ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Αναλυτική Απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μαρκέλλα Δ. Ευθυμίου

Επιβλέπων: Ιωάννης Σαραντόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2011

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Αναλυτική Απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μαρκέλλα Δ. Ευθυμίου

Επιβλέπων: Ιωάννης Σαραντόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή τη 15η Ιουλίου 2011:

. . . .	. . . .	. . . .
Ι. Σαραντόπουλος	Η. Γλύτσης	Α. Παπαϊωάννου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2011

.

. . . .

Μαρκέλλα Δ. Ευθυμίου
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία παρουσιάζουμε την αναλυτική απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή που ξεκινά απ' το 18ο αιώνα και καταλήγει στο Riemann, που εισήγαγε τα βασικά αναλυτικά εργαλεία, και στις πρώτες αναλυτικές αποδείξεις των Hadamard και de la Vallée Poussin. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφερόμαστε σ' ορισμένα σημαντικά αποτελέσματα της Θεωρίας Αριθμών πάνω στ' οποία βασίζεται η απόδειξη της απειρίας των πρώτων. Στο τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία της συνάρτησης ζ του Riemann. Καταλήγουμε στη ρητή έκφραση που συνδέει τα μηδενικά της συνάρτησης ζ και τους πρώτους αριθμούς (συγκεκριμένα της συνάρτησης $\psi(x)$). Το τέταρτο κεφάλαιο αποτελεί τον πυρήνα της εργασίας, καθώς είναι αυτό που πραγματεύεται την αναλυτική απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών. Στα παραρτήματα παρατίθενται βασικά εργαλεία για την απόδειξη του κεντρικού θεωρήματος: ο συμβολισμός του Landau, χρήσιμα αποτελέσματα της Μιγαδικής Θεωρίας Συναρτήσεων, οι συναρτήσεις Γάμμα και Βήτα του Euler, οι αριθμοί και τα πολυώνυμα Bernoulli, ο μετασχηματισμός Mellin και η Θεωρία Αριθμητικών Συναρτήσεων.

Λέξεις κλειδιά

πρώτοι αριθμοί, συνάρτηση ζ, Θεώρημα Πρώτων Αριθμών, αναλυτική απόδειξη Θεωρήματος Πρώτων Αριθμών, Riemann, $\pi(x)$, $\psi(x)$, μετασχηματισμός Mellin

In this essay we present the analytic proof of the Prime Number Theorem. In the first chapter, we make a short historical overview which begins from the 18th and ends in the 19th century with Riemann, who introduced the basic analytic tools, and the first analytic proofs of Hadamard and de la Vallée Poussin. In the second chapter, we refer to some important results from the theory of numbers upon which the proof of the infinity of primes is founded. In the third chapter, the theory of Riemann's zeta function (ζ function) is developed. We conclude with the explicit formula which connects the zeros of ζ function and the prime numbers (specifically, the function $\psi(x)$).The fourth chapter is the main chapter of the essay, which discusses the analytic proof of the Prime Number Theorem. In the appendices we present basic tools which are useful for the proof of the main theorem: the Landau Symbols, useful complex function theoretic results, Euler's Gamma and Beta Functions, Bernoulli numbers and polynomials, Mellin Transform and Theory of Arithmetical Functions.

Key words

prime numbers, ζ function, Prime Number Theorem, analytic proof of the Prime Number Theorem, Riemann, $\pi(x), \psi(x)$, Mellin transform

Πρόλογος

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θ' ασχοληθούμε με την Αναλυτική Θεωρία Αριθμών και συγκεκριμένα με την αναλυτική απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών. Η Αναλυτική Θεωρία Αριθμών ασχολείται με τις ιδιότητες των αριθμών ακολουθώντας αναλυτικές μεθόδους (είτε πραγματικές είτε μιγαδικές). Το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών μελετά τη συχνότητα εμφάνισης των πρώτων μες στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Βάσει του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Αριθμητικής κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί σε γινόμενο δυνάμεων πρώτων. Έτσι είναι προφανής η σημασία του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών, καθώς, με την απόδειξή του, μπορούμε να προβούμε σε συμπεράσματα για συγκεκριμένες κλάσεις φυσικών αριθμών.

Η διπλωματική εργασία διαρθρώνεται σε τέσσερα κεφάλαια κι έξι παραρτήματα.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή που ξεκινά απ' το 18ο αιώνα με τον Euler και περνά μες απ' το έργο σημαντικών μορφών της Μαθηματικής Επιστήμης, όπως ο Gauss, ο Legendre, ο Riemann κ.α. Το έργο, δε, του Riemann αποτελεί τη βάση για τη μετέπειτα εργασία των Hadamard και de la Vallée Poussin που απέδειξαν πρώτοι το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφερόμαστε σ' ορισμένα σημαντικά αποτελέσματα της Θεωρίας Αριθμών πάνω στ' οποία βασιζεται η απόδειξη της απειρίας των πρώτων.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία της συνάρτησης ζ του Riemann που κατέχει κεντρικό ρόλο στη σύνδεση της Θεωρίας Αριθμών με τη Μαθηματική Ανάλυση μέσω της Θεωρίας των Μιγαδικών Συναρτήσεων. Αναφέρεται η μερομορφική συνέχιση της ζ σ' ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο και βασικές ιδιότητές της, καταλήγοντας στη ρητή έκφραση μεταξύ των μηδενικών της ζ και των πρώτων αριθμών (συγκεκριμένα της συνάρτησης $\psi(x)$).

Το τέταρτο κεφάλαιο αποτελεί τον πυρήνα της παρούσας εργασίας, καθώς είναι αυτό που πραγματεύεται την αναλυτική απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών. Βασικό μας εργαλείο αποτελεί ο ολοκληρωτικός μετασχηματισμός του Mellin.

Στα παραρτήματα παρατίθενται βασικά εργαλεία για την απόδειξη του κεντρικού θεωρήματος. Συγκεκριμένα ασχολούμαστε κατά σειρά με το συμβολισμό του Landau, χρήσιμα αποτελέσματα της Μιγαδικής Θεωρίας Συναρτήσεων, τις συναρτήσεις Γάμμα και Βήτα του Euler, τους αριθμούς και τα πολυώνυμα Bernoulli, το μετασχηματισμό Mellin και τη Θεωρία Αριθμητικών Συναρτήσεων.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ιωάννη Σαραντόπουλο, Αν. Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ, για την ευκαιρία

που μού ᾿δωσε να μελετήσω ένα σημαντικό κομμάτι των Μαθηματικών και να διευρύνω τις μαθηματικές μου γνώσεις. Τον ευχαριστώ ιδιαιτέρως για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Παράλληλα, οφείλω ευχαριστίες στον κ. Ηλία Γλύτση, Καθηγητή της Σχολής Ηλεκτρολόγων και Μηχανικών Υπολογιστών ΕΜΠ, και τον κ. Αλέξανδρο Παπαϊωάννου, Αν. Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ, που δέχτηκαν να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω το Θεοδόση Παπαδημητρόπουλο για τις συμβουλές, τη στήριξη και τη συμπαράσταση που μου πρόσφερε κατά την προσπάθειά μου.

Αθήνα, 14 Ιουλίου 2011

Περιεχόμενα

Κατάλογος Εικόνων

Συμβολισμός και Ορολογία

- $\mathbb{C}$- το μιγαδικό επίπεδο
- $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$- το επεκτεταμένο ή αλλιώς συμπαγοποιημένο μιγαδικό επίπεδο
- $\Re$- πραγματικό μέρος
- $\Im$- φανταστικό μέρος
- $\arg$- όρισμα
- $\overline{z}$- ο συζυγής του z
- f'- παράγωγος της f
- $f^{(k)}$- παράγωγος k-τάξεως της f
- $\exp$- εκθετική συνάρτηση
- $\ln$- μιγαδικός λογάριθμος
- Ln- κύριος ή πρωτεύον κλάδος λογαρίθμου
- γ- καμπύλη
- $L(\gamma)$- μήκος της καμπύλης
- $\int_\gamma f\left(z\right)\, dz$- επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στη καμπύλη γ
- $\oint_\gamma f\left(z\right)\, dz$- επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στη κλειστή καμπύλη γ
- $Res\left(f, z_0\right)$- ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0
- B- συνάρτηση βήτα του Euler
- Γ- συνάρτηση γάμμα του Euler
- ζ- συνάρτηση ζήτα του Riemann
- $\pi(x) = card\{p : p \leq x \ \text{ και } \ p \ \text{ πρώτος}\}$
- $li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$

- $\Lambda(n)$- συνάρτηση του Mangoldt
- $\mu(n)$- συνάρτηση του Möbius
- $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$
- $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$- συνάρτηση Chebyshev
- $\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)dt$
- $\mathcal{L}\left[f(x); s\right]$ μετασχηματισμός κατά Laplace της $f(x)$
- $\mathcal{L}^{-1}\left[f(s); x\right]$ αντίστροφος μετασχηματισμός κατά Laplace της $f(s)$
- $\mathcal{M}\left[f(x); s\right]$ μετασχηματισμός κατά Mellin της $f(x)$
- $\mathcal{M}^{-1}\left[f(s); x\right]$ αντίστροφος μετασχηματισμός κατά Mellin της $f(s)$

Κεφάλαιο 1

Ιστορική αναδρομή

Η βασική μας αναφορά σ' αυτή την ενότητα είναι το σύγγραμμα [9, σελ. 1 - 38]. Συμβουλευθήκαμε επίσης το [12, σελ. 370 - 389].

1.1 Τα πρώτα βήματα

Το 1737, ο L. Euler[1] απέδειξε ότι το άθροισμα των αντίστροφων των πρώτων αριθμών:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots \tag{1.1}$$

είναι μια αποκλίνουσα σειρά. Έτσι, κατάφερε να δείξει όχι μόνο ότι υπάρχουν άπειροι το πλήθος πρώτοι αριθμοί, αλλά κι ότι αυτοί είν' αρκετά πυκνοί στο σύνολο των ακεραίων αριθμών. Στη συνέχεια, βασιζόμενος στην απόκλιση της σειράς (1.1), ο Euler δείχνει πως, καθώς η σειρά:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots \tag{1.2}$$

αποκλίνει όπως ο λογάριθμος κι η σειρά (1.1) αποκλίνει σαν τον λογάριθμο της (1.2)[2], έτσι κι η σειρά (1.1) θα πρέπει ν' αποκλίνει σαν το λογάριθμο του λογαρίθμου, δηλαδή:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots=\log(\log\infty),^{3} \tag{1.3}$$

[1] Leonhard Euler (15 Απριλίου 1707-18 Σεπτεμβρίου 1783) Ελβετός μαθηματικός και φυσικός. Ένας εκ των θεμελιωτών του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού.Επίσης, σ' αυτόν οφείλονται πολλοί απ' τους μοντέρνους ορισμούς και συμβολισμούς, ιδιαίτερα στη μαθηματική ανάλυση. Σημαντικό υπήρξε το έργο του και στη Μηχανική. Όσον αφορά τη Θεωρία Αριθμών, είναι αυτός που ανακάλυψε τη συναρτησιακή εξίσωση της συνάρτησης Ζήτα, που συνήθως αποδίδεται στον Riemann [22, σελ. 102-115]

[2] Ισχύει ότι: $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\log(+\infty)-\log(1)=+\infty-0=+\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=O\left(\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}\right)$

[3] Η σχέση αυτή δεν είναι προφανής. Πρόκειται για μια αναδιατύπωση του θεωρήματος των πρώτων αριθμών. Παραπέμπουμε στο [24, σελ. 278] για την απόδειξη της σχέσης με

όπως ο ίδιος συμβόλισε. Μια προφανής ερμηνεία της παραπάνω αναπαράστασης είναι:

$$\sum_{p<x} \frac{1}{p} \sim \ln(\ln x) \quad (x \to \infty), \tag{1.4}$$

όπου η αριστερή πλευρά δηλώνει το άθροισμα όλων των πρώτων αριθμών πού' ναι μικρότεροι ενός αριθμού x.

Επιπλέον, είναι χρήσιμο ν' αναφερθεί για λόγους που θα γίνουν κατανοητοί παρακάτω, ότι:

$$\ln(\ln x) = \int_1^{\ln x} \frac{du}{u} = \int_e^x \frac{dv}{v \ln v},^{4} \tag{1.5}$$

Στη συνέχεια ο Gauss[5] αναφέρει σε γράμμα του 1849 πως είχε παρατηρήσει απ' το 1792 ότι η πυκνότητα των πρώτων αριθμών είναι κατά μέσο όρο $\frac{1}{\ln x}$, ενώ κατά το 1800 ο Legendre[6] εκδίδει το Theorie de Nombres, όπου αναφέρει, όμοια με τον Gauss, ότι η πυκνότητα των πρώτων αριθμών έχει τη μορφή:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{A \ln x + B}, \tag{1.6}$$

με τα A, B αριθμούς που ο ίδιος υπολογίζει εμπειρικά με τη βοήθεια πινάκων πρώτων αριθμών.

Τα πρώτα σημαντικά αποτελέσματα πέρα απ' τον Euler επιτεύχθηκαν απ' τον Chebyshev γύρω στο 1850. Ο Chebyshev[7] απέδειξε ότι

$$0,89 \int_2^x \frac{dt}{\ln t} < \pi(x) < 1,11 \int_2^x \frac{dt}{\ln t}, \tag{1.7}$$

με x οσοδήποτε μεγάλο ή, μ' άλλα λόγια, ότι το σχετικό σφάλμα στην προσέγγιση

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\ln t}, \tag{1.8}$$

όπου $\pi(x)$ ο αριθμός των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι του x, είναι μικρότερο του 11%. Εν συνεχεία, απέδειξε ότι η παραπάνω προσέγγιση είναι καλύτερη απ' την προσέγγιση (1.6) του Legendre καθώς κι ότι αν ο λόγος του $\pi(x)$ προς το $\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$

στοιχειώδεις μεθόδους.

[4]Ισχύει ότι: $\ln(\ln x) = \ln(\ln x) - 0 = \ln(\ln x) - \ln 1 = \ln u|_1^{\ln x} = \int_1^{\ln x} \frac{du}{u}$. Με την αλλαγή μεταβλητής $v = \ln u$ η σχέση γίνεται$\int_e^x \frac{dv}{v \ln v}$.

[5]Johann Carl Friedrich Gauss (30 Απριλίου 1777-23 Φεβρουαρίου 1855) Γερμανός μαθηματικός που συνεισέφερε σε πολλά μαθηματικά πεδία, όπως τη Θεωρία Αριθμών, τη Στατιστική, την Ανάλυση, η Διαφορική Γεωμετρία και την Αναλυτική Μηχανική. Υπήρξε δάσκαλος του Riemann.

[6]Adrien Marie Legendre, 1752 - 1833. Σημαντικός Γάλλος Μαθηματικός. Ασχολήθηκε με τη Θεωρία Αριθμών, τη Θεωρία Ελλειπτικών Συναρτήσεων και την Αναλυτική Μηχανική.

[7]Pafnuty Lvovich Chebyshev, 1821 - 1894. Ρώσος μαθηματικός. Ασχολήθηκε με τη Θεωρία Προσεγγίσεων και τη Θεωρία Αριθμών.

προσεγγίζει κάποιο όριο καθώς το x τείνει στο άπειρο, τότε η τιμή αυτού του ορίου δεν μπορεί παρά να είναι 1. Είναι φανερό ότι ο Chebyshev θέλησε ν' αποδείξει ότι η (1.8) πλησιάζει στο 0 καθώς το x τείνει στο άπειρο, κάτι το οποίο, όμως, αποδείχθηκε 50 χρόνια μετά με το γνωστό θεώρημα των πρώτων αριθμών.

1.2 Η συνεισφορά του Riemann

Η πραγματική συνεισφορά του Riemann το 1859, που είναι άμεσα συσχετισμένη με την ομώνυμη συνάρτηση ζ, δεν είναι τόσο στ' αποτελέσματά του, όσο στις μεθόδους του. Το βασικό αποτέλεσμα της δημοσίευσής του *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe* (μετ. *Περί του πλήθους των πρώτων αριθμών που κείνται υπό ενός δοθέντος μεγέθους*), που έχει αναδημοσιευθεί μεταφρασμένη στο [27], ήταν η έκφραση του $\pi(x)$ ως άθροισμα μιας απειροσειράς, η οποία έχει ως κύριο όρο το $\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$. Παρ' όλα αυτά, η απόδειξη του Riemann ήταν ανεπαρκής. Κατά βάση, δεν ήταν διόλου ξεκάθαρο απ' τις υποθέσεις του Riemann ότι η σειρά αυτή συγκλίνει, κι ακόμα λιγότερο ότι ο όρος $\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ κυριαρχεί έναντι των άλλων για μεγάλες τιμές του x. Απ' την άλλη μεριά, οι μέθοδοι του Riemann, που περιελάμβαναν τη μελέτη της συνάρτησης ζ σα συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής, τη μελέτη των σημείων μηδενισμού της ζ, αντιστροφή κατά Fourier και κατά Möbius και την αναπαράσταση συναρτήσεων όπως η $\pi(x)$ με αναλυτικούς τύπους έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην έξέλιξη της θεωρίας. Αυτή η ενοποίηση αριθμητικών και μιγαδικών μεθόδων απαιτούσε τη συμβολή του Riemann ως ενός εκ των ιδρυτών της Μιγαδικής Ανάλυσης ώστε να περαιωθεί.

Η συνάρτηση ζ εισήχθηκε πρώτη φορά απ' τον Euler. Επι της ουσίας, ο Euler κατέληξε στην παρακάτω σχέση

$$\sum \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)} \tag{1.9}$$

όπου το n διάτρέχει όλους τους θετικούς ακεραίους, $n \in \mathbb{N}$ ενώ το p όλους τους πρώτους αριθμούς ($p = 2, 3, 5..$). Η σχέση αύτή συνέδεσε την Ανάλυση (τη θεωρία απειροσειρών), μέσω της συνάρτησης ζ, με τους πρώτους αριθμούς. Ο Euler χρησιμοποίησε την παραπάνω σχέση για s ακέραιο. Ο Dirichlet[8], απ' την άλλη, που βάσισε επίσης τη δουλειά του στον τύπο του Euler, χρησιμοποίησε τη σχέση αυτή με s πραγματικό και κατάφερε ν' αποδείξει ότι ισχύει για $s > 1$. Χρησιμοποιώντας μια γενίκευση της συνάρτησης $\zeta(s)$, τις σειρές Dirichlet, κατάφερε ν' αποδείξει ότι σε κάθε αριθμητική πρόοδο υπό αρκετά γενικές προϋποθέσεις οι πρώτοι που περιέχονται είναι άπειροι. Κάθε σειρά Dirichlet είναι ο διακριτός μετασχηματισμός κατά Mellin

[8]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Γερμανός μαθηματικός, 1805 - 59. Έπαιξε σημαντικό ρόλο σε πολλούς τομείς των σύγχρονων Μαθηματικών. Εφάρμοσε αναλυτικές μεθόδους σε ερωτήματα της Θεωρίας Αριθμών. Ασχολήθηκε επίσης με την Αρμονική Ανάλυση, τη Μαθηματική Φυσική κ.α.

ενός χαρακτήρα πάνω στους φυσικούς αριθμούς[9].

Μερικά χρόνια αργότερα, ο Riemann, εκκινώντας απ' την (1.9), ανακάλυψε μια στενή σχέση μεταξύ της συνάρτησης ζ και της ασυμπτωτικής κατανομής των πρώτων αριθμών. Ο Riemann, όντας ένας απ' τους ιδρυτές της θεωρίας της Μιγαδικής Ανάλυσης, δεν μπορούσε παρά να θεωρήσει το s ως μιγαδική μεταβλητή. Είναι εύκολο ν' αποδειχθεί ότι κ' οι δυο πλευρές της σχέσης του Euler συγκλίνουν για μιγαδική τιμή του s τέτοια ώστε $\Re s > 1$[10], ο Riemann δεν έμεινε, όμως, μόνο σ' αυτό, αλλά απέδειξε ότι, παρ' όλο που κ' οι δυο πλευρές της (1.9) αποκλίνουν για διαφορετικές τιμές του s, η συνάρτηση την οποία ορίζουν συνεχίζεται αναλυτικά σ' όλο το μιγαδικό επίπεδο, μ' εξαίρεση το σημείο $s = 1$, όπου έχει έναν απλό πόλο. Για ν' αποδείξει τα παραπάνω ο Riemann βασίστηκε στο ολοκλήρωμα του Euler

$$n! = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx \tag{1.10}$$

όπου $(n = 1, 2, 3, \cdots)$. Τ' ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει για μη ακέραιες τιμές του n , υπό την προϋπόθεση ότι $n > -1$. Για την απόδειξη της παραπάνω σχέσης, παραπέμπουμε στο θεώρημα Γ'.1. Πιο συγκεκριμένα, ο Riemann χρησιμοποίησε την αναπαράσταση που εισήγαγε ο Gauss για το παραπάνω ολοκλήρωμα:

$$\Pi(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s dx, \quad s > -1,^{11} \tag{1.11}$$

όπου η $\Pi(s)$ ορίζεται για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς με $\Re s > -1$ και $\Pi(s) = s!$ όταν το s είναι φυσικός αριθμός. Ο Riemann αντικατέστησε στη θέση του x το nx στην εξίσωση (1.11) για $\Pi(s-1)$ κι έτσι έφτασε στη σχέση:

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}, \quad s > 0,\ n \in \mathbb{N}^{12} \tag{1.12}$$

Στη συνέχεια άθροισε τη σχέση (1.12) για όλα τα n και με χρήση της γεωμετρική σειράς:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} = (r-1)^{-1}$$

κατέληξε στη σχέση:

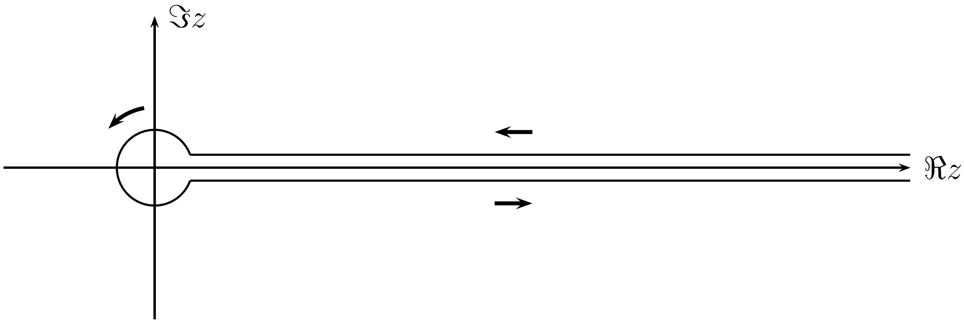
$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Pi(s-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1 \tag{1.13}$$

[9] Συμβουλευθείτε το [32, κεφ. II.1]

[10] $\sum \frac{1}{n^a}, +\infty, \quad \forall a > 1$ βάσει του ολοκληρωτικού λογισμού.

[11] Παρατηρούμε εδώ ότι $\Pi(s) = \Gamma(s+1)$, για s φυσικό αριθμό και $\Gamma(s+1)$ τη γνωστή συνάρτηση Γάμμα. Οι σχέσεις (1.10) και(1.11) αποδεικνύονται στο (Γ'.3) του παραρτήματος (Γ').

[12] Πάλι εδώ πρόκειται για μια ιδιότητα της συναρτήσεως Γάμμα, που αποδεικνύεται στο παράρτημα (Γ'), θεώρημα (Γ'.3) με τη διαφορά ότι επεκτείνουμε την ιδιότητα στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.



Εικόνα 1.1: Ο δρόμος ολοκλήρωσης για το ολοκλήρωμα $\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}$

Η συγκλιση του παραπάνω ολοκληρώματος κι η εναλλαγή της άθροισης με την ολοκλήρωση είν' εύκολο ν' αποδειχθούν.[13]

Στη συνέχεια θεώρησε το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1}\frac{dx}{x} \tag{1.14}$$

Τα όρια ολοκλήρωσης δείχνουν ένα μονοπάτι που ξεκινά απ' το $+\infty$, διατρέχει τον πραγματικό άξονα προς τ' αριστερά, περιελίσσεται αντίθετα απ' τη φορά των δεικτών του ρολογιού γύρω απ' την αρχή των αξόνων μια φορά κι επιστρέφει απ' τον πραγματικό άξονα προς το $+\infty$. Το $(-x)^s$ προσδιορίζεται απ' τη σχέση $(-x)^s = \exp[s\ln(-x)]$, όπου το $\ln(-x)$ ορίζεται ως ο κλάδος του μιγαδικού λογαρίθμου που είναι πραγματικός για πραγματικά z με z που δε βρίσκονται στον αρνητικό πραγματικό άξονα. Επομένως το $(-x)^s$ δεν ορίζεται στο θετικό πραγματικό άξονα, άρα το μονοπάτι θα βρίσκεται λίγο πάνω απ' τον πραγματικό άξονα στη διαδρομή απ' το $+\infty$ στο 0 και λίγο κάτω απ' τον πραγματικό άξονα στην αντίθετη διαδρομή (δείτε την εικόνα 4.2).

Το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται στη μορφή

$$\int_{+\infty}^{\delta} \frac{(-x)^s}{e^x - 1}\frac{dx}{x} + \int_{|x|=\delta} \frac{(-x)^s}{e^x - 1}\frac{dx}{x} + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{-x^s}{e^x - 1}\frac{dx}{x} \tag{1.15}$$

όπου ο μεσαίος όρος είναι $2\pi i$ φορές τη μέση τιμή της ποσότητας $(-x)^s(e^x-1)^s$ πάνω στον κύκλο $|x| = \delta$ [14]. Επομένως, ο μεσαίος όρος προσεγγίζει το μηδέν καθώς $\delta \to 0$ υπό την προϋπόθεση ότι $s > 1$ [15]. Οι άλλοι δυο όροι μπορούν να συνδυαστούν

[13] Παραπέμπουμε στο [15, σελ.521]

[14] Καθώς στον κύκλο αυτό ισχύει $id\theta = (dx/x)$

[15] Επειδή το $x(e^x-1)^{-1}$ έχει άρσιμο ανωμάλια στο $x = 0$

και να δώσουν

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x} = \lim_{s\to 0}\left\{\int_{+\infty}^{\delta} \frac{\exp[s(\ln x - i\pi)]dx}{(e^x-1)x}\right\} + \\ + \lim_{s\to 0}\left\{\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\exp[s(\ln x + i\pi)]dx}{(e^x-1)x}\right\} = \\ = (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s})\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx \tag{1.16}$$

Η σχέση αυτή συνδυαζόμενη με την (1.11) δίνει

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x} = 2i\sin(\pi s)\Pi(s-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} \tag{1.17}$$

Στο σημείο αυτό ας αναφέρουμε την παρακάτω ταυτότητα για τη συνάρτηση $\Pi(s)$:

$$\frac{\pi s}{\Pi(s)\Pi(-s)} = \sin \pi s.^{16} \tag{1.18}$$

Με τη χρήση της ταυτότητας αυτής, η εξίσωση (1.17) γίνεται

$$\frac{\Pi(-s)}{2\pi i}\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \tag{1.19}$$

Μ' άλλα λόγια, η $\zeta(s)$ ορίζεται απ' τον τύπο

$$\zeta(s) = \frac{\Pi(-s)}{2\pi i}\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}. \tag{1.20}$$

Για πραγματικές τιμές του s μεγαλύτερες του ένα, η $\zeta(s)$ ισούται με την απειροσειρά

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} \tag{1.21}$$

Παρ' όλα αυτά, η σχέση (1.20) ισχύει για όλες τις τιμές του s. Ουσιαστικά, εφ' όσον τ' ολοκλήρωμα της (1.20) συγκλίνει για όλες τις τιμές του s, είτε πραγματικές είτε μιγαδικές, [17] και καθώς η συνάρτηση που ορίζει είναι μιγαδική αναλυτική συνάρτηση [18] η συνάρτηση $\zeta(s)$ της (1.20) ορίζεται κ' είναι αναλυτική σ' όλα τα σημεία, με μόνη πιθανή εξαίρεση στα σημεία $s \in \mathbb{N}$, δηλαδή στους πόλους της $\Pi(-s)$. Απ' την άλλη,

[16] Καθώς $\Pi(s) = \Gamma(s+1)$ και $\pi(-s) = \Gamma(1-s)$, με βαση τις ιδιότητες της συνάρτησης Γάμμα σε συνδυασμό με τη συναρτησιακή εξίσωση της Γάμμα, που αποδεικνύονται στο παράρτημα Γ,Γ.3 καταλήγουμε στο ζητούμενο.

[17] Η σύγκλιση ισχύει, διότι το e^x μεγαλώνει ταχύτερα απ' τον όρο x^s όταν το x τείνει στο άπειρο

[18] Η συνάρτηση είναι αναλυτική, καθώς η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε συμπαγή χωρία.

η εξίσωση (1.21) δείχνει ότι η $\zeta(s)$ δεν έχει πόλους στα σημεία $s = 2, 3, 4, ..$ [19] κι ότι $\lim_{s\to 1} \zeta(s) = \infty$ καθώς $s \downarrow 1$, άρα η $\zeta(s)$ έχει έναν απλό πόλο στο $s = 1$. Επομένως, η σχέση (1.21) ορίζει μια συνάρτηση $\zeta(s)$ που είναι αναλυτική σ' όλα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου, εκτός μόνο του σημείου $s = 1$ όπου έχει απλό πόλο. Αυτή η συνάρτηση ταυτίζεται με την $\sum n^{-s}$ για πραγματικές τιμές του $s > 1$ και, στην ουσία, μέσω της αναλυτικής συνέχισης, σ' όλο το μιγαδικό ημιεπίπεδο $Res > 1$. Η παραπάνω συνάρτηση είναι γνωστή ως **η συνάρτηση ζήτα του Riemann**.

Τέλος, θα πρέπει να γίνει μια αναφορά στην **υπόθεση του Riemann**. Στην έρευνα που δημοσίευσε το 1859, αναφέρει ότι είναι πολύ πιθανό όλα τα μιγαδικά σημεία μηδενισμού της συνάρτησης ζ να έχουν πραγματικό μέρος ίσο με $\frac{1}{2}$, κάτι το οποίο είναι γνωστό ως **η υπόθεση Riemann**. Ο ίδιος ο Riemann δεν κατάφερε να τ' αποδείξει. Το 1900 ο Hilbert εισήγαγε την υπόθεση στην περίφημη λίστα του άλυτων τότε προβλημάτων που, κατά τη γνώμη του, θα όριζαν στη συνέχεια τις εξελίξεις στη μαθηματική έρευνα[20]. Πρόκειται για ένα απ' τα πιο σημαντικά προβλήματα στα μαθηματικά, που δεν έχουν λυθεί και που εξακολουθεί να κινεί το ενδιαφέρον της μαθηματικής κοινότητας. Για περισσότερες πληροφορίες σ' αυτό το σημαντικό κομμάτι της σύγχρονης έρευνας παραπέμπουμε στο εγχειρίδιο [6].

1.3 Οι αποδείξεις του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών

Τα τελευταία 20 χρόνια του 19ου αιώνα σημειώθηκαν σημαντικές εξελίξεις στη Θεωρία των Μιγαδικών Συναρτήσεων μ' αποτέλεσμα να ξαναεκδηλωθεί ενδιαφέρον για την ασυμπτωτική κατανομή των πρώτων και την εργασία του Riemann. Το 1896, ξέχωρα ο ένας απ' τον άλλο, ο Hadamard[21] κι ο de la Vallée Poussin[22] απέδειξαν το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών.

Κ' οι δυο τους ξεκίνησαν απ' το μη μηδενισμό της $\zeta(s)$ πάνω στην ευθεία $\Re s = 1$.

Ο Hadamard, όπως ο ίδιος αναφέρει, χρησιμοποίησε θεμελιωδώς το παραγοντικό ανάπτυγμα της $\zeta(s)$ πάνω στα μηδενικά της βασιζόμενος στην εργασία του Weier-

[19] Με λίγα λόγια, τ' ολοκλήρωμα της εξίσωσης (1.20) θα πρέπει να 'χει κάποιο μηδενισμό που ακυρώνει τον πόλο της $\Pi(s)$ σ' αυτά τα σημεία, όπως προκύπτει άμεσα απ' το θεώρημα του Cauchy.

[20] Τα προβλήματα ήταν 23 τω αριθμώ και δέκα εξ αυτών παρουσιάστηκαν απ' τον Hilbert το ίδιο έτος στο Διεθνές Μαθηματικό Συνέδριο στη Σορβόννη. Από τα 23 αυτά προβλήματα όλα εκτός τεσσάρων (συμπεριλαμβανομένης της υπόθεσης του Riemann) έχουν λυθεί πλήρως ή μερικώς με θετικό ή αρνητικό τρόπο.

[21] Jacques Salomon Hadamard, 1865 - 1963. Γάλλος μαθηματικός. Θεμελιωτής της σύγχρονης Θεωρίας Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και με σημαντικές συνεισφορές στη Θεωρία Αριθμών, στη Διαφορική Γεωμετρία κ.α.

[22] Charles-Jean Étienne Gustave Nicolas de la Vallée Poussin, 1866 - 1962. Βέλγος μαθηματικός.

strass[23]. O de la Vallée Poussin βασίστηκε σημαντικά στη σχέση:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^1 \frac{x}{(x+n)^{s+1}}dx$$

επιτυγχάνοντας έτσι την αναλυτική συνέχιση της $\zeta(s)$. Εν τέλει απέδειξε την ασυμπτωτική σχέση:

$$\theta(x) = \sum_{p\leq x} \ln p = (1+o(1))x$$

γνωρίζοντας την ισοδυναμία της μ' αυτή για την $\pi(x)$ απ' την εργασία του Chebyshev.

Το 1898 ο Mertens[24] μ' έναν ευφυή τρόπο που αναπαράγουμε και στην παρούσα διπλωματική, απλοποίησε την απόδειξη για το μη μηδενισμό της $\zeta(s)$ πάνω στην ευθεία $\Re s = 1$. Αργότερα ο Hardy[25] κι ο Littlewood[26] απλοποίησαν από κοινού περαιτέρω την απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών.

Το 1948 ο Selberg[27] κι ο Erdös[28] απέδειξαν ξέχωρα το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών με τη βοήθεια μόνο στοιχειωδών ανισοτικών εργαλείων. Αυτή η απόδειξη θεωρήθηκε στην εποχή της μια σημαντική εξέλιξη, καθώς υποδείκνυε ότι το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών δεν ήταν τόσο στενά συνδεδεμένο με τη συνάρτηση $\zeta(s)$ και πολύ περισσότερο με την υπόθεση του Riemann, όπως μέχρι τότε ήταν κοινή θέση.

Το 1980 ο Newman[29] απλοποίησε ακόμα περισσότερο την απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών βασιζόμενος κυρίως στο θεώρημα του Cauchy. Μια παραλλαγή της συγκεκριμένης απόδειξης αναπτύσσουμε στην παρούσα διπλωματική.

[23]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815 - 1917. Γερμανός μαθηματικός. Ένας εκ των θεμελιωτών της Σύγχρονης Ανάλυσης και της Μιγαδικής Θεωρίας Συναρτήσεων.

[24]Franz Mertens, 1840 - 1927. Γερμανός μαθηματικός. Ασχολήθηκε ιδιαίτερα με την υπόθεση του Riemann.

[25]Godfrey Harold Hardy, 1877 - 1947. Άγγλος Μαθηματικός. Ασχολήθηκε με τη Μαθηματική Ανάλυση και τη Θεωρία Αριθμών.

[26]John Edensor Littlewood, 1885 - 1977. Άγγλος μαθηματικός.

[27]Atle Selberg, 1917 - 2007. Νορβηγός μαθηματικός. Ασχολήθηκε με την Αναλυτική Θεωρία Αριθμών και τη Θεωρία Αυτομορφικών Συναρτήσεων.

[28]Paul Erdös, 1913 - 1996. Ούγγρος μαθηματικός. Ασχολήθηκε με τα Διακριτά Μαθηματικά, τη Θεωρία Πιθανοτήτων, τη Θεωρία Αριθμών κ.α.

[29]Donald D. Newman, 1930 - 2007. Αμερικανός μαθηματικός.

Κεφάλαιο 2

Γενικές ιδιότητες των πρώτων αριθμών

2.1 Διαιρετότητα

Το σύνολο $\{1, 2, 3 \dots\}$ όλων των φυσικών αριθμών στη συνέχεια θα συμβολίζεται με $\mathbb{N}$. Στο σύνολο αυτό ικανοποιούνται τα αξιώματα Peano, που υποδηλώνουν ότι η πρόσθεση κι ο πολλαπλασιασμός ορίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες της αντιμεταθετικότητας, της προσεταιριστικότητας και της επιμεριστικότητας, καθώς κ' η λεγόμενη Μαθηματική Επαγωγή που στηρίζεται στην έννοια της διάταξης. Για περαιτέρω στοιχεία περί των αριθμητικών αξιωμάτων του Peano, όπως και για τις κατασκευές που αναφέρονται στην επόμενη παράγραφο, μπορείτε να συμβουλευθείτε το σύγγραμμα [21, σελ. 2, κεφ. II, III, IV].

Το σύνολο που θα μας απασχολήσει ευρύτερα, πάνω στο οποίο θα δουλέψουμε παρακάτω είναι αυτό των ακεραίων αριθμών, που συμβολίζουμε ως $\mathbb{Z}$. Πρόκειται για το σύνολο που περιλαμβάνει τα στοιχεία $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ κ' είναι υπερσύνολο των φυσικών αριθμών. Δηλώνουμε, τέλος, το σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή των αριθμών:

$$\left\{ \frac{p}{q}, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

με το σύμβολο $\mathbb{Q}$. Η κατασκευή των $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ μ' αφετηρία το σύνολο των φυσικών αριθμών, καθώς και του συνόλου των πραγματικών και των φανταστικών αριθμών $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$, που αποτελούν τη βάση της Μαθηματικής Ανάλυσης θεωρούνται γνωστές και δε θα μας απασχολήσουν περαιτέρω. Είναι γνωστό ότι το άθροισμα, η διαφορά και το γινόμενο δυο ακεραίων αριθμών ανήκει πάλι στο σύνολο των ακεραίων. Δε συμβαίνει, όμως, πάντα το ίδιο με την πράξη της διαίρεσης. Ο παρακάτω ορισμός έρχεται να ονοματίσει ακριβώς αυτή την «ασυμμετρία».

Ορισμός 2.1.1. Έστω το σύνολο των ακεραίων αριθμών:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Τότε για $a, b \in \mathbb{Z}$ λέμε ότι ο b διαιρείται απ' τον a, αν υπάρχει κάποιος $x \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $b = ax$ και συμβολίζουμε [1]:

$$a|b.$$

Στην περίπτωση που ο b δε διαιρείται απ' τον a, τότε συμβολίζουμε:

$$a \nmid b. \tag{2.1}$$

Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να εκφραστεί και με τις εξής ισοδύναμες διατυπώσεις:

· Ο a διαιρεί τον b.

· Ο a είναι διαιρέτης του b.

· Ο b διαιρείται απ' τον a.

· Ο b είναι πολλαπλάσιο του a.

Θεώρημα 2.1.1. *Για κάθε a, b, c:*

1. *$a|a, 1|a$ και $a|0$.*
2. *Ισχύει $0|a$ αν και μόνο αν $a = 0$.*
3. *Αν $a|b$, τότε και $a|bc$.*
4. *$a|b$ και $a|c$ συνεπάγεται ότι $a|(bx + cy)$.*
5. *$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ ισχύει $a|b$ και $b|a$ αν και μόνο αν $a = \pm b$.*
6. *$a|b, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$ συνεπάγεται ότι $|a| \leq |b|$.*
7. *$m \neq 0, \quad a|b$ συνεπάγεται ότι $ma|mb$ κι αντίστροφα.*

Απόδειξη. 1.,2. Προφανή, καθώς ισχύουν οι σχέσεις $a = 1a$ και $0 = 0a$

3. Προφανές απ' τον ορισμό της διαιρετότητας. Εφ' όσον το a διαιρεί το b θα διαιρεί και κάθε πολλαπλάσιό του.

4. Εξ υπόθέσεως, υπάρχουν ακέραιοι b_1, c_1, τέτοιοι ώστε $b = ra$ και $c = sa$. Άρα

$$bx + cy = rax + say = x(ra) + y(sa) = (xr + yc_1)a,$$

που σημαίνει ότι $a|(bx + cy)$

[1]Με τον παρακάτω συμβολισμό δεν ορίζουμε τίποτ' άλλο παρά μιαν ιδιότητα. Δεν υπάρχει κάποια σχέση με τον συμβολισμό b/a, που δηλώνει ένα ρητό αριθμό

5. Είναι ξεκάθαρο ότι αν $a = \pm b$, τότε $a|b$ και $b|a$. Μας μένει να θεωρήσουμε ότι $a|b$ και $b|a$ και ν' αποδείξουμε ότι $a = \pm b$. Αν ένα απ' τα a, b είναι μηδέν, τότε το δεύτερο μέρος του θεωρήματος δηλώνει ότι και το άλλο είναι μηδέν. Επομένως, θεωρούμε ότι κανένα εκ των a, b δεν είναι μηδέν. Έτσι, $b|a$ συνεπάγεται ότι $a = bc, \quad c \in \mathbb{Z}$. Όμοια, $a|b$ συνεπάγεται ότι $b = ad, \quad d \in \mathbb{Z}$. Απ' τα παραπάνω $b = ad = bcd$, ή, διαφορετικά $1 = cd$. Για να ισχύει η ισότητα, θα πρέπει είτε $c = d = -1$, δηλαδή $a = -b$ είτε $c = d = 1$, δηλαδή $a = b$.

6. Ισχύει $b = ca, \quad c \in \mathbb{Z}$, άρα $|b| = |c||a|$. Αν $b \neq 0$, τότε $|c| \neq 0$. Επομένως, $|c| \geq 1$, οπότε $|b| = |c||a| \geq |a|$

7. Προφανές, καθώς αν ισχύει $b = ca$, τότε για $m \neq 0 \;\; mb = mca$

□

Ευκλείδεια Διαίρεση. *Για κάθε ζεύγος a, b με $b > 0$ υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος q, r τέτοιο ώστε:*

$$b = aq + r, \;\; 0 \leq r < a$$

Στη σχέση αυτή ο b χαρακτηρίζεται ως διαιρετέος κι ο a ως διαιρέτης. Ο q ονομάζεται ακέραιο πηλίκο της διαίρεσης του a δια του b, ενώ ο r ακέραιο υπόλοιπο της διαίρεσης.

Απόδειξη. Έστω το σύνολο $\mathbb{S}$ των μη αρνητικών ακεραίων της μορφής $a - zb, \quad z \in \mathbb{Z}$. Το σύνολο αυτό είναι προφανώς μη κενό, επομένως θα περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο λόγω της καλής διάταξης των φυσικών αριθμών[2]. Έστω ότι ο r είναι ο ελάχιστος ακέραιος σ' αυτό το σύνολο, με $r = a - qb, \quad q \in \mathbb{Z}$. Εξ ορισμού $r \geq 0$. Επιπλέον, θα πρέπει $r < b$ διαφορετικά θα είχαμε $0 \leq r - b < r$ και $r - b = a - (q+1)b \in \mathbb{S}$, πού' ρχεται, όμως, σ' αντίθεση με την υπόθεση ότι ο r είν' ελάχιστος στο σύνολο $\mathbb{S}$.

Αυτό αποδεικνύει την ύπαρξη των r, q. Για να δείξουμε ότι αυτά είναι και μοναδικά, υποθέτουμε ότι $a = bq + r$ και $a = bq' + r'$, όπου $0 \leq r < b$ και $0 \leq r' < b$.Αν αφαιρέσουμε μεταξύ τους αυτές τις δυο εξισώσεις,έχουμε

$$r' - r = b(q - q')$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, εξ υποθέσεως, το αριστερό μέλος της εξισώσεως είναι μικρότερο του b κατ' απόλυτον τιμή. Ωστόσο, αν $q \neq q'$, τότε το δεξί μέλος της εξισώσεως θά' πρεπε νά' ναι τουλάχιστον ίσο με b κατ' απόλυτον τιμή. Δια τούτο, θα πρέπει να ισχύει $q = q'$. Όμως, λόγω της εξισώσεως, θα πρέπει και $r = r'$ □

Ορισμός 2.1.2. Ο ακέραιος a είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων b, c όταν $a|b$ και $a|c$. Καθώς το σύνολο των κοινών διαιρετών είναι μη κενό και πεπερασμένο, θα υπάρχει ενα μέγιστο στοιχείο στο σύνολο το οποίο καλείται μέγιστος κοινός διαιρέτης και συμβολίζεται ως (b, c). Όμοια, ορίζουμε ως μέγιστο κοινό διαιρέτη g των ακεραίων $b_1, b_2, \ldots, b_n$, με έστω ένα μη μηδενικό αριθμό και συμβολίζουμε:

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

[2]Για την καλή διάταξη ενός συνόλου συμβουλευτείτε το [17, ενότητα 17].

Θεώρημα 2.1.2. *Αν g είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των b, c, τότε υπάρχουν ακέραιοι x, y τέτοιοι ώστε:*

$$g = (b, c) = bx + cy.$$

Απόδειξη. Έστω ο γραμμικός συνδυασμός $bx + cy$, όπου $x, y \in \mathbb{Z}$. Το σύνολο $bx + cy$ περιλαμβάνει θετικές κι αρνητικές τιμές, καθώς και την τιμή 0, αν επιλέξουμε $x = y = 0$. Εμείς επιλέγουμε x, y τέτοια ώστε το $bx + cy$ να είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος l στο σύνολο αυτό, δηλαδή $l = bx + cy$.

Στη συνέχεια, θ' αποδείξουμε ότι $l|b$ και $l|c$. Αποδεικνύουμε για b, και για το c προκύπτει κατ' αναλογία. Υπόθέτουμε ότι $l \nmid b$. Τότε, απ' το θεώρημα της ευκλείδιας διαίρεσης, θα υπάρχουν $q, r \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε $b = lq + r$, με $0 < r < l$. Επομένως, $r = b - lq = b - q(bx + cy) = b(1 - qx) + c(1 - qy)$, άρα $r \in bx + cy$. Αυτό έρχεται σ' αντίθεση με την υπόθεση ότι το λ είν' το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου $bx + cy$. Άτοπο. Επομένως θα πρέπει ν' αλλάξουμε τον αρχικό μας ισχυρισμό κι άρα $l|b$. Κατ' αναλογία $l|c$.

Τώρα, καθώς το g είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των b, c, μπορούμε να γράψουμε $b = gB$, $c = gC$ και $l = bx + cy = g(Bx + Cy)$ Επομένως, $g|l$, κι επομένως, βάσει του θεωρήματος 2.1.1 και της έκτης ιδιότητας της διαιρετότητας, θα πρέπει $|g| < |l|$, το οποίο είναι άτομο, καθώς ο g είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης. Επομένως, $g = l = bx + cy$.

□

Θεώρημα 2.1.3. *Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης g των b, c χαρακτηρίζεται με τους δυο παρακάτω τρόπους:*

1. *Είναι η ελάχιστη τιμή των $bx + cy$, $\quad x, y \in \mathbb{Z}$*

2. *Είναι ο θετικός κοινός διαιρέτης των b, c που διαιρείται από κάθε κοινό διαιρέτη τους.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του πρώτου μέρους του θεωρήματος προκύπτει απ' το θεώρημα 2.1.2 Για την απόδειξη του δεύτερου μέρους του θεωρήματος, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν d είναι κάποιος κοινός διαιρέτης των b, c, τότε $d|g$, λόγω της τέταρτης ιδιότητας της διαιρετότητας του θεωρήματος 2.1.1. Επιπλέον, δε γίνεται να υπάρχουν δυο διακριτοί μεταξύ τους ακέραιοι αριθμοί με την ιδιότητα 2 του παρόντος θεωρήματος, εξ' αιτίας της πέμπτης ιδιότητας διαιρετότητας του θεωρήματος 2.1.1 □

Αν ένας ακέραιος αριθμός d μπορεί να εκφραστεί στη μορφή $d = bx + cy$, τότε δεν είναι απαραίτητο ότι το d είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης. Ωστόσο, προκύπτει απ' την εξίσωση αυτή ότι ο (b, c) είναι διαιρέτης του d. Συγκεκριμένα, αν $bx + cy = 1$ για κάποιους ακέραιους x, y, τότε $(b, c) = 1$.

Ορισμός 2.1.3. Οι a, b ονομάζονται πρώτοι προς αλλήλους όταν $(a, b) = 1$. Αντίστοιχα, οι $a_1, a_2, \ldots a_n$ είναι σχετικά πρώτοι όταν $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$. Θα λέμε ότι οι $a_1, a_2, \ldots a_n$ είναι πρώτοι προς αλλήλους όταν $(a_i, a_j) = 1, \forall i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j$.

Θεώρημα 2.1.4. 1. *Για κάθε θετικό ακέραιο s:*

$$(sa, sb) = s(a, b).$$

2. *Αν $d|a$ και $d|b$, $d > 0$ τότε:*

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d}(a, b)$$

Αν $(a, b) = g$, τότε

$$\left(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}\right) = 1.$$

3. *Αν $(a, s) = (b, s) = 1$, τότε $(ab, s) = 1$.*

4. *Για κάθε ακέραιο m, $(a, b) = (b, a) = (a, -b) = (a, b + am)$.*

5. *Αν $c|ab$ και $(b, c) = 1$, τότε $c|a$.*

Απόδειξη. 1. Απ' το θεώρημα2.1.3 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}(sa, sb) = \min\{sax + sby :\ & sax + sby > 0\} = \\ \min\{s(ax + by) :\ & sax + sby > 0\} = \\ & = s(a, b).\end{aligned}$$

2. Ο πρώτος ισχυρισμός είναι μια άμεση συνέπεια του πρώτου μέρους του θεωρήματος αυτού. Ο δεύτερος ισχυρισμός είναι μια ειδική περίπτωση του πρώτου ισχυρισμού, αν στη θέση του d αντικαταστήσουμε τον μεγιστό κοινό διαιρέτη $g = (a, b)$.

3. Λόγω του θεωρήματος 2.1.2, υπάρχουν $x_0, y_0, x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε $1 = ax_0 + sy_0 = bx_1 + sy_1$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε $(ax_0)(bx_1) = (1 - sy_0)(1 - sy_1) = 1 - sy_2$, όπου το y_2 δίνεται απ' την εξίσωση $y_2 = y_0 + y_1 - sy_0y_1$. Απ' την εξίσωση $abx_0x_1 + sy_2 = 1$ και βάσει της τέταρτης ιδιότητας του θεωρήματος 2.1.1, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι κάθε κοινός διαιρέτης των ab, s είναι διαιρέτης του 1, κι επομένως $(ab, s) = 1$.

4. Δηλώνουμε με d το (a, b) και με g το $(a, b + am)$. Είναι φανερό ότι $(b, a) = (a, -b) = d$. Απ' το θεώρημα 2.1.2 γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $x, y \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε $d = ax + by$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$d = a(x - my) + (b + am)y.$$

Συμπεραίνουμε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $a, b + am$ είναι διαιρέτης του d, δηλαδή $g|d$. Απ' τον παρακάτω συλλογισμό μπορούμε να καταλήξουμε ότι $d|g$: Καθώς $d|a$ και $d|b$, βλέπουμέ ότι $d|(b + am)$, λόγω της τέταρτης ιδιότητας του θεωρήματος2.1.1. Απ' το δεύτερο μέρος του θεώρηματος2.1.3 ξέρουμε ότι κάθε κοινός διαιρέτης των $a, b + am$ είναι διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη τους, δηλαδή , του διαιρέτη του g. Επομένως, $d|g$. Εφόσον αποδείξαμε ότι $d|g$ και $g|d$, θα ισχύει $d = \pm g$, λόγω της τέταρτης ιδιότητας του θεωρήματος2.1.1. Ωστόσο, επειδή τα d, g είναι και τα δυο θετικά καθώς τα ορίσαμε, θα ισχύει $d = g$.

5. Όπως αποδείξαμε παραπάνω,στο πρώτο μέρος του θεωρήματος ισχύει $(ab, ac) = a(b, c) = a$. Απ' την υπόθεση που κάναμε $c|ab$ κι άρα $c|ac$, επομένως, λόγω του δεύτερου μέρους του θεωρήματος 2.1.3 , $c|a$.

□

2.2 Πρώτοι Αριθμοί

Ορισμός 2.2.1. Ένας ακέραιος p μεγαλύτερος της μονάδας καλείται **πρώτος αριθμός** αν διαιρείται μόνο απ' τη μονάδα και τον εαυτό του, δηλαδή δεν υπάρχει διαιρέτης d του p που να ικανοποιεί τη σχέση $1 < d < p$. Αν ένας ακέραιος a μεγαλύτερος της μονάδας δεν είναι πρώτος, καλείται **σύνθετος αριθμός**.

Θεώρημα 2.2.1. *Κάθε ακέραιος $n > 1$ μπορεί ν' αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων αριθμών, δηλαδή στη μορφή:*

$$n = \pm p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r},$$

όπου p_i είναι διακριτοί πρώτοι αριθμοί και e_i θετικοί ακέραιοι.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό με επαγωγή. Αν $n = 1$, τότε το παραπάνω ισχύει, καθώς ο n είναι γινόμενο μηδενικών σε αριθμό πρώτων αριθμών. Τώρα, έστω ότι $n > 1$ κι υποθέτουμε ότι κάθε θετικός ακέραιος αριθμός μικρότερος του n μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο πρώτων αριθμών. Αν ο n είναι πρώτος, τότε ξανά ο ισχυρισμός είναι σωστός, καθώς το n είναι παράγοντας ενός πρώτου αριθμού. Διαφορετικά, στην περίπτωση που ο n είναι σύνθετος αριθμός, θα υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}$ με $1 < a < n, \ \ 1 < b < n$ και $n = ab$. Απ' την εξ επαγωγής υπόθεση, οι a, b μπορούν να γραφτούν σαν γινόμενο πρώτων αριθμών, επομένως το ίδιο ισχύει και για τον n. □

Πρώτο Θεώρημα του Ευκλείδη 2.2.2. *Έστω p πρώτος αριθμός, κι έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Αν $p|ab$, τότε $p|a$ ή $p|b$. Γενικότερα, αν $p|a_1 a_2 \dots a_n$ τότε ο p διαιρεί έναν απ' τους παράγοντες a_i του παραπάνω γινομένου.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $p|ab$. Οι μόνοι διαιρέτες του p θα είναι οι $\pm 1, \pm p$. Επομένως, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης $g = (p, a)$ είναι το 1 ή το p. Αν $p|a$, τότε αποδείξαμε αυτό που έπρεπε. Διαφορετικά, αν $p \nmid a$, θα πρέπει να έχουμε $g = (p, a) = 1$ κι ο $p|b$. □

Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής 2.2.3. *Η ανάλυση κάθε ακεραίου αριθμού σε παράγοντες πρώτων αριθμών είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Έστω $p_1, \ldots, p_n$ και $p'_1, \ldots, p'_r$ πρώτοι αριθμοί, τέτοιοι ώστε:

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_n = p'_1 \cdot \ldots \cdot p'_r$$

Θ' αποδείξουμε με τη μέθοδο της επαγωγής ότι ο μόνος τρόπος για να ισχύει η παραπάνω σχέση, είναι όταν οι $(p_1, \ldots, p_n)$ είναι απλά μια μετάθεση των $(p'_1, \ldots, p'_r)$. Αν $n = 0$ θα πρέπει και $r = 0$, κι έτσι ο ισχυρισμός είναι σωστός. Θεωρούμε τώρα ότι $n > 0$ κι ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $n - 1$. Καθώς $n > 0$, θα πρέπει και $r > 0$. Επιπλέον, καθώς το p_1 διαιρεί το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης, θα πρέπει να διαιρεί και το δεξί μέλος της εξίσωσης. Έτσι, $p_1 | p'_1, \ldots, p'_r$. Απ' το θεώρημα 2.2.2 προκύπτει ότι $p_1 | p'_j$, για κάποιο $j = 1, \ldots, r$. Εφόσον οι αριθμοί p_i, p'_j είναι πρώτοι, θα πρέπει $p_i = p'_j$. Επομένως, απλοποιούμε κι απ' τις δυο πλευρές της εξίσωσης τα p_i, p'_j, που ταυτίζονται, κι ο ισχυρισμός αποδεικνύεται σωστός με τη μέθοδο της επαγωγής. □

Το παρακάτω θεώρημα είναι συνέπεια του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Αριθμητικής:

Δεύτερο θεώρημα του Ευκλείδη 2.2.4. *Υπάρχουν άπειροι σε πλήθος πρώτοι αριθμοί.*

Απόδειξη. Με χρήση της εις άτοπον απαγωγής, υποθέτουμε ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος πρώτων αριθμών, και τους συμβολίζουμε με $p_1, \ldots, p_k$. Θέτουμε $n := 1 + \prod_{i=1}^{k} p_i$ και θεωρούμε έναν πρώτο αριθμό p που διαιρεί τον n. Θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας πρώτος αριθμός, καθώς $n \geq 2$ και κάθε θετικός ακέραιος αριθμός μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο πρώτων αριθμών, όπως αναφέραμε στο Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής. Είναι προφανές ότι το p δεν θα πρέπει να ισούται με κάποιο εκ των p_i, καθώς, σ' αυτήν την περίπτωση το p θα διαιρούσε το $n - \prod_{i=1}^{k} p_i = 1$, πράγμα που' ναι αδύνατο. Επομένως ο p δεν μπορεί να βρίσκεται ανάμεσα στους $p_k, \ldots, p_k$, πού' ρχεται σε αντίθεση με την αρχική μας υπόθεση ότι αυτοί είναι ο μόνοι πρώτοι αριθμοί που υπάρχουν. □

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, που, όπως ήδη έχουμε αναφέρει είναι γνωστή απ' την εποχή του Ευκλείδη, οδηγεί στο άμεσο συμπέρασμα ότι, εφ' όσον οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι σε πλήθος, η ακολουθία

$$2, 3, 5, 7, 11, 13 \ldots$$

δε σταματά σε κάποιον πεπερασμένο αριθμό, ή, διαφορετικά, ότι η ακολουθία αυτή έχει άπειρους όρους.

Κεφάλαιο 3

Συνάρτηση ζ του Riemann και πρώτοι αριθμοί

3.1 Αναλυτική συνέχιση της συνάρτησης ζ

Η αναλυτική συνέχιση της $\zeta(s)$ θα επιτευχθεί σταδιακά. Για την έννοια της αναλυτικής συνέχισης συμβουλευτείτε τον ορισμό Β΄.3. Η διαδικασία έχει καταμερισθεί σε θεωρήματα που το καθένα αντιστοιχεί και σε μία υποπεριοχή αναλυτικής συνέχισης. Καταλυτική σημασία στα επιχειρήματά μας έχει η συναρτησιακή εξίσωση του Riemann που αποδεικνύεται στο θεώρημα 3.1.4 κι είναι ανάλογη με τη συναρτησιακή εξίσωση της Γ (συμβουλευτείτε την ιδιότητα 2 στο θεώρημα Γ΄.3).

Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος θα μας βοηθήσει να συνεχίσουμε τη συνάρτηση ζ στην περιοχή $\Re s > 0$.

Θεώρημα 3.1.1.

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt \tag{3.1}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση Γ [1] αντικαθιστώντας το x με nx. Έτσι, η σχέση γίνεται:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-nx}(nx)^{s-1}d(nx) = n^s \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx$$

Αν διαιρέσουμε και τα δυο μέλη με n^s, παίρνουμε:

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx$$

Αν, τώρα, αθροίσουμε τα δυο μέλη ως προς n κι εναλλάξουμε το ολοκλήρωμα με το

[1] Βλ. παράρτημα Γ΄

άθροισμα στο δεξί μέλος της εξίσωσης [2], θα καταλήξουμε στη σχέση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx.$$

Παρατηρούμε ότι στο πρώτο μέλος εμφανίζεται η συνάρτηση ζήτα. Χρησιμοποιώντας τη γνωστή γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} = (r-1)^{-1}$ φτάνουμε στη σχέση:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} (e^x - 1)^{-1} x^{s-1} dx.$$

□

Στο σημείο αυτό μπορούμε να συνεχίσουμε τη συνάρτηση ζήτα στο ημιεπίπεδο $\Re s > 0$.

Θεώρημα 3.1.2. *Η $\zeta(s)$ μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά στο ημιεπίπεδο $\Re s > 0$*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι:

$$\int_0^1 \frac{t^{s-1}}{t} dt = \int_0^1 t^{s-2} dt = \frac{1}{s-1} \tag{3.2}$$

Για $\Re s > 1$, η (3.1) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{s-1} dt + \frac{1}{s-1} + \int_1^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt \tag{3.3}$$

Γνωρίζουμε απ' το θεώρημα Δ'.4.1 πως ισχύει:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}, \quad \forall z : |z| < 2\pi, \tag{3.4}$$

όπου B_n είναι οι αριθμοί Bernoulli[3]. Πολλαπλασιάζοντας με z και αφαιρώντας απ' τη σχέση $\frac{1}{t}$ καταλήγουμε στην:

$$\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} = -\frac{1}{2} + \frac{B_2}{2!} t + \ldots, \quad \forall t : |t| < 2\pi. \tag{3.5}$$

Επομένως:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} = -\frac{1}{2}$$

Άρα, θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}| < 1, \ \ \forall t : 0 < t \leq \delta$ και

$$\int_0^{\delta} \left| \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right| t^{\sigma - 1} dt \leq \frac{\delta^{\sigma}}{\sigma} 1 = \frac{\delta^{\sigma}}{\sigma}$$

[2] Καθώς η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη. Παραπέμπουμε στο [15, σελ. 521].

[3] Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο παράρτημα Δ'.

Επομένως, το πρώτο ολοκλήρωμα της (3.3) συγκλίνει απόλυτα για $\sigma = \Re s > 0$ και μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι τ' ολοκλήρωμα αυτό ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση στο $\Re s > 0$. Ανάλογα επιχειρήματα εφαρμόζονται και στο τελευταίο ολοκλήρωμα της (3.3), μιας και το $t^{s-1} \cdot (e^t - 1)^{-1}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο καθώς το $t \to \infty$, για κάθε ακέραιο $s > 1$.

Επομένως, το δεξί μέλος της εξίσωσης (3.3) είν' αναλυτική συνάρτηση στο $Res > 0$, εκτός μόνον απ' τα σημείο $s = 1$, όπου ο δεύτερος όρος της σχέσης έχει έναν απλό πόλο με υπόλοιπο μονάδα. Συνεπώς, όταν διαιρεθεί με τη συνάρτηση $\Gamma(s)$, που, όπως πρωτύτερα δείξαμε, δεν έχει μηδενικά, μπορεί να θεωρηθεί σαν η αναλυτική συνέχιση της $\zeta(s)$στην ευρύτερη περιοχή $s : \Re s > 0 - 1$. □

Το επόμενο βήμα είναι η $\zeta(s)$ να συνεχισθεί μερομορφικά στη λωρίδα $-1 < \Re s < 1$[4].

Θεώρημα 3.1.3. *Η συνάρτηση $\zeta(s)$ συνεχίζεται μερομορφικά στη λωρίδα $-1 < \Re s < 1$.*

Απόδειξη. Καθώς στην περιοχή $0 < \Re s < 1$ ισχύει:

$$\int_1^{\infty} \frac{t^{s-1}}{t} dt = \int_1^{\infty} t^{s-2} dt = -\frac{1}{s-1} \tag{3.6}$$

αντικαθιστώντας την (3.6) στην (3.3),θα έχουμε:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{s-1} dt - \int_1^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{s-1} dt, \tag{3.7}$$

που ισχύει για $0 < \Re s < 1$ Η (3.7) μπορεί επίσης να γραφεί ως εξής:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{s-1} dt - \frac{1}{2s} + \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{s-1} dt \tag{3.8}$$

Στη σχέση αυτή, τα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος ορίζουν αναλυτικές συναρτήσεις στην περιοχή $-1 < \Re s < 1$, καθώς:

$$\frac{1}{e^{-1}} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} = t \left(\frac{1}{2} B_2 + \frac{1}{24} B_4 t^2 + \dots \right)$$

Έτσι, το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει στο κάτω όριο για $\Re s > -1$, ενώ το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει στο άνω όριο για $\Re s < 1$. Συγκεκριμένα:

$$\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} < \frac{1}{t}, \quad \forall t : t > 0.$$

[4]Μερομορφικά κι όχι αναλυτικά, καθώς στο σημείο $s = 1$ έχει έναν πόλο

Εξ' αυτού έπεται ότι μπορούμε να συνεχίσουμε αναλυτικά τη συνάρτηση ζήτα στην περιοχή $-1 < \Re s < 1$, αν διαιρέσουμε τη σχέση (3.8) με τη συνάρτηση Γάμμα.[5] □

Συναρτησιακή Εξίσωση του Riemann 3.1.4. *Ισχύει η εξίσωση:*

$$\xi(1-s) = \xi(s), \quad \forall s \in \mathbb{C},$$

όπου:

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Απόδειξη. Το σημείο $s = 0$ δεν είναι πόλος της $\zeta(s)$, καθώς αν πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (3.8) με s, θα έχουμε[6]:

$$s\Gamma(s)\zeta(s) = \Gamma(s+1)\zeta(s) = s\int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) t^{s-1}dt - \\ -\frac{1}{2} + s\int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{s-1}dt.$$

Θέτοντας $s = 0$, βρίσκουμε $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

Στη συνέχεια, έχουμε:

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty t^{s-1}dt = -\frac{1}{2s}, \quad \forall s : \Re s \in (-1,0). \tag{3.9}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.9) στη σχέση (3.8) και συνδυάζοντας τα ολοκληρώματα, έχουμε:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) t^{s-1}dt + \frac{1}{2s} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{s-1}dt \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) t^{s-1}dt + \frac{1}{2}\int_1^\infty t^{s-1}dt + \\ + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) t^{s-1}dt \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) t^{s-1}dt, \quad \forall s : \Re s \in (-1,0) \tag{3.10}$$

Η έκφραση μέσα στην παρένθεση είν' η ίδια που εμφανίζεται στην ολοκληρωτική αναπαράσταση του Binet[7]

[5] Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο παράρτημα Γ', όπου αναπτύσσονται πλήρως οι ιδιότητες της εν λόγω συνάρτησης.

[6] Η σχέση στο αριστερό μέλος της παρακάτω ισότητας δεν είναι παρά μια ιδιότητα της συνάρτησης Γάμμα, που αποδεικνύουμε στο Γ',Γ.3.

[7] Η ολοκληρωτική αναπαράσταση του Binet είναι η σχέση: $\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right)\frac{e^{-tz}}{t}dt$ που πρότεινε για τη συνάρτηση Γ ο Binet. Για την απόδειξη της σχέσης και περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [33, σελ. 242-245], [25, σελ. 21]

Έτσι, μπορούμε να βρούμε ότι:

$$\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\coth\frac{1}{2}t-\frac{1}{t}=2t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^2+4\pi^2n^2} \tag{3.11}$$

Αντικαθιστούμε στην (3.11) την (3.10) και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\zeta(s)&=2\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^2+4\pi^2n^2}\right)t^s dt=\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{t^s}{t^2+4\pi^2n^2}dt,\quad \forall s:\ \Re s\in(-1,0)\end{aligned} \tag{3.12}$$

Ωστόσο, το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει για $-1<\Re s<1$. Αν αντικαταστήσουμε $t=2\pi n\tau^{1/2}$ στο παραπάνω ολοκλήρωμα, τότε:

$$\frac{1}{2}(2\pi n)^{s-1}\int_0^{\infty}\frac{\tau^{1/2s-1/2}}{\tau+1}d\tau=\frac{1}{2}(2\pi n)^{s-1}B\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right) \tag{3.13}$$

Με λίγα λόγια, με την παραπάνω αντικατάσταση καταλήξαμε σ' ένα ολοκλήρωμα B, που συγκλίνει για $\Re\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\right)>0$ και $\Re\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\right)>0$ ή, ισοδύναμα, για $-1<Res<1$. Το ολοκλήρωμα αυτό έχει οριστεί στο παράρτημα Γ', όπου αναφέρονται και πολλές εκ των ιδιοτήτων του. Γράφοντας το δεξί μέλος της (3.13) με όρους της συνάρτησης Γάμμα και με χρήση της ιδιότητας 8 που αναφέρεται στο θεώρημα Γ'.3 σε συνδυασμό με τη σχέση 9 του θεωρήματος Γ'.4, που συνδέει τις συναρτήσεις Γάμμα και Βήτα,έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(2\pi n)^{s-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)&=\frac{1}{2}(2\pi n)^{s-1}\frac{\pi}{\sin 1/2\pi(1+s)}=\\&=\frac{1}{2}(2\pi n)^{s-1}\frac{\pi}{\cos 1/2\pi s}\end{aligned} \tag{3.14}$$

Καθώς ισχύει $s=\sigma+iy$, όπου $\sigma=\Re s$ και $y=\Im s$, έχουμε $|\cos(1/2\pi s)|=\sqrt[2]{\cos^2(1/2\pi\sigma)+\sinh(1/2\pi y)}$. Είναι ξεκάθαρο ότι η σύγκλιση είν' ομοιόμορφη εφ' όσον το s βρίσκεται εντός της λωρίδας $-1<\Re s<1$. Αν εισάγουμε το αποτέλεσμα της (3.14) στην (3.12), έχουμε:

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\frac{\pi(2\pi)^{s-1}}{\cos(1/2\pi s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-s}} \tag{3.15}$$

όπου η τελευταία σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα αν και μόνο αν $\Re(1-s)>1$ ή $\Re s<0$. Αυτό δικαιολογεί την αντιστροφή της τάξης του αθροίσματος και της ολοκλήρωσης στην (3.12) και δείχνει ότι η περιοχή ισχύος της εξίσωσης αυτής θα πρέπει να περιοριστεί στη λωρίδα $-1<\Re s<0$.

Τώρα, η εξίσωση (3.10) μπορεί να πάρει τη μορφή[8]:

$$\frac{\pi}{\sin(\pi s)} = \frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \frac{\pi(2\pi)^{s-1}}{\cos(1/2\pi)s}\zeta(1-s) \tag{3.16}$$

που απλοποιείται στη μορφή

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\sin(1/2\pi s)\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{3.17}$$

Η (3.1) ισχύει στην περιοχή $-1 < \Re s < 0$.

Η συνάρτηση στο δεξί μέλος της είν' αναλυτική στην περιοχή $\Re(1-s) > 1$ ή $\Re s < 0$, επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να μπορέσουμε ν' αποδείξουμε την αναλυτική συνέχιση της $\zeta(s)$ σ' ολόκληρο το ημιεπίπεδο $\Re s < 0$. Αν γίνει αυτό, η εξίσωση (3.1) θα ισχύει για κάθε τιμή του s, παρεκτός της τιμής $s = 1$.

Ακολουθώντας τον ορισμό της ξ στην εκφώνηση του θεωρήματος καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Καταληκτικά έχουμε αποδείξει το παρακάτω κομβικό θεώρημα:

Αναλυτική Συνέχιση της $\zeta(s)$ στο $\mathbb{C}$ 3.1.5. *Η συνάρτηση $\zeta(s)$, που ορίζεται στο $\Re s > 1$ απ' την εξίσωση*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

μπορεί να συνεχισθεί στο επίπεδο s σαν μερομορφική συνάρτηση μ' έναν απλό πόλο στο $s = 1$ με κύριο όρο $\frac{1}{s-1}$. Επιπλεόν, η $\zeta(s)$ ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση (3.1) σ' ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο.

Πόρισμα 3.1.1. *Οι συναρτήσεις $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ και $(s-1)\zeta(s)$ είναι ακέραιες συναρτήσεις*

Πόρισμα 3.1.2. $\zeta(\sigma) > 1$ *για* $\sigma = \Re s > 1$

Απόδειξη.

$$\zeta(\sigma) = \frac{1}{1^\sigma} + \frac{1}{2^\sigma} + \ldots > 1$$

□

Αργότερα, θ' αποδείξουμε ότι $\zeta(s) \neq 0$ στο ημιεπίπεδο $\Re s > 1$.

Πόρισμα 3.1.3. $\zeta(-2m) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \cdots$

Απόδειξη. Ο παράγοντας $\sin(1/2\pi s)$ στη συναρτησιακή εξίσωση (3.1) έχει απλά μηδενικά στα σημεία $s = \pm\, 2m, \quad m = 1, 2, 3\cdots$. Το μηδενικό στο $s = 0$ απλοποιείται απ' τον πόλο της $\zeta(s-1)$ στο $s = 0$, καθώς τα μηδενικά στο $s = 2m$ απλοποιούνται απ' τους απλούς πόλους της $\Gamma(1-s)$ στα ίδια σημεία. Ωστόσο, αν $s = -2m$ τότε $\Gamma(1+2m) \neq 0$, επομένως τα σημεία $-2, -4, -6\cdots$ θα είναι απλά μηδενικά της $\zeta(s)$. □

[8] Παραπέμπουμε και πάλι τον αναγνώστη στο θεώρημα (Γ.3), ιδιότητα 8.

Τα μηδενικά της $\zeta(s)$ στους αρνητικούς άρτιους ακέραιους καλούνται τετριμμένα μηδενικά της $\zeta(s)$

Πόρισμα 3.1.4. *$\zeta(\sigma) < 0$, για $0 \leq \sigma < 1$*

Απόδειξη. Θεωρούμε την εναλλάσσουσα σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots$$

Απ' το κριτήριο του Leibniz[9], η σειρά συγκλίνει για $s = \sigma > 0$. Αν $\Re s > 1$, έχουμε:

$$\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s) = \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) - 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s}\right) =$$

$$= \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^s}$$

Εφόσον το δεξί μέλος της σχέσης συγκλίνει για s πραγματικό και θετικό, απ' την Αρχή του Ταυτοτισμού Β'.5 η εξίσωση ισχύει επίσης στο δεξί ημιεπίπεδο $\Re s > 0$, εκτός απ' το σημείο $s = 1$. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\sigma} = \left(1 - 2^{1-\sigma}\right)\zeta(\sigma)$$

για $0 < \sigma < 1$. Ξανά, για $0 < \sigma < 1$ έχουμε

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} - \frac{1}{4^\sigma} + \ldots - \frac{1}{(2n)^\sigma} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^\sigma}\right) + \left(\frac{1}{3^\sigma} - \frac{1}{4^\sigma}\right) + \ldots + \left[\frac{1}{(2n-1)^\sigma} - \frac{1}{(2n)^\sigma}\right] >$$

$$> 1 - \frac{1}{2^\sigma}$$

κι αν

$$R_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^\sigma} - \frac{1}{(2n+2)\sigma} + \cdots$$

έχουμε ότι

$$|R_{2n}| < \epsilon = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^\sigma}\right),$$

για n αρκετά μεγάλο. Επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\sigma} = S_{2n} + R_{2n} > 0$$

κ' η (3.1) συνεπάγεται ότι $\zeta(\sigma) < 0$, καθώς $1-2^{1-\sigma}$. Για $\sigma = 0$ έχουμε ήδη υπολογίσει ότι $\zeta(0) = \frac{1}{2}$ □

[9] Για το εν λόγω κριτήριο, καθώς και περαιτέρω στοιχεία για τη σύγκλιση απειροσειρών, μπορεί κανείς ν' ανατρέξει στα [20, σελ.68].

Πόρισμα 3.1.5. *Ισχύει ότι* $\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos(1/2\pi s)\Gamma(s)\zeta(s)$

Απόδειξη. Αν αντικαταστήσουμε το s με $1-s$ στην (3.1) έχουμε:

$$\zeta(1-s) = 2\cdot(2\pi)^{-s}\sin(1/2\pi(1-s))\Gamma(s)\zeta(s) = 2(2\pi)^{-s}\cos(1/2\pi s)\Gamma(s)\zeta(s)$$

□

3.2 Περαιτέρω ιδιότητες της συνάρτησης ζ

Θεώρημα 3.2.1. *Αν το* $\{p_n\}$ *είναι η ακολουθία των πρώτων αριθμών και* $\sigma = \Re s > 1$, *τότε:*

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-{p_n}^{-s}} \tag{3.18}$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι το απειρογινόμενο στα δεξιά της (3.18) συγκλίνει απόλυτα για $\Re s > 1$, καθώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} |{p_n}^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{p_n}^{\sigma}}$$

κ' η σειρά στα δεξιά της (3.2),που περιέχει κάποιους απ' τους όρους της $\sum k^{-\sigma}$ συγκλίνει σε θετικό αριθμό, δηλαδή:

$$\sum \frac{1}{p_n^{\sigma}} < \sum \frac{1}{n^{\sigma}} < \infty.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι το απειρογινόμενο συγκλίνει, δηλαδή δεν αποκλίνει στο 0 ή στο ∞. Τώρα, για κάθε n έχουμε:

$$\frac{1}{1-{p_n}^{-s}} = 1 + {p_n}^{-s} + {p_n}^{-2s} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} {p_n}^{-ms} \tag{3.19}$$

κι αντικατάσταση της (3.19) στην $\prod_{n=1}^{N}(1-{p_n}^{-s})^{-1}$ δίνει

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-{p_n}^{-s}} = \sum_{k=1}^{\infty} {n_k}^{-s} \tag{3.20}$$

όπου το άθροισμα στο δεξί μέλος της σχέσης εκτείνεται πάνω στους ακεραίους n_k των οποίων η ανάλυση σε πρώτους αριθμούς είναι της μορφής

$$n_k = 2^{a_2}\cdot 3^{a_3}\cdots {p_N}^{a_N} \tag{3.21}$$

όπου $a_2 \geq 0, \cdots a_N \geq 0$. Ο παράγοντας για κάθε ${n_k}^{-s}$ είναι 1, όπως προκύπτει απ' το θεώρημα της ανάλυσης ενός ακεραίου σε πρώτους παράγοντες, το οποίο ήδη αποδείξαμε στα θεωρήματα 2.2.1 και 2.2.3. Μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} {n_k}^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{j=1}^{\infty} {n_j}^{-s}$$

όπου άθροισμα $\sum_{j=1}^{\infty}$ εκτείνεται πάνω σ' όλους τους θετικούς ακέραιους n_j, που περιέχουν τουλάχιστον ένα πρώτο παράγοντα μεγαλύτερο του p_N. Όμως:

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} n_j^{-s}\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} {n_j}^{-\sigma} < \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-\sigma}$$

Καθώς το $N \to \infty$, το τελευταίο άθροισμα προσεγγίζει το 0, που είναι το υπόλοιπο της συγκλίνουσας σειράς για $\sigma > 1$. Επομένως:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - {p_n}^{-s}} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - {p_n}^{-s}} = \zeta(s) - \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} {n_j}^{-s} = \zeta(s)$$

□

Πόρισμα 3.2.1. *Η ακολουθία $\{p_n\}$ των πρώτων αριθμών είναι άπειρη.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε ότι ο αριθμός των πρώτων είναι πεπερασμένος στο $\mathbb{N}$. Τότε, το αριστερό μέλος της σχέσης (3.20) θα ήταν πεπερασμένο γινόμενο, που συνεπάγεται μια πεπερασμένη τιμή p για $s = 1$, ενώ το δεξί μέλος θα ήταν ισοδύναμο με $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$, καθώς κάθε θετικός ακέραιος μπορεί ν' αναπαρασταθεί στη μορφή (3.21). Καταλήγουμε σε άτοπο, καθώς η $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ είναι μια αποκλίνουσα σειρά. □

Πόρισμα 3.2.2. $\zeta(s) \neq 0$ *για* $\Re s > 1$

Απόδειξη. Συνεπάγεται αμέσως απ' την (3.1), καθώς το απειρογινόμενο στο δεξί μέλος συγκλίνει (δηλαδή δεν αποκλίνει στο μηδέν). □

Πόρισμα 3.2.3. *Η σειρά των πρώτων αριθμών είναι αποκλίνουσα. Δηλαδή:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty \tag{3.22}$$

Απόδειξη. Αν η σειρά (3.22) ήταν συγκλίνουσα, τότε το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-1})$ θα ήταν απόλυτα συγκλίνον. Όμως:

$$\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - p_n^{-1})} > \frac{1}{\prod_{n=1}^{N}(1 - p_n^{-1})} = \sum_{k=1}^{\infty} {n_k}^{-1},$$

ώστε η $\sum_{k=1}^{\infty}$ θα ήταν συγκλίνουσα για κάθε φυσικό αριθμό στο $\mathbb{N}$. Ωστόσο, αυτό συνεπάγεται τη σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$, καθώς οποιοδήποτε άθροισμα της αρμονικής σειράς είναι μικρότερο από κάποιο μερικό άθροισμα της $\sum_{k=1}^{\infty} {n_k}^{-1}$. Καταλήξαμε σε άτοπο ισχυρισμό, κι άρα στην απόδειξη του ζητούμενου. □

Πόρισμα 3.2.4. *Έστω $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^m$ αν n είναι το γινόμενο m διαφορετικών πρώτων και $\mu(n) = 0$ διαφορετικά, δηλαδή αν το n περιέχει κάθε πρώτο παράγοντα σε δύναμη μεγαλύτερη της πρώτης.*[10]. *Τότε:*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad \Re s > 1. \tag{3.23}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το πόρισμα 3.2.2, η εξίσωση (3.18) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-s}) \tag{3.24}$$

Έχουμε:

$$\prod_{k=1}^{N} (1 - {p_k}^{-s}) = (1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s}) \dots (1 - {p_N}^{-s}) = \sum_{n=1}^{p_1 p_2 \dots p_N} \mu(n) n^{-s}$$

όπου το n είναι είτε 1 είτε γινόμενο κάποιων πρώτων $2, 3 \dots, p_N$ στην πρώτη δύναμη. Τότε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} - \prod_{k=1}^{N} (1 - {p_k}^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} - \sum_{n=1}^{p_1 p_2 \dots p_N} \mu(n) n^{-s} = \sum_{\nu} \mu(\nu) \nu^{-s},$$

όπου το ν περιέχει τουλάχιστον ενάν πρώτο παράγοντα μεγαλύτερο του p_N. Εφ' όσον:

$$\left| \sum_{\nu} \mu(\nu) \nu^{-s} \right| \leq \sum_{\nu} \frac{1}{\nu^{\sigma}} < \sum_{k=p_N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\sigma}} < \varepsilon,$$

για p_N αρκετά μεγάλο, βλέπουμε ότι η σχέση (3.23) ισχύει. □

Θεώρημα 3.2.2. *Για κάθε ακέραιο $N \geq 0$ και $\sigma > 0$ έχουμε:*

$$\zeta(s) = \sum_{0}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s \int_N^{\infty} \frac{x - [x]}{(x)^{s+1}} dx$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον αθροιστικό τύπο του Euler[11] με $f(t) = t^{-s}$ και ακεραίους x, y έχουμε:

$$\sum_{y < n \leq x} \frac{1}{n^s} = \int_y^x \frac{dt}{t^s} - s \int_y^x \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt$$

Αν θέσουμε $y = N$ και $x \to \infty$ με $\sigma > 1$, παίρνουμε:

$$\sum_{n=N+1} \frac{1}{n^s} = \int_N^{\infty} \frac{dt}{t^s} - s \int_N^{\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt$$

[10]Πρόκειται για έναν διαφορετικό ορισμό της συνάρτησης Möbius. Ο αναγνώστης μπορεί ν' ανατρέξει στο παράρτημα F', ενότητα F'.1

[11]Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [3, σελ. 54]

ή, διαφορετικά:

$$\zeta(s) - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^{\infty} \frac{t-[t]}{t^{s+1}} dt.$$

□

Παραθέτουμε παρακάτω μια σημαντική σχέση μεταξύ της συνάρτησης ζήτα του Riemann και της συνάρτησης $\Lambda(n)$ του von Mangoldt που αναπτύσσεται στην ενότητα F′.7.

Θεώρημα 3.2.3. *Ισχύει:*

$$\zeta(s) = e^{G(s)} \tag{3.25}$$

όπου:

$$G(s) = \ln \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} n^{-s} \tag{3.26}$$

Απόδειξη. Η παραπάνω σχέση μπορεί να προκύψει άμεσα με τη χρήση της σχέσης (3.18):

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - {p_n}^{-s}}$$

Αν κρατήσουμε το s πραγματικό, με $s > 1$, ούτως ώστε η $\zeta(s)$ να είναι θετική. Αν λογαριθμίσουμε και χρησιμοποιήσουμε τη δυναμοσειρά $-\ln(1-x) = \sum \frac{x^m}{m}$, βρίσκουμε:

$$\ln \zeta(s) = -\sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{-ms}}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda_1(n) n^{-s}$$

όπου:

$$\Lambda_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{αν } n = p^m \text{ , για κάποιο πρώτο } p \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Όμως, αν $n = p^m$, τότε $\ln n = m \ln p = m\Lambda(n)$ οπότε $\frac{1}{m} = \Lambda(n) \ln n^{-1}$.Επομένως:

$$\ln \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} n^{-s}$$

που συνεπάγεται την (3.25). Όμως, κάθε μέλος της (3.25) είναι αναλυτικό στο ημιεπίπεδο $\sigma > 1$, επομένως, με αναλυτική συνέχιση, η (3.25) ισχύει επίσης για $\sigma > 1$. □

Πόρισμα 3.2.5. *Ισχύει:*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} \tag{3.27}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = (\ln \zeta(s))' \tag{3.28}$$

Επομένως, παραγωγίζοντας τη σχέση (3.26) παίρνουμε:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = (\ln \zeta(s))' = \left(\sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda(n) n^{-s}}{\ln n} \right)' =$$

$$= \left(\sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda(n) e^{-s \ln n}}{\ln n} \right)' = -\sum_{n \geq 2} \frac{\ln n \Lambda(n) e^{-s \ln n}}{\ln n} =$$

$$= -\sum_{n \geq 2} \Lambda(n) n^{-s}$$

□

Θεώρημα 3.2.4. *Ισχύει:*

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(n)!} B_{2n}.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε απ' το θεώρημα Δ'.4.2 ότι:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum B_n \frac{z^n}{n!}.$$

Δεδομένου ότι $B_1 = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \coth z 2. \tag{3.29}$$

Θέτοντας $2iz$, όπου z:

$$z \cot z = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z : |z| < \pi.$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Β'.4 για τη συνάρτηση $f(z)g(z) = \pi \cot \pi z \cdot \frac{1}{z^{2n}}$. Τότε:

$$(2\pi)^{2n} \frac{(-1)^{n-1} B_{2n}}{(2n)!} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}, \nu \neq 0} \frac{1}{\nu^{2n}} = 2 \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^{2n}} = 2\zeta(2n),$$

μέσω του ανάπτυγματος της $\pi z \cot \pi z$. Αναδιατάσσοντας την παραπάνω σχέση έχουμε καταλήξει στο ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.2.5. *Ισχύει:*

$$\zeta(1 - 2n) = (-1)^n \frac{|B_{2n}|}{2n}.$$

Απόδειξη. Μέσω της συναρτησιακής εξίσωσης 3.1 και του προηγούμενου θεωρήματος καταληγούμε στο ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.2.6. *Τα μη τετριμμένα μηδενικά της $\zeta(s)$ κείνται συμμετρικά ως προς την ευθεία $\Re s = \frac{1}{2}$.*

Απόδειξη. Βάσει του πορίσματος 3.2.2 γνωρίζουμε ότι όλα τα μηδενικά στο θετικό ημιεπίπεδο θα πρέπει να βρίσκονται στη λωρίδα $0 \geq \Re s \geq 1$. Λόγω, όμως, του θεωρήματος για τη συναρτησιακή εξίσωση 3.1.4:

$$\xi\left(\frac{1}{2}+s\right) = \xi\left(1-\frac{1}{2}-s\right) = \xi\left(\frac{1}{2}-s\right), \quad \forall s \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Επειδή η $\xi(s)$ μηδενίζεται όπου κ' η $\zeta(s)$, συμπεραίνουμε τη ζητούμενη συμμετρία. □

Λόγω του παραπάνω θεωρήματος η λωρίδα $0 \leq \Re s \leq 1$ αναφέρεται ως **κρίσιμος**. Η υπόθεση του Riemann αναφέρει ότι όλα τα μηδενικά βρίσκονται ακριβώς πάνω στην κεντρική ευθεία $\Re s = \frac{1}{2}$. Η μέγιστη λωρίδα που μπορούμε να διανύσουμε απ' τη μονάδα προς το $1/2$, χωρίς να συναντήσουμε κάποιο σημείο μηδενισμού της ζ, ονομάζεται **ζώνη μη μηδενισμού της** ζ. Ισχύει η ασυμπτωτική σχέση που γενικεύει το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών:

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + O\left(x^{\Theta} \ln x\right),$$

όπου Θ το πάχος αυτής της λωρίδας. Στην περίπτωση που ισχύει η υπόθεση του Riemann το Θ είναι ίσο με $\frac{1}{2}$. Παραπέμπουμε στο [29, σελ. 449].

3.3 Ρητή έκφραση μεταξύ των μηδενικών της $\zeta(s)$ και των πρώτων αριθμών

Στην παρούσα ενότητα θ' αναφέρουμε ορισμένα στοιχεία της αρχικής απόδειξης του Hadamard για το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών, ώστε να δικαιολογήσουμε την απόδειξη που αναφέρουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Για τις λεπτομέρειες των αποδείξεων που παραθέτουμε, παραπέμπουμε στο [9, σελ. 48 - 67] και [31, σελ. 245 - 253]

Απ' το θεώρημα 3.1.1 γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $(s-1)\zeta(s)$ είναι ακέραια. Στη Θεωρία Ακέραιων Συναρτήσεων αποδεικνύεται έν' ανάλογο παραγοντικό ανάπτυγμα της συνάρτησης πάνω στα μηδενικά της μ' εκείνο των πολυωνύμων. Συγκεκριμένα για την $(s-1)\zeta(s)$ ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Παραγοντικό ανάπτυγμα της $(s-1)\zeta(s)$ **3.3.1.** *Ισχύει το παραγοντικό ανάπτυγμα:*

$$(s-1)\zeta(s) = e^{a+bs} \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1+\frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}} \prod_{\rho} \left(1-\frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \tag{3.30}$$

όπου το πρώτο γινόμενο εκτείνεται πάνω στα μηδενικά της $\zeta(s)$ στον αρνητικό ημιάξονα και το δεύτερο στα μηδενικά της $\zeta(s)$ εντός της κρίσιμης λωρίδας $0 < \Re s < 1$.

Αν διαιρέσουμε με $s-1$ και παραγωγίσουμε λογαριθμικά καταλήγουμε στον τύπο:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b - \frac{1}{s-1} - \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{s}{2n(s+2n)} + \sum_{\rho} \frac{s}{\rho(s-\rho)}, \quad \Re s > 1.$$

Παρατηρούμε ότι $\ln'(\zeta(s)) = b + 1$. Οπότε:

$$b - \frac{1}{s-1} = b + 1 - \frac{s}{s-1} = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{s}{s-1}.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα 3.2.5 λαμβάνουμε τον τύπο:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \Lambda(n) n^{-s} = \frac{s}{s-1} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{s}{2n(s+2n)} + \sum_{\rho} \frac{s}{\rho(s-\rho)}, \quad \Re s > 1.$$

Αν αντιστρέψουμε κατά Mellin την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στον τύπο:

$$\mathcal{M}^{-1}\left[\sum_{n=2}^{+\infty} \Lambda(n) n^{-s}; x\right] = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln(1 - x^{-2}).$$

Στο λήμμα 4.4.1 του επόμενου κεφαλαίου θα δούμε πως ο αντίστροφος κατά Mellin του αριστερού μέλους είναι η συνάρτηση $\psi(x)$, όπου $\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)$. Συνολικά έχουμε καταλήξει στο θεώρημα:

Ρητός τύπος για την $\psi(x)$ 3.3.2. *Ισχύει το ανάπτυγμα:*

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln(1 - x^{-2}), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{3.31}$$

όπου το άπειρο άθροισμα εκτείνεται στα μηδενικά της $\zeta(s)$ εντός της κρίσιμης λωρίδας $0 < \Re s < 1$.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι ο όρος που επικρατεί ασυμπτωτικά στον παραπάνω τύπο είναι ο γραμμικός, πράγμα που είναι ισοδύναμο, όπως επίσης θα δείξουμε, με το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών.

Κεφάλαιο 4

Αναλυτική Απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών

4.1 Το πλάνο της απόδειξης

Το θεώρημα των πρώτων αριθμών είναι ισοδύναμο με τη σχέση:

$$\psi(x) \sim x, \quad x \to \infty \tag{4.1}$$

όπου το $\psi(x)$ είναι η συνάρτηση του Chebyshev

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n),$$

και $\Lambda(n)$ η συνάρτηση του Mangoldt, όπως την ορίσαμε στο F′.7 του παραρτήματος F′. Στο κεφάλαιο αυτό δίνουμε την αναλυτική απόδειξη της (4.1) που βασίζεται στις ιδιότητες της συνάρτησης ζ του Riemann[1]. Στην ενότητα αυτή θ' αναφέρουμε τα βασικά στοιχεία της απόδειξης αυτής.

Η συνάρτηση ψ είναι βηματική συνάρτηση, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.1. Συνεπώς είναι πιο βολικό να χειριστούμε το ολοκλήρωμα της ψ, που εκφράζουμε σαν ψ_1.

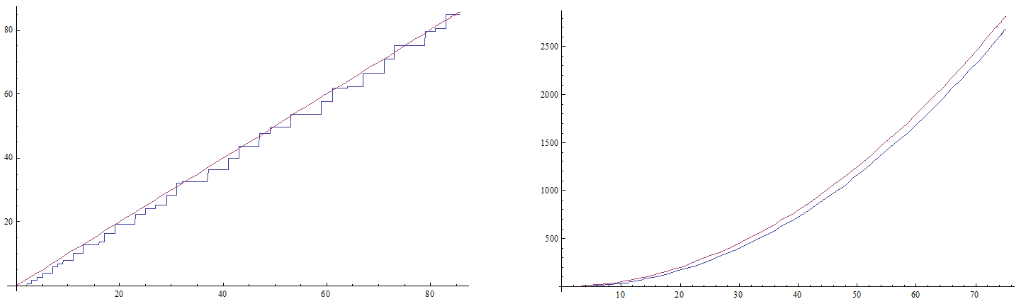
Επομένως, θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)dt.$$

Τ' ολοκλήρωμα της ψ_1 είναι μια κατά τμήματα γραμμική και συνεχής συνάρτηση. Δείχνουμε πρώτα ότι η ασυμπτωτική σχέση:

$$\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2, \quad x \to \infty \tag{4.2}$$

[1]Υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη ότι μπορεί ν' ανατρέξει στις υποενότητες 3.2,1.2



Εικόνα 4.1: Αριστερά: κυανό $\psi(x)$, ερυθρό x Δεξιά: κυανό $\psi_1(x)$, ερυθρό $\frac{x}{2}$

συνεπάγεται την (4.1) κι αποδεικνύουμε την (4.2). Για το σκοπό αυτό, εκφράζουμε την $\psi_1(x)/x^2$ με όρους της συνάρτησης ζ του Riemann, μέσω ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος:

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds, \quad c > 1$$

Ο παράγοντας $\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ έχει έναν πρώτης τάξης πόλο στο $s = 1$ με υπόλοιπο 1. Αν αφαιρέσουμε αυτόν τον πόλο παίρνουμε τη σχέση:

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{-1}{s-1}\right) ds, \quad c > 1$$

Θέτουμε:

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{-1}{s-1}\right)$$

και ξαναγράφουμε την τελευταία εξίσωση στη μορφή:

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} h(s) ds \tag{4.3}$$

Αν κάνουμε την αντικατάσταση $s = c + it$, παίρνουμε τη σχέση:

$$\frac{x^{c-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(c+it) e^{itlogx} dt \tag{4.4}$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα πρέπει να δείξουμε ακόμη ότι:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{c-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(c+it) e^{itlogx} dt = 0 \tag{4.5}$$

Το λήμμα Riemann-Lebesgue στη θεωρία των σειρών Fourier[2] δηλώνει ότι:

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{itx}dt = 0 \tag{4.6}$$

αν τ' ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ συγκλίνει. Τ' ολοκλήρωμα στη σχέση (4.5) είναι της μορφής αυτής, αν αντικαταστήσουμε το x με το $\log x$ κι εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι τ' ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(c+it)|dt$ συγκλίνει αν $c > 1$, επομένως το ολοκλήρωμα της σχέσης (4.5) τείνει στο 0 καθώς $x \to \infty$. Ωστόσο, ο παράγοντας x^{c-1} εκτός του ολοκληρώματος τείνει στο άπειρο για $c > 1$, επομένως, ερχόμαστε αντιμέτωποι με την απορσδιόριστη μορφή $\infty \cdot 0$. Η εξίσωση (4.4) ισχύει για κάθε $c > 1$. Αν μπορούσαμε να θέσουμε $c = 1$ στην (4.4), ο παράγοντας x^{c-1} που δημιουργεί απροσδιοριστία θα μπορούσε να εξαλειφθεί. Όμως τότε, η $h(c + it)$ γίνεται $h(1 + it)$ κ' η ολοκληρωτέα συνάρτηση περιλαμβάνει το $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ στη γραμμή $\sigma = 1$.

Στην περίπτωση αυτή είναι πολύ δύσκολο ν' αποδείξουμε ότι τ' ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(1+it)|dt$ συγκλίνει, κάτι που πρέπει ν' αποδειχθεί ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα Riemann-Lebesgue Το τελευταίο και δυσκολότερο κομμάτι της απόδειξης είναι να δείξουμε ότι είναι δυνατό ν' αντικαταστήσουμε το c με 1 στη σχέση (4.4) κι ότι τ' ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(1+it)|dt$ συγκλίνει. Αυτό το σημείο απαιτεί μια πιο εμπεριστατωμένη μελέτη της συνάρτησης ζήτα του Riemann στη γειτονιά της γραμμής $\sigma = 1$.

Για την παρουσίαση όλων των παραπάνω θα χρειαστεί πρώτα ν' αποδείξουμε την ισοδυναμία των ασυμπτωτικών σχέσεων $\psi(x) \sim x$ και $\pi(x) \sim x/\ln x$. Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια μιας άλλης συνάρτησης του Chebyshev, της $\theta(x)$, η οποία ορίζεται ως

$$\theta(x) = \sum_{p\le x}\ln p \tag{4.7}$$

Δια τούτο, θα ξεκινήσουμε αποδεικνύοντας τον παραπάνω ισχυρισμό, και θα συνεχίσουμε με τη διατύπωση ορισμένων λημμάτων.

4.2 Ισοδυναμία των ασυμπτωτικών σχέσεων $\psi(x) \sim x$ και $\pi(x) \sim x/\ln x$

Θα ξεκινήσουμε με μερικά χρήσιμα λήμματα και θεωρήματα, οι αποδείξεις των οποίων αποτελούν το θεμέλιο λίθο για ν' αποδείξουμε την ισοδυναμία των δυο ασυμπτωτικών σχέσεων.

Λήμμα 4.1. *Έστω $n \ge 1$ και $1 \le k \le n$. Τότε:*

$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k} \quad \textit{αν και μόνο αν} \quad k < \frac{n+1}{2},$$

[2] Για την εύρεση του λήμματος, μπορεί κανείς ν' ανατρέξει στα [5, σελ. 3-5],[16, σελ. 1067]

$$\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \quad \textit{αν και μόνο αν} \;\; k > \frac{n+1}{2},$$

$$\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \quad \textit{αν και μόνο αν} \;\; k = \frac{n+1}{2} \textit{και} \;\; n \;\; \textit{περιττός}.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} r(k) &= \frac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{(k-1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(k-1)!(n-k-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n-k+1}{k} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Επομένως, $r(k) > 1$ αν και μόνο αν $k < \frac{n+1}{2}$, $r(k) < 1$ αν και μόνο αν $k > \frac{n+1}{2}$ και $r(k) = 1$ αν και μόνο αν $k = \frac{n+1}{2}$. □

Λήμμα 4.2. *Για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει:*

$$\frac{2^{2n}}{2n} \leq \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} < 2^{2n}.$$

Απόδειξη. Απ' το διωνυμικό θεώρημα έχουμε:

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$$

Απ' το λήμμα 4.1, ο μέσος διωνυμικός παράγοντας είναι ο μέγιστος διωνυμικός παράγοντας στο ανάπτυγμα του $(1+1)^{2n}$. Επομένως:

$$\begin{aligned} 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \begin{pmatrix} 2n \\ k \end{pmatrix} &= 1 + \sum_{k=1}^{2n-1} \begin{pmatrix} 2n \\ k \end{pmatrix} + 1 \\ &\leq 2 + (2n-1) \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \\ &\leq 2n \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

□

Θεώρημα 4.1. *Για κάθε θετικό ακέραιο n:*

$$\prod_{p \leq n} p < 4^n \tag{4.10}$$

Ισοδύναμα, για κάθε πραγματικό αριθμό $x \geq 1$ ισχύει:

$$\theta(x) < x \log 4 \tag{4.11}$$

Απόδειξη. Έστω $m \geq 1$. Θεωρούμε τους διωνυμικούς συντελεστές:

$$M = \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1} =$$
$$= \frac{(2m+1)2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+2)}{m!}$$

Η παραπάνω παράσταση είναι ακέραιος αριθμός, καθώς το M είναι διωνυμικός συντελεστής. Επιπλέον:

$$2M = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1}$$
$$< \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}$$

κι έτσι

$$M < 4^m.$$

Αν p είναι πρώτος αριθμός τέτοιος ώστε $m+2 \leq p \leq 2m+1$, τότε το p διαιρεί το γινόμενο

$$(2m+1)2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m-2)$$

αλλά όχι το $m!$. Συνεπάγεται ότι $p|M$, κι έτσι το γινόμενο:

$$\prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p$$

διαιρεί το M. Επομένως,

$$\prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p \leq M < 4^m, \tag{4.12}$$

για κάθε θετικό m. Θ' αποδείξουμε την ανισότητα (4.10) μ' επαγωγή στο n. Η ανισότητα αυτή ισχύει για $n = 1$ και $n = 2$, καθώς $1 < 4^1$ και $2 < 4^2$ αντίστοιχα. Έστω $n \geq 3$ και θεωρούμε ότι η (4.10) ισχύει για όλους τους θετικούς ακέραιους $m < n$. Αν το n είναι άρτιο, τότε:

$$\prod_{p \leq n} p = \prod_{p \leq n-1} p < 4^{n-1} < 4^n.$$

Αν το n είναι περιττό, τότε $n = 2m+1$, για κάποιο $m > 1$ και

$$\prod_{p \leq n} p = \prod_{p \leq m+1} p \prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p.$$

Εξ επαγωγής, έχουμε:

$$\prod_{p \leq m+1} p < 4^{m+1} \tag{4.13}$$

Απ' τις (4.12), (4.13) ισχύει ότι:

$$\prod_{p\leq n} p = \prod_{p\leq m+1} p \prod_{m+2\leq 2m+1} p < 4^{m+1}4^m = 4^{2m+1} = 4^n$$

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύει την (4.10).

Η ανισότητα (4.11) έπεται της (4.10) ως εξής: Αν $x \geq 1$, τότε $n = [x] \geq 1$ και

$$\theta(x) = \theta(n) = \ln \prod_{p\leq n} p < n \ln 4 \leq x \ln 4.$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι η (4.11) έπεται της (4.10). □

Θεώρημα 4.2. *Υπάρχουν θετικές σταθερές A, B τέτοιες, ώστε:*

$$Ax \leq \theta(x) \leq \psi(x) \leq \pi(x) \ln x \leq B$$

για κάθε $x \leq 2$. Επιπλεόν:

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} \geq \ln 2$$

και

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} \leq \ln 4$$

Απόδειξη. Το θεώρημα 4.1 δίνει άνω φράγμα $\theta(x) < x \ln 4$, κι έτσι:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} \leq \ln 4$$

Θα υπολογίσουμε το κάτω φράγμα για το $\psi(x)$. Έστω n είναι ένας θετικός ακέραιος, και θεωρούμε το μέσο διωνυμικό παράγοντα $N = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$. Γράφουμε το N σαν γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής:

$$N = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n!} = \frac{(2n)!}{n!^2} = \prod_{p\leq 2n} p^{u_p((2n)!)-2u_p(n!)}$$

όπου:

$$u_p((2n)!) - 2u_p(n!) = \sum_{k=1}^{[\ln 2n/\ln p]} \left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{2k}\right] \right)$$

Για κάθε πραγματικό αριθμό t ισχύει $[2t] - 2[t] = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$. Επομένως:

$$0 \leq u_p((2n)!) - 2u_p(n!) \leq \left[\frac{\ln 2n}{\ln p}\right]$$

Λόγω του λήμματος 4.2, ισχύει:

$$\frac{2^{2n}}{2n} \leq N = \prod_{p \leq 2n} p^{u_p((2n)! - 2u_p(n!)} \leq \prod_{p \leq 2n} p^{[\ln 2n / \ln p]}$$

κι έτσι:

$$2n \ln 2 - \ln 2n \leq \sum_{p \leq 2n} \left[\frac{\ln 2n}{\ln p} \right] \ln p = \psi(2n)$$

Έστω $x \geq 2$ και $n = [x/2]$. Τότε:

$$2n \leq x < 2n + 2$$

και

$$\psi(x) \geq \psi(2n) \geq 2n \ln 2 - \ln 2n > (x-2) \ln 2 - \ln x = x \ln 2 - \ln x - 2 \ln 2.$$

Επομένως:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq \ln 2.$$

Τώρα, μπορούμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα για την $\theta(x)$ ως προς την $\pi(x) \ln x$. Αν $0 < \delta < 1$:

$$\begin{aligned} \theta(x) &\geq \sum_{x^{1-\delta} < p \leq x} \ln p \geq \\ &\geq \sum_{x^{1-\delta} < p \leq x} (1-\delta) \ln x = \\ &= (1-\delta)(\pi(x) - \pi(x^{1-\delta})) \ln x \geq \\ &\geq (1-\delta) \pi(x) \ln(x) - x^{1-\delta} \ln x. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\theta(x)}{x} \geq \frac{(1-\delta)\pi(x) \ln x}{x} \frac{\ln x}{x^{\delta}}.$$

Συνεπάγεται ότι:

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\theta(x)}{x} = (1-\delta) \liminf_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln(x)}{x}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $\delta > 0$, κι άρα:

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\theta(x)}{x} \geq \liminf_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln(x)}{x}. \tag{4.15}$$

Με παρόμοιο τρόπο, έχουμε το κάτω φράγμα της $\theta(x)$:

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\theta(x)}{x} \geq \limsup_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln(x)}{x}. \tag{4.16}$$

Η ανισότητα

$$\theta(x) \leq \psi(x) \leq \pi(x) \ln x$$

συνεπάγεται ότι:

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} \tag{4.17}$$

και

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x}$$

Αν συνδυάσουμε τις ανισότητες (4.15) και (4.17), παίρνουμε τη σχέση:

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} \geq \ln 2$$

Όμοια, συνδυάζοντας τις (4.16) και (4.2),έχουμε:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} \geq \ln 4$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Το θεώρημα 4.2 αποδεικνύει ότι

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x},$$

καθώς $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ αν και μόνο αν

$$\liminf_{x\to\infty} f(x) = \limsup_{x\to\infty} f(x) = a.$$

Επιπλέον, με το παραπάνω θεώρημα, καταφέραμε ν' αποδείξουμε ότι οι επόμενες ασυμπτωτικές σχέσεις είναι ισοδύναμες:

$$\begin{aligned} \pi(x) &\sim \frac{x}{\ln x}, \\ \theta(x) &\sim x, \\ \psi(x) &\sim x. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος των πρώτων αριθμών, θα χρησιμοποιήσουμε την ασυμπτωτική σχέση $\psi(x) \sim x$. Πρωτού, όμως, περάσουμε στην κυρίως απόδειξη, θ' αναφέρουμε στην επόμενη ενότητα σ' ορισμένα χρήσιμα λήμματα.

4.3 Λήμματα

Λήμμα 4.3. *Για κάθε αριθμητική συνάρτηση $\alpha(n)$ έστω:*

$$A(x) = \sum_{n \leq x} \alpha(n)$$

όπου $A(x) = 0$ αν $x < 1$. Τότε:

$$\sum_{n \leq x} (x - n)\alpha(n) = \int_1^x A(t)dt \tag{4.18}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα του Abel[3] που δηλώνει ότι:

$$\sum_{n \leq x} \alpha(n) f(n) = A(x) f(x) - \int_1^x A(t) f'(t) dt, \tag{4.19}$$

αν η f έχει συνεχή παράγωγο στο $[1, x]$. Θέτοντας $f(t) = t$ έχουμε:

$$\sum_{n \leq x} \alpha(n) f(n) = \sum_{n \leq x} n\alpha(n) \tag{4.20}$$

και

$$A(x) f(x) = x \sum_{n \leq x} \alpha(n) \tag{4.21}$$

οπότε, η (4.19) καταλήγει στην (4.18). □

Το επόμενο λήμμα είναι μια μορφή του κανόνα L'Hospital για αύξουσες, τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις:

Λήμμα 4.4. *Έστω $A(x) = \sum_{n \leq x} \alpha(n)$ κι έστω $A_1(x) = \int_1^x A(t)dt$. Θεωρούμε ακόμη ότι $\alpha(n) \geq 0$ για κάθε n. Αν ισχύει η ασυμπτωτική σχέση:*

$$A_1(x) \sim Lx^c, \;\; x \to \infty \tag{4.22}$$

για κάποιο $c > 0$ και $L > 0$, τότε:

$$A(x) \sim cLx^{c-1}, \;\; x \to \infty \tag{4.23}$$

Μ' άλλα λόγια, αν παραγωγίσουμε τα δυο μέλη της (4.22), παίρνουμε τις παραγώγους των δυο μελών, όπως φαίνεται στην (4.23)[4].

[3] Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [3, σελ. 77-78]

[4] Το αναφέρουμε ως κανόνα L' Hospital, γιατί:

$$\left[A_1(x) \sim Lx^c \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{A_1(x)}{Lx^c} = 1 \right] \Rightarrow \left[\lim_{x \to +\infty} \frac{A(x)}{cLx^{c-1}} \Leftrightarrow A(x) \sim cLx^{c-1} \right]$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $A(x)$ είναι αύξουσα, καθώς η $\alpha(n)$ είναι μη αρνητική. Επιλέγουμε κάποιο $\beta > 1$ και θεωρούμε τη διαφορά $A_1(\beta x) - A_1(x)$. Έχουμε:

$$A_1(\beta x) - A_1(x) = \int_x^{\beta x} A(u)du \geq \int_x^{\beta x} A(x)du = A(x)(\beta x - x) = x(\beta - 1)A(x).$$

Αυτό μας δίνει:

$$xA(x) \leq \frac{1}{\beta - 1}\{A_1(\beta x) - A_1(x)\}$$

Ας κρατήσουμε το β σταθερό κι ας θέσουμε $x \to \infty$ στην ανισότητα. Βρίσκουμε:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{\beta - 1}(L\beta^c - L) = L\frac{\beta^c - 1}{\beta - 1}$$

Τώρα, έστω $\beta \downarrow 1$. Το πηλίκο στα δεξιά είναι το πηλίκο διαφοράς για την παράγωγο του x^c στο $x = 1$ κι έχει όριο c. Επομένως:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq cL \tag{4.24}$$

Τώρα, θεωρούμε κάθε α με $0 < \alpha < 1$ κι έστω η διαφορά $A_1(x) - A_1(\alpha x)$. Μια παρόμοια υπόθεση αποτελεί και το παρακάτω:

$$\lim_{x\to\infty} \inf \frac{A(x)}{x^{c-1}} \geq L\frac{1 - \alpha^c}{1 - a}$$

Καθώς το $\alpha \to 1_-$, το δεξί μέλος τείνει στο cL. Αυτό, μαζί με τη σχέση (4.24) δείχνουν ότι το $A(x)/x^{c-1}$ τείνει στο όριο cL καθώς το $x \to \infty$. □

Όταν $\alpha(n) = \Lambda(n)$, έχουμε $A(x) = \psi(x), A_1(x) = \psi_1(x)$ και $\alpha(n) \geq 0$ Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε τα λήμματα (4.3),(4.4) κι αμέσως να καταλήξουμε στο:

Θεώρημα 4.3. *Ισχύει:*

$$\psi_1(x) = \sum_{n\geq x}(x - n)\Lambda(n) \tag{4.25}$$

Επιπλέον, η ασυμπτωτική σχέση $\psi_(x) \sim \frac{x^2}{2}$ *συνεπάγεται ότι* $\psi(x) \sim x$ *καθώς* $x \to \infty$.

Το επόμενο βήμα είναι να εκφράσουμε το $\frac{\psi_1(x)}{x^2}$ σαν επικαμπύλιο ολοκλήρωμα με τη βοήθεια της συνάρτησης ζήτα του Riemann. Βασικό μας εργαλείο θα είναι ο μετασχηματισμός Mellin.[5]

[5] Παραπέμπουμε στο παράρτημα Ε΄.

4.4 Αναπαράσταση του $\psi_1(x)/x^2$ με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Ξεκινούμε με τα παρακάτω λήμματα, πάνω στα οποία θα βασιστούμε για να μπορέσουμε ν' αναπαραστήσουμε το $\psi_1(x)/x^2$ μ' επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

Λήμμα 4.4.1. *Αν* $\psi(x) = \sum_{x \leq n} \Lambda(n)$*, τότε:*

$$(\ln \zeta(s))' = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -s \int_0^{+\infty} x^{-s-1} \psi(x) dx \tag{4.26}$$

Απόδειξη. Έχουμε ήδη αναφέρει μια εκ των ιδιοτήτων της ζ στο κεφάλαιο 3, ενότητα 3.2, την οποία για ευκολία ξαναγράφουμε παρακάτω:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n \geq 2} \Lambda(n) n^{-s} \tag{4.27}$$

Αν επεκτείνουμε την $\Lambda(n)$ σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}^+$ θέτοντας $\Lambda(x) = \Lambda(n)$ για κάθε $x \in [n, n+1]$, τότε:

$$\psi(x) = \sum_{x \leq n} \Lambda(n) \Leftrightarrow \Lambda(x) = \psi(n) - \psi(n-1)$$

Επομένως, η σχέση (4.27) γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} \Lambda(n) n^{-s} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} (\psi(n) - \psi(n-1)) n^{-s} = \\ &= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} \psi(n) n^{-s} - \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} \psi(n-1) n^{-s} \end{aligned} \tag{4.28}$$

Αλλάζουμε δείκτη στην άθροιση του δεύτερου ορίου κι έχουμε:

$$\begin{aligned} & \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} \psi(n) n^{-s} - \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \psi(n)(n+1)^{-s} \\ = & \lim_{N \to +\infty} \left(\psi(N) N^{-s} + \sum_{n=2}^{N-1} \psi(n) n^{-s} - \sum_{n=2}^{N-1} \psi(n)(n+1)^{-s} - \psi(2) \cdot 2^{-s} \right) = \\ = & \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N-1} \psi(n)(n^{-s} - (n+1)^{-s}) + \lim_{N \to +\infty} N^{-s} \psi(N) - \psi(1) 2^{-s} \end{aligned}$$

Όμως

$$\psi(1) = \Lambda(1) = 0 \ \text{ και } \psi(N) = \sum_{n\leq N} \Lambda(n) \leq \sum_{n\leq N} \Lambda(N) \leq \sum_{n\leq N} \ln(N) =$$
$$= \ln N \sum_{n\leq N} 1 = N \ln N \qquad (4.29)$$

Επομένως, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\frac{\psi(N)}{N^s} \leq \frac{N\ln N}{N^s} = N^{1-s}\ln N \to 0, \text{ καθώς } N \to \infty,$$

δεδομένου ότι το $s > 1$. Συνολικά, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \psi(n) \left(n^{-s} - (n+1)^{-s}\right) =$$
$$= -\lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \psi(n) \int n^{n+1} \frac{d}{dx} x^{-s} ds = -\lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \psi(n) \int_n^{n+1} \frac{d}{dx} x^{-s} ds =$$
$$= -\lim_{N\to\infty} \int_0^{\infty} \psi(x)(-s)x^{-s-1} dx = s\int_0^{\infty} \psi(x) x^{-s-1} dx. \qquad (4.30)$$

□

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τον **μετασχηματισμό Mellin** , που έχει εισηχθεί στο παράρτημα Ε'. Βάσει, λοιπόν, των προηγουμένων έχουμε:

$$(\ln \zeta(s))' = -s\mathcal{M}[\psi; -s].$$

Αντιστρέφοντας την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στο επόμενο λήμμα:

Λήμμα 4.5. *Ισχύει:*

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} x^s ds, \quad \forall \sigma \in (1, \infty)$$

Απόδειξη. Απ' το λήμμα 4.4.1 ισχύει

$$(\ln \zeta(s))' = -s\mathcal{M}[\psi; -s] \Rightarrow \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{(\ln\zeta(s))'}{s}; x\right] = -\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{M}[\psi; -s]; x] \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{(\ln \zeta(s))'}{s} x^{-s} ds = -\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{M}[\psi(s); -s]; x]$$

Με την αλλαγή μεταβλητής από s σε $-s$ παίρνουμε:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{(\ln\zeta(-s))'}{(-s)} x^s d(-s) = -\psi(x) \Rightarrow$$
$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} x^s ds. \qquad (4.31)$$

□

Θεώρημα 4.4. *Έστω:*

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)dt,$$

τότε:

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}\left(\frac{x^{s-1}}{s+1} - \frac{x^{-2}}{s+1}\right), \forall \sigma \in (1,+\infty)$$

Απόδειξη. Απ'το λήμμα 4.5 έχουμε:

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}x^s ds.$$

Επιπλέον, απ' τη σχέση (4.4):

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)dt = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}\left(\int_0^x t^s dt\right)ds.$$

Μ' εναλλαγή των δυο ολοκληρωμάτων παίρνουμε:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}\frac{t^{s+1}}{s+1}\Big|_1^x ds =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}\left(\frac{x^{s+1}}{s+1} - \frac{1}{s+1}\right)ds. \tag{4.32}$$

Διαιρώντας με x^2 λαμβάνουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 4.6. *Ισχύει:*

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}\frac{ds}{s+1} = 0$$

Απόδειξη. Θέτοντας $s = \sigma + it$ παίρνουμε:

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)}\frac{ds}{s+1} =$$

$$= \lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{(\sigma+it)\zeta(\sigma+it)}\frac{idt}{(\sigma+1+it)}.$$

Θέτουμε:

$$I(t) = \int_{-T}^{+T}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{(\sigma+it)\zeta(\sigma+it)}\frac{idt}{\sigma+1+it} =$$

$$= i\left(\int_{-T}^{T}\frac{1}{(\sigma+it)(\sigma+1+it)}(\ln(\zeta(\sigma+it)))'dt\right) =$$

$$= i\left(\frac{\ln\zeta(\sigma+it)}{(\sigma+it)(\sigma+1+it)}\Big|_{-T}^{T} +\right.$$

$$\left. + \int_{-T}^{T}\frac{(2\sigma+1)i - 2t}{((\sigma+it)\cdot(\sigma+1+it))^2}\ln(\zeta(\sigma+it))dt\right) = i(I_1(T)+I_2(T)) \tag{4.33}$$

Θα δουλέψουμε με καθένα απ' τα ολοκληρώματα ξεχωριστά. Για το πρώτο ολοκλήρωμα ισχύει:

$$I_1(T) = \frac{\ln(\zeta(\sigma+iT))}{(\sigma+iT)(\sigma+1+iT)} - \frac{\ln(\zeta(\sigma-iT))}{(\sigma-iT)(\sigma+1-iT)}$$

Επιπλέον, για το πρώτο ολοκλήρωμα μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε την ισχύ των παρακάτω ανισοτήτων:

$$|\sigma+iT| \geq ||\sigma|-|T||\,, \quad |\sigma-iT| \geq ||\sigma|-|T||$$

και

$$|\sigma+1+iT| \geq ||\sigma|-|T|+1|\,, \quad |\sigma+1-iT| \geq ||\sigma|-|T|-1|\,,$$

για την απόδειξη των οποίων χρησιμοποιήσαμε την αντίστροφη τριγωνομετρική ταυτότητα $|x+y| \geq ||x|-|y||$. Άρα:

$$\frac{1}{|\sigma+iT||\sigma+1+iT|} \leq \frac{1}{(||\sigma|-|T|-1|)^2} \tag{4.34}$$

και

$$\frac{1}{|\sigma-iT||\sigma+1-iT|} \leq \frac{1}{(||\sigma|-|T|-1|)^2}.$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}x^n, \quad \forall x : |x|<1.$$

Απ' τη σχέση του Euler μπορούμε να υπολογίσουμε ότι:

$$\ln\zeta(s) = -\sum_p \ln(1+p^{-s})$$

Αν $s = \sigma + it$, τότε:

$$\log(1+p^{-\sigma-it}) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}p^{-n\sigma-it}$$

$$\ln\zeta(\sigma+it) = -\sum_p\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}p^{-n\sigma-it}$$

Αν πάρουμε το μέτρο της παραπάνω σχέσης, έχουμε:

$$\begin{aligned}|\ln\zeta(\sigma+it)| &= \sum_p\sum_{n\geq 1}|\exp(-n(\sigma+it)\log p)| = \\ &= \sum_p\sum_{n\geq 1}|\exp(-n\sigma\ln p)\exp(-nit\ln p)| = \\ &= \sum_p\sum_{n\geq 1}|\exp(-n\sigma\ln p)||\exp(-nit\ln p)| = \\ &= \sum_p\sum_{n\geq 1}p^{-n\sigma} \leq \sum_{m\geq 1}m^{-\sigma} = C(\sigma) < +\infty,\end{aligned} \tag{4.35}$$

όπου το $\sigma > 1$ και $C(\sigma)$ μια σταθερά που εξαρτάται μόνο απ' το σ και το $|\exp(-nit\ln p)|$ να ισούται πάντα με μονάδα. Επομένως:

$$\begin{aligned}|I_1(T)| &= |\frac{\ln(\zeta(\sigma+iT))}{(\sigma+iT)(\sigma+1+iT)} - \frac{\ln(\zeta(\sigma-iT))}{(\sigma-iT)(\sigma+1-iT)}| = \\ &\leq |\frac{\ln(\zeta(\sigma+iT))}{(\sigma+iT)(\sigma+1+iT)}| + |\frac{\ln(\zeta(\sigma-iT))}{(\sigma-iT)(\sigma+1-iT)}| \leq \\ &\leq \frac{2C(\sigma)^2}{(|\sigma|-|T|-1)^2}.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Συνεπώς $I_1(T) \to 0$. Με παρόμοιο τρόπο θα δουλέψουμε τώρα και στο δεύτερο ολοκλήρωμα.

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη σχέση (4.34), καθώς:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(|\sigma+iT||\sigma+1+iT|)^2} &= \frac{1}{|\sigma+iT||\sigma+1+iT|} \cdot \frac{1}{|\sigma+iT||\sigma+1+iT|} \leq \\ &\leq \frac{1}{(||\sigma|-|T|-1|)} \cdot \frac{1}{(||\sigma|-|T|-1|)} = \\ &= \frac{1}{(||\sigma|-|T|-1|)^4}.\end{aligned} \tag{4.37}$$

Όμοια, θα χρησιμοποιήσουμε ξανά τη (4.35). Για $-T \leq t \leq T$ και καθώς η συνάρτηση του λογαρίθμου είναι αύξουσα και καθώς στη σχέση (4.35) που αποδείξαμε η σταθερά εξαρτάται μονάχα απ' το σ, ισχύει:

$$|\ln\zeta(\sigma+it)| \leq |\ln(\sigma+iT)| \leq C(\sigma) \tag{4.38}$$

Επιπλέον:

$$|2\sigma i + i - 2t| \leq ||2\sigma+i| + 2|t|| = |2\sigma+1+2|t|| \leq |2\sigma+1+2T| \tag{4.39}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.35), (4.38) και (4.39) στ' ολοκλήρωμα $I_2(T)$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-T}^{T} \frac{(2\sigma+1)i-2t}{((\sigma+it)\cdot(\sigma+1+it))^2}\ln\zeta(\sigma+it)dt\right| \leq \\ &\leq \int_{-T}^{T}\left|\frac{(2\sigma+1)i-2t}{((\sigma+it)\cdot(\sigma+1+it))^2}\ln\zeta(\sigma+it)dt\right| = \\ &= C(\sigma)\frac{|2\sigma+1+2T|}{|\sigma+T-1|^4}(T-(-T))\end{aligned} \tag{4.40}$$

για $\sigma, T > 0$. Δηλαδή:

$$C(\sigma)\frac{|4T\sigma+2T+4T^2|}{|\sigma+T-1|^4} \tag{4.41}$$

Η ποσότητα στον αριθμητή εμπεριέχει δύναμη του T μικρότερη απ' αυτή του παρονομαστή. Δια τούτο, στέλνοντας το T στο άπειρο, το κλάσμα $I_2(T)$ θα τείνει στο μηδέν. Συνεπώς, καταλήγουμε στο ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 4.5. *Ισχύει η σχέση:*

$$\frac{\psi(x)}{x^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds \tag{4.42}$$

Απόδειξη. Συνδυάζουμε τα θεώρημα (4.4) και λήμμα (4.6) και καταλήγουμε στο ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 4.6. *Αν $c > 1$ και $x \geq 1$, έχουμε:*

$$\frac{\psi(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1}h(s)ds \tag{4.43}$$

όπου

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right) \tag{4.44}$$

Απόδειξη. Θ' αποδείξουμε αρχικά ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{u^{-s}}{s(s+1)(s+2)}ds = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-u)^2 & \text{αν } 0 < u \leq 1 \\ 0 & \text{αν } u > 1 \end{cases} \tag{4.45}$$

Η ολοκληρωτέα ποσότητα στη σχέση (4.45) είναι ίση με $u^{-s}\Gamma(s)/\Gamma(s+3)$. Αυτό έπεται της ιδιότητας 4 στο θεώρημα Γ'.3 απ' το παράρτημα Γ':

$$\Gamma(s+3) = (s+2)(s+1)s\Gamma(s).$$

Έφαρμόζουμε το θεώρημα Cauchy ολοκληρωτικών υπολοίπων στ' ολοκλήρωμα:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R)} \frac{u^{-s}\Gamma(s)}{\Gamma(s+3)}$$

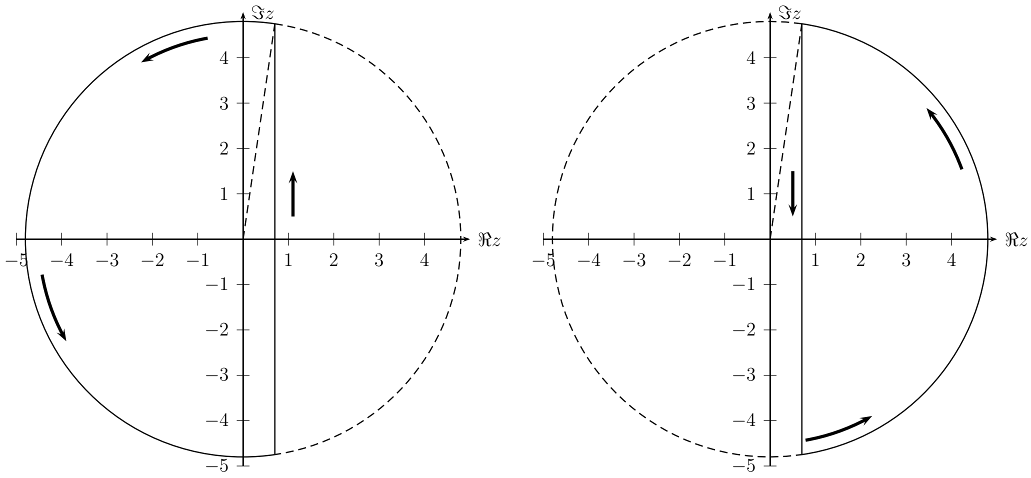
όπου $C(R)$ είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα που παρουσιάζεται στα σχήματα 4.2. Η ακτίνα R του κύκλου επιλέγεται μεγαλύτερη από $4 + c$, επομένως, όλοι οι πόλοι στα σημεία $s = 0, -1, -2$ βρίσκονται εντός του κύκλου.

Τώρα θα δείξουμε ότι τ' ολοκλήρωμα κατά μήκος καθενός εκ των κυκλικών τόξων τείνει στο 0 καθώς $R \to \infty$. Αν $s = x + iy$ και $|s| = R$ η ολοκληρωτέα ποσότητα φράσσεται εκ των άνω απ' την:

$$\left|\frac{u^{-s}}{s(s+1)(s+2)}\right| = \frac{u^{-x}}{|s||s+1||s+2|} \leq \frac{u^{-c}}{R\cdot|s+1|\cdot|s+2|}$$

Η ανισότητα $u^{-x} \leq u^{-c}$ συνεπάγεται απ' το γεγονός ότι η u^{-x} είναι μια αύξουσα συνάρτηση του x αν $0 < u \leq 1$ και φθίνουσα αν $u > 1$. Τώρα, αν $1 \leq n \leq 2$ έχουμε:

$$|s+n| \geq |s| - n = R - n \geq R - 2 \geq \frac{R}{2}$$



(α') $0 < u \leq 1$ (β') $u > 1$

Εικόνα 4.2: Οι δρόμοι ολοκλήρωσης ανά περίπτωση

καθώς $R > 4$. Επομένως, τ' ολοκλήρωμα κατά μήκος κάθε κυκλικού τόξου φράσσεται από:

$$\frac{2\pi R u^{-c}}{R\left(\frac{1}{2}R\right)^2} = O(R^2)$$

Η σχέση αυτή τείνει στο μηδέν καθώς το R τείνει στο άπειρο. Αν $u > 1$, η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι αναλυτική εντός του $C(R)$ καθώς $\int_{C(R)} = 0$, βάσει του θεωρήματος Cauchy Β'.1. Αν $R \to \infty$ τότε ισχύει η σχέση (4.45) Στην περίπτωση, τώρα, που $0 < u \leq 1$ εφαρμόζουμε τ' ολοκλήρωμα γύρω απ' το $C(R)$ με τη βοήθεια του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων Β'.2. Η ολοκληρωτέα ποσότητα έχει πόλους στους ακέραιους $n = 0, -1, -2$. Έτσι:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R)} \frac{u^{-s}\Gamma(s)}{\Gamma(s+3)}ds = \sum_{n=0}^{2} Res\left(\frac{u^{-s}\Gamma(s)}{\Gamma(s+3)}, -n\right) = \\ = \sum_{n=0}^{2} \frac{u^n}{\Gamma(3-n)} Res(\Gamma(s), -n) = \sum_{n=0}^{2} \frac{u^n(-1)^n}{(2-n)!n!} = \\ = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{2} \left(\begin{array}{c} 2 \\ n \end{array}\right)(-u)^n = \frac{(1-u)^2}{2}\end{aligned} \tag{4.46}$$

Στέλνοντας το $R \to \infty$, καταλήγουμε στην ισχύ της (4.45).

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.45) παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)(s+2)}ds$$

όπου $c > 0$. Με αντικατάσταση του s με $s-1$ στ' ολοκλήρωμα, κρατώντας το $c > 1$ κ' αφαιρώντας τη σχέση απ' τη σχέση (4.42) καταλήγουμε στην ισχύ του θεωρήματος (4.6). □

Αν παραμετροποιήσουμε το μονοπάτι ολοκλήρωσης γράφοντας $s = c + it$ βρίσκουμε:

$$x^{s-1} = x^{c-1}x^{it} = x^{c-1}e^{it\ln x}$$

κι η εξίσωση (4.43) γίνεται:

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{x^{c-1}}{2}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} h(c+it)e^{it\ln x}dt \tag{4.47}$$

Προχωρούμε δείχνοντας ότι το δεξί μέλος της (4.47) τείνει στο 0 καθώς $x \to \infty$. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, πρώτα δείχνουμε ότι μπορούμε να θέσουμε $c = 1$ στη (4.47). Γι' αυτό το σκοπό, πρέπει να μελετήσουμε τη $\zeta(s)$ στη γειτονιά της ευθείας $\sigma = 1$.

4.5 Άνω όρια για τη $|\zeta'(s)|$ και $|\zeta(s)|$ κοντά στην ευθεία $\sigma = 1$

Για να μελετήσουμε τη $\zeta(s)$ κοντά στη γραμμή $\sigma = 1$, θα χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση που προέκυψε απ' το θεώρημα 3.2.2 και ισχύει για $\sigma > 0$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} - s\int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx + \frac{N^{1-s}}{s-1} \tag{4.48}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιούμε τη σχέση για $\zeta'(s)$ παραγωγίζοντας κάθε μέλος της (4.48):

$$\begin{aligned}\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln n}{n^s} + s\int_N^\infty \frac{x-[x]\ln x}{x^{s+1}}dx - \int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx-\\ -\frac{N^{1-s}\ln N}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{(s-1)^2}\end{aligned} \tag{4.49}$$

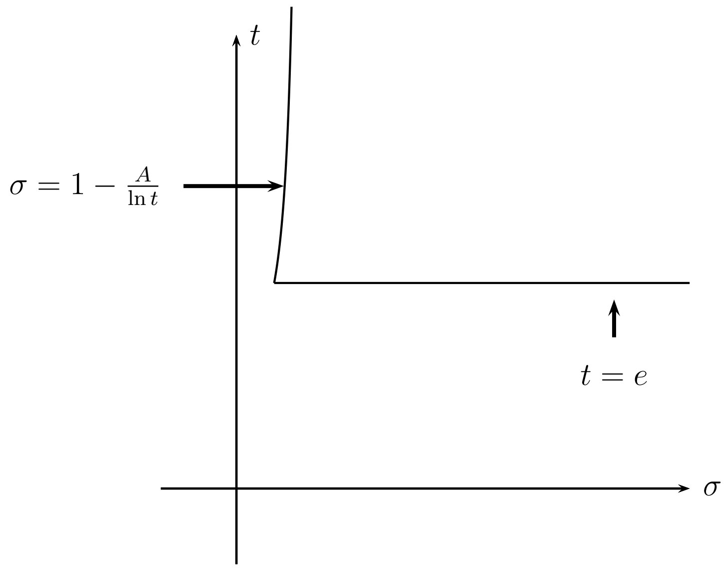
Το επόμενο θεώρημα χρησιμοποιεί τις σχέσεις αυτές για τον υπολογισμό των άνω ορίων για τις $|\zeta'(s)|$ και $|\zeta(s)|$.

Θεώρημα 4.7. *Για κάθε $A > 0$ υπάρχει μια σταθερά M, που εξαρτάται απ' το A, τέτοια ώστε:*

$$|\zeta(s)| \leq M\ln t \;\; \text{και} \;\; |\zeta'(s)| \leq M\ln^2 t \tag{4.50}$$

για κάθε $s = \sigma + it$ με $\sigma \geq 1/2$ που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\sigma > 1 - \frac{A}{\ln t} \;\; \text{και} \;\; t \geq e \tag{4.51}$$



Εικόνα 4.3: Η περιοχή μεταξύ των καμπυλών $\sigma > 1 - \frac{A}{\ln t}$ και $t > e$ για $A = 0.5$

Να σημειώσουμε εδώ ότι οι ανισότητες (4.50), (4.51) περιγράφουν μια περιοχή όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 4.3[6]:

Απόδειξη. Αν $\sigma \geq 2$, έχουμε $|\zeta(s)| \leq \zeta(2)$ και $|\zeta'(s)| \leq \zeta'(2)$. Έτσι, οι ανισότητες στη σχέση (4.50) ικανοποιούνται. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε $\sigma < 2$ και $t \geq e$. Τότε, έχουμε:

$$|s| \leq \sigma + t \leq 2 + t < 2t \;\text{ και }\; |s-1| \geq t$$

έτσι ώστε $\frac{1}{|s-1|} \leq 1/t$. Με χρήση της (4.48) εκτιμούμε την $|\zeta(s)|$ και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma}} + 2t \int_{N}^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + \frac{N^{1-\sigma}}{t} = \\ = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\sigma}} + \frac{2t}{\sigma N^{\sigma}} + \frac{N^{1-\sigma}}{t} \end{aligned} \tag{4.52}$$

Τώρα, αν το N εξαρτάται απ' το t, θεωρώντας $N = [t]$, θα ισχύει $N \leq t < N + 1$ και $\ln n \leq \ln t$ αν $n \leq N$. Η ανισότητα (4.51) συνεπάγεται ότι

$$1 - \sigma < \frac{A}{\ln t}$$

[6]Σ' αυτή την περιοχή, η συνάρτηση ζήτα συμπεριφέρεται σαν λογάριθμος, σε σχέση με το άνω φράγμα.

κι έτσι:

$$\frac{1}{n^\sigma} = \frac{1}{n} e^{(1-\sigma)\ln n} < \frac{1}{n} e^{A \ln n / \ln t} \leq \frac{1}{n} e^A = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Επομένως:

$$\frac{2t}{\sigma N^\sigma} \leq \frac{N+1}{N} = O(1) \text{ και } \frac{N^{1-\sigma}}{t} = \frac{N}{t}\frac{1}{N^\sigma} = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

Άρα

$$|\zeta(s)| = O\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right) + O(1) = O(\ln N) + O(1) = O(\ln t)$$

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύει την ανισότητα για την $|\zeta(s)|$ στη σχέση (4.50). Για την ανισότητα της $|\zeta'(s)|$ χρησιμοποιούμε με παρόμοιο τρόπο την (4.48). Η μόνη ουσιώδης διαφορά είναι ότι εμφανίζεται ένας επιπλέον παράγοντας $\ln N$ στο δεξί μέλος. Όμως, $\ln N = O(\ln t)$, επομένως παίρνουμε:

$$|\zeta'(s)| = O(\ln^2 t)$$

στην περιοχή που μας ενδιαφέρει κι ορίσαμε παραπάνω. □

4.6 Ο μη μηδενισμός της $\zeta(s)$ πάνω στη γραμμή $\sigma = 1$.

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύουμε ότι $\zeta(1+it) \neq 0$ για κάθε πραγματικό t. Η απόδειξη βασίζεται σε μια ανισότητα και θα χρειαστεί επίσης στην επόμενη ενότητα:

Θεώρημα 4.8. *Αν $\sigma > 1$, έχουμε:*

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq 1 \tag{4.53}$$

Απόδειξη. Ανακαλούμε την ταυτότητα της $\zeta(s) = e^{G(s)}$, που αποδείχθηκε στην ενότητα 3.2, όπου

$$G(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s} = \sum_{p} \frac{1}{mp^{ms}}, \quad \sigma > 1$$

Αυτό μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\zeta(s) = \exp\left\{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}\right\} = \exp\left\{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{imt\ln p}}{mp^{m\sigma}}\right\},$$

απ' όπου βρίσκουμε:

$$|\zeta(s)| = \exp\left\{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mt\ln p)}{mp^{m\sigma}}\right\}$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή επαναληπτικά με $s = \sigma$, $\;s = \sigma + it$ και $s = \sigma + 2it$ και λαμβάνουμε:

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| = \exp\left\{\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3 + 4\cos(mt\ln p) + \cos(2mt\ln p)}{mp^{m\sigma}}\right\}$$

Όμως, ισχύει η εξής τριγωνομετρική ανισότητα:

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geq 0$$

που προκύπτει απ' την ταυτότητα:

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 3 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 = 2(1+\cos\theta)^2$$

Επομένως, κάθε όρος στην τελευταία απειροσειρά είναι μη αρνητικός, επομένως καταλήγουμε στην (4.53) □

Θεώρημα 4.9. *Ισχύει $\zeta(1+it) \neq 0$ για κάθε πραγματικό t.*

Απόδειξη. Χρειάζεται μόνο να θεωρήσουμε ότι $t \neq 0$. Ξαναγράφουμε την (4.53) στη μορφή:

$$\{(\sigma-1)\zeta(\sigma)\}^3 \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 |\zeta(\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1} \tag{4.54}$$

Αυτό ισχύει αν $\sigma > 1$. Τώρα θεωρούμε ότι $\sigma \downarrow 1$ στην (4.54). Ο πρώτος παράγοντας πλησιάζει το 1 καθώς η $\zeta(s)$ έχει ολοκληρωτικό υπόλοιπο μονάδα στον πόλο $s = 1$. Ο τρίτος παράγοντας τείνει στο $|\zeta(1+2it)|$. Αν το $\zeta(1+it)$ ήταν ίσο με μηδέν, ο μεσαίος όρος θα μπορούσε να γραφεί ως εξής:

$$\left|\frac{\zeta(\sigma+it) - \zeta(1+it)}{\sigma-1}\right|^4 \to |\zeta'(1+it)|^4, \quad \text{καθώς} \sigma \downarrow 1$$

Επομένως, αν για κάποιο $t \neq 0$ είχαμε $\zeta(1+it) = 0$, το αριστερό μέλος της (4.54) θα πλησίαζε το όριο $|\zeta'(1+it)|^4|\zeta(1+2it)|$ καθώς $\sigma \downarrow 1$. Όμως, το δεξί μέλος τείνει στο ∞ καθώς $\sigma \downarrow 1$. Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο. Συνεπώς η αρχική μας υπόθεση ήταν εσφαλμένη. □

4.7 Ανισότητες για τα $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$ και $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$.

Στο σημείο αυτό εφαρμόζουμε το θεώρημα 4.8 ακόμη μια φορά για να εξάγουμε τις παρακάτω ανισότητες για τα $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$ και $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$.

Θεώρημα 4.10. *Υπάρχει μια σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε:*

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| < M\ln^7 t \;\; \textit{και} \;\; \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < M\ln^9 t \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2} < \infty$$

όπου $\sigma \geq 1$ και $t \geq e$.

Απόδειξη. Για $\sigma \geq 2$ έχουμε:

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leq \zeta(2)^7 \ \text{ και } \ \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2}{}^8, \tag{4.55}$$

άρα οι ανισότητες ισχύουν για $\sigma \geq 2$. Θεωρούμε τώρα ότι $1 \leq \sigma \leq 2$ και $t \geq e$. Ξαναγράφουμε την ανισότητα (4.53) ως ακολούθως:

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|} \leq \zeta(\sigma)^{3/4}|\zeta(\sigma+2it)|^{1/4}$$

Η $(\sigma-1)\zeta(\sigma)$ είναι φραγμένο στο διάστημα $1 \leq \sigma \leq 2$, καθώς είναι ολόμορφη συνάρτηση[9] κι έστω

$$(\sigma-1)\zeta(\sigma) \leq M, \tag{4.56}$$

όπου M μια απόλυτη σταθερά. Τότε:

$$\zeta(\sigma) \leq \frac{M}{\sigma-1}, \ \text{ αν } \ 1 \leq \sigma \leq 2$$

Επιπλέον, $\zeta(\sigma+2it) = O(\log t)$ αν $1 \leq \sigma \leq 2$ (λόγω του θεωρήματος 4.7), άρα, για $1 \leq \sigma \leq 2$ έχουμε:

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|} \leq \frac{M^{3/4}(\log t)^{1/4}}{(\sigma-1)^{3/4}} = \frac{A(\ln t)^{1/4}}{(\sigma-1)^{3/4}}$$

όπου A είναι μια απόλυτη σταθερά. Επομένως, για μια σταθερά $B > 0$ έχουμε:

$$|\zeta(\sigma+it)| > \frac{B(\sigma-1)^{3/4}}{(\ln t)^{1/4}}, \ \text{ αν } \ 1 < \sigma \leq 2 \ \text{ και } \ t \geq e \tag{4.57}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει με τετριμμένο τρόπο για $\sigma = 1$. Έστω α οποιοσδήποτε αριθμός που ικανοποιεί την ανισότητα $1 < \alpha < 2$. Τότε, αν $1 \leq \sigma \leq \alpha$, $t \geq e$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα (4.7) για να γράψουμε:

$$|\zeta(\sigma+it) - \zeta(\alpha+it)| \leq \int_{\sigma}^{\alpha}|\zeta'(u+it)|du \leq (\alpha-\sigma)M\ln^2 t \leq (\alpha-1)M\log^2 t$$

[7]Παραπέμπουμε στο πόρισμα 3.2.4 για την πρώτη από αριστερά ισότητα.

[8]Ισχύει:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \int_1^{+\infty}(lnx)'\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx =$$
$$= \ln x\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty}\ln x\frac{1/x^2 + \ln x/x^3}{x^2}dx < +\infty \tag{4.55}$$

[9]Γνωρίζουμε ότι στο $s = 1$ η $\zeta(s)$ έχει έναν απλό πόλο, οπότε στην εν λόγω συνάρτηση αυτός απαλείφεται με τον πολλαπλασιασμό επί $(\sigma-1)$

Βάσει της τριγωνικής ανισότητας:

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq |\zeta(\alpha+it)| - |\zeta(\sigma+it)-\zeta(\alpha+it)| \geq$$
$$\geq |\zeta(\alpha+it)| - (\alpha-1)M\ln^2 t \geq \frac{B(\alpha-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}} - (\alpha-1)M\ln^2 t$$

Το παραπάνω ισχύει αν $1 \leq \sigma \leq \alpha$ κι απ' τη σχέση (4.57) ισχύει επίσης αν $\alpha \leq \sigma \leq 2$ καθώς $(\sigma-1)^{3/4} \geq (\alpha-1)^{3/4}$. Μ' άλλα λόγια, αν $1 \leq \sigma \leq 2$ και $t \geq e$ έχουμε την ανισότητα

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq \frac{B(\alpha-1)^{3/4}}{(\ln t)^{1/4}} - (\alpha-1)M\ln^2 t$$

για κάθε α που ικανοποιεί την $1 < \alpha < 2$. Ας θεωρήσουμε, τώρα, ότι το α εξαρτάται απ' το t κι ας διαλέξουμε ένα α τέτοιο ώστε ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος να είναι διπλάσιος του δεύτερου. Αυτό συμβαίνει, όταν:

$$\alpha = 1 + \left(\frac{B}{2M}\right)\frac{1}{(\ln t)^9}$$

Προφανώς $\alpha > 1$ κι επίσης $\alpha < 2$ αν $t \geq t_0$ για κάποιο t_0. Άρα, αν $t \geq t_0$ $1 \leq \sigma \leq 2$, έχουμε:

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq (\alpha-1)M\ln^2 t = \frac{C}{(\ln t)^7}$$

Η ανισότητα ισχύει ακόμη και για διαφορετικό C αν $e \leq t \leq t_0$. Αυτό αποδεικνύει ότι $|\zeta(s)| \geq C\log^{-7} t$, για κάθε $\sigma \geq 1$, $\;t \geq e$ που μας δίνει ένα άνω όριο για το $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$. Για να πάρουμε την ανισότητα για το $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$, εφαρμόζουμε το θεώρημα 4.7. Η μόνη διαφορά που θα συναντήσουμε είναι η ύπαρξη ενός επιπλέον όρου $\log^2 t$. □

4.8 Ολοκλήρωση της απόδειξης του θεωρήματος των πρώτων αριθμών.

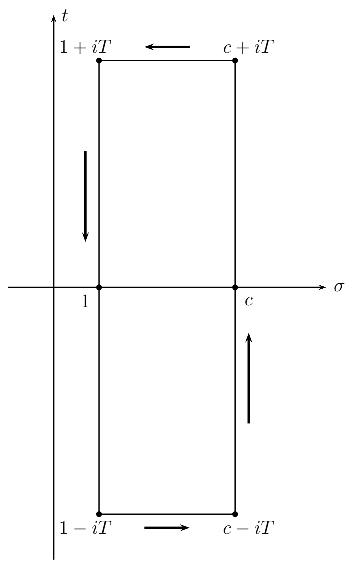
Στο σημείο αυτό είμαστε σχεδόν έτοιμοι να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος των πρώτων αριθμών.

Θεώρημα 4.11. *Η συνάρτηση*

$$F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

είναι αναλυτική στο $s-1$.

Απόδειξη. Απ' το λήμμα (Β'.3) η $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ έχει έναν πόλο πρώτης τάξης στο 1 με υπόλοιπο 1, όπως κ' η $\frac{1}{s-1}$. Επομένως η διαφορά τους είναι αναλυτική στο $s=1$. □



Εικόνα 4.4: Το ορθογώνιο ολοκλήρωσης

Θεώρημα 4.12. *Για $x \geq 1$ έχουμε:*

$$\frac{\psi(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(1+it)e^{it\ln x}dt$$

όπου τ' ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(1+it)|dt$ συγκλίνει. Ισχύει:

$$\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}. \tag{4.58}$$

Συνεπώς:

$$\psi(x) \sim x, \quad \textit{καθώς } x \to \infty.$$

Απόδειξη. Στο θεώρημα (4.6) αποδείξαμε ότι αν $c > 1$ και $x \geq 1$, ισχύει:

$$\frac{\psi(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+\infty} x^{s-1}h(s)ds$$

όπου

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right)$$

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι ν' αποδείξουμε ότι μπορούμε να μετακινήσουμε το μονοπάτι ολοκλήρωσης στη γραμμή $\sigma = 1$. Για να το κάνουμε αυτό εφαρμόζουμε το θεώρημα Cauchy Β'.1 στο ορθογώνιο R που φαίνεται στο σχήμα 4.4. Τ' ολοκλήρωμα του $x^{s-1}h(s)$ γύρω απ' το R είναι 0, καθώς η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι αναλυτική στο εσωτερικό του R. Τώρα, δείχνουμε ότι τα ολοκληρώματα κατά μήκος των οριζόντιων τμημάτων τείνουν στο 0 καθώς $T \to \infty$. Καθώς η ολοκληρωτέα ποσότητα έχει την ίδια απόλυτη τιμή στα συζυγή σημεία, αρκεί να μελετήσουμε μόνο το άνω τμήμα $t \in [0, T]$. Σ' αυτό το τμήμα ισχύουν οι προσεγγίσεις:

$$\left|\frac{1}{s(s+1)}\right| \leq \frac{1}{T^2} \quad \text{και} \quad \left|\frac{1}{s(s+1)(s-1)}\right| \leq \frac{1}{T^3} \leq \frac{1}{T^2}.$$

Επίσης, υπάρχει μια σταθερά M τέτοια ώστε $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq M \ln^2 t$ αν $\sigma \geq 1$ και $t \geq e$. Άρα, αν $T \geq e$, έχουμε:

$$|h(s)| \leq \frac{M \ln^2 T}{T^2}$$

έτσι ώστε:

$$\left|\int_1^e x^{s-1} h(s) ds\right| \leq \int_1^e x^{c-1} \frac{M \ln^9 T}{T^2} d\sigma = M x^{c-1} \frac{\ln^9 T}{T^2}(c-1)$$

Επομένως, τα ολοκληρώματα κατά μήκος των οριζόντιων τμημάτων τείνουν στο 0 καθώς το T τείνει στο άπειρο. Έτσι, εχόυμε:

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1} h(s) ds = \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1} h(s) ds$$

Στη γραμμή $\sigma = 1$ γράφουμε $s = 1 + it$ για να λάβουμε τη σχέση:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1} h(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(1+it) e^{it \log x} dt$$

Στο σημείο αυτό, παρατηρούμε ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(1+it)| dt = \int_{-\infty}^{-e} |h(1+it)| dt + \int_{-e}^{+e} |h(1+it)| dt + \int_{+e}^{+\infty} |h(1+it)| dt.$$

Στο τρίτο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$|h(1+it)| \leq \frac{M \log^9 t}{t^2}$$

άρα, το $\int_e^\infty |h(1+it)| dt$ συγκλίνει. Με παρόμοιο τρόπο συγκλίνει το πρώτο ολοκλήρωμα. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα Riemann-Lebesgue για να λάβουμε:

$$\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2} \tag{4.59}$$

Απ' το θεώρημα 4.3 αυτό συνεπάγεται $\psi(x) \sim x$, καθώς $x \to \infty$. Μ' αυτό έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη του θεωρήματος των πρώτων αριθμών. $\square$

Παράρτημα Α′

Ο συμβολισμός Landau

Θ' αναφερθούμε σύντομα στον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες των συμβολισμών $(O, o, \sim)$, που εισήχθησαν για πρώτη φορά απ' τον Bachmann στην Ανάλυση κι έχουν ως τώρα βοηθήσει αρκετά στη συμπαγή γραφή ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων.

Α′.1 Το μεγάλο Ο του Landau

Έστω a ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός (ακόμη και τα $\pm\infty$). Έστω $f(x)$ και $g(x)$ δυο συναρτήσεις που ορίζονται σε κάποια γειτονιά του a και θεωρούμε ότι η $g(x)$ είναι θετική συνάρτηση. Λέμε ότι η $f(x)$ είναι **το μεγάλο Ο της** $g(x)$ και γράφουμε:

$$f(x) = O(g(x)) \tag{Α′.1}$$

αν υπάρχει μια σταθερά $K > 0$ και μια γειτονιά $N(a)$ του a τέτοια ώστε

$$|f(x)| \leq Kg(x), \quad \forall x \in N(a)$$

Συγκεκριμένα, ο συμβολισμός

$$f(x) = O(1)$$

σημαίνει ότι η $f(x)$ είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή σε κατάλληλη γειτονιά του a[1].

Παραδείγματα:

i. Έστω ότι $a = 0$. Τότε

$$\sin x = O(x), \quad x^3 = O(x^2)$$

ii. Έστω ότι $a = \infty$. Τότε

$$\sin x = O(1), \quad x = O(x^2)$$

[1] Με τον όρο γειτονιά του a εννοούμε κάθε σύνολο $N(a)$ που περιέχει ένα ανοικτό διάστημα $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. Με τον όρο γειτονιά του $+\infty$ εννοούμε κάθε σύνολο $N(+\infty)$ που περιέχει ένα διάστημα $(M, +\infty)$. Με τον όρο γειτονιά του $-\infty$ εννοούμε κάθε σύνολο $N(-\infty)$ που περιέχει ένα διάστημα $(-\infty, -m)$.

iii Έστω ότι $a = 1$. Τότε $\ln(x) = O(x)$, καθώς:

$$\ln(x) = \ln(x + 1 - 1) = \ln(1 + (x - 1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}(x - 1)^n, \quad \forall x : |x| < 1.$$

iv Έστω ότι $a = +\infty$. Τότε $\frac{\ln(x)}{x} = O(1)$.

Α΄.1.1 Ιδιότητες

i. Αν $f_i(x) = O(g_i(x)), \quad i = (1, 2)$, τότε:

$$f_1(x) + f_2(x) = O(g_1(x) + g_2(x))$$

$$f_1(x)f_2(x) = O(g_1(x)g_2(x))$$

ii. Αν c είναι μια σταθερά, και:

$$f(x) = O(g(x))$$

τότε,

$$cf(x) = O(g(x))$$

Απόδειξη. i.

$$|f_1(x) + f_2(x)| \le |f_1(x)| + |f_2(x)| \le Kg_1(x) + \Lambda g_2(x)$$

ii.

$$|cf(x)| \le k \cdot c \cdot g(x) \le Kg(x)$$

□

Η παράσταση αυτή χρησιμοποιείται συνήθως με συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Επί παραδείγματι, συχνά συναντάμε μια συνάρτηση $f(s)$ μιγαδικής μεταβλητής $s = \sigma + iy$ και γράφουμε

$$f(s) = O(g(y)), \quad (y \to \infty)$$

Η σταθερά Κ, της οποίας η ύπαρξη συνεπάγεται απ᾽ το Ο, εξαρτάται απ᾽ το σ κ᾽ η εξάρτηση μπορεί να ᾽ναι τέτοια, ώστε το $K = K(\sigma)$ να είναι μη φραγμένο σε κάποια γειτονιά. **Μερικές φορές, η εξάρτηση απ᾽ το K σε δευτερεύουσες μεταβλητές ή παραμέτρους είναι σαφώς διατυπωμένη κι άλλες φορές συνεπάγεται απ᾽ τα συμφραζόμενα.**

Η παράσταση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης για ακολουθίες, που μπορεί να είναι ακολουθίες είτε συναρτήσεων, είτε πραγματικών ή μιγαδικών μεταβλητών. Για παράδειγμα, η σχέση:

$$f(n) = O(g(n))$$

σημαίνει ότι υπάρχει μια σταθερά K κι ένας ακέραιος N_0, τέτοια ώστε, αν $n > N_0$:

$$|f(n)| \leq Kg(n)$$

Για να μπορούμε να έχουμε μεγαλύτερη ελαστικότητα και να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό O του Landau πιο αποτελεσματικά, μας βολεύει να ορίσουμε το ίδιο το $O(g(x))$. Με το $O(g(x))$ θα εννοούμε το σύνολο των συναρτήσεων $C(g)$, που νά 'ναι τέτοιες ώστε το $f \in C(g)$ αν και μόνο αν:

$$f(x) = O(g(x))$$

Επομένως, συγκεκριμένα το $O(1)$ αποτελεί το σύνολο των φραγμένων συναρτήσεων. Αν

$$C(g) \subset C(h)$$

γράφουμε

$$O(g) = O(h)$$

Μπορούμε αμέσως ν' αντιληφθούμε τη μαθηματική ελευθερία με την οποία χρησιμοποιείται το σύμβολο της ισότητας για μια σχέση η οποία είναι ασύμμετρη. Ωστόσο, το σημείο αυτό δεν δημιουργεί σύγχυση σχεδόν ποτέ. Ορίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο δυο O. Με

$$O(g) + O(h)$$

εννοούμε το σύνολο των συναρτήσεων που αποτελούνται από άθροισμα $f_1 + f_2$, $f_1, \in C(g)$, $f_2 \in C(h)$. Με την ίδια ακριβώς λογική ορίζεται και το γινόμενο $O(g)O(h)$. Εκτός από πεπερασμένα αθροίσματα, μπορούμε συχνά να έχουμε κι άπειρο άθροισμα O.

Παραδείγματα:

(i) Αν $f(x) = x\sin(1/x)$ τότε, καθώς $x \to \infty$

$$f(x) = O(x)O(1) = O(x) = O(x\log x)$$

Εδώ θα πρέπει να προσέξουμε ότι ενώ ισχύει $O(x) = O(x\log x)$, δεν ισχύει το αντίθετο, δηλαδή $O(x\log x) \neq O(x)$.

(ii) Αν $f(x) = x\cos\left(e^{-\sqrt{\log x}}\right) + x\sin x \log^{-9} x$, τότε, καθώς $x \to \infty$

$$f(x) = O(xe^{-\sqrt{\log x}}) + O(x\log^{-9} x) = O(x\log^{-9} x) = O(x)$$

(iii) Αν $s = \sigma + iy$ και

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^s}$$

τότε, καθώς $y \to \infty$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} O(n^{-\sigma}) = O\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}\right) = O(1)$$

αν $\sigma > 1$. Ωστόσο, η σταθερά που συνεπάγεται απ' το O εξαρτάται απ' το σ, καθώς:

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin n}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{\sigma - 1} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\sigma} dt, \ \ \forall \sigma > 1$$

Α΄.2 Το μικρό ο του Landau

Έστω ότι οι $f(x)$ και $g(x)$ ορίζονται σε μια γειτονιά του a κι ότι η $g(x)$ είναι θετική συνάρτηση. Τότε λέμε ότι το $f(x)$ είναι **το μικρό** o **του** $g(x)$ και γράφουμε:

$$f(x) = o(g(x))$$

αν

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι αν

$$f_i = o(g_i), \ \ (i = 1, 2)$$

τότε

$$f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$$

Όπως και το μεγάλο Ο, ορίζουμε την $o(g)$ σαν το σύνολο συναρτήσεων $D(g)$ με την ιδιότητα ότι $f \in D$ αν και μόνο αν $f = o(g)$. Άρα, μπορούμε να ορίσουμε τα $o(g) + o(h)$ και $o(g)o(h)$. Αν $D(g) \subset D(h)$, γράφουμε:

$$o(g) = o(h)$$

Αν $C(g)$ είναι το σύνολο συναρτήσεων $O(g)$ κι ισχύει $C(g) \subset D(h)$, τότε:

$$O(g) = o(h)$$

Επομένως,

$$f = g_1 + g_2 = O(g_3) + O(g_4) = O(g_5) = o(g_6)$$

και

$$f = O(g_1) + O(g_2) = o(g_3) + o(g_4) = o(g_5)$$

Α′.3 Ασυμπτωτική σχέση

Τέλος, ορίζουμε το $\sim$. Αν f και g δυο συνάρτήσεις που ορίζονται σε μια γειτονιά του a, λέμε ότι η f είναι ασυμπτωτική στη g και γράφουμε

$$f \sim g$$

αν

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g} = 1$$

Ο ορισμός εφαρμόζεται σε συναρτήσεις είτε πραγματικών είτε μιγαδικών μεταβλητών, καθώς επίσης και σε ακολουθίες. Η σχέση είναι συμμετρική και μεταβατική.

Παράρτημα Β΄

Χρήσιμα αποτελέσματα της Μιγαδικής Ανάλυσης

Θεώρημα του Cauchy Β΄.1. *Έστωσαν μία ολόμορφη συνάρτηση f ορισμένη στο ανοικτό και συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Τότε για κάθε κλειστή καμπύλη Jordan γ εντός του Ω ισχύει:*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Απόδειξη. Συμβουλευτείτε το [15, σελ. 452]. □

Ορισμός Β΄.1. Έστω μια μερόμορφη συνάρτηση f με μεμονωμένη ανωμαλία z_0. Θεωρούμε το ανάπτυγμα Laurent της f γύρω απ' το z_0:

$$f(z) = \sum_{n=-2}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n + a_{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Τότε η ποσότητα a_{-1} ονομάζεται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο σημείο z_0 και συμβολίζεται $Res(f, z_0)$.

Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων Β΄.2. *Έστω μια μερόμορφη συνάρτηση f με μεμονωμένες ανωμαλίες $(z_k)_{k=1}^m$ στο ανοικτό και συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Τότε για κάθε κλειστή καμπύλη Jordan εντός του Ω που περιβάλλει τα $(z_k)_{k=1}^m$ ισχύει:*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f, z_k).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι απ' τις εμπλεκόμενες συνάμεις του $z - z_k$ στο εκάστοτε ανάπτυγμα Laurent η μόνη που δεν έχει μονότιμη αντιπαράγωγο είναι η πρώτη αρνητική δύναμη. Η αντιπαράγωγός της είναι ο λογάριθμος. Συνεπώς η ολοκληρωσή της πάνε σ' έναν κλειστό δρόμο που περιελίσσεται μια φορά γύρω απ' την ανωμαλία θ' αυξήσει το όρισμα του λογαρίθμου κατά 2π. Για μια ακριβή απόδειξη συμβουλευθείτε το [15, σελ. 675]. □

Ορισμός Β΄.2. Έστω μια μερόμορφη συνάρτηση f με μεμονωμένο σημείο ανωμαλίας z_0. Το σημείο z_0 κατατάσσεται ανάλογα με τη φύση του αναπτύγματός του κατά Laurent.

- Όταν όλοι οι αρνητικοί όροι του αναπτύγματος έχουν μηδενικούς συντελεστές, τότε η ανωμαλία ονομάζεται άρσιμος και με μια αλλαγή τιμής της f επί της ανωμαλίας καθιστά την f ολόμορφη.
- Όταν όλοι οι αρνητικοί όροι του αναπτύγματος Laurent από $-k+1$ και πέρα έχουν μηδενικούς συντελεστές, τότε η ανωμαλία ονομάζεται πόλος k τάξεως.
- Όταν υπάρχουν οσοδήποτε μικροί αρνητικοί όροι με μη μηδενικό συντελεστή, τότε η ανωμαλία ονομάζεται ουσιώδης.

Λήμμα Β΄.3. *Αν η $f(s)$ έχει ένα πόλο τάξης k στο $s = a$, τότε το πηλίκο $\frac{f'(s)}{f(s)}$ έχει έναν πρώτης τάξης πόλο στο $s = a$ με υπόλοιπο $-k$.*

Απόδειξη. Έχουμε $f(s) = g(s)/(s-a)^k$, όπου η g είναι αναλυτική στο a και $g(a) \neq 0$. Άρα, για όλα τα s σε μια γειτονιά του a έχουμε:

$$f'(s) = \frac{g'(s)}{(s-a)^k} - \frac{kg(s)}{(s-a)^{k+1}} = \frac{g(s)}{(s-a)^k}\left\{\frac{-k}{s-a} + \frac{g'(s)}{g(s)}\right\}$$

Άρα:

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{-k}{s-a} + \frac{g'(s)}{g(s)}.$$

Αυτό αποδεικνύει το λήμμα καθώς η $\frac{g'(s)}{g(s)}$ είναι αναλυτική στο a. □

Θεώρημα Β΄.4. *Θεωρούμε:*

1. *f μερόμορφη συνάρτηση με απλούς πόλους στα σημεία $z_n = a + n, \ldots n \in \mathbb{Z}$ με $Res(f, z_n) = \beta_n$.*
2. *g αναλυτική με πιθανώς ορισμένες μεμονωμένες ανωμαλίες τέτοια ώστε:*

$$\lim_{z\to\infty} zg(z) = 0.$$

3. *Ένα ορθογώνιο R_m που το διασχίζουμε με τη θετική φορά με ακμές τα:*

$$(b+m,-m),(b+m,m),(-b-m,-m),(-b-m,m), \;\; b \geq 0, \;\; b \neq \Re a, \;\; b \in \mathbb{N}$$

4. *$|f(z)| < K \in \mathbb{R}^+, \;\; \forall z \in \gamma_m$, καθώς $m \to +\infty$.*
5. *$S_m = \sum_{r\rho} Res(fg, z_\rho)$, όπου το άθροισμα νοείται επί των μεμονομέων ανωμαλιών της g που περικλείονται στην R_m*

Τότε:

$$S = \lim_{m \to +\infty} S_m = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n g(a+n).$$

Απόδειξη. Αναπαράγουμε απ' το [15, σελ. 733].

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Β'.2 στην fg για το R_m. Τότε:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{R_m} f(z)g(z)dz = \sum \beta_n g(a+n) + S_m.$$

Το πρώτο άθροισμα εκτείνεται μόνο πάνω στους πόλους που περικλείονται απ' το R_m. Λόγω της 2ης υπόθεσης υπάρχει ένά $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ $|zg(z)| < \epsilon$. Επίσης για κάθε $z \in R_m$ ισχύει $|z| \geq m$. Ακόμα $L(R_m) = 8m + 2b$. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \left| \int_{R_m} f(z)g(z)dz \right| &= \left| \int_{R_m} f(z)zg(z)\frac{dz}{z} \right| \leq \int_{R_m} |f(z)||zg(z)|\frac{|dz|}{|z|} \\ &< K \cdot \epsilon \cdot \frac{8m+2b}{m} = K\epsilon \left(8 + 2\frac{b}{m} \right) < 12K\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς λαμβάνοντας τ' όριο $m \to +\infty$ καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Αρχή του ταυτοτισμού Β'.5. *Έστωσαν οι ολόμορφες συναρτήσεις f, g σε ένα ανοικτό συνεκτικό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.*

1 *Είναι $f = g$ στον τόπο Ω αν και μόνο αν το σύνολο $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ έχει οριακό σημείο εντός του Ω.*

2 *Αν $f = g$ σε ένα ανοικτό σύνολο ή σ' ένα ευθύγραμμο τμήμα του Ω, τότε $f = g$ στο Ω.*

Απόδειξη. Συμβουλευτείτε το [26, σελ. 228 - 229] και για εφαρμογές της Αρχής του Ταυτοτισμού την αντίστοιχη ενότητα. □

Ορισμός Β'.3. Έστωσαν ολόμορφες συναρτήσεις f, g ορισμένες στα ανοικτά και συνεκτικά σύνολα Ω_f, Ω_g αντίστοιχα. Αν συμπίπτουν στο σύνολο $\Omega_f \cap \Omega_g$, τότε η f ονομάζεται αναλυτική συνέχιση της g στο Ω_f και η g αναλυτική συνέχιση της f στο Ω_g.

Παρατήρηση Β'.1. Λόγω της Αρχής του Ταυτοτισμού, αν δυο συναρτήσεις είναι αναλυτικές συνεχίσεις μιας άλλης στο ίδιο ανοικτό σύνολο και το συνόλο που ταυτίζονται με την αρχική συνάρτηση περιέχει ένα σημείο συσσωρεύσεως, τότε οι δυο συναρτήσεις είναι ίσες. Για περισσότερες λεπτομέρειες επί του ζητήματος μπορείτε να συμβουλευθείτε το [28, σελ. 30 - 43].

Παράρτημα Γ′

Τα ολοκληρώματα του Euler. Οι συναρτήσεις Γαμμα και Βήτα.

Ορισμός Γ′.1. Τα ολοκληρώματα

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{Γ'.1}$$

και

$$B(z, \zeta) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1} dt \tag{Γ'.2}$$

όπου το t είναι μια πραγματική μεταβλητή, $t^{z-1} = e^{z-1}\ln t,\ (1-t)^{\zeta-1} = e^{(\zeta-1)\ln(1-t)}$ μελετήθηκαν απ' τον Euler για z και ζ πραγματικά. Το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει για $\Re z > 0$ κι ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση $\Gamma(z)$ σ' αυτό το ημιεπίπεδο, που ονομάζεται συνάρτηση Γάμμα. Το δεύτερο ολοκλήρωμα συγκλίνει για $\Re z > 0$ και $\Re\zeta > 0$ κι ορίζει πάνω στο καρτεσιανό γινόμενο των δυο αυτών ημιεπιπέδων μια συνάρτηση $B(z, \zeta)$ αναλυτική για καθεμιά απ' τις δυο μεταβλητές, κι ονομάζεται συνάρτηση Βήτα. Υπάρχει μια στενή σχέση μεταξύ των δυο αυτών συναρτήσεων, που θα συζητήσουμε στη συνέχεια. Να σημειωθεί πως η συνάρτηση $\Gamma(z)$ είναι μια μετασχηματισμένη κατά Mellin:

$$\Gamma(z) = \mathcal{M}[e^{-t}; z].$$

Για περαιτέρω λεπτομέρειες περί της σχέσης της Γάμμα με το μετασχηματισμό Mellin συμβουλευθείτε το παράρτημα Ε′.

Θεώρημα Γ′.1. *Το ολοκλήρωμα*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{Γ'.3}$$

συγκλίνει απόλυτα στο $\Re z > 0$. Σ' αυτό το ημιεπίπεδο, η $\Gamma(z)$ είναι αναλυτική, και

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \ln t dt \tag{Γ'.4}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = P(z) + Q(z) \tag{Γ.5}$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $\tau = 1/t$. Συνεπώς, έχουμε:

$$P(z) = \int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{\tau}} \tau^{-z-1} d\tau \tag{Γ.6}$$

Τ' ολοκλήρωμα αποκλίνει για $\Re z \leq 0$.

Έστω ότι το z κείται σ' ένα συμπαγές σύνολο K[1] που περιέχεται στο ημιεπίπεδο $\Re z > 0$. Τότε, υπάρχει μια σταθερά $\delta > 0$, τέτοια ώστε $\Re z > \delta$, για κάθε $z \in K$, ούτως ώστε:

$$\left| e^{-\frac{1}{\tau}} \tau^{-z-1} \right| \leq \tau^{-\delta-1} \tag{Γ.7}$$

για $\tau \geq 1$. Εφ' όσον το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{\delta+1}}$ συγκλίνει, το ολοκλήρωμα (Γ.6) συγκλίνει απόλυτα [2]κι ομοιόμορφα[3] για $z \in K$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε τ' ολοκλήρωμα:

$$Q(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \tag{Γ.8}$$

και θεωρούμε ότι το z βρίσκεται εντός ενός τυχαίου συμπαγούς συνόλου $K' \subset \mathbb{C}$. Τότε, θα υπάρχει μια σταθερά α, τέτοια ώστε $\Re z \leq \alpha$ για κάθε $z \in K'$, ώστε:

$$\left| t^{z-1} \right| = t^{\Re z - 1} \leq t^{\alpha-1} \tag{Γ.9}$$

για $t \geq 1$. Εφ' όσον $e^{-t/2} t^{\alpha-1} \to 0$ καθώς $t \to \infty$, θα υπάρχει μια θετική σταθερά β, που εξαρτάται απ' το α τέτοια ώστε $t^{\alpha-1} \leq \beta e^{-t/2}$ όταν $t \geq 1$. Επομένως,

$$\left| e^{-t} t^{z-1} \right| \leq \beta e^{-t/2} \tag{Γ.10}$$

και καθώς το $\int_1^{\infty} \beta e^{-t/2} dt$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι τ' ολοκλήρωμα Γ.6 συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα για $z \in K'$.

Τώρα, κάθε z στο $\Re z > 0$ μπορεί να συμπεριληφθεί σ' ένα μικρό κλειστό δίσκο (συμπαγές σύνολο) που περιέχεται στο ημιεπίπεδο αυτό. Επομένως, τ' ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \tag{Γ.11}$$

---

[1]Υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη ότι **συμπαγές** ονομάζεται ένα σύνολο A στο οποίο για κάθε κάθε κάλυψή του υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη δηλαδή τέτοια ώστε $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_j$. Για περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί κανείς ν' ανατρέξει στο [15, σελ.106-115].

[2]Υπενθυμίζουμε ότι ένα ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα όταν συγκλίνει το ολοκλήρωμα της απόλυτης τιμής της ολοκληρωτέας συνάρτησης, δηλαδή :$\int_A |f(x)| dx < \infty$.

[3]Παραπέμπουμε στο [15, σελ. 197]

συγκλίνει απόλυτα για κάθε z τέτοιο ώστε $\Re z > 0$, επομένως ορίζει πάνω στην περιοχή αυτή μια συνάρτηση του z που καλείται συνάρτηση Γάμμα. Η συνάρτηση $P(z)$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, δηλαδή η $P(z)$ είναι μια ακέραια συνάρτηση, καθώς είναι της μορφής:

$$F(z) = \int_1^{+\infty} f(z,t)dt,$$

όπου η f είναι αναλυτική κι ως προς τα δυο της ορίσματα[4]. Άρα, η:

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z) \tag{Γ'.12}$$

είναι αναλυτική στο $\Re z > 0$ και, σύμφωνα με το ίδιο θεώρημα, έχουμε

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \ln t dt \tag{Γ'.13}$$

□

Πόρισμα Γ'.1. *Η συνάρτηση Γάμμα μπορεί ν' αναπαρασταθεί στη μορφή*

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + Q(z), \quad \Re z > 0 \tag{Γ'.14}$$

*Η σειρά στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης συγκλίνει για κάθε $z \neq 0, -1, -2\cdots$ και καθώς το $Q(z)$ είναι μια ακέραια συνάρτηση, η αναπαράσταση (Γ'.14) μπόρει να χρησιμοποιηθεί για να επεκτείνουμε αναλυτικά την $\Gamma(z)$ σ' ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, εξαιρώντας τα σημεία $0, -1, -2\cdots$. Η σχέση (Γ'.14) καλείται **Ανάλυση της Γ-συνάρτησης του Prym**.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n \right] t^{z-1} dt \tag{Γ'.15}$$

όπου $e^{-t} = \sum_{n\geq 0} \frac{-t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{-1^n t^n}{n!}$ είναι το ανάπτυγμα κατά Taylor της εκθετικής συνάρτησης. Εφ' όσον η εκθετική συνάρτηση είναι ακέραια σ' ολόκληρο το $\mathbb{C}$, η σειρά Taylor θα συγκλίνει ομοιόμορφα σ' όλο το $\mathbb{C}$. Επιπλέον, η σειρά $\sum_{n\geq 0} \frac{-1^n t^n}{n!}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$. Επομένως, μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη σειρά κατά όρους και να πάρουμε [5]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} \tag{Γ'.16}$$

Μ' αντικατάσταση της (Γ'.16) στη (Γ'.5) παίρνουμε την (Γ'.14).

[4] Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [15, σελ. 527]

[5] Βλ.[15, σελ.521]

Έστω

$$G = \bigcap_{n=0}^{\infty} z : |z+n| \geq \delta \tag{Γ'.17}$$

όπου $\delta > 0$ τυχαίος αριθμός. Για $z \in G$ έχουμε:

$$\left| \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} \right| \leq \frac{1}{n!\delta} \tag{Γ'.18}$$

και καθώς η $\sum_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{n!\delta}$ συγκλίνει, η σειρά στο δεξί μέλος της (Γ'.14) συγκλίνει απόλυτα κι ομοιόμορφα στο G. Εξ' αιτίας της τυχαιότητας του δ, η συνάρτηση

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + Q(z) \tag{Γ'.19}$$

είν' αναλυτική στο $\mathbb{C}$, με τα σημεία $0, -1, -2 \ldots$ να διαγράφονται. Εφ' όσον $\Gamma(z) = f(z)$ για $\Re z$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (Γ'.14) για να επεκτείνουμε τον ορισμό της $\Gamma(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο, εκτός απ' τα σημεία $0, -1, -2 \cdots$. Μια τέτοια αναπαράσταση δείχνει ότι τα σημεία $0, -1, -2 \cdots$ είναι πόλοι της επεκτεταμένης $\Gamma(z)$. Αν το θεωρήσουμε αυτό δεδομένο, τότε η $\Gamma(z)$ είναι μερομορφική[6] στο $\mathbb{C}$ □

Θεώρημα Γ'.2. *Το ολοκλήρωμα*

$$B(z,\zeta) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1} dt \tag{Γ'.20}$$

συγκλίνει απόλυτα για $\Re\zeta > 0$ και $\Re z > 0$. Η συνάρτηση $B(z,\zeta)$ ειν' αναλυτική ως προς τα ορίσματα ζ, z όταν $\Re z > 0$ και $\Re\zeta > 0$.

Απόδειξη. Το δοθέν ολοκλήρωμα, με την αντικατάσταση $t = r/(1+\tau)$ μπορεί να πάρει τη μορφή

$$B(z,\zeta) = \int_0^{\infty} \frac{\tau^{z-1}}{(1+\tau)^{z+\zeta}} d\tau = \int_0^1 \frac{\tau^{z-1}}{(1+\tau)^{z+\zeta}} d\tau + \int_1^{\infty} \frac{\tau^{z-1}}{(1+\tau)^{z+\zeta}} d\tau \tag{Γ'.21}$$

το οποίο είν' ευκολότερο να διαχειριστούμε. Για το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (Γ'.21) έχουμε για $0 < \tau \leq 1$ και $\Re z > 0, \ \ \Re\zeta > 0$:

$$\left| \frac{\tau^{z-1}}{(1+\tau)^{z+\zeta}} \right| = \frac{\tau^{\Re z-1}}{(1+\tau)^{\Re z+\Re\zeta}} < \tau^{\Re z-1} \tag{Γ'.22}$$

[6] Να υπενθυμίσουμε ότι μερομορφική συνάρτηση πάνω σ' ένα ανοιχτό υποσύνολο D του μιγαδικού επιπέδου είναι μια συνάρτηση που είναι ολόμορφη στο D παρεκτός ενός συνόλου μεμονομένων σημείων, που είναι πόλοι της συνάρτησης. Για περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί κανείς ν' ανατρέξει στα [15, σελ. 664], [2, σελ. 128]

Καθώς ισχύει $\int_0^1 \tau^{\Re z-1}d\tau = 1/\Re z$ (αν $\Re z > 0$), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα δεδομένου ότι $\Re z > 0, \ \ \Re\zeta > 0$. Όσο για το δεύτερο ολοκλήρωμα, έχουμε, για $\tau \geq 1$ και $\Re z > 0, \ \ \Re\zeta > 0$:

$$\left|\frac{\tau^{z-1}}{(1+\tau)^{z+\zeta}}\right| = \frac{\tau^{\Re z-1}}{(1+\tau)^{\Re z+\Re\zeta}} < \frac{\tau^{\Re z-1}}{\tau^{\Re z+\Re\zeta}} = \frac{1}{\tau^{\Re z+\Re\zeta}} \tag{Γ΄.23}$$

Όμως, ισχύει ότι το $\int_1^\infty d\tau/\tau^{\Re\zeta+1} = 1/\Re\zeta$ αν $\Re\zeta > 0$. Άρα το δεύτερο ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα, ξανά με την προυπόθεση ότι $\Re z > 0, \ \ \Re\zeta > 0$. Είναι ξεκάθαρο πως το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα για $\Re z \geq \delta, \ \ \Re\zeta > 0$, ενώ το δεύτερο συγκλίνει ομοιόμορφα για $\Re z, \Re\zeta \geq \delta, \ \ (\delta > 0)$. Επομένως, για καθε σταθερό ζ με $\Re\zeta > 0$, η $B(z,\zeta)$ ειν' αναλυτική συνάρτηση του z στο $\Re z > 0$ κι όμοια, για κάθε σταθερό z, με $\Re z > 0$ η $B(z,\zeta)$ είν' αναλυτική συνάρτηση του ζ στο $\Re\zeta > 0$.[7] □

Θεώρημα Γ΄.3. *Η συνάρτηση Γάμμα έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
3. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
4. $\Gamma(z+n) = z(z+1)\dots(z+n-1)\Gamma(z), \ \ (n > 1 \in \mathbb{Z})$
5. $\Gamma(n+1) = n!$
6. *Η* $\Gamma(x), \ \ x > 0$ *είναι κυρτή*
7. $\lim_{z\to -n}\Gamma(z) = \infty, \ \ (n \geq 0 \in \mathbb{Z})$
8. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$
9. $\int_0^\infty e^{-pt}t^{z-1}dt = \Gamma(z)/p^z, \ \ \Re p > 0, \ \ \Re z > 0$
10. $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$
11. $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \ \ (z \neq 0, -1, -2\cdots)$
12. $n! = (n/e)^n\sqrt{2\pi n}e^{\mu(n)}, \ \ \lim_{n\to\infty}\mu(n) = 0$

Απόδειξη. 1. $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$

2. Έχουμε:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t}t^{1/2}dt$$

και θέτοντας $t = x^2$ έχουμε:

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

[7] Παραπέμπουμε στο θεώρημα 8.4, +[15, σελ. 526-527]

3. Θεωρώντας ότι $\Re z > 0$, με ολοκλήρωση κατά μέλη:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^z dt = -t^z e^{-t} + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$
$$= z\Gamma(z) \qquad (\Gamma'.24)$$

Η σχέση (Γ'.24) ισχύει επίσης για κάθε z εκτός από $0, -1, -2\cdots$, καθώς η συνάρτηση $g(z) = \Gamma(z+1) - z\Gamma(z)$ ειν' αναλυτική στο $D = \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \cdots\}$ και $g(z) = 0$ για $\Re z > 0$. Επομένως, βάσει της Αρχής του Ταυτοτισμού Β'.5 $g(z) = 0$ για κάθε $z \in D$ ή

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Η σχέση (Γ'.24) καλείται **συναρτησιακή εξίσωση της συνάρτησης Γάμμα**. Δεν χαρακτηρίζει τη συνάρτηση Γάμμα παρά μόνο αν τεθούν κάποιες επιπλέον συνθήκες. Η συναρτησιακή εξίσωση παίζει σημαντικό ρόλο σε υπολογισμούς με τη συνάρτηση Γάμμα. Σημαίνει ότι αν είναι γνωστές οι τιμές της $\Gamma(z)$ σε κάποια κάθετη λωρίδα $n-1 < \Re z \leq n, \ \ (n = 1, 2, \cdots)$ μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις τιμές της συνάρτησης σε κάποια άλλη λωρίδα.

4. Αν εφαρμόσουμε την (Γ'.24) n φορές βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\Gamma(z+n) &= (z+n-1)\Gamma(z+n-1) = \\ &= (z+n-1)(z+n-2)\Gamma(z+n-2) = \\ &\vdots \\ &= (z+n-1)(z+n-2)\ldots(z+1)z\Gamma(z)\end{aligned} \qquad (\Gamma'.25)$$

Αν γράψουμε τη σχέση στη μορφή

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}$$

μπορούμε να ορίσουμε τη $\Gamma(z)$ στη λωρίδα $-n < \Re z \leq 1$.

5. Θέτοντας $z = 1$ στη σχέση (Γ'.25) παίρνουμε

$$\Gamma(n+1) = n(n+1)\cdots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) = n! \qquad (\Gamma'.26)$$

Επομένως, η $\Gamma(z)$ δεν είναι τίποτ' άλλο παρά μια γενίκευση της συναρτησιακής εξίσωσης των φυσικών αριθμών. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα που οδήγησε τον Euler στον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα ήταν η γενίκευση του $n!$ σε πραγματικές τιμές. Θα πρέπει ν' αναφερθεί ότι αυτό το πρόβλημα δεν επιδέχεται μοναδική λύση, καθώς αν η $g(z)$ είναι μια μερομορφική περιοδική συνάρτηση περιόδου 1, με $g(1) = 1$, κι ορίσουμε $f(z) = g(z)\Gamma(z)$, τότε:

$$f(z+n) = g(z+n)\Gamma(z+n) = g(z)\Gamma(z+n)$$

και θέτοντας $z = 1$, βρίσκουμε ότι:

$$f(n+1) = g(1)\Gamma(n+1) = n!$$

Για παράδειγμα, μπορούμε να υπολογίσουμε $g(z) = \cos 2\pi(z-1)$. Η εξίσωση (Γ'.25) ισχύει επίσης για $n = 0$ δεδομένου ότι $0! = 1$

6. Η ιδιότητα προκύπτει απ' το γεγονός ότι

$$\Gamma''(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}(\ln t)^2 dt > 0, \quad x > 0$$

7. Απ' τη σχέση (Γ'.24) και την αναλυτικότητα (άρα και συνέχεια) της Γάμμα στο $z = 1$ προκύπτει:

$$\lim_{z\to 0}\Gamma(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z+1}{z} = \infty$$

Όμοια, η σχέση

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

για $n > 0$ οδηγεί στην

$$\lim_{z\to n}\Gamma(z) = \infty$$

8. Θεωρούμε ότι $0 < \Re z < 1$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

$$\Gamma(1-z) = \int_0^\infty e^{-s}s^{-z}ds$$

Άρα:

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x}y^{z-1}\frac{dxdy}{(1+y)} = \\ &= \Gamma(1)\int_0^\infty \frac{y^{z-1}dy}{1+y} \qquad \text{(Γ'.27)}\end{aligned}$$

Όμως, η τιμή του τελευταίου ολοκληρώματος είναι γνωστή κι είναι $\frac{\pi}{\sin \pi z}$[8]. Άρα, καταλήγουμε στην:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Η $g(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \pi\csc\pi z$ είν' αναλυτική στο $D = \mathbb{C} - \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ κι έχουμε δει ότι $g(z) = 0$ στο $0 < \Re z < 1$. Τότε, απ' την Αρχή του Ταυτοτισμού Β'.5 συμπεραίνουμε ότι $g(z) = 0$ παντού στο D, έτσι ώστε η Γ' να ισχύει καλά στο D.

[8]Δεν επιλύουμε εδώ το ολοκλήρωμα. Η απόδειξη βασίζεται στο [15, σελ.707], σχέση (9.11-32)

9. Στη σχέση (Γ.1) θέτουμε $t = pt'$ όπου p είναι μια μιγαδική σταθερά τέτοια ώστε $\Re p > 0$. Άρα:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-pt'} p^z t'^{z-1} dt'$$

ή διαφορετικά, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\Gamma(z)}{p^z} = \int_0^\infty e^{-pt} t^{z-1} dt, \quad \Re p > 0, \quad \Re z > 0 \tag{Γ.28}$$

Με την αντικατάσταση του z απ' το $z+1$, το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί στη μορφή ενός μετασχηματισμού Laplace

$$\mathcal{L}[t^z; p] = \int_0^\infty e^{-pt} t^z dt = \frac{\Gamma(z+1)}{p^{z+1}}, \quad \Re p > 0, \quad \Re z > -1 \tag{Γ.29}$$

Άλλες μορφές του ολοκληρώματος Γ μπορούν να προκύψουν με διάφορες αλλαγές μεταβλητών. Για παράδειγμα, αν θέσουμε $t = x^2$, βρίσκουμε ότι:

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2z-1} dx, \quad \Re z > 0 \tag{Γ.30}$$

κ' η αλλαγή $t = \ln(1/x)$ δίνει:

$$\Gamma(z) = 2\int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{z-1} dx, \quad \Re z > 0 \tag{Γ.31}$$

10. Θεωρώντας ότι $\Re z > 0$ και, με χρήση της (Γ.30) έχουμε:

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2z-1} dx$$

και

$$\Gamma(z+1/2) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2z} dy$$

Άρα

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2+y^2} (2xy)^{2z-1} y dx dy$$

Αν αλλάξουμε τις μεταβλητές x, y μεταξύ τους, παίρνουμε:

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2+y^2} (2xy)^{2z-1} x dx dy$$

και προσθέτοντας τις δυο τελευταίες εξισώσεις καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) &= 2\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2+y^2} (2xy)^{2z-1} (x+y) dx dy = \\ &= 4\int\int_A e^{-x^2+y^2} (2xy)^{2z-1} (x+y) dx dy \end{aligned} \tag{Γ.32}$$

όπου $A = \{(x, y) : 0 \le x < \infty, \;\; 0 \le y < \infty\}$ Αν τώρα θέσουμε: $u = x^2 + y^2$ και $v = 2xy$ στο τελευταίο ολοκλήρωμα, παίρνουμε:

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = 2\int_0^\infty v^{2z-1}dv \int_0^\infty \frac{e^u}{\sqrt{u-v}}du$$

καθώς

$$\left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)\right| = \frac{1}{4|x^2 - y^2|}$$

και $\sqrt{u-v} = |x - y|$. Τελικά, θέτοντας $u = v + t^2$ στο τελευταίο ολοκλήρωμα, καταλήγουμε

$$\begin{aligned} 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = 2\int_0^\infty e^{-v}v^{2z-1}dv \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \\ = \sqrt{\pi}\Gamma(2z) \end{aligned} \qquad (\Gamma.33)$$

Η σχέση αυτή οφείλεται στο Legendre και ονομάζεται **σχέση διπλασιασμού** για τη συνάρτηση Γάμμα.

Παρ' όλο που η σχέση αποδείχθηκε θεωρώντας $\Re z > 0$, απ' την Αρχή του Ταυτοτισμού στη σελ. 65 γι' αναλυτικές συναρτήσεις, η σχέση ισχύει για όλες τις τιμές του z για τις οποίες κι οι δυο πλευρές της εξίσωσης ορίζονται, δηλαδή για όλα τα $z \in \mathbb{C} - \{0, -1/2, -1, -3/2 \cdots\}$

11. Ξανά, βάσει της Αρχής του Ταυτοτισμού σελ. 65, για ν' αποδείξουμε τη συγκεκριμένη ιδιότητα, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

όπου $\Re z > 0$. Για να το δείξουμε λοίπόν, θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(n, z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) t^{z-1}dt = n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1}d\tau$$

όπου το δεύτερο ολοκλήρωμα προκύπτει απ' το πρώτο αν αντικαταστήσουμε $t = n\tau$.

Αν $\Re z > 0$, με ολοκλήρωση κατά μέλη θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1}d\tau = \frac{n}{z}\int_0^1 (1-\tau)^{n-1}\tau^z d\tau = \\ = \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1}d\tau = \\ = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} \end{aligned}$$

Οπότε:

$$g(n,z)=\frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

και θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=\lim_{n\to\infty}g(n,z)$$

Έχουμε:

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt-\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt=$$
$$=\int_0^n[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n]t^{z-1}dt+\int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

Δοθέντος $\epsilon>0$, υπάρχει N_1 τέτοιο ώστε $n\geq N_1$ να συνεπάγεται ότι:

$$\left|\int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\right|<1/2\epsilon$$

καθώς το ολοκλήρωμα της Γάμμα συγκλίνει καθώς $\Re z>0$. Απ' την άλλη πλευρά για $0\leq t\leq n$ ή $0\leq t/n\leq 1$ έχουμε:

$$1+\frac{t}{n}\leq e^{t/n}\leq\left(1-\frac{t}{n}^{-1}\right)$$

έτσι ώστε:

$$1+\frac{t}{n}^{-n}\leq e^{-t}\leq\left(1-\frac{t}{n}^{n}\right)$$

κι έτσι:

$$0\leq e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)=e^{-t}\left[1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right].$$

Καθώς

$$e^t\geq\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$$

παίρνουμε ότι:

$$e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right]\leq e^{-t}\frac{t^2}{n}$$

Οπότε αν θέσουμε $x=\Re z$, έχουμε:

$$\left|\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt\right|\leq\frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t^{x+1}dt=$$
$$<\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t}t^{x+1}dt=\frac{A}{n}<\frac{1}{2}\epsilon\Gamma(x+2)$$

για $n > [2A/\epsilon] + 1 = N_2$, όπου $A = \int_0^\infty e^{-t}t^{x+1}dt$. Επομένως, αν $n > max(N_1, N_2)$, έχουμε:

$$\left|\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt - g(n,z)\right| < \epsilon$$

ή

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = \lim_{n\to\infty} g(n,z)$$

Η σχέση

$$\Gamma(z) = lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \qquad (\Gamma'.34)$$

ήταν γνωστή στους Euler και Gauss κι ονομάζεται **σχέση Euler ή (Gauss)**. Ξεκάθαρα, τα σημεία $z = 0, -1, -2, \cdots, -n, \cdots$ είναι απλά μηδενικά της $1/\Gamma(z)$, οπότε, η $\Gamma(z)$ έχει απλούς πόλους στην αρχή των αξόνων και στους αρνητικούς ακεραίους.

12. Το γνωστό ανάπτυγμα του λογαρίθμου σε δυνάμεις του z:[9]

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}z^n + \ldots$$

δίνει για $z = x, \; |x| < 1$:

$$\ln(1+x) = x - 1/2x^2 + 1/3x^3 - 1/4x^4 + \ldots$$

και

$$\ln(1-x) = -x - 1/2x^2 - 1/3x^3 - 1/4x^4 - \ldots$$

Επομένως, βάσει των παραπάνω:

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} = 2(x + 1/3x^3 + 1/5x^5 + \cdots), \;\; |x| < 1$$

Αν θέσουμε $x = 1/(2n+1), \;\; (n = 1, 2, 3, \cdots)$, έχουμε:

$$\ln\frac{n+1}{n} = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^5} + \cdots\right]$$

που συνεπάγεται ότι:

$$\frac{2}{2n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$< \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^3} + \cdots\right]$$

[9]Η σχέση θεωρείται γνωστή και δεν αποδεικνύεται εδώ. Για την απόδειξη, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [15, σελ.533].

ή

$$\frac{2}{2n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{4n(n+1)(2n+1)}$$

ή

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$$

και μπορούμε να γράψουμε:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + a_n \qquad (Γ'.35)$$

όπου

$$0 < a_n < \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \qquad (Γ'.36)$$

Αν στην εξίσωση (Γ'.35) θέσουμε $n = 1, 2, 3, \cdots, n-1$ και προσθέσουμε τις ανισότητες που προκύπτουν, θα πάρουμε:

$$\ln\left[\frac{2}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\right] + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}\right)$$
$$= n - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

ή, διαφορετικά:

$$\ln\frac{n^n}{n!} + \frac{1}{2}\ln n = n - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k. \qquad (Γ'.37)$$

Όμοια, απ' την (Γ'.36) παίρνουμε:

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k < \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{12} \qquad (Γ'.38)$$

Επομένως, αν πάρουμε αντιλογαρίθμους στην (Γ'.37) και χρησιμοποιήσουμε την (Γ'.38) βρίσκουμε ότι:

$$\frac{n^{n+1/2}}{n!} = exp\left(n - 1 + \sum_{1}^{n-1} a_k\right) \qquad (Γ'.39)$$

ή, διαφορετικά:

$$\frac{e^n n!}{n^{n+1/2}} = exp\left(1 - \sum_{1}^{n-1} a_k\right) > e^{11/12} \qquad (Γ'.40)$$

Η παραπάνω ακολουθία, στ' αριστερά της (Γ'.40) είναι φθίνουσα ως προς n και κάτω φραγμένη απ' το $e^{11/12}$. Συνεπώς συγκλίνει σ' ένα θετικό όριο, έστω L. Έχουμε:

$$L = L^2L^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}(n!)^2}{n^{2n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^{2n+1/2}}{e^{2n}(2n)!} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n+1/2}}{(2n)!n^1/2} \qquad (Γ'.41)$$

Η γνωστή σχέση Wallis[10]:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}\pi$$

μπορεί επίσης να γραφεί ως εξής:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!n^{1/2}} = \sqrt{\pi}$$

που δείχνει ότι το όριο στην (Γ'.41) είναι $L = \sqrt{2\pi}$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n n!}{n^{n+1/2}} = \sqrt{2\pi}$$

ή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n = 1$$

ή

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad (Γ'.42)$$

καθώς $n \to \infty$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως **τύπος Stirling**.

Η ασυμπτωτική σχέση (Γ'.43) μπορεί επίσης να γραφεί στη μορφή:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\mu(n)} \qquad (Γ'.43)$$

όπου $\mu(n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Απ' την (Γ'.43) έχουμε:

$$\mu(n) = \ln n! - (n + 1/2)\ln n + n - \ln\sqrt{2\pi} \qquad (Γ'.44)$$

Παίρνοντας λογαρίθμους στη σχέση (Γ'.40) βρίσκούμε ότι:

$$\ln n! - (n + 1/2)\ln n + m = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

[10] Παραπέμπουμε στα [1, σελ. 258],[10, σελ. 21][8, σελ. 271]

ώστε

$$\mu(n) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k - \ln \sqrt{2\pi}$$

Καθώς $n \to \infty$ θα ισχύει ότι $\mu(n) \to \infty$ κι η σχέση θα γίνει:

$$1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \ln \sqrt{2\pi}$$

Επομένως,

$$\mu(n) = \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) - \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) =$$
$$= \sum_{k=n}^{\infty} a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n}^{N} a_k$$

και με χρήση της (Γ'.36) καταλήγουμε στην

$$0 < \mu(n) \le \frac{1}{12} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = \frac{1}{12n} \qquad (Γ'.45)$$

□

Θεώρημα Γ'.4. *Η συνάρτηση Βήτα έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. $B(z,1) = 1/z$
2. $B(z,\zeta) = B(\zeta,z)$
3. $B(z,\zeta+1) = \frac{\zeta}{z+\zeta} B(z,\zeta)$
4. $B(z,\zeta) = \frac{B(z,\zeta+n)\cdot B(\zeta,n)}{B(z+\zeta,n)}$, *όπου n θετικός ακέραιος*
5. $B(z,\zeta) = B(z+1,\zeta) + B(z,\zeta+1)$
6. *Η* $zB(z,\zeta+1) = \zeta B(z+1,\zeta)$
7. $B(z,\zeta) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2z-1}\theta \cos^{2\zeta-1}\theta d\theta$
8. $\lim_{\xi\to\infty} \xi^x B(x,\xi)/\Gamma(x) = 1, \ \ x > 0, \ \ \xi > 1$
9. $B(z,\zeta) = \Gamma(z)\Gamma(\zeta)/\Gamma(z+\zeta)$

Απόδειξη. 1. Προκύπτει εύκολα, αν θέσουμε $\zeta = 1$ στη σχέση ορισμού (Γ'.2) της $B(z,\zeta)$.

2. Θέτοντας $t = 1 - \tau$ στο ολοκλήρωμα ορισμού (Γ'.2) έχουμε:

$$B(z,\zeta) = \int_0^1 (1-\tau)^{z-1}\tau^{\zeta-1}d\tau = B(\zeta, z)$$

δεδομένου ότι $\Re z > 0, \quad \Re\zeta > 0$. Μ' άλλα λόγια η συνάρτηση Βήτα είναι συμμετρική ως προς τα ορίσματά της.

$$B(z,\zeta+1) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta}dt = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta-1}(1-t)dt =$$
$$= B(z,\zeta) - \int_0^1 t^{z}(1-t)^{\zeta-1}dt$$

δεδομένου ότι $\Re z > -1, \quad \Re\zeta > -1$. Επιπλέον, θεωρώντας ότι $z \neq 0, \quad \zeta \neq 0$, αν ολοκληρώσουμε κατά μέλη το τελευταίο ολοκλήρωμα, τότε:

$$\int_0^1 t^{z}(1-t)^{\zeta-1}dt = \frac{1}{\zeta}t^{z}(1-t)^{\zeta}|_0^1 + \frac{z}{\zeta}\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\zeta}dt =$$
$$= \frac{z}{\zeta}B(z,\zeta+1)$$

Άρα:

$$B(z,\zeta+1) = B(z,\zeta) - \frac{z}{\zeta}B(z,\zeta+1)$$

ή, με άλλα λόγια:

$$B(z,\zeta+1) = \frac{\zeta}{z+\zeta}B(z,\zeta)$$

4. Αν κάνουμε χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων $(1-3)$, προκύπτει:

$$\frac{B(z,\zeta+1)B(\zeta,1)}{B(z+\zeta,1)} = \frac{[\zeta/(z+\zeta)]\,B(z,\zeta)(1/\zeta)}{1(z+\zeta)} = B(z,\zeta)$$

Αν η ιδιότητα ισχύει για $n \geq 1$, θα ισχύει και για $n+1$, καθώς:

$$\frac{B(z,\zeta+n+1)B(\zeta,n+1)}{B(z+\zeta,n+1)} =$$
$$= \frac{[(\zeta+n)/(z+\zeta+n)B(z,\zeta+n)[n/(\zeta+n)]B(\zeta,n)]}{[n/(z+\zeta+n)]B(z+\zeta,n)} = B(z,\zeta)$$

Επομένως, βάσει της μαθηματικής επαγωγής, η ιδιότητα 4. ισχύει με τους περιορισμούς $\Re z > 0, \quad \Re\zeta > -n, \quad \Re(z+\zeta) > 0, \quad \zeta \neq 0$, και $n \geq 1$ τυχαίος αριθμός.

5. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες 2., 3.:

$$B(z+1,\zeta) + B(z,\zeta+1) = \frac{z}{z+\zeta}B(z,\zeta) + \frac{\zeta}{z+\zeta} =$$
$$= B(z,\zeta)$$

δεδομένου ότι $\Re z > -1, \Re\zeta > -1, \quad z \neq 0, \quad \zeta \neq 0, \quad z+\zeta \neq 0$

6. Ξανά, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες $2., 3.$ προκύπτει:

$$zB(z, \zeta+1) = \frac{z\zeta}{z+\zeta}B(z,\zeta) = \zeta B(z+1,\zeta)$$

με τους ίδιους περιορισμούς.

7. Αντικαθιστούμε $t = \sin^2\theta$ και το ολοκλήρωμα της Βήτα γίνεται:

$$B(z,\zeta) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2z-1}\theta \cos^{2\zeta-1}\theta d\theta \qquad \text{(Γ'.46)}$$

δεδομένου ότι $\Re z > 0, \quad \Re\zeta > 0$.

8. Καθώς $e^t \geq 1+t$ για t πραγματικό και την ισότητα να ισχύει μόνο αν $t = 0$, έχουμε για $x > 0, \quad \xi > 0$ και χρησιμοποιώντας τις (Γ'.28),(Γ'.21):

$$\frac{\Gamma(x)}{(x+\xi)^x} = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+\xi}}dt = B(x,\xi)$$

και για $\xi > 1$

$$\frac{\Gamma(x)}{(\xi-1)^x} = \int_0^\infty e^{-(\xi-1)t}t^{x-1}dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{\xi-1}dt = B(x,\xi)$$

Άρα:

$$\frac{\Gamma(x)}{(x+\xi)^x} < B(x,\xi) < \frac{\Gamma(x)}{(\xi-1)^x}$$

ή

$$\frac{\xi^x}{(x+\xi)^x} < \frac{\xi^x B(x,\xi)}{\Gamma(x)} < \frac{\xi^x}{(\xi-1)^x}$$

Καθώς ισχύει:

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{\xi^x}{(x+\xi)^x} = \lim_{\xi\to\infty}\frac{\xi^x}{(\xi-1)^x} = 1$$

παίρνουμε:

$$\lim_{\xi\to\infty}\xi^x\frac{B(x,\xi)}{\Gamma(x)} = 1$$

ή, μ' άλλα λόγια:

$$B(x,\xi) \sim \xi^{-x}\Gamma(x)$$

καθώς $\xi \to \infty$

9. Απ' την ιδιότητα $4.$, με $z = x > 0, \zeta = \xi > 0$ έχουμε:

$$B(x,\xi) = \frac{B(x,\xi+n)B(\xi,n)}{B(x+\xi,n)}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η δεξιά πλευρά είναι ανεξάρτητη του n.

Άρα, παίρνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 8., βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} B(x,\xi) &= \lim_{n\to\infty} \frac{B(x,\xi+n)B(\xi,n)}{B(x+\xi,n)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\xi+n)^{-x}\Gamma(x)n^{-\xi}\Gamma(\xi)}{n^{-(x+\xi)}\Gamma(x+\xi)} \\ &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(\xi)}{\Gamma(x+\xi)} \end{aligned} \qquad \text{(Γ'.47)}$$

(Γ'.48)

η οποία αποδεικνύει ότι η ιδιότητα 9. ισχύει για $z = x > 0, \quad \zeta = \xi > 0$. Επιπλέον, καθώς η $B(z,\zeta)$ ειν' αναλυτική για $\Re z > 0, \forall \zeta$ με $\Re \zeta > 0$, όπως επίσης ειν' αναλυτική για $\Re \zeta > 0, \forall z$ με $\Re z > 0$, κι η $\Gamma(z)$ είναι εξίσου αναλυτικής το ημιεπίπεδο $\Re z > 0$, τότε με βάση την Αρχή του Ταυτοτισμού σελ. 65 ισχύει η σχέση:

$$B(z,\zeta) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(\zeta+z)} \qquad \text{(Γ'.49)}$$

ισχύει καλά για $\Re z > 0, \Re \zeta > 0$. Επιπλεόν, καθώς ο ορισμός της συνάρτησης Γάμμα επεκτάθηκε σ' ολόκληρο το $\mathbb{C}$, εκτός μόνο απ' τα σημεία $0, -1, -2, \cdots$, όπου η Γάμμα έχει πόλους, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (Γ'.49) για να επεκτείνουμε τον ορισμό της Βήτα στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{C}x\mathbb{C}$ εκτός των σημείων (z,ζ) όπου μια εκ των συντεταγμένων, ή κι οι δυο έχουν μηδενισμό σε αρνητικό ακέραιο.

Βάσει των παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε:

$$B(z,\zeta) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(\zeta+z)}, \quad z,\zeta \neq 0,-1,-2,\cdots \qquad \text{(Γ'.50)}$$

Τα σημεία όπου $z+\zeta = -n, \quad (n = 0,1,2\cdots)$ αλλά $z,\zeta \neq 0,-1,-2,\cdots$ είναι μηδενικά της $1/\Gamma(z+\zeta)$, άρα είναι επίσης μηδενικά της $B(z,\zeta)$. Μ. αυτή την επέκταση οι ιδιότητες $2.-6.$ ισχύουν γενικά, εκτός απ' τα σημεία όπου οι δυο συναρτήσεις δεν ορίζονται.[11]

Η σχέση (Γ'.49) που δείχνει τη σύνδεση μεταξύ των συναρτήσεων Βήτα και Γάμμα, κάνει δυνατό τον υπολογισμό ενός αριθμού σημαντικών ορισμένων ολοκληρωμάτων με όρους της συνάρτησης Γάμμα.

□

[11] Η μέθοδος απόδειξης της σχέσης Γ'.48 για θετικές πραγματικές τιμές των μεταβλητών οφείλεται στον Nanjudiah[23]

Παράρτημα Δ′

Αριθμοί Bernoulli

Δ′.1 Ο αντίστροφος του τελεστή των διαφορών

Η βασική μας αναφορά στο παράρτημα αυτό είναι το [8, σελ. 275]. Ο Jacob Bernoulli (1654-1705) εισήγαγε τα πολυώνυμα $s_n(x)$ που ικανοποιουν την εξίσωση:

$$s_n(x) = 0^n + 1^n + \ldots + (x-1)^n, \quad (0^0 = 1, 0^n = 0, \alpha\nu \;\; n > 0) \tag{Δ′.1}$$

για όλες τις μη αρνητικές τιμές των, n, x. Με τη σχέση αυτή κατασκεύασε μια συγκεκριμένη άπειρη ακολουθία ρητών αριθμών που ονομάζονται **αριθμοί Bernoulli** κ᾽ είναι χρήσιμοι σε πολλά προβλήματα της Ανάλυσης και της Θεωρίας Αριθμών.

Το πρόβλημα που εξέτασε ο Bernoulli έχει άμεση σχέση με τη μελέτη του αντίστροφου της βασικής πράξης του Λογισμού των Πεπερασμένων Διαφορών[1]. Έστω $f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x, \quad c_n \neq 0$ ένα πολυώνυμο βαθμού n. Ψάχνουμε να βρούμε ένα πολυώνυμο $g(x)$ για το οποίο να ισχύει:

$$\Delta g(x) = g(x+1) - g(x) = f(x) \tag{Δ′.2}$$

Αν

$$g^*(x) = g(x) + h(x) \tag{Δ′.3}$$

ειν᾽ ένα δεύτερο πολυώνυμο, για το οποίο $\Delta g^*(x) = f(x)$, τότε θα πρέπει να ισχύει:

$$h(x+1) = h(x)$$

ενώ

$$h(0) = h(1) = \ldots = h(n) = h(n+1) = \ldots$$

Επομένως, το πολυώνυμο $h(x) - h(0)$ έχει άπειρο αριθμό μηδενικών. Συνεπώς, το $h(x)$ να είναι ίσο με το σταθερό $h(0)$. Άρα, μπορεί να υπάρξει ακριβώς ένα πολυώνυμο $g(x)$ που ικανοποιεί εξίσου την εξίσωση (Δ′.2) και τη σχέση $g(0) = 0$.

[1] Συμβουλευθείτε το [19].

Για ν' αποδείξουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου πολυωνύμου $g(x)$ γράφουμε πρώτα την $f(x)$ στη μορφή:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1) + \ldots + a_n x(x-1)\ldots(x-n+1) \qquad (Δ'.4)$$

Είν' εύκολο να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός τρόπος να γράψουμε την $f(x)$ στη μορφή (Δ'.4). Έτσι, αν $n = 1$, τότε εμφανώς ισχύει $a_0 = c_0$ και $a_1 = c_1$. Επιπλέον, αν $n > 1$, τότε $a_n = c_n$. Επομένως, αν θεωρήσουμε εξ επαγωγής ότι η υπόθεση παραμένει αληθής για $(n-1)$, τότε συνεπάγεται ότι μπορούμε να καθορίσουμε τους αριθμούς $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ μ' έναν και μοναδικό τρόπο, έτσι ώστε να ισχύει η εξίσωση:

$$f(x) - c_n x(x-1)\ldots(x-n+1) = a_0 + \ldots + a_{n-1}x\ldots(x-n+2) \qquad (Δ'.5)$$

και να συνεπάγεται την (Δ'.4). Μια παρόμοια υπόθεση με μαθηματική επαγωγή δείχνει ότι όλοι οι παράγοντες $a_0, a_1, \ldots, a_n$ είναι ακέραιοι αν και μόνο αν όλοι οι παράγοντες $c_0, \ldots, c_n$ είναι ακέραιοι. Τώρα, εισάγουμε το συμβολισμό:

$$b_0 = a_0, b_1 = a_1, \ldots, b_\nu = a_\nu \nu! \;\; (v = 2, \ldots, n) \qquad (Δ'.6)$$

$$\binom{x}{0} = 1, \;\; \binom{x}{1} = x, \;\; \binom{x}{\nu} = \frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{\nu!} \qquad (Δ'.7)$$

και παρατηρούμε ότι

$$\Delta \binom{x}{\nu+1} = \binom{x+1}{\nu+1} - \binom{x}{n+1} = \binom{x}{\nu} \qquad (Δ'.8)$$

Άρα, απ' τις (Δ'.2), (Δ'.4), (Δ'.6), μπορούμε να γράψουμε:

$$f(x) = b_0 \binom{x}{0} + b_1 \binom{x}{1} + \cdots + b_n \binom{x}{n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \binom{x}{\nu}^{2} \qquad (Δ'.9)$$

κ' η (Δ'.6) δείχνει ότι το πολυώνυμο:

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \binom{x}{\nu+1} \qquad (Δ'.10)$$

ικανοποιεί όχι μόνο την (Δ'.2), αλλά και τη σχέση $g(0) = 0$. Παρατηρούμε, τέλος, ότι αν το x είναι θετικός ακέραιος, τότε:

$$g(x) = [g(1) - g(0)] + [g(2) - g(1)] + \ldots + [g(x) - g(x-1)] \qquad (Δ'.11)$$

ούτως ώστε να ισχύει:

$$g(x) = f(0) + f(1) + \ldots + f(x-1), \;\; (x = 1, 2, \cdots) \qquad (Δ'.12)$$

Η συνάρτηση $g(x)$ που ικανοποιεί εξίσου την $\Delta g(x) = f(x)$ και την $g(0) = 0$, θ' αναγράφεται στη συνέχεια ως:

$$\Delta^{-1} f(x) = g(x). \qquad (Δ'.13)$$

[2] Ισχύει $\binom{x}{\nu} = 0, \;\; \forall \nu > x$

Δ′.2 Αριθμοί Bernoulli

Τα πολυώνυμα Bernoulli, που προαναφέραμε στην αρχή της προηγούμενης παραγράφου, μπορούν τώρα να βρεθούν αν θέσουμε

$$s_n(x) = \Delta^{-1} x^n \tag{Δ′.14}$$

Με τη μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου, μπορούμε να υπολογίσουμε τα $s_n(x)$, τα πρώτα εκ των οποίων είναι:

$$\begin{aligned} s_0(x) &= x \\ s_1(x) &= \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x \\ s_2(x) &= \frac{x(x-1)(2x-1)}{6} = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x \\ s_3(x) &= \frac{x^2(x-1)^2}{4} = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 0x \\ s_4(x) &= \frac{x(x-1)(2x-1)(3x^2-3x+1)}{30} = \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{30}x \end{aligned} \tag{Δ′.15}$$

Όπως παρατηρούμε, δε φαίνεται να διέπει τους συντελεστές των πολυωνύμων κάποιο συγκεκριμένο σχήμα. Για να μπορέσουμε να βρούμε μι’ απλή σχέση παραγωγής των παραγόντων, πρέπει ν’ ακολουθήσουμε μι’ άλλη μέθοδο υπολογισμού των πολυωνύμων $s_n(x)$. Η σχέση υπολογισμού των $s_n(x)$ είναι:

$$s_n(x+1) - s_n(x) = x^n, \quad s_n(0) = 0 \tag{Δ′.16}$$

Αν παραγωγίσουμε τη σχέση αυτή:

$$s'_n(x+1) - s'_n(x) = nx^{n-1}, \quad s_n(0) = 0 \tag{Δ′.17}$$

Άρα:

$$s_{n-1} = \frac{1}{n}\left[s'_n(x) - {s_n}'(0)\right]. \tag{Δ′.18}$$

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ήδη υπολογίσει τους παράγοντες του ${s_n}'(x)$, δηλαδή ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση

$$s'_n(x) = h^0 x^n + h^1 \binom{n}{1} x^{n-1} + \ldots + h^n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n}{\nu} h^\nu x^{n-\nu} \tag{Δ′.19}$$

όπου h^v δοθέντες αριθμοί (Οι υπερδείκτες ν αυτής της εξίσωσης δεν είναι εκθέτες). Τότε, απ’ τις (Δ′.17), (Δ′.18. Δείτε την επόμενη ενότητα για το λόγο που χρησιμοποιούμε υπερδείκτες.) έχουμε ότι:

$$s_{n-1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n}{\nu} h^\nu x^{n-\nu} \tag{Δ′.20}$$

κι εφ' όσον ισχύει:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ \nu \end{array} \right) \frac{(n-\nu)}{n} = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ \nu \end{array} \right),$$

η (Δ'.20) συνεπάγεται ότι:

$$s'_{n-1} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ \nu \end{array} \right) h^{\nu} x^{(n-1)-\nu} \qquad (Δ'.21)$$

Οι αριθμοί $h^0, h^1, \ldots, h^{n-1}$ που εμφανίζονται στην (Δ'.21) είναι οι ίδιοι μ' αυτούς της εξίσωσης (Δ'.19). Η μόνη διαφορά μεταξύ των δυο παραπάνω εξισώσεων είναι η αντικατάσταση του n στην εξίσωση (Δ'.19) με το $(n-1)$ στην (Δ'.21) και στην παράλειψη του όρου h^n στην (Δ'.21). Όμως, για $x = 0$ και $n \geq 2$ η σχέση (Δ'.8) γίνεται:

$$s'_n(1) - s'_n(0) = 0$$

κι αυτή η σχέση μαζί με την (Δ'.19) οδηγούν στην στην ταυτότητα

$$h^0 + \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) h^1 + \ldots + \left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array} \right) h^{n-1} = 0, \quad (n \geq 2) \qquad (Δ'.22)$$

Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε το h^{n-1} δεδομένου ότι γνωρίζουμε τα $h^0, h^1, \ldots, h^{n-2}$ και, καθώς $h^0 = 1$ απ' τις (Δ'.15), η σχέση (Δ'.21) μας επιτρέπει να καθορίσουμε μ' επιτυχία τους αριθμούς της ακολουθίας $h^1, h^2, \cdots$ μέχρι τον αριθμό που μας ενδιαφέρει.

Δ'.3 Ο συμβολικός υπολογισμός του E.Lucas

Οι σχέσεις στις οποίες καταλήξαμε, καθώς κι αυτές που θα προκύψουν απ' τις παραπάνω, μπορούν να γραφούν μ' έναν πολύ σαφή τρόπο αν θεωρήσουμε τους αριθμούς h^{ν}, που ονομάζονται αριθμοί *Bernoulli*, ως συμβολικούς έκθέτες και τους χειριζόμαστε σαν νά 'ταν αυτή η ηθελημένη παρερμηνεία αληθής. Το τέχνασμα αυτό προτάθηκε απ' τον E. Lucas (1842-1891)[3]. Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (Δ'.18) στη μορφή:

$$s'_n(x) = (x+h)^n \qquad (Δ'.23)$$

και την (Δ'.22) στη μορφή:

$$(h+1)^n - h^n = 0, \quad (n = 2, 3, \ldots) \qquad (Δ'.24)$$

[3]Για βιογραφικά στοιχεία του Edouard Lucas και περαιτέρω λεπτομέρειες σχετικά με την εργασία του στη Θεωρία Αριθμών, παραπέμπουμε στο [14, σελ. 414]

Κατ' αυτόν τον τρόπο, υπολογίζουμε τους αριθμούς $Bernoulli$ ως ακολούθως:

$$
\begin{aligned}
2h^2+1=0 \quad h^1=-\frac{1}{2}\\
3h^2+3h^1+1=0, \quad h^2=\frac{1}{6}\\
4h^3+6h^2+4h^1+1=0, \quad h^3=0\\
5h^4+10h^3+10h^2+5h^1+1=0, \quad h^4=-\frac{1}{30}\\
6h^5+15h^4+20h^3+15h^2+6h^1+1=0, \quad h^5=0\\
7h^6+21h^5+35h^4+35h^3+21h^2+7h^1+1=0, \quad h^6=\frac{1}{42}
\end{aligned}
\tag{Δ΄.25}
$$

Οι αριθμοί Bernoulli συμβολίζονται διαφορετικά B_n.

Δ΄.4 Υπολογισμός χρήσιμων δυναμοσειρών με τη βοήθεια των αριθμών Bernoulli

Στη συνέχεια ακολουθούμε το [13, σελ. 231 - 233].

Θεώρημα Δ΄.4.1. *Ισχύει η σχέση:*

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z: |z|<2\pi.$$

Απόδειξη. Απ' την εξίσωση (Δ΄.22):

$$B_0+\begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix} B_1+\begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix} B_2+\ldots+\begin{pmatrix} n+1 \\ n \end{pmatrix} B_n=0.$$

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα καταλήγουμε στη σχέση:

$$\sum_{k \leq n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n+1-p)!}=\begin{cases} 1, & \text{αν} \quad n=0 \\ 0, & \text{αν} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με το γινόμενο δυναμοσειρών:

$$\sum_{n=0}^{=+\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^q}{(q+1)!}=1. \tag{Δ΄.26}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη με x καταλήγουμε στη σχέση:

$$(e^x-1) \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}=x.$$

Γνωρίζουμε ότι η δυναμοσειρά της $(e^z - 1)z^{-1}$ συγκλίνει γύρω απ' το μηδέν κ' η συνάρτηση δε μηδενίζεται. Συνεπώς συγκλίνει κ' η δυναμοσειρά της αντίστροφής της με πιθανόν μικρότερη ακτίνα σύγκλισης. Λόγω της μοναδικότητας του αναπτύγματος Taylor θα πρέπει να ισχύει τοπικά γύρω απ' το μηδέν:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

Η συνάρτηση $e^z - 1$ μηδενίζεται για πρώτη φορά πάνω στον κύκλο με ακτίνα 2π. Συνεπώς η ακτίνα σύγκλισης της παραπάνω δυναμοσειράς είναι 2π. □

Θεώρημα Δ'.4.2. *Ισχύει η σχέση:*

$$\frac{ze^{tz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z : |z| < 2\pi.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι:

$$s_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} t^k = n! \sum_{l+m} \frac{B_l t^m}{l!m!}.$$

Οπότε απ' την εξίσωση (Δ'.26):

$$\sum_n s_n(t) \frac{x^n}{n!} = \sum B_l t^m \frac{x^{l+m}}{l!m!} = \sum B_l \frac{x^l}{l!} \frac{(tx)^m}{m!} = e^{tx} \sum B_l \frac{x^l}{l!}.$$

Επιχειρηματολογώντας όπως στο προηγούμενο θεώρημα καταλήγουμε στην προς απόδειξη σχέση. □

Παράρτημα Ε΄

Ο Μετασχηματισμός Mellin

Ο μετασχηματισμός Mellin[1] μιας συνάρτησης $f(x)$, που συμβολίζεται με $f^*(s)$ ορίζεται απ᾽ τ᾽ ολοκλήρωμα:

$$f^*(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx. \tag{Ε΄.1}$$

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $f^*(s)$ καλούνται **ζεύγος μετασχηματισμού Mellin**. Η γνώση της μιας εκ των δυο μας επιτρέπει την εύρεση της άλλης μέσω του ολοκληρώματος (Ε΄.1).

Ο παραπάνω μετασχηματισμός υπάρχει, όταν τ᾽ ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\infty |f(x)|\, x^{k-1}dx$$

είναι φραγμένο για κάποιο $k > 0$.

Η αντιστροφή του μετασχηματισμού Mellin πραγματοποιείται μέσω του αντίστροφου ολοκληρώματος:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)x^{-s}ds, \tag{Ε΄.2}$$

όπου $c > k$. Αν συμβολίσουμε το μετασχηματισμό Mellin ως

$$f^*(s) = \mathcal{M}\left[f(x); s\right]$$

τότε μπορούμε να εκφράσουμε το αντίστροφο αποτέλεσμα (Ε΄.2) ως:

$$f(x) = \mathcal{M}^{-1}\left[f^*(s); x\right]$$

Ενδεικτικά θ᾽ αναφέρουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Mellin. Για την απόδειξή τους μπορεί κανείς να συμβουλευτείτε το [16, σελ.1129-1134], όπου επίσης μπορεί κανείς να βρει ζεύγη μετασχηματισμού Mellin βασικών

[1] Robert Hjalmar Mellin, 1854 - 1933. Φινλανδός μαθηματικός, μαθητής του Mittag - Leffler.

συναρτήσεων. Επιπλέον, για περαιτέρω μελέτη του μετασχηματισμού και σχέσεις ισοδύναμιας με τους μετασχηματισμούς Laplace και Fourier παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [7, σελ.343-347],[11, σελ.253].

Ε΄.1 Βασικές Ιδιότητες του μετασχηματισμού Mellin

1. Για a, b τυχαίες σταθερές, έχουμε:

$$\mathcal{M}\left[af(x) + bg(x)\right] = af^*(s) + bg^*(s) \text{ (γραμμικότητα).}$$

2. Αν $\lim_{x\to\infty} x^{s-r-1} f^(r)(x) = 0, \quad r = 0, 1, \ldots, n-1$ τότε:

$$\mathcal{M}\left[f^{(n)}(x); s\right] = (-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)} f^*(s-n)$$

και

$$\mathcal{M}\left[x^n f^{(n)}(x); s\right] = (-1)^n \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} f^*(s)$$

όπου $\Gamma(s)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα, που αναπτύσσεται στο παράρτημα Γ΄.

3. Αν συμβολίσουμε το $n-$οστό επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα του $f(x)$ με $\mathcal{I}_n\left[f(x)\right]$, όπου:

$$\mathcal{I}_n\left[f(x)\right] = \int_0^x \mathcal{I}_{n-1}\left[f(u)\right] du,$$

τότε:

$$\mathcal{M}\left[\mathcal{I}_n\left[f(x)\right]; s\right] = (-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(n+s)} f^*(s+n)$$

και

$$\mathcal{M}\left[\mathcal{I}_n^\infty\left[f(x)\right]; s\right] = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(n+s)} f^*(s+n)$$

όπου:

$$\mathcal{I}_n^\infty\left[f(x)\right] \int_x^\infty I_{n-1}^\infty\left[f(u)\right] du$$

4. Ισχύει:

$$\mathcal{M}\left[\left[f(x)g(x)\right]; s\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(u) g^*(s-u) du \text{ (Θεώρημα Συνέλιξης)}$$

Παράρτημα F′

Στοιχεία Θεωρίας Αριθμητικών Συναρτήσεων

Η βασική μας αναφορά σ' αυτό το κεφάλαιο είναι το σύγγραμμα [3, σελ. 24-35].

Η θεωρία αριθμών, όπως πολλοί άλλοι κλάδοι των Μαθηματικών, ασχολείται συχνά με ακολουθίες πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Στη θεωρία αριθμών τέτοιες ακολουθίες καλούνται αριθμητικές συναρτήσεις.

Ορισμός F′.1. Μια πραγματική ή μιγαδική συνάρτηση που ορίζεται στους θετικούς ακέραιους καλείται **αριθμητική συνάρτηση** ή **αριθμοθεωρητική συνάρτηση**

Αυτό το κεφάλαιο εισάγει μερικές αριθμητικές συναρτήσεις που παίζουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη της διαιρετότητας των ακεραίων και την κατανομή των πρώτων αριθμών. Επιπλέον, σ' αυτό το κεφάλαιο πραγματευόμαστε τον πολλαπλασιασμό κατά Dirichlet, κάτι που βοηθά στη διασαφήνιση των σχέσεων μεταξύ ποικίλων αριθμητικών συναρτήσεων.

Ξεκινούμε με δυο σημαντικά παραδείγματα, τη συνάρτηση **Möbius** και τη συνάρτηση **Euler**.

F′.1 Η συνάρτηση του Möbius $\mu(n)$

Ορισμός F′.2. Η συνάρτηση Möbius ορίζεται ως εξής:

$$\mu(1) = 1 \tag{F′.1}$$

Αν $n > 1$, γράφουμε $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ τότε:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{αν } a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{F′.2}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι $\mu(n) = 0$ αν και μόνο αν το n έχει στην ανάλυσή του σε πρώτους έναν τετραγωνικό παράγοντα μεγαλύτερο του 1 [1].

Η συνάρτηση Möbius εμφανίζεται σε πολλές διαφορετικές περιπτώσεις στη θεωρία αριθμών. Μια απ' τις βασικές της ιδιότητες είναι μια αξιοσημείωτα απλή σχέση για το άθροισμα διαιρετών $\sum_{d|n} \mu(d)$ που αναπτύσσεται πάνω στους θετικούς διαιρέτες του n.[2] Στη σχέση αυτή το $[x]$ δηλώνει το μέγιστο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του x.

Θεώρημα ϝ′.1. *Αν $n \geqslant 1$, έχουμε:*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 1 \\ 0, & \text{αν } n > 1 \end{cases} \tag{ϝ′.3}$$

Απόδειξη. Η σχέση είναι προφανής για $n = 1$. Θεωρούμε ότι $n > 1$ κι αναπτύσσουμε σε γινόμενο πρώτων $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$. Στο άθροισμα $\sum_{d|n} \mu(d)$ οι μόνοι μη μηδενικοί όροι προκύπτουν απ' το $d = 1$ και γι' αυτούς τους διαιρέτες του n οι οποίοι είναι διακριτοί πρώτοι.

Επομένως:

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p_1) + \ldots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \ldots + \\ + \mu(p_{k-1} p_k) + \ldots + \mu(p_1 p_2 \ldots p_k) = \\ = 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \\ + \ldots \binom{k}{k}(-1)^k = . \\ = (1-1)^k = 0 \end{aligned} \tag{ϝ′.4}$$

□

ϝ′.2 Η συνάρτηση του Euler $\phi(n)$

Ορισμός ϝ′.3. Αν $n \geq 1$, η συνάρτηση $\phi(n)$ ορίζεται ως ο αριθμός των θετικών ακέραιων που δεν ξεπερνούν την τιμή του n και που είναι πρώτοι προς αλλήλους με το n. Άρα:

$$\phi(n) = \sum_{1 \leq k \leq n,\ (k,n)=1} 1, \tag{ϝ′.5}$$

δηλαδή το άθροισμα εκτείνεται πάνω στα k που είναι πρώτοι προς αλλήλους με το k[3]

[1] Δηλαδή έναν αριθμό του οποίου το τετράγωνο είναι παράγοντας. Προφανώς το ίδιο θα ισχύει και για κάθε παράγοντα που εμφανίζεται σε δύναμη μεγαλύτερη του δύο.

[2] Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις ιδιότητες των αριθμών υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη ν' ανατρέξει στην ενότητα 2

[3] Δηλαδή $(k, n) = 1$, όπως ήδη έχουμε αναφέρει στο 2

Όπως στην περίπτωση του $\mu(n)$, υπάρχει μια απλή σχέση για το άθροισμα διαιρετών $\sum_{d|n} \phi(d)$

Θεώρημα F′.2. *Ισχύει:*

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$

Απόδειξη. Έστω ότι το S δηλώνει το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$. Χωρίζουμε τους ακεραίους του S σε **ξένα** σύνολα ως ακολούθως: Για κάθε διαιρέτη d του n, έχουμε:

$$A(d) = \{k : (k, n) = d, \ \ 1 \leq k \leq n\}$$

Με λίγα λόγια, το $A(d)$ περιέχει τα στοιχεία του S που έχουν με το n μέγιστο κοινό διαιρέτη d.[4]

Τα σύνολα $A(d)$ σχηματίζουν μια συλλογή συνόλων ξένων ανά δυο[5], των οποίων η ένωση είναι το S. Επομένως, αν το $f(d)$ δηλώνει τον αριθμό των ακέραιων στο $A(d)$, τότε:

$$\sum_{d|n} f(d) = n \tag{F′.6}$$

Όμως $(k, n) = d$ αν και μόνο αν $(k/d, n/d) = 1$ και $0 < k \leq n$ αν και μόνο αν $0 < k/d \leq n/d$. Επομένως, αν θέσουμε $q = k/d$, τότε υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων στο $A(d)$ κι εκείνων των ακεραίων q που ικανοποιούν την $0 < q < n/d$, $\ (q, n/d) = 1$. Ο αριθμός τέτοιων q είναι $\phi(n/d)$. Άρα $f(d) = \phi(n/d)$ κ' η εξίσωση (F′.6) γίνεται:

$$\sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) = n$$

Η παραπάνω, όμως, σχέση είναι ισοδύναμη με την $\sum_{d|n} \phi(d) = n$, καθώς, όταν το d διατρέχει όλους τους διαιρέτες του n, το ίδιο κάνει και το n/d. □

F′.3 Μια σχέση που συνδέει τα ϕ, μ

Η συνάρτηση Euler συνδέεται με τη συνάρτηση Möbius μέσω της παρακάτω σχέσης:

Θεώρημα F′.3. *Αν $n > 1$, έχουμε:*

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$$

[4] Για τον ορισμό και τις ιδιότητες του Μ.Κ.Δ μπορεί κανείς ν' ανατρέξει στην ενότητα 2 του κεφαλαίου 3

[5] Δηλαδή αν A, B δυο σύνολα που ανήκουν στη συλλογή τότε ισχύει $A \cup B = \emptyset$

Απόδειξη. Το άθροισμα (F′.5) που ορίζει το $\phi(n)$ μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή:

$$\phi(n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(n,k)} \right]$$

όπου, τώρα, το k διατρέχει τους ακέραιους που είναι μικρότεροι ή ίσοι με το n. Τώρα, χρησιμοποιούμε το θεώρημα F′.2, όπου το n αντικαθίσταται από το n, k κι η σχέση γίνεται:

$$\phi(n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(d) \sum_{d|(n,k)}^{\mu(d)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{d|n \\ d|k}} \mu(d)$$

Για ένα σταθερό διαιρέτη d του n θα πρέπει ν' αθροίσουμε πάνω απ' όλα τα k στο εύρος $1 \le k \le n$, τα οποία είναι πολλαπλάσια του d. Αν γράψουμε $k = qd$, τότε $1 \le k \le n$ αν και μόνο αν $1 \le q \le n/d$. Επομένως, το τελευταίο άθροισμα για το $\phi(n)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \sum_{q=1}^{n/d} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{q=1}^{n/d} 1 = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$$

□

F′.4 Μια σχέση γινομένου για τη συνάρτηση $\phi(n)$

Το άθροισμα για τη $\phi(n)$ στο θεώρημα F′.3 μπορεί να εκφραστεί σαν ένα γινόμενο που εκτείνεται πάνω απ' όλους τους διακριτούς πρώτους διαιρέτες του n.

Θεώρημα F′.4. *Για $n \ge 1$, έχουμε:*

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \tag{F′.7}$$

Απόδειξη. Για $n = 1$, το γινόμενο είναι κενό, καθώς δεν υπάρχουν πρώτοι που να διαιρούν το 1. Στην περίπτωση αυτή γίνεται κατανοητό ότι το γινόμενο θα πρέπει να έχει τιμή 1.

Θεωρούμε, λοιπόν, ότι $n > 1$ κι έστω $p_1, \ldots p_r$ οι διακριτοί πρώτοι διαιρέτες του n. Το γινόμενο μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) &= \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \\ &= 1 - \sum \frac{1}{p_i} + \sum \frac{1}{p_i p_j} - \sum \frac{1}{p_i p_j p_k} + \ldots + \frac{(-1)^r}{p_1 p_2 \cdots p_r} \end{aligned} \tag{F′.8}$$

Στο δεξί μέλος της σχέσης, σ' έναν όρο όπως ο $\sum \frac{1}{p_1 p_j p_k}$, είναι φανερό ότι θεωρούμε όλα τα πιθανά γινόμενα. $p_i p_j p_k$ των διακριτών παραγόντων του n, ανά τρια κάθε φορά. Παρατηρήστε ότι κάθε όρος στο δεξί μέλος της (F'.8) είναι της μορφής $\pm\frac{1}{d}$, όπου d είναι ο διαιρέτης του n που είναι είτε 1 είτε γινόμενο διακριτών πρώτων αριθμών. Ο αριθμητής ± 1 είναι ακριβώς το $\mu(d)$. Καθώς $\mu(d) = 0$ αν το d διαιρείται απ' το τετράγωνο κάθε p_i, παρατηρούμε ότι το άθροισμα στην (F'.8) είναι το ακριβώς το ίδιο με τη σχέση:

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}. \tag{F'.9}$$

□

Πολλές ιδιότητες της $\phi(n)$ μπορούν εύκολα να προκύψουν απ' την παραπάνω σχέση γινομένου. Μερικές απ' αυτές παρουσιάζονται στο επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα F'.5. *Η συνάρτηση $\phi(n)$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. $\phi(\rho^\alpha) = \rho^\alpha - \rho^{\alpha-1}$
2. $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)\frac{d}{\phi(d)}$, *όπου* $d = (m, n)$
3. $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$
4. $a|b$ *συνεπάγεται* $\phi(a)|\phi(b)$
5. *Το $\phi(n)$ είναι άρτιο για $n \geq 3$. Επιπλέον, αν το n έχει r διακριτούς περιττούς παράγοντες p, τότε $2^r|\phi(n)$*

Απόδειξη. 1. Προκύπτει άμεσα με την αντικατάσταση $n = p^a$ στην εξίσωση (F'.7).

2. Γράφουμε:

$$\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι κάθε πρώτος διαιρέτης του mn είναι πρώτος διαιρέτης είτε του m είτε του n κι αυτοί οι πρώτοι που διαιρούν τα m, n διαιρούν επίσης το (m, n) [6]. Επομένως:

$$\frac{\phi(mn)}{mn} = \prod_{p|mn}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\prod_{p|mn}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod_{p|(m,n)}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} =$$

$$= \frac{\phi(m)}{m}\frac{\phi(n)}{n}\left(\frac{\phi(d)}{d}\right)^{-1}$$

3. Είναι μια ειδική περίπτωση του 2. για $d = 1$.

[6] Παραπέμπουμε στο θεώρημα 2.1.4.

4. Θ' αποδείξουμε την πρόταση με χρήση της ιδιότητας 2.. Καθώς $a|b$, θα ισχύει $b = ac$[7], όπου $1 \leq c \leq b$. Αν $c = b$ τότε $a = 1$ και το ζητούμενο ικανοποιείται. Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι $c < b$ θα έχουμε, βάσει της ιδιότητας 2:

$$\phi(b) = \phi(ac) = \phi(a)\phi(c)\frac{d}{\phi(d)} = d\phi(a)\frac{\phi(c)}{\phi(d)}, \tag{F'.10}$$

όπου $d = (a, c)$. Τώρα, το αποτέλεσμα προκύπτει μ' επαγωγή στο b. Για $b = 1$, ισχύει. Θεωρούμε τότε, ότι η ιδιότητα 4. ισχύει για κάθε ακέραιο μικρότερο του b. Τότε ισχύει για το c, επομένως $\frac{\phi(d)}{\phi(c)}$ καθώς $d|c$. Άρα, το δεξί μέλος της (F'.10) είναι πολλαπλάσιο του $\phi(a)$, που σημαίνει ότι $\phi(a) = \phi(b)$.

5. Αν $n = 2^a, a \geq 2$, η ιδιότητα (1.) συνεπάγεται ότι η $\phi(n)$ είναι άρτια. Αν το n έχει τουλάχιστον έναν περιττό πρώτο παράγοντα, γράφουμε:

$$\phi(n) = n\prod_{p|n}\frac{p-1}{p} = \frac{n}{\prod_{p|n} p}\prod_{p|n}(p-1) = c(n)\prod_{p|n}(p-1), \tag{F'.11}$$

όπου ο $c(n)$ είναι ακέραιος. Το γινόμενο $\prod_{p|n}(p-1)$ πολλαπλασιαζόμενο μ' έναν άρτιο είναι άρτιο. Συνεπώς η $\phi(n)$ είναι άρτια. Επιπλέον, κάθε περιττός πρώτος αριθμός p (δηλαδή κάθε $p > 2$) συνεισφέρει έναν παράγοντα 2 στο γινόμενο αυτό. Επομένως $2^r|\phi(n)$, αν ο n έχει r διακριτούς περιττούς πρώτους παράγοντες.

□

F'.5 Το γινόμενο Dirichlet των αριθμητικών συναρτήσεων

Στο θεώρημα F'.3 αποδείξαμε ότι:

$$\phi(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$$

Το άθροισμα στο δεξί μέλος είναι μιας μορφής που συχνά συναντάται στη θεωρία αριθμών. Αυτά τ' αθροίσματα έχουν τη μορφή:

$$\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right),$$

όπου f, g είναι αριθμητικές συναρτήσεις κι αξίζει να μελετήσουμε κάποιες ιδιότητες κοινές γι' αυτά τ' αθροίσματα. Θα δούμε αργότερα ότι αθροίσματα αυτής της μορφής εμφανίζονται στη θεωρία των σειρών Dirichlet[8]. Ειν' ενδιαφέρον να αντιμετωπίσουμε

[7] Όπως αναφέρεται και στον ορισμό 2.1.1,

[8] Για τη θεωρία των σειρών Dirichlet υπάρχει πλούσια βιβλιογραφία. Παραπέμπουμε ενδεικτικά στα [4, σελ.161],[18]

αυτές τις σειρές σαν ένα νέο είδος πολλαπλασιασμού των αριθμητικών συναρτήσεων, κάτι το οποίο εισήχθηκε απ᾽ τον E.T. Bell το 1915.

Ορισμός Ϝ′.4. Αν f, g είναι δυο αριθμητικές συναρτήσεις, ορίζουμε το γινόμενο κατά Dirichlet (ή συνέλιξη Dirichlet) ως την αριθμητική συνάρτηση h που ορίζεται απ᾽ τη σχέση:

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Θα γράφουμε $f * g$ για την h και $(f * g)(n)$ για την $h(n)$. Το σύμβολο N θα χρησιμοποιείται για αριθμητικές συναρτήσεις, για τις οποίες $N(n) = n, \quad \forall n$. Βάσει του συμβολισμού αυτού, το θεώρημα Ϝ′.3 μπορεί να εκφραστεί στη μορφή:

$$\phi(n) = \mu(n) * N$$

Το επόμενο θεώρημα περιγράφει τις αλγεβραϊκές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού κατά Dirichlet.

Θεώρημα Ϝ′.6. *Ο πολλαπλασιασμός κατά Dirichlet είναι αντιμεταθετικός και προσεταιριστικός. Δηλαδή, για κάθε αριθμητική συνάρτηση f, g, k έχουμε*

$$f * g = g * f \quad \textit{αντιμεταθετική ιδιότητα}$$

$$(f * g) * k = f * (g * k) \quad \textit{προσεταιριστική ιδιότητα}$$

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι ο ορισμός της $f * g$ μπορεί επίσης να εκφραστεί με τον παρακάτω τρόπο:

$$(f * g)(n) = \sum_{ab=n} f(a) g(b)$$

όπου τα a, b μεταβάλλονται σ᾽ όλους τους θετικούς ακέραιους για τους οποίους το γινόμενο είναι n. Αυτό κάνει την αντιμεταθετική ιδιότητα αυταπόδεικτη.

Για την απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας θέτουμε $A = g*k$ και θεωρούμε $f * A = f * (g * k)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}(f * A)(n) = \sum_{ad=n} f(a) A(d) &= \sum_{ad=n} f(a) \sum_{bc=d} g(b) k(c) = \\ &= \sum_{abc=n} f(a) g(b) k(c)\end{aligned} \tag{Ϝ′.12}$$

Με παρόμοιο τρόπο θέτουμε $B = f * g$ και θεωρούμε $B * k$, κι έτσι καταλήγουμε στην ίδια σχέση για το $(B * k)(n)$. Επομένως, $f * A = B * k$, που σημαίνει ότι ο πολλαπλασιασμός κάτα $Dirichlet$ είναι προσεταιριστικός. □

Στη συνέχεια, εισάγουμε ένα ταυτοτικό στοιχείο για τον πολλαπλασιασμό αυτό:

Ορισμός F′.5. Η αριθμητική συνάρτηση I που δίνεται απ' τη σχέση

$$I(n) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 1 \\ 0, & \text{αν} n > 1 \end{cases}$$

καλείται ταυτοτική συνάρτηση.

Θεώρημα F′.7. *Για κάθε f ισχύει:*

$$I * f = f * I = f$$

Απόδειξη.

$$(f * I)(n) = \sum_{d|n} f(d) I\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d) \left[\frac{d}{n}\right] = f(n)$$

□

F′.6 Οι αντιστροφές κατά Dirichlet κι η σχέση της αντιστροφής κατά Möbius

Θεώρημα F′.8. *Αν f είναι μια αριθμητική συνάρτηση με $f(1) \neq 0$, υπάρχει μια μοναδική αριθμητική συνάρτηση f^{-1} που λέγεται αντιστροφή κατά Dirichlet της f, τέτοια ώστε*

$$f * f^{-1} = f^{-1} f = I$$

Επιπλέον, η f^{-1} δίνεται απ' τους αναδρομικούς τύπους

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}, \quad f^{-1}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) \quad \text{για } n > 1$$

Απόδειξη. Δοθείσας f, θα δείξουμε ότι η εξίσωση $(f * f^{-1})(n) = I(n)$ έχει μοναδική λύση για τις τιμές $f^{-1}(n)$. Για $n = 1$, θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$(f * f^{-1})(n) = I(1)$$

που απλοποιείται στην

$$f(1) f^{-1}(1)$$

Καθώς $f(1) \neq 0$, υπάρχει μια και μοναδική λύση, η $f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}$. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι οι τιμές $f^{-1}(k)$ της συνάρτησης έχουν μοναδικά οριστεί για κάθε $k < n$. Τότε έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $(f * f^{-1})(n) = I(n)$, ή

$$\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) = 0$$

Η σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$f(1)f^{-1}(1) + \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) = 0$$

Αν οι τιμές $f^{-1}(d)$ είναι γνωστές για όλους τους διαιρέτες $d < n$ τότε θα υπάρχει μια μοναδικά ορισμένη τιμή για την $f^{-1}(n)$, δηλαδή:

$$f^{-1}(1) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d),$$

για $f(1) \neq 0$. Η σχέση αυτή, μέσω της επαγωγής, δείχνει την ύπαρξη και μοναδικότητα της f. □

Ορισμός F′.6. Ορίζουμε τη μοναδιαία συνάρτηση u ως την αριθμητική συνάρτηση για την οποία ισχύει $u(n) = 1$, για κάθε n.

Το θεώρημα F′.2 δηλώνει ότι $\sum_{d|n} \mu(d) = I(n)$. Με χρήση του πολλαπλασιασμού κατά Dirichlet αυτό γίνεται:

$$\mu * u = I$$

Επομένως, τα u, μ είναι κατά Dirichlet αντιστροφές το ένα για το άλλο και γράφουμε:

$$u = \mu^{-1}, \text{και} \ \ \mu = u^{-1}.$$

Αυτή η απλή ιδιότητα της συνάρτησης Möbius, μαζί με την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού κατά Dirichlet μας βοηθά να δώσουμε μια εύκολη απόδειξη για το παρακάτω θεώρημα:

Τύπος για την αντιστροφή Möbius F′.9. *Η εξίσωση:*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \tag{F′.13}$$

συνεπάγεται ότι:

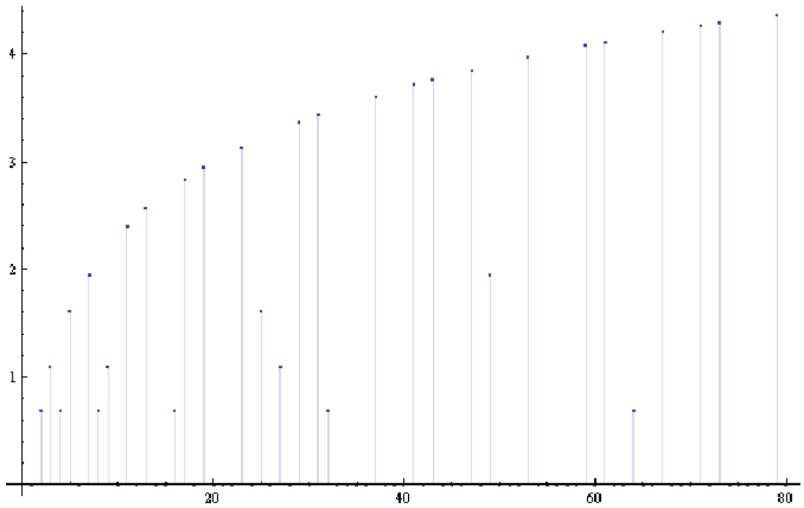
$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) \tag{F′.14}$$

Αντίστροφα, η (F′.14) συνεπάγεται την (F′.13).

Απόδειξη. Η εξίσωση (F′.13) δηλώνει ότι $f = g * u$. Αν πολλαπλασιάσουμε με μ την εξίσωση, θα έχουμε $f * \mu = (g * u) * \mu = g * (u * \mu) = g * I = g$, δηλαδή την εξίσωση (F′.14). Αντίστροφα, ο πολλαπλασιασμός της $f * \mu = g$ με u δίνει την εξίσωση (F′.13). □

Η αντιστροφή κατά Möbius έχει ήδη παρουσιαστεί με το ζεύγος σχέσεων στα θεωρήματα F′.2 και F′.3:

$$n = \sum_{d|n} \phi(d), \quad \phi(n) = \sum_{d|n} n(d)\left(\frac{n}{d}\right) \tag{F′.15}$$



Εικόνα F′.1: Η συνάρτηση $\Lambda(n)$ του Mangoldt

F′.7 Η συνάρτηση $\Lambda(n)$ του Mangoldt

Εισάγουμε τη συνάρτηση $\Lambda(n)$ του Mangoldt που παίζει κεντρικό ρόλο στην κατανομή των πρώτων αριθμών.

Ορισμός F′.7. Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ ορίζουμε:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{αν } \ n = p^m, \text{για κάποιο πρώτο } \ p \ \text{ και κάποιο } \ m \geq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ακολουθεί ένας πίνακας με τις πρώτες 100 τιμές της $\Lambda(n)$.

n	$\Lambda(n)$	n	$\Lambda(n)$	n	$\Lambda(n)$	n	$\Lambda(n)$
1	0	26	0	51	0	76	0
2	ln(2)	27	ln(3)	52	0	77	0
3	ln(3)	28	0	53	ln(53)	78	0
4	ln(2)	29	ln(29)	54	0	79	ln(79)
5	ln(5)	30	0	55	0	80	0
6	0	31	ln(31)	56	0	81	ln(9)
7	ln(7)	32	ln(2)	57	0	82	0
8	ln(2)	33	0	58	0	83	ln(83)
9	ln(3)	34	0	59	ln(59)	84	0
10	0	35	0	60	0	85	0
11	ln(11)	36	0	61	ln(61)	86	0
12	0	37	ln(37)	62	0	87	0
13	ln(13)	38	0	63	0	88	0
14	0	39	0	64	ln(2)	89	ln(89)
15	0	40	0	65	0	90	0
16	ln(2)	41	ln(41)	66	0	91	0
17	ln(17)	42	0	67	ln(67)	92	0
18	0	43	ln(43)	68	0	93	0
19	ln(19)	44	0	69	0	94	0
20	0	45	0	70	0	95	0
21	0	46	0	71	ln(71)	96	0
22	0	47	ln(47)	72	0	97	ln(97)
23	ln(23)	48	0	73	ln(73)	98	0
24	0	49	ln(7)	74	0	99	0
25	ln(5)	50	0	75	0	100	0

Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος δείχνει πώς η $\Lambda(n)$ προκύπτει με τρόπο φυσικό απ' το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής[9].

Θεώρημα ϝ′.10. *Αν* $n \geq 1$ *έχουμε:*

$$\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d) \tag{ϝ′.16}$$

Απόδειξη. Το θεώρημα ισχύει για $n = 1$, καθώς και τα δυο μέλη της σχέσης είναι μηδέν. Επομένως, θεωρούμε ότι $n > 1$ και γράφουμε:

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k}$$

Αν πάρουμε το λογάριθμο στα δυο μέλη της σχέσης, προκύπτει:

$$\ln n = \sum_{k=1}^{r} a_k \ln p_k$$

Τώρα, θεωρούμε το άθροισμα στο δεξί μέλος της (ϝ′.16). Οι μόνοι μη μηδενικοί όροι για το άθροισμα αυτό προκύπτουν απ' τους διαιρέτες d της μορφής p_k^m για $m = 1, 2, \ldots, a_k$ και $k = 1, 2, \ldots, r$. Άρα:

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \Lambda({p_k}^m) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \ln p_k = \\ = \sum_{k=1}^{r} a_k \ln p_k = \ln n\end{aligned}$$

που αποδεικνύει την (ϝ′.16). □

Θεώρημα ϝ′.11. *Αν* $n \geq 1$ *έχουμε:*

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \ln \frac{n}{d} - \sum_{d|n} \mu(d) \ln d$$

Απόδειξη. Αντιστρέφοντας τη σχέση (ϝ′.16) με αντιστροφή κατά Möbius, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \ln \frac{n}{d} = \ln n \sum_{d|n} \mu(d) - \sum_{d|n} \mu(d) \ln d = \\ = I(n) \ln n - \sum_{d|n} \mu(d) \ln d \end{aligned} \tag{ϝ′.17}$$

Καθώς $I(n) \ln n = 0$ για κάθε n, καταλήγουμε στην ισχύ της σχέσης. □

[9]Βλ. 2.2.1, 2.2.3

ϝ′.8 Πολλαπλασιαστικές Συναρτήσεις

Έχουμε ήδη σημειώσει ότι το σύνολο όλων των αριθμητικών συναρτήσεων f με $f(1) \neq 0$[10] ορίζει μια αβελιανή ομάδα[11] υπό τον πολλαπλασιασμό Dirichlet. Στην ενότητα αυτή θα συζητήσουμε για ένα σημαντικό υποσύνολο του συνόλου αυτού, τις πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις.

Ορισμός ϝ′.8. Μια αριθμητική συνάρτηση f καλείται πολλαπλασιαστική αν η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική κι αν

$$f(mn) = f(m)f(n), \text{ αν } (m,n) = 1$$

Μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση f καλείται πλήρως πολλαπλασιαστική, αν επιπλέον ισχύει:

$$f(mn) = f(m)f(n), \ \forall m,n$$

Παρακάτω παρατίθενται ορισμένα παραδείγματα πολλαπλασιαστικών συναρτήσεων:

1. Έστω $f_a(n) = n^a$, όπου το a είναι μια πραγματική ή μιγαδική σταθερά. Αυτή η συνάρτηση είναι πλήρως πολλαπλασιαστική. Συγκεκριμένα, η μοναδιαία συνάρτηση $u = f_o$ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική. Δηλώνουμε τη συνάρτηση f_a με N^a.

2. Η ταυτοτική συνάρτηση $I(n) = \left[\frac{1}{n}\right]$ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική.

3. Η συνάρτηση Möbius είναι πολλαπλασιαστική αλλά όχι πλήρως πολλαπλασιαστική. Αυτό προκύπτει εύκολα απ' τον ορισμό του $\mu(n)$. Θεωρούμε δυο σχετικά πρώτους, όπως τους έχουμε ορίσει στον ορισμό 2.1.3, ακέραιους m, n. Αν είτε το n είτε το m έχει έναν τετραγωνικό πρώτο παράγοντα, τότε το ίδιο ισχύει και για τα m, n και τα $\mu(mn)$ και $\mu(m)\mu(n)$ είναι μηδενικά. Αν ούτε το m ούτε το n έχει τετραγωνικό παράγοντα, γράφουμε $m = p_1 \dots p_s$, και $n = q_1 \dots q_t$, όπου p_i και q_i είναι διακριτοί πρώτοι. Τότε, το $\mu(m) = (-1)^s, \ \mu(n) = (-1)^t$ και $\mu(mn) = (-1)^{s+t} = \mu(m)\mu(n)$. Αυτό δείχνει ότι η μ είναι πολλαπλασιαστική.

4. Η συνάρτηση Euler $\phi(n)$ είναι πολλαπλασιαστική. Αυτό αποδεικνύεται στο (3) του θεωρήματος ϝ′.5. Δεν είναι όμως πλήρως πολλαπλασιαστική.

5. Το σύνηθες γινόμενο $f \cdot g$ δυο αριθμητικών συναρτήσεων ορίζεται με τη γνωστή σχέση:

$$(fg)(n) = f(n)g(n)$$

[10] Επιλέγουμε $f(1) \neq 0$ για νάποκλείσουμε τη μηδενική συνάρτηση.[;, σελ. 26]

[11] Πρόκειται για όρο της θεωρίας της Άλγεβρας. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [30, σελ. 180]

Όμοια, το πηλίκο ορίζεται απ' τη σχέση:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(n) = \frac{f(n)}{g(n)}$$

όπου $g(n) \neq 0$. Αν οι f και g είναι πολλαπλαστιαστικές, το ίδιο ισχύει και για τις fg, $\frac{f}{g}$. Όμοια, αν οι f και g είναι πλήρως πολλαπλαστιαστικές, το ίδιο ισχύει και για τις fg, $\frac{f}{g}$.

Καταλήγουμε σε ορισμένες κοινές ιδιότητες για όλες τις πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις.

Θεώρημα F′.12. *Αν η f είναι πολλαπλασιαστική, τότε $f(1) = 1$.*

Απόδειξη. Έχουμε $f(n) = f(1)f(n)$, καθώς $(n, 1) = 1$. Καθώς η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν, έχουμε $f(n) \neq 0$, για κάποιο n, οπότε, $f(1) = 1$. □

Με βάση το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση Mangoldt δεν είναι πολλαπλασιαστική, καθώς $\Lambda(1) = 0$.

Θεώρημα F′.13. *Δίνεται f με $f(1) = 1$. Τότε:*

1. *Η f είναι πολλαπλασιαστική αν και μόνο αν:*

$$f({p_1}^{a_1} \dots {p_r}^{a_r}) = f({p_1}^{a_1}) \dots f({p_r}^{a_r})$$

για όλους τους πρώτους p_i και όλους τους ακέραιους.

2. *Αν η f είναι πολλαπλασιαστική, τότε η f είναι πλήρως πολλαπλαστική αν και μόνο εαν*

$$f(p^a) = f(p)^a$$

για όλους τους πρώτους κι όλους τους ακεραίους $a \geq 1$

Βιβλιογραφία

[1] M. Abramowitz και I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Dover Publications, New York, 9η έκδοση, 1972.

[2] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis.* Mc-Graw Hill, United States of America, 3η έκδοση, 1979.

[3] Tom M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory.* Springer-Verlag, New York, 1976.

[4] Tom M. Apostol. *Modular Forms and Dirichlet Series in Number Theory.* Springer-Verlag, 2η έκδοση, 1976.

[5] S. Bochner και K. Chandrasekharan. *Fourier Transforms.* Princeton University Press, New York, 1949.

[6] P. Borwein, S. Choi, B. Rooney και A. Weirathmueller. *The Riemann Hypothesis.* Springer Verlag, Berlin, 2006.

[7] Ronald N. Bracewell. *The Fourier Transform and Its Applications.* Mc Graw-Hill, 3η έκδοση, 2000.

[8] C. Caratheodory. *Theory of Functions of a Complex Variable*, τόμος 1. Chelsea Publishing, New York, 1954.

[9] H.M. Edwards. *Riemann's Zeta Function.* Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York and London, 1974.

[10] St. R. Finch. *Mathematical Constants.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[11] Gerald B. Folland. *Fourier Analysis and its Applications.* Wadsworth and Brooks/Cole, California, 1992.

[12] Th.W. Gamelin. *Complex Analysis.* Springer, New York, 2001.

[13] R. Godement. *Analysis II.* Universitext. Springer Verlag, New York, 2003.

[14] C. Goldstein, N. Schappacher και J. Schwermer. *The shaping of arithmetic: after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*. Springer, Berlin, 2007.

[15] Mario O. Gonzalez. *Classical Complex Analysis*. Marcel Dekker,Inc., New York, 1992.

[16] I. Gradshteyn και I. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Elsevier, 7η έκδοση, 2007.

[17] Paul R. Halmos. *Αφελής Συνολοθεωρία*. Εκκρεμές, Αθήνα, 2002.

[18] G.H. Hardy και M. Rietz. *Dirichlet Series*. Cambridge University Press, London, 1915.

[19] Ch. Jordan και H.C. Carver. *Calculus of Finite Differences*. Chelsea Publishing Company, New York, 1950.

[20] Konrad Knopp. *Infinite Sequences and Series*. Dover Publications, New York, 1956.

[21] Ed. Landau. *Foundations of Analysis*. Chelsea Publications Company, New York, 3η έκδοση, 1966.

[22] G. Loria. *Istor'ia twn Majhmatik'wn*. χ.χ.

[23] Nanjudiah. Notes on the beta and gamma function. *American Mathematical Monthly*, 76:411–413, 1969.

[24] Melvyn B. Nathanson. *Elementary Methods in Number Theory*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[25] A. Erdelyi. *Higher Transcedental Functions*, τόμος I. McGraw-Hill Book Company, USA, 1953.

[26] R. Remmert. *Theory of Complex Functions*. Αριθμός 122 στο Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, New York, 1991.

[27] B. Riemann. *Collected Papers*. Dover, New York, 1953.

[28] B.W. Roos. *Analytic Functions and Distributions in Physics and Engineering*. John Wiley and Sons, New York, 1969.

[29] S.L. Segal. *Nine Introductions in Complex Analysis*. Elsevier, Amsterdam, 2008.

[30] Victor Shoup. *A computational introduction to Number Theory and Algebra*. Cambridge University Press, 2005.

[31] J. Stopple. *A primer on Analytic Number Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[32] Gerald Tenenbaum. *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory*. Αριθμός 46 στο Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[33] E. T. Whittaker και G. N. Watson. *A course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, Fettee Lane B.C., London, 2η έκδοση, 1915.