



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ  
ΗΛΕΚΤΡΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

## Εύρεση Ρυθμών Διαρροής σε Περιοδικές Οπτικές Διατάξεις

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ευδοκία Χ. Δρεμέτσικα

Επιβλέπων : Ηλίας Ν. Γλύτσης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Φεβρουάριος 2012





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ  
ΗΛΕΚΤΡΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

## Εύρεση Ρυθμών Διαρροής σε Περιοδικές Οπτικές Διατάξεις

### ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ευδοκία Χ. Δρεμέτσικα

**Επιβλέπων :** Ηλίας Ν. Γλύτσης

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 31<sup>η</sup> Φεβρουαρίου 2012.

.....  
Η. Γλύτσης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....  
Ι. Ρουμελιώτης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....  
Ι. Βομβορίδης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Φεβρουάριος 2012

.....  
Ευδοκία Χ. Δρεμέτσικα

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Ευδοκία Χ. Δρεμέτσικα, 2012.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## Περίληψη

Οι σύγχρονες εξελίξεις της οπτικής τεχνολογίας θέτουν στο επίκεντρο των προσδοκιών την οπτική ολοκλήρωση, στον τομέα των υπολογιστικών συστημάτων, και την επεξεργασία σήματος αποκλειστικά με οπτικά μέσα, στον τομέα των τηλεπικοινωνιών. Για την επίτευξη αυτών, είναι αναγκαίες οι περιοδικές οπτικές διατάξεις ή περιθλαστικά οπτικά στοιχεία τα οποία βασίζονται στα περιθλαστικά φράγματα. Στην παρούσα εργασία, για την θεωρητική μελέτη της περίθλασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στις περιοδικές οπτικές διατάξεις, αλλά και για τις προσομοιώσεις που έγιναν, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος συζευγμένων κυμάτων (RCWA) σε συνδυασμό με την ανάλυση διαρρέοντος ρυθμού (leaky-mode). Οι ρυθμοί διαρροής είναι πολύ σημαντικοί στη μελέτη των οπτικών διατάξεων και κυματοδηγών, καθώς χρησιμεύουν στην μαθηματική διατύπωση του ακτινοβολούντος πεδίου με πεπερασμένο πλήθος ρυθμών. Στόχος της εργασίας είναι η παρουσίαση δύο νέων μη αυστηρών αριθμητικών μεθόδων για την εύρεση των ρυθμών σε περιοδικές οπτικές διατάξεις. Οι δύο μέθοδοι, Μέθοδος Πλάτους Ανακλαστικότητας Ισχύος (RMM) και Μέθοδος Φάσης Συντελεστού Ανάκλασης (RCPM), χρησιμοποιούν τον συντελεστή ανάκλασης που προκύπτει από την ανάλυση RCWA και υπολογίζουν τους ρυθμούς γραφικά, μέσω Λορεντζιανών κατανομών. Οι προσομοιώσεις με την εφαρμογή των μεθόδων γίνονται για τέσσερις διατάξεις περιθλαστικών φραγμάτων (ολογραφικών φραγμάτων και φραγμάτων επιφανειακής χάραξης), σε πόλωση TE και TM. Για κάθε διάταξη, εξάγονται οι τιμές του συντελεστή διάδοσης καθώς και του συντελεστή σύζευξης, ενώ τα αποτελέσματα, που παρουσιάζονται αναλυτικά και σε σύγκριση με αποτελέσματα αυστηρής μεθόδου, οδηγούν σε χρήσιμα συμπεράσματα για την αξιολόγηση των δύο μεθόδων.

## Λέξεις Κλειδιά

Οπτική Ολοκλήρωση, Περιοδικές Οπτικές Διατάξεις, Περιθλαστικά Οπτικά Στοιχεία, Περιθλαστικά Φράγματα, RCWA, Ρυθμοί Διαρροής, RMM, RCPM, Ολογραφικό Φράγμα, Φράγμα Επιφανειακής Χάραξης, Λορεντζιανή Κατανομή, Συντελεστής Σύζευξης, Συντελεστής Διάδοσης

## **Abstract**

The recent evolution in optical technology aims at the optical integration in the area of informatics, as well as the all-optical signal processing in the area of telecommunications. To this end, periodic optical devices and specifically Diffractive Optical Elements (DOEs) are necessary. DOEs are based on diffraction gratings. In this thesis, the Rigorous Coupled Wave Analysis (RCWA) combined with the leaky-mode approach are used both in the theoretical description of the diffraction of electromagnetic waves in periodic optical devices and in the simulation of this phenomenon. Leaky modes are very important to the study of optical devices and waveguides as they are used for the mathematical formulation of radiation field with a discrete finite sum of modes. The objective of this thesis is to present two new non-rigorous numerical methods for the determination of guided and leaky modes in periodic optical devices: The Reflectance Magnitude Method (RMM) and the Reflection Coefficient Phase Method (RCPM); both these methods use the reflection coefficient resulting from RCWA to extract modes graphically from Lorentzian-type peaks. The application of these methods through the simulation of four different diffraction gratings (holographic gratings and surface-relief gratings) for both polarizations (TE and TM) is included. For each device, the values of transmission coefficient and coupling coefficient are extracted. The results are presented in detail, in comparison with those of rigorous methods (solving the dispersion equation in the complex plane) and finally lead to useful conclusions for the evaluation of the two numerical methods.

## **Key Words**

Optical Integration, Periodic Optical Devices, Diffractive Optical Elements (DOEs), Diffraction Gratings, Rigorous Coupled Wave Analysis (RCWA), Leaky Modes, Reflectance Magnitude Method (RMM), Reflection Coefficient Phase Method (RCPM), Holographic Grating, Surface-Relief Grating, Lorentzian Curve, Coupling Coefficient, Transmission Coefficient

## **Ευχαριστίες**

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της παρούσας διπλωματικής εργασίας κ. Ηλία Ν. Γλύτση για την πολύτιμη βοήθειά του, την επιστημονική του καθοδήγηση, αλλά και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε για την εκπόνηση αυτής της εργασίας. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους για την υποστήριξη και την συμπαράστασή τους.





# Περιεχόμενα

<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>19</b>
<b>2 Θεωρία Κυμάτων σε Οπτικά Συστήματα</b>	<b>22</b>
2.1 Φως – σωματίδιο και κύμα.....	22
2.2 Το φαινόμενο της περίθλασης.....	24
2.3 Ρυθμοί Κυμάτων σε Επίπεδους Οπτικούς Κυματοδηγούς.....	28
2.4 Ρυθμοί Διαρροής (Leaky Modes).....	31
<b>3 Θεωρία Φραγμάτων περίθλασης</b>	<b>34</b>
3.1 Εισαγωγικά.....	34
3.2 Εφαρμογές περιθλαστικών φραγμάτων.....	35
3.3 Είδη περιθλαστικών φραγμάτων.....	36
3.4 Εξίσωση περιθλαστικών φραγμάτων (grating equation).....	38
3.5 Rigorous Coupled Wave Analysis.....	42
3.6 Ανάλυση Διαρρέοντος ρυθμού - Leaky Mode Analysis.....	64
<b>4 Μέθοδοι εύρεσης ρυθμών μέσω του συντελεστή ανάκλασης</b>	<b>67</b>
4.1 Εισαγωγικά.....	67
4.2 Μέθοδος Πλάτους Ανακλαστικότητας Ισχύος (Reflectance Magnitude Method) .....	67
4.3 Μέθοδος Φάσης Συντελεστού Ανάκλασης (Reflection Coefficient Phase Method).....	70

<b>5 Εφαρμογή – Αποτελέσματα</b>	<b>72</b>
5.1 Εισαγωγικά.....	72
5.2 Φράγμα Επιφανειακής Χάραξης Ορθογωνικού Προφίλ (Surface- Relief Rectangular Grating).....	74
5.3 Κεκλιμένο Φράγμα Επιφανειακής Χάραξης (Slanted Surface- Relief Grating) ..	89
5.4 Ολογραφικό περιθλαστικό φράγμα 1 (Holographic Grating in the waveguide) ..	99
5.5 Ολογραφικό περιθλαστικό φράγμα 2 (Holographic Grating over the waveguide) .....	108
5.6 Μοντέλο απλής ρίζας για το 2 <sup>ο</sup> ολογραφικό περιθλαστικό φράγμα .....	118
<b>6 Συμπεράσματα</b>	<b>129</b>

## Κατάλογος Πινάκων

5.2.1 Παράμετροι κυμάτωσης συντελεστών $\alpha$ και $\beta$ για TE πόλωση.....	79
5.2.2 Τιμές συντελεστών $\alpha$ και $\beta$ φράγματος επιφανειακής χάραξης ορθογωνικού προφίλ για TE πόλωση .....	83
5.2.3 Παράμετροι κυμάτωσης συντελεστών $\alpha$ και $\beta$ για TM πόλωση .....	86
5.2.4 Τιμές συντελεστών $\alpha$ και $\beta$ φράγματος επιφανειακής χάραξης ορθογωνικού προφίλ για TM πόλωση .....	88
5.3.1 Τιμές συντελεστών $\alpha$ και $\beta$ κεκλιμένου φράγματος επιφανειακής χάραξης για TE πόλωση .....	94
5.3.2 Τιμές συντελεστών $\alpha$ και $\beta$ κεκλιμένου φράγματος επιφανειακής χάραξης για TM πόλωση .....	99
5.4.1 Τιμές συντελεστών $\alpha$ και $\beta$ 1 <sup>ου</sup> ολογραφικού φράγματος για TE πόλωση .....	103
5.4.2 Τιμές συντελεστών $\alpha$ και $\beta$ 1 <sup>ου</sup> ολογραφικού φράγματος για TM πόλωση .....	108
5.5.1 Τιμές συντελεστών $\alpha$ και $\beta$ 2 <sup>ου</sup> ολογραφικού φράγματος για TE πόλωση .....	113
5.5.2 Τιμές συντελεστών $\alpha$ και $\beta$ 2 <sup>ου</sup> ολογραφικού φράγματος για TM πόλωση .....	117
5.6.1 Τιμές συντελεστών $\alpha$ και $\beta$ 2 <sup>ου</sup> ολογραφικού φράγματος με τη μέθοδο απλής ρίζας για TE πόλωση .....	123
5.6.2 Τιμές συντελεστών $\alpha$ και $\beta$ 2 <sup>ου</sup> ολογραφικού φράγματος με τη μέθοδο απλής ρίζας για TM πόλωση.....	128
6.1 Αποτελέσματα συντελεστών $\alpha$ και $\beta$ όλων των διατάξεων σε TE και TM πόλωση για σύγκριση .....	129
6.2 Διορθωμένες τιμές συντελεστών $\alpha$ και $\beta$ του 2ου ολογραφικού φράγματος με τη μέθοδο απλή ρίζας σε TE και TM πόλωση για σύγκριση .....	129

## Κατάλογος Εικόνων

2.2.1 Μέτωπο κύματος με βάση την αρχή του Huygens .....	25
2.2.2 Ερμηνεία περίθλασης με την αρχή του Huygens .....	25
2.2.3 Ένταση ισχύος για περίθλαση από απλή σχισμή .....	26
2.2.4 Ένταση ισχύος για τέσσερις περιπτώσεις περίθλασης από πολλαπλές σχισμές .	27
2.2.5 Εικόνα περίθλασης σε θαλάσσια κύματα .....	27
2.2.6 Εικόνα περίθλασης από απλή σχισμή .....	27
2.3.1 Κυματοδηγός παραλλήλων πλακών τριών στρωμάτων .....	28
2.3.2 Πιθανοί ρυθμοί σε επίπεδο κυματοδηγό .....	30
2.4.1 Κανονικοποιημένο πεδίο (α) κυματοδηγούμενου ρυθμού (χωρίς grating) (β) διαρρέοντος ρυθμού (με grating) (γ) φανταστικό μέρος ρυθμού .....	32
3.1.1 Ένταση ισχύος περίθλασης Fraunhofer ως προς τη γωνία περίθλασης .....	35
3.3.1 Περιθλαστικά φράγματα από σειρά πολλαπλών σχισμών .....	36
3.3.2 Παραδείγματα φραγμάτων επιφανειακής χάραξης .....	37
3.3.3 Ολογραφικό φράγμα .....	38
3.4.1 Γεωμετρία περιθλαστικού φράγματος και τάξεις περίθλασης .....	39
3.4.2 (α) Διάγραμμα K-χώρου (β) αντιστοιχία στην πραγματική γεωμετρία .....	40
3.4.3 (α) διάγραμμα K-χώρου με $\vec{K} = K\hat{x}$ και τα πολλαπλάσιά του (β) τελικό διάγραμμα με τις περιθλαστικές τάξεις .....	41
3.4.4 Διάγραμμα K-χώρου για τη γενική περίπτωση $\vec{K} = K_x\hat{x} + K_z\hat{z}$ .....	42
3.5.1 Διάταξη εφαρμογής της RCWA σε TE πόλωση .....	43
3.5.2 Διάταξη εφαρμογής της RCWA σε TM πόλωση .....	55
4.2.1 Τυπική διάταξη περιθλαστικού φράγματος με βοηθητικό στρώμα .....	68
5.2.1 Τοπολογία φράγματος επιφανειακής χάραξης ορθογωνικού προφίλ .....	74
5.2.2 Τοπολογία φράγματος επιφανειακής χάραξης ορθογωνικού προφίλ με βοηθητικό στρώμα υψηλού δείκτη διάθλασης .....	74
5.2.3 Ισχύς $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x. Σύγκριση για τρεις τιμές της απόστασης d για TE πόλωση .....	75

5.2.4 Συντελεστής σύζευξης $\alpha$ συναρτήσει της απόστασης $d$ , φράγματος επιφανειακής χάραξης ορθογωνικού προφίλ για TE πόλωση .....	76
5.2.5 Συντελεστής διάδοσης $\beta$ συναρτήσει της απόστασης $d$ , φράγματος επιφανειακής χάραξης ορθογωνικού προφίλ για TE πόλωση .....	77
5.2.6 Σύγκριση παραμέτρων κυμάτωσης συντελεστή $\beta$ για διαφορετικά $n_{aux}$ (TE) .....	78
5.2.7 Σύγκριση παραμέτρων κυμάτωσης συντελεστή $\alpha$ για διαφορετικά $n_{aux}$ (TE) .....	78
5.2.8 Πλάτος κυμάτωσης των συντελεστών σύζευξης και διάδοσης συναρτήσει του δείκτη διάθλασης του βοηθητικού στρώματος (TE) .....	79
5.2.9 Μέση τιμή κυμάτωσης των συντελεστών σύζευξης και διάδοσης συναρτήσει του δείκτη διάθλασης του βοηθητικού στρώματος .....	80
5.2.10 Κυμάτωση των συντελεστών $\alpha$ και $\beta$ σε σχέση με την περίοδο του φράγματος ..	81
5.2.11 Για το φράγμα επιφανειακής χάραξης ορθογωνικού προφίλ για TE πόλωση (α) φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην $x - \text{συνιστώσα}$ (β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης .....	82
5.2.12 Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην $x - \text{συνιστώσα}$ .....	82
5.2.13 Συντελεστής σύζευξης $\alpha$ συναρτήσει της απόστασης $d$ , φράγματος επιφανειακής χάραξης ορθογωνικού προφίλ για TM πόλωση .....	84
5.2.14 Συντελεστής διάδοσης $\beta$ συναρτήσει της απόστασης $d$ , φράγματος επιφανειακής χάραξης ορθογωνικού προφίλ για TM πόλωση .....	84
5.2.15 Σύγκριση παραμέτρων κυμάτωσης συντελεστή $\alpha$ για διαφορετικά $n_{aux}$ (TM) ..	85
5.2.16 Σύγκριση παραμέτρων κυμάτωσης συντελεστή $\beta$ για διαφορετικά $n_{aux}$ (TM) ..	85
5.2.17 Πλάτος κυμάτωσης των συντελεστών σύζευξης και διάδοσης συναρτήσει του δείκτη διάθλασης του βοηθητικού στρώματος $n_{aux}$ (TM) .....	86
5.2.18 Μέση τιμή κυμάτωσης των συντελεστών σύζευξης και διάδοσης συναρτήσει του δείκτη διάθλασης του βοηθητικού στρώματος $n_{aux}$ (TM) .....	86

5.2.19 Για το φράγμα επιφανειακής χάραξης ορθογωνικού προφίλ για TM πόλωση	
(α) φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην $x$ – συνιστώσα	
(β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης .....	87
5.2.20 Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην $x$ – συνιστώσα .....	88
5.3.1 Τοπολογία κεκλιμένου φράγματος επιφανειακής χάραξης .....	89
5.3.2 Τοπολογία κεκλιμένου φράγματος επιφανειακής χάραξης με βοηθητικό στρώμα υψηλού δείκτη διάθλασης .....	89
5.3.3 Ισχύς $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα- $x$ . Σύγκριση για τρεις τιμές της απόστασης $d$ για TE πόλωση .....	90
5.3.4 Συντελεστής σύζευξης $\alpha$ συναρτήσει της απόστασης $d$ , κεκλιμένου φράγματος επιφανειακής χάραξης για TE πόλωση .....	91
5.3.5 Συντελεστής διάδοσης $\beta$ συναρτήσει της απόστασης $d$ , κεκλιμένου φράγματος επιφανειακής χάραξης για TE πόλωση .....	91
5.3.6 Fitting συντελεστή σύζευξης $\alpha$ συναρτήσει της απόστασης $d$ με ημιτονοειδή συνάρτηση για το κεκλιμένο φράγμα και TE πόλωση .....	92
5.3.7 Fitting συντελεστή διάδοσης $\beta$ συναρτήσει της απόστασης $d$ με ημιτονοειδή συνάρτηση για το κεκλιμένο φράγμα και TE πόλωση .....	92
5.3.8 Για το κεκλιμένο φράγμα επιφανειακής χάραξης για TE πόλωση	
(α) φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην $x$ – συνιστώσα	
(β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης .....	93
5.3.9 Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην $x$ – συνιστώσα .....	94
5.3.10 Ισχύς $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα- $x$ . Σύγκριση για τρεις τιμές της απόστασης $d$ για TM πόλωση .....	95
5.3.11 Συντελεστής σύζευξης $\alpha$ συναρτήσει της απόστασης $d$ , κεκλιμένου φράγματος επιφανειακής χάραξης για TM πόλωση .....	96
5.3.12 Συντελεστής διάδοσης $\beta$ συναρτήσει της απόστασης $d$ , κεκλιμένου φράγματος επιφανειακής χάραξης για TM πόλωση .....	96

5.3.13 Fitting συντελεστή σύζευξης $\alpha$ συναρτήσει της απόστασης $d$ με ημιτονοειδή συνάρτηση για το κεκλιμένο φράγμα και TM πόλωση .....	97
5.3.14 Fitting συντελεστή διάδοσης $\beta$ συναρτήσει της απόστασης $d$ με ημιτονοειδή συνάρτηση για το κεκλιμένο φράγμα και TM πόλωση .....	97
5.3.15 Για το κεκλιμένο φράγμα επιφανειακής χάραξης για TM πόλωση	
(α) φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην $x$ – συνιστώσα	
(β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης .....	98
5.3.16 Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην $x$ – συνιστώσα .....	98
5.4.1 Τοπολογία ολογραφικού περιθλαστικού φράγματος .....	99
5.4.2 Τοπολογία ολογραφικού περιθλαστικού φράγματος με βοηθητικό στρώμα υψηλού δείκτη διάθλασης .....	100
5.4.3 Ισχύς $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα- $x$ . Σύγκριση για τρεις τιμές της απόστασης $d$ (TE) .....	100
5.4.4 Συντελεστής σύζευξης $\alpha$ συναρτήσει της απόστασης $d$ , ολογραφικού φράγματος για TE πόλωση .....	101
5.4.5 Συντελεστής διάδοσης $\beta$ συναρτήσει της απόστασης $d$ , ολογραφικού φράγματος για TE πόλωση .....	101
5.4.6 Για το ολογραφικό περιθλαστικό φράγμα για TE πόλωση	
(α) φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην $x$ – συνιστώσα	
(β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης .....	102
5.4.7 Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην $x$ – συνιστώσα .....	103
5.4.8 Ισχύς $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα- $x$ . Σύγκριση για τρεις τιμές της απόστασης $d$ (TM) .....	104
5.4.9 Συντελεστής σύζευξης $\alpha$ συναρτήσει της απόστασης $d$ , ολογραφικού φράγματος για TM πόλωση .....	105
5.4.10 Συντελεστής διάδοσης $\beta$ συναρτήσει της απόστασης $d$ , ολογραφικού φράγματος για TM πόλωση .....	105

5.4.11 Συντελεστής σύζευξης $\alpha$ συναρτήσει της απόστασης $d$ , ολογραφικού φράγματος, σε μικρότερη κλίμακα, με τη μέση τιμή (TM) .....	106
5.4.12 Συντελεστής διάδοσης $\beta$ συναρτήσει της απόστασης $d$ , ολογραφικού φράγματος, σε μικρότερη κλίμακα, με τη μέση τιμή (TM) .....	106
5.4.13 Για το ολογραφικό περιθλαστικό φράγμα για TM πόλωση	
(α) φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην $x$ – συνιστώσα	
(β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης .....	107
5.4.14 Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην $x$ – συνιστώσα .....	107
5.5.1 Τοπολογία περιθλαστικού 2ου ολογραφικού φράγματος .....	108
5.5.2 Τοπολογία περιθλαστικού 2ου ολογραφικού φράγματος με βοηθητικό στρώμα υψηλού δείκτη διάθλασης .....	109
5.5.3 Ισχύς $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα- $x$ . Σύγκριση για τρεις τιμές της απόστασης $d$ (TE) .....	110
5.5.4 Συντελεστές $\alpha$ και $\beta$ συναρτήσει της απόστασης $d$ , περιθλαστικού 2ου ολογραφικού φράγματος για TE πόλωση .....	110
5.5.5 Fitting συντελεστών σύζευξης $\alpha$ και $\beta$ ως προς την απόσταση $d$ , με ημιτονοειδή συνάρτηση για το 2 <sup>ο</sup> ολογραφικό φράγμα για TE πόλωση .....	111
5.5.6 Για το 2 <sup>ο</sup> ολογραφικό φράγμα για TE πόλωση	
(α) φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην $x$ – συνιστώσα	
(β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης .....	112
5.5.7 Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην $x$ – συνιστώσα .....	112
5.5.8 Σύγκριση μεθόδων RMM και RCPM, ισχύος και παραγώγου φάσης αντίστοιχα για το 2ο ολογραφικό φράγμα σε TE πόλωση .....	113
5.5.9 Ισχύς $1- R_0 ^2$ (μέθοδος RMM), όπου σημειώνεται η θέση στην οποία αναμέναμε το μέγιστο για το 2ο ολογραφικό φράγμα (TE) .....	114
5.5.10 Σύγκριση παραγώγου φάσης και παραγώγου $1- R_0 ^2$ για το 2ο ολογραφικό φράγμα (TE) .....	114



5.5.11	Ισχύς $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x. Σύγκριση για διάφορες τιμές της απόστασης d σε TM πόλωση	115
5.5.12	Για το 2ο ολογραφικό φράγμα για TM πόλωση (α) φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην x – συνιστώσα (β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης	116
5.5.13	Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην x – συνιστώσα	117
5.6.1	Ισχύς $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x για το 2 <sup>ο</sup> ολογραφικό φράγμα για d=0.8μm σε TE πόλωση	120
5.6.2	Fitting ισχύος $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x για d=0.8μm (ολογραφικό φράγμα 2 σε TE πόλωση)	121
5.6.3	Κανονικοποιημένη παράγωγος ισχύος $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x για d=0.8μm (ολογραφικό φράγμα 2 σε TE πόλωση)	121
5.6.4	Fitting παραγώγου ισχύος $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x με Λορεντζιανή συνάρτηση	123
5.6.5	Ισχύς $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x για το 2 <sup>ο</sup> ολογραφικό φράγμα για d=0.8μm σε TM πόλωση	124
5.6.6	Fitting ισχύος $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x για d=0.8μm (ολογραφικό φράγμα 2 σε TM πόλωση)	125
5.6.7	Κανονικοποιημένη παράγωγος ισχύος $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x για d=0.8μm (ολογραφικό φράγμα 2 σε TM πόλωση)	126
5.6.8	Fitting παραγώγου ισχύος $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x με Λορεντζιανή συνάρτηση	127
5.6.9	Δεύτερο fitting παραγώγου ισχύος $1- R_0 ^2$ ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x με Λορεντζιανή συνάρτηση	127



## Κεφάλαιο 1

### Εισαγωγή

Η οπτική επιστήμη και οι εφαρμογές της ολοένα και κερδίζουν έδαφος λόγω των ραγδαίων εξελίξεων της τεχνολογίας.

Στον τομέα των υπολογιστικών συστημάτων υπάρχει ταχύτατη μείωση των διαστάσεων των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων και ταυτόχρονη αύξηση της συχνότητας λειτουργίας, όπως υποδεικνύει ο νόμος του Moore. Έτσι, σύντομα θα επέλθει κορεσμός αφού τα ηλεκτρόνια, ως φορέας μετάδοσης της πληροφορίας, υπόκεινται σε φυσικούς περιορισμούς [1]. Ακόμη, οι ηλεκτρικές διασυνδέσεις που χρησιμοποιούνται στα ολοκληρωμένα (VLSI) κυκλώματα παρουσιάζουν αρκετά προβλήματα όσο η συχνότητα λειτουργίας και ο αριθμός των τρανζίστορ CMOS αυξάνεται, ενώ οι διαστάσεις μειώνονται. Η αναζήτηση εναλλακτικής μεθόδου είναι λοιπόν απαραίτητη, αφού οι διασυνδέσεις αποτελούν ένα εξαιρετικά σημαντικό κομμάτι στην μελλοντική πρόοδο των VLSI κυκλωμάτων [2]. Έναντι των ηλεκτρικών διασυνδέσεων, οι οπτικές διασυνδέσεις έχουν αρκετά πλεονεκτήματα και επιλύουν πολλά από τα προβλήματα, καθώς η διάδοση του φωτός, ως φορέα πληροφορίας, εξαρτάται κυρίως από τον δείκτη διάθλασης και μόνο ασθενώς από τις διαστάσεις των γραμμών μετάδοσης. Ακόμη, η εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από τη θερμοκρασία είναι τόσο μικρή ώστε να μην επηρεάζεται η διάδοση για μεγάλο εύρος θερμοκρασιών, ενώ επιτυγχάνεται ελάχιστη κατανάλωση ισχύος, αφού το φως διαδίδεται σε διηλεκτρικά μέσα χαμηλής αγωγιμότητας. Επιπλέον τα φωτόνια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αν έχουν διαφορετικό μήκος κύματος, σε αντίθεση με τα ηλεκτρόνια. Το κυριότερο μειονέκτημα που πρέπει να ξεπεραστεί στις οπτικές διασυνδέσεις είναι οι μεγάλες τους διαστάσεις, που τις καθιστούν μη ολοκληρώσιμες. Με την πρόοδο στις νανοκατασκευές, οι οπτικές διασυνδέσεις αποκτούν όλο και μικρότερες διαστάσεις και είμαστε πλέον κοντά στην οπτική ολοκλήρωση.

Στον τομέα των τηλεπικοινωνιών, τα συστήματα με οπτικές ίνες παίζουν κυρίαρχο ρόλο, αλλά η ζήτηση για υψηλότερες ταχύτητες αυξάνεται συνεχώς. Το οπτικό σήμα όμως, πρέπει να μετατρέπεται σε ηλεκτρικό για να επεξεργασθεί και κατόπιν πάλι σε οπτικό στους ενδιάμεσους κόμβους των δικτύων. Αυτή η διαδικασία εισάγει καθυστερήσεις και σφάλματα και γι' αυτό οι έρευνες στρέφονται τελευταία στην επεξεργασία σήματος με οπτικά μέσα μόνο (all-optical). Στα πλαίσια αυτά έχουν αναπτυχθεί οπτικές διατάξεις όπως ενισχυτές, συζεύκτες, φίλτρα, μεταγωγείς κ.ά.

Για την κατασκευή των οπτικών διασυνδέσεων αλλά και των οπτικών διατάξεων που αναφέραμε παραπάνω χρησιμοποιούνται περιθλαστικά οπτικά στοιχεία (DOEs : Diffractive Optical Elements). Η μικροκατασκευή των περιθλαστικών οπτικών στοιχείων δρομολογεί τα φωτόνια μιας οπτικής δέσμης σε επιθυμητές κατευθύνσεις στο χώρο μέσω του φαινομένου της περίθλασης. Τα τελευταία χρόνια έχει σημειωθεί τεράστια πρόοδος στην τεχνική κατασκευής των DOEs και οι εφαρμογές τους είναι πάρα πολλές, αφού η περιθλαστική οπτική μπορεί να πραγματοποιήσει σχεδόν τις ίδιες οπτικές λειτουργίες με την συμβατική διαθλαστική οπτική· για παράδειγμα φακούς και πρίσματα, αλλά σε μικρότερες διαστάσεις. Επιπλέον, μπορεί να προσφέρει ιδιότητες που είναι αδύνατες στην συμβατική οπτική.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα περιθλαστικών οπτικών στοιχείων που θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία είναι τα περιθλαστικά φράγματα. Αυτά είναι περιοδικά διαμορφωμένα και η απόκρισή τους ρυθμίζεται μέσω της δομής και της περιόδου τους. Τις τελευταίες δεκαετίες τα περιθλαστικά φράγματα έχουν γίνει αντικείμενο μελέτης ιδιαίτερου ενδιαφέροντος. Θεωρητικά, η περίθλαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από περιοδικά διαμορφωμένα μέσα μπορεί να περιγραφεί με πολλές μεθόδους. Μια από αυτές είναι η μέθοδος συζευγμένων κυμάτων [3], [4] (RCWA : Rigorous Coupled Wave Analysis) που θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία. Είναι ακριβής μέθοδος χωρίς προσεγγίσεις και θα την συνδυάσουμε με τις αριθμητικές μεθόδους RMM (Reflectance Magnitude Method) και RCPM (Reflection Coefficient Phase Method) για να βρούμε τη μιγαδική σταθερά διάδοσης των ρυθμών διαρροής (leaky modes) σε διατάξεις με περιθλαστικά φράγματα.

Συνοπτικά, η δομή της εργασίας έχει ως εξής: στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο περιγράφονται γενικά η θεωρία των κυμάτων σε οπτικά συστήματα, το φαινόμενο της περίθλασης και οι ρυθμοί διαρροής (leaky modes). Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζεται η θεωρία των περιθλαστικών φραγμάτων μαζί με την μέθοδο RCWA σε συνδυασμό με την προσέγγιση διαρρέοντος ρυθμού (leaky mode approach) ενώ στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο οι μέθοδοι RMM και RCPM. Στη συνέχεια, στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο υπάρχει η εφαρμογή των μεθόδων και τα αποτελέσματα για τέσσερις περιοδικές περιθλαστικές διατάξεις και τέλος στο 6<sup>ο</sup> κεφάλαιο τα τελικά συμπεράσματα.

### *Αναφορές*

- [1] David A. B. Miller ‘Rationale and challenges for optical interconnects to electronic chips’ Proceedings of the IEEE, vol. 88, no. 6, pp.728-749, June 2000
- [2] G. Tosik, F. Gaffot, Z. Lisik, I O’Connor F. Tissafi - Drissi ‘Optical versus electrical interconnections for clock distribution networks in new VLSI technologies’, PATMOS, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Vol. 2799 , p. 461-470, (2003)
- [3] M. G. Moharam, Eric B. Grann, Drew A. Pommet and T. K. Gaylord, “Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings” J. Opt. Soc. Am. A , Vol. 12, No. 5 , pp. 1068 - 1076, May 1995.
- [4] M. G. Moharam, Eric B. Grann, Drew A. Pommet and T. K. Gaylord, “Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix method,” J. Opt. Soc. Am. A , Vol. 12, No. 5 , pp. 1077 - 1086, May 1995.

## Κεφάλαιο 2

# Θεωρία Κυμάτων σε Οπτικά Συστήματα

### 2.1 Φως

Τα οπτικά συστήματα επικοινωνίας χρησιμοποιούν ως φορέα μετάδοσης της πληροφορίας φως. Με την έννοια ‘φως’ εδώ αναφερόμαστε σε ηλεκτρομαγνητικό κύμα με συχνότητα που ανήκει στην οπτική ζώνη του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος από το υπεριώδες ως το υπέρυθρο, δηλαδή μπορεί να είναι και μη ορατό.

Είναι γνωστό ότι το φως παρουσιάζει διττή φύση. Συμπεριφέρεται άλλες φορές ως σωματίδιο και άλλες ως κύμα. Η πρώτη θεωρία για το φως διατυπώθηκε από τον Νεύτωνα ο οποίος δεχόταν ότι τα φωτεινά σώματα εκπέμπουν σωματίδια, τα οποία κινούνται ευθύγραμμα και με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα διάδοσης του φωτός. Απέδωσε δηλαδή σωματιδιακή φύση στο φως. Η κυματική φύση του φωτός προτάθηκε από τον Huygens τον 17<sup>ο</sup> αιώνα. Η *Αρχή του Huygens* είναι αποδεκτή έως και σήμερα και μπορεί να ερμηνεύσει κυματικά φαινόμενα όπως η ανάκλαση (reflection), η διάθλαση (refraction), η συμβολή (interference) και η περίθλαση (diffraction). Ωστόσο, η εδραίωση της κυματικής φύσης του φωτός έγινε το 1864 από τον Maxwell με την ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Σύμφωνα με αυτή, το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα με ταχύτητα  $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  και περιγράφεται από την κυματική εξίσωση :

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

ή

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

δηλαδή

$$\nabla^2 F - \left(\frac{1}{u}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

όπου  $u=c/n$  η ταχύτητα του φωτός σε υλικό μέσο με δείκτη διάθλασης  $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$  και  $F$  οποιαδήποτε από τις συνιστώσες του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου. Η κυματική εξίσωση προκύπτει από τις εξισώσεις Maxwell χωρίς πηγές, δηλαδή

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon = 0$$

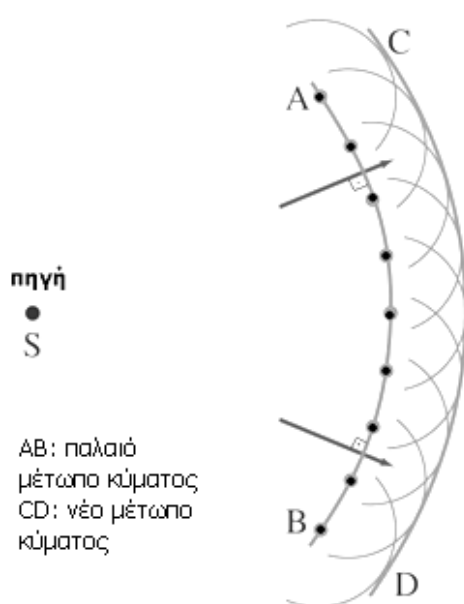
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

Τέλος, το 1905 έχουμε την ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου από τον Einstein με βάση την κβαντική θεωρία του Planck. Σύμφωνα με αυτή, το φως είναι κβαντισμένο και αποτελείται από κυματοπακέτα που ονομάζονται φωτόνια με (ηλεκτρομαγνητική) ενέργεια ανάλογη της συχνότητας  $E=h \cdot f$ , όπου  $h \approx 6.63 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg/s}$  η σταθερά του Planck και  $f$  η συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

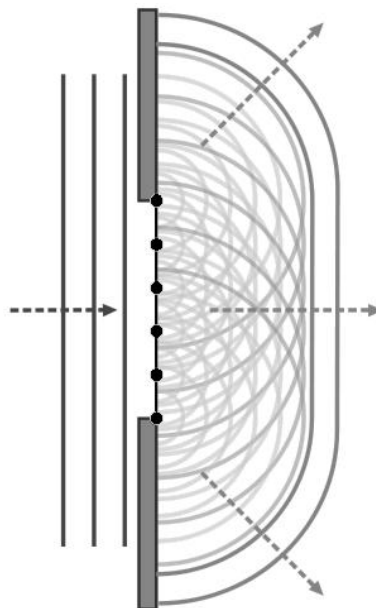
## 2.2 Το φαινόμενο της Περίθλασης

Το κυματικό φαινόμενο που θα μας απασχολήσει σε αυτή την εργασία είναι το φαινόμενο της περίθλασης. Με τον όρο αυτό αναφερόμαστε σε εκτροπή του φωτός από την ευθύγραμμη πορεία του, η οποία δεν οφείλεται σε ανάκλαση ή διάθλαση. Πιο συγκεκριμένα, περίθλαση έχουμε όταν στην πορεία του κύματος παρεμβάλλεται εμπόδιο του οποίου οι διαστάσεις είναι συγκρίσιμες του μήκους κύματος και το κύμα αποκλίνει από την αρχική του πορεία. Η περίθλαση μελετήθηκε πρώτη φορά το 1665 από τον Grimaldi. Στα πειράματα που έκανε, ο Grimaldi παρατήρησε ότι η σκιά ενός μικρού μολυβιού δεν ήταν καλά ορισμένη, αλλά η μετάβαση από τη φωτεινή στην σκοτεινή περιοχή γίνονταν σταδιακά, αντίθετα από τη σωματιδιακή θεώρηση του φωτός, και η σκιά φαινόταν μεγαλύτερη από αυτή που προέβλεπε η γεωμετρική οπτική. Το φαινόμενο εξήγησε ο Huygens που πρότεινε την θεωρία της κυματικής φύσης του φωτός. Σύμφωνα με την αρχή του Huygens, *κάθε σημείο ενός πρωτεύοντος μετώπου κύματος αποτελεί πηγή σφαιρικών δευτερευόντων κυμάτων, έτσι ώστε σε μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή το κύριο μέτωπο κύματος να είναι η περιβάλλουσα αυτών των κυμάτων*. Στην εικόνα 2.2.1 έχουμε την απεικόνιση της αρχής του Huygens. Το λεγόμενο ‘μέτωπο κύματος’ είναι μια ισοφασική επιφάνεια του κύματος. Έτσι, για να ερμηνεύσουμε το φαινόμενο της περίθλασης, αρκεί να θεωρήσουμε ότι κάθε σημείο του μετώπου κύματος στο επίπεδο της ασυνέχειας είναι πηγή δευτερευόντων κυμάτων τα οποία διαδίδονται προς όλες τις κατευθύνσεις. Το νέο μέτωπο κύματος δίνεται από την υπέρθεση των κυμάτων αυτών, δηλαδή την άθροιση αρμονικών συνιστωσών με διαφορετικές φάσεις που μπορεί να είναι ενισχυτική ή αναιρετική. Η εικόνα 2.2.2 απεικονίζει τα παραπάνω. Το φαινόμενο της περίθλασης είναι ισοδύναμο με το φαινόμενο της συμβολής με τη διαφορά ότι στην περίθλαση έχουμε τροποποίηση του μετώπου κύματος επειδή το εμπόδιο είναι μικρό, συγκρίσιμο του μήκους κύματος.





Εικόνα 2.2.1: αρχή του Huygens



Εικόνα 2.2.2: ερμηνεία περίθλασης

Τον μαθηματικό φορμαλισμό του φαινομένου της περίθλασης έθεσε ο Kirchhoff και ο Fresnel χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Maxwell με κάποιες προσεγγίσεις (αγνοώντας τη διανυσματική τους μορφή) ενώ συνέβαλε και ο Fraunhofer. Τέλος, μια πιο αυστηρή θεώρηση έδωσαν οι Rayleigh – Sommerfeld [1].

Με βάση τις προηγούμενες θεωρίες, όταν έχουμε περίθλαση από ένα άνοιγμα τυχαίου σχήματος, η ένταση του πεδίου σε τυχαίο σημείο του χώρου δίνεται από τη σχέση [2]:

$$E(\vec{r}) \propto \iint E_{inc}(x', y') \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{2\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \left( jk_0 + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{z}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dx' dy' \quad (2.2.1)$$

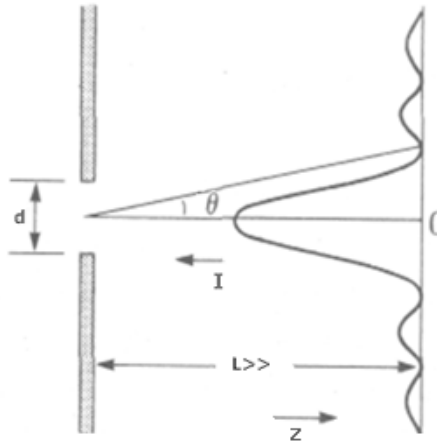
όπου  $r$  η απόσταση του σημείου παρατήρησης και  $r'$  η απόσταση της ρευματικής πηγής από την αρχή των αξόνων και  $E_{inc}$  το προσπίπτον πεδίο. Τα τονισμένα μεγέθη αναφέρονται στην διαχωριστική επιφάνεια όπου γίνεται η ολοκλήρωση. Η ολοκλήρωση γίνεται στο τυχαίο άνοιγμα. Για το κοντινό πεδίο ή αλλιώς περιοχή Fresnel, δηλαδή για κοντινές αποστάσεις από την πηγή σχετικά με το μήκος κύματος είναι  $k_0|\vec{r}-\vec{r}'| \ll 1$  και η ένταση του πεδίου προσεγγιστικά γίνεται:

$$E(\vec{r}) \approx E_0 \frac{e^{-jk_0 z}}{2\pi z} jk_0 \iint E_{inc}(x', y') \exp\left(-jk_0 \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z}\right) dx' dy' \quad (2.2.2)$$

Για το μακρινό πεδίο, ή περιοχή Fraunhofer όπου  $k_0 |\vec{r} - \vec{r}'| \gg 1$  ένταση του πεδίου προσεγγιστικά είναι:

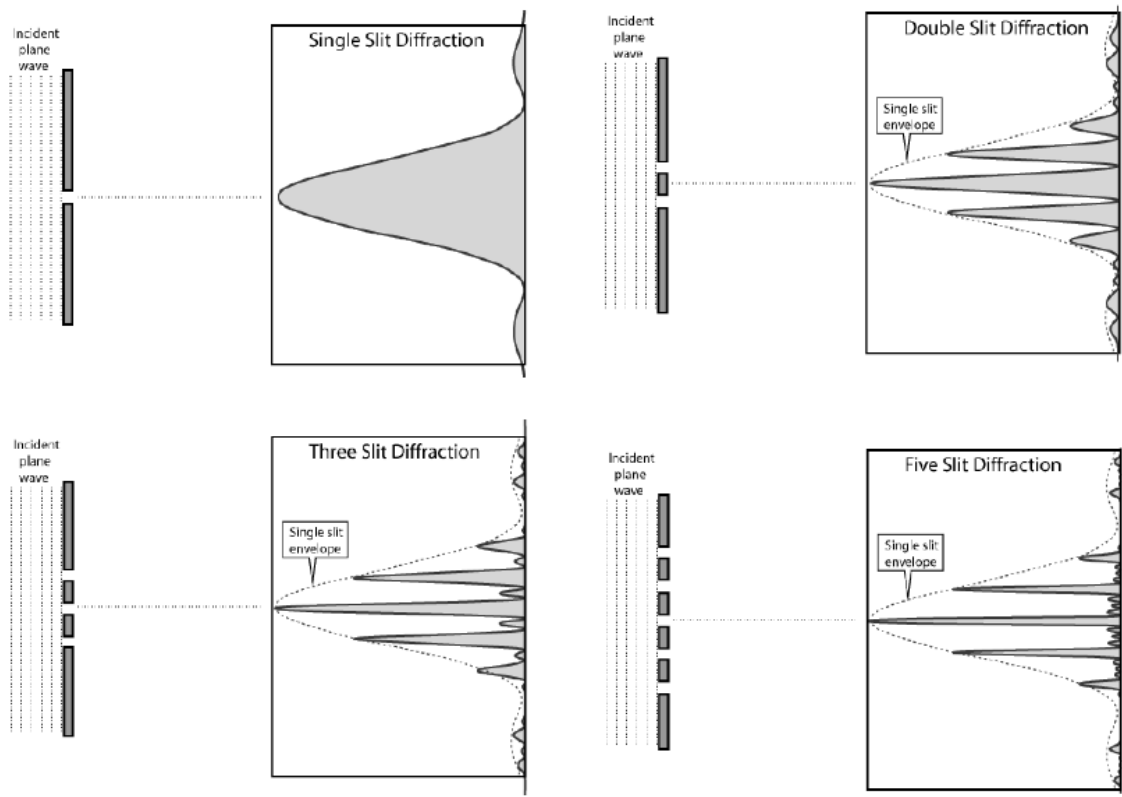
$$E(\vec{r}) \approx E_0 \frac{e^{-jk_0 z}}{2\pi z} jk_0 e^{-jk_0 \frac{x^2 + y^2}{2z}} \iint E_{inc}(x', y') \exp\left(-jk_0 \frac{xx' + yy'}{2z}\right) dx' dy' \quad (2.2.3)$$

Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η περιθλαστική κατανομή του πεδίου αντιστοιχεί στον (χωρικό) μετασχηματισμό Fourier του πεδίου εισόδου [3]. Έτσι, για παράδειγμα όταν έχουμε περίθλαση από μια απλή σχισμή μήκους  $d$  το αποτέλεσμα που θα πάρουμε αν μετρήσουμε το πεδίο (μετράμε ισχύ) θα είναι:  $I = |E|^2 = I_m \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$ ,  $\beta = \frac{1}{2} k d \sin\theta$  όπως στην εικόνα 2.2.3 που ακολουθεί.

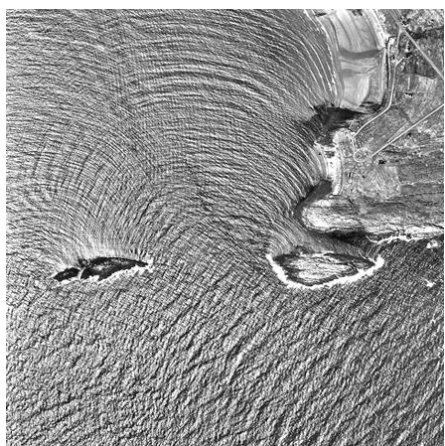


**Εικόνα 2.2.3** Ένταση ισχύος για περίθλαση από απλή σχισμή

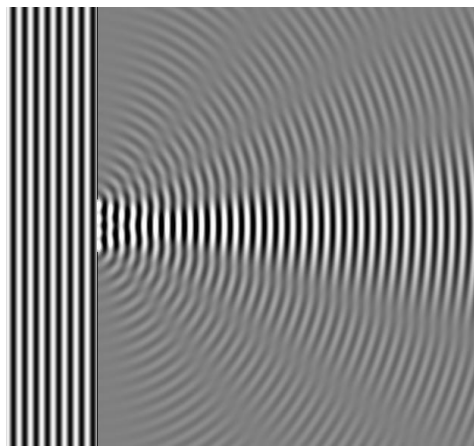
Στην εικόνα 2.2.4 απεικονίζονται περιπτώσεις πολλαπλών σχισμών. Η ανάλυση των περιθλαστικών φραγμάτων θα γίνει στο κεφάλαιο 3 εκτενώς.



**Εικόνα 2.2.4** Περιπτώσεις περίθλασης από πολλαπλές σχισμές



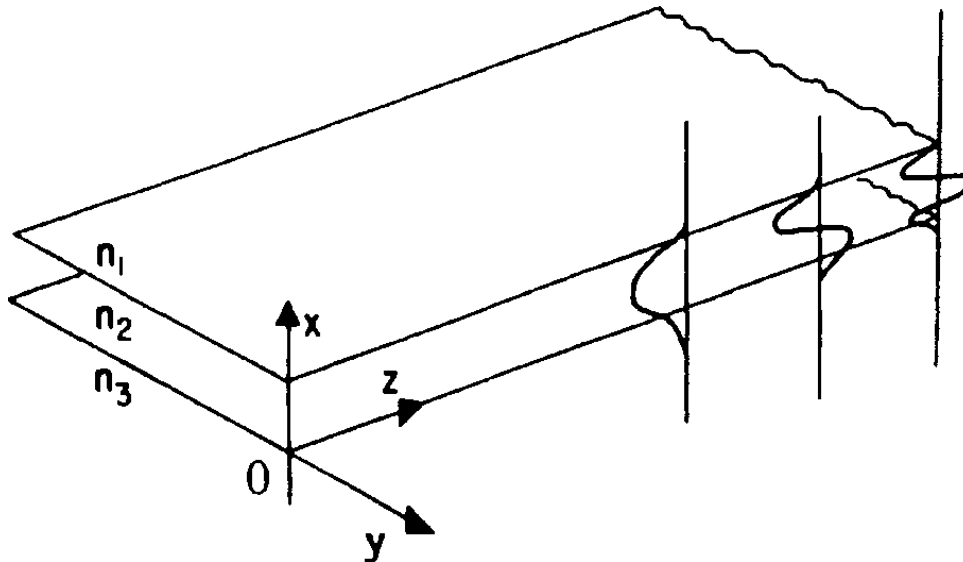
**Εικόνα 2.2.5:** Περίθλαση σε θαλάσσια κύματα



**Εικόνα 2.2.6:** Εικόνα περίθλασης

## 2.3 Ρυθμοί Κυμάτων σε Επίπεδους Οπτικούς Κυματοδηγούς

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται στους κυματοδηγούς σε ξεχωριστούς ρυθμούς. Με την έννοια ‘ρυθμός’ αναφερόμαστε σε μια χωρική κατανομή ενέργειας που παραμένει σταθερή στον χρόνο. Ένας επίπεδος κυματοδηγός (planar waveguide) αποτελείται από επίπεδα παράλληλα διηλεκτρικά στρώματα με διαφορετικούς δείκτες διάθλασης. Για παράδειγμα ο κυματοδηγός της εικόνας 2.3.1 αποτελείται από τρία στρώματα. Θεωρούμε τον κυματοδηγό άπειρο στις διευθύνσεις z και y και τα στρώματα 1 και 3 ημιάπειρα. Τα στρώματα 1, 2 και 3 αντιστοιχούν στο κάλυμμα (cover), κυματοδηγό (waveguide) και υπόστρωμα (substrate) αντίστοιχα [4].



**Εικόνα 2.3.1:**  
Κυματοδηγός  
παράλληλων  
πλακών τριών  
στρωμάτων  
[4] pp. 18.

Μαθηματικά, ο ρυθμός είναι μια λύση της κυματικής εξίσωσης Maxwell για το πεδίο που να ικανοποιεί και τις οριακές συνθήκες.

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{n^2(\vec{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.3.1)$$

Οι λύσεις είναι της μορφής  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}$  όπου  $\omega$  η συχνότητα του κύματος σε rad και αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (2.3.1) έχουμε:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k^2 n^2(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.3.2)$$

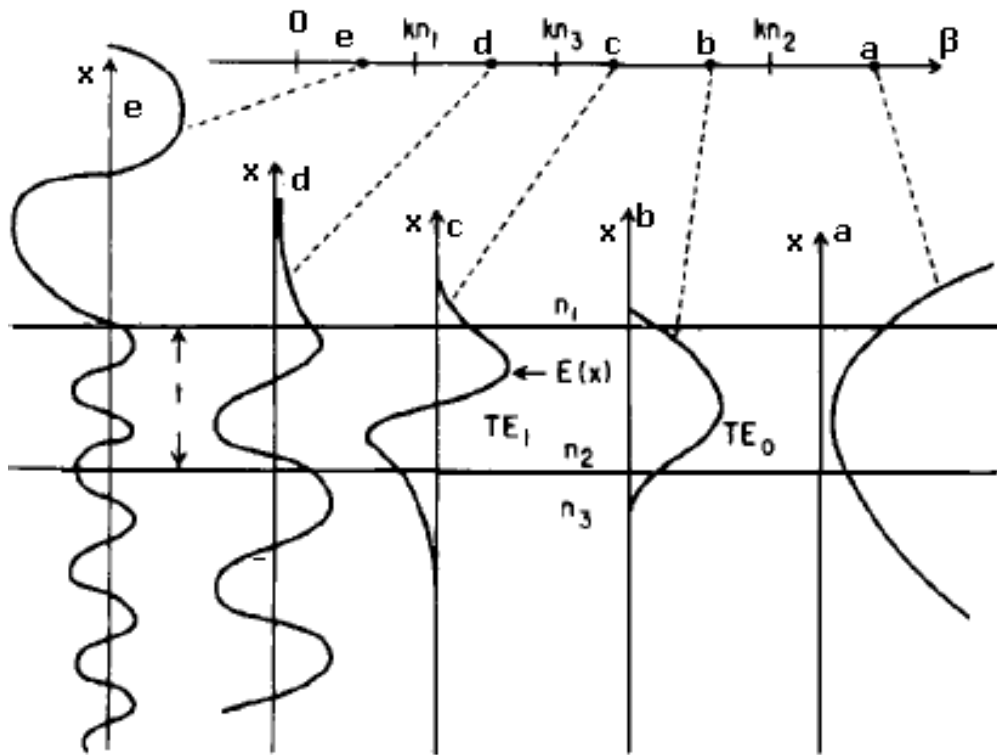
όπου  $k=\omega/c$ . Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται στη διεύθυνση  $z$ , τότε  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, y)e^{-j\beta z}$  όπου  $\beta$  ο συντελεστής διάδοσης, τότε η (2.3.2) γίνεται:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}(x, y)}{\partial y^2} + [k_0^2 n^2(\vec{r}) - \beta^2] \vec{E}(x, y) = 0 \quad (2.3.3)$$

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι ο κυματοδηγός είναι άπειρος στη διεύθυνση  $y$ , μπορούμε να χωρίσουμε την εξίσωση 2.3.3 σε περιοχές του  $x$  ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{περιοχή 1} \quad & \frac{\partial^2 E(x, y)}{\partial x^2} + [k_0^2 n_1^2 - \beta^2] E(x, y) = 0 \\ \text{περιοχή 2} \quad & \frac{\partial^2 E(x, y)}{\partial x^2} + [k_0^2 n_2^2 - \beta^2] E(x, y) = 0 \\ \text{περιοχή 3} \quad & \frac{\partial^2 E(x, y)}{\partial x^2} + [k_0^2 n_3^2 - \beta^2] E(x, y) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

όπου  $E(x, y)$  είναι η  $E_x(x, y)$  ή  $E_y(x, y)$  ή  $E_z(x, y)$  και  $k_0=2\pi/\lambda_0$ , με  $\lambda_0$  το μήκος κύματος στο κενό. Οι λύσεις της 2.3.4 είναι είτε ημιτονοειδείς είτε εκθετικές ανάλογα με το πρόσημο του  $(k^2 n_i^2 - \beta^2)$   $i=1,2,3$ . Επιπλέον πρέπει να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες, δηλαδή συνεχείς  $E(x, y)$  και  $\partial E/\partial x$  στις διαχωριστικές επιφάνειες. Έστω τώρα ότι έχουμε σταθερή συχνότητα  $\omega$  και για τους δείκτες διάθλασης  $n_2 > n_3 > n_1$  ή  $n_w > n_s > n_c$  (σχέση που είναι απαραίτητη για να έχουμε κυματοδηγήση στην περιοχή 2). Ανάλογα με την τιμή του συντελεστή διάδοσης  $\beta$ , το προφίλ του αντίστοιχου ρυθμού αλλάζει. Στην εικόνα 2.3.2 που ακολουθεί απεικονίζονται ενδεικτικά οι ρυθμοί για κάθε περιοχή του  $\beta$ . Η περίπτωση (a) είναι φυσικώς αδύνατη καθώς η ενέργεια θα πρέπει να αυξάνεται συνεχώς. Οι ρυθμοί (b) και (c) είναι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί (guided modes)  $TE_0$  και  $TE_1$ . Στην περίπτωση (d) έχουμε ρυθμό ακτινοβολίας που ακτινοβολεί ενέργεια στο υπόστρωμα (substrate radiation mode) ενώ ο (e) ακτινοβολεί σε όλα τα στρώματα (air radiation mode). Εδώ να σημειώσουμε ότι στην περιοχή  $k_0 n_3 < \beta < k_0 n_2$  επιτρέπονται μόνο διακριτές τιμές για το  $\beta$  που αντιστοιχούν σε TE και TM ρυθμούς. Ακόμα, υπάρχει κάποια συχνότητα κατωφλίου  $\omega_c$  (cut-off frequency) κάτω από την οποία δεν υπάρχει κυματοδηγούμενος ρυθμός.



**Εικόνα 2.3.2:** Πιθανοί ρυθμοί σε επίπεδο κυματοδηγό (a)  $\beta > k_0 n_2$  (b), (c)  $k_0 n_3 < \beta < k_0 n_2$  (d)  $k_0 n_1 < \beta < k_0 n_3$  (e)  $0 < \beta < k_0 n_1$  [4] pp. 19

Για να εκφράσουμε την κατανομή του συνολικού πεδίου, θα πρέπει να πάρουμε τον γραμμικό συνδυασμό των κυματοδηγούμενων ρυθμών και τη γραμμική ολοκλήρωση των ρυθμών ακτινοβολίας. Δηλαδή έχουμε:

$$E(x, y) = \sum_n q_n E_n(x, y) + \int q(\beta) E(x, y, \beta) d\beta \quad (2.3.5)$$

όπου  $E_n(x, y)$  και  $E(x, y, \beta)$  τα προφίλ των αντίστοιχων ρυθμών και  $q_n$ ,  $q(\beta)$  αντίστοιχοι συντελεστές. Είναι αξιοσημείωτο ο γεγονός ότι οι ρυθμοί είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους.

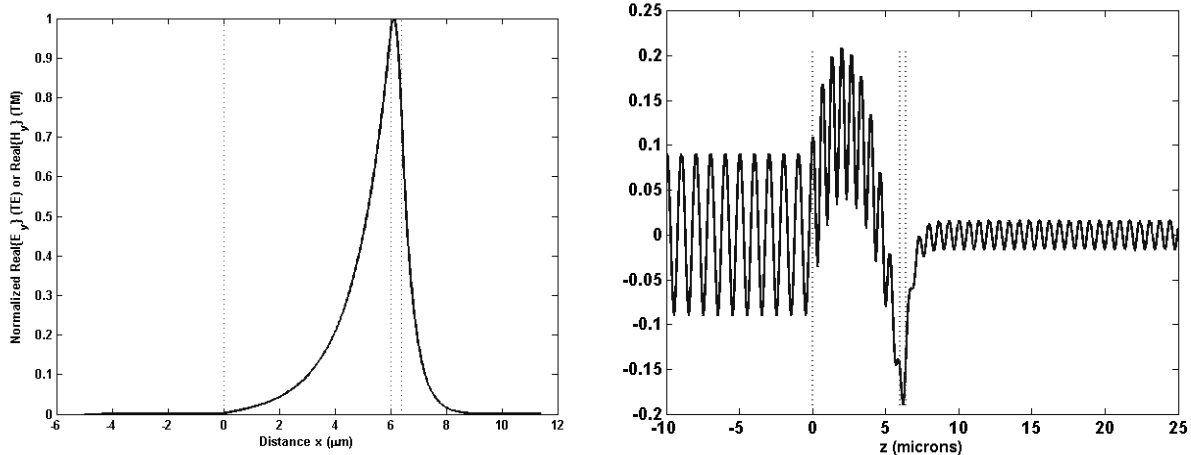
## 2.4 Ρυθμοί Διαρροής (Leaky Modes)

Η μελέτη των ρυθμών διαρροής στους οπτικούς κυματοδηγούς έχει απασχολήσει πολλούς επιστήμονες στον τομέα αυτό, καθώς είναι σημαντική για την κατανόηση των απωλειών λόγω ακτινοβολίας στους κυματοδηγούς αλλά και για τη μαθηματική διατύπωση του ακτινοβολούντος πεδίου με πεπερασμένο αριθμό ρυθμών.

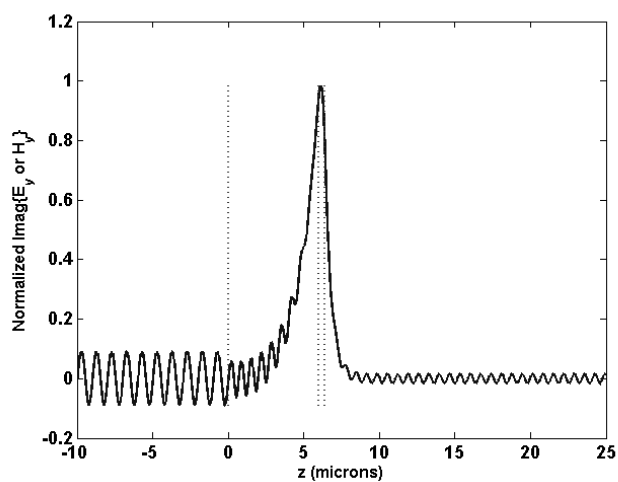
Οι ρυθμοί διαρροής είναι διακριτές λύσεις του προβλήματος ιδιοτιμών κάτω από τη συχνότητα αποκοπής με μιγαδική σταθερά διάδοσης όπου το φανταστικό μέρος συμβολίζει την απόσβεση, καθώς ο ρυθμός θα διαδίδεται στον κυματοδηγό. Το πρόβλημα ιδιοτιμών είναι το ίδιο που περιγράφει τους κυματοδηγούμενους ρυθμούς υπό διαφορετικές οριακές συνθήκες. Όπως είδαμε στην εξίσωση 2.3.5 το πεδίο ακτινοβολίας αναπαριστάται από μια ολοκλήρωση των ρυθμών ακτινοβολίας. Έχουμε δηλαδή άπειρους ρυθμούς – συνεχές ‘φάσμα’. Μαθηματικά, μπορούμε να χειριστούμε το ολοκλήρωμα αυτό με χρήση μιγαδικής ανάλυσης ως ένα άθροισμα πεπερασμένων διακριτών όρων. Οι όροι αυτοί, όπως αποδεικνύεται, αντιπροσωπεύουν τους ρυθμούς διαρροής [5], [6]. Έτσι, μπορούμε κάτω από ορισμένες συνθήκες να αναπαραστήσουμε ένα άπειρο σύνολο ρυθμών ακτινοβολίας με ένα πεπερασμένο σύνολο ρυθμών διαρροής πράγμα που απλοποιεί το μαθηματικό μοντέλο και είναι πολύ σημαντικό, ιδιαίτερα αν έχουμε να κάνουμε με αριθμητικές μεθόδους. Η προσέγγιση διαρρέοντος πεδίου είναι λοιπόν προσέγγιση του ακτινοβολούντος πεδίου, σε αποστάσεις που αυτό είναι σημαντικό.

Οι ρυθμοί διαρροής έχουν την ίδια μορφή πεδίου με τους κυματοδηγούμενους ρυθμούς στην κυματοδηγούμενη περιοχή, αλλά στις γειτονικές περιοχές (στο υπόστρωμα και στο κάλυμμα δηλαδή) είναι ταλαντούμενοι, δηλαδή ακτινοβολούν και χάνουν ισχύ. Ένα τέτοιο παράδειγμα απεικονίζεται στην εικόνα 2.4.1. Ο ρυθμός απώλειας ισχύος εκφράζεται από το μιγαδικό μέρος του συντελεστή διάδοσης (σχέση 2.4.1), που ονομάζεται συντελεστής σύζευξης (coupling coefficient) επειδή ουσιαστικά η σύζευξη στους οπτικούς συζεύκτες επιτυγχάνεται μέσω αυτής της διαρροής ισχύος.

$$\tilde{\beta} = \beta - j\alpha \quad (2.4.1)$$



**Εικόνα 2.4.1:** (α) κυματοδηγούμενος ρυθμός (χωρίς να υπάρχει grating) (β) διαρρέων ρυθμός, όπου το grating είναι holographic στην περιοχή  $0 < z < 6 \mu\text{m}$  (και για τις δύο περιπτώσεις, οι κάθετες ευθείες αντιστοιχούν στα όρια του κυματοδηγού και έχουμε το πραγματικό μέρος του πεδίου)



(γ) Φανταστικό μέρος του πεδίου, της περίπτωσης εικόνας (β)



### *Αναφορές*

- [1] B. B. Baker, E. T. Copson, “The Mathematical Theory of Huygens' Principle” Oxford at the Clarendon Press (1939)
- [2] A. Ishimaru, “Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering”, Prentice Hall, Ch.6, (1991)
- [3] Okan K. Ersoy, “Diffraction, Fourier Optics and Imaging”, John Wiley & Sons Ch.4 & 5 (2007)
- [4] Robert G. Hunsperger, “Integrated Optics, Theory and Technology”, Springer ch.1 - 3 (2009)
- [5] A. W. Snyder, J. D. Love, “Optical Waveguide Theory”, Chapman and Hall (1983) ch.24 & 26
- [6] A. K. Ghatak, “Leaky modes in optical waveguides ”, optical and quantum electronics, Vol 17, pp. 311-321 (April 1985)
- [7] T. A. Maldonado and T. K. Gaylord, “Hybrid guided modes in biaxial planar waveguides,” Journal of Lightwave. Technology vol. 14, pp. 486-499 (March 1996)
- [8] A. Knoesen, T. K. Gaylord, M. G. Moharam, “Hybrid Guided Modes in Uniaxial Dielectric Planar Waveguides” Journal of Lightwave technology. Vol. 6. No. 6, pp. 1083-1104, (June 1988)
- [9] H.J.Pain, “Φυσική των ταλαντώσεων και των κυμάτων”, Μετάφραση Τομέα Φυσικής ΕΜΠ, εκδ. Συμμετρία (1997)

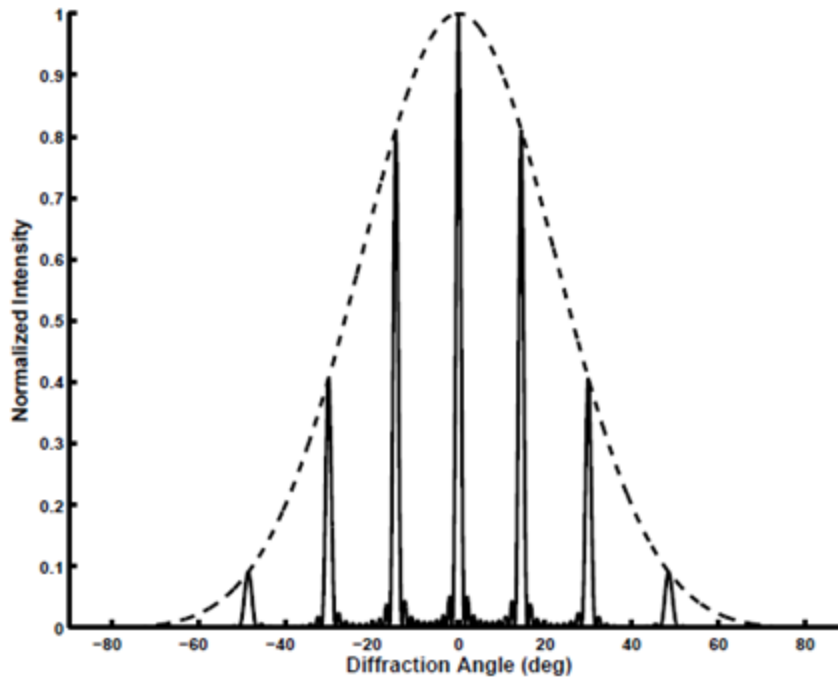
## Κεφάλαιο 3

# Θεωρία Φραγμάτων περίθλασης

### 3.1 Εισαγωγικά

Τα φράγματα περίθλασης (diffraction gratings) χρησιμοποιούνται εδώ και πολλά χρόνια στην φασματοσκοπία και έχουν συμβάλει σημαντικά στην εξέλιξη πολλών επιστημονικών κλάδων. Ωστόσο σήμερα, υπό το φως των τελευταίων εξελίξεων στα συστήματα επικοινωνίας καθώς και στα υπολογιστικά συστήματα, η μελέτη των φραγμάτων περίθλασης καθίσταται αναγκαία, όπως έχουμε αναφέρει και στην εισαγωγή, για μια πληθώρα εφαρμογών που αναφέρονται στη συνέχεια.

Τα περιθλαστικά φράγματα αποτελούνται από μία περιοδική διαταραχή του δείκτη διάθλασης με περίοδο  $\Lambda$  συνήθως της τάξης του μήκους κύματος  $\lambda$ . Περιληπτικά, λειτουργούν ως εξής: λόγω της περίθλασης, η ακτινοβολία που προσπίπτει στο φράγμα ανακλάται και διαδίδεται προς διάφορες διευθύνσεις, γνωστές ως τάξεις περίθλασης ανάκλασης/μετάδοσης (reflected/transmitted diffractive orders). Οι διευθύνσεις αυτές είναι ευαίσθητες ως προς το μήκος κύματος και επίσης εξαρτώνται από την περίοδο του φράγματος. Ο λόγος της ισχύος σε μια διεύθυνση προς τη συνολική περιθλώμενη ισχύ ονομάζεται περιθλαστική απόδοση (Diffraction Efficiency). Αυτή εξαρτάται από το σχήμα και την κατασκευή του περιθλαστικού φράγματος. Αυτά είναι φανερά και στο παρακάτω σχήμα, εικόνα 3.1.1, όπου απεικονίζεται η περίθλαση στην περιοχή Fraunhofer. Η διακεκομμένη περιβάλλουσα αντιστοιχεί στην ένταση από περίθλαση σε μια περίοδο του φράγματος, ενώ η συνεχής αντιστοιχεί στην περίθλαση από φράγμα μήκους  $L \gg \lambda$  και είναι υπέρθεση των περιθλάσεων των στοιχειωδών τμημάτων μήκους  $\Lambda$ . Στα μέγιστα της καμπύλης έχουμε ενισχυτική συμβολή και αυτά είναι που αντιστοιχούν στις τάξεις περίθλασης.



Εικόνα 3.1.1: Ένταση ισχύος περίθλασης Fraunhofer ως προς τη γωνία περίθλασης

### 3.2 Εφαρμογές περιθλαστικών φραγμάτων

Μερικές εφαρμογές των φραγμάτων περίθλασης είναι στην ολοκληρωμένη οπτική (Integrated Optics), στις συσκευές φωτονικών κρυστάλλων (Photonic Crystal Devices), στην φασματοσκοπία (Spectral Analysis) [1] (ch.12), στις τηλεπικοινωνίες οπτικών ινών (Fiber Optical Communications) όπου χρησιμοποιούνται για διαμόρφωση (Modulation), πολυπλεξία/αποπλεξία (Multiplexing /Demultiplexing) και άλλες λειτουργίες, στις οπτικές διασυνδέσεις (Optical Interconnections) [2], στην ολογραφία (Holography), σε διάφορες διατάξεις όπως κωδικοποίηση δέσμης (Beam Coding), σαρωτές φραγμάτων περίθλασης (Grating Scanners) και στην σύζευξη κυμάτων (Coupling) [3]. Πιο αναλυτικά για τις εφαρμογές στο [4] ch.13.

Όσον αφορά τις οπτικές διασυνδέσεις, όπως έχουμε αναφέρει, υπερτερούν έναντι των ηλεκτρικών σε δυνατότητες ενώ για την οπτική σύζευξη σε αυτές, τα περιθλαστικά φράγματα είναι ιδανικά. Έναντι των υπόλοιπων τύπων οπτικών διασυνδέσεων, τα περιθλαστικά φράγματα είναι πιο συμπαγή και συμβατά με την τεχνολογία ολοκληρωμένων κυκλωμάτων, ενώ έχουν επιπλέον τη δυνατότητα ρύθμισης της απόδοσής τους με βάση την περίοδο και το είδος του φράγματος.

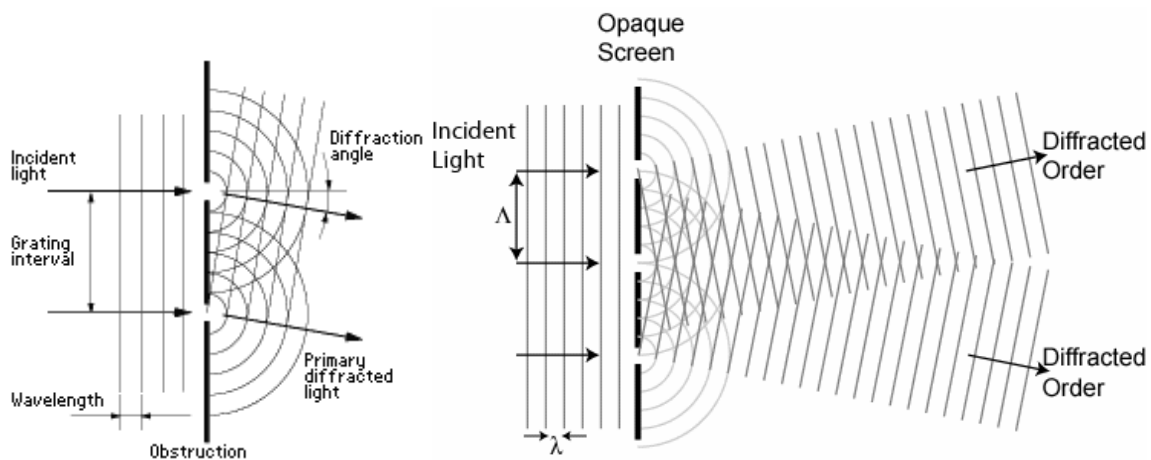
Στην ολοκληρωμένη οπτική, αλλά και σε άλλες εφαρμογές, τα φράγματα περίθλασης επιτυγχάνουν τις λειτουργίες των κλασικών οπτικών διατάξεων (όπως ανάκλαση, διάθλαση) σε πολύ μικρότερη κλίμακα διαστάσεων. Κάποια παραδείγματα τέτοιας χρήσης είναι οι περιθλαστικοί συζεύκτες εισόδου / εξόδου κυματοδηγών (input/output grating couplers), μετατροπείς ρυθμών (mode converters) και φασματικά φίλτρα (wavelength filters).

Στις τηλεπικοινωνίες οπτικών ινών είναι αναγκαία η χρήση διατάξεων πολύ ευαίσθητων σε εναλλαγές του μήκους κύματος για την πολυπλεξία και αποπλεξία μήκους κύματος. Τα περιθλαστικά φράγματα είναι κατάλληλα για αυτή τη χρήση.

### 3.3 Είδη περιθλαστικών φραγμάτων

Τα περιθλαστικά φράγματα χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Τα φράγματα πλάτους και τα φράγματα φάσης.

Τα φράγματα πλάτους ήταν τα πρώτα που κατασκευάστηκαν και αποτελούνται από μια σειρά περιοδικά διατεταγμένων σχισμών. Αυτά επηρεάζουν μόνο το πλάτος του διαδιδόμενου κύματος. ([5] Ch.2)

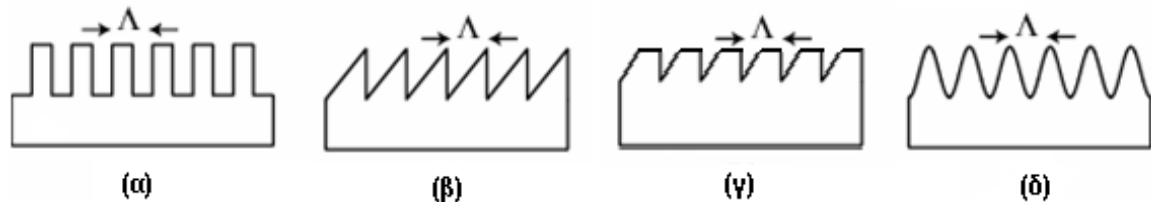


Εικόνα 3.3.1: (α) , (β) Περιθλαστικά φράγματα από σειρά πολλαπλών σχισμών [5] p.9

Τα φράγματα φάσης, που θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία, αποτελούνται από διατάξεις με περιοδικά μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης. Διαμορφώνουν μόνο την φάση του διαδιδόμενου κύματος και χωρίζονται σε δύο βασικά είδη: τα φράγματα επιφανειακής χάραξης (surface-relief grating) και τα ολογραφικά φράγματα (holographic). Πιο αναλυτική κατηγοριοποίηση στο [1] ch.3 .

### **Φράγματα επιφανειακής χάραξης (surface-relief gratings)**

Κατασκευάζονται με την μέθοδο της φωτολιθογραφίας (όπως και τα ολοκληρωμένα κυκλώματα). Με τη μέθοδο αυτή χαράσσεται το υλικό του υποστρώματος, που μπορεί να είναι και μέρος ενός κυματοδηγού, και δημιουργείται μια περιοδική διαταραχή της επιφάνειάς του, συνεπώς και του δείκτη διάθλασης. Έτσι, στην περιοχή της διαταραχής επαναλαμβάνεται περιοδικά ο δείκτης διάθλασης του υποστρώματος και του καλύμματος, που είναι συνήθως ο αέρας ή κάποιο άλλο μέσο.

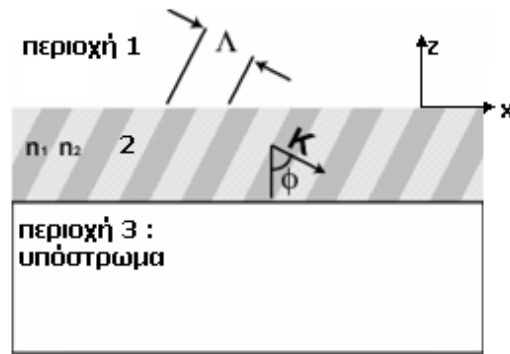


**Εικόνα 3.3.2:** Παραδείγματα φραγμάτων επιφανειακής χάραξης [5] pp.11

Ο πιο απλός τύπος φράγματος επιφανειακής χάραξης απεικονίζεται στην εικόνα 3.3.2(α) και όπως φαίνεται έχει ορθογωνικό προφίλ (grooves, ridges) γι αυτό λέγεται rectangular grating ή binary grating. Τα περιθλαστικά αυτά φράγματα είναι πολύ σημαντικά γιατί η ανάλυση αυθαίρετου σχήματος φραγμάτων ανάγεται σε ανάλυση πολλών στοιχειωδών ορθογώνιων φραγμάτων που προσεγγίζουν το συνολικό αυθαίρετο φράγμα, όπως θα δούμε και παρακάτω. Στην εικόνα 3.3.2(β) απεικονίζεται το φράγμα τριγωνικού προφίλ (blazed grating) που όπως και το κεκλιμένο φράγμα (slanted grating) εικόνα 3.3.2(γ) είναι χρήσιμο λόγω της υψηλής κατευθυντικότητας που παρουσιάζει σε ορισμένες διευθύνσεις ανάλογα με την κλίση του. Τέλος, το ημιτονοειδούς προφίλ περιθλαστικό φράγμα στην εικόνα 3.3.2(δ).

### Ολογραφικά φράγματα (holographic /volume gratings)

Τα ολογραφικά φράγματα ή φράγματα όγκου έχουν επίπεδη επιφάνεια, ενώ η περιοδική μεταβολή του δείκτη διάθλασης πραγματοποιείται με ολογραφική εγγραφή σε όλο τον όγκο του υλικού. Η περιοδικότητα εδώ μπορεί να μην είναι παράλληλη στην επιφάνεια του μέσου και έτσι μπορούμε να έχουμε πάλι υψηλή κατευθυντικότητα σε κάποια διεύθυνση.



Εικόνα 3.3.3: Ολογραφικό Φράγμα [5] pp.11

### 3.4 Εξίσωση περιθλαστικών φραγμάτων (grating equation)

Κάθε περιθλαστικό φράγμα έχει ένα χαρακτηριστικό κυματοδιάνυσμα φράγματος  $\vec{K}$  του οποίου το μέτρο είναι  $|\vec{K}| = \frac{2\pi}{\Lambda}$ , όπου  $\Lambda$  η περίοδος του φράγματος, και διεύθυνση τη διεύθυνση της περιοδικότητας. Όταν ηλεκτρομαγνητικό επίπεδο κύμα με κυματοδιάνυσμα  $\vec{k}_{inc}$  προσπίπτει στο περιθλαστικό φράγμα, τα περιθλώμενα κύματα έχουν κυματοδιάνυσμα  $\vec{k}_i$  που υπό τον περιορισμό του θεωρήματος Floquet [6] δίνεται για την περιοχή του φράγματος από τη σχέση:

$$(\vec{k}_i)_x = (\vec{k}_{inc} - i\vec{K})_x \quad (3.4.1) \quad \text{όπου } i=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ αντίστοιχα για κάθε τάξη}$$

περιθλασης. Η σχέση αυτή είναι η συνθήκη προσαρμογής φάσης (phase matching condition). Ουσιαστικά προστίθενται ακέραια πολλαπλάσια του κυματοδιανύσματος φράγματος στο μη περιθλώμενο κύμα (ανακλώμενο ή διαδιδόμενο) στην παράλληλη συνιστώσα στην διεύθυνση x (εικόνα 3.4.1) [5] (ch.2).

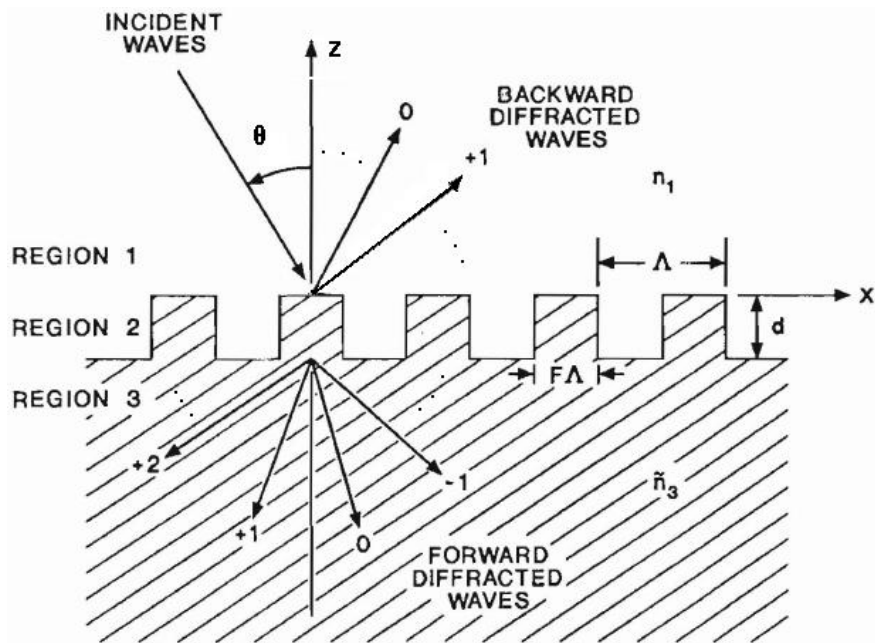
Για τη γενική περίπτωση όπου  $\vec{K} = \frac{2\pi}{\Lambda}(\cos\varphi \hat{z} + \sin\varphi \hat{x})$  (slanted grating), για τα διαδιδόμενα κύματα στην περιοχή 3, η παραπάνω ισότητα που ισχύει για τις εφαπτομενικές συνιστώσες στον άξονα x γίνεται:

$$\frac{2\pi}{\lambda} n_3(\sin\theta_i \hat{x}) = \frac{2\pi}{\lambda} n_3(\sin\theta_t \hat{x}) - i \frac{2\pi}{\Lambda} (\sin\varphi \hat{x})$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις η περιοδικότητα του φράγματος είναι μόνο στον άξονα x (unslanted grating) οπότε έχουμε:

$$\frac{2\pi}{\lambda} n_3 \sin\theta_i = \frac{2\pi}{\lambda} n_3 \sin\theta_t - i \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (\varphi=90^\circ)$$

Το παρακάτω σχήμα διευκολύνει να καταλάβουμε την γεωμετρία του προβλήματος



Εικόνα 3.4.1: Γεωμετρία περιθλαστικού φράγματος

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Νόμο του Snell και να αντικαταστήσουμε το  $n_3 \sin\theta_t = n_1 \sin\theta_{inc}$  οπότε έχουμε την γνωστή εξίσωση grating:

$$n_3 \sin\theta_i = n_1 \sin\theta_{inc} - i \frac{\lambda}{\Lambda} \quad \text{με } i=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots (3.4.2)$$

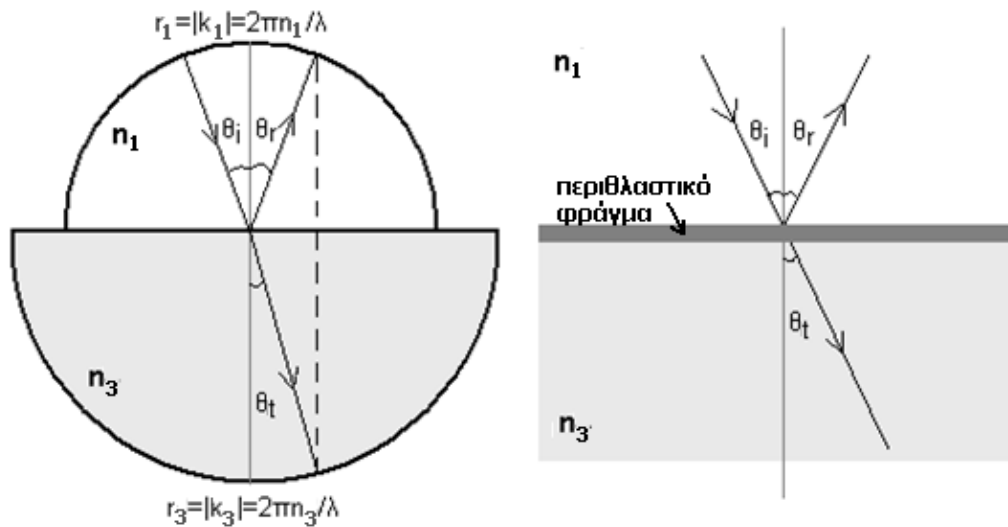
Στην ουσία για να καταλήξουμε σε αυτήν την εξίσωση εφαρμόσαμε την οριακή συνθήκη που απαιτεί συνέχεια στις συνιστώσες του εφαπτομενικού πεδίου. Ισοδύναμα, θα καταλήγαμε στην ίδια εξίσωση αν εφαρμόζαμε τη συνθήκη του Bragg (συνθήκη ενισχυτικής συμβολής) για το περιθλαστικό φράγμα με προσέγγιση ακτινών (γεωμετρική οπτική).

Για τα ανακλώμενα κύματα (backward diffracted waves) στην περιοχή 1 έχουμε αντίστοιχα την εξίσωση  $n_1 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_{inc} - i \frac{\lambda}{\Lambda}$  (3.4.3) ( $\theta_{inc} = \theta_r$ )

Φυσικά ισχύει ότι  $|\sin \theta_i| \leq 1$  οπότε η εξίσωση grating ικανοποιείται για ορισμένα μόνο  $i$ , όχι άπειρα, τα οποία αντιστοιχούν στις διαδιδόμενες τάξεις περίθλασης, ενώ τα υπόλοιπα στις αποσβεννύμενες. Επιπλέον, είναι φανερό ότι ο αριθμός των τάξεων περίθλασης καθώς και οι διευθύνσεις τους εξαρτώνται σημαντικά από τον λόγο του μήκους κύματος προς την περίοδο του φράγματος ( $\lambda/\Lambda$ ).

### Διαγράμματα Κ-χώρου / διανυσματική απεικόνιση συνθήκης Bragg

Για να κατανοήσουμε καλύτερα το φαινόμενο της περίθλασης στο περιθλαστικό φράγμα και τις τάξεις περίθλασης που ανακλώνται και διαδίδονται, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα διαγράμματα Κ-χώρου [5] τα οποία αποτελούν διανυσματική απεικόνιση της συνθήκης Bragg ή της εξίσωσης (3.4.1) που είναι απόρροια του θεωρήματος Floquet. Στην ανάλυση αυτή θα θεωρήσουμε για απλοποίηση ότι το κυματοδιάνυσμα φράγματος  $\vec{K}$  είναι παράλληλο στον άξονα  $x$ . Δηλαδή  $\vec{K} = K\hat{x}$ .

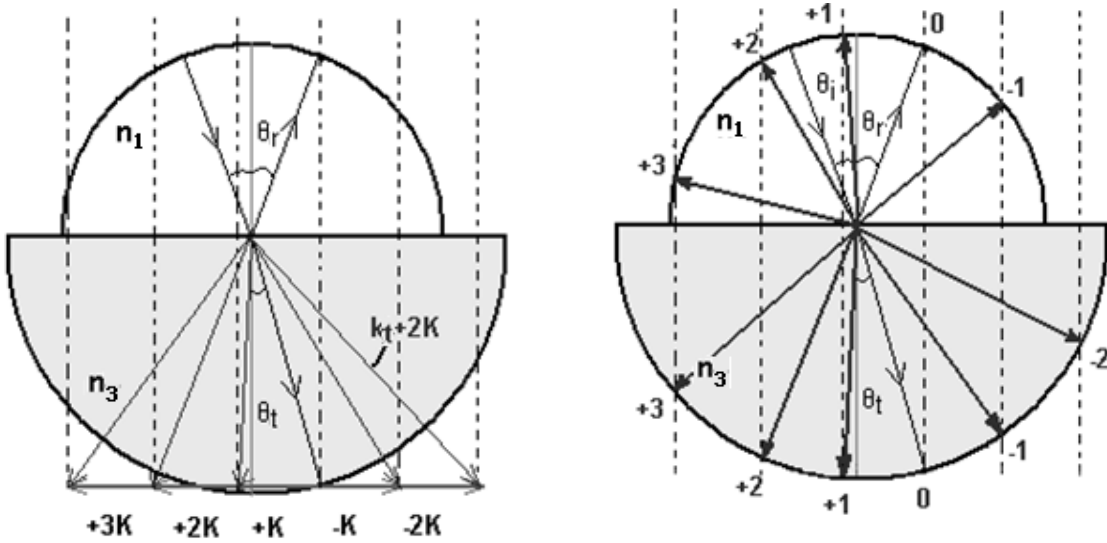


Εικόνα 3.4.2: (α) Διάγραμμα Κ-χώρου

(β) Αντιστοιχία στην πραγματική γεωμετρία

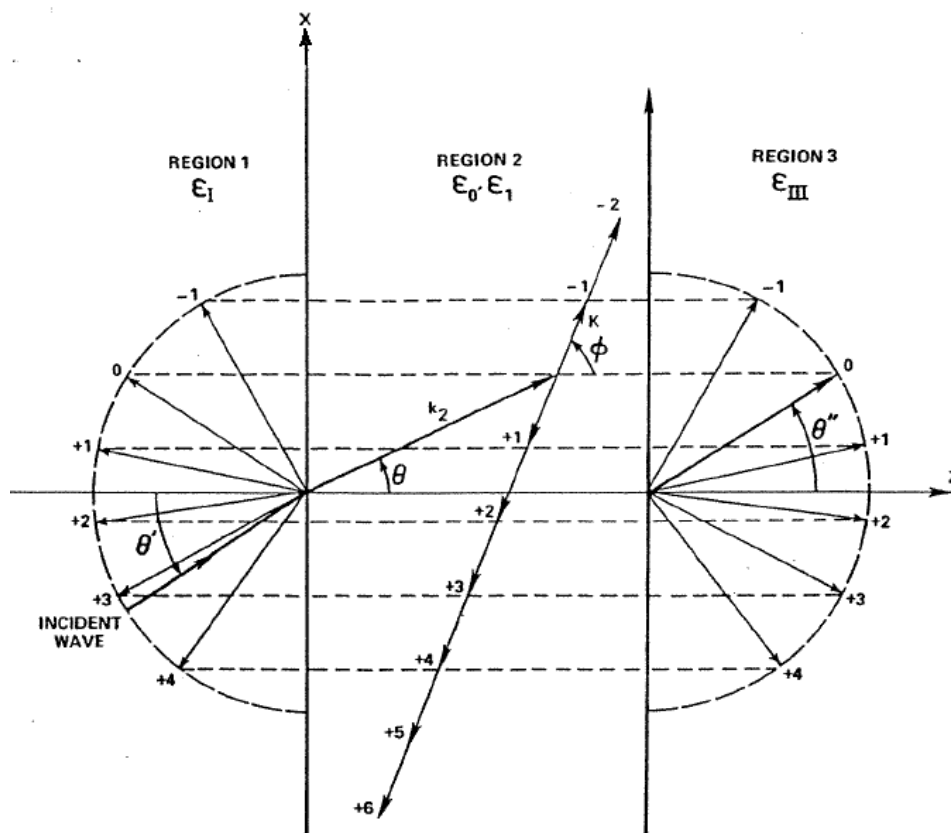


Όπως φαίνεται στην εικόνα 3.4.2 (α), έχουμε δύο ομόκεντρα ημικύκλια, ένα για την περιοχή 1 (cover) και ένα για την περιοχή 3 (substrate). Η ακτίνα του καθενός ισούται με το μέτρο του κυματοδιανύσματος στην αντίστοιχη περιοχή. Το περιθλαστικό φράγμα (περιοχή 2) είναι στο κέντρο των ημικυκλίων. Στην παραπάνω εικόνα, σχεδιάσαμε τις ακτίνες αγνοώντας την περίθλαση, έχουμε δηλαδή τα μη περιθλώμενα κύματα και στην (β) το φυσικό ανάλογο για την καλύτερη κατανόηση του διαγράμματος. Στην επόμενη εικόνα θα προσθέσουμε στο σχήμα το κυματοδιάνυσμα του φράγματος και τα πολλαπλάσιά του ξεκινώντας από το πέρασ του διαδιδόμενου κύματος.



**Εικόνα 3.4.3:** (α) Διάγραμμα K-χώρου με  $\vec{K} = K\hat{x}$  και τα πολλαπλάσιά του (β) τελικό διάγραμμα με τις περιθλαστικές τάξεις.

Στην εικόνα 3.4.3 (α) απεικονίζεται η σχέση  $(\vec{k}_i)_x = (\vec{k}_t)_x - iK$  με  $\vec{K} = K\hat{x}$ . Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στην εφαπτομενική συνιστώσα των κυματοδιανυσμάτων. Για να βρούμε τα περιθλώμενα κύματα θα χρησιμοποιήσουμε τα σημεία τομής των γραμμών αυτών με τα ημικύκλια. Στο τελικό διάγραμμα 3.4.3 (β) απεικονίζονται οι σχέσεις:  $n_3 \sin\theta_i = n_1 \sin\theta_{inc} - i\frac{\lambda}{\Lambda}$  με επιτρεπτά  $i=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$  για τα ανακλώμενα κύματα και  $n_1 \sin\theta_i = n_1 \sin\theta_{inc} - i\frac{\lambda}{\Lambda}$  με επιτρεπτά  $i=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$  για τα διαδιδόμενα κύματα. Οι γωνίες των ακτινών αντιστοιχούν στις γωνίες των περιθλαστικών τάξεων.



Εικόνα 3.4.4: Γενικό διάγραμμα K-χώρου με  $\vec{K} = K_x \hat{x} + K_z \hat{z}$  [5] p.2

### 3.5 Ακριβής Μέθοδος Συζευγμένων Κυμάτων ( Rigorous Coupled Wave Analysis )

Στην προηγούμενη παράγραφο μελετήσαμε τρόπους για την εύρεση των διευθύνσεων των τάξεων περίθλασης. Ωστόσο, είναι σημαντικό να μπορούμε να υπολογίσουμε και την περιθλαστική απόδοση των περιθλαστικών τάξεων. Έτσι, σε αυτήν την παράγραφο αναλύουμε μια αυστηρή μέθοδο, την μέθοδο συζευγμένων κυμάτων (RCWA).

Η μέθοδος RCWA είναι μια αυστηρή αριθμητική μέθοδος, ντετερμινιστική και μη επαναληπτική που αναπτύχθηκε από τους Moharam και Gaylord κατά τη δεκαετία του 1980 [7], [8], [9], [10]. Είναι πολύ σημαντική καθώς υπολογίζει με καλή ακρίβεια την περιθλαστική απόδοση κάθε τάξης περίθλασης χωρίς προσεγγίσεις, από την επίλυση

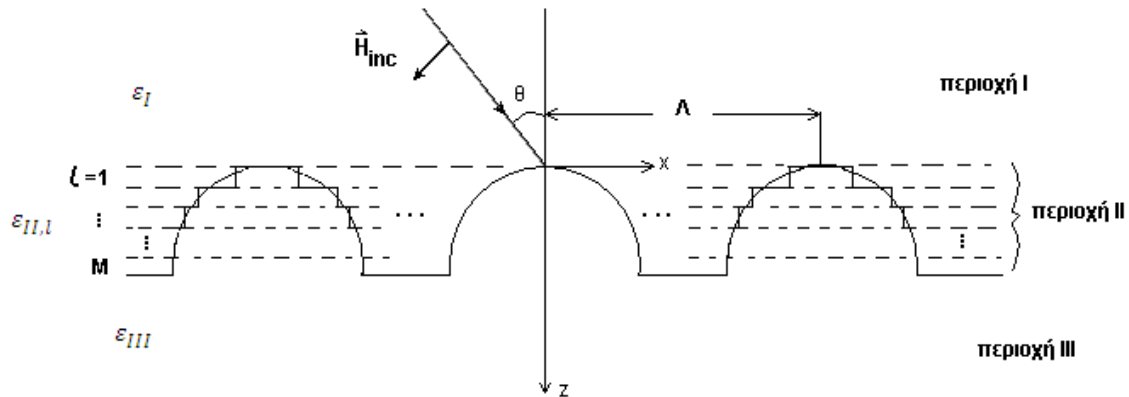
των εξισώσεων Maxwell για περίθλαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από περιοδικά περιθλαστικά φράγματα. Επιπλέον, είναι εύκολο να προγραμματιστεί και δίνει γρήγορα αποτελέσματα.

Ακολουθεί αναλυτικά η μέθοδος για πρόβλημα δύο διαστάσεων:

## TE πόλωση

### Γεωμετρία προβλήματος

Θα αναλύσουμε το φράγμα περίθλασης ημιτονοειδούς προφίλ που απεικονίζεται, χωρίζοντάς το σε στοιχειώδη επίπεδα τμήματα στα οποία το φράγμα είναι ορθογώνιο και θα εφαρμόσουμε την μέθοδο RCWA σε κάθε ένα από αυτά. Τα στοιχειώδη τμήματα είναι επαρκώς λεπτά, ώστε να έχουμε ακρίβεια. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αναλύσουμε ένα οποιοδήποτε είδους περιθλαστικό φράγμα ακόμη και πολυεπίπεδες διατάξεις που περιλαμβάνουν και επίπεδους κυματοδηγούς.



Εικόνα 3.5.1: Γεωμετρία σε TE πόλωση

Το κύμα έχει συχνότητα  $\omega$  και είναι σε πόλωση TE. Προσπίπτει στο φράγμα υπό γωνία  $\theta$ , όπως φαίνεται στο σχήμα, και περιθλάται δημιουργώντας ανακλώμενες και διαδιδόμενες περιθλαστικές τάξεις. Το κυματοδιάνυσμα κάθε στοιχειώδους φράγματος είναι  $\vec{K}_l = \frac{2\pi}{\Lambda_l} (\cos\varphi_l \hat{z} + \sin\varphi_l \hat{x})$ , όπου  $l=1,2,\dots,M$ , με τον περιορισμό όμως οι x-συνιστώσες να είναι ίδιες για όλα τα στοιχειώδη φράγματα, δηλαδή  $K_{l,x} = K_x$  για κάθε

$l=1,2,\dots,M$ . Το κυματοδιάνυσμα ελευθέρου χώρου είναι  $k_0=2\pi/\lambda_0=\omega/c$ , όπου  $\lambda_0$  το μήκος κύματος στο κενό και  $c$  η ταχύτητα του φωτός.

### Ηλεκτρομαγνητική Ανάλυση

Οι περιοχές I και III είναι ομογενείς με με διηλεκτρική επιτρεπτότητα  $\epsilon_I=\epsilon_0 n_I^2$  και  $\epsilon_{III}=\epsilon_0 n_{III}^2$  αντίστοιχα, όπου  $\epsilon_0$  η επιτρεπτότητα του κενού.

Η περιοχή II χωρίζεται σε  $M$  υποπεριοχές. Κάθε υποπεριοχή μπορεί να είναι είτε ορθογώνιο (δυναδικό) περιθλαστικό φράγμα επιφανειακής χάραξης, είτε ολογραφικό. Λόγω της περιοδικότητας, η διηλεκτρική επιτρεπτότητα κάθε υποπεριοχής μπορεί να γραφεί σαν σειρά Fourier. Δηλαδή είναι:

$$\epsilon_{II,l} = \epsilon_0 \sum_h \epsilon_{h,l} \exp(jh\vec{K}_l \cdot \vec{r}) \quad l=1,2,\dots$$

### Ηλεκτρομαγνητικά πεδία στην περιοχή I

Το ηλεκτρικό πεδίο του προσπίπτοντος κύματος είναι:

$$\vec{E}_{inc} = \hat{y} E_0 e^{-jk_0 n_I (x \sin\theta + z \cos\theta)}$$

Συνολικά, μαζί με τα πεδία των περιθλαστικών τάξεων, το ολικό ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή I είναι:

$$\vec{E}_I = \hat{y} (E_{inc} + \sum_i R_i e^{-j\vec{k}_{I,i} \cdot \vec{r}})$$

όπου  $R_i$  το πλάτος της  $i$  - ανακλώμενης τάξης περίθλασης και  $\vec{k}_{I,i} = k_{x_i} \hat{x} + k_{I,z_i} \hat{z}$  το κυματοδιάνυσμα.

Από την εξίσωση του grating ισχύει ότι  $k_{x_i} = k_0 n_I \sin\theta - iK_x$  όπου το  $i$  αναφέρεται στις περιθλαστικές τάξεις  $i=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\dots$

Επιπλέον,  $k_{I,z} = -\sqrt{k_0^2 n_I^2 - k_{x_i}^2}$  για διαδιδόμενες τάξεις ( $|k_{x_i}| < k_0 n_I$ ) και

$k_{I,z} = +j\sqrt{k_{x_i}^2 - k_0^2 n_I^2}$  για αποσβεννύμενες τάξεις ( $|k_{x_i}| > k_0 n_I$ )

Από τις εξισώσεις Maxwell μπορούμε να βρούμε και το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή I.

$$\begin{aligned}\vec{H}_I &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{E}_I = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_I & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \left[ \hat{x} \left( -\frac{\partial E_I}{\partial z} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial E_I}{\partial x} \right) \right]\end{aligned}$$

Άρα η x-συνιστώσα είναι

$$\begin{aligned}H_{Ix} &= +\frac{1}{j\omega\mu_0} \left[ -jk_0 n_I \cos\theta e^{-jk_0 n_I (x \sin\theta + z \cos\theta)} + \sum_i -jk_{I,zi} R_i e^{-j\vec{k}_{I,i} \cdot \vec{r}} \right] = \\ &= \frac{-k_0 n_I \cos\theta}{\omega\mu_0} e^{-j\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}} - \frac{1}{\omega\mu_0} \sum_i k_{I,zi} R_i e^{-j\vec{k}_{I,i} \cdot \vec{r}}\end{aligned}$$

ενώ η z-συνιστώσα

$$\begin{aligned}H_{Iz} &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \left[ -jk_0 n_I \sin\theta e^{-jk_0 n_I (x \sin\theta + z \cos\theta)} + \sum_i -jk_{xi} R_i e^{-j\vec{k}_{I,i} \cdot \vec{r}} \right] = \\ &= \frac{k_0 n_I \sin\theta}{\omega\mu_0} e^{-j\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}} + \frac{1}{\omega\mu_0} \sum_i k_{xi} R_i e^{-j\vec{k}_{I,i} \cdot \vec{r}}\end{aligned}$$

### Ηλεκτρομαγνητικά πεδία στην περιοχή III

Ομοίως υπολογίζουμε τα πεδία στην περιοχή III.

$$\vec{E}_{III} = \hat{y} \sum_i T_i e^{-j\vec{k}_{III,i} \cdot \vec{r}} = \hat{y} \sum_i T_i e^{-j[k_{xi}x + k_{III,zi}(z-d)]} \quad (z \geq d)$$

όπου  $T_i$  το πλάτος της  $i$  – διαδιδόμενης τάξης περίθλασης,  $d = \sum_{i=1}^M d_{II,i}$  το συνολικό πάχος της περιοχής II και  $\vec{k}_{III,i} = k_{xi}\hat{x} + k_{III,zi}\hat{z}$  το κυματοδιάνυσμα.

Όπως και πριν,  $k_{III,z} = \sqrt{k_0^2 n_{III}^2 - k_{xi}^2}$  για διαδιδόμενες τάξεις ( $k_0 n_{III} > |k_{xi}|$ )

$$k_{III,z} = -j\sqrt{k_{xi}^2 - k_0^2 n_{III}^2} \text{ για αποσβεννόμενες τάξεις } (k_0 n_{III} < |k_{xi}|)$$

Για το μαγνητικό πεδίο έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{H}_{III} &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{E}_{III} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_{III} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \left[ \hat{x} \left( -\frac{\partial E_{III}}{\partial z} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial E_{III}}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{IIIx} &= -\frac{1}{\omega\mu_0} \sum_i k_{III,zi} T_i e^{-j[k_{xi}x + k_{III,zi}(z-d)]} \\ H_{IIIz} &= -\frac{1}{\omega\mu_0} \sum_i k_{xi} T_i e^{-j[k_{xi}x + k_{III,zi}(z-d)]} \end{aligned}$$

### Ηλεκτρομαγνητικά πεδία στην περιοχή II (περιοχή περιοδικού φράγματος)

Στο  $l$ -οστό στρώμα της περιοχής II, όπου  $l=1,2,\dots,M$ , οι συνιστώσες των εφαπτομενικών πεδίων μπορούν να γραφούν σαν ένα άθροισμα χωρικών αρμονικών των πεδίων στην περιοδική περιοχή του φράγματος. Οι χωρικές αρμονικές αντιστοιχούν στις περιθλαστικές τάξεις. Ουσιαστικά τα πεδία από κάθε τάξη που εισχωρούν στην περιοχή του φράγματος, διαδίδονται σε αυτήν και ανταλλάσσουν μεταξύ τους ενέργεια, γι αυτό λέγονται συζευγμένα κύματα. Έτσι, έχουμε

$$E_{ly} = \sum_i S_{lyi}(z) e^{-j\vec{k}_{II,i} \cdot \vec{r}}$$

Όπου από τις οριακές συνθήκες, απαιτείται οι φάσεις των κυμάτων στις περιοχές I, II και III να ταιριάζουν, οπότε  $\vec{k}_{II,i} = k_{xi}\hat{x} - iK_{zl}\hat{z}$

$$E_{ly} = \sum_i S_{lyi}(z) e^{-j(k_{xi}x - iK_{zl}z)} \quad (3.5.1)$$

$$H_{lx} = \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} \sum_i U_{lxi}(z) e^{-j(k_{xi}x - ik_{zi}z)} \quad (3.5.2)$$

### Εφαρμογή εξισώσεων Maxwell

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Maxwell για να βρούμε λύσεις για τις χωρικές αρμονικές των πεδίων  $S_{lyi}(z)$  και  $U_{lxi}(z)$ .

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \left[ \hat{x} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \hat{z} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \right] \quad (3.5.3)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon(x,z)} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon(x,z)} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & 0 & H_z \end{vmatrix}$$

Επομένως είναι:

$$E_{ly} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_l(x,z)} \left( \frac{\partial H_{lx}}{\partial z} - \frac{\partial H_{lz}}{\partial x} \right) \quad (3.5.4)$$

Και από την (3.5.3)

$$H_{lx} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_{ly}}{\partial z} \quad (3.5.5)$$

$$H_{lz} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_{ly}}{\partial x} \quad (3.5.6)$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (3.5.5) τα πεδία από τις σχέσεις (3.5.1) και (3.5.2) και έχουμε:

$$j\omega\mu_0 \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} \sum_i U_{lxi}(z) e^{-j(k_{xi}x - ik_{zi}z)} = \sum_i \left[ \frac{dS_{lyi}}{dz} + jik_{zi}S_{lyi}(z) \right] e^{-j(k_{xi}x - ik_{zi}z)}$$

$$\Rightarrow jk_0 U_{lxi}(z) = \frac{dS_{lyi}}{dz} + jik_{zi}S_{lyi}(z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k_0} \frac{dS_{lyi}}{dz} = jU_{lxi}(z) - ji \frac{k_{zl}}{k_0} S_{lyi}(z)$$

Θέτω  $z' = k_0 z$  και ξαναγράψω την προηγούμενη εξίσωση για όλες τις περιθλώμενες τάξεις  $i$  από  $-L$  έως  $L$  σε μορφή πίνακα :

$$\frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} S_{ly(-L)} \\ \vdots \\ S_{ly(0)} \\ \vdots \\ S_{ly(L)} \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} U_{ly(-L)} \\ \vdots \\ U_{ly(0)} \\ \vdots \\ U_{ly(L)} \end{bmatrix} - j \underbrace{\begin{bmatrix} -L \frac{k_{zl}}{k_0} & \cdot & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & \cdot & L \frac{k_{zl}}{k_0} \end{bmatrix}}_{\tilde{K}_{zl}} \begin{bmatrix} S_{ly(-L)} \\ \vdots \\ S_{ly(0)} \\ \vdots \\ S_{ly(L)} \end{bmatrix}$$

$\tilde{S}_{ly}$                        $\tilde{U}_{ly}$                        $\tilde{K}_{zl}$                        $\tilde{S}_{ly}$

που σε συμπαγή μορφή είναι:

$$\frac{d\tilde{S}_{ly}}{dz'} = j\tilde{U}_{lxi}(z) - j\tilde{K}_{zl}\tilde{S}_{ly} \quad (3.5.7)$$

Από τις σχέσεις (3.5.4) και (3.5.5) και έχουμε:

$$j\omega\varepsilon_0\varepsilon_l(x,z)E_{ly} = \frac{\partial H_{lx}}{\partial z} + \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial^2 E_{ly}}{\partial x^2}$$

Αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση τα πεδία από τις σχέσεις (3.5.1) και (3.5.2) και έχουμε:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow j\omega\varepsilon_0 \sum_h \varepsilon_{lh} e^{jh(k_{lx}x+k_{lz}z)} \sum_m S_{lym} e^{-j(k_{xm}x-mk_{zl}z)} = \\ &= \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_i \left[ \frac{dU_{lxi}}{dz} + jik_{zl}U_{lxi} \right] e^{-j(k_{xi}x-ik_{zl}z)} + \frac{1}{j\omega\mu_0} \sum_i (-k_{xi}^2 S_{lyi}) e^{-j(k_{xi}x-ik_{zl}z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow j\omega\varepsilon_0 \sum_i \left[ \sum_m \varepsilon_{l,i-m} S_{lym} \right] e^{-j(k_{xm}x-mk_{zl}z)} = \\ &= \sum_i \left\{ \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{dU_{lxi}}{dz} + jik_{zl}U_{lxi} \right] - \frac{k_{xi}^2}{j\omega\mu_0} S_{lyi} \right\} e^{-j(k_{xi}x-ik_{zl}z)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow j\omega\varepsilon_0 \sum_m \varepsilon_{l,i-m} S_{lym} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{dU_{lxi}}{dz} + jik_{zl}U_{lxi} \right] - \frac{k_{xi}^2}{j\omega\mu_0} S_{lyi}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{k_0} \frac{dU_{lxi}}{dz} = j \sum_m \varepsilon_{l,i-m} S_{lym} - j i k_{zl} U_{lxi} - j \left( \frac{k_{xi}}{k_0} \right)^2 S_{lyi}$$

Για  $i$  από  $-L$  έως  $L$  και  $z' = k_0 z$  η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$\frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} U_{l(-L)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{l(L)} \end{bmatrix} = j \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{l0} & \varepsilon_{l(-1)} & \cdots & \varepsilon_{l(-L)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \varepsilon_{l(-L)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{l(+L)} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \varepsilon_{l(+L)} & \cdots & \cdots & \varepsilon_{l0} \end{bmatrix}}_{\tilde{E}_l} \begin{bmatrix} S_{ly(-L)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{ly(-L)} \end{bmatrix} - j \underbrace{\begin{bmatrix} -L \frac{K_{zl}}{k_0} & & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & +L \frac{K_{zl}}{k_0} \end{bmatrix}}_{\tilde{K}_{zl}} \begin{bmatrix} U_{l(-L)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{l(L)} \end{bmatrix} - j \underbrace{\begin{bmatrix} \left( \frac{k_{x(-L)}}{k_0} \right)^2 & & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & \left( \frac{k_{x(+L)}}{k_0} \right)^2 \end{bmatrix}}_{\tilde{K}_x^2} \begin{bmatrix} S_{ly(-L)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{ly(-L)} \end{bmatrix}$$

που σε συμπαγή μορφή είναι:

$$\frac{d}{dz'} \tilde{U}_{lx}(z) = j \left( \tilde{E}_l - \tilde{K}_x^2 \right) \tilde{S}_{ly} - j \tilde{K}_{zl} \tilde{U}_{lx} \quad (3.5.8)$$

Όποτε από τις (3.5.7) και (3.5.8) έχουμε να λύσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} \tilde{S}_{ly} \\ \tilde{U}_{lx} \end{bmatrix} = j \underbrace{\begin{bmatrix} -\tilde{K}_{zl} & \tilde{I} \\ \tilde{E}_l - \tilde{K}_x^2 & -\tilde{K}_{zl} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_l} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{S}_{ly} \\ \tilde{U}_{lx} \end{bmatrix}}_{\tilde{V}_l}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz'} \tilde{V}_l = j \tilde{A}_l \tilde{V}_l \quad (3.5.9)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ένα σύστημα  $2(2L+1) \times 2(2L+1)$  και για την επίλυσή του θα ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία.

Έστω  $\tilde{Q}_l = [w_{l1} \ w_{l2} \ \cdots \ w_{l2(2L+1)}]$  ο πίνακας ιδιοδιανυσμάτων του  $\tilde{A}_l$  με διάσταση  $2(2L+1) \times 2(2L+1)$ . Ορίζουμε  $\tilde{V}_l = \tilde{Q}_l \tilde{\Psi}_l$  και η εξίσωση (3.5.9) γίνεται:

$$\frac{d}{dz}(\tilde{Q}_l \tilde{\Psi}_l) = j \tilde{A}_l \tilde{Q}_l \tilde{\Psi}_l \Rightarrow \frac{d}{dz} \tilde{\Psi}_l = j \underbrace{\tilde{Q}_l^{-1} \tilde{A}_l \tilde{Q}_l}_{\tilde{\lambda}_l = \text{diag}(\lambda_l)} \tilde{\Psi}_l \quad (3.5.10)$$

Η λύση του αποσυζευγμένου συστήματος (3.5.10) γράφεται

$$\tilde{\Psi}_l = \begin{bmatrix} \Psi_{l1} \\ \Psi_{l2} \\ \vdots \\ \Psi_{l2L+1} \\ \vdots \\ \Psi_{l2(2L+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\lambda_{l1}(z-d_{l-1})k_0} & & & & \emptyset \\ & e^{j\lambda_{l2}(z-d_{l-1})k_0} & & & \emptyset \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & e^{j\lambda_{l2L+1}(z-d_{l-1})k_0} & \vdots \\ & \emptyset & & & \vdots \\ & & & & e^{j\lambda_{l2(2L+1)}(z-d_l)k_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{l1} \\ \vdots \\ C_{l2(2L+1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{j\lambda_{l1}^l(z-d_{l-1})k_0} & \emptyset \\ \emptyset & e^{j\lambda_{l2}^l(z-d_l)k_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^l \\ C_2^l \end{bmatrix}$$

Στην παραπάνω λύση, οι ιδιοτιμές  $\lambda$  έχουν διαταχθεί με τον εξής τρόπο :

$\lambda_{l1}, \lambda_{l2}, \dots, \lambda_{l2L+1}$  τέτοιες ώστε  $\text{Re}\{j\lambda_{lk}\} \leq 0$  και εφόσον  $d_{l-1} \leq z \leq d_l$  για το  $l$ -οστό στρώμα ισχύει  $\text{Re}\{j\lambda_{lk}\} \cdot (z-d_{l-1}) \leq 0$  άρα έχουμε αποσβεννόμενα κύματα.

Ομοίως,  $\lambda_{l2L+2}, \dots, \lambda_{l2(2L+1)}$  τέτοιες ώστε  $\text{Re}\{j\lambda_{lk}\} \geq 0$  και εφόσον  $d_{l-1} \leq z \leq d_l$  για το  $l$ -οστό στρώμα ισχύει  $\text{Re}\{j\lambda_{lk}\} \cdot (z-d_l) \leq 0$  άρα έχουμε αποσβεννόμενα κύματα.

Όμως θα πρέπει να αναδιατάξουμε και τα ιδιοδιανύσματα για να ταιριάζουν με τις ιδιοτιμές.

$$\tilde{Q}_l = [\tilde{w}_{l1} \quad \tilde{w}_{l2} \quad \dots \quad \tilde{w}_{l(2L+1)} \quad \tilde{w}_{l(2L+2)} \quad \dots \quad \tilde{w}_{l2(2L+1)}] = \begin{bmatrix} \tilde{W}_{11}^l & \tilde{W}_{12}^l \\ \tilde{W}_{21}^l & \tilde{W}_{22}^l \end{bmatrix}$$

όπου  $W_{ij}^l$  υποπίνακες διάστασης  $(2L+1) \times (2L+1)$ .

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η λύση του συστήματος (3.5.9) θα είναι:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_l = \tilde{Q}_l \tilde{\Psi}_l = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{ly} \\ \tilde{U}_{lx} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{W}_{11}^l & \tilde{W}_{12}^l \\ \tilde{W}_{21}^l & \tilde{W}_{22}^l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{j\Lambda_1^l(z-d_{l-1})k_0} & \emptyset \\ \emptyset & e^{j\Lambda_2^l(z-d_l)k_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{C}_1^l \\ \tilde{C}_2^l \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \tilde{V}_l &= \begin{bmatrix} \tilde{W}_{11}^l e^{j\Lambda_1^l(z-d_{l-1})k_0} & \tilde{W}_{12}^l e^{j\Lambda_2^l(z-d_l)k_0} \\ \tilde{W}_{21}^l e^{j\Lambda_1^l(z-d_{l-1})k_0} & \tilde{W}_{22}^l e^{j\Lambda_2^l(z-d_l)k_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{C}_1^l \\ \tilde{C}_2^l \end{bmatrix}\end{aligned}$$

### Οριακές συνθήκες

Στην επιφάνεια  $z=0$ , από την απαίτηση για συνέχεια εφαπτομενικών συνιστωσών των πεδίων έχουμε:

$$\begin{aligned}E_{ly}(z=0) &= E_{lly}(z=0) \\ H_{lx}(z=0) &= H_{llx}(z=0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Οπότε } e^{-jk_{x0}x} + \sum_i R_i e^{-jk_{xi}x} &= \sum_i S_{1yi}(0) e^{-jk_{xi}x} \\ \Rightarrow \delta_{i0} + R_i &= S_{1yi}(0)\end{aligned}$$

Και σε συμπαγή μορφή πίνακα

$$\boxed{\tilde{I}_1 + \tilde{R} = \tilde{S}_{1y}(\emptyset) = \tilde{W}_{11}^1 \tilde{C}_1^1 + \tilde{W}_{12}^1 e^{-j\Lambda_2^1 d_1 k_0} \tilde{C}_2^1}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{-k_0 n_l \cos\theta}{\omega \mu_0} e^{-jk_{x0}x} - \frac{1}{\omega \mu_0} \sum_i k_{l,zi} R_i e^{-jk_{xi}x} &= \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_i U_{1xi}(0) e^{-jk_{xi}x} \\ \Rightarrow \frac{-k_0 n_l \cos\theta}{\omega \mu_0} \delta_{i0} - \frac{1}{\omega \mu_0} k_{l,zi} R_i &= \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}} U_{1xi}(0) \\ \Rightarrow n_l \cos\theta \delta_{i0} - \frac{k_{l,zi}}{k_0} R_i &= U_{1xi}(0)\end{aligned}$$

Άρα σε συμπαγή μορφή:

$$\boxed{\tilde{I}_2 + \tilde{Z}_l \tilde{R} = \tilde{U}_{1x}(\emptyset) = \tilde{W}_{21}^1 \tilde{C}_1^1 + \tilde{W}_{22}^1 e^{-j\Lambda_2^1 d_1 k_0} \tilde{C}_2^1}$$

$$\begin{aligned}\text{όπου } \tilde{R} &= [R_{-L} \quad R_{-L+1} \quad \dots \quad R_0 \quad \dots \quad R_L]^T, \quad \tilde{Z}_l = \text{diag} \left[ \frac{k_{l,zi}}{k_0} \right], \\ \tilde{I}_1 &= [0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0]^T, \quad \tilde{I}_2 = [0 \quad \dots \quad -n_l \cos\theta \quad \dots \quad 0]^T.\end{aligned}$$

Στις επιφάνειες  $z=d_l$  , από την απαίτηση για συνέχεια εφαπτομενικών συνιστωσών των πεδίων έχουμε:

$$E_{ly}(z = d_l) = E_{lly}(z = d_l)$$

$$H_{lx}(z = d_l) = H_{llx}(z = d_l)$$

$$\begin{aligned} \sum_i S_{lyi}(d_l)e^{-jk_x x} e^{+jK_z d_l} &= \sum_i S_{l+1,yi}(d_l)e^{-jk_x x} e^{+jK_z d_l} \\ \Rightarrow S_{lyi}(d_l)e^{+jK_z d_l} &= S_{l+1,yi}(d_l)e^{+jK_z d_l} \end{aligned}$$

Σε συμπαγή μορφή, αν θέσω  $\tilde{Y}_l = e^{+jK_z d_l}$  και  $\tilde{Y}_{l+1} = e^{+jK_z d_l}$

$$\tilde{Y}_l \tilde{S}_{ly}(d_l) = \tilde{Y}_{l+1} \tilde{S}_{l+1,y}(d_l)$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_l [\tilde{W}_{11}^l e^{j\Lambda_1^l (d_l - d_{l-1}) k_0} \tilde{C}_1^l + \tilde{W}_{12}^l \tilde{C}_2^l] = \tilde{Y}_{l+1} [\tilde{W}_{11}^{l+1} \tilde{C}_1^{l+1} + \tilde{W}_{12}^{l+1} e^{j\Lambda_2^{l+1} (d_l - d_{l+1}) k_0} \tilde{C}_2^{l+1}]$$

Θέτω  $\tilde{X}_{1l} = e^{j\Lambda_1^l (d_l - d_{l-1}) k_0}$  και  $\tilde{X}_{2l} = e^{j\Lambda_2^{l+1} (d_l - d_{l+1}) k_0}$  για ευκολία οπότε έχουμε

$$\boxed{\tilde{Y}_l [\tilde{W}_{11}^l \tilde{X}_{1l} \tilde{C}_1^l + \tilde{W}_{12}^l \tilde{C}_2^l] = \tilde{Y}_{l+1} [\tilde{W}_{11}^{l+1} \tilde{C}_1^{l+1} + \tilde{W}_{12}^{l+1} \tilde{X}_{2l} \tilde{C}_2^{l+1}]}$$

ομοίως,

$$U_{lx}(d_l)e^{+jK_z d_l} = U_{l+1,xi}(d_l)e^{+jK_z d_l}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{Y}_l [\tilde{W}_{21}^l \tilde{X}_{1l} \tilde{C}_1^l + \tilde{W}_{22}^l \tilde{C}_2^l] = \tilde{Y}_{l+1} [\tilde{W}_{21}^{l+1} \tilde{C}_1^{l+1} + \tilde{W}_{22}^{l+1} \tilde{X}_{2l} \tilde{C}_2^{l+1}]}$$

Τέλος, στην επιφάνεια  $z = d_M$  , από την απαίτηση για συνέχεια εφαπτομενικών συνιστωσών των πεδίων έχουμε:

$$E_{ly}(z = d_M) = E_{lly}(z = d_M)$$

$$H_{lx}(z = d_M) = H_{llx}(z = d_M)$$

Άρα

$$\begin{aligned} \sum_i S_{Myi}(d_M)e^{-jk_x x} e^{+jK_z d_M} &= \sum_i T_i e^{-jk_x x} \\ \Rightarrow S_{Myi}(d_M)e^{+jK_z d_M} &= T_i \end{aligned}$$

Σε συμπαγή μορφή

$$\tilde{Y}_M \tilde{S}_{My}(d_M) = \tilde{T} \Rightarrow \boxed{\tilde{Y}_M [\tilde{W}_{11}^M \tilde{X}_{1M} \tilde{C}_1^M + \tilde{W}_{12}^M \tilde{C}_2^M] = \tilde{T}}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_i U_{Mxi}(d_M) e^{-jk_{xi}x} e^{+jK_{zM}d_M} &= -\frac{1}{\omega\mu_0} \sum_i k_{III,zi} T_i e^{-jk_{xi}x} \\ \Rightarrow \left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}} U_{Mxi}(d_M) e^{jK_{zM}d_M} &= -\frac{1}{\omega\mu_0} k_{III,zi} T_i \\ \Rightarrow U_{Mxi}(d_M) e^{jK_{zM}d_M} &= -\frac{k_{III,zi}}{k_0} T_i \end{aligned}$$

Σε συμπαγή μορφή, όπως προηγουμένως  $\tilde{Z}_{III} = \text{diag} \left[ \frac{k_{III,zi}}{k_0} \right]$

$$\tilde{Y}_M \tilde{U}_{Mx}(d_M) = \tilde{Z}_{III} \tilde{T} \Rightarrow \boxed{\tilde{Y}_M [\tilde{W}_{21}^M \tilde{X}_{1M} \tilde{C}_1^M + \tilde{W}_{22}^M \tilde{C}_2^M] = \tilde{Z}_{III} \tilde{T}}$$

Αν συγκεντρώσουμε όλες τις σχέσεις που προέκυψαν από την εφαρμογή των οριακών συνθηκών θα καταλήξουμε σε ένα σύστημα με αγνώστους τα παρακάτω

$$\tilde{R}, \tilde{T}, \tilde{C}_1^l, \tilde{C}_2^l \quad l = 1, \dots, M$$

Το σύστημα είναι:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 + \tilde{R} &= \tilde{W}_{11}^1 \tilde{C}_1^1 + \tilde{W}_{12}^1 \tilde{X}_{21} \tilde{C}_2^1 \\ \tilde{I}_2 + \tilde{Z}_l \tilde{R} &= \tilde{W}_{21}^1 \tilde{C}_1^1 + \tilde{W}_{22}^1 \tilde{X}_{21} \tilde{C}_2^1 \\ \tilde{Y}_l [\tilde{W}_{21}^l \tilde{X}_{1l} \tilde{C}_1^l + \tilde{W}_{22}^l \tilde{C}_2^l] &= \tilde{Y}_{l+1} [\tilde{W}_{21}^{l+1} \tilde{C}_1^{l+1} + \tilde{W}_{22}^{l+1} \tilde{X}_{2l} \tilde{C}_2^{l+1}] \quad l = 1, \dots, M-1 \\ \tilde{Y}_l [\tilde{W}_{11}^l \tilde{X}_{1l} \tilde{C}_1^l + \tilde{W}_{12}^l \tilde{C}_2^l] &= \tilde{Y}_{l+1} [\tilde{W}_{11}^{l+1} \tilde{C}_1^{l+1} + \tilde{W}_{12}^{l+1} \tilde{X}_{2l} \tilde{C}_2^{l+1}] \quad l = 1, \dots, M-1 \\ \tilde{Y}_M [\tilde{W}_{11}^M \tilde{X}_{1M} \tilde{C}_1^M + \tilde{W}_{12}^M \tilde{C}_2^M] &= \tilde{T} \\ \tilde{Y}_M [\tilde{W}_{21}^M \tilde{X}_{1M} \tilde{C}_1^M + \tilde{W}_{22}^M \tilde{C}_2^M] &= \tilde{Z}_{III} \tilde{T} \end{aligned}$$

Το σύστημα μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} -\tilde{R} + \tilde{W}_{11}^1 \tilde{C}_1^1 + \tilde{W}_{12}^1 \tilde{X}_{2,1} \tilde{C}_2^1 &= \tilde{I}_1 \\ -\tilde{Z}_l \tilde{R} + \tilde{W}_{21}^1 \tilde{C}_1^1 + \tilde{W}_{22}^1 \tilde{X}_{2,1} \tilde{C}_2^1 &= \tilde{I}_2 \\ \tilde{Y}_1 \tilde{W}_{11}^1 \tilde{X}_{1,1} \tilde{C}_1^1 + \tilde{Y}_1 \tilde{W}_{12}^1 \tilde{C}_2^1 - \tilde{Y}_2 \tilde{W}_{11}^2 \tilde{C}_1^2 - \tilde{Y}_2 \tilde{W}_{12}^2 \tilde{X}_{2,1} \tilde{C}_2^2 &= 0 \quad l = 1 \\ \tilde{Y}_1 \tilde{W}_{21}^1 \tilde{X}_{1,1} \tilde{C}_1^1 + \tilde{Y}_1 \tilde{W}_{22}^1 \tilde{C}_2^1 - \tilde{Y}_2 \tilde{W}_{21}^2 \tilde{C}_1^2 - \tilde{Y}_2 \tilde{W}_{22}^2 \tilde{X}_{2,1} \tilde{C}_2^2 &= 0 \quad l = 1 \\ \dots\dots \\ \tilde{Y}_{M-1} \tilde{W}_{11}^{M-1} \tilde{X}_{1,M-1} \tilde{C}_1^{M-1} + \tilde{Y}_{M-1} \tilde{W}_{12}^{M-1} \tilde{C}_2^{M-1} - \tilde{Y}_M \tilde{W}_{11}^M \tilde{C}_1^M - \tilde{Y}_M \tilde{W}_{12}^M \tilde{X}_{2,M-1} \tilde{C}_2^M &= 0 \quad l=M-1 \\ \tilde{Y}_{M-1} \tilde{W}_{21}^{M-1} \tilde{X}_{1,M-1} \tilde{C}_1^{M-1} + \tilde{Y}_{M-1} \tilde{W}_{22}^{M-1} \tilde{C}_2^{M-1} - \tilde{Y}_M \tilde{W}_{21}^M \tilde{C}_1^M - \tilde{Y}_M \tilde{W}_{22}^M \tilde{X}_{2,M-1} \tilde{C}_2^M &= 0 \quad l=M-1 \\ \tilde{Y}_M \tilde{W}_{11}^M \tilde{X}_{1M} \tilde{C}_1^M + \tilde{Y}_M \tilde{W}_{12}^M \tilde{C}_2^M - \tilde{T} &= 0 \\ \tilde{Y}_M \tilde{W}_{21}^M \tilde{X}_{1M} \tilde{C}_1^M + \tilde{Y}_M \tilde{W}_{22}^M \tilde{C}_2^M - \tilde{Z}_{III} \tilde{T} &= 0 \end{aligned}$$

Και σε γενική μορφή ως:

$$\tilde{B} \cdot \tilde{\varphi} = \tilde{b}$$

$$\text{όπου } \tilde{\varphi} = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ \tilde{C}_1^1 \\ \tilde{C}_1^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}_1^M \\ \tilde{C}_2^1 \\ \vdots \\ \tilde{C}_2^M \\ \tilde{T} \end{bmatrix} \text{ το διάνυσμα των αγνώστων, } \tilde{b} = \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ το διάνυσμα διέγερσης και } \tilde{B} \text{ ο}$$

πίνακας του συστήματος που προκύπτει από τις εξισώσεις.

Έτσι, υπολογίζουμε τα  $\tilde{R} = |\tilde{R}|e^{j\varphi_R}$ ,  $\tilde{T} = |\tilde{T}|e^{j\varphi_T}$  που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, στις μεθόδους RMM και RCPM.

Επιπλέον, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την περιθλαστική απόδοση για κάθε τάξη περίθλασης (diffraction efficiencies) ως εξής:

$$DE_{ri} = |R_i|^2 \cdot \frac{Re\{-k_{I,zi}^*\}}{k_0 n_I \cos\theta}, DE_{ti} = |T_i|^2 \cdot \frac{Re\{-k_{III,zi}^*\}}{k_0 n_I \cos\theta}$$

όπου  $DE_{ri}$  αναφέρεται στις ανακλώμενες περιθλαστικές τάξεις, ενώ  $DE_{ti}$  στις διαδιδόμενες.



Από την εξίσωση του grating ισχύει ότι  $k_{xi} = k_0 n_I \sin\theta - iK_x$  όπου το  $i$  αναφέρεται στις περιθλαστικές τάξεις  $i=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Επιπλέον,  $k_{I,z} = -\sqrt{k_0^2 n_I^2 - k_{xi}^2}$  για διαδιδόμενες τάξεις ( $|k_{xi}| < k_0 n_I$ ) και  $k_{I,z} = +j\sqrt{k_{xi}^2 - k_0^2 n_I^2}$  για αποσβεννόμενες τάξεις ( $|k_{xi}| > k_0 n_I$ )

Από τις εξισώσεις Maxwell μπορούμε να βρούμε και το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή I.

$$\begin{aligned}\vec{E}_I &= \frac{1}{j\omega\epsilon_0 n_I^2} \vec{\nabla} \times \vec{H}_I = \frac{1}{j\omega\epsilon_0 n_I^2} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_I & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{j\omega\epsilon_0 n_I^2} \left[ \hat{x} \left( -\frac{\partial H_I}{\partial z} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial H_I}{\partial x} \right) \right] \\ E_{Ix} &= -\frac{1}{j\omega\epsilon_0 n_I^2} \left[ -jk_0 n_I \cos\theta e^{-jk_0 n_I (x \sin\theta + z \cos\theta)} + \sum_i -jk_{I,zi} R_i e^{-j\vec{k}_{I,i} \cdot \vec{r}} \right] = \\ &= \frac{k_0 n_I \cos\theta}{\omega\epsilon_0 n_I^2} e^{-j\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}} + \frac{1}{\omega\epsilon_0 n_I^2} \sum_i k_{I,zi} R_i e^{-j\vec{k}_{I,i} \cdot \vec{r}} \\ E_{Iz} &= \frac{1}{j\omega\epsilon_0 n_I^2} \left[ -jk_0 n_I \sin\theta e^{-jk_0 n_I (x \sin\theta + z \cos\theta)} + \sum_i -jk_{xi} R_i e^{-j\vec{k}_{I,i} \cdot \vec{r}} \right] = \\ &= -\frac{k_0 n_I \sin\theta}{\omega\epsilon_0 n_I^2} e^{-j\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}} - \frac{1}{\omega\epsilon_0 n_I^2} \sum_i k_{xi} R_i e^{-j\vec{k}_{I,i} \cdot \vec{r}}\end{aligned}$$

### Ηλεκτρομαγνητικά πεδία στην περιοχή III

Ομοίως υπολογίζουμε τα πεδία στην περιοχή III.

$$\vec{H}_{III} = \hat{y} \sum_i T_i e^{-j\vec{k}_{III,i} \cdot \vec{r}} = \hat{y} \sum_i T_i e^{-j[k_{xi}x + k_{III,zi}(z-d)]} \quad (z \geq d)$$

$d = \sum_{l=1}^M d_{II,l}$  το συνολικό πάχος της περιοχής II και  $\vec{k}_{III,i} = k_{xi}\hat{x} + k_{III,zi}\hat{z}$ .

Όπως και πριν,  $k_{III,z} = \sqrt{k_0^2 n_{III}^2 - k_{xi}^2}$  για διαδιδόμενες τάξεις ( $k_0 n_{III} > |k_{xi}|$ )

$k_{III,z} = -j\sqrt{k_{xi}^2 - k_0^2 n_{III}^2}$  για αποσβεννόμενες τάξεις ( $k_0 n_{III} < |k_{xi}|$ )



Για το ηλεκτρικό πεδίο έχουμε:

$$\vec{E}_{III} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0 n_{III}^2} \vec{\nabla} \times \vec{H}_{III}$$

$$E_{IIIx} = \frac{1}{\omega\varepsilon_0 n_{III}^2} \sum_i k_{III,zi} T_i e^{-j[k_{xi}x + k_{III,zi}(z-d)]}$$

$$E_{IIIz} = -\frac{1}{\omega\varepsilon_0 n_{III}^2} \sum_i k_{xi} T_i e^{-j[k_{xi}x + k_{III,zi}(z-d)]}$$

### Ηλεκτρομαγνητικά πεδία στην περιοχή II (περιοχή περιοδικού φράγματος)

Στο  $l$ -οστό στρώμα της περιοχής II, όπου  $l=1,2,\dots,M$ , οι συνιστώσες των εφαπτομενικών πεδίων μπορούν ομοίως να γραφούν σαν ένα άθροισμα χωρικών αρμονικών των πεδίων στην περιοδική περιοχή του φράγματος. Οι χωρικές αρμονικές αντιστοιχούν στις περιθλαστικές τάξεις. Έτσι, έχουμε

$$H_{ly} = \sum_i U_{lyi}(z) e^{-j\vec{k}_{II,i} \cdot \vec{r}}$$

Όπου από τις οριακές συνθήκες, απαιτείται οι φάσεις των κυμάτων στις περιοχές I, II και III να ταιριάζουν, οπότε  $\vec{k}_{II,i} = k_{xi}\hat{x} - iK_{zl}\hat{z}$

$$H_{ly} = \sum_i U_{lyi}(z) e^{-j(k_{xi}x - iK_{zl}z)} \quad (3.5.11)$$

$$E_{lx} = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \sum_i S_{lxi}(z) e^{-j(k_{xi}x - iK_{zl}z)} \quad (3.5.12)$$

### Εφαρμογή εξισώσεων Maxwell

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Maxwell για να βρούμε λύσεις για τις χωρικές αρμονικές των πεδίων  $S_{lyi}(z)$  και  $U_{lxi}(z)$ .

$$\vec{E}_l = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_l(x,z)} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_l(x,z)} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$E_{l,x} = \frac{j}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_l(x,z)} \frac{\partial H_{l,y}}{\partial z} \quad E_{l,z} = \frac{-j}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_l(x,z)} \frac{\partial H_{l,y}}{\partial x} \quad (3.5.13)$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

Επομένως,

$$H_{l,y} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \left( \frac{\partial E_{l,x}}{\partial z} - \frac{\partial E_{l,z}}{\partial x} \right) \quad (3.5.14)$$

όμως έχουμε:

$$\frac{\partial H_{l,y}}{\partial z} = -j\omega\varepsilon_0\varepsilon_l(x,z)E_{l,x} \quad (3.5.15)$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (3.5.15) τα πεδία από τις σχέσεις (3.5.11) και (3.5.12) και έχουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \left[ \sum_i U_{lyi}(z) e^{-j(k_x x - iK_z z)} \right] = \\ & = -j\omega\varepsilon_0 \sum_h \varepsilon_{lh} e^{jh(k_x x + K_z z)} \left[ \left( \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \sum_m S_{lxm}(z) e^{-j(k_{xm} x - mK_z z)} \right] \\ & \Rightarrow \sum_i \left[ \frac{dU_{lyi}}{dz} + jiK_{zl} U_{lyi}(z) \right] e^{-j(k_x x - iK_z z)} = \\ & = jk_0 \sum_i \left[ \sum_m \varepsilon_{l,i-m} S_{lxm}(z) \right] e^{-j(k_x x - iK_z z)} \end{aligned}$$

όπου  $i=h+m$  και  $\omega\varepsilon_0 \left( \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} = k_0$

Έχουμε λοιπόν,

$$\frac{dU_{lyi}}{dz} + jiK_{zl} U_{lyi}(z) = -jk_0 \sum_m \varepsilon_{l,i-m} S_{lxm}(z) \quad (3.5.16)$$

Θέτω  $z'=k_0 z$  και ξαναγράψω την εξίσωση (3.5.16) για όλες τις περιθλώμενες τάξεις  $i$  από  $-L$  έως  $L$  σε μορφή συμπαγών πινάκων :

$$\frac{d\tilde{U}_{ly}}{dz'} = -j\tilde{K}_{zl}\tilde{U}_{ly} - j\tilde{E}_l\tilde{S}_{lx}$$

Σε περίπτωση που η  $\epsilon$  έχει ασυνέχειες η παραπάνω εξίσωση πρέπει να γραφεί ως εξής:

$$\frac{d\tilde{U}_{ly}}{dz'} = -j\tilde{K}_{zl}\tilde{U}_{ly} - j\tilde{A}_l^{-1}\tilde{S}_{lx}$$

Όπου  $\tilde{A}_l = \begin{bmatrix} \alpha_{l0} & \dots & \emptyset \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \dots & \alpha_{l0} \end{bmatrix}$  σε αντιστοιχία με τον πίνακα  $\tilde{E}_l$  με

$$\sum_h \alpha_{lh} e^{jh(k_x x + K_{zl} z)} = \frac{1}{\epsilon(x, z)}$$

Αντικαθιστούμε τώρα στη σχέση (3.5.14) τα πεδία από τις σχέσεις (3.5.11) και (3.5.12) και έχουμε:

$$\frac{\partial E_{lx}}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_{ly} + \frac{\partial E_{lz}}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_{ly} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{-j}{\omega\epsilon_0\epsilon(x, z)} \frac{\partial H_{ly}}{\partial x} \right\}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_i \left[ \frac{dS_{lxi}}{dz} + jik_{zl}S_{lxi} \right] e^{-j(k_{xi}x - ik_{zl}z)} = -j\omega\mu_0 \sum_i U_{lyi} e^{-j(k_{xi}x - ik_{zl}z)} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{j}{\omega\epsilon_0} \sum_h a_{lh} e^{jh(k_{lx}x + K_{lz}z)} \sum_m -jk_{xm} U_{lym} e^{-j(k_{xm}x - mK_{zl}z)} \right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_i \left[ \frac{dS_{lxi}}{dz} + jik_{zl}S_{lxi} \right] e^{-j(k_{xi}x - ik_{zl}z)} = -j\omega\mu_0 \sum_i U_{lyi} e^{-j(k_{xi}x - ik_{zl}z)} +$$

$$+ \frac{j}{\omega\epsilon_0} \sum_i \left[ k_{xi} \sum_m a_{l,i-m} k_{xm} U_{lym} \right] e^{-j(k_{xm}x - mK_{zl}z)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} S_{lxi} + jik_{zl}S_{lxi} = -jk_0 U_{lyi} + j\frac{1}{k_0} k_{xi} \sum_m a_{l,i-m} k_{xm} U_{lym} \quad (3.5.17)$$

Για  $i$  από  $-L$  έως  $L$  και  $z'=k_0 z$  η εξίσωση (3.5.17) σε μορφή συμπαγών πινάκων γίνεται:

$$\frac{d}{dz} \tilde{S}_{lx} + j\tilde{K}_{zl}\tilde{S}_{lx} = -j\tilde{U}_{ly} + j\tilde{K}_x\tilde{A}_l\tilde{K}_x\tilde{U}_{ly} = j[\tilde{K}_x\tilde{A}_l\tilde{K}_x - \tilde{I}]\tilde{U}_{ly}$$

Σε περίπτωση που η  $\epsilon(x,z)$  έχει ασυνέχειες η παραπάνω εξίσωση (3.5.17) πρέπει να γραφεί ως εξής:

$$\frac{d}{dz'} \tilde{S}_{lx} = -j\tilde{K}_{zl}\tilde{S}_{lx} + j[\tilde{K}_x\tilde{E}_l^{-1}\tilde{K}_x - \tilde{I}]\tilde{U}_{ly}$$

όπου  $\tilde{K}_x = \text{diag}\left(\frac{k_{xi}}{k_0}\right)$

Συνοψίζοντας για την TM πόλωση έχουμε είτε:

$$\frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} \tilde{U}_{ly} \\ \tilde{S}_{lx} \end{bmatrix} = j \underbrace{\begin{bmatrix} -\tilde{K}_{zl} & -\tilde{E}_l \\ \tilde{K}_x\tilde{A}_l\tilde{K}_x - \tilde{I} & -\tilde{K}_{zl} \end{bmatrix}}_{\tilde{M}_l} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{U}_{ly} \\ \tilde{S}_{lx} \end{bmatrix}}_{\tilde{V}_l}$$

είτε αν η  $\epsilon(x,z)$  έχει ασυνέχειες,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} \tilde{U}_{ly} \\ \tilde{S}_{lx} \end{bmatrix} &= j \underbrace{\begin{bmatrix} -\tilde{K}_{zl} & -\tilde{E}_l \\ \tilde{K}_x\tilde{E}_l^{-1}\tilde{K}_x - \tilde{I} & -\tilde{K}_{zl} \end{bmatrix}}_{\tilde{M}_l} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{U}_{ly} \\ \tilde{S}_{lx} \end{bmatrix}}_{\tilde{V}_l} \\ &\Rightarrow \frac{d}{dz'} \tilde{V}_l = j\tilde{M}_l\tilde{V}_l \quad (3.5.18) \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση (3.5.18) είναι ένα σύστημα  $2(2L+1) \times 2(2L+1)$  και για την επίλυσή του θα ακολουθήσουμε όμοια διαδικασία με την περίπτωση TE πόλωσης.

$$\frac{d}{dz'} (\tilde{Q}_l\tilde{\Psi}_l) = j\tilde{M}_l\tilde{Q}_l\tilde{\Psi}_l \Rightarrow \frac{d}{dz'} \tilde{\Psi}_l = j \underbrace{\tilde{Q}_l^{-1}\tilde{M}_l\tilde{Q}_l}_{\tilde{\lambda}_l = \text{diag}(\lambda_i)} \tilde{\Psi}_l$$

Η λύση του αποσυζευγμένου συστήματος γράφεται:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_l &= \begin{bmatrix} e^{j\Lambda_1^l(z-d_{l-1})k_0} & \emptyset \\ \emptyset & e^{j\Lambda_2^l(z-d_l)k_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^l \\ C_2^l \end{bmatrix} \\ \tilde{Q}_l &= \begin{bmatrix} \tilde{W}_{11}^l & \tilde{W}_{12}^l \\ \tilde{W}_{21}^l & \tilde{W}_{22}^l \end{bmatrix} \end{aligned}$$

όπου  $W_{ij}^l$  υποπίνακες διάστασης  $(2L+1) \times (2L+1)$ .

Η λύση του συστήματος θα είναι:

$$\tilde{V}_l = \tilde{Q}_l \tilde{\Psi}_l = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{ly} \\ \tilde{S}_{lx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{W}_{11}^l & \tilde{W}_{12}^l \\ \tilde{W}_{21}^l & \tilde{W}_{22}^l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{j\Lambda_1^l(z-d_{l-1})k_0} & \emptyset \\ \emptyset & e^{j\Lambda_2^l(z-d_l)k_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{C}_1^l \\ \tilde{C}_2^l \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{V}_l = \begin{bmatrix} \tilde{W}_{11}^l e^{j\Lambda_1^l(z-d_{l-1})k_0} & \tilde{W}_{12}^l e^{j\Lambda_2^l(z-d_l)k_0} \\ \tilde{W}_{21}^l e^{j\Lambda_1^l(z-d_{l-1})k_0} & \tilde{W}_{22}^l e^{j\Lambda_2^l(z-d_l)k_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{C}_1^l \\ \tilde{C}_2^l \end{bmatrix}$$

### Οριακές συνθήκες

Στην επιφάνεια  $z=0$  από την απαίτηση για συνέχεια εφαπτομενικών συνιστωσών των πεδίων έχουμε:

$$H_{ly}(z=0) = H_{lly}(z=0)$$

$$E_{lx}(z=0) = E_{llx}(z=0)$$

Οπότε  $e^{-jk_{x0}x} + \sum_i R_i e^{-jk_{xi}x} = \sum_i U_{1yi}(0) e^{-jk_{xi}x}$

$$\Rightarrow \delta_{i0} + R_i = U_{1yi}(0) \quad i=-L, \dots, L$$

Και σε συμπαγή μορφή πίνακα

$$\boxed{\tilde{I}_1 + \tilde{R} = \tilde{U}_{1y}(\emptyset) = \tilde{W}_{11}^1 \tilde{C}_1^1 + \tilde{W}_{12}^1 e^{-j\Lambda_2^1 d_1 k_0} \tilde{C}_2^1}$$

και

$$\frac{k_0 n_l \cos\theta}{\omega \varepsilon_0 n_l^2} e^{-jk_{x0}x} - \frac{1}{\omega \varepsilon_0 n_l^2} \sum_i k_{l,zi} R_i e^{-jk_{xi}x} = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_i S_{1xi}(0) e^{-jk_{xi}x}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{n_l} \delta_{i0} - \frac{1}{n_l^2} \left(\frac{k_{l,zi}}{k_0}\right) R_i = U_{1xi}(0)$$

Άρα σε συμπαγή μορφή,

$$\boxed{\tilde{I}_2 + \tilde{Z}_l \tilde{R} = \tilde{U}_{1x}(\emptyset) = \tilde{W}_{21}^1 \tilde{C}_1^1 + \tilde{W}_{22}^1 e^{-j\Lambda_2^1 d_1 k_0} \tilde{C}_2^1}$$

$$\text{όπου} \quad \tilde{R} = [R_{-L} \quad R_{-L+1} \quad \dots \quad R_0 \quad \dots \quad R_L]^T, \quad \tilde{Z}_l = \text{diag} \left[ \frac{1}{n_l^2} \frac{k_{l,zi}}{k_0} \right],$$

$$\tilde{I}_1 = [0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0]^T, \quad \tilde{I}_2 = \left[ 0 \quad \dots \quad \frac{\cos\theta}{n_l} \quad \dots \quad 0 \right]^T.$$

Στις επιφάνειες  $z=d_l$ ,  $l = 1 \dots M-1$  από την απαίτηση για συνέχεια εφαπτομενικών συνιστωσών των πεδίων έχουμε:

$$H_{ly}(z = d_l) = H_{ly}(z = d_l)$$

$$E_{lx}(z = d_l) = E_{lx}(z = d_l)$$

$$\begin{aligned} \sum_i U_{lyi}(d_l) e^{-jk_{xi}x} e^{+jiK_{zl}d_l} &= \sum_i U_{l+1,yi}(d_l) e^{-jk_{xi}x} e^{+jiK_{z,l+1}d_l} \\ \Rightarrow U_{lyi}(d_l) e^{+jiK_{zl}d_l} &= U_{l+1,yi}(d_l) e^{+jiK_{z,l+1}d_l} \end{aligned}$$

Σε συμπαγή μορφή, αν θέσω  $\tilde{Y}_l = e^{+jiK_{zl}d_l}$  και  $\tilde{Y}_{l+1} = e^{+jiK_{z,l+1}d_l}$  η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\tilde{Y}_l \tilde{U}_{ly}(d_l) = \tilde{Y}_{l+1} \tilde{U}_{l+1,y}(d_l)$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_l [\tilde{W}_{11}^l e^{j\Lambda_1^l(d_l-d_{l-1})k_0} \tilde{C}_1^l + \tilde{W}_{12}^l \tilde{C}_2^l] = \tilde{Y}_{l+1} [\tilde{W}_{11}^{l+1} \tilde{C}_1^{l+1} + \tilde{W}_{12}^{l+1} e^{j\Lambda_2^{l+1}(d_l-d_{l+1})k_0} \tilde{C}_2^{l+1}]$$

Θέτω  $\tilde{X}_{1l} = e^{j\Lambda_1^l(d_l-d_{l-1})k_0}$  και  $\tilde{X}_{2l} = e^{j\Lambda_2^{l+1}(d_l-d_{l+1})k_0}$  για ευκολία οπότε έχουμε

$$\boxed{\tilde{Y}_l [\tilde{W}_{11}^l \tilde{X}_{1l} \tilde{C}_1^l + \tilde{W}_{12}^l \tilde{C}_2^l] = \tilde{Y}_{l+1} [\tilde{W}_{11}^{l+1} \tilde{C}_1^{l+1} + \tilde{W}_{12}^{l+1} \tilde{X}_{2l} \tilde{C}_2^{l+1}]}$$

ομοίως,

$$S_{lxi}(d_l) e^{+jiK_{zl}d_l} = S_{l+1,xi}(d_l) e^{+jiK_{z,l+1}d_l}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{Y}_l [\tilde{W}_{21}^l \tilde{X}_{1l} \tilde{C}_1^l + \tilde{W}_{22}^l \tilde{C}_2^l] = \tilde{Y}_{l+1} [\tilde{W}_{21}^{l+1} \tilde{C}_1^{l+1} + \tilde{W}_{22}^{l+1} \tilde{X}_{2l} \tilde{C}_2^{l+1}]}$$

Τέλος, στην επιφάνεια  $z=d_M$  από την απαίτηση για συνέχεια εφαπτομενικών συνιστωσών των πεδίων έχουμε:

$$H_{ly}(z = d_M) = H_{ly}(z = d_M)$$

$$E_{lx}(z = d_M) = E_{lx}(z = d_M)$$

Άρα

$$\sum_i U_{Myi}(d_M) e^{-jk_{xi}x} e^{+jiK_{zM}d_M} = \sum_i T_i e^{-jk_{xi}x}$$

$$\Rightarrow U_{Myi}(d_M) e^{+jiK_{zM}d_M} = T_i$$

Σε συμπαγή μορφή

$$\tilde{Y}_M \tilde{U}_{My}(d_M) = \tilde{T} \Rightarrow \boxed{\tilde{Y}_M [\tilde{W}_{11}^M \tilde{X}_{1M} \tilde{C}_1^M + \tilde{W}_{12}^M \tilde{C}_2^M] = \tilde{T}}$$

Ομοίως,

$$\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_i S_{Mxi}(d_M) e^{-jk_{xi}x} e^{+jiK_{zM}d_M} = \frac{1}{\omega \varepsilon_0 n_{III}^2} \sum_i k_{III,zi} T_i e^{-jk_{xi}x}$$

$$\Rightarrow S_{Mxi}(d_M) e^{+jiK_{zM}d_M} = \frac{1}{n_{III}^2} \frac{k_{III,zi}}{k_0} T_i$$

Σε συμπαγή μορφή όπως προηγουμένως  $\tilde{Z}_l = \text{diag} \left[ \frac{1}{n_{III}^2} \frac{k_{III,zi}}{k_0} \right]$

$$\tilde{Y}_M \tilde{S}_{Mx}(d_M) = \tilde{Z}_{III} \tilde{T} \Rightarrow \boxed{\tilde{Y}_M [\tilde{W}_{21}^M \tilde{X}_{1M} \tilde{C}_1^M + \tilde{W}_{22}^M \tilde{C}_2^M] = \tilde{Z}_{III} \tilde{T}}$$

Αν συγκεντρώσουμε όλες τις σχέσεις που προέκυψαν από την εφαρμογή των οριακών συνθηκών θα καταλήξουμε σε ένα σύστημα με αγνώστους τα παρακάτω

$$\tilde{R}, \tilde{T}, \tilde{C}_1^l, \tilde{C}_2^l \quad l = 1, \dots, M$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 + \tilde{R} &= \tilde{W}_{11}^1 \tilde{C}_1^1 + \tilde{W}_{12}^1 \tilde{X}_{21} \tilde{C}_2^1 \\ \tilde{I}_2 + \tilde{Z}_l \tilde{R} &= \tilde{W}_{21}^1 \tilde{C}_1^1 + \tilde{W}_{22}^1 \tilde{X}_{21} \tilde{C}_2^1 \\ \tilde{Y}_l [\tilde{W}_{21}^l \tilde{X}_{1l} \tilde{C}_1^l + \tilde{W}_{22}^l \tilde{C}_2^l] &= \tilde{Y}_{l+1} [\tilde{W}_{21}^{l+1} \tilde{C}_1^{l+1} + \tilde{W}_{22}^{l+1} \tilde{X}_{2l} \tilde{C}_2^{l+1}] \quad l = 1, \dots, M-1 \\ \tilde{Y}_l [\tilde{W}_{11}^l \tilde{X}_{1l} \tilde{C}_1^l + \tilde{W}_{12}^l \tilde{C}_2^l] &= \tilde{Y}_{l+1} [\tilde{W}_{11}^{l+1} \tilde{C}_1^{l+1} + \tilde{W}_{12}^{l+1} \tilde{X}_{2l} \tilde{C}_2^{l+1}] \quad l = 1, \dots, M-1 \\ \tilde{Y}_M [\tilde{W}_{11}^M \tilde{X}_{1M} \tilde{C}_1^M + \tilde{W}_{12}^M \tilde{C}_2^M] &= \tilde{T} \\ \tilde{Y}_M [\tilde{W}_{21}^M \tilde{X}_{1M} \tilde{C}_1^M + \tilde{W}_{22}^M \tilde{C}_2^M] &= \tilde{Z}_{III} \tilde{T} \end{aligned}$$

Και σε γενική μορφή όπως και στην περίπτωση TE πόλωσης,

$$\tilde{B} \cdot \tilde{\varphi} = \tilde{b} \quad (3.5.19)$$

Έτσι, υπολογίζουμε τα  $\tilde{R} = |\tilde{R}| e^{j\varphi_R}$ ,  $\tilde{T} = |\tilde{T}| e^{j\varphi_T}$  που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, στις μεθόδους RMM και RCPM.

Επιπλέον, μπορούμε να υπολογίσουμε την περιθλαστική απόδοση για κάθε τάξη περίθλασης (diffraction efficiencies) ως εξής:

$$DE_{ri} = |R_i|^2 \cdot \frac{\text{Re}\{-k_{i,zi}^*\}}{k_0 n_l \cos\theta}$$

$$DE_{ti} = |T_i|^2 \cdot \frac{n_l \text{Re}\{-k_{III,zi}^*\}}{k_0 n_{III}^2 \cos\theta}$$

όπου  $DE_{ri}$  αναφέρεται στις ανακλώμενες περιθλαστικές τάξεις, ενώ  $DE_{ti}$  στις διαδιδόμενες.

### Ευστάθεια

Αναγκαία συνθήκη για την ευστάθεια της μεθόδου είναι η σχέση διατήρησης της ενέργειας:

$$\sum_i (DE_{ri} + DE_{ti}) = 1$$

Επιπλέον, η ακρίβεια των λύσεων εξαρτάται από το πλήθος των αρμονικών που διατηρούνται στην ανάλυση, αλλά ταυτόχρονα με την αύξηση των αρμονικών, αυξάνεται η πολυπλοκότητα και μπορεί να υπάρξει αστάθεια λόγω των αποσβεννόμενων όρων.

### **3.6 Ανάλυση Διαρρέοντος ρυθμού - Leaky Mode Analysis**

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει εξωτερική διέγερση, το διάνυσμα διέγερσης μηδενίζεται ( $\tilde{b} = 0$ ) και το σύστημα (3.5.19) ή το αντίστοιχο σε TM πόλωση γίνεται ομογενές:

$$\tilde{B}\tilde{\varphi} = \varnothing \quad (3.6.1)$$

Για να έχει το σύστημα 3.6.1 μη τετριμμένη λύση θα πρέπει:

$$\det\{\tilde{B}(\tilde{\beta})\} = 0 \quad (3.6.2)$$

όπου για το  $\tilde{\beta}$  ισχύει:  $k_{xi} = \tilde{\beta} - iK_x$  και επιπλέον,  $k_{I,z} = \pm \sqrt{k_0^2 n_I^2 - k_{xi}^2}$  στην περιοχή

I και  $k_{III,z} = \pm \sqrt{k_0^2 n_{III}^2 - k_{xi}^2}$  στην περιοχή III.

Από την εξίσωση 3.6.2 μπορούμε να βρούμε τη μιγαδική σταθερά διάδοσης  $\tilde{\beta}$  του διαρρέοντος ρυθμού (leaky-mode). Η εξίσωση είναι υπερβατική και λύνεται με αριθμητικές μεθόδους για τις οποίες είναι απαραίτητη μια αρχική εκτίμηση του  $\tilde{\beta}$  (όπως η μέθοδος Muller [11]). Για παράδειγμα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αντίστοιχη τιμή  $\beta_0$  αν στη θέση του περιθλαστικού φράγματος υπήρχε στρώμα με ενιαίο δείκτη διάθλασης (μέσος δείκτης διάθλασης ή ενεργός δείκτης διάθλασης). Αν θεωρήσουμε το περιθλαστικό φράγμα ως διαταραχή αυτού του συστήματος, τότε το  $\beta_0$  είναι η λύση του αδιατάρακτου συστήματος. Η αριθμητική σύγκλιση στη σωστή λύση είναι πολλές φορές δύσκολη και αυτό εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως η μορφή της διάταξης και



το μέγεθος της διαταραχής. Ακόμα, υπάρχει περίπτωση η επαναληπτική διαδικασία να μην συγκλίνει ή να δίνει λάθος λύση. Αυτό είναι πιο πιθανό όταν το αδιατάρακτο σύστημα έχει πολλές λύσεις (ρυθμούς) σε μικρή απόσταση μεταξύ τους.

Το σύστημα 3.6.1 έχει άπειρες λύσεις αν ισχύει η 3.6.2 . Επιλέγουμε σαν ελεύθερη παράμετρο την μεταβλητή  $R_0$  που αντιστοιχεί στην μηδενική ανακλώμενη τάξη. Οι υπόλοιπες άγνωστες μεταβλητές θα εκφραστούν συναρτήσει αυτής. Αν το  $R_0$  είναι το  $j$ -οστό στοιχείο του διανύσματος  $\tilde{\varphi}$  και απαλείψουμε την  $i$ -οστή γραμμή του πίνακα  $\tilde{B}$  τότε το σύστημα 3.6.1 μετατρέπεται στο ισοδύναμο μειωμένο, μη ομογενές σύστημα:

$$\tilde{B}_{ij}\tilde{\varphi}_j = -\tilde{B}_j\varphi_j \quad (3.6.3)$$

όπου  $\tilde{B}_{ij}$  ο πίνακας  $\tilde{B}$  χωρίς τη γραμμή  $i$  και τη στήλη  $j$ ,  $\tilde{\varphi}_j$  το διάνυσμα  $\tilde{\varphi}$  χωρίς το στοιχείο  $j$ ,  $\tilde{B}_j$  η στήλη  $j$  του πίνακα  $\tilde{B}$  χωρίς το  $i$  στοιχείο και  $\varphi_j = R_0$ . Για το σύστημα ισχύει ότι  $\det\{\tilde{B}_{ij}\} \neq 0$  οπότε έχει μοναδική λύση και μπορούμε να υπολογίσουμε τα  $\tilde{R} = |\tilde{R}|e^{j\varphi_R}$ ,  $\tilde{T} = |\tilde{T}|e^{j\varphi_T}$  που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Επιπλέον, μπορούμε να υπολογίσουμε την σχετική περιθλαστική απόδοση για κάθε τάξη περίθλασης.

$$\text{TE πόλωση: } DE_{ri} = |R_i|^2 \cdot \text{Re}\{-k_{I,zi}\} \quad , \quad DE_{ti} = |T_i|^2 \cdot \text{Re}\{k_{III,zi}\}$$

$$\text{TM πόλωση: } DE_{ri} = |R_i|^2 \cdot \text{Re}\{-k_{I,zi}\} \quad , \quad DE_{ti} = |T_i|^2 \cdot \text{Re}\{-k_{III,zi}\} \frac{n_I^2}{n_{III}^2}$$

## Αναφορές

- [1] E. G. Lowen and E. Popov, “Diffraction Gratings and Applications”, Marcel Dekker, New York, (1997)
- [2] P. R. Haugen, S. Rychnovsky, and A. Husain, “Optical interconnects for high speed computing,” *Opt. Engr.*, vol. 25, pp. 1076-1084, Oct.1986.
- [3] J. H. Harris, R. K. Winn, and D. G. Dalgoutte, “Theory and design of periodic couplers,” *Appl Opt.*, vol. 11, pp. 2234-2241, Oct. 1972.
- [4] C. Palmer, E. Lowen, “Diffraction Grating Handbook”, 6th edition Newport Corporation (2005)
- [5] K. R. Harper, “Theory, design, and fabrication of Diffractive grating coupler For slab waveguide”, A Ph.D. thesis submitted to the faculty of Brigham Young University (2003).
- [6] R. E. Collin, “Field Theory of Guided Waves”, McGraw-Hill Book Company pp.368-370 (1960).
- [7] T. K. Gaylord, M. G. Moharam, “Planar dielectric grating diffraction theories”, *Applied Physics B Photophysics And Laser Chemistry*, Vol. 28, Issue:1, pp. 1-14, Feb.1982.
- [8] M. G. Moharam, T. K. Gaylord, “Three-dimensional vector coupled-wave analysis of planar-grating diffraction”, *JOSA*, Vol. 73, Issue 9, pp. 1105-1112, Sept.1983.
- [9] M. G. Moharam, Eric B. Grann, Drew A. Pommet and T. K. Gaylord, “Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings” *J. Opt. Soc. Am. A* , Vol. 12, No. 5 , pp. 1068 - 1076, May 1995.
- [10] M. G. Moharam, Eric B. Grann, Drew A. Pommet and T. K. Gaylord, “Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix method,” *J. Opt. Soc. Am. A* , Vol. 12, No. 5 , pp. 1077 - 1086, May 1995.
- [11] D. E. Muller, "A method for solving algebraic equations using an automatic computer," *Math. Tables and Other Aids to Comp.* 10, pp. 208-215, Oct.1956.

## Κεφάλαιο 4

# Μέθοδοι εύρεσης ρυθμών μέσω του συντελεστή ανάκλασης

### 4.1 Εισαγωγικά

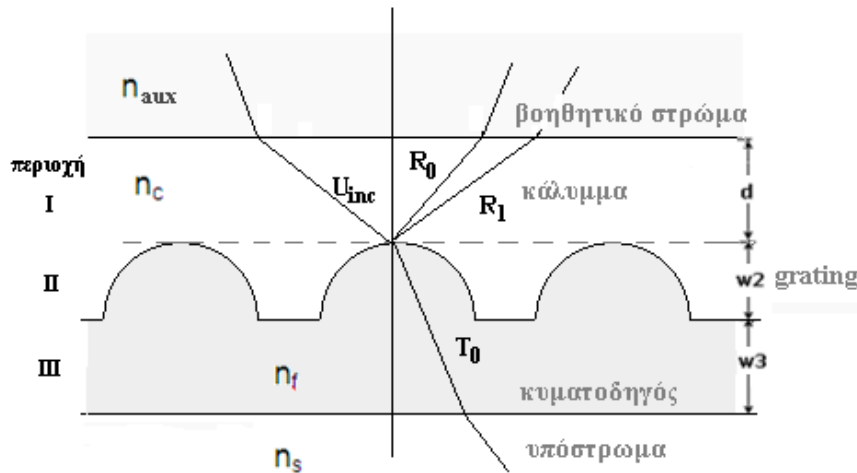
Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι για να βρούμε την μιγαδική σταθερά διάδοσης  $\tilde{\beta}$  θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση 3.6.2, δηλαδή να βρούμε τις ρίζες της στο μιγαδικό επίπεδο με κάποια ακριβή αριθμητική μέθοδο. Κάθε ρίζα αντιστοιχεί σε έναν ρυθμό διάδοσης. Όπως έχουμε αναφέρει, αν και οι αριθμητικές αυτές μέθοδοι δίνουν ακριβείς λύσεις, πολλές φορές η σύγκλιση είναι δύσκολη και γενικά ο προγραμματισμός τους είναι αρκετά πολύπλοκος. Έτσι, είναι αναγκαία η εύρεση μεθόδων που θα βρίσκουν τους ρυθμούς κυματοδηγούμενων διατάξεων χωρίς πολύ κόπο ως προς τον προγραμματισμό. Τέτοιες μέθοδοι είναι οι Reflectance Magnitude Method (RMM) και Reflection Coefficient Phase Method (RCPM) που θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία.

### 4.2 Μέθοδος Πλάτους Ανακλαστικότητας Ισχύος (Reflectance Magnitude Method)

Με τη μέθοδο RMM βρίσκουμε τους ρυθμούς που διαδίδονται σε κάποιο στρώμα πολυστρωματικού εν γένει κυματοδηγού που περιλαμβάνει περιθλαστικό φράγμα. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια του γραφήματος της περιθλαστικής απόδοσης ενός προσπίπτοντος κύματος, ως προς την εφαπτομενική συνιστώσα του κυματοδιανύσματος του προσπίπτοντος κύματος. Το γράφημα που προκύπτει έχει κάποιες κορυφές Λορεντζιανής κατανομής. Κάθε κορυφή αντιστοιχεί στο πραγματικό μέρος της μιγαδικής σταθεράς διάδοσης ενός επιτρεπτού ρυθμού, δηλαδή στον λεγόμενο *συντελεστή διάδοσης*  $\beta$ . Το αντίστοιχο φανταστικό μέρος, που λέγεται *συντελεστής σύζευξης*  $\alpha$ , βρίσκουμε από το

μισό του εύρους ημίσειας μεγίστου (HWHM) της Λορεντζιανής. [1] Η μέθοδος δίνει σε γενικές γραμμές ακριβή αποτελέσματα, ενώ παρουσιάζει προβλήματα όταν δύο ή περισσότερες Λορεντζιανές κατανομές επικαλύπτονται.

Σε όλες τις περιπτώσεις, για να μελετήσουμε τους κυματοδηγούμενους ρυθμούς, όπως θα δούμε στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε ένα επιπλέον βοηθητικό στρώμα υψηλού δείκτη διάθλασης στην αντίστοιχη διάταξη. Αυτό συμβαίνει ώστε για τους ρυθμούς που μας ενδιαφέρουν να ισχύει η ανισότητα  $0 < N_{\text{eff}} < \max\{n_i\}$ , όπου  $N_{\text{eff}} = \beta / k_0$  και  $n_i$  οι δείκτες διάθλασης των στρωμάτων. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας  $\tilde{B}$  αποκτά μια διαταραχή η οποία μεταφέρεται στις ιδιοτιμές του πίνακα και τελικά στο  $\tilde{\beta}_0^*$ . Η διαταραχή αυτή μειώνεται, όσο η απόσταση του βοηθητικού στρώματος από τη διάταξη αυξάνεται. Για αυτό όπως θα δούμε στη συνέχεια, θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του διαταραγμένου  $\tilde{\beta}_0^*$  καθώς η απόσταση αυτή αυξάνεται. Η διάταξη με το βοηθητικό στρώμα απεικονίζεται παρακάτω:



**Εικόνα 4.2.1:** Τυπική διάταξη περιθλαστικού φράγματος με βοηθητικό στρώμα.

Αναλυτικά, από την ενότητα 3.6 και τη σχέση (3.6.1) έχουμε:

$$\tilde{B}(\tilde{\beta}) \begin{bmatrix} R_{-M} \\ \vdots \\ R_M \\ C \\ \vdots \\ T_M \end{bmatrix} = \Phi \Rightarrow \det\{\tilde{B}(\tilde{\beta})\} = 0$$

Έστω  $\check{\beta}_0^*$  μια ρίζα της εξίσωσης  $\det\{\tilde{B}(\tilde{\beta})\} = f(\tilde{\beta}) = 0$ . Τότε  $f(\tilde{\beta}) = (\tilde{\beta} - \check{\beta}_0^*)A(\tilde{\beta})$ .

Σε περίπτωση που έχουμε εξωτερική διέγερση η εξίσωση γίνεται  $\tilde{B}(\tilde{\beta}) \cdot \tilde{\varphi} = \tilde{b}$  όπου  $\tilde{b}$  το διάνυσμα διέγερσης. Τότε η λύση του συστήματος θα είναι:

$$\tilde{\varphi} = \begin{bmatrix} R_{-M} \\ \vdots \\ R_M \\ C \\ \vdots \\ T_M \end{bmatrix} = \frac{1}{\det\{\tilde{B}(\tilde{\beta})\}} \cdot Adj\{\tilde{B}(\tilde{\beta})\} \cdot \tilde{b}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R_{-M} \\ \vdots \\ R_M \\ C \\ \vdots \\ T_M \end{bmatrix} = \frac{1}{(\tilde{\beta} - \check{\beta}_0^*)A(\tilde{\beta})} \cdot Adj\{\tilde{B}(\tilde{\beta})\} \cdot \tilde{b}$$

Αν στο στοιχείο  $R_0$  αντιστοιχεί η συνάρτηση  $p(\beta)$  από τον πίνακα στήλη  $Adj\{\tilde{B}(\tilde{\beta})\} \cdot \tilde{b}$  και  $Q(\tilde{\beta}) = \frac{p(\tilde{\beta})}{A(\tilde{\beta})}$  τότε για τον μιγαδικό συντελεστή ανάκλασης της μηδενικής περιθλαστικής τάξης έχουμε (για πραγματικό  $\tilde{\beta}$ ):

$$R_0 = R_0(\beta) = \frac{Q(\beta)}{\beta - \check{\beta}_0^*} \quad (4.2.1)$$

$$|R_0|^2 = \frac{|Q(\beta)|^2}{|\beta - \check{\beta}_0^*|^2} = \frac{|Q(\beta)|^2}{|(\beta - \beta_{0r}) - j\beta_{0i}|^2} = \frac{|Q(\beta)|^2}{(\beta - \beta_{0r})^2 + \beta_{0i}^2} \propto DE_0$$

Επομένως,

$$1 - |R_0|^2 = \frac{J(\beta)}{(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2} \quad \text{όπου } J(\beta) = (\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2 - |Q(\beta)|^2 \quad (4.2.2)$$

Η περιθλαστική απόδοση είναι ανάλογη του  $|R_0|^2$  όπως είναι γνωστό. Αυτό σημαίνει ότι αν η συνάρτηση  $J(\beta)$  δεν μεταβάλλεται γρήγορα γύρω από το  $\check{\beta}_0^*$  τότε μπορούμε να πούμε ότι η ισχύς  $1 - |R_0|^2$  ή  $1 - DE_0$  παρουσιάζει Λορεντζιανή κατανομή. Δηλαδή είναι της μορφής  $\frac{c}{(\beta-b)^2+a^2}$ . Έτσι, αν έχουμε δοσμένη την κατανομή της ισχύος  $1 - |R_0|^2$  και υπολογίσουμε τους συντελεστές της Λορεντζιανής κατανομής, μπορούμε να τους αντιστοιχίσουμε με τα  $\beta_{0r}, \beta_{0i}$  δηλαδή τη μιγαδική σταθερά διάδοσης της μηδενικής ανακλώμενης τάξης περίθλασης:  $\tilde{\beta} = \check{\beta}_0^* = \beta_{0r} + j\beta_{0i} = \beta^* - j\alpha$

Τα ίδια ισχύουν και για οποιαδήποτε άλλη τάξη περίθλασης υπάρχει.

### 4.3 Μέθοδος Φάσης Συντελεστού Ανάκλασης (Reflection Coefficient Phase Method)

Για την εφαρμογή της προηγούμενης μεθόδου χρησιμοποιήσαμε το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης. Ωστόσο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τη φάση του συντελεστή ανάκλασης για να βρούμε τους ρυθμούς με τη μέθοδο RCPM. Πιο συγκεκριμένα, από την σχέση (4.2.1) έχουμε:

$$R_0 = \frac{Q(\beta)}{\beta - \check{\beta}_0^*} = \frac{|Q(\beta)|e^{j\Phi_1\{Q(\beta)\}}}{[(\beta - \beta_{0r})^2 + \beta_{0i}^2]^{1/2}} \cdot e^{-j \tan^{-1}\left(\frac{\beta_{0i}}{\beta - \beta_{0r}}\right)}$$

Άρα η φάση του μιγαδικού  $R_0$  θα είναι:  $\Phi\{R_0\} = -\tan^{-1}\left(\frac{\beta_{0i}}{\beta - \beta_{0r}}\right) + \Phi_1\{Q(\beta)\}$  (4.3.1)

αν υποθέσουμε ότι η  $\Phi_1\{Q(\beta)\}$  μεταβάλλεται αργά γύρω από το  $\check{\beta}_0^*$  δηλαδή

$$\frac{d\Phi_1}{d\beta} \rightarrow 0 \text{ για } \beta \rightarrow \check{\beta}_0^*$$

τότε

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\beta} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\beta_{0i}}{\beta - \beta_{0r}}\right)^2} \cdot \frac{d}{d\beta} \left(\frac{\beta_{0i}}{\beta - \beta_{0r}}\right) \\ \Rightarrow \frac{d\Phi}{d\beta} &= \frac{-\beta_{0i}}{(\beta - \beta_{0r})^2 + \beta_{0i}^2} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Επομένως έχουμε:

$$\left|\frac{d\Phi}{d\beta}\right| \propto \frac{1}{(\beta - \beta_{0r})^2 + \beta_{0i}^2}$$

δηλαδή η παράγωγος της φάσης του  $R_0$  έχει Λορεντζιανή κατανομή όπως και το τετράγωνο του μέτρου. Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε όπως και πριν τους συντελεστές  $\beta_{0r}$ ,  $\beta_{0i}$  και  $\check{\beta}_0^* = \beta_{0r} + j\beta_{0i} = \boldsymbol{\beta} - j\boldsymbol{\alpha}$ .

Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου έναντι της RMM είναι ότι δεν είναι απαραίτητο το βοηθητικό στρώμα υψηλού δείκτη, οπότε δεν υφίσταται η διαταραχή. Ωστόσο, αυτό σημαίνει ότι οι ρυθμοί εξάγονται με μη φυσικό τρόπο που ισοδυναμεί με τη χρήση μιγαδικής γωνίας πρόσπτωσης για το προσπίπτον κύμα, όπως και στην μέθοδο RPM [2]. Έτσι το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης (μιγαδικού) και συνεπώς η περιθλαστική απόδοση μπορεί να υπερβαίνουν την μονάδα, πράγμα μη φυσικό. Η μέθοδος δουλεύει αποκλειστικά με την φάση του συντελεστή ανάκλασης και είναι καθαρά μαθηματική-θεωρητική.

Ένα ακόμα πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι σε περίπτωση που δεν μπορούμε να αγνοήσουμε την επίδραση της συνάρτησης  $J(\beta)$  ή  $Q(\beta)$  από τις σχέσεις 4.2.2 και 4.3.1 αντίστοιχα, τότε η μορφή της παραγώγου της φάσης επηρεάζεται πιο λίγο και πιο δύσκολα. Για παράδειγμα αν η  $Q(\beta)$  έχει πραγματική ρίζα κοντά στο  $\beta$  που μας ενδιαφέρει η φάση δεν επηρεάζεται. Γενικά, το γεγονός ότι στην σχέση 4.3.2 η συνάρτηση-σφάλμα  $\frac{d\Phi_1\{Q(\beta)\}}{d\beta}$  προστίθεται ενώ στην σχέση 4.2.2 η  $J(\beta)$  πολλαπλασιάζεται στην Λορεντζιανή κάνει την κατάσταση πιο εύκολα επιλύσιμη για την πρώτη περίπτωση.

Για να εφαρμόσουμε τις δύο μεθόδους που περιγράψαμε, χρησιμοποιούμε πρώτα την μέθοδο RCWA για να υπολογίσουμε τον συντελεστή ανάκλασης (μέτρο ή φάση). Στη συνέχεια από τις Λορεντζιανές κατανομές στα διαγράμματα  $1 - |R_0|^2$  ή  $\frac{d\Phi\{R_0\}}{d\beta}$  βρίσκουμε τους συντελεστές  $\beta$  και  $\alpha$ .

### *Αναφορές*

- [1] A. K. Ghatak, K. Thyagarajan, and M. R. Shenoy, “Numerical analysis of planar optical waveguides using matrix approach” *Journal of Lightwave Technology*, vol. 5, pp. 660–667, May 1987.
- [2] E. Anemogiannis, E. N. Glytsis, and T. K. Gaylord, “Determination of Guided and Leaky Modes in Lossless and Lossy Planar Multilayer Optical Waveguides: Reflection Pole Method and Wavevector Density Method”, *Journal of Lightwave Technology*, Vol. 17, Issue 5, pp. 929- 941, May 1999.

## Κεφάλαιο 5

# Εφαρμογή - Αποτελέσματα

### 5.1 Εισαγωγικά

Στις ακόλουθες ενότητες παρουσιάζεται η εφαρμογή των μεθόδων RMM και RCPM και τα αποτελέσματα, με προσομοιώσεις σε τέσσερις διαφορετικές διατάξεις περιθλαστικών φραγμάτων. Σε κάθε περίπτωση μελετάμε αν οι δύο μέθοδοι μπορούν να ανιχνεύσουν τους ρυθμούς και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με τις τιμές για τους ρυθμούς υπολογισμένες από τη μέθοδο leaky-mode, δηλαδή τη λύση της υπερβατικής εξίσωσης 3.6.2. Αναλυτικά, για κάθε διάταξη τα βασικά βήματα για την εφαρμογή των μεθόδων είναι τα εξής:

#### 1. Μέθοδος Πλάτους Ανακλαστικότητας Ισχύος (Reflectance Magnitude Method)

- Προσθήκη βοηθητικού στρώματος υψηλού δείκτη διάθλασης ώστε για τους ρυθμούς που ενδιαφέρουν να είναι  $0 < N_{\text{eff}} < n_{\text{aux}}$  όπου  $n_{\text{aux}} = \max(n_c, n_s)$  ( $n_{\text{aux}}$  ο δείκτης διάθλασης του βοηθητικού στρώματος)
- Εύρεση της περιθλαστικής απόδοσης  $DE_0^f \sim |R_0|^2$  (του ρυθμού  $TE_0$  ή  $TM_0$ ) με την μέθοδο RCWA για μεταβαλλόμενη γωνία  $\theta$  του προσπίπτοντος κύματος (εικόνα 3.5.1). Η μέθοδος έχει περιγραφεί αναλυτικά στην ενότητα 3.5. Ο κώδικας είναι γραμμένος σε FORTRAN αλλά και σε MATLAB μόνο για τις διατάξεις που δεν περιλαμβάνουν ολογραφικά στρώματα.
- Υπολογισμός του  $1-|R_0|^2$  και κανονικοποίηση αυτού. Στη συνέχεια, δημιουργία του γραφήματος  $1-|R_0|^2$  κανονικοποιημένου ως προς την συνιστώσα-x του κυματοδιανύσματος του προσπίπτοντος  $k_x = k_0 n_c \sin\theta$ .

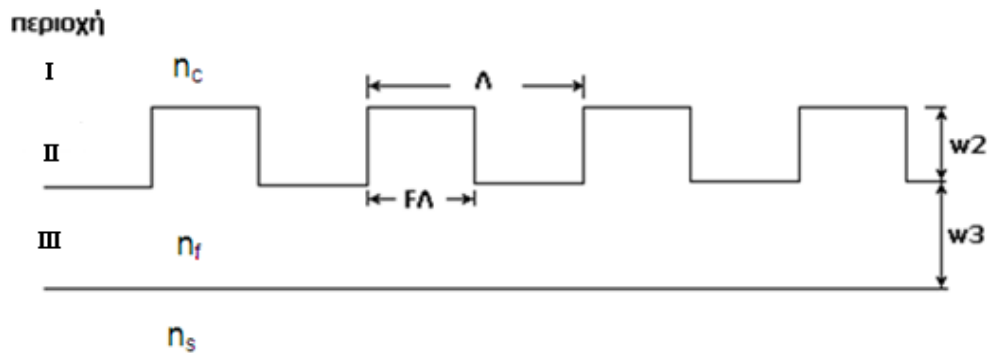


- Υπολογισμός των συντελεστών  $\beta$  και  $\alpha$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος της μιγαδικής σταθεράς διάδοσης  $\check{\beta}_0^* = \beta - j\alpha$ ) από την Λορεντζιανή στο προηγούμενο γράφημα. Συγκεκριμένα, το ζητούμενο  $\beta$  είναι αυτό που αντιστοιχεί στην κορυφή της Λορεντζιανής, ενώ το  $\alpha$  είναι το μισό του εύρους ημίσεως μεγίστου (FWHM) αυτής. (ο υπολογισμός γίνεται σε MATLAB και χρησιμοποιείται μια Nonlinear Least Square μέθοδος)
- Επανάληψη για διαφορετικές τιμές της απόστασης  $d$  του βοηθητικού στρώματος από την αρχική διάταξη. (Στον κώδικα MATLAB γίνεται αυτόματα.)
- Εύρεση τελικής μέσης τιμής για τον συντελεστή διάδοσης  $\beta$  και για τον συντελεστή σύζευξης  $\alpha$ .

## 2. Μέθοδος Φάσης Συντελεστού Ανάκλασης (Reflection Coefficient Phase Method)

- Εύρεση του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης  $R_0$  με την μέθοδο RCWA με μεταβαλλόμενη την κανονικοποιημένη συνιστώσα- $x$  του κυματοδιανύσματος του προσπίπτοντος κύματος  $k_x/k_0$ . Η μέθοδος έχει περιγραφεί αναλυτικά στην ενότητα 3.5. Ο κώδικας είναι γραμμένος σε FORTRAN.
- Εύρεση της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης  $\Phi\{R_0\} = \tan^{-1}\left(\frac{R_{0i}}{R_{0r}}\right)$  και της παραγώγου της ως προς  $k_x$ ,  $\frac{1}{\pi} \frac{d\Phi}{dk_x}$
- Σχεδιασμός γραφημάτων της φάσης, της παραγώγου της φάσης αλλά και της κανονικοποιημένης παραγώγου της φάσης του συντελεστή ανάκλασης ως προς το  $k_x/k_0$ .
- Υπολογισμός των συντελεστών  $\beta$  και  $\alpha$  από την Λορεντζιανή στο τελευταίο γράφημα, όπου χρησιμοποιείται μια Nonlinear Least Square μέθοδος. Τα τελευταία τρία βήματα γίνονται με αυτοματοποιημένο πρόγραμμα σε MATLAB.
- Σύγκριση των συντελεστών  $\beta$  και  $\alpha$  με τις τελικές τιμές των συντελεστών από τη μέθοδο RMM και τις δοσμένες τιμές από την ανάλυση leaky-mode.

## 5.2 Φράγμα Επιφανειακής Χάραξης Ορθογωνικού Προφίλ (Surface-Relief Rectangular Grating)



Εικόνα 5.2.1: Τοπολογία περιθλαστικού φράγματος

Μελετάμε την διάταξη της εικόνας 5.2.1 με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

Διηλεκτρικές σταθερές των περιοχών:  $n_c=1.0$ ,  $n_f=\sqrt{3}$ ,  $n_s=\sqrt{2.3}$

Μήκος κύματος ελευθέρου χώρου:  $\lambda_0=1.0 \mu\text{m}$

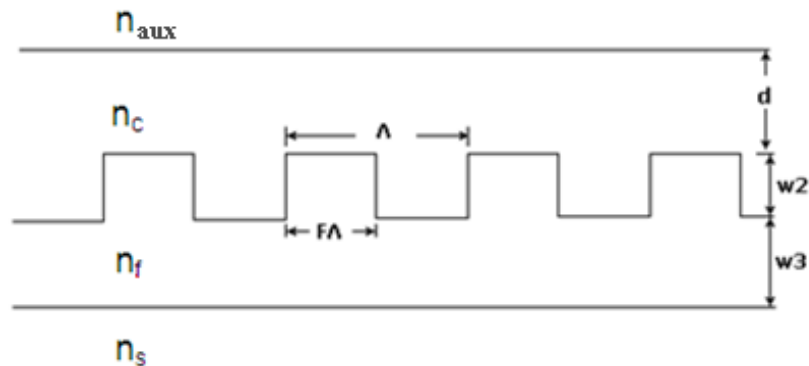
Πάχος στρωμάτων:  $w_1 = \infty$ ,  $w_2 = 0.2\lambda_0$ ,  $w_3 = \lambda_0/\pi$ ,  $w_4 = \infty$

Περίοδος φράγματος:  $\Lambda = \lambda_0/2$  με  $F=0.50$

### TE πόλωση

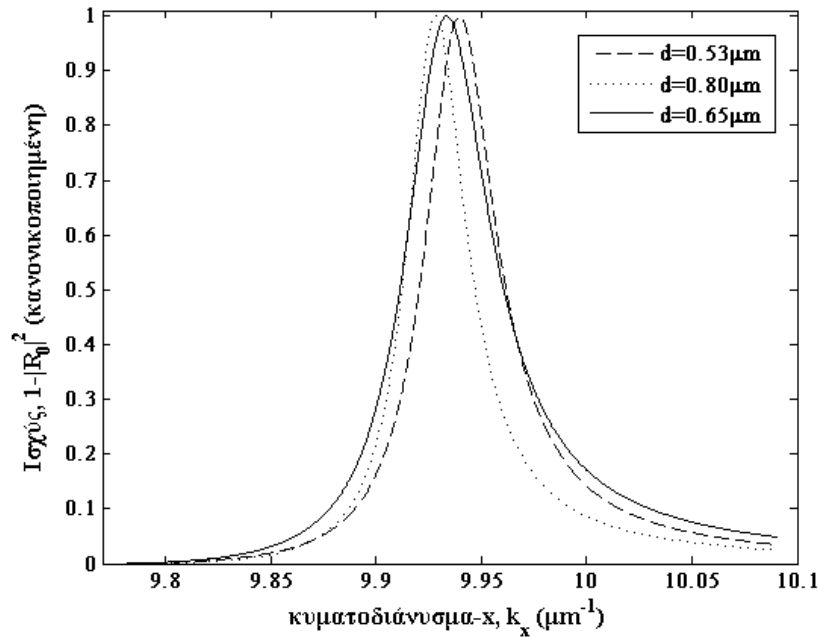
#### Μέθοδος RMM

Χρησιμοποιούμε βοηθητικό στρώμα σε απόσταση  $d$  από την αρχική διάταξη με  $n_{\text{aux}}=\sqrt{3}$  όπως φαίνεται στην εικόνα 5.2.2 έτσι ώστε για τους ρυθμούς που μας ενδιαφέρουν να έχουμε  $n_s < N_{\text{eff}} < n_{\text{aux}}$  ( $n_{\text{aux}} = \sqrt{3} = 1.731051\dots$ ).



Εικόνα 5.2.2: Τοπολογία φράγματος με βοηθητικό στρώμα

Εφαρμόζουμε την αριθμητική μέθοδο RCWA για διάφορες τιμές της απόστασης  $d$  του βοηθητικού στρώματος από την αρχική διάταξη. Στην εικόνα 5.2.3 απεικονίζονται τα αποτελέσματα της κανονικοποιημένης ισχύος  $1-DE_0^r$  για τρεις αποστάσεις ενδεικτικά. Ισχύει  $DE_0^r \sim |R_0|^2$ . Τα αποτελέσματα είναι κανονικοποιημένα ώστε να μπορούν να συγκριθούν αλλά και για καλύτερη εποπτεία.

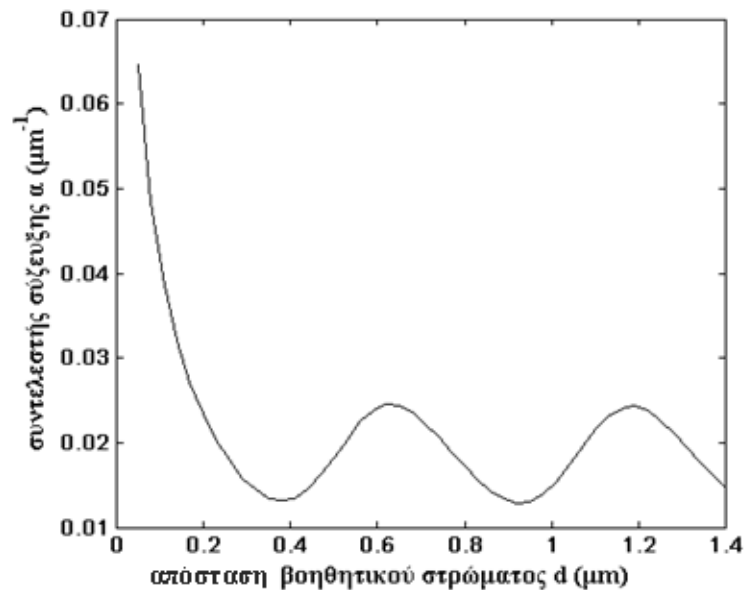


**Εικόνα 5.2.3:** Ισχύς  $1-|R_0|^2$  ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα- $x$ . Σύγκριση Λορεντζιανών κατανομών για τρεις τιμές της απόστασης  $d$  του βοηθητικού στρώματος από τη αρχική διάταξη.

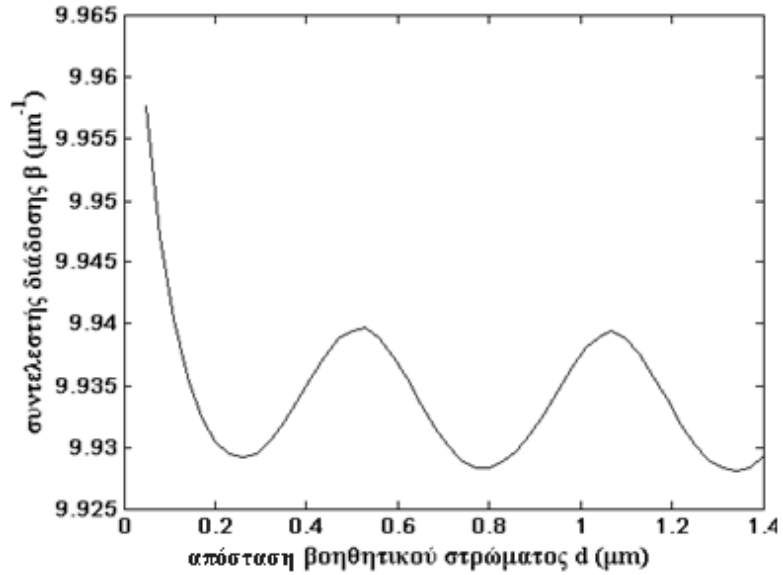
Οι τιμές των μεγίστων αντιστοιχούν στο ζητούμενο  $\beta$  ενώ τα πλάτη ημίσειος μεγίστου στο  $a$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος της σταθεράς διάδοσης αντίστοιχα). Υπολογίζουμε τις τιμές  $a$  και  $\beta$  κάθε φορά με δύο δυνατές μεθόδους. Επειδή η μορφή του διαγράμματος είναι Λορεντζιανή, με την πρώτη μέθοδο κάνουμε fitting με αυτή. Ταιριάζουμε δηλαδή τις τιμές της κανονικοποιημένης ισχύος με τη συνάρτηση  $f = \frac{A}{(k_x - \beta)^2 + a^2}$ , όπου στη θέση της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι το  $k_x$ , και υπολογίζουμε τα  $a$  και  $\beta$  ώστε να έχουμε ελάχιστο σφάλμα (χρησιμοποιείται η μη γραμμική μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων στο MATLAB). Η δεύτερη μέθοδος είναι πιο απλή. Εντοπίζουμε ποια τιμή του κυματοδιανύσματος- $x$  αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή κανονικοποιημένης ισχύος (μονάδα). Αυτή ισούται με το  $\beta$ . Κατόπιν, εντοπίζουμε τις δύο τιμές του

κυματοδιανύσματος- $x$  που αντιστοιχούν στο μισό του μεγίστου (0.5) και υπολογίζουμε το  $\alpha$  από τον τύπο:  $\alpha = (k_{x1/2,2} - k_{x1/2,1})/2$ .

Όπως παρατηρούμε στην εικόνα 5.2.3, οι τιμές του  $\alpha$  και του  $\beta$  για τις τρεις περιπτώσεις απόστασης  $d$  διαφέρουν, έχουμε δηλαδή μια απόκλιση. Για να μελετήσουμε καλύτερα τη μεταβολή των συντελεστών  $\alpha$  και  $\beta$  με το  $d$  κάνουμε την παραπάνω διαδικασία επαναληπτικά για αρκετές τιμές και σχεδιάζουμε το αντίστοιχο γράφημα (εικόνας 5.2.4 και 5.2.5). Τα αποτελέσματα είναι ιδιαίτερα ενδιαφέροντα καθώς, όπως είναι φανερό στις παρακάτω εικόνες, υπάρχει μία περιοδική ταλάντωση γύρω από μία τιμή και για τους δύο συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$ .



Εικόνα 5.2.4: Γράφημα συντελεστή  $\alpha$  συναρτήσει της απόστασης  $d$



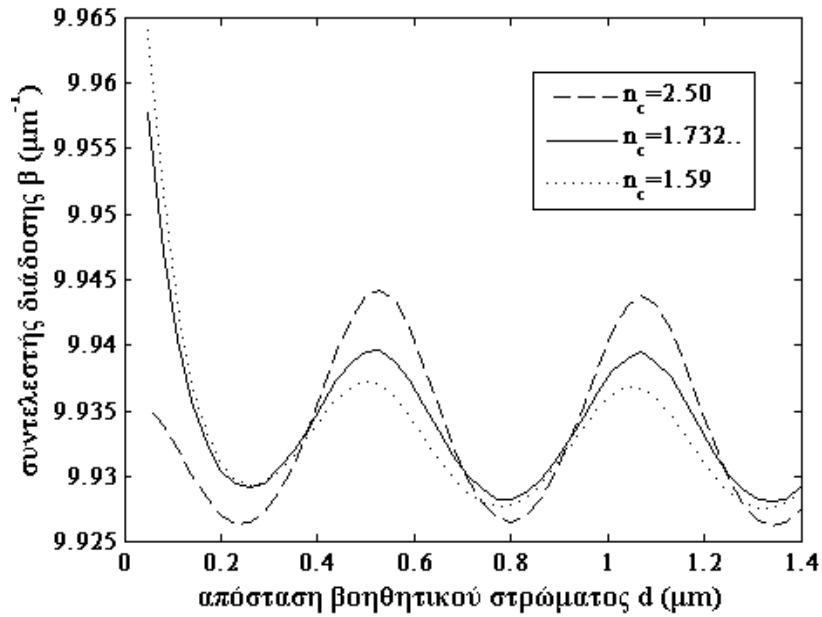
Εικόνα 5.2.5: Γράφημα συντελεστή  $\beta$  συναρτήσει της απόστασης  $d$

Η ταλάντωση αυτή οφείλεται στην ύπαρξη και άλλων περιθλαστικών τάξεων που συμβάλουν μεταξύ τους στην περιοχή μεταξύ του βοηθητικού στρώματος και του grating. Συγκεκριμένα εδώ, από την εξίσωση του grating για τις ανακλώμενες τάξεις  $n_c \sin\theta_i = n_{aux} \sin\theta_{inc} - i \frac{\lambda}{\Lambda} \Rightarrow \sin\theta_i = n_{aux} \sin\theta_{inc} - i2$  και από την απαίτηση  $|\sin\theta_i| \leq 1$  προκύπτει ότι και η 1<sup>η</sup> τάξη είναι επιτρεπόμενη ( $i=1$ ).

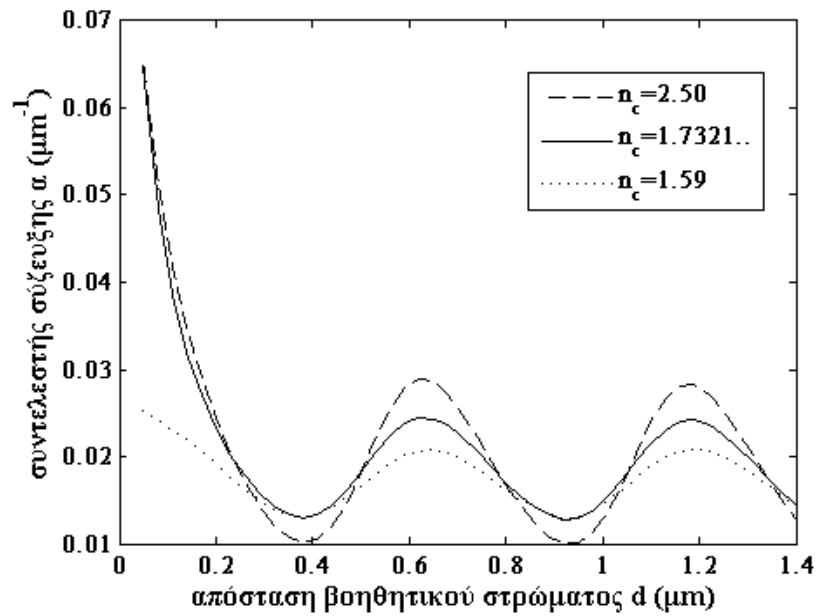
Από την θεωρία συμβολής προκύπτει ότι η περιοδικότητα θα είναι της μορφής  $\cos(k_{1z}d)$  όπου  $k_{1z} = k_0 n_c \cos\theta_1$ . Την γωνία  $\theta_1$  υπολογίζουμε από την εξίσωση grating για  $i=1$  με  $n_{aux} \sin\theta_{inc} = \frac{\beta_0}{k_0} = 1.58075$ . Για να βρούμε την περίοδο θέτουμε

$$T \cdot (k_0 n_c \cos\theta_1) = \pi \Rightarrow T = \frac{\lambda_0/n_c}{2\cos\theta_1} \approx 0.55 \mu\text{m}. \text{ Η περίοδος της ταλάντωσης είναι}$$

λοιπόν σταθερή και ανεξάρτητη του δείκτη διάθλασης  $n_{aux}$  ίση με  $0.55 \mu\text{m}$ . Ακόμη, το πλάτος ταλάντωσης θα είναι ανάλογο του δείκτη διάθλασης  $n_{aux}$ . Για να επαληθεύσουμε αν αυτά ισχύουν, εκτελέσαμε την ίδια διαδικασία υπολογισμού του γραφήματος των συντελεστών  $\alpha$  και  $\beta$  ως προς το  $d$ , για διαφορετικούς δείκτες διάθλασης και σε κάθε περίπτωση μετρήσαμε το πλάτος και την περίοδο ταλάντωσης, καθώς και την μέση τιμή γύρω από την οποία υφίσταται η ταλάντωση. Στις εικόνες 5.2.6 και 5.2.7 που ακολουθούν έχουμε μια σύγκριση τριών από τα γραφήματα που προέκυψαν για το  $\alpha$  και το  $\beta$ .



Εικόνα 5.2.6: Σύγκριση πλάτους κυμάτωσης συντελεστή  $\beta$  για διαφορετικά  $n_{aux}$



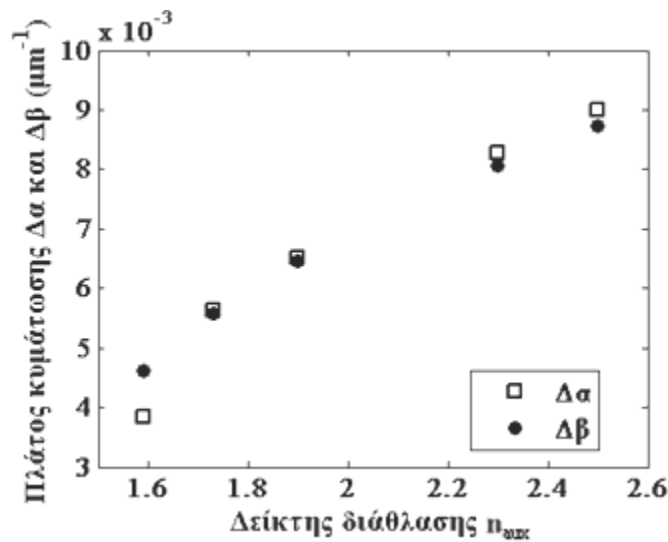
Εικόνα 5.2.7: Σύγκριση πλάτους κυμάτωσης συντελεστή  $\alpha$  για διαφορετικά  $n_{aux}$

Στον πίνακα 5.2.1 που ακολουθεί συνοψίζονται οι τιμές που λάβαμε για τις περιόδους κυμάτωσης  $T_\alpha$  και  $T_\beta$ , τα πλάτη κυμάτωσης  $\Delta\alpha$  και  $\Delta\beta$  και τις μέσες τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ . (οι τιμές αυτές υπολογίστηκαν με fitting με ημιτονοειδή συνάρτηση). Στις εικόνες 5.2.8 και 5.2.9 παρουσιάζονται τα γραφήματα αυτών.

Πίνακας 5.2.1: παράμετροι κυμάτωσης συντελεστών α και β

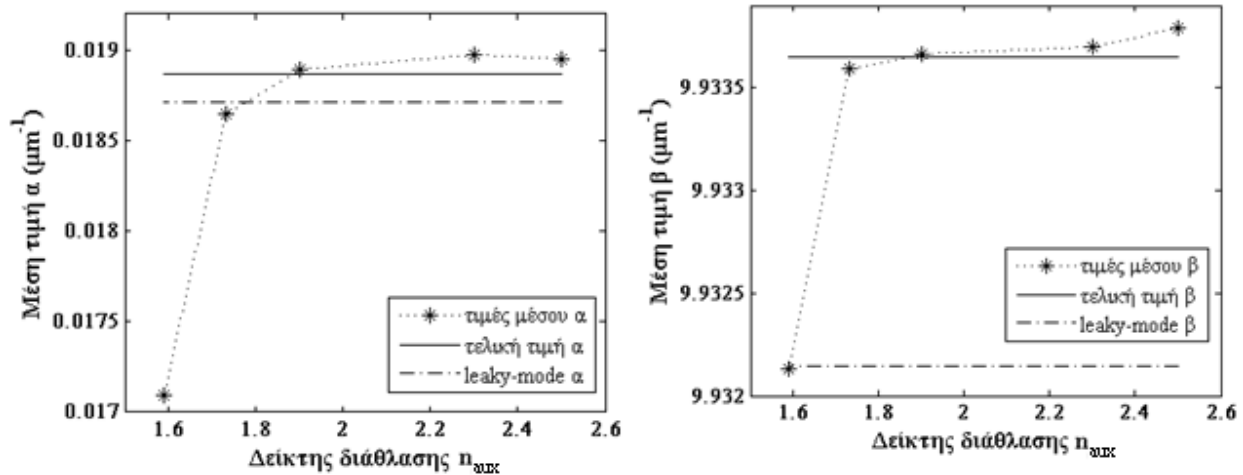
$n_{aux}$	$T_a(\mu m)$	$\Delta\alpha(\mu m^{-1})$	$\mu\acute{\epsilon}\sigma\sigma\_a(\mu m^{-1})$	$T_b(\mu m)$	$\Delta\beta(\mu m^{-1})$	$\mu\acute{\epsilon}\sigma\sigma\_b(\mu m^{-1})$
2.5	0.545	0.00900	0.018949	0.545	0.00873	9.93379
2.3	0.545	0.00826	0.018976	0.546	0.00808	9.93370
1.9	0.544	0.00652	0.018893	0.546	0.00647	9.93366
1.732051	0.544	0.00564	0.018648	0.549	0.00558	9.93359
1.59	0.548	0.00384	0.017091	0.552	0.00462	9.93213

Οι τιμές της περιόδου επαληθεύονται στα 0.55  $\mu m$  περίπου ενώ οι ανακρίβειες είναι τυχαίες και οφείλονται σε σφάλματα των μετρήσεων. Το πλάτος κυμάτωσης κυμαίνεται στα ίδια επίπεδα για το α και το β και είναι ανάλογο του δείκτη διάθλασης όπως περιμένουμε. Για να συγκρίνουμε, οι τιμές των α και β με την απευθείας εύρεση της μιγαδικής σταθεράς με leaky-mode ανάλυση είναι:  $\alpha=0.018714 \mu m^{-1}$ ,  $\beta=9.932141 \mu m^{-1}$ .



Εικόνα 5.2.8: Πλάτος κυμάτωσης των συντελεστών σύζευξης και διάδοσης συναρτήσει του δείκτη διάθλασης του βοηθητικού στρώματος

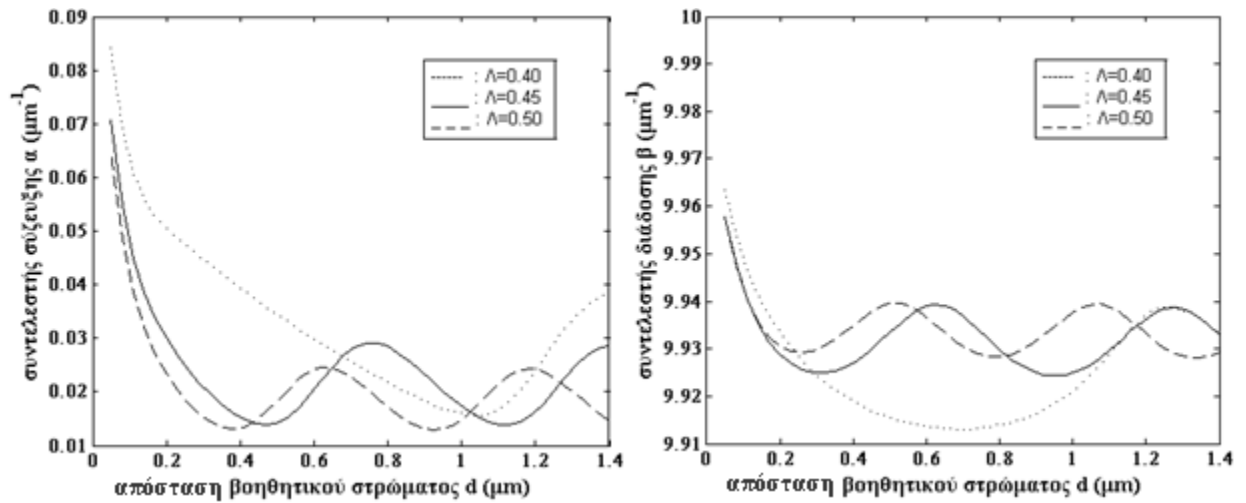
Οι μέσες τιμές των συντελεστών  $\alpha$  και  $\beta$  αυξάνουν αρχικά σε σχέση με τον δείκτη διάθλασης και στη συνέχεια φαίνεται να σταθεροποιούνται σε μία τιμή. Με την βοήθεια αυτών των διαγραμμάτων, θα εξάγουμε και τις τελικές τιμές για τους συντελεστές σύζευξης και διάδοσης  $\alpha$  και  $\beta$  με την μέθοδο RMM.



**Εικόνα 5.2.9:** Μέση τιμή κυμάτωσης των συντελεστών σύζευξης και διάδοσης συναρτήσει του δείκτη διάθλασης του βοηθητικού στρώματος. Οι συμπαγείς ευθείες αντιπροσωπεύουν την τελική μέση τιμή, ενώ οι διακεκομμένες τις τιμές από leaky-mode ανάλυση.

Συμπεραίνουμε ότι οι τιμές ταιριάζουν στις θεωρητικές προβλέψεις. Θα κάνουμε έναν τελευταίο έλεγχο για την περίοδο. Για την περίοδο της κυμάτωσης έχουμε ότι  $T = \frac{\lambda_0/n_c}{2\cos\theta_1}$ . Επειδή το  $\cos\theta_1$  εξαρτάται από την περίοδο του φράγματος  $\Lambda$ , θα εξαρτάται και η περίοδος ταλάντωσης από αυτή. Αυτό επαληθεύεται στην παρακάτω εικόνα όπου επαναλαμβάνονται τα γραφήματα των εικόνων 5.2.4 και 5.2.5 για διαφορετικές τιμές του  $\Lambda$ . Όσο το  $\Lambda$  μειώνεται, η περίοδος κυμάτωσης αυξάνεται μέχρι που η κυμάτωση δεν υφίσταται, όταν η  $1^{\text{η}}$  περιθλαστική τάξη παύει να διαδίδεται.





Εικόνα 5.2.10: Κυμάτωση των συντελεστών α και β σε σχέση με την περίοδο του φράγματος

Σύμφωνα με τις τιμές που απεικονίζονται στην εικόνα 5.2.9 και παρουσιάζονται στον πίνακα 5.2.1, για το τελικό α και β θα πάρουμε μια μέση τιμή αυτών, αγνοώντας τις τιμές για  $n_{aux}=1.59$  που είναι πολύ χαμηλές σε σχέση με τις υπόλοιπες.

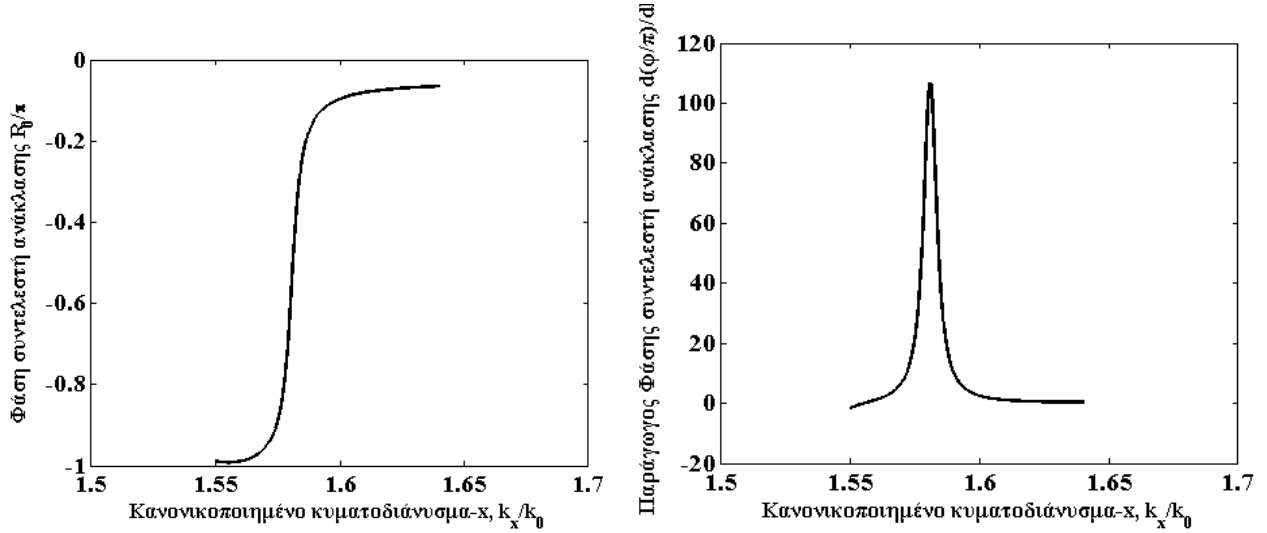
Οι τελικές τιμές είναι:

Συντελεστής σύζευξης:  $\alpha = 0.018867 \mu\text{m}^{-1}$

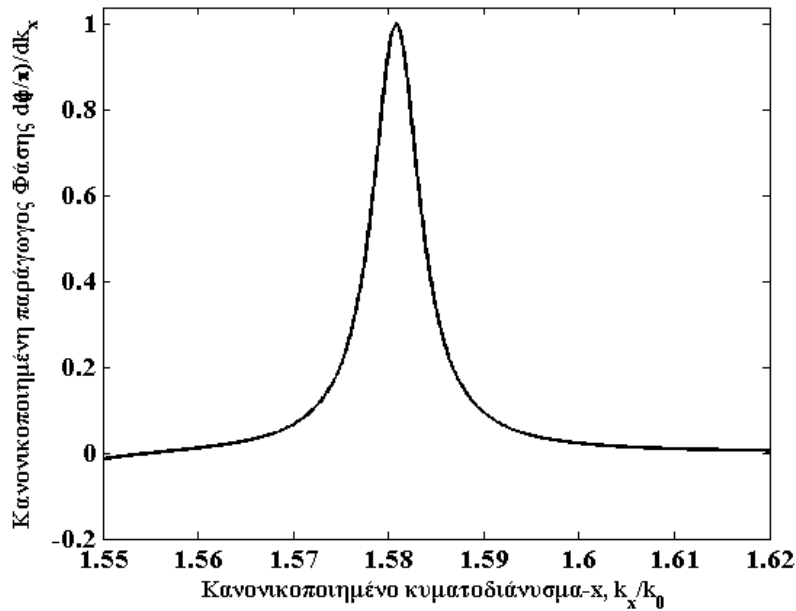
Συντελεστής διάδοσης:  $\beta = 9.93365 \mu\text{m}^{-1}$

## Μέθοδος RCPM

Με τη μέθοδο αυτή το βοηθητικό στρώμα είναι περιττό οπότε έχουμε την αρχική διάταξη της εικόνας 5.2.1. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο και λαμβάνουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



**Εικόνα 5.2.11:** (α) Φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην  $x$  – συνιστώσα (β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης



**Εικόνα 5.2.12:** Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην  $x$  – συνιστώσα

Τα τελικά αποτελέσματα που παίρνουμε είναι:

Συντελεστής σύζευξης:  $\alpha = 0.018677 \mu\text{m}^{-1}$

Συντελεστής διάδοσης:  $\beta = 9.93233 \mu\text{m}^{-1}$ .

Στον συγκεντρωτικό πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των μεθόδων RMM και RCPM σε σύγκριση με τις δοσμένες τιμές από Leaky-Mode ανάλυση. Το σχετικό σφάλμα υπολογίζεται ως εξής:  $\frac{\beta_{LM}-\beta}{\beta_{LM}} \times 100\%$  όπου  $\beta_{LM}$  η leaky-mode τιμή, και αντίστοιχα για το  $\alpha$ .

Πίνακας 5.2.2

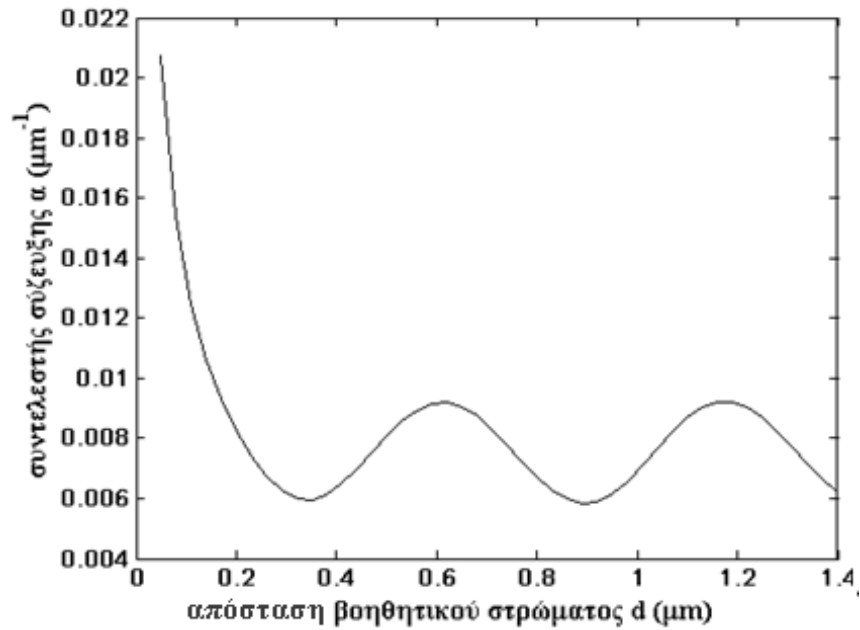
μέθοδος	$\beta$ ( $\mu\text{m}^{-1}$ )	$\alpha$ ( $\mu\text{m}^{-1}$ )	σφάλμα $\beta$ (%)	σφάλμα $\alpha$ (%)
RMM	9.93365	0.018867	-0.0152	-0.8176
RCPM	9.93233	0.018677	-0.0019	0.1977
leaky-mode	9.93214	0.018714	-	-

## TM πόλωση

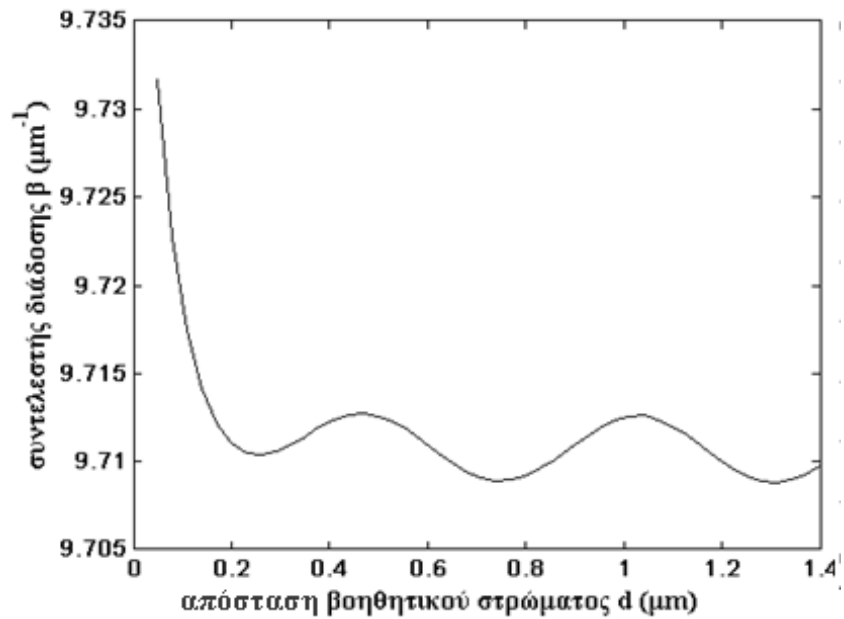
Στην TM πόλωση λειτουργούμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

### Μέθοδος RMM

Χρησιμοποιούμε πάλι βοηθητικό στρώμα (εικόνα 5.2.2) και εφαρμόζουμε την αριθμητική μέθοδο RCWA για διάφορες τιμές της απόστασης  $d$ . Έχουμε πάλι απόκλιση στις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  ανάλογα με το  $d$ , οπότε κατασκευάζουμε διαγράμματα αντίστοιχα των 5.2.4 και 5.2.5:



Εικόνα 5.2.13: Γράφημα συντελεστή  $\alpha$  συναρτήσει της απόστασης  $d$

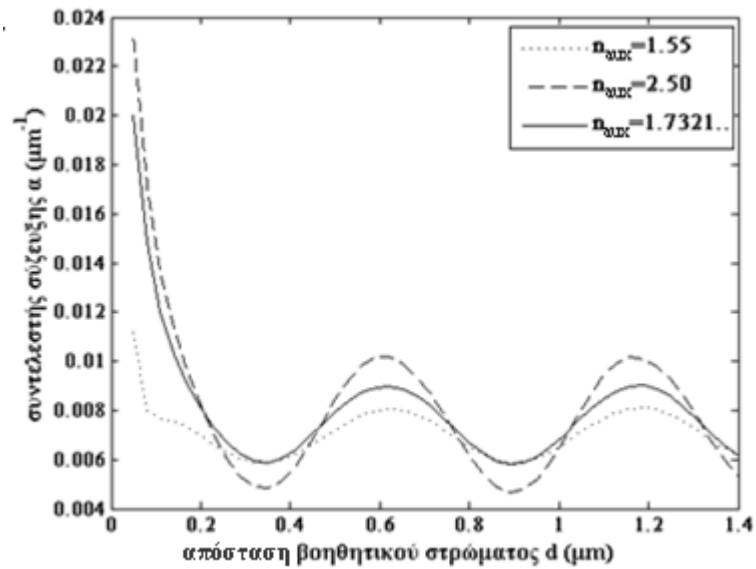


Εικόνα 5.2.14: Γράφημα συντελεστή  $\beta$  συναρτήσει της απόστασης  $d$

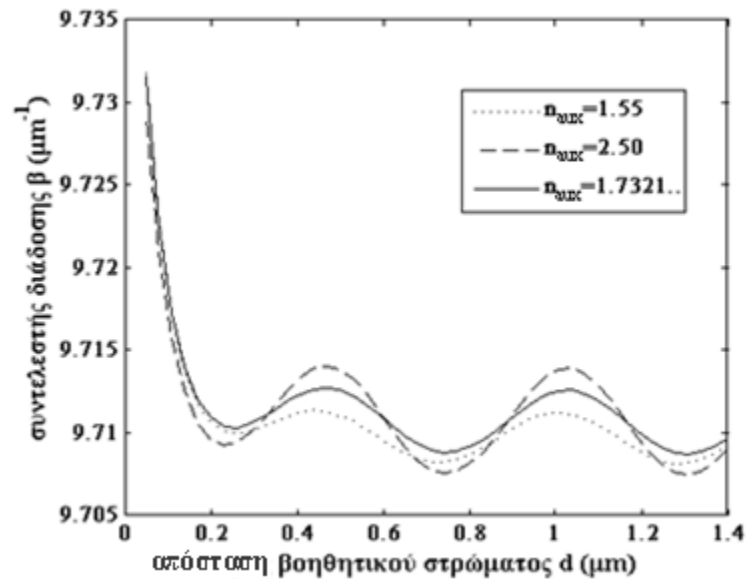
Για την ταλάντωση ισχύουν τα ίδια με τη διαφορά ότι  $n_{aux} \sin \theta_{inc} = \frac{\beta_0}{k_0} = 1.54555$

οπότε  $T = \frac{\lambda_0/n_c}{2 \cos \theta_1} \approx 0.56 \mu\text{m}$ .

Θα επαναλάβουμε τη σύγκριση για διάφορους δείκτες διάθλασης του βοηθητικού στρώματος.



Εικόνα 5.2.15: Σύγκριση πλάτους κυμάτωσης συντελεστή  $\alpha$  για διαφορετικά  $n_{aux}$

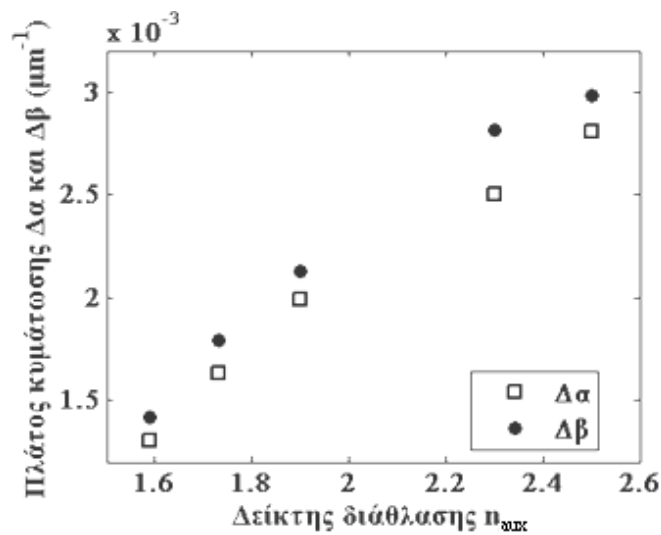


Εικόνα 5.2.16: Σύγκριση πλάτους κυμάτωσης συντελεστή  $\beta$  για διαφορετικά  $n_{aux}$

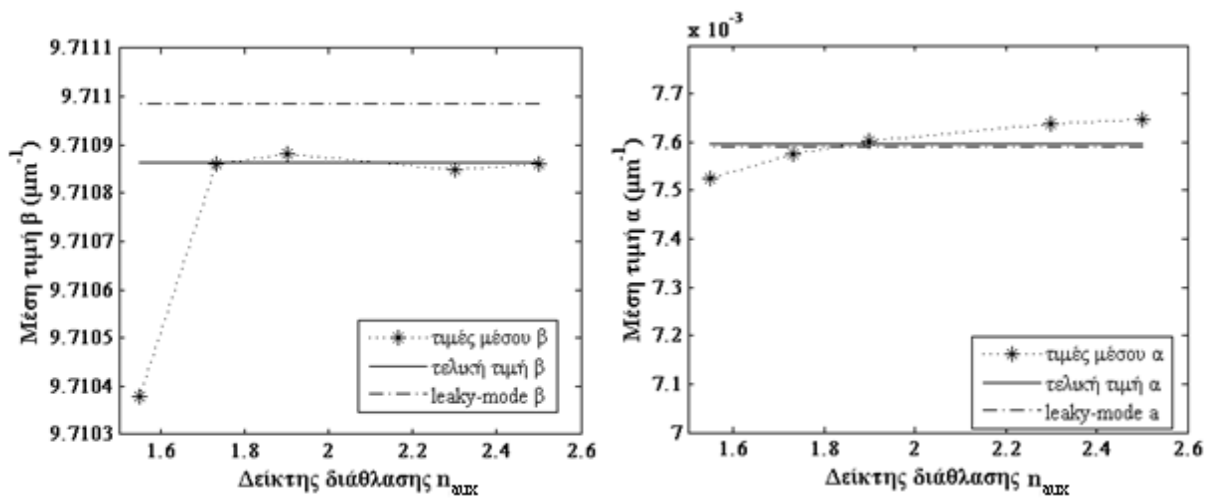
Κατόπιν θα επαναλάβουμε τη διαδικασία εξαγωγής των τιμών για τις περιόδους κυμάτωσης  $T_\alpha$  και  $T_\beta$ , τα πλάτη κυμάτωσης  $\Delta\alpha$  και  $\Delta\beta$  και τις μέσες τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

Πίνακας 5.2.3

$n_{aux}$	$T_a(\mu m)$	$\Delta\alpha(\mu m^{-1})$	$\mu\acute{\epsilon}\sigma\sigma\_a(\mu m^{-1})$	$T_\beta(\mu m)$	$\Delta\beta(\mu m^{-1})$	$\mu\acute{\epsilon}\sigma\sigma\_b(\mu m^{-1})$
2.5	0.564	0.00280	0.0076474	0.568	0.00298	9.71086
2.3	0.558	0.00250	0.0076365	0.568	0.00282	9.71085
1.9	0.557	0.00199	0.0076028	0.570	0.00212	9.71088
1.732051	0.558	0.00163	0.0075750	0.573	0.00179	9.71086
1.55	0.562	0.00131	0.0075239	0.577	0.00142	9.71038



Εικόνα 5.2.17: Πλάτος κυμάτωσης α και β ως προς τον δείκτη διάθλασης



Εικόνα 5.2.18: Μέση τιμή κυμάτωσης των α και β συναρτήσει του δείκτη διάθλασης. Οι συμπαγείς ευθείες αντιπροσωπεύουν την τελική μέση τιμή, ενώ οι διακεκομμένες τις τιμές από leaky-mode ανάλυση.

Όπως παρατηρούμε από τις παραπάνω εικόνες η συμπεριφορά είναι ίδια και στην TM πόλωση με τη διαφορά ότι το πλάτος κυμάτωσης κυμαίνεται σε χαμηλότερα επίπεδα. Αυτό συμβαίνει επειδή στην TM πόλωση το φαινόμενο αυτό της συμβολής είναι πιο ασθενές εξαιτίας της πόλωσης του περιθλώμενου κύματος.

Σύμφωνα με τις τιμές που απεικονίζονται στην εικόνα 5.2.17 και παρουσιάζονται στον πίνακα 5.2.3 για το τελικό  $\alpha$  και  $\beta$  θα πάρουμε μια μέση τιμή αυτών (στο  $\beta$  αγνοούμε την τιμή για  $n_{aux}=1.55$  που είναι πολύ χαμηλή σε σχέση με τις υπόλοιπες).

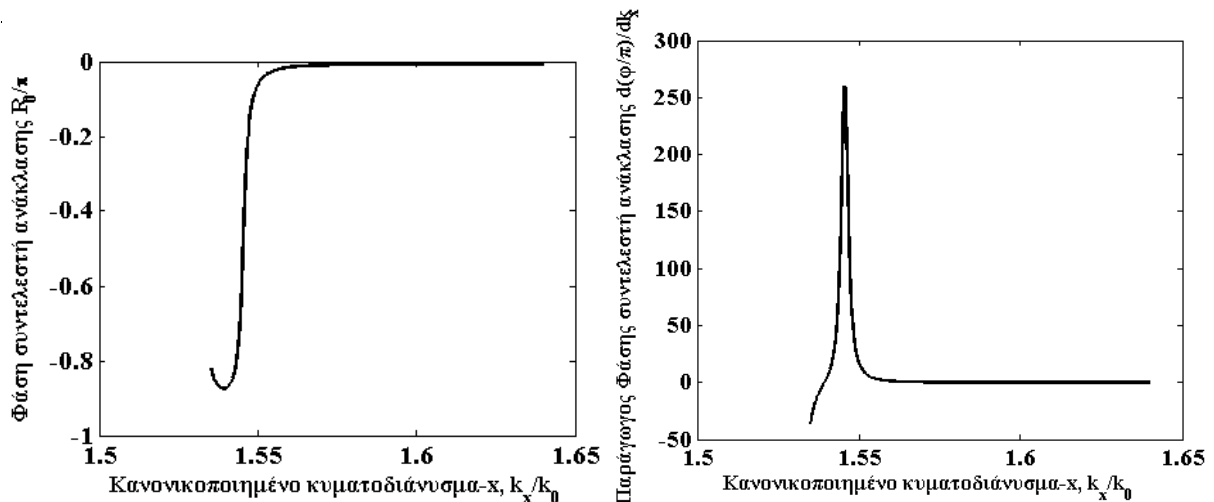
Οι τελικές τιμές είναι:

Συντελεστής σύζευξης,  $\alpha= 0.0075971 \mu\text{m}^{-1}$

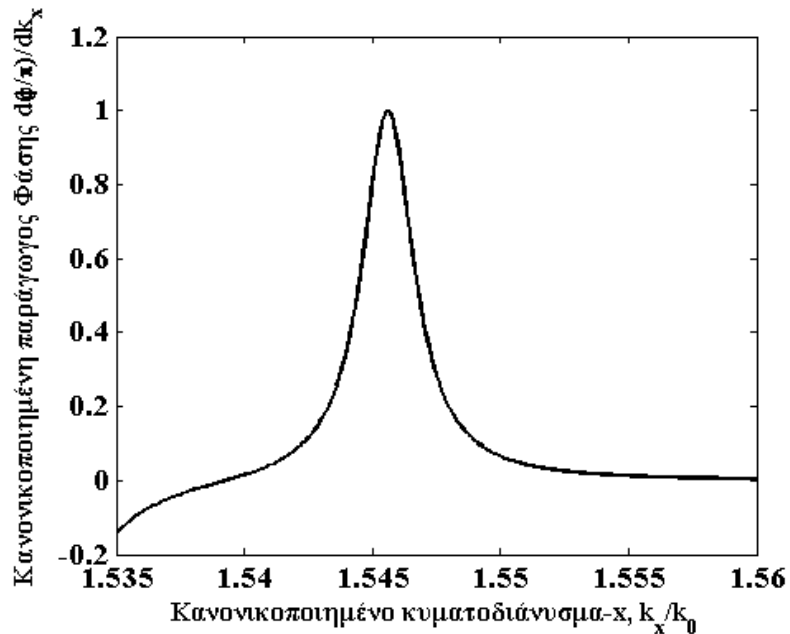
Συντελεστής διάδοσης,  $\beta= 9.71086 \mu\text{m}^{-1}$ .

### Μέθοδος RCPM

Ομοίως με την περίπτωση της TE πόλωσης, το βοηθητικό στρώμα είναι περιττό οπότε έχουμε την αρχική διάταξη της εικόνας 5.2.1. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο και λαμβάνουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



**Εικόνα 5.2.19:** (α) Φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην  $x$  – συνιστώσα (β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης



**Εικόνα 5.2.20:** Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάλυμα στην x – συνιστώσα

Τα τελικά αποτελέσματα που παίρνουμε είναι:

Συντελεστής σύζευξης,  $\alpha = 0.0075182 \mu\text{m}^{-1}$

Συντελεστής διάδοσης,  $\beta = 9.71099 \mu\text{m}^{-1}$ .

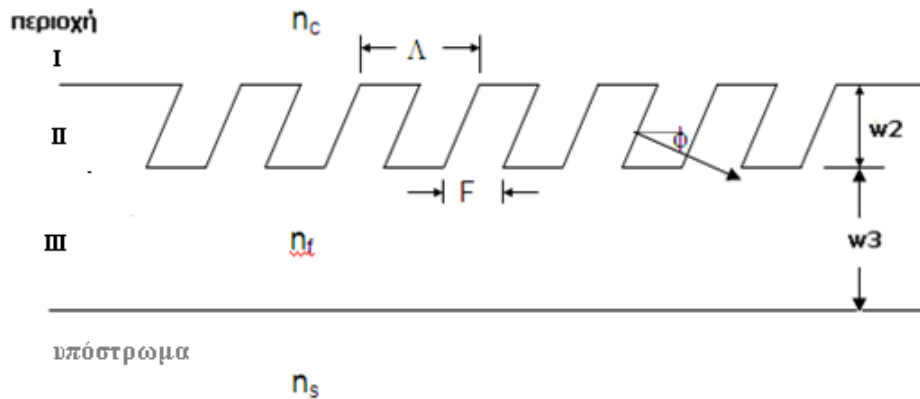
Στον συγκεντρωτικό πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των μεθόδων RMM και RCPM σε σύγκριση με τις δοσμένες τιμές από RCWA-Leaky Mode.

Πίνακας 5.2.4

μέθοδος	$\beta (\mu\text{m}^{-1})$	$\alpha (\mu\text{m}^{-1})$	σφάλμα $\beta(\%)$	σφάλμα $\alpha(\%)$
RMM	9.71086	0.0075971	0.001236	-0.0790
RCPM	9.71099	0.0075182	-0.000103	0.9603
leaky-mode	9.71098	0.0075911	-	-



### 5.3 Κεκλιμένο Φράγμα Επιφανειακής Χάραξης (Slanted Surface- Relief Grating)



Εικόνα 5.3.1: Τοπολογία κεκλιμένου περιθλαστικού φράγματος

Μελετάμε την διάταξη της εικόνας 5.3.1 με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

Δείκτες διάθλασης των περιοχών:  $n_c=1.0$ ,  $n_f=1.56$ ,  $n_s=1.4567$

Μήκος κύματος ελευθέρου χώρου:  $\lambda_0=1.0 \mu\text{m}$

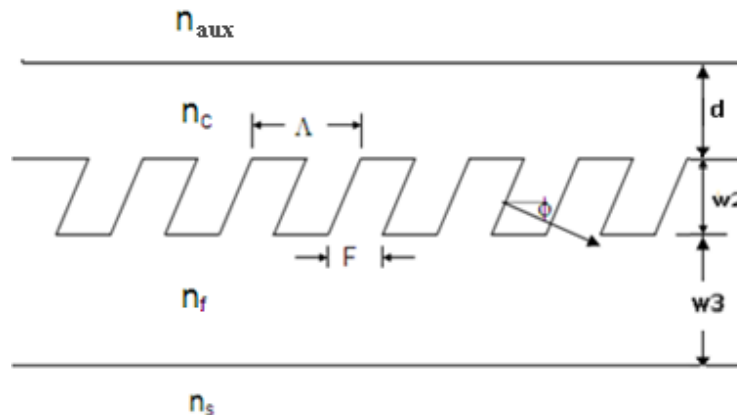
Πάχος στρωμάτων:  $w_1 = \infty$ ,  $w_2 = 0.2 \mu\text{m}$ ,  $w_3 = 0.4 \mu\text{m}$ ,  $w_4 = \infty$

Περίοδος φράγματος:  $\Lambda = 0.4226 \mu\text{m}$   $\phi = 40.5227 \text{ deg}$

#### TE πόλωση

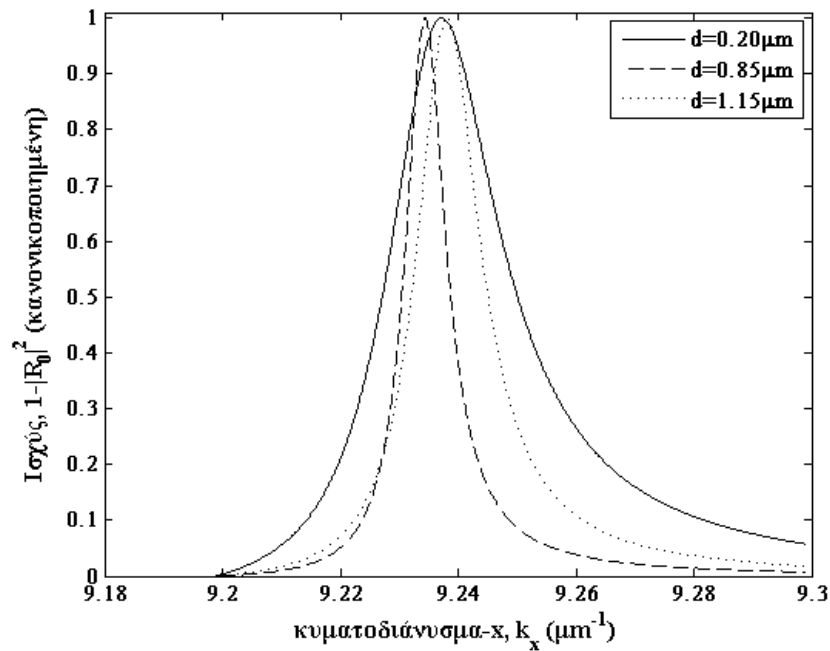
##### Μέθοδος RMM

Όπως και στην προηγούμενη διάταξη θα χρησιμοποιούμε βοηθητικό στρώμα σε απόσταση  $d$  από την αρχική διάταξη, όπως φαίνεται στην εικόνα 5.3.2.



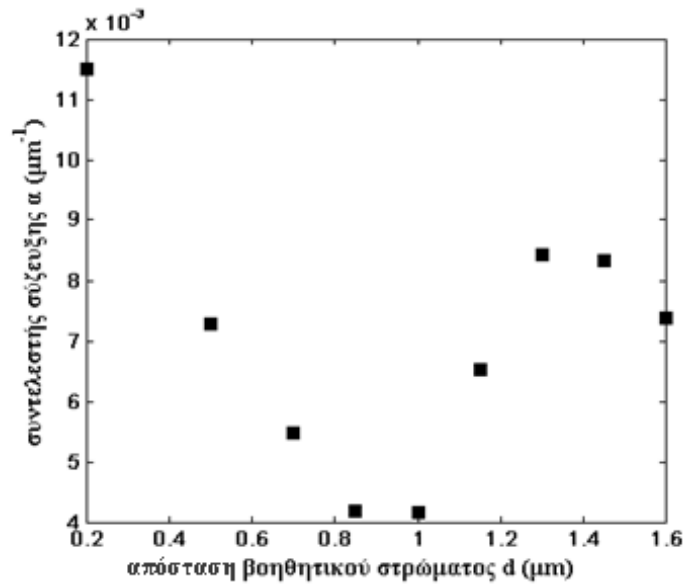
Εικόνα 5.3.2: Τοπολογία κεκλιμένου φράγματος με βοηθητικό στρώμα

Τώρα έχουμε για τους δείκτες διάθλασης:  $n_{\text{aux}}=\sqrt{3}=1.73051..$  και οι υπόλοιποι ως έχουν. Λόγω του κεκλιμένου φράγματος, η περίπτωση αυτή είναι περισσότερο πολύπλοκη και για να αναλυθεί χωρίζουμε την περιοχή II σε στοιχειώδεις υποπεριοχές ορθογωνικών φραγμάτων όπως ακριβώς και στην ανάλυση που έγινε στο κεφάλαιο 3 για την γενική περίπτωση περιθλαστικού φράγματος επιφανειακής χάραξης (εικόνα 3.5.1). Αυτό απαιτεί πολύ περισσότερο χρόνο για την εκτέλεση των προγραμμάτων γι' αυτό η εφαρμογή της μεθόδου RCWA έγινε για λίγες τιμές της απόστασης  $d$  του βοηθητικού στρώματος από την αρχική διάταξη. Στην εικόνα 5.3.3 απεικονίζονται τα αποτελέσματα της κανονικοποιημένης ισχύος  $1-DE_0^r$  για τρεις αποστάσεις ενδεικτικά με  $DE_0^r \sim |R_0|^2$ . Τα αποτελέσματα είναι κανονικοποιημένα.

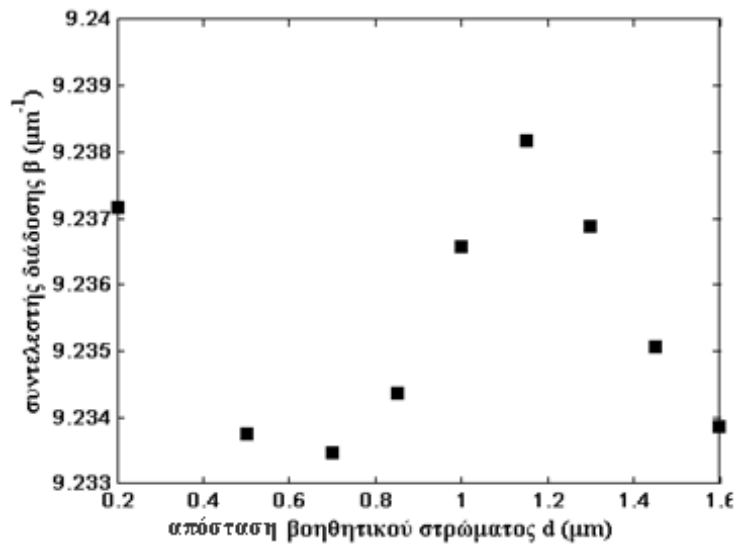


**Εικόνα 5.3.3:** Ισχύς  $1-|R_0|^2$  ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα- $x$ . Σύγκριση Λορεντζιανών κατανομών για τρεις τιμές της απόστασης  $d$  του βοηθητικού στρώματος

Ο υπολογισμός των συντελεστών  $\alpha$  και  $\beta$  έγινε όπως και στην προηγούμενη περίπτωση με fitting με Λορεντζιανή και τα αποτελέσματα για διαφορετικές τιμές της απόστασης  $d$  παρατίθενται στα επόμενα διαγράμματα.

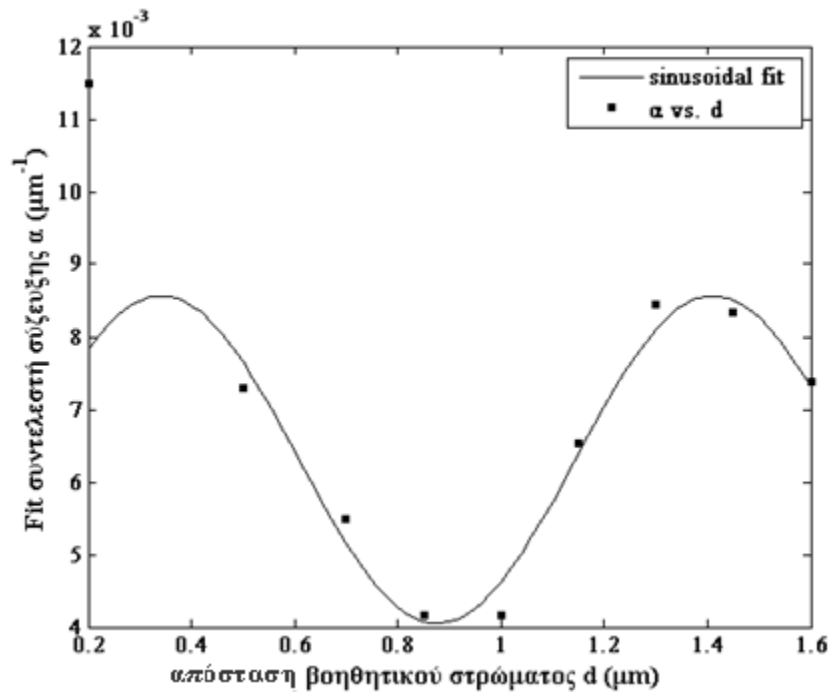


Εικόνα 5.3.4: Συντελεστής α συναρτήσει της απόστασης d

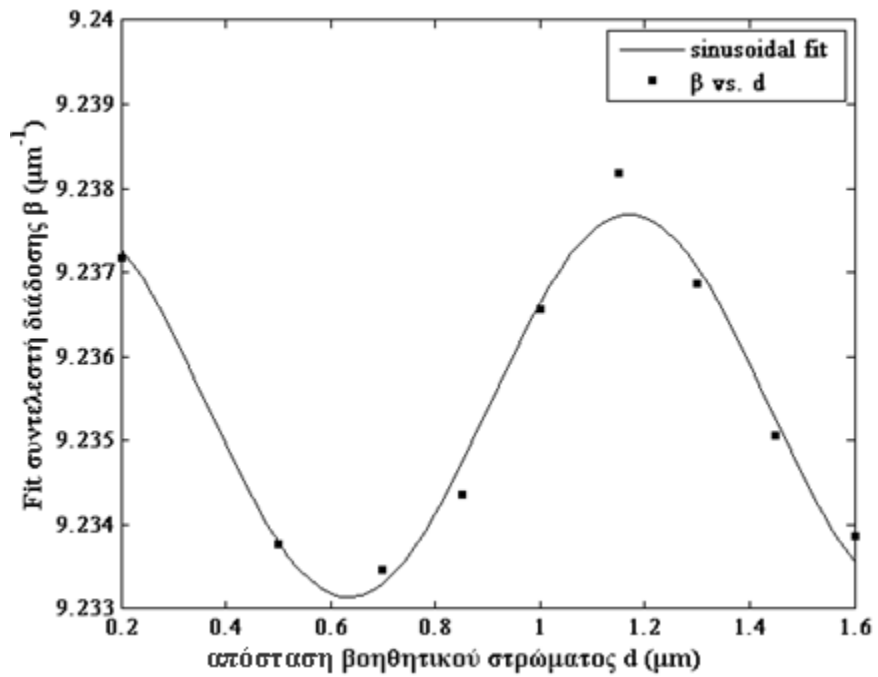


Εικόνα 5.3.5: Συντελεστής β συναρτήσει της απόστασης d

Όπως έχουμε τεκμηριώσει στην προηγούμενη παράγραφο, η κυμάτωση πρέπει να έχει ημιτονοειδή μορφή λόγω της συμβολής περιθλαστικών τάξεων. Αυτό δεν είναι ολοφάνερο επειδή οι τιμές που έχουμε υπολογίσει είναι λίγες. Αν κάνουμε fitting με ημίτονο για να υπολογίσουμε τις μέσες τιμές και τις περιόδους κυμάτωσης, παρατηρούμε ότι οι τιμές ταιριάζουν στο ημίτονο, όπως είναι αναμενόμενο. Στις παρακάτω εικόνες αυτό είναι φανερό.



Εικόνα 5.3.6: Fitting συντελεστή σύζευξης με ημιτονοειδή συνάρτηση ως προς την απόσταση d



Εικόνα 5.3.7: Fitting συντελεστή διάδοσης με ημιτονοειδή συνάρτηση ως προς την απόσταση d

Οι τιμές που προέκυψαν για την περίοδο κυμάτωσης είναι και στις δυο περιπτώσεις  $T_a \approx T_b \approx 1.07 \mu\text{m}$ , τα πλάτη κυμάτωσης  $\Delta_a$  και  $\Delta_b$  είναι της τάξης του  $5 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}^{-1}$  και οι μέσες τιμές είναι  $\alpha_\mu = 0.0063080 \mu\text{m}^{-1}$  και  $\beta_\mu = 9.2354101 \mu\text{m}^{-1}$ . Είναι κοντά στις τιμές από leaky-mode ανάλυση που είναι  $\beta = 9.2348978 \mu\text{m}^{-1}$ ,  $\alpha = 0.0064179 \mu\text{m}^{-1}$ . Ακόμη, θεωρητικά έχουμε  $T = \frac{\lambda_0/n_c}{2\cos\theta_1} \approx 1.12 \mu\text{m}$  οπότε έχουμε μικρή απόκλιση από την τιμή της προσομοίωσης.

Τις τιμές αυτές θα λάβουμε και ως τελικές για την περίπτωση του κεκλιμένου φράγματος, αφού δε θα διερευνήσουμε τις περιπτώσεις για διαφορετικούς δείκτες διάθλασης του βοηθητικού στρώματος. Εξάλλου αυτό θα ήταν ιδιαίτερα χρονοβόρο καθώς είναι δύσκολο να αυτοματοποιηθεί και επιπλέον η απόκλιση που μπορεί να είχαμε θα ήταν ασήμαντου μεγέθους, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

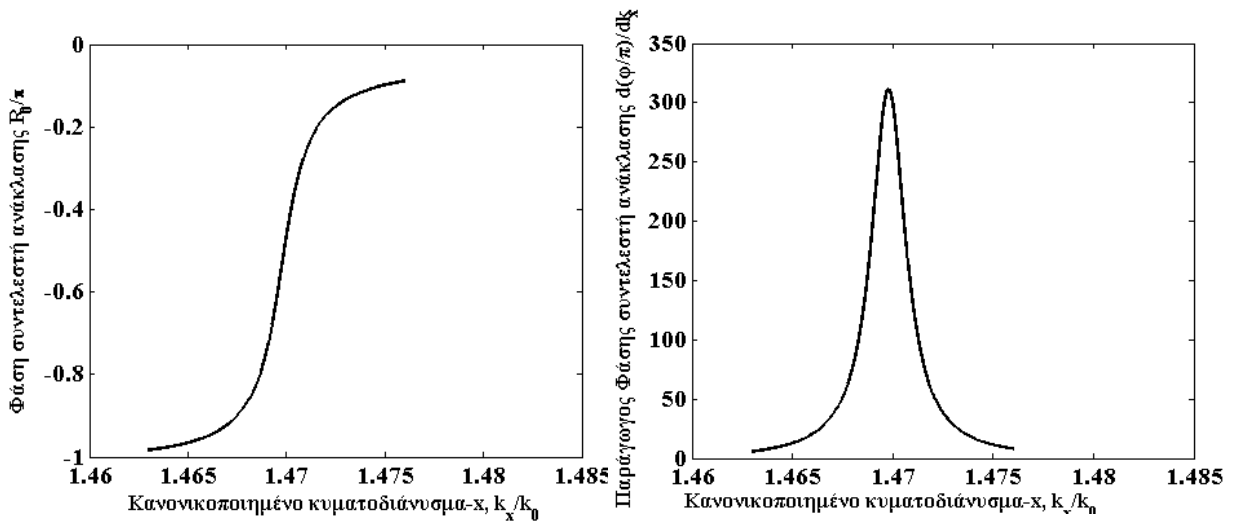
Έτσι, οι τελικές τιμές είναι:

Συντελεστής σύζευξης,  $\alpha = 0.0063080 \mu\text{m}^{-1}$

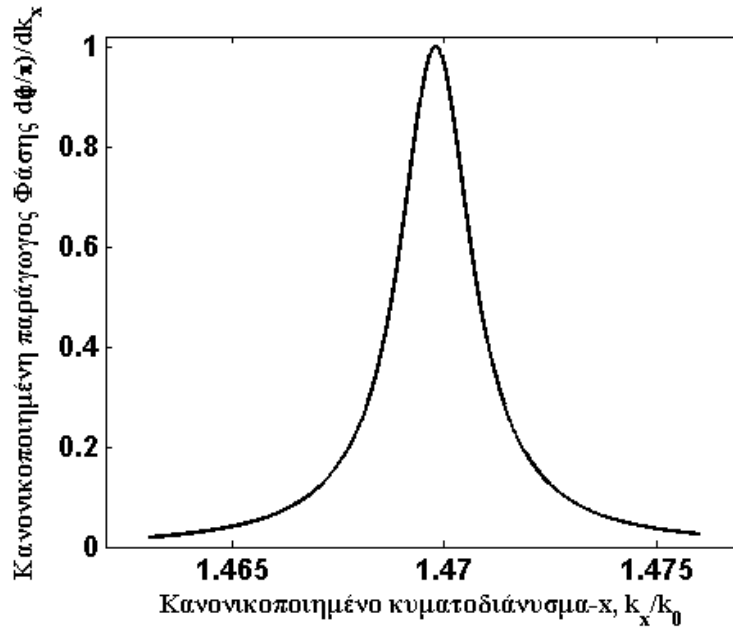
Συντελεστής διάδοσης,  $\beta = 9.2354101 \mu\text{m}^{-1}$ .

### Μέθοδος RCPM

Με τη μέθοδο RCPM το βοηθητικό στρώμα είναι περιττό οπότε έχουμε την αρχική διάταξη της εικόνα 5.3.1. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο και λαμβάνουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



**Εικόνα 5.3.8:** (α) Φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην  $x$  – συνιστώσα (β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης



**Εικόνα 5.3.9:** Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην  $x$  – συνιστώσα

Τα τελικά αποτελέσματα που παίρνουμε είναι:

Συντελεστής σύζευξης,  $\alpha = 0.006409974 \mu\text{m}^{-1}$

Συντελεστής διάδοσης,  $\beta = 9.2348970 \mu\text{m}^{-1}$ .

Στον συγκεντρωτικό πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των μεθόδων RMM και RCPM σε σύγκριση με τις δοσμένες τιμές από RCWA-Leaky Mode.

Πίνακας 5.3.1

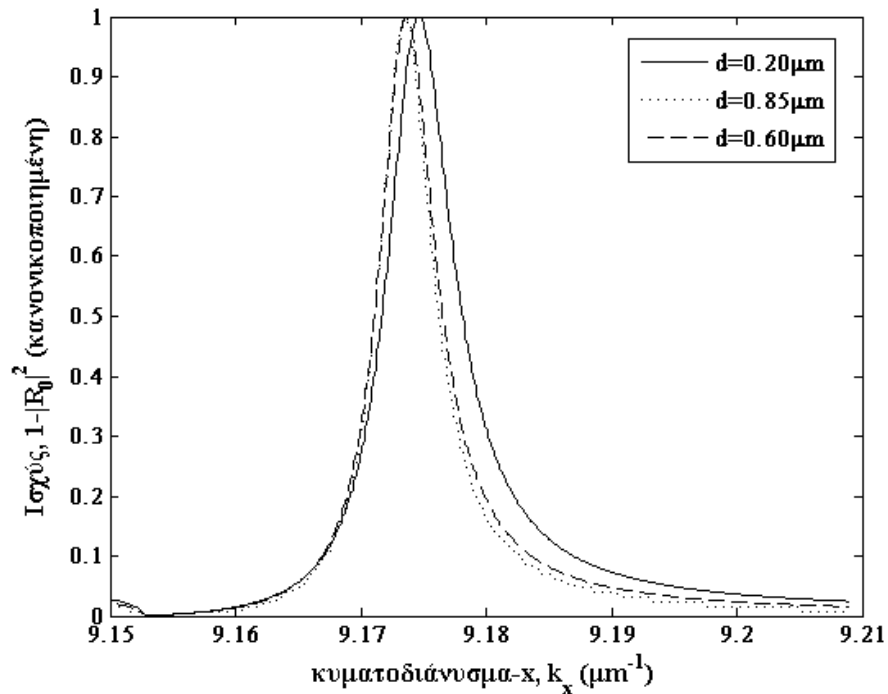
μέθοδος	$\beta$ ( $\mu\text{m}^{-1}$ )	$\alpha$ ( $\mu\text{m}^{-1}$ )	σφάλμα $\beta$ (%)	σφάλμα $\alpha$ (%)
RMM	9.2354101	0.0063080	-0.0055485	1.7124
RCPM	9.2348970	0.0064099	0.0000076	0.1247
leaky-mode	9.2348977	0.0064179	-	-

## TM πόλωση

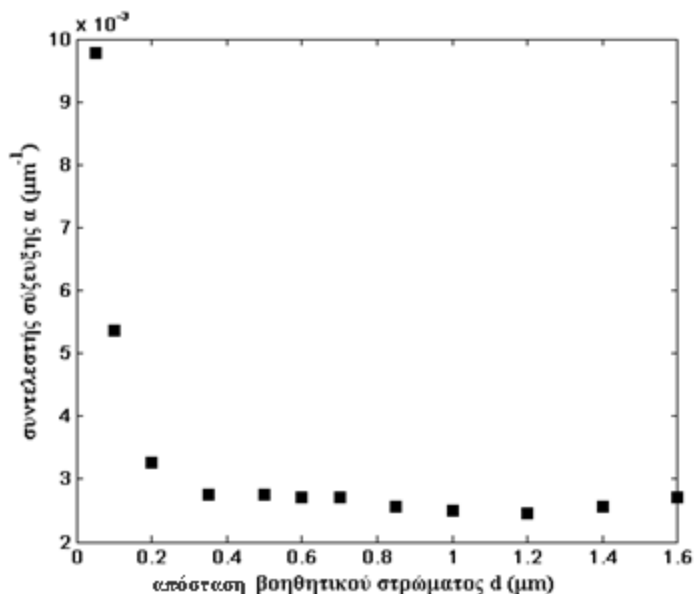
Στην TM πόλωση επαναλαμβάνουμε ομοίως την διαδικασία.

### Μέθοδος RMM

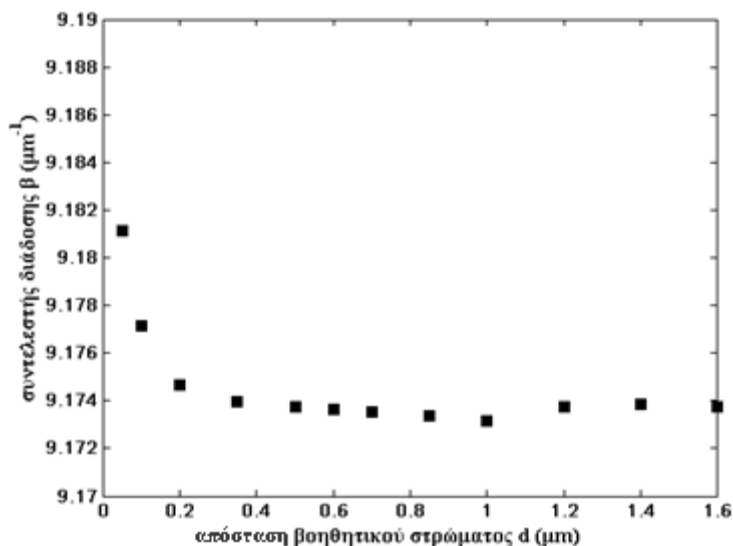
Χρησιμοποιούμε πάλι βοηθητικό στρώμα (εικόνα 5.3.2) και εφαρμόζουμε την αριθμητική μέθοδο RCWA για διάφορες τιμές της απόστασης  $d$ . Έχουμε μικρή απόκλιση στις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  όπως είναι φανερό στις παρακάτω εικόνες.



**Εικόνα 5.3.10:** : Ισχύς  $1-|R_0|^2$  ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα- $x$ . Σύγκριση Λορεντζιανών κατανομών για τρεις τιμές της απόστασης  $d$  του βοηθητικού στρώματος από την αρχική διάταξη.



Εικόνα 5.3.11: Συντελεστής α συναρτήσει της απόστασης d



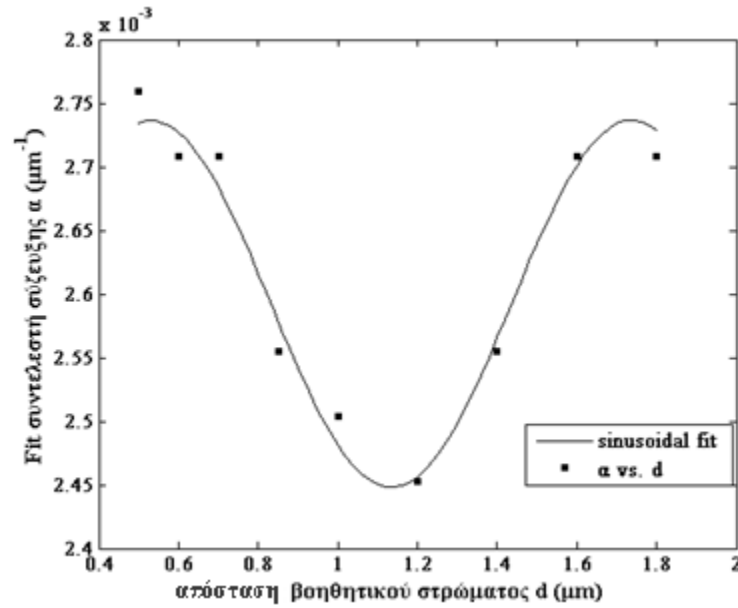
Εικόνα 5.3.12: Συντελεστής β συναρτήσει της απόστασης d

Η κυμάτωση δεν είναι πολύ εμφανής επειδή η περίοδος της είναι μεγάλη ενώ το πλάτος της μικρό σε σχέση με την κλίμακα των εικόνων. Πράγματι μετά από fitting με ημιτονοειδή συνάρτηση (αγνοώντας τις τιμές για  $d < 0.4$ ) προκύπτει ότι η περίοδος κυμάτωσης είναι  $T_\alpha \approx T_\beta \approx 1.20 \mu\text{m}$ , τα πλάτη κυμάτωσης  $\Delta\alpha$  και  $\Delta\beta$  είναι της τάξης του  $3 \cdot 10^{-4} \mu\text{m}^{-1}$  και οι μέσες τιμές είναι  $\alpha_\mu = 0.0025916 \mu\text{m}^{-1}$  και  $\beta_\mu = 9.17361 \mu\text{m}^{-1}$ . Για σύγκριση, από leaky-mode ανάλυση έχουμε  $\alpha = 0.0025857 \mu\text{m}^{-1}$  και  $\beta = 9.17351 \mu\text{m}^{-1}$ .

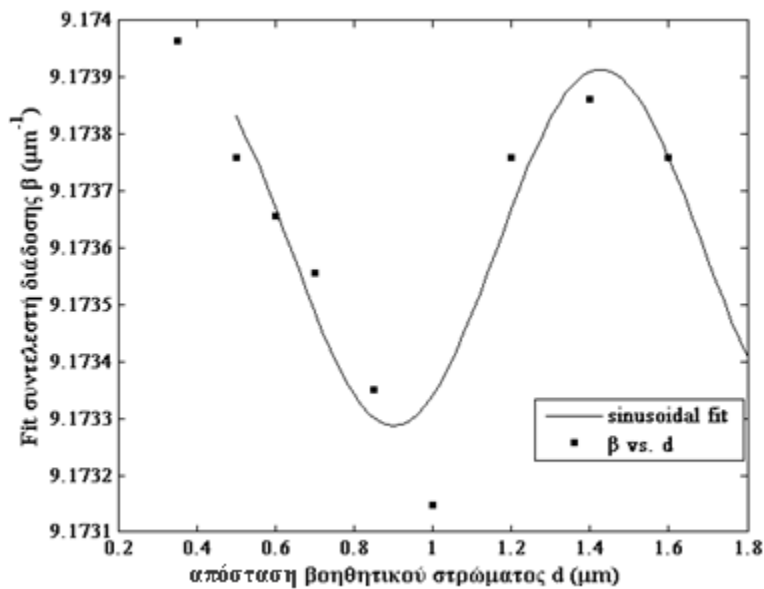
Επιπλέον, θεωρητικά έχουμε  $T = \frac{\lambda_0/n_c}{2\cos\theta_1} \approx 1.18 \mu\text{m}$  που είναι κοντά στο αναμενόμενο.



Ακολουθούν τα διαγράμματα που προέκυψαν από το fitting με την ημιτονοειδή συνάρτηση.



Εικόνα 5.3.13 Fitting συντελεστή σύζευξης με ημιτονοειδή συνάρτηση ως προς την απόσταση d



Εικόνα 5.3.14: fitting συντελεστή διάδοσης με ημιτονοειδή συνάρτηση ως προς την απόσταση d

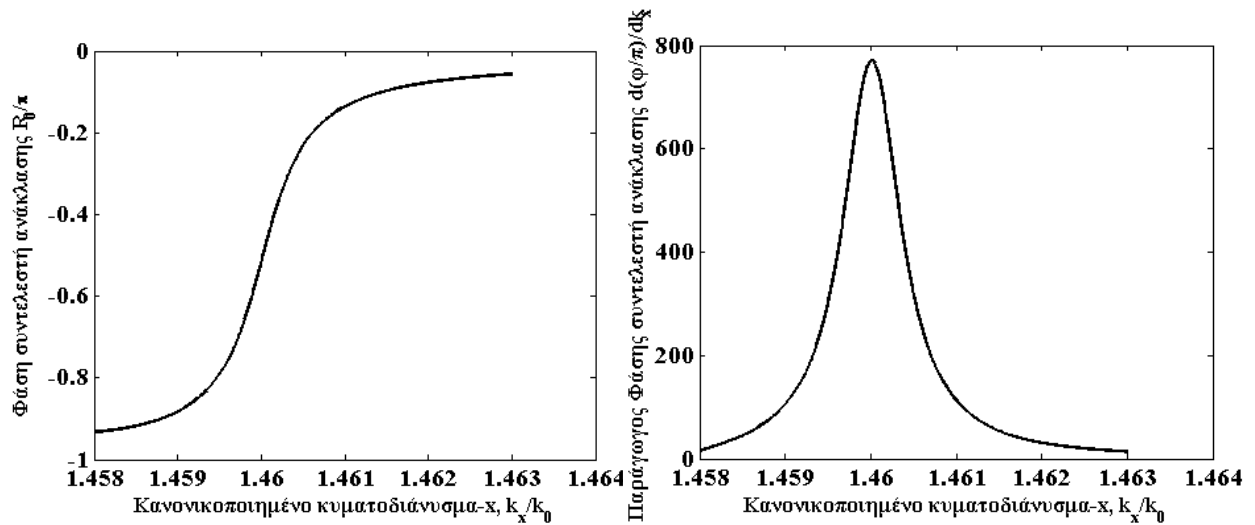
Τις τιμές του μέσου α και του μέσου β θα λάβουμε και ως τελικές και για την περίπτωση της TM πόλωσης στο κεκλιμένο φράγμα, αφού δε θα διερευνήσουμε τις περιπτώσεις για διαφορετικούς δείκτες διάθλασης του βοηθητικού στρώματος.

Έτσι, οι τελικές τιμές είναι:

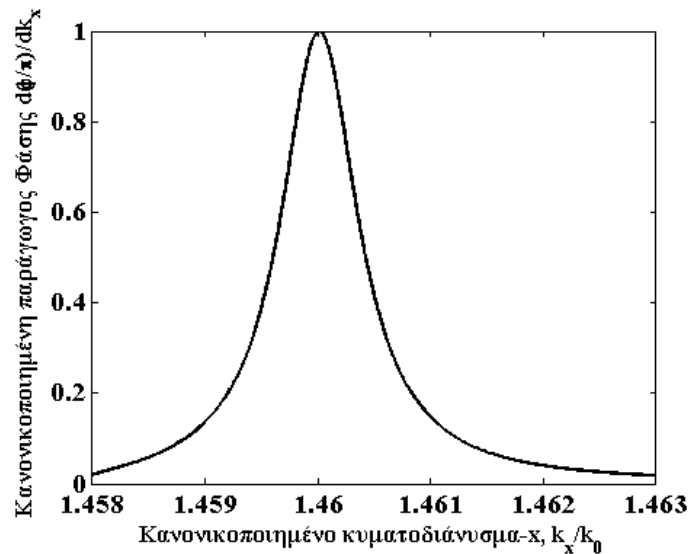
Συντελεστής σύζευξης:  $\alpha=0.0025916 \mu\text{m}^{-1}$ , συντελεστής διάδοσης:  $\beta=9.17361 \mu\text{m}^{-1}$ .

### Μέθοδος RCPM

Με τη μέθοδο RCPM το βοηθητικό στρώμα είναι περιττό οπότε έχουμε την αρχική διάταξη της εικόνας 5.3.1. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο και λαμβάνουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



Εικόνα 5.3.15: (α) Φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην  $x$  – συνιστώσα (β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης



Εικόνα 5.3.16: Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην  $x$  – συνιστώσα

Τα τελικά αποτελέσματα που παίρνουμε είναι:

Συντελεστής σύζευξης:  $\alpha = 0.00257699 \mu\text{m}^{-1}$

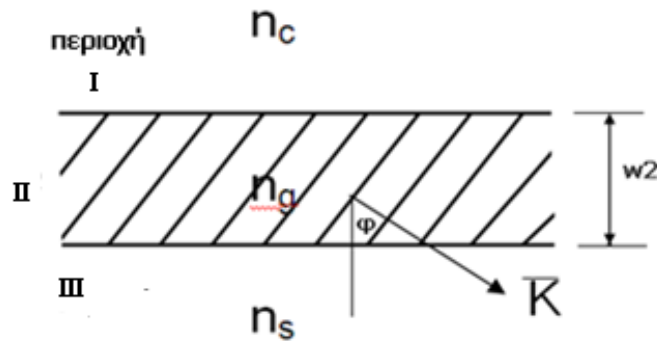
Συντελεστής διάδοσης:  $\beta = 9.1734977 \mu\text{m}^{-1}$ .

Στον συγκεντρωτικό πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των μεθόδων RMM και RCPM σε σύγκριση με τις δοσμένες τιμές από RCWA-Leaky Mode.

Πίνακας 5.3.2

μέθοδος	$\beta (\mu\text{m}^{-1})$	$\alpha (\mu\text{m}^{-1})$	σφάλμα $\beta(\%)$	σφάλμα $\alpha(\%)$
RMM	9.17361	0.0025916	-0.00109	-0.22818
RCPM	9.17350	0.0025770	0.00011	0.33647
leaky-mode	9.17351	0.0025857	-	-

#### 5.4 Ολογραφικό περιθλαστικό φράγμα 1 (Holographic Grating in the waveguide)



Εικόνα 5.4.1: Διάταξη ολογραφικού περιθλαστικού φράγματος

Μελετάμε την διάταξη της εικόνας 5.4.1 με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

Δείκτες διάθλασης των περιοχών:  $n_c=1.0$ ,  $n_g= 1.5$ ,  $n_s= 1.45670$

Μήκος κύματος ελευθέρου χώρου:  $\lambda_0=1.0 \mu\text{m}$

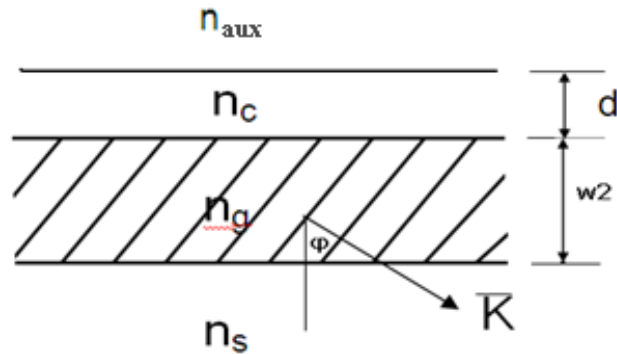
Πάχος στρωμάτων:  $w_1 = \infty$ ,  $w_2 = 1.8\mu\text{m}$ ,  $w_3= \infty$

Περίοδος φράγματος:  $\Lambda = 0.47366129099174\mu\text{m}$ ,  $\varphi = 44.72504526101211\text{deg}$

$\Delta\epsilon$  (Grating Cosine Harmonic) = 0.06

## TE πόλωση

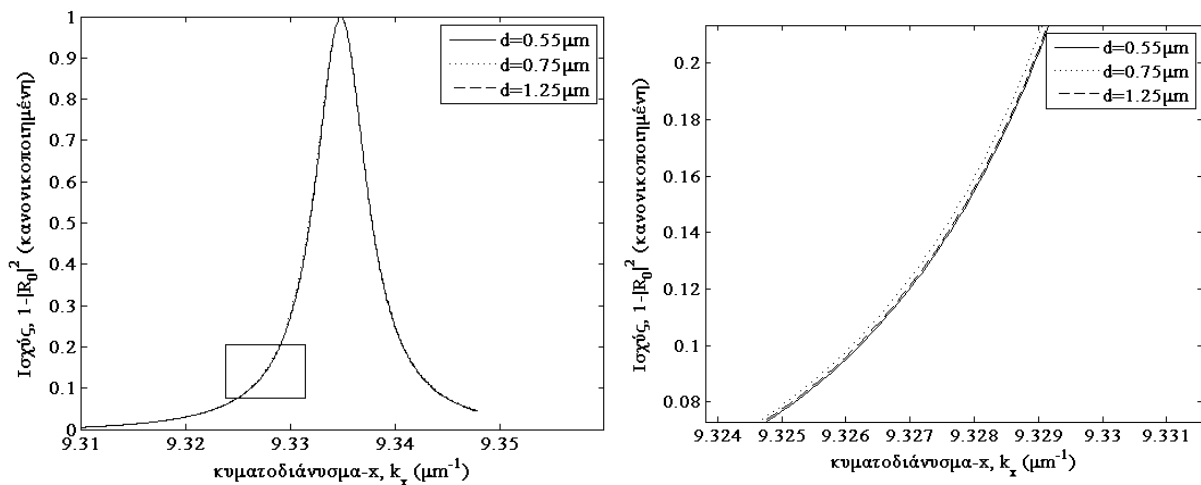
### Μέθοδος RMM



Εικόνα 5.4.2: Διάταξη ολογραφικού περιθλαστικού φράγματος

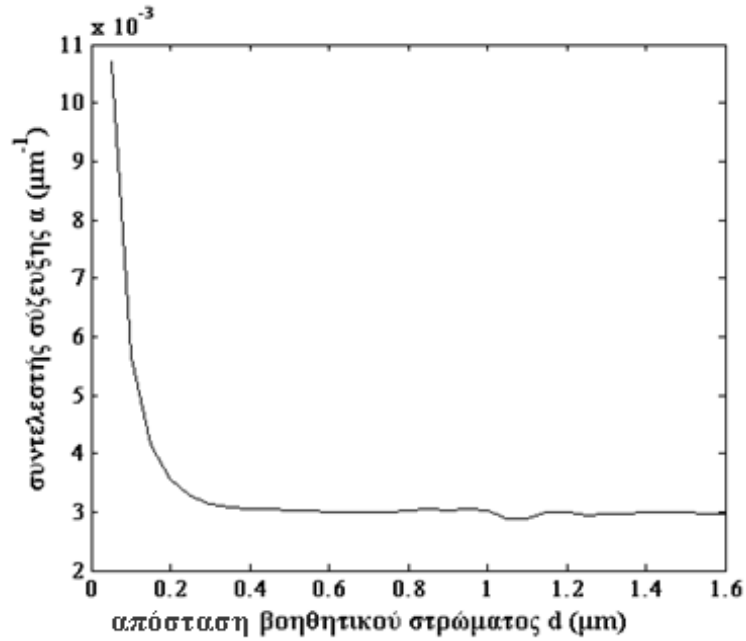
Όπως και στην προηγούμενη διάταξη θα χρησιμοποιούμε βοηθητικό στρώμα σε απόσταση  $d$  όπως φαίνεται στην εικόνα 5.4.2. Τώρα έχουμε  $n_{aux} = \sqrt{3} = 1.73051\dots$

Εφαρμόζουμε την αριθμητική μέθοδο RCWA για διάφορες τιμές της απόστασης  $d$ . Στην εικόνα 5.4.3 απεικονίζονται τα αποτελέσματα της κανονικοποιημένης  $1-DE_0^r$  για τρεις αποστάσεις ενδεικτικά με  $DE_0^r \sim |R_0|^2$ . Παρατηρούμε ότι η απόκλιση είναι ελάχιστη σε σημείο που δεν είναι εμφανής.

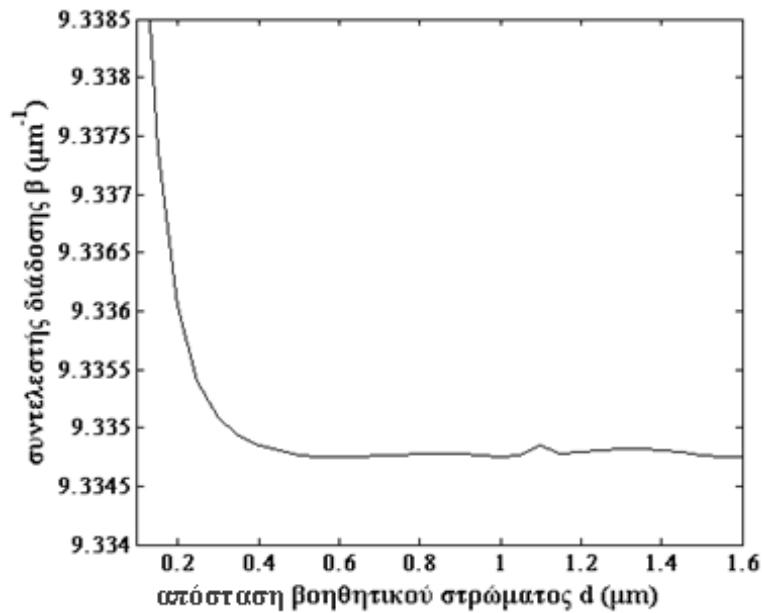


Εικόνα 5.4.3: (α) Ισχύς  $1-|R_0|^2$  ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα- $x$ . Σύγκριση Λορεντζιανών κατανομών για τρεις τιμές της απόστασης  $d$  του βοηθητικού στρώματος από την αρχική διάταξη (β) μεγέθυνση ορθογώνιου πλαισίου για καλύτερη εποπτεία

Εξάγουμε τις τιμές των συντελεστών σύζευξης και διάδοσης  $\alpha$  και  $\beta$  όπως και στις προηγούμενες διατάξεις και κατασκευάζουμε τα διαγράμματα των εικόνων 5.4.4 και 5.4.5. Η κυμάτωση δεν είναι εμφανής επειδή το πλάτος της είναι πολύ μικρό, της τάξης του  $3 \cdot 10^{-5} \mu\text{m}^{-1}$ .



Εικόνα 5.4.4: Συντελεστής  $\alpha$  συναρτήσει της απόστασης  $d$



Εικόνα 5.4.5: Συντελεστής  $\beta$  συναρτήσει της απόστασης  $d$

Η περίοδος της κυμάτωσης είναι περίπου όπως προβλέπεται από τη θεωρία  $T=0.35\mu\text{m}$  ενώ οι μέσες τιμές προκύπτουν μετά από fitting αντίστοιχα  $\alpha_{\mu}= 0.00299562384 \mu\text{m}^{-1}$  και  $\beta_{\mu}=9.334787918 \mu\text{m}^{-1}$  που είναι πολύ κοντά στις τιμές από την ανάλυση διαρρέοντος ρυθμού (leaky-mode)  $\alpha = 0.00304603868 \mu\text{m}^{-1}$  και  $\beta = 9.334774884 \mu\text{m}^{-1}$ .

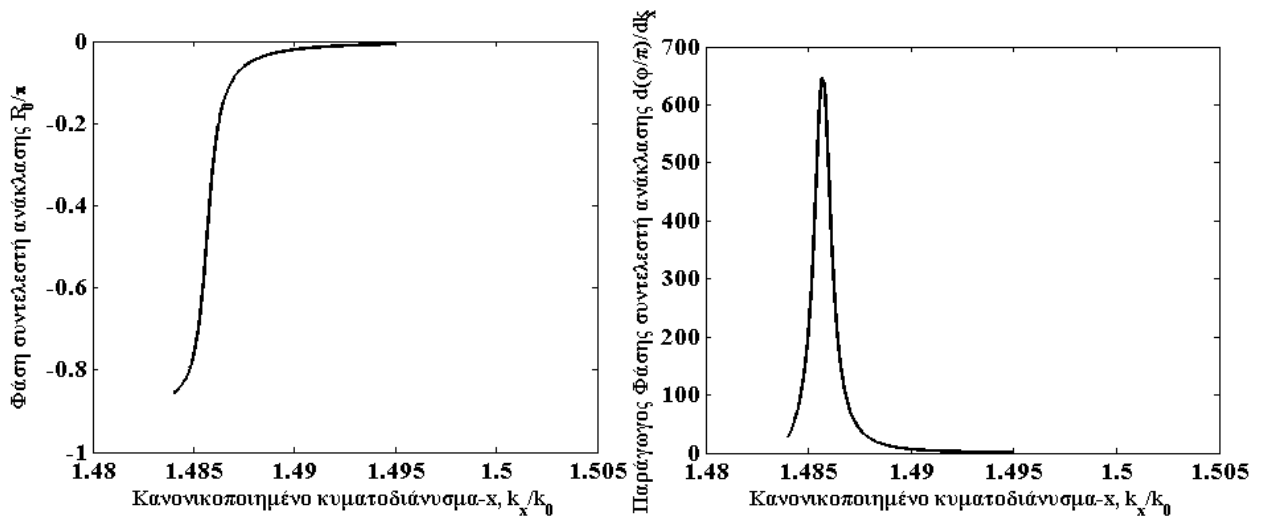
Τις τιμές αυτές θα λάβουμε και ως τελικές για την περίπτωση του ολογραφικού φράγματος. Έτσι, έχουμε:

Συντελεστής σύζευξης:  $\alpha=0.00299562\mu\text{m}^{-1}$

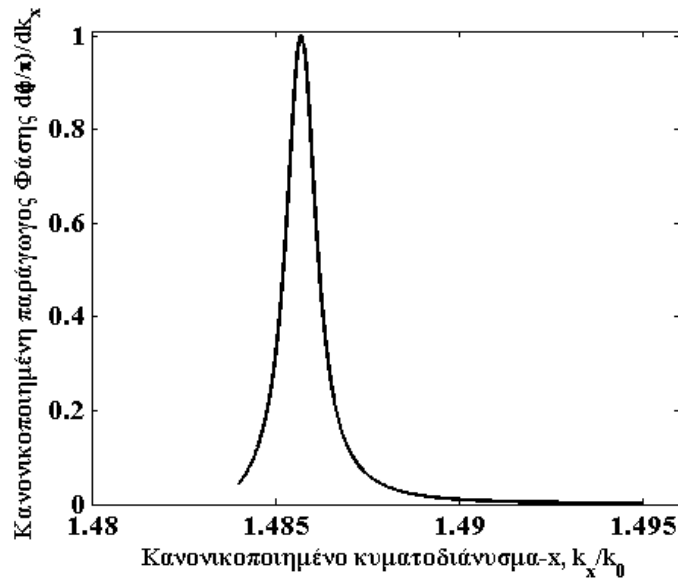
Συντελεστής διάδοσης:  $\beta=9.334787\mu\text{m}^{-1}$ .

### Μέθοδος RCPM

Με τη μέθοδο RCPM το βοηθητικό στρώμα είναι περιττό οπότε έχουμε την αρχική διάταξη της εικόνας 5.3.1. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο και λαμβάνουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



**Εικόνα 5.4.6:** (α) Φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην  $x$  – συνιστώσα (β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης



**Εικόνα 5.4.7:** Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην  $x$  – συνιστώσα

Τα τελικά αποτελέσματα που παίρνουμε είναι:

Συντελεστής σύζευξης:  $\alpha = 0.003015763\mu\text{m}^{-1}$

Συντελεστής διάδοσης:  $\beta = 9.3348302\mu\text{m}^{-1}$ .

Στον συγκεντρωτικό πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των μεθόδων RMM και RCPM σε σύγκριση με τις δοσμένες τιμές από RCWA-Leaky Mode.

Πίνακας 5.4.1

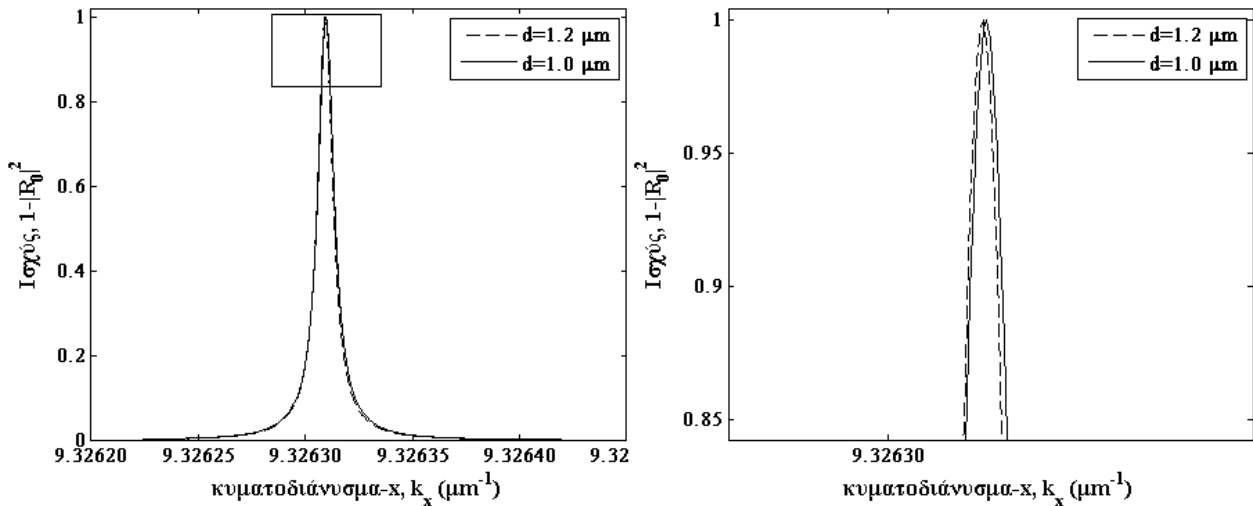
μέθοδος	$\beta$ ( $\mu\text{m}^{-1}$ )	$\alpha$ ( $\mu\text{m}^{-1}$ )	σφάλμα $\beta$ (%)	σφάλμα $\alpha$ (%)
RMM	9.33479	0.0029956	-0.000214	1.6546
RCPM	9.33483	0.0030158	-0.000643	0.9915
leaky-mode	9.33477	0.0030460	-	-

## TM πόλωση

Για την TM πόλωση επαναλαμβάνουμε ομοίως την παραπάνω διαδικασία.

Η διάταξη παραμένει ίδια, ενώ αλλάζουν η περίοδος φράγματος:  $\Lambda = 0.47366129099174 \mu\text{m}$  και η γωνία  $\varphi = 44.72504526101211\text{deg}$ .

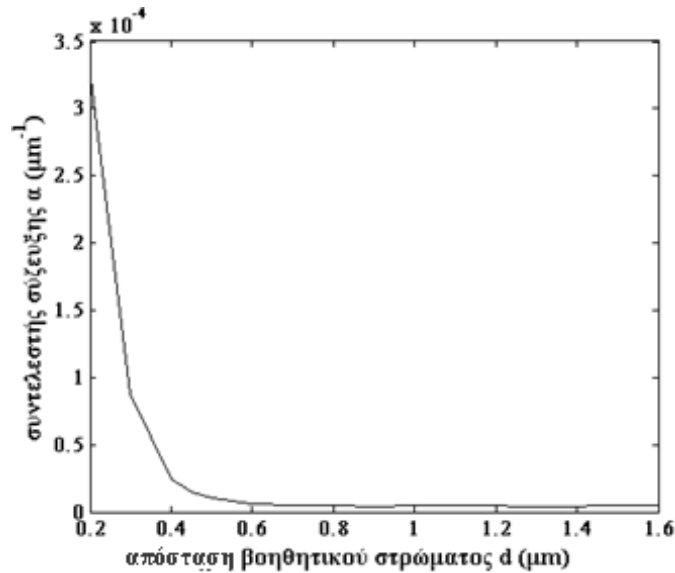
Η σύγκριση για τις λορεντζιανές κατανομές ισχύος απεικονίζεται στα παρακάτω σχήματα και όπως παρατηρούμε, η απόκλιση μεταξύ τους είναι και πάλι ελάχιστη.



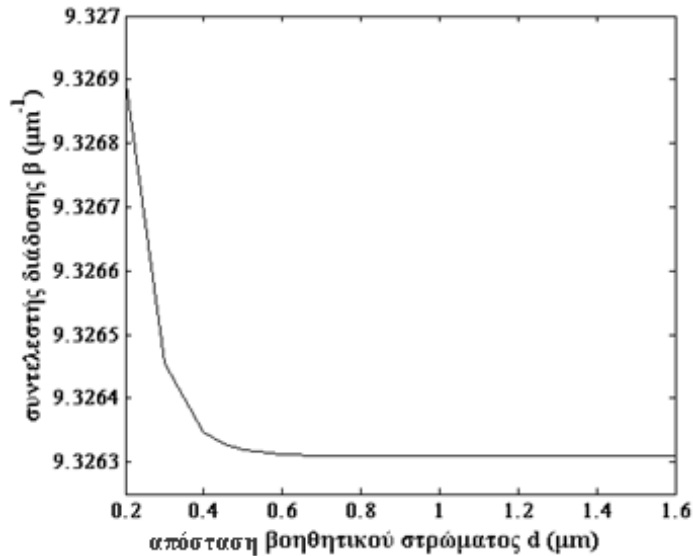
**Εικόνα 5.4.8:** (α) Ισχύς  $1-|R_0|^2$  ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα- $x$ . Σύγκριση Λορεντζιανών κατανομών για τρεις τιμές της απόστασης  $d$  του βοηθητικού στρώματος από την αρχική διάταξη (β) μεγέθυνση ορθογώνιου πλαισίου για καλύτερη εποπτεία

Εξάγουμε τις τιμές των συντελεστών σύζευξης και διάδοσης  $\alpha$  και  $\beta$  και κατασκευάζουμε τα διαγράμματα των εικόνων 5.4.9 και 5.4.10. Η κυμάτωση πάλι δεν είναι εμφανής επειδή το πλάτος της είναι ακόμα μικρότερο από τη περίπτωση TE πόλωσης. Πράγματι, αυτό είναι φανερό και στα παρακάτω διαγράμματα των συντελεστών  $\alpha$  και  $\beta$  ως προς την απόσταση  $d$  του βοηθητικού στρώματος από την αρχική διάταξη.



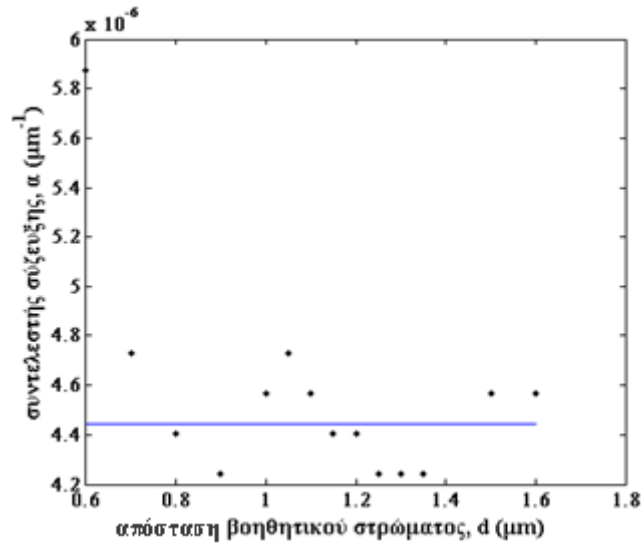


Εικόνα 5.4.9 : Συντελεστής α συναρτήσει της απόστασης d

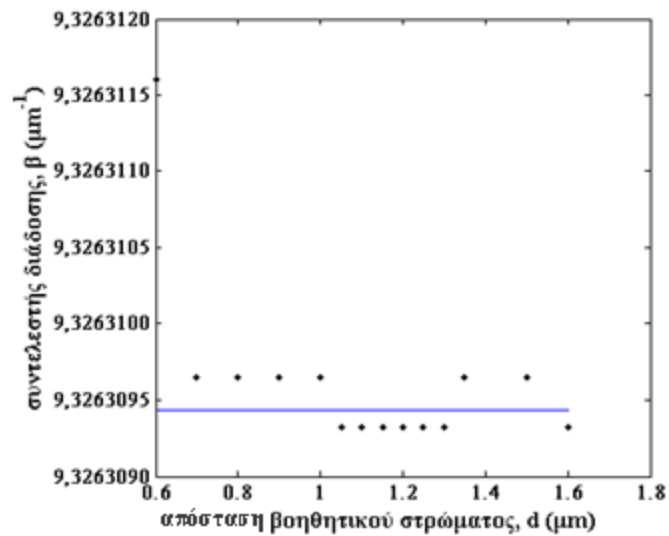


Εικόνα 5.4.10 : Συντελεστής β συναρτήσει της απόστασης d

Η περίοδος της κυμάτωσης είναι περίπου όπως προβλέπεται από τη θεωρία  $T=0.35\mu\text{m}$  ενώ οι μέσες τιμές προκύπτουν αντίστοιχα  $\alpha_{\mu}=0.000004443893\mu\text{m}^{-1}$  και  $\beta_{\mu}=9.32630943\mu\text{m}^{-1}$  που είναι πολύ κοντά στις τιμές από την ανάλυση διαρρέοντος ρυθμού (leaky-mode)  $\alpha = 0.004435748\mu\text{m}^{-1}$  και  $\beta = 9.32630942\mu\text{m}^{-1}$ . Επειδή η κυμάτωση είναι σε πολύ μικρή κλίμακα, με πλάτος της τάξης του  $2 \cdot 10^{-6}\mu\text{m}^{-1}$ , οι τιμές έχουν κάποιες ανακρίβειες με αποτέλεσμα να μην προσεγγίζεται καλά η ημιτονοειδής συμπεριφορά. Ωστόσο, οι μέσες τιμές  $\alpha_{\mu}$  και  $\beta_{\mu}$  είναι αρκετά αντιπροσωπευτικές για το δείγμα των μετρήσεων. Αυτά είναι φανερά στις εικόνες που ακολουθούν.



**Εικόνα 5.4.11:** Συντελεστής α συναρτήσει της απόστασης d σε μικρότερη κλίμακα για να φαίνεται η κυμάτωση. Η ευθεία αντιπροσωπεύει την μέση τιμή  $\alpha_{\mu}$ .



**Εικόνα 5.4.12:** Συντελεστής β συναρτήσει της απόστασης d σε μικρότερη κλίμακα για να φαίνεται η κυμάτωση. Η ευθεία αντιπροσωπεύει την μέση τιμή  $\beta_{\mu}$ .

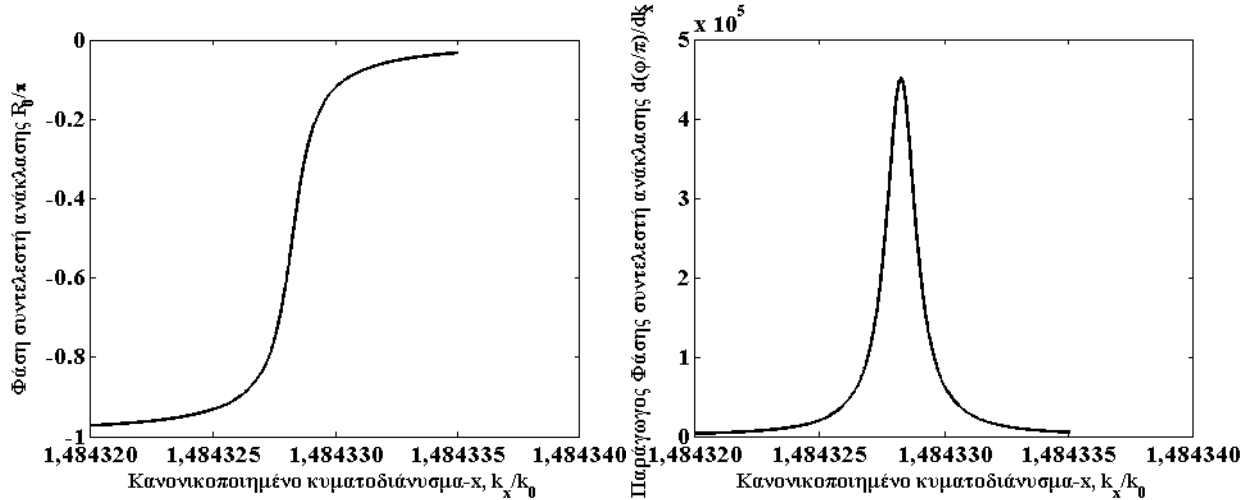
Τις μέσες τιμές  $\alpha_{\mu}$  και  $\beta_{\mu}$  θα λάβουμε και ως τελικές για την περίπτωση του ολογραφικού φράγματος στην TM πόλωση. Έτσι, έχουμε:

Συντελεστής σύζευξης:  $\alpha = 0.00000444389356 \mu\text{m}^{-1}$

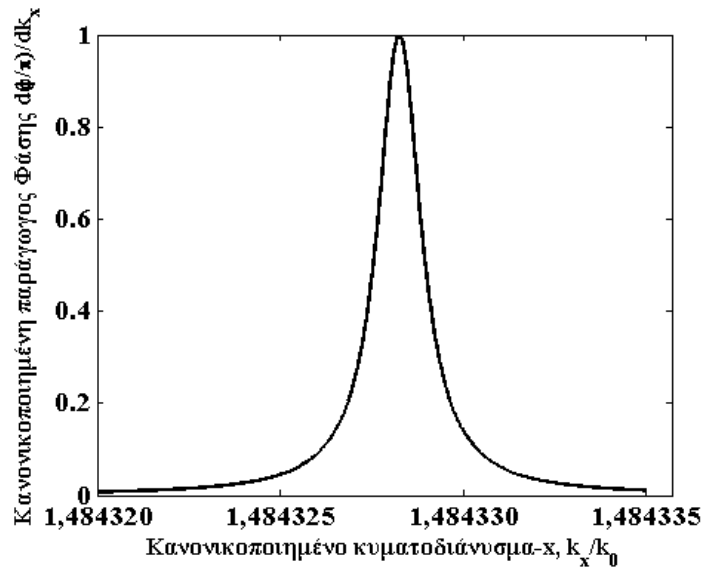
Συντελεστής διάδοσης:  $\beta = 9.32630943681472 \mu\text{m}^{-1}$ .

## Μέθοδος RCPM

Με τη μέθοδο RCPM χωρίς το βοηθητικό στρώμα, έχουμε την αρχική διάταξη της εικόνας 5.3.1. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο και λαμβάνουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



**Εικόνα 5.4.13:** (α) Φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην  $x$  – συνιστώσα (β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης



**Εικόνα 5.4.14:** Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην  $x$  – συνιστώσα

Τα τελικά αποτελέσματα που παίρνουμε είναι:

Συντελεστής σύζευξης:  $\alpha = 4.43619 \cdot 10^{-6} \mu\text{m}^{-1}$

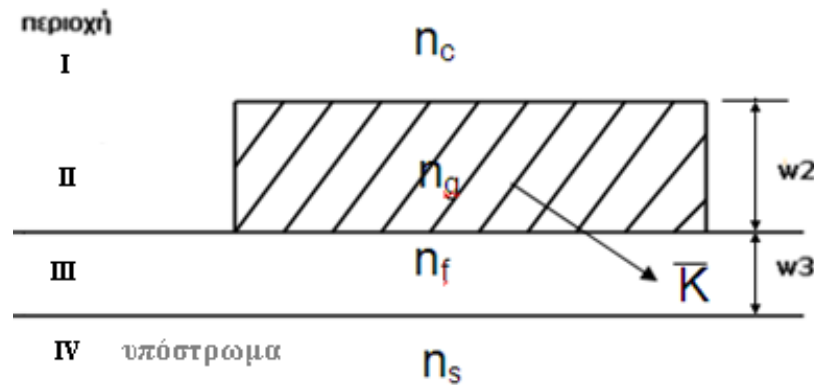
Συντελεστής διάδοσης:  $\beta = 9.3263031 \mu\text{m}^{-1}$ .

Στον συγκεντρωτικό πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των μεθόδων RMM και RCPM σε σύγκριση με τις δοσμένες τιμές από RCWA-Leaky Mode.

Πίνακας 5.4.2

μέθοδος	$\beta$ ( $\mu\text{m}^{-1}$ )	$\alpha$ ( $\mu\text{m}^{-1}$ )	σφάλμα $\beta$ (%)	σφάλμα $\alpha$ (%)
RMM	9.326309	$4.44389 \cdot 10^{-6}$	0	-0.18351
RCPM	9.326303	$4.43619 \cdot 10^{-6}$	$6.43 \cdot 10^{-5}$	-0.00992
leaky-mode	9.326309	$4.43575 \cdot 10^{-6}$	-	-

### 5.5 Ολογραφικό Περιθλαστικό φράγμα 2 (Holographic Grating above the waveguide)



Εικόνα 5.5.1: Τοπολογία 2ου ολογραφικού φράγματος

Μελετάμε την διάταξη της εικόνας 5.5.1 με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

Δείκτες διάθλασης των περιοχών:  $n_c=1.0$ ,  $n_g=1.50$   $\Delta n = 0.02$  ( $\Delta \epsilon = 0.06$ ),  $n_f=1.56$ ,  $n_s=1.4567$

Μήκος κύματος ελευθέρου χώρου:  $\lambda_0=1.0 \mu\text{m}$

Πάχος στρωμάτων:  $w_1 = \infty$ ,  $w_2 = 6 \mu\text{m}$ ,  $w_3= 0.4 \mu\text{m}$ ,  $w_4 = \infty$

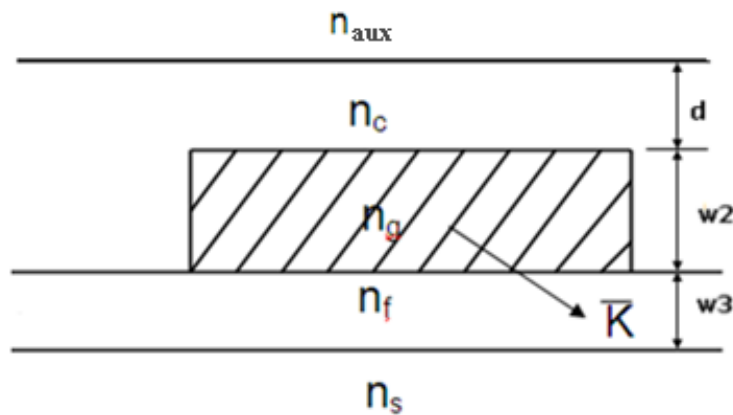
Περίοδος φράγματος:  $\Lambda = 0.47062806227227 \mu\text{m}$   $\varphi=45.09429531550855 \text{ deg}$

Η διαφορά που έχει αυτή η διάταξη σε σχέση με την πρώτη ολογραφική διάταξη, είναι ότι εδώ το ολογραφικό φράγμα (περιοχή 2) δεν είναι ενσωματωμένο στην κυματοδηγούμενη περιοχή.

## TE πόλωση

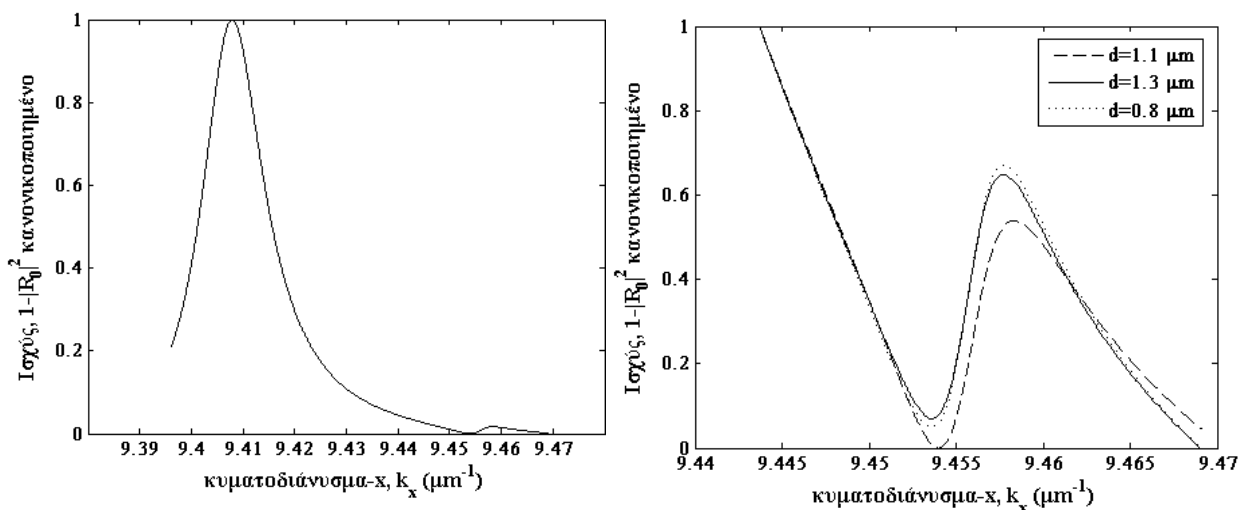
### Μέθοδος RMM

Όπως και στις προηγούμενες διατάξεις θα χρησιμοποιήσουμε βοηθητικό στρώμα σε απόσταση  $d$  όπως φαίνεται στην εικόνα 5.5.2. Σε αυτήν την περίπτωση, για τους δείκτες διάθλασης έχουμε:  $n_{aux}=\sqrt{3}=1.73051..$  ενώ οι υπόλοιποι ως έχουν.



**Εικόνα 5.5.2:** Τοπολογία 2ου ολογραφικού φράγματος με βοηθητικό στρώμα

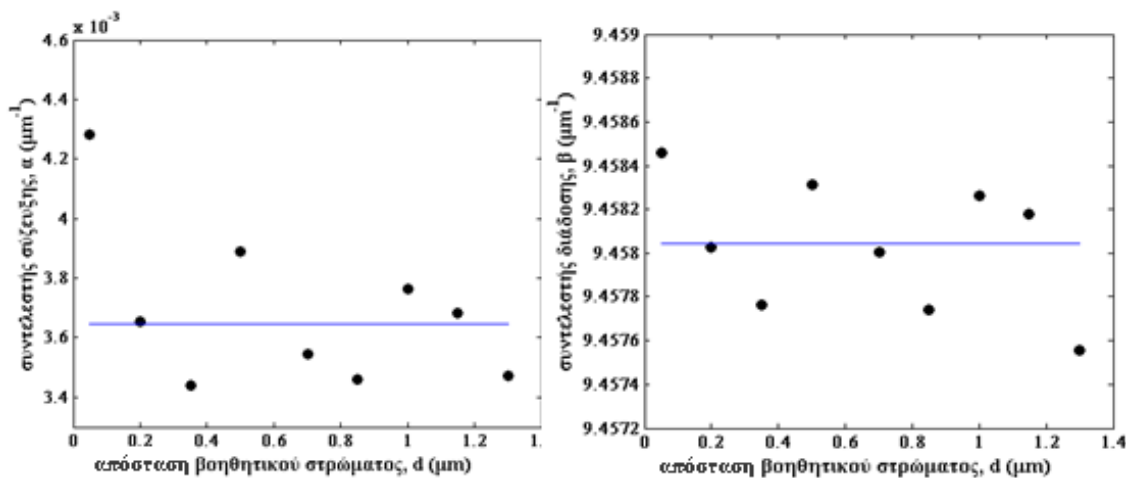
Επειδή η ολογραφική περιοχή έχει αρκετά μεγαλύτερο πάχος από την κυματοδηγούμενη, η περίπτωση αυτή είναι αρκετά πολύπλοκη ως προς την εύρεση των ρυθμών. Στην εικόνα 5.3.3 απεικονίζονται τα αποτελέσματα της κανονικοποιημένης ισχύος  $1-DE_0^r$  για τρεις αποστάσεις ενδεικτικά με  $DE_0^r \sim |R_0|^2$ . Τα αποτελέσματα είναι κανονικοποιημένα.



**Εικόνα 5.5.3 :** (α) Ισχύς  $1-|R_0|^2$  ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x (β) εστίαση στην κορυφή που μας ενδιαφέρει με νέα κανονικοποίηση για καλύτερη εποπτεία. Σύγκριση γραφημάτων για τρεις τιμές της απόστασης  $d$  του βοηθητικού στρώματος από την αρχική διάταξη.

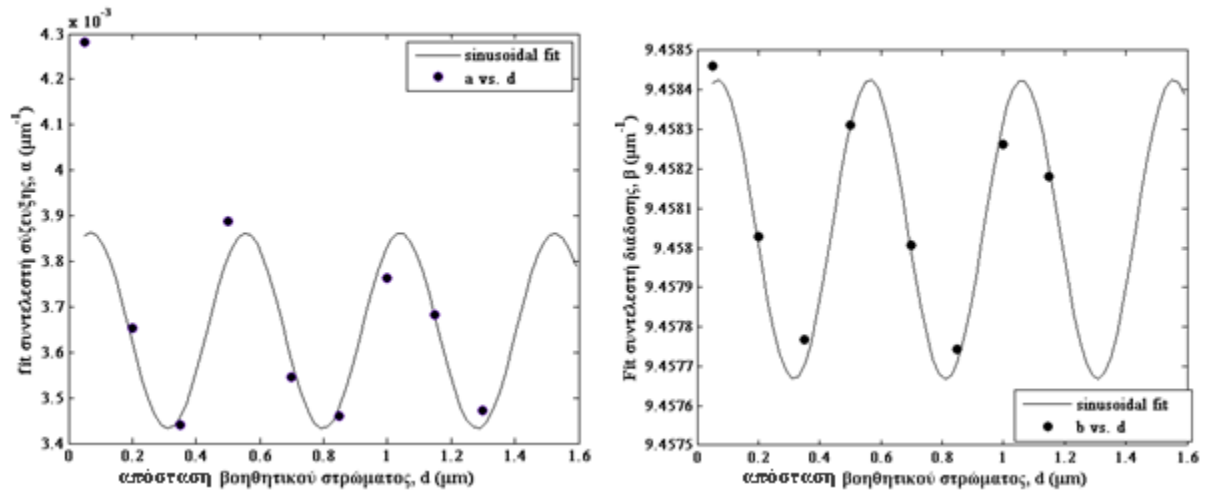
Οι τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  από την απευθείας εύρεση της μιγαδικής σταθεράς διάδοσης με ανάλυση leaky-mode είναι:  $\beta=9.45572935189 \mu\text{m}^{-1}$  και  $\alpha=0.0027608481206 \mu\text{m}^{-1}$ . Η πιο κοντινή κορυφή στο  $\beta$  αυτό είναι αυτή που απεικονίζεται στην εικόνα 5.5.3(β) και όπως παρατηρούμε δεν φαίνεται να προσεγγίζεται καλά από Λορεντζιανή κατανομή. Ωστόσο, συνεχίζουμε κανονικά τη διαδικασία για να μελετήσουμε τα αποτελέσματα.

Ο υπολογισμός των συντελεστών  $\alpha$  και  $\beta$  έγινε όπως και στην προηγούμενη περίπτωση με fitting με Λορεντζιανή και τα αποτελέσματα για διαφορετικές τιμές της απόστασης  $d$  παρατίθενται στα επόμενα διαγράμματα.



**Εικόνα 5.5.4 :** Συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$  συναρτήσει της απόστασης  $d$ . Οι ευθείες αντιπροσωπεύουν τις μέσες τιμές.

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής  $\alpha_\mu$  και  $\beta_\mu$  κάνουμε fitting με ημιτονοειδή συνάρτηση. Ακολουθούν τα διαγράμματα που προέκυψαν.



Εικόνα 5.5.5 Fitting συντελεστών σύζευξης  $\alpha$  και  $\beta$  με ημιτονοειδή συνάρτηση ως προς την απόσταση  $d$ .

Οι τιμές που υπολογίσθηκαν είναι αντίστοιχα  $\alpha_\mu=0.0036472308897\mu\text{m}^{-1}$  και  $\beta_\mu=9.458045375925940\mu\text{m}^{-1}$  και παρουσιάζουν σχετική απόκλιση από τις τιμές της ανάλυσης διαρρέοντος ρυθμού (leaky-mode)  $\beta=9.45572935189\mu\text{m}^{-1}$  και  $\alpha=0.0027608481206\mu\text{m}^{-1}$ .

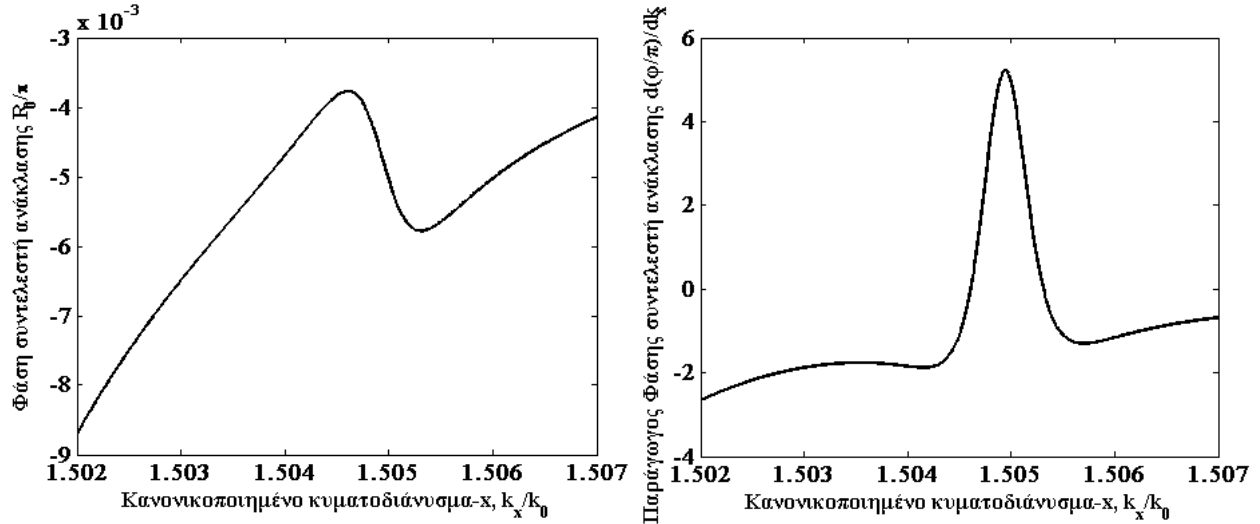
Τις μέσες τιμές  $\alpha_\mu$  και  $\beta_\mu$  θα λάβουμε και ως τελικές για την περίπτωση του δεύτερου ολογραφικού φράγματος στην TE πόλωση. Έτσι, έχουμε:

Συντελεστής σύζευξης:  $\alpha=0.0036472389\mu\text{m}^{-1}$

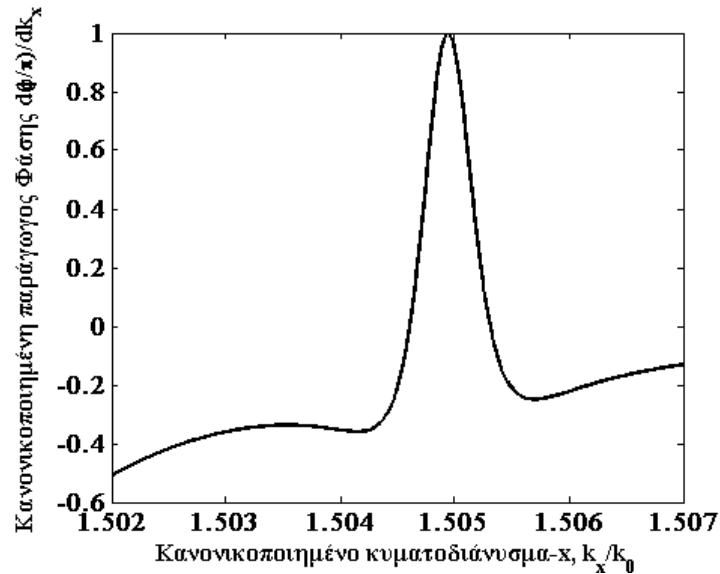
Συντελεστής διάδοσης:  $\beta=9.4580453759\mu\text{m}^{-1}$ .

## Μέθοδος RCPM

Με τη μέθοδο RCPM, χωρίς το βοηθητικό στρώμα, έχουμε την αρχική διάταξη της εικόνας 5.5.1. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο και λαμβάνουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



**Εικόνα 5.5.6:** (α) Φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην  $x$  – συνιστώσα (β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης



**Εικόνα 5.5.7:** Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην  $x$  – συνιστώσα

Τα τελικά αποτελέσματα που παίρνουμε είναι:

Συντελεστής σύζευξης:  $\alpha = 0.001505346490317 \mu\text{m}^{-1}$

Συντελεστής διάδοσης:  $\beta = 9.455814278203441 \mu\text{m}^{-1}$ .



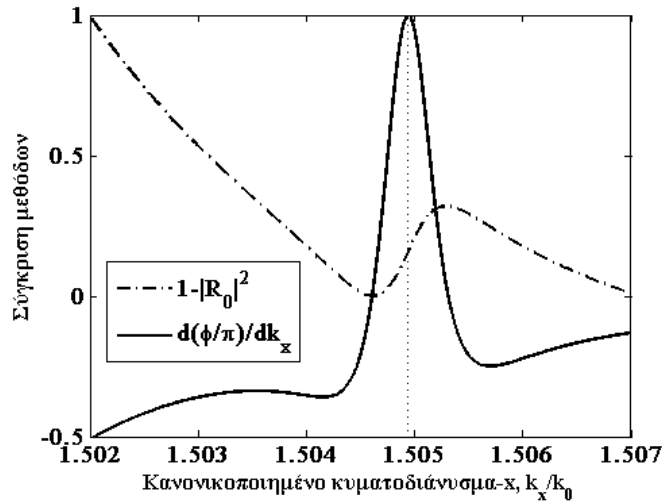
Στον συγκεντρωτικό πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των μεθόδων RMM και RCPM σε σύγκριση με τις δοσμένες τιμές από RCWA-Leaky Mode.

Πίνακας 5.5.1

μέθοδος	$\beta$ ( $\mu\text{m}^{-1}$ )	$\alpha$ ( $\mu\text{m}^{-1}$ )	σφάλμα $\beta$ (%)	σφάλμα $\alpha$ (%)
RMM	9.458045	0.00364723	-0.024493	-32.105
RCPM	9.455814	0.00150535	-0.000899	45.475
leaky-mode	9.455729	0.00276085	-	-

### Παρατήρηση

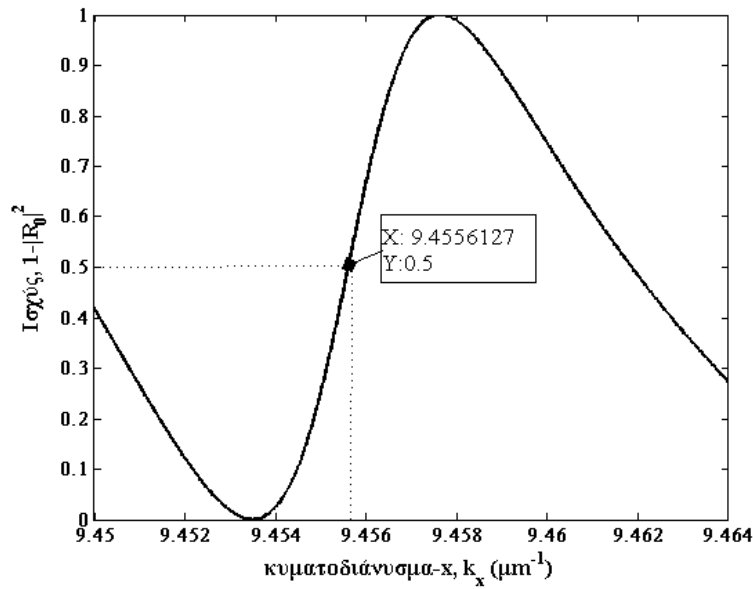
Η σύγκριση των διαγραμμάτων από τις μεθόδους RMM και RCPM παρουσιάζει ένα ενδιαφέρον σημείο.



Εικόνα 5.5.8: Σύγκριση μεθόδων RMM και RCPM, ισχύος και παραγώγου φάσης αντίστοιχα

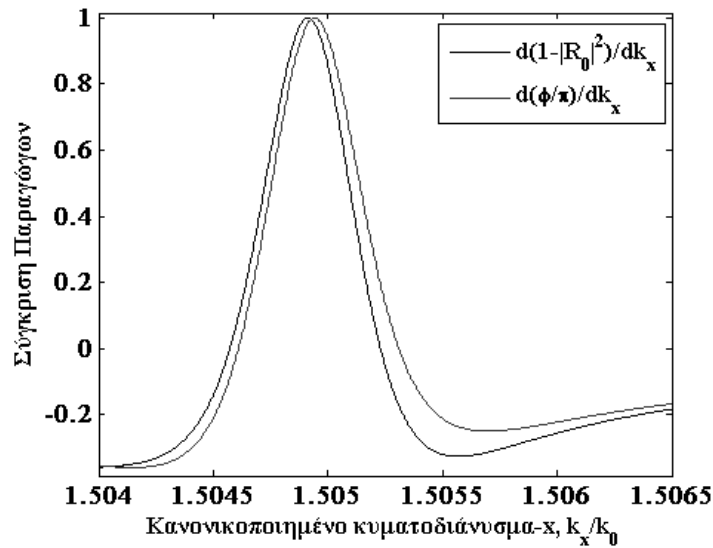
Στην παραπάνω εικόνα θα έπρεπε να υπάρχουν δυο Λορεντζιανές κατανομές με κορυφή περίπου στο ίδιο σημείο, αν οι δύο μέθοδοι έδιναν την ίδια περίπου λύση. Ωστόσο, η μέθοδος RMM παρουσιάζει μια απόκλιση. Η θέση στην οποία η μέθοδος RMM θα έπρεπε να έχει κορυφή σημειώνεται στην παρακάτω εικόνα, που είναι κανονικοποιημένη,

ώστε η κορυφή να αντιστοιχεί στη μονάδα. Η σημειωμένη θέση αντιστοιχεί στο μισό ( $\approx 0.5$ ).



Εικόνα 5.5.9: Μέθοδος RMM, σημειώνεται η θέση στην οποία αναμέναμε το μέγιστο

Η παραγωγή της ισχύος από το παραπάνω διάγραμμα δίνει το γράφημα που απεικονίζεται παρακάτω σε σύγκριση με την παράγωγο της φάσης από την μέθοδο RCPM.



Εικόνα 5.5.10: Σύγκριση παραγώγων φάσης και  $1-|R_0|^2$

Υπάρχει εξαιρετική ομοιότητα ανάμεσα στα δύο διαγράμματα. Μια πιθανή εξήγηση θα δοθεί στην επόμενη παράγραφο, όπου θα μελετήσουμε ένα νέο μοντέλο για την διάταξη του δεύτερου ολογραφικού φράγματος.

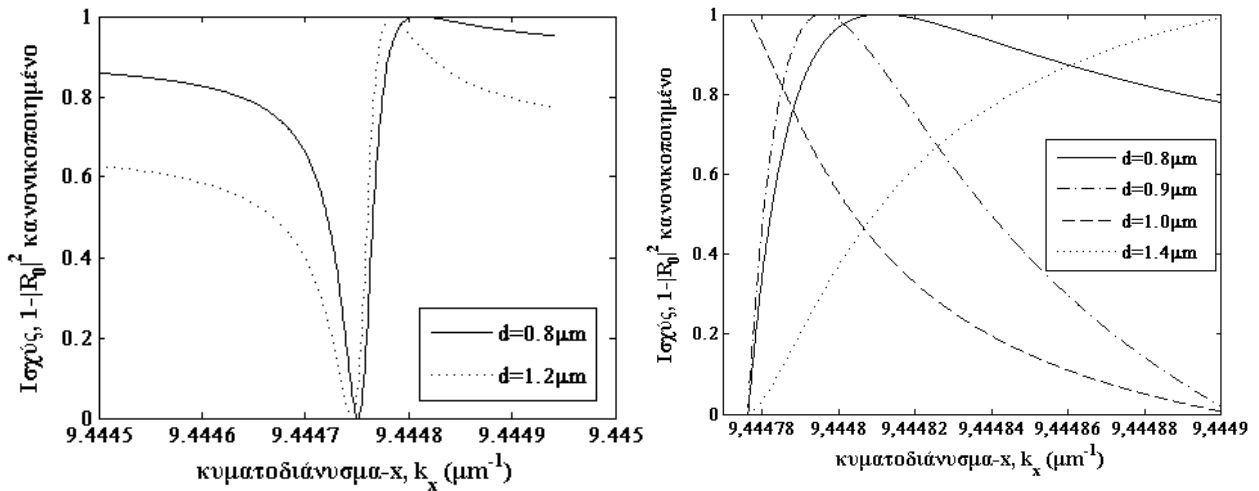
### TM πόλωση

Για την TM πόλωση επαναλαμβάνουμε ομοίως την παραπάνω διαδικασία.

Η διάταξη παραμένει ίδια, με τη διαφορά ότι αλλάζουν η περίοδος φράγματος

$\Lambda = 0.47089155933548 \mu\text{m}$  και η γωνία  $\varphi = 45.06231284934884 \text{ deg}$

Στην εικόνα 5.5.11 απεικονίζονται τα αποτελέσματα της κανονικοποιημένης ισχύος  $1 - DE_0^r$  για τρεις αποστάσεις ενδεικτικά με  $DE_0^r \sim |R_0|^2$ . Τα αποτελέσματα είναι κανονικοποιημένα.



**Εικόνα 5.5.11:** : (α) Ισχύς  $1 - |R_0|^2$  ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα- $x$ . (β) εστίαση στην κορυφή που μας ενδιαφέρει με νέα κανονικοποίηση για καλύτερη εποπτεία. Σύγκριση γραφημάτων για τέσσερις τιμές της απόστασης  $d$ .

Οι τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  από την απευθείας εύρεση της μιγαδικής σταθεράς διάδοσης με ανάλυση leaky-mode είναι:  $\beta = 9.444756311480933 \mu\text{m}^{-1}$  και  $\alpha = 1.765167485018906 \text{E-}05 \mu\text{m}^{-1}$ . Η πιο κοντινή κορυφή στο  $\beta$  αυτό, είναι αυτή που απεικονίζεται στην εικόνα 5.5.11(β), και όπως παρατηρούμε δεν φαίνεται να προσεγγίζεται καλά από Λορεντζιανή κατανομή. Εκτός αυτού, έχει πολύ μεγάλες αποκλίσεις ανάλογα με την απόσταση  $d$  του βοηθητικού στρώματος, πράγμα που εφόσον η πόλωση είναι TM δεν δικαιολογείται.

Έτσι, ο υπολογισμός των συντελεστών  $\alpha$  και  $\beta$  δεν μπορεί να γίνει αξιόπιστα. Ενδεικτικά, παρουσιάζουμε μερικές τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ , ωστόσο στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε ένα διαφορετικό μοντέλο για τον υπολογισμό τους:

για  $d=0.8\mu\text{m}$   $\beta = 9.444811129807700 \mu\text{m}^{-1}$  και  $\alpha = 4.098827078902190\text{E-}005 \mu\text{m}^{-1}$

για  $d=1.4\mu\text{m}$   $\beta = 9.444738814552922 \mu\text{m}^{-1}$  και  $\alpha = 1.798743445746709\text{E-}005 \mu\text{m}^{-1}$

για  $d=1.5\mu\text{m}$   $\beta = 9.444753610843540 \mu\text{m}^{-1}$  και  $\alpha = 1.849533327202835\text{E-}005 \mu\text{m}^{-1}$ .

Από τις τιμές αυτές εξάγουμε τις μέσες τιμές  $\alpha_\mu=1.82413838647\text{E-}005 \mu\text{m}^{-1}$  και  $\beta_\mu=9.4447462127\mu\text{m}^{-1}$ .

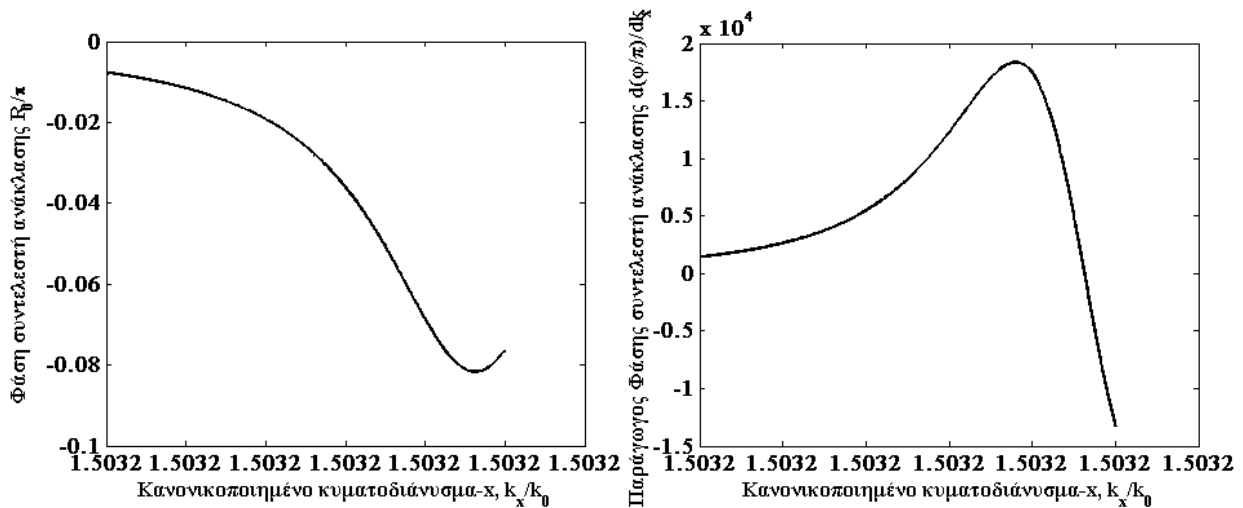
Τις μέσες τιμές  $\alpha_\mu$  και  $\beta_\mu$  θα λάβουμε και ως τελικές για την περίπτωση του δεύτερου ολογραφικού φράγματος στην TM πόλωση. Έτσι, έχουμε:

Συντελεστής σύζευξης:  $\alpha=1.824138\text{E-}005 \mu\text{m}^{-1}$

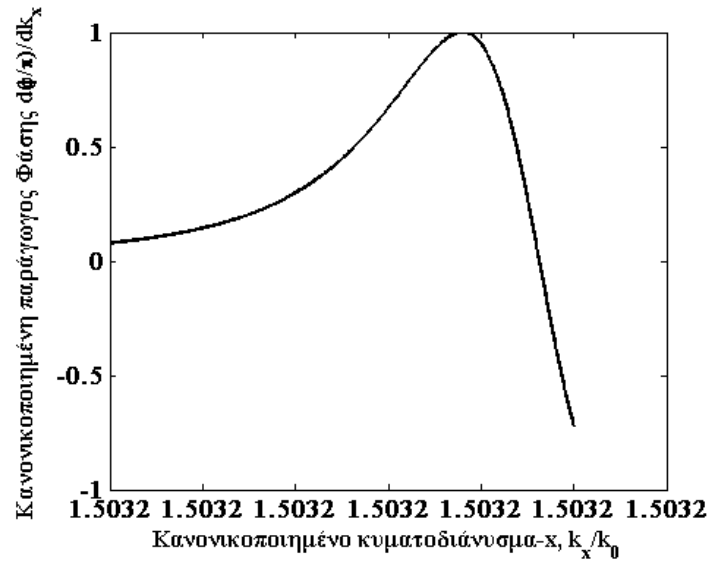
Συντελεστής διάδοσης:  $\beta=9.444746213 \mu\text{m}^{-1}$

### Μέθοδος RCPM

Με τη μέθοδο RCPM χωρίς το βοηθητικό στρώμα, έχουμε την αρχική διάταξη της εικόνας 5.5.1. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο και λαμβάνουμε τα παρακάτω διαγράμματα:



**Εικόνα 5.5.12:** (α) Φάση του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην x – συνιστώσα (β) η αντίστοιχη παράγωγος της φάσης



**Εικόνα 5.5.13:** Κανονικοποιημένη παράγωγος της φάσης του μιγαδικού συντελεστή ανάκλασης ως προς το κανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα στην  $x$  – συνιστώσα

Τα τελικά αποτελέσματα που παίρνουμε είναι:

Συντελεστής σύζευξης:  $\alpha=1.492256510454E-005 \mu\text{m}^{-1}$

Συντελεστής διάδοσης:  $\beta=9.444743378985546 \mu\text{m}^{-1}$

Στον συγκεντρωτικό πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των μεθόδων RMM και RCPM σε σύγκριση με τις δοσμένες τιμές από RCWA-Leaky Mode.

Πίνακας 5.5.2

μέθοδος	$\beta$ ( $\mu\text{m}^{-1}$ )	$\alpha$ ( $\mu\text{m}^{-1}$ )	σφάλμα $\beta$ (%)	σφάλμα $\alpha$ (%)
RMM	9.44474621	1.8241E-05	0.000107	-3.337
RCPM	9.44474338	1.4923E-05	0.000137	15.460
leaky-mode	9.44475631	1.7652E-05	-	-

## 5.6 Μοντέλο απλής ρίζας για το δεύτερο ολογραφικό φράγμα (Holographic Grating above the waveguide)

Στο κεφάλαιο 4 έχουμε δείξει ότι :

$$R_0 = R_0(\beta) = \frac{\tilde{Q}(\beta)}{\tilde{\beta} - \check{\beta}_0^*}$$

όπου η  $\tilde{Q}$  είναι ρητή μιγαδική συνάρτηση του  $\beta$  και  $\check{\beta}_0^* = \beta^* - j\alpha$ . Αν χωρίσουμε το μέτρο από τη φάση έχουμε:

$$R_0 = \frac{|Q(\beta)|e^{j\Phi_1\{Q(\beta)\}}}{[(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2]^{1/2}} \cdot e^{-j \tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta - \beta^*}\right)}$$

$$|R_0|^2 = \frac{|Q(\beta)|^2}{(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2}$$

Επομένως αυτό που μελετάμε θα είναι :

$$1 - |R_0|^2 = \frac{J(\beta)}{(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2} \quad \text{όπου } J(\beta) = (\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2 - |Q(\beta)|^2$$

Αν η  $J(\beta)$  στην προηγούμενη σχέση δεν έχει ρίζες κοντά στο  $\beta^*$  και μεταβάλλεται αργά στην περιοχή αυτή, μπορούμε να αγνοήσουμε την επίδρασή της. Το γράφημα θα μας δώσει Λορεντζιανή κατανομή με κορυφή στο  $\beta^*$  και εύρος ημίσεος μεγίστου ίσο με το διπλάσιο του  $\alpha$ , αφού ισχύει  $1 - |R_0|^2 \approx \frac{1}{(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2}$ . Αν όμως η  $J(\beta)$  έχει ρίζες (πραγματικές) κοντά στο  $\beta^*$  τότε έχουμε αλλοίωση της Λορεντζιανής κατανομής αφού δεν μπορούμε να αγνοήσουμε την  $J(\beta)$ .

Για παράδειγμα αν υπάρχει μία μόνο ρίζα κοντά στο  $\beta^*$  έχουμε τα εξής:

$J(\beta) = (\beta - \beta^* - \delta\beta)\psi(\beta)$  όπου  $\delta\beta$  μικρό και η  $\psi(\beta)$  δεν έχει ρίζες και μεταβάλλεται αργά κοντά στο  $\beta^*$ , οπότε

$$1 - |R_0|^2 = \frac{(\beta - \beta^* - \delta\beta)\psi(\beta)}{(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2} \approx \frac{(\beta - \beta^* - \delta\beta)}{(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2}$$

Η παραπάνω σχέση δεν μας δίνει Λορεντζιανή στο γράφημά της με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να βρούμε το  $\beta^*$  με την μέθοδο RPM, αν όμως την παραγωγίσουμε έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \{1 - |R_0|^2\} &= \\ &= \frac{[\psi(\beta) + (\beta - \beta^* - \delta\beta)\psi'(\beta)] \cdot [(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2] - 2(\beta - \beta^* - \delta\beta)(\beta - \beta^*)\psi(\beta)}{((\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2)^2} \end{aligned}$$

Επειδή θεωρήσαμε ότι η  $\psi(\beta)$  μεταβάλλεται αργά κοντά στο  $\beta^*$ , στην περιοχή αυτή μπορούμε να υποθέσουμε ότι θα ισχύει  $\psi'(\beta) \rightarrow 0$ , άρα η παράγωγος γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \{1 - |R_0|^2\} &= \frac{\psi(\beta) \cdot [(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2] - 2(\beta - \beta^* - \delta\beta)(\beta - \beta^*)\psi(\beta)}{((\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2)^2} \\ \Rightarrow \frac{d}{d\beta} \{1 - |R_0|^2\} &= \psi(\beta) \left\{ \frac{1}{(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2} - \frac{2(\beta - \beta^* - \delta\beta)(\beta - \beta^*)}{((\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2)^2} \right\} \end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος της παραπάνω σχέσης τείνει να μηδενιστεί κοντά στο  $\beta^*$ , όποτε τελικά έχουμε κατά προσέγγιση:

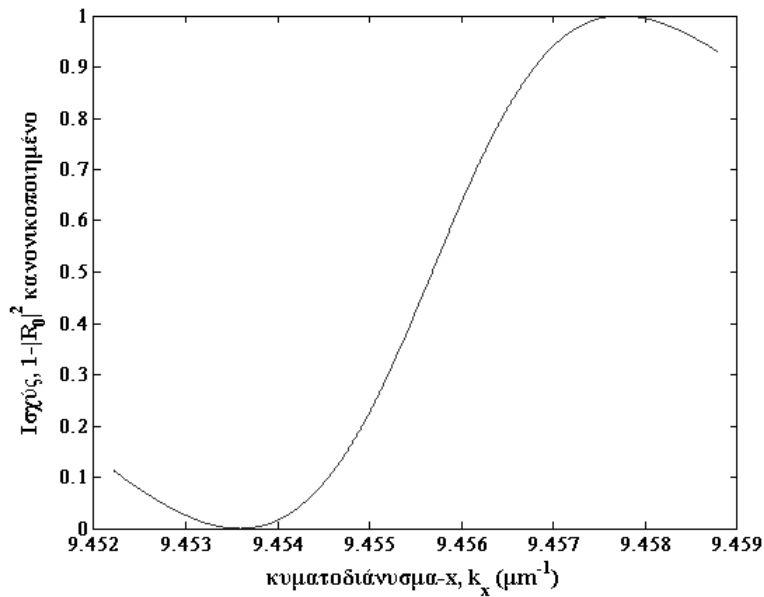
$$\frac{d}{d\beta} \{1 - |R_0|^2\} \simeq \psi(\beta) \frac{1}{(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2} \approx \frac{1}{(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2}$$

όπου εφόσον ισχύουν οι υποθέσεις για την  $\psi(\beta)$  έχουμε Λορεντζιανή με κορυφή στο  $\beta^*$  και εύρος ημίσειος μεγίστου λίγο μεγαλύτερο ή μικρότερο από αυτό που περιμένουμε λόγω του δεύτερου όρου που παραλείψαμε. Έτσι, μπορούμε τελικά να βρούμε το  $\beta^*$  μέσω της παραγώγου του  $1 - |R_0|^2$  που έχει τη μορφή Λορεντζιανής.

## Εφαρμογή στην περίπτωση 2<sup>ου</sup> ολογραφικού φράγματος TE πόλωσης

Από την ανάλυση leaky-mode έχουμε  $\beta=9.45572935\mu\text{m}^{-1}$  και  $\alpha=2.76085\text{E-}03\mu\text{m}^{-1}$ .

Εφαρμόζουμε την αριθμητική μέθοδο RCWA και με τα αποτελέσματα φτιάχνουμε το διάγραμμα της κανονικοποιημένης ισχύος  $1-|R_0|^2$  για  $d=0.8\mu\text{m}$ . Περιμένουμε το διάγραμμα να είναι Λορεντζιανή με κορυφή στο  $\beta=9.45572935\mu\text{m}^{-1}$ , όμως αυτό δεν συμβαίνει.



Εικόνα 5.6.1: Ισχύς  $1-|R_0|^2$  ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x για  $d=0.8\mu\text{m}$

Εξετάζουμε την περίπτωση απλής ρίζας που μελετήσαμε θεωρητικά όπου

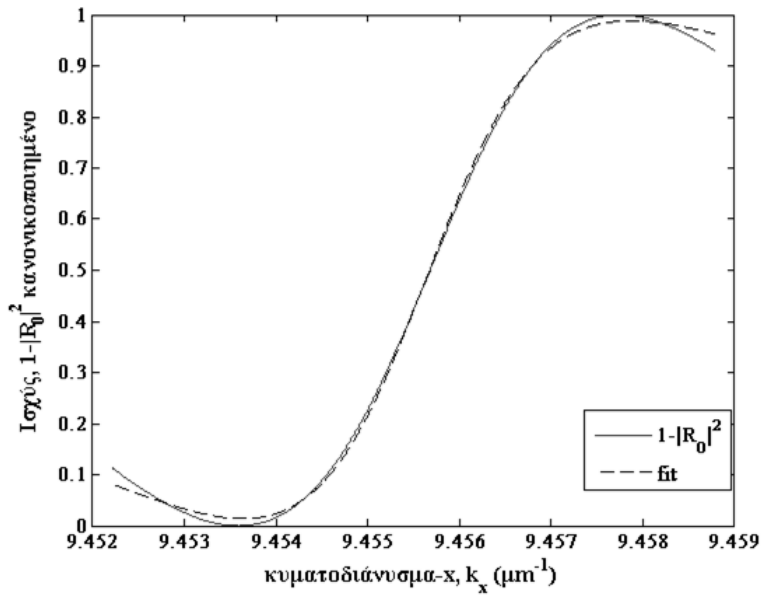
$$1 - |R_0|^2 \approx \frac{(\beta - \beta^* - \delta\beta)}{(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2}$$

Αντί για την γνωστή Λορεντζιανή, κάνουμε fitting των αποτελεσμάτων κανονικοποιημένης ισχύος  $1-|R_0|^2$  με την παραπάνω συνάρτηση με άγνωστες παραμέτρους τα  $\beta^*$ ,  $\alpha$ ,  $\delta\beta$ . Για το fitting χρησιμοποιήσαμε τυχαίες αρχικές εκτιμήτριες των παραμέτρων και πήραμε τα εξής αποτελέσματα:

$$\beta^* = 9.45558999\mu\text{m}^{-1} \quad \alpha = 0.00210840\mu\text{m}^{-1} \quad \delta\beta = 0.0001664075\mu\text{m}^{-1}$$

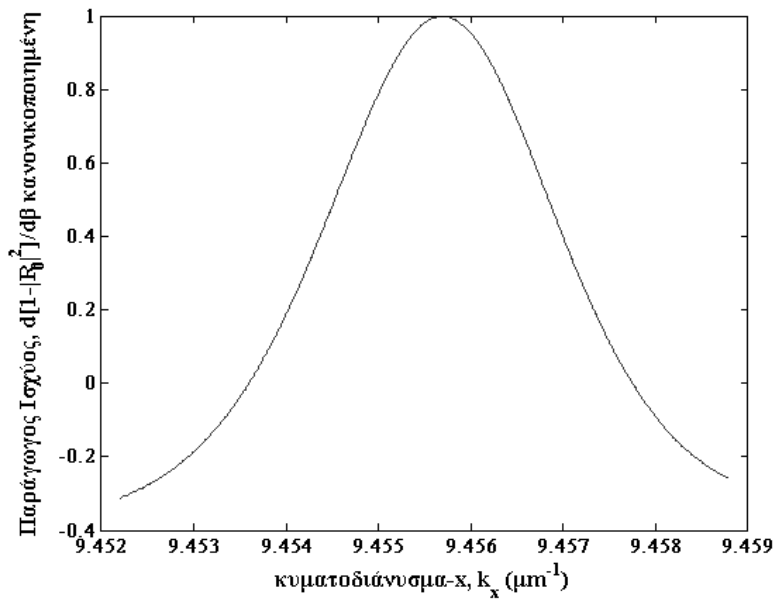


Για καλύτερη εποπτεία, στην παρακάτω εικόνα συγκρίνουμε το γράφημα της συνάρτησης που προέκυψε με τις τιμές από το fitting με το αρχικό γράφημα.



Εικόνα 5.6.2: Fitting ισχύος  $1-|R_0|^2$  ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x για  $d=0.8\mu\text{m}$

Στην συνέχεια θα σχηματίσουμε αριθμητικά την παράγωγο του  $1-|R_0|^2$  ως προς  $\beta$  από τις τιμές που υπολογίσαμε με τη μέθοδο RCWA και αν ισχύει η θεωρία της απλής ρίζας περιμένουμε τώρα Λορεντζιανή με κορυφή περίπου στο  $\beta=9.45572935 \mu\text{m}^{-1}$ .



Εικόνα 5.6.3: Κανονικοποιημένη παράγωγος ισχύος  $1-|R_0|^2$  ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x

Το μέγιστο είναι στο  $\beta = 9.45570216 \mu\text{m}^{-1}$  δηλαδή πολύ κοντά στο αναμενόμενο ενώ το εύρος ημίσειος μεγίστου είναι μικρότερο από αυτό που περιμένουμε όπως προβλέπεται.

Στη συνέχεια θα κάνουμε fitting με την παράγωγο από την σχέση

$$\frac{d}{d\beta} \{1 - |R_0|^2\} \approx \frac{1}{(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2} - \frac{2(\beta - \beta^* - \delta\beta)(\beta - \beta^*)}{((\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2)^2}$$

με άγνωστες παραμέτρους τα  $\beta^*$ ,  $\alpha$ ,  $\delta\beta$ .

Τα αποτελέσματα είναι τα εξής:  $\beta^* = 9.45568652 \mu\text{m}^{-1}$ ,

$\alpha = 0.00270281 \mu\text{m}^{-1}$ ,  $\delta\beta = -0.00001009877 \mu\text{m}^{-1}$ .

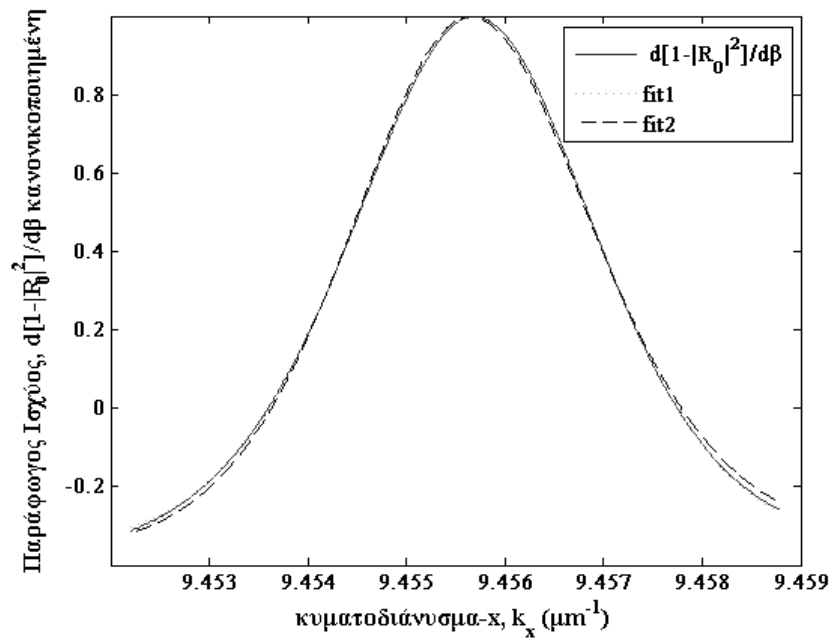
Παρατηρούμε ότι το  $\delta\beta$  διαφέρει πολύ από αυτό που υπολογίσαμε πριν γίνει η παραγωγή. Επειδή όμως αυτές οι τιμές είναι πολύ ευαίσθητες και εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τις αρχικές εκτιμήτριες, θα κάνουμε ένα δεύτερο fitting με άγνωστες παραμέτρους τα  $\beta^*$  και  $\alpha$ . Θα χρησιμοποιήσουμε σαν γνωστή σταθερά το  $\delta\beta$  που υπολογίσαμε πριν την παραγωγή δηλαδή  $\delta\beta = 0.0001664075 \mu\text{m}^{-1}$ .

Τα αποτελέσματα είναι τα εξής:

$\beta^* = 9.45559926 \mu\text{m}^{-1}$ ,  $\alpha = 0.00268817 \mu\text{m}^{-1}$ .

Στα δύο τελευταία fitting έχουμε ουσιαστικά σχεδόν σταθερό το άθροισμα  $\beta^* + \delta\beta$ .

Στην παρακάτω εικόνα συγκρίνουμε τα τελευταία τρία διαγράμματα που προκύπτουν.



Εικόνα 5.6.4: Fitting παραγώγου ισχύος ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x με Λορεντζιανή

Συνοπτικά τα αποτελέσματα αν κρατήσουμε την τιμή  $\delta\beta = 0.0001664075 \mu\text{m}^{-1}$  σε σύγκριση με τα αποτελέσματα των άλλων μεθόδων είναι:

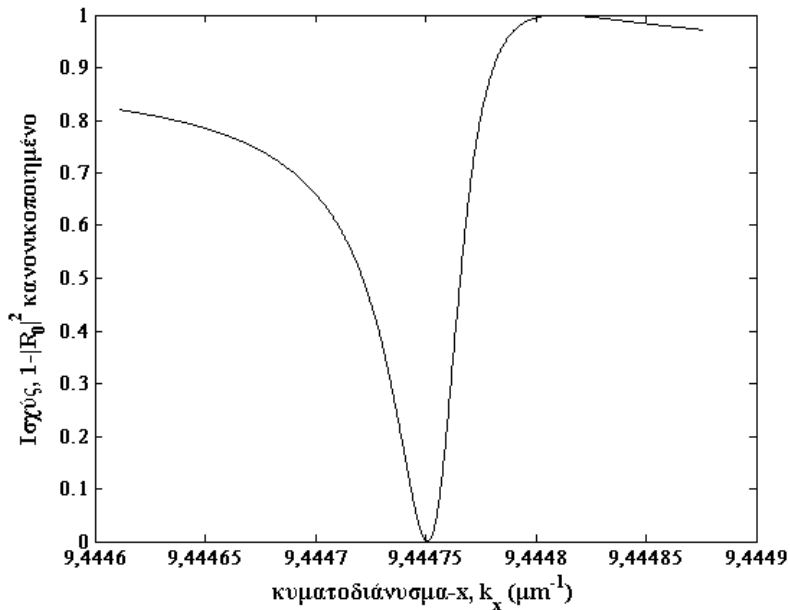
μέθοδος	$\beta (\mu\text{m}^{-1})$	$\alpha (\mu\text{m}^{-1})$	σφάλμα $\beta(\%)$	σφάλμα $\alpha(\%)$
Απλής ρίζας fit $1 -  R_0 ^2$	9.455590	0.00210840	0.00147	23.632
Απλής ρίζας fit $d\{1 -  R_0 ^2\}/d\beta$	9.455599	0.00268817	0.00137	2.633
Αρχική μέθοδος RMM	9.458045	0.00364724	-0.02449	-32.106
RCPM	9.455814	0.00150535	-0.00090	45.475
leaky-mode	9.455729	0.00276085	-	-

Όπως είναι φανερό, η μέθοδος απλής ρίζας είναι πιο κοντά στα αναμενόμενα αποτελέσματα, άρα το μοντέλο απλής ρίζας προσεγγίζει καλύτερα τις πειραματικές τιμές των προσομοιώσεων. Επιπλέον, το σφάλμα ελαχιστοποιείται όταν χρησιμοποιούμε το μοντέλο απλής ρίζας με fitting στην παράγωγο.

## Εφαρμογή στην περίπτωση 2<sup>ου</sup> ολογραφικού φράγματος TM πόλωσης

Από την ανάλυση leaky-mode έχουμε  $\beta=9.44475631\mu\text{m}^{-1}$  και  $\alpha=1.765167\text{E-}05\mu\text{m}^{-1}$ .

Εφαρμόζουμε την αριθμητική μέθοδο RCWA και με τα αποτελέσματα φτιάχνουμε το διάγραμμα της κανονικοποιημένης ισχύος  $1-|R_0|^2$  για  $d=0.8\mu\text{m}$ . Περιμένουμε το διάγραμμα να είναι Λορεντζιανή με κορυφή στο  $\beta=9.44475631\mu\text{m}^{-1}$ , όμως αυτό δεν συμβαίνει.



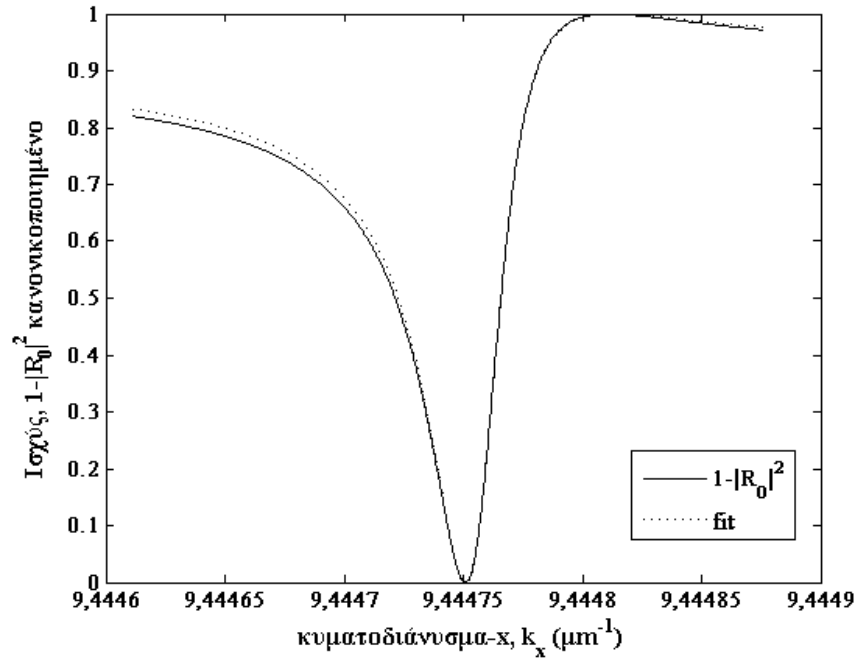
Εικόνα 5.6.5: Ισχύς  $1-|R_0|^2$  ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x για  $d=0.8\mu\text{m}$

Εξετάζουμε την περίπτωση απλής ρίζας που μελετήσαμε θεωρητικά όπου

$$1 - |R_0|^2 \approx \frac{(\beta - \beta^* - \delta\beta)}{(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2}$$

Αντί για την γνωστή Λορεντζιανή, κάνουμε fitting των αποτελεσμάτων κανονικοποιημένης ισχύος  $1-|R_0|^2$  με την παραπάνω συνάρτηση με άγνωστες παραμέτρους τα  $\beta^*$ ,  $\alpha$ ,  $\delta\beta$ . Για το fitting χρησιμοποιήσαμε τυχαίες αρχικές εκτιμήτριες των παραμέτρων, αλλά τα αποτελέσματα ήταν αρκετά ασταθή. Για αυτό το λόγο δοκιμάζουμε δεύτερο fitting θεωρώντας τα  $\alpha$  και  $\beta^*$  γνωστά και ίσα με αυτά που περιμένουμε θεωρητικά, δηλαδή  $\beta^*=9.44475631\mu\text{m}^{-1}$  και  $\alpha= 1.765167\text{E-}05 \mu\text{m}^{-1}$  με άγνωστο το  $\delta\beta$ . Προκύπτει  $\delta\beta=0.00002579 \mu\text{m}^{-1}$ .

Θα συγκρίνουμε στο επόμενο διάγραμμα το γράφημα της συνάρτησης που προκύπτει από το fitting με το  $\delta\beta$  που υπολογίσαμε, με το γράφημα  $1-|R_0|^2$ .

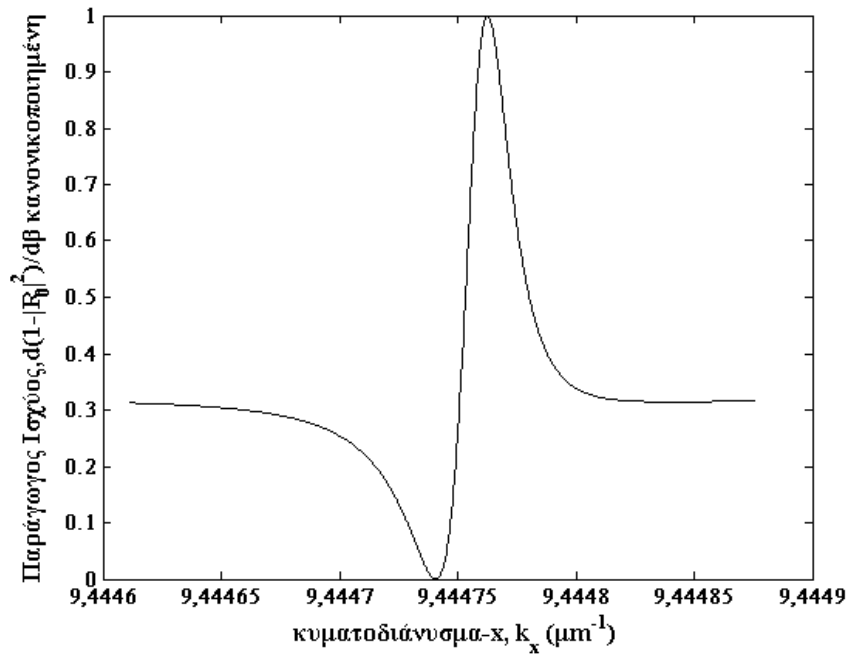


**Εικόνα 5.6.6:** Fitting ισχύος  $1-|R_0|^2$  ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x για  $d=0.8\mu\text{m}$

Τα δύο γραφήματα ταιριάζουν σχεδόν απόλυτα, οπότε το μοντέλο της συνάρτησης  $1 - |R_0|^2 \approx \frac{(\beta-\beta^*-\delta\beta)}{(\beta-\beta^*)^2+\alpha^2}$  είναι καλό για να περιγράψει την κανονικοποιημένη ισχύ  $1-|R_0|^2$ .

Επιπλέον οι τιμές  $\alpha$  και  $\beta^*$  είναι σίγουρα πολύ κοντά στις αναμενόμενες θεωρητικές και θα επιχειρήσουμε να τις υπολογίσουμε στο επόμενο βήμα χρησιμοποιώντας την παράγωγο.

Στην συνέχεια θα σχηματίσουμε αριθμητικά την παράγωγο του  $1-|R_0|^2$  ως προς  $\beta$  από τις τιμές που υπολογίσαμε με τη μέθοδο RCWA και αν ισχύει η θεωρία της απλής ρίζας περιμένουμε τώρα Λορεντζιανή με κορυφή περίπου στο  $\beta=9.44475631 \mu\text{m}^{-1}$ .



**Εικόνα 5.6.7:** Κανονικοποιημένη παράγωγος ισχύος ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x

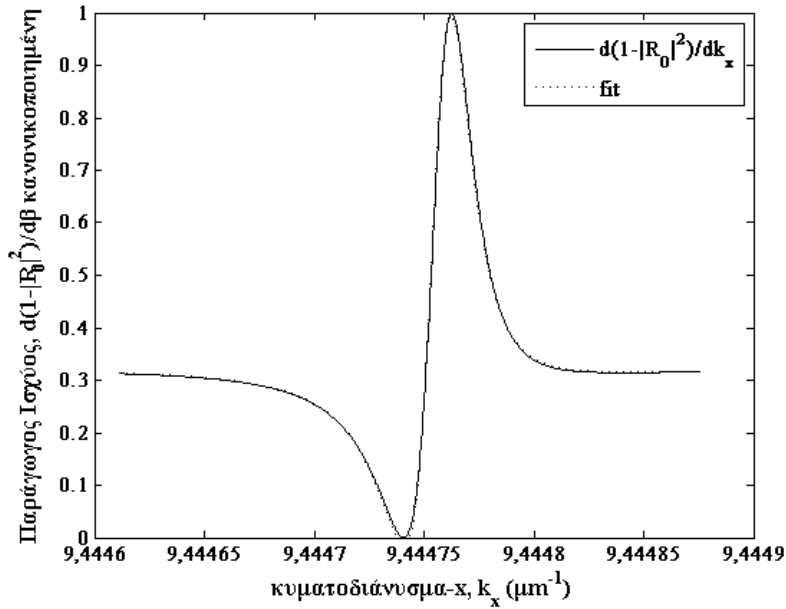
Η κορυφή είναι στο  $\beta=9.44476259 \mu\text{m}^{-1}$  όπως περιμένουμε ενώ το εύρος ημίσειος μεγίστου είναι λίγο μικρότερο από το θεωρητικό  $\alpha = 1.765167\text{E-}05 \mu\text{m}^{-1}$  όπως προβλέπεται.

Στη συνέχεια θα κάνουμε fitting με την παράγωγο από την σχέση

$$\frac{d}{d\beta} \{1 - |R_0|^2\} \approx \frac{1}{(\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2} - \frac{2(\beta - \beta^* - \delta\beta)(\beta - \beta^*)}{((\beta - \beta^*)^2 + \alpha^2)^2}$$

αρχικά με άγνωστη παράμετρο το  $\delta\beta$  και τα  $\alpha$  και  $\beta^*$  γνωστά και ίσα με αυτά που περιμένουμε θεωρητικά, δηλαδή  $\beta^*=9.44475631\mu\text{m}^{-1}$  και  $\alpha= 1.765167\text{E-}05 \mu\text{m}^{-1}$ . Το  $\delta\beta$  προκύπτει  $0.00002629 \mu\text{m}^{-1}$  οπότε επαληθεύεται και η προηγούμενη τιμή που είναι πολύ κοντά.

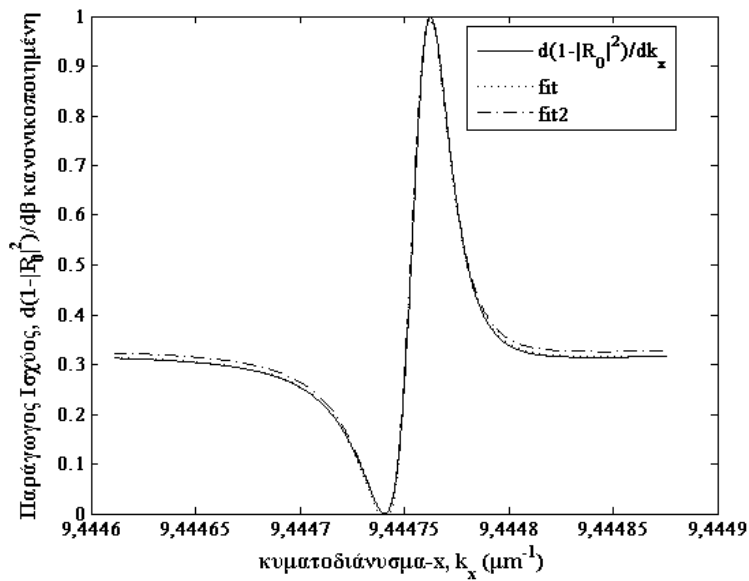
Ακολουθεί η σύγκριση με τα διαγράμματα που επιβεβαιώνει ότι το μοντέλο και για την παράγωγο είναι αρκετά ακριβές.



**Εικόνα 5.6.8:** Fitting παραγώγου ισχύος ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x  
Τέλος, κάνουμε ένα δεύτερο fitting με την ίδια συνάρτηση αλλά με άγνωστες  
παραμέτρους τα  $\alpha$ ,  $\beta^*$  και  $\delta\beta$ .

Τα αποτελέσματα είναι εξής:  $\beta^* = 9.44475628\mu\text{m}^{-1}$ ,  $\alpha = 1.779345\text{E-}05\mu\text{m}^{-1}$ ,  
 $\delta\beta = 0.0000262952\mu\text{m}^{-1}$ .

Στο παρακάτω διάγραμμα προσθέτουμε και το τελευταίο fitting.



**Εικόνα 5.6.9:** Fitting παραγώγου ισχύος ως προς το κυματοδιάνυσμα στον άξονα-x

Συνοπτικά τα αποτελέσματα αν κρατήσουμε την τιμή  $\delta\beta = 0.0000262952\mu\text{m}^{-1}$  είναι:

μέθοδος	$\beta$ ( $\mu\text{m}^{-1}$ )	$\alpha$ ( $\mu\text{m}^{-1}$ )	σφάλμα $\beta$ (%)	σφάλμα $\alpha$ (%)
Απλής ρίζας fit $1 -  R_0 ^2$	-	-	-	-
Απλής ρίζας fit $d\{1 -  R_0 ^2\}/d\beta$	9.44475628	1.77934E-05	3.18E-07	-0.803
Αρχική μέθοδος RMM	9.44474621	1.82414E-05	1.07E-04	-3.341
RCPM	9.44474338	1.49226E-05	1.37E-04	15.460
leaky-mode	9.44475631	1.76516E-05	-	-

Και πάλι, η μέθοδος απλής ρίζας έχει πλησιέστερα στα αναμενόμενα αποτελέσματα αν και οι διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων είναι απειροελάχιστες.

Συνοψίζοντας, το μοντέλο της απλής ρίζας φαίνεται πως ερμηνεύει καλά τα αποτελέσματα για την περίπτωση του δεύτερου ολογραφικού φράγματος σε TE και TM πόλωση που παρουσίασε προβλήματα με το προηγούμενο μοντέλο, καθώς ελαχιστοποιεί τα σφάλματα στις υπολογισθείσες τιμές. Ωστόσο, η εύρεση των τιμών των συντελεστών  $\alpha$ ,  $\beta$  (και  $\delta\beta$ ) είναι αρκετά δύσκολη και χρειάζεται καλή πρόβλεψη στις αρχικές τιμές οπουδήποτε γίνεται fitting. Ακόμη, χρειάζεται περαιτέρω μελέτη για το πώς επηρεάζει το μοντέλο η απόσταση  $d$  του βοηθητικού στρώματος καθώς και αν αυτό εφαρμόζεται σε διαφορετικές διατάξεις.



## Κεφάλαιο 6

### Συμπεράσματα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε και αναλύσαμε τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων που έγιναν σε προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB και FORTRAN. Τα αποτελέσματα αυτά θα συνοψίσουμε και στον επόμενο πίνακα.

Πίνακας 6.1

	rectangular		slanted		holographic 1		holographic 2	
Μέθοδος	$\beta(\mu\text{m}^{-1})$	$\alpha(\mu\text{m}^{-1})$	$\beta(\mu\text{m}^{-1})$	$\alpha(\mu\text{m}^{-1})$	$\beta(\mu\text{m}^{-1})$	$\alpha(\mu\text{m}^{-1})$	$\beta(\mu\text{m}^{-1})$	$\alpha(\mu\text{m}^{-1})$
<i>TE</i>								
RMM	9.93365	0.018867	9.23541	0.006308	9.33479	0.0029956	9.45805	0.0036472
RCPM	9.93233	0.018677	9.23490	0.006410	9.33483	0.0030158	9.45581	0.0015054
leaky-mode	9.93214	0.018714	9.23490	0.006418	9.33477	0.0030460	9.45573	0.0027609
<i>TM</i>								
RMM	9.71086	0.0075971	9.17361	0.0025916	9.326309	4.4439E-06	9.444746	1.8241E-05
RCPM	9.71099	0.0075182	9.17350	0.0025770	9.326303	4.4362E-06	9.444743	1.4923E-05
leaky-mode	9.71098	0.0075911	9.17351	0.0025857	9.326309	4.4358E-06	9.444756	1.7652E-05

Πίνακας 6.2

	holographic 2	
Μέθοδος	$\beta(\mu\text{m}^{-1})$	$\alpha(\mu\text{m}^{-1})$
RMM* απλής ρίζας	9.45560	0.0026882
RCPM	9.45581	0.0015054
leaky-mode	9.45573	0.0027609
RMM* απλής ρίζας	9.444756	1.7793E-05
RCPM	9.444743	1.4923E-05
leaky-mode	9.444756	1.7652E-05

Οι δύο νέες αριθμητικές μέθοδοι που παρουσιάσαμε στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση των κυματοδηγούμενων ρυθμών καθώς και των ρυθμών διαρροής σε πολυστρωματικούς οπτικούς κυματοδηγούς με περιοδικά περιθλαστικά φράγματα. Οι τιμές των συντελεστών διάδοσης  $\beta$  και σύζευξης  $\alpha$  που υπολογίσαμε με τις μεθόδους RMM (Reflectance Magnitude Method) και RCPM (Reflection Coefficient Phase Method) είναι πολύ κοντά στις δοσμένες τιμές από την επίλυση της υπερβατικής εξίσωσης της ανάλυσης διαρρέοντος ρυθμού (leaky-mode). Το πλεονέκτημα των μεθόδων αυτών είναι ότι υπολογίζουμε τους ρυθμούς χωρίς την επίλυση της υπερβατικής εξίσωσης που είναι αρκετά απαιτητική από την προγραμματιστική πλευρά. Ακόμη, υπάρχει δυνατότητα να υπολογίσουμε και ρυθμούς που βρίσκονται πολύ κοντά (και οι Λορεντζιανές επικαλύπτονται) αλλά και τον αριθμό των ρυθμών. Με τις τελευταίες δύο περιπτώσεις ωστόσο δεν ασχοληθήκαμε.

Για την μέθοδο RMM χρησιμοποιήσαμε σε κάθε διάταξη ένα βοηθητικό στρώμα υψηλού δείκτη διάθλασης. Αυτό διαταράσσει την όλη διάταξη και γι αυτό μελετήσαμε την απόκριση κάθε διάταξης καθώς αύξανε η απόσταση του βοηθητικού στρώματος. Η κυμάτωση που παρατηρήσαμε στους συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$  συναρτήσει της απόστασης αυτής ( $d$ ) οφείλεται, όπως εξηγήσαμε διεξοδικά, στην συμβολή των υπό μελέτη τάξεων  $TE_0$  και  $TM_0$  με άλλες περιθλαστικές τάξεις. Το φαινόμενο αυτό ήταν αρκετά ασθενές στο πρώτο ολογραφικό φράγμα περίθλασης (holographic grating 1). Στο δεύτερο ολογραφικό φράγμα (holographic grating 2) η μέθοδος RMM παρουσίασε προβλήματα και μη αναμενόμενη συμπεριφορά. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε ποικίλους λόγους αφού η πολυπλοκότητα του προβλήματος είναι μεγάλη. Μία πιθανή ερμηνεία δόθηκε στην παράγραφο 5.6 με το μοντέλο απλής ρίζας που τελικά δίνει αποτελέσματα πολύ πλησιέστερα στα αναμενόμενα. Με βάση το μοντέλο αυτό, ο συντελεστής ανάκλασης έχει κάποιο μηδενικό κοντά στον πόλο που αντιστοιχεί στον ρυθμό. Γι αυτό το γράφημα δεν είναι Λορεντζιανής κατανομής όπως περιμένουμε. Ο πίνακας 6.2 αποτελεί διόρθωση του πίνακα 6.1 για το κομμάτι του  $2^{ου}$  ολογραφικού φράγματος με βάση το μοντέλο απλής ρίζας.

Η μέθοδος RCPM έχει το πλεονέκτημα έναντι της RMM ότι δεν χρειάζεται βοηθητικό στρώμα και ως εκ τούτου δεν υφίσταται διαταραχή. Συνεπώς, είναι πολύ πιο σύντομη, εύχρηστη και ακριβής. Ακόμη, όπως αναλύσαμε στο κεφάλαιο 4, επηρεάζεται πιο δύσκολα από προβλήματα που ενδέχεται να προκύψουν ανάλογα με την πολυπλοκότητα της διάταξης. Όπως είναι φανερό από τον πίνακα 6.1, η μέθοδος υπολογίζει τους ρυθμούς πολύ κοντά στους αναμενόμενους από την επίλυση της υπερβατικής εξίσωσης ανάλυσης διαρρέοντος ρυθμού (leaky-mode). Στις περισσότερες περιπτώσεις μάλιστα οι τιμές είναι πιο κοντά από αυτές της μεθόδου RMM. Ιδιαίτερα στην περίπτωση 2<sup>ο</sup> ολογραφικού φράγματος, η RCPM δίνει καλύτερα αποτελέσματα από ότι η RMM στην αντίστοιχη περίπτωση. Χρησιμοποιώντας μόνο τη φάση του συντελεστή ανάκλασης, έχουμε λοιπόν περισσότερα πλεονεκτήματα.

Το ενδιαφέρον για τις οπτικές διατάξεις και συγκεκριμένα για τα περιοδικά περιθλαστικά φράγματα ολοένα και αυξάνεται αφού εφαρμογές τους επεκτείνονται σε όλα τα πεδία της οπτικής τεχνολογίας. Οι δύο μέθοδοι που παρουσιάσαμε για την εύρεση των ρυθμών στις περιοδικές οπτικές διατάξεις είναι λοιπόν πολύ σημαντικό εργαλείο για την μελέτη και την εξέλιξή τους.