



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Εξάλειψη των ταλαντώσεων που προκύπτουν κατά την
επίλυση της εξίσωσης Hallén με τον προσεγγιστικό πυρήνα
με τη Μέθοδο των Ροπών**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θεμιστοκλής Κ. Μαυρογορδάτος

Επιβλέπων : Γεώργιος Ι. Φικιώρης
Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Μάιος 2009



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Εξάλειψη των ταλαντώσεων που προκύπτουν κατά την
επίλυση της εξίσωσης Hallén με τον προσεγγιστικό πυρήνα
με τη Μέθοδο των Ροπών**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θεμιστοκλής Κ. Μαυρογορδάτος

Επιβλέπων : Γεώργιος Ι. Φικιώρης
Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την _____ Ιουνίου 2009.

.....
Κωνσταντίνα Σ. Νικήτα
Καθηγήτρια ΕΜΠ

.....
Ιωάννης Λ. Τσαλαμέγκας
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Γεώργιος Ι. Φικιώρης
Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Μάιος 2009

.....
Θεμιστοκλής Κ. Μαυρογορδάτος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Θεμιστοκλής Μαυρογορδάτος 2009

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η γραμμική κεραία που τροφοδοτείται στο κέντρο της είναι ο θεμελιώδης τύπος κεραίας εκπομπής. Πρόκειται για ένα ευθύ, αγωγίμο, λεπτό κυλινδρικό δίπολο με το σημείο τροφοδοσίας ακριβώς στο κέντρο του. Αυτός ο τύπος κεραίας έχει μελετηθεί ευρύτατα τον τελευταίο αιώνα με βασική άγνωστη ποσότητα το ρεύμα (και κατ' επέκταση την αγωγιμότητα εισόδου) κατά μήκος της κεραίας, που ικανοποιεί μια μονοδιάστατη ολοκληρωτική εξίσωση. Η μελέτη γίνεται συχνά με αριθμητικές μεθόδους και ιδίως με μεθόδους ροπών (Moment Methods), εφαρμοσμένες σε ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Hallén και Pocklington. Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να λάβουν δύο μορφές ανάλογα με τον πυρήνα που επιλέγεται. Οι δύο πυρήνες αναφέρονται συνήθως ως ο ακριβής και ο προσεγγιστικός πυρήνας. Η πιο διαδεδομένη μοντελοποίηση για την τροφοδοσία της κεραίας, είναι το delta function generator (DFG), δηλαδή μια γεννήτρια δέλτα συνάρτησης.

Αν υποθέσουμε ότι χρησιμοποιείται ο λεγόμενος προσεγγιστικός πυρήνας, πράγμα που είναι συνηθέστατο στην πράξη, οι προαναφερθείσες ολοκληρωτικές εξισώσεις δεν έχουν λύση. Απόρροια της μη επιλυσιμότητας είναι οι έντονες ταλαντώσεις που εμφανίζει η λύση (που δίνει τη ρευματική κατανομή) στο κέντρο και στα άκρα του διπόλου. Το παραπάνω καταδείχθηκε χρησιμοποιώντας μια κατηγορία της μεθόδου των ροπών, τη μέθοδο point-matching.

Στη συνέχεια, εκμεταλλευόμενοι την ισοδυναμία της παραπάνω μεθόδου με τη μέθοδο Galerkin (επίσης μια κατηγορία της μεθόδου των ροπών) για την εύρεση των ρευματικών συντελεστών, προβήκαμε σε εξομάλυνση των ταλαντώσεων στην πεπερασμένη κεραία με βάση μια μέθοδο που είχε προταθεί σε προκαταρκτική μορφή από τους Κο Φικιωρη και Κο Παπακανέλλο. Τα αποτελέσματα της εξομάλυνσης για την πεπερασμένη κεραία φαίνονται στα αντίστοιχα γραφήματα και συγκρίνονται με τη λύση (κατανομή του ρεύματος) της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τον ακριβή πυρήνα. Επίσης οδηγηθήκαμε σε αναλυτικά αποτελέσματα για την άπειρη κεραία καταδεικνύοντας τη σύγκλιση της μεθόδου.

Τέλος, ορμώμενοι από τη διαδικασία της εξομάλυνσης εξαγάγαμε δύο ασυμπτωτικές εκφράσεις για το ρεύμα του διπόλου απείρου μήκους στο κέντρο του διατυπώνοντας συνθήκες για την περιοχή στην οποία ισχύει η καθεμία. Ακολούθησαν συγκρίσεις του ασυμπτωτικού ρεύματος με το προτεινόμενο ρεύμα για δίπολο πεπερασμένου μήκους που κατέδειξαν μια καλή ακρίβεια.

Ως προέκταση της παρούσας εργασίας προτείνουμε τη μελέτη της ρευματικής κατανομής στην περίπτωση μοντελοποίησης τροφοδοσίας με frill generator όπου και πάλι εμφανίζονται ταλαντώσεις και εφαρμόζεται η μέθοδος της εξομάλυνσης.

Λέξεις-κλειδιά: εξίσωση Hallén, προσεγγιστικός πυρήνας, εξομάλυνση, ασυμπτωτική προσέγγιση ρεύματος.

ABSTRACT

The center-driven linear dipole is the most fundamental type of the transmission antenna. Antennas of this type have been at the center of interest of many researchers and scientists of the 20th century, who aimed to determine the current and therefore input impedance. Many numerical methods have been applied to Hallén and Pocklington's equations for the cylindrical dipole, with the method of moments being the most common. The simplest feed is the Delta Function Generator (DFG). The main problem that arises when moment methods are applied is that the current distribution oscillated rapidly at the center and the ends of the antenna when the approximate kernel is used; this is a result of nonsolvability of the integral equation.

In this thesis we propose a remedy for these oscillations based on a method that Dr Papakanellos and Dr Fikioris introduced some years ago in preliminary form. Thus, we propose smoothed current distributions for the finite antenna which we compare with the solution obtained with the use of the exact kernel. We check our method by applying it to the infinite antenna and studying the formulas by analytical and asymptotic methods. We explain the relevance of our asymptotic formulas to the finite antenna in detail, and make careful numerical comparisons.

We propose an extension of the smoothing process in dipoles with other kinds of feed (such as the frill generator), in which oscillations also occur.

Key words: Hallén's equation, approximate kernel, smoothed current, asymptotic formula

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω πάνω από όλους τον καθηγητή μου Κ^ο Γεώργιο Φικιώρη για την πολύτιμη καθοδήγησή του σε όλα τα στάδια εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Ό,τι πρωτότυπο αναφέρεται σε αυτήν ερείδεται στη δική του ακατάπαυστη ερευνητική δραστηριότητα και στη διαρκή του παρουσία κάθε εβδομάδα της περιόδου που με επέβλεπε.

Ένα ευχαριστώ επίσης οφείλω στους συναδέλφους και φίλους μου Δημήτρη Τσαμήτρο για τη βοήθεια του στο προγραμματιστικό μέρος της και Αντώνη Μιχαλολιάκο για τη μορφοποίηση του παρόντος.

Τελος, πολύ χρήσιμες ήταν οι συγκρίσεις των αποτελεσμάτων με αντίστοιχα αποτελέσματα του Δρα. Παπακανελλου, του οποίου καρποί της ερευνητικής εργασίας βρίσκονται και εδώ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ HALLÉN	15
1.1.ΤΟ ΣΩΛΗΝΟΕΙΔΕΣ ΔΙΠΟΛΟ	15
1.2 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΕΙΣΩΣΕΩΝ MAXWELL-ΚΥΜΑΤΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ	17
1.3 ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΕΙΣΩΣΗΣ ROCKLINGTON	20
1.4 ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΕΙΣΩΣΗΣ ROCKLINGTON ΓΙΑ ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΔΕΛΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (DELTA FUNCTION GENERATOR)	24
1.5 Η ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΕΙΣΩΣΗ ΤΟΥ HALLÉN ΓΙΑ ΤΗ ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ DELTA-GAP	26
1.6 Ο ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΠΥΡΗΝΑΣ	29
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ	32
2.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ	32
2.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΝ ΕΙΣΩΣΗ HALLÉN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ	37
2.3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΝ ΕΙΣΩΣΗ HALLÉN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΗ ΠΥΡΗΝΑ	47
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗ ΡΕΥΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ.....	52
3.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ	52
3.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ	53
3.3 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ:.....	57
3.3 ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΕΙΡΗ ΚΕΡΑΙΑ	65
3.3.1 ΤΑ ΟΡΙΑ ΓΙΑ $\rho \rightarrow 0$	70
3.3.2 ΣΥΝΟΨΗ ΤΩΝ ΑΚΡΙΒΩΝ ΕΚΦΡΑΣΕΩΝ	71
3.3.3 ΚΥΡΙΑΡΧΟΥΣΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΓΙΑ $z_o \rightarrow 0$	72
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΟΙ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΕΙΡΗ ΚΕΡΑΙΑ	77
4.1 Η ΠΡΩΤΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ	77
4.1.1 ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΕΚΦΡΑΣΗΣ	77
4.1.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΡΩΤΟ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟ ΤΥΠΟ ΣΤΗΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΚΕΡΑΙΑ.....	80
4.2 Η ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ	84
4.2.1 ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΕΚΦΡΑΣΗΣ:	84
4.2.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟ ΤΥΠΟ ΣΤΗΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΚΕΡΑΙΑ	87
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ MATLAB	94
5.1 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ	94
5.2 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΠΥΡΗΝΑ	98
5.3 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΕΞΟΜΑΛΥΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ.....	104
5.4 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΤΥΠΟΥ.....	106
5.5 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΤΥΠΟΥ.....	108

ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΙΚΟΝΩΝ-ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΕΙΚΟΝΑ 1.1:ΈΝΑΣ ΑΠΛΟΣ ΤΥΠΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΚΕΡΑΙΑΣ	15
ΕΙΚΟΝΑ 1.2: ΔΥΟ ΑΚΟΜΑ «ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ» ΚΕΡΑΙΕΣ, (Α) Η ΔΙΠΟΛΙΚΗ ΚΕΡΑΙΑ ΤΡΟΦΟΔΟΤΟΥΜΕΝΗ ΑΠΟ ΔΙΣΥΡΜΑΤΗ ΓΡΑΜΜΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ (Β) Η ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΑΓΩΓΙΜΟ ΕΠΙΠΕΔΟ.	16
ΕΙΚΟΝΑ 1.3: ΈΝΑ ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΥΜΑ ΠΡΟΣΠΙΠΤΕΙ ΠΑΝΩ ΣΕ ΑΓΩΓΙΜΟ ΣΩΛΗΝΑ	20
ΕΙΚΟΝΑ 1.4: ΣΗΜΕΙΟ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ (ρ, ϕ, z) , ΣΗΜΕΙΟ ΠΗΓΗΣ (a, ϕ', z') , ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΗ R ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ.	23
ΕΙΚΟΝΑ 1.5: ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΔΙΠΟΛΟ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ DELTA GAP	24

ΕΙΚΟΝΑ 1.6: ΓΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΗΣ ΚΕΡΑΙΑΣ, Η ΑΠΟΣΤΑΣΗ R ΔΙΝΕΤΑΙ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ. ΕΔΩ ΔΕΙΧΝΟΥΜΕ ΠΡΟΒΟΛΗ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ $z=0$. Η ΠΡΟΒΟΛΗ ΤΟΥ R ΕΙΝΑΙ $2a \left \sin \left(\frac{\phi'}{2} \right) \right $, ΜΕ ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ $2a$ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ 0 .	29
ΕΙΚΟΝΑ 1.7: ΤΟ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΡΕΥΜΑ ΤΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ	30
ΕΙΚΟΝΑ 2.1: ΤΡΙΓΩΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΒΑΣΗΣ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΑΥΤΩΝ (ΕΔΩ $N=5$ ΚΑΙ $M=11$)	33
ΕΙΚΟΝΑ 2.2: ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΒΑΣΗΣ ($N=5$) ΜΕ ΤΗΝ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΣΑ ΡΕΥΜΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ.	35
ΣΧΗΜΑ 2.1: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 150$	38
ΣΧΗΜΑ 2.2: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 150$	39
ΣΧΗΜΑ 2.3: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100$	40
ΣΧΗΜΑ 2.4: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100$	41
ΣΧΗΜΑ 2.5: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$	41
ΣΧΗΜΑ 2.6: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$	42
ΣΧΗΜΑ 2.7: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 250$	43
ΣΧΗΜΑ 2.8: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 150$	43
ΣΧΗΜΑ 2.9: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 20$	44
ΣΧΗΜΑ 2.10: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 20$	45
ΣΧΗΜΑ 2.11: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100$	45
ΣΧΗΜΑ 2.12: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100$	46
ΣΧΗΜΑ 2.13: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$	47
ΣΧΗΜΑ 2.14: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$	47
ΣΧΗΜΑ 2.15: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 150$	49
ΣΧΗΜΑ 2.16: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 150$	49

ΣΧΗΜΑ 4.2: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΤΟΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$ ΓΙΑ

$$\rho = 2 \cdot z_o = 2 \cdot \frac{h}{N} \dots\dots\dots 81$$

ΣΧΗΜΑ 4.3: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ % ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΟΥ (ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ) ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ ΓΙΑ $\rho = z_o = \frac{h}{N}$ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ ($z=0$). $\dots\dots\dots 82$

ΣΧΗΜΑ 4.4: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ % ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΟΥ (ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ) ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ ΓΙΑ $\rho = 1.5 \cdot z_o = 1.5 \cdot \frac{h}{N}$ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ ($z=0$). $\dots\dots\dots 83$

ΣΧΗΜΑ 4.5: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ % ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΟΥ (ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ) ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ ΓΙΑ $\rho = 2 \cdot z_o = 2 \cdot \frac{h}{N}$ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ ($z=0$). $\dots\dots\dots 83$

ΣΧΗΜΑ 4.6: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ (ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ) ΤΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΤΟΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$ ΓΙΑ

$$\rho = 0.5 \cdot z_o = 0.5 \cdot \frac{h}{N} \dots\dots\dots 87$$

ΣΧΗΜΑ 4.7: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ (ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ) ΤΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$,

$$h/\lambda = 0.25, N = 200 \text{ ΓΙΑ } \rho = 0.5 \cdot z_o = 0.5 \cdot \frac{h}{N} \dots\dots\dots 88$$

ΣΧΗΜΑ 4.8: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ % ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΟΥ (ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ) ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ ΓΙΑ $\rho = 0.125 \cdot z_o = 0.125 \cdot \frac{h}{N}$ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ ($z=0$). $\dots\dots\dots 89$

ΣΧΗΜΑ 4.9: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ % ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΟΥ (ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ) ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ ΓΙΑ $\rho = 0.25 \cdot z_o = 0.25 \cdot \frac{h}{N}$ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ ($z=0$). $\dots\dots\dots 89$

ΣΧΗΜΑ 4.10: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ % ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΟΥ (ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ) ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ ΓΙΑ $\rho = 0.5 \cdot z_o = 0.5 \cdot \frac{h}{N}$ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ ($z=0$). $\dots\dots\dots 90$

ΣΧΗΜΑ 4.11: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ % ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΟΥ (ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ) ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ ΓΙΑ

$$\rho = 0.75 \cdot z_o = 0.75 \cdot \frac{h}{N} \text{ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ (z=0)} \dots\dots\dots 90$$

ΣΧΗΜΑ 4.12: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ % ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΟΥ (ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ) ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ ΓΙΑ $\rho = z_o = \frac{h}{N}$ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ (z=0). 91

ΣΧΗΜΑ 4.13: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ % ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΟΥ (ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ) ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ ΓΙΑ

$$\rho = 1.25 \cdot z_o = 1.25 \cdot \frac{h}{N} \text{ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ (z=0)} \dots\dots\dots 91$$

ΣΧΗΜΑ 4.14: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ % ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΟΥ (ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ) ΜΕΡΟΥΣ ΤΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ ΓΙΑ

$$\rho = 1.5 \cdot z_o = 1.5 \cdot \frac{h}{N} \text{ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ (z=0)} \dots\dots\dots 92$$

ΣΧΗΜΑ 5.1: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ (ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ) ΤΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$,

$$h/\lambda = 0.25, N = 200 \text{ ΓΙΑ } \rho = 2 \cdot z_o = 2 \cdot \frac{h}{N} \dots\dots\dots 107$$

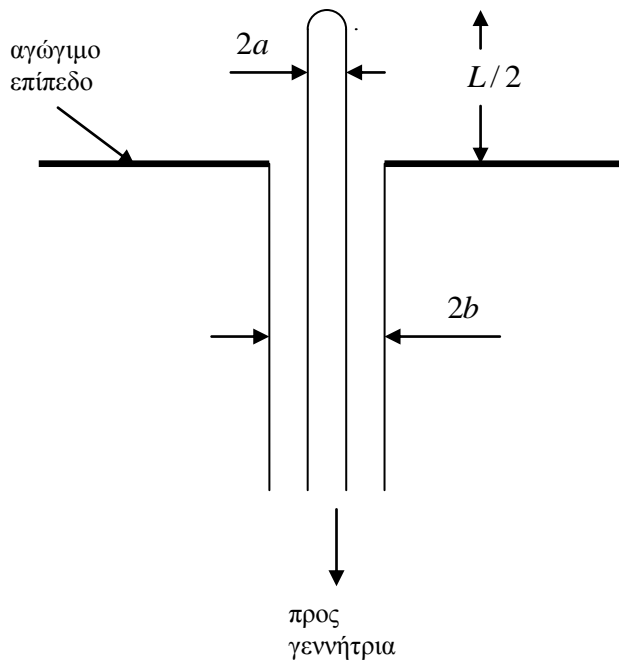
ΣΧΗΜΑ 5.2: ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ (ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΡΟΥΣ) ΤΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΓΙΑ $a/\lambda = 0.007022$,

$$h/\lambda = 0.25, N = 200 \text{ ΓΙΑ } \rho = 0.125 \cdot z_o = 0.125 \cdot \frac{h}{N} \dots\dots\dots 109$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εξαγωγή της εξίσωσης Hallén

1.1. Το σωληνοειδές δίπολο

Το μοντέλο της κεραίας που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το παρακάτω:



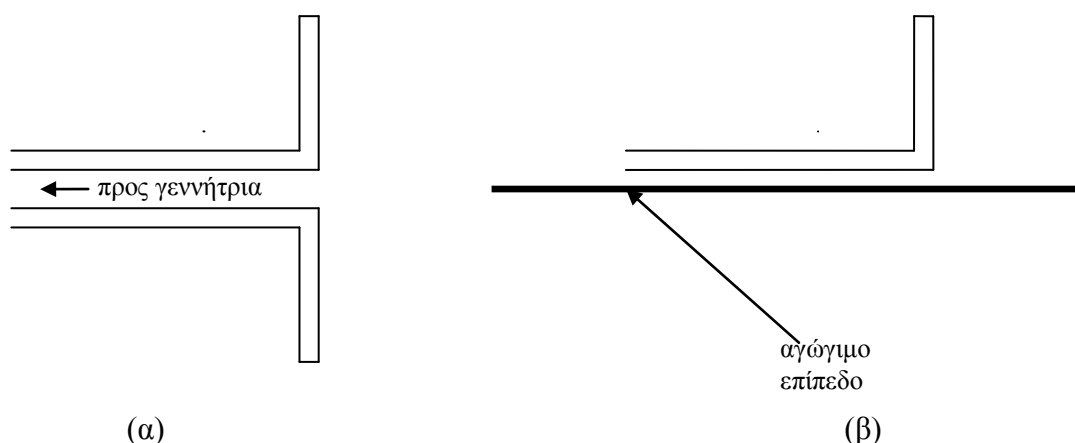
Εικόνα 1.1: Ένας απλός τύπος πραγματικής κεραίας

Ο εξωτερικός αγωγός, που έχει διάμετρο $2b$ καταλήγει σε ένα αγωγίμο επίπεδο (ground plane). Ο εσωτερικός αγωγός έχει διάμετρο $2a$ και εξέχοντας σχηματίζει μια μονοπολική κεραία μήκους h . Ο εξωτερικός αγωγός διαμέτρου $2b$, ομοαξονικής γραμμής μεταφοράς καταλήγει σε αγωγίμο επίπεδο ενώ ο εσωτερικός αγωγός διαμέτρου $2a$, εξέχει και σχηματίζει μια μονοπολική κεραία. Η εν λόγω κεραία είναι λεπτή με την έννοια ότι $a \ll h$ και $ka \ll 1$, όπου $k = 2\pi/\lambda$ ο κυματαριθμός του ελεύθερου χώρου. Με εφαρμογή της θεωρίας ειδώλων (για μικρά b και a), η διάταξη είναι ισοδύναμη με μια διπολική, κεντρικά τροφοδοτούμενη γραμμική κεραία μήκους $2h$ και διαμέτρου $2a$. Η κεραία της παραπάνω εικόνας έχει σφαιρικό καπάκι, αλλά συναντώνται και κεραίες με επίπεδο καπάκι ή και χωρίς καπάκι.

Στη διάταξη αυτή, μολονότι είναι μια από τις απλούστερες που χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές, η κατάστρωση και επίλυση των εξισώσεων

Maxwell παρουσιάζει εγγενείς δυσκολίες. Επιπλέον, η κεραία και η τροφοδοτούσα γραμμή μεταφοράς αποτελούν ένα σύνθετο σύστημα ενώ συνήθως στην ανάλυση μας αναγόμεστε σε δύο ανεξάρτητα συστήματα. Έτσι, συνήθως αγνοούμε την αλληλεπίδραση της κεραίας με την τροφοδοτούσα γραμμή μεταφοράς, απλοποίηση που καθίσταται απαραίτητη στην περίπτωση στοιχειοκεραιών πολλών στοιχείων όπου είναι πρακτικά αδύνατον να ληφθούν υπόψιν όλες οι αλληλεπιδράσεις.

Για τους παραπάνω λόγους, θα εισαγάγουμε και θα μελετήσουμε ένα απλούστερο θεωρητικό μοντέλο, το επονομαζόμενο «σωληνοειδές δίπολο». Το σωληνοειδές δίπολο χρησιμεύει για την μοντελοποίηση όχι μόνο της κεραίας της εικόνας 1.1 αλλά και άλλων πραγματικών κεραιών, όπως της διπολικής κεραίας της εικόνας 1.2 που τροφοδοτείται από δισύρματη γραμμή μεταφοράς, καθώς και της ισοδύναμης διάταξης της κεραίας της εικόνας 1.3 πάνω από αγωγίμο επίπεδο.



Εικόνα 1.2: Δύο ακόμα «πραγματικές» κεραίες, (α) η διπολική κεραία τροφοδοτούμενη από δισύρματη γραμμή μεταφοράς και (β) η ισοδύναμη διάταξη πάνω από αγωγίμο επίπεδο.

Το σωληνοειδές δίπολο είναι ένας τέλει αγωγίμος μεταλλικός σωλήνας με απείρως λεπτά τοιχώματα. Στο κέντρο $z = 0$ υπάρχει ένα απειροστά μικρό δάκενο (infinitesimal gap). Η επιτυχία της μοντελοποίησης αυτής έγκειται στο γεγονός ότι οι ολοκληρωτικές εξισώσεις που διατυπώνονται είναι ακριβείς και η λύση δεν επηρεάζεται από τη φύση της τροφοδοσίας ή την ύπαρξη καπακιού.

1.2 Διατύπωση εξισώσεων Maxwell-Κυματικές Εξισώσεις

Αρχόμενοι από τις εξισώσεις Maxwell θα αποδείξουμε την εξίσωση του Rocklington, η οποία θα δείξουμε ότι ισοδυναμεί με την εξίσωση του Hallén. Για ευκολία, θεωρούμε ότι η κεραία βρίσκεται στο κενό οπότε θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\vec{B} = \mu_o \cdot \vec{H} \quad \text{και} \quad \vec{D} = \epsilon_o \cdot \vec{E},$$

όπου B η μαγνητική επαγωγή, H η ένταση του μαγνητικού πεδίου, D η διηλεκτρική μετατόπιση και E η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Η μαγνητική διαπερατότητα μ_o και η διηλεκτρική σταθερά του κενού ϵ_o συνδέονται με την ταχύτητα του φωτός

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o \cdot \mu_o}} \quad \text{και με την αντίσταση του κενού χώρου} \quad \zeta_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}}. \quad \text{Η πρώτη, από τούδε}$$

και στο εξής θα λαμβάνεται ίση με $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ και η δεύτερη με $376,23 \Omega$. Αν αναφερθούμε σε ισότροπο ομογενή χώρο με μ και ϵ εν γένει, τα παραπάνω μεγέθη τροποποιούνται αναλόγως.

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, στην περίπτωση ημιτονοειδούς χρονικής μεταβολής πηγών και πεδίων (μορφή $e^{i\omega t}$) διέπεται από τις εξισώσεις του Maxwell η οποίες έπειτα από μετασχηματισμό Fourier, λαμβάνουν τη (σημειακή) μορφή:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i \cdot \omega \cdot \vec{B} \quad (\text{Νόμος Faraday-Maxwell})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + i \cdot \omega \cdot \vec{D} \quad (\text{Νόμος Ampere-Maxwell})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{Νόμος του Gauss στον Ηλεκτρισμό})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Νόμος του Gauss στον Μαγνητισμό})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -i \cdot \omega \cdot \rho \quad (\text{Εξίσωση Συνέχειας}).$$

Όπως είναι φανερό, οι πηγές των πεδίων είναι η χωρική πυκνότητα φορτίου ρ και η χωρική πυκνότητα ρεύματος \vec{J} με χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{i\omega t}$.

Στο σημείο αυτό εισάγουμε το μέγεθος του διανυσματικού δυναμικού \vec{A} , από τη σχέση ορισμού του οποίου δίνεται η μαγνητική επαγωγή $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ (1.1). Από το Νόμο Faraday-Maxwell, έχουμε:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -i \cdot \omega \cdot \vec{B} = -i \cdot \omega \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{E} + i \cdot \omega \cdot \vec{A}) &= \vec{0}\end{aligned}$$

Όμοια με το διανυσματικό δυναμικό \vec{A} , εισάγουμε το βαθμωτό δυναμικό Φ , τέτοιο ώστε $\vec{\nabla} \times (\nabla \Phi) = \vec{0}$ (που ισχύει πάντα) και κατ'επέκταση:

$$\vec{E} + i \cdot \omega \cdot \vec{A} = -\nabla \Phi \Rightarrow \vec{E} = -i \cdot \omega \cdot \vec{A} - \nabla \Phi. \quad (1.2)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση για την πεδιακή ένταση \vec{E} στο νόμο Ampere-Maxwell και κάνοντας χρήση της διανυσματικής ταυτότητας

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}, \text{ λαμβανουμε:}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} &= i \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \vec{E} + \vec{J} \Rightarrow \frac{1}{\mu} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = i \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot (-i \cdot \omega \cdot \vec{A} - \nabla \Phi) + \vec{J} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \right) &= -i \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \nabla \Phi + \omega^2 \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \vec{A} + \mu \cdot \vec{J} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{A} + k^2 \cdot \vec{A} &= -\mu \cdot \vec{J} + \nabla (\nabla \cdot \vec{A} + i \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \nabla \Phi)\end{aligned} \quad (1.3)$$

Όμοια, αν αντικαταστήσουμε τη σχέση ορισμού του διανυσματικού δυναμικού (1.1) στο Νόμο του Gauss για τον Ηλεκτρισμό, λαμβάνουμε τη σχέση:

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \cdot \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} - i \cdot \omega \cdot (\nabla \cdot \vec{A} + i \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \nabla \Phi) \quad (1.4)$$

Παρατηρώντας τα μέλη των εξισώσεων (1.3) και (1.4) είναι πρόσφορο για έναν μεγάλο αριθμό περιπτώσεων να επιλέξουμε:

$\nabla \cdot \vec{A} + i \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \nabla \Phi = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{A} = -i \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \nabla \Phi$ (1.5), που είναι η συνθήκη του Lorentz. Με τη βοήθεια της παραπάνω παραδοχής, οι σχέσεις (1.3) και (1.4) παίρνουν τη μορφή:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} + k^2 \cdot \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J} \quad (1.6) \quad \text{και} \quad \nabla^2 \Phi + k^2 \cdot \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1.7).$$

Από το θεώρημα του Helmholtz στη διανυσματική ανάλυση, γνωρίζουμε ότι ένα διάνυσμα \vec{A} είναι μοναδικά καθορισμένο, αν γνωρίζουμε την περιστροφή $(\vec{\nabla} \times \vec{A})$ και την απόκλιση $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ του. Το πρώτο εξασφαλίζεται με τη συνθήκη ορισμού και το δεύτερο με τη συνθήκη Lorentz. Με την παραπάνω επιλογή των συναρτήσεων δυναμικού, κάθε μία από τις συναρτήσεις-λύσεις ικανοποιεί την αντίστοιχη κυματική εξίσωση. Από αυτές, έπεται ότι το διανυσματικό δυναμικό εξαρτάται από την κατανομή των πηγών ρεύματος ενώ το βαθμωτό δυναμικό εξαρτάται από την κατανομή των πηγών φορτίου. Οι δύο αυτές κατανομές συνδέονται μέσω της εξίσωσης της συνέχειας, γεγονός που επιβεβαιώνει την αλληλεξάρτηση των \vec{A} και Φ μέσω της συνθήκης Lorentz. Με χρήση της ανωτέρω συνθήκης και της (1.2) μπορεί να βρεθεί να βρεθεί μια έκφραση για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μόνο συναρτήσει του διανυσματικού δυναμικού \vec{A} , η οποία θα μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη συνέχεια:

$$\vec{E} = -i \cdot \omega \cdot \vec{A} - i \cdot \frac{\omega}{k^2} \cdot \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) \quad (1.8)$$

Οι γενικές λύσεις των κυματικών εξισώσεων (1.6) και (1.7) για το βαθμωτό και το διανυσματικό δυναμικό, στην περίπτωση ημιτονοειδούς χρονικής μεταβολής, είναι αντίστοιχα:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \int_V \rho(x', y', z') \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} dV' \quad (1.9) \text{ και}$$

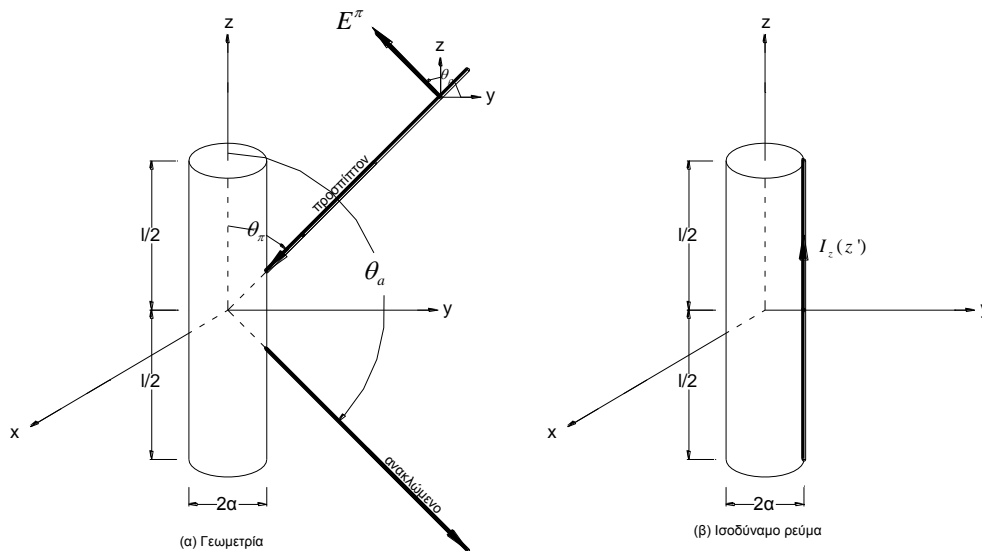
$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \vec{J}(x', y', z') \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} dV' \quad (1.10),$$

όπου $\vec{r} = (x, y, z)$ είναι το διάνυσμα παρατήρησης και $\vec{r}' = (x', y', z')$ είναι το διάνυσμα θέσης της πηγής και R είναι η απόσταση της θέσης της πηγής από την παρατήρηση, δηλαδή:

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} .$$

1.3 Εξαγωγή της ακριβούς εξίσωσης Pocklington

Για την εξαγωγή της εξίσωσης Pocklington, θα έχουμε ως οδηγό μας το σχήμα της εικόνας 1.3.



Εικόνα 1.3: Ένα επίπεδο κύμα προσπίπτει πάνω σε αγώγιμο σωλήνα

Η εξίσωση αυτή, ισχύει όταν η λεπτή αγώγιμη κεραία χρησιμοποιείται είτε ως δέκτης είτε ως εκπομπός. Ας υποθέσουμε ότι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα προσπίπτει πάνω στην επιφάνεια της αγώγιμης ευθύγραμμης κεραίας, όπως φαίνεται στο σχήμα της εικόνας 1.3. Έχουμε έτσι ένα προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}^{incident}(r) = \vec{E}^i(r)$. Τμήμα του προσπίπτοντος κύματος πέφτει στην κεραία και επάγει μια πυκνότητα ρεύματος \vec{J}_s , η οποία είναι πηγή ενός δευτερογενούς πεδίου, του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}^{scattered}(r) = \vec{E}^s(r)$. Έτσι, σε κάθε σημείο του χώρου, το ολικό πεδίο $\vec{E}^{total}(r) = \vec{E}^t(r)$, είναι το διανυσματικό άθροισμα του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου, δηλαδή:

$$\vec{E}^t(r) = \vec{E}^i(r) + \vec{E}^s(r). \quad (1.11)$$

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, το ηλεκτρικό μακρινό πεδίο που ακτινοβολείται από ένα δίπολο αυθαιρέτου μήκους, έχει ακτινική συνιστώσα E_ρ και εφαπτομενική συνιστώσα E_z . Η τελευταία, δίνεται από τη σχέση:

$$E_z(\rho, z) = -\frac{i \cdot I(0) \cdot \zeta_o}{4 \cdot \pi \cdot \sin(kh) \cdot \rho} \cdot \left(e^{ikR_1} + e^{ikR_2} - 2 \cdot \cos(kh) \cdot e^{ikR_o} \right), \quad (1.12)$$

όπου $R_1 = \sqrt{(h-z)^2 + \rho^2}$, $R_2 = \sqrt{(h+z)^2 + \rho^2}$ και $R_o = \sqrt{z^2 + \rho^2}$.

Για την εξαγωγή του παραπάνω πεδίου έχει υποτεθεί η ρευματική κατανομή

$$I(z) = I(0) \cdot \frac{\sin(k(h-|z|))}{\sin(kh)} \quad (1.13), \text{ η οποία είναι προσεγγιστική. Για το λόγο αυτό,}$$

εγκαταλείπουμε προς το παρον τις μορφές (1.12) και (1.13), οι οποίες όμως θα μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη διαδικασία της εξομάλυνσης.

Στην επιφάνεια της λεπτής και τέλεια αγωγίμης κεραίας το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό. Επίσης, η εφαπτομενική στην επιφάνεια $\rho = a$ συνιστώσα E_z του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι συνεχής, οπότε λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} E_z^i(\rho = a) &= E_z^i(\rho = a) + E_z^s(\rho = a) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow E_z^i(\rho = a) &= -E_z^s(\rho = a) \end{aligned}$$

Όπως δείξαμε παραπάνω, το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από την επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος J_s , δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{E}^s(r) = -i \cdot \omega \cdot \vec{A} - i \cdot \frac{\omega}{k^2} \cdot \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) = -i \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \mu \cdot \omega} \cdot \left(k^2 \cdot \vec{A} + \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) \right).$$

Για παρατηρήσεις που γίνονται πάνω στην αγωγή επιφάνεια, απαιτείται μόνο η z συνιστώσα του σκεδαζόμενου πεδίου, η οποία γράφεται:

$$E_z^s(r) = -i \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \mu \cdot \omega} \cdot \left(k^2 \cdot A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \quad (1.14). \text{ Σύμφωνα με την εξίσωση (1.10), η z-}$$

συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού, γράφεται:

$$A_z(x, y, z) = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V J_z(x', y', z') \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} dV', \text{ και } dS' = a \cdot d\phi' \cdot dz' \text{ είναι το στοιχειώδες}$$

εμβαδόν στην παράπλευρη επιφάνεια του σωληνοειδούς διπόλου (όπου a η ακτίνα της κυλινδρικής κεραίας). Έτσι λοιπόν, λαμβάνουμε:

$$A_z(\rho, \phi, z) = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{z'=-h}^h \int_{\phi'=0}^{2\pi} J_z(a, \phi', z') \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} \cdot a \cdot d\phi' \cdot dz'. \quad (1.15)$$

Αν τώρα ο αγωγός θεωρηθεί πολύ λεπτός, η χωρική πυκνότητα ρεύματος J_z αποκτά την έννοια της επιφανειακής (πυκνότητας ρεύματος) και δεν είναι πλέον συνάρτηση της αζιμουθιακής γωνίας ϕ , οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε:

$$2 \cdot \pi \cdot a \cdot J_z(a \rightarrow 0, \phi', z') = I_z(z') \Rightarrow J_z(a \rightarrow 0, \phi', z') = \frac{I_z(z')}{2 \cdot \pi \cdot a}$$

Στη θεώρηση αυτή, $I_z(z')$ είναι το ισοδύναμο γραμμικό ρεύμα που βρίσκεται σε ακτινική απόσταση ($\rho = a$) από τον άξονα z , όπως φαίνεται στο σχήμα της εικόνας 1.7. Έτσι, η σχέση (1.15) τροποποιείται ως κάτωθι:

$$A_z(\rho, \phi, z) = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{z'=-h}^h \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a} \int_{\phi'=0}^{2\pi} I_z(z') \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} \cdot a \cdot d\phi' \right) dz' \quad (1.16) \text{ όπου}$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \\ &= \sqrt{(\rho \cdot \cos \phi - a \cdot \cos \phi')^2 + (\rho \cdot \sin \phi - a \sin \phi')^2 + (z-z')^2} = \\ &= \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2 \cdot \rho \cdot a \cdot \cos(\phi - \phi') + (z-z')^2} \end{aligned}$$

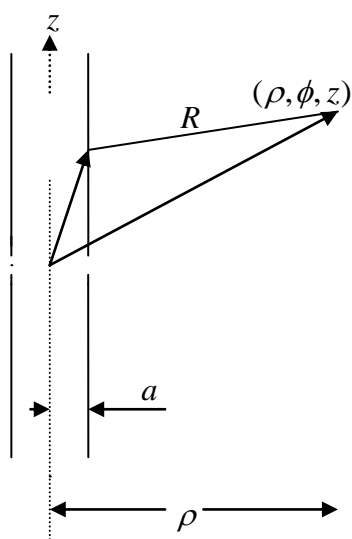
όπου χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις μετασχηματισμού $x = \rho \cdot \cos \phi$, $y = \rho \cdot \sin \phi$, $z = z$ από τις κυλινδρικές στις καρτεσιανές συντεταγμένες. Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας του διπόλου ισχύει $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$, άρα τα μετρούμενα πεδιακά μεγέθη δεν εξαρτώνται από το αζιμούθιο ϕ . Για λόγους απλότητας, λοιπόν και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\phi = 0$.

Η σχέση 1.16, τότε, γίνεται:

$$\begin{aligned} A_z(\rho = a, \phi, z) &= \mu \cdot \int_{z'=-h}^h I_z(z') \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cdot \frac{e^{-ikR}}{4 \cdot \pi \cdot R} \cdot a \cdot d\phi' \right) dz' = \\ &= \mu \int_{-h}^h I_z(z') \cdot K(z, z') dz' \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\text{όπου } K(z, z') = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cdot \frac{e^{-ikR}}{4 \cdot \pi \cdot R} \cdot d\phi' \text{ και :}$$

$$R(\rho = a, \phi = 0) = \sqrt{2 \cdot a^2 \cdot (1 - \cos \phi') + (z - z')^2} = \sqrt{4 \cdot a^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\phi'}{2} \right) + (z - z')^2}$$



Εικόνα 1.4: Σημείο παρατήρησης (ρ, ϕ, z) , σημείο πηγής (a, ϕ', z') , και απόσταση R μεταξύ τους.

Αντικαθιστώντας στην (1.14) λοιπόν, την προερευρεθείσα έκφραση για το διανυσματικό δυναμικό, έχουμε:

$$E_z^s(\rho = a, z) = -i \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \omega} \cdot \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \int_{-h}^h I_z(z') \cdot K(z, z') \cdot dz' \quad (1.18).$$

Έτσι, αν αναχθούμε και πάλι στην οριακή συνθήκη συνέχειας των εφαπτομενικών συνιστωσών της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στην τέλεια αγωγίμη επιφάνεια $\rho = a$, του διπόλου, θα λάβουμε:

$$E_z^s(\rho = a) = -E_z^i(\rho = a) \Rightarrow \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \int_{-h}^h I_z(z') \cdot K(z, z') \cdot dz' = -i \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot E_z^i(\rho = a)$$

Η τελευταία εξίσωση που εξαγάγαμε, δηλαδή η

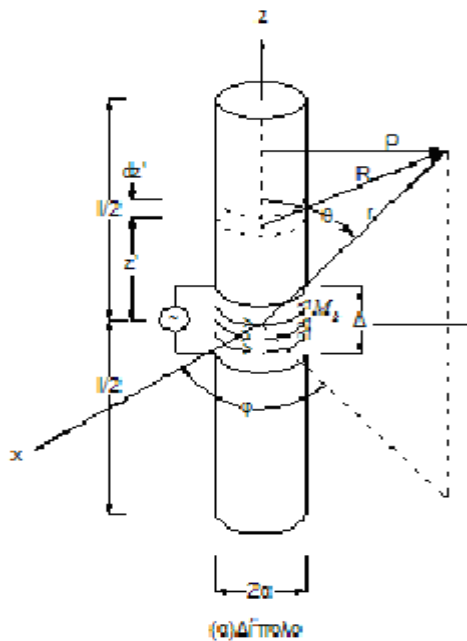
$$\boxed{\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \int_{-h}^h I_z(z') \cdot K(z, z') \cdot dz' = -i \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot E_z^i(\rho = a)} \quad (1.19)$$

αναφέρεται ως *Ολοκληρωτική εξίσωση του Pocklington* και με την επίλυσή της υπολογίζουμε το ισοδύναμο ρεύμα γραμμικής κατανομής (κατ'επέκταση και την πυκνότητα ρεύματος στην επιφάνεια του διπόλου), γνωρίζοντας το προσπίπτον πεδίο στην επιφάνεια αυτή. Αν υποθέσουμε ότι το δίπολο τροφοδοτείται συμμετρικά από

πηγή τάσης, τότε για την κατάστροψη και επίλυση της εξίσωσης Pocklington , πρέπει να γνωρίζουμε την έκφραση της z-συνιστώσας του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου $E_z^i(a, z)$. Η μέθοδος που διαπραγματευόμαστε εδώ για να μοντελοποιήσει τη διέγερση της κεραίας αναφέρεται ως *διέγερση delta-gap* ή *γεννήτρια delta function* . Ας δούμε λοιπόν πώς προκύπτει η αντίστοιχη εξίσωση Pocklington.

1.4 Εξαγωγή της ακριβούς εξίσωσης Pocklington για γεννήτρια δέλτα συνάρτησης (delta function generator)

Πρόκειται για την απλούστερη και ευρύτερα χρησιμοποιούμενη μέθοδο για την μοντελοποίηση πηγής, που υστερεί ωστόσο σε ακρίβεια στον υπολογισμό των αγωγιμοτήτων εισόδου. Η σχηματική της αναπαράσταση δίνεται στην εικόνα 1.5.



Εικόνα 1.5: Κυλινδρικό δίπολο και μοντελοποίηση τροφοδοσίας delta gap

Θεωρούμε λοιπόν ένα απειροστά μικρό διάκενο (infinitesimal gap) στο κέντρο του σωληνοειδούς διπόλου $z=0$, και μια διέγερση τάσης στους ακροδέκτες τροφοδοσίας σταθερής τιμής V στο κέντρο και μηδενικής τιμής οπουδήποτε αλλού. Στο κέντρο του σωληνοειδούς διπόλου βρίσκεται η γεννήτρια delta function generator

η οποία διατηρεί ένα δυναμικό V στο διάκενο, έτσι ώστε το βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό $\Phi(\rho, z)$ να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\Phi(a, z = 0^+) - \Phi(a, z = 0^-) = V.$$

Η z -συνιστώσα του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου (η οποία μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του A_z) πρέπει να είναι μηδενική σε όλα τα σημεία της επιφάνειας της κεραίας, εκτός του διακένου. Στο διάκενο τροφοδοσίας η ένταση του προσπίπτοντος και η ένταση του ανακλωμένου πεδίου πρέπει να είναι αντίθετες. Η διαφορά δυναμικού στο διάκενο, V , δίνεται από τη σχέση:

$$V = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\delta}^{\delta} E_z^i(z) \cdot dz \Rightarrow E_z^i(z) = V \cdot \delta(z). \quad (1.20) \text{ (από ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα).}$$

Έτσι, δεδομένου ότι $\zeta_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}}$ και $k = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_o \cdot \mu_o}$, αντικαθιστώντας στην (1.19)

λαμβάνουμε:

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \int_{-h}^h I_z(z') \cdot K_{ex}(z, z') \cdot dz' = \frac{i \cdot k \cdot V}{\zeta_o} \cdot \delta(z), \text{ για } -h \leq z \leq h \quad (1.20) \text{ όπου}$$

$$\begin{aligned} K_{ex}(z, z') &= F(z - z') = \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} \cdot a \cdot d\phi' = \\ &= \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cdot \frac{e^{-i \cdot k \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (z-z')^2}}}{\sqrt{4 \cdot a^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (z-z')^2}} \cdot d\phi' \end{aligned}$$

είναι ο πυρήνας αυτής της ολοκληρωτικής εξίσωσης, που όπως είναι φανερό εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $z - z'$ και όχι από τα z και z' χωριστά, αποτελώντας έτσι έναν πυρήνα διαφοράς. Στη σχέση (1.20) και τα δύο μέλη, δίνουν την εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στο σωληνοειδές δίπολο. Κατά την εξαγωγή της δεν έγινε καμία προσέγγιση επομένως είναι ακριβής για το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου. Όπως θα δείξουμε, με εξαίρεση της περίπτωσης της κεραίας απείρου μήκους ($h \rightarrow \infty$), η (1.20) δεν μπορεί να λυθεί σε κλειστή μορφή.

1.5 Η ολοκληρωτική εξίσωση του Hallén για τη γεννητρια delta-gap

Η εξίσωση Hallén, δεν περιέχει τον τελεστή Helmholtz $\hat{T} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right)$ και είναι ισοδύναμη της Pocklington. Ο τελεστής Helmholtz δεν μπορεί να εναλλαχθεί με το ολοκλήρωμα στην (1.20), διότι όπως θα δείξουμε ο πυρήνας K_{ex} απειρίζεται για μικρά z με λογαριθμική συμπεριφορά, δηλαδή $K_{ex}(z) \sim \beta \cdot \ln(|z|)$ για μικρά z . Ας επανέλθουμε στη σχέση για τον ακριβή πυρήνα $K_{ex}(z)$. Τότε έχουμε:

$$K_{ex}(z, \rho) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} \cdot d\phi', \text{ όπου}$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2 \cdot \rho \cdot a \cdot \cos \phi'} = \sqrt{(\rho + a)^2 + z^2 - 2 \cdot \rho \cdot a \cdot (1 + \cos \phi')} = \\ &= \sqrt{(\rho + a)^2 + z^2 - 2 \cdot \rho \cdot a \cdot \cos^2 \left(\frac{\phi'}{2} \right)} = \sqrt{(\rho + a)^2 + z^2 - 2 \cdot \rho \cdot a \cdot \sin^2 \theta} = \\ &= R_{\max} \cdot \sqrt{1 - \kappa^2 \cdot \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

όπου ορίσαμε τις ποσότητες $R_{\max} = \sqrt{(\rho + a)^2 + z^2}$ και $\kappa = \frac{2 \cdot \sqrt{a \cdot \rho}}{\sqrt{(\rho + a)^2 + z^2}}$ και

κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $\phi' = \pi + 2 \cdot \theta$. Έτσι, το διάστημα ολοκλήρωσης για τη μεταβλητή θ γίνεται $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ και επειδή η R είναι άρτια συνάρτηση του θ μπορούμε

να γράψουμε:

$$K(z, \rho) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} \cdot d\theta = \frac{2}{\pi \cdot R_{\max}} \cdot \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{-ikR_{\max} \cdot \sqrt{1 - \kappa^2 \cdot \sin^2 \theta}}}{R_{\max} \cdot \sqrt{1 - \kappa^2 \cdot \sin^2 \theta}} \cdot d\theta \quad (1.21),$$

όπου το R_{\max} αντιπροσωπεύει την μέγιστη τιμή του R καθώς μεταβάλλεται το θ . Θα επιχειρήσουμε τώρα τη σύνδεση με τις ελλειπτικές συναρτήσεις. Με την αλλαγή

μεταβλητής $u = \int_0^\theta \frac{da}{\sqrt{1 - \kappa^2 \cdot \sin^2 a}} \Rightarrow du = \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \kappa^2 \cdot \sin^2 \theta}}$ εκφράζουμε εμμέσως τη

μεταβλητή u ως μια συνάρτηση της θ . Δύο από τις 12 ελλειπτικές συναρτήσεις, η $sn(u, \kappa)$, ορίζεται ως $sn(u, \kappa) = \sin \theta$ και η $dn(u, \kappa)$ ως

$$dn(u, \kappa) = \sqrt{1 - \kappa^2 \cdot sn^2(u, \kappa)} = \sqrt{1 - \kappa^2 \cdot \sin^2 \theta}. \quad \text{Τα συμπληρωμένα ελλειπτικά}$$

ολοκληρώματα α' και β' είδους είναι $K(\kappa) = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2 \cdot \sin^2 \theta}}$ και

$E(\kappa) = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\kappa^2 \cdot \sin^2 \theta} \cdot d\theta$ αντίστοιχα. Εξ' ορισμού, όταν $\theta = \frac{\pi}{2}$ τότε $u = K(\kappa)$,

οπότε ο ακριβής πυρήνας δίνεται από τη σχέση:

$$K_{ex}(\rho, z) = \frac{2}{\pi \cdot R_{\max}} \cdot \int_{u(\theta=0)}^{u(\theta=\frac{\pi}{2})} e^{-ikR_{\max} \cdot dn(u, \kappa)} \cdot du = \frac{2}{\pi \cdot R_{\max}} \cdot \int_{u=0}^{K(\kappa)} e^{-ikR_{\max} \cdot dn(u, \kappa)} \cdot du \quad (1.22).$$

Αν κάνουμε πάλι την αλλαγή μεταβλητής $u \rightarrow u \cdot K(\kappa)$, τότε το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται:

$$K_{ex}(\rho, z) = \frac{2 \cdot K(\kappa)}{\pi \cdot R_{\max}} \cdot \int_{u=0}^1 e^{-ikR_{\max} \cdot dn(u, \kappa)} \cdot du \quad (1.23).$$

Για σημεία πάνω στην επιφάνεια της κεραίας ($\rho = a$) έχουμε:

$$R_{\max} = \sqrt{4 \cdot a^2 + z^2} \quad \text{και} \quad \kappa = \frac{2 \cdot \sqrt{a \cdot a}}{\sqrt{(a+a)^2 + z^2}} = \frac{2 \cdot a}{\sqrt{4 \cdot a^2 + z^2}}. \quad \text{Καθώς η μεταβλητή } u$$

παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$, η ποσότητα $dn(u \cdot K, \kappa)$ παραμένει φραγμένη και λαμβάνει τιμές στο διάστημα: $\kappa' \leq dn(u \cdot K, \kappa) \leq 1$, όπου

$$\kappa' = \sqrt{1-\kappa^2} = \frac{|z|}{\sqrt{4 \cdot a^2 + z^2}} = \frac{|z|}{R_{\max}}. \quad \text{Έτσι,} \quad \left| \int_{u=0}^1 e^{-ikR_{\max} \cdot dn(u, \kappa)} \cdot du \right| < 1, \quad \forall z \text{ στην έκφραση}$$

(1.23) για τον ακριβή πυρήνα. Από την άλλη, το ελλειπτικό ολοκλήρωμα $K(\kappa)$ ενσωματώνει τη λογαριθμική ανωμαλία καθώς $z \rightarrow 0$. Πράγματι, καθώς $z \rightarrow 0$,

$$\kappa' \rightarrow 0 \text{ και έχουμε τη συμπεριφορά } K(\kappa) \approx \ln\left(\frac{4}{\kappa'}\right) \approx \ln\left(\frac{4 \cdot R_{\max}}{|z|}\right) \approx \ln\left(\frac{8 \cdot a}{|z|}\right), \text{ για}$$

$z \rightarrow 0$.

$$\text{Άρα, } K_{ex}(z) \approx \frac{1}{\pi \cdot \alpha} \cdot \ln\left(\frac{8 \cdot a}{|z|}\right) \text{ για } z \rightarrow 0 \quad (1.24).$$

Έτσι, η παράγωγος $\frac{d^2 K_{ex}(z)}{dz^2}$ θα συμπεριφέρεται ανάλογα με τον όρο $\frac{1}{z^2}$, επομένως είναι μια ποσότητα μη ολοκληρώσιμη απαγορεύοντας έτσι την εναλλαγή του διαφορικού τελεστή και του ολοκληρώματος.

Για να υπολογίσουμε τη δράση του τελεστή, λοιπόν, θα θεωρήσουμε την εξίσωση του Rocklington ως μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με άγνωστο το

ολοκλήρωμα: $I_o(z) = \int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z(z') \cdot dz'$, δηλαδή:

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot I_o(z) = \frac{i \cdot k \cdot V}{\zeta_o} \cdot \delta(z) \quad (1.25).$$

Ας θυμηθούμε ότι το ολοκλήρωμα I_o είναι το διανυσματικό δυναμικό $A_z(a, z)$ που είναι άρτια συνάρτηση του z . Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.25) θα είναι η υπέρθεση της λύσης της ομογενούς και μιας οποιασδήποτε λύσης της μη ομογενούς. Η άρτια λύση της ομογενούς είναι $I_{oo,even}(z) = C \cdot \cos(k \cdot z)$ με $C \in \mathbb{R}$. Μια μερική λύση θα αναζητηθεί με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της συνάρτησης δέλτα και είναι η $I_{os}(z) = \frac{V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sin(k \cdot |z|)$, με $\zeta_o = 120 \cdot \pi \Omega = 376,23 \Omega$ την κυματική

αντίσταση του κενού χώρου. Έτσι τελικά προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\boxed{\int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z(z') \cdot dz' = C \cdot \cos(k \cdot z) + \frac{i \cdot V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sin(k \cdot |z|)} \quad (1.26)$$

η οποία ονομάζεται *εξίσωση του Hallén*. Η σταθερά C θα προσδιοριστεί από την απαίτηση μηδενισμού του ρεύματος στα άκρα της κεραίας από την Αρχή Διατήρησης του Φορτίου, δηλαδή $I(\pm h) = 0$.

Από της Αρχή της Επαλληλίας, τώρα, η λύση της εξίσωσης Hallén μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός δύο συναρτήσεων $I^{(1)}(z)$ και $I^{(2)}(z)$ που θα ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z^{(1)}(z') \cdot dz' = \frac{i \cdot V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sin(k \cdot |z|) \quad \text{και} \quad \int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z^{(2)}(z') \cdot dz' = \cos(k \cdot z)$$

αντίστοιχα. Τότε, η λύση της εξίσωσης Hallén που ικανοποιεί την οριακή συνθήκη

$$I(\pm h) = 0, \quad \text{δίνεται από τη σχέση: } I_z^{tot} = I^{(1)}(z) + C \cdot I^{(2)}(z) \quad \text{με} \quad C = -\frac{I^{(1)}(h)}{I^{(2)}(h)}.$$

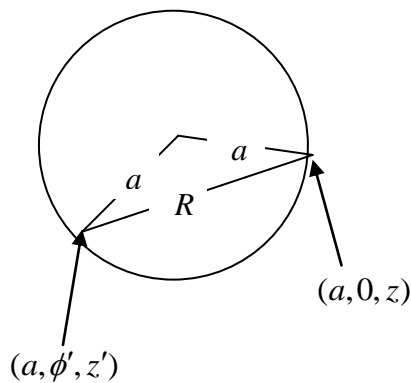
1.6 Ο προσεγγιστικός πυρήνας

Οι εξισώσεις Hallén και Rocklington που παρουσιάστηκαν παραπάνω, εμφανίζουν δυσκολίες στην επίλυσή τους λόγω της πολυπλοκότητας του πυρήνα τους. Ο πυρήνας αυτός, K_{ex} μπορεί να απλοποιηθεί, όπως δείχνουμε παρακάτω: Αν επανέλθουμε στη σχέση:

$$R(\rho = a, \phi = 0) = \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2 \cdot \rho \cdot a \cdot \cos((\phi = 0) - \phi') + (z - z')^2} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot a^2 \cdot (1 - \cos \phi) + (z - z')^2} = \sqrt{4 \cdot a^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (z - z')^2}$$

θα διαπιστώσουμε ότι η προβεβλημένη απόσταση $d = 2 \cdot a \cdot \sin\left(\frac{\phi'}{2}\right)$ μεταβάλλεται κατά την ολοκλήρωση με μέγιστη τιμή $d_{\max} = 2 \cdot a$ και ελάχιστη τιμή $d_{\min} = 0$. Σε μια προσπάθεια προσέγγισης, λαμβάνουμε τη μέση απόσταση $\bar{d} = a$ με την οποία προσεγγίζουμε όλες τις δυνατές προβεβλημένες αποστάσεις σημείου πηγής-παρατήρησης.



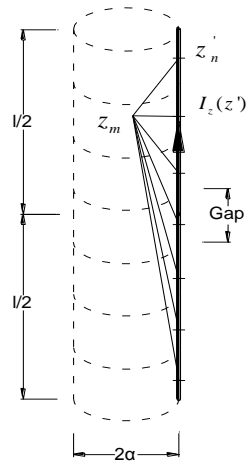
Εικόνα 1.6: Για σημεία παρατήρησης πάνω στην επιφάνεια της κεραίας, η απόσταση R δίνεται στον τρισδιάστατο χώρο. Εδώ δείχνουμε προβολή στο επίπεδο $z=0$. Η προβολή του R είναι $2a \left| \sin\left(\frac{\phi'}{2}\right) \right|$, με μέγιστη τιμή $2a$ και ελάχιστη τιμή 0 .

Έτσι ο πυρήνας γράφεται $K_{ap}(z) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{i \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + a^2}}}{\sqrt{z^2 + a^2}}$ (1.27) και αναφέρεται ως

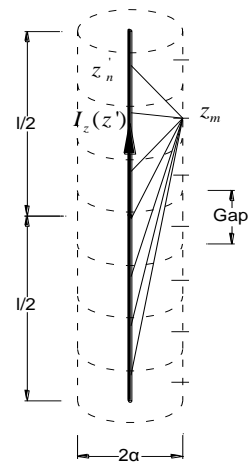
προσεγγιστικός πυρήνας λόγω της προσεγγιστικής θεώρησης που έγινε στη απόσταση. Ο προσεγγιστικός πυρήνας προκύπτει από την (1.21):

$$K_{ex}(z, \rho) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} \cdot d\theta = \frac{2}{\pi \cdot R_{\max}} \cdot \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{-ikR_{\max} \cdot \sqrt{1-\kappa^2 \cdot \sin^2 \theta}}}{R_{\max} \cdot \sqrt{1-\kappa^2 \cdot \sin^2 \theta}} \cdot d\theta \text{ με } \kappa \rightarrow 0.$$

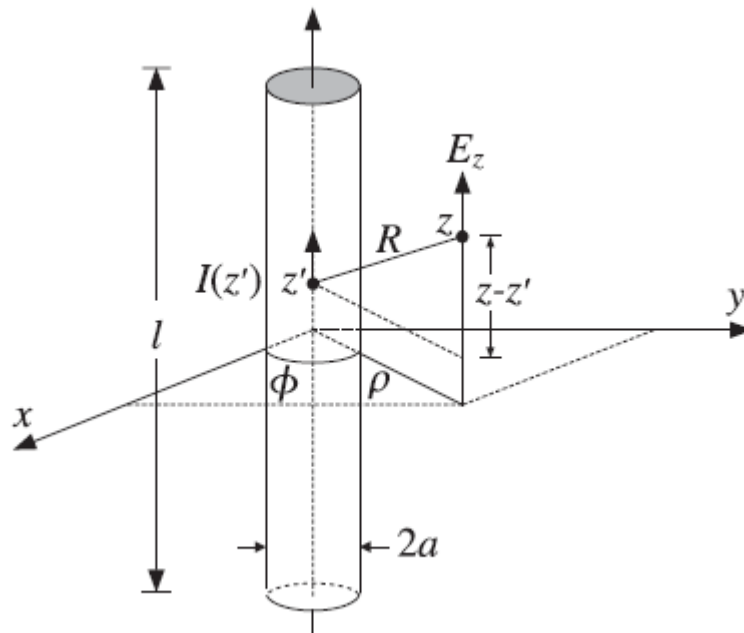
Με την προσέγγιση αυτή θεωρούμε το ρεύμα συγκεντρωμένο στον άξονα της κεραίας, δηλαδή $I_z(z) = I(\rho=0, z)$.



(α) Στην επιφάνεια



(β) Κατά μήκος του άξονα z



Εικόνα 1.7: Το ισοδύναμο ρεύμα του διπόλου

Το παραπάνω είναι λογικό, διότι το σωληνοειδές δίπολο είναι λεπτό. Το αριστερό μέλος της εξίσωσης Hallén εκφράζει τη συνιστώσα A_z στην κυλινδρική επιφάνεια $\rho=a$. Με τον ακριβή πυρήνα, αυτό το διανυσματικό δυναμικό οφείλεται σε επιφανειακή κατανομή ρεύματος στην ίδια την επιφάνεια $\rho=a$ ενώ με τον προσεγγιστικό πυρήνα η πηγή του δυναμικού (άρα και του πεδίου) είναι μια γραμμική κατανομή ρεύματος για $\rho=0$. Με την εξίσωση Hallén λοιπόν που έχει τον προσεγγιστικό πυρήνα, αναζητούμε μια γραμμική κατανομή ρεύματος της οποίας το διανυσματικό δυναμικό A_z σε απόσταση $\rho=a$ συμπεριφέρεται όπως υπαγορεύει το δεξιό μέλος της εξίσωσης. Σημειώνουμε ότι σε αντίθεση με τον ακριβή, ο προσεγγιστικός πυρήνας δεν απειρίζεται για $z=0$, οπότε ο τελεστής Helmholtz μπορεί καλλιστα να εναλλαχθεί με το ολοκλήρωμα στις Hallén και Pocklington.

Έτσι, το αριστερό μέλος της εξίσωσης Hallén είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση του z ενώ το δεξί μέλος είναι μη διαφορίσιμο για $z=0$, λόγω της παρουσίας του όρου $\sin(k \cdot |z|)$. Συνεπώς η ολοκληρωτική εξίσωση του Hallén δεν έχει λύση *stricto sensu*. Η φυσική αιτία αυτού είναι ότι η γραμμική κατανομή ρεύματος που είναι τοποθετημένη επί του άξονα z δεν είναι δυνατόν να προκαλεί για $\rho=a, z=0$ πεδίο με την τόσο απότομη συμπεριφορά της συνάρτησης του Dirac, $\delta(z)$, αφού το πεδίο μακριά από την πηγή πρέπει να έχει ομαλή συμπεριφορά.

Τέλος, το πραγματικό μέρος του πυρήνα $K_{ap}(z)$ μεγιστοποιείται για $z=0$ και αυτό το σημειούμενο μέγιστο γίνεται οξύτερο για λεπτότερες κεραίες (πράγμα που θα επιβεβαιώσουμε αργότερα στις ρευματικές κατανομές).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Η αριθμητική μέθοδος επίλυσης της εξίσωσης Hallén

2.1 Μέθοδος των Ροπών

Στο παρόν κεφάλαιο θα επιλύσουμε αριθμητικά την ολοκληρωτική εξίσωση που εξαγάγαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για την εύρεση της ρευματικής κατανομής στο δίπολο. Η αριθμητική μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση της εξίσωσης του Hallén:

$$\int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z(z') \cdot dz' = C \cdot \cos(k \cdot z) + \frac{i \cdot V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sin(k \cdot |z|) \quad (2.1)$$

είναι η μέθοδος των ροπών. Στη μέθοδο αυτή αναπτύσσουμε τον άγνωστο $I(z)$ σε ένα πεπερασμένο άθροισμα $2N-1$ συναρτήσεων βάσης $g_n(z)$ έτσι ώστε να ισχύει:

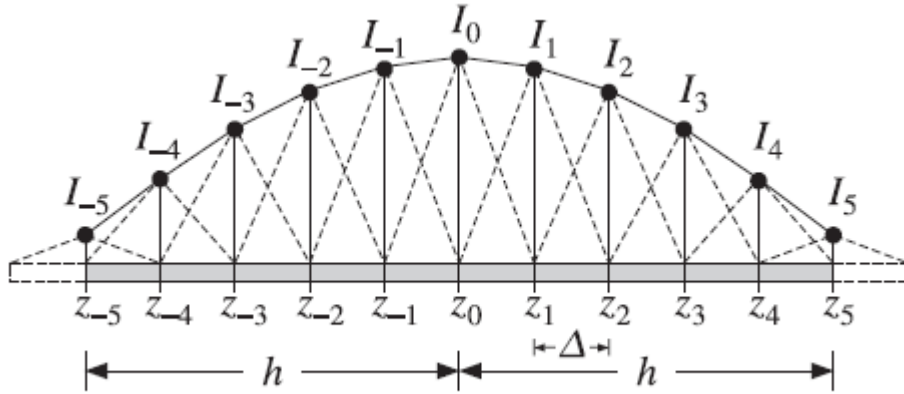
$$I(z) \cong \sum_{n=-N+1}^{N-1} I_n \cdot g_n(z) = I_{-N+1} \cdot g_{-N+1}(z) + I_{-N+2} \cdot g_{-N+2}(z) + \dots + I_o \cdot g_o(z) + \dots + I_{N-1} \cdot g_{N-1}(z) \quad (2.2)$$

.Οι άγνωστοι στην παραπάνω εξίσωση είναι οι συντελεστές I_n και στην (2.2) γράφουμε \cong και όχι $=$ διότι η λύση $I(z)$ της ολοκληρωτικής εξίσωσης γενικά δεν μπορεί να γραφεί ακριβώς σαν υπέρθεση πεπερασμένου αριθμού συναρτήσεων βάσης.

Οι συναρτήσεις βάσης $g_n(z)$ μπορούν να επιλεγούν ανάλογα με τη φύση του προβλήματος, με συνηθέστερες επιλογές τις παλμικές, τις τριγωνικές και τις ημιτονοειδείς. Οι συναρτήσεις που επιλέγουμε εδώ είναι οι τριγωνικές (αν και θα μας είναι χρήσιμες και οι ημιτονοειδείς αργότερα) που ορίζονται ως:

$$t(z) = \begin{cases} \frac{z_o - |z|}{z_o}, & -z_o \leq z \leq z_o \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad \text{με } z_o = \frac{h}{N} \quad (2.3)$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $t(z-l \cdot z_o)$ είναι το $((l-1) \cdot z_o, (l+1) \cdot z_o)$, για $|l| \leq N-1$. Οι συναρτήσεις αυτές σχεδιάζονται παρακάτω μαζί με το γράφημα που προκύπτει από γραμμικό συνδυασμό αυτών:



Εικόνα 2.1: Τριγωνικές συναρτήσεις βάσης και γραμμικός συνδυασμός αυτών (εδώ $N=5$ και $M=11$)

Αντικαθιστώντας την έκφραση (2.3) στην εξίσωση του Hallén λαμβάνουμε :

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} I_n \cdot \int_{-h}^h K(z-z') \cdot t(z'-n \cdot z_o) dz' \cong \frac{i}{2 \cdot \zeta_o} \cdot V \cdot \sin(k \cdot |z|) + C \cdot \cos(k \cdot |z|), -h < z < h \quad (2.4)$$

Αν επιβάλλουμε την ισότητα στα $2N+1$ σημεία κατακερματισμού του σωληνοειδούς διπόλου, $z=l \cdot z_o$ (δηλαδή και στα τερματικά και στα εσωτερικά σημεία) με $|l| \leq N$ τότε αναφερόμαστε σε μια τεχνική -παραλλαγή αντιστοίχισης σημείων (point matching) και δημιουργείται το σύστημα εξισώσεων:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} D_{ln} \cdot I_n = \frac{i \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot V \cdot \sin(k \cdot |l \cdot z_o|) + z_o \cdot C \cdot \cos(k \cdot l \cdot z_o) \quad (2.5)$$

$|l| \leq N$, όπου οι συντελεστές D_{ln} δίνονται από τη σχέση:

$$D_{ln} = z_o \cdot \int_{-h}^h K(l \cdot z_o - z') \cdot t(z'-n \cdot z_o) dz' \quad (2.6) \text{ με } |l| \leq N \text{ και } |n| \leq N-1.$$

Γι αυτές τις τιμές των l και n θα αποδείξουμε ότι $D_{ln} = A_{l-n}$, όπου:

$$A_l = A_{-l} = \int_0^{z_o} (z_o - z) \cdot [K(z+l \cdot z_o) + K(z-l \cdot z_o)] \cdot dz \quad (2.7).$$

Από τον ορισμό των τριγωνικών συναρτήσεων και επειδή τόσο ο ακριβής όσο και ο προσεγγιστικός πυρήνας $K(z)$ είναι άρτιες συναρτήσεις του z , έχουμε:

$$\begin{aligned}
D_{ln} &= z_o \cdot \int_{-h}^h K(l \cdot z_o - z') \cdot t(z' - n \cdot z_o) dz' = z_o \cdot \int_{-h}^h K(z' - l \cdot z_o) \cdot t(z' - n \cdot z_o) dz' = \\
&= z_o \cdot \int_{(n-1) \cdot z_o}^{(n+1) \cdot z_o} K(z' - l \cdot z_o) \cdot \frac{z_o - |z' - n \cdot z_o|}{z_o} dz'
\end{aligned}$$

Αν επιχειρήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $z = z' - n \cdot z_o \Rightarrow dz' = dz$ τότε το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned}
D_{ln} &= \int_{-z_o}^{z_o} K(z + (n-l) \cdot z_o) \cdot (z_o - |z|) \cdot dz = \int_0^{z_o} K(z + (n-l) \cdot z_o) \cdot (z_o - |z|) \cdot dz + \\
&+ \int_{-z_o}^0 K(z + (n-l) \cdot z_o) \cdot (z_o - |z|) \cdot dz = \\
&= \int_0^{z_o} K(z + (n-l) \cdot z_o) \cdot (z_o - z) \cdot dz + \int_0^{z_o} K(-z + (n-l) \cdot z_o) \cdot (z_o - z) \cdot dz = \\
&= \int_0^{z_o} (K(z + (n-l) \cdot z_o) + K(z - (n-l) \cdot z_o)) \cdot (z_o - |z|) \cdot dz
\end{aligned}$$

Έτσι, $D_{ln} = D_{nl}$ και οι D_{ln} εξαρτώνται μόνο από τη διαφορά $l - n$, δηλαδή

$$D = A_{l-n} \text{ με } A_l = \int_0^{z_o} (z_o - z) \cdot [K(z + l \cdot z_o) + K(z - l \cdot z_o)] \cdot dz, |l| \leq N. \text{ Με αυτόν τον}$$

τρόπο αποδείξαμε το ζητούμενο. Το σύστημα εξισώσεων (2.5), λοιπόν, γίνεται:

$$\boxed{\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{l-n} \cdot I_n = \underbrace{\frac{i \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot V \cdot \sin(k \cdot |l| \cdot z_o)}_{B_l^{(1)}} + \underbrace{z_o \cdot C \cdot \cos(k \cdot l \cdot z_o)}_{B_l^{(2)}}} \quad (2.8)$$

$$\text{με } |l| \leq N \text{ όπου } A_l = A_{-l} = \int_0^{z_o} (z_o - z) \cdot [K(z + l \cdot z_o) + K(z - l \cdot z_o)] \cdot dz \text{ και ο δείκτης}$$

l παίρνει τιμές $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$.

Το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με τα δύο συστήματα Toeplitz:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{l-n} \cdot I_n^{(1)} = \frac{i \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot V \cdot \sin(k \cdot |l| \cdot z_o) = B_l^{(1)} \text{ με } l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \text{ και}$$

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{l-n} \cdot I_n^{(2)} = z_o \cdot \cos(k \cdot l \cdot z_o) = B_l^{(2)} \text{ επίσης με } l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N.$$

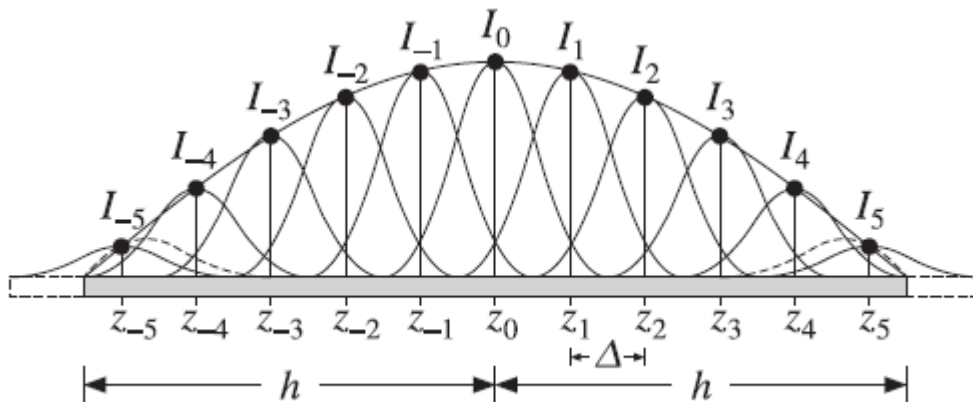
Οι άγνωστοι συντελεστές I_n δίνονται από τη σχέση $I_n = I_n^{(1)} + C \cdot I_n^{(2)}$ με $C = -\frac{I_N^{(1)}}{I_N^{(2)}}$ έτσι ώστε $I_{\pm N} = 0$. Ας σημειώσουμε ότι υπάρχουν και οι επιπλέον συντελεστές $A_{2,N}$ και $A_{-2,N}$.

Αντί της τεχνικής point matching, τώρα, και της επιλογής τριγωνικών συναρτήσεων βάσης θα μπορούσαμε να επιλέξουμε ημιτονοειδείς συναρτήσεις βάσης και να επεκταθούμε σε μια μέθοδο Galerkin, όπως θα δειξουμε αμέσως παρακάτω. Ο λόγος για τον οποίον καταφεύγουμε σε αυτήν την παραλλαγή είναι για να εξαγάγουμε τα αναλυτικά αποτελέσματα για την άπειρη κεραία που παρουσιάζουμε και στο κεφάλαιο 3, βασιζόμενοι στην ισότητα των ρευματικών συντελεστών των δύο μεθόδων.

Οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις, λοιπόν, ορίζονται με ανάλογο τρόπο με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$s(z) = \begin{cases} \frac{\sin k(z_0 - |z|)}{\sin(kz_0)}, & -z_0 \leq z \leq z_0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.10)$$

και πάλι έτσι ώστε: $I(z) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} I_n \cdot s(z - n \cdot z_0)$ (2.11) με την κάθε ημιτονοειδή συνάρτηση $s(z - l \cdot z_0)$ να έχει κέντρο το $z = l \cdot z_0$ και εύρος διαστήματος ορισμού $2 \cdot z_0$.



Εικόνα 2.2: Γραμμικός συνδυασμός ημιτονοειδών συναρτήσεων βάσης (N=5) με την προκύπτουσα ρευματική κατανομή.

Αντικαθιστώντας την έκφραση (2.11) στην (2.1) λαμβάνουμε:

$$\int_{-h}^h \left[K(z-z') \cdot \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} I_n \cdot s(z'-n \cdot z_o) \right] \cdot dz' \cong C \cdot \cos(k \cdot z) + \frac{i \cdot V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sin(k \cdot |z|), \text{για}$$

$$-h \leq z \leq h$$

Το άθροισμα και το ολοκλήρωμα μπορούν να εναλλαχθούν στην παραπάνω σχέση έτσι ώστε να γράψουμε:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \int_{-h}^h [K(z-z') \cdot I_n \cdot s(z'-n \cdot z_o)] \cdot dz' \cong C \cdot \cos(k \cdot z) + \frac{i \cdot V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sin(k \cdot |z|) \quad (2.12)$$

για $-h \leq z \leq h$.

Η παραπάνω εξίσωση έχει $2 \cdot N - 1$ αγνώστους, συνεπώς απαιτούνται $2 \cdot N - 1$ γραμμικώς ανεξάρτητες εξισώσεις. Για να προκύψουν οι εξισώσεις αυτές θα χρησιμοποιήσουμε μια άλλη ομάδα συναρτησεων, που τις ονομάζουμε *συναρτήσεις δοκιμής* $w_l(z)$. Και πάλι από τις πολλές επιλογές που έχουμε θα καταφύγουμε στις τριγωνικές συναρτήσεις, δηλαδή:

$$w_l(z) = t(z) = \begin{cases} \frac{z_o - |z|}{z_o}, & -z_o \leq z \leq z_o \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$

Θεωρούμε τώρα το εσωτερικό γινόμενο της (2.12) με $2 \cdot N - 1$ συναρτήσεις δοκιμής, ήτοι πολλαπλασιάζουμε με $w_l^*(z)$ και ολοκληρώνουμε απο $-h$ έως h , οπότε προκύπτει ένα σύστημα εξισώσεων $(2 \cdot N - 1) \times (2 \cdot N - 1)$, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\int_{-h}^h t(z-l \cdot z_o) \cdot \left\{ \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \int_{-h}^h [K(z-z') \cdot I_n \cdot s(z'-n \cdot z_o)] \cdot dz' \right\} dz \cong$$

με $-(N-1) \leq l, n \leq N-1$

$$\cong \int_{-h}^h t(z-l \cdot z_o) \cdot \left\{ C \cdot \cos(k \cdot z) + \frac{i \cdot V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sin(k \cdot |z|) \right\} dz$$

Το σύστημα αυτό γράφεται: $\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{ln} \cdot I_n = B_l$, όπου

$$A_{in} = \int_{-h}^h t(z-l \cdot z_o) \cdot \left\{ \int_{-h}^h [K(z-z') \cdot I_n \cdot s(z'-n \cdot z_o)] \cdot dz' \right\} dz \quad \text{και}$$

$$B_l = \int_{-h}^h t(z-l \cdot z_o) \cdot \left\{ C \cdot \cos(k \cdot z) + \frac{i \cdot V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sin(k \cdot |z|) \right\} dz. \quad (2.13)$$

Αποδεικνύεται, [2], ότι τα συστήματα (2.8) και (2.13) είναι ισοδύναμα και οι συντελεστές I_n που προσδιορίζονται από τις 2 παραπάνω μεθόδους (δηλαδή με point matching και τριγωνικές συναρτήσεις βάσης και με ημιτονοειδείς συναρτήσεις βάσης και τριγωνικές συναρτήσεις δοκιμής) είναι πανομοιότυποι για την πεπερασμένη κεραία. Από τούδε και στο εξής, λοιπόν, θα αναφερομαστε γενικά στους συντελεστές I_n από όποια διαδικασία και αν έχουν προκύψει.

2.2 Αριθμητικά αποτελέσματα την εξίσωση Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα

Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται ο προσεγγιστικός πυρήνας , επιλύουμε το σύστημα:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{1-n} \cdot I_n = \underbrace{\frac{i \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot V \cdot \sin(k \cdot |l| \cdot z_o)}_{B_l^{(1)}} + C \cdot \underbrace{z_o \cdot \cos(k \cdot l \cdot z_o)}_{B_l^{(2)}}$$

με $A_l = A_{-l} = \int_0^{z_o} (z_o - z) \cdot [K_{ap}(z+l \cdot z_o) + K_{ap}(z-l \cdot z_o)] \cdot dz$, δηλαδή

$$A_l = A_{-l} = \int_0^{z_o} (z_o - z) \cdot \left[\frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{i \cdot k \cdot \sqrt{(z+l \cdot z_o)^2 + a^2}}}{\sqrt{(z+l \cdot z_o)^2 + a^2}} + \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{e^{i \cdot k \cdot \sqrt{(z-l \cdot z_o)^2 + a^2}}}{\sqrt{(z-l \cdot z_o)^2 + a^2}} \right] \cdot dz.$$

Οι κρίσιμες παράμετροι για την εξαγωγή των ρευματικών συντελεστών και συνεπώς της ρευματικής κατανομής είναι:

1. ο λόγος της ακτίνας του διπόλου a προς το μήκος κύματος λ , δηλαδή ο λόγος

$$a/\lambda.$$

2. ο λόγος του ύψους h του διπόλου προς το μήκος κύματος λ , δηλαδή ο λόγος

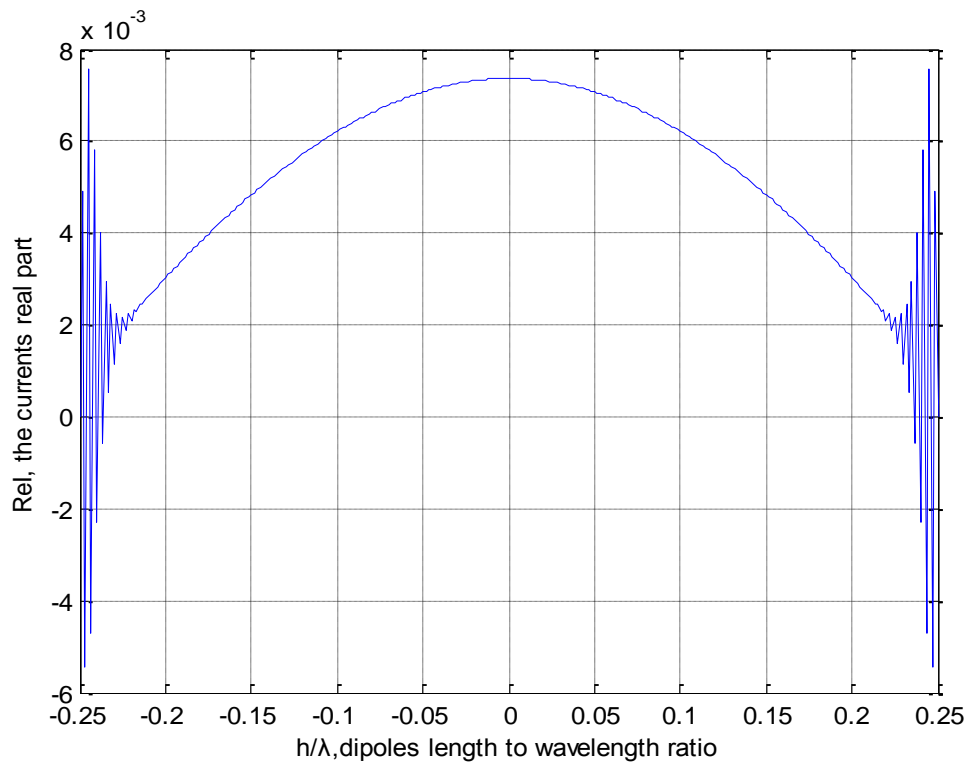
$$h/\lambda.$$

3. ο αριθμός $M (=2 \cdot N + 1)$ των συναρτήσεων βάσης που ισούται με το πλήθος των στοιχειωδών τμημάτων στα οποία κατακερματίζουμε το δίπολο και απαιτούμε την ισότητα (2.5).

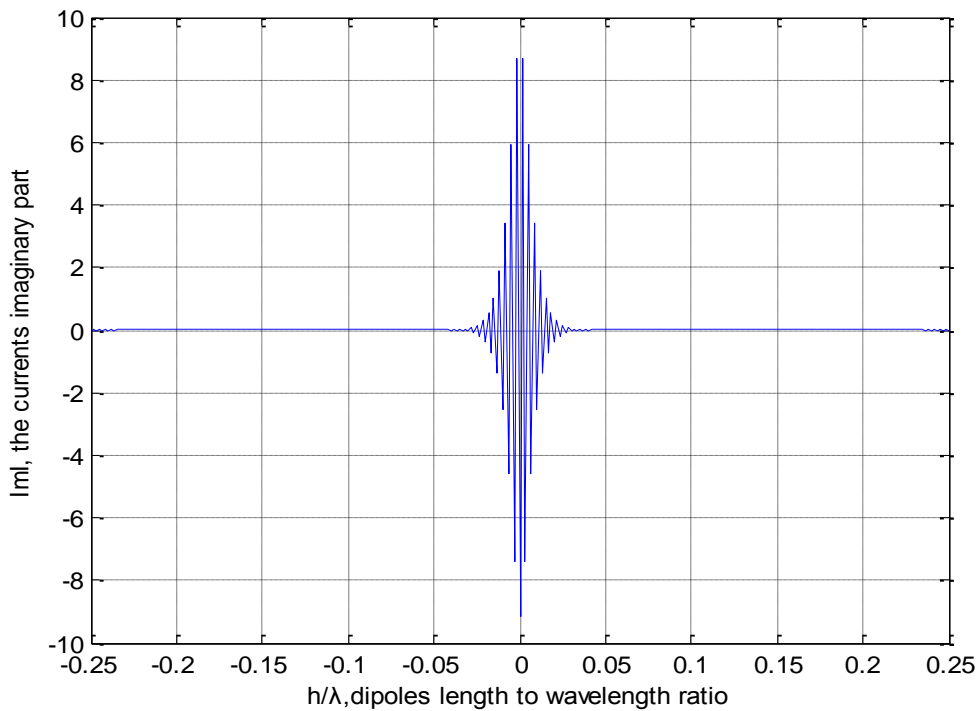
Η τάση τροφοδοσίας του διπόλου είναι $V = 1$ χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Ας μην μας διαφεύγει ότι για να ισχύουν τα όσα γράφουμε με την απαιτούμενη ακρίβεια θα πρέπει το δίπολο να είναι λεπτό δηλαδή $ka \ll 1 \Rightarrow \frac{a}{\lambda} \ll 1$ και $a \ll h$.

Μια τυπική εικόνα της ρευματικής κατανομής δίνεται στα σχήματα 2.1 και 2.2 και είναι η παρακάτω:

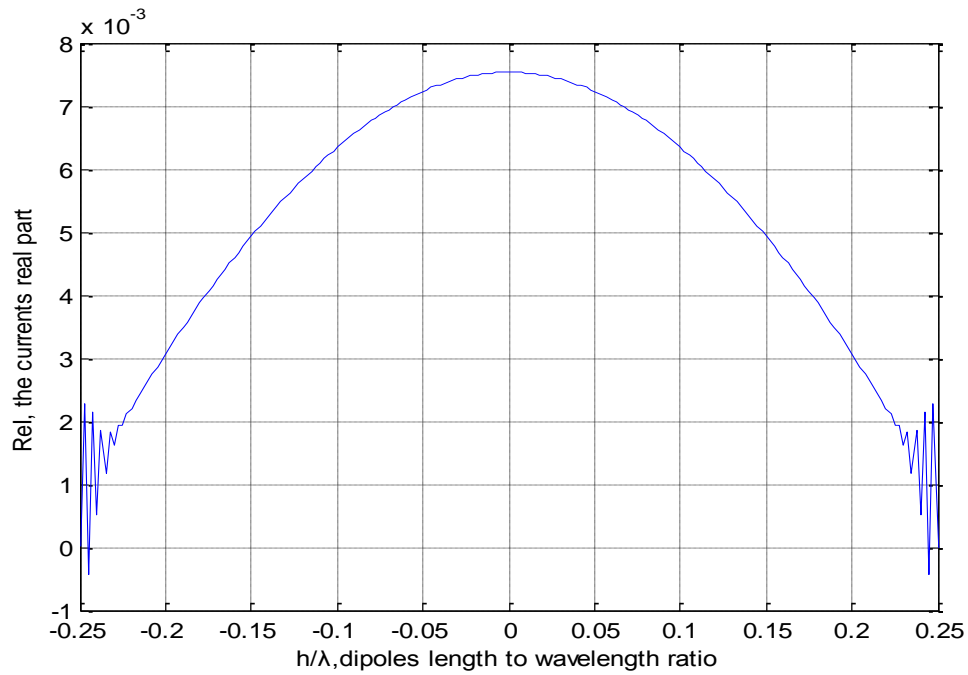


Σχήμα 2.1: Κατανομή του πραγματικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $\frac{a}{\lambda} = 0.007022$, $\frac{h}{\lambda} = 0.25$, $N = 150$

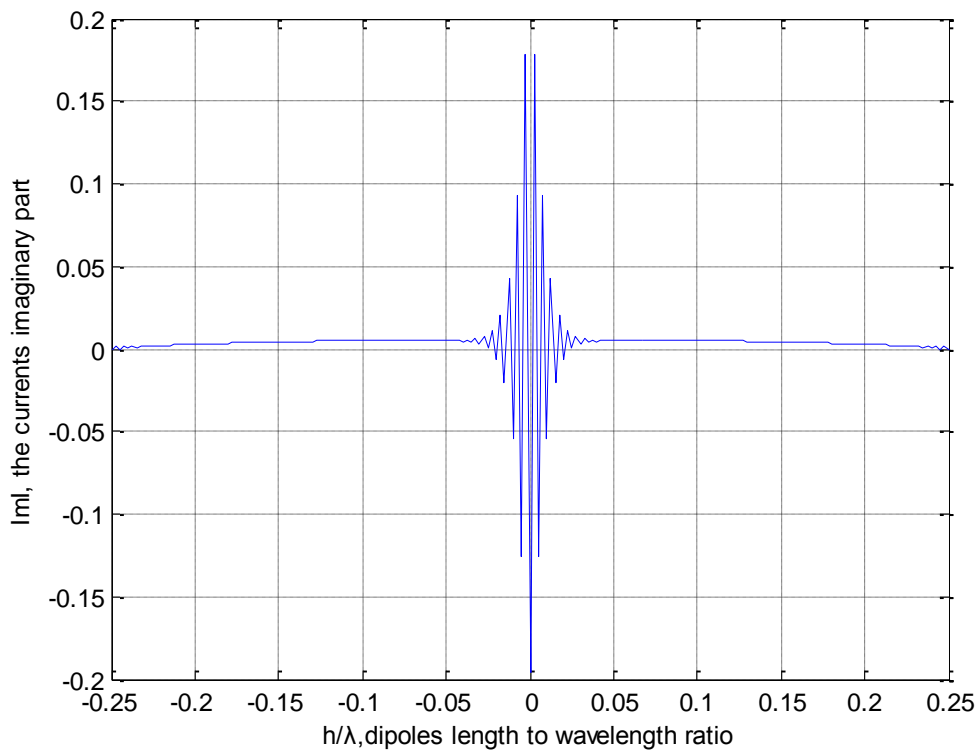


Σχήμα 2.2: Κατανομή του φανταστικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 150$

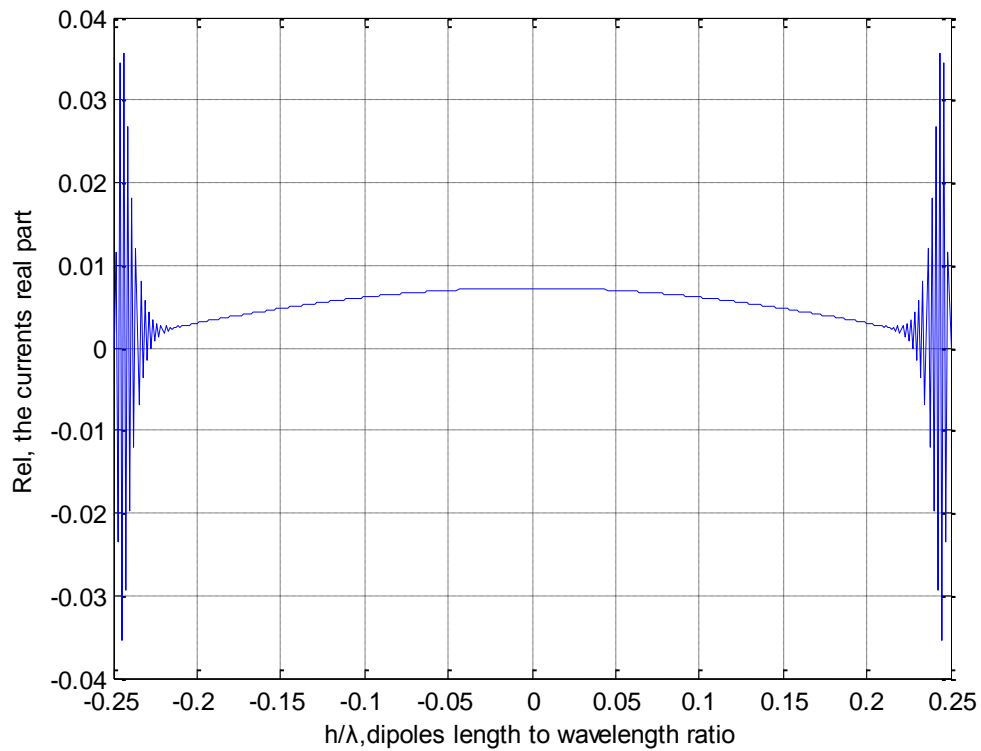
Παρατηρούμε αμέσως την ύπαρξη ταλαντώσεων στα άκρα του διπόλου ($z = \pm h$) για το πραγματικό μέρος του ρεύματος και στο σημείο τροφοδοσίας ($z = 0$) για το φανταστικό μέρος του ρεύματος. Το πλάτος και η συχνότητα των ταλαντώσεων αυτών αυξάνονται καθώς μειώνεται το εύρος των διαμερίσεων $z_o = \frac{h}{N}$, δηλαδή συνηθέστερα με αύξηση του N (η αύξηση αυτή είναι περίπου εκθετική [2,conclusion]). Αυτό καταδεικνύεται και από τα παρακάτω γραφήματα των σχημάτων 2.3-2.8.



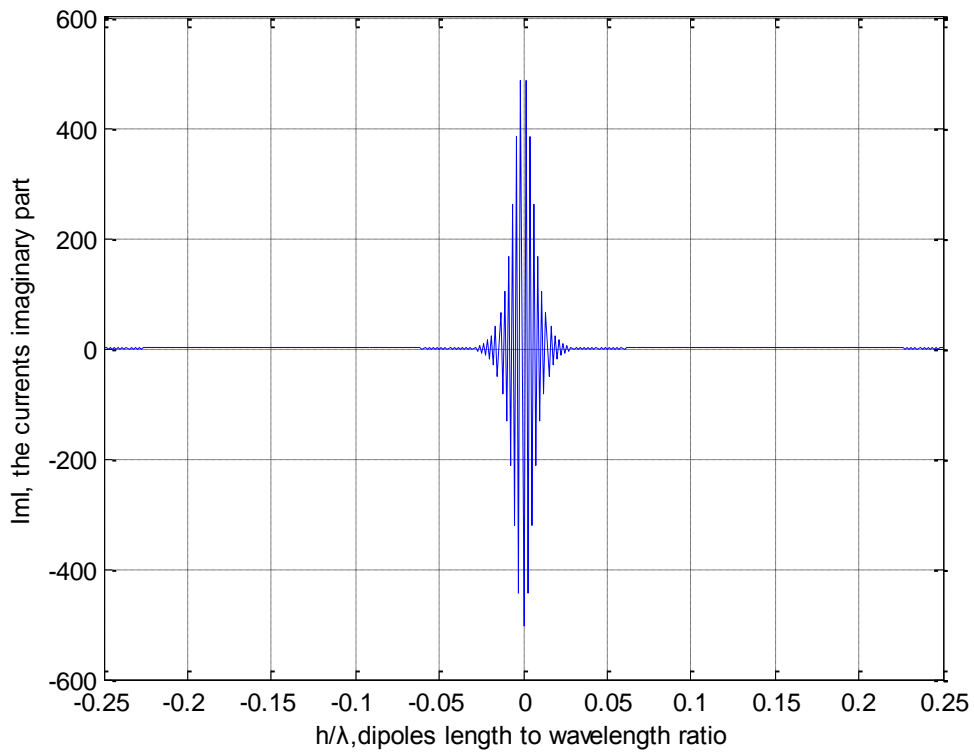
Σχήμα 2.3: Κατανομή του πραγματικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100$



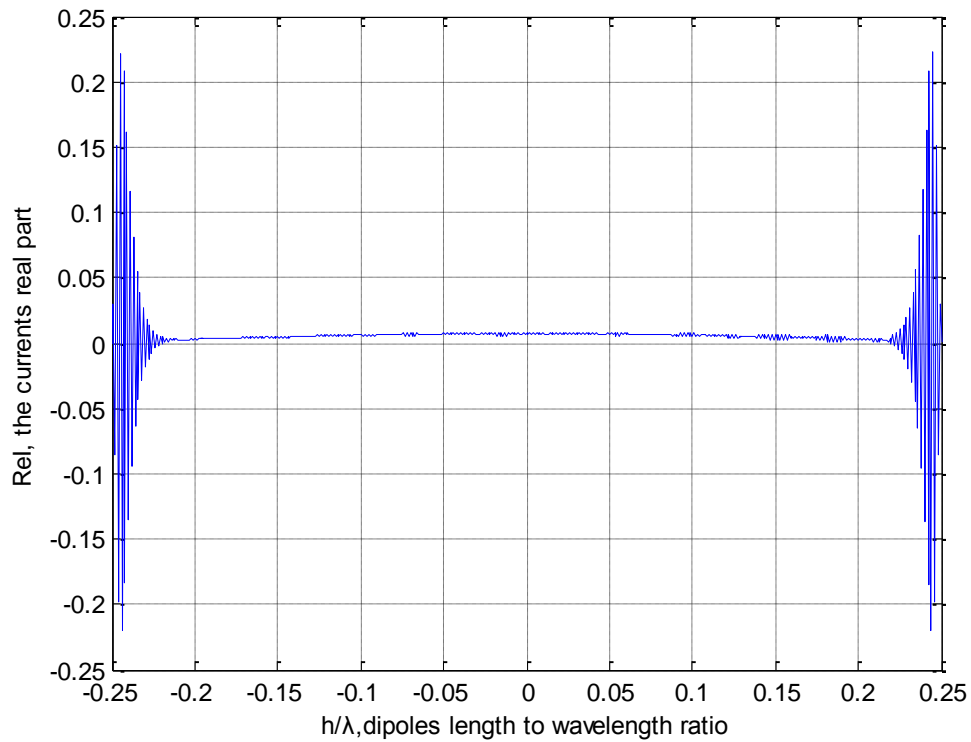
Σχήμα 2.4: Κατανομή του πραγματικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100$



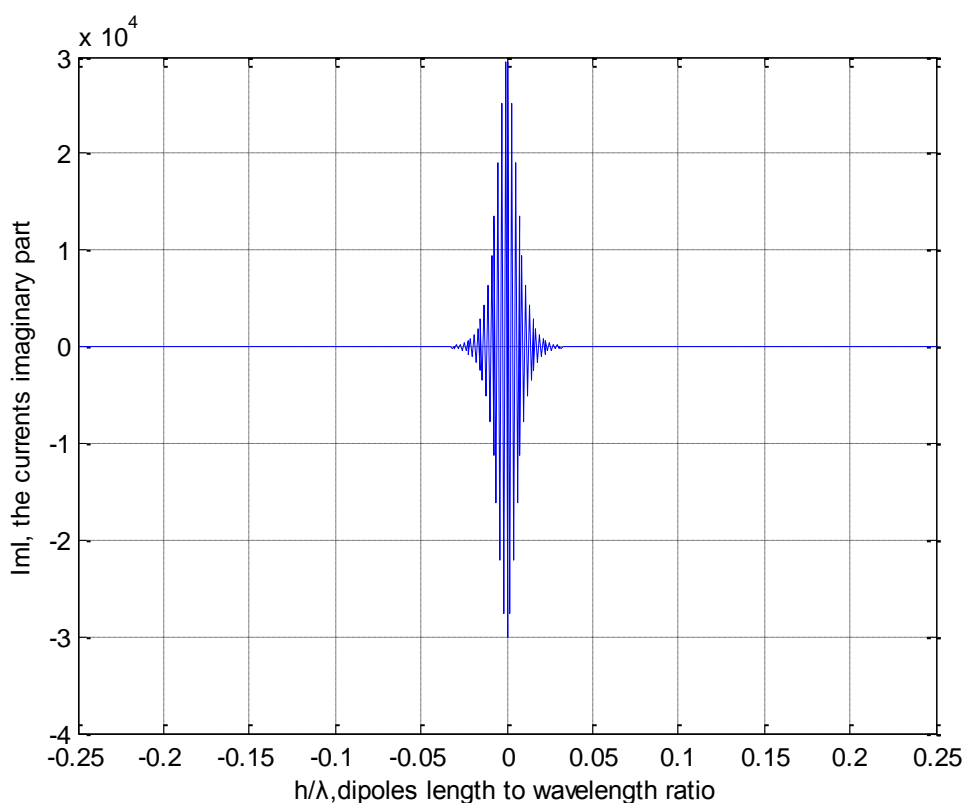
Σχήμα 2.5: Κατανομή του πραγματικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$



Σχήμα 2.6: Κατανομή του φανταστικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$

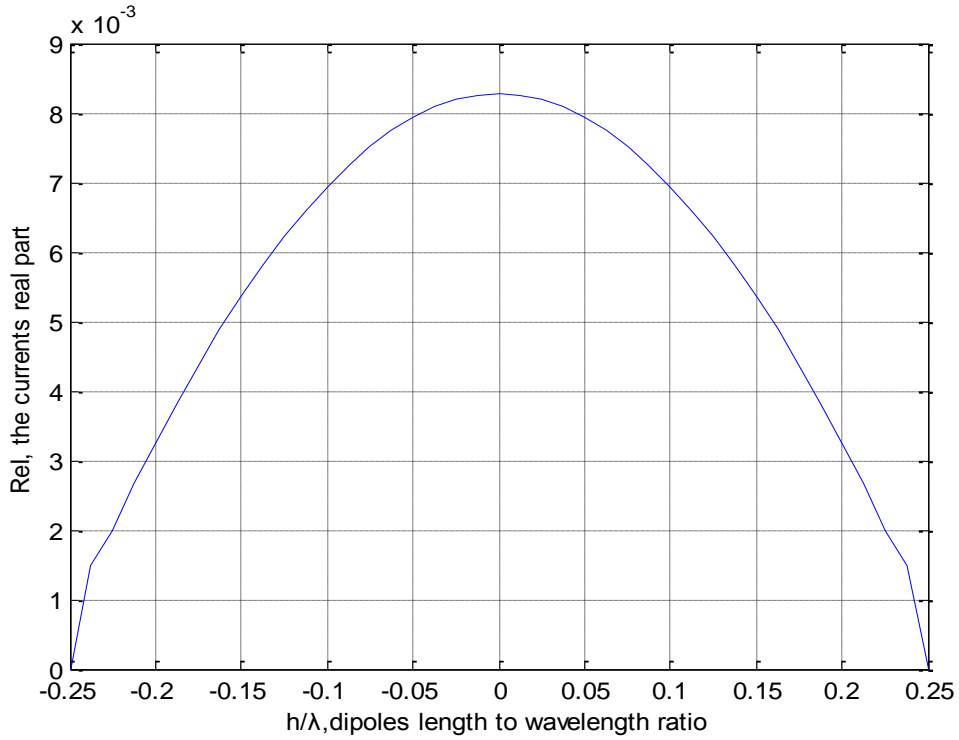


Σχήμα 2.7: Κατανομή του πραγματικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 250$

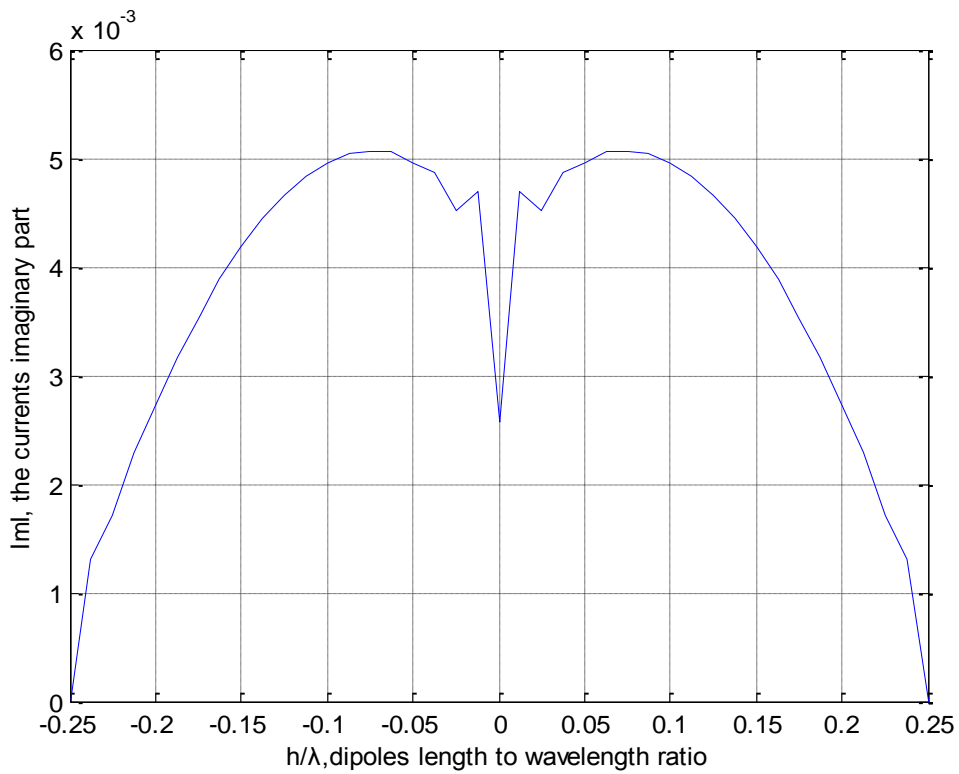


Σχήμα 2.8: Κατανομή του φανταστικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 150$

Από τη στιγμή που έχουμε θεωρήσει $V=1$, στον κατακόρυφο άξονα όλων των παραπάνω γραφημάτων θα απεικονίζεται η αγωγιμότητα της κεραίας (σε Siemens) για κάθε σημείο της $z = n \cdot z_0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$. Από παρατηρήσεις προκύπτει ότι οι ταλαντώσεις εμφανίζονται περίπου όταν το N γίνει μεγαλύτερο του h/a . Στα παραπάνω παραδείγματα $h/a \approx 36$. Αυτό επιβεβαιώνεται και από τις παρακάτω κατανομές όπου $N = 20 < h/a$ στα σχήματα 2.9 και 2.10.

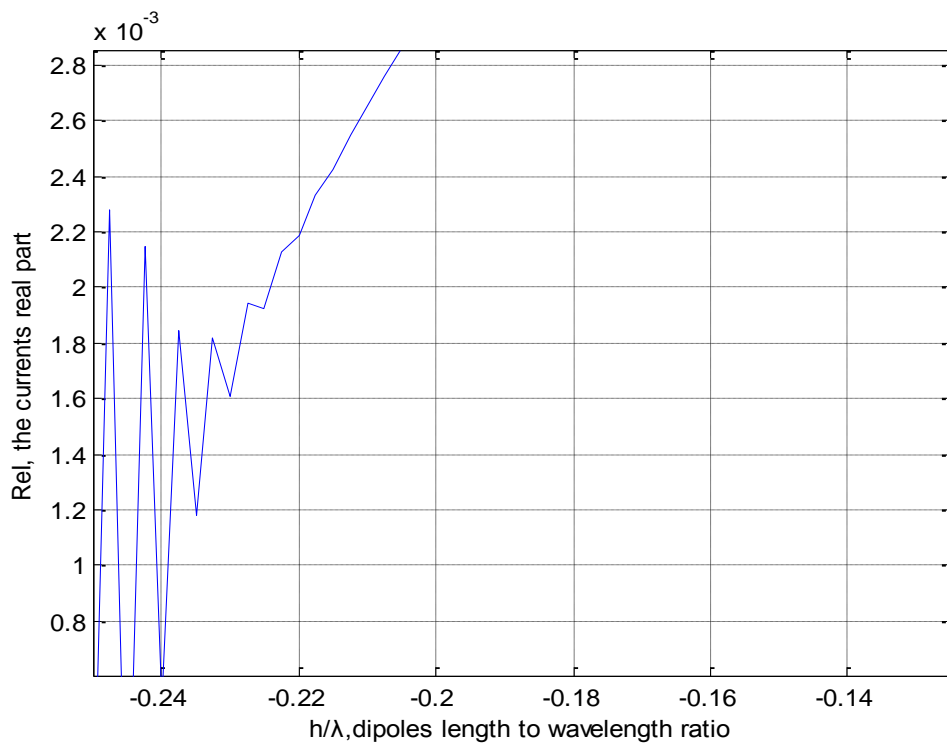


Σχήμα 2.9: Κατανομή του πραγματικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 20$

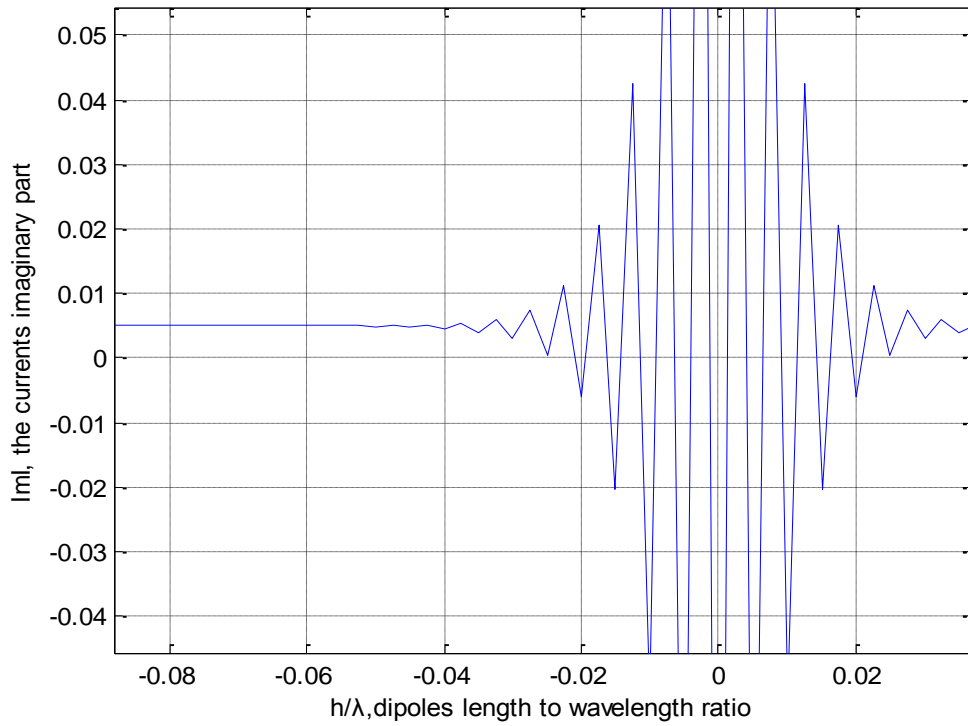


Σχήμα 2.10: Κατανομή του πραγματικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 20$

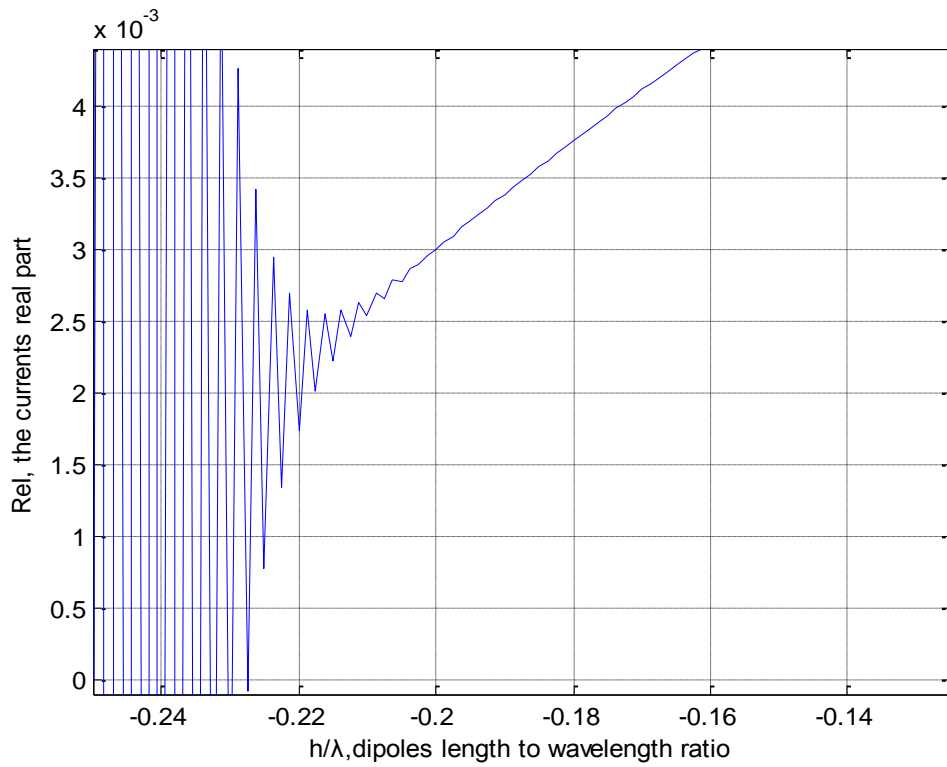
Το σημείο εμφάνισης των ταλαντώσεων στο σωληνοειδές δίπολο εξαρτάται επίσης από το N , το οποίο όσο αυξάνεται τόσο μεγαλύτερο μέρος καταλαμβάνουν οι ταλαντώσεις στο κέντρο και στα άκρα. Αυτό καταδεικνύεται και από τα γραφήματα 2.11 – 2.14 για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$ και $N=100, 200$.



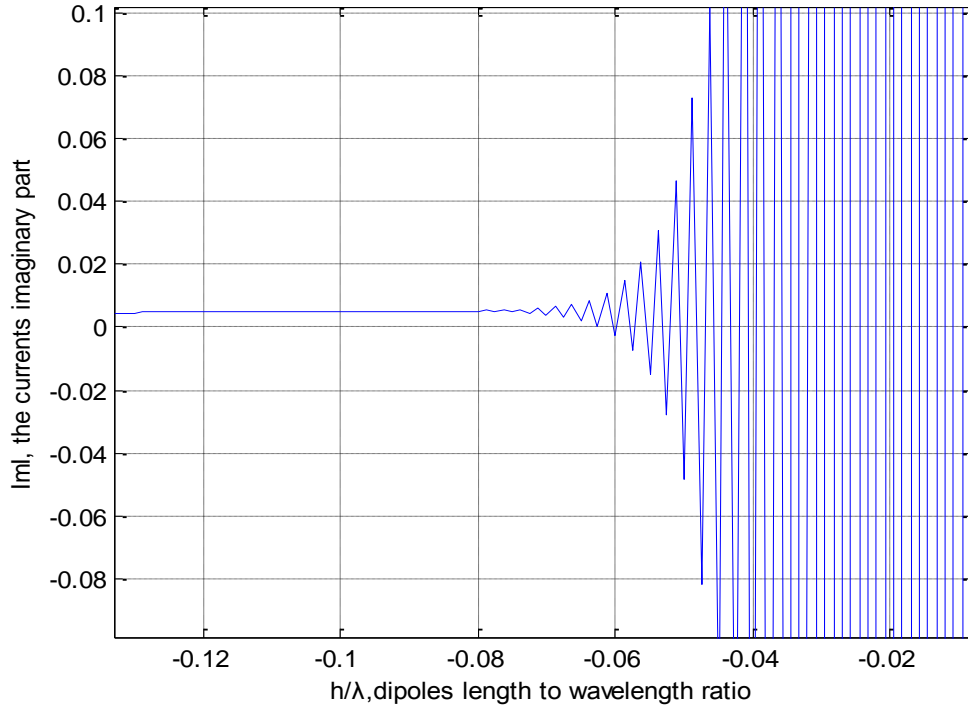
Σχήμα 2.11: Κατανομή του πραγματικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100$



Σχήμα 2.12: Κατανομή του φανταστικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100$



Σχήμα 2.13: Κατανομή του πραγματικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$



Σχήμα 2.14: Κατανομή του φανταστικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$

Οι ταλαντώσεις αυτές εν γένει οφείλονται στη μη διαφορισιμότητα του δεύτερου μέλους της εξίσωσης Hallén και στη διαφορισιμότητα που παρουσιάζει ο προσεγγιστικός πυρήνας για $z \rightarrow 0$ που οδηγεί και την εξίσωση να μην έχει λύση. Διαισθητικά, στα άκρα έχουμε ταλαντώσεις λόγω ασυνέχειας του μέσου και στο κέντρο διότι δεν είναι δυνατόν το πεδίο για $\rho = a$ να έχει συμπεριφορά $\delta(z)$.

2.3 Αριθμητικά αποτελέσματα την εξίσωση Hallén με χρήση του ακριβή πυρήνα

Στην περίπτωση του ακριβούς πυρήνα, όπου η εξίσωση έχει λύση, οι ταλαντώσεις αυτές εξαφανίζονται. Το σύστημα που επιλύουμε τότε είναι:

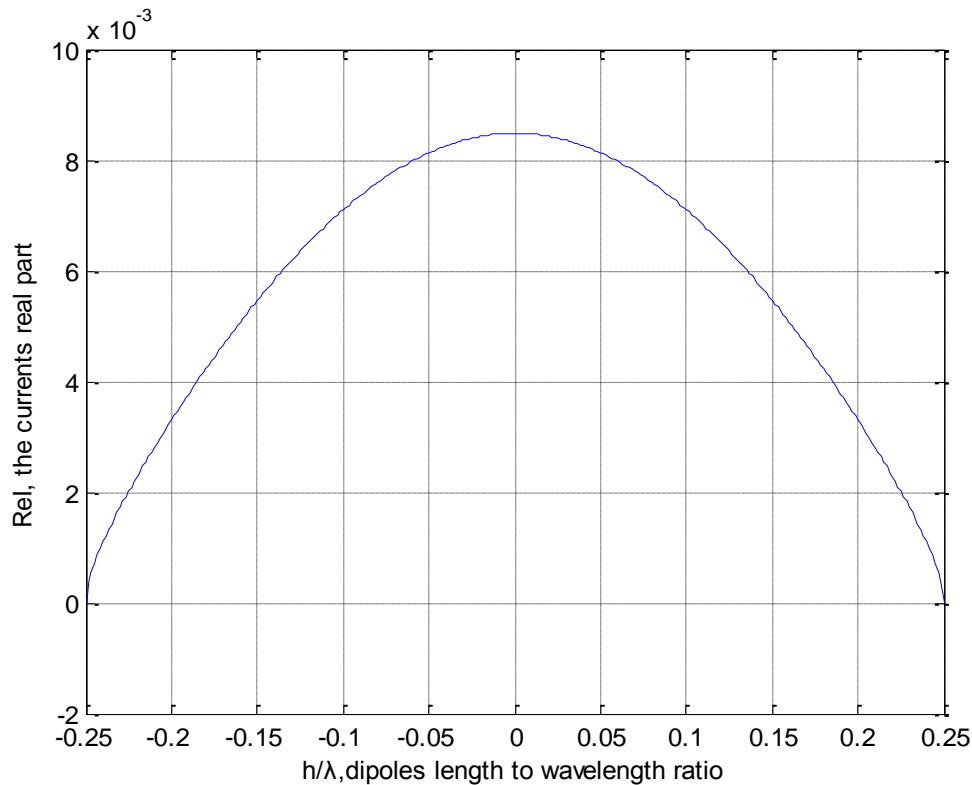
$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{1-n} \cdot I_n = \underbrace{\frac{i \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot V \cdot \sin(k \cdot |l| \cdot z_o)}_{B_l^{(1)}} + C \cdot \underbrace{z_o \cdot \cos(k \cdot l \cdot z_o)}_{B_l^{(2)}}$$

όπου: $A_l' = A_{-l}' = \int_0^{z_o} (z_o - z) \cdot [K_{ex}(z+l \cdot z_o) + K_{ex}(z-l \cdot z_o)] \cdot dz$ δηλαδή:

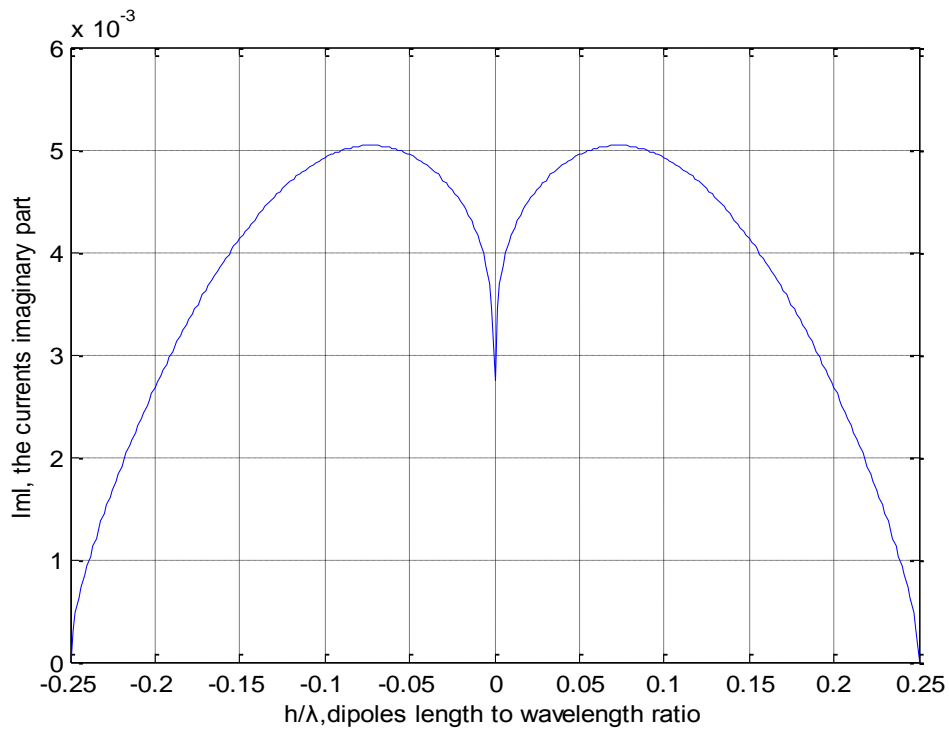
$$A_l' = A_{-l}' = \int_0^{z_o} (z_o - z) \cdot \left[\frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{e^{-i \cdot k \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (z+l \cdot z_o)^2}}}{\sqrt{4 \cdot a^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (z+l \cdot z_o)^2}} \cdot d\phi' + \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{e^{-i \cdot k \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (z-l \cdot z_o)^2}}}{\sqrt{4 \cdot a^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (z-l \cdot z_o)^2}} \cdot d\phi' \right] \cdot dz .$$

Προκειμένου να ξεπεράσουμε το πρόβλημα του απειρισμού του πυρήνα για $\theta = 0$ και για $z \rightarrow 0$, χωρίζουμε το ολοκλήρωμα του ακριβή πυρήνα σε δύο, εκ των οποίων το ένα είναι το ελλειπτικό ολοκλήρωμα που έχει τη λογαριθμική ανωμαλία (όπως περιγράψαμε στο πρώτο κεφάλαιο) και το άλλο υπολογίζεται ομαλά. Μια εκτενής αναφορά αυτού του ‘τεχνάσματος’ δίνεται στο [5, (9.1)-(9.6)].

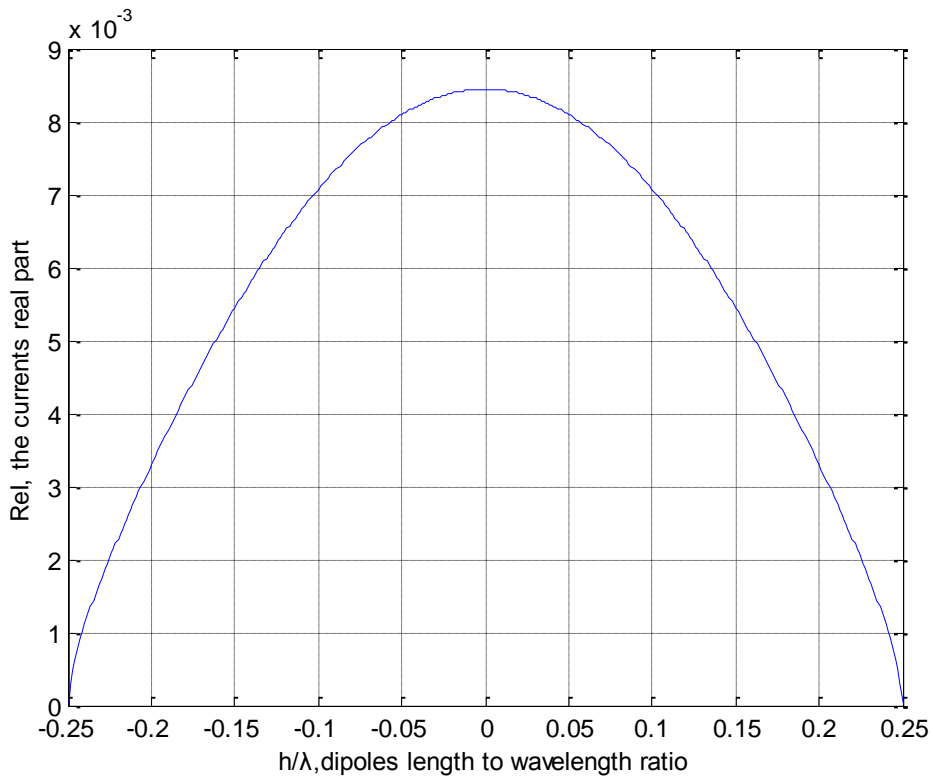
Τα αντίστοιχα με την περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα είναι τα γραφήματα 2.15- 2.20 :



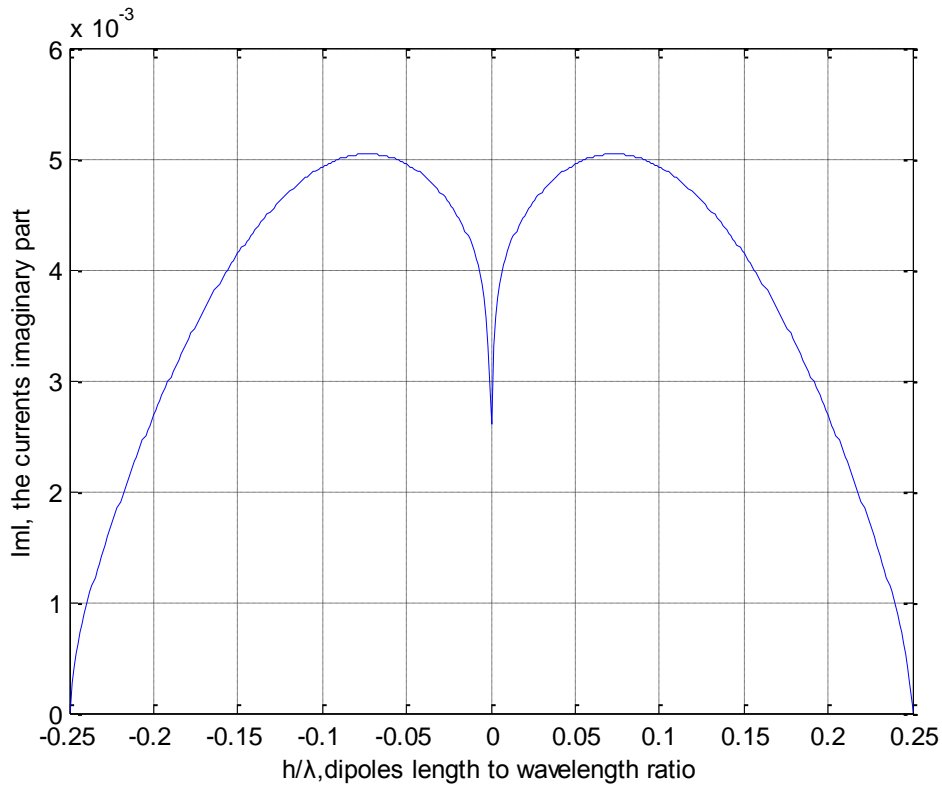
Σχήμα 2.15: Κατανομή του πραγματικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 150$



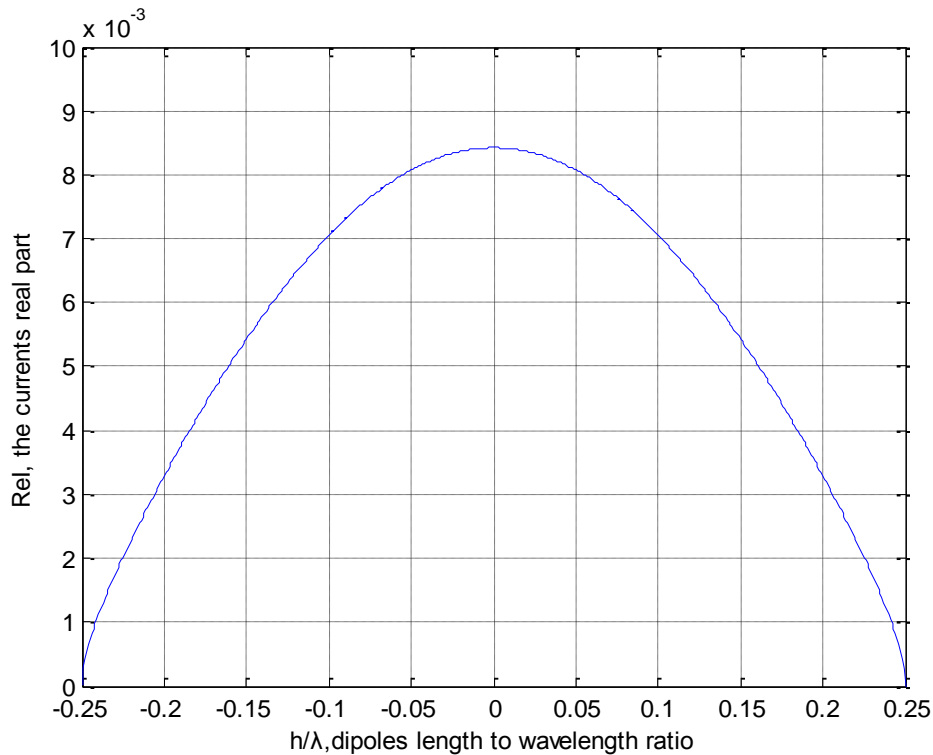
Σχήμα 2.16: Κατανομή του φανταστικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 150$



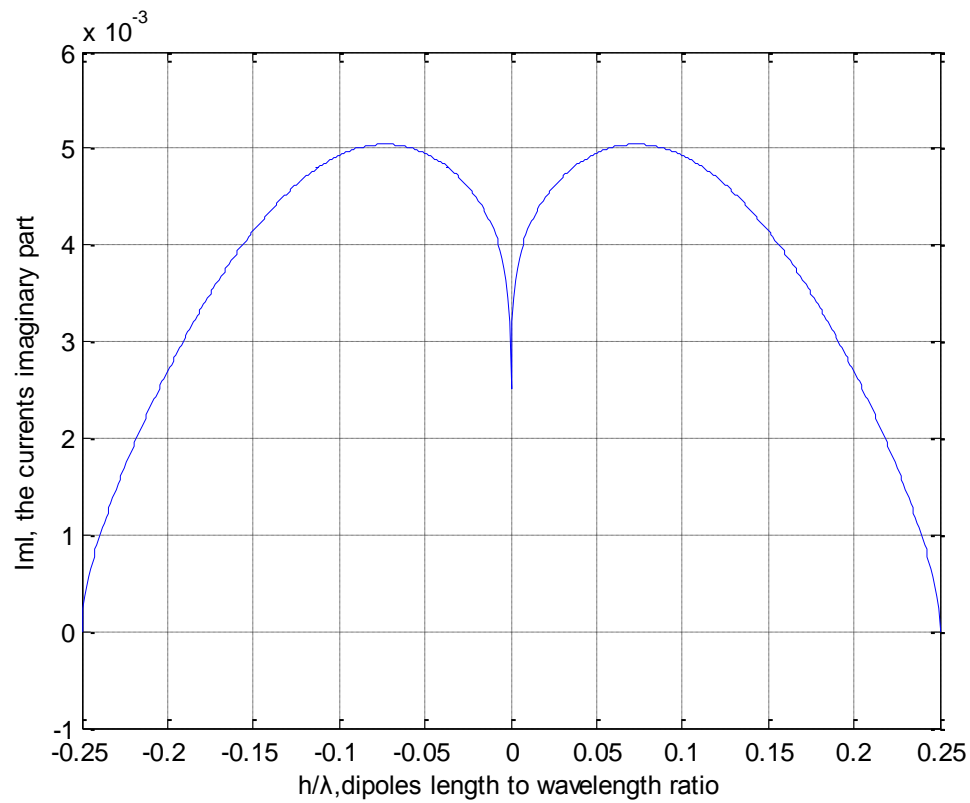
Σχήμα 2.17: Κατανομή του πραγματικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$



Σχήμα 2.18: Κατανομή του φανταστικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$



Σχήμα 2.19: Κατανομή του πραγματικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 250$



Σχήμα 2.20: Κατανομή του φανταστικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 250$

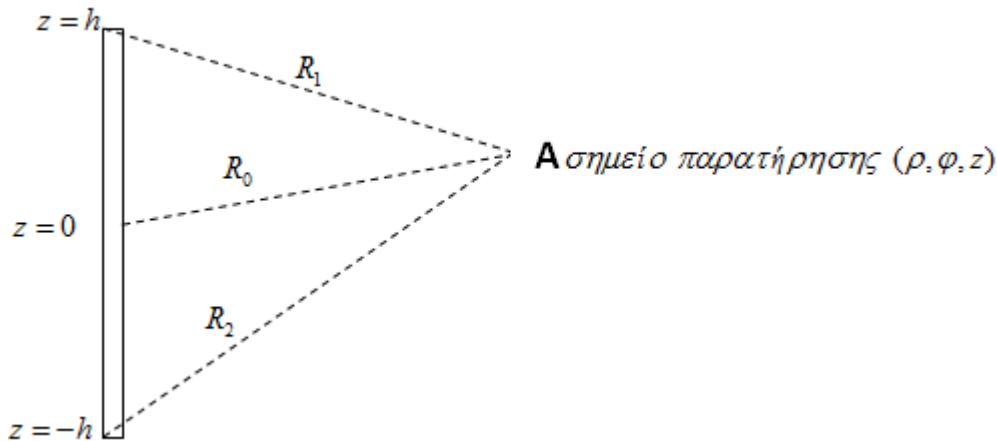
Κεφάλαιο 3: Εξομάλυνση ρευματικών κατανομών

3.1 Η μέθοδος της εξομάλυνσης

Για την αντιμετώπιση των ταλαντώσεων θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ροπών που χρησιμοποιεί ημιτονοειδείς συναρτήσεις βάσης και τριγωνικές συναρτήσεις δοκιμής, για τις οποίες έχουμε και τα αναλυτικά αποτελέσματα για ην άπειρη κεραία. Έτσι, το ρεύμα που διαρρέει το δίπολο μπορεί να γραφεί:

$$I(z) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} I_n \cdot s(z - n \cdot z_o) \quad (3.1) \quad \text{όπου: } s(z) = \begin{cases} \frac{\sin k(z_o - |z|)}{\sin(kz_o)}, & -z_o \leq z \leq z_o \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα κυλινδρικό δίπολο μήκους $2h$ όπως αυτό που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



στο οποίο υποτίθεται η ρευματική κατανομή: $I_d(z) = I_d(0) \cdot \frac{\sin[k(h - |z|)]}{\sin(kh)}$ (3.2).

Το ακριβές μαγνητικό πεδίο στο σημείο παρατήρησης (ρ, φ, z) σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι ίσο με:

$$H_{\phi,d}(\rho, z) = -\frac{i \cdot I_d(0)}{4 \cdot \pi \cdot \sin(kh) \cdot \rho} \cdot (e^{ikR_1} + e^{ikR_2} - 2 \cdot \cos(kh) \cdot e^{ikR_0}) \quad (3.3)$$

,όπου:

$R_1 = \sqrt{(h-z)^2 + \rho^2}$, $R_2 = \sqrt{(h+z)^2 + \rho^2}$, $R_0 = \sqrt{z^2 + \rho^2}$ είναι οι αποστάσεις του σημείου παρατήρησης από την κορυφή ($z=h$), τη βάση ($z=-h$) και το κέντρο

($z = 0$) του ημιτονοειδούς ρεύματος αντίστοιχα. Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι:

$$I_d(0, z) \triangleq \left[2\pi \cdot \rho \cdot H_{\phi, a}(\rho, z) \right]_{\rho=0} = \begin{cases} I(z), & -h \leq z \leq h \\ 0, & |z| \geq h \end{cases} \quad (3.4).$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο Galerkin που χρησιμοποιούμε, το ρεύμα $I(z)$ είναι μια σύνθεση επικαλυπτόμενων ημιτονοειδών ρευμάτων $I_n \cdot s(z - n \cdot z_o)$, όπου το ημιτονοειδές ρεύμα $\#n$ έχει ως κέντρο του το $z = n \cdot z_o$, κορυφή το $z = (n+1) \cdot z_o$ και βάση το $z = (n-1)z_o$. Το ρεύμα του κάθε κέντρου $z = n \cdot z_o$ είναι I_n . Έτσι, οι αποστάσεις του σημείου παρατήρησης (ρ, ϕ, z) από την κορυφή, τη βάση και το κέντρο του ρεύματος είναι αντίστοιχα:

$\sqrt{[(n+1) \cdot z_o - z]^2 + \rho^2}$, $\sqrt{[(n-1) \cdot z_o - z]^2 + \rho^2}$, $\sqrt{(n \cdot z_o - z)^2 + \rho^2}$. Το ημιτονοειδές ρεύμα $\#n$, λοιπόν δημιουργεί το μαγνητικό πεδίο:

$$H_{\phi_n} = -\frac{iI_n}{4\pi \cdot \sin(kz_o)\rho} \left(e^{ik\sqrt{[(n+1)z_o - z]^2 + \rho^2}} + e^{ik\sqrt{[(n-1)z_o - z]^2 + \rho^2}} - 2 \cdot \cos(k \cdot z_o) \cdot e^{ik\sqrt{(nz_o - z)^2 + \rho^2}} \right) \quad (3.5)$$

Έτσι λοιπόν το προτεινόμενο ρεύμα, για κάθε ακτίνα ρ και θέση z είναι:

$$I(\rho, z) = \frac{1}{2i \sin(kz_o)} \cdot \sum_{n=-N}^N I_n \left(e^{ik\sqrt{[(n+1)z_o - z]^2 + \rho^2}} + e^{ik\sqrt{[(n-1)z_o - z]^2 + \rho^2}} - 2 \cdot \cos(kz_o) \cdot e^{ik\sqrt{(nz_o - z)^2 + \rho^2}} \right) \quad (3.6)$$

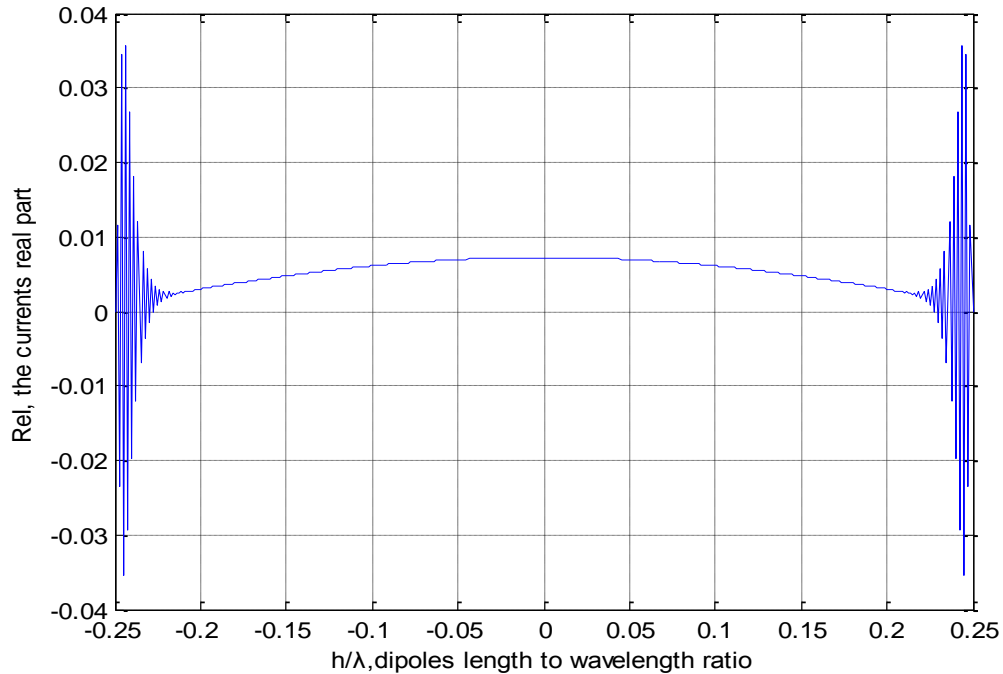
Στη θέση $\rho = a$, λοιπόν, το προτεινόμενο ρεύμα θα είναι:

$$I(a, z) = \frac{1}{2i \sin(kz_o)} \cdot \sum_{n=-N}^N I_n \left(e^{ik\sqrt{[(n+1)z_o - z]^2 + a^2}} + e^{ik\sqrt{[(n-1)z_o - z]^2 + a^2}} - 2 \cdot \cos(kz_o) \cdot e^{ik\sqrt{(nz_o - z)^2 + a^2}} \right) \quad (3.7)$$

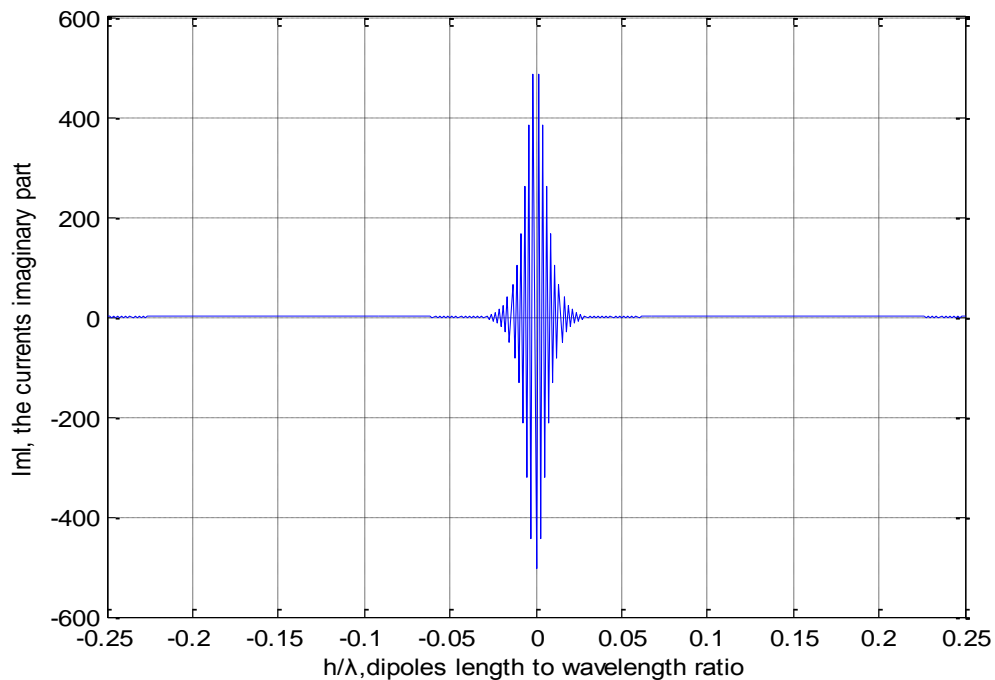
Η μέθοδος αυτή έχει προταθεί από τον Δρα Παπακανέλλο στο [7] και υλοποιήθηκε για την προεγγιστική θεώρηση του διπόλου Hertz από τους Ν. Λαύκα και Δ.Κούλικα στη διπλωματική τους εργασία.

3.2 Αριθμητικά αποτελέσματα της εξομάλυνσης

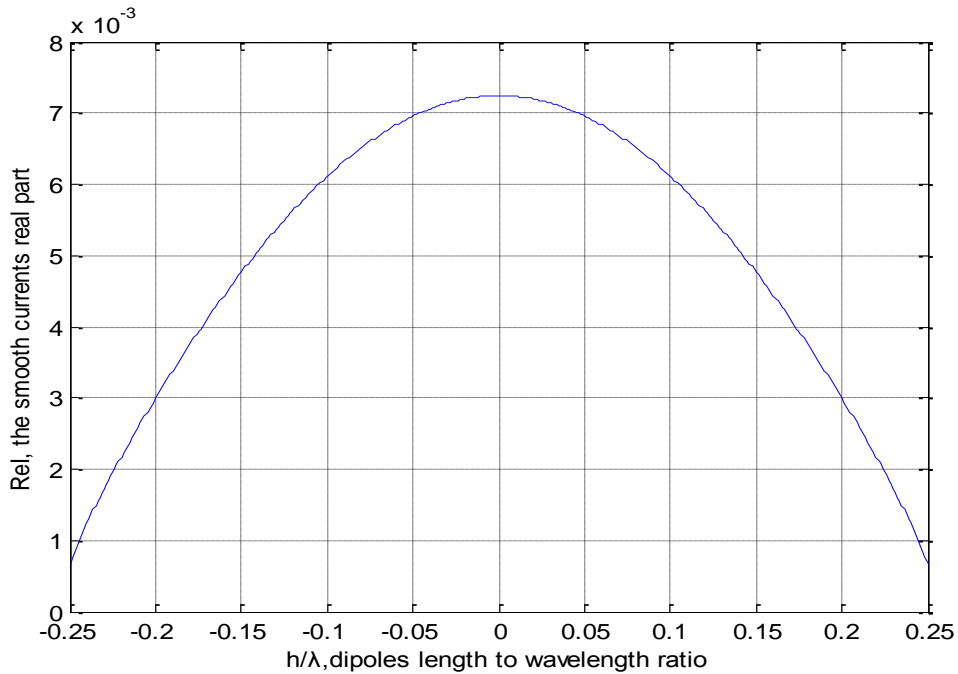
Ας δουμε την εξομάλυνση που επιτυγχάνουμε σε μια ταλαντούμενη ρευματική κατανομή που δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η κατανομή αυτή δίνεται στα σχήματα 3.1 και 3.2:



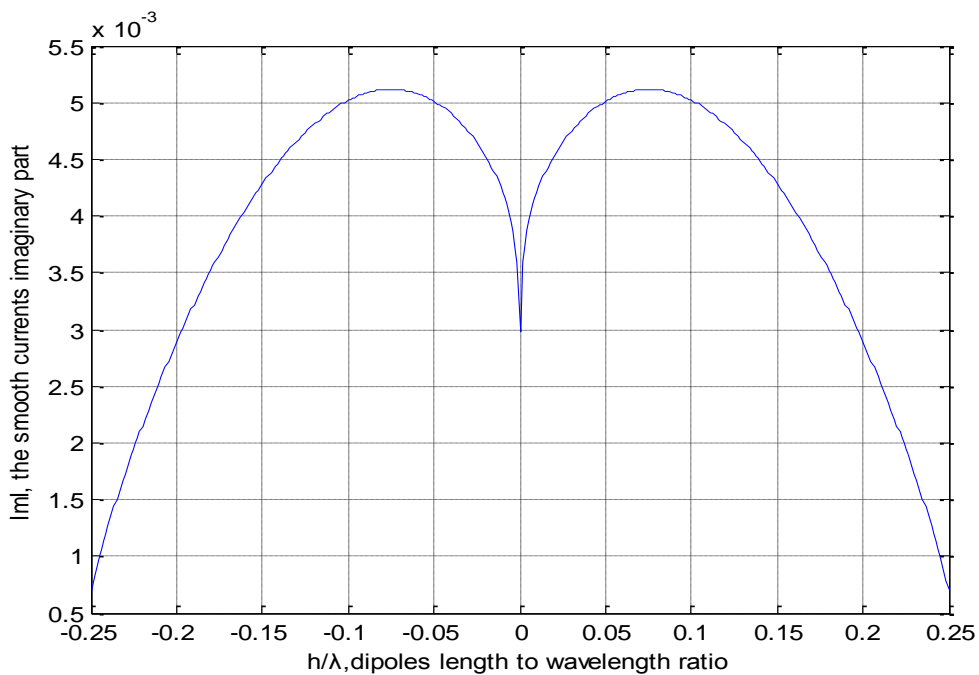
Σχήμα 3.1: Κατανομή του πραγματικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$



Σχήμα 3.2: Κατανομή του φανταστικού μέρους του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$ και το αντίστοιχο εξομαλυμένο ρεύμα για $\rho = a$ στα γραφήματα 3.3 και 3.4:

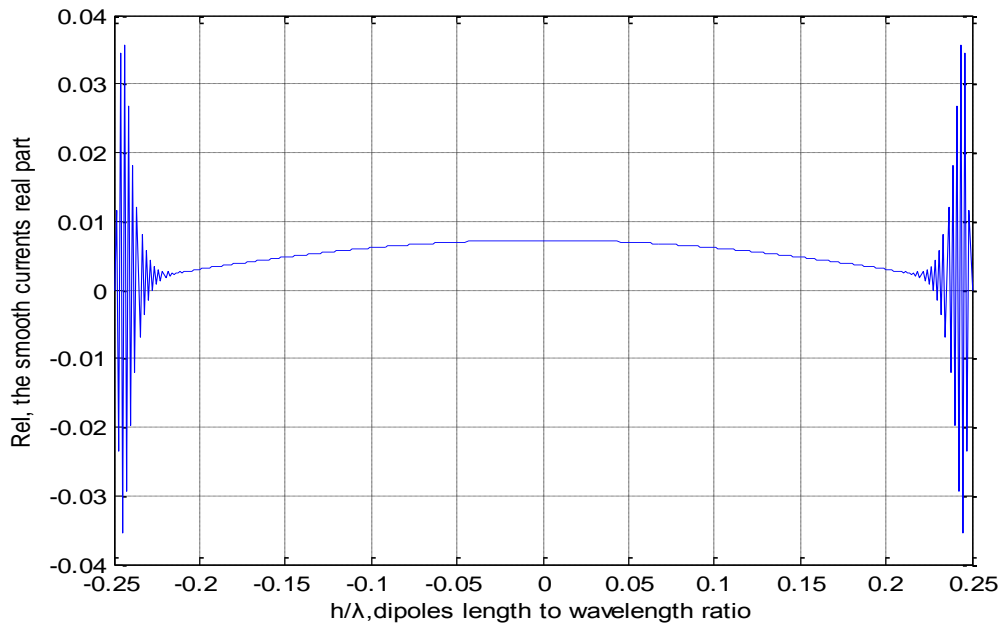


Σχήμα 3.3: Κατανομή του πραγματικού μέρους του προτεινόμενου (εξομαλυμένου) ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$ με $\rho = a$

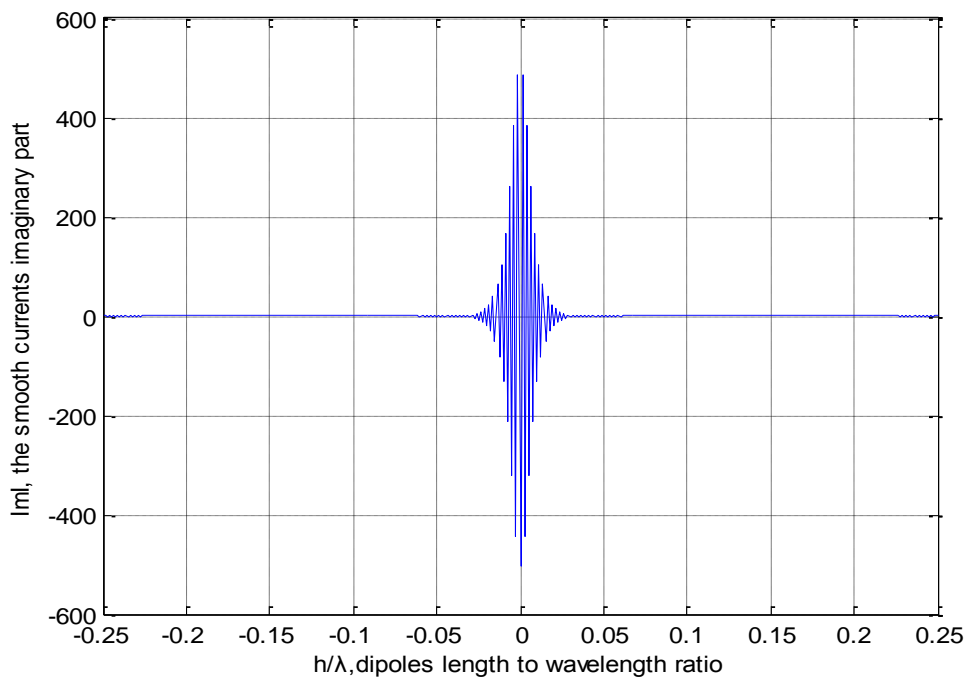


Σχήμα 3.4: Κατανομή του φανταστικού μέρους του προτεινόμενου (εξομαλωμένου) ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$ με $\rho = \alpha$

Επαληθεύουμε επίσης γραφικά στις παραστάσεις των σχημάτων 3.5 και 3.6 ότι $I(0, z) = I(z)$, δηλαδή για $\rho=0$ προκύπτει η γνωστή ταλαντούμενη μορφή:



Σχήμα 3.5: Κατανομή του πραγματικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$ με $\rho = 0$

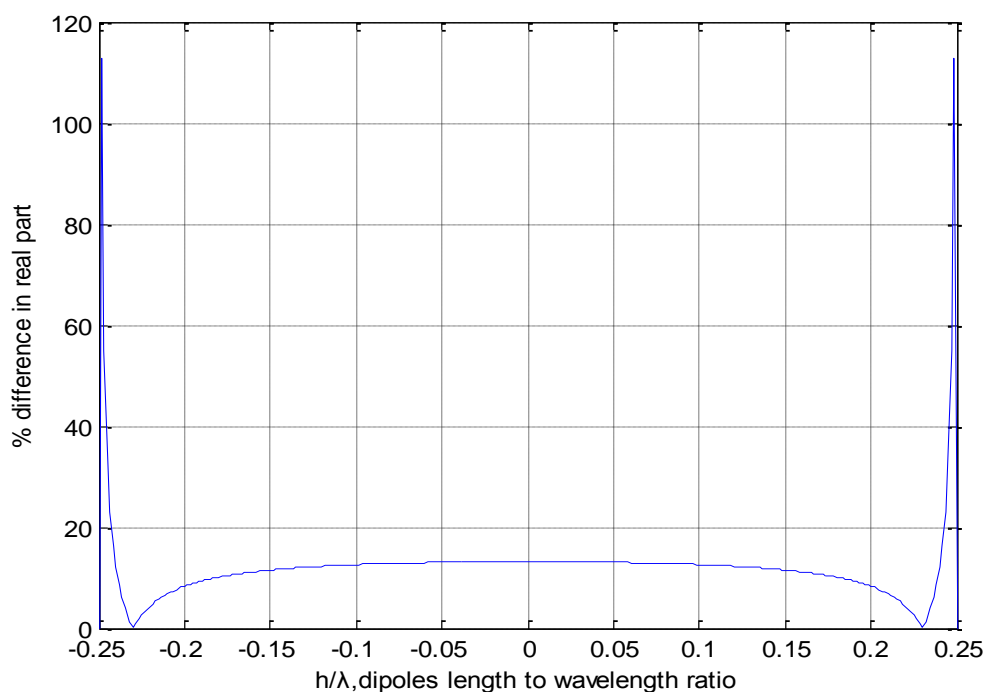


Σχήμα 3.6: Κατανομή του φανταστικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$ με $\rho = 0$

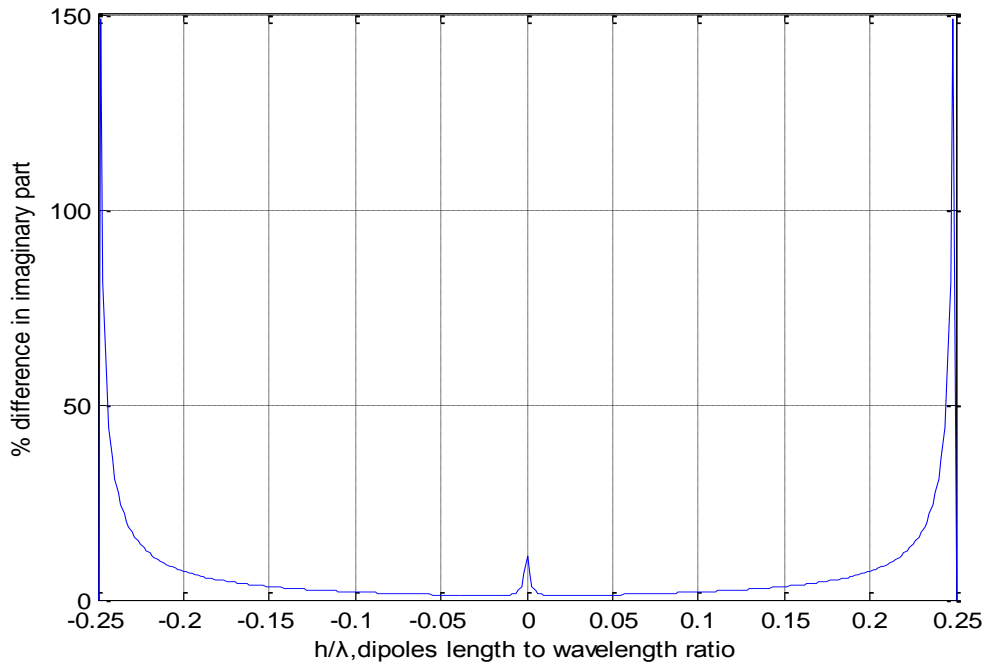
3.3 Αξιολόγηση της εξομάλυνσης:

Για την αξιολόγηση της ποιότητας της εξομάλυνσης, θα προβούμε σε σύγκριση με τα αριθμητικά αποτελέσματα λύσης της εξίσωσης Hallén με τον ακριβή πυρήνα, επισημαίνοντας τις ποσοστιαίες διαφορές των ρευματικών συντελεστών για κάθε $z = n \cdot z_0$. Σημειώνουμε ότι αποκλίσεις εν γένει είναι δικαιολογημένες διότι για να επιτευχθεί πλήρης εξομάλυνση πρέπει $N \rightarrow \infty$ για την άπειρη κεραία, όπως θα δείξουμε παρακάτω, τα αποτελέσματα παρόλα αυτά σε μερικές περιπτώσεις είναι εντυπωσιακά. Παραθέτουμε τις αντίστοιχες ομάδες γραφημάτων όπου μεταβάλλουμε κάθε φορά:

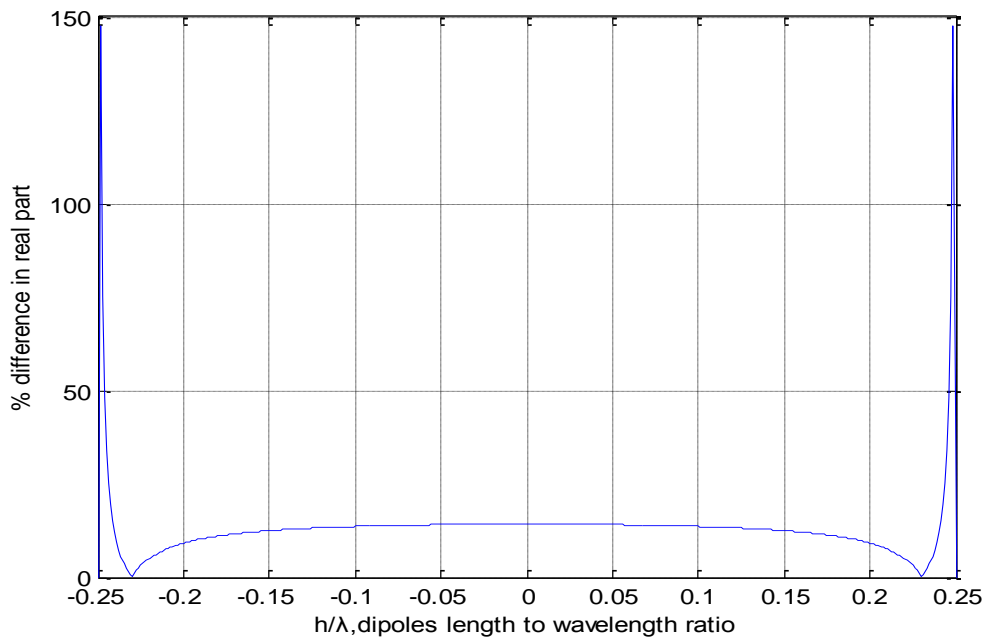
- Τον αριθμό των στοιχειωδων συναρτήσεων N , για τα γραφήματα 3.7 – 3.12:



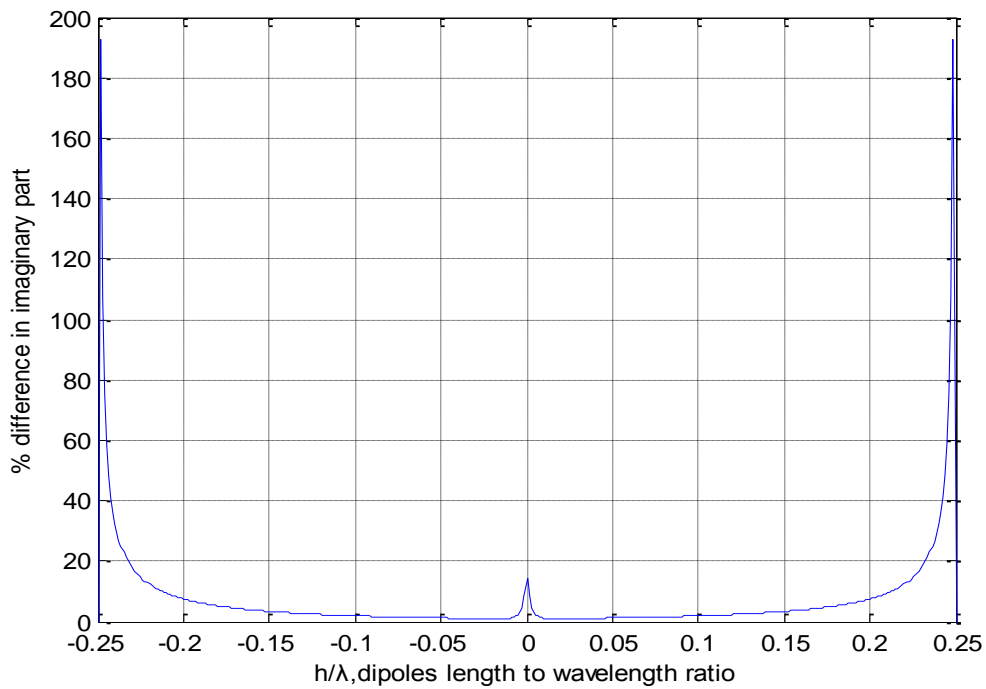
Σχήμα 3.7: Κατανομή των % διαφορών του πραγματικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το πραγματικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 150$ με $\rho = \alpha$



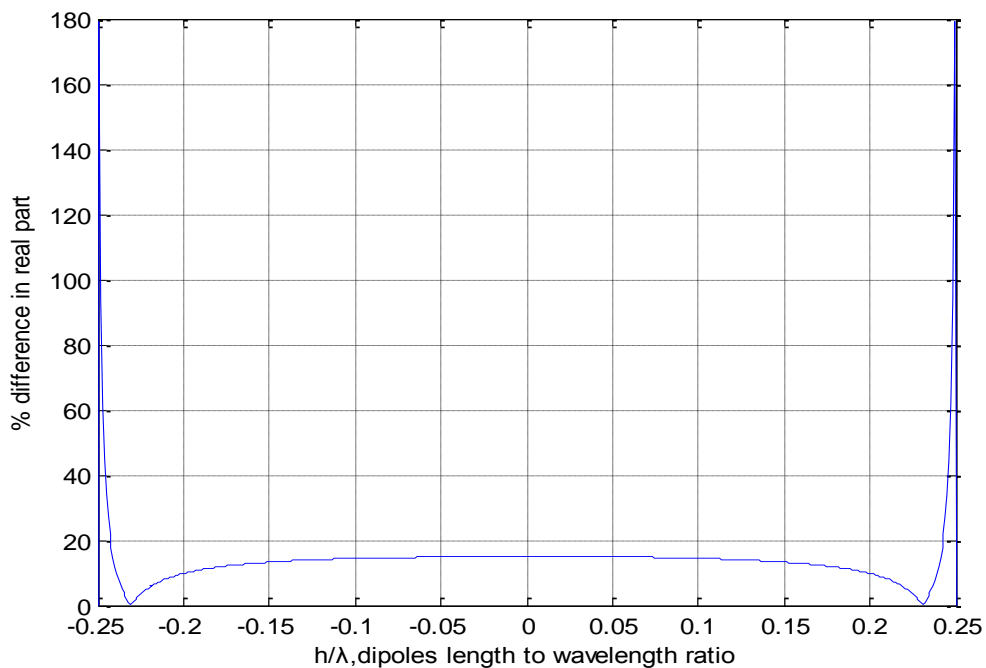
Σχήμα 3.8: Κατανομή των % διαφορών του φανταστικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το φανταστικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 150$ με $\rho = a$



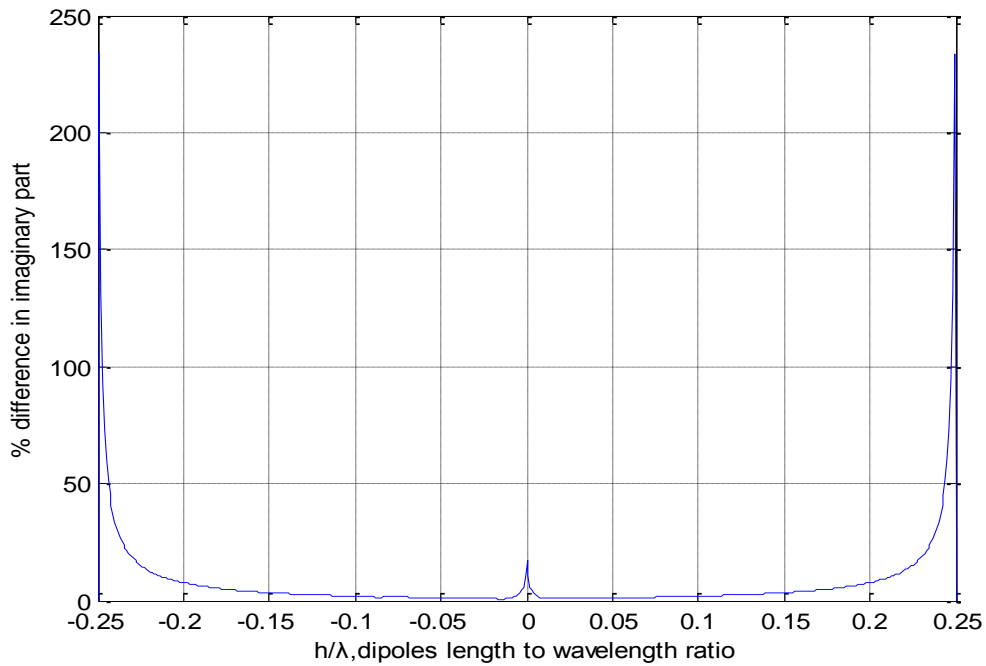
Σχήμα 3.9: Κατανομή των % διαφορών του πραγματικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το πραγματικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$ με $\rho = a$



Σχήμα 3.10: Κατανομή των % διαφορών του φανταστικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το φανταστικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$ με $\rho = a$

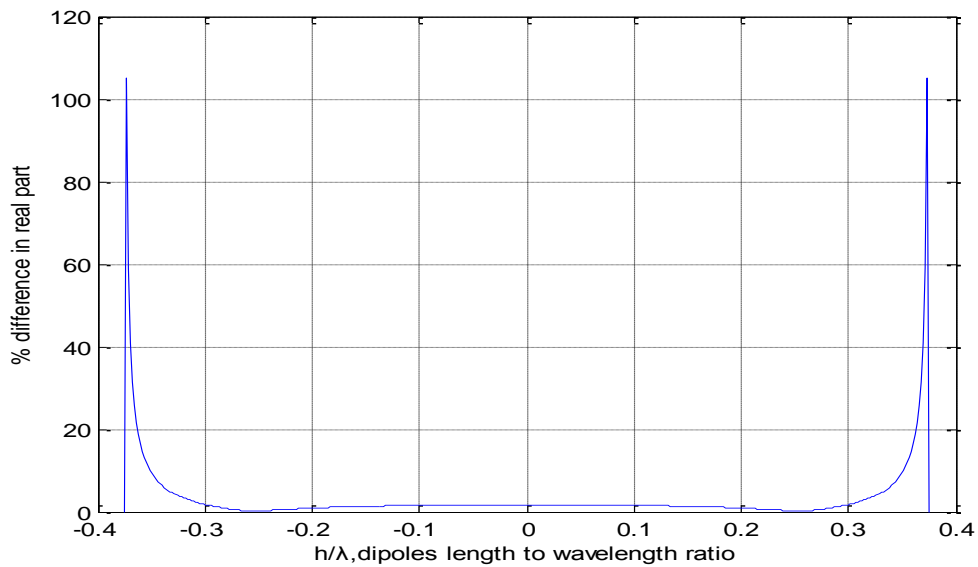


Σχήμα 3.11: Κατανομή των % διαφορών του πραγματικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το πραγματικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 250$ με $\rho = a$

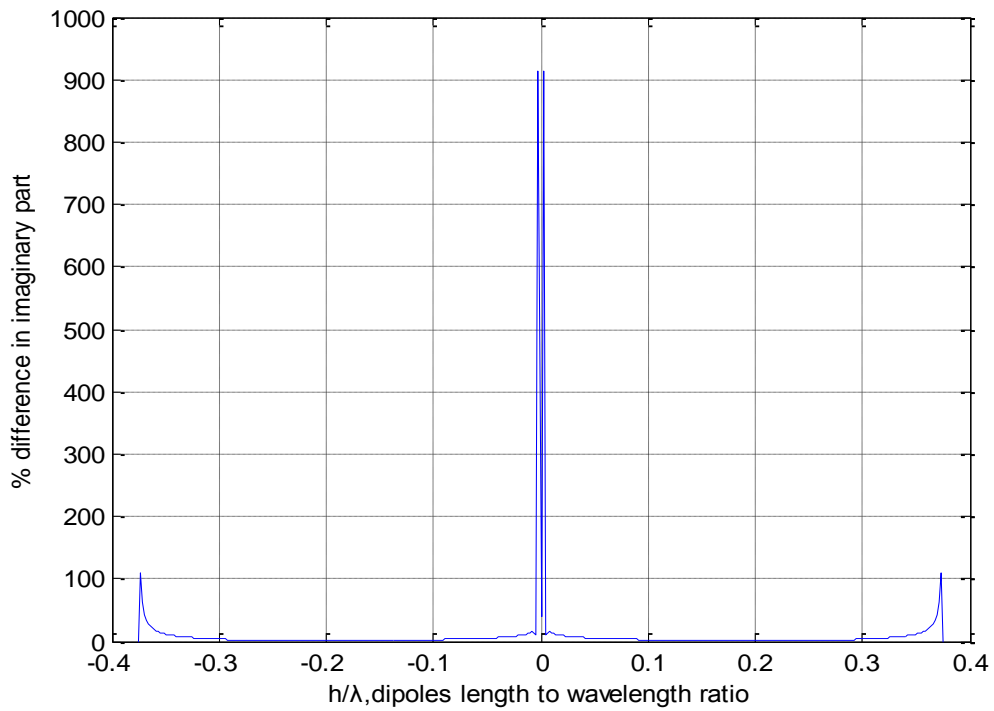


Σχήμα 3.12: Κατανομή των % διαφορών του φανταστικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το φανταστικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 250$ με $\rho = a$

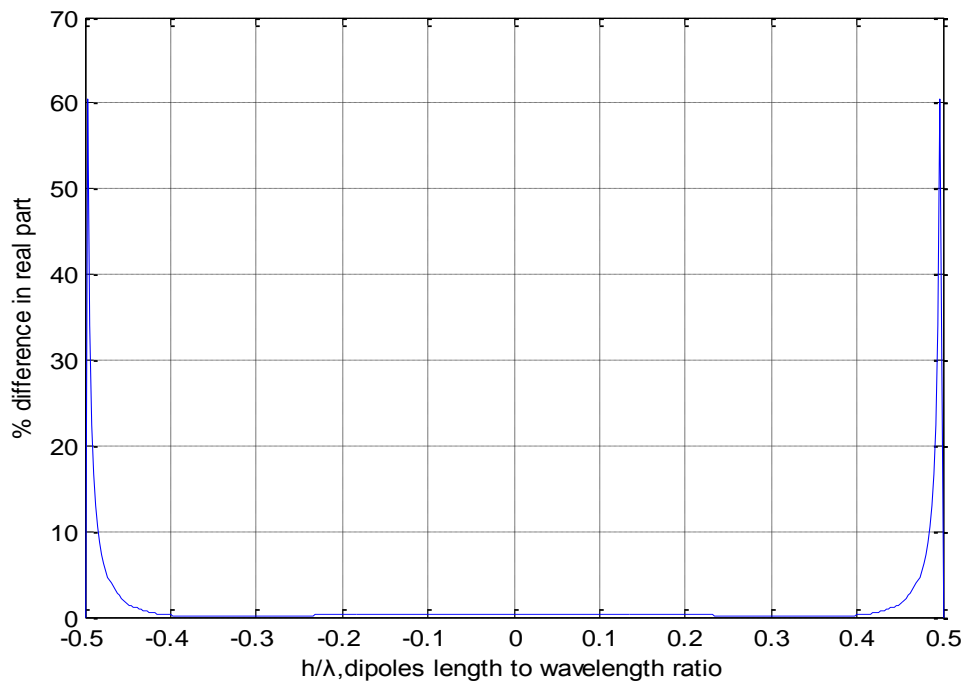
- Το λόγο h/a για τα γραφήματα 3.13 -3.16 :



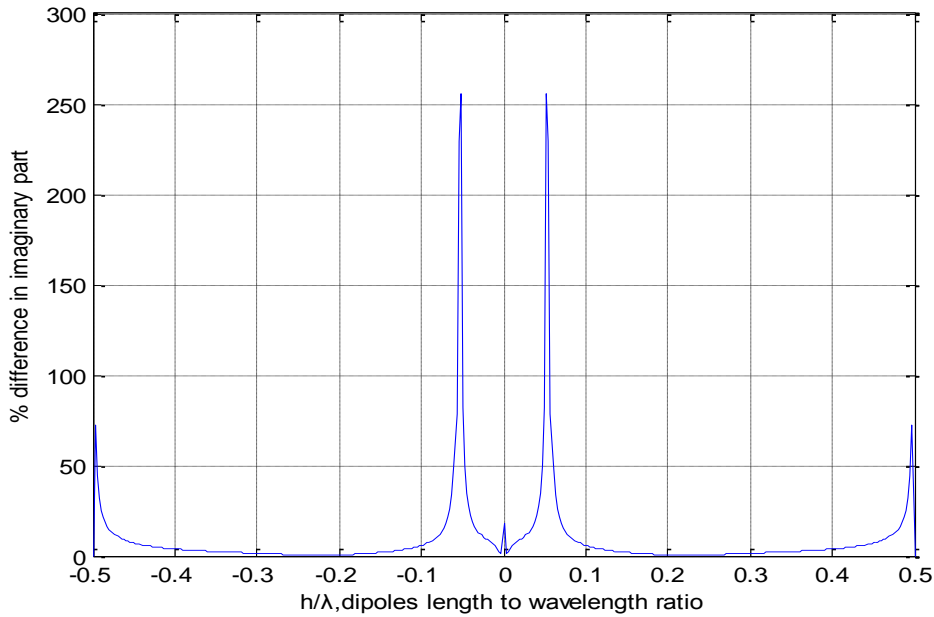
Σχήμα 3.13: Κατανομή των % διαφορών του πραγματικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το πραγματικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.375$, $N = 200$ με $\rho = a$



Σχήμα 3.14: Κατανομή των % διαφορών του φανταστικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το φανταστικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.375$, $N = 200$ με $\rho = \alpha$



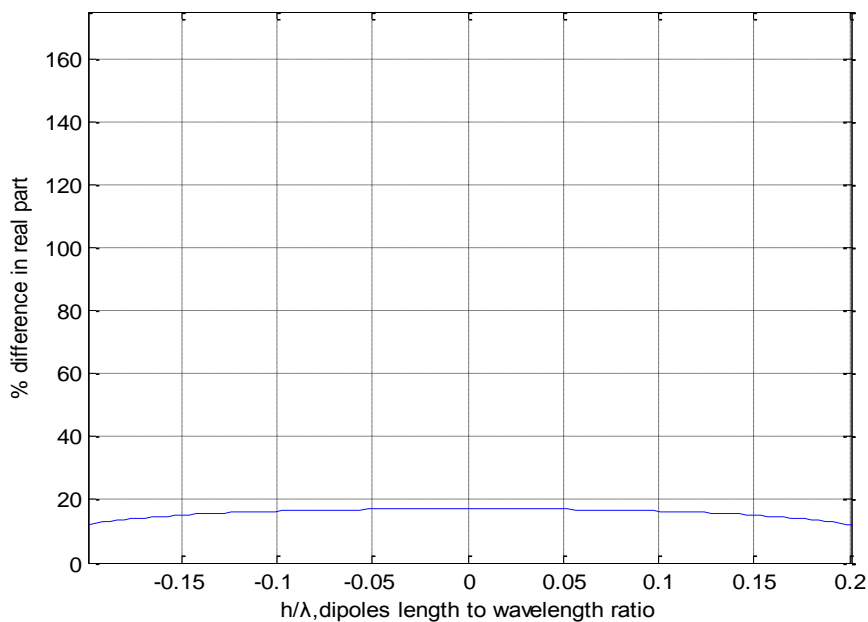
Σχήμα 3.15: Κατανομή των % διαφορών του πραγματικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το πραγματικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.5$, $N = 200$ με $\rho = a$



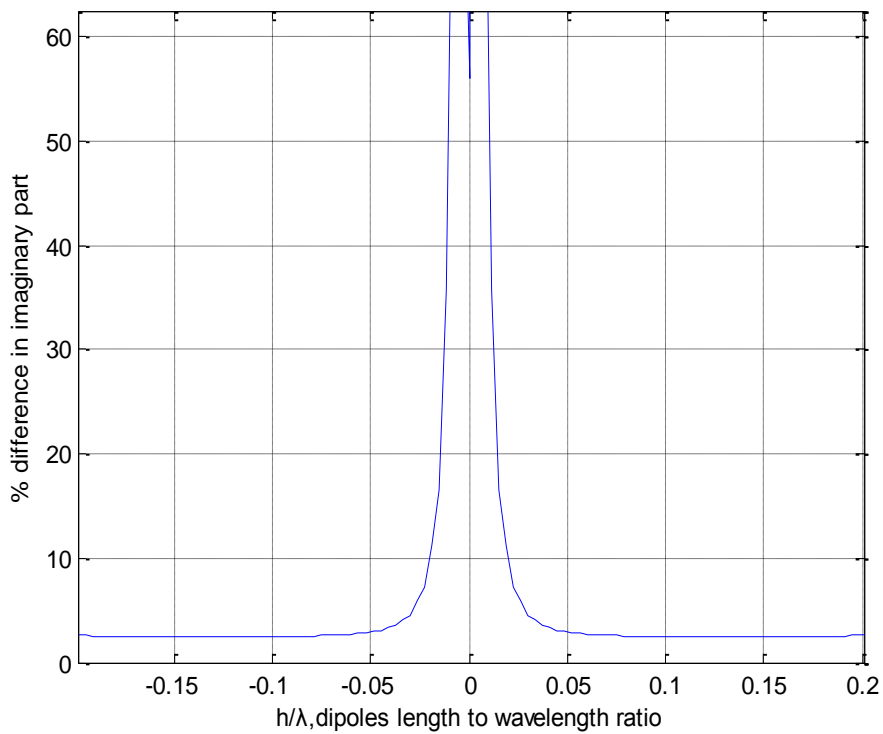
Σχήμα 3.16: Κατανομή των % διαφορών του φανταστικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το φανταστικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.5$, $N = 200$ με $\rho = a$

Τα παρατηρούμενα spikes οφείλονται στο μηδενισμό του ρεύματος που εξάγεται από τη Hallén επειδή το μήκος του διπόλου είναι μεγαλύτερο.

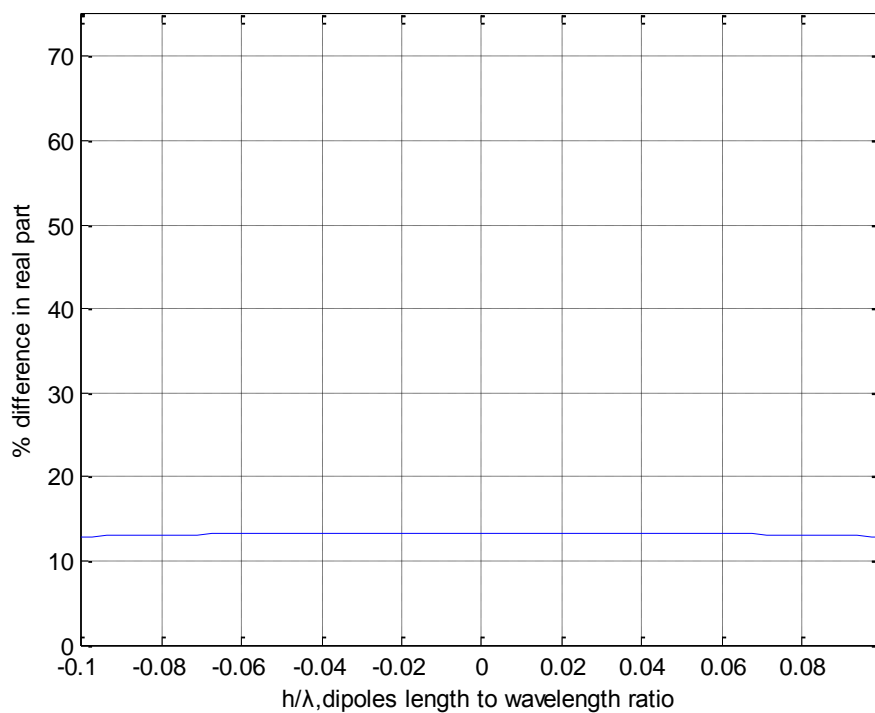
- Το λόγο a/λ για τα γραφήματα 3.17-3.21:



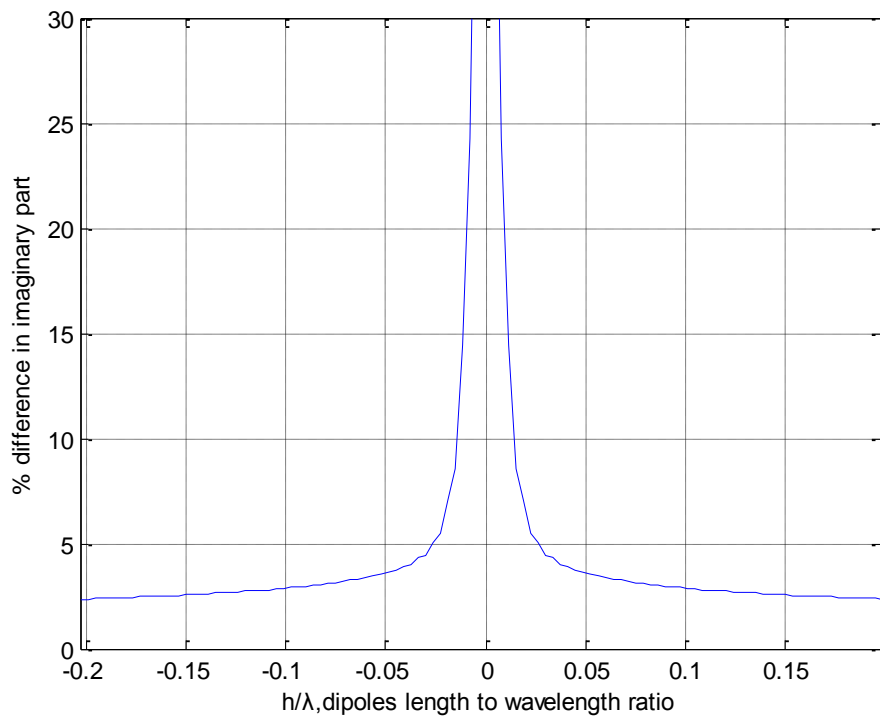
Σχήμα 3.17: Κατανομή των % διαφορών του πραγματικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το πραγματικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.02$, $h/\lambda = 0.75$, $N = 200$ με $\rho = a$



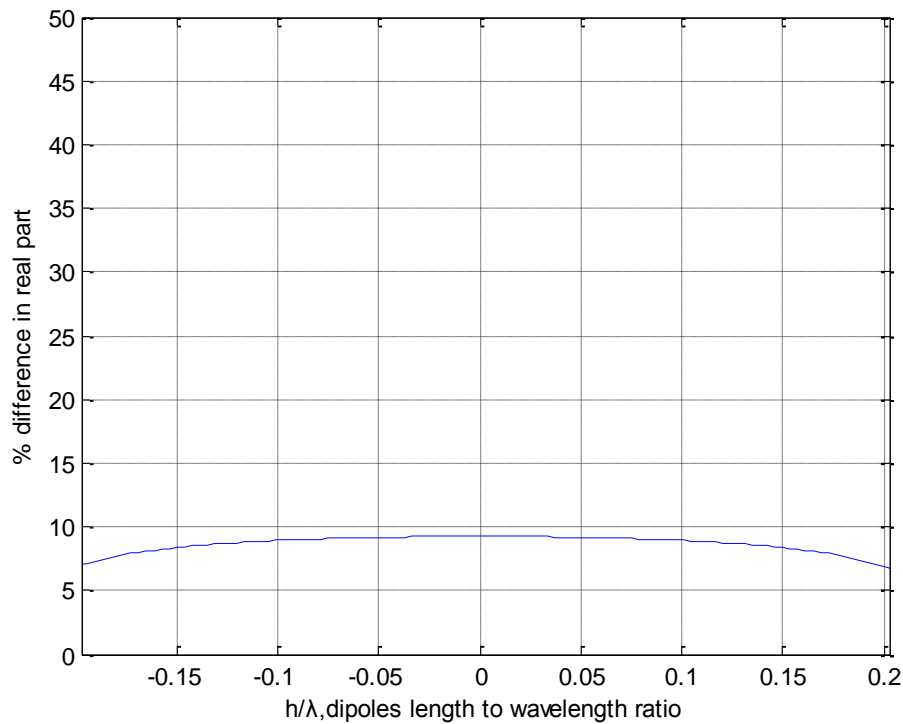
Σχήμα 3.18: Κατανομή των % διαφορών του φανταστικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το φανταστικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.02$, $h/\lambda = 0.75$, $N = 200$ με $\rho = a$



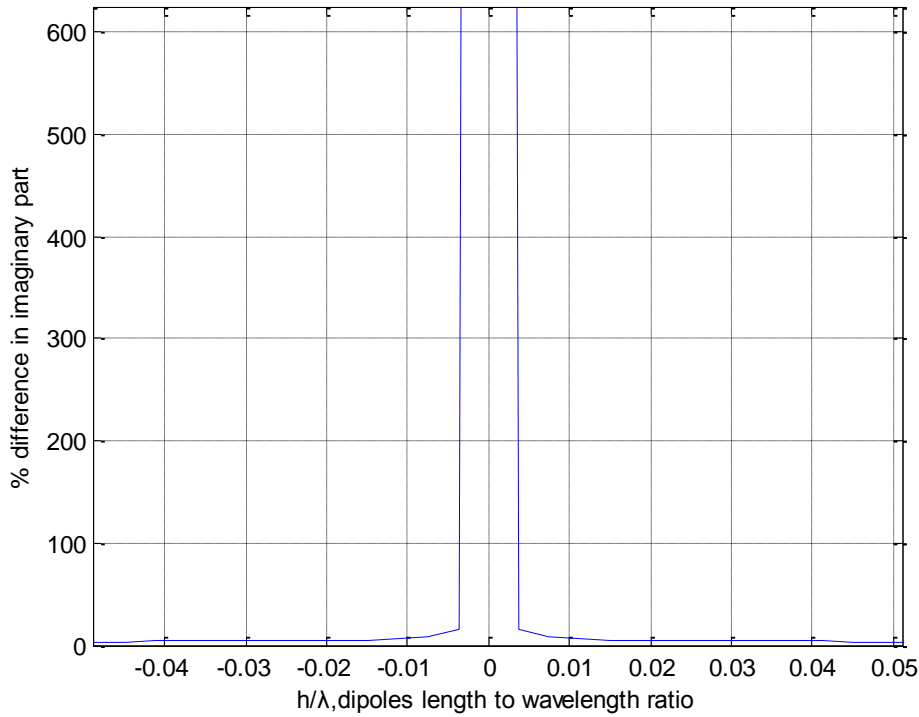
Σχήμα 3.18: Κατανομή των % διαφορών του πραγματικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το πραγματικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.015$, $h/\lambda = 0.75$, $N = 200$ με $\rho = a$



Σχήμα 3.19: Κατανομή των % διαφορών του φανταστικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το φανταστικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.015$, $h/\lambda = 0.75$, $N = 200$ με $\rho = a$



Σχήμα 3.20: Κατανομή των % διαφορών του πραγματικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το πραγματικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.01$, $h/\lambda = 0.75$, $N = 200$ με $\rho = a$



Σχήμα 3.21: Κατανομή των % διαφορών του φανταστικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος από το φανταστικό μέρος του ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του ακριβούς πυρήνα για $a/\lambda = 0.01$, $h/\lambda = 0.75$, $N = 200$ με $\rho = a$.

Στα παραπάνω διαγράμματα καταδεικνύεται η καλή επίδοση της μεθόδου της εξομάλυνσης με εντυπωσιακά αποτελέσματα σε μερικές περιπτώσεις παραμέτρων.

3.3 Εξέταση της σύγκλισης της μεθόδου εξομάλυνσης για την άπειρη κεραία

Θα εξετάσουμε τώρα τη σύγκλιση της μεθόδου ροπών με τριγωνικές συναρτήσεις δοκιμής και ημιτονοειδείς συναρτήσεις βάσης για την άπειρη κεραία. Η εξίσωση του Pocklington για το delta gap generator είναι:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} K(z-z') \cdot I(z') dz' = \frac{i \cdot V \cdot k}{\zeta_o} \cdot \delta(z) \quad (3.8), \text{ όπου τώρα στην περίπτωση της}$$

$$\text{άπειρης κεραίας: } I(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot s(z - n \cdot z_o) \quad (3.9).$$

Με χρήση των τριγωνικών συναρτήσεων δοκιμής $t(z - l \cdot z_o)$ λαμβάνουμε:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{1n} \cdot I_n = \frac{i \cdot V \cdot k}{\zeta_o} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) \cdot t(z - l \cdot z_o) dz = \begin{cases} 0, l \neq 0 \\ \frac{i \cdot V \cdot k}{\zeta_o}, l = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

όπου:

$$E_{ln} = \int_{(l-1) \cdot z_0}^{(l+1) \cdot z_0} t(z-l \cdot z_0) \cdot \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{(n-1) \cdot z_0}^{(n+1) \cdot z_0} s(z'-n \cdot z_0) \cdot K(z-z') \cdot I(z') dz' \right] dz. \quad (3.11)$$

Όπως αποδεικνύεται, ο E_{ln} είναι πίνακας Toeplitz (άρα το άπειρο σύστημα λύνεται ακριβώς) και τα στοιχεία του γράφονται ως E_{l-n} με :

$$E_l = \frac{k}{z_0 \cdot \sin(k \cdot z_0)} \cdot (A_{l+1} + A_{l-1} - 2 \cdot \cos(k \cdot z_0) \cdot A_l) \quad (3.12), \text{ όπου:}$$

$$A_l = \int_0^{z_0} [K(z+l \cdot z_0) + K(z-l \cdot z_0)] \cdot (z_0 - z) dz \quad (3.13).$$

Θα επιχειρήσουμε τώρα να επιλύσουμε το ισοδύναμο σύστημα :

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{ln} \cdot I_n \cdot e^{il\theta} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{i \cdot V \cdot k}{\zeta_0} \cdot \delta_l \cdot e^{il\theta} \quad (3.14).$$

Θεωρούμε λοιπόν:

$$E(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} E_l \cdot e^{il\theta} \quad (3.15)$$

και αναζητούμε ένα ρεύμα $I(\theta)$ τέτοιο ώστε:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{ln} \cdot I_n = \frac{i \cdot V \cdot k}{\zeta_0} \cdot \delta_l \Rightarrow E(\theta) \cdot I(\theta) = \frac{i \cdot V \cdot k}{\zeta_0} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta_l \cdot e^{il\theta} \Rightarrow E(\theta) \cdot I(\theta) = \frac{i \cdot V \cdot k}{\zeta_0} \quad (3.16)$$

$$\text{Αν } A(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l \cdot e^{il\theta} \quad (3.17)$$

τότε με αλλαγή του δείκτη άθροισης δείχνουμε ότι:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{l \pm 1} \cdot e^{il\theta} = e^{\pm i\theta} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l \cdot e^{il\theta} = e^{\pm i\theta} \cdot A(\theta) \quad (3.18), \text{ οπότε:}$$

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{k}{z_0 \cdot \sin(k \cdot z_0)} \cdot (A_{l+1} + A_{l-1} - 2 \cdot \cos(k \cdot z_0) \cdot A_l) \cdot e^{il\theta} = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{k}{z_0 \cdot \sin(k \cdot z_0)} \cdot A_{l+1} \cdot e^{il\theta} + \\ &+ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{k}{z_0 \cdot \sin(k \cdot z_0)} \cdot A_{l-1} \cdot e^{il\theta} - 2 \cdot \cos(k \cdot z_0) \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{k}{z_0 \cdot \sin(k \cdot z_0)} \cdot A_l \cdot e^{il\theta} = \\ &= \frac{k}{z_0 \cdot \sin(k \cdot z_0)} \cdot (e^{-i\theta} + e^{i\theta} - 2 \cdot \cos(k \cdot z_0)) \cdot A(\theta) = \\ &= \frac{2 \cdot k}{z_0 \cdot \sin(k \cdot z_0)} \cdot (\cos(\theta) - \cos(k \cdot z_0)) \cdot A(\theta) \end{aligned}$$

(3.19)

Συνεπώς, από τις (3.16) και (3.19) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot k}{z_o \cdot \sin(k \cdot z_o)} \cdot (\cos(\theta) - c \cos(k \cdot z_o)) \cdot A(\theta) \cdot I(\theta) &= \frac{i \cdot V \cdot k}{\zeta_o} \Rightarrow \\ \Rightarrow I(\theta) &= \frac{i \cdot V \cdot z_o \cdot \sin(k \cdot z_o)}{2 \cdot \zeta_o \cdot (\cos(\theta) - c \cos(k \cdot z_o)) \cdot A(\theta)} = \\ &= - \frac{i \cdot V \cdot z_o \cdot \sin(k \cdot z_o)}{4 \cdot \zeta_o \cdot \underbrace{\left(\sin\left(\frac{\theta + k \cdot z_o}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta - k \cdot z_o}{2}\right) \right)}_{B(\theta)}} \cdot \frac{1}{A(\theta)} = \quad (3.20) \\ &= \frac{B(\theta)}{A(\theta)} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\cos(\theta) - \cos(k \cdot z_o) = -2 \cdot \sin\left(\frac{\theta + k \cdot z_o}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta - k \cdot z_o}{2}\right).$$

Έτσι λοιπόν: $I(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot e^{i \cdot n \cdot \theta}$ (3.21) (ανάπτυξη σε μιγαδική σειρά Fourier), με τους

συντελεστές να υπολογίζονται:

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B(\theta)}{A(\theta)} e^{-i \cdot n \cdot \theta} d\theta \quad (3.22)$$

Θα δώσουμε τώρα μια έκφραση για την ποσότητα $A(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l \cdot e^{il\theta}$.

Έχουμε λοιπόν με τη βοήθεια της (2.7):

$$A(\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l \cdot e^{il\theta} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left\{ \int_0^{z_o} [K(z+l \cdot z_o) + K(z-l \cdot z_o)] \cdot (z_o - z) dz \right\}}_{F(l)} \cdot e^{il\theta} \quad (3.23).$$

Από τον τύπο αθροίσματος του Poisson, έχουμε:

$$\boxed{\sum_{l=-\infty}^{\infty} F(l) \cdot e^{il\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\theta-2\pi m) \cdot x} \cdot F(x) dx} \quad (3.24) \text{ έτσι ώστε:}$$

$$A(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\theta-2\pi m) \cdot x} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{z_o} [K(z+x \cdot z_o) + K(z-x \cdot z_o)] \cdot (z_o - z) dz \right)}_{F(x)} dx \quad (3.25)$$

Αν εναλλάξουμε τη σειρά της ολοκλήρωσης και πραγματοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $z \pm x \cdot z_o = t$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
A(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{z_0} (z_0 - z) \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(z+l \cdot z_0) \cdot e^{i(\theta-2\pi m) \cdot x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} K(z-l \cdot z_0) \cdot e^{i(\theta-2\pi m) \cdot x} dx \right] dz = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{z_0} (z_0 - z) \left[\frac{1}{z_0} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \cdot e^{i \frac{(\theta-2\pi m) \cdot (t-z)}{z_0}} dt + \frac{1}{z_0} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \cdot e^{i \frac{(\theta-2\pi m) \cdot (z-t)}{z_0}} dt \right] dz = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{z_0} (z_0 - z) \cdot \frac{1}{z_0} \left[\bar{K} \left(\frac{\theta - 2 \cdot m \cdot \pi}{z_0} \right) \cdot e^{-i \frac{(\theta-2\pi m) \cdot z}{z_0}} + \bar{K} \left(\frac{\theta - 2 \cdot m \cdot \pi}{z_0} \right) \cdot e^{i \frac{(\theta-2\pi m) \cdot z}{z_0}} \right] dz = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{K} \left(\frac{\theta - 2 \cdot m \cdot \pi}{z_0} \right) \cdot 2 \cdot \int_0^{z_0} \left(1 - \frac{z}{z_0} \right) \cdot \cos \left(\frac{(\theta - 2 \cdot m \cdot \pi) \cdot z}{z_0} \right) dz = \\
&= z_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{K} \left(\frac{\theta - 2 \cdot m \cdot \pi}{z_0} \right) \cdot 2 \cdot \underbrace{\int_0^1 (1-x) \cdot \cos((\theta - 2 \cdot m \cdot \pi) \cdot x) \cdot dx}_{= \frac{\sin^2(\theta/2)}{2 \cdot (m \cdot \pi - \theta/2)^2}}
\end{aligned}$$

Έτσι καταλήγουμε :

$$A(\theta) = z_0 \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \bar{K} \left(\frac{2 \cdot m \cdot \pi - \theta}{z_0} \right) \cdot \frac{\sin^2(\theta/2)}{(m\pi - \theta/2)^2} \right\} \quad (3.26) \text{ και}$$

$$B(\theta) = -i \cdot \frac{V}{\zeta_0} \cdot \frac{z_0}{4} \cdot \frac{\sin(k \cdot z_0)}{\sin\left(\frac{\theta + k \cdot z_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta - k \cdot z_0}{2}\right)} = \frac{V \cdot z_0}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ikz_0|l|} \cdot e^{il\theta} \quad (3.27), \quad \text{όπου}$$

$$\bar{K}_{ap}(\zeta) = \begin{cases} (l/4) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}), & |\zeta| < k \\ (1/2\pi) \cdot K_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}), & |\zeta| > k \end{cases} \quad (3.28) \text{ είναι ο}$$

Μετασχηματισμός Fourier του προσεγγιστικού πυρήνα $K_{ap}(z)$, ήτοι:

$$\bar{K}_{ap}(\zeta) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{z^2+a^2}} \cdot e^{i\zeta z} dz.$$

Η σχέση (3.22) ισχύει για $\text{Im}(k) > 0$ και μπορεί να επεκταθεί για θετικά πραγματικά k αν η καμπύλη ολοκλήρωσης παρακάμψει τα σημεία $\theta = k \cdot z_0$ και $\theta = -k \cdot z_0$ από κάτω και από πάνω αντίστοιχα.

Με αναφορά στη σχέση (3.6), τώρα, στην περίπτωση της άπειρης κεραίας το προτεινόμενο ρεύμα θα είναι:

$$I(\rho, z) = \frac{1}{2i \sin(kz_0)} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \left(e^{ik\sqrt{(n+1)z_0-z|^2+\rho^2}} + e^{ik\sqrt{(n-1)z_0-z|^2+\rho^2}} - 2 \cdot \cos(kz_0) \cdot e^{ik\sqrt{(nz_0-z)^2+\rho^2}} \right) \quad (3.29).$$

Με τη βοήθεια της (3.22) λαμβάνουμε:

$$I(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B(\theta)}{A(\theta)} \cdot D(\theta) d\theta \text{ με}$$

$$D(\theta) = \frac{1}{2i \sin(kz_o)} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta} \cdot \left(e^{ik\sqrt{(n+1)z_o-z]^2+\rho^2}} + e^{ik\sqrt{(n-1)z_o-z]^2+\rho^2}} - 2 \cdot \cos(kz_o) \cdot e^{ik\sqrt{(nz_o-z)^2+\rho^2}} \right) \quad (3.30)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι το άθροισμα της (3.30) συγκλίνει για $k > 0$ άλλα δεν μπορεί να χωριστεί σε τρία αθροίσματα διότι κάθε ξεχωριστό άθροισμα αποκλίνει.

$$\text{Με } F(\theta) = \frac{V \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik\sqrt{(nz_o-z)^2+\rho^2}} \cdot e^{-in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot e^{-in\theta} \quad (3.31), \text{Im } k > 0 \text{ έχουμε:}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n\pm 1} \cdot e^{-in\theta} = e^{\pm i\theta} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot e^{-in\theta} = e^{\pm i\theta} F(\theta) \quad (3.32)$$

με την (3.30) και πάλι όπως και στην (3.19) να μπορεί να γραφτεί:

$$\begin{aligned} D(\theta) &= \frac{\zeta_o}{i \cdot V \cdot z_o \cdot \sin(kz_o)} \cdot (e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2 \cdot \cos(kz_o)) \cdot F(\theta) = \\ &= \frac{2 \cdot \zeta_o}{i \cdot V \cdot z_o \cdot \sin(kz_o)} \cdot (\cos \theta - \cos(kz_o)) \cdot F(\theta) = \quad (3.33). \\ &= \frac{i \cdot 4 \cdot \zeta_o}{V \cdot z_o \cdot \sin(kz_o)} \cdot \sin\left(\frac{(\theta + kz_o)}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{(\theta - kz_o)}{2}\right) \cdot F(\theta) \end{aligned}$$

$$\text{Οι (3.21), (3.22) και (3.33) δίνουν: } I(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(\theta)}{A(\theta)} \cdot d\theta \quad (3.34).$$

Ας παρατηρήσουμε ότι από την (3.33), για $z = m \cdot z_o$ ($m \in \mathbb{Z}$) και $\rho=0$, έχουμε:

$$F(\theta)_{\substack{z=mz_o \\ \rho=0}} = \frac{V \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik|n-m|z_o} \cdot e^{-in\theta}, \text{ Θέτοντας } l = n - m \text{ και από την (3.27) έχουμε:}$$

$$F(\theta)_{\substack{z=mz_o \\ \rho=0}} = e^{-im\theta} \cdot \frac{V \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ik|l|z_o} \cdot e^{-il\theta} = e^{-im\theta} B(\theta) \text{ έτσι ώστε η (3.34) να γίνει:}$$

$$I(0, m \cdot z_o) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} \cdot \frac{B(\theta)}{A(\theta)} d\theta = I_m \text{ (από την (3.22)) ,δηλαδή το προτεινόμενο}$$

ρεύμα στα σημεία $(\rho, z) = (0, m \cdot z_o)$ πάνω στον άξονα z ισούται με την ταλαντούμενη ρευματική κατανομή όπως δείξαμε στο γράφημα του σχήματος 3.5 !

Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε εκ νέου τον τύπο αθροίσματος Poisson σύμφωνα με τον οποίο:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) \cdot e^{in\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\theta-2\pi m) \cdot x} \cdot g(x) dx$$

Αν τον εφαρμόσουμε στην $F(\theta) = \frac{V \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik\sqrt{(n \cdot z_o + z)^2 + \rho^2}} \cdot e^{in\theta}$ με

$g(n) = e^{ik\sqrt{(n \cdot z_o + z)^2 + \rho^2}}$ και πραγματοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής

$z + x \cdot z_o = t \Rightarrow x = \frac{t - z}{z_o}$, θα λάβουμε:

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{V \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\theta-2\pi m) \cdot x} \cdot e^{ik\sqrt{(z+xz_o)^2 + \rho^2}} dx = \frac{V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\theta-2\pi m}{z_o} z} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\theta-2\pi m}{z_o} t} \cdot e^{ik\sqrt{t^2 + \rho^2}} dt \\ &= \frac{V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\theta-2\pi m}{z_o} z} \cdot \bar{L}\left(\frac{\theta-2\pi m}{z_o}, \rho\right) \end{aligned}$$

(3.35), όπου:

$$\bar{L}(\zeta, \rho) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\sqrt{z^2 + a^2}} \cdot e^{i\zeta z} dz = \begin{cases} -\pi k \rho \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}} H_1^{(1)}\left(\rho\sqrt{k^2 - \zeta^2}\right), |\zeta| < k \\ \frac{2k\rho}{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - k^2}} \cdot K_1^{(1)}\left(\rho\sqrt{\zeta^2 - k^2}\right), |\zeta| > k \end{cases} \quad (3.36)$$

3.3.1 Τα όρια για $\rho \rightarrow 0$

Θα δείξουμε τώρα αναλυτικά ότι $I(0, z) = I(z)$ θεωρώντας την οριακή συμπεριφορά των παραπάνω εκφράσεων για $\rho \rightarrow 0$. Η ασυμπτωτική προσέγγιση της ειδικής συνάρτησης Bessel K_1 για μικρά ορίσματα είναι: $K_1(x) \sim \frac{1}{x}$ για $x \rightarrow 0^+$ οπότε

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\rho \cdot K_1\left(\rho \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}\right) \right) = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - k^2}}. \text{ Αντίστοιχα:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\rho \cdot H_1^{(1)} \left(\rho \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2} \right) \right) &= i \cdot \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\rho \cdot Y_1 \left(\rho \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2} \right) \right) = i \cdot \left(-\frac{1}{\pi} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2} \right)^{-1} = \\ &= -\frac{2 \cdot i}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}} \end{aligned}$$

Από την (3.36) έχουμε: $L(\zeta, 0) = \frac{2 \cdot k \cdot i}{k^2 - \zeta^2}$ οπότε:

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i(\theta-2\pi m)z}{z_o}} \cdot \bar{L} \left(\zeta = \frac{\theta-2\pi m}{z_o}, \rho = 0 \right) = \\ &= \frac{V \cdot k \cdot i}{\zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i(\theta-2\pi m)z}{z_o}} \cdot \frac{1}{k^2 - \left(\frac{\theta-2\pi m}{z_o} \right)^2} = \frac{z_o \cdot V \cdot k \cdot i}{\zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i(\theta-2\pi m)z}{z_o}} \cdot \frac{1}{(k \cdot z_o)^2 - (\theta-2\pi m)^2} \end{aligned}$$

(3.37). Αυτή θα έπρεπε να είναι η σχέση για το $B(\theta)$. Από τον ορισμό της ποσότητας αυτής έχουμε:

$$\begin{aligned} B(\theta) &= \frac{V \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ikz_o \cdot |l|} \cdot e^{il\theta} = \frac{V \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\theta-2\pi m)x} \cdot e^{ikz_o \cdot |z+x \cdot z_o|} dx = \\ &= \frac{V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i(\theta-2\pi m)z}{z_o}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i(\theta-2\pi m)t}{z_o}} \cdot e^{ikz_o \cdot |t|} dt \end{aligned}$$

όπου και πάλι θέσαμε: $t = z + x \cdot z_o \Rightarrow x = \frac{t-z}{z_o}$.

Με τη χρήση του ολοκληρώματος:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} \cdot e^{i\beta|t|} dt &= \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha t} \cdot e^{i\beta(-t)} dt + \int_0^{\infty} e^{i\alpha t} \cdot e^{i\beta t} dt = \int_0^{\infty} e^{-i\alpha t} \cdot e^{i\beta t} dt + \int_0^{\infty} e^{i\alpha t} \cdot e^{i\beta t} dt = \\ &= \frac{1}{i} \left[\frac{1}{\alpha - \beta} - \frac{1}{\alpha + \beta} \right] = -2i \cdot \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \end{aligned}$$

καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} B(\theta) &= \frac{V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i(\theta-2\pi m)z}{z_o}} \cdot \frac{2i \cdot (k \cdot z_o)}{(k \cdot z_o)^2 - (\theta-2\pi m)^2} = \\ &= \frac{i \cdot V \cdot (k \cdot z_o)}{\zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i(\theta-2\pi m)z}{z_o}} \cdot \frac{1}{(k \cdot z_o)^2 - (\theta-2\pi m)^2} = F(\theta) \end{aligned}$$

άρα και πάλι δείξαμε ότι $I(z) = I(0, z)$!

3.3.2 Σύνοψη των ακριβών εκφράσεων

Στο σημείο αυτό ας κάνουμε μια σύνοψη των «ακριβών» εκφράσεων των μεγεθών που θα χρησιμοποιήσουμε για να προβούμε ύστερα στην ανάλυση των ασυμπτωτικών. Υπό μορφή καταλογράφησης έχουμε:

$$\text{I)} I(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(\theta)}{A(\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{F(\theta) + F(-\theta)}{A(\theta)} d\theta \text{ όπου}$$

$$F(\theta) = \frac{V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i \frac{\theta - 2\pi m}{z_o} z} \cdot \bar{L} \left(\frac{\theta - 2\pi m}{z_o}, \rho \right)$$

$$\text{II)} \bar{L}(\zeta, \rho) = \begin{cases} -\pi k \rho \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}} H_1^{(1)} \left(\rho \sqrt{k^2 - \zeta^2} \right), |\zeta| < k \\ \frac{2k\rho}{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - k^2}} \cdot K_1^{(1)} \left(\rho \sqrt{\zeta^2 - k^2} \right), |\zeta| > k \end{cases}$$

$$\text{III)} A(\theta) = z_o \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \bar{K} \left(\frac{2 \cdot m \cdot \pi - \theta}{z_o} \right) \frac{\sin^2(\theta/2)}{(m\pi - \theta/2)^2} \right\}$$

$$\text{IV)} \bar{K}_{ap}(\zeta) = \begin{cases} (i/4) \cdot H_o^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}), |\zeta| < k \\ (1/2\pi) \cdot K_o^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}), |\zeta| > k \end{cases}$$

3.3.3 Κυριαρχούσα ασυμπτωτική προσέγγιση για $z_o \rightarrow 0$

Όταν $z_o \rightarrow 0$ μπορούμε να προσεγγίσουμε τις εκφράσεις $F(\theta)$ και $A(\theta)$ από τους όρους $m=0$ (καθότι οι συναρτήσεις Bessel που περιέχουν παρουσιάζουν συμπεριφορά εκθετικής συνάρτησης με αρνητικό όρισμα), δηλαδή:

$$F(\theta) \sim \frac{V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot e^{-i \frac{\theta}{z_o} z} \cdot \bar{L} \left(\frac{\theta}{z_o}, \rho \right) \quad (3.37) \text{ και}$$

$$A(\theta) \sim z_o \cdot \bar{K}_{ap} \left(\frac{\theta}{z_o} \right) \cdot \left(\frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} \right)^2 \quad (3.38).$$

Έτσι, για $\zeta = \frac{\theta}{z_o} \Rightarrow d\zeta = \frac{1}{z_o} \cdot d\theta$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
I(\rho, z) &\sim \frac{V}{4\pi\zeta_o z_o} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\theta}{z_o} \cdot z} \cdot \frac{\bar{L}\left(\frac{\theta}{z_o}, \rho\right)}{\bar{K}_{ap}\left(\frac{\theta}{z_o}\right) \cdot \left(\frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2}\right)^2} \cdot d\theta = \\
&= \frac{V}{4\pi\zeta_o} \cdot \int_{-\pi/z_o}^{\pi/z_o} e^{-i\zeta \cdot z} \cdot \frac{\bar{L}(\zeta, \rho)}{\bar{K}_{ap}(\zeta) \cdot \left(\frac{\sin(\zeta z_o/2)}{\zeta z_o/2}\right)^2} d\zeta \sim \quad (3.39)
\end{aligned}$$

$$\sim \frac{V}{4\pi\zeta_o} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta \cdot z} \cdot \frac{L(\zeta, \rho)}{\bar{K}_{ap}(\zeta)} d\zeta = \frac{V}{2\pi \cdot \zeta_o} \cdot \int_0^{\infty} \cos(\zeta \cdot z) \cdot \frac{\bar{L}(\zeta, \rho)}{\bar{K}_{ap}(\zeta)} d\zeta$$

$$\text{αφού: } \left(\frac{\sin\left(\frac{\zeta z_o}{2}\right)}{\frac{\zeta z_o}{2}} \right) = \text{sin c}\left(\frac{\zeta z_o}{2}\right) \rightarrow 1 \text{ για } z_o \rightarrow 0.$$

Καθώς $\zeta \rightarrow +\infty$ (δηλαδή $z_o \rightarrow 0$) έχουμε:

$$\bar{L}(\zeta, \rho) \sim \frac{2k\rho}{i} \cdot \frac{1}{\zeta} \cdot K_1(\rho \cdot \zeta) \sim \frac{2k\rho}{i} \cdot \frac{1}{\zeta} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2\rho\zeta}} \cdot e^{-\rho\zeta} \quad (3.40),$$

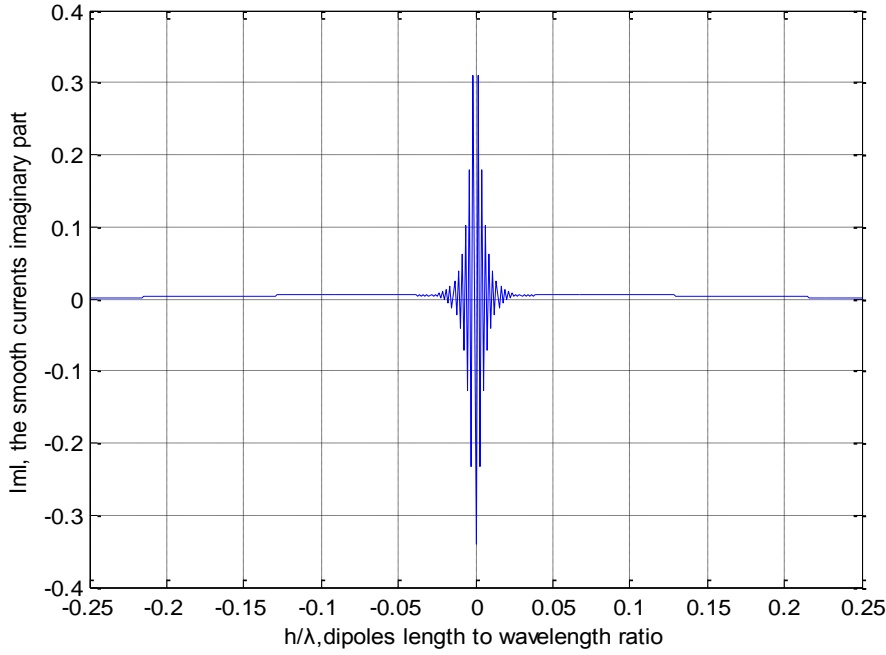
$$\bar{K}_{ap}(\zeta) \sim \frac{1}{2\pi} \cdot K_o(\alpha \cdot \zeta) \sim \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\zeta}} \cdot e^{-\alpha\zeta} \quad (3.41) \text{ και}$$

$$\bar{K}_{ex}(\zeta) \sim \frac{1}{2\pi} \cdot I_o(\alpha\zeta) \cdot K_o(\alpha\zeta) \sim \frac{1}{4\pi\alpha\zeta} \quad (3.42).$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για την ακτίνα ρ του σωληνιδούς διπόλου:

1. Για $\rho < a$:

Το ολοκλήρωμα στην (3.39) αποκλίνει διότι περιέχει τον όρο $e^{(a-\rho)\zeta}$ και $\zeta \rightarrow \infty$. Αυτό επαληθεύεται και γραφικά στην περίπτωση της πεπρασμένης κεραίας όπου παρατηρούνται και πάλι ταλαντώσεις για $z \rightarrow 0$, όπως δείχνουμε στο σχήμα 3.22:



Σχήμα 3.22: Κατανομή του φανταστικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$ για $\rho = \alpha/2$

2. Για $\rho = a$:

Έχουμε τότε $\frac{\bar{L}(\zeta, a)}{\bar{K}_{ap}(\zeta)} \sim \frac{-i4\pi \cdot ka}{\zeta}$, οπότε το ολοκλήρωμα στην (3.39)

συγκλίνει και έχουμε: $I(a, z) = \frac{V}{2\pi \cdot \zeta_o} \cdot \int_0^\infty \cos(\zeta \cdot z) \cdot \frac{\bar{L}(\zeta, a)}{\bar{K}_{ap}(\zeta)} d\zeta$ (3.43).

Όπως αποδεικνύεται στο [2], η έκφραση για το ρεύμα που προκύπτει ως λύση της εξίσωσης Hallén με τον ακριβή πυρήνα για την άπειρη κεραία είναι:

$$I_{ex}(z) = \frac{ikV}{\pi\zeta_o} \cdot \int_0^\infty \cos(\zeta z) \cdot \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot \bar{K}_{ex}(\zeta)} d\zeta \quad (3.44)$$

Με σύγκριση της (3.43) και της (3.44) διαπιστώνουμε ότι η ποσότητα:

$$g_{ex}(\zeta) = \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot \bar{K}_{ex}} = \frac{-2\pi}{(\zeta^2 - k^2) \cdot I_o(a\sqrt{\zeta^2 - k^2}) \cdot K_o(a\sqrt{\zeta^2 - k^2})}$$

έχει αντικατασταθεί από την:

$$g_{ap}(\zeta) = \frac{1}{2ki} \cdot \frac{\bar{L}(\zeta, \alpha)}{\bar{K}_{ap}(\zeta)} = \frac{1}{2ki} \cdot \frac{\frac{2ka}{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - k^2}} \cdot K_1(a\sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\frac{1}{2\pi} \cdot K_o(a\sqrt{\zeta^2 - k^2})} =$$

$$= \frac{-2\pi\alpha \cdot K_1(a\sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} K_o(a\sqrt{\zeta^2 - k^2})}$$

Εξετάζοντας την οριακή συμπεριφορά των παραπάνω ποσοτήτων για $\zeta \rightarrow \infty$ έχουμε:

$$g_{ex}(\zeta) \sim \frac{1}{-\zeta^2 \cdot \frac{1}{4\pi a \zeta}} = -\frac{4\pi a}{\zeta} \quad \text{ενώ:} \quad g_{ap}(\zeta) \sim \frac{1}{2ki} \cdot \frac{-i4\pi k a}{\zeta} = -\frac{2\pi a}{\zeta}.$$

Έτσι, $\frac{I(a, z)}{V} = -i \cdot \frac{2ka}{\zeta_o} \cdot \ln\left(\frac{1}{|z|}\right) + O(1)$ για $z \rightarrow 0$ (Θεώρημα Αρχικής Τιμής), δηλαδή αναπαράγεται η λογαριθμική ανωμαλία που αποδεικνύεται και στο [2, (16)] με τη διαφορά ενός παράγοντα 2 !

Το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας της κεραίας, τώρα, είναι:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{I(a, z)}{V}\right\} = \frac{1}{2\pi \cdot \zeta_o} \cdot \int_0^k \cos(\zeta \cdot z) \cdot \operatorname{Re}\left\{\frac{\bar{L}(\zeta, a)}{\bar{K}_{ap}(\zeta, a)}\right\} d\zeta \quad (3.45)$$

Από τις (3.28) και (3.36) λαμβάνουμε:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\bar{L}(\zeta, a)}{\bar{K}_{ap}(\zeta, a)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{-\pi k a \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}} \cdot H_1^{(1)}(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{\frac{i}{4} \cdot H_0^{(1)}(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}\right\} =$$

$$= -4\pi k a \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}} \operatorname{Re}\left\{\frac{J_1(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + i Y_1(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{-Y_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + i J_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}\right\} =$$

$$= 4\pi k a \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}} \cdot \operatorname{Re}\left\{\frac{\left[J_1(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + i Y_1(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})\right] \cdot \left[Y_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + i J_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})\right]}{\left[J_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})\right]^2 + \left[Y_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})\right]^2}\right\} =$$

$$= 4\pi k a \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}} \cdot \frac{J_1(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot Y_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) - Y_1(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot J_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{\left[J_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})\right]^2 + \left[Y_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})\right]^2}$$

Από την ιδιότητα των συναρτήσεων Bessel:

$$J_1(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot Y_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) - Y_1(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot J_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) = \frac{2}{\pi \cdot \zeta}, \quad \text{έχουμε:}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\bar{L}(\zeta, a)}{\bar{K}_{ap}(\zeta, a)} \right\} = 4\pi k a \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\pi \cdot a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}} \cdot \frac{1}{\left[J_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right]^2 + \left[Y_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right]^2} =$$

$$= \frac{8k}{k^2 - \zeta^2} \cdot \frac{1}{\left[J_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right]^2 + \left[Y_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right]^2}$$

οπότε καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{I(a, z)}{V} \right\} = \frac{4k}{\pi \cdot \zeta_0} \cdot \int_0^k \frac{\cos(\zeta \cdot z)}{(k^2 - \zeta^2) \cdot \left[J_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right]^2 + \left[Y_0(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right]^2} d\zeta$$

(3.46) για το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου, που έρχεται σε πλήρη συμφωνία με την αντίστοιχη της [2, (39)] (όπως και το φανταστικό μέρος που απλά διαφέρει κατά έναν παράγοντα 2).

Κεφάλαιο 4: Οι ασυμπτωτικές εκφράσεις για το προτεινόμενο ρεύμα για την άπειρη κεραία

4.1 Η πρώτη ασυμπτωτική έκφραση

4.1.1 Εξαγωγή της πρώτης ασυμπτωτικής έκφρασης

Σε μια πιο προσεκτική ανάλυση της περίπτωσης $\rho < a$ που επιχειρήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο θα παρατηρήσουμε ότι στο ολοκλήρωμα:

$$I(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(\theta)}{A(\theta)} d\theta \quad (4.1),$$

η συνάρτηση $F(\theta)$ δεν είναι άρτια, σε αντίθεση με τη συνάρτηση $\bar{L}(\zeta)$ που είναι άρτια: $\bar{L}(\zeta) = \bar{L}(-\zeta)$.

$$\text{Έτσι, έχουμε: } I(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(\theta)}{A(\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{F(\theta) + F(-\theta)}{A(\theta)} d\theta.$$

$$\text{Από την (3.35) έχουμε: } F(\theta) = \frac{V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i \frac{\theta - 2\pi m}{z_o} z} \cdot \bar{L}\left(\frac{\theta - 2\pi m}{z_o}, \rho\right) \text{ οπότε και:}$$

$$F(-\theta) = \frac{V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i \frac{\theta + 2\pi m}{z_o} z} \cdot \bar{L}\left(\frac{\theta + 2\pi m}{z_o}, \rho\right) = \frac{V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i \frac{\theta - 2\pi m}{z_o} z} \cdot \bar{L}\left(\frac{2\pi m - \theta}{z_o}, \rho\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(\theta) + F(-\theta) = \frac{V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{i \frac{\theta - 2\pi m}{z_o} z} + e^{i \frac{\theta + 2\pi m}{z_o} z} \right) \cdot \bar{L}\left(\frac{2\pi m - \theta}{z_o}, \rho\right) =$$

$$= \frac{V}{\zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi m - \theta}{z_o} z\right) \cdot \bar{L}\left(\frac{2\pi m - \theta}{z_o}, \rho\right)$$

(4.2)

$$\text{Υπενθυμίζουμε ότι: } A(\theta) = z_o \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \bar{K} \left(\frac{2 \cdot m \cdot \pi - \theta}{z_o} \right) \cdot \frac{\sin^2(\theta/2)}{(m\pi - \theta/2)^2} \right\} \quad (4.3)$$

Θα αναπτύξουμε έναν ασυμπτωτικό τύπο μόνο με τους όρους $m=0$ και $m=1$ στα αθροίσματα που δίνουν τα $A(\theta)$ και $F(\theta) + F(-\theta)$. Συνεπώς έχουμε:

$$A(\theta) \sim 4 \cdot z_o \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[\bar{K}_{ap} \left(\frac{\theta}{z_o} \right) \cdot \frac{1}{\theta^2} + \bar{K}_{ap} \left(\frac{2\pi - \theta}{z_o} \right) \cdot \frac{1}{(2\pi - \theta)^2} \right] \quad (4.4) \text{ και}$$

$$F(\theta) + F(-\theta) \sim \frac{V}{\zeta_o} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{z_o} \cdot z\right) \cdot \bar{L}\left(\frac{\theta}{z_o}, \rho\right) + \cos\left(\frac{2\pi - \theta}{z_o} \cdot z\right) \cdot \bar{L}\left(\frac{2\pi - \theta}{z_o}, \rho\right) \right] \quad (4.5)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.4) και (4.5) στην (4.1) και θέτοντας $\phi = \pi - \theta$ λαμβάνουμε:

$$I(\rho, z) \sim \frac{V}{8\pi a \zeta_o} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos\left(\frac{\pi - \phi}{z_o} \cdot z\right) \cdot \bar{L}\left(\frac{\pi - \phi}{z_o}, \rho\right) + \cos\left(\frac{\pi + \phi}{z_o} \cdot z\right) \cdot \bar{L}\left(\frac{\pi + \phi}{z_o}, \rho\right)}{\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \left[\bar{K}_{ap}\left(\frac{\pi - \phi}{z_o}\right) \cdot \frac{1}{(\pi - \phi)^2} + \bar{K}_{ap}\left(\frac{\pi + \phi}{z_o}\right) \cdot \frac{1}{(\pi + \phi)^2} \right]} d\phi \quad (4.6)$$

Με $x = \phi \cdot \frac{a}{z_o} \Rightarrow d\phi = \frac{z_o}{a} \cdot dx$, η ασυμπτωτική έκφραση για το προτεινόμενο ρεύμα

γίνεται:

$$I(\rho, z) \sim \frac{V}{8\pi a \zeta_o} \cdot \int_0^{\frac{a}{z_o}} \frac{\cos\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o} - \frac{x \cdot z}{a}\right) \cdot \bar{L}\left(\frac{\pi - x}{z_o}, \rho\right) + \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o} + \frac{x \cdot z}{a}\right) \cdot \bar{L}\left(\frac{\pi + x}{z_o}, \rho\right)}{\cos^2\left(\frac{z_o \cdot x}{2a}\right) \cdot \left[\bar{K}_{ap}\left(\frac{\pi - x}{z_o}\right) \cdot \frac{1}{\left(\pi - \frac{z_o \cdot x}{a}\right)^2} + \bar{K}_{ap}\left(\frac{\pi + x}{z_o}\right) \cdot \frac{1}{\left(\pi + \frac{z_o \cdot x}{a}\right)^2} \right]} dx$$

(4.7)

Στο σημείο αυτό αντικαθιστούμε τα \bar{L} και \bar{K}_{ap} με τις κυριαρχούσες ασυμπτωτικές συμπεριφορές τους όπως προκύπτει από τις (3.40) και (3.41). Έτσι έχουμε:

$$\bar{L}\left(\frac{\pi \pm x}{z_o}, \rho\right) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{i} \cdot k \cdot \sqrt{\rho} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\pi \pm x}{z_o}\right)^{3/2}} \cdot e^{-\left(\frac{\pi \pm x}{z_o}\right) \cdot \rho} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{i} \cdot k \cdot \sqrt{\rho} \cdot z_o^{3/2} \cdot \frac{1}{\left(\pi \pm \frac{x \cdot z_o}{a}\right)^{3/2}} \cdot e^{-\pi \frac{\rho}{z_o}} \cdot e^{\pm \frac{\rho x}{a}} \quad (4.8) \text{ και:}$$

$$\frac{1}{\left(\pi \pm \frac{z_o \cdot x}{a}\right)^2} \cdot \bar{K}_{ap}\left(\frac{\pi \pm x}{z_o}\right) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\left(\pi \pm \frac{z_o \cdot x}{a}\right)^{5/2}} \cdot e^{-\frac{a}{z_o} \cdot \pi} \cdot e^{\pm x} \quad (4.9),$$

προσέγγιση που υπονοεί ότι το ρ δεν μπορεί να είναι πολύ μικρό. Έτσι έχουμε:

$$I(\rho, z) \sim \frac{-i \cdot V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \frac{k \cdot \rho^{1/2} \cdot z_o}{a^{1/2}} \cdot \int_0^{\frac{a}{z_o}} \frac{\cos\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o} - \frac{x \cdot z}{a}\right) \cdot \left(\pi - \frac{z_o \cdot x}{a}\right)^{-3/2} \cdot e^{-\pi \frac{\rho}{z_o}} \cdot e^{\frac{\rho x}{a}} + \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o} + \frac{x \cdot z}{a}\right) \cdot \left(\pi + \frac{z_o \cdot x}{a}\right)^{-3/2} \cdot e^{-\pi \frac{\rho}{z_o}} \cdot e^{-\frac{\rho x}{a}}}{\cos^2\left(\frac{z_o \cdot x}{2a}\right) \cdot \left[\left(\pi - \frac{z_o \cdot x}{a}\right)^{-5/2} \cdot e^{-\frac{a}{z_o} \pi} \cdot e^{+x} + \left(\pi + \frac{z_o \cdot x}{a}\right)^{-5/2} \cdot e^{-\frac{a}{z_o} \pi} \cdot e^{-x}\right]} dx$$

(4.10) Τώρα, θεωρούμε $\frac{z_o}{a} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a}{z_o} \rightarrow \infty$, διατηρώντας τα $\frac{\rho}{a}$, $\frac{z}{a}$ και $\frac{z}{z_o}$ σταθερά

οπότε λαμβάνουμε:

$$I(\rho, z) \sim \frac{-i \cdot \pi \cdot V}{4 \cdot \zeta_o} \cdot \frac{k \cdot \rho^{1/2} \cdot z_o}{a^{1/2}} \cdot e^{\frac{\pi}{z_o}(a-\rho)} \cdot \int_0^{\frac{a}{z_o}} \frac{\cos\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o} - \frac{x \cdot z}{a}\right) \cdot e^{\frac{\rho x}{a}} + \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o} + \frac{x \cdot z}{a}\right) \cdot e^{-\frac{\rho x}{a}}}{\cosh(x)} dx$$

(4.11)

Ο αριθμητής $\cos\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o} - \frac{x \cdot z}{a}\right) \cdot e^{\frac{\rho x}{a}} + \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o} + \frac{x \cdot z}{a}\right) \cdot e^{-\frac{\rho x}{a}}$ μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} & \left[\cos\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o}\right) \cdot \cos\left(\frac{x \cdot z}{a}\right) + \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o}\right) \cdot \sin\left(\frac{x \cdot z}{a}\right) \right] \cdot \left(\cosh\left(\frac{\rho \cdot x}{a}\right) + \sinh\left(\frac{\rho \cdot x}{a}\right) \right) + \\ & + \left[\cos\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o}\right) \cdot \cos\left(\frac{x \cdot z}{a}\right) - \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o}\right) \cdot \sin\left(\frac{x \cdot z}{a}\right) \right] \cdot \left(\cosh\left(\frac{\rho \cdot x}{a}\right) - \sinh\left(\frac{\rho \cdot x}{a}\right) \right) = \\ & = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o}\right) \cdot \cos\left(\frac{x \cdot z}{a}\right) \cdot \cosh\left(\frac{\rho \cdot x}{a}\right) - \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o}\right) \cdot \sin\left(\frac{x \cdot z}{a}\right) \cdot \sinh\left(\frac{\rho \cdot x}{a}\right) \right] \end{aligned}$$

,συνεπώς:

$$I(\rho, z) \sim \frac{-i \cdot \pi \cdot V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \frac{k \cdot \rho^{1/2} \cdot z_o}{a^{1/2}} \cdot e^{\frac{\pi}{z_o}(a-\rho)} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o}\right) \cdot \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{x \cdot z}{a}\right) \cdot \cosh\left(\frac{\rho \cdot x}{a}\right)}{\cosh(x)} dx + \right. \\ \left. + \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o}\right) \cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x \cdot z}{a}\right) \cdot \sinh\left(\frac{\rho \cdot x}{a}\right)}{\cosh(x)} dx \right]$$

(4.12)

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων στην (4.12) έχουμε:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cosh(ax) \cdot \cos(bx)}{\cosh(x)} dx = \pi \cdot \frac{\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{b\pi}{2}\right)}{\cosh(b\pi) + \cos(a\pi)}, 0 < a < 1, b \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh(ax) \cdot \sin(bx)}{\cosh(x)} dx = \pi \cdot \frac{\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{b\pi}{2}\right)}{\cosh(b\pi) + \cos(a\pi)}, 0 < a < 1, b \in \mathbb{R}$$

οπότε:

$$I(\rho, z) \sim \frac{-i \cdot \pi^2 \cdot V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot k \cdot z_o \cdot \sqrt{\frac{\rho}{a}} \cdot e^{\frac{\pi}{z_o}(a-\rho)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o}\right) \cdot \cos\left(\frac{\rho \cdot \pi}{2 \cdot \alpha}\right) \cdot \cosh\left(\frac{\pi \cdot z}{2 \cdot a}\right) + \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{z_o}\right) \cdot \sin\left(\frac{\rho \cdot \pi}{2 \cdot \alpha}\right) \cdot \sinh\left(\frac{\pi \cdot z}{2 \cdot a}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi \cdot z}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi \cdot \rho}{\alpha}\right)} \quad (4.13)$$

Για $z = n \cdot z_o$, η παραπάνω λαμβάνει την απλούστερη μορφή:

$$I(\rho, n \cdot z_o) \sim \frac{-i \cdot \pi^2 \cdot V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot k \cdot z_o \cdot \sqrt{\frac{\rho}{a}} \cdot e^{\frac{\pi}{z_o}(a-\rho)} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot \rho}{2 \cdot \alpha}\right) \cdot (-1)^n \cdot \frac{\cosh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot z_o}{2 \cdot a}\right)}{\cosh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot z_o}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi \cdot \rho}{\alpha}\right)}$$

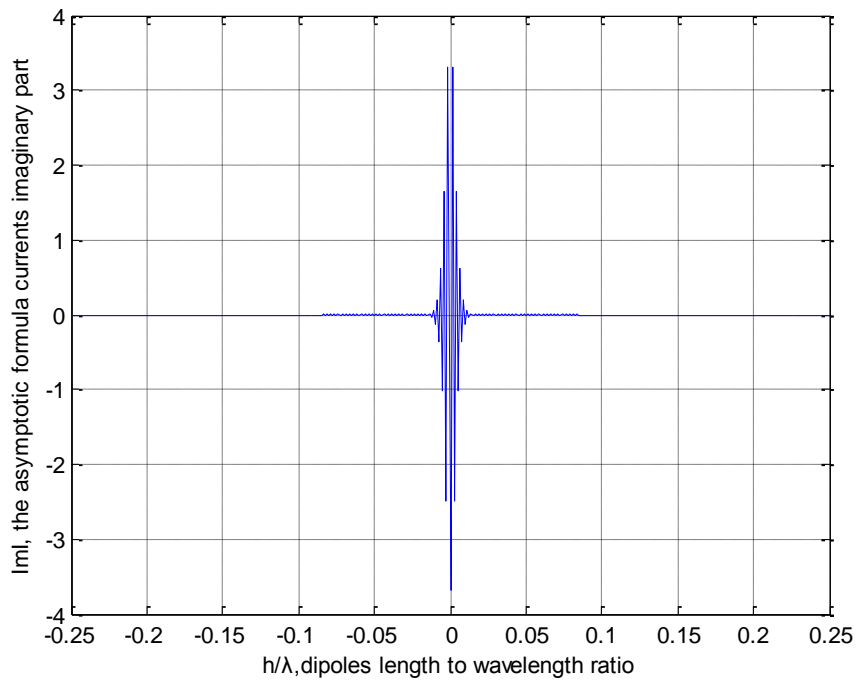
(4.14), που αποτελεί τον I^o Ασυμπτωτικό τύπο για το προτεινόμενο ρεύμα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην ασυμπτωτική αυτή έκφραση το ρεύμα είναι καθαρά φανταστικό, δηλαδή το πραγματικό του μέρος είναι αμελητέο σε σύγκριση με το φανταστικό. Οι ταλαντώσεις φαίνονται στον όρο $(-1)^n$ με το μεγάλο μέτρο τους να οφείλεται στον παράγοντα $e^{\frac{\pi}{z_o}(a-\rho)}$.

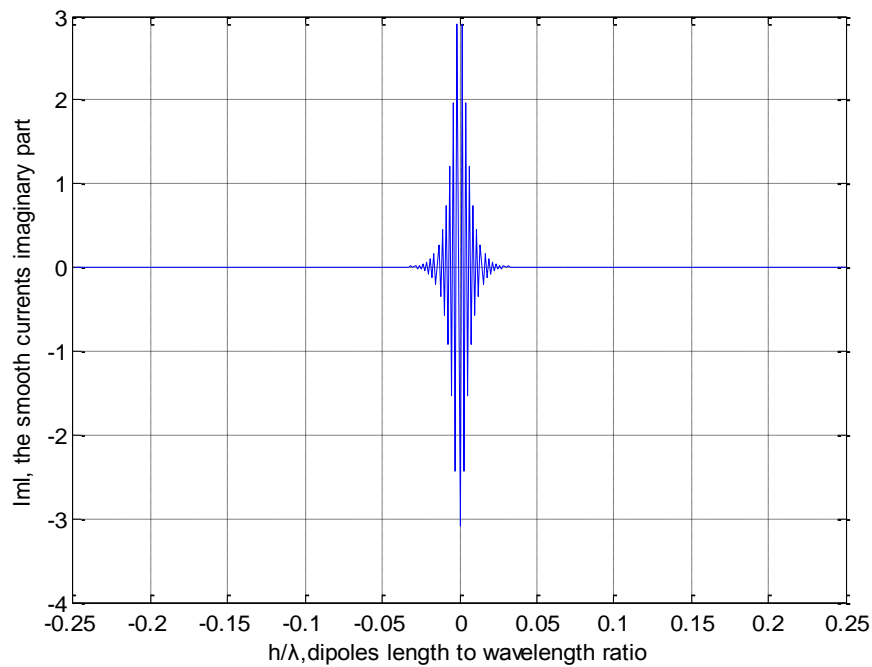
Οι προσεγγίσεις που αναφέραμε παραπάνω ισχύουν για $\frac{\rho}{z_o} \gg 1$ αλλά όχι για ρ κοντά στην ακτινα a του διπόλου, όπως θα δείξουμε και με τα αριθμητικά αποτελέσματα που ακολουθούν.

4.1.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για τον πρωτο ασυμπτωτικό τύπο στην πεπερασμένη κεραία

Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις των σχημάτων απεικονίζουμε την ασυμπτωτική προσέγγιση στα διάφορα σημεία $l \cdot z_o$ του διπόλου στο 4.1 και παραθέτουμε το γράφημα για το προτεινόμενο ρεύμα στο 4.2 για την ίδια απόσταση από τον άξονα του διπόλου, που εξαγάγαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.



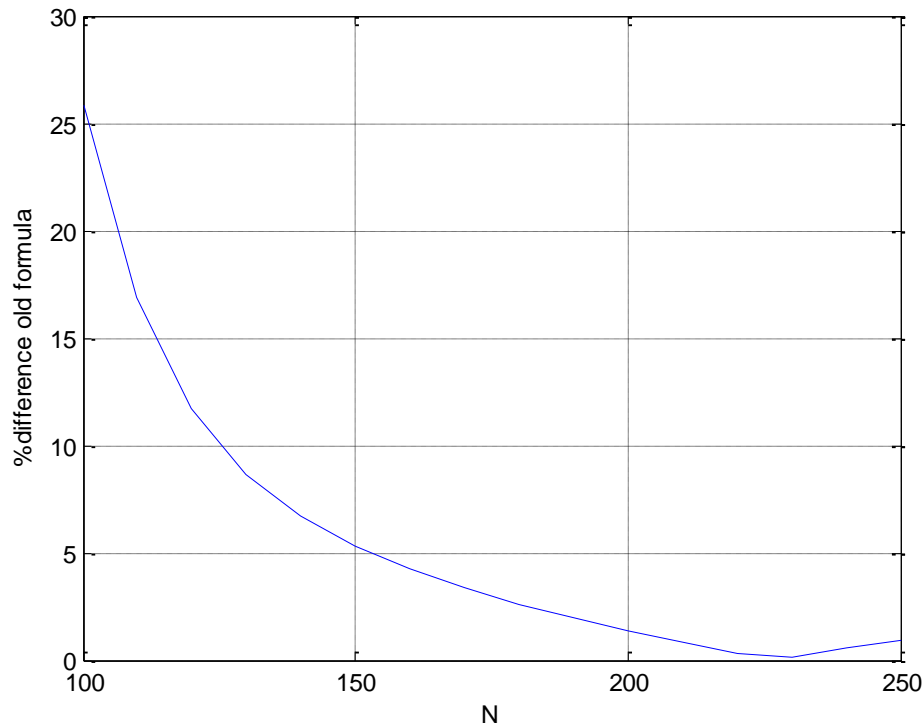
Σχήμα 4.1: Κατανομή του (φανταστικού μέρους) του ασυμπτωτικού ρεύματος για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$ για $\rho = 2 \cdot z_o = 2 \cdot \frac{h}{N}$



Σχήμα 4.2: Κατανομή του φανταστικού μέρους του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με τον προσεγγιστικό πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$ για $\rho = 2 \cdot z_o = 2 \cdot \frac{h}{N}$

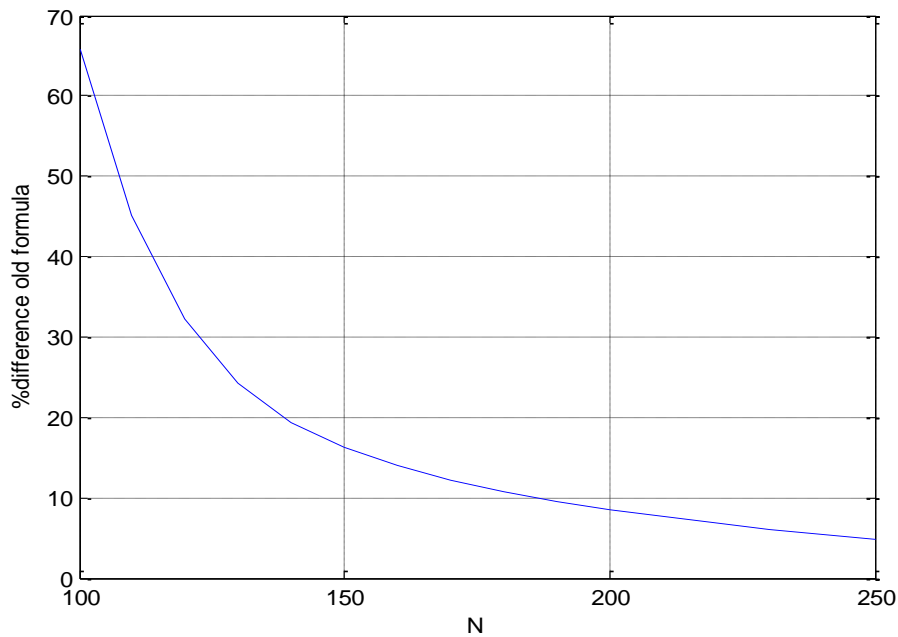
Για τον έλεγχο της ισχύος του τύπου θα προβούμε σε συγκρίσεις με το προτεινόμενο ρεύμα που υπολογίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Παραθέτουμε λοιπόν τα διαγράμματα 4.3 – 4.5 που εικονίζουν τις ποσοστιαίες διαφορές του προτεινόμενου από το ασυμπτωτικό ρεύμα στο κέντρο του σωληνοειδούς διπόλου ($z=0$) στο σημείο τροφοδοσίας συναρτησει του αριθμού N των ημιτονοειδών συναρτησεων και άρα του πλήθους των σημείων διαμέρισης.



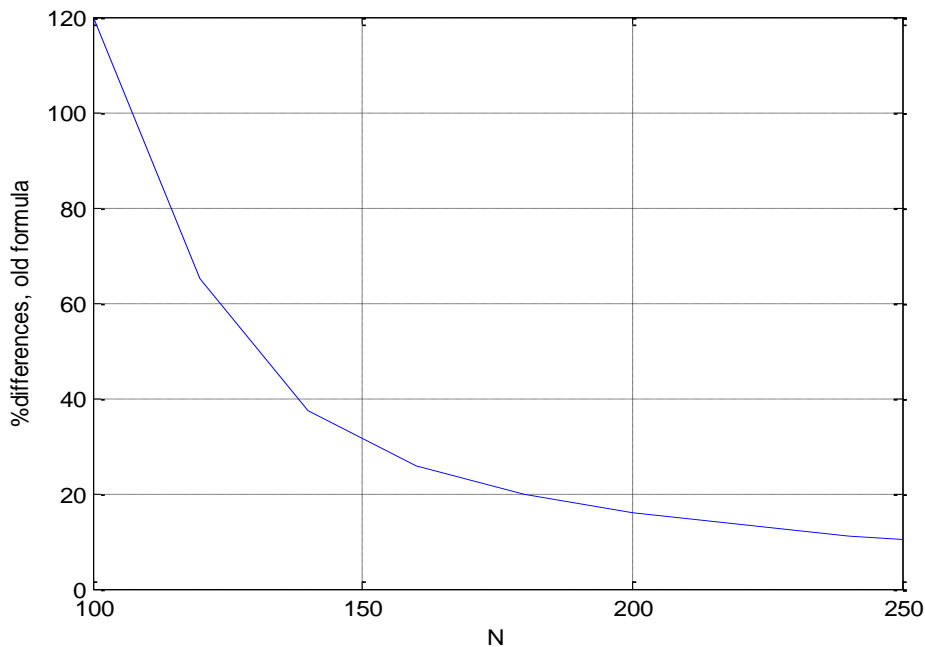
Σχήμα 4.3: Κατανομή των % διαφορών του (φανταστικού) μέρους του ασυμπτωτικού από το φανταστικό μέρος του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ για

$$\rho = z_o = \frac{h}{N} \text{ στο κέντρο του διπόλου } (z=0).$$



Σχήμα 4.4: Κατανομή των % διαφορών του (φανταστικού) μέρους του ασυμπτωτικού από το φανταστικό μέρος του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ για

$$\rho = 1.5 \cdot z_o = 1.5 \cdot \frac{h}{N} \text{ στο κέντρο του διπόλου } (z=0).$$



Σχήμα 4.5: Κατανομή των % διαφορών του (φανταστικού) μέρους του ασυμπτωτικού από το φανταστικό μέρος του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ για

$$\rho = 2 \cdot z_o = 2 \cdot \frac{h}{N} \text{ στο κέντρο του διπόλου } (z=0)$$

Παρατηρούμε ότι τα % σφάλματα φθίνουν καθώς αυξάνεται το N, που επιβεβαιώνει την ισχύ του τύπου. Ικανοποιείται λοιπόν η απαίτηση της ασυμπτωτικής προσέγγισης σύμφωνα με την οποία το σφάλμα ελαττώνεται καθώς μια παράμετρος αυξάνεται (εδώ το N άρα και ο λόγος $\frac{a}{z_o}$).

Επίσης, οι ποσότητες:

$$A(\theta) \sim 4 \cdot z_o \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[\bar{K}_{ap}\left(\frac{\theta}{z_o}\right) \cdot \frac{1}{\theta^2} + \bar{K}_{ap}\left(\frac{2\pi-\theta}{z_o}\right) \cdot \frac{1}{(2\pi-\theta)^2} \right] \text{ και}$$

$$F(\theta) + F(-\theta) \sim \frac{V}{\zeta_o} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{z_o} \cdot z\right) \cdot \bar{L}\left(\frac{\theta}{z_o}, \rho\right) + \cos\left(\frac{2\pi-\theta}{z_o} \cdot z\right) \cdot \bar{L}\left(\frac{2\pi-\theta}{z_o}, \rho\right) \right]$$

συγκλίνουν ταχύτατα για $z_o \rightarrow 0$ (για το λόγο αυτό κρατήσαμε τους δύο πρώτους όρους στο άθροισμα). Τα παραπάνω είναι αρκετά διότι ούτως ή άλλως η ποσότητα $\frac{a}{z_o}$ δεν μπορεί να είναι μεγάλη για μια πεπερασμένη κεραία λόγω σφαλμάτων roundoff (σφάλματα αποκοπής-στρογγυλοποίησης).

4.2 Η δεύτερη ασυμπτωτική έκφραση

4.2.1 Εξαγωγή της δεύτερης ασυμπτωτικής έκφρασης:

$$\text{Για } z = n \cdot z_o \text{ έχουμε: } F(\theta)_{z=n \cdot z_o} = e^{i \cdot n \cdot \theta} \cdot \underbrace{\frac{V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cdot \bar{L}\left(\frac{\theta - 2\pi m}{z_o}, \rho\right)}_{B_1(\theta, \rho)} \quad (4.14) \text{ οπότε και}$$

$$I(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{B_1(\theta, \rho) \cdot e^{i \cdot n \cdot \theta}}{A(\theta)} d\theta \quad (4.15) \text{ όπου } B_1(\theta, 0) = B(\theta) \text{ όπως αποδείξαμε και}$$

στο προηγούμενο κεφάλαιο στη σχέση (3.37). Με αναφορά στο [2] το ασυμπτωτικό ρεύμα μπορεί να γραφεί:

$$I(\rho, z) \sim \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot k \cdot z_o \cdot \sqrt{\frac{z_o}{a}} \cdot e^{\frac{\pi}{z_o} \cdot a} \cdot (-1)^n \cdot f\left(\frac{z_o}{a}, k \cdot a, n \cdot \frac{z_o}{a}\right) \quad (4.16) \text{ όπου}$$

$$f\left(\frac{z_o}{a}, k \cdot a, n \cdot \frac{z_o}{a}\right) = \int_0^{\frac{a}{z_o}} g\left(x, \frac{z_o}{a}, k \cdot a\right) \cdot \cos\left(n \cdot \frac{z_o}{a} \cdot x\right) dx \quad (4.17) \text{ και}$$

$$g\left(x; \frac{z_o}{a}, k \cdot a\right) = \frac{B_1\left(\pi - \frac{z_o}{a} \cdot x, \rho\right) / k \cdot z_o^2 \cdot \cos^2\left(n \cdot \frac{z_o}{a} \cdot x\right)}{\left(\pi - \frac{z_o}{a} \cdot x\right)^{-5/2} \cdot e^{+x} + \left(\pi + \frac{z_o}{a} \cdot x\right)^{-5/2} \cdot e^{-x}} \quad (4.18)$$

όπου $x = \underbrace{(\pi - \theta)}_{\phi} \cdot \frac{a}{z_o}$ όπως και στην (4.6). Ο αριθμητής της παραπάνω παράστασης

είναι :

$$\begin{aligned} & B_1\left(\pi - \frac{z_o}{a} \cdot x, \rho\right) / k \cdot z_o^2 \cdot \cos^2\left(\frac{z_o}{2 \cdot a} \cdot x\right) = \\ & = \frac{V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \frac{1}{k \cdot z_o^2 \cdot \cos^2\left(n \cdot \frac{z_o}{a} \cdot x\right)} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cdot \bar{L}\left(\frac{(2 \cdot m - 1) \cdot \pi}{z_o} - \frac{x}{a}, \rho\right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\text{Γνωρίζουμε όμως ότι } \bar{L}(\zeta, \rho) = \frac{2k\rho}{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - k^2}} \cdot K_1^{(1)}\left(\rho \sqrt{\zeta^2 - k^2}\right), |\zeta| > k \quad (4.17)$$

(που ισχύει) και για τη ρίζα $\sqrt{\zeta^2 - k^2}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\sqrt{\zeta^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{(2 \cdot m - 1) \cdot \pi}{z_o} - \frac{x}{a}\right)^2 - (k \cdot z_o)^2} = \frac{1}{z_o} \cdot \sqrt{\left((2 \cdot m - 1) \cdot \pi - \frac{z_o \cdot x}{a}\right)^2 - (k \cdot z_o)^2} . \quad (4.18)$$

Έχουμε λοιπόν συνδυάζοντας τις (4.16), (4.17) και (4.18)

$$\begin{aligned} & B_1\left(\pi - \frac{z_o}{a} \cdot x, \rho\right) / k \cdot z_o^2 \cdot \cos^2\left(\frac{z_o}{2 \cdot a} \cdot x\right) = \\ & = \frac{V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \frac{1}{k \cdot z_o^2 \cdot \cos^2\left(\frac{z_o}{2 \cdot a} \cdot x\right)} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cdot \bar{L}\left(\frac{(2 \cdot m - 1) \cdot \pi}{z_o} - \frac{x}{a}, \rho\right) = \\ & = \frac{-i \cdot V}{\zeta_o} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{z_o}{2 \cdot a} \cdot x\right)} \cdot \frac{\rho}{z_o} \quad (4.19) \\ & \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left((2 \cdot m - 1) \cdot \pi - \frac{z_o \cdot x}{a}\right)^2 - (k \cdot z_o)^2}} \cdot K_1\left(\frac{\rho}{z_o} \cdot \sqrt{\left((2 \cdot m - 1) \cdot \pi - \frac{z_o \cdot x}{a}\right)^2 - (k \cdot z_o)^2}\right) \end{aligned}$$

Αν και πάλι θεωρήσουμε $\frac{z_o}{a} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a}{z_o} \rightarrow \infty$ όπως και στην (4.10), τότε:

$$B_1\left(\pi - \frac{z_o}{a} \cdot x, \rho\right) / k \cdot z_o^2 \cdot \cos^2\left(\frac{z_o}{2 \cdot a} \cdot x\right) = \frac{-i \cdot V}{\pi \cdot \zeta_o} \cdot \frac{\rho}{z_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|2 \cdot m - 1|} \cdot K_1\left(\frac{\pi \cdot \rho}{z_o} \cdot |2 \cdot m - 1|\right)$$

(4.20).

Εκτελούμε αναλυτικά τις πράξεις:

$$f\left(0, k \cdot a, n \cdot \frac{z_o}{a}\right) = \int_0^{\frac{a}{z_o}} \underbrace{g\left(x; 0, k \cdot a\right)}_{\frac{\pi^{5/2}}{2 \cdot \cosh(x)} \cdot \frac{-i \cdot V}{\pi \cdot \zeta_o} \cdot \frac{\rho}{z_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|2 \cdot m - 1|} \cdot K_1\left(\frac{\pi \cdot \rho}{z_o} \cdot |2 \cdot m - 1|\right)} \cdot \cos\left(n \cdot \frac{z_o}{a} \cdot x\right) \cdot dx \text{ με}$$

$$g\left(x; 0, k \cdot a\right) = \frac{\pi^{5/2}}{2 \cdot \cosh(x)} \cdot \frac{-i \cdot V}{\pi \cdot \zeta_o} \cdot \frac{\rho}{z_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|2 \cdot m - 1|} \cdot K_1\left(\frac{\pi \cdot \rho}{z_o} \cdot |2 \cdot m - 1|\right).$$

Με χρήση του ολοκληρώματος $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(n \cdot \frac{z_o}{a} \cdot x\right)}{\cosh(x)} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\cosh\left(n \cdot \frac{z_o}{a} \cdot \frac{\pi}{2}\right)}$ και από

την (4.20) καταλήγουμε στην έκφραση:

$$I(\rho, z) \sim \frac{-i \cdot V \cdot \pi^2}{\zeta_o \cdot 4 \cdot \sqrt{2}} \cdot k \cdot z_o \cdot \sqrt{\frac{z_o}{a}} \cdot e^{\frac{\pi}{z_o} \cdot \alpha} \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{\cosh\left(n \cdot \frac{z_o}{a} \cdot \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \frac{\rho}{z_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|2 \cdot m - 1|} \cdot K_1\left(\frac{\pi \cdot \rho}{z_o} \cdot |2 \cdot m - 1|\right) \quad (4.21)$$

$$\cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|2 \cdot m - 1|} \cdot K_1\left(\frac{\pi \cdot \rho}{z_o} \cdot |2 \cdot m - 1|\right)$$

η οποία μπορεί να ξαναγραφτεί ως:

$$I(\rho, z) \sim \frac{-i \cdot V \cdot \pi^2}{\zeta_o \cdot 4 \cdot \sqrt{2}} \cdot k \cdot z_o \cdot \sqrt{\frac{z_o}{a}} \cdot e^{\frac{\pi}{z_o} \cdot \alpha} \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{\cosh\left(n \cdot \frac{z_o}{a} \cdot \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \xi\left(\frac{\rho}{z_o}\right) \quad (4.22) \text{ όπου:}$$

$$\xi(x) = x \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|2 \cdot m - 1|} \cdot K_1(\pi \cdot x \cdot |2 \cdot m - 1|), x \geq 0. \quad (4.23)$$

Για μεγάλες θετικές ποσότητες του x κρατάμε μόνο τους όρους $m=0$ και $m=1$ του αθροίσματος στην (4.24), οπότε γίνεται η προσέγγιση:

$$\xi(x) \sim 2 \cdot x \cdot K_1(\pi \cdot x).$$

Τελικά, το ασυμπτωτικό ρεύμα γράφεται:

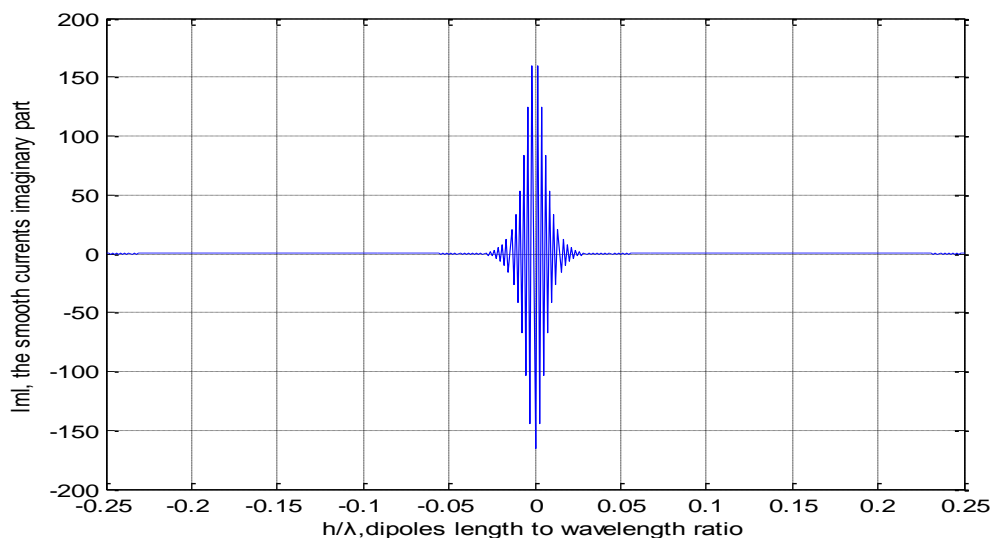
$$I(\rho, z) \sim \frac{-i \cdot V \cdot \pi^2}{\zeta_0 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} \cdot k \cdot \rho \cdot \sqrt{\frac{z_0}{a}} \cdot e^{\frac{\pi}{z_0} a} \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{\cosh\left(n \cdot \frac{z_0}{a} \cdot \frac{\pi}{2}\right)} \cdot K_1\left(\frac{\pi \cdot \rho}{z_0}\right) \quad (4.25), \quad \text{που}$$

αποτελεί τον 2^ο Ασυμπτωτικό τύπο για το προτεινόμενο ρεύμα. Και πάλι το μεγάλο μέτρο των ταλαντώσεων οφείλεται στην ποσότητα $e^{\frac{\pi}{z_0} a}$, οι ταλαντώσεις οφείλονται στον όρο $(-1)^n$ και φθίνουν αυξανόμενου του n όπως φαίνεται από τον όρο

$$\frac{1}{\cosh\left(n \cdot \frac{z_0}{a} \cdot \frac{\pi}{2}\right)}.$$

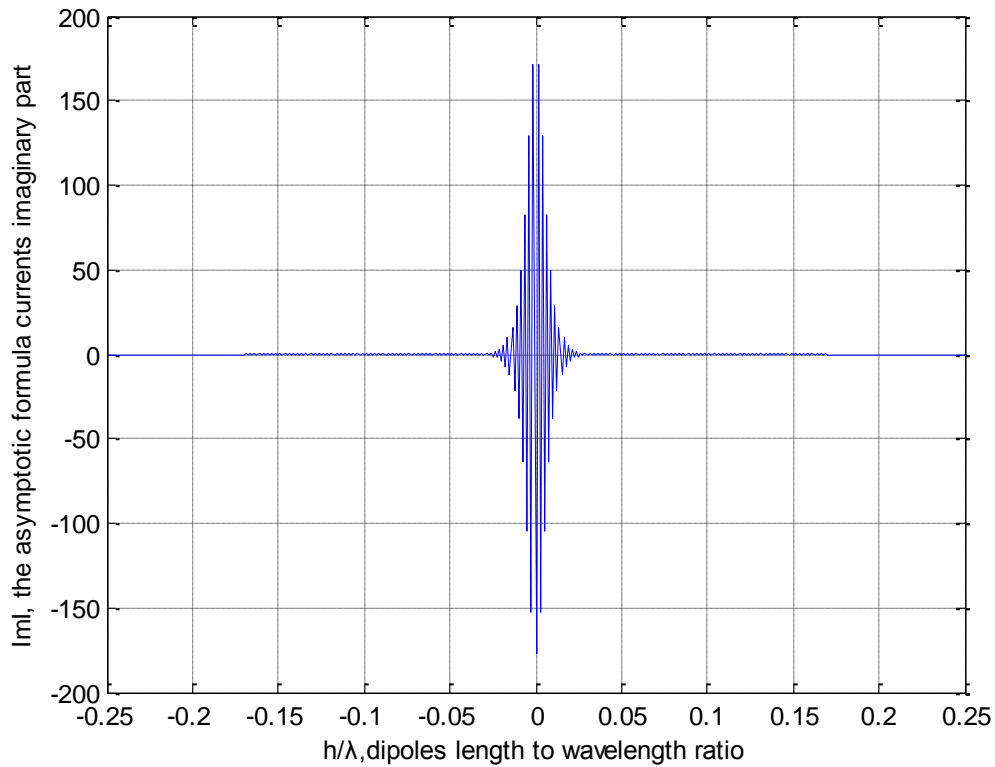
4.2.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για το δεύτερο ασυμπτωτικό τύπο στην πεπερασμένη κεράια

Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις των σχημάτων απεικονίζουμε την ασυμπτωτική προσέγγιση στα διάφορα σημεία $l \cdot z_0$ του διπόλου στο 4.6 και παραθέτουμε το γράφημα για το προτεινόμενο ρεύμα στο 4.7 για την ίδια απόσταση από τον άξονα του διπόλου, που εξαγάγαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 4.6: Κατανομή του (φανταστικού μέρους) του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με τον προσεγγιστικό πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$,

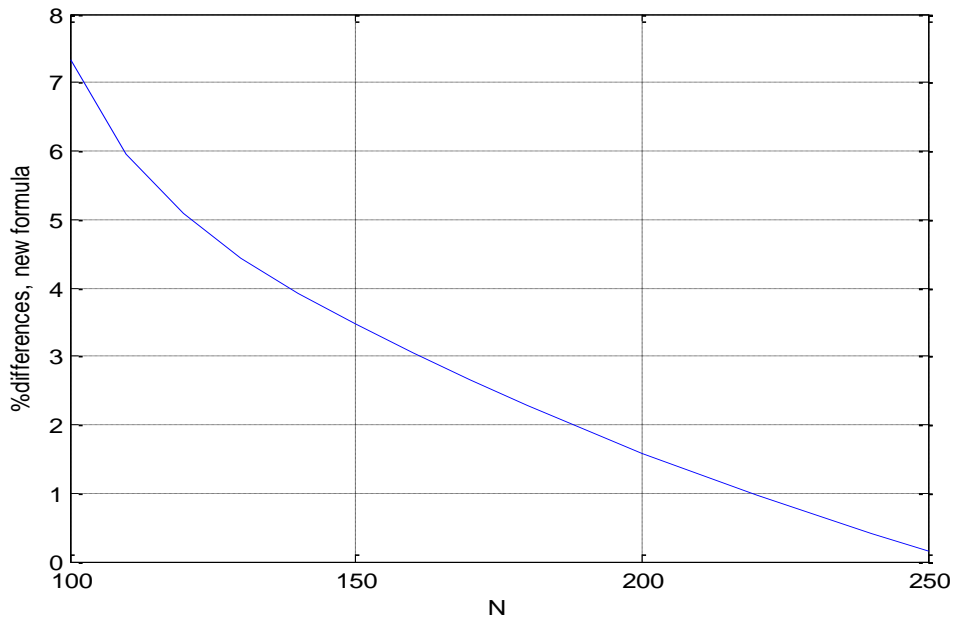
$$N = 200 \text{ για } \rho = 0.5 \cdot z_0 = 0.5 \cdot \frac{h}{N}$$



Σχήμα 4.7: Κατανομή του (φανταστικού μέρους) του ασυμπτωτικού ρεύματος για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$ για $\rho = 0.5 \cdot z_o = 0.5 \cdot \frac{h}{N}$

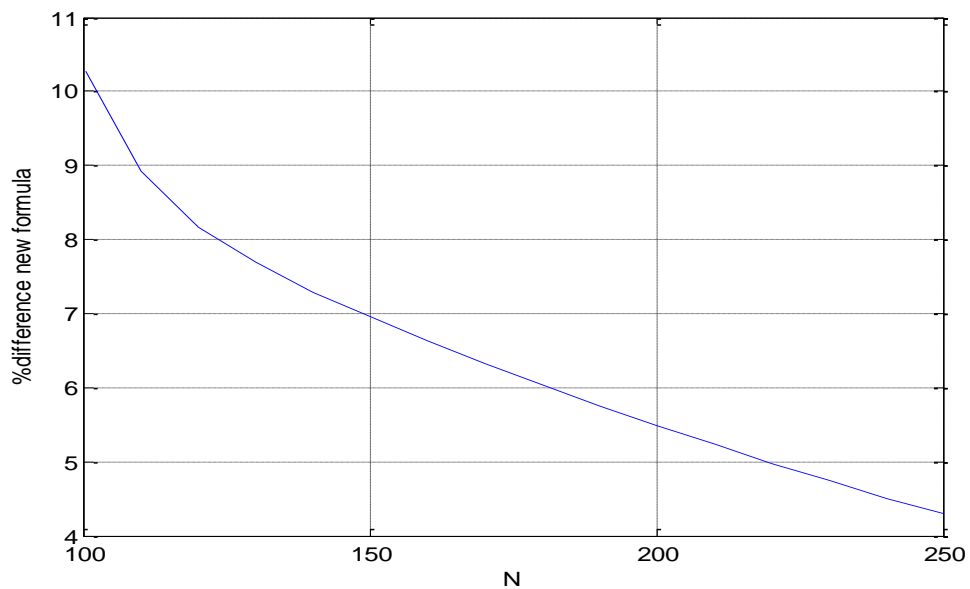
Για τον έλεγχο της ισχύος του τύπου και πάλι θα προβούμε σε συγκρίσεις με το προτεινόμενο ρεύμα που υπολογίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Παραθέτουμε λοιπόν τα διαγράμματα 4.8 – 4.14 που εικονίζουν τις ποσοστιαίες διαφορές του προτεινόμενου από το ασυμπτωτικό ρεύμα στο κέντρο του σωληνοειδούς διπόλου ($z=0$) στο σημείο τροφοδοσίας συναρτησει του αριθμού N των ημιτονοειδών συναρτησεων και άρα του πλήθους των σημείων διαμέρισης.



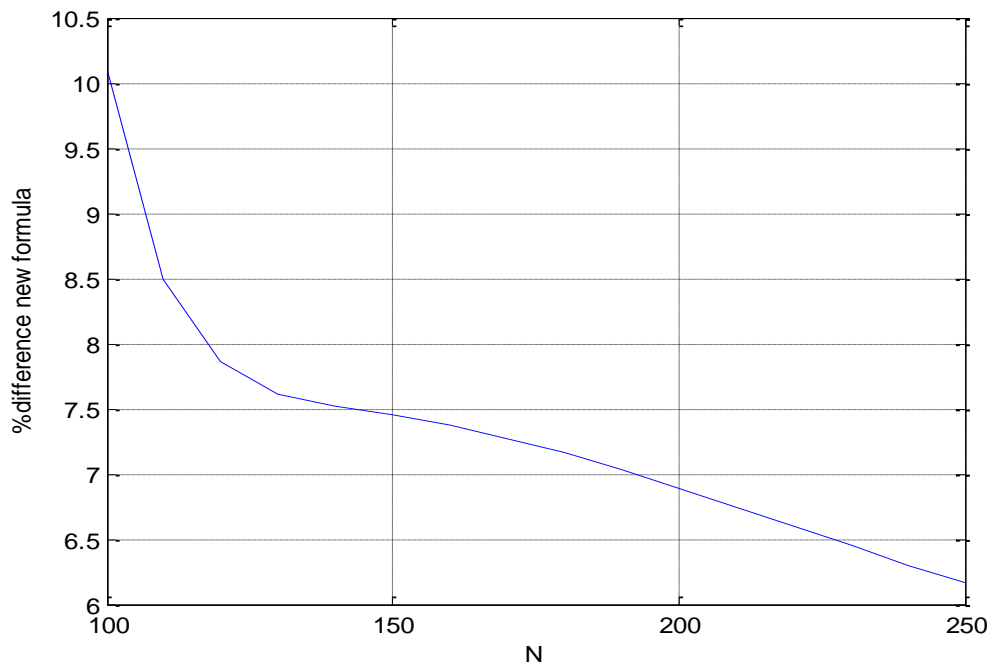
Σχήμα 4.8: Κατανομή των % διαφορών του (φανταστικού) μέρους του ασυμπτωτικού από το φανταστικό μέρος του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ για

$$\rho = 0.125 \cdot z_o = 0.125 \cdot \frac{h}{N} \text{ στο κέντρο του διπόλου } (z=0).$$



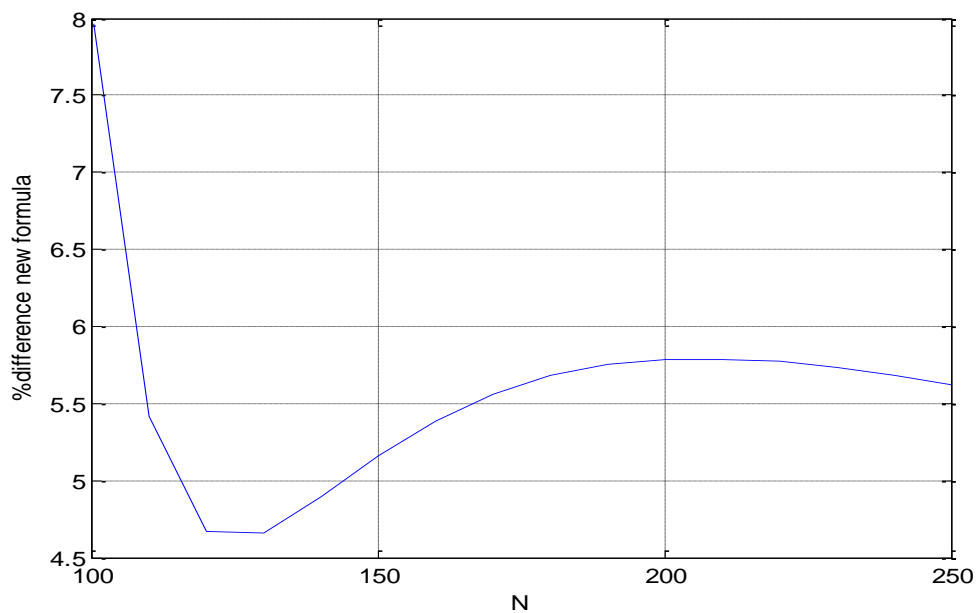
Σχήμα 4.9: Κατανομή των % διαφορών του (φανταστικού) μέρους του ασυμπτωτικού από το φανταστικό μέρος του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ για

$$\rho = 0.25 \cdot z_o = 0.25 \cdot \frac{h}{N} \text{ στο κέντρο του διπόλου } (z=0).$$



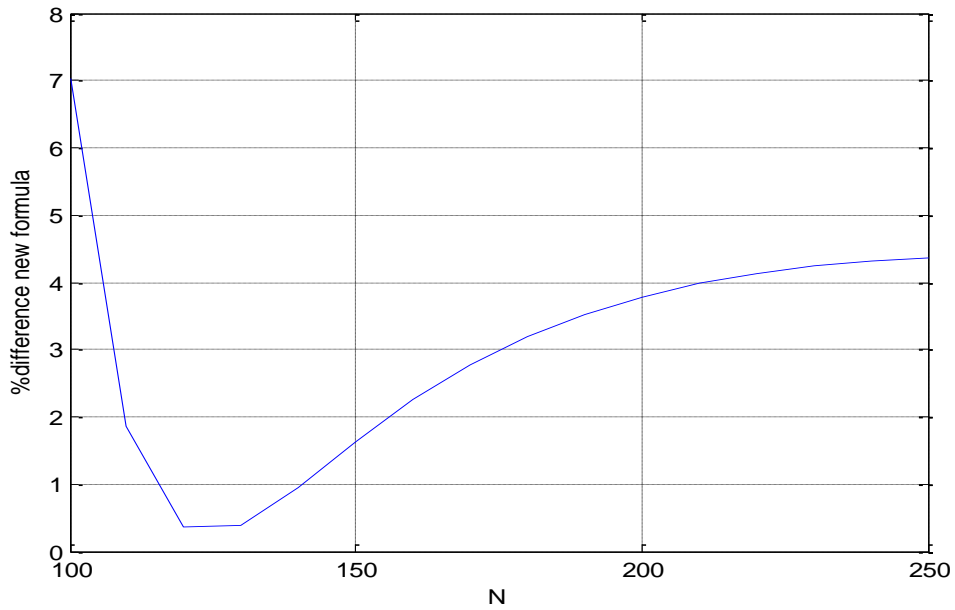
Σχήμα 4.10: Κατανομή των % διαφορών του (φανταστικού) μέρους του ασυμπτωτικού από το φανταστικό μέρος του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ για

$$\rho = 0.5 \cdot z_o = 0.5 \cdot \frac{h}{N} \text{ στο κέντρο του διπόλου } (z=0).$$



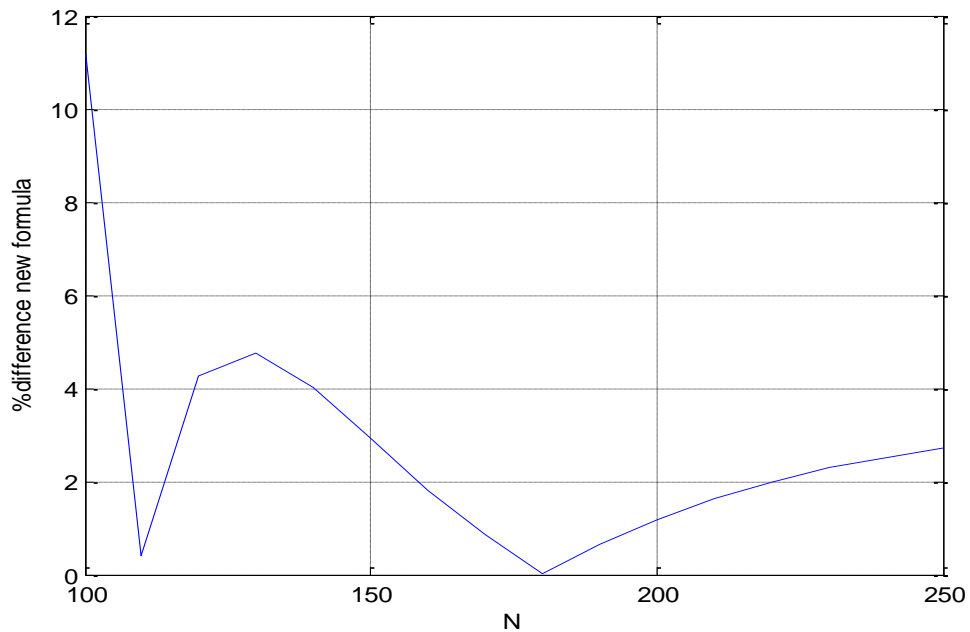
Σχήμα 4.11: Κατανομή των % διαφορών του (φανταστικού) μέρους του ασυμπτωτικού από το φανταστικό μέρος του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ για

$$\rho = 0.75 \cdot z_o = 0.75 \cdot \frac{h}{N} \text{ στο κέντρο του διπόλου } (z=0).$$



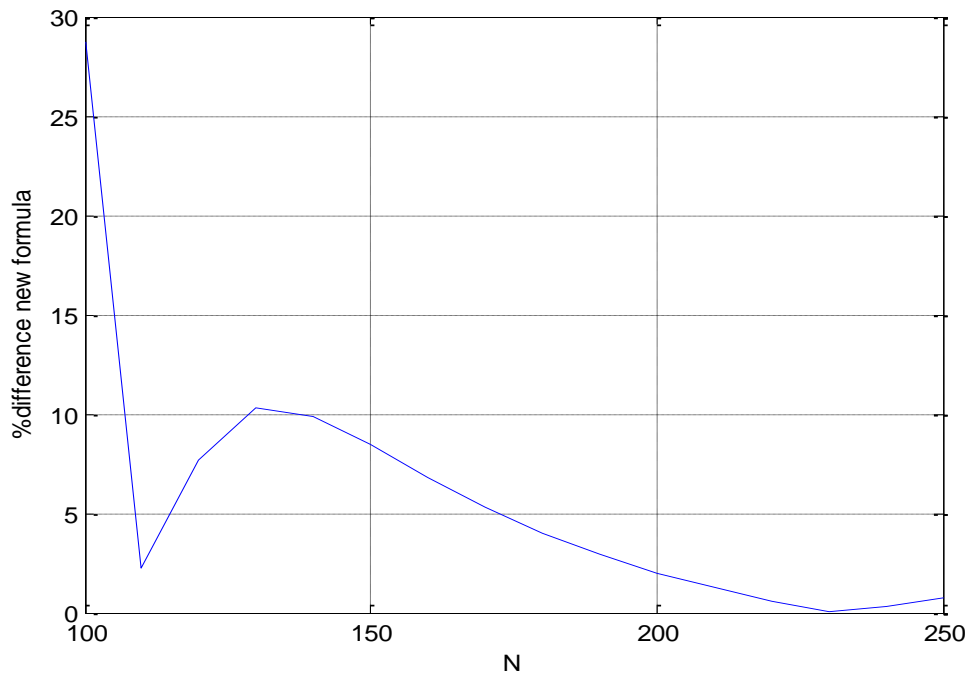
Σχήμα 4.12: Κατανομή των % διαφορών του (φανταστικού) μέρους του ασυμπτωτικού από το φανταστικό μέρος του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ για

$$\rho = z_o = \frac{h}{N} \text{ στο κέντρο του διπόλου } (z=0).$$



Σχήμα 4.13: Κατανομή των % διαφορών του (φανταστικού) μέρους του ασυμπτωτικού από το φανταστικό μέρος του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ για

$$\rho = 1.25 \cdot z_o = 1.25 \cdot \frac{h}{N} \text{ στο κέντρο του διπόλου } (z=0).$$



Σχήμα 4.14: Κατανομή των % διαφορών του (φανταστικού) μέρους του ασυμπτωτικού από το φανταστικό μέρος του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 100 - 250$ για $\rho = 1.5 \cdot z_o = 1.5 \cdot \frac{h}{N}$ στο κέντρο του διπόλου ($z=0$).

Αξιζει να σημειώσουμε ότι παρότι για $\rho > z_o$ υπάρχουν περιοχές των γραφημάτων στις οποίες οι % διαφορες στο κέντρο τροφοδοσίας αυξάνονται με την αύξηση του N (κάτι που είναι δείγμα μη ισχύος της ασυμπτωτικής έκφρασης για τη συγκεκριμένη περιοχή) , οι % διαφορες πολλών σημείων $l \cdot z_o$ περί το κέντρο είναι εντυπωσιακά μικρές όπως δείχνουμε στον παρακάτω πίνακα για την περίπτωση $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $\rho = 1.5 \cdot z_o$:

-32,1099	2,821136	4,82178
-30,5151	4,191454	4,191454
-23,9342	4,82178	2,821135
-21,3767	3,902113	0,306237
-16,0827	1,872463	-2,2139
-13,1349	-0,78886	-5,79907
-8,74416	-2	-8,74416
-5,79907	-0,78886	-13,1349

-2,2139	1,872463	-16,0827
0,306237	3,902113	-21,3767

*Πίνακας 4.1: Κατανομή των % διαφορών του (φανταστικού) μέρους του ασυμπτωτικού από το φανταστικό μέρος του προτεινόμενου ρεύματος που προκύπτει από λύση της εξίσωσης Hallén με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, για $\rho = 1.5 \cdot z_o = 1.5 \cdot \frac{h}{N}$ για σημεία περί το κέντρο του διπόλου ($z=0$). Με **bold** σημειώνεται η διαφορά στο κέντρο του διπόλου (2%).*

Η εικόνα είναι ακόμα καλύτερη για $\rho < z_o$. Στη συμπεριφορά των γειτονικών σημείων του κέντρου, λοιπόν, ο 2^{05} τύπος υπερτερεί σαφώς.

Στο εύρος $\rho = (0^+, \alpha)$ υπάρχουν περιοχές στις οποίες δεν ισχύει καμία ασυμπτωτική προσέγγιση, πράγμα που παρατηρείται από την έλλειψη της σύγκλισης αυξανόμενου του N , όπως είδαμε και στον δεύτερο τύπο.

Κεφάλαιο 5: Πρόγραμμα Matlab

5.1 Πρόγραμμα για την επίλυση του συστήματος με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα

Θα επιλύσουμε αριθμητικά το σύστημα:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{1-n} \cdot I_n = \underbrace{\frac{i \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot V \cdot \sin(k \cdot |l| \cdot z_o)}_{B_l^{(1)}} + C \cdot \underbrace{z_o \cdot \cos(k \cdot l \cdot z_o)}_{B_l^{(2)}} \quad (5.1)$$

$$\text{Με } A_l = A_{-l} = \int_0^{z_o} (z_o - z) \cdot [K_{ap}(z + l \cdot z_o) + K_{ap}(z - l \cdot z_o)] \cdot dz, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$$

Το σύστημα είναι ισοδυναμο με τα:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{1-n} \cdot I_n^{(1)} = \frac{i \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot V \cdot \sin(k \cdot |l| \cdot z_o) = B_l^{(1)} \quad (5.2)$$

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{1-n} \cdot I_n^{(2)} = z_o \cdot \cos(k \cdot l \cdot z_o) = B_l^{(2)} \quad (5.3), \quad C = -\frac{I_N^{(1)}}{I_N^{(2)}}$$

Οι συντελεστές I_n υπολογίζονται με κλήση της συνάρτησης `telikoreuma` στο `command mode` η οποία έχει ορίσματα:

1. Τη διαφορά δυναμικού V στο κέντρο του διπόλου (πάντα εδώ $V=1$)
2. Τον κυματαριθμό $k = 2 \cdot \pi / \lambda$
3. Το λόγο h/λ
4. Το λόγο a/λ
5. Το N .

Δηλαδή ένα παράδειγμα κλήσης είναι το `telikoreuma(1,2*pi,0.25,0.007022,200)`.

Η συνάρτηση είναι:

```

function f=telikoreuma(V,k,h,a,N)
b=pinakasB1(V,k,h,a,N);
d=pinakasB2(k,h,a,N);
c=-b(2*N+1)/d(2*N+1);
f=b+c*d;

```

όπου b η λύση του συστήματος (5.2) και d η λύση του συστήματος (5.3)

```

function f=pinakasB1(V,k,h,a,N)
b=deximelos1pinakas(V,k,h,N);
b=b(:);
f=inv(makeAltoeplitz(k,h,a,N))*b;
και
function f=pinakasB2(k,h,a,N)
b=deximelos2pinakas(k,h,N);
b=b(:);
f=inv(makeAltoeplitz(k,h,a,N))*b;

```

Στο $deximelos1pinakas(V,k,h,N)$ και στο $deximelos2pinakas(k,h,N)$, υπολογίζονται τα στοιχεία των πινάκων $B_l^{(1)}$ και $B_l^{(2)}$ αντίστοιχα:

```

function g=deximelos1pinakas(V,k,h,N)
z0=h/N;
for l=-N:N
g(N+l+1)=z0*pointmatchingparastasiB1(l*z0,V,k);
end

```

και

```

function f=deximelos2pinakas(k,h,N)
z0=h/N;
for l=-N:N
f(N+l+1)=z0*pointmatchingparastasiB2(l*z0,k);
end

```

με

```

function r=pointmatchingparastasiB1(z,V,k)
Zo=376.73;
r=(i*V/(2*Zo)).*(sin(k*abs(z)));
end

```

και

```

function f=pointmatchingparastasiB2(z,k)
f=cos(k*z);

```

Η συνάρτηση $makeAltoeplitz(k,h,a,N)$ είναι η παρακάτω:

```

function f=makeAltoeplitz(k,h,a,N)
for x=0:(2*N)
    g(x+1)=olokliromaAl(k,h,a,x,N);
end
for d=0:2*(N)
    for e=0:2*(N)
        f(d+1,e+1)=g(1+abs(d-e));
    end
end
end

```

όπου

```

function f=olokliromaAl(k,h,a,l,N)
z0=h/N;
f=quad(@olokliroteosAl,0,z0,[],[],k,h,a,l,N);

```

Η συνάρτηση $quad(@olokliroteosAl,0,z0,[],[],k,h,a,l,N)$ υπολογίζει τους συντελεστές:

$$A_l = A_{-l} = \int_0^{z_0} (z_0 - z) \cdot [K_{ap}(z + l \cdot z_0) + K_{ap}(z - l \cdot z_0)] \cdot dz$$

όπου

```

function f=olokliroteosAl(z,k,h,a,l,N)
z0=h/N;
f=(z0-z).*(kernelzkailz0(z,k,h,a,l,N)+kernelzmeionlz0(z,k,h,a,l,N));

```


με

```
function f=kernelzkailz0(z,k,h,a,l,N)
z0=h/N;
g=exp(i*k*sqrt((z+l*z0).^2+a.^2))./sqrt((z+l*z0).^2+a.^2);
f=(1/(4*pi))*g;
```

και

```
function f=kernelzmeionlz0(z,k,h,a,l,N)
z0=h/N;
g=exp(i*k*sqrt((z-l*z0).^2+a.^2))./sqrt((z-l*z0).^2+a.^2);
f=(1/(4*pi))*g;
```

Για το παράδειγμα κλήσης της *telikoreuma(1,2*pi,0.25,0.007022,200)* υπολογίζεται ένας πίνακας συντελεστών *ans*, του οποίου παραθέτουμε τα πρώτα στοιχεία περί το κέντρο $z = 0$.

0,00722363991569351 + 64,6327718921325i
0,00722705896832960 - 82,3746471657681i
0,00723087492919688 + 104,850620926769i
0,00723363105129223 - 133,109693640540i
0,00723665718774013 + 168,335974148064i
0,00723875032390726 - 211,504015670137i
0,00724098853308996 + 263,063627955597i
0,00724241217874720 - 321,974887707621i
0,00724387616119433 + 384,581392550803i
0,00724460761185795 - 443,209399190245i
0,00724532168772624 + 486,429645334000i
0,00724533994378029 - 502,548582960025i
0,00724531835538360 + 486,429645436533i
0,00724461567451543 - 443,209399408720i
0,00724386159648547 + 384,581392908206i
0,00724243576430096 - 321,974888218295i
0,00724095484347855 + 263,063628591837i
0,00723879539891103 - 211,504016383679i
0,00723660193995394 + 168,335974893080i
0,00723369494449968 - 133,109694373689i

Το γράφημα αυτών των I_n για τα διάφορα $z_n = n \cdot z_o$ δίνεται στα σχήματα (2.5) και (2.6)

Το γράφημα αυτό παράγεται από τη συνάρτηση:

$z0=h/N;$

figure(1)

$x=(-h:h/N:h);$

$plot(x,real(ans));$

$xlabel('h/\lambda, dipoles length to wavelength ratio');$

$ylabel('Re\{I\}, the currents real part');$

$grid;$

figure(2)

$x=(-h:h/N:h);$

$plot(x,imag(ans));$

$xlabel('h/\lambda, dipoles length to wavelength ratio');$

$ylabel('Im\{I\}, the currents imaginary part');$

$grid;$

, αφού δοθούν στο command mode οι τιμές των h/λ , α/λ και N.

5.2 Πρόγραμμα για την επίλυση του συστήματος με χρήση του ακριβούς πυρήνα

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{1-n} \cdot I_n = \underbrace{\frac{i \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot V \cdot \sin(k \cdot |l| \cdot z_o)}_{B_l^{(1)}} + C \cdot \underbrace{z_o \cdot \cos(k \cdot l \cdot z_o)}_{B_l^{(2)}} \quad (5.4)$$

$$\text{Με } A_l = A_{-l} = \int_0^{z_o} (z_o - z) \cdot [K_{ex}(z + l \cdot z_o) + K_{ex}(z - l \cdot z_o)] \cdot dz, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N$$

Το σύστημα είναι ισοδυναμο με τα:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{1-n} \cdot I_n^{(1)} = \frac{i \cdot z_o}{2 \cdot \zeta_o} \cdot V \cdot \sin(k \cdot |l| \cdot z_o) = B_l^{(1)} \quad (5.5)$$

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{1-n} \cdot I_n^{(2)} = z_o \cdot \cos(k \cdot l \cdot z_o) = B_l^{(2)} \quad (5.6), C = -\frac{I_N^{(1)}}{I_N^{(2)}}$$

Οι συντελεστές I_n υπολογίζονται με κλήση της συνάρτησης `telikoreuma` στο `command mode` η οποία έχει ορίσματα:

1. Τη διαφορά δυναμικού V στο κέντρο του διπόλου (πάντα εδώ $V=1$)
2. Τον κυματαριθμό $k = 2 \cdot \pi / \lambda$
3. Το λόγο h/λ
4. Το λόγο a/λ
5. Το N .

Δηλαδή ένα παράδειγμα κλήσης είναι το `telikoreuma(1,2*pi,0.25,0.007022,200)`.

Η συνάρτηση είναι:

```
function f=telikoreuma(V,k,h,a,N)
b=pinakasB1(V,k,h,a,N);
d=pinakasB2(k,h,a,N);
c=-b(2*N+1)/d(2*N+1);
f=b+c*d;
```

όπου b η λύση του συστήματος (5.5) και d η λύση του συστήματος (5.6)

```
function f=pinakasB1(V,k,h,a,N)
b=deximelos1pinakas(V,k,h,N);
b=b(:);
f=inv(makeAltoeplitz(k,h,a,N))*b;
και
function f=pinakasB2(k,h,a,N)
b=deximelos2pinakas(k,h,N);
b=b(:);
f=inv(makeAltoeplitz(k,h,a,N))*b;
```

Στο $deximelos1pinakas(V,k,h,N)$ και στο $deximelos2pinakas(k,h,N)$, υπολογίζονται τα στοιχεία των πινάκων $B_l^{(1)}$ και $B_l^{(2)}$ αντίστοιχα:

```
function g=deximelos1pinakas(V,k,h,N)
z0=h/N;
for l=-N:N
g(N+l+1)=z0*pointmatchingparastasiB1(l*z0,V,k);
end
```

και

```
function f=deximelos2pinakas(k,h,N)
z0=h/N;
for l=-N:N
f(N+l+1)=z0*pointmatchingparastasiB2(l*z0,k);
end
```

με

```
function r=pointmatchingparastasiB1(z,V,k)
Zo=376.73;
r=(i*V/(2*Zo)).*(sin(k*abs(z)));
end
```

και

```
function f=pointmatchingparastasiB2(z,k)
f=cos(k*z);
```

Η συνάρτηση $makeAltoeplitz(k,h,a,N)$ είναι η παρακάτω:

```
function f=makeAltoeplitz(k,h,a,N)
for x=0:(2*N)
g(x+1)=olokliromaAl(k,a,x,N);
end
```

```

for d=0:2*(N)
    for e=0:2*(N)
        f(d+1,e+1)=g(l+abs(d-e));
    end
end
end

```

όπου

```

function f=olokliromaAlexact(k,a,l,z0)
f=dblquad(@olokliroteosdblexactkernel,-pi,pi,0,z0,[],[],k,a,l,z0);

```

Η συνάρτηση `dblquad(@olokliroteosdblexactkernel,-pi,pi,0,z0,[],[],k,a,l,z0)`; υπολογίζει τους συντελεστές:

$$A_l = A_{-l} = \int_0^{z_0} (z_0 - z) \cdot [K_{ex}(z + l \cdot z_0) + K_{ex}(z - l \cdot z_0)] \cdot dz$$

όπου

```

function f=olokliroteosdblexactkernel(theta,z,k,a,l,z0)
f=olokliroteosdblexactkernelzmeionlz0(theta,z,k,a,l,z0)+olokliroteosdblexactkernelzkailz0(theta,z,k,a,l,z0);

```

με

```

function f=olokliroteosdblexactkernelzkailz0(theta,z,k,a,l,z0)
f=(z0-
z).*(1/(8*pi^2))*exp(i*k*sqrt((z+l*z0).^2+(2*a*sin(theta/2)).^2))./sqrt((z+l*z0).^2+(2*a*sin(theta/2)).^2));

```

και

```

function f=olokliroteosdblexactkernelzmeionlz0(theta,z,k,a,l,z0)
f=(z0-z).*(1/(8*pi^2))*exp(i*k*sqrt((z-l*z0).^2+(2*a*sin(theta/2)).^2))./sqrt((z-l*z0).^2+(2*a*sin(theta/2)).^2));

```

Προκειμένου να ξεπεράσουμε το πρόβλημα του απειρισμού του πυρήνα για $\theta = 0$ και για $z \rightarrow 0$, χωρίζουμε το ολοκλήρωμα του ακριβή πυρήνα σε δύο, εκ των

οποίων το ένα είναι το ελλειπτικό ολοκλήρωμα που έχει τη λογαριθμική ανωμαλία (όπως περιγράψαμε στο πρώτο κεφάλαιο) και το άλλο υπολογίζεται ομαλά. Μια εκτενής αναφορά αυτού του ‘τεχνάσματος’ δίνεται στο [5, (9.1)-(9.6)].

Ο αντίστοιχος κώδικας είναι:

```
function f=olokliromaAexact(k,a,l,z0)
f=dblquad(@olokliroteosdblexactkernel,-pi,pi,10^(-8),z0,[],[],k,a,l,z0);
```

με

```
function f=olokliroteosdblexactkernel(theta,z,k,a,l,z0)
f=olokliroteosdblexactkernelzmeionlz0(theta,z,k,a,l,z0)+olokliroteosdblexactkernelzkailz0(theta,z,k,a,l,z0);
```

και

```
function f=olokliroteosdblexactkernelzkailz0(theta,z,k,a,l,z0)
```

```
xx=(2*a)^2/((z+l*z0).^2+(2*a)^2);
```

```
c1=1/(2*pi^2);
```

```
I1=(c1/sqrt((z+l*z0).^2+(2*a)^2)).*ellipke(xx);
```

```
d=exp(i*k*sqrt((z+l*z0).^2+(2*a*sin(theta/2)).^2));
```

```
e=sqrt((z+l*z0).^2+(2*a*sin(theta/2)).^2);
```

```
constant=1/(8*pi^2);
```

```
f=(z0-z).*(constant*((d/e)-1)+I1);
```

και

```
function f=olokliroteosdblexactkernelzmeionlz0(theta,z,k,a,l,z0)
```

```
yy=(2*a)^2/((z-l*z0).^2+(2*a)^2);
```

$$c1=1/(2*\pi^2);$$

$$I2=(c1/\sqrt{(z-1*z0).^2+(2*a)^2})*\text{ellipke}(yy);$$

$$d=\exp(i*k*\sqrt{(z-1*z0).^2+(2*a*\sin(\text{theta}/2)).^2});$$

$$e=\sqrt{(z-1*z0).^2+(2*a*\sin(\text{theta}/2)).^2};$$

$$\text{constant}=1/(8*\pi^2);$$

$$f=(z0-z).*(\text{constant}*((d/e)-1)+I2);$$

Για το παράδειγμα κλήσης της $\text{telikoreuma}(1,2*\pi,0.25,0.007022,200)$ υπολογίζεται ένας πίνακας συντελεστών ans , του οποίου παραθέτουμε τα πρώτα στοιχεία περί το κέντρο $z = 0$.

0,00843231967456443 + 0,00416379338183183i
0,00843561471570034 + 0,00410473960763891i
0,00843847072966067 + 0,00403719204293268i
0,00844088758291605 + 0,00395777609440028i
0,00844286516248340 + 0,00386110747133073i
0,00844440337586051 + 0,00373749597547254i
0,00844550215110115 + 0,00356663327222230i
0,00844616143680296 + 0,00330639382526975i
0,00844638120213125 + 0,00260931395625145i
0,00844616143680299 + 0,00330639382526978i
0,00844550215110116 + 0,00356663327222231i
0,00844440337586050 + 0,00373749597547253i
0,00844286516248340 + 0,00386110747133073i
0,00844088758291607 + 0,00395777609440030i
0,00843847072966064 + 0,00403719204293265i
0,00843561471570035 + 0,00410473960763892i

Το γράφημα αυτών των I_n για τα διάφορα $z_n = n \cdot z_0$ δίνεται στα σχήματα 2.17 και 2.18

Τα γραφήματα αυτά παράγονται από τη συνάρτηση:

```
z0=h/N;
```

```
figure(1)
```

```
x=(-h:h/N:h);
```

```
plot(x,real(ans));
```

```
xlabel('h/λ,dipoles length to wavelength ratio');
```

```
ylabel('Re{I}, the currents real part');
```

```
grid;
```

```
figure(2)
```

```
x=(-h:h/N:h);
```

```
plot(x,imag(ans));
```

```
xlabel('h/λ,dipoles length to wavelength ratio');
```

```
ylabel('Im{I}, the currents imaginary part');
```

```
grid;
```

, αφού δοθούν στο command mode οι τιμές των $\frac{h}{\lambda}$, $\frac{\alpha}{\lambda}$ και N.

5.3 Πρόγραμμα για την εύρεση του προτεινόμενου ρεύματος

Το πρόγραμμα αυτό υλοποιεί τη συνάρτηση:

$$I(\rho, z) = \frac{1}{2i \sin(kz_o)} \cdot \sum_{n=-N}^N I_n \left(e^{ik\sqrt{(n+1)z_o-z]^2+\rho^2}} + e^{ik\sqrt{[(n-1)z_o-z]^2+\rho^2}} - 2 \cdot \cos(kz_o) \cdot e^{ik\sqrt{(nz_o-z)^2+\rho^2}} \right)$$

για κάθε ακτίνα ρ και θέση z.

Η συνάρτηση στο Matlab είναι:


```

r=0;
z0=h/N;
for zz=-h:(h/N):h
    r=r+1;
    calcexomalinsi
    current(r)=ans1;

end

figure(5)
x=(-h:h/N:h);
plot(x,real(current));
xlabel('h/λ,dipoles length to wavelength ratio');
ylabel('Re{I}, the smooth currents real part');
grid;

```

```

figure(6)
x=(-h:h/N:h);
plot(x,imag(current));
xlabel('h/λ,dipoles length to wavelength ratio');
ylabel('Im{I}, the smooth currents imaginary part');
grid;

```

όπου η συνάρτηση *calcexomalinsi* είναι η:

```

ans1=0;
ans2=0;
k=2*pi;
for n=-(N):(N)
    ans2=(1/(2*i*sin(k*z0)))*I(n+N+1)*
(-2*cos(k*z0)*exp(i*k*(sqrt((n*z0-zz)^2+a^2)))+exp(i*k*(sqrt(((n+1)*z0-
zz)^2+a^2)))+exp(i*k*(sqrt(((n-1)*z0-zz)^2+a^2))));
    ans1=ans2+ans1;
end

```

Για την εξομάλυνση έχουμε δώσει την εντολή $I=ans$; στο command mode.

Το προτεινόμενου ρεύμα περί το κέντρο για την περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα και την κλίση $telikoreuma(1,2*\pi,0.25,0.007022,200)$ είναι:

0,00723136330708320 + 0,00426271645402765i
0,00723445233544508 + 0,00421127166465280i
0,00723717831009491 + 0,00415961443585991i
0,00723954103668949 + 0,00409679051645922i
0,00724154050433252 + 0,00403418786843650i
0,00724317650425756 + 0,00395052689983253i
0,00724444910010890 + 0,00386750060763794i
0,00724535806210219 + 0,00372928794698248i
0,00724590354453115 + 0,00359181535630328i
0,00724608530122100 + 0,00298162798102200i
0,00724590356618532 + 0,00359181515864518i
0,00724535808193982 + 0,00372928753562005i
0,00724444914237822 + 0,00386749996737252i
0,00724317653203591 + 0,00395052601026776i
0,00724154052283598 + 0,00403418669083148i
0,00723954105272071 + 0,00409678899417150i
0,00723717830304557 + 0,00415961254411898i
0,00723445232745908 + 0,00421126942713596i
0,00723136328823053 + 0,00426271401541304i

Οι γραφικές παραστάσεις αυτού του προτεινόμενου ρεύματος σχεδιάζονται στα σχήματα 3.3 και 3.4

5.4 Πρόγραμμα για τον υπολογισμό του ασυμπτωτικού ρεύματος με χρήση του πρώτου τύπου

Το πρόγραμμα υπολογίζει και σχεδιάζει τις τιμές της συνάρτησης:

$$I(\rho, n \cdot z_o) \sim \frac{-i \cdot \pi^2 \cdot V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot k \cdot z_o \cdot \sqrt{\frac{\rho}{a}} \cdot e^{\frac{\pi}{z_o}(a-\rho)} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot \rho}{2 \cdot \alpha}\right) \cdot (-1)^n \cdot \frac{\cosh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot z_o}{2 \cdot a}\right)}{\cosh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot z_o}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi \cdot \rho}{\alpha}\right)}$$

και δίνεται παρακάτω:

```

z0=h/N;
k=2*pi;
for n=-N:N

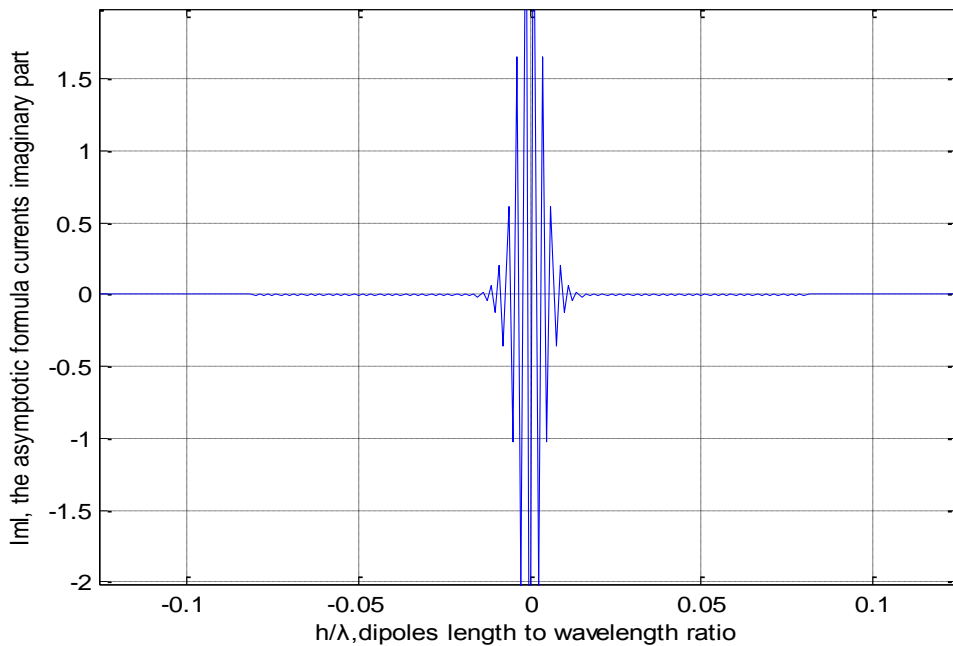
A=-i*pi^2*I*z0*k*sqrt(r/a)*exp((pi/z0)*(a-r));
B=2*376.73;
C=cos((pi*z0*n)/z0)*cos((r*pi)/2*a)*cosh((pi*z0*n)/2*a);
D=cosh((pi*z0*n)/a)+cos((r*pi)/a);

Iform(n+N+1)=A*C/(B*D);

end;
figure(7)
x=(-h:h/N:h);
plot(x,imag(Iform));
xlabel('h/λ,dipoles length to wavelength ratio');
ylabel('Im{I}, the asymptotic formula currents imaginary part');
grid;

```

Ένα τέτοιο γράφημα είναι το παρακάτω:



Σχήμα 5.1: Κατανομή του (φανταστικού μέρους) του ασυμπτωτικού ρεύματος για $a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$ για $\rho = 2 \cdot z_o = 2 \cdot \frac{h}{N}$

Τα γειτονικά στο κέντρο σημεία:

-0,0000000000000000 - 1,02354148749035i
0,0000000000000000 + 1,65090129937604i
-0,0000000000000000 - 2,48512065935569i
0,0000000000000000 + 3,31424574081377i
-0,0000000000000000 - 3,68438996280636i
0,0000000000000000 + 3,31424574081377i
-0,0000000000000000 - 2,48512065935569i
0,0000000000000000 + 1,65090129937604i
-0,0000000000000000 - 1,02354148749035i

5.5 Πρόγραμμα για τον υπολογισμό του ασυμπτωτικού ρεύματος με χρήση του δεύτερου τύπου

Το πρόγραμμα υπολογίζει και σχεδιάζει τις τιμές της συνάρτησης:

$$I(\rho, z) \sim \frac{-i \cdot V \cdot \pi^2}{\zeta_o \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} \cdot k \cdot \rho \cdot \sqrt{\frac{z_o}{a}} \cdot e^{\frac{\pi}{z_o} \cdot \alpha} \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{\cosh\left(n \cdot \frac{z_o}{a} \cdot \frac{\pi}{2}\right)} \cdot K_1\left(\frac{\pi \cdot \rho}{z_o}\right)$$

και δίνεται παρακάτω:

$z0=h/N;$

$k=2*pi;$

for $n=-N:N$

$A=-i*(pi^2)*I*r*k*sqrt(z0/a)*exp((pi/z0)*a);$

$B=2*376.73*sqrt(2);$

$C=(-1)^n*besselk(1,(pi*r/z0));$

$D=cosh((pi*z0*n)/(2*a));$

Iform3($n+N+1$)=($A*C$)/($B*D$);

end;

figure(21)

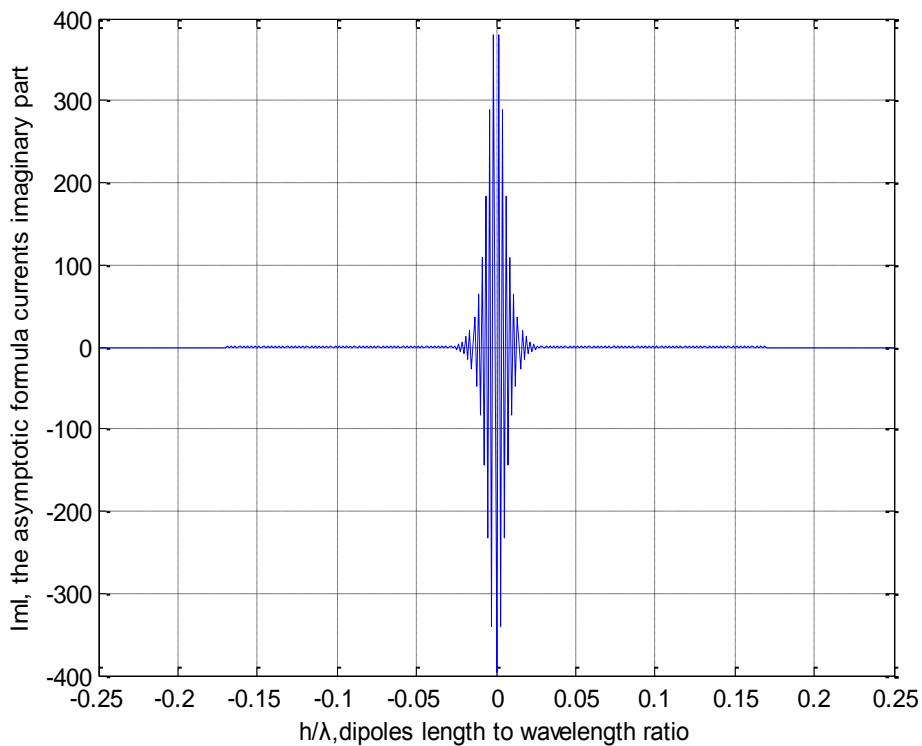
```

x=(-h:h/N:h);
plot(x,imag(Iform3));
xlabel('h/λ,dipoles length to wavelength ratio');
ylabel('Im{I}, the asymptotic formula currents imaginary part');
grid;

```

Ένα τέτοιο γράφημα για την περίπτωση $\rho = 0.125 \cdot z_o$, $N=200$,

$h/\lambda = 0.25$, $\rho/\alpha = 0.007022$ είναι το παρακάτω:



Σχήμα 5.2: Κατανομή του (φανταστικού μέρους) του ασυμπτωτικού ρεύματος για

$a/\lambda = 0.007022$, $h/\lambda = 0.25$, $N = 200$ για $\rho = 0.125 \cdot z_o = 0.125 \cdot \frac{h}{N}$

Τα γειτονικά στο κέντρο σημεία είναι:

0,0000000000000000 + 184,295137837782i
-0,0000000000000000 - 233,680056050064i
0,0000000000000000 + 288,233439121252i
-0,0000000000000000 - 341,005748113999i
0,0000000000000000 + 380,752656735056i
-0,0000000000000000 - 395,734972303780i
0,0000000000000000 + 380,752656735056i
-0,0000000000000000 - 341,005748113999i

$0,00000000000000 + 288,233439121252i$
$-0,00000000000000 - 233,680056050064i$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή επιτύχαμε εξομάλυνση των ταλαντώσεων του ρεύματος κατά την επίλυση της εξίσωσης Hallén με τον προσεγγιστικό πυρήνα. Οδηγό για την εξομάλυνση στην πεπερασμένη κεραία που χρησιμοποιείται στην πράξη, αποτέλεσε η αναλυτική εργασία στην άπειρη κεραία η οποία –ως αναλυτική- δεν αντιμετωπίζει το πρόβλημα των σφαλμάτων στρογγύλευσης (round-off errors) που εμφανίζεται σε όλες τις αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιούν υπολογιστή. Με μία εξαίρεση (συγκεκριμένα, το συντελεστή της λογαριθμικής ανωμαλίας του φανταστικού μέρους του ρεύματος) στην άπειρη κεραία τα αποτελέσματα ήρθαν σε εντυπωσιακή συμφωνία με τα αποτελέσματα για τον ακριβή πυρήνα που δίνονται στο [2] και στην πεπερασμένη κεραία οι ποσοστιαίες διαφορές του εξομαλυμένου ρεύματος και αυτού που προέκυπτε με χρήση του ακριβούς πυρήνα ήταν μικρές (από 0.5%-10%).

Επίσης, από τα αναλυτικά αποτελέσματα για την άπειρη κεραία εξαγάγαμε δύο ασυμπτωτικές εκφράσεις για το προτεινόμενο ρεύμα, τις οποίες ελέγξαμε με επιτυχία στις περιοχές ισχύος τους. Κριτήριο ήταν η μείωση των % σφαλμάτων μεταξύ του ακριβούς και ασυμπτωτικού ρεύματος που λαμβάναμε από τη μέθοδο της εξομάλυνσης καθώς μειώνουμε το μήκος του διαστήματος διαμέρισης (πράγμα που συμβαδίζει με τον έλεγχο μιας ασυμπτωτικής προσέγγισης).

Προτείνουμε την εφαρμογή της μεθόδου εξομάλυνσης σε άλλες μοντελοποιήσεις τροφοδοσίας διπόλων (π.χ. frill generator) και τη σύνδεση των ρευματικών κατανομών που εξάγουμε με το διάγραμμα ακτινοβολίας της κεραίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] C.A. Balanis, “*Antenna Theory: Analysis and design*”, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1997.
- [2] G. Fikioris and T. T. Wu, “*On the Application of Numerical Methods to Hallén ’s Equation*”, IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. 49, pp. 383-392, 2001.
- [3] G. Fikioris, “*The approximate integral equation for a cylindrical scatterer has no solution*”, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, vol. 15, pp. 1153-1159, 2001.
- [4] Α. Μπακόπουλος και Ι. Χρυσοβέργης, “*Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*”, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, Σεπτέμβριος 1994.
- [5] G. Fikioris, “*Resonant Arrays of Cylindrical Dipoles: Theory and Experiment*”, PhD Thesis, Harvard University, 1993.
- [6] Sophocles J. Orphanides, “*Electromagnetic Waves and Antennas*”, published online in <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>, 2008.
- [7] Χ. Καυάλης και Π. Κωπτής, “*Κεραίες-Ασύρματες Ζεύξεις*”, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2005.
- [8] E. Alanen, “*Pyramidal and Entire Domain Basis Functions in the Method of Moments*”, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, vol. 5, pp. 315-329, 1991.
- [9] D. Hanselman and B. Littlefield, “*Mastering MATLAB 5-A Comprehensive Tutorial and Reference*”, MATLAB Curriculum Series.
- [10] P. J. Papakanellos and G. Fikioris, “*A possible remedy for the oscillations occurring in thin-wire MoM analysis of cylindrical antenna,*”, Progress in Electromagnetic Research ,vol. 69, pp. 77-92, 2007.
- [11] E. K. Miller and F. J. Deadrick, “*Some Computational Aspects of Thin Wire Modeling*”, Topics in Applied Physics, pp. 89-127, 1975.
- [12] S. Christiansen and R. E. Kleinman, “*On a Misconception involving Point Collocation and the Rayleigh Hypothesis*”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 44, pp.1309-1315, 1996.
- [13] A. I. Kleev and A. B. Manenkov, “*The Convergence of Point-Matching Techniques*”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 37, pp.1309-1315, 1989.

- [14] Ν.Λαύκας και Δ.Κούλικας «Αντιμετώπιση του προβλήματος των ταλαντώσεων κατά την εφαρμογή μεθόδων ροπών σε εξισώσεις Hallén και Pocklington», Διπλωματική Εργασία, Δεκέλεια 2007.
- [15] A. Yokoyama, “*Radiation Impedance of a Thin Straight Antenna Derived from Hallén’s Equation by the Circuit-Theoretical Method*”, IEICE Trans. Electron., vol. E89-C, January 2006.
- [16] M. N. O. Sadiku, “*Numerical Techniques in Electromagnetics*”, 2nd Edition, CRC Press, 2001.
- [17] A. E. Peterson, S. L. Ray and R. Mittra, “*Computational Methods for Electromagnetics*”, IEEE Press, 1998.
- [18] N. Morita, N. Kumagai and J. R. Mautz, “*Integral Equation Methods for Electromagnetics*”, Artech House, 1990.
- [19] K. E. Atkinson, “*A Survey of Numerical Methods for the Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind*”, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976.
- [20] T.T. Wu, “*Introduction to Linear Antennas*”, ch.8 in Antenna Theory, Pt. I. R. E. Collin and F. J. Zucker, Eds. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [21] S. A. Schelkunoff, “*Advanced Antenna Theory*”, New York : Wiley, 1952.
- [22] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Eds., “*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*”, (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, vol. 55), U. S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1964.
- [23] D.S.Jones, “*Methods in Electromagnetic Wave Propagation*”, 2nd ed. Piscataway , NJ: IEEE Press, pp 605-608, 1995.
- [24] E. Hallén, ‘*Electromagnetic theory*’, Chapman and Hall, 1962.

Τέλος