



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ,
ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

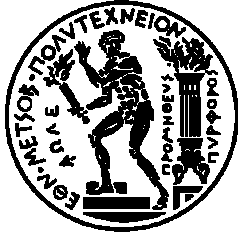
**Γεωμετρική Οπτική και Εξίσωση Fokker-Planck
σε ανομοιογενές πλάσμα**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Άννα Π. Στακιά

Επιβλέπων: Κυριάκος Χιτζανίδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Απρίλιος 2012



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ,
ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Γεωμετρική Οπτική και Εξίσωση Fokker-Planck σε ανομοιογενές πλάσμα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Άννα Π. Στακιά

Επιβλέπων: Κυριάκος Χιτζανίδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 5^η Απριλίου 2012.

.....
Κυριάκος Χιτζανίδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ηλίας Γλύτσης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ιωάννης Ξανθάκης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Απρίλιος 2012

.....

Άννα Π. Στακιά

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Άννα Π. Στακιά, 2012

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Σε διατάξεις συγκράτησης πλάσματος έχει παρατηρηθεί πως, κοντά στην περιοχή των τοιχωμάτων, εμφανίζονται μικρές περιοχές με σημαντικά μεγαλύτερη πυκνότητα σωματιδίων από τη μέση πυκνότητα στο πλάσμα. Οι περιοχές αυτές μοιάζουν με φουσκάλες (blobs). Είναι, επομένως, ιδιαίτερα σημαντικό να αναλύσουμε θεωρητικά την επίδραση των blobs στη συμπεριφορά του πλάσματος.

Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε πώς επηρεάζουν τα blobs τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με τα οποία ακτινοβολούμε το πλάσμα προκειμένου να ελέγξουμε τη συμπεριφορά του. Πιο συγκεκριμένα, υπολογίζουμε τη γωνία κατά την οποία μία ηλεκτρομαγνητική δέσμη εκτρέπεται από την πορεία της λόγω της παρουσίας blobs.

Αρχικά, εξηγούμε ένα μοντέλο που έχει αναπτυχθεί, και το οποίο μπορεί να περιγράψει τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε χωρικά και χρονικά μεταβαλλόμενο πλάσμα. Το μοντέλο αυτό συνοψίζεται σε ένα χαμιλτονιανό σύστημα διαφορικών εξισώσεων.

Στη συνέχεια, παίρνοντας προσεγγίσεις πρώτης τάξης, καταλήγουμε σε μια εξίσωση για την εξέλιξη του κυματοδιανύσματος καθώς το κύμα διαδίδεται μέσα στο πλάσμα. Θεωρώντας ομοιόμορφη κατανομή των blobs, παίρνουμε χωρική μέση τιμή στην παραπάνω εξίσωση, και καταλήγουμε σε μια εξίσωση Fokker-Planck. Ο πίνακας διάχυσης της εξίσωσης αυτής υπολογίζεται αναλυτικά για διάφορες γεωμετρίες των blobs (σφαιρική, ελλειπτική, κυλινδρική).

Τέλος, βρίσκουμε τη συνάρτηση Green της εξίσωσής μας και υπολογίζουμε τη μέση γωνία απόκλισης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Λέξεις κλειδιά: χωρικά μεταβαλλόμενο πλάσμα, εξίσωση Fokker-Planck, γεωμετρική οπτική σε πλάσμα, πίνακας διάχυσης, blobs

Abstract

In magnetic confinement fusion devices, small areas of significantly higher particle density than the average plasma density have been observed to appear in the edge region; these areas look like and are referred to as blobs. It is, therefore, of vital importance to theoretically approach and analyze the impact of these blobs on plasmas.

In this thesis, the various effects of blobs on the electromagnetic waves with which the plasma is irradiated in order for its performance to be optimized, are studied. More specifically, the angle between the course of an electromagnetic ray and the distraction from it, due to the presence of blobs, is calculated.

At first, a fully developed model that successfully describes the electromagnetic wave propagation in spatially and temporally varying plasmas is explained. This particular model is summarized in a Hamiltonian system of differential equations.

Later on and through first-order approximations, an equation describing the evolution and variation of the wave-vector, during the wave propagation inside the plasma, is deduced. Assuming a uniform distribution of the blobs and using the spatial average of the aforementioned equation, a Fokker-Planck equation is reached. The diffusion tensor of this equation for various blob geometries is, then, analytically calculated, including the cases of spherical, elliptic and cylindrical blobs.

Finally, the Green's function of our equation is calculated and a mean angle of distraction of the electromagnetic wave from its course is defined.

Keywords: spatially varying plasma, Fokker-Planck equation, geometric optics in plasma, diffusion tensor

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....σελ.11	
2. Περιγραφή της διάδοσης ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε χωρικά και χρονικά μεταβαλλόμενο πλάσμα με χρήση γεωμετρικής οπτικής.....σελ.13	
3. Περιγραφή του μοντέλου και υπολογισμός πίνακα διάχυσης.....σελ.21	
3.α Μελέτη της εκτροπής της δέσμης παρουσία ελλειπτικών blobs.....σελ.28	
3.α.1 Υπολογισμός του τανυστή διάχυσης στην περίπτωση ελλειπτικών blobs.....σελ.28	
3.α.2 Εξίσωση Fokker-Planck στην περίπτωση ελλειπτικών blobs.....σελ.44	
3.β Μελέτη της εκτροπής της δέσμης παρουσία κυλινδρικών blobs.....σελ.48	
3.β.1 Υπολογισμός του τανυστή διάχυσης στην περίπτωση κυλινδρικών blobs.....σελ.48	
3.β.2 Εξίσωση Fokker-Planck στην περίπτωση κυλινδρικών blobs.....σελ.55	
Παραρτήματα	
Παράρτημα Α (Υπολογισμός χρήσιμων παραγώγων).....σελ.57	
Παράρτημα Β (Πίνακας Διάχυσης σφαιρικών blobs).....σελ.59	
Παράρτημα Γ (Υπολογισμός χρήσιμων ολοκληρωμάτων).....σελ.62	
Παράρτημα Δ (Υπολογισμός παραγώγων του δείκτη διάθλασης).....σελ.64	
Αναφορές.....σελ.65	

1. Εισαγωγή

Στις διάφορες διατάξεις παγίδευσης πλάσματος (π.χ. tokamak), για τον έλεγχο του πλάσματος και την αντιμετώπιση των διαφόρων ασταθειών που αυτό εμφανίζει, χρησιμοποιούνται ηλεκτρομαγνητικά κύματα κατάλληλης συχνότητας. Για παράδειγμα, κύματα στη ζώνη των EC (electron cyclotron) συχνοτήτων έχουν χρησιμοποιηθεί για τον περιορισμό της NTM (neoclassical tearing mode) αστάθειας μέσω της επαγωγής κατάλληλων ρευμάτων στην περιοχή της αστάθειας (βλ. αναφορά [Aym]).

Τα κύματα αυτά, για να κατευθυνθούν στην περιοχή του πλάσματος -που μας ενδιαφέρει να επηρεάσουμε- από την εξωτερική πηγή, όπου διεγείρονται, θα πρέπει να διέλθουν από μία περιοχή του πλάσματος κοντά στα τοιχώματα της διάταξης, όπου παρατηρείται τυρβώδης ροή. Το αποτέλεσμα της διέλευσης του κύματος από την περιοχή αυτή μπορεί να οδηγήσει σε αλλαγή της πορείας του κύματος και αλλοίωση των χαρακτηριστικών του. Αυτές τις αλλαγές υπολογίζουμε ποσοτικά σε αυτή την εργασία.

Στην περιοχή κοντά στα τοιχώματα, από την οποία καλείται να περάσει το κύμα, έχει παρατηρηθεί η ύπαρξη περιοχών με πολύ μεγαλύτερη πυκνότητα και θερμοκρασία από το υπόλοιπο πλάσμα. Οι περιοχές αυτές που σχηματίζονται μοιάζουν με φουσκάλες (blobs). Καθώς το κύμα διέρχεται από αυτές τις περιοχές υψηλής πυκνότητας, είναι δυνατό να εκτραπεί, διότι, αφού έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα, άρα μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης, το κύμα μας υφίσταται διάθλαση διερχόμενο από αυτές. Καθώς το κύμα έχει να διανύσει μία σημαντική απόσταση προτού φτάσει στην περιοχή που θέλουμε να επηρεάσουμε, ακόμα και μικρές αλλαγές μπορεί αθροιστικά να οδηγήσουν σε σημαντική μεταβολή των χαρακτηριστικών του. Για παράδειγμα, η συνολική εκτροπή λόγω διάθλασης της δέσμης μπορεί να είναι τόσο μεγάλη, ώστε να μην φτάσει στον επιθυμητό στόχο. Άρα είναι απαραίτητο να μελετηθεί θεωρητικά αυτή η εκτροπή, και να μετρηθεί ποσοτικά, ώστε να μπορεί με χρήση κατάλληλων τεχνικών ελέγχου να μειωθεί όσο αυτό είναι δυνατό.

Η αύξηση της πυκνότητας στην περιοχή των blobs κυμαίνεται από 5 έως και 20% της μέσης πυκνότητας του πλάσματος. Το σχήμα του είναι κατά προσέγγιση ελλειπτικό με το μεγάλο άξονα να βρίσκεται στον άξονα του μαγνητικού πεδίου. Το μήκος τους κυμαίνεται από 10 έως 30 φορές την ακτίνα Larmor.

Η επίδραση των blobs στο κύμα που θα μελετήσουμε σε αυτή την εργασία είναι αυτή που οφείλεται στην διάθλασή του, καθώς αυτό διέρχεται από την περιοχή των blobs. Ωστόσο, το κύμα υφίσταται και περίθλαση. Η μελέτη της περίθλασης, όμως, απαιτεί τελείως διαφορετικές τεχνικές και δεν θα μελετηθεί σε αυτή την εργασία.

Η μελέτη της διάθλασης θα γίνει με χρήση γεωμετρικής οπτικής. Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα το βλέπουμε ως μία δέσμη που διαδίδεται μέσα στο πλάσμα. Στην πορεία της η δέσμη συναντά πολλά blobs, και, εξαιτίας της ύπαρξης καθενός από αυτά, υφίσταται διάθλαση. Η κατανομή των blobs στο πλάσμα, όπως είναι λογικό, θεωρείται τυχαία και, ελλείψει περισσοτέρων στοιχείων, ομοιόμορφη. Η συνολική αλλαγή στο κύμα είναι διπλής φύσης. Αφενός εκτροπή της δέσμης, όπως έχουμε ήδη πει, και αφετέρου αλλαγή στο κυματοδιάγραμμα.

2. Περιγραφή της διάδοσης ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε χωρικά και χρονικά μεταβαλλόμενο πλάσμα με χρήση γεωμετρικής οπτικής

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη της διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε ανομοιογενές -λόγω της ύπαρξης των blobs- πλάσμα. Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε πώς προκύπτει το μοντέλο το οποίο περιγράφει την μεταβολή του κύματος λόγω της αλληλεπίδρασης με το πλάσμα, και το οποίο χρησιμοποιείται για την πραγματοποίηση των υπολογισμών στις επόμενες παραγράφους. Το μοντέλο αυτό αναπτύχθηκε στην αναφορά [Ber].

Οι υποθέσεις που γίνονται είναι πρώτον ότι το πλάτος του διαδιδόμενου κύματος είναι μικρό, δεύτερον ότι υπάρχει γραμμική και αιτιατή, αλλά όχι απαραίτητα τοπική, σχέση μεταξύ της πυκνότητας ρεύματος και του ηλεκτρικού πεδίου, και τρίτον ότι οι χωρικές και χρονικές μεταβολές του πλάσματος στο οποίο γίνεται η διάδοση δεν είναι μεγάλες μέσα σε ένα μήκος κύματος ή μία περίοδο αντίστοιχα.

Το μοντέλο στο οποίο καταλήγουμε είναι ένα χαμιλτονιανό σύστημα εξισώσεων για τον κυματαριθμό και τη συχνότητα του κύματος (φυσικά αυτά τα μεγέθη μεταβάλλονται χρονικά και χωρικά).

Σημειωτέον ότι, σε όλη την εργασία συμβολίζουμε με \vec{a} ένα διάνυσμα το οποίο έχει τη μορφή στήλης, με \vec{a}^T ένα διάνυσμα γραμμή, με a το μέτρο του διανύσματος αυτού, και με \vec{A} έναν τανυστή-πίνακα 3×3 . Όλους τους πολλαπλασιασμούς τούς βλέπουμε ως πολλαπλασιασμούς πινάκων, κι έτσι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{a}, \vec{b} γράφεται $\vec{a}^T \vec{b}$.

Γράφουμε αρχικά τις εξισώσεις του Maxwell για το ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (2)$$

Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα ρεύματος έχει την παρακάτω μορφή:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^t dt' \hat{\sigma} \left[\vec{r} - \vec{r}', t - t', \frac{1}{2}(\vec{r} + \vec{r}'), \frac{1}{2}(t + t') \right] \vec{E}(\vec{r}', t') \quad (3)$$

Πράγματι η σχέση αυτή είναι γραμμική ως προς την ένταση του πεδίου (ολοκλήρωμα συνέλιξης), αιτιατή αφού η πυκνότητα τη στιγμή t εξαρτάται από την τιμή της έντασης στο παρελθόν, ενώ η μη τοπικότητα εκφράζεται από το ότι η τιμή της πυκνότητας ρεύματος στη θέση \vec{r} εξαρτάται από την τιμή του \vec{E} και σε άλλες θέσεις. Το μέγεθος $\hat{\sigma}$ που εμφανίζεται είναι ο τανυστής αγωγιμότητας, ο οποίος, στην περίπτωση απείρου, ομογενούς και σταθερού πλάσματος, δεν εξαρτάται από τα ορίσματα $\vec{r} + \vec{r}'$ και $t + t'$.

Θα μελετήσουμε την περίπτωση το πλάσμα να μεταβάλλεται αργά, τόσο χωρικά όσο και χρονικά. Η υπόθεση αυτή είναι σε συμφωνία με τη θεώρηση κανονικής κατανομής για την πυκνότητα των blobs που ακολουθούμε παρακάτω. Στην περίπτωση αυτή, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο θα έχουν αντίστοιχα τη μορφή:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{a}(\vec{r}, t) \exp[i\psi(\vec{r}, t)] \quad (4)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{b}(\vec{r}, t) \exp[i\psi(\vec{r}, t)] \quad (5)$$

με το κυματοδιάνυσμα \vec{k} και τη συχνότητα ω να ορίζονται ως εξής:

$$\vec{k}(\vec{r}, t) \equiv \nabla_{\vec{r}}\psi(\vec{r}, t) \quad (6)$$

$$\omega(\vec{r}, t) \equiv -\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) \quad (7)$$

Αφού έχουμε αργές χρονικές και χωρικές μεταβολές, όταν το όρισμα $\frac{1}{2}(\vec{r} + \vec{r}')$ μεταβάλλεται σε πλάτος κατά $\lambda = 2\pi/k$ και το όρισμα $\frac{1}{2}(t + t')$ κατά $\tau = 2\pi/\omega$, ο τανυστής $\hat{\sigma}$ θα υφίσταται μια αλλαγή ανάλογη μιας μικρής σταθεράς ε . Ομοίως, η ποσοστιαία μεταβολή των μεγεθών \vec{k} , \vec{a} και \vec{b} , όταν το όρισμα \vec{r} αλλάζει (κατά πλάτος) κατά λ και το όρισμα t κατά τ , θα είναι πάλι ε .

Ο χωρο-χρονικός μετασχηματισμός Fourier του τανυστή αγωγιμότητας θα είναι

$$\vec{\sigma}(\vec{k}, \omega, \vec{r}, t) = \int d^3r' \int_0^{+\infty} dt' \hat{\sigma}(\vec{r}', t'; \vec{r}, t) \exp[i(\omega t' - \vec{k}\vec{r}')] \quad (8)$$

Παρατηρούμε πως είναι συνάρτηση τόσο των χωρικών συντεταγμένων \vec{r} όσο και του χρόνου (εκτός από τα \vec{k}, ω), κι έτσι περιγράφει τα μεταβλητά χαρακτηριστικά του πλάσματος.

Το Ερμιτιανό και αντι-Ερμιτιανό κομμάτι του τανυστή αυτού θα είναι:

$$\vec{\sigma}^H = \frac{1}{2}(\vec{\sigma} + \vec{\sigma}^{T*}) \quad (9)$$

$$\vec{\sigma}^A = \frac{1}{2}(\vec{\sigma} - \vec{\sigma}^{T*}) \quad (10)$$

με το T να δηλώνει ανάστροφο και το * συζυγή.

Μετά από πράξεις (βλ. [Ber]) προκύπτει ότι η ένταση του ρεύματος έχει τη μορφή:

$$\vec{J} = e^{i\psi} \vec{\sigma}^A \vec{a} + \vec{K}\{\vec{a}\} + \dots \quad (11)$$

όπου ο τανυστής \vec{K} δίνεται από τον τύπο:

$$\vec{K}\{\vec{a}\} = \vec{\sigma}^H \vec{a} - i \frac{1}{2} [\nabla_{\vec{r}} \cdot (\nabla_{\vec{k}} \vec{\sigma}^A)] \vec{a} - i [(\nabla_{\vec{r}} \vec{a})^T \cdot \nabla_{\vec{k}}] (\vec{\sigma}^A)^T + i \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{\sigma}^A}{\partial \omega} \right) \right] \vec{a} + i \frac{\partial \vec{\sigma}^A}{\partial \omega} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \quad (12)$$

Ο τελεστής $\nabla_{\vec{k}} = \frac{\partial}{\partial k_x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial k_y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial k_z} \hat{z}$ υπολογίζεται κρατώντας τα \vec{r}, ω και t σταθερά, η παράγωγος $\partial/\partial \omega$ υπολογίζεται με \vec{k}, \vec{r} και t σταθερά, ο $\nabla_{\vec{r}}$ με t σταθερό, και η $\partial/\partial t$ με \vec{r} σταθερό, βλέποντας τα \vec{k}, ω ως συναρτήσεις του t . Το $\vec{\sigma}^H$ είναι τάξης μεγέθους ε , ενώ το $\vec{\sigma}^A$ κατά προσέγγιση σταθερό. Άρα το $\vec{K}\{\vec{a}\}$ είναι τάξης μεγέθους ε , αφού κάθε όρος του (αν αμελήσουμε τις χωροχρονικές μεταβολές, οι οποίες υποθέτουμε ότι είναι μικρές) είναι ανάλογος του $\vec{\sigma}^H$ ή του \vec{a} , και καθένας από τους δύο αυτούς όρους είναι, όπως είπαμε, ανάλογος του ε .

Αν τώρα αναπτύξουμε τα πεδία σε σειρά Taylor – με τον όρο τάξης i να είναι ανάλογος του ε^i , δηλαδή:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots \quad (13)$$

$$\vec{b} = \vec{b}_0 + \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \dots \quad (14)$$

και αντικαταστήσουμε στις (1) και (2), παίρνουμε, αν εξισώσουμε τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ε , τις παρακάτω σχέσεις:

$$i \left(\vec{k} \times \vec{b}_0 + \frac{\omega}{c^2} \vec{a}_0 + i \mu_o \vec{\sigma}^A \vec{a}_0 \right) = 0 \quad (15)$$

$$i \left(\vec{k} \times \vec{b}_1 + \frac{\omega}{c^2} \vec{a}_1 + i \mu_o \vec{\sigma}^A \vec{a}_1 \right) = \vec{K}\{\vec{a}\} - \nabla \times \vec{b}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{a}_0}{\partial t} \quad (16)$$

κλπ.

$$i(\vec{k} \times \vec{a}_0 - \omega \vec{b}_0) = 0 \quad (17)$$

$$i(\vec{k} \times \vec{a}_1 - \omega \vec{b}_1) = -\nabla \times \vec{a}_0 - \frac{\partial \vec{b}_0}{\partial t} \quad (18)$$

κλπ.

Αν αντικαταστήσουμε το \vec{b}_0 από τη (17) στη (15) παίρνουμε:

$$\vec{\epsilon} \vec{a}_0 = 0 \quad (19)$$

όπου με $\vec{\epsilon}$ συμβολίζεται ο διηλεκτρικός τανυστής:

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, \omega, \vec{r}, t) = \vec{\epsilon}^H = \vec{I} \left(1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) + \frac{c^2}{\omega^2} \vec{k} \vec{k}^T + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \vec{\sigma}^A \quad (20)$$

Η (19) έχει και μη μηδενικές λύσεις όταν ο πίνακας του τανυστή δεν είναι αντιστρέψιμος. Επομένως όταν:

$$F(\vec{k}, \omega, \vec{r}, t) \equiv \det \vec{\epsilon} = 0 \quad (21)$$

Αυτή είναι η λεγόμενη σχέση διασποράς, και είναι μία μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση για το ψ , αφού τα \vec{k} και ω είναι πρώτες παράγωγοι -χωρική και χρονική αντίστοιχα- του ψ . Αυτή η εξίσωση θα μπορούσε να λυθεί αριθμητικά, αλλά εμάς μας ενδιαφέρει να έχουμε εξισώσεις για τα k και ω .

Επιστρέφοντας στις (6) και (7) μπορεί να εξαχθεί η σχέση:

$$\nabla_{\vec{r}} \omega + \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

αφού $\nabla_{\vec{r}} \omega + \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = -\nabla_{\vec{r}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\vec{r}} \psi = 0$, από θεώρημα Schwartz.

Θεωρώντας τώρα ότι από την (21) μπορεί να βρεθεί το ω ως συνάρτηση των \vec{k}, \vec{r} και t , δηλαδή ότι $\omega = \Omega(\vec{k}, \vec{r}, t)$, η (22) γράφεται στη μορφή:

$$\Omega_{\vec{r}} + (\nabla_{\vec{r}} \vec{k})^T \Omega_{\vec{k}} + \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = 0 \quad (23)$$

με τους δείκτες να συμβολίζουν τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους.

Αν παραγωγίσουμε τώρα την (21) ως προς \vec{r} και \vec{k} , αντίστοιχα, παίρνουμε:

$$\Omega_{\vec{r}} F_{\omega} + F_{\vec{r}} = 0 \quad (24)$$

$$\Omega_{\vec{k}} F_{\omega} + F_{\vec{k}} = 0 \quad (25)$$

Με συνδυασμό τώρα των (22) και (24), και αφού ο $\nabla_{\vec{r}}\vec{k} = \nabla\nabla\psi$ είναι συμμετρικός πίνακας, παίρνουμε:

$$\frac{\partial\vec{k}}{\partial t} + (\nabla_{\vec{r}}\vec{k})\Omega_{\vec{k}} = \frac{F_{\vec{r}}}{F_{\omega}} \quad (26)$$

Η $\Omega_{\vec{k}}$, όμως, είναι η ταχύτητα ομάδας, και επομένως η διάδοση γίνεται κατά την κατεύθυνσή της. Άρα η τροχιά \vec{r} , με χρήση και της σχέσης (25), θα ικανοποιεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{F_{\vec{k}}}{F_{\omega}} = \Omega_{\vec{k}}} \quad (27)$$

Τότε η (26) γίνεται:

$$\frac{\partial\vec{k}}{\partial t} + (\nabla_{\vec{r}}\vec{k})\Omega_{\vec{k}} = \frac{F_{\vec{r}}}{F_{\omega}} \stackrel{(27)}{\implies}$$

$$\frac{\partial\vec{k}}{\partial t} + (\nabla_{\vec{r}}\vec{k})\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{F_{\vec{r}}}{F_{\omega}} \implies$$

$$\boxed{\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{F_{\vec{r}}}{F_{\omega}} = -\Omega_{\vec{r}}} \quad (28)$$

Από την (21) μπορούμε να βρούμε την Ω , οπότε οι (27) και (28) είναι ένα ζεύγος συνήθων διαφορικών εξισώσεων κατά μήκος της τροχιάς που ορίζεται από την (27).

Αντί να λύσουμε την εξίσωση διασποράς για την Ω , κάτι το οποίο μπορεί να γίνει μόνο αριθμητικά, θα εξαγάγουμε μια διαφορική εξίσωση που είναι πιο εύκολο να διαχειριστούμε. Παραγωγίζοντας την (21) ως προς t κατά μήκος μιας ακτίνας έχουμε:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} \cdot F_{\vec{k}} + \frac{d\omega}{dt} \cdot F_{\omega} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot F_{\vec{r}} + F_t = 0 \stackrel{(27),(28)}{\implies}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{F_t}{F_{\omega}} \implies$$

$$\boxed{\frac{d\Omega}{dt} = \Omega_t} \quad (29)$$

Οι εξισώσεις (27) και (28) αποτελούν ένα Hamiltonian σύστημα εξισώσεων με την Ω να παίζει το ρόλο της χαμιλτονιανής.

Αφού έχω βρει τα k και ω , μπορώ να βρω τη φάση ψ του κύματος. Μένει να βρω τα πλάτη του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Παρ' ότι δε θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια, παρατίθεται για λόγους πληρότητας ο τρόπος υπολογισμού τους.

Αφού υπολογίσω τα \vec{k}, ω , όπως περιέγραψα παραπάνω, ο τανυστής $\vec{\epsilon}$ είναι γνωστός, ως συνάρτηση του χρόνου και της θέσης. Επιλέγοντας κατάλληλη ορθοκανονική βάση $\vec{e}_i(\vec{r}, t), i = 1, 2, 3$ ο $\vec{\epsilon}$ γράφεται σε διαγώνια μορφή

$$\vec{\epsilon} = \epsilon_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1^{*T} + \epsilon_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2^{*T} + \epsilon_3 \vec{e}_3 \vec{e}_3^{*T} \quad (30)$$

Αφού από την εξίσωση διασποράς έχουμε ότι: $0 = \det \vec{\epsilon} = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$, τουλάχιστον ένα από τα ϵ_i πρέπει να είναι μηδέν.

Γράφοντας το σταθερό όρο του αναπτύγματος Taylor του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου \vec{a}_0 ως προς την παραπάνω βάση, έστω:

$$\vec{a}_0 = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 \quad (31)$$

από τη σχέση (19), και αφού $\vec{e}_i^T \vec{e}_j = \delta_{ij}$ μιας και έχω επιλέξει ορθοκανονική βάση, προκύπτει:

$$\alpha_1 \epsilon_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \epsilon_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \epsilon_3 \vec{e}_3 = 0 \quad (32)$$

Αφού τα $\vec{e}_i, i = 1, 2, 3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ως διανύσματα βάσης, για να ισχύει η σχέση (32), θα πρέπει, αν δεν μηδενίζεται το ϵ_i , να μηδενίζεται το α_i . Για να βρούμε τα α_i που δε μηδενίζονται, απαλείφουμε τα \vec{b}_0, \vec{b}_1 από τις σχέσεις (17), (18), και, αντικαθιστώντας στην (16), καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned} i\omega \vec{\epsilon} \vec{a}_1 &= -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times (\nabla_{\vec{r}} \times \vec{a}_0) - \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \frac{\partial \left(\frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{a}_0 \right)}{\partial t} + c^2 K \{ \vec{a}_0 \} - c \nabla_{\vec{r}} \times \left(\frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{a}_0 \right) + \frac{\partial \vec{a}_0}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial(\omega \vec{\epsilon})}{\partial \omega} \frac{\partial \vec{a}_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(\omega \vec{\epsilon})}{\partial \omega} \right) \right] \vec{a}_0 - [(\nabla_{\vec{r}} \vec{a}_0)^T \nabla_{\vec{k}}] \omega \vec{\epsilon}^T - \frac{1}{2} [\nabla_{\vec{r}} (\nabla_{\vec{k}} \omega \vec{\epsilon})] \vec{a}_0 + \overleftrightarrow{\sigma}^H \vec{a}_0 \quad (33) \end{aligned}$$

Παίρνω εσωτερικό γινόμενο της (33) με ένα \vec{e}_i^* . Αν $\varepsilon_i \neq 0$, θα προκύψει μια έκφραση για το $\vec{e}_i^* \cdot \vec{a}_1$. Αν τώρα $\varepsilon_i = 0$, $\vec{e}_i^* \cdot (\vec{\varepsilon} \vec{a}_1) = \vec{e}_i^* \cdot (\varepsilon_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1^{*T} \vec{a}_1 + \varepsilon_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2^{*T} \vec{a}_1 + \varepsilon_3 \vec{e}_3 \vec{e}_3^{*T} \vec{a}_1) = \varepsilon_i \vec{e}_i^{*T} \vec{a}_1 = 0$, και από τα άλλα δύο μέλη θα προκύψει μια εξίσωση με τα μη μηδενικά α_j . Η εξίσωση αυτή είναι η εξής:

$$\sum_{l=1}^3 \left\{ -\vec{e}_i^{*T} \frac{\partial(\omega \vec{\varepsilon})}{\partial \omega} \vec{e}_l \frac{\partial a_l}{\partial t} + [(\nabla_{\vec{k}} \omega \vec{\varepsilon}) : \vec{e}_l \vec{e}_i^{*T}] \nabla_{\vec{r}} a_l \right\} = \beta_i \quad (34)$$

όπου το β_i δίνεται από τον τύπο:

$$\beta_i = \sum_{l=1}^3 a_l \vec{e}_i^{*T} \left\{ \frac{\partial(\omega \vec{\varepsilon})}{\partial \omega} \frac{\partial \vec{e}_l}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial(\omega \vec{\varepsilon})}{\partial \omega} \right) \right] \vec{e}_l - [(\nabla_{\vec{r}} \vec{e}_l)^T \nabla_{\vec{k}}] \omega \vec{\varepsilon}^T - \frac{1}{2} [\nabla_{\vec{r}} (\nabla_{\vec{k}} \omega \vec{\varepsilon})] \vec{e}_l + \vec{\sigma}^H \vec{e}_l \right\} \quad (35)$$

Χρησιμοποιώντας τη διαγώνια μορφή του πίνακα -στην οποία αναφερθήκαμε παραπάνω- έχουμε:

$$\frac{\partial(\omega \vec{\varepsilon})}{\partial \omega} = \sum_{l=1}^3 \left\{ \vec{e}_l \vec{e}_l^{*T} \frac{\partial(\omega \varepsilon_l)}{\partial \omega} + \omega \varepsilon_l \frac{\partial \vec{e}_l}{\partial \omega} \vec{e}_l^* + \omega \varepsilon_l \vec{e}_l \frac{\partial \vec{e}_l^{*T}}{\partial \omega} \right\} \quad (36)$$

και επομένως για i, l τέτοια ώστε $\varepsilon_i = \varepsilon_l = 0$,

$$\vec{e}_i^{*T} \frac{\partial(\omega \vec{\varepsilon})}{\partial \omega} \vec{e}_l = \delta_{li} \frac{\partial(\omega \varepsilon_i)}{\partial \omega} \quad (37)$$

Με παρόμοιο τρόπο:

$$(\nabla_{\vec{k}} \omega \vec{\varepsilon}) : \vec{e}_l \vec{e}_i^{*T} = \delta_{li} \nabla_{\vec{k}}(\omega \varepsilon_i) \quad (38)$$

Μεταβάλλοντας τη (19) ως προς k , κρατώντας ω, r σταθερά και για $\vec{a}_0 = \vec{e}_l$, έχουμε:

$$0 = \left\{ \delta \omega \frac{\partial(\omega \vec{\varepsilon})}{\partial \omega} + \delta k \nabla_{\vec{k}} \omega \vec{\varepsilon} \right\} \vec{e}_l + \omega \vec{\varepsilon} \vec{e}_l \quad (39)$$

Παίρνοντας τώρα εσωτερικό γινόμενο της (39) με \vec{e}_i^* ,

$$0 = \omega_{\vec{k}} = \frac{\delta\omega}{\delta\vec{k}} = -\frac{(\nabla_{\vec{k}}\omega\vec{\epsilon}) : \vec{e}_i \vec{e}_i^{*T}}{\vec{e}_i^{*T} \frac{\partial(\omega\vec{\epsilon})}{\partial\omega} \vec{e}_i} \quad (40)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις (37)-(40) στην (34), προκύπτει:

$$\frac{da_i}{dt} \frac{\partial(\omega\epsilon_i)}{\partial\omega} = -\beta_i \quad (41)$$

Αφού από την προηγούμενη ανάλυση έχουμε προσδιορίσει το κυματοδιάνυσμα και τη συχνότητα, τα β_i, ϵ_i στη (41) είναι πλέον συναρτήσεις μόνο της θέσης της διαδιδόμενης ακτίνας και του χρόνου. Άρα η (41) είναι μια διαφορική εξίσωση από την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου. Το πλάτος του μαγνητικού πεδίου προσδιορίζεται από την εξίσωση (2). Πλέον έχουμε πλήρως προσδιορισμένα (συγκεκριμένα, μπορούμε να βρούμε αν επιλύσουμε αριθμητικά) όλα τα χαρακτηριστικά του κύματος.

3. Περιγραφή του μοντέλου και υπολογισμός πίνακα διάχυσης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε ποσοτικά την επίδραση της χωρικής ανομοιογένειας στην πυκνότητα του πλάσματος (των blobs στα οποία αναφερθήκαμε στην εισαγωγή) στη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα στο πλάσμα. Κατά τη διάδοσή της μέσα στο πλάσμα, μία RF ακτίνα συναντά πολλά blobs με τα οποία και αλληλεπιδρά. Η αλληλεπίδραση αυτή οδηγεί σε διάθλαση της ακτίνας. Το συνολικό αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης με πολλά blobs -τα οποία θεωρούμε ότι είναι τυχαία κατανομημένα- μπορεί να μεταβάλει σημαντικά την εκπεμπόμενη ακτίνα. Δύο ειδών είναι οι μεταβολές που μπορεί να επέλθουν. Πρώτον, μεταβολή στην εγκάρσια (ως προς το μαγνητικό πεδίο) συνιστώσα του κυματοδιανύσματος, η οποία οδηγεί σε εκτροπή της δέσμης από την πορεία της, με αποτέλεσμα αυτή να μην πετυχαίνει το στόχο στον οποίο θέλαμε να μεταφέρει την ενέργεια και την ορμή της. Δεύτερον, αλλαγή στην παράλληλη (ως προς το μαγνητικό πεδίο) συνιστώσα του κυματοδιανύσματος, που οδηγεί σε αλλαγή της ζώνης συντονισμού, και άρα σε διαφοροποίηση του χωρικού προφίλ του επαγόμενου ρεύματος.

Ξεκινάμε με ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής Hamilton-Jacobi, από το οποίο, με χρήση θεωρίας μεταβολών, οδηγούμαστε σε μια εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη του κυματοδιανύσματος καθώς η ακτίνα αλληλεπιδρά με τα blobs. Θεωρώντας τυχαία κατανομή των blobs, ίδια γεωμετρία για όλα (θα μελετήσουμε τις περιπτώσεις σφαιρικών, ελλειπτικών και κυλινδρικών blobs), αλλά διαφορετικά εν γένει μεγέθη, καταλήγουμε σε μια εξίσωση Fokker-Planck. Ο πίνακας διάχυσης που εμφανίζεται στην εξίσωση αυτή, ο οποίος περιγράφει τη μεταβολή στο κυματοδιάνυσμα λόγω της επιρροής των blobs, υπολογίζεται αναλυτικά. Αφού πάρουμε την χωρική μέση τιμή της παραπάνω εξίσωσης, υπολογίζουμε τη συνάρτηση Green (λύση για κρουστική διέγερση). Τέλος, δίνουμε τον τύπο για τη γωνία απόκλισης της δέσμης και τη μέση τετραγωνική μεταβολή του κυματοδιανύσματος.

Θεωρούμε ότι το κυματοδιάνυσμα \vec{k} και η θέση \vec{r} της εκπεμπόμενης ακτίνας τη στιγμή t ικανοποιούν τις εξισώσεις (1).

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = -\nabla_{\vec{r}}\omega \quad (1. a)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \nabla_{\vec{k}}\omega \quad (1. b)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} \quad (1. c)$$

Τα μεγέθη \vec{k} και \vec{r} τα θεωρούμε ανεξάρτητα, και το ω , που είναι η συχνότητα του κύματος, το βλέπουμε ως συνάρτηση των \vec{k}, \vec{r} και t .

Έτσι, στις εξισώσεις (1) ο τελεστής $\nabla_{\vec{k}} = \frac{\partial}{\partial k_x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial k_y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial k_z} \hat{z}$ υπολογίζεται θεωρώντας τα \vec{r} και t σταθερά, και στον υπολογισμό του $\nabla_{\vec{r}} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$ (το γνωστό grad) η παραγωγή γίνεται κρατώντας τα \vec{k} και t σταθερά. Το παραπάνω μοντέλο βασίζεται στην εργασία του Bernstein [Ber] και το περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Το αποτέλεσμα της εφαρμογής του τελεστή $\nabla_{\vec{r}}$ στο k θα δώσει μηδέν, λόγω της ανεξαρτησίας των μεγεθών \vec{k} και \vec{r} . Αν εισαχθεί και το μέγεθος $\eta = \frac{kc}{\omega}$ (είναι ο δείκτης διάθλασης), όπου c η ταχύτητα του φωτός, τότε προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$0 = \nabla_{\vec{r}} k = \frac{\eta}{c} \nabla_{\vec{r}} \omega + \frac{\omega}{c} \nabla_{\vec{r}} \eta \quad (2)$$

Ισχύει επίσης η παρακάτω ταυτότητα για το $\nabla_{\vec{k}} k$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{k}} k &= \frac{\partial k}{\partial k_x} \hat{x} + \frac{\partial k}{\partial k_y} \hat{y} + \frac{\partial k}{\partial k_z} \hat{z} \\ &= \frac{\partial}{\partial k_x} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial k_y} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial k_z} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \hat{z} \\ &= \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \hat{x} + \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \hat{y} + \frac{k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \hat{z} = \frac{\vec{k}}{k} \end{aligned}$$

Η ταυτότητα αυτή με χρήση του δείκτη διάθλασης η γράφεται ως εξής:

$$\frac{\vec{k}}{k} = \nabla_{\vec{k}} k = \frac{\eta}{c} \nabla_{\vec{k}} \omega + \frac{\omega}{c} \nabla_{\vec{k}} \eta \quad (3)$$

Εισάγουμε επίσης την ποσότητα $l = ct$, που είναι η απόσταση που έχει διανύσει το κύμα σε χρόνο t . Οι εξισώσεις (1.a) και (1.b) μπορούν να γραφούν με χρήση της ποσότητας αυτής ως ακολούθως.

$$\frac{d\vec{k}}{dl} = \frac{d\vec{k}}{dt} \frac{1}{c} \stackrel{(1.a)}{=} -\frac{1}{c} \nabla_{\vec{r}} \omega \stackrel{(2)}{=} \frac{\omega}{\eta c} \nabla_{\vec{r}} \eta = \frac{k}{\eta^2} \nabla_{\vec{r}} \eta = -k \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{\eta} \right) \quad (4. a)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dl} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{1}{c} \stackrel{(1.b)}{=} \frac{1}{c} \nabla_{\vec{k}} \omega \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{c} \left(c \frac{\vec{k}}{k} - \frac{\omega}{\eta} \nabla_{\vec{k}} \eta \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\vec{k}}{k} - \frac{k}{\eta^2} \nabla_{\vec{k}} \eta = \frac{1}{\eta} \frac{\vec{k}}{k} + k \nabla_{\vec{k}} \left(\frac{1}{\eta} \right) \quad (4. b)$$

Ο δείκτης διάθλασης θα εξαρτάται από τις συχνότητες πλάσματος των διαφόρων ειδών σωματιδίων που απαρτίζουν το πλάσμα –με ω_α συμβολίζουμε τη συχνότητα πλάσματος των σωματιδίων του είδους α – καθώς και από τη γωνία θ , που είναι η γωνία ανάμεσα στο μαγνητικό πεδίο και το κυματοδιάνυσμα. Επειδή οι περιοχές όπου μελετάμε τις αλληλεπιδράσεις των blobs με το κύμα είναι μικρές σε σχέση με τις διαστάσεις του πλάσματος, κι επειδή οι θερμοκρασίες είναι αρκετά χαμηλές ώστε η προσέγγιση ψυχρού πλάσματος να είναι αποδεκτή, μπορούμε να θεωρήσουμε το μαγνητικό πεδίο ομογενές, και με σταθερή κατεύθυνση \vec{i}_z (βλ. Σχήμα 1). Άρα ο δείκτης διάθλασης θα είναι τελικά συνάρτηση μόνο της πυκνότητας $n_\alpha(\vec{r})$ των διαφόρων σωματιδίων του πλάσματος στη θέση \vec{r} . Θα έχουμε επομένως:

$$\eta = \eta(\{\omega_\alpha^2(n_\alpha(\vec{r}))\}, \theta) \quad (5)$$

$$\omega_\alpha^2 = \frac{q_\alpha^2 n_\alpha(\vec{r})}{\varepsilon_0 m_\alpha} \quad (6)$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{i}_z \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{i}_z}{k} \right) \quad (7)$$

όπου m_α είναι η μάζα ενός σωματιδίου του είδους α .

Εισάγοντας τα παραπάνω μεγέθη στις εξισώσεις (4.a) και (4.b), και με χρήση του κανόνα της αλυσίδας στις παραγωγίσεις, παίρνουμε:

$$\frac{d\vec{k}}{dl} = -k \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{1}{\eta} \right) = \frac{k}{\eta^2} \nabla_{\vec{r}} \eta = \frac{k}{\eta^2} \sum_a \frac{\partial \eta}{\partial \omega_\alpha^2} \frac{\partial \omega_\alpha^2}{\partial n_\alpha} \nabla_{\vec{r}} n_\alpha(\vec{r}) \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{k}}{dl} = \frac{k}{\varepsilon_0 \eta^2} \sum_a \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial \omega_\alpha^2} \nabla_{\vec{r}} n_\alpha(\vec{r}) \quad (8. a)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dl} = \frac{1}{\eta} \frac{\vec{k}}{k} + k \nabla_{\vec{k}} \left(\frac{1}{\eta} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\vec{k}}{k} - \frac{k}{\eta^2} \nabla_{\vec{k}} \eta$$

με την άθροιση να γίνεται ως προς τα διάφορα είδη σωματιδίων του πλάσματος.

Όμως οι συνιστώσες του κυματοδιανύσματος \vec{k} γράφονται ως:

$$k_x = k \sin \theta' \cdot \cos \varphi$$

$$k_y = k \sin \theta' \cdot \sin \varphi$$

$$k_z = k \cos \theta'$$

όπου θ' (δεν έχει καμία σχέση με τη θ) και φ οι γωνίες ενός κατάλληλου συστήματος σφαιρικών συντεταγμένων προσαρμοσμένου στη δέσμη.

Εφαρμόζοντας τώρα τον κανόνα της αλυσίδας -για το η ως συνάρτηση του θ και το θ ως συνάρτηση του \vec{k} - έχουμε (αναλυτικά οι πράξεις φαίνονται στο Παράρτημα Α):

$$\frac{\partial \eta}{\partial k_x} = \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial k_x} = \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\cos \theta \cdot \cos \varphi}{k}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial k_y} = \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial k_y} = \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\cos \theta \cdot \sin \varphi}{k}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial k_z} = \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial k_z} = \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{-\sin \theta}{k}$$

Άρα:

$$-\frac{k}{\eta^2} \nabla_{\vec{k}} \eta = -\frac{k}{\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial k_x} \hat{x} + \frac{\partial \eta}{\partial k_y} \hat{y} + \frac{\partial \eta}{\partial k_z} \hat{z} \right) = -\frac{k}{\eta^2} \frac{1}{k} (\cos \theta \cdot \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \cdot \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z})$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί, με τη χρήση ενός πίνακα που θα εισαγάγουμε, σε πιο κατάλληλη μορφή, χωρίς αναφορά σε συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Ορίζουμε:

$$\vec{I}_T = \vec{I} - \vec{t}_k \vec{t}_k^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta \cdot \cos \varphi & \sin \theta \cdot \sin \varphi & \cos \theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \varphi & -\sin^2 \theta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi & -\cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ -\sin^2 \theta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi & 1 - \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi & -\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ -\cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi & -\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi & 1 - \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

όπου το \vec{t}_k είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του \vec{k} .

Εύκολα τώρα φαίνεται ότι η εξίσωση (4.b) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\frac{d\vec{r}}{dl} = \frac{1}{\eta} \frac{\vec{k}}{k} - \frac{k}{\eta^2} \nabla_{\vec{k}} \eta = \frac{1}{\eta} \frac{\vec{k}}{k} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} (\cos\theta \cdot \cos\varphi \hat{x} + \cos\theta \cdot \sin\varphi \hat{y} - \sin\theta \hat{z}) \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{r}}{dl} = \frac{1}{\eta} \frac{\vec{k}}{k} + \frac{1}{\eta^2 \sin\theta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} (\vec{I}_T \vec{I}_z) \quad (8.b)$$

Ο παράγοντας που επηρεάζει την διάδοση του κύματος μέσα στο πλάσμα, και τον οποίο θέλουμε να μελετήσουμε, είναι η χωρική μεταβολή της πυκνότητας των διαφόρων συστατικών του πλάσματος. Αυτό εκφράζεται ποσοτικά μέσω της ύπαρξης των όρων η και $\nabla_{\vec{r}} n_a(\vec{r})$ στην εξίσωση (8.a), και του η –που είναι συνάρτηση της συχνότητας πλάσματος, άρα εξαρτάται από τις πυκνότητες των διαφόρων σωματιδίων– στην (8.b). Πολύ εύκολα, με χρήση γεωμετρικής οπτικής, μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα πως αν υπάρχουν μεταβολές στην πυκνότητα των διαφόρων σωματιδίων στο πλάσμα, το κύμα, καθώς διέρχεται από μια περιοχή σε μια άλλη με διαφορετική πυκνότητα, θα αλλάζει και κατεύθυνση. Έτσι εξηγείται και η αρνητική επίδραση των blobs στη διάδοση κυμάτων μέσα στο πλάσμα. Πράγματι, δεδομένου ότι σε περιοχές με blobs η συγκέντρωση των διαφόρων σωματιδίων διαφέρει από αυτή στο υπόλοιπο πλάσμα, οδηγούμαστε σε εκτροπή της δέσμης. Με την παρακάτω ανάλυση επιχειρείται να ποσοτικοποιηθεί η επίδρασή τους, και να υπολογιστεί, εκτός των άλλων, και η γωνία εκτροπής.

Θα θεωρήσουμε πως η πυκνότητα κάθε είδους σωματιδίων του πλάσματος αποτελείται από δύο όρους. Ένα σταθερό όρο, που εκφράζει τη μέση πυκνότητα, κι έναν όρο που περιγράφει την μεταβολή της πυκνότητας, λόγω της παρουσίας των blobs. Άρα, για τα σωματίδια του είδους a , μπορούμε να θεωρήσουμε πυκνότητα της μορφής:

$$n_a(\vec{r}) = n_{a0} + \delta n_a(\vec{r}) \quad (9)$$

Αν θεωρήσουμε πως η διαταραχή $\delta n_a(\vec{r})$ είναι μικρή συγκρινόμενη με την πυκνότητα n_{a0} (δηλαδή αν κάνουμε την υπόθεση ότι η πυκνότητα των blobs δεν είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτήν του υπόλοιπου πλάσματος), μπορούμε να αναπτύξουμε σε σειρά Taylor το δείκτη διάθλασης η γύρω από το n_{a0} , και να κρατήσουμε μόνο όρους πρώτης τάξης, επιτυγχάνοντας έτσι καλή ακρίβεια. Με αυτή την προσέγγιση έχουμε:

$$\eta = \eta_0 + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2} \delta n_a(\vec{r}) \quad (10)$$

όπου $\omega_{\alpha 0} = \frac{q_{\alpha}^2 n_{a0}}{\varepsilon_0 m_{\alpha}}$ η συχνότητα πλάσματος των σωματιδίων τύπου a απουσία blobs,

και $\eta_0 = \eta(\{\omega_{\alpha 0}^2\}, \theta)$ ο δείκτης διάθλασης απουσία blobs.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στις (8.a) και (8.b), παίρνουμε εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη των μεγεθών \vec{k} και \vec{r} του κύματος, καθώς αυτό διαδίδεται σε πλάσμα παρουσία blobs. Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν προσέγγιση πρώτης τάξης, καθώς αμελούμε γινόμενα και δυνάμεις μεγεθών που εξαρτώνται από τη διαταραχή $\delta n_a(\vec{r})$. Επίσης, το δείκτη διάθλασης η , όταν εμφανίζεται στον παρονομαστή, τον αντικαθιστούμε με η_0 ώστε να είναι εφικτοί οι υπολογισμοί που μας ενδιαφέρουν.

$$\dot{\vec{k}} \equiv \frac{d\vec{k}}{dl} \approx \frac{k}{\varepsilon_0 \eta_0^2} \sum_a \frac{q_a^2}{m_a} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2} \right) \nabla_{\vec{r}} \delta n_a(\vec{r}) \quad (11.a)$$

$$\dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dl} \approx \frac{1}{\eta_0} \vec{l}_{k_0} + \frac{1}{\eta_0^2 \sin \theta} (\vec{I}_{T_0} \vec{l}_z) \left[\frac{\partial \eta_0}{\partial \theta} + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_a \frac{q_a^2}{m_a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2} \right) \delta n_a(\vec{r}) \right] \quad (11.b)$$

όπου το \vec{l}_{k_0} είναι μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στο αρχικό κυματοδιάνυσμα,

$$\text{και } \vec{I}_{T_0} = \vec{I} - \vec{l}_{k_0} \vec{l}_{k_0}^T.$$

Ορίζουμε ένα σταθερό (με την έννοια ότι δεν εμπλέκονται τα blobs στον ορισμό του) μοναδιαίο κυματοδιάνυσμα το οποίο θα μας είναι χρήσιμο στη συνέχεια.

$$\vec{l}_s = \frac{\frac{1}{\eta_0} \vec{l}_k + \frac{1}{\eta_0^2 \sin \theta} (\vec{I}_{T_0} \vec{l}_z) \frac{\partial \eta_0}{\partial \theta}}{\sqrt{\frac{1}{\eta_0^2} + \frac{1}{\eta_0^4} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \theta} \right)^2}} \quad (12)$$

Οι εξισώσεις (11.a) και (11.b) απουσία blobs απλοποιούνται και παίρνουν τη μορφή:

$$\dot{\vec{k}} = 0 \quad (13.a)$$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{\eta_0} \vec{l}_{k_0} + \frac{1}{\eta_0^2 \sin \theta} (\vec{I}_{T_0} \vec{l}_z) \frac{\partial \eta_0}{\partial \theta} = \vec{l}_s \sqrt{\frac{1}{\eta_0^2} + \frac{1}{\eta_0^4} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \theta} \right)^2} \quad (13.b)$$

Περιγράφουν δηλαδή το αναμενόμενο αποτέλεσμα, ότι απουσία blobs το κυματοδιάνυσμα δεν μεταβάλλεται καθώς το κύμα διαδίδεται στο πλάσμα, και το κύμα ακολουθεί σταθερή κατεύθυνση (η ταχύτητα ομάδας είναι σταθερή), αυτή του διανύσματος \vec{l}_s . Αυτό συμβαίνει, γιατί δεν υπάρχουν τα blobs για να το εκτρέψουν. Στην περίπτωση που υπάρχουν και blobs, που είναι και η περίπτωση που μας ενδιαφέρει, το \vec{l}_s δείχνει την αρχική κατεύθυνση του κύματος.

Επιστρέφουμε τώρα στις (11.a) και (11.b), τις οποίες και θα χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό του 6×6 πίνακα \vec{D}_{XX} (είναι ο ταυνοστής συσχέτισης, τον οποίο θα ορίσουμε στη συνέχεια) του διανύσματος $X = \begin{bmatrix} \vec{k} \\ \vec{r} \end{bmatrix}$. Ο πίνακας αυτός έχει για στοιχεία του συσχετίσεις των

μεγεθών \vec{k}, \vec{r} , και είναι χρήσιμος για τη στατιστική περιγραφή των blobs (μόνο στατιστικά μπορούμε να τα μελετήσουμε, αφού η θέση τους και το μέγεθός τους δεν είναι δυνατό να μας είναι επακριβώς γνωστά). Για τον υπολογισμό του πίνακα χρειάζεται το μέγεθος $\langle \dot{X}(\vec{r}, \vec{k}) \dot{X}^T(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma, \vec{k}) \rangle$, που είναι η συσχέτιση του μεγέθους X στη θέση \vec{r} με το μέγεθος X στη θέση $\vec{r} + \vec{l}_s \sigma$, δηλαδή αφού μετακινηθούμε κατά σ στην αρχική κατεύθυνση της δέσμης. Η τελεία σημαίνει παραγωγή ως προς το $l = ct$, ενώ ο τελεστής $\langle \cdot \rangle$ σημαίνει μέση τιμή ως προς την κατανομή των blobs στο πλάσμα. Αυτός ο πίνακας υποδιαιρείται σε τέσσερις 3×3

$$\text{υποπίνακες } \vec{D}_{XX} = \begin{bmatrix} \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}} & \vec{D}_{\vec{k}\vec{r}} \\ \vec{D}_{\vec{r}\vec{k}} & \vec{D}_{\vec{r}\vec{r}} \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζοντας έναν προς ένα τους όρους αυτούς, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\vec{k}}(\vec{r}, \vec{k}) \dot{\vec{k}}^T(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma, \vec{k}) \rangle \\ &= \frac{k^2}{\varepsilon_0^2 \eta_0^4} \sum_{\alpha, \beta} \frac{q_\alpha^2 q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2} \right) \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\beta 0}^2} \right) \langle \nabla_{\vec{r}} \delta n_\alpha(\vec{r}; \vec{r}_0) \nabla_{\vec{r}}^T \delta n_\beta(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma; \vec{r}_0) \rangle \quad (14. a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\vec{r}}(\vec{r}, \vec{k}) \dot{\vec{r}}^T(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma, \vec{k}) \rangle \\ &= \frac{1}{\eta_0^2} \vec{l}_k \vec{l}_k^T + \frac{2}{\eta_0^3 \sin \theta} (\vec{l}_T \vec{l}_z) \cdot \vec{l}_k^T \frac{\partial \eta_0}{\partial \theta} + \frac{1}{\eta_0^4 \sin^2 \theta} (\vec{l}_T \vec{l}_z) \cdot (\vec{l}_T \vec{l}_z)^T \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\eta_0^4 \sin^2 \theta} (\vec{l}_T \vec{l}_z) \cdot \\ & (\vec{l}_T \vec{l}_z)^T \frac{1}{\varepsilon_0^2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{q_\alpha^2 q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\beta 0}^2} \right) \langle \delta n_\alpha(\vec{r}; \vec{r}_0) \delta n_\beta^T(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma; \vec{r}_0) \rangle \quad (14. b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\vec{k}}(\vec{r}, \vec{k}) \dot{\vec{r}}^T(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma, \vec{k}) \rangle \\ &= \frac{k}{\varepsilon_0^2 \eta_0^4 \sin \theta} \sum_{\alpha, \beta} \frac{q_\alpha^2 q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\beta 0}^2} \right) \langle \nabla_{\vec{r}} \delta n_\alpha(\vec{r}; \vec{r}_0) \delta n_\beta^T(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma; \vec{r}_0) \rangle \quad (14. c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle \dot{\vec{r}}(\vec{r}, \vec{k}) \dot{\vec{k}}^T(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma, \vec{k}) \rangle \\
&= \frac{k}{\varepsilon_0^2 \eta_0^4 \sin \theta} (\vec{l}_T \vec{l}_z) \sum_{\alpha, \beta} \frac{q_\alpha^2 q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta} \left(\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \omega_{\alpha 0}^2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \omega_{\beta 0}^2} \right) \langle \delta n_\alpha(\vec{r}; \vec{r}_0) \nabla_{\vec{r}}^T \delta n_\beta(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma; \vec{r}_0) \rangle \quad (14. d)
\end{aligned}$$

Στους παραπάνω τύπους δεν εμφανίζονται όροι που να περιέχουν μόνο δn_α ή $\nabla_{\vec{r}} \delta n_\alpha$, παρά μόνο γινόμενα των όρων αυτών. Αυτό οφείλεται στο ότι οι όροι αυτοί εξαφανίζονται όταν πάρω μέση τιμή, αφού τα blobs έχουν πολύ μικρές διαστάσεις, η συγκέντρωσή τους δεν είναι πολύ μεγάλη, και η κατανομή τους είναι κατά προσέγγιση ομοιόμορφη στο πλάσμα, άρα η μέση μεταβολή που προκαλούν στην πυκνότητα του πλάσματος θα είναι κατά προσέγγιση μηδέν.

Μένει τώρα να καταστρώσουμε, με χρήση του πίνακα διάχυσης που θα προκύψει από τους παραπάνω υπολογισμούς, μία εξίσωση Fokker-Planck για την περιγραφή την μέσης μεταβολής -λόγω της παρουσίας των blobs- στο κυματοδιάνυσμα, καθώς το κύμα διαδίδεται μέσα στο πλάσμα. Για να γίνει αυτό, πρέπει να καθορίσουμε τη γεωμετρία των blobs. Από μετρήσεις που έχουν γίνει, έχει παρατηρηθεί ότι τα blobs έχουν σχήμα ελαφρώς μακρύτερο κατά την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Στην παρακάτω ανάλυση θεωρούμε τρεις διαφορετικές γεωμετρίες συμβατές με τις πειραματικές παρατηρήσεις για το σχήμα των blobs. Αρχικά ελλειπτική, έπειτα την ειδική περίπτωση της πρώτης, τη σφαιρική, η οποία είχε μελετηθεί και στην αναφορά [Hiz], και τέλος κυλινδρική. Το τι σχήμα θεωρούμε ότι έχουν τα blobs εκφράζεται μέσω της μορφής για το δn_α που επιλέγουμε.

3.α Μελέτη της εκτροπής της δέσμης παρουσία ελλειπτικών blobs

3.α.1 Υπολογισμός του τανυστή διάχυσης στην περίπτωση ελλειπτικών blobs

Στην παράγραφο αυτή θα αναπτύξουμε τι συμβαίνει στην περίπτωση που το σχήμα των blobs θεωρηθεί ελλειπτικό. Θα υπολογίσουμε τον αντίστοιχο πίνακα διάχυσης, και θα λύσουμε την εξίσωση Fokker-Planck που προκύπτει.

Θεωρούμε ότι έχουμε blobs ελλειπτικού σχήματος. Θυμίζουμε ότι τα blobs είναι ανομοιογένειες στην πυκνότητα του πλάσματος. Στην παράγραφο αυτή θα θεωρήσουμε ότι το σχήμα αυτής την ανομοιογένειας είναι ελλειπτικό. Μοντελοποιούμε τα blobs, έτσι ώστε να έχουν μέγιστη πυκνότητα στο κέντρο, και να μειώνεται σταδιακά (ακολουθώντας κανονική κατανομή) καθώς απομακρυνόμαστε από αυτό με ελλειπτική συμμετρία. Τα προσεγγίζουμε με ελλειψοειδή εκ περιστροφής (δεν υπάρχει λόγος να υπάρχει ανομοιομορφία μεταξύ των αξόνων x και y) με άξονα περιστροφής των z , που είναι ο άξονας της κατεύθυνσης του μαγνητικού πεδίου. Ο z είναι και ο μεγάλος άξονας του ελλειψοειδούς. Το σχήμα τους επομένως είναι επιμηκυμένο κατά την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, όπως είπαμε ότι έχει παρατηρηθεί πειραματικά.

Θα πρέπει να εισαγάγουμε τώρα αυτή την ιδιότητα των blobs στο μοντέλο μας. Αυτό επιτυγχάνεται θεωρώντας ότι η διαταραχή στην πυκνότητα των σωματιδίων του α είδους λόγω ενός blob στη θέση \vec{r}_o (εννοούμε τη θέση του κέντρου του) έχει την εξής μορφή:

$$\delta n_a(\vec{r}; \vec{r}_o) = v n_{a0} \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A (\vec{r} - \vec{r}_o)}{2} \right] \quad (15)$$

Ας εξηγήσουμε τώρα τη σημασία των διαφόρων μεγεθών στην παραπάνω σχέση. Το \vec{r} είναι η θέση παρατήρησης της διαταραχής. Η v είναι μια αδιάστατη τυχαία μεταβλητή που μοντελοποιεί την τυχαία πυκνότητα των σωματιδίων του είδους α στο κέντρο ενός blob, ως ποσοστό της αντίστοιχης μέσης πυκνότητας στο background πλάσμα. Για απλότητα, τη θεωρούμε ανεξάρτητη του είδους των σωματιδίων, και ότι ακολουθεί κανονική κατανομή μέσης τιμής v_o και τυπικής απόκλισης δ_o . Τέλος, για τον πίνακα A, θεωρούμε ότι και αυτός είναι ανεξάρτητος του είδους των σωματιδίων, και έχει την εξής μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} 1/(\Delta r_b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(\Delta r_b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(\Delta r_a)^2 \end{bmatrix} \text{ με } \Delta r_b, \Delta r_a \text{ τα μήκη του μικρού (xy επίπεδο) και του}$$

μεγάλου (στο z άξονα), αντίστοιχα, άξονα του ελλειψοειδούς. Ο πίνακας αυτός δηλαδή περιγράφει το μέσο μέγεθος ενός blob.

Πράγματι οι ισοΰψεις της παραπάνω διαταραχής ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(\vec{r} - \vec{r}_o)^T \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{(\Delta r_b)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\Delta r_b)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(\Delta r_a)^2} \end{bmatrix}}_A (\vec{r} - \vec{r}_o) = \sigma \tau \alpha \theta.$$

$$\Rightarrow \frac{(z - z_o)^2}{(\Delta r_a)^2} + \frac{(x - x_o)^2}{(\Delta r_b)^2} + \frac{(y - y_o)^2}{(\Delta r_b)^2} = \sigma \tau \alpha \theta.$$

που είναι εξίσωση έλλειψης. Άρα πράγματι, η εξίσωση (15) για την πυκνότητα περιγράφει blob ελλειπτικού σχήματος.

Επίσης στην έλλειψη $(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A (\vec{r} - \vec{r}_o) = 1$, έχω $\delta n_a = v n_{ao} e^{-1/2} \approx 0.6(\delta n_a)_{max}$ και μετά η πυκνότητα μειώνεται όλο και πιο πολύ, άρα τα $\Delta r_b, \Delta r_a$ είναι αντιπροσωπευτικά του μεγέθους του blob.

Φυσικά το μέγεθος όλων των blobs και πόσο μάλλον η εκκεντρότητά τους δεν είναι ίδια, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μέσες τιμές για αριθμητικούς υπολογισμούς και εξαγωγή συμπερασμάτων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η περίπτωση σφαιρικών blobs που μελετάται στο [Hiz], μιας και η εκκεντρότητα των περισσοτέρων -όπως έχει παρατηρηθεί- είναι κοντά στη μονάδα. Πιο συγκεκριμένα, δεδομένα από τον TJ-stellarator και τον NSTX δείχνουν ότι το ποσοστό των blobs με λόγο ύψους προς πλάτος μεγαλύτερο του 2 είναι μικρότερο από 35% [Alon]. Φυσικά η ανάλυσή μας καλύπτει και αυτήν την περίπτωση, αλλά θα γίνει και ιδιαίτερη αναφορά στην ειδική περίπτωση σφαιρικής συμμετρίας, όπου και απλοποιούνται τα αποτελέσματα, και είναι πιο εύκολο να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα.

Από τη μακροσκοπική ουδετερότητα σε περιοχές με blobs, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta n_{\alpha} &= \sum_{\alpha} q_{\alpha} v n_{\alpha o} \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A (\vec{r} - \vec{r}_o)}{2} \right] = \\ &= v \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A (\vec{r} - \vec{r}_o)}{2} \right] \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha o} = 0 \end{aligned}$$

Για την εφαρμογή των τύπων (14) είναι απαραίτητο να υπολογιστεί προηγουμένως το grad της διαταραχής δn_a . Με λίγες πράξεις προκύπτει ότι :

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{r}} \delta n_a(\vec{r}; \vec{r}_o) &= \frac{\partial \delta n_a}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \delta n_a}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \delta n_a}{\partial z} \hat{z} \\ &= \left(-v n_{ao} \frac{x - x_o}{b^2} \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A (\vec{r} - \vec{r}_o)}{2} \right] \right) \hat{x} \\ &+ \left(-v n_{ao} \frac{y - y_o}{b^2} \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A (\vec{r} - \vec{r}_o)}{2} \right] \right) \hat{y} \\ &+ \left(-v n_{ao} \frac{z - z_o}{b^2} \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A (\vec{r} - \vec{r}_o)}{2} \right] \right) \hat{z} \Rightarrow \\ \nabla_{\vec{r}} \delta n_a(\vec{r}; \vec{r}_o) &= -v n_{ao} \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A (\vec{r} - \vec{r}_o)}{2} \right] A (\vec{r} - \vec{r}_o) \quad (16) \end{aligned}$$

Άρα το γινόμενο που εμφανίζεται στον τύπο για τον υποπίνακα $\langle \vec{k}(\vec{r}, \vec{k}) \vec{k}^T(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma, \vec{k}) \rangle$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{r}} \delta n_a(\vec{r}; \vec{r}_o) \nabla_{\vec{r}}^T \delta n_b(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma; \vec{r}_o) = \\ v^2 n_{a0} n_{b0} \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A (\vec{r} - \vec{r}_o) + (\vec{r} + \vec{l}_s \sigma - \vec{r}_o)^T A (\vec{r} + \vec{l}_s \sigma - \vec{r}_o)}{2} \right] A (\vec{r} - \vec{r}_o) (\vec{r} + \vec{l}_s \sigma - \vec{r}_o)^T A^T \Rightarrow \\ \nabla_{\vec{r}} \delta n_a(\vec{r}; \vec{r}_o) \nabla_{\vec{r}}^T \delta n_b(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma; \vec{r}_o) = v^2 n_{a0} n_{b0} \exp \left[-\frac{2(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A (\vec{r} - \vec{r}_o) + \sigma^2 \vec{l}_s^T A \vec{l}_s + 2\sigma (\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_s}{2} \right] \cdot \\ \cdot (A (\vec{r} - \vec{r}_o) (\vec{r} - \vec{r}_o)^T A + \sigma A (\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_s^T A) \quad (17) \end{aligned}$$

Ο τανυστής \vec{D}_{XX} στον οποίο αναφερθήκαμε και πριν, και ο οποίος είναι ο 6x6 πίνακας που περιγράφει τη συσχέτιση των διαφόρων συνιστωσών του διανύσματος $X = \begin{bmatrix} \vec{k} \\ \vec{r} \end{bmatrix}$, ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \vec{D}_{XX} = \frac{1}{\Delta s} \int_0^{\Delta s} ds \int_{-s}^{\Delta s - s} d\sigma \langle \dot{X}'[\vec{r}(s), \vec{k}] X'^T[\vec{r}(s) + \vec{l}_s \sigma, \vec{k}] \rangle \\ \approx \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \langle \dot{X}'[\vec{r}(s), \vec{k}] X'^T[\vec{r}(s) + \vec{l}_s \sigma, \vec{k}] \rangle \quad (18) \end{aligned}$$

Οι αγκύλες $\langle \rangle$ εκφράζουν χωρική μέση τιμή ως προς την κατανομή των blobs. Το \dot{X}' είναι το τμήμα του $\dot{X} \equiv \frac{d}{dt} X$ που εξαρτάται από την μεταβολή στην πυκνότητα του πλάσματος. Άρα, από τις εξισώσεις (11.a), (11.b) :

$$\dot{X}' = \left(\frac{k}{\varepsilon_0 \eta_0^2} \sum_{\alpha} \frac{q_a^2}{m_a} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2} \right) \nabla_{\vec{r}} \delta n_a(\vec{r}), \frac{1}{\varepsilon_0 \eta_0^2 \sin \theta} (\vec{l}_{T_o} \vec{l}_z) \sum_{\alpha} \frac{q_a^2}{m_a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2} \right) \delta n_a(\vec{r}) \right)$$

Το Δs είναι στοιχείο μήκους κατά την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος. Τα ολοκληρώματα αυτά εκφράζουν ουσιαστικά μία συνέλιξη για τις μεταβολές σε μήκος Δs . Επειδή η κύρια συνεισφορά στα ολοκληρώματα της πρώτης ισότητας είναι για s τα οποία απέχουν λιγότερο από Δs , επιτρέπεται να κάνουμε την προσέγγιση που οδηγεί στη δεύτερη ισότητα.

Μας ενδιαφέρει η μεταβολή της κατανομής του κυματοδιανύσματος \vec{k} καθώς το κύμα διαδίδεται στην περιοχή των blobs. Από αυτή τη μεταβολή θα βρούμε και τη γωνία εκτροπής της ακτίνας. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε μόνο τον υποπίνακα $\vec{D}_{\vec{k}\vec{k}}$ του πίνακα διάχυσης. Ένα ολοκλήρωμα που χρειάζεται για τον υπολογισμό του είναι το παρακάτω.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \nabla_{\vec{r}} \delta n_a(\vec{r}; \vec{r}_0) \nabla_{\vec{r}}^T \delta n_b(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma; \vec{r}_0) d\sigma =$$

$$v^2 n_{\alpha 0} n_{\beta 0} \exp[-(\vec{r} - \vec{r}_0)^T A (\vec{r} - \vec{r}_0)] \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\sigma^2 \vec{l}_s^T A \vec{l}_s + 2\sigma(\vec{r} - \vec{r}_0)^T A \vec{l}_s}{2}\right] d\sigma}_{I_1} A (\vec{r} - \vec{r}_0) (\vec{r} - \vec{r}_0)^T A + \right.$$

$$\left. \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \exp\left[-\frac{\sigma^2 \vec{l}_s^T A \vec{l}_s + 2\sigma(\vec{r} - \vec{r}_0)^T A \vec{l}_s}{2}\right] d\sigma}_{I_2} A (\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{l}_s^T A \right)$$

όπου τα ολοκληρώματα I_1 και I_2 υπολογίζονται ως εξής:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\left(\sigma + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^T A \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}\right)^2}{2 \frac{1}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}}\right] \exp\left[\frac{((\vec{r} - \vec{r}_0)^T A \vec{l}_s)^2}{2 \vec{l}_s^T A \vec{l}_s}\right] d\sigma$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}} \exp\left[\frac{((\vec{r} - \vec{r}_0)^T A \vec{l}_s)^2}{2 \vec{l}_s^T A \vec{l}_s}\right]$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \cdot \exp\left[-\frac{\left(\sigma + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^T A \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}\right)^2}{2 \frac{1}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}}\right] \exp\left[\frac{((\vec{r} - \vec{r}_0)^T A \vec{l}_s)^2}{2 \vec{l}_s^T A \vec{l}_s}\right] d\sigma$$

$$= -\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^T A \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s} \sqrt{\frac{2\pi}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}} \exp\left[\frac{((\vec{r} - \vec{r}_0)^T A \vec{l}_s)^2}{2 \vec{l}_s^T A \vec{l}_s}\right]$$

Άρα τελικά:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla_{\vec{r}} \delta n_a(\vec{r}; \vec{r}_o) \nabla_{\vec{r}}^T \delta n_\beta(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma; \vec{r}_o) d\sigma \\
&= v^2 n_{a0} n_{\beta 0} \exp[-(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A (\vec{r} - \vec{r}_o)] \sqrt{\frac{2\pi}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}} \left\{ A(\vec{r} - \vec{r}_o) (\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s} A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_s^T A \right\} \exp \left[\frac{((\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_s)^2}{2 \vec{l}_s^T A \vec{l}_s} \right] \quad (19)
\end{aligned}$$

Στον παραπάνω τύπο εμφανίζεται η τυχαία μεταβλητή v . Παίρνοντας τη μέση τιμή (expectation) ως προς αυτή στην εξίσωση (19) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla_{\vec{r}} \delta n_a(\vec{r}; \vec{r}_o) \nabla_{\vec{r}}^T \delta n_\beta(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma; \vec{r}_o) d\sigma \right\rangle \\
&= \langle v^2 \rangle n_{a0} n_{\beta 0} \exp[-(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A (\vec{r} - \vec{r}_o)] \sqrt{\frac{2\pi}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}} \left\{ A(\vec{r} - \vec{r}_o) (\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s} A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_s^T A \right\} \exp \left[\frac{((\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_s)^2}{2 \vec{l}_s^T A \vec{l}_s} \right]
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση : $\langle v^2 \rangle = E[v^2] = Var(v) + E^2[v] = \delta_o^2 + v_o^2$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla_{\vec{r}} \delta n_a(\vec{r}; \vec{r}_o) \nabla_{\vec{r}}^T \delta n_\beta(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma; \vec{r}_o) d\sigma \right\rangle \\
&= (\delta_o^2 + v_o^2) n_{a0} n_{\beta 0} \exp[-(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A (\vec{r} - \vec{r}_o)] \sqrt{\frac{2\pi}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}} \left\{ A(\vec{r} - \vec{r}_o) (\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s} A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_s^T A \right\} \exp \left[\frac{((\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_s)^2}{2 \vec{l}_s^T A \vec{l}_s} \right] \quad (20)
\end{aligned}$$

Επομένως ο τανυστής $\vec{D}_{\vec{k}\vec{k}}$, έχοντας πάρει μέση τιμή ως προς ν , γίνεται:

$$\begin{aligned}\langle \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}} \rangle &= \frac{k^2}{\varepsilon_0^2 \eta_0^2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{q_\alpha^2 q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta} \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2} \right) \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\beta 0}^2} \right) \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla_{\vec{r}} \delta n_\alpha(\vec{r}; \vec{r}_0) \nabla_{\vec{r}}^T \delta n_\beta(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma; \vec{r}_0) d\sigma \right\rangle \\ &= \frac{k^2}{\eta_0^4} \sum_{\alpha, \beta} \frac{q_\alpha^2}{\varepsilon_0 m_\alpha} \frac{q_\beta^2}{\varepsilon_0 m_\beta} \left(\frac{1}{2\eta_0} \frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\alpha 0}^2} \right) \left(\frac{1}{2\eta_0} \frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\beta 0}^2} \right) \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla_{\vec{r}} \delta n_\alpha(\vec{r}; \vec{r}_0) \nabla_{\vec{r}}^T \delta n_\beta(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma; \vec{r}_0) d\sigma \right\rangle \\ &= \frac{k^2 (v_0^2 + \delta_0^2)}{4\eta_0^6} \sqrt{\frac{2\pi}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}} \sum_{\alpha, \beta} \frac{q_\alpha^2 n_{\alpha 0}}{\varepsilon_0 m_\alpha} \frac{q_\beta^2 n_{\beta 0}}{\varepsilon_0 m_\beta} \left(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\alpha 0}^2} \right) \left(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\beta 0}^2} \right) \\ &\quad \cdot \exp \left[-\frac{2(\vec{r}-\vec{r}_0)^T A (\vec{r}-\vec{r}_0) - \frac{((\vec{r}-\vec{r}_0)^T A \vec{l}_s)^2}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}}{2} \right] \left\{ A(\vec{r}-\vec{r}_0)(\vec{r}-\vec{r}_0)^T A - \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)^T A \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s} A(\vec{r}-\vec{r}_0) \vec{l}_s^T A \right\} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}} \rangle &= \frac{k^2 (v_0^2 + \delta_0^2)}{4\eta_0^6} \sqrt{\frac{2\pi}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}} \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha 0}^2 \omega_{\beta 0}^2 \left(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\alpha 0}^2} \right) \left(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\beta 0}^2} \right) \\ &\quad \cdot \exp \left[-\frac{2(\vec{r}-\vec{r}_0)^T A (\vec{r}-\vec{r}_0) - \frac{((\vec{r}-\vec{r}_0)^T A \vec{l}_s)^2}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}}{2} \right] \left\{ A(\vec{r}-\vec{r}_0)(\vec{r}-\vec{r}_0)^T A - \left(\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)^T A \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s} \right) A(\vec{r}-\vec{r}_0) \vec{l}_s^T A \right\} \quad (21)\end{aligned}$$

Στον παραπάνω τύπο εμφανίζεται η ποσότητα \vec{r}_0 , που είναι η θέση ενός blob, και την οποία προφανώς δεν μπορούμε να θεωρήσουμε γνωστή. Μπορούμε όμως, και είναι λογικό, να πάρουμε τη μέση τιμή της παραπάνω ποσότητας, θεωρώντας πως τα blobs είναι ομοιόμορφα καταναμημένα σε όγκο V_0 . Άρα :

$$\begin{aligned}\langle \langle \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}} \rangle \rangle &= \\ &= \frac{k^2 (v_0^2 + \delta_0^2)}{4V_0 \eta_0^6} \sqrt{\frac{2\pi}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}} \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha 0}^2 \omega_{\beta 0}^2 \left(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\alpha 0}^2} \right) \left(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\beta 0}^2} \right) \int_{V_0} \exp \left[-\frac{2(\vec{r}-\vec{r}_0)^T A (\vec{r}-\vec{r}_0) - \frac{((\vec{r}-\vec{r}_0)^T A \vec{l}_s)^2}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}}{2} \right] \left\{ A(\vec{r}-\vec{r}_0)(\vec{r}-\vec{r}_0)^T A - \left(\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)^T A \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s} \right) A(\vec{r}-\vec{r}_0) \vec{l}_s^T A \right\} dV_0 \quad (22)\end{aligned}$$

Για πεπερασμένο όγκο V_0 το ολοκλήρωμα στον τύπο (22) δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί αναλυτικά. Αν επιτρέψουμε η ολοκλήρωση να γίνει στον άπειρο χώρο, τότε μπορούμε να το υπολογίσουμε.

Η θεώρηση αυτή επιτρέπεται, γιατί λόγω της εκθετικής συνάρτησης της μορφής

$$\exp[-a(x - x_0)^2 - b(y - y_0)^2 - c(z - z_0)^2]$$

με a, b, c θετικά, η συνεισφορά της προς ολοκλήρωση συνάρτησης θα είναι περιορισμένη σε έναν πεπερασμένο όγκο, και η ολοκλήρωση μέχρι το άπειρο δεν θα αλλάζει ουσιαστικά το ολοκλήρωμα.

Πέρα από το βασικό σύστημα συντεταγμένων xyz εισάγουμε κι ένα νέο χρήσιμο σύστημα $\chi\psi\zeta$, όπως στο Σχήμα 1. Ο ζ έχει την κατεύθυνση του \vec{i}_s , που είναι η αρχική κατεύθυνση της ταχύτητας ομάδας του κύματος, ο άξονας χ ταυτίζεται με τον x και είναι και οι δύο κάθετοι στο επίπεδο που ορίζουν τα \vec{i}_s και \vec{i}_{k_0} , και ο ψ είναι τέτοιος, ώστε το σύστημα $\chi\psi\zeta$ να είναι δεξιόστροφο. Με λίγα λόγια, το νέο σύστημα προκύπτει με στροφή του xyz ως προς τον άξονα x , με ωρολογιακή φορά, κατά γωνία a' .

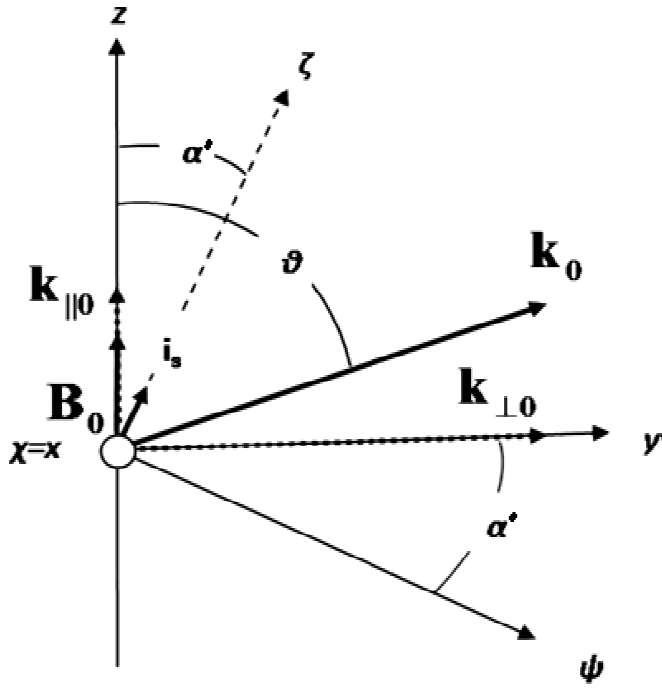
Το ολοκλήρωμα της (22) δεν θα το υπολογίσουμε απευθείας. Πέρα από τη θεώρηση ότι εκτείνεται σε άπειρο χώρο, θα πάρουμε και τις προβολές του στους άξονες του νέου συστήματος συντεταγμένων που περιγράψαμε. Αυτό θα μας δώσει την εικόνα του πώς μεταβάλλεται η κατανομή του κυματοδιανύσματος σε σύστημα που σχετίζεται με την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος απουσία blobs, την κατεύθυνση δηλαδή της μη εκτρεπόμενης -λόγω σκέδασης στα blobs- ακτίνας.

Ακολουθεί ο πλήρης υπολογισμός για τη γενική περίπτωση ελλειπτικών blobs. Στο Παράρτημα Β παρατίθεται και ο υπολογισμός για την ειδική περίπτωση σφαιρικών blobs, αν και είναι δυνατή η εξαγωγή των αποτελεσμάτων από τη γενική περίπτωση.

Δείχνουμε τώρα τις πράξεις για την εύρεση των προβολών $\langle \vec{i}_1^T \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}} \vec{i}_2 \rangle$ με $\vec{i}_1, \vec{i}_2 = \vec{i}_\chi$ ή \vec{i}_ψ ή \vec{i}_ζ .

$$A(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{bmatrix} (x - x_0)/(\Delta r_b)^2 \\ (y - y_0)/(\Delta r_b)^2 \\ (z - z_0)/(\Delta r_a)^2 \end{bmatrix}, \text{ άρα στο σύστημα } \chi, \psi, \zeta:$$

$$A(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{bmatrix} \frac{(x-x_0)}{(\Delta r_b)^2} \\ \cos a' \frac{y-y_0}{(\Delta r_b)^2} - \sin a' \frac{z-z_0}{(\Delta r_a)^2} \\ \cos a' \frac{z-z_0}{(\Delta r_a)^2} + \sin a' \frac{y-y_0}{(\Delta r_b)^2} \end{bmatrix}$$



Σχήμα 1. Τα δύο συστήματα συντεταγμένων, με τον άξονα z του ενός να έχει την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου, και τον άξονα ζ του άλλου να έχει την κατεύθυνση του διανύσματος \vec{i}_s της ταχύτητας ομάδος της ακτίνας.

$$A\vec{l}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sin a'}{(\Delta r_b)^2} \\ \frac{\cos a'}{(\Delta r_a)^2} \end{bmatrix}, \text{ άρα στο σύστημα } \chi, \psi, \zeta:$$

$$A\vec{l}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos a' \frac{\sin a'}{(\Delta r_b)^2} - \sin a' \frac{\cos a'}{(\Delta r_a)^2} \\ \cos a' \frac{\cos a'}{(\Delta r_a)^2} + \sin a' \frac{\sin a'}{(\Delta r_b)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sin 2a'}{2} \left(\frac{1}{(\Delta r_b)^2} - \frac{1}{(\Delta r_a)^2} \right) \\ \frac{\cos^2 a'}{(\Delta r_a)^2} + \frac{\sin^2 a'}{(\Delta r_b)^2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{l}_s^T A\vec{l}_s = \vec{l}_\zeta^T A\vec{l}_\zeta = \frac{\cos^2 a'}{(\Delta r_a)^2} + \frac{\sin^2 a'}{(\Delta r_b)^2} = m$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A\vec{l}_s = \sin a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} + \cos a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
 & \exp \left[- \frac{2(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A (\vec{r} - \vec{r}_o) - \frac{((\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_s)^2}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}}{2} \right] \\
 &= \exp \left[- \frac{2 \left(\frac{(z - z_o)^2}{(\Delta r_a)^2} + \frac{(x - x_o)^2}{(\Delta r_b)^2} + \frac{(y - y_o)^2}{(\Delta r_b)^2} \right) - \frac{\left(\sin a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} + \cos a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2} \right)^2}{m}}{2} \right] \\
 &= \exp \left[- \frac{(x - x_o)^2}{(\Delta r_b)^2} - K(y - y_o)^2 - L(z - z_o)^2 + R(y - y_o)(z - z_o) \right]
 \end{aligned}$$

όπου οι σταθερές K, L και R ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$K = \frac{1}{(\Delta r_b)^2} - \frac{\sin^2 a'}{2(\Delta r_b)^4 m} > 0$$

$$L = \frac{1}{(\Delta r_a)^2} - \frac{\cos^2 a'}{2(\Delta r_a)^4 m} > 0$$

$$R = \frac{\sin a' \cdot \cos a'}{(\Delta r_a)^2 (\Delta r_b)^2 m}$$

και $KL - \frac{R^2}{4} = \frac{1}{2(\Delta r_a)^2 (\Delta r_b)^2} > 0$, που σημαίνει πως μπορώ να χρησιμοποιήσω τους τύπους του Παραρτήματος Γ.

- $\vec{l}_1 = \vec{l}_x$
 $\vec{l}_2 = \vec{l}_\psi$

$$\begin{aligned}
 & \vec{l}_x^T \left\{ A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_z}{\vec{l}_z^T A \vec{l}_z} A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_z^T A \right\} \vec{l}_\psi \\
 &= \vec{l}_x^T A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_\psi - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_z}{\vec{l}_z^T A \vec{l}_z} \vec{l}_x^T A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_z^T A \vec{l}_\psi \\
 &= \frac{x - x_o}{(\Delta r_b)^2} \left(\cos a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} - \sin a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2} \right) - \frac{\sin a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} + \cos a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2}}{m} \frac{x - x_o}{(\Delta r_b)^2} \frac{\sin 2a'}{2} \left(\frac{1}{(\Delta r_b)^2} - \frac{1}{(\Delta r_a)^2} \right)
 \end{aligned}$$

Κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος στον τύπο του $\langle\langle \vec{l}_\chi^T \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}} \vec{l}_\psi \rangle\rangle$ θα εμφανιστεί ολοκλήρωμα της μορφής:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(x - x_o) e^{-\frac{(x-x_o)^2}{(\Delta r_b)^2}} dx_o}_{E[X-x_o]=0} \int_{y,z} \exp[-K(y - y_o)^2 - L(z - z_o)^2 + R(y - y_o)(z - z_o)](\dots) dy_o dz_o = 0$$

Άρα $D_{\chi\psi} = 0$

Ομοίως, $D_{\chi\zeta} = 0$

- $\vec{l}_1 = \vec{l}_\psi$
 $\vec{l}_2 = \vec{l}_\chi$

$$\begin{aligned} & \vec{l}_\psi^T \left\{ A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_\zeta}{\vec{l}_\zeta^T A \vec{l}_\zeta} A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_\zeta^T A \right\} \vec{l}_\chi \\ &= \vec{l}_\psi^T A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_\chi - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_\zeta}{\vec{l}_\zeta^T A \vec{l}_\zeta} \vec{l}_\psi^T A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_\zeta^T A \vec{l}_\chi \\ &= \frac{x-x_o}{(\Delta r_b)^2} \left(\cos a' \frac{y-y_o}{(\Delta r_b)^2} - \sin a' \frac{z-z_o}{(\Delta r_a)^2} \right) - \frac{\sin a' \frac{y-y_o}{(\Delta r_b)^2} + \cos a' \frac{z-z_o}{(\Delta r_a)^2}}{m} \left(\cos a' \frac{y-y_o}{(\Delta r_b)^2} - \sin a' \frac{z-z_o}{(\Delta r_a)^2} \right) \cdot 0 \\ &= \frac{x-x_o}{(\Delta r_b)^2} \left(\cos a' \frac{y-y_o}{(\Delta r_b)^2} - \sin a' \frac{z-z_o}{(\Delta r_a)^2} \right) \end{aligned}$$

Θα εμφανιστεί πάλι ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_o) e^{-\frac{(x-x_o)^2}{(\Delta r_b)^2}} dx_o \int_{y,z} \exp[-K(y - y_o)^2 - L(z - z_o)^2 + R(y - y_o)(z - z_o)](\dots) dy_o dz_o = 0$$

Άρα $D_{\psi\chi} = 0$

Ομοίως, $D_{\zeta\chi} = 0$

- $\vec{l}_1 = \vec{l}_\psi$
 $\vec{l}_2 = \vec{l}_\zeta$

$$\begin{aligned}
& \vec{l}_\psi^T \left\{ A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_\zeta}{\vec{l}_\zeta^T A \vec{l}_\zeta} A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_\zeta^T A \right\} \vec{l}_\zeta \\
&= \vec{l}_\psi^T A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_\zeta - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_\zeta}{\vec{l}_\zeta^T A \vec{l}_\zeta} \vec{l}_\psi^T A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_\zeta^T A \vec{l}_\zeta \\
&= \left(\cos a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} - \sin a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2} \right) \left(\sin a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} + \cos a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2} \right) \\
&\quad - \frac{\sin a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} + \cos a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2}}{m} \left(\cos a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} - \sin a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2} \right) m \\
&= 0
\end{aligned}$$

Άρα $D_{\psi\zeta} = 0$

- $\vec{l}_1 = \vec{l}_\zeta$
 $\vec{l}_2 = \vec{l}_\psi$

$$\begin{aligned}
& \vec{l}_\zeta^T \left\{ A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_\psi}{\vec{l}_\psi^T A \vec{l}_\psi} A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_\psi^T A \right\} \vec{l}_\psi \\
&= \vec{l}_\zeta^T A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_\psi - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_\psi}{\vec{l}_\psi^T A \vec{l}_\psi} \vec{l}_\zeta^T A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_\psi^T A \vec{l}_\psi \\
&= \left(\cos a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} - \sin a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2} \right) \left(\sin a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} + \cos a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2} \right) \\
&\quad - \frac{\sin a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} + \cos a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2}}{m} \left(\sin a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} + \cos a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2} \right) \frac{\sin 2a'}{2} \left(\frac{1}{(\Delta r_b)^2} - \frac{1}{(\Delta r_a)^2} \right) \\
&= \frac{\sin a' \cdot \cos a'}{m(\Delta r_a)^2(\Delta r_b)^4} (y - y_o)^2 - \frac{\sin a' \cdot \cos a'}{m(\Delta r_a)^4(\Delta r_b)^2} (z - z_o)^2 + \frac{1}{m(\Delta r_a)^2(\Delta r_b)^2} \left(\frac{\cos^2 a'}{(\Delta r_a)^2} - \frac{\sin^2 a'}{(\Delta r_b)^2} \right) (y - y_o)(z - z_o)
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \int_V \exp \left[-\frac{2(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A(\vec{r} - \vec{r}_o) - \frac{((\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_s)^2}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}}{2} \right] \vec{l}_s^T \left\{ A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s} A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_s^T A \right\} \vec{l}_\psi dV_o \\
&= \frac{\sin a' \cdot \cos a'}{m(\Delta r_a)^2 (\Delta r_b)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_o)^2}{(\Delta r_b)^2}} dx_o \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - y_o)^2 \exp[-K(y - y_o)^2 - L(z - z_o)^2 \\
&\quad + R(y - y_o)(z - z_o)] dy_o dz_o \\
&\quad - \frac{\sin a' \cdot \cos a'}{m(\Delta r_a)^4 (\Delta r_b)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_o)^2}{(\Delta r_b)^2}} dx_o \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (z - z_o)^2 \exp[-K(y - y_o)^2 \\
&\quad - L(z - z_o)^2 + R(y - y_o)(z - z_o)] dy_o dz_o \\
&\quad + \frac{1}{m(\Delta r_a)^2 (\Delta r_b)^2} \left(\frac{\cos^2 a'}{(\Delta r_a)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin^2 a'}{(\Delta r_b)^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_o)^2}{(\Delta r_b)^2}} dx_o \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - y_o)(z - z_o) \exp[-K(y - y_o)^2 \\
&\quad - L(z - z_o)^2 + R(y - y_o)(z - z_o)] dy_o dz_o = \\
&= \frac{\sin a' \cdot \cos a'}{m(\Delta r_a)^2 (\Delta r_b)^4} \left(\sqrt{2\pi} \frac{\Delta r_b}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\pi \left(\frac{1}{(\Delta r_a)^2} - \frac{\cos^2 a'}{2(\Delta r_a)^4 m} \right)}{2 \left(\frac{1}{2\Delta r_a^2 \Delta r_b^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \right) - \frac{\sin a' \cdot \cos a'}{m(\Delta r_a)^4 (\Delta r_b)^2} \left(\frac{\pi \left(\frac{1}{(\Delta r_b)^2} - \frac{\sin^2 a'}{2(\Delta r_b)^4 m} \right)}{2 \left(\frac{1}{2\Delta r_a^2 \Delta r_b^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
&\quad + \frac{1}{m(\Delta r_a)^2 (\Delta r_b)^2} \left(\frac{\cos^2 a'}{(\Delta r_a)^2} - \frac{\sin^2 a'}{(\Delta r_b)^2} \right) \frac{\pi \frac{\sin a' \cdot \cos a'}{(\Delta r_a)^2 (\Delta r_b)^2 m}}{4 \left(\frac{1}{2\Delta r_a^2 \Delta r_b^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Στα παραπάνω χρησιμοποιήθηκαν τα ολοκληρώματα I_4, I_5 και I_6 του Παραρτήματος Γ.

Άρα $D_{z\psi} = 0$.

Επομένως ο τανυστής θ είναι διαγώνιος.

- $\vec{i}_1 = \vec{i}_2 = \vec{i}_x$

$$\begin{aligned} & \vec{i}_x^T \left\{ A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A^T - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{i}_z}{\vec{i}_z^T A \vec{i}_z} A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{i}_z^T A \right\} \vec{i}_x = \\ & \vec{i}_x^T A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A^T \vec{i}_x - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{i}_z}{\vec{i}_z^T A \vec{i}_z} \vec{i}_x^T A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{i}_z^T A \vec{i}_x = \\ & \frac{(x - x_o)^2}{(\Delta r_b)^4} - \frac{\sin a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} + \cos a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2} x - x_o}{m} \frac{1}{(\Delta r_b)^2} \cdot 0 = \\ & \frac{(x - x_o)^2}{(\Delta r_b)^4} \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} & \int_V \exp \left[- \frac{2(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A(\vec{r} - \vec{r}_o) - \frac{((\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{i}_s)^2}{\vec{i}_s^T A \vec{i}_s}}{2} \right] \vec{i}_x^T \left\{ A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \right. \\ & \quad \left. - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{i}_s}{\vec{i}_s^T A \vec{i}_s} A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{i}_s^T A \right\} \vec{i}_x dV_o = \\ & \int_V \frac{(x - x_o)^2}{(\Delta r_b)^4} \exp \left[- \frac{(x - x_o)^2}{(\Delta r_b)^2} - K(y - y_o)^2 - L(z - z_o)^2 + R(y - y_o)(z - z_o) \right] dV_o = \\ & \frac{1}{(\Delta r_b)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_o)^2 e^{-\frac{(x-x_o)^2}{(\Delta r_b)^2}} dx_o \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-K(y - y_o)^2 - L(z - z_o)^2 + R(y - y_o)(z - z_o)] dy_o dz_o = \\ & \frac{1}{(\Delta r_b)^4} \left(\sqrt{2\pi} \frac{\Delta r_b (\Delta r_b)^2}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\sqrt{KL - \frac{R^2}{4}}} = \\ & \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} \Delta r_a \end{aligned}$$

Και τελικά :

$$D_{xx} = \frac{k^2 (v_o^2 + \delta_o^2) \pi^2 \Delta r_a}{4V_o \eta_o^6} \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 a'}{(\Delta r_a)^2} + \frac{\sin^2 a'}{(\Delta r_b)^2}}} \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha o}^2 \omega_{\beta o}^2 \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\alpha o}^2} \right) \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\beta o}^2} \right) \quad (23. a)$$

- $\vec{l}_1 = \vec{l}_2 = \vec{l}_\psi$

$$\begin{aligned}
& \vec{l}_\psi^T \left\{ A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_\zeta}{\vec{l}_\zeta^T A \vec{l}_\zeta} A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_\zeta^T A \right\} \vec{l}_\psi \\
&= \vec{l}_\psi^T A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_\psi - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_\zeta}{\vec{l}_\zeta^T A \vec{l}_\zeta} \vec{l}_\psi^T A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_\zeta^T A \vec{l}_\psi \\
&= \left(\cos a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} - \sin a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2} \right)^2 - \frac{\sin a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} + \cos a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2}}{m} \left(\cos a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} - \sin a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2} \right) \\
&\quad \cdot \frac{\sin 2a'}{2} \left(\frac{1}{(\Delta r_b)^2} - \frac{1}{(\Delta r_a)^2} \right) \\
&= \frac{\cos^2 a'}{m(\Delta r_b)^4 (\Delta r_a)^2} (y - y_o)^2 + \frac{\sin^2 a'}{m(\Delta r_a)^4 (\Delta r_b)^2} (z - z_o)^2 - \frac{\cos a' \cdot \sin a'}{m(\Delta r_a)^2 (\Delta r_b)^2} \left(\frac{1}{(\Delta r_b)^2} + \frac{1}{(\Delta r_a)^2} \right) (y - y_o)(z - z_o)
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
& \int_V \exp \left[- \frac{2(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A(\vec{r} - \vec{r}_o) - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s}}{2} \right] \vec{l}_\psi^T \left\{ A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T A \vec{l}_s} A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_s^T A \right\} \vec{l}_\psi dV_o \\
&= \frac{\cos^2 a'}{m(\Delta r_b)^4 (\Delta r_a)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_o)^2}{(\Delta r_b)^2}} dx_o \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - y_o)^2 \exp \left[-\frac{(x - x_o)^2}{(\Delta r_b)^2} - K(y - y_o)^2 - L(z - z_o)^2 \right. \\
&\quad \left. + R(y - y_o)(z - z_o) \right] dy_o dz_o \\
&\quad + \frac{\sin^2 a'}{m(\Delta r_a)^4 (\Delta r_b)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_o)^2}{(\Delta r_b)^2}} dx_o \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (z - z_o)^2 \exp[-K(y - y_o)^2 \\
&\quad - L(z - z_o)^2 + R(y - y_o)(z - z_o)] dy_o dz_o \\
&\quad - \frac{\cos a' \cdot \sin a'}{m(\Delta r_a)^2 (\Delta r_b)^2} \left(\frac{1}{(\Delta r_b)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(\Delta r_a)^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_o)^2}{(\Delta r_b)^2}} dx_o \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - y_o)(z - z_o) \exp[-K(y - y_o)^2 \\
&\quad - L(z - z_o)^2 + R(y - y_o)(z - z_o)] dy_o dz_o \\
&= \frac{(2\pi)^{3/2}}{4m\Delta r_a}
\end{aligned}$$

Άρα:

$$D_{\psi\psi} = \frac{k^2(v_o^2 + \delta_o^2)\pi^2}{4V_o\eta_o^6} \frac{1}{\Delta r_a \left(\frac{\cos^2 a'}{(\Delta r_a)^2} + \frac{\sin^2 a'}{(\Delta r_b)^2} \right)^{3/2}} \sum_{\alpha,\beta} \omega_{\alpha o}^2 \omega_{\beta o}^2 \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\alpha o}^2} \right) \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\beta o}^2} \right) \quad (23. b)$$

- $\vec{l}_1 = \vec{l}_2 = \vec{l}_z$

$$\begin{aligned} & \vec{l}_z^T \left\{ A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A^T - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_z}{\vec{l}_z^T A \vec{l}_z} A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_z^T A \right\} \vec{l}_z \\ &= \vec{l}_z^T A(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A^T \vec{l}_z - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T A \vec{l}_z}{\vec{l}_z^T A \vec{l}_z} \vec{l}_z^T A(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_z^T A \vec{l}_z \\ &= \left(\sin a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} + \cos a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2} \right)^2 - \frac{\sin a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} + \cos a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2}}{m} \left(\sin a' \frac{y - y_o}{(\Delta r_b)^2} + \cos a' \frac{z - z_o}{(\Delta r_a)^2} \right) m \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άρα $D_{z\zeta} = 0$

Βρήκαμε επομένως ότι ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\chi\psi\zeta$ ο ζητούμενος τανυστής θα είναι:

$$\langle\langle \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}} \rangle\rangle = D \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ όπου:}$$

$$D = \frac{\left(\frac{\pi\omega}{c} \right)^2 (v_o^2 + \delta_o^2)}{4V_o\eta_o^4} \sum_{\alpha,\beta} \omega_{\alpha o}^2 \omega_{\beta o}^2 \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\alpha o}^2} \right) \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\beta o}^2} \right) \quad (24. a)$$

$$d_1 = \frac{\Delta r_a}{\sqrt{\frac{\cos^2 a'}{(\Delta r_a)^2} + \frac{\sin^2 a'}{(\Delta r_b)^2}}} \quad (24. b)$$

$$d_2 = \frac{1}{\Delta r_a \left(\frac{\cos^2 a'}{(\Delta r_a)^2} + \frac{\sin^2 a'}{(\Delta r_b)^2} \right)^{3/2}} \quad (24. c)$$

Τα αποτελέσματα αυτά, όταν το ελλειψοειδές εκφυλίζεται σε σφαίρα, συμφωνούν απόλυτα με τα αποτελέσματα στο Παράρτημα Β. Ο υπολογισμός των παραγώγων που εμφανίζονται στην έκφραση του D γίνεται στο Παράρτημα Δ.

3.a.2 Εξίσωση Fokker-Planck στην περίπτωση ελλειπτικών blobs

Καθώς το κύμα διαδίδεται μέσα στο ανομοιογενές πλάσμα, μεταβάλλεται το κυματοδιάνυσμα κατά μέτρο και κατεύθυνση. Άρα μεταβάλλεται το διάνυσμα \vec{X} το οποίο έχουμε εισαγάγει παραπάνω. Έστω $f(X, l)$ η συνάρτηση κατανομής του. Αυτή θεωρούμε ότι ικανοποιεί μία εξίσωση διάχυσης που έχει την εξής μορφή:

$$\frac{\partial f}{\partial l} + \left[\frac{1}{\eta_0} \vec{l}_k + \frac{1}{\eta_0^2 \sin \theta} (\vec{l}_T \vec{l}_z) \frac{\partial \eta_0}{\partial \theta} \right] \cdot \nabla_{\vec{r}}^T f = \frac{\partial}{\partial} \left(\vec{D}(\vec{X}) \frac{\partial f}{\partial \vec{X}} \right) \quad (25)$$

Παίρνοντας χωρική μέση τιμή σε όγκο V_0 στην παραπάνω εξίσωση, απαλείφεται η εξάρτηση της f από το \vec{r} , και η $\bar{f} = \frac{1}{V_0} \int f dV$ είναι συνάρτηση μόνο του \vec{k} . Αυτή είναι η εξίσωση που μας χρειάζεται για τον προσδιορισμό της εκτροπής της δέσμης, και είναι η παρακάτω:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial l} = \text{div}_{\vec{k}} (\langle \langle \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}}(\vec{X}) \text{grad}_{\vec{k}} f \rangle \rangle) \cong \text{div}_{\vec{k}} (\langle \langle \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}}(\vec{X}) \rangle \rangle \text{grad}_{\vec{k}} \bar{f}) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial l} = \left(D d_1 \frac{\partial^2}{\partial k_\chi^2} + D d_2 \frac{\partial^2}{\partial k_\psi^2} \right) \bar{f} \quad (26)$$

όπου τα D, d_1, d_2 είναι αυτά των σχέσεων (24.a), (24.b) και (24.c) παραπάνω.

Η βασική υπόθεση από την οποία προέκυψε η παραπάνω εξίσωση είναι ότι το μέγεθος των blobs είναι μικρό σε σχέση με τις διαστάσεις του προς μελέτη πλάσματος.

Η εξίσωση (26) είναι μια εξίσωση Fokker-Planck για την κατανομή του κυματοδιανύσματος \vec{k} της ακτίνας. Μένει να ορίσουμε αρχική συνθήκη και να την επιλύσουμε.

Έστω $\vec{k}_o = (k_{\chi_o}, k_{\psi_o}, k_{z_o})^T$ το αρχικό κυματοδιάνυσμα ως προς το σύστημα $\chi\psi z$. Δεν έχουμε διασπορά ως προς τον άξονα z , άρα θα είναι πάντα $k_z = k_{z_o}$. Μας ενδιαφέρει επομένως η κατανομή των k_χ, k_ψ . Αρχικά έχουμε:

$$\bar{f}(\vec{k}, l = 0) = \delta(k_\chi - k_{\chi_o}) \delta(k_\psi - k_{\psi_o}) \quad (27)$$

Η συνάρτηση Green της (26) (λύση της (26) με αρχική συνθήκη την (27)) είναι:

$$\bar{f}(\vec{k}, l) = \frac{1}{4\pi D l \sqrt{d_1 d_2}} \exp \left[-\frac{(k_x - k_{x0})^2}{4D d_1 l} - \frac{(k_y - k_{y0})^2}{4D d_2 l} \right] \quad (28)$$

Θα εκφράσουμε τώρα αυτή την συνάρτηση κατανομής ως προς το σύστημα αναφοράς xyz.

$$\begin{aligned} \Delta \vec{k} &= (k_x - k_{x0}, k_y - k_{y0}, 0) \Big|_{\text{στο } x\psi z} \\ &= \left(\underbrace{k_x - k_{x0}}_{\Delta k_x}, \underbrace{\cos a' (k_y - k_{y0})}_{\Delta k_y}, \underbrace{-\sin a' (k_y - k_{y0})}_{\Delta k_z} \right) \Big|_{\text{στο } xyz} \end{aligned}$$

Θα εκφράσουμε τη μεταβολή κάθετα και παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο (z άξονας).

$$\Delta k_z = \Delta k_{\parallel}$$

$$\Delta k_x = \Delta k_{\perp} \cos \varphi_B$$

$$\Delta k_y = \Delta k_{\perp} \sin \varphi_B$$

με $\Delta k_{\perp} = \sqrt{(\Delta k_x)^2 + (\Delta k_y)^2}$ και φ_B η γωνία που σχηματίζει η προβολή του $\Delta \vec{k}$ στο xy επίπεδο με τον άξονα x. Επομένως:

$$(k_x - k_{x0})^2 = (\Delta k_x)^2 = (\Delta k_{\perp} \cos \varphi_B)^2$$

$$(k_y - k_{y0})^2 = (\Delta k_y)^2 + (\Delta k_z)^2 = (\Delta k_{\perp} \sin \varphi_B)^2 + (\Delta k_{\parallel})^2$$

Αντικαθιστώντας στην (28) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &\bar{f}(\Delta k_{\parallel}, \Delta k_{\perp}, \varphi_B, l) \\ &= \frac{1}{4\pi D l} \left(\frac{\cos^2 a'}{(\Delta r_a)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin^2 a'}{(\Delta r_b)^2} \right) \exp \left[-\frac{\sqrt{\frac{\cos^2 a'}{(\Delta r_a)^2} + \frac{\sin^2 a'}{(\Delta r_b)^2}}}{\Delta r_a} (\Delta k_{\perp})^2 (\cos \varphi_B)^2 + \Delta r_a \left(\frac{\cos^2 a'}{(\Delta r_a)^2} + \frac{\sin^2 a'}{(\Delta r_b)^2} \right)^{3/2} ((\Delta k_{\perp} \sin \varphi_B)^2 + (\Delta k_{\parallel})^2) \right] \quad (29) \end{aligned}$$

Η γωνία α' (βλ. Σχήμα 1) είναι η γωνία ανάμεσα στο μαγνητικό πεδίο και το διάνυσμα \vec{i}_s . Άρα:

$$a' = (\vec{i}_z, \vec{i}_s) = \cos^{-1}(\vec{i}_z^T \cdot \vec{i}_s) = \cos^{-1} \left(\frac{\frac{1}{\eta_o} \cos\theta + \frac{1}{\eta_o^2} \frac{\partial \eta_o}{\partial \theta} \sin\theta}{\sqrt{\frac{1}{\eta_o^2} + \frac{1}{\eta_o^4} \left(\frac{\partial \eta_o}{\partial \theta}\right)^2}} \right) \Rightarrow$$

$$a' = \cos^{-1} \left(\frac{\eta_o \cos\theta + \frac{\partial \eta_o}{\partial \theta} \sin\theta}{\sqrt{\eta_o^2 + \left(\frac{\partial \eta_o}{\partial \theta}\right)^2}} \right) \quad (30)$$

Υπολογίζουμε τώρα τις μέσες τετραγωνικές τιμές των Δk_x , Δk_y , Δk_z σε μήκος διανυόμενο από την ακτίνα ίσο με L_o .

$$(\Delta k_x^{rms})^2 = \frac{1}{L_o} \int_0^{L_o} dl \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta k_{||} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta k_{\perp} \int_0^{2\pi} d\varphi_B (\Delta k_x)^2 \bar{f}(\Delta k_{||}, \Delta k_{\perp}, \varphi_B, l) =$$

$$= \frac{1}{L_o} \int_0^{L_o} dl \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta k_{||} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta k_{\perp} \int_0^{2\pi} d\varphi_B (\Delta k_{\perp})^2 (\cos\varphi_B)^2 \bar{f}(\Delta k_{||}, \Delta k_{\perp}, \varphi_B, l)$$

$$= \frac{1}{4\pi D \sqrt{d_1 d_2} L_o} \int_0^{L_o} dl \int_0^{2\pi} d\varphi_B I(\varphi_B, l)$$

με:

$$I(\varphi_B, l) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta k_{||} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta k_{\perp} \frac{1}{l} (\Delta k_{\perp})^2 (\cos\varphi_B)^2 \exp \left[-\frac{\frac{(\Delta k_{\perp} \cos\varphi_B)^2}{d_1} + \frac{(\Delta k_{\perp} \sin\varphi_B)^2}{d_2} + (\Delta k_{||})^2}{4Dl} \right]$$

$$= \frac{1}{l} (\cos\varphi_B)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\Delta k_{||})^2}{4Dd_2l}} d\Delta k_{||} \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta k_{\perp})^2 e^{-\frac{(\cos^2\varphi_B + \frac{\sin^2\varphi_B}{d_2})(\Delta k_{\perp})^2}{4Dl}} d\Delta k_{\perp}$$

$$= \frac{1}{l} (\cos\varphi_B)^2 (\sqrt{2\pi} \sqrt{2Dd_2l}) \left(\sqrt{2\pi} \left(\frac{2Dl}{\frac{\cos^2\varphi_B}{d_1} + \frac{\sin^2\varphi_B}{d_2}} \right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$= \frac{2\pi (\cos\varphi_B)^2}{l} (2Dl)^2 \frac{\sqrt{d_2}}{\left(\frac{\cos^2\varphi_B}{d_1} + \frac{\sin^2\varphi_B}{d_2} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{L_o} dl I(\varphi_B, l) = 4\pi D^2 L_o^2 (\cos\varphi_B)^2 \frac{\sqrt{d_2}}{\left(\frac{\cos^2\varphi_B}{d_1} + \frac{\sin^2\varphi_B}{d_2} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Άρα:

$$(\Delta k_x^{rms})^2 = \frac{DL_o}{\sqrt{d_1}} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos\varphi_B)^2}{\left(\frac{\cos^2\varphi_B}{d_1} + \frac{\sin^2\varphi_B}{d_2}\right)^{3/2}} d\varphi_B \quad (31.a)$$

Ομοίως:

$$(\Delta k_y^{rms})^2 = \frac{DL_o}{\sqrt{d_1}} \int_0^{2\pi} \frac{(\sin\varphi_B)^2}{\left(\frac{\cos^2\varphi_B}{d_1} + \frac{\sin^2\varphi_B}{d_2}\right)^{3/2}} d\varphi_B \quad (31.b)$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} (\Delta k_z^{rms})^2 &= \frac{1}{L_o} \int_0^{L_o} dl \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta k_{||} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta k_{\perp} \int_0^{2\pi} d\varphi_B (\Delta k_z)^2 \bar{f}(\Delta k_{||}, \Delta k_{\perp}, \varphi_B, l) = \\ &= \frac{1}{L_o} \int_0^{L_o} dl \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta k_{||} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta k_{\perp} \int_0^{2\pi} d\varphi_B (\Delta k_{||})^2 \bar{f}(\Delta k_{||}, \Delta k_{\perp}, \varphi_B, l) \\ &= \frac{1}{4\pi D \sqrt{d_1 d_2} L_o} \int_0^{L_o} dl \int_0^{2\pi} d\varphi_B I'(\varphi_B, l) \end{aligned}$$

με:

$$\begin{aligned} I'(\varphi_B, l) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta k_{||} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta k_{\perp} \frac{1}{l} (\Delta k_{||})^2 \exp \left[-\frac{\frac{(\Delta k_{\perp} \cos\varphi_B)^2}{d_1} + \frac{(\Delta k_{\perp} \sin\varphi_B)^2}{d_2} + (\Delta k_{||})^2}{4Dl} \right] \\ &= \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta k_{||})^2 e^{-\frac{(\Delta k_{||})^2}{4Dd_2l}} d\Delta k_{||} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(\frac{\cos^2\varphi_B}{d_1} + \frac{\sin^2\varphi_B}{d_2}\right)(\Delta k_{\perp})^2}{4Dl}} d\Delta k_{\perp} \\ &= \frac{1}{l} \left(\sqrt{2\pi} \sqrt{2Dd_2l} \right)^3 \left(\sqrt{2\pi} \left(\frac{2Dl}{\frac{\cos^2\varphi_B}{d_1} + \frac{\sin^2\varphi_B}{d_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{2\pi}{l} (2Dl)^2 \frac{d_2^{3/2}}{\left(\frac{\cos^2\varphi_B}{d_1} + \frac{\sin^2\varphi_B}{d_2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &\Rightarrow \int_0^{L_o} dl I'(\varphi_B, l) = 4\pi D^2 L_o^2 \frac{d_2^{3/2}}{\left(\frac{\cos^2\varphi_B}{d_1} + \frac{\sin^2\varphi_B}{d_2}\right)^{1/2}} \end{aligned}$$

Άρα:

$$(\Delta k_z^{rms})^2 = \frac{DL_o d_2}{\sqrt{d_1}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{\cos^2\varphi_B}{d_1} + \frac{\sin^2\varphi_B}{d_2}\right)^{1/2}} d\varphi_B \quad (31.c)$$

3.β Μελέτη της εκτροπής της δέσμης παρουσία κυλινδρικών blobs

3.β.1 Υπολογισμός του τανυστή διάχυσης στην περίπτωση κυλινδρικών blobs

Αφού, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τα blobs έχουν σχήμα επιμηκυμένο κατά τον άξονα του μαγνητικού πεδίου (άξονας z), μπορούμε να τα παραστήσουμε με κύλινδρο με άξονα συμμετρίας τον z . Θεωρούμε τώρα ότι η πυκνότητά τους είναι ομογενής κατά τον άξονα z σε μήκος L , ενώ στο xy επίπεδο 'πέφτει' πάλι με τη μορφή κανονικής κατανομής καθώς απομακρυνόμαστε από τον άξονα, και έχει ενεργή ακτίνα R . Θεωρούμε επομένως μία διαταραχή στην πυκνότητα των σωματιδίων του είδους a , λόγω του blob στη θέση \vec{r}_o , της μορφής:

$$\delta n_a(\vec{r}; \vec{r}_o) = v n_{ao} \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' (\vec{r} - \vec{r}_o)}{2R^2} \right] \text{rect} \left(\frac{z - z_o}{L} \right) \quad (32)$$

Όπου η v είναι αδιάστατη τυχαία μεταβλητή όπως στην περίπτωση των ελλειπτικών blobs,

$$I' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \text{rect} \left(\frac{z}{L} \right) = \begin{cases} 1, & -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

Αν θεωρήσουμε πως η αλληλεπίδραση των blobs με την ακτίνα γίνεται στο κυρίως σώμα του κυλίνδρου και όχι στα άκρα, μπορούμε να αγνοήσουμε το φαινόμενο των άκρων – όπου, λόγω της χρήσης τετραγωνικού παλμού για την παράσταση του σχήματος του blob, έχουμε απειρισμό της παραγώγου. Ούτως ή άλλως, σε μία πιο ρεαλιστική περιγραφή της κατανομής της πυκνότητας θα είχε πολύ πιο ομαλή μετάβαση στο μηδέν, αλλά επειδή η περιοχή αυτή θα είναι πάλι πολύ μικρή, υπάρχει πολύ μικρή πιθανότητα να αλληλεπιδράσει με τη δέσμη. Με αυτή την υπόθεση, το gradient της δn_a κατά προσέγγιση υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{r}} \delta n_a(\vec{r}; \vec{r}_o) &= \frac{\partial \delta n_a}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \delta n_a}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \delta n_a}{\partial z} \hat{z} \\ &= \left(-v n_{ao} \frac{x - x_o}{R^2} \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' (\vec{r} - \vec{r}_o)}{2R^2} \right] \text{rect} \left(\frac{z - z_o}{L} \right) \right) \hat{x} \\ &\quad + \left(-v n_{ao} \frac{y - y_o}{R^2} \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' (\vec{r} - \vec{r}_o)}{2R^2} \right] \text{rect} \left(\frac{z - z_o}{L} \right) \right) \hat{y} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\nabla_{\vec{r}} \delta n_a(\vec{r}; \vec{r}_o) \approx -\frac{v n_{ao}}{R^2} \text{rect} \left(\frac{z - z_o}{L} \right) \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' (\vec{r} - \vec{r}_o)}{2R^2} \right] I' (\vec{r} - \vec{r}_o) \quad (33)$$

Άρα για τα γινόμενα τα οποία μας χρειάζονται στον υπολογισμό του πίνακα διάχυσης έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{r}} \delta n_a(\vec{r}; \vec{r}_0) \nabla_{\vec{r}}^T \delta n_\beta(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma; \vec{r}_0) = \\ \frac{v^2 n_{a0} n_{\beta 0}}{R^4} \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^T I' (\vec{r} - \vec{r}_0) + (\vec{r} + \vec{l}_s \sigma - \vec{r}_0)^T I' (\vec{r} + \vec{l}_s \sigma - \vec{r}_0)}{2R^2} \right] \\ \cdot \text{rect} \left(\frac{z - z_0}{L} \right) \text{rect} \left(\frac{z + \text{cosa}' \sigma - z_0}{L} \right) I' (\vec{r} - \vec{r}_0) (\vec{r} + \vec{l}_s \sigma - \vec{r}_0)^T I'^T \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{r}} \delta n_a(\vec{r}; \vec{r}_0) \nabla_{\vec{r}}^T \delta n_\beta(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma; \vec{r}_0) = \\ \frac{v^2 n_{a0} n_{\beta 0}}{R^4} \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^T I' (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2R^2} \right] \exp \left[-\frac{\sigma^2 \vec{l}_s^T I' \vec{l}_s + 2\sigma (\vec{r} - \vec{r}_0)^T I' \vec{l}_s}{2R^2} \right] \\ \cdot \text{rect} \left(\frac{z - z_0}{L} \right) \text{rect} \left(\frac{z + \text{cosa}' \sigma - z_0}{L} \right) \{ I' (\vec{r} - \vec{r}_0) (\vec{r} - \vec{r}_0)^T I' + \sigma I' (\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{l}_s^T I' \} \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στον τύπο του $\vec{D}_{\vec{k}\vec{k}}$ είναι ένα ολοκλήρωμα σε πεπερασμένο μήκος (στο μήκος του blob) μιας συνάρτησης της μορφής $e^{-k_1 x^2 - k_2 y^2}$, το οποίο -όπως είναι γνωστό (Θεώρημα Liouville)- δεν υπολογίζεται αναλυτικά. Αφενός επειδή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μήκος στο οποίο παίρνουμε συσχέτιση των gradients είναι μικρό σε σχέση με το μήκος L του blob, και, αφετέρου επειδή μας ενδιαφέρουν αποτελέσματα σε κλειστή μορφή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ολοκλήρωση εκτείνεται από μείον άπειρο έως συν άπειρο.

Υπολογίζουμε επομένως το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla_{\vec{r}} \delta n_a(\vec{r}; \vec{r}_0) \nabla_{\vec{r}}^T \delta n_\beta(\vec{r} + \vec{l}_s \sigma; \vec{r}_0) d\sigma \approx \\ \frac{v^2 n_{a0} n_{\beta 0}}{R^4} \text{rect} \left(\frac{z - z_0}{L} \right) \exp \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^T I' (\vec{r} - \vec{r}_0)}{2R^2} \right] \\ \cdot \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{\sigma^2 \vec{l}_s^T I' \vec{l}_s + 2\sigma (\vec{r} - \vec{r}_0)^T I' \vec{l}_s}{2R^2} \right] d\sigma}_{I_1} I' (\vec{r} - \vec{r}_0) (\vec{r} - \vec{r}_0)^T I' \right. \\ \left. + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \exp \left[-\frac{\sigma^2 \vec{l}_s^T I' \vec{l}_s + 2\sigma (\vec{r} - \vec{r}_0)^T I' \vec{l}_s}{2R^2} \right] d\sigma}_{I_2} I' (\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{l}_s^T I' \right) \quad (34) \end{aligned}$$

όπου τα ολοκληρώματα I_1 και I_2 υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{\sigma^2 \vec{l}_s^T I' \vec{l}_s + 2\sigma (\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_s}{2R^2} \right] d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{\left(\sigma + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s} \right)^2}{2 \frac{1}{\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s} R^2} \right] \exp \left[\frac{((\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_s)^2}{2R^2 (\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s)} \right] d\sigma \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s}} R \cdot \exp \left[\frac{((\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_s)^2}{2R^2 (\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \cdot \exp \left[-\frac{\sigma^2 \vec{l}_s^T I' \vec{l}_s + 2\sigma (\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_s}{2R^2} \right] d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \cdot \exp \left[-\frac{\left(\sigma + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s} \right)^2}{2 \frac{1}{\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s} R^2} \right] \exp \left[\frac{((\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_s)^2}{2R^2 (\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s)} \right] d\sigma \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s}} R \cdot \left(-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s} \right) \exp \left[\frac{((\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_s)^2}{2R^2 (\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s)} \right]
\end{aligned}$$

και με αντικατάσταση στη σχέση (18), που είναι ο τύπος για τον υπολογισμό του πίνακα διάχυσης, και κρατώντας μόνο το τμήμα του πίνακα που έχει να κάνει με την αυτοσυσχέτιση του \vec{k} , παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\langle \langle \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}} \rangle \rangle &= \frac{k^2 (v_o^2 + \delta_o^2)}{4R^3 V_o \eta_o^6} \sqrt{\frac{2\pi}{\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s}} \Sigma_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha o}^2 \omega_{\beta o}^2 \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\alpha o}^2} \right) \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\beta o}^2} \right) \int_{V_o} \text{rect} \left(\frac{z-z_o}{L} \right) \left\{ I'(\vec{r} - \vec{r}_o) (\vec{r} - \right. \\
&\left. \vec{r}_o)^T I' - \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s} \right) I'(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_s^T I' \right\} \exp \left[-\frac{2(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' (\vec{r} - \vec{r}_o) - \frac{((\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_s)^2}{(\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s)}}{2R^2} \right] dV \quad (35)
\end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε τις προβολές $\langle \vec{i}_1^T \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}} \vec{i}_2 \rangle$ του τανυστή $\vec{D}_{\vec{k}\vec{k}}$ στο σύστημα $\chi\psi\zeta$ της δέσμης, και για το λόγο αυτό θα εκφράσουμε τα διανύσματα που εμφανίζονται στην εξίσωση (35) στο σύστημα αυτό.

$$I'(\vec{r} - \vec{r}_o) = \begin{bmatrix} (x - x_o) \\ (y - y_o) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{άρα στο σύστημα } \chi,\psi,\zeta: \quad I'(\vec{r} - \vec{r}_o) = \begin{bmatrix} x - x_o \\ \cos a' (y - y_o) \\ \sin a' (y - y_o) \end{bmatrix}$$

$$I'\vec{i}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin a' \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{άρα στο σύστημα } \chi,\psi,\zeta: \quad I'\vec{i}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos a' \cdot \sin a' \\ \sin^2 a' \end{bmatrix}$$

Ακολουθεί ο υπολογισμός των προβολών:

- $\vec{i}_1 = \vec{i}_\chi$
 $\vec{i}_2 = \vec{i}_\psi$

$$\begin{aligned} & \vec{i}_\chi^T \left\{ I'(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' - \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{i}_s}{\vec{i}_s^T I' \vec{i}_s} \right) I'(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{i}_s^T I' \right\} \vec{i}_\psi \\ &= \vec{i}_\chi^T I'(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{i}_\psi - \frac{y - y_o}{\sin a'} \vec{i}_\chi^T I'(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{i}_\zeta^T I' \vec{i}_\psi \\ &= \cos a' (x - x_o)(y - y_o) - \frac{y - y_o}{\sin a'} (x - x_o) \cos a' \sin a' = 0 \end{aligned}$$

Άρα: $D_{\chi\psi} = 0$

- $\vec{i}_1 = \vec{i}_\psi$
 $\vec{i}_2 = \vec{i}_\chi$

$$\begin{aligned} & \vec{i}_\psi^T \left\{ I'(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' - \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{i}_s}{\vec{i}_s^T I' \vec{i}_s} \right) I'(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{i}_s^T I' \right\} \vec{i}_\chi \\ &= \vec{i}_\psi^T I'(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{i}_\chi - \frac{y - y_o}{\sin a'} \vec{i}_\psi^T I'(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{i}_\zeta^T I' \vec{i}_\chi \\ &= \cos a' (x - x_o)(y - y_o) - \frac{y - y_o}{\sin a'} (y - y_o) \cos a' \cdot 0 = \cos a' (x - x_o)(y - y_o) \end{aligned}$$

Θα εμφανιστεί επομένως ολοκλήρωμα της μορφής:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos a'(x - x_0)(y - y_0) \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{R^2} - \frac{(y - y_0)^2}{2R^2} \right] dx_0 dy_0 = 0$$

Άρα: $D_{\psi\chi} = 0$

- $\vec{i}_1 = \vec{i}_\chi$
 $\vec{i}_2 = \vec{i}_\zeta$

$$\begin{aligned} & \vec{i}_\chi^T \left\{ I'(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0)^T I' - \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^T I' \vec{i}_s}{\vec{i}_s^T I' \vec{i}_s} \right) I'(\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{i}_s^T I' \right\} \vec{i}_\zeta \\ &= \vec{i}_\chi^T I'(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0)^T I' \vec{i}_\zeta - \frac{y - y_0}{\sin a'} \vec{i}_\chi^T I'(\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{i}_\zeta^T I' \vec{i}_\zeta \\ &= \sin a'(x - x_0)(y - y_0) - \frac{y - y_0}{\sin a'} (x - x_0)(\sin a')^2 = 0 \end{aligned}$$

Άρα: $D_{\chi\zeta} = 0$

- $\vec{i}_1 = \vec{i}_\zeta$
 $\vec{i}_2 = \vec{i}_\chi$

$$\begin{aligned} & \vec{i}_\zeta^T \left\{ I'(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0)^T I' - \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^T I' \vec{i}_s}{\vec{i}_s^T I' \vec{i}_s} \right) I'(\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{i}_s^T I' \right\} \vec{i}_\chi \\ &= \vec{i}_\zeta^T I'(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0)^T I' \vec{i}_\chi - \frac{y - y_0}{\sin a'} \vec{i}_\zeta^T I'(\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{i}_\zeta^T I' \vec{i}_\chi \\ &= \sin a'(x - x_0)(y - y_0) - \frac{y - y_0}{\sin a'} \sin a'(y - y_0) \cdot 0 = \sin a'(x - x_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

Θα εμφανιστεί επομένως ολοκλήρωμα της μορφής:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin a'(x - x_0)(y - y_0) \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{R^2} - \frac{(y - y_0)^2}{2R^2} \right] dx_0 dy_0 = 0$$

Άρα: $D_{\zeta\chi} = 0$

- $\vec{l}_1 = \vec{l}_\psi$
 $\vec{l}_2 = \vec{l}_\zeta$

$$\begin{aligned}
& \vec{l}_\psi^T \left\{ I'(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' - \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s} \right) I'(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_s^T I' \right\} \vec{l}_\zeta \\
&= \vec{l}_\psi^T I'(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_\zeta - \frac{y - y_o}{\sin a'} \vec{l}_\psi^T I'(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_\zeta^T I' \vec{l}_\zeta \\
&= \sin a' \cos a' (y - y_o)^2 - \frac{y - y_o}{\sin a'} (y - y_o) \cos a' (\sin a')^2 = 0
\end{aligned}$$

Άρα: $D_{\psi\zeta} = 0$

- $\vec{l}_1 = \vec{l}_\zeta$
 $\vec{l}_2 = \vec{l}_\psi$

$$\begin{aligned}
& \vec{l}_\zeta^T \left\{ I'(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' - \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s} \right) I'(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_s^T I' \right\} \vec{l}_\psi \\
&= \vec{l}_\zeta^T I'(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_\psi - \frac{y - y_o}{\sin a'} \vec{l}_\zeta^T I'(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_\psi^T I' \vec{l}_\psi \\
&= \sin a' \cos a' (y - y_o)^2 - \frac{y - y_o}{\sin a'} (y - y_o) \sin a' \cos a' \sin a' = 0
\end{aligned}$$

Άρα: $D_{\zeta\psi} = 0$

- $\vec{l}_1 = \vec{l}_2 = \vec{l}_x$

$$\begin{aligned}
& \vec{l}_x^T \left\{ I'(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' - \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s} \right) I'(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_s^T I' \right\} \vec{l}_x \\
&= \vec{l}_x^T I'(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_x - \frac{y - y_o}{\sin a'} \vec{l}_x^T I'(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_x^T I' \vec{l}_x \\
&= (x - x_o)^2 - \frac{y - y_o}{\sin a'} (x - x_o) \cdot 0 \\
&= (x - x_o)^2
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
& \int_{V_o} \text{rect}\left(\frac{z-z_o}{L}\right) \vec{i}_x^T \left\{ I'(\vec{r}-\vec{r}_o)(\vec{r}-\vec{r}_o)^T I' \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{(\vec{r}-\vec{r}_o)^T I' \vec{i}_s}{\vec{i}_s^T I' \vec{i}_s} \right) I'(\vec{r}-\vec{r}_o) \vec{i}_s^T I' \right\} \exp \left[- \frac{2(\vec{r}-\vec{r}_o)^T I'(\vec{r}-\vec{r}_o) - \frac{((\vec{r}-\vec{r}_o)^T I' \vec{i}_s)^2}{(\vec{i}_s^T I' \vec{i}_s)}}{2R^2} \right] \vec{i}_x dV \\
& = \int_{L_o} \text{rect}\left(\frac{z-z_o}{L}\right) dz_o \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_o)^2 \exp \left[- \frac{(x-x_o)^2}{R^2} - \frac{(y-y_o)^2}{2R^2} \right] dx_o dy_o \\
& = L \left(\sqrt{2\pi} \frac{R}{\sqrt{2}} \frac{R^2}{2} \right) (\sqrt{2\pi} R) = \frac{\pi R^4 L}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Και τελικά:

$$D_{xx} = \frac{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (v_o^2 + \delta_o^2) RL \sqrt{\pi}}{4\eta_o^4 L_o R_o^2 |\sin a'|} \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha o}^2 \omega_{\beta o}^2 \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\alpha o}^2} \right) \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\beta o}^2} \right) \quad (36)$$

- $\vec{i}_1 = \vec{i}_2 = \vec{i}_\psi$

$$\begin{aligned}
& \vec{i}_\psi^T \left\{ I'(\vec{r}-\vec{r}_o)(\vec{r}-\vec{r}_o)^T I' - \left(\frac{(\vec{r}-\vec{r}_o)^T I' \vec{i}_s}{\vec{i}_s^T I' \vec{i}_s} \right) I'(\vec{r}-\vec{r}_o) \vec{i}_s^T I' \right\} \vec{i}_\psi \\
& = \vec{i}_\psi^T I'(\vec{r}-\vec{r}_o)(\vec{r}-\vec{r}_o)^T I' \vec{i}_\psi - \frac{y-y_o}{\sin a'} \vec{i}_\psi^T I'(\vec{r}-\vec{r}_o) \vec{i}_\zeta^T I' \vec{i}_\psi \\
& = (\cos a')^2 (y-y_o)^2 - \frac{y-y_o}{\sin a'} \cos a' (y-y_o) \cos a' \sin a' = 0
\end{aligned}$$

Άρα $D_{\psi\psi} = 0$

- $\vec{l}_1 = \vec{l}_2 = \vec{l}_z$

$$\begin{aligned}
& \vec{l}_z^T \left\{ I'(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' - \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_s}{\vec{l}_s^T I' \vec{l}_s} \right) I'(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_s^T I' \right\} \vec{l}_z \\
&= \vec{l}_z^T I'(\vec{r} - \vec{r}_o)(\vec{r} - \vec{r}_o)^T I' \vec{l}_z - \frac{y - y_o}{\sin a'} \vec{l}_z^T I'(\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{l}_z^T I' \vec{l}_z \\
&= (\sin a')^2 (y - y_o)^2 - \frac{y - y_o}{\sin a'} \sin a' (y - y_o) (\sin a')^2 = 0
\end{aligned}$$

Άρα $D_{\zeta\zeta} = 0$.

3.β.2 Εξίσωση Fokker-Planck στην περίπτωση κυλινδρικών blobs

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι το κυματοδιάνυσμα θα αλλάζει μόνο κατά την κατεύθυνση χ . Η Fokker-Planck (26) τώρα γίνεται μονοδιάστατη, αφού μόνο κατά μία κατεύθυνση μπορούμε να έχουμε αλλαγή του κυματοδιανύσματος. Η μορφή που παίρνει η εξίσωση είναι η εξής:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial l} = D_{\chi\chi} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_\chi^2} \quad (37)$$

Η λύση της με αρχική συνθήκη $\bar{f}(k_\chi; l = 0) = \delta(k_\chi - k_{\chi o})$ είναι:

$$\bar{f}(\vec{k}, l) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_{\chi\chi} l}} \exp \left[-\frac{(k_\chi - k_{\chi o})^2}{4D_{\chi\chi} l} \right] \quad (38)$$

Παράρτημα

Παράρτημα Α

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial k_x} &= \frac{\partial}{\partial k_x} \left(\arccos \left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{i}_z}{k} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial k_x} \left(\arccos \left(\frac{k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - f^2(k_x)}} f'(k_x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}} \left(-\frac{2k_z k_x}{2\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}^3} \right) \\ &= \frac{k_z k_x \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}^3} = \frac{k_z k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \frac{1}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \\ &= \frac{k^2 \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi}{k \sin \theta} \frac{1}{k^2} = \frac{\cos \theta \cdot \cos \varphi}{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial k_y} &= \frac{\partial}{\partial k_y} \left(\arccos \left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{i}_z}{k} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial k_y} \left(\arccos \left(\frac{k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - f^2(k_y)}} f'(k_y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}} \left(-\frac{2k_z k_y}{2\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}^3} \right) \\ &= \frac{k_z k_y \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}^3} = \frac{k_z k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \frac{1}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \\ &= \frac{k^2 \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi}{k \sin \theta} \frac{1}{k^2} = \frac{\cos \theta \cdot \sin \varphi}{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial k_z} &= \frac{\partial}{\partial k_z} \left(\arccos \left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{i}_z}{k} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial k_z} \left(\arccos \left(\frac{k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \right) \right) = -\frac{1}{\sqrt{1 - f^2(k_z)}} f'(k_z) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}} \left(\frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} - k_z \frac{k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right) \\
&= -\frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} - k_z \frac{k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)} = -\frac{k}{k \sin \theta} \frac{k - \frac{k_z^2}{k}}{k^2} \\
&= -\frac{k^2 - k_z^2}{k^3 \sin \theta} = -\frac{k^2 - k^2 \cos^2 \theta}{k^3 \sin \theta} = -\frac{\sin \theta}{k}
\end{aligned}$$

Παράρτημα Β

Ακολουθεί ο υπολογισμός του τανυστή $\vec{D}_{\vec{k}\vec{k}}$ και των προβολών του, για την ειδική περίπτωση σφαιρικών blobs.

Τα blobs γίνονται σφαιρικά αν πάρω $\Delta r_a = \Delta r_b = \Delta r$ («μέση» ακτίνα της σφαίρας πλέον),

οπότε $A = \frac{1}{(\Delta r)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Τότε η (22) παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$\langle\langle \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}} \rangle\rangle =$$

$$\frac{k^2(v_o^2 + \delta_o^2)}{4V_o\eta_o^6(\Delta r)^3} \sqrt{2\pi} \sum_{\alpha,\beta} \omega_{\alpha o}^2 \omega_{\beta o}^2 \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\alpha o}^2} \right) \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\beta o}^2} \right) \int_{V_o} \exp \left[-\frac{2|\vec{r}-\vec{r}_o|^2 - |(\vec{r}-\vec{r}_o)^T \cdot \vec{i}_s|^2}{2(\Delta r)^2} \right] \{ (\vec{r} - \vec{r}_o) (\vec{r} - \vec{r}_o)^T - ((\vec{r} - \vec{r}_o)^T \cdot \vec{i}_s) (\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{i}_s^T \} dV \quad (\mathbf{B.1})$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τις προβολές του τανυστή αυτού στους άξονες του συστήματος συντεταγμένων $\chi\psi\zeta$, δηλαδή τα $\langle\langle \vec{i}_1^T \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}} \vec{i}_2 \rangle\rangle$ με $\vec{i}_1, \vec{i}_2 = \vec{i}_\chi$ ή \vec{i}_ψ ή \vec{i}_ζ .

- $\vec{i}_1 = \vec{i}_\chi$
 $\vec{i}_2 = \vec{i}_\psi$

$$\begin{aligned} & \vec{i}_\chi^T \{ (\vec{r} - \vec{r}_o) (\vec{r} - \vec{r}_o)^T - ((\vec{r} - \vec{r}_o)^T \cdot \vec{i}_s) (\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{i}_s^T \} \vec{i}_\psi \\ &= \vec{i}_\chi^T (\vec{r} - \vec{r}_o) (\vec{r} - \vec{r}_o)^T \vec{i}_\psi - \vec{i}_\chi^T ((\vec{r} - \vec{r}_o)^T \cdot \vec{i}_s) (\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{i}_s^T \vec{i}_\psi \\ & \quad \vec{i}_s = \vec{i}_\zeta, \text{ άρα } \vec{i}_s^T \vec{i}_\psi = 0 \\ & \quad = (\chi - \chi_o) (\psi - \psi_o) \\ & \exp \left[-\frac{2|\vec{r} - \vec{r}_o|^2 - |(\vec{r} - \vec{r}_o)^T \cdot \vec{i}_s|^2}{2(\Delta r)^2} \right] \\ &= \exp \left[-\frac{2(\chi - \chi_o)^2 + 2(\psi - \psi_o)^2 + 2(\zeta - \zeta_o)^2 - (\zeta - \zeta_o)^2}{2(\Delta r)^2} \right] \\ &= \exp \left[-\frac{(\chi - \chi_o)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{(\psi - \psi_o)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{(\zeta - \zeta_o)^2}{2(\Delta r)^2} \right] \end{aligned}$$

Άρα το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στην (B.1) γίνεται:

$$\int_{V_o} \exp \left[-\frac{2|\vec{r}-\vec{r}_o|^2 - |(\vec{r}-\vec{r}_o)^T \cdot \vec{i}_s|^2}{2(\Delta r)^2} \right] \vec{i}_\chi^T \{ (\vec{r}-\vec{r}_o)(\vec{r}-\vec{r}_o)^T - ((\vec{r}-\vec{r}_o)^T \cdot \vec{i}_s)(\vec{r}-\vec{r}_o) \vec{i}_s^T \} \vec{i}_\psi dV =$$

$$\iiint_{V_o} (\chi - \chi_o)(\psi - \psi_o) \exp \left[-\frac{(\chi - \chi_o)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{(\psi - \psi_o)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{(\zeta - \zeta_o)^2}{2(\Delta r)^2} \right] dV =$$

$$\underbrace{\int_{\chi_o=-\infty}^{+\infty} (\chi - \chi_o) \exp \left[-\frac{(\chi - \chi_o)^2}{(\Delta r)^2} \right] d\chi_o}_{E[\chi - \chi_o] = 0} \int_{\psi_o=-\infty}^{+\infty} (\psi - \psi_o) \exp \left[-\frac{(\psi - \psi_o)^2}{(\Delta r)^2} \right] d\psi_o \int_{\zeta_o=-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(\zeta - \zeta_o)^2}{2(\Delta r)^2} \right] d\zeta_o = 0$$

$$\text{Άρα } D_{\chi\psi} \equiv \langle \langle \vec{i}_\chi^T \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}} \vec{i}_\psi \rangle \rangle = 0$$

$$\text{Ομοίως, } D_{\psi\chi} = D_{\chi\zeta} = D_{\zeta\chi} = D_{\psi\zeta} = D_{\zeta\psi} = 0.$$

Άρα ο τανυστής της εξίσωσης (B.1) θα είναι διαγώνιος σε αυτό το σύστημα. Μένει να υπολογίσουμε τα διαγώνια στοιχεία του.

- $\vec{i}_1 = \vec{i}_\chi$
 $\vec{i}_2 = \vec{i}_\chi$

$$\vec{i}_\chi^T \{ (\vec{r}-\vec{r}_o)(\vec{r}-\vec{r}_o)^T - ((\vec{r}-\vec{r}_o)^T \cdot \vec{i}_s)(\vec{r}-\vec{r}_o) \vec{i}_s^T \} \vec{i}_\chi$$

$$= \vec{i}_\chi^T (\vec{r}-\vec{r}_o)(\vec{r}-\vec{r}_o)^T \vec{i}_\chi - \vec{i}_\chi^T ((\vec{r}-\vec{r}_o)^T \cdot \vec{i}_s)(\vec{r}-\vec{r}_o) \vec{i}_s^T \vec{i}_\chi$$

$$\vec{i}_s = \vec{i}_\zeta, \text{ άρα } \vec{i}_s^T \vec{i}_\chi = 0$$

$$= (\chi - \chi_o)^2$$

Άρα:

$$\int_{V_o} \exp \left[-\frac{2|\vec{r}-\vec{r}_o|^2 - |(\vec{r}-\vec{r}_o)^T \cdot \vec{i}_s|^2}{2(\Delta r)^2} \right] \vec{i}_\chi^T \{ (\vec{r}-\vec{r}_o)(\vec{r}-\vec{r}_o)^T - ((\vec{r}-\vec{r}_o)^T \cdot \vec{i}_s)(\vec{r}-\vec{r}_o) \vec{i}_s^T \} \vec{i}_\chi dV$$

$$= \iiint_{V_o} (\chi - \chi_o)^2 \exp \left[-\frac{(\chi - \chi_o)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{(\psi - \psi_o)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{(\zeta - \zeta_o)^2}{2(\Delta r)^2} \right] dV$$

$$= \int_{\chi_o=-\infty}^{+\infty} (\chi - \chi_o)^2 \exp \left[-\frac{(\chi - \chi_o)^2}{(\Delta r)^2} \right] d\chi_o \int_{\psi_o=-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(\psi - \psi_o)^2}{(\Delta r)^2} \right] d\psi_o \int_{\zeta_o=-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(\zeta - \zeta_o)^2}{2(\Delta r)^2} \right] d\zeta_o$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sqrt{2\pi} \frac{\Delta r}{\sqrt{2}} \left(\frac{\Delta r}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) \left(\sqrt{2\pi} \frac{\Delta r}{\sqrt{2}} \right) (\sqrt{2\pi} \Delta r) \\
&= (\Delta r)^5 \frac{\sqrt{2\pi}^3}{4}
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$D_{\chi\chi} \equiv \langle \langle \vec{i}_\chi^T \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}} \vec{i}_\chi \rangle \rangle = \frac{k^2(v_o^2 + \delta_o^2)}{4V_o\eta_o^6} (\pi\Delta r)^2 \sum_{\alpha,\beta} \omega_{\alpha o}^2 \omega_{\beta o}^2 \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\alpha o}^2} \right) \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\beta o}^2} \right) \quad (\mathbf{B.2})$$

Ομοίως, $D_{\psi\psi} = D_{\chi\chi}$

- $\vec{i}_1 = \vec{i}_\zeta$
 $\vec{i}_2 = \vec{i}_\zeta$

$$\vec{i}_\zeta^T \{ (\vec{r} - \vec{r}_o) (\vec{r} - \vec{r}_o)^T - ((\vec{r} - \vec{r}_o)^T \cdot \vec{i}_s) (\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{i}_s^T \} \vec{i}_\zeta \stackrel{i_s = i_\zeta}{=} =$$

$$\vec{i}_\zeta^T (\vec{r} - \vec{r}_o) (\vec{r} - \vec{r}_o)^T \vec{i}_\zeta - \vec{i}_\zeta^T ((\vec{r} - \vec{r}_o)^T \cdot \vec{i}_\zeta) (\vec{r} - \vec{r}_o) \vec{i}_\zeta^T = (\zeta - \zeta_o)^2 - (\zeta - \zeta_o)^2 = 0$$

Άρα $D_{\zeta\zeta} = 0$

Έτσι τελικά ο τανυστής της εξίσωσης (B.1) εκφρασμένος στο χψζ σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\langle \langle \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}} \rangle \rangle = D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ με } D = \frac{k^2(v_o^2 + \delta_o^2)}{4V_o\eta_o^6} (\pi\Delta r)^2 \sum_{\alpha,\beta} \omega_{\alpha o}^2 \omega_{\beta o}^2 \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\alpha o}^2} \right) \left(\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{\beta o}^2} \right) \quad (\mathbf{B.3})$$

Όλα τα μεγέθη στη (B.3) μπορούν να θεωρηθούν γνωστά. Τις παραγώγους τις υπολογίζουμε στο Παράρτημα Δ.

Παράρτημα Γ

Στο παράρτημα αυτό θα υπολογίσουμε κάποια χρήσιμα ολοκληρώματα που εμφανίζονται, όταν προσπαθούμε να βρούμε τον $\langle \langle \vec{D}_{\vec{k}\vec{k}} \rangle \rangle$.

Αν $a, b > 0$ και $ab > \frac{c^2}{4}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{z=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2 - bz^2 + cyz} dydz = \int_{z=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(y - \frac{c}{2a}z\right)^2 - bz^2 + \frac{c^2}{4a}z^2} dydz \\ &= \int_{z=-\infty}^{+\infty} e^{-bz^2 + \frac{c^2}{4a}z^2} \left(\int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(y - \frac{c}{2a}z\right)^2} dy \right) dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{z=-\infty}^{+\infty} e^{-\left(b - \frac{c^2}{4a}\right)z^2} dz \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\left(b - \frac{c^2}{4a}\right)}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab - \frac{c^2}{4}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{z=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} ze^{-ay^2 - bz^2 + cyz} dydz = \int_{z=-\infty}^{+\infty} ze^{-\left(b - \frac{c^2}{4a}\right)z^2} \left(\int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(y - \frac{c}{2a}z\right)^2} dy \right) dz \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{z=-\infty}^{+\infty} ze^{-\left(b - \frac{c^2}{4a}\right)z^2} dz = 0 \end{aligned}$$

Ομοίως:

$$I_3 = \int_{z=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} ye^{-ay^2 - bz^2 + cyz} dydz = 0$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{z=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-ay^2-bz^2+cyz} dydz \\
&= \int_{z=-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-bz^2+\frac{c^2}{4a}z^2} \left(\int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-a(y-\frac{c}{2a}z)^2} dy \right) dz \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{z=-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-(b-\frac{c^2}{4a})z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2(b-\frac{c^2}{4a})}} \frac{1}{2(b-\frac{c^2}{4a})} \\
&= \frac{\pi a}{2\left(ab-\frac{c^2}{4}\right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Ομοίως:

$$I_5 = \int_{z=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-ay^2-bz^2+cyz} dydz = \frac{\pi b}{2\left(ab-\frac{c^2}{4}\right)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_{z=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} zye^{-ay^2-bz^2+cyz} dydz \\
&= \int_{z=-\infty}^{+\infty} ze^{-(b-\frac{c^2}{4a})z^2} \left(\int_{y=-\infty}^{+\infty} ye^{-a(y-\frac{c}{2a}z)^2} dy \right) dz \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{c}{2a} \int_{z=-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-(b-\frac{c^2}{4a})z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{c}{2a} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2(b-\frac{c^2}{4a})}} \frac{1}{2(b-\frac{c^2}{4a})} \\
&= \frac{\pi c}{4\left(ab-\frac{c^2}{4}\right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Παράρτημα Δ

Η έκφραση των Åstrom και Allis για τη γωνία θ μεταξύ του μαγνητικού πεδίου και του κυματοδιανύσματος \vec{k} είναι (όπως μπορούμε να δούμε στο [Stix]) :

$$\tan\theta = \frac{P(\eta_o^2 - L)(\eta_o^2 - R)}{(LR - S\eta_o^2)(\eta_o^2 - P)} \quad (\Delta.1)$$

όπου:

$$P = 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2}, \quad R = 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega(\omega + \omega_{ca})}, \quad L = 1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega(\omega - \omega_{ca})}$$

$$\text{και } S = \frac{R+L}{2}$$

όπου ω_{pa} , ω_{ca} η συχνότητα πλάσματος και η κυκλοτρονική συχνότητα των σωματιδίων του είδους a , αντίστοιχα.

Με παραγώγιση της (Δ.1) ως προς ω_{pa}^2 , παίρνουμε:

$$\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \omega_{pa}^2} = \frac{\eta_o^2}{2P\{\eta_o^4(2S^2 - PS - RL) + LR(2\eta_o^2(P - S) + LR - PS)\}} \left\{ \begin{array}{l} 2\eta_o^6(PS' - P'S) \\ + 2\eta_o^4[(LR + 2S^2)P' - P(LR)' - P^2S'] \\ + 2\eta_o^2(P^2(LR)' - 3P'SLR) \\ + P(\eta_o^2 - P)(L'R^2 + L^2R') + 2L^2R^2P' \end{array} \right\} \quad (\Delta.2)$$

όπου:

$$P' = \frac{dP}{d\omega_{pa}^2} = -\frac{1}{\omega}, \quad L' = \frac{dL}{d\omega_{pa}^2} = \frac{-1}{\omega(\omega - \omega_{ca})}, \quad R' = \frac{dR}{d\omega_{pa}^2} = \frac{-1}{\omega(\omega + \omega_{ca})}, \quad S' = \frac{dS}{d\omega_{pa}^2} = \frac{-1}{\omega^2 - \omega_{ca}^2}$$

$$\text{και } (LR)' = \frac{d(LR)}{d\omega_{pa}^2} = L'R + LR'$$

Παραγωγίζοντας την (Δ.1), ως προς θ όμως αυτή την φορά, παίρνουμε:

$$\frac{\partial \eta_o^2}{\partial \theta} = \frac{2\eta_o^2(\eta_o^2 - L)(\eta_o^2 - R)(\eta_o^2(P - S) + LR - PS)}{(\eta_o^4(PS - 2S^2 + LR) - 2\eta_o^2(P - S)LR + PSLR - L^2R^2)\tan\theta} \quad (\Delta.3)$$

Αναφορές

- [Aym] R. Aymar, V.A. Chuyanov, M. Huguet, Y. Shimomura, ITER Joint Central Team and ITER Home Teams, *Nucl. Fusion* **41**, 1301 (2001)
- [Alon] J. A. Alonso, S. J. Zweben, P. Carvalho, J. L. de Pablos, E. de la Cal, C. Hidalgo, T. Klinger, B. Ph. van Milligen, R. J. Maqueda, M. A. Pedrosa, C. Silva, M. Spolaore, H. Thomsen and the TJ-II team, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **48**, B465 (2006)
- [Ber] I.B. Bernstein, *Geometric optics in space- and time-varying plasmas*, *The Physics of fluids*, Vol. 18, No. 3, 1975, p.320-324
- [Chan] S. Chandrasekhar, *Stochastic Problems in Physics and Astronomy*, *Reviews of modern Physics*, Vol. 15, No. 1, 1943
- [Hiz] K. Hizanidis, A.K. Ram, Y. Kominis, C. Tsironis, *Fokker-Planck description of the scattering of radio frequency waves at the plasma edge*, *Physics of Plasmas*, **17**, 022505 (2010)
- [Miy] K. Miyamoto, *Plasma Physics and Control Nuclear Fusion*, Springer-Verlag, Berlin, 2005
- [Stix] T.H. Stix, *Waves in plasmas*, Springer-Verlag, New York, 1992