



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΥΛΙΚΩΝ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ΑΠΟ ΚΥΨΕΛΩΤΕΣ ΔΟΜΕΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ ΣΕΡΓΙΟΥ Γ. ΣΠΥΡΑΤΟΥ

Επιβλέπων: Νικόλαος Ουζούνογλου, καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2012



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΥΛΙΚΩΝ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ΑΠΟ ΚΥΨΕΛΩΤΕΣ ΔΟΜΕΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ ΣΕΡΓΙΟΥ Γ. ΣΠΥΡΑΤΟΥ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή τη 10^η Ιουλίου 2012.

.....
Νικόλαος Ουζούνογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Δήμητρα – Θεοδώρα Κακλαμάνη
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

.....
Γεώργιος Ματσόπουλος
Επίκουρος καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2012

.....
Σέργιος Γ. Σπυράτος
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Σέργιος Γ. Σπυράτος, 2012
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής είναι να μελετηθούν φαινόμενα ανάκλασης, σκέδασης και μετάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που προσπίπτουν σε εξαγωνικό κυψελωτό πλέγμα. Μελετάται συγκεκριμένα η δυνατότητα χρήσης ενός τέτοιου πλέγματος για να θωρακίσει ηλεκτρομαγνητικά μια περιοχή.

Αρχικά, γίνεται αναφορά στους παράγοντες που προκαλούν ηλεκτρομαγνητική ρύπανση, στον τρόπο με τον οποίο συμβαίνει και στους τρόπους προστασίας από αυτήν. Κατόπιν, αναλύεται η μέθοδος της ηλεκτρομαγνητικής θωράκισης ως μέθοδος προστασίας, οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να επιτευχθεί και οι εφαρμογές της.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας επιλύεται αναλυτικά το ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα της κάθετης πρόσπτωσης ηλεκτρομαγνητικού πεδίου πάνω σε εξαγωνικό κυψελωτό πλέγμα, δηλαδή υπολογίζονται τα πεδία που δημιουργούνται, μεταδιδόμενα και ανακλώμενα, ενώ λαμβάνονται υπόψη οι περιπτώσεις το πλέγμα να είναι πεπερασμένων ή άπειρων διαστάσεων. Ακόμη, επιλύεται το ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα όταν (πρακτικά άπειρων διαστάσεων) πέτασμα κυψελωτού πλέγματος τοποθετηθεί μέσα σε μεταλλικό έλασμα, μια διάταξη που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην πράξη.

Λέξεις – κλειδιά: ηλεκτρομαγνητική ρύπανση, ιονισμός, ηλεκτρομαγνητική θωράκιση, εξαγωνικό κυψελωτό πλέγμα, ηλεκτρικό πεδίο, διάταξη άπειρων διαστάσεων, διάταξη πεπερασμένων διαστάσεων, διάταξη εντός μεταλλικής πλάκας

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to study the phenomena of reflection, scattering and propagation of electromagnetic fields that incide on a hexagonal cellular grid. It also studies the possibility to use such a grid for the electromagnetic shielding of an area.

The first part of the thesis mentions the factors which conduce to electromagnetic pollution, the way it happens and the means of protection from it. Specifically, the method of electromagnetic shielding is analyzed, as well as the ways to shield an area and its applications.

In the second part of the thesis, the electromagnetic problem of the vertical incidence of an electromagnetic field on a hexagonal cellular grid is analytically solved; the propagated and reflected fields that occur are computed, and the analysis is divided on whether the grid is of finite or infinite dimensions. Moreover, the electromagnetic problem of a (practically infinite) screen of the cellular grid placed in a metal lamina (an arrangement that can be used in practice) is solved.

Keywords: electromagnetic pollution, ionization, electromagnetic shielding, hexagonal cellular grid, finite-sized grid, infinite-sized grid, grid inside a metal lamina

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	8
ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΙΚΟΝΩΝ ΚΑΙ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	9
1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	10
1.1 Ηλεκτρομαγνητική ρύπανση	10
1.1.1 Ορισμοί – βασικές έννοιες.....	10
1.1.2 Όρια επικινδυνότητας ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.....	11
1.1.3 Κυριότερες πηγές Η/Μ ακτινοβολίας στο αστικό περιβάλλον	11
1.1.3.1 Γραμμές μεταφοράς υψηλής ενέργειας	11
1.1.3.2 Κινητή τηλεφωνία	12
1.1.4 Συνέπειες από την έκθεση στην Η/Μ ακτινοβολία	12
1.1.5 Προστασία από την Η/Μ ακτινοβολία	13
1.2 Ηλεκτρομαγνητική θωράκιση.....	14
1.2.1 Ορισμοί – βασικές έννοιες	14
1.2.2 Υλικά κατασκευής.....	14
1.2.3 Εφαρμογές.....	15
1.2.5 Αρχή λειτουργίας.....	16
1.2.6 Μαγνητική θωράκιση	16
2. ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.....	18
2.1 Προσδιορισμός του προβλήματος	18
2.2 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης – επαγόμενα ρεύματα	18
2.3 Εύρεση του πεδίου που δημιουργεί η διάταξη.....	20
2.3.1 Διάταξη άπειρων διαστάσεων	21
2.3.2 Διάταξη πεπερασμένων διαστάσεων	24
2.4 Προκύπτων πεδίο όταν η διάταξη τοποθετηθεί εντός μεταλλικής πλάκας	28
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	32
ΠΗΓΕΣ ΕΙΚΟΝΩΝ.....	33

ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΙΚΟΝΩΝ ΚΑΙ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

<i>Εικόνα 1: Όρια επικινδυνότητας ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.....</i>	<i>10</i>
<i>Εικόνα 2: Γραμμές μεταφοράς υψηλής τάσης</i>	<i>10</i>
<i>Εικόνα 3: Μαγνητική τομογραφία εγκεφάλου</i>	<i>11</i>
<i>Εικόνα 4: Κατανομή ακτινοβολίας από κεραίες κινητής τηλεφωνίας σε μια πόλη</i>	<i>11</i>
<i>Εικόνα 5: Κλωβός Faraday.....</i>	<i>13</i>
<i>Εικόνα 6: Θωρακισμένο καλώδιο</i>	<i>14</i>
<i>Εικόνα 7: Πόρτα φούρνου μικροκυμάτων</i>	<i>14</i>
<i>Εικόνα 8: «Υφανση» κουρτίνας ηλεκτρομαγνητικής προστασίας</i>	<i>14</i>
<i>Εικόνα 9: Κατανομή μαγνητικού πεδίου κατά τη μαγνητική θωράκιση.....</i>	<i>15</i>
<i>Εικόνα 10: Πλέγμα θωράκισης σε κάλυμμα κινητού τηλεφώνου.....</i>	<i>16</i>
<i>Εικόνα 11α: Το μελετώμενο εξαγωγικό πλέγμα.....</i>	<i>17</i>
<i>Εικόνα 11β: Το μελετώμενο εξαγωγικό πλέγμα (λεπτομέρεια)</i>	<i>18</i>
<i>Εικόνα 12: Το πέτασμα του κυψελωτού πλέγματος μέσα σε μεταλλική πλάκα.....</i>	<i>27</i>
<i>Εικόνα 13: Όγκος V επιφάνειας S.....</i>	<i>27</i>
<i>Εικόνα 14: Η χρησιμοποιούμενη επιφάνεια Green.....</i>	<i>28</i>
<i>Εικόνα 15: Πρόοψη διάταξης.....</i>	<i>28</i>
<i>Εικόνα 16: Οι διαστάσεις του πετάσματος.....</i>	<i>29</i>

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

1.1 ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΡΥΠΑΝΣΗ

1.1.1 Ορισμοί – βασικές έννοιες

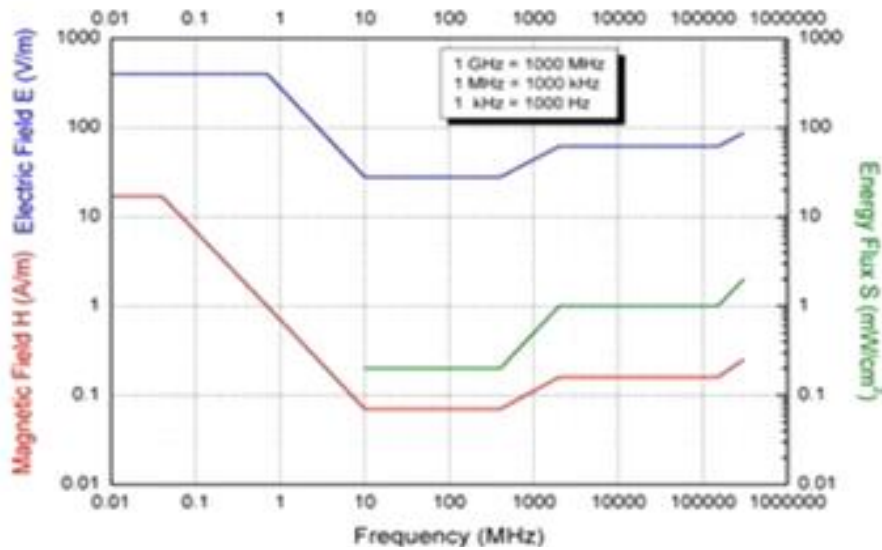
Ηλεκτρομαγνητική Ρύπανση είναι ένα είδος περιβαλλοντικού ρύπου ηλεκτρομαγνητικής φύσης. Ουσιαστικά μπορεί να προσομοιωθεί σαν ένα ηλεκτρομαγνητικό "νέφος" (Electronic Smog), που είναι αποτέλεσμα της ηλεκτρομαγνητικής επιβάρυνσης του περιβάλλοντος από τεχνολογικά προϊόντα, τα οποία είτε δεν σχεδιάστηκαν καλά είτε δεν έχουν περάσει από το σωστό ποιοτικό έλεγχο. Πηγές δημιουργίας του ηλεκτρομαγνητικού νέφους είναι οι διάφορες ηλεκτρικές ή μαγνητικές συσκευές, ανεξαρτήτως μεγέθους και χρήσης.

Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία διακρίνεται σε ιονίζουσα και σε μη-ιονίζουσα ανάλογα με τη συχνότητά της. Μη-ιονίζουσα ακτινοβολία είναι εκείνη που δεν μπορεί να προκαλέσει ιονισμό, δηλαδή να μετακινήσει ηλεκτρόνια από τους φλοιούς των ατόμων και των μορίων (να διεγείρει δηλαδή πυρήνες στοιχείων). Τέτοιου είδους ακτινοβολία είναι το ορατό φως, το υπέρυθρο φάσμα, οι πηγές μικροκυμάτων, οι πηγές ραδιοφωνικών σημάτων, οι εξαιρετικά χαμηλής συχνότητας πηγές ακτινοβολίας (π.χ. γραμμές μεταφοράς) και τα ισχυρά σταθερά ηλεκτρικά ή μαγνητικά πεδία (strong DC fields). Η μη-ιονίζουσα ακτινοβολία παράγεται από διάφορα είδη πηγών που υπάρχουν σε οικιακούς χώρους, σε χώρους εργασίας ή στο περιβάλλον, και μπορεί να είναι lasers, γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικού ρεύματος, οικιακές συσκευές, κινητά τηλέφωνα, υπολογιστές, κεραιές κινητών, ραντάρ, ραντάρ αυτοκινήτων, ραντάρ εσωτερικού χώρου, ασύρματα δίκτυα κτλ.

Το κυριότερο αποτέλεσμα της δράσης της μη-ιονίζουσας ακτινοβολίας είναι η αύξηση της θερμοκρασίας στους σωματικούς ιστούς. Αυτό συμβαίνει διότι τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία επιβάλλουν στα φορτία που βρίσκονται μέσα στο ανθρώπινο σώμα να κινηθούν. Η επιβράδυνσή τους στη συνέχεια μετατρέπεται σε θερμότητα, και έτσι, από αυτή την έκλυση θερμότητας, αλλάζει η ταχύτητα (και πιθανόν και η έκβαση) των βιοχημικών αντιδράσεων που συμβαίνουν μέσα στο σώμα.

Η ιονίζουσα ακτινοβολία, σε αντίθεση, μεταφέρει αρκετή ενέργεια ώστε να μετακινήσει ηλεκτρόνια από τους φλοιούς των ατόμων και των μορίων, με αποτέλεσμα να μπορεί να διεγείρει πυρήνες στοιχείων. Τέτοιου είδους ακτινοβολία προέρχεται από ένα μέρος του υπεριώδους φάσματος, από ακτίνες X, από ακτίνες γ και από την κοσμική ακτινοβολία.

1.1.2 Όρια επικινδυνότητας ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας



Εικόνα 1: Όρια επικινδυνότητας ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

Στο παραπάνω διάγραμμα παρουσιάζονται οι τιμές των ορίων επικινδυνότητας για την ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου (συμπεριλαμβανομένης και της ενεργειακής ροής) της Ευρωπαϊκής Ένωσης για το γενικό πληθυσμό, στην περιοχή συχνοτήτων 10 kHz – 300 GHz. Βάσει των τιμών αυτών γίνεται κατά περίπτωση ο έλεγχος της ηλεκτρομαγνητικής ρύπανσης με τη σωστή μεθοδολογία και τα κατάλληλα όργανα μέτρησης.

1.1.3 Κυριότερες πηγές H/M ακτινοβολίας στο αστικό περιβάλλον

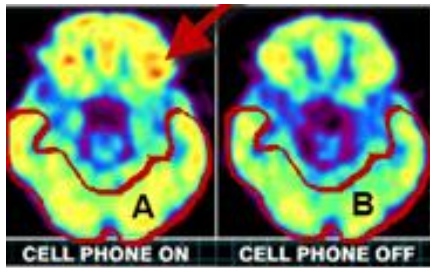
1.1.3.1 Γραμμές μεταφοράς υψηλής ενέργειας



Οι γραμμές μεταφοράς υψηλής ισχύος συχνότητας 60Hz θα μπορούσαν να επηρεάζουν τις εγκεφαλικές λειτουργίες. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από σχετικές μελέτες δείχνουν ότι η ρύπανση μπορεί να εκτείνεται σε αρκετά μεγάλη απόσταση (της τάξης των εκατοντάδων μέτρων), αλλά και μέσα στα υπέδαφος, σε σημαντικό βάθος. Ακόμη, μπορεί να διαδίδεται και μέσα ή πίσω από φυσικά εμπόδια (π.χ. κτήρια). Συνεπώς, είναι πολύ σημαντικό να ελέγχονται και να τηρούνται τα θεσμοθετημένα όρια ασφαλείας.

Εικόνα 2: Γραμμές μεταφοράς υψηλής τάσης

1.1.3.2 Κινητή τηλεφωνία

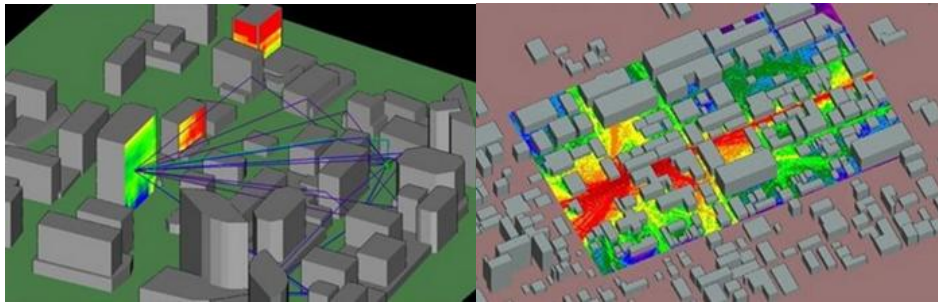


Εικόνα 3: Μαγνητική τομογραφία εγκεφάλου

Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμπει ένα κινητό τηλέφωνο κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του μπορεί να προκαλέσει μεταβολή της κατανομής της θερμοκρασίας στον ανθρώπινο εγκέφαλο. Η μεταβολή αυτή εξαρτάται από την μορφή και την ισχύ της κεραίας και την απόστασή της από το αυτί του ανθρώπου. Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι, ότι η θερμοκρασία παρουσιάζει τη μεγαλύτερη μεταβολή (0.5 -1.5°C) στην περιοχή του αυτιού αλλά και μέσα στο κεφάλι. Η συμπεριφορά αυτή επιβεβαιώνεται με μετρήσεις MRI (μαγνητικές τομογραφίες) του εγκεφάλου ενός χρήστη κινητού τηλεφώνου,

τοποθετημένου στη θέση του αυτιού του.

Σε ό,τι αφορά ένα αστικό περιβάλλον, η τοποθέτηση μίας ή περισσότερων κεραιών κινητής τηλεφωνίας δίνει ένα «χάρτη» περιοχών όπου η ακτινοβολία είναι από μηδαμινή (μπλε) μέχρι μέγιστη (κόκκινη). Στην αριστερή φωτογραφία κάτω παρουσιάζεται ένας τέτοιος χάρτης αν υπάρχει μία μόνο κεραία και στη δεξιά αν οι κεραιές είναι περισσότερες.



Εικόνα 4: Κατανομή ακτινοβολίας από κεραιές κινητής τηλεφωνίας σε μια πόλη

1.1.4 Συνέπειες από την έκθεση στην Η/Μ ακτινοβολία

Σύμφωνα με έρευνες που έχουν διαξαχθεί, προκύπτει ότι μπορούν να προκληθούν βλάβες από την μακροχρόνια έκθεση, ακόμη και σε χαμηλά επίπεδα ακτινοβολιών. Συγκεκριμένα, αυξάνεται ο κίνδυνος εμφάνισης καρκίνου, νευρικών διαταραχών και διάσπασης των 24ωρων βιολογικών ρυθμών. Ακόμη, φαίνεται ικανή να επηρεάσει τους αναπτυσσόμενους οργανισμούς.

Το 2007, διεθνής ομάδα επιστημόνων συνόλησε τα αποτελέσματα των μέχρι σήμερα ερευνών για τις επιπτώσεις των τεχνητών ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Η έκθεση τους Bioinitiative Report, κινητοποίησε πολλούς φορείς και έδωσε το έναυσμα σε κυβερνήσεις να μειώσουν τα όρια έκθεσης στις ακτινοβολίες. Τα αποτελέσματα της έκθεσης δείχνουν ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μπορεί να προκαλέσει μια σειρά διαταραχών σε διαδικασίες σύνθεσης ή διάσπασης απαραίτητων για τον οργανισμό ουσιών, το ανοσοποιητικό σύστημα. Ακόμη, μπορεί να ευθύνεται για εμφάνιση ασθενειών όπως καρκίνου, λευχαιμίας, Αλτσχάιμερ, υπογονιμότητας, ακόμα και υποβάθμισης των νοητικών λειτουργιών και κατάθλιψης και ανεξήγητων συμπτωμάτων, όπως πονοκέφαλοι, ναυτίες, προβλήματα όρασης, ταχυκαρδία, αλλεργικές αντιδράσεις κτλ. Ως πιο ευάλωτες ομάδες αναφέρονται τα παιδιά και οι έγκυοι. Τέλος, η ηλεκτρομαγνητική ρύπανση πιθανόν συσχετίζεται με την ανάπτυξη του νευρικού συστήματος και άρα με διάφορα προβλήματα νόησης και συμπεριφοράς (έλλειψη συγκέντρωσης, υπερκινητικότητα, αυτισμός κτλ).

1.1.5 Προστασία από την Η/Μ ακτινοβολία

Υπάρχουν δύο μέθοδοι προστασίας από ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με υλικά:

1. Μέσω απορρόφησης, δηλαδή χρησιμοποιώντας ένα απορροφητικό υλικό για να μετατραπεί η προσπίπτουσα ακτινοβολία σε θερμότητα ή και άλλου είδους ενέργεια (ωφέλιμη ή μη)
2. Μέσω ανακλάσεως, δηλαδή χρησιμοποιώντας ένα ανακλαστικό υλικό για να ανακλαστεί προς μία ή περισσότερες διευθύνσεις η προσπίπτουσα σε αυτό ακτινοβολία μίας ή περισσότερων συχνοτήτων.

Και οι δυο μέθοδοι βασίζονται σε φυσικά υλικά, σύνθετα υλικά και μεταϋλικά. Η απόδοση τους εξαρτάται από τον τρόπο κατασκευής τους, τη γεωμετρία τους, τις ηλεκτρομαγνητικές τους ιδιότητες, καθώς και από τη συχνότητα, την πόλωση, την κατανομή και την ισχύ της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Ανάλογα με το είδος τους και τη μεθοδολογία που χρησιμοποιείται, τα χρησιμοποιούμενα υλικά μπορούν να εντοιχιστούν, να επιστρωθούν σε επιφάνειες, να γίνουν ελάσματα ή πλέγματα κτλ. Συνεπώς, υπάρχουν σε διάφορες μορφές ανάλογα με το είδος και τον βαθμό προστασίας που ζητείται.

1.2 ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΘΩΡΑΚΙΣΗ

1.2.1 Ορισμοί – βασικές έννοιες

Με τον όρο ηλεκτρομαγνητική θωράκιση αναφερόμαστε στη μείωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε ένα χώρο, εμποδίζοντας το πεδίο με «ασπίδες» κατασκευασμένα από αγωγίμα ή μαγνητικά υλικά. Πολύ συχνά εφαρμόζεται σε περιβλήματα και σε καλώδια, για να απομονώσει ηλεκτρικές συσκευές από το περιβάλλον τους. Ακόμη, μπορεί να επιτευχθεί και θωράκιση από ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία της περιοχής των ραδιοσυχνοτήτων, και η μέθοδος ονομάζεται RF θωράκιση.



Εικόνα 5: Κλωβός Faraday

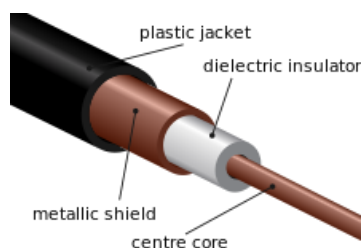
Η θωράκιση μπορεί να μειώσει τη σύζευξη των ραδιοκυμάτων, των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων και των ηλεκτροστατικών πεδίων. Μια πολύ κοινή διάταξη που μπλοκάρει ηλεκτροστατικά πεδία είναι ο κλωβός Faraday. Το ποσοστό της μείωσης του πεδίου που δημιουργεί μια τέτοια διάταξη εξαρτάται από το υλικό κατασκευής της, το πάχος της, τον όγκο του χώρου που θωρακίζεται, τη συχνότητα του πεδίου και το μέγεθος, το σχήμα και τον προσανατολισμό τυχόν ανοιγμάτων στη διάταξη.

1.2.2 Υλικά κατασκευής

Τα υλικά που χρησιμοποιούνται συνήθως για την ηλεκτρομαγνητική θωράκιση περιλαμβάνουν πλάκες μετάλλου, μεταλλικά πλέγματα και μεταλλικούς αφρούς. Οποιοσδήποτε οπές στο πλέγμα ή στην ασπίδα πρέπει να είναι σημαντικά μικρότερα από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας που κρατιέται έξω, δηλαδή το περίβλημα θα πρέπει να προσεγγίζει αποτελεσματικά μια ενιαία, αρραγή αγωγίμη επιφάνεια.

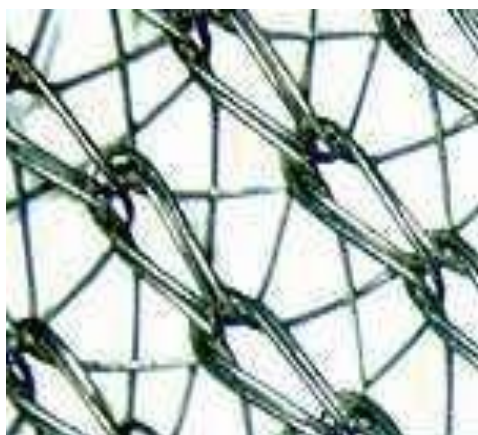
Μια άλλη μέθοδος που χρησιμοποιείται συχνά, ιδίως για ηλεκτρονικές συσκευές μέσα σε πλαστικά περιβλήματα, είναι η κάλυψη του εσωτερικού του περιβλήματος με μεταλλική μελάνη ή παρόμοιο υλικό. Η μελάνη αποτελείται από ένα φέρον υλικό επενδεδυμένο με κατάλληλο μέταλλο (συνήθως χαλκό ή νικέλιο) σε μορφή πολύ μικρών σωματιδίων. Απλώνεται στο περίβλημα και όταν στεγνώσει δημιουργεί ένα συνεχές αγωγίμο στρώμα μετάλλου, που μπορεί να συνδεθεί ηλεκτρικά με το κάτω μέρος του εξοπλισμού (τον επιφάνεια έδρασή του), παρέχοντας έτσι την επιθυμητή θωράκιση.

1.2.3 Εφαρμογές



Εικόνα 6: Θωρακισμένο καλώδιο

Ακόμα, συχνή είναι η χρήση πλεγμάτων θωράκισης για να προστατευτούμε από την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το πλέγμα που τοποθετείται στις πόρτες των φούρνων μικροκυμάτων. Στην ουσία, η οθόνη θωράκισης που τοποθετείται είναι το τελείωμα ενός κλωβού Faraday που σχηματίζεται από το μεταλλικό περίβλημα του φούρνου. Οι διαστάσεις του πλέγματος είναι τέτοιες ώστε να εμποδίζεται η διαφυγή μικροκυματικών ακτονοβολιών (ενώ για παράδειγμα το ορατό φως μπορεί να διαφεύγει, λόγω διαφορετικού μήκους κύματος).



Εικόνα 8: «Υφανση» κουρτίνας ηλεκτρομαγνητικής προστασίας

θωράκιση μπορεί να προστατευτεί ιατρικός και εργαστηριακός εξοπλισμός από παρεμβολή σημάτων όπως AM, FM, τηλεοπτικά, ESMR, PCS, κινητής τηλεφωνίας και τηλεειδοποιητών (pagers).

Τέλος, το NATO εκμεταλλεύεται την ηλεκτρομαγνητική θωράκιση για υπολογιστές και πληκτρολόγια, ώστε να εμποδίζει την παθητική παρακολούθηση από εκπομπές πληκτρολογίων, που θα επέτρεπαν την ανίχνευση των κωδικών πρόσβασης που έχει (τα πληκτρολόγια μαζικής χρήσης δεν προσφέρουν αυτή τη δυνατότητα κατά κύριο λόγο, εξαιτίας του μεγάλου της κόστους).

Η ηλεκτρομαγνητική θωράκιση χρησιμοποιείται τόσο για τη μείωση της ηλεκτρομαγνητικής ρύπανσης όσο και για την παρεμπόδιση της διαφυγής ή εισχώρησης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου από ή προς κάποιο χώρο αντίστοιχα. Παράδειγμα χρήσης της θωράκισης είναι τα θωρακισμένα καλώδια, στα οποία ένα πλέγμα θωράκισης τοποθετείται γύρω από τον εσωτερικό πυρήνα του αγωγού. Έτσι, παρεμποδίζεται η διαφυγή οποιουδήποτε σήματος από τον αγωγό πυρήνα αλλά και στην παρείσφρηση εξωτερικών σημάτων σε αυτόν.



Εικόνα 7: Πόρτα φούρνου μικροκυμάτων

Άλλοι τρόποι με τους οποίους προστατευόμαστε από την ηλεκτρομαγνητική ακτονοβολία είναι με χρώματα ηλεκτρομαγνητικής προστασίας, δηλαδή μπογιά που περιέχει σκόνη ορυκτού γραφίτη (δημιουργώντας έτσι ουσιαστικά έναν κλωβό Faraday), κουρτίνες και κουνουπιέρες ηλεκτρομαγνητικής προστασίας, που αποτελούνται από «ύφασμα» πολύ πυκνού μεταλλικού πλέγματος, αυτοκόλλητες μεμβράνες θωράκισης και μεμβράνες κεραμοσκεπής.

Η RF θωράκιση χρησιμοποιείται επίσης για να απαγορευτεί η είσοδος σε δεδομένα αποθηκευμένα σε RFID chips που βρίσκονται ενσωματωμένα σε διάφορες συσκευές και μηχανισμούς, όπως τα βιομετρικά διαβατήρια. Ακόμα, με την RF

1.2.4 Αρχή λειτουργίας

Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία αποτελείται από συζευγμένο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Το ηλεκτρικό πεδίο ασκεί δυνάμεις στους φορτισμένους φορείς του (ηλεκτρόνια) μέσα σε έναν αγωγό. Όταν εφαρμοστεί ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια ιδανικού αγωγού, επάγει ρεύμα που προκαλεί μετατόπιση του φορτίου μέσα στον αγωγό, με τέτοια φορά που να τείνει να αναιρέσει το εφαρμοζόμενο πεδίο.

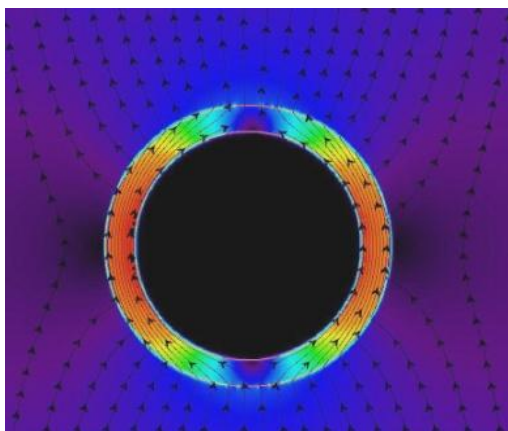
Παρόμοια, μεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία προκαλούν δινορρεύματα, τα οποία δρουν αναιρετικά στο εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο. Το αποτέλεσμα τελικά είναι ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ανακλάται από την επιφάνεια του αγωγού, οπότε τα εσωτερικά πεδία μένουν στο εσωτερικό του και τα εξωτερικά μένουν στο εξωτερικό του.

Εξαιτίας διαφόρων παραγόντων, στην πράξη η ικανότητα θωράκισης των πραγματικών ασπίδων RF θωράκισης είναι περιορισμένη. Αρχικά, λόγω της ηλεκτρικής αντίστασης των αγωγών, το πεδίο λόγω επαγωγής δεν αναιρεί πλήρως το προσπίπτον. Ακόμη, οι περισσότεροι αγωγοί εμφανίζουν φερρομαγνητική αντίδραση σε χαμηλόσυχνα μαγνητικά πεδία, οπότε αυτά δεν εξασθενούν πλήρως. Τέλος, οποιαδήποτε οπή υπάρχει στην ασπίδα αναγκάζει το ρεύμα να περάσει γύρω της, με αποτέλεσμα τα πεδία να περνούν μέσα από τις οπές χωρίς να επάγουν αντίθετα πεδία.

Στην περίπτωση υψίσυχνης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, οι παραπάνω περιορισμοί είναι ακόμα δυσκολότερο να αγνοηθούν από άποψη χρόνου. Σε αυτή την περίπτωση επίσης, η ενέργεια λόγω ακτινοβολίας, εφόσον δεν ανακλάται, απορροφάται (εκτός αν το πάχος του αγωγού είναι πολύ μικρό), οπότε σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μέσα στον αγωγό.

1.2.5 Μαγνητική θωράκιση

Ειδική περίπτωση της ηλεκτρομαγνητικής θωράκισης αποτελεί η μαγνητική θωράκιση, δηλαδή η απομόνωση κάποιου εξοπλισμού μόνον από μαγνητικά πεδία. Για στατικά ή βραδέως μεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία (κάτω των 100kHz) ο κλωβός Faraday είναι αναποτελεσματικός. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι ασπίδες πρέπει να κατασκευαστούν από υλικά μεγάλης μαγνητικής διαπερατότητας, όπως κατάλληλα κράματα μετάλλων ή υλικά με νανοκρυσταλλική δομή. Αυτά τα υλικά δε μπλοκάρουν το μαγνητικό πεδίο, όπως οι παραπάνω ασπίδες που περιγράψαμε, αλλά απορροφούν το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό

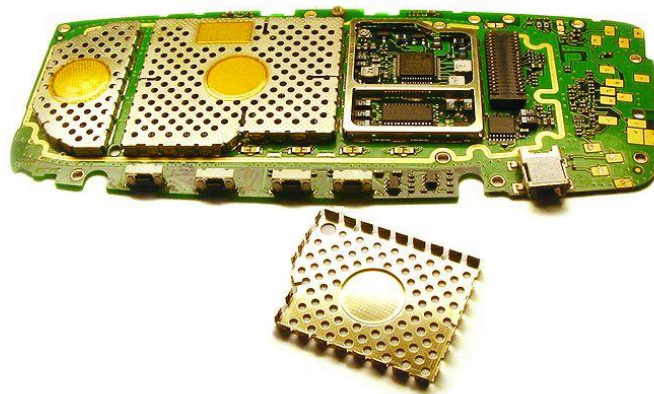


Εικόνα 9: Κατανομή μαγνητικού πεδίου κατά τη μαγνητική θωράκιση

τους, δίνοντας στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου ένα «μονοπάτι» γύρω από το θωρακισμένο χώρο. Το καλύτερο σχήμα, επομένως, για ασπίδες μαγνητικής θωράκισης είναι ένας κλειστός κάδος γύρω από το αντικείμενο που επιθυμούμε να θωρακιστεί.

Η αποτελεσματικότητα αυτών των θωρακίσεων εξαρτάται από τη μαγνητική διαπερατότητα του υλικού, η οποία γενικά μειώνεται τόσο για πολύ ασθενή μαγνητικά πεδία, όσο και για πολύ ισχυρά (κορεσμός). Για την αντιμετώπιση αυτών των περιορισμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας εναλλακτικός, «ενεργητικός» τρόπος θωράκισης, χρησιμοποιώντας ένα μαγνητικό

πεδίο δημιουργούμενο από ηλεκτρομαγνήτες, για να αντισταθμίσει το περιβάλλον πεδίο ενός χώρου. Για αυτό το σκοπό μπορούν να χρησιμοποιηθούν σωληνοειδή ή σπείρες Helmholtz. Τέλος, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και υπεραγωγία υλικά για να απομακρυνθούν τα μαγνητικά πεδία, εξαιτίας του φαινομένου Meissner (απομάκρυνση του μαγνητικού πεδίου από έναν υπεραγωγό κατά τη φάση που μεταβαίνει στην υπεραγωγική του κατάσταση).



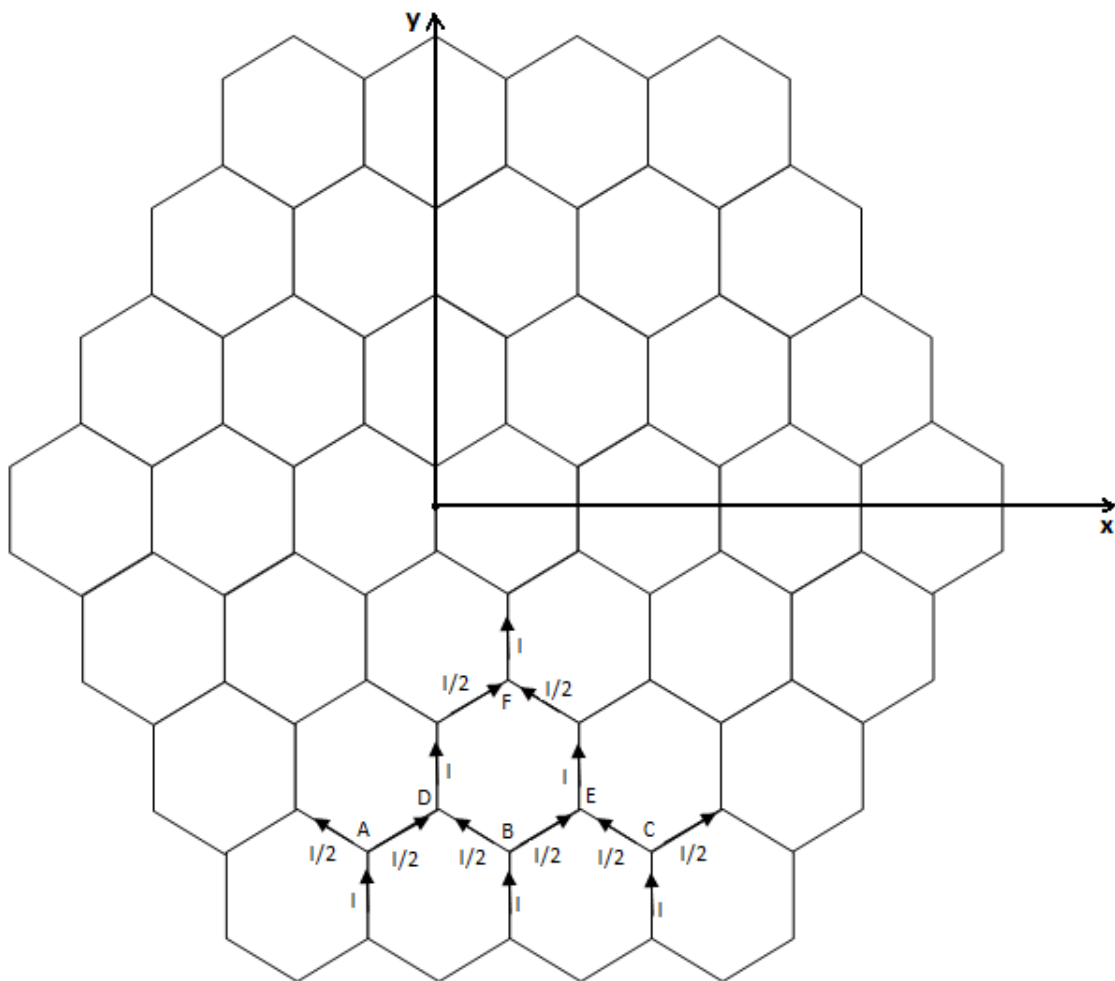
Εικόνα 10: Πλέγμα θωράκισης σε κάλυμμα κινητού τηλεφώνου

2. ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

2.1 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

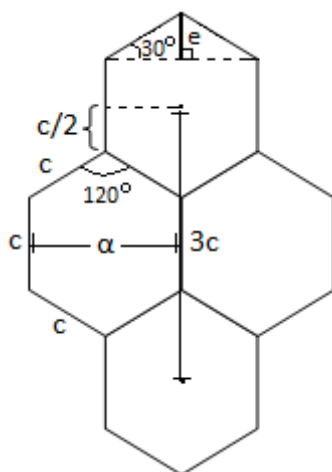
Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με φαινόμενα ανάκλασης, μετάδοσης και σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που προσπίπτουν πάνω σε εξαγωνικό πλέγμα, αποτελούμενο από μεταλλικό υλικό. Εξετάζουμε τις δυνατότητες ανάκλασης ηλεκτρομαγνητικών πεδίων από τη διάταξη αυτή, ώστε να διαπιστώσουμε κατά πόσο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για ηλεκτρομαγνητική θωράκιση.

2.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ - ΕΠΑΓΟΜΕΝΑ ΡΕΥΜΑΤΑ



Εικόνα 11α: Το μελετώμενο εξαγωνικό πλέγμα

Παραπάνω απεικονίζεται ένα τμήμα του εξαγωνικού πλέγματος. Παρατηρούμε για τα ρεύματα που επάγονται τα εξής: έστω ότι στους κάθετους κλάδους επάγεται ρεύμα τιμής I (ίδιο λόγω συμμετρίας). Τότε, μόλις συναντήσει διακλάδωση, όπως στα σημεία A, B, C, διασπάται, και συγκεκριμένα, λόγω της απόλυτης συμμετρίας του σχήματος, διασπάται σε $\frac{I}{2}$ και $\frac{I}{2}$. Άρα, οι κλάδοι που σχηματίζουν γωνία 60° με τον άξονα y διαρρέονται από ρεύμα $\frac{I}{2}$. Ακολούθως, αυτά τα ρεύματα $\frac{I}{2}$ «συναντιούνται» ξανά ανά ζεύγη στα σημεία που ενώνονται οι κλάδοι που σχηματίζουν γωνία με τον άξονα y , όπως τα σημεία D και E. Έτσι, οι κάθετοι κλάδοι που ξεκινούν από τα σημεία αυτά, διαρρέονται από ρεύμα $\frac{I}{2} + \frac{I}{2} = I$. Άρα, γενικεύοντας για όλο το πλέγμα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι κλάδοι που σχηματίζουν γωνία με τον άξονα y διαρρέονται όλοι από το ίδιο ρεύμα, το οποίο έχει τη μισή ένταση από την επίσης κοινή ένταση όλων των κλάδων που είναι παράλληλοι στον άξονα y . Παραθέτουμε επίσης μια λεπτομέρεια του πλέγματος, όπου απεικονίζονται διάφορα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης, που σχετίζονται με τη γεωμετρία του κανονικού εξαγώνου:



Εικόνα 11β: Το μελετώμενο εξαγωνικό πλέγμα (λεπτομέρεια)

Για να βρούμε μια σχέση ανάμεσα στη διάμετρο a και την πλευρά c του εξαγώνου, έχουμε:

$$\cos 30^\circ = \frac{a/2}{c} \Rightarrow \frac{a}{2} = c \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = c\sqrt{3}. \text{ Ακόμα, η απόσταση } e \text{ προκύπτει μέσω του}$$

πυθαγορείου θεωρήματος ότι είναι
$$e = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{c}{2}.$$

2.3 ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΠΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΕΙ Η ΔΙΑΤΑΞΗ

Θεωρούμε κάθετη πρόσπτωση ηλεκτρομαγνητικού κύματος με πόλωση $E//y$. Λόγω των διαιρέσεων των ρευμάτων και των προσθέσεων των επιμέρους κλάδων, όπως αυτές φαίνονται στο σχήμα, σε κάθε αγωγό παράλληλο στον άξονα των y το ρεύμα που επάγεται έχει τιμή I και σε κάθε αγωγό που σχηματίζει γωνία με τον y το ρεύμα έχει τιμή $\frac{I}{2}$. Έτσι, υπολογίζοντας τη θέση στην οποία βρίσκονται οι άξονες, το πεδίο ανάγεται στο άθροισμα δύο επιμέρους αθροισμάτων, ένα για τη συμβολή καθεμιάς από τις «άρτιες» σειρές κυψελών για κάθε πλευρά του εξαγώνου (συμπεριλαμβανομένης και της «μηδενικής», δηλαδή αυτής στην οποία βρίσκεται ο άξονας x) και ένα για τις περιττές. Η εξωτερική άθροιση γίνεται κατά μήκος της σειράς, γι' αυτό και εκτείνεται από το $-\infty$ μέχρι το $+\infty$:

$$\begin{aligned} \underline{E} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots}^{+\infty} \left\{ I \cdot \overline{\overline{G}}(\underline{r}, \underline{r}_{\underline{m}}) \cdot \hat{y} + I \cdot \overline{\overline{G}}(\underline{r}, \underline{r}_{\underline{m}} + a\hat{x}) \cdot \hat{y} + \frac{I}{2} \cdot \left[\overline{\overline{G}}\left(\underline{r}, \underline{r}_{\underline{m}} + \frac{3}{4}a\hat{x} + \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4}\right)\hat{y}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \overline{\overline{G}}\left(\underline{r}, \underline{r}_{\underline{m}} + \frac{3}{4}a\hat{x} - \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4}\right)\hat{y}\right) + \overline{\overline{G}}\left(\underline{r}, \underline{r}_{\underline{m}} + \frac{1}{4}a\hat{x} + \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4}\right)\hat{y}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \overline{\overline{G}}\left(\underline{r}, \underline{r}_{\underline{m}} + \frac{1}{4}a\hat{x} - \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4}\right)\hat{y}\right) \right] \hat{y} \right\} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots}^{+\infty} \left\{ I \cdot \overline{\overline{G}}(\underline{r}, \underline{r}'_{\underline{m}}) \cdot \hat{y} + I \cdot \overline{\overline{G}}(\underline{r}, \underline{r}'_{\underline{m}} + a\hat{x}) \cdot \hat{y} + \right. \\ \left. + \frac{I}{2} \cdot \left[\overline{\overline{G}}\left(\underline{r}, \underline{r}'_{\underline{m}} + \frac{3}{4}a\hat{x} + \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4}\right)\hat{y}\right) + \overline{\overline{G}}\left(\underline{r}, \underline{r}'_{\underline{m}} + \frac{3}{4}a\hat{x} - \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4}\right)\hat{y}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \overline{\overline{G}}\left(\underline{r}, \underline{r}'_{\underline{m}} + \frac{1}{4}a\hat{x} + \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4}\right)\hat{y}\right) + \overline{\overline{G}}\left(\underline{r}, \underline{r}'_{\underline{m}} + \frac{1}{4}a\hat{x} - \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4}\right)\hat{y}\right) \right] \hat{y} \right\} \quad (1), \end{aligned}$$

$$\text{όπου } \underline{r}_{\underline{m}} = ma \cdot \hat{x} + n\sqrt{3}a \cdot \hat{y} \quad (2) \text{ και } \underline{r}'_{\underline{m}} = \underline{r}_{\underline{m}} + \frac{a}{2}\hat{x} = \left(ma + \frac{a}{2}\right) \cdot \hat{x} + n\sqrt{3}a \cdot \hat{y} \quad (3).$$

Ακόμα, η συνάρτηση $\overline{\overline{G}}$ είναι η συνάρτηση Green του προβλήματος:

$$\overline{\overline{G}}(\underline{r}, \underline{r}') = \left(1 + k_0^{-2}\nabla\nabla\right) \frac{e^{-jk_0|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad (4).$$

Χωρίζουμε κατόπιν την ανάλυσή μας σε δυο περιπτώσεις, ανάλογα με το αν θεωρούμε ότι το πλέγμα έχει άπειρες ή πεπερασμένες διαστάσεις.

2.3.1 Διάταξη απείρων διαστάσεων

Για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση Green, έχουμε:

$$\frac{e^{-jk_0|z-z'|}}{4\pi|z-z'|} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \frac{e^{jk_z(z-z')}}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - k_0^2 + j\varepsilon} e^{jk_x(x-x') + jk_y(y-y')}, \text{ όπου}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \frac{e^{jk_z(z-z')}}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - k_0^2 + j\varepsilon} \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \begin{cases} 2\pi j \frac{e^{-jk_b(z-z')}}{-2k_b}, & z > z' \\ -2\pi j \frac{e^{jk_b(z-z')}}{2k_b}, & z < z' \end{cases} = \frac{\pi j}{k_b} e^{-jk_b|z-z'|} \text{ και}$$

$$k_b = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}.$$

Αν καταπιαστούμε με την ακριβή έκφραση $\overline{\overline{G}}(r, r''_{mn}) = \left(\overline{\overline{1}} + k_0^{-2} \nabla \nabla\right) \frac{e^{-jk_0|z-r''_{mn}|}}{4\pi|z-r''_{mn}|}$ της Green,

όπου $r''_{mn} = r_{mn} + p\hat{x} + q\hat{y} = am\hat{x} + an\sqrt{3}\hat{y} + p\hat{x} + q\hat{y} = (am+p)\hat{x} + (an\sqrt{3}+q)\hat{y}$ και

ακολουθήσουμε τη μέθοδο ολοκληρωμάτων Fourier, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0, \pm 2, \dots}^{+\infty} \overline{\overline{G}}(r, r''_{mn}) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \overline{\overline{G}}(r, r''_{mn'}) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0, \pm 2, \dots}^{+\infty} \left(\overline{\overline{1}} + k_0^{-2} \nabla \nabla\right) \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y e^{jk_x(x-x')} e^{jk_y(y-y')} \frac{\pi j e^{-j\sqrt{k_b}|z-z'|}}{\sqrt{k_b}}. \end{aligned}$$

$$\text{Όμως, } \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_x(am+p)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_x am} e^{-jk_x p} = e^{-jk_x p} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_x am} = e^{-jk_x p} \frac{a}{2\pi} \delta(k_x) \text{ και}$$

$$\sum_{n'=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_y(a\sqrt{3}n'+q)} = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_y a\sqrt{3}n'} e^{-jk_y q} = e^{-jk_y q} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_y a\sqrt{3}n'} = e^{-jk_y q} \frac{a\sqrt{3}}{2\pi} \delta(k_y), \text{ οπότε}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0, \pm 2, \dots}^{+\infty} \overline{\overline{G}}(r, r''_{mn}) = \left(\overline{\overline{1}} + k_0^{-2} \nabla \nabla\right) \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-j(k_x p + k_y q)} \frac{a^2 \sqrt{3}}{(2\pi)^2} \cdot \frac{\pi j}{\sqrt{k_b}} e^{-jk_0|z-z'|}.$$

Συγκεκριμένα, για τις 6 φορές που εμφανίζεται στις 6 συναρτήσεις Green που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε το πεδίο προερχόμενο από τις άρτιες σειρές στην εξίσωση (1), θα έχουμε κατά περίπτωση ανάλογα με την έκφραση του r''_{mn} (με τη σειρά που εμφανίζονται):

- $p = q = 0$
- $p = a, q = 0$
- $p = \frac{3}{4}a, q = \frac{3}{4}c$
- $p = \frac{3}{4}a, q = -\frac{3}{4}c$
- $p = \frac{1}{4}a, q = \frac{3}{4}c$

- $p = \frac{1}{4}a, \quad q = -\frac{3}{4}c$

Για τις περιττές σειρές του πλέγματος, λόγω του μετασχηματισμού

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots}^{+\infty} \overline{\overline{G}}(r, r_{mn}^{\prime\prime}) \stackrel{n'=\frac{n-1}{2}}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \overline{\overline{G}}(r, r_{mn}^{\prime\prime}) \quad \text{που μπορούμε να εφαρμόσουμε, τελικά}$$

καταλήγουμε σε 6 ακόμα εκφράσεις ανάλογες με τις 6 πρώτες που είδαμε παραπάνω, με τη διαφορά ότι τώρα είναι

$$\underline{r}_{mn}^{\prime\prime} = \underline{r}_{mn}^{\prime} + p\hat{x} + q\hat{y} = \underline{r}_{mn}^{\prime} + \frac{a}{2}x + p\hat{x} + q\hat{y} = \left(am + \frac{a}{2} + p\right)\hat{x} + \left(an\sqrt{3} + q\right)\hat{y}, \quad \text{άρα}$$

προκύπτει ότι είναι παντού $p' = p + \frac{a}{2}$ και $q' = q$, δηλαδή κατά περίπτωση (και με τη σειρά που εμφανίζονται):

- $p' = \frac{a}{2}, \quad q' = 0$
- $p' = \frac{3}{2}a, \quad q' = 0$
- $p' = \frac{5}{4}a, \quad q' = \frac{3}{4}c$
- $p' = \frac{5}{4}a, \quad q' = -\frac{3}{4}c$
- $p' = \frac{3}{4}a, \quad q' = \frac{3}{4}c$
- $p' = \frac{3}{4}a, \quad q' = -\frac{3}{4}c$

Επομένως, η τελική έκφραση που προκύπτει για το πεδίο είναι:

$$\underline{E} = \frac{jIa^2\sqrt{3}}{32\pi^4\sqrt{k_b}} \cdot \left(\hat{z} + k_0^{-2} \nabla \nabla \right) \cdot \left[\left[\left[1 + e^{-jk_x a} + \frac{e^{-j\left(\frac{3}{4}k_x a + \frac{3}{4}k_y c\right)}}}{2} + \frac{e^{-j\left(\frac{3}{4}k_x a - \frac{3}{4}k_y c\right)}}}{2} + \frac{e^{-j\left(\frac{1}{4}k_x a + \frac{3}{4}k_y c\right)}}}{2} + \frac{e^{-j\left(\frac{1}{4}k_x a - \frac{3}{4}k_y c\right)}}}{2} \right] + \left(e^{-jk_x \frac{a}{2}} + e^{-jk_x \frac{3a}{2}} + \frac{e^{-j\left(\frac{5}{4}k_x a + \frac{3}{4}k_y c\right)}}}{2} + \frac{e^{-j\left(\frac{5}{4}k_x a - \frac{3}{4}k_y c\right)}}}{2} + \frac{e^{-j\left(\frac{3}{4}k_x a + \frac{3}{4}k_y c\right)}}}{2} + \frac{e^{-j\left(\frac{3}{4}k_x a - \frac{3}{4}k_y c\right)}}}{2} \right) \right] \cdot e^{-jk_0|z-z'|} \cdot \hat{y} \quad (5).$$

Για περαιτέρω χρήση, θα θέσουμε

$$E_1 = \left[\left(1 + e^{-jk_x a} + \frac{e^{-j\left(\frac{3}{4}k_x a + \frac{3}{4}k_y c\right)}}{2} + \frac{e^{-j\left(\frac{3}{4}k_x a - \frac{3}{4}k_y c\right)}}{2} + \frac{e^{-j\left(\frac{1}{4}k_x a + \frac{3}{4}k_y c\right)}}{2} + \frac{e^{-j\left(\frac{1}{4}k_x a - \frac{3}{4}k_y c\right)}}{2} \right) + \left(e^{-jk_x \frac{a}{2}} + e^{-jk_x \frac{3a}{2}} + \frac{e^{-j\left(\frac{5}{4}k_x a + \frac{3}{4}k_y c\right)}}{2} + \frac{e^{-j\left(\frac{5}{4}k_x a - \frac{3}{4}k_y c\right)}}{2} + \frac{e^{-j\left(\frac{3}{4}k_x a + \frac{3}{4}k_y c\right)}}{2} + \frac{e^{-j\left(\frac{3}{4}k_x a - \frac{3}{4}k_y c\right)}}{2} \right) \right]$$

Άρα, το πεδίο σε κάθε διεύθυνση προκύπτει ως εξής:

- $E_x = \underline{E} \cdot \hat{x} = \frac{jIa^2 \sqrt{3}}{32\pi^4 \sqrt{k_b}} \cdot \left(\underline{1} + k_0^{-2} \nabla \nabla \right) \cdot E_1 \cdot e^{-jk_0 |z-z'|} \cdot \hat{y} \cdot \hat{x} = 0$
- $E_y = \underline{E} \cdot \hat{y} = \frac{jIa^2 \sqrt{3}}{32\pi^4 \sqrt{k_b}} \cdot \left(\underline{1} + k_0^{-2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot E_1 \cdot e^{-jk_0 |z-z'|} \cdot \hat{y} \cdot \hat{y} \stackrel{z > z'}{=} \frac{jIa^2 \sqrt{3}}{32\pi^4 \sqrt{k_b}} \cdot E_1 \cdot e^{-jk_0 (z-z')}$

2.3.2 Διάταξη πεπερασμένων διαστάσεων

Θεωρούμε ότι το πλέγμα έχει πεπερασμένες διαστάσεις, συγκεκριμένα ότι έχουμε να κάνουμε με ένα πλέγμα διαστάσεων $(2M+1) \times (2N)$. Σε αυτή την περίπτωση, για τη συνάρτηση Green μπορούμε για το μακρινό πεδίο να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση $\overline{\overline{G}}(\underline{r}, \underline{r}') \approx \frac{e^{-jk_0|\underline{r}|}}{4\pi|\underline{r}|} (\underline{\hat{1}} - \underline{\hat{r}}\underline{\hat{r}}) e^{jk_0 \underline{r}'\underline{\hat{r}}}$. Άρα, τοποθετώντας αυτή τη συνάρτηση Green στη σχέση (1)

που δίνει την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και αλλάζοντας τα άκρα της άθροισης, για να περιγράψουμε το πεδίο που προκύπτει αν το πλέγμα έχει πεπερασμένες διαστάσεις, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \sum_{m=-M}^M \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots}^{2N} \left\{ I \frac{e^{-jk_0|\underline{r}|}}{4\pi|\underline{r}|} (\underline{\hat{1}} - \underline{\hat{r}}\underline{\hat{r}}) e^{jk_0 r_{nm} \underline{\hat{r}}} \cdot \underline{\hat{y}} + I \frac{e^{-jk_0|\underline{r}|}}{4\pi|\underline{r}|} (\underline{\hat{1}} - \underline{\hat{r}}\underline{\hat{r}}) e^{jk_0 (r_{nm} + a\hat{x}) \underline{\hat{r}}} \cdot \underline{\hat{y}} + \right. \\ &+ \frac{I}{2} \left[\frac{e^{-jk_0|\underline{r}|}}{4\pi|\underline{r}|} (\underline{\hat{1}} - \underline{\hat{r}}\underline{\hat{r}}) e^{jk_0 \left[\frac{r_{nm}}{4} + \frac{3}{4}(a\hat{x} + c\hat{y}) \right] \underline{\hat{r}}} \cdot \underline{\hat{y}} + \frac{e^{-jk_0|\underline{r}|}}{4\pi|\underline{r}|} (\underline{\hat{1}} - \underline{\hat{r}}\underline{\hat{r}}) e^{jk_0 \left[\frac{r_{nm}}{4} + \frac{3}{4}(a\hat{x} - c\hat{y}) \right] \underline{\hat{r}}} \cdot \underline{\hat{y}} + \right. \\ &+ \left. \frac{e^{-jk_0|\underline{r}|}}{4\pi|\underline{r}|} (\underline{\hat{1}} - \underline{\hat{r}}\underline{\hat{r}}) e^{jk_0 \left[\frac{r_{nm}}{4} + \frac{1}{4}(a\hat{x} + 3c\hat{y}) \right] \underline{\hat{r}}} \cdot \underline{\hat{y}} + \frac{e^{-jk_0|\underline{r}|}}{4\pi|\underline{r}|} (\underline{\hat{1}} - \underline{\hat{r}}\underline{\hat{r}}) e^{jk_0 \left[\frac{r_{nm}}{4} + \frac{1}{4}(a\hat{x} - 3c\hat{y}) \right] \underline{\hat{r}}} \cdot \underline{\hat{y}} \right] \Big\} + \\ &+ \sum_{m=-M}^M \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots}^{2N-1} \left\{ I \frac{e^{-jk_0|\underline{r}|}}{4\pi|\underline{r}|} (\underline{\hat{1}} - \underline{\hat{r}}\underline{\hat{r}}) e^{jk_0 \left(\frac{r_{nm}}{2} + \frac{a}{2}\hat{x} \right) \underline{\hat{r}}} \cdot \underline{\hat{y}} + I \frac{e^{-jk_0|\underline{r}|}}{4\pi|\underline{r}|} (\underline{\hat{1}} - \underline{\hat{r}}\underline{\hat{r}}) e^{jk_0 \left(\frac{r_{nm}}{2} + \frac{3a}{2}\hat{x} \right) \underline{\hat{r}}} \cdot \underline{\hat{y}} + \right. \\ &+ \frac{I}{2} \left[\frac{e^{-jk_0|\underline{r}|}}{4\pi|\underline{r}|} (\underline{\hat{1}} - \underline{\hat{r}}\underline{\hat{r}}) e^{jk_0 \left[\frac{r_{nm}}{4} + \frac{1}{4}(5a\hat{x} + 3c\hat{y}) \right] \underline{\hat{r}}} \cdot \underline{\hat{y}} + \frac{e^{-jk_0|\underline{r}|}}{4\pi|\underline{r}|} (\underline{\hat{1}} - \underline{\hat{r}}\underline{\hat{r}}) e^{jk_0 \left[\frac{r_{nm}}{4} + \frac{1}{4}(5a\hat{x} - 3c\hat{y}) \right] \underline{\hat{r}}} \cdot \underline{\hat{y}} + \right. \\ &+ \left. \left. \frac{e^{-jk_0|\underline{r}|}}{4\pi|\underline{r}|} (\underline{\hat{1}} - \underline{\hat{r}}\underline{\hat{r}}) e^{jk_0 \left[\frac{r_{nm}}{4} + \frac{3}{4}(a\hat{x} + c\hat{y}) \right] \underline{\hat{r}}} \cdot \underline{\hat{y}} + \frac{e^{-jk_0|\underline{r}|}}{4\pi|\underline{r}|} (\underline{\hat{1}} - \underline{\hat{r}}\underline{\hat{r}}) e^{jk_0 \left[\frac{r_{nm}}{4} + \frac{3}{4}(a\hat{x} - c\hat{y}) \right] \underline{\hat{r}}} \cdot \underline{\hat{y}} \right] \Big\} = \\ &= I \frac{e^{-jk_0|\underline{r}|}}{4\pi|\underline{r}|} (\underline{\hat{1}} - \underline{\hat{r}}\underline{\hat{r}}) \cdot \left[\left(1 + e^{jk_0 a \hat{x} \underline{\hat{r}}} + \frac{e^{jk_0 \frac{3}{4}(a\hat{x} + c\hat{y}) \underline{\hat{r}}}}{2} + \frac{e^{jk_0 \frac{3}{4}(a\hat{x} - c\hat{y}) \underline{\hat{r}}}}{2} + \frac{e^{jk_0 \frac{1}{4}(a\hat{x} + 3c\hat{y}) \underline{\hat{r}}}}{2} + \frac{e^{jk_0 \frac{1}{4}(a\hat{x} - 3c\hat{y}) \underline{\hat{r}}}}{2} \right) \cdot \right. \\ &\cdot \sum_{m=-M}^M \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots}^{2N} e^{jk_0 r_{nm} \underline{\hat{r}}} + \left(e^{jk_0 \frac{a}{2} \hat{x} \underline{\hat{r}}} + e^{jk_0 \frac{3a}{2} \hat{x} \underline{\hat{r}}} + \frac{e^{jk_0 \frac{1}{4}(5a\hat{x} + 3c\hat{y}) \underline{\hat{r}}}}{2} + \frac{e^{jk_0 \frac{1}{4}(5a\hat{x} - 3c\hat{y}) \underline{\hat{r}}}}{2} + \frac{e^{jk_0 \frac{3}{4}(a\hat{x} + c\hat{y}) \underline{\hat{r}}}}{2} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{e^{jk_0 \frac{3}{4}(a\hat{x} - c\hat{y}) \underline{\hat{r}}}}{2} \right) \cdot \sum_{m=-M}^M \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots}^{2N-1} e^{jk_0 r_{nm} \underline{\hat{r}}} \right] \cdot \underline{\hat{y}} \quad (6). \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι είναι $\hat{x} \cdot \hat{r} = \sin \theta \cos \phi$ και $\hat{y} \cdot \hat{r} = \sin \theta \sin \phi$, επομένως, όπως προκύπτει από την έκφραση του r_{nm} από τη σχέση (2), θα είναι

$\underline{r}_{mn} \cdot \hat{r} = ma \sin \theta \cos \phi + n\sqrt{3}a \sin \theta \sin \phi$. Αν ονομάσουμε, λοιπόν, Σ_1 το πρώτο από τα διπλά αθροίσματα που υπεισέρχονται στη σχέση (6) και Σ_2 το δεύτερο, θα έχουμε:

$$\Sigma_1 = \sum_{m=-M}^M e^{jk_0ma \sin \theta \cos \phi} \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots}^{2N} e^{jk_0n\sqrt{3}a \sin \theta \sin \phi} \stackrel{n'=\frac{n}{2}}{=} \sum_{m=-M}^M e^{jk_0ma \sin \theta \cos \phi} \sum_{n'=-N}^N e^{2jk_0n'\sqrt{3}a \sin \theta \sin \phi}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του αθροίσματος γεωμετρικής προόδου, έχουμε:

$$\begin{aligned} S_M &= \sum_{m=-M}^M e^{jum} = \sum_{m=-M}^0 e^{jum} + \sum_{m=0}^M e^{jum} - e^{ju \cdot 0} = \frac{1 - e^{-ju(M+1)}}{1 - e^{-ju}} + \frac{1 - e^{ju(M+1)}}{1 - e^{ju}} - 1 = \\ &= \frac{e^{juM} + e^{-juM} - e^{ju(M+1)} - e^{-ju(M+1)}}{(1 - e^{-ju})(1 - e^{ju})} = \frac{e^{-juM} - e^{ju(M+1)}}{1 - e^{ju}} = \\ &= \frac{e^{j\frac{u}{2} \left(e^{-ju \left(M + \frac{1}{2} \right)} - e^{ju \left(M + \frac{1}{2} \right)} \right)}}{e^{j\frac{u}{2} \left(e^{-j\frac{u}{2}} - e^{j\frac{u}{2}} \right)}} = \frac{\sin \left[\left(M + \frac{1}{2} \right) u \right]}{\sin \left(\frac{u}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Άρα, θέτοντας διαδοχικά $u = k_0a \sin \theta \cos \phi$ και $u = 2k_0a\sqrt{3} \sin \theta \sin \phi$, παίρνουμε τελικά

$$\Sigma_1 = \frac{\sin \left[\left(M + \frac{1}{2} \right) k_0a \sin \theta \cos \phi \right]}{\sin \left(\frac{k_0a \sin \theta \cos \phi}{2} \right)} \cdot \frac{\sin \left[(2N+1)k_0a\sqrt{3} \sin \theta \sin \phi \right]}{\sin \left(k_0a\sqrt{3} \sin \theta \sin \phi \right)}.$$

Για το Σ_2 (με $w = k_0a\sqrt{3} \sin \theta \sin \phi$) έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{m=-M}^M e^{jk_0ma \sin \theta \cos \phi} \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots}^{2N-1} e^{jm w} \stackrel{n'=\frac{n-1}{2}}{=} \sum_{m=-M}^M e^{jk_0ma \sin \theta \cos \phi} \sum_{n'=-N}^{N-1} e^{j(2n'+1)w} = \\ &= \sum_{m=-M}^M e^{jk_0ma \sin \theta \cos \phi} \left(\sum_{n'=-N}^N e^{j(2n'+1)w} - e^{j(2N+1)w} \right) \stackrel{u=2w}{=} \sum_{m=-M}^M e^{jk_0ma \sin \theta \cos \phi} \left(e^{jw} \sum_{n'=-N}^N e^{jn'u} - e^{j(2N+1)w} \right) = \\ &= \sum_{m=-M}^M e^{jk_0ma \sin \theta \cos \phi} \cdot \left[e^{jw} \frac{\sin \left[(2N+1)w \right]}{\sin w} - e^{j(2N+1)w} \right] = \\ &= \frac{\sin \left[\left(M + \frac{1}{2} \right) k_0a \sin \theta \cos \phi \right]}{\sin \left(\frac{k_0a \sin \theta \cos \phi}{2} \right)} \cdot \left(\frac{\sin \left[(2N+1)k_0a\sqrt{3} \sin \theta \sin \phi \right]}{\sin \left(k_0a\sqrt{3} \sin \theta \sin \phi \right)} - e^{2jk_0Na\sqrt{3} \sin \theta \sin \phi} \right) e^{jk_0a\sqrt{3} \sin \theta \sin \phi} \end{aligned}$$

Άρα, η τελική έκφραση που προκύπτει για το ηλεκτρικό πεδίο, αν το πλέγμα έχει πεπερασμένες διαστάσεις, είναι:

$$\begin{aligned}
 \underline{E} = I \frac{e^{-jk_0|r|}}{4\pi|r|} (\hat{1} - \hat{r}\hat{r}) \cdot \frac{\sin\left[\left(M + \frac{1}{2}\right)k_0 a \sin\theta \cos\phi\right]}{\sin\left(\frac{k_0 a \sin\theta \cos\phi}{2}\right)} \cdot \left[\left(1 + e^{jk_0 a \sin\theta \cos\phi} + \frac{e^{\frac{jk_0}{4}(a \sin\theta \cos\phi + c \sin\theta \sin\phi)}}{2} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{e^{\frac{jk_0}{4}(a \sin\theta \cos\phi + 3c \sin\theta \sin\phi)}}{2} + \frac{e^{\frac{jk_0}{4}(a \sin\theta \cos\phi - 3c \sin\theta \sin\phi)}}{2} \right) \cdot \frac{\sin\left[(2N+1)k_0 a \sqrt{3} \sin\theta \sin\phi\right]}{\sin(k_0 a \sqrt{3} \sin\theta \sin\phi)} + \right. \\
 \left. + \left(e^{\frac{jk_0}{2} a \sin\theta \cos\phi} + e^{\frac{jk_0}{2} \frac{3a}{2} \sin\theta \cos\phi} + \frac{e^{\frac{jk_0}{4}(5a \sin\theta \cos\phi + 3c \sin\theta \sin\phi)}}{2} + \frac{e^{\frac{jk_0}{4}(5a \sin\theta \cos\phi - 3c \sin\theta \sin\phi)}}{2} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{e^{\frac{jk_0}{4}(a \sin\theta \cos\phi + c \sin\theta \sin\phi)}}{2} + \frac{e^{\frac{jk_0}{4}(a \sin\theta \cos\phi - c \sin\theta \sin\phi)}}{2} \right) \cdot \left(\frac{\sin\left[(2N+1)k_0 a \sqrt{3} \sin\theta \sin\phi\right]}{\sin(k_0 a \sqrt{3} \sin\theta \sin\phi)} - \right. \\
 \left. - e^{2jk_0 N a \sqrt{3} \sin\theta \sin\phi} \right) \cdot e^{jk_0 a \sqrt{3} \sin\theta \sin\phi} \Big] \cdot \hat{y} \quad (7).
 \end{aligned}$$

Πάλι για περαιτέρω χρήση, θέτουμε

$$\begin{aligned}
 E_2 = \left[\left(1 + e^{jk_0 a \sin\theta \cos\phi} + \frac{e^{\frac{jk_0}{4}(a \sin\theta \cos\phi + c \sin\theta \sin\phi)}}{2} + \frac{e^{\frac{jk_0}{4}(a \sin\theta \cos\phi + 3c \sin\theta \sin\phi)}}{2} + \frac{e^{\frac{jk_0}{4}(a \sin\theta \cos\phi - 3c \sin\theta \sin\phi)}}{2} \right) \cdot \right. \\
 \left. \cdot \frac{\sin\left[(2N+1)k_0 a \sqrt{3} \sin\theta \sin\phi\right]}{\sin(k_0 a \sqrt{3} \sin\theta \sin\phi)} + \left(e^{\frac{jk_0}{2} a \sin\theta \cos\phi} + e^{\frac{jk_0}{2} \frac{3a}{2} \sin\theta \cos\phi} + \frac{e^{\frac{jk_0}{4}(5a \sin\theta \cos\phi + 3c \sin\theta \sin\phi)}}{2} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{e^{\frac{jk_0}{4}(5a \sin\theta \cos\phi - 3c \sin\theta \sin\phi)}}{2} + \frac{e^{\frac{jk_0}{4}(a \sin\theta \cos\phi + c \sin\theta \sin\phi)}}{2} + \frac{e^{\frac{jk_0}{4}(a \sin\theta \cos\phi - c \sin\theta \sin\phi)}}{2} \right) \right] \cdot \\
 \left[\frac{\sin\left[(2N+1)k_0 a \sqrt{3} \sin\theta \sin\phi\right]}{\sin(k_0 a \sqrt{3} \sin\theta \sin\phi)} - e^{2jk_0 N a \sqrt{3} \sin\theta \sin\phi} \right] \cdot e^{jk_0 a \sqrt{3} \sin\theta \sin\phi}
 \end{aligned}$$

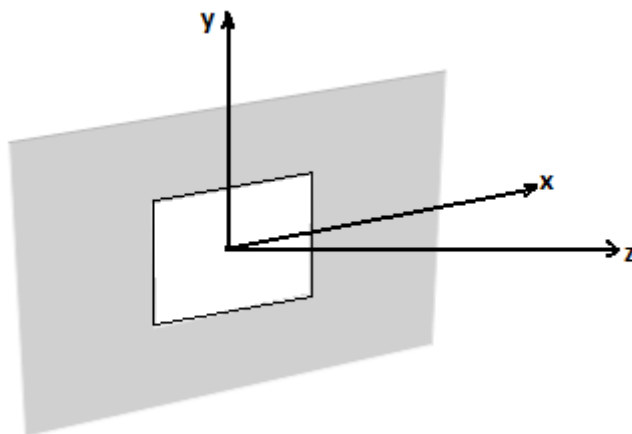
Άρα, το πεδίο σε κάθε διεύθυνση, δεδομένου ότι $\hat{r} = \hat{x} \cos\phi \sin\theta + \hat{y} \sin\phi \sin\theta + \hat{z} \cos\theta$,
 άρα $(\hat{1} - \hat{r}\hat{r})\hat{y} = \hat{y} - \hat{r} \sin\theta \sin\phi$, θα είναι:

$$E_x = \underline{E} \cdot \hat{x} = I \frac{e^{-jk_0|z|}}{4\pi|r|} \cdot (-\sin^2\theta \sin\phi \cos\phi) \cdot \frac{\sin\left[\left(M + \frac{1}{2}\right)k_0 a \sin\theta \cos\phi\right]}{\sin\left(\frac{k_0 a \sin\theta \cos\phi}{2}\right)} \cdot E_2.$$

$$E_y = \underline{E} \cdot \hat{y} = I \frac{e^{-jk_0|z|}}{4\pi|r|} \cdot (1 - \sin^2\theta \sin^2\phi) \cdot \frac{\sin\left[\left(M + \frac{1}{2}\right)k_0 a \sin\theta \cos\phi\right]}{\sin\left(\frac{k_0 a \sin\theta \cos\phi}{2}\right)} \cdot E_2.$$

2.4 ΠΡΟΚΥΠΤΟΝ ΠΕΔΙΟ ΟΤΑΝ Η ΔΙΑΤΑΞΗ ΤΟΠΟΘΕΤΗΘΕΙ ΕΝΤΟΣ ΜΕΤΑΛΛΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

Ας ασχοληθούμε τώρα με το πρακτικό ζήτημα της τοποθέτησης της εξαγωνικής διάταξης μέσα σε μεταλλικό φύλλο, που ουσιαστικά μπορεί να εφαρμοστεί στην πράξη. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα τέτοιο μεταλλικό φύλλο, στο κέντρο του οποίου είναι τοποθετημένο ένα ορθογώνιο κομμάτι της κυψελωτής διάταξης:

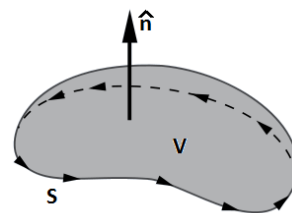


Εικόνα 12: Το πέτασμα του κυψελωτού πλέγματος μέσα σε μεταλλική πλάκα

Για το μεταλλικό έλασμα ισχύουν κατά τα γνωστά οι σχέσεις: $\sigma \rightarrow +\infty$, $\hat{n} \times \underline{E} = 0$, $\hat{n} \times \underline{H} \neq 0$, όπου σ η αγωγιμότητα και \hat{n} το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα. Ακόμα, $(\nabla^2 + k_0^2)\underline{E}_x = 0$, $(\nabla^2 + k_0^2)\underline{E}_y = 0$, $(\nabla^2 + k_0^2)\underline{E}_z = 0$ (8).

Θα στηρίξουμε την ανάλυσή μας για την εύρεση του πεδίου που προκύπτει από τη διάταξη αν προσπέσει σε αυτή κάθετο κύμα με πόλωση $E//y$ στο θεώρημα Green για δυο διανυσματικές συναρτήσεις Φ και Ψ σε έναν όγκο V επιφάνειας S .

$$\iiint_V (\Phi(\underline{r})\nabla^2\Psi(\underline{r}) - \Psi(\underline{r})\nabla^2\Phi(\underline{r}))dV = \iint_S \left(\Phi \frac{\partial\Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right) dS$$



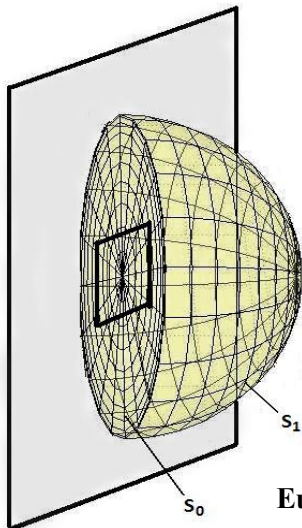
Εικόνα 13: Όγκος V επιφάνειας S

Θα ορίσουμε ακόμα για την ανάλυσή μας και μια «βοηθητική» συνάρτηση Green ως εξής: $\tilde{G}(\underline{r}, \underline{r}') = G(\underline{r}, \underline{r}') - G(\underline{r}, \underline{r}' - 2z'\hat{z}) = G(x, y, z; x', y', z') - G(x, y, z; x', y', -z')$, όπου G η συνάρτηση Green της απλής διάταξης. Παρατηρούμε ότι η \tilde{G} αναφέρεται στο είδωλο του σημείου με διανυσματική ακτίνα \underline{r}' ως προς το xOy επίπεδο.

Σημειώνουμε ακόμα ότι για τη συνάρτηση G ισχύει:

$$(\nabla^2 + k_0^2)G(\underline{r}, \underline{r}') = (\nabla^2 + k_0^2) \frac{e^{-jk_0|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \quad (9).$$

Έτσι, είμαστε έτοιμοι τώρα να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Green για την επιφάνεια που απεικονίζεται παρακάτω (ημισφαίριο ακτίνας R , που εφάπτεται πάνω στο επίπεδο της μεταλλικής πλάκας, δηλαδή το $z=0$, και ο κυκλικός δίσκος του ισημερινού του καλύπτει πλήρως το κυψελωτό πλέγμα):



Εικόνα 14: Η χρησιμοποιούμενη επιφάνεια Green

Χωρίζουμε, για λόγους ευκολίας της ανάλυσης (όπως θα φανεί παρακάτω) την επιφάνεια της σφαίρας σε S_0 (η επιφάνεια του κυκλικού δίσκου που εφάπτεται πάνω στη μεταλλική πλάκα) και S_1 (η επιφάνεια του ημισφαιρίου που βρίσκεται στο θετικό ημίχωρο $z>0$). Τέλος, ως συναρτήσεις θα χρησιμοποιήσουμε τη $\Phi=E_i$ και $\Psi=\tilde{G}$, όπου $i=\{x,y\}$.

Για το πρώτο μέλος της ισότητας του θεωρήματος Green, θα έχουμε:

$$\iiint_V (E_i \nabla^2 \tilde{G}(\underline{r}, \underline{r}') - \tilde{G}(\underline{r}, \underline{r}') \nabla^2 E_i) dV \stackrel{(8),(9)}{=} \iiint_V [E_i (-k_0^2 \tilde{G}(\underline{r}, \underline{r}') - \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')) - \tilde{G}(\underline{r}, \underline{r}') (-k_0^2 E_i)] dV = \iiint_V [-E_i(x, y, z) \cdot \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')] dV = -E_i(x, y, z).$$

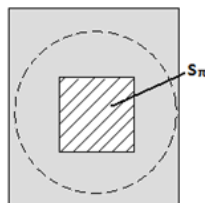
Ακόμα, χωρίζοντας την επιφάνεια του ημισφαιρίου σε S_0 και S_1 όπως αναλύσαμε προηγουμένως, θα είναι προφανώς για το δεύτερο μέλος της ισότητας του θεωρήματος Green:

$$\iint_S \left(E_i \frac{\partial \tilde{G}}{\partial z'} - \tilde{G} \frac{\partial E_i}{\partial z'} \right) dS = \iint_{S_0} \left(E_i \frac{\partial \tilde{G}}{\partial z'} - \tilde{G} \frac{\partial E_i}{\partial z'} \right) dS + \iint_{S_1} \left(E_i \frac{\partial \tilde{G}}{\partial z'} - \tilde{G} \frac{\partial E_i}{\partial z'} \right) dS. \quad \text{Πρακτικά}$$

όμως, από τη συνθήκη ακτινοβολίας, για $R \rightarrow +\infty$, το $\iint_{S_1} \left(E_i \frac{\partial \tilde{G}}{\partial z'} - \tilde{G} \frac{\partial E_i}{\partial z'} \right) dS$ μηδενίζεται.

Με την παραδοχή, λοιπόν, ότι $R \rightarrow +\infty$, μένει μόνο ο υπολογισμός του ολοκληρώματος

$$\iint_{S_0} \left(E_i \frac{\partial \tilde{G}}{\partial z'} - \tilde{G} \frac{\partial E_i}{\partial z'} \right) dS. \quad \text{Όμως, εξ ορισμού, πάνω στην επιφάνεια } z=0 \text{ είναι } \tilde{G}=0 \text{ και}$$



Εικόνα 15:
Πρόσψη
διάταξης

επίσης στην περιοχή του S_0 εκτός του παραθύρου είναι $E_i=0$ γιατί $\sigma \rightarrow +\infty$.

Άρα, αν ονομάσουμε S_π την επιφάνεια του παραθύρου, δηλαδή αυτή που απομένει από την S_0 για την οποία ισχύει $E_i \neq 0$, θα απομένει απλά ο

$$\text{υπολογισμός του ολοκληρώματος } \iint_{S_\pi} E_i \frac{\partial \tilde{G}}{\partial z'} dS.$$

Αναφερόμενοι στον κυκλικό δίσκο στην επιφάνεια του μεταλλικού ελάσματος, όμως, θα είναι $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$, $z \rightarrow +\infty$ και $z' = 0$. Άρα, θα είναι:

$$\left. \frac{\partial \tilde{G}}{\partial z'} \right|_{z'=0} = \frac{z}{4\pi e^{jk_0 r_1^3}} + \frac{jk_0 z}{4\pi e^{jk_0 r_1^2}} + \frac{z}{4\pi e^{jk_0 r_2^3}} + \frac{jk_0 z}{4\pi e^{jk_0 r_2^2}}.$$

Σημειώνοντας ότι για $z' = 0$ θα είναι $r_1 = r_2 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} = r_k$, και με τις υποθέσεις και τις προσεγγίσεις που έχουμε κάνει, θα ισχύει η προσέγγιση:

$$\frac{e^{-jk_0 r_k}}{r_k^v} \rightarrow \frac{e^{-jk_0 \rho}}{\rho^v} e^{jk_0(x'\cos\phi + y'\sin\phi)}, \text{ όπου } v=\{2,3\}, \tan\phi = \frac{y}{x} \text{ και } \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Άρα, και με $z = \rho \cos\theta$, θα είναι:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{G}}{\partial z'} \right|_{z'=0} &= \frac{\rho \cos\theta}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jk_0 \rho}}{\rho^3} \cdot e^{jk_0(x'\cos\phi + y'\sin\phi)} + \frac{jk_0 \rho \cos\theta}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jk_0 \rho}}{\rho^2} \cdot e^{jk_0(x'\cos\phi + y'\sin\phi)} + \\ &+ \frac{\rho \cos\theta}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jk_0 \rho}}{\rho^3} \cdot e^{jk_0(x'\cos\phi + y'\sin\phi)} + \frac{jk_0 \rho \cos\theta}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jk_0 \rho}}{\rho^2} \cdot e^{jk_0(x'\cos\phi + y'\sin\phi)}. \end{aligned}$$

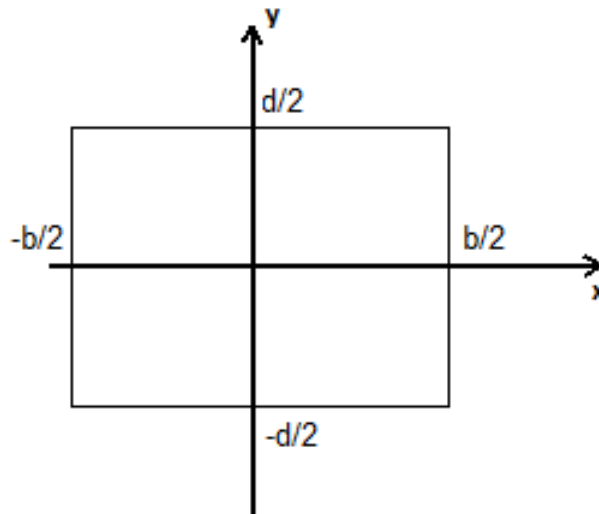
Αμελώντας τους όρους που αναφέρονται σε εξάρτηση ανώτερης τάξης του $\frac{1}{\rho}$, έχουμε

$$\text{τελικά } \left. \frac{\partial \tilde{G}}{\partial z'} \right|_{z'=0} \approx \frac{jk_0 \cos\theta}{2\pi} \cdot \frac{e^{-jk_0 \rho}}{\rho} \cdot e^{jk_0(x'\cos\phi + y'\sin\phi)}.$$

Σε αυτό το σημείο, θα θεωρήσουμε ότι το πλέγμα έχει πρακτικά άπειρες διαστάσεις συγκριτικά με το μέγεθος του ενός εξαγώνου, δηλαδή ότι τοποθετούμε ένα πρακτικά άπειρο πέτασμα μέσα στη μεταλλική πλάκα. Επομένως, οι εκφράσεις για τα πεδία είναι οι παράγωγες εκφράσεις της σχέσης (5) για τα E_x και E_y στις οποίες επιπλέον, λόγω των παραδοχών που έχουμε κάνει, θα είναι $e^{-jk_0(z-z')} \rightarrow 1$. Δηλαδή, θα είναι $E_x = 0$ και

$$E_y = \frac{I_0 a^2 \sqrt{3}}{32\pi^4 \sqrt{k_b}} \cdot E_1 \text{ (προφανώς προκύπτει από εδώ ότι η περίπτωση } E_x = 0 \text{ δεν}$$

ενδιαφέρει, θα δώσει μηδενικό πεδίο κατά την κατεύθυνση x). Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι το παράθυρο έχει διαστάσεις $b \times d$:



Εικόνα 16: Οι διαστάσεις του πετάσματος

θα είναι με βάση το θεώρημα Green:

$$\begin{aligned}
 -E_y &= \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{Ija^2\sqrt{3}}{32\pi^4\sqrt{k_b}} \cdot E_1 \cdot \frac{jk_0 \cos \theta}{2\pi} \cdot \frac{e^{-jk_0\rho}}{\rho} \cdot e^{jk_0(x'\cos\phi+y'\sin\phi)} dx' dy' \Rightarrow \\
 E_y &= \frac{Ia^2k_0 \cos \theta\sqrt{3}}{64\pi^5\sqrt{k_b}} \cdot E_1 \cdot \frac{e^{-jk_0\rho}}{\rho} \cdot \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{jk_0(x'\cos\phi+y'\sin\phi)} dx' dy' \Rightarrow \\
 E_y &= \frac{Ia^2k_0 \cos \theta\sqrt{3}}{64\pi^5\sqrt{k_b}} \cdot E_1 \cdot \frac{e^{-jk_0\rho}}{\rho} \cdot \int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{jk_0 \cos \phi} \cdot \left[e^{jk_0x'\cos\phi} \right]_{-b/2}^{b/2} e^{jk_0y'\sin\phi} dy' \Rightarrow \\
 E_y &= \frac{Ia^2k_0 \cos \theta\sqrt{3}}{64\pi^5\sqrt{k_b}} \cdot E_1 \cdot \frac{e^{-jk_0\rho}}{\rho} \cdot \frac{1}{jk_0 \cos \phi} \left(e^{jk_0\frac{b}{2}\cos\phi} - e^{-jk_0\frac{b}{2}\cos\phi} \right) \cdot \frac{1}{jk_0 \sin \phi} \cdot \left[e^{jk_0x'\cos\phi} \right]_{-d/2}^{d/2} \Rightarrow \\
 E_y &= -\frac{Ia^2k_0 \cos \theta\sqrt{3}}{64\pi^5k_0^2 \cos \phi \sin \phi \sqrt{k_b}} \cdot E_1 \cdot \frac{e^{-jk_0\rho}}{\rho} \cdot \left(e^{jk_0\frac{b}{2}\cos\phi} - e^{-jk_0\frac{b}{2}\cos\phi} \right) \cdot \left(e^{jk_0\frac{d}{2}\sin\phi} - e^{-jk_0\frac{d}{2}\sin\phi} \right) \Rightarrow \\
 E_y &= -\frac{Ia^2 \cos \theta\sqrt{3}}{64\pi^5k_0 \cos \phi \sin \phi \sqrt{k_b}} \cdot E_1 \cdot \frac{e^{-jk_0\rho}}{\rho} \cdot \frac{j \sin \left(k_0 \frac{b}{2} \cos \phi \right)}{2} \cdot \frac{j \sin \left(k_0 \frac{d}{2} \sin \phi \right)}{2} \\
 E_y &= \frac{Ia^2 \cos \theta\sqrt{3}}{256\pi^5k_0 \cos \phi \sin \phi \sqrt{k_b}} \cdot E_1 \cdot \frac{e^{-jk_0\rho}}{\rho} \cdot \sin \left(k_0 \frac{b}{2} \cos \phi \right) \cdot \sin \left(k_0 \frac{d}{2} \sin \phi \right).
 \end{aligned}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Sergei Tretyakov, “Analytical modeling in applied electromagnetics”, Artech House Publishers, London 2003
2. Ν. Κ. Ουζούνογλου, «Συστήματα Ραντάρ», Αθήνα 2006
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_shielding
4. <http://em-pollution-gr.blogspot.gr>
5. <http://www.home-biology.gr>
6. <http://www.emwatch.com/>
7. <http://www.aktinovolies.gr>
8. http://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CGEQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.qsl.net%2Fsz1a%2Fdownload%2Fhmsn.ppt&ei=qaLoT_OUCZT18QP13IGTCg&usg=AFQjCNGVp93BpepebaC0fQIFdPI1GZsynA

ΠΗΓΕΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

http://www.google.com/imgres?um=1&hl=ca&sa=N&biw=1280&bih=709&tbm=isch&tbid=uYB4Ipxhp-n7KM:&imgrefurl=http://www.wisegeek.com/what-is-a-faraday-cage.htm&docid=O7Owik294mMl5M&imgurl=http://images.wisegeek.com/faraday-cage-with-bolt-of-electricity.jpg&w=634&h=1024&ei=wJ_hT7bAH8SY8gO84PHPDw&zoom=1&iact=hc&vpx=842&vpy=96&dur=1689&hovh=285&hovw=177&tx=57&ty=225&sig=104220537633110994558&page=2&tbnh=165&tbnw=110&start=17&ndsp=20&ved=1t:429,r:13,s:17,i:167

<http://www.math.ucdavis.edu/~brattain/Math21D.html>

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Coaxial_cable_cutaway.svg

http://www.google.com/imgres?um=1&hl=ca&biw=1280&bih=709&tbm=isch&tbid=oKBxPnwknwIzuM:&imgrefurl=http://en.allexperts.com/q/Small-Household-Appliances-3559/2009/10/DeLonghi-Microwave-Oven.htm&docid=X02xwVsHikg-wM&imgurl=http://z.about.com/w/experts/Small-Household-Appliances-3559/2009/10/Microwave-Door.jpg&w=640&h=480&ei=6dfhT7C7GMbv8QOM_ZmSBA&zoom=1&iact=hc&vpx=863&vpy=162&dur=640&hovh=194&hovw=259&tx=56&ty=137&sig=104220537633110994558&page=1&tbnh=159&tbnw=212&start=0&ndsp=15&ved=1t:429,r:3,s:0,i:77

<http://mumetal.co.uk/2009/03/11/how-does-a-magnetic-shield-work/>

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Electromagnetic_shielding_inside_mobile_phone.jpg

http://www.google.com/imgres?um=1&hl=ca&sa=N&biw=1280&bih=709&tbm=isch&tbid=NpHYj2sW0g5WBM:&imgrefurl=http://www.epop.gr/page9/page9.html&docid=32ISpGAt9c5ZJM&imgurl=http://www.epop.gr/page9/files/page9_1.jpg&w=400&h=312&ei=gIDoT-rXF4mg8QP_2KmpCg&zoom=1&iact=hc&vpx=351&vpy=159&dur=525&hovh=198&hovw=254&tx=91&ty=139&sig=104220537633110994558&page=1&tbnh=157&tbnw=206&start=0&ndsp=15&ved=1t:429,r:1,s:0,i:73

http://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CGEQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.qsl.net%2Fsz1a%2Fdownload%2Fhmsn.ppt&ei=qaLoT_OUCZT18QP13IGTCg&usg=AFQjCNGVp93BpepebaC0fQIFdPI1GZsynA

<http://em-pollution-gr.blogspot.gr/2007/12/blog-post.html>