



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

**ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ :
ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αλέξανδρος Σωτηρίδης

Επιβλέπων : Ι. Τσινιάς

Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2012



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

**ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ :
ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αλέξανδρος Σωτηρίδης

Επιβλέπων : Ι. Τσινιάς

Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 31η Οκτωβρίου 2012 .

.....
Ι. ΤΣΙΝΙΑΣ
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Ν.ΜΑΡΑΤΟΣ
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Β.ΚΟΚΚΙΝΗΣ
Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2012

.....

Αλέξανδρος Α. Σωτηρίδης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών ΕΜΠ

Copyright © Αλέξανδρος Σωτηρίδης

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Π Ε Ρ Ι Λ Η Ψ Η

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη του προβλήματος ελέγχου αρίστου χρόνου για γραμμικά συστήματα. Το πρώτο μέρος (Κεφάλαια 1 – 3) της εργασίας επικεντρώνεται στη θεωρία του προβλήματος αρίστου χρόνου. Συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1, διατυπώνουμε το γενικό πρόβλημα βελτίστου ελέγχου. Στο Κεφάλαιο 2, εισάγουμε την έννοια του προσιτού συνόλου για γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα με περιορισμούς στον έλεγχο και χρησιμοποιώντας κάποιες βασικές τοπολογικές ιδιότητες των προσιτών συνόλων, παρουσιάζουμε τις αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να πληρεί ο βέλτιστος έλεγχος (αρχή του μεγίστου). Στο Κεφάλαιο 3, δίνεται έμφαση στα χρονικά αμετάβλητα γραμμικά συστήματα. Μεταξύ των άλλων μελετώνται η ελεγκσιμότητα και η ισοδυναμία συστημάτων μεσω αλλαγής συντεταγμένων και παρέχονται οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος του αρίστου χρόνου. Το δεύτερο μέρος της εργασίας περιλαμβάνει τέσσερις εφαρμογές επίλυσης του προβλήματος αρίστου χρόνου. Ξεκινάμε με το πολύ απλό σύστημα του διπλού ολοκληρωτή (Κεφάλαιο 4) και στη συνέχεια περνάμε στην επίλυση πιο σύνθετων προβλημάτων αρίστου χρόνου για συστήματα όπως ο αρμονικός ταλαντωτής μιας εισόδου χωρίς απόσβεση (Κεφάλαιο 5), ο αρμονικός ταλαντωτής δύο εισόδων χωρίς απόσβεση (Κεφάλαιο 6) και κλείνουμε με τον αρμονικό ταλαντωτή μιας εισόδου με απόσβεση (Κεφάλαιο 7).

Λέξεις κλειδιά: πρόβλημα ελέγχου αρίστου χρόνου, γραμμικά συστήματα, προσιτό σύνολο, χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα, ελεγκσιμότητα, ισοδυναμία συστημάτων, αρχή του μεγίστου, αρχή bang – bang, διπλός ολοκληρωτής, αρμονικός ταλαντωτής, απόσβεση

ABSTRACT

The purpose of this thesis is the study of the time – optimal control problem for linear systems . The first part (Chapters 1 – 3) of the thesis is concentrated on the theory of the time – optimal control problem . Particularly, in Chapter 1 , we formulate the general optimal control problem . In Chapter 2 , we introduce the concept of the attainable set for time-varying linear systems with constraints in the control and by exploiting some fundamental topological properties of the attainable sets , we present the necessary conditions for the optimal control(maximum principle) . Emphasis is given for the case of time- invariant linear systems (Chapter 3). Among other things, controllability and equivalence via change of coordinates are studied and necessary and sufficient conditions the time – optimal control problem are provided. The second part of the thesis includes four applications for the solvability of the time – optimal control problem . We begin with the simple case of the double integrator (Chapter 4) and we proceed to more complicated problems such as the undamped harmonic oscillator with one input (Chapter 5), the undamped harmonic oscillator with two inputs (Chapter 6) and we conclude with the damped harmonic oscillator with one input (Chapter 7) .

Keywords : time – optimal control problem , linear systems , attainable set , time variant systems , controllability , system equivalence , maximum principle , bang – bang principle , double integrator , harmonic oscillator , damping

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ Α : ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ : ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

1.ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ.....	10
2.ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.....	11
2.1 Ιδιότητες του προσιτού συνόλου.....	12
2.2 Η αρχή του μεγίστου για τα προβλήματα αρίστου χρόνου.....	16
2.3 Μοναδικότητα αρίστου ελέγχου.....	26
2.4 Η αρχή bang – bang.....	28
3 . ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΓΙΑ ΑΥΤΟΝΟΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.....	29
3.1 Το προσιτό σύνολο για αυτόνομα συστήματα.....	29
3.2 Ελεγχιμότητα για αυτόνομα συστήματα.....	32
3.3 Ισοδυναμία γραμμικών συστημάτων.....	36
3.4 Κανονικότητα και ελεγχιμότητα.....	39
3.5 Μέγιστος αριθμός αλλαγών ελέγχου αρίστου χρόνου.....	40

ΜΕΡΟΣ Β : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

4 . ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΗ.....	41
4.1 Διατύπωση προβλήματος ελέγχου αρίστου χρόνου διπλού ολοκληρωτή.....	41
4.2 Επίλυση προβλήματος ελέγχου αρίστου χρόνου διπλού ολοκληρωτή.....	42
5 .ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΜΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ	52
5.1 Διατύπωση προβλήματος ελέγχου αρίστου χρόνου αρμονικού ταλαντωτή μιας εισόδου χωρίς απόσβεση.....	52
5.2 Επίλυση προβλήματος ελέγχου αρίστου χρόνου αρμονικού ταλαντωτή μιας εισόδου χωρίς απόσβεση.....	54
6 . ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΔΥΟ ΕΙΣΟΔΩΝ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ.....	69
6.1 Διατύπωση προβλήματος ελέγχου αρίστου χρόνου αρμονικού ταλαντωτή δύο εισόδων χωρίς απόσβεση.....	69
6.2 Επίλυση προβλήματος ελέγχου αρίστου χρόνου αρμονικού ταλαντωτή δύο εισόδων χωρίς απόσβεση.....	69
7 . ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΜΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ.....	82
ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ	
7.1 Διατύπωση προβλήματος ελέγχου αρίστου χρόνου αρμονικού ταλαντωτή μιας εισόδου με απόσβεση.....	82
7.2 Επίλυση προβλήματος ελέγχου αρίστου χρόνου αρμονικού ταλαντωτή μιας εισόδου με απόσβεση.....	83
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	92

ΜΕΡΟΣ Α : ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ : ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

1. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Στην παράγραφο αυτή διατυπώνουμε το γενικό πρόβλημα βελτίστου ελέγχου . Κάθε πρόβλημα χαρακτηρίζεται από τα εξής δεδομένα :

(α) το σύστημα του οποίου η κατάσταση $x(\cdot)$ συνδέεται με τον έλεγχο $u(\cdot)$ μέσω ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \quad i=1,2,\dots, m, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε στη συνέχεια ότι οι απεικονίσεις f_i είναι κλάσεως C^1 .

(β) την αρχική κατάσταση ή αρχικό σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$, που είναι ένα διάνυσμα γνωστό στο επίπεδο φάσεων και το σύνολο τελικών καταστάσεων ή σύνολο – στόχο G για το σύστημα (1.1) . Αν και το σύνολο – στόχος μπορεί να είναι συνεχώς μεταβαλλόμενο με τον χρόνο $G = G(t)$, σε αυτήν την εργασία θεωρούμε ότι το G είναι σταθερό και συγκεκριμένα ο στόχος μας είναι πάντα η αρχή των αξόνων .

(γ) την κλάση των επιτρεπτών ελέγχων Δ , που αποτελείται από όλους τους αποδεκτούς ελέγχους $u(\cdot)$ για χρόνους $t_0 \leq t \leq t_1$ που οδηγούν την αρχική κατάσταση x_0 στο σύνολο – στόχο G σε κάποια χρονική στιγμή t_1 . Οι έλεγχοι $u(\cdot)$ συνήθως υπόκεινται σε περιορισμούς της μορφής $u(\cdot) \in \Omega$, όπου Ω ένα σταθερό , συμπαγές και κυρτό σύνολο περιορισμών στο \mathbb{R}^m .

(δ) το συναρτησιακό κόστους , που είναι ένα ποσοτικό κριτήριο για την απόδοση κάθε ελέγχου $u(\cdot)$ για χρόνους $t_0 \leq t \leq t_1$. Το κόστος ορίζεται ως :

$$C(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t)) dt \quad (1.2)$$

όπου $f^0(t, x, u) : [t_1, t_2] * \mathbb{R}^n * \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνωστή συνάρτηση κλάσεως C^1 .

Θεωρούμε το πρόβλημα ελέγχου για το σύστημα (1.1) , αρχική κατάσταση x_0 , σύνολο – στόχο $G(\cdot)$, επιτρεπτούς ελέγχους $u(\cdot)$ που ανήκουν στην κλάση Δ και συναρτησιακό κόστους $C(u)$ ορισμένο για όλους τους ελέγχους στην Δ .

Ορισμός 1.1 . Ένας έλεγχος $u^*(\cdot)$ ονομάζεται **βέλτιστος** ^{[1],[3],[4],[5]} ως προς το συναρτησιακό κόστους $C(u)$ αν

$$C(u^*) \leq C(u) \quad (1.3)$$

για κάθε $u(\cdot)$ στο Δ .

Η παρούσα εργασία εστιάζει στην μελέτη του προβλήματος αρίστου χρόνου δηλαδή στοχεύουμε στην ελαχιστοποίηση του κόστους (1.2) με

$$f_0(t, x, u) \equiv 1 \quad (1.4)$$

και άρα

$$C(u) = t_1 - t_0 \quad (1.5)$$

Διατυπώνουμε λοιπόν το πρόβλημα αρίστου χρόνου για γραμμικά αυτόνομα συστήματα .

- Δίνεται μια αρχική κατάσταση $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}^n$. Να βρεθεί ένας έλεγχος $u^* \in U$ που οδηγεί το σύστημα $\dot{x} = Ax + Bu$ από την κατάσταση x_0 στην αρχή των αξόνων $0 \in \mathbb{R}^n$ στον ελάχιστο δυνατό χρόνο t^* . Αν υπάρχει ο εν λόγω u^* τον καλούμε **έλεγχος αρίστου χρόνου**, την άριστη χρονική στιγμή t^* **άριστο χρόνο** και την αντίστοιχη τροχιά $x(t, x_0, u^*)$, $0 \leq t \leq t^*$, **άριστη τροχιά** .

2. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Έστω το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t) \quad (2.1)$$

του οποίου οι συντελεστές $A(t)$, $B(t)$ και $v(t)$ είναι γνωστοί πραγματικοί πίνακες, ορισμένοι στο διάστημα $[t_0, t_1]$ και ο έλεγχος $u(t)$ οδηγεί την απόκριση $x(t, x_0, u)$ από μια αρχική κατάσταση x_0 σε κάποιο επιθυμητό σύνολο – στόχο G στο \mathbb{R}^n . Υποθέτουμε ότι :

- ο πίνακας $A(t)$ είναι διαστάσεων $n \times n$, ο $B(t)$ είναι $n \times m$ με συνεχείς πραγματικούς συντελεστές, ο πίνακας ελέγχων $u(t)$ είναι ένα διάνυσμα – στήλη μήκους n
- ο έλεγχος $u(\cdot)$ είναι ένα διάνυσμα πραγματικό και φραγμένο σε κάποιο διάστημα $J : [t_0, t_1]$ που παίρνει τιμές σε ένα μη – κενό σύνολο περιορισμών $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ και ακόμη ότι ο $u(\cdot)$ είναι μια μετρήσιμη απεικόνιση στο διάστημα $[t_0, t_1]$.

Κατά περίπτωση, θα κάνουμε περαιτέρω παραδοχές για τους συντελεστές του (2.1) ή για το σύνολο περιορισμών Ω του διανύσματος ελέγχου $u(\cdot)$.

Η απόκριση ή λύση $x(t) = x(t, x_0, u)$ με $x(t_0) = x_0$ είναι μια πραγματική και συνεχής συνάρτηση στο διάστημα J και ικανοποιεί το (2.1) .

Οι υποθέσεις που έχουμε κάνει για τους συντελεστές του συστήματος του (2.1) εγγυώνται την ύπαρξη λύσεων και εξασφαλίζουν γνωστές ιδιότητες από τη θεωρία γραμμικών διαφορικών συστημάτων [2] . Θυμίζουμε ότι η τροχιά - λύση $x(t)$ του συστήματος (2.1) με αρχική συνθήκη $x(t_0) = x_0$, είναι :

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} [B(s)u(s) + v(s)] ds \quad (2.2)$$

όπου ο πίνακας $\Phi(t)$ είναι ο θεμελιώδης πίνακας – λύση του ομογενούς συστήματος :

$$\dot{x} = A(t)x \quad (2.3)$$

με $\Phi(t_0) = I$. Αν ο πίνακας A είναι σταθερός , τότε ως γνωστόν $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$.

2.1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΡΟΣΙΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

Θεωρούμε το σύστημα (2.1) . Με γνωστή την αρχική κατάσταση x_0 , μελετάμε το σύνολο $M(t_1)$ των σημείων του \mathbb{R}^n στα οποία μπορεί να οδηγηθεί το x_0 από ελέγχους $u \in \Omega$ σε χρόνους $t_0 \leq t \leq t_1$.

Ορισμός 2.1 . Για το σύστημα (2.1) , με σύνολο περιορισμών Ω και αρχική κατάσταση $x(t_0) = x_0$, θεωρούμε τους ελέγχους $u(t) \in \Omega$ (σχεδόν) για κάθε $t_0 \leq t \leq t_1$ και $x(t)$ τις αντίστοιχες αποκρίσεις που αρχίζουν από το $x(t_0) = x_0$.

Το **προσιτό σύνολο** ^{[1],[3],[5]} $M((2.1), \Omega, x_0, t_0, t_1)$ είναι το σύνολο όλων των τελικών σημείων των τροχιών $x(t_1)$ του (2.1) στο \mathbb{R}^n . Για λόγους απλότητας , αναφέρουμε μόνο τον τελικό χρόνο t_1 δηλαδή γράφουμε $M(t_1)$ για το προσιτό σύνολο τελικού χρόνου t_1 . Ορίζουμε ακόμη $M(t_0) = x_0$.

Παρατηρούμε από την (2.2) ότι το σύνολο $M((2.1), \Omega, x_0, t_0, t_1)$ είναι μια μετατόπιση του $M((2.1), \Omega, 0, t_0, t_1)$ κατά το διάνυσμα $\Phi(t_1)x_0$. Δηλαδή η γεωμετρία του προσιτού συνόλου $M((2.1), \Omega, x_0, t_0, t_1)$ δεν εξαρτάται από την αρχική κατάσταση x_0 εκτός από τη θέση της στο \mathbb{R}^n . Για γραμμικά συστήματα ανεξάρτητα του χρόνου :

$$\dot{x} = Ax + Bu + v \quad (2.4)$$

μόνο η διαφορά $t_1 - t_0$ είναι σημαντική και για αυτό παίρνουμε συνήθως ως αρχικό χρόνο $t_0 = 0$.

Ερχόμαστε πάλι στο σύνολο περιορισμών Ω ^{[3],[4]} . Το σύνολο περιορισμών Ω είναι συνήθως συμπαγές και κυρτό . Ένα τέτοιο σύνολο περιορισμών είναι ο κύβος m διαστάσεων :

$$|u_i| \leq 1 \quad , \quad i=1, \dots, m \quad (2.5)$$

Για συμπαγή και κυρτά σύνολα περιορισμών Ω , αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα :

Θεώρημα 2.1 . Έστω το γραμμικό σύστημα (2.1) στο \mathbb{R}^n με συμπαγές και κυρτό σύνολο περιορισμών Ω , αρχική κατάσταση x_0 και ελέγχους $u(\cdot)$ στο διάστημα $[t_0, t_1]$. Τότε το προσιτό σύνολο $M(t_1)$ είναι συμπαγές , κυρτό και μεταβάλλεται συνεχώς με το t_1 για $t_1 \geq t_0$ ^[5] .

Απόδειξη : Για να δείξουμε ότι το $M(t_1)$ είναι συμπαγές δηλαδή κλειστό και φραγμένο , δείχνουμε ότι για κάθε ακολουθία σημείων $x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_r(t_1), \dots$ στο $M(t_1)$

υπάρχει μια υποακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο οριακό σημείο $\bar{x}(t_1)$ στο $M(t_1)$. Παίρνουμε τις αποκρίσεις $x_r(\cdot)$ και τους αντιστοίχους ελέγχους $u_r(\cdot) \in \Omega$ στο διάστημα $[t_0, t_1]$ για $r = 1, 2, \dots$. Από τη σχέση (2.2) παίρνουμε :

$$x_r(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} [B(s)u_r(s) + v(s)] ds \quad (2.6)$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι ο θεμελιώδης πίνακας - λύση του (2.1) με $\Phi(t_0) = I$. Το σύνολο όλων των ελέγχων $u_r(\cdot) \in \Omega$ στο $[t_0, t_1]$ είναι ασθενώς συμπαγές. Επομένως υπάρχει μια υποακολουθία $u_{r_i}(\cdot)$ που συγκλίνει ασθενώς σε έναν έλεγχο $\bar{u}(\cdot) \in \Omega$ στο $[t_0, t_1]$ δηλαδή :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} B(s) u_{r_i}(s) ds = \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} B(s) \bar{u}(s) ds \quad (2.7)$$

Έστω η απόκριση $\bar{x}(\cdot)$ στον έλεγχο $\bar{u}(\cdot)$ ώστε για κάθε t στο διάστημα $[t_0, t_1]$, ισχύει :

$$\bar{x}(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} [B(s)\bar{u}(s) + v(s)] ds = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{r_i}(t) \quad (2.8)$$

Επομένως για $t = t_1$ προκύπτει :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{r_i}(t_1) = \bar{x}(t_1) \in M(t_1) \quad (2.9)$$

άρα το $M(t_1)$ είναι πράγματι συμπαγές.

Για να αποδείξουμε ότι το $M(t_1)$ είναι κυρτό και από τον ορισμό της κυρτότητας ενός συνόλου, θεωρούμε δύο σημεία $x_0(t_1)$ και $x_1(t_1)$ του προσιτού συνόλου $M(t_1)$ και δείχνουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα :

$$(1-\lambda)x_0(t_1) + \lambda x_1(t_1), \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (2.10)$$

που τα ενώνει, βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο $M(t_1)$. Έστω δύο έλεγχοι $u_0(t)$ και $u_1(t)$ με αντίστοιχες αποκρίσεις $x_0(t)$ και $x_1(t)$. Ορίζουμε τον έλεγχο $u_\lambda(t) \in \Omega$ στο $[t_0, t_1]$ από τη σχέση :

$$u_\lambda(t) = (1-\lambda)u_0(t) + \lambda u_1(t) \quad (2.11)$$

που προφανώς ανήκει στο Ω , αφού το σύνολο Ω είναι κυρτό. Η απόκριση $x_\lambda(t)$ στον έλεγχο $u_\lambda(t)$ είναι :

$$x_\lambda(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} [B(s)u_\lambda(s) + v(s)] ds \quad (2.12)$$

η οποία λόγω της (2.11) γίνεται :

$$\begin{aligned} x_\lambda(t) = & (1-\lambda) \left\{ \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} [B(s)u_0(s) + v(s)] ds \right\} \\ & + \lambda \left\{ \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} [B(s)u_1(s) + v(s)] ds \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

άρα

$$x_\lambda(t_1) = (1-\lambda)x_0(t_1) + \lambda x_1(t_1) \quad .$$

Άρα το $M(t_1)$ είναι κυρτό .

Αποδεικνύουμε τέλος ότι το προσιτό σύνολο $M(t_1)$ μεταβάλλεται συνεχώς με το χρόνο. Κρατάμε σταθερά όλα τα στοιχεία $((2.1), \Omega, x_0, t_0)$ και εξετάζουμε την εξάρτηση του συνόλου $M(t_1)$ από την μεταβαλλόμενη τελική χρονική στιγμή $t_1 > t_0$. Με γνωστό το $\varepsilon > 0$, δείχνουμε ότι :

$$\exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon, \forall |t_1 - t_2| < \delta \text{ και } \forall (x_1, x_2) \in M(t_0) * M(t_1)$$

Έστω $\hat{u}(t) \subset \Omega$ ένας έλεγχος με απόκριση $\hat{x}(t)$ στο διάστημα $[t_0, t_1 + 1]$. Τότε για $t_0 < t_1, t_2 < t_1 + 1$, έχουμε :

$$\begin{aligned} \hat{x}(t_2) - \hat{x}(t_1) = & \Phi(t_2) \int_{t_0}^{t_2} \Phi(s)^{-1} [B(s)\hat{u}(s) + v(s)] ds \\ & - \Phi(t_2) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(s)^{-1} [B(s)\hat{u}(s) + v(s)] ds \\ & + [\Phi(t_2) - \Phi(t_1)] \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \Phi(s)^{-1} [B(s)\hat{u}(s) + v(s)] ds + x_0 \right\} \quad . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Στο διάστημα $[t_0, t_1 + 1]$, οι συνεχείς συναρτήσεις $\Phi(t)$ και $\Phi(t)^{-1}$ φράσσονται από κάποια σταθερά C_1 δηλαδή

$$|\Phi(t)| < C_1 \quad , \quad |\Phi(t)^{-1}| < C_1 \quad . \quad (2.15)$$

Ακόμη , επειδή οι $|B(t)|$, $|v(t)|$ είναι ολοκληρώσιμες και η $|\hat{v}(t)|$ είναι φραγμένη , έχουμε

$$|x_0| + \int_{t_0}^{t_1+1} |\Phi(s)^{-1}| |B(s)\hat{u}(s)+v(s)| ds < C_2 \quad . \quad (2.16)$$

Επίσης, λόγω συνέχειας προκύπτει :

$$\left| \int_{t_1}^t \Phi(s)^{-1} [B(s)\hat{u}(s)+v(s)] ds \right| < \frac{\varepsilon}{2C_1} \quad (2.17)$$

και

$$|\Phi(t)-\Phi(t_1)| \leq \left| \int_{t_1}^t A(s)\Phi(s) ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{2C_2} \quad (2.17)$$

για κάποιο $\varepsilon > 0$ και για $|t-t_1| < \delta$. Άρα για $|t_2-t_1| < \delta$, έχουμε :

$$\begin{aligned} |\hat{x}(t_2)-\hat{x}(t_1)| &\leq |\Phi(t_2)| \left| \int_{t_1}^{t_2} \Phi(s)^{-1} [B(s)\hat{u}(s)+v(s)] ds \right| \\ &+ |\Phi(t_2)-\Phi(t_1)| \left[\int_{t_0}^{t_1+1} |\Phi(s)^{-1}| |B(s)\hat{u}(s)+v(s)| ds + |x_0| \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

και καταλήγουμε

$$|\hat{x}(t_2)-\hat{x}(t_1)| < C_1 \frac{\varepsilon}{2C_1} + C_2 \frac{\varepsilon}{2C_2} = \varepsilon \quad (2.19)$$

Θεωρούμε την απόκριση $\hat{x}(t_1) \in M(t_1)$ στον έλεγχο $\hat{u}(t)$ στο διάστημα $[t_0, t_1]$. Ορίζουμε τον έλεγχο $\hat{u}(t) \subset \Omega$ στο $[t_0, t_1+1]$ δίνοντας του την τιμή $\hat{u}(t) = \hat{u}(t_1)$ στο $[t_1, t_1+1]$ και έστω $\hat{x}(t)$ η αντίστοιχη απόκριση. Τότε $\hat{x}(t_2) \in M(t_2)$ και $|\hat{x}(t_2)-\hat{x}(t_1)| < \varepsilon$. Έστω τώρα $t_2 \in [t_0, t_1+1]$ και έστω $\tilde{x}(t_2)$ ένα σημείο του συνόλου $M(t_2)$, δηλαδή η απόκριση στον έλεγχο $\tilde{u}(t)$ στο διάστημα $[t_0, t_2]$. Επεκτείνουμε τον έλεγχο $\tilde{u}(t) \subset \Omega$ στο διάστημα $[t_0, t_1+1]$ για να πάρουμε $|\tilde{x}(t_2)-\tilde{x}(t_1)| < \varepsilon$. Η παραπάνω διαδικασία δείχνει ότι $|x(t_2)-x(t_1)| < \varepsilon$ όταν $|t_1-t_2| < \delta$, όπου το δ εξαρτάται από το ε και την χρονική στιγμή t_1 . Με την ίδια διαδικασία βρίσκουμε ότι η απόσταση μεταξύ $M(t_0) = x_0$ και $M(t_1)$ είναι μικρότερη από ε όταν η διαφορά $|t_1-t_0|$ είναι επαρκώς μικρή. Άρα το προσιτό σύνολο $M(t_1)$ μεταβάλλεται συνεχώς με το $t_1 > t_0$. □

Από το γεγονός ότι το προσιτό σύνολο $M(t_1)$ μεταβάλλεται συνεχώς με το χρόνο, προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα :

Πόρισμα 2.1. Αν P είναι ένα σημείο στο εσωτερικό του προσιτού συνόλου $M(t_1)$, τότε υπάρχει μια γειτονιά N του P και ένα $\delta > 0$ τέτοια ώστε κάθε προσιτό σύνολο $M(t_2)$ με $|t_2-t_1| < \delta$ να περιέχει τη γειτονιά N στο εσωτερικό του.

Απόδειξη : Έστω $x_0(t_1), x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)$ οι κορυφές ενός n -πολυέδρου Σ (το οποίο προκύπτει ως ο κυρτός φλοιός των $n+1$ σημείων - κορυφών) που βρίσκεται στο εσωτερικό

του $M(t_1)$ και έχει το P βαρύκεντρο. Έστω N το εσωτερικό ενός παρομοίου πολυέδρου αλλά με όλα τα μήκη του μισά. Έστω οι αντίστοιχοι έλεγχοι $u_0(t), u_1(t), \dots, u_n(t) \in \Omega$ για το εκτεταμένο διάστημα $[t_0, t_1+1]$. Έστω $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε κάθε n-πολύεδρο Q_0, Q_1, \dots, Q_n με $|Q_i - x_i(t_i)| < \varepsilon$ να περιέχει την περιοχή N στο εσωτερικό του. Τότε από το θεώρημα 2.1 υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $|t_2 - t_1| < \delta$, είναι $|x(t_2) - x_1(t_1)| < \varepsilon$, $i=0, 1, \dots, n$. Επειδή το $M(t_2)$ περιέχει τα $x_0(t_2), x_1(t_2), \dots, x_n(t_2)$ στο εσωτερικό του και επειδή το $M(t_2)$ είναι κυρτό, το $M(t_2)$ περιέχει το N στο εσωτερικό του. □

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι το θεώρημα 2.1 και το πόρισμα 2.1 αποδείχτηκαν ύπο την προϋπόθεση ότι το σύνολο Ω είναι κυρτό. Ωστόσο, τα αποτελέσματα ισχύουν και για μη-κυρτά σύνολα.

2.2. Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Τώρα θα ασχοληθούμε με κάποιες γεωμετρικές ιδιότητες του βελτίστου ελέγχου που είναι απαραίτες για την διατύπωση της αρχής του μεγίστου.

Ορισμός 2.2. Έστω $M(t_1)$ το προσιτό σύνολο για το σύστημα (2.1) με αρχική κατάσταση x_0 που προκύπτει από την εφαρμογή όλων των ελέγχων $u(\cdot) \in \Omega$ στο διάστημα $[t_0, t_1]$. Ένα σημείο $P \in \partial M(t_1)$ βρίσκεται στο “νέο” σύνορο του $M(t_1)$ μόνο αν το P δεν βρίσκεται σε κάποιο από τα προσιτά σύνολα $M(t)$ για $t_0 \leq t < t_1$ δηλαδή

$$P \in \{ \partial M(t_1) - \bigcup_{t_0 \leq t < t_1} M(t) \} \quad (2.20)$$

Οι έλεγχοι $u(\cdot)$ στο διάστημα $[t_0, t_1]$ οι οποίοι μεταφέρουν το x_0 στο σύνορο $\partial M(t_1)$ του προσιτού συνόλου $M(t_1)$, ονομάζονται ακρότατοι. Αυτοί μας δίνουν τη λύση αρίστου χρόνου για τα συστήματα (2.1) όπως θα δειχθεί παρακάτω. Ακολουθεί ο ακριβής ορισμός.

Ορισμός 2.3. Έστω ένας έλεγχος $u(t) \in \Omega$ στο $[t_0, t_1]$ για το σύστημα (2.1) με σύνολο περιορισμών Ω και αρχική κατάσταση $x(t_0) = x_0$. Αν η απόκριση $x(t)$ έχει τελικό σημείο $x(t_1)$ στο σύνορο $\partial M(t_1)$ του προσιτού συνόλου $M(t_1)$, τότε ο έλεγχος $u(t)$ λέγεται **ακρότατος** ^{[1],[3],[4],[5]} έλεγχος και αντίστοιχα η απόκριση $x(t)$ επίσης λέγεται **ακρότατη** στο διάστημα $[t_0, t_1]$.

Για να εκφράσουμε την συνθήκη για ακρότατους ελέγχους αναλυτικά, θα αναφερθούμε στο γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{x} = A(t)x \quad (2.21)$$

και στο συζυγές του γραμμικό σύστημα:

$$\dot{p}' = -p'A(t) \quad (2.22)$$

όπου $p(t)$ είναι ένα διάνυσμα - στήλη μήκους n και κάθε λύση του είναι της μορφής $p(t) = p_0 \Phi(t)^{-1}$ όπου p_0 σταθερό διάνυσμα και $\Phi(t)$ ο θεμελιώδης πίνακας -

λύση του συστήματος (2.22) με $\Phi(t_0) = I$. Αν $p_0 \neq 0$, τότε η απόκριση $p(t)$ δεν μηδενίζεται στο διάστημα $[t_0, t_1]$. Στην περίπτωση των χρονικά ανεξάρτητων συστημάτων τα οποία περιγράφονται από εξίσωση της μορφής

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.23)$$

είναι $p(t) = e^{-(t-t_0)A} p_0$. [2]

Εισάγουμε την έννοια του κανονικού προβλήματος, που είναι θεμελιώδης για τη διατύπωση της αρχής του μεγίστου.

Ορισμός 2.4. Θεωρούμε το σύστημα (2.1) με συμπαγές σύνολο περιορισμών Ω και αρχική κατάσταση x_0 για χρόνο t_0 . Το πρόβλημα να οδηγηθεί το σύστημα (2.1) από την αρχική κατάσταση x_0 και με τον περιορισμό $u(\cdot) \in \Omega$ στο σύνολο-στόχο $G(\cdot)$ για χρόνο t_1 - δηλαδή το πρόβλημα $((2.1), \Omega, x_0, t_0, t_1)$ - ονομάζεται **κανονικό** [3], αν οποιοδήποτε δύο έλεγχοι $u_1(\cdot)$ και $u_2(\cdot)$ για $t_0 \leq t \leq t_1$ που οδηγούν το x_0 στο ίδιο σημείο του συνόρου $P_1 \in \partial M(t_1)$ είναι ίσοι σχεδόν παντού στο $[t_0, t_1]$.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου, θεωρούμε ότι το πρόβλημα $((2.1), \Omega, x_0, t_0, t_1)$ είναι κανονικό δηλαδή δεν υπάρχουν δύο διαφορετικοί έλεγχοι που μεταφέρουν το x_0 στο ίδιο σημείο του συνόρου $P_1 \in \partial M(t_1)$.

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί σημαντικό εργαλείο για τα προβλήματα ελέγχου αρίστου χρόνου για τα γραμμικά συστήματα (2.1). Μας εξασφαλίζει ότι ένας έλεγχος είναι ακρότατος, αν και μόνο αν ικανοποιεί την αρχή του μεγίστου.

Θεώρημα 2.2 (maximum principle [1],[3],[4],[5]). Έστω το γραμμικό σύστημα (2.1) με αρχική κατάσταση x_0 για την χρονική στιγμή t_0 και συμπαγές σύνολο περιορισμών Ω . Ένας έλεγχος $u(t) \in \Omega$ είναι ακρότατος στο $[t_0, t_1]$, αν και μόνο αν υπάρχει μια μη-τετριμμένη λύση $p(t)$ του συστήματος (2.23) τέτοια ώστε

$$p'(t)B(t)u(t) = \max_{u \in \Omega} p'(t)B(t)u \quad (2.24)$$

σχεδόν για κάθε t στο $[t_0, t_1]$.

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα κάνουμε την απόδειξη του θεωρήματος για την περίπτωση μιας μεταβλητής ελέγχου με περιορισμό $|u| \leq 1$, για αρχική χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και συμβολίζουμε με $b(\cdot) = B(\cdot)$ όπου $b(\cdot)$ πίνακας-στήλη του \mathbb{R}^n .

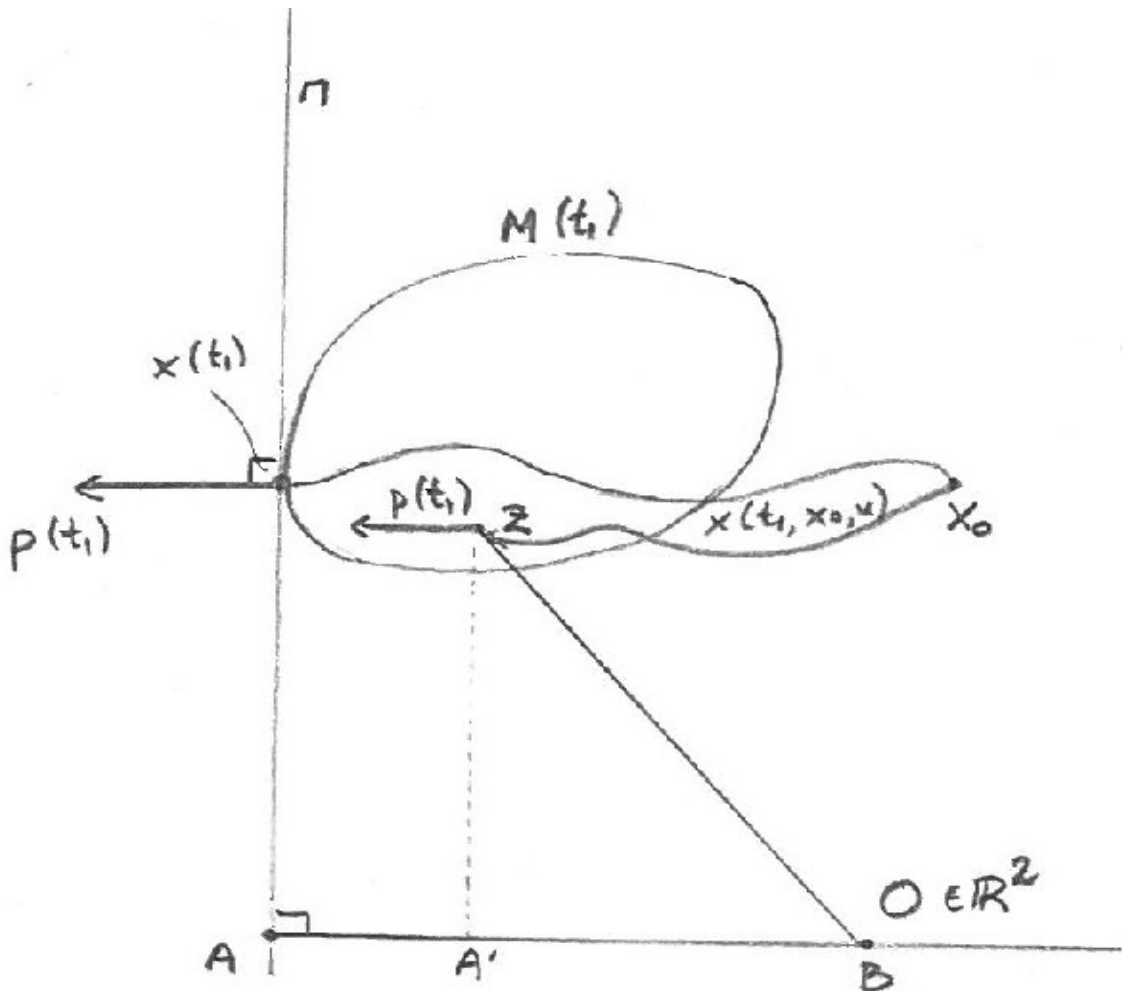
Υποθέτουμε ότι ο έλεγχος $u(\cdot)$ είναι ακρότατος στο $[t_0, t_1]$ και έτσι οδηγεί το x_0 στο $x(t_1) \in \partial M(t_1)$ διαγράφοντας τροχιά:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} [b(s)u(s) + v(s)] ds \quad (2.25)$$

Έστω ότι η (2.24) είναι ψευδής. Τότε υπάρχει ένα ανοικτό μη - κενό $I \in [t_0, t_1]$ έτσι ώστε:

$$\forall p_0 \neq 0 \quad p'(t)b(t)u(t) < \max_{u \in U} p'(t)b(t)u \quad \text{για κάθε } t \in I \quad (2.26)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας παίρνουμε $|p(t_1)|=1$ και έστω p_0 με $p'(t_1)=p_0'\Phi(t_1)^{-1}$. Θα δείξουμε ότι η συγκεκριμένη επιλογή του p_0 οδηγεί σε άτοπο.



Σχήμα 2.1 : Για κάθε ακρότατο έλεγχο $u(\cdot)$ με αντίστοιχη τροχιά $x(\cdot)$, ισχύει ότι :
 $p'(t_1)x(t_1) > p'(t_1)z \quad \forall z \in \text{int}M(t, x_0)$

Πράγματι , αφενός λόγω της κυρτότητας του προσιτού συνόλου $M(t_1, x_0)$:

$$p'(t_1)x(t_1) = AB \geq A'B = p'(t_1)z \quad \forall z \in M(t, x_0) \quad (2.27)$$

αφετέρου

$$p'(t_1)x(t_1) = p_0'\Phi(t_1)^{-1}(\Phi(t_1)x_0 + \Phi(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(s)^{-1}[b(s)u(s) + v(s)]ds) \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}
&= p_0' x_0 + \int_{t_0}^{t_1} p_0' \Phi(s)^{-1} [b(s)u(s) + v(s)] ds \\
&= p_0' x_0 + \int_{t_0}^{t_1} p'(s) [b(s)u(s) + v(s)] ds \\
&< p_0' x_0 + \int_{t_0}^{t_1} p'(s) [b(s)w(s) + v(s)] ds \\
&= p'(t_1) x(t_1, x_0, w)
\end{aligned}$$

με $z = x(t_1, x_0, w) \in M(t_1, x_0)$

όπου ο έλεγχος $w \in U$ ορίζεται ως εξής ^[5] :

$$\begin{aligned}
p'(t)bw(t) &= \max \{ p'(t)bu, u \in U \}, t \in I \\
w(t) &= u(t), t \in [t_0, t_1] \text{ και } t \notin I
\end{aligned}$$

άτοπο διότι από την (2.27), είναι $AB \geq A'B$ (βλ. Σχήμα 2.1). Καταλήγουμε σε άτοπο, και επομένως η (2.24) είναι αληθής.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάποια μη - τετριμμένη λύση της εξίσωσης $p'(t) = p_0' \Phi(t)^{-1}$, ο έλεγχος $w: [t_0, t_1] \rightarrow [0, 1]$ ικανοποιεί τη σχέση

$$p'(t)b(t)w(t) = \max_{|u| \leq 1} p'(t)b(t)u, \quad (2.29)$$

για κάθε $0 \leq t \leq t_1$. Δείχνουμε ότι η αντίστοιχη απόκριση $x(t)$ τερματίζει στο σύνορο του $M(t_1)$ και όχι σε κάποιο εσωτερικό του σημείο (βλ. Σχήμα 2.2), δηλαδή η τροχιά που προκύπτει από τον έλεγχο w που ικανοποιεί την αρχή του μεγίστου με αρχικό σημείο x_0 ανήκει στο εσωτερικό του προσιτού συνόλου M . Τότε θα υπάρχει $p_0 \neq 0$ ώστε $p'(t_1) = p_0' \Phi(t_1)^{-1}$ και όμοια με πριν, χωρίς βλάβη της γενικότητας παίρνουμε $|p(t_1)| = 1$.

Έστω ο έλεγχος

$$w = \begin{cases} p'(t)b(t), & t \in [t_0, t_1] : p'(t)b(t) > 0 \\ -p'(t)b(t), & t \in [t_0, t_1] : p'(t)b(t) < 0 \\ 0, & t \in [t_0, t_1] : p'(t)b(t) = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

που προφανώς ικανοποιεί την (2.29) και έστω τουναντίον $\bar{x} = x(t_1, x_0, w) \in \text{int } M(t_1)$. Όμως τότε (βλέπε Σχήμα 2.2), προκύπτει:

$$p'(t_1)\bar{x} = A'B < AB = p'(t_1)x \quad (2.31)$$

$$p'(t_1)x = p_0'x_0 + \int_{t_0}^{t_1} p'(s)[b(s)u(s)+v(s)]ds \quad (2.32)$$

Όμοια υπολογίζουμε το $p'(t_1)\bar{x}$:

$$\begin{aligned} p'(t_1)\bar{x} &= p'(t_1)(\Phi(t_1)x_0 + \Phi(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(s)^{-1}[b(s)w(s)+v(s)]ds) \\ &= p_0'\Phi(t_1)^{-1}(\Phi(t_1)x_0 + \Phi(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(s)^{-1}[b(s)w(s)+v(s)]ds) . \end{aligned}$$

Κάνουμε τις πράξεις και παίρνουμε :

$$p'(t_1)\bar{x} = p_0'x_0 + \int_{t_0}^{t_1} p'(s)[b(s)w(s)+v(s)]ds \quad (2.33)$$

Όμως :

$$p_0'x_0 + \int_{t_0}^{t_1} p'(s)[b(s)w(s)+v(s)]ds \geq p_0'x_0 + \int_{t_0}^{t_1} p'(s)[b(s)u(s)+v(s)]ds \quad (2.34)$$

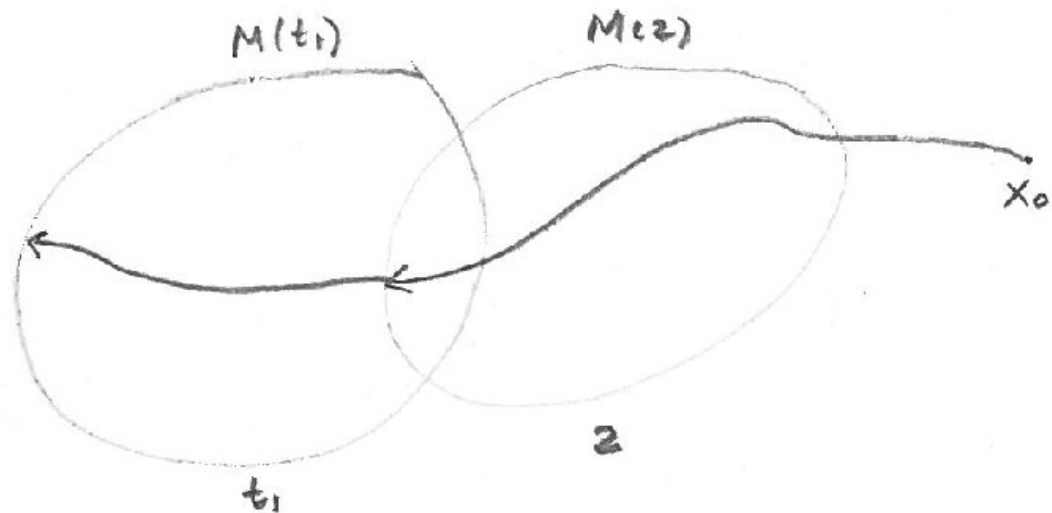
επειδή $|u| \leq 1$ και από τον ορισμό του ελέγχου w (σχέση 2.30).

Προκύπτει τελικά από τις (2.32), (2.33), (2.34) ότι $p'(t_1)\bar{x} \geq p'(t_1)x$ άτοπο, διότι αντιβάνει στην (2.31). □

Πόρισμα 2.2. Έστω $u(t) \in \Omega$ για $t_0 \leq t \leq t_1$ ένας ακρότατος έλεγχος για το σύστημα (2.1) με αντίστοιχη απόκριση $x(t)$ και συζυγή απόκριση $p(t)$ τέτοιες ώστε

$$p'(t)B(t)u(t) = \max_{u \in \Omega} p'(t)B(t)u \quad (2.35)$$

σχεδόν παντού για $t_0 \leq t \leq t_1$. Τότε σε κάθε υποδιάστημα $t_0 \leq t \leq \tau \leq t_1$, ο έλεγχος $u(t)$ είναι ακρότατος και η αντίστοιχη απόκριση του ανήκει στο σύνορο του προσιτού συνόλου του χρόνου τ δηλαδή $x(\tau) \in \partial M(\tau)$ (βλ. Σχήμα 2.3). Ακόμη, το διάνυσμα της συζυγούς απόκρισης $p(\tau)$ για χρόνο τ , είναι κάθετο στο υπερεπίπεδο π το οποίο διαχωρίζει το προσιτό σύνολο του συνόλου $M(\tau)$ από τον υπόλοιπο χώρο κατάστασης, εφάπτεται του $\partial M(\tau)$ και δείχνει έξω από αυτό.



Σχήμα 2.3

Πόρισμα 2.3 . Έστω $M(t)$ για $t_0 < t \leq t_1$ το προσιτό σύνολο για το σύστημα (2.1) . Αν για κάποιο χρόνο τ στο (t_0, t_1) το σύνολο $M(\tau)$ έχει μη - κενό εσωτερικό τότε το $M(t)$ έχει μη - κενό εσωτερικό για κάθε $\tau < t < t_1$.

Απόδειξη : Αποδεικνύουμε το πόρισμα με την εις άτοπο απαγωγή , υποθέτοντας ότι το $M(t)$ έχει κενό εσωτερικό . Επομένως , η απόκριση $x(t)$ ανήκει στο σύνορο του $M(t)$. Άρα , η τροχιά $x(t)$ είναι ακρότατη και ο αντίστοιχος έλεγχος $u(t)$ είναι ακρότατος . Από το Πόρισμα 2.2 όμως , βρίσκουμε ότι αν ο έλεγχος $u(t)$ είναι ακρότατος για $t_0 < t < t_1$, τότε και ο έλεγχος $u(\tau)$ είναι ακρότατος για $\tau < t < t_1$ και άρα η απόκριση $x(\tau)$ ανήκει στο σύνορο του $M(\tau)$ που είναι άτοπο διότι το σύνολο $M(\tau)$ έχει μη - κενό εσωτερικό .

□

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε την αρχή του μεγίστου για τη γενική περίπτωση . Η αρχή του μεγίστου αποτελεί μια αναγκαία συνθήκη η οποία πρέπει να ικανοποιείται από μια ακρότατη τροχιά του δυναμικού συστήματος

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.36)$$

στο διάστημα $[0, T]$ δηλαδή να κατέχει την ιδιότητα :

$$x(T, x_0, u) \in \partial A(T, x_0) \quad (2.37)$$

Υιοθετούμε τους συμβολισμούς :

$$\triangleright H(p, x, u) = p'f(x, u) = p_1 f_1(x, u) + \dots + p_n f_n(x, u)$$

Η συνάρτηση $H(\cdot)$ ονομάζεται η συνάρτηση Hamiltonian ^{[1],[3],[4],[5]} του συστήματος (2.36) .

$$\triangleright m(p, x) = \max \{H(p, x, u), u \in D\}$$

Ακολουθεί η διατύπωση της αρχής του μεγίστου.

Θεώρημα 2.3 : Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και υποθέτουμε ότι κάθε λύση $x(\cdot, x_0, u)$ ορίζεται για κάθε διάστημα $[0, T]$ για κάθε αποδεκτό έλεγχο $u \in U$ και ότι ο έλεγχος u είναι ακρότατος στο διάστημα $[0, T]$.

Τότε θα υπάρχει μια μη μηδενική λύση $p = p(t)$ της συζυγούς εξίσωσης :

$$\dot{p}' = -p' \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)) \quad (2.38)$$

- όπου $x(t)$ είναι η εξίσωση τροχιάς $x(t) = x(t, x_0, u)$ - που ικανοποιεί :

$$H(p(t), x(t), u(t)) = \max_{u \in D} H(p(t), x(t), u) \quad \text{σχεδόν για κάθε } t \in [0, T] \quad (2.39)$$

Εδώ σημειώνουμε ότι το $\max_{u \in D} H(p(t), x(t), u)$ θα υπάρχει σχεδόν για κάθε $t \in [0, T]$ όταν το D είναι συμπαγές. Αν όντως το D είναι συμπαγές, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το u σταθερό και ίσο με μια τιμή που μεγιστοποιεί το $m(p(t), x(t))$ κι η (2.39) γράφεται :

$$H(p(t), x(t), u(t)) = m(p(t), x(t)) \quad \text{σχεδόν για κάθε } t \in [0, T] \quad (2.40)$$

Στην περίπτωση αυτή και σχεδόν για κάθε $t \in [0, T]$ ισχύει :

$$m(p(t), x(t)) = k \quad (2.41)$$

Έχουμε αρχικά δείξει ότι ο βέλτιστος έλεγχος - τουλάχιστον για τα γραμμικά συστήματα που θα μας απασχολήσουν - είναι ακρότατος. Στη συνέχεια, δηλώσαμε την αρχή του μεγίστου η οποία πρέπει να ικανοποιείται από μία ακρότατη τροχιά του (2.36). Τώρα διατυπώνουμε την αρχή του μεγίστου για προβλήματα που συνίστανται στην ελαχιστοποίηση του κόστους :

$$J(u) = \int_0^t f_0(x(s), u(s)) ds \quad (2.42)$$

με $f_0: \mathbb{R}^n * \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσεως C^1 για δοσμένη αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ του γενικού συστήματος (2.36).

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.3, μπορούμε να εξάγουμε τις αναγκαίες συνθήκες για το πρόβλημα αρίστου χρόνου για την περίπτωση του συστήματος (2.36) με κόστος όπως δίνεται από την (2.42). Για να το επιτύχουμε αυτό, θεωρούμε το σύστημα :

$$\begin{aligned} \dot{x}^0 &= f_0(x, u) \\ \dot{x} &= f(x, u) \end{aligned} \quad , \quad (x^0, x; u) \in \mathbb{R}^{n+1} * \mathbb{R}^m \quad (2.43)$$

που επεκτείνει το (2.36) με κατάσταση $(\dot{x}^0, x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^n$ όπου $f_0(\cdot)$ η προς ολοκλήρωση συνάρτηση του συναρτησιακού (2.42). Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση Hamiltonian του εκτεταμένου συστήματος (2.43) :

$$H_0 = p_0 f_0 + p_1 f_1 + \dots + p_n f_n \quad (2.44)$$

Ορίζουμε επίσης την απεικόνιση

$$H'(p, x, u) = H_0 |_{p_0=-1} = -f_0 + pf \quad (2.45)$$

Βάζουμε στο συντελεστή p_0 την τιμή -1 γιατί επιδιώκουμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος και προσπαθούμε να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση Hamiltonian .

Παρατήρηση 2.1 : Ισοδύναμα , στις εφαρμογές που θα δούμε παρακάτω , βάζουμε $p_0 = 1$ και προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση Hamiltonian . Ακόμη , θέτουμε $f_0 = 1$ επειδή αντιμετωπίζουμε πρόβλημα ελέγχου αρίστου χρόνου (βλ. και σχέση (1.4)). Από την (2.44) , σκοπός μας είναι τελικά να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση ^[3] :

$$H(p, x, u) = H_0 |_{p_0=+1} = 1 + pf \quad (2.46)$$

Με βάση τα προηγούμενα , παίρνουμε τις αναγκαίες συνθήκες για την επιλυσιμότητα του προβλήματος ελαχιστοποίησης του κόστους (2.42).

Θεώρημα 2.4 : Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και υποθέτουμε ότι κάθε λύση $x(\cdot, x_0, u)$ ορίζεται για κάθε διάστημα $[0, T]$ για κάθε αποδεκτό έλεγχο $u \in U$ και έστω ένας έλεγχος $u^* \in \Omega$ που ελαχιστοποιεί το κόστος $J(\cdot)$:

$$\min J(u) = J(u^*) = \int_0^{T^*} f_0(x^*(s), u^*(s)) ds \quad , \quad T^* < \infty$$

όπου $x^*(\cdot) = x(\cdot, x_0, u^*)$ με $x^*(0) = x_0$. Τότε υπάρχει λύση $p(\cdot)$ της συζυγούς εξίσωσης ^{[1],[3],[4],[5]} :

$$\begin{aligned} \dot{p}' &= -p_0 \frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*(t), u^*(t)) - p' \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t)) \quad , \quad t \in [0, T^*] \\ &= -\frac{\partial H(p, x, u)}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.47)$$

με $p_0 \leq 0$ κατάλληλη σταθερά και $(p_0, p) \neq 0$ έτσι ώστε

$$1. \quad H_0(p(t), x^*(t), u^*(t)) = \max \{H_0(p(t), x^*(t), u), u \in D\} \quad (2.48)$$

σχεδόν για κάθε $t \in [0, T^*]$

2. Αν το D είναι συμπαγές, τότε το δεξί μέλος της (2.48) ορίζεται για κάθε $t \in [0, T^*]$ κι η λύση $p(\cdot)$ της (2.47) μπορεί να επιλεγεί ώστε :

$$H_0(p(t), x^*(t), u^*(t)) = \max \{H_0(p(t), x^*(t), u), u \in D\} = k \quad (\text{σταθερά}) \quad (2.49)$$

σχεδόν για κάθε $t \in [0, T^*]$

3. Αν δεν υφίστανται περιορισμοί στο άκρο ολοκλήρωσης T η σταθερά k στην (2.49) μπορεί να επιλεγεί $k=0$ για κατάλληλο $p(\cdot)$.

4. Αν δεν υφίστανται περιορισμοί στην τελική κατάσταση $x(T^*, x_0, u)$ τότε υπάρχει λύση $p(\cdot)$ της (2.47) έτσι ώστε ισχύει η (2.48) - ή αντίστοιχα η (2.49) αν το D είναι συμπαγές - με $p_0 = -1$. Ισοδύναμα, με βάση τον ορισμό (2.45)

$$H'(p(t), x^*(t), u^*(t)) = \max \{H'(p(t), x^*(t), u), u \in D\} \quad (2.50)$$

σχεδόν για κάθε $t \in [0, T^*]$

και επιπλέον η $p(\cdot)$ θα ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη

$$p(T^*)=0 \quad (2.51)$$

Ειδικά, για την περίπτωση γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.52)$$

από το θεώρημα 2.4 και την αναγκαία συνθήκη 4 υπάρχει λύση $p(\cdot)$ της συζυγούς εξίσωσης :

$$\dot{p}' = -\frac{\partial H(p, x, u)}{\partial x}$$

τέτοια ώστε

$$H'(p(t), x^*(t), u^*(t)) = \max \{H'(p(t), x^*(t), u), u \in D\} \quad (2.53)$$

σχεδόν για κάθε $t \in [0, T^*]$

ή :

$$\begin{aligned} -f_0 + p(t)(Ax(t) + Bu(t)) &= -f_0 + \max_{u \in D} \{p(t)(Ax(t) + Bu)\} && \Rightarrow \\ + p(t)(Ax(t) + Bu(t)) &= + \max_{u \in D} \{p(t)(Ax(t) + Bu)\} && \Rightarrow \\ + p(t)(Ax(t) + u(t)) &= + p(t)Ax(t) + \max_{u \in D} \{+ p(t)Bu\} && \Rightarrow \end{aligned}$$

$$+ p(t)Bu(t) = + \max_{u \in D} \{+p(t)Bu\} \quad (2.53)$$

Σημειώνουμε ότι η συνθήκη (2.53) που εξάγαμε από την αρχή του μεγίστου για γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα της μορφής (2.52) είναι ίδια με την συνθήκη (2.24) που πήραμε για τα γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα (2.1).

2.3. ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΑΡΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Περνάμε τώρα στο ζήτημα της μοναδικότητας του αρίστου ελέγχου και επανερχόμαστε στην έννοια του κανονικού προβλήματος . Στο προηγούμενο θεώρημα , είδαμε ότι ένας έλεγχος $u(t)$ οδηγεί την αρχική κατάσταση x_0 στο σύνορο $\partial M(t_1)$ του προσιτού συνόλου $M(t_1)$ μόνο αν

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{u \in \Omega} p(t)B(t)u \quad \text{σχεδόν για κάθε } t \in [t_0, t_1] \quad (2.54)$$

για μία κατάλληλη συζυγή απόκριση $p(t)$. Εξετάζουμε αν για κάθε σημείο $P_1 \in \partial M(t_1)$ του συνόρου του προσιτού συνόλου $M(t)$, ο έλεγχος $u(t) \in \Omega$ για $t_0 \leq t \leq t_1$ που μεταφέρει την αρχική μας κατάσταση x_0 στο P_1 είναι μοναδικός .

Θεώρημα 2.5 . Έστω το σύστημα (2.1) με συμπαγές σύνολο περιορισμών Ω και αρχική κατάσταση x_0 για κάποια χρονική στιγμή t_0 . Το πρόβλημα ((2.1), Ω , x_0, t_0, t_1) είναι κανονικό αν και μόνο αν ισχύει : για κάθε μη – μηδενική λύση $p(t)$ του $\dot{p}' = -p'A(t)$ και για δύο οποιουδήποτε ελέγχους $u_1(\cdot)$ και $u_2(\cdot) \in \Omega$ που ικανοποιούν την αρχή του μεγίστου , δηλαδή :

$$p(t)B(t)u_1(t) = p(t)B(t)u_2(t) = \max_{u \in \Omega} p(t)B(t)u \quad (2.55)$$

σχεδόν παντού για $t_0 \leq t \leq t_1$

οι έλεγχοι $u_1(\cdot)$ και $u_2(\cdot)$ είναι ίδιοι στο $[t_0, t_1]$ δηλαδή

$$u_1(\cdot) = u_2(\cdot) \quad \text{σχεδόν παντού για } t_0 \leq t \leq t_1 \quad (2.56)$$

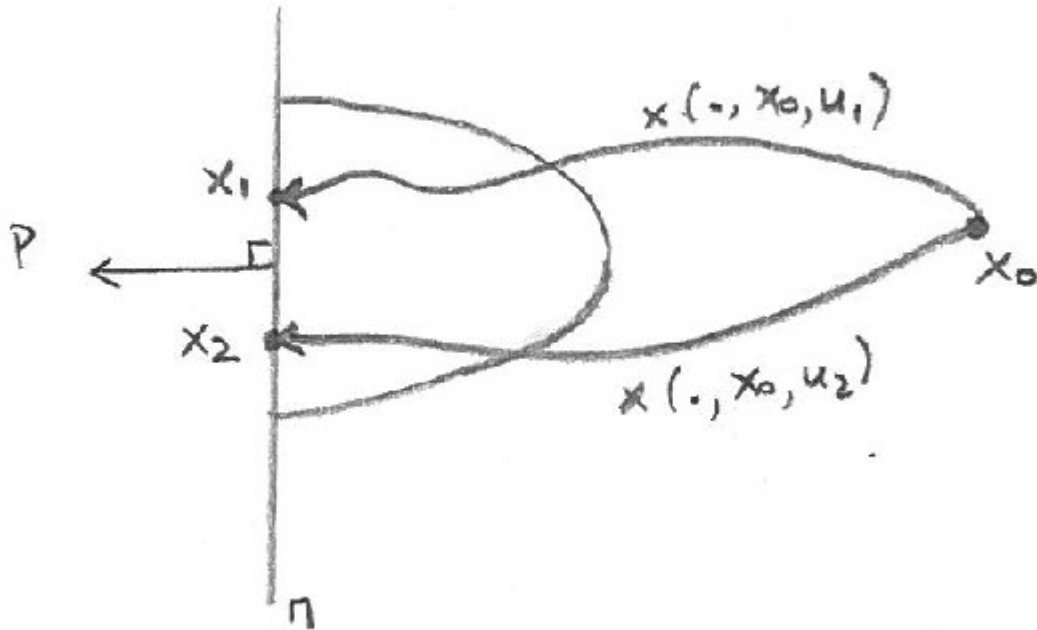
Αν το πρόβλημα είναι κανονικό και το Ω περιέχει παραπάνω από ένα σημεία , τότε το προσιτό σύνολο $M(t_1)$ είναι αυστηρά κυρτό δηλαδή για $x_1, x_2 \in M(t)$ είναι :

$$lx_1 + (1-l)x_2 \subset \text{int}M(t) \quad \text{για } 0 < l < 1 \quad (2.57)$$

Άρα το $M(t_1)$ είναι ένα συμπαγές αυστηρά κυρτό σύνολο με μη – κενό εσωτερικό .

Απόδειξη : Για λόγους απλότητας , θα κάνουμε την απόδειξη για την περίπτωση μίας μεταβλητής ελέγχου $u(\cdot)$. Συμβολίζουμε με $b(\cdot) = B(\cdot)$ όπου $b(\cdot)$ πίνακας – στήλη του

\mathbb{R}^n . Υποθέτουμε ότι το σύνολο Ω περιέχει περισσότερα από ένα σημεία. Έστω τουναντίον ότι το $M(t)$ δεν είναι αυστηρά κυρτό. Θεωρούμε καταστάσεις $x_1(\cdot, x_0, u_1)$ και $x_2(\cdot, x_0, u_2)$ στο σύνορο του $M(t)$ (βλ. Σχήμα 2.4).



Σχήμα 2.4: οι δύο αποκρίσεις x_1 και x_2 που προκύπτουν από τους ακροτάτους ελέγχους u_1 και u_2

Προφανώς, οι έλεγχοι u_1 και u_2 είναι ακρότατοι. Άρα σχεδόν για όλους τους χρόνους t στο $[t_0, t_1]$ τόσο ο u_1 όσο και ο u_2 ικανοποιούν την αρχή του μεγίστου. Επομένως:

$$u_1(t) = u_2(t) = \text{sgn}(p'(t)b(t)) \text{ , σχεδόν παντού στο } [t_0, t_1]$$

άρα $u_1 \equiv u_2$ που συνεπάγεται ότι $x(t, x_0, u_1) \equiv x(t, x_0, u_2)$ για κάθε $t \in [0, t_1]$. Επομένως, $x_1 (= x(t_1, x_0, u_1)) = x_2 (= x(t_1, x_0, u_2))$, που είναι άτοπο διότι $x_1 \neq x_2$. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα το $M(t_1)$ είναι αυστηρά κυρτό.

Τώρα δείχνουμε ότι αν το πρόβλημα $((2.1), \Omega, x_0, t_0, t_1)$ είναι κανονικό, δύο οποιοδήποτε έλεγχοι u_1 και u_2 που ικανοποιούν την αρχή του μεγίστου, είναι ίσοι σχεδόν παντού. Πράγματι, θεωρούμε τη συζυγή απόκριση $p(t)$ και το υπερεπίπεδο π που διαχωρίζει το προσιτό σύνολο $M(t_1)$ από τον υπόλοιπο χώρο κατάστασης και εφάπτεται στο σύνορο του προσιτού συνόλου $\partial M(t_1)$. Το π περιέχει μόνο το σημείο $P_1 = x(t_1, x_0, u)$ γιατί το προσιτό σύνολο είναι αυστηρά κυρτό. Αν $\hat{u}_1(\cdot)$ και $\hat{u}_2(\cdot)$ είναι δύο έλεγχοι που ικανοποιούν

$$p'(t)B(t)\hat{u}_1(t) = p'(t)B(t)\hat{u}_2(t) = \max_{u \in \Omega} p'(t)B(t)u \text{ (2.58)}$$

σχεδόν για κάθε $t \in [t_0, t_1]$

τότε και ο $\hat{u}_1(\cdot)$ και ο $\hat{u}_2(\cdot)$ μεταφέρουν το x_0 στο μοναδικό σημείο P_1 της τομής $\pi \cap M(t_1)$. Επειδή το πρόβλημα $((2.1), \Omega, x_0, t_0, t_1)$ είναι κανονικό :

$$\hat{u}_1(\cdot) = \hat{u}_2(\cdot) \text{ σχεδόν παντού στο } [t_0, t_1] \quad (2.59)$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι δύο οποιοδήποτε έλεγχοι u_1 και u_2 που ικανοποιούν την αρχή του μεγίστου, είναι ίσοι σχεδόν παντού. Θεωρούμε $P_1 \in \partial M(t_1)$ και $p(t)$ μια μη – τετριμμένη συζυγή απόκριση με το διάνυσμα $p(t_1)$ να δείχνει έξω από το π . Έστω δύο έλεγχοι $u_1(\cdot)$ και $u_2(\cdot) \subset \Omega$ που οδηγούν το x_0 στο P_1 . Επειδή $P_1 \in \partial M(t_1)$, και οι δύο έλεγχοι $u_1(\cdot)$ και $u_2(\cdot) \subset \Omega$ είναι ακρότατοι. Άρα ικανοποιούν την αρχή του μεγίστου :

$$p'(t)B(t)\hat{u}_1(t) = p'(t)B(t)\hat{u}_2(t) = \max_{u \in \Omega} p'(t)B(t)u \text{ σχεδόν παντού}$$

Όμως από την υπόθεση μοναδικότητας, συμπεραίνουμε ότι

$$\hat{u}_1(\cdot) = \hat{u}_2(\cdot) \text{ σχεδόν παντού στο } [t_0, t_1] \quad (2.60)$$

το πρόβλημα $((2.1), \Omega, x_0, t_0, t_1)$ είναι κανονικό. □

Πόρισμα 2.4. Αν το πρόβλημα $((2.1), \Omega, x_0, t_0, t_1)$ είναι κανονικό, τότε για κάθε τ στο $[t_0, t_1]$ το πρόβλημα $((2.1), \Omega, x_0, t_0, \tau)$ είναι κανονικό.

2.4. Η ΑΡΧΗ BANG - BANG

Σημειώνουμε ότι όποια και αν είναι η τελική κατάσταση $x_1(\cdot)$ εντός του προσιτού συνόλου στην οποία καταλήγει η τροχιά μέσω του ελέγχου $u(\cdot) \in \Omega$, στην ίδια κατάσταση μπορεί να μας μεταφέρει και κάποιος έλεγχος $u(\cdot)$ που ανήκει στο σύνορο του συνόλου περιορισμών $\partial \Omega$. Δηλαδή δεν χρειάζεται να επιλέγουμε παρά μόνο ανάμεσα σε ελέγχους που ανήκουν στο σύνορο $\partial \Omega$ του συνόλου περιορισμών Ω δηλαδή αν $u(\cdot)$ ο βέλτιστος έλεγχος, τότε είναι $u(\cdot) \in \partial \Omega$. Επομένως, ο έλεγχος θα είναι τμηματικά σταθερός. Ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Θεώρημα 2.6 (bang – bang principle) ^{[1],[3],[5]}. Έστω το γραμμικό σύστημα (2.1) με σύνολο περιορισμών Ω και αρχική κατάσταση x_0 για χρόνο t_0 . Έστω Ω_0 ένα συμπαγές υποσύνολο του Ω που έχει τον ίδιο κυρτό φλοιό με το Ω δηλαδή ισχύει

$$H(\Omega_0) = H(\Omega) \quad (2.63)$$

Έστω $M(t_1)$ το προσιτό σύνολο για όλους τους ελέγχους $u(t) \subset \Omega$ στο $[t_0, t_1]$ και $M_0(t_1)$ το αντίστοιχο προσιτό σύνολο για τους ελέγχους $u(t) \subset \Omega_0$ στο $[t_0, t_1]$.

Τότε το προσιτό σύνολο $M(t)$ είναι συμπαγές και κυρτό και ισχύει

$$M(t_1) = M_0(t_1) \quad (2.64)$$

Πόρισμα 2.5. Έστω $\Omega_1 = \partial\Omega$ για το συμπαγές σύνολο περιορισμών Ω . Τότε για τα αντίστοιχα προσιτά σύνολα $M(t_1)$ και $M_1(t_1)$, ισχύει:

$$M(t_1) = M_1(t_1) \quad (2.65)$$

Πόρισμα 2.6. Αν Ω είναι ένα κυρτό πολύτοπο με κορυφές Ω_2 , τότε για τα αντίστοιχα προσιτά σύνολα $M(t_1)$ και $M_2(t_1)$, ισχύει:

$$M(t_1) = M_2(t_1) \quad (2.66)$$

Παράδειγμα: Για το γραμμικό σύστημα (2.1), θεωρούμε ως συμπαγές σύνολο περιορισμών Ω , τον κύβο m -διαστάσεων $|u_i| \leq 1$ για $i = 1, \dots, m$. Τότε μπορούμε να οδηγηθούμε σε κάθε σημείο στο $M(t_1)$, χρησιμοποιώντας έναν έλεγχο bang-bang με

$$|u_j(t)| = 1 \quad \text{στο} \quad [t_0, t_1] \quad (2.67)$$

3. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΓΙΑ ΑΥΤΟΝΟΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

3.1. ΤΟ ΠΡΟΣΙΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΓΙΑ ΑΥΤΟΝΟΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Έστω το αυτόνομο γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

όπου ο πίνακας A είναι πραγματικός διαστάσεων $n \times n$ και ο B επίσης πραγματικός $n \times m$ διαστάσεων. Κάνουμε κάποιες απλοποιήσεις στο σύστημα (3.1) σε σχέση με το (2.1) οι οποίες όμως στη συνέχεια δεν μας περιορίζουν αφού τα συστήματα με τα οποία ασχολούμαστε, είναι γραμμικά της μορφής (3.1). Δεχόμαστε ότι οι πίνακες συντελεστών A , B δεν μεταβάλλονται με το χρόνο. Για αποφυγή σύγχυσης θα υιοθετήσουμε στην παρούσα παράγραφο το συμβολισμό $A(t, x)$ για την περίπτωση των προσιτών συνόλων για κάποια χρονική στιγμή t και αρχική κατάσταση $x^{[5]}$, όταν ο χώρος εισόδων Ω δεν υφίσταται περιορισμούς, ενώ με $M(t, x)$ συνεχίζουμε να συμβολίζουμε το υποσύνολο του $A(t, x)$ για να παραστήσουμε το προσιτό σύνολο για κάποια χρονική στιγμή t και αρχική κατάσταση x που αντιστοιχεί στην περίπτωση $\Omega = U$, όταν δηλαδή ο χώρος εισόδων του (3.1) υφίσταται τον περιορισμό:

$$u \in U := [a_i, b_i]^m \quad \text{με} \quad a_i \leq b_i, \text{ για} \quad \text{κάθε} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.2)$$

Όπως και στα προηγούμενα, εστιάζουμε στην περίπτωση $a_i = -1$ και $b_i = +1$.

Ασχολούμαστε πρώτα με την περίπτωση όπου το Ω δεν υφίσταται περιορισμούς. Όπως συμφωνήσαμε, δηλώνουμε με $A(t, x_0)$ το προσιτό σύνολο, χρόνου t και αρχικής συνθήκης x_0 .

1. Το $A(t, 0)$ είναι γραμμικός υποχώρος του \mathbb{R}^n :

$$A(t, 0) \leq \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0 \quad (3.3)$$

2. Το $A(t, x_0)$ είναι γραμμική πολλαπλότητα του \mathbb{R}^n :

$$A(t, x_0) = e^{At}x_0 + A(t, 0), \forall t \geq 0 \quad (3.4)$$

Γεωμετρική ερμηνεία της (3.4) στον \mathbb{R}^3 : Το $A(t, x_0)$ “διέρχεται” από το διάνυσμα $e^{At}x_0$ κι είναι παράλληλο ως προς το επίπεδο $A(t, 0)$.

Απόδειξη της (3.3): Έστω $x_1, x_2 \in A(t, 0)$. Δείχνουμε ότι για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ έπεται $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A(t, 0)$.

Πράγματι,

$$x_i = \int_0^t e^{A(t-r)} B u_i(r) dr \quad i=1,2 \quad (3.5)$$

για κάποια $u_1, u_2 \in \Omega$ (χωρίς περιορισμούς). Επειδή ο Ω είναι γραμμικός χώρος έχουμε

$$u := \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in \Omega$$

και άρα από την (3.5) παίρνουμε

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \int_0^t e^{A(t-r)} B u(r) dr \in A(t, 0)$$

που σημαίνει ότι το $A(t, 0)$ είναι γραμμικός χώρος. □

Για την περίπτωση όπου το Ω υφίσταται περιορισμούς της μορφής (3.2) έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα. Υπενθυμίζουμε ότι τώρα τα προσιτά σύνολα συμβολίζονται με $M(t, x_0)$.

Αν $\Omega = U$, τότε πληρούνται οι παρακάτω ιδιότητες :

(α) $M(t, x_0) = e^{At}x_0 + M(0, x_0)$, $\forall t \geq 0, x_0 \in \mathbb{R}^n$

(β) Το σύνολο $M(t, x_0)$ είναι κυρτό

(γ) $M(t, x_0) \subset A(t, x_0)$, επιπλέον για κάθε $t > 0$ το $M(t, x_0)$ έχει ανοικτό εσωτερικό M_0 ως προς την τοπολογία του $A(t, x_0)$ και το M_0 περιέχει το $e^{At}x_0$ ^[5]

(δ) Το σύνολο $M(t, x_0)$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη : Για την απόδειξη των παραπάνω ισχυρισμών , περιοριζόμαστε για απλότητα σε συστήματα μιας εισόδου

$$\dot{x} = Ax + ub \quad (3.6)$$

όπου δηλαδή το αποδεκτό σύνολο εισόδων u περιλαμβάνει όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $u: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με περιορισμό

$$|u(\cdot)| \leq 1 \quad (3.7)$$

Η απόδειξη του (α) είναι απλή και προκύπτει από τις τροχιές – λύσεις του συστήματος (3.6) με αρχικά σημεία τα 0 και x_0 .

Έχουμε δείξει ότι το $M(t, x_0)$ είναι κυρτό για την περίπτωση του χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος (2.1) . Στη συνέχεια , δείχνουμε ότι επιπλέον για κάθε $0 \leq \lambda \leq 1$ και $x_1, x_2 \in M(t, x_0)$, είναι

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in M(t, x_0) \quad (3.8)$$

Έχουμε

$$x_i = \int_0^t e^{A(t-r)} b u_i(r) dr \quad i=1,2 \quad \text{με} \quad |u_i(\cdot)| \leq 1 \quad (3.9)$$

Όμως το U είναι κυρτό . Άρα $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in U$ και από την (3.9) :

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = \int_0^t e^{A(t-r)} b (\lambda u_1(r) + (1-\lambda)u_2(r)) dr \in M(t, x_0) \quad (3.10)$$

άρα το $M(t, x_0)$ είναι κυρτό .

Για να αποδείξουμε το (γ) , χωρίς βλάβη της γενικότητας εξετάζουμε την περίπτωση $x_0 = 0$. Το $M(t, 0) \subset A(t, 0)$ είναι προφανές . Συγκεκριμένα , δείχνουμε ότι το $M(t, 0)$ είναι μια γειτονιά του 0 που βρίσκεται στο $A(t, 0)$.

Έστω ότι $\dim(A, t_0) = 2$. Θεωρούμε x_1 και x_2 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα που ανήκουν στο $A(t, 0)$. Τότε :

$$x_1 = x(t, 0, u_1) = \int_0^t e^{A(t-s)} b u_1(s) ds \Rightarrow \quad (3.11)$$

$$\frac{x_1}{\|u_1\|} = \int_0^t e^{A(t-s)} b \frac{u_1}{\|u_1\|} ds = x(t, 0, v_1) = \xi_1 \in M(t, 0) \quad \text{όπου} \quad \frac{u_1}{\|u_1\|} = v_1$$

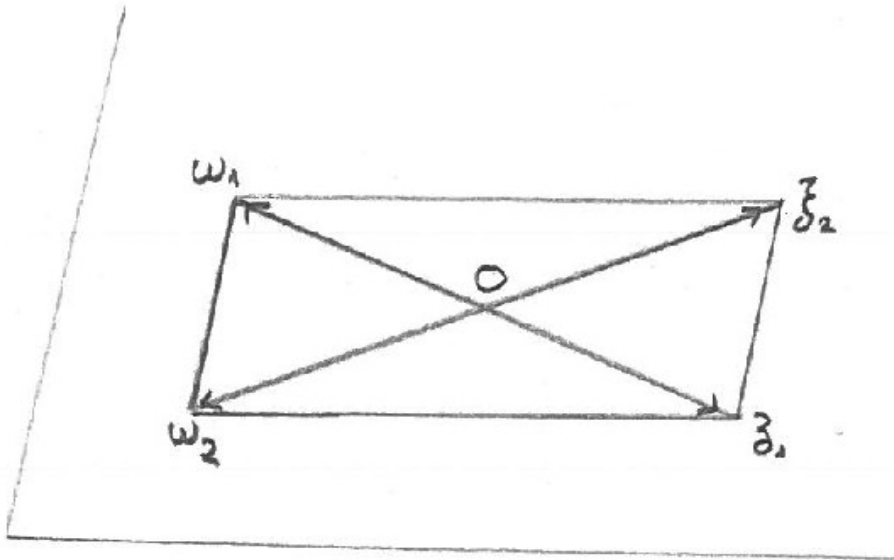
$$x_2 = x(t, 0, u_2) = \int_0^t e^{A(t-s)} b u_2(s) ds \Rightarrow \quad (3.12)$$

$$\frac{x_2}{\|u_2\|} = \int_0^t e^{A(t-s)} b \frac{u_2}{\|u_2\|} ds = x(t, 0, v_2) = \xi_2 \in M(t, 0) \quad \text{όπου} \quad \frac{u_2}{\|u_2\|} = v_2$$

Εξ ορισμού $|v_1|, |v_2| \leq 1$, άρα $v_1, v_2 \in M(t, 0)$. Επίσης ορίζουμε :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\xi_1 = \int_0^t e^{A(t-s)} b (-v_1) ds \\ \omega_2 &= -\xi_2 = \int_0^t e^{A(t-s)} b (-v_2) ds \end{aligned} \quad (3.13)$$

Άρα $\omega_1, \omega_2 \in M(t, 0)$, αφού $|v_1|, |v_2| \leq 1$, και επομένως $|\omega_1|, |\omega_2| \leq 1$.



Σχήμα 3.1 : Το παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται από τα x_1, x_2, ω_1 και ω_2

Το 0 ανήκει επίσης στο $M(t, 0)$. Επομένως το παραλληλόγραμμο, που προκύπτει από τον κυρτό συνδυασμό των $\xi_1, \xi_2, \omega_1, \omega_2$ και μηδέν (βλ. Σχήμα 3.1) ανήκει στο $M(t, 0)$ και έτσι καταλήγουμε ότι το $M(t, 0)$ έχει όντως μη-κενό εσωτερικό ως προς την τοπολογία του $A(t, 0)$.

Το (δ) αποδεικνύεται με επιχειρήματα παρόμοια με την περίπτωση του χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος (2.1). □

3.2. ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΑΥΤΟΝΟΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ορίζουμε την ελεγχιμότητα ενός γραμμικά χρονικά αμετάβλητου συστήματος (3.1) στην περίπτωση που δεν υπάρχουν περιορισμοί στον έλεγχο δηλαδή $u \in \mathbb{R}^m$.

Ορισμός 3.1. Το σύστημα (3.1) με $\Omega = \mathbb{R}^m$ είναι **ελέγξιμο** ^{[1],[2],[3],[5]} αν για κάθε ζευγάρι σημείων x_0 και $x_1 \neq x_0$ στο R^n , υπάρχει ένας φραγμένος και μετρήσιμος έλεγχος $u(\cdot)$ που σε κάποιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq t_1$ οδηγεί το x_0 στο x_1 .

Στρεφόμαστε στο πρόβλημα μεταφοράς του συστήματος (3.1) από μία αρχική κατάσταση στην αρχή στον ελάχιστο χρόνο με την εφαρμογή ενός ελέγχου από το σύνολο περιορισμών $u \in U : |u_i| \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, m$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα κριτήριο για την ελεγχσιμότητα των αυτόνομων γραμμικών συστημάτων για την περίπτωση φραγμένων ελέγχων $u \in U$.

Θεώρημα 3.1. Το σύστημα (3.1) είναι ελέγξιμο στο \mathbb{R}^n αν και μόνο αν ο πίνακας

$$[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (3.14)$$

διαστάσεων $n \times nm$ έχει τάξη n . ^{[2],[3],[5]}

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το (3.1) είναι ελέγξιμο και άρα το x_0 μπορεί να μεταφερθεί σε ένα τυχαίο σημείο $x_1 \neq x_0$ του R^n . Ακόμη υποθέτουμε ενάντια στο θεώρημα ότι

$$\text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] < n \quad (3.15)$$

Τότε οι σειρές του πίνακα είναι γραμμικά εξαρτημένες και υπάρχει ένα μη – μηδενικό διάνυσμα – σειρά ώστε

$$v[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = 0 \quad (3.16)$$

ή αλλιώς

$$vB = vAB = vA^2B = \dots = vA^{n-1}B = 0 \quad (3.17)$$

Από το θεώρημα Cayley – Hamilton, γνωρίζουμε ότι ένας πίνακας A ικανοποιεί τη χαρακτηριστική του εξίσωση:

$$A^n = c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \dots + c_n I \quad (3.18)$$

για πραγματικούς αριθμούς c_1, c_2, \dots, c_n . Άρα

$$vA^n B = c_1 vA^{n-1}B + c_2 vA^{n-2}B + \dots + v c_n B = 0 \quad (3.19)$$

και άρα

$$vA^{n+k}B = 0 \quad \text{για κάθε } k=0,1,2,3,\dots \quad (3.20)$$

Κατά συνέπεια ,

$$v e^{At} B = v [I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots] B = 0 \quad (3.21)$$

για κάθε t πραγματικό . Η απόκριση του συστήματος (3.1) με αρχικό σημείο το $x_0 = 0$ και εφαρμόζοντας έλεγχο $u(.)$ είναι

$$x(t) = e^{At} \int_0^t e^{-As} B u(s) ds \quad (3.22)$$

και από την (3.22)

$$v x(t) = \int_0^t v e^{A(t-s)} B u(s) ds = 0 \quad (3.23)$$

για κάθε έλεγχο u . Άρα όλες οι αποκρίσεις με αρχικό σημείο x_0 βρίσκονται στο υπερεπίπεδο που είναι ορθογώνιο στο διάνυσμα v . Δηλαδή δεν μπορεί να οδηγηθεί το (3.1) σε οποιοδήποτε x_1 στο \mathbb{R}^n . Αυτό αντιβαίνει στην ελεγχιμότητα του (3.1) . Άρα η τάξη του πίνακα $[B, AB, \dots, A^{n-1} B]$ είναι n .

Αντίστροφα , υποθέτουμε ότι ο πίνακας $[B, AB, \dots, A^{n-1} B]$ έχει τάξη n και δείχνουμε ότι το (3.1) είναι ελέγξιμο . Πράγματι , ορίζουμε με K το σύνολο των σημείων στα οποία μπορεί να οδηγηθεί η αρχή για $t < 1$ χρησιμοποιώντας φραγμένους ελέγχους $|u_i| \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, m$. Τότε το σύνολο K είναι συμπαγές και κυρτό στο \mathbb{R}^n . Υποθέτουμε ότι η διάσταση του K είναι μικρότερη από n . Τότε θα υπάρχει διάνυσμα v ώστε

$$\int_0^1 v e^{A(1-s)} B u(s) ds = 0 \quad (3.24)$$

για κάθε έλεγχο $u \in U$. Όμως καθώς ο έλεγχος είναι τυχαίος και φραγμένος , από την (3.24) προκύπτει :

$$v e^{A(1-s)} B = 0 \quad \text{για} \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (3.25)$$

Θέτουμε στη (3.25) όπου $s = 1$ και παίρνουμε $v B = 0$. Διαφορίζουμε την (3.25) ως προς s και ξαναθέτουμε $s = 1$ για να πάρουμε $v A B = 0$. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο , καταλήγουμε :

$$v B = v A B = v A^2 B = \dots = v A^{n-1} B = 0 \quad (3.26)$$

Από την (3.26) παίρνουμε ότι ο πίνακας $[B, AB, \dots, A^{n-1} B]$ έχει εξαρτημένες γραμμές άρα η διάσταση του είναι μικρότερη από n . Οδηγηθήκαμε σε άτοπο διότι υποθέσαμε ότι η διάσταση του K είναι μικρότερη από n . Άρα η διάσταση του K είναι ίση με n . □

Συμβολίζουμε τέλος με C το σύνολο των σημείων που μπορούν να οδηγηθούν στην αρχή σε πεπερασμένο χρόνο από κάποιο έλεγχο u που συμφωνεί με τους περιορισμούς Ω

δηλαδή $u \in \Omega$. Το πεδίο C είναι ανοιχτό στο \mathbb{R}^n .

Πόρισμα 3.1. Θεωρούμε το (3.1) με σύνολο περιορισμών $U \subset \mathbb{R}^m$ που να περιέχει το $u=0$ στο εσωτερικό του. Τότε το πεδίο ελεγχιμότητας προς το 0 είναι ανοιχτό αν και μόνο αν το (3.1) είναι ελέγξιμο.

Απόδειξη: Αρχικά βλέπουμε ότι το (3.1) είναι ελέγξιμο, αν και μόνο αν και το

$$\dot{x} = -Ax - Bu \quad (3.27)$$

είναι επίσης ελέγξιμο αφού

$$\text{span}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = \text{span}[-B, AB, \dots, (-1)^n A^{n-1}B]$$

δηλαδή, αν ο έλεγχος $u(t)$ οδηγεί το $x_0=0$ στο x_1 μέσω μιας τροχιάς του συστήματος (3.27) σε χρόνο t_1 , τότε ο έλεγχος $u(t_1-t)$ οδηγεί το x_1 στην αρχή μέσω μιας τροχιάς του συστήματος (3.1) στον ίδιο χρόνο. Άρα το προσιτό σύνολο M^- από την αρχική κατάσταση $0 \in \mathbb{R}^n$ και για το σύστημα (3.27) με ελέγχους $u(\cdot) \in \Omega$ είναι ακριβώς το πεδίο της ελεγχιμότητας προς το 0 του συστήματος (3.27). Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το (3.1) και άρα και το (3.27) είναι ελέγξιμο. Τότε για $\varepsilon > 0$ ώστε $|u_i(\cdot)| \leq \varepsilon$, το προσιτό σύνολο M_ε^- περιέχει μια γειτονιά του $0 \in \mathbb{R}^n$. Όμως αφού $M_\varepsilon^- \subset M^- = C$, το σύνολο C περιέχει μια γειτονιά του 0 και άρα το C είναι ανοιχτό στο \mathbb{R}^n . Αντίστροφα υποθέτουμε ότι το C είναι ανοιχτό στο \mathbb{R}^n . Τότε κάθε σημείο $x_1 \in C$ είναι προσιτό από την αρχή μέσω μιας τροχιάς-λύσης του (3.27) και με έναν επιτρεπτό έλεγχο $u \in \Omega$. Άρα τυπικά το σύνολο C είναι το σύνολο των σημείων για τα οποία

$$x = - \int_0^{t_1} e^{A(s-t_1)} Bu(s) ds \quad (3.28)$$

για κάποιο $u(\cdot) \in \Omega$ και για κάποιο πεπερασμένο χρόνο $0 < t_1 < \infty$. Υποθέτουμε ότι το (3.27) δεν είναι ελέγξιμο. Τότε θα υπάρχει διάνυσμα v ώστε

$$vB = vAB = vA^2B = \dots = vA^{n-1}B = 0 \quad (3.29)$$

και άρα $ve^{At}B = 0$ για κάθε $t \geq 0$. Άρα το σύνολο C βρίσκεται στο υπερεπίπεδο που είναι ορθογώνιο στο διάνυσμα v άτοπο διότι το C έχει μη-κενό εσωτερικό. Άρα τα (3.1) και (3.27) είναι ελέγξιμα.

□

Πόρισμα 3.2. Έστω το αυτόνομο γραμμικό σύστημα (3.1) στο \mathbb{R}^n με συμπαγές σύνολο περιορισμών $u(t) \in \mathbb{R}^m$, αρχική κατάσταση x_0 .

Υποθέτουμε ότι

(α) $u=0$ βρίσκεται στο εσωτερικό του Ω

(β) το (3.1) είναι ελέγξιμο

(γ) ο A είναι Hurwitz δηλαδή κάθε ιδιοτιμή του A ικανοποιεί $\text{Re } \lambda < 0$.

Τότε το πεδίο ελεγχιμότητας προς το 0 είναι όλο το \mathbb{R}^n . ^{[3],[5]}

Απόδειξη : Έστω ένα αρχικό σημείο $x_1 \in \mathbb{R}^n$ το οποίο οδηγείται από τον μηδενικό έλεγχο $u(t) \equiv 0$ μέχρι η απόκριση $x(t)$ να προσεγγίσει το $x_0 = 0$ και να μπει στο C . Αλλά μετά η τροχιά $x(t)$ μπορεί να οδηγηθεί στην αρχή σε πεπερασμένο χρόνο. Άρα το $x_1 \in C$ και $C = \mathbb{R}^n$.

□

Παρατήρηση 3.1 : Για κάθε $t > 0$ και $x_0 \in \mathbb{R}^n$, το $M(t, x_0)$ έχει μη-κενό εσωτερικό ως προς \mathbb{R}^n αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη (με βάση το Θεώρημα 3.1) :

$$\text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n.$$

3.3. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Θεωρούμε τα δύο γραμμικά συστήματα

$$\Sigma : \dot{x} = Ax + Bu, (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (3.31)$$

$$\bar{\Sigma} : \dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u, (z, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (3.32)$$

ορισμένα στον ίδιο χώρο κατάστασης \mathbb{R}^n .

Ορισμός 3.2. Τα $\Sigma, \bar{\Sigma}$ είναι **ισοδύναμα** ^{[1],[2],[3],[5]} (Συμβολισμός: $\Sigma \sim \bar{\Sigma}$), αν υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$

αντιστρέψιμος έτσι ώστε για κάθε $u(\cdot) \in \Omega$ και για κάθε x_0, z_0 με

$$z_0 = Px_0 \quad (3.33)$$

Ισχύει

$$z(t, z_0, u) = Px(t, x_0, u), \forall t \geq 0 \quad (3.34)$$

Παραγωγίζοντας την (3.34) ως προς t , παίρνοντας υπόψη τις (3.31), (3.32) και (3.33), και θέτοντας $t=0$ προκύπτει ισοδύναμα ότι

$$\bar{A}z_0 + \bar{B}u(\cdot) = PAx_0 + PBu(\cdot) \text{ με } z_0 = Px_0, \forall x_0, u(\cdot) \quad (3.35)$$

ή το ίδιο

$$\begin{cases} \bar{A} = PAP^{-1} \\ \bar{B} = PB \end{cases} \quad (3.36)$$

Επομένως, ισοδυναμία μεταξύ των Σ και $\bar{\Sigma}$, σημαίνει πως υπάρχει αλλαγή συντεταγμένων $z = Px$, $\det P \neq 0$ έτσι ώστε το Σ μετασχηματίζεται στις καινούριες συντεταγμένες z στο $\bar{\Sigma}$, όπου υποχρεωτικά οι \bar{A} και \bar{B} πληρούν τις (3.36). Μπορεί μέσω των (3.33), (3.34) να δειχθεί ότι η σχέση $\bar{\Sigma} \sim \Sigma$ είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός 3.3 . Καλούμε **ελέγξιμο υποχώρο** $V = \langle A/B \rangle$ του συστήματος (3.31) το χώρο $\text{span}[B, AB, \dots, A^{n-1} B]$ και βαθμό ελεγχιμότητας του (3.31) τη διάσταση του $\langle A/B \rangle$.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cayley – Hamilton εύκολα δείχνεται ότι :

- ο χώρος $\langle A/B \rangle$ είναι αναλλοίωτος δηλαδή

$$Ax \in \langle A/B \rangle, \forall x \in \langle A/B \rangle \quad (3.37)$$

και περιέχει το $\text{im} B$:

$$\text{im} B \leq \langle A/B \rangle \quad (3.38)$$

- ο χώρος $\langle A/B \rangle$ είναι ο μικρότερης διάστασης υποχώρος του \mathbb{R}^n με τις ιδιότητες (3.37) και (3.38) .

Πόρισμα 3.3 . Αν $\Sigma \sim \tilde{\Sigma}$, τότε έχουν τον ίδιο βαθμό ελεγχιμότητας . Επομένως , το Σ είναι ελέγξιμο , τότε και μόνο αν το $\tilde{\Sigma}$ είναι ελέγξιμο .

Απόδειξη : Για το σύστημα $\tilde{\Sigma}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \bar{A}/\bar{B} \rangle &= \text{im}[\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}] \\ &= \text{im}[PB, PAB, \dots, PA^{n-1}B] \\ &= \text{im} P[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \end{aligned} \quad (3.39)$$

Αφού ο P είναι αντιστρέψιμος , προκύπτει από την (3.39) ότι

$$\dim \langle \bar{A}/\bar{B} \rangle = \dim \langle A/B \rangle \quad (3.40)$$

□

Επιπλέον , προκύπτει άμεσα από την (3.36) η ακόλουθη :

Πόρισμα 3.4 . Αν $\Sigma \sim \tilde{\Sigma}$ (μέσω της γραμμικής αλλαγής συντεταγμένων $z = Px$) , τότε υποχρεωτικά :

- $P[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = [\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}]$ (3.41)

- οι πίνακες A , \tilde{A} είναι όμοιοι , επομένως έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές . ^[5]

Ειδικά , για ισοδύναμα συστήματα μιας εισόδου :

$$\dot{x} = Ax + ub \quad (3.42)$$

$$\dot{z} = \bar{A}z + u\bar{b} \quad (3.43)$$

ο πίνακας ισοδυναμίας P δίνεται από την σχέση

$$P = C C^{-1} \quad (3.44)$$

όπου

$$C = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b], \quad \bar{C} = [\bar{b}, \bar{A}\bar{b}, \bar{A}^{n-1}\bar{b}] \quad (3.45)$$

Αντίστροφα, ισχύει το ακόλουθο :

Θεώρημα 3.2 . Δίνονται τα ελέγξιμα συστήματα (3.42) και (3.43) και υποθέτουμε ότι οι A και \bar{A} είναι όμοιοι . Τότε (3.42) \sim (3.43) .

Απόδειξη : Θα δείξουμε ότι υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έτσι ώστε ισχύουν οι (3.36), δηλαδή

$$\bar{A} = PAP^{-1} \quad (3.46)$$

$$\bar{b} = Pb \quad (3.47)$$

Θεωρούμε τον πίνακα P όπως ορίζεται από τις (3.44), (3.45) . Ισοδύναμα, ο P ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} Pb &= \bar{b} \\ PAb &= \bar{A}\bar{b} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ PA^{n-1}b &= \bar{A}^{n-1}\bar{b} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Θα δείξουμε ότι ο P ικανοποιεί τις (3.46) και (3.47) . Επειδή, λόγω ελεγχιμότητας, τα $\bar{b}, \bar{A}\bar{b}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{b}$ είναι μια βάση του \mathbb{R}^n αρκεί να δειχθεί ότι

$$\begin{aligned} \bar{A}\bar{b} &= (PAP^{-1})\bar{b} \\ \bar{A}(\bar{A}\bar{b}) &= (PAP^{-1})(\bar{A}\bar{b}) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \bar{A}(\bar{A}^{n-1}\bar{b}) &= (PAP^{-1})(\bar{A}^{n-1}\bar{b}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Φυσικά, η (3.47) πληρούται λόγω της πρώτης ισότητας στην (3.49) . Χρησιμοποιώντας την (3.49) μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί με επαγωγή ότι πράγματι :

$$\bar{A}^{i+1}\bar{b} = \bar{A}(\bar{A}^i\bar{b}) = (PAP^{-1})(\bar{A}^i\bar{b}) = PA^{i+1}b, i = 0, 1, \dots, n-2 \quad (3.50)$$

Για να δείξουμε ότι πληρούται και η τελευταία επιθυμητή ισότητα εκ των (3.49), δηλαδή :

$$\bar{A}(\bar{A}^{n-1}\bar{b}) = (PAP^{-1})(\bar{A}^{n-1}\bar{b}) \quad (3.51)$$

χρησιμοποιούμε πρώτα την τελευταία ισότητα από τις (3.50), δηλαδή την ισότητα :

$$\bar{A}^{n-1}\bar{b} = (PAP^{-1})(\bar{A}^{n-2}\bar{b}) = PA^{n-1}b \quad (3.52)$$

που μας βοηθά να γράψουμε την επιθυμητή (3.51) ισοδύναμα :

$$\bar{A}^n\bar{b} = PA^nB \quad (3.53)$$

Στη συνέχεια επικαλούμαστε την υπόθεση ότι οι A και \bar{A} είναι όμοιοι, άρα λόγω θεωρήματος Cayley – Hamilton, ικανοποιούν την ίδια χαρακτηριστική εξίσωση, ή το ίδιο, ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ_i , $i = 0, \dots, n-1$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} A^n &= \lambda_0 I + \lambda_1 A + \lambda_{n-1} A^{n-1} \\ \bar{A}^n &= \lambda_0 I + \lambda_1 \bar{A} + \lambda_{n-1} \bar{A}^{n-1} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.54), η (3.53) γράφεται

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \bar{A}_i \bar{b} = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i P A_i b \quad (3.55)$$

που είναι άμεση συνέπεια της (3.50).

□

3.4. ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ

Με τα επόμενα θεωρήματα, εισάγουμε την συνθήκη κανονικότητας και συνδεύμε την έννοια του κανονικού προβλήματος με την ελεγχσιμότητα του συστήματος για να καταλήξουμε στην μοναδικότητα του αρίστου ελέγχου.

Θεώρημα 3.3. Θεωρούμε το αυτόνομο γραμμικό σύστημα (3.1) με σύνολο περιορισμών Ω και αρχική κατάσταση $t_0 = 0$. Αν το (3.1) είναι ελέγξιμο, τότε το πρόβλημα ((3.1), Ω , $x_0, 0, t_1$) είναι κανονικό. Ισοδύναμα ισχύει η ιδιότητα: Αν για κάθε $t_1 > 0$ και $u_1, u_2 : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ με

$$p'(t)B(t)u_1(t) = p'(t)B(t)u_2(t) = \max_{u \in \Omega} p'(t)B(t)u \quad (3.56)$$

σχεδόν για κάθε $t \in [t_0, t_1]$ όπου $p'(t) = p_0 e^{-At} b$, $p_0 \neq 0$

τότε

$$u_1(t) = u_2(t) \text{ σχεδόν παντού στο } [0, t_1] \quad (3.57)$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε συστήματα μιας εισόδου δηλαδή $m = 1$ και συμβολίζουμε $B(\cdot) = b(\cdot)$. Έστω $u_1, u_2 : [0, t_1] \rightarrow [-1, 1]$ με

$$x(t_1, x_0, u_1) = x(t_1, x_0, u) \in \partial M(t_1) \quad (3.58)$$

τότε από την αρχή του μεγίστου

$$p'(t)b(t)u_1(t) = p'(t)b(t)u_2(t) = \max_{u \in \Omega} p'(t)b(t)u \quad (3.59)$$

σχεδόν για κάθε $t \in [0, t_1]$

Λαμβάνουμε τώρα υπόψη την υπόθεση της ελεγχιμότητας η οποία ισοδυναμεί σε συστήματα μιας εισόδου με την ακόλουθη

$$\det[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] = 0 \quad (3.60)$$

Η σχέση (3.60) εξασφαλίζει ότι $p'(t)b = 0$ σε πεπερασμένο πλήθος σημείων στο $[0, t_1]$. Πράγματι, στην αντίθετη περίπτωση λόγω αναλυτικότητας της απεικόνισης $t \rightarrow p'(t)b$ θα ήταν $p'(t)b = 0$ για κάθε $t \in [0, t_1]$. Ισοδύναμα

$$p_0'(b + Abt + A^2b\frac{t^2}{2} + \dots + A^{n-1}b\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots) = 0, \forall t \in [0, t_1] \quad (3.61)$$

δηλαδή

$$p_0'b = p_0'Ab = \dots = p_0'A^{n-1}b = \dots = 0 \quad (3.62)$$

και άρα

$$0 \neq p_0 \perp [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \quad (3.63)$$

άτοπο λόγω της (3.60). Επομένως από την (3.59) καταλήγουμε στην επιθυμητή ισότητα

$$u_i(t) = \text{sgn}(p'(t)b), \quad i = 1, 2 \quad \text{σχεδόν για κάθε } t \in [0, t_1]. \quad (3.64)$$

□

Τέλος, στηρίζομαστε στο επόμενο σημαντικότατο πόρισμα για την επίλυση των προβλημάτων αρίστου χρόνου που αντιμετωπίζουμε παρακάτω.

Πόρισμα 3.5. Έστω το αυτόνομο γραμμικό σύστημα (3.1) στο \mathbb{R}^n με ρητό πολυεδρικό σύνολο περιορισμών $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ που περιέχει τον έλεγχο $u=0$ στο εσωτερικό του και ως επιθυμητό σύνολο G την αρχή $x=0$. Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα ((3.1), $\Omega, x_0, 0, t_1$) είναι κανονικό.

Τότε για κάθε σημείο x_0 του πεδίου ελεγχιμότητας C υπάρχει ένας μοναδικός ακρότατος έλεγχος $u^*(t)$ που οδηγεί το x_0 στην αρχή και ο έλεγχος $u^*(t)$ είναι βέλτιστος. Αν ο πίνακας A είναι Hurwitz, τότε $C = \mathbb{R}^n$ και κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ μπορεί να οδηγηθεί στην αρχή από μόνο ένα ακρότατο έλεγχο δηλαδή τον βέλτιστο έλεγχο.

3.5. ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΛΛΑΓΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Προχωράμε τώρα στη διατύπωση, χωρίς απόδειξη, ενός θεωρήματος που καθορίζει τον μέγιστο αριθμό αλλαγών του ελέγχου για το πρόβλημα ελέγχου αρίστου χρόνου υποθέτοντας βέβαια ότι το σύστημα είναι κανονικό.

Θεώρημα 3.4 (ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΛΛΑΓΩΝ ^{[1],[3],[5]}): Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα (3.1) στο \mathbb{R}^n με περιορισμό $\Omega: |u(\cdot)| \leq 1$ στο \mathbb{R}^n . Υποθέτουμε ότι το

(3.1) είναι ελέγξιμο και άρα κανονικό .

- Αν κάθε ιδιοτιμή του πίνακα A είναι πραγματική , τότε κάθε ακρότατος έλεγχος έχει το πολύ $n-1$ αλλαγές για $0 \leq t < \infty$.
- Αν κάθε ιδιοτιμή του πίνακα A έχει μη-μηδενικό φανταστικό μέρος , τότε κάθε ακρότατος έλεγχος έχει άπειρο αριθμό αλλαγών για $0 \leq t < \infty$. Άρα για κάθε αριθμό $N > 0$, υπάρχει μια αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ για την οποία ο αντίστοιχος έλεγχος αρίστου χρόνου που οδηγεί το x_0 στην αρχή έχει πάνω από N αλλαγές .

ΜΕΡΟΣ Β : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

4. ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΗ

4.1. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΗ

Σε αυτήν την παράγραφο λύνουμε το πρόβλημα αρίστου χρόνου για ένα απλό σύστημα που ονομάζεται **διπλός ολοκληρωτής** . Θεωρούμε - όπως και για τα επόμενα προβλήματα - ότι η τερματική κατάσταση είναι η αρχή των αξόνων . Το σύστημα με το οποίο ασχολούμαστε αναπαριστά την κίνηση αδρανών φορτίων σε ένα περιβάλλον χωρίς τριβή . Για παράδειγμα , αν m η μάζα ενός σώματος , $y(t)$ η θέση του και $u(t)$ η εφαρμοζόμενη δύναμη και αν θεωρήσουμε αμελητέες την τριβή και τις βαρυτικές δυνάμεις , τότε η κίνηση του σώματος περιγράφεται από την εξίσωση δεύτερης τάξης

$$m \ddot{y}(t) = v(t) \quad (4.1)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ του συστήματος είναι

$$G(s) = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{ms^2} \quad (4.2)$$

και από εδώ προκύπτει το όνομα διπλός ολοκληρωτής . Ορίζουμε τον έλεγχο $u(t)$ ως $\frac{v(t)}{m}$. Τότε η (4.1) γίνεται

$$\ddot{y}(t) = u(t) \quad (4.3)$$

Θεωρούμε τώρα τις μεταβλητές κατάστασης $x_1(\cdot)$ και $x_2(\cdot)$ ως

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

δηλαδή η μεταβλητή $x_1(\cdot)$ είναι η έξοδος του συστήματος και η μεταβλητή $x_2(\cdot)$

είναι ο ρυθμός της εξόδου. Έτσι, το σύστημα παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ακόμη θεωρούμε ότι φυσικοί περιορισμοί σχετικά με τις τριβές και τις ροπές, που μπορούν να αναπτυχθούν στην πράξη αναγκάζουν το πλάτος του ελέγχου να υπακούει στη σχέση

$$|u(t)| \leq 1 \quad \text{για κάθε } t \quad (4.6)$$

Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε λοιπόν είναι :

Πρόβλημα 4.1 : Δίνεται το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \end{aligned} \quad \text{με } |u(t)| \leq 1 \quad (4.7)$$

Βρίσκουμε έναν επιτρεπτό έλεγχο που οδηγεί το σύστημα (4.7) από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση (ξ_1, ξ_2) στην αρχή $(0, 0)$ στον ελάχιστο δυνατό χρόνο επιβάλλοντας έναν κατάλληλο έλεγχο $u(\cdot)$ με $|u(\cdot)| \leq 1$.

4.2. ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΗ

Παρατηρούμε ότι το (4.7) είναι ελέγξιμο. Πράγματι, καλώντας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, έχουμε $\det(B, AB) = 1 \neq 0$. Επομένως, το πρόβλημα είναι κανονικό και

ο ζητούμενος άριστος έλεγχος είναι bang – bang (βλ. Θεώρημα 3.4).

Για να βρούμε τον έλεγχο αρίστου χρόνου για το συγκεκριμένο πρόβλημα, πρώτα βρίσκουμε τον έλεγχο που ελαχιστοποιεί την Hamiltonian (βλ. Παρατήρηση 2.1). Η Hamiltonian συνάρτηση (βλ. σχέση 2.46) είναι :

$$H = 1 + x_2 p_1 + u p_2 \quad (4.8)$$

Τώρα ο έλεγχος που ελαχιστοποιεί τη Hamiltonian δίνεται από την

$$u(t) = -\text{sgn}\{p_2(t)\} = \Lambda = \pm 1 \quad (4.9)$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις εξισώσεις των συζυγών μεταβλητών $p_1(\cdot)$ και $p_2(\cdot)$ ως συνάρτηση των άγνωστων αρχικών τους τιμών με χρήση της (2.47):

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \quad (4.10)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1$$

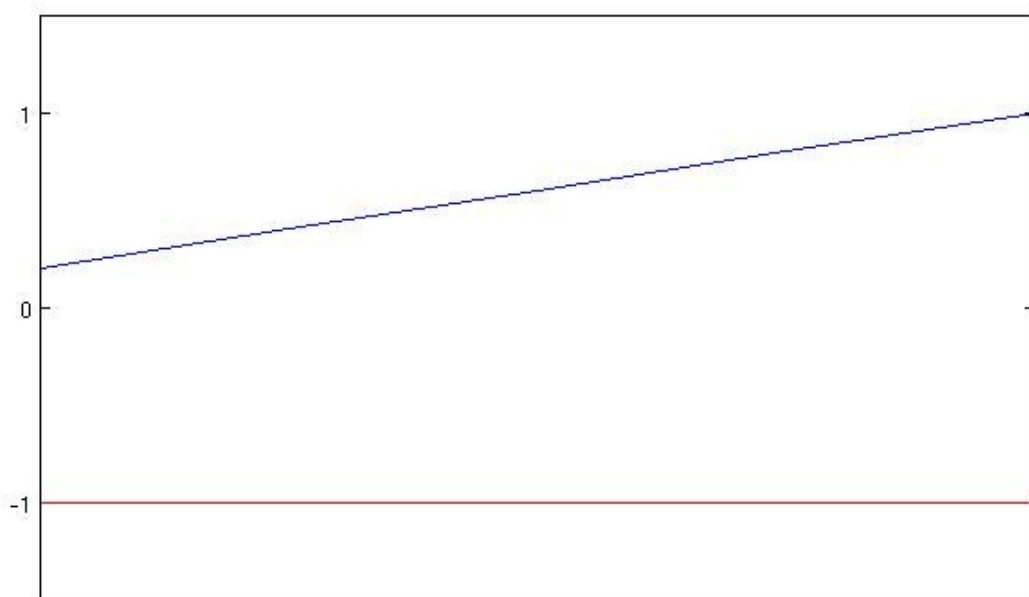
Έστω π_1 και π_2 οι αρχικές τιμές των συζυγών μεταβλητών δηλαδή

$$\begin{aligned} \pi_1 &= p_1(0) \\ \pi_2 &= p_2(0) \end{aligned} \quad (4.11)$$

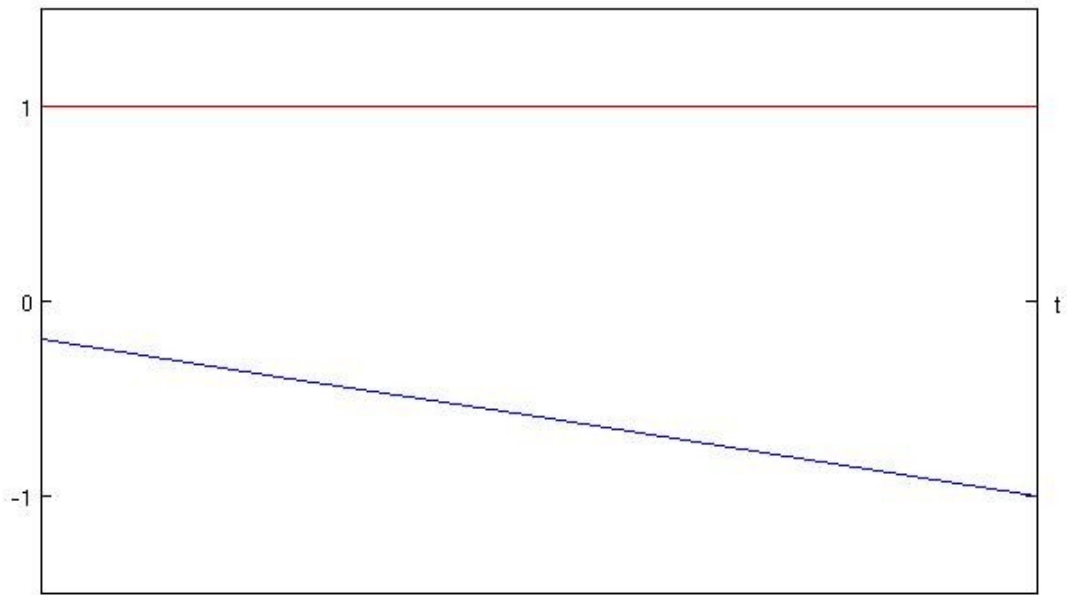
τότε από τις εξισώσεις (4.10) παίρνουμε

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \pi_1 = \text{σταθερά} \\ p_2(t) &= \pi_2 - \pi_1 t \end{aligned} \quad (4.12)$$

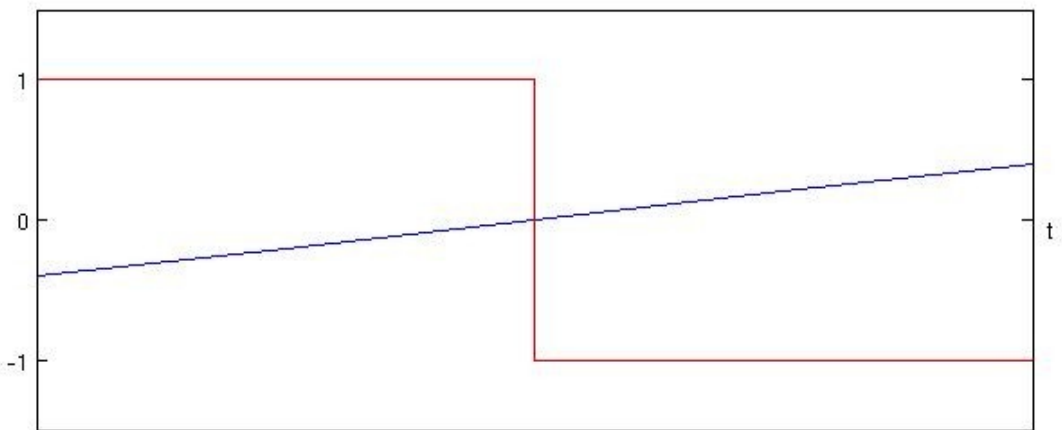
Παρατηρούμε από την (4.12) ότι στο επίπεδο με άξονες τα p_2 και t , η μεταβλητή p_2 είναι μια ευθεία γραμμή. Οι τέσσερις δυνατές μορφές της p_2 και οι αντίστοιχες μορφές του ελέγχου $u(t) = -\text{sgn}\{p_2(t)\}$ που ελαχιστοποιεί τη Hamiltonian δίνονται στα σχήματα 4.1 ως και 4.4.



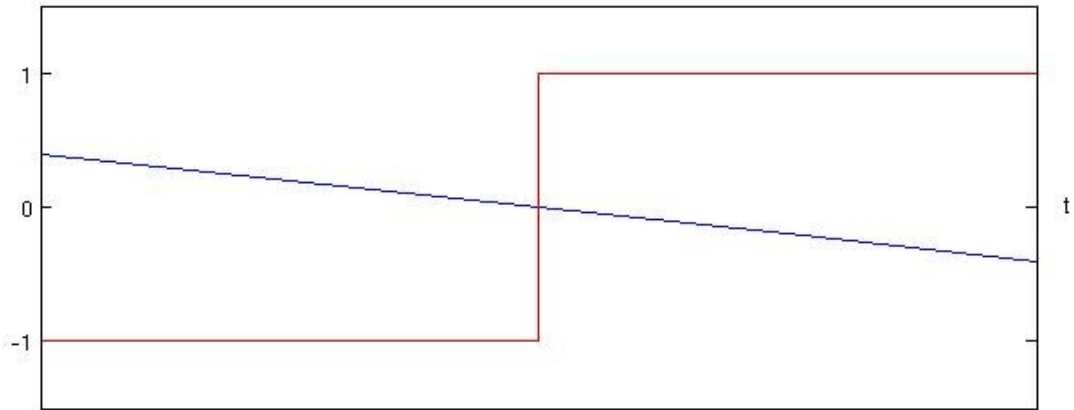
Σχήμα 4.1: Με μπλε η μεταβλητή $p_2(t)$ και με κόκκινο ο αντίστοιχος έλεγχος $u(t)$ για $\pi_1 < 0$ και $\pi_2 > 0$



Σχήμα 4.2: Με μπλε η μεταβλητή $p_2(t)$ και με κόκκινο ο αντίστοιχος έλεγχος $u(t)$ για $\pi_1 < 0$ και $\pi_2 < 0$



Σχήμα 4.3: Με μπλε η μεταβλητή $p_2(t)$ και με κόκκινο ο αντίστοιχος έλεγχος $u(t)$ για $\pi_1 < 0$ και $\pi_2 < 0$



Σχήμα 4.4: Με μπλε η μεταβλητή $p_2(t)$ και με κόκκινο ο αντίστοιχος έλεγχος $u(t)$ για $\pi_1 > 0$ και $\pi_2 > 0$

Από τα σχήματα (4.1) ως και (4.4), συμπεραίνουμε ότι ο έλεγχος αρίστου χρόνου σε κάθε περίπτωση είναι τμηματικά σταθερός και μπορεί να αλλάξει το πολύ μια φορά επειδή το σύστημα (4.7) είναι δεύτερης τάξης με πραγματικές ιδιοτιμές, σύμφωνα και με το Θεώρημα 3.4. Άρα καταλήγουμε στο ότι μόνο οι τέσσερις ακολουθίες ελέγχου $\{+1\}$, $\{-1\}$, $\{+1, -1\}$, $\{-1, +1\}$ είναι υποψήφιες για τον έλεγχο αρίστου χρόνου. Το αποτέλεσμα αυτό προέκυψε μόνο από δύο από τις αναγκαίες συνθήκες - τις (4.9) και (4.12).

Λύνουμε τις εξισώσεις (4.7) με αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \xi_1 \\ x_2(0) &= \xi_2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

καθώς για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα ο έλεγχος αρίστου χρόνου είναι σταθερός $u(t) = \Lambda = \pm 1$. Έτσι, παίρνουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \xi_2 + \Lambda t \\ x_1(t) &= \xi_1 + \xi_2 t + \frac{1}{2} \Lambda t^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Από τις (4.14), απαλείφουμε τον χρόνο :

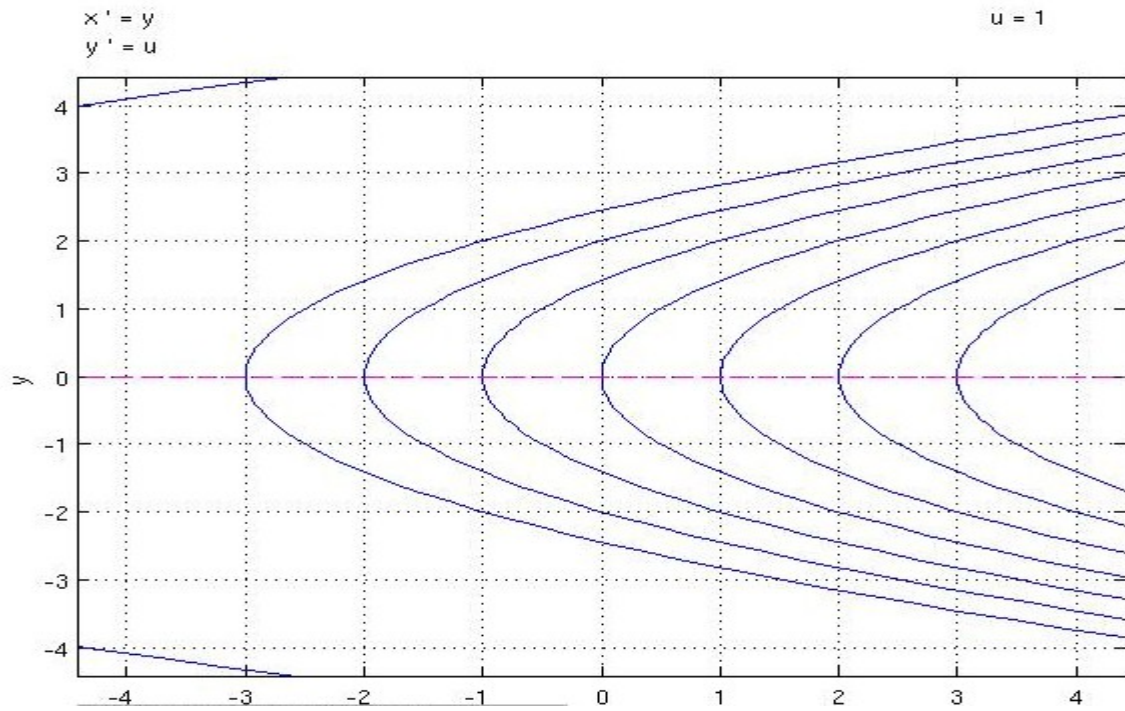
$$\begin{aligned} x_2(t) &= \xi_2 + \Lambda t \Rightarrow \\ t &= \frac{x_2 - \xi_2}{\Lambda} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Όμως $\Lambda = \pm 1$ και άρα η (4.15) γίνεται

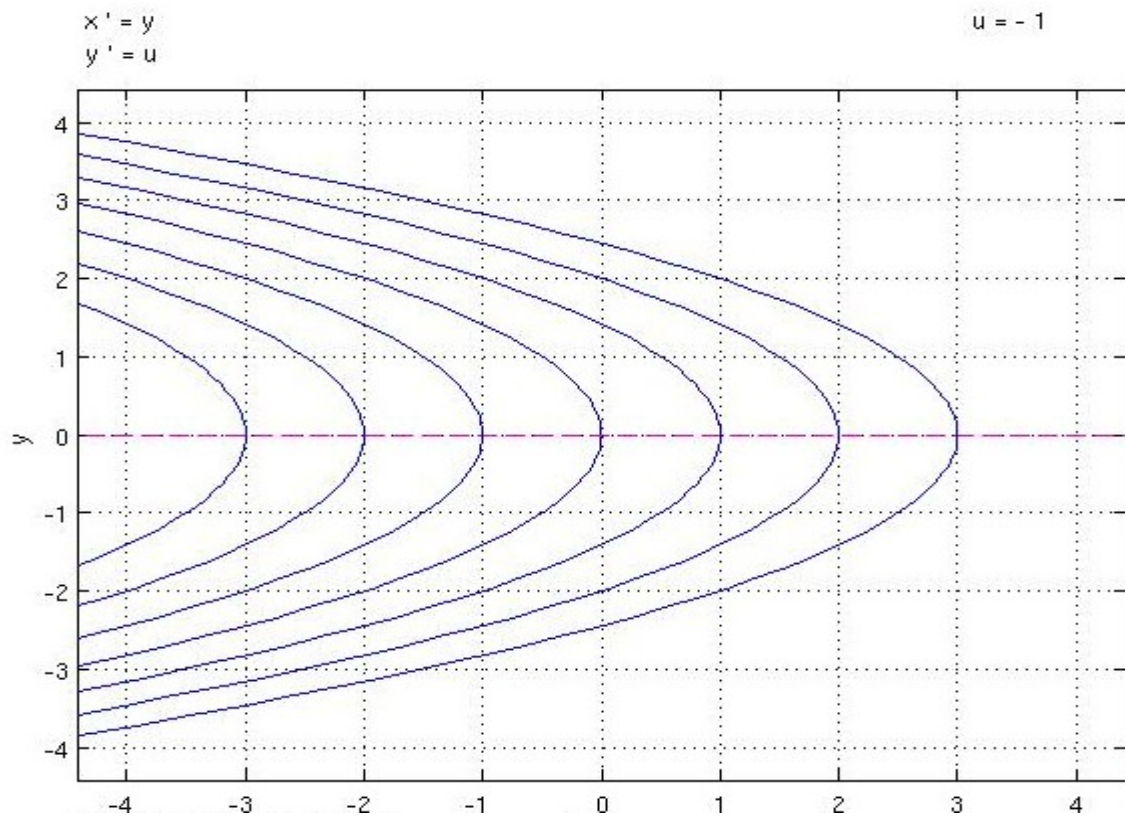
$$t = \Lambda(x_2 - \xi_2) \quad (4.16)$$

και αν αντικαταστήσουμε την (4.16) στην (4.14), έχουμε

$$x_1 = \xi_1 + \frac{1}{2} \Lambda x_2^2 - \frac{1}{2} \Lambda \xi_2^2 \quad (4.17)$$



Σχήμα 4.5: Τροχιές του συστήματος (4.5) για $\Lambda = +1$



Σχήμα 4.6: Τροχιές του συστήματος (4.5) για $\Lambda = -1$

Η εξίσωση (4.17) είναι η εξίσωση τροχιάς του συστήματος (4.7) στο επίπεδο με

άξονες x_1 και x_2 αρχίζοντας από το (ξ_1, ξ_2) και ύπο τη δράση του ελέγχου $u = \Lambda$. Οι τροχιές αυτές είναι παραβολικές και φαίνονται στο Σχήμα 4.5 για $\Lambda = +1$ και στο Σχήμα 4.6 για $\Lambda = -1$.

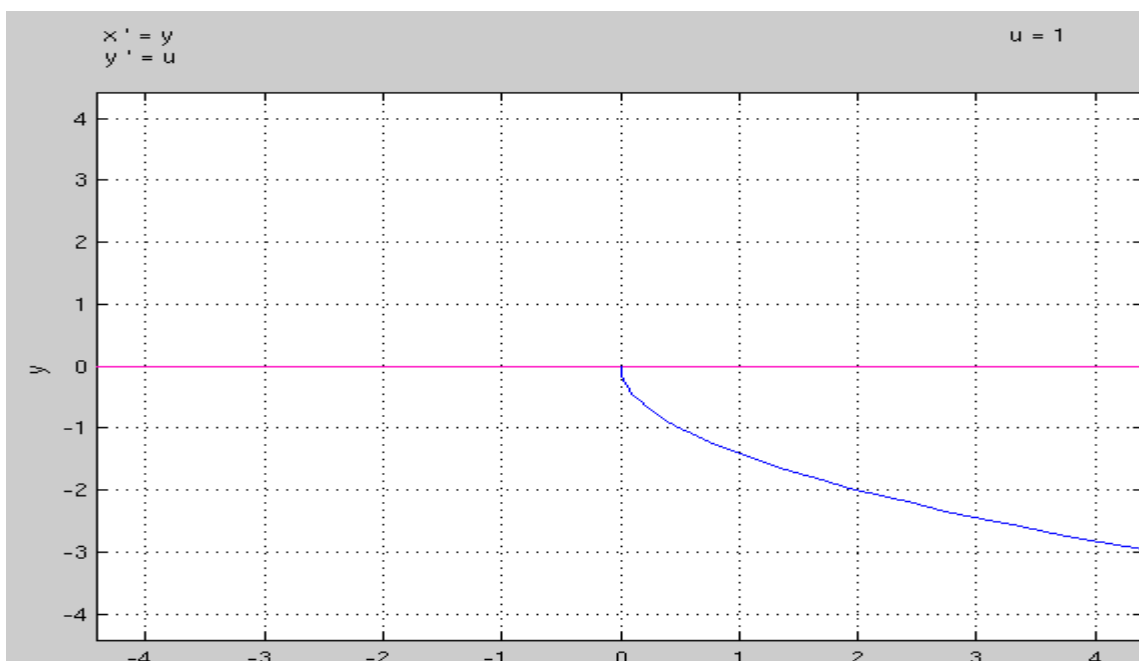
Ο στόχος μας είναι να οδηγήσουμε οποιαδήποτε αρχική κατάσταση στην αρχή των αξόνων δηλαδή στο σημείο $(0, 0)$. Από τη στιγμή που ο έλεγχος είναι τμηματικά σταθερός, μπορούμε να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων (x_1, x_2) που ύπο τους ελέγχους $u = \Lambda = \pm 1$ μεταφέρονται στην αρχή. Αυτές τις τροχιές θα τις ονομάσουμε γ_+ και γ_- .

Ορισμός 4.1. Η καμπύλη γ_+ είναι το σύνολο όλων των σημείων (x_1, x_2) που μπορούν να μεταφερθούν στο $(0, 0)$ από τον έλεγχο $u = +1$. Η καμπύλη γ_+ φαίνεται στο Σχήμα 4.7. Είναι:

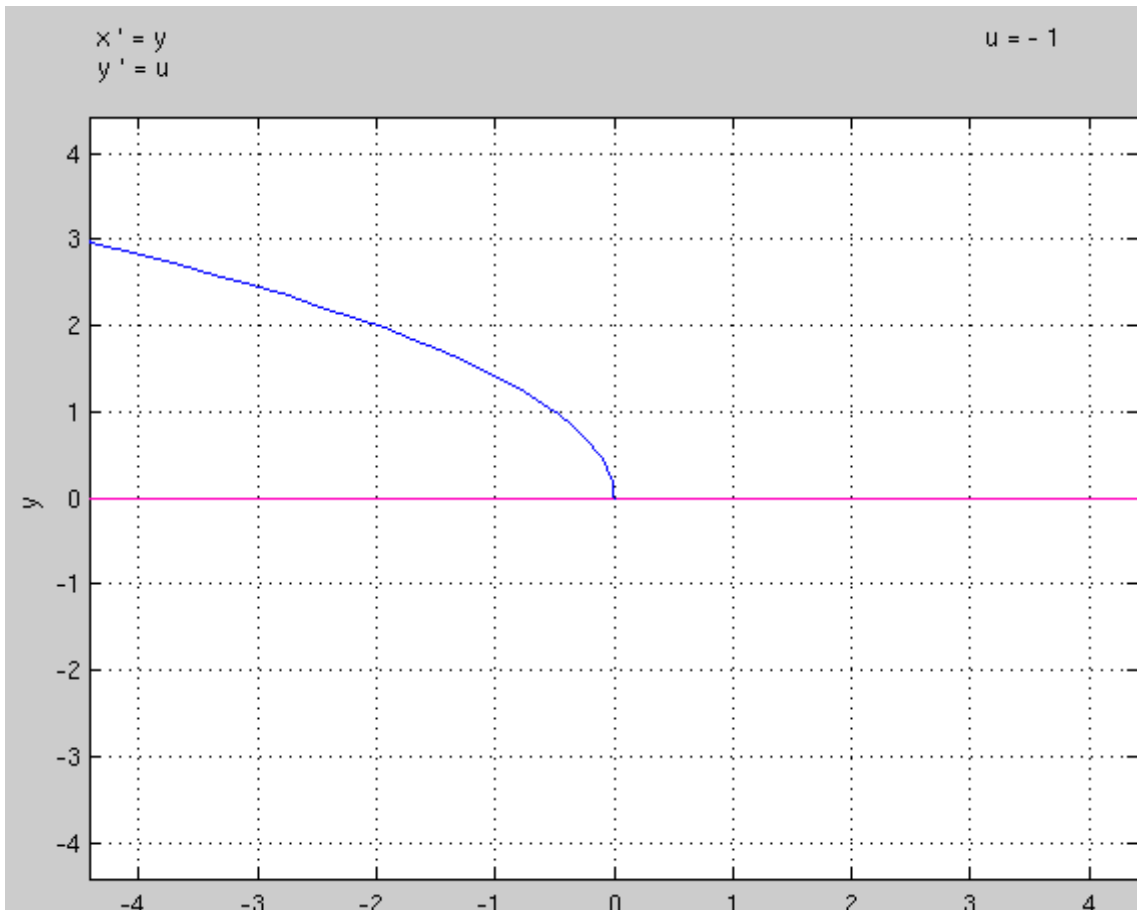
$$\gamma_+ = \{(x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 ; x_2 \leq 0\} \quad (4.18)$$

Ορισμός 4.2. Η καμπύλη γ_- είναι το σύνολο όλων των σημείων (x_1, x_2) που μπορούν να μεταφερθούν στο $(0, 0)$ από τον έλεγχο $u = -1$. Η καμπύλη γ_- φαίνεται στο Σχήμα 4.8. Είναι:

$$\gamma_- = \{(x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 ; x_2 \geq 0\} \quad (4.19)$$



Σχήμα 4.7: η καμπύλη γ_+ για το σύστημα του διπλού ολοκληρωτή



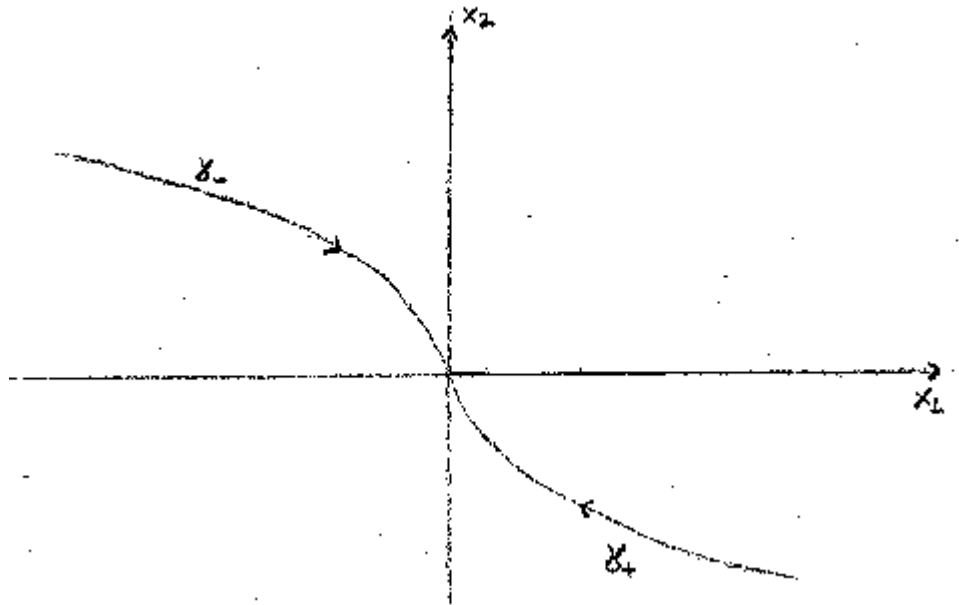
Σχήμα 4.8 : Η καμπύλη γ_- για το σύστημα του διπλού ολοκληρωτή

Ο γεωμετρικός τόπος που απαρτίζεται από τα κομμάτια των γ_- και γ_+ τα οποία έχουν κατεύθυνση το $O \in \mathbb{R}^2$ ονομάζεται **καμπύλη αλλαγής** ^{[1],[4],[5]} (**switching locus**) και παίζει σημαντικό ρόλο στην εύρεση του αρίστου χρόνου. Στην απλή περίπτωση που εξετάζουμε, επιδιώκουμε το σύστημα ξεκινώντας από ένα δοθέν σημείο (x_1, x_2) να φτάσει το συντομότερο δυνατό στην καμπύλη αλλαγής γ .

Ορισμός 4.3. Η καμπύλη γ είναι η ένωση των καμπυλών γ_- και γ_+ . Η εξίσωσή της είναι :

$$\gamma = \{(x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2|\} = \gamma_+ \cup \gamma_- \quad (4.20)$$

Η καμπύλη γ φαίνεται στο Σχήμα 4.9. Η καμπύλη γ χωρίζει το επίπεδο καταστάσεων σε 2 περιοχές ή σύνολα, τις R_- και R_+ .



Σχήμα 4.9 : η καμπύλη γ

Ορισμός 4.4. Ορίζουμε το σύνολο R_- ως το σύνολο των καταστάσεων (x_1, x_2) τέτοιες ώστε

$$R_- = \{(x_1, x_2) : x_1 > -\frac{1}{2}x_2|x_2|\} \quad (4.21)$$

δηλαδή το R_- αποτελείται από τα σημεία δεξιά της καμπύλης αλλαγής (βλ. Σχήμα 4.9) .

Ορίζουμε το σύνολο R_+ ως το σύνολο των καταστάσεων (x_1, x_2) τέτοιες ώστε

$$R_+ = \{(x_1, x_2) : x_1 < -\frac{1}{2}x_2|x_2|\} \quad (4.22)$$

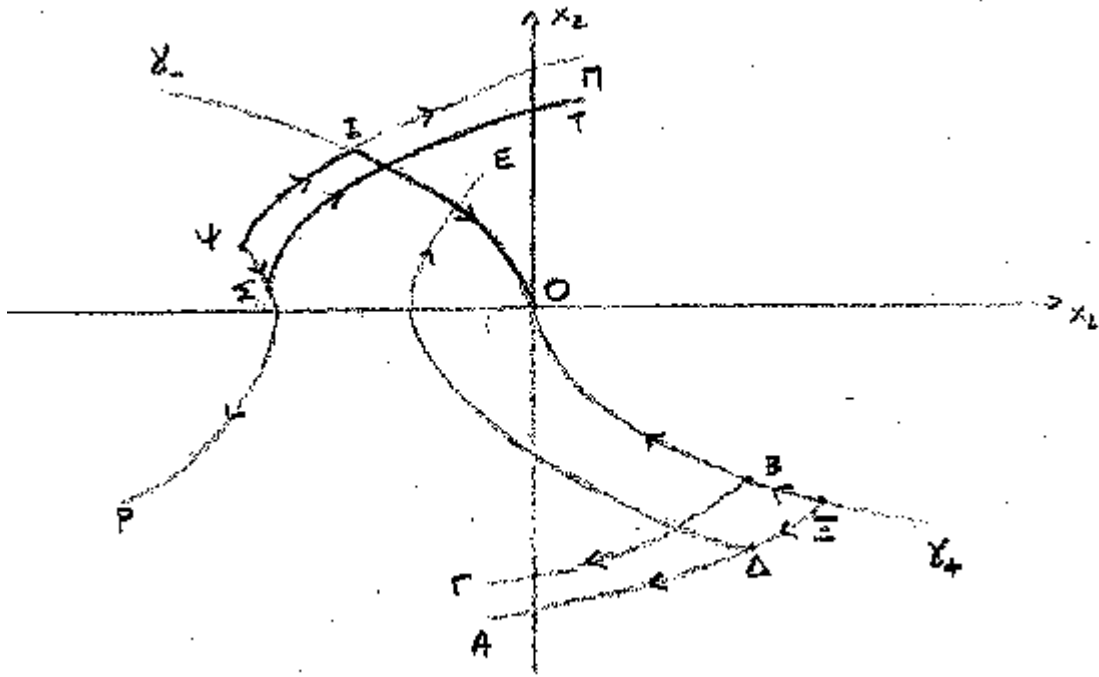
δηλαδή το R_+ αποτελείται από τα σημεία αριστερά της καμπύλης αλλαγής (βλ. Σχήμα 4.9) .

Δεν είναι πάντα τόσο εύκολο στις επόμενες εφαρμογές να βρίσκουμε την εξίσωση της καμπύλης αλλαγής . Εδώ το καταφέραμε λόγω της απλότητας του συστήματος που εξετάζουμε . Είμαστε σε θέση με την καμπύλη αλλαγής να χωρίζουμε το επίπεδο καταστάσεων σε δύο ή και περισσότερα μέρη στα οποία ο βέλτιστος έλεγχος παίρνει διαφορετική τιμή , που ανήκει όμως στο σύνολο του συνόλου περιορισμών .

Ισχυρισμός 4.1 : Αν η αρχική κατάσταση $\Xi = (\xi_1, \xi_2)$ ανήκει στην καμπύλη γ_+ , τότε ο έλεγχος $u = +1$ είναι ο έλεγχος αρίστου χρόνου .

Αν η αρχική κατάσταση $\Xi = (\xi_1, \xi_2)$ ανήκει στην καμπύλη γ_- , τότε ο έλεγχος $u = -1$ είναι ο έλεγχος αρίστου χρόνου .

Απόδειξη : Θα αποδείξουμε τον Ισχυρισμό 4.1 μόνο για την περίπτωση για την οποία η αρχική κατάσταση $\Xi = (\xi_1, \xi_2)$ ανήκει στην καμπύλη γ_+ . Η περίπτωση για την οποία το Ξ ανήκει στην καμπύλη γ_- αποδεικνύεται όμοια .



Σχήμα 4. 10: Τροχιές που δημιουργήθηκαν από τις 4 πιθανές ακολουθίες ελέγχου αρίστου χρόνου

Έστω η αρχική κατάσταση $\Xi = (\xi_1, \xi_2)$ που ανήκει στην καμπύλη γ_+ (βλ. Σχήμα 4. 10). Θεωρούμε τις 4 δυνατές ακολουθίες ελέγχων αρίστου χρόνου $\{+1\}$, $\{-1\}$, $\{+1, -1\}$ και $\{-1, +1\}$. Εξ ορισμού, ο έλεγχος $\{+1\}$ παράγει την τροχιά ΞO που φτάνει στην αρχή. Ο έλεγχος $\{-1\}$ παράγει την τροχιά ΞA που δεν φτάνει ποτέ στην αρχή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.10. Η ακολουθία ελέγχου $\{+1, -1\}$ δίνει τροχιές της μορφής $\Xi B \Gamma$ που δεν φτάνουν ποτέ στην αρχή και η ακολουθία ελέγχου $\{-1, +1\}$ δίνει τροχιές της μορφής $\Xi \Delta E$ που δε φτάνουν επίσης ποτέ στην αρχή. Υπάρχει βέβαια η τροχιά $\Xi \Delta Z O$ η οποία φτάνει στον στόχο αλλά δεν είναι η άριστη τροχιά. Και αυτό γιατί παράγεται από ακολουθία ελέγχου της μορφής $\{-1, +1, -1\}$ η οποία περιλαμβάνει 2 αλλαγές στον έλεγχο και επομένως δεν ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες για βελτιστότητα. Όλα αυτά φαίνονται καθαρά στο Σχήμα 4. 10. Τελικά, αν η αρχική κατάσταση είναι πάνω στην καμπύλη γ_+ , από όλες τις ακολουθίες ελέγχου που είναι υποψήφιες για τον έλεγχο αρίστου χρόνου, μόνο η ακολουθία $\{+1\}$ οδηγεί την κατάσταση Ξ στο O . Άρα η ακολουθία $\{+1\}$ είναι η ακολουθία αρίστου χρόνου.

Έτσι βρήκαμε τον έλεγχο αρίστου χρόνου για αρχικές καταστάσεις στην καμπύλη γ . □

Διατυπώνουμε τώρα έναν ισχυρισμό για τον έλεγχο αρίστου χρόνου για τις καταστάσεις των συνόλων R_+ και R_- .

Ισχυρισμός 4.2. Ο έλεγχος αρίστου χρόνου u^* ως συνάρτηση της κατάστασης (x_1, x_2) δίνεται από τις

$$\begin{aligned} u^* &= u^*(x_1, x_2) = +1 \quad \text{για κάθε } (x_1, x_2) \in \gamma_+ \cup R_+ \\ u^* &= u^*(x_1, x_2) = -1 \quad \text{για κάθε } (x_1, x_2) \in \gamma_- \cup R_- \end{aligned} \tag{4.23}$$

και είναι μοναδικός.

Απόδειξη : Για τις καταστάσεις που ανήκουν στην καμπύλη γ_+ , έχουμε βρει τον έλεγχο αρίστου χρόνου με την διατύπωση του Ισχυρισμού 4.1.

Παίρνουμε μια κατάσταση Ψ που ανήκει στο σύνολο R_+ (βλ. Σχήμα 4.10). Αν χρησιμοποιήσουμε την ακολουθία ελέγχου $\{+1\}$ παίρνουμε την τροχιά $\Psi\Pi$ που δεν φτάνει στην αρχή. Αν χρησιμοποιήσουμε την ακολουθία ελέγχου $\{-1\}$ παίρνουμε την τροχιά $\Psi\rho$ που δε φτάνει στην αρχή. Αν χρησιμοποιήσουμε την ακολουθία ελέγχου $\{-1, +1\}$ παίρνουμε την τροχιά $\Psi\Sigma\Gamma$ που δε φτάνει στην αρχή. Ωστόσο, αν χρησιμοποιήσουμε την ακολουθία $\{+1, -1\}$ αλλάζοντας από $+1$ σε -1 ακριβώς όταν η τροχιά συναντήσει την καμπύλη γ και πιο συγκεκριμένα όταν η τροχιά συναντήσει την καμπύλη γ_- , τότε μπορούμε να οδηγήσουμε το σύστημα στην αρχή. Δηλαδή παίρνουμε την τροχιά ΨIO όπου το σημείο I ανήκει στην καμπύλη γ (βλ. Σχήμα 4.10) ^[1]. Η αρχική κατάσταση Ψ επιλέχτηκε τυχαία άρα τα παραπάνω ισχύουν για κάθε αρχική κατάσταση στο σύνολο R_+ . Καταλήγουμε στο ότι η ακολουθία ελέγχου $\{+1, -1\}$ είναι η ακολουθία αρίστου χρόνου για κάθε κατάσταση στο R_+ με την προϋπόθεση ότι ο έλεγχος αλλάζει από $u=+1$ σε $u=-1$ στην καμπύλη γ_+ που είναι μέρος της καμπύλης αλλαγής γ .

Όμοια συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $\{-1, +1\}$ είναι η ακολουθία αρίστου χρόνου για κάθε κατάσταση στο R_- αν ο έλεγχος αλλάζει από $u=-1$ σε $u=+1$ στην καμπύλη αλλαγής γ .

□

Όλα αυτά φαίνονται στο Σχήμα 4.10.

5 . ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΜΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

5. 1. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΜΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Στο προηγούμενο παράδειγμα εξετάσαμε ένα πρόβλημα ελέγχου αρίστου όπου οι ιδιοτιμές του πίνακα του συστήματος ήταν πραγματικές . Περνάμε σε ένα σύστημα δεύτερης τάξης για το οποίο οι ιδιοτιμές του πίνακα του συστήματος είναι φανταστικές . Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4 , περιμένουμε ο έλεγχος αρίστου χρόνου να αλλάζει αρκετές φορές για καταστάσεις μακριά από την αρχή .

Η εξίσωση που περιγράφει το σύστημα είναι:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = K u(t) \quad , K > 0 \quad (5.1)$$

όπου ο έλεγχος $u(\cdot)$ ικανοποιεί την σχέση

$$|u(\cdot)| \leq 1 \quad . \quad (5.2)$$

Ορίζουμε τις μεταβλητές κατάστασης y_1, y_2 ως εξής :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y(t) \\ y_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Προκύπτουν έτσι από την (5.1) οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= -\omega^2 y_1 + K u(t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

και σε μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ K u(t) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο γραμμικό μετασχηματισμό ^[1] :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\omega}{K} y_1 \\ x_2 &= \frac{1}{K} y_2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Το σύστημα στις νέες συντεταγμένες γράφεται :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Δηλαδή είναι ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u \quad (5.8)$$

με

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του \mathbf{A} , υπολογίζουμε τις ρίζες του $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^2 + \omega^2$ επομένως :

$$s_1 = j\omega \quad \text{και} \quad s_2 = -j\omega \quad (5.10)$$

Καταλήγουμε σε μιγαδικές ιδιοτιμές. Θεωρούμε το ίδιο σύστημα με το (5.7) αλλά με μηδενισμένη την είσοδο δηλαδή $u = 0$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (5.11)$$

με

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} .$$

και βρίσκουμε τον θεμελιώδη πίνακα $\Phi(t)$ για το σύστημα (5.11) :

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} . \quad (5.12)$$

Άρα από θεωρία γραμμικών συστημάτων, η λύση του (5.11) είναι :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

με αρχικές συνθήκες

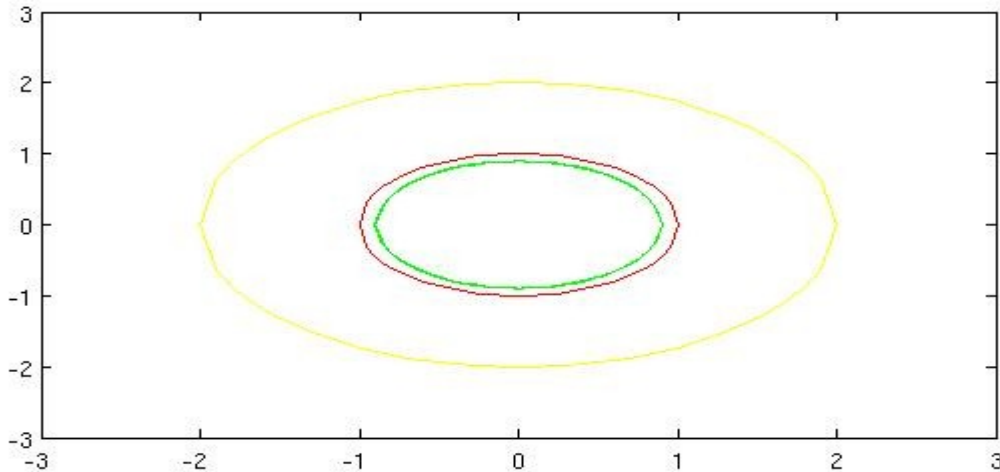
$$\begin{aligned} x_1(0) &= \xi_1 \\ x_2(0) &= \xi_2 \end{aligned} . \quad (5.14)$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω πίνακας είναι ορθογώνιος άρα:

$$x_1^2 + x_2^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 = c \text{ σταθερά} \quad (5.15)$$

Επομένως, ο γεωμετρικός τύπος των τροχιών του ελεύθερου συστήματος είναι κύκλοι με κέντρο την αρχή των αξόνων στο επίπεδο x_1x_2 και ακτίνα η οποία εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες ξ_1 και ξ_2 και έχει μέγεθος την απόσταση της αφετηρίας (ξ_1, ξ_2) από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ δηλαδή $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

Οι τροχιές αυτές φαίνονται στο Σχήμα 5.1. Με την παραπάνω ανάλυση δείξαμε ότι οι τροχιές του ελεύθερου συστήματος δεν διέρχονται από την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 5.1 : Τροχιές του ελεύθερου συστήματος (5.11)

Πρόβλημα 5.1. Για το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση (5.7), όπου ο έλεγχος ικανοποιεί τον έξης περιορισμό: $|u(\cdot)| \leq 1$, καθορίζουμε τον έλεγχο που οδηγεί το σύστημα από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση (ξ_1, ξ_2) στην αρχή των αξόνων $(0, 0)$ στον ελάχιστο χρόνο.

5.2. ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΜΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Προχωρούμε στην επίλυση του προβλήματος ως εξής:

- Σχηματίζουμε την Hamiltonian συνάρτηση (βλ. Σχέση 2.46) για το συγκεκριμένο πρόβλημα:

$$H = 1 + (p_1 \ p_2) \begin{pmatrix} \omega x_2 \\ -\omega x_1 + u \end{pmatrix} = 1 + \omega x_2 p_1 - \omega x_1 p_2 + u p_2$$

- Αν θεωρήσουμε την Hamiltonian ως συνάρτηση του ελέγχου $u(\cdot)$ και τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές $H = H(u)$, τότε για να ελαχιστοποιηθεί η Hamiltonian (βλ. Παρατήρηση 2.1) με $u \in [-1, 1]$, εξετάζουμε τον όρο $u p_2$.
- Με δεδομένο ότι $-1 \leq u \leq +1$, το πρόσημο της βοηθητικής μεταβλητής p_2 καθορίζει τον έλεγχο αρίστου χρόνου. Δηλαδή
 - αν $p_2 > 0$, τότε το u πρέπει να παίρνει την μικρότερη δυνατή τιμή άρα $u = -1$.
 - αν $p_2 < 0$, τότε το u πρέπει να παίρνει την μεγαλύτερη δυνατή τιμή άρα $u = +1$.

Άρα καταλήγουμε στη σχέση:

$$u(t) = -\text{sgn } p_2(t) \quad (5.16)$$

Είναι :

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}}\right)' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (5.17)$$

και από την αρχή του μεγίστου (σχέση 2.47) :

$$\dot{\mathbf{p}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}\right)' = \begin{pmatrix} \omega p_2 \\ -\omega p_1 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Άρα βγάζουμε τις ακόλουθες εξισώσεις για τις βοηθητικές μεταβλητές p_1 και p_2 :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_1} = \omega p_2(t) \\ \dot{p}_2(t) &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_2} = -\omega p_1(t) \end{aligned} \quad (5.19)$$

οι οποίες σε μορφή πινάκων γράφονται:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

δηλαδή όπως ακριβώς το σύστημα (5.7). Από την σχέση (5.18), παίρνουμε για τον πίνακα $\Phi(\cdot)$:

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

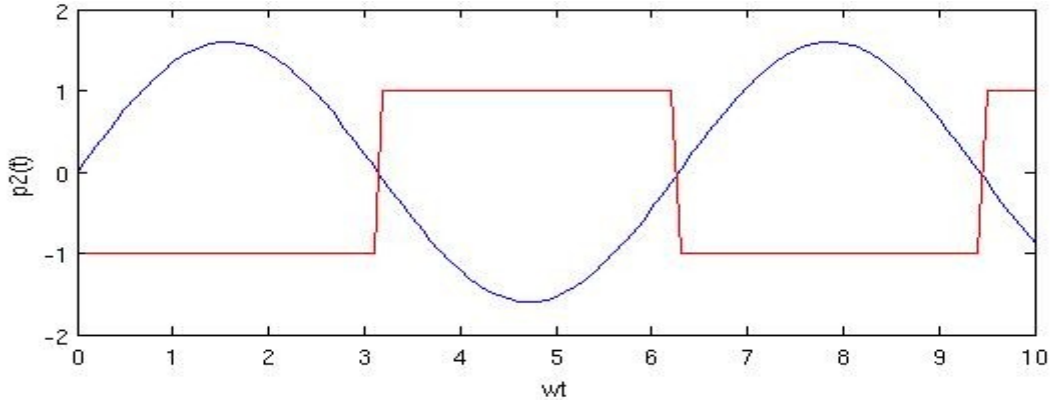
Ψάχνουμε το πρόσημο της βοηθητικής μεταβλητής $p_2(t)$. Από την εξίσωση (5.21) :

$$p_2(t) = -\sin(\omega t)p_1(0) + \cos(\omega t)p_2(0) \quad (5.22)$$

δηλαδή το $p_2(t)$ είναι άθροισμα ημιτονοειδών άρα μπορεί να εκφραστεί ως ένα ημίτονο με διαφορετικό πλάτος A και φάση α ^[1] :

$$p_2(t) = A\sin(\omega t + \alpha) \quad (5.23)$$

Από τις (5.16) και (5.23), έχουμε το Σχήμα 5.2 :



Σχήμα 5.2: Με μπλε δείχνεται η συζυγής μεταβλητή p_2 και με κόκκινο απεικονίζεται ο τμηματικά σταθερός έλεγχος αρίστου χρόνου

- Ο έλεγχος βελτίστου χρόνου πρέπει να είναι μια τμηματικά σταθερή συνάρτηση και να αλλάζει μόνο μεταξύ των τιμών $u(t)=-1$ και $u(t)=+1$.
- Ο έλεγχος αρίστου χρόνου δε μπορεί να παραμείνει σταθερός για παραπάνω από $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου.
- Δεν υπάρχει ανώ όριο στον αριθμό των αλλαγών του ελέγχου αρίστου χρόνου, όπως αναμενόταν από το Θεώρημα 3.4.
- Η συνάρτηση $p_2(t)$ δε μηδενίζεται παρά μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές διότι αν μηδενιζόταν σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα, θα απαιτούσαμε $p_1(0) = 0$ και $p_2(0) = 0$ και άρα $p_1(t) = p_2(t) = 0$ για κάθε t και επομένως η Hamiltonian $H = 1 \neq 0$ όπως απαιτεί η αρχή του μεγίστου (βλ. σχέση 2.49 και αναγκαία συνθήκη 3).

Το γεγονός ότι δεν υπάρχει όριο στο συνολικό αριθμο αλλαγών για αυτό το σύστημα δεύτερης τάξης που έχει μιγαδικές ιδιοτιμές έρχεται σε αντίθεση με τα συστήματα δεύτερης τάξης με πραγματικές ιδιοτιμές για τα οποία ο έλεγχος αρίστου χρόνου αλλάζει το πολύ μία φορά σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4.

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τη λύση του συστήματος (5.7) χρησιμοποιώντας τους ελέγχους

$$u = \Delta = \pm 1 \tag{5.24}$$

Αν η αρχική κατάσταση δίνεται από τις

$$\xi_1 = x_1(0) \quad \xi_2 = x_2(0) \tag{5.25}$$

Τότε η λύση του συστήματος (5.7) είναι

$$x_1(t) = \left(\xi_1 - \frac{\Delta}{\omega}\right) \cos(\omega t) + \xi_2 \sin(\omega t) + \frac{\Delta}{\Omega} \tag{5.26}$$

$$x_2(t) = -\left(\xi_1 - \frac{\Delta}{\omega}\right) \sin(\omega t) + \xi_2 \cos(\omega t) \tag{5.27}$$

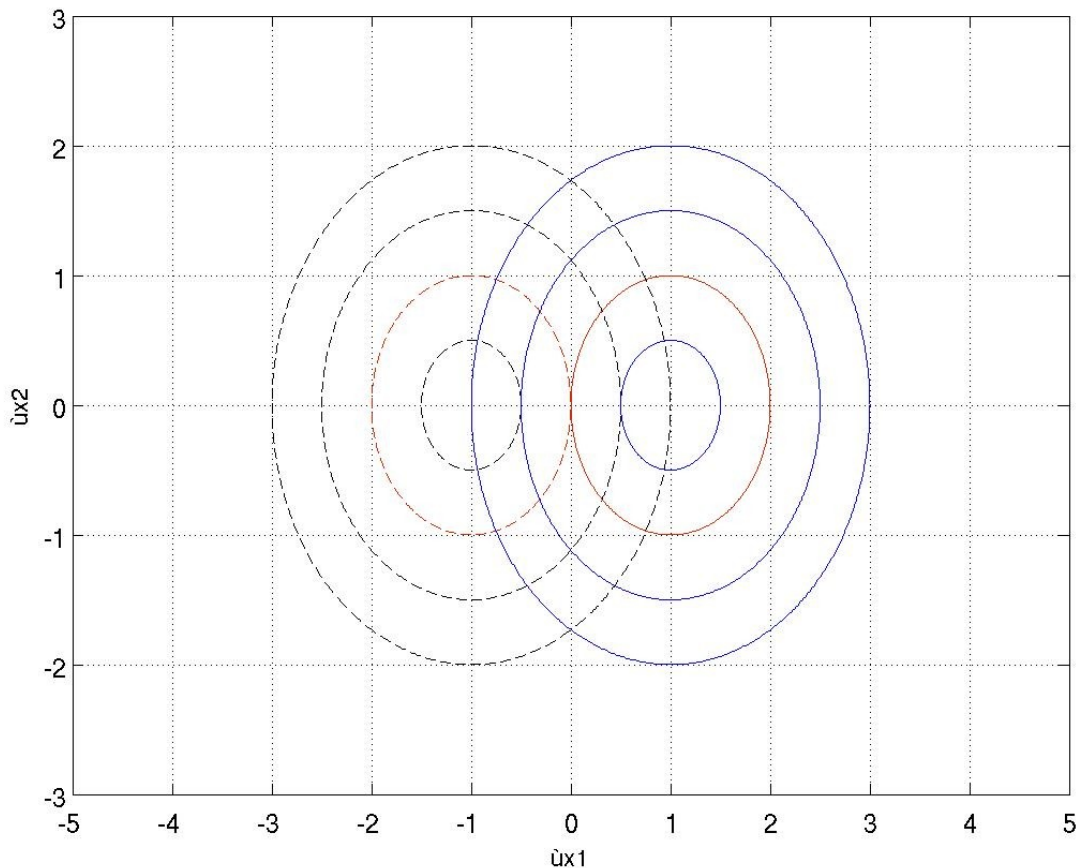
Ισοδύναμα :

$$\begin{aligned}\omega x_1(t) &= (\omega \xi_1 - \Delta) \cos(\omega t) + \omega \xi_2 \sin(\omega t) + \Delta \\ \omega x_2(t) &= -(\omega \xi_1 - \Delta) \sin(\omega t) + \omega \xi_2 \cos(\omega t)\end{aligned}\quad (5.28)$$

Τετραγωνίζοντας και τα δύο μέλη των παραπάνω εξισώσεων και προσθέτοντας, παίρνουμε την εξίσωση :

$$[\omega x_1(t) - \Delta]^2 + [\omega x_2(t)]^2 = (\omega \xi_1 - \Delta)^2 + (\omega \xi_2)^2 \quad (5.29)$$

Η παραπάνω εξίσωση δεν περιέχει τον χρόνο t και είναι η εξίσωση των τροχιών στο επίπεδο με άξονες τα ωx_1 και ωx_2 .



Σχήμα 5.3: Οι συνεχείς κύκλοι αναπαριστούν τροχιές του αρμονικού ταλαντωτή όταν $u = +1$ ενώ οι διακεκομμένες τροχιές οφείλονται στον έλεγχο $u = -1$. Η κίνηση των καταστάσεων είναι δεξιόστροφη. Με κόκκινο φαίνονται οι τροχιές του ταλαντωτή που περνούν από την αρχή των αξόνων.

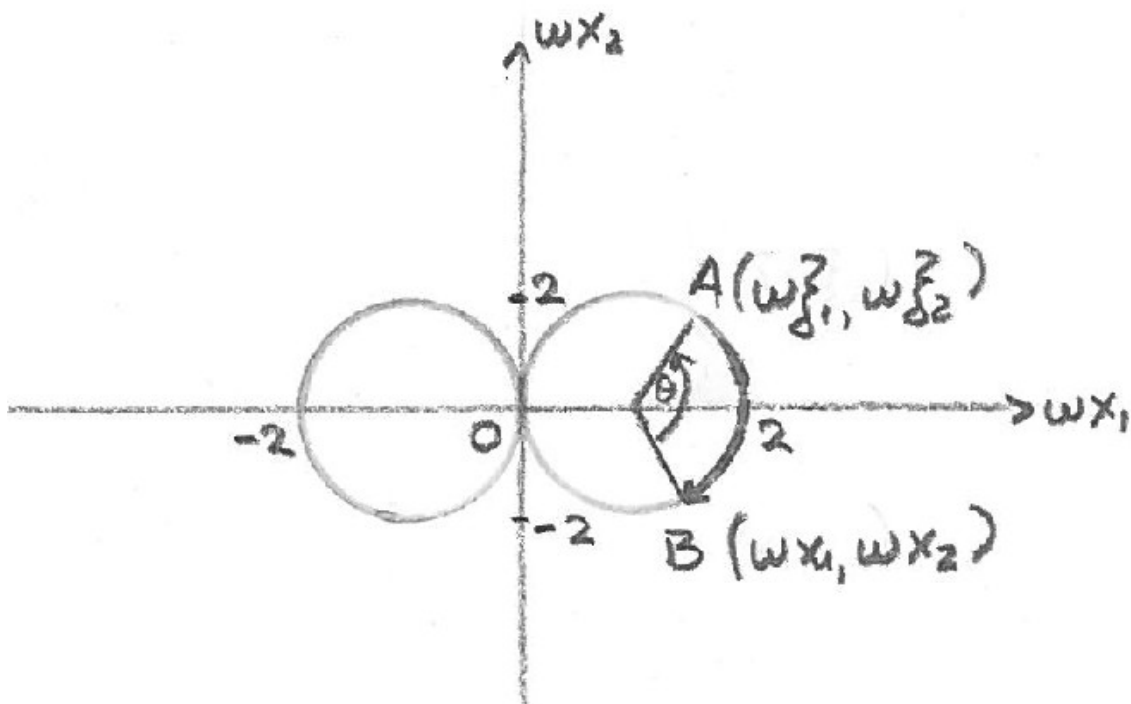
Αυτές οι τροχιές στο επίπεδο με άξονες ωx_1 και ωx_2 είναι κύκλοι με κέντρο το $O(\Delta, 0)$. Επομένως, αν $u = +1$, τότε οι τροχιές είναι κύκλοι γύρω από το σημείο $(1, 0)$ ενώ αν $u = -1$, τότε οι τροχιές είναι κύκλοι γύρω από το σημείο $(-1, 0)$. Οι τροχιές αυτές φαίνονται στο σχήμα 5.3.

Από τις εξισώσεις (5.28), παίρνουμε μια αναλυτική έκφραση για τον χρόνο που

απαιτείται για να πάμε από το σημείο $(\omega\xi_1, \omega\xi_2)$ στο $(\omega x_1, \omega x_2)$ όταν ο έλεγχος είναι $u = \Delta$. Ο χρόνος δίνεται από την εξίσωση ^[1]

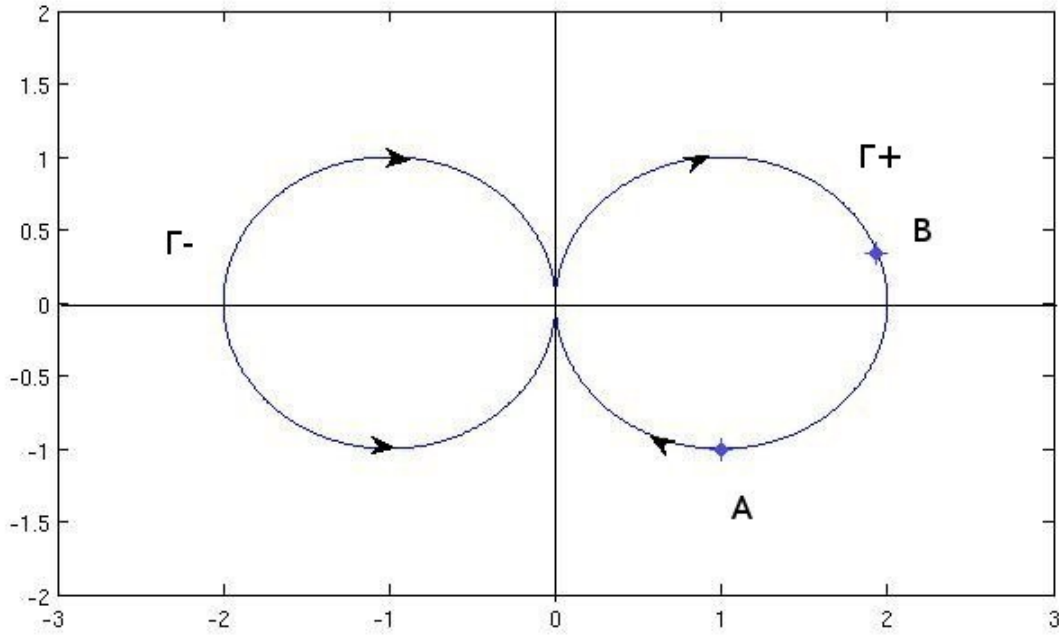
$$t = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \frac{(\omega x_1 - \Delta)\omega\xi_2 - \omega x_2(\omega\xi_1 - \Delta)}{(\omega x_2) + (\omega x_1 - \Delta)(\omega\xi_1 - \Delta)} \quad (5.30)$$

Αυτός ο τύπος έχει μια πολύ απλή εξήγηση στο επίπεδο με άξονες ωx_1 και ωx_2 . Μπορούμε να πάρουμε το χρόνο μετρώντας τη γωνία $\theta = \omega t$ του κυκλικού τόξου από το σημείο $(\omega\xi_1, \omega\xi_2)$ στο $(\omega x_1, \omega x_2)$ όπου το κυκλικό τόξο έχει το κέντρο του στο σημείο $(\Delta, 0)$ (βλ. Σχήμα 5.4).



Σχήμα 5.4: ο χρόνος μετάβασης από την κατάσταση $(\omega\xi_1, \omega\xi_2)$ στην κατάσταση $(\omega x_1, \omega x_2)$ δίνεται από την σχέση $\tau = \frac{\theta}{\omega}$.

Στο Σχήμα 5.5, απεικονίζονται οι 2 μοναδικοί κύκλοι Γ^+ και Γ^- από τις προηγούμενες οικογένειες κύκλων που αντιστοιχούν σε έλεγχο $u = +1$ και $u = -1$ αντίστοιχα οι οποίοι περνούν από την αρχή των αξόνων του επιπέδου με άξονες ωx_1 και ωx_2 .



Σχήμα 5.5 : Οι 2 κύκλοι Γ^+ και Γ^- αναπαριστούν τις 2 εξαναγκασμένες τροχιές από τους ελέγχους $u = +1$ και $u = -1$ που περνούν από την αρχή του επιπέδου

Γράφοντας τους κύκλους Γ^+ και Γ^- ως σύνολα , παίρνουμε:

$$\Gamma^+ = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - 1)^2 + (\omega x_2)^2 = 1\} \quad (5.31)$$

και

$$\Gamma^- = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + 1)^2 + (\omega x_2)^2 = 1\} \quad (5.32)$$

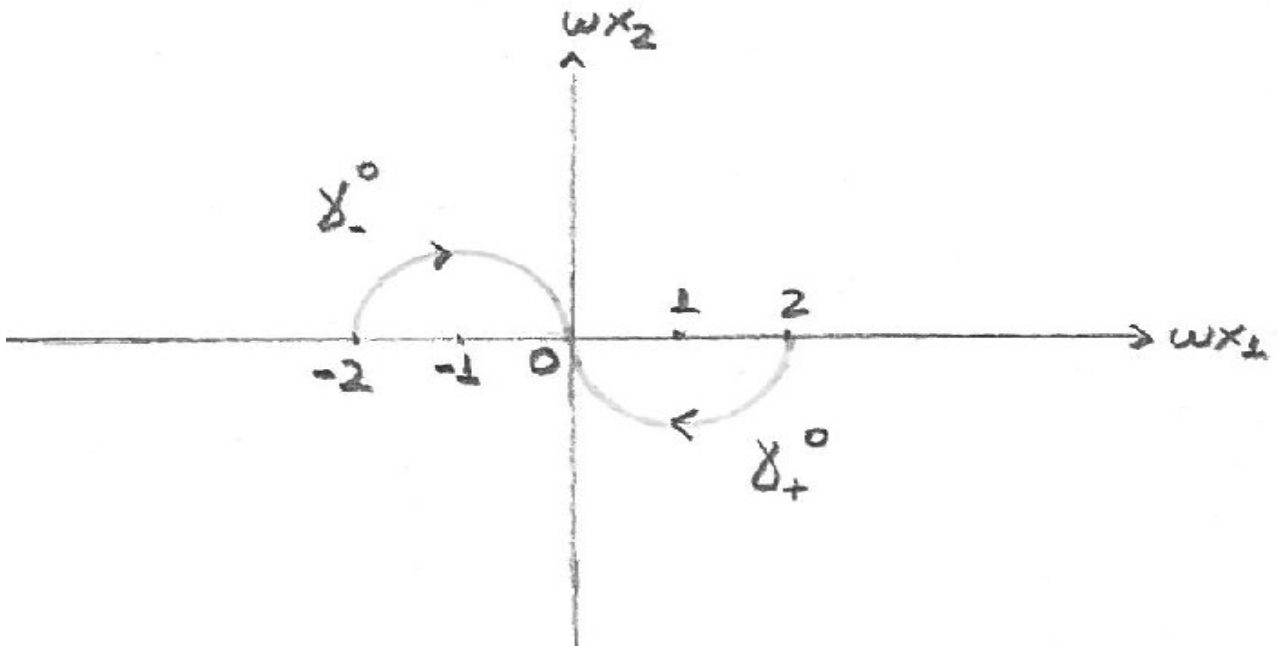
Κάθε κατάσταση στο Γ^+ μπορεί να οδηγηθεί στην αρχή από τον έλεγχο $u = +1$. Συγκεκριμένα, το σημείο $(2,0)$ μπορεί να οδηγηθεί στην αρχή σε ακριβώς $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου καθώς το κυκλικό τόξο έχει μήκος ακριβώς π ακτίνια. Στο Σχήμα 5.5 , εφαρμογή του ελέγχου $u = +1$ οδηγεί το σημείο A του Γ^+ στην αρχή σε λιγότερες από $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου , ενώ το σημείο B του Γ^+ απαιτεί περισσότερες από $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου , το οποίο όμως παραβιάζει την απαίτηση ο έλεγχος άριστου χρόνου να παραμένει σταθερός το πολύ για $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου .

Ορισμός 5.1. Έστω γ_+^0 το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην αρχή σε χρόνο λιγότερο ή ίσο με $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου από τον έλεγχο $u = +1$. Είναι προφανές ότι

$$\gamma_+^0 = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - 1)^2 + (\omega x_2)^2 = 1 ; \omega x_2 < 0\} \quad (5.33)$$

Με άλλα λόγια, η καμπύλη γ_+^0 είναι το τμήμα του κύκλου Γ^+ που βρίσκεται κάτω από

τον άξονα ωx_1 (βλ. Σχήμα 5.6).



Σχήμα 5.6: Οι καμπύλες γ_-^0 και γ_+^0 για το σύστημα του ταλαντωτή μίας εισόδου

Ορισμός 5.2. Έστω γ_-^0 το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην αρχή σε χρόνο λιγότερο ή ίσο με $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου από τον έλεγχο $u = -1$. Είναι προφανές ότι

$$\gamma_-^0 = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + 1)^2 + (\omega x_2)^2 = 1 ; \omega x_2 > 0\} \quad (5.34)$$

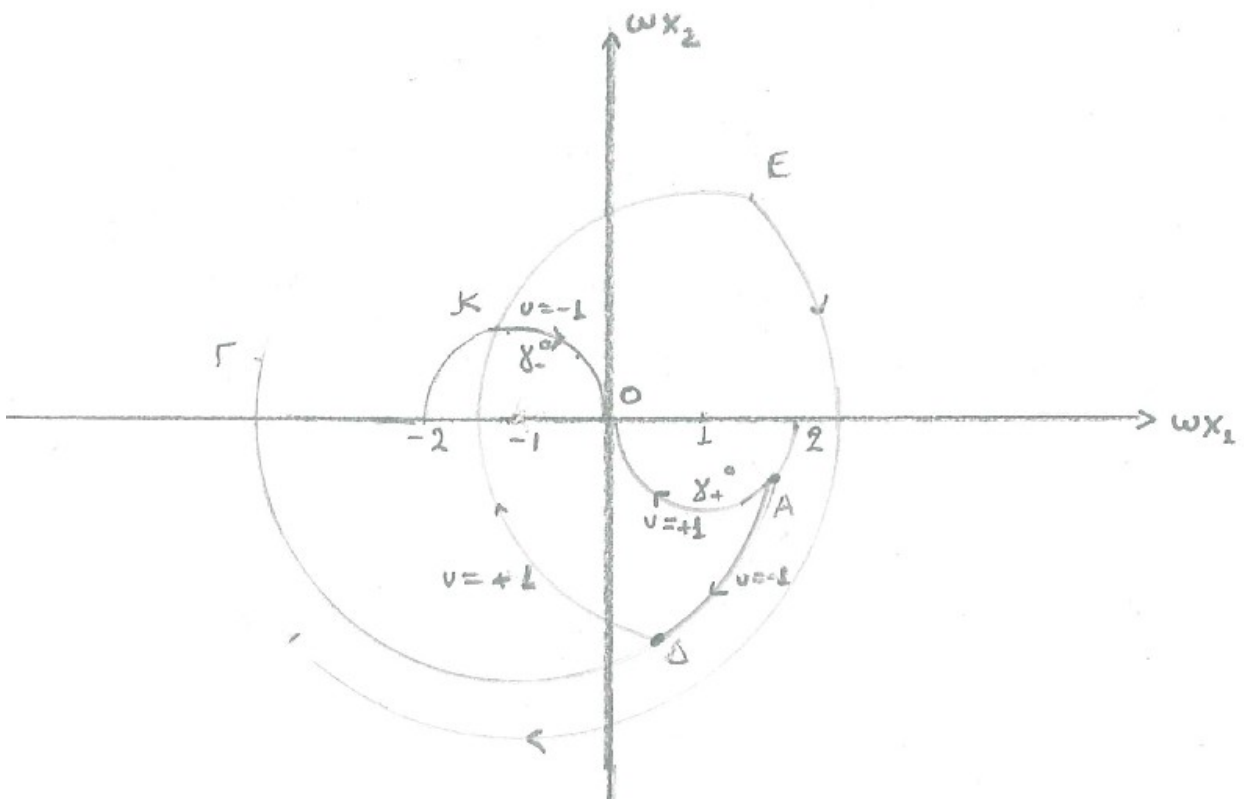
Με άλλα λόγια, η καμπύλη γ_-^0 είναι το τμήμα του κύκλου Γ^- που βρίσκεται πάνω από τον άξονα ωx_1 (βλ. Σχήμα 5.6).

Τώρα δείχνουμε ότι οι καμπύλες γ_-^0 και γ_+^0 αποτελούν βέλτιστα μονοπάτια προς την αρχή.

Ισχυρισμός 5.1. Ισχυριζόμαστε ότι δοθείσης μιας κατάστασης $(\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_-^0 \cup \gamma_+^0$, τότε ο έλεγχος άριστου χρόνου $u^*(\cdot)$ είναι μοναδικός και δίνεται από

$$\begin{aligned} u^*(\cdot) &= u^*(\omega x_1, \omega x_2) = +1 \text{ για κάθε } (\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_+^0 \\ u^*(\cdot) &= u^*(\omega x_1, \omega x_2) = -1 \text{ για κάθε } (\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_-^0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Απόδειξη : Θα αποδείξουμε γεωμετρικά τον Ισχυρισμό 5.1 .



Σχήμα 5.7 : Επίδειξη κάποιων άριστων τροχιών και κάποιων τροχιών που δεν οδηγούν στην αρχή

Στο Σχήμα 5.7, παίρνουμε ένα σημείο A που ανήκει στην καμπύλη γ_+^0 . Από τον ορισμό 5.1 της καμπύλης γ_+^0 , το A θα οδηγηθεί στην αρχή των αξόνων κατά μήκος του τόξου AO που ανήκει στην καμπύλη γ_+^0 για $u = +1$. Ελέγχουμε τώρα αν το A οδηγείται στην αρχή με εφαρμογή του ελέγχου $u = -1$. Έχουμε δείξει με την εξίσωση (5.29) ότι οι τροχιές που προκύπτουν από τον έλεγχο $u = -1$ είναι κύκλοι γύρω από το σημείο $(-1, 0)$. Παράλληλα, οι τροχιές αυτές για να ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες βελτιστότητας πρέπει να έχουν μήκος το πολύ π ακτίνια. Έστω ότι φτάνουμε στο σημείο Γ (βλ. Σχήμα 5.7). Προφανώς, το τόξο $A\Gamma$ δεν περιέχει την αρχή των αξόνων. Αναγκαστικά όταν φτάσουμε στο Γ (ή και πιο πριν) θα πρέπει να ξαναλλάξουμε τον έλεγχο από -1 σε $+1$. Έστω ότι αλλάζουμε στο σημείο Δ (βλ. Σχήμα 5.7) και έστω E το σημείο στο οποίο

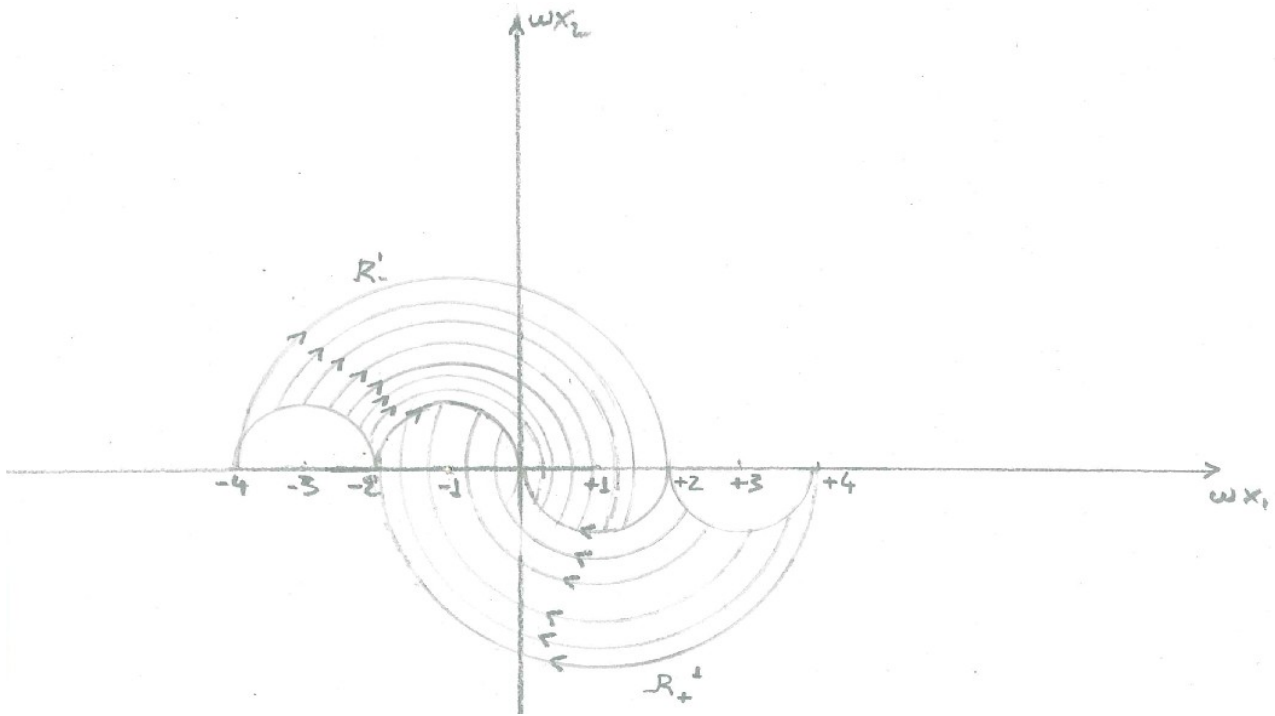
καταλήγει η τροχιά, που αρχίζει από το Δ με εφαρμογή του ελέγχου $u = +1$, μετά από $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου. Το τόξο ΔE θα ανήκει σε έναν κύκλο με κέντρο το σημείο $(1, 0)$ (εξίσωση 5.29 με $\Delta = 1$) και δεν περιέχει την αρχή των αξόνων (βλ. Σχήμα 5.7). Άρα πρέπει να ξαναλλάξουμε τον έλεγχο σε -1 αλλά όλο και απομακρυνόμαστε από την αρχή. Δηλαδή αν στο αρχικό σημείο A εφαρμόσουμε τον έλεγχο $u = -1$ και συνεχίσουμε εφαρμόζοντας μια ακολουθία ελέγχων που είναι σύμφωνη με την αρχή του μεγίστου, απομακρυνόμαστε από την αρχή.

Η ακολουθία ελέγχων που πήραμε παραπάνω βέβαια δεν είναι η μοναδική για να οδηγηθούμε στην αρχή. Θα μπορούσαμε όπως πριν, αφού εφαρμόσουμε έλεγχο $u = +1$ από το σημείο Δ , να αλλάξουμε τον έλεγχο σε -1 μόλις συναντήσουμε την καμπύλη γ_-^0 στο σημείο K και να βρεθούμε στην αρχή. Όμως τότε το τόξο ΔK θα είχε μήκος μικρότερο από π ακτίνια. Το τόξο ΔK ωστόσο πρέπει να έχει μήκος ακριβώς π ακτίνια αφού μόνο το πρώτο και το τελευταίο τόξο της βέλτιστης τροχιάς μπορούν να έχουν μήκος μικρότερο από π (βλ. Σχήμα 5.1). Άρα η τροχιά $A\Delta K O$ δεν είναι η βέλτιστη. Τελικά, για οποιοδήποτε σημείο A που ανήκει στην καμπύλη γ_+^0 , ο βέλτιστος έλεγχος θα είναι $u = +1$ διότι όποιος άλλος έλεγχος μεταφέρει το σημείο A στην αρχή, παραβιάζει τις αναγκαίες συνθήκες βελτιστότητας.

□

Ορισμός 5.3. Έστω R_-^1 το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_+^0 σε χρόνο λιγότερο ή ίσο με $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου από τον έλεγχο $u = -1$. Το σύνολο R_-^1 κατασκευάζεται από όλα τα κυκλικά τόξα μήκους π ακτινίων γύρω από το κέντρο $(-1, 0)$ που τερματίζουν στην καμπύλη γ_+^0 . Το σύνολο R_-^1 δείχνεται στο σχήμα 5.8.

Ορισμός 5.4. Έστω R_+^1 το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_-^0 σε χρόνο λιγότερο ή ίσο με $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου από τον έλεγχο $u = +1$. Το σύνολο R_+^1 κατασκευάζεται από όλα τα κυκλικά τόξα μήκους π ακτινίων γύρω από το κέντρο $(+1, 0)$ που τερματίζουν στην καμπύλη γ_-^0 . Το σύνολο R_+^1 δείχνεται στο σχήμα 5.8.



Σχήμα 5.8 : Τα σύνολα R'_+ και R'_-

Ορισμός 5.5. Έστω γ_-^1 το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_+^0 σε ακριβώς $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου από τον έλεγχο $\mathbf{u} = -\mathbf{1}$. Η καμπύλη γ_-^1 είναι ένα ημικύκλιο πάνω από τον άξονα ωx_1 με κέντρο το $(-3, 0)$ ή ακριβέστερα

$$\gamma_-^1 = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + 3)^2 + (\omega x_2)^2 = 1; \omega x_2 > 0\} \quad (5.36)$$

Η καμπύλη γ_-^1 δείχνεται στο Σχήμα 5.9.

Ορισμός 5.6. Έστω γ_+^1 το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_-^0 σε ακριβώς $\frac{\pi}{\omega}$ χρονικές μονάδες από τον έλεγχο $\mathbf{u} = +\mathbf{1}$. Η καμπύλη γ_+^1 είναι ένα ημικύκλιο κάτω από τον άξονα ωx_1 με κέντρο το $(3, 0)$ ή ακριβέστερα

$$\gamma_+^1 = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - 3)^2 + (\omega x_2)^2 = 1; \omega x_2 < 0\} \quad (5.37)$$

Η καμπύλη γ_+^1 δείχνεται στο Σχήμα 5.9.

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, παράγουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός 5.2. Ισχυρίζομαστε ότι δοθείσης μιας κατάστασης $(\omega x_1, \omega x_2) \in R'_+ \cup R'_-$, τότε ο έλεγχος αρίστου χρόνου \mathbf{u}^* είναι μοναδικός και δίνεται από

$$\begin{aligned} u^* = u^*(\omega x_1, \omega x_2) &= +1 \text{ για κάθε } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_+^1 \\ u^* = u^*(\omega x_1, \omega x_2) &= -1 \text{ για κάθε } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_-^1 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Η απόδειξη του παραπάνω νόμου ελέγχου είναι όμοια με την απόδειξη του Ισχυρισμού 5.1 – παίρνουμε ένα σημείο π.χ. στο R_-^1 και δείχνουμε ότι η μόνη ακολουθία ελέγχου η οποία ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες που προέρχονται από την αρχή του μεγίστου είναι να εφαρμόσουμε τον έλεγχο $u = -1$ μέχρι να φτάσουμε την καμπύλη γ_+^0 και μετά να αλλάξουμε τον έλεγχο σε $u = +1$ για να φτάσουμε στην αρχή.

Γενικεύουμε για όλα τα σημεία του χώρου κατάστασης :

Ορισμός 5.7. Έστω η καμπύλη γ_+^j , $j=1, 2, \dots$ το ημικύκλιο κάτω από τον άξονα ωx_1 με κέντρο το $(2j+1, 0)$ και μοναδιαία ακτίνα ή ακριβέστερα

$$\gamma_+^j = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - (2j+1))^2 + (\omega x_2)^2 = 1; \omega x_2 < 0\} \quad (5.39)$$

Ορισμός 5.8. Έστω η καμπύλη γ_-^j , $j=1, 2, \dots$ το ημικύκλιο πάνω από τον άξονα ωx_1 με κέντρο το $(-2j-1, 0)$ και μοναδιαία ακτίνα ή ακριβέστερα

$$\gamma_-^j = \{(\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + (2j+1))^2 + (\omega x_2)^2 = 1; \omega x_2 > 0\} \quad (5.40)$$

Οι καμπύλες γ_+^j και γ_-^j απεικονίζονται στο Σχήμα 5.9.

Ορισμός 5.9. Έστω R^j , $j=1, 2, \dots$ το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_+^{j-1} σε χρόνο λιγότερο ή ίσο με $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου από τον έλεγχο $u = -1$.

Έστω R_+^j , $j=1, 2, \dots$ το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_-^{j-1} σε χρόνο λιγότερο ή ίσο με $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου από τον έλεγχο $u = +1$.

Από τους παραπάνω ορισμούς, συνεπάγεται ότι η καμπύλη γ_-^j είναι ο τόπος όλων των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν σε ακριβώς $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου στην καμπύλη γ_+^{j-1} από τον έλεγχο $u = -1$ (βλ. Σχήμα 5.9) και η καμπύλη γ_+^j είναι ο τόπος όλων των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_-^{j-1} σε ακριβώς $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου από τον έλεγχο $u = +1$ (βλ. Σχήμα 5.9). Δηλαδή δημιουργούμε την καμπύλη γ_-^j από την καμπύλη γ_+^{j-1} περιστρέφοντας κάθε σημείο της καμπύλης γ_+^{j-1} γύρω από το κέντρο $(-1, 0)$ κατά 180 μοίρες και όμοια για την γ_+^j εκτός του ότι η περιστροφή είναι γύρω από το κέντρο $(+1, 0)$. Χρησιμοποιούμε αυτήν την παρατήρηση στη συνέχεια.

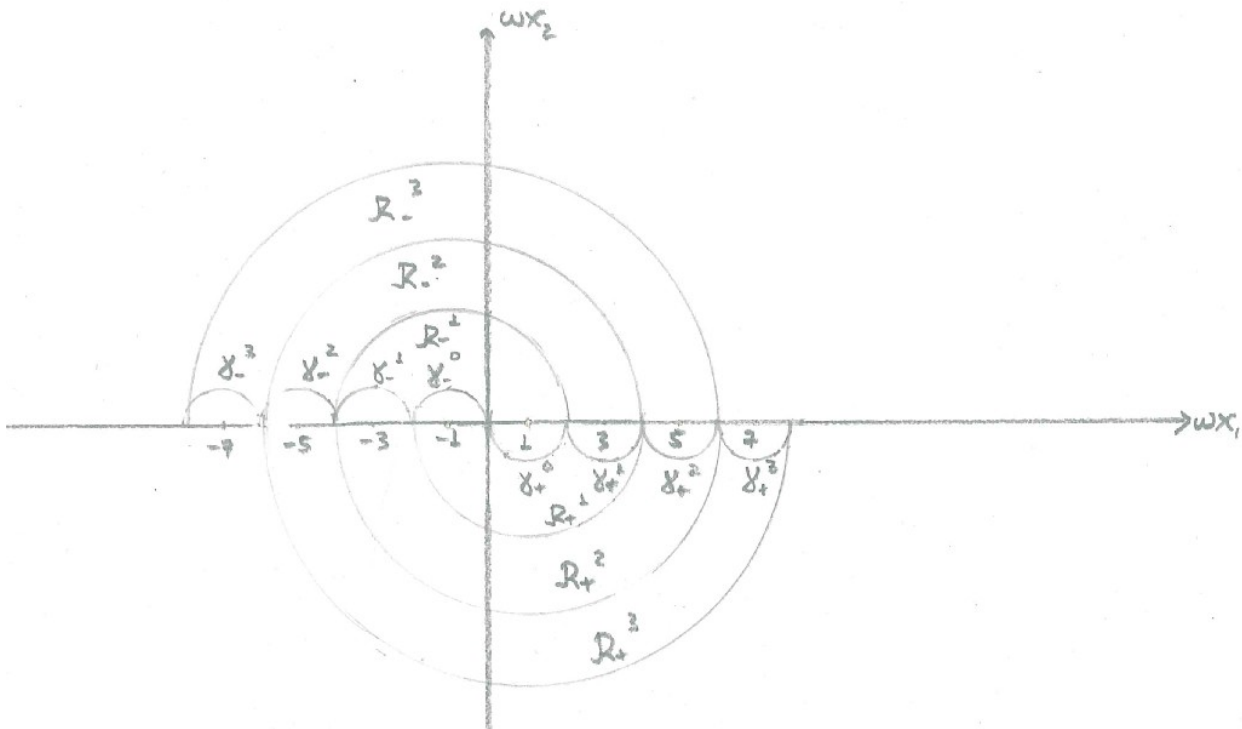
Ορίζουμε την καμπύλη αλλαγής γ ^{[1],[3],[4],[5]} από τη σχέση

$$\gamma = \left[\bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_+^j \right] \cup \left[\bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_-^j \right] = \gamma_+ \cup \gamma_- \quad (5.41)$$

και αν

$$\begin{aligned} R_- &= \bigcup_{j=1}^{\infty} R_-^j \\ R_+ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} R_+^j \end{aligned} \quad (5.42)$$

τότε το R_- είναι το σύνολο των σημείων πάνω από την καμπύλη αλλαγής και το R_+ είναι το σύνολο των σημείων κάτω από την καμπύλη αλλαγής. Τα σύνολα R_+ και R_- απεικονίζονται στο σχήμα 5.9.



Σχήμα 5.9: Τα ημικύκλια γ_+^j και γ_-^j για $j=0,1,2,\dots$ κι οι περιοχές R_+^j και R_-^j για $j=1,2,\dots$

Περιγράφουμε τώρα τον έλεγχο αρίστου χρόνου για το Πρόβλημα 5.1 :

Ισχυρισμός 5.3: Ισχυριζόμαστε ότι ο έλεγχος αρίστου χρόνου, ως συνάρτηση της κατάστασης $(\omega x_1, \omega x_2)$, δίνεται από

$$\begin{aligned} u^* &= u^*(\omega x_1, \omega x_2) = +1 \text{ για κάθε } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_+ \cup \gamma_+ \\ u^* &= u^*(\omega x_1, \omega x_2) = -1 \text{ για κάθε } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_- \cup \gamma_- \end{aligned} \quad (5.43)$$

Ο βέλτιστος έλεγχος είναι μοναδικός.

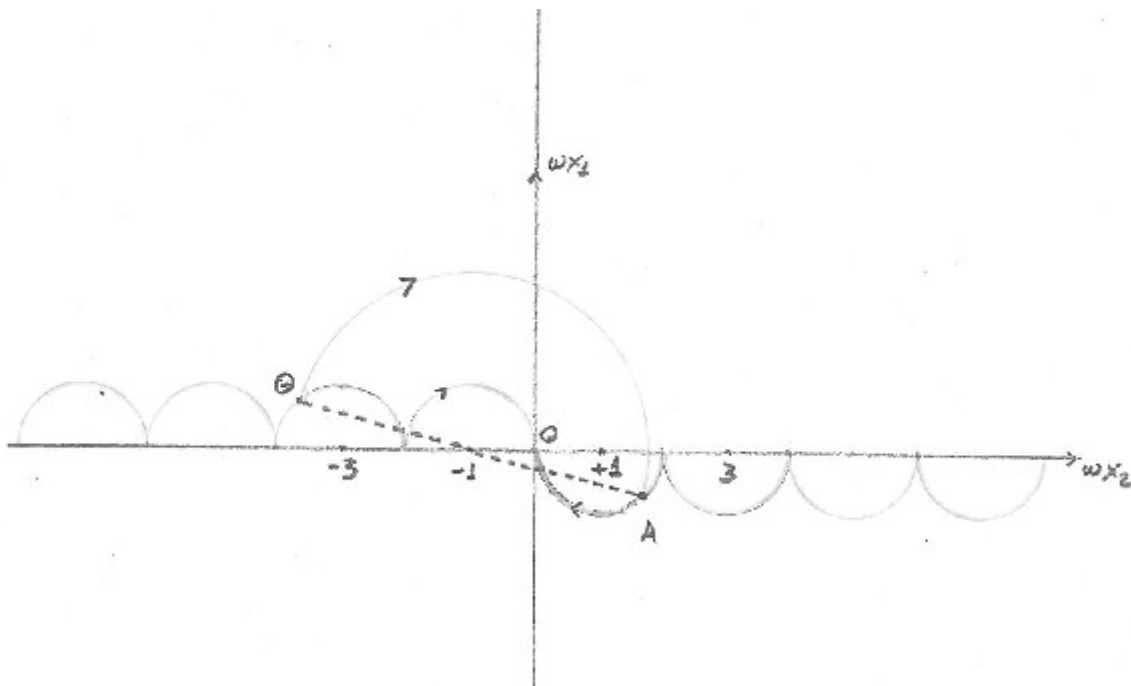
Απόδειξη : Πέρα από τη γεωμετρική μέθοδο ^[1] που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό 5.1, εδώ θα επικαλεστούμε και την ύπαρξη και μοναδικότητα του ελέγχου αρίστου χρόνου.

Παίρνουμε τον πίνακα $[B \ AB]$ για το σύστημα (5.7) :

$$(B \ AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

ο οποίος έχει τάξη 2. Επομένως, το σύστημα (5.7) ικανοποιεί την συνθήκη ελεγχιμότητας και σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4, το πρόβλημα είναι κανονικό. Για κάθε σημείο x_0 του πεδίου ελεγχιμότητας, υπάρχει ένας μοναδικός ακρότατος έλεγχος $u(t)$ που οδηγεί το x_0 στην αρχή και ο έλεγχος $u(t)$ είναι βέλτιστος.

Για τον προσδιορισμό των αρίστων τροχιών - ελέγχων, προχωράμε ανάποδα ως προς τον χρόνο ^[5] ως εξής. Έστω για παράδειγμα ένα σημείο A όπως πιο πάνω, το οποίο προφανώς ανήκει στην τομή μιας τροχιάς της οικογενείας γ^+ και της τροχιάς από την οικογένεια γ^- . Τότε λαμβάνοντας υπόψη την (5.28), πηγαίνουμε πίσω στο χρόνο ^{[3],[5]} κατά $t = \pi$ και βρισκόμαστε στο σημείο Θ , όπως δείχνουμε στο Σχήμα 5.10.

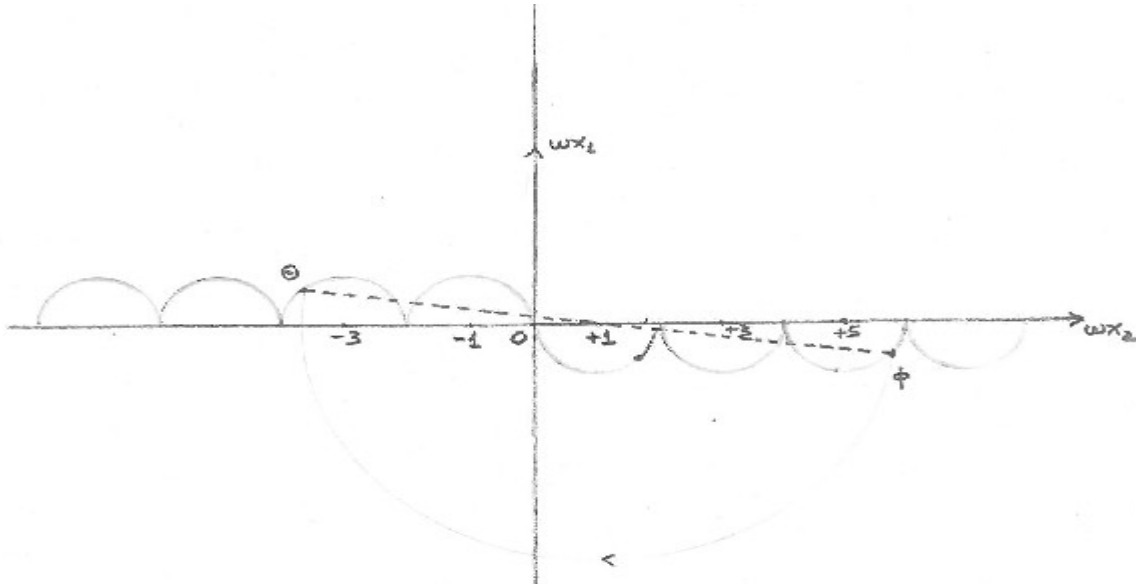


Σχήμα 5.10: Πηγαίνουμε πίσω στον χρόνο από το σημείο A κατά π/ω μονάδες χρόνου και καταλήγουμε στο σημείο Θ

Είμαστε σίγουροι πως το σύστημα στην πορεία ΘA λειτουργεί με είσοδο $u = -1$, ενώ - λόγω της περιοδικότητας με την οποία εμφανίζονται τα μηδενικά της σχέσης (5.23) - λίγο πριν το σύστημα φτάσει στο Θ θα λειτουργεί με είσοδο $u = +1$, ακολουθώντας δηλαδή την τροχιά της οικογενείας γ^+ που διέρχεται από το σημείο Θ . Πηγαίνοντας λοιπόν ξανά πίσω ως προς το χρόνο κατά π βρισκόμαστε στο σημείο Φ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.11.

Προχωράμε ακριβώς με τον ίδιο περιοδικό τρόπο, πηγαίνοντας ανάποδα ως προς τον χρόνο και δημιουργώντας ημικύκλια από τις τροχιές της οικογενείας γ^- , γ^+ αντίστοιχα. Είναι φανερό πως

- αν για παράδειγμα το Φ είναι το σημείο αφετηρίας του προβλήματος, τότε η τροχιά $\Phi\Theta A O$ οδηγεί το σύστημα στο μηδέν και επιπλέον
- η πορεία $\Phi\Theta A O$ είναι ο συντομότερος χρονικά δρόμος για να οδηγηθούμε στο μηδέν. ^[5]



Σχήμα 5.11 : Πηγαίνουμε πίσω στον χρόνο από το σημείο Θ κατά π/ω μονάδες χρόνου και καταλήγουμε στο σημείο Φ

Για τη γενική περίπτωση, η προηγούμενη συζήτηση οδηγεί στο συμπέρασμα πως ο γεωμετρικός τόπος γ χωρίζει τον \mathbb{R}^2 σε δύο σύνολα, τα R^+ και R^- με τέτοιο τρόπο ώστε, αν για παράδειγμα η αρχική συνθήκη ανήκει στο R^+ (R^-), τότε διαγράφει τροχιά με έλεγχο $u(\cdot) = +1$ (-1 αντίστοιχα) έως ότου συναντήσει τη γ . Στη συνέχεια αλλάζει είσοδο $u(\cdot) = -1$ ($+1$ αντίστοιχα) ώσπου να συναντήσει ξανά τον τόπο γ . Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με τον ίδιο περιοδικό τρόπο έως ότου τελικά η τροχιά συναντήσει για πρώτη φορά την καμπύλη αλλαγής του προβλήματος. Όταν αυτό συμβεί, οδηγείται κατευθείαν στο $O \in \mathbb{R}^2$ με είσοδο $u = +1$, ή $u = -1$, ανάλογα με τον κλάδο της καμπύλης αλλαγής που θα συναντήσει.

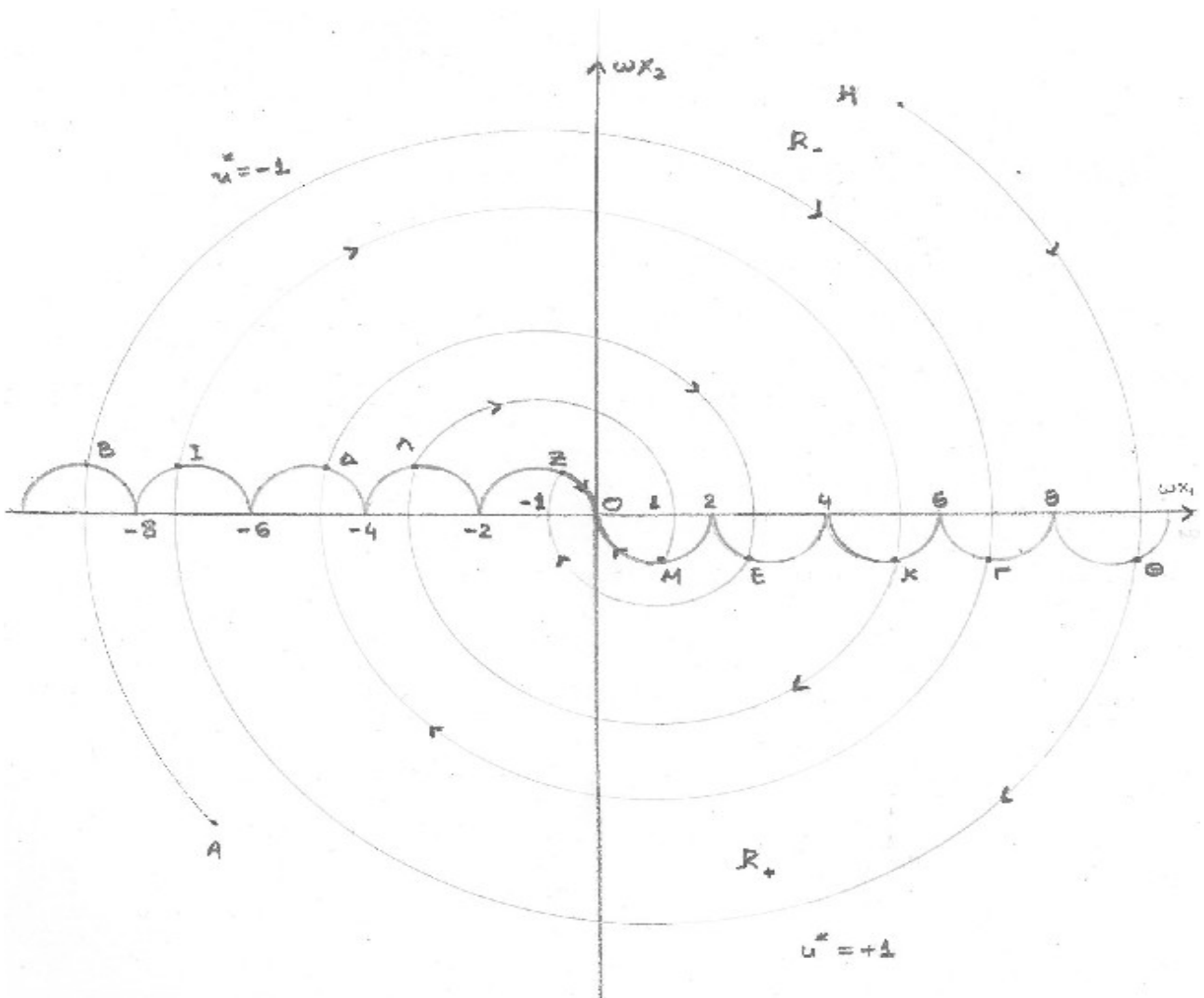
Τέλος, ο Ισχυρισμός 5.3 ικανοποιεί όλες τις αναγκαίες συνθήκες για βελτιστότητα που απορρέουν από την αρχή του μεγίστου. Μας δίνει μια ακολουθία ελέγχων οι οποίοι διατηρούνται σταθεροί για ένα διάστημα π ακτινίων καθώς οι καμπύλες αλλαγής γ_+^{j-1} είναι οι συμμετρικές των καμπυλών γ_-^j ως προς το $(-1, 0)$ αλλά και αντίστροφα, οι καμπύλες αλλαγής γ_-^{j-1} είναι οι συμμετρικές των καμπυλών γ_+^j ως προς το $(+1, 0)$. Αυτό σημαίνει πως οι τροχιές που υπακούουν σε αυτόν τον νόμο ελέγχου διατρέχουν ημικύκλια (δηλαδή γωνίες π ακτινίων) γύρω από τα σημεία $(+1, 0)$ και $(-1, 0)$. □

Είναι προφανές ότι όσο πιο μακριά είναι το αρχικό σημείο από την αρχή των αξόνων, τόσο περισσότερες αλλαγές θα έχουμε στην ακολουθία των ελέγχων και ότι δεν υπάρχει άνω όριο στον αριθμό αυτό σύμφωνα και με το Θεώρημα 3.4. Επιβεβαιώνουμε ακόμη ότι η ακολουθία ελέγχων μένει απροσδιόριστη μόνο σε πεπερασμένες χρονικές στιγμές – τις στιγμές που η βέλτιστη τροχιά τέμνει την καμπύλη αλλαγής γ . ^[4]

Το Σχήμα 5.12 δείχνει κάποιες τροχιές άριστου χρόνου προς την αρχή. Παίρνουμε την τροχιά ΑΒΓΔΕΖΟ. Το Α είναι το αρχικό σημείο και στη συνέχεια ο έλεγχος που παράγει τη βέλτιστη τροχιά αλλάζει ακριβώς 5 φορές στα σημεία Β, Γ, Δ, Ε και Ζ. Σύμφωνα και με την ανάλυση μας, το τόξο ΑΒ ανήκει στην καμπύλη R_+^4 , το τόξο ΒΓ ανήκει στην καμπύλη R_-^3 , το τόξο ΓΔ ανήκει στην καμπύλη R_+^2 κ.ο.κ. Ακόμη η τροχιά αυτή ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες για βελτιστότητα καθώς τα τόξα ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΖ έχουν μήκος π ακτίνια ενώ τα ΑΒ και ΖΟ έχουν μήκος μικρότερο από π ακτίνια. Ακόμη,

το μόνο κομμάτι της τροχιάς που ανήκει στην καμπύλη αλλαγής γ είναι το τελευταίο κομμάτι ZO που ανήκει στην καμπύλη γ_-^0 . Το ίδιο ισχύει και για την άλλη τροχιά του σχήματος, την $H\Theta I\Lambda M O$: μόνο το τόξο MO ανήκει στην καμπύλη αλλαγής γ_+^0 . Συμπεραίνουμε ότι μόνο οι καμπύλες γ_-^0 και γ_+^0 αποτελούν μέρος της βέλτιστης τροχιάς ενώ οι καμπύλες γ_-^j και γ_+^j για $j = 1, 2, \dots$ δεν ανήκουν στη βέλτιστη τροχιά.

Κλείνουμε με την σημαντική παρατήρηση ότι για τον αρμονικό ταλαντωτή μίας εισόδου, ο έλεγχος αρίστου χρόνου δεν είναι απαραίτητα αυτός με τις λιγότερες αλλαγές όπως για παράδειγμα με την τροχιά BO στο Σχήμα 5.5. Εκεί, το σημείο B θα μπορούσε με την εφαρμογή του ελέγχου $u = +1$ να οδηγηθεί στην αρχή αφού ανήκει στον κύκλο Γ^+ . Όμως ο έλεγχος αρίστου χρόνου για τη συγκεκριμένη αρχική κατάσταση που ανήκει στο σύνολο R_-^1 είναι η ακολουθία $\{+1, -1\}$ δηλαδή έχουμε μια αλλαγή.



Σχήμα 5.12: Η περιοχή R_- είναι πάνω από την καμπύλη αλλαγής γ κι η περιοχή R_+ είναι κάτω από την καμπύλη αλλαγής. Δύο βέλτιστες τροχιές είναι οι $AB\Gamma\Delta E Z O$ και $H\Theta I\Lambda M O$.

6 . ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΔΥΟ ΕΙΣΟΔΩΝ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

6 . 1 . ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΔΥΟ ΕΙΣΟΔΩΝ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.1 . Μας δίνεται το σύστημα που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση πινάκων

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

όπου οι έλεγχοι u_1 , u_2 υφίστανται τους περιορισμούς $|u_1| \leq 1$ $|u_2| \leq 1$.

Βρίσκουμε τους ελέγχους $u_1(\cdot)$ και $u_2(\cdot)$ που οδηγούν οποιαδήποτε αρχική κατάσταση

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \zeta_1 \\ x_2(0) &= \zeta_2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

στην αρχή $(0, 0)$ σε ελάχιστο χρόνο .

6 . 2 . ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΔΥΟ ΕΙΣΟΔΩΝ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Ο πίνακας του συστήματος είναι ο ίδιος με την περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή με έναν έλεγχο χωρίς απόσβεση. Χρησιμοποιούμε για ακόμη μια φορά την αρχή του μεγίστου του Pontryagin για να καθορίσουμε τις αναγκαίες συνθήκες για βελτίστους ελέγχους. Η Hamiltonian για τον έλεγχο ελαχίστου χρόνου του συστήματος (6.1) δίνεται από την εξίσωση (βλ. σχέση 2.46) :

$$H = 1 + \omega x_2 p_1 - \omega x_1 p_2 + k u_1 + k u_2 p_2 \quad (6.3)$$

όπου οι μεταβλητές συζυγούς κατάστασης $p_1(\cdot)$ και $p_2(\cdot)$ είναι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (βλ. σχέση 2.47) :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \omega p_2(t) \\ \dot{p}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\omega p_1(t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

που μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Ο θεμελιώδης πίνακας του συστήματος (6.5) δίνεται από τη σχέση

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

άρα

$$p_1(t) = \pi_1 \cos \omega t + \pi_2 \sin \omega t \quad (6.7)$$

$$p_2(t) = -\pi_1 \sin \omega t + \pi_2 \cos \omega t \quad (6.8)$$

όπου

$$\begin{aligned} \pi_1 &= p_1(0) \\ \pi_2 &= p_2(0) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Αν θεωρήσουμε ότι $k > 0$, τότε οι έλεγχοι που ελαχιστοποιούν την Hamiltonian (βλ. Παρατήρηση 2.1) είναι

$$u_1(t) = -\operatorname{sgn} p_1(t) \quad (6.10)$$

και

$$u_2(t) = -\operatorname{sgn} p_2(t) \quad (6.11)$$

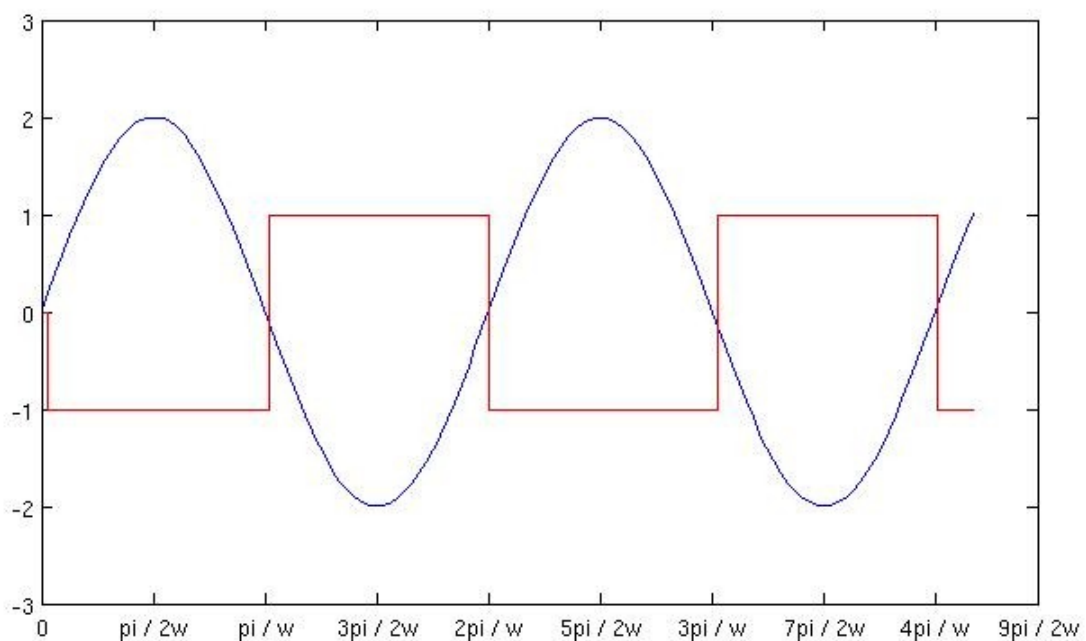
άρα

$$u_1(t) = -\operatorname{sgn} (\pi_1 \cos \omega t + \pi_2 \sin \omega t) \quad (6.12)$$

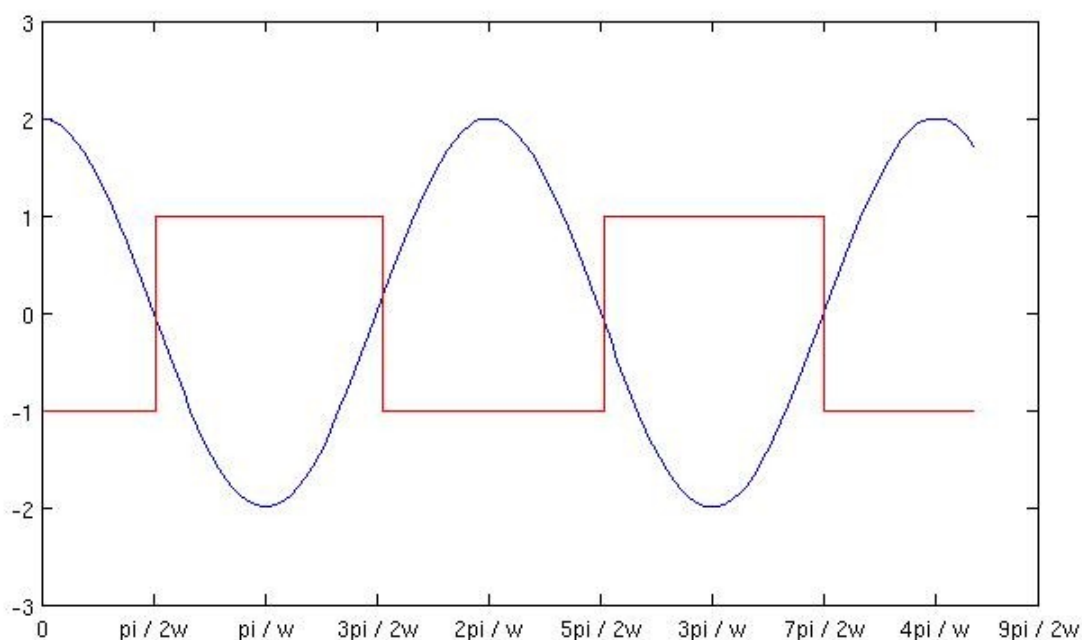
και

$$u_2(t) = -\operatorname{sgn} (\pi_1 \sin \omega t + \pi_2 \cos \omega t) \quad (6.13)$$

Από τις (6.7), (6.8) προκύπτουν τα σχήματα των δύο συναρτήσεων $p_1(\cdot)$ και $p_2(\cdot)$ αλλά και των αντιστοίχων ελέγχων $u_1(\cdot)$ και $u_2(\cdot)$ που προκύπτουν από τις (6.12) και (6.13).



(--), (-+), (++) , (+-) , (--), (-+), (++)



Σχήμα 6.1 : Οι δύο ημιτονοειδείς συναρτήσεις $p_1(\cdot)$ και $p_2(\cdot)$ και οι δύο τμηματικά σταθεροί έλεγχοι $u_1(\cdot)$ και $u_2(\cdot)$ που προκύπτουν από αυτές

Από τα διαγράμματα του Σχήματος 6.1 και τις αναγκαίες συνθήκες (βλ. Κεφάλαιο 2) για βελτιστότητα του ελέγχου , παίρνουμε τις εξής πληροφορίες :

1. Κάθε έλεγχος $u_1(\cdot)$ και $u_2(\cdot)$ είναι μια τμηματικά σταθερή συνάρτηση και αλλάζει ανάμεσα στις τιμές -1 και 1 . Δεν υπάρχει πάνω όριο στον αριθμό των αλλαγών .
2. Κάθε ημίτονο αλλάζει πρόσημο κάθε $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου . Άρα καθένας από τους ελέγχους $u_1(\cdot)$ και $u_2(\cdot)$ δεν μπορεί να παραμείνει σταθερός για παραπάνω από $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου .
3. Αν $t_1 \leq t \leq t_2$ είναι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κι ο $u_1(\cdot)$ και $u_2(\cdot)$ μένουν σταθεροί , τότε είναι : $t_2 - t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$.
4. Αν ο $u_1(\cdot)$ είναι σταθερός στο διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$ με $t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\omega}$, τότε ο έλεγχος $u_2(\cdot)$ πρέπει να αλλάξει ακριβώς τη στιγμή $t_3 = t_1 + \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ κι αντιστρόφως.
5. Οι ακολουθίες ελέγχου πρέπει να έχουν την εξής ακολουθία προσήμων :
 $\dots, (--), (-+), (++) , (+-) , (--), \dots$

όπου το (- -) σημαίνει ότι για το διάστημα εκείνο ασκούμε τους ελέγχους $u_1(.) = u_2(.) = -1$, το (- +) σημαίνει ότι για το διάστημα εκείνο ασκούμε τους ελέγχους $u_1(.) = -1$ και $u_2(.) = +1$, το (+ +) σημαίνει ότι για το διάστημα εκείνο ασκούμε τους ελέγχους $u_1(.) = +1$ και $u_2(.) = +1$ και το (+ -) σημαίνει ότι για το διάστημα εκείνο ασκούμε τους ελέγχους $u_1(.) = +1$ και $u_2(.) = -1$. Είναι δηλαδή δεδομένη η σειρά στην ακολουθία προσήμων δηλαδή μετά από (- -) έχουμε ελέγχους **αναγκαστικά** (- +). Αυτό το γεγονός μας βοηθά πολύ να βρούμε τον έλεγχο αρίστου χρόνου αποκλείοντας ελέγχους που δεν ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες.

6. Δεν υπάρχει περίπτωση να μηδενιστούν ταυτόχρονα οι μεταβλητές συζυγούς κατάστασης.

Στη συνέχεια, λύνουμε τις εξισώσεις του συστήματος (6.1) με τους ελέγχους να παίρνουν τις τιμές που ανήκουν στο σύνορο του συνόλου περιορισμών (βλ. Παράγραφο 2.4) :

$$u_1(.) = \Lambda_1 = \pm 1 \quad (6.14)$$

και

$$u_2(.) = \Lambda_2 = \pm 1 \quad (6.15)$$

Με αρχικές συνθήκες τις (6.2) και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace , παίρνουμε

$$\begin{aligned} \omega x_1(t) &= +(\omega \xi_1 - k \Lambda_2) \cos \omega t + (\omega \xi_2 + k \Lambda_1) \cos \omega t + k \Lambda_2 \\ \omega x_2(t) &= -(\omega \xi_1 - k \Lambda_2) \sin \omega t + (\omega \xi_2 + k \Lambda_1) \cos \omega t - k \Lambda_1 \end{aligned} \quad (6.16)$$

και καταλήγουμε στην

$$[\omega x_1(t) - k \Lambda_2]^2 + [\omega x_2(t) + k \Lambda_1]^2 = + (\omega \xi_1 - k \Lambda_2)^2 + (\omega \xi_2 + k \Lambda_1)^2 \quad (6.17)$$

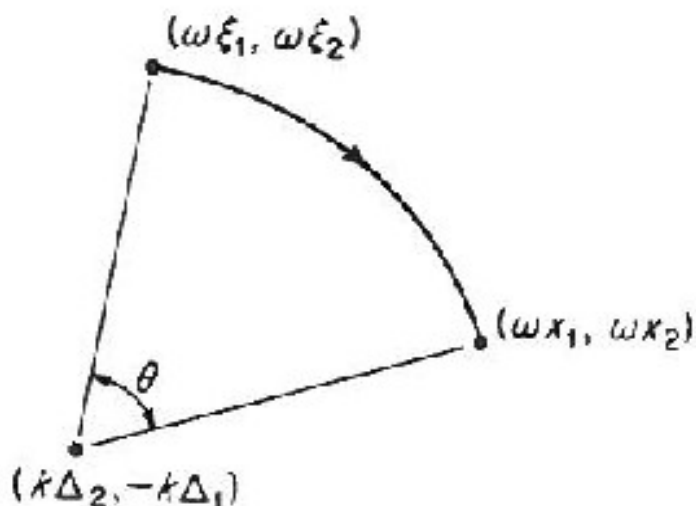
δηλαδή οι τροχιές του συστήματος (6.1) είναι κύκλοι με κέντρο στο σημείο ($k \Lambda_2, -k \Lambda_1$) του επιπέδου με άξονες τα ωx_1 και ωx_2 με ακτίνα που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες και κατεύθυνση δεξιόστροφη.

Ο χρόνος μετάβασης του συστήματος από μία κατάσταση $(\omega \xi_1, \omega \xi_2)$ σε μια άλλη $(\omega x_1, \omega x_2)$ κατά μήκος του κύκλου αυτού είναι ^[3]

$$t = \frac{1}{\omega} \tanh \frac{(\omega x_1 - k \Lambda_2) (\omega \xi_2 + k \Lambda_1) - (\omega x_2 + k \Lambda_1) (\omega \xi_1 - k \Lambda_2)}{(\omega x_2 + k \Lambda_1) (\omega \xi_2 + k \Lambda_1) + (\omega x_1 - k \Lambda_2) (\omega \xi_1 - k \Lambda_2)} \quad (6.18)$$

και υπολογίζεται από τη γωνία του τόξου ως εξής $t = \frac{\theta}{\omega}$ (βλ. Σχήμα 6.2).

Ο τρόπος με τον οποίο δουλεύουμε στην περίπτωση αυτού του συστήματος δεν διαφέρει από τις περιπτώσεις όπου έχουμε μόνο μία μεταβλητή έλεγχο. Ορίζουμε λοιπόν τα ακόλουθα.



Σχήμα 6.2: Η γωνία θ καθορίζει τον χρόνο μετάβασης από το σημείο $(\omega\xi_1, \omega\xi_2)$ στο σημείο $(\omega x_1, \omega x_2)$

Ορισμός 6.1 : Έστω Γ_{++} το σύνολο των καταστάσεων $(\omega x_1, \omega x_2)$ που μπορούν να οδηγηθούν στην αρχή $(0, 0)$ από τους ελέγχους $u_1(\cdot)=+1$ και $u_2(\cdot)=+1$, Γ_{+-} το σύνολο των καταστάσεων $(\omega x_1, \omega x_2)$ που μπορούν να οδηγηθούν στην αρχή $(0, 0)$ από τους ελέγχους $u_1(\cdot)=+1$ και $u_2(\cdot)=-1$, Γ_{-+} το σύνολο των καταστάσεων $(\omega x_1, \omega x_2)$ που μπορούν να οδηγηθούν στην αρχή $(0, 0)$ από τους ελέγχους $u_1(\cdot)=-1$ και $u_2(\cdot)=+1$ και Γ_{--} το σύνολο των καταστάσεων $(\omega x_1, \omega x_2)$ που μπορούν να οδηγηθούν στην αρχή $(0, 0)$ από τους ελέγχους $u_1(\cdot)=-1$ και $u_2(\cdot)=-1$

Αν αντικαταστήσουμε στην (6.17) τις αρχικές συνθήκες με $(0, 0)$ και βάλουμε $A_1 = \pm 1$ και $A_2 = \pm 1$, καταλήγουμε στις εξισώσεις για τα σύνολα Γ_{+-} , Γ_{-+} , Γ_{++} , Γ_{--} :

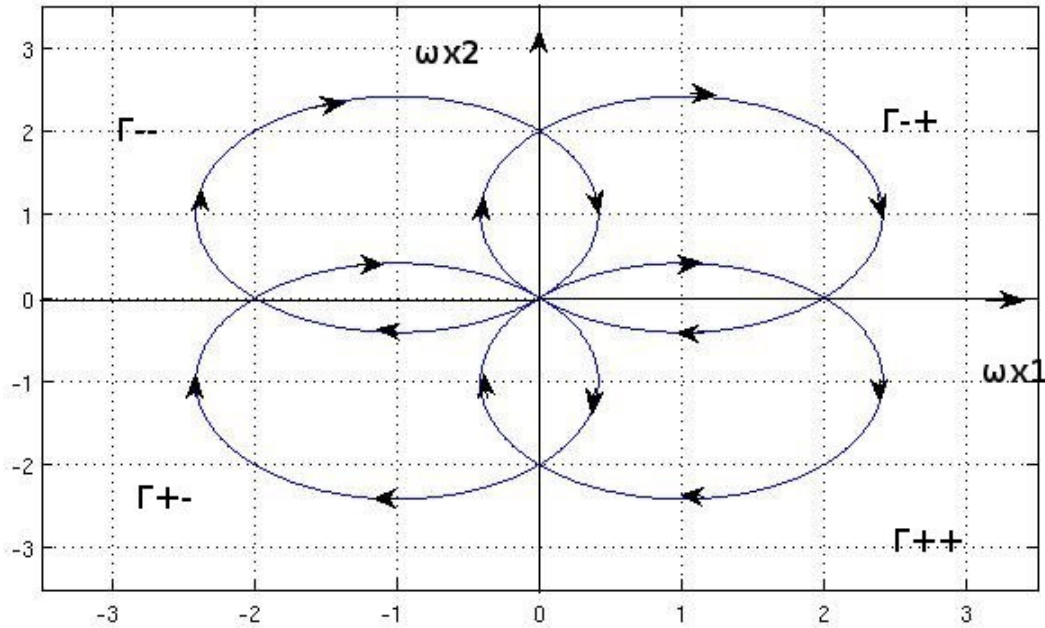
$$\Gamma_{+-} = \{ (\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - k)^2 + (\omega x_2 - k)^2 = 2k^2 \} \quad (6.19)$$

$$\Gamma_{-+} = \{ (\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + k)^2 + (\omega x_2 - k)^2 = 2k^2 \} \quad (6.20)$$

$$\Gamma_{++} = \{ (\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - k)^2 + (\omega x_2 + k)^2 = 2k^2 \} \quad (6.21)$$

$$\Gamma_{--} = \{ (\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + k)^2 + (\omega x_2 + k)^2 = 2k^2 \} \quad (6.22)$$

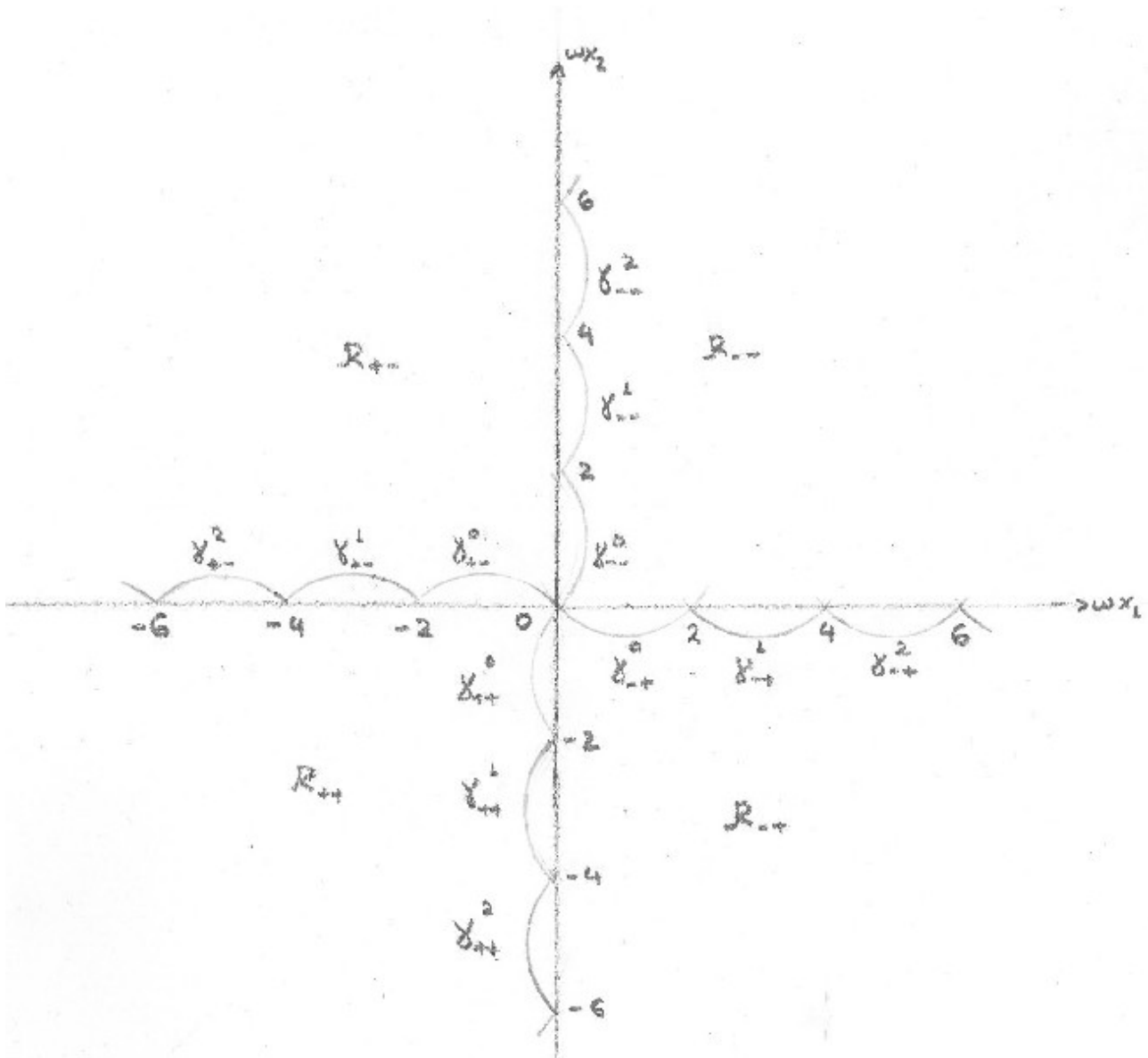
Πρόκειται για κύκλους που διέρχονται από την αρχή με κέντρα τα (k, k) , $(-k, k)$, $(k, -k)$ και $(-k, -k)$ αντίστοιχα. Οι 4 κύκλοι Γ_{++} , Γ_{+-} , Γ_{-+} και Γ_{--} φαίνονται στο Σχήμα 6.3 για $k=1$.



Σχήμα 6.3 : Οι κύκλοι Γ_{++} , Γ_{+-} , Γ_{-+} και Γ_{--} που περνούν από την αρχή των αξόνων για $k=1$.

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από τις αναγκαίες συνθήκες του βελτίστου ελέγχου, θα καθορίσουμε ποια μέρη των τεσσάρων κύκλων μπορούν να αποτελούν κομμάτια της βέλτιστης τροχιάς. Θυμίζουμε ότι ένα ζεύγος ελέγχων πρέπει να αλλάζει κάθε $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου ή η τροχιά από ένα σημείο - αφετηρία να μην διατρέχει γωνία μεγαλύτερη από $\pi/2$ (ένα τεταρτοκύκλιο) πάνω σε έναν κύκλο ελέγχου εκ των (6.19), (6.20), (6.21), (6.22). Π.χ. το σημείο $M(2, 2)$ μπορεί διατρέχοντας ένα ημικύκλιο στον κύκλο Γ_{+-} να βρεθεί στην αρχή. Αυτό όμως παραβιάζει τις αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ένας έλεγχος για να είναι βέλτιστος. Αντίθετα, το σημείο $N(2, 0)$ κινούμενο στον κύκλο Γ_{-+} θα βρεθεί ακριβώς σε $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου στην αρχή άρα το μονοπάτι NO μπορεί να είναι βέλτιστο αλλά το MO όχι. Παρακάτω χωρίζουμε ακριβώς τα μονοπάτια γ των κύκλων Γ που μπορούν να ανήκουν στη βέλτιστη τροχιά.

Ορισμός 6.2 : Έστω γ_{++}^0 το σύνολο των καταστάσεων $(\omega x_1, \omega x_2)$ που μπορούν να οδηγηθούν στην αρχή $(0, 0)$ σε χρόνο λιγότερο ή ίσο από $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου από το ζεύγος ελέγχων $u_1(\cdot) = +1$ και $u_2(\cdot) = +1$. Όμοια, έστω γ_{+-}^0 το σύνολο των καταστάσεων $(\omega x_1, \omega x_2)$ που μπορούν να οδηγηθούν στην αρχή $(0, 0)$ σε χρόνο λιγότερο ή ίσο από $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου από το ζεύγος ελέγχων $u_1(\cdot) = +1$ και $u_2(\cdot) = -1$ έστω γ_{-+}^0 το σύνολο των καταστάσεων $(\omega x_1, \omega x_2)$ που μπορούν να οδηγηθούν στην αρχή $(0, 0)$ σε χρόνο λιγότερο ή ίσο από $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου από το ζεύγος ελέγχων $u_1(\cdot) = -1$ και $u_2(\cdot) = +1$ και έστω γ_{--}^0 το σύνολο των καταστάσεων $(\omega x_1, \omega x_2)$ που μπορούν να οδηγηθούν στην αρχή $(0, 0)$ σε χρόνο λιγότερο ή ίσο από $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου από το ζεύγος ελέγχων $u_1(\cdot) = -1$ και $u_2(\cdot) = -1$.



Σχήμα 6.4: Τα τεταρτοκύκλια γ_{++}^0 , γ_{+-}^0 , γ_{-+}^0 και γ_{--}^0 - για $k=1$ - διαχωρίζουν το επίπεδο $\omega x_1 - \omega x_2$ στις 4 περιοχές R_{++} , R_{+-} , R_{-+} και R_{--} .

Οι τόποι γ_{++}^0 , γ_{+-}^0 , γ_{-+}^0 , γ_{--}^0 είναι τεταρτοκύκλια και κομμάτια των Γ_{++} , Γ_{+-} , Γ_{-+} , Γ_{--} με εξισώσεις:

$$\gamma_{++}^0 = \{ (\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - k)^2 + (\omega x_2 + k)^2 = 2k^2, \omega x_1 \leq 0, -2k \leq \omega x_2 \leq 0 \} \quad (6.23)$$

$$\gamma_{+-}^0 = \{ (\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + k)^2 + (\omega x_2 + k)^2 = 2k^2, -2k \leq \omega x_1 \leq 0, \omega x_2 \geq 0 \} \quad (6.24)$$

$$\gamma_{-+}^0 = \{ (\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - k)^2 + (\omega x_2 - k)^2 = 2k^2, 0 \leq \omega x_1 \leq 2k, \omega x_2 \leq 0 \} \quad (6.25)$$

$$\gamma_{--}^0 = \{ (\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 + k)^2 + (\omega x_2 - k)^2 = 2k^2, 0 \leq \omega x_1, 0 \leq \omega x_2 \leq 2k \} \quad (6.26)$$

Τα τεταρτοκύκλια γ_{++}^0 , γ_{+-}^0 , γ_{-+}^0 και γ_{--}^0 δείχνονται στο Σχήμα 6.4 για $k=1$.

Ισχυρισμός 6.1 : Ισχυριζόμαστε ότι δοθείσης μιας κατάστασης $(\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_{++}^0 \cup \gamma_{-+}^0 \cup \gamma_{+-}^0 \cup \gamma_{--}^0$, ο έλεγχος αρίστου χρόνου προς την αρχή δίνεται από

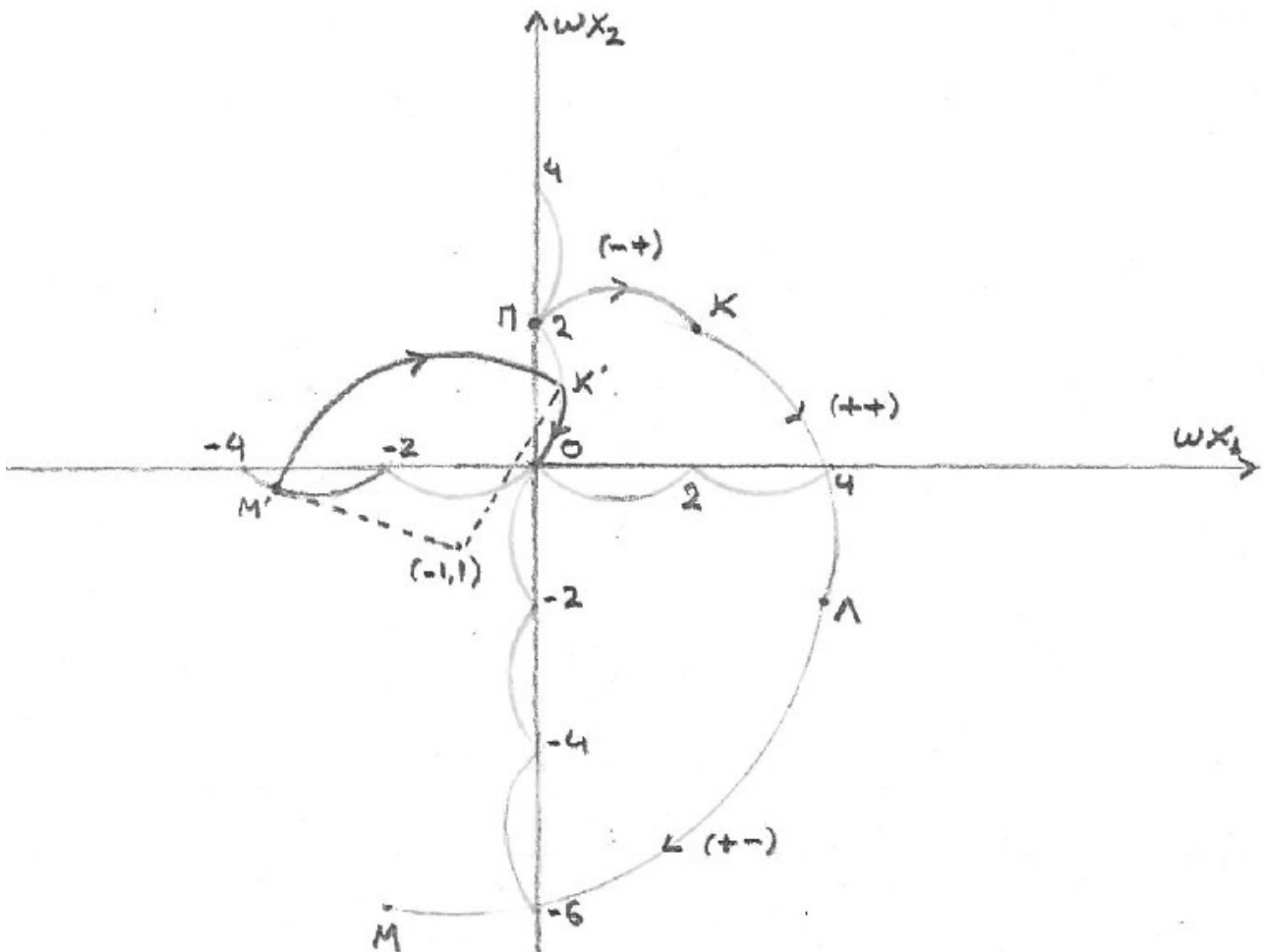
$$\begin{aligned} u_1^*(.) &= +1, u_2^*(.) = +1 \text{ για κάθε } (\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_{++}^0 \\ u_1^*(.) &= +1, u_2^*(.) = -1 \text{ για κάθε } (\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_{+-}^0 \\ u_1^*(.) &= -1, u_2^*(.) = +1 \text{ για κάθε } (\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_{-+}^0 \\ u_1^*(.) &= -1, u_2^*(.) = -1 \text{ για κάθε } (\omega x_1, \omega x_2) \in \gamma_{--}^0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

Απόδειξη : Θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας και για δική μας ευκολία ότι $k=1$. Παίρνουμε ένα σημείο που ανήκει στην καμπύλη γ_{--}^0 και δείχνουμε ότι οι έλεγχοι $u_1(.)=-1$ και $u_2(.)=-1$ είναι οι μοναδικοί που ταυτόχρονα ικανοποιούν όλες τις αναγκαίες συνθήκες για βελτιστότητα και οδηγούν στην αρχή. Προηγούμενα δείξαμε από την αρχή του μεγίστου ότι οι βέλτιστοι έλεγχοι αλλάζουν από -1 σε 1 και αντίστροφα, και **δεν παίρνουν άλλες τιμές σχεδόν παντού**.

Παίρνουμε τώρα ένα σημείο $\Pi(0, 2)$ που ανήκει στην γ_{--}^0 (βλ.Σχήμα 6.5). Από τον ορισμό 6.2 και τη διαδικασία κατασκευής της καμπύλης αυτής ξέρουμε ότι υπό τον έλεγχο $u_1(.) = -1$ και $u_2(.) = -1$ οδηγούμαστε στην αρχή. Τώρα παίρνουμε όλους τους υπολοίπους δυνατούς ελέγχους και θα δείξουμε ότι δεν μας οδηγούν στην αρχή. Θυμίζουμε ότι δεν υπάρχει όριο στον αριθμό των αλλαγών των ελέγχων αλλά υπάρχει μια συγκεκριμένη σειρά στις αλλαγές των τιμών του βελτίστου ελέγχου. Έστω ότι βρισκόμαστε στο Π και εφαρμόζουμε τους ελέγχους $u_1(.)=-1$ και $u_2(.)=+1$ που συμβολίζουμε $(-+)$ (βλ. Σχήμα 6.5). Όμως αυτός ο έλεγχος δημιουργεί τροχιές που είναι κύκλοι γύρω από το σημείο $(1, 1)$ από την εξίσωση (6.19) και επειδή η μέγιστη διάρκεια που μπορεί να διατηρηθεί ο έλεγχος αυτός είναι $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου, όταν φτάσουμε στο σημείο $K(2, 2)$, αλλάζουμε τους ελέγχους σε $(++)$. Οι έλεγχοι αυτοί δημιουργούν τροχιές γύρω από το $(1, -1)$ και αλλάζουν σε $(+-)$ όταν φτάσουμε στο $\Lambda(4, -2)$. Διατρέχουμε ένα τεταρτοκύκλιο με τη δράση του ελέγχου $(+-)$ και καταλήγουμε στο $M(-2, -6)$. Καταλαβαίνουμε ότι όσο αλλάζουν οι έλεγχοι, τόσο περισσότερο απομακρυνόμαστε από την αρχή. Όλα αυτά φαίνονται στο Σχήμα 6.5. Το ίδιο συμβαίνει ακόμα και αν ο αρχικός έλεγχος είναι ο $(++)$ ή ο $(+-)$ και οι περιπτώσεις αυτές αποδεικνύονται ομοίως.

Πράττουμε το ίδιο και για τις καμπύλες γ_{++}^0 , γ_{+-}^0 και γ_{-+}^0 και έτσι αποδεικνύουμε τον Ισχυρισμό 6.1.

□



Σχήμα 6.5 : Αρχίζοντας από το σημείο Π της καμπύλης γ_-^0 , δείχνουμε ότι οι έλεγχοι εκτός του ζεύγους (--) μας απομακρύνουν από την αρχή

Τώρα προσπαθούμε να βρούμε τον νόμο ελέγχου για καταστάσεις που δεν ανήκουν στις καμπύλες γ^0 . Έστω ότι βρισκόμαστε σε κάποια από τις καμπύλες γ^0 , π.χ. τη γ_-^0 . Αν προχωρήσουμε μπροστά στο χρόνο, αποδείξαμε με τον Ισχυρισμό 6.1 ότι θα οδηγηθούμε βέλτιστα στην αρχή από τους ελέγχους (--) δηλαδή ότι η καμπύλη γ_-^0 αποτελεί μονοπάτι βέλτιστου χρόνου προς την αρχή. Άρα θα υπάρχουν καταστάσεις για τις οποίες ένα κομμάτι της καμπύλης γ_-^0 αποτελεί βέλτιστο μονοπάτι προς την αρχή.

Αν προχωρήσουμε πίσω στο χρόνο, τότε θα βρούμε αυτές τις καταστάσεις για τις οποίες ένα κομμάτι της καμπύλης γ_-^0 ανήκει στο βέλτιστο μονοπάτι για την αρχή δηλαδή από ένα αρχικό σημείο M' και με την εφαρμογή ενός ζεύγους ελέγχων που ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες, μεταφερόμαστε στο σημείο K' της καμπύλης γ_-^0 και από εκεί και πέρα ξέρουμε να εφαρμόσουμε τους ελέγχους (--) για να φτάσουμε στον Ο (βλ.Σχήμα 6.5).

Όμως η αναγκαία συνθήκη 5 μας υπαγορεύει ότι για τη βέλτιστη τροχιά και πριν τον έλεγχο (--), θα πρέπει να έχει εφαρμοστεί η ακολουθία ελέγχων (+-). Άρα πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο, μπορούμε να βρούμε καταστάσεις που υπό τους ελέγχους (+-) φτάνουν στην καμπύλη γ_-^0 σε χρόνο λιγότερο ή ίσο από $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου καθώς γνωρίζουμε τις τροχιές που προκύπτουν από την ακολουθία (+-).

Ονομάζουμε το σύνολο των καταστάσεων αυτών γ_+^1 και κάνουμε το ίδιο για όλες τις

καμπύλες γ^0 . Αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί μέχρι να φτάσουμε στην αρχική κατάσταση x_0 . Άρα :

Ορισμός 6.3 : Έστω γ_{+-}^1 το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_{+-}^0 σε χρόνο λιγότερο ή ίσο από $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου με εφαρμογή των ελέγχων (+-). Η καμπύλη γ_{+-}^1 φαίνεται στο Σχήμα 6.4.

Έστω γ_{-+}^1 το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_{-+}^0 σε χρόνο λιγότερο ή ίσο από $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου με εφαρμογή των ελέγχων (-). Η καμπύλη γ_{-+}^1 φαίνεται στο Σχήμα 6.4.

Έστω γ_{++}^1 το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_{++}^0 σε χρόνο λιγότερο ή ίσο από $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου με εφαρμογή των ελέγχων (-+). Η καμπύλη γ_{++}^1 φαίνεται στο Σχήμα 6.4.

Έστω γ_{+-}^1 το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_{+-}^0 σε χρόνο λιγότερο ή ίσο από $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου με εφαρμογή των ελέγχων (++) . Η καμπύλη γ_{+-}^1 φαίνεται στο Σχήμα 6.4.

Προφανώς οι καμπύλες $\gamma_{+-}^1, \gamma_{-+}^1, \gamma_{++}^1, \gamma_{+-}^1$ προκύπτουν από τις $\gamma_{-+}^0, \gamma_{-+}^0, \gamma_{++}^0$ και γ_{+-}^0 με περιστροφή κατά $\pi/2$ γύρω από τα σημεία $(k, k), (-k, k), (-k, -k), (k, -k)$ όπως περιγράψαμε και στην απόδειξη του ισχυρισμού (6.1) .

Τώρα μπορούμε να δημιουργήσουμε τις καμπύλες γ^2 που αποτελούν τα σύνολα καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν από κάποιον έλεγχο που ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες στις καταστάσεις των καμπύλων γ^1 σε ακριβώς $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου, τις καμπύλες γ^3 που αποτελούν τα σύνολα καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν από κάποιον έλεγχο που ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες στις καταστάσεις των καμπύλων γ^2 σε ακριβώς $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου κ.ο.κ.

Ορισμός 6.4 : Έστω γ_{+-}^n το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_{+-}^{n-1} σε χρόνο ίσο με $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου με εφαρμογή των ελέγχων (+-).

Έστω γ_{-+}^n το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_{-+}^{n-1} σε χρόνο ίσο με $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου με εφαρμογή των ελέγχων (--).

Έστω γ_{++}^n το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_{++}^{n-1} σε χρόνο ίσο με $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου με εφαρμογή των ελέγχων (-+).

Έστω γ_{+-}^n το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_{+-}^{n-1} σε χρόνο ίσο με $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου με εφαρμογή των ελέγχων (++) .

Οι εξισώσεις των καμπύλων $\gamma_{+-}^n, \gamma_{-+}^n, \gamma_{++}^n, \gamma_{+-}^n$ για $n=1, 2, \dots$ είναι :

$$\gamma_{++}^n = \{ (\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - k)^2 + (\omega x_2 + (2n+1)k)^2 = 2k^2 \} \quad (6.27)$$

με $\omega x_1 \leq 0 ; -(2n+2)k \leq \omega x_2 \leq -2nk$

$$\gamma_{+-}^n = \{ (\omega x_1, \omega x_2) : [\omega x_1 + (2j+1)k]^2 + (\omega x_2 + k)^2 = 2k^2 \} \quad (6.28)$$

με $-(2n+2)k \leq \omega x_1 \leq -2nk ; \omega x_2 \geq 0$

$$\begin{aligned} \gamma_{+-}^n = \{ (\omega x_1, \omega x_2) : [\omega x_1 - (2j+1)k]^2 + (\omega x_2 - k)^2 = 2k^2 \} \\ \text{με } 2nk \leq \omega x_1 \leq (2n+2)k ; \omega x_2 \leq 0 \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{++}^n = \{ (\omega x_1, \omega x_2) : (\omega x_1 - k)^2 + (\omega x_2 + (2n+1)k)^2 = 2k^2 \} \\ \text{με } \omega x_1 \geq 0 ; 2nk \leq \omega x_2 \leq (2n+1)k \end{aligned} \quad (6.30)$$

Τα τμήματα της καμπύλης αλλαγής γ ορίζονται πλέον ως :

$$\begin{aligned} \gamma_{++} &= \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_{++}^j \\ \gamma_{+-} &= \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_{+-}^j \\ \gamma_{-+} &= \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_{-+}^j \\ \gamma_{--} &= \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_{--}^j \end{aligned} \quad (6.31)$$

Αυτές οι καμπύλες χωρίζουν το επίπεδο με άξονες τα ωx_1 και ωx_2 σε 4 περιοχές τις R_{++} , R_{+-} , R_{-+} , R_{--} . Η καμπύλη αλλαγής γ και οι περιοχές R_{++} , R_{+-} , R_{-+} , R_{--} φαίνονται στο σχήμα 6.4. Η περιοχή R_{++} είναι όλα τα σημεία στα αριστερά της καμπύλης γ_{++} και κάτω από την καμπύλη γ_{+-} . Αντίστοιχα, η περιοχή R_{+-} είναι όλα τα σημεία στα αριστερά της καμπύλης γ_{--} και πάνω από την καμπύλη γ_{+-} . Η περιοχή R_{-+} είναι όλα τα σημεία στα δεξιά της καμπύλης γ_{++} και κάτω από την καμπύλη γ_{-+} . Τέλος, η περιοχή R_{--} είναι όλα τα σημεία στα δεξιά της καμπύλης γ_{--} και πάνω από την καμπύλη γ_{-+} . Τονίζουμε ότι όλα αυτά δείχνονται στο Σχήμα 6.9.

Τώρα περιγράφουμε τον νόμο ελέγχου αρίστου χρόνου για οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου με άξονες τα ωx_1 και ωx_2 .

Ισχυρισμός 6.2 : Ο έλεγχος αρίστου χρόνου \mathbf{u}^* ως συνάρτησης της κατάστασης $(\omega x_1, \omega x_2)$ δίνεται από

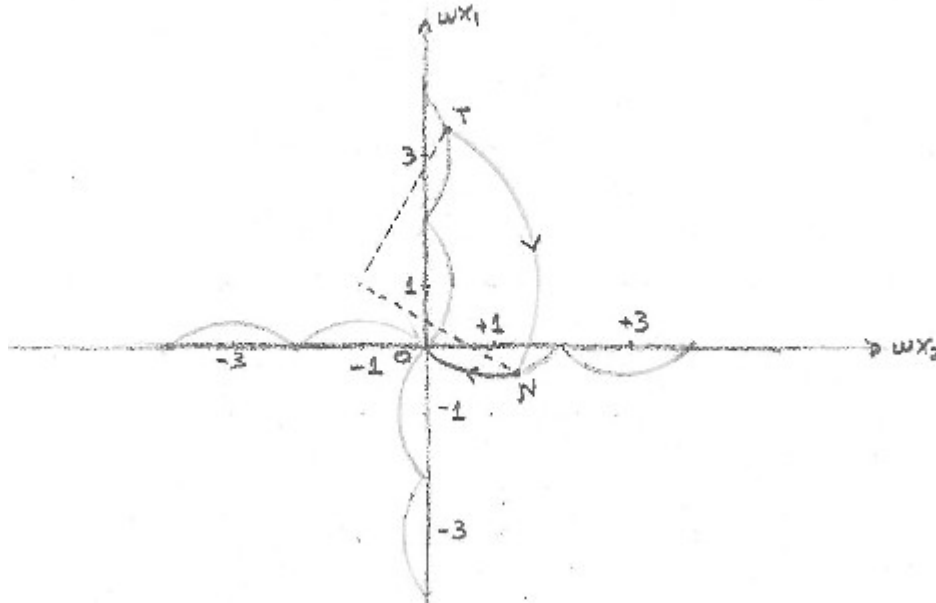
$$\begin{aligned} u_1^* = +1, u_2^* = +1 \text{ για κάθε } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{++} \cup \gamma_{++} \\ u_1^* = +1, u_2^* = -1 \text{ για κάθε } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{+-} \cup \gamma_{+-} \\ u_1^* = -1, u_2^* = +1 \text{ για κάθε } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{-+} \cup \gamma_{-+} \\ u_1^* = -1, u_2^* = -1 \text{ για κάθε } (\omega x_1, \omega x_2) \in R_{--} \cup \gamma_{--} \end{aligned} \quad (6.32)$$

και ακόμη ο \mathbf{u}^* είναι μοναδικός.

Απόδειξη : Θυμίζουμε ότι έχουμε βρει με τον Ισχυρισμό (6.1) τον έλεγχο αρίστου χρόνου για τα σημεία που ανήκουν στις καμπύλες γ^0 και ότι οι καμπύλες γ^0 ανήκουν στα μονοπάτια αρίστου χρόνου δηλαδή για οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου, η τροχιά ελαχίστου χρόνου περνά από κάποια από τις καμπύλες γ^0 . Ακόμη δείξαμε με την αναγκαία συνθήκη 3 ότι κάθε ζεύγος ελέγχου μπορεί να διαρκεί για $\pi/2\omega$ μονάδες χρόνου και άρα ανάλογα με την τιμή του, αποτελεί ένα τεταρτοκύκλιο κάποιου κύκλου με κέντρο ένα εκ των $(\pm 1, \pm 1)$. Αν σκεφτούμε επίσης από την αναγκαία συνθήκη 5 ότι η ακολουθία ελέγχων είναι δεδομένη, τότε ξέρουμε ότι π.χ. από ένα σημείο πάνω στη γ_{-+}^0

πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο, πέφτουμε στη γ_-^1 κι από εκεί στη γ_+^2 κ.ο.κ. μέχρι να φτάσουμε στο αρχικό σημείο.

Πως ξέρουμε όμως ποια από τις καμπύλες γ^0 θα μας οδηγήσει στην αρχή των αξόνων ώστε απο εκεί να ακολουθήσουμε την διαδικασία που περιγράφεται παραπάνω και τελικά να φτάσουμε στο αρχικό σημείο του επιπέδου $\omega x_1, \omega x_2$; Έστω για παράδειγμα το σημείο N που ανήκει στην καμπύλη γ_+^0 . Πηγαίνουμε πίσω στον χρόνο κατά $t = \pi / 2\omega$ και βρισκόμαστε στο σημείο T.

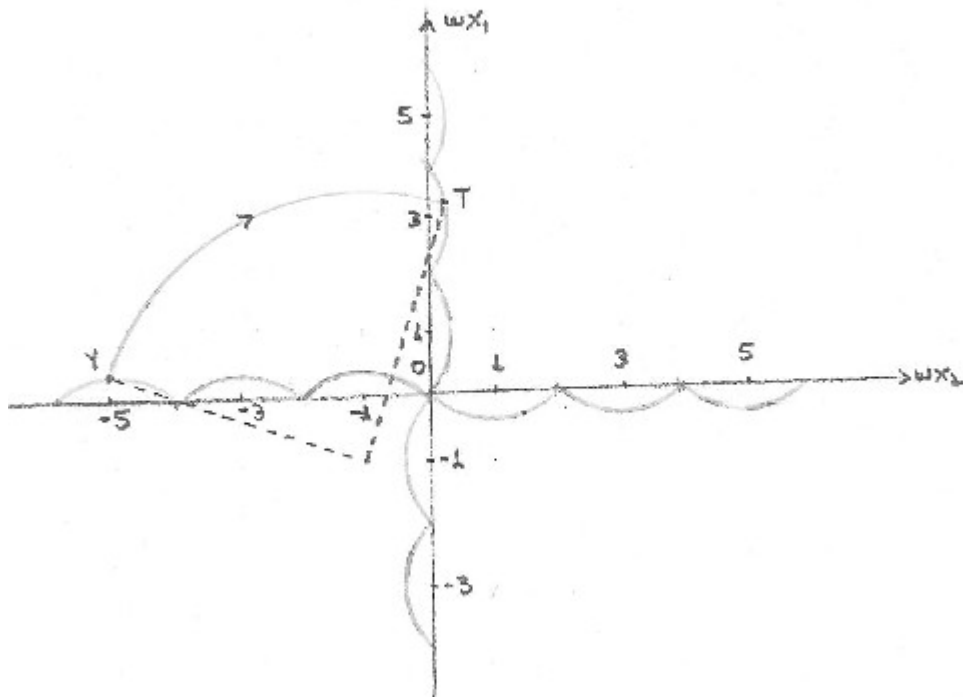


Σχήμα 6.6: Πηγαίνουμε από το σημείο N πίσω στο χρόνο κατά $t = \pi / 2\omega$ και καταλήγουμε στο σημείο T με την εφαρμογή των ελέγχων (- -).

Από τις σχέσεις (6.12) και (6.13), είμαστε σίγουροι πως το σύστημα στην πορεία TN λειτουργεί με εισόδους $u_1(\cdot) = -1, u_2(\cdot) = -1$ ενώ λίγο πριν το σύστημα φτάσει στο T θα λειτουργεί με εισόδους $u_1 = +1, u_2 = -1$ από την αναγκαία συνθήκη 5, ακολουθώντας δηλαδή την τροχιά της οικογενείας γ_- που διέρχεται από το σημείο T (βλ. Σχήμα 6.6). Πηγαίνοντας λοιπόν – λόγω περιοδικότητας των (6.12) και (6.13) ξανά πίσω ως προς τον χρόνο κατά $\pi / 2$, φτάνουμε στο σημείο Y (βλ. Σχήμα 6.7).

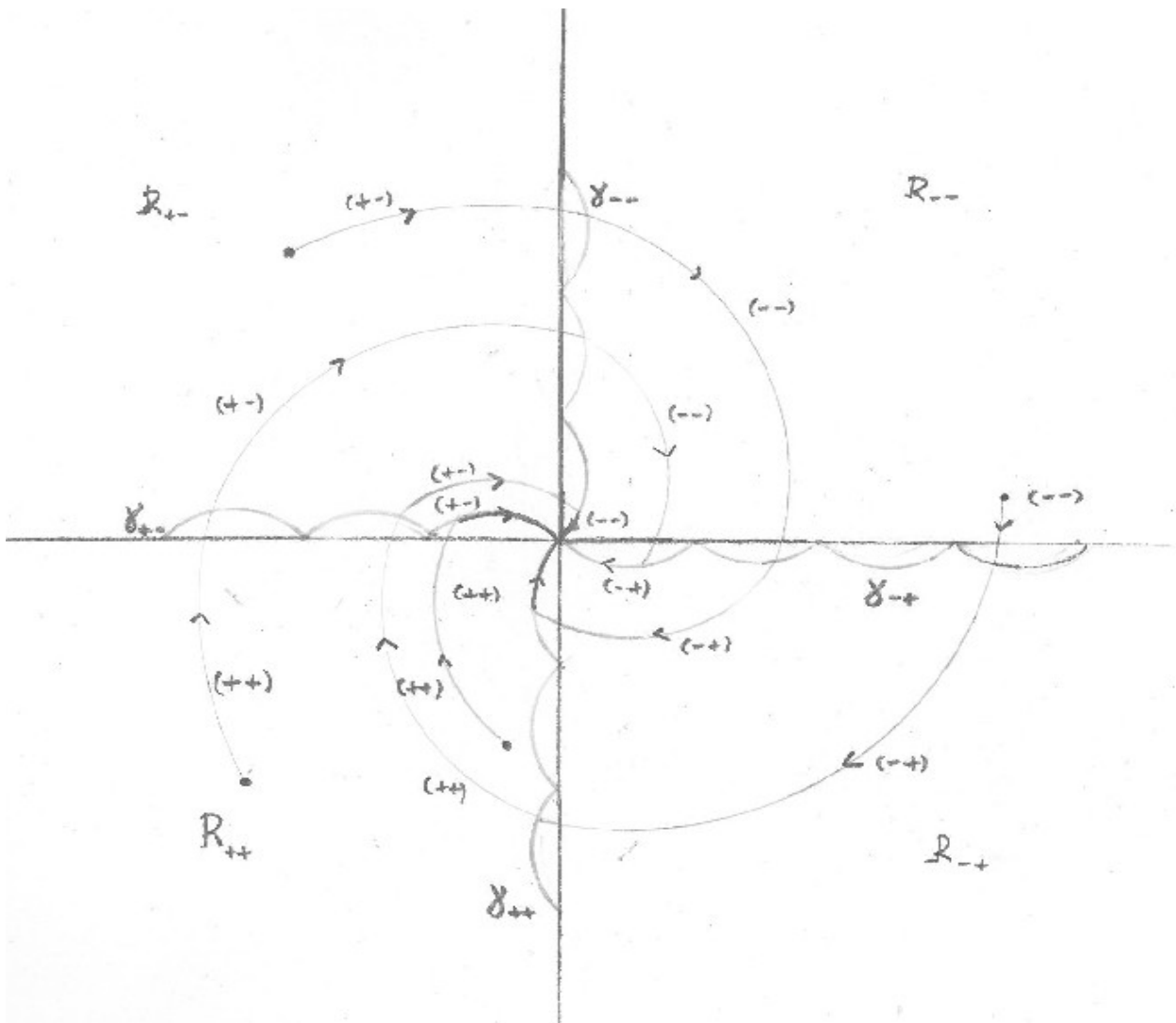
Προχωράμε ακριβώς με τον ίδιο περιοδικό τρόπο, πηγαίνοντας ανάποδα ως προς τον χρόνο και δημιουργώντας τεταρτοκύκλια από τις τροχιές της οικογενείας γ_- , γ_+ , γ_{++} και γ_{+-} αντίστοιχα. Προφανώς αν το Y είναι το σημείο αφετηρίας του προβλήματος, τότε η τροχιά YTNO οδηγεί το σύστημα στο 0 και ακόμη η πορεία YTNO είναι ο συντομότερος χρονικά δρόμος για να οδηγηθούμε στο μηδέν. Για την γενική περίπτωση, παρατηρούμε ότι αρκεί να ξέρουμε μόνο τη θέση του αρχικού σημείου στο επίπεδο $(\omega x_1, \omega x_2)$ δηλαδή σε ποιο σύνολο από τα R_{++} , R_{+-} , R_{-+} ή R_{--} ανήκει το $(\omega x_1, \omega x_2)$. Σε κάθε περίπτωση, επαληθεύεται ο Ισχυρισμός 6.2.

□



Σχήμα 6.7: Πηγαίνουμε από το σημείο T πίσω στο χρόνο κατά $t = \pi/2\omega$ και καταλήγουμε στο σημείο Y με την εφαρμογή των ελέγχων (+-).

Δίνουμε αρκετές τροχιές άριστου χρόνου προς την αρχή για $k=1$ στην Εικόνα 6.8.



Σχήμα 6.8: Κάποιες άριστες τροχιές προς την αρχή

7. ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΕΥΣΤΑΘΟΥΣ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

7.1 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΕΥΣΤΑΘΟΥΣ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Έχουμε ήδη εξετάσει στο κεφάλαιο 5 το σύστημα αρμονικού ταλαντωτή μίας εισόδου που κινείται χωρίς τριβή. Αν το ίδιο σύστημα κινείται υπό την επίδραση γραμμικής τριβής, το ονομάζουμε αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση και ψάχνουμε τον έλεγχο αρίστου χρόνου για ένα τέτοιο σύστημα. Θεωρούμε δηλαδή ένα σύστημα δεύτερης τάξης που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + (a^2 + \omega^2)y(t) = Ku(t), \quad K > 0 \quad (7.1)$$

όπου $y(\cdot)$ είναι η έξοδος του συστήματος, $u(\cdot)$ είναι ο έλεγχος με περιορισμό

$$|u(\cdot)| \leq 1 \quad \text{για κάθε } t \geq 0 \quad (7.2)$$

και ακόμη τα α και ω είναι σταθερές με

$$\alpha > 0 \quad \text{και} \quad \omega > 0 \quad (7.3)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω συστήματος είναι

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{K}{(s+\alpha)^2 + \omega^2} \quad (7.4)$$

Οι πόλοι της συνάρτησης $G(s)$ είναι μιγαδικοί συζυγείς

$$s = -\alpha \pm j\omega \quad (7.5)$$

Η σταθερά ω είναι η **φυσική συχνότητα** και η σταθερά α είναι η **απόσβεση** του συστήματος ^[1].

Θεωρούμε μεταβλητές κατάστασης:

$$y_1(\cdot) = y(\cdot) \quad \text{και} \quad y_2(\cdot) = \dot{y}(\cdot) \quad (7.6)$$

οι οποίες ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha^2 + \omega^2) & -2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Ku(t) \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Ορίζουμε νέες μεταβλητές κατάστασης $x_1(\cdot)$ και $x_2(\cdot)$ μέσω του ακόλουθου γραμμικού μετασχηματισμού:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

που ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \omega \\ -\omega & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Βέβαια αν $\alpha = 0$, από την εξίσωση (7.9) παίρνουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων του αρμονικού ταλαντωτή μίας εισόδου χωρίς απόσβεση (5.7). Ο πίνακας του συστήματος στην εξίσωση (7.9) μπορεί να γραφεί και ως :

$$\begin{bmatrix} -\alpha & \omega \\ -\omega & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

δηλαδή ως το άθροισμα ενός διαγωνίου πίνακα με στοιχεία το πραγματικό μέρος των συζυγών πόλων και ενός αντισυμμετρικού πίνακα με στοιχεία το φανταστικό μέρος των συζυγών πόλων.

Το πρόβλημα ελέγχου αρίστου χρόνου για τον αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση διατυπώνεται πλέον ως εξής :

Πρόβλημα 7.1 : Δίνεται το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση (7.9). Καθορίζουμε τον έλεγχο $u(\cdot)$ με περιορισμό $|u(\cdot)| \leq 1$ που μεταφέρει οποιαδήποτε αρχική κατάσταση (ξ_1, ξ_2) στην αρχή $(0, 0)$ στον ελάχιστο χρόνο.

7.2. ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΕΥΣΤΑΘΟΥΣ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Αρχικά σχηματίζουμε την Hamiltonian (βλ. σχέση 2.46) :

$$H = 1 - \alpha x_1 p_1 + \omega x_2 p_1 - \omega x_1 p_2 - \alpha x_2 p_2 + u p_2 \quad (7.11)$$

Ο έλεγχος που ελαχιστοποιεί την Hamiltonian (βλ. Παρατήρηση 2.1) είναι :

$$u(t) = -\text{sgn}\{p_2(t)\} \quad (7.12)$$

Οι συζυγείς μεταβλητές $p_1(\cdot)$ και $p_2(\cdot)$ ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (βλ. σχέση 2.47) :

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \omega \\ -\omega & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Ο θεμελιώδης πίνακας $\Psi(t)$ για το σύστημα (7.13) είναι

$$\Psi(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

Θεωρούμε τον πίνακα $\mathbf{M}(t)$:

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

ο οποίος είναι ορθογώνιος. Από την εξίσωση (7.13) παίρνουμε για το διάνυσμα συζυγών μεταβλητών :

$$\mathbf{p}(t) = e^{at} \mathbf{M}(t) \boldsymbol{\pi} \quad \text{όπου} \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p}(0) \quad (7.16)$$

και

$$\|\mathbf{p}(t)\| = e^{at} \|\boldsymbol{\pi}\| \quad (7.17)$$

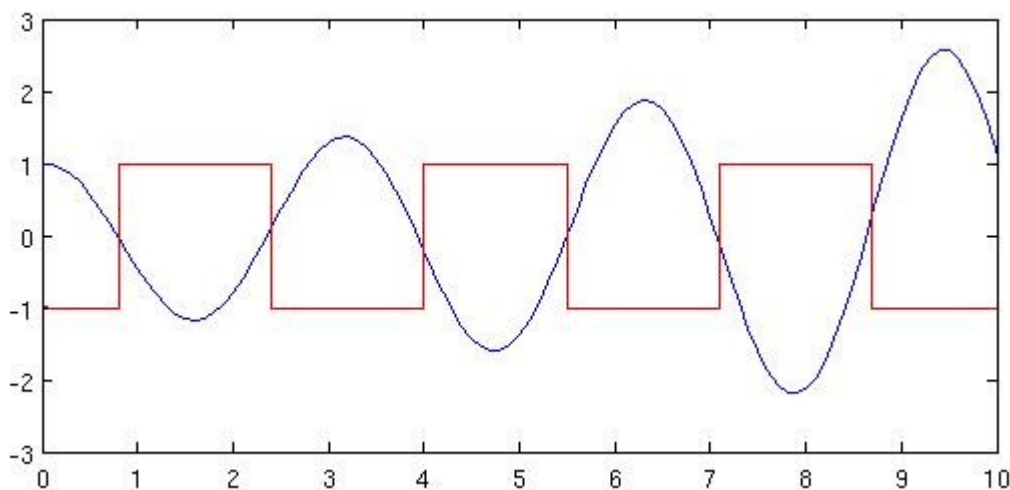
Άρα το διάνυσμα μεταβλητών συζυγούς κατάστασης περιγράφει μια σπείρα η οποία κατευθύνεται μακριά από την αρχή των αξόνων στο επίπεδο $p_1 p_2$. Από την εξίσωση (7.12), η μεταβλητή που καθορίζει τον έλεγχο είναι η p_2 για την οποία από την εξίσωση (7.16) έχουμε:

$$p_2(t) = e^{at} (\pi_1 \cos \omega t + \pi_2 \sin \omega t) \quad (7.18)$$

δηλαδή επειδή $a > 0$, η συνάρτηση $p_2(\cdot)$ είναι το γινόμενο μιας εκθετικής αύξουσας συνάρτησης και μιας ημιτονοειδούς συνάρτησης (βλ. Σχήμα 7.1). Από την εξίσωση (7.18) γράφουμε την $p_2(\cdot)$ ως:

$$p_2(t) = c e^{at} (\sin \omega t + \gamma) \quad (7.19)$$

Τα μηδενικά της $p_2(\cdot)$ βρίσκονται στα σημεία $\omega t = -\gamma \pm n\pi$ [5]. Το Σχήμα (7.1) απεικονίζει στο ίδιο διάγραμμα την συζυγή μεταβλητή $p_2(\cdot)$ και τον έλεγχο $u(\cdot)$ που ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες για βελτιστότητα.



Σχήμα 7.1: Με μπλε δείχνεται η συζυγής μεταβλητή p_2 και με κόκκινο απεικονίζεται ο τμηματικά σταθερός έλεγχος αρίστου χρόνου για το σύστημα (7.9)

Ο έλεγχος $u(\cdot)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Ο έλεγχος βελτίστου χρόνου πρέπει να είναι μια τμηματικά σταθερή συνάρτηση και να αλλάζει μόνο μεταξύ των τιμών $u(t) = -1$ και $u(t) = +1$.
- Ο έλεγχος αρίστου χρόνου δε μπορεί να παραμείνει σταθερός για παραπάνω από $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου.
- Δεν υπάρχει ανώ όριο στον αριθμό των αλλαγών του ελέγχου αρίστου χρόνου. Έτσι επαληθεύεται και το θεώρημα 3.4.
- Η συνάρτηση $p_2(t)$ δε μηδενίζεται παρά μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές

διότι αν μηδενιζόταν σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα, θα απαιτούσαμε $p_1(0) = 0$ και $p_2(0) = 0$ κι άρα $p_1(t) = p_2(t) = 0$ για κάθε t και επομένως η Hamiltonian $H = 1 \neq 0$ όπως απαιτεί η αρχή του μεγίστου (βλ. σχέση 2.49 για $k = 0$).

Λύνουμε την εξίσωση (7.9) χρησιμοποιώντας τον έλεγχο $u = \Lambda = \pm 1$. Με αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= x_1(0) \\ \zeta_2 &= x_2(0) \end{aligned} \quad , \quad (7.20)$$

βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1(t) &= \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} \zeta_1 e^{-\alpha t} \cos \omega t + \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} \zeta_2 e^{-\alpha t} \sin \omega t \\ &\quad - \Lambda \frac{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \psi) + \Lambda \end{aligned} \quad (7.21)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2(t) &= -\frac{\alpha^2 + \omega^2}{\alpha} \zeta_1 e^{-\alpha t} \sin \omega t + \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\alpha} \zeta_2 e^{-\alpha t} \cos \omega t \\ &\quad - \Lambda \frac{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}{\omega} e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \psi) + \Lambda \frac{\alpha}{\omega} \end{aligned} \quad (7.22)$$

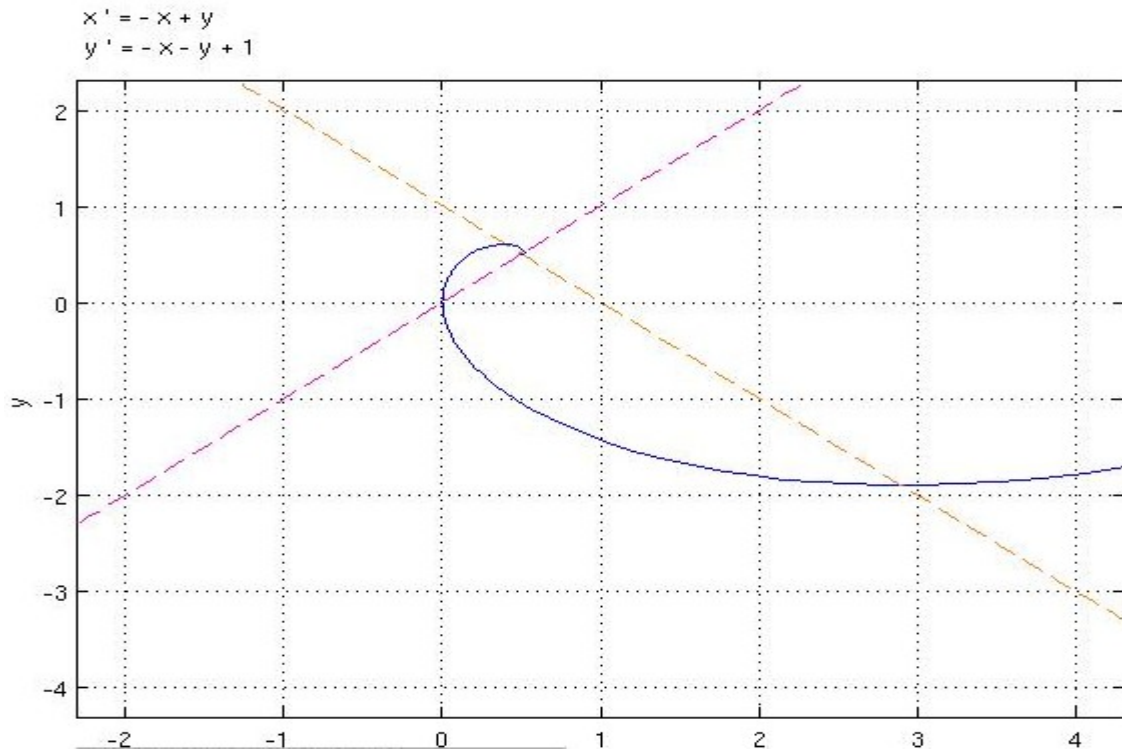
όπου θεωρήσαμε

$$\psi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha} \quad (7.23)$$

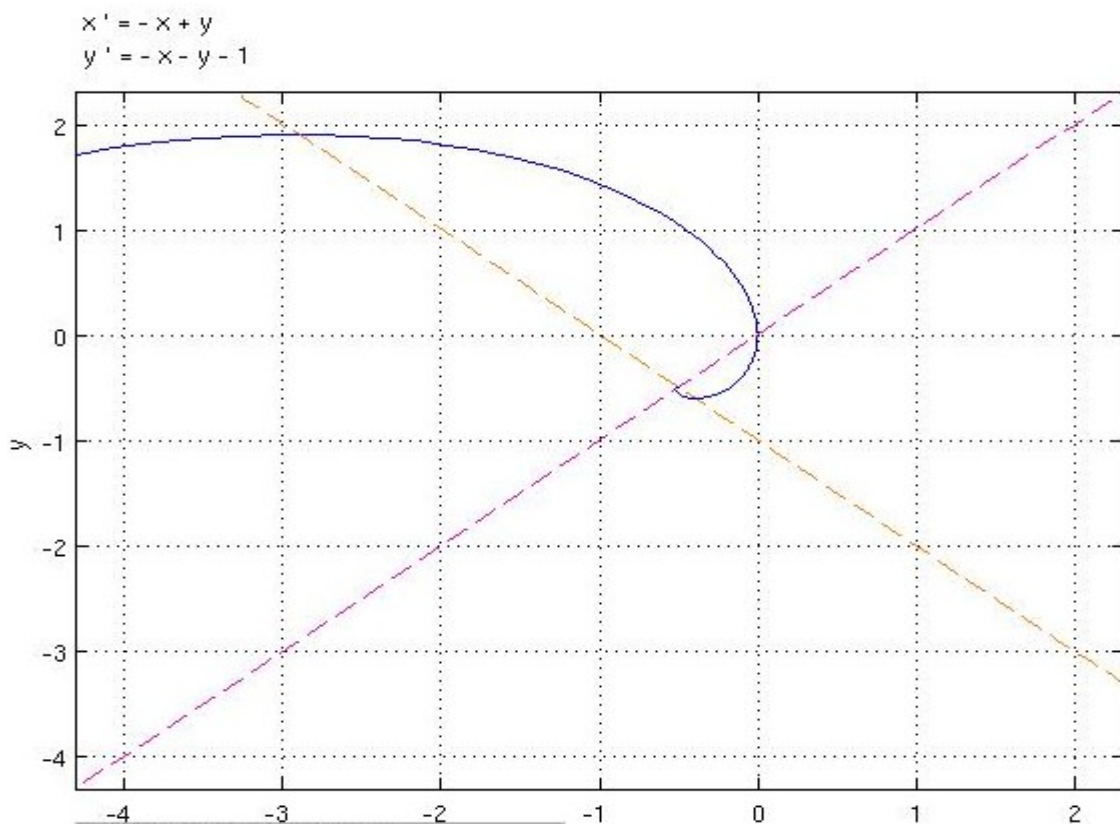
Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) &= \Lambda \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) &= \Lambda \frac{\alpha}{\omega} \end{aligned} \quad (7.24)$$

Οι εξισώσεις (7.21) ως και (7.24) περιγράφουν λογαριθμικές σπείρες που τείνουν στο σημείο $\left(\Lambda, \Lambda \frac{\alpha}{\omega} \right)$ του επιπέδου $\left(\frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2 \right)$. Οι τροχιές που διέρχονται από την αρχή των αξόνων O στο επίπεδο (x_1, x_2) φαίνονται στο σχήμα 7.2 για $u = +1$ και στο Σχήμα 7.3 για $u = -1$.



Σχήμα 7.2 : Η σπείρα που αναπαριστά την εξαναγκασμένη τροχιά από τον έλεγχο $u = +1$ που περνά από την αρχή του επιπέδου $X_1 X_2$



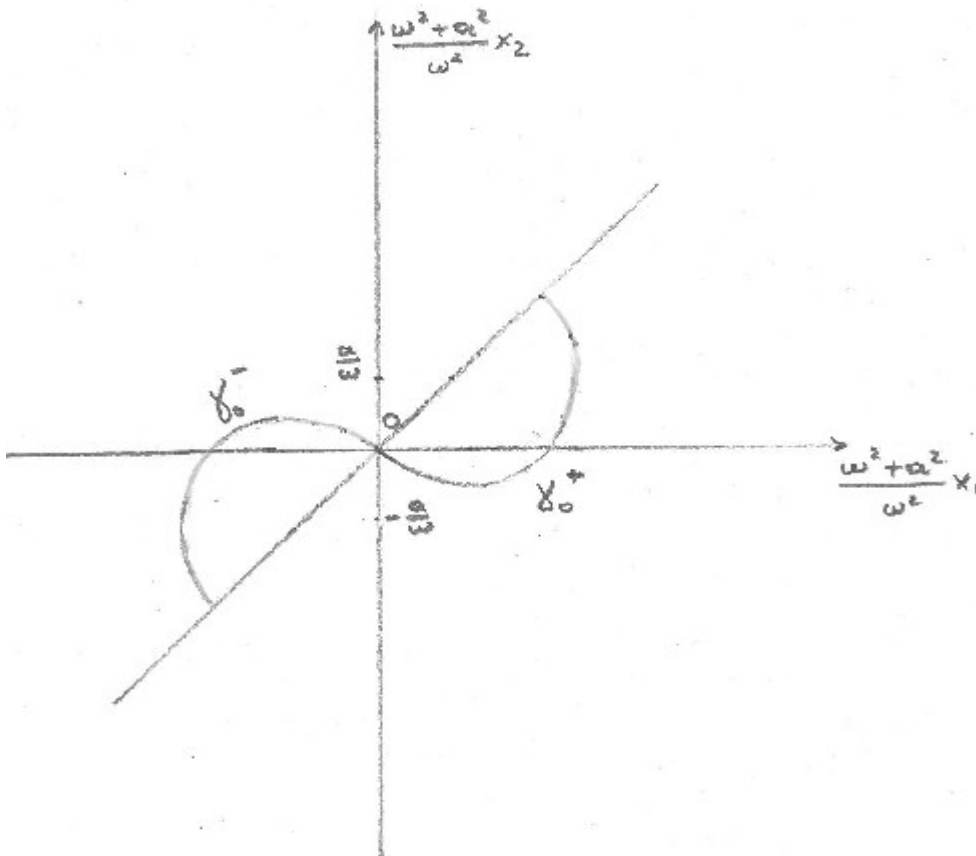
Σχήμα 7.3 : Η σπείρα που αναπαριστά την εξαναγκασμένη τροχιά από τον έλεγχο $u = -1$ που περνά από την αρχή του επιπέδου $X_1 X_2$

Η αλλαγή του επιπέδου από (x_1, x_2) σε $\left(\frac{\omega^2 + a^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + a^2}{\omega} x_2\right)$ δεν επηρεάζει τη μορφή των τροχιών αλλά προκαλεί μια κλιμάκωση των μεταβλητών x_1 και x_2 . Δεν μπορούμε να εξαλείψουμε τον χρόνο για να παράγουμε την εξίσωση τροχιάς. Ακολουθούμε την ίδια πορεία με τα προηγούμενα συστήματα, ορίζοντας τα σημεία του επιπέδου τα οποία οδηγούνται στην αρχή με έλεγχο $u = \pm 1$:

Ορισμός 7.1: Έστω γ_+^0 το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να μεταφερθούν στην αρχή από τον έλεγχο $u = \Lambda = +1$ σε χρόνο λιγότερο ή ίσο με $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου. Έστω γ_-^0 το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να μεταφερθούν στην αρχή από τον έλεγχο $u = \Lambda = -1$ σε χρόνο λιγότερο ή ίσο με $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου.

Η μορφή των καμπυλών γ_+^0 και γ_-^0 φαίνεται στο σχήμα 7.4.

Οι καμπύλες γ_+^0 και γ_-^0 μας δίνουν μονοπάτια προς την αρχή που ικανοποιούν όλες τις αναγκαίες συνθήκες για βελτιστότητα.



Σχήμα 7.4: Οι καμπύλες γ_+^0 και γ_-^0 για το σύστημα ταλαντωτή με απόσβεση

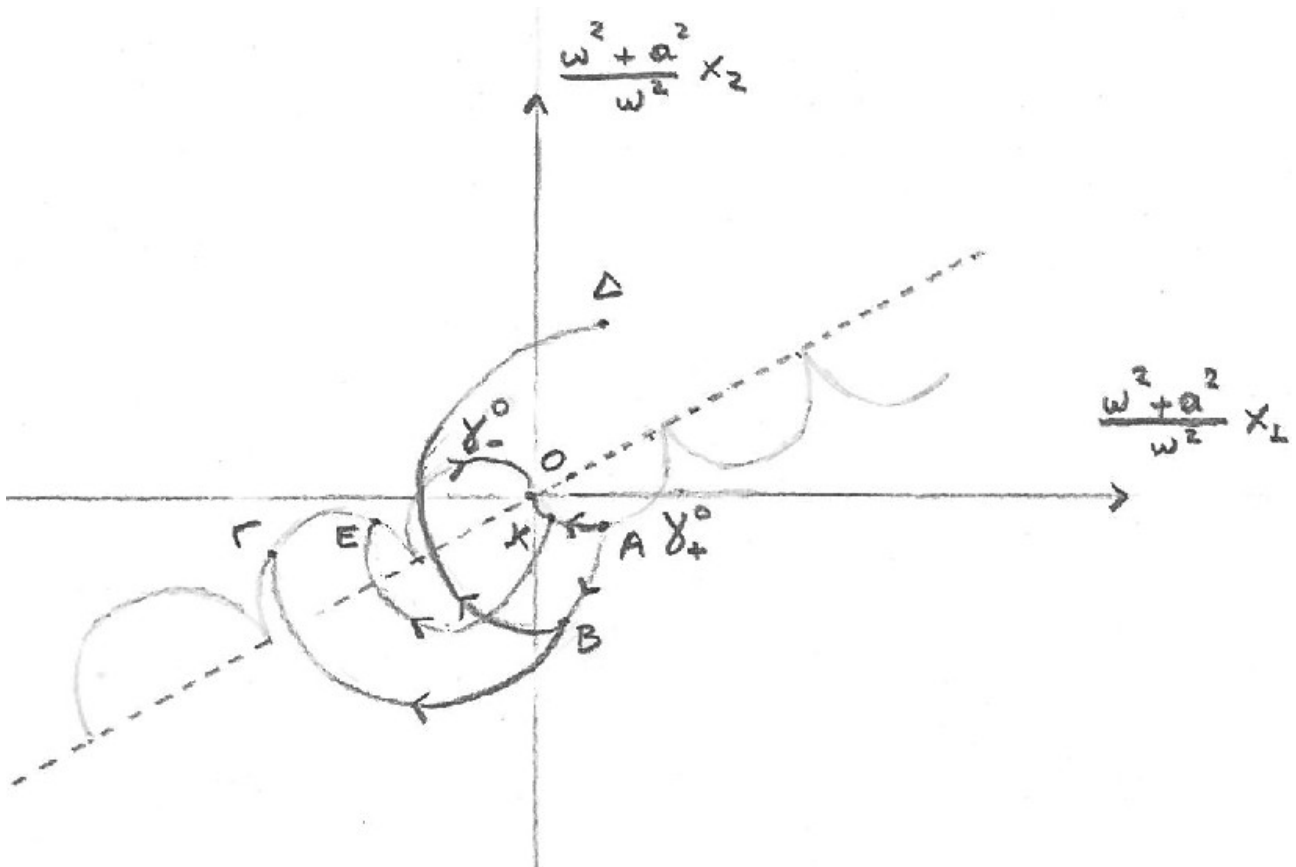
Θα δείξουμε πάλι με τη διαδικασία του αποκλεισμού ότι όντως οι καμπύλες γ_+^0 και γ_-^0 μας δίνουν βέλτιστα μονοπάτια προς την αρχή.

Ισχυρισμός 7.1: Ισχυρίζομαστε ότι ο έλεγχος αρίστου χρόνου ως συνάρτηση της

συνάρτησης $\left(\frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2 \right)$ είναι :

- Αν το σημείο $\left(\frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2 \right)$ ανήκει στην καμπύλη γ_+^0 , τότε $u^*(.) = +1$.

- Αν το σημείο $\left(\frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2 \right)$ ανήκει στην καμπύλη γ_-^0 , τότε $u^*(.) = -1$.



Σχήμα 7.5 : Για σημεία της καμπύλης γ_+^0 , μόνο ο έλεγχος $u = +1$ μας οδηγεί στην αρχή O

Απόδειξη : Κάνουμε την απόδειξη για την περίπτωση όπου το σημείο $\left(\frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2 \right)$ ανήκει στην καμπύλη γ_+^0 .

Παίρνουμε ένα σημείο $A \in \gamma_+^0$ (βλ. Σχήμα 7.5). Αν εφαρμόσουμε έλεγχο $u = +1$, τότε από τον ορισμό 7.1 της καμπύλης γ_+^0 το σημείο A θα οδηγηθεί στην αρχή O σε λιγότερο από $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου. Αν εφαρμόσουμε έλεγχο $u = +1$ αλλά πριν φτάσουμε στην αρχή O - και πιο συγκεκριμένα στο σημείο K - αλλάξουμε τον έλεγχο σε $u = -1$, τότε λόγω των αναγκαίων συνθηκών για βελτιστότητα, ο έλεγχος θα πρέπει να ξαναλλάξει σε $u = +1$ μετά από π / ω μονάδες χρόνου δηλαδή στο σημείο E . Όμως παρατηρούμε ότι με αυτήν την ακολουθία ελέγχων απομακρυνόμαστε από την αρχή.

Αν από το σημείο A εφαρμόσουμε έλεγχο $u = -1$ για διάστημα π / ω μονάδες χρόνου, τότε καταλήγουμε στο σημείο Γ όπου και πρέπει να αλλάξουμε τον έλεγχο σε $u = +1$. Αν

αλλάζουμε στο σημείο B τον έλεγχο σε $u = +1$, τότε μεταφερόμαστε στο σημείο Δ όπου πλέον ο έλεγχος ξαναγίνεται $u = -1$. Όμως παρατηρούμε ότι και με αυτήν την ακολουθία ελέγχων απομακρυνόμαστε από την αρχή.

Συμπεραίνουμε ότι μόνο ο έλεγχος $u = +1$ μας οδηγεί στην αρχή. Αν εφαρμόσουμε έλεγχο $u = +1$ αλλά αλλάζουμε σε $u = -1$ πριν φτάσουμε στην αρχή και στη συνέχεια πάρουμε μια ακολουθία ελέγχων σύμφωνη με τις αναγκαίες συνθήκες για βελτιστότητα, τότε απομακρυνόμαστε από την αρχή κατά μήκος κάποιων σπειρών – τροχιών. Το ίδιο θα συμβεί αν εφαρμόσουμε αρχικά έλεγχο $u = -1$ και επιλέξουμε πάλι μια ακολουθία ελέγχων σύμφωνη με τις αναγκαίες συνθήκες για βελτιστότητα.

Καταλήγουμε λοιπόν ότι αν το σημείο A ανήκει στην καμπύλη γ_+^0 , τότε $u^*(.) = +1$. Όμοια αποδεικνύεται ότι αν το σημείο $\left(\frac{\omega^2 + a^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + a^2}{\omega} x_2 \right)$ ανήκει στην καμπύλη γ_-^0 , τότε $u^*(.) = -1$.

□

Στη συνέχεια, δημιουργούμε μια ακολουθία καμπυλών γ_+^j και γ_-^j για $j = 1, 2, \dots$

Ορισμός 7.2 : Η καμπύλη γ_+^1 ορίζεται ως το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_-^0 σε ακριβώς $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου από τον έλεγχο $u = +1$. Η καμπύλη γ_-^1 ορίζεται ως το σύνολο των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_+^0 σε ακριβώς $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου από τον έλεγχο $u = -1$.

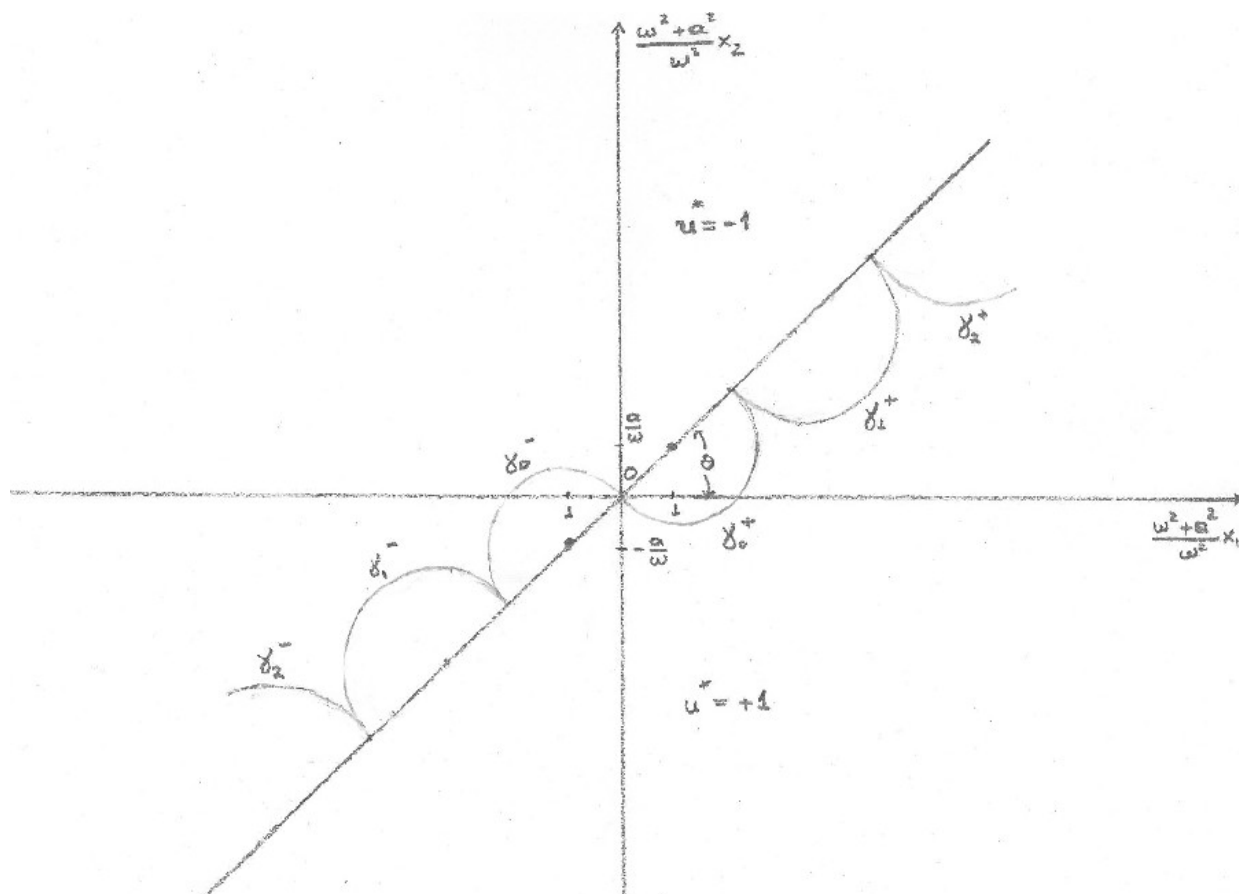
Ορισμός 7.3 : Οι καμπύλες γ_+^j ορίζονται ως τα σύνολα των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_-^{j-1} σε ακριβώς $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου από τον έλεγχο $u = +1$. (βλ. Σχήμα 7.6).

Οι καμπύλες γ_-^j ορίζονται ως τα σύνολα των καταστάσεων που μπορούν να οδηγηθούν στην καμπύλη γ_+^{j-1} σε ακριβώς $\frac{\pi}{\omega}$ μονάδες χρόνου από τον έλεγχο $u = -1$. (βλ. Σχήμα 7.6)

Η ένωση όλων των καμπυλών γ_+^j και γ_-^j μας δίνει την καμπύλη αλλαγής γ :

$$\gamma = \left\{ \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_+^j \right\} \cup \left\{ \bigcup_{j=0}^{\infty} \gamma_-^j \right\} \quad (7.27)$$

Η καμπύλη αλλαγής γ φαίνεται στο Σχήμα 7.6.



Σχήμα 7.6: Οι καμπύλες γ_+^j και γ_-^j για $j=0,1,2,\dots$ για τον ταλαντωτή με απόσβεση

Παραθέτουμε με βάση τους ορισμούς 7.2 και 7.3 - χωρίς απόδειξη - τον Ισχυρισμό 7.2 για τον νόμο ελέγχου για το σύστημα 7.9.

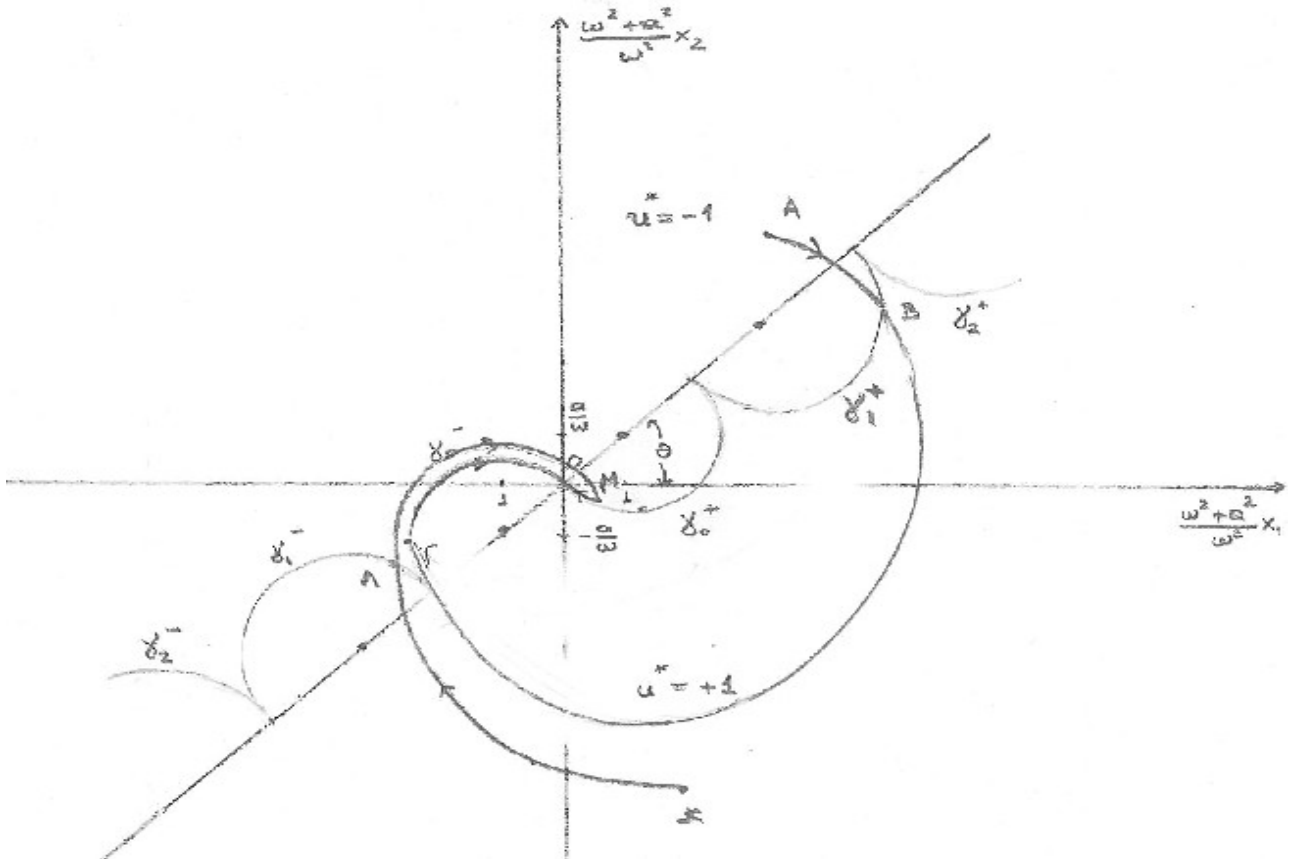
Ισχυρισμός 7.2 : Ισχυριζόμαστε ότι ο έλεγχος αρίστου χρόνου ως συνάρτηση της συνάρτησης $\left(\frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2 \right)$ είναι :

- Αν το σημείο $\left(\frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2 \right)$ είναι πάνω από την καμπύλη γ , τότε $u^*(.) = -1$.
- Αν το σημείο $\left(\frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2 \right)$ είναι κάτω από την καμπύλη γ , τότε $u^*(.) = +1$.
- Αν το σημείο $\left(\frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2 \right)$ ανήκει στην καμπύλη γ_+^0 , τότε $u^*(.) = +1$.
- Αν το σημείο $\left(\frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_1, \frac{\omega^2 + \alpha^2}{\omega} x_2 \right)$ ανήκει στην καμπύλη γ_-^0 , τότε $u^*(.) = -1$.

Σημειώνουμε την σημασία της σταθεράς α . Αν $\alpha = 0$, τότε η γωνία θ στο Σχήμα 7.6 τείνει στο 0 και η καμπύλη γ για τον ταλαντωτή με απόσβεση ταυτίζεται με την καμπύλη

γ για το σύστημα χωρίς απόσβεση. Ωστόσο, για $a > 0$, το μέγεθος των καμπύλων γ_+^j και γ_-^j αυξάνουν, καθώς το a αυξάνει. Αυτό συμβαίνει διότι ο όρος e^{-at} καθορίζει το μέγεθος των σπειροειδών τροχιών.

Κλείνουμε δείχνοντας κάποιες τροχιές άριστου χρόνου για το σύστημα με απόσβεση στο σχήμα 7.7.



Σχήμα 7.7: Κάποιες τροχιές άριστου χρόνου προς την αρχή για το σύστημα με απόσβεση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Athans M., and Falb P.L.,1966, *Optimal Control: an introduction to the theory and its applications* , New York: McGraw-Hill Book Company
- [2] C. T. Chen , *Linear Systems Theory and Design*, Holt , Rinehart and Winston, New York , 1984.
- [3] E. B. Lee - L. Markus , *Foundations of Optimal Control Theory* , Wiley 1967
- [4] E. R. Pinch , *Optimal Control and the Calculus of Variations* , Oxford Science Publ. , 1993
- [5] Ι . Τσινιάς, *Άριστος Έλεγχος, Σημειώσεις για το μάθημα 8^ο Εξαμήνου ΣΕΜΦΕ,ΕΜΠ:*
«*Μαθηματικός Βέλτιστος Έλεγχος*»