ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Το Regularity Lemma και οι εφαρμογές του στη θεωρία γραφημάτων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ιωάννης Π. Παππάς

Επιβλέπων : Βασίλης Κανελλόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος, 2012

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Το Regularity Lemma και οι εφαρμογές του στη θεωρία γραφημάτων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ιωάννης Π. Παππάς

Επιβλέπων : Βασίλης Κανελλόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 19^{η} Οκτωβρίου 2012.

....	....	....
Βασίλης Κανελλόπουλος	Πέτρος Στεφανέας	Γεώργιος Κολέτσος
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Λέκτορας Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος, 2012

....

Ιωάννης Π. Παππάς

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Για τον Endre με τα παράξενα παντελόνια...

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω πρώτα και να εκφράσω ευγνωμοσύνη στον επιβλέποντα καθηγητή μου Βασίλη Κανελλόπουλο, ο οποίος στάθηκε δίπλα μου σε κάθε βήμα και με περίσσεια υπομονή με ενθάρρυνε και μου μεταλαμπάδευε κάθε όμορφο στοιχείο των μαθηματικών.

Αισθάνομαι κάτι περισσότερο από υποχρέωση να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους, προπτυχιακούς φοιτητές, μεταπτυχιακούς φοιτητές ή υποψήφιους διδάκτορες, με τους οποίους συναναστράφηκα και οι οποίοι αγκάλιασαν με στωικότητα τις σκέψεις, τις αμφιβολίες και τις ιδιοτροπίες μου. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Νίκο Καραγιάννη, Γιάννη Πανάγου, Κώστα Τύρο, Φοίβο Ξανθό, Γιάννη Καραγιώργο, Μίλτο Καραμανλή, Παύλο Μοτάκη, Γιώργο Ζαχαριάδη, Βασίλη Σεψάκο, Αντρέα Κουρασβίλι, Δημήτρη Ροδόπουλο, Βαγγέλη Φωτόπουλο.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Φώτη Μαυρίδη για την ανεκτίμητη βοήθειά του σε πολλά μαθηματικά ζητήματα.

Τέλος θα ήθελα ιδιαίτερα να εκφράσω την απέραντη ευγνωμοσύνη στην οικογένεια μου, καθώς χωρίς αυτούς κάθε προσπάθεια θα είχε αποτύχει.

Περιεχόμενα

Λίστα εικόνων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το Regularity Lemma (θεωρούμε ότι η μετάφρασή του σε λήμμα κανονικότητας περισσότερο θα μπερδέψει παρά θα βοηθήσει τον αναγνώστη γι αυτό κρίνουμε σκόπιμο να κρατήσουμε την αγγλική απόδοση) το οποίο πρωτεμφανίστηκε από τον Endre Szemerédi στο [Sze76] θεωρείται ένα θεμελιώδες εργαλείο στην θεωρία γραφημάτων και,μιλώντας με μεγαλύτερη ακρίβεια, στην θεωρία μεγάλων και πυκνών γραφημάτων. Μιλώντας αρκετά απλοικά, το Regularity Lemma μας λέει ότι κάθε γράφημα μπορεί να προσεγγιστεί από ψευδοτυχαία γραφήματα. Δηλαδή δοθέντος ενός σφάλματος ή ορίου αποδοχής $\epsilon > 0$ και $\epsilon \ll 1$, κάποιος μπορεί να προσεγγίσει ένα οποιοδήποτε γράφημα με μία διαμέριση των κορυφών του τέτοια ώστε η προσέγγιση μεταξύ των περισσότερων ζευγαριών της διαμέρισης να είναι ψευδοτυχαία $\epsilon - regular$. Οι ορισμοί αυτοί θα δοθούν αυστηρά στην συνέχεια.

Το Regularity Lemma έχει πολλές εφαρμογές στην θεωρία γραφημάτων, στην συνδυαστική, στην επιστήμη των υπολογιστών και στην διακριτή γεωμετρία. Η σημαντικότερη συνεισφορά του είναι ως αποδεικτικό εργαλείο στο περίφημο θεώρημα του Szemerédi για τις αριθμητικές προόδους το οποίο ισχυρίζεται ότι κάθε υποσύνολο των ακεραίων θετικής πυκνότητας (positive density) περιέχει τυχαίες μεγάλες αριθμητικές προόδους [Sze69], [Sze75]. Το θεώρημα του Szemerédi, είναι θεμελιώδους σημασίας για τον κλάδο της συνδυαστικής και έχει αποδειχτεί με βάση εργοδική θεωρία Ramsey από τον Furstenberg [FK78] το 1977, και από τον Timothy Gowers το 2001 χρησιμοποιώντας μεθόδους Fourier και συνδυαστική [Gow98].

1.1 Βασικοί ορισμοί

Στις επόμενες σελίδες θα θεωρήσουμε απλά ακυκλικά γραφήματα, χωρίς βάρη, κατευθύνσεις, ή πολλαπλές ακμές. Τα γραφήματα θα είναι της μορφής $G = (V, E)$, όπου $V = V(G)$ οι κορυφές του G και $E = E(G)$ οι ακμές του γραφήματος. Επιπλέον με $u(G) = |V(G)|$ θα συμβολίζουμε τον αριθμό των κορυφών του γραφήματος (ή αλλιώς τάξη του γραφήματος) και με $e(G) = |E(G)|$ τον αριθμό των ακμών του γραφήματος (ή αλλιώς μέγεθος του γραφήματος). Με G_n θα συμβολίζουμε ένα γράφημα n κορυφών. Με $deg(u)$ θα συμβολίζουμε τον βαθμό της κορυφής u , ενώ με $deg(u, Y)$ θα συμβολίζουμε τον αριθμό των γειτόνων του u σέ ένα σύνολο κορυφών Y . $\Delta(G)$ είναι ο μέγιστος βαθμός του G. $N(x)$ είναι το σύνολο των γειτόνων της κορυφής x, και $e(X, Y)$ είναι ο αριθμός των ακμών μεταξύ X, Y. Με την έννοια διμερές γράφημα θα εννοούμε ένα γράφημα $G(V, E)$ όπου οι κορυφές μπορούν να χωριστούν σε 2 ανεξάρτητα σύνολα V_1, V_2, με $V_1 \cup V_2 = V$, και κάθε ακμή $e \in E$ θα ενώνει μια κορυφή του ενός με μία κορυφή του άλλου. Ένας διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών A, B και σύνολο ακμών E θα γράφεται συνήθως σαν $G = (A, B, E)$ με $E \subset A \times B$.

Ταίριασμα ενός γραφήματος είναι ένα υποσύνολο των ακμών του τέτοιο ώστε για κάθε ζευγάρι ακμών που ανήκουν στο σύνολο αυτό ισχύει ότι δεν μοιράζονται κοινή κορυφή.

Κλίκα ενός γραφήματος είναι ένα υποσύνολο των κορυφών του τέτοιο ώστε κάθε ζευγάρι κορυφών που ανήκουν στο σύνολο αυτό συνδέονται με ακμή του γραφήματος.

Τριμερές γράφημα είναι αντίστοιχα ένα γράφημα $G(V, E)$ όπου οι κορυφές μπορούν να χωριστούν σε 3 ανεξάρτητα σύνολα V_1, V_2, V_3, με $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V$ και δεν υπάρχουν ακμές μεταξύ κορυφών του ίδιου συνόλου.

Όπως φαίνεται, αυτή η έννοια μπορεί να γενικευτεί για r - μερή γραφήματα.

Με $k-uniform$ υπεργράφημα θα εννοούμε ένα γράφημα όπου κάθε υπερακμή (hyperedge) περιλαμβάνει k κορυφές. Συνεπώς ένα $3 - uniform$ υπεργράφημα θα είναι μια συλλογή από σύνολα τριάδων.

Πιο αυστηρά:

Ορισμός 1.1.1. *Αν J είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και $d \geqslant 0$, ορίζουμε σαν $\binom{J}{d} := \{e \subseteq J : |e| = d\}$ να είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του J πληθικότητας d . Ένα $d-uniform$ υπεργράφημα στο J ορίζεται να είναι οποιοδήποτε σύνολο $H_d \subseteq \binom{J}{d}$ του $\binom{J}{d}$.*

Ορισμός 1.1.2. *Αβελιανή ομάδα εννοούμε ένα ζευγάρι $(A, *)$, όπου A σύνολο και $*$ και μια εσωτερική πράξη για την οποία ισχύει ότι:*

1. για $a \in A$, $b \in A$ το αποτέλεσμα της πράξης $a * b$ ανήκει επίσης στο A.

2. υπάρχει ένα μοναδιαίο στοιχείο $e \in A$ τέτοιο ώστε $a * e = e * a = a$ για κάθε $a \in A$.

3. για κάθε $a, b, c \in A$ ισχύει ότι $(a * b) * c = a * (b * c)$.

4. για κάθε $a \in A$ υπάρχει ένα $b \in A$ τέτοιο ώστε $a * b = b * a = e$ όπου e είναι το μοναδιαίο στοιχείο.

5. για κάθε $a, b \in A$ θα ισχύει ότι $a * b = b * a$.

Με τα σύμβολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ εννοούμε τα σύνολα των φυσικών, ακεραίων, πραγματικών και μιγαδικών αριθμών αντίστοιχα. Με το σύμβολο $\mathbb{Z}_N$ ή $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ εννοούμε την ομάδα πηλίκο του $\mathbb{Z}$ που είναι μία κυκλική (και άρα αβελιανή) ομάδα και αποτελείται από τα στοιχεία $\{0 + N\mathbb{Z}, 1 + N\mathbb{Z}, \ldots, N - 2 + N\mathbb{Z}, N - 1 + N\mathbb{Z}\} = \{0, 1, 2, \ldots, N - 1\}$ με πράξη την πρόσθεση $modulo - N$.

Δίνουμε τον ορισμό της πυκνότητας μεταξύ δύο ξένων συνόλων κορυφών ενός γραφήματος.

Ορισμός 1.1.3. *Δοθέντος τώρα δύο ξένων συνόλων κορυφών ενός γραφήματος, ορίζουμε ως πυκνότητα (density) των A, B το μέγεθος:*

$$d(A, B) = \frac{e(A, B)}{|A||B|} \ .$$

Παρατηρούμε $d(A, B) = 1$ όταν υπάρχουν όλες οι ακμές μεταξύ A, B.

Από τον ορισμό της πυκνότητας (density) για δύο σύνολα κορυφών A, B γνωρίζουμε ότι

$$d = \frac{|e(A, B)|}{|A||B|} = \frac{|\bigcup_{a \in A} deg(a, B)|}{|A||B|} =$$

$$= \frac{\sum_{a \in A} |deg(a, B)|}{|A||B|} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \left\{ \sum_{a \in A} \frac{|deg(a,B)|}{|B|} \right\}$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι τουλάχιστον $\frac{d}{2}$ ποσοστό κορυφών του A συνδέεται με τουλάχιστον $\frac{d}{2}$ ποσοστό κορυφών από το B.
Το συμπέρασμα αυτό εξάγεται ως εξής: Γενικά για $1 \geq \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$, έστω ότι έχουμε $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = d$. Τότε για $0 \leq \epsilon \leq d$ θα ισχύει ότι

$$A = |\{i \in \{1, \ldots, n\} : \alpha_i \geq d - \epsilon\}| \geq \epsilon n.$$

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{1}{n} (\sum_{i:\alpha_i \geq d-\epsilon} \alpha_i + \sum_{i:\alpha_i < d-\epsilon} \alpha_i)$$

$$\leq \frac{1}{n} (|A| + (d-\epsilon)(n - |A|)$$

$$\leq \frac{1}{n} (|A| + (d-\epsilon)n)$$

$$\Rightarrow nd \leq |A| + dn - \epsilon n$$

$$\Rightarrow |A| \geq \epsilon n$$

.

Αν θέσουμε $\frac{1}{n} = \frac{1}{|A|}$, $\sum_{\alpha \in A} \frac{deg(\alpha, B)}{B} = \sum \alpha_i$ και $\epsilon = \frac{d}{2}$, έχουμε το ζητούμενο.

Για δύο ξένα υποσύνολα A, B του $V(G)$, γράφουμε $G(A, B)$ για να συμβολίσουμε το υπογράφημα με σύνολο κορυφών $A \cup B$ του οποίου οι ακμές είναι εκείνες οι ακμές του G

οι οποίες έχουν το ένα άκρο στο A και το άλλο στο B .

Για γραφήματα G, H, με $H \subset G$, εννοούμε ότι ο H είναι υπογράφημα του G, αλλά συχνά το χρησιμοποιούμε με μία πιο ασθενή έννοια - με την έννοια του ότι το γράφημα G έχει ένα υπογράφημα ισομορφικό στο H (το H είναι εμφυτεύσιμο στο G), δηλαδή υπάρχει μια ένα προς ένα απεικόνιση $\phi : V(H) \to V(G)$ τέτοια ώστε για κάθε $\{x, y\} \in E(H)$ θα υπονοείται ότι $\{\phi(x), \phi(y)\} \in E(G)$. Η πληθικότητα ενός συνόλου S θα συμβολίζεται με $|S|$ ή με $\sharp S$. Για $r \geq 2$, συμβολίζουμε με K^r το πλήρες γράφημα r κορυφών και με K_s^r το πλήρες γράφημα που έχει μια διαμέριση του συνόλου των κορυφών του V σε r κλάσεις, τέτοια ώστε κάθε ακμή του να έχει τα άκρα της σε διαφορετικές κλάσεις και επιπλέον $|V_1|, |V_2|, \ldots, |V_r| = s$.

Με $f(x) = O(g(x))$ για δύο τυχαίες συναρτήσεις f, g θα εννοούμε ότι υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός M και ένα κατώφλι x_0 τέτοιος ώστε για $x > x_0$ θα ισχύει ότι $|f(x)| \leq M|g(x)|$.

Με $f(x) = o(g(x))$ θα εννοούμε ότι πέρα από κάποιο σημείο θα ισχύει ότι $lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ για μη μηδενική g, δηλαδή πρακτικά οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται.

Τέλος, η ανισότητα Cauchy-Schwarz η οποία θα χρειαστεί στην απόδειξη του Regularity Lemma αναφέρει στην στοιχειώδη μορφή της ότι για πραγματικούς αριθμούς α_i, b_i έχω ότι $\sum a_i^2 \sum b_i^2 \geq (\sum \alpha_i b_i)^2$.

1.2 Regularity Pairs

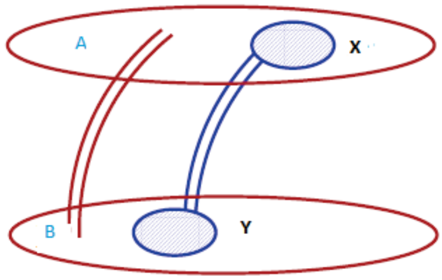
Τα regular pairs είναι ομοιόμορφα διμερή γραφήματα, γραφήματα για τα οποία ισχύει ότι η πυκνότητα οποιουδήποτε «μεγάλου» μεγέθους υπογραφήματός τους είναι περίπου ίδια με την συνολική πυκνότητα του γραφήματος.

Ορισμός 1.2.1. *Έστω $0 < \epsilon < 1$. Δοθέντος ενός γραφήματος G και δύο ξένων συνόλων κορυφών $A \subset V, B \subset V$, λέμε ότι το ζευγάρι (A, B) είναι $\epsilon - regular$ αν για κάθε $X \subset A$ και $Y \subset B$ τα οποία ικανοποιούν*

$$|X| > \epsilon|A|, |Y| > \epsilon|B|$$

,έχουμε ότι

$$|d(X, Y) - d(A, B)| < \epsilon.$$



Η ιδέα που κρύβεται πίσω από την $\epsilon - regularity$, είναι ότι θα θέλαμε όλα τα στοιχεία του A να συνδέονται με ποσοστό d των στοιχείων του B. Δηλαδή θα θέλαμε οι ακμές μεταξύ μεταξύ των συνόλων X, Y να συμπεριφέρονται σαν να να έχουν τραβηχτεί τυχαία (για αυτό και ορισμός της $\epsilon - regularity$ αναφέρεται συχνά σαν ορισμός της ψευδοτυχαιότητας - pseudo - randomness).

Η $\epsilon - regularity$ μας διασφαλίζει ότι «σχεδόν» όλα τα στοιχεία του A συνδέονται με ποσοστό d στοιχείων του B και αυτό να συμβαίνει για κάθε υποσύνολο $Y \subset B$. Δηλαδή :

Λήμμα 1.2.2. *Έστω (A, B) ένα $\epsilon - regular$ ζευγάρι με πυκνότητα d . Τότε τουλάχιστον $(1 - \epsilon)$ - σχεδόν για όλα τα στοιχεία $a \in A$(δηλαδή για ποσοστό τουλάχιστον $(1 - \epsilon)|A|$) και για οποιοδήποτε $Y \subset B$ με $|Y| > \epsilon|B|$, ισχύει ότι $\dfrac{|deg(a, Y)|}{|Y|} > d - \epsilon$.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε $X \subset A$ το υποσύνολο κορυφών του A , που έχουν μικρότερο ή ίσο από $(d - \epsilon)|Y|$ αριθμό γειτόνων στο Y. Θα αποδείξουμε ότι $|X| \leq \epsilon A$. Πράγματι $e(X, Y) \leq |X|(d - \epsilon)|Y|$ και $d(X, Y) = \dfrac{e(X, Y)}{|X||Y|} \leq d - \epsilon = d(A, B) - \epsilon$ και αφού (A, B) είναι $\epsilon - regular$ και $Y > \epsilon|B|$, άμεσα συνεπάγεται ότι $|X| \leq \epsilon A$.

□

1.3 Το Regularity Lemma

Όπως αναφέραμε το regularity lemma μας λέει ότι ένα οποιοδήποτε πυκνό γράφημα μπορεί να χωριστεί σε έναν μικρό αριθμό από regular ζευγάρια και σε κάποιες εναπομείνουσες ακμές. Αφού τα regular ζευγάρια συμπεριφέρονται σαν ψευδοτυχαία διμερή γραφήματα μπορούμε να πούμε ότι το regularity lemma μας λέει ότι κάθε πυκνό γράφημα προσεγγίζεται από ψευδοτυχαία διμερή γραφήματα.

Θεώρημα 1.3.1. *(Regularity Lemma, Szemerédi 1978)*

Για κάθε $\epsilon > 0$, για κάθε ακέραιο m, υπάρχει ένας ακέραιος $M = M(\epsilon)$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε γράφημα G τάξης τουλάχιστον m, υπάρχει μια διαμέριση του συνόλου των κορυφών του σε k κλάσεις $V = V_1 \bigcup V_2 \bigcup \cdots \bigcup V_k$ τέτοια ώστε :

- $k \leq M$
- $|V_i| \leq \lceil \epsilon |V| \rceil$ *για κάθε* i
- $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ *για όλα τα* i, j *(ισοδιαμέριση)*
- (V_i, V_j) *είναι* $\epsilon - regular$ *στο* G *για όλα τα ζευγάρια* (i, j) *εκτός από το πολύ* ϵk^2 *τον αριθμό.*

Το Regularity Lemma θα αποδειχτεί σε επόμενο κεφάλαιο για την ειδική περίπτωση τυχαίων διμερών γραφημάτων στο οποίο θα φανεί ότι το όριο $M(\epsilon)$ είναι αρκετά μεγάλο. Συγκεκριμένα το όριο είναι ένας πύργος από 2 με ύψος ανάλογο του ϵ^{-5}. Επιπλέον να σημειώσουμε ότι με τον όρο πυκνά γραφήματα εννούμε γραφήματα τα οποία ο αριθμός των ακμών τους προσεγγίζει τον μέγιστο ικανό αριθμό ακμών. Δηλαδή αν θεωρήσουμε ένα διμερές γράφημα με $|V_1| = n, |V_2| = n$ τότε ο αριθμός των ακμών ενός πυκνού γραφήματος αναμένεται περίπου cn^2 για κάποια σταθερά $c > 0$.

1.4 Ο δρόμος προς το Regularity Lemma

Στην ενότητα αυτή όταν θα μιλάμε για πυκνότητα(θα χρησιμοποιήσουμε τον αγγλικό όρο)density, θα εννοούμε την density συνόλων. Δηλαδή αν X είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και $Y \subset X$, τότε η density του Y είναι $\frac{|Y|}{|X|}$. Εκτενέστερους ορισμούς θα δώσουμε και στο κεφάλαιο 3.

Το πρώτο βασικό αποτέλεσμα στην συνδυαστική που αποτέλεσε και πρόγονο του θεωρήματος του Szemerédi, ήταν το θεώρημα του Van der Waerden το οποίο εμφανίστηκε το 1927 [dW27].

Θεώρημα 1.4.1. *(Van der Waerden 1927) Έστω k, t τυχαίοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Αν χρωματίσουμε τους ακεραίους με t χρώματα, τότε θα βρούμε μια αριθμητική πρόοδο k όρων που θα ανήκει σε τουλάχιστον μία χρωματική κλάση.*

Όπως θα δούμε και μετά, η density μορφή του θεωρήματος Van der Waerden, είναι το θεώρημα του Szemerédi. Το θεώρημα Van der Waerden μπορεί να εξαχθεί άμεσα από το θεώρημα του Szemerédi, αν σκεφτούμε ότι από την αρχή του περιστεριώνα, τουλάχιστον μία από τις χρωματικές κλάσεις θα έχει θετική density. Το αντίστροφο όμως είναι αρκετά δύσκολο. Το θεώρημα αυτό είναι παρόμοιας φιλοσοφίας με το θεώρημα του Ramsey για χρωματισμούς γραφημάτων, το οποίο εμφανίστηκε περίπου την ίδια περίοδο.

Η απόδειξη του θεωρήματος του Van der Waerden ήταν αρκετά στοιχειώδης και απλή. Ωστόσο τα όρια τα οποία παρείχε για την ύπαρξη των αριθμητικών προόδων ήταν αρκετά μεγάλα λόγω της αναδρομικής φύσης της απόδειξης. Τα όρια δεν βελτιώθηκαν παρά μόνο μέχρι το 1988 από τον Shelah [She88]. Το καλύτερο άνω όριο το οφείλουμε στον Gowers [Gow2] το 2001, ο οποίος χρησιμοποίησε το θεώρημα του Szemerédi.

Γενίκευση του θεωρήματος Van der Waerden αποτελεί και το θεώρημα Hales - Jewett το οποίο ισχυρίζεται ότι:

Θεώρημα 1.4.2. *Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N_0 = N_0(k, r)$ τέτοιο ώστε για $N \geq N_0$, για κάθε αλφάβητο A με $|A| = k$ και για κάθε r - χρωματισμό $w_N(A) = \bigcup_{i=1}^{r} w_i$ των λέξεων μήκους N με γράμματα του αλφαβήτου A, υπάρχει μια μεταβλητή λέξη $w(x)$ μήκους N $\{w(a) : a \in A\}$ μονοχρωματική.*

Για το θεώρημα Hales Jewett θα πούμε περισσότερα και στο τέλος της εργασίας.
Οι Erdös και Turán το 1936 [ET36], προχώρησαν το πρόβλημα ακόμα παραπέρα, υποκινούμενοι από μια παλιά εικασία(η οποία αποδείχτηκε το 2004 από τους Green, Tao [GT08]), σχετικά με την ύπαρξη αριθμητικών προόδων στους πρώτους αριθμούς. Πρότειναν δύο εικασίες, η πρώτη απαντήθηκε από τον Szemerédi και έμεινε γνωστή σαν θεώρημα του

Szemerédi, ενώ η δεύτερη εικασία, την οποία αποδίδουν στον Szekeres, ισχυρίζεται ότι δοθέντος ενός $k \geq 1$, υπάρχει ένα $\epsilon > 0$, τέτοιο ώστε κάθε υποσύνολο του $\{1, \ldots, n\}$, πληθικότητας τουλάχιστον $n^{(1-\epsilon)}$ θα περιέχει τουλάχιστον μία αριθμητική πρόοδο μήκους k, αν το $n(k)$ είναι αρκετά μεγάλο.

Ο Endre Szemerédi λοιπόν απέδειξε το 1975, απαντώντας στην πρώτη εικασία των Erdös και Turán, ότι θετική πυκνότητα υπονοεί την ύπαρξη μιας αριθμητικής προόδου k όρων.

Θεώρημα 1.4.3. *(Szemerédi 1975).*

Για κάθε θετικό ακέραιο $k > 2$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα κατώφλι $n_0 = n_0(\epsilon, k)$ τέτοιο ώστε αν $n \geq n_0$, $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ και $|A| > \epsilon n$, τότε το A περιέχει μια αριθμητική πρόοδο k όρων.

Οι περιπτώσεις του θεωρήματος του Szemerédi για $k < 3$ είναι τετριμμένες. Η περίπτωση για $k = 3$ αποδείχτηκε πρώτα από τον Roth [Rot53] το 1953. Η απόδειξη χρησιμοποίησε μεθόδους Fourier. Το βασικό επιχείρημα της απόδειξης ήταν, υποθέτωντας ότι υπάρχει ένα υποσύνολο με θετική density που δεν περιέχει αριθμητικές προόδους μήκους 3 και μετά χρησιμοποιώντας μεθόδους Fourier, να κατασκευαστεί ένα σύνολο με υψηλότερη πυκνότητα που πάλι δεν θα περιέχει αριθμητικές προόδους. Αυτή η διαδικασία θα καταλήξει στην κατασκευή ενός συνόλου πυκνότητας μεγαλύτερης από 1, το οποίο φυσικά είναι αδύνατο.

Οι Fourier μέθοδοι του Roth γενικεύτηκαν από τον Gowers [Gow98] το 1998 για $k = 4$, ενώ το 2001 γενικεύτηκε για όλες τις περιπτώσεις [Gow01]. Η μέθοδος του Gowers χρησιμοποίησε καινούργια εργαλεία από την ανάλυση Fourier και κυρίως το περίφημο Balog-Szemerédi-Gowers λήμμα.

Ο Szemerédi το 1969 απέδειξε την δύσκολη περίπτωση για $k = 4$ με μεθόδους συνδυαστικής, ενώ το 1975 κατάφερε τελικά να αποδείξει και τις περιπτώσεις για $k > 4$. Ο Szemerédi χρησιμοποίησε ισχυρά εργαλεία για την απόδειξή του όπως το regularity lemma.

Δύο χρόνια αργότερα, το 1977, ο Furstenberg [FK78] απέδειξε το θεώρημα χρησιμοποιώντας εργοδικές μεθόδους.

Μια τέταρτη απόδειξη, βασισμένη στην θεωρία των γραφημάτων και υπεργραφημάτων (hypergraphs), δόθηκε από τους Ruzsa, Szemerédi [RS78] και στηρίχθηκε στο λεγόμενο triangle removal lemma το οποίο αναφέρει ότι αν ένα γράφημα G με n κορυφές περιέχει το πολύ ϵn^3 τρίγωνα, τότε όλα αυτά τρίγωνα μπορούν να αφαιρεθούν αν αφαιρέσουμε το πολύ $c(\epsilon)n^2$ ακμές όπου $c(\epsilon)$ είναι μια ποσότητα που πάει στο 0 αν το ϵ πάει στο 0.

Ένα τελευταίο θεώρημα που θα αναφέρουμε για λόγους πληρότητας είναι το density Hales - Jewett θεώρημα. Όπως το θεώρημα Hales - Jewett και το θεώρημα του Szemerédi γενικεύουν το θεώρημα Van der Waerden, το density Hales - Jewett γενικεύει τα Hales - Jewett και Szemerédi θεωρήματα. Το θεώρημα αναφέρει το εξής:

Θεώρημα 1.4.4. *Για κάθε $\delta > 0$ και κάθε k, υπάρχει n τέτοιο ώστε κάθε υποσύνολο του $[k]^n$, πυκνότητας τουλάχιστον δ περιέχει μια combinatorial line.*

Το density Hales - Jewett αποδείχτηκε από τους Furstenberg, Katznelson [FK91] το 1991. Η απόδειξη χρησιμοποιούσε εργαλεία από την εργοδική θεωρία καθώς επίσης και Ramsey θεωρήματα όπως το θεώρημα του Carlson, καθιστώντας το θεώρημα ως ένα από τα πιο δύσκολα στην συνδυαστική.

Κεφάλαιο 2

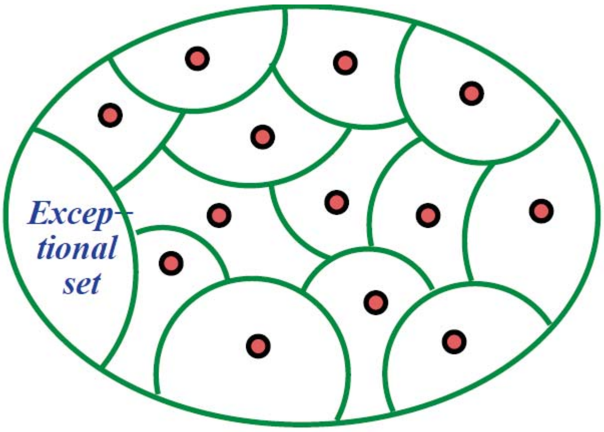
Πώς εφαρμόζεται το Regularity Lemma

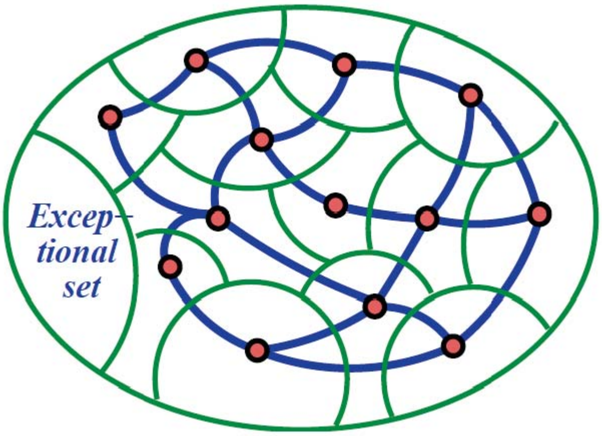
Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του Regularity Lemma θα δούμε λίγες από τις ποικίλες εφαρμογές του σε διάφορα πεδία.

2.1 Προκαταρκτικοί ορισμοί

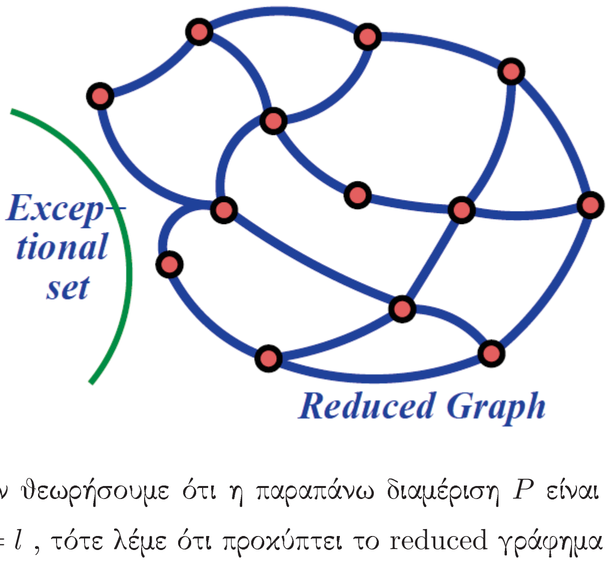
Ορισμός 2.1.1. *Δοθέντος ενός τυχαίου γραφήματος* $G = (V, E)$*, μιας διαμέρισης* P *του συνόλου των κορυφών του* V *σε* $V_1, V_2, \ldots, V_k$ *και δύο παραμέτρων* $\epsilon, d \gg \epsilon$ *, ορίζουμε το reduced ή cluster γράφημα* R *ως εξής :*

- *Οι κορυφές του είναι οι κλάσεις* $V_1, V_2, \ldots, V_k$.
- *Μία κορυφή* V_i *ενώνεται με μία κορυφή* V_j *αν το ζευγάρι* (V_i, V_j) *είναι* $\epsilon - regular$ *με πυκνότητα μεγαλύτερη από* d.





Το γράφημα που σχηματίζεται ονομάζεται reduced γράφημα.



Αν θεωρήσουμε ότι η παραπάνω διαμέριση P είναι τέτοια ώστε $|V_1| = |V_2| = \cdots = |V_k| = l$, τότε λέμε ότι προκύπτει το reduced γράφημα με παραμέτρους ϵ, d, l .

Ορισμός 2.1.2. *Δοθέντος ενός τυχαίου γραφήματος R ορίζω το γράφημα R_t(ή $R(t)$), το οποίο προκύπτει αν αντικαταστήσουμε κάθε κορυφή του $x \in V(R)$ με ένα σύνολο t ανεξάρτητων κορυφών V_x και δύο κορυφές $u \in V_x$ και $v \in V_y$ θα ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν (x, y) είναι ακμή στο R.*

Για παράδειγμα αν $R = K^r$, τότε $R_s = K_s^r$.

2.2 Το λήμμα εμφύτευσης

Το λήμμα αυτό μας λέει ότι αν ένα γράφημα G έχει reduced γράφημα R και αν η παράμετρος ϵ είναι αρκετά μικρή, τότε κάθε μικρό υπογράφημα H που περιέχεται στο R_s , περιέχεται και στο G . Ας το διατυπώσουμε αυστηρά :

Θεώρημα 2.2.1. *(Embedding Lemma) Για κάθε d στο $[0, 1]$, για κάθε $\Delta \geqslant 1$, υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε: για κάθε γράφημα G, για κάθε H γράφημα με $\Delta(H) \leqslant \Delta$, για κάθε $s \in \mathbb{N}$ και για κάθε R reduced γράφημα του G με παραμέτρους $\epsilon \leqslant \epsilon_0$, $\frac{2s}{d^\Delta} \leqslant l$ και d, ισχύει ότι :*

$$H \subseteq R_s \Rightarrow H \subseteq G .$$

Η απόδειξη είναι η εξής.

Απόδειξη. Επιλέγουμε ϵ_0 τέτοιο ώστε $\epsilon_0 < d$ και $(d - \epsilon_0)^\Delta - \Delta\epsilon_0 \geqslant \frac{1}{2}d^\Delta$

$$\tag{1}$$

. Η επιλογή αυτή είναι εφικτή αφού $(d - \epsilon)^\Delta - \Delta\epsilon \to d^\Delta$ και θα φανεί χρήσιμη στην συνέχεια της απόδειξης.

Ας θεωρήσουμε ότι $\{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ είναι η $\epsilon - regular$ διαμέριση με πυκνότητα τουλάχιστον d που σχηματίζεται από το R, με $|V_0| = |V_1| = \cdots = |V_k| = m$. Δηλαδή $V(R) = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$.

Ας υποθέσουμε ότι το H έχει κορυφές $u_1, u_2, \ldots, u_h$. Θεωρούμε ότι το H είναι υπογράφημα του $R(t)$, συνεπώς κάθε κορυφή του u_i ανήκει σε κάποιο από τα t - σύνολα του $R(t)$, τα οποία ας τα συμβολίσουμε με R_j^t . Δηλαδή υπάρχει μια απεικόνιση $\sigma : i \mapsto j$ που απεικονίζει κάθε i κορυφή του H σε κάποιο j , t - σύνολο του $R(t)$.

Θέλουμε να εμφυτεύσουμε την ακολουθία κορυφών $u_1, u_2, \ldots, u_h$ στο γράφημα G . Αυτό που θα ορίσουμε, με βάση και τους παραπάνω συμβολισμούς και τους ορισμούς της ενότητας 1.1, είναι μια εμφύτευση $u_i \mapsto v_i \in V_{\sigma(i)}$ του γραφήματος H σαν υπογράφημα στο G. Δηλαδή τελικά αναζητούμε $v_1, v_2, \ldots v_h$ διακεκριμένες κορυφές, όπου δύο v_i, v_j θα ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν οι αντίστοιχες u_i, u_j ενώνονται με ακμή στο H.

Θα εμφυτεύσουμε την ακολουθία των κορυφών επαγωγικά. Για κάθε κορυφή που εμφυτεύουμε u_i θα έχουμε ένα σύνολο Y_i από υποψήφιες κορυφές το οποίο θα μικραίνει μέχρι να καταλήξει στην τελική επιλογή v_i . Για κάθε κορυφή u_i αρχικά το Y_i θα είναι ολόκληρο το $V_{\sigma(i)}$. Στην συνέχεια το Y_i συνεχώς μικραίνει ως εξής: επαγωγικά για $j < i$ και για $(u_i, u_j) \in E(H)$,επιλέγουμε κορυφή v_j και διαγράφουμε κάθε φορά τις κορυφές του Y_i οι οποίες δεν ενώνονται με ακμή με την v_j . Αυτό θα το συμβολίσουμε ως εξής:

$$V_{\sigma(i)} = Y_i \subseteq Y_i^0 \subseteq \ldots \; Y_i^i = \{v_i\} \ ,$$

όπου με Y_i^j συμβολίζουμε την κατάσταση του Y_i μετά την επιλογή της v_j και την διαγραφή των κορυφών από το σύνολο Y_i^{j-1} .

Με βάση λοιπόν την παραπάνω επαγωγική διαδικασία, όταν θέλουμε να εμφυτεύσουμε μια κορυφή u_j ελέγχουμε όλα τα $i > j$ για τα οποία $(u_i, u_j) \in E(H)$ και για κάθε τέτοιο i επιλέγουμε μία κορυφή v_j(η οποία προφανώς θα ανήκει στο $V_{\sigma(j)}$) ανανεώνοντας ταυτόχρονα το αντίστοιχο Y_i .

Ο αριθμός των $i > j$ για τα οποία ισχύει ότι $(u_i, u_j) \in E(H)$ είναι το πολύ Δ εξ' ορισμού. Για κάθε τέτοιο i που επιλέγουμε, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι το σύνολο

$Y_i^j = N(v_j) \cap Y_i^{j-1}$

$$(2)$$

που προκύπτει από την διαγραφή εκείνων των κορυφών του Y_i που δεν ενώνονται με ακμή με την v_j, δεν θα γίνει πολύ μικρό. Κάτι τέτοιο εξασφαλίζεται με το αν εφαρμόσουμε το λήμμα 1.2.2 , όπου $A = V_{\sigma(j)}$, $B = V_{\sigma(i)}$ και $Y = Y_i^{j-1}$. Πράγματι με βάση το λήμμα 1.2.2 και το γεγονός ότι το $|Y_i^{j-1}|$ θα έχει τουλάχιστον μέγεθος ϵm, όλες οι επιλογές για το v_j εκτός από το πολύ ϵm τον αριθμό, θα διασφαλίζουν ότι :

$$|Y_i^j| \geqslant (d-\epsilon)Y_i^{j-1} \ . \tag{3}$$

Συνεπώς συνδυάζοντας και το παραπάνω, βρίσκουμε ότι για όλα τα i , όλες οι επιλογές v_j εκτός από το πολύ $\Delta\epsilon m$, θα ικανοποιούν την (3).
Τέλος για να ολοκληρωθεί η απόδειξη πρέπει να αποδείξουμε ότι το σύνολο Y_i^{j-1} το οποίο θεωρήσαμε σαν $Y \subseteq V_{\sigma(i)}$ δεν θα πέφτει κάτω από το μέγεθος ϵm . Επιπλέον πρέπει να δείξουμε ότι οι διαθέσιμες επιλογές κάθε φορά για την κορυφή v_j δεν πέφτουν ποτέ κάτω από t. Όπως είπαμε και πριν όλες οι κορυφές $v_j \in V_\sigma(j)$, εκτός από το πολύ $\Delta m\epsilon$, είναι οι ικανές για επιλογή. Συνεπώς πρέπει να αποδείξουμε ότι $|Y_i^{j-1}| - \Delta m\epsilon \geqslant t$.

Πράγματι αυτά ισχύουν αφού:

$$|Y_i^{j-1}| - \Delta m\epsilon \geqslant_3 (d-\epsilon)^\Delta m - \Delta m\epsilon \geqslant (d-\epsilon_0)^\Delta m - -\Delta m\epsilon_0 \geqslant_1 \frac{1}{2}d^\Delta m \geqslant t$$

για όλα τα $j \leqslant i$.

□

Η μεγάλη σημασία του λήμματος εμφύτευσης έγκειται στο γεγονός ότι ανάγει την εμφύτευση σε ντετερμινιστικά αντικείμενα, σε εμφύτευση σε ψευδοτυχαία αντικείμενα. Για παράδειγμα δοθέντος ενός γραφήματος G, εφαρμόζουμε το Regularity Lemma αποκτώντας έτσι την $\epsilon - regular$ διαμέριση. Στην συνέχεια με βάση αυτήν κατασκευάζουμε το reduced γράφημα R. Πάνω στο γράφημα R_s, μπορούμε να εφαρμόσουμε ένα οποιοδήποτε κλασικό θεώρημα της extremal graph theory, όπως το θεώρημα του Turán, και στην συνέχεια με ένα αντίστροφο επίχειρημα, όπως το λήμμα της εμφύτευσης, να ανάγουμε το θεώρημα στο αρχικό γράφημα G.

2.3 Extremal Graph Theory

Το γενικό πρόβλημα στην Extremal Graph Theory είναι το εξής :

Δοθείσας μιας οικογένειας $\mathcal{L}$ γραφημάτων, αναζητούμε τον μέγιστο αριθμό ακμών ένα γράφημα G_n μπορεί να έχει, χωρίς να περιέχει κανένα υπογράφημα $L \in \mathcal{L}$. Δηλαδή ζητούμε να προσδιορίσουμε την ποσότητα :

$$ex(n, \mathcal{L}) = max_{\substack{L \not\subseteq G_n \\ L \in \mathcal{L}}} e(G_n)$$

.

Όλα άρχισαν το 1941, με το ιστορικό θεώρημα του Pál Turán [Tur41], το οποίο προσδιόριζε τον μικρότερο αριθμό ακμών που εγγυώνται την ύπαρξη μιας κλίκας r κορυφών σε ένα γράφημα. Παρακάτω παραθέτουμε μια πιο ασθενή μορφή του θεωρήματος :

Θεώρημα 2.3.1. *(Turán 1941)*

Αν G_n είναι ένα γράφημα με n κορυφές και $ex(n, K^r) \leq \left(1 - \frac{1}{r-1}\right)\frac{n^2}{2}$, τότε $K^r \subset G_n$.

Ορισμός 2.3.2. *Ο χρωματικός αριθμός χ ενός γραφήματος H είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός c, τέτοιος ώστε οι κορυφές του H μπορούν να χρωματιστούν με c χρώματα και κανένα ζευγάρι κορυφών που ενώνονται με ακμή στο γράφημα να έχουν το ίδιο χρώμα.*

Σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι να αποδείξουμε με την βοήθεια του Regularity Lemma και κάποιων άλλων χρήσιμων λημμάτων, το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.3.3. *(Erdös - Stone - Simonovits)*

Για κάθε γράφημα H και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0, τέτοιο ώστε για $n \geq n_0$,

$$\left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \epsilon\right) \frac{n^2}{2} \leq ex(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \epsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

Προφάνως για το πλήρες γράφημα K^r, ο χρωματικός αριθμός είναι r, συνεπώς σε αυτή την περίπτωση, το παραπάνω θεώρημα των Erdös, Stone, Simonovits ανάγεται στο θεώρημα του Turán. Το θεώρημα των Erdös, Stone, Simonovits μας δίνει τον ελάχιστο αριθμό ακμών και κορυφών που πρέπει να έχει ένα γράφημα G έτσι ώστε να περιέχεται σε αυτό το γράφημα K_s^r, για οποιοδήποτε $r \geqslant 2$ και $s \geqslant 1$.

Θα ξεκινήσουμε με αυτό που είναι ως γνωστό σαν counting lemma.

Λήμμα 2.3.4. *Έστω G ένα γράφημα και έστω X, Y, Z υποσύνολα του συνόλου κορυφών $V(G)$. Έστω ότι (X, Y) , (Y, Z) και (Z, X) να είναι $\epsilon - regular$ ζευγάρια με πυκνότητες $d(X, Y) = \alpha$, $d(Y, Z) = \beta$ και $d(Z, X) = \gamma$. Τότε αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 2\epsilon$, ο αριθμός των τριγώνων x, y, z με $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ είναι τουλάχιστον*

$$(1 - 2\epsilon)(\alpha - \epsilon)(\beta - \epsilon)(\gamma - \epsilon)|X||Y||Z|.$$

Απόδειξη. Αν συμβολίσουμε με $deg(x, Y), deg(x, Z)$ των αριθμό των γειτόνων του x στο Y και Z ανίστοιχα, τότε με βάση το λήμμα 1.2.2 υπάρχει το πολύ $\epsilon|X|$ αριθμός $x \in X$, τέτοιος ώστε $deg(x, Y) \leq (\alpha - \epsilon)|Y|$. Όμοια υπάρχει το πολύ $\epsilon|X|$ αριθμός $x \in X$,τέτοιος ώστε $deg(x, Z) \leq (\gamma - \epsilon)|Z|$. Αν $deg(x, Y) > (\alpha - \epsilon)|Y|$ και $deg(x, Z) > (\gamma - \epsilon)|Z|$, ο αριθμός των τριγώνων είναι τουλάχιστον

$$(\alpha - \epsilon)(\beta - \epsilon)(\gamma - \epsilon)|Y||Z| \ ,$$

και αν αθροίσουμε το προηγούμενο για όλα τα $x \in X$, έχουμε το ζητούμενο.

□

Θα αποδείξουμε τώρα το λεγόμενο triangle removal lemma.

Θεώρημα 2.3.5. *(Triangle removal lemma)*

Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, κάθε γράφημα G_n και με το πολύ δn^3 τρίγωνα, μπορεί να μείνει χωρίς τρίγωνα με το να αφαιρεθούν το πολύ ϵn^2 ακμές.

Απόδειξη. Εφαρμόζωντας το Regularity Lemma αποκτούμε μία $\frac{\epsilon}{4} - regular$ διαμέριση του G σε σύνολα κορυφών $V_1, \ldots, V_K$. Αφαιρούμε μία ακμή xy:

- αν ανήκει σε ζευγάρι (V_i, V_j) που δεν είναι $\frac{\epsilon}{4} - regular$
- αν ανήκει σε ζευγάρι με πυκνότητα το πολύ $\frac{\epsilon}{2}$
- αν η κορυφή x ανήκει σε V_i με $|V_i| \leq \frac{\epsilon}{4K}n$.

Συνεπώς το αποτέλεσμα μετά την διαγραφή είναι ένα υπογράφημα G' του G, τέτοιο ώστε κάθε κορυφή του ανήκει σε ένα ζευγάρι (V_i, V_j) το οποίο είναι $\frac{\epsilon}{4} - regular$ και έχει πυκνότητα τουλάχιστον $\frac{\epsilon}{2}$.

Ο αριθμός των ακμών που διαγράψαμε για να επιτύχουμε την πρώτη συνθήκη είναι το πολύ $\frac{\epsilon}{4}n^2$. Ο αριθμός των ακμών που διαγράψαμε για να επιτύχουμε την δεύτερη συνθήκη είναι το πολύ $\frac{\epsilon}{2}n^2$ από τον ορισμό της πυκνότητας.
Ο αριθμός των ακμών που διαγράψαμε για να επιτύχουμε την τρίτη συνθήκη είναι το πολύ $Kn\frac{\epsilon}{4K}n$.
Τελικά ο αριθμός των ακμών που διαγράφτηκαν από την παραπάνω διαδικασία, είναι το πολύ ϵn^2.
Το μόνο που απομένει είναι να δείξουμε ότι το γράφημα καινούργιο γράφημα G' που σχηματίστηκε μετά την διαγραφή των ακμών δεν περιέχει τρίγωνα. Έστω ότι υπάρχουν ακόμα κάποιο τρίγωνο στο γράφημα, έστω xyz όπου $x \in V_i$, $y \in V_j$, $z \in V_k$. Τότε τα ζευγάρια (V_i, V_j), (V_j, V_k), (V_i, V_k) θα είναι όλα $\frac{\epsilon}{4} - regular$ και με πυκνότητα τουλάχιστον $\frac{\epsilon}{2}$ και αφού $|V_i|, |V_j|, |V_k| \geq \frac{\epsilon}{4K}n$, τότε από το προηγούμενο λήμμα, έχουμε ότι θα υπάρχουν πολλά τρίγωνα στο γράφημα κα το συνολικό πλήθος τους θα είναι:

$$\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^3 \left(\frac{\epsilon}{4K}\right)^3 n^3.$$

Αν πάρουμε σαν $\delta = \dfrac{\epsilon^6}{2^{20}K^3}$, τότε βαίνουμε σε άτοπο.

$\square$

Θα δώσουμε τώρα την απόδειξη του θεωρήματος Erdós, Stone, Simonovits.

Απόδειξη. Έστω r, s όπως στην εκφώνηση του θεωρήματος. Για $s = 1$, το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το θεώρημα του Turán. Οπότε ας θεωρήσουμε ότι $s \geqslant 2$. Επιπλέον έστω $\gamma = \epsilon$ όπως αυτό επιλέγεται από την εκφώνηση του θεωρήματος .

Η συλλογιστική που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής: θα χρησιμοποιήσουμε το regularity lemma για να παράγουμε ένα reduced γράφημα το οποίο θα περιέχει το K^r χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Turán. Προφανώς για να συμβεί κάτι τέτοιο οι επιλογές των παραμέτρων ϵ, d, l του reduced γραφήματος πρέπει να είναι κατάλληλες και άρα οι παράμετροι της $\epsilon - regular$ διαμέρισης πρέπει και αυτές να είναι κατάλληλες. Όλα αυτά θα προσδιοριστούν μέσω του λήμματος εμφύτευσης. Τελικά λοιπόν το R_s θα περιέχει ένα K^r_s και από το λήμμα της εμφύτευσης θα μπορέσουμε να πούμε ότι το ίδιο ισχύει και για το G, δηλαδή θα ισχύει $K^r_s \subset G$.

Για $d := \gamma$ και $\Delta := \Delta(K^r_s)$, το λήμμα της εμφύτευσης μας επιστρέφει ένα ϵ_0 .Για να εφαρμόσουμε το regularity lemma, έστω $m > \dfrac{1}{\gamma}$ και επιλέγουμε $\epsilon \leqslant \epsilon_0$,(ο συμβολισμός δεν αναφέρεται στο ίδιο ϵ της εκφώνησης), $\epsilon < \dfrac{\gamma}{2} < 1$, και $\delta := 2\gamma - \epsilon^2 - 4\epsilon - d - \dfrac{1}{m} > 0$. Αυτό είναι εφικτό αφού $2\gamma - d - \dfrac{1}{m} > 0$. Για ϵ και m το regularity lemma μας δίνει έναν αριθμό $M(\epsilon)$. Υποθέτουμε ότι οι n κορυφές του G είναι

$$n = \frac{2Ms}{d^{\Delta}(1-\epsilon)}$$

Η ποσότητα αυτή είναι τουλάχιστον m, συνεπώς από το Regularity Lemma, αποκτούμε μια $\epsilon - regular$ διαμέριση $\{V_1, \ldots, V_k\}$ του G, με $m \leqslant k \leqslant M$. Έστω $|V_1| = |V_2| = \cdots = |V_k| := l$. Τότε $n \geqslant kl$ και

$$l = \frac{n - |V_0|}{k} \geqslant \frac{n - \epsilon n}{M} = \frac{1-\epsilon}{M} \geqslant \frac{2s}{d^{\Delta}} .$$

Έστω R το reduced γράφημα του G που προκύπτει από την παραπάνω διαμέριση. Από το λήμμα της εμφύτευσης για το γράφημα R όπως προέκυψε παραπάνω, και για τις παραμέτρους ϵ, d, l όπως επιλέχτηκαν παραπάνω, έχουμε ότι αν $K^r \subseteq R$ (και κατά συνέπεια $K_s^r \subseteq R_s$), τότε $K_s^r \subseteq G$.

Μένει να αποδείξουμε, όπως αναφέραμε και στην αρχή της απόδειξης, ότι το reduced γράφημα που προέκυψε, είναι αρκετά πυκνό ώστε να περιέχει το K^r , δηλαδή να αποδείξουμε ότι $K^r \subseteq R$ από το θεώρημα του Turán. Αν αποδειχτεί αυτό, τότε με βάση την αμέσως παραπάνω συλλογιστική, η απόδειξη έχει τελειώσει.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι αρκετά regular - pairs (V_i, V_j), έχουν πυκνότητα τουλάχιστον d . Αυτό είναι επακόλουθο της υπόθεσης του θεωρήματος ότι ο αριθμός των ακμών θα είναι τουλάχιστον $\left(1 - \frac{1}{r-1} + \epsilon\right)\frac{n^2}{2}$, αφού η πυκνότητα του reduced γραφήματος θα είναι τουλάχιστον $\left(1 - \frac{1}{r-1} + \epsilon\right)$. Άρα από το θεώρημα του Turán θα περιέχει σίγουρα το K^r.

$\square$

Κεφάλαιο 3

Προσθετική συνδυαστική

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε μια εισαγωγή στην μελέτη για την υπάρξη αριθμητικών προόδων σε σύνολα. Αποκορύφωμα αυτής της προσπάθειας το θεώρημα του Szemerédi, είναι μέρος μια μελέτης συνόλων με προσθετική (additive) δομή, η οποία μελέτη βρίσκεται στην καρδιά της προσθετικής συνδυαστικής (additive combinatorics). Παρακάτω παραθέτουμε κάποιους ορισμούς για τα σύνολα με προσθετική δομή.

Ορισμός 3.0.6. *Μια προσθετική ομάδα Z είναι μια αβελιανή ομάδα με εσωτερική πράξη $+$. Μπορούμε να ορίσουμε και μια πράξη πολλαπλασιασμού $nx \in Z$, όταν $n \in Z$ και $x \in Z$ με τον συνήθη τρόπο μέσω της πρόσθεσης. Σαν προσθετικό (additive) σύνολο εννοούμε το ζευγάρι (A, Z), όπου Z είναι μια προσθετική ομάδα και A είναι ένα πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο του Z. Συνήθως όμως αναφερόμαστε σε αυτό μόνο σαν A και το Z την αναφέρουμε σαν περιβάλλουσα ομάδα του προσθετικού συνόλου.*

Αν A, B είναι προσθετικά υποσύνολα της Z τότε ορίζουμε το άθροισμα συνόλων

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

και την διαφορά συνόλων σαν

$$A - B := \{a - b : a \in A, B \in B\}$$

Επιπλέον μπορούμε να ορίσουμε το επαναλαμβανόμενο άθροισμα $kA := \{a_1 + \cdots + a_k : a_1, \ldots, a_k \in A\}$

Τα προσθετικά σύνολα μπορούν να έχουν από πολύ ασθενή εώς πολύ ισχυρή προσθετική δομή. Παράδειγμα ισχυρής προσθετικής δομής είναι η ύπαρξη αριθμητικών προόδων

$$a + [0, N)r := \{a, a + r, \ldots, a + (N - 1)r\}.$$

Το να ορίσει κάποιος ένα μέτρο για το πόσο προσθετικό είναι ένα σύνολο είναι ένα θεμελιώδες ερώτημα. Κάποια παραδείγματα τα οποία θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σαν μέτρα είναι τα εξής:

- το $A + A$ είναι 'μικρό'
- το $A - A$ είναι 'μικρό'
- υπάρχουν πολλές τετράδες της μορφής $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in A \times A \times A \times A$ τέτοιες ώστε $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$
- υπάρχουν πολλές τετράδες της μορφής $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in A \times A \times A \times A$ τέτοιες ώστε $a_1 - a_2 = a_3 - a_4$
- έχει υψηλό μετασχηματισμό Fourier $\widehat{1}_A$ (θα οριστεί στην συνέχεια).

Το τελευταίο χαρακτηριστικό έχει ιδιαίτερη σημασία για την μελέτη τέτοιων συνόλων με βάση την ανάλυση Fourier όπως θα δούμε και στην συνέχεια.

3.1 Fourier analysis

3.1.1 Εισαγωγή

Ένα από τα εργαλεία για να εξετάσουμε την προσθετική δομή τέτοιων συνόλων A είναι και η ανάλυση Fourier για σύνολα. Ο Roth χρησιμοποίησε αυτά τα εργαλεία για να αποδείξει το θεώρημα του Szemerédi για $k = 3$ (ή αλλιώς θεώρημα του Roth). Θα κάνουμε μια σύντομη παρουσίαση αυτών των εργαλείων και πώς αυτά χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη για την ύπαρξη αριθμητικών προόδων. Θα ξεκινήσουμε με κάποιους ορισμούς.

3.1.2 Ορισμοί

Ορισμός 3.1.1. *Έστω f μια συνάρτηση $f: Z \to \mathbb{C}$. Ορίζουμε σαν μέση τιμή της f την ποσότητα*

$$\mathbb{E}_Z(f) = \mathbb{E}_{x \in Z} f(x) := \frac{1}{|Z|} \sum_{x \in Z} f(x).$$

Ορισμός 3.1.2. *Ορίζουμε την πυκνότητα ή πιθανότητα ενός συνόλου $A \subseteq Z$ σαν :*

$$\mathbb{P}_Z(A) = \mathbb{P}_{x \in Z}(x \in A) := \mathbb{E}_Z(1_A) = \frac{|A|}{|Z|}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι $1_A(x) = 1$ όταν $x \in A$ και $1_A(x) = 0$ αλλιώς.

Από δω και πέρα μπορούμε να θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας την κυκλική ομάδα $\mathbb{Z}/\mathbb{N}\mathbb{Z}$.

Ορισμός 3.1.3. *(Discrete Fourier Transform)*

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Για κάθε $r \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, ορίζουμε σαν Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier (Discrete Fourier Transform) της f την συνάρτηση

$$\widehat{f}(r) = \mathbb{E}_{x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \left(f(x) e^{\dfrac{2\pi i r x}{N}} \right)$$

.

Για ευκολία στην συνέχεια, θα συμβολίζουμε με $e\left(\frac{rx}{N}\right)$ τον όρο $e^{\dfrac{2\pi i r x}{N}}$.

Κάθε προσπάθεια απόδειξης υπάρξης αριθμητικών προόδων ξεκινά με τον ορισμό της ψευδοτυχαιότητας ή pseudo - randomness.

Ορισμός 3.1.4. *Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{Z}/\mathbb{N}\mathbb{Z}$ είναι ψευδοτυχαίο (pseudo-random) αν η τομή του με κάθε διάστημα $I \in \mathbb{Z}/\mathbb{N}\mathbb{Z}$ έχει μέγεθος περίπου $\frac{|I|}{N}|A|$ και το ίδιο συμβαίνει για κάθε $\lambda I := \{\lambda x : x \in I\}$.*

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Discrete Fourier Transform για την συνάρτηση $1_A(x)$ και με βάση αυτό να ορίσουμε ξανά την έννοια της pseudo-randomness.

Ορισμός 3.1.5. *Έστω* $A \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, *με* $|A| = \alpha N$, *και έστω* $\epsilon > 0$. *Τότε καλούμε το* A $\epsilon-$ *pseudo-random αν και μόνο αν* $|\widehat{1}_A(r)| \leq \epsilon$ *για όλα* $r \neq 0$ *ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν* $|\widehat{f}(r)| \leq \epsilon$ *για όλα τα* r , *όπου* $f = 1_A - \alpha$.[1]

Η έννοια της pseudo-randomness μας βοηθάει να πούμε πολλά και για σύνολα που είναι pseudo-random και για σύνολα που δεν είναι pseudo-random.

3.1.3 Το θεώρημα του Roth

Θεώρημα 3.1.6. *Έστω* $\alpha > 0$ *και* $N > N_0(\alpha)$. *Έστω* $A \subseteq \{1, \ldots, N\}$ *ένα σύνολο μεγέθους* αN. *Τότε το* A *περιέχει τρία στοιχεία μιας αριθμητικής προόδου* $(x, x+d, x+2d)$.

Θα δώσουμε εδώ ένα σχέδιο της απόδειξης.

Απόδειξη. (σχέδιο)

Διακρίνουμε δύο περίπτωσεις.

- Πρώτη περίπτωση : το A να είναι pseudo-random για κάποιο ϵ.
- Δεύτερη περίπτωση : το A να μην είναι pseudo-random.

  Περίπτωση 1

  Ισχυριζόμαστε ότι το A περιέχει σχεδόν $\alpha^3 N^2$ τριών όρων αριθμητικές προόδους.

  Απόδειξη

  Χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο Discrete Fourier Transform

  $\widehat{1}_A(x) = \sum_r \widehat{1}_A(r) e\left(\dfrac{-rx}{N}\right)$

Ο αριθμός των τριών όρων αριθμητικών προόδων στο A είναι :

$\sum_{x,d} \widehat{1}_A(x)\widehat{1}_A(x+d)\widehat{1}_A(x+2d) = \sum_{x,d}\sum_{r,s,t} \widehat{1}_A(r)e\left(\dfrac{rx}{N}\right)\widehat{1}_A(r)e\left(\dfrac{s(x+d)}{N}\right)\widehat{1}_A(r)e\left(\dfrac{t(x+2d)}{N}\right) = \sum_{r,s,t} \widehat{1}_A(r)\widehat{1}_A(s)\widehat{1}_A(t)\sum_x e\left(\dfrac{(r+s+t)}{N}\right)\sum_d e\left(\dfrac{(s+2t)d}{N}\right)$.

[1] την ονομάζουμε και balanced function

Αν $r+s+t \neq 0$ ή $s+2t \neq 0$, τότε ένα από τα αθροίσματα ακυρώνεται.
Οι εναπομείναντες όροι έχουνε $s = 2r, t = r$.
Άρα ο αριθμός των τριών όρων αριθμητικών προόδων στο A είναι $N^2 \sum_r \widehat{1}_A(r)^2 \widehat{1}_A(-2r) = \alpha^3 N^2 + N^2 \sum_{r\neq 0} \widehat{1}_A(r)^2 \widehat{1}_A(-2r)$.
Το σφάλμα είναι μικρότερο ή ίσο του $N^2 sup_{r\neq 0} |\widehat{1}_A(-2r) \sum_r |\widehat{1}_A(r)|^2 \leq N^2 \epsilon \sum_r |\widehat{1}_A(r)|^2 = N^2 \epsilon \mathbb{E}_x 1_A(x)^2 = N^2 \epsilon \alpha$, όπου η ανισότητα οφείλεται στη pseudo-randomness. Η προτελευταία ισότητα οφείλεται στην λεγόμενη ταυτότητα του Parseval:

$\|\widehat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$, όπου:

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = \sum_r |\widehat{f}(r)|^2 \text{ και } \|f\|_2^2 = \mathbb{E}_x |f(x)|^2.$$

Άρα τελικά αν $\epsilon \ll \alpha^2$,τότε A περιέχει σχεδόν $\alpha^3 N^2$ τριών όρων αριθμητικές προόδους.

Περίπτωση 2

Έστω το σύνολο A δεν είναι pseudo-random. Τότε $|\widehat{1}_A(r)| \geq \epsilon$ για κάποιο r . Δηλαδή

$$|\widehat{1}_A(r)| = |\mathbb{E}_x 1_A(x) e^{\frac{2\pi i r x}{N}}| \geq \epsilon \Rightarrow A \cap I > \frac{|I|}{N} A$$

για κάποιο «αρκετά μεγάλο» διάστημα I. Στην πραγματικότητα θα έχουμε ότι $\frac{|A \cap I|}{|I|} \geq \alpha + c\epsilon$.
Τώρα αντικαθιστούμε το A με το $A' = A \cap I$, το α με το $\alpha' = \frac{|A \cap I|}{|I|} \geq \alpha + \epsilon$ και το N με το I, και επαναλαμβάνουμε το ίδιο επιχείρημα.
Η διαδικασία θα σταματήσει μετά από α βήματα αφού εξ' ορισμού η πυκνότητα ενός συνόλου είναι μικρότερη ή ίση του 1.

$\square$

3.2 Επέκταση της μεθόδου του Roth

Μετά από το παραπάνω, τίθεται το παρακάτω ερώτημα:

‵ Μπορούμε να αποδείξουμε με τον ίδιο τρόπο το θεώρημα του Roth για τεσσάρων όρων αριθμητικές προόδους ; ′

Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που το A είναι pseudo-random. Είναι αληθές ότι αν το A είναι $\epsilon - pseudorandom$ και το $|A| = \alpha N$, τότε το A θα περιέχει σχεδόν $\alpha^4 N^3$ τεσσάρων όρων αριθμητικές προόδους ;
Η απάντηση είναι όχι.
Ας θεωρήσουμε το παρακάτω παράδειγμα :

$A = \left\{ n \leq N : |\{n^2 2^{1/2}\}| \leq \frac{\alpha}{2} \right\}$, όπου οι εσωτερικές αγκύλες υποδηλώνουν ακέραιο μέρος (οι εξωτερικές υποδηλώνουν κανονικά τον ορισμό του συνόλου).

Για το παραπάνω σύνολο ισχύει ότι

- $|A| \approx \alpha N$ (πυκνότητα σχεδόν α). Η απόδειξη αυτού χρησιμοποιεί την ανισότητα του Weyl και πιο συγκεκριμένα το γεγονός ότι η $n^2 2^{1/2} (mod 1)$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη.
- το A είναι pseudorandom ακόμα και για $\epsilon \approx \frac{1}{2^{1/2}}$.

Ωστόσο το A έχει πολλές τεσσάρων όρων αριθμητικές προόδους. Πράγματι αν όλοι οι όροι $\{n^2 2^{1/2}\}, \{(n+d)^2 2^{1/2}\}, \{(n+2d)^2 2^{1/2}\}$ είναι $\leq \frac{\alpha}{2}$,δηλαδή $n, n+d, n+2d \in A$, τότε αυτόματα ο τελευταίος όρος $\{(n+3d)^2 2^{1/2}\} \leq \frac{7\alpha}{2}$. Δηλαδή ο όρος $n+3d$ βρίσκεται μέσα στο A με πιθανότητα $\frac{1}{7}$.
Ωστόσο, υπάρχουν σχεδόν $\alpha^3 N^2$ τριών όρων αριθμητικές πρόοδοι στο A ,αφού το A είναι pseudo-random.

Συνεπώς υπάρχουν σχεδόν $\frac{1}{7}\alpha^3 N^2$ τεσσάρων όρων αριθμητικές προόδους στο A που είναι πολύ μεγαλύτερο νούμερο από το $\alpha^7 N^2$ αν το α είναι περίπου ίσο με $\frac{1}{100}$. Τελικά αυτή η έννοια της pseudo-randomness δεν είναι αρκετή για να ελέγξει τις τεσσάρων όρων αριθμητικές προόδους.

Ένα πιο γενικό παράδειγμα στο οποίο πάλι έχουμε πολλές τεσσάρων όρων αριθμητικές προόδους, περιλαμβάνει το λεγόμενο γενικευμένο bracket quadratic. Δηλαδή μιλάμε για σύνολα της μορφής $A = \left\{ n : \left\{ n2^{1/2} \left\{ n3^{1/2} \right\} \right\} \leq \dfrac{\alpha}{2} \right\}$, όπου πάλι όλα οι αγκύλες εκτός από τις εξωτερικές υποδηλώνουν ακέραιο μέρος.

Σκοπός μας λοιπόν, αν θέλουμε να γενικεύσουμε τις Fourier μεθόδους του Roth για $k = 4$, είναι να κατανοήσουμε και να αντιμετωπίσουμε τα quadratic φαινόμενα.

Κεφάλαιο 4

Quasirandomness σε σύνολα, συναρτήσεις, γραφήματα

4.1 Εισαγωγή

Η σημασία του Regularity Lemma έγινε φανερή σε προηγούμενο κεφάλαιο όπου χρησιμοποιήθηκε σαν εργαλείο στην extremal graph theory. Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε ένα βήμα πίσω κα θα ορίσουμε την ψευδοτυχαιότητα (quasirandomness) για σύνολα και διμερή γραφήματα, θα αποδείξουμε ξανά το triangle removal lemma σε αυτά και θα συνεχίσουμε με την απόδειξη του Regularity Lemma πάλι για διμερή γραφήματα. Πριν το κάνουμε αυτό θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τις προσπάθειες γενίκευσής του σε υπεργραφήματα ακολουθώντας το πνεύμα του [Gow06]. Το 1976, όπως αναφέραμε και στην ιστορική αναδρομή, οι Ruzsa, Szemerédi, βρήκαν έναν απλό τρόπο να εξάγουν το θεώρημα του Roth από το regularity lemma. Για πολλά χρόνια υπήρχε ο στόχος να δοθεί μια καινούργια απόδειξη του πλήρους θεωρήματος του Szemerédi, γενικεύοντας το επιχείρημα των Ruzsa, Szemerédi, με κύριο εκπρόσωπο αυτής της προσπάθειας τον Vojta Rödl. Για να υλοποιούταν κάτι τέτοιο δεν ήταν αρκετό να γενικευθεί το Regularity Lemma αλλά και το counting lemma το οποίο αναφέρεται στην ύπαρξη υπο-δομών που περιέχονται σε ψευδοτυχαία γραφήματα [FR92]. Πράγματι το 2002, οι Frankl και Rödl ολοκλήρωσαν το πρόγραμμα για 3 - uniform υπεργραφήματα δίνοντας μια απόδειξη για την περίπτωση $k = 5$ του θεωρήματος του Szemerédi. Αξιοσημείωτο είναι ότι 10 χρόνια νωρίτερα, είχαν ήδη αποκτήσει ένα Regularity Lemma για $k - uniform$ υπεργραφήματα, ωστόσο η γενίκευση του counting lemma αποδείχτηκε μεγάλη τροχοπέδη για το πρόγραμμα.

4.2 Το επιχείρημα των Ruzsa, Szemerédi

Αφετηρία του προγράμματος του Rödl ήταν, όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, η γενίκευση του επιχειρήματος των Ruzsa, Szemerédi που οδήγησε στην καινούργια απόδειξη του θεωρήματος του Roth. Ας δούμε ποια ήταν τα βασικά βήματα αυτού του επιχειρήματος.

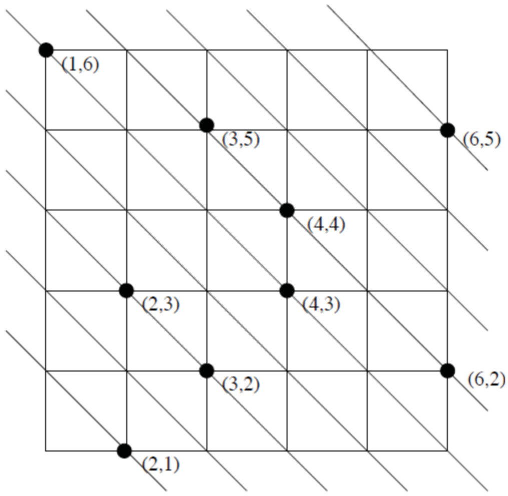
Πρώτο βήμα ήταν να αποδείξουν το λεγόμενο triangle removal lemma, το οποίο αναφέραμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, αλλά για λόγους πληρότητας θα το επαναδιατυπώσουμε εδώ.

Θεώρημα 4.2.1. *Για κάθε $c > 0$ υπάρχει μια σταθερά $\alpha > 0$ για την οποία ισχύει : Αν G είναι ένα οποιοδήποτε γράφημα με n κορυφές που περιέχει το πολύ αn^3 τρίγωνα, τότε είναι δυνατό να αφαιρέσουμε το πολύ cn^2 ακμές από το γράφημα G για να το κάνουμε να μην περιέχει τρίγωνα.*

Η απόδειξη του θωρήματος, όπως είδαμε, χρησιμοποιεί το Regularity Lemma, το όριο όμως που μας δίνει για το πώς εξαρτάται το α από το c είναι αρκετά μεγάλο.
Το παραπάνω θεώρημα μας συνεπάγεται το θεώρημα του Roth. Ένα πολύ σημαντικό βήμα είναι να αποδειχτεί ένα triangle removal lemma χωρίς το Regularity Lemma βελτιώνοντας έτσι το όριο. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας το παρακάτω επιχείρημα το Solymosi:

Πόρισμα 4.2.2. *Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε, κάθε $A \subset [N]^2$ μεγέθους τουλάχιστον δN^2 περιέχει μια τριάδα της μορφής $(x, y), (x + d, y), (x, y + d)$ με $d > 0$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη του επιχειρήματος του Solymosi είναι η εξής: Έστω ότι δημιουργούμε το εξής διμερές γράφημα με τα δύο σύνολα κορυφών $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ και $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$: έχουμε $(v_i, w_j) \in E(G)$ αν και μόνο αν $(i, j) \in A$. Ορίζουμε την εξής κλάση ισοδυναμίας : Δύο σημεία $(v_i, w_j), (v_{i'}, w_{j'})$ (ή ακμές σύμφωνα με την παραπάνω κατασκευή) θα είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν $i + j = i' + j'$. Δηλαδή θεωρούμε κλάσεις ισοδυναμίας όλες τις διαγωνίους του συνόλου A όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Κάθε τέτοια διαγώνιος ή κλάση ισοδυναμίας είναι ένα ταίριασμα (matching). Επειδή το σύνολο είναι πυκνό και μεγάλο κάποιο ταίριασμα δεν θα υπάρχει. Συνεπώς για κάποιο ταίριασμα $(v_i, w_j), (v_{i'}, w_{j'})$ θα υπάρχει μια επιπλέον ακμή έστω η $(v_i, w_{j'})$. Αν θέσουμε $j^{'} = j + d$ έχουμε την ζητούμενη τριάδα.

□

Θα δείξουμε λοιπόν πώς από το παραπάνω αποκτούμε το θεώρημα του Roth.

Πόρισμα 4.2.3. *Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε κάθε υποσύνολο A του $\{1, 2, \ldots, N\}$ μεγέθους τουλάχιστον δN περιέχει μια αριθμητική πρόοδο μήκους 3.*

Απόδειξη. Ορίζουμε σαν $B \subset [N]^2$ το σύνολο όλων των ζευγαριών (x, y) τέτοιων ώστε $x - y \in A$. Η πυκνότητα του συνόλου B είναι τουλάχιστον $\eta > 0$ και εξαρτάται μόνο από το δ . Εφαρμόζωντας το πόρισμα 4.2.2 για το σύνολο B , παίρνουμε μια τριάδα σημείων $(x, y), (x + d, y), (x, y + d)$. Τότε οι αριθμοί $x - y - d, x - y, x + d - y$ θα ανήκουν στο A και θα αποτελούν μια μήκους 3 αριθμητική πρόοδο.

□

Σκοπός του προγράμματος του Rödl ήταν καταρχάς να γενικεύσει το θεώρημα 4.2.1 για υπεργραφήματα χρησιμοποιώντας ένα γενικευμένο Regularity Lemma και counting lemma.

Κάνοντας μια επιγραμματική αναφορά , ορίζουμε σαν *simplex* σε ένα 3 - uniform γράφημα όλες τις ακμές μεταξύ ενός συνόλου κορυφών της μορφής $\{xyz, xyw, xzw, yzw\}$, δηλαδή ένα πλήρες υπο-υπεργράφημα τεσσάρων κορυφών.
Οπτικά (όσο αυτό είναι εφικτό), αν θεωρήσουμε ότι κάθε κορυφή ενός 3 - uniform υπεργράφημα είναι ένα τρίγωνο και μια ακμή μεταξύ δύο κορυφών (τριγώνων) του είναι ένα δισδιάστατο τρίγωνο, τότε το simplex μπορούμε να το φανταστούμε σαν τις έδρες του τετράεδρου.
Με βάση αυτή την ορολογία, το γενικευμένο θεώρημα του προγράμματος του Rödl για τα τρίγωνα σε υπεργραφήματα είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 4.2.4. *Για κάθε σταθερά $c > 0$ υπάρχει μια σταθερά $\alpha > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα. Αν H είναι ένα 3 - uniform υπεργράφημα n κορυφών που περιέχει το πολύ αn^4 simplices, τότε είναι πιθανό να αφαιρέσουμε το πολύ cn^3 ακμές από το H για να κάνουμε το υπεργράφημα να μην περιέχει simplices.*

Στην συνέχεια όπως έδειξε και ο Solymosi, από το θεώρημα 4.2.4 , μπορούμε εύκολα να πάρουμε σαν συνέπεια το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.5. *Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε κάθε υποσύνολο $A \subset [N]^3$ μεγέθους τουλάχιστον δN^3 περιέχει τετράδα της μορφής*

$$\{(x, y, z), (x + d, y, z), (x, y + d, z), (x, y, z + d)\}$$

με $d > 0$.

Όμοια, το θεώρημα του Szemerédi για προόδους μήκους 4 είναι εύκολη συνέπεια του θεωρήματος 4.2.5 [Sol03].
Συνεπώς αν κάποιος δημιουργήσει γενικευμένα regularity και counting lemmas για υπεργραφήματα, θα μπορεί με βάση την παραπάνω επιχειρηματολογία να καταλήξει στην απόδειξη του θεωρήματος του Szemerédi.

4.3 Quasirandomness

Όπως αναφεράμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, κάθε προσπάθεια απόδειξης του θεωρήματος του Szemerédi ξεκινάει με τον κατάλληλο ορισμό της quasirandomness(ή pseudorandomness). Στην συνέχεια για την απόδειξη του Regularity Lemma χρησιμοποιείται ένα γενικό επιχείρημα της εξής μορφής : αν μία δομή είναι quasirandom τότε θα περιέχει συγκεκριμένες δομές, αν δεν είναι quasirandom χρησιμοποιούμε κατάλληλα τη non - quasirandomness και περνάμε στην επόμενο βήμα της επανάληψης.

Υπάρχουν αρκετοί ορισμοί για την quasirandomness ενός γραφήματος, οι οποίοι ωστόσο, έχει αποδειχτεί, ότι είναι ισοδύναμοι. Θα χρησιμοποιήσουμε δύο ορισμούς όπως αυτοί παρουσιάζονται από τους Chung, Graham στο [CG90].

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω G ένα διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών X,Y. Έστω $|X| = M$ και $|Y| = N$ και ας υποθέσουμε ότι το γράφημα G έχει pMN ακμές. Τότε οι ακόλουθες ιδιότητες του G είναι ισοδύναμες:*
i)Ο αριθμός των τετράδων $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in X^2 \times Y^2$ για τις οποίες οι $x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2$ είναι ακμές του γραφήματος G (4 - cycles) ,είναι το πολύ $p^4M^2N^2 + c_1M^2N^2$.
ii)Αν X' και Y' είναι δύο υποσύνολα του X, Y αντίστοιχα, τότε ο αριθμός των ακμών από το X' στο Y' διαφέρει από το $p|X'||Y'|$ κατά c_2MN το πολύ.

Οι δύο ιδιότητες είναι ισοδύναμες υπό την έννοια ότι για κάθε $c_2 > 0$ υπάρχει $c_1 > 0$ τέτοιο ώστε αν η i) ισχύει για c_1, η ii) ισχύει για c_2 - και αντίστροφα. Ένα γράφημα για το οποίο ισχύει η πρώτη ιδιότητα για $c_1 = \alpha$ καλείται $\alpha - quasirandom$.
Είναι τετριμμένο να συγκρίνουμε την ιδιότητα ii με τον ορισμό της $\epsilon - regularity$ που δώσαμε στην αρχή της εργασίας. Με στοιχειώδεις υπολογισμούς έχουμε ότι η σταθέρα c_1 πρέπει να είναι ϵ^3 για να πάρουμε την $\epsilon - regularity$.
Θα ορίσουμε τώρα την έννοια της quasirandomness για υποσύνολα του $\mathbb{Z}_N$ τυχαίας πυκνότητας όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο(ορισμός 3.1.4). Με την έννοια $mod - N$ πρόοδο θα εννοούμε σύνολα της μορφής $(\alpha, \alpha + d, \ldots, \alpha(m-1)d)$, όπου η πρόσθεση ορίζεται στην ομάδα $\mathbb{Z}_N$. Ο ορισμός θα δωθεί πάλι σε μορφή ισοδυναμίας ιδιοτήτων [CG92].

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{Z}_N$ μεγέθους pN . Τότε οι ακόλουθες* *ιδιότητες του A είναι ισοδύναμες:*

i) Ο αριθμός των τετράδων $(\alpha, b, c, d) \in A^4$ για τον οποίο ισχύει $\alpha + b = c + d$,είναι το πολύ $p^4N^3 + c_1N^3$.
ii) Αν X είναι οποιαδήποτε $mod - N$ πρόοδος τότε $|A \cap X| = p|X| + c_2N$.

Υπάρχει σύνδεση μεταξύ quasirandom γραφημάτων και quasirandom συνόλων. Αυτό επιτυγχάνεται με την παρακάτω κατασκευή:
Έστω $A \subset \mathbb{Z}_N$.Κατασκευάζουμε ένα διμερές γράφημα G με σύνολα κορυφών $X = Y = \mathbb{Z}_N$ και τα $(x, y) \in X \times Y$ θα ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν $x + y \in A$.

Ο ρόλος των quasirandom συνόλων έγινε άμεσα φανερός στο προηγούμενο κεφάλαιο, όπου το επαναληπτικό επιχείρημα σχετικά με το αν ένα σύνολο είναι ή όχι quasirandom οδήγησε στην απόδειξη του θεωρήματος του Roth.

Όπως παρατηρήσαμε ωστόσο και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η δυσκολία αυξάνει κατακόρυφα για την περίπτωση $k = 4$. Εκεί η κλασσική έννοια της quasirandomness αδυνατεί να ελέγξει τις αριθμητικές προόδους τεσσάρων όρων όπως φάνηκε και με τα quadratic φαινόμενα. Η ιδέα είναι να ορίσουμε μια πιο γενική ιδιότητα, την quadratic uniformity. Εδώ θα ορίσουμε πότε ένα σύνολο είναι quadratically uniform και θα δείξουμε γιατί αυτή η ιδιότητα είναι γενικότερη από αυτήν του θεωρήματος 4.3.2.

Ορισμός 4.3.3. *Έστω $\alpha > 0$. Ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{Z}_N$ μεγέθους pN είναι $\alpha - quadratically - uniform$ αν το A^8 περιέχει το πολύ $(p^4 + \alpha)N^4$ οχτάδες της μορφής:*

$$(x, x + \alpha, x + b, x + c, x + \alpha + b, x + \alpha + c, x + b + c, x + \alpha + b + c) \ .$$

Οι τετράδες (α, b, c, d) με $\alpha + b = c + d$ είναι σε μία προς μία αντιστοιχία με τις τετράδες της μορφής $(x, x + \alpha, x + b, x + \alpha + b)$. Άρα ο ορισμός αυτός γενικεύει την ιδιότητα i του θεωρήματος 4.3.2.

Είναι φυσιολογικό,ότι για να αναζητήσουμε ένα ορισμό για την $\alpha - quasirandomness$

για τα 3 - uniform - υπεργραφήματα, πρέπει να αναζητήσουμε μια αντίστοιχη ιδιότητα quadratic uniformity για γραφήματα όπως κάναμε και για την quasirandomness σε γραφήματα και σύνολα. Υπενθυμίζουμε ότι για να συνδέσουμε την quasirandomness σε σύνολα με την quasirandomness σε γραφήματα, θεωρήσαμε ένα διμερές γράφημα G με σύνολα κορυφών $X = Y = \mathbb{Z}_N$ και τα $(x, y) \in X \times Y$ θα ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν $x + y \in A$. Φαίνεται αρκετά λογικό να θεωρήσουμε για την περίπτωση της quadratic uniformity σαν 3 - uniform υπεργράφημα, το τριμερές υπεργράφημα H με σύνολα κορυφών $X = Y = Z = \mathbb{Z}_N$ με την τριάδα $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ να σχηματίζει ακμή αν και μόνο αν $x + y + z \in A$.

Για να επιτύχουμε τον σκοπό μας, αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να βρούμε μια κατάλληλη δομή στο γράφημα H, που να αντιστοιχεί στις οχτάδες, όπως ακριβώς οι 4 - cycles του θεωρήματος 4.3.1 αντιστοιχούν στις τετράδες του θεωρήματος 4.3.2.

Με σκοπό να κατανοήσουμε καλύτερα την διαδικασία εύρεσης της δομής που αναζητούμε στο τριμερές υπεργράφημα H, ας φανταστούμε ότι οι ακμές του H είναι τρίγωνα ενώ οι οχτάδες αναπαριστούν τα σημεία ενός κύβου. Το ερώτημα που τίθεται λοιπόν είναι αν μπορούμε να βρούμε μια σχέση μεταξύ των τριγώνων και του κύβου.
Για να βρούμε τελικά την δομή που αναζητούμε θα γυρίσουμε πάλι στην αντιστοιχία που κάναμε για την quasirandomness μεταξύ των 4 - cycles και των τετράδων. Με βάση την ορολογία για τους κύβους και τα τρίγωνα, η τετράδα πρέπει να ιδωθεί σαν κορυφές ενός τετραγώνου με δυικό (ας χρησιμοποιήσουμε αυτό τον όρο) της στο διμερές γράφημα τον 4 - cycle , ο οποίος παραδόξως πρέπει να ιδωθεί και αυτός σαν τετράγωνο (ας μην ξεχνάμε την αντιστοιχία που υπάρχει και το γεγονός ότι αυτός ο 4 - cycle στο G μας οδήγησε στην τετράδα -τετράγωνο $(x_1 + y_1, x_1 + y_2, x_2 + y_1, x_2 + y_2)$ στο $\mathbb{Z}_N$). Συνεπώς γενικεύοντας αυτό τον συλλογισμό, μπορούμε να πούμε ότι το δυικό του κύβου στο τριμερές υπεργράφημα είναι το οχτάεδρο το οποίο θα αποτελείται από τρίγωνα. Αυτός ο συλλογισμός μπορεί να γενικευτεί και για περισσότερες διαστάσεις.
Συνεπώς ένα οχτάεδρο είναι το εξής: Δοθέντος ενός υποσυνόλου $A \subset \mathbb{Z}_N$,ας ορίσουμε ένα τριμερές 3 - uniform υπεργράφημα H με σύνολα κορυφών $X = Y = Z = \mathbb{Z}_N$ να είναι το σύνολο όλων των τριάδων (x, y, z) τέτοιων ώστε $x+y+z \in A$. Ορίζουμε το οχτάεδρο σε αυτό (ή οποιοδήποτε άλλο) υπεργράφημα να είναι το σύνολο των 3-ακμών της μορφής

$$\{(x_i, y_j, z_k) : i, j, k \in \{1, 2\}\}\ , \text{ όπου } x_1, x_2 \in X \text{ και } y_1, y_2 \in Z\ .$$

Ισοδύναμα ένα οχτάεδρο είναι ένα πλήρες τριμερές υπο-υπεργράφημα με δύο κορυφές από κάθε σύνολο κορυφών του H .

Είναι λογικό λοιπόν τώρα να διατυπώσουμε τον παρακάτω ορισμό για την $\alpha{-}quasirandomness$ για τα 3 - uniform - υπεργραφήματα.

Ορισμός 4.3.4. *Έστω H ένα τριμερές 3 - uniform υπεργράφημα με σύνολα κορυφών X, Y, Z μεγέθους L, M, N αντίστοιχα και ας υποθέσουμε ότι το H έχει $pLMN$ ακμές. Τότε ο H είναι $\alpha - quasirandom$ αν περιέχει το πολύ $(p^8 + \alpha)L^2M^2N^2$ οχτάεδρα.*

Ο ορισμός είναι, σωστός καθώς κάποιος μπορεί να επαληθεύσει ότι μια οχτάδα όντως δίνει ένα κύβο στο τριμερές υπεργράφημα.

Μια λογική ερώτηση είναι αν μπορούμε να βρούμε και μια δεύτερη ιδιότητα όπως στο θεώρημα 4.3.1 και να ισχυριστούμε ότι οι δύο ιδιότητες είναι ισοδύναμες. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι ότι μπορούμε να βρούμενα βρούμε μια δεύτερη ιδιότητα την οποία θα ονομάσουμε $\beta - vertex - uniformity$ αλλά για την οποία θα ισχύει ότι ένα $\alpha - quasirandom$ 3 - γράφημα είναι $\beta - vertex - uniform$ για κάποιο β που θα εξαρτάται από το α αλλά το αντίθετο δεν θα ισχύει.
Ας δώσουμε λοιπόν τον ορισμό της $\beta - vertex - uniformity$.

Ορισμός 4.3.5. *Έστω H ένα $3 - uniform$ υπεργράφημα με σύνολα κορυφών X, Y, Z μεγέθους L, M, N αντίστοιχα και ας υποθέσουμε ότι το H έχει $pLMN$ ακμές. Τότε το H είναι $\beta - vertex - uniform$, αν για κάθε επιλογή υποσυνόλων $X' \subset X, Y' \subset Y$ και $Z' \subset Z$, ο αριθμός των τριάδων $(x, y, z) \in X' \times Y' \times Z'$ που ανήκει στο H διαφέρει από το $p|X'||Y'||Z'|$ το πολύ βLMN .*

Μια ιδιότητα, η οποία αποδεικνύεται τελικά ότι αυτή είναι που γενικεύει την δεύτερη ιδιότητα το θεωρήματος 4.3.1 είναι αυτή της $\gamma - edge - uniformity$.

Ορισμός 4.3.6. *Έστω H ένα $3-uniform$ υπεργράφημα με σύνολα κορυφών X, Y, Z, μεγεθών L, M, N αντίστοιχα και ας υποθέσουμε ότι το H έχει $pLMN$ ακμές. Τότε το H είναι $\gamma-edge-uniform$, αν για κάθε $t \in [0,1]$ και κάθε τριμερές γράφημα G με σύνολα κορυφών X, Y, Z και $tLMN$ τρίγωνα, ο αριθμός των τριγώνων που ανήκει στο H διαφέρει από το $ptLMN$ το πολύ γLMN .*

Είναι αξιοσημείωτο να παρατηρήσουμε κάπως θεωρητικά γιατί ο προηγούμενος ορισμός αποτελεί γενίκευση της ιδιότητας ii)του θεωρήματος 4.3.1. Ας θυμηθούμε ότι η ιδιότητα ii ανέφερε ότι ένα διμερές γράφημα δεν συσχετίζεται(ή ότι διαφέρει κατά κάποια ποσότητα από) με γραφήματα που παράγονται από σύνολα κορυφών, δηλαδή από πλήρης διμερή γραφήματα κάποιων υποσυνόλων των συνόλων κορυφών. Είναι φυσιολογική γενίκευση λοιπόν να πούμε ότι η edge uniformity πρέπει να μας δείχνει ότι ένα 3 - uniform υπεργράφημα δεν συσχετίζεται (ή ότι διαφέρει κατά κάποια ποσότητα από) με γραφήματα που παράγονται από σύνολα ακμών.

Ένα τελευταίο σημείο, πριν προχωρήσουμε, είναι το γεγονός της γενίκευσης των αποτελεσμάτων μας σε k - uniform υπεργραφήματα. Ένα k - partite k - uniform υπεργράφημα H πυκνότητας p με σύνολα κορυφών V_i μεγέθους N_i είναι quasirandom αν περιέχει το πολύ $(p^{2^k}+c)(N_1 \dots N_k)^2$ k - διάστατα οχτάεδρα και το c είναι μικρό. Αυτό είναι ισοδύναμο, σύμφωνα με τον ορισμό 4.3.6 ότι το H είναι $((k-1)-edge)-uniform$ υπό την έννοια ότι δεν συσχετίζεται με κανένα k -uniform υπεργράφημα που παράγεται από ένα (k-1) - uniform υπεργράφημα. Εδώ φαίνεται και ο ιδιαίτερος χαρακτήρας του ορισμού 4.3.6. Ένα quasirandom γράφημα θα είναι 2 -uniform υπεργράφημα αλλά όχι 1 - edge - uniform υπεργράφημα.

4.4 Quasirandom συναρτήσεις

Στο κεφάλαιο 3 προσεγγίσαμε την έννοια της pseudorandomness ενός συνόλου μέσω του Discrete Fourier Transform της χαρακτηριστικής του συνάρτησης ή ακόμα καλύτερα μέσω της balanced συνάρτησης. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η αναλυτική αυτή προσέγγιση, η προσέγγιση δηλαδή των συνόλων μέσω συναρτήσεων που παίρνουν τιμές σε σύνολα όπως $[0,1], [-1,1], \mathbb{R}_+, \mathbb{R}, \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ ή το $\mathbb{C}$, αποτελεί ένα μεγάλο πλεονέκτημα, όταν

θέλουμε να γενικεύσουμε ιδιότητες όπως το counting lemma σε 3 - uniform υπεργραφήματα.
Ο σκοπός μας σε αυτή και την επόμενη ενότητα είναι να δώσουμε τον ορισμό της $\alpha - quasirandomness$ της $\alpha - quasirandomness$ για ένα τυχαίο διμερές γράφημα με την βοήθεια συναρτήσεων. Στην συνέχεια θα αποδείξουμε τα counting lemma και triangle removal lemma με βάση αυτή την διαφορετική θεώρηση.

Ξεκινάμε με το βασικό θεώρημα :

Θεώρημα 4.4.1. *Έστω X και Y σύνολα μεγέθους M, N αντίστοιχα και έστω $f : X \times Y \to [-1, 1]$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

i) $\sum_{x,x'} \sum_{y,y' \in Y} f(x, y)f(x', y)f(x, y')f(x', y') \leqslant c_1 M^2 N^2$.

ii) Για κάθε ζευγάρι συναρτήσεων $u : X \to [-1, 1]$ *και* $v : Y \to [-1, 1]$ *έχουμε ότι* $\sum_{x,y} |f(x, y)u(x)v(y)| \leqslant c_2 MN$.

iii) Για κάθε ζευγάρι συνόλων $X' \subset X$ *και* $Y' \subset Y$ *έχουμε την ανισότητα*

$$|\sum_{x \in X'} \sum_{y \in Y'} f(x, y)| \leqslant c_3 MN \ .$$

Επιπλέον αν $\sum_{x,y} f(x, y) = 0$ *τότε αυτά είναι ισοδύναμα με την επιπλέον διατύπωση ότι*

iv) Για κάθε ζευγάρι συνόλων $X' \subset X$ *και* $Y' \subset Y$ *έχουμε την ανισότητα*

$$\sum_{x \in X'} \sum_{y, \in Y'} f(x, y) \leqslant c_4 MN.$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν στην θέση της f βάζαμε την χαρακτηριστική συνάρτηση του γραφήματος τότε αυτομάτως η ιδιότητα i θα χαρακτήριζε τον αριθμό των $4 - cycles$ όπως ακριβώς θέλουμε.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε καταρχάς ότι το ii συνεπάγεται το i .

Έστω ότι $\sum_{x,x'} \sum_{y,y' \in Y} f(x,y)f(x^{'},y)f(x,y^{'})f(x^{'},y^{'}) > c_1 M^2 N^2$

Τότε αν διαλέξουμε $x^{'}, y^{'}$ τυχαία και ανεξάρτητα , τότε η μέση τιμή του αθροίσματος

$$\sum_{x,y} f(x,y)f(x^{'},y)f(x,y^{'})f(x^{'},y^{'})$$

να είναι μεγαλύτερη από $c_1 MN$.

Συνεπώς μπορούμε να διαλέξουμε $x^{'}, y^{'}$ τέτοια ώστε το

$$\sum_{x,x'} \sum_{y,y' \in Y} f(x,y)f(x^{'},y)f(x,y^{'})f(x^{'},y^{'}) > c_1 M^2 N^2$$

να είναι μεγαλύτερο από $c_1 MN$. Μα κάτι τέτοιο οδηγεί σε άτοπο αν θέσουμε στην ii όπου $c_2 = c_1$ και όπου $u(x) = f(x,y^{'})$ και $v(y) = f(x^{'},y)f(x^{'},y^{'})$.

Το αντίστροφο προκύπτει χρησιμοποιώντας την Cauchy - Schwarz ανισότητα. Ξεκινάμε κάπως έτσι:

$$\begin{aligned}
|\sum_{x,y} |f(x,y)u(x)v(y)||^4 &= \left(\left(\sum_x \sum_y f(x,y)u(x)v(y)\right)^2\right)^2 \\
&\leqslant \left(M \sum_x \left(\sum_y f(x,y)u(x)v(y)\right)^2\right) \\
&\leqslant \left(M \sum_x \left(\sum_y f(x,y)v(y)\right)^2\right)^2 \\
&= M^2 \left(\sum_x \sum_{y,y'} f(x,y)f(x,y^{'}v(y)v(y^{'})\right)^2 \\
&\leqslant M^2 N^2 \sum_{y,y'} \left(\sum_x f(x,y)f(x,y^{'})v(y)v(y^{'})\right)^2 \\
&\leqslant M^2 N^2 \sum_{x,x'} \sum_{y,y'} f(x,y)f(x,y^{'})f(x^{'},y)f(x^{'},y^{'}) \; .
\end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν αν το i είναι αληθές τότε το ii είναι αληθές για $c_2 = c_1^{1/4}$.

Το ii συνεπάγεται τα iii και iv (Με απαγωγή εις άτοπο και στη συνέχεια θέτοντας όπου u, v τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις των $X^{'}, Y^{'}$ αντίστοιχα).

Απομένει λοιπόν να δείξουμε ότι το iii συνεπάγεται το ii και το iv συνεπάγεται το ii. Δουλεύουμε πάλι με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι το ii δεν ισχύει. Αυτό σημαίνει υπάρχουν συναρτήσεις $u : X \to [-1,1]$ και $v : Y \to [-1,1]$ τέτοιες ώστε $|\sum_{x,y} f(x,y)u(x)v(y)| > c_2 MN$. Σκοπός μας είναι να βρούμε τυχαία υποσύνολα X_1, Y_1 των συνόλων X, Y τέτοια ώστε $|\sum_{x \in X_1} \sum_{y \in Y_1} f(x,y)| > c_2 MN/4$ γιατί αν $c_3 \leqslant c_2/4$ βαίνουμε σε άτοπο και η απόδειξη ολοκληρώνεται. Πράγματι, αν γράψουμε $u = u_+ - u_-$ και $v = v_+ - v_-$. όπου u_+ , u_- , v_+ ,v_- συναρτήσεις που δίνουν τιμές στο $[0,1]$. Με βάση αυτό, υπάρχουν συναρτήσεις s,t τέτοιες ώστε $|\sum_{x,y} f(x,y)s(x)t(y)| > c_2MN/4$. Θεωρούμε τώρα δύο τυχαία και ανεξάρτητα υποσύνολα X_1, Y_1 των οποίων επιλέγονται με πιθανότητα που περιγράφεται από τις συναρτήσεις s,t . Τότε, ως γνωστόν, η μέση τιμή του $\sum_{x\in X_1}\sum_{y\in Y_1} f(x,y)$ ισούται με $\sum_{x,y} f(x,y)s(x)t(y)$ συνεπώς υπάρχει επιλογή X_1, Y_1 τέτοια ώστε $|\sum_{x\in X_1}\sum_{y\in Y_1} f(x,y)| > c_2MN/4$. Αν το άθροισμα είναι θετικό ,η απόδειξη τελειώνει.

Αλλιώς, ας συνεχίσουμε με την υπόθεση ότι $\sum_{x,y} f(x,y) = 0$. Έστω $X_2 = X \setminus X_1$ και $U_2 = U \setminus U_1$. Έστω τώρα ότι $S_{ij} = \sum_{x\in X_i}\sum_{y\in Y_j} f(x,y)$. Τότε $S_{11}+S_{12}+S_{21}+S_{22} = 0$ για $i,j \in \{1,2\}$. Τότε, σύμφωνα και με τα παραπάνω υπάρχει ένα ζευγάρι $(i,j) \neq (1,1)$ τέτοιο ώστε $\sum_{x\in X_i}\sum_{y\in Y_j} f(x,y) > c_2MN/12$. Αυτό μας οδηγεί σε άτοπο για το iv αν $c_4 \leqslant c_2/12$.

Άρα και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. □

Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνεται ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 4.4.2. *Έστω X, Y σύνολα μεγέθους M, N . Μία συνάρτηση f είναι $\alpha - quasirandom$ αν $\sum_{x,x'\in X}\sum_{y,y'\in Y} f(x,y)f(x',y)f(x,y'), f(x',y') \leqslant \alpha M^2N^2$.*

Είναι αρκετά λογικό να δώσουμε τώρα έναν ορισμό για την $\alpha - quasirandomness$ ενός διμερούς γραφήματος.

Ορισμός 4.4.3. *Έστω G ένα διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών X, Y . Ας ορίσουμε $G(x,y)$ τη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι μας επιστρέφει 1 αν xy είναι ακμή του G και 0 διαφορετικά. Αν τα σύνολα κορυφών έχουν μέγεθος $|M|, |N|$ αντίστοιχα και το γράφημα έχει pMN ακμές, τότε το G είναι $\alpha - quasirandom$ αν η συνάρτηση $G(x,y) - p$ είναι $\alpha - quasirandom$.*

Παρατηρούμε ότι αυτός ο ορισμός είναι ισοδύναμος με την ιδιότητα ii του θεωρήματος 4.3.1 καθώς

$$\sum_{x\in X'}\sum_{y\in Y'} G(x,y) = \sum_{x\in X'}\sum_{y\in Y'} f(x,y) + p|X'||Y'|.$$

Ας ξεκινήσουμε λοιπόν, ύστερα από αυτούς τους ορισμούς, να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το counting lemma. Θα ξεκινήσουμε με την πιο ειδική περίπτωση για τα τρίγωνα.

Λήμμα 4.4.4. *Έστω G ένα τριμερές γράφημα με σύνολα κορυφών X, Y, Z μεγέθους L, M, N αντίστοιχα. Έστω $G(X,Y), G(Y,Z), G(X,Z)$ να είναι $\alpha - quasirandom$ με πυκνότητες p, q, r αντίστοιχα. Τότε ο αριθμός των τριγώνων στο G διαφέρει από το $pqrLMN$ το πολύ $4\alpha^{1/4}LMN$.*

Απόδειξη. Ο αριθμός των τριγώνων στο G θα δίνεται από μια έκφραση της μορφής:

$$\sum_{x,y,z}(p + f(x,y))(q + g(y,z))(r + h(x,z))$$

όπου $f(x,y) = G(x,y) - p$ μία συνάρτηση $f : X \times X \to [-1,1]$ και $g(y,z) = G(y,z) - q$, $h(x,z) = G(x,z) - R$ αντίστοιχα ορισμένες.
Αν εκτελεστούν οι πράξεις μέσα στο άθροισμα, τότε το άθροισμα μπορεί να διασπαστεί σε 8 όρους. Τότε ας θεωρήσουμε τους όρους της μορφής $\sum_{x,y,z} f(x,y)u(y,z)v(x,z)$ όπου u προφανώς θα είναι q ή g και όπου v θα είναι προφανώς ή r ή h . Αυτή έκφραση για συγκεκριμένο z παίρνει την μορφή $\sum_{x,y} f(x,y)u(y)v(x)$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 4.4.1 και το γεγονός ότι οι $f(x,y)u(y)v(x)$ είναι $\alpha - quasirandom$, παρατηρούμε από την ισοδυναμία i και ii και συγκεκριμένα την κατεύθυνση i σε ii ότι το $\sum_{x,y} f(x,y)u(y)v(x)$ θα είναι το πολύ $\alpha^{1/4}LMN$. Παρατηρούμε εύκολα ότι υπάρχουν επτά ακόμη τέτοιοι όροι από τους οποίους μόνο οι 4 είναι μη μηδενικοί. γεγονός που δίνει το ζητούμενο.

□

Θα αποδείξουμε τώρα το counting lemma αλλά με την πιθανοθεωρητική μορφή του.

Θεώρημα 4.4.5. *Έστω G ένα m - μερές γράφημα με σύνολα κορυφών $X_1, X_2, \dots, X_m$ και ας γράψουμε σαν N_i το μέγεθος του X_i . Έστω ότι για κάθε ζευγάρι (i,j) με $i \neq j$ το παραγόμενο διμερές γράφημα $G(X_i, Y_i)$ είναι $\alpha - quasirandom$ με πυκνότητα p_{ij} αντίστοιχα. Έστω H οποιοδήποτε γράφημα με σύνολο κορυφών $\{1, 2 \dots, m\}$ και έστω $\{x_1, \dots, x_m\}$ ένα τυχαίο στοιχείο του $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$. Τότε η πιθανότητα ότι η απεικόνιση $i \hookrightarrow x_i$ είναι μια ισομορφική εμφύτευση του H στο G διαφέρει από το $\prod_{ij \in E(H)} p_{ij} \sum_{ij \notin E(H)}(1 - p_{ij})$ το πολύ $2^{\binom{m}{2}}$. Η πιθανότητα ότι x_i, x_j είναι ακμή στο G*

όταν ij είναι ακμή του H (αλλά όχι απαραίτητα αντιστρόφως) διαφέρει από το $\prod_{ij \in E(H)} p_{ij}$ *το πολύ* $2^{|E(H)|}\alpha^{1/4}$.

Απόδειξη. Το θεώρημα μπορεί να φαίνεται πολύπλοκο αλλά η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε για την απόδειξή του είναι παρόμοια με αυτή που ακολουθήσαμε στο προηγούμενο λήμμα. Θεωρούμε αυτή τη φορά x_i ένα σημείο του X_i . Έστω $f_{ij}(x,y) = G(x,y) - p_{ij}$ για κάθε ζευγάρι (i,j) . Τότε η πιθανότητα της εκφώνησης είναι

$$(N_1, \ldots, N_m)^{-1} \sum_{x_1, \ldots, x_m} \prod_{ij \in E(H)} (p_{ij} + f_{ij}(x_i, x_j)) \prod_{ij \notin E(H)} (1 - p_{ij} - f_{ij}(x_i, x_j))$$

Πάλι το άθροισμα μπορεί να διασπαστεί σε όρους. Ο κεντρικός όρος είναι ο

$$\prod_{ij \in E(H)} p_{ij} \sum_{ij \notin E(H)} (1 - p_{ij})$$

.

Θα δείξουμε ότι όλοι άλλοι όροι είναι μικροί. Όλοι οι άλλοι όροι του αθροίσματος θα περιέχουν το $f_{ij}(x_i, y_j)$ και αν θεωρήσουμε σταθερά όλα τα άλλα x_k , το άθροισμα θα είναι τελικά της μορφής $\sum_{x_i, x_j} f_{ij}(x_i, x_j) u(x_i) v(x_j)$ με u, v να παίρνουμε τιμές στο $[-1, 1]$. Όπως πάντα από το θεώρημα 4.4.1 και από την $\alpha-quasirandomness$ των f_{ij} , η ποσότητα αυτή είναι το πολύ $\alpha^{1/4} N_i N_j$. Αν αθροίσουμε για όλες τις άλλες $m-2$ μεταβλητές και πολλαπλασιάσουμε με $(N_1, \ldots, N_m)^{-1}$ τότε αποδεικνύεται ότι κάθε όρος έχει μέγεθος το πολύ $\alpha^{1/4}$. Τέλος αφού οι όροι είναι το πολύ $2^{\binom{m}{2}}$ παίρνουμε το ζητούμενο. Το δεύτερο αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

□

4.5 Το Regularity Lemma για διμερή γραφήματα

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε και θα αποδείξουμε το Regularity Lemma με βάση την δουλειά που έγινε σε αυτό το κεφάλαιο.

Η βασική ιδέα που κρύβεται πίσω από την απόδειξη του Regularity Lemma είναι η επινόηση μιας $\mathcal{L}_2$ νόρμας τέτοιας ώστε αν η διαμέριση που βρίσκουμε κάθε φορά δεν είναι $\epsilon - regular$ τότε η νόρμα θα αυξάνεται κατά μια ποσότητα που εξαρτάται από το ϵ .

Έχοντας ένα καλό άνω όριο για την νόρμα αυτή και χρησιμοποιώντας αυτό το επαναληπτικό επιχείρημα, θα φτάσουμε τελικά σε μια διαμέριση που θα είναι $\epsilon-regular$. Όπως θα δούμε, η ζητούμενη νόρμα θα είναι η μέση τετραγωνική πυκνότητα.

Ορισμός 4.5.1. *Δοθέντος ενός διμερούς γραφήματος G με σύνολα κορυφών X, Y μεγεθών M, N αντίστοιχα και δύο διαμερίσεων $X_1 \cup \cdots \cup X_m$ και $Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$ των X, Y, όπου $|X_i| = \alpha_i M$, $|Y_j| = \beta_j N$, θα συμβολίζουμε με $d(X_i, X_j)$ την πυκνότητα του $G(X_i, Y_j)$, δηλαδή τον αριθμό των ακμών μεταξύ των X_i, Y_j πολλαπλασιασμένο με $|X_i|^{-1}|Y_j|^{-1}$. Η μέση τετραγωνική πυκνότητα του G θα ορίζεται σαν $\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j d(X_i, Y_j)^2$.*

Ας διατυπώσουμε λοιπόν το Regularity Lemma για διμερή γραφήματα. Παρατηρούμε ότι αυτή η διατύπωση δεν υποθέτει κατάνάγκη ισοδιαμέριση όπως υποθέσαμε στο πρώτο κεφάλαιο.

Θεώρημα 4.5.2. *Έστω $\epsilon > 0$ και έστω G οποιοδήποτε διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών X, Y. Τότε υπάρχει μια διαμέριση $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ και μια διαμέριση $Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$, με n, m φραγμένα από πάνω με συναρτήσεις που να εξαρτώνται από το ϵ με την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε i, j έστω $|X_i| = \alpha_i|X|$ και $|Y_j| = \beta_j|Y|$ και έστω B το σύνολο όλων των ζευγαριών (i, j) τέτοιο ώστε το υπογράφημα $G(X_i, X_j)$ δεν είναι $\epsilon - quasirandom$, τότε $\sum_{(i,j)\in B} \alpha_i \beta_j \leqslant \epsilon$. Ισοδύναμα η πιθανότητα ένα τυχαίο ζευγάρι $(x, y) \in X \times Y$ να ανήκει σε ένα $X_i \times Y_j$ για το οποίο $G(X_i, Y_j)$ αποτυγχάνει να είναι $\epsilon - quasirandom$ είναι το πολύ ϵ .*

4.5.1 Η probabilistic σκοπιά του Regularity Lemma

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του λήμματος θα επισκεφτούμε ξανά το Regularity Lemma σαν ένα θεώρημα όχι για μεγάλα πυκνά γραφήματα αλλά σαν ένα θεώρημα σε χώρο πιθανότητας καρτεσιανού γινομένου. Θα δούμε πώς μπορούμε να ορίσουμε την πυκνότητα και την τετραγωνική πυκνότητα ξανά καθώς επίσης και μια εισαγωγή στα τεχνικά λήμματα που θα ακολουθήσουν για την απόδειξη του Regularity Lemma. Δεν θα προχωρήσουμε στην πλήρη διατύπωση του probabilistic Regularity Lemna καθώς αυτό απαιτεί κάποιους τεχνικούς ορισμούς που ξεφεύγουν από τα πλαίσια της εργασίας αυτής. Για περισσότερα παραθέτουμε στο εξαιρετικό άρθρο του Terence Tao [Tao06].

Έστω (X, Y, E), $E \subset X \times Y$ ένα οποιοδήποτε πυκνό και μεγάλο διμερές γράφημα. Θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{B}, \rho)$ με $\Omega := X \times Y$, $\mathcal{B} := 2^{\Omega}$, και μέτρο πιθανότητας ρ το uniform μέτρο γινόμενο στο $X \times Y$. Συνεπώς κάθε ακμή $(x, y) \in E$ είναι ένα probabilistic event και είναι εφοδιασμένες με το uniform μέτρο $\rho_X(x)\rho_Y(y)$. Ο ορισμός της density είναι φυσιολογικός και θα είναι το εξής μέτρο πιθανότητας:

$$d = d(X, Y) = \rho(E) = \rho(\bigcup_{(x_1,x_2)\in E} \rho\left((x_1, x_2)\right) = \sum_E \rho\left((x_1, x_2)\right) = \frac{1}{|X|}\frac{1}{|Y|}e(X, Y) \ .$$

Η τελευταία ισότητα οφείλεται uniform μέτρου που έχουμε ορίσει. Βλέπουμε λοιπόν πώς ο ορισμός της density αποτελεί στην ουσία ένα μέτρο πιθανότητας.
Αν διαμερίσουμε τα δύο σύνολα X, Y σε δύο σύνολα το καθένα έστω $X_1 \cup X_2$ και $Y_1 \cup Y_2$ τότε το καρτεσιανό γινόμενο θα ισούται με $X \times Y = (X_1 \times Y_1) \cup (X_1 \times Y_2) \cup (Y_2 \times X_1) \cup (Y_2 \times X_2)$ και η density τώρα θα ορίζεται στα επιμέρους κομμάτια. Για παράδειγμα ο περιορισμός της density στο υποσύνολο $X_1 \cup Y_2$ θα είναι

$$d(X_1, Y_2) = \rho_{X_1 \times Y_2}\left(E \bigcap (X_1 \times Y_2)\right).$$

Ανάλογα ορίζεται η density για διαμερίσεις σε περισσότερες κλάσεις.
Έστω τώρα η συνάρτηση $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται σαν $f(x, y) = d^2(X, Y)$ με $x \in X, y \in Y$. Στον χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $L_2\left(X \times Y, \rho\right)$ ορίζουμε την νόρμα 2 αυτής της συνάρτησης υψωμένη στο τετράγωνο:

$\|f\|_2^2 = \int f^2 d\rho$.

Αν θεωρήσουμε τώρα μια πεπερασμένη διαμέριση $\mathcal{P}$ των X σε X_i και Y σε Y_j. Τότε ο περιορισμός της f σε αυτή την διαμέριση θα είναι $f_{\mathcal{P}} = \sum \chi_{X_i \times Y_j} d^2(X_i, Y_j)$, όπου χ η χαρακτηριστική συνάρτηση συνόλου.
Ένα κρίσιμο λήμμα για την απόδειξη του Regularity Lemma θα μας πει ότι η νόρμα 2 της f υψωμένη στο τετράγωνο και περιορισμένη στην διαμέριση, θα είναι μεγαλύτερη από την νόρμα 2 υψωμένη στο τετράγωνο της f πριν την διαμέριση κατά μια σταθερή ποσότητα που θα εξαρτάται μόνο από το ϵ. Δηλαδή:

$$\|f_{\mathcal{P}}\|_2^2 = \int f_{\mathcal{P}}^2 d\rho \geq \int f^2 d\rho = \|f\|_2^2$$

ή

$$\|f_{\mathcal{P}}\|_2 \geq \|f\|_2 + o(\epsilon).$$

.

4.5.2 Η απόδειξη του Regularity Lemma

Όπως αναφέραμε και πριν, για να το αποδείξουμε θα χρειαστούμε κάποια τεχνικά λήμματα πρώτα.

Λήμμα 4.5.3. *Έστω U ένα πεπερασμένο σύνολο και έστω $f : U \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με μέση τιμή d. Έστω $U = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ με $|U_i| = \gamma_i |U|$ και έστω d_i η μέση τιμή του f περιορισμένη στο U_i. Τότε $d^2 \leqslant \sum_{i=1}^r \gamma_i d_i^2$.*

Απόδειξη. Από την ανισότητα Cauchy - Schwarz παίρνω

$$\left(\sum_{i=1}^r \gamma_i d_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^r \gamma_i\right)\left(\sum_{i=1}^r \gamma_i d_i^2\right)$$

το οποίο ισούται με

$$d^2 \leqslant \sum_{i=1}^r \gamma_i d_i^2 \ .$$

□

Το λήμμα που ακολουθεί αναφέρει ότι όταν διαμερίσουμε επιπλέον μια υπάρχουσα διαμέριση, η μέση τετραγωνική πυκνότητα δεν θα μειωθεί.

Λήμμα 4.5.4. *Έστω U , f και $U_1, \ldots, U_r$ όπως το προηγούμενο λήμμα. Υποθέτουμε επίσης ότι κάθε U_i διαμερίζεται επιπλέον σε σύνολα U_{ij} και έστω $|U_{ij}| = \gamma_{ij}|U|$ ενώ επιπλέον έστω d_{ij} η μέση τιμή της f περιορισμένη στο U_{ij} . Τότε $\sum_i \gamma_i d_i^2 \leqslant \sum_{ij} \gamma_{ij} d_{ij}^2$.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε για κάθε i την ανισότητα

$$d_i^2 \leqslant \sum_j \frac{\gamma_{ij}}{\gamma_i} d_{ij}^2$$

Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές γ_i και αθροίζοντας για κάθε i έχουμε το ζητούμενο.

□

Το επόμενο πόρισμα μετουσιώνει το παραπάνω λήμμα σε γραφοθεωρητικό πλαίσιο και συγκεκριμένα για τα διμερή γραφήματα. Έστω ότι έχουμε δύο διαμερίσεις, η μία διαμερίζει το ένα σύνολο κορυφών και η άλλη το δεύτερο σύνολο κορυφών και έστω ότι αυτές οι δύο διαμερίσεις διαμερίζονται επιπλέον. Το παρακάτω πόρισμα αναφέρει ότι η μέση τετραγωνική πυκνότητα που σχετίζεται με(περιορισμένη σε) τις δύο επιπλέον διαμερίσεις θα είναι τουλάχιστον η μέση τετραγωνική πυκνότητα που σχετίζεται με τις δύο αρχικές διαμερίσεις.

Πόρισμα 4.5.5. *Έστω G ένα διμερές γράφημα πυκνότητας d με σύνολα κορυφών X, Y μεγέθους M, N αντίστοιχα. Έστω $X_1 \cup \cdots \cup X_m$ και $Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$ διαμερίσεις των X και Y. Έστω ότι τα X_i, Y_i μπορούν να διασπαστούν περαιτέρω σε X_{ik}, Y_{jl} αντίστοιχα. Τότε η μέση τετραγωνική πυκνότητα του G σχετική με τα σύνολα διαμερίσεων $\{X_{ik}\}, \{Y_{jl}\}$ είναι τουλάχιστον η μέση τετραγωνική πυκνότητα του G σχετική με τα σύνολα διαμερίσεων $\{X_i\}, \{Y_j\}$.*

Απόδειξη. Έστω U το σύνολο $X \times Y$ και f η χαρακτηριστική συνάρτηση του G . Τότε από το λήμμα 4.5.4. το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα, αν για πρώτη διαμέριση πάρουμε όλα τα σύνολα $X_i \times Y_j$ και για επιπλέον διαμέριση όλα τα σύνολα της μορφής $X_{ik} \times Y_{jl}$.

□

Παραθέτουμε ένα λήμμα το οποίο παίζει κρίσιμο ρόλο στην απόδειξη του Regularity Lemma. Αυτό το λήμμα αναφέρει ότι αν ένα ζευγάρι αποτυγχάνει να είναι $\epsilon-quasirandom$, τότε αν διαμέρισουμε κάθε σύνολο επιπλέον σε δύο σύνολα, η μέση τετραγωνική πυκνότητα θα αυξηθεί κατά μια σταθερά που εξαρτάται από το ϵ .

Λήμμα 4.5.6. *Έστω G ένα διμερές γράφημα πυκνότητας d με σύνολα κορυφών X, Y μεγέθους M, N αντίστοιχα. Έστω ότι το G αποτυγχάνει να είναι $\epsilon - quasirandom$.Τότε υπάρχουν διαμερίσεις $X_1 \cup X_2$ και $Y_1 \cup Y_2$ τέτοιες ώστε να έχουν μέση τετραγωνική πυκνότητα τουλάχιστον $d^2 + \epsilon^2/16$.*

Απόδειξη. Έστω $f(x, y) = G(x, y) - d$. Τότε από το θεώρημα 4.4.1 μπορούμε να βρούμε υποσύνολα $X_1 \subset X$ και $Y_1 \subset Y$ τέτοια ώστε $|\sum_{x \in X_1} \sum_{y \in Y_1} f(x, y)| \geqslant \epsilon MN/4$.
Αν συμβολίσουμε με $\phi(X_i, Y_j)$ την balanced πυκνότητα [1] της f αν περιοριστεί αυτή στο

[1] την ονομάζω balanced λόγω της balanced συνάρτησης $f(x, y) = G(x, y) - d$ που χρησιμοποιείται στον ορισμό της

$X_i \times Y_j$, δηλαδή το μέγεθος

$$\phi(X_i, Y_j) = |X_i|^{-1}|Y_j|^{-1} \sum_{x \in X_i} \sum_{y \in Y_j} f(x, y)$$

,τότε η μέση τετραγωνική πυκνότητα αυτής της διαμέρισης είναι

$$\sum_{i,j=1}^{2} \alpha_i \beta_j (d + \phi(X_i, Y_j))^2 = \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_i \beta_j (d^2 + 2d\phi(X_i, Y_j) + \phi(X_i, Y_j)^2) \ .$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος είναι d^2, ο δεύτερος 0 αφού η μέση τιμή της f είναι 0, και ο τρίτος τουλάχιστον $\alpha_1\beta_1(\alpha_1 M)^{-2}(\beta_1 N)^{-2}(\epsilon MN/4)^2$,το οποίο είναι τουλάχιστον $\frac{\epsilon^2}{16}$. Άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Λήμμα 4.5.7. *Έστω G ένα διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών X, Y, μεγέθους M, N αντίστοιχα. Έστω $X_1 \cup \cdots \cup X_m$ και $Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$ διαμερίσεις των X, Y με $|X_i| = \alpha_i M$ και $|Y_j| = \beta_j N$.Έστω ότι η μέση τετραγωνική πυκνότητα αυτών των διαμερίσεων είναι d^2. Έστω B το σύνολο όλων των ζευγαριών (i, j) τέτοια ώστε τα υπογραφήματα $G(X_i, Y_j)$ αποτυγχάνουν να είναι $\epsilon - quasirandom$ και έστω $\sum_{(ij) \in B} \alpha_i \beta_j > \epsilon$. Τότε μπορούν να βρεθούν διαμερίσεις $X_{i1} \cup \ldots X_{is}$ και $Y_j = Y_{j1} \cup \cdots \cup Y_{jt}$ τέτοιες ώστε οι διαμερίσεις $\{X_{ik}\}$ και $\{Y_{jl}\}$ να έχουν μέση τετραγωνική πυκνότητα τουλάχιστον $d^2 + \epsilon^3/16$. Επιπλέον τα s, t είναι ομοιόμορφα φραγμένα από πάνω από τα 2^n και 2^m αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 4.5.6. Για κάθε ζευγάρι (X_i, Y_j) που αποτυγχάνει να είναι $\epsilon - quasirandom$ το λήμμα 4.5.6. μας παρέχει διαμερίσεις σε δύο σύνολα $X_i = X_{i1}^{(j)} \cup X_{i2}^{(j)}$ και $Y_j = Y_{j1}^{(i)} \cup Y_{j2}^{(i)}$ με μέση τετραγωνική πυκνότητα τουλάχιστον $d(X_i, Y_j)^2 + \epsilon^2/16$. Δηλαδή για κάθε i το X_i διαμερίζεται σε δύο περαιτέρω σύνολα αλλά αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφτεί αρκετές φορές (με διαφορετικές διαμερίσεις η καθεμία) καθώς για κάθε i ελέγχουμε όλα τα j για τα οποία το ζευγάρι (X_i, Y_j) είναι $\epsilon - quasirandom$. Για κάθε i έστω $X_i = X_{i1} \cup \cdots \cup X_{is}$ η διαμέριση που διαμερίζει ταυτόχρονα όλες τις διαμερίσεις $X_i = X_{i1}^{(j)} \cup X_{i2}^{(j)}$ που προήλθαν με την παραπάνω διαδικασία, με φυσιολογικό όριο $s \leqslant 2^n$ και για κάθε j έστω $Y_j = Y_{j1} \cup \cdots \cup Y_{jt}$ η διαμέριση που διαμερίζει περαιτέρω τις διαμερίσεις $Y_j = Y_{j1}^{(i)} \cup Y_{j2}^{(i)}$ με $t \leqslant 2^m$.

Τότε για κάθε $(i, j) \in B$ το πόρισμα 4.5.6. , μας λέει ότι η μέση τετραγωνική πυκνότητα του G με βάση τις διαμερίσεις $X_i = X_{i1}^{(j)} \cup X_{i2}^{(j)}$ και $Y_{j1}^{(i)} \cup Y_{j2}^{(i)}$, είναι τουλάχιστον

$d(X_i, X_j)^2 + \epsilon^2/16$. Για κάθε άλλο (i,j) θα είναι τουλάχιστον $d(X_i, Y_j)^2$. Πολλαπλασιάζοντας με $\alpha_i\beta_j$ και αθροίζοντας για όλα τα i, j , έχουμε ότι η μέση τετραγωνική πυκνότητα για όλες τις διαμερίσεις $\{X_{ik}\}, \{Y_{jl}\}$ είναι τουλάχιστον

$$\sum_{(i,j)\notin B} \alpha_i\beta_j d(X_i, Y_j)^2 + \sum_{(i,j)\in B} \alpha_i\beta_j (d(X_i, X_j)^2 + \epsilon^2/16)$$

που είναι τουλάχιστον $d^2 + \epsilon^3/16$ από την υπόθεση για το B .

□

Παραθέτουμε τώρα την απόδειξη του Regularity Lemma.

Απόδειξη. (Απόδειξη Regularity Lemma)

Αν το G είναι $\epsilon - quasirandom$ τελειώσαμε. Αλλιώς έστω d η πυκνότητα του G . Το λήμμα 4.5.5 μας δίνει διαμερίσεις $X = X_1 \cup X_2$ και $Y = Y_1 \cup Y_2$ με μέση τετραγωνική πυκνότητα τουλάχιστον $d^2 + \epsilon^3/16$. Αν πάρουμε λοιπόν οποιοδήποτε ζευγάρι διαμερίσεων $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ και $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$ είτε θα ισχύει $\sum_{(i,j)\in B} \alpha_i\beta_j \leqslant \epsilon$ (με B όπως το έχουμε ορίσει στην υπόθεση) και τελειώσαμε, είτε θα βρούμε πάλι νέες διαμερίσεις με μέση τετραγωνική πυκνότητα μεγαλύτερη τουλάχιστον κατά $\epsilon^3/16$.Συνεπώς θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία διαμερίσεων με αυξανόμενη μέση τετραγωνική πυκνότητα. Αφού όμως η μέση τετραγωνική πυκνότητα φράσσεται από το 1, η ακολουθία διαμερίσεων κάποια στιγμή θα τερματίσει σε το πολύ $16\epsilon^{-3}$ βήματα και θα τερματίσει σε ένα ζευγάρι διαμερίσεων που θα ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος. Επιπλέον από το λήμμα 4.5.6 το σύνολο των συνόλων σε αυτές τις διαμερίσεις θα φράσσεται από μια συνάρτηση που θα εξαρτάται από το ϵ. Πιο συγκεκριμένα θα είναι μια συνάρτηση πύργος 2 - αριών όπου το ύψος θα είναι ανάλογο το ϵ^{-3}.

□

Παρατηρούμε ότι μια τέτοια επαναληπτική συλλογιστική (όπου περνάμε σε σύνολα μεγαλύτερης density) ακολουθήθηκε και στο θεώρημα του Roth.

Κεφάλαιο 5

Προσθετική συνδυαστική (2)

5.1 Ανάλυση Fourier

Μια εισαγωγή στην αναζήτηση δομών σε σύνολα με βάση την ανάλυση Fourier και τον ορισμός της quasirandomness ενός συνόλου έγινε στο τρίτο κεφάλαιο. Εδώ επαναδιατυπώνουμε κάποιους ορισμούς, αποδεικνύουμε κάποια θεωρήματα της ανάλυσης Fourier και ορίζουμε πάλι την ψευδοτυχαιότητα (quasirandomness) ενός συνόλου. Μια βασική σκέψη είναι η εξής:

Όταν θέλουμε να μιλήσουμε για την δομή ενός συνόλου, πολύ χρήσιμο είναι να κοιτάξουμε τι ιδιότητες έχει ο μετασχηματιμός Fourier της χαρακτηριστικής του συνάρτησης.

Κάνοντας πάλι ένα βήμα πίσω λοιπόν θα δούμε πώς μπορούμε να ορίσουμε την quasirandomness ενός συνόλου (με βάση τον μετασχηματισμό Fourier της χαρακτηριστικής του) ως προς τις τετράδες που περιέχει, εν απόλυτη αντιστοιχία με την συλλογιστική τους θεωρήματος 4.4.1. Θα ξεκινήσουμε με βάση κάποιους ορισμούς που θα ταυτίζονται με αυτούς του κεφαλαίου 3. Βέβαια, όπως θα διαπιστώσει κανείς, θα θεωρήσουμε αθροίσματα στον Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier που δεν είναι νορμαρισμένα. Επίσης το πρόσημο το οποίο χρησιμοποιείται στο εκθετικό στο Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier είναι αρνητικό σε σχέση με αυτό που ορίσαμε στο κεφάλαιο 3. Αυτές οι δύο προσεγγίσεις δεν έρχονται σε αντίφαση. Οι αποδείξεις που ακολουθούν δεν επηρεάζονται από αυτή την σύμβαση. Τέλος η δυικότητα μεταξύ του κανονικού μετασχηματισμού και του αντίστροφου διατηρείται και στα δύο κεφάλαια.

Ορισμός 5.1.1. *Έστω* $\omega = exp(2\pi i/N)$. *Δοθείσας μια συνάρτησης* $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ [1], *και ενός* $r \in \mathbb{Z}_N$, *θέτουμε*

$$\widehat{f}(r) = \sum_{s\in\mathbb{Z}_N} f(s)\omega^{-rs}$$

Η συνάρτηση $\widehat{f}(r)$ καλείται ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier της f. Έστω $f * g$ η συνέλιξη των δύο συναρτήσεων που ορίζεται σαν

$$f * g(s) = \sum_{t\in\mathbb{Z}_N} f(t)\overline{g(t-s)}$$

Οι ακόλουθες ιδιότητες θα μας χρησιμέψουν :

$$(f * g)\widehat{\ }(r) = \widehat{f}(r)\overline{\widehat{g}(r)} \quad (1)$$

$$\sum_r \widehat{f}(r)\overline{\widehat{g}(r)} = N\sum_s f(s)\overline{g(s)} \text{ (ταυτότητα του Parseval)} \quad (2)$$

$$\sum_r |\widehat{f(r)}|^2 = N\sum_s |f(s)|^2 \text{ (ταυτότητα του Parseval)} \quad (3)$$

$f(s) = N^{-1}\sum_r \widehat{f}(r)\omega^{rs}$ (συνήθως αυτή η ιδιότητα λέγεται και αντίστροφος Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier) (4)

Η απόδειξη των παραπάνω ιδιότητων είναι αρκετά εύκολη υπόθεση. Για την πληρότητα της εργασίας, ενδεικτικά θα αναφέρουμε ότι για την (1) αρκεί να δούμε ότι:

$$\begin{aligned}(f * g)(r) &= \textstyle\sum_s (f * g)(s)\omega^{-rs}\\ &= \textstyle\sum_{s,t} f(t)\overline{g(t-s)}\omega^{-rt}\omega^{r(t-s)}\\ &= \textstyle\sum_{t,u} f(t)\omega^{-rt}\overline{g(u)\omega^{-ru}}\\ &= \widehat{f}(r)\overline{\widehat{g}(r)}.\end{aligned}$$

[1]Και σε αυτή την ενότητα θα θεωρούμε υποσύνολα του $\mathbb{Z}_N$ αντί για υποσύνολα του $\{1, 2, \ldots, N\}$

ενώ για την (2) $\sum_r \widehat{f}(r)\overline{\widehat{g}(r)} = \sum_r \sum_s f * g(s)\omega^{-rs} = Nf * g(0) = N\sum_s f(s)\overline{g(s)}$.

Μια ιδιότητα που μας ενδιαφέρει σημαντικά είναι η ακόλουθη :

Λήμμα 5.1.2. *Έστω f, g συναρτήσεις από το $\mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$. Τότε*

$$\sum_r |\widehat{f}(r)|^2|\overline{\widehat{g}(r)}|^2 = N\sum_t |\sum_s f(s)\overline{g(s-t)}|^2.$$

Απόδειξη. Από τις ιδιότητες (1),(2) έχω

$$\begin{aligned}\sum_r |\widehat{f}(r)|^2|\overline{\widehat{g}(r)}|^2 &= \sum_r |(f*g)\widehat{\ }(r)|^2\\ &= \sum_t |f*g(t)|^2\\ &= N\sum_{t,s,u} f(s)\overline{g(s-t)f(u)}g(u-t)\\ &= N\sum_t |\sum_s f(s)\overline{g(s-t)}|^2\end{aligned} \tag{5}$$

□

Αν θέσουμε $f = g$ στην (5) παίρνουμε την ακόλουθη ενδιαφέρουσα ταυτότητα

$$\sum_r |\widehat{f}(r)|^4 = N\sum_{\alpha-b=c-d} f(\alpha)\overline{f(b)f(c)}f(d) \tag{6}$$

Τέτοια αθροίσματα, όπως στην παραπάνω ιδιότητα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαραστήσουν δομές μέσα σε υποσύνολα του $\mathbb{Z}_N$. Για να το καταλάβουμε αυτό, ας θεωρήσουμε στην (6), ότι δοθέντος ενός υποσυνόλου $\mathbb{Z}_N$ πυκνότητας δ , τότε για την χαρακτηριστική του συνάρτηση A η (6) θα δίνει ότι :

$$\sum_r |\widehat{A}(r)|^4 = \sharp \text{ των τετράδων } (\alpha, b, c, d) \in A^4 \text{ τέτοιες ώστε } \alpha - b = c - d \ .$$

Από δω και στο εξής λοιπόν θα αναφερόμαστε μόνο σε υποσύνολα $A \subset \mathbb{Z}_N$ πληθικότητας δN (ή πυκνότητας δ).

Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι πιο βολικό να χρησιμοποιούμε αντί για την χαρακτηριστική συνάρτηση του A, την balanced function.

Ορισμός 5.1.3. *Ορίζουμε σαν balanced function του A, πληθικότητας δN ,να είναι* $f_A : \mathbb{Z}^N \to [-1,1]$ *όπου*

$$f_A(s) = 1 - \delta \text{ αν } s \in A \text{ και } -\delta \text{ αλλιώς.}$$

Παρατηρούμε ότι $\sum_{s\in\mathbb{Z}_N} f_A(s) = \widehat{f}_A(0) = 0$ και ότι $\widehat{f}_A(r) = \widehat{A}(r)$ για $r \neq 0$.

Είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε την έννοια της pseudo-randomness. Εδώ θυμηθείτε την αντιστοιχία με το θεώρημα 4.4.1.

Λήμμα 5.1.4. *Έστω f συνάρτηση από το* $\mathbb{Z}_N$ *στο* D *. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα. :*

i) $\sum_k |\sum_s f(s)\overline{f(s-k)}|^2 \leqslant c_1 N^3$.

ii) $\sum_{\alpha-b=c-d} f(\alpha)\overline{f(b)f(c)}f(d) \leqslant c_1 N^3$

iii) $\sum_r |\widehat{f}(r)|^4 \leqslant c_1 N^4$.

iv) $max_r|\widehat{f}(r)| \leqslant c_2 N$.

v) $\sum_k |\sum_s f(s)\overline{g(s-k)}|^2 \leqslant c_3 N^2 \|g\|_2^2$ *για κάθε συνάρτηση* $g : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$.

Απόδειξη. Το i συνεπάγεται το ii(αν αναπτύξουμε το αριστερό μέλος της i). Το i συνεπάγεται το iii από την ταυτότητα (6). Το iii συνεπάγεται το iv για $c_2 \geqslant c_1^{1/4}$. Το iv συνεπάγεται το iii, αφού ισχύει ότι $\sum_r |\widehat{f}(r)|^4 \leqslant max_r|\widehat{f}(r)|^2 \sum_r |\widehat{f}(r)|^2 \leqslant N^2 max_r|\widehat{f}(r)|^2$. Επιπλέον αν $c_1 \geqslant c_3$, το v συνεπάγεται το i. Αυτό που απομένει είναι να δείξουμε ότι το iii συνεπάγεται το iv.
Από λήμμα 4.6.2 έχουμε ότι

$$N^{-1}\sum_r |\widehat{f}(r)|^2|\widehat{g}(r)^2|^2 \leqslant N^{-1}\left(\sum_r |\widehat{f}(r)|^4\right)^{1/2}\left(\sum_r |\widehat{g}(r)|^4\right)^{1/2} .$$

,από ανισότητα Cauchy - Schwarz. Επιπλέον αφού $\left(\sum_r |\widehat{g}(r)|^4\right)^{1/2} \leqslant \sum_r |\widehat{g}(r)|^2$, έχω τελικά ότι το iii συνεπάγεται το iv,αν $c_3 \geqslant c_1^{1/2}$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Με βάση το παραπάνω λήμμα είναι εύλογο να δώσουμε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 5.1.5. *Μια συνάρτηση* $f : \mathbb{Z}_N \to D$ *καλείται* $\alpha - quasirandom$ *αν ικανοποιεί την ιδιότητα* i *του παραπάνω λήμματος για* $c_1 = \alpha$.

Ορισμός 5.1.6. *Αν* f_A *είναι η balanced συνάρτηση ενός υποσυνόλου* $A \subset \mathbb{Z}_N$ *,πληθικότητας* δN *είναι* $\alpha - quasirandom$*, τότε καλούμε το σύνολο* A $\alpha - quasirandom$.

Όπως και στην $\epsilon - regularity$ που δείχνει πόσο κοντά ένα γράφημα μπορεί να προσεγγίσει ένα τυχαίο γράφημα(σαν οι ακμές δηλαδή να είχαν τραβηχτεί τυχαία μεταξύ δύο συνόλων κορυφών) , έτσι και η $\alpha - quasirandomness$ δείχνει για ένα σύνολο A ,πόσο κοντά είναι στο να είναι τυχαίο. Για παράδειγμα το $\sum_r |\widehat{A}(r)|^4$ είναι N φορές ο αριθμός των τετράδων $(\alpha, b, c, d \in A^4)$ τέτοιες ώστε $\alpha - b = c - d$. Αν το A ήταν τυχαίο και πυκνότητας δ , τότε ο αριθμός των τετράδων θα ήταν περίπου $\delta^4 N^3 = N^{-1}|A|^4$. Συνεπώς το α μετράει πόσο κοντά ένα σύνολο A, είναι στο να είναι τυχαίο.

5.2 Το θεώρημα των Green - Tao για τους πρώτους αριθμούς

Το θέωρημα των Green - Tao ακολουθεί την φιλοσοφία του θεώρηματος του Szemerédi για τους πρώτους αριθμούς και ισχυρίζεται ότι οι πρώτοι αριθμοί περιέχουν τυχαία μεγάλες αριθμητικές προόδους.
Παρακάτω παραθέτουμε μια διαφορετική εκδοχή του θεωρήματος. Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{P}$ το σύνολο των πρώτων αριθμών.

Θεώρημα 5.2.1. *Θα λέμε ότι ένα* $I \subset \mathbb{N}$ *είναι* (k, δ) *- Szemerédi , αν κάθε υποσύνολο* $J \subset I$ *με* $|J| \geq \delta |I|$ *περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους* k *. Τότε το* $\mathbb{P} \cap \{1, \ldots, N\}$ *είναι* (k, δ) *- Szemerédi.*

Το θεώρημα του Szemerédi επαναδιατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 5.2.2. *Έστω* $v_{const} : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ *η σταθερή συνάρτηση* $v_{const} \equiv 1$ *. Έστω* $0 < \delta \leqslant 1$ *και* $k \geqslant 1$ *σταθερά. Έστω* N *μεγάλος ακέραιος και* $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$ *μια μη αρνητική συνάρτηση με*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant v_{const}(x) \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{Z}_N \ ,$$

και

$$\mathbb{E}(f(x)|x \in \mathbb{Z}_N) \geqslant \delta \ .$$

Τότε έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(f(x)f(x+r)\dots f(x+(k-1)r)|x, r \in \mathbb{Z}_N) \geqslant c(k,\delta) - o_{k,\delta}(1)$$

για κάποια σταθερά $c(k,\delta) > 0$ *που δεν εξαρτάται από την* f *ή το* N *.*

Εισάγουν την έννοια του μέτρου. Για $\nu : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}^+$, ορίζουν το ν σαν μέτρο αν

$$\mathbb{E}(\nu) = 1 + o(1) \ .$$

Η συλλογιστική τους είναι να ορίσουν μέτρα ν τα οποία να είναι ψευδοτυχαία. Στην συνέχεια χρησιμοποιούν μια αρχή της μεταφοράς η οποία πολύ χοντρικά αναφέρει ότι δομές που δεν μπορούν να ελεγχθούν με βάση pseudo-random συναρτήσεις, μπορούν να ελεγχθούν από pseudo-random μέτρα όπως το παραπάνω. Στην συνέχεια με βάση τα εργαλεία της ανάλυσης Fourier που χρησιμοποιήθηκαν κυρίως στο [Gow01] αποδεικνύουν ότι όντως υποσύνολα των πρώτων αριθμών με θετική σχετική πυκνότητα περιέχουν τυχαίες αριθμητικές προόδους.

Κεφάλαιο 6

Παράρτημα

6.1 Το θεώρημα Hales - Jewett

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να διατυπώσουμε το θεώρημα Hales Jewett. Ας ξεκινήσουμε με κάποιους ορισμούς.

Με $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$ θα εννοούμε τους φυσικούς αριθμούς.
Ένα αλφάβητο A είναι ένα πεπερασμένο και μη κενό υποσύνολο. Για παράδειγμα ένα αλφάβητο μπορεί να είναι το $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.
Ονομάζουμε γράμματα τα στοιχεία του αλφαβήτου. Με A^N , όπου $N \in \mathbb{N}$, συμβολίζουμε όλες τις ακολουθίες γραμμάτων με μήκος N . Δηλαδή με A^N εννοούμε το σύνολο της μορφής $\{(\alpha_j)_{j=1}^N : \alpha_j \in A, 1 \leq j \leq N\}$.
Με $W(A)$ συμβολίζουμε όλες τις πεπερασμένες ακολουθίες στοιχείων του A συμπεριλαμβανομένης της κενής. Κάθε στοιχείο του $W(A)$ λέγεται σταθερή λέξη.
Τώρα, θεωρούμε σαν αλφάβητο το $A \cup \{x\}$ όπου x ονομάζεται μεταβλητή και $x \notin A$. Θα συμβολίζουμε με $V(A)$ το σύνολο των μεταβλητών λέξεων δηλαδή το σύνολο $V(A) = W(A \cup \{x\}) \setminus W(A)$. Κάθε στοιχείο του $V(A)$ καλείται μεταβλητή λέξη και θα συμβολίζεται με $w(x)$. Το μήκος μιας σταθερής ή μεταβλητής λέξης w θα συμβολίζεται με $|w|$ και με $w(i)$ με $1 \leq i \leq |w|$ θα συμβολίζουμε την i συντεταγμένη της λέξης.

Έστω τώρα μια μεταβλητή λέξη $w(x)$ και $\alpha \in A$. Με $w(\alpha)$ θα συμβολίζουμε την σταθερή λέξη που προκύπτει με αντικατάσταση της x από την α . Το σύνολο $\{w(\alpha) : \alpha \in W(\alpha)\}$ ονομάζεται combinatorial line.
Έστω τώρα $d \in \mathbb{N}$ και $w_1(x), \ldots, w_d(x)$ μεταβλητές λέξεις. Τότε το σύνολο

$$\{w_1(\alpha_1)^\frown \ldots ^\frown w_d(\alpha_d) : \alpha_i \in A, ; 1 \leq i \leq d\}$$

ονομάζεται combinatorial d - χώρος.

Αν $n \in \mathbb{N}$ και $w_1, \ldots, w_n$ μεταβλητές λέξεις, τότε ορίζουμε σαν σταθερό και μεταβλητό span τα ακόλουθα

$$< w_1(x), ..., w_n(x) >_{W(A)} = \{w_1(a_1)^\frown ... ^\frown w_n(a_n) : (a_1, ..., a_n) \in W(A)\}$$
$$< w_1(x), ..., w_n(x) >_{V(A)} = \{w_1(a_1)^\frown ... ^\frown w_n(a_n) : (a_1, ..., a_n) \in V(A)\}.$$

Το πλήρες span των $w_1(x), \ldots, w_n(x)$ είναι το σύνολο

$$\bigcup_{i=1}^{n} < w_1(x), ..., w_i(x) >_{W(A)} .$$

Ονομάζουμε χρωματισμό ενός μη κενού συνόλου X μια απεικόνιση $c : X \to [r]$, όπου $r \in \mathbb{N}$ και $[r] = \{1, \ldots, r\}$.Ένα σύνολο $Y \subseteq X$ θα ονομάζεται μονοχρωματικό αν υπάρχει $i \in [r]$ τέτοιο ώστε $Y \subseteq c^{-1}(\{i\})$.

Το θεώρημα Hales Jewett διατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 6.1.1. *(Hales - Jewett) Για κάθε $k \leq 1, r \leq 1$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $N = N(k, r)$ τέτοιος ώστε για κάθε $c : A^N \to [r]$ υπάρχει μονοχρωματική combinatorial line.*

Το πολυδιάστατο θεώρημα Hales Jewett διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 6.1.2. *Έστω $d, k, r \leq 1$. Τότε υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $N = N(d, k, r)$ τέτοιος ώστε , για κάθε $w_1, \ldots, w_N(x)$ μεταβλητές λέξεις και για κάθε $c :< w_1(x), \ldots, w_N(x) >_{W(A)} \to [r]$ υπάρχουν $t_1(x), \ldots, t_d(x)$ μεταβλητές λέξεις, με $(t_1(x), \ldots, t_d(x)) \leq (w_1(x), \ldots, w_N(x))$ τέτοιες ώστε το σύνολο $< t_1(x), \ldots, t_d(x) >_{W(A)}$ είναι μονοχρωματικό.*

Bibliography

[CG90] F. R. K. Chung and R. L. Graham. Quasi-random hypergraphs. Random Structures and Algorithms, 1:105–124, 1990.

[CG92] F. R. K. Chung and R. L. Graham. Quasi-random subsets of $\mathbb{Z}_n$. J. Comb. Th. A, 61:64–86, 1992.

[Con] D. Conlon. Online notes on extremal graph theory.

[Die05] R. Diestel. Graph Theory. Springer Verlag, 2005.

[dW27] B. L. Van der Waerden. Beweis einer baudetschen vermutung. Nieuw Archief voor Wiskunde, 15:441–452, 1927.

[ET36] P. Erdös and P. Turán. On some sequences of integers. J. Lond. Math. Soc, 11:261–264, 1936.

[FK78] H. Furstenberg and Y. Katznelson. An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations. J. Analyse Math, 34:275–291, 1978.

[FK91] H. Furstenberg and Y. Katznelson. A density version of the Hales-Jewett theorem. J. Analyse Math, 57:64–119, 1991.

[FR92] P. Frankl and V. Ródl. The uniformity lemma for hypergraphs. Graphs Combin., 8:309–312, 1992.

[Gow98] W. T. Gowers. A new proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four. Geom. Funct. Anal., 8:529–551, 1998.

[Gow01] W. T. Gowers. A new proof of Szemerédi's theorem. Geom. Funct. Anal., 11:465–588, 2001.

[Gow06] W. T. Gowers. Quasirandomness, counting and regularity for 3-uniform hypergraphs. Comb. Probab. Comput., 15(1-2):143–184, January 2006.

[Gre] B. Green. Speech at the Workshop on Pseudorandomness in Mathematical Structures, IAS, Princeton.

[GRS90] R.L. Graham, B.L. Rothschild, and J.H. Spencer. Ramsey Theory. Wiley Interscience, 2nd edition, 1990.

[GT08] B. Green and T. Tao. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. Annals of Mathematics, 167:481–5471, 2008.

[KSMS02] J. Komlós, A. Shokoufandeh, M.Simonovits, and E. Szemerédi. The regularity lemma and its applications in graph theory. Theoretical Apects of Computer Science, 2002.

[Rot53] K.F. Roth. On certain sets of integers. J. London Math. Soc, 28:245–252, 1953.

[RS78] I. Ruzsa and E. Szemerédi. Triple systems with no six points carrying three triangles. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, 18:939–945, 1978.

[She88] S. Shelah. Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers. J. Amer. Math. Soc, 1:683–697, 1988.

[Sol03] J. Solymosi. Note on a generalization of Roth's theorem. Discrete and Computational Geometry, 25:825–827, 2003.

[Sze69] E. Szemerédi. On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression. Acta Math, 27:299–345, 1969.

[Sze75] E. Szemerédi. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. Acta Arith., 27:155–158, 1975.

[Sze76] E. Szemerédi. Regular partitions of graphs. In Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes, pages 399–401, Orsay, 1976. Colloques Internationaux C.N.R.S.

[Tao06] T. Tao. Szemerédi's regularity lemma revisited. Contrib. Discrete Math, 1:8–28, 2006.

[Tur41] P. Turán. On an extremal problem in graph theory(in hungarian). Matematikai és Fizikai Lapok, 48:436–452, 1941.

[TV06] T. Tao and V. Vu. Additive Combinatorics. Cambridge University Press, 2006.