



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ  
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

## Μελέτη Εγκεφαλικής Δραστηριότητας Παρατηρητών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παναγιώτα Δ. Σκουρουμούνη

**Επιβλέπων :** Γεώργιος Κ. Ματσόπουλος  
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2013





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ  
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

## Μελέτη Εγκεφαλικής Δραστηριότητας Παρατηρητών

### ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παναγιώτα Δ. Σκουρουμούνη

**Επιβλέπων :** Γεώργιος Κ. Ματσόπουλος  
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 4<sup>η</sup> Ιουλίου 2013.

.....  
Γεώργιος Ματσόπουλος  
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Νικόλαος Ουζούνογλου  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Δημήτριος Κουτσούρης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2013

.....  
Παναγιώτα Δ. Σκουρουμούνη

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Παναγιώτα Δ. Σκουρουμούνη, 2013.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## Περίληψη

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη μεθόδου κατηγοριοποίησης σημάτων από εγκεφαλογραφήματα, προκειμένου να εξεταστεί κατά πόσο είναι δυνατόν δοθέντος ενός εγκεφαλογραφήματος να γίνεται κατηγοριοποίηση παρατηρήσεων. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν εγκεφαλογραφήματα από 16 άτομα, τα οποία περιείχαν σήματα από τα 47 ηλεκτρόδια που είχαν τοποθετηθεί σε συγκεκριμένα μέρη του κρανίου.

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε για την βελτίωση της απόδοσης του κατηγοριοποιητή, χρησιμοποιήθηκε και η μέθοδος επιλογής χαρακτηριστικών Σειριακής Εμπρόσθιας Μεταβλητής Επιλογής (SFFS) προκειμένου να αφαιρεθούν πλεονάζοντα χαρακτηριστικά των δεδομένων. Στην συνέχεια χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος επιβλεπόμενης μάθησης SVM (η Μηχανή Διανυσμάτων Υποστήριξης) για την κατηγοριοποίηση των δεδομένων. Η επιλογή των χαρακτηριστικών με την χρήση του αλγορίθμου SFFS, βελτίωσε την απόδοση του κατηγοριοποιητή δίνοντας ποσοστό επιτυχίας 87,5%, χρησιμοποιώντας γραμμικό και multilayer perceptron πυρήνα.

## Λέξεις Κλειδιά

Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα, Προκλητά Δυναμικά, ERN, Επιλογή Χαρακτηριστικών, SFFS, Κατηγοριοποίηση, Μηχανή Διανυσμάτων Υποστήριξης (SVM)

## **Abstract**

The scope of this thesis was the development of a classification method based on evoked potentials in order to discriminate observations from correct or wrong actions. For this purpose, EEGs of 16 people, which contained 47 signals from the electrodes, were placed in specific parts of the skull.

Specifically, to improve the performance of the classifier and to remove redundant data attributes, the selection method of features Serial anterior Variable Selection (SFFS) was used. Then, the supervised learning algorithm SVM (Support Vector Engine) was used to classify the data. The selection of the characteristics using the algorithm SFFS, improved the performance of the classifier to yield a success rate of 87.5%, using a linear and multilayer perceptron kernel.

## **Key Words**

EEG, Evoked Potentials (EP), Error Related Negativity (ERN), Feature selection, SFFS, Classification, Support Vector Machine (SVM)

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Δημήτρη και Ελισάβετ, για την στήριξή τους, αλλά και τον επιβλέποντα Επίκουρο Καθηγητή Δρ. Γεώργιο Ματσόπουλο καθώς και τον Καθηγητή Εφαρμογών Δρ. Παντελεήμονα Ασβεστά, από το Τμήμα Μηχανκών Βιοϊατρικής Τεχνολογίας Τ.Ε. του ΤΕΙ Αθηνών, για τη συμβολή τους. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα αδέρφια μου και τους φίλους μου, που με στήριξαν και με βοήθησαν, ο καθένας με τον δικό του τρόπο.

## Περιεχόμενα

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	9
1.1. Σκοπός.....	9
1.2. Διάρθρωση.....	9
2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ.....	10
2.1. Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα.....	10
2.2. ΠΡΟΚΛΗΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ.....	12
2.3. Αρνητική Κορύφωση σχετιζόμενη με σφάλμα .....	13
3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ.....	16
3.1. Υπολογισμός Χαρακτηριστικών.....	17
3.2. Επιλογή Χαρακτηριστικών.....	20
3.2.1. Σειριακή Εμπρόσθια Μεταβλητή Επιλογή.....	21
3.3. Ταξινόμηση.....	24
3.3.1. Επιβλεπόμενη Μάθηση.....	24
3.3.1.1. Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα.....	26
3.3.1.2. Μηχανή Διανυσμάτων Υποστήριξης.....	41
3.3.1.3. Αλγόριθμος k-Κοντινότερων Γειτόνων.....	56
3.3.2. Μη επιβλεπόμενη μάθηση.....	65
3.3.2.1. Χάρτες Αυτο-Οργάνωσης.....	66
3.3.2.2. Ασαφής C-Μέσος.....	75
4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	81
4.1. Δεδομένα .....	81
4.2. Παρουσίαση Αποτελεσμάτων .....	88
5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ.....	96
5.1. Συμπεράσματα Αποτελεσμάτων.....	96
3.1. Επεκτάσεις.....	97
 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....	 98



# 1. Εισαγωγή

## 1.1 Σκοπός

Η λήψη αποφάσεων ήταν ανέκαθεν ένα δύσκολο ζήτημα, αποτέλεσμα σύνθετων διαδικασιών του εγκεφάλου. Τα τελευταία, χρόνια συστήματα υποστήριξης απόφασης (decision support systems) χρησιμοποιούνται σε διάφορους τομείς της καθημερινότητας για την διευκόλυνση μας. Τα συστήματα αυτά εκπαιδεύονται και ελέγχονται με αναλυτικές μεθόδους, για διαφορετικές συνθήκες. Αξιοσημείωτη είναι η εφαρμογή τους στο πεδίο της Ιατρικής, με ποικίλους τρόπους οι οποίοι έχουν βοηθήσει στην εξέλιξη της διάγνωσης διαφόρων ασθενειών.

Ειδικότερα, στο τομέα της Ψυχιατρικής και της Ψυχολογίας, μελετώντας τα προκλητά δυναμικά μπορούμε να αντλήσουμε πολλές πληροφορίες για τις γνωσιακές διαδικασίες του εγκεφάλου, την νοητική επεξεργασία εξωτερικών ερεθισμάτων, την εγρήγορση των αισθητήριων μέσων του ασθενούς, και όλα αυτά χρησιμοποιώντας σήματα από εγκεφαλογραφήματα..

Έχοντας υπόψιν τα πιο πάνω, δημιουργήθηκε η ιδέα για την ανάπτυξη ενός συστήματος αυτόματης αναγνώρισης προκλητών δυναμικών ατόμων που παρατηρούν τις ενέργειες τρίτου ατόμου (actor). Αυτό το σύστημα θα μπορεί να έχει εφαρμογή στο πεδίο της Ψυχιατρικής, για την μελέτη και την κατανόηση των εγκεφαλικών διεργασιών κατά την διάρκεια που ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται λάθος απόφαση του χρήστη καθώς και στο πεδίο της Ψυχολογίας σε εφαρμογές συνδυασμένης δράσης.

## 1.2 Διάρθρωση

Στο κεφάλαιο 2 αναλύεται το θεωρητικό υπόβαθρο της μελέτης κάνοντας αναφορά στα ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα, τα προκλητά δυναμικά και την αρνητική κορύφωση σχετιζόμενη με σφάλμα.

Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναλύεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την εκπόνηση του συστήματος αναγνώρισης, με ειδική αναφορά στις μεθόδους επιλογής δεδομένων και στους αλγόριθμους ταξινόμησης.

Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρατίθενται τα χαρακτηριστικά που υπολογίστηκαν και επιλέχθηκαν, και τα αποτελέσματα του συστήματος, τόσο με την χρήση της σειριακής εμπρόσθιας μεταβλητής επιλογής, όσο και χωρίς την χρήση της.

Στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναλύονται τα συμπεράσματα από τα αποτελέσματα και σημειώνονται μελλοντικές επεκτάσεις του συστήματος.

## 2. Θεωρητικό υπόβαθρο

Ένα σημαντικό μέρος στην διαδικασία εκμάθησης στον άνθρωπο γίνεται μέσα από την παρατήρηση του περιβάλλοντος του. Η συμπεριφορά του παρατηρητή μπορεί να επηρεαστεί άμεσα από τις θετικές ή αρνητικές συνέπειες που έχει ένα μοντέλο συμπεριφοράς, αφού κρίνει εάν τα χαρακτηριστικά του, όπως ταλέντο, εξυπνάδα, δύναμη, είναι επιθυμητά και το μιμείται. Επίσης σημαντικός παράγοντας είναι και το κατά πόσο η συμπεριφορά του μοντέλου επιβραβεύεται ή όχι.

Αποτελέσματα μελετών στην εκμάθηση μέσα από παρατήρηση έδειξαν ότι οι μηχανισμοί του εγκεφάλου που χρησιμοποιούνται κατά την διάρκειά της, είναι οι ίδιοι με αυτούς που χρησιμοποιούνται κατά την διάρκεια της πρακτικής εκμάθησης. Η επεξεργασία λάθους είναι από τους σημαντικότερους παράγοντες των μηχανισμών αυτών, αφού περιλαμβάνει τον εντοπισμό του λάθους, και την διαμόρφωση μελλοντικής αντίδρασης στο λάθος.

### 2.1 Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα

Το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα στηρίζεται στην καταγραφή των διαφορών δυναμικού, οι οποίες παρουσιάζονται σε σημεία της εξωτερικής δερματικής επιφάνειας του ανθρώπινου κεφαλιού. Τα δυναμικά τα οποία μετρούμε μεταξύ δύο ηλεκτροδίων στην εξωτερική δερματική επιφάνεια του κεφαλιού οφείλονται ουσιαστικά σε ρεύματα ιόντων διαμέσου της κυτταρικής μεμβράνης των νευρώνων που συμμετέχουν στην εγκεφαλική διεργασία. Τα ρεύματα αυτά διαχέονται στην περιοχή από τα σημεία δημιουργίας τους έως την εξωτερική δερματική επιφάνεια, διότι ο εγκεφαλικός ιστός, οι μήνιγγες, το κρανίο και το δέρμα, άγουν το ηλεκτρικό ρεύμα. Η παρεμβολή μεταξύ του ηλεκτροδίου και του εγκεφάλου ενός στρώματος πάχους 2-3 cm (δέρμα, κρανίο, σκληρά μήνιγγα) εξασθενεί το σήμα κατά 10 τουλάχιστον φορές. Ανακύπτει έτσι η απαίτηση ενίσχυσης των σημάτων αυτών, για καλύτερη απεικόνισή τους, καθώς και της πυκνότερης κάλυψης του κεφαλιού με απαγωγά ηλεκτρόδια για μεγαλύτερη ακρίβεια και εποπτεία της εγκεφαλικής λειτουργίας.

Η ενίσχυση και η καταγραφή αυτών των κυμάτων, που αντιπροσωπεύουν ένα άθροισμα ταυτόχρονων ηλεκτρικών αλλαγών πολλών εγκεφαλικών κυττάρων αποτελεί το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (ΗΕΓ), το οποίο περιλαμβάνει:

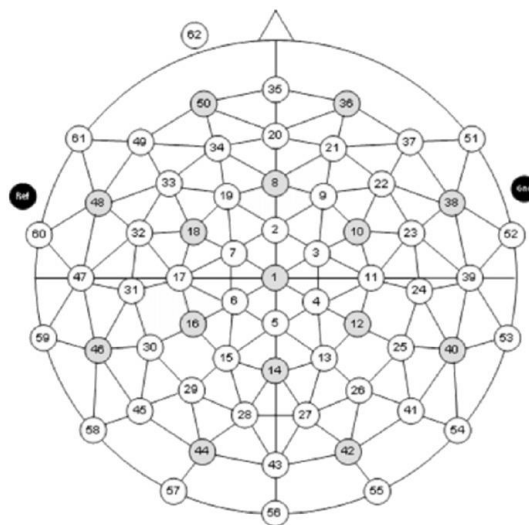
1. Τη λήψη του βιοδυναμικού – με επιφανειακά ηλεκτρόδια.
2. Επεξεργασία του σήματος– μετατροπή, ενίσχυση και φιλτράρισμα (0,1- 100Hz)
3. Καταγραφή του σήματος– απεικόνιση σε οθόνη και αποθήκευση σε κάποιο μέσο (δίσκο, ταινία, χαρτί)
4. Ανάλυση του σήματος - με οπτική ή υπολογιστική ανάλυση κατεγραμμένου ΗΕΓ

Το ΗΕΓ χρησιμοποιείται κυρίως για διάγνωση και ειδικότερα:

1. Βοηθά στην ανίχνευση και στον εντοπισμό εγκεφαλικών αλλοιώσεων ( ασυμμετρίες, ανωμαλίες στο ΗΕΓ).

2. Βοηθά στη μελέτη της επιληψίας.
3. Βοηθά στη διάγνωση νοητικών διαταραχών.
4. Βοηθά στη μελέτη των διαφόρων προτύπων ύπνου.
5. Επιτρέπει την παρατήρηση και ανάλυση αντιδράσεων του εγκεφάλου σε αισθητηριακά ερεθίσματα.

Το πρώτο στάδιο στην εξαγωγή των σημάτων του ΗΕΓ αποτελούν τα ηλεκτρόδια, οι αισθητήρες του συστήματος, οι οποίοι μετατρέπουν το ρεύμα ιόντων μέσα στο ανθρώπινο σώμα σε ρεύμα ηλεκτρονίων μέσα στα καλώδια, τα οποία μετά οδηγούν αυτό το ρεύμα σε επόμενα στάδια επεξεργασίας. Η επαφή τους με το δέρμα γίνεται μέσω μιας κολλώδους ουσίας ή μέσω ενός μικρού δακτυλιδιού, που από τη μία μεριά προσκολλάται στο δέρμα και από την άλλη στο κυρίως ηλεκτρόδιο.



Σχήμα 1: Αναπαράσταση της τοποθέτησης των ηλεκτροδίων

Για την επιλογή των θέσεων κάθε ηλεκτροδίου πάνω στο κρανίο έχουν δημιουργηθεί διάφορα πρότυπα, το δημοφιλέστερο εκ των οποίων είναι το Διεθνές Σύστημα 10 –20, το οποίο παρουσιάζεται στο σχήμα 1. Η ονομασία του συστήματος οφείλεται στην επιλογή του 20% της απόστασης μεταξύ των δύο αυτιών ως προς τον απόσταση ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε ηλεκτρόδια και επίσης στην επιλογή του 10% της αποστάσεως μεταξύ των δύο αυτιών ως προς την απόσταση από το αυτί στο κοντινότερο προς αυτό ηλεκτρόδιο του. Κατ' αυτόν τον τρόπο οι θέσεις των ηλεκτροδίων προσαρμόζονται ανάλογα με τις διαστάσεις του κρανίου του εξεταζομένου. Το κάθε σήμα το οποίο ενισχύεται στον ΗΕΓ είναι η διαφορά μεταξύ των δυναμικών που ανά πάσα στιγμή παρουσιάζουν δύο ηλεκτρόδια μεταξύ τους. Ηλεκτρόδια που βρίσκονται «πάνω» από εγκεφαλικές περιοχές, οι οποίες ενδεχομένως θα παρουσιάσουν δραστηριότητα, λέγεται ότι αντιστοιχούν σε ενεργά σημεία. Αντίθετα, ηλεκτρόδια τοποθετημένα πάνω σε περιοχές που θεωρείται ότι δεν έχουν σχέση με την εγκεφαλική δραστηριότητα, λέγεται ότι αντιστοιχούν σε ανενεργά σημεία. Τέτοια σημεία μπορεί να είναι τα μάτια, τα αυτιά, ο λαιμός κ.λπ. Τα σημεία αυτά λειτουργούν ως σημεία

αναφοράς του συστήματος και θα πρέπει να διατηρούν το δυναμικό τους σταθερό, ανεξάρτητα από την εγκεφαλική δραστηριότητα στην οποία υπόκεινται τα υπόλοιπα, ενεργά, σημεία. Η μέτρηση του δυναμικού μεταξύ ενός ενεργού και ενός ανενεργού σημείου ονομάζεται «μονοπολική» μέτρηση και χρησιμοποιείται συνηθέστερα σε περιπτώσεις ψυχοφυσιολογικής έρευνας. Επιζητείται με αυτόν τον τρόπο η απόκτηση μιας ολοκληρωμένης και ταυτόχρονης, από όλα τα ηλεκτρόδια, πληροφόρησης σχετικά με κάθε εγκεφαλικό ρεύμα ιόντων το οποίο φτάνει στην εξωτερική δερματική επιφάνεια του κεφαλιού.

Η χρήση του ΗΕΓ στη Νευρολογία είναι ευρύτατη, καθώς αποτελεί μια μέθοδο φθηνή, ανώδυνη και απλή στην εφαρμογή της. Από τη μελέτη του ΗΕΓ μπορούν να εξαχθούν εξαιρετικά χρήσιμα συμπεράσματα για τη σωστή εξέλιξη του Κεντρικού Νευρικού Συστήματος ενός ανθρώπου από τη γέννηση του μέχρι και την ενηλικίωση. Επίσης το ΗΕΓ μπορεί να δώσει χρήσιμα στοιχεία στην περίπτωση εγκεφαλοπαθειών (π.χ. νόσο Jacobs–Kreutzfeldt, Alzheimer), τόσο για τη βαρύτητα της νόσου όσο και για την υποβοήθηση της διάγνωσης και της πρόγνωσης.

## 2.2 Προκλητά δυναμικά

Τα Προκλητά Δυναμικά ( ERPs – Evoked Related Potentials ) είναι οι διαφορές δυναμικού που μετρούμε, συνήθως στη δερματική επιφάνεια του κεφαλιού, οι οποίες προκαλούνται ως προετοιμασία ή/και ως απόκριση του υποκειμένου, σε συγκεκριμένο γεγονός, το οποίο συμβαίνει είτε στον εξωτερικό φυσικό κόσμο είτε λαμβάνει χώρα ως ψυχολογική διαδικασία. Τα διακρίνουμε σε Προκλητά δυναμικά όταν το ερέθισμα προέρχεται από τον εξωτερικό κόσμο και σε Εκπεμπόμενα Δυναμικά όταν σχετίζονται με μία ψυχολογική διαδικασία. Τα προκλητά δυναμικά χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με το είδος του εξωτερικού ερεθίσματος που τα προκαλεί:

Α) Οπτικά προκλητά δυναμικά (VEP–Visual Evoked Potential-): Προκαλούνται από οπτικό ερέθισμα, όπως εμφάνιση μιας συγκεκριμένης εικόνας, αλλαγή χρωμάτων, λάμπεις κ. ά.

Β) Ακουστικά προκλητά δυναμικά (AEP – Auditory Evoked Potential-): Προκαλούνται από ακουστικό ερεθισμό, δηλαδή ήχους, λέξεις, τόνους διαφόρων συχνοτήτων και έντασης.

Γ) Σωματοαισθητικά προκλητά δυναμικά (SEP–Somatosensory Evoked Potential-): Προκαλούνται όταν ένα μικρής διάρκειας και έντασης ηλεκτρικό ρεύμα ερεθίσει κάποιο συγκεκριμένο νεύρο.

Επιπλέον, μπορούμε να χωρίσουμε τα Προκλητά Δυναμικά σε ενδογενή και εξωγενή. Τα εξωγενή σχετίζονται άμεσα με τη φύση του εκλυτικού ερεθίσματος δηλαδή την ένταση, τη συχνότητα του καθώς και με την ακεραιότητα των αισθητικών οδών. Τα ενδογενή Προκλητά Δυναμικά εξαρτώνται ουσιαστικά από την ψυχολογική κατάσταση του ατόμου και τα ψυχολογικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα του απλού ή περίπλοκου ερεθίσματος, π.χ. αν το ερέθισμα είναι γνωστό ή άγνωστο, αν προκαλεί δυσφορία ή ευχαρίστηση, αν είναι σημασιολογικά ορθό ή λάθος, ενδιαφέρον ή αδιάφορο κ.ο.κ. Ο λανθάνων χρόνος εμφάνισης τους σε σχέση με το εκλυτικό ερέθισμα βρίσκεται συνήθως ανάμεσα στα 100 και 500 msec.

### 2.3 Αρνητική Κορύφωση Σχετιζόμενη με Σφάλμα

Οι ηλεκτροεγκεφαλικοί μηχανισμοί και οι ψυχολογικές συσχετίσεις με την επεξεργασία λάθους έχουν μελετηθεί σε βάθος χρησιμοποιώντας την αρνητική κορύφωση σχετιζόμενη με σφάλμα (Error related negativity- ERN). Το ERN είναι αρνητικό σήμα, μέρος ενός προκλητού δυναμικού, το οποίο αποτελεί την ηλεκτρική δραστηριότητα του εγκεφάλου που μετριέται με ηλεκτροεγκαφαλογράφο, και εξαρτάται από ένα εξωτερικό συμβάν. Ισχυρά σήματα παρατηρούνται κατά τη διάρκεια εργασιών όταν γίνονται λανθασμένες επιλογές, ή και όταν ο συμμετέχων δεν είναι απόλυτα σίγουρος για την απάντησή του. Παρατηρείται αρνητική κορύφωση περίπου μετά από 50-100ms, από την στιγμή που γίνεται η λανθασμένη αντίδραση, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.

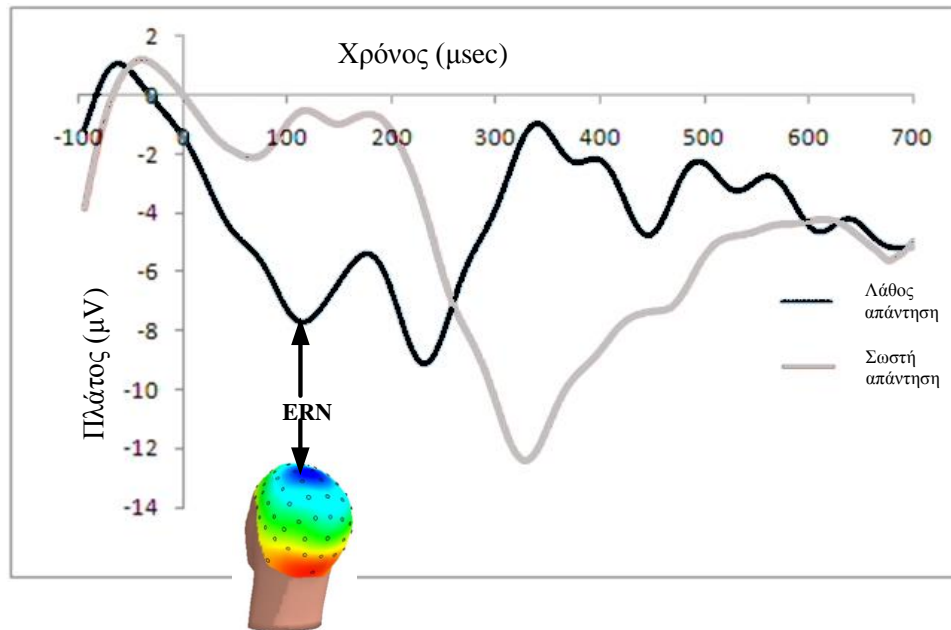
Το αρνητικό αυτό σήμα συχνά ακολουθείται από ένα θετικό σήμα, θετική κορύφωση σχετιζόμενη με σφάλμα (error related positivity-Pe), το οποίο μπορεί να εμφανιστεί 200-500 ms από την λανθασμένη αντίδραση. Ο ρόλος του Pe δεν έχει εξακριβωθεί ακόμη, αλλά φαίνεται να μειώνεται στα ασυνείδητα λάθη σε σχέση με τα λάθη που γνωρίζει ότι γίνονται. Ενώ τα ERN και Pe φαίνονται να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, και τα δύο υπάρχει η πιθανότητα να υποδείξουν αρνητικές παραβιάσεις των αναμενόμενων αποτελεσμάτων.

Βασιζόμενοι σε μαγνητοεγκεφαλογραφικές μελέτες και ενδοκρανιακές καταγραφές, αλλά και δεδομένα ασθενών, το ERN σχετίζεται με την δραστηριότητα στο πρόσθιο φλοιό προσαγωγίου του εγκεφάλου (anterior cingulate cortex –ACC).

Πολλά θεωρητικά αλλά και υπολογιστικά μοντέλα έχουν προταθεί για την επεξήγηση της παραγωγής των ERN. Σύμφωνα με μια θεωρία, το σήμα του ERN δημιουργείται όταν υπάρχει διαφορά στην αναπαράσταση της πραγματικής και της σωστής απόκρισης [M. Falkenstein, M.G. Coles, P.S. Bernstein]. Συγκεκριμένα το σήμα του ERN γίνεται εντονότερο καθώς η απόκλιση μεταξύ πραγματικής και σωστής απόκρισης μεγαλώνει, και αντίστοιχα το πλάτος του αυξάνεται όταν ο χρήστης είναι σίγουρος ότι έκανε λάθος (έστω και αν δεν έχει κάνει). Σύμφωνα με το μοντέλο ενίσχυτικής μάθησης (reinforcement learning model - RL-ERN) η παραγωγή του ERN συνδέεται με το μεσοεγκεφαλικό σύστημα ντοπαμίνης [C.B. Holroyd and M.G.H. Coles]. Η ντοπαμίνη είναι ένας νευροδιαβιβαστής, ένα χημικό μόριο που έχει την ιδιότητα να μεταφέρει μηνύματα από μια περιοχή του εγκεφάλου σε άλλη. Πράξεις που προκαλούν χαρά, ικανοποίηση αυξάνουν την έκκριση ντοπαμίνης, και έτσι το μοντέλο αυτό ισχυρίζεται ότι υπάρχει αύξηση στο σύστημα ντοπαμίνης όταν οι πράξεις έχουν καλύτερα αποτελέσματα από τα αναμενόμενα και αντίστοιχα το αντίθετο. Το ERN παράγεται στις λανθασμένες απαντήσεις, όταν η δραστηριότητα του μεσοεγκεφαλικού συστήματος ντοπαμίνης μειώνεται και ενεργοποιεί τους νευρώνες στο πρόσθιο φλοιό του εγκεφάλου για την επιλογή της καταλληλότερης αντίδρασης.

Το σήμα του ERN χρησιμοποιήθηκε και σαν ποσοτικός δείκτης της δραστηριότητας ACC σε πειράματα παρακολούθησης λαθών. Σε αυτά φαίνεται ότι υπάρχει δραστηριότητα στο μεσαίο μπροστινό λοβό ο οποίος εξαρτάται από την ορθότητα της δραστηριότητας του άλλου ατόμου που παρακολουθείται. Ο Van Schie ανακάλυψε ότι τα ERNs παράγονται όχι μόνο

όταν το άτομο του οποίου καταγράφουμε το ηλεκτοεγκεφαλογράφημα κάνει λάθος, αλλά και όταν παρακολουθεί κάποιο άλλο άτομο να κάνει λάθος, με μειωμένο πλάτος και μεγαλύτερη καθυστέρηση. Η κορυφή σε αυτή την περίπτωση συναντάται στα 250 ms μετά το λάθος, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.



Σχήμα 2: Παράδειγμα EP

Τα νευρομυϊκά κανάλια, που χρησιμοποιούνται από τον εγκέφαλο για να επικοινωνούν και να ελέγχουν το εξωτερικό περιβάλλον, μπορεί να αποκοπούν από ασθένειες, με κάποιες προϋποθέσεις, όπως βλάβη εγκεφάλου και νωτιαίου μυελού, εγκεφαλικό επεισόδιο του εγκεφαλικού στελέχους, μυϊκές δυστροφίες, αμυοτροφική πλευρική σκλήρυνση (ALS), εγκεφαλική παράλυση, πολλαπλή σκλήρυνση (MS). Ένας τρόπος που μπορεί να βοηθήσει τα άτομα με κινητικά προβλήματα είναι να δοθεί στον εγκέφαλο ένα κανάλι επικοινωνίας και ελέγχου που να μην είναι μυϊκό. Αυτό ονομάζεται Brain-Computer Interface (BCI)- διεπαφή εγκεφάλου με υπολογιστή, και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μεταφέρει μηνύματα και εντολές στο εξωτερικό περιβάλλον. Η εξέλιξη της τεχνολογίας δίνει τη δυνατότητα επεξεργασίας πολλών καναλιών ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων σε πραγματικό χρόνο, και έτσι υπάρχουν διάφορα πρότυπα για BCI συστήματα βασισμένα σε ΗΕΓ. Σε αυτά τα συστήματα τα μηνύματα και οι εντολές που θέλει να στείλει ο εγκέφαλος δεν ακολουθούν τη συνηθισμένη διαδικασία, αλλά κωδικοποιούνται σαν ηλεκτροεγκεφαλική δραστηριότητα. Αρκετές μελέτες έδειξαν συσχετίσεις μεταξύ των ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων και των νοητικών λειτουργιών, όπως και μεταξύ των πραγματικών και φανταστικών κινήσεων. Για παράδειγμα, τα σήματα που εκπέμπει ο εγκέφαλος όταν σκεφτόμαστε μια κίνηση ή μια εντολή που πρέπει να διαβιβαστεί σε BCI σύστημα, επεξεργάζονται και τα χαρακτηριστικά που σχετίζονται με την ενέργεια κωδικοποιούνται και διαβιβάζονται στο μηχάνημα που

υποστηρίζει το σύστημα. Έτσι ο χρήστης θα πρέπει να αναπτύξει ικανότητα να ελέγχει τα εγκεφαλικά σήματα που εκπέμπει, στα οποία βασίζεται η λειτουργία του BCI συστήματος. Ένα μεγάλο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν όσοι χρησιμοποιούν τέτοια συστήματα είναι η αδυναμία του συστήματος πολλές φορές να εντοπίσει τα σήματα που εκπέμπει ο χρήστης, λόγω του μικρού τους πλάτους και του θορύβου από εξωτερικούς παράγοντες. Το ERN μπορεί να βοηθήσει σημαντικά στην εφαρμογή του BCI συστήματος, αφού έχει αποδειχθεί ότι παράγεται ERN όταν γίνει λάθος από το σύστημα κατά τη διάρκεια της αναγνώρισης της πρόθεσης του χρήστη. Σε αυτή την περίπτωση, ο χρήστης δεν έκανε κάποιο λάθος, αλλά αντιλήφθηκε το λάθος του συστήματος και έδρασε σαν παρατηρητής. Το σήμα που παράγεται σε τέτοιες περιπτώσεις αναφέρεται ως “interaction ErrP”, παρουσιάζοντας την πρώτη θετική κορυφή περίπου 200 ms μετά την ανατροφοδότηση από το σύστημα. Αρνητική και θετική κορυφή εμφανίζονται αντίστοιχα περίπου 250 ms και 320 ms μετά και μια δεύτερη ευρύτερη αρνητική κορυφή περίπου 450 ms μετά. Με αυτό το σήμα που παράγει ο χρήστης παρατηρώντας το σύστημα BCI, μπορεί να ανιχνεύεται το λάθος από το εγκεφαλογράφημα και να διορθώνεται η αντίδραση του συστήματος, σε πραγματικό χρόνο.

Τα προκλητά δυναμικά διαφοροποιούνται από το πλάτος, την καθυστέρηση, την συχνότητά τους, τα οποία σχετίζονται με τις διαφορετικές πτυχές κάθε διαδικασίας, γι’ αυτό και είναι αναγκαία η ταξινόμησή τους. Στη μελέτη του Sveinsson, τα δεδομένα (προκλητά δυναμικά) πάρθηκαν από ασθενείς με χρόνια σχιζοφρένεια, και χρησιμοποιήθηκε νευρωνικό δίκτυο για την ταξινόμησή τους, ακρίβειας 90%. Στην μελέτη των Palaniappan και Paramesran για την ταξινόμηση αλκοολικών και μη, χρησιμοποιήθηκε γενετικός αλγόριθμος και ο ταξινομητής fuzzy ARTMAP με ακρίβεια 95,9%. Ένα σύστημα ταξινόμησης για τον διαχωρισμό ασθενών με κατάθλιψη από υγιείς, χρησιμοποίησε Μηχανή Διανυσμάτων Υποστήριξης (Support Vector Machines-SVM) με ακρίβεια 94%. Στην μελέτη του Wang, ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα ταξινομήθηκαν με τεχνητό νευρωνικό δίκτυο (artificial neural network-ANN). Τα χαρακτηριστικά εξάχθηκαν από τα HEG με ένα συνδυασμό αλγορίθμων χωρική ανάλυσης (spatial subspace decomposition) και διακριτής ανάλυσης Fisher (Fisher discriminant analysis), με ακρίβεια 84%.

Βάσει αυτών, η παρουσία ERPs στα υποκείμενα που είτε κάνουν λάθος, είτε παρατηρούν άλλα άτομα να κάνουν λάθος, δημιουργεί την ανάγκη ανάπτυξης συστημάτων ταξινόμησης. Ο βασικός σκοπός αυτών των συστημάτων είναι η διάκριση της σωστής από τη λανθασμένη απάντηση σε πραγματικό χρόνο, με δεδομένα τις καταγραφές ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων.

Η διαφοροποίηση μεταξύ των προκλητών δυναμικών ατόμων που παρατηρούν σωστές και λανθασμένες απαντήσεις άλλων ατόμων, ή διεπαφής, είναι ένα κίνητρο για την ανάπτυξη συστημάτων ταξινόμησης προκλητών δυναμικών για την διάκριση και ποσοτικοποίηση της αντίληψης των παρατηρητών, αλλά και για την διόρθωση των λανθασμένων απαντήσεων τεχνητών μέσων όπως το BCI. Τέτοια συστήματα θα μπορούν να υποδείξουν εάν ένας παρατηρητής μπορεί να αντιληφθεί τα λάθη που γίνονται από άλλα άτομα ή από συστήματα,

τα οποία θα μπορούν να βελτιωθούν για την καλύτερη τους λειτουργία με άτομα με κινησιακά προβλήματα.

### 3.Μεθοδολογία

Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε είχε στόχο την μελέτη των μηχανισμών του εγκεφάλου που ενεργοποιούνται κατά την παρακολούθηση σωστών ή λανθασμένων απαντήσεων άλλων ατόμων. Έτσι αναπτύχθηκε ένα υπολογιστικό σύστημα το οποίο επεξεργάζεται και αυτόματα ταξινομεί προκλητά δυναμικά, τα οποία πάρθηκαν κατά τη διάρκεια παρατηρήσεων, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.

#### A) Υπολογισμός Χαρακτηριστικών

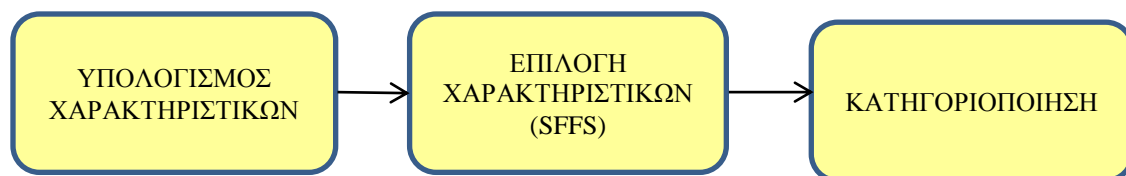
Για κάθε ένα από τα ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα έγινε ο υπολογισμός επτά χαρακτηριστικών, τα οποία θα βοηθήσουν στην καλύτερη και γρηγορότερη ταξινόμηση. Τα χαρακτηριστικά είναι: η μέγιστη τιμή (max), η ελάχιστη τιμή (min), η μέση τιμή (mean), η μεταβλητότητα (std-standard deviation), η κύρτωση (kurtosis), η ασυμμετρία (skewness) και η εντροπία του σήματος (entropy).

#### B) Επιλογή Χαρακτηριστικών

Για την επιλογή των καταλληλότερων χαρακτηριστικών χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος SFFS, ο οποίος είναι προέκταση του αλγορίθμου SFS.

#### Γ) Κατηγοριοποίηση

Βάσει των χαρακτηριστικών των σημάτων, τα οποία επιλέχτηκαν στο προηγούμενο βήμα, γίνεται η ταξινόμηση των ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων στις δύο κατηγορίες με τον αλγόριθμο Μηχανής Διανυσμάτων Υποστήριξης (SVM).



Σχήμα 3: Αρχιτεκτονική του συστήματος



### 3.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ-FEATURE EXTRACT

Τα δεδομένα, τα οποία πάρθηκαν από τα εγκεφαλογραφημάτων των 16 συμμετεχόντων του πειράματος περιέχουν τις τιμές των σημάτων από τα 47 ηλεκτρόδια τα οποία τοποθετήθηκαν στο κρανίο τους. Στους πιο κάτω πίνακες 1 και 2 φαίνεται η μέση τιμή για κάθε ηλεκτρόδιο τόσο για τις σωστές όσο και για τις λανθασμένες απαντήσεις.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
-1.56	0.48	-1.08	-0.44	1.49	1.22	-1.92	-1.61	-0.61	0.71	-0.48	-3.05	-0.09	1.88	2.08	1.81
-1.55	0.85	-0.80	0.26	1.59	1.15	-1.59	-1.58	-0.62	1.14	-0.75	-2.47	-0.15	1.64	2.07	1.48
-1.37	0.54	-1.00	-0.41	1.53	1.16	-1.81	-1.38	-0.43	1.22	-0.84	-2.75	-0.37	1.60	2.27	1.49
-1.26	0.24	-1.26	-0.98	0.93	1.00	-1.62	-1.39	-0.22	0.52	-0.90	-3.22	-0.87	1.67	2.67	1.95
-1.22	0.14	-1.42	-0.89	0.80	1.05	-1.60	-1.46	-0.01	-0.06	-0.74	-3.05	-0.55	2.18	2.13	2.16
-1.21	0.58	-0.87	-0.62	1.09	1.06	-1.74	-1.43	-0.38	-0.01	-0.68	-3.05	-0.40	2.04	2.04	2.14
-1.40	0.76	-0.73	0.05	1.37	1.12	-1.66	-1.44	-0.70	0.73	-0.58	-2.55	-0.19	1.61	1.98	1.81
-1.15	0.90	-0.41	0.42	1.40	0.71	-1.09	-1.26	-0.44	0.91	-0.60	-1.96	-0.27	0.80	1.90	1.15
-1.10	0.81	-0.57	0.18	1.37	1.01	-1.43	-1.14	-0.07	1.15	-0.60	-2.36	-0.31	1.04	1.87	0.96
-1.10	0.30	-0.74	-0.50	1.35	0.95	-1.75	-0.90	-0.32	1.50	-0.92	-2.49	-0.59	0.88	2.15	1.13
-0.93	0.25	-1.01	-1.07	1.01	0.72	-1.66	-0.91	-0.48	0.98	-1.16	-2.68	-0.92	0.53	2.77	1.58
-0.81	0.31	-1.01	-0.94	0.50	1.13	-0.88	-0.99	0.09	0.50	-1.25	-3.30	-1.10	1.19	3.09	2.08
-0.90	0.07	-1.79	-0.70	-0.28	1.44	-0.69	-1.13	0.36	-0.07	-1.57	-3.26	-0.96	1.80	2.70	2.31
-1.05	-0.30	-2.28	-0.78	-0.41	1.41	-1.19	-1.42	0.27	-0.36	-1.63	-2.66	-0.73	2.00	2.03	2.43
-0.14	0.58	-1.40	-0.77	-0.01	1.42	-1.40	-0.87	0.22	-0.42	-1.47	-2.88	-0.64	2.40	1.97	2.66
-0.39	1.01	-0.61	-0.75	0.58	1.14	-1.58	-0.73	-0.31	-0.45	-0.91	-2.85	-0.45	2.17	2.11	2.49
-0.85	0.88	-0.31	-0.47	1.07	0.82	-1.70	-0.83	-1.06	-0.26	-0.61	-2.62	-0.41	1.47	1.88	2.09
-1.09	0.70	-0.31	0.14	1.14	0.63	-1.27	-0.86	-1.12	0.54	-0.50	-1.98	-0.28	0.79	1.78	1.68
-1.13	0.92	-0.33	0.55	1.22	0.65	-0.96	-1.14	-0.52	0.96	-0.53	-1.83	-0.17	0.72	1.92	1.29
-0.67	0.49	-0.13	0.45	0.87	0.32	-0.46	-0.81	-0.09	0.57	-0.46	-1.19	-0.36	0.51	1.27	0.86
-0.72	0.32	-0.44	0.25	0.89	0.54	-0.67	-0.41	-0.10	0.41	-0.46	-1.33	-0.28	0.56	1.20	0.82
-0.85	-0.03	-0.45	0.30	1.22	0.88	-1.11	-0.28	-0.21	0.83	-0.50	-1.87	-0.39	0.30	1.17	0.46
-0.52	0.12	-0.24	-0.49	1.33	0.68	-1.16	-0.28	-0.92	1.21	-0.57	-1.64	-0.61	-0.12	1.69	0.69
-0.14	0.38	-0.24	-0.57	1.04	1.08	-0.90	-0.19	-0.37	1.33	-0.89	-2.03	-0.86	0.13	2.35	1.45
0.09	0.94	-0.21	-0.14	-0.04	1.58	0.12	-0.17	0.39	0.99	-1.25	-2.75	-0.84	1.13	3.08	2.21
-0.11	1.11	-1.03	-0.12	-0.93	2.49	1.21	-0.21	1.08	0.06	-1.75	-3.81	-0.93	2.49	3.19	2.58
-0.66	0.24	-2.96	-0.44	-1.15	2.51	0.20	-1.16	0.42	-0.12	-2.22	-2.55	-0.65	2.70	2.10	2.65
0.76	0.47	-2.22	-0.57	-1.07	2.70	-0.88	-0.24	0.73	-0.13	-2.25	-2.13	-0.35	3.42	1.64	2.97
1.51	1.54	-0.50	-0.29	-0.47	2.54	-0.77	0.67	0.81	-0.21	-1.61	-2.27	-0.34	3.45	2.11	3.19
0.89	1.74	0.03	-0.17	0.29	1.48	-1.01	0.31	0.02	0.00	-0.59	-1.87	-0.29	2.17	1.28	2.74
-0.02	1.02	0.24	-0.24	1.09	0.68	-1.13	0.01	-1.07	0.09	-0.20	-1.82	-0.59	1.16	1.40	1.96
-0.71	0.29	0.14	0.01	1.20	0.15	-1.02	-0.23	-0.98	0.13	-0.29	-1.61	-0.84	0.52	1.20	1.48
-0.59	0.27	-0.02	0.32	0.67	0.14	-0.44	-0.98	-0.15	0.53	-0.29	-1.58	-0.55	0.43	1.16	1.16
-0.56	0.62	0.05	0.45	0.74	0.33	-0.15	-0.71	0.12	0.52	-0.37	-1.24	-0.38	0.54	1.25	1.04
-0.20	0.04	-0.24	0.34	0.32	0.10	-0.16	-0.11	-0.15	0.10	0.08	-0.65	-0.48	0.02	0.68	0.25
-0.34	-0.10	-0.11	0.01	0.69	0.24	-0.85	-0.04	-0.55	0.84	-0.04	-1.22	-0.52	-0.19	0.89	0.44
0.21	0.32	0.28	0.00	0.63	0.34	-0.61	0.15	-1.21	1.65	-0.42	-0.66	-0.58	-0.42	1.43	0.72
1.09	1.20	0.67	0.74	0.23	1.67	0.06	0.89	0.52	1.70	-0.41	-0.84	-0.24	0.81	2.14	1.57
1.86	2.86	1.70	1.65	-0.73	3.22	2.31	1.75	2.25	0.63	-0.93	-1.36	-0.11	2.22	3.86	2.22
1.80	2.60	0.37	0.96	-0.51	3.83	2.19	0.60	2.53	0.35	-0.63	-0.95	0.25	2.86	2.93	3.54
1.75	1.30	-0.73	0.49	-0.41	3.72	0.87	0.49	1.97	0.15	0.12	0.40	0.90	2.90	1.66	3.50
2.72	2.82	1.43	0.36	-0.47	3.83	0.33	2.54	2.77	1.10	0.08	0.37	1.17	3.39	1.78	4.63
2.77	3.68	1.55	1.19	-0.41	2.88	0.10	2.44	1.62	1.14	0.86	0.35	0.93	3.07	1.72	4.09
1.35	1.90	1.06	0.68	0.17	1.01	0.02	1.24	0.11	0.75	1.27	-0.19	0.11	1.33	1.18	2.45

0.32	0.51	0.71	0.03	0.66	0.27	-0.53	0.35	-0.38	0.34	0.83	-1.02	-0.49	0.67	1.01	1.32
-0.26	-0.11	0.42	0.15	0.74	-0.3	-0.53	-0.52	-0.98	0.43	-0.06	-1.20	-1.06	0.55	0.71	0.99
-0.20	-0.18	0.28	0.00	0.23	0.04	-0.13	-0.50	-0.42	-0.11	-0.14	-1.00	-0.91	0.66	0.47	0.74

Πίνακας 1 : Η μέση τιμή κάθε ηλεκτροδίου για τις σωστές απαντήσεις, για τους 16 παρατηρητές.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
-2.54	-0.29	-1.94	-1.44	0.87	0.26	-0.43	-1.02	-4.19	-2.06	-2.37	-3.94	-1.68	2.22	-0.1	1.32
-2.56	0.09	-1.69	-0.64	1.00	0.44	-0.61	-1.30	-4.05	-1.60	-1.52	-3.56	-1.27	2.87	-0.4	1.00
-2.24	0.06	-1.61	-1.36	0.71	0.38	-0.40	-0.87	-4.00	-1.57	-2.09	-3.69	-1.57	2.30	0.28	1.13
-2.21	-0.04	-1.64	-1.95	0.00	0.29	-0.09	-0.40	-3.65	-1.98	-2.62	-4.28	-2.15	1.30	0.76	1.57
-2.18	-0.17	-2.02	-1.75	-0.17	0.33	-0.33	-0.59	-3.72	-2.04	-2.88	-4.10	-2.27	1.32	0.36	1.68
-1.98	0.09	-1.58	-1.52	0.33	0.40	-0.68	-0.56	-3.67	-1.98	-2.67	-3.86	-2.01	1.80	0.29	1.55
-2.18	0.01	-1.62	-1.00	0.86	0.36	-0.77	-1.14	-3.81	-1.93	-2.01	-3.40	-1.59	2.29	-0.1	1.20
-1.62	0.36	-1.17	0.04	0.59	0.46	-0.67	-1.48	-3.16	-1.08	-0.98	-2.76	-0.82	2.18	-0.6	0.81
-1.57	0.70	-1.21	-0.37	0.62	0.63	-0.56	-1.15	-3.53	-1.01	-0.99	-2.66	-1.09	2.31	-0.3	0.86
-1.75	0.29	-1.03	-1.29	0.37	0.45	-0.45	-0.67	-3.53	-0.95	-1.56	-3.17	-1.44	1.60	0.45	0.94
-1.81	0.30	-0.73	-1.99	0.05	0.24	-0.21	0.08	-3.12	-1.41	-2.28	-4.03	-2.07	0.44	1.10	1.36
-1.63	0.59	-1.00	-1.99	-0.82	0.59	0.19	0.44	-2.66	-1.89	-2.54	-4.42	-2.53	0.19	1.29	1.78
-1.74	0.37	-1.91	-1.63	-1.57	0.76	0.32	0.25	-2.24	-1.87	-2.86	-4.44	-2.26	0.54	1.15	1.85
-1.76	0.01	-2.55	-1.59	-1.70	0.64	0.03	-0.18	-2.49	-1.81	-3.18	-4.07	-2.11	0.74	0.61	1.76
-0.87	0.60	-1.77	-1.57	-1.22	0.78	-0.42	0.15	-2.34	-1.79	-3.18	-3.97	-2.11	1.31	0.71	1.98
-0.93	0.66	-1.24	-1.59	-0.19	0.70	-0.87	0.02	-2.75	-1.84	-2.86	-3.66	-2.08	1.57	0.67	1.82
-1.22	0.28	-1.14	-1.32	0.60	0.49	-1.21	-0.44	-3.21	-1.94	-2.25	-3.24	-1.97	1.53	0.43	1.38
-1.49	0.03	-1.21	-0.63	0.48	0.23	-1.01	-1.03	-3.41	-1.68	-1.67	-2.67	-1.60	1.46	-0.1	1.07
-1.63	0.28	-1.33	0.12	0.52	0.33	-0.85	-1.49	-3.02	-1.34	-1.26	-2.57	-1.04	2.15	-0.6	0.89
-1.10	-0.10	-0.85	0.41	0.17	0.55	-0.39	-1.45	-2.38	-0.83	-0.59	-1.89	-0.66	1.74	-0.7	0.72
-0.87	0.22	-0.89	0.08	0.13	0.66	-0.42	-2.14	-2.33	-0.58	-0.74	-1.85	-0.88	1.41	-0.5	0.67
-0.94	0.95	-0.68	-0.41	0.13	0.87	-0.70	-1.12	-2.82	-0.56	-0.93	-1.33	-1.23	0.83	0.05	0.59
-1.04	0.03	-0.17	-1.07	0.11	0.37	-0.50	-0.35	-2.34	-0.57	-1.24	-2.37	-1.48	0.05	0.54	0.67
-0.93	0.49	-0.17	-1.44	-0.26	0.58	0.04	0.83	-1.76	-0.49	-1.81	-3.04	-1.99	-0.25	0.98	1.36
-0.89	1.35	0.18	-1.36	-1.39	0.92	0.67	1.38	-1.25	-0.89	-2.05	-3.72	-2.04	0.13	1.56	1.92
-0.56	1.93	-0.60	-1.25	-2.54	1.58	1.62	1.17	-0.36	-1.47	-2.24	-4.61	-1.94	0.89	1.80	2.07
-1.31	1.15	-2.96	-1.23	-2.89	1.64	1.03	0.09	-0.99	-1.23	-2.82	-3.88	-1.81	1.18	1.11	1.73
-0.24	1.00	-2.23	-1.23	-2.66	1.89	0.00	0.77	-0.57	-1.23	-3.22	-3.47	-1.59	1.84	0.69	2.02
0.44	1.84	-0.66	-1.11	-1.84	1.79	-0.25	1.31	-0.54	-1.07	-3.02	-2.90	-1.60	2.04	0.88	2.42
0.39	1.76	-0.40	-1.12	-0.44	1.15	-0.85	0.73	-1.45	-1.31	-2.32	-2.55	-1.71	1.23	0.79	2.11
-0.35	0.38	-0.63	-0.95	0.15	0.55	-1.23	-0.31	-2.30	-1.35	-1.90	-2.07	-1.84	0.84	0.58	1.32
-0.69	-0.33	-0.70	-0.52	0.54	0.08	-1.08	-1.05	-3.09	-1.34	-1.43	-1.93	-1.90	0.46	0.15	0.96
-1.17	-0.40	-0.99	0.13	-0.01	0.72	-0.77	-1.64	-2.83	-1.22	-1.21	-2.02	-1.28	0.93	0.13	0.63
-1.14	-0.13	-1.03	0.51	-0.01	0.45	-0.67	-1.36	-1.87	-1.05	-0.76	-1.84	-0.81	1.33	-0.3	0.69
-0.51	0.02	-0.54	-0.24	-0.07	0.30	-0.13	-1.55	-1.61	-0.43	-0.57	-0.56	-1.02	0.13	-0.4	0.42
-0.84	-0.12	-0.29	-0.41	-0.01	0.18	-0.47	-0.86	-1.67	-0.44	-0.82	-0.94	-1.27	-0.26	0.19	0.29
-0.67	-0.22	0.34	-0.59	-0.04	-0.2	-0.63	0.49	-1.02	-0.66	-0.94	-1.44	-1.44	-0.28	0.55	0.60
0.29	1.79	1.19	-0.29	-0.86	0.56	0.42	1.92	0.05	0.33	-1.06	-1.57	-0.95	0.07	1.25	1.56
1.29	3.63	2.79	0.25	-2.25	2.00	2.16	3.08	1.65	-0.25	-1.25	-1.60	-0.40	1.16	2.46	2.03
1.26	3.33	1.29	-0.37	-1.98	3.04	2.28	1.47	2.70	0.10	-0.59	-1.45	-0.43	1.63	1.71	2.83
0.84	2.01	-0.40	0.03	-2.09	2.91	1.14	1.25	1.66	-0.19	0.27	-0.67	0.12	1.74	0.62	2.60
1.50	3.76	1.87	-0.01	-1.68	3.31	0.58	3.05	2.26	0.51	-0.37	-0.20	0.70	2.56	0.53	3.69
1.51	4.26	1.71	0.36	-1.03	2.06	0.02	2.66	1.08	1.19	-0.43	0.06	0.22	2.28	0.54	3.43
0.52	1.97	0.52	-0.21	-0.17	0.48	-0.61	0.81	-1.30	0.00	-0.20	-0.64	-0.99	0.92	0.90	1.95

-0.19	0.35	-0.30	-0.40	0.24	0.37	-1.12	-1.00	-2.62	-0.65	-1.10	-1.45	-1.75	0.60	0.37	1.05
-0.69	-0.72	-0.65	-0.04	-0.12	0.84	-0.92	-1.68	-2.39	-1.18	-1.34	-1.74	-1.74	0.14	0.00	0.66
-0.59	-0.50	-0.85	0.18	-0.09	0.13	-0.48	-1.56	-1.69	-0.92	-1.15	-1.62	-1.28	0.21	-0.3	0.40

Πίνακας 2 : Η μέση τιμή κάθε ηλεκτροδίου για τις λανθασμένες απαντήσεις, για τους 16 παρατηρητές

Για να μπορέσουμε να κατηγοροποιήσουμε τα δεδομένα αυτά, λόγω του μεγάλου όγκου τους, θα έπρεπε να υπολογίσουμε αρχικά κάποια χαρακτηριστικά των σημάτων, τα οποία στη συνέχεια θα αποτελέσουν είσοδο στον κατηγοροποιητή.

Για τον λόγο αυτό υπολογίσαμε για κάθε ένα σήμα

A) την μέγιστη τιμή (max)

B) την ελάχιστη τιμή (min)

Γ) την μέση τιμή (mean)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

Δ) την μεταβλητότητα (std-standard deviation) δηλαδή πόσο μεταβάλλονται οι τιμές του σήματος από την μέση τιμή,

$$s = \left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

E) την κύρτωση (kurtosis), δηλαδή το πως κατανέμονται οι τιμές κατά μήκος μιας γραφικής παράστασης, με μεγάλη κύρτωση να αναφέρεται σε κατανομή με εντονότερες κορυφές και μακρύτερες ουρές, ενώ μικρή κύρτωση αναφέρεται σε κατανομή με πιο στρογγυλοποιημένες κορυφές και κοντύτερες ουρές.

$$k = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} - 3 \quad (3)$$

Στ) την ασυμμετρία (skewness), δηλαδή πόσο ασύμμετρο είναι το σύστημα των δεδομένων μας σε σχέση με το μεσαίο σημείο, όσο απομακρύνεται από το μέσο μεγαλώνει, αρνητικά προς τα αριστερά και θετικά προς τα δεξιά.

$$\gamma = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

Z) την εντροπία του σήματος (entropy), δηλαδή το μέτρο αβεβαιότητας, το μέγεθος της τάξης-αταξίας των δεδομένων που παρατηρείται.

$$H(X) = \sum_{i=1}^n p_i \log_2 \left( \frac{1}{p_i} \right) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \quad (5)$$

### 3.2 ΕΠΙΛΟΓΗ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ-FEATURE SELECTION-SFFS

Η επιλογή των χαρακτηριστικών επηρεάζει άμεσα την ακρίβεια της ταξινόμησης που θα ακολουθήσει, καθώς επίσης και τον χρόνο εκτέλεσής της. Αυτό σημαίνει ότι τα χαρακτηριστικά αυτά θα καθορίσουν ουσιαστικά την ταξινόμηση και η παρουσία άσχετων στοιχείων θα αυξήσει τον χρόνο για την εκπαίδευση και τη δοκιμή του ταξινομητή. Οι δύο κλασσικοί και κυριότεροι αλγόριθμοι είναι η Σειριακή εμπρόσθια επιλογή και η Σειριακή επιλογή προς τα πίσω.

Στη Σειριακή εμπρόσθια επιλογή (SFS) το βέλτιστο σύνολο χαρακτηριστικών  $X_d$  με πληθικότητα  $d$  προκύπτει από ένα αρχικά κενό σύνολο  $X_0$  στο οποίο σταδιακά προστίθενται χαρακτηριστικά από το αρχικό σύνολο  $Y$  σύμφωνα με κάποιο μέτρο, ακολουθείται δηλαδή η στρατηγική «bottom up». Η διαδικασία επιλογής της SFS αποτελείται από τα παρακάτω βήματα:

1. *Ορίσε ένα κριτήριο διαχωρισιμότητας των κλάσεων  $C$*
2. *Υπολόγισε την τιμή του  $C$  για κάθε χαρακτηριστικό και*
3. *Επίλεξε το χαρακτηριστικό με την καλύτερη τιμή.*
4.  *$k = 2$*
5. *Σχημάτισε όλα τα πιθανά  $k$ -διάστατα διανύσματα που περιέχουν το διάνυσμα-νικητή που προέκυψε από το προηγούμενο βήμα*
6. *Υπολόγισε την τιμή του  $C$  για κάθε διάνυσμα του προηγούμενου βήματος*
7. *Επίλεξε το διάνυσμα με την καλύτερη τιμή*
8. *Αύξησε το  $k$  κατά 1 και συνέχισε στο βήμα 5 μέχρι  $k = d$*
9. *Το διάνυσμα που προκύπτει περιέχει τα στοιχεία του  $X_d$*

Στη γενική περίπτωση όπου το αρχικό σύνολο χαρακτηριστικών περιλαμβάνει  $m$  χαρακτηριστικά και μειώνεται σε ένα σύνολο  $d$  χαρακτηριστικών. Προφανώς η μέθοδος αυτή δεν υπακούει στην αρχή της βελτιστότητας αφού άπαξ και ένα στοιχείο του  $Y$  επιλεγθεί για το υποσύνολο δεν υπάρχει τρόπος να βγει ώστε να προκύψει κάποιος καλύτερος συνδιασμός. Η συμπεριφορά αυτή του αλγορίθμου αναφέρεται και ως φαινόμενο φωλιάσματος (nesting effect). Έτσι, προκειμένου να προκύψει ένα βέλτιστο υποσύνολο είναι απαραίτητο να προστεθεί ένας μηχανισμός επανεξέτασης όλων των στοιχείων του υποσυνόλου σε κάθε επανάληψη ώστε να αφαιρεθεί κάποιο αν αυτό κριθεί απαραίτητο.

Στη Σειριακή επιλογή προς τα πίσω (SBS) ακολουθείται παρόμοιος αλγόριθμος με το προηγούμενο, αλλά με αντίστροφη διαδικασία. Ξεκινώντας από το αρχικό σύνολο χαρακτηριστικών που διαθέτουμε, αφαιρείται κάθε φορά ένα χαρακτηριστικό έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το ποσοστό αναγνώρισης στο σύνολο που απομένει.

### 3.2.1 Σειριακή Εμπρόσθια Μεταβλητή Επιλογή (Sequential Forward Floating Selection, SFFS)

Η τεχνική της Σειριακής Εμπρόσθιας Μεταβλητής Επιλογής (Sequential Forward Floating Selection-SFFS) αποτελεί βελτιστοποίηση της τεχνικής Σειριακής Εμπρόσθιας Επιλογής (Sequential Forward Selection-SFS).

Πριν την φορμαλιστική διατύπωση του αλγορίθμου SFFS, πρέπει να δοθούν οι ακόλουθοι ορισμοί. Έστω  $X_k = \{x_i: 1 \leq i \leq k, x_i \in Y\}$  υποσύνολο  $k$  χαρακτηριστικών από το σύνολο  $Y = \{y_i: 1 \leq i \leq D\}$  των  $D$  διαθέσιμων χαρακτηριστικών. Η τιμή  $J(y_i)$  της συναρτησης-κριτηρίου επιλογής χαρακτηριστικών  $C$ , στην περίπτωση που χρησιμοποιείται μόνο το  $i$ -οστό χαρακτηριστικό  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, D$ , ονομάζεται ατομική σημαντικότητα (individual significance)  $S_0(y_i)$  του χαρακτηριστικού. Η σημαντικότητα  $S_{k-1}(x_j)$  του χαρακτηριστικού  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , στο σύνολο  $X_k$  ορίζεται ως

$$S_{k-1}(x_j) = J(X_k) - J(X_k - x_j) \quad (6)$$

Η σημαντικότητα  $S_{k+1}(f_j)$  του χαρακτηριστικού  $f_j$  του συνόλου  $Y - X_k = \{f_i: 1 \leq i \leq D - k, f_i \in Y, f_i \neq x_l \ \forall x_l \in X_k\}$  ως προς το σύνολο  $X_k$  ορίζεται ως

$$S_{k+1}(f_j) = J(X_k + f_j) - J(X_k) \quad (7)$$

Όπως είναι εμφανές, για  $k = 1$  ο όρος της σημαντικότητας του χαρακτηριστικού ενός συνόλου της σχέσης (6) συμπίπτει με την ατομική σημαντικότητα. Ένα χαρακτηριστικό  $x_j$  του συνόλου  $X_k$  ονομάζεται

(α) το σημαντικότερο (καλύτερο) χαρακτηριστικό στο σύνολο  $X_k$  εάν

$$S_{k-1}(x_j) = \max_{1 \leq i \leq k} S_{k-1}(x_i) \Rightarrow J(X_k - x_j) = \min_{1 \leq i \leq k} J(X_k - x_i) \quad (8)$$

(β) το λιγότερο σημαντικό (χειρότερο) χαρακτηριστικό στο σύνολο  $X_k$  εάν

$$S_{k-1}(x_j) = \min_{1 \leq i \leq k} S_{k-1}(x_i) \Rightarrow J(X_k - x_j) = \max_{1 \leq i \leq k} J(X_k - x_i) \quad (9)$$

Ένα χαρακτηριστικό  $f_j$  του συνόλου  $Y - X_k$  ονομάζεται

(α) το σημαντικότερο (καλύτερο) χαρακτηριστικό ως προς το σύνολο  $X_k$  εάν

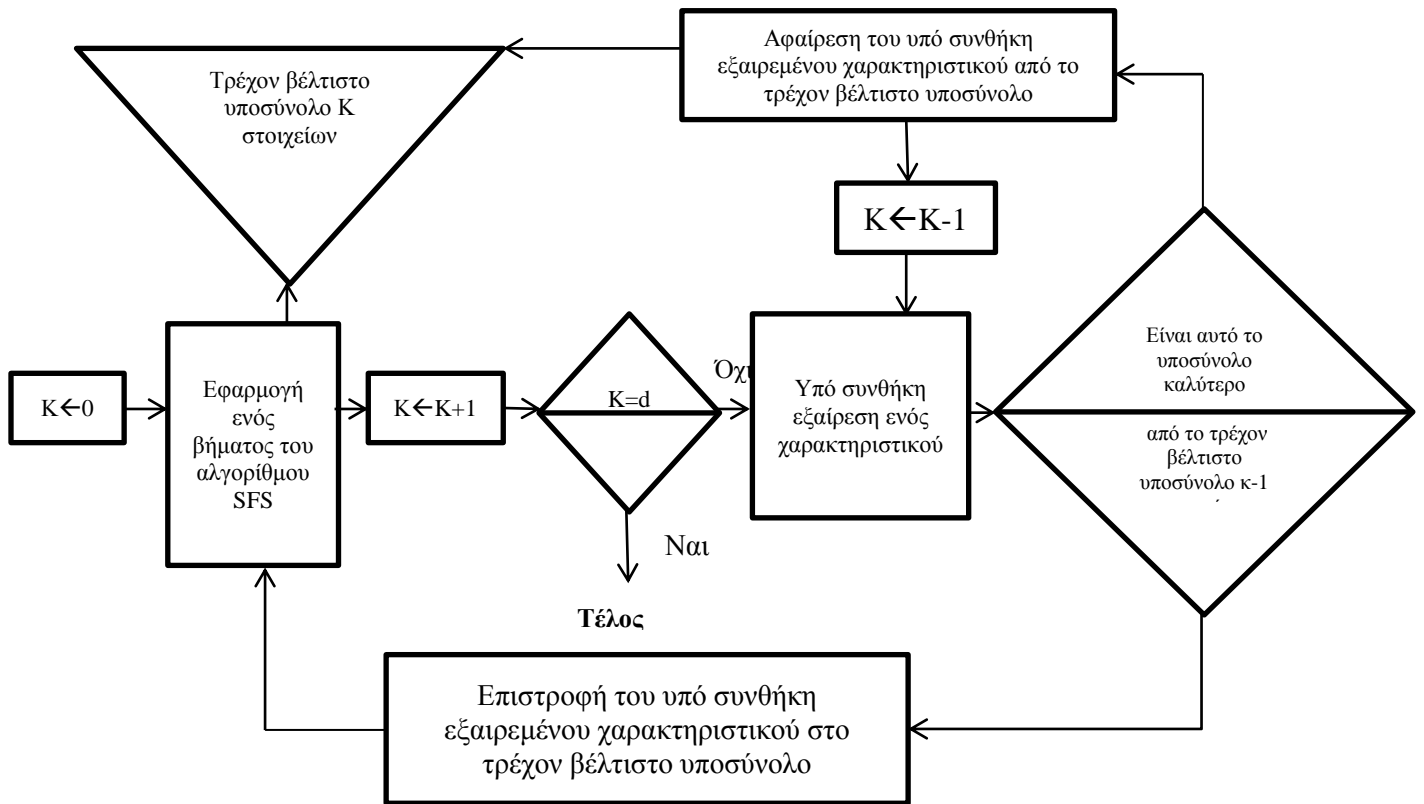
$$S_{k+1}(f_j) = \max_{1 \leq i \leq D-k} S_{k+1}(f_i) \Rightarrow J(X_k + f_j) = \min_{1 \leq i \leq D-k} J(X_k + f_i) \quad (10)$$

(β) το λιγότερο σημαντικό (χειρότερο) χαρακτηριστικό ως προς το σύνολο  $X_k$  εάν

$$S_{k+1}(f_j) = \min_{1 \leq i \leq D-k} S_{k+1}(f_i) \Rightarrow J(X_k + f_j) = \max_{1 \leq i \leq D-k} J(X_k + f_i) \quad (11)$$

Έτσι, με τη βοήθεια των παραπάνω ορισμών είναι πλέον δυνατή η διατύπωση του αλγορίθμου SFFS. Η βασική ιδέα του αλγορίθμου είναι ότι επιλέγονται τα νέα

χαρακτηριστικά σύμφωνα με τη διαδικασία SFS ξεκινώντας από το τρέχον σύνολο, στη συνέχεια όμως ακολουθείται μία σειρά από διαδοχικούς αποκλεισμούς του χειρότερου χαρακτηριστικού του μόλις ανανεωμένου υποσυνόλου. Ο αλγόριθμος SFFS παρουσιάζεται στον πίνακα 3 ενώ το αντίστοιχο διάγραμμα ροής φαίνεται στο σχήμα 4.



Σχήμα 4: Το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου επιλογής χαρακτηριστικών SFFS

### Πίνακας 3: Σύνοψη του Αλγορίθμου SFFS

#### 1. Αρχική Επιλογή

Χρησιμοποιώντας τη βασική μέθοδο SFS επέλεξε το σημαντικότερο χαρακτηριστικό  $x_{k+1}$  ως προς το σύνολο  $X_k$  από το σύνολο των διαθέσιμων μετρήσεων  $Y - X_k$ , ώστε να σχηματιστεί το σύνολο  $X_{k+1} = X_k + x_{k+1}$ .

#### 2. Εξαίρεση υπό Συνθήκη

Βρες το λιγότερο σημαντικό χαρακτηριστικό στο σύνολο  $X_{k+1}$ .

2.1. Αν το  $x_{k+1}$  είναι το λιγότερο σημαντικό χαρακτηριστικό του  $X_k$  δηλαδή

$$J(X_{k+1} - x_{k+1}) \geq J(X_{k+1} - x_j), \forall j = 1, 2, \dots, k$$

Θέσε  $k = k + 1$  και επίστρεψε στο βήμα 1.

2.2. Αν κάποιο  $x_r, 1 \leq r \leq k$  είναι το λιγότερο σημαντικό χαρακτηριστικό στο σύνολο  $X_{k+1}$ , δηλαδή  $J(X_{k+1} - x_r) > J(X_k)$  τότε αφάιρεσε το  $x_r$  από το  $X_{k+1}$  οπότε προκύπτει το σύνολο  $X'_k = X_{k+1} - x_r$ .

(Ισχύει  $J(X'_k) > J(X_k)$ )

2.2.1. Αν  $k = 2$  τότε θέσε  $X_k = X'_k$  και  $J(X'_k) = J(X_k)$  και επίστρεψε στο βήμα 1.

Αλλιώς πήγαινε στο βήμα 3.

#### 3. Συνέχιση Εξαίρεσης υπό Συνθήκη

Βρες το λιγότερο σημαντικό χαρακτηριστικό  $x_s$  στο σύνολο  $X'_k$ .

3.1. Αν  $J(X'_k - x_s) \leq J(X'_{k-1})$  τότε θέσε  $X_k = X'_k$  και  $J(X'_k) = J(X_k)$  και επίστρεψε στο βήμα 1.

3.2. Αν  $J(X'_k - x_s) > J(X'_{k-1})$  τότε αφάιρεσε το  $x_s$  από το  $X'_k$  οπότε προκύπτει το σύνολο  $X'_{k-1} = X'_k - x_s$ .

Θέσε  $k = k - 1$ .

3.2.1. Αν  $k = 2$  τότε θέσε  $X_k = X'_k$  και  $J(X'_k) = J(X_k)$  και επίστρεψε στο βήμα 1.

Αλλιώς πήγαινε στο βήμα 3.

Ο αλγόριθμος SFFS του πίνακα 1 αρχικοποιείται με  $k = 0$  και  $\mathbf{X}_0 = \emptyset$  και στη συνέχεια χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος SFS μέχρι να προκύψει το  $\mathbf{X}_2$ , να προκύψει δηλαδή ένα σύνολο με δύο χαρακτηριστικά και στη συνέχεια μεταβαίνει στο βήμα 1. Τερματίζεται όταν προκύψει σύνολο με τον επιθυμητό αριθμό χαρακτηριστικών. Παρ' όλο που ο SFFS δεν εγγυάται την εύρεση όλων των βέλτιστων υποσυνόλων, αποδίδει πολύ καλύτερα σε σύγκριση με τον απλό SFS υπό το κόστος βέβαια της αυξημένης πολυπλοκότητας.

## 3.3 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ

Για να μπορέσει ο κατηγοριοποιητής να καθορίσει τη γραμμή απόφασης έχει ανάγκη για μια διαδικασία μάθησης-εκπαίδευσης. Όπως συμβαίνει και με τη διαδικασία μάθησης των ανθρώπων από το περιβάλλον τους, έτσι και η μηχανική μάθηση είναι δύο ειδών, μάθηση με εκπαιδευτή και μάθηση χωρίς εκπαιδευτή ή αλλιώς επιβλεπόμενη μάθηση και μη επιβλεπόμενη μάθηση. Η μέθοδος που ακολουθείται σε κάθε περίπτωση εξαρτάται από το αν υπάρχουν διαθέσιμα δεδομένα εκπαίδευσης. Αν υπάρχουν, τότε πρόκειται για την περίπτωση της επιβλεπόμενης μάθησης, ενώ σε αντίθετη περίπτωση η διαδικασία της μάθησης είναι μη επιβλεπόμενη.

### 3.3.1 Επιβλεπόμενη Μάθηση

Στην περίπτωση αυτού του προγράμματος χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της επιβλεπόμενης μάθησης ή μάθησης με εκπαιδευτή, όπου ο εκπαιδευτής έχει γνώση του περιβάλλοντος και η γνώση αυτή αναπαρίσταται από ένα σύνολο ζευγών εισόδου-εξόδου, δηλαδή διανυσμάτων χαρακτηριστικών εκπαίδευσης. Αν το περιβάλλον τροφοδοτήσει τόσο τον εκπαιδευτή όσο και το σύστημα μάθησης με ένα διάνυσμα εκπαίδευσης τότε λόγω της γνώσης του ο εκπαιδευτής μπορεί να παράξει την επιθυμητή έξοδο δεδομένου του συγκεκριμένου διανύσματος.

Η επιθυμητή αυτή έξοδος είναι ουσιαστικά και η βέλτιστη έξοδος του κατηγοριοποιητή, επομένως υπό την συνδυασμένη επίρεια του διανύσματος εκπαίδευσης και ενός διανύσματος σφάλματος οι παράμετροι του συστήματος προσαρμόζονται κατάλληλα ώστε μετά από την επαναληπτική εφαρμογή της μεθόδου αυτής ο κατηγοριοποιητής να έχει την ίδια συμπεριφορά με τον εκπαιδευτή. Το διάνυσμα σφάλματος ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ της επιθυμητής κατηγοριοποίησης και της πραγματικής κατηγοριοποίησης που εκτελεί ο κατηγοριοποιητής. Με τον τρόπο αυτό, η γνώση του εκπαιδευτή μεταφέρεται στον κατηγοριοποιητή ώστε μετά το πέρας της εκπαίδευσης ο κατηγοριοποιητής να είναι ικανός να κατατάξει τα επόμενα πρότυπα που θα δεχθεί στη σωστή κλάση. Όπως αφήνει να εννοηθεί η παραπάνω περιγραφή, η επιβλεπόμενη μάθηση συνιστά ένα σύστημα κλειστού βρόχου με ανάδραση, στο οποίο όμως δεν περιλαμβάνεται το περιβάλλον το οποίο είναι άγνωστο προς τον κατηγοριοποιητή.

Έτσι, ένας κατηγοριοποιητής που χρησιμοποιεί επιβλεπόμενη μάθηση είναι ικανός με τη χρήση κατάλληλων αλγορίθμων να προσεγγίζει τη λειτουργία του εκπαιδευτή με την προσέγγιση να βελτιώνεται όσο αυξάνεται το σύνολο των διανυσμάτων εκπαίδευσης. Τέτοιοι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται ευρέως είναι ο αλγόριθμος Perceptron, ο αλγόριθμος Ελάχιστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (Least Mean Square, LMS), οι Μηχανές Διανυσμάτων Υποστήριξης (Support Vector Machines, SVM), ο αλγόριθμος Οπισθοδιάδοσης (Back Propagation) και ο αλγόριθμος k-Κοντινότερων Γειτόνων (k-Nearest Neighbors, k-NN). Από τους αλγορίθμους αυτούς θα χρησιμοποιηθεί στα πλαίσια αυτής της εργασίας ο αλγόριθμος Μηχανής Διανυσμάτων Υποστήριξης (SVM) .

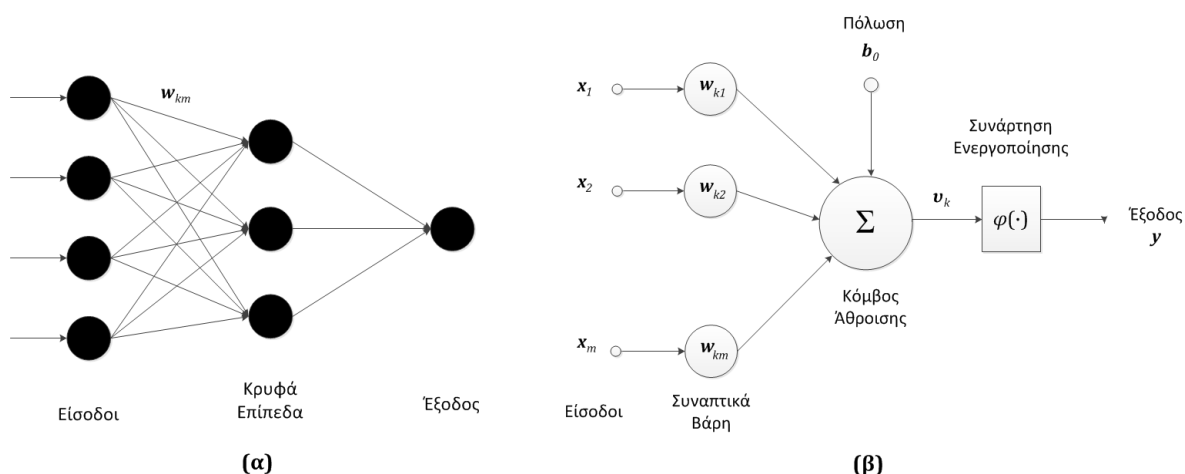


### 3.3.1.1. Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα (Artificial Neural Networks, ANN)

#### Εισαγωγή

Τα Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα (Artificial Neural Networks) είναι μη γραμμικές δομές των οποίων η λειτουργία είναι εμπνευσμένη από τον ανθρώπινο εγκέφαλο. Είναι ισχυρά εργαλεία για τη διαδικασία της μοντελοποίησης, ειδικά σε περιπτώσεις που η σχέση μεταξύ των υποκείμενων δεδομένων είναι άγνωστη. Τα Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα (ΤΝΔ) έχουν την ικανότητα να αναγνωρίζουν και να θυμούνται συσχετισμένα πρότυπα ανάμεσα σε ένα σύνολο δεδομένων εισόδου και συγκεκριμένες αντίστοιχες τιμές. Μετά τη διαδικασία της εκπαίδευσης, τα νευρωνικά δίκτυα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προβλέψουν το αποτέλεσμα ενός νέου ανεξάρτητου συνόλου δεδομένων. Τα νευρωνικά δίκτυα μιμούνται την διαδικασία εκπαίδευσης του ανθρώπινου εγκεφάλου και μπορούν να επεξεργαστούν προβλήματα που περιλαμβάνουν μη γραμμικά και σύνθετα δεδομένα ακόμα κι αν τα δεδομένα είναι ανακριβή ή έχουν θόρυβο.

Τα νευρωνικά δίκτυα έχουν γίνει επίκεντρο πολλών ερευνών χάρη στο ευρύ φάσμα εφαρμογών όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν αλλά και λόγω της ικανότητας τους να αντιμετωπίσουν πολύπλοκα προβλήματα με ευκολία. Τα νευρωνικά δίκτυα είναι παράλληλα υπολογιστικά μοντέλα που αποτελούνται από πυκνά διασυνδεδεμένες προσαρμοστικές μονάδες επεξεργασίας. Ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό αυτών των δικτύων είναι η προσαρμοστικότητά τους, αφού ο προγραμματισμός αντικαθίσταται από τη γνώση μέσω του παραδείγματος, ιδιότητα πολύ χρήσιμη σε περιπτώσεις που το πρόβλημα δεν είναι πλήρως κατανοητό αλλά διατίθενται δεδομένα εκπαίδευσης.



Σχήμα 5: Μη γραμμικό μοντέλο νευρώνα. (α) Σχηματική αναπαράσταση (β) Μαθηματική αναπαράσταση

Ένα νευρωνικό δίκτυο είναι μια υπολογιστική δομή η οποία είναι εμπνευσμένη από την διαδικασία που έχει παρατηρηθεί στα φυσικά δίκτυα των βιολογικών νευρώνων στον

εγκέφαλο. Αποτελείται από απλές υπολογιστικές μονάδες που ονομάζονται *νευρώνες* οι οποίοι διασυνδέονται μεταξύ τους με πολύπλοκο τρόπο. Το σχήμα 5 παρουσιάζει το μοντέλο ενός νευρώνα που αποτελεί τη βάση για τη σχεδίαση μιας μεγάλης οικογένειας νευρωνικών δικτύων. Τα τρία βασικά στοιχεία του μοντέλου νευρώνα που διακρίνονται στο σχήμα 5β είναι τα εξής:

1. Ένα σύνολο *συνάψεων* οι οποίες αντιστοιχούν στην ιδέα των συνάψεων των νευρικών κυττάρων. Κάθε σύναψη χαρακτηρίζεται από ένα *βάρος*. Ένα σήμα εισόδου  $x_j$  στην είσοδο της σύναψης  $j$  που συνδέεται με το νευρώνα  $k$  πολλαπλασιάζεται επί το συναπτικό βάρος  $w_{kj}$ . Σε αντίθεση με τον ανθρώπινο εγκέφαλο, το συναπτικό βάρος ενός νευρώνα λαμβάνει και αρνητικές και θετικές τιμές.
2. Έναν *αθροιστή* (*adder*) για την άθροιση των σημάτων εισόδου, σταθμισμένων από τα αντίστοιχα συναπτικά βάρη του νευρώνα. Ουσιαστικά πρόκειται για έναν γραμμικό συνδυαστή (*linear combiner*).
3. Μια *συνάρτηση ενεργοποίησης* (*activation function*) για τον περιορισμό του πλάτους του σήματος εξόδου ενός νευρώνα. Η συνάρτηση ενεργοποίησης αναφέρεται επίσης και ως συνάρτηση περιορισμού (*squashing function*) επειδή περιορίζει το επιτρεπτό εύρος πλάτους του σήματος εξόδου σε κάποια πεπερασμένη τιμή. Συνήθως το κανονικοποιημένο εύρος τιμών πλάτους της εξόδου ενός νευρώνα γράφεται ως μοναδιαίο κλειστό διάστημα με τη μορφή  $[0,1]$  ή  $[-1,1]$ .

Στο μοντέλο του νευρώνα του σχήματος 2 περιλαμβάνεται επίσης και μία εξωτερικά επιβαλλόμενη πόλωση  $b_k$  η οποία χρησιμεύει στην αύξηση ή τη μείωση της δικτυακής διέγερσης της συνάρτησης ενεργοποίησης ανάλογα με το αν είναι θετική ή αρνητική αντίστοιχα.

Η μαθηματική περιγραφή του μοντέλου ενός νευρώνα  $k$  γίνεται με τις δύο παρακάτω εξισώσεις

$$u_k = \sum_{j=1}^m w_{kj} x_j \quad (12)$$

$$y_k = \varphi(u_k + b_k) \quad (13)$$

όπου  $x_1, x_2, \dots, x_m$  τα σήματα εισόδου,  $w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{km}$  τα αντίστοιχα συναπτικά βάρη του νευρώνα  $k$ ,  $u_k$  η έξοδος του γραμμικού συνδυαστή (δεν παρουσιάζεται στο σχήμα),  $b_k$  η πόλωση,  $\varphi(\cdot)$  η συνάρτηση ενεργοποίησης και  $y_k$  το σήμα εξόδου του νευρώνα. Η χρήση της πόλωσης έχει ως αποτέλεσμα τη χρήση ενός αφινικού μετασχηματισμού στην έξοδο  $u_k$  του γραμμικού συνδυαστή σύμφωνα με τη σχέση

$$v_k = u_k + b_k \quad (14)$$

Η συνάρτηση ενεργοποίησης η οποία συμβολίζεται ως  $\varphi(\cdot)$ , ορίζει την έξοδο ενός νευρώνα βάσει του τοπικού πεδίου  $u$ . Δύο βασικοί τύποι συναρτήσεων ενεργοποίησης είναι η συνάρτηση κατωφλίου (*threshold function*) και η σιγμοειδής συνάρτηση (*sigmoid function*) που απεικονίζονται στο σχήμα 3.

Η συνάρτηση κατωφλίου (σχήμα 6α) είναι η γνωστή και ως βηματική συνάρτηση ή συνάρτηση Heaviside ορίζεται ως εξής

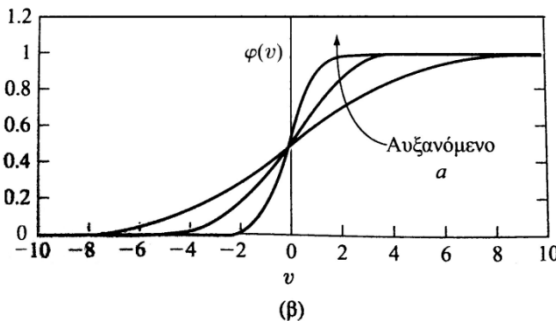
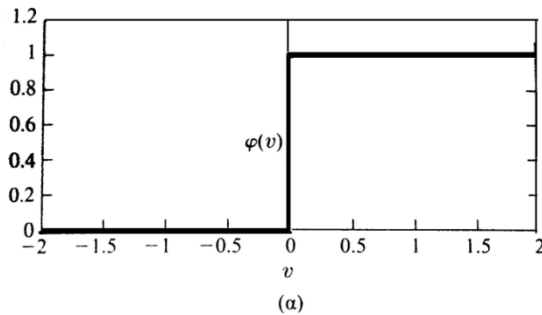
$$\varphi(v) = \begin{cases} 1, & \text{αν } v \geq 0 \\ 0, & \text{αν } v < 0 \end{cases} \quad (15)$$

Η έξοδος νευρώνα  $k$  που χρησιμοποιεί μια τέτοια συνάρτηση κατωφλίου προκύπτει

$$y_k = \begin{cases} 1, & \text{αν } v_k \geq 0 \\ 0, & \text{αν } v_k < 0 \end{cases} \quad (16)$$

όπου  $v_k$  είναι το τοπικό πεδίο νευρώνα για το οποίο ισχύει

$$v_k = \sum_{j=1}^m w_{kj}x_j + b_k \quad (17)$$



**Σχήμα 6:** Συναρτήσεις  
Ενεργοποίησης  
**(α)** Συνάρτηση Κατωφλίου  
**(β)** Σιγμοειδής συνάρτηση για  
μεταβαλλόμενη  
παράμετρο κλίσης  $\alpha$

Το μοντέλο νευρώνα που περιγράφουν οι παραπάνω σχέσεις αναφέρεται ως *μοντέλο McCulloch-Pitts* (1946) Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, η έξοδος ενός νευρώνα λαμβάνει την τιμή 1 αν το τοπικό πεδίο του συγκεκριμένου νευρώνα είναι μη αρνητικό και 0 σε κάθε άλλη περίπτωση.

Η σιγμοειδής συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση θυμίζει το λατινικό γράμμα «S» όπως φαίνεται στο σχήμα 6β είναι η πιο κοινή συνάρτηση που χρησιμοποιείται στα νευρωνικά δίκτυα. Ορίζεται ως γνησίως αύξουσα συνάρτηση και περιλαμβάνει τμήματα τόσο γραμμικής όσο και μη γραμμικής συμπεριφοράς. Επίσης είναι διαφορίσιμη, ιδιότητα ιδιαίτερα χρήσιμη για τα νευρωνικά δίκτυα. Επιπλέον, σε αντίθεση με τη συνάρτηση κατωφλίου, η σιγμοειδής συνάρτηση λαμβάνει τιμές στο συνεχές διάστημα  $[0,1]$ . Παράδειγμα σιγμοειδούς συνάρτησης είναι η *λογιστική συνάρτηση* η οποία ορίζεται ως

$$\varphi(v) = \frac{1}{1 + \exp(-av)} \quad (18)$$

όπου  $a$  η παράμετρος κλίσης της συνάρτησης. Μεταβάλλοντας την τιμή της παραμέτρου αυτής μεταβάλλεται και η κλίση της καμπύλης στην αρχή των αξόνων. Καθώς η παράμετρος  $a$  τείνει στο άπειρο η καμπύλη προσεγγίζει τη συνάρτηση κατωφλίου. Άλλη μία ευρέως χρησιμοποιούμενη σιγμοειδής συνάρτηση είναι η συνάρτηση υπερβολικής εφαπτομένης:

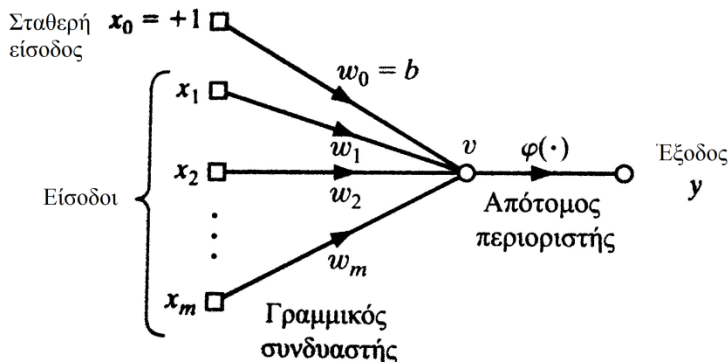
$$\varphi(v) = \tanh v \quad (19)$$

Επιπλέον, σε αντίθεση με τη συνάρτηση κατωφλίου, η σιγμοειδής συνάρτηση λαμβάνει τιμές στο συνεχές διάστημα  $[0,1]$ .

### Perceptron

Το *Perceptron* του Rosenblatt (1958) είναι το πρώτο νευρωνικό δίκτυο που είχε αλγοριθμική περιγραφή. Είναι η απλούστερη δυνατή μορφή ενός νευρωνικού δικτύου που χρησιμοποιείται για την κατηγοριοποίηση γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων. Ουσιαστικά αποτελείται από έναν και μόνο νευρώνα με προσαρμόσιμα βάρη και πόλωση. Υπό αυτό το πρίσμα, για τον αλγόριθμο που χρησιμοποιείται για την προσαρμογή αυτών των ελεύθερων παραμέτρων αποδεικνύεται ότι αν τα πρότυπα που χρησιμοποιούνται προέρχονται από δύο γραμμικά διαχωρίσιμες κλάσεις ο αλγόριθμος του perceptron συγκλίνει και τοποθετεί τη διαχωριστική επιφάνεια απόφασης με τη μορφή ενός υπερεπιπέδου μεταξύ των δύο κλάσεων.

Στο perceptron χρησιμοποιείται ένας μη γραμμικός νευρώνας σύμφωνα με το μοντέλο νευρώνα McCulloch-Pitts. Η απεικόνισή του με τη μορφή γραφήματος ροής φαίνεται στο σχήμα 7. Το μοντέλο αυτό είναι ισοδύναμο με αυτό του σχήματος 7β, με μόνη τροποποίηση ότι η πόλωση  $b(n)$  αντιμετωπίζεται ως ένα συναπτικό βάρος το οποίο οδηγείται από σταθερή είσοδο  $+1$ .



**Σχήμα 7:**  
Ισοδύναμο γράφημα ροής σήματος του perceptron. Χάρην σαφήνειας παραλείπεται ο χρόνος

Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό ορίζουμε το διάνυσμα εισόδων διαστάσεων  $(m + 1) \times 1$  ως

$$\mathbf{x}(n) = [+1, x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]^T$$

όπου  $n$  το χρονικό βήμα εφαρμογής του αλγορίθμου. Αντίστοιχα ορίζεται το διάνυσμα βαρών διαστάσεων  $(m + 1) \times 1$  ως

$$\mathbf{w}(n) = [b, w_1(n), w_2(n), \dots, w_m(n)]^T$$

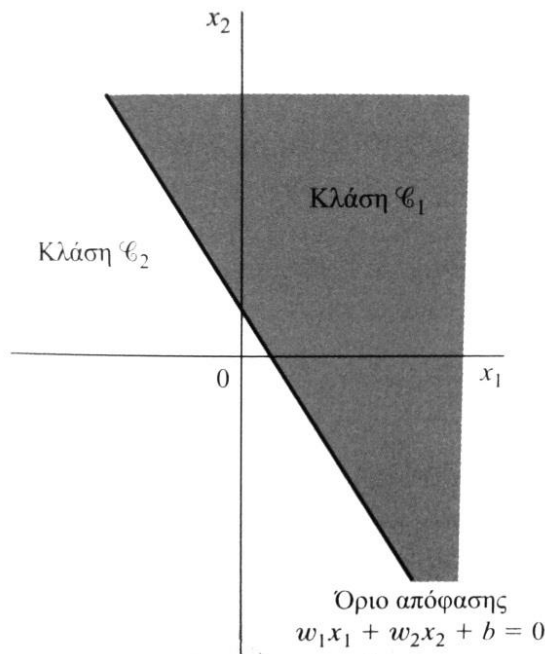
Επομένως η έξοδος του γραμμικού συνδυαστή, η οποία είναι και η είσοδος του απότομου περιοριστή ή τοπικό πεδίο, μπορεί να γραφεί σε συμπαγή μορφή

$$v(n) = \sum_{i=0}^m w_i(n)x_i(n) = \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n) \quad (20)$$

όπου  $w_0(n) = b$ . Στη συνέχεια, ο απότομος περιοριστής παράγει έξοδο ίση με  $+1$  αν το τοπικό πεδίο  $v(n)$  είναι θετικό, οπότε το πρότυπο κατατάσσεται στην κλάση  $\mathcal{C}_1$  και  $-1$  αν είναι αρνητικό, οπότε το πρότυπο κατατάσσεται στην κλάση  $\mathcal{C}_2$ .

Για σταθερό  $n$  η εξίσωση  $\mathbf{w}^T\mathbf{x} = 0$  αν απεικονιστεί σε ένα  $m$ -διάστατο χώρο με συντεταγμένες  $x_1, x_2, \dots, x_m$  ορίζει το υπερεπίπεδο που δρα ως διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των δύο κλάσεων εισόδου  $\mathcal{C}_1$  και  $\mathcal{C}_2$ . Ένα παράδειγμα σε χώρο δύο διαστάσεων φαίνεται στο σχήμα 8. Δοθέντος ενός συνόλου εκπαίδευσης  $\mathcal{T}$ , ο σκοπός της κατηγοριοποίησης είναι να βρεθεί το κατάλληλο διάνυσμα βαρών  $\mathbf{w}$  ώστε να ισχύουν:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T\mathbf{x} &> 0 && \text{για τα διανύσματα εισόδων } \mathbf{x} \text{ που ανήκουν στην κλάση } \mathcal{C}_1 \\ \mathbf{w}^T\mathbf{x} &\leq 0 && \text{για τα διανύσματα εισόδων } \mathbf{x} \text{ που ανήκουν στην κλάση } \mathcal{C}_2 \end{aligned} \quad (21)$$



**Σχήμα 8:**

Το υπερεπίπεδο ως όριο απόφασης για ένα πρόβλημα ταξινόμησης προτύπων σε δύο κλάσεις σε χώρο διαστάσεων (για σταθερό χρόνο)

Διατυπώνεται επομένως ο αλγόριθμος προσαρμογής του διανύσματος βαρών του perceptron ως εξής:

1. Εάν το  $n$ -οστό μέλος του συνόλου εκπαίδευσης  $\mathbf{x}(n)$  ταξινομείται σωστά από το διάνυσμα βαρών  $\mathbf{w}(n)$  που υπολογίζεται στη  $n$ -οστή επανάληψη του αλγορίθμου, δεν γίνεται καμία διόρθωση στο διάνυσμα βαρών του perceptron σύμφωνα με τον κανόνα

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{w}(n) && \text{Αν } \mathbf{w}^T \mathbf{x} > 0 \text{ και } \mathbf{x}(n) \text{ ανήκει στην κλάση } \mathcal{C}_1 \\ \mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{w}(n) && \text{Αν } \mathbf{w}^T \mathbf{x} \leq 0 \text{ και } \mathbf{x}(n) \text{ ανήκει στην κλάση } \mathcal{C}_2 \end{aligned} \quad (22)$$

2. Ειδάλλως, το διάνυσμα βαρών ενημερώνεται σύμφωνα με τον κανόνα

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{w}(n) - \eta(n)\mathbf{x}(n) && \text{Αν } \mathbf{w}^T \mathbf{x} > 0 \text{ και } \mathbf{x}(n) \in \mathcal{C}_1 \\ \mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{w}(n) - \eta(n)\mathbf{x}(n) && \text{Αν } \mathbf{w}^T \mathbf{x} \leq 0 \text{ και } \mathbf{x}(n) \in \mathcal{C}_2 \end{aligned} \quad (23)$$

όπου η παράμετρος  $\eta(n)$  ονομάζεται *ρυθμός μάθησης* και ελέγχει την προσαρμογή που εφαρμόζεται στο διάνυσμα βαρών στην επανάληψη  $n$ .

Αν  $\eta(n) = \eta > 0$ , όπου  $\eta$  σταθερά ανεξάρτητη του αριθμού επανάληψης  $n$ , τότε πρόκειται για την περίπτωση του λεγόμενου *κανόνα προσαρμογής μέσω σταθερής αύξησης*. Αποδεικνύεται με αυτά τα δεδομένα ότι ο αλγόριθμος με σταθερή αύξηση συγκλίνει σε μία λύση. Το θεώρημα σύγκλισης με σταθερή αύξηση διατυπώνεται ως εξής (Rosenblatt, 1962):

*Έστω ότι τα υποσύνολα των διανυσμάτων εκπαίδευσης  $\mathcal{T}_1$  και  $\mathcal{T}_2$  είναι γραμμικά διαχωρίσιμα. Έστω ότι οι εισόδοι που παρουσιάζονται στο perceptron προέρχονται από αυτά τα δύο υποσύνολα. Το perceptron συγκλίνει μετά από κάποιο αριθμό  $n_0$  επαναλήψεων υπό την έννοια ότι το*

$$\mathbf{w}(n_0) = \mathbf{w}(n_0 + 1) = \mathbf{w}(n_0 + 2) = \dots$$

*είναι ένα διάνυσμα λύσεων για  $n_0 \leq n_{max}$ , όπου  $n_{max}$  ο αριθμός επαναλήψεων μετά από τις οποίες τερματίζει ο αλγόριθμος.*

Στον πίνακα 4 παρουσιάζεται συνοπτικά ο αλγόριθμος σύγκλισης του perceptron [Lippmann, 1987].

#### Πίνακας 4: Σύνοψη του Αλγορίθμου Σύγκλισης του Perceptron

**Μεταβλητές και Παράμετροι:**

$$\mathbf{x}(n) = [+1, \mathbf{x}_1(n), \mathbf{x}_2(n), \dots, \mathbf{x}_m(n)]^T \text{ (διάνυσμα εισόδων)}$$

$$\mathbf{w}(n) = [\mathbf{b}, \mathbf{w}_1(n), \mathbf{w}_2(n), \dots, \mathbf{w}_m(n)]^T \text{ (διάνυσμα βαρών)}$$

$$\mathbf{b} = \text{πόλωση}$$

$$\mathbf{y}(n) = \text{πραγματική απόκριση (κβαντισμένη)}$$

$$\mathbf{d}(n) = \text{επιθυμητή απόκριση}$$

$$\eta = \text{παράμετρος ρυθμού μάθησης, } \mathbf{0} < \eta < \mathbf{1}$$

1. **Αρχικοποίηση.** Θέσε  $\mathbf{w}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Στη συνέχεια, εκτέλεσε τους ακόλουθους υπολογισμούς για χρονικό βήμα  $n = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots$
2. **Ενεργοποίηση.** Στο χρονικό βήμα  $n$  ενεργοποίησε το perceptron εφαρμόζοντας το διάνυσμα εισόδων  $\mathbf{x}(n)$  και την επιθυμητή απόκριση  $\mathbf{d}(n)$ .
3. **Υπολογισμός της Πραγματικής Απόκρισης.** Υπολόγισε την πραγματική απόκριση του perceptron ως

$$\mathbf{y}(n) = \text{sgn}[\mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)]$$

όπου  $\text{sgn}(\cdot)$  η συνάρτηση προσήμου

4. *Προσαρμογή του Διανύσματος Βαρών.* Ενημέρωσε το διάνυσμα βαρών του perceptron ώστε να καταλήξεις στο

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta[d(n) - y(n)]\mathbf{x}(n)$$

όπου

$$d(n) = \begin{cases} +1, & \text{αν } \mathbf{x}(n) \in \mathcal{C}_1 \\ -1, & \text{αν } -\mathbf{x}(n) \in \mathcal{C}_2 \end{cases}$$

5. *Συνέχιση.* Αύξησε το χρονικό βήμα  $n$  κατά 1 και επέστρεψε στο βήμα 2.

Στην μέχρι τώρα ανάλυση δεν έχει γίνει αναφορά σε σε κάποια συνάρτηση κόστους. Σε αυτό το σημείο θα γίνει αυτή η προσθήκη ενώ θα διατυπωθεί μία μέθοδος *μαζικής (batch)* κατηγοριοποίησης. Η έννοια της μαζικότητας έγκειται στο γεγονός ότι σε κάθε χρονικό βήμα χρησιμοποιείται το σύνολο των εσφαλμένα ταξινομημένων δειγμάτων για τον υπολογισμό της προσαρμογής.

Η *συνάρτηση κόστους του perceptron* ορίζεται ως

$$J(\mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} -\mathbf{w}^T \mathbf{x} \quad (24)$$

όπου  $\mathcal{X}$  είναι το σύνολο των δειγμάτων  $\mathbf{x}$  που ταξινομούνται εσφαλμένα από ένα perceptron που το οποίο χρησιμοποιεί το  $\mathbf{w}$  ως διάνυσμα βαρών. Εάν τα δείγματα ταξινομούνται σωστά τότε το σύνολο  $\mathcal{X}$  είναι κενό οπότε και η συνάρτηση κόστους  $J(\mathbf{w})$  είναι 0. Το σημαντικότερο χαρακτηριστικό της συνάρτησης κόστους  $J(\mathbf{w})$  είναι ότι η συνάρτηση αυτή είναι διαφορίσιμη ως προς το διάνυσμα βαρών  $\mathbf{w}$ . Επομένως διαφορίζοντας τη συνάρτηση  $J(\mathbf{w})$  ως προς το διάνυσμα βαρών  $\mathbf{w}$  προκύπτει το *διάνυσμα κλίσεων*

$$\nabla J(\mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} -\mathbf{x} \quad (25)$$

όπου ο τελεστής κλίσης

$$\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial w_1}, \frac{\partial}{\partial w_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial w_m} \right]^T \quad (26)$$

Σύμφωνα με τη *μέθοδο της πλέον απότομης κατάβασης (steepest descent)*, η προσαρμογή που γίνεται στο διάνυσμα βαρών  $\mathbf{w}$  σε κάθε χρονικό βήμα του αλγορίθμου εφαρμόζεται σε κατεύθυνση αντίθετη ως προς το διάνυσμα κλίσεων  $\nabla J(\mathbf{w})$ . Κατά συνέπεια ο αλγόριθμος παίρνει τη μορφή

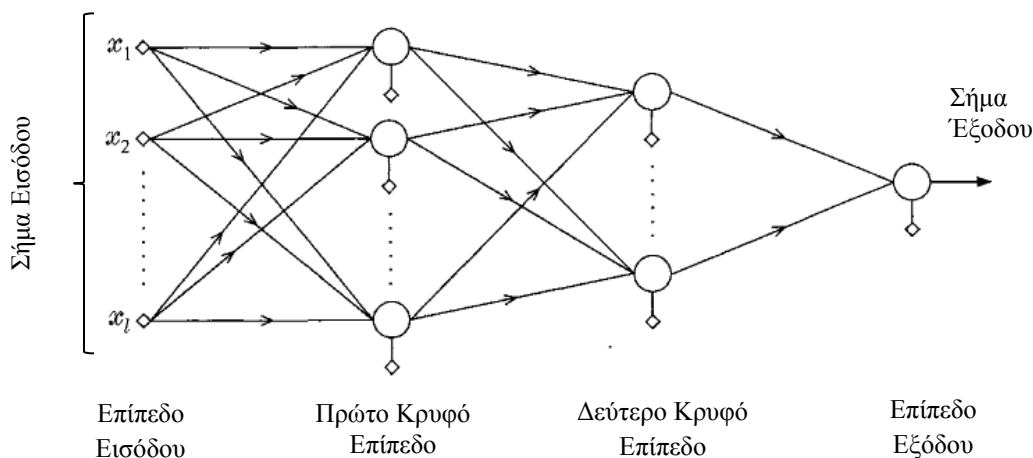
$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \eta(n)\nabla J(\mathbf{w}) = \mathbf{w}(n) + \eta(n) \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \mathbf{x} \quad (27)$$

Η μορφή αυτή περιλαμβάνει την περίπτωση του αλγορίθμου σύγκλισης για προσαρμογή βάσει ενός δείγματος που περιγράφηκε προηγουμένως ως ειδική περίπτωση. Σύμφωνα με την εξίσωση (27) που εκφράζει τον *μαζικό αλγόριθμο του perceptron*, το διάνυσμα βαρών στο βήμα  $n+1$  του αλγορίθμου προσαρμόζεται μέσω του αθροίσματος των δειγμάτων που ταξινομούνται εσφαλμένα από το διάνυσμα βαρών  $\mathbf{w}(n)$ . Η επίδραση του αθροίσματος αυτού στην προσαρμογή καθορίζεται από την παράμετρο ρυθμού μάθησης  $\eta(n)$ .

## Perceptron πολλών επιπέδων

Το perceptron που μελετήθηκε στην προηγούμενη ενότητα είναι το απλούστερο νευρωνικό δίκτυο, το οποίο όπως φαίνεται στην εικόνα 2α έχει μόνο ένα κρυφό επίπεδο νευρώνων. Οι δυνατότητες του δικτύου αυτού περιορίζονται στην λύση προβλήματος κατηγοριοποίησης όπου τα πρότυπα είναι γραμμικά διαχωρίσιμα. Σε πραγματικές συνθήκες όμως υπάρχει ανάγκη για κατηγοριοποίηση μη γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων. Για το σκοπό αυτό είναι απαραίτητη η εισαγωγή περαιτέρω επιπέδων νευρώνων εσωτερικά του δικτύου, τα οποία παραμένουν *κρυφά* για τους κόμβους των επιπέδων εισόδου και εξόδου. Η δομή ενός τέτοιου δικτύου με δύο κρυφά επίπεδα και μία έξοδο φαίνεται στην εικόνα 9.

Οι νευρώνες εξόδου συγκροτούν το επίπεδο εξόδου του δικτύου. Οι υπόλοιποι νευρώνες συγκροτούν τα κρυφά επίπεδα του δικτύου. Οι κρυφές μονάδες δεν αποτελούν τμήμα ούτε της εισόδου είτε της εξόδου του δικτύου. Το πρώτο κρυφό επίπεδο τροφοδοτείται από το επίπεδο εισόδου του δικτύου το οποίο αποτελείται από αισθητηριακές μονάδες. Οι έξοδοι που παράγονται από το πρώτο κρυφό επίπεδο εφαρμόζονται στο επόμενο κρυφό επίπεδο και ούτω καθ' εξής για το υπόλοιπο του δικτύου.



**Σχήμα 9:** Αρχιτεκτονική ενός perceptron πολλών επιπέδων με δύο κρυφά επίπεδα νευρώνων και μία έξοδο

Κάθε κρυφός νευρώνας ή νευρώνας εξόδου ενός perceptron πολλών επιπέδων σχεδιάζεται ώστε να εκτελεί δύο υπολογισμούς. Πρώτον, εκτελεί τον υπολογισμό του σήματος που εμφανίζεται στην έξοδο κάθε νευρώνα του προηγούμενου επιπέδου (*λειτουργικό σήμα*) ο οποίος εκφράζεται ως μία συνεχής μη γραμμική συνάρτηση του σήματος εισόδου και των συναπτικών βαρών που σχετίζονται μ' αυτό τον νευρώνα. Δεύτερον, εκτελείται ο υπολογισμός μιας εκτίμησης του διανύσματος κλίσης, δηλαδή των κλίσεων της επιφάνειας σφάλματος σε σχέση με τα βάρη που είναι συνδεδεμένα στις εισόδους ενός νευρώνα. Ο υπολογισμός αυτός χρησιμοποιείται στη φάση εξέλιξης του δικτύου προς τα πίσω, τη φάση δηλαδή που τα συναπτικά βάρη προσαρμόζονται σύμφωνα με τα σφάλματα που έχουν υπολογιστεί.



Οι κρυφοί νευρώνες στο perceptron πολλών επιπέδων δρουν ως ανιχνευτές χαρακτηριστικών (feature detectors). Καθώς προχωρά η διαδικασία μάθησης οι κρυφοί νευρώνες προσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά εκείνα των προτύπων εκπαίδευσης που είναι αυτά που είναι καθοριστικότερα στην διαδικασία της κατηγοριοποίησης. Αυτό επιτυγχάνεται μετασχηματίζοντας γραμμικά τα δεδομένα εισόδου σε ένα νέο χώρο, τον *χώρο χαρακτηριστικών*. Με αυτόν τον μετασχηματισμό ξεχωρίζουν τα χαρακτηριστικά που ενδιαφέρουν την διαδικασία της κατηγοριοποίησης από τυχόν περιττές πληροφορίες που τίθενται στην είσοδο. Αυτή ακριβώς η ιδιότητα είναι που καθιστά το perceptron πολλών επιπέδων ικανό να λύσει το μη γραμμικά διαχωρίσιμο πρόβλημα κατηγοριοποίησης.

Ανάλογα με το πώς εκτελείται η επιβλεπόμενη μάθηση στο perceptron πολλών επιπέδων έχουν αναπτυχθεί δύο στρατηγικές, η *μαζική μάθηση (batch)* και η *on-line μάθηση*. Το χαρακτηριστικό της μαζικής μάθησης είναι ότι οι προσαρμογές στα συναπτικά βάρη εκτελούνται μετά την επεξεργασία του συνόλου των προτύπων του συνόλου εκπαίδευσης. Από την άλλη πλευρά, στην on-line μάθηση τα συναπτικά βάρη προσαρμόζονται παράδειγμα προς παράδειγμα, δηλαδή σε κάθε εμφάνιση κάποιου προτύπου του συνόλου εκπαίδευσης.

### **Αλγόριθμος Οπισθοδιάδοσης (Back Propagation, BK)**

Η μέθοδος της on-line μάθησης για την επιβλεπόμενη εκπαίδευση έγινε πολύ δημοφιλής χάρη και στην ανάπτυξη του αλγορίθμου *Οπισθοδιάδοσης (Back Propagation, BK)* τον οποίο θα αναλύσουμε εις βάθος στη συνέχεια.

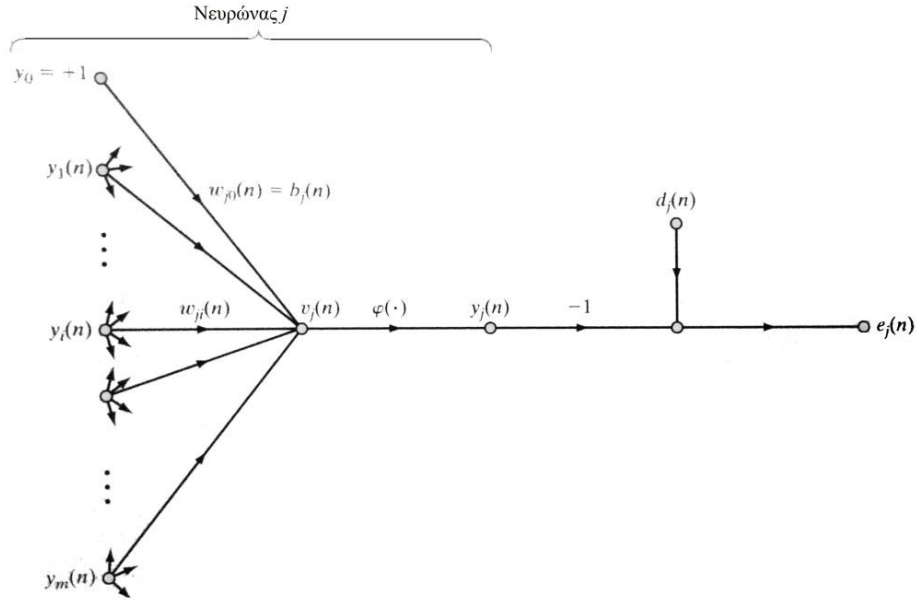
Στο σχήμα 10 φαίνονται οι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή του αλγορίθμου. Έστω ότι διατίθεται ένα σύνολο εκπαίδευσης  $\mathcal{T} = \{\mathbf{x}(n), \mathbf{d}(n)\}_{n=1}^N$ . Αν με  $y_j(n)$  συμβολίζεται το λειτουργικό σήμα που παράγεται στην έξοδο του νευρώνα  $j$  στο επίπεδο εξόδου από το ερέθισμα  $\mathbf{x}(n)$  που εφαρμόζεται στο επίπεδο εισόδου, τότε αυτό αρχικά τουλάχιστον θα είναι διαφορετικό από την επιθυμητή έξοδο  $\mathbf{d}(n)$  οπότε ορίζεται το σήμα σφάλματος που παράγεται στην έξοδο του νευρώνα  $j$  ως

$$e_j(n) = d_j(n) - y_j(n) \quad (28)$$

όπου  $d_j(n)$  είναι το  $j$ -οστό στοιχείο του διανύσματος επιθυμητών εξόδων  $\mathbf{d}(n)$ . Ο σκοπός του αλγορίθμου BK είναι έχοντας καθορίσει μία κατάλληλη για το πρόβλημα συνάρτηση κόστους  $J$  που να εξαρτάται από τα  $\mathbf{d}(n)$  και  $\mathbf{y}(n)$ , να προσαρμόζονται τα συναπτικά βάρη του δικτύου ώστε η συνάρτηση κόστους  $J$  να ελαχιστοποιείται. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η συνάρτηση κόστους που είναι κατάλληλη είναι η συνολική στιγμιαία ενέργεια σφάλματος ολόκληρου του δικτύου, δηλαδή η συνάρτηση:

$$\mathcal{E}(n) = \frac{1}{2} \sum_{j \in C} e_j^2(n) \quad (29)$$

όπου  $C$  το σύνολο των νευρώνων του επιπέδου εξόδου.



**Σχήμα 10:** Γράφημα ροής σήματος που περιγράφει τις λεπτομέρειες του νευρώνα εξόδου  $j$

Το τοπικό πεδίο  $v_j(n)$  που παράγεται στην είσοδο της συνάρτησης ενεργοποίησης  $\varphi_j$  και σχετίζεται με το νευρώνα  $j$  είναι:

$$v_j(n) = \sum_{i=0}^m w_{ji}(n)y_i(n) \quad (30)$$

όπου  $m$  είναι το πλήθος των εισόδων (εξαιρουμένης της πόλωσης) που εφαρμόζονται στον νευρώνα  $j$ . Το συναπτικό βάρος  $w_{j0}$  αντιστοιχεί στην σταθερή είσοδο και είναι ίση με την πόλωση  $b_j$  που εφαρμόζεται στο νευρώνα  $j$ . Επομένως το λειτουργικό σήμα που λαμβάνεται στην έξοδο  $y_i(n)$  του νευρώνα  $j$  κατά την επανάληψη  $n$  είναι:

$$y_i(n) = \varphi_j(v_j(n)) \quad (31)$$

Η διόρθωση που  $\Delta w_{ji}(n)$  εφαρμόζει στο συναπτικό βάρος  $w_{ji}(n)$  ο αλγόριθμος ΒΚ σε κάθε επανάληψη είναι ανάλογη της μερικής παραγώγου  $\partial \mathcal{E}(n)/\partial w_{ji}(n)$ . Η μερική παράγωγος αυτή αντιπροσωπεύει ένα *συντελεστή ευαισθησίας* ο οποίος καθορίζει την κατεύθυνση της αναζήτησης στο χώρο βαρών για το συναπτικό βάρος  $w_{ji}(n)$ . Επομένως, η διόρθωση  $\Delta w_{ji}(n)$  που εφαρμόζεται στο  $w_{ji}(n)$  ορίζεται από τον κανόνα Δέλτα ως:

$$\Delta w_{ji}(n) = -\eta \frac{\partial \mathcal{E}(n)}{\partial w_{ji}(n)} \quad (32)$$

όπου  $\eta$  η παράμετρος ρυθμού μάθησης. Το αρνητικό πρόσημο της σχέσης (32) υποδηλώνει τη χρήση της μεθόδου βαθμωτής κατάβασης (gradient descent) στο χώρο βαρών, δηλαδή αναζητείται η κατεύθυνση για τη μεταβολή των βαρών η οποία μειώνει την τιμή του  $\mathcal{E}(n)$ . Με χρήση του κανόνα της αλυσίδας και των σχέσεων (30) και (31) και μετά από σειρά πράξεων προκύπτει τελικά

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta \delta_j(n) y_i(n) \quad (33)$$

όπου η τοπική κλίση  $\delta_j(n)$  ορίζεται ως

$$\delta_j(n) = \frac{\partial \mathcal{E}(n)}{\partial v_j(n)} = \frac{\partial \mathcal{E}(n)}{\partial e_j(n)} \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} = e_j(n) \varphi_j' (v_j(n)) \quad (34)$$

Παρατηρώντας τις σχέσεις (33) και (34) είναι εμφανές ότι το σφάλμα  $e_j(n)$  για το νευρώνα εξόδου  $j$  είναι σημαντικό παράγοντας στον υπολογισμό της προσαρμογής  $\Delta w_{ji}(n)$ . Επομένως, πρέπει να γίνει μία διάκριση μεταξύ της περίπτωσης που ο νευρώνας  $j$  είναι ένας κόμβος εξόδου και της περίπτωσης που ο νευρώνας  $j$  είναι κρυφός κόμβος.

Στην περίπτωση που ο νευρώνας  $j$  βρίσκεται στο επίπεδο εξόδου του δικτύου τροφοδοτείται με τη δική του επιθυμητή απόκριση. Το σήμα σφάλματος  $e_j(n)$  που σχετίζεται με αυτό το νευρώνα υπολογίζεται συγκεκριμένα από τη σχέση (28) (βλ. και σχήμα 10). Δεδομένου του σφάλματος  $e_j(n)$  η τοπική κλίση  $\delta_j(n)$  υπολογίζεται απλά από τη σχέση (34).

Στην περίπτωση που ο νευρώνας  $j$  βρίσκεται σε ένα κρυφό επίπεδο του δικτύου δεν υπάρχει καθορισμένη επιθυμητή απόκριση γι' αυτόν. Το σήμα σφάλματος που αντιστοιχεί σε ένα τέτοιο νευρώνα, επομένως, θα πρέπει να καθοριστεί αναδρομικά, χρησιμοποιώντας τα σήματα σφάλματος όλων των νευρώνων με τους οποίους συνδέεται άμεσα ο εν λόγω νευρώνας. Η περίπτωση αυτή απαιτεί ειδική μελέτη, για την οποία χρήσιμη είναι η εικόνα 8, όπου βλέπουμε τον κρυφό νευρώνα  $j$  να συνδέεται με ένα νευρώνα εξόδου  $k$ .

Αρχικά, τροποποιούμε τη σχέση (34) όπου υπολογίζεται η τοπική κλίση  $\delta_j(n)$  για τον κρυφό νευρώνα  $j$  ως εξής

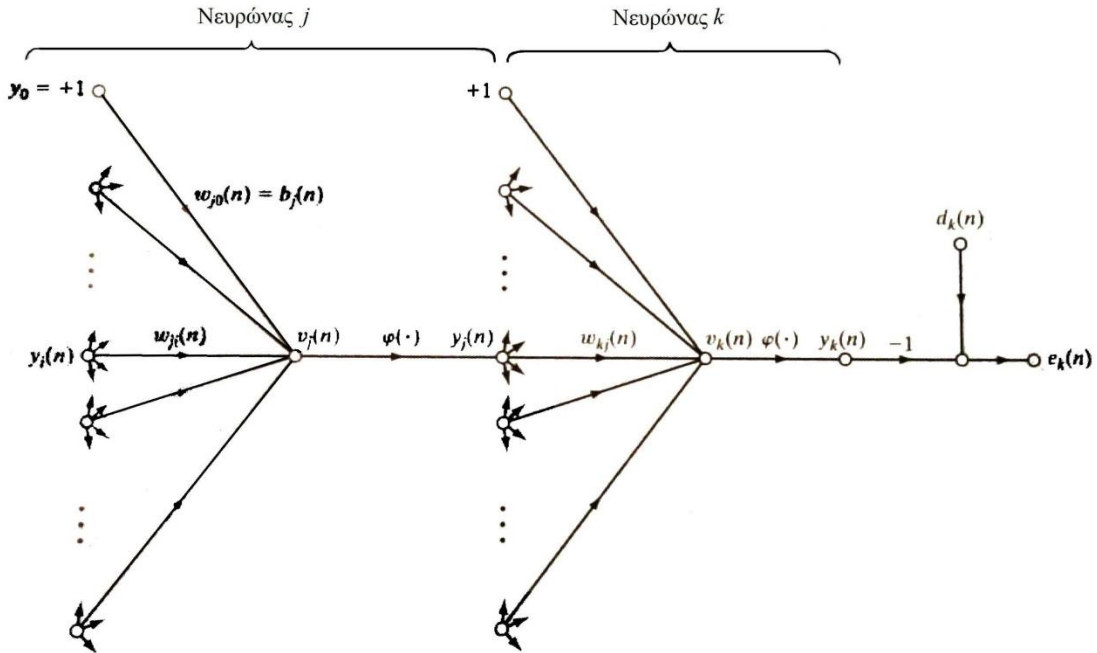
$$\delta_j(n) = \frac{\partial \mathcal{E}(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} = - \frac{\partial \mathcal{E}(n)}{\partial y_j(n)} \varphi_j' (v_j(n)) \quad (35)$$

ενώ εφαρμόζοντας τη σχέση (18) για το νευρώνα εξόδου  $k$  ισχύει

$$\mathcal{E}(n) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{C}} e_k^2(n) \quad (36)$$

και τελικά διαφορίζοντας τη σχέση (36) ως προς το λειτουργικό σήμα  $y_j(n)$  προκύπτει

$$\frac{\partial \mathcal{E}(n)}{\partial y_j(n)} = \sum_k e_k(n) \frac{\partial e_k(n)}{\partial y_j(n)} = \sum_k e_k(n) \frac{\partial e_k(n)}{\partial v_k(n)} \frac{\partial v_k(n)}{\partial y_j(n)} \quad (37)$$



**Σχήμα 11:** Γράφημα ροής σήματος που περιγράφει τις λεπτομέρειες του νευρώνα εξόδου  $k$  ο οποίος συνδέεται στον κρυφό νευρώνα  $j$

Επίσης, σύμφωνα με το σχήμα 11 για το σφάλμα εξόδου και το τοπικό πεδίο του νευρώνα  $k$  ισχύει

$$e_k(n) = d_k(n) - y_k(n) \quad (38)$$

$$v_k(n) = \sum_{i=0}^m w_{ki}(n) y_i(n) \quad (39)$$

όμοια με τις σχέσεις (28) και (31). Τελικά, η ζητούμενη μερική παράγωγος προκύπτει

$$\frac{\partial \mathcal{E}(n)}{\partial y_j(n)} = - \sum_k e_k(n) \varphi'_k(v_k(n)) w_{kj}(n) = - \sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n) \quad (40)$$

όπου η τοπική κλίση  $\delta_k(n)$  ορίζεται όπως στη σχέση (34) αλλά αυτή τη φορά για το νευρώνα  $k$ . Έτσι, από τις σχέσεις (35) και (40) λαμβάνεται ο τύπος οπισθοδιάδοσης για την τοπική κλίση  $\delta_j(n)$ :

$$\delta_j(n) = \varphi'_j(v_j(n)) \sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n) \quad (41)$$

Στη σχέση (41) εξωτερικός παράγοντας  $\varphi'_j(v_j(n))$  εξαρτάται αποκλειστικά από τη συνάρτηση ενεργοποίησης που σχετίζεται με το νευρώνα  $j$ . Ο παράγοντας του αθροίσματος για όλα τα  $k$  που περιλαμβάνεται επίσης σ' αυτόν τον υπολογισμό εξαρτάται από δύο σύνολα όρων. Το πρώτο σύνολο όρων,  $\delta_k(n)$ , απαιτεί γνώση των σημάτων σφάλματος

$e_k(n)$  για όλους τους νευρώνες που βρίσκονται στο αμέσως δεξιότερο επίπεδο του νευρώνα  $j$  και συνδέονται άμεσα με το νευρώνα  $j$ . Το δεύτερο σύνολο όρων  $w_{kj}(n)$  αποτελείται από τα συναπτικά βάρη που σχετίζονται με αυτές τις συνδέσεις.

Συμπερασματικά, η διόρθωση  $\Delta w_{ji}(n)$  που εφαρμόζεται από τον αλγόριθμο Οπισθοδιάδοσης στο συναπτικό βάρος  $w_{ji}(n)$  που συνδέει ένα νευρώνα  $i$  με ένα νευρώνα  $j$  δίνεται από τη σχέση (33). Στη σχέση (33), η τοπική κλίση  $\delta_j(n)$  διαφέρει ανάλογα με το αν ο νευρώνας  $j$  είναι νευρώνας του επιπέδου εξόδου ή όχι. Η τοπική κλίση υπολογίζεται από τη σχέση (34) εάν ο νευρώνας  $j$  είναι νευρώνας εξόδου, ειδάλλως χρησιμοποιείται η σχέση (41).

Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνει μία σειρά από επιλογές για τον καθορισμό των παραμέτρων που υπεισέρχονται στον μαθηματικό μοντέλο του αλγορίθμου ΒΚ, συγκεκριμένα για τη συνάρτηση ενεργοποίησης, το ρυθμό μάθησης και τα κριτήρια τερματισμού του αλγορίθμου. Κατ' αρχάς, όσον αφορά στη συνάρτηση ενεργοποίησης  $\varphi(\cdot)$ , όπως υποδεικνύεται από τις μαθηματικές σχέσεις που προηγήθηκαν, είναι απαραίτητο η συνάρτηση αυτή να είναι διαφορίσιμη. Η συνηθέστερη περίπτωση είναι η χρήση σιγμοειδούς μη γραμμικότητας, όπως παρουσιάστηκε στο σχήμα 3β, με τις δύο μορφές που χρησιμοποιούνται ευρύτερα, τη λογιστική συνάρτηση και τη συνάρτηση υπερβολικής εφαπτομένης.

Αν επιλεγεί η λογιστική συνάρτηση η οποία ορίζεται ως

$$\varphi_j(v_j(n)) = \frac{1}{1 + \exp(-av_j(n))}, \quad a > 0$$

η σχέση (34) για νευρώνα στο επίπεδο εξόδου και η σχέση (39) για κρυφό νευρώνα γίνονται αντίστοιχα

$$\delta_j(n) = \alpha [d_j(n) - o_j(n)] o_j(n) [1 - o_j(n)] \quad (42)$$

$$\delta_j(n) = \alpha y_j(n) [1 - y_j(n)] \sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n) \quad (43)$$

όπου προκειμένου για νευρώνα εξόδου,  $o_j(n) = y_j(n)$ .

Ομοίως, αν επιλεγεί η συνάρτηση υπερβολικής εφαπτομένης με τύπο

$$\varphi_j(v_j(n)) = \alpha \tanh(bv_j(n)), \quad a, b > 0$$

η σχέση (34) για νευρώνα στο επίπεδο εξόδου και η σχέση (30) για κρυφό νευρώνα γίνονται αντίστοιχα

$$\delta_j(n) = \frac{b}{a} [d_j(n) - o_j(n)] [a - o_j(n)] [a + o_j(n)] \quad (44)$$

$$\delta_j(n) = \frac{b}{a} [a - y_j(n)] [a + y_j(n)] \sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n) \quad (45)$$

όπου προκειμένου για νευρώνα εξόδου,  $o_j(n) = y_j(n)$ .

Αναφορικά με την παράμετρο του ρυθμού μάθησης  $\eta$  που έχει εισαχθεί στη διόρθωση  $\Delta w_{ji}(n)$  των συναπτικών βαρών, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, αυτή καθορίζει την ισχύ του διανύσματος κλίσης  $\partial \mathcal{E}(n)/\partial w_{ji}(n)$  επί της διόρθωσης  $\Delta w_{ji}(n)$ . Με άλλα λόγια, ορίζεται από τον αλγόριθμο ΒΚ μια τροχιά που διαγράφεται στο χώρο των βαρών σύμφωνα με τη μέθοδο της πλέον απότομης κατάβασης. Όσο μικρότερη είναι η παράμετρος ρυθμού μάθησης τόσο πιο αποδυναμωμένες είναι οι αλλαγές που θα επιβληθούν στα συναπτικά βάρη του δικτύου από τη μία επανάληψη στην επόμενη και επίσης, τόσο πιο ομαλή θα είναι η τροχιά στο χώρο των βαρών. Όπως είναι αναμενόμενο, σ' αυτή την περίπτωση η διαδικασία μάθησης είναι πιο αργή, απαιτούνται δηλαδή περισσότερες επαναλήψεις. Στην περίπτωση που επιλεγεί πολύ μεγάλη τιμή της παραμέτρου του ρυθμού μάθησης, η διαδικασία μάθησης επιταχύνεται μεν, υπάρχει όμως ο κίνδυνος οι μεγάλες αλλαγές στα συναπτικά βάρη να πάρουν τη μορφή ταλάντωσης οπότε το σύστημα είναι ασταθές.

Προκειμένου να βρεθεί μία ισορροπία μεταξύ μεγάλου ρυθμού μάθησης και ευστάθειας, εισάγεται στον κανόνα Δέλτα για τη διόρθωση των συναπτικών βαρών  $\Delta w_{ji}(n)$  ένας νέος όρος ορμής, δηλαδή:

$$\Delta w_{ji}(n) = \alpha \Delta w_{ji}(n-1) + \eta \delta_j(n) y_i(n) \quad (46)$$

όπου ο (συνήθως) θετικός αριθμός  $\alpha$  ονομάζεται *σταθερά ορμής*. Η σταθερά αυτή έχει το ρόλο ελέγχου της ανάδρασης που δέχεται η διόρθωση  $\Delta w_{ji}(n)$ . Λύνοντας την εξίσωση (46) σαν εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης ως προς  $\Delta w_{ji}(n)$  προκύπτει:

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta \sum_{t=0}^n a^{n-t} \delta_j(t) y_i(t) = -\eta \sum_{t=0}^n a^{n-t} \frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial w_{ji}(t)} \quad (47)$$

Η σχέση (47) αποτελεί μία εκθετικά σταθμισμένη χρονοσειρά μήκους  $n+1$ . Για να συγκλίνει η χρονοσειρά, η σταθερά ορμής πρέπει να κινείται στο διάστημα  $0 \leq |\alpha| < 1$ . Για  $\alpha = 0$  μεταπίπτουμε στην περίπτωση όπου δεν χρησιμοποιείται ορμή. Γενικότερα, όταν υπάρχει ταλάντωση του προσήμου της προσαρμογής η ύπαρξη της ορμής δρα σταθεροποιητικά ενώ όταν το πρόσημο είναι σταθερό τότε η χρήση της ορμής επιταχύνει την κατάβαση.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι μέχρι στιγμής γινόταν αναφορά σε παράμετρο ρυθμού μάθησης  $\eta$ , σταθερής τιμής. Στην πραγματικότητα όμως η παράμετρος ρυθμού μάθησης μπορεί να είναι διαφορετική για κάθε νευρώνα, έστω  $\eta_{ij}$ . Τέλος, υπάρχει δυνατότητα να μην είναι όλα τα συναπτικά βάρη μεταβλητά, αλλά να υπάρχουν μερικοί νευρώνες με σταθερό βάρος, οπότε για τους νευρώνες αυτούς θα ισχύει  $\eta_{ij} = 0$ .

Η εφαρμογή του αλγορίθμου ΒΚ γίνεται σε δύο φάσεις υπολογισμών. Το πρώτο πέρασμα είναι το λεγόμενο πέρασμα με κατεύθυνση προς τα εμπρός ενώ το δεύτερο πέρασμα είναι το λεγόμενο πέρασμα με κατεύθυνση προς τα πίσω. Κατά το *πέρασμα με κατεύθυνση προς τα εμπρός* δεν γίνονται αλλαγές στα συναπτικά βάρη του δικτύου, παρά μόνο υπολογίζονται τα λειτουργικά σήματα στην έξοδο των νευρώνων των διαδοχικών κρυφών επιπέδων μέχρι το επίπεδο εξόδου, οπότε και υπολογίζεται το σήμα σφάλματος. Το πέρασμα με κατεύθυνση προς τα πίσω ξεκινά από το επίπεδο εξόδου διαδίδοντας το σφάλμα

διαδοχικά στα προηγούμενα κρυφά επίπεδα όπου υπολογίζεται αναδρομικά η τοπική κλίση κάθε νευρώνα. Με αυτόν τον τρόπο μεταβάλλονται τα συναπτικά βάρη σύμφωνα με τη διόρθωση του κανόνα Δέλτα.

Ο αλγόριθμος ΒΚ στη γενική περίπτωση δεν μπορεί να αποδειχτεί ότι συγκλίνει σε κάποια λύση, άρα παρουσιάζεται επίσης δυσκολία και στην υιοθέτηση κριτηρίων τερματισμού που να είναι καλά ορισμένα. Υπάρχουν όμως πρακτικοί κανόνες οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον τερματισμό της διαδικασίας προσαρμογής των βαρών. Αρχικά, αναφέρεται το εξής κριτήριο [Kramer et al., 1989]

*Ο αλγόριθμος ΒΚ θεωρείται ότι έχει συγκλίνει όταν η Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος κλίσης φτάσει σε ένα επαρκώς μικρό κατώφλι κλίσης.*

Το κριτήριο αυτό έχει το μειονέκτημα ότι προκύπτουν μεγάλοι χρόνοι μάθησης, όπως επίσης απαιτεί τον υπολογισμό του διανύσματος κλίσης. Άλλη μία πρόταση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο σύγκλισης είναι:

*Ο αλγόριθμος ΒΚ θεωρείται ότι έχει συγκλίνει όταν ο απόλυτος ρυθμός μεταβολής του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ανά εποχή<sup>1</sup> είναι επαρκώς μικρός.*

Μια τυπική τιμή τερματισμού για το μέσο τετραγωνικό σφάλμα αν ακολουθηθεί αυτό το κριτήριο είναι στο διάστημα 0.1% ως 1% ανά εποχή, αλλά μπορεί να επιλεγεί ακόμα μικρότερη τιμή κατωφλίου στο 0.01% ανά εποχή. Η επιλογή της τιμής τερματισμού είναι πολύ κρίσιμη καθώς το κριτήριο αυτό πολλές φορές επιφέρει πρόωρο τερματισμό της διαδικασίας μάθησης.

Τέλος, για τον τερματισμό του αλγορίθμου χρησιμοποιείται ακόμη ένα κριτήριο, με χρήση της *διασταυρωμένης επικύρωσης (cross validation)*, οπότε μετά από κάθε επανάληψη της διαδικασίας μάθησης το δίκτυο ελέγχεται ως προς την ικανότητα γενίκευσής του. Η αξιολόγηση αυτή επιτυγχάνεται χωρίζοντας το σύνολο εκπαίδευσης σε δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, εκ των οποίων το πρώτο χρησιμοποιείται για τη γνωστή διαδικασία προσαρμογής των βαρών ενώ το δεύτερο χρησιμοποιείται στο να διαπιστωθεί κατά πόσο το δίκτυο είναι σε θέση να ταξινομήσει με ικανοποιητικό σφάλμα τα μελλοντικά πρότυπα. Έτσι, μπορεί να παρουσιαστεί πλέον η πλήρης εικόνα του αλγορίθμου ΒΚ όπως παρουσιάζεται στον πίνακα 5.

#### **Πίνακας 5: Σύνοψη του Αλγορίθμου Οπισθοδιάδοσης (Backpropagation)**

##### **1. Αρχικοποίηση**

Αρχικοποίησε τα συναπτικά βάρη χρησιμοποιώντας μια ομοιόμορφη κατανομή.

<sup>1</sup> Ο όρος εποχή αναφέρεται στην *εποχή εκπαίδευσης*, δηλαδή το διάστημα παρουσίας στον αλγόριθμο όλων των παραδειγμάτων ενός δείγματος εκπαίδευσης  $\mathcal{T}$ . Το ίδιο σύνολο εκπαίδευσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερες από μία φορές ώστε να επιτευχθεί καλύτερη σύγκλιση.

## 2. Παρουσιάσεις των Παραδειγμάτων Εκπαίδευσης

Παρουσίασε στο δίκτυο μια εποχή παραδειγμάτων εκπαίδευσης.

## 3. Υπολογισμός προς τα Εμπρός.

Για κάθε δiάνυσμα εκπαίδευσης υπολόγισε το τοπικό πεδίο για το νευρώνα  $j$  στο επίπεδο  $l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ )

$$u_j^{(l)}(n) = \sum_i w_{ji}^{(l)}(n) y_i^{(l-1)}(n)$$

Υπολόγισε το σήμα σφάλματος

$$e_j^{(l)}(n) = d_j(n) - y_j^{(l)}(n) = d_j(n) - o_j(n)$$

## 4. Υπολογισμός προς τα Πίσω.

Υπολόγισε τις τοπικές κλίσεις του δικτύου

$$\delta_j^{(l)} = \begin{cases} e_j^{(l)}(n) \varphi_j'(u_j^{(l)}(n)), & \text{νευρώνας } j \text{ στο επίπεδο εξόδου } L \\ \varphi_j'(u_j^{(l)}(n)) \sum_k \delta_k^{(l+1)}(n) w_{kj}^{(l+1)}(n), & \text{νευρώνας } j \text{ στο κρυφό επίπεδο } l \end{cases}$$

Προσάρμοσε τα συναπτικά βάρη του δικτύου στο επίπεδο  $l$

$$w_{ji}^{(l)}(n+1) = w_{ji}^{(l)}(n) + a w_{ji}^{(l)}(n-1) + \eta \delta_j^{(l)}(n) y_i^{(l-1)}(n)$$

5. **Συνέχιση.** Αύξησε το χρονικό βήμα  $n$  κατά 1 και επέστρεψε στο βήμα 3 μέχρι να ικανοποιηθεί το επιλεγμένο κριτήριο τερματισμού.

Στο σημείο αυτό να σημειωθεί ότι με κατάλληλες τροποποιήσεις ο αλγόριθμος BK μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση όπου ζητείται να ακολουθηθεί η στρατηγική της μαζικής μάθησης. Η εφαρμογή της μαζικής μάθησης προσφέρει καλύτερη εκτίμηση των τοπικών κλίσεων και επομένως καλύτερη σύγκλιση. Η online μάθηση, από την άλλη πλευρά, προσδίδει μεγαλύτερη τυχαιότητα κατά την εκπαίδευση, γεγονός που μικραίνει την πιθανότητα να παγιδευτεί ο αλγόριθμος σε κάποιο τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης κόστους. Η επιλογή μεταξύ των δύο προσεγγίσεων γίνεται ανάλογα με τη φύση του προβλήματος κατηγοριοποίησης.

Όταν η διαδικασία της εκπαίδευσης έχει ολοκληρωθεί οι τιμές στις οποίες τα συναπτικά βάρη έχουν συγκλίνει σταθεροποιούνται και το δίκτυο πλέον μπορεί να μπει στη διαδικασία της κατηγοριοποίησης. Αυτή είναι μια διαδικασία πολύ απλούστερη από την εκπαίδευση. Ένα άγνωστο δiάνυσμα παρουσιάζεται στην είσοδο του δικτύου και ταξινομείται στην κλάση που υποδεικνύει η έξοδος του δικτύου. Οι υπολογισμοί που εκτελούνται από τους νευρώνες είναι προσθέσεις και πολλαπλασιασμοί που ακολουθούνται από μη γραμμικότητες. Για το λόγο αυτό έχουν προταθεί διάφορες υλοποιήσεις σε επίπεδο υλικού, όπως οπτικά κυκλώματα και κυκλώματα VLSI. Επίσης λόγω του εγγενούς παραλληλισμού που παρουσιάζουν τα νευρωνικά δίκτυα, για τους υπολογισμούς μπορεί να χρησιμοποιηθούν συστήματα παράλληλης επεξεργασίας. Με αυτή τη λογική έχουν αναπτυχθεί και ειδικά συστήματα νευροϋπολογιστών (neurocomputers).



### 3.3.1.2. Μηχανή Διανυσμάτων Υποστήριξης (Support Vector Machine, SVM)

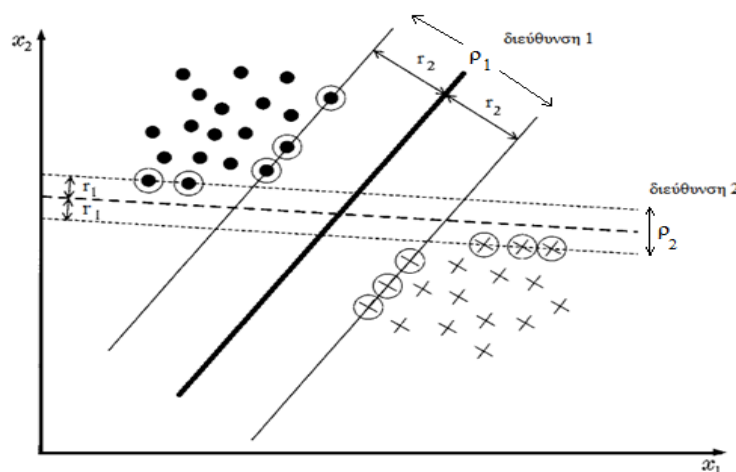
Στην ενότητα αυτή θα μελετηθεί σε βάθος η κατηγοριοποίηση με χρήση των μηχανών διανυσμάτων υποστήριξης. Η μέθοδος αυτή αναφέρεται σε προβλήματα κατηγοριοποίησης σε δύο ομάδες και η κεντρική ιδέα της είναι η αντιστοίχιση των διανυσμάτων με κάποιο κριτήριο που επιλέγεται εξ αρχής σε έναν πολυδιάστατο χώρο χαρακτηριστικών. Στον χώρο αυτό κατασκευάζεται μία γραμμική επιφάνεια απόφασης με ειδικές ιδιότητες ώστε ο κατηγοριοποιητής να έχει την ικανότητα να λειτουργεί στη γενική περίπτωση διανυσμάτων εισόδου. Το πρόβλημα που τίθεται είναι πώς θα καταστεί δυνατό να προσδιοριστεί ένα *υπερεπίπεδο (hyperplane)* στην επιφάνεια αυτή ώστε η γενίκευση να είναι ικανοποιητική. Η λύση του προβλήματος αυτού διαφοροποιείται ανάλογα με το αν τα πρότυπα είναι γραμμικώς διαχωρίσιμα ή όχι.

#### Γραμμικά Διαχωρίσιμα Πρότυπα

Ξεκινώντας από την περίπτωση των γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων, θεωρούμε ένα δείγμα εκπαίδευσης  $\{(\mathbf{x}_i, d_i)\}_{i=1}^N$  όπου  $\mathbf{x}_i$  είναι το  $i$ -οστό διάνυσμα εισόδου και  $d_i$  το αντίστοιχο επιθυμητό αποτέλεσμα της κατηγοριοποίησης και έστω ότι για τη μία κλάση ισχύει  $d_i = +1$  και για την άλλη  $d_i = -1$ . Η εξίσωση της επιφάνειας απόφασης με τη μορφή ενός υπερεπιπέδου που πραγματοποιεί τον διαχωρισμό είναι

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x} + b = 0 \quad (48)$$

όπου  $\mathbf{x}$  είναι ένα διάνυσμα εισόδου,  $\mathbf{w}$  ένα προσαρμόσιμο διάνυσμα βαρών και  $b$  είναι μία πόλωση. Το διάνυσμα  $\mathbf{w}$  αντιπροσωπεύει τη διεύθυνση του υπερεπιπέδου ενώ το  $b$  αντιπροσωπεύει την ακριβή θέση του υπερεπιπέδου στο χώρο.



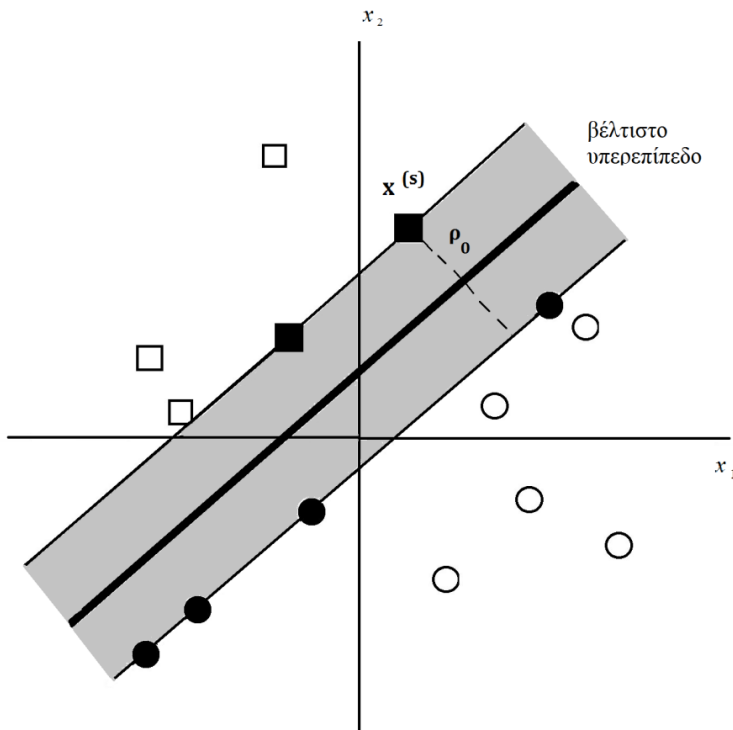
**Σχήμα 12:** Δύο πιθανά υπερεπίπεδα για ένα σύνολο εκπαίδευσης σε διδιάστατο χώρο χαρακτηριστικών. Το υπερεπίπεδο διεύθυνσης 1 είναι προτιμότερο του άλλου καθώς το περιθώριο διαχωρισμού είναι μεγαλύτερο από αυτό της διεύθυνσης 2. Τα κυκλωμένα σημεία αποτελούν τα διανύσματα υποστήριξης που αντιστοιχούν στο κάθε υπερεπίπεδο.

Για ένα δεδομένο σύνολο εκπαίδευσης μπορούν να προκύψουν περισσότερα από ένα υπερεπίπεδα που να διαχωρίζουν τις δύο κλάσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα 9. Επομένως, για τα πρότυπα που είναι καταναμημένα εκατέρωθεν του υπερεπιπέδου θα ισχύει

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x} + b \geq 0, \text{ για } d_i = +1$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x} + b < 0, \text{ για } d_i = -1$$

Για ένα δεδομένο διάνυσμα βαρών  $\mathbf{w}$  και πόλωση  $b$  ο διαχωρισμός μεταξύ του υπερεπιπέδου που ορίζει η εξίσωση (48) και του πλησιέστερου σημείου δεδομένων ονομάζεται περιθώριο διαχωρισμού (margin of separation) και συμβολίζεται με το γράμμα  $\rho$ . Ο στόχος της μηχανής διανυσμάτων υποστήριξης είναι να προσδιορίσει το υπερεπίπεδο εκείνο για το οποίο το περιθώριο διαχωρισμού μεγιστοποιείται. Η επιφάνεια απόφασης που πληροί αυτή τη συνθήκη ονομάζεται βέλτιστο υπερεπίπεδο (optimal hyperplane), ενώ το αντίστοιχο περιθώριο διαχωρισμού ονομάζεται βέλτιστο περιθώριο (optimal margin). Παρατηρώντας το σχήμα 12, μεταξύ των υπερεπιπέδων διεύθυνσης 1 και 2, το υπερεπίπεδο διεύθυνσης 1 είναι το βέλτιστο υπερεπίπεδο καθ' ότι το περιθώριο διαχωρισμού είναι μεγαλύτερο. Ο λόγος για τον οποίο είναι επιθυμητή μία τέτοια συνθήκη είναι ότι η κατηγοριοποίηση των μελλοντικών προτύπων εισόδου είναι πολύ πιο ασφαλής, δεδομένου ότι παρέχεται καλύτερη δυνατότητα να ταξινομηθούν πρότυπα που διαφέρουν από αυτά του συνόλου εκπαίδευσης. Αυτή είναι και η έννοια της γενικευμένης απόδοσης του κατηγοριοποιητή στην όποια έγινε νύξη προηγουμένως. Προκειμένου για ένα διδιάστατο χώρο χαρακτηριστικών η απεικόνιση του βέλτιστου υπερεπιπέδου φαίνεται στο σχήμα 13.



**Σχήμα 13:** Γραφική απεικόνιση της έννοιας του βέλτιστου υπερεπιπέδου για γραμμικά διαχωρίσιμα πρότυπα σε χώρο 2 διαστάσεων. Τα σημεία δεδομένων με μαύρο χρώμα είναι τα διανύσματα υποστήριξης,

Η εξίσωση του βέλτιστου υπερεπιπέδου προκύπτει από την εξίσωση (48) αν διατίθενται οι βέλτιστες τιμές του διανύσματος βαρών  $\mathbf{w}_0$  και της πόλωσης  $b$  ως:

$$\mathbf{w}_0^T \mathbf{x} + b_0 = 0 \quad (49)$$

απ' όπου προκύπτει και η συνάρτηση διάκρισης

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_0^T \mathbf{x} + b_0 \quad (50)$$

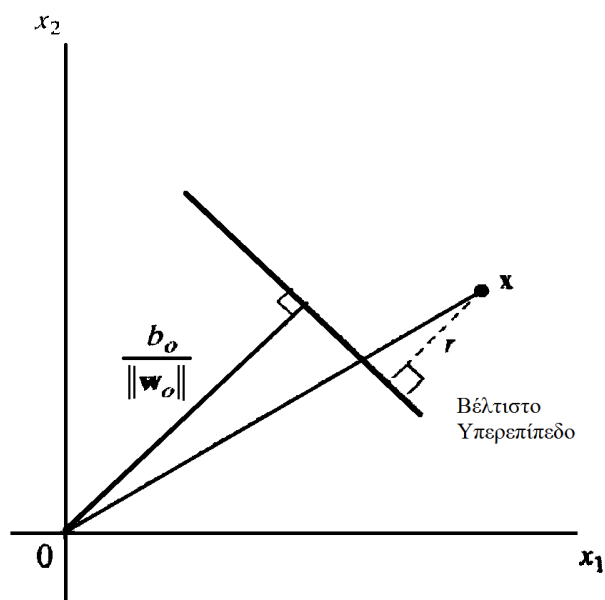
η οποία δίνει ένα αλγεβρικό μέτρο της απόστασης του  $\mathbf{x}$  από το βέλτιστο υπερεπίπεδο. Αναλυτικότερα, το  $\mathbf{x}$  μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + r \frac{\mathbf{w}_0}{\|\mathbf{w}_0\|} \quad (51)$$

όπου  $\mathbf{x}_p$  είναι η κανονική προβολή του  $\mathbf{x}$  στο βέλτιστο επίπεδο και  $r$  είναι η επιθυμητή αλγεβρική απόσταση, η οποία είναι θετική αν το  $\mathbf{x}$  βρίσκεται στη θετική πλευρά του βέλτιστου υπερεπιπέδου και αρνητική αν το  $\mathbf{x}$  βρίσκεται στην αρνητική πλευρά. Όμως εξ' ορισμού ισχύει  $g(\mathbf{x}_p) = 0$ , άρα

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_0^T \mathbf{x} + b_0 &= r \|\mathbf{w}_0\| \Leftrightarrow \\ r &= \frac{g(\mathbf{x})}{\|\mathbf{w}_0\|} \end{aligned} \quad (52)$$

Η απόσταση του βέλτιστου υπερεπιπέδου από το σημείο αρχής ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ) είναι  $b_0/\|\mathbf{w}_0\|$ . Αν  $b_0 > 0$  το σημείο αρχής βρίσκεται στη θετική πλευρά του υπερεπιπέδου, αν  $b_0 < 0$  το σημείο αρχής βρίσκεται στην αρνητική πλευρά του υπερεπιπέδου, ενώ αν  $b_0 = 0$  το υπερεπίπεδο διέρχεται από το σημείο αρχής. Οι παρατηρήσεις αυτές απεικονίζονται στο σχήμα 6.



**Σχήμα 14:** Γεωμετρική ερμηνεία των αλγεβρικών αποστάσεων ενός σημείου από το βέλτιστο υπερεπίπεδο στην περίπτωση χώρου 2 διαστάσεων

Δοθέντος λοιπόν του συνόλου προτύπων εκπαίδευσης  $\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}_i, d_i)\}$  οι παράμετροι  $\mathbf{w}_0$  και  $b_0$  για το βέλτιστο υπερεπίπεδο πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση

$$d_i(\mathbf{w}_0^T \mathbf{x}_i + b_0) \geq 1, \text{ για } i = 1, 2, \dots, N \quad (53)$$

Τα σημεία δεδομένων  $(\mathbf{x}_i, d_i)$  για τα οποία στην παραπάνω σχέση ο ισχύει με ισότητα ονομάζονται *διανύσματα υποστήριξης (support vectors)* και σε αυτά οφείλει την ονομασία της η μέθοδος των Μηχανών Διανυσμάτων Υποστήριξης. Τα διανύσματα αυτά έχουν ιδιαίτερη θέση στη μέθοδο αυτή καθώς είναι τα πλησιέστερα στο βέλτιστο υπερεπίπεδο και επομένως είναι και αυτά που παρουσιάζουν τη μεγαλύτερη δυσκολία στην κατηγοριοποίηση και επομένως έχουν άμεση επίδραση στη βέλτιστη θέση της επιφάνειας απόφασης.

Έστω ένα διάνυσμα υποστήριξης  $\mathbf{x}^{(s)}$ . Κατά συνέπεια του ορισμού των διανυσμάτων υποστήριξης ισχύει

$$g(\mathbf{x}^{(s)}) = \mathbf{w}_0^T \mathbf{x}^{(s)} + b_0 = \pm 1 \text{ για } \mathbf{d}^{(s)} = \pm 1 \quad (54)$$

Επομένως το βέλτιστο περιθώριο κέρδους προσδιορίζεται ως ο χώρος μεταξύ των παράλληλων επιφανειών  $\mathbf{w}_0^T \mathbf{x}^{(s)} + b_0 = \pm 1$ . Από την εξίσωση (52) προκύπτει η αλγεβρική απόσταση του διανύσματος υποστήριξης  $\mathbf{x}^{(s)}$  από το βέλτιστο υπερεπίπεδο

$$r = \frac{g(\mathbf{x}^{(s)})}{\|\mathbf{w}_0\|} = \begin{cases} \frac{1}{\|\mathbf{w}_0\|}, & \text{για } \mathbf{d}^{(s)} = +1 \\ -\frac{1}{\|\mathbf{w}_0\|}, & \text{για } \mathbf{d}^{(s)} = -1 \end{cases} \quad (55)$$

Το θετικό πρόσημο υποδεικνύει ότι το  $\mathbf{x}^{(s)}$  βρίσκεται στη θετική πλευρά του βέλτιστου υπερεπιπέδου ενώ το αρνητικό πρόσημο ότι το  $\mathbf{x}^{(s)}$  βρίσκεται στη αρνητική πλευρά του βέλτιστου υπερεπιπέδου. Έτσι, από την εξίσωση (55) προκύπτει η *βέλτιστη τιμή του περιθωρίου διαχωρισμού*  $\rho$  μεταξύ των δύο κλάσεων που στις οποίες ανήκουν τα πρότυπα εκπαίδευσης του συνόλου  $\mathcal{T}$ :

$$\rho = 2r = \frac{2}{\|\mathbf{w}_0\|} \quad (56)$$

Από την εξίσωση (56) προκύπτει ότι προκειμένου να μεγιστοποιηθεί το περιθώριο διαχωρισμού μεταξύ των δύο κλάσεων η Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος βαρών πρέπει να ελαχιστοποιείται. Η συνθήκη αυτή καθιστά το βέλτιστο υπερεπίπεδο που ορίζει η εξίσωση (50) *μοναδικό*. Η ελαχιστοποίηση της νόρμας αυτής είναι μία διαδικασία μη γραμμικής δευτεροβάθμιας βελτιστοποίησης που υπόκειται σε ένα σύνολο περιορισμών οι οποίοι είναι γραμμικές ανισότητες.

Η μέθοδος της μηχανής διανυσμάτων υποστήριξης ικανοποιεί μια καλώς ορισμένη συνθήκη βελτιστότητας αφού η διαδικασία που ακολουθείται είναι μία ειδική περίπτωση της *βελτιστοποίησης κυρτών συναρτήσεων*. Η διαδικασία της βελτιστοποίησης αυτής αποτελείται από τέσσερα κύρια βήματα. Αρχικά, γίνεται η διατύπωση του προβλήματος στον πρωτεύοντα χώρο βαρών. Στη συνέχεια, κατασκευάζεται η συνάρτηση Lagrange του προβλήματος και έπειτα διατυπώνονται οι συνθήκες για την βελτιστότητα της μηχανής.

Τέλος, γίνεται η επίλυση του προβλήματος στον δυϊκό χώρο των πολλαπλασιαστών Lagrange.

Η φορμαλιστική διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης με περιορισμούς η οποία περιγράφει το πρωτεύον πρόβλημα είναι η εξής:

Δοθέντος ενός δείγματος εκπαίδευσης  $\{(\mathbf{x}_i, d_i)\}_{i=1}^N$ , να βρεθούν οι βέλτιστες τιμές του διάνυσματος βαρών  $\mathbf{w}$  και της πόλωσης  $b$  ώστε να ικανοποιούν τους περιορισμούς

$$d_i(\mathbf{w}_0^T \mathbf{x}_i + b_0) \geq 1, \text{ για } i = 1, 2, \dots, N$$

και το διάνυσμα βαρών  $\mathbf{w}$  να ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους

$$\Phi(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w}$$

Δεδομένου ότι η  $\Phi(\mathbf{w})$  είναι μία κυρτή συνάρτηση του  $\mathbf{w}$  και οι περιορισμοί είναι γραμμικοί ως προς το  $\mathbf{w}$  είναι δυνατή η λύση του προβλήματος με τη χρήση της μεθόδου πολλαπλασιαστών Lagrange. Επομένως, η συνάρτηση Lagrange που κατασκευάζεται είναι η εξής

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} - \sum_{i=1}^N \lambda_i [d_i(\mathbf{w}_0^T \mathbf{x}_i + b) - 1] \quad (57)$$

όπου οι μεταβλητές  $\lambda_i$  ονομάζονται πολλαπλασιαστές Lagrange και  $\boldsymbol{\lambda}$  είναι το αντίστοιχο διάνυσμα των πολλαπλασιαστών Lagrange. Οι συνθήκες βελτιστότητας Karush-Kuhn-Tucker (KKT) που πρέπει να ικανοποιεί ο ελαχιστοποιητής είναι οι παρακάτω:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{0} \quad (58)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\lambda})}{\partial b} = 0 \quad (59)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (60)$$

$$\lambda_i [d_i(\mathbf{w}_0^T \mathbf{x}_i + b_0) - 1] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (61)$$

Με αντικατάσταση των συνθηκών (58) και (59) στην σχέση (57) προκύπτει

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i \mathbf{x}_i \quad (62)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i d_i = 0 \quad (63)$$

Σ' αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να υπολογιστούν οι παράμετροι που έχουν υπεισέλθει στον ορισμό του προβλήματος που αναφέρθηκε προηγουμένως. Λόγω της κυρτότητας της συνάρτησης κόστους και της γραμμικότητας των περιορισμών είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί η λεγόμενη *Λαγκραντζιανή δυϊκότητα (Lagrangian duality)*. Το πρωτεύον

πρόβλημα δηλαδή μετασχηματίζεται στο δυϊκό του στον χώρο των πολλαπλασιαστών Lagrange, το οποίο έχει την ίδια βέλτιστη τιμή με το πρωτεύον όμως τη λύση παρέχουν οι πολλαπλασιαστές Lagrange. Σύμφωνα με το θεώρημα περί δυϊσμού, για να είναι το  $\mathbf{w}_0$  μια βέλτιστη λύση στο πρωτεύον πρόβλημα και το  $\lambda_0$  μια βέλτιστη λύση για το δυϊκό πρόβλημα, η ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι το  $\mathbf{w}_0$  να είναι εφικτό για το πρωτεύον πρόβλημα και

$$\Phi(\mathbf{w}_0) = \mathcal{L}(\mathbf{w}_0, b_0, \lambda_0) = \min_{\mathbf{w}} \mathcal{L}(\mathbf{w}, b, \lambda) \quad (64)$$

Προκειμένου να διατυπωθεί το δυϊκό πρόβλημα στην παρούσα περίπτωση, η εξίσωση (57) αναλύεται περαιτέρω:

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, b, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} - \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i \mathbf{w}_0^T \mathbf{x}_i - b \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i + \sum_{i=1}^N \lambda_i \quad (65)$$

από τη συνθήκη βελτιστότητας (64) ο τρίτος όρος του δεξιού μέλους μηδενίζεται. Ακόμη από τη σχέση (65) προκύπτει

$$\mathbf{w}^T \mathbf{w} = \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j d_i d_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j \quad (66)$$

Θέτοντας την αντικειμενική συνάρτηση  $\mathcal{L}(\mathbf{w}, b, \lambda) = Q(\lambda)$  ώστε να γίνει πιο εμφανής ο μετασχηματισμός του προβλήματος στο δυϊκό του, η σχέση (64) αναδιατυπώνεται ως εξής

$$Q(\lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j d_i d_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j \quad (67)$$

Άρα, το πρόβλημα βελτιστοποίησης αναδιατυπώνεται πλέον ως εξής:

Δοθέντος ενός δείγματος εκπαίδευσης  $\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}_i, d_i)\}_{i=1}^N$ , να βρεθούν οι πολλαπλασιαστές Lagrange  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$  που μεγιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση

$$Q(\lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j d_i d_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j$$

υπό τους περιορισμούς

$$(1) \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i = 0$$

$$(2) \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Στο σημείο αυτό, η χρησιμότητα του μετασχηματισμού του προβλήματος είναι πιο σαφής. Το δυϊκό πρόβλημα, σε αντίθεση με το πρωτεύον, βασίζεται μόνο στα δεδομένα εκπαίδευσης. Επιπλέον, η συνάρτηση  $Q(\lambda)$  που πρέπει να μεγιστοποιηθεί εξαρτάται μόνο από τα πρότυπα εισόδου με τη μορφή ενός αθροίσματος εσωτερικών γινομένων. Τα διανύσματα υποστήριξης στην πλειονότητα των περιπτώσεων αποτελούν ένα υποσύνολο μόνο του συνόλου εκπαίδευσης, επομένως το διάνυσμα των λύσεων είναι αραιό. Στον περιορισμό (2) του δυϊκού προβλήματος η ανισότητα ισχύει για τα διανύσματα υποστήριξης

ενώ η ισότητα ισχύει για όλα τα άλλα διανύσματα εκπαίδευσης, οπότε όλοι οι πολλαπλασιαστές Lagrange είναι μηδέν. Επομένως, υπολογίζοντας τους βέλτιστους πολλαπλασιαστές Lagrange,  $\lambda_{0,i}$ , προκύπτει από τη σχέση (62) το βέλτιστο διάνυσμα βαρών

$$\mathbf{w}_0 = \sum_{i=1}^{N_s} \lambda_{0,i} d_i \mathbf{x}_i \quad (68)$$

όπου  $N_s$  το πλήθος των διανυσμάτων υποστήριξης. Η βέλτιστη πόλωση  $b_0$  υπολογίζεται με αντικατάσταση του  $\mathbf{w}_0$  που υπολογίστηκε προηγουμένως στη σχέση (54).

Σε μία μηχανή διανυσμάτων υποστήριξης, όπως περιγράφηκε παραπάνω, επιβάλλεται μία δομή στο σύνολο των υπερεπιπέδων διαχωρισμού που προκύπτουν μέσω περιορισμών (ελαχιστοποίηση) στην Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος βαρών. Η δομή αυτή περιγράφεται από το ακόλουθο θεώρημα (Vapnik, 1995,1998)

Έστω  $D$  η διάμετρος της μικρότερης σφαίρας που περιέχει όλα τα διανύσματα εισόδου  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ . Το σύνολο των βέλτιστων υπερεπιπέδων που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\mathbf{w}_0^T \mathbf{x} + b_0 = 0$$

έχει διάσταση VC (Vapnik-Chervonekis)<sup>2</sup>,  $h$ , με άνω φράγμα

$$h \leq \min \left\{ \left\lceil \frac{D^2}{\rho^2} \right\rceil, m_0 \right\} + 1$$

όπου το  $\lceil \cdot \rceil$  συμβολίζει τον μικρότερο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον αριθμό που περικλείει,  $\rho$  είναι το περιθώριο διαχωρισμού, ίσο με  $2/\|\mathbf{w}_0\|$ , και  $m_0$  είναι η διαστατικότητα του χώρου εισόδου.

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, είναι δυνατό μέσω της σωστής επιλογής του περιθωρίου διαχωρισμού  $\rho$  να ελεγχθεί η πολυπλοκότητα του βέλτιστου υπερεπιπέδου, δηλαδή η διάσταση VC, ανεξάρτητα από τη διαστατικότητα  $m_0$  του χώρου εισόδου.

### Μη γραμμικά Διαχωρίσιμα Πρότυπα

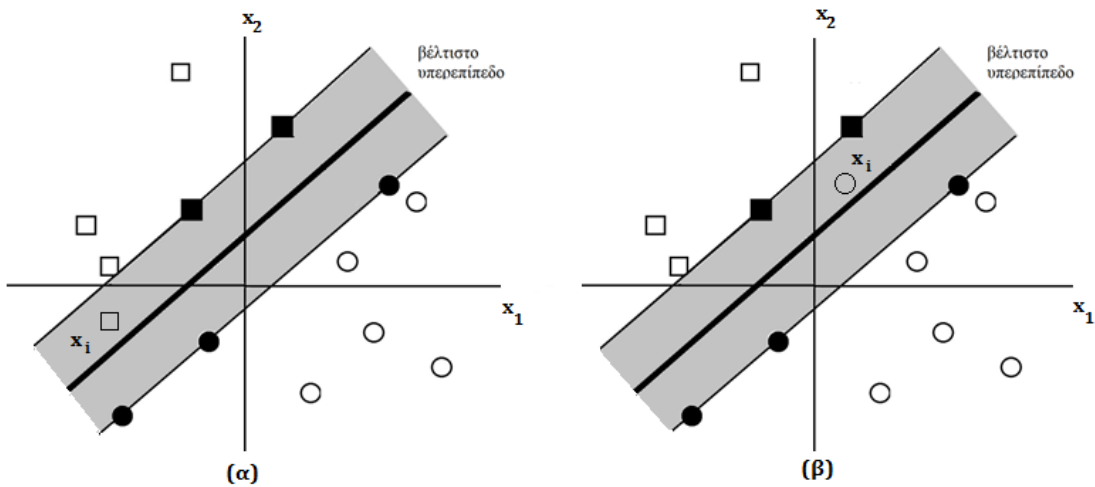
Στην περίπτωση των μη γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων, το σύνολο εκπαίδευσης είναι τέτοιο που δεν επιτρέπει την κατασκευή ενός υπερεπιπέδου διαχωρισμού χωρίς την να υπεισέλθουν σφάλματα στην κατηγοριοποίηση. Το έργο της κατηγοριοποίησης περιορίζεται στην εύρεση ενός βέλτιστου υπερεπιπέδου το οποίο να ελαχιστοποιεί την πιθανότητα σφάλματος, υπολογισμένου επί του συνόλου του συνόλου εκπαίδευσης.

Το περιθώριο διαχωρισμού μεταξύ των κλάσεων χαρακτηρίζεται *ελαστικό (soft)* αν υπάρχει ένα σημείο δεδομένων  $(\mathbf{x}_i, d_i)$  το οποίο παραβιάζει τη συνθήκη της σχέσης (53):

$$d_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b) \geq 1, \text{ για } i = 1, 2, \dots, N$$

<sup>2</sup> Η *διάσταση VC* είναι μία παράμετρος η οποία αποτελεί μέτρο της χωρητικότητας ή εκφραστικής ισχύος (expressive power) μιας οικογένειας δυαδικών συναρτήσεων ταξινόμησης που υλοποιούνται από μία μηχανή μάθησης. Όσο πιο πολλά φαινόμενα μπορούν να περιγραφούν από την οικογένεια συναρτήσεων τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της  $h$ . Στη συγκεκριμένη περίπτωση η διάσταση VC αποτελεί μέτρο της πολυπλοκότητας του χώρου συναρτήσεων.

Η παραβίαση της συνθήκης αυτής μπορεί να προκύψει με δύο τρόπους. Είτε το διάνυσμα  $(\mathbf{x}_i, d_i)$  εμπίπτει στην περιοχή διαχωρισμού και στη σωστή πλευρά της επιφάνειας απόφασης (σχήμα 15α) οπότε η κατηγοριοποίηση είναι σωστή, είτε το διάνυσμα  $(\mathbf{x}_i, d_i)$  εμπίπτει στη λάθος πλευρά της επιφάνειας απόφασης (σχήμα 15β) οπότε η κατηγοριοποίηση αποτυγχάνει. Λόγω του σφάλματος που υπεισέρχεται στην κατηγοριοποίηση στην περίπτωση που εξετάζουμε είναι επόμενο η αφαίρεση από το σύνολο εκπαίδευσης κάποιου από τα παραπάνω σημεία τα οποία προκαλούν το σφάλμα αυτό να προκαλέσει και την αλλαγή της επιφάνειας απόφασης.



**Σχήμα 15:** Υπερεπίπεδο ελαστικού περιθωρίου διαχωρισμού σε διδιάστατο χώρο.

(α) Το σημείο δεδομένων  $\mathbf{x}_i$  βρίσκεται στη σωστή πλευρά του υπερεπιπέδου αλλά εντός της περιοχής διαχωρισμού.

(β) Το σημείο δεδομένων  $\mathbf{x}_i$  βρίσκεται στη λάθος πλευρά του υπερεπιπέδου

Για την εισαγωγή μίας ενιαίας περιγραφής τόσο των δύο παραπάνω προβληματικών περιπτώσεων όσο και της περίπτωσης ενός διανύσματος που ικανοποιεί τον περιορισμό της σχέσης (53) εισάγεται στον ορισμό του διαχωριστικού υπερεπιπέδου ένα καινούριο σύνολο μη αρνητικών μεταβλητών  $\{\xi_i\}_{i=1}^N$  οι οποίες ονομάζονται *μεταβλητές χαλάρωσης (slack variables)* και εισάγονται ως εξής:

$$d_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b) \geq 1 - \xi_i, \text{ για } i = 1, 2, \dots, N \quad (69)$$

Οι μεταβλητές αυτές αποτελούν ουσιαστικά το μέτρο της απόκλισης ενός σημείου δεδομένων από την ιδανική συνθήκη διαχωρισιμότητας των προτύπων. Αν  $0 < \xi_i \leq 1$ , πρόκειται για ένα διάνυσμα εντός της περιοχής διαχωρισμού αλλά στη σωστή πλευρά της επιφάνειας απόφασης (σχήμα 7α). Αν  $\xi_i > 1$ , πρόκειται για ένα διάνυσμα στη λάθος πλευρά της επιφάνειας απόφασης (σχήμα 7β). Αν  $\xi_i = 0$  η εξίσωση (69) μεταπίπτει στην περίπτωση της προηγούμενης ενότητας των γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων, πρόκειται δηλαδή για τα σημεία που είναι σωστά ταξινομημένα και βρίσκονται εκτός της περιοχής διαχωρισμού. Τα διανύσματα υποστήριξης ορίζονται επομένως όπως και στην προηγούμενη περίπτωση και είναι τα σημεία για τα οποία ισχύει η ισότητα της σχέσης (69) με  $\xi_i = 0$ . Ο στόχος του



κατηγοριοποιητή είναι επομένως να προσδιοριστεί ένα υπερεπίπεδο το οποίο να μεγιστοποιεί το περιθώριο διαχωρισμού περιλαμβάνοντας ταυτόχρονα στην περιοχή διαχωρισμού το μικρότερο δυνατό αριθμό διανυσμάτων για τα οποία να ισχύει  $\xi_i > 0$ .

Προκειμένου να διατυπωθεί φορμαλιστικά το πρόβλημα και να επιτευχθεί αυτός ο στόχος ορίζουμε την συναρτησιακή εξίσωση κόστους

$$\Phi(\xi) = \sum_{i=1}^N I(\xi_i - 1)$$

Η παραπάνω συνάρτηση πρέπει να ελαχιστοποιηθεί ως προς το διάνυσμα βαρών  $\mathbf{w}$  υπό τον περιορισμό της σχέσης (69). Η συνάρτηση  $I(\xi)$  είναι μία *συνάρτηση δείκτης (indicator function)* η οποία ορίζεται ως εξής

$$I(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0 \\ 1, & \xi > 0 \end{cases}$$

Η ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού  $\Phi(\xi)$  είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας μη κυρτής συνάρτησης, το οποίο ανήκει στην κλάση των NP-πλήρων προβλημάτων, είναι επομένως αδύνατη η λύση του σε ικανοποιητικό χρόνο. Προκειμένου να αρθεί αυτή η δυσκολία το συναρτησιακό προσεγγίζεται ως εξής

$$\Phi(\xi) = \sum_{i=1}^N \xi_i$$

ενώ αν αναδιατυπωθεί το συναρτησιακό ώστε να διευκολύνεται η ελαχιστοποίησή του ως προς το διάνυσμα βαρών  $\mathbf{w}$

$$\Phi(\mathbf{w}, \xi) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} + C \sum_{i=1}^N \xi_i \quad (70)$$

Η ελαχιστοποίηση του πρώτου όρου σχετίζεται με τα διανύσματα υποστήριξης ενώ το άθροισμα του δεύτερου όρου αποτελεί το άνω φράγμα του αριθμού εσφαλμένων ταξινομήσεων των προτύπων εκπαίδευσης. Η παράμετρος  $C$  καθορίζει ποιος από τους δύο όρους υπερισχύει στην συνάρτηση, επιλέγεται από τον χρήστη και προσδιορίζεται είτε πειραματικά είτε με κάποια άλλη μέθοδο (π.χ. διασταυρωμένης επικύρωσης, cross validation). Όταν το σύνολο εκπαίδευσης θεωρείται αξιόπιστο, τότε η τιμή της σταθεράς αυτής προκύπτει μεγάλη. Αντίθετα, αν θεωρηθεί ότι το σύνολο εκπαίδευσης μπορεί να περιέχει θόρυβο τότε η σταθερά παίρνει πιο μικρές τιμές.

Θα χρησιμοποιηθεί όπως και στην περίπτωση των γραμμικά διαχωρίσιμων προτύπων ο μετασχηματισμός του πρωτεύοντος προβλήματος ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού (70) υπό τον περιορισμό της σχέσης (69) στο δυϊκό του στο χώρο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Το πρωτεύον πρόβλημα επομένως ορίζεται φορμαλιστικά ως εξής:

Δοθέντος ενός δείγματος εκπαίδευσης  $\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}_i, d_i)\}_{i=1}^N$  να βρεθούν βέλτιστες τιμές του διανύσματος βαρών  $\mathbf{w}$  και της πόλωσης  $b$  ώστε να ικανοποιούν τον περιορισμό

$$\begin{aligned} d_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b) &\geq 1 - \xi_i, \text{ για } i = 1, 2, \dots, N \\ \xi_i &\geq 0, \text{ για } i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

και επίσης τέτοιες ώστε το διάνυσμα  $\mathbf{w}$  και οι μεταβλητές  $\xi_i$  να ελαχιστοποιούν τη συναρτησιακή εξίσωση κόστους

$$\Phi(\mathbf{w}, \xi) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} + C \sum_{i=1}^N \xi_i$$

όπου  $C$  παράμετρος που καθορίζεται από τον χρήστη.

Προχωρώντας στον μετασχηματισμό του προβλήματος στο δυϊκό του ορίζουμε την κυρτή συνάρτηση Lagrange του προβλήματος

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, b, \xi, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} + C \sum_{i=1}^N \xi_i - C \sum_{i=1}^N \mu_i \xi_i - \sum_{i=1}^N \lambda_i [d_i(\mathbf{w}_0^T \mathbf{x}_i + b_0) - 1 + \xi_i] \quad (71)$$

όπου οι μεταβλητές  $\lambda_i$  είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange και  $\lambda$  είναι το αντίστοιχο διάνυσμα των πολλαπλασιαστών Lagrange ενώ  $\mu_i$  είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange που αντιστοιχούν στις μεταβλητές  $\xi_i$  και  $\mu$  το αντίστοιχο διάνυσμα των πολλαπλασιαστών Lagrange. Οι συνθήκες βελτιστότητας ΚΚΤ που πρέπει να ικανοποιεί ο ελαχιστοποιητής είναι οι παρακάτω:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{w}, b, \xi, \lambda, \mu)}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{0} \quad (72)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{w}, b, \xi, \lambda, \mu)}{\partial b} = 0 \quad (73)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{w}, b, \xi, \lambda, \mu)}{\partial \xi} = 0 \quad (74)$$

$$\mu_i \xi_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (75)$$

$$\mu_i \geq 0 \text{ και } \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (76)$$

$$\lambda_i [d_i(\mathbf{w}_0^T \mathbf{x}_i + b_0) - 1 + \xi_i] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (77)$$

Με εφαρμογή των συνθηκών (72), (73) και (74) στην σχέση (71) προκύπτουν αντίστοιχα οι σχέσεις:

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i \mathbf{x}_i \quad (78)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i d_i = 0 \quad (79)$$

$$C - \mu_i - \lambda_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (80)$$

Εξετάζοντας ιδιαίτερα την περίπτωση των προβληματικών διανυσμάτων ( $\xi_i > 0$ ), λύνοντας τις συνθήκες KKT για  $\xi_i \neq 0$  για τους αντίστοιχους πολλαπλασιαστές προκύπτει  $\mu_i = 0$  και  $\lambda_i = C$ . Αυτό το αποτέλεσμα σημαίνει ότι τα προβληματικά αυτά σημεία έχουν τη μέγιστη επιρροή στην τελική λύση για το διάνυσμα βαρών  $\mathbf{w}$ .

Με αντικατάσταση των σχέσεων (78), (79) και (80) στη Λαγκραντζιανή της σχέσης (71) και θέτοντας την αντικειμενική συνάρτηση  $\mathcal{L}(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = Q(\boldsymbol{\lambda})$  προκύπτει η αντικειμενική συνάρτηση που θα μεγιστοποιηθεί στα πλαίσια του δυϊκού προβλήματος:

$$Q(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j d_i d_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j \quad (81)$$

Άρα, το πρόβλημα βελτιστοποίησης αναδιατυπώνεται ως εξής:

Δοθέντος ενός δείγματος εκπαίδευσης  $\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}_i, d_i)\}_{i=1}^N$ , να βρεθούν οι πολλαπλασιαστές Lagrange  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$  που μεγιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση

$$Q(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j d_i d_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j$$

υπό τους περιορισμούς

$$(1) \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i = 0$$

$$(2) \quad 0 \leq \lambda_i \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

όπου  $C$  είναι μια καθοριζόμενη από τον χρήστη θετική παράμετρος.

Από τη σχέση (79) προκύπτει το διάνυσμα βαρών  $\mathbf{w}$  όπως και στην περίπτωση των διαχωρίσιμων προτύπων και στη συνέχεια υπολογίζεται η πόλωση  $b$ .

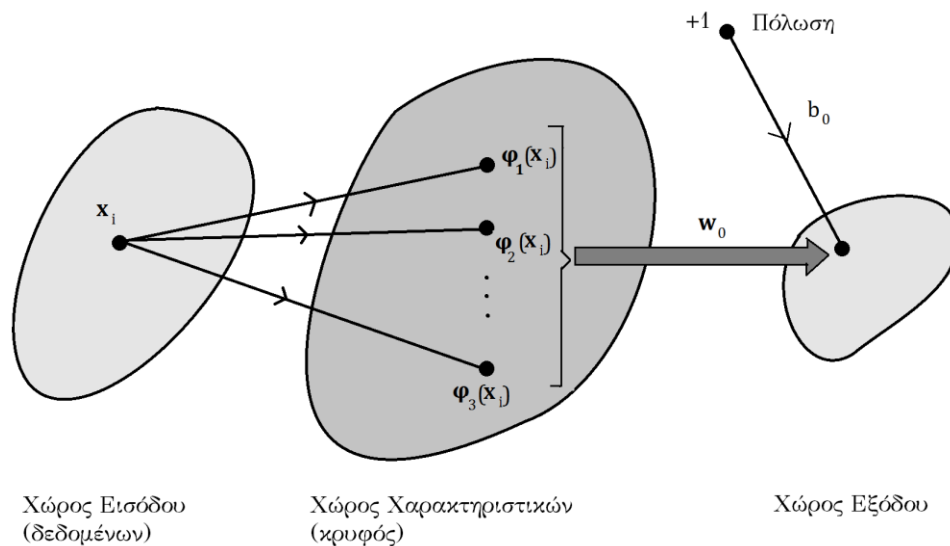
Όπως έχει αναφερθεί προηγουμένως, τα διανύσματα υποστήριξης προσδιορίζονται με τον ίδιο τρόπο είτε πρόκειται για διαχωρίσιμα είτε μη διαχωρίσιμα πρότυπα. Συγκρίνοντας τώρα την εξίσωση (81) με την αντίστοιχη του διαχωρίσιμου προβλήματος εξίσωση (67) προκύπτει ότι η συνάρτηση που πρέπει να μεγιστοποιηθεί είναι επίσης η ίδια και στις δύο περιπτώσεις. Η μεταβλητές  $\xi_i$  καθώς και οι αντίστοιχοι πολλαπλασιαστές Lagrange  $\mu_i$  απαλείφονται από την αντικειμενική συνάρτηση. Η επίδρασή τους μεταφέρεται στη σταθερά  $C$  και η διαφορά μεταξύ των δύο περιπτώσεων έγκειται στον περιορισμό που αφορά στους πολλαπλασιαστές Lagrange  $\lambda_i$ . Στην περίπτωση των μη διαχωρίσιμων προτύπων οι πολλαπλασιαστές  $\lambda_i$  περιορίζονται από τη σταθερά  $C$ , περιορισμός ο οποίος στην απλή περίπτωση δεν υπάρχει, μπορεί δηλαδή να θεωρηθεί ότι  $C \rightarrow \infty$ .

Το επόμενο σημείο στο οποία πρέπει να γίνει ιδιαίτερη αναφορά είναι το υπολογιστικό φορτίο που δημιουργούν οι μηχανές διανυσμάτων υποστήριξης. Οι διαδικασίες της εκπαίδευσης και του ελέγχου είναι αυξημένης τόσο χρονικής όσο και υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Όσον αφορά το στάδιο της εκπαίδευσης, όταν το σύνολο εκπαίδευσης είναι σχετικά μικρό οι συνήθεις αλγόριθμοι βελτιστοποίησης γενικής χρήσης αρκούν για να

έρθει εις πέρας η εργασία αυτή. Για μεγάλα σύνολα εκπαίδευσης όμως (της τάξης μερικών χιλιάδων διανυσμάτων) πρέπει να υπάρξει ιδιαίτερη αντιμετώπιση. Το σύνολο εκπαίδευσης αποσυντίθεται με τέτοιο τρόπο ώστε τα υποσύνολα που δημιουργούνται να μπορούν να χωρέσουν στην διαθέσιμη μνήμη (Bose 1997, Osun 1997, Chan 2000). Επί των υποσυνόλων που προκύπτουν εφαρμόζεται κάποιος αλγόριθμος βελτιστοποίησης γενικής χρήσης ενώ όσο προχωρά η διαδικασία από το ένα υποσύνολο στο επόμενο τα διανύσματα υποστήριξης ενημερώνονται ώστε να ισχύουν οι περιορισμοί του προβλήματος στο σύνολο που αποτελούν τα υποσύνολα που έχουν μέχρι στιγμής υποστεί επεξεργασία. Παρόμοια προβλήματα προκύπτουν και στο στάδιο του ελέγχου για μεγάλα σύνολα προτύπων ελέγχου τα οποία αντιμετωπίζονται με κατάλληλες τεχνικές που έχουν προταθεί (Burg 1997).

### Μηχανή Πυρήνα

Μετά από την μελέτη όλων των παραπάνω δεδομένων είναι πλέον δυνατή η φορμαλιστική περιγραφή της διαδικασίας κατασκευής μίας μηχανής διανυσμάτων υποστήριξης για την κατηγοριοποίηση προτύπων. Η διαδικασία αυτή αποτελείται από δύο επιμέρους μαθηματικές διαδικασίες όπως φαίνεται στο σχήμα 16. Αρχικά γίνεται αντιστοίχιση ενός διανύσματος εισόδου σε ένα χώρο χαρακτηριστικών μεγαλύτερης διαστατικότητας. Η αντιστοίχιση αυτή είναι μη γραμμική. Επίσης, ο ενδιάμεσος χώρος χαρακτηριστικών είναι εσωτερικός του συστήματος, δηλαδή άγνωστος προς την είσοδο και την έξοδο. Η διαστατικότητά του χώρου αυτού καθορίζεται από τον αριθμό των διανυσμάτων υποστήριξης ώστε να διασφαλίζεται η βελτιστότητα της κατηγοριοποίησης. Το επόμενο στάδιο περιλαμβάνει την κατασκευή του βέλτιστου υπερεπιπέδου για τον διαχωρισμό των διανυσμάτων του χώρου χαρακτηριστικών που προσδιορίστηκαν στο προηγούμενο βήμα.



**Σχήμα 16:** Απεικόνιση των λειτουργιών που συγκροτούν τη διαδικασία κατασκευής μίας μηχανής διανυσμάτων υποστήριξης για την αναγνώριση προτύπων. Αρχικά γίνεται η μη γραμμική

αντιστοίχιση του χώρου εισόδου στο χώρο χαρακτηριστικών και στη συνέχεια η γραμμική αντιστοίχιση από το χώρο χαρακτηριστικών στο χώρο εισόδου.

Το πρώτο βήμα ακολουθεί το *θεώρημα του Cover* για τη γραμμική διαχωρισιμότητα των προτύπων. Αν το διαθέσιμο σύνολο των προτύπων είναι μη διαχωρίσιμο. Σύμφωνα με το θεώρημα Cover ένας τέτοιος πολυδιάστατος χώρος μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα νέο χώρο χαρακτηριστικών όπου τα πρότυπα είναι γραμμικά διαχωρίσιμα με μεγάλη πιθανότητα υπό δύο συνθήκες. Η πρώτη συνθήκη είναι ότι ο μετασχηματισμός είναι μη γραμμικός ενώ η δεύτερη υποαγορεύει ότι η διαστατικότητα του χώρου χαρακτηριστικών είναι αρκετά μεγάλη. Βέβαια, το θεώρημα Cover δεν εξετάζει την βελτιστότητα του διαχωριστικού υπερεπιπέδου. Αυτή η έλλειψη καλύπτεται στο δεύτερο βήμα, όπου το βέλτιστο υπερεπίπεδο υπολογίζεται κατά τα γνωστά, με τη βασική διαφορά όμως ότι το διαχωριστικό υπερεπίπεδο ορίζεται ως μία γραμμική συνάρτηση στο χώρο χαρακτηριστικών αντί του αρχικού χώρου εισόδου. Η κατασκευή του γίνεται με τη χρήση του λεγόμενου πυρήνα εσωτερικού γινομένου που εξηγείται στη συνέχεια.

Ακολουθώντας αυτή τη λογική ορίζουμε ως  $\mathbf{x}$  ένα διάνυσμα του χώρου εισόδου διάστασης  $m_0$ , ως  $\{\varphi_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^{\infty}$  ένα σύνολο μη γραμμικών συναρτήσεων οι οποίες μετασχηματίζουν τον χώρο διάστασης  $m_0$  στο χώρο χαρακτηριστικών άπειρων διαστάσεων και ως  $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$  το απείρως μεγάλο σύνολο βαρών που μετασχηματίζει τον χώρο χαρακτηριστικών στο χώρο εξόδου. Χρησιμοποιώντας αυτό το μετασχηματισμό ο ορισμός ενός υπερεπιπέδου το οποίο δρα ως επιφάνεια απόφασης διαμορφώνεται ως εξής

$$\sum_{j=1}^{\infty} w_j \varphi_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (82)$$

Η απόφαση για την κλάση στην οποία θα καταταχθεί το διάνυσμα εισόδου  $\mathbf{x}$  λαμβάνεται στον χώρο εξόδου. Η εξίσωση (82) σε περιγραφή πίνακα γράφεται

$$\mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = 0 \quad (83)$$

όπου το  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  είναι το διάνυσμα χαρακτηριστικών και  $\mathbf{w}$  το διάνυσμα βαρών. Προσαρμόζοντας τη σχέση (68) στην παρούσα περίπτωση προκύπτει

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{N_s} \lambda_i d_i \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i) \quad (84)$$

όπου  $N_s$  είναι το πλήθος των διανυσμάτων υποστήριξης και το διάνυσμα χαρακτηριστικών εκφράζεται ως

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i) = [\varphi_1(\mathbf{x}_i), \varphi_2(\mathbf{x}_i), \dots]^T \quad (85)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (83) στην εξίσωση (84) προκύπτει μία νέα έκφραση για την επιφάνεια απόφασης στο χώρο εξόδου

$$\sum_{i=1}^{N_s} \lambda_i d_i \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = 0 \quad (86)$$

Ο βαθμωτός όρος  $\boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  της εξίσωσης αυτής αποτελεί ένα εσωτερικό γινόμενο. Ο όρος αυτός που συμβολίζεται με  $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$  ονομάζεται πυρήνας εσωτερικού γινομένου (inner product kernel) ή απλά πυρήνας (kernel) και ορίζεται ως (Shawe-Taylor, Christianini 2004):

Ο πυρήνας  $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$  είναι μία συνάρτηση η οποία υπολογίζει το εσωτερικό γινόμενο των εικόνων που παράγονται στο χώρο χαρακτηριστικών βάσει του διανύσματος  $\boldsymbol{\varphi}$  δύο σημείων δεδομένων στο χώρο εισόδου

Και ο αντίστοιχος μαθηματικός μαθηματικός ορισμός:

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\mathbf{x}_i) \varphi_j(\mathbf{x}) \quad (87)$$

Η έκφραση της βέλτιστης επιφάνειας γίνεται επομένως

$$\sum_{i=1}^{N_s} \lambda_i d_i k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = 0 \quad (88)$$

Το σημαντικό όφελος αυτής της προσέγγισης είναι ότι με τον προσδιορισμό μιας τέτοιας συνάρτησης πυρήνα είναι δυνατόν να έρθει εις πέρας η εργασία της κατηγοριοποίησης προτύπων χωρίς να εμπλακεί καθόλου το διάνυσμα βαρών. Ο χώρος χαρακτηριστικών θεωρήθηκε απείρων διαστάσεων, η σχέση (87) όμως υποδεικνύει ότι ο αριθμός των διαστάσεων είναι ίσος με το πλήθος των των προτύπων εκπαίδευσης που χρησιμοποιείται.

### Έλεγχος της ικανότητας γενίκευσης των μηχανών διανυσμάτων υποστήριξης

Η ικανότητα γενίκευσης μιας μηχανής μάθησης εξαρτάται από δύο παράγοντες, το ρυθμό σφάλματος στο σύνολο εκπαίδευσης και τη χωρητικότητα της μηχανής όπως αυτή εκφράζεται μέσω της VC διάστασης. Η πιθανότητα λάθος κατηγοριοποίησης κάποιου προτύπου αγνώστου στη μηχανή (σφάλμα ελέγχου) είναι φραγμένη με την εξής μορφή:

Με πιθανότητα 1 – η ισχύει η ανισότητα

$$R(\mathbf{w}, \mathbf{b}) \leq R_{\text{train}}(\mathbf{w}, \mathbf{b}) + \sqrt{\frac{h \log\left(\frac{2N}{h}\right) - \log\frac{\eta}{4}}{N}} \quad (89)$$

Στην σχέση (43),  $R(\mathbf{w}, \mathbf{b})$  η πιθανότητα σφάλματος ελέγχου,  $R_{\text{train}}(\mathbf{w}, \mathbf{b})$  η πιθανότητα σφάλματος εκπαίδευσης και  $h$  η διάσταση VC. Δηλαδή η σχέση αυτή υπαγορεύει ότι:

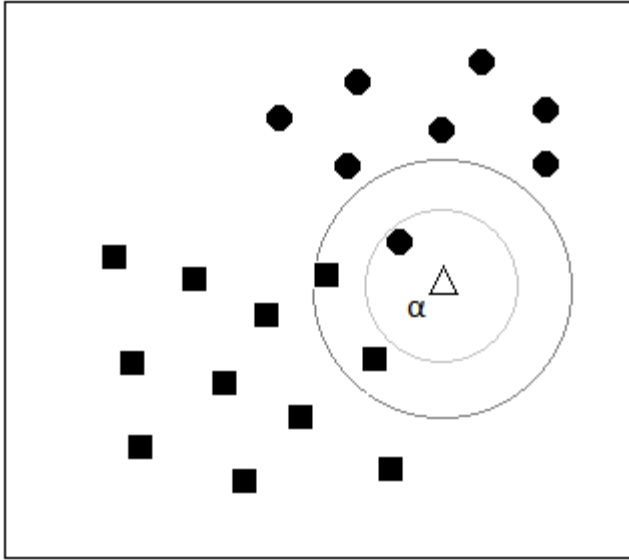
$$P(\text{σφάλμα ελέγχου}) \leq \text{Συχνότητα}(\text{σφάλμα εκπαίδευσης}) + \frac{\text{Διάστημα}}{\text{Εμπιστοσύνης}}$$

Στο φράγμα της παραπάνω σχέσης το διάστημα εμπιστοσύνης εξαρτάται από τη VC διάσταση της μηχανής, το πλήθος των προτύπων του συνόλου εκπαίδευσης και την τιμή του  $\eta$ . Οι δύο όροι του φράγματος είναι ανταγωνιστικοί μεταξύ τους επομένως πρέπει να γίνει ένας συμβιβασμός μεταξύ τους. Όσο μικρότερη είναι η VC διάσταση τόσο μικρότερο είναι το διάστημα εμπιστοσύνης και επίσης τόσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα εμφάνισης σφάλματος εκπαίδευσης. Για την διευθέτηση αυτού του προβλήματος υιοθετείται η αρχή της ελαχιστοποίησης του δομικού κινδύνου (structural risk minimization) η οποία έχει τις ρίζες της στη θεωρία της VC διάστασης και σύμφωνα με την οποία για την εύρεση λύσης αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα των δύο ανταγωνιστικών όρων.

### **3.3.1.3. Αλγόριθμος k-Κοντινότερων Γειτόνων (k-Nearest Neighbor)**

Η λογική της κατηγοριοποίησης κοντινότερων γειτόνων η οποία είναι μη γραμμική είναι πολύ απλή καθώς το υπό κατηγοριοποίηση πρότυπο κατατάσσεται στην κλάση που είναι ανήκουν τα κοντινότερα σε αυτό πρότυπα εκπαίδευσης. Αν πρόκειται για την απλή κατηγοριοποίηση κοντινότερου γείτονα τότε το υπό κατηγοριοποίηση πρότυπο κατατάσσεται στην κλάση που ανήκει το κοντινότερο πρότυπο. Στην περίπτωση που το σύνολο εκπαίδευσης είναι μεγάλο, το απλό αυτό κριτήριο παρουσιάζει μάλιστα πολύ καλές επιδόσεις. Για περισσότερη ασφάλεια στην κατηγοριοποίηση όμως είναι δυνατόν να ληφθούν υπ' όψιν περισσότερα του ενός κοντινά πρότυπα του δείγματος εκπαίδευσης, έστω  $k$  το πλήθος. Σ' αυτό συνίσταται και η μέθοδος των k-Κοντινότερων Γειτόνων (kKΓ) (k-Nearest Neighbor, kNN). Στην περίπτωση που τα  $k$  κοντινότερα πρότυπα δεν είναι όλα της ίδιας κλάσης τότε χρησιμοποιείται η ψήφος πλειοψηφίας είτε η ψήφος σταθμισμένων αποστάσεων. Το  $k$  επιλέγεται ώστε να μην είναι πολλαπλάσιο του πλήθους  $M$  των κλάσεων που υπάρχουν στο πρόβλημα. Όλα τα πρότυπα εκπαίδευσης πρέπει να είναι συνεχώς διαθέσιμα στην μνήμη κατά την εκτέλεση της κατηγοριοποίησης και για το λόγο αυτό πολλές φορές η μέθοδος αυτή αναφέρεται ως κατηγοριοποίηση Βάσει της Μνήμης (Memory-Based). Άλλες ονομασίες της μεθόδου που αναφέρονται είναι Κατηγοριοποίηση Βάσει της Περίπτωσης (Case-Based) ή Βάσει του Παραδείγματος (Example-Based) καθώς η κατηγοριοποίηση βασίζεται άμεσα στα πρότυπα εκπαίδευσης.

Παρατηρώντας το σχήμα 9, το πρότυπο  $a$  με εφαρμογή του κριτηρίου κοντινότερου γείτονα θα καταταχθεί στην κλάση των κύκλων. Στο σχήμα 17, αν εφαρμοστεί κατηγοριοποίηση τριών κοντινότερων γειτόνων τότε το πρότυπο  $a$  θα καταταχθεί στην κλάση των τετραγώνων, καθώς τα δύο από τα τρία κοντινότερα πρότυπα είναι τετράγωνα, χρησιμοποιείται η ψήφος πλειοψηφίας.



**Σχήμα 17:** Παράδειγμα ταξινόμησης κοντινότερων γειτόνων. Ο μικρός ανοιχτός γκρι κύκλος αναφέρεται στην ταξινόμηση κοντινότερου γείτονα ενώ ο μεγάλος σκούρος γκρι κύκλος αναφέρεται στην ταξινόμηση 3 κοντινότερων γειτόνων.

Το πρόβλημα της κατηγοριοποίησης kNN ορίζεται ως εξής: Έστω ότι διαθέτουμε ένα σύνολο εκπαίδευσης  $\mathcal{T} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ , όπου  $N$  το πλήθος των προτύπων του συνόλου  $\mathcal{T}$ . Τα χαρακτηριστικά των προτύπων αυτών συγκροτούν σύνολο  $\mathcal{F}$  και οι τιμές τους κανονικοποιούνται ώστε να βρίσκονται στο διάστημα  $[0,1]$ . Κάθε πρότυπο του  $\mathcal{T}$  αντιστοιχίζεται σε μία κλάση  $y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , όπου  $M$  το πλήθος των κλάσεων. Το ζητούμενο είναι να ταξινομηθεί ένα άγνωστο πρότυπο  $\alpha$ . Η κατηγοριοποίηση αποτελείται από δύο επιμέρους διαδικασίες, τον προσδιορισμό των  $k$  κοντινότερων γειτόνων και τον καθορισμό της κλάσης με χρήση των  $k$  κοντινότερων γειτόνων. Έτσι, αρχικά υπολογίζεται η απόσταση του  $\alpha$  από κάθε  $\mathbf{x}_i$ :

$$d(\alpha, \mathbf{x}_i) = \sum_{f \in \mathcal{F}} w_f \delta(\alpha_f, x_{if}) \quad (90)$$

όπου  $w_f$  είναι ο συντελεστής βάρους του χαρακτηριστικού  $f$ . Υπάρχει μεγάλο ποικιλία δυνατοτήτων για το μετρικό  $\delta$ . Με βάση αυτό το μετρικό υπολογίζονται οι  $k$  κοντινότεροι γείτονες του προτύπου  $\alpha$ . Σύμφωνα με τον μαθηματικό ορισμό ένα μετρικό πρέπει να ικανοποιεί τα παρακάτω τέσσερα κριτήρια:

- (1)  $d(x, y) \geq 0$  (μη αρνητικότητα)
- (2)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (ταυτότητα)
- (3)  $d(x, y) = d(y, x)$  (συμμετρικότητα)
- (4)  $d(x, z) \geq d(x, y) + d(y, z)$  (τριγωνική ανισότητα)

Είναι δυνατόν να κατασκευαστεί κατηγοριοποιητής kNN που να μην είναι μετρικό, κάποιες βελτιστοποιήσεις της μεθόδου για την βελτίωση της απόδοσης όμως απαιτούν τη χρήση μετρικού και κυρίως να ισχύει η τριγωνική ανισότητα.

Αν τα χαρακτηριστικά των προτύπων παίρνουν συνεχείς τιμές, χρησιμοποιείται το μετρικό απόστασης Minkowski, ο γενικός τύπος του οποίου είναι



$$MD_p(\alpha, \mathbf{x}_i) = \left( \sum_{f \in \mathcal{F}} |\alpha_f - x_{if}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (91)$$

Αν επιλεγθεί  $p=1$ , τότε προκύπτει η λεγόμενη απόσταση  $L_1$  ή απόσταση Manhattan, ενώ αν επιλεγθεί  $p=2$  τότε προκύπτει η απόσταση  $L_2$  η οποία είναι η γνωστή Ευκλείδεια απόσταση. Οι δύο αυτές περιπτώσεις είναι οι πιο συνήθεις, υπάρχει όμως δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν και μεγαλύτερες τιμές του  $p$ . Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του  $p$  τόσο μεγαλύτερη βαρύτητα δίνεται στα χαρακτηριστικά τα οποία διαφέρουν πολύ μεταξύ των δύο προτύπων. Μια ακόμη περίπτωση είναι να χρησιμοποιηθεί η απόσταση Minkowski για  $p \rightarrow \infty$ , η οποία συμβολίζεται ως  $L_\infty$  και ονομάζεται απόσταση Chebyshev:

$$MD_\infty(\alpha, \mathbf{x}_i) = \max_{f \in \mathcal{F}} |\alpha_f - x_{if}| \quad (92)$$

Η απόσταση αυτή είναι ουσιαστικά η διαφορά μεταξύ των τιμών του χαρακτηριστικού στο οποίο τα δύο πρότυπα διαφέρουν περισσότερο μεταξύ τους.

Αν τώρα τα χαρακτηριστικά των προτύπων λαμβάνουν δυαδικές τιμές, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η απόσταση *Hamming*

$$HD(\alpha, \mathbf{x}_i) = |\{j \mid \alpha_j \neq x_{ij}\}| \quad (93)$$

η οποία ουσιαστικά υπολογίζει τον αριθμό των σημείων στα οποία τα διανύσματα των δύο προτύπων διαφέρουν. Η απόσταση Hamming συμπίπτει με την απόσταση  $L_1$  στην περίπτωση δυαδικών χαρακτηριστικών. Αν τα χαρακτηριστικά λαμβάνουν διακριτές τιμές χρησιμοποιείται το μέτρο

$$D(\alpha, \mathbf{x}_i) = \sum_{f \in \mathcal{F}} d_f(\alpha_f, x_{if}) \quad (94)$$

όπου  $d_f$  είναι κάποια συνάρτηση απόστασης για το κάθε χαρακτηριστικό. Έτσι, χρησιμοποιώντας κάποιο από τα παραπάνω μετρικά δημιουργείται μία υπερσφαίρα με κέντρο το διάνυσμα του προτύπου  $\alpha$  ακτίνα την απόσταση του  $k$ -οστού μακρύτερου γείτονα από το πρότυπο  $\alpha$ .

Ο τρόπος με τον οποίο θα προσδιοριστεί η κλάση του  $\alpha$  αξιοποιώντας τη γνώση για την κλάση των  $k$  κοντινότερων γειτόνων που περικλείονται στην υπερσφαίρα παρουσιάζει επίσης ποικιλία. Η πιο απλή περίπτωση είναι να επιλεγθεί η κλάση κατά πλειοψηφία των  $k$  κοντινότερων γειτόνων. Μία πιο κομψή προσέγγιση είναι να σταθμιστούν οι ψήφοι των γειτόνων ως προς την απόσταση τους από το υπό κατηγοριοποίηση πρότυπο, δηλαδή τα πιο κοντινά στο  $\alpha$  πρότυπα να επηρεάζουν περισσότερο το αποτέλεσμα. Οι ψήφοι που θα δίνονται σε κάθε κλάση  $y_j$  είναι επομένως

$$\text{Vote}(y_j) = \sum_{c=1}^k \frac{1}{[d(\alpha, \mathbf{x}_i)]^n} 1(y_j, y_c) \quad (95)$$

όπου

$$1(y_j, y_c) = \begin{cases} 1, & y_j = y_c \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και το  $n$  επιλέγεται από τον χρήστη ανάλογα με το πόσο επιθυμεί να μειωθεί η επίδραση των μακρινότερων από τους  $k$  κοντινότερους γείτονες (συνήθως ισούται με 1). Μία άλλη προσέγγιση [Shepard, 1987], χρησιμοποιεί εκθετική μείωση της επίδρασης των μακρύτερων γειτόνων αντί του αντιστρόφου της απόστασης:

$$\text{Vote}(y_j) = \sum_{c=1}^k e^{-\frac{d(\alpha, x_c)}{h}} 1(y_j, y_c) \quad (96)$$

Έτσι, με κάποιο από τους τύπους (95) και (96) υπολογίζονται οι ψήφοι κάθε κλάσης και το πρότυπο  $\alpha$  κατατάσσεται στην κλάση με τις περισσότερες ψήφους.

Όσον αφορά τώρα στην στατιστική συμπεριφορά του κατηγοριοποιητή kNN, αυτός χαρακτηρίζεται μη βέλτιστος (suboptimal). Παρ' όλα αυτά έχει γίνει πολύ δημοφιλής, καθώς ενώ δεν ανήκει στους κατηγοριοποιητές Bayes, ασυμπτωτικά, δηλαδή για  $k \rightarrow \infty$ , προσεγγίζει τη βέλτιστη συμπεριφορά ενός κατηγοριοποιητή Bayes. Ενδεικτικά για την περίπτωση δύο κλάσεων, η πιθανότητα σφάλματος του κατηγοριοποιητή kNN,  $P_{kNN}$ , προκύπτει

$$P_B \leq P_{kNN} \leq P_B + \frac{1}{\sqrt{ke}} \quad (97)$$

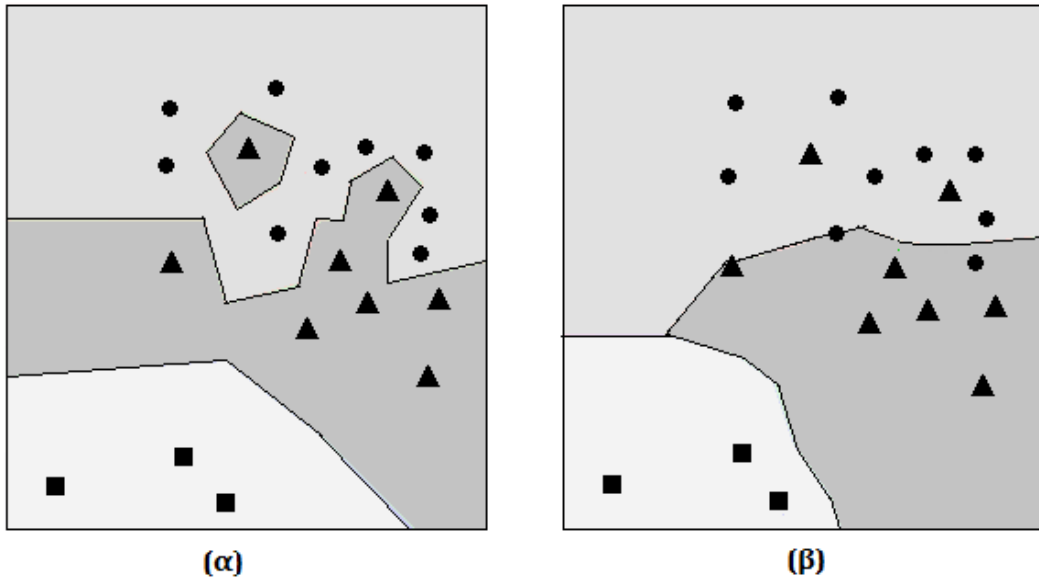
όπου  $P_B$  η πιθανότητα σφάλματος ενός κατηγοριοποιητή Bayes, η οποία ως γνωστόν είναι ελάχιστη. Από τη σχέση αυτή είναι εμφανές ότι για μεγάλες τιμές του  $k$  η συμπεριφορά του κατηγοριοποιητή προσεγγίζει τη βέλτιστη.

Για το συμπέρασμα αυτό μπορεί να δοθεί μία διαισθητική ερμηνεία. Αν υποθεθεί ότι διαθέτουμε μεγάλο σύνολο εκπαίδευσης, δηλαδή το  $N$  είναι αρκετά μεγάλο, η ακτίνα της υπερσφαιράς που έχει κέντρο το υπό κατηγοριοποίηση πρότυπο  $\alpha$  και περιλαμβάνει τους  $k$  κοντινότερους γείτονές του τείνει στο 0, καθώς σ' αυτή την περίπτωση τα πρότυπα θα είναι καταναμημένα με μεγάλη πυκνότητα στο χώρο κι έτσι οι  $k$  κοντινότεροι γείτονες του  $\alpha$  θα βρίσκονται πολύ κοντά του. Επομένως, η οι δεσμευμένες πιθανότητες κάθε κλάσης  $\omega_i$  θα είναι περίπου ίσες με την πιθανότητα  $P(\omega_i|\alpha)$ . Ακόμη, για μεγάλες τιμές του  $k$ , το οποίο όμως είναι απείρως μικρό ποσοστό του  $N$ , η πλειοψηφία των σημείων εντός της υπερσφαιράς θα ανήκουν στην κλάση με τη μεγαλύτερη δεσμευμένη πιθανότητα. Άρα, ο κατηγοριοποιητής kNN ασυμπτωτικά τείνει στον κατηγοριοποιητή Bayes. Βέβαια, στην πεπερασμένη περίπτωση είναι πολύ πιθανό η κατηγοριοποίηση κοντινότερου γείτονα ( $k = 1$ ) να παρουσιάζει μικρότερη πιθανότητα σφάλματος απ' ότι η κατηγοριοποίηση για μεγαλύτερο  $k$ . Ενδεικτικά παρουσιάζεται ένα συγκριτικό παράδειγμα στο σχήμα 18.

### Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Ο σημαντικότερος περιορισμός της κατηγοριοποίησης kNN όμως είναι η πολυπλοκότητα της διαδικασίας προσδιορισμού των  $k$  κοντινότερων γειτόνων μεταξύ του συνόλου εκπαίδευσης. Η εξαντλητική αναζήτηση των γειτόνων έχει πολυπλοκότητα της τάξης του  $O(kN)$ , είναι

δηλαδή ψευδοπολυωνυμικού χρόνου, η οποία είναι αρκετά κακή. Η λύση του προβλήματος γίνεται ακόμα πιο δύσκολη όταν ο χώρος των χαρακτηριστικών έχει πολλές διαστάσεις. Ακόμη, με χρήση ενός μετρικού απόστασης Minkowski η αναζήτηση εκτελείται σε χρόνο  $O(|\mathcal{F}|N)$ , οπότε και πάλι προκύπτει μία μεγάλη χρονική πολυπλοκότητα.



**Σχήμα 18:** Περιοχές απόφασης που δημιουργεί ο αλγόριθμος κοντινότερων γειτόνων kNN σε ένα δεδομένο σύνολο εκπαίδευσης με τρεις κλάσεις σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις (α) κατηγοριοποιητής ενός κοντινότερου γείτονα ( $k=1$ ) (β) κατηγοριοποιητής 5 κοντινότερων γειτόνων

Για το λόγο αυτό, έχουν αναπτυχθεί πολλές τεχνικές τόσο για το φιλτράρισμα των προτύπων του συνόλου εκπαίδευσης, όσο και για την μείωση των διαστάσεων του διανύσματος χαρακτηριστικών. Όσον αφορά στην εύρεση των κοντινότερων γειτόνων, ακολουθεί μία συνοπτική παρουσίαση κάποιων στρατηγικών που έχουν προταθεί για την επιτάχυνση της διαδικασίας αυτής:

- i. Δίκτυο Ανάκτησης Περιπτώσεων (Case-Retrieval Net, CRN)  
 Η ανάκτηση kNN χρησιμοποιείται ευρέως στην Λογική Βάσει της Περίπτωσης (Case-Based Reasoning) και τα CRN είναι μία από τις δημοφιλέστερες τεχνικές για την βελτίωση του χρόνου ανάκτησης. Οι περιπτώσεις, δηλαδή τα πρότυπα εκπαίδευσης, υπόκεινται μία προεπεξεργασία ώστε να σχηματίσουν μία δομή δίκτυου η οποία χρησιμοποιείται κατά την εκτέλεση της κατηγοριοποίησης. Η διαδικασία της ανάκτησης γίνεται με διαδιδόμενη ενεργοποίηση (spreading activation) εντός της δικτυακής αυτής δομής. Είναι δυνατόν τα CRN να ρυθμιστούν έτσι ώστε να επιστρέφουν ακριβώς τόσες περιπτώσεις όσες οι k κοντινότεροι γείτονες [Lenz, Burkhard 1996].
- ii. Ανάκτηση Βάσει του Αποτυπώματος (Footprint-Based Retrieval)  
 Όπως όλες στρατηγικές του είδους, έτσι και αυτή περιλαμβάνει ένα στάδιο προεπεξεργασίας ώστε τα δεδομένα εκπαίδευσης να οργανωθούν σε μία ιεραρχία δύο

επιπέδων στα οποία εφαρμόζεται μία διαδικασία ανάκτησης δύο σταδίων. Κατά την προεπεξεργασία κατασκευάζεται ένα μοντέλο επάρκειας το οποίο αναγνωρίζει τις περιπτώσεις-«απωτυπώματα» οι οποίες αποτελούν σημεία αναφοράς στο σύνολο εκπαίδευσης. Αυτή η διαδικασία δεν ανακτά απαραίτητα τα ίδια πρότυπα που θα ανακτούσε ο εξαντλητικός αλγόριθμος kNN, η βελτίωση όμως που προσφέρει στην ταχύτητα ανάκτησης σε συνδυασμό με την ποιότητα της είναι αρκετά εντυπωσιακή [Smyth 1999].

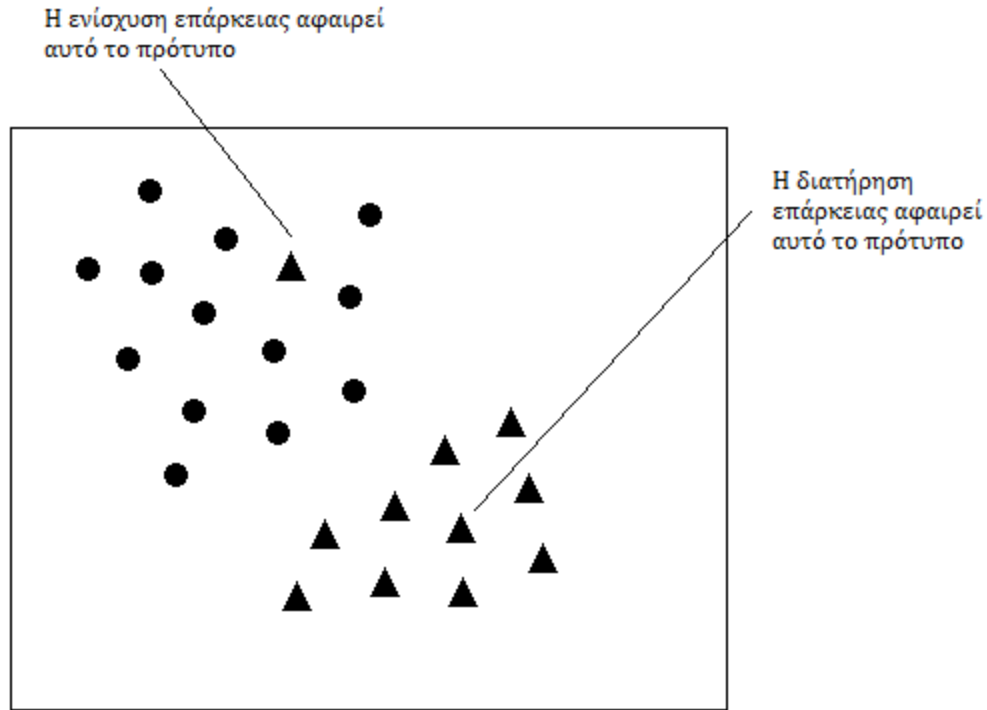
iii. Ψάρεμα και Συρρίκνωση (Fish & Shrink)

Αυτή η τεχνική απαιτεί το μέτρο της απόστασης που χρησιμοποιείται να είναι μετρικό με την αυστηρή έννοια και εκμεταλλεύεται την ιδιότητα της τριγωνικής ανισότητας ώστε να παράγει μία οργάνωση του συνόλου εκπαίδευσης σε πρότυπα που αποτελούν υποψήφιους γείτονες και πρότυπα που δεν λαμβάνονται υπ' όψιν. Πρότυπα που βρίσκονται μακριά από το υπό κατηγοριοποίηση πρότυπο μπορούν να αγνοηθούν και να μην συμπεριληφθούν στην διαδικασία ανάκτησης. Η μέθοδος αυτή έχει αποδειχθεί ότι είναι ισοδύναμη της ανάκτησης kNN [Schaaf, 1996].

iv. Δέντρα Κάλυψης (Cover Trees)

Αυτή η τεχνική μπορεί να θεωρηθεί η τελειότερη μέχρι στιγμής στην επιτάχυνση της ανάκτησης kNN. Για την οργάνωση των προτύπων εκπαίδευσης ώστε η ανάκτηση να είναι αποδοτική, χρησιμοποιείται μία δομή δεδομένων που ονομάζεται δέντρο κάλυψης. Η χρήση δέντρων κάλυψης προϋποθέτει τη χρήση μετρικού υπό την αυστηρή έννοια όμως οι απαιτήσεις σε χώρο καθώς και η βελτίωση της ταχύτητας καθιστούν την τεχνική αυτή πολύ ελκυστική. Οι απαιτήσεις σε χώρο είναι της τάξης του  $O(N)$ , ο χρόνος κατασκευής των δέντρων είναι της τάξης του  $O(c^6 N \log N)$  ενώ ο χρόνος ανάκτησης  $O(c^{12} N \log N)$ , όπου  $c$  είναι ένα μέτρο της διαστατικότητας των δεδομένων. [Beygelzimer et al. 1006]

Οι παραπάνω τεχνικές περιλαμβάνουν επιπρόσθετη επεξεργασία των δεδομένων προκειμένου να κατασκευαστούν κατάλληλες δομές δεδομένων και παρουσιάζουν μεγαλύτερη δυσκολία στην υλοποίηση σε σχέση με την απλή μέθοδο kNN προσφέρουν όμως μεγάλη επιτάχυνση της ανάκτησης των κοντινότερων γειτόνων. Εναλλακτική επιλογή για την επιτάχυνση της κατηγοριοποίησης είναι η μείωση της διαστατικότητας των δεδομένων.



**Σχήμα 19:** Απεικόνιση του στόχου των δύο στρατηγικών επεξεργασίας και διόρθωσης του συνόλου εκπαίδευσης. Η ενίσχυση επάρκειας αφαιρεί πρότυπα με θόρυβο ή εξαιρετικές περιπτώσεις, ενώ η διατήρηση επάρκειας αφαιρεί πρότυπα που βρίσκονται στο εσωτερικό μίας συστάδας προτύπων της ίδιας κλάσης.

Η έρευνα για την μείωση των διαστάσεων των δεδομένων έχει δύο κατευθύνσεις. Το πρώτο πεδίο βελτιστοποιήσεων, η *επιλογή χαρακτηριστικών (feature selection)* εξηγείται σε ξεχωριστή ενότητα καθώς είναι μια τεχνική που εφαρμόζεται σε πολλούς κατηγοριοποιητές με επίβλεψη. Η άλλη πλευρά της μείωσης διαστάσεων είναι η διαγραφή περιττών προτύπων ή προτύπων με θόρυβο στο σύνολο εκπαίδευσης ώστε να βελτιώνεται η απόδοση της κατηγοριοποίησης.

Οι πρώτες τεχνικές που αναπτύχθηκαν στην κατεύθυνση της μείωσης των προτύπων στο σύνολο εκπαίδευσης χωρίζονται σε δύο υποκατηγορίες, τις τεχνικές διατήρησης επάρκειας (*competence preservation*) και τις τεχνικές ενίσχυσης επάρκειας (*competence enhancement*) (βλ. σχήμα 19). Η διατήρηση επάρκειας περιλαμβάνει τον εντοπισμό και την εξαίρεση από το σύνολο εκπαίδευσης των προτύπων που πλεονάζουν και δεν συνεισφέρουν στην επάρκεια της κατηγοριοποίησης. Αυτό επιτυγχάνεται αφαιρώντας πρότυπα που βρίσκονται εσωτερικά μίας συστάδας προτύπων της ίδιας κλάσης και όπως διαφαίνεται διατηρούν τα πρότυπα με θόρυβο ως εξαιρέσεις ή συνοριακά πρότυπα. Από την άλλη πλευρά, η ενίσχυση επάρκειας αποτελεί ουσιαστικά διαδικασία μείωσης θορύβου, αφαιρώντας πρότυπα θορύβου ή φθαρμένα πρότυπα. Υπάρχει περίπτωση όμως στα πλαίσια αυτής της προσπάθειας να αφαιρεθούν εξαιρετικές ή συνοριακές περιπτώσεις προτύπων που μπορεί να μην μπορούν να ξεχωρίσουν από τον πραγματικό θόρυβο. Συνεπώς, για την

βέλτιστο αποτέλεσμα πρέπει να βρεθεί μια ισορροπία μεταξύ των δύο τεχνικών. Οι διάφορες τέτοιες στρατηγικές τροποποίησης του συνόλου εκπαίδευσης υλοποιούνται με δύο τρόπους, είτε επαυξητικά οπότε προστίθενται επιλεγμένα πρότυπα του συνόλου εκπαίδευσης σε ένα αρχικά κενό σύνολο διόρθωσης, είτε μειωτικά οπότε από το σύνολο εκπαίδευσης αφαιρούνται επιλεγμένα πρότυπα.

Μία πρώτη τεχνική διατήρησης επάρκειας είναι η επαυξητική τεχνική των λεγόμενων Συνοπτικών Κοντινότερων Γειτόνων (Condensed Nearest Neighbor, CNN) [Hart 1968]. Η μέθοδος CNN προβλέπει την χρήση ενός αρχικά κενού συνόλου διόρθωσης στο οποίο προστίθενται τα πρότυπα του συνόλου εκπαίδευσης που δεν είναι δυνατό να ταξινομηθούν σωστά από το σύνολο διόρθωσης. Αυτή η τεχνική είναι πολύ ευαίσθητη στο θόρυβο και μάλιστα τείνει εξ ορισμού να διατηρεί τα πρότυπα με θόρυβο. Για το λόγο αυτό προτάθηκε μία βελτιωμένη εκδοχή του CNN, η μέθοδος των Επιλεκτικών Κοντινότερων Γειτόνων (Selective Nearest Neighbor, SNN) [Ritter et al. 1975]. Η μέθοδος αυτή επιβάλλει τον κανόνα ότι κάθε πρότυπο του συνόλου εκπαίδευσης πρέπει να βρίσκεται πιο κοντά σε ένα πρότυπο της ίδιας κλάσης στο σύνολο διόρθωσης απ' ό,τι σε κάποιο πρότυπο άλλης κλάσης. Μία άλλη τεχνική διατήρησης επάρκειας [Gates 1972], μειωτική όμως αυτή τη φορά, υπαγορεύει την ύπαρξη ενός συνόλου διόρθωσης αρχικά όμοιο με το σύνολο εκπαίδευσης. Στη συνέχεια, αφαιρούνται πρότυπα από το σύνολο διόρθωσης των οποίων η αφαίρεση δεν προκαλεί σφάλμα κατηγοριοποίησης των υπόλοιπων προτύπων εκπαίδευσης. Η τεχνική αυτή επιτυγχάνει σε ένα ποσοστό την αφαίρεση θορύβου, είναι όμως ευαίσθητη στη σειρά με την οποία παρουσιάζονται τα πρότυπα.

Όσον αφορά στις τεχνικές ενίσχυσης επάρκειας ή αλλιώς μείωσης θορύβου, η πρώτη που προτάθηκε ήταν ο αλγόριθμος Επεξεργασμένων Κοντινότερων Γειτόνων (Edited Nearest Neighbor, ENN) [Wilson 1972]. Πρόκειται για μειωτική στρατηγική σύμφωνα με την οποία αφαιρούνται από το σύνολο εκπαίδευσης όσα πρότυπα δεν συμφωνούν με τους  $k$  κοντινότερους γείτονες τους καθώς θεωρούνται ως θόρυβος και δεν θα έπρεπε να υπάρχουν σε μία ομάδα προτύπων από την ίδια κλάση. Αυτός ο αλγόριθμος επεκτάθηκε στον Επαναληπτικό ENN (RENN) [Tomek 1976], ο οποίος διατρέχει κατ' επανάληψη το σύνολο εκπαίδευσης με τη λογική του ENN μέχρις ότου να μην μπορεί να ελαχιστοποιηθεί περαιτέρω το σύνολο εκπαίδευσης. Αυτές οι στρατηγικές εστιάζουν στην εξάλειψη των προτύπων με θόρυβο ή άλλων εξαιρετικών περιπτώσεων, δεν έχουν όμως τόσο καλές επιδόσεις στην μείωση των απαιτήσεων μνήμης όσο οι τεχνικές διατήρησης επάρκειας.

Οι μεταγενέστερες τεχνικές επεξεργασίας του συνόλου εκπαίδευσης μπορούν να χαρακτηριστούν υβρίδια των δύο ειδών που αναφέρθηκαν παραπάνω καθώς ενσωματώνουν διαδικασίες τόσο διατήρησης επάρκειας όσο και ενίσχυσης επάρκειας. Ένα παράδειγμα είναι η σειρά αλγορίθμων IBn (Instance Based n) [Aha et al. 1991] οι οποίοι μειώνουν τις απαιτήσεις μνήμης της κατηγοριοποίησης ενώ παράλληλα αντιμετωπίζουν το θόρυβο. Ο αλγόριθμος IB2 είναι όμοιος με τον CNN με την προσθήκη ότι στο σύνολο διόρθωσης προστίθενται μόνο πρότυπα που δεν μπορούν να ταξινομηθούν σωστά από το μειωμένο σύνολο εκπαίδευσης. Η δυσκολία εξάλειψης του θορύβου του αλγορίθμου αυτού

αντιμετωπίζεται στον αλγόριθμο IB3 ο οποίος καταγράφει πόσο σωστά ταξινομούνται τα πρότυπα που αφαιρούνται από το εναπομείναν σύνολο εκπαίδευσης και επιλέγει αυτά που ταξινομούνται σωστά σε σχέση με κάποιο στατιστικό μέτρο.

Οι πιο σύγχρονες προσεγγίσεις στην επεξεργασία του συνόλου εκπαίδευσης χρησιμοποιούν ένα μοντέλο επάρκειας των δεδομένων εκπαίδευσης και εισάγουν κάποιες ιδιότητες επάρκειας που καθορίζουν ποια πρότυπα θα συμπεριληφθούν τελικά στο σύνολο εκπαίδευσης. Οι πρώτες σημαντικές ιδιότητες που εισήχθησαν είναι το σύνολο προσβασιμότητας (reachability set) και το σύνολο κάλυψης (coverage set). Το σύνολο προσβασιμότητας ενός προτύπου είναι το σύνολο των προτύπων τα οποία μπορούν να ταξινομήσουν σωστά το πρότυπο αυτό. Το σύνολο κάλυψης ενός προτύπου είναι το σύνολο των προτύπων που το πρότυπο αυτό μπορεί να ταξινομήσει επιτυχώς. Τα σύνολα προσβασιμότητας και κάλυψης αποτελούν τα χαρακτηριστικά τοπικής επάρκειας ενός προτύπου και αποτελούν τη βάση για έναν αριθμό τεχνικών επεξεργασίας του συνόλου εκπαίδευσης.

Οι αλγόριθμοι που αναπτύχθηκαν σε αυτή τη βάση έχουν τέσσερις βασικές λειτουργίες. Ανάλογα με τις επιλογές που γίνονται για την υλοποίηση αυτών των λειτουργιών σχηματίστηκαν διάφορες οικογένειες αλγορίθμων. Οι επιλογές αφορούν:

- (i) μία πολιτική διάταξης για την παρουσίαση των προτύπων με βάση τα χαρακτηριστικά επάρκειας των προτύπων
- (ii) ένας κανόνας πρόσθεσης για τον καθορισμό των προτύπων που θα συμπεριληφθούν στο διορθωμένο σύνολο.
- (iii) ένας κανόνας διαγραφής για τον καθορισμό των προτύπων που θα αφαιρεθούν από το σύνολο εκπαίδευσης.
- (iv) μία πολιτική ενημέρωσης ώστε να ελέγχεται αν το μοντέλο επάρκειας ενημερώνεται μετά από κάθε βήμα της επεξεργασίας.

Έτσι, αναπτύχθηκε ο αλγόριθμος Επαναληπτικού Φιλτραρίσματος (Iterative Case Filtering, ICF) [Brighton, Mellish 2002], ο οποίος ακολουθεί μειωτική στρατηγική και αφαιρεί από το σύνολο εκπαίδευσης τα πρότυπα των οποίων το πλήθος των στοιχείων του συνόλου προσβασιμότητας είναι μεγαλύτερο από αυτό του συνόλου κάλυψης. Με αυτή τη μέθοδο αφαιρούνται πρότυπα που βρίσκονται μακριά από τα σύνορα μίας κλάσης. Μετά το πέρας κάθε επανάληψης το μοντέλο επάρκειας ενημερώνεται και η διαδικασία τερματίζεται όταν δεν μπορούν να αφαιρεθούν πλέον άλλα πρότυπα. Προβλέπεται επίσης και ένα στάδιο προεπεξεργασίας για τη μείωση του θορύβου, πρακτικά γίνεται χρήση του αλγορίθμου RENN.

Μία άλλη σειρά αλγορίθμων που προτάθηκε είναι οι αλγόριθμοι Τεχνικής Μείωσης (Reduction Technique, RTn) [Wilson, Martinez 1997]. Οι αλγόριθμοι αυτοί ακολουθούν την μειωτική στρατηγική και αφαιρούν κάποιο πρότυπο από το σύνολο εκπαίδευσης αν τουλάχιστον τόσα πρότυπα όσα υπάρχουν στο σύνολο κάλυψής του θα μπορούσαν να ταξινομηθούν σωστά αν δεν υπήρχε το πρότυπο αυτό. Πρακτικά, αφαιρεί πρότυπα με

θόρυβο και πρότυπα που βρίσκονται στο κέντρο μίας συστάδας προτύπων της ίδιας κλάσης καθώς τα υπόλοιπα μπορούν να ταξινομηθούν και χωρίς αυτά.

Συμπερασματικά λοιπόν, η μέθοδος των  $k$  Κοντινότερων Γειτόνων είναι μία μέθοδος που είναι απλή, κατανοητή και εύκολη στην υλοποίηση, της οποίας μάλιστα οι επιδόσεις είναι δυνατόν να βελτιωθούν με χρήση τεχνικών για την αφαίρεση θορύβου αλλά και τη μείωση των απαιτήσεων μνήμης. Όμως, χρειάζεται να δοθεί και επιπλέον σπουδή προκειμένου να βελτιωθεί η χρονική πολυπλοκότητα, καθώς από τη φύση του αλγορίθμου  $k$ NN όλος ο φόρτος εργασίας αντιμετωπίζεται κατά την εκτέλεση. Επίσης, η μέθοδος είναι ευαίσθητη σε άσχετα ή περιττά χαρακτηριστικά καθώς όλα τα χαρακτηριστικά συμμετέχουν στο μέτρο της απόστασης, οπότε και απαιτούνται μέθοδοι για την επιλογή των κατάλληλων χαρακτηριστικών ή την στάθμιση των χαρακτηριστικών. Γενικά, σε δύσκολες εργασίες κατηγοριοποίησης η μέθοδος  $k$ NN υποσκελιζεται από άλλες τεχνικές όπως οι Μηχανές Διανυσμάτων Υποστήριξης ή τα Νευρωνικά Δίκτυα.

### 3.3.2. Μη Επιβλεπόμενη Μάθηση

Στην περίπτωση της μη επιβλεπόμενης μάθησης ή αλλιώς αυτο-οργανούμενης μάθησης δεν υπάρχει κάποιος εξωτερικός παράγοντας που να επεμβαίνει στη διαδικασία μάθησης. Το κενό αυτό καλύπτεται ορίζοντας κάποιο μέτρο ποιότητας της αναπαράστασης που καλείται να αναγνωρίσει ο κατηγοριοποιητής, ανεξάρτητο της εργασίας. Οι ελεύθερες παράμετροι του συστήματος θα πρέπει με την πάροδο της διαδικασίας μάθησης να βελτιστοποιούνται ως προς το μέτρο αυτό. Αν επιλεγεί ένα τέτοιο ανεξάρτητο από την εργασία μέτρο, τότε μετά από την τροφοδότηση του κατηγοριοποιητή με διανύσματα χαρακτηριστικών ώστε να παρουσιάζουν κάποια στατιστική κανονικότητα, τότε ο κατηγοριοποιητής αποκτά την ικανότητα να σχηματίζει εσωτερικές αναπαραστάσεις για την κωδικοποίηση χαρακτηριστικών των διανυσμάτων εισόδου και να δημιουργεί αυτόματα νέες κλάσεις/συστάδες (clusters).

Με άλλα λόγια, η μη επιβλεπόμενη μάθηση στηρίζεται σε αλγορίθμους που προσπαθούν να ανιχνεύσουν ομοιότητες μεταξύ των διανυσμάτων χαρακτηριστικών που δέχονται στην είσοδό τους και να κατατάξουν τα πρότυπα που ομοιάζουν στην ίδια ομάδα, ενώ ο αριθμός των ομάδων μπορεί να αυξηθεί δυναμικά ανάλογα με τα δεδομένα εισόδου. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της ανακάλυψης σημαντικών προτύπων ή χαρακτηριστικών μεταξύ των δεδομένων εισόδου με χρήση των λεγόμενων μη χαρακτηρισμένων παραδειγμάτων (unlabeled examples). Η μη επιβλεπόμενη μάθηση μπορεί να ακολουθήσει δύο στρατηγικές, την αυτο-οργανούμενη μάθηση και την στατιστική θεωρία μάθησης. Η υλοποίηση της αυτο-οργανούμενης μάθησης απορρέει από τη συμπεριφορά των βιολογικών νευρωνικών δικτύων, καθώς υιοθετείται η τοπικότητα των λειτουργιών που παρουσιάζεται στον εγκέφαλο. Από την άλλη πλευρά η στατιστική θεωρία μάθησης στηρίζεται περισσότερο στην χρήση καλά τεκμηριωμένων μαθηματικών εργαλείων.



Μερικοί κατηγοριοποιητές χωρίς επίβλεψη στους οποίους γίνεται αναλυτική αναφορά στην εργασία αυτή είναι οι Χάρτες Αυτο-Οργάνωσης (Self-Organising Maps, SOM) και ο Ασαφής C-Μέσος (Fuzzy C-Means, FCM).

### 3.3.2.1. Χάρτες Αυτο-Οργάνωσης (Self-Organising Maps, SOM)

Οι χάρτες αυτο-οργάνωσης είναι μία ειδική κατηγορία τεχνητών νευρωνικών δικτύων και όπως είναι εμφανές, στηρίζονται στις αρχές της αυτο-οργανούμενης μάθησης. Στηρίζονται στην *ανταγωνιστική μάθηση*, υπό την έννοια ότι ένας μόνο νευρώνας (ή ένας νευρώνας ανά ομάδα) έχει δικαίωμα ενεργοποίησης στην έξοδο του δικτύου οπότε οι νευρώνες ανταγωνίζονται για το ποιος θα υπερισχύσει.

#### Αρχές Αυτο-οργάνωσης

Η αυτο-οργανούμενη μάθηση είναι μία προσέγγιση της μη επιβλεπόμενης μάθησης η οποία στηρίζεται στη λειτουργία των νευρώνων του εγκεφάλου. Συγκεκριμένα, ένας αλγόριθμος που ακολουθεί τις αρχές της αυτο-οργάνωσης εφοδιάζεται με ένα σύνολο κανόνων τοπικής συμπεριφοράς και ο στόχος είναι να χρησιμοποιηθούν οι κανόνες για να υπολογιστεί μια αντιστοίχιση εισόδου-εξόδου με τις επιθυμητές ιδιότητες. Η τοπικότητα έχει την έννοια ότι οι προσαρμογές που εφαρμόζονται στα συναπτικά βάρη κάθε νευρώνα του δικτύου περιορίζονται στην άμεση τοπική γειτονιά του νευρώνα. Έτσι, συγκροτούνται οι τέσσερις αρχές που ακολουθούν οι αλγόριθμοι αυτο-οργάνωσης.

## 1. Αυτο-ενίσχυση

Η πρώτη αρχή της αυτο-οργάνωσης βασίζεται στο επιχείρημα:

Οι τροποποιήσεις στα συναπτικά βάρη ενός νευρώνα τείνουν να αυτο-ενισχύονται σύμφωνα με το αίτημα μάθησης του Hebb, το οποίο εδράζεται στην πλαστικότητα των συνάψεων.

Η διαδικασία της αυτο-ενίσχυσης (self-amplification), δηλαδή, περιορίζεται από την απαίτηση οι τροποποιήσεις που γίνονται στα συναπτικά βάρη του νευρώνα να βασίζονται στα προσυναπτικά και μετασυναπτικά σήματα που είναι διαθέσιμα στο τοπικό επίπεδο. Με άλλα λόγια προβλέπεται ένας μηχανισμός ανάδρασης μέσω του οποίου μια ισχυρή σύναψη οδηγεί στη σύμπτωση των προσυναπτικών και μετασυναπτικών σημάτων και έτσι η σύναψη αυξάνει την ισχύ της λόγω αυτής της σύμπτωσης.

Το αίτημα μάθησης που έχει διατυπωθεί από τον Hebb το 1949 αφορούσε τους βιολογικούς νευρώνες. Το τροποποιημένο αίτημα μάθησης του Hebb για τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα διατυπώνεται ως ένας διμερής κανόνας:

- i. Εάν δύο νευρώνες στις δύο πλευρές μιας σύναψης ενεργοποιούνται ταυτόχρονα τότε η ισχύς αυτής της σύναψης αυξάνεται επιλεκτικά.
- ii. Εάν δύο νευρώνες στις δύο πλευρές μιας σύναψης ενεργοποιούνται ασύγχρονα, τότε η σύναψη αποδυναμώνεται επιλεκτικά ή εξαφανίζεται.

Μία σύναψη που υπακούει στον παραπάνω κανόνα ονομάζεται «Χεμπιανή». Πιο συγκεκριμένα μία σύναψη ορίζεται ως Χεμπιανή όταν χρησιμοποιεί έναν εξαρτώμενο από το χρόνο, εξαιρετικά τοπικό και έντονα αλληλεπιδραστικό μηχανισμό για την αύξηση της συναπτικής αποτελεσματικότητας σαν συνάρτηση της συσχέτισης μεταξύ της προσυναπτικής και μετασυναπτικής δραστηριότητας.

## 2. Ανταγωνισμός

Η δεύτερη αρχή της αυτο-οργάνωσης υπαγορεύει το εξής:

Η ύπαρξη περιορισμών στους διαθέσιμους πόρους, με οποιαδήποτε μορφή, οδηγεί στον ανταγωνισμό μεταξύ των συνάψεων ενός μεμονωμένου νευρώνα ή μεταξύ των νευρώνων μιας ομάδας νευρώνων, με αποτέλεσμα οι πιο έντονα αναπτυσσόμενες συνάψεις, ή νευρώνες, αντίστοιχα, να επιλέγονται εις βάρος των άλλων.

Η ανταγωνιστική αυτή διαδικασία σε ένα δίκτυο εξελίσσεται ως εξής. Αρχικά, οι νευρώνες του δικτύου είναι όλοι στην ίδια κατάσταση εκτός από κάποια τυχαία κατανομημένα συναπτικά βάρη, λόγω των οποίων οι νευρώνες αντιδρούν διαφορετικά σε ένα δεδομένο σύνολο προτύπων εισόδου. Επιβάλλεται, στη συνέχεια, ένα συγκεκριμένο όριο στην ισχύ κάθε νευρώνα του δικτύου. Οι νευρώνες ανταγωνίζονται με αυτό τον τρόπο σύμφωνα με ένα προκαθορισμένο κανόνα για το δικαίωμα να αποκριθούν σ' ένα δεδομένο υποσύνολο εισόδων. Έτσι, μόνο ένας νευρώνας εξόδου ή ένας νευρώνας ανά ομάδα, είναι ενεργός ανά πάσα στιγμή, ο οποίος επικρατεί. Οι μεμονωμένοι νευρώνες του δικτύου αναλαμβάνουν μέσω της διαδικασίας ανταγωνιστικής μάθησης το ρόλο των ανιχνευτών χαρακτηριστικών (feature detectors) για διαφορετικές κλάσεις προτύπων εισόδου.

## 3. Συνεργασία

Η τρίτη αρχή της αυτο-οργάνωσης συνίσταται στην επόμενη πρόταση

Οι τροποποιήσεις των συναπτικών βαρών σε επίπεδο μεμονωμένου νευρώνα και σε επίπεδο δικτύου τείνουν να συνεργάζονται μεταξύ τους.

Ένας νευρώνας δεν είναι συνήθως δυνατόν να ενεργοποιηθεί από σήμα μίας μόνο σύναψης. Πρέπει επομένως να υπάρξει μία συνεργασία μεταξύ των συνάψεων του νευρώνα ώστε να είναι δυνατόν να παραχθούν σήματα επαρκούς ισχύος για την ενεργοποίηση του νευρώνα αυτού. Σε επίπεδο δικτύου η συνεργασία μπορεί να πάρει τη μορφή πλευρικής αλληλεπίδρασης μεταξύ μιας ομάδας διεγερμένων νευρώνων. Ένας νευρώνας που ενεργοποιείται τείνει να διεγείρει και νευρώνες που βρίσκονται στην άμεση γειτονιά του.

## 4. Δομική Πληροφορία

Η τέταρτη και τελευταία αρχή της αυτο-οργάνωσης αναφέρει:

Η υποκείμενη τάξη και η δομή που ενυπάρχουν σ' ένα σήμα εισόδου αντιπροσωπεύουν πλεονασματική πληροφορία, η οποία αποκτάται από ένα αυτο-οργανούμενο σύστημα με τη μορφή γνώσης.

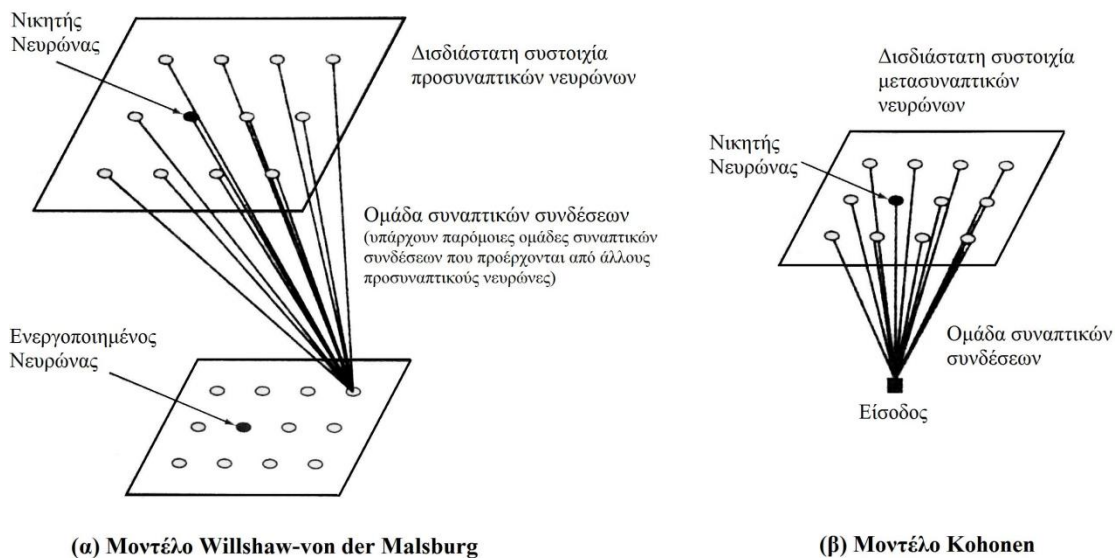
Η δομική πληροφορία που περιέχεται στα δεδομένα εισόδου είναι συνεπώς αναγκαία προϋπόθεση για την αυτο-οργανούμενη μάθηση. Η αυτο-ενίσχυση, ο ανταγωνισμός και η συνεργασία που αναφέρθηκαν προηγουμένως αφορούν τους νευρώνες ενώ η δομική πληροφορία είναι εγγενές χαρακτηριστικό του σήματος εισόδου. Αν αφαιρούνταν η δομική πληροφορία από ένα σήμα τότε το σήμα δεν θα ήταν διαχωρίσιμο από το θόρυβο και δεν θα είχε αξία σε οποιοδήποτε σύστημα μάθησης.

### Χαρτογράφηση Χαρακτηριστικών

Στον εγκέφαλο διαφορετικές αισθητηριακές εισοδοί από τα διάφορα υποσυστήματα χαρτογραφούνται σε αντίστοιχες περιοχές του εγκεφαλικού φλοιού με διατεταγμένο τρόπο. Μια τέτοια δομή τοπογραφικού χάρτη που έχει την ικανότητα να μαθαίνει με τρόπο εμπνευσμένο από τη λειτουργία του εγκεφάλου είναι και το ζητούμενο στην κατασκευή των αυτο-οργανούμενων χαρτών. Ένας τέτοιος χάρτης πρέπει να υπακούει στην αρχή σχηματισμού ενός τοπογραφικού χάρτη [Kohonen, 1990]:

Η χωρική θέση ενός νευρώνα εξόδου σ' ένα τοπογραφικό χάρτη αντιστοιχεί σ' ένα συγκεκριμένο πεδίο ή χαρακτηριστικό των δεδομένων που αντλούνται από το χώρο εισόδου.

Σύμφωνα με την αρχή αυτή αναπτύχθηκαν δύο διαφορετικά μοντέλα αντιστοίχισης χαρακτηριστικών (σχήμα 20).



**Σχήμα 20:** Δύο μοντέλα αυτο-οργανούμενων χαρτών χαρακτηριστικών  
**(α)** Το μοντέλο των Willshaw-von der Malsburg  
**(β)** Το μοντέλο του Kohonen

Παρατηρώντας το σχήμα 20 φαίνεται πως και στις δύο περιπτώσεις οι νευρώνες εξόδου είναι διατεταγμένοι σε δισδιάστατο πλέγμα. Αυτό το είδος τοπολογίας εξασφαλίζει

ότι κάθε νευρώνας έχει ένα σύνολο από γείτονες. Η διαφορά των δύο μοντέλων έγκειται στον τρόπο με τον οποίο καθορίζονται τα πρότυπα εισόδου.

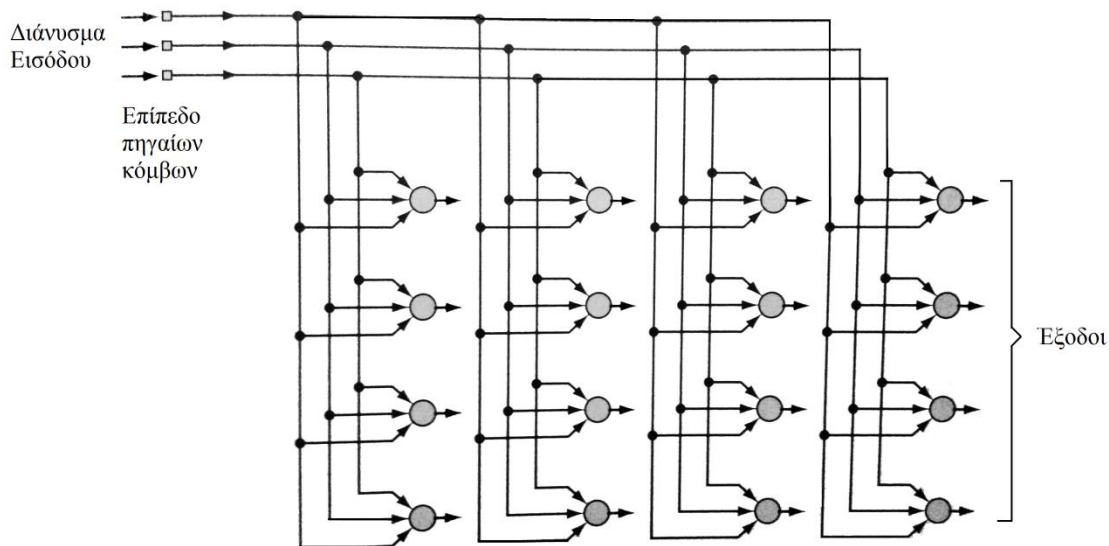
Το πρώτο μοντέλο που απεικονίζεται στην εικόνα 1α προτάθηκε από τους *Willshaw και von der Malsburg* (1976). Το μοντέλο αυτό προβλέπει την ύπαρξη δύο ξεχωριστά δισδιάστατα πλέγματα νευρώνων συνδεδεμένα μαζί, με το ένα να προβάλλεται στο άλλο. Το ένα πλέγμα αντιπροσωπεύει προσυναπτικούς νευρώνες (εισόδου) και το άλλο πλέγμα αντιπροσωπεύει μετασυναπτικούς νευρώνες (εξόδου). Το πλέγμα των μετασυναπτικών νευρώνων χρησιμοποιεί ένα διεγερτικό μηχανισμό μικρής εμβέλειας και έναν ανασταλτικό μηχανισμό μεγάλης εμβέλειας. Αυτοί οι δύο μηχανισμοί είναι τοπικής φύσεως και είναι μείζονος σημασίας για την αυτο-οργάνωση. Τα δύο πλέγματα συνδέονται μεταξύ τους με Χεμπιανές συνάψεις, των οποίων τα βάρη είναι τροποποιήσιμα. Έτσι, μόνο λίγοι μετασυναπτικοί νευρώνες ενεργοποιούνται κάθε στιγμή ενώ για να αποφευχθεί αστάθεια το συνολικό βάρος που αντιστοιχεί σε κάθε νευρώνα περιορίζεται από κάποιο άνω όριο. Με αυτόν τον τρόπο κάποια συναπτικά βάρη αυξάνονται και κάποια μειώνονται. Το μοντέλο αυτό ειδικεύεται σε προβλήματα στα οποία η διάσταση της εισόδου είναι ίδια με τη διάσταση της εξόδου.

Το δεύτερο μοντέλο που φαίνεται στο σχήμα 1β παρουσιάστηκε από τον Kohonen (1982) δεν σχετίζεται άμεσα με τις νευροβιολογικές λειτουργίες. Είναι πιο γενικό από το μοντέλο Willshaw-von der Malsburg αφού έχει τη δυνατότητα να εκτελεί συμπίεση δεδομένων, μειώνει δηλαδή τη διαστατικότητα της εισόδου. Το μοντέλο Kohonen παρέχει μία τοπολογική αντιστοίχιση η οποία τοποθετεί με βέλτιστο τρόπο ένα σταθερό αριθμό διανυσμάτων (κωδικών) σε έναν υψηλότερης διαστατικότητας χώρο εισόδου διευκολύνοντας τη συμπίεση δεδομένων, διαδικασία που αναφέρεται ως *διανυσματική κωδικοποίηση*. Επομένως, το μοντέλο αυτό μπορεί να προσεγγιστεί με δύο τρόπους, πρώτον, με την παραδοσιακή προσέγγιση η οποία βασίζεται στις αρχές της αυτο-οργάνωσης των βιολογικών νευρώνων και, δεύτερον, με μια εναλλακτική προσέγγιση, αυτή της διανυσματικής κβάντισης η οποία βασίζεται στους μηχανισμούς κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης όπως αυτοί ορίζονται στη θεωρία επικοινωνίας. Αυτό είναι και το μοντέλο που θα χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση των αυτο-οργανούμενων χαρτών.

### **Χάρτες Αυτο-οργάνωσης**

Ο στόχος ενός χάρτη αυτο-οργάνωσης (SOM) είναι να μετασχηματίζει ένα πρότυπο εισερχόμενου σήματος, τυχαίας διάστασης, σε ένα διακριτό χάρτη μίας ή δύο διαστάσεων και να εκτελεί αυτό το μετασχηματισμό προσαρμοστικά με κάποιον τοπολογικά διατεταγμένο τρόπο. Στο σχήμα 5 απεικονίζεται ένα δισδιάστατο πλέγμα νευρώνων που χρησιμοποιείται συχνά ως διακριτός χάρτης. Ένας SOM μπορεί να θεωρηθεί ως ένα δίχτυ το οποίο απλώνεται στο χώρο των δεδομένων. Ο αλγόριθμος SOM μετακινεί τα διανύσματα βαρών ώστε να καλύπτει όλο το χώρο δεδομένων και ο χάρτης να είναι οργανωμένος, υπό την έννοια ότι γειτονικοί νευρώνες στο πλέγμα καταλήγουν να έχουν παραπλήσια διανύσματα βαρών.

Ο αλγόριθμος που είναι υπεύθυνος για το σχηματισμό του αυτο-οργανούμενου χάρτη ξεκινά αρχικοποιώντας τα συναπτικά βάρη στο δίκτυο. Τα συναπτικά βάρη αυτά αρχικοποιούνται με μικρές τιμές με χρήση γεννήτριας τυχαίων αριθμών ώστε να μην επιβληθεί κάποια αρχική προτεραιότητα σε κάποιους νευρώνες του χάρτη χαρακτηριστικών. Από το σημείο αυτό και έπειτα, λαμβάνουν χώρα τρεις βασικές διαδικασίες οι οποίες οδηγούν στο σχηματισμό του χάρτη, όπως φαίνεται στο σχήμα 21:



**Σχήμα 21:** Δισδιάστατο πλέγμα νευρώνων με είσοδο τριών διαστάσεων και έξοδο 4x4 (οι εξοδοι συμβολίζονται με βέλη). Κάθε νευρώνας είναι πλήρως συνδεδεμένος με όλους τους πηγαίους κόμβους του επιπέδου εισόδου.

## 1. Ανταγωνισμός

Για κάθε πρότυπο εισόδου οι νευρώνες του δικτύου υπολογίζουν τις αντίστοιχες τιμές μιας συνάρτησης διάκρισης. Η συνάρτηση αυτή καθορίζει τους όρους με βάση τους οποίους διεξάγεται ο ανταγωνισμός μεταξύ των νευρώνων. Ο νευρώνας με τη μεγαλύτερη τιμή στη συνάρτηση διάκρισης είναι και αυτός που αναδεικνύεται νικητής του ανταγωνισμού.

Έστω  $m$  η διάσταση του χώρου εισόδου. Ένα πρότυπο εισόδου επομένως είναι το παρακάτω

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \quad (98)$$

ενώ το διάνυσμα συναπτικών βαρών του νευρώνα  $j$

$$\mathbf{w}_j = [w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jm}]^T, \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (99)$$

όπου  $l$  ο συνολικός αριθμός νευρώνων του δικτύου. Η βέλτιστη ταύτιση του διανύσματος εισόδου  $\mathbf{x}$  με τα διανύσματα συναπτικών βαρών προκύπτει επιλέγοντας το μεγαλύτερο από τα εσωτερικά γινόμενα  $\mathbf{w}_j^T \mathbf{x}$  για  $j = 1, 2, \dots, l$ . Η επιλογή αυτή καθορίζει ουσιαστικά σε ποιο σημείο τοποθετείται το κέντρο της τοπολογικής γειτονιάς των διεγερμένων νευρώνων. Η

μεγιστοποίηση του εσωτερικού γινομένου  $\mathbf{w}_j^T \mathbf{x}$  ανάγεται μαθηματικά στην ελαχιστοποίηση της Ευκλείδειας απόστασης μεταξύ των διανυσμάτων  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{w}_j$ , δεδομένου ότι το  $\mathbf{w}_j$  έχει μοναδιαίο μήκος για όλα τα  $j$ . Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση η διαδικασία ανταγωνισμού μεταξύ των νευρώνων περιγράφεται από τη σχέση

$$i(\mathbf{x}) = \arg \min_j \|\mathbf{x} - \mathbf{w}_j\|, \quad j \in \mathcal{A} \quad (100)$$

όπου  $i(\mathbf{x})$  είναι ο δείκτης του νευρώνα που ταιριάζει καλύτερα με το διάνυσμα εισόδου  $\mathbf{x}$  και  $\mathcal{A}$  το πλέγμα των νευρώνων. Ο νευρώνας  $i$  που ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη ονομάζεται *νευρώνας βέλτιστης τάυτισης* ή *νικητής νευρώνας* για το διάνυσμα εισόδου  $\mathbf{x}$ . Έτσι, προκύπτει ότι ένας συνεχής χώρος εισόδου από πρότυπα ενεργοποίησης αντιστοιχίζεται σ' ένα διακριτό χώρο εξόδου νευρώνων μέσω μιας διαδικασίας ανταγωνισμού μεταξύ των νευρώνων του δικτύου.

## 2. Συνεργασία

Ο νικητής νευρώνας  $i$  καθορίζει τη χωρική θέση μιας τοπολογικής γειτονιάς διεγερμένων νευρώνων θέτοντας έτσι τη βάση για τη συνεργασία τέτοιων γειτονικών νευρώνων. Η τοπολογική γειτονιά γύρω από τον νευρώνα  $i$  φθίνει ομαλά με την πλευρική απόσταση και συμβολίζεται με το γράμμα  $h_{j,i}$  όπου  $j$  ένα τυπικό δείγμα του συνόλου των διεγερμένων συνεργαζόμενων νευρώνων γύρω από τον νικητή νευρώνα. Αν  $d_{j,i}$  η πλευρική απόσταση μεταξύ του νικητή νευρώνα  $i$  και του διεγερμένου νευρώνα  $j$ , η τοπολογική γειτονιά  $h_{j,i}$  θεωρείται ως μια μονοκόρυφη συνάρτηση της πλευρικής απόστασης  $d_{j,i}$  τέτοια ώστε να ικανοποιούνται δύο απαιτήσεις:

- i. Η τοπολογική γειτονιά  $h_{j,i}$  είναι συμμετρική γύρω από το μέγιστο σημείο όπου ισχύει  $d_{j,i} = 0$
- ii. Το πλάτος της τοπολογικής γειτονιάς  $h_{j,i}$  μειώνεται μονοτονικά με την αύξηση της πλευρικής απόστασης  $d_{j,i}$  τείνοντας προς το 0 για  $d_{j,i} \rightarrow \infty$ , η οποία είναι και αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση.

Μια συνηθισμένη επιλογή του  $h_{j,i}$  που ικανοποιεί αυτές τις απαιτήσεις είναι η γκαουσιανή συνάρτηση

$$h_{j,i(\mathbf{x})} = \exp\left(-\frac{d_{j,i}^2}{2\sigma^2}\right), \quad j \in \mathcal{A} \quad (101)$$

η οποία είναι αναλλοίωτη της μετατόπισης, δηλαδή ανεξάρτητη από τη θέση του νικητή νευρώνα. Η παράμετρος  $\sigma$  είναι το εύρος της τοπολογικής γειτονιάς και καθορίζει το βαθμό στον οποίο οι διεγερμένοι νευρώνες στην κοντινή περιοχή του νικητή νευρώνα συμμετέχουν στη διαδικασία μάθησης. Ο τρόπος υπολογισμού της απόστασης  $d_{j,i}$  εξαρτάται από τη διαστατικότητα του πλέγματος.

Το σημαντικότερο χαρακτηριστικό του αλγορίθμου SOM, όμως, είναι ότι επιτρέπει το μέγεθος της τοπολογικής γειτονιάς να μειώνεται σε κάθε επανάληψη, το εύρος  $\sigma$  της σχέσης

(15), δηλαδή, μειώνεται με το χρόνο. Μια συνήθης επιλογή για την εξάρτηση του  $\sigma$  από τον διακριτό χρόνο είναι η εκθετική μείωση σύμφωνα με την εξίσωση

$$\sigma(n) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{n}{\tau_1}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (102)$$

όπου  $\sigma_0$  είναι η αρχική τιμή του  $\sigma$  κατά την έναρξη του αλγορίθμου SOM και  $\tau_1$  μια σταθερά χρόνου η οποία επιλέγεται από τον σχεδιαστή. Η σχέση (101) για την τοπολογική γειτονιά επομένως γίνεται

$$h_{j,i(\mathbf{x})}(n) = \exp\left(-\frac{d_{j,i}^2}{2\sigma^2(n)}\right), \quad n = 1, 2, \dots, n \quad (103)$$

Καθώς αυξάνεται ο διακριτός χρόνος, δηλαδή εκτελούνται επαναλήψεις του αλγορίθμου SOM το εύρος  $\sigma(n)$  μειώνεται εκθετικά και η τοπολογική γειτονιά συρρικνώνεται ανάλογα. Η συνάρτηση τοπολογικής γειτονιάς έχει και πάλι τιμή 1 για το νικητή νευρώνα  $i$ .

### 3. Προσαρμογή Συναπτικών Βαρών

Η τελευταία φάση του αυτο-οργανούμενου σχηματισμού ενός χάρτη χαρακτηριστικών είναι η προσαρμοστική διαδικασία των συναπτικών βαρών, δηλαδή το διάνυσμα συναπτικών βαρών  $\mathbf{w}_j$  του νευρώνα  $j$  να προσαρμόζεται σε σχέση με το διάνυσμα εισόδου  $\mathbf{x}$ . Λόγω του γεγονότος ότι οι αλλαγές που γίνονται στα συναπτικά βάρη είναι προς μια κατεύθυνση και όχι προσυναπτικά και μετασυναπτικά όπως στην κλασική χεμπιανή θεώρηση, τα συναπτικά βάρη μπορεί να οδηγηθούν σε κορεσμό. Για το λόγο αυτό εισάγεται ένας όρος λησμόνησης  $g(y_j)\mathbf{w}_j$  όπου  $g(y_j)$  είναι κάποια θετική βαθμωτή συνάρτηση της απόκρισης  $y_j$ . Το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης αυτή πρέπει να έχει μηδενικό σταθερό όρο, δηλαδή

$$g(y_j) = 0, \quad \text{για } y_j = 0 \quad (104)$$

Έτσι, η διόρθωση στο διάνυσμα βαρών του νευρώνα  $j$  του πλέγματος εκφράζεται:

$$\Delta\mathbf{w}_j = \eta y_j \mathbf{x} - g(y_j)\mathbf{w}_j \quad (105)$$

όπου  $\eta$  η παράμετρος ρυθμού μάθησης του αλγορίθμου. Ο πρώτος όρος είναι ο όρος που αντιστοιχεί στην χεμπιανή θεώρηση ενώ ο δεύτερος είναι ο όρος λησμόνησης. Για να ικανοποιείται η συνθήκη (104) επιλέγεται μια γραμμική συνάρτηση  $g(y_j)$ ,

$$g(y_j) = \eta y_j \quad (106)$$

Για ένα νικητή νευρώνα  $i(\mathbf{x})$  η απόκριση είναι

$$y_j = h_{j,i(\mathbf{x})} \quad (107)$$

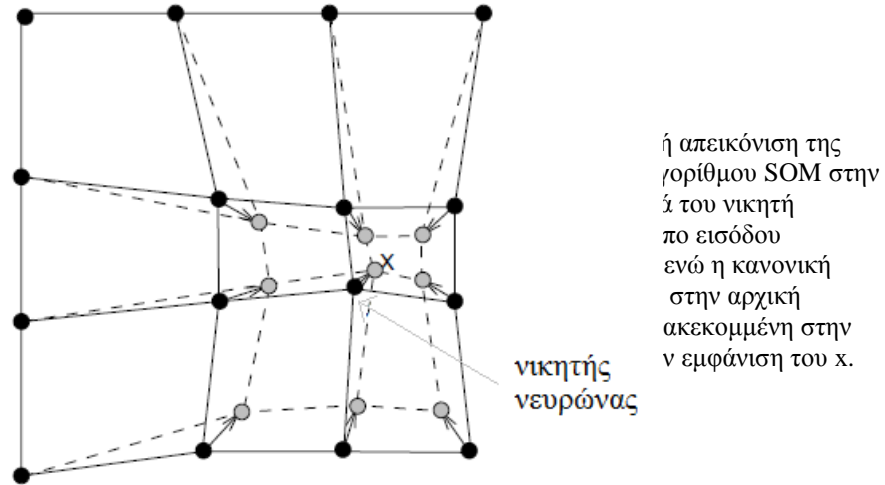
Άρα, η διόρθωση που υφίσταται το διάνυσμα βαρών του νευρώνα  $j$  από τις σχέσεις (105), (106) και (107) προκύπτει

$$\Delta\mathbf{w}_j = \eta h_{j,i(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{w}_j) \quad (108)$$

όπου  $i$  είναι ο νικητής νευρώνας και  $j$  ο διεγερμένος νευρώνας. Έτσι, το ενημερωμένο διάνυσμα βαρών τη χρονική στιγμή  $n + 1$  θα είναι

$$\mathbf{w}_j(n+1) = \mathbf{w}_j(n) + \eta(n)h_{j,i(\mathbf{x})}(n) (\mathbf{x}(n) - \mathbf{w}_j(n)) \quad (109)$$

Η σχέση αυτή εφαρμόζεται σε όλους τους νευρώνες του πλέγματος της τοπολογικής γειτονιάς του νικητή νευρώνα  $i$ . Αυτό που ουσιαστικά περιγράφει είναι η μετατόπιση του διανύσματος συναπτικών βαρών  $\mathbf{w}_i$  του νικητή νευρώνα προς το διάνυσμα εισόδου  $\mathbf{x}$ , όπως



φαίνεται στο σχήμα 22.

Σχήμα 22: Νικητής νευρώνας

Με αυτό τον τρόπο, μετά το πέρας της παρουσίασης των προτύπων εκπαίδευσης τα διανύσματα συναπτικών βαρών τείνουν να ακολουθήσουν την κατανομή των προτύπων εισόδου, οπότε τελικά ο αλγόριθμος οδηγεί στη δημιουργία μιας τοπολογικής διάταξης του χάρτη χαρακτηριστικών στο χώρο εισόδου. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι νευρώνες που είναι γειτονικοί στο πλέγμα θα τείνουν να έχουν παρόμοια διανύσματα συναπτικών βαρών.

Η παράμετρος μάθησης όπως υποδεικνύεται από τη σχέση (109) είναι επίσης μεταβαλλόμενη στο χρόνο. Συγκεκριμένα υπάρχει η απαίτηση να ξεκινά από κάποια αρχική τιμή  $\eta_0$  και στη συνέχεια να φθίνει βαθμιαία με το χρόνο. Έτσι, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εκθετική μείωση ως εξής:

$$\eta(n) = \eta_0 \exp\left(-\frac{n}{\tau_2}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (110)$$

όπου  $\tau_2$  είναι μία ακόμα σταθερά του αλγορίθμου SOM. Η χρήση της εκθετικής μείωσης τόσο στη σχέση (102) όσο και στη σχέση (110) δεν είναι η βέλτιστη επιλογή, είναι όμως επαρκής για το σχηματισμό ενός αυτο-οργανούμενου χάρτη.



## Πίνακας 6: Σύνοψη του Αλγορίθμου Χαρτών Αυτο-οργάνωσης (SOM)

### 1. Αρχικοποίηση

Επίλεξε τυχαίες τιμές για τα αρχικά διανύσματα συναπτικών βαρών  $w_j(0)$  υπό τον περιορισμό ότι οι τιμές  $w_j(0)$  πρέπει να είναι διαφορετικές για κάθε νευρώνα του πλέγματος και συνήθως μικρές τιμές.

### 2. Δειγματοληψία

Πάρε ένα δείγμα  $x$  από το χώρο εισόδου με μια συγκεκριμένη πιθανότητα. Το διάνυσμα  $x$  αντιπροσωπεύει το πρότυπο ενεργοποίησης που εφαρμόζεται στο πλέγμα.

### 3. Ταίριασμα Ομοιότητας

Βρες τον νικητή νευρώνα  $i(x)$  στο χρονικό βήμα  $n$  χρησιμοποιώντας το κριτήριο ελάχιστης απόστασης

$$i(x) = \arg \min_j \|x - w_j\|, \quad j \in \mathcal{A}$$

### 4. Ενημέρωση

Προσάρμοσε τα διανύσματα συναπτικών βαρών όλων των διεγερμένων νευρώνων χρησιμοποιώντας τον τύπο ενημέρωσης

$$w_j(n+1) = w_j(n) + \eta(n)h_{j,i(x)}(n)(x(n) - w_j(n))$$

όπου  $\eta(n)$  η παράμετρος του ρυθμού μάθησης και  $h_{j,i(x)}(n)$  είναι η συνάρτηση γειτονιάς κεντραρισμένη γύρω από το νικητή νευρώνα  $i(x)$ . Οι  $\eta(n)$  και  $h_{j,i(x)}(n)$  μεταβάλλονται δυναμικά κατά τη διάρκεια της μάθησης.

### 5. Συνέχιση

Αύξησε το χρονικό βήμα  $n$  κατά 1 και επέστρεψε στο βήμα 2 μέχρι να μην παρατηρούνται πλέον ευδιάκριτες αλλαγές στο χάρτη χαρακτηριστικών.

Η προσαρμοστική διαδικασία που περιγράφηκε μπορεί να αναλυθεί σε δύο φάσεις, τη φάση διάταξης και στη συνέχεια τη φάση σύγκλισης. Η φάση διάταξης περιλαμβάνει τη διαδικασία της τοπολογικής διάταξης των διανυσμάτων βαρών. Η φάση αυτή μπορεί να απαιτήσει 1000 ή και περισσότερες επαναλήψεις, οπότε είναι κρίσιμης σημασίας να γίνει σωστή επιλογή των παραμέτρων του ρυθμού μάθησης και της συνάρτησης γειτονιάς. Η συνάρτηση γειτονιάς στην αρχή του αλγορίθμου πρέπει να περιλαμβάνει όλους σχεδόν τους νευρώνες του δικτύου κεντραρισμένους ως προς το νικητή νευρώνα και στη συνέχεια η γειτονιά σταδιακά να μειώνεται ώστε να περιλαμβάνει τελικά μόνο λίγους γειτονικούς νευρώνες γύρω από το νικητή ή και μόνο το νικητή νευρώνα. Η φάση σύγκλισης αφορά στην εκτέλεση μικρών προσαρμογών στο χάρτη χαρακτηριστικών ώστε να παρέχεται ακριβέστερη στατιστική ποσοτικοποίηση του χώρου εισόδου. Ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτείται σε αυτή τη φάση είναι ακόμα μεγαλύτερος, συγκεκριμένα πρέπει να είναι τουλάχιστον 500-πλάσιος του αριθμού των νευρώνων του δικτύου. Οι παράμετροι

επιλέγονται ώστε ο ρυθμός μάθησης να είναι αρκετά μικρότερος της φάσης διάταξης και τοπολογική γειτονιά  $\nu$  περιέχει μόνο τους πλησιέστερους γείτονες του νικητή νευρώνα. Έτσι, ο αλγόριθμος SOM μπορεί να συνοψιστεί όπως στον πίνακα 6.

### 3.3.2.2. Ασαφής C-Μέσος (Fuzzy C-Means, FCM)

Ο αλγόριθμος του Ασαφούς C-Μέσου ανήκει στην ευρύτερη οικογένεια των αλγορίθμων ασαφούς συσταδοποίησης (*fuzzy clustering*) η οποία βασίζεται στην ασαφή λογική (*fuzzy logic*). Η ιδέα στην οποία βασίζεται η ασαφής συσταδοποίηση είναι ότι ένα πρότυπο μπορεί να ανήκει ταυτόχρονα σε περισσότερες από μία κλάσεις. Αυτή η θεώρηση αντιπροσωπεύει ουσιαστικά την κατάσταση όπου η γνώση είναι προσεγγιστική, όπως συμβαίνει πολύ συχνά και στην ανθρώπινη νόηση όταν κάποιο αντικείμενο του περιβάλλοντος *μοιάζει* να είναι κάποιο γνωστό αντικείμενο, μοιάζει δηλαδή να ανήκει σε κάποια γνωστή κατηγορία ή αλλιώς συστάδα.

#### Ασαφής Συσταδοποίηση και Μέτρα

Έστω ένα σύνολο δεδομένων  $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ . Η ασαφής  $m$ -συσταδοποίηση του  $X$  ορίζεται ως η διαίρεση του  $X$  σε  $m$  το πλήθος σύνολα (συστάδες) τα οποία χαρακτηρίζονται από  $m$  συναρτήσεις  $u_j$ , οι οποίες ονομάζονται *συναρτήσεις συμμετοχής* και για τις οποίες ισχύει

$$u_j: X \rightarrow [0,1], \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (111)$$

$$\sum_{j=1}^m u_j(\mathbf{x}_i) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (112\alpha)$$

$$0 < \sum_{i=1}^N u_j(\mathbf{x}_i) < N, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (112\beta)$$

Η τιμή της ασαφούς συνάρτησης συμμετοχής είναι μία μαθηματική περιγραφή της συστάδας η οποία δεν είναι επακριβώς καθορισμένη. Με άλλα λόγια κάθε διάνυσμα  $\mathbf{x}$  ανήκει «σε κάποιο βαθμό» ταυτόχρονα σε περισσότερες από μία συστάδες, γεγονός το οποίο ποσοτικοποιείται από την αντίστοιχη τιμή του  $u_j$  στο διάστημα  $[0,1]$ . Τιμές της συνάρτησης συμμετοχής κοντά στη μονάδα καταδεικνύουν μεγάλο βαθμό συμμετοχής στη συστάδα  $j$ , ενώ μικρές τιμές αντιστοιχούν σε μικρό βαθμό συμμετοχής. Οι τιμές των συναρτήσεων συμμετοχής προσφέρουν επίσης πληροφορίες για τη δομή του συνόλου δεδομένων υπό την έννοια ότι αν μία συνάρτηση συμμετοχής έχει περίπου την ίδια τιμή για για δύο διανύσματα του  $X$  τότε τα δύο αυτά διανύσματα θεωρούνται όμοια μεταξύ τους. Η συνθήκη (112β) εγγυάται ότι δεν υπάρχουν απλές περιπτώσεις όπου υπάρχουν συστάδες που δεν μοιράζονται κανένα διάνυσμα.

Έστω, τώρα, τα διανύσματα  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$  με πραγματικές τιμές των οποίων οι συνιστώσες  $x_i$  και  $y_i$  ανήκουν στο διάστημα  $[0,1]$  όπου  $i = 1, 2, \dots, l$ . Αντίθετα με τις προηγούμενες

περιπτώσεις οι τιμές των  $x_i$  δεν είναι αποτέλεσμα κάποιας συσκευής μέτρησης. Αντ' αυτού η τιμή  $x_i$  ανάλογα με το αν είναι κοντά στο 1 (ή κοντά στο 0) συμβολίζει την πιθανότητα το πρότυπο να διαθέτει (ή να μη διαθέτει) το  $i$ -οστό χαρακτηριστικό. Όταν το  $x_i$  πλησιάζει το 1/2 γίνεται λιγότερο σαφές εάν το  $\mathbf{x}$  διαθέτει το  $i$ -οστό χαρακτηριστικό ενώ όταν  $x_i = 1/2$  είναι τελείως άγνωστο. Όπως είναι εύκολο να διακρίνει κανείς, η ασαφής λογική είναι μια γενίκευση της δυαδικής λογικής. Στην ασαφή λογική τίποτα δεν συμβαίνει με απόλυτη σιγουριά. Η δυαδική λογική είναι μια ειδική περίπτωση της ασαφούς λογικής όπου το  $x_i$  παίρνει μόνο τις τιμές 0 και 1.

Στο πλαίσιο της σύνδεσης της ασαφούς με τη δυαδική λογική, προκύπτει ότι ο τελεστής AND της δυαδικής λογικής στην ασαφή λογική ανάγεται στον τελεστή  $\min$  ενώ ο τελεστής OR της δυαδικής λογικής ανάγεται στον τελεστή  $\max$ . Ακόμη, η λογική άρνηση (NOT) του  $x_i$  αντιστοιχεί στο  $1 - x_i$ . Έτσι, η παρακάτω σχέση ταυτότητας μεταξύ δύο δυαδικών μεταβλητών  $a$  και  $b$

$$(a \equiv b) = ((NOT\ a)AND\ (NOT\ b))\ OR\ (a\ AND\ b) \quad (113)$$

στην περίπτωση της ασαφούς λογικής μεταφράζεται σε σχέση ομοιότητας μεταξύ των πραγματικών μεταβλητών στο διάστημα  $[0,1]$   $x_i$  και  $y_i$  ως εξής:

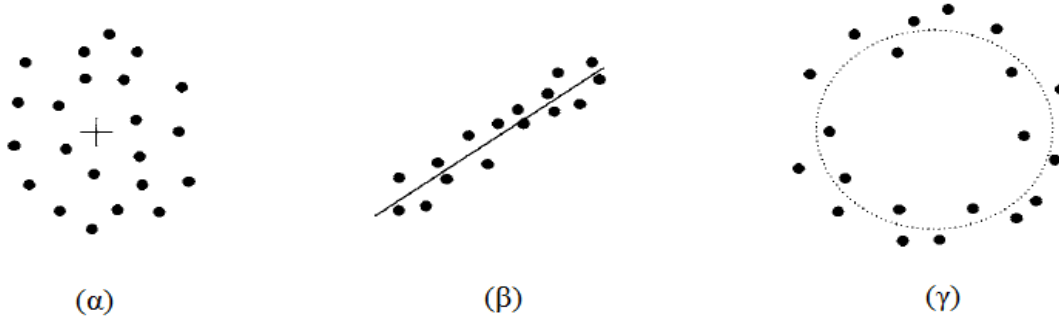
$$s(x_i, y_i) = \max(\min(1 - x_i, 1 - y_i), \min(x_i, y_i)) \quad (114)$$

Ακόμη, προκειμένου για διανύσματα στον  $l$ -διάστατο χώρο, ο διανυσματικός χώρος είναι ο υπερκύβος  $H_l$ . Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση, όσο πιο κοντά βρίσκεται ένα διάνυσμα  $\mathbf{x}$  στο κέντρο  $(1/2, \dots, 1/2)$  του υπερκύβου τόσο πιο μεγάλη είναι η αβεβαιότητα για τα χαρακτηριστικά του  $\mathbf{x}$ , ενώ, αντίθετα, όσο πιο κοντά βρίσκεται σε κάποια ακμή του υπερκύβου τόσο μεγαλύτερη είναι η βεβαιότητα. Με βάση, επομένως, την ομοιότητα  $s$  μεταξύ δύο μεταβλητών στο διάστημα  $[0,1]$  της σχέσης (114), ορίζεται το *μέτρο ομοιότητας μεταξύ δύο διανυσμάτων  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$* :

$$s_F^q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \sum_{i=1}^l s(x_i, y_i)^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (115)$$

### Αλγόριθμος Ασαφούς c-Μέσου

Στη διατύπωση του αλγορίθμου FCM θεωρούμε ότι γνωρίζουμε εκ των προτέρων το πλήθος των συστάδων καθώς και το σχήμα τους. Το σχήμα των συστάδων χαρακτηρίζεται από τις παραμέτρους που υιοθετούνται, όπως φαίνεται στο σχήμα 23. Σε κάθε συστάδα ανάλογα με το σχήμα της αντιστοιχίζεται ένα εκπρόσωπο οπότε η απόσταση ενός διανύσματος  $\mathbf{x}$  από μία συστάδα ορίζεται ως η απόσταση του  $\mathbf{x}$  από τον εκπρόσωπο.



**Σχήμα 23:** (α) Συμπαγής συστάδα με εκπρόσωπο ένα σημείο (β) Γραμμική συστάδα με εκπρόσωπο ένα υπερεπίπεδο (γ) Υπερσφαιρική συστάδα με εκπρόσωπο μία υπερσφαίρα

Έτσι, ανεξαρτήτως του σχήματος της συστάδας ορίζεται ο παρακάτω συμβολισμός:

$\theta_j$  : ο παραμετροποιημένος εκπρόσωπος της  $j$ -οστής συστάδας,

$$\theta \equiv [\theta_1^T, \theta_2^T, \dots, \theta_m^T]^T$$

$U$  : ο πίνακας  $N \times m$  του οποίου το  $(i, j)$  στοιχείο ισούται με το  $u_j(\mathbf{x}_i)$

$d(\mathbf{x}_i, \theta_j)$  : η ανομοιότητα μεταξύ των  $\mathbf{x}_i$  και  $\theta_j$ , μετρούμενη με κάποιο μέτρο απόστασης όπως αναφέρθηκαν στην ενότητα 2.1.3

$q > 1$  : μια παράμετρος που ονομάζεται *ασαφοποιητής (fuzzifier)*

Οι περισσότεροι αλγόριθμοι ασαφούς συσταδοποίησης προκύπτουν από την προσπάθεια ελαχιστοποίησης ως προς τα  $\theta$  και  $U$  μιας συνάρτησης κόστους της μορφής

$$J_q(\theta, U) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m u_{ij}^q d(\mathbf{x}_i, \theta_j) \quad (116)$$

υπό τους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^m u_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (117)$$

όπου

$$u_{ij} \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$0 < \sum_{i=1}^N u_{ij} < N, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (118)$$

Ο όρος  $d(\mathbf{x}_i, \theta_j)$  αναπαριστά την απόσταση του  $\mathbf{x}_i$  από το εκπρόσωπο της συστάδας, δηλαδή υπό μία έννοια το κέντρο μάζας της. Ο όρος  $u_{ij}^q d(\mathbf{x}_i, \theta_j)$  συμβολίζει το σφάλμα που υπεισέρχεται από τη χρήση του  $\theta_j$  ως εκπρόσωπο του  $\mathbf{x}_i$  σταθμισμένο από το βαθμό συμμετοχής του  $\mathbf{x}_i$  (υψωμένο σε κάποια δύναμη) στην κλάση  $j$ . Ο όρος  $\sum_{j=1}^m u_{ij}^q d(\mathbf{x}_i, \theta_j)$  αποτελεί το άθροισμα των σφαλμάτων λόγω της χρήσης εκπροσώπων σε όλες τις συστάδες, επομένως τελικά η συνάρτηση κόστους συνιστά το ολικό σταθμισμένο άθροισμα των γενικευμένων σφαλμάτων λόγω της αντικατάστασης του χώρου εισόδου από το  $\theta$ .

Οι περιορισμοί της σχέσης (119) δηλώνουν ότι ο βαθμός συμμετοχής του  $\mathbf{x}_i$  στη  $j$ -οστή συστάδα συνδέεται με το βαθμό συμμετοχής του  $\mathbf{x}_i$  στις υπόλοιπες  $m - 1$  συστάδες. Η τιμή του  $q$  λειτουργεί ως πόλωση της  $J_q(\boldsymbol{\theta}, U)$  είτε προς την ασαφή συσταδοποίηση είτε προς την αυστηρή συσταδοποίηση και κάθε τιμή του καθορίζει και έναν ασαφή αλγόριθμο. Δεν υπάρχει θεωρητικά ή υπολογιστικά κάποια βέλτιστη τιμή για το  $q$  οπότε η επιλογή του γίνεται πειραματικά

Για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους, θεωρείται κατ' αρχάς ότι κανένα  $\mathbf{x}_i$  δεν συμπίπτει με κανέναν από τους εκπροσώπους των συστάδων. Πιο φορμαλιστικά, αν για τα  $\mathbf{x}_i$  υπάρχει ένα σύνολο  $Z_i$  που περιλαμβάνει τους δείκτες των εκπροσώπων  $\boldsymbol{\theta}_j$  για τους οποίους ισχύει  $d(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_j) = 0$ , τότε θα ισχύει  $Z_i = \emptyset$  για όλα τα  $i$ . Η ελαχιστοποίηση της  $J_q(\boldsymbol{\theta}, U)$  ως προς το  $U$  υπό τον περιορισμό (105) οδηγεί στην ακόλουθη Λαγκραντζιανή συνάρτηση:

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}, U) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m u_{ij}^q d(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_j) - \sum_{i=1}^N \lambda_i \left( \sum_{j=1}^m u_{ij} - 1 \right) \quad (120)$$

Η μερική παράγωγος του  $\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}, U)$  ως προς το  $u_{rs}$  είναι

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}, U)}{\partial u_{rs}} = q u_{rs}^{q-1} d(\mathbf{x}_r, \boldsymbol{\theta}_s) - \lambda_r \quad (121)$$

Θέτοντας τη μερική παράγωγο αυτή ίση με 0 και λύνοντας ως προς  $u_{rs}$  προκύπτει

$$u_{rs} = \left( \frac{\lambda_r}{q d(\mathbf{x}_r, \boldsymbol{\theta}_s)} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad s = 1, 2, \dots, m \quad (122)$$

Αντικαθιστώντας το  $u_{rs}$  της σχέσης (121) στη συνθήκη του περιορισμού (117) λαμβάνεται

$$\sum_{j=1}^m \left( \frac{\lambda_r}{q d(\mathbf{x}_r, \boldsymbol{\theta}_s)} \right)^{\frac{1}{q-1}} = 1$$

ή αλλιώς

$$\lambda_r = \frac{q}{\left( \sum_{j=1}^m \left( \frac{1}{q d(\mathbf{x}_r, \boldsymbol{\theta}_s)} \right)^{\frac{1}{q-1}} \right)^{q-1}} \quad (123)$$

Από τις σχέσεις (121) και (122) μετά από πράξεις προκύπτει

$$u_{rs} = \frac{1}{\sum_{j=1}^m \left( \frac{d(\mathbf{x}_r, \boldsymbol{\theta}_s)}{d(\mathbf{x}_r, \boldsymbol{\theta}_j)} \right)^{\frac{1}{q-1}}}, \quad r = 1, 2, \dots, N, \quad s = 1, 2, \dots, m \quad (124)$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για το διάνυσμα παραμέτρων  $\boldsymbol{\theta}_j$ , υπολογίζεται η κλίση της  $\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}, U)$  ως προς το  $\boldsymbol{\theta}_j$  και τίθεται ίση με 0 οπότε προκύπτει

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta}, U)}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} = \sum_{i=1}^N u_{ij}^q \frac{\partial d(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_j)}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (125)$$

Οι εξισώσεις (123) και (134) είναι συζευγμένες και γενικά δεν δίνουν λύσεις κλειστού τύπου. Ένας τρόπος να παρακαμφθεί αυτή η δυσκολία είναι να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος του πίνακα 7 ώστε να βρεθούν προσεγγίσεις του  $U$  και του  $\boldsymbol{\theta}$ . Πρόκειται για μια γενικής χρήσης αλγοριθμική τεχνική στην ασαφή συσταδοποίηση η οποία αναφέρεται ως Γενικό Αλγοριθμικό Σχέδιο Ασάφειας (Generalised Fuzzy Algorithmic Scheme, GFAS).

#### Πίνακας 7: Περιγραφή του Αλγορίθμου GFAS

1. Διάλεξε τα  $\theta_j(0)$  ως αρχικές εκτιμήσεις των  $\theta_j$  για  $j = 1, 2, \dots, m$

2. **Επανάλαβε**

**Για**  $i=1$  **μέχρι**  $N$

**Για**  $j=1$  **μέχρι**  $m$

$$u_{rs}(n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^m \left( \frac{d(x_r, \theta_s)}{d(x_r, \theta_j)} \right)^{\frac{1}{q-1}}}$$

**Τέλος** {Για-  $j$ }

**Τέλος** {Για-  $i$ }

$n=n+1$

**Για**  $j=1$  **μέχρι**  $m$

        Βρες το  $\theta_j(n)$  από την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^N u_{ij}^q (n-1) \frac{\partial d(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_j)}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} = 0$$

**Τέλος** {Για-  $j$ }

**Μέχρις ότου** ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού

Ως κριτήριο τερματισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία σχέση της μορφής  $\|\boldsymbol{\theta}(n) - \boldsymbol{\theta}(n-1)\| < \varepsilon$ , όπου το  $\varepsilon$  είναι μία σχετικά μικρή σταθερά που καθορίζεται από το σχεδιαστή.

Καταλήγοντας τώρα στον ζητούμενο αλγόριθμο FCM, επιλέγεται ως μέτρο της ανομοιότητας, δηλαδή της απόστασης του  $\mathbf{x}_i$  από το κέντρο της συστάδας, το μετρικό

$$d(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_j) = (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\theta}_j)^T A (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\theta}_j) = \|\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\theta}_j\|_A^2 \quad (126)$$

δηλαδή μια  $A$ -νόρμα όπου  $A$  ένας συμμετρικός θετικός πίνακας βαρών. Ο πίνακας αυτός ελέγχει το σχήμα των βέλτιστων συστάδων και υπάρχουν άπειρες επιλογές για τις τιμές που

μπορεί να πάρει. Οι πιο συνήθεις περιπτώσεις είναι η Ευκλείδεια νόρμα με  $A = I$ , η διαγώνια νόρμα με  $A = D_x^{-1}$  και η νόρμα Mahalanobis με  $A = C_x^{-1}$ , όπου

$$c_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \quad (127\alpha)$$

$$C_x = \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i - c_x)(\mathbf{x}_i - c_x)^t \quad (127\beta)$$

και  $D_x$  ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία της διαγωνίου ίσα με τις ιδιοτιμές του  $C_x$ . Έτσι, έπεται ότι:

$$\frac{\partial d(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_j)}{\partial \boldsymbol{\theta}_j} = 2A(\boldsymbol{\theta}_j - \mathbf{x}_i) \quad (128)$$

και αντικαθιστώντας την εξίσωση (127) στη σχέση (124) υπολογίζεται ότι:

$$\sum_{i=1}^N u_{ij}^q 2A(\boldsymbol{\theta}_j - \mathbf{x}_i) = \mathbf{0} \quad (129)$$

Τελικά, λύνοντας ως προς το  $\boldsymbol{\theta}_j$  προκύπτει η βασική σχέση του αλγορίθμου FCM ως μια υποπερίπτωση του GFAS

$$\boldsymbol{\theta}_j(n) = \frac{\sum_{i=1}^N u_{ij}^q (n-1) \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^N u_{ij}^q (n-1)} \quad (130)$$

Παρ' όλο που ο αλγόριθμος FCM περιλαμβάνει απλά μία εργασία ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης κόστους, δεν υπάρχει καλή γνώση για τη συμπεριφορά του ως προς τη σύγκλιση. Συγκεκριμένα, έχει αποδειχθεί ότι όταν χρησιμοποιείται η απόσταση Mahalanobis η επαναληπτική σειρά που παράγει ο αλγόριθμος FCM είτε συγκλίνει σε ένα σταθερό σημείο της συνάρτησης κόστους σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων είτε περιέχει τουλάχιστον μία υποσειρά η οποία συγκλίνει σε ένα σταθερό σημείο της συνάρτησης κόστους. Αυτό το σημείο μπορεί να είναι τοπικό ή ολικό ελάχιστο οπότε πρέπει να μελετηθεί η φύση του σημείου σύγκλισης.

## 4. Αποτελέσματα

### 4.1 Δεδομένα

Τα δεδομένα από τα προκλητά δυναμικά που χρησιμοποιείται στην παρούσα μελέτη συλλέχθηκαν σε προηγούμενη έρευνα. Τα δεδομένα αποκτήθηκαν από 16 υγιείς εθελοντές. Οι συμμετέχοντες κάθονται μπροστά από έναν πίνακα απέναντι από ένα πειραματιστή, έχοντας μπροστά τους, πάνω στο τραπέζι, δύο μοχλούς που τοποθετούνται στα αριστερά και δεξιά της LED συσκευής ερεθισμάτων. Οι συμμετέχοντες έπρεπε να εκτελέσουν μια εργασία flanker Eriksen. Σε αυτό το είδος των εργασιών αντίδρασης με επιλογή, που χρησιμοποιούνται σε γνωστικές έρευνες ψυχολογίας, ένας συμμετέχων αναμένεται να απαντήσει σε ένα κεντρικό στοιχείο, το οποίο πλαισιώνεται από σύμβολα που αποσπούν την προσοχή του, όπως βέλη ή γράμματα. Στο πείραμα που χρησιμοποιείται, οι συμμετέχοντες ανταποκρίθηκαν στην κατεύθυνση (δεξιά ή αριστερά) του βέλους, μετακινώντας τον αντίστοιχο μοχλό προς τα έξω με τον αντίχειρα. Το κεντρικό βέλος περιβαλλόταν από τέσσερις άλλες αιχμές βέλων που αποσπούν την προσοχή, δύο σε κάθε πλευρά, δείχνοντας είτε στην ίδια κατεύθυνση όπως το κεντρικό βέλος (παράλληλα Flankers), ή στην αντίθετη κατεύθυνση (ασύμβατα Flankers). Η ηλεκτροεγκεφαλική δραστηριότητα καταγράφηκε από 47 ηλεκτρόδια, με αριθμούς 1-34 και 37-49. Η συχνότητα δειγματοληψίας ήταν 250 Hz, και τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται για ανάλυση της αρνητικής κορύφωσης σχετιζόμενης με σφάλμα, περιορίστηκαν χρησιμοποιώντας ζωνοπερατό φίλτρο 1-14 Hz. Σωστές και λανθασμένες δοκιμές διήρκησαν κατά μέσο όρο πάνω από μια εποχή, αρχίζοντας από 100 ms και τελειώνοντας 700 ms μετά την απάντηση. Οι δοκιμές που περιλαμβάνονται στη διαδικασία, είχαν επιλεγεί σύμφωνα με το χρόνο απόκρισης μεταξύ σωστών και λανθασμένων δοκιμών, για τον περιορισμό της συμβολής των ερεθισμάτων που σχετίζονται με δραστηριότητα στα προκλητά δυναμικά. Ένα σύνολο από  $32 \times 47 = 1504$  καταγραφές προκλητών δυναμικών ήταν διαθέσιμα για ανάλυση. Από τις διαθέσιμες καταγραφές,  $16 \times 47 = 752$  εγγραφές αντιστοιχούσαν σε σωστές απαντήσεις και το υπόλοιπο  $16 \times 47 = 752$  αντιστοιχούσε σε λανθασμένες απαντήσεις.

Οι παρακάτω πίνακες 8-11, *Observation–correct* και *Observation–incorrect*, περιέχουν τα χαρακτηριστικά των εγκεφαλογραφημάτων – την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση- για κάθε ένα από τους 16 παρατηρητές για σωστές και λανθασμένες απαντήσεις αντίστοιχα, τα οποία υπολογίστικαν όπως περιγράφηκε πιο πάνω. Οι στήλες 1-8 και 9-16 αντιπροσωπεύουν τους 16 παρατηρητές, ενώ η κάθε γραμμή περιέχει τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του αντίστοιχου παρατηρητή.



Observers (1-8) -Correct															
1		2		3		4		5		6		7		8	
-1.55	2.23	0.47	1.08	-1.07	1.64	-0.44	2.21	1.49	1.86	1.21	1.42	-1.91	1.80	-1.60	1.69
-1.55	2.17	0.85	1.03	-0.80	1.58	0.26	2.27	1.58	1.59	1.14	1.26	-1.59	1.70	-1.57	1.48
-1.36	2.05	0.54	1.00	-0.99	1.66	-0.41	2.14	1.52	1.57	1.16	1.25	-1.81	1.82	-1.38	1.31
-1.26	1.87	0.24	1.17	-1.26	1.79	-0.98	2.03	0.92	1.59	1.00	1.32	-1.61	1.86	-1.39	1.33
-1.22	1.83	0.14	1.20	-1.42	1.81	-0.89	2.02	0.80	1.72	1.04	1.43	-1.59	1.79	-1.45	1.64
-1.20	2.00	0.58	1.18	-0.86	1.65	-0.62	1.95	1.08	1.71	1.05	1.38	-1.73	1.72	-1.42	1.72
-1.39	2.21	0.76	1.12	-0.73	1.62	0.05	2.15	1.36	1.72	1.11	1.35	-1.65	1.70	-1.43	1.69
-1.14	1.77	0.89	0.94	-0.41	1.59	0.41	1.95	1.39	1.21	0.71	1.06	-1.08	1.62	-1.25	1.39
-1.09	1.79	0.80	0.94	-0.56	1.53	0.18	1.90	1.36	1.21	1.00	1.15	-1.43	1.70	-1.14	1.30
-1.09	1.93	0.30	1.06	-0.74	1.56	-0.50	1.88	1.34	1.40	0.95	1.15	-1.74	1.93	-0.89	1.17
-0.92	1.84	0.25	1.30	-1.00	1.89	-1.06	1.91	1.01	1.43	0.71	1.19	-1.65	2.11	-0.91	1.21
-0.81	1.85	0.31	1.58	-1.00	2.00	-0.93	1.94	0.50	1.61	1.13	1.40	-0.87	2.02	-0.98	1.34
-0.90	1.79	0.07	1.64	-1.78	2.19	-0.70	1.97	-0.28	1.65	1.43	1.58	-0.69	1.81	-1.12	1.49
-1.5	1.8	-0.3	1.6	-2.26	2.3	-0.8	2.0	-0.41	1.8	1.41	1.60	-1.2	1.8	-1.4	1.71
-0.14	1.91	0.58	1.69	-1.40	2.04	-0.77	2.01	-0.01	1.84	1.42	1.63	-1.39	1.86	-0.86	1.70
-0.39	2.10	1.01	1.68	-0.61	1.92	-0.75	2.01	0.58	1.80	1.14	1.64	-1.57	1.91	-0.72	1.77
-0.85	2.19	0.87	1.59	-0.31	1.91	-0.47	1.96	1.07	1.80	0.82	1.59	-1.69	1.93	-0.83	1.80
-1.08	2.24	0.69	1.50	-0.31	1.99	0.14	2.08	1.13	1.75	0.63	1.54	-1.26	1.89	-0.86	1.89
-1.12	2.20	0.92	1.52	-0.33	2.00	0.54	2.27	1.21	1.71	0.64	1.58	-0.96	2.00	-1.14	1.94
-0.67	1.81	0.48	1.48	-0.13	1.85	0.45	1.89	0.87	1.48	0.32	1.52	-0.46	1.82	-0.81	1.86
-0.72	1.94	0.32	1.56	-0.44	1.86	0.25	1.98	0.89	1.55	0.54	1.58	-0.66	1.86	-0.41	1.96
-0.85	2.13	-0.03	1.70	-0.45	1.86	0.30	1.84	1.21	1.65	0.87	1.68	-1.10	1.98	-0.28	1.74
-0.51	2.05	0.12	1.74	-0.24	1.90	-0.49	2.02	1.32	1.76	0.67	1.68	-1.16	2.15	-0.28	1.75
-0.14	2.10	0.37	1.95	-0.24	2.23	-0.57	2.14	1.04	1.93	1.08	1.75	-0.90	2.53	-0.19	1.85
0.09	2.24	0.94	2.19	-0.21	2.41	-0.13	2.20	-0.04	2.23	1.57	1.98	0.12	2.53	-0.17	1.98
-0.11	2.32	1.10	2.38	-1.03	2.69	-0.11	2.35	-0.93	2.45	2.48	2.21	1.21	2.23	-0.21	2.12
-0.66	2.31	0.24	2.35	-2.94	3.06	-0.43	2.52	-1.15	2.41	2.50	2.27	0.20	2.32	-1.16	2.35
0.76	2.39	0.47	2.37	-2.21	2.96	-0.57	2.63	-1.07	2.54	2.68	2.34	-0.87	2.42	-0.24	2.32
1.50	2.59	1.53	2.45	-0.50	2.57	-0.29	2.62	-0.46	2.58	2.53	2.34	-0.77	2.45	0.66	2.29
0.89	2.64	1.73	2.42	0.03	2.59	-0.17	2.54	0.29	2.41	1.47	2.33	-1.01	2.52	0.31	2.39
-0.02	2.56	1.02	2.37	0.24	2.52	-0.24	2.47	1.08	2.43	0.68	2.32	-1.13	2.53	0.01	2.50
-0.71	2.68	0.29	2.38	0.14	2.59	0.01	2.56	1.19	2.37	0.15	2.35	-1.01	2.52	-0.23	2.58
-0.58	2.62	0.27	2.43	-0.02	2.61	0.32	2.60	0.67	2.39	0.14	2.41	-0.44	2.55	-0.98	2.69
-0.56	2.64	0.62	2.42	0.05	2.65	0.45	2.68	0.74	2.41	0.33	2.45	-0.15	2.66	-0.70	2.70
-0.20	2.70	0.04	2.64	-0.24	2.69	0.34	2.64	0.32	2.64	0.10	2.63	-0.16	2.66	-0.11	2.78
-0.34	2.83	-0.10	2.75	-0.11	2.80	0.01	2.80	0.68	2.68	0.24	2.76	-0.84	2.88	-0.04	2.77
0.21	2.86	0.32	2.83	0.28	2.87	0.00	2.87	0.63	2.84	0.34	2.79	-0.61	3.06	0.15	2.85
1.08	2.92	1.19	2.89	0.67	2.99	0.74	2.84	0.23	3.03	1.66	2.85	0.06	3.22	0.89	2.90
1.85	3.07	2.84	3.08	1.69	3.58	1.64	2.98	-0.73	3.33	3.21	3.03	2.30	3.11	1.74	3.12
1.79	3.05	2.59	3.37	0.36	3.51	0.95	3.09	-0.51	3.25	3.81	3.19	2.18	3.07	0.60	3.14
1.74	3.09	1.30	3.40	-0.73	3.45	0.49	3.26	-0.41	3.24	3.70	3.24	0.86	3.15	0.49	3.20
2.71	3.24	2.81	3.41	1.43	3.45	0.36	3.58	-0.47	3.43	3.81	3.31	0.32	3.24	2.53	3.33
2.76	3.37	3.66	3.35	1.54	3.36	1.18	3.39	-0.41	3.47	2.87	3.27	0.10	3.31	2.43	3.30
1.34	3.33	1.89	3.27	1.05	3.34	0.67	3.41	0.17	3.36	1.00	3.33	0.02	3.37	1.24	3.35
0.32	3.43	0.51	3.39	0.70	3.43	0.03	3.44	0.66	3.37	0.27	3.43	-0.53	3.44	0.35	3.53
-0.26	3.52	-0.11	3.49	0.42	3.51	0.15	3.53	0.74	3.39	-0.3	3.53	-0.52	3.51	-0.52	3.64
-0.20	3.54	-0.18	3.53	0.28	3.53	0.00	3.60	0.23	3.48	0.04	3.50	-0.13	3.52	-0.50	3.63

Πίνακας 8 : Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των παρατηρητών 1-8 σε σωστές απαντήσεις.

## Observers (9-16) –Correct

9		10		11		12		13		14		15		16	
-0.61	1.95	0.71	1.40	-0.48	2.02	-3.03	1.93	-0.09	1.84	1.87	2.34	2.07	1.49	1.80	1.28
-0.62	1.76	1.14	1.59	-0.75	1.86	-2.46	1.90	-0.15	1.42	1.63	2.46	2.06	1.53	1.47	1.30
-0.43	1.69	1.21	1.50	-0.83	1.71	-2.73	1.88	-0.37	1.33	1.59	2.02	2.25	1.45	1.48	1.13
-0.22	1.84	0.51	1.16	-0.89	1.83	-3.20	1.98	-0.87	1.33	1.66	1.71	2.65	1.46	1.94	1.13
-0.01	2.20	-0.06	1.24	-0.73	1.93	-3.04	1.99	-0.55	1.53	2.17	2.04	2.12	1.38	2.15	1.24
-0.37	2.03	-0.01	1.35	-0.68	1.72	-3.03	1.90	-0.39	1.51	2.03	1.91	2.03	1.36	2.13	1.25
-0.70	1.84	0.73	1.65	-0.58	1.67	-2.54	1.96	-0.19	1.56	1.60	2.09	1.97	1.47	1.80	1.27
-0.44	1.49	0.90	1.23	-0.59	1.58	-1.95	1.75	-0.27	1.09	0.79	1.68	1.89	1.56	1.14	1.06
-0.07	1.55	1.14	1.39	-0.60	1.57	-2.35	1.98	-0.31	1.11	1.03	1.65	1.86	1.45	0.95	1.06
-0.32	1.62	1.49	1.53	-0.92	1.62	-2.47	1.90	-0.59	1.09	0.88	1.37	2.14	1.41	1.12	1.01
-0.48	1.83	0.98	1.36	-1.16	1.80	-2.67	1.98	-0.91	1.21	0.53	1.19	2.76	1.51	1.57	1.11
0.09	2.05	0.50	1.45	-1.25	2.08	-3.28	2.31	-1.10	1.41	1.18	1.42	3.07	1.66	2.07	1.28
0.36	2.16	-0.07	1.52	-1.56	2.37	-3.24	2.40	-0.95	1.66	1.79	1.76	2.68	1.60	2.30	1.39
0.26	2.29	-0.36	1.59	-1.62	2.49	-2.65	2.27	-0.73	1.86	1.99	1.92	2.02	1.56	2.42	1.48
0.22	2.39	-0.42	1.76	-1.46	2.38	-2.86	2.12	-0.64	1.91	2.39	1.94	1.96	1.52	2.65	1.60
-0.30	2.30	-0.45	1.97	-0.91	2.05	-2.83	2.12	-0.45	1.74	2.16	1.79	2.10	1.55	2.48	1.60
-1.05	2.05	-0.26	1.97	-0.61	1.80	-2.61	2.13	-0.40	1.64	1.46	1.85	1.87	1.64	2.08	1.53
-1.12	1.94	0.54	1.93	-0.50	1.78	-1.97	2.14	-0.28	1.57	0.78	1.90	1.77	1.81	1.67	1.48
-0.52	1.95	0.96	1.82	-0.53	1.99	-1.82	2.21	-0.17	1.61	0.72	2.08	1.91	1.94	1.29	1.55
-0.09	1.74	0.56	1.53	-0.46	1.79	-1.18	1.82	-0.36	1.57	0.51	1.71	1.27	1.77	0.86	1.50
-0.10	1.80	0.41	1.62	-0.46	1.86	-1.32	1.93	-0.28	1.61	0.56	1.69	1.19	1.80	0.82	1.55
-0.21	1.80	0.82	1.68	-0.50	1.92	-1.86	2.19	-0.39	1.64	0.30	1.65	1.16	1.80	0.45	1.59
-0.92	2.01	1.20	1.77	-0.57	2.00	-1.63	2.03	-0.61	1.75	-0.1	1.72	1.68	1.81	0.69	1.64
-0.37	2.38	1.32	1.91	-0.88	2.32	-2.02	2.28	-0.85	1.91	0.13	1.80	2.34	1.94	1.45	1.76
0.39	2.65	0.99	2.09	-1.24	2.69	-2.74	2.67	-0.84	2.09	1.13	1.94	3.07	2.13	2.20	1.97
1.07	2.65	0.06	2.24	-1.74	3.05	-3.79	3.24	-0.92	2.36	2.47	2.63	3.18	2.25	2.57	2.08
0.42	2.71	-0.12	2.19	-2.21	3.23	-2.54	2.86	-0.65	2.67	2.69	2.74	2.09	2.25	2.63	2.16
0.72	2.84	-0.13	2.29	-2.24	3.33	-2.12	2.61	-0.35	2.79	3.40	2.84	1.63	2.23	2.95	2.26
0.80	2.84	-0.21	2.60	-1.60	3.20	-2.26	2.61	-0.34	2.78	3.43	2.82	2.10	2.22	3.17	2.42
0.02	2.82	0.00	2.67	-0.59	2.80	-1.86	2.62	-0.29	2.61	2.16	2.38	1.27	2.24	2.73	2.45
-1.07	2.69	0.09	2.46	-0.20	2.50	-1.81	2.58	-0.59	2.48	1.16	2.33	1.39	2.32	1.95	2.33
-0.97	2.66	0.13	2.46	-0.29	2.49	-1.60	2.61	-0.84	2.46	0.51	2.40	1.19	2.41	1.47	2.29
-0.15	2.68	0.52	2.42	-0.29	2.55	-1.57	2.84	-0.55	2.43	0.43	2.48	1.15	2.55	1.15	2.33
0.12	2.66	0.52	2.49	-0.37	2.62	-1.23	2.74	-0.38	2.49	0.53	2.56	1.24	2.59	1.04	2.41
-0.14	2.70	0.09	2.64	0.08	2.67	-0.64	2.72	-0.48	2.69	0.02	2.66	0.68	2.70	0.25	2.63
-0.54	2.82	0.84	2.67	-0.04	2.78	-1.21	2.89	-0.52	2.77	-0.18	2.75	0.89	2.70	0.43	2.69
-1.20	3.26	1.64	2.79	-0.42	2.99	-0.66	2.92	-0.58	2.86	-0.42	2.89	1.42	2.75	0.72	2.76
0.52	3.33	1.69	2.87	-0.40	3.16	-0.83	3.03	-0.24	2.96	0.81	2.91	2.13	2.87	1.56	2.87
2.24	3.58	0.63	3.29	-0.92	3.70	-1.36	3.56	-0.11	3.34	2.21	3.17	3.84	3.21	2.21	3.08
2.52	3.45	0.35	3.16	-0.63	3.52	-0.95	3.51	0.24	3.29	2.84	3.42	2.92	3.20	3.52	3.25
1.96	3.59	0.15	3.14	0.12	3.37	0.40	3.25	0.90	3.39	2.89	3.47	1.65	3.25	3.49	3.26
2.76	3.89	1.09	3.22	0.08	3.58	0.37	3.24	1.16	3.85	3.37	3.70	1.77	3.22	4.61	3.51
1.62	3.75	1.13	3.49	0.86	3.63	0.35	3.25	0.93	3.83	3.05	3.64	1.71	3.21	4.07	3.66
0.11	3.54	0.75	3.32	1.27	3.39	-0.19	3.34	0.11	3.46	1.32	3.32	1.18	3.24	2.43	3.43
-0.38	3.63	0.34	3.40	0.83	3.38	-1.01	3.50	-0.49	3.46	0.67	3.36	1.00	3.35	1.31	3.36
-0.98	3.65	0.42	3.40	-0.06	3.50	-1.20	3.58	-1.05	3.57	0.54	3.43	0.71	3.43	0.98	3.38
-0.42	3.57	-0.11	3.51	-0.14	3.55	-1.00	3.63	-0.91	3.58	0.66	3.47	0.47	3.52	0.73	3.44

Πίνακας 9 : Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των παρατηρητών 9-16 σε σωστές απαντήσεις.

## Observers (1-8) –Incorrect

1		2		3		4		5		6		7		8	
-2.53	2.10	-0.29	1.52	-1.92	1.68	-1.44	2.10	0.86	1.21	0.26	0.72	-0.41	1.72	-0.99	1.85
-2.54	2.05	0.09	1.05	-1.67	1.54	-0.65	1.91	1.00	1.18	0.44	0.61	-0.59	1.76	-1.27	1.78
-2.21	2.15	0.08	1.18	-1.59	1.50	-1.35	1.94	0.71	1.12	0.39	0.74	-0.37	1.72	-0.85	1.64
-2.17	2.20	-0.02	1.79	-1.60	1.58	-1.93	2.09	0.02	1.12	0.30	0.92	-0.06	1.65	-0.36	1.49
-2.14	2.11	-0.14	2.04	-1.98	1.80	-1.72	2.13	-0.2	1.21	0.35	0.93	-0.29	1.43	-0.55	1.65
-1.94	1.99	0.13	1.87	-1.54	1.64	-1.48	2.11	0.35	1.14	0.42	0.85	-0.63	1.46	-0.52	1.72
-2.14	1.93	0.04	1.46	-1.57	1.65	-0.97	2.19	0.88	1.20	0.38	0.78	-0.71	1.70	-1.08	1.85
-1.58	1.66	0.40	1.02	-1.12	1.35	0.07	1.69	0.62	1.10	0.50	0.74	-0.61	1.59	-1.43	1.75
-1.52	1.89	0.74	1.03	-1.15	1.33	-0.33	1.74	0.66	1.11	0.67	0.88	-0.50	1.66	-1.09	1.67
-1.70	2.16	0.34	1.25	-0.98	1.34	-1.24	1.91	0.40	1.07	0.50	1.09	-0.39	1.76	-0.61	1.53
-1.74	2.26	0.36	1.65	-0.67	1.50	-1.92	2.19	0.10	1.17	0.29	1.29	-0.15	1.86	0.14	1.40
-1.56	2.36	0.65	2.09	-0.93	1.67	-1.92	2.34	-0.8	1.46	0.63	1.28	0.26	1.87	0.51	1.53
-1.66	2.32	0.44	2.35	-1.83	1.99	-1.56	2.25	-1.5	1.69	0.81	1.29	0.39	1.59	0.32	1.65
-1.68	2.19	0.08	2.52	-2.46	2.28	-1.51	2.29	-1.6	1.82	0.69	1.31	0.12	1.45	-0.10	1.74
-0.80	2.06	0.68	2.37	-1.68	2.02	-1.49	2.33	-1.1	1.76	0.85	1.34	-0.32	1.51	0.23	1.70
-0.85	2.04	0.74	2.30	-1.15	1.86	-1.50	2.34	-0.1	1.53	0.76	1.39	-0.77	1.66	0.11	1.69
-1.13	1.97	0.36	2.06	-1.05	1.83	-1.23	2.27	0.68	1.43	0.57	1.40	-1.10	1.82	-0.34	1.77
-1.40	1.97	0.13	1.78	-1.11	1.91	-0.55	2.22	0.56	1.60	0.32	1.40	-0.90	1.92	-0.93	2.00
-1.53	2.04	0.37	1.67	-1.23	1.97	0.19	2.17	0.61	1.64	0.42	1.43	-0.73	2.02	-1.38	2.18
-0.99	1.88	0.00	1.52	-0.74	1.74	0.49	1.82	0.27	1.57	0.64	1.42	-0.28	1.79	-1.34	2.03
-0.76	1.96	0.32	1.57	-0.78	1.74	0.17	1.87	0.23	1.63	0.76	1.56	-0.30	1.84	-2.03	2.35
-0.83	2.13	1.05	1.65	-0.56	1.72	-0.30	2.05	0.23	1.67	0.98	1.74	-0.57	1.97	-1.01	1.97
-0.92	2.21	0.14	1.82	-0.05	1.74	-0.94	2.23	0.22	1.73	0.48	1.84	-0.37	2.00	-0.24	1.87
-0.81	2.34	0.61	2.08	-0.05	2.01	-1.31	2.52	-0.2	1.89	0.69	1.97	0.17	2.31	0.95	1.92
-0.76	2.60	1.46	2.44	0.30	2.13	-1.22	2.70	-1.3	2.24	1.03	2.02	0.79	2.53	1.49	2.18
-0.42	2.72	2.05	2.73	-0.47	2.37	-1.11	2.64	-2.4	2.64	1.69	2.04	1.74	2.26	1.29	2.48
-1.16	2.54	1.28	2.56	-2.80	3.02	-1.09	2.57	-2.7	2.73	1.75	2.04	1.16	2.11	0.23	2.59
-0.10	2.48	1.14	2.62	-2.07	2.87	-1.09	2.69	-2.5	2.80	2.00	2.20	0.15	2.21	0.91	2.55
0.58	2.56	1.97	2.78	-0.51	2.47	-0.96	2.80	-1.7	2.72	1.91	2.31	-0.09	2.28	1.45	2.49
0.54	2.41	1.90	2.69	-0.25	2.42	-0.96	2.86	-0.3	2.35	1.28	2.34	-0.68	2.43	0.88	2.34
-0.20	2.48	0.53	2.60	-0.47	2.44	-0.80	2.75	0.30	2.31	0.69	2.39	-1.06	2.52	-0.14	2.43
-0.53	2.52	-0.17	2.54	-0.53	2.50	-0.36	2.70	0.69	2.36	0.24	2.44	-0.90	2.52	-0.88	2.61
-1.00	2.63	-0.24	2.54	-0.82	2.64	0.28	2.66	0.15	2.43	0.89	2.35	-0.59	2.57	-1.47	2.83
-0.96	2.69	0.04	2.49	-0.85	2.69	0.66	2.61	0.16	2.50	0.61	2.40	-0.49	2.64	-1.17	2.96
-0.33	2.74	0.20	2.62	-0.35	2.68	-0.05	2.81	0.11	2.65	0.48	2.65	0.06	2.66	-1.37	2.90
-0.64	2.94	0.07	2.73	-0.10	2.73	-0.22	2.90	0.17	2.72	0.37	2.79	-0.27	2.76	-0.67	2.87
-0.47	3.02	-0.02	2.91	0.54	2.81	-0.39	3.00	0.15	2.80	-0.02	2.91	-0.42	3.03	0.69	2.82
0.48	2.99	1.98	2.93	1.37	2.91	-0.09	3.10	-0.6	3.01	0.75	2.87	0.61	3.16	2.10	3.02
1.48	3.08	3.81	3.25	2.96	3.29	0.45	3.11	-2.04	3.43	2.18	2.96	2.35	3.11	3.26	3.57
1.45	3.07	3.51	3.47	1.48	3.16	-0.15	3.23	-1.8	3.43	3.21	3.06	2.47	3.04	1.67	3.51
1.04	3.07	2.20	3.39	-0.19	3.25	0.24	3.32	-1.9	3.51	3.09	3.12	1.34	3.09	1.45	3.52
1.70	3.16	3.94	3.50	2.07	3.25	0.19	3.34	-1.4	3.61	3.49	3.26	0.80	3.21	3.24	3.85
1.71	3.24	4.44	3.46	1.92	3.29	0.57	3.48	-0.8	3.54	2.26	3.33	0.25	3.29	2.86	3.60
0.75	3.30	2.19	3.29	0.74	3.30	0.01	3.49	0.06	3.34	0.70	3.54	-0.37	3.38	1.03	3.38
0.04	3.45	0.59	3.42	-0.07	3.41	-0.17	3.53	0.47	3.37	0.60	3.54	-0.87	3.48	-0.76	3.55
-0.44	3.58	-0.47	3.56	-0.41	3.51	0.19	3.61	0.11	3.47	1.07	3.42	-0.67	3.51	-1.43	3.69
-0.34	3.57	-0.25	3.55	-0.60	3.60	0.43	3.66	0.16	3.49	0.37	3.51	-0.23	3.53	-1.31	3.77

Πίνακας 10: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των παρατηρητών 1-8 σε λάθος απαντήσεις.

Observers (9-16) -Incorrect															
9		10		11		12		13		14		15		16	
-4.15	2.36	-2.05	2.78	-2.36	4.48	-3.89	2.42	-1.67	1.66	2.21	1.71	-0.04	1.83	1.31	1.53
-4.01	2.43	-1.59	2.79	-1.50	4.50	-3.52	2.52	-1.25	1.47	2.86	1.95	-0.40	1.82	1.00	1.62
-3.95	2.26	-1.56	2.74	-2.06	4.13	-3.64	2.42	-1.55	1.49	2.30	1.43	0.30	1.88	1.13	1.41
-3.60	2.25	-1.96	3.08	-2.58	4.02	-4.22	2.57	-2.12	1.66	1.31	1.44	0.77	1.97	1.57	1.28
-3.67	2.36	-2.01	3.21	-2.84	4.17	-4.03	2.58	-2.23	1.76	1.34	1.49	0.38	1.94	1.68	1.25
-3.61	2.28	-1.94	3.04	-2.62	4.24	-3.80	2.54	-1.97	1.67	1.82	1.44	0.32	1.79	1.56	1.26
-3.75	2.35	-1.90	2.79	-1.97	4.14	-3.34	2.41	-1.55	1.62	2.32	1.57	-0.04	1.77	1.21	1.50
-3.09	2.21	-1.04	2.08	-0.94	3.01	-2.70	2.24	-0.78	1.09	2.20	1.38	-0.52	1.41	0.84	1.27
-3.45	2.16	-0.97	2.26	-0.94	3.24	-2.59	2.26	-1.04	1.26	2.34	1.39	-0.22	1.67	0.89	1.30
-3.45	2.15	-0.91	2.37	-1.50	3.32	-3.10	2.28	-1.38	1.48	1.64	1.20	0.50	1.84	0.98	1.28
-3.04	2.25	-1.35	2.88	-2.20	3.58	-3.93	2.72	-2.00	1.76	0.49	1.59	1.14	2.03	1.40	1.26
-2.58	2.36	-1.82	3.58	-2.46	3.88	-4.31	2.98	-2.45	2.11	0.24	2.01	1.33	2.30	1.81	1.35
-2.16	2.39	-1.80	3.67	-2.77	3.97	-4.33	2.96	-2.18	2.20	0.60	2.07	1.20	2.34	1.89	1.39
-2.39	2.49	-1.74	3.65	-3.09	4.32	-3.95	2.87	-2.03	2.35	0.80	1.91	0.67	2.34	1.81	1.41
-2.24	2.41	-1.70	3.63	-3.08	4.45	-3.86	2.89	-2.02	2.44	1.37	1.98	0.79	2.22	2.03	1.52
-2.65	2.47	-1.76	3.61	-2.77	4.31	-3.55	2.87	-1.99	2.38	1.64	1.89	0.74	2.02	1.87	1.53
-3.10	2.50	-1.85	3.34	-2.16	3.95	-3.14	2.66	-1.87	2.10	1.61	1.66	0.52	1.83	1.44	1.48
-3.30	2.44	-1.59	2.61	-1.57	3.62	-2.56	2.48	-1.50	1.99	1.54	1.59	0.04	1.84	1.15	1.63
-2.90	2.64	-1.24	2.42	-1.16	3.40	-2.45	2.60	-0.94	1.71	2.23	1.86	-0.45	1.87	0.97	1.78
-2.27	2.12	-0.73	1.88	-0.48	2.16	-1.77	2.04	-0.56	1.54	1.83	1.64	-0.57	1.75	0.81	1.58
-2.21	2.44	-0.48	1.80	-0.63	2.27	-1.72	2.05	-0.78	1.64	1.50	1.63	-0.35	1.87	0.77	1.61
-2.69	2.40	-0.45	2.04	-0.81	2.36	-1.21	2.10	-1.11	1.85	0.93	1.66	0.17	1.96	0.69	1.65
-2.21	2.54	-0.46	2.36	-1.12	2.72	-2.23	2.33	-1.35	2.06	0.17	1.80	0.65	2.06	0.78	1.68
-1.62	2.66	-0.38	2.87	-1.67	3.41	-2.89	2.89	-1.86	2.39	-0.1	2.14	1.09	2.35	1.46	1.81
-1.11	2.81	-0.77	3.56	-1.91	3.88	-3.56	3.30	-1.90	2.67	0.25	2.41	1.66	2.54	2.03	2.01
-0.23	2.70	-1.33	3.82	-2.09	4.12	-4.43	3.65	-1.79	2.93	1.01	2.71	1.91	2.69	2.17	2.11
-0.83	2.95	-1.09	3.64	-2.66	4.27	-3.70	3.26	-1.67	3.06	1.30	2.59	1.24	2.78	1.84	2.16
-0.42	2.90	-1.09	3.77	-3.05	4.64	-3.29	3.08	-1.44	3.21	1.96	2.58	0.83	2.79	2.13	2.25
-0.39	2.88	-0.93	3.86	-2.85	4.81	-2.74	3.17	-1.45	3.42	2.17	2.63	1.02	2.65	2.53	2.41
-1.28	2.91	-1.16	3.53	-2.16	4.42	-2.39	3.25	-1.55	3.24	1.37	2.41	0.94	2.54	2.23	2.42
-2.13	3.09	-1.19	3.24	-1.74	3.93	-1.90	3.04	-1.68	2.96	0.99	2.36	0.74	2.44	1.46	2.32
-2.92	3.03	-1.18	2.88	-1.26	3.41	-1.75	2.87	-1.73	2.92	0.62	2.33	0.31	2.47	1.10	2.31
-2.63	3.04	-1.05	2.70	-1.04	3.04	-1.85	2.84	-1.11	2.62	1.09	2.39	0.30	2.49	0.78	2.41
-1.68	3.03	-0.88	2.72	-0.58	2.94	-1.66	2.86	-0.63	2.50	1.49	2.48	-0.08	2.53	0.85	2.48
-1.41	2.85	-0.24	2.69	-0.38	2.72	-0.36	2.69	-0.83	2.74	0.32	2.70	-0.17	2.71	0.60	2.61
-1.47	3.05	-0.24	2.92	-0.63	2.96	-0.74	2.87	-1.07	2.90	-0.06	2.75	0.38	2.80	0.48	2.68
-0.82	3.31	-0.46	3.46	-0.74	3.45	-1.23	3.15	-1.24	3.07	-0.08	2.99	0.74	2.89	0.78	2.77
0.25	3.37	0.52	3.31	-0.85	3.81	-1.36	3.30	-0.74	3.20	0.27	3.09	1.43	2.98	1.74	2.93
1.85	3.68	-0.06	3.77	-1.03	4.40	-1.38	3.50	-0.19	3.52	1.34	3.29	2.64	3.13	2.21	3.28
2.90	3.99	0.30	3.50	-0.38	3.96	-1.22	3.60	-0.22	3.45	1.82	3.23	1.90	3.10	3.01	3.29
1.87	3.81	0.02	3.53	0.48	3.58	-0.45	3.37	0.33	3.46	1.93	3.27	0.84	3.22	2.78	3.21
2.47	3.97	0.72	3.71	-0.16	4.05	0.02	3.33	0.91	3.90	2.75	3.49	0.75	3.31	3.86	3.45
1.30	3.73	1.39	3.75	-0.21	4.42	0.28	3.48	0.44	4.02	2.48	3.48	0.77	3.36	3.61	3.66
-1.07	3.59	0.23	3.56	0.02	4.14	-0.41	3.51	-0.76	3.75	1.14	3.33	1.13	3.34	2.16	3.42
-2.36	3.84	-0.42	3.63	-0.87	4.04	-1.21	3.73	-1.50	3.76	0.82	3.40	0.61	3.38	1.27	3.36
-2.14	3.86	-0.94	3.69	-1.09	3.83	-1.49	3.69	-1.48	3.73	0.38	3.44	0.24	3.47	0.89	3.39
-1.43	3.72	-0.67	3.59	-0.90	3.61	-1.36	3.66	-1.03	3.66	0.45	3.50	-0.05	3.53	0.64	3.47

Πίνακας 11: Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των παρατηρητών 9-16 σε λάθος απαντήσεις.

Τα χαρακτηριστικά τα οποία επιλέχτηκαν από την μέθοδο SFFS , αρχικά χρησιμοποιώντας όλα τα δεδομένα φαίνονται στον πίνακα . Με την χρήση της μεθόδου SFFS επιλέχτηκαν τα χαρακτηριστικά 259 και 282 για τις σωστές και τις λανθασμένες απαντήσεις :

Correct		Incorrect	
3.0252	3.0856	3.3957	3.0669
2.7786	3.4026	3.2057	3.3941
3.1250	3.4520	2.7875	3.2507
2.9470	3.2650	3.3561	3.3227
3.0832	3.2440	2.3683	3.5112
2.4544	3.2443	3.2285	3.1161
3.5769	3.1491	3.4992	3.0902
2.9001	3.2038	2.9291	3.5216
3.8956	3.5920	4.0131	3.8090
3.2040	3.1405	4.0122	3.5299
3.3427	3.3700	4.0850	3.5797
3.0138	3.2530	3.6163	3.3663
2.5038	3.3886	3.4457	3.4626
2.9398	3.4716	3.3399	3.2730
2.8780	3.2521	3.2619	3.2192
2.4055	3.2562	2.6130	3.2067

Πίνακας :Χαρακτηριστικά που εξάγονται με την μέθοδο SFFS

Στη συνέχεια, με περιορισμό των δεδομένων και χρήση της μεθόδου SFFS, επιλέχτηκαν τα χαρακτηριστικά [35 -98-127-153-154-169-225-328]:

Correct							
2.244	-1.687	2.185	1.852	2.699	-2.976	-4.770	-4.849
1.502	-1.539	1.587	1.576	2.644	-0.436	-1.537	-1.238
1.987	-1.036	1.914	2.002	2.690	-2.089	-4.642	-3.851
2.079	-1.694	1.958	1.944	2.636	-1.830	-5.384	-4.679
1.749	-0.765	1.799	1.611	2.639	-0.851	-3.046	-2.381
1.545	-0.893	1.592	1.404	2.633	-1.240	-2.445	-2.336
1.890	-1.402	1.933	2.017	2.662	-2.118	-5.485	-4.738
1.891	-2.483	1.804	1.338	2.778	-2.967	-3.510	-3.232
1.938	-1.961	2.049	2.047	2.700	-2.485	-4.428	-5.651
1.931	-1.519	1.970	1.447	2.635	-0.942	-1.342	-4.175
1.783	-1.990	1.802	2.076	2.674	-2.476	-4.882	-3.958
2.144	-2.922	2.133	2.313	2.718	-3.506	-6.470	-5.824

1.568	-2.018	1.640	1.414	2.692	-1.673	-4.351	-3.828
1.900	-0.742	1.851	1.416	2.662	-1.807	-2.063	-1.217
1.810	-1.639	1.638	1.663	2.696	-1.876	-1.497	-0.592
1.477	-0.335	1.532	1.277	2.625	-0.784	-0.991	-0.484

Πίνακας 13:Χαρακτηριστικά που εξάγονται με την μέθοδο SFFS για σωστές απαντήσεις, με περιορισμό δεδομένων

<b>Incorrect</b>							
1.971	-1.743	1.972	2.361	2.741	-2.835	-5.925	-4.230
1.779	-1.707	2.059	2.093	2.624	-1.495	-4.325	-3.664
1.905	-2.235	1.835	1.671	2.679	-3.392	-4.668	-4.218
2.217	-2.115	2.273	2.344	2.815	-1.491	-7.822	-7.605
1.598	-1.003	1.434	1.461	2.650	-1.412	-1.994	-1.804
1.403	-1.036	1.402	1.285	2.647	-0.227	-1.322	-0.923
1.923	-1.169	1.817	1.870	2.661	-2.416	-3.526	-3.636
1.997	-3.787	1.772	1.527	2.905	-4.066	-3.324	-3.037
2.444	-3.719	2.496	2.356	2.850	-4.822	-7.741	-7.251
2.613	-2.295	3.339	3.577	2.691	-3.916	-9.298	-8.924
3.622	-2.635	3.953	3.880	2.716	-4.092	-11.382	-12.046
2.480	-2.728	2.665	2.982	2.695	-3.902	-9.413	-10.035
1.991	-2.753	2.098	2.106	2.736	-1.725	-4.951	-6.114
1.591	-1.186	1.663	2.010	2.699	-1.219	-2.123	-1.985
1.836	-1.609	1.831	2.299	2.707	-1.907	-3.978	-2.856
1.626	-0.497	1.481	1.349	2.614	-0.653	-0.822	-0.707

Πίνακας 14:Χαρακτηριστικά που εξάγονται με την μέθοδο SFFS για λανθασμένες απαντήσεις, με περιορισμό δεδομένων

## 4.2 Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

Μετά τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών, ακολούθησε η επιλογή των καταλληλότερων με τον αλγόριθμο SFFS. Αφού επιλέχθηκαν τα χαρακτηριστικά με την καλύτερη απόδοση, είχε σειρά η εφαρμογή της μεθόδου SVM για την ταξινόμηση των εγκεφαλογραφημάτων στη σωστή ομάδα. Στην εφαρμογή αυτής της μεθόδου υπήρχαν κάποιοι παράγοντες, όπως ο πυρήνας και το μέγεθος των δεδομένων που θα χρησιμοποιούσαμε, οι οποίοι φαίνεται να επηρεάζουν το τελικό αποτέλεσμα. Στα δεδομένα, έχοντας υπόψη ότι το σήμα ERN έχει κορύφωση περίπου 250 ms μετά την παρατήρηση του λάθους, ουσιαστικά ένα κομμάτι του κατεγεγραμμένου ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος δεν μπορεί να μας προσφέρει ουσιαστική πληροφορία.

Για την ταξινόμηση χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος διασταυρωμένης επικύρωσης του αχρησιμοποίητου παραδείγματος (leave one out cross – validation, LOO), κατά την οποία κάθε φορά χρησιμοποιείται μόνο ένα από τα δείγματα για να εκτιμήσει την απόδοση του ταξινομητή, και όλα τα υπόλοιπα αντικείμενα χρησιμοποιούνται για εκπαίδευση. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να χρησιμοποιηθούν όλα τα αντικείμενα από μία τουλάχιστον φορά για επαλήθευση. Όταν ολοκληρωθεί η μέθοδος για όλα τα δείγματα τότε παίρνουμε τον μέσο όρο των σφαλμάτων και έχουμε μια εκτίμηση της απόδοσης του ταξινομητή. Η μέθοδος αυτή δεν σπαταλά δεδομένα αλλά έχει μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος.

Αρχικά παρατίθενται τα αποτελέσματα πριν από την επιλογή των χαρακτηριστικών:  
Χρησιμοποιώντας τετραγωνικό πυρήνα έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
5	11
13	3

Σύνολο = 8/32

Χρησιμοποιώντας τετραγωνικό πυρήνα και περιορίζοντας το μέγεθος των δεδομένων με «παράθυρο» έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
9	7
14	2

Σύνολο = 11/32

Χρησιμοποιώντας γραμμικό πυρήνα έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
3	13
9	7

Σύνολο = 10/32

Χρησιμοποιώντας γραμμικό πυρήνα και περιορίζοντας το μέγεθος των δεδομένων με «παράθυρο» έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
7	9
10	6

Σύνολο = 13/32



Χρησιμοποιώντας πολυωνυμικό πυρήνα έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
13	3
15	1

Σύνολο = 14/32

Χρησιμοποιώντας πολυωνυμικό πυρήνα και περιορίζοντας το μέγεθος των δεδομένων με «παράθυρο» έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
13	3
16	0

Σύνολο = 13/32

Χρησιμοποιώντας πυρήνα radial basis function έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
10	6
13	3

Σύνολο = 13/32

Χρησιμοποιώντας πυρήνα radial basis function και περιορίζοντας το μέγεθος των δεδομένων με «παράθυρο» έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
11	5
15	1

Σύνολο = 12/32

Χρησιμοποιώντας πυρήνα multilayer perceptron έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
5	11
12	4

Σύνολο = 9/32

Χρησιμοποιώντας πυρήνα multilayer perceptron και περιορίζοντας το μέγεθος των δεδομένων με «παράθυρο» έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
10	6
12	4

Σύνολο = 14/32

Στην συνέχεια παρατίθενται τα αποτελέσματα του αυτοματοποιημένου συστήματος, μετά την επιλογή των χαρακτηριστικών με την χρήση της μεθόδου SFFS:

Χρησιμοποιώντας τετραγωνικό πυρήνα έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
11	5
11	5

Σύνολο = 16/32

Χρησιμοποιώντας τετραγωνικό πυρήνα και περιορίζοντας το μέγεθος των δεδομένων με «παράθυρο» έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
12	4
7	9

Σύνολο = 21/32

Χρησιμοποιώντας γραμμικό πυρήνα έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
9	7
9	7

Σύνολο = 16/32

Χρησιμοποιώντας γραμμικό πυρήνα και περιορίζοντας το μέγεθος των δεδομένων με «παράθυρο» έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
14	2
2	14

Σύνολο = 28/32

Χρησιμοποιώντας πολυωνυμικό πυρήνα έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
9	7
10	6

Σύνολο = 15/32

Χρησιμοποιώντας πολυωνυμικό πυρήνα και περιορίζοντας το μέγεθος των δεδομένων με «παράθυρο» έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
14	2
6	10

Σύνολο = 24/32

Χρησιμοποιώντας πυρήνα radial basis function έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
9	7
5	11

Σύνολο = 20/32

Χρησιμοποιώντας πυρήνα radial basis function και περιορίζοντας το μέγεθος των δεδομένων με «παράθυρο» έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
12	4
10	6

Σύνολο = 18/32

Χρησιμοποιώντας πυρήνα multilayer perceptron έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
13	3
10	6

Σύνολο = 19/32

Χρησιμοποιώντας πυρήνα multilayer perceptron και περιορίζοντας το μέγεθος των δεδομένων με «παράθυρο» έχουμε :

<b>Confusion Matrix</b>	
15	1
3	13

Σύνολο = 28/32

## 5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

### 5.1 Συμπεράσματα αποτελεσμάτων

Αρχικά τα αποτελέσματα του κατηγοριοποιητή, χρησιμοποιώντας όλα τα δεδομένα από τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών που επιλέξαμε, δεν είναι ικανοποιητικά αφού και η καλύτερη περίπτωση έχει ποσοστό επιτυχίας χαμηλότερο από το 50%.

Αναλυτικά, χρησιμοποιώντας τον τετραγωνικό πυρήνα `kernel_function= 'quadratic'` η επιτυχία φτάνει το 25% με μόλις 8 σωστά, ενώ με χρήση παραθύρου για τα δεδομένα, τα οποία περιορίζουμε στην αρχή και στο τέλος, αυξάνεται στο 34,4 με 11 από τα 32 να κατατάσσονται στη σωστή κλάση.

Χρησιμοποιώντας το γραμμικό πυρήνα `kernel_function= 'linear'` υπάρχει μια μικρή βελτίωση αφού η επιτυχία γίνεται 31,25% με 10 σωστά, και περιορίζοντας τα δεδομένα 40,6% με 13 σωστά.

Συνεχίζοντας, ο πολυωνυμικός πυρήνας `kernel_function= 'polynomial'` έχει ποσοστό επιτυχίας 43,7% με 14 σωστά στα 32, ενώ περιορίζοντας τα σήματα έχει μια μικρή μείωση φτάνοντας το 40,6%.

Με τον πυρήνα `kernel_function= 'rbf'` (Radial Basis Function) και  $\sigma=1$ , το ποσοστό επιτυχίας φτάνει το 40,6% και με περιορισμό δεδομένων 37,5%.

Τέλος χρησιμοποιώντας τον πυρήνα `kernel_function= 'mlp'` (Multilayer Perceptron kernel) με κλίμακα [1 -1], το ποσοστό επιτυχίας είναι 28,1%, και περιορίζοντας το σήμα των δεδομένων φτάνει το 43,7%.

Η επιλογή των χαρακτηριστικών με τη χρήση του αλγορίθμου SFFS, βελτίωσε την απόδοση του κατηγοριοποιητή, αφού επιλέγει το σύνολο των χαρακτηριστικών που δίνει την μέγιστη απόδοση.

Με βάση τα αποτελέσματα όπως παρουσιάστηκαν πιο πάνω, είναι εμφανές ότι χρησιμοποιώντας τον κατηγοριοποιητή SVM με γραμμικό πυρήνα `kernel_function= 'linear'` αλλά και με τον `kernel_function= 'mlp'`, και με χρήση παραθύρου για τα δεδομένα, τα οποία περιορίζουμε στην αρχή και στο τέλος, παίρνουμε το καλύτερο αποτέλεσμα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε 28 σωστά από τα 32, 87,5% επιτυχία. Δηλαδή ο ταξινομητής είχε κατατάξει σε λάθος κλάση 4 σήματα. Ενώ χωρίς την χρήση παραθύρου, τα λάθη αυξάνονται. Στο γραμμικό πυρήνα `kernel_function= 'linear'`, χρησιμοποιώντας όλα τα δεδομένα το ποσοστό επιτυχίας μειώνεται στο 50% με 16 λάθη, ενώ στο πυρήνα `kernel_function= 'mlp'` (Multilayer Perceptron kernel) με κλίμακα [1 -1], 59,3% με 13 λάθη.

Ακολουθώντας χρησιμοποιώντας τον τετραγωνικό πυρήνα `kernel_function= 'quadratic'` και περιορίζοντας το σήμα, η επιτυχία φτάνει 65,62%, με 21 σωστά κατατεταγμένα ηλεκτροεγκεφαλογραφήματα. Ενώ χωρίς περιορισμό του σήματος η επιτυχία μειώνεται αισθητά με μόλις 16 σωστά και ποσοστό 50 %.

Χρησιμοποιώντας τον πολυωνυμικό πυρήνα `kernel_function= 'polynomial'` και περιορίζοντας το σήμα τα αποτελέσματα είναι ανάλογα με τους άλλους πυρήνες, δηλαδή 75% επιτυχία, ενώ χωρίς περιορισμό του σήματος φτάνει μόλις το 46,9%.

Στην συνέχεια τα αποτελέσματα φαίνεται να αντιστρέφονται, όσον αφορά τον περιορισμό ή όχι του σήματος. Με τον πυρήνα `kernel_function= 'rbf'` (Radial Basis Function) και  $\sigma=1$ , έχουμε καλύτερο αποτέλεσμα χωρίς να περιοριστεί το σήμα με ποσοστό επιτυχίας 66,7%, με 20 στα 32, ενώ αντίθετα το ποσοστό μειώνεται στο 56,3%.

Το ποσοστό επιτυχίας υποδεικνύει το ποσοστό που έχει κατηγοριοποιηθεί σωστά στις δύο κατηγορίες, ορθής και λανθασμένης απάντησης, με μέγιστο ποσοστό 87,5% αρκετά ικανοποιητικό.

## 5.2 Επεκτάσεις

Στις μελλοντικές επεκτάσεις για περαιτέρω βελτιώσεις θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε περισσότερα χαρακτηριστικά των δεδομένων, αλλά και να χρησιμοποιηθούν άλλες τεχνικές επιλογής των χαρακτηριστικών, όπως `exhausting search` και `SBS`. Επίσης θα μπορούσαμε να εισάγουμε και άλλους τύπους κατηγοριοποιητών, όπως για παράδειγμα ο αλγόριθμος Ασαφούς C-Μέσου (FCM), ο αλγόριθμος k-Κοντινότερων Γειτόνων (kNN) και ο αλγόριθμος Bayes classifier. Χρησιμοποιώντας και άλλους κατηγοριοποιητές είναι πιθανόν να αυξηθεί το ποσοστό επιτυχίας. Επίσης θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος επικύρωσης ταξινομητή, η οποία χρησιμοποιεί το 70% των δεδομένων για εκπαίδευση και το υπόλοιπο για δοκιμή.



## Βιβλιογραφία

1. E. Niedermeyer, “The Normal EEG of the Waking Mult. In”, E. Niedermeyer & F. Lopes da Silveds, *Electroencephalography: Basic Principles, Clinical Applications and Related Fields*. Lippincott Williams & Wilkins, Baltimore MD, pp. 149-173, 1999.
2. Scheffers, M. K., & Coles, M. G. H. (2000). Performance monitoring in a confusing world: Error-related brain activity, judgments of response accuracy, and types of errors. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 26(1), 141-151.
3. R. Johnson Jr. (Ed.), *Event-Related Brain Potentials and Cognition*, Handbook of Neuropsychology, vol. 10, Elsevier, Amsterdam, 1995.
4. T. Theodoridis & K. Koutroumbas. *Pattern Recognition*, Third Edition, Elsevier, 2006.
5. V. Vapnik & A. Chervonenkis. *The Theory of Pattern Recognition*. Nauka, Moscow, 1974.
6. M. Falkenstein, J. Hoormann, S. Christ, J. Hohnsbein, ERP components on reaction errors and their functional significance: a tutorial, *Biol. Psychol.* 51 (2000) 87–107.
7. M.G. Coles, M.K. Scheffers, C.B. Holroyd, “Why is there an ERN/Ne on correct trials? Response representations, stimulus-related components and the theory of error-processing”, *Biol. Psychol.*, v.56, pp.173-189, 2001.
8. P.S. Bernstein, M.K. Scheffers and M.G.H. Coles, “Where did I go wrong? A psychophysiological analysis of error detection”, *J. Exp. Psychol. Human*, v.21, pp.1312–1322, 1995.
9. D.M. Olvet, G Hajcak, Reliability of error-related brain activity, *Brain Res.* 1284 (2009) 89–99.
10. G. Schalk, J. Wolpaw, D. McFarland, G. Pfurtscheller, EEG-based communication: presence of an error potential, *Clin. Neurophysiol.* 111 (2000) 2138–2144.

11. M. Falkenstein, J. Hohnsbein, J. Hoormann, L. Blanke, "Effects of errors in choice reaction tasks on the ERP under focused and divided attention", in *Psychophysiological Brain Research*, C.H.M. Brunia, A.W.K. Gaillard, and A. Kok, (Eds.), Tilburg Univ. Press: Tilburg, The Netherlands, pp. 192–195, 1990.
12. C. Holroyd, M. Coles, The neural basis of human error processing: reinforcement learning, dopamine and the error-related negativity, *Psychol. Rev.* 109 (2002) 679–709.
13. J.R. Sveinsson, J.A. Benediktsson, S.B. Stefansson, K. Davidsson, Parallel principal component neural networks for classification of event-related potential waveforms, *Med. Eng. Phys.* 19 (1997) 15–20.
14. Kalatzis, N. Piliouras, E. Ventouras, C.C. Papageorgiou, A.D. Rabavilas, D. Cavouras, Design and implementation of an SVM-based computer classification system for discriminating depressive patients from healthy controls using the P600 component of ERP signals, *Comput. Methods Prog. Biol.* 75 (2004) 11–22.
15. H. van Schie, R.B. Mars, M.G.H. Coles, H. Bekkering, Modulation of activity in medial frontal and motor cortices during error observation, *Nature Neurosci.* 7 (2004) 549–554.
16. P. Pudil, J. Nonovocova, J. Kittler, Floating search methods in feature selection, *Pattern Recognition Lett.* 15 (1994) 1119–1125
17. B.Blankertz, G.Dornhege, C.Schafer, R.Krepki, J.Kohlmorgen, K.-R.Muller, V.Kunzmann,F.Losch,G.Curio,Boosting bit rates and error detection for the classification of fast-paced motor commands based on single-trial EEG analysis, *IEEETrans.NeuralSyst.Rehabil.Eng.*11(2003)127–131
18. B.A. Eriksen, C.W. Eriksen, Effects of noise letters upon the identification of a target letter in a nonsearch task, *Percept. Psychophys.* 16 (1974) 143–149.
19. J.F. Stins, T.J.C. Polderman, D.I. Boomsma, E.J.C. de Geus, Conditional accuracy in response interference tasks: evidence from the Eriksen flanker task and the spatial conflict task, *Adv. Cogn. Psychol.* 3 (2007) 389–396.
20. C. Cortes & V. Vapnik. Support-vector network. *Machine Learning*, 20:273-297, 1995.
21. J. Bezdek, R. Ehrlich & W. Full. The Fuzzy c-Means Clustering Algorithm. *Computers & Geosciences* Vol. 10, 2-3:191-203, 1984.

22. A.W. Moore, M.S. Lee, Efficient algorithms for minimizing cross validation error, in Proceedings of Eleventh International Conference on Machine Learning, New Brunswick, NJ, Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1994, pp. 190–198.
23. M. Goldstein. kn-Nearest Neighbor Classification. IEEE Transactions Theory, Vol. IT-18, No. 5, 1972.
24. F. Rosenblatt. The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the Brain. Psychological Review, 65:386-408.