ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Δίκαιη διανομή ανομοιογενούς αγαθού: Κόψιμο του κέικ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΙΩΑΝΝΗ ΚΟΥΡΚΟΥΜΕΛΗ

Επιβλέπων : Δημήτριος Φωτάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2013

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Δίκαιη διανομή ανομοιογενούς αγαθού: Κόψιμο του κέικ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΙΩΑΝΝΗ ΚΟΥΡΚΟΥΜΕΛΗ

Επιβλέπων : Δημήτριος Φωτάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 11/3/2013

(Υπογραφή)	*(Υπογραφή)*	*(Υπογραφή)*
....	....	....
Δημήτριος Φωτάκης	Στάθης Ζάχος	Άρης Παγουρτζής
Λέκτορας Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Βοηθός καθηγητή Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2013

(Υπογραφή)

....

ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΥΡΚΟΥΜΕΛΗΣ

Φοιτητής Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια, εντός των ορίων των θεμάτων που πραγματεύεται η θεωρητική πληροφορική, μεγάλο έδαφος στις έρευνες και τη βιβλιογραφία έχει κερδίσει το mechanism design. Ο κλάδος αυτός είναι ένα υποσύνολο της θεωρίας παιγνίων, που προσφέρει διάφορα σενάρια λύσεων σε μια κλάση παιχνιδιών με μυστική ατομική πληροφορία για τους παίκτες. Τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά του mechanism design επικεντρώνονται κυρίως σε δυο σημεία: αφενός οι άμεσα ενδιαφερόμενοι με ένα παιχνίδι επιλέγουν τη δομή του παρά την υιοθετούν, και αφετέρου οι σχεδιαστές του ενδιαφέρονται για το αποτέλεσμα του. Ένα από τα προβλήματα στα οποία έχει εφαρμογή το mechanism design είναι η δίκαιη κατανομή αγαθών. Το πρόβλημα αυτό μας είναι γνωστό από πολλές πτυχές του δημόσιου βίου, και η εφαρμογή της μαθηματικής θεωρίας πάνω σε αυτό το καθιστά γνωστό ως το πρόβλημα «τομής του κέικ». Το σύνολο της βιβλιογραφίας που έχει αναπτυχθεί πάνω στο θέμα αυτό έχει να κάνει με την παρουσίαση πρωτοκόλλων που καλύπτουν μερικές ποικιλόμορφες ανάγκες, παρουσιασμένες από την ποικιλόμορφη και πολυπρισματική μελέτη του. Οι ανάγκες αυτές άλλοτε είναι ατομικές, και άλλοτε ομαδικές, μιας και το ζητούμενο κάθε φορά είναι η υπερκάλυψη διαφορετικών κριτηρίων μέσω αλγοριθμικών λύσεων.

Στην παρούσα εργασία θα γίνει μια σύνοψη της βιβλιογραφίας για το κόψιμο του κέικ από τα τελευταία περίπου 70 χρόνια, όπου έχει καταγραφεί μια πλούσια μελέτη επί του θέματος. Στην ανασκόπηση αυτή θα παρατεθούν επίσης ορισμένα ιστορικά στοιχεία για το πρόβλημα αυτό, καθώς και συμπεράσματα που προκύπτουν, αναθεωρημένα πάντα από την οπτική του γράφοντος.

Abstract

Over the last years, inside the borders of theoretical computer science, an uprising study has been identified under the name of mechanism design. This specific branch is a subclass of Game theory, which provides us with many solution concepts in private information games. The distinguishing features of these games are the following two: a game "designer" chooses the game structure rather than inheriting one, and the designer is interested in the game's outcome. One of the issues of study through mechanism design is fair good allocation. This issue is widely known from many concepts of public life, and the application of mathematical theory over it is identified as the "cake cutting" problem. The cake cutting bibliography at the whole has to do with protocols that deal with multiple needs, presented by its multifaceted study. These needs are sometimes personal, and sometimes they are social, as each time the quest is the coverage of different criteria through algorithmic way of thinking.

At the present work there will be a summary about cake cutting study over the last 70 years, where a rich study of bibliography has been notified. There will also be a historic recursion of the problem and its roots, as also the writer's subjective point of view.

Πίνακας περιεχομένων

1

Εισαγωγή

1.1 Ορισμός του προβλήματος

Μια από τις πιο διαχρονικές και διάσημες οικογένειες προβλημάτων της θεωρητικής πληροφορικής αποτελεί η Διανομή Πόρων. Από τις απαρχές της ανθρωπότητας και το σχηματισμό των κοινωνιών οι συναναστροφές των ατόμων απαίτησαν δίκαιη κατανομή σε αγαθά όπως τροφή, χρήματα και πρώτες ύλες, αλλά και σε υποχρεωτικές εκφάνσεις της ζωής όπως εργασίες και ευθύνες. Ζητήματα όπως τα παραπάνω συνέχισαν να απασχολούν ανά τους αιώνες το σύνολο των ανθρώπων, και παραμένουν μέχρι και σήμερα επίκαιρα, ενώ παράλληλα αποτέλεσαν και αποτελούν πόλο έλξης για μαθηματική μελέτη, ώστε να προσδιοριστεί αφενός ο βαθμός στον οποίο είναι δίκαιη μια διανομή αγαθού ή υποχρέωσης, και αφετέρου να σχεδιαστούν νέοι τρόποι διανομής σε θεωρητικό επίπεδο με στόχο την πρακτική τους εφαρμογή. Το επιστημονικό ενδιαφέρον εφάπτεται πάνω στην ανάγκη για δικαιοσύνη και καθορίζει όλες εκείνες τις παραμέτρους που καθιστούν σωστό τον καταμερισμό του πλούτου ή της ευθύνης, ανάλογα με τη φύση του εκάστοτε προβλήματος κατάτμησης ενός πόρου.

Εκτός από την αναγωγή των προβλημάτων διανομής σε δυο μεγάλες κατηγορίες, δηλαδή στα προβλήματα διανομής αγαθών και τα προβλήματα διανομής εργασιών, εξετάζεται και το κατά πόσο η ποσότητα που απαιτεί διαμερισμό είναι διαιρέσιμη ή όχι. Ένα παράδειγμα για διανομή εργασίας θα μπορούσε να είναι μια ομάδα εργατών η οποία καλείται να βάψει έναν τοίχο. Εδώ το αντικείμενο διαχωρισμού είναι διαιρέσιμο, καθώς η επιφάνεια του τοίχου θα μοιραστεί έτσι ώστε καθένας από τους εργάτες να αναλάβει τη βαφή ενός ποσοστού από το συνολικό εμβαδόν της επιφάνειας του τοίχου, και όλοι μαζί να φτάσουν στον επιθυμητό στόχο της περάτωσης του έργου. Αντιστοίχως, αν σε κάποιο άλλο πλαίσιο υπάρχει ένα σύνολο από διακριτές διεργασίες και ένα σύνολο από μηχανές με δηλωμένο το χρόνο που η καθεμία δύναται να περατώσει την κάθε διεργασία, και ο συντονιστής του έργου καλείται να κάνει την αντιστοίχιση μεταξύ μηχανών και διεργασιών με βάση τους χρόνους αυτούς, τότε το αντικείμενο της μελέτης είναι μη διαιρέσιμες ποσότητες.

Σπουδαίο ενδιαφέρον παρουσιάζεται όταν το πρόβλημα αναφέρεται σε διαιρέσιμο αγαθό που πρέπει να μοιραστεί, και παράλληλα είναι μη ομοιογενές αντικείμενο ως προς τον τρόπο που αντιμετωπίζεται από τα άτομα που διεκδικούν το μερίδιό τους. Σε μια τέτοια περίπτωση η επίλυση του προβλήματος γίνεται πολύπλοκη, καθώς οι ανάγκες που πρέπει να καλύψουν οι διαγωνιζόμενοι ξεφεύγουν από τα πιο απλά και καθιερωμένα μαθηματικά και γεωμετρικά στερεότυπα όπως διασφάλιση μεγαλύτερης ποσότητας, αν το πρόβλημα του διαμερισμού αφορά αγαθό, ή αναφορικά με το παράδειγμα του βαψίματος του τοίχου διασφάλιση μικρότερου εμβαδού, και γενικεύουν τις ανάγκες τους που δεν είναι πάντα προφανείς να εξηγηθούν με μαθηματικό τρόπο. Το πρόβλημα της κατανομής ενός διαιρέσιμου και ανομοιογενούς αγαθού είναι ευρέως γνωστό ως το κόψιμο του κέικ (cake cutting).

Ένα κέικ αποτελείται από ποικιλία συστατικών, όπου λόγω της διαφορετικής τους γεύσης κάθε κομμάτι που το απαρτίζει προσελκύει και διαφορετικούς ανθρώπους. Έτσι ο διαχωρισμός του και η δίκαιη κατανομή του στους ενδιαφερόμενους είναι ένα παράδειγμα διανομής διαιρέσιμου και ανομοιογενούς αγαθού. Οι οπτικές γωνίες για τη δίκαιη διανομή ποικίλουν, καθώς το «κόψιμο του κέικ» μελετάται από σωρεία επιστημονικών κύκλων, όπως οικονομολόγους, πολιτικούς, μαθηματικούς, αλλά και μηχανικούς. Τα κριτήρια για την αποδοτικότητα ωστόσο συσπειρώνονται γύρω από το ατομικό και το γενικό όφελος, δυο έννοιες που συνήθως δε συνάδουν μεταξύ τους.

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια βιβλιογραφική ανασκόπηση των βασικών θεμάτων που ανέκυψαν από τη μέχρι σήμερα μελέτη πάνω στο πρόβλημα του «κοψίματος του κέικ», μια παρουσίαση των κριτηρίων αποδοτικότητας, των πρωτοκόλλων και των αποτελεσμάτων που μας δίνουν, και παράλληλα είναι μια προσπάθεια να αναδειχθούν τα ανοιχτά προβλήματα που καλούνται να αντιμετωπίσουν οι μελετητές στο εγγύς μέλλον για τη συνέχιση της έρευνας σε ένα σπουδαίο επιστημονικό αντικείμενο μελέτης όπως και το συζητηθέν.

1.2 Ιστορική αναδρομή

Όπως αναφέρθηκε, ζητήματα σχετικά με δίκαιη διανομή απασχολούν εδώ και χιλιετίες το ανθρώπινο γένος. Συγκεκριμένα, η διαδικασία «κόβω και διαλέγεις», που όπως θα δούμε αργότερα εφαρμόζεται όταν το αγαθό μοιράζεται μεταξύ δυο ατόμων, εικάζεται πως χρησιμοποιείται από τα βάθη της Προϊστορίας. Επιπροσθέτως, από την εποχή εκείνη ως τη σημερινή, είναι χαρακτηριστικά τα παραδείγματα στα οποία το Κόψιμο του κέικ συνέβαλλε σε σπουδαίες αποφάσεις της Ιστορίας, όπως λόγου χάριν στο διαμελισμό του Βερολίνου που κανονίστηκε μετά το τέλος του Β’ Παγκοσμίου Πολέμου στη διάσκεψη του Πότσνταμ.

Από την καθαρά επιστημονική πλευρά, ο Αμερικανός μαθηματικός Sol Garfunkel χαρακτήρισε το Κόψιμο του κέικ ως ένα από τα πιο σπουδαία ανοιχτά προβλήματα στα μαθηματικά του 20ού αιώνα[1]. Το 1947, μετά από δουλειά τριών Πολωνών μαθηματικών, των Hugo Steinhaus, Bronisław Knaster και Stefan Banach, εκδόθηκε η αναλογική («δίκαιη») λύση του «τελευταίου διαμελιστή», μια λύση η οποία αποτελεί αρχέτυπο για πολλές μορφές αλγορίθμων που έχουν προταθεί έκτοτε και βρίσκει εφαρμογή σε προβλήματα για οποιονδήποτε αριθμό ατόμων («παικτών») που μοιράζονται το αγαθό. Ο Steinhaus[2] την ίδια χρονιά έθεσε το πρόβλημα της εύρεσης του αριθμού των κοψιμάτων του κέικ που απαιτούν αλγόριθμοι όπως και αυτός.

Το 1960, δυο επιστήμονες που ερευνούσαν ξεχωριστά το πρόβλημα, οι John Selfridge και John Conway, παρουσίασαν μια λύση στο πρόβλημα των 3 παικτών, η οποία εξαλείφει τη ζήλια μεταξύ τους, δηλαδή δίνει στον καθένα ένα κομμάτι που κατά την άποψη του είναι τουλάχιστον ισάξιο με των υπολοίπων. Για περισσότερους από 4 παίκτες, η εξάλειψη της ζήλιας ήταν ένα ανοιχτό και δύσκολο πρόβλημα μέχρι το έτος 1995, όπου ο Steven Brams και ο Alan Taylor δημοσίευσαν τη λύση τους (το θέμα της εξάλειψης της ζήλιας είναι ένα από τα βασικότερα θέματα που πραγματεύεται η παρούσα εργασία στη συνέχεια). Τέλος, το 2006 σημειώθηκε μεγάλη πρόοδος στην εύρεση «έντιμου» (equitable) διαχωρισμού χάριν των Steven Brams, Michael Jones και Christian Klamler[1].

Αν συγκριθεί με άλλες υποενότητες των μαθηματικών, της επιστήμης των υπολογιστών και των οικονομικών, το Κόψιμο του κέικ αναλύεται σε μια σχετικά νεοσύστατη βιβλιογραφία, που απαρτίζεται από ένα σύνολο περίπου 100 δημοσιεύσεων[3] και βιβλίων που πρόσφατα παρουσιάστηκαν στο κοινό[4][5].

1.3 Αποτελέσματα μέχρι τώρα

Οι ερευνητές μέχρι σήμερα έχουν θεσπίσει πολλά και ποικιλόμορφα κριτήρια αξιολόγησης για τους αλγορίθμους του Κοψίματος του κέικ, υπό το πρίσμα των πολλών οπτικών γωνιών που προσφέρει ένα πρόβλημα τόσο πολυδιάστατο όπως αυτό. Επομένως η πρόοδος πάνω στο πρόβλημα προσμετράται με το βαθμό στον οποίο έχουν ικανοποιηθεί όλα αυτά τα κριτήρια.

Ως τώρα έχουν δοθεί ικανοποιητικές απαντήσεις σε ζητήματα όπως η αναλογικότητα, η εξάλειψη ζήλιας και η εντιμότητα, ενώ παράλληλα οι απαιτήσεις των παικτών έχουν μοντελοποιηθεί σε διάφορα πρότυπα για να προσεγγίζουν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο ρεαλιστικά σενάρια, πράγμα που βοηθά σημαντικά τη μελέτη. Αρκετά απαιτητικοί περιορισμοί, όπως για παράδειγμα το μικρότερο δυνατό κομμάτι που είναι διατεθειμένος να λάβει ο κάθε παίκτης, λαμβάνονται υπ' όψιν με αποτέλεσμα το πρόβλημα να μελετάται από διαφορετική σκοπιά κάθε φορά.

Οι αλγόριθμοι που έχουν παρουσιαστεί όλα αυτά τα χρόνια είναι ως επί το πλείστον αποδοτικοί όχι μόνο ως προς την ορθότητα τους αλλά και την πολυπλοκότητα της λύσης τους, η οποία μετριέται με τον αριθμό των κοψιμάτων που χρειάζονται για να παραχθούν τα τελικά κομμάτια του καταμερισμού. Για έναν αλγόριθμο όπου συμμετέχουν n παίκτες, η καλύτερη πολυπλοκότητα που μπορεί να επιτευχθεί είναι $O(n)$, καθώς ο ελάχιστος δυνατός αριθμός κοψιμάτων που απαιτείται για τη διανομή είναι $n-1$. Όμως οι αληθινές ανάγκες επιτάσσουν περισσότερα από αυτά, καθώς στο σύνολο των πρωτοκόλλων υπάρχει το ενδεχόμενο οι παίκτες να καταλήγουν με περισσότερα από ένα κομμάτια, όπως και το σενάριο της ανακατανομής της αρχικής μοιρασιάς, και μάλιστα συνήθως περισσότερο από μια φορά. Οι αποδοτικότερες λύσεις ,όπως για παράδειγμα μια διαίρει-και-βασίλευε παραλλαγή του «τελευταίου διαμελιστή», προσεγγίζουν το $O(nlogn)$ που είναι πολύ ικανοποιητική πολυπλοκότητα. Το σύνολο των λύσεων κυμαίνεται μεταξύ αυτής και την πολυπλοκότητα των αλγορίθμων οι οποίοι εξετάζουν εξαντλητικά όλες τις πιθανές λύσεις και φτάνουν σε μη αποδεκτές πολυπλοκότητες της τάξης του $O(n!)$.

Έτσι γίνεται αντιληπτό ότι πέρα από την ορθότητα που είναι σαφώς προαπαιτούμενη για να υιοθετηθεί μια λύση που προτείνει ένας αλγόριθμος, η πρόοδος της μελέτης στο Κόψιμο του κέικ αναδεικνύεται από την ελάττωση της πολυπλοκότητας που καθιστά πιο βιώσιμες τις λύσεις για προβλήματα με πολλούς παίκτες. Σήμερα οι αλγόριθμοι για τα πιο απλά προβλήματα της κατηγορίας αυτής προσεγγίζουν το καλύτερο δυνατό. Η βελτίωση αναζητείται σε έννοιες πιο δύσκολο να ικανοποιηθούν, όπως αυτή της εξάλειψης της ζήλιας, οι οποίες απαιτούν μεγάλη πολυπλοκότητα και ορισμένες φορές δεν καλύπτουν όλα τα σενάρια αναγκών που εκφράζονται από τους παίκτες.

1.4 Ανοιχτά προβλήματα

Παρ' όλη τη μεγάλη πρόοδο και τη σχετικά εκτεταμένη βιβλιογραφία που έχει προκύψει από τη μελέτη του Κοψίματος του κέικ, εντοπίζονται ορισμένα σημαντικά κενά στη γενική εικόνα του προβλήματος που αποτρέπουν την ολοκληρωμένη θεώρηση του. Τα κενά αυτά είναι και τα θέματα που αποζητούν λύση από τους ερευνητές του παρόντος και του μέλλοντος, και θα απασχολήσουν -όπως γίνεται σαφές- όλους τους επιστημονικούς κύκλους που προαναφέρθηκαν.

Ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα συναντάται στη μεγάλη ανομοιογένεια του γενικού πλαισίου μελέτης. Οι ερευνητές καταλήγουν σε αποτελέσματα, τα οποία λόγω της πληθώρας των κριτηρίων που υπάρχουν είναι συνήθως αδύνατο να συγκριθούν μεταξύ τους. Έτσι ο καθένας τους αδυνατεί να κατανοήσει πλήρως τη σημασία του έργου του ομολόγου του και η αξία της μελέτης του γίνεται δύσκολα πλήρως αντιληπτή. Ήδη προς αυτή την κατεύθυνση της ενοποίησης των πλαισίων έχουν κινηθεί ερευνητές όπως οι Sgall, Woeginger, Robertson και Webb[3], αλλά για την ώρα η επιστημονική κοινότητα είναι μακριά από τον τελικό στόχο που είναι η εύρεση ενός τελικού πεδίου δράσης για τη συνέχιση της μελέτης.

Προβλήματα παρουσιάζονται επίσης στον τρόπο που οι προτιμήσεις των παικτών πάνω στο κέικ κωδικοποιούνται από τον αλγόριθμο. Ενώ η κυρίαρχη τάση είναι να ανατίθενται όλοι οι υπολογισμοί στους ίδιους τους παίκτες (μέσω ενός πρωτοκόλλου), ένας κεντρικός αλγόριθμος δεν επιτρέπει αυτή την επιλογή. Η αντιμετώπιση του ζητήματος αυτού θα οδηγήσει όχι μόνο σε νέα αποτελέσματα, αλλά επίσης στη σύμπραξη των υπολοίπων περιοχών της Επιστήμης των υπολογιστών στο πρόβλημα.

Ένα τελευταίο ανοιχτό θέμα που θα αναφερθεί στο σημείο αυτό, είναι το ότι οι πιο προχωρημένες λύσεις και κριτήρια που έχουν προταθεί πάνω στο Κόψιμο του Κέικ δεν έχουν βρει μέχρι στιγμής πρακτική χρήση στον αληθινό κόσμο πέραν της θεωρίας. Θα ήταν μεγάλη επιτυχία για τη θεωρητική πληροφορική αν κάποτε, ακόμα και τα πιο εξεζητημένα ζητήματα που έχουν επιλυθεί ήδη ή θα επιλυθούν στη συνέχεια σε θεωρητικό επίπεδο, έβρισκαν εφαρμογή σε καθημερινές ασχολίες και εκφάνσεις στη ζωή των ανθρώπων.

Παραπάνω είναι μερικά από τα ανοιχτά προβλήματα, που απλώς αναφέρονται ως παραδείγματα στο παρόν στάδιο. Εκτενής παρουσίαση ανοιχτών προβλημάτων και πιθανών επιδιώξεων του μέλλοντος θα γίνει στο τέλος της εργασίας, όπου και θα υπάρχει πλέον η απαραίτητη γνώση για την πλήρη κατανόηση των θεμάτων αυτών.

2

Το γενικό πλαίσιο

Στην ενότητα αυτή γίνεται μια παρουσίαση των πρωταρχικών θεματικών του Κοψίματος του κέικ. Σε αυτές συμπεριλαμβάνονται μαθηματικοί συμβολισμοί που θα βοηθήσουν στην απεικόνιση, την έρευνα και την αντιμετώπιση του προβλήματος με μαθηματικό τρόπο, ορισμοί που επεξηγούν έννοιες όπως τα πρωτόκολλα, και τέλος βασικές μέθοδοι που χρησιμεύουν στη διαίρεση του κέικ για 2 παίκτες που θα δώσουν μια πρώτη εικόνα για το σύνολο των αλγορίθμων που θα εμφανιστούν στο σύνολο των επόμενων κεφαλαίων.

2.1 Συμβολισμοί

Συμβατικά αναφερόμαστε στο ετερογενές κέικ ως το κλειστό διάστημα $C = [0,1]$. Ένα κομμάτι του κέικ είναι μία πεπερασμένη ένωση από υποσύνολα του $[0,1]$, και το προσδιορίζουμε $I = [x, y]$, όπου το x αποτελεί το αριστερό όριο του κομματιού I και το y το δεξί. Το μήκος του κομματιού I είναι $y - x$. Στο σημείο αυτό θα θεσπίσουμε τις συναρτήσεις που επιστρέφουν τα βασικά αυτά χαρακτηριστικά: η συνάρτηση $left$ θα επιστρέφει το αριστερό όριο του κομματιού, η $right$ αντιστοίχως το δεξί και η len το μήκος του κομματιού. Άρα $left(I) = x$, $right(I) = y$, $len(I) = y - x$. Αν ένα κομμάτι X απαρτίζεται από πολλά κομμάτια I, τότε $len(X) = \sum_{I \in X}(I)$.

Όπως διευκρινίστηκε παραπάνω, οι άνθρωποι οι οποίοι απαρτίζουν το σύνολο των ατόμων που ενδιαφέρονται να αποκτήσουν ένα μέρος του κέικ σε κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα, θα αναφέρονται ως παίκτες. Το σύνολο αυτό θα απεικονίζεται ως $N = \{1, \dots n\}$.

Ένας μηχανισμός Κοψίματος του κέικ ορίζεται ως μιά συνάρτηση f που διανέμει σε κάθε παίκτη $i \in N$ το κομμάτι A_i που του αναλογεί, και συνολικά για όλους τους παίκτες επιστρέφει την κατανομή $(A_1, \ldots, A_n)$. Τα κομμάτια αυτά είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους, αφού προφανώς $A_i \cap A_j = \emptyset$ για κάθε $i, j \in N,\ i \neq j$. Επίσης προφανώς, το σύνολο των κομματιών δεν ξεπερνούν επ' ουδενί το συνολικό κέικ, δηλαδή $\sum_{i=1}^{n} A_i \subseteq C$.

Αυτοί είναι οι βασικότεροι συμβολισμοί που συνοδεύουν ανελλιπώς τη μαθηματική απεικόνιση του Κοψίματος του κέικ. Όμως, καθώς η ανάλυση του προβλήματος ξεδιπλώνεται και παρουσιάζονται σειριακά οι πηγές εστίασης του ενδιαφέροντός μας πάνω σε αυτό, θα δημιουργούνται νέες ανάγκες μαθηματικής επεξήγησης μεγεθών. Έτσι περαιτέρω συμβολισμοί θα παρατίθενται στα επόμενα κεφάλαια, όποτε χρειαστεί. Ειδική μνεία γίνεται για τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας που αποτελούν πολύ σημαντική τεχνική συμβολισμού, καθώς είναι ο καλύτερος δυνατός τρόπος να μεταφραστεί η επιθυμία ενός παίκτη στη μαθηματική γλώσσα. Αυτές θα αναφερθούν στο επόμενο Κεφάλαιο, αφού καταδειχθεί η λογική της συνάρτησης αξιολόγησης των παικτών.

2.2 Πρωτόκολλα και πολυπλοκότητα

Η εκδοχή των Even και Paz, που υιοθετήθηκε από πολλές δημοσιεύσεις[6][7] για το πώς ορίζεται το πρωτόκολλο είναι η εξής:

Ορισμός 2.2.1. Πρωτόκολλο είναι μια διαδραστική διαδικασία ικανή να προγραμματιστεί από υπολογιστή. Δύναται να θέτει ερωτήματα (queries) στους συμμετέχοντες, των οποίων οι απαντήσεις μπορούν να επηρεάσουν τις μελλοντικές αποφάσεις του. Δύναται να θέσει οδηγίες στους συμμετέχοντες. Το πρωτόκολλο δεν έχει καμία πληροφόρηση πάνω στα μεγέθη των διαφόρων κομματιών όπως αυτά εκτιμώνται από τους συμμετέχοντες. Υποτίθεται επίσης ότι στην περίπτωση που αυτοί υπακούσουν το πρωτόκολλο, τότε θα καταλήξουν με το δικό τους κομμάτι ο καθένας ύστερα από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων[8].

Από τον παραπάνω ορισμό αντλείται το εξής σημαντικό: το πρωτόκολλο ζητά από τους παίκτες να υπολογίσουν την εκτίμησή τους επάνω στο κέικ, και όχι από κάποιο υπολογιστικό κέντρο. Εγγυάται την ορθότητά του ως προς το ότι προσφέρει λύση για κάθε παίκτη ύστερα από κάποιο χρονικό διάστημα, εφ' όσον ακολουθηθούν τα βήματα που προτείνει να γίνουν.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να ορίσουμε ένα κριτήριο "δικαιοσύνης" για τα πρωτόκολλα: Συμβολίζουμε με P_i το σύνολο των κατανομών τις οποίες ο i λογίζεται ως δίκαιες. Το σύνολο των δίκαιων κατανομών για όλους τους παίκτες ταυτόχρονα είναι η τομή $P = P_1 \cap \ldots \cap P_n$.

Ορισμός 2.2.2. Ένα πρωτόκολλο κοψίματος του κέικ ικανοποιεί το κριτήριο δικαιοσύνης $P = P_1 \cap \dots \cap P_n$ αν, για όλους τους παίκτες, υπάρχει μια στρατηγική που αποκρίνεται στις οδηγίες που εγγυώνται ότι η τελική κατανομή $X = (X_1, \dots, X_n) \in P$. Επιπροσθέτως, αν ο παίκτης i ακολουθήσει τη στρατηγική αυτή αλλά παράλληλα κάποιοι άλλοι παίκτες παρεκκλίνουν από το πρωτόκολλο, τότε η καταλυτική κατανομή $X' = (X'_1, \dots, X'_n)$ πρέπει $X' \in P_i$.

Τα πρωτόκολλα είναι μείζονος σημασίας για τη μελέτη του Κοψίματος του κέικ. Είναι ντετερμινιστικές λύσεις που καταλήγουν σε κάποιο αποτέλεσμα όσον αφορά τη διανομή του αγαθού. Σε όλες τις περιπτώσεις που εφαρμόζονται, ο βαθμός της αποτελεσματικότητάς τους καθορίζεται από το κατά πόσο καλύπτουν κάποιο κριτήριο δικαιοσύνης, και την πολυπλοκότητα που χρειάζονται για να καταλήξουν σε οριστικό αποτέλεσμα.

Η πολυπλοκότητα στην Πληροφορική μετριέται ποικιλοτρόπως, ανάλογα με τη φύση του εκάστοτε προβλήματος. Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα ταξινόμησης, η πολυπλοκότητα ταυτίζεται με τον αριθμό των συγκρίσεων μεταξύ των υπο ταξινόμηση αντικειμένων. Παρομοίως, στη Θεωρία Υπολογισμού μελετάται η χρονική πολυπλοκότητα, που ορίζεται γενικά ως ο αριθμός βημάτων που απαιτεί ένα πρωτόκολλο για να ολοκληρωθεί, ενώ υπάρχει και η χωρική πολυπλοκότητα που ασχολείται με την ποσότητα της μνήμης στην οποια γίνονται οι απαραίτητες καταχωρήσεις, φυλάσσοντας πληροφορίες ενός ενδιάμεσου σταδίου της διαδικασίας επίλυσης που θα βρουν χρήση σε επόμενο βήμα της διαδικασίας.

Το Κόψιμο του κέικ σπανίως έχει προφανή λύση, η οποία να μπορεί να προκύψει μετά από τον πρώτο διαμελισμό, και αυστηρά με ένα κομμάτι για τον καθένα. Στην πραγματικότητα, ειδικά όταν ο αριθμός παικτών είναι σχετικά μεγάλος, τα άτομα στα οποία διανέμεται το κέικ είναι πολύ δύσκολο να καταλήξουν με το ίδιο κομμάτι που τους είχε δοθεί και αρχικά (δηλαδή στο πρώτο βήμα της εκτέλεσης του πρωτοκόλλου). Το κέικ μοιράζεται αλλεπάλληλα ώσπου το πρωτόκολλο να ολοκληρωθεί, και σε κάθε στάδιο που διεκπεραιώνεται μέχρι τη στιγμή εκείνη το μαχαίρι διαιρεί και ανακατανέμει το κέικ στους παίκτες. Για το πρόβλημα αυτό λοιπόν, πολυπλοκότητα λογίζεται ο αριθμός κοψιμάτων που γίνονται συνολικά στο κέικ. Όπως αναλύθηκε, η ελάχιστη δυνατή πολυπλοκότητα είναι η γραμμική $O(n)$.

Ένας πιο επίσημος ορισμός για την πολυπλοκότητα, που ταυτίζεται με τον παραπάνω, θα δοθεί στο επόμενο κεφάλαιο, αφού πρώτα αποσαφηνιστεί η έννοια των ερωτημάτων που τίθενται από το πρωτόκολλο στους παίκτες (τα queries). Τα ερωτήματα αυτά καθορίζουν εν πολλοίς και έναν πιο ακριβή προσδιορισμό για την έννοια του πρωτοκόλλου που δόθηκε από τους Robertson και Webb [5], ο οποιος επισημοποιήθηκε από τους Sgall και Woeninger[9].

2.3 «Κόβω και διαλέγεις»

Η τεχνική Cut and choose («κόβω και διαλέγεις»), πιθανότατα αποτελεί τον αρχαιότερο τρόπο δίκαιης μοιρασιάς ενός αγαθού για 2 παίκτες[3]. Το σίγουρο είναι ότι αποτελεί το πιο απλό - και σε μερικές περιπτώσεις δίκαιο- πρωτόκολλο που μπορεί να εκφραστεί για δυο άτομα που εποφθαλμιούν στο να μοιραστούν το ανομοιογενές και διαιρέσιμο κέικ. Το πρωτόκολλο είναι το εξής:

Πρωτόκολλο 2.3 Cut and Choose

1.Ο παίκτης 1 κόβει το κέικ C σε δυο κομμάτια C_1 και C_2 τα οποία εκείνος θεωρεί ισάξια.

2.Ο παίκτης 2 διαλέγει ένα από τα κομμάτια C_1 και C_2 (αυτό που προτιμάει περισσότερο) και ο παίκτης 1 παίρνει το εναπομείναν από αυτά.

Μελετώντας κανείς το πρωτόκολλο αυτό μπορεί να οδηγηθεί στα εξής συμπεράσματα:

1.Είναι φιλαληθής (truthful), με την έννοια ότι και οι δυο παίκτες ευνοούνται από τη μοιρασιά στο μέγιστο βαθμό μόνο αν δηλώσουν ότι ενδιαφέρονται για το κομμάτι που πραγματικά επιθυμούν, και συνεπώς κανείς από τους δυο παίκτες δεν κερδίζει δηλώνοντας ψευδώς άλλο κομμάτι.

2.Εξαλείφει τη ζήλια μεταξύ των παικτών (envy-free), δηλαδή και οι δυο παίκτες καταλήγουν με ένα κομμάτι που το θεωρούν τουλάχιστον ισάξιο με αυτό του αντιπάλου τους.

Η πρώτη ιδιότητα εξηγείται ως εξής: Ο πρώτος παίκτης δεν κόβει ανισομερώς το κέικ, γιατί αυτό μπορεί να το εκμεταλλευθεί ο δεύτερος διαλέγοντας το -κατά την άποψη του πρώτου- καλύτερο κομμάτι. Ο δεύτερος προφανώς ευνοείται διαλέγοντας το καλύτερο για εκείνον κομμάτι που προέκυψε από το κόψιμο του πρώτου. Άρα και οι δυο παίρνουν το καλύτερο δυνατό δηλώνοντας την αλήθεια.

Η δεύτερη ιδιότητα, πρωτίστης σημασίας για τα πρωτόκολλα όπως και η πρώτη, εξηγείται ως εξής: Ο πρώτος παίκτης δε ζηλεύει το κομμάτι του δεύτερου, γιατί δηλώνοντας αληθώς δημιουργεί δυο ίσα κομμάτια, και συνεπώς ο δεύτερος θα λάβει ακριβώς ισάξιο με το δικό του. Ο δεύτερος παίκτης, αφού διαλέγει το ένα από αυτά και απορρίπτει το άλλο, είναι προφανές ότι κατά τη γνώμη του θα καταλήξει με καλύτερο κομμάτι, ή στη χειρότερη περίπτωση ισάξιο με αυτό του πρώτου.

Παρατηρείται λοιπόν ότι το πρωτόκολλο αυτό ικανοποιεί δυο σημαντικά κριτήρια που είναι η φιλαλήθεια και η εξάλειψη της ζήλιας. Επιπροσθέτως, η πολυπλοκότητά του είναι η βέλτιστη (μόλις μία κοπή). Δυστυχώς όμως, η τεχνική αυτή εφαρμόζεται με επιτυχία μόνο σε μια πολύ περιορισμένη κατηγορία περιπτώσεων. Τα μόνα προβλήματα δυο παικτών που μπορούν να επιλυθούν αποτελεσματικά με τέτοιο τρόπο, είναι εκείνα στα οποία συμμετέχουν παίκτες με το ίδιο σκεπτικό και τις ίδιες ανάγκες πάνω στο κέικ. Το γεγονός που η τεχνική «κόβω και διαλέγεις» αψηφά είναι ότι στις περισσότερες των περιπτώσεων οι δυο συμμετέχοντες σκέφτονται εντελώς διαφορετικά, και αυτή η διαφορετικότητα οδηγεί σε μη αποδεκτές λύσεις από τον αλγόριθμο.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητός ο τελευταίος ισχυρισμός, ας σκεφτεί κάποιος ως παράδειγμα την περίπτωση όπου παίκτες είναι ένα παιδί και ένας μεσήλικας: Αν το κέικ καλείται να κόψει ο μεσήλικας, εκείνος μπορεί να λάβει υπ’ όψιν την ανάγκη του παιδιού για συγκεκριμένα κομμάτια του κέικ που ο ίδιος δεν έχει σε προτεραιότητα, όπως π.χ. το κεράσι, αλλά και του ιδίου για το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδό του κέικ. Έτσι μπορεί να θεωρήσει το κεράσι ως ξεχωριστό κομμάτι από μόνο του, και το υπόλοιπο κέικ ως το δεύτερο κομμάτι. Το παιδί, για το οποίο το κεράσι είναι η πρώτη ανάγκη που πρέπει να καλύψει, θα διαλέξει αναγκαστικά το κεράσι, όμως σαφώς θα ζηλεύει την ανισομέρεια της κατανομής που δε του επιτρέπει να αποκτήσει κάποιο ποσοστό από το υπόλοιπο γλυκό.

Η αναποτελεσματικότητα αυτή του πρωτοκόλλου καταδεικνύει μια πολύ σημαντική ιδιότητα ενός ανομοιογενούς αγαθού όπως είναι το κέικ: Οι παίκτες δεν εποφθαλμιούν πάντα τα ίδια κομμάτια, καθώς έχουν διαφορετικό τρόπο σκέψης και εστιάζουν το ενδιαφέρον τους σε άλλα υλικά που το απαρτίζουν από αυτά που επιθυμεί ο ομόλογός τους. Το πρόβλημα περιπλέκεται σημαντικά από αυτή την πτυχή του προβλήματος, καθώς όπως φαίνεται, η αξία των κομματιών που μπορούν να προκύψουν από το κέικ δε μπορεί επ’ ουδενί να μετρηθεί από ένα κεντρικό σημείο αναφοράς, ένα κοινό σύστημα αξιών που καθορίζει τη χρησιμότητα των κομματιών για τους παίκτες. Η αξία καθορίζεται αποκλειστικά και μόνο από τους παίκτες που απαρτίζουν το πρόβλημα, οι οποίοι αξιολογούν ξεχωριστά το κέικ.

Η μαθηματική απεικόνιση της διαφορετικότητας αυτής θα δοθεί στο επόμενο κεφάλαιο, ώστε να γίνει πλέον εφικτός ο προσανατολισμός της μελέτης προς μια κατεύθυνση που επεξηγεί με μαθηματικό τρόπο τις ιδιομορφίες του προβλήματος.

2.4 Τεχνικές κινούμενου μαχαιριού

Η γενικότητα του προβλήματος επιτάσσει συνήθως να παρουσιάζονται πρωτόκολλα για μη περιορισμένο αριθμό παικτών, αντιθέτως με τεχνικές όπως η «κόβω και διαλέγεις» που αναφέρεται στην περίπτωση των 2 παικτών. Μια οικογένεια λύσεων για απεριόριστους παίκτες είναι οι τεχνικές του λεγόμενου «κινούμενου μαχαιριού». Τα πρωτόκολλα αυτά ορίζουν έναν εξωτερικό παρατηρητή, ένα διαιτητή, ο οποιος κινεί το μαχαίρι του στις διαστάσεις του κέικ, περιμένοντας κάποιον να ζητήσει να κόψει το κομμάτι που ορίζει με αυτό και να το δώσει σε αυτόν που το ζήτησε. Η πιο απλή παραλλαγή τεχνικής κινούμενου μαχαιριού είναι η εξής:

Ας φανταστούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το κέικ ως μακρόστενο ορθογώνιο με μικρή αριστερή και δεξιά πλευρά (το ταυτίζουμε με τη μαθηματική απεικόνιση $C = [0,1]$, όπου 0 η αριστερή πλευρά και 1 η δεξιά). Ο διαιτητής ξεκινάει με το μαχαίρι στο αριστερό άκρο και το κινεί προς τα δεξιά ώσπου ένας από τους n παίκτες να του πει να κόψει το κέικ ακριβώς εκεί που βρίσκεται το μαχαίρι τη στιγμή εκείνη. Ο διαιτητής κόβει το κομμάτι στην τοποθεσία x_1 και δίνει το κομμάτι $[0, x_1]$ στον παίκτη αυτό. Η διαδικασία συνεχίζεται με όμοιο τρόπο για τους $n-1$ παίκτες που απομένουν και το υπόλοιπο κέικ, δηλαδή το $C' = [x_1, 1]$, ώσπου όλοι οι παίκτες να λάβουν το κομμάτι τους.

Η παραπάνω μέθοδος για το κόψιμο δεν έχει κάποιο αυστηρό ορισμό, και θα χρειαστεί κάποιες διευκρινίσεις για να οριστεί πλήρως ως πρωτόκολλο. Όμως, και στη μορφή της αυτή δύναται να εξάγει κάποια χρήσιμα συμπεράσματα. Αν ερχόταν κανεις στη θέση ενός παίκτη που περιμένει το μερίδιό του, θα βρισκόταν αντιμέτωπος με αυτό που ορίστηκε παραπάνω ως φιλαλήθεια: Ας υποθέσουμε ότι το κέικ έχει χωριστεί μέχρι το σημείο x_k και πλεον το διαθέσιμο κέικ είναι το $[x_k, 1]$. Μέσα στο διάστημα αυτό θα υπάρχει κάποιο x_{k+1}, τέτοιο ώστε το κομμάτι $[x_k, x_{k+1}]$ να τον ικανοποιεί. Το ερώτημα είναι κατά πόσο το σημείο x'_{k+1} στο οποιο θα ζητήσει από το διαιτητή να χωρίσει το κέικ θα ταυτίζεται με την πραγματική του ανάγκη (x_{k+1}). Αν ζητήσει από το διαιτητή να κόψει μικρότερο κομμάτι από αυτό που χρειάζεται, δηλαδή δηλώσει $x'_{k+1} < x_{k+1}$, θα καταλήξει με το κομμάτι $[x_k, x'_{k+1}]$, που θα έχει όμως μικρότερη αξία για αυτόν από το $[x_k, x_{k+1}]$. Αν ζητήσει από το διαιτητή να κόψει μεγαλύτερο κομμάτι, δηλαδή δηλώσει $x'_{k+1} > x_{k+1}$, θα καταλήξει σαφώς με καλύτερο κομμάτι από αυτό που πραγματικά έχει ανάγκη (θα λάβει το κομμάτι $[x_k, x_{k+1}]$ που θέλει μαζί με την επιπρόσθετη αξία του κομματιού $[x_{k+1}, x'_{k+1}]$). Όμως, με το να αφήσει το διαιτητή να συνεχίσει την κίνηση του μαχαιριού προς τα δεξιά, αυξάνεται ο κίνδυνος να σταματήσει πρωτύτερα το διαιτητή κάποιος άλλος παίκτης και να καταλήξει εκείνος με το κομμάτι που ήθελε, και έτσι για μια μικρή επιπρόσθετη αξία θα ρισκάρει ολόκληρο το κομμάτι το οποίο χρειάζεται. Συνεπώς, το συμφέρον του είναι η δήλωσή του να μην παρεκκλίνει από την αλήθεια και το x'_{k+1} να ταυτιστεί με την πραγματική τιμή x_{k+1}. Η μέθοδος αυτή λοιπόν είναι φιλαληθής.

Μια πιο συγκεκριμένη τεχνική κινούμενου μαχαιριού, είναι η ρουτίνα που πρότεινε ο Stromquist[3] και αναφέρεται στην περίπτωση για 3 παίκτες:

Ρουτίνα 2.4. Ένας διαιτητής μετακινεί ένα σπαθί από την αριστερή πλευρά στη δεξιά πάνω από το κέικ, υποθετικά διαιρώντας το σε ένα μικρό αριστερό και ένα μεγάλο δεξί κομμάτι. Καθένας από τους 3 παίκτες κρατάει ένα μαχαίρι στη θέση που θεωρεί μέσο του δεξιού κομματιού (δηλαδή το χωρίζει σε δυο ισάξια κατά την άποψή του κομμάτια). Όσο ο διαιτητής κινεί το σπαθί, οι παίκτες συνεχώς προσαρμόζουν τα μαχαίρια τους επάνω στο κέικ, πάντα κρατώντας τα παράλληλα στο σπαθί. Όταν οποιοσδήποτε παίκτης φωνάξει «κόψε», το κέικ κόβεται από τον παίκτη του οποίου το μαχαίρι τυχαίνει να είναι το μεσαίο από αυτά[10].

Όπως και στα πρωτόκολλα, οι διαδικασίες κινούμενου μαχαιριού είναι δίκαιες όταν υπάρχει μια στρατηγική για κάθε παίκτη που του εξασφαλίζει ένα δίκαιο μερίδιο, ανεξάρτητα από τις στρατηγικές των άλλων παικτών. Το χαρακτηριστικό τους είναι όμως, ότι παρά τη μεγάλη πρακτική τους αξία, δεν έχουν ιδιαίτερο θεωρητικό ενδιαφέρον. Ανεξάρτητα πάντως από το γεγονός αυτό, είναι μια οικογένεια λύσεων που κάνει αισθητή την ανάγκη της φιλαλήθειας από τους παίκτες προς δικό τους όφελος. Άλλα παραδείγματα διαδικασιών κινούμενου μαχαιριού τέθηκαν επι τάπητος από τους Dubins,Spanier[11] και Jones[12].

3

Η λογική της συνάρτησης αξιολόγησης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναδείχθηκε, μεταξύ άλλων, η διαφορετικότητα ως προς την οπτική γωνία του κάθε παίκτη πάνω στο κέικ. Εφ’ όσον το πρόβλημα του Κοψίματος του κέικ ανάγεται στα μαθηματικά, θα χρειαστεί να απεικονίσουμε τη διαφορετικότητα αυτή στη μαθηματική γλώσσα, και στο εξής να χρησιμοποιούμε ειδικούς συμβολισμούς ώστε να αναλύονται επακριβώς πρωτόκολλα, κριτήρια και αποδείξεις. Αφού συμβεί αυτό, θα είναι εφικτή η κατηγοριοποίηση των προβλημάτων με βάση τους κανόνες που ακολουθούν οι απαιτήσεις των παικτών από το κέικ, και θα ξεκινήσει μια πιο συγκεκριμένη θεώρηση πάνω στο πρόβλημα. Το παρόν κεφάλαιο παρουσιάζει τη συνάρτηση αξιολόγησης από τη θεωρία στην πράξη, την ομαδοποίηση των προβλημάτων με βάση την αξιολόγηση και τις κυριότερες ομάδες που προκύπτουν από αυτή, και τέλος τα ερωτήματα ως προς τους παίκτες, τα λεγόμενα queries.

3.1 Εισαγωγή

Η ανομοιογενής φύση του κέικ, η πληθώρα παικτών και η ποικιλοτροπία στον τρόπο σκέψης τους πάνω στο κέικ έχει ως φυσικό επακόλουθο την εξέχουσα θέση που έχουν στη μελέτη του προβλήματος οι ατομικές προτιμήσεις. Η διαφορετικότητα των προτιμήσεων απεικονίζεται με τις συναρτήσεις αξιολόγησης.

Για ένα σύνολο παικτών $N = \{1, \dots, n\}$, κάθε παίκτης $i \in N$ έχει μια μυστική συνάρτηση αξιολόγησης V_i, η οποια χαρτογραφεί ποια σημεία του κέικ και σε ποιο βαθμό ενδιαφέρεται να τα αποκτήσει ο i. Συγκεκριμένα, ο καθένας τους έχει μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $u_i: [0,1] \to [0, \infty)$, και έτσι για τον παίκτη i η αξία ενός κομματιού X με άκρα $left(X) = x_1$ και $right(X) = x_2$ είναι $V_i(X) = \int_{x_1}^{x_2} u_i(x)\,dx$. Η συνάρτηση u δείχνει πόσο σημαντικό είναι ένα συγκεκριμένο (απειροστό) σημείο μέσα στο διάστημα $[0,1]$ για τον παίκτη i, και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας V αθροίζει τη χρησιμότητα των σημείων αυτών και δείχνει συνολικά το πόσο αξιόλογο για τον παίκτη είναι το άθροισμα αυτό (που απαρτίζει ένα ολόκληρο κομμάτι).

Για να υπάρχει ισορροπία μεταξύ των κατανομών και να μπορούν οι επιθυμίες όλων των παικτών να συγκρίνονται σε ένα γενικό πλαίσιο, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις αξιολόγησης είναι κανονικοποιημένες για όλους τους παίκτες, δηλαδή $V_i([0,1]) = \int_0^1 u_i(x)\,dx = 1$. Ατομικά αυτό σημαίνει ότι ο παίκτης είτε θα προτιμήσει ένα περιορισμένο κομμάτι του κέικ και θα «τοποθετήσει» όλη του την αξία πάνω σε αυτό, είτε θα προτιμήσει μεγαλύτερο ποσοστό από αυτό με μειωμένη αξία. Οι περιορισμοί αυτοί ενθαρρύνουν τη φιλαλήθεια, καθώς οι παίκτες θα προσαρμόσουν τις συναρτήσεις αξιολόγησής τους στα απαραίτητα -κατ' αυτούς- κομμάτια, και αφού με μικρότερο κομμάτι ενδιαφέροντος αυξάνεται ο βαθμός χρησιμότητάς του, θα υπάρχει και μεγαλύτερη πιθανότητα τελικώς να λάβει το κομμάτι αυτό από το πρωτόκολλο κατανομής που επιλέγεται.

3.2 *Μαθηματικές ιδιότητες*

Οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας διέπονται από ορισμένες μαθηματικές ιδιότητες, οι οποιες υπαγορεύουν τους κανόνες που ακολουθούν οι αξιολογήσεις των παικτών:

1) Οι συναρτήσεις αξιολόγησης είναι αθροιστικές: $V_i(X \cup Y) = V_i(X) + V_i(Y)$
2) Οι συναρτήσεις αξιολόγησης είναι μη ατομικές: $V_i([x,x]) = 0$
3) Οι συναρτήσεις αξιολόγησης δίνουν ίδια αποτελέσματα όταν τα όρια είναι συγκεκριμένα, ασχέτως με το αν είναι κλειστά ή ανοιχτά τα όρια του κομματιού: $V_i\big([x,y)\big) = V_i\big((x,y]\big) = V_i([x,y]) = V_i((x,y))$

Στις παραπάνω ιδιότητες προσθέτουμε και την κανονικότητα των κατανομών που παρουσιάστηκε παραπάνω: $V_i([0,1]) = \int_0^1 u_i(x)\,dx = 1, \forall i \in N$.

Αν και στο σύνολό τους τετριμμένες, οι σχέσεις αυτές είναι αναγκαίο να λαμβάνονται υπ' όψιν, καθώς η πρακτική τους αξία είναι φανερή και επιβεβαιώνονται από την πραγματικότητα πέραν των μαθηματικών. Η πρώτη ιδιότητα αποσαφηνίζει πως όταν ο παίκτης i κοστολογεί δυο κομμάτια με κάποιες τιμές αντίστοιχα, η συνολική αξία των κομματιών θα ισούται με το άθροισμα των τιμών αυτών, δηλαδή δεν προστίθεται αξία με τη συνένωση κομματιών ούτε χάνεται κάποια (υποθέτουμε πως δεν υπάρχει κορεσμός στην ανάγκη του παίκτη για το δεύτερο κομμάτι μετά την απόκτηση του πρώτου κομματιού). Η δεύτερη ιδιότητα πληροφορεί πως ένα κομμάτι με κοινό αριστερό και δεξιό άκρο, δηλαδή μηδενικό μήκος, δε δύναται παρα να έχει μηδενική αξία για τον κάθε παίκτη οποιουδήποτε προβλήματος. Η τρίτη απλώς επιβεβαιώνει ότι σε ένα πρόβλημα με πραγματική φύση όπως το κόψιμο του κέικ, είναι ανεδαφική η συζήτηση για ανοιχτά και κλειστά όρια.

3.3 Τμηματική λογική

Συνήθως οι ανάγκες των ανθρώπων πάνω σε κάποιο αγαθό ακολουθούν ορισμένους κανόνες. Η συνάρτηση αξιολόγησης, όντας μηχανισμός που βοηθά στη χαρτογράφηση των αναγκών αυτών μέσω μαθηματικής επεξήγησης, μπορεί να απεικονίσει τις διάφορες ιδιαιτερότητες που διέπουν την ανθρώπινη σκέψη αναφορικά με το κέικ και να κάνει ακόμα πιο συγκεκριμένη τη θεώρηση του προβλήματος.

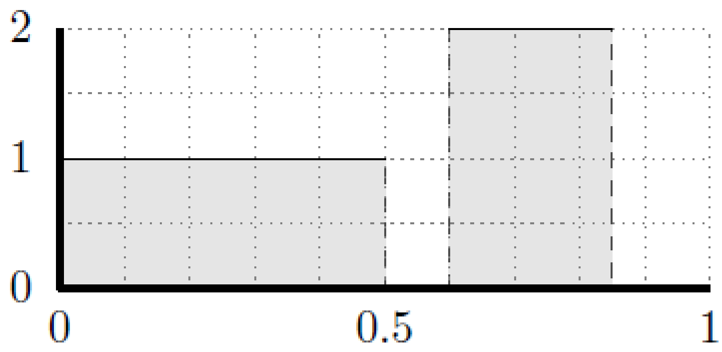
Γενικά οι συνεχείς συναρτήσεις κατανομής δεν ακολουθούν κάποιους περιορισμούς, και δεν είναι τμηματικά σταθερές. Δηλαδή, για μια σταθερά $\varepsilon > 0$ αισθητά μικρότερη της μονάδας και για κάποιο σημείο $c \in [0,1]$ εντός του κέικ, για κάποιον παίκτη i ισχύει συνήθως $V_i(c) \neq V_i(c+\varepsilon) \neq V_i(c-\varepsilon)$. Με απλά λόγια διαφοροποιούνται απειροστά σημεία του κέικ που γειτονεύουν και συχνά έχουν ανεπαίσθητη διαφορά για την ανθρώπινη αντίληψη. Όμως οι παίκτες συνηθίζουν να βλέπουν το κέικ ως ένα σύνολο από κομμάτια παρά ως ένα απαρτιζόμενο από απειροστά αγαθό.

Ας σκεφτούμε ένα παράδειγμα: οι παίκτες έχουν να καταστρώσουν τη δική τους συνάρτηση αξιολόγησης πάνω σε ένα κέικ που απαρτίζεται από δυο τμήματα: το ένα έχει επικάλυψη σοκολάτας και το άλλο επικάλυψη βανίλιας. Είναι επόμενο να θεωρήσουμε ότι το σύνολο της ικανοποίησης των παικτών θα μετρηθεί με το ποσοστό που θα λάβουν από το πρώτο τμήμα και το ποσοστό που θα λάβουν από το δεύτερο, σύμφωνα με την αξιολόγησεις που έχουν για την επικάλυψη σοκολάτας και βανίλιας. Συνεπώς σε περιπτώσεις όπως και αυτή οι παίκτες κρίνουν τμηματικά το κέικ, δηλαδή ομαδοποιούν τα απειροστά σε τμήματα που έχουν κάποιο κοινό χαρακτηριστικό. Οι συναρτήσεις που σέβονται αυτό τον τρόπο σκέψης είναι οι τμηματικές συναρτήσεις αξιολόγησης (piecewise valuation functions). Οι συναρτήσεις αυτές εμφανίζονται με ορισμένες παραλλαγές, και για αυτό στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ξεχωριστά τις υποδιαιρέσεις τους.

3.4 Τμηματικά σταθερή αξιολόγηση

Μια συνάρτηση αξιολόγησης V_i είναι τμηματικά σταθερή όταν η κατανομή u_i που της αντιστοιχεί είναι τμηματικά σταθερή.

Στο σχήμα 3.4 βλέπουμε μια τμηματικά σταθερή συνάρτηση αξιολόγησης για κάποιον παίκτη i:



Σχήμα 3.4 Παράδειγμα τμηματικά σταθερής αξιολόγησης

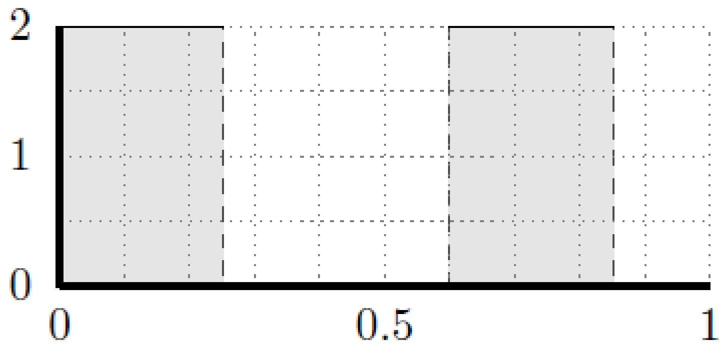
Η συνάρτηση u_i είναι σταθερά 1 στο διάστημα $[0,0.5]$, σταθερά 2 στο διάστημα $[0.6,0.85]$ και μηδενική στα υπόλοιπα σημεία. Παρατηρούμε ότι η κατανομή είναι κανονική (συνολικά το εμβαδόν της συνάρτησης V_i είναι μοναδιαίο).

3.5 Τμηματικά ομοιογενής αξιολόγηση

Η τμηματικά σταθερή αξιολόγηση που είδαμε παραπάνω κάνει πρακτικά το εξής: ο κάθε παίκτης διαχωρίζει το κέικ σε κομμάτια, από τα οποια μερικά επιθυμεί να αποκτήσει, και μερικά άλλα όχι. Όμως παράλληλα σημαίνει ότι μπορεί να αξιολογήσει και το βαθμό που θέλει κάποιο κομμάτι. Στο παράδειγμα της προηγούμενης υποενότητας παρατηρούμε ότι το κομμάτι $[0.60,0.85]$ παρ'ότι έχει μικρότερο μήκος από το κομμάτι $[0,0.5]$, έχει την ίδια αξία για τον παίκτη i, καθώς για $x \in [0,0.5]$, η αξιολόγηση είναι $u_i(x) = 1$ ενώ αντίστοιχα στο $x \in [0.6,0.85]$ η αξιολόγηση είναι $u_i(x) = 2$. Έτσι δυο κομμάτια με διαφορετικό μήκος μπορούν να έχουν ίδια αξία για αυτόν.

Κάτι που ενδεχομένως ισχύει τις περισσότερες φορές, είναι ότι οι παίκτες απλώς επιθυμούν κάποια κομμάτια και κάποια άλλα όχι. Δηλαδή η αξία τους καθορίζεται αποκλειστικά από το μήκος τους. Η αξιολόγηση που ικανοποιεί αυτό το αρκετά ρεαλιστικό σενάριο είναι η τμηματικά ομοιογενής.

Μια συνάρτηση αξιολόγησης V_i λέγεται τμηματικά ομοιογενής αν η κατανομή u_i ισούται είτε με κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}_+$, είτε με 0.



Σχήμα 3.5 Παράδειγμα τμηματικά ομοιογενούς αξιολόγησης

Ένα παράδειγμα τμηματικά ομοιογενούς αξιολόγησης είναι αυτό που απεικονίζεται και στο σχήμα 3.5. Η κατανομή είναι μηδενική στα διαστήματα [0.25.0.6] και [0.85,1] όπου για τον παίκτη i το κέικ δεν έχει αξία, ενώ στα υπόλοιπα διαστήματα, τα οποια τον ενδιαφέρουν, η αξία u_i είναι μη μηδενική και όση χρειάζεται, ώστε στο σύνολό του το εμβαδόν που καλύπτει η V_i να είναι 1.

Όταν οι επιθυμίες του παίκτη επάνω στο κέικ ακολουθούν τμηματικά ομοιογενή κατανομή, η αξία την οποια λαμβάνει από κάποια κατανομή που του δίνει ένα κομμάτι X ισούται με $V_i(X) = len(X \cap U_i)/len(U_i)$. Για παράδειγμα, αν θέλει τα κομμάτια [0,0.3] και [0.5,0.8] και λαμβάνει το κομμάτι $X = [0.1,0.7]$, ο παίκτης κοστολογεί το κομμάτι του 0.67.

3.6 *Τμηματικά γραμμική αξιολόγηση*

Η τελευταία κατηγορία τμηματικά γραμμικής αξιολόγησης που παρουσιάζεται είναι η τμηματικά γραμμική.

Μια συνάρτηση κατανομής u_i είναι τμηματικά γραμμική όταν μπορεί να γραφτεί ως το σύνολο $u_i(x) = \sum_{j=1}^{m} L_j(x)$, όπου οι L_j είναι γραμμικές συναρτήσεις πάνω σε ασυσχέτιστα κομμάτια $\{I_1, \dots, I_m\}$, δηλαδή για σταθερά a_j και b_j, $L_j(x) = a_j x + b_j$. Στα τμήματα του κέικ που δεν ενδιαφέρουν τον παίκτη i οι σταθερές αυτές έχουν μηδενική τιμή.

Σημειώνεται ότι για $a_j = 0$, λαμβάνουμε τμηματικά σταθερές αξιολογήσεις, ενώ για κοινό $a = a_i \; \forall \; i \in N$ λαμβάνουμε τμηματικά ομοιογενείς συναρτήσεις.

3.7 *Ερωτήματα*

Για να μπορούν τα πρωτόκολλα να ζητούν από τους παίκτες το διαχωρισμό ενός κομματιού από το κέικ, θέτουν τα ερωτήματα (queries). Τα ερωτήματα αυτά τίθενται με στόχο οι παίκτες να κόψουν κομμάτια που πληρούν μια ιδιότητα με βάση την αξιολόγησή τους. Τα ερωτήματα είναι δυο ειδών:

Το $Mark(i, a)$ επιστρέφει το μικρότερο x για το οποίο $V_i([0, x]) = a$

Το $Eval(i, x)$ επιστρέφει το $a = V_i([0, x])$ [9]

Το πρώτο εξ' αυτών ζητάει να κοπεί το κέικ από τον παίκτη i στο κοντινότερο δυνατό ως προς το 0 σημείο, όπου η αξία να είναι η ζητούμενη (a).

Το δεύτερο, για ένα συγκεκριμένο σημείο x, ζητάει από τον παίκτη να κάνει γνωστή την αξία του για το κομμάτι $[0, x]$.

Η πολυπλοκότητα ενός πρωτοκόλλου όπως υποδείχθηκε μετριέται με τον αριθμό των τομών πάνω στο κέικ. Επισήμως όμως μπορεί να μετρηθεί με το συνολικό αριθμό των queries που τίθενται σε όλους τους παίκτες.

4

Ατομικά κριτήρια για την αποδοτικότητα των αλγορίθμων

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα σπουδαιότερα κριτήρια που κατατάσσουν τα πρωτόκολλα σε αποτελεσματικά και μη, με γνώμονα το ατομικό όφελος. Όταν οι λύσεις που προτείνονται εξετάζονται με βάση το κατά πόσο εξυπηρετούν τα εξατομικευμένα ιδανικά, συνήθως ενδιαφέρει η ισορροπία μεταξύ των κομματιών που μοιράζονται στους παίκτες και η εξάλειψη αδικιών που προκύπτουν δίνοντας μεγάλα κομμάτια σε κάποιους από αυτούς και πολύ μικρότερα σε άλλους. Για να συμμετέχει κάποιος παίκτης σε πρωτόκολλο κατανομής οφείλει πρώτα να γνωρίζει το κατά πόσο αυτό θα του διασφαλίσει ένα κομμάτι που θα ικανοποιεί τις ανάγκες του, σε δίκαια πάντα πλαίσια. Οι σπουδαιότερες έννοιες του ατομικού όφελους φαίνονται στις κάτωθι παραγράφους.

4.1 Πληρότητα

Όταν τίθεται πρόβλημα διαχωρισμού του κέικ, η συνηθέστερη κατάσταση που προκύπτει τελικά είναι να διανέμεται ολόκληρο το αγαθό στο σύνολο των παικτών, έτσι ώστε να μη μείνει κάποιο ποσοστό του ανεκμετάλλευτο. Σε πολλές περιπτώσεις όμως, και για διάφορους λόγους, το σύστημα κατανομής ενδεχομένως να μη θεωρήσει απαραίτητο να δοθεί ολόκληρο το κέικ στους παίκτες, και επακολούθως ορισμένα κομμάτια του να μείνουν ανεκμετάλλευτα από αυτούς.

Ορισμός 4.1. Μια κατανομή λέγεται πλήρης όταν κάθε παίκτης $i \in N$ λαμβάνει αντίστοιχα ένα κομμάτι από τα $X_1, \ldots, X_n$ και συνολικά $X_1 \cap \ldots \cap X_n = [0,1]$, δηλαδή όταν δεν υπάρχει κανένα ανεκμετάλλευτο μέρος του συνολικού κέικ αλλά ολόκληρο έχει διανεμηθεί στο σύνολο των παικτών.

Παράδειγμα: Σε πρόβλημα 2 παικτών, ο παίκτης 1 λαμβάνει το κομμάτι $X_1 = [0, 0.65]$, και παρομοίως ο παίκτης 2 λαμβάνει το κομμάτι $X_2 = [0.65\ ,0]$. Καθώς $X_1 \cap X_2 = [0, 0.65] \cap [0.65\ ,1] = [0,1]$, η κατανομή θεωρείται πλήρης.

4.2 *Ακρίβεια*

Αρχικά υποθέτουμε ότι S είναι ένα υποσύνολο από τους παίκτες N που συμμετέχουν σε ένα πρόβλημα διαχωρισμού του κέικ, και X ένα κομμάτι του κέικ. Επίσης ονομάζουμε ως $D(S,X)$ τα σημεία του X που επιθυμούνται από τουλάχιστον 1 παίκτη του υποσυνόλου S. Ορίζουμε ως $avg(S,X) = len(D(S,X))/|S|$ το μέσο όρο μήκους των σημείων του X που επιθυμούνται από τουλάχιστον 1 παίκτη του S.

Ορισμός 4.2. Μια κατανομή λέγεται ακριβής αναφορικά με το S και το X, όταν δίνει στον κάθε παίκτη μέσα στο S κομμάτι μήκους $avg(S,X)$ αποτελούμενο αποκλειστικά από επιθυμητά για τον ίδιο σημεία του κέικ. Για να υπάρχει ακριβής κατανομή του X απαιτείται σαφώς να δοθεί ολόκληρο το κομμάτι αυτό, αφού το ολικό μήκος που πρέπει να δοθεί από μια ακριβή κατανομή είναι $avg(S,X) * |S| = len(D(S,X))$.

Παράδειγμα:Υποθέτουμε $S = \{1,2\}$ και $X = [0,1]$. αν $U_1 = U_2 = [0, 0.2]$, τότε δίνοντας στον 1 και τον 2 τα κομμάτια $[0, 0.1]$ και $[0.1, 0.2]$ αντίστοιχα έχουμε ακριβή κατανομή. Σε αντιδιαστολή, αν $U_1 = [0, 0.2]$ και $U_2 = [0.3, 0.7]$ δε δύναται να υπάρξει ακριβής κατανομή.

4.3 *Αναλογικότητα*

Το κριτήριο που έχει μελετηθεί περισσότερο από κάθε άλλο στο θέμα της κατανομής είναι αυτό της αναλογικότητας.

Ορισμός 4.3. Μια κατανομή $X = (X_1, \ldots, X_n)$ λέγεται αναλογική (proportional) αν για κάθε παίκτη $i \in N$, ισχύει $V_i(X_i) \geq {}^1\!/_n$. Δηλαδή, αν ο κάθε παίκτης εκτιμά με μια συγκεκριμένη τιμή το σύνολο του κέικ, για να υπάρχει αναλογικότητα θα πρέπει να λάβει τουλάχιστον το $1/n$ της τιμής αυτής.

Η αναλογικότητα είναι μια έννοια που κατοχυρώνει τη θέσπιση ενός κατώτατου ορίου αξίας με την οποια θα καταλήγει ο κάθε παίκτης μετά το διαχωρισμό του κέικ. Αποτελεί αναγκαία συνθήκη για το σύνολο των πιο ισχυρών κριτηρίων που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, και αυτό δίνει την αίσθηση της αναγκαιότητας για αναλογικό τρόπο διαχωρισμού. Με πιο απλά λόγια, αν ένας καταμερισμός του κέικ είναι μη αναλογικός, αποκλείεται να καλύψει κριτήρια πιο ισχυρά όπως λ.χ. η εξάλειψη της ζήλιας.

Αν το κέικ ήταν ομοιογενές αγαθό και όλοι οι παίκτες εποφθαλμιούσαν με τον ίδιο τρόπο κάθε σημείο του, για να υπήρχε αναλογικός τρόπος καταμερισμού οι n παίκτες θα έπρεπε να λάβουν ακριβώς $1/n$ από αυτό. Όμως, η ανομοιογένειά του δίνει τη δυνατότητα να λάβουν όλοι ταυτοχρόνως πάνω από $1/n$ (κάτι που θα φάνταζε αδύνατο μέσα σε ένα καθαρά μαθηματικό-γεωμετρικό τρόπο σκέψης, αφού το σύνολο των κομματιών των παικτών θα ξεπερνούσε ολόκληρο το κέικ).

Παράδειγμα: Έστω πρόβλημα τμηματικά ομοιογενούς αξιολόγησης με $n = 2$ παίκτες, όπου ο παίκτης 1 επιθυμεί το κομμάτι [0,0.5] και ο παίκτης 2 επιθυμεί το κομμάτι $[0, 0.75]$. Προφανώς, για να είναι οι προτιμήσεις κανονικοποιημένες ($V_i(x) = \int_0^1 u_i dx = 1\,, i \in 1,2$), στα σημεία ενδιαφέροντος των παικτών η αξία u_i είναι αντίστοιχα 2 και 1.33. Αν ένα πρωτόκολλο διανείμει το κομμάτι $X_1 = [0,0.3]$ στον πρώτο παίκτη και το κομμάτι $X_2 = [0.3,1]$ στο δεύτερο, οι παίκτες καταλήγουν με αξία $V_1 = 2(0.3 - 0) = 0.6$ και $V_2 = 1.33(0.75 - 0.3) = 0.598$, και καθώς οι αξίες αυτές είναι άνω του ορίου $1/n = 0.5$, το πρωτόκολλο αυτό κρίνεται ως αναλογικό.

Κατανομές που ακολουθούν ρητά το κατώτατο όριο $1/n$ για το σύνολο των παικτών συναντώνται συχνά στη βιβλιογραφία ως «δίκαιες»[2] ή «απλά δίκαιες»[5]. Όμως, συνήθως κυριαρχεί ο όρος «αναλογικές» προς αποφυγήν σύγχυσης με άλλα κριτήρια που αναφέρονται στη δικαιοσύνη.

4.4 Εξάλειψη ζήλιας

Παρ’ότι η αναλογικότητα εγγυάται μια σχετικά δίκαιη λύση επι του συνόλου των παικτών, ο τρόπος σκέψης που επιβάλλεται από αυτήν αναφέρεται μόνο στην ισομερή συμπεριφορά της κεντρικής διανομής έναντι των παικτών. Όμως, παραβλέπεται το σημαντικό θέμα του τρόπου με τον οποίο λογίζεται ο κάθε παίκτης το μερίδιο των υπολοίπων. Στο παραπάνω παράδειγμα, ο πρώτος παίκτης κοστολογεί το κομμάτι του 0.6 και του δεύτερου 0.4, ενώ για το δεύτερο παίκτη το κομμάτι του έχει αξία 0.598 και του άλλου 0.402. Έτσι δεν υπάρχει ζήλια μεταξύ των δυο παικτών. Ας ληφθεί όμως υπόψιν μια άλλη περίπτωση:

Παράδειγμα: Σε ένα πρόβλημα διανομής 3 παικτών, ο παίκτης 1 επιθυμεί το κομμάτι $[0, 0.5]$, ο παίκτης 2 επιθυμεί ολόκληρο το κέικ $[0,1]$, και ο παίκτης 3 επιθυμεί το κομμάτι $[0.5, 1]$. Αν ο 1 λάβει το κομμάτι $X_1 = [0, {}^1\!/_3]$, ο 2 το κομμάτι $X_2 = [{}^2\!/_3, 1]$ και ο 3 το $X_3 = [{}^1\!/_3, {}^2\!/_3]$, θα προκύψουν τα εξής συμπεράσματα:

Οι αξίες των παικτών θα είναι αντίστοιχα $V_1 = 0.67$, $V_2 = 0.33$, $V_3 = 0.33$. Συνεπώς, αφού $V_i \geq {}^1\!/_n = 0.33$ η διανομή αυτή είναι αναλογική.

Όμως παράλληλα, ο παίκτης 1 θα θεωρήσει, προφανώς σύμφωνα με τη δική του οπτική γωνία, ότι το κομμάτι του 2 είναι αξίας 0 και του 3 0.33, ο 2 θα θεωρήσει ότι το κομμάτι του 1 έχει αξία 0.33 και του 3 επίσης 0.33, και τέλος ο 3 θα λογίζεται το κομμάτι του 1 ως αξίας 0 και το κομμάτι του 2 ως αξίας 0.67. Τα δεδομένα αυτά αναδεικνύουν πως ο 1 θεωρεί ότι έχει καλύτερο κομμάτι από τους άλλους 2 παίκτες, ο 2 ότι το κομμάτι του είναι ίσης αξίας με τα κομμάτια των υπολοίπων, αλλά ο 3 θεωρεί ότι ο 1 έχει λάβει καλύτερο κομμάτι απ'ό,τι ο ίδιος. Συνοψίζοντας, σε αυτό το πρόβλημα κατανομής 3 παικτών, οι 2 από αυτούς θεωρούν ότι έχουν το καλύτερο ή τουλάχιστον ισάξιο κομμάτι σχετικά με ό,τι διανεμήθηκε στους άλλους, και ο ένας θεωρεί ότι υπάρχει κάποιος παίκτης που έχει λάβει μεγαλύτερη αξία από αυτόν. Άρα υπάρχει έστω και ένας που «ζηλεύει» το κομμάτι ενός άλλου.

Ορισμός 4.4. Μια κατανομή $X = (X_1, \dots, X_n)$ λέγεται πως εξαλείφει τη ζήλεια (είναι envy-free) αν για κάθε δυάδα παικτών $i, j \in N$, ισχύει $V_i(X_i) \geq V_i(X_j)$. Δηλαδή η προϋπόθεση για να είναι envy-free μια κατανομή, είναι ο κάθε παίκτης να μη θεωρήσει ότι η αξία του κομματιού του υποσκελίζεται από την αξία ενός άλλου κομματιού που κατέληξε σε άλλο παίκτη, αλλά να είναι τουλάχιστον ισάξιο από το κομμάτι που θεωρεί καλύτερο από αυτά.

Η ζήλια μεταξύ των συμμετεχόντων σε μια διανομή αγαθού ή αγαθών αποτελεί ένα πολύ ρεαλιστικό και αναπόσπαστο κομμάτι της ανθρώπινης σκέψης. Ένα μερίδιο από μια μοιρασιά θα μπορούσε να θεωρηθεί ικανοποιητικό από το συμμετέχοντα που το λαμβάνει αν κρινόταν απομονωμένα. Θα μπορούσε όμως ταυτόχρονα να μην τον ικανοποιεί όταν το πεδίο σύγκρισης είναι το σύνολο των κομματιών που διανεμήθηκαν στους ομολόγους του. Κάτι τέτοιο καθιστά ανεπαρκή τη θέσπιση ενός κατώτατου ορίου αξίας για τους παίκτες ξεχωριστά, όπως ορίζουν έννοιες όπως η αναλογικότητα, και δημιουργεί την ανάγκη για μια διεξοδικότερη και πιο εμπεριστατωμένη έρευνα για το βαθμό που οι παίκτες ικανοποιούνται από κάποιο πρωτόκολλο. Και όπως είναι φυσικό μετά την παραδοχή αυτή, η εξάλειψη της ζήλιας αποτελεί ισχυρότερη έννοια από την αναλογικότητα, κάτι που θα φανεί και με την απόδειξη της παρακάτω πρότασης:

Πρόταση 4.4.1. Υποθέτουμε ότι η κατανομή $X = (X_1, \dots, X_n)$ είναι πλήρης. Τότε, αν η X είναι envy-free, είναι και αναλογική.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε για αντίφαση ότι $V_i(X_i) < {}^{1}\!/_{n}$ για κάποιο $i \in N$. Λόγω της πληρότητας της κατανομής, εννοείται ότι $V_i\big(C - X_j\big) > (n-1)/n$ και, από την Αρχή του Περιστερώνα αυτό συνεπάγεται ότι $V_i(X_j) > {}^{1}\!/_{n}$ για κάποιο $j \neq i$. Όμως για το λόγο αυτό θα ισχύει $V_i(X_i) < V_i(X_j)$, σχέση που αντιτίθεται στην εξάλειψη της ζήλιας. Συνεπώς $V_i(X_i) \geq {}^{1}\!/_{n}$ για όλα τα $i \in N$.

Η παραπάνω πρόταση παράγει το κάτωθι πόρισμα:

Πόρισμα 4.4.2. Αν $n = 2$, τότε μια πλήρης κατανομή είναι αναλογική αν και μόνο αν αυτή εξαλείφει τη ζήλια.

Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η εξάλειψη της ζήλιας αποτελεί ένα κριτήριο το οποιο δυσκολεύει σημαντικά την εύρεση αποδεκτών λύσεων για μεγάλο αριθμό παικτών. Η διαρκής ανάγκη για σύγκριση των κομματιών μεταξύ τους επιτάσσει ραγδαία αύξηση της πολυπλοκότητας καθώς οι παίκτες αυξάνονται, και επιπροσθέτως σε κάθε πρόβλημα εγείρεται το ερώτημα του κατά πόσο υπάρχει έστω και μια envy-free λύση. Στην αντίπερα όχθη, η κάλυψη μιας τόσο πραγματιστικής ανάγκης, όπως η εξάλειψη της ζήλιας σε πρόβλημα κατανομής, καθιστά συνήθως ικανοποιημένο το σύνολο των παικτών λόγω της δικαιοσύνης που εγγυάται.

4.5 Ισομέρεια

Το κριτήριο που αναδεικνύει τη δίκαιη συμπεριφορά του κεντρικού μηχανισμού διανομής έναντι των παικτών είναι αυτό της ισομέρειας.

Ορισμός 4.5. Μια κατανομή λέγεται ισομερής (equitable) όταν κάθε παίκτης $i, j \in N$ λαμβάνει από αυτήν αξία $V_i(A_\iota) = V_j(A_j)$.

Παράδειγμα: Σε πρόβλημα 3 παικτών, αν οι παίκτες λάβουν αντίστοιχα τα κομμάτια A_1, A_2, A_3, και η αξιολόγησή τους για αυτά είναι $V_1(A_1) = V_2(A_2) = V_3(A_3) = 0.4$, τότε θα υπάρξει ισομερής διαμελισμός του αγαθού.

Η ισομέρεια διατηρεί στο ίδιο επίπεδο το βαθμό στον οποιο είναι ικανοποιημένοι με το μερίδιό τους οι παίκτες που απαρτίζουν ένα πρόβλημα. Δεν εξετάζει όμως το κατά πόσο υπάρχει ζήλια μεταξύ τους. Αν στο προηγούμενο παράδειγμα υποθέσουμε ότι ο παίκτης 1 θεωρεί το κομμάτι που δόθηκε στον 2 αξίας $V_1(A_2) = 0.5$, θα ισχύει $V_1(A_1) < V_1(A_2)$, πράγμα που αντιτίθεται στον ορισμό της envy-free κατανομής. Αντιστρόφως, μια envy-free κατανομή δεν είναι απαραίτητο να είναι και ισομερής, γιατί στην εξάλειψη της ζήλιας δεν εξετάζεται το κατά πόσο θα είναι ικανοποιημένοι οι παίκτες εφ'όσον ο ένας δεν προτιμά το μερίδιο του αντιπάλου από το δικό του. Συνεπώς είναι προφανές ότι η μια έννοια δεν περικλείει την άλλη.

5

Πρωτόκολλα

Μετά την αναφορά στα κριτήρια αποδοτικότητας ενός πρωτοκόλλου που έγινε στο προηγούμενο κεφάλαιο, φυσικό επακόλουθο είναι να γίνει παρουσίαση των ίδιων των πρωτοκόλλων, ή τουλάχιστον ένα μέρος των βασικότερων από αυτά, τα οποια καλύπτουν βασικές ανάγκες για δίκαιη κατανομή του αγαθού.

Η παρουσίαση ξεκινάει με έναν ντετερμινιστικό μηχανισμό που βασίζεται στο «μικρότερο μέσο όρο αξιολόγησης», όπως παρουσιάστηκε από την ερευνητική ομάδα των Chen, Lai, Parkes, Procaccia [13], και ως προς το μηχανισμό αυτό το ενδιαφέρον αρχικά στρέφεται στην εφαρμογή του στο προβλήμα των 2 παικτών, για να γενικευτεί στη συνέχεια στο ευρύτερο φάσμα του προβλήματος των απεριόριστων παικτών. Εν συνεχεία, διατυπώνεται η λύση Banach-Knaster [2], που αποτελεί ολοκληρωμένο πρωτόκολλο που ακολουθεί την τεχνοτροπία του κινούμενου μαχαιριού και επιστρέφει αναλογική λύση, και τέλος στρεφόμαστε σε πρωτόκολλα που εξαλείφουν τη ζήλια μεταξύ των παικτών, όπως το πρωτόκολλο Selfridge-Conway [9] που επιστρέφει envy-free λύση σε πρόβλημα 3 παικτών, καθώς και ο μηχανισμός Brams-Taylor που πραγματεύεται με προβλήματα απεριόριστων παικτών.

Με την ευκαιρία της παρουσίασης αυτής, θα επεκταθούμε και σε πιο εξειδικευμένες περιπτώσεις των αντίστοιχων κριτηρίων αξιολόγησης, τα οποια αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 4, οι οποιες συναντώνται στη βιβλιογραφία και πλαισιώνουν τα ήδη υπάρχοντα, δίνοντας έτσι βάθος στην έρευνα για την αποδοτικότητα ενός μηχανισμού διαμέρισης.

Στο τέλος του κεφαλαίου αυτού παρατίθεται και ένα κατώτατο όριο πολυπλοκότητας για μηχανισμούς που εξαλείφουν τη ζήλια, όπως αυτό παρουσιάστηκε και αποδείχτηκε από τον Ariel Procaccia [32].

5.1 *Πρωτόκολλο του μικρότερου μέσου όρου αξιολόγησης*

Μια ερευνητική ομάδα 4 ατόμων, οι Yiling Chen, John K. Lai, David C. Parkes και Ariel D. Procaccia, σε δημοσίευσή τους [13] παρουσίασαν ένα μηχανισμό κατανομής αγαθού που βασίζεται στην έννοια του μέσου όρου αξιολόγησης. Σε ένα πρόβλημα τμηματικά ομοιογενούς αξιολόγησης, ο μέσος όρος μήκους των σημείων ενός κομματιού X που επιθυμούνται από ένα τουλάχιστον παίκτη ενός υποσυνόλου S των N παικτών, όπως ορίστηκε στην παράγραφο 4.2, ισούται με $avg(S, X) = len(D(S, X))/|S|$. Στην ανάγκη για τη θέσπιση ενός μηχανισμού που ενθαρρύνει την εντιμότητα από το σύνολο των παικτών, οι προαναφερθέντες ερευνητές εξέφρασαν την ιδέα της προτεραιότητας εξυπηρέτησης των παικτών που βρίσκονται στο υποσύνολο του S με το μικρότερο μέσο όρο αξιολόγησης.

Παράδειγμα: Θεωρούμε πρόβλημα 3 παικτών, με αντίστοιχες δηλωμένες προτιμήσεις $U_1 = [0, 0.1]$, $U_2 = [0, 0.39]$, και $U_3 = [0, 0.6]$. Όλα τα πιθανά υποσύνολα του $S = \{1,2,3\}$ είναι τα $\{1\}$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{1,2\}$,$\{1,3\}$,$\{2,3\}$,$\{1,2,3\}$, και για τα υποσύνολα αυτά οι μέσοι όροι κατ'αντιστοιχία είναι 0.1 , 0.39 , 0.6 , 0.195 , 0.3 , 0.3 και 0.2. Συνεπώς, ο μικρότερος μέσος όρος αντιστοιχεί στο υποσύνολο $\{1\}$. Ο μηχανισμός θα διανείμει απ'ευθείας το κομμάτι $[0, 0.1]$ στον παίκτη 1, και η αναδρομική διαδικασία αυτή θα συνεχιστεί για το διάστημα $[0.1 ,1]$ και το δυναμοσύνολο των παικτών 2 και 3, μέχρι να προκύψει ο τελικός καταμερισμός (στο παράδειγμά μας κατά τη δεύτερη εκτέλεση της αναδρομής ο μικρότερος μέσος όρος αντιστοιχεί στο υποσύνολο $\{2,3\}$ με τιμή 0.25 και οι παίκτες 2,3 μοιράζονται στο μισό το κομμάτι $[0.1 , 0.6]$). Παρακάτω παρουσιάζεται σε ντετερμινιστική μορφή ο μηχανισμός αυτός:

Αλγόριθμος 5.1 $(\boldsymbol{V_1}, \dots, \boldsymbol{V_n})$

1.ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ$(\{1, \dots, n\}, [0,1], (V_1, \dots, V_n))$

ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ$(S, X, V_1, \dots, V_n)$:

1.Αν $S = \emptyset$, επιστροφή.

2.Έστω $S_{min} \in \underset{S' \subseteq S}{argmin}\, avg(S', X)$.

3.Υποθέτουμε ότι $E_1, \ldots, E_n$ είναι μια ακριβής διανομή με γνώμονα τα S_{min}, X. Για κάθε $i \in S_{min}$, θέτω $A_i = E_i$.

4.ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ$\big(S \backslash S_{min}, X \backslash D(S_{min}, X), (V_1, \ldots, V_n)\big)$.

5.1.1 *Μικρότερος μέσος όρος αξιολόγησης για 2 παίκτες*

Για να γίνει σαφής η αποδοτικότητα του Αλγορίθμου 5.1 θα εξεταστεί η περίπτωση 2 παικτών. Συμβολίζουμε με U_i το κομμάτι που δηλώνει ο παίκτης $i \in N$ ότι επιθυμεί, και για $i \in \{1,2\}$ συμβολίζουμε $W_i = U_i \backslash U_{3-i}$ και $W_{12} = U_1 \cap U_2$. Παρατηρώντας ότι τα W_1, W_2, W_{12} είναι ασυμβίβαστα, μπορούμε εναλλακτικώς να γράψουμε $len(W_1) + len(W_2) + len(W_{12})$ και $len(W_1 \cup W_2 \cup W_{12})$.

Στην περίπτωση των 2 παικτών που εξετάζεται, η απόφαση του μηχανισμού εξαρτάται αποκλειστικά από το S_{min} κατά την πρώτη κλήση της υπορουτίνας. Αν ο μικρότερος μέσος όρος ανήκει στον παίκτη i, ο παίκτης i λαμβάνει $U_i = W_i \cup W_{12}$ και ο παίκτης $3-i$ αποκτά $U_{3-i} \backslash U_i = W_{3-i}$. Αν όμως το S_{min} αντιστοιχεί στο υποσύνολο $\{1,2\}$, τότε ο μηχανισμός επιστρέφει μια ακριβή και ισόποση διανομή στους 2 παίκτες. Ο παίκτης i λαμβάνει ολόκληρο το W_i, και το διάστημα W_{12} κόβεται με τέτοιο τρόπο ώστε τα συνολικά μήκη με τα οποια καταλήγουν οι παίκτες να είναι ίσα.

Αρχικά καλούμαστε να αποδείξουμε ότι, στο πρόβλημα των 2 παικτών, ο μηχανισμός 5.1 είναι καλώς ορισμένος, αναλογικός και φιλαληθής. Για να γίνει αυτό, θα ήταν χρήσιμο να οριστούν πρώτιστα οι μεταβλητές $\delta_i = (len(W_{12}) - len(W_i) + len(W_{3-i}))/2$ για κάθε παίκτη (είναι ορατό ότι $\delta_1 + \delta_2 = len(W_{12})$ και $\delta_1 + len(W_1) = \delta_2 + len(W_2)$). Το δ_i καταδεικνύει το μερίδιο του W_{12} που παίρνει ο i αναφορικά με το μέγεθος του W_i. Μικρότερες τιμές του $len(W_i)$ δίνουν στον παίκτη μεγαλύτερο μέρος από το W_{12} και το δ_i αυξάνεται. Μπορούμε να συσχετίσουμε τις τιμές αυτών των μεταβλητών με την επιλογή S_{min} που λαμβάνεται από το μηχανισμό. Με τη βοήθεια των παραπάνω συμβολισμών μπορεί να ξεκινήσει και η διερεύνηση των δυνατών κατανομών στις οποιες καταλήγει ο μηχανισμός:

Από τον ορισμό των W_i και W_{12} συνεπάγεται ότι $avg(\{i\}) = len(W_i \cup W_{12})$ και $avg(\{1,2\}) = len(W_1 \cup W_2 \cup W_{12})/2$. Υπάρχουν 3 περιπτώσεις:

1. $\delta_1 < 0, \delta_2 > len(W_{12})$. Από τις σχέσεις που διατυπώθηκαν παραπάνω, προκύπτει ότι $len(W_1) > len(W_2)$ και επομένως $avg(\{1\}) > avg(\{2\})$. Επίσης, από τη σχέση $\delta_2 > len(W_{12})$ προκύπτει $\frac{len(W_{12}) - len(W_2) + len(W_1)}{2} > len(W_{12})$ και συνεπάγεται ότι

$\frac{len(W_{12}) + len(W_2) + len(W_1)}{2} > len(W_{12}) + len(W_2)$,δηλαδή $avg(\{1,2\}) > avg(\{2\})$.

Άρα, η περίπτωση αυτή έρχεται σε πλήρη αντιστοιχία με την περίπτωση το υποσύνολο $\{2\}$ να είναι το μικρότερο, και έτσι ο μηχανισμός δίνει όλο το $W_2 \cup W_{12}$ στον παίκτη 2 και το W_1 στον παίκτη 1.

2. $0 \leq \delta_1 \leq len(W_{12})$, $0 \leq \delta_2 \leq len(W_{12})$. Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική με την προηγούμενη περίπτωση, συνεπάγεται ότι $avg(\{1,2\}) < avg(\{1\})$ και $avg(\{1,2\}) < avg(\{2\})$. Εδώ, ο μικρότερος μέσος όρος αντιστοιχεί στο $\{1,2\}$ και ο μηχανισμός προσφέρει μια ακριβή διανομή στους 2 παίκτες. Επίσης, αφού στην περίπτωση αυτή ισχύει $D(S,X) = W_1 \cup W_2 \cup W_{12}$, πρέπει να δοθεί στον κάθε παίκτη το ήμισυ αυτής της ποσότητας με τρόπο που να τους ικανοποιεί -αντίστοιχα- και τους 2: το W_i στον παίκτη $i \in \{1,2\}$,και το W_{12} με τρόπο ώστε να μοιράζεται ισόποσα το κέικ.

3. $\delta_2 < 0, \delta_1 > len(W_{12})$. Ακριβώς όπως στην περίπτωση 1, προκύπτει πως $S_{min} = \{1\}$ και ακολούθως ο παίκτης 1 λαμβάνει όλο το $W_1 \cup W_{12}$ και ο παίκτης 2 το W_2.

Από την ανάλυση αυτή είναι δυνατόν να παρουσιαστούν και να αναλυθούν οι ιδιότητες του μηχανισμού για την περίπτωση των 2 παικτών. Πρωτίστως όμως θα διατυπωθεί με διαφορετικό τρόπο ο αλγόριθμος αυτός. Συγκεκριμένα, μπορούμε να φανταστούμε τη διανομή με τον τρόπο αυτό ως μια διαδικασία ανταλλαγής, η οποια περιγράφεται με τον παρακάτω εναλλακτικό τρόπο (χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $len(W_1) \leq len(W_2)$):

1.Ανταλλαγή κομματιών X,Y ίσου μήκους όπου το X ανήκει στον παίκτη 1,το Y στο 2, και $X \subseteq W_2$,$Y \subseteq W_1$.

2.Ανταλλαγή κομματιών X,Y ίσου μήκους όπου το X ανήκει στον παίκτη 1,το Y στο 2, και $X \subseteq W_2$,$Y \subseteq W_{12}$.

3.Αν υπάρχουν ακόμα κομμάτια του W_2 που ανήκουν στον παίκτη 1, τα αποκτά ο παίκτης 2.

Αναλογικότητα. Η ερμηνεία του μηχανισμού μικρότερου μέσου όρου 2 παικτών ως διαδικασία ανταλλαγής καθιστά εμφανές ότι πρόκειται για αναλογική λύση που εξαλείφει τη ζήλια. Συγκεκριμένα, οι δυο παίκτες αρχικά εγγυώνται μερίδια που αξίζουν ακριβώς 0.5 για τον καθένα, και οι ανταλλαγές που ακολουθούν αποκλείεται να μειώσουν την αξία και των δυο.

Φιλαλήθεια. Αν υποτεθεί ότι $\delta_i > len(W_{12})$, τότε ο i λαμβάνει όλα τα επιθυμητά κομμάτια και δεν έχει ανάγκη να δηλώσει ψευδή αξιολόγηση, γι'αυτό καταλήγουμε στο ότι $\delta_i \leq len(W_{12})$. Ας υποτεθεί επίσης ότι ο i δηλώνει $U_i' \neq U_i$, δημιουργώντας τα νέα κομμάτια W_{12}',W_1',W_2'. Προτού ο παίκτης δηλώσει ψευδώς, λαμβάνει $len(W_i) + \max(\delta_i, 0)$. Όμως ισχύει $len(W_{12}') + len(W_{3-i}') = len(U_{3-i}) = len(W_{12}) + len(W_{3-i})$, και για το λόγο αυτό το σύνολο δεν επηρεάζεται από τη δήλωση του i. Αν επίσης $len(W_i') = len(W_i) - k$, τότε ο παίκτης χάνει τουλάχιστον k από W_i και κερδίζει το πολύ $k/2$ από μια αύξηση στο δ_i (δηλαδή επ'ουδενί δεν οδηγεί σε κέρδος). Τέλος, αν $len(W_i') = len(W_i) + k$ ο παίκτης αποκτά ανεπιθύμητα κομμάτια μήκους k και το δ_i είναι ελαφρώς μικρότερο, συνεπώς ο παίκτης δεν κερδίζει περισσότερο από W_{12} δηλώνοντας ψευδή αξιολόγηση. Τουτέστιν, ο μηχανισμός για 2 παίκτες είναι φιλαλήθης.

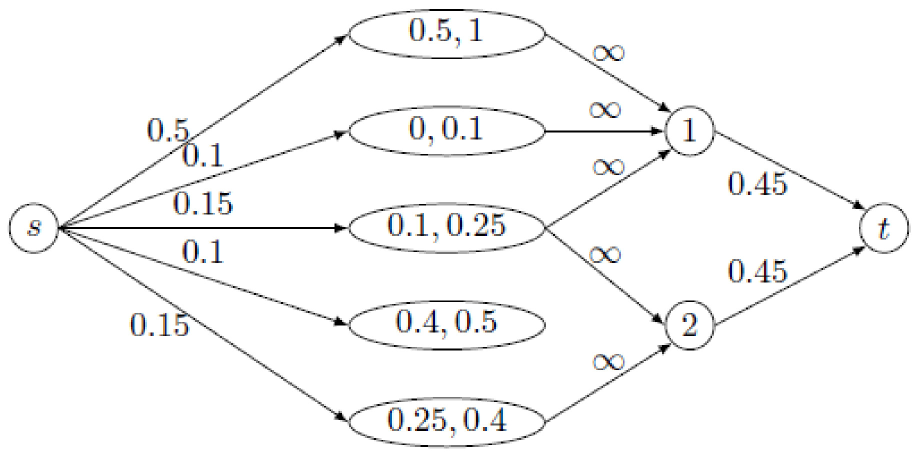
5.1.2 *Μικρότερος μέσος όρος αξιολόγησης για N παίκτες*

Μετά την εξέταση της εξειδικευμένης περίπτωσης του προβλήματος των 2 παικτών, θα φτάσουμε -μέσω των απαραιτήτων λημμάτων- στην επέκταση των ιδιοτήτων αυτών για το πρόβλημα των N παικτών. Πρώτα όμως θα χρειαστεί να αποδειχθεί ότι ο Αλγόριθμος 5.1 είναι καλώς ορισμένος.

Καλώς ορισμένη λύση. Ο μηχανισμός προαπαιτεί μια ακριβή κατανομή E σεβόμενη τα S_{min} και X, όμως απομένει να αποδειχθεί ότι μια τέτοια κατανομή υπάρχει, και αν ναι να βρεθεί ένας τρόπος να υπολογιστεί. Σε αυτό το σημείο θα εκμεταλλευτούμε τη στενή σχέση μεταξύ ακριβών κατανομών και μέγιστης ροής δικτύων.

Δοσμένων $S \subseteq N$, ενός κομματιού κέικ X και σταθεράς $c > 0$, ορίζουμε γράφο $G(S, X, c)$ ως εξής: Για να δημιουργήσουμε τους κόμβους του γράφου σημειώνουμε τα αριστερά και δεξιά όρια μέσα στο X που ορίζονται από τα κομμάτια U_i της προτιμήσεως των παικτών $i \in N$, και στο τέλος της διαδικασίας αυτής θα προκύψουν κομμάτια που ορίζονται από τα ζευγάρια διαδοχικών σημειώσεων. Το κάθε κομμάτι από αυτά θα αποτελέσει και ένα κόμβο του G, και προφανώς το καθένα από αυτά ενδέχεται να επιθυμείται ολικώς ή να μην επιθυμείται καθόλου από τον καθένα. Προσθέτουμε επίσης ένα κόμβο για κάθε παίκτη $i \in N$, ένα κόμβο-πηγή s και ένα κόμβο-καταβόθρα t. Για κάθε κομμάτι I, προσθέτουμε μια κατευθυνόμενη ακμή από την πηγή s στο I με χωρητικότητα ίση με το μήκος του κομματιού. Κάθε κόμβος αποτελούμενο από παίκτη συνδέεται με το t με μια ακμή χωρητικότητας $avg(S, X)$. Για κάθε ζευγάρι κομματιού-παίκτη (I, i), προσθέτουμε μια ακμή άπειρης χωρητικότητας από τον κόμβο I στον παίκτη i αν ο παίκτης i επιθυμεί το κομμάτι I.

Παράδειγμα: Υποθέτουμε $U_1 = [0, 0.25] \cup [0.5, 1]$ και $U_2 = [0.1, 0.4]$. Αν $X = [0,1]$ θα σημειωθούν τα σημεία $\{0, 0.1, 0.25, 0.4, 0.5, 1\}$. Ο παίκτης 1 επιθυμεί το $[0, 0.1]$, οι δυο μαζί επιθυμούν το $[0.1, 0.25]$, ο παίκτης 2 το $[0.25, 0.4]$, κανείς δε χρειάζεται το $[0.4, 0.5]$ και ο παίκτης 1 επιθυμεί το $[0.5, 1]$. Ισχύει ότι $len\big(D(\{1,2\}, [0,1])\big) = 0.9$. Οι τιμές των μέσων όρων για τα υποσύνολα $\{1\}$, $\{2\}$ και $\{1,2\}$ είναι 0.75, 0.3, και 0.45 αντίστοιχα. Το σχεδιάγραμμα 5.2 απεικονίζει το γράφο του παραδείγματος αυτού.



Σχήμα 5.2: Το σχεδιάγραμμα ροής δικτύου που εξάγεται από το παραπάνω παράδειγμα

Λήμμα 5.3. Ορίζεται ένα υποσύνολο των παικτών $S \subseteq N$ και ένα κομμάτι X του κέικ. Υπάρχει μια ροή μήκους $len(D(S, X))$ στο $G(S, X)$ αν και μόνο αν για όλα τα $S' \subseteq S$, ισχύει $avg(S', X) \geq avg(S, X)$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε μια εφαρμογή του κλασσικού Θεωρήματος Μέγιστης ροής-Ελάχιστης Τομής [15]. Υποθέτουμε ότι για όλα τα $S' \subseteq S$, $avg(S', X) \geq avg(S, X)$. Από το θεώρημα αυτό, η ελάχιστη χωρητικότητα που αφαιρείται από ένα γράφο για να αποσυνδεθεί ο κόμβος της πηγής και της καταβόθρας είναι ίση με το μήκος της μέγιστης ροής. Οι μόνες ακμές με πεπερασμένη χωρητικότητα στο $G(S, X)$ είναι αυτές που συνδέουν τους κόμβους των παικτών με την καταβόθρα, και αυτές που συνδέουν την πηγή στους κόμβους των κομματιών.

Κατασκευάζουμε μια υποψήφια ελάχιστη τομή αποσυνδέοντας κάποιους κόμβους υποσυνόλων παικτών $T \subseteq S$ από την καταβόθρα με κόστος $|T| * avg(S, X)$ και ύστερα αποσυνδέοντας όλους τους δεσμούς (s, I) στους κόμβους των κομματιών I που επιθυμούνται από έναν παίκτη $i \in S \backslash T$. Αυτό σημαίνει ότι η ολική επιπρόσθετη χωρητικότητα που χρειάζεται να απομακρύνουμε είναι $len(D(S \backslash T, X))$, δηλαδή το ολικό μήκος των κομματιών που επιθυμούνται από τουλάχιστον ένα παίκτη στο διάστημα $S \backslash T$. Από την υπόθεση, το μέγεθος αυτό είναι το λιγότερο $|S \backslash T| * avg(S, X)$. Ως αποτέλεσμα, η τομή αυτή έχει χωρητικότητα το λιγότερο $|T| * avg(S, X) + |S \backslash T| * avg(S, X) = |S| * avg(S, X) = len\big(D(S, X)\big)$.

Σε διαφορετική κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι υπάρχει ροή μήκους $len(D(S, X))$ στο $G(S, X)$, και για αντίφαση υποστηρίζουμε ότι υπάρχει $S' \subseteq S$ για το οποιο $avg(S', X) < avg(S, X)$. Δημιουργούμε μια τομή αποσυνδέοντας τους δεσμούς (s, I) που ενώνουν τα κομμάτια που επιθυμούνται από έναν παίκτη $i \in S'$, και αποσυνδέοντας τους κόμβους των παικτών $S \backslash S'$ από την καταβόθρα. Η ολική χωρητικότητα της τομής είναι $|S'| * avg(S', X) + |S \backslash S'| * avg(S, X) < len(D(S, X))$, και από το Θεώρημα Μέγιστης Ροής-Ελάχιστης Τομής, η μέγιστη ροή θα πρέπει να είναι μήκους μικρότερο από $len(D(S, X))$, σε αντίθεση με την υπόθεσή μας.

Το παρακάτω λήμμα καθιερώνει ότι μια ροή μήκους $len(D(S, X))$ στο $G(S, X)$ επιφέρει μια ακριβή κατανομή.

Λήμμα 5.4. Ορίζεται ένα υποσύνολο των παικτών $S \subseteq N$ και ένα κομμάτι X του κέικ. Υπάρχει μια ακριβής κατανομή σχετικά με το S, X αν και μόνο αν υπάρχει μια μέγιστη ροή μήκους $len(D(S, X))$ στο $G(S, X)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια μέγιστη ροή μήκους $D(S, X)$: θα υποδείξουμε πώς θα χρησιμοποιήσουμε τη ροή αυτή για να παράξουμε μια ακριβή κατανομή στο S, X. Για κάθε ακμή μεταξύ κόμβων κομματιών I και παίκτη $i \in N$ που λαμβάνει θετική ροή μεγέθους c από τη μέγιστη ροή, διανέμουμε το c από το I στον παίκτη i. Αυτή η κατανομή είναι εφικτή καθώς οι κόμβοι των κομματιών αντιπροσωπεύουν ασυμβίβαστα κομμάτια του X και η ροή στον κόμβο του κομματιού είναι περιορισμένη από τη χωρητικότητα της ακμής μεταξύ s και του ιδίου του κόμβου του κομματιού, το οποιο αντιπροσωπεύει το μήκος του κομματιού. Επιπροσθέτως, αυτή η κατανομή πρέπει να δώσει στον κάθε παίκτη ακριβώς $avg(S, X)$ από κομμάτια που επιθυμεί. Για να γίνει αντιληπτό αυτό, ας προσεχθεί πως όλα τα μονοπάτια προς την καταβόθρα πρέπει να περνούν μέσω των κόμβων των παικτών, και το σύνολο των χωρητικοτήτων των ακμών μεταξύ των παικτών και της καταβόθρας είναι $D(S, X)$. Για να έχει μια μέγιστη ροή μήκος $D(S, X)$, οι ακμές αυτές πρέπει να κορεστούν.

Σε διαφορετική κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι έχουμε μια ακριβή κατανομή στο S, X. Μπορεί να παραχθεί μια εφικτή ροή μήκους $len(D(S, X))$ ορίζοντας μια ροή μεγέθους c σε μια ακμή (I, i) αν ο παίκτης i λάβει c από το κομμάτι I στην ακριβή κατανομή, και με το να κορεστούν όλες οι ακμές (s, I) και (i, t), για κομμάτια I και παίκτες $i \in N$.

Συνδέοντας τις υποθέσεις των λημμάτων 5.3 και 5.4 συμπεραίνουμε ότι ο μηχανισμός είναι πράγματι καλώς ορισμένος: αν το υποσύνολο S έχει το μικρότερο μέσο όρο τότε υπάρχει ακριβής κατανομή στο S, X. Επιπλέον, λαμβάνουμε ένα μηχανισμό για τον υπολογισμό μιας ακριβής κατανομής, υπολογίζοντας τη μέγιστη ροή και αντλώντας μια ακριβή κατανομή. Μια μέγιστη ροή μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο με βάση τον αριθμό των κόμβων ο οποιος είναι πολυωνυμικός στο δικό μας μήκος εισόδου.

Εξάλειψη της ζήλιας.

Λήμμα 5.5. Συμβολίζουμε με S_1,S_2,…,S_m την αύξουσα ταξινομημένη ακολουθία των υποσυνόλων των παικτών όπως αυτά προκύπτουν από τον Αλγόριθμο 5.1, και με X_1,…,X_m την ταξινομημένη ακολουθία των κομματιών που διανέμονται με τις κλήσεις της ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑΣ. Ισχύει ότι $X_1 = [0,1]$, $X_2 = X_1 \backslash D(S_1, X_1)$,…, $X_m = X_{m-1} \backslash D(S_{m-1}, X_{m-1})$. Τότε, για κάθε $i > j$, $avg(S_i, X_i) \geq avg(S_j, X_j)$, και οι παίκτες που είναι μέλη των επόμενων υποσυνόλων λαμβάνουν ελαφρώς περισσότερο από τα επιθυμητά -κατ'αυτούς- κομμάτια.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το παραπάνω δεν ισχύει. Τότε, για κάποιο i: $avg(S_i, X_i) > avg(S_{i+1}, X_{i+1})$. Λαμβάνοντας υπόψιν το $S_i \cup S_{i+1}$. Θα δείξουμε ότι $avg(S_i \cup S_{i+1}, X_i) < avg(S_i, X_i)$, το οποιο έρχεται σε αντιπαράθεση με την επιλογή του S_i ως το υποσύνολο των παικτών με τον μικρότερο μέσο όρο κατά το βήμα i. Σημειώνεται ότι τα S_i και S_{i+1} είναι ασυμβίβαστα καθώς οι παίκτες τίθονται εκτός της διαδικασίας με το που αποτελέσουν μέλη του υποσυνόλου με το μικρότερο μέσο όρο. Συνεπώς,

$$avg(S_i \cup S_{i+1}) = \frac{len\big(D(S_i \cup S_{i+1}, X_i)\big)}{|S_i| + |S_{i+1}|} = \frac{len\big(D(S_i, X_i)\big) + len\Big(D\big(S_{i+1}, X_i \backslash D(S_i, X_i)\big)\Big)}{|S_i| + |S_{i+1}|}$$

$$= \frac{|S_i| * avg(S_i, X_i) + |S_{i+1}| * avg(S_{i+1}, X_{i+1})}{|S_i| + |S_{i+1}|} < \frac{|S_i| * avg(S_i, X_i) + |S_{i+1}| * avg(S_i, X_i)}{|S_i| + |S_{i+1}|}$$

$= avg(S_i, X_i)$ όπου η δεύτερη μετατροπή ισχύει καθώς S_i και S_{i+1} είναι ασυμβίβαστα, και η ανισότητα έπεται της υπόθεσής μας.

Η εξάλειψη της ζήλιας προκύπτει αμέσως από το λήμμα 5.5. Για έναν παίκτη $i \in N$, και όπως πριν υποθέτουμε ότι S_j είναι το υποσύνολο των παικτών με το μικρότερο μέσο όρο κατά τη j-κλήση της ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑΣ. Υποθέτοντας ότι $i \in S_j$, ο παίκτης δε ζηλεύει τους υπόλοιπους στο S_j καθώς όλοι λαμβάνουν ίδιο μήκος μέσα σε αυτό. Σύμφωνα με το λήμμα, ο παίκτης δε ζηλεύει τους υπόλοιπους στο S_k για $k < j$ επειδή η ποσότητα που λαμβάνουν οι παίκτες αυξάνεται με κάθε κλήση. Ο παίκτης επίσης δε ζηλεύει τους υπόλοιπους στο S_k για $k > j$ επειδή όλα τα κομμάτια που είναι επιθυμητά από τον παίκτη σε εκείνο το χρονικό σημείο έχουν διαμοιραστεί και απομακρυνθεί από τα κομμάτια που εκείνος μπορεί να επιλέξει. Αποδεικνύεται λοιπόν ότι ο μηχανισμός εξαλείφει τη ζήλια.

Αναλογικότητα. Για να αποδειχτεί ότι ο Αλγόριθμος 5.1 είναι αναλογικός, παρουσιάζεται πρώτα το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 5.6. Ο Αλγόριθμος 5.1 παραχωρεί όλα τα κομμάτια που επιθυμούνται από ένα παίκτη, τουλάχιστον σε μια περίπτωση μέσα στα υποσύνολα S.

Απόδειξη. Για να αποδειχτεί η παραπάνω πρόταση, αρκεί με κάποιο τρόπο να φανεί πως η ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ πάντοτε παραχωρεί, τουλάχιστον σε ένα παίκτη, όλα τα κομμάτια που αυτός επιθυμεί. Στην περίπτωση που $|S| = 1$, η υπορουτίνα δίνει στον παίκτη όλα τα επιθυμητά κομμάτια, και τετριμμένα, η πρόταση ισχύει. Όταν καλείται για j-φορά η υπορουτίνα, αν S' είναι το υποσύνολο των παικτών με το μικρότερο μέσο όρο, γίνεται μια ακριβής κατανομή του $D(S',X)$. Υποσημειώνεται ότι μια ακριβής κατανομή δίνει $len(D(S',X))/|S'|$ από τα επιθυμητά κομμάτια στον κάθε παίκτη. Για να συμβεί αυτό, ολόκληρο το $D(S',X)$ πρέπει να δοθεί σε κάποιο παίκτη. Συνεπώς, η απαίτηση καλύπτεται από την προσφορά που γίνεται στο υποσύνολο με το μικρότερο μέσο όρο. Αυστηρή επαγωγή δείχνει ότι αυτή καλύπτεται στο $X \backslash D(S',X)$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Φιλαλήθεια. Η κάλυψη της φιλαλήθειας από τον αλγόριθμο 5.1 προκύπτει από μια ισχυρή επαγωγή στον αριθμό των παικτών στην κλήση της ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑΣ. Στην περίπτωση του ενός παίκτη, η ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ δίνει στον παίκτη όλα τα επιθυμητά κομμάτια και έτσι αυτός δε χρειάζεται να δηλώσει ψευδώς για να κερδίσει επιπλέον αξία. Στη γενικότερη περίπτωση, μια ψευδής δήλωση οδηγεί σε δυο πιθανά ενδεχόμενα: ένας παίκτης μπορεί να δηλώσει μια αξιολόγηση η οποια δεν αλλάζει την επιλογή του υποσυνόλου των παικτών με μικρότερο μέσο όρο, αλλά αντίθετα επηρεάζει την απόφαση για την ακριβή κατανομή που επιλέγεται για το υποσύνολο αυτό. Η άλλη εκδοχή είναι η επιλογή αυτή να διαφοροποιεί την επιλογή του υποσυνόλου την παικτών με μικρότερο μέσο όρο.

Αρχικά εξετάζουμε την πρώτη περίπτωση. Οι ψευδές δηλώσεις μπορούν να επηρεάσουν την ακριβή κατανομή για το πρόβλημα S,X, η οποια χωρίς αυτές θα μοίραζε ακριβώς $len(D(S,X))/|S|$ στους παίκτες. Υποθέτουμε πως η ψευδής δήλωση ενός παίκτη αλλάζει τα επιθυμητά κομμάτια σε $D'(S,X)$. Αν $len(D'(S,X)) \leq len(D(S,X))$, τότε η δήλωση αυτή δεν είναι προς όφελος του παίκτη καθώς λαμβάνει λιγότερο μήκος. Επίσης, όταν $len\big(D'(S,X)\big) > len(D(S,X))$, ο κάθε παίκτης λαμβάνει $len(D'(S,X))/|S|$ από τα κομμάτια που επιθυμεί. Και, καθώς οι υπόλοιποι παίκτες υποτίθεται ότι δεν ψεύδονται στις δηλώσεις τους, ο μηχανισμός δίνει σε αυτούς κομμάτια που πραγματικά χρειάζονται. Το σύνολο όλων των κομματιών που επιθυμούνται πραγματικά από τους παίκτες στο S είναι $D(S,X)$. Αφαιρώντας από αυτό τα κομμάτια που έχουν διανεμηθεί σε άλλους παίκτες προκύπτει το μέγιστο μήκος των εναπομείνοντων επιθυμητών κομματιών για τον παίκτη i. Και καθώς $len\big(D(S,X)\big) - (|S|-1)D'(S,X)/|S| \leq len(D(S,X))/|S|$, η ψευδής δήλωση είναι ξανά μη κερδοφόρα.

Στην περίπτωση όπου το υποσύνολο με το μικρότερο μέσο όρο δεν είναι πια το ίδιο μετά την ψευδή δήλωση, υπάρχουν δυο υποπεριπτώσεις για τον παίκτη $i \in N$ που ψεύδεται:

1. $i \notin S_{min}$. Όπως μπορεί να παρατηρηθεί, για κάθε υποσύνολο S' που μπορεί να προκύψει από ψευδή δήλωση αν $i \notin S'$ ο παίκτης i δεν μπορεί να αλλάξει το $D(S',X)$ με τη δήλωσή του. Ως αποτέλεσμα αυτού, ο παίκτης δεν μπορεί να κάνει το μηχανισμό να διαλέξει κάποιο άλλο S',$i \notin S'$ καθώς δεν είναι σε θέση να αλλάξει το $avg(S_{min},X)$ ή το $avg(S',X)$. Επομένως, η μόνη απόκλιση που προσπαθεί να δημιουργήσει ο παίκτης στο μηχανισμό είναι τελικά να επιλεγεί ένα υποσύνολο S', στο οποιο ο παίκτης i ανήκει. Για να συμβεί αυτό ο παίκτης πρέπει να δημιουργήσει την ανισότητα $avg'(S',X) \leq avg(S_{min},X)$ και έτσι θα λάβει το λιγότερο $avg'(S',X)$ από επιθυμητά μήκη. Σύμφωνα με το λήμμα 5.5 ο παίκτης λέγοντας την αλήθεια θα λάμβανε αξία τουλάχιστον $avg(S_{min},X)$ (αφού θα διανεμόταν το κομμάτι σε κάποια επόμενη κλήση) και άρα η ψευδής δήλωση δεν αποφέρει κάτι σε αυτόν. Η φιλαλήθεια λοιπόν προκύπτει επαγωγικά καθώς ο παίκτης δεν έχει λόγο να αλλάξει το S_{min} ή το κομμάτι του κέικ $X \backslash D(S_{min},X)$ που μοιράζεται στην αναδρομική κλήση.

2. $i \in S_{min}$. Ο παίκτης λαμβάνει $avg(S_{min},X)$ υπο αληθούς δήλωσης. Αν με ψευδή του δήλωση προσπαθήσει να αλλάξει την επιλογή του υποσυνόλου S που θα διαλέξει ο αλγόριθμος σε κάποια κλήση της ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑΣ, και $i \in S'$, για να υπάρξει κέρδος θα πρέπει $avg'(S',X) \geq avg(S_{min},X)$. Αλλιώς, αν $i \notin S'$, τότε ο παίκτης i δε θα μπορούσε να επηρεάσει το $avg(S',X)$ και έτσι το S' επιλέχτηκε υπο αληθούς δήλωσης, και έτσι $avg'(S',X) \geq avg(S_{min},X)$. Σε κάθε περίπτωση, για να υπάρξει κέρδος, πρέπει $avg'(S',X) \geq avg(S_{min},X)$ σε επιθυμητά κομμάτια, όπως υποδεκνύει το λήμμα 5.5. Χρησιμοποιώντας ίδια επιχειρήματα με την παραπάνω περίπτωση, το συνολικό μέγεθος των κομματιών που πραγματικά επιθυμούνται από τους παίκτες στο S_{min} είναι $D(S_{min},X)$. Όσο ο παίκτης i ψεύδεται, όλοι οι υπόλοιποι μέσα στο S_{min} που δηλώνουν αληθώς την προτίμησή τους, λαμβάνουν τα κομμάτια που επιθυμούν. Αυτό αφήνει ως υπόλοιπο $len\big(D(S_{min}, X)\big) - (|S_{min}| - 1) * avg'(S', X) \leq len\big(D(S_{min}, X)\big) - (|S_{min}| - 1) * avg(S_{min}, X)$ στα επιθυμητά από τον i σημεία. Το δεξί μέλος της ανισότητας ισούται με $avg(S_{min}, X)$, συνεπώς η απόκλιση είναι μη επικερδής.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της φιλαλήθειας για τον Αλγόριθμο 5.1. Τοποθετώντας τα όλα μαζί, προκύπτει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 5.7. Σε ένα πρόβλημα με παίκτες που οι προτιμήσεις τους ως προς το κέικ ακολουθούν τμηματικά ομοιογενείς συναρτήσεις, ο Αλγόριθμος 5.1 είναι φιλαλήθης, εξαλείφει τη ζήλια, και ολοκληρώνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

5.1.3 Πολυπλοκότητα του προβλήματος των N παικτών

Πέρα από τις ιδιότητες των λύσεων που προτείνει ο Αλγόριθμος 5.1, είναι σημαντική η διερεύνηση της πολυπλοκότητάς του. Καθώς μελετώνται τα βήματα του αλγορίθμου όπως δόθηκε στην αρχή της ενότητας, γίνεται σαφές ότι η πολυπλοκότητά του έρχεται σε άμεση συνάρτηση με την πολυπλοκότητα του βήματος 2 της ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑΣ. Έτσι, ισχυριζόμενοι ότι ο μηχανισμός μπορεί να ολοκληρωθεί σε πολυωνυμικό χρόνο (πολυωνυμικό χρόνο αριθμό κοπών του κέικ), απομένει να δείξουμε ότι είναι εξίσου πιθανό να λυθεί και το βήμα 2 της ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑΣ σε πολυωνυμικό χρόνο. Στην πραγματικότητα, μια καλώς ορισμένη εκτέλεση του βήματος 2 μπορεί να σημαίνει ότι η ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ μπορεί να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, ενώ αυτή καλείται το πολύ $n+1$ φορές. Επομένως το ζητούμενο είναι να βρεθεί το $S_{min} \in argmin_{S' \subseteq S} avg(S, X)$ σε πολυωνυμικό χρόνο, δοσμένου του $S \subseteq N$ και ενός κομματιού X. Προς δική μας διευκόλυνση, χρησιμοποιούμε όρους ροής δικτύου, οι οποιοι είναι μια εύκολη εκδοχή εκείνων που υιοθετήθηκαν από τους Katta και Sethuraman [16]. Για λόγους πληρότητας περιγράφεται εν συντομία μια εκτέλεση χαλαρότερα ορισμένη από την προαναφερθείσα [16] αλλά αναμφισβήτητα πολυωνυμικού χρόνου:

Δοσμένου $S \subseteq N$, ενός κομματιού X και σταθεράς $c > 0$, κατασκευάζουμε γράφο $G'(S, X, c)$, όμοιο με τον G εκτός από τις χωρητικότητες των ακμών μεταξύ των παικτών και της καταβόθρας που είναι c αντί για $avg(S, X)$. Η απόδειξη της δήλωσης που ακολουθεί είναι παρόμοια με την απόδειξη του λήμματος 5.3 (αντικαθιστώντας με c το $avg(S, X)$ όπου αυτό συναντάται στον κόμβο): υπάρχει μια ροή μεγέθους $c|S|$ στο δίκτυο $G'(S, X, c)$ αν και μόνο αν για όλα τα $S' \subseteq S$ ισχύει ότι $avg(S'X) \geq c$.

Υποθέτουμε ότι τα όρια των προτιμήσεων των παικτών αναπαριστούνται από το πολύ k bits. Υπάρχει ένα μέγιστο c^* για το οποιο το $G'(S, X, c^*)$ έχει μια ροή μεγέθους $c^*|S|$.

Το c^* είναι μέλος ενός συνόλου K παικτών στο $[0,1]$ που περικλείει όλες τις πιθανές τιμές του $avg(S',X)$ για τα $S' \subseteq S$. Ισχύει ότι το $|K|$ είναι εκθετικού βαθμού n και k, και για το λόγο αυτό κάνοντας δυαδική αναζήτηση στο K δεν μπορούμε να βρούμε το c^* σε πολυωνυμικό χρόνο.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι $c^* + a$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του K που είναι μεγαλύτερο από το c^*, και λαμβάνουμε υπόψιν το $G'(S,X,c^* + a)$. Αυτό το δίκτυο δεν έχει ροή δικτύου μήκους $(c^* + a)|S|$. Μπορούμε να βρούμε μια ελάχιστη τομή σε αυτό το δίκτυο σε πολυωνυμικό χρόνο. Στο δίκτυο βρίσκεται ένα υποσύνολο $T \subseteq S$ για το οποιο η τομή διαχωρίζει το $S \backslash T$ από την καταβόθρα, και τα επιθυμούμενα κομμάτια από το T από την πηγή. Αυτό το υποσύνολο T πρέπει να έχει μέσο όρο $avg(T,X) < c^* + a$, και από την κατασκευή του K αυτό σημαίνει ότι $avg(T,X) \leq c^*$.

Επιθυμούμε να ισχυριστούμε ότι το T είναι το S_{min} που αναζητούμε. Πράγματι, ας σημειωθεί ότι καθώς υπάρχει ροή μήκους $c^*|S|$ στο $G'(S,X,c^*)$, πρέπει να ισχύει $avg(S',X) \geq c^*$ για όλα τα $S' \subseteq S$, το οποιο αμέσως επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό.

5.2 Πρωτόκολλα αναλογικότητας

5.2.1 Εφαρμογή του πρωτοκόλλου Banach-Knaster για αναλογικότητα

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η τεχνική του «κινούμενου μαχαιριού» και ορισμένες παραλλαγές του, χωρίς όμως κάποιο από τα παραδείγματα που δόθηκαν να είναι ολοκληρωμένος αλγόριθμος, δηλαδή πρωτόκολλο με ακολουθία επακριβών βημάτων που καταλήγει σε λύση με κάποια αποδεκτά γνωρίσματα.

Ένα πρωτόκολλο που θα παρουσιαστεί στο σημείο αυτό, το οποιο ακολουθεί την προαναφερθείσα τεχνική είναι ο αλγόριθμος Banach-Knaster. Ο αλγόριθμος αυτός εμφανίστηκε από την εποχή που θεσπίστηκε το πρόβλημα κοψίματος του κέικ, και εμφανίστηκε από τον Steinhaus [2], ο οποιος παρουσίασε μια ανεπίσημη περιγραφή μιας λύσης που ο ίδιος απέδωσε στους B.Knaster και S.Banach. Η λύση αυτή αναθέτει ένα ικανοποιητικό κομμάτι σε έναν παίκτη και αναδρομικά δουλεύει για το υπόλοιπο κέικ και τους υπόλοιπους παίκτες. Σε κάθε «γύρο», η διαδικασία εγγυάται ένα ικανοποιητικό μερίδιο δίνοντας σε κάθε παίκτη την επιλογή να κόψει το κομμάτι του κέικ, ξεκινώντας με ολόκληρο το κέικ στην αρχή, και ολοκληρώνοντας με τον τελευταίο παίκτη να λαμβάνει το κομμάτι που απέμεινε.

Όπως σημειώνει ο Steinhaus, στους παίκτες μπορεί να εγγυηθεί μια αναλογική κατανομή αν εκείνοι δράσουν σύμφωνα με ένα συγκεκριμένο τρόπο. Συγκεκριμένα, αν σε κάθε «γύρο» ένας παίκτης $i \in N$ λαμβάνει αρχικά ένα κομμάτι I_{i-1}, μπορεί να του εξασφαλιστεί ένα αναλογικό κομμάτι κόβοντάς το σε ένα νέο κομμάτι I_i με $V_i(I_i) = 1/n$ αν και μόνο αν $V_i(I_{i-1}) > 1/n$.

Παρακάτω, ο Αλγόριθμος 5.2.1 επισημοποιεί τη μη αναδρομική ρουτίνα εντολών της διαδικασίας Banach-Knaster. Για τη λειτουργία της προϋποθέτει την ύπαρξη ενός κομματιού I, ενός αριθμημένου συνόλου παικτών M, και τις αντίστοιχες συναρτήσεις αξιολόγησής u'. Η μεταβλητή max σηματοδοτεί τον παίκτη που έχει πιο πρόσφατα κόψει το κομμάτι του κέικ, δηλαδή το μέγιστο i_j για το οποιο $V_{i_j}\left(I_{j-1}\right) > 1/n$. Ο αλγόριθμος επιστρέφει ένα κομμάτι κέικ I_{max} και ένας παίκτης max στον οποιο κατανέμεται το κομμάτι του κέικ I_{max}, έτσι ώστε $X_{max} = I_{max}$. Ο Αλγόριθμος 5.2.2 που παρατίθεται στη συνέχεια καλεί αναδρομικά τον Αλγόριθμο 5.2.1 με είσοδο $I - I_{max}$, $M - \{max\}$, και $u - \{u_{max}\}$.

Αλγόριθμος 5.2.1 (Banach-Knaster Helper)

Είσοδος: Κομμάτι $I = [x_b, x_e]$, Παίκτες $M = \{i_1, \dots, i_m\}$, Συναρτήσεις αξιολόγησης $u' = \{u_{i_1}, \dots, u_{i_m}\}$

Έξοδος: Κομμάτι I_{max}, Παίκτης max

1.Βρες $I_1 = [x_b, x_1] \subset I$ με $V_{i_1}(I_1) = 1/n$

2.$max \longleftarrow 1$

3.**Για** $j = 2, \dots, m$ **κάνε**

Αν $V_{i_j}(I_{j-1}) \leq 1/n$ **τότε**

$I_j \longleftarrow I_{j-1}$

αλλιώς

Βρες $I_j = [x_b, x_j] \subset I_{j-1}$ με $V_{i_j}\left(I_j\right) = 1/n$

$max \longleftarrow i_j$

Τέλος-Αν

Τέλος-Για

Επιστροφή (I_{max}, max)

Η ορθότητα του Αλγορίθμου 5.2.2 προκύπτει επαγωγικά από τον αριθμό των παικτών n. Αρκεί να ειπωθεί ότι το παρακάτω θεώρημα ισχύει:

Θεώρημα 5.8. Ο Αλγόριθμος 5.2.2 είναι αναλογικός

Αλγόριθμος 5.2.2 (Banach-Knaster)

Είσοδος: Κέικ C,Παίκτες N, Συναρτήσεις αξιολόγησης u

Έξοδος: Κατανομή $X = (X_1, \dots, X_n)$

1.$I \longleftarrow C$,$M \longleftarrow N$,$u' \longleftarrow u$

2.**Όσο** $M \neq \emptyset$ **κάνε**

$(I_{max}, \max) \longleftarrow \text{Banach} - \text{Knaster Helper}(\text{I}, \text{M}, \text{u}')$

$X_{max} \longleftarrow I_{max}$

$I \longleftarrow I - I_{max}$, $M \longleftarrow M - \{max\}$, $u' \longleftarrow u' - \{u_{max}\}$

Τέλος-Όσο

Επιστροφή $(\boldsymbol{X_1}, \dots, \boldsymbol{X_n})$

Όπως γίνεται αντιληπτό, ο αλγόριθμος αυτός εγγυάται στον κάθε παίκτη ποσότητα αξίας με κατώτατο όριο $1/n$. Συνεπώς, το πρωτόκολλο Banach-Knaster προσφέρει αναλογική λύση για το σύνολο των παικτών του προβλήματος, και παρ'ότι η αναλογικότητα δεν είναι και το πιο ισχυρό κριτήριο που επιδέχεται κάλυψη, ο μηχανισμός αυτός παρέχει μια σημαντική δικλείδα ασφαλείας ώστε να συμμετάσχουν οι παίκτες σε σχετική μοιρασιά. Το πρόβλημα ωστόσο έγκειται στην πολύ υψηλή πολυπλοκότητα που οδηγεί η απ'ευθείας εφαρμογή του, και συγκεκριμένα αυτή είναι της τάξης του $n(n-1)/2$. Εντύπωση προκαλεί ότι ένα παρεμφερές σενάριο κατανομής, σύμφωνα με το οποιο οι παίκτες διαμοιράζονται ανα ζεύγη τα κομμάτια τους (Successive Pairs Algorithm[1]) καταλήγει στο να δημιουργήσει $n!$ κομμάτια, ενώ ουσιαστικά χρειάζονται μόνο $n^3/3$ από αυτά, και τα μεγέθη αυτά είναι προφανώς πολύ μακριά από αποδεκτές τάξεις. Παρ'όλα αυτά, τεχνικές που συνδέουν την τεχνική του κινούμενου μαχαιριού με τη φιλοσοφία «διαίρει και βασίλευε», φτάνουν σε πολύ ικανοποιητικά στάδια μεγέθη της τάξης του $n \log_2 n$.

5.2.2 α-Αναλογικότητα και αυστηρή αναλογικότητα

Η έννοια και το γενικότερο σκεπτικό της αναλογικότητας, όντας θεμελιώδους σημασίας για τη θέσπιση του Κοψίματος του κέικ ως μαθηματικό πρόβλημα, πιστοποιεί την ανάγκη για τη διερεύνηση του βαθμού στον οποιο το κριτήριο αυτό τηρείται σε μια κατανομή. Πιο συγκεκριμένα, καθώς η αναλογικότητα καθορίζει ένα κατώτατο όριο αξίας που μπορεί να λάβει κάθε παίκτης σε ένα πρόβλημα, το επόμενο βήμα είναι να προσδιοριστεί ένα διαφορετικό όριο (πιθανότατα υψηλότερο) πέραν από το καθορισμένο $(1/n)$:

Ορισμός 5.9. Θέτουμε $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ με $\alpha_i > 0$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ για όλα τα i, και $\sum \alpha_\iota = 1$. Μια κατανομή $X = (X_1, \dots, X_n)$ είναι α-αναλογική εάν $V_i(X_j) = \alpha_j$ για όλα τα $i, j \in N$.

Η α-αναλογικότητα ως έννοια παρουσιάστηκε από τους Dubins και Spanier[11]. Εκ πρώτης όψεως, είναι δυσκολότερο να βρεθεί μια α-αναλογική κατανομή από απλώς αναλογική, λόγω των περισσότερων περιορισμών που τίθενται στον ορισμό 5.9. Ωστόσο, η α-αναλογικότητα μπορεί να επιτευχθεί μέσω αναγωγής στη λύση των Banach-Knaster. Η προϋπόθεση ότι οι σταθερές α_i είναι ρητοί αριθμοί είναι καθοριστική για την αναγωγή αυτή, καθώς αυτή προκύπτει ως εξής: εκφράζουμε το κάθε α_i ως το κλάσμα δυο ακεραίων r_i/k ,με το k να παραμένει ίδιο για όλους τους παίκτες $i \in N$. Μπορούμε να εξομοιώσουμε τον αλγόριθμο Banach-Knaster για k «εικονικούς» παίκτες, όπου ο κάθε πραγματικός παίκτης i απεικονίζεται από τους r_i του συνόλου των k παικτών. Αυτό θα έχει ως συνέπεια ο κάθε παίκτης να λάβει $r_i(1/k)$, και οδηγούμαστε στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.10. Για κάθε $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, υπάρχει μια α-αναλογική κατανομή.

Είναι σημαντικό, ωστόσο, να σημειωθεί ότι η πολυπλοκότητα ενός τέτοιου αλγορίθμου δε συνάδει απαραίτητα με το μέγεθος του k.

Μια άλλη εξειδίκευση της αναλογικότητας αποτελεί η αυστηρή αναλογικότητα, σύμφωνα με την οποια κάθε παίκτης λαμβάνει αξία $V_i(X_i) > 1/n$. Ο Woodal[17] αποδεικνύει το κάτωθι θεώρημα αναφορικά με την αυστηρή αναλογικότητα:

Θεώρημα 5.11. Δεδομένου ότι υπάρχει ένα κομμάτι κέικ $P \subset C$ και 2 παίκτες $i \neq j$ για τους οποιους ισχύει $V_i(P) \neq V_j(P)$, υπάρχει μια αυστηρά αναλογική κατανομή.

Γίνεται εύκολα αντιληπτό πως εάν όλοι οι παίκτες έχουν όμοιες συναρτήσεις αξιολόγησης για το κέικ, τότε η αυστηρή αναλογικότητα μπορεί να μην είναι πιθανή.

5.3 Πρωτόκολλα αναλογικότητας

5.3.1 Εφαρμογή του πρωτοκόλλου Selfridge-Conway για n=3 παίκτες

Η έννοια της εξάλειψης της ζήλιας (envy-freeness), όπως συζητήθηκε στην παράγραφο 4.4, αποτελεί ένα αναπόσπαστο κομμάτι της μελέτης πάνω στο πρόβλημα του Κοψίματος του κέικ. Κύριο γνώρισμα της ανάλυσης που γίνεται ώστε να κριθεί αν ένα πρωτόκολλο ή μια απλή διαμέριση εξαλείφει τη ζήλια ή όχι, είναι η σύγκριση μεταξύ των κομματιών που λαμβάνουν όλοι οι παίκτες που απαρτίζουν την κατανομή. Το γεγονός αυτό αυξάνει σημαντικά το βαθμό δυσκολίας εξεύρεσης λύσεων, και, εφ'όσον τέτοιες λύσεις είναι εφικτό να βρεθούν, η πολυπλοκότητά τους κυμαίνεται πολλές φορές σε μη αποδεκτά πλαίσια.

Η λύση «κόβω και διαλέγεις» σε πρόβλημα 2 παικτών (παρ. 2.3) εξαλείφει επιτυχώς τη ζήλια στην περίπτωση που οι παίκτες αυτοί αξιολογούν το κέικ με τον ίδιο τρόπο, και συνεπώς η εφαρμογή της είναι αρκετά περιορισμένη καθώς ένα τέτοιο σενάριο δεν προσαρμόζεται στις ρεαλιστικές ανάγκες διαμέρισης ανομοιογενούς αγαθού. Αποτελεί ωστόσο την πρώτη χρονολογικά προσπάθεια εξεύρεσης ενός envy-free μηχανισμού.

Το πρωτόκολλο Selfridge-Conway αποτελεί την πρώτη αποδεκτή envy-free λύση για το πρόβλημα των 3 παικτών. Ονομάζεται έτσι από τους ερευνητές John Selfridge και John Horton Conway. Ο πρώτος ανακάλυψε τη λύση αυτή το 1960 και, ενώ την παρουσίασε στο Βρετανό μαθηματικό Richard Guy δεν προχώρησε ποτέ στη δημοσίευσή της. Ο Conway ανακάλυψε τη λύση ξεχωριστά από τον Selfridge και τη δημοσίευσε κατά τη δεκατία του 1990 [1]. Προσφάτως, οι Steven Brams και Alan Taylor προχώρησαν σε κοινοποιήσεις envy-free λύσεων για n παίκτες βασιζόμενοι αισθητά στο μηχανισμό Selfridge-Conway που λύνει το πρόβλημα των 3 παικτών [6][18].

Πρωτόκολλο 5.3.1 (Selfridge-Conway)

1.Ο παίκτης 1 κόβει το κέικ C σε τρία κομμάτια P_1,P_2,P_3, έτσι ώστε $V_1(P_1) = V_2(P_2) = V_3(P_3)$.

2.Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο παίκτης 2 προτιμά τα κομμάτια κατά τη φθίνουσα σειρά P_1, P_2, P_3. Αν $V_2(P_1) = V_2(P_2)$, τότε αφήνει τα κομμάτια ως έχουν. Αλλιώς, κόβει το P_1 σε δυο κομμάτια P_1' και L έτσι ώστε $V_2(P_1') = V_2(P_2)$.

3.Οι παίκτες διαλέγουν κομμάτια από το σύνολο $\{P_1', P_2, P_3\}$ κατά τη σειρά $3,2,1$. Αν ο παίκτης 3 δε διαλέξει το P_1', τότε ο παίκτης 2 υποχρεούται να το διαλέξει για τον εαυτό του.

4.**Αν** $L = \emptyset$, ο αλγόριθμος σταματάει. Αλλιώς, συμβολίζουμε με j τον παίκτη από το $\{2,3\}$ ο οποιος δεν έλαβε το P_1'. Ο παίκτης j κόβει το L σε τρία κομμάτια L_1, L_2, L_3 που εκείνος θεωρεί ισάξια ($V_j(L_1) = V_j(L_2) = V_j(L_3)$).

5.Οι παίκτες διαλέγουν κομμάτια από το σύνολο $\{L_1, L_2, L_3\}$ κατά τη σειρά $5 - j$, 1, j.

Θεώρημα 5.12. Το πρωτόκολλο 5.3.1 εξαλείφει τη ζήλια.

Απόδειξη. Αρχικά αναλογιζόμαστε τα 3 πρώτα βήματα του μηχανισμού. Μετά την περάτωσή τους, τα κομμάτια $C - L = \{P_1', P_2, P_3\}$ έχουν κατανεμηθεί. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι αυτή η μερική κατανομή είναι envy-free. Πρώτον, ο παίκτης 3 δε ζηλεύει τα κομμάτια των άλλων παικτών μιας και είναι ο πρώτος στον οποιο επιτρέπεται να διαλέξει κομμάτι από το σύνολο $\{P_1', P_2, P_3\}$. Δεύτερον, ο παίκτης 2 δε ζηλεύει τα κομμάτια των άλλων παικτών καθώς διαλέγει μεταξύ των δυο κομματιών που εκείνος θεωρεί τα δυο καλύτερα, τα P_1' και P_2. Τρίτον, σημειώνουμε ότι $V_1(P_3) = V_1(P_2) \geq V_1(P_1')$, και, καθώς το P_1' έχει ήδη διανεμηθεί και είναι μη διαθέσιμο για τον παίκτη 1, ο τελευταίος διαλέγει μεταξύ των P_2 και P_3, κομματιών που θεωρεί ισάξια και καλύτερα από το P_1'. Συνεπώς η διαμέριση εώς το σημείο αυτό είναι envy-free, γεγονός που οδηγεί αυτόματα και στο συμπέρασμα ότι εφ'όσον δεν υπάρξει διαμέριση του κομματιού P_1 από τον παίκτη 2 και $L = \emptyset$, τότε και ολόκληρο το πρωτόκολλο είναι envy-free για το ενδεχόμενο αυτό.

Εφ'όσον υπάρχει διαμέριση του κομματιού P_1 και $L \neq \emptyset$, η ακολουθία εντολών συνεχίζεται με τον παίκτη j να κόβει το κέικ σε 3 ίσα-κατά την προτίμησή του- κομμάτια, και έπειτα τους παίκτες να διαλέγουν από τα κομμάτια αυτά με τη σειρά $5 - j$, 1, j. Ο παίκτης $5 - j$, όντας ο πρώτος που διαλέγει, λαμβάνει το καλύτερο κομμάτι κατά την κρίση του και επιπροσθέτως, αθροιστικά με τα αποτελέσματα του πρώτου διαμερισμού, δε ζηλεύει κάποιον από τους άλλους παίκτες. Ο παίκτης 1 θα λάβει κάποιο από τα κομμάτια που απέμειναν, ενδεχομένως και όχι το πρώτο κατά την προτίμησή του, όμως στο σύνολο της κατανομής θα είναι ικανοποιημένος με το μερίδιό του έναντι των άλλων. Σε αυτό συντελούν τα 3 πρώτα βήματα του πρωτοκόλλου, με το πέρας των οποιων ο παίκτης 1 λαμβάνει αξία $V_1(P_1) = V_1(P_2) = V_1(P_3)$. Κατά την άποψη του ιδίου, ο παίκτης $5 - j$ έχοντας λάβει το κομμάτι P_1' από τον πρώτο «γύρο» και L_{5-j} από το δεύτερο, θα έχει συνολική αξία $V_1(P_1') + V_1(L_{5-j})$, δηλαδή μικρότερη από $V_1(P_1)$, συνεπώς επ'ουδενί δε τον ζηλεύει. Παράλληλλα ο παίκτης 1 διαλέγει κομμάτι από το σύνολο $\{L_1, L_2, L_3\} - \{L_{5-j}\}$ πριν από τον j και έτσι συνολικά δε ζηλεύει ούτε εκείνον. Τέλος, ο παίκτης j παίρνει από το σύνολο $\{L_1, L_2, L_3\}$ το κομμάτι που απομένει, όμως η επιλογή αυτή είναι αδιάφορη καθώς για τον παίκτη αυτό τα κομμάτια είναι ισάξια. Συνεπώς το πρωτόκολλο 5.3.1 μετά τον τερματισμό της ακολουθίας των εντολών που το απαρτίζουν εξαλείφει τη ζήλια.

Το πρωτόκολλο Selfridge-Conway στηρίζει τη λειτουργία του πάνω σε δυο βασικές ιδέες: την αναδρομική τομή και την αντίστροφη επιλογή. Οι παίκτες τέμνουν το κέικ με στόχο να δημιουργούν ισάξια κομμάτια, ώστε να τους εγγυάται ότι οι τμηματικές κατανομές θα τους ανταμείψουν με ένα κομμάτι που απαλείφει τη ζήλια συγκριτικά με τα υπόλοιπα, και εν συνεχεία η διαδικασία συνεχίζεται αναδρομικά με την τομή του εναπομείνοντος αγαθού. Στην αντίπερα όχθη, τα άτομα που απαρτίζουν το πρόβλημα διαλέγουν τα κομμάτια τους σε αντίστροφη σειρά με την οποια έκοψαν το κέικ και καθόρισαν κατά το δοκούν τα κομμάτια του τμήματος που τους δόθηκε να διαμερίσουν. Ο συνδυασμός των δυο αυτών στρατηγικών είναι αυτό που οι Brams και Taylor αποκαλούν «αμετάκλητο πλεονέκτημα» του παίκτη 1 πάνω στο κομμάτι του κέικ $C - L$ και του j στο L [4]. Καθώς οι παίκτες αυτοί διαιρούν το κέικ με τρόπο ώστε να θεωρούν το κομμάτι τους καλύτερο από τα άλλα μόλις η κατανομή τελειώσει, η διαδικασία εγγυάται μια envy-free διαμέριση $C - L$ και L αντίστοιχα. Το ερώτημα που αναδύεται είναι αν η τεχνική αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε πρόβλημα με πάνω από 3 παίκτες.

5.3.2 Εφαρμογή του πρωτοκόλλου Selfridge-Conway για n>3 παίκτες

Όταν ένα πρωτόκολλο εφαρμόζεται με επιτυχία στο πρόβλημα Κοψίματος του κέικ των 3 παικτών, εξαλείφει τη ζήλια μεταξύ τους και εμφανίζει σχετικά αποδεκτή πολυπλοκότητα (το πολύ 5 κοπές), εύλογα τίθεται το ερώτημα του κατά πόσο το πρωτόκολλο αυτό (ή έστω η φιλοσοφία στην οποια στηρίζεται) μπορεί να οδηγήσει σε λύσεις και αποδεκτά αποτελέσματα για περιπτώσεις περισσότερων παικτών.

Εξετάζουμε το πρόβλημα για $n = 4$ παίκτες. Σύμφωνα με μια επέκταση του πρωτοκόλλου Selfridge-Conway, ο παίκτης 1 θα έκοβε το κέικ σε 4 κομμάτια A,B,C,D που θεωρεί ισάξια, δηλαδή $V_1(A) = V_1(B) = V_1(C) = V_1(D)$. Στη συνέχεια ο παίκτης 2 θα προσάρμοζε το διαμερισμό αυτό με τρόπο ώστε να δημιουργήσει τρία ισάξια -κατά τον ίδιο- κομμάτια. Υποθέτοντας ότι για να το πετύχει αυτό θα έκοβε ένα ποσοστό από τα κομμάτια C και D, θα υπήρχαν πλέον τα κομμάτια C' και D' στη θέση τους, και επίσης υποθέτοντας ότι οι κοπές έγιναν ώστε να εξομειωθούν με το κομμάτι A, η τριπλή ισότητα θα ήταν $V_2(A) = V_2(C') = V_2(D')$. Με παρόμοιο τρόπο ο παίκτης 3 θα δημιουργούσε διπλή ισότητα (εδώ υποθέτουμε ότι για να το πετύχει αυτό θα έπρεπε να κόψει το κομμάτι B ώστε να το εξομοιώσει με το A), $V_3(A) = V_3(B')$. Μετά την αναδρομική τομή γίνεται η αντίστροφη επιλογή, και ο παίκτης 4 θα διάλεγε πρώτος το κομμάτι του. Αν όμως το κομμάτι αυτό ήταν το A, τότε ο παίκτης 3 θα υποχρεούνταν να διαλέξει με τη σειρά του το κομμάτι B' και ο παίκτης 2 ένα εκ του συνόλου $\{C', D'\}$. Έτσι ο παίκτης 1 θα κατέληγε αναγκαστικά με το κομμάτι του συνόλου $\{C', D'\}$ που θα περίσσευε, και θα ζήλευε τον παίκτη 4 που πρόλαβε να διαλέξει το A ($V_1(C') < V_1(A)$ και $V_1(D') < V_1(A)$). Συνεπώς το πρωτόκολλο 5.3 είναι μη εφαρμόσιμο σε περιπτώσεις πέραν των 3 παικτών.

Στο γενικό πλαίσιο, ο συνδυασμός αναδρομικών τομών και αντίστροφης επιλογής που περιγράφηκε υστερεί λόγω την ασύμμετρης μορφής του. Γενικότερα, το πρόβλημα επίλυσης envy-free προβλημάτων για περιπτώσεις άνω των 3 παικτών αποδείχθηκε πολύπλοκο, όμως οι Brams και Taylor ήταν οι πρώτοι που έδωσαν λύση [6] βασιζόμενοι αισθητά στη φιλοσοφία του πρωτοκόλλου Selfridge-Conway. Η λύση αυτή παρουσιάζεται στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

5.3.3 Πρωτόκολλο Brams-Taylor

Το 1995, οι ερευνητές Steven J. Brams και Alan D. Taylor παρουσίασαν λύση σε ένα πρόβλημα που υπήρχε από καταβολής Κοψίματος του κέικ: έναν envy-free μηχανισμό για πάνω από 3 παίκτες. Στηρίχθηκαν σε θεωρήματα και ιδέες που έχουν πρωτοεμφανιστεί από το 1940 (ακόμα και το Θεώρημα κυρτότητας του Liapounoff [19] ή και ένα θεώρημα ύπαρξης λύσης του Neyman [20] συμπεριλαμβάνονται σε αυτά), αλλά και με τη γνώση πως «τα ήδη γνωστά αποτελέσματα δεν είναι σε θέση να παρέχουν κάποια αψεγάδιαστη κατάτμηση [21]», και σε πιο πρακτικό επίπεδο σε μηχανισμούς και πρωτόκολλα [22][23] που αναφέρονται σε απλούστερες κατηγορίες προβλημάτων. Το πρωτόκολλο είναι μακροσκελές και η πιθανή διερεύνηση του να είναι δυσπρόσιτη, συγκριτικά με όλα τα προηγούμενα πρωτόκολλα που συζητήθηκαν. Ωστόσο, από την εκδοχή του πρωτοκόλλου για 4 παίκτες που παρατίθεται στη συνέχεια, απορρέουν ορισμένα σημαντικά συμπεράσματα.

Πρωτόκολλο 5.3.3 Brams-Taylor (envy-freeness για αυθαίρετο n)- περίπτωση 4 παικτών

1. Ο παίκτης 2 κόβει το κέικ σε 4 κομμάτια που θεωρεί ισάξια, κρατάει το ένα κομμάτι από αυτά και μοιράζει τα υπόλοιπα, ένα για κάθε άλλο παίκτη.
2. Οι παίκτες 1,3,4 διερωτώνται αν τους ικανοποιεί η κατανομή αυτή.
3. Αν οι παίκτες δεν έχουν αντίρρηση με την κατανομή, τότε ο κάθε παίκτης καταλήγει με το κομμάτι που του δόθηκε στο βήμα 1 και το πρωτόκολλο τερματίζει.
4. Αλλιώς, διαλέγουμε το μικρότερο i για το οποιο ο παίκτης i έχει αντίρρηση με την κατανομή (χάριν απλότητας υποθέτουμε $i = 1$). Ο παίκτης $i = 1$ διαλέγει ένα κομμάτι που αρχικά δόθηκε σε κάποιον άλλο παίκτη (τον οποιο ζήλευε) και το αποκαλεί κομμάτι A. Το κομμάτι που αρχικά είχε δοθεί στον 1 ονομάζεται B. Στο σημείο αυτό ο παίκτης 1 θεωρεί ότι το κομμάτι A είναι καλύτερο από το B και ο 2 τα θεωρεί ισάξια.
5. Ο παίκτης 1 ορίζει ένα θετικό ακέραιο $r \geq 10$, έτσι ώστε για κάθε διαχωρισμό του A σε r κομμάτια, ο παίκτης 1 θα προτιμάει το A, ακόμα και αν τα 7 μικρότερα –κατά τον 1- κομμάτια αφαιρούνταν από το A και προστίθεντο στο B.
6. Ο παίκτης 2 διαχωρίζει το A σε ακριβώς r κομμάτια (τα οποια θεωρεί ίσης αξίας), και κάνει το ίδιο για το B.
7. Ο παίκτης 1 διαλέγει τα μικρότερα 3 κομμάτια που προκύπτουν από το διαχωρισμό του B και τα ονομάζει Z_1,Z_2,Z_3. Διαλέγει επίσης είτε τα μεγαλύτερα 3 κομμάτια από το διαχωρισμό του A (αν θεωρεί ότι όλα είναι αυστηρώς μεγαλύτερα από τα Z_1,Z_2,Z_3) και κόβει το πολύ 2 από αυτά (προσαρμόζοντάς τα στο μήκος του μικρότερου από τα τρία), ή διαχωρίζει το μεγαλύτερο από τα κομμάτια που προέκυψαν από το διαχωρισμό του A σε 3 κομμάτια (που θεωρεί ίσης αξίας). Σε κάθε περίπτωση, τα ονομάζει Y_1,Y_2,Y_3. Με τον τρόπο αυτό η στρατηγική του παίκτη 1 εγγυάται ότι τα κομμάτια Y θα είναι μεταξύ τους ίσα, και αυστηρά μεγαλύτερα από τα Z. Ο παίκτης 2 πιστεύει ότι τα κομμάτια Z είναι ίσης αξίας, και το καθένα από αυτά είναι το λιγότερο ισάξιο με τα αντίστοιχα Y.
8. Ο παίκτης 3 παίρνει τα 6 αυτά κομμάτια. Αν πιστεύει ότι τα δυο καλύτερα κομμάτια από αυτά δεν είναι ισάξια, κόβει το μεγαλύτερο εξισώνοντας το με το δεύτερο, δημιουργώντας έτσι μια ισοπαλία.
9. Οι παίκτες 4,3,2 και 1, με τη σειρά αυτή, διαλέγουν ένα από τα 6 κομμάτια Z και Y που προέκυψαν στο βήμα 8 και που θεωρούν το καλύτερο, με τον παίκτη 3 να υποχρεούται να λάβει το κομμάτι το οποιο έκοψε, αν είναι διαθέσιμο. Ο παίκτης 2 πρέπει να διαλέξει μεταξύ των Z, ενώ ο παίκτης 1 από τα Y. Το βήμα αυτό οδηγεί σε ένα διαχωρισμό του κέικ

$\{X_1, X_2, X_3, X_4, L_1\}$, με το $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ να είναι μια envy-free κατανομή, και το L_1 το κομμάτι που απέμεινε.

10. Ο παίκτης 1 ορίζει ένα θετικό ακέραιο s, διαλεγμένο έτσι ώστε $[4V_1(L_1)/5]^s < \varepsilon$. Ο ακέραιος αυτός καθορίζει τον αριθμό επαναλήψεων που θα λάβει χώρα η διαδικασία «κόβω-διαλέγεις» που ακολουθεί, ενώ είναι και μια μορφή διασφάλισης πως ο αλγόριθμος κάποια στιγμή θα τερματιστεί.
11. Ο παίκτης 1 κόβει το L_1 σε 5 κομμάτια που θεωρεί ισάξια.
12. Ο παίκτης 2 λαμβάνει τα κομμάτια αυτά, διαλέγει τα 3 μεγαλύτερα και κόβει 1 ή 2 από αυτά προσαρμόζοντάς τα στην αξία του μικρότερου, δημιουργώντας μια τριπλή ισοπαλία.
13. Ο παίκτης 3 παίρνει τα 5 κομμάτια που πιθανόν να κόπηκαν στο προηγούμενο βήμα, διαλέγει τα 2 μεγαλύτερα και κατά τα γνωστά δημιουργεί μια τριπλή ισοπαλία στο μέγεθος του μικρότερου από αυτά.
14. Οι παίκτες 4,3,2 και 1, με τη σειρά αυτή, διαλέγουν ένα κομμάτι από αυτά. Οι παίκτες 3 και 2 είναι υποχρεωμένοι να λάβουν κάποιο από τα κομμάτια που έκοψαν.
15. Τα βήματα 11-14 επαναλαμβάνονται $s-1$ ακόμα φορές, με κάθε εφαρμογή των βημάτων αυτών να γίνεται στο κομμάτι που απέμεινε (όπως έγινε για το L_1 την πρώτη φορά). Από τη διαδικασία αυτή προκύπτει η διαμέριση $\{X_1', X_2', X_3', X_4', L_2\}$ όπου $\{X_1', X_2', X_3', X_4'\}$ είναι μια envy-free κατανομή, με την οποία ο παίκτης 1 θεωρεί ότι το X_1' είναι καλύτερο από το $X_2' \cup L_2$. Έτσι ο 1 έχει ένα αμετάκλητο πλεονέκτημα έναντι του 2, και έτσι ξεκινάει η δημιουργία ενός υποσυνόλου $\{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$ που αποκαλούμε $A.\Pi.$ (από το αμετάκλητο πλεονέκτημα), τοποθετώντας το $(1,2) \in A.\Pi.$
16. Ο παίκτης 2 κόβει το L_2 σε 12 κομμάτια που θεωρεί ίσου μεγέθους.
17. Καθένας από τους υπόλοιπους παίκτες δηλώνει αν συμφωνεί με το ότι τα κομμάτια αυτά είναι ίσα. Οι παίκτες που συμφωνούν είναι τύπου A, ενώ οι υπόλοιποι είναι τύπου D. Ο παίκτης 2 είναι προφανώς τύπου A.
18. Αν $D \times A \subset A.\Pi.$, τότε δίνουμε τα 12 κομμάτια στους παίκτες τύπου A, με τον καθένα από αυτούς να λαμβάνει τον ίδιο αριθμό κομματιών. Στην περίπτωση αυτή, ο αλγόριθμος τερματίζει.
19. Αλλιώς, διαλέγουμε το αλφαβητικά μικρότερο ζευγάρι (i,j) από το $D \times A$ το οποίο δε βρίσκεται μέσα στο $A.\Pi.$,και επιστρέφουμε στο βήμα 4 με τον παίκτη i στο ρόλο του παίκτη 1, τον παίκτη j στο ρόλο του παίκτη 2, και το L_2 στο σημείο όπου βρισκόταν το κέικ.
20. Τα βήματα 5-18 επαναλαμβάνονται. Κάθε φορά που περνάμε από το βήμα 15, προσθέτουμε και ένα ταξινομημένο ζευγάρι στο $A.\Pi.$ Παρατηρούμε πως καθώς $D \times A \subset \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$ και $A.\Pi. \subset \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$, πρέπει να προκύψει $D \times A \subset A.\Pi.$ μετά από το πολύ 16 επαναλήψεις. Στο σημείο αυτό, καταλήγουμε στο βημα 18 με μια envy-free κατανομή πάνω στο σύνολο του κέικ. Αυτό τερματίζει το πρωτόκολλο.

Εκ πρώτης όψεως, και συγκριτικά με το πρωτόκολλο Selfridge-Conway που εξετάζει την περίπτωση των 3 παικτών, διακρίνεται πως παρ'ότι οι παίκτες αυξήθηκαν μόλις σε 4, η πολυπλοκότητα της λύσης αυξάνεται κατακόρυφα. Πιο συγκεκριμένα, για $n = 3$ παίκτες οι απαραίτητες κοπές είναι το πολύ 5, ανεξάρτητα από τις συναρτήσεις αξιολόγησης τους. Ακολουθώντας όμως το μηχανισμό που παρουσιάστηκε παραπάνω, οι 4 παίκτες κάνουν τον αριθμό των κοπών απροσδιόριστα μεγάλο, κυρίως σε περιπτώσεις κατά τις οποιες οι αξιολογήσεις των παικτών περιπλέκουν το πρόβλημα. Ύστερα από τη σύγκριση αυτή, διαφαίνεται ότι με την προσθήκη νέων παικτών στο πρόβλημα το τίμημα για την εξάλειψη της ζήλιας μεταξύ των παικτών αυξάνεται εκθετικά (σημειώνεται πάντως ότι οι Brams,Taylor και Zwicker έχουν παρουσιάσει μια envy-free τακτική κινούμενου μαχαιριού για το πρόβλημα των 4 παικτών με άνω φραγμένο αριθμό κοπών[24], όπως παρόμοια έπραξε και ο O. Pikhurko[25]).

5.3.4 Κατώτατο όριο πολυπλοκότητας εξάλειψης της ζήλιας

Ο Ariel D. Procaccia σε δημοσίευσή του το 2011, παρουσίασε και απέδειξε τον ισχυρισμό του για το κατώτατο δυνατό όριο πολυπλοκότητας στα πλαίσια της οποιας μπορεί να κινηθεί μια envy-free επίλυση σε πρόβλημα n παικτών [32]. Ο ισχυρισμός διαφαίνεται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.13. Η πολυπλοκότητα της επίτευξης εξάλειψης της ζήλιας (σύμφωνα με το μοντέλο υποβολής queries των Robertson-Webb) είναι $\Omega(n^2)$.

Για να φτάσουμε στην απόδειξη του ισχυρισμού αυτού, ξεκινάμε από τον ορισμό των Edmonds και Pruhs [33], κατά τον οποιο ένα κομμάτι κέικ $X = \bigcup_{k\in K} I_k$ είναι ελαφρύ εφόσον $\sum_{k\in K} |I_k| \leq 2/n$, και βαρύ στην αντίθετη περίπτωση. Καθώς επιθυμούμε να καταλήξουμε σε ένα κατώτατο όριο, θα πρέπει να διερευνήσουμε την περίπτωση όπου τα queries απαντώνται στον αλγόριθμο με έναν περίπλοκο, αν και συνεπή τρόπο. Αποδεικνύεται χρήσιμο για το σκοπό αυτό, να δώσουν οι παίκτες μεγαλύτερο όγκο πληροφορίας στον αλγόριθμο απ'όσο απαιτείται και με τον τρόπο αυτό να διερευνηθεί το σενάριο χειρότερης περίπτωσης.

Πιο συγκεκριμένα, δοσμένου του ερωτήματος $eval_i(x_1, x_2)$, ο αλγόριθμος θα πληροφορηθεί με τις εξής τιμές: $u_i(0, x_1)$, $u_i(x_1, x_2)$, $u_i(x_2, 1)$. Αντίστοιχα, δοσμένου του ερωτήματος $cut_i(x_1, a)$, θα διαλέξουμε ένα σημείο x_2 για το οποιο $u_i(x_1, x_2) = a$, και ο αλγόριθμος θα λάβει τις ίδιες τιμές με τις παραπάνω. Θα ρίξουμε το ενδιαφέρον μας στη διαθέσιμη για τον αλγόριθμο πληροφορία, σε διαφορετικές φάσεις της εκτέλεσής του, βασισμένοι στις απαντήσεις των παικτών με τις ιδιαιτερότητες που συζητήθηκαν παραπάνω. Ορίζουμε με Π_i^t όπου $i \in N$ και t ο αριθμός των queries που έχει υποβληθεί μέχρι μια χρονική στιγμή, ως το σύνολο των κομματιών του κέικ που απαρτίζουν μια διαμέριση, κατά το στάδιο μετά τις t υποβολές queries για τον παίκτη i. Θεωρούμε ότι ένα κομμάτι $I \in \Pi_i^t$ είναι ενεργό αναφορικά με τον παίκτη i στο στάδιο t.

Η διαμέριση Π_i^t κατασκευάζεται επαγωγικά, με αφετηρία $\Pi_i^0 = \{[0,1]\}$ για κάθε παίκτη $i \in N$. Τώρα, ας υποθέσουμε ότι στο στάδιο t έχουμε τις διαμερίσεις Π_i^t για κάθε $i \in N$. Επίσης υποθέτουμε ότι το ερώτημα $t+1$ υποβάλλεται στον παίκτη i. Για κάθε $j \neq i$, $\Pi_j^{t+1} = \Pi_j^t$. Αναλογιζόμαστε δυο περιπτώσεις, βασισμένες στον τύπο του ερωτήματος $t+1$:

Περίπτωση 1: Το ερώτημα είναι $eval_i(x_1, x_2)$. Έστω $I_1 \in \Pi_i^t$έτσι ώστε $x_1 \in I_1$ και $I_2 \in \Pi_i^t$ για το οποίο $x_2 \in I_2$. Η πρώτη υποπερίπτωση είναι $I_1 \neq I_2$, οπότε:

$\Pi_i^{t+1} = (\Pi_i^t \setminus \{I_1, I_2\}) \cup \{[left(I_1), x_1], [x_1, right(I_1)], [left(I_2), x_2], [x_2, right(I_2)]\}$.

Αν $I_1 = I_2$, κατά την ίδια λογική:

$\Pi_i^{t+1} = (\Pi_i^t \setminus \{I_1\}) \cup \{[left(I_1), x_1], [x_1, x_2], [x_2, right(I_1)]\}$.

Περίπτωση 2: Το ερώτημα είναι $cut_i(x_1, a)$. Έστω $x_2 \in [0,1]$ ώστε $u_i(x_1, x_2) = a$. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι αντίστοιχη με την περίπτωση 1. Το κάτωθι λήμμα, η απόδειξη του οποιου θα συμβάλλει σημαντικά στην απόδειξη και του θεωρήματος 5.13 που θα ακολουθήσει, προκύπτει απ'ευθείας από την κατασκευή του Π_i^{t+1}.

Λήμμα 5.14. Για κάθε $i \in N$ και στάδιο t, ισχύει $\left|\Pi_i^{t+1}\right| - |\Pi_i^t| \leq 2$.

Στο σημείο αυτό, επιθυμούμε να ισχυριστούμε πως η Π_i^t είναι μια διαμέριση του $[0,1]$ σε μικρότερα κομμάτια με γνωστές αξίες.

Λήμμα 5.15. Για κάθε $i \in N$ και στάδιο t, η Π_i^t έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1.Για κάθε $I \in \Pi_i^t$, η $u_i(I)$ είναι γνωστή στον αλγόριθμο κατά το στάδιο t.

2.Για κάθε $I \in \Pi_i^t$, $I' \subsetneq I$, και $0 \leq \lambda < 1$, βασισμένοι στη διαθέσιμη πληροφορία που διαθέτει ο αλγόριθμος στο στάδιο t, θα ισχύει $u_i(I') = \lambda u_i(I)$.

Απόδειξη του λήμματος 5.15. Λαμβάνουμε υπόψιν έναν παίκτη $i \in N$. Αποδεικνύουμε το λήμμα επαγωγικά στο t. Για $t = 0$, $\Pi_i^0 = \{[0,1]\}$, και οι δυο ιδιότητες ισχύουν κατά τετριμμένο τρόπο. Υποθέτουμε ότι οι δυο ιδιότητες ισχύουν στο στάδιο t. Αποδεικνύουμε ότι ισχύουν και στο στάδιο $t+1$, κάτι που ισχύει και αν $\Pi_i^{t+1} = \Pi_i^t$. Έστω x_1, $x_2 \in [0,1]$, I_1,$I_2 \subseteq [0,1]$ κατά την κατασκευή του Π_i^{t+1}, και $I_1 \neq I_2$. Αναλογιζόμενοι την πρώτη ιδιότητα, η αξία όλων των κομματιών στο $\Pi_i^{t+1} \cap \Pi_i^t$ ήταν γνωστή στο στάδιο t από επαγωγική υπόθεση, έτσι χρειάζεται απλώς να επιβεβαιώσουμε ότι η ιδιότητα ισχύει αναφορικά με τα κομμάτια στο $\Pi_i^{t+1} \backslash \Pi_i^t$. Πράγματι, από επαγωγική υπόθεση, η αξία $u_i(0, left(I_1))$ ήταν γνωστή στο στάδιο t, καθώς το κομμάτι αυτό μπορεί να διαμοιραστεί κατά την Π_i^t. Καθώς η αξία $u_i(0, x_1)$ αποκαλύπτεται στον αλγόριθμο, ο ίδιος μπορεί να υπολογίσει ότι

$u_i(left(I_1), x_1) = u_i(0, x_1) - u_i\big(0, left(I_1)\big)$, και κατόπιν

$u_i\big(x_1, right(I_1)\big) = u_i(I_1) - u_i(left(I_1), x_1)$.

Η συμμετρική μορφή των κομματιών $[left(I_2), x_2]$ και $[x_2, right(I_2)]$ αναδεικνύει την πρώτη ιδιότητα. Για τη δεύτερη, από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι στο στάδιο t ο αλγόριθμος δεν έχει πληροφορία αναφορικά με τη διακύμανση των τιμών μέσα στα κομμάτια του $\Pi_i^{t+1} \cap \Pi_i^t$, και η απάντηση στο ερώτημα $t+1$ προφανώς δεν παρέχει μια τέτοια πληροφόρηση. Μπορεί επίσης να εξακριβωθεί ότι η δεύτερη ιδιότητα αποδεικνύεται από επαγωγική υπόθεση σχετικά με το $\Pi_i^{t+1} \backslash \Pi_i^t$, και τα I_1, I_2.

Λήμμα 5.16. Αναλογιζόμαστε κάποιο αλγόριθμο για το πρόβλημα εξάλειψης της ζήλιας. Υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος αυτός κατά κάποιο στάδιο t παρέχει ως έξοδο μια κατανομή $X_1, \ldots, X_n$. Τότε, κάθε X_i πρέπει να είναι κρίσιμο κατά τον παίκτη i στο στάδιο t.

Απόδειξη. Υποθέτουμε για αντίθεση ότι υπάρχει $i \in N$ τέτοιο ώστε το X_i να μην είναι κρίσιμο για τον παίκτη i στο στάδιο t. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια αξιολόγηση u_i συνεπής ως πρως τη διαθέσιμη πληροφορία του αλγορίθμου στο στάδιο t, έτσι ώστε ο i να ζηλεύει.

Πρώτα, ισχυριζόμαστε ότι μπορούμε να ορίσουμε $u_i(X_i) = u_i'(X_i)$. Πράγματι, για κάθε $I \in \Pi_i^t$ τέτοιο ώστε $I \nsubseteq X_i$, θέτουμε $u_i(X_i \cap I) = 0$. Αν $X_i \cap I = \emptyset$, αυτό είναι τετριμμένα πιθανό. Αλλιώς, είναι συνεπές με τη διαθέσιμη πληροφορία στο στάδιο t, καθώς το I είναι ενεργό, σύμφωνα με την ιδιότητα 2 του λήμματος 5.15. Επιπροσθέτως, αφού η Π_i^t είναι μια διαμέριση του [0,1], ισχύει ότι

$$X_i = \bigcup_{I \in \Pi_i^t} X_i \cap I$$

Ως εκ τούτου,

$$u_i(X_i) = \sum_{I \in \Pi_i^t : I \subseteq X_i} u_i(X_i \cap I) + \sum_{I \in \Pi_i^t : I \nsubseteq X_i} u_i(X_i \cap I)$$
$$= \sum_{I \in \Pi_i^t : I \subseteq X_i} u_i(I) + 0 = u_i^t(X_i)$$

Τώρα, από το συμπέρασμα ότι το μερίδιο X_i δεν είναι κρίσιμο, καταλήγουμε στο ότι υπάρχει κάποιο ενεργό κομμάτι $I \in \Pi_i^t$ τέτοιο ώστε $u_i(I) > u_i^t(X_i) = u_i(X_i)$, και αυτό έγκειται στην περίπτωση κατά την οποια $I \nsubseteq X_i$. Συνεπώς, υπάρχει $I' \subseteq I$ για το οποιο $I' \subseteq X_i = \emptyset$.

Έπειτα, παρατηρούμε ότι ένα υποδιάστημα I'' του I' πρέπει να διανεμηθεί σε κάποιον παίκτη, και η τιμή του I πρέπει να συγκεντρωθεί στο I''. Πιο επίσημα, υπάρχει $j \in N$ τέτοιο ώστε $X_j \cap I' \neq \emptyset$. Έστω $I'' = X_j \cap I'$. Καθώς το I είναι ενεργό, μπορούμε να ορίσουμε $u_i(I'') = u_i(I) > u_i(X_i)$, αξία που είναι συνεπής με τη διαθέσιμη πληροφορία στον αλγόριθμο κατά το στάδιο t. Επομένως, $u_i(X_j) \geq u_i(I'') > u_i(X_i)$. Συμπερασματικά, ο παίκτης i ζηλεύει τον παίκτη j, σε αντιδιαστολή με την ορθότητα του αλγορίθμου.

Στο σημείο αυτό ορίζουμε ως criticalight κομμάτι, το κομμάτι εκείνο που σε κάποιο στάδιο t είναι ελαφρύ και ταυτόχρονα κρίσιμο για κάποιον παίκτη i. Τον ορισμό αυτό θα το χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, μέχρι και την ολοκλήρωση της απόδειξης του θεωρήματος 5.13.

Λήμμα 5.17. Αν υπάρχει κάποια στρατηγική ακολουθώντας την οποια θα χρειαστούν το λιγότερο $T(n)$ ερωτήματα (queries) ώστε να βρεθεί ένα criticalight κομμάτι αναφορικά με κάποιο παίκτη $i \in N$, τότε η πολυπλοκότητα της envy-free διαμέρισης είναι $\Omega(nT(n))$.

Απόδειξη λήμματος 5.17. Πρωτίστως έχουμε την απαίτηση να θεωρούμε πως οι απαντήσεις στα queries που υποβάλλονται στο πρωτόκολλο για ένα παίκτη $i \in N$, δεν μπορούν να βοηθήσουν το ίδιο ώστε να βρει criticalight κομμάτι για κάποιον άλλο παίκτη $j \neq i$. Πράγματι, η ιδιότητα για κάποιο κομμάτι να είναι ελαφρύ είναι γνωστό εκ των πρωτέρων (καθώς δεν εξαρτάται από τις αξιολογήσεις των παικτών), και η ιδιότητα του να είναι κρίσιμο για τον i εξαρτάται μόνο από τη διαθέσιμη στον αλγόριθμο πληροφορία αναφορικά με το u_i. Επομένως, στο πλαίσιο της εύρεσης criticalight κομματιών, μπορούμε να ξεχωρίσουμε την ενδοσυνεννόηση του αλγορίθμου με τον καθένα από τους παίκτες. Αφού ο αλγόριθμος αλληλεπιδράσει με τους παίκτες, πρέπει να αποφασίσει πάνω σε μια envy-free κατανομή.

Τώρα, επακόλουθο της υπόθεσής μας είναι το συμπέρασμα πως αν ένας παίκτης i λάβει λιγότερο από $T(n)$ queries, τότε είναι πιθανό να σχεδιάσει μια αξιολόγηση u_i έτσι ώστε το κομμάτι που καταλήγει στον παίκτη i δεν είναι criticalight σύμφωνα με την οπτική του ιδίου.

Ας υποθέσουμε ότι $X_1, \dots, X_n$ είναι η κατανομή που επιστρέφει ο αλγόριθμος. Σύμφωνα με το λήμμα 5.16, για όλα τα $i \in N$ το X_i είναι criticalight για τον κάθε παίκτη ατομικά. Τώρα, υποθέτουμε για χάριν αντίρρησης πως περισσότερα από $n/2$ κομμάτια είναι βαριά, δηλαδή πως υπάρχει ένα σύνολο $N' \subseteq N$, $|N'| > n/2$, έτσι ώστε για όλα τα $i \in N'$, $|X_i| > 2/n$. Καθώς τα $X_1, \dots, X_n$ είναι ασυμβίβαστα, ισχύει ότι

$$\left|\bigcup_{i \in N'} X_i\right| = \sum_{i \in N'} |X_i| > \frac{n}{2} * \frac{2}{n} = 1$$

το οποίο δεν μπορεί να είναι αληθές.

Καταλήγουμε στο ότι τουλάχιστον $n/2$ από τα X_i είναι ελαφριά, και συνεπώς το λιγότερο $n/2$ των κομματιών είναι criticalight. Αυτό σημαίνει ότι ο αλγόριθμος έλυσε το πρόβλημα της εύρεσης criticalight κομματιών αναφορικά με $n/2$ παίκτες, ανεξάρτητα. Συνεπώς, η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι το λιγότερο

$$\frac{n}{2} * T(n) = \Omega(nT(n))$$

όσο είναι και το ζητούμενο.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του θεωρήματος 5.13, απομένει μόνο να αποδείξουμε ότι, δοσμένου ενός παίκτη, το να βρεθεί ένα criticalight κομμάτι δεν είναι ένα ιδιαίτερα πολύπλοκο ζήτημα.

Απόδειξη του θεωρήματος 5.13. Από το λήμμα 5.17, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ότι υπάρχει μια αντίπαλη στρατηγική έτσι ώστε $\Omega(n)$ queries χρειάζονται έτσι ώστε να βρεθεί ένα criticalight κομμάτι αναφορικά με τον παίκτη $i \in N$.

Επικεντρώνουμε σε ένα παίκτη i. Σχεδιάζουμε έναν αντίπαλο που απαντάει στα queries λαμβάνοντας υπόψη τον παίκτη i. Η απάντηση στο ερώτημα $eval(x_1, x_2)$ είναι ότι $u_i(0, x_1) = x_1$, $u_i(x_1, x_2) = x_2 - x_1$, και $u_i(x_2, 1) = 1 - x_2$. Η απάντηση στο ερώτημα $cut(x_1, a)$ προκύπτει θέτοντας $x_2 = x_1 + a$ και απαντώντας όπως παραπάνω. Με απλά λόγια, ο αντίπαλος πάντα δίνει απαντήσεις που θα έδινε με γνώμονα ότι η αξιολόγηση u_i είναι ομοιογενώς κατανεμημένη στο διάστημα [0,1].

Συμβολίζουμε $t^* = n/4 - 1$. Από το λήμμα 5.14 ανακύπτει πως για όλα τα $t \leq t^*$, ισχύει

$\left|\Pi_i^t\right| \leq \left|\Pi_i^0\right| + 2t^* = 1 + n/2 - 2 < n/2$. Ακολούθως, πρέπει να υπάρχει κάποιο ενεργό κομμάτι I^* στο στάδιο t με $|I^*| > 2/n$. Η αξιολόγηση για κάθε ενεργό κομμάτι I είναι γνωστό ότι είναι $|I|$, έτσι $u_i(I^*) = |I^*| > 2/n$. Με παρόμοιο τρόπο, για κάθε ελαφρύ κομμάτι X του κέικ, $u_i^t(X) \leq |X| \leq 2/n < u_i(I^*)$. Επομένως, δεν υπάρχει ελαφρύ κομμάτι που να είναι κρίσιμο για κάποιον παίκτη i σε οποιοδήποτε στάδιο $t \leq t^*$, και συνεπώς δεν υπάρχει criticalight κομμάτι για τον παίκτη i. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο αριθμός των queries που απαιτούνται για να βρούμε ένα criticalight κομμάτι είναι το λιγότερο $n/4 = \Omega(n)$.

Η παραπάνω θέσπιση ενός κατωτάτου ορίου για την εξάλειψη της ζήλιας αποτελεί ένα πολύ σημαντικό μέρος της ολικής μελέτης γύρω από τη μελέτη δίκαιης διανομής αγαθών. Ο Ariel Procaccia, γνωστός ερευνητής πάνω στο ζήτημα, βασισμένος σε παλαιότερες δημοσιεύσεις όπως εκείνες των Brams, Busch, Chevaleyre, Stromquist, Woeninger και Sgall [34-38].

6

Πρωτόκολλα

Μέχρι και αυτό το σημείο της εργασίας, η έρευνα πάνω στο πρόβλημα του Κοψίματος του κέικ είχε ως επίκεντρο τη δίκαιη κάλυψη των αναγκών των παικτών της διανομής, χωρίς οι μηχανισμοί που ορίζουν τις κατανομές να λαμβάνουν υπόψη περαιτέρω περιορισμούς για να αποφανθούν κάποιο αποτέλεσμα. Όμως, ως είθισται σε πολλές περιπτώσεις, στα προβλήματα εισέρχονται επιπλέον παράγοντες που αυξάνουν την πολυπλοκότητα του προβλήματος και περιορίζουν ακόμα περισσότερο την ελευθερία κινήσεων στα πρωτόκολλα διανομής. Οι περιορισμοί αυτοί προσδίδουν νέο ενδιαφέρον στη μελέτη πάνω στο πρόβλημα και παρέχουν περισσότερα σενάρια προς διερεύνηση. Ένας από τους πιο διαδεδομένους περιορισμούς, ο οποίος θα αναλυθεί και στο παρόν κεφάλαιο είναι το ελάχιστο κομμάτι διανομής για κάθε παίκτη.

6.1 Εισαγωγή

Όπως έχει γίνει κατ' επανάληψη αντιληπτό, από τα πρώτα μόλις κεφάλαια της παρούσας εργασίας, η αποκλειστικά μαθηματική προσέγγιση του Κοψίματος του κέικ δε συμβαδίζει πάντα με το πραγματικό πρόβλημα και τα ρεαλιστικά σενάρια που προκύπτουν από τις ανάγκες των παικτών. Ένα από τα σενάρια αυτά εντοπίζεται στην περίπτωση διαρκούς κατάτμησης του κέικ, με συνέπεια τη δημιουργία υπερβολικά μεγάλου αριθμού κομματιών, που διαισθητικά προσεγγίζουν τρίμματα. Τα κομμάτια με απειροελάχιστο μήκος παρουσιάζουν μηδαμινή αξία για τους παίκτες, κάτι που δε μεταφράζεται στη μαθηματική γλώσσα και είναι άγνωστο για τα πρωτόκολλα διαχωρισμού αγαθών. Έτσι, μια ανάγκη που γεννιέται με την αφορμή αυτή, είναι η θέσπιση κατώτατων ορίων μήκους κομματιών που μπορούν να κοπούν, έτσι ώστε να μη δημιουργούνται κομμάτια χωρίς αξία για τους παίκτες που περιορίζουν τη χρησιμότητα του αγαθού.

Το κατώτατο μήκος κομματιού, δεν είναι κάτι που μπορεί να οριστεί ολικά στο πρόβλημα, αλλά έγκειται στις επιθυμίες του κάθε παίκτη εξατομικευμένα. Έτσι, δοσμένου $i \in N$, ορίζεται η παράμετρος ελάχιστου μήκους λ_i, η οποια ορίζει πως για κομμάτια μήκους μικρότερου του λ_i ο παίκτης i έχει μηδενική αξιολόγηση.

Ορισμός 6.1. Σε πρόβλημα N παικτών, και για κάθε παίκτη $i \in N$ ορίζεται η ποσότητα $D(i,[0,1])$, η οποία υποδεικνύει τα τμήματα του κομματιού X που ενδιαφέρουν τον παίκτη i, και $d(i,X) = |D(i,X)|$ το συνολικό μήκος των τμημάτων αυτών. Σε πρόβλημα με τμηματικά ομοιογενείς αξιολογήσεις και με ελάχιστο μήκος κομματιού, κάθε παίκτης επιθυμεί ομοιόμορφα ένα τμήμα $D(i,[0,1])$ από το κέικ, και ορίζει το κατώτατο όριο μήκους λ_i. Η συνάρτηση αξιολόγησης του παίκτη ως προς ένα κομμάτι X ορίζεται ως $V_i(X) = \frac{\sum_{I \in D(i,X):|I| \geq \lambda_i} |I|}{d(i,[0,1])}$.

Παράδειγμα. Από το σύνολο του κέικ, ο παίκτης i έχει δηλώσει ότι επιθυμεί τα κομμάτια $[0, 0.2]$ και [0.5, 0.8]. Επιπλέον, έχει δηλώσει $\lambda_i = 0.2$. Αν του δοθεί το $X = \{[0.1, 0.3], [0.4, 0.7]\}$, η αξιολόγησή του για αυτό θα είναι $V_i(X) = 0.4$, καθώς το κομμάτι $[0.1, 0.2]$ έχει για αυτόν μηδενική αξία.

Για να γίνει αναφορά στην πολυπλοκότητα προβλημάτων με κατώτατο όριο μήκους κομματιών, όπως θα γίνει στο παρόν κεφάλαιο, είναι αναγκαίο να κατανοηθεί το μέγεθος της εισόδου δεδομένων (input) που χρειάζεται ο κάθε μηχανισμός για να αποφανθεί κάποια μορφή λύσης. Η είσοδος αυτή απαρτίζεται από τα όρια των κομματιών που επιθυμούν οι παίκτες, αλλά και το διάνυσμα $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ των ελαχίστων μηκών. Συνεπώς, υπό την προϋπόθεση ότι όλοι οι παίκτες του προβλήματος δηλώνουν πλήρως τις προτιμήσεις τους, το μήκος της εισόδου εξαρτάται από τον αριθμό των bits που χρειάζεται ώστε να αναπαρασταθούν τα μεγέθη αυτά.

6.2 Αναλογικότητα μέσω προσέγγισης

Σε προβλήματα όπου δεν υπάρχει περιορισμός για το ελάχιστο μήκος κομματιού, η αναλογικότητα είναι πάντα εφικτή για οποιοδήποτε αριθμό παικτών (όπως έχει υποδειχθεί σε πολλές δημοσιεύσεις[4]). Με τη θέσπιση όμως του περιορισμού αυτού, η αναλογικότητα γίνεται πλέον μη δεδομένη.

Παράδειμα. Σε πρόβλημα 2 παικτών με τμηματικά ομοιογενή αξιολόγηση, οι παίκτες δηλώνουν πως επιθυμούν ολόκληρο το κέικ, καθώς και $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Στην περίπτωση αυτή, είναι αδύνατη η περίπτωση ύπαρξης ομογενούς λύσης (το λιγότερο ένας παίκτης θα καταλήξει με μηδενική αξία από το αγαθό).

Για να μπορεί να αντιμετωπιστεί η αδυναμία βέβαιης διασφάλισης της αναλογικότητας, τρεις ερευνητές με δημοσίευσή τους (I. Καραγιάννης, J. Lai, A. Procaccia) πρότειναν την προσέγγιση ως μια δικλείδα προστασίας έναντι ανισομερών καταμερισμών που μπορούν να προκύψουν από ακραίες ανάγκες δηλωμένες από τους παίκτες[26][27][28]. Οι μηχανισμοί διαμέρισης σε προβλήματα με περιορισμό μικρότερου δυνατού μήκους, πρέπει με κάποιο τρόπο να «ανταμείβουν» τους παίκτες που δηλώνουν σχετικά μικρά λ_i.

Ορισμός 6.2. Μια κατανομή $X_1, \dots, X_n$ είναι β-αναλογική αναφορικά με τις αξιολογήσεις $V_1, \dots, V_n$, αν για κάθε $i \in N$, $V_i(X_i) \geq 1/n - \beta * l_i$. Ένας αλγόριθμος κοπής κέικ είναι β-αναλογικός αν, δοσμένων των αξιολογήσεων $V_1, \dots, V_n$, παράγει πάντα μια β-αναλογική κατανομή σεβόμενη τις αξιολογήσεις αυτές. Ισοδύναμα, ένας β-αναλογικός αλγόριθμος εγγυάται ότι $\sum_{I \in D(i, X_i): |I| \geq \lambda_i} |I| \geq \frac{d(i,[0,1])}{n} - \beta * \lambda_i$.

Παρακάτω παρουσιάζεται ένας $2\,(n-1)/n$-αναλογικός και πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος, όπως παρουσιάστηκε από την παραπάνω ερευνητική ομάδα (Καραγιάννης,Lai,Procaccia[26]).

Αλγόριθμος 6.3. $2\,(n-1)/n$-αναλογικός μηχανισμός

Είσοδος: $V_1, \dots, V_n$

1.ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ(S,u,($V_1, \dots, V_n$))

ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ(S,u,($V_1, \dots, V_n$)):

1.**Αν** $S = \{i\}$, θέτω $X_i = [u, 1]$ και επιστρέφω.

2.Για κάθε $i \in S$:

$r_i^* = \min\left\{r : r \in [u, 1], V_i([u, r]) \geq \frac{V_i([u,1])}{|S|} - \frac{2(|S|-1)l_i}{|S|}\right\}.$

3.$r^* = min_{i \in S} r_i^*$,$i^* = argmin_{i \in S} r_i^*$

4.Θέτω $X_{i^*} = [u, r]$.

5.ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ$(S\{i^*\}, r)$

Για $n = 2$, παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος είναι το πολύ 1 −αναλογικός. Προτού αποδειχθεί ο ισχυρισμός ότι ο αλγόριθμος είναι $2\,(n-1)/n$-αναλογικός, θα χρειαστεί το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 6.4. Θεωρούμε ένα συνεχόμενο κομμάτι $[u, v]$ εντός του κέικ, και ένα σημείο $w \in [u, v]$. Ισχύει $V_i([w, v]) \geq V_i([u, v]) - V_i([u, w]) - 2l_i$.

Απόδειξη. Το μέγεθος $V_i([u, w]) + V_i([w, v])$ μπορεί να είναι μικρότερο από το $V_i([u, v])$ καθώς το σημείο τομής w μπορεί να βρίσκεται σε θέση τέτοια ώστε να προκύπτουν δυο κομμάτια μήκους μικρότερο από λ_i. Για παράδειγμα, ορίζουμε κάποιο $w \in (b, c)$ όπου $(b, c) \in D_i([u, v])$. Αν $w - b \geq \lambda_i$ και $c - w \geq \lambda_i$, δε χάνεται αξία για τον παίκτη i, προσθέτοντας τις αξίες $[u, w]$ και $[w, v]$ συγκριτικά με το $[u, v]$. Ωστόσο, σε περίπτωση που το w είναι τέτοιο ώστε $w - b < \lambda_i$ ή $c - w < \lambda_i$, το άθροισμα των αξιών των κομματιών $[u, w]$ και $[w, v]$ γίνεται μικρότερο από το συνεχές κομμάτι $[u, v]$. Η μέγιστη αξία που μπορεί να χαθεί είναι $2\lambda_i$ (λ_i από κάθε πλευρά της τομής στο w). Συνεπώς $V_i([u, w]) + V_i([w, v]) \geq V_i([u, v]) - 2l_i$, και μεταφέροντας το $V_i([u, w])$ στο δεύτερο μέλος επιβεβαιώνεται το λήμμα.

Η απόδειξη της $2\,(n-1)/n$-αναλογικότητας για τον αλγόριθμο 6.3 προκύπτει επαγωγικά ως προς το $|S|$, και παράλληλα δείχνοντας ότι η ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ δίνει σε κάθε παίκτη $i \in S$ αξία τουλάχιστον $V_i([u, 1])/|S| - 2(|S| - 1)l_i/|S|$ (δηλαδή ότι η ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ είναι $2\,(n-1)/n$-αναλογική στο κομμάτι $[u, 1]$ και το σύνολο S των παικτών). Η ισχύς της πρότασης είναι εμφανής για τους παίκτες i^* που ήδη έχουν πάρει το μερίδιό τους, ενώ για τους υπόλοιπους, λαμβάνοντας υπόψη το λήμμα 4, αλλά και το γεγονός ότι δεν επιλέχτηκαν από τον αλγόριθμο, μπορούμε να αποφανθούμε πως κατέχουν αρκετή αξία από το κέικ έτσι ώστε η επαγωγική υπόθεση να εγγυάται την αναλογικότητα του μηχανισμού στο σύνολό του.

Αναλογιζόμενοι ξανά την περίπτωση των 2 παικτών, όπου οι παίκτες επιθυμούν ολόκληρο το κέικ και δηλώνουν $\lambda_1 = \lambda_2 = l_1 = l_2 = 1/2 + \varepsilon$, και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο 6.3 ως μηχανισμό κατανομής, ένας από τους παίκτες θα καταλήξει με μηδενική αξία. Συνεπώς, είναι αδύνατο να εγγυηθεί στους παίκτες αξία μεγαλύτερη από $1/2 - l_i + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, και για το λόγο αυτό ο αλγόριθμος 6.3 στην περίπτωση $n = 2$. Στο γενικό πλαίσιο, το παρακάτω θεώρημα θεμελιώνει πως ο αλγόριθμος 6.3 είναι βέλτιστος για τα χειρότερα σενάρια που μπορούν να προκύψουν (worst-case optimal) για οποιοδήποτε αριθμό παικτών:

Θεώρημα 6.5. Για κάθε αριθμό παικτών n, υπάρχουν αξιολογήσεις με ελάχιστο μήκος κομματιού οι οποιες αποκλείουν την ύπαρξη β-αναλογικών αλγορίθμων τομής, με $\beta < 2(n-1)/n$.

Το θεώρημα 6.5 δεν αποκλείει την περίπτωση να υπάρχουν κατανομές με καλύτερο βαθμό αναλογικότητας για ορισμένες αξιολογήσεις. Αντιθέτως, γίνεται να υπάρξει κάποιος αλγόριθμος με λύση που ταιριάζει με αυτή του αλγορίθμου 6.3 στο χειρότερο σενάριο, και να επιστρέφει κατανομές που εγγυώνται μεγαλύτερη αναλογικότητα (μικρότερο β) σε άλλες περιπτώσεις. Ωστόσο, η συνδυαστική φύση του προβλήματος όταν εμπεριέχεται ο περιορισμός για το μήκος του κομματιού θέτει όρια σε ό,τι μπορεί να επιτευχθεί μέσω αλγορίθμων πολυωνυμικού χρόνου.

6.3 *Εξάλειψη της ζήλιας*

Ενώ ο αλγόριθμος 6.3, όπως εξετάστηκε στην παραπάνω παράγραφο, παρέχει τη βέλτιστη λύση σε χειρότερα δυνατά σενάρια, δεν αντιμετωπίζει την εξάλειψη της ζήλιας. Αντιθέτως, υπο την εφαρμογή του, είναι δυνατόν ένας παίκτης που λαμβάνει πρώτος το μερίδιό του να εκτιμά περισσότερο κάποιο κομμάτι που δίνεται αργότερα σε κάποιον άλλο ομόλογό του.

Το ερώτημα που τίθεται ως φυσική συνέπεια της ανάγνωσης του μηχανισμού αυτού, είναι το κατά πόσο μπορεί να βρεθεί μια λύση που εξαλείφει τη ζήλια μεταξύ των παικτών, διατηρώντας όμως παράλληλα και τις ιδιότητες του. Πιο συγκεκριμένα, αναζητείται η ύπαρξη ενός $2(n-1)/n$-αναλογικού και πλήρως envy-free αλγορίθμου. Μέχρι σήμερα, θετικό αποτέλεσμα στην αναζήτηση αυτή έχει υπάρξει στο πρόβλημα των 2 παικτών[26], και τον αλγόριθμο που επιλύει το πρόβλημα αυτό τον παρουσιάζουμε στην παρούσα παράγραφο. Πρωτίστως όμως, θα χρειαστεί να οριστεί ένα ζευγάρι μεγεθών, ο κατάλληλος συνδυασμός των οποίων εγγυάται μια δίκαια κατανομή στην κατηγορία προβλημάτων που εξετάζουμε:

Αρχικά ορίζουμε ένα φίλτρο F ως τη συνάρτηση που δέχεται ως όρισμα ένα οριοθετημένο κομμάτι του κέικ, και επιστρέφει ένα σύνολο από κάποια από τα μέρη του κομματιού αυτού. Για παράδειγμα, από το κομμάτι $[0, 0.5]$ του συνολικού αγαθού, θα μπορούσε κανείς να διαλέξει τα μέρη $\{[0, 0.15], [0.35, 0.5]\}$, πετώντας το $[0.15, 0.35]$. Σε αυτή την περίπτωση, $F([0, 0.5]) = \{[0, 0.15], [0.35, 0.5]\}$. Το φίλτρο αυτό σε συνδυασμό με το σημείο τομής x, σύμφωνα με το οποιο διαχωρίζεται σε δυο κομμάτια το κέικ, απαρτίζει το ζευγάρι φίλτρου-σημείου τομής (F_i, x_i).

Ορισμός 6.6. Ένα ζευγάρι φίλτρου-σημείου τομής (F_i, x_i) είναι δίκαιο, αν :

1) $\mathrm{V_i}(F_i([0, x_i])) = V_i(F_i([x_i, 1]))$
2) $V_i\big(F_i([0, x_i])\big) \geq 1/2 - l_i$.

Έχοντας ορίσει τα παραπάνω, παρουσιάζουμε τον παρακάτω envy-free και 1-αναλογικό αλγόριθμο για το πρόβλημα των 2 παικτών:

Αλγόριθμος 6.7. 1-αναλογικός και envy-free αλγόριθμος για $n = 2$

1.Υπολόγισε δίκαια ζευγάρια φίλτρου-σημείου τομής (F_1, x_1), (F_2, x_2).

2.Υποθέτουμε $x_1 \leq x_2$. Αλλιώς, οι ρόλοι μπορούν να αντιστραφούν

3.Συμβολίζουμε $X_1 = F_1([0, x_1])$, $X_2 = F_2([x_2, 1])$. Αν η κατανομή είναι envy-free, επιστρέφω

4.Αν και οι δυο παίκτες ζηλεύουν, τα κομμάτια των παικτών ανταλλάζονται και επιστρέφω.

5.Αν ο παίκτης 1 ζηλεύει, του επιτρέπεται να διαλέξει μεταξύ των $F_2([0, x_2])$ και $F_2([x_2, 1])$, δίνοντας στον παίκτη 2 το κομμάτι που περισσεύει από την επιλογή αυτή.

6.Αν ο παίκτης 2 ζηλεύει, του επιτρέπεται να διαλέξει μεταξύ των $F_1([0, x_1])$ και $F_1([x_1, 1])$, δίνοντας στον παίκτη 1 το κομμάτι που περισσεύει από την επιλογή αυτή.

Λήμμα 6.8. Υποθέτοντας ότι υπάρχουν ζευγάρια φίλτρου-σημείου τομής (F_1, x_1),(F_2, x_2), ο αλγόριθμος 6.7 είναι 1-αναλογικός και envy-free

Απόδειξη. Αν ο αλγόριθμος 6.7 ολοκληρώνεται μετά την τέλεση του βήματος 3, τότε και οι δυο παίκτες καταλήγουν με ένα αναλογικό μερίδιο από το κέικ και δε ζηλεύουν το κομμάτι του άλλου. Αν ο αλγόριθμος τερματίζει στο βήμα 4, δεν υπάρχει ζήλια καθώς πριν γίνει η ανταλλαγή των κομματιών και οι δυο προτιμούν το κομμάτι του άλλου παίκτη, ενώ ικανοποιείται και η αναλογικότητα καθώς παρ’ότι ο κάθε παίκτης προτιμά την τελική κατανομή από την αρχική, η αρχική ικανοποιεί το μηχανισμό. Αν ο αλγόριθμος τερματίζει στο βήμα 5, ο παίκτης 2 καταλήγει με αναλογικό κομμάτι, και καθώς εκείνος επιλέγει κομμάτι δε ζηλεύει. Ο παίκτης 1 λαμβάνει αναλογικό κομμάτι αφού στη χειρότερη περίπτωση θα λάβει το $F_2([x_2, 1])$, το οποιο το προτιμά από το$F_1([0, x_1])$. Επειδή ο παίκτης 1 έχει να διαλέξει μεταξύ των κομματιών $F_2([0, x_2])$ και $F_2([x_2, 1])$, δε γίνεται να ζηλεύει.

Παρόμοια επεξήγηση υπάρχει και για την περίπτωση που ο αλγόριθμος τερματίζει με το τέλος του βήματος 6.

7

Ομαδικά κριτήρια για την αποδοτικότητα των αλγορίθμων

Σε προβλήματα θεωρητικής πληροφορικής, και πιο συγκεκριμένα σε θέματα που ανάγονται στην οικογένεια των προβλημάτων της θεωρίας παιγνίων αλλά και του mechanism design, τα κριτήρια που αξιολογούν τα αποτελέσματα κάποιου αλγορίθμου εστιάζουν στο κατά πόσο καλύπτονται τα εξατομικευμένα και τα ομαδικά συμφέροντα. Με παρόμοιο τρόπο, το ατομικό και ομαδικό συμφέρον βρίσκεται στο επίκεντρο της μελέτης και για το πρόβλημα του Κοψίματος του κέικ. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας μέχρι και το σημείο αυτό, εξετάστηκαν τα κριτήρια που αξιολογούν τους διάφορους μηχανισμούς διαμέρισης με μοναδικό γνώμονα το προσωπικό όφελος του κάθε παίκτη, αγνοώντας τις συνέπειες που μπορεί να έχει η μονομέρεια της προσέγγισης αυτής ως προς το γενικό συμφέρον.

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί αρχικά διατυπώνεται η έννοια του γενικού καλού, όπως αυτή εμφανίζεται σε ένα πρόβλημα πολλών παικτών που αποζητούν την κάλυψη των προσωπικών τους αναγκών μέσω μιας διαμέρισης αγαθού, και την αντίθεση της κοινωφέλειας με το εξατομικευμένο συμφέρον. Εν συνεχεία, μετά τη διατύπωση των απαραίτητων μαθηματικών συμβολισμών και κριτηρίων, παρουσιάζεται μια μέθοδος επίλυσης για το πρόβλημα των 2 παικτών, χρησιμοποιώντας ως μέσο την έννοια της αναλογίας κέρδους. Τέλος, συγκρίνονται τα αποτελέσματα που δίνουν μερικά βασικά υποσύνολα ομαδικά βέλτιστων λύσεων, μέσα από θεωρήματα που έχουν παρουσιαστεί από τη μέχρι τώρα βιβλιογραφία.

7.1 Το γενικό καλό ως έννοια

Ως είθισται, κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα που απαρτίζεται από ένα σύνολο ατόμων δεν κρίνεται μόνο από το βαθμό στον οποιο καλύπτει τις ανάγκες των ατόμων αυτών ξεχωριστά, αλλά και από το συνολικό όφελος που προκύπτει από τη συνεργασία και τη συνύπαρξη τους. Ωστόσο, το προσωπικό συμφέρον δε συμβαδίζει απαραίτητα με την ευημερία του συνόλου: η καθημερινή εμπειρία και η ανθρώπινη Ιστορία γενικότερα έχουν αναδείξει παραδείγματα όπου η ευημερία των ανθρώπων θυσιάζεται για το καλό της ομάδας ή της κοινωνίας που απαρτίζουν, και αντίστροφα.

Η αντίθεση αυτή συναντάται και στο πρόβλημα κοπής του κέικ: ο κάθε παίκτης, κοιτάζοντας να διασφαλίσει ό,τι καλύτερο μπορεί αναφορικά με το μερίδιό του από το αγαθό, συμβάλλει στο να ελλατώνονται οι πιθανότητες εξεύρεσης μιας λύσης που θα βρίσκει σύμφωνους τους παίκτες στο σύνολό τους. Σε καταστάσεις όπου οι παίκτες δρουν σκεπτόμενοι μόνο ατομικά, δημιουργείται ένα υπόβαθρο ασύμφορο για το συμφέρον του συνόλου τους, και παράλληλα οι ίδιοι καλούνται να πληρώσουν το λεγόμενο Τίμημα της Αναρχίας (price of anarchy), δηλαδή να υποστούν το επακόλουθο του ατομισμού στον τρόπο που διεκδίκησαν το μερίδιό τους.

Βεβαίως, πρόβλημα συναντάται και σε περιπτώσεις όπου το πρώτο μέλημα του μηχανισμού διαμέρισης είναι το γενικό καλό. Σε παραδείγματα που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, θα δούμε πως η προσέγγιση αυτή μπορεί να οδηγήσει πολλές φορές σε εντελώς ανισομερείς κατανομές, με μερικούς από τους παίκτες να καταλήγουν με αμελητέα ή και καθόλου αξία από το αγαθό, κατάληξη ολέθρια και εντελώς ανεπιθύμητη.

7.2 Μαθηματική απεικόνιση του γενικού καλού

Η κοινωφέλεια στο πρόβλημα που εξετάζουμε προσδιορίζεται με δυο τρόπους: την Pareto βελτιστότητα και την ομαδική αποδοτικότητα (χωρίς η τελευταία να συσχετίζεται με την αποδοτικότητα των αλγορίθμων που αναφέρθηκε εως τώρα). Οι δυο αυτές έννοιες ορίζονται παρακάτω:

Ορισμός 7.1. Μια κατανομή $X = (X_1, \dots, X_n)$ είναι Pareto-βέλτιστη, αν δεν υπάρχει κάποια άλλη κατανομή $X' = (X'_1, \dots, X'_n)$ τέτοια ώστε $V_i(X_i) \leq V_i(X'_i)$ για όλα τα $i \in N$ και $V_j(X_j) < V_j(X'_j)$ για κάποιο $j \in N$.

Ορισμός 7.2. Μια κατανομή $X = (X_1, \dots, X_n)$ είναι ομαδικά βέλτιστη, αν για κάθε άλλη κατανομή $X' = (X_1', \dots, X_n')$, ισχύει $\sum_{i=1}^{n} V_i(X_i) \geq \sum_{i=1}^{n} V_i(X_i')$.

Το σύνολο $\sum_{i=1}^{n} V_i(X_i)$ των αξιολογήσεων όλων των παικτών $i \in N$ ως προς το κομμάτι που λαμβάνουν, είναι και το διαπιστευτήριο για το βαθμό της κοινοφέλειας που διέπει την κατανομή. Όσο μεγαλύτερο είναι, τόσο προσεγγίζει και τη βέλτιστη ομαδική λύση. Την ποσότητα αυτή τη συμβολίζουμε με $s(X)$.

Η Pareto-βελτιστότητα και η ομαδική βελτιστότητα δεν οδηγούν υποχρεωτικά σε διαφορετικές λύσεις. Για παράδειγμα, αν P είναι κάποια κλάση από κατανομές (λ.χ. η κλάση των envy-free κατανομών), τότε μια κατανομή $X^* \in P$ είναι ομαδικά βέλτιστη ως προς την κλάση P αν ικανοποιείται η σχέση $s(X^*) = \max_{X \in P} s(X)$. Το παρακάτω θεώρημα, αποδεικνύει ότι στις πλήρεις κατανομές η ομαδική αποδοτικότητα είναι ισχυρότερη έννοια από την Pareto-βελτιστότητα:

Θεώρημα 7.3. Αν X είναι μια ομαδικά βέλτιστη κατανομή, τότε επιπλέον είναι και Pareto-βέλτιστη.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η κατανομή X δεν είναι Pareto-βέλτιστη μεταξύ των πλήρων κατανομών. Άρα, υπάρχει κάποια envy-free κατανομή $X' = (X_1', \dots, X_n')$, όπου $V_i(X_i') \geq V_i(X_i)$ για κάθε i και $V_j(X_j') > V_j(X_j)$ για κάποιο j. Προσθέτοντας τις ανισώσεις λαμβάνουμε $\sum_{i \neq j} V_i(X_i) + V_j(X_j) < \sum_{i \neq j} V_i(X_i') + V_j(X_j')$ που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι η X δεν είναι Pareto-βέλτιστη. Συνεπώς η X είναι εν τέλει Pareto-βέλτιστη.

7.3 *Μαθηματική απεικόνιση του γενικού καλού*

Ως μια πρώτη προσπάθεια να θεσπίσουμε μηχανισμούς διαμέρισης υπο το πρίσμα της ομαδικής βελτιστότητας, θεωρούμε το παρακάτω παράδειγμα:

Σε πρόβλημα $n = 3$ παικτών με τμηματικά ομοιογενείς αξιολογήσεις, οι προτιμήσεις των παικτών είναι αντίστοιχα $V_1 = [0, 0.5]$, $V_2 = [0.25 ,1]$ και $V_3 = [0,1]$. Αν εξετασθεί το κέικ τμηματικά, θα συμπεράνουμε πως για όλα τα σημεία του διαστήματος $[0, 0.5]$ ο παίκτης 1 έχει τη μεγαλύτερη αξιολόγηση, ενώ αντίστοιχα για διάστημα $[0.5, 1]$ τη μεγαλύτερη αξιολόγηση την έχει ο 2. Το σύνολο $\sum_{i=1}^{n} V_i(X_i)$ γίνεται μέγιστο όταν όλα τα κομμάτια του κέικ διανέμονται στους παίκτες που τα αξιολογούν περισσότερο, και αν η αρχή αυτή εφαρμοζόταν στο πρόβλημα αυτό ο παίκτης 1 θα λάμβανε το πρώτο μισό του κέικ, ο παίκτης 2 το δεύτερο μισό, ενώ ο παίκτης 3 θα κατέληγε χωρίς κομμάτι. Η κατάληξη αυτή, παρ'ότι βελτιστοποιεί το ομαδικό όφελος είναι προφανώς μη αποδεκτή.

Η παραπάνω περίπτωση καθιστά σαφές πως η τυφλή εξυπηρέτηση του ομαδικού συμφέροντος παραβλέποντας εντελώς το ατομικό στοιχείο, είναι δυνατό να οδηγήσει σε ακραίες λύσεις που εξυπηρετούν μόνο ένα υποσύνολο των ατόμων που απαρτίζουν μία διαμέριση, και καταδικάζουν τους υπόλοιπους παίκτες στο να λαμβάνουν πολύ μικρά μερίδια από το αγαθό. Το συμπέρασμα αυτό δημιουργεί την ανάγκη εξεύρεσης λύσεων που δεν αποσκοπούν αποκλειστικά στο ατομικό ή το ομαδικό όφελος, αλλά αποζητούν τη χρυσή τομή αναμεταξύ τους, ώστε να υπάρχει αρμονία ως προς την ευημερία των ατόμων και το ομαδικό –και κατ'επέκταση κοινωνικό- σύνολο.

7.4 Ένας αφηρημένος αλγόριθμος για 2 παίκτες

Στην παράγραφο αυτή περιγράφεται ένας αφηρημένος (abstract) μηχανισμός, παρουσιασμένος από τους Cohler, Lai, Parkes και Procaccia[39] (βασισμένοι σε παλαιότερες δημοσιεύσεις[40-42]), ο οποιος επιστρέφει ομαδικά βέλτιστη και envy-free λύση για το πρόβλημα των $n = 2$ παικτών με γενικές αξιολογήσεις. Η ιδιότητα «abstract» που του αποδίδεται, οφείλεται στο ότι δεν μπορεί να εφαρμοστεί μέσα σε ένα πλαίσιο ρητών που απαρτίζονται από αριθμημένα bits.

Ουσιαστικά, ο αλγόριθμος αυτός δουλεύει ξεκινώντας με μια ομαδικά βέλτιστη κατανομή και την ανταλλαγή κομματιών του κέικ μεταξύ των παικτών μέχρι το σημείο όπου κανείς παίκτης δε θα ζηλεύει το κομμάτι του ομολόγου του. Συνεπώς το ζητούμενο θα είναι ο προσδιορισμός των κομματιών εκείνων που θα πρέπει ανα πάσα στιγμή να ανταλλάσονται. Ένα καθοριστικό μέγεθος για να πραγματοποιηθεί ο προσδιορισμός αυτός είναι η αναλογία κέρδους.

Ορισμός 7.4. Η αναλογία κέρδους στο διάστημα $x \in [0,1]$, όπου $u_2(x) \neq 0$, ορίζεται ως $R(x) = u_1(x)/u_2(x)$.

Η αναλογία κέρδους αντικατοπτρίζει το ύψος της αξίας με την οποία ο παίκτης 1 κοστολογεί ένα ορισμένο κομμάτι του κέικ συγκριτικά με τον παίκτη 2. Με τη διερεύνηση των υποπεριοχών του κέικ για τις οποίες η συνάρτηση $R(x)$ ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιότητες, θα μπορέσει να πραγματοποιηθεί εξάλειψη της ζήλιας. Για τη «σηματοδότηση» αυτή των υποπεριοχών θα χρειαστούν και ο εξής συμβολισμός: για $i, j \in \{1,2\}$ και $op \in \{>, \geq, =\}$, ορίζουμε $Y_{i\ op\ j} = \{x \in [0,1]: u_i(x) op\ u_j(x)\}$. Ο συμβολισμός αυτός επιτρέπει την άμεση χαρτογράφηση των μερών του κέικ για τα οποια κάποιος παίκτης έχει αυστηρά περισσότερη, λιγότερη ή ίση αξιολόγηση. Για λόγους απλούστευσης ορίζουμε ως $Y_{op\ r} = \{x \in [0,1]: R(x)\ op\ r(x)\} \cap Y_{2>1}$ τα κομμάτια του κέικ μέσα στα οποια η αναλογία κέρδους είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη από ένα μέγεθος r (π.χ. $Y_{>0} = C$).

Ένα επιπρόσθετο λήμμα θα είναι χρήσιμο για την κατασκευή του εν λόγω αλγορίθμου:

Λήμμα 7.5. Κάθε κατανομή (X_1, X_2) για την οποια $Y_{1>2} \subset X_1$ και $Y_{2>1} \subset X_2$ είναι ομαδικά βέλτιστη.

Το λήμμα αυτό επισημοποιεί την απλή διαπίστωση πως αν κάθε παίκτης λάβει όλα τα κομμάτια του κέικ τα οποια έχει αξιολογήσει αυστηρά περισσότερο από τον άλλο, τότε η συνάρτηση της ομαδικής βελτιστότητας θα μεγιστοποιηθεί.

Αλγόριθμος 7.6.

Είσοδος: Συναρτήσεις αξιολόγησης $\{u_1, u_2\}$

Έξοδος: Κατανομή (X_1, X_2)

Αν $V_1(Y_{1\geq 2}) \geq 1/2$ και $V_2(Y_{2\geq 1}) \geq 1/2$ **τότε**

δώσε το $Y_{1\geq 2}$ στον παίκτη 1 και το $Y_{2\geq 1}$ στον παίκτη 2

Αν $V_1(Y_{1\geq 2}) \geq 1/2$ **τότε**

δώσε το $Y_{1=2}$ στον παίκτη 2

αλλιώς

διαίρεσε το $Y_{1=2}$ μεταξύ των 2 έτσι ώστε ο παίκτης 1 να λάβει αξία 1/2

τέλος-αν

αλλιώς {Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $V_1(Y_{1\geq 2}) < 1/2$}

δώσε το $Y_{1\geq 2}$ στον παίκτη 1

ορίζεται $r^* = \max\{r: V_1(Y_{1\geq 2} \cup Y_{\geq r}) \geq 1/2\}$

δώσε το $Y_{>r^*}$ στον παίκτη 1

διαίρεσε το $Y_{=r^*}$ μεταξύ των δυο έτσι ώστε ο παίκτης 1 να λάβει αξία $1/2$

τέλός-αν

Ορισμός 7.7. Δοσμένων 2 παικτών, ο αλγόριθμος 7.6 παρέχει μια ομαδικά βέλτιστη κατανομή που εξαλείφει τη ζήλια.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι (X_1, X_2) είναι η κατανομή που επιστρέφεται από τον αλγόριθμο. Εξετάζουμε ξεχωριστά τα δυο μεγάλα παρακλάδια του αλγορίθμου:

Περίπτωση 1: $V_1(Y_{1\geq 2}) \geq 1/2$ και $V_2(Y_{2\geq 1}) \geq 1/2$.Τότε, επειδή το κομμάτι $Y_{1>2}$ δίνεται στον παίκτη 1 και το $Y_{2>1}$ στον παίκτη 2, λόγω του λήμματος 7.5 η κατανομή αυτή είναι βέλτιστη. Λόγω των παραπάνω σχέσεων, είναι και envy-free

Περίπτωση 2: $V_1(Y_{1\geq 2}) < 1/2$. Αρχικά θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει ζήλια μεταξύ των παικτών. Ο παίκτης 1 δε γίνεται να ζηλεύει, καθώς του δίνεται ένα κομμάτι X_1 με $V_1(X_1) = 1/2$. Επιπροσθέτως, καθώς η κατανομή είναι πλήρης, $V_1(X_1) = 1/2$ και αφού το X_2 απαρτίζεται μόνο από «σημεία» x στα οποια $u_1(x) \leq u_2(x)$, γνωρίζουμε και ότι $V_2(X_2) \geq V_1(X_2) \geq 1/2$. Άρα η κατανομή είναι envy-free.

Για να κατοχυρωθεί η εξάλειψη της ζήλιας για την οποια κάνουμε λόγο, θυσιάζουμε το ομαδικό όφελος εγγυώμενοι στον παίκτη 1 κομμάτια όπου $u_1(x) < u_2(x)$ (που σημαίνει κομμάτια από το $Y_{2>1}$), και το ζητούμενο στην περίπτωση αυτή είναι να διαλέξουμε τον καλύτερο τρόπο για να συμβεί η μετατόπιση αυτή. Θέτοντας μια τυχαία κατανομή (X'_1, X'_2), ορίζουμε: $A = X_1 \cap X'_1 \cap Y_{2>1}$, $B = (X_1 - X'_1) \cap Y_{2>1}$ και $C = (X'_1 - X_1) \cap Y_{2>1}$: το A απαρτίζεται από τα κομμάτια πάνω στα οποια και οι δυο κατανομές χάνουν ομαδική αξία, λόγω απονομής κομματιών στον 1 που αξιολογεί περισσότερο ο παίκτης 2, ενώ τα B και C από τα κομμάτια πάνω στα οποια μόνο η ομαδική αξία της κατανομής (X_1, X_2) και (X'_1, X'_2) ελαττώνεται σε κάθε αντίστοιχη περίπτωση. Τώρα, θέτοντας $\varepsilon > 0$ ένα μέγεθος με $V_1(Y_{1\geq 2}) = 1/2 - \varepsilon$. Αφού ο αλγόριθμος δίνει αξία ακριβώς $1/2$ στον παίκτη 1, έχουμε:

$$V_1(A) + V_1(B) = \int_A u_1(x)dx + \int_B u_1(x)dx = \varepsilon$$

Παράλληλα, καθώς η κατανομή (X'_1, X'_2) είναι envy-free, ο παίκτης 1 πρέπει να λάβει τουλάχιστον ε από το μερίδιο του $Y_{2>1}$ που λαμβάνει:

$$V_1(A) + V_1(C) = \int_A u_1(x)dx + \int_C u_1(x)dx \geq \varepsilon$$

Συνδυάζοντας τις δυο αυτές σχέσεις προκύπτει:

$$\int_C u_1(x)dx - \int_B u_1(x)dx \geq 0$$

Τώρα, ορίζεται κατανομή $X^* = (X_1^*, X_2^*)$, όχι απαραίτητα envy-free, και μια τυχαία κατανομή $A = (A_1, A_2)$. Η συνάρτηση διαφοράς τίθεται ως $l(A) = s(X^*) - s(A)$. Σύμφωνα με το λήμμα 7.5, ισχύουν τα παρακάτω:

$$l(X_1, X_2) = \int_A [(u_2(x) - u_1(x)]dx + \int_B [(u_2(x) - u_1(x)]\, dx$$

$$l(X'_1, X'_2) \geq \int_A [(u_2(x) - u_1(x)]dx + \int_C [(u_2(x) - u_1(x)]\, dx$$

Η ποσότητα που χάνεται για τη (X'_1, X'_2) είναι ανισότητα επειδή καθώς ο αλγόριθμος διανέμει όλοκληρο το $Y_{1>2}$ στον 1, η (X'_1, X'_2) μπορεί να μη χάνει ομαδική αξία στα κομμάτια αυτά.

Πλέον χρειάζεται να αποδείξουμε απλώς ότι $l(X'_1, X'_2) \geq l(X_1, X_2)$. Για να γίνει αυτό, σημειώνουμε ότι εξ'ορισμού το $X_1 \cap Y_{2>1}$ περιέχει όλα τα σημεία με $R(x) > r^*$ και μερικά σημεία με $R(x) = r^*$. Καθώς $B \cap C = \emptyset$, προκύπτει ότι αν $x \in B$ τότε $R(x) \geq r^*$ και αν $x \in C$ τότε $R(x) \leq r^*$. Έτσι,

$$l(X'_1, X'_2) - l(X_1, X_2) \geq \int_C [(u_2(x) - u_1(x)]dx - \int_B [(u_2(x) - u_1(x)]\, dx$$

$$= \int_C [\frac{u_1(x)}{R(x)} - u_1(x)]dx - \int_B [\frac{u_1(x)}{R(x)} - u_1(x)]dx$$

$$\geq \left(\frac{1}{r^*} - 1\right)(\int_C u_1(x)dx - \int_B u_1(x)dx) \geq 0$$

με την τελευταία ανίσωση να προκύπτει λόγω της σχέσης

$$\int_C u_1(x)dx - \int_B u_1(x)dx \geq 0$$

7.5 Ομαδικά βέλτιστη ισομέρεια εναντίον ομαδικά βέλτιστης εξάλειψης της ζήλιας

Μεταξύ των κατανομών που ανήκουν στην κλάση των ομαδικά βέλτιστων λύσεων, ενδιαφέρον παρουσιάζει η περαιτέρω διερεύνηση της αποτελεσματικότητάς τους μέσω συγκρίσεων των λύσεων στις οποίες οι παραπάνω καταλήγουν. Σε δημοσίευσή τους, τέσσερις ερευνητές, οι Steven Brams, Michal Feldman, John Lai, Jamie Morgenstern και Ariel Procaccia, μεταξύ άλλων συγκρίνουν τα αποτελέσματα των ομαδικά βέλτιστων ισομερών κατανομών έναντι των αποτελεσμάτων των ομαδικά βέλτιστων envy-free κατανομών [29].

Συμβολίζοντας την ομαδική αξιολόγηση μιας ομαδικά βέλτιστης envy-free κατανομής ως OPT_{EF} , και αντίστοιχα μιας ισομερούς με OPT_{EQ} , και ορίζοντας την ε-EF κατανομή ως την κατανομή εκείνη για την οποία $V_i(A_i) \geq V_i(A_j) - \varepsilon$ για κάθε $i, j \in N$, είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 7.8. Σε πρόβλημα τμηματικά σταθερών αξιολογήσεων από τους παίκτες, ισχύει $OPT_{EQ} \leq OPT_{EF}$. Επίσης, για γενικές συναρτήσεις αξιολόγησης και κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει $OPT_{EQ} \leq OPT_{\varepsilon-EF} + \varepsilon$.

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού εναπόκειται στο συσχετισμό μεταξύ συναρτήσεων τμηματικά σταθερών αξιολογήσεων και ισορροπίας αγοράς για σύνολα διαιρέσιμων αγαθών, εμπνευσμένη από τη δουλειά των Reijnierse και Potters [30]. Προτού παρουσιαστεί η απόδειξή του, θα ήταν χρήσιμη η παράθεση του συσχετισμού αυτού και η αναφορά στα σχετικά αποτελέσματα από τη βιβλιογραφία της ισορροπίας αγοράς:

Μια γραμμική αγορά Fisher είναι μια αγορά όπου οι παίκτες $N = \{1, \dots, n\}$ έχουν προσθετικές, γραμμικές συναρτήσεις χρησιμότητας για ένα σύνολο $G = \{1, \dots, m\}$ διαιρέσιμων αγαθών. Κάθε παίκτης $i \in N$ λαμβάνει ένα κεφάλαιο e_i και έχει μια χρησιμότητα u_{ij} για κάθε αγαθό $j \in G$. Μια εφικτή κατανομή δίνει ένα κλάσμα x_{ij} του αγαθού j στον παίκτη i έτσι ώστε να μην υπάρχει κάποιο αγαθό που να υπερκατανεμηθεί. Η ολική χρησιμότητα του παίκτη από μια κατανομή x_{ij} είναι $\sum_j u_{ij} x_{ij}$. Όταν οι συναρτήσεις αξιολόγησης είναι τμηματικά σταθερές, οι χρησιμότητες σε μια κατανομή εφικτής αγοράς Fisher μπορεί να αναπαραχθεί στο πλαίσιο του Κοψίματος του κέικ.

Λήμμα 7.9. Έστω $A_1, \dots, A_n$ μια κατανομή σε πρόβλημα τομής του κέικ. Ορίζουμε μια αγορά Fisher με τους ίδιους παίκτες, και ένα αγαθό j που να αντιστοιχεί σε κάθε A_j και $u_{ij} = V_i(A_j)$. Επίσης, έστω x_{ij} μια εφικτή κατανομή αγαθών στην αγορά Fisher. Τότε, υπάρχει μια κατανομή $A'_1, \dots, A'_n$ τέτοια ώστε $V_i(A'_j) = u_{ij} x_{ij}$. Με απλά λόγια, μπορούμε να αναπαράξουμε χρησιμότητες παικτών στην αγορά Fisher με μια κατανομή του κέικ.

Απόδειξη. Δοσμένης μιας εφικτής κατανομής x_{ij} στην αγορά Fisher, κατασκευάζεται κατανομή $A'_1, \dots, A'_n$ ως εξής: κάθε αρχικό κομμάτι A_j κόβεται σε μικρότερα και για το καθένα από αυτά η συνάρτηση αξιολόγησης κάθε παίκτη είναι σταθερή. Στον παίκτη i δίνεται ένα κλάσμα x_{ij} κάθε υποδοαστήματος. Η αξιολόγηση του i για το μερίδιό του από το A_j είναι $x_{ij}V_i(A_j) = x_{ij}u_{ij}$ και προσθέτοντας όλα τα κομμάτια που προέκυψαν από την περαιτέρω κατάτμηση αποδεικνύουμε το λήμμα.

Οι γραμμικές αγορές Fisher έχουν τις εξής πολύ σημαντικές ιδιότητες:

Θεώρημα 7.10. Αναλογιζόμαστε μια γραμμική αγορά Fisher όπου ο παίκτης i έχει κεφάλαιο e_i , $\sum_{i\in N} e_i = 1$, και κάθε αγαθό δίνει θετική χρησιμότητα τουλάχιστον σε έναν παίκτη. Υπάρχει ένα διάνυσμα τιμών $p = (p_1, \dots, p_{|G|})$ με $p_j > 0$, $\sum_{j\in G} p_j = 1$, και μια εφικτή κατανομή x_{ij} για την οποια:

1. $\forall j \in G, \sum_{i\in N} x_{ij} = 1$,
2. $\forall i \in N, j \in G$, αν $x_{ij} > 0$, τότε $j \in argmax_{j'}(u_{ij'}/p_{j'})$,
3. $\forall i \in N, \sum_{i\in N} x_{ij} = 1, \sum_{j\in G} p_j x_{ij} = e_i$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις αυτές, προχωρούμε στην απόδειξη του θεωρήματος 7.8.

Απόδειξη του θεωρήματος 7.8. Πρώτα δείχνουμε το αποτέλεσμα για τμηματικά σταθερές αξιολογήσεις. Αρχίζουμε με την ομαδικά βέλτιστη envy-free κατανομή $A^* = (A_1^*, \dots, A_n^*)$ και κατασκευάζουμε μια αγορά Fisher στην οποια το αγαθό j αντιστοιχεί στο A_j^*, $u_{ij} = V_i(A_j^*)$ και κάθε παίκτης έχει κεφάλαιο $e_i = 1/n$. Ορίζοντας p,x_{ij} το διάνυσμα τιμών και μια εφικτή κατανομή όπως εγγυώνται από το θεώρημα 7.10, αναλογιζόμαστε την κατανομή $A_1', \dots, A_n'$ όπως περιγράφτηκε στο λήμμα 7.9. Χρειάζεται να δείξουμε ότι η κατανομή αυτή είναι envy-free και καταλήγει σε ομαδική αξία ασθενώς μεγαλύτερη από την αρχική ομαδικά βέλτιστη ισομερή κατανομή. Λόγω του λήμματος 7.9, μπορούμε να συσχετίσουμε τις αξιολογήσεις $A_1', \dots, A_n'$ με τις χρηστικότητες στην αγορά Fisher.

Η απόδειξη του ότι η κατανομή $A_1', \dots, A_n'$ είναι envy-free διαφαίνεται στη δουλειά των Reijnerse και Potters [30] , και για λόγους πληρότητας η επόμενη ισότητα την αναπαράγει (ορίζουμε $u_i^* = argmax_k(u_{ik}/p_k)$):

$$V_i(A_i') = \sum_k u_{ik}x_{ik} = \sum_k \frac{u_{ik}}{p_k} p_k x_{ik}$$

$$= \sum_k u_i^* p_k x_{ik} = u_i^*/n$$

$$V_i(A_j') = \sum_k u_{ik}x_{jk} = \sum_k \frac{u_{ik}}{p_k} p_k x_{jk}$$

$$\leq \sum_k u_i^* p_k x_{jk} = u_i^*/n.$$

Απομένει να δειχθεί πως $\sum_i V_i(A_i') \geq \sum_i V_i(A_i^*)$. Υποθέτοντας $V_i(A_i^*) = C$ για κάθε $i \in N$, τότε $OPT_{EQ} = \sum_i V_i(A_i^*) = nC$. Το u_i^* μεγιστοποιεί το u_{ik}/p_k, έτσι ώστε το u_i^* να είναι το λιγότερο u_{ii}/p_i, η χρηστικότητα της αναλογίας τιμής για το αγαθό στην αγορά Fisher που αντιστοιχεί στο A_i^*. Επομένως, $V_i(A_i') = u_i^*/n \geq u_{ii}/(np_i) = C/(np_i)$. Τότε,

$$OPT_{EF} \geq \sum_i V_i(A_i') \geq \sum_i \frac{C}{np_i} = \frac{C}{n} \sum_i \frac{1}{p_i}.$$

Λόγω του ότι $\sum_i p_i = 1$, το μέγεθος $\sum_i (1/p_i)$ ελαχιστοποιείται όταν $p_i = 1/n$ για κάθε i και είναι τουλάχιστον n^2. Άρα,

$$OPT_{EF} \geq \frac{C}{n} \sum_i \frac{1}{p_i} \geq \frac{C}{n} n^2 = nC = OPT_{EQ}.$$

Συνεχίζοντας, διευρύνουμε το αποτέλεσμα αυτό για γενικές συναρτήσεις αξιολόγησης $V_1, \ldots, V_n$(με ολοκληρώσιμες συναρτήσεις αξιολόγησης Riemann). Για $\varepsilon > 0$, η ολοκληρωσιμότητα Riemann των $u_1, \ldots, u_n$ συνεπάγεται ότι για όλα τα $i \in N$ υπάρχουν $0 = x_1 < \cdots < x_m = 1$ τέτοια ώστε το ανώτερο άθροισμα των u_i ικανοποιεί τη σχέση

$$1 = \int_{x=0}^{1} u_i(x)dx$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} [(x_k - x_{k-1}) * \left(sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} u_i(x)\right)] \leq 1 + \tfrac{\varepsilon}{n}.$$

Για κάθε $k = 1, \ldots, m$ και κάθε $y \in [x_{k-1}, x_k]$, θέτουμε $u_i'(y) = sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} u_i(x)$. Ισχυριζόμαστε ότι οι αντιστοιχίζουσες τμηματικά σταθερές συναρτήσεις αξιολόγησης $V_1', \ldots, V_n'$ προσεγγίζουν τις αρχικές συναρτήσεις αξιολόγησης υπο την έννοια ότι για κάθε κομμάτι X του κέικ,

$$V_i(X) \leq V_i'(X) \leq V_i(X) + \tfrac{\varepsilon}{n}.$$

Πράγματι, το αριστερό μέρος της ανισότητας είναι τετριμμένο, και το δεξί προκύπτει από την παραπάνω σχέση και το γεγονός ότι $u_i'(x) \geq u_i(x)$ για όλα τα $x \in [0,1]$:

$$V_i'(X) - V_i(X) = \int_X \left(u_i'(x) - u_i(x)\right)dx$$

$$\leq \int_{x=0}^{1} \left(u_i'(x) - u_i(x)\right)dx \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

Συμπεραίνουμε όπως προηγουμένως ότι η ομαδικά βέλτιστη ισομερής κατανομή A^* ικανοποιεί τη σχέση $V_i(A_i^*) = C$ για όλα τα $i \in N$. Χρησιμοποιώντας τα ίδια ορίσματα με πριν, υπάρχει κατανομή A' η οποια είναι envy-free αναφορικά με τη $V_1, \dots, V_n$. Συνεπώς, ισχύει ότι

$$OPT_{\varepsilon-EF} \geq \sum_{i \in N} V_i(A'_i) \geq \sum_{i \in N} (V'_i(A'_i) - \frac{\varepsilon}{n})$$

$$= \sum_{i \in N} V'_i(A'_i) - \sum_{i \in N} \frac{\varepsilon}{n} \geq OPT_{EQ} - \varepsilon.$$

8

Επίλογος

Ως τώρα, η θεματολογία που έχει αναπτυχθεί επάνω στο θέμα της δίκαιης διαμέρισης ομοιογενούς αγαθού, το λεγόμενο Κόψιμο του κέικ, είναι οπωσδήποτε πλούσια, εκτενής, και συνάμα πολυεπίπεδη, καθώς όπως αναλύθηκε στα κεφάλαια που προηγήθηκαν, οι πολλές οπτικές γωνίες από τις οποίες μπορεί να μελετηθεί το πρόβλημα προσφέρουν πολλαπλό φάσμα στην παρατήρηση ενός θέματος διαχρονικού και πολύπλευρης εφαρμογής όπως και το θέμα αυτό. Επομένως, σε μια βιβλιογραφική ανασκόπηση όπως και την παρούσα, δε θα μπορούσε να γίνει πλήρης παρουσίαση των όσων έχουν επινοηθεί και αποδειχτεί πάνω στο πρόβλημα, παρά να επιλεχθούν ορισμένα θέματα από το σύνολο τους και να παρουσιαστούν ως μια συλλογή των σημαντικότερων εξ’ αυτών.

Βέβαια, δε θα έπρεπε να παραληφθούν και μερικά από τα υπόλοιπα θέματα ή αποτελέσματα τα οποία δεν βρήκαν χώρο στην παρούσα ανασκόπηση. Σε δημοσίευσή τους το 2009, οι Καραγιάννης, Κακλαμάνης, Κανελλόπουλος και Κυροπούλου, παρουσίασαν το κόστος αναλογικότητας σε πρόβλημα n παικτών ($\Theta(\sqrt{n})$), καθώς και το κόστος ισομέρειας (το πολύ n και το λιγότερο $\frac{(n+1)^2}{4n}$)[40]. Οι Chen, Lai, Parkes και Procaccia (βασιζόμενοι και σε προηγούμενες δημοσιεύσεις [43-45])σχεδίασαν και δημοσίευσαν ένα τυχαιοκρατικό (randomized) μηχανισμό για n παίκτες, ο οποιος εξαλείφει τη ζήλια μεταξύ των παικτών, είναι φιλαλήθης και αναλογικός. Αξίζει να σημειωθεί ότι πολλοί από τους προαναφερθέντες ερευνητές λογίζονται ως πιθανή συνάρτηση αξιολόγησης την τμηματικά γραμμική (piecewise linear), πέραν των υπολοίπων τμηματικών συναρτήσεων. Τέλος, οι Edmonds και Pruhs [33] παρουσίασαν ένα κατώτατο όριο για την πολυπλοκότητα όλων των ντετερμινιστικών πρωτοκόλλων ($\Omega(n \log n)$), και ένα κατώτατο όριο όλων των τυχαιοκρατικών πρωτοκόλλων ($\Omega(n \log \frac{n}{c} / \log \frac{1}{\varepsilon})$).

Το πρόβλημα διανομής αγαθών θα είναι πάντα διαχρονικό σε όλες τις μορφές του, καθώς όσο υπάρχουν διαφορετικές ανάγκες πάνω σε έναν κοινό πόρο θα υπάρχουν και διαφορετικοί πιθανοί τρόποι διαμερισμού του. Η Θεωρητική Πληροφορική εξετάζοντας το πρόβλημα Τομής του κέικ με ένα μαθηματικοποιημένο τρόπο σκέψης, έχει ήδη δώσει αρκετές απαντήσεις στα ερωτήματα που παρουσιάζονται, και η επιτυχής προσέγγισή της έγκειται στην ποικιλόμορφη αντιμετώπισή των διάφορων κριτηρίων δικαιοσύνης που ανακύπτουν. Η συνέχιση του έργου αυτού αναμένεται να έχει πρακτικότερη αξία στο μέλλον, καθώς η ήδη υπάρχουσα βιβλιογραφία μπορεί να δώσει λύσεις σε πολλά προβλήματα στην καθημερινή ζωή, την πολιτική και φυσικά την επιστήμη των υπολογιστών, και παράλληλα η μελέτη σε θεωρητικό επίπεδο θα εξακολουθήσει να δημιουργεί καινούργιους υποτύπους προβλημάτων ώστε να αυξάνεται το επίπεδο δυσκολίας εύρεσης απαντήσεων. Στο παρόν επίπεδο, στα χέρια μας έχουμε μια ήδη εκτεταμένη θεματολογία που μπορεί να καλύψει -ως έναν αρκετά μεγάλο βαθμό- τα περισσότερα ερωτήματα της συγκεκριμένης και σπουδαίας αυτής περιοχής του mechanism design.

9

Βιβλιογραφία

[1] Wikipedia.

[2] H. Steinhaus. The problem of fair division. *Econometrica*, 16(1):101-104, 1948.

[3] Optimal Envy-Free Cake-Cutting. A thesis presented by Yuga Cohler to Computer Science in partial fulfillment of the honors requirements for the degree of Bachelor of Arts. Harvard College Cambridge, Massachusetts, 2011.

[4] S.Brams and A.Taylor. *Fair Division: From Cake-Cutting to Dispute Resolution. Cambridge University Press*, 1996

[5] J.Robertson and W.Webb. *Cake-Cutting Algorithms: Be Fair If You Can*. A.K. Peters, 1998

[6] S. Brams and A. Taylor. An envy-free cake division protocol. The American Mathematical Monthly, 102(1):9-18, 1995.

[7] A.Austin. Sharing a cake. *Mathematical Gazette*, 66(437):212-215, 1982.

[8] S.Even and A.Paz. A note on cake cutting. Discrete Applied Mathematics, 7:285-296, 1984.

[9] J.Sgall and G.Woeninger. A lower bound for cake cutting. *Lecture Notes in Computer Science*, 2832:459-469, 2003.

[10] W. Stromquist. How to cut a cake fairly. The American Mathematical Monthly, 87(8):640-644, 1980.

[11] L. E. Dubins and E. H. Spanier. How to cut a cake fairly. *The American Mathematical Monthly*, 68(1):1-17, 1961.

[12] M. Jones. Equitable, envy-free, and efficient cake cutting for two people and its applications to divisible goods. *Mathematics Magazine*, 75(4):275-283, 2002.

[13] Yiling Chen, John K. Lai, David C. Parkes, Ariel D. Procaccia. Truth,Justice, and Cake Cutting.

[14] D. Woodall. Dividing a cake fairly. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 78(1):233-247, 1980.

[15] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, and C. Stein. *Introduction to Algorithms.* MIT Press, 2nd edition, 2001

[16] A. Katta and J. Sethuraman. A solution to the random assignment problem on the full preference domain. *Journal of Economic Theory*, 131:231-250, 2006.

[17] D. Woodall. A note on the cake-division problem. *Journal of Combinatorial Theory (A)*, 42(2):300-301, 1986.

[18] S. J. Brams, A.D. Taylor, and W.S. Zwicker. A moving-knife solution to the four-person envy free cake division problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(2):547-554, 1997.

[19] A. A. Liapounoff. *On completely additive vector functions. Izv. Akad. Nauk SSSR*, 465-478 1940.

[20] J. Neyman. *Un theoreme d'existence. C. R. Acad. Sci. Paris* 222, 843-845. 1946.

[21] K. Rebman. How to get (at least) a fair share of the cake, in Mathematical Plums, Ross Honsberger, editor, Mathematical Association of America, 22-37, 1979.

[22] G. Gamow and M. Stern, Puzzle-Math. Viking,New York, 1958.

[23] S. X. Levmore and E. E. Cook. *Super Strategies for Puzzles and Games*. Doubleday,Garden City, New York, 47-53, 1981

[24] S. J. Brams, A. D. Taylor and W. S. Zwicker. *A moving-knife solution to the four-person envy-free cake division problem*, Preprint

[25] O. Pikhurko. On envy-free cake division. The American Mathematical Monthly, 107(8):736-738, 2000.

[26] I. Caragiannis, J.K. Lai, A.D. Procaccia. *Towards More Expressive Cake Cutting*, 211

[27] Benisch et al., M. Benisch, N.M. Sadeh, T.Sandholm. A theory of expressiveness in mechanisms, *In Proc. Of 23rd AAAI*, 2008.

[28] Berliant et al., M. Berliant, K.Dunz, W.Thomson. On the fair division of a heterogeneous commodity. Journal of Mathematical Economics, 21:201-216, 1992.

[29] Brams, Feldman, Lai, Morgenstern, Procaccia. How good are optimal cake divisions? 2011.

[30] J. Reijnierse, J.A.M. Potters. On finding an envy-free Pareto-optimal division. Mathematical Programming 83:291-311, 1998.

[31] V.V. Vazirani. Combinatorial algorithms for market equilibria. In Nisan, N.; Roughgarden, T.; Tardos, E.; and Vazirani, V., eds., *Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press chapter 5, 2007.

[32] Ariel D. Procaccia. Thou Shalt Covet Thy Neighbor's Cake, 2011.

[33] Edmonds and Pruhs. Cake cutting really is not a piece of cake. *In Proceedings of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium of Discrete Algorithms (SODA)*, 2006.

[34] Brams et al. S. J. Brams, A. D. Taylor, and W. S. Zwicker. A moving-knife solution to the four-person envy free cake division problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1997.

[35] Busch et al. C. Busch, M. S. Krishnamoorthy, and M. Magdon Ismail. Hardness results for cake cutting. *Bulletin of the EATCS*, 2005.

[36] Chevaleyre et al. Y. Chevaleyre, P. E. Dunne, U. Endriss, J. Lang, M. Lemaitre, N. Maudet, J. Padget, S.Phelps, J. A. Rodriguez-Aguilar, and P. Sousa. Issues in multiagent resource allocation. *Informatica*, 2006.

[37] W. Stromquist, Envy-free cake divisions cannot be found by finite protocols. *The Electronic Journal of Combinatories*, 2008.

[38] G. J. Woeginger, J. Sgall. On the complexity of cake cutting. *Discrete Optimization*, 2007.

[39] Yuga J. Cohler, John K. Lai, David C. Parkes, Ariel D. Procaccia. Optimal Envy-Free Cake Cutting. *Proceedings of the Twenty-Fifth AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2011.

[40] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, P. Kanellopoulos, M. Kyropoulou. *The efficiency of fair division. In Proc. of 5th WINE*, 2009.

[41] N. R. Devanur, C. H. Papadimitriou, A. Saberi, V. V. Vazirani. Market equilibrium via a primal-dual-type algorithm. *In Proc. of 43rd FOCS*, 2002.

[42] F. E. Su. Rental harmony: Sperner's lemma in fair division. *American Mathematical Monthly*, 1999.

[43] N. Alon. Splitting necklaces. *Advances in Mathematics*, 1987.

[44] A. Bogomolnaia and H. Moulin. A new solution to the random assignment problem. *Journal of Economic Theory*, 2001.

[45] R. J. Lipton, E. Markakis, E. Mossel, and A. Saberi. On approximately fair allocations of indivisible goods. *In Proc. of* 6^{th} *EC*, 2004.