







ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ,  
ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ  
ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΩΝ ΑΓΩΓΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΑΓΩΓΙΜΩΝ ΣΦΑΙΡΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γεώργιος Δ. Ζιόβας

**Επιβλέπων:** Ιωάννης Α. Ρουμελιώτης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 19<sup>η</sup> Φεβρουαρίου 2014

.....

Ι. Ρουμελιώτης

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....

Ι.Τσαλαμέγκας

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....

Η. Γλύτσης

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2014

.....

Γεώργιος Δ. Ζιόβας

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Γεώργιος Δ. Ζιόβας, 2014

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζουμε τρόπους θεωρητικού υπολογισμού της χωρητικότητας μεταξύ δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών και μεταξύ αγωγίων σφαιρών.

Στα δύο αυτά προβλήματα θα δώσουμε λύση με δύο διαφορετικούς τρόπους στο κάθε ένα. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των ειδώλων και το διπολικό σύστημα συντεταγμένων στην πρώτη περίπτωση, ενώ στην περίπτωση των σφαιρών θα δώσουμε λύση με την μέθοδο των ειδώλων και με χρήση δισφαιρικών συντεταγμένων.

Στα κεφάλαια που ακολουθούν γίνεται μια σύντομη παρουσίαση των διαφόρων συστημάτων συντεταγμένων που θα χρησιμοποιήσουμε και αναφορά στην μέθοδο των ειδώλων, αντίστοιχα, στις περιπτώσεις κυλινδρικού αγωγού και σφαίρας.

Για να δώσουμε λύση στο πρόβλημα υπολογισμού της χωρητικότητας στηρίζομαστε στο γεγονός ότι η συνάρτηση του δυναμικού ικανοποιεί την εξίσωση Laplace. Σε κάθε περίπτωση που μελετάμε καταλήγουμε σε έναν μαθηματικό τύπο που μας δίνει την χωρητικότητα. Βλέπουμε και επιβεβαιώνουμε πως η χωρητικότητα εξαρτάται μόνο από την γεωμετρία της διάταξης.

Υπολογίζουμε την χωρητικότητα στα προβλήματα που εξετάσαμε με τη χρήση του λογισμικού πακέτου Microsoft Word Excel. Συγκρίνουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα και επιβεβαιώνουμε την θεωρητική ορθότητα των λύσεων μας.

## Λέξεις κλειδιά

Χωρητικότητα , Ηλεκτρικό πεδίο , Δυναμικό , Μέθοδος των ειδώλων , Διπολικές συντεταγμένες, Δισφαιρικές συντεταγμένες, Εξίσωση Laplace , Συναρτήσεις Legendre

## **Summary**

The present thesis deals with ways of calculating the capacity between two parallel cylindrical conductors and between conductive spheres.

Solutions to these problems are attempted in two ways. In the first one the methods used are the method of images and the bipolar coordinate system, and in the second one the method of images and the bispherical coordinate system.

In the chapters to come, the above methods are briefly analysed and as far as the calculation of the capacity is concerned, the main principle is that the function of the potential must satisfy the Laplace equation. Mathematical closed-form solutions are obtained. It is, finally, confirmed that the capacity depends on the geometry of the arrangement.

In all cases, the capacity is calculated with Microsoft Word Excel and each result is compared with the theoretical solution.

## **Key words**

Capacity, Electric field, Potential, Method of images, Bipolar coordinates, Bispherical coordinates, Equation Laplace, Function Legendre

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Η Παρούσα εργασία, μου ανατέθηκε από τον καθηγητή του Ε.Μ.Π κ. Ιωάννη Ρουμελιώτη στα πλαίσια της εκπόνησης διπλωματικής μελέτης για την σχολή των Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών .

Αισθάνομαι την ανάγκη, και από αυτή τη θέση, να ευχαριστήσω τον κ. Ρουμελιώτη για την βοήθεια που μου προσέφερε σε όλη την διάρκεια της εργασίας, καθώς και για την άψογη συνεργασία .

Τέλος, ευχαριστώ, θερμά, τους γονείς μου για την στήριξή τους.

# Περιεχόμενα

	Σελ
Περίληψη	5
Summary	6
Ευχαριστίες	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Εισαγωγή	10
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Εύρεση χωρητικότητας γραμμής δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών με τη μέθοδο των ειδώλων και με χρήση διπολικών συντεταγμένων	11
2.1 Η μέθοδος των ειδώλων	11
2.2 Γραμμικό φορτίο παράλληλο σε αγώγιμο κύλινδρο	11
2.3 Γραμμή δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών, όπου καθένας βρίσκεται εξωτερικά του άλλου	14
2.4 Γραμμή δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών, όπου ο ένας βρίσκεται εσωτερικά του άλλου	18
2.5 Διπολικές συντεταγμένες	20
2.6 Εύρεση της χωρητικότητας γραμμής δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών όπου καθένας βρίσκεται εξωτερικά του άλλου, με χρήση διπολικών συντεταγμένων	22
2.7 Γραμμή δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών, όπου ο ένας βρίσκεται εσωτερικά του άλλου	27
2.8 Προσδιορισμός της παραμέτρου $a$ στις διπολικές συντεταγμένες	28
2.9 Υπολογισμός της χωρητικότητας γραμμής δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών με χρήση λογισμικού πακέτου	28
Πίνακες 1.1 – 1.6	29



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Εύρεση της χωρητικότητας μεταξύ δυο αγώγιμων σφαιρών με τη μέθοδο των ειδώλων και με χρήση δισφαιρικών συντεταγμένων	32
3.1 Σημειακό φορτίο έξω από αγώγιμη σφαίρα	32
3.2 Εύρεση χωρητικότητας μεταξύ δυο αγώγιμων σφαιρών εξωτερικών η μία της άλλης	34
3.3 Εύρεση χωρητικότητας αγώγιμης σφαίρας τοποθετημένης έκκεντρα στο εσωτερικό σφαιρικής κοιλότητας με αγώγιμα τοιχώματα	41
3.4 Δισφαιρικές συντεταγμένες	45
3.5 Εύρεση χωρητικότητας μεταξύ δυο αγώγιμων σφαιρών με χρήση δισφαιρικών συντεταγμένων	47
3.6 Εύρεση χωρητικότητας αγώγιμης σφαίρας τοποθετημένης έκκεντρα στο εσωτερικό σφαιρικής κοιλότητας με αγώγιμα τοιχώματα, με χρήση δισφαιρικών συντεταγμένων	51
3.7 Υπολογισμός της χωρητικότητας μεταξύ δύο αγώγιμων σφαιρών με χρήση λογισμικού πακέτου	52
Πίνακες 1.7 - 1.11	53
Βιβλιογραφία	58

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Σκοπός της εργασίας είναι η ανάδειξη μεθόδων υπολογισμού της χωρητικότητας σε διατάξεις παράλληλων κυλινδρικών αγωγών και αγώγιμων σφαιρών διαφορετικής ακτίνας. Η γνώση της χωρητικότητας είναι αναγκαία για την ομαλή λειτουργία των διάφορων ηλεκτρομηχανολογικών συσκευών και εγκαταστάσεων που χρησιμοποιούνται ευρέως στις σύγχρονες κοινωνίες. Θα βρούμε την χωρητικότητα σε παράλληλους κυλινδρικούς αγωγούς άνισων διατομών, με τη μέθοδο των ειδώλων και του διπολικού συστήματος συντεταγμένων και στη συνέχεια ακολουθεί η εύρεση της χωρητικότητας μεταξύ δύο αγώγιμων σφαιρών με τη μέθοδο των ειδώλων και τη χρήση των δισφαιρικών συντεταγμένων.

Για την επιβεβαίωση των δύο τρόπων υπολογισμού της χωρητικότητας στην περίπτωση των κυλίνδρων και των σφαιρών, αντίστοιχα, με χρήση του υπολογιστικού προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή, Microsoft Word Excel, υπολογίζουμε την χωρητικότητα με τους δύο τρόπους. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε πίνακες στα κεφάλαια 2 και 3.

# Κεφάλαιο 2

## Εύρεση χωρητικότητας γραμμής δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών με τη μέθοδο των ειδώλων και με χρήση διπολικών συντεταγμένων

### 2.1 Η μέθοδος των ειδώλων

Η μέθοδος των ειδώλων ή αλλιώς μέθοδος κατοπτρισμού χρησιμοποιείται όταν στον χώρο υπάρχει ένας αγωγός και ηλεκτρικά φορτία έξω από αυτόν. Σ' αυτήν την περίπτωση επιφανειακά φορτία επάγονται στον αγωγό, έτσι ώστε το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του να είναι μηδενικό και ο όγκος του ισοδυναμικός. Στη γενική περίπτωση η κατανομή των επιφανειακών φορτίων είναι άγνωστη και για αυτό ο υπολογισμός του δυναμικού και του πεδίου είναι δύσκολος.

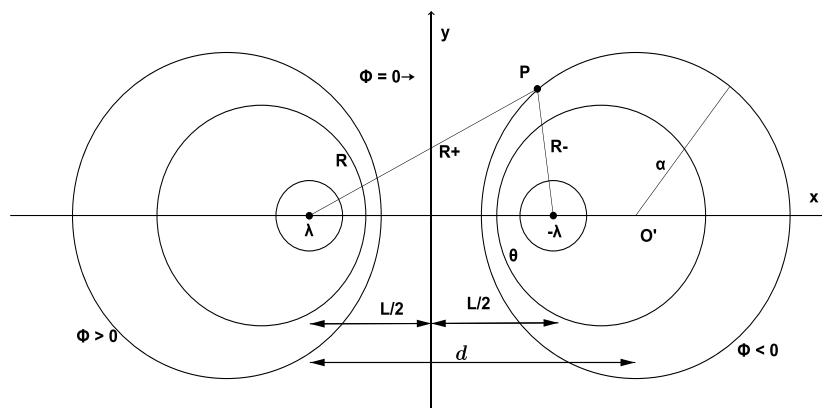
Για απλές, όμως, γεωμετρίες που περιλαμβάνουν απέραντα αγωγίμα επίπεδα, αγωγίμους κυλίνδρους απείρου μήκους και αγωγίμες σφαίρες, η λύση δίνεται με αντικατάσταση της αγωγίμης επιφάνειας από ένα σύνολο ισοδύναμων φορτίων, τοποθετημένων στο χώρο που κάλυπτε ο αγωγός. Τα φορτία αυτά τα ονομάζουμε είδωλα και μαζί με τα αρχικά φορτία καθιστούν ισοδυναμική την επιφάνεια του αγωγού. Με γνωστές τις τιμές φορτίων και τις θέσεις των ειδώλων, μαζί με τα αρχικά φορτία, με τη χρήση του θεωρήματος της επαλληλίας λύνουμε το πρόβλημα σαν να μην υπάρχει ο αγωγός.

Αν αντικαταστήσουμε μία ισοδυναμική επιφάνεια με ένα πολύ λεπτό αγωγίμο κέλυφος, με ίδιο σχήμα και δυναμικό με αυτήν, δε θα υπάρξει καμία μεταβολή του πεδίου στις δύο περιοχές του χώρου, που βρίσκονται προς τις δύο όψεις του. Οι πεδιακές γραμμές θα παραμένουν κάθετες στις επιφάνειες του κελύφους, ενώ στο εσωτερικό του αγωγού το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι μηδενικό, πράγμα που σημαίνει ότι το αρχικό πεδίο χωρίζεται σε δύο ανεξάρτητα τμήματα. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να αφαιρέσουμε από το ένα τμήμα όλα τα φορτία ή να το αντικαταστήσουμε με έναν αγωγό, χωρίς να αλλάξει τίποτα στο άλλο τμήμα.

### 2.2 Γραμμικό φορτίο παράλληλο σε αγωγίμο κύλινδρο

Το βοηθητικό πρόβλημα που θα χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε τις ισοδυναμικές επιφάνειες είναι να υπολογίσουμε το δυναμικό που δημιουργούν δύο παράλληλες ευθείες γραμμές απείρου μήκους σε απόσταση  $L$ , ομοιόμορφα φορτισμένες στη

μονάδα μήκους τους με φορτία  $\lambda$  και  $-\lambda$ , αντίστοιχα, σε απέραντο ομογενή χώρο με επιτρεπτότητα  $\epsilon$ .



**Σχήμα 2.1**

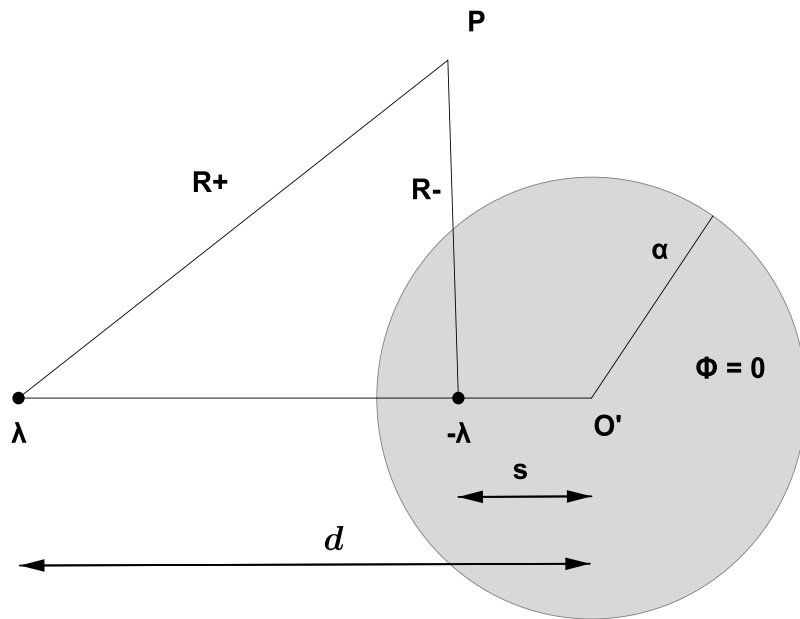
Το δυναμικό στο σημείο  $P$  του **σχήματος 2.1** προκύπτει με επαλληλία των δυναμικών των δύο γραμμών και ισούται με:

$$\Phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln R_+ + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln R_- + C = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_+}{R_-} + C \quad (2.2.1)$$

Η σταθερά  $C$  εξαρτάται από την αναφορά των δυναμικών. Αν η αναφορά θεωρηθεί στο επίπεδο  $y-z$  η σταθερά  $C$  θα είναι μηδενική, διότι  $R_+ = R_-$ . Βλέπουμε από την παραπάνω εξίσωση του δυναμικού ότι οι ισοδυναμικές επιφάνειες δίνονται από τη σχέση

$$\frac{R_+}{R_-} = C = \text{σταθερό} \quad (2.2.2)$$

και είναι κυκλικοί κύλινδροι (Απολλώνιοι κύλινδροι) με άξονες παράλληλους στον  $z$ , που βρίσκονται όλοι στο επίπεδο  $x-z$ . Θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα στο οποίο έχουμε ένα ομοιόμορφο γραμμικό φορτίο πυκνότητας  $\lambda$ , παράλληλο σε έναν απέραντο αγωγίμο κύλινδρο ακτίνας  $a$  και δυναμικού  $\Phi = 0$ , το οποίο απέχει απόσταση  $d$  από τον άξονά του κυλίνδρου, όπως φαίνεται στο **σχήμα 2.2**.



Σχήμα 2.2

Από τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε ότι

$$\frac{R_+}{R_-} = e^{-\frac{2\pi\epsilon U}{\lambda}} \quad (2.2.3)$$

Αν  $a$  είναι η ακτίνα της περιφέρειας που περιγράφει την προηγούμενη ισοδυναμική γραμμή και το κέντρο της  $O'$  βρίσκεται σε απόσταση  $d$  από το γραμμικό φορτίο  $\lambda$ , τότε μπορούμε να βρούμε την απόσταση  $s$  του φορτίου  $-\lambda$  από το κέντρο  $O'$  η οποία είναι ίση με:

$$s = \frac{a^2}{d} \quad (2.2.4)$$

Χρησιμοποιώντας το βοηθητικό πρόβλημα θα θεωρήσουμε το είδωλο  $-\lambda$  του  $\lambda$  και θα το τοποθετήσουμε σε απόσταση  $s$  από τον άξονα του κυλίνδρου. Τα φορτία  $\lambda$  και  $-\lambda$  καθιστούν την επιφάνεια του κυλίνδρου ισοδυναμική, μόνο που έχει δυναμικό διάφορο του μηδενός γιατί αναφορά στο βοηθητικό πρόβλημα έχουμε θεωρήσει στο μεσοκάθετο επίπεδο μεταξύ των δύο γραμμικών φορτίων ( $R_+ = R_-$ ). Θα πρέπει να πάρουμε ως επιφάνεια αναφοράς την επιφάνεια του κυλίνδρου για να γίνει μηδενικό το δυναμικό της, με την σταθερά  $C$  της εξίσωσης του δυναμικού να είναι

$$C = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{d}{a} \quad (2.2.5)$$

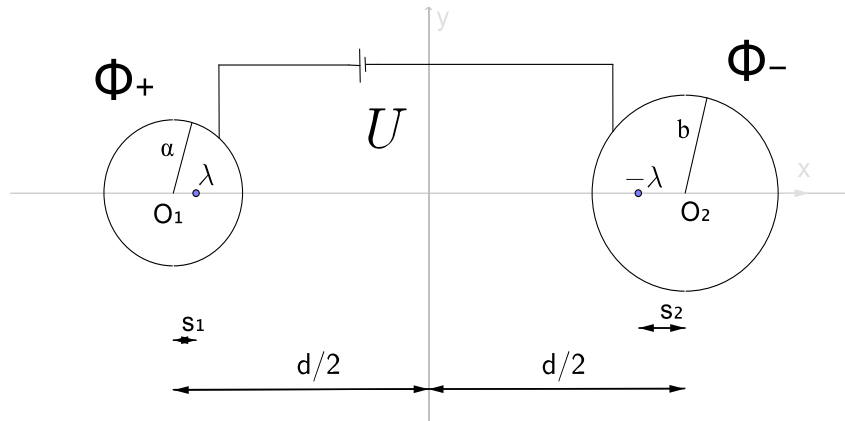
Το δυναμικό στο τυχαίο σημείο P έξω από τον κύλινδρο ισούται με:

$$\Phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{R_+}{R_-} \frac{a}{d}\right) \quad (2.2.6)$$

### 2.3 Γραμμή δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών, όπου καθένας βρίσκεται εξωτερικά του άλλου

Ας θεωρήσουμε δύο παράλληλους κυλινδρικούς αγωγούς όπου οι άξονες τους απέχουν απόσταση  $d$ . Συνδέουμε την γραμμή με πηγή τάσης  $U$ , η οποία φορτίζει τους δύο αγωγούς με αντίθετα φορτία  $\lambda$  και  $-\lambda$ , ανά μονάδα μήκους.

Τα φορτία των δύο αγωγών κατανέμονται ανομοιόμορφα στις επιφάνειες τους, με μεγαλύτερη πυκνότητα στην περιοχή όπου αυτές προσεγγίζουν μεταξύ τους. Η προσομοίωση των φορτίων του κάθε αγωγού με τα γραμμικά φορτία  $\lambda$  και  $-\lambda$  χρησιμοποιείται για την εύρεση της χωρητικότητας, με τα κέντρα βάρους των φορτίων να μην βρίσκονται στους άξονες των δύο αγωγών αλλά σε θέσεις που πλησιάζουν τα σημεία με μεγαλύτερη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου. Οι επιφάνειες των δύο αγωγών θα είναι ισοδυναμικές επιφάνειες στο πεδίο των γραμμικών φορτίων. Καθένα από τα φορτία  $\lambda$  και  $-\lambda$  μπορεί να θεωρηθεί σαν είδωλο του άλλου, ως προς την κυλινδρική επιφάνεια που το περικλείει. Τοποθετούμε το γραμμικό φορτίο  $\lambda$  σε απόσταση  $s_1$  από τον άξονα του αγωγού με ακτίνα  $a$  και το φορτίο  $-\lambda$  σε απόσταση  $s_2$  από τον άξονα του αγωγού ακτίνας  $b$ , όπως στο **σχήμα 2.3**.



**Σχήμα 2.3**

Για τις αποστάσεις των γραμμικών φορτίων από τους άξονες των αγωγών θα ισχύει ότι

$$s_1 = \frac{\alpha^2}{d - s_2} \quad (2.3.1)$$

$$s_2 = \frac{b^2}{d - s_1} \quad (2.3.2)$$

Με αντικατάσταση από τη (2.3.1) στην (2.3.2) και αντίστροφα καταλήγουμε στις ακόλουθες εξισώσεις δευτέρου βαθμού:

$$s_1^2 - s_1 \cdot \frac{d^2 - b^2 + \alpha^2}{d} + \alpha^2 = 0 \quad (2.3.3)$$

$$s_2^2 - s_2 \cdot \frac{d^2 - \alpha^2 + b^2}{d} + b^2 = 0 \quad (2.3.4)$$

Επιλέγουμε για ρίζες των δευτεροβάθμιων εξισώσεων τις  $s_1$  και  $s_2$ , έτσι ώστε κάθε ένα είδωλο-φορτίο να βρίσκεται στο εσωτερικό του αντίστοιχου κυλίνδρου όπου ανήκει:

$$s_1 = \frac{(d^2 + \alpha^2 - b^2)}{2d} - \left[ \left( \frac{d^2 + \alpha^2 - b^2}{2d} \right)^2 - \alpha^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.5)$$

$$s_2 = \frac{(d^2 - \alpha^2 + b^2)}{2d} - \left[ \left( \frac{d^2 - \alpha^2 + b^2}{2d} \right)^2 - b^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.6)$$

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} s_1 &< \alpha && \Rightarrow \\ \frac{(d^2 + \alpha^2 - b^2)}{2d} - \left[ \left( \frac{d^2 + \alpha^2 - b^2}{2d} \right)^2 - \alpha^2 \right]^{\frac{1}{2}} &< \alpha && \Rightarrow \\ - \left[ \left( \frac{d^2 + \alpha^2 - b^2}{2d} \right)^2 - \alpha^2 \right]^{\frac{1}{2}} &< \alpha - \frac{(d^2 + \alpha^2 - b^2)}{2d} && \xrightarrow{\cdot(-1)} \\ \left[ \left( \frac{d^2 + \alpha^2 - b^2}{2d} \right)^2 - \alpha^2 \right]^{\frac{1}{2}} &> \frac{(d^2 + \alpha^2 - b^2)}{2d} - \alpha && \xrightarrow{\text{ύψωση στο τετράγωνο}} \\ \left( \frac{d^2 + \alpha^2 - b^2}{2d} \right)^2 - \alpha^2 &> \left( \frac{d^2 + \alpha^2 - b^2}{2d} \right)^2 + \alpha^2 - 2\alpha \frac{(d^2 + \alpha^2 - b^2)}{2d} \Rightarrow \\ \alpha^2 + d^2 - 2\alpha d - b^2 &> 0 && \Rightarrow \\ (d - \alpha)^2 - b^2 &> 0 && (2.3.7) \end{aligned}$$

Η σχέση (2.3.7) είναι αληθής γιατί  $\mathbf{a} < \mathbf{b}$  και  $\mathbf{a} + \mathbf{b} < \mathbf{d}$ , οπότε ισχύει και η αρχική μας υπόθεση ότι  $s_1 < \alpha$ .

Με τον ίδιο τρόπο δεχόμαστε για ρίζα της εξίσωσης (2.3.4) την  $s_2$  έτσι ώστε  $s_2 < \mathbf{b}$  και απορρίπτουμε τις ρίζες που βρίσκονται στην περιοχή ανάμεσα στους δύο κυλίνδρους

Η τάση  $\mathbf{U}$  μεταξύ των αγωγών είναι ίση με

$$\begin{aligned} U &= \Phi_+ - \Phi_- = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \left( \frac{\alpha}{d-s_2} \right) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \left( \frac{d-s_1}{b} \right) = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \left( \frac{(d-s_1)(d-s_2)}{\alpha b} \right) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$



Από τις σχέσεις (2.3.1) και (2.3.2) παίρνουμε

$$d - s_2 = \frac{a^2}{s_1}, \quad d - s_1 = \frac{b^2}{s_2}$$

και με αντικατάσταση στην (2.3.8) έχουμε:

$$\begin{aligned} U = \Phi_+ - \Phi_- &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \left( \frac{\frac{b^2}{s_2} \cdot \frac{a^2}{s_1}}{ab} \right) = \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \left( \frac{s_1 s_2}{ab} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \left\{ \frac{[d^2 - a^2 - b^2]}{2ab} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( \frac{d^2 - a^2 - b^2}{2ab} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Η χωρητικότητα στη μονάδα μήκους της γραμμής είναι  $C = \frac{\lambda}{U}$ , δηλαδή

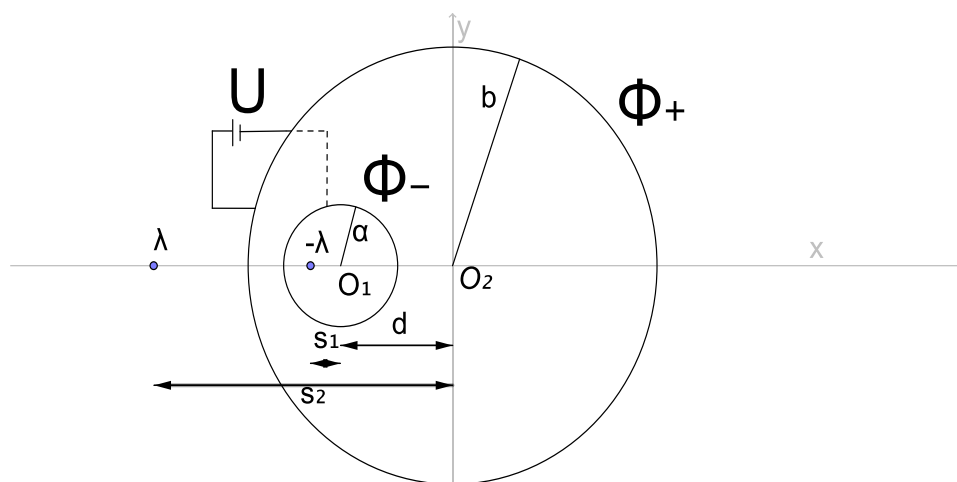
$$\begin{aligned} C_\mu &= \frac{2\pi\epsilon}{\ln \left\{ \frac{[d^2 - a^2 - b^2]}{2ab} + \left[ \left( \frac{d^2 - a^2 - b^2}{2ab} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}} = \\ &= \frac{2\pi\epsilon}{\cosh^{-1} \left( \frac{d^2 - a^2 - b^2}{2ab} \right)} \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα

$$\ln [x + (x^2 - 1)^{1/2}] = \cosh^{-1} x$$

## 2.4 Γραμμή δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών, όπου ο ένας βρίσκεται εσωτερικά του άλλου

Στο **σχήμα 2.5** βλέπουμε την κάτωψη δύο αγωγών που έχουν συνδεθεί με πηγή τάσης  $U$ , η οποία φορτίζει τους δύο αγωγούς με αντίθετα φορτία  $\lambda$  και  $-\lambda$ . Λόγω της διάταξης των αγωγών η μεγαλύτερη πυκνότητα επιφανειακού φορτίου βρίσκεται στα σημεία όπου οι επιφάνειες των αγωγών προσεγγίζουν μεταξύ τους. Το συνολικό θετικό φορτίο του αγωγού ακτίνας  $b$  προσομοιώνεται με το γραμμικό φορτίο  $\lambda$  σε απόσταση  $s_2$  από τον άξονα του  $O_2$ , εξωτερικά του αγωγού και αντίστοιχα το φορτίο του αγωγού ακτίνας  $a$  με το είδωλο  $-\lambda$  σε απόσταση  $s_1$  από τον άξονα  $O_1$ , εσωτερικά στον αγωγό.



**Σχήμα 2.4**

Οι επιφάνειες των αγωγών είναι τώρα ισοδυναμικές επιφάνειες στο πεδίο των γραμμικών φορτίων  $\lambda$  και  $-\lambda$ , όπου κάθε ένα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν είδωλο του άλλου. Λόγω των ισοδυναμικών επιφανειών και των ειδώλων, όπως στην προηγούμενη περίπτωση, θα ισχύει για τις αποστάσεις  $s_1$  και  $s_2$  ότι

$$s_1 = \frac{a^2}{s_2 - d} \quad (2.4.1)$$

$$s_2 = \frac{b^2}{d + s_1} \quad (2.4.2)$$

Με αντικατάσταση από τη μία εξίσωση στην άλλη καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις δευτέρου βαθμού, με άγνωστες τις αποστάσεις  $s_1$  και  $s_2$  :

$$s_1^2 - s_1 \cdot \frac{d^2 - b^2 + \alpha^2}{d} + \alpha^2 = 0 \quad (2.4.3)$$

$$s_2^2 + s_2 \cdot \frac{d^2 - \alpha^2 + b^2}{d} + b^2 = 0 \quad (2.4.4)$$

Επιλέγουμε ρίζες των δευτεροβάθμιων εξισώσεων τις  $s_1$  και  $s_2$  , τέτοιες ώστε  $s_1 < \alpha$  και  $s_2 > b$

$$s_1 = \frac{(d^2 + \alpha^2 - b^2)}{2d} + \left[ \left( \frac{d^2 + \alpha^2 - b^2}{2d} \right)^2 - \alpha^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.5)$$

$$s_2 = -\frac{(d^2 - \alpha^2 + b^2)}{2d} - \left[ \left( \frac{d^2 - \alpha^2 + b^2}{2d} \right)^2 - b^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.6)$$

Η τάση  $U$  μεταξύ των αγωγών ισούται με

$$\begin{aligned} U = \Phi_+ - \Phi_- &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \left( \frac{b}{d+s_1} \right) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \left( \frac{s_2-d}{\alpha} \right) = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \left( \frac{(s_2-d)(d+s_1)}{\alpha b} \right) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Από τις σχέσεις (2.4.1) και (2.4.2) παίρνουμε αντίστοιχα

$$s_2 - d = \frac{\alpha^2}{s_1}, \quad d + s_1 = \frac{b^2}{s_2}$$

και με αντικατάσταση στην (2.4.9) θα είναι:

$$U = \Phi_+ - \Phi_- = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{s_1 s_2}{ab}\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \cdot \ln\left\{-\frac{[d^2 - a^2 - b^2]}{2ab} + \left[\left(\frac{d^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)^2 - 1\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

Η χωρητικότητα στη μονάδα μήκους της γραμμής είναι  $C_\mu = \frac{\lambda}{U}$ ,

$$C_\mu = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left\{-\frac{[d^2 - a^2 - b^2]}{2ab} + \left[\left(\frac{d^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)^2 - 1\right]^{\frac{1}{2}}\right\}} =$$

$$= \frac{2\pi\epsilon}{\cosh^{-1}\left(-\frac{d^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)} \quad (2.4.8)$$

## 2.5 Διπολικές συντεταγμένες

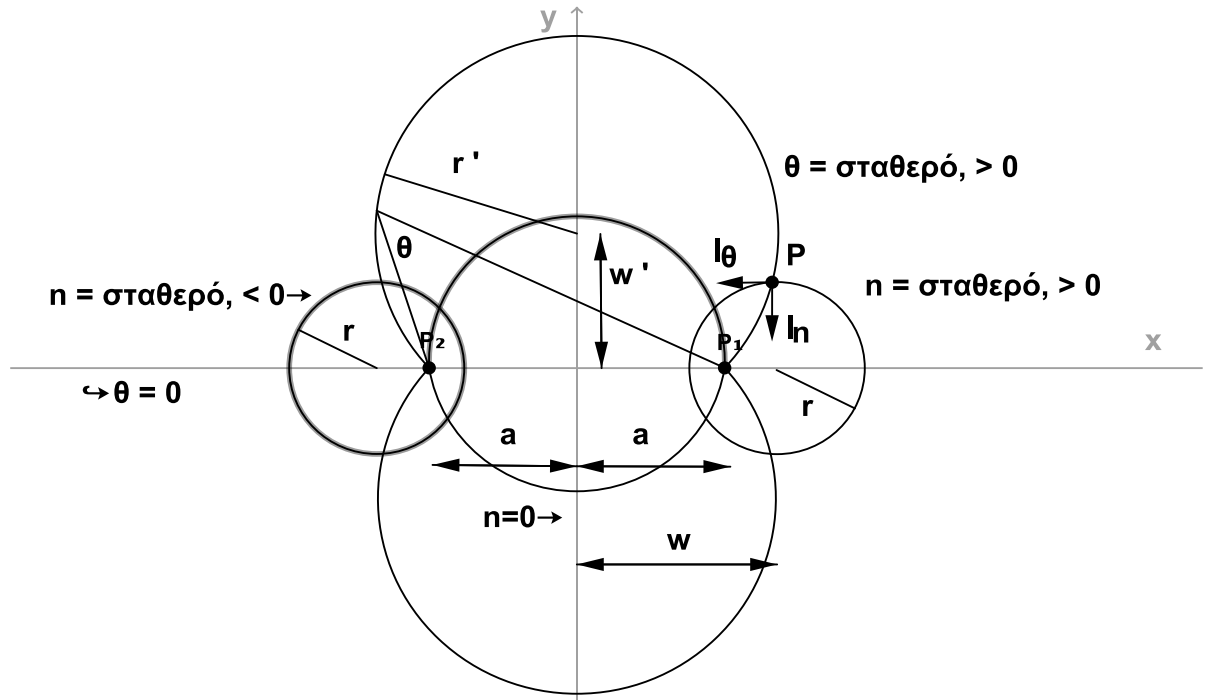
Έστω ότι  $P_1$  και  $P_2$  είναι δύο σταθερά σημεία ενός επιπέδου  $z = \text{σταθερό}$ , που βρίσκονται πάνω στον άξονα  $x$ , στις θέσεις  $x = a$  και  $x = -a$ , αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο **σχήμα 2.5**.

Έστω ότι  $n$  είναι μία παράμετρος, τότε η εξίσωση

$$(x - a \coth n)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sinh^2 n} \quad (2.5.1)$$

περιγράφει δύο οικογένειες κύκλων, με κέντρα πάνω στον άξονα  $x$ . Οι οικογένειες αυτές είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $y$ , όπως φαίνεται στο **σχήμα 2.5**. Το σημείο  $P_1$  αντιστοιχεί στο  $n \rightarrow \infty$ , ενώ το  $P_2$  στο  $n \rightarrow -\infty$ . Οι καμπύλες που είναι ορθογώνιες στις δύο προηγούμενες οικογένειες κύκλων αποτελούν επίσης μια οικογένεια κύκλων, με κέντρα πάνω στον άξονα  $y$ . Οι κύκλοι αυτοί περνούν όλοι από τα σταθερά σημεία  $P_1$  και  $P_2$  και περιγράφονται από την εξίσωση:

$$x^2 + (y - a \cot\theta)^2 = \frac{a^2}{\sin^2\theta}, \quad -\pi < \theta \leq \pi \quad (2.5.2)$$



Σχήμα 2.5

Το σημείο P χαρακτηρίζεται από τις μεταβλητές  $\theta$ ,  $n$  και  $z$ , οι οποίες καλούνται διπολικές συντεταγμένες. Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$x = \frac{a \sinh n}{\cosh n - \cos \theta}, \quad y = \frac{a \sin \theta}{\cosh n - \cos \theta}, \quad z = z \quad (2.5.3)$$

Τα μοναδιαία διανύσματα  $\vec{l}_1 = \vec{l}_\theta$ ,  $\vec{l}_2 = \vec{l}_n$  και  $\vec{l}_3 = \vec{l}_z$  έχουν φορά κατά την κατεύθυνση αύξησης των  $\theta$ ,  $n$  και του άξονα  $z$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5.

Οι μετρικοί συντελεστές είναι:

$$h_\theta = h_n = \frac{a}{\cosh n - \cos \theta}, \quad h_z = 1 \quad (2.5.4)$$

Οι απαραίτητες σχέσεις που θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

$$\nabla \Phi = \frac{\cosh n - \cos \theta}{a} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{l}_\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial n} \vec{l}_n \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{l}_z \quad (2.5.5)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{(\cosh n - \cos \theta)^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad (2.5.6)$$

όπου  $\Phi$  βαθμωτή συνάρτηση. Οι θέσεις των κέντρων των κύκλων με  $n = \text{σταθερό}$  και  $\theta = \text{σταθερό}$ , καθώς και οι ακτίνες τους προκύπτουν από τις σχέσεις :

κύκλος με  $n = \text{σταθερό}$ :  $(x - w)^2 + y^2 = r^2$

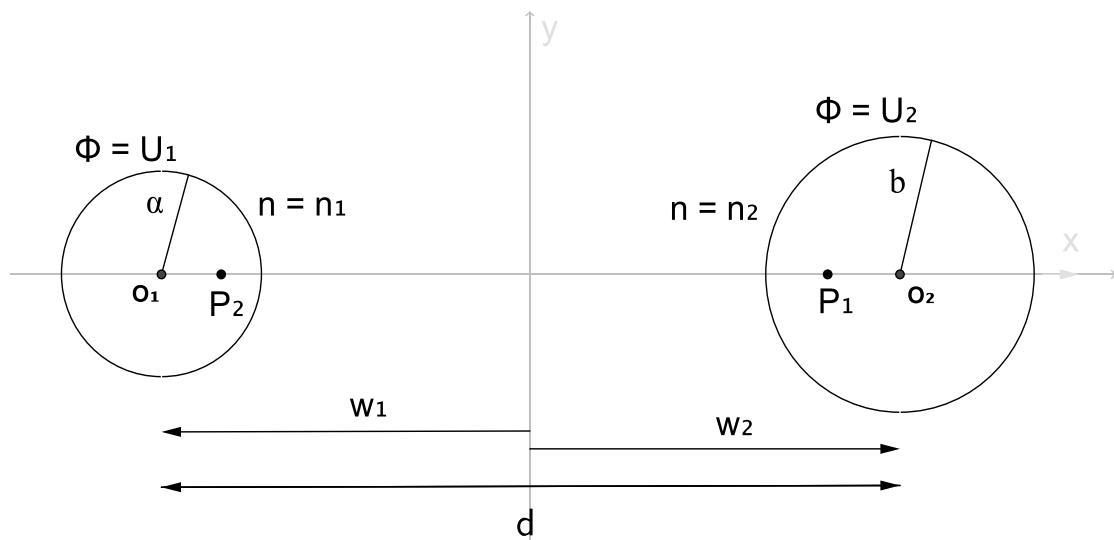
$$w = a \coth n, \quad r = \frac{a}{|\sinh n|} \quad (2.5.7)$$

κύκλος με  $\theta = \text{σταθερό}$ :  $x^2 + (y - w')^2 = (r')^2$

$$w' = a \cot \theta, \quad r' = \frac{a}{|\sinh \theta|} \quad (2.5.8)$$

## 2.6 Εύρεση της χωρητικότητας γραμμής δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών όπου καθένας βρίσκεται εξωτερικά του άλλου, με χρήση διπολικών συντεταγμένων

Όπως και στο **σχήμα 2.3** θεωρούμε δύο παράλληλους κυλινδρικούς αγωγούς ακτίνων  $a$  και  $b$ , αντιστοίχως που απέχουν απόσταση  $d$ . Παρατηρώντας το **σχήμα 2.6** θα προσπαθήσουμε να βρούμε την χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους της γραμμής, με την χρήση των διπολικών συντεταγμένων. Σε αυτό το σύστημα οι επιφάνειες των αγωγών περιγράφονται από τις εξισώσεις  $\Phi = U_1$  και  $\Phi = U_2$ , όπου  $n_1, n_2$  σταθερά. Θέτουμε το δυναμικό στις επιφάνειες των δύο αγωγών ίσο με  $\Phi = U_1$  και  $\Phi = U_2$  αντίστοιχα.



**Σχήμα 2.6**

Στις επιφάνειες των αγωγών και στο εσωτερικό τους, το δυναμικό είναι ανεξάρτητο της γωνίας  $\theta$ . Για να βρούμε το δυναμικό σε κάποιο σημείο του χώρου λύνουμε την εξίσωση Laplace στο σύστημα των διπολικών συντεταγμένων. Η μορφή της είναι :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{(\cosh n - \cos \theta)^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.6.1)$$

Η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να λυθεί με την μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών. Στην περίπτωση όμως δύο παράλληλων απέραντων αγωγών όπου δεν υπάρχει μεταβολή του δυναμικού στην κατεύθυνση του άξονα  $z$ , και η εξίσωση Laplace παίρνει την μορφή:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{(\cosh n - \cos \theta)^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} = 0 \quad (2.6.2)$$

η εύρεση του δυναμικού  $\Phi$  είναι δυνατή αν υποθέσουμε ότι το  $\Phi$  ισούται με

$$\Phi(\theta, n) = \Theta(\theta) H(n) \quad (2.6.3)$$

Αντικαθιστώντας την (2.6.3) στην (2.6.2) και διαιρώντας δια  $\Phi$  βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dn^2} = 0 \quad (2.6.4)$$

Θέτουμε

$$K_\theta = \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \quad \text{και} \quad K_n = \frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dn^2} \quad (2.6.5)$$

όπου  $K_\theta$  και  $K_n$  είναι σταθερές ανεξάρτητες από τα  $\theta$  και  $n$  τέτοιες ώστε

$$K_{\theta} + K_n = 0 \quad (2.6.6)$$

Επειδή στις επιφάνειες των αγωγών και στο εσωτερικό τους, το δυναμικό είναι ανεξάρτητο του  $\theta$ , το ίδιο υποθέτουμε και για τον υπόλοιπο χώρο. Δηλαδή ότι παντού ισχύει ότι

$$K_{\theta} = 0 \quad \text{και επομένως ότι} \quad K_n = 0$$

Η λύση της εξίσωσης

$$K_n = \frac{1}{H} \frac{d^2 H}{dn^2} = 0 \quad (2.6.7)$$

δίνει για το δυναμικό  $\Phi$  την έκφραση έκφραση

$$\Phi = A_1 n + A_2 \quad (2.6.8)$$

Με ικανοποίηση των οριακών συνθηκών στις επιφάνειες των δύο αγωγών προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\text{για} \quad n=n_1 \Rightarrow \Phi = A_1 n_1 + A_2 = U_1 \quad (2.6.9)$$

$$\text{και για} \quad n=n_2 \Rightarrow \Phi = A_1 n_2 + A_2 = U_2 \quad (2.6.10)$$

Η λύση του συστήματος των δύο παραπάνω εξισώσεων δίνει

$$\Phi = \frac{U_1 - U_2}{n_1 - n_2} n + \frac{U_2 n_1 - U_1 n_2}{n_1 - n_2} \quad (2.6.11)$$

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι  $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ , όπου με χρήση των διπολικών συντεταγμένων παίρνουμε

$$\vec{E} = -\nabla \Phi = -\frac{1}{h_n} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \vec{l}_n = -\frac{1}{h_n} \frac{U_1 - U_2}{n_1 - n_2} \vec{l}_n \quad (2.6.12)$$



Η επιφανειακή πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου για  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$  είναι

$$|\sigma| = \varepsilon |E_n| = \varepsilon \left( \frac{1}{h_n} \left| \frac{U_1 - U_2}{n_1 - n_2} \right| \right) \Big|_{\mathbf{n} = \mathbf{n}_1} \quad (2.6.13)$$

Το συνολικό φορτίο στην μονάδα μήκους του αγωγού  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$  είναι

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma| h_\theta \delta\theta = \varepsilon \left| \frac{U_1 - U_2}{n_1 - n_2} \right| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{h_n} h_\theta \delta\theta \\ &= 2\pi\varepsilon \left| \frac{U_1 - U_2}{n_1 - n_2} \right| \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

Στην προηγούμενη σχέση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα ότι οι μετρικοί συντελεστές  $\mathbf{h}_n$  και  $\mathbf{h}_\theta$  είναι ίσοι. Η ζητούμενη χωρητικότητα στη μονάδα μήκους της γραμμής είναι:

$$C_\mu = \frac{|\lambda_1|}{|U_1 - U_2|} = \frac{2\pi\varepsilon}{|n_1 - n_2|} \quad (2.6.15)$$

Στο σύστημα των διπολικών συντεταγμένων ισχύουν για τις αποστάσεις των αξόνων των κυλινδρικών αγωγών από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων οι σχέσεις

$$w_1 = a \coth n_1 \text{ και } w_2 = a \coth n_2 \quad (2.6.16)$$

ενώ για τις ακτίνες των αγωγών ισχύουν οι σχέσεις

$$a = a / |\sinh n_1| \text{ και } b = a / \sinh n_2 \quad (2.6.17)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους είναι,

$$C_{\mu} = \frac{2\pi\varepsilon}{|n_1 - n_2|} = \frac{2\pi\varepsilon}{\sinh^{-1} \frac{a}{a} + \sinh^{-1} \frac{a}{b}} \quad (2.6.18)$$

Μας διευκολύνει η σχέση για το αντίστροφο υπερβολικό ημίτονο

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (2.6.19)$$

και την υπερβολική εφαπτομένη

$$\coth x = \frac{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sinh x} \quad (2.6.20)$$

Άρα για να βρούμε την χωρητικότητα συναρτήσει των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της γραμμής θα πρέπει να προσδιορίσουμε την παράμετρο  $a$  που εμφανίζεται στις διπολικές συντεταγμένες. Είναι

$$\begin{aligned} w_1 &= |a \coth n_1| = a \frac{\sqrt{\sinh^2 n_1 + 1}}{|\sinh n_1|} = a \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 + 1}}{\frac{a}{\alpha}} \\ &= \sqrt{a^2 + \alpha^2} \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

Το ίδιο ισχύει για την απόσταση  $w_2$  :

$$\begin{aligned} w_2 &= a \coth n_2 = a \frac{\sqrt{\sinh^2 n_2 + 1}}{\sinh n_2} = a \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}}{\frac{a}{b}} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned} \quad (2.6.22)$$

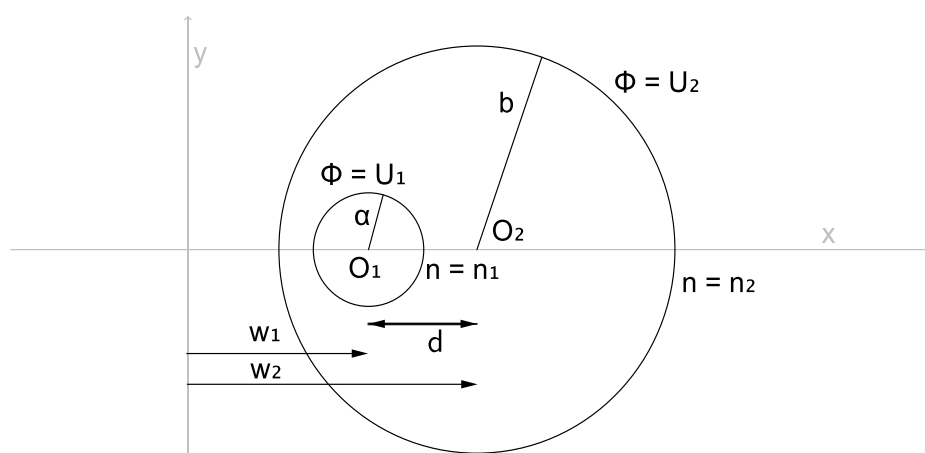
Το μέτρο της απόστασης μεταξύ των αξόνων των δύο αγωγών είναι

$$d = |w_1| + w_2 = \sqrt{a^2 + \alpha^2} + \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.6.23)$$

## 2.7 Γραμμή δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών, όπου ο ένας βρίσκεται εσωτερικά του άλλου

Στην περίπτωση που ο ένας αγωγός βρίσκεται εσωτερικά του άλλου, όπως φαίνεται στο **σχήμα 2.7**, αυτό που αλλάζει είναι η απόσταση **d** η οποία γίνεται

$$d = w_2 - w_1 = \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + \alpha^2} \quad (2.7.1)$$



**Σχήμα 2.7**

Με την ίδια μεθοδολογία όπως και στην προηγούμενη ενότητα, με τους εξωτερικούς κυλίνδρους, βρίσκουμε ότι η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους της γραμμής είναι,

$$C_\mu = \frac{2\pi\epsilon}{n_1 - n_2} = \frac{2\pi\epsilon}{\sinh^{-1} \frac{a}{\alpha} - \sinh^{-1} \frac{a}{b}} \quad (2.7.2)$$

## 2.8 Προσδιορισμός της παραμέτρου $a$ στις διπολικές συντεταγμένες

Για να προσδιορίσουμε την παράμετρο  $a$  χρησιμοποιούμε την σχέση

$$d = w_2 - w_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \pm \sqrt{a^2 + \alpha^2} \quad \text{το + για εξωτερικούς κυλίνδρους}$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + a^2 + \alpha^2 \pm 2\sqrt{(a^2 + \alpha^2)(a^2 + b^2)} \Rightarrow$$

$$2a^2 + \alpha^2 + b^2 - d^2 = \mp 2\sqrt{(a^2 + \alpha^2)(a^2 + b^2)} \Rightarrow$$

$$(2a^2 + \alpha^2 + b^2 - d^2)^2 = 4(a^2 + \alpha^2)(a^2 + b^2) \Rightarrow$$

$$\alpha^4 + b^4 + d^4 - 4a^2d^2 - 2\alpha^2d^2 - 2b^2d^2 = 2\alpha^2b^2 \Rightarrow$$

$$\alpha^4 + b^4 - 2\alpha^2b^2 + d^4 - 2d^2(\alpha^2 + b^2) = 4a^2d^2 \Rightarrow$$

$$a = \frac{1}{2d} \sqrt{(b^2 - \alpha^2)^2 + d^4 - 2d^2(\alpha^2 + b^2)} \quad (2.8.1)$$

## 2.9 Υπολογισμός της χωρητικότητας γραμμής δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών με χρήση λογισμικού πακέτου

Στην ενότητα αυτή υπολογίζουμε την χωρητικότητα γραμμής δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών, με χρήση του λογισμικού πακέτου **Microsoft Word Excel**, με τη μέθοδο των ειδώλων και με τη χρήση των διπολικών συντεταγμένων.

Για τον υπολογισμό της χωρητικότητας, σε κάθε μία περίπτωση, χρησιμοποιούμε το **Διεθνές Σύστημα μονάδων (S. I.)** και θεωρούμε ότι το μέσο μεταξύ των αγωγών είναι ο αέρας, άρα η σχετική διηλεκτρική σταθερά  $\epsilon$  που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι  $\epsilon = \epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των θεωρητικών υπολογισμών και συγκρίνοντας τα, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε την θεωρητική ορθότητα των λύσεων μας. Όλα τα μήκα δίνονται σε μέτρα (**m**) και οι χωρητικότητες σε Farad (**F**).

**Πίνακας 1.1**

	Εξωτερικοί κύλινδροι	Εσωτερικοί κύλινδροι
Ακτίνα α	0,001	0,001
Ακτίνα b	0,001	0,038
Απόσταση d	0,005	0,028
S1	0,004791288	-0,023493149
S1 (δεκτή ρίζα)	0,000208712	-4,25656E-05
S2	0,004791288	-0,028042566
S2 (δεκτή ρίζα)	0,000208712	-0,051493149
C (με χρήση ειδώλων)	1,77535E-11	1,95007E-11
Παράμετρος διπολικών	'a' 0,002291288	0,011725292
C(διπολικές συντεταγμένες)	1,77535E-11	1,95007E-11

**Πίνακας 1.2**

	Εξωτερικοί κύλινδροι	Εσωτερικοί κύλινδροι
Ακτίνα α	0,1	0,002
Ακτίνα b	0,1	0,02
Απόσταση d	0,5	0,01
S1	0,479128785	-0,029464242
S1 (δεκτή ρίζα)	0,020871215	-0,000135758
S2	0,479128785	-0,010135758
S2 (δεκτή ρίζα)	0,020871215	-0,039464242
C (με χρήση ειδώλων)	1,77535E-11	2,76728E-11
Παράμετρος διπολικών	'a' 0,229128785	0,014664242
C(διπολικές συντεταγμένες)	1,77535E-11	2,76728E-11

**Πίνακας 1.3**

	Εξωτερικοί κύλινδροι	Εσωτερικοί κύλινδροι
Ακτίνα α	0,004	0,003
Ακτίνα b	0,1	0,01
Απόσταση d	0,4	0,005
S1	0,374997333	-0,012478775
S1 (δεκτή ρίζα)	4,2667E-05	-0,000721225
S2	0,399957333	-0,005721225
S2 (δεκτή ρίζα)	0,025002667	-0,017478775
C (με χρήση ειδώλων)	9,38657E-12	6,41655E-11
Παράμετρος διπολικών C(διπολικές συντεταγμένες)	'a' 0,187477333 9,38657E-12	0,005878775 6,41655E-11

**Πίνακας 1.4**

	Εξωτερικοί κύλινδροι	Εσωτερικοί κύλινδροι
Ακτίνα α	0,002	0,003
Ακτίνα b	0,02	0,007
Απόσταση d	0,4	0,001
S1	0,398999975	-0,038767849
S1 (δεκτή ρίζα)	1,00251E-05	-0,000232151
S2	0,399989975	-0,001232151
S2 (δεκτή ρίζα)	0,001000025	-0,039767849
C (με χρήση ειδώλων)	6,70956E-12	6,76934E-11
Παράμετρος διπολικών C(διπολικές συντεταγμένες)	'a' 0,199494975 6,70956E-12	0,019267849 6,76934E-11

**Πίνακας 1.5**

	Εξωτερικοί κύλινδροι	Εσωτερικοί κύλινδροι
Ακτίνα α	0,03	0,02
Ακτίνα b	0,04	0,05
Απόσταση d	0,35	0,024
S1	0,345394282	-0,056408923
S1 (δεκτή ρίζα)	0,002605718	-0,007091077
S2	0,347394282	-0,031091077
S2 (δεκτή ρίζα)	0,004605718	-0,080408923
C (με χρήση ειδώλων)	1,20807E-11	9,90266E-11
Παράμετρος διπολικών C(διπολικές συντεταγμένες)	'a' 0,171394282	0,024658923
	1,20807E-11	9,90266E-11

**Πίνακας 1.6**

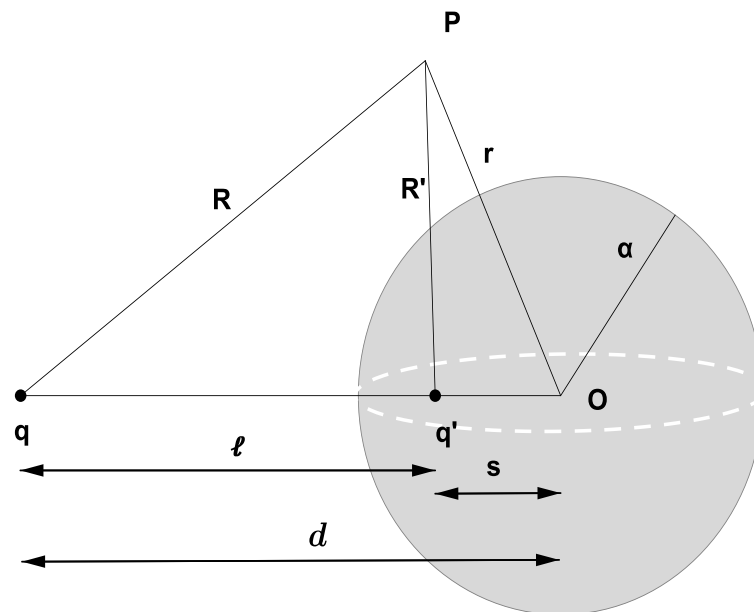
	Εξωτερικοί κύλινδροι	Εσωτερικοί κύλινδροι
Ακτίνα α	0,01	0,001
Ακτίνα b	0,01	0,002
Απόσταση d	0,022	0,0005
S1	0,015582576	-0,005311738
S1 (δεκτή ρίζα)	0,006417424	-0,000188262
S2	0,015582576	-0,000688262
S2 (δεκτή ρίζα)	0,006417424	-0,005811738
C (με χρήση ειδώλων)	6,27101E-11	9,22309E-11
Παράμετρος διπολικών C(διπολικές συντεταγμένες)	'a' 0,004582576	0,002561738
	6,27101E-11	9,22309E-11

# Κεφάλαιο 3

Εύρεση της χωρητικότητας μεταξύ δυο αγώγιμων σφαιρών με τη μέθοδο των ειδώλων και με χρήση δισφαιρικών συντεταγμένων

## 3.1 Σημειακό φορτίο έξω από αγώγιμη σφαίρα

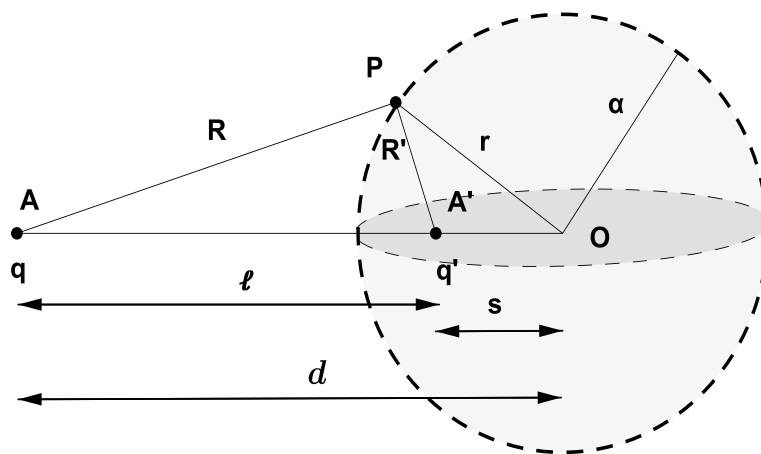
Έστω φορτίο  $q$  που απέχει απόσταση  $d$  από το κέντρο αγώγιμης σφαίρας ακτίνας  $a$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1

Θα βρούμε την ισοδυναμική επιφάνεια με μηδενικό δυναμικό, υπολογίζοντας το δυναμικό που δημιουργούν δύο ετερόσημα φορτία  $q$  και  $q'$ , σε απόσταση  $l$  μεταξύ τους, σε απέραντο ομογενή χώρο με επιτρεπτότητα  $\epsilon$ . Από το **σχήμα 3.2**





**Σχήμα 3.2**

παίρνουμε για το δυναμικό στο σημείο P :

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{q}{R} + \frac{q'}{R'} \right) \quad (3.2.1)$$

Η ισοδυναμική επιφάνεια με  $\Phi = 0$  ορίζεται από τη σχέση

$$\frac{R}{R'} = -\frac{q}{q'} = C = \text{σταθερό} \quad (3.2.2)$$

και είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P με σταθερό λόγο αποστάσεων από τα σταθερά σημεία A και A', όπου βρίσκονται τα φορτία. Η σφαίρα αυτή ακτίνας a, γνωστή από τη γεωμετρία ως « Απολλώνια σφαίρα », περικλείει το φορτίο με την μικρότερη απόλυτη τιμή και το κέντρο της O βρίσκεται στην προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος AA', σε απόσταση d από το q και s από το q'.

Στα σημεία τομής του ευθυγράμμου τμήματος με την επιφάνεια της σφαίρας ισχύει λόγω της παραπάνω σταθερής αναλογίας ότι

$$\frac{d-a}{a-s} = \frac{d+a}{a+s} = -\frac{q}{q'} = C \quad (3.2.3)$$

όπου με χρήση γνωστών ιδιοτήτων των αναλογιών βρίσκουμε ότι

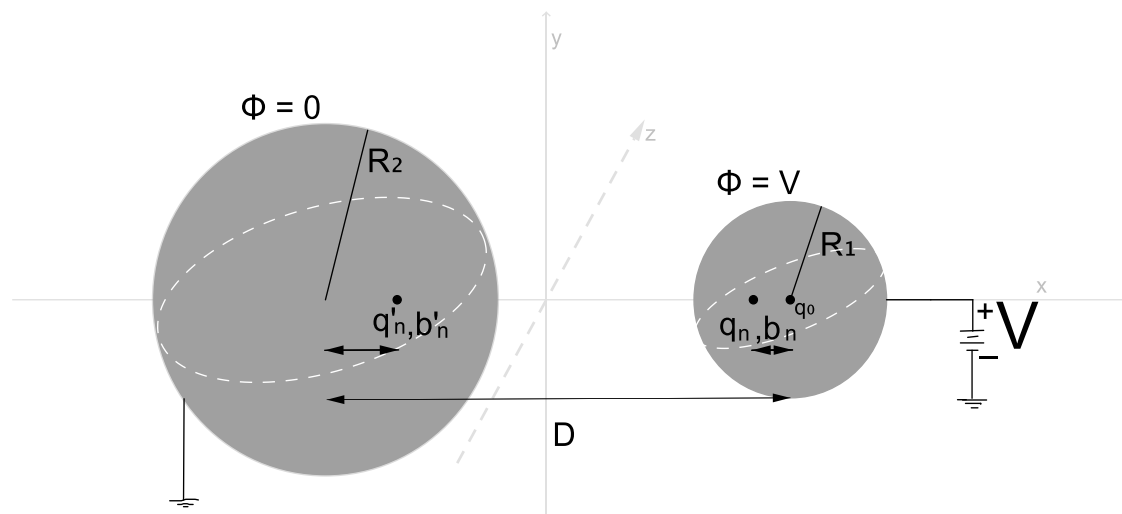
$$C = \frac{d}{a} = \frac{a}{s} \quad (3.2.3)$$

και έτσι προκύπτει το μέγεθος και η απόσταση του ειδώλου που τοποθετήσαμε στο εσωτερικό της σφαίρας :

$$q' = -\frac{d}{a}q \quad , \quad s = \frac{a^2}{d} \quad (3.2.4)$$

### 3.2 Εύρεση χωρητικότητας μεταξύ δυο αγωγίμων σφαιρών εξωτερικών η μία της άλλης

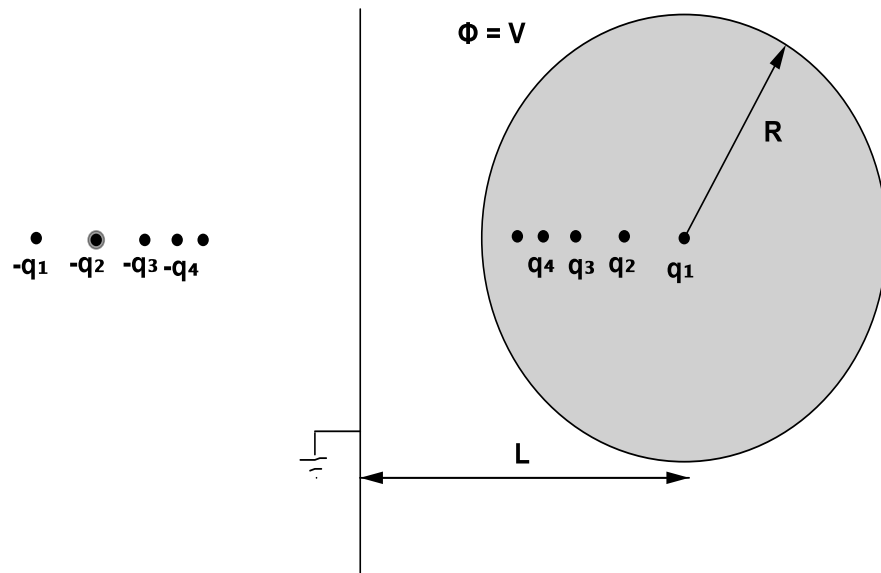
Ας θεωρήσουμε δύο αγωγίμες σφαίρες με ακτίνες  $R_1$  και  $R_2$ , αντίστοιχα, τα κέντρα των οποίων απέχουν απόσταση  $d$ . Θα βρούμε την μεταξύ τους χωρητικότητα με την μέθοδο των ειδώλων. Συνδέουμε τη σφαίρα ακτίνας  $R_1$  με μια πηγή τάσης ώστε το δυναμικό στην επιφάνεια της να ισούται με  $V$ , όπως φαίνεται στο **σχήμα 3.3**.



**Σχήμα 3.3**

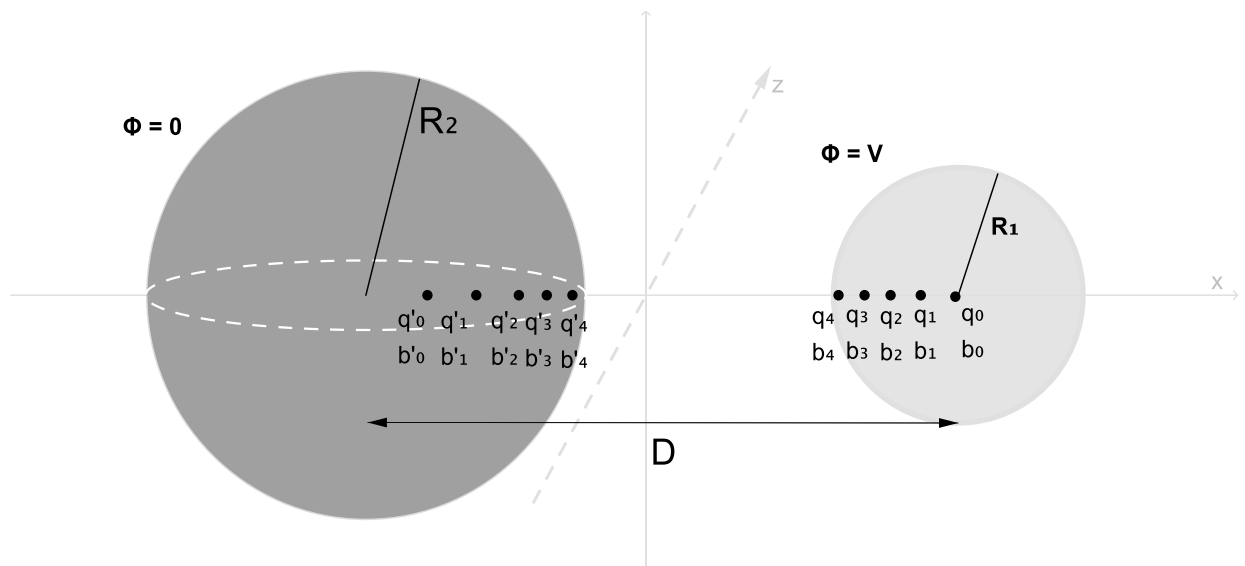
Θα τοποθετήσουμε τα φορτία-είδωλα στο εσωτερικό των δύο σφαιρών, πάνω στον άξονα που ενώνει τα κέντρα τους κοντά στα σημεία όπου οι επιφάνειες προσεγγίζουν η μία την άλλη. Όπως και στην περίπτωση της σφαίρας με δυναμικό  $V$  που απέχει

απόσταση  $L$  από γειωμένο επίπεδο, βλέπουμε ότι χρειάζεται να τοποθετήσουμε άπειρα φορτία-είδωλα εντός και εκτός της σφαίρας, ώστε να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες όπως φαίνεται στο **σχήμα 3.4**.



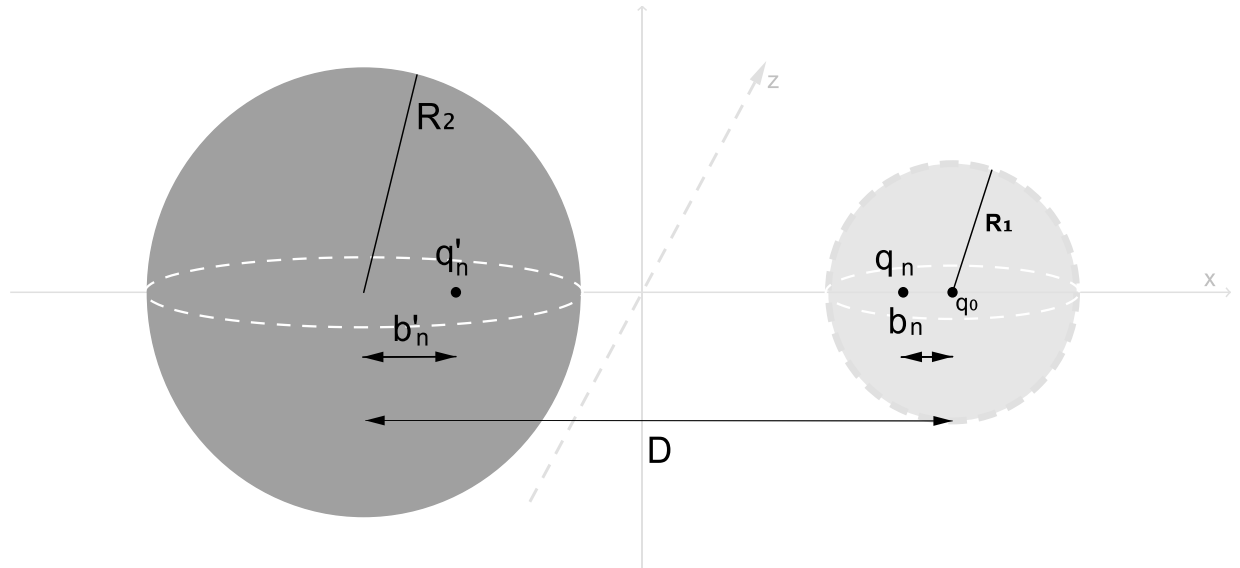
**Σχήμα 3.4**

Από το πρόβλημα του ενός σημειακού φορτίου έξω από αγωγική σφαίρα μπορούμε εύκολα να βρούμε τον αναδρομικό τύπο για τις τιμές των φορτίων-ειδώλων και τις αποστάσεις τους από τα κέντρα των δύο σφαιρών. Στην περίπτωση των δύο αγωγικών σφαιρών θα τοποθετήσουμε ένα σημειακό φορτίο είδωλο  $q_0$  στο κέντρο της σφαίρας με δυναμικό  $V$  και θα επιλέξουμε έως πέντε είδωλα σε κάθε σφαίρα, που θα προσομοιώνουν το αντίστοιχο καταναμημένο στην επιφάνεια τους φορτίο. Στο **σχήμα 3.5** φαίνονται τα φορτία και οι αποστάσεις τους από τα κέντρα των σφαιρών, οι θέσεις των οποίων βρίσκονται στην περιοχή όπου οι σφαιρικές επιφάνειες προσεγγίζουν η μία την άλλη και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι ισχυρότερη.



Σχήμα 3.5

Με επαναληπτική χρήση του προβλήματος του ενός σημειακού φορτίου έξω από μία αγώγιμη σφαίρα προκύπτουν οι αναδρομικοί τύποι για τις τιμές των φορτίων και τις αποστάσεις των ειδώλων της σφαίρας με ακτίνα  $R_1$ , όταν θεωρήσουμε ότι είναι σημειακά φορτία έξω από την αγώγιμη σφαίρα ακτίνας  $R_2$ , έτσι ώστε ισοδυναμική επιφάνεια να είναι αυτή της σφαίρας ακτίνας  $R_2$ , όπως φαίνεται στο **σχήμα 3.6**.



**Σχήμα 3.6**

Βρίσκουμε, λοιπόν, για τις τιμές και τις θέσεις των ειδώλων της σφαίρας ακτίνας  $\mathbf{R}_2$  τις σχέσεις :

$$q_{n+1} = -\frac{q'_n R_1}{D-b'_n}, \quad b_{n+1} = \frac{R_1^2}{D-b'_n}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (3.3.1)$$

Ομοίως αν θεωρήσουμε τα είδωλα  $\mathbf{q}'_n$  της σφαίρας ακτίνας  $\mathbf{R}_2$  ως σημειακά φορτία έξω από την αγωγίμη σφαίρα ακτίνας  $\mathbf{R}_1$ , ισχύει ότι

$$q'_n = -\frac{q_n R_2}{D-b_n}, \quad b'_n = \frac{R_2^2}{D-b_n} \quad (3.3.2)$$

Με χρήση του αναδρομικού τύπου και με την επιλογή πέντε ειδώλων-φορτίων σε κάθε σφαίρα, όπως φαίνεται στο **σχήμα 3.5**, έχουμε:

$$\Gamma_{\alpha} \quad \mathbf{n}=\mathbf{0},$$

$$q_0 = V 4\pi\epsilon_0 R_1, \quad b_0 = 0 \quad (3.3.3)$$

$$q'_0 = -\frac{R_2}{D-b_0} q_0 = -\frac{R_2}{D} q_0,$$

$$b'_0 = \frac{R_2^2}{D-b_0} = \frac{R_2^2}{D} \quad (3.3.4)$$

$$q_1 = -\frac{R_1}{D-b'_0} q'_0 = \frac{R_1 R_2}{D(D-b'_0)} q_0,$$

$$b_1 = \frac{R_1^2}{D-b'_0} \quad (3.3.5)$$

$$\Gamma_{\alpha} \quad \mathbf{n}=\mathbf{1},$$

$$q'_1 = -\frac{R_2}{D-b_1} q_1 = -\frac{R_1 R_2^2}{D(D-b'_0)(D-b_1)} q_0,$$

$$b'_1 = \frac{R_2^2}{D-b_1} \quad (3.3.6)$$

$$q_2 = -\frac{R_1}{D-b'_1} q'_1 = \frac{R_1^2 R_2^2}{D(D-b'_0)(D-b'_1)(D-b_1)} q_0,$$

$$b_2 = \frac{R_1^2}{D-b'_1} \quad (3.3.7)$$

$\Gamma\alpha \quad \mathbf{n=2,}$

$$q'_2 = -\frac{R_2}{D-b_2} q_2 = -\frac{R_1^2 R_2^3}{D(D-b'_0)(D-b'_1)(D-b_1)(D-b_2)} q_0 ,$$

$$b'_2 = \frac{R_2^2}{D-b_2} \tag{3.3.8}$$

$$q_3 = -\frac{R_1}{D-b'_2} q'_2 = \frac{R_1^3 R_2^3}{D(D-b'_0)(D-b'_1)(D-b'_2)(D-b_1)(D-b_2)} q_0 ,$$

$$b_3 = \frac{R_1^2}{D-b'_2} \tag{3.3.9}$$

$\Gamma\alpha \quad \mathbf{n=3,}$

$$q'_3 = -\frac{R_2}{D-b_3} q_3$$

$$= -\frac{(R_1)^3 (R_2)^4}{\prod (D-b'_n) \Big|_{n=0,1,2} \prod (D-b_1) \Big|_{n=0,1,2,3}} q_0 ,$$

$$b'_3 = \frac{R_2^2}{D-b_3} \tag{3.3.10}$$

$$q_4 = -\frac{R_1}{D-b'_3} q'_3$$

$$= \frac{(R_1)^4 (R_2)^4}{\prod (D-b'_n) \Big|_{n=0,1,2,3} \prod (D-b_1) \Big|_{n=0,1,2,3}} q_0 ,$$

$$b_4 = \frac{R_1^2}{D-b'_3} \tag{3.3.11}$$

$\Gamma\alpha \quad \mathbf{n=4,}$

$$\begin{aligned}
q'_4 &= - \frac{R_2}{D-b_4} q_4 \\
&= - \frac{(R_1)^4 (R_2)^5}{\prod (D-b'_n) \Big|_{n=0,1,2,3} \prod (D-b_1) \Big|_{n=0,1,2,3,4}} q_0, \\
b'_4 &= \frac{R_2^2}{D-b_4}
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Με το σύμβολο  $\prod$  παριστάνουμε το γινόμενο των αντίστοιχων όρων.

Βλέπουμε από τα αποτελέσματα ότι τα φορτία της σφαίρας ακτίνας  $\mathbf{R}_1$  έχουν θετικό πρόσημο, σε αντίθεση με αυτά της σφαίρας ακτίνας  $\mathbf{R}_2$  που έχουν αρνητικό πρόσημο, διότι η σφαίρα ακτίνας  $\mathbf{R}_1$  συγκεντρώνει στην επιφάνεια της θετικά φορτία ευρισκόμενη σε δυναμικό  $\mathbf{V}$ , ενώ η σφαίρα ακτίνας  $\mathbf{R}_2$ , που έχει γειωθεί, έχει αρνητικά φορτία στην επιφάνεια της. Έχοντας φτάσει στο σημείο να γνωρίζουμε τις ποσότητες φορτίου των ειδώλων συναρτήσει του ήδη γνωστού  $q_0$ , καθώς και τις αποστάσεις τους από το κέντρο της κάθε σφαίρας, αντίστοιχα, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την χωρητικότητα μεταξύ των δύο σφαιρών από τον τύπο:

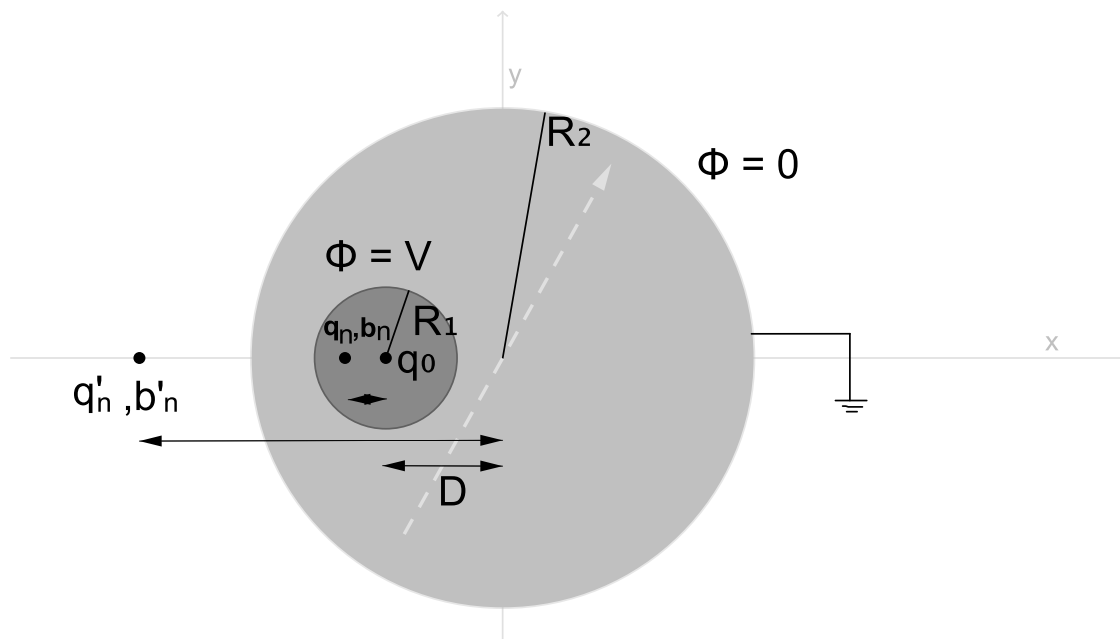
$$\begin{aligned}
C &= \frac{Q_{ολικό, R_1}}{V} = \frac{q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4}{V} \\
&= \frac{1}{V} \left( q_0 + \frac{R_1 R_2}{D (D-b'_0)} q_0 + \frac{R_1^2 R_2^2}{D (D-b'_0) (D-b'_1) (D-b_1)} q_0 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{R_1^3 R_2^3}{D (D-b'_0) (D-b'_1) (D-b_1) (D-b_2)} q_0 + \frac{(R_1)^4 (R_2)^4}{\prod (D-b'_n) \Big|_{n=0,1,2,3} \prod (D-b_1) \Big|_{n=0,1,2,3}} q_0 \right) \\
\stackrel{q_0 = V 4 \pi \epsilon_0 R_1}{\implies} C &= 4 \pi \epsilon_0 R_1 \left( 1 + \frac{R_1 R_2}{D (D-b'_0)} + \frac{R_1^2 R_2^2}{D (D-b'_0) (D-b'_1) (D-b_1)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{R_1^3 R_2^3}{D (D-b'_0) (D-b'_1) (D-b_1) (D-b_2)} + \frac{(R_1)^4 (R_2)^4}{\prod (D-b'_n) \Big|_{n=0,1,2,3} \prod (D-b_1) \Big|_{n=0,1,2,3}} \right)
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Όπως αναμενόταν το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από τα φορτία των ειδώλων που προσομοιώνουν τις φορτισμένες επιφάνειες των δύο σφαιρών και τη διαφορά δυναμικού μεταξύ τους και επομένως η χωρητικότητα εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία της διάταξης μας.



### 3.3 Εύρεση χωρητικότητας αγωγίμης σφαίρας τοποθετημένης έκκεντρα στο εσωτερικό σφαιρικής κοιλότητας με αγωγή τοιχώματα

Στην περίπτωση που έχουμε την μία σφαίρα εσωτερικά της άλλης με απόσταση  $D$  μεταξύ των κέντρων τους, όπως φαίνεται στο **σχήμα 3.7**, για την εύρεση της χωρητικότητας με τη μέθοδο των ειδώλων, έχοντας την εσωτερική σφαίρα ακτίνας  $R_1$  σε δυναμικό  $V$  και την εξωτερική σφαίρα ακτίνας  $R_2$  γειωμένη, επιλέγουμε τα είδωλα  $q_n$  εντός της σφαίρας ακτίνας  $R_1$ , ενώ τα αντίστοιχα είδωλα  $q'_n$  εξωτερικά της σφαίρας ακτίνας  $R_2$ , στην περιοχή όπου οι επιφάνειες προσεγγίζουν η μία την άλλη. Έτσι με τη χρήση των αποτελεσμάτων του προβλήματος ενός σημειακού φορτίου έξω από αγωγή σφαίρα καταλήγουμε στους παρακάτω αναδρομικούς τύπους, για τις τιμές και τις αποστάσεις των ειδώλων από τα κέντρα των σφαιρών.



Σχήμα 3.7

$$q_{n+1} = \frac{q'_n R_1}{D - b'_n}, \quad b_{n+1} = -\frac{R_1^2}{D - b'_n} \quad (3.4.1)$$

$$q'_n = -\frac{q_n R_2}{D+b_n}, b'_n = \frac{R_2^2}{D+b_n}, n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (3.4.2)$$

Με την επιλογή πέντε ειδώλων σε κάθε σφαίρα έχουμε :

Για  $n=0$ ,

$$q_0 = V 4\pi\epsilon_0 R_1, b_0 = D \quad (3.4.3)$$

$$q'_0 = -\frac{R_2}{D+b_0} q_0 = -\frac{R_2}{2D} q_0,$$

$$b'_0 = \frac{R_2^2}{D+b_0} = \frac{R_2^2}{2D} \quad (3.4.4)$$

$$q_1 = \frac{R_1}{D-b'_0} q'_0 = -\frac{R_1 R_2}{D(D-b'_0)} q_0,$$

$$b_1 = -\frac{R_1^2}{D-b'_0} \quad (3.4.5)$$

Για  $n=1$ ,

$$q'_1 = -\frac{R_2}{D+b_1} q_1 = \frac{R_1 R_2^2}{D(D-b'_0)(D+b_1)} q_0,$$

$$b'_1 = \frac{R_2^2}{D+b_1} \quad (3.4.6)$$

$$q_2 = \frac{R_1}{D-b'_1} q'_1 = \frac{R_1^2 R_2^2}{D(D-b'_0)(D-b'_1)(D+b_1)} q_0 ,$$

$$b_2 = -\frac{R_1^2}{D-b'_1} \tag{3.4.7}$$

$\Gamma_{1\alpha} \quad \mathbf{n=2,}$

$$q'_2 = -\frac{R_2}{D+b_2} q_2$$

$$= -\frac{R_1^2 R_2^3}{D(D-b'_0)(D-b'_1)(D+b_1)(D+b_2)} q_0 , \quad b'_2 = \frac{R_2^2}{D+b_2} \tag{3.4.8}$$

$$q_3 = \frac{R_1}{D-b'_2} q'_2$$

$$= -\frac{R_1^3 R_2^3}{D(D-b'_0)(D-b'_1)(D-b'_2)(D+b_1)(D+b_2)} q_0 ,$$

$$b_3 = -\frac{R_1^2}{D-b'_2} \tag{3.4.9}$$

$\Gamma_{1\alpha} \quad \mathbf{n=3,}$

$$q'_3 = -\frac{R_2}{D+b_3} q_3$$

$$= \frac{(R_1)^3 (R_2)^4}{\prod (D-b'_n) \Big|_{n=0,1,2} \prod (D+b_1) \Big|_{n=0,1,2,3}} q_0 ,$$

$$b'_3 = \frac{R_2^2}{D+b_3} \tag{3.4.10}$$

$$\begin{aligned}
q_4 &= \frac{R_1}{D-b'_3} q'_3 \\
&= \frac{(R_1)^4 (R_2)^4}{\prod (D-b'_n) \Big|_{n=0,1,2,3} \prod (D+b_1) \Big|_{n=0,1,2,3}} q_0 , \\
b_4 &= -\frac{R_1^2}{D-b'_3}
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Για  $n=4$ ,

$$\begin{aligned}
q'_4 &= -\frac{R_2}{D+b_4} q_4 \\
&= \frac{(R_1)^4 (R_2)^5}{\prod (D-b'_n) \Big|_{n=0,1,2,3} \prod (D+b_1) \Big|_{n=0,1,2,3,4}} q_0 , \\
b'_4 &= \frac{R_2^2}{D+b_4}
\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

Η χωρητικότητα μεταξύ των δύο σφαιρών είναι

$$\begin{aligned}
C &= \frac{Q_{ολικό,R_1}}{V} = \frac{q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4}{V} = \\
&= \frac{1}{V} \left( q_0 - \frac{R_1 R_2}{D(D-b'_0)} q_0 + \frac{R_1^2 R_2^2}{D(D-b'_0)(D-b'_1)(D+b_1)} q_0 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{R_1^3 R_2^3}{D(D-b'_0)(D-b'_1)(D-b'_2)(D+b_1)(D+b_2)} q_0 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(R_1)^4 (R_2)^4}{\prod (D-b'_n) \Big|_{n=0,1,2,3} \prod (D+b_1) \Big|_{n=0,1,2,3}} q_0 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\stackrel{q_0=V4\pi\varepsilon_0 R_1}{\implies} C &= 4\pi\varepsilon_0 R_1 \left( 1 - \frac{R_1 R_2}{D(D-b'_0)} + \right. \\
&+ \frac{R_1^2 R_2^2}{D(D-b'_0)(D-b'_1)(D+b_1)} - \\
&- \frac{R_1^3 R_2^3}{D(D-b'_0)(D-b'_1)(D-b'_2)(D+b_1)(D+b_2)} + \\
&\left. + \frac{(R_1)^4 (R_2)^4}{\prod (D-b'_n) \Big|_{n=0,1,2,3} \prod (D+b_1) \Big|_{n=0,1,2,3}} \right) \tag{3.4.13}
\end{aligned}$$

Καταλήγουμε όπως και στην προηγούμενη περίπτωση στον πιο πάνω τύπο της χωρητικότητας που εξαρτάται από τη γεωμετρία των δύο σφαιρών.

### 3.4 Δισφαιρικές συντεταγμένες

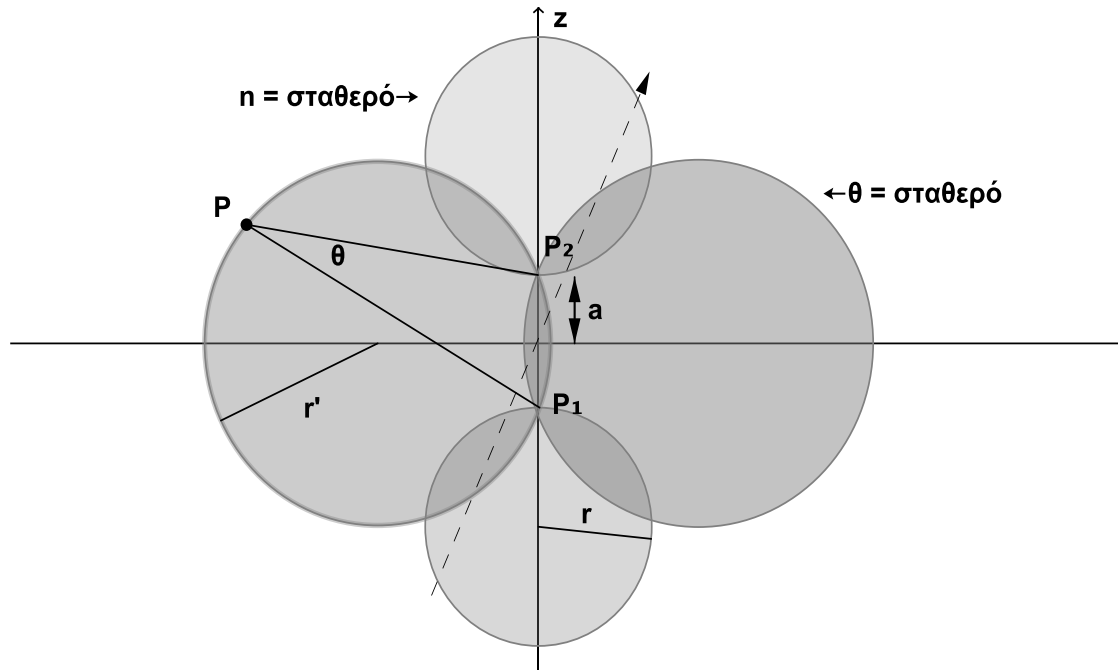
Αυτό το σύστημα συντεταγμένων προκύπτει από το σύστημα των διπολικών συντεταγμένων αν περιστρέψουμε τις οικογένειες των κύκλων γύρω από τον άξονα  $x$ , ο οποίος αντικαθίσταται από τον  $z$ , όπως φαίνεται στο **σχήμα 3.8**. Οι επιφάνειες με  $n = \text{σταθερό}$  είναι σφαίρες και οι επιφάνειες με  $\theta = \text{σταθερό}$  είναι επιφάνειες σε σχήμα μήλου, με λακούβες στον άξονα  $z$  ή έχουν ατρακτοειδές σχήμα.

Η μεταβλητή  $n$  παίρνει τιμές από το  $-\infty$  έως το  $+\infty$ . Θετική τιμή του  $n$  αντιστοιχεί σε σφαίρα που το κέντρο της βρίσκεται πάνω από το επίπεδο των αξόνων  $x$ - $y$ , ενώ αρνητική τιμή δείχνει σφαίρα που το κέντρο της βρίσκεται κάτω από το  $x$ - $y$  επίπεδο. Μηδενική τιμή του  $n$  δηλώνει σφαίρα με άπειρη ακτίνα, όπως προκύπτει από τη σχέση,

$$r = \frac{a}{|\sinh n|} \tag{3.5.1}$$

ενώ για  $n = \pm \infty$  συγκλίνει στα σημεία  $z = \pm a$ .

Η μεταβλητή  $\theta$  ενός σημείου  $P$  παίρνει τιμές από  $0$  έως  $\pi$  και δηλώνει την γωνία. Στην ειδική περίπτωση όπου  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , έχουμε σφαίρα ακτίνας  $a$ , ενώ για  $\theta = \pi$ , παίρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα μήκους  $2a$ .



**Σχήμα 3.8**

Επιφάνειες με  $\varphi = \text{σταθερό}$  δηλώνουν ημιεπίπεδα που περνούν από τον άξονα  $z$ . Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν τον άξονα  $z$  ως τον άξονα περιστροφής για τις δισφαιρικές συντεταγμένες, παίρνουμε τις σχέσεις που συνδέουν τις δισφαιρικές με τις καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a \sin\theta \cos\varphi}{\cosh n - \cos\theta} \\ y &= \frac{a \sin\theta \sin\varphi}{\cosh n - \cos\theta} \\ z &= \frac{a \sinh n}{\cosh n - \cos\theta} \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Οι μετρικοί συντελεστές είναι :

$$g_{11} = g_{22} = \frac{a^2}{(\cos n - \cos\theta)^2} \quad (3.5.3)$$

$$g_{33} = \frac{a^2 \sin^2\theta}{(\cos n - \cos\theta)^2} \quad (3.5.4)$$

Ισχύει ακόμη ότι

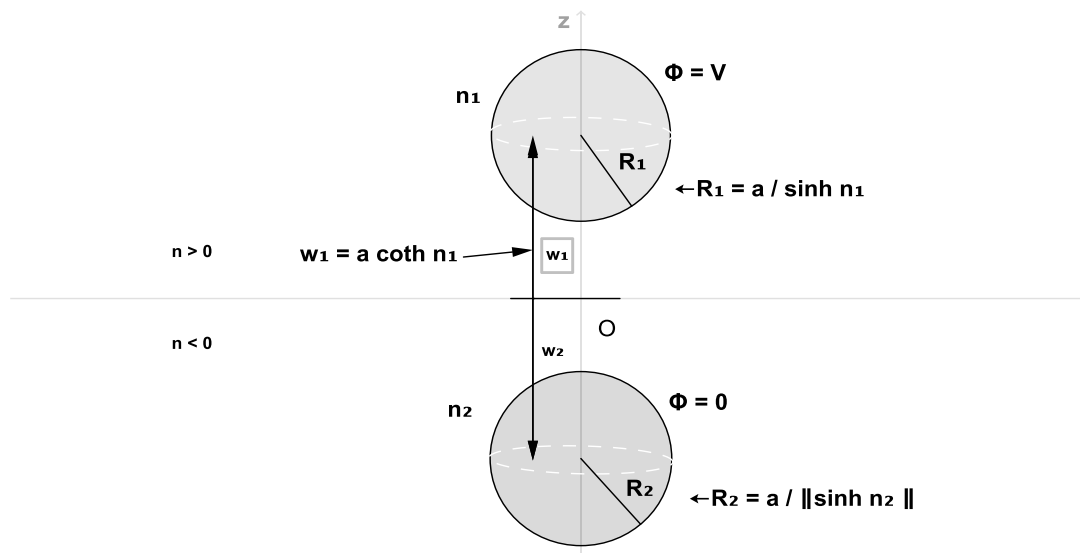
$$g^{\frac{1}{2}} = \frac{a^3 \sin\theta}{(\cos n - \cos\theta)^3} \quad (3.5.5)$$

### 3.5 Εύρεση χωρητικότητας μεταξύ δύο αγωγίμων σφαιρών με χρήση δισφαιρικών συντεταγμένων

Θέλουμε να βρούμε την χωρητικότητα μεταξύ δύο αγωγίμων σφαιρών με ακτίνες  $R_1$  και  $R_2$ , αντίστοιχα, με χρήση των δισφαιρικών συντεταγμένων. Στο **σχήμα 3.9** βλέπουμε τις σφαίρες οι οποίες απέχουν απόσταση  $d = w_1 + w_2$  από τα κέντρα τους. Θα ισχύει για τις επιφάνειες των σφαιρών και για το δυναμικό τους, αντίστοιχα,

$$n = n_1, \quad \Phi = V$$

$$n = n_2, \quad \Phi = 0$$



**Σχήμα 3.9**

Για να καθορίσουμε το ηλεκτροστατικό πεδίο ανάμεσα στις δύο σφαίρες χρησιμοποιούμε ως λύση της εξίσωσης Laplace την σχέση (3.6.1), στην οποία εμφανίζονται οι συντελεστές ανάπτυξης της σειράς Legendre ως  $A_n$  και  $B_n$  :

$$\Phi = (\cosh n - \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \sum_{\rho=0}^{\infty} [A_{\rho} e^{(\rho+\frac{1}{2})n} + B_{\rho} e^{-(\rho+\frac{1}{2})n}] \cdot P_{\rho}(\cos \theta) \quad (3.6.1)$$

Για  $n = n_2$  είναι  $\Phi = 0$  για οποιαδήποτε τιμή του  $\theta$ , άρα από την σχέση (3.6.1) έχουμε

$$A_{\rho} e^{(\rho+\frac{1}{2})n_2} + B_{\rho} e^{-(\rho+\frac{1}{2})n_2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$B_\rho = -A_\rho e^{2(\rho+\frac{1}{2})n_2} \quad (3.6.2)$$

Από τις σχέσεις (3.6.1) και (3.6.2) παίρνουμε για το δυναμικό:

$$\Phi = (\cosh n - \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \sum_{\rho=0}^{\infty} A_\rho \left[ e^{(\rho+\frac{1}{2})n} - e^{(\rho+\frac{1}{2})(2n_2-n)} \right] \cdot P_\rho (\cos \theta) \quad (3.6.3)$$

Για  $n = n_1$  είναι  $\Phi = V$  για κάθε τιμή του  $\theta$ , οπότε από την (3.6.3) προκύπτει ότι

$$\frac{V}{(\cosh n_1 - \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{\rho=0}^{\infty} A_\rho \left[ e^{(\rho+\frac{1}{2})n_1} - e^{(\rho+\frac{1}{2})(2n_2-n_1)} \right] \cdot P_\rho (\cos \theta) \quad (3.6.4)$$

Η σχέση (3.6.4) θέτοντας  $w = \cos \theta$  και κάνοντας χρήση της σχέσης ορθογωνιότητας των πολωνύμων Legendre μετασχηματίζεται στην

$$\int_{-1}^1 \frac{V P_\rho(w)}{(\cosh n_1 - w)^{\frac{1}{2}}} dw = A_\rho \left[ e^{(\rho+\frac{1}{2})n_1} - e^{(\rho+\frac{1}{2})(2n_2-n_1)} \right] \frac{2}{2\rho+1} \Rightarrow$$

$$A_\rho = \frac{2}{2\rho+1} \frac{V}{e^{(\rho+\frac{1}{2})n_1} - e^{(\rho+\frac{1}{2})(2n_2-n_1)}} \left( \int_{-1}^1 \frac{P_\rho(w)}{(\cosh n_1 - w)^{\frac{1}{2}}} dw \right) \quad (3.6.5)$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τους τρεις πρώτους όρους της σειράς Legendre, για  $\rho = 0, 1, 2$  από την εξίσωση (3.6.5) έχουμε

$$\text{Για } \rho = 0, \quad A_0 = \frac{\sqrt{2}V}{e^{\frac{n_1}{2}} - e^{-\frac{2n_2-n_1}{2}}} \left[ \cosh \frac{n_1}{2} - \sinh \frac{n_1}{2} \right] \quad (3.6.6)$$

Για  $\rho = 1$ ,

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}V}{e^{\frac{3n_1}{2}} - e^{-\frac{3(2n_2-n_1)}{2}}} \left[ (2\cosh n_1 - 1)\cosh \frac{n_1}{2} - (2\cosh n_1 + 1)\cosh \frac{n_1}{2} \right] \quad (3.6.7)$$

Για  $\rho = 2$ ,

$$A_2 = \frac{\sqrt{2}V}{e^{\frac{5n_1}{2}} - e^{-\frac{5(2n_2-n_1)}{2}}} \left[ (4\cos^2 n_1 - 2\cosh n_1 - 1)\cosh \frac{n_1}{2} - (4\cos^2 n_1 + 2\cosh n_1 - 1)\sinh \frac{n_1}{2} \right] \quad (3.6.8)$$

Με  $n = n_1$  το φορτίο στην επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας  $R_1$  θα είναι:



$$Q(n = n_1) = 4\pi \varepsilon a \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{(\cosh n_1 - \cos\theta)} \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{n_1} d\theta \quad (3.6.9)$$

Παραγωγίζουμε την σχέση (3.6.1) ως προς την μεταβλητή  $n$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= \frac{\sinh n}{2(\cosh n - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sum_{\rho=0}^{\infty} A_\rho [e^{(\rho+\frac{1}{2})n} - e^{(\rho+\frac{1}{2})(2n_2-n)}] P_\rho(\cos\theta) + \\ &+ (\cosh n - \cos\theta)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\rho=0}^{\infty} A_\rho [(\rho + \frac{1}{2}) e^{(\rho+\frac{1}{2})n} + (\rho + \frac{1}{2}) e^{(\rho+\frac{1}{2})(2n_2-n)}] P_\rho(\cos\theta) \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

Από τις σχέσεις (3.6.7) και (3.6.8) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} Q(n = n_1) &= 4\pi\varepsilon a \cdot \\ &\left\{ \frac{A_0}{2} [\sinh n_1 (e^{\frac{n_1}{2}} - e^{\frac{2n_2-n_1}{2}})] \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{(\cosh n_1 - \cos\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} (e^{\frac{n_1}{2}} + \right. \\ &e^{\frac{2n_2-n_1}{2}}) \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{(\cosh n_1 - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \Big] + \frac{A_1}{2} [\sinh n_1 (e^{\frac{3n_1}{2}} - e^{\frac{3(2n_2-n_1)}{2}})] \int_0^\pi \frac{\cos\theta \sin\theta d\theta}{(\cosh n_1 - \cos\theta)^{\frac{3}{2}}} + \\ &\frac{3}{2} (e^{\frac{3n_1}{2}} + e^{\frac{3(2n_2-n_1)}{2}}) \int_0^\pi \frac{\cos\theta \sin\theta d\theta}{(\cosh n_1 - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \Big] + \frac{A_1}{2} [\sinh n_1 (e^{\frac{5n_1}{2}} - \\ &e^{\frac{5(2n_2-n_1)}{2}}) \int_0^\pi \frac{P_2(\cos\theta) \sin\theta d\theta}{(\cosh n_1 - \cos\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{5}{2} (e^{\frac{5n_1}{2}} - e^{\frac{5(2n_2-n_1)}{2}}) \int_0^\pi \frac{P_2(\cos\theta) \sin\theta d\theta}{(\cosh n_1 - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \Big] \Big\} \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

Το πολυώνυμο  $P_2(\cos\theta)$  είναι ίσο με  $\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$  και τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην τελευταία σχέση είναι εύκολο να βρεθούν αν θέσουμε  $w = \cos\theta$ ,  $\mu = \cosh n_1$  και χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω βοηθητικά ολοκληρώματα:

$$\int \frac{w dw}{(\mu-w)^{3/2}} = (2\mu - w) \frac{2}{\sqrt{\mu-w}} \quad (3.6.12)$$

$$\int \frac{w^2 dw}{(\mu-w)^{3/2}} = - \frac{2(w^2 + 4\mu w - 8\mu^2)}{3\sqrt{\mu-w}} \quad (3.6.13)$$

$$\int \frac{w dw}{\sqrt{\mu-w}} = \frac{2(-w-2\mu)}{3} \sqrt{\mu-w} \quad (3.6.14)$$

$$\int \frac{w^2 dw}{\sqrt{\mu-w}} = - \frac{2}{15} (3w^2 + 4\mu w + 8\mu^2) \sqrt{\mu-w} \quad (3.6.15)$$

Έτσι για την χωρητικότητα από τη σχέση (3.6.9) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
C = \frac{Q(n=n_1)}{V} = \frac{4\pi\epsilon a}{V} \cdot \left\{ A_0 \left[ \sinh n_1 \left( e^{\frac{n_1}{2}} - e^{\frac{2n_2-n_1}{2}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\cosh n_1-1}} - \frac{1}{\sqrt{\cosh n_1+1}} \right) - \right. \right. \\
\left. \left( e^{\frac{n_1}{2}} + e^{\frac{2n_2-n_1}{2}} \right) \left( \sqrt{\cosh n_1-1} - \sqrt{\cosh n_1+1} \right) \right] + A_1 \left[ \sinh n_1 \left( e^{\frac{3n_1}{2}} - \right. \right. \\
\left. \left. e^{\frac{3(2n_2-n_1)}{2}} \right) \left( \frac{2\cosh n_1-1}{\sqrt{\cosh n_1-1}} - \frac{2\cosh n_1+1}{\sqrt{\cosh n_1+1}} \right) - \left( e^{\frac{3n_1}{2}} + e^{\frac{3(2n_2-n_1)}{2}} \right) \left( \sqrt{\cosh n_1-1} (1 + \right. \right. \\
\left. \left. 2 \cosh n_1) + \sqrt{\cosh n_1+1} (1 - 2 \cosh n_1) \right) \right] + A_2 \left[ \frac{1}{2} \sinh n_1 \left( e^{\frac{5n_1}{2}} - \right. \right. \\
\left. \left. e^{\frac{5(2n_2-n_1)}{2}} \right) \left( \frac{1-4\cosh n_1-8\cos^2 n_1}{\sqrt{\cosh n_1+1}} - \frac{1+4\cosh n_1-8\cos^2 n_1}{\sqrt{\cosh n_1-1}} + \frac{1}{\sqrt{\cosh n_1+1}} - \frac{1}{\sqrt{\cosh n_1-1}} \right) + \right. \\
\left. \frac{5}{2} \left( e^{\frac{5n_1}{2}} + e^{\frac{5(2n_2-n_1)}{2}} \right) \left( \left( -\frac{1}{5} \right) \left( \sqrt{\cosh n_1-1} (3 + 4 \cosh n_1 + 8\cos^2 n_1) - \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. \sqrt{\cosh n_1+1} (3 - 4 \cosh n_1 + 8\cos^2 n_1) \right) \right) + \sqrt{\cosh n_1-1} - \sqrt{\cosh n_1+1} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

(3.6.16)

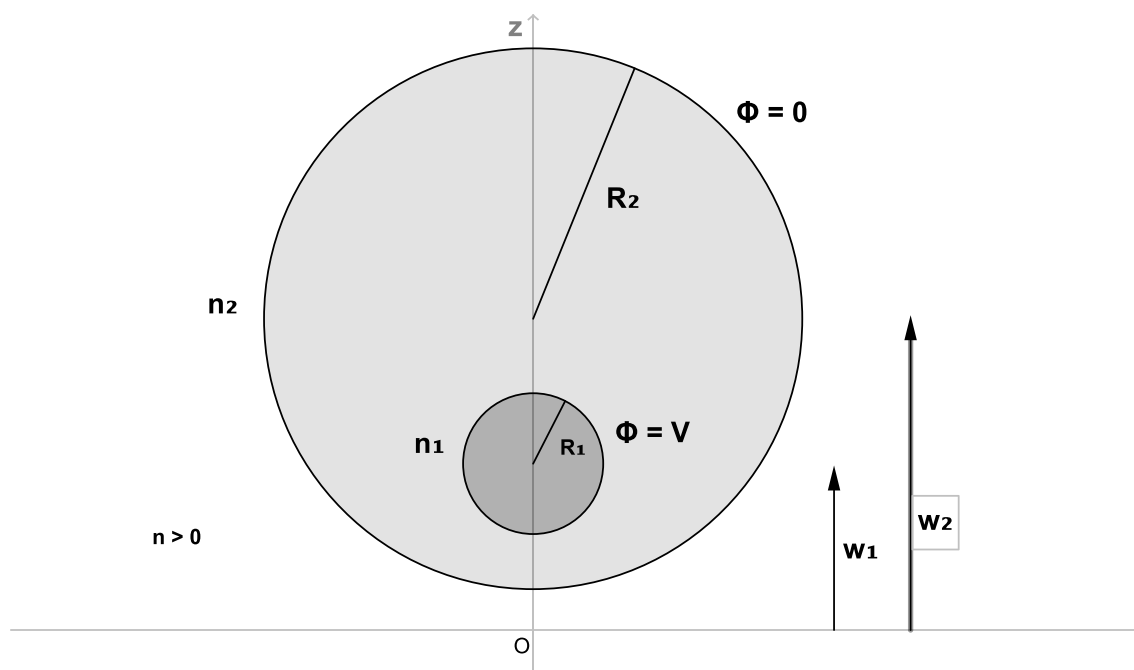
Η παράμετρος  $\mathbf{a}$  με τον ίδιο τρόπο όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο με τις διπολικές συντεταγμένες δίνεται από την σχέση (2.8.1) η οποία είναι:

$$a = \frac{1}{2d} \sqrt{(b^2 - \alpha^2)^2 + d^4 - 2d^2(\alpha^2 + b^2)}$$

Παρατηρούμαι ότι η σχέση (3.6.14) που εκφράζει την χωρητικότητα μεταξύ των δύο σφαιρών εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία της διάταξης.

### 3.6 Εύρεση χωρητικότητας αγωγίμης σφαίρας τοποθετημένης έκκεντρα στο εσωτερικό σφαιρικής κοιλότητας με αγωγή τοιχώματα, με χρήση δισφαιρικών συντεταγμένων

Στην περίπτωση που η μία σφαίρα βρίσκεται στο εσωτερικό της άλλης όπως φαίνεται στο **σχήμα 3.10**



**Σχήμα 3.10**

Η μόνη διαφορά εδώ είναι ότι  $n_1, n_2 > 0$ . Με την ίδια λογική έχουμε την εξωτερική σφαίρα ακτίνας  $R_2$  γειωμένη, ενώ η σφαίρα ακτίνας  $R_1$  έχει δυναμικό  $V$ .

Η **σχέση (3.6.15)** δίνει την χωρητικότητα μεταξύ των δύο σφαιρών.

### 3.7 Υπολογισμός της χωρητικότητας μεταξύ δύο αγωγίμων σφαιρών με χρήση λογισμικού πακέτου

Χρησιμοποιούμε το **Διεθνές Σύστημα Μονάδων (Σ.Ι.)** και θεωρούμε ότι το μέσο μεταξύ των σφαιρών είναι ο αέρας, άρα η σχετική διηλεκτρική σταθερά είναι  $\epsilon_0 \simeq 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ . και η χωρητικότητα υπολογίζεται σε Farad (**F**). Όλα τα μήκη δίνονται σε μέτρα (**m**).

Τα αποτελέσματα, από τους υπολογισμούς με χρήση του λογισμικού πακέτου, που παρουσιάζονται στους πίνακες που ακολουθούν, επιβεβαιώνουν την θεωρητική ορθότητα των λύσεων μας.

**Πίνακας 1.7**

	Εξωτερικές σφαίρες	Εσωτερικές σφαίρες
Ακτίνα R1	0,004	0,001
Ακτίνα R2	0,004	0,2
Απόσταση d	0,2	0,07
Παράμετρος 'a'	0,099919968	0,250705148
C(δισφαιρικών)	4,45448E-13	1,12677E-13
C(είδωλα)	4,45238E-13	1,12747E-13
Απόστασεις ειδώλων		
b0	0	0
b0'	0,00008	0,285714286
b1	8,0032E-05	4,63576E-06
b1'	8,0032E-05	0,571390731
b2	8,0032E-05	1,99445E-06
b2'	8,0032E-05	0,571412291
b3	8,0032E-05	1,99437E-06
b3'	8,0032E-05	0,571412291
b4	8,0032E-05	1,99437E-06
b4'	8,0032E-05	0,571444852

**Πίνακας 1.8**

	Εξωτερικές σφαίρες	Εσωτερικές σφαίρες
Ακτίνα R1	0,01	0,001
Ακτίνα R2	0,01	0,05
Απόσταση d	0,1	0,02
Παράμετρος 'a'	0,048989795	0,052465471
C(δισφαιρικών)	1,10129E-12	1,11255E-13
C(είδωλα)	1,124E-12	1,17966E-13
Απόστασεις ειδώλων		
b0	0	0
b0'	0,001	0,0625
b1	0,001010101	2,35294E-05
b1'	0,001010204	0,124853114
b2	0,001010205	9,53715E-06
b2'	0,001010205	0,124940421
b3	0,001010205	9,52922E-06
b3'	0,001010205	0,124940471
b4	0,001010205	9,52921E-06
b4'	0,001010205	0,125059586

**Πίνακας 1.9**

	Εξωτερικές σφαίρες	Εσωτερικές σφαίρες
Ακτίνα R1	0,03	0,002
Ακτίνα R2	0,05	0,05
Απόσταση d	0,2	0,024
Παράμετρος 'a'	0,09539392	0,039949969
C(δισφαιρικών)	3,49445E-12	2,57492E-13
C(είδωλα)	3,47718E-12	2,57283E-13
Απόστασεις ειδώλων		
b0	0	0
b0'	0,0125	0,052083333
b1	0,0048	0,000142433
b1'	0,012807377	0,103552114
b2	0,004807882	5,02815E-05
b2'	0,012807894	0,103948887
b3	0,004807895	5,0032E-05
b3'	0,012807895	0,103949966
b4	0,004807895	5,00313E-05
b4'	0,012807895	0,10438427

**Πίνακας 1.10**

	Εξωτερικές σφαίρες	Εσωτερικές Σφαίρες
Ακτίνα R1	0,01	0,001
Ακτίνα R2	0,02	0,4
Απόσταση d	0,22	0,03
Παράμετρος 'a'	0,108859841	2,651649811
C(δισφαιρικών)	1,12943E-12	1,11592E-13
C(είδωλα)	1,1173E-12	1,11829E-13
Απόστασεις ειδώλων		
b0	0	0
b0'	0,001818182	2,666666667
b1	0,000458333	3,79267E-07
b1'	0,001821978	5,333265909
b2	0,000458341	1,88563E-07
b2'	0,001821978	5,333299811
b3	0,000458341	1,88562E-07
b3'	0,001821978	5,333299811
b4	0,000458341	1,88562E-07
b4'	0,001821978	5,333366856



**Πίνακας 1.11**

	Εξωτερικές σφαίρες	Εσωτερικές σφαίρες
Ακτίνα R1	0,4	0,01
Ακτίνα R2	0,4	0,06
Απόσταση d	2	0,03
Παράμετρος 'a'	0,916515139	0,042163702
C(δισφαιρικών)	4,55448E-12	2,48492E-13
C(είδωλα)	4,64448E-12	2,57671E-13
Απόστασεις ειδώλων		
b0	0	0
b0'	0,08	0,06
b1	0,083333333	0,003333333
b1'	0,083478261	0,108
b2	0,083484574	0,001282051
b2'	0,083484848	0,115081967
b3	0,08348486	0,001175337
b3'	0,083484861	0,115475896
b4	0,083484861	0,00116992
b4'	0,083484861	0,124869583

## Βιβλιογραφία

1. Ι.Δ. Βεργάδος , Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής , Τόμος Ι , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης , 2004
2. I.S. Gradshteyn , I.M. Ryzhik , Table of Integrals Series and Products , Academic Press , 1965
3. Parry Moon and Domina Spencer , Field Theory for Engineers” , D. Van Nostrand Company Inc. , 1961
4. Ι.Α. Τσαλαμέγκας – Ι.Α. Ρουμेलιώτη , “Σημειώσεις Ηλεκτρομαγνητικών Πεδίων” , Τόμοι Ι , ΙΙ , Αθήνα 2002
5. Θ.Δ. Τσιμπούκης , “Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, Βασική Θεωρία και Εφαρμογές” , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης , 2011
6. Marcus Zahn , “Electromagnetic Field Theory – a problem solving approach , John Wiley and Sons Inc. , 1979



