



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

**Προσομοίωση δινορρευμάτων και αντιστοίχων απωλειών σε
επιφανειακούς μόνιμους μαγνήτες
κινητήρων συγκεντρωμένων τυλιγμάτων κλασματικής αύλακας**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημήτριος Γ. Αγριοστάθης

Επιβλέπων : Αντώνιος Κλαδάς
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα Μάιος 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

**Προσομοίωση δινορρευμάτων και αντιστοίχων απωλειών σε
επιφανειακούς μόνιμους μαγνήτες
κινητήρων συγκεντρωμένων τυλιγμάτων κλασματικής αύλακας**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημήτριος Γ. Αγριοστάθης

Επιβλέπων : Αντώνιος Κλαδάς
Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 13η Μαΐου 2014.

.....
Αντώνιος Κλαδάς
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Στέφανος Μανιάς
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Στάυρος Παπαθανασίου
Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα Μάιος 2014

.....

Δημήτριος Γ. Αγριοστάθης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Δημήτριος Γ. Αγριοστάθης, 2014

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Οι απώλειες δινορρευμάτων στους μόνιμους μαγνήτες σε μηχανές εναλλασσομένου ρεύματος με δρομείς μονίμων μαγνητών συνήθως αγνοούνται, καθώς η θεμελιώδης συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου στο διάκενο περιστρέφεται σε συγχρονισμό με τον δρομέα και οι αρμονικές χρόνου της κυματομορφής του ρεύματος και χώρου του μαγνητικού πεδίου του διακένου που οφείλονται στη διαμόρφωση των τυλιγμάτων του στάτη είναι γενικά μικρές. Ωστόσο, λόγω των πλεονεκτημάτων μη επικάλυψης των τερματικών συνδέσεων των τυλιγμάτων, αναπτύσσεται πρόσφατα μια σημαντική κατηγορία μηχανών, οι οποίες έχουν συγκεντρωμένα τυλίγματα κλασματικής αύλακας, στις οποίες η θεμελιώδης συνιστώσα της μαγνητεγερτικής δύναμης του στάτη εμφανίζει διαφορετικό αριθμό πόλων από αυτούς του δρομέα. Στις μηχανές αυτές η ροπή παράγεται από ανώτερη αρμονική συνιστώσα της μαγνητεγερτικής δύναμης του δρομέα. Η θεμελιώδης συνιστώσα και άλλες χαμηλής τάξης αρμονικές συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου του στάτη μπορούν στις περιπτώσεις αυτές να προκαλέσουν δινορρεύματα σημαντικής έντασης και αντίστοιχες απώλειες στους μόνιμους μαγνήτες. Καθίσταται επομένως απαραίτητο να αναπτυχθεί μια αποδοτική μεθοδολογία εκτίμησης της πυκνότητας δινορρευμάτων και των αντιστοίχων απωλειών που επιφέρουν στους μόνιμους μαγνήτες. Για τον σκοπό αυτόν, στην παρούσα εργασία αναπτύσσονται δύο μεθοδολογίες, οι οποίες χρησιμοποιώντας αναλυτικές μεθόδους επίλυσης του μαγνητικού πεδίου επιτρέπουν ικανοποιητική εκτίμηση των δινορρευμάτων και των αντιστοίχων απωλειών στους μαγνήτες των μηχανών αυτού του τύπου. Με βάση τις προαναφερόμενες μεθοδολογίες επιχειρήθηκε επίσης παραμετρική διερεύνηση της επίδρασης των ηλεκτρικών και γεωμετρικών μεγεθών στις εκτιμώμενες απώλειες και τα λειτουργικά χαρακτηριστικά της μηχανής.

Λέξεις κλειδιά: Απώλειες δινορρευμάτων, δρομείς μονίμων μαγνητών, σύγχρονες ηλεκτρικές μηχανές, τυλίγματα κλασματικής αύλακας.

Abstract

The eddy current losses in the permanent magnets of brushless ac machines are usually neglected, since the fundamental component of the air-gap field usually rotates in synchronism with the rotor and time harmonics in the current waveform and air-gap magnetic field space harmonics due to the winding distribution are generally small. However, due to advantages of non-overlapping end zone winding parts an important category of brushless ac machine design is emerging, those with fractional slot concentrated windings, in which the fundamental component of the stator MMF has different number of poles than the rotor. The torque in these machines is developed by a higher order MMF harmonic. The fundamental component and lower order MMF harmonics can then give rise to significant eddy currents and respective losses in the rotor magnets. It is thereby useful to establish an efficient methodology enabling prediction of the density of eddy currents and their corresponding losses in the magnets. For this purpose two methodologies have been developed in this thesis, which use analytical methods for the magnetic field distribution analysis enabling prediction of the eddy currents and the respective losses developed in the permanent magnets of such machines. By using the above mentioned methodologies, the impact of various electric and geometric variables on the eddy current losses as well as on the machine operating characteristics has been investigated.

Keywords: Eddy current losses, surface permanent magnet rotors, synchronous electrical machines, fractional slot windings.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με στήριξαν και με βοήθησαν κατά την εκπόνηση της διπλωματικής αυτής εργασίας.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Αντώνη Κλαδά για την ανάθεση της εργασίας και την καθοδήγηση κατά την εκπόνησή της, καθώς και τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Μίνωα Μπενιακάρ για την υποστήριξη και τις υποδείξεις του.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους δικούς μου και τους συμφοιτητές μου Γιώργο Αλπογιάννη και Κυριακή Αντωνιάδου για την ποικιλόμορφη βοήθεια που μου παρείχαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη	5
Abstract	7
Ευχαριστίες	9
Περιεχόμενα	11
Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή	13
1.1 Σκοπός της εργασίας	13
1.2 Δομή της εργασίας	13
Κεφάλαιο 2 Το φαινόμενο των δινορρευμάτων	15
2.1 Ορισμός	15
2.2 Εφαρμογές και επιπτώσεις	15
2.2.1 Το επιδερμικό φαινόμενο	16
2.2.2 Το φαινόμενο γεινίασης	18
2.3 Δινορρεύματα στις ηλεκτρικές μηχανές	18
Κεφάλαιο 3 Μηχανές μονίμων μαγνητών	19
3.1 Τύλιγμα	20
3.2 Συντελεστής Τυλίγματος	21
3.3 Μαγνητεγερτική Δύναμη	25
3.4 Αρμονικές Μαγνητεγερτικής Δύναμης	28
Κεφάλαιο 4 Αναλυτικός Υπολογισμός Δινορρευμάτων	35
4.1 Εξισώσεις Maxwell	35
4.2 Η εξίσωση διάχυσης	37
4.2.1 Χωρισμός μεταβλητών σε καρτεσιανές συντεταγμένες	39
4.2.2 Χωρισμός μεταβλητών σε κυλινδρικές συντεταγμένες	40
4.2.3 Χωρισμός μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες	42
4.2.4 Συνοριακές συνθήκες	44
4.3 Παραδείγματα αναλυτικού υπολογισμού δινορρευμάτων	45
4.3.1 Κυλινδρικές συντεταγμένες – Διέγερση από ρευματοφόρο βρόχο παράλληλο σε ημιάπειρη πλάκα	45
4.3.2 Καρτεσιανές Συντεταγμένες – Διέγερση από νηματοειδές ρεύμα παράλληλα σε ημιάπειρη πλάκα	50

4.3.3	Πολικές Συντεταγμένες – Στοιχειώδης περιστρεφόμενη μηχανή	55
Κεφάλαιο 5	Μοντελοποίηση μηχανών μονίμων μαγνητών συγκεντρωμένου τυλίγματος	59
5.1	Μοντέλο σε καρτεσιανές συντεταγμένες	59
5.1.1	Ορισμός γεωμετρίας μοντέλου	59
5.1.2	Αρμονικές ΜΕΔ.....	61
5.1.3	Αναλυτικός υπολογισμός απωλειών δινορρευμάτων	63
5.1.4	Εφαρμογή μοντέλου	65
5.2	Μοντέλο σε πολικές συντεταγμένες	72
5.2.1	Γεωμετρία μοντέλου	73
5.2.2	Αναλυτικός υπολογισμός δινορρευμάτων	73
5.2.3	Εφαρμογή μοντέλου	77
5.3	Σύγκριση των δύο μοντέλων	83
5.3.1	Μηχανή δεδομένων πίνακα 1 – 36 αυλάκων 34 πόλων	84
5.3.2	Μηχανή δεδομένων πίνακα 2 – 12 αυλάκων 10 πόλων	85
5.4	Συμπεράσματα	86
5.5	Ιδιαίτερες περιπτώσεις.....	87
Κεφάλαιο 6	Συμπεράσματα.....	89
6.1	Κυριότερα συμπεράσματα	90
6.2	Σημεία καινοτομικής συνεισφοράς.....	91
6.3	Προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση	91
Βιβλιογραφία	92

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

1.1 Σκοπός της εργασίας

Σκοπός της παρούσης διπλωματικής εργασίας είναι να αναπτυχθούν κατάλληλες μεθοδολογίες βασισμένες σε αναλυτικές λύσεις για το πρόβλημα προσδιορισμού των δινορρευμάτων και των απωλειών που αναπτύσσονται στους μόνιμους μαγνήτες των δρομέων των μηχανών εναλλασσομένου ρεύματος και στη συνέχεια η χρησιμοποίηση αυτών των αποτελεσμάτων για τον υπολογισμό μέσω ανάπτυξης κατάλληλου αριθμητικού κώδικα της επίδρασης των γεωμετρικών και ηλεκτρικών μεγεθών της μηχανής στις απώλειες. Για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκαν δύο μεθοδολογίες, μία σε καρτεσιανές και μία σε πολικές συντεταγμένες, οι οποίες ακολουθούν διαφορετικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα και είναι κατάλληλες σε διαφορετικούς τύπους μηχανών.

Στο προγραμματιστικό μέρος της εργασίας ο κώδικας υπολογισμού των απωλειών για τα μοντέλα γράφτηκε σε προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB.

1.2 Δομή της εργασίας

Η εργασία περιλαμβάνει 5 κεφάλαια, που καλύπτουν τις επιμέρους θεματικές ενότητες. Στο πρώτο κεφάλαιο περιλαμβάνονται ο σκοπός της εργασίας και σύντομη παρουσίασή της μέσω περιγραφής των περιεχομένων των κεφαλαίων. Ειδικότερα:

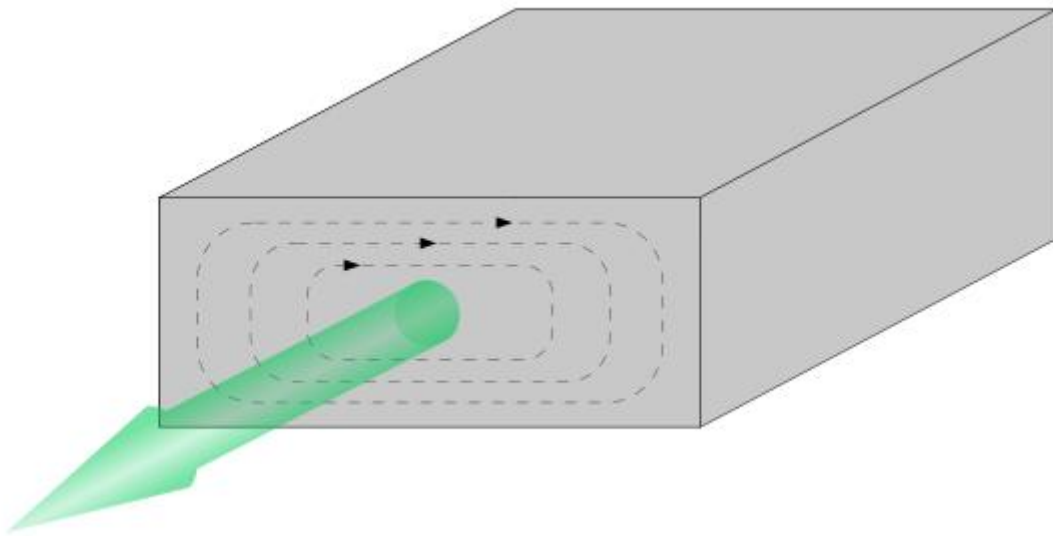
- Στο δεύτερο κεφάλαιο επιχειρείται μια εισαγωγή στη συμπεριφορά των δινορρευμάτων. Εξετάζεται ο τρόπος δημιουργίας τους και περιγράφονται οι κύριες επιδράσεις τους αλλά και οι αρνητικές επιπτώσεις τους στη λειτουργία των μηχανών.
- Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύονται οι μηχανές μόνιμων μαγνητών με συγκεντρωμένα τυλίγματα. Η τοπολογία των τυλιγμάτων των μηχανών αυτών διαφέρει από τις συμβατικές μηχανές κατανομημένων τυλιγμάτων πράγμα που διαφοροποιεί και τον τρόπο λειτουργίας τους. Επεξηγείται επίσης πώς διαμορφώνεται ο συντελεστής τυλίγματος, η μαγνητεγερτική δύναμη και οι αρμονικές συνιστώσες της στις μηχανές αυτές.
- Στο τέταρτο κεφάλαιο καταστρώνονται οι εξισώσεις Maxwell και διαμορφώνεται η εξίσωση διάχυσης του μαγνητικού πεδίου που διέπει τα φαινόμενα των δινορρευμάτων. Περιγράφονται επίσης οι μέθοδοι επίλυσης της εξίσωσης αυτής, η πιο διαδεδομένη των οποίων βασίζεται στην τεχνική του χωρισμού των μεταβλητών. Επιλύονται οι εξισώσεις για ορισμένες τυπικές γεωμετρικές προβλημάτων οι οποίες προσφέρονται για αναλυτική επίλυση και υπολογίζεται η πυκνότητα δινορρευμάτων σε αγώγιμα μέσα.

- Στο πέμπτο κεφάλαιο αναπτύσσονται δύο μοντέλα μηχανών, ένα σε καρτεσιανές και ένα σε πολικές συντεταγμένες, τα οποία βασίζονται σε αναλυτικό υπολογισμό των απωλειών δινορρευμάτων. Καταstrώνονται έτσι ώστε να επιτρέπουν την ανάλυση ευαισθησίας για διάφορες παραμέτρους των μηχανών και εξετάζεται η συμβατότητα των μοντέλων μεταξύ τους.
- Στο έκτο κεφάλαιο επιχειρείται η ανακεφαλαίωση της εργασίας, συγκεντρώνονται τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν, παρουσιάζονται τα σημεία επιστημονικής συνεισφοράς της και προτείνονται θέματα για περαιτέρω διερεύνηση βάσει των αποτελεσμάτων της εργασίας.

Κεφάλαιο 2 Το φαινόμενο των δινορρευμάτων

2.1 Ορισμός

Δινορρεύματα ονομάζονται τα ηλεκτρικά ρεύματα που δημιουργούνται σε αγωγούς εντός των οποίων υπάρχει μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Η ονομασία τους προέρχεται από τους σχηματισμούς της διαδρομής τους στο υλικό που θυμίζει τις δίνες που προκαλούνται στην επιφάνεια ενός υγρού ύστερα από μια διαταραχή. Η μορφή αυτών των διαδρομών δίνεται στο σχήμα 2.1 ενώ φαίνεται επίσης η κατεύθυνση του πεδίου που τα δημιουργεί.



Σχήμα 2.1 Δινορεύματα σε αγώγιμο υλικό

Το πλάτος των δινορρευμάτων εξαρτάται από την ένταση του μαγνητικού πεδίου και τη συχνότητά του, από την αγωγιμότητα του υλικού και το πάχος του.

2.2 Εφαρμογές και επιπτώσεις

Τα δινορρεύματα έχουν μεγάλο πλήθος από εφαρμογές. Μερικές από αυτές είναι οι ακόλουθες:

- Μη καταστροφικός έλεγχος: Το δοκίμιο ενός υλικού μπορεί να ελεγχθεί για ρωγμές ή άλλες ατέλειες της γεωμετρίας του μέσω του εντοπισμού δινορρευμάτων σε αυτό
- Ηλεκτρομαγνητική πέδηση: Μια μεταλλική πλάκα που κινείται εντός επιβαλλόμενου εξωτερικού μαγνητικού πεδίου μπορεί να επιβραδυνθεί μέσω της

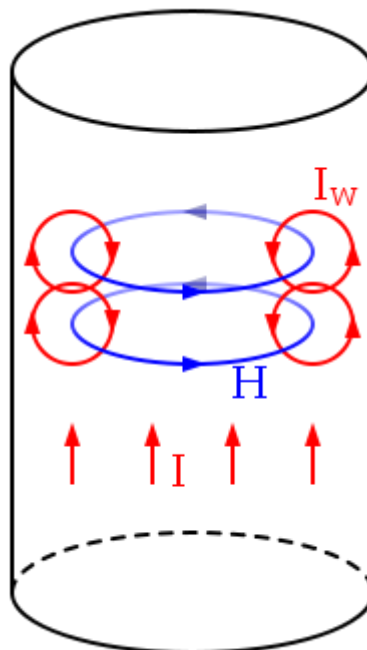
αλληλεπίδρασης του εξωτερικού πεδίου με το μαγνητικό πεδίο των δινορρευμάτων.

- Αναγνώριση μετάλλων: Όπως στην ηλεκτρομαγνητική πέδηση, ένα μεταλλικό δοκίμιο το οποίο περνά από σταθερά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο θα επιβραδυνθεί. Διαφορετικά μέταλλα επιβραδύνονται με διαφορετικούς ρυθμούς, γεγονός που επιτρέπει την αναγνώρισή τους.
- Μαγνητική αιώρηση: Η δημιουργία αντίθετου μαγνητικού πεδίου από τα δινορρεύματα μπορεί να καταστήσει δυνατή την αιώρηση ενός μαγνήτη. Αυτή η αρχή επιτρέπει τη λειτουργία των υπερταχειών μαγνητικής αιώρησης.

Αρκετές ακόμα εφαρμογές των δινορρευμάτων μπορούν να αναφερθούν, οι οποίες υπογραμμίζουν τη χρησιμότητά τους. Ωστόσο τα δινορρεύματα έχουν και ανεπιθύμητες παρενέργειες σε ένα πλήθος άλλων εφαρμογών, όπως η πρόκληση του επιδερμικού φαινομένου και του φαινομένου γειτνίασης. Τα φαινόμενα αυτά ευθύνονται για τις διαφεύγουσες απώλειες στις ηλεκτρικές μηχανές, γι' αυτό θα εξεταστούν λεπτομερέστερα.

2.2.1 Το επιδερμικό φαινόμενο

Όταν ένας αγωγός διαρρέεται από εναλλασσόμενο ηλεκτρικό ρεύμα, εμφανίζεται η τάση το ρεύμα αυτό να κατανέμεται με μεγαλύτερη πυκνότητα κοντά στην επιφάνεια του αγωγού. Αυτό ονομάζεται επιδερμικό φαινόμενο. Μια αναπαράστασή του δίνεται στο σχήμα 2.2



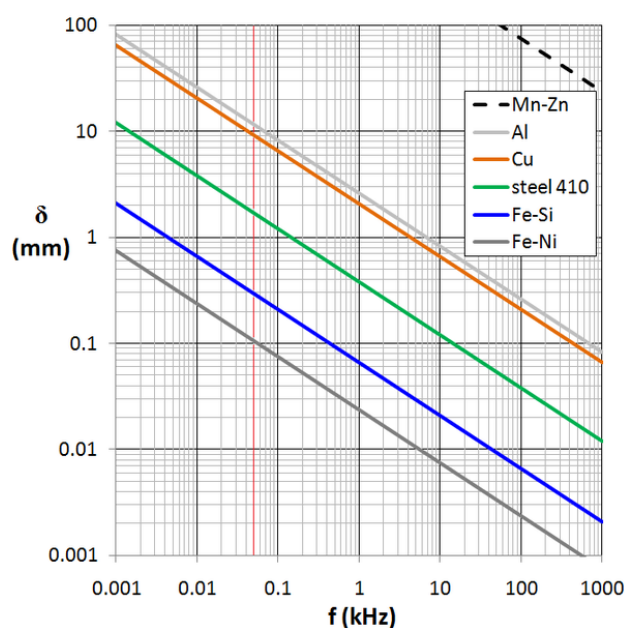
Σχήμα 2.2 Το επιδερμικό φαινόμενο σε αγωγό

Το εναλλασσόμενο ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό κατά μήκος του δημιουργεί το εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο με ένταση \mathbf{H} που βλέπουμε στο σχήμα 2.2. Αυτό με τη σειρά του δημιουργεί τα δινορρεύματα. Σύμφωνα με το νόμο του Lenz, η φορά των δινορρευμάτων είναι τέτοια ώστε να αντιτίθενται στην πηγή που τα δημιούργησε, δηλαδή το μαγνητικό πεδίο \mathbf{H} . Βλέπουμε ότι το διανυσματικό άθροισμα των δινορρευμάτων με το ρεύμα του αγωγού έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της έντασης στον εσωτερικό όγκο του αγωγού και την αύξηση στις περιοχές που βρίσκονται πιο κοντά στην επιφάνειά του. Τελικά η συγκέντρωση της πυκνότητας ρεύματος σε διατομή μικρότερης επιφάνειας οδηγεί στην αύξηση της αντίστασης του αγωγού.

Από την περιγραφή του μηχανισμού γένεσης γίνεται κατανοητό ότι για μεγαλύτερες συχνότητες το μαγνητικό πεδίο και κατ' επέκταση τα δινορρεύματα θα έχουν μεγαλύτερη ένταση και έτσι το επιδερμικό φαινόμενο θα είναι εντονότερο. Γενικά το ρεύμα σε έναν αγωγό μειώνεται εκθετικά απο την επιφάνειά του προς το εσωτερικό του. Μια μέτρηση της μείωσης δίνεται από το βάθος διείσδυσης, το οποίο είναι το μήκος από την επιφάνεια του αγωγού στο οποίο η ένταση της πυκνότητας ρεύματος έχει μειωθεί σε ποσοστό $1/e$ ή περίπου 37% της αρχικής τιμής του. Σε συνήθεις περιπτώσεις αγωγών το μέγεθος αυτό προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τον τύπο (2.1) για χαμηλές συχνότητες [1]:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu_r\mu_0}} \quad (2.1)$$

όπου δ είναι το βάθος διείσδυσης, ω η κυκλική συχνότητα του ρεύματος του αγωγού, μ_r είναι η σχετική μαγνητική διαπερατότητα του αγωγού, μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού και ρ η ειδική αντίσταση του αγωγού.



Σχήμα 2.3 Βάθος διείσδυσης για διάφορα υλικά και συχνότητες

Το σχήμα 2.3 απεικονίζει τα αποτελέσματα της σχέσης (2.1) για μια ποικιλία υλικών και σε ένα μεγάλο φάσμα συχνοτήτων. Η κάθετη κόκκινη γραμμή του σχήματος δεικτοδοτεί τη συχνότητα των 50 Hz.

Όπως αναφέρθηκε, το επιδερμικό φαινόμενο αυξάνει τη φαινόμενη αντίσταση του αγωγού. Ένα άλλο φαινόμενο το οποίο επίσης αυξάνει τη φαινόμενη αντίσταση και σχετίζεται άμεσα με τα δινορρέυματα είναι το φαινόμενο γειτνίασης.

2.2.2 Το φαινόμενο γειτνίασης

Σε έναν αγωγό ο οποίος διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, αν υπάρχουν ρευματοφόροι αγωγοί εναλλασσόμενου ρεύματος κοντά του, τότε στον πρώτο αγωγό η κατανομή ρεύματος θα περιοριστεί σε μικρότερη περιοχή. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι το ρεύμα των διπλανών αγωγών θα επάγει δινορρέυματα μέσω του μαγνητικού πεδίου που θα δημιουργεί στον πρώτο αγωγό. Είναι μηχανισμός εντελώς ανάλογος με το επιδερμικό φαινόμενο με τη διαφορά ότι το μαγνητικό πεδίο δεν δημιουργείται από το ρεύμα του ίδιου του αγωγού. Αυτό συνεπάγεται ότι το ρεύμα δεν θα κατανεμηθεί ομοιόμορφα προς την επιφάνεια του αγωγού αλλά θα έχει μεγαλύτερη πυκνότητα προς την περιοχή του εκείνη που βρίσκεται πιο μακριά από τους γειτονικούς αγωγούς, αν το ρεύμα των αγωγών έχει την ίδια κατεύθυνση.

Επειδή το φαινόμενο εξαρτάται από τα επαγόμενα δινορρέυματα, η έντασή του αυξάνεται καθώς η συχνότητα των ρευμάτων μεγαλώνει. Το αποτέλεσμα είναι σημαντική αύξηση της φαινόμενης αντίστασης του αγωγού, η οποία μπορεί να φτάσει σε δεκαπλάσια τιμή σε σχέση με την αντίσταση σε συνεχές ρεύμα. Η μαθηματική περιγραφή του φαινομένου εξαρτάται και από άλλες παραμέτρους, όπως η γεωμετρία των αγωγών και η απόσταση μεταξύ τους.

2.3 Δινορρέυματα στις ηλεκτρικές μηχανές

Τα δινορρέυματα είναι γενικά ανεπιθύμητα στη λειτουργία των ηλεκτρικών μηχανών. Εμφανίζονται κυρίως στο δρομέα της μηχανής και προκαλούν απώλειες οι οποίες μειώνουν τις επιδόσεις και την απόδοση της μηχανής, ενώ επίσης τη θερμαίνουν μειώνοντας τη διάρκεια ζωής των μονώσεων των τυλιγμάτων. Έτσι απαιτείται συχνότερη συντήρηση και συνεπώς επιφέρουν μεγαλύτερο κόστος στη λειτουργία της μηχανής.

Η αναλυτική έκφραση των δινορρευμάτων στους μαγνήτες θα δοθεί στη συνέχεια μέσω των πεδιακών εξισώσεων, επομένως είναι χρήσιμο να γίνει μια εισαγωγή για την περιγραφή των μηχανών που θα μας απασχολήσουν, το τύλιγμά τους και τις ιδιομορφίες των πεδιακών μεγεθών τους.

Κεφάλαιο 3 Μηχανές μονίμων μαγνητών

Παρά το γεγονός ότι η χρήση μονίμων μαγνητών για σκοπούς ηλεκτρομηχανικής μετατροπής και συγκεκριμένα για την κατασκευή ηλεκτρικών κινητήρων είχε πραγματοποιηθεί ήδη από τα τέλη του 19ου αιώνα, δε συνεχίστηκε λόγω της μικρής ισχύος που είχαν οι μηχανές αυτές. Τη θέση τους πήραν οι ηλεκτρομαγνήτες, οι οποίοι διατήρησαν κυρίαρχη θέση στις εμπορικές εφαρμογές μέχρι περίπου και το τέλος του 20ου αιώνα. Ωστόσο ήδη από τη δεκαετία του 1930 είχε ξεκινήσει η έρευνα για τον εντοπισμό καλύτερων μονίμων μαγνητών. Τότε βρέθηκαν οι μόνιμοι μαγνήτες από κράμα αλλουμινίου, νικελίου και κοβαλτίου με σίδηρο [2], οι οποίοι ήταν δύο φορές ισχυρότεροι από τους μόνιμους μαγνήτες κραμάτων σιδήρου της εποχής και εκατό φορές ισχυρότεροι από τους φυσικούς μαγνήτες. Στη συνέχεια εμφανίστηκαν οι μόνιμοι μαγνήτες σπανίων γαιών (σαμαρίου και κοβαλτίου) τη δεκαετία του 60 [3] οι οποίοι αντικαταστάθηκαν από τους μαγνήτες νεοδυμίου-σιδήρου [3], που εμφανίστηκαν τη δεκαετία του 80. Οι μαγνήτες νεοδυμίου-σιδήρου ξεπερνούν σε ένταση μαγνητικού πεδίου κάθε άλλο είδος μαγνήτη, έχουν καλή αντίσταση απομαγνήτισης από επιβολή εξωτερικού πεδίου αλλά είναι σχετικά ευαίσθητοι όσον αφορά απομαγνήτιση από αύξηση της θερμοκρασίας [4]. Οι μαγνήτες αυτοί είναι επίσης σχετικά φθηνοί. Τα παραπάνω χαρακτηριστικά κάνουν πολύ ελκυστική τη χρήση τους σε μεγάλη ποικιλία εφαρμογών με αποτέλεσμα να είναι αρκετά διαδεδομένοι σήμερα.

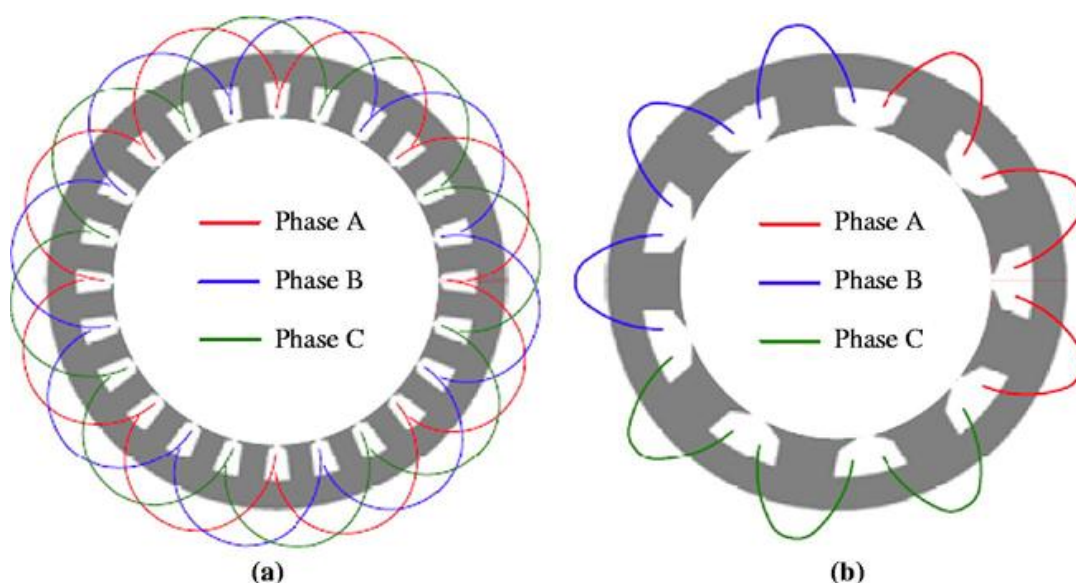


Σχήμα 3.1 Δείγμα νεοδυμίου

Εν συνεχεία θα εξετάσουμε τις κατασκευαστικές ιδιαιτερότητες και τα χαρακτηριστικά των μηχανών μονίμων μαγνητών που χρησιμοποιούνται σήμερα.

3.1 Τύλιγμα

Το τύλιγμα στις μηχανές μονίμων μαγνητών είναι συνήθως συγκεντρωμένο. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τις μηχανές με εξωτερική τροφοδοσία στις οποίες επιλέγεται συχνότερα καταναμημένο τύλιγμα. Στο σχήμα 3.2 μπορούμε να δούμε τη διαφορά μεταξύ των δύο τυλιγμάτων.

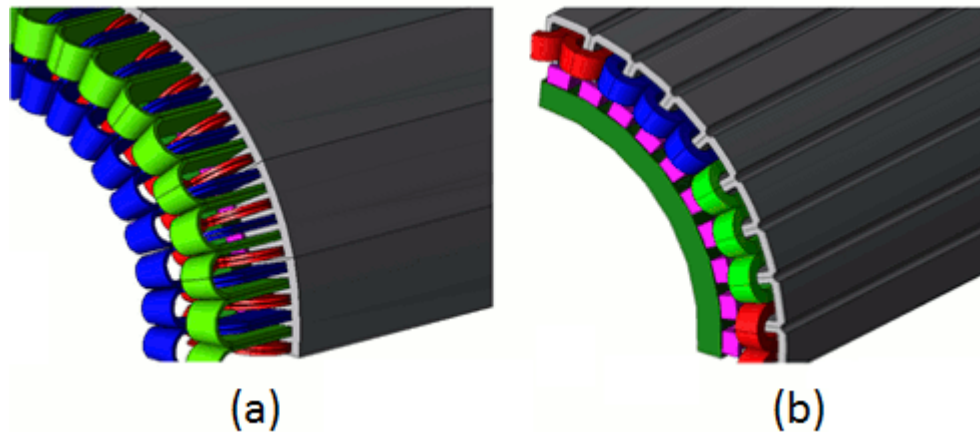


Σχήμα 3.2 (a) Καταναμημένο τύλιγμα (b) Συγκεντρωμένο τύλιγμα

Το καταναμημένο τύλιγμα χαρακτηρίζεται από συμμετρία των πόλων μιας φάσης ως προς τον άξονα του δρομέα της μηχανής. Το βήμα συστάδος μιας φάσης είναι τρία αυλάκια ή πολλαπλάσια αυτού. Τα τυλίγματα αυτά έχουν συνήθως αριθμό αυλάκων ανά πόλο και φάση μεγαλύτερο ή ίσο του ένα. Αντίθετα στο συγκεντρωμένο τύλιγμα κάθε φάση έχει συστάδες που τυλίγονται σε διαδοχικά αυλάκια και είναι επομένως μη επικαλυπτόμενα. Το βήμα συστάδος μιας φάσης είναι στην περίπτωση αυτή ίσο με ένα αυλάκι του στάτη και συνήθως ο αριθμός αυλάκων ανά πόλο και φάση είναι μικρότερος του ένα. Ο αριθμός αυλάκων ανά πόλο και φάση επιλέγεται συνήθως όπως αναφέρθηκε λόγω της επίδρασης που έχει στις αρμονικές της μαγνητεγερτικής δύναμης ανάλογα με τα χαρακτηριστικά κάθε τυλιγματος όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Από κατασκευαστική άποψης το συγκεντρωμένο τύλιγμα πλεονεκτεί έναντι του καταναμημένου επειδή είναι ευκολότερη και φθηνότερη λύση, γεγονός που το καθιστά ελκυστικό για εφαρμογές που απαιτούν χαμηλό κόστος κατασκευής. Επιπρόσθετα το

συγκεντρωμένο τύλιγμα έχει μικρότερα άκρα τυλίγματος και συνεπώς χαμηλότερες απώλειες χαλκού, ενώ η μη επικάλυψη των τυλιγμάτων των φάσεων επιτρέπει την εύκολη αντικατάσταση των συστάδων και το μοντάρισμα του τυλίγματος ξεχωριστά από την μηχανή, περιορίζοντας το κόστος συντήρησης. Ταυτόχρονα δίνεται η δυνατότητα ελαχιστοποίησης του όγκου της μηχανής.



Σχήμα 3.3 Άκρα τυλίγματος (a) για κατενεμημένο τύλιγμα (b) για συγκεντρωμένο τύλιγμα

3.2 Συντελεστής Τυλίγματος

Ο συντελεστής τυλίγματος είναι ένας αδιάστατος αριθμός ο οποίος εκφράζει το ποσοστό απομείωσης της επαγόμενης ηλεκτρεγερτικής δύναμης στα τυλίγματα του τυμπάνου μιας μηχανής. Εξαιτίας της γεωμετρίας του στάτη και της κατανομής των τυλιγμάτων στα αυλάκια, η μαγνητεγερτική δύναμη (η οποία καθορίζει τη μορφή της ηλεκτρεγερτικής δύναμης που εμφανίζεται) δεν είναι αμιγώς ημιτονοειδής. Αυτό εισάγει αρμονικές στις κυματομορφές αυτών των μεγεθών, οι οποίες μετατρέπουν χρήσιμη ενέργεια εισόδου σε απώλειες. Ο συντελεστής τυλίγματος αποτελεί το μέτρο αυτών των απωλειών και υπολογίζεται ως γινόμενο τριών ξεχωριστών συντελεστών [5]:

$$k_w = k_d \cdot k_p \cdot k_s \quad (3.1)$$

Το k_d ονομάζεται συντελεστής κατανομής (distribution factor) και εκφράζει τη μείωση της ηλεκτρεγερτικής δύναμης λόγω της κατανομής των συστάδων κάθε φάσης σε περισσότερα από ένα αυλάκια. Το k_p είναι ο συντελεστής βήματος (pitch factor) και αφορά τα τυλίγματα στα οποία το βήμα μιας συστάδας αγωγών είναι μικρότερο από το πολικό βήμα (κλασματικά τυλίγματα). Τέλος το k_s είναι ένας συντελεστής (skewing factor) που αφορά τη μείωση της ηλεκτρεγερτικής δύναμης στην περίπτωση που οι συστάδες των φάσεων έχουν τοποθετηθεί στα αυλάκια του δρομέα υπό γωνία. Στην ανάλυσή μας δεν θα μας απασχολήσει αυτός ο συντελεστής.

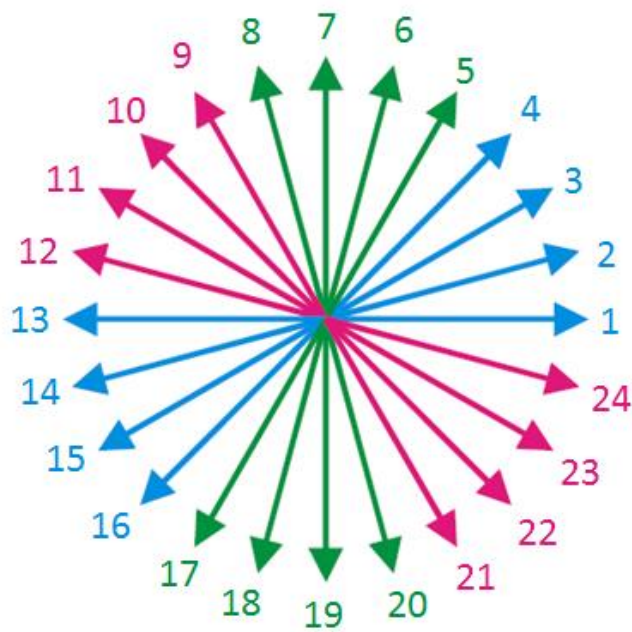
Ο συντελεστής βήματος μπορεί να υπολογιστεί για κάθε τύλιγμα από [6]:

$$k_{p\nu} = \sin\left(\nu \frac{y}{y_Q} \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.2)$$

όπου y το βήμα συστάδας και y_Q το πλήρες βήμα. Για συγκεντρωμένο τύλιγμα είναι $y=1$ και $2y_Q=Q/p_s$ [7], όπου Q ο αριθμός των αυλάκων και $p_s = \text{gcd}(Q, 2p)$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του αριθμού των αυλάκων και του αριθμού των πόλων, οπότε ο τύπος (3.2) γίνεται:

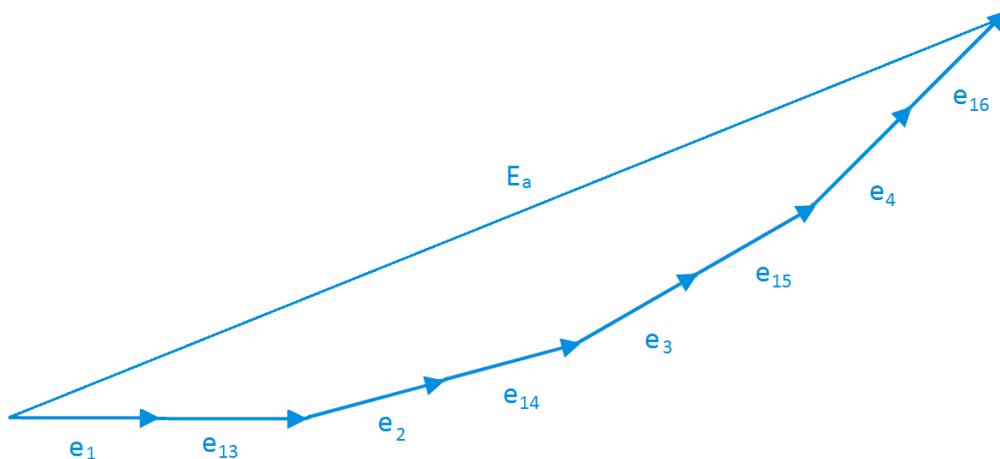
$$k_{p\nu} = \sin\left(\frac{\nu\pi p_s}{Q}\right) \quad (3.3)$$

Σημειώνεται εδώ ότι για την περίπτωση συγκεντρωμένου τυλίγματος μονής στρώσης ο συντελεστής βήματος ισούται με τον συντελεστή τυλίγματος (αφού δεν υπάρχει κατανομή συστάδων σε πολλά αυλάκια). Για τυλίγματα διπλής στρώσης, ο υπολογισμός του συντελεστή κατανομής δεν είναι προφανής και εξαρτάται από τη συγκεκριμένη διαμόρφωση του τυλίγματος. Ένας τρόπος είναι να υπολογιστεί απευθείας ο συντελεστής τυλίγματος χρησιμοποιώντας το διάνυσμα ηλεκτρεγερτικής δύναμης που επάγει η κάθε συστάδα αγωγών του τυλίγματος στα αυλάκια που βρίσκεται και μετά να υπολογιστεί μέσω αυτού και του συντελεστή βήματος ο συντελεστής κατανομής. Αυτή η μέθοδος διανυσματικού υπολογισμού της ΗΕΔ ονομάζεται στην αγγλική ορολογία *star of slots*.



Σχήμα 3.4 Διανύσματα ΗΕΔ μηχανής 24 αυλάκων με $q = 4$ αυλάκια ανά πόλο και φάση

Στο σχήμα 3.4 βλέπουμε πώς είναι τα διανύσματα ΗΕΔ για μηχανή 24 αυλάκων με $q=4$ αυλάκια ανά πόλο και φάση (δηλαδή 2 πόλους), κατανομημένο τύλιγμα και αριθμημένες συστάδες αγωγών. Κάθε χρώμα αντιστοιχεί και σε μια φάση.



Σχήμα 3.5 Άθροισμα διανυσμάτων ΗΕΔ μιας φάσης

Στο σχήμα 3.5 έχει σχεδιαστεί το διανυσματικό άθροισμα των συνιστωσών της φάσης με μπλέ χρώμα. Οι συστάδες 13 έως 16 έχουν αντίθετης φοράς ρεύμα, γι' αυτό παρότι μετατοπισμένες κατά 180° χωρικά, καταλήγουν να είναι ομόρροπες με τις 1 έως 4. Στον υπολογισμό της ΗΕΔ E_a έχει συμπεριληφθεί η επίδραση της κατανομής των συστάδων στα

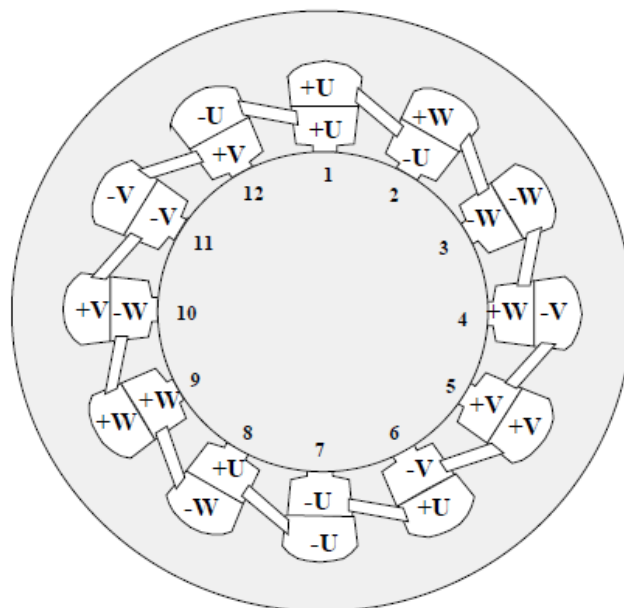
αυλάκια καθώς. Η μηχανή του σχήματος δεν έχει κλασματικό βήμα αλλά η επίδρασή θα φαινόταν ως διαφορά πλάτους μεταξύ των συνιστωσών 1 έως 4 και 13 έως 16. Τα ίδια ισχύουν και για τις υπόλοιπες φάσεις της μηχανής ανεξάρτητα του πλήθους τους. Τελικά ο συντελεστής τυλίγματος υπολογίζεται ως ο λόγος της ΗΕΔ E_a προς το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους συνιστωσών της, το οποίο είναι η ΗΕΔ μιας ίδιας μηχανής χωρίς κλασματικό βήμα και κατανομή συστάδων.

$$k_w = \frac{|E_a|}{\sum_j |e_j|} \quad (3.4)$$

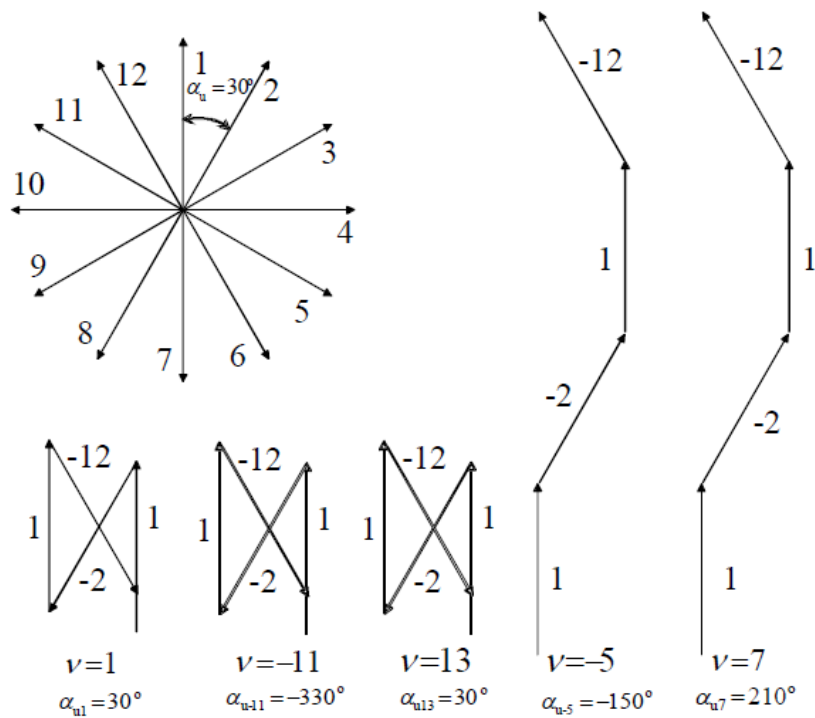
Γνωρίζοντας τον συντελεστή τυλίγματος είναι δυνατό να υπολογιστεί και ο συντελεστής κατανομής, αν και στην περίπτωση του κατανεμημένου τυλίγματος μπορεί να υπολογιστεί και αναλυτικά.

Αν το προηγούμενο παράδειγμα είχε 4 πόλους, τότε θα είχαμε 2 ζώνες φάσης και θα θεωρούσαμε μόνο τις ΗΕΔ 1,2,13 και 14, γιατί οι 3,4,15,16 θα έδιναν ταυτόσημα αποτελέσματα. Με 8 πόλους θα είχαμε ιδανικό συντελεστή τυλίγματος (ίσο με τη μονάδα).

Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου σε περιπτώσεις τυλιγμάτων με μη ακέραιο αριθμό αυλάκων ανά πόλο και φάση είναι αρκετά πολύπλοκη για να αναλυθεί εδώ και ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτής της εργασίας. Στο σχήμα 3.6 δίνεται ένα γραφικό παράδειγμα υπολογισμού για την περίπτωση μηχανής διπλής στρώσης με 12 αυλάκια και 10 πόλους [7], [8].



Σχήμα 3.6 Μηχανή με 12 αυλάκια-10 πόλους και τυλιγμα διπλής στρώσης



Σχήμα 3.7 Διανύσματα ΗΕΔ για τη μηχανή του σχήματος 3.6

Υπολογίζοντας το συντελεστή τυλίγματος όπως στο προηγούμενο παράδειγμα και έχοντας υπολογίσει το συντελεστή βήματος είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε και το συντελεστή κατανομής για τη συγκεκριμένη μηχανή.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων ΗΕΔ διαδοχικών αυλάκων αλλάζει ανάλογα με την τάξη της αρμονικής. Είναι ενδιαφέρον ότι για την τοπολογία αυτή η 5^η και η 7^η αρμονική έχουν πολύ μεγαλύτερο πλάτος από τη θεμελιώδη.

Τα παραπάνω αποτελέσματα αφορούν ανάλυση ομοιόμορφου διακένου, αγνοούν δηλαδή τις επιπτώσεις που έχει το άνοιγμα αύλακος. Την παράμετρο αυτή τη λαμβάνουμε υπόψιν μέσω του ακόλουθου συντελεστή:

$$k_b = \frac{\sin(np_s b)}{(np_s b)} \quad (3.5)$$

3.3 Μαγνητεγερτική Δύναμη

Η μαγνητεγερτική δύναμη (ΜΕΔ) είναι το ανάλογο της ηλεκτεγερτικής δύναμης για τα μαγνητικά κυκλώματα. Ορίζεται από το νόμο του διαρρεύματος ως [9]

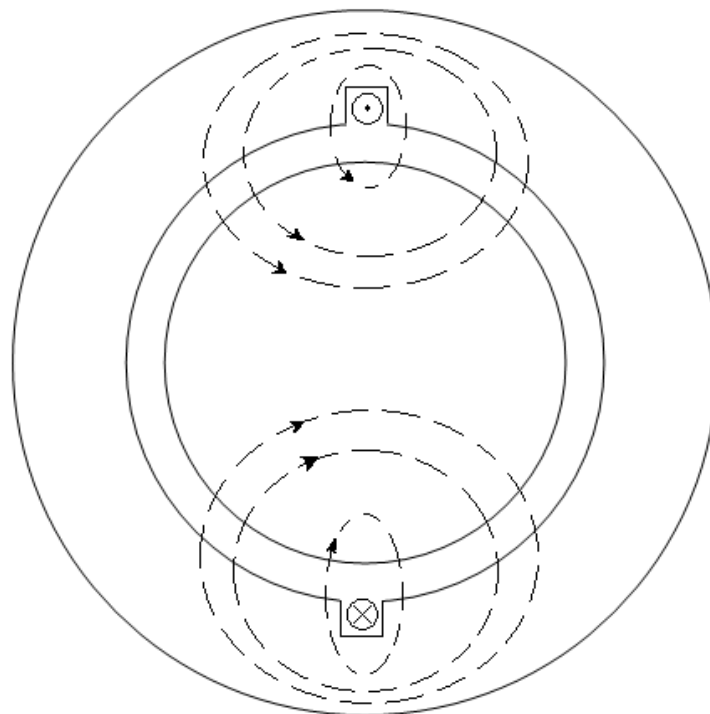
$$F = Ni = \oint \bar{H} d\bar{l} \quad (3.6)$$

όπου N ο αριθμός των σπειρών του πηνίου, i το ρεύμα που διαρρέει τους αγωγούς. Το ολοκλήρωμα αφορά μια κλειστή διαδρομή που περικλείει Ni αμπερελίγματα και περνάει από το διάκενο.

Στο σχήμα 3.8 βλέπουμε τις κλειστές τροχιές της μαγνητεγερτικής δύναμης για ένα συγκεντρωμένο τυλίγμα σε μια μηχανή. Αν υποθέσουμε ότι η μαγνητική αντίσταση είναι συγκεντρωμένη στο διάκενο και ότι η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι ακτινική στο διάκενο το οποίο έχει μήκος g μπορούμε να γράψουμε:

$$2gH(\theta) = Ni \quad (3.7)$$

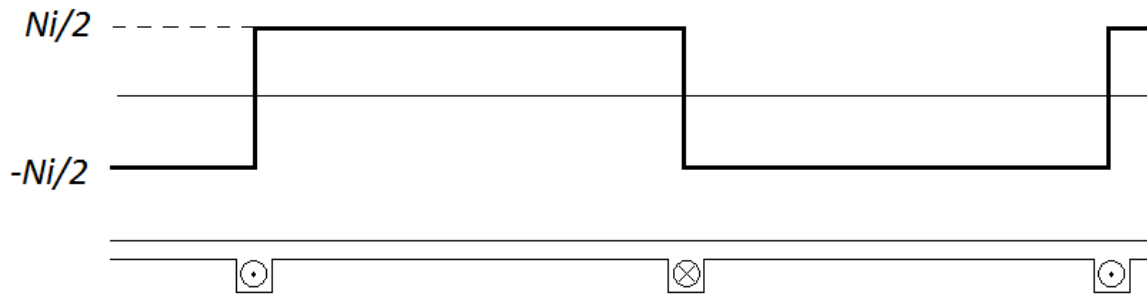
Για να εγκατασταθεί η μαγνητική ροή στο διάκενο θεωρούμε ότι ασκείται μια ΜΕΔ, κατανομημένη κατά μήκος του διακένου. Στις θέσεις όπου η μαγνητική ροή διασχίζει το διάκενο με φορά από το δρομέα στο στάτη θεωρούμε ότι ασκείται ΜΕΔ ίση με $Ni/2$, ενώ στις συμμετρικές τους θέσεις όπου η ροή διασχίζει το διάκενο με φορά απ' τ το στάτη στο δρομέα θεωρούμε ότι ασκείται ΜΕΔ ίση με $-Ni/2$.



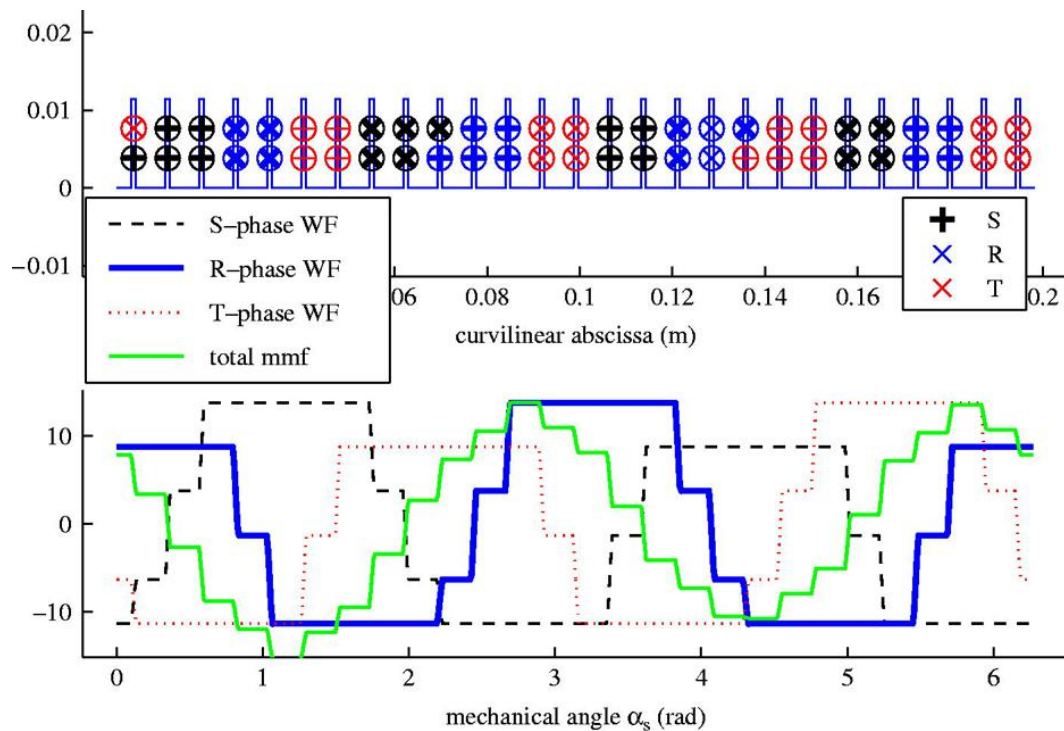
Σχήμα 3.8 Μαγνητεγερτική δύναμη συγκεντρωμένου τυλίγματος

Η μαγνητεγερτική δύναμη αποκτά μια τετραγωνική κυματομορφή, όπως φαίνεται στο ανάπτυγμα του σχήματος 3.9. Σε μια τριφασική μηχανή η συνισταμένη μαγνητεγερτική

δύναμη είναι το άθροισμα των επιμέρους συνιστωσών κάθε φάσης. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνεισφορά κάθε φάσης όπως στο σχήμα 3.9 και να έχουμε μια εικόνα της συνολικής μαγνητεγερτικής δύναμης στο διάκενο. Στο σχήμα 3.10 δίνεται ένα παράδειγμα αυτού του υπολογισμού για μηχανή κατανεμημένου τυλίγματος. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η συνολική μαγνητεγερτική δύναμη παίρνει ημιτονοειδή μορφή χάρη στην τοπολογία του κατανεμημένου τυλίγματος.



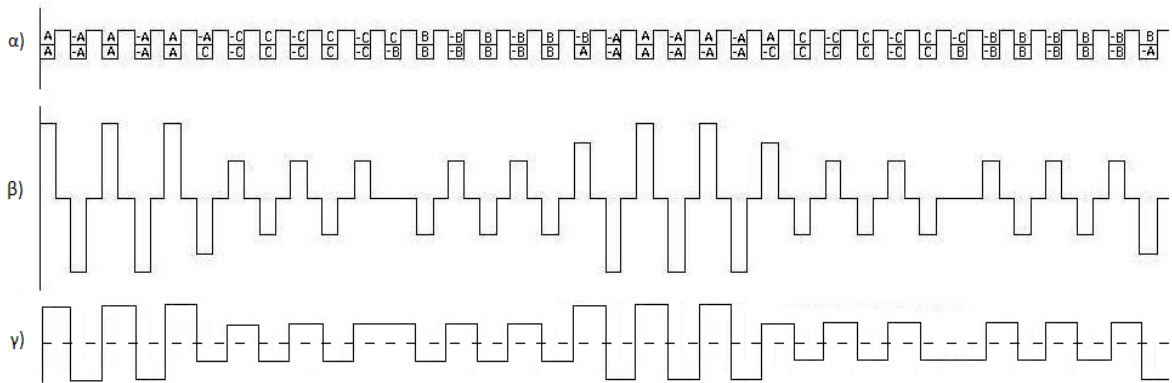
Σχήμα 3.9 Μαγνητεγερτική δύναμη στο ανάπτυγμα της μηχανής



Σχήμα 3.10 Μαγνητεγερτική δύναμη σε κλασματικό κατανεμημένο τύλιγμα διπλής στρώσης

Το συγκεντρωμένο τύλιγμα δίνει αρκετά διαφορετική κυματομορφή μαγνητεγερτικής δύναμης σε σύγκριση με το κατανεμημένο τύλιγμα. Στο σχήμα 3.11 βλέπουμε ένα ποιοτικό παράδειγμα για μηχανή με κλασματικό συγκεντρωμένο τύλιγμα διπλής στρώσης

και 36 αυλάκια στο στάτη. Δίνεται το ανάπτυγμα της μηχανής με τη διαδοχή των φάσεων, η ηλεκτρική φόρτιση και η μαγνητεγερτική δύναμη στο διάκενο όταν η φάση A έχει μέγιστο ρεύμα.



Σχήμα 3.11 α) Ανάπτυγμα μηχανής β) Ηλεκτρική φόρτιση γ) Μαγνητεγερτική Δύναμη

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η μορφή της μαγνητεγερτικής δύναμης δεν παραμένει σταθερή στο χρόνο, αλλά μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλεται το ρεύμα των αγωγών.

3.4 Αρμονικές Μαγνητεγερτικής Δύναμης

Αφού η μαγνητεγερτική δύναμη εγκαθιστά τη μαγνητική ροή στο διάκενο και άρα το μαγνητικό πεδίο εκεί, είναι υπεύθυνη και για τη δημιουργούμενη ροπή στο δρομέα ή για την κυματομορφή της επαγόμενης τάσης ανάλογα με τη λειτουργία της μηχανής, δηλαδή είναι καταλυτικός παράγοντας για τις επιδόσεις της μηχανής. Για το λόγο αυτό είναι σημαντικό να υπολογιστούν οι αρμονικές της μαγνητεγερτικής δύναμης και η επίδρασή τους.

Για να γίνει ο υπολογισμός χρειάζεται να αναλυθεί κατά Fourier η κυματομορφή της μαγνητεγερτικής δύναμης κάθε συστάδας αγωγών σε άθροισμα συνημιτόνων. Η ανάλυση αυτή μπορεί να γίνει εύκολα σε κατανεμημένο τύλιγμα πλήρους βήματος και θα παρουσιαστεί εδώ για λόγους καλύτερης και απλούστερης κατανόησης. Στα συγκεντρωμένα τυλίγματα ο υπολογισμός γίνεται με ανάλογο τρόπο λαμβάνοντας υπόψιν τις γεωμετρικές παραμέτρους της εκάστοτε μορφοποίησης.

Το βασικό τύλιγμα του σχήματος 3.9 μας δίνει την κυματομορφή που θα αναλύσουμε. Επειδή η κυματομορφή αυτή είναι συμμετρική γύρω από το μαγνητικό της άξονα, δεν θα υπάρχουν αρμονικές άρτιας τάξης. Η ανάλυση Fourier μας δίνει:

$$F_{ph} = \frac{Ni_{ph}}{2} \frac{4}{\pi} \left[\cos(\theta) - \frac{1}{3} \cos(3\theta) + \frac{1}{5} \cos(5\theta) - \frac{1}{7} \cos(7\theta) \dots \right] \quad (3.8)$$

Σε ένα συμμετρικό τριφασικό τύλιγμα οι άλλες δύο φάσεις βρίσκονται μετατοπισμένες χωρικά κατά $2\pi/3$, επομένως έχουν την ίδια έκφραση για τη μαγνητεγερτική δύναμη με τη διαφορά ότι το όρισμα των συνημίτονων είναι $(\nu\theta \pm 2\pi/3)$. Το ρεύμα στην εξίσωση 3.8 θεωρούμε ότι είναι καθαρά ημιτονοειδές και περιγράφεται ως:

$$i_{ph} = \hat{I} \cos(\omega t + k2\pi/3) \quad (3.9)$$

όπου \hat{I} είναι το πλάτος του ρεύματος και η μεταβλητή k είναι 0 για τη φάση a, -1 για τη φάση b και 1 για τη φάση c, σε αντιστοιχία με το όρισμα των συνημίτονων της μαγνητεγερτικής δύναμης για κάθε φάση. Αν αντικαταστήσουμε την έκφραση του ρεύματος και πολλαπλασιάσουμε κάθε συνημίτονο από την 3.8 με το συνημίτονο της 3.9, τότε έχουμε γινόμενα συνημίτονων τα οποία μπορούμε να αντικαταστήσουμε με την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos \theta \cos \varphi = \frac{\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)}{2} \quad (3.10)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\cos(\varphi) + \cos(\varphi + 2\pi/3) + \cos(\varphi - 2\pi/3) = 0 \quad (3.11)$$

και συγκεντρώνοντας όρους, καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση για το άθροισμα των συνιστωσών της μαγνητεγερτικής δύναμης των φάσεων

$$F_{tot} = F_a + F_b + F_c = \frac{3\hat{I}N}{\pi} \left[\cos(\omega t - \theta) + \frac{1}{5} \cos(\omega t + 5\theta) - \frac{1}{7} \cos(\omega t - 7\theta) \dots \right] \quad (3.12)$$

Βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα αποτελείται από όρους της μορφής $(1/\nu)\cos(\omega t \pm \nu\theta)$. Οι όροι αυτοί ικανοποιούν την κυματική εξίσωση, πρόκειται δηλαδή για κύματα ΜΕΔ που διαδίδονται στο διάκενο. Η κατεύθυνση διάδοσης δεν είναι πάντα αυτή της θεμελιώδους, αλλά υπάρχουν και αντιστρόφως περιστρεφόμενες αρμονικές. Η μεταβλητή ν αντιστοιχεί στην τάξη της αρμονικής. Πρέπει να τονίσουμε ότι η τάξη της αρμονικής αναφέρεται στον αριθμό των πολλαπλάσιων μηκών κύματος της αρμονικής σε σχέση με τα μήκη κύματος που έχει η θεμελιώδης τάξη. Στην περίπτωση που εξετάζουμε η θεμελιώδης έχει ένα μήκος κύματος στο διάκενο. Στη γενική περίπτωση εξαρτάται από την περιοδικότητα της κυματομορφής της μαγνητεγερτικής δύναμης η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από την περιοδικότητα του τυλίγματος. Θα ονομάζουμε βασικό τύλιγμα το κομμάτι του

τυλίγματος το οποίο επαναλαμβάνεται για να σχηματίσει το συνολικό. Ένα βασικό τύλιγμα αντιστοιχεί σε ένα μήκος κύματος θεμελιώδους αρμονικής.

Από την εξίσωση 3.12 είναι φανερό ότι οι αρμονικές που μας απασχολούν είναι χωρικές, οφείλονται δηλαδή στην κατανομή της μαγνητεγερτικής δύναμης στο διάκενο. Αρμονικές χρόνου υπάρχουν όταν τα ρεύματα των φάσεων δεν είναι καθαρά ημιτονοειδή και δεν θα μας απασχολήσουν σε αυτήν την εργασία.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όλες οι αρμονικές έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα ω που έχουν και τα ρεύματα των φάσεων. Επίσης βλέπουμε ότι ο αριθμός μηκών κύματος για μια αρμονική δίνεται από το συντελεστή της χωρικής μεταβλητής ν και είναι ίσος με ν . Επομένως μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος της ν -οστής αρμονικής ως

$$\omega_{mech,\nu} = \lambda_{\nu} \omega_{el,\nu} \quad (3.13)$$

Αφού όμως $\omega_{el,\nu} = \omega$ και $\lambda_{\nu} = \lambda / \nu$, προκύπτει ότι η ταχύτητα περιστροφής της ν -οστής αρμονικής στο διάκενο ίση με

$$\omega_{mech,\nu} = \frac{\omega_{mech,1}}{\nu} \quad (3.14)$$

Ο τύπος 3.14 μας λέει ότι αρμονικές υψηλότερης τάξης περιστρέφονται πιο αργά στο διάκενο. Παρότι η ανάλυση αυτή έγινε στο απλούστερο δυνατό τύλιγμα, τα αποτελέσματα επάγονται άμεσα σε περιπτώσεις πιο περίπλοκων συγκεντρωμένων τυλιγμάτων. Το αποτέλεσμα για τη μαγνητεγερτική δύναμη ενός συγκεντρωμένου τυλίγματος δίνεται από [10]

$$F_{3ph(\nu)} = \sum_{\nu=\frac{2}{p}}^{\infty} \sum_{c=1}^{n_c} \frac{4N}{\nu p \pi} \sin\left(\frac{\nu \pi}{2} \frac{\tau_{cc}}{\tau_p}\right) (F^+ + F^-) \quad (3.15)$$

όπου p ο αριθμός πόλων της μηχανής, τ_{cc} το βήμα της c -οστής συστάδας, τ_p το πολικό βήμα και F^+ , F^- οι ευθέως και αντιστρόφως περιστρεφόμενες αρμονικές της μαγνητεγερτικής δύναμης οι οποίες δίνονται ως

$$F^+ = \hat{I} \cos(\omega t - \nu(\gamma - \theta_c)) \left[\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{2\pi}{3}(\nu - 1)\right) + 2\pi \cdot \nu \cdot n_y \right] \quad (3.16)$$

$$F^- = \hat{I} \cos(\omega t + \nu(\gamma - \theta_c)) \left[\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{2\pi}{3}(\nu + 1)\right) + 2\pi \cdot \nu \cdot n_y \right] \quad (3.17)$$

όπου γ η γωνία του ρεύματος, θ_c η γωνία του μαγνητικού άξονα της c -οστής συστάδας και n_y ένας όρος που λέγεται παράγοντας ηλεκτρικής μετατόπισης και υπάρχει επειδή η κατανομή της μαγνητεγερτικής δύναμης δεν είναι ίδια για κάθε πόλο σε τυλίγματα κλασματικού βήματος .

Μπορούμε να εξετάσουμε τι σημαίνει η έκφραση 3.14 για το συνδυασμό πόλων – αυλάκων μιας μηχανής και για το τύλιγμά της. Για παράδειγμα αν έχουμε μια μηχανή με 12 αυλάκια και 10 πόλους στο δρομέα, όπως αυτή του σχήματος 3.6, γνωρίζουμε ότι έχει σύγχρονη ταχύτητα

$$n_s = \frac{120f}{P} \quad (3.18)$$

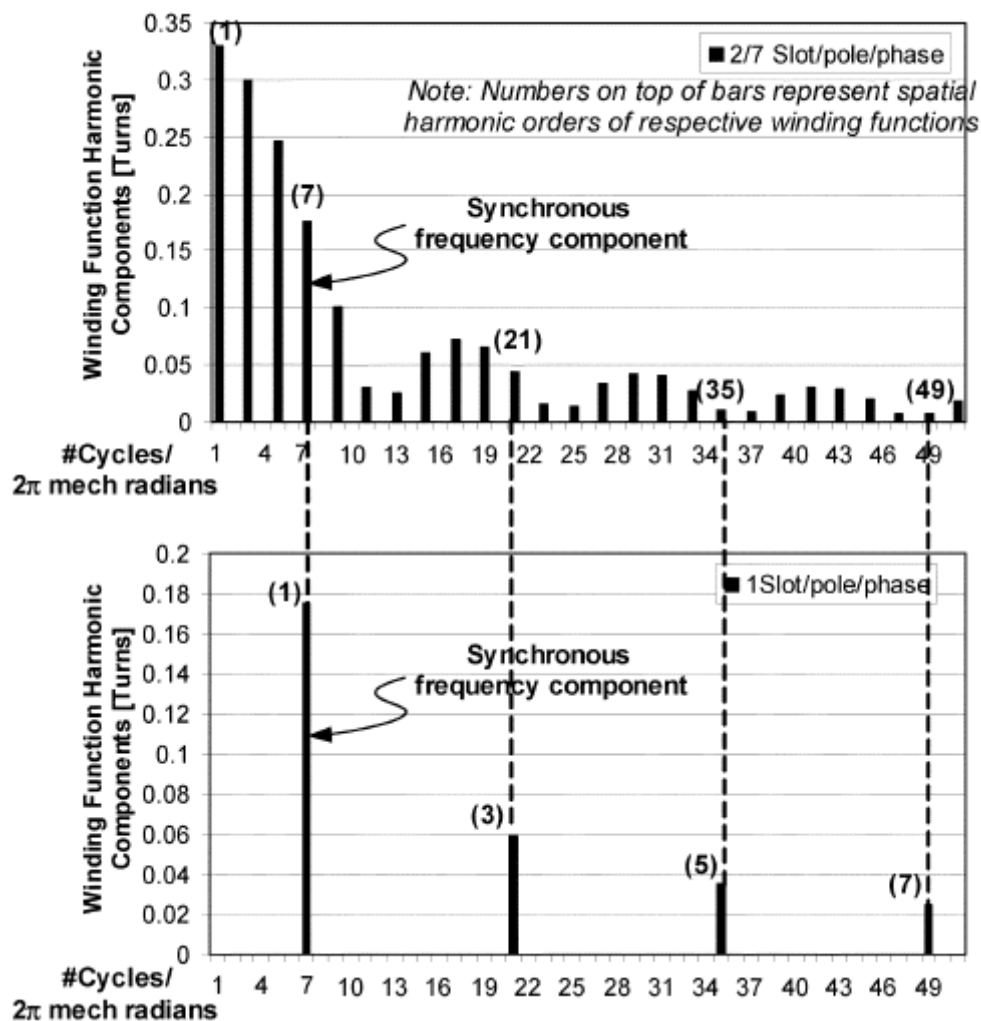
και στην περίπτωση μας για $f=50\text{Hz}$ και $P=10$ πόλους προκύπτει ίση με 600 στροφές ανά λεπτό ή 10 Hz. Η μηχανή αυτή αποτελείται από ένα βασικό τύλιγμα χωρίς επαναλήψεις, επομένως η θεμελιώδης αρμονική καταλαμβάνει ένα μήκος κύματος στο διάκενο. Από την εξίσωση 3.14 μπορούμε να υπολογίσουμε ότι η ταχύτητα περιστροφής της θεμελιώδους αρμονικής στο διάκενο είναι 50 Hz, ενώ της 5^{ης} αρμονικής είναι 10 Hz. Αυτό σημαίνει ότι η αρμονική που παράγει τη χρήσιμη ροπή για τη μηχανή είναι η 5^η και όχι η 1^η. Γενικά, η τάξη που παράγει ωφέλιμη ισχύ σε μια μηχανή ονομάζεται κύρια τάξη (main harmonic). Αυτό είναι ένα φαινόμενο που στην πράξη δεν το παρατηρούμε σε μηχανές κατανεμημένου τυλίγματος. Ο λόγος είναι ότι η διαμόρφωση του κατανεμημένου τυλίγματος έχει σαν αποτέλεσμα μεγάλη τιμή συντελεστή τυλίγματος για τη θεμελιώδη αρμονική, οπότε επιλέγεται αυτή ως κύρια αρμονική.

Σε ένα τύλιγμα με περισσότερες από μία συμμετρίες η θεμελιώδης αρμονική έχει τόσα μήκη κύματος στο διάκενο όσες είναι οι συμμετρίες του τυλίγματος. Η τάξη της αρμονικής αναφέρεται σε πολλαπλάσια μήκους κύματος της θεμελιώδους και όχι σε απόλυτο αριθμό μηκών κύματος. Για μηχανή συγκεντρωμένου τυλίγματος με 24 αυλάκια και 20 πόλους έχουμε 2 επαναλήψεις της μηχανής του σχήματος 3.6 των 12 αυλάκων – 10 πόλων. Η κύρια αρμονική σε αυτήν την περίπτωση είναι και πάλι η 5^η με τη διαφορά ότι τώρα περιστρέφεται στο διάκενο με τη μισή ταχύτητα. Στη γενική περίπτωση, μια μηχανή συγκεντρωμένου τυλίγματος έχει ως κύρια αρμονική τάξη την

$$f_f = \frac{P}{\text{gcd}(Q, P)} \quad (3.19)$$

όπου $\text{gcd}(Q, P)$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης μεταξύ του αριθμού αυλάκων και πόλων της μηχανής. Η τάξη αυτή ορίζει συμβατικά την ορθή φορά περιστροφής των αρμονικών.

Η αρίθμηση των αρμονικών μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Είτε θα θεωρηθεί ως πρώτη αρμονική η θεμελιώδης, είτε θα θεωρηθεί ως πρώτη αρμονική η τάξη της κύριας. Στη δεύτερη περίπτωση οι αρμονικές μικρότερης τάξης συνιστούν μια ομάδα κατ'ουσίαν υφαρμονικών. Τη διάκριση αυτή αποσαφηνίζει το σχήμα 3.12 [11] το οποίο δείχνει τα πλάτη των αρμονικών μαγνητεγερτικής δύναμης για διάφορες τάξεις σε δύο διαφορετικές μηχανές. Το πάνω διάγραμμα αναφέρεται σε μηχανή 12 αυλάκων 14 πόλων με συγκεντρωμένο τύλιγμα, ενώ το κάτω διάγραμμα σε μηχανή 42 αυλάκων 14 πόλων με καταναμημένο τύλιγμα. Ο οριζόντιος άξονας μετράται σε μήκη κύματος για μια αρμονική στο διάκενο. Εφόσον οι δύο μηχανές έχουν 14 πόλους, απαιτούνται 7 μήκη κύματος για μια τάξη αρμονικής μαγνητεγερτικής δύναμης ώστε αυτή να μπορεί να είναι η σύγχρονη. Βλέπουμε ότι για τη μηχανή με το καταναμημένο τύλιγμα, το οποίο επαναλαμβάνεται άλλες έξι φορές (δηλαδή υπάρχουν επτά βασικά τυλίγματα), η θεμελιώδης αρμονική που έχει επτά μήκη κύματος περιφεριακά του διακένου είναι και η κύρια τάξη. Αντίθετα στο συγκεντρωμένο τύλιγμα, το οποίο έχει μια συμμετρία μόνο στο τύλιγμά του, η κύρια τάξη είναι η έβδομη. Το διάγραμμα εξηγεί την αρίθμηση των αρμονικών και με τους δύο τρόπους.



Σχήμα 3.12 Αρμονικές μαγνητεγερτικής δύναμης σε δύο διαφορετικές μηχανές με ίδιο αριθμό πόλων

Είναι προφανές ότι η μηχανή με το συγκεντρωμένο τύλιγμα μπορεί να είναι πολύ μικρότερη σε όγκο από αυτήν με το κατανεμημένο, όπως είδαμε και από την παράγραφο 3.1. Ωστόσο, το αρμονικό περιεχόμενο και ιδιαίτερα η ύπαρξη υφαρμονικών με μεγάλη ταχύτητα περιστροφής μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική αύξηση των δινορρευμάτων και των απωλειών σιδήρου της μηχανής. Το γεγονός αυτό καθιστά επιτακτική την ανάγκη για τον υπολογισμό των δινορρευμάτων σε μηχανές μονίμων μαγνητών συγκεντρωμένου τυλίγματος, ειδικά αν λάβουμε υπόψιν τη χαμηλή θερμοκρασία στην οποία μπορεί να επέλθει απομαγνήτιση των μαγνητών νεοδυμίου που αποτελούν την πλειοψηφία των μαγνητών για εφαρμογές σε ηλεκτρικές μηχανές.

Κεφάλαιο 4 Αναλυτικός Υπολογισμός Δινορρευμάτων

Στα προηγούμενα κεφάλαια κάναμε μια εισαγωγή στα δινορρεύματα και τις μηχανές μονίμων μαγνητών και είδαμε γιατί δεν μπορούμε να αγνοήσουμε την επίδραση των δινορρευμάτων στις μηχανές αυτές. Τώρα θα μελετήσουμε πώς μπορούμε να εξάγουμε αναλυτικές σχέσεις υπολογισμού των δινορρευμάτων και τι δυσκολίες συναντάμε κατά τη διαδικασία αυτή. Επίσης θα εξετάσουμε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις γεωμετριών που παρουσιάζουν ενδιαφέρον.

4.1 Εξισώσεις Maxwell

Η θεμελίωση του γενικού προβλήματος θα γίνει μέσω των εξισώσεων Maxwell που ισχύουν για κάθε σημείο του χώρου. Αυτές είναι

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (4.4)$$

Πριν χρησιμοποιήσουμε αυτές τις σχέσεις, πρέπει να διατυπώσουμε τις γενικές υποθέσεις που θα ισχύουν για τα προβλήματα που θα οριστούν σε αυτό το κεφάλαιο, καθώς και για την εξαγωγή της γενικής λύσης. Οι υποθέσεις αυτές είναι:

- Τα αγώγιμα μέσα έχουν σταθερή σχετική μαγνητική διαπερατότητα μ_r . Αυτή είναι πολύ βασική υπόθεση η οποία αφενός μεν επιτρέπει να αντιμετωπιστούν τα μαγνητικά προβλήματα ως γραμμικά, αφετέρου δε καθιστά δυνατή την υπέρθεση των αποτελεσμάτων διαφορετικών συχνοτήτων στην περίπτωση αρμονικής ανάλυσης.
- Τα αγώγιμα μέσα θεωρούνται ομοιογενή και ιστροπικά. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε σημείο τους και προς κάθε κατεύθυνση έχουν σταθερή ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα.
- Το ρεύμα μετατόπισης αγνοείται καθώς στο εύρος συχνοτήτων που μελετώνται τα προβλήματα οι διαστάσεις των περιοχών όπου εξετάζονται τα πεδία είναι μικρές σε σύγκριση με το μήκος κύματος που έχουν.

➤ Δεν έχουμε συσώρευση στατικού φορτίου στον όγκο των αγωγίμων μέσων

Επίσης τα προβλήματα αντιμετωπίζονται στη μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση, κάτι που σημαίνει ότι δεν θα μας απασχολήσουν μεταβατικά φαινόμενα. Υπό το πρίσμα αυτών των υποθέσεων, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε τις εξισώσεις του Maxwell ως εξής

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (4.5)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \quad (4.6)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \bar{E} = 0 \quad (4.8)$$

Αντίστοιχα με τις σημειακές εξισώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ολοκληρωτική μορφή τους

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \bar{B} \cdot d\bar{A} \quad (4.9)$$

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{s} = \int_A \bar{J} \cdot d\bar{A} \quad (4.10)$$

$$\oint_A \bar{B} \cdot d\bar{A} = 0 \quad (4.11)$$

$$\oint_A \bar{E} \cdot d\bar{A} = 0 \quad (4.12)$$

Τέλος είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε τις συντακτικές σχέσεις των μέσων του προβλήματος, οι οποίες σύμφωνα με τις υποθέσεις περί ισοτροπικότητας και ομοιογένειάς τους είναι

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \quad (4.13)$$

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} \quad (4.14)$$

όπου μ η μαγνητική διαπερατότητα και σ η ηλεκτρική αγωγιμότητα του μέσου.

4.2 Η εξίσωση διάχυσης

Έχοντας ορίσει ένα σύστημα εξισώσεων για το πρόβλημα, μπορούμε να εξάγουμε μια συνολική εξίσωση η λύση της οποίας θα είναι λύση του προβλήματος. Για να το πετύχουμε αυτό συνδυάζουμε κατάλληλα τις εξισώσεις 4.5 έως 4.8. Από την 4.5 εάν εφαρμόσουμε τον τελεστή ανάδελτα ως εξωτερικό γινόμενο και στα δύο μέλη της εξίσωσης προκύπτει

$$\nabla \times \nabla \times \bar{H} = \nabla \times \bar{J} \quad (4.15)$$

Αντικαθιστώντας τη συντακτική σχέση 4.14 παίρνουμε

$$\nabla \times \nabla \times \bar{H} = \sigma(\nabla \times \bar{E}) \quad (4.16)$$

Χρησιμοποιώντας την 4.5 και τη συντακτική σχέση 4.13, η 4.16 γίνεται

$$\nabla \times \nabla \times \bar{H} = -\sigma\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (4.17)$$

Από τον ορισμό της λαπλασιανής ενός διανυσματικού μεγέθους A ως

$$\nabla^2 \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{A}) \quad (4.18)$$

και το γεγονός ότι για τη μαγνητική ένταση, από τις εξισώσεις 4.7 και 4.13, ο πρώτος όρος μηδενίζεται καταλήγουμε τελικά στην εξίσωση

$$\nabla^2 \bar{H} = \sigma\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (4.19)$$

Η εξίσωση 4.19 είναι η εξίσωση διάχυσης για τη μαγνητική ένταση. Η εξίσωση διάχυσης είναι μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης η οποία περιγράφει τη δυναμική των πυκνοτήτων των εξεταζόμενων μεγεθών σε ηλεκτρομαγνητικά, θερμικά και προβλήματα ρευστών. Στην προκειμένη περίπτωση η επίλυση της εξίσωσης διάχυσης προσδιορίζει τη μαγνητική ένταση και μπορούμε μέσω του νόμου του Ampere (εξίσωση 4.6) να υπολογίσουμε την πυκνότητα δινορρευμάτων στο μέσο που μας ενδιαφέρει και ακολούθως τις απώλειές τους.

Από τις σχέσεις που συνδέουν τη μαγνητική ένταση, τη μαγνητική επαγωγή, την πυκνότητα ρεύματος και το μαγνητικό δυναμικό μπορούμε να εξάγουμε εκφράσεις της εξίσωσης διάχυσης για όλα αυτά τα μεγέθη. Ειδικά θα μας απασχολήσει η έκφραση για το

μαγνητικό δυναμικό επειδή η διέγερση προέρχεται από περίπλοκη πηγή, ενώ επίσης η γενική λύση και οι συνοριακές συνθήκες γίνονται πιο διαχειρίσιμες [12]. Το μαγνητικό δυναμικό σχετίζεται με τη μαγνητική επαγωγή ως

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad (4.20)$$

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για την επίλυση της εξίσωσης διάχυσης. Οι σημαντικότερες είναι οι εξής:

- Μέθοδος χωρισμού μεταβλητών
- Μεταβολική μέθοδος
- Αριθμητική επίλυση ολοκληρωτικών σχέσεων

Η μεταβολική μέθοδος (variational method) συνίσταται στην αντικατάσταση της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης από την λύση που λαμβάνουμε απαιτώντας μια συνθήκη για μια κατάλληλη ποσότητα (functional). Στον ηλεκτρομαγνητισμό η ποσότητα αυτή είναι

$$F = \int_{v,t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \bar{E}^2 - \frac{1}{2\mu} \bar{B}^2 + \bar{J} \cdot \bar{A} - \varphi \rho \right) dx dy dz dt \quad (4.21)$$

και η απαίτηση που θεωρούμε βασίζεται στην αρχή του Hamilton, σύμφωνα με την οποία η κατάσταση ενός συστήματος χαρακτηρίζεται από το ελάχιστο επίπεδο ενέργειας σε κάθε χρονική στιγμή [13]. Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου είναι αρκετά πολύπλοκη.

Με τον όρο αριθμητική επίλυση ολοκληρωτικών σχέσεων εννοούμε την επίλυση της εξίσωσης διάχυσης όπως αυτή προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε τις ολοκληρωτικές μορφές των εξισώσεων Maxwell για την εξαγωγή της. Το βασικό πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι οι συνοριακές συνθήκες δεν συμμετέχουν άμεσα στη μαθηματική περιγραφή του προβλήματος, έτσι είναι εφικτό να περιγράψουν περίπλοκες γεωμετρίες. Η λύση αυτών των εξισώσεων μπορεί να γίνει με επαναληπτικές αριθμητικές μεθόδους, επομένως είναι καταλληλότερες για ανάλυση μέσω κατάλληλου προγράμματος υπολογιστή και συγκεκριμένα μέσω της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (finite element analysis).

Η μέθοδος χωρισμού μεταβλητών είναι μια κλασσική μέθοδος για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων. Παρακάτω θα δούμε τρόπους αντιμετώπισης τέτοιου είδους εξισώσεων σε διάφορες συντεταγμένες καθώς και μερικά παραδείγματα της εφαρμογής της σε ορισμένες βασικές γεωμετρίες.

4.2.1 Χωρισμός μεταβλητών σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Αρχικά θα δούμε πώς μπορεί να εφαρμοστεί ο χωρισμός μεταβλητών σε μια βαθμωτή ποσότητα Φ για την οποία ισχύει

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (4.22)$$

Η εξίσωση 4.22 αντιστοιχεί στην εξίσωση Laplace και ισχύει σε περιοχές χωρίς αγωγιμότητα. Θα την εξετάσουμε εδώ επειδή η λύση της είναι μέρος της λύσης για την εξίσωση διάχυσης 4.19. Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση Φ είναι της μορφής $\Phi(x,y,z)$, τότε θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή

$$\Phi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad (4.23)$$

Η μεταβλητή της χρονικής εξάρτησης t έχει απαλειφθεί θεωρώντας ότι η ανάλυση γίνεται για τη μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση. Εφαρμόζοντας την 4.23 στη σχέση 4.22 έχουμε το πρόβλημα

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (4.24)$$

Ο κάθε όρος της εξίσωσης 4.24 είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής και επομένως κάθε όρος πρέπει να είναι ίσος με μια σταθερά προκειμένου η εξίσωση 4.24 να ικανοποιείται για αυθαίρετες τιμές των μεταβλητών x, y, z . Αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k_x^2 \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k_y^2 \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k_z^2 \quad (4.27)$$

Για τις σταθερές διαχωισμού ισχύει ότι

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \quad (4.28)$$

Η σχέση 4.25 μπορεί να γραφεί και ως

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (4.29)$$

που είναι ένα πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm-Liouville με $\lambda = -k_x^2$. Αντίστοιχα μπορούμε να γράψουμε

$$Y'' + \mu Y = 0 \quad (4.30)$$

$$Z'' - (\lambda + \mu)Z = 0 \quad (4.31)$$

Τελικά καταφέρνουμε να διαχωρίσουμε το αρχικό πρόβλημα στα επιμέρους 4.29-4.31 τα οποία είναι προβλήματα Sturm-Liouville με αλληλοσχετιζόμενες σταθερές. Η τελική λύση που παίρνουμε είναι της μορφής

$$\Phi(x, y, z) = (A_1 \sin k_x x + A_2 \cos k_x x)(B_1 \sin k_y y + B_2 \cos k_y y)(C_1 \sinh |k_z| z + C_2 \cosh |k_z| z) \quad (4.32)$$

Οι σταθερές $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ προσδιορίζονται μέσω των οριακών συνθηκών του προβλήματος. Για το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό η εξίσωση Laplace είναι

$$\nabla^2 A = [\nabla^2 A_x] \bar{x}_0 + [\nabla^2 A_y] \bar{y}_0 + [\nabla^2 A_z] \bar{z}_0 = 0 \quad (4.32)$$

Επομένως έχουμε να λύσουμε στη γενική περίπτωση 3 εξισώσεις Laplace για βαθμωτές συναρτήσεις όπως είδαμε προηγουμένως. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί σε κάθε περίπτωση χωρίς να χρειάζονται επιπλέον συνθήκες πέραν των οριακών συνθηκών. Υποθέτοντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες μπορεί να δειχθεί [14] ότι το πρόβλημα είναι καλά τοποθετημένο και ότι η λύση που βρέθηκε είναι μοναδική.

4.2.2 Χωρισμός μεταβλητών σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Ο χωρισμός μεταβλητών σε κυλινδρικές συντεταγμένες παρουσιάζει μεγαλύτερες δυσκολίες σε σχέση με το αντίστοιχο πρόβλημα των καρτεσιανών συντεταγμένων. Θα λύσουμε πάλι την εξίσωση Laplace 4.22 για μια βαθμωτή συνάρτηση Φ , μόνο που τώρα θα έχουμε $\Phi = \Phi(r, \varphi, z)$. Η εξίσωση παίρνει τη μορφή [12]

$$\nabla^2 \Phi(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.33)$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών υποθέτουμε λύση της μορφής

$$\Phi(r, \varphi, z) = R(r)F(\varphi)Z(z) \quad (4.34)$$

Αντικαθιστώντας την 4.34 στην 4.33 και πολλαπλασιάζοντας με τον παράγοντα r^2/RFZ παίρνουμε

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} + r^2 \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (4.35)$$

Ο δεύτερος όρος της 4.35 είναι ανεξάρτητος των μεταβλητών r και z και η εξίσωση ισχύει για κάθε τιμή των μεταβλητών r, φ, z μόνο αν είναι σταθερός

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = n^2 \quad (4.36)$$

Η 4.36 είναι περιοδικό πρόβλημα Sturm-Liouville καθώς πρέπει η Φ να είναι μονότιμη, δηλαδή $\Phi(2\pi) = \Phi(0)$. Αυτό σημαίνει ότι η σταθερά διαχωρισμού n είναι ακέραιος αριθμός. Η γενική λύση δίνεται από

$$F(\varphi) = B_1 e^{jn\varphi} + B_2 e^{-jn\varphi} \quad (4.37)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την 4.36 στην 4.35, διαιρέσουμε με r^2 και αναδιατάξουμε τους όρους, έχουμε σαν αποτέλεσμα

$$\left[\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{n^2}{r^2} \right] + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (4.38)$$

Κάθε όρος πρέπει να είναι ίσος με μια σταθερά για να ισχύει η εξίσωση. Έστω ότι η σταθερά διαχωρισμού είναι k^2 , τότε ο πρώτος όρος της 4.38 μας δίνει

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (4.39)$$

Η εξίσωση 4.39 είναι μια εξίσωση Bessel με γενική λύση

$$R(r) = A_1 J_n(kr) + A_2 Y_n(kr) \quad (4.40)$$

όπου J_n είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης n και Y_n η συνάρτηση Bessel δεύτερου είδους τάξης n .

Μένει να καθοριστεί ο δεύτερος όρος της 4.38 για τον οποίον ισχύει

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \quad (4.41)$$

Όπως έχουμε δει από τις 4.31 και 4.32 η λύση για αυτήν την εξίσωση είναι

$$Z(z) = C_1 \sinh |kz| + C_2 \cosh |kz| \quad (4.42)$$

Επομένως η γενική λύση του αρχικού προβλήματος είναι

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi, z) = \sum_n \sum_k [A_{1,n} J_n(kr) + A_{2,n} Y_n(kr)] [B_{1,n} e^{jn\varphi} + B_{2,n} e^{-jn\varphi}] \\ [C_{1,k} \sinh |kz| + C_{2,k} \cosh |kz|] \end{aligned} \quad (4.43)$$

Για το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων η λαπλασιανή του μαγνητικού δυναμικού δίνεται ως

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{A} = \left[\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} \right] \bar{r}_0 \\ + \left[\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A_\varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} \right] \bar{\varphi}_0 \\ + \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \bar{z}_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Μόνο ο τρίτος όρος της εξίσωσης 4.44 είναι διαχωρίσιμος. Για τους άλλους δύο όρους ο χωρισμός μεταβλητών είναι εφαρμόσιμος αν θεωρηθούν επιπλέον συνθήκες.

4.2.3 Χωρισμός μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες

Είδαμε ότι η εξίσωση διάχυσης λαμβάνει αρκετά πολύπλοκη λύση στην περίπτωση των κυλινδρικών συντεταγμένων. Μια απλοποίηση που μπορεί να γίνει είναι να θεωρηθεί το πεδίο ανεξάρτητο της διάστασης z , να λυθεί το πρόβλημα σε πολικές συντεταγμένες και να υπολογιστεί το αποτέλεσμα ανά μονάδα μήκους κατά τον άξονα z .

Η εξίσωση 4.22 παίρνει σε αυτήν την περίπτωση τη μορφή

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (4.45)$$

Εφαρμόζοντας το χωρισμό μεταβλητών υποθέτουμε λύση της μορφής

$$\Phi(r, \varphi) = R(r)F(\varphi) \quad (4.46)$$

και λαμβάνουμε τα ακόλουθα δύο προβλήματα

$$F'' + \lambda F = 0 \quad (4.47)$$

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \quad (4.48)$$

Η λύση του περιοδικού προβλήματος Sturm-Liouville 4.47 είναι

$$F(\varphi) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta) \quad (4.49)$$

ενώ το πρόβλημα 4.48 περικλείει την εξίσωση Euler, της οποίας η γενική λύση δίνεται στη μορφή

$$R_n(r) = \begin{cases} C_1 + C_2 \ln r, & n=0 \\ C_3 r^n + C_4 r^{-n}, & n=1,2,3,.. \end{cases} \quad (4.50)$$

Η μορφή της γενικής λύσης του προβλήματος 4.45 είναι

$$\Phi(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\theta \right\} \quad (4.51)$$

Για το μαγνητικό δυναμικό ισχύει

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{A} &= \left[\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right] \bar{r}_0 \\ &+ \left[\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A_\varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \bar{\varphi}_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Και σε αυτήν την περίπτωση η μέθοδος χωρισμού μεταβλητών είναι εφικτή εάν θεωρήσουμε επιπλέον συνθήκες.

Στην παράγραφο 4.2 εφαρμόσαμε το χωρισμό μεταβλητών σε εξισώσεις Laplace. Ο λόγος είναι ότι τα προβλήματα που θα αντιμετωπίσουμε στην εργασία αυτή αφορούν τη μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση, για την οποία το δεύτερο μέλος της εξίσωσης 4.19 που είναι μια μερική παράγωγος της συνάρτησης του προβλήματος ως προς το χρόνο εκφυλίζεται σε γινόμενο της συνάρτησης με τη συχνότητα λειτουργίας χρησιμοποιώντας τον

παραστατικό μιά της συνάρτησης. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε σε μια εξίσωση Poisson, την οποία αντιμετωπίζουμε υπερθέτοντας την τυπική λύση του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος Laplace με την ειδική λύση που προκύπτει από τον μη ομογενή όρο.

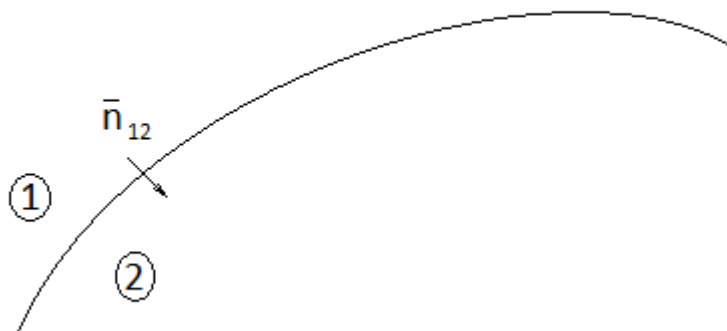
4.2.4 Συνοριακές συνθήκες

Οι γενικές εκφράσεις που εξάγαμε παραπάνω προκειμένου να εφαρμοστούν σε ένα πρόβλημα πρέπει αυτό να είναι καλά τοποθετημένο, να έχει δηλαδή κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Για τα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα αυτές είναι τέτοιες ώστε να εξασφαλίζεται η συνέχεια των πεδίων όταν υπάρχει διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ μέσων με ανόμοια ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα. Επίσης χρειάζονται προκειμένου να καθορίσουν τα σύνορα του προβλήματος με κατάλληλη έκφραση από μαθηματικής και φυσικής σκοπιάς. Οι συνοριακές συνθήκες έχουν καταλυτική επίδραση στον προσδιορισμό της τυπικής λύσης του προβλήματος.

Για τα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις συνέχειας ως συνοριακές συνθήκες λαμβάνοντας υπόψιν την υπόθεση ότι δεν έχουμε συσσώρευση φορτίου και είναι

$$(\bar{B}_2 - \bar{B}_1) \cdot \bar{n}_{12} = 0 \quad (4.53)$$

$$\bar{n}_{12} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \bar{K}_s \quad (4.54)$$



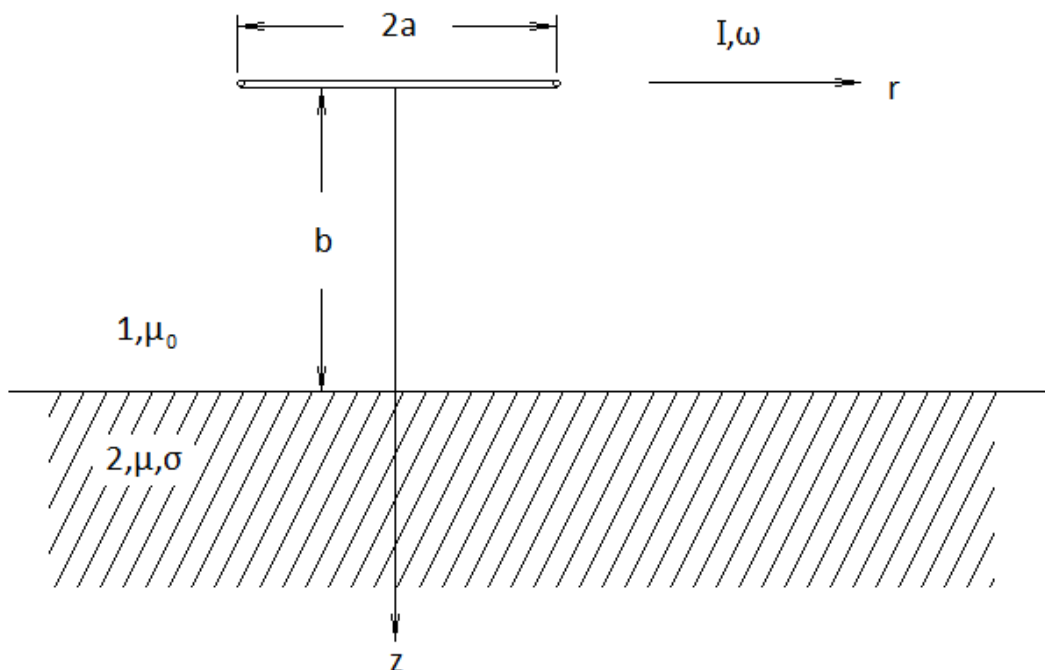
Σχήμα 4.1 Συνοριακές συνθήκες

όπου n_{12} το κάθετο διάνυσμα από το μέσο 1 προς το μέσο 2 όπως βλέπουμε στο σχήμα 4.1, και B_1, B_2, H_1, H_2 τα μεγέθη της μαγνητικής επαγωγής και έντασης στο μέσο που υποδεικνύει το όρισμα πολύ κοντά στη διαχωριστική επιφάνεια. Η οριστική έκφραση αυτών των συνθηκών εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων και τη γεωμετρία του εκάστοτε προβλήματος.

4.3 Παραδείγματα αναλυτικού υπολογισμού δινορρευμάτων

Η παραπάνω ανάλυση θα εφαρμοστεί σε μερικές απλές περιπτώσεις υπολογισμού δινορρευμάτων που δεν σχετίζονται άμεσα με γεωμετρίες ηλεκτρικών μηχανών αλλά είναι πιο γενικές. Κάποια από τα αποτελέσματα θα χρησιμεύσουν στην ανάλυση που θα γίνει για πολυπλοκότερα μοντέλα. Θα εξετάσουμε τρεις περιπτώσεις, μία σε καρτεσιανές, μία σε πολικές και μία σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

4.3.1 Κυλινδρικές συντεταγμένες - Διέγερση από ρευματοφόρο βρόχο παράλληλο σε ημιάπειρη πλάκα



Σχήμα 4.2 Ρευματοφόρος βρόχος παράλληλος σε ημιάπειρη πλάκα

Ο ρευματοειδής βρόχος του σχήματος 4.2 τοποθετείται παράλληλα ως προς τη διαχωριστική επιφάνεια με το αγώγιμο μέσο που καταλαμβάνει τον ημιχώρο (περιοχή 2). Η περιοχή 1 καταλαμβάνεται από αέρα. Ο βρόχος επάγει δινορρεύματα στο αγώγιμο μέσο, τα οποία θα υπολογίσουμε ακολούθως. [12]

Οι διαφορικές εξισώσεις που ισχύουν για το μαγνητικό δυναμικό στις περιοχές 1 και 2 είναι αντίστοιχα

$$\nabla^2 \bar{A}_1 = 0 \quad (4.55)$$

$$\nabla^2 A_2 = \mu\sigma \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t} \quad (4.56)$$

Το καταλληλότερο σύστημα συντεταγμένων για αυτό το πρόβλημα είναι το κυλινδρικό, με την αρχή να επιλέγεται στο κέντρο του βρόχου. Εφόσον το ρεύμα είναι κυκλικό, η μόνη συνιστώσα του μαγνητικού δυναμικού θα είναι η A_θ . Επίσης αφού το ρεύμα είναι ομοιόμορφο, δεν υπάρχει εξάρτηση του μαγνητικού δυναμικού από τη θ -συνιστώσα, δηλαδή εξαρτάται μόνο από τα r, z . Έτσι από την εξίσωση 4.55 προκύπτει μόνο μία διαφορική εξίσωση για την περιοχή 1 η οποία είναι

$$\frac{\partial^2 A_1(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_1(r, z)}{\partial r} - \frac{A_1(r, z)}{r^2} + \frac{\partial^2 A_1(r, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (4.57)$$

Έχουμε παραλείψει το δείκτη θ , αφού είναι η μόνη συνιστώσα. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, υποθέτουμε γενική λύση της εξίσωσης 4.57 στη μορφή

$$A_1(r, z) = e^{\pm kz/a} J_1(kr/a) \quad (4.58)$$

Όπου k είναι η σταθερά χωρισμού. Για την περιοχή 2 ισχύει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 A_2(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial A_2(r, z)}{\partial r} - \frac{A_2(r, z)}{r^2} - \frac{\partial^2 A_2(r, z)}{\partial z^2} = j\omega\sigma A_2(r, z) \quad (4.59)$$

Εφαρμόζοντας ξανά τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών λαμβάνουμε τη γενική λύση της εξίσωσης 4.59 ως εξής

$$A_2(r, z) = e^{\pm(k^2 + j\omega^2)^{1/2} z/a} J_1(kr/a) \quad (4.60)$$

όπου

$$\rho^2 = \mu\sigma\omega\alpha^2 = 2\alpha^2 / \delta^2 \quad (4.61)$$

και δ το πάχος διείσδυσης. Το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό που οφείλεται σε βρόχο ακτίνας α στον άπειρο χώρο σε ένα σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων είναι

$$A = A_\theta(r, z)\theta_0 = 2\pi I\alpha\theta_0 \int_0^\infty e^{-k|z|} J_1(kr)J_1(ka)dk \quad (4.62)$$

όπου J_1 είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους. Το πεδίο έξω από το μέσο (στην περιοχή 1) είναι το άθροισμα δύο συνιστωσών, μία λόγω του ρευματοφόρου βρόχου και μία λόγω των δινορρευμάτων εντός του μέσου. Επομένως από τα προηγούμενα αποτελέσματα το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό στον αέρα είναι

$$A_1(r, z) = \mu_0 \int_0^\infty \left[\frac{I}{2} e^{-kz/a} J_1(k) + L_k e^{kz/a} \right] J_1(kr/a) dk \quad (4.63)$$

Ο δεύτερος όρος του αθροίσματος των ολοκληρωτέων αντιστοιχεί στη στη συνιστώσα του πεδίου που προκαλείται από τα δινορρεύματα. Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό εντός του μέσου

$$A_2(r, z) = \mu_0 \mu_r \int_0^\infty M_k e^{-z(k^2 + j\rho^2)^{1/2}/a} J_1(kr/a) dk \quad (4.64)$$

Οι σταθερές L_k και M_k είναι προσδιοριστέες. Για να τις υπολογίσουμε, κάνουμε χρήση των οριακών συνθηκών που ισχύουν στη διαχωριστική επιφάνεια, οι οποίες για το πρόβλημα αυτό είναι

$$B_z = \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r} \quad (4.65)$$

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z} \quad (4.66)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις για $z=b$ καταλήγουμε στις ακόλουθες εκφράσεις για τις σταθερές:

$$L_k = \frac{k\mu_r - \sqrt{k^2 + j\rho^2}}{k\mu_r + \sqrt{k^2 + j\rho^2}} \frac{l}{2} e^{-2kb/a} J_1(k) \quad (4.67)$$

$$M_k = \frac{k}{k\mu_r + \sqrt{k^2 + j\rho^2}} l e^{-kb/a} \cdot e^{+(k^2 + j\rho^2)b/a} J_1(k) \quad (4.68)$$

Γνωρίζοντας τις εκφράσεις για τις σταθερές μπορούμε να τις αντικαταστήσουμε και να βρούμε τις εκφράσεις για το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό εντός και εκτός του μέσου

$$A_1(r, z) = \frac{\mu_0 l}{2} \int_0^\infty e^{-kb/a} J_1(k) J_1(kr/a) \left[e^{-k(z-b)/a} + \frac{k\mu_r - \sqrt{k^2 + j\rho^2}}{k\mu_r + \sqrt{k^2 + j\rho^2}} e^{+k(z-b)/a} \right] dk \quad (4.69)$$

$$A_2(r, z) = \mu_0 \mu_r l \int_0^\infty e^{-kb/a} J_1(kr/a) \frac{k}{k\mu_r + \sqrt{k^2 + j\rho^2}} e^{-(k^2 + j\rho^2)^{1/2} (z-b)/a} dk \quad (4.70)$$

Από τη σχέση ορισμού της μαγνητικής επαγωγής μέσω του μαγνητικού δυναμικού (4.20), μπορούμε να υπολογίσουμε τις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου στις δύο περιοχές του χώρου

$$B_{1,r}(r, z) = \frac{\mu_0 l}{2a} \int_0^\infty e^{-kb/a} J_1(k) J_1(kr/a) \left[e^{-k(z-b)/a} - \frac{k\mu_r - (k^2 + j\rho^2)^{1/2}}{k\mu_r + (k^2 + j\rho^2)^{1/2}} e^{k(z-b)/a} \right] k dk \quad (4.71)$$

$$B_{1,\theta}(r, z) = 0 \quad (4.72)$$

$$B_{1,z}(r, z) = \frac{\mu_0 l}{2a} \int_0^\infty e^{-kb/a} J_1(k) J_0(kr/a) \left[e^{-k(z-b)/a} + \frac{k\mu_r - (k^2 + j\rho^2)^{1/2}}{k\mu_r + (k^2 + j\rho^2)^{1/2}} e^{k(z-b)/a} \right] k dk \quad (4.73)$$

Αντίστοιχα για την περιοχή 2 εξάγουμε τις εξής σχέσεις για το μαγνητικό πεδίο

$$B_{2,r}(r, z) = \frac{\mu_0 \mu_r l}{a} \int_0^\infty e^{-kb/a} J_1(k) J_1(kr/a) \frac{k(k^2 + j\rho^2)^{1/2}}{\mu_r k + (k^2 + j\rho^2)^{1/2}} e^{-(k^2 + j\rho^2)^{1/2} (z-b)/a} dk \quad (4.74)$$

$$B_{2,\theta}(r, z) = 0 \quad (4.75)$$

$$B_{2,z}(r,z) = \frac{\mu_0 \mu_r I}{a} \int_0^\infty e^{-kb/a} J_1(k) J_0(kr/a) \frac{k^2}{\mu_r k + (k^2 + jp^2)^{1/2}} e^{-(k^2 + jp^2)^{1/2} (z-b)/a} dk \quad (4.76)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση 4.5 του Maxwell και τη συντακτική σχέση 4.14 μπορούμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα των δινορρευμάτων στο εσωτερικό του μέσου, η οποία έχει μόνο θ -συνιστώσα. Η σχέση που προκύπτει είναι

$$J_{2,\theta}(r,z) = -\frac{jp^2 I}{a^2} \int_0^\infty e^{-kb/a} J_1(k) J_1(kr/a) \frac{k}{\mu_r k + \sqrt{k^2 + jp^2}} e^{-\sqrt{k^2 + jp^2} (z-b)/a} dk \quad (4.77)$$

Η εξίσωση 4.69 δείχνει τις ξεχωριστές επιδράσεις της διέγερσης και των δινορρευμάτων στο μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό. Ο πρώτος όρος της αγκύλης μέσα στο ολοκλήρωμα αφορά το βρόχο, ενώ ο δεύτερος αντιστοιχεί στη συνεισφορά των δινορρευμάτων.

Οι εξισώσεις που αφορούν το μαγνητικό δυναμικό και την πυκνότητα δινορρευμάτων μπορούν να απλοποιηθούν κάνοντας χρήση των αδιάστατων μεταβλητών του προβλήματος. Προκύπτουν έτσι δύο περιορισμένες μορφές οι οποίες έχουν ενδιαφέρον.

➤ Resistance Limited

Αυτή η μορφή ισχύει υποθέτοντας ότι

$$k \mu_r \gg \sqrt{k^2 + jp^2} \quad (4.78)$$

Σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις γίνονται

$$A_1 = \frac{\mu_0 I}{2} \int_0^\infty e^{-kb/a} J_1(k) J_1(kr/a) (e^{-k(z-b)/a} + e^{k(z-b)/a}) dk \quad (4.79)$$

$$A_2 = \mu_0 \mu_r I \int_0^\infty e^{-kb/a} J_1(k) J_1(kr/a) e^{-\sqrt{k^2 + jp^2} (z-b)/a} dk \quad (4.80)$$

$$J_2 = -j\omega \mu_0 \sigma I \int_0^\infty e^{-kb/a} J_1(k) J_1(kr/a) e^{-\sqrt{k^2 + jp^2} (z-b)/a} dk \quad (4.81)$$

Τα δινορρεύματα καθυστερούν σε σχέση με το ρεύμα διέγερσης κατά περίπου 90° . Αυτή είναι η συνήθης προσέγγιση χαμηλών συχνοτήτων και η συμπεριφορά καλείται resistance limited. Η συνθήκη 4.78 είναι θεωρητικά αδύνατη για μικρές τιμές του k . Ένας γενικός

κανόνας για να ισχύει αυτή η προσέγγιση είναι να έχουμε μεγάλη τιμή μαγνητικής διαπερατότητας στο μέσο και μικρή ακτίνα βρόχου [12].

➤ Inductance Limited

Για αυτή τη μορφή υποθέτουμε

$$\rho \gg k\mu_r \quad (4.81)$$

Οι εξισώσεις γίνονται σε αυτήν την περίπτωση

$$A_1 = \frac{\mu_0 I}{2} \int_0^\infty e^{-kb/a} J_1(k) J_1(kr/a) \left(e^{-k(z-b)/a} - e^{k(z-b)/a} \right) dk \quad (4.82)$$

$$A_2 = \mu_0 \frac{\mu_r I}{\rho j^{1/2}} \int_0^\infty e^{-kb/a} J_1(k) J_1(kr/a) e^{-\sqrt{jp(z-b)}/a} k dk \quad (4.83)$$

$$J_2 = -j^{1/2} \frac{\rho I}{a^2} \int_0^\infty e^{-kb/a} J_1(k) J_1(kr/a) e^{-\sqrt{jp(z-b)}/a} k dk \quad (4.84)$$

Παρατηρώντας την εξίσωση 4.82 βλέπουμε ότι το μαγνητικό πεδίο στο αέρα (περιοχή 1) επηρεάζεται σημαντικά από την κατανομή των δινορρευμάτων στο μέσο. Έχουμε μείωση της κάθετης συνιστώσας κοντά στη διαχωριστική επιφάνεια και ενίσχυση της οριζόντιας. Το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο δεν εισχωρεί στο μέσο.

Υπ'αυτές τις συνθήκες, τα δινορρεύματα καθυστερούν κατά περίπου 45° σε σχέση με το ρεύμα διέγερσης. Η συμπεριφορά αυτή καλείται inductance limited. Το μοντέλο αυτό έχει πιο περιορισμένη εφαρμογή, αφού η ικανοποίηση της συνθήκης 4.81 μοιάζει αδύνατη δεδομένου ότι το k λαμβάνει τιμές έως το άπειρο, περιγράφει ωστόσο μια συνθήκη ώστε να θωρακιστεί ένα μέσο από το περιβάλλον μαγνητικό του πεδίο.

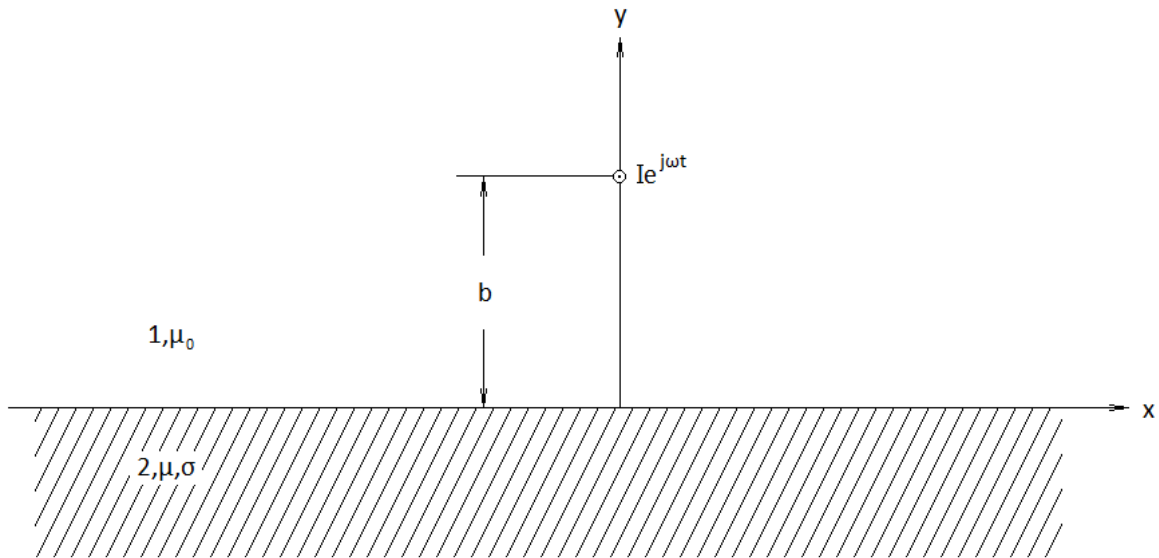
4.3.2 Καρτεσιανές Συντεταγμένες - Διέγερση από νηματοειδές ρεύμα παράλληλα σε ημιάπειρη πλάκα

Η γεωμετρία του παραδείγματος φαίνεται στο σχήμα 4.3. Υπάρχουν δύο περιοχές στο χώρο, η περιοχή 1 περιέχει αέρα ενώ τη δεύτερη καταλαμβάνει το αγωγίμο μέσο. Το νήμα τοποθετείται παράλληλα προς τη διαχωριστική επιφάνεια και σε απόσταση b από αυτήν και διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα το οποίο επιστρέφει μέσω της πλάκας. Η κατανομή της πυκνότητας δινορρευμάτων εντός του μέσου είναι παράλληλη με το νήμα,

έτσι το πρόβλημα γίνεται διδιάστατο. Οι εξισώσεις για το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό στις δύο περιχές του χώρου έχουν ως εξής

$$\nabla^2 \bar{A}_1 = 0 \quad (4.85)$$

$$\nabla^2 \bar{A}_2 = \mu\sigma \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t} = j\rho^2 \bar{A}_2, \quad \rho^2 = \omega\mu\sigma \quad (4.86)$$



Σχήμα 4.3 Νηματοειδές ρεύμα παράλληλο σε ημιάπειρα πλάκα

Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος ως προς τον y άξονα, η μοναδική συνιστώσα του μαγνητικού δυναμικού $A_1(x,y)$ έχει λύση της μορφής

$$A_1(x,y) = \int_0^{\infty} (Q_1 e^{my} + Q_2 e^{-my}) \cos(mx) dm \quad (4.87)$$

όπου η σταθερά διαχωρισμού m παίρνει οποιαδήποτε θετική πραγματική τιμή. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το ολοκλήρωμα της σχέσης 4.87 συγκλίνει. Τότε οι συνιστώσες της μαγνητικής επαγωγής θα είναι

$$B_{1x} = \frac{\partial A_1}{\partial y} = \int_0^{\infty} (Q_1 e^{my} - Q_2 e^{-my}) m \cos(my) dm \quad (4.88)$$

$$B_{1y} = -\frac{\partial A_1}{\partial x} = \int_0^{\infty} (Q_1 e^{my} + Q_2 e^{-my}) m \sin(mx) dm \quad (4.89)$$

Εξετάζοντας τις εξισώσεις 4.88, 4.89 συμπεραίνουμε ότι ο όρος που περιέχει τον παράγοντα e^{my} αντιστοιχεί στη συνεισφορά του νήματος στο πεδίο, ενώ ο όρος που περιέχει τον παράγοντα e^{-my} αντιστοιχεί στη συνεισφορά των δινορρευμάτων της πλάκας στο πεδίο.

Το μαγνητικό πεδίο σε ένα τυχαίο σημείο (x,y) της περιοχής 1 δίνεται από

$$B_1(x,y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad (4.90)$$

όπου $r = [x^2 + (b-y)^2]^{1/2}$ η απόσταση του σημείου από το νήμα. Οι συνιστώσες του πεδίου μπορούν να γραφούν υπό μορφή ολοκληρωμάτων Fourier ως εξής

$$B_{1x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{b-y}{x^2 + (b-y)^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int e^{-|b-y|m} \cos(mx) dm \quad (4.91)$$

$$B_{1y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (b-y)^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int e^{-|b-y|m} \sin(mx) dm \quad (4.92)$$

Συγκρίνοντας αυτή τη μορφή με τη μορφή των εξισώσεων 4.88, 4.89 προκύπτει ότι

$$Q_1(m) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{e^{-bm}}{m} \quad (4.93)$$

Για την περιοχή 1 η 4.85 έχει λύσεις της μορφής

$$Q(m)e^{-my} \cos(mx) \quad , \quad y \geq b \quad (4.94)$$

την οποία μπορούμε να γράψουμε και ως

$$(Q'e^{-my} + Q''e^{-my}) \cos(mx) \quad (4.95)$$

ώστε να εκφράσουμε το γεγονός ότι το συνολικό πεδίο είναι άθροισμα των συνιστωσών που προκύπτουν από τη διέγερση του νήματος και από τα δινορρεύματα. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν προκύπτει ότι

$$Q'_1(m) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{e^{bm}}{m} \quad (4.96)$$

και οι εξισώσεις 4.87 έως 4.89 γίνονται

$$B_{1x} = \int_0^{\infty} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} e^{-|b-y|m} - Q_2 m e^{-my} \right) \cos(mx) dm \quad (4.97)$$

$$B_{1y} = \int_0^{\infty} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} e^{-|b-y|m} + Q_2 m e^{-my} \right) \sin(mx) dm \quad (4.98)$$

$$A_1(x, y) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{e^{-|b-y|m}}{m} + Q_2 e^{-my} \right) \cos(mx) dm \quad (4.99)$$

Ως αποτέλεσμα της συμμετρίας του πεδίου ως προς τον y άξονα, και επειδή καθώς το y τείνει στο μείον άπειρο το πεδίο στο εσωτερικό του μέσου πρέπει να μηδενίζεται, η εξίσωση 4.86 λαμβάνει γενική λύση

$$A_2(x, y) = \int_0^{\infty} K(m) e^{qy} \cos(mx) dm \quad , \quad y \leq 0 \quad (4.100)$$

$$q = (m^2 + j\rho^2)^{1/2} \quad (4.101)$$

Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου σε κάθε άξονα είναι

$$B_{2x} = \frac{\partial A_2}{\partial y} = \int_0^{\infty} K(m) q e^{qy} \cos(mx) dm \quad (4.102)$$

$$B_{2y} = -\frac{\partial A_2}{\partial x} = \int_0^{\infty} K(m) m e^{qy} \sin(mx) dm \quad (4.103)$$

Για να καθορίσουμε τις σταθερές Q_2 και K_m των εξισώσεων 4.97-4.98 και 4.102-4.103 εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια $y=0$. Αυτές είναι η συνέχεια της κάθετης συνιστώσας της μαγνητικής επαγωγής και η συνέχεια της οριζόντιας συνιστώσας της μαγνητικής έντασης

$$B_{1,y} = B_{2,y} \quad , \quad \frac{1}{\mu_0} B_{1,x} = \frac{1}{\mu} B_{2,x} \quad (4.104)$$

Μετά την εφαρμογή των οριακών συνθηκών οι σταθερές γίνονται

$$Q_2(m) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\mu_r^{m-q}}{\mu_r^{m+q}} \frac{e^{-bm}}{m} \quad (4.105)$$

$$K(m) = \mu_r \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{1}{\mu_r^{m+q}} e^{-bm} \quad (4.106)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές προκύπτουν οι τελικές εκφράσεις για το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό

$$A_1(x, y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{e^{my}}{m} + \frac{\mu_r^{m-q}}{\mu_r^{m+q}} \frac{e^{-my}}{m} \right] e^{-bm} \cos(mx) dm \quad (4.107)$$

ή

$$A_1(x, y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{x^2 + (b-y)^2}}{\sqrt{x^2 + (b+y)^2}} + \mu_r \frac{\mu_0 I}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-m(b+y)}}{\mu_r + q} \cos(mx) dm \quad (4.108)$$

και

$$A_2(x, y) = \mu_r \frac{\mu_0 I}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ay} e^{-mb}}{\mu_r^{m+q}} \cos(mx) dm \quad (4.109)$$

Εφαρμόζοντας όπως στο προηγούμενο παράδειγμα τον νόμο 4.5 του Maxwell και τη συντακτική σχέση 4.14, η πυκνότητα των δινορρευμάτων βρίσκεται από τη σχέση

$$\bar{i}(x, y) = -\frac{\partial \bar{A}_2}{\partial t} \quad (4.110)$$

ή

$$\bar{i}(x, y) = -j\omega \sigma \bar{A}_2(x, y) \quad (4.111)$$

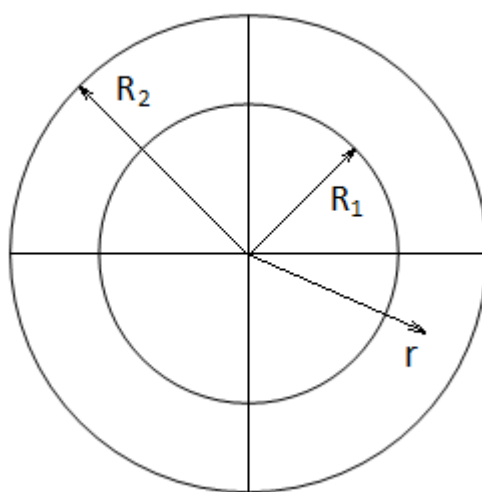
Τελικά η πυκνότητα των δινορρευμάτων είναι ίση με

$$\bar{i}(x, y) = -z_0 j \frac{\rho^2 I}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ay} e^{-mb}}{\mu_r^{m+q}} \cos(mx) dm \quad (4.112)$$

Η σχέση 4.111 δείχνει γιατί είναι βολικό να χρησιμοποιούμε το μαγνητικό δυναμικό όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα δινορρευμάτων σε μια διάταξη. Ολοκληρώνοντας τη σχέση 4.112 σε μια διατομή κατά τον z άξονα βρίσκουμε ότι το συνολικό ρεύμα είναι ίσο με το ρεύμα I του νήματος, όπως περιμέναμε από την αρχική υπόθεση ότι το ρεύμα επιστρέφει μέσω της πλάκας.

4.3.3 Πολικές Συντεταγμένες - Στοιχειώδης περιστρεφόμενη μηχανή

Στο παράδειγμα αυτό θα μελετήσουμε μια στοιχειώδη διάταξη ηλεκτρικής μηχανής με λείο δρομέα και στάτη. Η εξωτερική επιφάνεια του δρομέα έχει ακτίνα $r=R_1$ ενώ η εσωτερική επιφάνεια του στάτη έχει ακτίνα $r=R_2$. Στις επιφάνειες αυτές υπάρχουν ημιτονοειδείς επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος K_R και K_S αντίστοιχα, με κατεύθυνση προς τον άξονα z . Η διάταξη φαίνεται στο σχήμα 4.4. Μπορούμε να θεωρήσουμε σταθερά τα μεγέθη κατά τον z άξονα και κατά συνέπεια να λύσουμε το πρόβλημα στις δύο διαστάσεις.



Σχήμα 4.4 Στοιχειώδης περιστρεφόμενη μηχανή

Αν ο στάτης έχει p πόλους και ο δρομέας n , τότε οι εκφράσεις για την επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος γίνονται

$$\bar{K}_s = \bar{z} K_s \cos(p\varphi) \quad (4.113)$$

$$\bar{K}_R = \bar{z} K_R \cos(n(\varphi - a)) \quad (4.114)$$

Η μεταβλητή a αντιστοιχεί στη γωνιακή μετατόπιση μεταξύ δρομέα και στάτη, ενώ φ είναι η μηχανική μετατόπιση του δρομέα. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα προσδιορισμού του μαγνητικού δυναμικού είναι σε αυτήν την περίπτωση

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} = -\mu_0 (K_s + K_R) \quad (4.115)$$

καθώς το μαγνητικό δυναμικό έχει μόνο φ συνιστώσα και εξαρτάται από τις μεταβλητές r και φ .

Η γενική λύση της εξίσωσης 4.115 είναι όπως έχουμε δει

$$A(r, \varphi) = \sum_m (B_m \sin(m\varphi) + A_m \cos(m\varphi)) (C_m r^m + D_m r^{-m}) \quad (4.116)$$

Θεωρούμε τις συνοριακές συνθήκες

$$H_t = 0 \quad , \quad r = R_1 \quad (4.117)$$

$$H_t = -J \quad , \quad r = R_2 \quad (4.118)$$

όπου J είναι επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος. Υπολογίζουμε τη μαγνητική ένταση μέσω της γενικής λύσης

$$H_t = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{1}{\mu_0} \sum_m (B_m \sin(m\varphi) + A_m \cos(m\varphi)) m (C_m r^{m-1} + D_m r^{-m-1}) \quad (4.119)$$

και εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες σε αυτήν την έκφραση

$$H_t |_{r=R_1} = -\frac{1}{\mu_0} \sum_m (B_m \sin(m\varphi) + A_m \cos(m\varphi)) m (C_m R_1^{m-1} + D_m R_1^{-m-1}) = 0 \quad (4.120)$$

$$H_t |_{r=R_2} = \frac{1}{\mu_0} \sum_m (B_m \sin(m\varphi) + A_m \cos(m\varphi)) m (C_m R_2^{m-1} + D_m R_2^{-m-1}) = J \quad (4.121)$$

Για $m \neq p$ γνωρίζουμε ότι θα ισχύει

$$(C_m R_1^{m-1} + D_m R_1^{-m-1}) = 0 \Rightarrow C_m = D_m = 0 \quad (4.122)$$

ενώ για $m=p$ παίρνουμε από τη σχέση 4.121

$$H_t |_{r=R_2} = \frac{1}{\mu_0} (B_p \sin(p\varphi) + A_p \cos(p\varphi)) p (C_p R_2^{p-1} + D_p R_2^{-p-1}) = J \quad (4.123)$$

Αν θέσουμε $x=R_1/R_2$ η λύση το συστήματος των εξισώσεων 4.122 και 4.123 μας δίνει

$$B_p = 1, A_p = 0, C_p = \frac{\mu_0 J_{\max}}{p} \cdot \frac{1}{1-x^{2p}} \cdot \frac{1}{R_2^{p-1}}, D_p = \frac{\mu_0 J_{\max}}{p} \cdot \frac{1}{1-x^{2p}} \cdot x^{2p} \cdot R_2^{p+1} \quad (4.124)$$

όπου J_{\max} είναι η μέγιστη τιμή της επιφανειακής πυκνότητας ρεύματος. Εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας, καταλήγουμε στην τελική λύση για το μαγνητικό δυναμικό

$$A(r, \varphi) = \frac{\mu_0 K_S}{\rho} \frac{1}{1-x^{2\rho}} \left(\frac{r^\rho}{R_2^{\rho-1}} + \frac{x^{2\rho} \cdot R_2^{\rho+1}}{r^\rho} \right) \cos(\rho\varphi) + \frac{\mu_0 K_R}{n} \frac{1}{1-x^{2n}} \left(x^{2n} \frac{r^n}{R_2^{n-1}} + \frac{R_2^{n+1}}{r^n} \right) \cos(n(\varphi-a)) \quad (4.125)$$

Από τη σχέση 4.20 μπορούμε να υπολογίσουμε τη μαγνητική επαγωγή από το μαγνητικό δυναμικό

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \varphi} = -\frac{\mu_0 K_S}{1-x^{2\rho}} \left(\frac{r^{\rho-1}}{R_2^{\rho-1}} + \frac{x^{2\rho} R_2^{\rho+1}}{r^{\rho+1}} \right) \sin(\rho\varphi) - \frac{\mu_0 K_R}{1-x^{2n}} \left(x^{2n} \frac{r^{n-1}}{R_2^{n-1}} + \frac{R_2^{n+1}}{r^{n+1}} \right) \sin(n(\varphi-a)) \quad (4.126)$$

$$B_\varphi = -\frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{\mu_0 K_S}{1-x^{2\rho}} \left(\frac{r^{\rho-1}}{R_2^{\rho-1}} - \frac{x^{2\rho} R_2^{\rho+1}}{r^{\rho+1}} \right) \cos(\rho\varphi) - \frac{\mu_0 K_R}{1-x^{2n}} \left(x^{2n} \frac{r^{n-1}}{R_2^{n-1}} - \frac{R_2^{n+1}}{r^{n+1}} \right) \cos(n(\varphi-a)) \quad (4.127)$$

Κεφάλαιο 5 Μοντελοποίηση μηχανών μονίμων μαγνητών συγκεντρωμένου τυλίγματος

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τρόπους για να μοντελοποιηθεί η γεωμετρία μιας μηχανής μονίμων μαγνητών με συγκεντρωμένο τύλιγμα με τρόπο που θα μας επιτρέψει να εξάγουμε αναλυτικές εκφράσεις για τις απώλειες δινορρευμάτων στους μαγνήτες της. Στόχος μας είναι η μοντελοποίηση να έχει τη δυνατότητα διερεύνησης της επίδρασης των γεωμετρικών και ηλεκτρικών χαρακτηριστικών της μηχανής και να μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα πάνω στη μεταβολή αυτών των χαρακτηριστικών για μια συγκεκριμένη μηχανή. Τέλος θα εξετάσουμε τη χρησιμότητα των μοντέλων για την προκαταρκτική σχεδίαση μηχανών με μόνιμους μαγνήτες. Τα μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν επίσης για τον υπολογισμό άλλων μεγεθών όπως η επαγωγή του ισοδύναμου κυκλώματος [15] αλλά αυτή η δυνατότητα δεν θα μας απασχολήσει στην εργασία αυτή.

Για τους σκοπούς αυτούς αναπτύχθηκαν δύο μοντέλα, ένα σε καρτεσιανές και ένα σε πολικές συντεταγμένες, τα οποία αναλύονται παρακάτω.

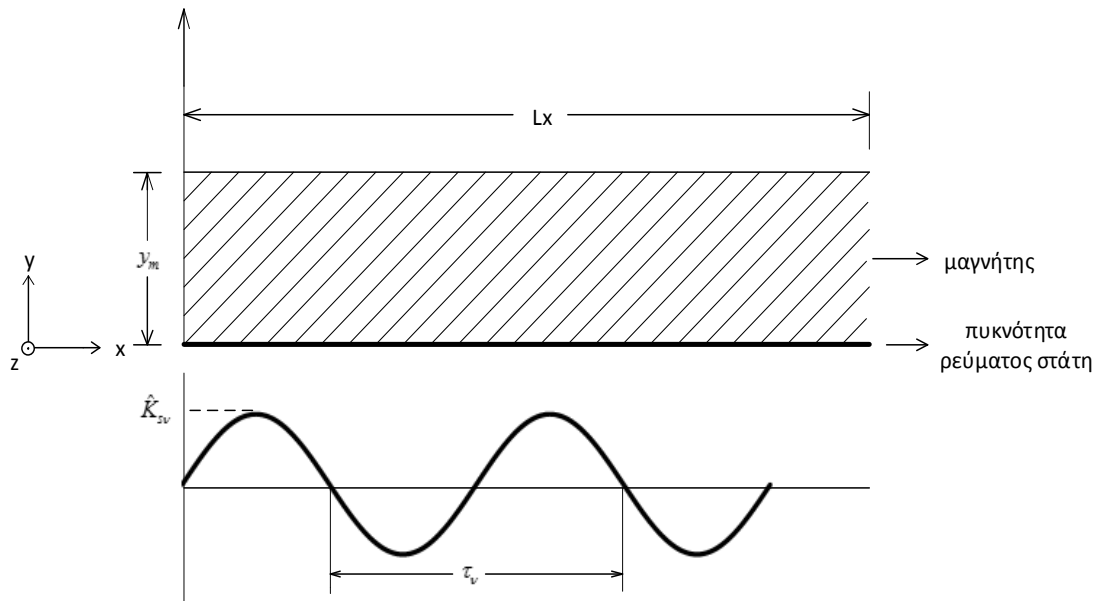
5.1 Μοντέλο σε καρτεσιανές συντεταγμένες

5.1.1 Ορισμός γεωμετρίας μοντέλου

Στο σχήμα 5.1 βλέπουμε μια αναπαράσταση της γεωμετρίας του μοντέλου [16]. Το μοντέλο χρησιμοποιεί μία στρώση για το υλικό στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε τις απώλειες δινορρευμάτων και σε αυτήν την περίπτωση συγκεκριμένα στους μαγνήτες της μηχανής. Στην επιφάνεια $y=0$ θεωρούμε ότι εφαρμόζεται πυκνότητα ρεύματος K_{sv} η οποία αναπαριστά την ηλεκτρική φόρτιση στο διάκενο της μηχανής. Η μηχανή έχει Q αυλάκια στο στάτη, p_r ζεύγη πόλων στο δρομέα και μήκος L_x το οποίο αντιστοιχεί στην περίμετρο μιας ισοδύναμης περιστρεφόμενης μηχανής.

Πρέπει να παρατηρήσουμε δύο πράγματα όσον αφορά την πυκνότητα ρεύματος. Πρώτον πρόκειται για γραμμική πυκνότητα ρεύματος, εφόσον υποθέτουμε ομοιομορφία των αποτελεσμάτων κατά τον z άξονα αγνοώντας τα φαινόμενα άκρων. Αυτό σημαίνει ότι το αποτέλεσμα των απωλειών που θα υπολογιστεί θα είναι ανά μονάδα μήκους κατά τον άξονα αυτόν. Δεύτερον, η πυκνότητα ρεύματος χρειάζεται να προσαρμοστεί έτσι ώστε να ανταποκρίνεται στην ηλεκτρική φόρτιση της μηχανής. Γνωρίζουμε ότι η ηλεκτρική φόρτιση αναπαριστάται ως ορθογωνική κυματομορφή και όχι ημιτονοειδής. Ένα παράδειγμα τέτοιας κυματομορφής για μηχανή 36 αυλάκων μπορούμε να δούμε στο σχήμα 3.11. Το αποτέλεσμα είναι η εισαγωγή αρμονικών χώρου στην ηλεκτρική φόρτιση και κατ' επέκταση στη μαγνητεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο διάκενο, όπως

είδαμε στο κεφάλαιο 3. Επομένως η πυκνότητα ρεύματος ορίζεται ως συνημιτονική σειρά Fourier που συγκλίνει στην ορθογωνική κυματομορφή που έχει η ηλεκτρική φόρτιση στο διάκενο. Με αυτήν τη θεώρηση μπορούμε να υπολογίζουμε τις απώλειες για κάθε αρμονική τάξη ξεχωριστά, ενώ παράλληλα καθιστά δυνατή την εφαρμογή των μεθόδων που αναλύσαμε στο κεφάλαιο 4 και οι οποίες προϋπέθεταν ότι τα πεδιακά μεγέθη βρίσκονται στη μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση.



Σχήμα 5.1 Αναπαράσταση γεωμετρίας μοντέλου σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι είναι απαραίτητο να υπερθέσουμε τις επιμέρους απώλειες για κάθε τάξη αρμονικής προκειμένου να υπολογίσουμε το τελικό αποτέλεσμα. Για να είναι εφικτό κάτι τέτοιο χρειάζεται τα υλικά στα οποία εφαρμόζονται οι πεδιακές εξισώσεις να έχουν γραμμικές μαγνητικές και ηλεκτρικές ιδιότητες. Ένας βολικός τρόπος να επιτευχθεί είναι υποθέτοντας ότι η μαγνητική και ηλεκτρική διαπερατότητα των υλικών είναι σταθερές. Την υπόθεση αυτή θα εφαρμόσουμε και στα δύο μοντέλα που θα παρουσιαστούν σε αυτήν την εργασία.

Μια άλλη συνέπεια των παραπάνω υποθέσεων είναι η δυνατότητα ανάλυσης ομοιόμορφου διακένου. Εφόσον η πυκνότητα ρεύματος έχει οριστεί με τρόπο που περιλαμβάνει τις αρμονικές χώρου, ο στάτης μπορεί να θεωρηθεί σαν λείο σύνορο, χωρίς αυλάκια, αφού τα τελευταία είναι που εισάγουν τις αρμονικές. Η παρατήρηση αυτή μας επιτρέπει να λαμβάνουμε υπόψιν την επίδραση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του στάτη, ενώ ταυτόχρονα προσαρμόζεται ως σύνορο σε μορφή η οποία είναι διαχειρίσιμη από την άποψη των συνοριακών συνθηκών που θα χρειαστούν για να συμπληρώσουν το πρόβλημα μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν το μοντέλο.

Στα πλαίσια αυτά μπορούμε να εκφράσουμε την πυκνότητα ρεύματος K_{sv} ως

$$\bar{K}_{sv}(x) = \sum_v \hat{K}_{sv} e^{j\pi x/\tau_v} \quad (5.1)$$

όπου \hat{K}_{sv} είναι το πλάτος της v -οστής αρμονικής και τ_v το μήκος κύματος της v -οστής αρμονικής το οποίο δίνεται από τον τύπο 5.2 ως

$$\tau_v = \frac{L_x}{2v \cdot \text{gcd}(Q, p_r)} \quad (5.2)$$

Η εξαγωγή του τύπου 5.2 έχει τις ρίζες της στην ανάλυση του κεφαλαίου 3 για τις αρμονικές της μαγνητεγερτικής δύναμης. Καθώς η μαγνητεγερτική δύναμη και η ηλεκτρική φόρτιση μιας μηχανής σχετίζονται άμεσα μεταξύ τους και με το τυλίγμα της, μπορεί να εφαρμοστεί η αρμονική ανάλυση στο κύμα της ηλεκτρικής φόρτισης με τον ίδιο τρόπο όπως έγινε για τη μαγνητεγερτική δύναμη. Ο αριθμός μηκών κύματος μιας αρμονικής εξαρτάται επομένως από τις επαναλήψεις του βασικού τυλίγματος. Στον τύπο 5.2 το μήκος κύματος δίνεται σε μονάδες μήκους και εξαρτάται από το μήκος L_x της μηχανής.

5.1.2 Αρμονικές ΜΕΔ

Η ανάλυση Fourier της μαγνητεγερτικής δύναμης (εξίσωση 3.12) περιέχει συνημιτονικούς όρους οι οποίοι εκφράζουν κύματα που διαδίδονται σε δύο κατευθύνσεις. Έτσι οι αρμονικές μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες, αυτές που περιστρέφονται κατά την ευθεία διεύθυνση (forward rotating) και αυτές που περιστρέφονται αντίστροφα (backward rotating). Συμβατικά θεωρούμε ως forward rotating την ομάδα αρμονικών που περιέχει την κύρια τάξη.

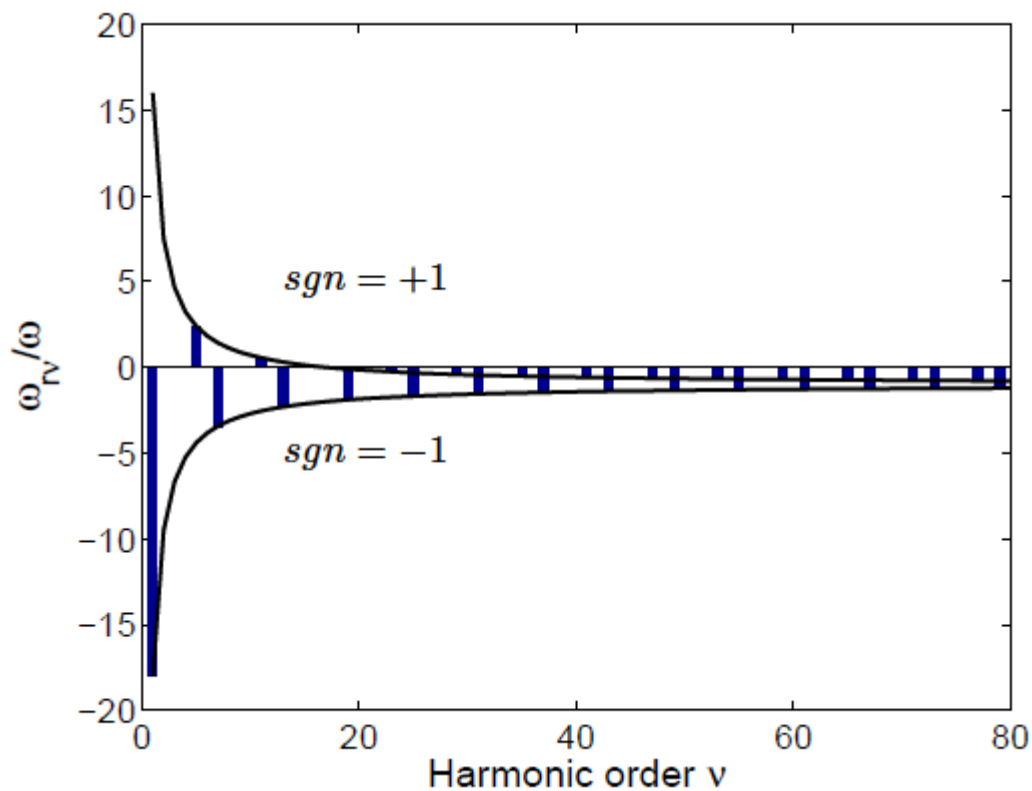
Στις μηχανές κατανεμημένου τυλίγματος η συνήθης επιλογή συνδυασμού αυλάκων και πόλων έχει σαν αποτέλεσμα η θεμελιώδης αρμονική της μαγνητεγερτικής δύναμης να είναι και η κύρια, έτσι σχεδόν πάντα θεωρείται forward rotating η ομάδα που περιέχει τις τάξεις $v=6k+1$, $k=0,1,2,\dots$ ενώ οι τάξεις $v=6k-1$, $k=1,2,3,\dots$ θεωρούνται backward rotating. Στις μηχανές συγκεντρωμένου τυλίγματος περιλαμβάνονται κατά κανόνα και οι άρτιες τάξεις επομένως οι δύο ομάδες αρμονικών που προκύπτουν είναι $v=3k+1$, $k=0,1,2,\dots$ και $v=3k-1$, $k=1,2,3,\dots$. Ο τύπος 3.19 και η περιοδικότητα του βασικού τυλίγματος καθορίζουν την κύρια τάξη αρμονικής και επομένως τις forward και backward rotating αρμονικές.

Στα προβλήματα του κεφαλαίου 4 η ανάλυση και οι υπολογισμοί έγιναν σε περιπτώσεις στις οποίες δεν υπήρχε σχετική κίνηση του εξεταζόμενου μέσου με την πηγή των δινορρευμάτων. Σε μια μηχανή όμως ο δρομέας και οι μαγνήτες κινούνται, ενώ ο στάτης,

στον οποίο βρίσκεται το τύλιγμα, μένει σταθερός. Συνεπώς, η εφαρμογή των εξισώσεων σε μοντέλα μηχανών προϋποθέτει τη χρησιμοποίηση ενός πλαισίου αναφοράς ακίνητου ως προς το δρομέα της μηχανής. Αυτό σημαίνει ότι η συχνότητα που χρησιμοποιείται στις εξισώσεις και αναφέρεται σε χωρική μετατόπιση των μεγεθών χρειάζεται να αναπροσαρμοστεί κατάλληλα. Η ταχύτητα σε πλαίσιο αναφοράς του δρομέα υπολογίζεται από τη σχέση

$$\omega_{rv} = 2\pi f \left(\frac{\text{sgn}}{v} - \frac{1}{p_r} \right) \quad (5.3)$$

Η συνάρτηση πρόσημου sign στον παραπάνω τύπο παίρνει τις τιμές 1 αν η τάξη αρμονικής αντιστοιχεί σε forward rotating και -1 αν αντιστοιχεί σε backward rotating.

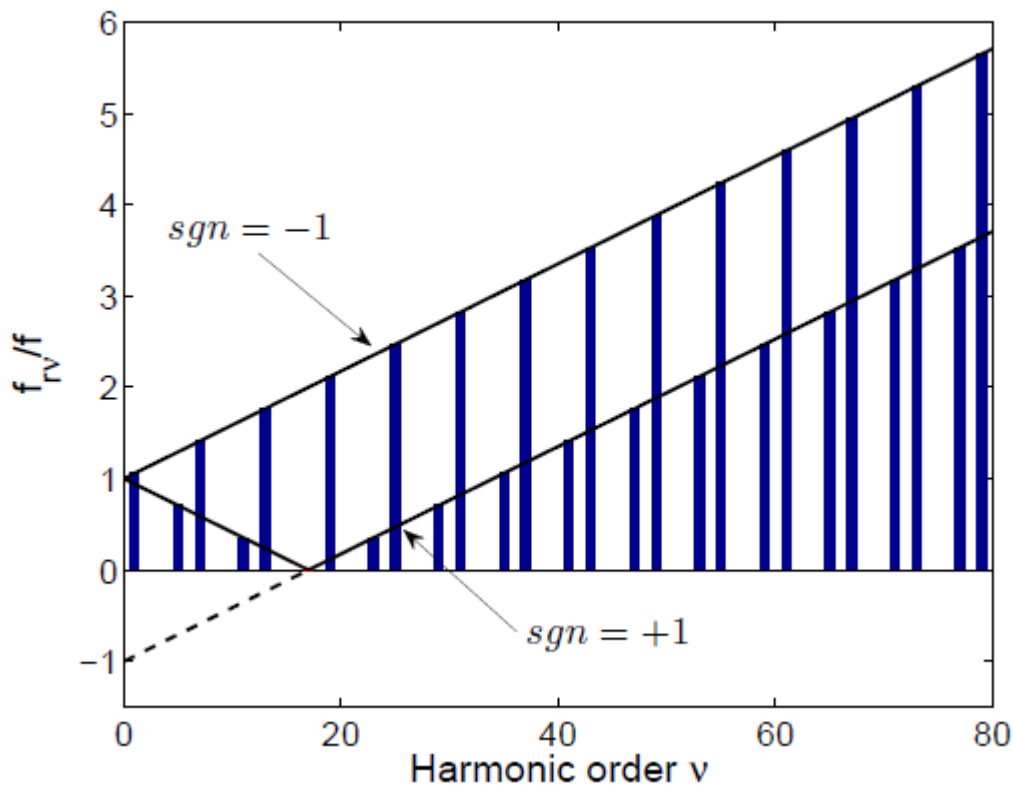


Σχήμα 5.2 Ταχύτητα αρμονικών στο στρεφόμενο πλαίσιο του δρομέα

Στο σχήμα 5.2 βλέπουμε μια αναπαράσταση της ταχύτητας αρμονικών μαγνητεγερτικής δύναμης σε σχέση με τη σύγχρονη ταχύτητα [16]. Παρατηρούμε ότι ασχέτως προσήμου η ταχύτητα προσεγγίζει για πολύ μεγάλες τιμές του v την οριακή τιμή $-2\pi f/p_r$, η οποία είναι η αντιστρόφως περιστρεφόμενη σύγχρονη ταχύτητα. Οι αρμονικές της μαγνητεγερτικής δύναμης επάγουν ηλεκτρεγερτική δύναμη με συχνότητα αρμονικών που δίνεται από τον τύπο 5.4

$$f_{rv} = v \frac{\omega_{rv}}{2\pi} = f \left| \text{sgn} - \frac{v}{\rho_r} \right| \quad (5.4)$$

Αυτή είναι η συχνότητα των επαγόμενων δινορρευμάτων όπως θα χρησιμοποιηθεί στους εξαγόμενους τύπους. Το σχήμα 5.3 μας δίνει μια εικόνα για τη διαμόρφωση των συχνοτήτων στο πλαίσιο αναφοράς του δρομέα.



Σχήμα 5.3 Συχνότητα αρμονικών δινορρευμάτων στο πλαίσιο αναφοράς του δρομέα

5.1.3 Αναλυτικός υπολογισμός απωλειών δινορρευμάτων

Η ανάλυση του μοντέλου είναι διδιάστατη, επομένως το μαγνητικό δυναμικό είναι συνάρτηση των χωρικών μεταβλητών x, y . Λόγω της κατεύθυνσης της επιφανειακής πυκνότητας ρεύματος η μοναδική μη μηδενική συνιστώσα του μαγνητικού δυναμικού έχει κατεύθυνση προς τον άξονα z . Η πεδιακή εξίσωση για την περιοχή των μαγνητών που προκύπτει από την εξίσωση διάχυσης για τη μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση όπως ορίστηκε στο κεφάλαιο 4 και με τις υποθέσεις που διατυπώθηκαν για το μοντέλο είναι

$$\frac{\partial^2 \bar{A}_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{A}_z(x, y)}{\partial y^2} - j2\pi f_{rv} \mu \sigma \bar{A}_z(x, y) = 0 \quad (5.5)$$

Οι μεταβλητές μ και σ είναι η μαγνητική και ηλεκτρική διαπερατότητα του υλικού αντίστοιχα. Οι συνοριακές συνθήκες που συμπληρώνουν τη μερική διαφορική εξίσωση 5.5 είναι για την επιφάνεια $y=0$

$$H_x(x, 0) = K_{sv}(x) \quad (5.6)$$

Απαιτούμε δηλαδή η εφαπτομενική συνιστώσα της μαγνητικής έντασης στο σύνορο $y=0$ να είναι ίση με την επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος. Η δεύτερη συνθήκη που εισάγαμε στη σχέση 4.53 μπορεί να αντικατασταθεί με την ισοδύναμη για το μαγνητικό δυναμικό (σχέση 5.7).

$$A_y(x, y_m) = 0 \quad (5.7)$$

Έχουμε πλέον ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα συνοριακών τιμών του οποίου η λύση δίνεται από την εξίσωση

$$A_z(x, y) = -\frac{\mu K_{sv}}{d} e^{j\frac{\pi}{\tau_v}x} e^{-dy} \quad (5.8)$$

Το μέγεθος d του παραπάνω τύπου είναι ίσο με

$$d = \sqrt{\left(\frac{\pi}{\tau_v}\right)^2 + j2\pi f_{rv}\mu\sigma} \quad (5.9)$$

Από τη σχέση 4.110 η οποία συνδέει το μαγνητικό δυναμικό με την πυκνότητα των διρρρευμάτων στο μέσο μπορούμε να έχουμε μια έκφραση με την ολοκλήρωση της οποίας υπολογίζονται οι απώλειες στο μέσο

$$q = 2\sigma\pi^2 f_{rv}^2 \int_0^{y_m} AA^* dy \quad (5.10)$$

Η ολοκλήρωση γίνεται κατά τον άξονα y . Ο παράγοντας π/τ_v στην εξίσωση 5.8 μετατρέπει την απόσταση x σε ισοδύναμη γωνία, όπως χρησιμοποιήθηκε και στον τύπο 5.1 για την επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος. Στην έκφραση 5.10 ο πολλαπλασιασμός με το συζυγή του μαγνητικού δυναμικού θα απαλείψει τον όρο που εξαρτάται από τη μεταβλητή x , επομένως δεν υπάρχει εξάρτηση από αυτήν τη διάσταση. Κατά συνέπεια η ολοκλήρωση στον τύπο 5.10 γίνεται μόνο στη διάσταση του άξονα y . Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με όσα παρατηρήσαμε για την ομοιομορφία της πυκνότητας ρεύματος κατά τον άξονα z καθιστούν σαφές ότι το αποτέλεσμα του τύπου 5.10 είναι η πυκνότητα απωλειών διρρρευμάτων στο μέσο, η οποία μετράται σε Watt ανά τετραγωνικό μέτρο.

Η επίλυση του ολοκληρώματος δίνει την αναλυτική έκφραση για την πυκνότητα απωλειών δινορρευμάτων

$$q = \frac{\xi^4}{\sqrt[4]{(\pi^4 + \xi^4)^3}} \frac{1}{\cos(\phi/2)} \frac{\hat{K}_{sv}^2}{4\sigma\tau_v} k_{ym} \quad (5.11)$$

Το μέγεθος ξ καλείται ειδικό μήκος κύματος και δίνεται από την έκφραση 5.12

$$\xi = \sqrt{2} \frac{\tau_v}{\delta} \quad (5.12)$$

Η μεταβλητή δ αντιστοιχεί στο πάχος διείδυσης και δίνεται, όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 4, από τον τύπο

$$\delta = 1 / \sqrt{\pi f_{rv} \mu \sigma} \quad (5.13)$$

Η γωνία φ ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\tan \varphi = (\xi / \pi)^2 \quad (5.14)$$

Τέλος ο όρος k_{ym} αναπαριστά έναν παράγοντα μείωσης και είναι ίσος με

$$k_{ym} = 1 - e^{-2\sqrt[4]{\pi^4 + \xi^4} \cos(\varphi/2) y_m / \tau_v} \quad (5.15)$$

Προκύπτει έτσι μια αρκετά απλή αναλυτική έκφραση για τον υπολογισμό της πυκνότητας απωλειών δινορρευμάτων.

5.1.4 Εφαρμογή μοντέλου

Το μοντέλο που αναπτύχθηκε εξετάζεται για μια συγκεκριμένη τοπολογία μηχανής. Ο υπολογισμός των σχέσεων έγινε σε προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB.

5.1.4.1 Χαρακτηριστικά μηχανής

Τα γεωμετρικά και ηλεκτρικά χαρακτηριστικά της μηχανής στην οποία δοκιμάστηκε το μοντέλο φαίνονται στον πίνακα 1.

Πίνακας 1: Δεδομένα για τη μηχανή του πρώτου μοντέλου

Μέγεθος	Συμβολισμός	Τιμή
Αριθμός φάσεων	q	3
Μήκος μηχανής	L_x	0,5π m
Πάχος μαγνήτη	y_m	15 mm
Αριθμός πόλων δρομέα	p_r	34
Αριθμός αυλάκων	Q	36
Πλάτος ανοίγματος αύλακος	β_0	40%
Ηλεκτρική αγωγιμότητα	σ	694.000 S
Μαγνητική διαπερατότητα	μ	$4\pi \cdot 10^{-7}$
Πλάτος πυκνότητας ρεύματος	K_s	10.000 A/m
Ονομαστική ταχύτητα δρομέα	ω_s	840 rpm

Το πλάτος ανοίγματος αύλακος εκφράζεται ως ποσοστό επί του συνολικού μήκους διακένου. Η ηλεκτρική συχνότητα των ρευμάτων στα τυλίγματα του στάτη θεωρείται τέτοια ώστε η εκάστοτε ταχύτητα περιστροφής να είναι σύγχρονη.

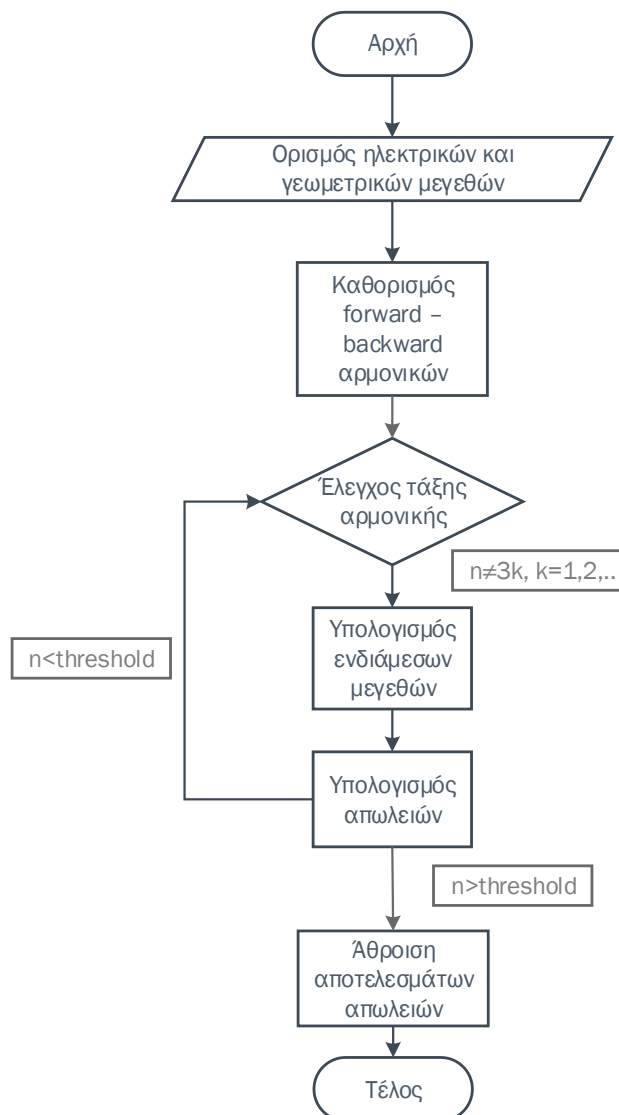
Τα στοιχεία της μηχανής αυτής προέρχονται από την αναφορά [16] και είναι μία από τις περιπτώσεις στις οποίες εξετάστηκε το μοντέλο.

5.1.4.2 Διάγραμμα Ροής

Στο σχήμα 5.4 δίνεται το διάγραμμα ροής για τον αναλυτικό υπολογισμό των απωλειών δινορρευμάτων μέσω των σχέσεων που εξήχθησαν παραπάνω. Σε πρώτο στάδιο ορίζονται τα γεωμετρικά και ηλεκτρικά χαρακτηριστικά της μηχανής όπως δίνονται στον πίνακα 5.4 και καθορίζονται η κύρια τάξη αρμονικής και οι ομάδες των forward και backward rotating αρμονικών χρησιμοποιώντας τη σχέση 3.19. Στη συνέχεια ορίζεται ένας επαναληπτικός βρόχος ο οποίος σε κάθε επανάληψη αυξάνει την τάξη αρμονικής, ελέγχει εάν ανήκει σε μία από τις δύο ομάδες αρμονικών που συνεισφέρουν στις απώλειες δινορρευμάτων και υπολογίζει για τις τάξεις ενδιαφέροντος τα ενδιάμεσα μεγέθη και τις απώλειες για την τάξη αυτή. Όταν η τάξη αρμονικής ξεπεράσει κάποιο όριο που έχουμε θέσει (threshold) τότε σταματούν οι υπολογισμοί και αθροίζονται τα επιμέρους αποτελέσματα για να προκύψει το τελικό.

Μέσω του κώδικα μπορούν να υπολογιστούν εκτός από τις απώλειες και άλλα ενδιάμεσα μεγέθη τα οποία έχουν ενδιαφέρον για τον τρόπο που μεταβάλλονται ανάλογα με την

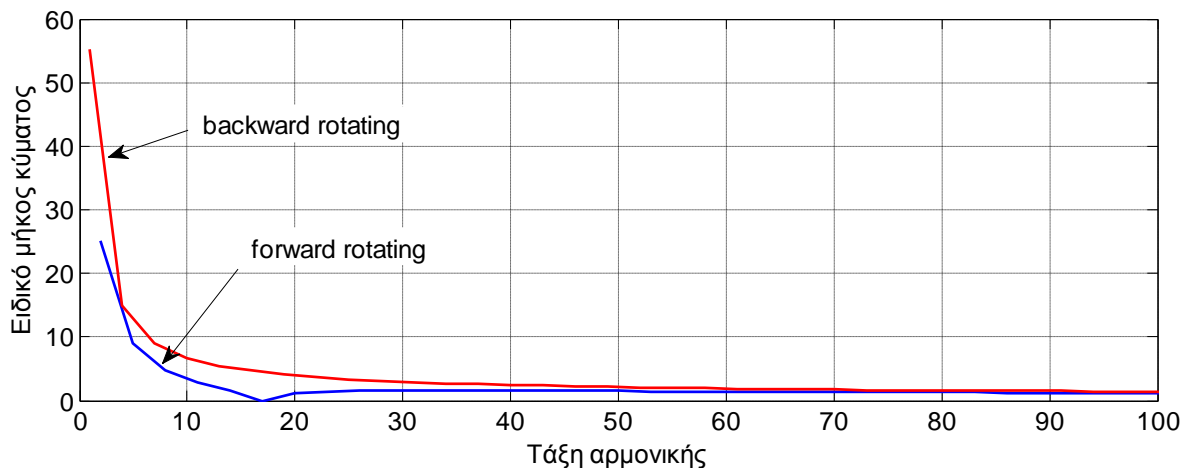
αρμονική τάξη και την επίδραση που έχουν στις απώλειες. Επίσης δίνεται η δυνατότητα να σχεδιαστούν διαγράμματα μεταβολής αυτών των μεγεθών αλλάζοντας μια ποικιλία από παραμέτρους της μηχανής, είτε ηλεκτρικές είτε γεωμετρικές.



Σχήμα 5.4 Διάγραμμα ροής για τον αναλυτικό υπολογισμό απωλειών

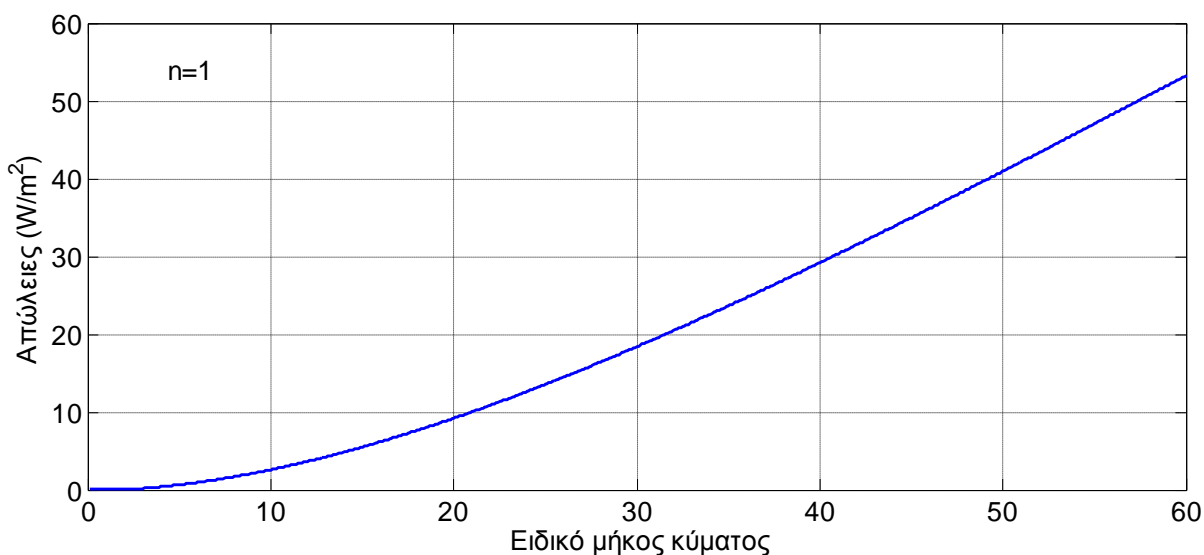
5.1.4.3 Αποτελέσματα

Το ειδικό μήκος κύματος είναι ένα μέγεθος με μεγάλη και ίσως την κυριότερη επίδραση στις απώλειες δινορρευμάτων όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από τη σχέση 5.11. Το σχήμα 5.5 παρουσιάζει τη μεταβολή του ειδικού μήκους κύματος συναρτήσει της τάξης αρμονικής. Βλέπουμε τις περιβάλλουσες ξεχωριστά για κάθε μια από τις δύο ομάδες αρμονικών ανάλογα με τη φορά περιστροφής τους.

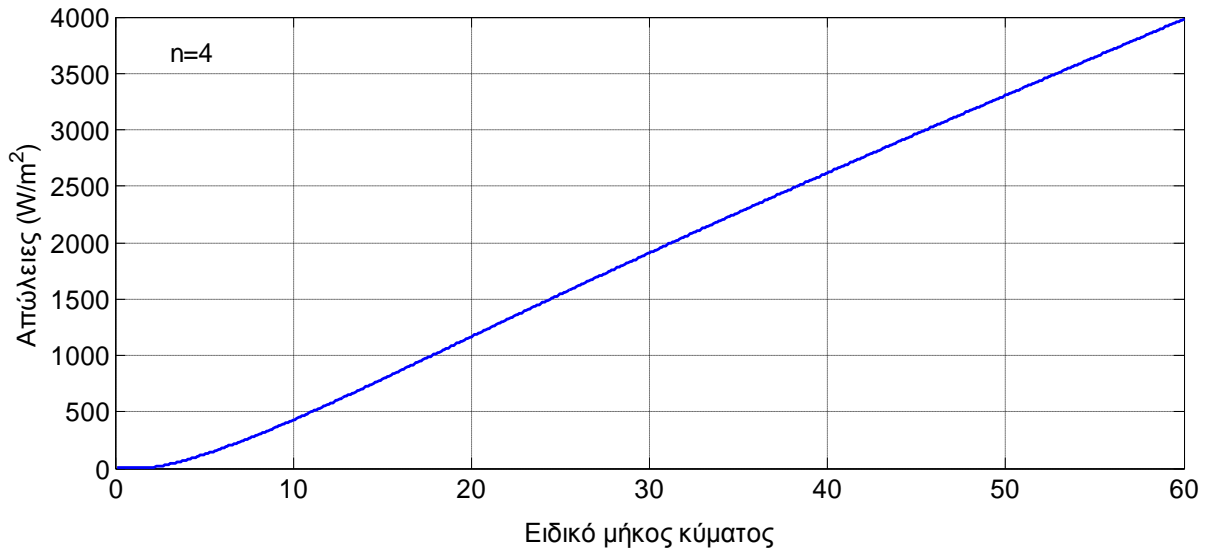


Σχήμα 5.5 Ειδικό μήκος κύματος σε συνάρτηση με την τάξη αρμονικής

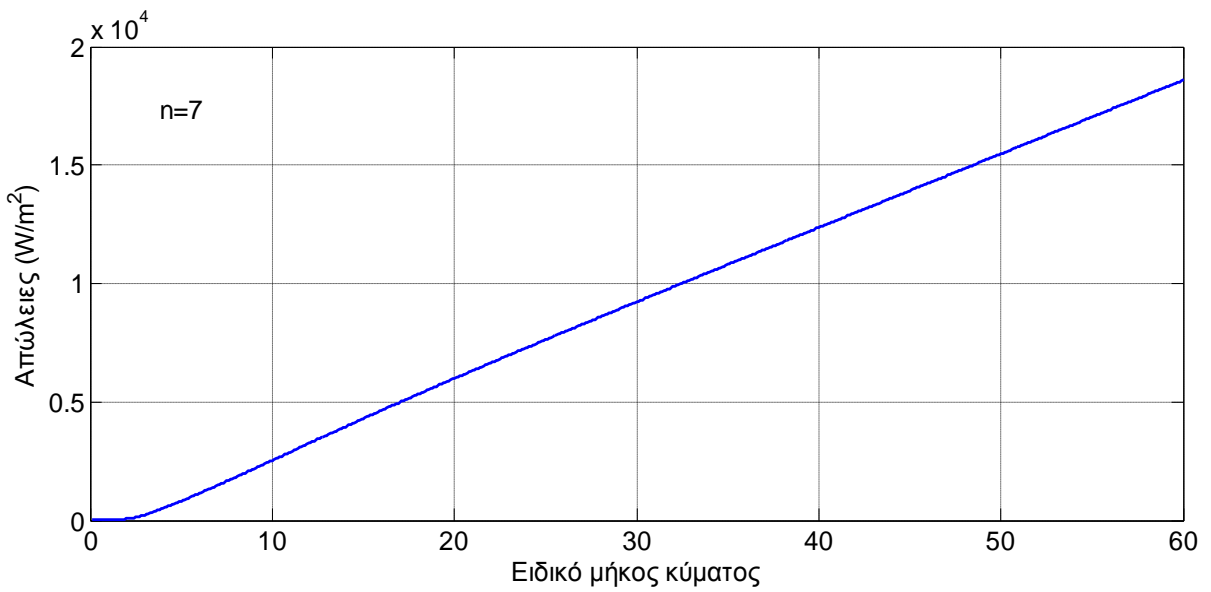
Παρατηρούμε ότι το ειδικό μήκος κύματος μηδενίζεται για την κύρια αρμονική τάξη τάξη δηλαδή για $\nu = \rho_r$ και στην περίπτωση μας $\nu = 17$. Αυτό συνεπάγεται ότι η τάξη αυτή δεν προκαλεί απώλειες και δεν επάγει δινορρεύματα, συμπέρασμα το οποίο περιμέναμε καθώς τα πεδία στάτη και δρομέα είναι ακίνητα μεταξύ τους για την ταχύτητα αυτή. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το ειδικό μήκος κύματος λαμβάνει υψηλές τιμές για τις τάξεις οι οποίες είναι μικρότερες της κύριας. Για μεγαλύτερες τάξεις και οι δύο ομάδες τείνουν προς το μηδέν.



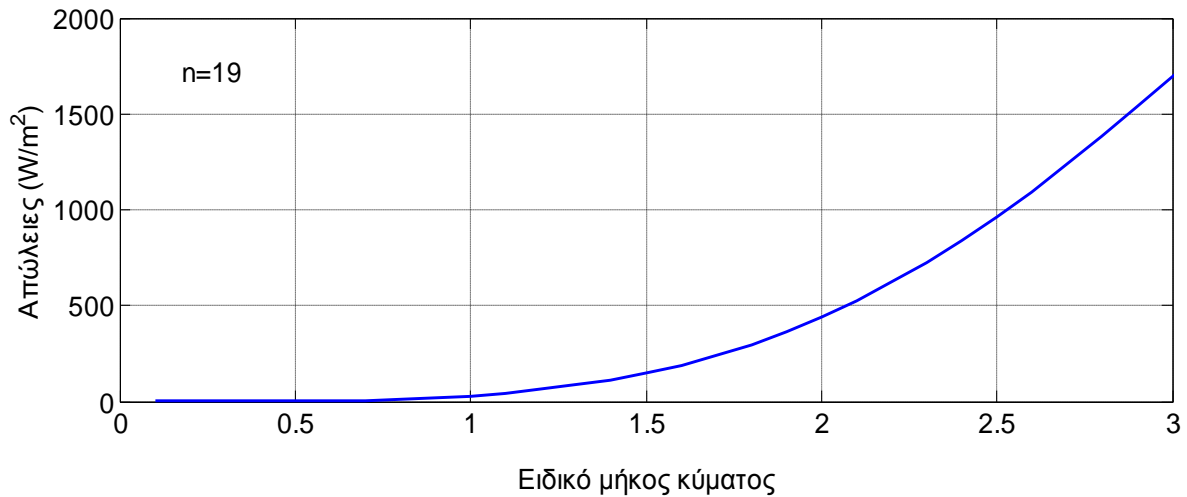
Σχήμα 5.6 Απώλειες συναρτήσει του ειδικού μήκους κύματος για την 1^η αρμονική τάξη



Σχήμα 5.7 Απώλειες συναρτήσεϊ του ειδικού μήκους κύματος για την 4^η αρμονική τάξη

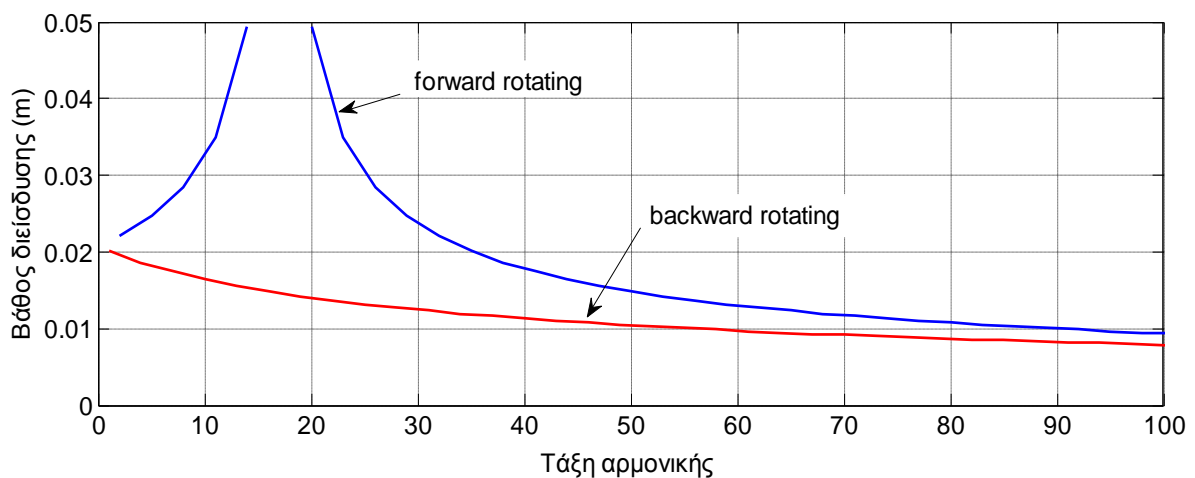


Σχήμα 5.8 Απώλειες συναρτήσεϊ του ειδικού μήκους κύματος για την 7^η αρμονική τάξη



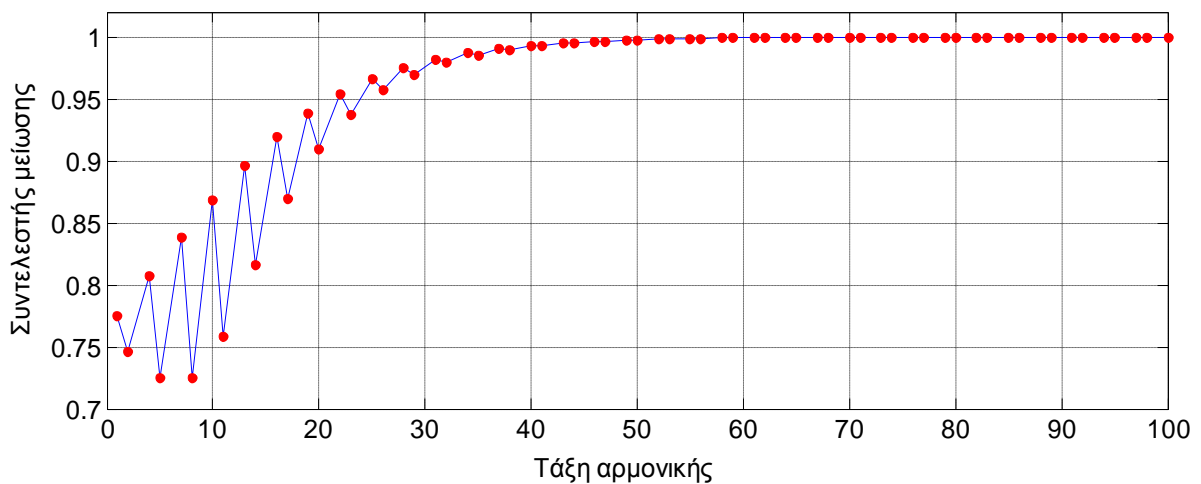
Σχήμα 5.9 Απώλειες συναρτήσει του ειδικού μήκους κύματος για την 19^η αρμονική τάξη

Στα σχήματα 5.6 έως 5.9 παρατηρούμε την επίδραση του ειδικού μήκους κύματος στις απώλειες δινορρευμάτων για τη μηχανή που εξετάζουμε. Η συμπεριφορά της συνάρτησης είναι γραμμική όταν το ειδικό μήκος κύματος παίρνει μεγάλες τιμές, ενώ για μικρές τιμές η συμπεριφορά είναι εκθετική. Το σχήμα 5.5 δείχνει ότι οι μεγαλύτερες τάξεις αρμονικών χαρακτηρίζονται από μικρότερο ειδικό μήκος κύματος, επομένως η περιοχή που μας ενδιαφέρει γι'αυτές παρουσιάζει εκθετική μεταβολή. Ακόμη βλέπουμε ότι οι απώλειες για το ίδιο μήκος κύματος αυξάνονται σημαντικά για μεγαλύτερες αρμονικές τάξεις. Θα δούμε κατά πόσο αυτό μπορεί να αυξήσει πράγματι τις απώλειες δινορρευμάτων για τις μεγαλύτερες τάξεις αρμονικών.



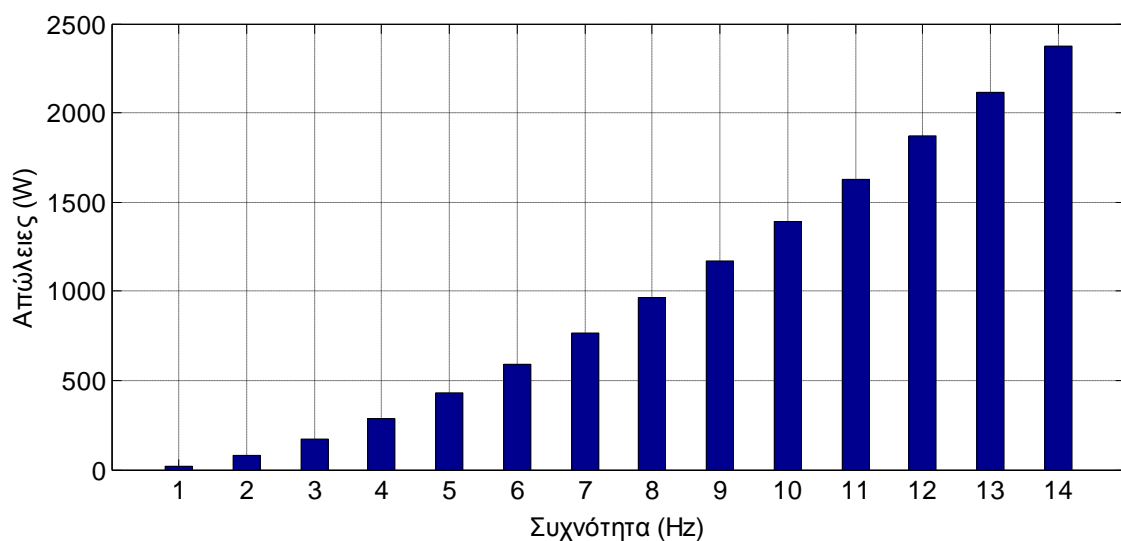
Σχήμα 5.10 Βάθος διείσδυσης σε συνάρτηση με την τάξη αρμονικής

Το σχήμα 5.10 παρουσιάζει το βάθος διείσδυσης συναρτήσει της τάξης αρμονικής. Η συχνότητα για $v=r_r$ αποτελεί τη συχνότητα συντονισμού όταν η ταχύτητα περιστροφής του δρομέα είναι η σύγχρονη και έτσι το βάθος διείσδυσης γίνεται άπειρο για τη συχνότητα αυτή. Όπως είδαμε όμως η κύρια τάξη δεν προκαλεί απώλειες δινορρευμάτων και επομένως δεν αποτελεί πρόβλημα.



Σχήμα 5.11 Συντελεστής μείωσης σε συνάρτηση με την τάξη αρμονικής

Στο σχήμα 5.11 βλέπουμε πώς μεταβάλλεται ο συντελεστής μείωσης k_{ym} της εξίσωσης 5.11 για διάφορες τάξεις αρμονικών. Ο συντελεστής έχει σημαντική επίδραση μόνο για χαμηλές τάξεις αρμονικών για τις οποίες λαμβάνει τιμές μεταξύ 0,7 και 1. Από την 40^η τάξη και έπειτα είναι σχεδόν ίσος με τη μονάδα και δεν επιδρά στο αποτέλεσμα.



Σχήμα 5.12 Απώλειες σε συνάρτηση με τη συχνότητα περιστροφής

Στο σχήμα 5.12 φαίνεται η εξάρτηση των απωλειών σε σχέση με τη συχνότητα περιστροφής του δρομέα. Οι απώλειες αυξάνονται καθώς η συχνότητα περιστροφής μεγαλώνει. Από φυσικής σκοπιάς γνωρίζουμε ότι η αύξηση της συχνότητας έχει ως συνέπεια την ενίσχυση της έντασης των επαγόμενων πεδίων και επομένως και των δινορρευμάτων καθώς και των απωλειών που προκαλούν. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο εξετάζοντας τις αναλυτικές εξισώσεις και ιδιαίτερα από τον τύπο 5.11 στον οποίο η μεταβολή της ταχύτητας επιδρά στη συχνότητα των επαγόμενων δινορρευμάτων. Πιο συγκεκριμένα το πρώτο κλάσμα της εξίσωσης είναι αυτό που καθορίζει τη μορφή του διαγράμματος 5.12 και η συνάρτηση αυτή έχει πράγματι μια τέτοια απεικόνιση.

5.2 Μοντέλο σε πολικές συντεταγμένες

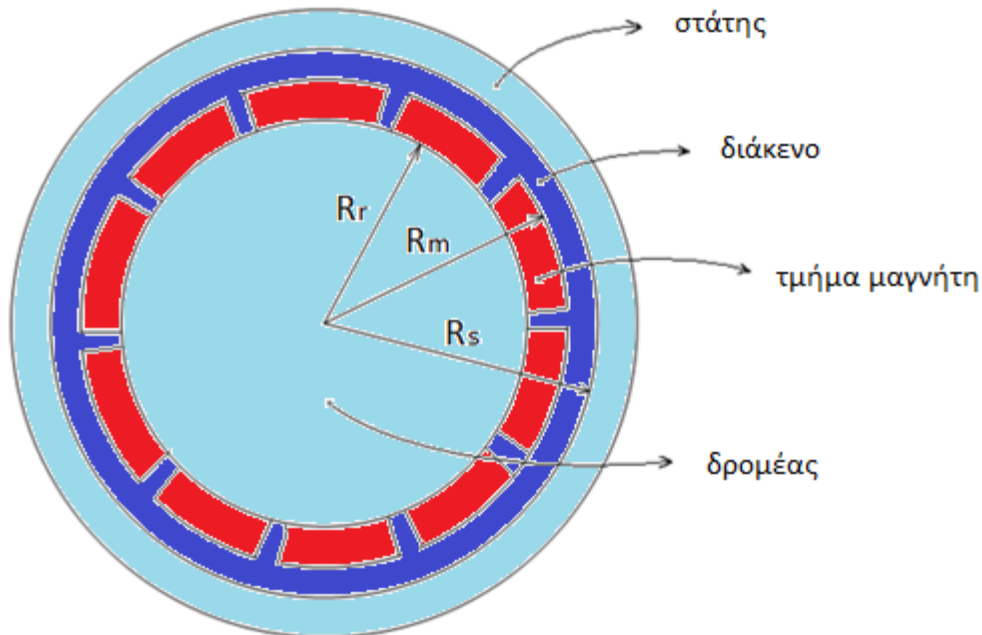
Οι πεδιακές εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση ομοιόμορφου διακένου αναλύονται στην αναφορά [17]. Ισχύουν οι ίδιες υποθέσεις που διατυπώθηκαν και στο πρώτο μοντέλο και οι οποίες συνοπτικά είναι οι εξής:

- Όλα τα υλικά έχουν σταθερή μαγνητική και ηλεκτρική διαπερατότητα, μ και σ αντίστοιχα, οι οποίες εξαρτώνται από το είδος του υλικού.
- Η εσωτερική επιφάνεια του στάτη θεωρείται λεία, χωρίς αυλάκια. Η γεωμετρία των αυλακιών και η συνεπαγόμενη ηλεκτρική φόρτιση αντικαθίστανται με κατάλληλη πυκνότητα ρεύματος.
- Ισχύουν οι ίδιες παρατηρήσεις για τις αρμονικές, την ταχύτητα περιστροφής και τη μεταφορά των μεγεθών σε πλαίσιο αναφοράς σύγχρονο με το δρομέα όπως διατυπώθηκαν και για το πρώτο μοντέλο.

Μια επιπλέον υπόθεση που κάνουμε για το μοντέλο αυτό είναι ότι τα δινορρεύματα είναι resistance limited. Τη μορφή αυτή συναντήσαμε στο παράδειγμα της παραγράφου 4.3.1.

5.2.1 Γεωμετρία μοντέλου

Η γεωμετρία του μοντέλου αυτού παρουσιάζεται στο σχήμα 5.13.



Σχήμα 5.13 Μοντέλο πολικών συντεταγμένων

Την περιοχή με $r < R_r$ καταλαμβάνει ο δρομέας, στην περιοχή $R_r < r < R_m$ βρίσκονται οι μαγνήτες των οποίων τα όρια διακρίνονται στο σχήμα, ενώ στην περιοχή με $R_m < r < R_s$ θεωρούμε το διάκενο της μηχανής. Η τελευταία περιοχή, $r > R_s$, η οποία είναι το σώμα του στάτη δεν μας απασχολεί στους υπολογισμούς, καθώς έχει ήδη ληφθεί υπόψιν η επίδρασή της στη δημιουργία του πεδίου εσωτερικά της μηχανής.

5.2.2 Αναλυτικός υπολογισμός δινορρευμάτων

Η ισοδύναμη πυκνότητα ρεύματος στην εσωτερική επιφάνεια του στάτη δίνεται από τον τύπο 5.16

$$J_s(\theta, t) = \frac{q}{2} \left\{ \sum_{n=qk-1, k=1,2,3,\dots} J_n \cos(np_s\theta - p_r\Omega t) - \sum_{n=qk+1, k=0,1,2,\dots} J_n \cos(np_s\theta + p_r\Omega t) \right\} \quad (5.16)$$

όπου q ο αριθμός των φάσεων, Ω η κυκλική συχνότητα του ρεύματος, p_s η περιοδικότητα του βασικού τυλίγματος, p_r ο αριθμός ζευγών πόλων του δρομέα, θ η γωνιακή μετατόπιση και J_n το πλάτος της n -οστής αρμονικής της πυκνότητας ρεύματος, το οποίο δίνεται από τον τύπο

$$J_n = \frac{2N_s I_m}{\pi R_s} K_{wn} \quad (5.17)$$

όπου N_s ο αριθμός των εν σειρά τυλιγμάτων ανά φάση, I_m το πλάτος του ρεύματος των αγωγών και K_{wn} ο συντελεστής τυλίγματος για τη n -οστή αρμονική τάξη. Ο συντελεστής τυλίγματος για το συγκεντρωμένο τύλιγμα αναλύθηκε στο κεφάλαιο 3, στην περίπτωση του μοντέλου ο συντελεστής που θεωρούμε δίνεται από τον τύπο [18]

$$K_{wn} = \sin\left(\frac{np_s \pi}{Q}\right) \frac{\sin(np_s \beta_0)}{(np_s \beta_0)} \quad (5.18)$$

όπου Q ο αριθμός αυλάκων του στάτη και β_0 το πλάτος του ανοίγματος αύλακος σε rad. Το πρώτο ημίτονο είναι ο συντελεστής βήματος όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, ενώ το κλάσμα του τύπου 5.18 είναι ένας παράγοντας που συμπεριλαμβάνει την επίδραση των δοντιών του στάτη στο συντελεστή τυλίγματος. Στην ιδανική περίπτωση το άνοιγμα αύλακος τείνει στο μηδέν και το κλάσμα τείνει στη μονάδα, οπότε ο συντελεστής τυλίγματος παίρνει τη μορφή που εισάγαμε στη σχέση 3.3.

Ανάγοντας την ισοδύναμη πυκνότητα ρεύματος του στάτη σε πλαίσιο αναφοράς σύγχρονο με το δρομέα η έκφραση 5.16 γίνεται

$$J_s(\theta, t) = \frac{q}{2} \left\{ \sum_{n=qk-1, k=1,2,3,\dots} J_n \cos(np_s \theta + (np_s - p_r)\Omega t) - \sum_{n=qk+1, k=0,1,2,\dots} J_n \cos(np_s \theta + (np_s + p_r)\Omega t) \right\} \quad (5.19)$$

Η έκφραση για το μαγνητικό δυναμικό σε δύο διαστάσεις σε πολικές συντεταγμένες για μηχανές με επιφανειακούς μαγνήτες για την περιοχή του διακένου και των μαγνητών μπορεί να εξαχθεί αναλυτικά [18], [19] και δίνεται από

$$A_z(r, \theta, t) = \frac{\mu_0 q}{2} \left\{ \sum_{\substack{n=qk-1 \\ k=1,2,3,\dots}} \frac{J_n}{np_s} F_m(r) \cos[np_s \theta + (np_s - p_r)\Omega t] - \sum_{\substack{n=qk+1 \\ k=0,1,2,\dots}} \frac{J_n}{np_s} F_m(r) \cos[np_s \theta + (np_s + p_r)\Omega t] \right\} \quad (5.20)$$

Η συνάρτηση F_m εξαρτάται από την απόσταση r και την τάξη αρμονικής n και δίνεται από

$$F_m(r) = r \cdot \frac{1 + \left(\frac{R_r}{r}\right)^{2np_s}}{1 - \left(\frac{R_r}{R_s}\right)^{2np_s}} \left(\frac{r}{R_s}\right)^{np_s-1} \quad (5.21)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω και λαμβάνοντας υπόψιν τις υποθέσεις του μοντέλου η πυκνότητα δινορρευμάτων δίνεται από [20]

$$J_e(r, \theta, r) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z(r, \theta, t)}{\partial t} + C(t) \quad (5.22)$$

Η μεταβλητή ρ αντιστοιχεί στην ηλεκτρική αγωγιμότητα του υλικού. Η συνάρτηση $C(t)$ διασφαλίζει ότι το συνολικό ρεύμα σε ένα κομμάτι μαγνήτη θα είναι ίσο με το μηδέν. Αυτή η απαίτηση χρησιμοποιείται για να ορίσει τη συνάρτηση ως

$$\int_{R_r}^{R_m} \int_{\alpha_i - a/2}^{\alpha_i + a/2} J_e(r, \theta, t) r d\theta dr \quad (5.23)$$

Η μεταβλητή α_i είναι η γωνιακή μετατόπιση του μαγνητικού άξονα του i -οστού μαγνήτη σε σχέση με το δρομέα, a είναι το πλάτος του μαγνήτη σε rad.

Οι απώλειες μπορούν να υπολογιστούν από το ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$P = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} \int_{R_r}^{R_m} \int_{-a/2}^{a/2} \rho J_m^2 r dr d\theta_r dt \quad (5.24)$$

Η επίλυση του ολοκληρώματος μας δίνει την αναλυτική έκφραση απωλειών για το μοντέλο και είναι

$$P = \sum_n^{\infty} (P_{cn} + P_{an}) \quad (5.25)$$

Οι δύο όρου στο άπειρο άθροισμα του τύπου 5.25 δίνονται από τους τύπους

$$\begin{aligned}
P_{cn} &= \frac{q^2 \mu_o^2 a}{8\rho} \frac{J_n^2}{n^2 p_s^2} (np_s \pm p_r)^2 \Omega^2 \\
&\times \left[\left(\frac{R_m}{R_s} \right)^{2np_s} \frac{R_s^2 R_m^2}{(2np_s + 2)} \left(1 - \left(\frac{R_r}{R_m} \right)^{2np_s+2} \right) + \right. \\
&\left. \left(\frac{R_r}{R_s} \right)^{2np_s} R_s^2 R_r^2 F_n + \left(\frac{R_r}{R_s} \right)^{2np_s} R_s^2 (R_m^2 - R_r^2) \right] \\
&/ \left[1 - \left(\frac{R_r}{R_s} \right)^{2np_s} \right]^2
\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
P_{an} &= -\frac{q^2 \mu_o^2}{a\rho} \frac{J_n^2}{n^4 p_s^4} (np_s \pm p_r)^2 \Omega^2 \\
&\times \left[\left(\frac{R_m}{R_s} \right)^{np_s} \frac{R_s R_m^2}{(np_s + 2)} \left(1 - \left(\frac{R_r}{R_m} \right)^{np_s+2} \right) + \left(\frac{R_r}{R_s} \right)^{np_s} R_s R_r^2 G_n \right]^2 \\
&\times \frac{\sin^2 \left(np_s \frac{a}{2} \right)}{(R_m^2 - R_r^2) \left[1 - \left(\frac{R_r}{R_s} \right)^{2np_s} \right]^2}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

όπου οι συναρτήσεις F_n , G_n ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$F_n = \begin{cases} \frac{\left[\left(\frac{R_m}{R_r} \right)^{-2np_s} - 1 \right]}{(-2np_s + 2)} & , \quad np_s \neq 1 \\ \ln \left(\frac{R_m}{R_r} \right) & , \quad np_s = 1 \end{cases} \tag{5.28}$$

$$G_n = \begin{cases} \frac{\left[\left(\frac{R_m}{R_r} \right)^{-np_s+2} - 1 \right]}{(-np_s + 2)} & np_s \neq 2 \\ \ln \left(\frac{R_m}{R_r} \right) & np_s = 2 \end{cases} \tag{5.29}$$

Από τις σχέσεις 5.26 – 5.29 μπορούμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα απωλειών δινορρευμάτων. Το αποτέλεσμα δίνεται σε Watt/m καθώς στον τύπο 5.24 έχει αγνοηθεί ο άξονας z (θεωρούμε ότι ολοκλήρωση κατά τον άξονα αυτό ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του αποτελέσματος με το μήκος της μηχανής).

5.2.3 Εφαρμογή μοντέλου

Το μοντέλο που αναπτύχθηκε εξετάζεται για μια συγκεκριμένη τοπολογία μηχανής. Ο υπολογισμός των σχέσεων και των αποτελεσμάτων έγινε σε προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB.

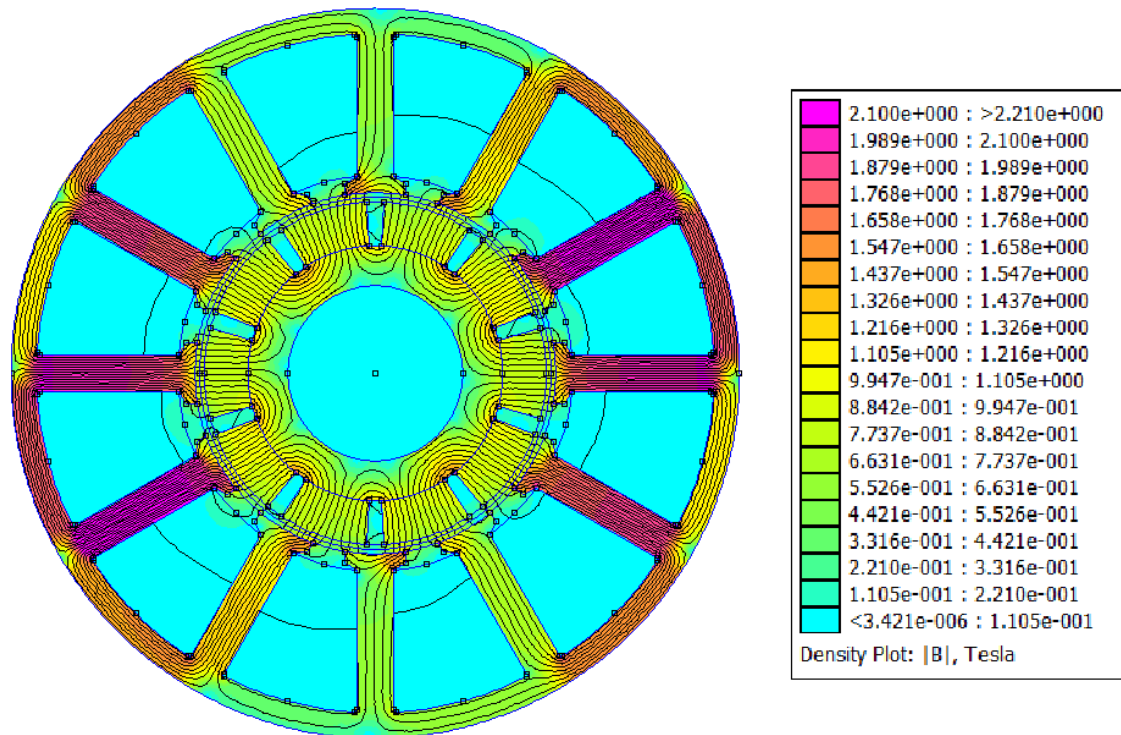
5.2.3.1 Χαρακτηριστικά μηχανής

Τα γεωμετρικά και ηλεκτρικά χαρακτηριστικά της μηχανής στην οποία δοκιμάστηκε το μοντέλο φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 2: Δεδομένα για τη μηχανή του δεύτερου μοντέλου

Μέγεθος	Συμβολισμός	Τιμή
Αριθμός φάσεων	q	3
Αριθμός εν σειρά ελιγμάτων	N_s	42
Ακτίνα δρομέα	R_r	0,0117 m
Ακτίνα μαγνήτη	R_m	0,0157 m
Ακτίνα στάτη	R_s	0,0165 m
Μήκος μηχανής	L	0,1 m
Πάχος μαγνήτη	γ_m	4 mm
Αριθμός πόλων δρομέα	p_r	10
Αριθμός αυλάκων	Q	12
Πλάτος ανοίγματος αύλακος	β_0	40%
Ηλεκτρική αγωγιμότητα	σ	694.000 S
Μαγνητική διαπερατότητα	μ	$4\pi \cdot 10^{-7}$
Πλάτος ρεύματος	I_m	20 A
Ταχύτητα λειτουργίας	ω_s	8.400 rpm

Όπως και στο πρώτο μοντέλο το πλάτος ανοίγματος αύλακος εκφράζεται ως ποσοστό επί του συνολικού μήκους διακένου. Η ηλεκτρική συχνότητα των ρευμάτων στα τυλίγματα του στάτη θεωρείται σταθερή και ίση με 50 Hz.

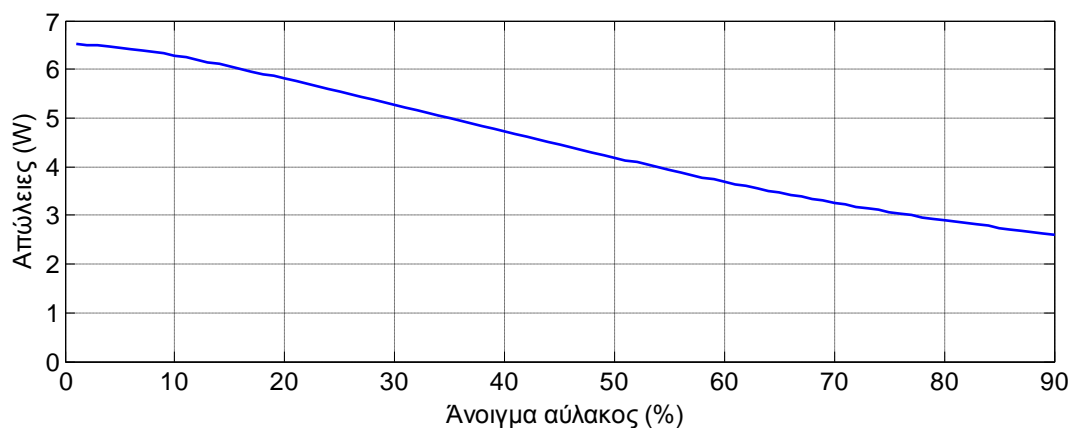


Σχήμα 5.14 Αναπαράσταση της μηχανής και του πεδίου της

Το σχήμα 5.14 δίνει μια αναπαράσταση για τη μηχανή και για το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται σε αυτήν όταν η φάση A διαρρέεται από ρεύμα μέγιστου πλάτους. Βλέπουμε ότι η μαγνητική ροή συγκεντρώνεται στα δόντια του στάτη όπως αναμέναμε, ενώ υπάρχει επίσης σημαντική ροή που διαρρέει τους μαγνήτες.

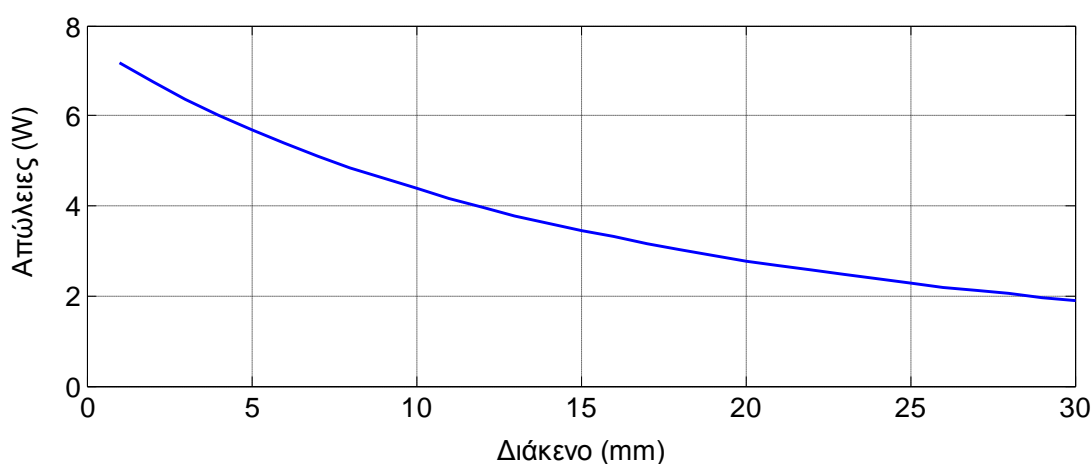
5.2.3.2 Αποτελέσματα

Η αναλυτική έκφραση επιτρέπει την εξέταση διαφόρων παραμέτρων της μηχανής σε συνάρτηση με τις απώλειες. Στα επόμενα διαγράμματα θα δούμε πώς τις μεταβάλλουν ορισμένες από αυτές.



Σχήμα 5.15 Απώλειες σε συνάρτηση με το άνοιγμα αύλακος

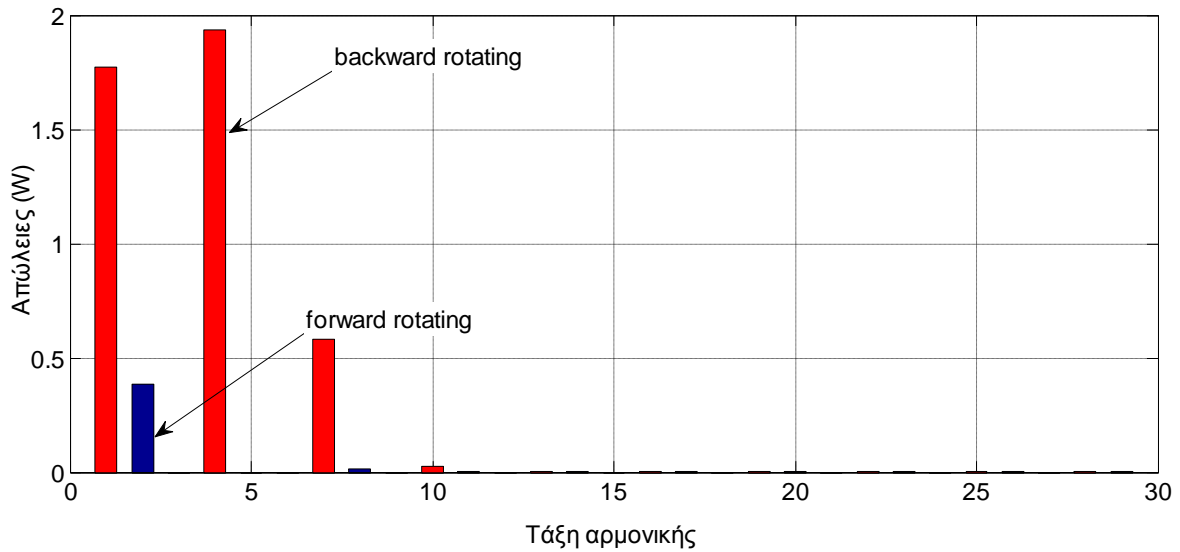
Στο σχήμα 5.15 έχουμε υπολογίσει τις απώλειες για τη μηχανή με τα δεδομένα του πίνακα 2 αλλάζοντας το άνοιγμα αύλακος. Αυτό επηρεάζει τον συντελεστή τυλίγματος όπως τον έχουμε ορίσει στη σχέση 5.18. Βλέπουμε ότι μεγαλύτερο άνοιγμα αύλακος επιφέρει μικρότερες τιμές απωλειών. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας της κατανάλωσης ενέργειας στο διάκενο της μηχανής. Η μαγνητική ροή που παράγει ο στάτης με την οποία επιδρά το πεδίο των μαγνητών για να γίνει εφικτή η ηλεκτρομηχανική μετατροπή συγκεντρώνεται πάμω από τη επιφάνεια των δοντιών του στάτη. Αν το άνοιγμα αύλακος μεγαλώσει, αυτό σημαίνει ότι η ροή περιορίζεται σε μικρότερη επιφάνεια με μεγαλύτερη μαγνητική αντίσταση και έτσι καταναλώνεται εκεί. Οι απώλειες μειώνονται αλλά μειώνεται επίσης και η επίδοση της μηχανής.



Σχήμα 5.16 Απώλειες σε συνάρτηση με το πάχος διακένου

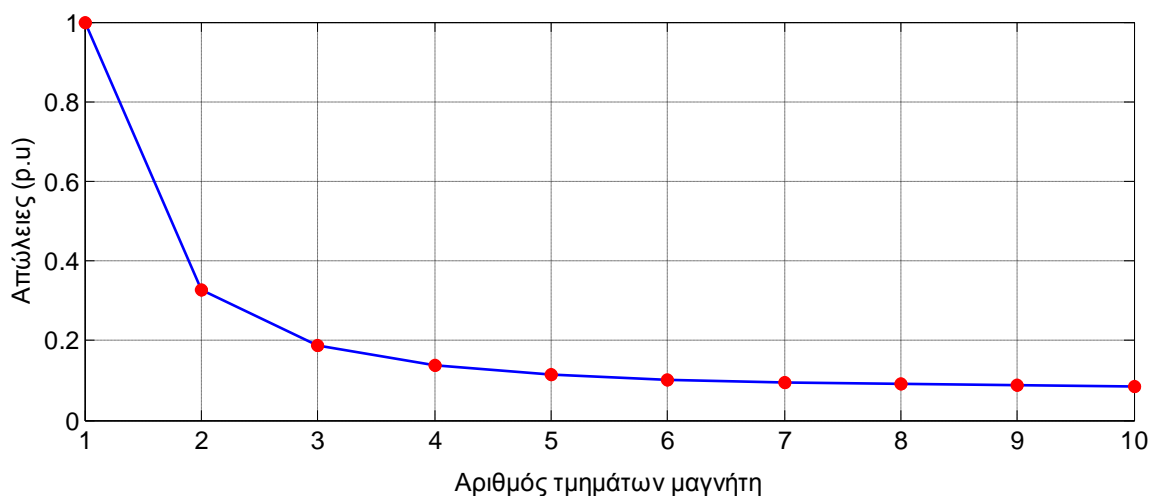
Ανάλογη επίδραση με το άνοιγμα αύλακος έχει η μεταβολή του διακένου. Αυτή εξετάζεται μεταβάλλοντας την ακτίνα της εσωτερικής επιφάνειας του στάτη ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι της μηχανής παραμένουν σταθερές. Βλέπουμε ότι η αύξηση του διακένου έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση των απωλειών δινορρευμάτων στους μαγνήτες. Για πολύ μικρή τιμή διακένου, πρακτικά αδύνατη, οι απώλειες φτάνουν τα 7 watt, ενώ για διάκενο της τάξης των 10 χιλιοστών, τιμή αρκετά μεγάλη, οι απώλειες περιορίζονται στα 4,5 watt περίπου. Η φυσική ερμηνεία είναι ίδια με πριν. Η αύξηση του διακένου σημαίνει μεγαλύτερη κατανάλωση μαγνητικής ενέργειας προκειμένου να εγκατασταθεί η ροή. Τελικά οι απώλειες μειώνονται αλλά ταυτόχρονα μειώνεται και η επίδοση της μηχανής.

Παρότι εκ πρώτης όψεως οι παράγοντες που είδαμε επιδιώκεται να ελαχιστοποιούνται σε κλασικούς σχεδιασμούς μηχανών, εντούτοις ίσως είναι απαραίτητο να επιλεχθούν διαφορετικά στις περιπτώσεις μονίμων μαγνητών. Οι αιτίες είναι αφενός μεν η προστασία των μαγνητών από υπερθέρμανση, ανάλογα και με τις δυνατότητες της εφαρμογής για ψύξη της μηχανής και αφετέρου η εξοικονόμηση υλικών και η ευκολία συναρμολόγησης.



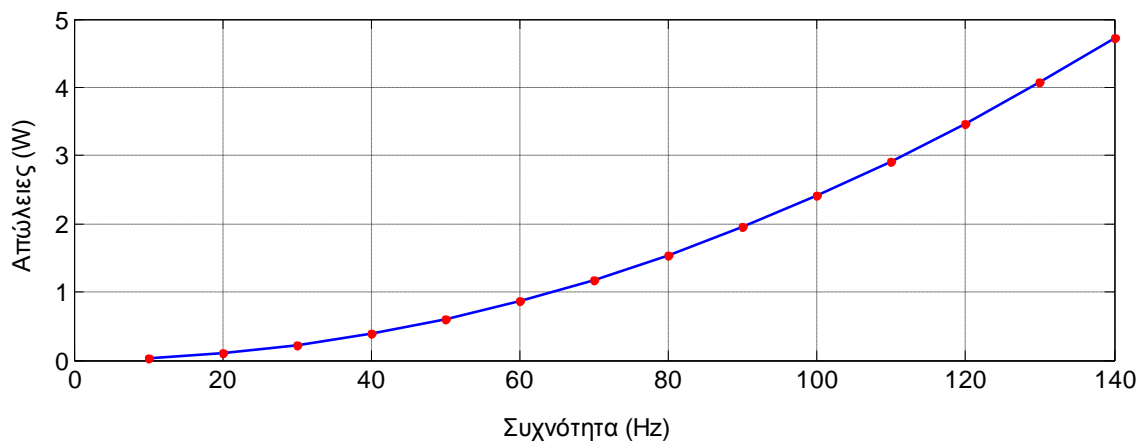
Σχήμα 5.17 Απώλειες σε συνάρτηση με την τάξη αρμονικής

Στο σχήμα 5.17 έχουμε αναλύσει τις απώλειες στις αρμονικές τάξεις στις οποίες ανήκουν. Με κόκκινο χρώμα βλέπουμε τις τάξεις που περιστρέφονται αντίστροφα με τη κύρια (backward rotating) ενώ με μπλε συμβολίζονται οι τάξεις που περιστρέφονται με τη φορά της κύριας (forward rotating). Παρατηρούμε ότι οι backward αρμονικές προκαλούν πολύ μεγαλύτερες απώλειες σε σχέση με την ομάδα των forward αρμονικών. Αυτό συμβαίνει επειδή η σχετική ταχύτητα των backward αρμονικών στο πλαίσιο αναφοράς του δρομέα είναι μεγαλύτερη απ' ότι των forward αρμονικών και έτσι οι απώλειες αυτών των τάξεων είναι αυξημένες. Όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως η κύρια τάξη η οποία στην περίπτωση αυτής της μηχανής είναι η 5^η δεν προκαλεί απώλειες. Επίσης είναι φανερό ότι το μεγαλύτερο μέρος των απωλειών οφείλεται σε υφαρμονικές, ενώ το σύνολό τους σχεδόν περιορίζεται σε μια μικρή ομάδα χαμηλών τάξεων οι οποίες χαρακτηρίζονται από μεγάλη ταχύτητα περιστροφής στο διάκενο.



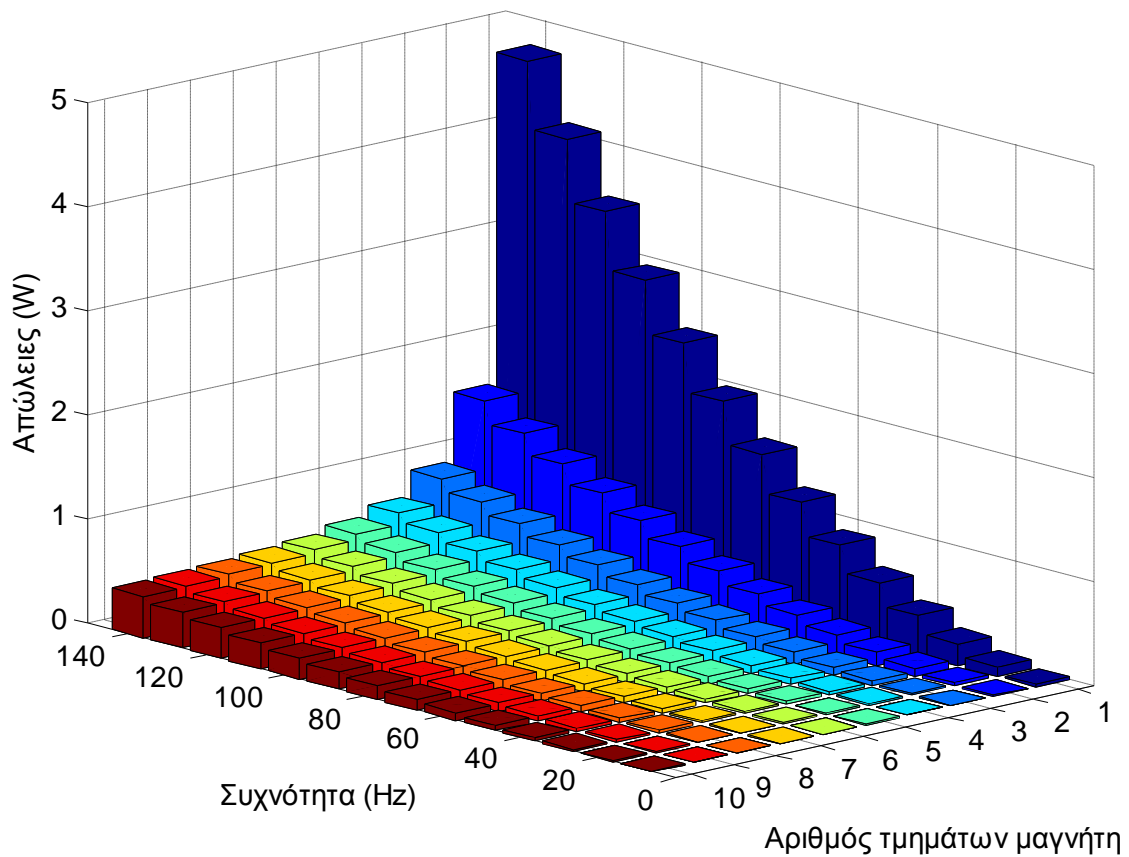
Σχήμα 5.18 Απώλειες σε συνάρτηση με την τμηματοποίηση των μαγνητών του δρομέα

Το σχήμα 5.17 εξετάζει την επίδραση που έχει η τμηματοποίηση των μαγνητών διατηρώντας τις παραμέτρους του πίνακα 5.13. Η τμηματοποίηση που γίνεται εδώ είναι περιφερειακή (circumferential segmentation), ενώ είναι δυνατή και η αξονική τμηματοποίηση η οποία παρουσιάζει επίσης ενδιαφέροντα αποτελέσματα [21]. Βλέπουμε ότι η τμηματοποίηση μπορεί να έχει καταλυτική επίδραση στη μείωση των απωλειών. Χωρίζοντας το κάθε κομμάτι μαγνήτη σε δύο κομμάτια με ίδια πολικότητα οι απώλειες μειώνονται κατά 65%. Βλέπουμε ότι περαιτέρω τμηματοποίηση έχει επίσης αρκετά σημαντική επίδραση, η οποία όμως περιορίζεται έπειτα από την πέμπτη φορά, πλησιάζοντας συνολική μείωση που αγγίζει το 90% της αρχικής τιμής απωλειών. Επομένως η τμηματοποίηση μπορεί να αποτελέσει μέθοδο για τον περιορισμό των απωλειών δινορρευμάτων, εάν υπάρχει τέτοια ανάγκη για την αποδοτική λειτουργία της μηχανής.



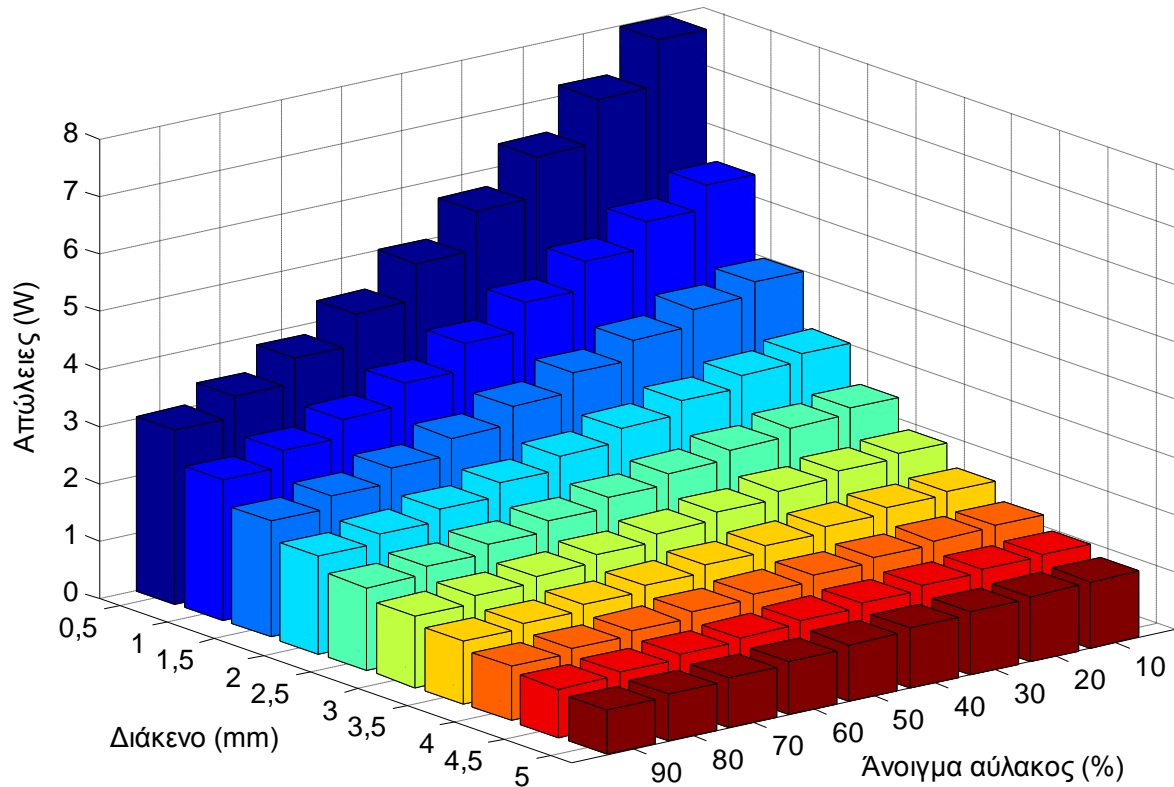
Σχήμα 5.19 Απώλειες σε συνάρτηση με τη συχνότητα περιστροφής

Στο σχήμα 5.19 παρουσιάζεται η εξέλιξη της καμπύλης απωλειών σε συνάρτηση με τη συχνότητα περιστροφής του δρομέα. Παρατηρούμε ότι οι απώλειες παρουσιάζουν εξάρτηση από το τετράγωνο της συχνότητας περιστροφής. Αυτό το αποτέλεσμα το περιμένουμε ως συνέπεια των σχέσεων στους τύπους 5.26 και 5.27.



Σχήμα 5.20 Απώλειες σε συνάρτηση με την τμηματοποίηση των μαγνητών και τη συχνότητα περιστροφής

Στο σχήμα 5.20 μπορούμε να δούμε ένα συνδυασμό των αποτελεσμάτων που λάβαμε για τις αναλύσεις ως προς την τμηματοποίηση των μαγνητών και τη συχνότητα περιστροφής του δρομέα της μηχανής. Είναι φανερό ότι οι καμπύλες που εξήχθησαν στα δύο προηγούμενα σχήματα διατηρούν τη μορφή και τη συμπεριφορά τους για οποιονδήποτε αριθμό τμημάτων ή συχνότητα λειτουργίας ως προς την ελεύθερη παράμετρο που επιλέγεται. Και πάλι βλέπουμε πόσο μπορεί να μειώσει τις απώλειες η τμηματοποίηση στους μαγνήτες καθώς και την ουσιαστική αύξηση που παρουσιάζουν οι απώλειες σε υψηλές συχνότητες περιστροφής. Επίσης παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε ταχύτητα υπάρχει ένα όριο αριθμού τμημάτων πέραν του οποίου δεν μειώνονται σημαντικά οι απώλειες ενώ ταυτόχρονα γίνεται αναίτια δύσκολη και περίπλοκη η κατασκευή της μηχανής και για την περίπτωση που εξετάζουμε βλέπουμε ότι ο αριθμός αυτός είναι 4 με 5 κομμάτια.



Σχήμα 5.21 Απώλειες σε συνάρτηση με το διάκενο και το άνοιγμα αύλακος

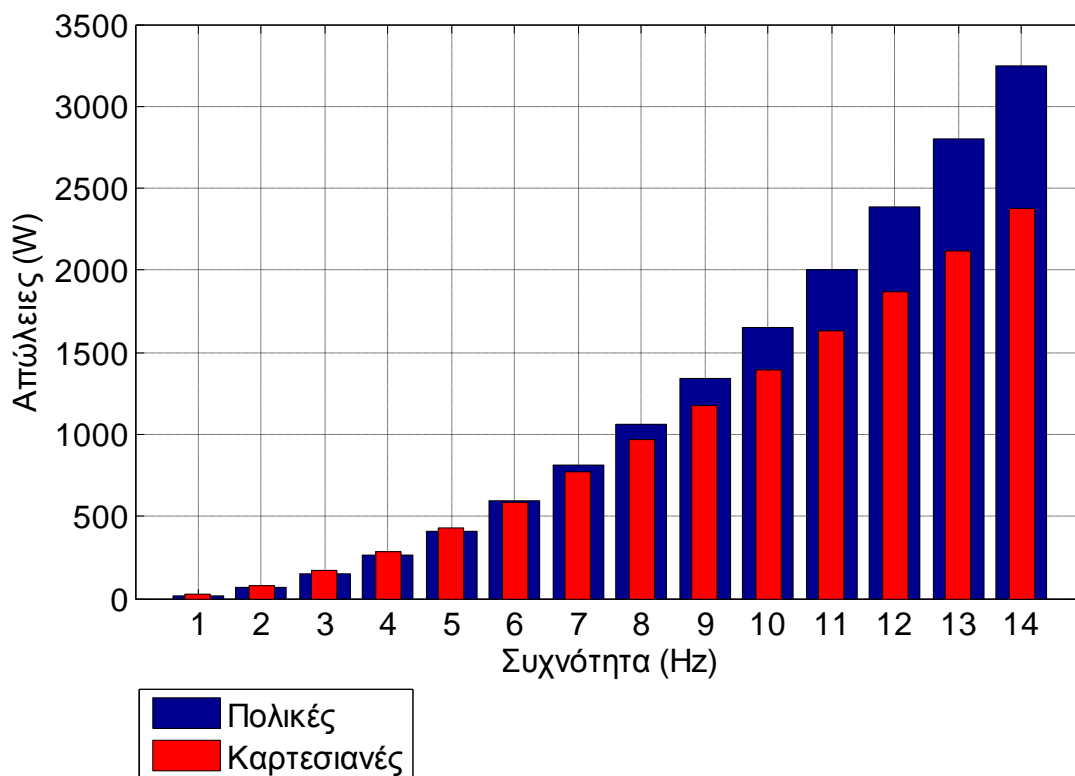
Στο σχήμα 5.21 βλέπουμε ένα συνδυαστικό διάγραμμα απωλειών καθώς μεταβάλλεται το διάκενο και το άνοιγμα αύλακος. Σε κάθε περίπτωση μικρότερο διάκενο συνεπάγεται αύξηση των απωλειών, όπως είδαμε και στο σχήμα 5.16, ενώ ύστερα από τα 2,5 χιλιοστά δεν επηρεάζει σημαντικά τις απώλειες. Το άνοιγμα του αυλακιού έχει παρόμοια επίδραση, η μείωσή του αυξάνει τις απώλειες, όμως παρατηρούμε ότι η επίδρασή του εξαρτάται από το διάκενο της μηχανής. Για μικρό διάκενο μπορεί να υπερδιπλασιάσει τις απώλειες, αλλά αν το διάκενο είναι μεγαλύτερο περιορίζεται σημαντικά η μεταβολή των απωλειών κατά την αλλαγή του ανοίγματος αύλακος. Και τα δύο φαινόμενα συνδέονται άρρηκτα με τον τρόπο που μεταβάλλουν την αντίσταση που συναντά η μαγνητική ροή κατά την εγκατάστασή της στο διάκενο.

5.3 Σύγκριση των δύο μοντέλων

Η ανάλυση των δύο μοντέλων και η εφαρμογή τους προσέφεραν αρκετές πληροφορίες για την εξάρτηση των απωλειών δινορρευμάτων από διάφορα χαρακτηριστικά της μηχανής, γεωμετρικά ή ηλεκτρικά. Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε κατά πόσο τα δύο μοντέλα που αναπτύχθηκαν συγκλίνουν στην τιμή απωλειών που προβλέπουν για την ίδια μηχανή. Χρησιμοποιούνται οι δύο μηχανές στις οποίες εξετάστηκαν τα μοντέλα.

5.3.1 Μηχανή δεδομένων πίνακα 1 – 36 αυλάκων 34 πόλων

Η μηχανή με τα δεδομένα του πίνακα 1 δοκιμάζεται στις αναλυτικές εξισώσεις του δεύτερου μοντέλου.

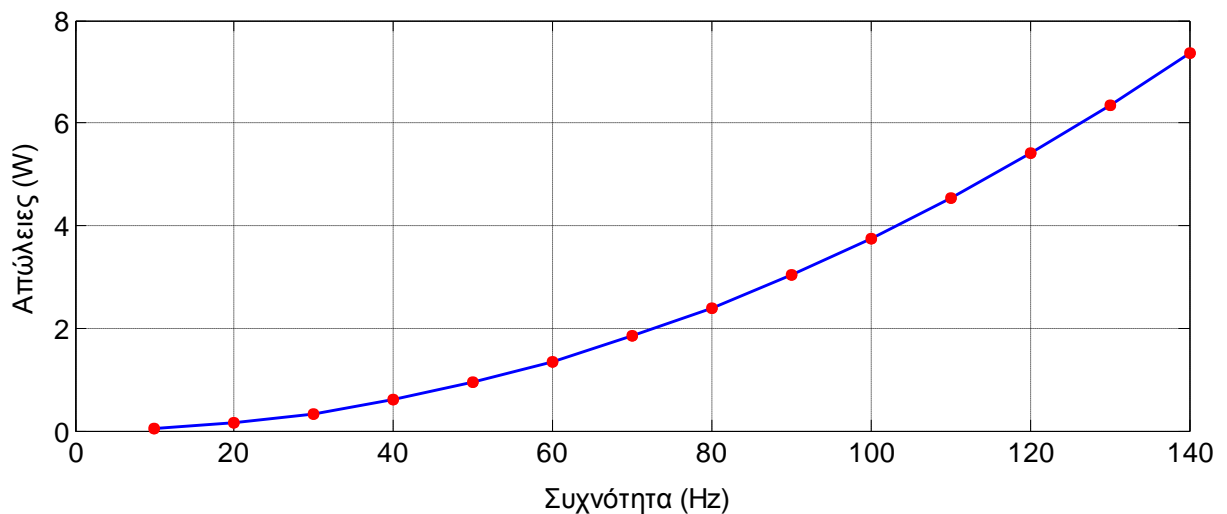


Σχήμα 5.22 Απώλειες σε συνάρτηση με τη συχνότητα περιστροφής για τα δύο μοντέλα

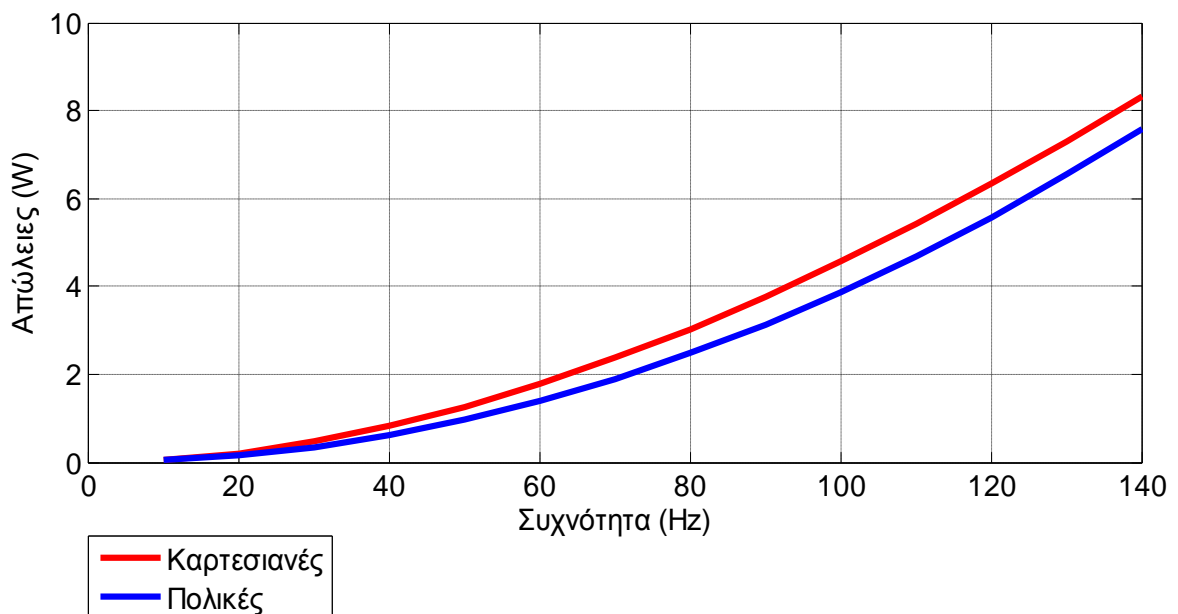
Στο σχήμα 5.22 εξετάζεται η συμφωνία των δύο μοντέλων στην πρόβλεψη απωλειών για διάφορες συχνότητες. Χρησιμοποιείται διαφορετικό χρώμα για κάθε μοντέλο, το μπλε χρώμα αντιστοιχεί στη μοντελοποίηση που αναπτύχθηκε σε πολικές συντεταγμένες, ενώ το ιστόγραμμα με κόκκινο χρώμα παρουσιάζει τα αποτελέσματα του πρώτου μοντέλου το οποίο αναπτύχθηκε σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Μπορούμε να δούμε ότι τα δύο μοντέλα συμφωνούν αρκετά στις προβλέψεις τους έχοντας μέγιστο σφάλμα της τάξης του 30% για τη μεγαλύτερη ταχύτητα λειτουργίας. Βλέπουμε επίσης ότι το σφάλμα αυτό αυξάνεται καθώς μεγαλώνει η ταχύτητα της μηχανής. Αυτό συμβαίνει επειδή το πρώτο μοντέλο ενσωματώνει την ταχύτητα στις εξισώσεις του με διαφορετικό τρόπο σε σχέση με το δεύτερο μοντέλο. Συγκεκριμένα το πρώτο μοντέλο μεταβάλλει το ειδικό μήκος κύματος σε σχέση με την ταχύτητα και το ειδικό μήκος κύματος συμμετέχει στις εξισώσεις υψωμένο σε διάφορες δυνάμεις, ενώ οι αναλυτικές σχέσεις του δεύτερου μοντέλου υποδεικνύουν ότι το αποτέλεσμα των απωλειών εξαρτάται καθαρά από το τετράγωνο της ταχύτητας λειτουργίας.

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι το πρώτο μοντέλο δεν μπορεί να εξετάσει τα αποτελέσματα της τμηματοποίησης (segmentation) των μαγνητών. Ο λόγος είναι ότι ο γεωμετρικός ορισμός του μοντέλου θεωρεί το σύνολο του υλικού των μαγνητών συγκεντρωμένο σε μια περιοχή και υπολογίζει τις απώλειες εκεί. Η διαίρεση της περιοχής αυτής σε μικρότερα κομμάτια ισοδυναμεί με τον υπολογισμό των απωλειών σε ισάριθμο πλήθος μηχανών με ίδιες παραμέτρους και όχι με υπολογισμό σε τμηματοποιημένους μαγνήτες.

5.3.2 Μηχανή δεδομένων πίνακα 2 - 12 αυλάκων 10 πόλων



Σχήμα 5.23 Απώλειες για διάφορες τιμές συχνότητας περιστροφής για τη μηχανή του πίνακα 2



Σχήμα 5.24 Συνδυαστικό διάγραμμα απωλειών για τη μηχανή του πίνακα 2

Βλέπουμε ότι υπάρχει κάποια διαφορά μεταξύ των απωλειών που προβλέπει το πρώτο μοντέλο αν εισάγουμε ως δεδομένη τη γεωμετρία και τα χαρακτηριστικά της μηχανής του δοκιμάσαμε στο δεύτερο μοντέλο και τα οποία φαίνονται στον πίνακα 2. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα του δευτέρου μοντέλου μπορούμε να τα δούμε στο σχήμα 5.19 ενώ το σχήμα 5.24 απεικονίζει τα αποτελέσματα των δύο μοντέλων στο ίδιο διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι για τη μέγιστη ταχύτητα των 140 Hz η τιμή απωλειών που δίνει το πρώτο μοντέλο (8,2 Watt) είναι σχεδόν διπλάσια από τα 4,7 Watt που συναντάμε στο δεύτερο. Ωστόσο μπορούμε να ερμηνεύσουμε αυτή τη συμπεριφορά αν λάβουμε υπόψιν μας ότι το πρώτο μοντέλο θεωρεί την ηλεκτρική φόρτιση στο διάκενο πάρα πολύ κοντά στους μαγνήτες της μηχανής ενώ στο δεύτερο μοντέλο υπάρχει το πάχος διακένου και επίσης ότι παρά αυτήν τη διαφορά οι πυκνότητες ρεύματος στις δύο περιπτώσεις θεωρήθηκαν ίδιες. Αν παρατηρήσουμε το σχήμα 5.15 το οποίο αναφέρεται σε ίδιες συνθήκες λειτουργίας μπορούμε να δούμε πως το αποτέλεσμα του δευτέρου μοντέλου προσαρμόζεται στα 8 Watt περίπου όταν το διάκενο τείνει να μηδενιστεί.

Όπως στην προηγούμενη παράγραφο έτσι και εδώ δεν μπορούμε να εξετάσουμε την τμηματοποίηση των μαγνητών λόγω του τρόπου που ορίστηκε το πρώτο μοντέλο.

5.4 Συμπεράσματα

Αναπτύχθηκαν δύο μοντέλα για την πρόβλεψη των απωλειών δινορρευμάτων σε μηχανές κλασματικού συγκεντρωμένου τυλίγματος, ένα σε καρτεσιανές και ένα σε πολικές συντεταγμένες. Τα μοντέλα χρησιμοποιήθηκαν για συγκεκριμένων χαρακτηριστικών μηχανές και έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων τους. Παρατηρήθηκαν μικρές διαφορές μεταξύ τους οι οποίες εξηγούνται από τη διαφορετική προσέγγιση που έγινε για την υλοποίηση του κάθε μοντέλου. Τελικά τα αποτελέσματα που λήφθηκαν συμφωνούν ικανοποιητικά μεταξύ τους.

Ένα σημαντικό στοιχείο που πρέπει να έχουμε υπόψιν κατά τη μελέτη των μοντέλων είναι οι περιορισμοί κάτω από τους οποίους αναπτύχθηκαν. Επιγραμματικά, για το πρώτο μοντέλο θεωρήθηκε σταθερή ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα των υλικών και αντικαταστάθηκε η γεωμετρία των αυλακιών του στάτη από ισοδύναμη επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος η οποία αντικατοπτρίζει την επίδραση των αυλακιών στις αρμονικές χώρου, ενώ για το δεύτερο μοντέλο ισχύει επιπρόσθετα η υπόθεση ότι τα επαγόμενα δινορρεύματα είναι *resistance limited* και επομένως δεν επηρεάζουν σημαντικά το πεδίο που δημιουργεί ο στάτης.

Οι διαφορές των δύο μοντέλων συγκεντρώνονται κυρίως στη γεωμετρική περιγραφή. Το πρώτο μοντέλο, των καρτεσιανών συντεταγμένων, διακρίνεται για την απλότητα της περιγραφής της γεωμετρίας του προβλήματος και για την σύντομη και απλή εξαγωγή των εξισώσεων. Το δεύτερο μοντέλο επιτυγχάνει καλύτερη περιγραφή της γεωμετρίας μιας

περιστρεφόμενης μηχανής και επιτρέπει ακόμη την εξέταση της επίδρασης της τμηματοποίησης των μαγνητών. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το δεύτερο μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί πιο αξιόπιστο στις προβλέψεις του, ειδικά για περιστρεφόμενες μηχανές.

Σε κάθε περίπτωση η μέτρηση των απωλειών δινορρευμάτων στους μαγνήτες μιας μηχανής μονίμων μαγνητών είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Το γεγονός αυτό υπογραμμίζει τη σημασία που έχει η δυνατότητα πρόβλεψης των απωλειών και τη χρησιμότητα της μοντελοποίησης. Ταυτόχρονα συνειδητοποιούμε τους περιορισμούς που τίθενται στην ακρίβεια που μπορεί να έχει η πρόβλεψη.

Μέσω των μοντέλων παρέχεται η δυνατότητα δημιουργίας ενός χάρτη απωλειών. Αυτός είναι ένας πίνακας ο οποίος περιέχει τα αποτελέσματα που προκύπτουν από ένα μοντέλο για μια συγκεκριμένη μηχανή μεταβάλλοντας μια παράμετρο ενδιαφέροντος. Καθίσταται έτσι εύκολη η σύγκριση των απωλειών και διευκολύνεται η επιλογή παραμέτρων γνωρίζοντας τις απώλειες, αν όχι ως απόλυτο νούμερο, τουλάχιστον ως τάξη μεγέθους. Η διαδικασία αυτή μπορεί να αποδειχθεί σημαντική κατά την προκαταρκτική σχεδίαση μηχανών μονίμων μαγνητών αλλά και κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης της γεωμετρίας.

5.5 Ιδιαίτερες περιπτώσεις

Τα αποτελέσματα των μοντέλων οφείλουν να αντιμετωπίζονται με σκεπτικισμό σε περιπτώσεις στις οποίες είναι φανερό ότι παραβιάζονται οι υποθέσεις που διατυπώθηκαν κατά την ανάπτυξή τους. Μια τέτοια περίπτωση είναι όταν η μηχανή λειτουργεί σε περιοχή όπου υπάρχει κορεσμός του μαγνητικού πεδίου στους μαγνήτες. Αυτό αναιρεί την υπόθεση περί γραμμικότητας και δεν μπορούμε να υπερθέσουμε τα αποτελέσματα για κάθε τάξη αρμονικής, ενώ δεν ισχύει η συντακτική σχέση που συνδέει τη μαγνητική ένταση και τη μαγνητική επαγωγή.

Μια άλλη περίπτωση που αφορά ιδίως το δεύτερο μοντέλο είναι όταν δεν ισχύει η υπόθεση ότι τα δινορρεύματα είναι resistance limited. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί εάν ο μαγνήτης του δρομέα της μηχανής αποτελείται από έναν κυλινδρικό δακτύλιο με πολλούς πόλους [20]. Σε μια τέτοια περίπτωση το βάθος διείσδυσης του υλικού των μονίμων μαγνητών είναι μόνο ένα κλάσμα του πολικού βήματος της θεμελιώδους αρμονικής της μαγνητεγερτικής δύναμης, γεγονός που αναιρεί την υπόθεση. Γενικά το βάθος διείσδυσης πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερο από το πάχος των μαγνητών για να ισχύει η resistance limited μορφή λύσης, διαφορετικά απαιτείται άλλη προσέγγιση [22].

Κεφάλαιο 6 Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναπτύχθηκαν αναλυτικές εκφράσεις για τον υπολογισμό των απωλειών δινορρευμάτων στους μόνιμους μαγνήτες των δρομέων μηχανών εναλλασσομένου ρεύματος με κλασματικά συγκεντρωμένα τυλίγματα καθώς και τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης αυτών σε συγκεκριμένες γεωμετρίες μηχανών. Η εργασία περιλαμβάνει έξι κεφάλαια τα οποία διαρθρώνονται ως εξής:

- Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν ο σκοπός και η δομή της εργασίας.
- Στο δεύτερο κεφάλαιο μετά από μια εισαγωγή στους φυσικούς μηχανισμούς με τους οποίους δημιουργούνται τα δινορρεύματα, αναφέρθηκαν οι εφαρμογές οι οποίες στηρίζονται στην ύπαρξη των δινορρευμάτων και επεξηγήθηκαν οι αρνητικές τους επιπτώσεις στη λειτουργία των ηλεκτρικών μηχανών.
- Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύθηκαν οι μηχανές μονίμων μαγνητών. Προτάχθηκε μια ιστορική αναδρομή στη χρήση μονίμων μαγνητών σε εφαρμογές ηλεκτρικών μηχανών. Στη συνέχεια εξετάστηκαν τα συγκεντρωμένα τυλίγματα, τα οποία χρησιμοποιούνται συνηθέστερα σε αυτές τις μηχανές και αναλύθηκαν οι μαγνητεγερτικές δυνάμεις που αναπτύσσουν. Θεωρώντας τον αστέρα αυλάκων (star of slots) υπολογίσθηκε ο συντελεστής τυλίγματος και συνδέθηκε με τις αρμονικές χώρου των μαγνητεγερτικών δυνάμεων.
- Στο τέταρτο κεφάλαιο διατυπώθηκαν οι εξισώσεις του Maxwell που διέπουν την κατανομή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και οι κατασταστικές εξισώσεις για γραμμικά μέσα. Στη συνέχεια καταστρώθηκε η εξίσωση διάχυσης του μαγνητικού πεδίου που διέπει τα προβλήματα δινορρευμάτων. Εξετάστηκαν μέθοδοι επίλυσής της και υπολογίσθηκαν οι κατανομές του μαγνητικού πεδίου και των δινορρευμάτων σε απλές γεωμετρίες χρησιμοποιώντας κατάλληλα συστήματα συντεταγμένων επιλύοντας την τεχνική χωρισμού των μεταβλητών.
- Στο πέμπτο κεφάλαιο αναπτύχθηκαν δύο μοντέλα αναλυτικού υπολογισμού δινορρευμάτων για μηχανές μονίμων μαγνητών, ένα σε καρτεσιανές και ένα σε πολικές συντεταγμένες και παρουσιάστηκε η αναλυτική κατάστρωση των εξισώσεων για κάθε μοντέλο. Οι αναλυτικές λύσεις αξιοποιήθηκαν για την υλοποίηση κώδικα σε προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab, με τον οποίο υπολογίσθηκαν στην συνέχεια οι απώλειες δινορρευμάτων καθώς και η μεταβολή λειτουργικών χαρακτηριστικών σε συνάρτηση με ηλεκτρικές και γεωμετρικές παραμέτρους της μηχανής.

6.1 Κυριότερα συμπεράσματα

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από αυτή την εργασία είναι συγκεντρωτικά τα εξής:

- Οι μηχανές μονίμων μαγνητών συγκεντρωμένων τυλιγμάτων παρουσιάζουν σημαντικά αυξημένες απώλειες δινορρευμάτων στους μόνιμους μαγνήτες. Διαπιστώθηκε ότι σε τέτοιου τύπου τυλίγματα η αρμονική συνιστώσα με το μεγαλύτερο πλάτος που χρησιμοποιείται για την παραγωγή κινητήριας ροπής είναι ανώτερης τάξης, με αποτέλεσμα την ύπαρξη υφαρμονικών, οι οποίες δημιουργούν δινορρεύματα που δεν μπορούν να αμεληθούν. Οι τοπολογίες αυτές ωστόσο είναι ελκυστικές λόγω των κατασκευαστικών πλεονεκτημάτων τους και της εύκολης συντήρησης των τυλιγμάτων.
- Υπάρχει μεγάλο πλήθος παραμέτρων οι οποίες μπορούν να επηρεάσουν τις απώλειες δινορρευμάτων. Οι παράμετροι που εξετάστηκαν είναι η τμηματοποίηση των μαγνητών, το μήκος διακένου, η ταχύτητα περιστροφής του δρομέα, ο αριθμός αυλάκων και πόλων, το μέγεθος της μηχανής, η ένταση του ρεύματος των αγωγών του τυλίγματος και το πλάτος των δοντιών του στάτη. Οι παράμετροι αυτές μελετήθηκαν αποκλειστικά από τη σκοπιά των δινορρευμάτων, καθώς επηρεάζουν επίσης την επίδοση και τη συνολική απόδοση της μηχανής. Κάποιες από τις παραμέτρους αποδείχθηκε ότι έχουν μεγαλύτερη βαρύτητα στη διαμόρφωση των απωλειών.
- Μεταξύ των παραμέτρων που εξετάστηκε η επίδρασή τους στις απώλειες δινορρευμάτων ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η τμηματοποίηση των μαγνητών. Διαπιστώθηκε ότι για τη μηχανή που μελετήθηκε η τμηματοποίηση περιορίσε τις απώλειες σε ποσοστό που άγγιζε το 10% της αρχικής τιμής τους. Παρατηρήθηκε επίσης ότι υπάρχει ένα πρακτικό όριο τμηματοποίησης πέραν του οποίου η μείωση των απωλειών είναι περιορισμένη με αποτέλεσμα να μην δικαιολογείται η αύξηση της πολυπλοκότητας που εισάγεται στην κατασκευή. Το όριο αυτό εξαρτάται από την εκάστοτε μηχανή.
- Τα αποτελέσματα των δύο μοντέλων που αναπτύχθηκαν, χωρίς να συμφωνούν απόλυτα μεταξύ τους, παρέχουν ικανοποιητική επιβεβαίωση της παρεχόμενης ακρίβειας, λαμβάνοντας υπόψη ότι πρόκειται για δύο προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν διδιάστατη ανάλυση σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων.

6.2 Σημεία καινοτομικής συνεισφοράς

Τα παρακάτω σημεία αναδεικνύουν την επιστημονική συνεισφορά της εργασίας:

- Η υλοποίηση προγράμματος αναλυτικού υπολογισμού απωλειών δινορρευμάτων για μηχανές μονίμων μαγνητών κλασματικών συγκεντρωμένων τυλιγμάτων. Οι αναλυτικές εκφράσεις είναι δυνατόν να εκτιμήσουν τις απώλειες σε πολύ περιορισμένο χρόνο υπολογισμού με συμβατικούς υπολογιστές. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να διευκολυνθεί η προκαταρκτική σχεδίαση της μηχανής, έτσι ώστε να εξοικονομηθεί χρόνος από χρονοβόρες διαδικασίες υπολογισμού μέσω προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων σε συνδυασμό με αλγορίθμους βελτιστοποίησης γεωμετρίας.
- Η καταγραφή της ανάλυσης ευαισθησίας των αποτελεσμάτων του προγράμματος για πλήθος παραμέτρων των μηχανών που εξετάστηκαν. Τα αποτελέσματα περιλαμβάνουν τόσο τις απώλειες δινορρευμάτων όσο και ενδιάμεσα μεγέθη που ορίζουν οι αναλυτικές λύσεις που αναπτύχθηκαν και τα οποία επιτρέπουν τη φυσική ερμηνεία της επίδρασης που έχει η μεταβολή μιας παραμέτρου στις απώλειες δινορρευμάτων των μαγνητών. Δίνεται έτσι η δυνατότητα άμεσης πρόβλεψης της μεταβολής των απωλειών, γεγονός που είναι πολύ χρήσιμο κατά τη διαδικασία της προκαταρκτικής σχεδίασης μιας μηχανής.

6.3 Προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση

Τα θέματα που ανέδειξε η εργασία ότι χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης είναι τα εξής:

- Πειραματική επιβεβαίωση των ευρημάτων της εργασίας.
- Ενσωμάτωση του κώδικα που αναπτύχθηκε σε μεθοδολογία βελτιστοποίησης γεωμετρίας ηλεκτρικών μηχανών.

Βιβλιογραφία

- [1] W. Hayt, *Engineering Electromagnetics (4th ed.)*. McGraw-Hill, 1981.
- [2] P. K. Sokolowski, *Processing and Protection of Rare Earth Permanent Magnet Particulate for Bonded Magnet Applications*. 2007.
- [3] A. Goldman, *Modern Ferrite Technology*. Springer, 2006.
- [4] J. J. Anderson, *Structural and Magnetic Properties of Neodymium- Iron - Boron Clusters*. 2010.
- [5] S. J. Chapman, *Electric Machinery Fundamentals*, 4th ed. 2010.
- [6] J. H. Pyrhönen, *Design of Rotating Electrical Machines*. Wiley, 2008.
- [7] H. Jussila, *Concentrated winding multiphase permanent magnet machine design and electromagnetic properties – case axial flux machine*. 2009.
- [8] P. Salminen, *Fractional Slot Permanent Magnet Synchronous Motors for Low Speed Applications*. 2004.
- [9] K. Βουρνάς and Γ. Κονταξής, *Εισαγωγή στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας*, Έ. ΕΜΠ, Ed. 2006.
- [10] F. Magnussen and C. Saradangani, "Winding Factors and Joule Losses of Permanent Magnet Machines with Concentrated Windings," in *Electric Machines and Drives Conference, 2003. IEMDC'03. IEEE International (Volume:1)*, 2003.
- [11] A. M. EL-Refai and T. M. Jahns, "Optimal Flux Weakening in Surface PM Machines Using Fractional-Slot Concentrated Windings," in *Industry Applications, IEEE Transactions on (Volume:41 , Issue: 3)*, 2005.
- [12] J. A. Tegopoulos and E. E. Kriezis, *Eddy Currents in Linear Conducting Media*. ELSEVIER, 1985.
- [13] J. H. Field, "Classical Electromagnetism as a Consequence of Coulomb's Law, Special Relativity and Hamilton's Principle and its Relationship to Quantum Electrodynamics," *Phys.Scripta* 74 (2006), pp. 702-717, 2006.
- [14] Ν. Μ. Σταυρακάκης, *Εξισώσεις Μερικών Παραγώγων*. 2006.
- [15] K. Atallah, Z. Q. Zhu, D. Howe, and T. S. Birch, "Armature Reaction Field and Winding Inductances of Slotless Permanent-Magnet Brushless Machines," *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 34, NO. 5*, 1998.
- [16] E. Fornasiero, *Advanced Design of Direct Drive PM Machines*. 2010.
- [17] P.-D. Pfister and Y. Perriard, "Slotless Permanent-Magnet Machines: General Analytical Magnetic Field Calculation," *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 47, NO. 6*, 2011.

- [18] J. Wang, K. Atallah, R. Chin, W. M. Arshad, and H. Lendenmann, "Rotor Eddy-Current Loss in Permanent-Magnet Brushless AC Machines," *Industry Applications, IEEE Transactions on (Volume:36, Issue: 6)*, 2000.
- [19] D. Ishak, Z. Q. Zhu, and D. Howe, "Eddy-current loss in the rotor magnets of permanent-magnet brushless machines having a fractional number of slots per pole," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 41, no. 9, 2005.
- [20] K. Atallah, D. Howe, P. H. Mellor, and D. A. Stone, "Rotor loss in permanent-magnet brushless AC machines," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 36, no. 6, 2000.
- [21] J. D. Ede, K. Atallah, G. W. Jewell, J. B. Wang, and D. Howe, "Effect of Axial Segmentation of Permanent Magnets on Rotor Loss in Modular Permanent-Magnet Brushless Machines," *IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 43, No. 5,*, 2007.
- [22] M. Markovic and Y. Perriard, "An Analytical Determination of Eddy-Current Losses in a Configuration With a Rotating Permanent Magnet," *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 43, NO. 8,* 2007.