



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

*Μελέτη επί της τρισδιάστατης απεικόνισης και αυτόματης
ανακατασκευής θραυσμένων προϊστορικών αγγείων*

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ιωάννης Γ. Κοτζάς

Επιβλέπων: **Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς**
Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα, Ιούνιος 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

*Μελέτη επί της τρισδιάστατης απεικόνισης και αυτόματης
ανακατασκευής θραυσμένων προϊστορικών αγγείων*

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ιωάννης Γ. Κοτζάς

Επιβλέπων: **Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς**
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 2^η Ιουνίου 2014

.....
Κ. Παπαοδυσσεύς
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Β. Λούμος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Η. Κουκούτσης
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2014

.....

Ιωάννης Γ. Κοτζάς

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright© Ιωάννης Γ. Κοτζάς, 2014.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολόκληρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν την χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται στον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται, αρχικά, μία αναφορά σε αρχές της θεωρίας των καμπυλών και επιφανειών της διαφορικής γεωμετρίας οι οποίες αποτελούν ένα απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρό της σχετικής προσέγγισης. Δίνεται έμφαση σε βασικές έννοιες, όπως της καμπύλης, της επιφάνειας αλλά και άλλων μεγεθών-εργαλείων που τις συνοδεύουν, ούτως ώστε να γίνει εφικτή η προσέγγιση στο θέμα της αυτόματης ανασυγκρότησης θραυσμάτων.

Στην συνέχεια, ακολουθεί περιγραφή της επεξεργασίας την οποία υπέστησαν τρισδιάστατες απεικονίσεις θραυσμάτων αγγείων οι οποίες προέρχονται από την τρισδιάστατη σάρωση των πραγματικών θραυσμάτων με τρισδιάστατο σαρωτή. Η παραπάνω επεξεργασία αποτελεί προκαταρκτικό στάδιο για την εφαρμογή μίας νέας μεθόδου η οποία προσφέρει αποτελεσματική λύση στο πρόβλημα της αυτόματης εικονικής ανασυγκρότησης των θραυσμένων αγγείων για την οποία γίνεται αναφορά στη συνέχεια.

Λέξεις κλειδιά:

Θραυσμένα αντικείμενα, αυτόματη ανακατασκευή, προϊστορικά αγγεία.

Abstract :

In this thesis, initially, a report on principles of the theory of curves and surfaces, in differential geometry, takes place. These principles are the mathematical background of this thesis. The understanding of basic concepts such as curve , surface and other sizes-tools which surround them, is emphasized thanks to which the approach to automatic reconstruction of fragments is feasible.

Then, follows a description of the processing that was applied in three-dimensional representations of broken vessels. These representations derived from the three-dimensional scan of the real fragments with three-dimensional scanner.

The above process is a preliminary step for the implementation of a new method which is an effective solution to the problem of automatic virtual reconstruction of broken vessels to which reference is made below.

Key-words:

Fragmented objects, automatic reassembly, archeological vessels.

Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω, θερμά, τον καθηγητή μου, κ. Κωνσταντίνο Παπαοδυσσέα, για την ανάθεση της παρούσας διπλωματικής εργασίας και για την πολύτιμη επίβλεψή του κατά την διάρκεια της εκπόνησής της. Ακόμη, τον κ. Δημήτρη Αραμπατζή, ο οποίος ήταν ο υπεύθυνος για την εργασία και μου παρείχε την απαραίτητη καθοδήγηση, όπου αυτή χρειάστηκε. Τέλος, να ευχαριστήσω την οικογένειά μου η οποία με στήριζε πάντα, καθώς και τους φίλους και συμφοιτητές μου Ηλία και Γιάννη για την καταλυτική βοήθεια που μου προσέφεραν κατά τα τελευταία χρόνια της φοιτητικής μου ζωής.

Γιάννης Κοτζάς.

Πίνακας περιεχομένων

1. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ	13
2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ	15
2.1 Χρήσιμοι Ορισμοί για τις Καμπύλες.....	15
2.2 Καμπυλότητα Καμπύλης και Χρήσιμα Θεωρήματα.....	16
2.2.1 Ο Κύκλος.....	16
2.2.2 Εγγύτατος Κύκλος - Καμπυλότητα Καμπύλης με Παράμετρο το Μήκος της.....	19
2.2.3 Η Καμπυλότητα μίας Καμπύλης με Τυχαία Παράμετρο	20
2.3 Ορισμοί και θεωρήματα στις Κωνικές Τομές.....	21
2.3.1 Η Έλλειψη	21
2.3.2 Η Υπερβολή.....	25
2.3.3 Η Παραβολή	30
2.3.4 Έλλειψη – Υπερβολή – Παραβολή : Τομές Ορθού Κώνου με Επίπεδο	32
2.4 Εγγύτατη Σφαίρα.....	35
2.4.1 Τάξη Επαφής Καμπύλης και Επιφάνειας - Εγγύτατο Επίπεδο	35
2.4.2 Το Τρίεδρο του Frenet.....	36
2.4.3 Τύποι του Frenet	38
2.4.4 Κέντρο Καμπυλότητας – Πολική Ευθεία	40
2.4.5 Η Στρέψη και η Καμπυλότητα μέσω των τύπων του Frenet.....	40
2.4.6 Ο Ορισμός της Εγγύτατης Σφαίρας	42
2.5 Ορισμός επιφάνειας.....	44
2.6 Το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο	49
2.7 Στοιχειώδες Εμβαδόν Επιφάνειας	51
3. ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΤΩΝ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ	55
3.1 Οι απεικονίσεις	55
3.2 Η ανώτερη, η κατώτερη και η πλευρική επιφάνεια των θραυσμάτων	60
3.3 Τα περιγράμματα-όρια της ανώτερης και κατώτερης επιφάνειας των θραυσμάτων .	69
4. ΑΥΤΟΜΑΤΗ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΑΓΓΕΙΩΝ - ΣΧΕΤΙΚΑ ΕΡΓΑ.....	82
Βιβλιογραφία	87

1

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο γενικότερος στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ανάδειξη και αξιοποίηση δυνατοτήτων που μας δίνει ο ηλεκτρονικός υπολογιστής, όπως είναι η χρησιμοποίησή του για την διευκόλυνση των ερευνητών στην μελέτη, ανασύνθεση και διάσωση αρχαιολογικών δεδομένων αλλά και στην επίλυση προβλημάτων τα οποία ανέκυπταν στο έργο τους.

Πιο συγκεκριμένα, σκοπός της εργασίας αυτής είναι η επεξεργασία τρισδιάστατων απεικονίσεων θραύσματος αγγείων αρχαιολογικής αξίας η οποία είναι απαραίτητη για την χρησιμοποίησή τους στην μέθοδο της αυτόματης ανασυγκρότησης θραυσμένων αγγείων η οποία παρουσιάζεται στην δημοσίευση [1].

Επίσης, με αναφορά σε αρχές της διαφορικής γεωμετρίας αναδεικνύεται η αναγκαιότητα της γνώσης αυτής προκειμένου να υλοποιηθεί η προσέγγιση στα όσα πραγματεύεται η παρούσα εργασία.

2

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

2.1 Χρήσιμοι Ορισμοί για τις Καμπύλες

(από [2])

Θεωρούμε ως καμπύλη στον χώρο \mathfrak{R}^n το σύνολο των σημείων, δηλαδή το σύνολο των διατεταγμένων n -άδων, των οποίων όλες οι συνιστώσες εξαρτώνται συναρτησιακά από μόνο μία ελεύθερη μεταβλητή της οποίας οι τιμές βρίσκονται σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathfrak{R}$. Με άλλα λόγια, καμπύλη είναι το σύνολο των σημείων $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, με $t \in I$, που προκύπτουν από μία απεικόνιση $(I \rightarrow \mathfrak{R}^n)$ σε διατεταγμένη n -άδα.

Ονομάζουμε C_n ομαλή (ή απλώς C_n) μία καμπύλη όταν η επιβατική της ακτίνα $\mathbf{r}(t)$ έχει όλες τις παραγώγους μέχρι και τάξεως n και επιπλέον η n -οστή είναι συνεχής.

Επειδή η ύπαρξη της παραγώγου n -τάξης συνεπάγεται την συνέχεια της $(n-1)$ -τάξης παραγώγου, συμπεραίνεται ότι μία C_n καμπύλη καθώς και όλες οι παράγωγοι του $\mathbf{r}(t)$, μέχρι n -τάξης, είναι συνεχείς.

Μία καμπύλη ονομάζεται τμηματικά C_n και συμβολίζεται με C_n^t , όταν είναι ένωση C_n καμπύλων. Συνήθως ονομάζουμε C_0^t τις απλώς τμηματικά συνεχείς καμπύλες.

Όταν μία καμπύλη έχει συνεχείς όλες τις παραγώγους μέχρι $(n-1)$ -τάξης αλλά η n -τάξης παράγωγος του $\mathbf{r}(t)$ υπάρχει παντού εκτός ενδεχομένως από ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων (δηλαδή η $\mathbf{r}(t)$ υπάρχει τμηματικά) τότε ονομάζουμε την καμπύλη αυτή C_{n-} καμπύλη.

Για να ορίσουμε την επιβατική ακτίνα σε τυχαίο σημείο της καμπύλης θεωρούμε :

$M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ τυχαίο σημείο μίας τυχαίας καμπύλης $C \subset \mathfrak{R}^n$,

O η αρχή των αξόνων,

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ μία ορθοκανονική βάση του \mathfrak{R}^n ,

t η παράμετρος της καμπύλης και

t_M η τιμή της t η οποία αντιστοιχεί στο σημείο M

Τότε η επιβατική ακτίνα στο σημείο M είναι :

$$\mathbf{r}(t_M) = \overrightarrow{OM} = \mathbf{OM} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \quad (2.1.1)$$

Το εφαπτόμενο και το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα μίας καμπύλης :

Για μία καμπύλη $C \subset \mathfrak{R}^n$ με ανεξάρτητη μεταβλητή την t και ένα τυχαίο σημείο της το $M(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις $x_1(t), x_2(t), \dots$ και $x_n(t)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα I . Τότε το διάνυσμα

$$\mathbf{r}'(t) = x_1'(t)\mathbf{e}_1 + x_2'(t)\mathbf{e}_2 + \dots + x_n'(t)\mathbf{e}_n$$

εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο M .

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα \mathbf{t} στο τυχαίο σημείο M θα είναι:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

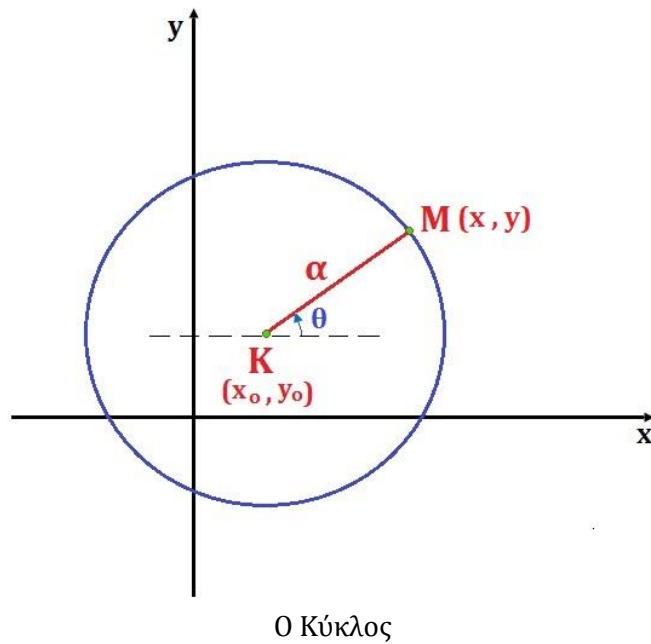
Αν είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο I οι συναρτήσεις $x_1(t), x_2(t), \dots$ και $x_n(t)$, τότε με την σχέση $\mathbf{r}''(t) = x_1''(t)\mathbf{e}_1 + x_2''(t)\mathbf{e}_2 + \dots + x_n''(t)\mathbf{e}_n$ μπορούμε να ορίσουμε την δεύτερη παράγωγο της επιβατικής ακτίνας. Κατ'επέκταση, μπορούμε για το διάνυσμα της επιβατικής ακτίνας να ορίσουμε και τις παραγώγους ανώτερης τάξης.

2.2 Καμπυλότητα Καμπύλης και Χρήσιμα Θεωρήματα

(από [2])

2.2.1 Ο Κύκλος

Έστω κύκλος ακτίνας α , με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$, M ένα τυχαίο σημείο του και θ η πολική γωνία, δηλαδή η προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζει το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{i} του άξονα x με το διάνυσμα της επιβατικής ακτίνας \mathbf{KM} .



Τότε οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου με παράμετρο την πολική γωνία θ , είναι :

$$x(\theta) = x_0 + \alpha \cos(\theta)$$

$$y(\theta) = y_0 + \alpha \sin(\theta)$$

Διαφορίζοντας τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε για το στοιχειώδες μήκος του κύκλου ότι :

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx(\theta))^2 + (dy(\theta))^2} = \sqrt{(x'(\theta)d\theta)^2 + (y'(\theta)d\theta)^2} = \\ &= \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} d\theta = \alpha d\theta \end{aligned}$$

Άρα, ολοκληρώνοντας την παραπάνω, καταλήγουμε σε αυτό που πρώτος παρατήρησε και απέδειξε ο Αρχιμήδης, ότι το μήκος του κύκλου είναι

$$s = \alpha \theta .$$

Η μορφή που παίρνουν οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου, επιλύοντας την παραπάνω ως προς θ και αντικαθιστώντας το σε αυτές είναι :

$$x(s) = x_0 + \alpha \cos\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

$$y(s) = y_0 + \alpha \sin\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Έτσι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στον κύκλο γίνεται :

$$\mathbf{r}'(s) = x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{r}'(s) = -\sin\left(\frac{s}{\alpha}\right)\mathbf{i} + \cos\left(\frac{s}{\alpha}\right)\mathbf{j} \quad (2.2.1)$$

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα συμβολίζεται και ως \mathbf{t} . Όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το μήκος s του κύκλου τότε $\mathbf{t} = \mathbf{r}'(s)$ ενώ αν η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι τυχαία τότε :

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}. \quad (2.2.2)$$

Από την (2.2.1) με παραγωγήιση έχουμε :

$$\mathbf{r}''(s) = -\frac{1}{\alpha}\cos\left(\frac{s}{\alpha}\right)\mathbf{i} - \frac{1}{\alpha}\sin\left(\frac{s}{\alpha}\right)\mathbf{j} \quad <=>$$

$$\mathbf{r}''(s) = -\frac{1}{\alpha^2}(\mathbf{r}(s) - x_0\mathbf{i} - y_0\mathbf{j}) \quad <=>$$

$$\mathbf{r}''(s) = -\frac{1}{\alpha^2}\mathbf{KM} \quad <=> \quad \|\mathbf{r}''(s)\| = \frac{1}{\alpha}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε την ακτίνα του κύκλου από το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{r}''(s)$. Επιπλέον

$$\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) \equiv 1 \quad <=> \quad \frac{d}{ds}(\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s)) = 0 \quad <=>$$

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \cdot \mathbf{t}(s) = 0 \quad <=> \quad \mathbf{r}''(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0$$

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι το διάνυσμα $\mathbf{r}''(s)$ σε τυχαίο σημείο M του κύκλου δείχνει προς το κέντρο του, K και ισχύει ότι :

$$\mathbf{MK} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|^2}.$$

Άρα μπορούμε να ορίσουμε μονοσήμαντα έναν κύκλο γνωρίζοντας ένα τυχαίο του σημείο M και το διάνυσμα $\mathbf{r}''(s)$ στο M .

2.2.2 Εγγύτατος Κύκλος - Καμπυλότητα Καμπύλης με Παράμετρο το Μήκος της

Έστω τυχαία καμπύλη σε έναν χώρο της οποίας ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το μήκος της s . Για τον διδιάστατο (\mathcal{R}^2) και τρισδιάστατο χώρο (\mathcal{R}^3) ισχύουν αντίστοιχα :

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} \quad \text{και} \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$$

Επισημαίνουμε ότι :

$$d\mathbf{r} = ds \quad \text{και} \quad |\mathbf{r}'(s)| \equiv \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| \equiv \frac{|ds|}{ds} = 1$$

οπότε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{t}(s)$ στο τυχαίο σημείο A της καμπύλης ισούται με $\mathbf{r}'(s)$. Ισχύει ότι $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{r}''(s)$. Θεωρούμε μοναδικό κύκλο (K) ο οποίος περνάει από το ίδιο σημείο A της καμπύλης, έχει το ίδιο $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ με αυτή και βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το $\mathbf{t}(s)$. Θα αποδείξουμε ότι αν B είναι το σημείο $\mathbf{r}(s + ds)$ της καμπύλης και $\mathbf{t}(s + ds)$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμά της στο B τότε το B ανήκει και στον κύκλο K ενώ τα $\mathbf{t}(s)$ και $\mathbf{t}(s + ds)$ εφάπτονται και στον κύκλο (K) στα αντίστοιχα σημεία.

Απόδειξη :

Ισχύει ότι :

$$\mathbf{t}(s)\mathbf{t}(s) \equiv 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\mathbf{t}(s)\mathbf{t}(s)) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}\mathbf{t}(s) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}''(s)\mathbf{t}(s) = 0.$$

Δηλαδή το $\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{t}(s)$. Συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{t}(s)$ εφάπτεται και στον κύκλο (K) και στην καμπύλη αφού το $\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \mathbf{r}''(s)$ υποθέσαμε ότι είναι κοινό για την καμπύλη και τον κύκλο (K).

Ακόμη $\mathbf{r}(s + ds) = \mathbf{r}(s) + \mathbf{r}'(s)ds = \mathbf{r}(s) + \mathbf{t}(s)ds$ άρα και το $\mathbf{r}(s + ds)$ (δηλαδή το B) ανήκει στον κύκλο (K). Όντως αν O η αρχή των αξόνων και K το κέντρο του κύκλου (K), τα δεδομένα είναι ότι $\mathbf{OB} = \mathbf{r}(s + ds)$, $\mathbf{OA} = \mathbf{r}(s)$ οπότε και $\mathbf{OB} - \mathbf{OA} = \mathbf{r}'(s)ds = \mathbf{t}(s)ds$. Αλλά $\mathbf{OB} - \mathbf{OA} = \mathbf{KB} - \mathbf{KA}$ άρα $\mathbf{KB} = \mathbf{KA} + \mathbf{t}(s)ds$. Επίσης επειδή ο κύκλος (K) και η καμπύλη έχουν το ίδιο μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο A , το B ανήκει στον κύκλο (K).

Επίσης $\mathbf{t}(s + ds) = \mathbf{t}(s) + \frac{d\mathbf{t}}{ds}$. Αλλά τα $\mathbf{t}(s)$ και $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ είναι κοινά και στον κύκλο (K) και στην καμπύλη. Άρα το $\mathbf{t}(s + ds)$ εφάπτεται και αυτό στον κύκλο (K) στο σημείο B .

Επειδή ο κύκλος (K) έχει με την καμπύλη κοινά σημεία τα $\mathbf{r}(s)$ και $\mathbf{r}(s + ds)$ και κοινές εφαπτόμενες στα σημεία αυτά, ονομάζεται εγγύτατος κύκλος επειδή είναι η καλύτερη προσέγγιση δεύτερης τάξης της καμπύλης.

Οπότε ορίζουμε ως καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο A την καμπυλότητα του κύκλου (K). Επειδή από την υπόθεση ο κύκλος (K) έχει κοινό $\mathbf{r}''(s)$ με την καμπύλη, προφανώς η καμπυλότητά της στο A είναι :

$$\kappa = \|\mathbf{r}''(s)\|.$$

Κέντρο του εγγύτατου κύκλου είναι το σημείο :

$$\mathbf{q} = \mathbf{r}(s) + \frac{\mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|^2}$$

και η ακτίνα του, η οποία ονομάζεται εγγύτατη ακτίνα ή ακτίνα καμπυλότητας, είναι :

$$\rho = \frac{1}{\|\mathbf{r}''(s)\|} = \frac{1}{\kappa(s)}.$$

2.2.3 Η Καμπυλότητα μίας Καμπύλης με Τυχαία Παράμετρο

Έστω μία τυχαία καμπύλη στον διδιάστατο χώρο \mathbb{R}^2 με τυχαία μεταβλητή t :

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

Παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε :

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{ds} |\dot{\mathbf{r}}(t)| \Leftrightarrow \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{ds}$$

Όμως :

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} \quad \text{άρα} \quad \mathbf{t}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{ds}$$

Παραγωγίζοντας ως προς t και την παραπάνω παίρνουμε :

$$\frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \frac{ds}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} |\dot{\mathbf{r}}(t)| \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{\frac{d\mathbf{t}(t)}{dt}}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} \Leftrightarrow \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right| = \frac{\left| \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} \right|}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} = \frac{\left| \frac{d\mathbf{t}(t)}{dt} \right|}{\left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|} = \kappa \quad (2.2.3)$$

Στην τελευταία σχέση εκφράστηκε η καμπυλότητα κ συναρτήσει της ανεξάρτητης παραμέτρου t .

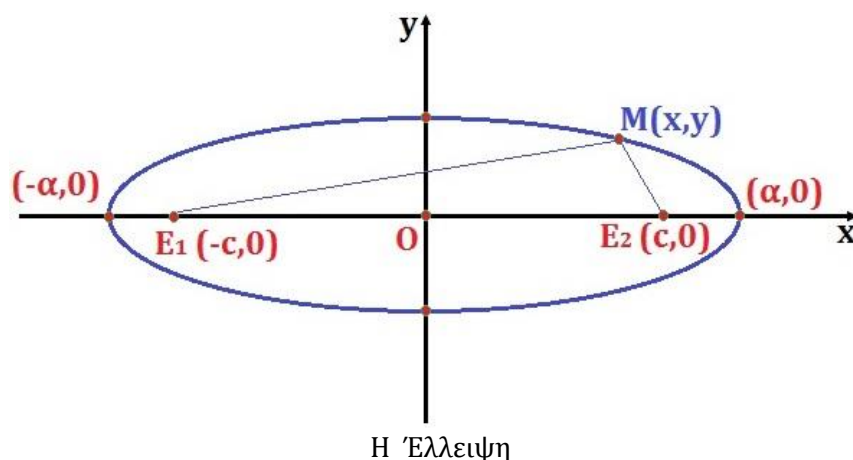
Αναφορές στην καμπυλότητα γίνονται σε έρευνες όπως η [3].

2.3 Ορισμοί και θεωρήματα στις Κωνικές Τομές

(από [2])

2.3.1 Η Έλλειψη

Έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων για τα οποία το άθροισμα των αποστάσεών τους από δύο σταθερά σημεία E_1 και E_2 (τα οποία ονομάζουμε εστίες) είναι σταθερό.



Ονομάζουμε 2α το σταθερό άθροισμα, ενώ θεωρούμε ότι οι εστίες βρίσκονται στον άξονα x και συγκεκριμένα στα σημεία $(-c, 0)$ και $(c, 0)$ με $c < \alpha$, οπότε στο μέσον του E_1E_2 βρίσκεται η αρχή των αξόνων O . Εάν $M(x,y)$ είναι ένα τυχαίο σημείο της έλλειψης τότε σύμφωνα με τα παραπάνω :

$$2\alpha = ME_1 + ME_2 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$4\alpha^2 = (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$2\alpha^2 = x^2 + y^2 + c^2 + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$2\alpha^2 - x^2 - y^2 - c^2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + x^2c^2 - \alpha^2x^2 - \alpha^2c^2 - \alpha^2y^2 = 0$$

Εάν θέσουμε $b^2 = \alpha^2 - c^2$ προκύπτει :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.3.1)$$

Τα σημεία της έλλειψης ικανοποιούν την εξίσωση (2.3.1) από την οποία διαπιστώνουμε συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων αλλά και προς τους άξονες x και y . Επίσης τέμνει τον x στα σημεία $(-\alpha, 0)$ και $(\alpha, 0)$ ενώ τον y στα $(0, -b)$ και $(0, b)$.

Η παραπάνω εξίσωση αφορά έλλειψη της οποίας οι άξονες είναι οι άξονες των συντεταγμένων και δεν μπορεί να θεωρηθεί η γενικότερη. Προκειμένου να βρούμε μία γενικότερη εξίσωση θα στρέψουμε, αρχικά, την έλλειψη γύρω από την αρχή των αξόνων αντιωρολογιακά κατά γωνία φ . Έτσι ένα τυχαίο σημείο (x, y) της έλλειψης μεταφέρεται στο σημείο (X, Y) του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται από την σχέση :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

Από την παραπάνω παίρνουμε :

$$\begin{aligned} x &= X \cos\varphi + Y \sin\varphi \\ y &= -X \sin\varphi + Y \cos\varphi \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις δύο στην (2.3.1) και θέτοντας

$$\begin{aligned} A &= b^2 \cos^2\varphi + \alpha^2 \sin^2\varphi \\ B &= b^2 \sin^2\varphi + \alpha^2 \cos^2\varphi \\ C &= (b^2 - \alpha^2) 2 \sin\varphi \cos\varphi \end{aligned}$$

$$F = -\alpha^2 b^2$$

προκύπτει :

$$AX^2 + BY^2 + CXY + F = 0 \quad (2.3.3)$$

Ονομάζουμε διακρίνουσα την ποσότητα $\Delta = 4AB - C^2$. Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει ότι $\Delta = 4\alpha^2 b^2$ οπότε διαπιστώνουμε ότι η Δ είναι ανεξάρτητη από την περιστροφή της έλλειψης και επιπλέον είναι πάντα θετική.

Ένας άλλος τρόπος για να διατυπώσουμε μία γενικότερη εξίσωση για την έλλειψη είναι να λάβουμε υπόψιν και μία πιθανή παράλληλη μετατόπιση του κέντρου της. Έστω σημείο $M(x, y)$ μίας έλλειψης η οποία έχει άξονες παράλληλους προς του άξονες των συντεταγμένων και το κέντρο της βρίσκεται στο σημείο (x_0, y_0) . Αν περιστρέψουμε την έλλειψη αντιωρολογιακά κατά γωνία φ τότε το σημείο M μετατοπίζεται στο σημείο $N(X, Y)$. Για να βρούμε την σχέση που συνδέει τα X, Y θα πρέπει πρώτα να μετατοπίσουμε την έλλειψη ώστε το κέντρο της να συμπίσει με την αρχή των αξόνων οπότε το σημείο $M(x, y)$ μετατοπίζεται στο $M'(x - x_0, y - y_0)$ του οποίου οι συντεταγμένες θα επαληθεύουν την εξίσωση :

$$\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (2.3.4)$$

Περιστρέφοντας στην καινούρια της θέση την έλλειψη γύρω από την αρχή των αξόνων, το σημείο $M'(x - x_0, y - y_0)$ μεταφέρεται στο σημείο $N'(u, v)$ για τις συμτεταγμένες του οποίου θα ισχύει :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \quad (2.3.5)$$

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Τέλος, για να μετατοπιστεί το σημείο $N'(u, v)$ στο σημείο $N(X, Y)$ θα πρέπει να μετατοπιστεί κατά (x_0, y_0) θα πρέπει :

$$\begin{aligned} X &= u + x_0, & Y &= v + y_0 \\ u &= X - x_0, & v &= Y - y_0 \end{aligned} \Leftrightarrow \quad (2.3.6)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις, (2.3.6), στην (2.3.5) προκύπτει :

$$\begin{aligned} (x - x_0) &= (X - x_0)\cos\varphi + (Y - y_0)\sin\varphi \\ (y - y_0) &= -(X - x_0)\sin\varphi + (Y - y_0)\cos\varphi \end{aligned} \Leftrightarrow \quad (2.3.7)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις (2.3.7) στην (2.3.4), κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών αναγωγή ομοίων όρων και αφού θέσουμε :

$$\begin{aligned}
A &= b^2 \cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi \\
B &= b^2 \sin^2 \varphi + \alpha^2 \cos^2 \varphi \\
C &= (b^2 - \alpha^2) 2 \sin \varphi \cos \varphi \\
D &= -2x_0 (b^2 \cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi) + 2 y_0 \sin \varphi \cos \varphi (\alpha^2 + b^2) \\
E &= -2y_0 (b^2 \sin^2 \varphi + \alpha^2 \cos^2 \varphi) + 2 x_0 \sin \varphi \cos \varphi (\alpha^2 + b^2) \\
F &= b^2 (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)^2 + \alpha^2 (x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi)^2 - \alpha^2 b^2
\end{aligned}$$

προκύπτει η γενική εξίσωση της έλλειψης :

$$AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F \quad (2.3.8)$$

Η διακρίνουσα $\Delta = 4AB - C^2$ εξακολουθεί να είναι πάντα θετική και ανεξάρτητη από την θέση της έλλειψης.

Παρατηρώντας την γενική εξίσωση της έλλειψης εξάγουμε ότι :

$$A - B = (b^2 - \alpha^2)(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = (b^2 - \alpha^2)\cos 2\varphi$$

και

$$C = (b^2 - \alpha^2)\sin 2\varphi$$

οπότε :

$$\tan 2\varphi = \frac{C}{A - B} .$$

Μπορούμε, δηλαδή, έχοντας την γενική εξίσωση της έλλειψης, να υπολογίσουμε την γωνία φ που πρέπει να περιστρέψουμε μία έλλειψη ώστε οι άξονες συμμετρίας της να γίνουν παράλληλοι με τους άξονες των συντεταγμένων. Στη συνέχεια με γνωστή την γωνία φ μπορούμε να υπολογίσουμε τα α , b από τα A , B , C .

Ας θεωρήσουμε μία έλλειψη με άξονες συμμετρίας τους x , y και ένα επίπεδο το οποίο διέρχεται από τον άξονα x σχηματίζοντας γωνία γ με το επίπεδο xy για την οποία ισχύει :

$$\cos \gamma = \frac{b}{\alpha} .$$

Έστω κύκλος K αυτού του επιπέδου με ακτίνα α και κέντρο την αρχή των αξόνων O . Η προβολή αυτού του κύκλου στο xy επίπεδο είναι η έλλειψη που περιγράψαμε με την εξίσωση (2.3.1). Αυτό για να αποδειχθεί θεωρούμε, αρχικά, τις (x, v) συντεταγμένες του πλάγιου επιπέδου, οπότε η εξίσωση του κύκλου K σε πολικές συντεταγμένες, πάνω σε αυτό το επίπεδο, θα είναι $x = \alpha \cos \theta$, $v = b \sin \theta$. Να υπενθυμίσουμε ότι κάθε σημείο του κύκλου K και το αντίστοιχο σημείο της έλλειψης (2.3.1) έχουν πάντα κοινή τετμημένη ενώ η τεταγμένη της προβολής του στο xy επίπεδο θα είναι :

$$y = v \cos \gamma = \frac{b}{\alpha} \alpha \sin \theta = b \sin \theta$$

Συνεπώς η προβολή του κύκλου K στο xy επίπεδο είναι οι εξισώσεις :

$$\begin{aligned} x &= a \cos\theta \\ y &= b \sin\theta \quad \text{όπου } \theta \in [0, 2\pi) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

δηλαδή συμπίπτει με την έλλειψη (2.3.1) απλώς η γωνία θ δεν είναι η πολική γωνία της έλλειψης, αλλά η πολική γωνία του κύκλου στο επίπεδό του.

2.3.2 Η Υπερβολή

Υπερβολή ονομάζουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία η διαφορά των αποστάσεών τους από δύο σταθερά σημεία E_1 και E_2 (τα οποία ονομάζουμε εστίες της υπερβολής) είναι σταθερή κατά απόλυτη τιμή και έστω ότι είναι ίση με 2α . Ας θεωρήσουμε, αρχικά, ότι τα E_1 και E_2 βρίσκονται, αντίστοιχα, στα σημεία $(-c, 0)$ και $(c, 0)$ του άξονα x , με $c > \alpha$. Οπότε :

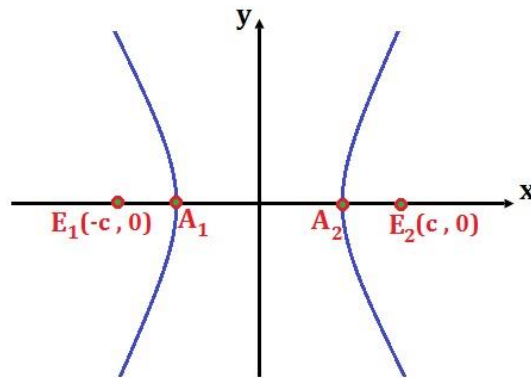
$$\begin{aligned} 2\alpha &= |ME_1 - ME_2| \Leftrightarrow \\ 2\alpha &= |\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| \Leftrightarrow \\ 4\alpha^2 &= (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ 2\alpha^2 &= x^2 + c^2 + y^2 - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ 2\alpha^2 - x^2 - c^2 - y^2 &= -\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ \alpha^4 + x^2c^2 - \alpha^2x^2 - \alpha^2x^2 - \alpha^2y^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Επειδή έχουμε θέσει $c > \alpha$, το σημείο του άξονα x με συντεταγμένες $(\alpha, 0)$ το οποίο βρίσκεται μεταξύ των δύο εστιών ικανοποιεί την εξίσωση της έλλειψης άρα ανήκει στον γεωμετρικό τόπο της. Θέτοντας $b^2 = c^2 - \alpha^2$ με $b \in \mathfrak{R}$ και αντικαθιστώντας στην (2.3.10) προκύπτει :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.3.11)$$

Παρατηρούμε ότι για $y=0$ προκύπτει $x = \pm\alpha$ δηλαδή η υπερβολή τέμνει τον άξονα x στα σημεία $(-\alpha, 0)$ και $(\alpha, 0)$ τα οποία βρίσκονται ανάμεσα στις εστίες.

Ακόμη, για $x=0$ η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις το οποίο σημαίνει ότι η υπερβολή δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα y . Τέλος, παρατηρούμε ότι για κάθε σημείο (x, y) που ανήκει στην υπερβολή τότε και τα σημεία $(-x, y)$, $(-x, -y)$ και $(x, -y)$ ανήκουν σε αυτή. Άρα η υπερβολή έχει άξονες συμμετρίας τους x και y (δηλαδή τους άξονες που ορίζουν οι εστίες και η μεσοκάθετός τους), σημείο συμμετρίας το μέσο των εστιών και επιπλέον επειδή δεν τέμνει τον άξονα y συμπεραίνουμε πως έχει δύο κλάδους.



Η Υπερβολή

Θα γενικεύσουμε, τώρα, την εξίσωση (2.3.11), η οποία περιγράφει υπερβολή της οποίας οι άξονες είναι οι άξονες των συντεταγμένων στρέφοντάς την αντιωρολογιακά γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία φ . Έτσι το τυχαίο σημείο (x, y) της υπερβολής μεταφέρεται στο σημείο (X, Y) για το οποίο ισχύει :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Από την παραπάνω προκύπτει ότι :

$$x = X\cos\varphi + Y\sin\varphi$$

και

$$y = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi$$

τις αντικαθιστούμε στην (2.3.11) και θέτοντας :

$$\begin{aligned}
A &= b^2 \cos^2 \varphi - \alpha^2 \sin^2 \varphi \\
B &= b^2 \sin^2 \varphi - \alpha^2 \cos^2 \varphi \\
C &= (\alpha^2 + b^2) 2 \sin \varphi \cos \varphi \\
F &= -\alpha^2 b^2
\end{aligned}$$

παίρνουμε :

$$A X^2 + B Y^2 + C X Y + F = 0 \quad (2.3.13)$$

Υπολογίζουμε και εδώ την διακρίνουσα Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4AB - C^2 \quad \Leftrightarrow \\
\Delta &= -4\alpha^2 b^2 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) \quad \Leftrightarrow \\
\Delta &= -4\alpha^2 b^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2 \quad \Leftrightarrow \\
\Delta &= -4\alpha^2 b^2
\end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι, όπως και στην έλλειψη, η διακρίνουσα είναι ανεξάρτητη από την περιστροφή της υπερβολής αλλά εδώ είναι πάντα αρνητική.

Συνεχίζοντας την γενίκευση της εξίσωσης της υπερβολής θα θεωρήσουμε μία υπερβολή τις οποίας οι άξονες είναι παράλληλοι προς στους άξονες των συντεταγμένων και το κέντρο της βρίσκεται στη θέση (x_0, y_0) οπότε η εξίσωσή της θα είναι :

$$\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (2.3.14)$$

Στην περίπτωση που υπερβολή είναι περιστραμμένη γύρω από το (x_0, y_0) τότε αφού την μετατοπίσουμε παράλληλα προς τους άξονες θα πρέπει να την περιστρέψουμε όπως πριν και αν θέσουμε $U = X - x_0$ και $V = Y - y_0$ τότε έχουμε :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - x_0 \\ Y - y_0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \\
\begin{bmatrix} X - x_0 \\ Y - y_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \quad (2.3.15)
\end{aligned}$$

από την οποία παίρνουμε τις σχέσεις :

$$x = U \cos \varphi + V \sin \varphi + x_0 = (X - x_0) \cos \varphi + (Y - y_0) \sin \varphi + x_0$$

και

$$y = -U \sin\varphi + V \cos\varphi + y_0 = -(X - x_0)\sin\varphi + (Y - y_0)\cos\varphi + y_0$$

Από αυτές τις δύο σχέσεις και αν θέσουμε :

$$A = b^2 \cos^2\varphi - \alpha^2 \sin^2\varphi$$

$$B = b^2 \sin^2\varphi - \alpha^2 \cos^2\varphi$$

$$C = (\alpha^2 + b^2) 2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$D = -2x_0 (b^2 \cos^2\varphi - \alpha^2 \sin^2\varphi) - 2y_0 \sin\varphi \cos\varphi (\alpha^2 + b^2)$$

$$E = -2y_0 (b^2 \sin^2\varphi - \alpha^2 \cos^2\varphi) - 2x_0 \sin\varphi \cos\varphi (\alpha^2 + b^2)$$

$$F = b^2(x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi)^2 - \alpha^2(x_0 \sin\varphi - y_0 \cos\varphi)^2 - \alpha^2 b^2$$

προκύπτει η γενική εξίσωση της υπερβολής:

$$A X^2 + B Y^2 + C X Y + D X + E Y + F = 0 \quad (2.3.16)$$

Γνωρίζοντας την γενική εξίσωση της υπερβολής μπορούμε να υπολογίσουμε την γωνία με την οποία αν την περιστρέψουμε, οι άξονές της θα γίνουν παράλληλοι με τους άξονες των συντεταγμένων και στη συνέχεια να υπολογίσουμε από τα A, B, C τα α και b .

Αναλυτικότερα :

$$A - B = (\alpha^2 + b^2)\cos 2\varphi \quad \text{και} \quad C = (\alpha^2 + b^2)\sin 2\varphi$$

οπότε

$$\tan 2\varphi = \frac{C}{A - B} .$$

Χρησιμοποιώντας τους υπερβολικούς τριγωνομετρικούς αριθμούς μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (2.3.11) με μία άλλη μορφή παίρνοντας έτσι την «πολική» εξίσωση της υπερβολής. Το υπερβολικό ημίτονο και υπερβολικό συνημίτονο ορίζονται αντίστοιχα από τους παρακάτω τύπους :

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{και} \quad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} .$$

Κάνοντας πράξεις με τους παραπάνω ορισμούς προκύπτουν οι σχέσεις :

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

$$\sinh(2t) = 2 \sinh(t) \cosh(t)$$

$$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) .$$

Για να γράψουμε την «πολική» εξίσωση της (2.3.11) για τον θετικό κλάδο αρχικά χρησιμοποιούμε την παράμετρο $t \in \mathfrak{R}$ με την προϋπόθεση ότι :

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{b} = e^t \quad \text{και} \quad \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{b} = e^{-t} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{\alpha} = \cosh(t) \quad \text{και} \quad \frac{y}{b} = \sinh(t).$$

Έτσι οι «πολικές» εξισώσεις της υπερβολής είναι :

$$x = \alpha \cosh(t) \quad \text{και} \quad y = b \sinh(t) \quad (2.3.17)$$

για τον θετικό κλάδο, ενώ :

$$x = -\alpha \cosh(t) \quad \text{και} \quad y = b \sinh(t) \quad (2.3.18)$$

για τον αρνητικό.

Τέλος, από την εξίσωση (2.3.14) της υπερβολής παρατηρούμε ότι για $x, y \rightarrow \infty$ και οι δύο κλάδοι της υπερβολής τείνουν να ταυτιστούν με δύο ευθείες οι οποίες ονομάζονται ασύμπτωτες της υπερβολής. Πιο συγκεκριμένα :

$$\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2(x - x_0)^2} = \frac{1}{(x - x_0)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2(x - x_0)^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{(x - x_0)^2} \quad \Leftrightarrow$$

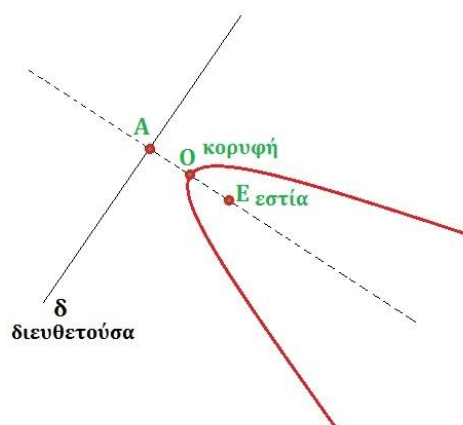
$$\frac{(y - y_0)^2}{(x - x_0)^2} = \frac{b^2}{\alpha^2} - \frac{b^2}{(x - x_0)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \begin{cases} \sqrt{\frac{b^2}{\alpha^2} - \frac{b^2}{(x - x_0)^2}} & , \text{ για } (y - y_0)(x - x_0) > 0 \\ -\sqrt{\frac{b^2}{\alpha^2} - \frac{b^2}{(x - x_0)^2}} & , \text{ για } (y - y_0)(x - x_0) < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{b}{\alpha} & , \text{ για } (y - y_0)(x - x_0) > 0 \\ -\frac{b}{\alpha} & , \text{ για } (y - y_0)(x - x_0) < 0 \end{cases} \quad (2.3.19)$$

2.3.3 Η Παραβολή

Παραβολή ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ τα οποία ισαπέχουν από μία ευθεία δ (η οποία ονομάζεται διευθετούσα) και από ένα σημείο E το οποίο δεν ανήκει στη δ (και ονομάζεται εστία) :



Η Παραβολή

Έστω ότι διευθετούσα είναι ο άξονας x και η εστία $E(0, y_0)$ βρίσκεται επί του άξονα y . Προφανώς η απόσταση του τυχαίου σημείου $M(x, y)$ από την διευθετούσα είναι y και από την εστία είναι

$$ME = \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}.$$

Άρα για κάθε σημείο $M(x, y)$ θα πρέπει να ισχύει :

$$y^2 = x^2 + (y - y_0)^2 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{x^2}{2y_0} + \frac{y_0}{2} \tag{2.3.20}$$

Εάν η εστία ήταν το σημείο $E(x_0, y_0)$ και διευθετούσα η ευθεία $y = y_1$ με $y \neq y_1$ τότε για το τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της παραβολής θα ισχύει :

$$y - y_1 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \Leftrightarrow$$

$$y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Εάν στην παραπάνω θέσουμε

$$\alpha = \frac{1}{2(y_0 - y_1)}, \quad b = \frac{x_0}{y_1 - y_0}, \quad c = \frac{x_0^2 + y_0^2 + y_1^2}{2(y_0 - y_1)}$$

τότε παίρνει την μορφή :

$$y = \alpha x^2 + bx + c \quad (2.3.21)$$

Η γενική εξίσωση της παραβολής με εστία τυχαίο σημείο και διευθετούσα τυχαίας διεύθυνσης θα είναι, όπως και στην περίπτωση της έλλειψης και της υπερβολής :

$$A X^2 + B Y^2 + C X Y + D X + E Y + F = 0 \quad (2.3.22)$$

της οποίας οι συντελεστές είναι :

$$A = \alpha \cos^2 \varphi$$

$$B = \alpha \sin^2 \varphi$$

$$C = 2\alpha \cos \varphi \sin \varphi$$

$$D = b \cos \varphi + \sin \varphi$$

$$E = b \sin \varphi - \cos \varphi$$

$$F = c$$

Η διακρίνουσα $\Delta = 4 A B - C^2$ είναι πάντα μηδενική και

$$\tan 2\varphi = \frac{C}{A - B}. \quad (2.3.23)$$

2.3.4 Έλλειψη – Υπερβολή – Παραβολή : Τομές Ορθού Κώνου με Επίπεδο

Θα εξετάσουμε τώρα μία ειδική περίπτωση σχετικά με την υπερβολή. Θεωρούμε έναν κώνο του οποίου άξονας είναι ο άξονας z . Θα αποδείξουμε την εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

της υπερβολής αντικαθιστώντας την μεταβλητή x με την z . Εάν γ είναι η γωνία, ως προς τον άξονα z , μίας γενέτειρας του κώνου τότε, σε σφαιρικές συντεταγμένες, οι εξισώσεις που τον περιγράφουν είναι :

$$\begin{aligned}x &= r \sin\gamma \cos\varphi \\y &= r \sin\gamma \sin\varphi \\z &= r \cos\gamma\end{aligned}\tag{2.3.24}$$

Τέμνοντας τον κώνο με το επίπεδο $x = x_1$ το οποίο είναι παράλληλο στον άξονα z παίρνουμε :

$$\begin{aligned}r^2 \cos^2\varphi &= \frac{x_1^2}{\sin^2\gamma} \\ \frac{y^2}{\sin^2\gamma} = r^2 \sin^2\varphi &= r^2 - r^2 \cos^2\varphi = \frac{z^2}{\cos^2\gamma} - \frac{x_1^2}{\sin^2\gamma} \quad \Leftrightarrow \\ \frac{z^2}{\cos^2\gamma} - \frac{y^2}{\sin^2\gamma} &= \frac{x_1^2}{\sin^2\gamma} \quad \Leftrightarrow \\ \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1\end{aligned}$$

Όπου $b = x_1$ και $a = r \cot\gamma$.

Θα εξετάσουμε τώρα μία γενική περίπτωση στην οποία ένα επίπεδο E παράλληλο προς τον άξονα x τέμνει το xy επίπεδο στην ευθεία $y = y_0$, ($y_0 < 0$) σχηματίζοντας δίεδρο γωνία β με αυτό για την οποία ισχύει :

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2} .$$

Οπότε οι συντεταγμένες κάθε σημείου του E επαληθεύουν την

$$z = (y - y_0) \tan\beta \quad (2.3.25)$$

Επιλέγουμε σύστημα αξόνων X, Y στο επίπεδο E τέτοιο ώστε ο άξονας Y να ταυτίζεται με την τομή του επιπέδου E με το επίπεδο yz και ο άξονας X να συμπίπτει με την ευθεία $y = y_0$. Οπότε :

$$X = x, \quad Y = \frac{z}{\sin\beta} \quad (2.3.26)$$

Τα σημεία τομής του κώνου με το επίπεδο E θα ικανοποιούν τις εξισώσεις (2.3.24) και (2.3.26) άρα :

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{Y \sin\beta}{\cos\gamma} \\ r \cos\varphi &= \frac{X}{\sin\gamma} \\ r \sin\varphi &= \frac{r \cos\gamma + y_0 \tan\beta}{\sin\gamma \tan\beta} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$Y^2 \left(\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\gamma} - \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma} \right) + X^2 \left(-\frac{1}{\sin^2\gamma} \right) + Y \frac{2y_0 \cos\beta}{\sin^2\gamma} - \frac{y_0^2}{\sin^2\gamma} = 0 \quad (2.3.27)$$

Όταν το επίπεδο E είναι παράλληλο στην γενέτειρα του κώνου, τότε :

$$\beta - \gamma = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + \gamma$$

οπότε

$$\sin\beta = \cos\gamma \quad \text{και} \quad \cos\beta = -\sin\gamma$$

και ο συντελεστής του Y^2 στην (2.3.27) γίνεται μηδέν. Οπότε έχουμε την εξίσωση της παραβολής.

Όταν το επίπεδο E δεν είναι παράλληλο στην γενέτειρα και ισχύει :

$$0 < \beta < \gamma + \frac{\pi}{2}$$

τότε τέμνει το πάνω μισό του κώνου. Επειδή το ημίτονο είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ θα ισχύει :

$$0 < \sin\beta < \cos\gamma \quad \text{άρα} \quad \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\gamma} < 1 .$$

Ομοίως επειδή το συνημίτονο είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ θα ισχύει: $-\sin\gamma < \cos\beta < 1$ οπότε:

$$\frac{\cos\beta}{|\sin\gamma|} > 1 \quad \text{άρα} \quad \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma} > 1 .$$

Από τις δύο τελευταίες κλασματικές ανισότητες προκύπτει για τον συντελεστή του Υ^2 στην σχέση (2.3.27) ότι:

$$\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\gamma} - \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma} < 0 .$$

Ακόμη, ο συντελεστής του X^2 στην ίδια σχέση είναι πάντα αρνητικός και σύμφωνα με την εξίσωση (2.3.8) και επειδή η διακρίνουσα $\Delta = 4 AB$ είναι πάντα θετική, η τομή του επιπέδου E με άνω μισό του κώνου είναι έλλειψη.

Όταν το επίπεδο E δεν είναι παράλληλο στην γενέτειρα και ισχύει

$$\beta - \gamma > \frac{\pi}{2} \quad \text{άρα} \quad \frac{\pi}{2} + \gamma < \beta < \frac{\pi}{2}$$

τότε τέμνει και τα δύο μισά του κώνου. Επειδή το ημίτονο είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση το διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ ισχύει:

$$\cos\gamma < \sin\beta \leq 1 \quad \text{άρα} \quad \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\gamma} > 1 .$$

Ομοίως, επειδή το συνημίτονο είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα

$[0, \frac{\pi}{2}]$ ισχύει:

$$-\sin\gamma > \cos\beta \geq 0 .$$

Άρα:

$$\frac{\cos\beta}{|\sin\gamma|} < 1 \quad \text{άρα} \quad \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma} < 1 .$$

Εδώ από τις δύο τελευταίες κλασματικές ανισότητες συμπεραίνουμε για τον συντελεστή του Υ^2 στην σχέση (2.3.27) ότι:

$$\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\gamma} - \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma} > 0 .$$

Επίσης, ο συντελεστής του X^2 στην ίδια σχέση είναι πάντα αρνητικός και σύμφωνα με την εξίσωση (2.3.8) και επειδή η διακρίνουσα $\Delta = 4 AB$ είναι πάντα αρνητική, η τομή του επιπέδου E με τον κώνο είναι υπερβολή.

2.4 Εγγύτατη Σφαίρα

(Από [4])

2.4.1 Τάξη Επαφής Καμπύλης και Επιφάνειας - Εγγύτατο Επίπεδο

Μία καμπύλη K με εξίσωση:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$$

και μία επιφάνεια S με εξίσωση:

$$F(x, y, z) = 0$$

λέμε ότι έχουν επαφή τάξης n στο κοινό τους σημείο $P(t_0)$ όταν για την συνάρτηση:

$$f(t) = F(r_1(t), r_2(t), r_3(t))$$

ισχύει:

$$f(t_0) = 0, \quad f'(t_0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(n)}(t_0) = 0 \quad \text{και} \quad f^{(n+1)}(t_0) \neq 0.$$

Ένα επίπεδο το οποίο έχει την υψηλότερη δυνατή τάξη επαφής με μία καμπύλη σε κάποιο σημείο της λέγεται εγγύτατο επίπεδο.

Μία καμπύλη $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ τάξης C^2 έχει εγγύτατο επίπεδο σε κάθε ομαλό σημείο $P_0(s_0)$ που δίνεται από την εξίσωση:

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}(s_0)) \mathbf{r}'(s_0) \mathbf{r}''(s_0) = 0.$$

και έχει τάξη επαφής ≥ 2 .

Η εξίσωση ενός επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $P(s_0)$ της καμπύλης και είναι κάθετο προς το τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{m} είναι:

$$F = (\mathbf{p} - \mathbf{r}(s_0)) \mathbf{m} = 0 \tag{2.4.1}$$

Σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε το \mathbf{m} ώστε το επίπεδο αυτό να έχει τη μέγιστη δυνατή τάξη επαφής με την καμπύλη. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση:

$$f = F(\mathbf{r}(t)) = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(s_0)) \mathbf{m}$$

την οποία παραγωγίζουμε ως προς t και έχουμε:

$$f(t_0) = 0$$

$$f'(t_0) = \dot{\mathbf{r}}(t_0) \mathbf{m}$$

$$f''(t_0) = \ddot{\mathbf{r}}(t_0) \mathbf{m}$$

Εάν λοιπόν το \mathbf{m} είναι κάθετο προς τα διανύσματα $\dot{\mathbf{r}}$ και $\ddot{\mathbf{r}}$ το επίπεδο (2.4.1) έχει τάξη επαφής τουλάχιστον 2 με την καμπύλη στο σημείο $P(s_0)$. Άρα $\mathbf{m} = \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$ και η (2.4.1) μπορεί να γραφεί :

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}(s_0)) \times \dot{\mathbf{r}}(s_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(s_0) = 0.$$

Εάν η καμπύλη έχει παράμετρο t , που δεν είναι το μήκος της, τότε έχουμε:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}' \frac{ds}{dt} \Rightarrow$$

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}') \frac{ds}{dt} + \mathbf{r}' \frac{d^2s}{dt^2} = \mathbf{r}'' \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathbf{r}' \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα διανύσματα $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$ και $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$ είναι συγγραμμικά διότι:

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

και επομένως, το εγγύτατο επίπεδο δίνεται από την εξίσωση:

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}(t_0)) \times \mathbf{r}'(t_0) \times \mathbf{r}''(t_0) = 0.$$

2.4.2 Το Τρίεδρο του Frenet

Σε κάθε σημείο μίας καμπύλης K προσαρτούμε τα εξής τρία μοναδιαία διανύσματα:

α) Το εφαπτόμενο διάνυσμα \mathbf{t} .

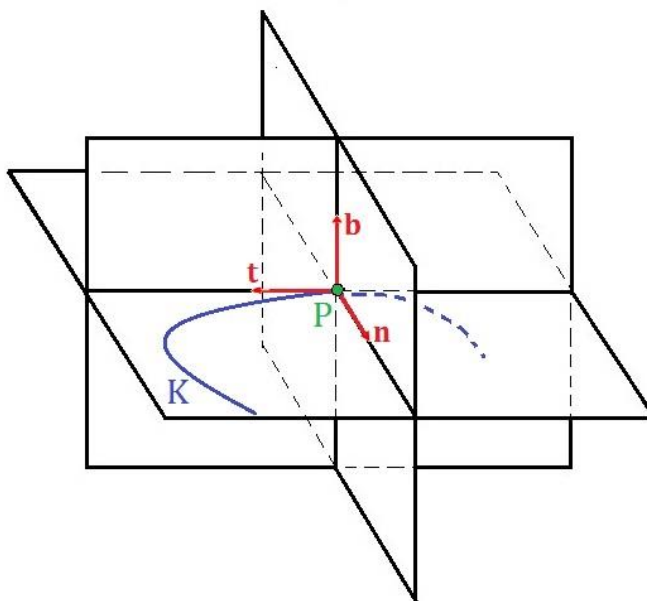
β) Το πρώτο κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} . Αυτό βρίσκεται στο εγγύτατο επίπεδο και έχει κατεύθυνση προς τα κοίλα της προβολής της καμπύλης επάνω στο εγγύτατο επίπεδο, δηλαδή το διάνυσμα \mathbf{n} δείχνει προς την κατεύθυνση του \mathbf{r}'' .

γ) Το δεύτερο κάθετο διάνυσμα \mathbf{b} το οποίο είναι κάθετο προς τα δύο προηγούμενα και με κατεύθυνση τέτοια ώστε η τριάδα $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ να αποτελεί μία θετικά προσανατολισμένη τριάδα διανυσμάτων.

Οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται αυτά τα διανύσματα λέγονται κατά σειρά εφαπτόμενη, πρώτη κάθετος και δεύτερη κάθετος.

Τα τρία επίπεδα που ορίζουν ανά δύο τα διανύσματα (\mathbf{t}, \mathbf{n}) , (\mathbf{t}, \mathbf{b}) και (\mathbf{n}, \mathbf{b}) λέγονται εγγύτατο, ευθαιοποιούν και κάθετο επίπεδο αντίστοιχα.

Το σχήμα που ορίζεται από αυτά τα τρία επίπεδα, οι ευθείες τομές τους και τα μοναδιαία διανύσματα που αναφέραμε πάνω σ'αυτές, λέγεται τριέδρο του Frenet (σχήμα 2.4.1) ή συνοδεύον τριέδρο της καμπύλης.



Σχήμα 2.4.1 : Το τριέδρο του Frenet

Έστω ότι η καμπύλη K έχει εξίσωση $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ όπου s η φυσική παράμετρος, τότε:

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}'.$$

Το διάνυσμα \mathbf{r}'' βρίσκεται στο εγγύτατο επίπεδο, και επειδή το \mathbf{r}' είναι μοναδιαίο διάνυσμα, το \mathbf{r}'' είναι κάθετο στο \mathbf{r}' , άρα:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|}$$

Έχουμε επίσης:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|}$$

Αυτές οι σχέσεις λοιπόν ισχύουν για τα διανύσματα $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ και τις παραγώγους της καμπύλης, όταν αυτή έχει παράμετρο s . Έστω τώρα ότι έχει τυχούσα παράμετρο t . Τότε:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' \frac{ds}{dt} = \mathbf{r}' |\dot{\mathbf{r}}(t)| \Rightarrow \mathbf{t} = \mathbf{r}' = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

επειδή $\frac{ds}{dt} = |\dot{\mathbf{r}}(t)|$.

Επίσης,

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \Rightarrow \mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| \times |\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{\ddot{\mathbf{r}} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - \dot{\mathbf{r}} (\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}})}{|\dot{\mathbf{r}}| |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}.$$

Είναι φανερό ότι όταν τα διανύσματα $\dot{\mathbf{r}}$ και $\ddot{\mathbf{r}}$ είναι συγγραμμικά, τότε οι τύποι αυτοί δεν ισχύουν, άρα και το τρίεδρο του Frenet δεν υπάρχει.

2.4.3 Τύποι του Frenet

Θα μελετήσουμε την συμπεριφορά του τρίεδρου Frenet όταν αυτό κινείται από σημείο σε σημείο της καμπύλης K . Θεωρούμε λοιπόν ότι υπάρχει το τρίεδρο, και παραγωγίζουμε τα τρία διανύσματα ως προς s , και έχουμε :

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = |\mathbf{r}''| \mathbf{n} = \kappa \mathbf{n}$$

Για να βρούμε τις παραγώγους των δύο άλλων διανυσμάτων \mathbf{n} και \mathbf{b} , θεωρούμε ότι έχουν την μορφή :

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b}$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \lambda \mathbf{t} + \mu \mathbf{n} + \nu \mathbf{b}$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτές με τα \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} έχουμε :

$$\alpha = \mathbf{t} \frac{d\mathbf{n}}{ds}, \quad \beta = \mathbf{n} \frac{d\mathbf{n}}{ds}, \quad \gamma = \mathbf{b} \frac{d\mathbf{n}}{ds}$$

$$\lambda = \mathbf{t} \frac{d\mathbf{b}}{ds}, \quad \mu = \mathbf{n} \frac{d\mathbf{b}}{ds}, \quad \nu = \mathbf{b} \frac{d\mathbf{b}}{ds}.$$

Από τις ταυτότητες :

$$\mathbf{t}^2 = \mathbf{n}^2 = \mathbf{b}^2 = 1, \quad \mathbf{t} \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{t} \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{n} \mathbf{b} = 0$$

προκύπτουν :

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0, & \quad \mathbf{n} \frac{d\mathbf{n}}{ds} = 0, & \quad \mathbf{b} \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0 \\ \mathbf{t} \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\mathbf{n} \frac{d\mathbf{t}}{ds}, & \quad \mathbf{t} \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\mathbf{b} \frac{d\mathbf{t}}{ds}, & \quad \mathbf{n} \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\mathbf{b} \frac{d\mathbf{n}}{ds}. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε :

$$\lambda = \beta = \nu = 0, \quad \gamma = -\mu \quad \text{και} \quad \alpha = -\kappa.$$

Θέτουμε :

$$\gamma = \tau$$

και έχουμε τελικά :

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n}$$

ή με μορφή πίνακα :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Οι συντελεστές κ και τ είναι η καμπυλότητα και η στρέψη της καμπύλης στο σημείο αυτό.

2.4.4 Κέντρο Καμπυλότητας – Πολική Ευθεία

Στα ομαλά σημεία μίας καμπύλης, για τα οποία $\kappa \neq 0$, υπάρχει εγγύτατος κύκλος ο οποίος βρίσκεται στο εγγύτατο επίπεδο, έχει τάξη επαφής τουλάχιστον 2 με την καμπύλη και έχει ακτίνα ίση με $1/\kappa$. Το κέντρο του βρίσκεται στην πρώτη κάθετο και προς το μέρος του διανύσματος $\ddot{\mathbf{r}}$.

Άρα το κέντρο καμπυλότητας ενός σημείου της καμπύλης $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ για την τιμή της παραμέτρου s_0 δίνεται και από τη σχέση :

$$\mathbf{q} = \mathbf{r}(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{n}(s_0)$$

ενώ η ακτίνα καμπυλότητας $\rho = 1/\kappa(s_0)$.

Η κάθετη προς το εγγύτατο επίπεδο ευθεία η οποία περνά από το κέντρο καμπυλότητας λέγεται πολική ευθεία ή πολικός άξονας της καμπύλης στο σημείο αυτό, και έχει εξίσωση :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{r} + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} + u \mathbf{b},$$

όπου u η παράμετρος της ευθείας.

2.4.5 Η Στρέψη και η Καμπυλότητα μέσω των τύπων του Frenet

Θα κατασκευάσουμε τώρα τύπους για τον υπολογισμό της καμπυλότητας και της στρέψης.

Όταν η παράμετρος είναι η φυσική, τότε :

$$\kappa = |\mathbf{r}''|$$

Όταν όμως η παράμετρος είναι τυχούσα, τότε χρησιμοποιώντας τον πρώτο τύπο του Frenet έχουμε :

$$\kappa = |\mathbf{t}'| =$$

$$\begin{aligned} \frac{|\dot{\mathbf{t}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|} &= \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \right) \right| \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \\ & \left| |\dot{\mathbf{r}}| \ddot{\mathbf{r}} - \frac{d|\dot{\mathbf{r}}|}{dt} \dot{\mathbf{r}} \right| |\dot{\mathbf{r}}|^{-3} = \\ & = \left| \dot{\mathbf{r}}^2 \ddot{\mathbf{r}} - (\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}} \right| |\dot{\mathbf{r}}|^{-4} = \\ & \quad \left| (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}} \right| |\dot{\mathbf{r}}|^{-4}. \end{aligned}$$

Επειδή το διάνυσμα $\dot{\mathbf{r}}$ είναι κάθετο προς το $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$ προκύπτει ότι :

$$\left| (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}} \right| = \left| \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \right| \left| \dot{\mathbf{r}} \right|$$

και επομένως :

$$\kappa = \frac{\left| \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \right|}{\left| \dot{\mathbf{r}} \right|^3}$$

Για να υπολογίσουμε τη στρέψη, όταν η καμπύλη έχει παράμετρο το s , πολλαπλασιάζουμε την τελευταία εξίσωση του Frenet με \mathbf{n} , και έχουμε :

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{b}' \mathbf{n} = -(\mathbf{t} \times \mathbf{n})' \mathbf{n} = -(\mathbf{t}' \times \mathbf{n}) \mathbf{n} - (\mathbf{t} \times \mathbf{n}') \mathbf{n} = \mathbf{t} \mathbf{n} \mathbf{n}'$$

διότι $\mathbf{t}' \times \mathbf{n} = \kappa \mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0$.

Επίσης, επειδή ισχύουν οι σχέσεις :

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}' \quad , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|} = \frac{\mathbf{r}''}{\kappa} \quad , \quad \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{r}'''}{\kappa} - \frac{\kappa'}{\kappa^2} \mathbf{r}''$$

και

$$\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \left(\mathbf{r}''' - \frac{\kappa' \mathbf{r}''}{\kappa} \right) = \mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}'''$$

έχουμε :

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}'''}{\kappa^2} = \frac{\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}'''}{(\mathbf{r}'')^2}$$

Στην περίπτωση της τυχαίας παραμέτρου t , έχουμε :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \dot{\mathbf{r}} \frac{dt}{ds} \\ \mathbf{r}'' &= \ddot{\mathbf{r}} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \dot{\mathbf{r}} \frac{d^2t}{ds^2} \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}''' = \ddot{\mathbf{r}} \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3 \dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \left(\frac{dt}{ds}\right) \frac{d^2t}{ds^2} + \dot{\mathbf{r}} \frac{d^2t}{ds^3}$$

και επομένως :

$$\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''' = \dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \left(\frac{dt}{ds}\right)^6 = \frac{\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|^6}$$

και τότε η στρέψη τ δίνεται από τον τύπο :

$$\tau = \frac{\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}}}{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})^2} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}}}{\dot{\mathbf{r}}^2 \ddot{\mathbf{r}}^2 - (\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}})^2}$$

2.4.6 Ο Ορισμός της Εγγύτατης Σφαίρας

Μία σφαίρα S που έχει τάξη επαφής μεγαλύτερη του 2 με μία καμπύλη K σ'ένα σημείο P λέγεται εγγύτατη σφαίρα της καμπύλης K στο σημείο P .

Μία καμπύλη K τάξης C^4 έχει μιγαδική εγγύτατη σφαίρα σε κάθε ομαλό σημείο P για το οποίο $\kappa \neq 0 \neq \tau$.

Το κέντρο της σφαίρας βρίσκεται στην πολική ευθεία του P και έχουμε:

$$\overline{\Sigma\mathbf{T}} = \Sigma\mathbf{T} = \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \mathbf{b} \quad \text{και} \quad \rho = \frac{\sqrt{\kappa^2\tau^2 + \kappa'^2}}{\kappa^2\tau}$$

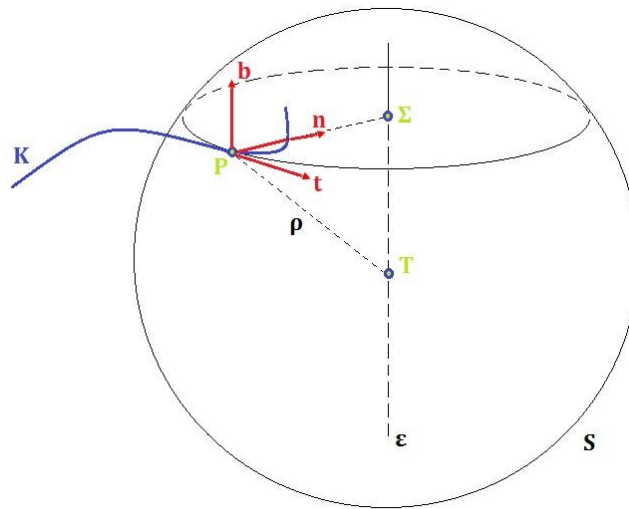
Όπου Σ το κέντρο του εγγύτατου κύκλου, T το κέντρο της εγγύτατης σφαίρας και ρ η ακτίνα της.

Η εγγύτατη σφαίρα έχει επαφή βαθμού 3 τουλάχιστον με την καμπύλη. Όταν $\tau=0$, τότε η εγγύτατη σφαίρα δεν υπάρχει. Σε αυτή την περίπτωση το εγγύτατο επίπεδο έχει επαφή βαθμού 3 με την καμπύλη και μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτό συμπίπτει με την εκφυλισμένη εγγύτατη σφαίρα που έχει άπειρη ακτίνα.

Η εξίσωση μίας σφαίρας που περνάει από το σημείο P με παράμετρο s_0 είναι:

$$|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^2 - |\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}_0|^2 = 0$$

όπου \mathbf{p} τυχαίο σημείο της σφαίρας, \mathbf{p}_0 το κέντρο της και \mathbf{r}_0 το σημείο P.



Σχήμα: 2.4.2

Αντικαθιστώντας σ'αυτήν την εξίσωση της καμπύλης έχουμε:

$$f(s) = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^2 - |\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}_0|^2 .$$

Παραγωγίζοντας τρεις φορές ως προς s έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(s) &= 2(\mathbf{r} - \mathbf{p}_0) \mathbf{r}' = 2(\mathbf{r} - \mathbf{p}_0) \mathbf{t} \\ f''(s) &= 2(\mathbf{r} - \mathbf{p}_0) \mathbf{t}' + 2\mathbf{t} \mathbf{t} = 2\kappa(\mathbf{r} - \mathbf{p}_0) \mathbf{n} + 2 \\ f'''(s) &= 2\kappa(\mathbf{r} - \mathbf{p}_0) \mathbf{n} + 2\kappa \mathbf{t} \mathbf{n} + 2\kappa(\mathbf{r} - \mathbf{p}_0) \mathbf{n}' = \\ &= 2\kappa'(\mathbf{r} - \mathbf{p}_0) \mathbf{n} + 2\kappa(\mathbf{r} - \mathbf{p}_0) [-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}] = \\ &= 2\kappa'(\mathbf{r} - \mathbf{p}_0) \mathbf{n} + 2\kappa^2(\mathbf{r} - \mathbf{p}_0) \mathbf{t} + 2\kappa\tau(\mathbf{r} - \mathbf{p}_0) \mathbf{b} . \end{aligned}$$

Προφανώς $f(s_0) = 0$ διότι η σφαίρα περνάει από το P. Επίσης:

$$\begin{aligned} f'(s_0) = 0 \quad \text{και} \quad f''(s_0) = 0 \quad \Rightarrow \\ (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}_0) \mathbf{t}_0 = 0 \quad \text{και} \quad (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}_0) \mathbf{n}_0 = -\frac{1}{\kappa_0} . \end{aligned}$$

$$\text{Τέλος,} \quad f'''(s_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{r} - \mathbf{p}_0) \mathbf{b} = -\frac{\kappa'_0}{\kappa_0^2 \tau_0} .$$

Εάν λοιπόν, $\kappa_0 \neq 0 \neq \tau_0$ τότε οι προβολές του διανύσματος $\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}_0$ στα τρία διανύσματα $(\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0)$ είναι :

$$\left(0, -\frac{1}{\kappa_0}, \frac{\kappa'_0}{\kappa_0^2 \tau_0} \right)$$

Και επομένως το μήκος του ρ δίνεται από τη σχέση :

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa_0}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'_0}{\kappa_0^2 \tau_0}\right)^2}$$

και το κέντρο της δίνεται από το διάνυσμα :

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} - \frac{\kappa'_0}{\kappa_0^2 \tau_0} \mathbf{b}.$$

2.5 Ορισμός επιφάνειας

(Από [5])

Εκφράζοντας μία απλουστευμένη απόδοση της έννοιας της επιφάνειας θα λέγαμε ότι μία επιφάνεια είναι ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων ενός σημείου το οποίο κινείται στο χώρο με δύο βαθμούς ελευθερίας.

Μπορούμε με δύο μεθόδους, με τη βοήθεια αναλυτικών τύπων, να κάνουμε την περιγραφή ενός τέτοιου τόπου.

Η μία μέθοδος χαρακτηρίζεται ως *έμπλεκτη (ή πεπλεγμένη ή έμμεση) παράσταση* σύμφωνα με την οποία μία επιφάνεια περιγράφεται ως το σύνολο των σημείων (x,y,z) που ικανοποιούν μία εξίσωση της μορφής:

$$F(x,y,z) = 0.$$

Σε κάποιες περιπτώσεις η παραπάνω εξίσωση μπορεί να επιλυθεί ως προς μία από τις συντεταγμένες συναρτήσει των άλλων δύο, π.χ. ως προς z συναρτήσει των x και y . Έτσι βρίσκουμε μία *εκπεφρασμένη παράσταση της επιφάνειας* η οποία ορίζεται με μία ή περισσότερες εξισώσεις της μορφής $z=f(x,y)$.

Για παράδειγμα, η σφαίρα με κέντρο την αρχή και ακτίνα 1 έχει την *έμμεση παράσταση*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

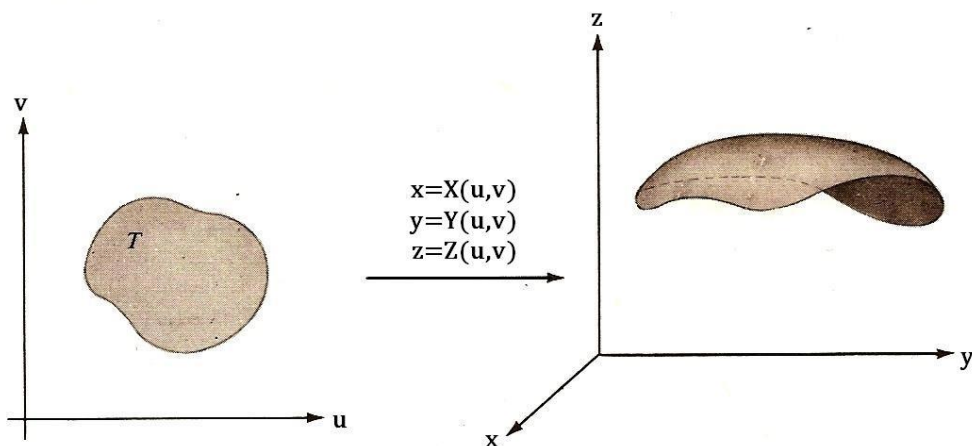
Όταν αυτή η εξίσωση επιλυθεί ως προς z μας οδηγεί στις δύο λύσεις:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \& \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

από τις οποίες η πρώτη μας δίνει την *εκπεφρασμένη παράσταση* του άνω ημισφαιρίου και η δεύτερη του κάτω.

Μία τρίτη μέθοδος περιγραφής των επιφανειών, η οποία ταιριάζει περισσότερο στην μελέτη των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων και μας ενδιαφέρει περισσότερο, είναι η *παραμετρική ή διανυσματική παράσταση*. Στην παράσταση αυτή δίνονται τρεις εξισώσεις που εκφράζουν τα x, y, z συναρτήσει δύο παραμέτρων u και v :

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad z = Z(u, v). \quad (2.5.1)$$



Σχήμα 2.5.1: Παραμετρική παράσταση επιφάνειας

Αν θεωρήσουμε ότι το σημείο (u, v) μεταβάλλεται πάνω σε κάποιο διδιάστατο συνεκτικό σύνολο T του επιπέδου uv τότε το αντίστοιχο σημείο (x, y, z) διαγράφει ένα τμήμα της επιφάνειας του χώρου xyz . Όπως γίνεται αντιληπτό και στο Σχήμα 2.5.1 η παρουσία των δύο παραμέτρων στις εξισώσεις (2.5.1) κάνει δυνατή την πρόσδοση δύο βαθμών ελευθερίας στην κίνηση του σημείου (x, y, z) . Ένας άλλος τρόπος έκφρασης της ίδιας ιδέας είναι να λέμε ότι μία επιφάνεια είναι η εικόνα μίας επίπεδης περιοχής T σύμφωνα με την απεικόνιση που ορίζεται από τις εξισώσεις (2.5.1).

Αν εισάγουμε την διανυσματική ακτίνα \mathbf{r} , από την αρχή προς το γενικό σημείο (x, y, z) της επιφάνειας οι εξισώσεις (2.5.1) μετασχηματίζονται στη *διανυσματική εξίσωση της επιφάνειας*:

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v)\mathbf{i} + Y(u,v)\mathbf{j} + Z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in T.$$

Γενικά η εικόνα του T κατά την απεικόνιση \mathbf{r} ονομάζεται παραμετρική επιφάνεια και την παριστάνουμε με το σύμβολο $\mathbf{r}(T)$. Όταν η συνάρτηση \mathbf{r} είναι αμφιμονοσήμαντη στο T , η εικόνα $\mathbf{r}(T)$ λέγεται απλή παραμετρική επιφάνεια. Σε αυτή τη περίπτωση διαφορετικά σημεία του T απεικονίζονται σε διαφορετικά σημεία της επιφάνειας και ιδιαίτερα κάθε απλή κλειστή καμπύλη του T απεικονίζεται σε απλή κλειστή καμπύλη της επιφάνειας.

Μία παραμετρική επιφάνεια $\mathbf{r}(T)$ μπορεί να εκφυλιστεί σε ένα σημείο ή σε μία καμπύλη. Π.χ. αν οι τρεις συναρτήσεις X, Y, Z είναι ανεξάρτητες από το v ή σταθεροί αριθμοί η εικόνα $\mathbf{r}(T)$ θα είναι μία καμπύλη ή ένα σημείο. Ένα άλλο παράδειγμα εκφυλισμένης επιφάνειας παίρνουμε όταν $X(u,v) = u+v$, $Y(u,v) = (u+v)^2$ και $Z(u,v) = (u+v)^3$ με $T = [0,1] \times [0,1]$. Θέτοντας $t = u+v$ η επιφάνεια ανάγεται στην καμπύλη του χώρου με παραμετρικές εξισώσεις $x = t$, $y = t^2$ και $z = t^3$ όπου $0 \leq t \leq 2$. Για μία επιφάνεια υπάρχουν και πολλές άλλες παραμετρικές παραστάσεις. Μία από αυτές μπορούμε να βρίσκουμε πάντα από μία εκπεφρασμένη παράσταση $z = f(x,y)$ της επιφάνειας γράφοντας:

$$X(u,v) = u, \quad Y(u,v) = v, \quad Z(u,v) = f(u,v)$$

Και αντίστροφα, αν είναι δυνατή η επίλυση ως προς u, v των δύο πρώτων εξισώσεων (2.5.1), προκύπτει η εκπεφρασμένη παράσταση της επιφάνειας.

Παράδειγμα 1: Μία παραμετρική παράσταση μιας σφαίρας.

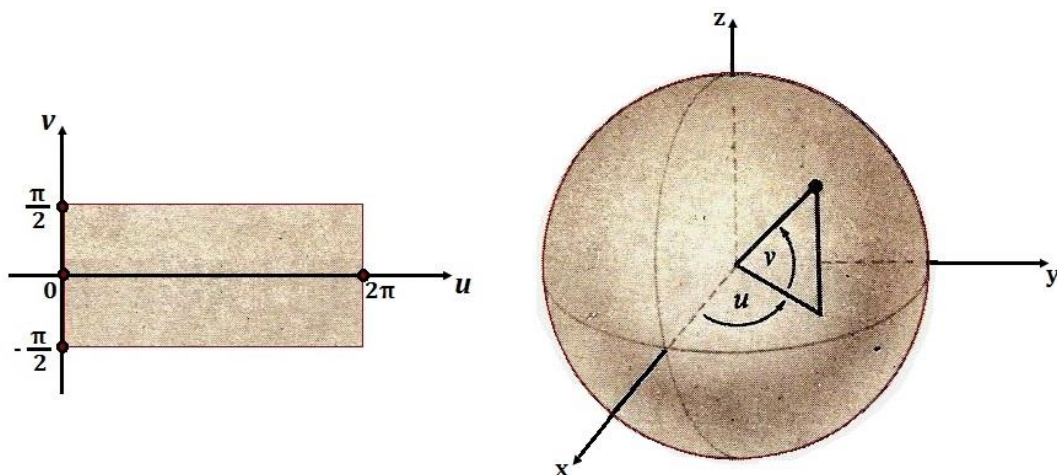
$$x = a \cos u \cos v, \quad y = a \sin u \cos v, \quad z = a \sin v \quad (2.5.2)$$

Οι παραπάνω τρεις εξισώσεις χρησιμεύουν ως παραμετρικές εξισώσεις της σφαίρας με κέντρο την αρχή και ακτίνα a . Οι μεταβλητές u και v απαλείφονται υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας οπότε προκύπτει η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

η οποία επαληθεύεται από τις συντεταγμένες κάθε σημείου (x,y,z) οι οποίες εκφράζονται με τις εξισώσεις (2.5.2).

Η γεωμετρική ερμηνεία των γωνιών u και v διακρίνεται εύκολα στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2.5.2 : Παραμετρική παράσταση Σφαίρας

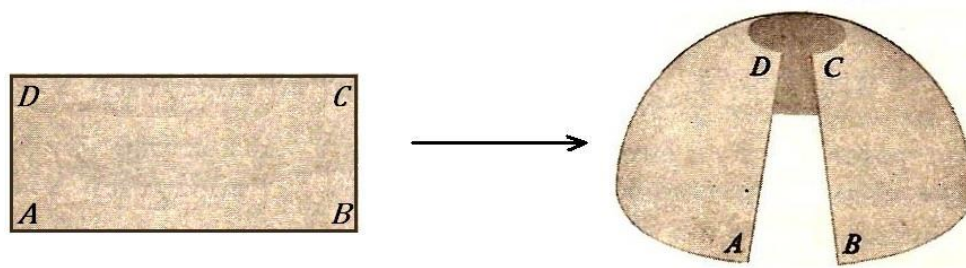
Καθώς το σημείο (u,v) μεταβάλλεται πάνω στο ορθογώνιο:

$$T = [0,2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

το σημείο (x,y,z) διαγράφει ολόκληρη τη σφαίρα.

Το πάνω ημισφαίριο αποτελεί εικόνα του ορθογωνίου $[0,2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ ενώ το κάτω ημισφαίριο εικόνα του ορθογωνίου $[0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, 0]$.

Το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.5.3) μας δίνει μία συγκεκριμένη ιδέα για το πως το ορθογώνιο $ABCD = [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ απεικονίζεται σε ολόκληρο το άνω ημισφαίριο.



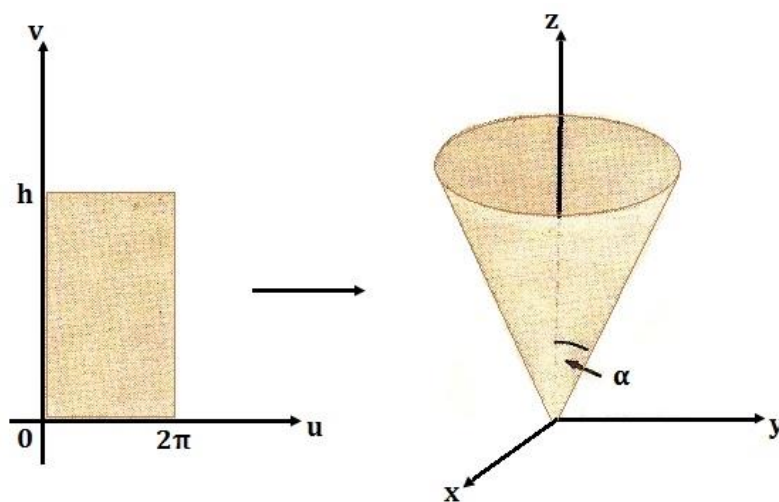
Σχήμα 2.5.3 : Διαμόρφωση ενός ορθογωνίου σε ημισφαίριο

Αν φανταστούμε ότι το ορθογώνιο αυτό είναι κατασκευασμένο από ένα εύκαμπτο πλαστικό υλικό που να μπορεί να τεντώνεται ή να συμπιέζεται επιφανειακά, το σχήμα 2.2.03 μας δείχνει μία διαμόρφωση του ορθογωνίου σε ένα ημισφαίριο: η βάση AB γίνεται ισημερινός, οι απέναντι πλευρές AD και BC έρχονται σε σύμπτωση πάνω σε ένα τεταρτημόριο ενός μεσημβρινού και η DC συμμαζεύεται έτσι ώστε να καταντήσει ένα σημείο (ο Βόρειος Πόλος).

Παράδειγμα 2: Μία παραμετρική παράσταση ενός ορθού κυκλικού κώνου. Η διανυσματική εξίσωση:

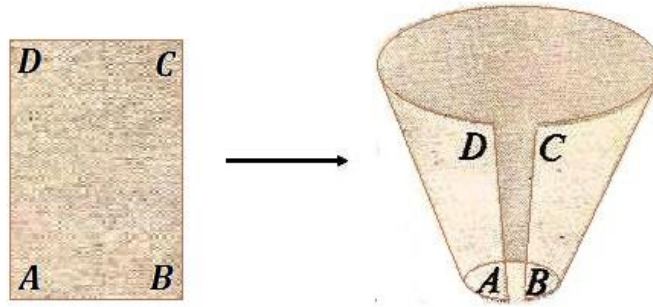
$$\mathbf{r}(u,v) = v \sin \alpha \cos u \mathbf{i} + v \sin \alpha \sin u \mathbf{j} + v \cos \alpha \mathbf{k}$$

παριστάνει τον ορθό κυκλικό κώνο στο σχήμα 2.5.4 με ημιάνοιγμα στην κορυφή του την γωνία α . Οι γεωμετρικές ερμηνείες των παραμέτρων u και v είναι εδώ οι εξής: η v εκφράζει την πολική απόσταση του γενικού σημείου $M(x,y,z)$ του κώνου από την αρχή και η u την γωνία του διανύσματος \mathbf{OM} με τον θετικό z - ημιάξονα.



Σχήμα 2.5.4: Παραμετρική παράσταση ενός κώνου

Όταν το σημείο (u,v) μεταβάλλεται πάνω στο ορθογώνιο $[0,2\pi] \times [0,h]$ το αντίστοιχο σημείο (x,y,z) διαγράφει ολόκληρη την επιφάνεια (Σχήμα 2.5.4) του κυκλικού κώνου με ύψος $h \cos \alpha$. Ένα πλαστικό ορθογώνιο και εδώ ABCD μπορεί να διαμορφωθεί έτσι ώστε να ταυτιστεί με το σχήμα της επιφάνειας του κώνου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (2.5.5):



Σχήμα 2.5.5 : Διαμόρφωση ενός ορθογωνίου σε κώνο.

2.6 Το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο

(Από [5])

Θεωρούμε μία επιφάνεια η οποία περιγράφεται από την διανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{r}(u,v) = X(u,v) \mathbf{i} + Y(u,v) \mathbf{j} + Z(u,v) \mathbf{k} , \quad (u,v) \in T.$$

Αν οι X, Y, Z είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο T τότε μπορούμε να ορίσουμε τα δύο διανύσματα:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial u} \mathbf{k} \quad \text{και} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial v} \mathbf{k} .$$

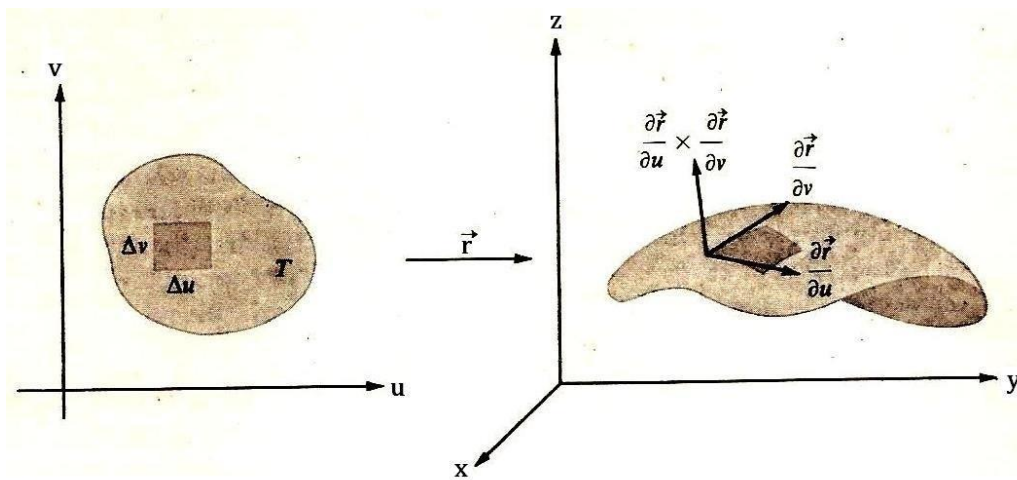
Το εξωτερικό γινόμενο, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, των παραπάνω διανυσμάτων ονομάζεται *θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο* της παράστασης \mathbf{r} της επιφάνειας.

Οι συνιστώσες του μπορούν να εκφραστούν σε μορφή Ιακωβιανών οριζουσών:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \\ &= \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Αν (u,v) είναι ένα σημείο του T στο οποίο τα $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ και $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και το εξωτερικό τους γινόμενο διάφορο του $\mathbf{0}$, τότε η εικόνα, $\mathbf{r}(u,v)$ αυτού του σημείου ονομάζεται ομαλό σημείο της επιφάνειας $\mathbf{r}(T)$. Κατ'έκταση, η επιφάνεια $\mathbf{r}(T)$ λέγεται ομαλή όταν όλα τα σημεία της είναι ομαλά. Αντίθετα, ανώμαλα σημεία λέγονται τα σημεία στα οποία τα $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ και $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ δεν είναι συνεχείς συναρτήσεις ή $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{0}$.

Κάθε επιφάνεια έχει περισσότερες από μία παραμετρικές εκφράσεις και κάποιο σημείο της μπορεί να είναι ομαλό για κάποια έκφραση ενώ ανώμαλο για κάποια άλλη. Την γεωμετρική σημασία των διανυσμάτων $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ και του εξωτερικού τους γινομένου μπορούμε να την εξηγήσουμε με τον εξής τρόπο:



Σχήμα 2.6.1: Γεωμετρική ερμηνεία των διανυσμάτων $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ και $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$.

Θεωρούμε ένα οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα στο T . Η εικόνα του κατά την απεικόνιση \mathbf{r} είναι μία καμπύλη (μία u -καμπύλη όπως λέμε) πάνω στην επιφάνεια $\mathbf{r}(T)$. Το διάνυσμα $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ είναι το διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης αυτής.

Με όμοιο τρόπο, το διάνυσμα $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ είναι το διάνυσμα ταχύτητας μίας v -καμπύλης που βρίσκουμε αν θέσουμε $u = \text{σταθερά}$. Από κάθε σημείο M της επιφάνειας περνάμε μία u -καμπύλη και μία v -καμπύλη με τον περιορισμό $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq \mathbf{0}$, ο οποίος σημαίνει ότι τα διανύσματα $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ και $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ δεν είναι συγγραμμικά στο σημείο M .

Για ένα σταθερό v ας ερμηνεύσουμε την παράμετρο u ως «χρόνο». Όταν το u μεταβληθεί κατά ένα ποσό Δu , το σημείο όπου βρίσκεται αρχικά το $\mathbf{r}(u,v)$ θα κινηθεί

κατά μήκος μίας u -καμπύλης και κατά μία απόσταση η οποία θα είναι ίση σχεδόν με το γινόμενο $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right| \Delta u$ (αφού το $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|$ παριστάνει την ταχύτητα της κίνησης κατά μήκος της u -καμπύλης).

Αναλόγως, για ένα σταθερό u , ένα σημείο μίας v -καμπύλης διαγράφει σε χρόνο Δv διάστημα σχεδόν ίσο με το γινόμενο $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta v$.

Ένα ορθογώνιο στο T με εμβαδό $\Delta u \Delta v$ (Σχήμα 2.6.1) μετασχηματίζεται σε ένα τμήμα της επιφάνειας $\mathbf{r}(T)$ το οποίο το εξομοιώνουμε με το παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τα διανύσματα $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u$ και $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v$.

2.7 Στοιχειώδεις Εμβαδόν Επιφάνειας

(Από [5])

Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, το ορθογώνιο στο T με εμβαδό $\Delta u \Delta v$ (Σχήμα 2.6.1) μετασχηματίστηκε σε ένα τμήμα της επιφάνειας $\mathbf{r}(T)$ το οποίο το εξομοιώσαμε με το παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τα διανύσματα

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u \text{ και } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v.$$

Το εμβαδό αυτού του παραλληλογράμμου ισούται με το μέτρο του εξωτερικού γινομένου των δύο παραπάνω διανυσμάτων:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v.$$

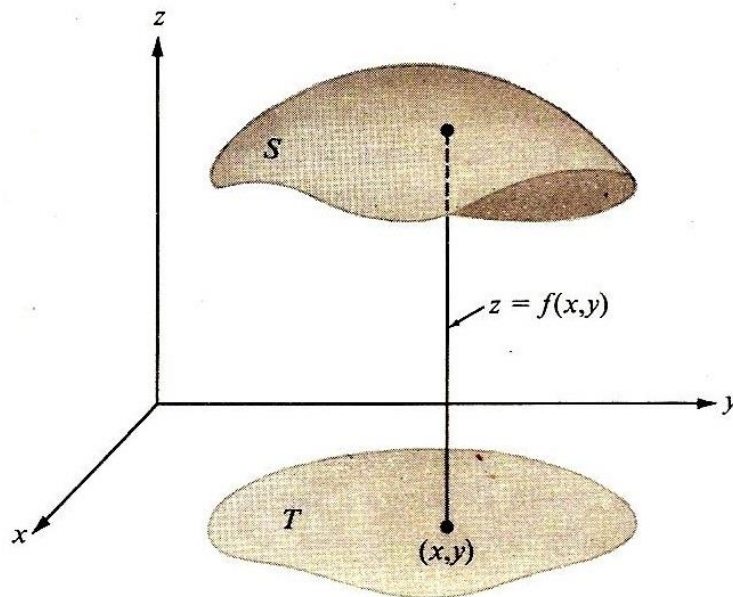
Σύμφωνα με τα παραπάνω το μήκος του θεμελιώδους διανυσματικού γινομένου μπορεί να ερμηνευτεί ως ένας τοπικός συντελεστής μεγέθυνσης για εμβαδά. Στα σημεία όπου αυτό το εξωτερικό γινόμενο είναι ίσο με το μηδενικό διάνυσμα, το παραλληλόγραμμο εκφυλίζεται σε ένα κομμάτι τόξου ή ένα σημείο. Σε κάθε ομαλό σημείο της επιφάνειας τα διανύσματα $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ και $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ ορίζουν ένα επίπεδο το οποίο έχει για κάθετο διάνυσμα το εξωτερικό γινόμενο αυτών των δύο διανυσμάτων.

Αποδεικνύεται ότι το εξωτερικό γινόμενο $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ είναι κάθετο σε κάθε ομαλή καμπύλη της επιφάνειας η οποία περνάει από το σημείο $M(x, y \rightarrow u, v)$. Για τον λόγο

αυτό το επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ και $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ ονομάζεται εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο M . Η συνέχεια των διανυσμάτων αυτών έχει σαν συνέπεια την συνέχεια του εξωτερικού τους γινομένου, πράγμα που σημαίνει ότι το εφαπτόμενο επίπεδο «γλιστράει» ομαλά από ένα σημείο της επιφάνειας στο γειτονικό της σημείο. Βλέπουμε έτσι ότι η μεν συνέχεια των $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ και $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ απαλλάσσει την επιφάνεια από απότομες κόγχες και από γωνίες ενώ η συνθήκη $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq 0$ εγγυάται την ανυπαρξία φαινομένων εκφυλισμού.

Παράδειγμα 1: Επιφάνειες με παράσταση $z=f(x,y)$. Για μία τέτοια επιφάνεια μπορούμε να θεωρήσουμε τα x και y ως παραμέτρους και να γράψουμε ως διανυσματική εξίσωσή της την σχέση:

$$\mathbf{r}(x,y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + f(x,y) \mathbf{k}.$$



Σχήμα 2.7.1 : Μία επιφάνεια S με παράσταση $z=f(x,y)$. Η περιοχή T είναι προβολή της επιφάνειας στο xy επίπεδο

Η παράσταση αυτή μας δίνει πάντα μία απλή παραμετρική επιφάνεια. Η περιοχή T εδώ λέγεται προβολή της επιφάνειας πάνω στο xy -επίπεδο. (Σχήμα 2.7.1). Επειδή:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{k} , \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{k} ,$$

Θα έχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Όπως παρατηρούμε, η z-συνιστώσα του διανύσματος αυτού είναι ίση με 1 και επομένως το θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο σε αυτή την περίπτωση θα παραμένει πάντα διάφορο του $\mathbf{0}$. Άρα τα μόνα ανώμαλα σημεία που μπορεί να παρουσιαστούν είναι αυτά στα οποία η μία τουλάχιστον από τις δύο μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$ ή $\frac{\partial f}{\partial y}$ δεν είναι συνεχής συνάρτηση.

Μία ειδική περίπτωση είναι η εξίσωση $z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ που παριστάνει το πάνω ημισφαίριο της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, όταν $x^2 + y^2 \neq 1$.

Η διανυσματική εξίσωση

$$\mathbf{r}(x,y) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + \sqrt{1 - x^2 - y^2} \mathbf{k}$$

απεικονίζει το δίσκο με ακτίνα 1: $T = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$ πάνω σε ένα ημισφαίριο και με αμφιμονοσήμαντο τρόπο. Οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$ και $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς σε κάθε σε κάθε εσωτερικό σημείο του δίσκου αυτού, όχι όμως και στο σύνορό του. Επομένως κάθε σημείο του ισημερινού είναι ανώμαλο κατά την παράσταση αυτή.

Παράδειγμα 2: Το ίδιο ημισφαίριο με πριν $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ αλλά ως εικόνα τώρα του ορθογωνίου $T = [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ κατά την απεικόνιση

$$\mathbf{r}(u,v) = \alpha \cos u \cos v \mathbf{i} + \alpha \sin u \cos v \mathbf{j} + \alpha \sin v \mathbf{k}.$$

Τα διανύσματα $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ και $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ είναι εδώ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= -\alpha \sin u \cos v \mathbf{i} + \alpha \cos u \cos v \mathbf{j}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= -\alpha \cos u \sin v \mathbf{i} - \alpha \sin u \sin v \mathbf{j} + \alpha \sin v \mathbf{k} \end{aligned}$$

και

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \alpha \cos v \mathbf{r}(u,v).$$

Στην περίπτωση αυτή όμως η εικόνα του T δεν είναι μία απλή παραμετρική επιφάνεια γιατί η απεικόνιση αυτή δεν είναι αμφιμονοσήμαντη στο T . Όντως κάθε σημείο του ευθύγραμμου τμήματος: $v = \frac{\pi}{2}$, $0 \leq u \leq 2\pi$ απεικονίζεται πάνω στο σημείο $(0, 0, \alpha)$ δηλαδή στο βόρειο πόλο. Επίσης λόγω της περιοδικότητας των συναρτήσεων \sin και \cos προκύπτει ότι το \mathbf{r} παίρνει τις ίδιες τιμές στα σημεία $(0, v)$ και $(2\pi, v)$ και επομένως η αριστερή και η δεξιά πλευρά του ορθογωνίου T απεικονίζονται πάνω στην ίδια καμπύλη, το τέταρτο του μεσημβρινού που συνδέει το βόρειο πόλο με το σημείο $(\alpha, 0, 0)$ του ισημερινού (Σχήμα 2.5.3). Τα διανύσματα $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ και $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάθε σημείο του του T και επειδή

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \alpha^2 \cos v,$$

το μόνο ανώμαλο σημείο της απεικόνισης είναι το σημείο για το οποίο $\cos v = 0$, δηλαδή ο βόρειος πόλος.

Συμπερασματικά, το στοιχειώδες εμβαδό μίας επιφάνειας δίνεται από τον τύπο:

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

Ενώ για το υπολογισμό του εμβαδού ολόκληρης της επιφάνειας αρκεί να ολοκληρώσουμε το μήκος του εξωτερικού γινομένου, $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|$, πάνω στην περιοχή T . Δηλαδή:

$$S = \int_T \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv.$$

3

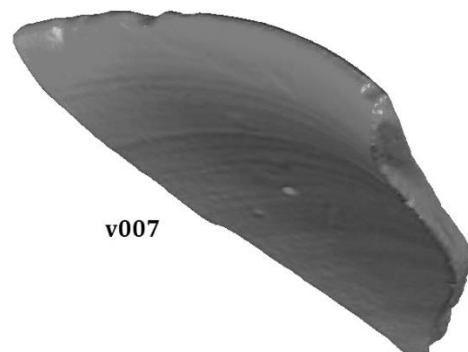
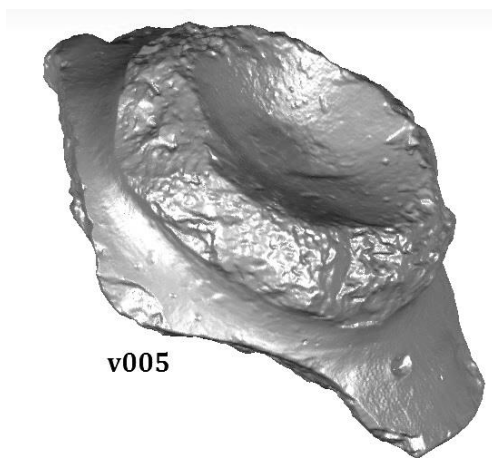
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΤΩΝ ΘΡΑΥΣΜΑΤΩΝ

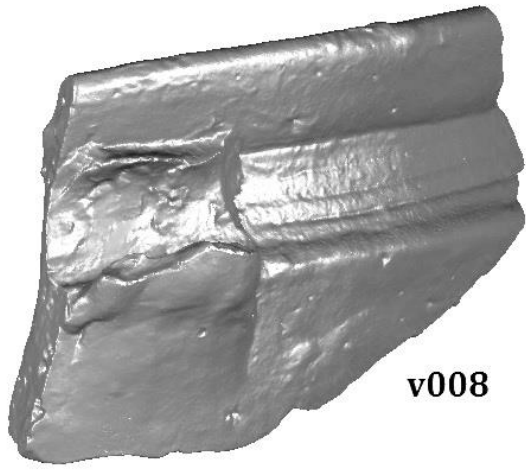
3.1 Οι απεικονίσεις

Λέγοντας τρισδιάστατη απεικόνιση των θραυσμάτων εννοούμε την ψηφιακή απεικόνισή τους η οποία προκύπτει χρησιμοποιώντας δεδομένα που προέρχονται από την τρισδιάστατη σάρωσή τους με κατάλληλο, τριών διαστάσεων, σαρωτή. Με την τρισδιάστατη σάρωση λαμβάνουμε πληροφορίες που αφορούν την θέση που κατέχει στον τρισδιάστατο χώρο κάθε, σχεδόν, σημείο που ανήκει στην επιφάνεια του θραύσματος, με ακρίβεια μέχρι και 70μm περίπου. Χάρη στην τρισδιάστατη σάρωση, δηλαδή, αποκτούμε μία ολοκληρωμένη εικόνα των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της επιφάνειας του θραύσματος στο σύνολό της.

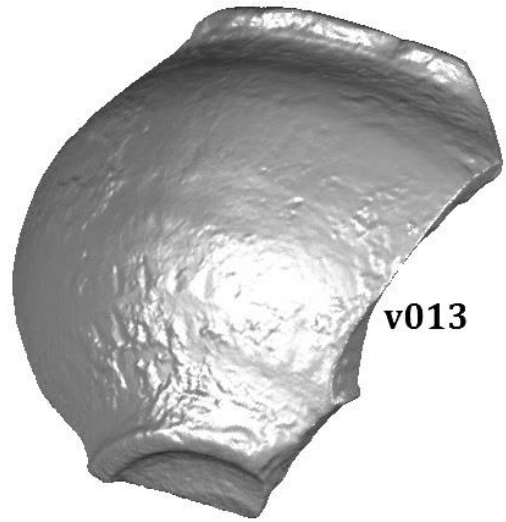
Στην παρούσα εργασία ήταν διαθέσιμες και υπέστησαν επεξεργασία οι απεικονίσεις περίπου 100 θραυσμάτων ταφικών αγγείων της Μηκυναϊκής περιόδου.

Πριν από οποιαδήποτε επεξεργασία, οι τρισδιάστατες απεικονίσεις ενδεικτικά, 15 θραυσμάτων ήταν στη μορφή που φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:

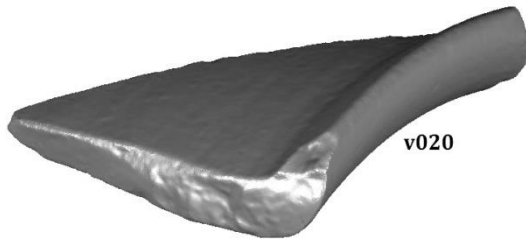




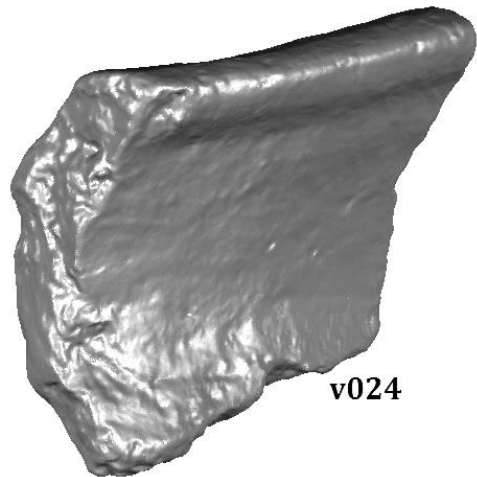
v008



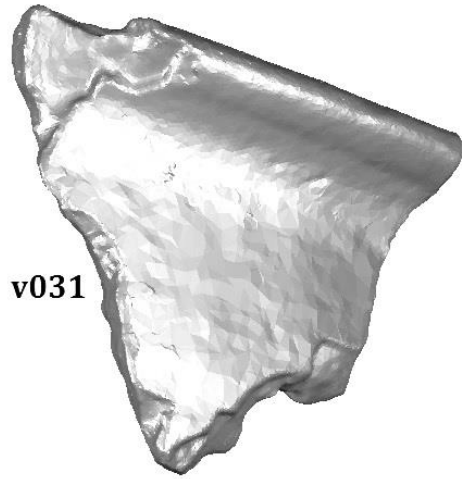
v013



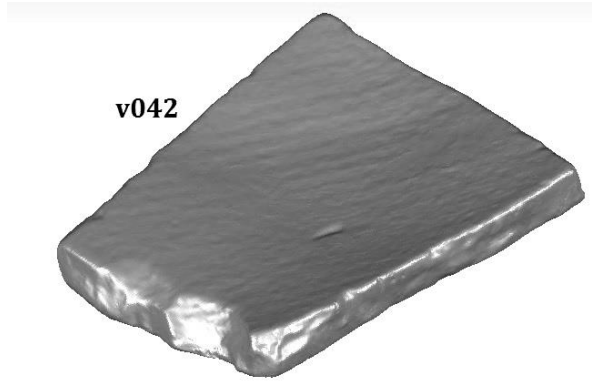
v020



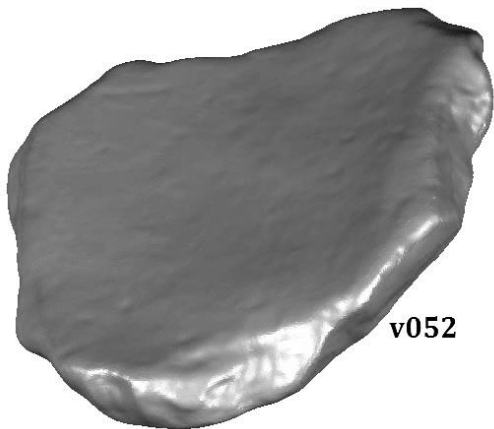
v024



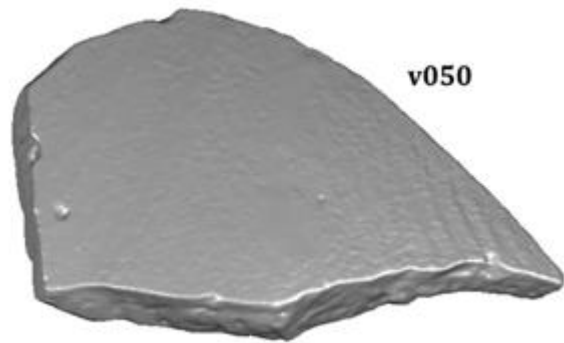
v031



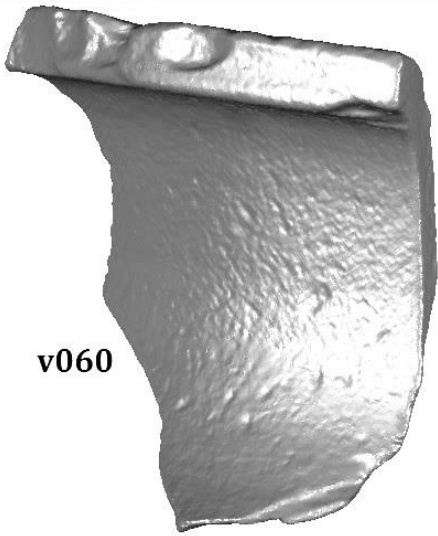
v042



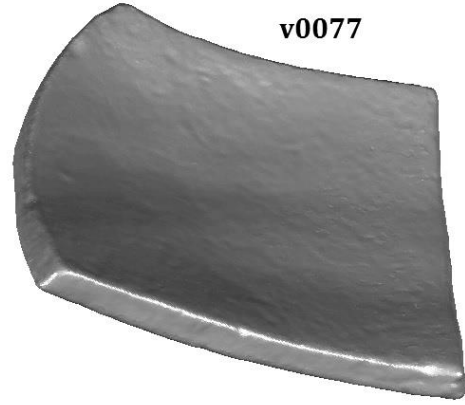
v052



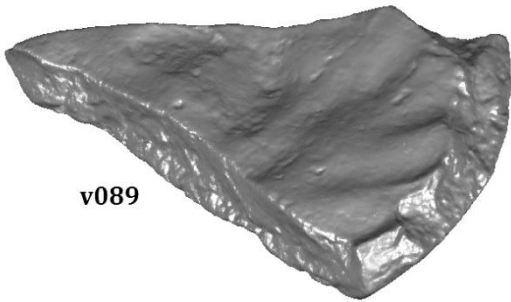
v050



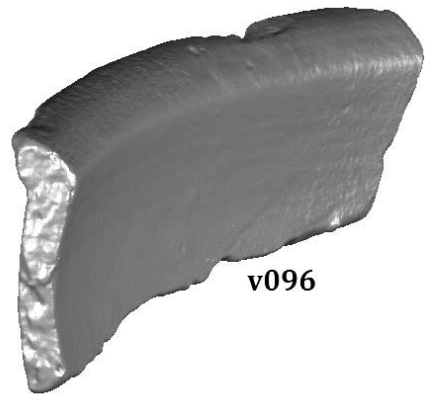
v060



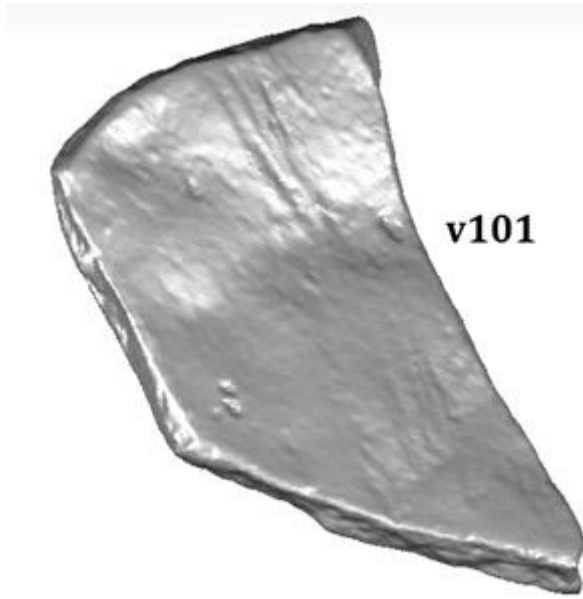
v0077



v089



v096



3.2 Η ανώτερη, η κατώτερη και η πλευρική επιφάνεια των θραυσμάτων

Το πρώτο βήμα στην μελέτη των θραυσμάτων ήταν η θεώρηση ότι η επιφάνειά τους αποτελεί ένωση, κατά κανόνα, τριών επιφανειών :

- α) Της «ανώτερης επιφάνειας» η οποία είναι τμήμα της εξωτερικής επιφάνειας του αγγείου,
- β) της «κατώτερης επιφάνειας» η οποία είναι τμήμα της εσωτερικής επιφάνειας του αγγείου και
- γ) της «πλευρικής επιφάνειας» η οποία είναι η επιφάνεια θραύσης.

Η διάκριση των παραπάνω τριών επιφανειών είναι απαραίτητη για την μετέπειτα αυτόματη ανασυγκρότηση των θραυσμάτων.

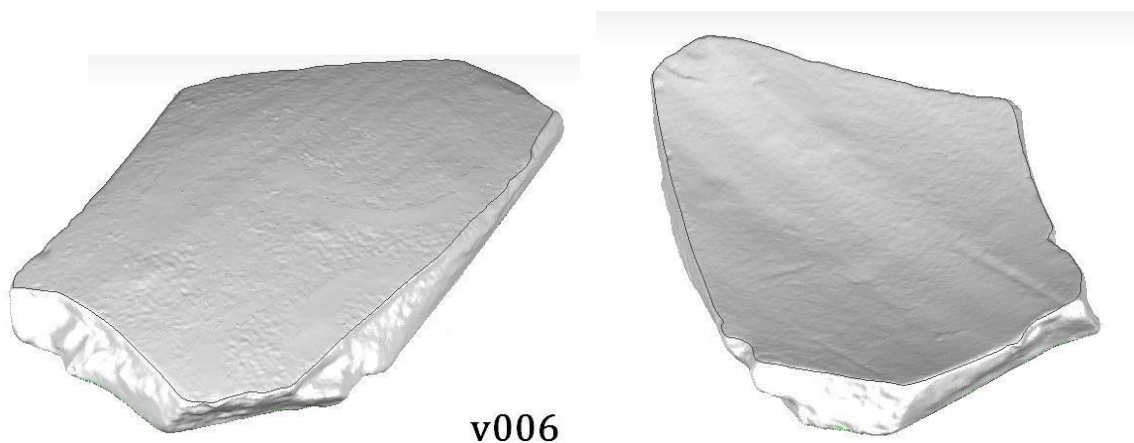
Το κριτήριο με το οποίο διακρίνουμε την «ανώτερη» από την «κατώτερη» επιφάνεια σε ένα θραύσμα είναι ότι, συνήθως, η «ανώτερη» είναι ελαφρώς κυρτή, ενώ η «κατώτερη» είναι ελαφρώς κοίλη. Σε κάποιες περιπτώσεις τυχαίνει η καθεμία από τις δύο να εμφανίζει αλλαγή κυρτότητας και να είναι τμηματικά κοίλη και κυρτή. Τότε, το τμήμα της επιφάνειας που εμφανίζει πιο ομαλή κυρτότητα ή κοιλότητα, σε σχέση με το άλλο, θεωρούμε ότι ανήκει στην «ανώτερη» ή «κατώτερη» επιφάνεια αντίστοιχα.

Τέλος η «πλευρική» επιφάνεια του θραύσματος είναι αυτή η οποία ενώνει τα σύνορα της «ανώτερης» και της «κατώτερης» επιφάνειας και είναι πολύ λιγότερο ομαλή σε σχέση με αυτές.

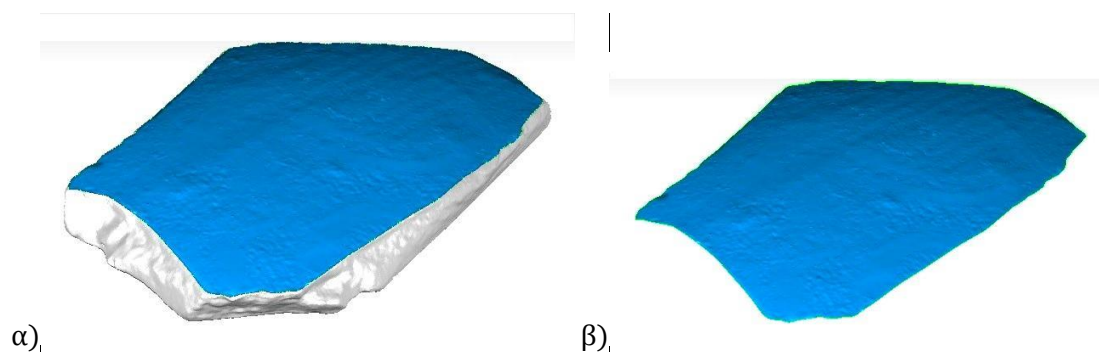
Από την παραπάνω θεώρηση προκύπτει αυτόματα η ανάγκη εύρεσης των καμπύλων εκείνων οι οποίες αποτελούν τα όρια-περιγράμματα των τριών προαναφερθέντων επιφανειών. Η εύρεση αυτών των καμπυλών μοιάζει οπτικά απλή και αυτονόητη αλλά εν τούτοις για τον εντοπισμό τους στον υπολογιστή είναι απαραίτητος και ο μαθηματικός προσδιορισμός τους μέσω, κυρίως, της μεταβολής του κάθετου διανύσματος των επιφανειών και της αξιοποίησης αρχών της θεωρίας καμπυλών και επιφανειών, οι οποίες αναφέρθηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας. Με την χάραξη των παραπάνω καμπυλών σε κάθε θραύσμα επιτυγχάνεται ο αυστηρός διαχωρισμός των τριών επιφανειών που αποτελούν την συνολική επιφάνεια του εκάστοτε θραύσματος.

Παρακάτω, ενδεικτικά, για τα θραύσματα v006, v024 και v060 βλέπουμε εικόνες στις οποίες διακρίνονται η «ανώτερη», η «κατώτερη» και η «πλευρική» του επιφάνεια.

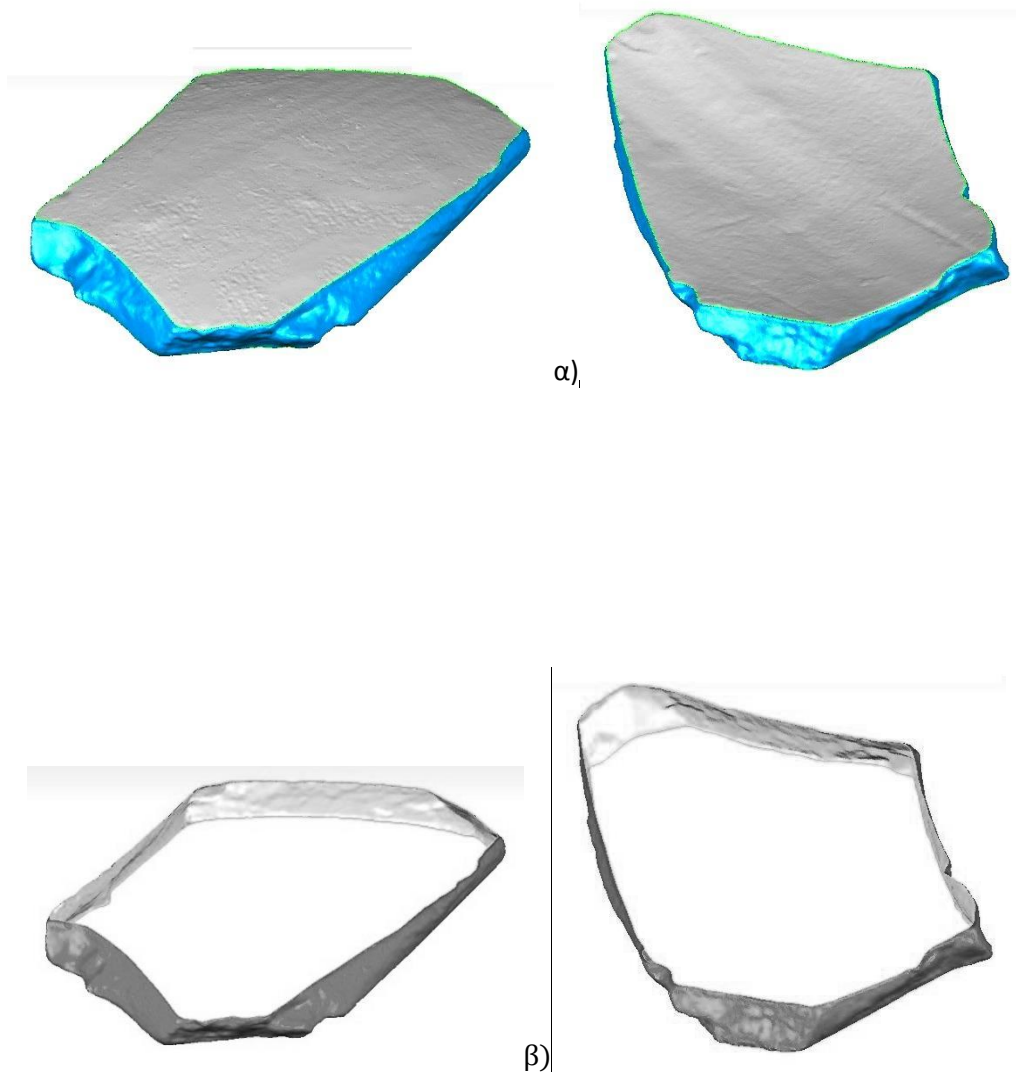
Αρχικά για το θραύσμα v006 :



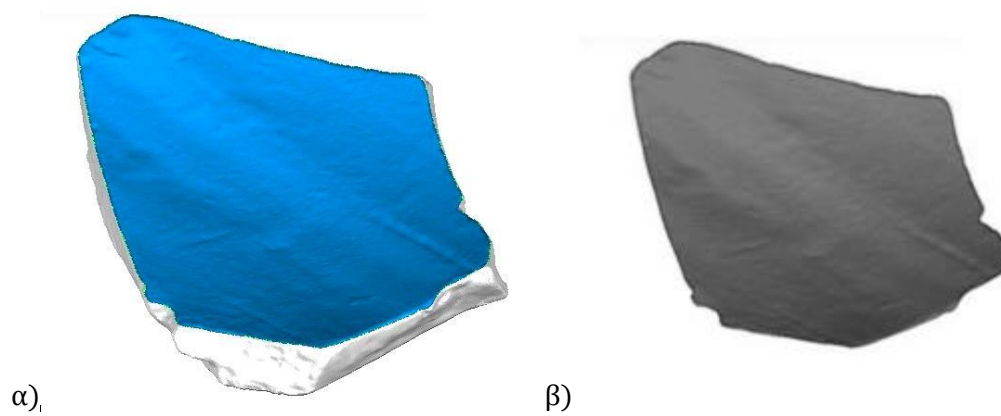
Εικόνα 3.2.1 : Το θραύσμα v006 από δύο οπτικές γωνίες. Στην αριστερή διακρίνεται η καμπύλη-σύνορο της «πλευρικής» επιφάνειας με την «ανώτερη» και στην δεξιά με την «κατώτερη».



Εικόνα 3.2.2 : Η «ανώτερη» επιφάνεια του θραύσματος v006.
α) Χρωματισμένη πάνω στο θραύσμα
β) Απομονωμένη από το υπόλοιπο θραύσμα

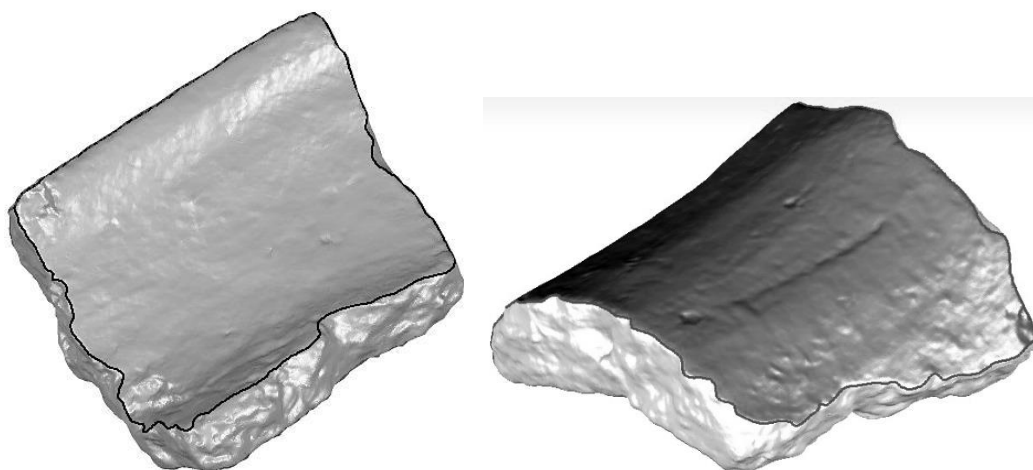


Εικόνα 3.2.3 : Η «πλευρική» επιφάνεια του θραύσματος v006 από δύο οπτικές γωνίες.
α) Χρωματισμένη πάνω στο θραύσμα
β) Απομονωμένη από το υπόλοιπο θραύσμα

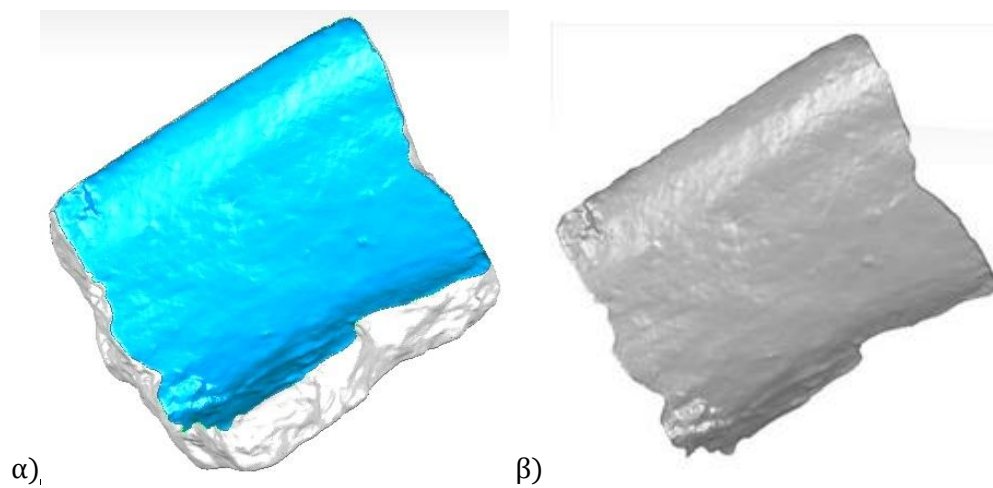


Εικόνα 3.2.4 : Η «κατώτερη» επιφάνεια του θραύσματος ν006.
α) Χρωματισμένη πάνω στο θραύσμα
β) Απομονωμένη από το υπόλοιπο θραύσμα

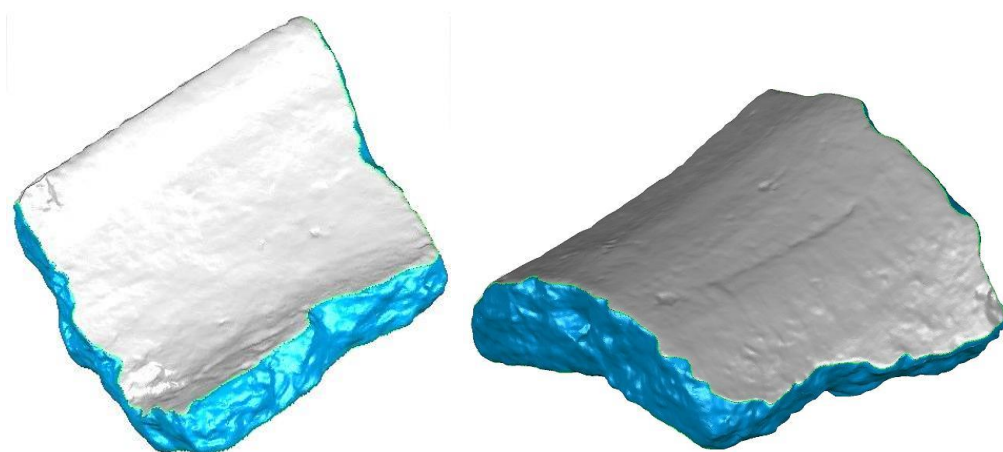
Στη συνέχεια για το θραύσμα ν024 :



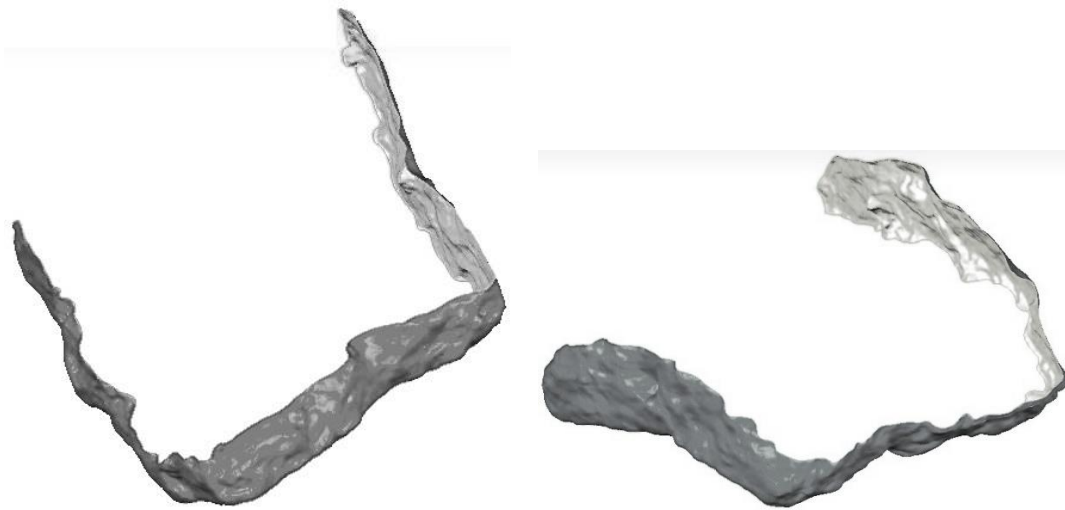
Εικόνα 3.2.5 : Το θραύσμα ν024 από δύο οπτικές γωνίες. Στην αριστερή διακρίνεται η «ανώτερη» επιφάνεια και στην δεξιά η «κατώτερη».



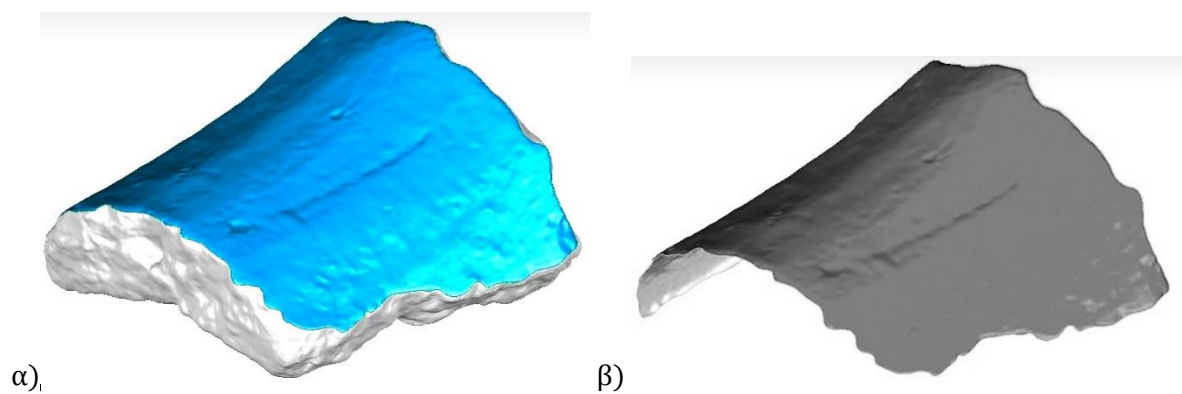
Εικόνα 3.2.6 : *Η «ανώτερη» επιφάνεια του θραύσματος ν024.
α)Χρωματισμένη πάνω στο θραύσμα
β)Απομονωμένη από το υπόλοιπο θραύσμα*



Εικόνα 3.2.7 : *Η «πλευρική» επιφάνεια του θραύσματος ν024, από δύο οπτικές γωνίες, χρωματισμένη πάνω στο θραύσμα*



Εικόνα 3.2.8: Η «πλευρική» επιφάνεια του θραύσματος v024, από δύο οπτικές γωνίες, απομονωμένη από το υπόλοιπο θραύσμα

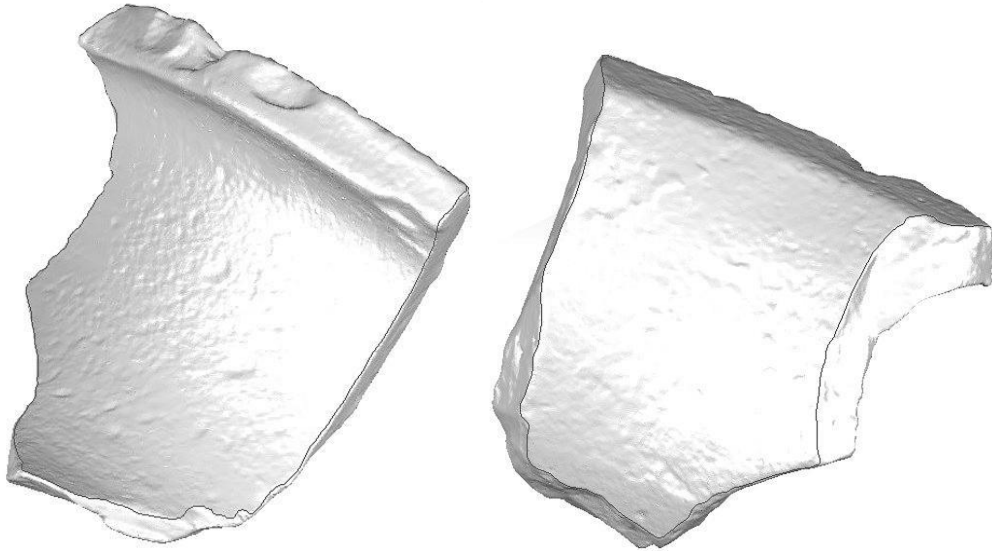


α),

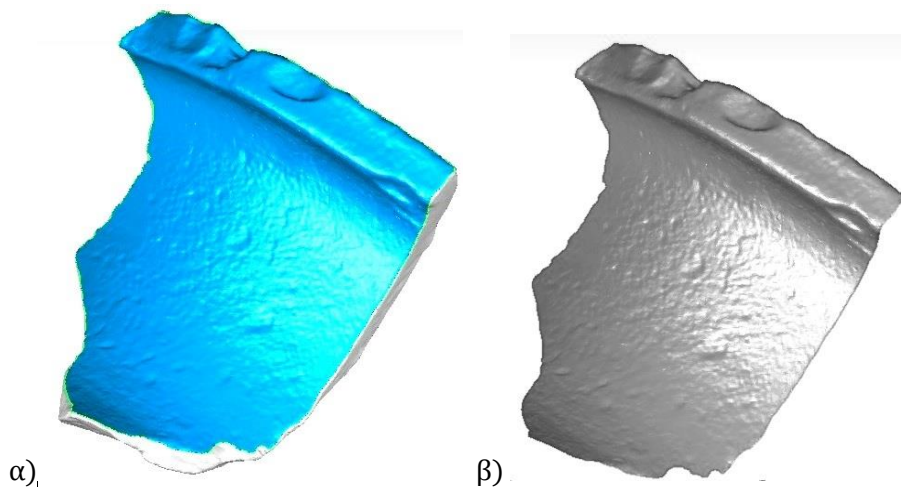
β)

Εικόνα 3.2.9: Η «κατώτερη» επιφάνεια του θραύσματος v024.
α) Χρωματισμένη πάνω στο θραύσμα
β) Απομονωμένη από το υπόλοιπο θραύσμα

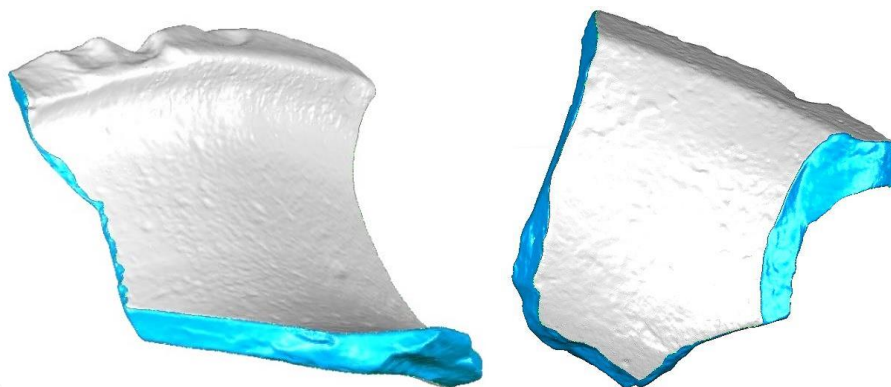
Τέλος, για το θραύσμα ν060 :



Εικόνα 3.2.10 : Το θραύσμα ν060 από δύο οπτικές γωνίες. Στην αριστερή διακρίνεται και η καμπύλη-σύνορο της «ανώτερης» επιφάνειας και στην δεξιά της «κατώτερης».



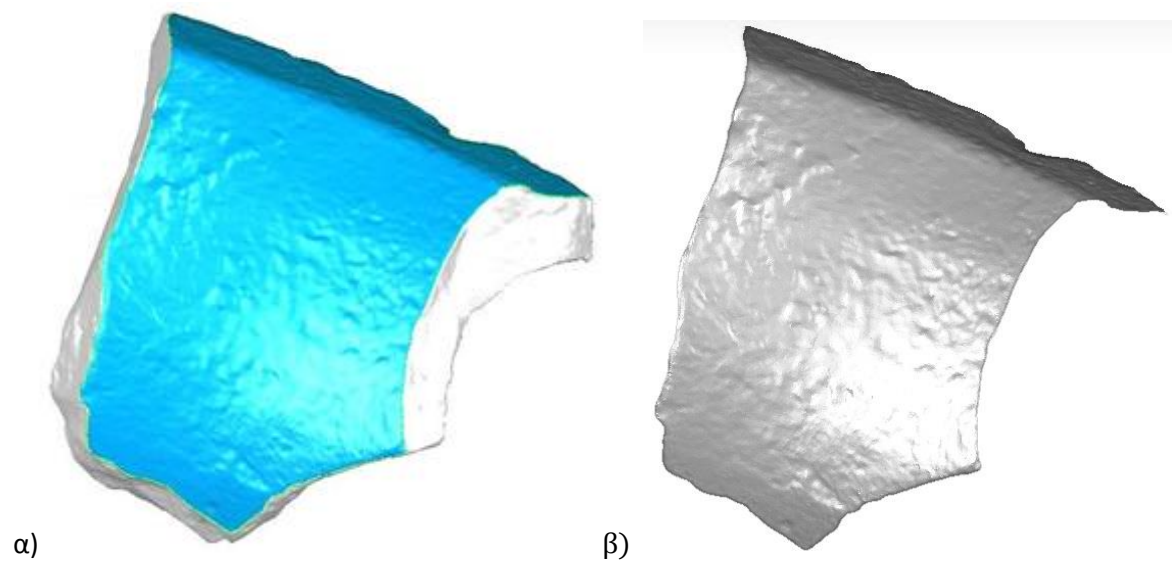
Εικόνα 3.2.11 : Η «ανώτερη» επιφάνεια του θραύσματος ν060.
α) Χρωματισμένη πάνω στο θραύσμα
β) Απομονωμένη από το υπόλοιπο θραύσμα



Εικόνα 3.2.12: Η «πλευρική» επιφάνεια του θραύσματος v060 από δύο οπτικές γωνίες χρωματισμένη πάνω στο θραύσμα



Εικόνα 3.2.13: Η «πλευρική» επιφάνεια του θραύσματος v060 από δύο οπτικές γωνίες απομονωμένη από το υπόλοιπο θραύσμα



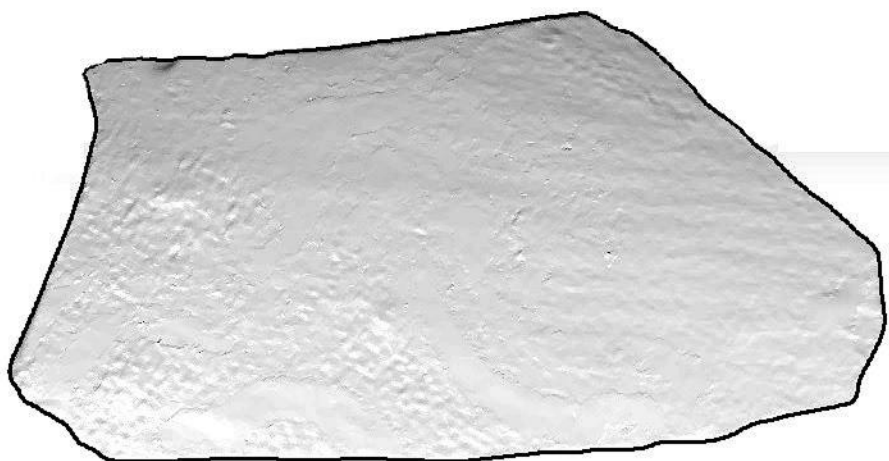
Εικόνα 3.214 : *Η «κατώτερη» επιφάνεια του θραύσματος ν060.
α)Χρωματισμένη πάνω στο θραύσμα
β)Απομονωμένη από το υπόλοιπο θραύσμα*

3.3 Τα περιγράμματα-όρια της ανώτερης και κατώτερης επιφάνειας των θραυσμάτων

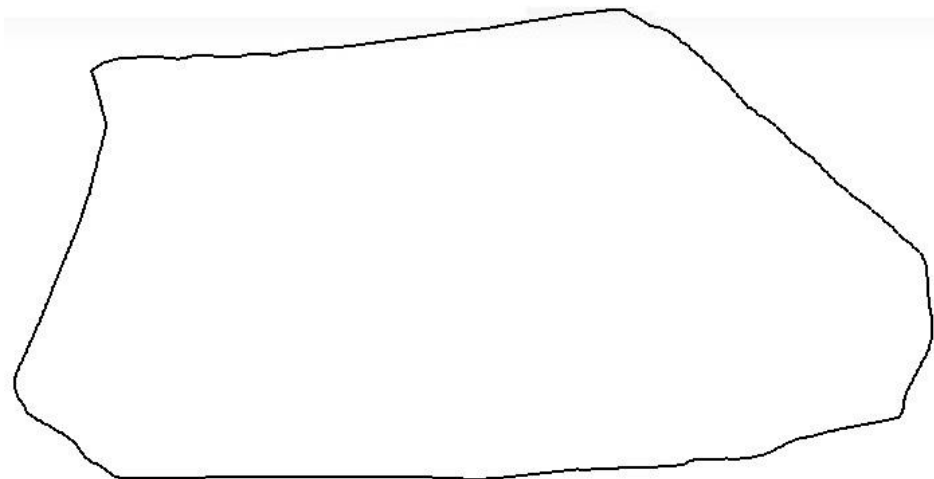
Το δεύτερο βήμα στην επεξεργασία της απεικόνισης ενός θραύσματος είναι η εξαγωγή δύο καμπυλών οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια στην μέθοδο της αυτόματης ανασυγκρότησης θραυσμάτων. Οι καμπύλες αυτές είναι το περίγραμμα-σύνορο τόσο της ανώτερης όσο και της κατώτερης επιφάνειας.

Οι ζητούμενες καμπύλες εξάγονται κατά τον προσδιορισμό των τριών επιφανειών (ανώτερης, κατώτερης, πλευρικής) αφού οι επιφάνειες αυτές ορίζονται ως το τμήμα της επιφάνειας του θραύσματος που αυτές οι καμπύλες περικλύουν. Επειδή όμως κατά την επεξεργασία των απεικονίσεων των θραυσμάτων απομονώνουμε πρώτα τις τρεις επιφάνειες, εξάγουμε μετέπειτα τις καμπύλες ως περιγράμματα των επιφανειών αυτών. Στην συνέχεια δειγματοληπτούμε επί των καμπυλών αυτών, αποθηκεύοντάς τις σε μορφή αλυσίδας σημείων οι οποίες τελικά θα χρησιμοποιηθούν στην μέθοδο της αυτόματης ανασυγκρότησης.

Ακολουθούν παρακάτω εικόνες της «ανώτερης» και της «κατώτερης» επιφάνειας των θραυσμάτων ν006, ν026 και ν060 στις οποίες φαίνεται η διαδικασία της εξαγωγής του περιγράμματός τους σε μορφή αλυσίδας σημείων. Για το θραύσμα ν006 έχουμε:



Σχήμα 3.3.1: Η ανώτερη επιφάνεια του ν006 με το περίγραμμά της



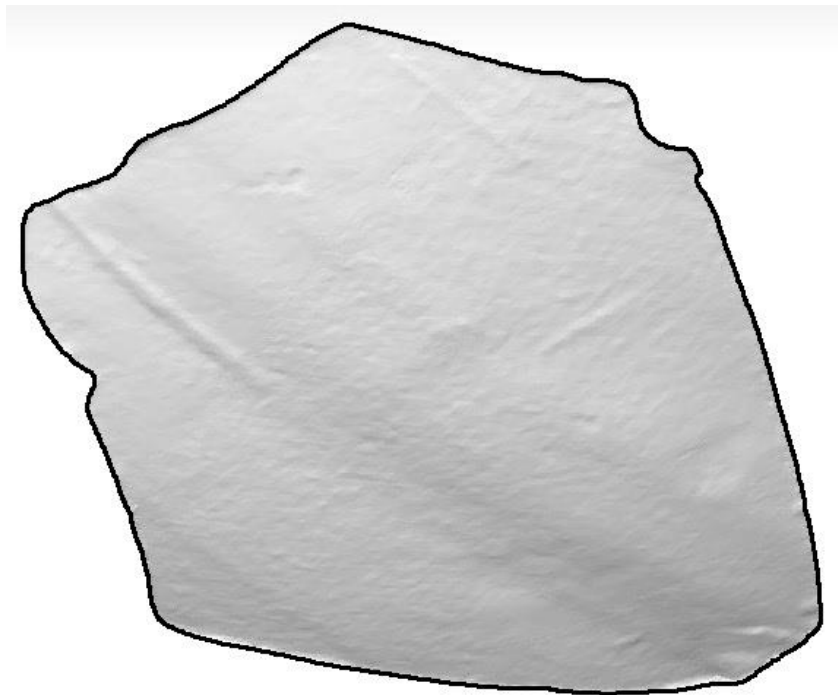
Σχήμα 3.3.2: Απομονωμένο το περίγραμμα της ανώτερης επιφάνειας του v006



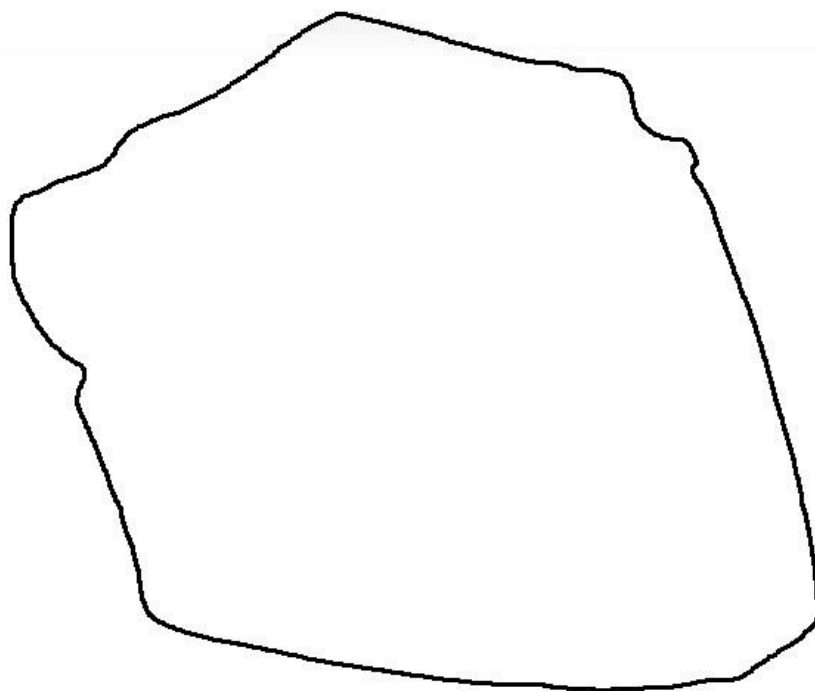
Σχήμα 3.3.3: Λεπτομέρεια της ανώτερης επιφάνειας του v006 με το περίγραμμά της



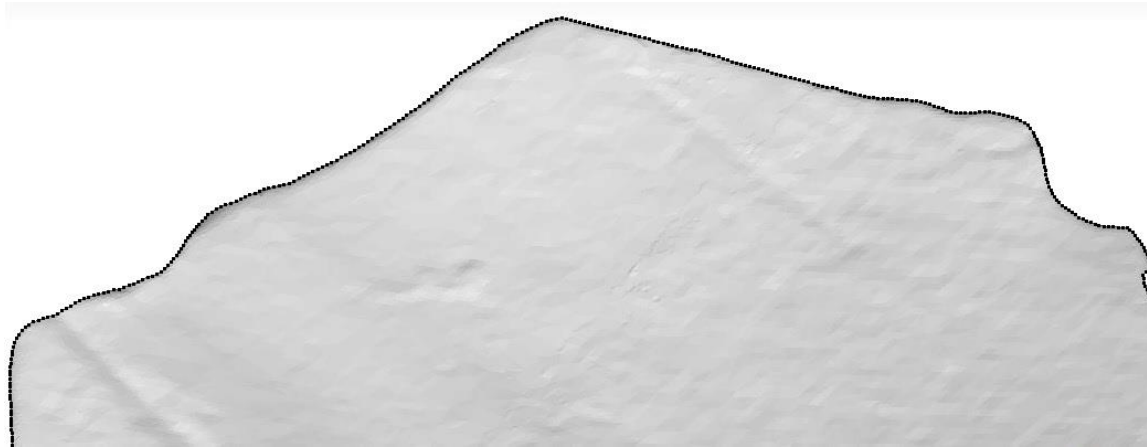
Σχήμα 3.3.4: Λεπτομέρεια του περιγράμματος της ανώτερης επιφάνειας του ν006



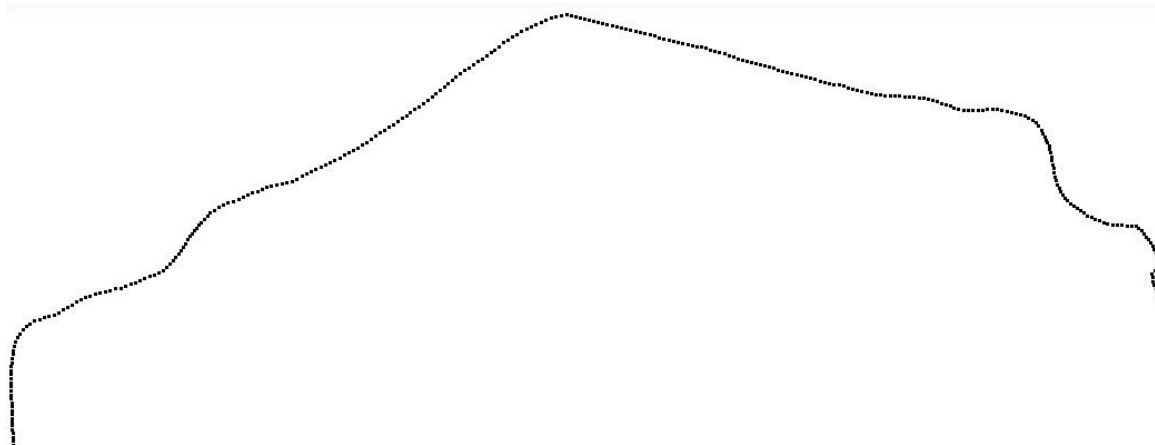
Σχήμα 3.3.5: Η κατώτερη επιφάνεια του ν006 με το περίγραμμά της



Σχήμα 3.3.6: Απομονωμένο το περίγραμμα της κατώτερης επιφάνειας του v006

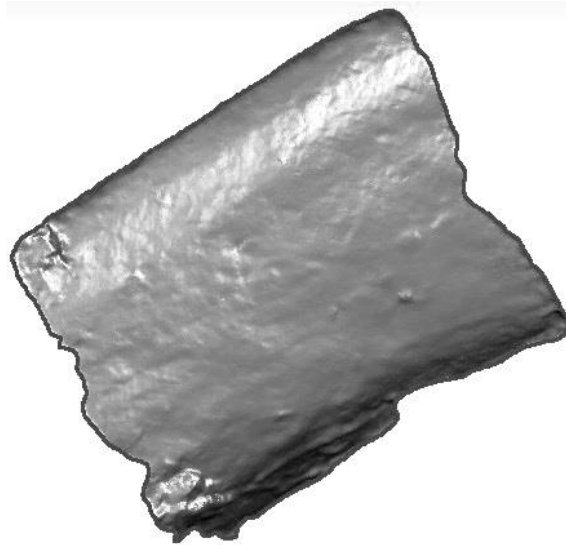


Σχήμα 3.3.7: Λεπτομέρεια της κατώτερης επιφάνειας του v006 με το περίγραμμά της

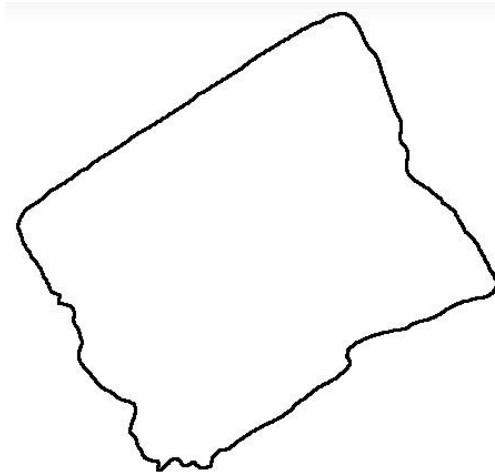


Σχήμα 3.3.8: Λεπτομέρεια του περιγράμματος της κατώτερης επιφάνειας του v006

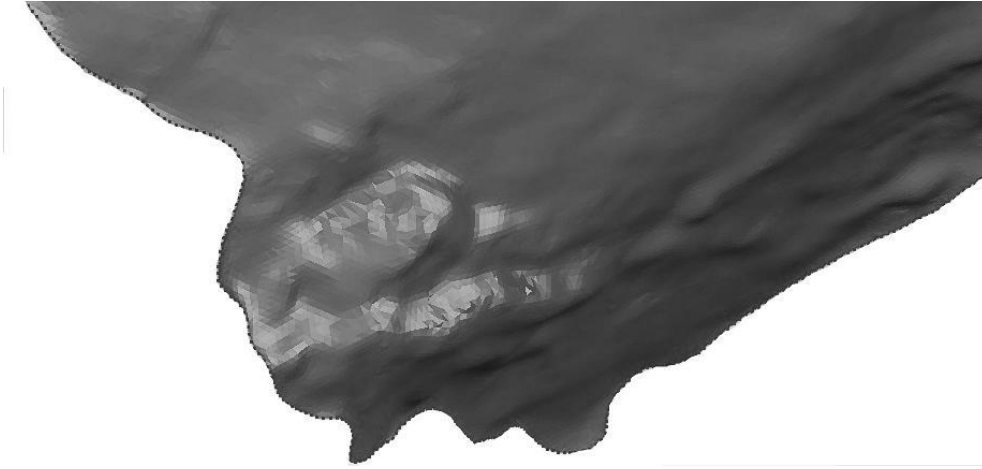
Ομοίως για το θραύσμα v024 :



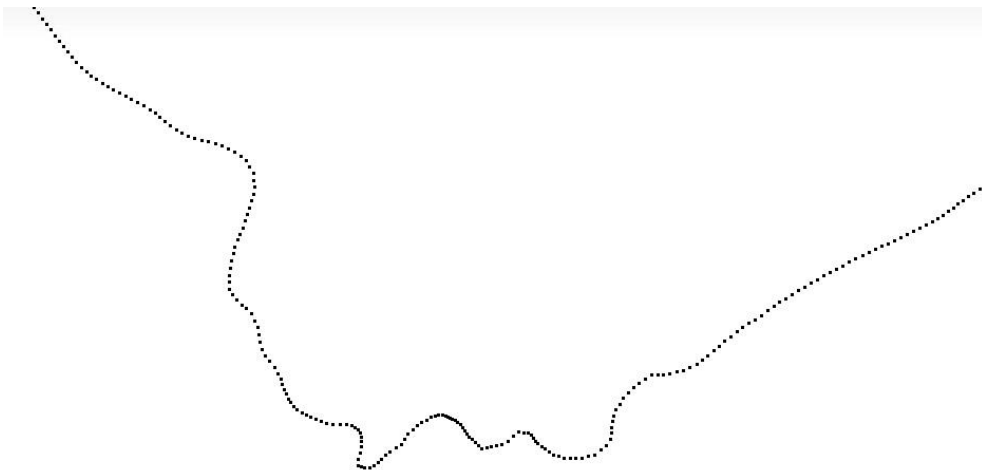
Σχήμα 3.3.9: Η ανώτερη επιφάνεια του v024 με το περίγραμμά της



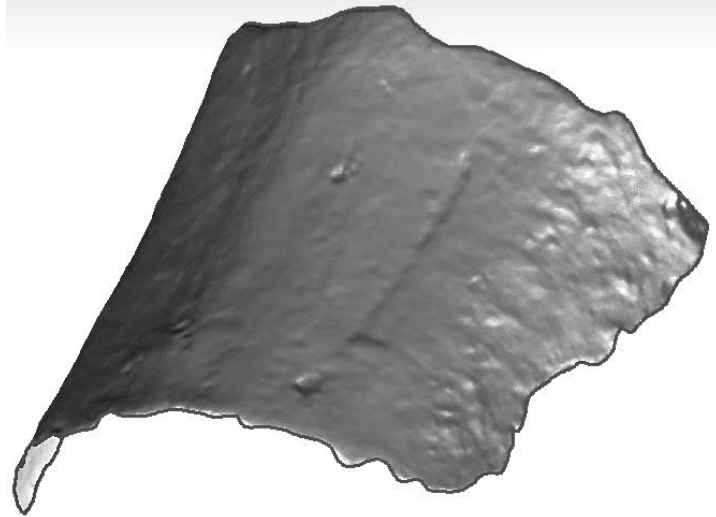
Σχήμα 3.3.10: Απομονωμένο το περίγραμμα της ανώτερης επιφάνειας του v024



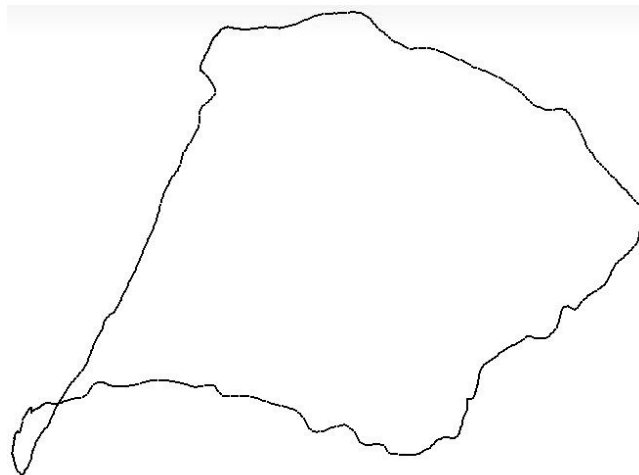
Σχήμα 3.3.11: Λεπτομέρεια της ανώτερης επιφάνειας του v024 με το περίγραμμά της



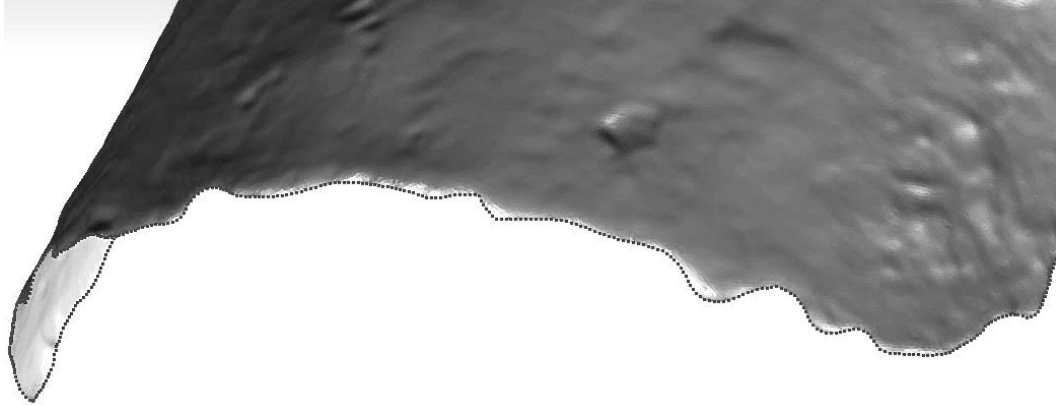
Σχήμα 3.3.12: Λεπτομέρεια του περιγράμματος της ανώτερης επιφάνειας του v024



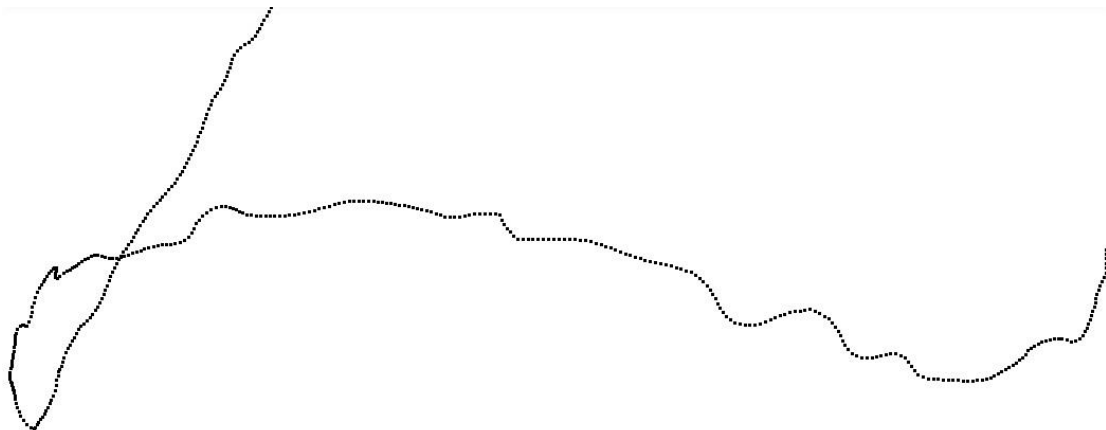
Σχήμα 3.3.13: Η κατώτερη επιφάνεια του v024 με το περίγραμμά της



Σχήμα 3.3.14: Απομονωμένο το περίγραμμα της κατώτερης επιφάνειας του v024

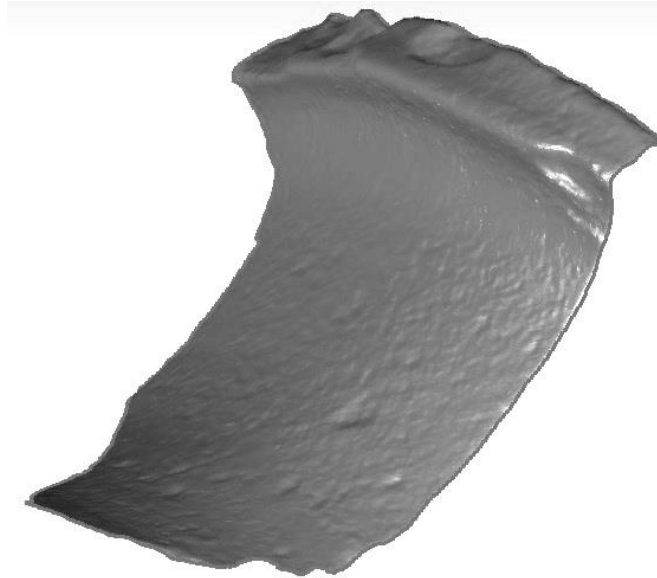


Σχήμα 3.3.15: Λεπτομέρεια της κατώτερης επιφάνειας του v024

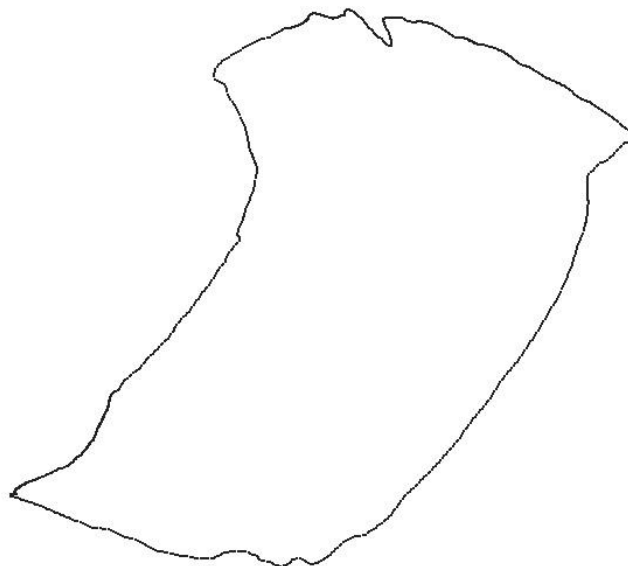


Σχήμα 3.3.16: Λεπτομέρεια του περιγράμματος της κατώτερης επιφάνειας του v024

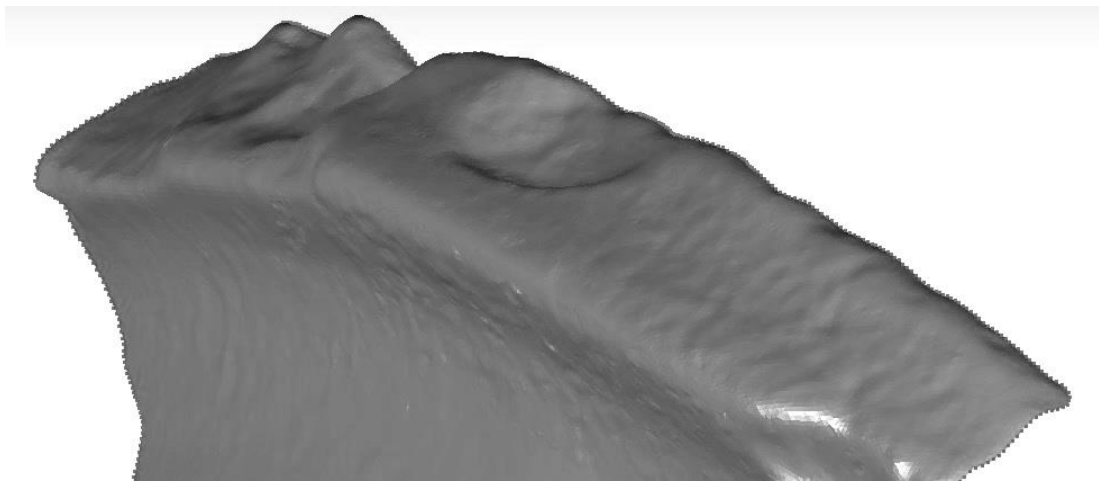
Ομοίως για το θραύσμα v060 :



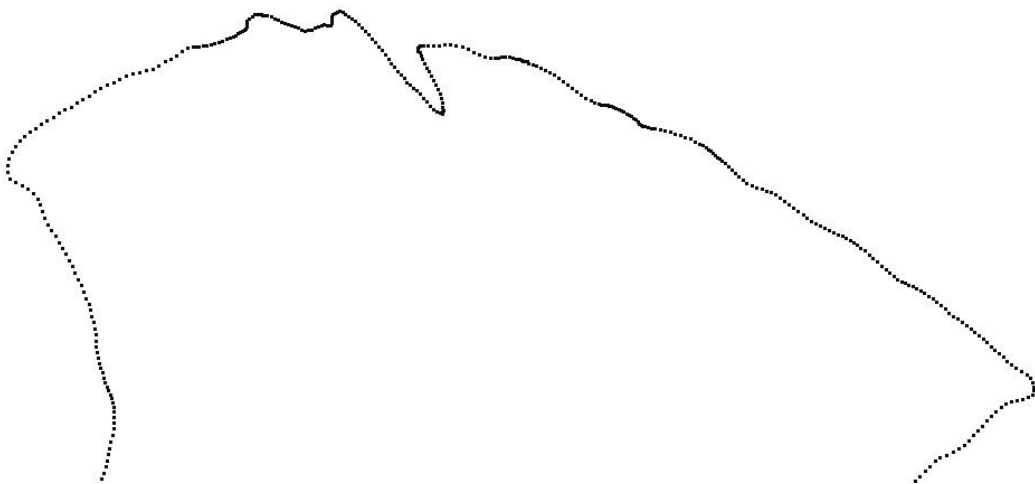
Σχήμα 3.3.17: Η ανώτερη επιφάνεια του v060 με το περίγραμμά της



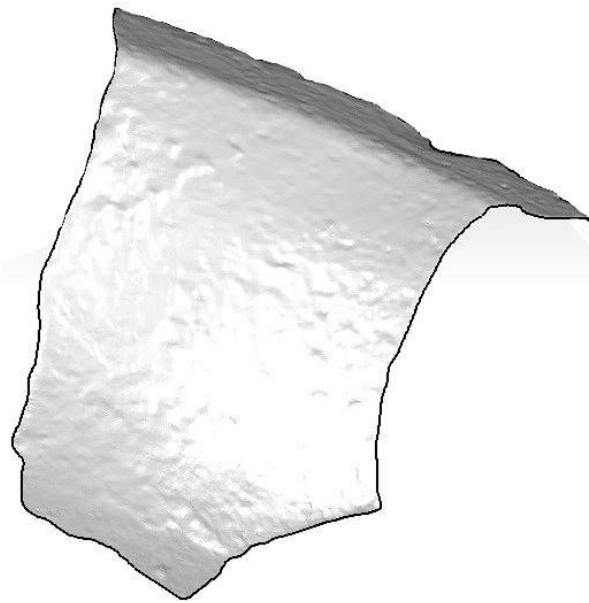
Σχήμα 3.3.18: Απομονωμένο το περίγραμμο της ανώτερης επιφάνειας του v060



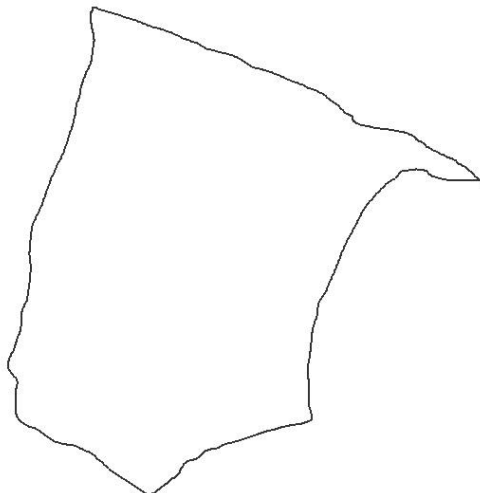
Σχήμα 3.3.19: Λεπτομέρεια της ανώτερης επιφάνειας του v060 με το περίγραμμά της



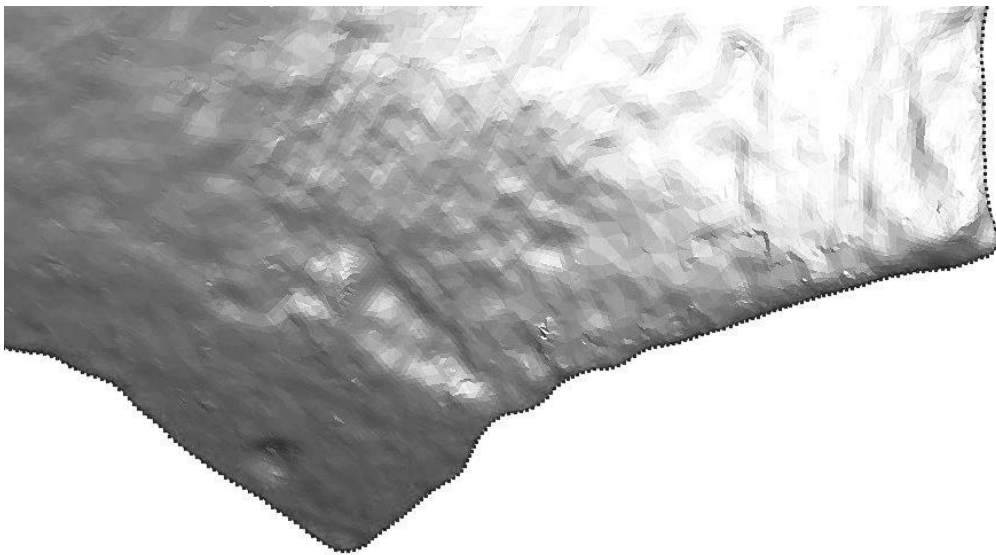
Σχήμα 3.3.20: Λεπτομέρεια του περιγράμματος της ανώτερης επιφάνειας του v060



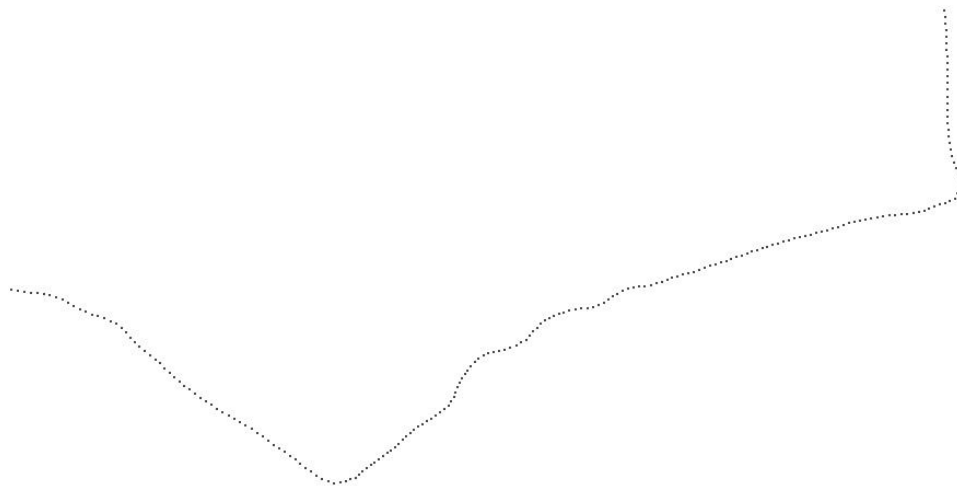
Σχήμα 3.3.21: Η κατώτερη επιφάνεια του v060 με το περίγραμμά της



Σχήμα 3.3.22: Απομονωμένο το περίγραμμα της κατώτερης επιφάνειας του v060



Σχήμα 3.3.23: Λεπτομέρεια της κατώτερης επιφάνειας του ν060



Σχήμα 3.3.24: Λεπτομέρεια του περιγράμματος της κατώτερης επιφάνειας του ν060

4

ΑΥΤΟΜΑΤΗ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΑΓΓΕΙΩΝ - ΣΧΕΤΙΚΑ ΕΡΓΑ

Η αυτόματη ανακατασκευή των θραυσμάτων βασίστηκε στην δημοσίευση [1]. Στην δημοσίευση αυτή εισάγεται μια νέα προσέγγιση για την αυτοματοποιημένη ανοικοδόμηση - ανασυγκρότηση των κατακερματισμένων αντικειμένων που έχουν μία επιφάνεια σχεδόν επίπεδη, με βάση την τρισδιάστατη αναπαράσταση των θραυσμάτων που τα αποτελούν.

Η όλη διαδικασία αρχίζει με την τρισδιάστατη σάρωση των διαθέσιμων θραυσμάτων. Οι ληφθήσες αναπαραστάσεις έχουν υποστεί την κατάλληλη επεξεργασία έτσι ώστε να μπορούν να ελεγχθούν για πιθανά ταιριάσματα. Μετά, εισάγονται τέσσερα νέα κριτήρια, που οδηγούν στον προσδιορισμό των ζευγών θραυσμάτων που ταιριάζουν. Τα κριτήρια αυτά έχουν επιλεγεί έτσι ώστε η όλη διαδικασία μιμείται την ενστικτώδη μέθοδο συναρμολόγησης που ειδικοί μελετητές εφαρμόζουν. Το πρώτο κριτήριο εκμεταλλεύεται τον όγκο του διακένου μεταξύ δύο σωστά τοποθετημένων θραυσμάτων. Το δεύτερο λαμβάνει υπόψη την υπερκάλυψη των θραυσμάτων σε κάθε πιθανή θέση ταιριάσματος. Τα κριτήρια 3, 4 χρησιμοποιούν αρχές από τον λογισμό των μεταβολών προκειμένου να θέσουν όρια για την περιοχή, την μέση καμπυλότητα των επιφανειών επαφής και το μήκος των καμπυλών επαφής, τα οποία πρέπει να τηρούνται εάν τα δύο θραύσματα ταιριάζουν. Η μέθοδος έχει εφαρμοστεί με μεγάλη επιτυχία, τόσο στην ανασυγκρότηση αντικειμένων, τεχνητά θραυσμένων από τους συγγραφείς και, σημαντικότερα, στην εικονική συναρμολόγηση τμημάτων τοιχογραφιών που ανήκουν στον Μυκηναϊκό πολιτισμό (1300 π.Χ.), οι οποίες ανασκάφηκαν ιδιαίτερα κατακερματισμένες στην Τίρυνθα στην Ελλάδα.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε μια μεθοδολογία και ένα σχετικό σύστημα πληροφοριών για την αντιμετώπιση του προβλήματος της αυτοματοποιημένης

ανοικοδόμησης ενός αυθαίρετου κατακερματισμένου αντικειμένου, με μόνο περιορισμό, όσον αφορά την περίπτωση των τοιχογραφιών, ότι μία από τις επιφάνειες των θραυσμάτων είναι επίπεδη ή σχεδόν επίπεδη. Ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι να προτείνει ένα σύστημα που προσφέρει μια πρακτικώς μοναδική λύση, όσον αφορά το ταίριασμα θραυσμάτων. Με άλλα λόγια, το παρουσιαζόμενο σύστημα δεν μοντελοποιεί τις επιφάνειες επαφής, ούτε εξετάζει το ακριβές σχήμα και τις θέσεις των εδρών θραύσης. Προσπαθεί μάλλον να μιμηθεί την διαδικασία που οι ειδικοί μελετητές ενστικτωδώς ακολουθούν, στην προσπάθειά τους να επανασυναρμολογήσουν μία τοιχογραφία ή ένα αγγείο. Επιπλέον, η μεθοδολογία λαμβάνει υπόψη την αναπόφευκτη φθορά που υπέστησαν τα ξεθαμμένα αρχαιολογικά θραύσματα και προσδιορίζει ακραίες περιπτώσεις σχετικά με την γεωμετρία των γειτονικών κομματιών μέσω του Λογισμού των Μεταβολών. Έχει εφαρμοστεί από την ερευνητική ομάδα της [1] η παρουσιαζόμενη μεθοδολογία και το σχετικό σύστημα :

α) σε μια τεχνητή δοκιμαστική περίπτωση και

β) στην πραγματική, πολύ σημαντική περίπτωση της ανασυγκρότησης προϊστορικών τοιχογραφιών με μεγάλη επιτυχία.

Σε αμφότερες τις περιπτώσεις, τα συστατικά μέρη έχουν ταιριάζει σωστά και η σωστή θέση ταιριάσματος μεταξύ γειτονικών θραυσμάτων έχει εντοπιστεί μοναδικά. Στην περίπτωση των τοιχογραφιών, η προηγούμενη δήλωση σχετικά με την ορθότητα των αποτελεσμάτων εκφράζει το γεγονός ότι ειδικοί μελετητές (αρχαιολόγοι και συντηρητές), συμφώνησαν πλήρως με τα ταιριάσματα που πρότεινε το σύστημα.

Αρχικά, πραγματοποιούμε μια τρισδιάστατη σάρωση των διαθέσιμων θραυσμάτων. Στη συνέχεια, για κάθε εικόνα θραύσματος εντοπίζουμε αυτόματα την ανώτερη επιφάνεια η οποία σε τοιχογραφίες είναι σχεδόν επίπεδη ενώ σε αγγεία είναι η εξωτερική. Προσδιορίζουμε επίσης τον άξονα ελάχιστης ροπής αδράνειας («κεντρικό άξονα» του θραύσματος), κάθετο προς την ανώτερη επιφάνεια. Για την περίπτωση των τοιχογραφιών περιστρέφουμε όλα τα θραύσματα, έτσι ώστε οι κεντρικοί άξονές τους να είναι παράλληλοι προς τον άξονα z. Στη συνέχεια, δημιουργούμε ένα μεγάλο σύνολο περιστραμμένων εκδοχών του κάθε θραύσματος, περιστρέφοντάς το γύρω από τον κεντρικό του άξονα κατά ένα μικρό βήμα γωνίας $\delta\theta$. Η ενέργεια αυτή γίνεται μόνο μία φορά για κάθε θραύσμα.

Για να ελέγξουμε αν δύο θραύσματα A, B ταιριάζουν, τοποθετούμε κατάλληλα κάθε περιστραμμένη εκδοχή του B δίπλα στο A και ορίζουμε πιθανές επιφάνειες επαφής μεταξύ τους. Σε κάθε θέση που δοκιμάζεται για ταίριασμα εφαρμόζονται τέσσερα κριτήρια, 3 αναγκαία και 1 ικανό. Ειδικότερα,

A) Ελέγχουμε εάν τα σχετικά μήκη των καμπυλών επαφής στις κοινές ανώτερες επιφάνειες των θραυσμάτων είναι αποδεκτά σύμφωνα με μια νέα πρόταση που αναφέρεται στην δημοσίευση [1].

B) Εξετάζουμε αν η περιοχή των «επιφανειών επαφής» των δύο θραυσμάτων κατά τη συγκεκριμένη σχετική θέση ικανοποιεί το θεώρημα που αναφέρεται και αποδεικνύεται στην δημοσίευση [1], του οποίου το ακριβές περιεχόμενο παράγεται με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών.

Γ) Η μέθοδος αναζητεί αυτόματα πιθανές επικαλύψεις μεταξύ των προς ταίριασμα θραυσμάτων.

Δ) Εάν όλα, τα διαδοχικά κριτήρια που εφαρμόζονται, (Α), (Β), (Γ), πληρούνται, τότε για τη σχετική τοποθέτηση των θραυσμάτων Α και Β, ορίζουμε ένα κατάλληλο τρισδιάστατο χωρίο, μεταξύ των δύο θραυσμάτων και υπολογίζουμε τον όγκο του. Εάν αυτός ο όγκος είναι μικρότερος από ένα σωστά προκαθορισμένο κατώφλι, τότε η σχετική τοποθέτηση των δύο θραυσμάτων χαρακτηρίζεται ως ορθή.

Θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι, φαινομενικά, ο έλεγχος για ταίριασμα όλων των περιστραμμένων εκδοχών του κάθε κομματιού είναι μια μάλλον περίπλοκη διαδικασία. Στην πραγματικότητα, θα μπορούσαμε να έχουμε αξιοποιήσει τα απορριπτικά κριτήρια της δημοσίευσης [1], έτσι ώστε να είναι αμετάβλητα περιστροφικά. Για παράδειγμα, θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει ένα σύνολο αλυσίδων ίσου μήκους, ή τομείς σταθερής δίδερης γωνίας τόσο στα σταθερά όσο και στα περιστραμμένα θραύσματα για την αξιοποίηση του κριτηρίου αυτού, χωρίς την εφαρμογή περιστροφής σε κανένα θραύσμα.

Ωστόσο, αυτό θα μπορούσε να μειώσει την ακρίβεια του συστήματος για τον καθορισμό των βέλτιστων επιφανειών ταίριασματος, ενώ η προσέγγισή μας είναι έντονα προσανατολισμένη προς την επίτευξη ακρίβειας και όχι ταχύτητας. Η αξιοποίηση όλων περιστραμμένων εκδοχών του κάθε θραύσματος είναι απαραίτητη και αναγκαία για να υπολογίσουμε τον όγκο που περικλείεται από τις γειτονικές επιφάνειες θραύσης, ενώ ταυτόχρονα, αποφεύγουμε τις υπερκαλύψεις. Παρ'όλα αυτά, όπως ήδη αναφέρθηκε, τα απορριπτικά κριτήρια που έχουν αναπτυχθεί με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών μειώνουν δραστικά την πολυπλοκότητα των υπολογισμών και επομένως επιταχύνουν την όλη διαδικασία.

Σχετικά έργα :

Προηγούμενες προσπάθειες τρισδιάστατης ανακατασκευής θραυσμένων αντικειμένων έγιναν και σε άλλες μελέτες όπως στην [6] στην οποία χρησιμοποιείται η τρισδιάστατη αναπαράστασή τους και γίνεται εφαρμογή της σε σημαντικά αρχαιολογικά ευρήματα. Στο [7], επιχειρείται η ανασυγκρότηση δισδιάστατων κατακερματισμένων ή σχισμένων αντικειμένων. Η διαδικασία συγκρίνει τα κωδικοποιημένα βάσει καμπυλότητας περιγράμματα θραυσμάτων, σε προοδευτικά αυξανόμενες κλίμακες ανάλυσης, χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο αντιστοίχισης. Στο [8] οι συγγραφείς αντιμετωπίζουν το πρόβλημα ανακατασκευής κατακερματισμένου αγγείου μέσω αξονικά συμμετρικών επιφανειών. Το ίδιο πρόβλημα αντιμετωπίζεται στο [9], όπου η ανασυγκρότηση πήλινων αγγείων βασίζεται στη συνέχεια του μέσου χρώματος στα εικονοστοιχεία του περιγράμματος των γειτονικών θραυσμάτων. Η προσέγγιση της ανασυγκρότησης αγγείων του [10] χρησιμοποιεί τις συναρτήσεις της καμπυλότητας για να πετύχει ταίριασμα συνεχόμενων εικονοστοιχείων περιγράμματος σε ζεύγος θραυσμάτων. Οι δημοσιεύσεις [11] έως [16] αντιμετωπίζουν την αυτόματη συναρμολόγηση σχισμένων ή τεμαχισμένων εγγράφων με έναν τρόπο βασισμένο στο περίγραμμα, χρησιμοποιώντας δύο και τριών διαστάσεων αναπαραστάσεις των εγγράφων.

Οι προσεγγίσεις στο πρόβλημα της τρισδιάστατης ανακατασκευής κατακερματισμένων αντικειμένων συνήθως ενσωματώνουν στοιχεία από ταίριασμα επιφανειών (π.χ. ο αλγόριθμος ICP που εισάγεται στο [17] ή οι σημείο προς σημείο προσεγγίσεις, όπως στον «Γενικευμένο Μετασχηματισμό Hough» στο [18]).

Στο [19] οι συγγραφείς αρχικά μειώνουν τις διαστάσεις του προβλήματος του ταϊριάσματος των επιφανειών και, στη συνέχεια, αναζητούν βέλτιστα ζεύγη ταϊριάσματος μέσω ενός σχήματος (RANSAC). Στο [20] και [21] η αυτόματη τρισδιάστατη ανακατασκευή αντιμετωπίζεται μέσω των σημείο προς σημείο αποστάσεων (από τον άξονα z) μεταξύ δοσμένων αμοιβαία ορατών εδρών θραύσης του αντικειμένου. Στο [22] οι συγγραφείς εισάγουν μια τρισδιάστατη μέθοδο ανακατασκευής που βασίζεται σε χαρακτηριστικά της επιφάνειας των θραυσμάτων, που υπολογίζεται μέσω ολοκληρωμάτων τα οποία υπολογίζονται τοπικά. Οι θραυσμένες επιφάνειες που ενδεχομένως ταϊριάζουν εντοπίζονται μέσω ενός αλγόριθμου κατάτμησης που βασίζεται σε τομές γράφων. Στη συνέχεια, μια λύση στην συναρμολόγηση θραυσμάτων προσδιορίζεται μέσω, μίας συνολικής σύγκρισης θραυσμάτων ανά δύο, η οποία βασίζεται σε ομοιότητα χαρακτηριστικών. Στο [23] η προσέγγιση που εισάγεται, διαφέρει από τις προηγούμενες, με την έννοια ότι η προτεινόμενη μέθοδος για την τρισδιάστατη συναρμολόγηση κατακερματισμένων αντικειμένων δεν βασίζεται σε ομοιότητα χαρακτηριστικών, αλλά στηρίζεται στην διενέργεια μιας επαναληπτικής διαδικασίας πάνω σε μία δομή πυκνού δυαδικού δέντρου. Δηλαδή, οι συγγραφείς χρησιμοποιούν ένα μετασχηματισμό μεταξύ ζευγών σημείων επί γειτονικών θραυσμένων επιφανειών προκειμένου να καθορίσουν δυαδικές σχέσεις μεταξύ αυτών των επιφανειών. Στο [24] μελετάται το πρόβλημα της τρισδιάστατης συναρμολόγησης κατακερματισμένων τοιχογραφιών. Οι συγγραφείς παρουσιάζουν ένα χαμηλού κόστους σύστημα πρόσληψης και επεξεργασίας πληροφοριών από τρισδιάστατα θραύσματα. Το σύστημα πρόσληψης απαιτεί ελάχιστη επίβλεψη, έτσι ώστε ένας, μη εξειδικευμένος χρήστης να μπορεί να σαρώνει τουλάχιστον 10 τεμάχια ανά ώρα. Το σύστημα εφαρμόζεται στις τοιχογραφίες του Ακρωτηρίου της Θήρας. Στο [25], αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της ανακατασκευής κατακερματισμένων τοιχογραφιών, στην περίπτωση όπου η μόνη διαθέσιμη πληροφορία είναι το σύνολο των δισδιάστατων εικόνων των θραυσμάτων. Η προσέγγιση είναι αποτελεσματική, αλλά έχει τον περιορισμό ότι δεν υπάρχει διαθέσιμη τρισδιάστατη πληροφορία των συστατικών μερών.

Βιβλιογραφία

- [1] C. Papaodysseus, D. Arabadjis, M. Exarhos, P. Rousopoulos, S. Zannos, M. Panagopoulos and L. Papazoglou-Manioudaki, “Efficient solution to the 3D problem of automatic wall paintings reassembly”, Computers and Mathematics with Applications, vol. 64, pp. 2712-2734, 2012.
- [2] Π. Ρουσσόπουλος, *Ανάπτυξη Προηγμένων Μεθόδων Αναγνώρισης Προτύπων και Μαθηματική Θεμελίωση για τον Εντοπισμό του Τρόπου Δημιουργίας και της Ταυτότητας του Δημιουργού Σημαντικών Αρχαιολογικών Ευρημάτων* Διδακτορική Διατριβή, Επιβλέπων Καθηγητής : Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς, Αθήνα Οκτώβριος 2010.
- [3] C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, F. Giannopoulos, S. Zannos, D. Arabadjis, M. Panagopoulos, E. Kalfa, C. Blackwell, S. Tracy. *Identifying the writer of ancient inscriptions and Byzantine codices. A novel approach*. Computer Vision and Image Understanding 121 (2014) 57–73. journal homepage: www.elsevier.com/locate/cviu.
- [4] Μαρκάτης, Σ. (1986). *Μαθήματα Διαφορικής Γεωμετρίας (Θεωρία Καμπυλών και Επιφανειών)*. Αθήνα: Ε.Μ.Πολυτεχνείο.
- [5] Apostol, T. *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός τόμος: II*. Μ. Πεχλιβανίδης & Σια ΑΕ.
- [6] C. Papaodysseus, D. Arabadjis, M. Panagopoulos, P. Rousopoulos, M. Exarhos, E. Papazoglou, *Automated reconstruction of fragmented objects using their 3D representation—application to important archaeological finds*, in: IEEE Proc. of ICSP 08, 2008, pp. 769–772.
- [7] da Gama Leitao, H.C., Stolfi, J. (2002). *A multiscale method for the reassembly of two-dimensional fragmented objects*. IEEE Trans. on PAMI, 24(9), 1239-1251.
- [8] Willis, A., Orriols, X., Cooper, D.B. (2003). *Accurately Estimating Shred 3D Surface Geometry with Application to Pot Reconstruction*. *Proceedings on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1-7.
- [9] Shogo, Y., Shohei, K., Satoshi, K. and Hidenori, I. (2005). *An Earthenware Reconstruction Method Based on the Matching of Both Contour Curve and Color Pattern on the Surface of Potsherds*. Journal of the Institute of Image Electronics Engineers of Japan, 34(2), 126-133.
- [10] Ucoluk, G., Toroslu, I.H. (1999). *Automatic reconstruction of 3D surface objects*. *Elsevier Computers & Graphics*, 23(4), 573-582.
- [11] Biswas, A., Bhowmick, P., and Bhattacharya, B.B. (2005). *Reconstruction of torn documents using contour maps*. IEEE Int. Conf. on Image Processing, 3, 517-520.
- [12] de Smet, P. (2008). *Reconstruction of ripped-up documents using fragment stack analysis procedures*, Elsevier Forensic Science International, 176(2-3), 124-136.
- [13] Stanco F., Tenze L., Ramponi G., and de Polo A., (2004). *Virtual restoration of fragmented glass plate photographs*. 12th IEEE Medit. Electrotechnical Conf., 1, 243-246.
- [14] Ukovic, A., and Ramponi, G. (2008). *Feature extraction and clustering for the computer-aided reconstruction of strip-cut shredded documents*. J. Electron. Imaging, 17(1).

- [15] Ukovic, A., Ramponi, G., Doulaverakis, H., Kompatsiaris, Y., and Strintzis, M.G. (2004). *Shredded document reconstruction using MPEG-7 standard descriptors*. 4th IEEE Int. Symp. on Signal Processing, 334-337.
- [16] Zhu, L., Zhou, Z. and Hu, D. (2008). *Globally Consistent Reconstruction of Ripped-Up Documents*. IEEE Trans. on PAMI, 30(1), 1-13
- [17] Besl, P.J. and McKay, H.D. (1992). *A method for registration of 3-D shapes*. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 14(2), 239-256.
- [18] Linnainmaa, S., Harwood, D., and Davis, L. S. (1988). *Pose determination of a three-dimensional object using triangle pairs*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 10(5), 634-647.
- [19] Winkelbach, S., Rilk, M., Schönfelder, C. and Wahl, F. M. (2004). *Fast random sample matching of 3D fragments*. Lecture Notes in Computer Science: 3175. Pattern recognition, 26th DAGM symposium, Berlin: Springer, 129-136.
- [20] Papaioannou, G., Karabassi, E.A., and Theoharis, T. (2002). *Reconstruction of Three-Dimensional Objects through Matching of Their Parts*. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 24(1), 114-124.
- [21] Papaioannou, G. and Karabassi, E.A. (2003). *On the automatic assemblage of arbitrary broken solid artefacts*. Elsevier Image and Vision Computing, 21, 401-412.
- [22] Huang, Q.X., Flöry, S., Gelfand, N., Hofer, M. and Pottmann, H. (2006). *Reassembling fractured objects by geometric matching*. ACM Transactions on Graphics, 25(3), 569-578.
- [23] Winkelbach, S. and Wahl, F.M. (2008). *Pairwise Matching of 3D Fragments Using Cluster Trees*. Springer Int. J. Computer Vision, 78(1), 1-13.
- [24] Brown, B.J., Toler-Fraklin, C., Nehab, D., Burns, M., Dobkin, D., Vlachopoulos, A., Doulas, C. Rusinkiewicz, C. and Weyrich, T. (2008). *A system for high-volume acquisition and matching of fresco fragments: reassembling Theran wall paintings*. ACM Transactions on Graphics, 27(3).
- [25] Papaodysseus, C. Panagopoulos, T. Exarhos, M. Triantafillou, C. Fragoulis, D. Doulas, C. (2002). *Contour-shape based reconstruction of fragmented, 1600 BC wall-paintings*. IEEE Transactions on Signal Processing, 50(6), 1277-1288.