



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
Τομέας Ηλεκτρομαγνητικών Εφαρμογών, Ηλεκτροοπτικής  
& Ηλεκτρονικών Υλικών

Μελέτη  
Ηλεκτρομαγνητικών Συντονισμών  
σε Ανισοτροπικές μικροκοιλότητες

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κυράννας Ηλίας

Επιβλέπων: Ρουmeliώτης Ιωάννης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2018





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙ-  
ΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
Τομέας Ηλεκτρομαγνητικών Εφαρμογών, Ηλε-  
κτροοπτικής & Ηλεκτρονικών Υλικών

Μελέτη  
Ηλεκτρομαγνητικών Συντονισμών  
σε Ανισοτροπικές μικροκοιλότητες

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κυράννας Ηλίας

Επιβλέπων: Ρουμελιώτης Ιωάννης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 31η  
Οκτωβρίου 2018.

Ρουμελιώτης Ιωάννης Τσαλαμέγκας Ιωάννης Γλύτσης Ηλίας

Αθήνα, Οκτώβριος 2018

.....  
**Κυράννας Ηλίας**

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών

Copyright © (2018) Κυράννας Ηλίας

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## Περίληψη

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, μελετάται ο υπολογισμός των μιγαδικών συχνοτήτων συντονισμού ανισοτροπικών σφαιρικών μικροκοιλοτήτων. Η διάταξη που μελετάται αποτελείται από μία ανισοτροπική σφαίρα, γυροηλεκτρικού ή γυρομαγνητικού τύπου, βρισκόμενη σε ισοτροπικό περιβάλλοντα χώρο. Για την επίτευξη του υπολογισμού γίνεται χρήση της μεθόδου διακριτών ιδιοσυναρτήσεων (Discrete Eigenfunction Method—DEM), που επιτρέπει την ανάπτυξη των άγνωστων πεδίων στις περιοχές ανισοτροπίας σε όρους σφαιρικών διανυσματικών κυματοσυναρτήσεων (Spherical Vector Wave Functions—SVWFs). Για την επαλήθευση της μεθόδου και των αποτελεσμάτων γίνεται σύγκριση με τα αποτελέσματα της μεθόδου χωρικών ολοκληρωτικών εξισώσεων (Volume Integral Equation—VIE), καθώς και με αυτά της μεθόδου χωριζομένων μεταβλητών (Separation of Variables Method—SVM) για την ειδική περίπτωση ισοτροπίας. Τέλος ελέγχεται η συμφωνία των ιδιοσυχνοτήτων και των απεικονίσεων των πεδίων στο χώρο για τις δύο μεθόδους πλήρους πεδίου και γίνεται χρήση του εμπορικού πακέτου HFSS για επαλήθευση των αποτελεσμάτων.

**Λέξεις-Κλειδιά:** ιδιοσυχνότητες, μικροκοιλότητες, ανισοτροπία, ιδιοσυναρτήσεις, σφαιρικές διανυσματικές κυματοσυναρτήσεις.

## Abstract

In this diploma thesis, the calculation of complex eigenfrequencies of anisotropic spherical resonators placed in isotropic environment is assessed. The configuration studied is composed of an anisotropic sphere, of gyroelectric or gyromagnetic type, placed in isotropic environment. To this purpose the discrete eigenfunction method (DEM) is used, which allows the expansion of the unknown fields in the region of anisotropy in terms of spherical vector wave functions (SVWFs). In order to validate the method and the results, they are compared to the analogous ones from the volume integral equations (VIE) method, as well as the ones resulting from the separation of variables method (SVM) for the special case of isotropy. At last the agreement of eigenfrequencies and fields between the two methods of full-wave solution is examined and the commercial package HFSS is used to validate the results.

**Keywords:** eigenfrequencies, microcavities, anisotropy, eigenfunctions, spherical vector wave functions.

Στους γονείς μου

## Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας και το τέλος των προπτυχιακών μου σπουδών, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την οικογένεια μου για τη συνεχή στήριξη, υλική και ψυχολογική, που αφειδώς μου παρείχαν όλα αυτά τα χρόνια, για την ανατροφή μου, την ακαδημαϊκή μου πορεία και τις υπόλοιπες δραστηριότητες μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της παρούσας εργασίας κ. Ρουμελιώτη Ιωάννη, όπως επίσης και τα άλλα δύο μέλη της εξεταστικής επιτροπής, τους κ. κ. Τσαλαμέγκα Ιωάννη και Γλύτση Ηλία, για την εξέταση της παρούσας εργασίας καθώς και τη γενικότερη βοήθεια τους τα χρόνια της προπτυχιακής μου πορείας. Επιπλέον, θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου σε όλους τους καθηγητές του τομέα για τη διδασκαλία των θεμάτων και την αγάπη που μεταδίδουν για το αντικείμενο. Κυριότερα, ιδιαίτερη αναφορά αξίζει στον μεταδιδακτορικό ερευνητή κ. Ζούρο Γρηγόριο, ο οποίος συνεισέφερε με συνεχή επίβλεψη και ενασχόληση κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας.



# Περιεχόμενα

<b>Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Γενικό πλαίσιο . . . . .	1
1.2 Μελέτη Κοιλοτήτων . . . . .	2
1.3 Παραγωγή και εφαρμογές . . . . .	4
1.4 Περιγραφή της εργασίας . . . . .	6
1.5 Δομή της εργασίας . . . . .	7
<b>Κεφάλαιο 2: Σφαιρικές Διανυσματικές Κυματοσυναρτήσεις</b> <b><math>M, N, L</math></b>	<b>8</b>
2.1 Συναρτήσεις Green . . . . .	8
2.2 Εισαγωγή των σφαιρικών διανυσματικών κυματοσυναρτήσεων <b><math>M, N, L</math></b> . . . . .	9
2.3 Ιδιότητες των <b><math>M, N, L</math></b> . . . . .	10
2.3.1 Ταυτότητες των <b><math>M, N, L</math></b> . . . . .	10
2.3.2 Ορθογωνιότητα των <b><math>M, N, L</math></b> . . . . .	10
2.4 Πληρότητα των <b><math>M, N, L</math></b> . . . . .	14
2.5 Εκφράσεις των σφαιρικών διανυσματικών συναρτήσεων (SVWFs)	15
<b>Κεφάλαιο 3: Εισαγωγή Υπολογιστικών Μεθόδων</b>	<b>18</b>
3.1 Επισκόπηση . . . . .	18
3.2 Μέθοδος Διακριτών Ιδιοτιμών . . . . .	19
3.3 Μέθοδος χωρικών ολοκληρωτικών εξισώσεων . . . . .	29
3.4 Μέθοδος Χωρισμού Μεταβλητών . . . . .	31
<b>Κεφάλαιο 4: Αποτελέσματα και Επαλήθευση</b>	<b>32</b>
4.1 Σύγκριση μεθόδων με διάταξη ισοτροπικής σφαίρας . . . . .	32
4.2 Σύγκριση μεθόδων με το εμπορικό πακέτο HFSS . . . . .	33
4.3 Επίλογος . . . . .	40
<b>Παράρτημα</b>	<b>42</b>
DEM για ισοτροπική διηλεκτρική σφαίρα σε περιβάλλον με απόσβεση	42
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>47</b>



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Γενικό πλαίσιο

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι ο υπολογισμός των ιδιοσυχνοτήτων ανισοτροπικών σφαιρικών μικροκοιλοτήτων σε ισοτροπικό περιβάλλον και η απεικόνιση των πεδίων στη διάταξη με τη μέθοδο διακριτών ιδιοσυναρτήσεων. Τα αποτελέσματα και η ορθότητα της μεθόδου, τόσο για την τιμή των ιδιοσυχνοτήτων όσο και για την απεικόνιση των πεδίων, επαληθεύονται με χρήση της μεθόδου των χωρικών ολοκληρωτικών εξισώσεων, καθώς και με αντιπαραβολή με τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών για την ειδική περίπτωση της ισοτροπικής σφαίρας. Τέλος, τα αποτελέσματα επαληθεύονται και με χρήση του εμπορικού πακέτου HFSS, αλλά υποδεικνύεται και η αδυναμία τέτοιων πακέτων να μελετήσουν με ακρίβεια ανοιχτές διατάξεις, όπως αυτή που εξετάζεται εδώ.

Η σημασία της εύρεσης μίας ακριβούς και αποδοτικής μεθόδου για την μελέτη ανισοτροπικών διατάξεων υποδεικνύεται από το ενδιαφέρον της παγκόσμιας ερευνητικής κοινότητας για το θέμα. Τα τελευταία χρόνια πλήθος εργασιών έχουν δημοσιευθεί και έχουν προταθεί πολλές μέθοδοι για τη μελέτη ανισοτροπικών διατάξεων και για τη βελτίωση της προσέγγισης του προβλήματος από την υπάρχουσα θεωρία.

Ακόμα το βάρος της μελέτης της ανισοτροπικής σφαίρας έγκειται στην απλότητα της σαν διάταξη, την εύκολη προσαρμογή της σε πιο πολύπλοκες διατάξεις και την σταθερότητα των ιδιοτήτων της σε μεγάλο εύρος θερμοκρασιών. Επίσης είναι πλέον εφικτή η κατασκευή τέτοιων σφαιρών με προκαθορισμένες ιδιότητες σε μεγάλη ακρίβεια.

## 1.2 Μελέτη Κοιλοτήτων

Οι ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες των κοιλοτήτων έχουν εξεταστεί από πολλούς ερευνητές, λόγω του μεγάλου ενδιαφέροντος που παρουσιάζουν σε ευρεία γκάμα πρακτικών εφαρμογών. Σε αυτό το μέρος του κεφαλαίου θα παρουσιαστούν σύντομα κάποια σημεία από μελέτες ισοτροπικών και ανισοτροπικών κοιλοτήτων, που καταδεικνύουν την ανάγκη ύπαρξης μίας μεθόδου υπολογισμού των χαρακτηριστικών των ιδιορυθμών τους.

Η μελέτη συντονισμού διηλεκτρικών σφαιρών και κοιλοτήτων είναι πολυετής και η βιβλιογραφία που αναφέρεται στο θέμα είναι εκτενής. Στην βιβλιογραφική αναφορά [1] γίνεται λεπτομερής μελέτη των φαινομένων συντονισμού σε τέτοιες κοιλοότητες και στην εφαρμογή τέτοιων μερών σαν στοιχείων σε μικροκυματικές διατάξεις.

Στη [2] μελετάται η αναλυτική εύρεση των χαρακτηριστών των ιδιορυθμών σε διάταξη που αποτελείται από ένα σφαιρικό αγωγίμο κέλυφος που γεμίζεται με διηλεκτρικό υλικό, για ρυθμούς TE και TM. Δίνονται κλειστοί τύποι υπολογισμού των συχνοτήτων συντονισμού για κάθε περίπτωση και αντλούνται τα εξής συμπεράσματα:

- Αν το αγωγίμο κέλυφος έχει επαγωγική αντίσταση, οι συχνότητες συντονισμού για όλους τους ρυθμούς έχουν χαμηλότερες τιμές. Αντίθετα, αν έχει χωρητική αντίσταση τότε έχουν υψηλότερες τιμές. Σε περίπτωση μιγαδικής αντίστασης τα πεδία εντός της κοιλότητας εξασθενούν λόγω των μιγαδικών ιδιοτιμών.
- Η πρώτη ιδιοτιμή είναι μία διαταραχή της μηδενικής σε κοιλότητα με τέλεια αγωγή τοιχώματα.
- Αν η αντίσταση του κελύφους είναι χωρητική τότε η θεμελιώδης συχνότητα είναι TE ρυθμού. Αντίθετα αν είναι επαγωγική, η θεμελιώδης συχνότητα είναι TM ρυθμού.
- Υπάρχουν εκφυλισμένοι ρυθμοί συντονισμού όπως στην περίπτωση κοιλότητας με τέλεια αγωγή τοιχώματα.

Τη σημασία τέτοιων διατάξεων καταδεικνύει η προσπάθεια που έχει γίνει για τη μελέτη των ρυθμών συντονισμού και τον υπολογισμό των μιγαδικών συχνοτήτων συντονισμού για διηλεκτρικούς συντονιστές. Στον τομέα αυτό έχουν δημοσιευθεί πολυάριθμες εργασίες και έχει χρησιμοποιηθεί πλήθος μεθόδων.

Στην [3] δίνεται μία διαδικασία, με χρήση της μεθόδου των ροών, για τον προσδιορισμό των ιδιοσυχνοτήτων και των συντελεστών ποιότητας διηλεκτρικών κοιλοτήτων με κανονικές γεωμετρίες. Η μέθοδος δίνει αποτελέσματα τόσο

για σφαιρικούς συμμετρικούς όσο και για υβριδικούς ρυθμούς. Παρόλο που στην εργασία αυτή χρησιμοποιούνται μόνο συντονιστές κυλινδρικής συμμετρίας και χωρίς απώλειες, η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί επίσης σε συντονιστές με τυχαία σχήματα και σε διηλεκτρικά με απώλειες.

Άλλη μία μέθοδος που χρησιμοποιείται για τη μελέτη παρόμοιων φαινομένων είναι η μέθοδος του μηδενικού πεδίου. Στην [4] η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων και των συντελεστών ποιότητας σε σύνθετους διηλεκτρικούς συντονιστές. Οι σύνθετοι διηλεκτρικοί συντονιστές σχεδιάζονται με σκοπό να δημιουργηθούν ευρύτερες διατάξεις που είναι διαμορφώσιμες ως προς τη συχνότητα συντονισμού, όπως τα μικροκυματικά φίλτρα και οι ταλαντωτές.

Στην [5] δίνεται μία αποδοτική μέθοδος για τη μελέτη συντονιστών που έχουν βυθιστεί σε ανομοιογενές περιβάλλον. Ιδιαίτερη μνεία αξίζει στο γεγονός ότι έχει χρησιμοποιηθεί μία μέθοδος που παρέχει πλήρη περιγραφή των πεδίων μέσω της συνάρτησης Green, για τον αριθμό των συντονιστών.

Αντίστοιχα στην [6] χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις του Maxwell για να μελετηθεί διάταξη ανισοτροπικής σφαίρας κρυσταλλικού τύπου, που περιβάλλεται από αγωγό με απώλειες. Χρησιμοποιώντας την αζιμουθιακή συμμετρία του προβλήματος και εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες, υπολογίζεται η εξίσωση διασποράς και τα χαρακτηριστικά των TE, TM ρυθμών. Τα σημεία στα οποία δίνεται έμφαση είναι τα εξής:

- Η κρυσταλλική ανισοτροπία επηρεάζει μόνο τους TM ρυθμούς και εμφανίζονται νέοι TM ρυθμοί.
- Η λύση του προβλήματος με τον τρόπο αυτό παρουσιάζει δυσκολίες, λόγω της εξάρτησης του τανυστή επιτρεπτότητας από την πολική γωνία.
- Η ανισοτροπία δημιουργεί δύο τύπους ανεξάρτητων ταλαντώσεων, με διαφορετικές συχνότητες και συντελεστές ποιότητας.

Οι σφαιρικές διατάξεις παίζουν σημαντικό ρόλο και στη μελέτη και τον καθορισμό των ιδιοτήτων ανισοτροπικών υλικών. Στην [7] δίνεται μία περιγραφή του εξοπλισμού και της μεθόδου μετρήσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση του πίνακα επιτρεπτότητας ενός υλικού με ανισοτροπία μονοαξονικού τύπου. Η μέθοδος που εφαρμόζεται χρησιμοποιεί τρεις διατάξεις. Αρχικά λαμβάνονται μετρήσεις από περίβλημα που περικλείει κενή σφαιρική κοιλοτητα. Έπειτα γίνεται το ίδιο με την κοιλοτητα να γεμίζεται εν μέρει με σφαιρικό κέλυφος γνωστής επιτρεπτότητας και τέλος με τον υπόλοιπο κενό χώρο να γεμίζεται με σφαίρα κατασκευασμένη από το υπό εξέταση ανισοτροπικό υλικό. Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζεται ο άξονας ανισοτροπίας της σφαίρας. Τέλος παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της μεθόδου. Λόγω

του σφαιρικού σχήματος η κοιλότητα έχει τον μεγαλύτερο συντελεστή ποιότητας και οι αντίστοιχοι ρυθμοί συντονισμού διεγείρονται πιο εύκολα. Επίσης, ο διαχωρισμός των εκφυλισμένων ρυθμών που υπάρχουν στη σφαιρική διάταξη είναι χρήσιμος για τον εντοπισμό του άξονα ανισοτροπίας του υλικού και οι υπολογισμοί των συχνοτήτων συντονισμού γίνονται εύκολα με την παρούσα διάταξη. Το μειονέκτημα είναι ότι η κατασκευή της ανισοτροπικής σφαίρας πρέπει να είναι ακριβής και κάθε απόκλιση από τη σφαιρική γεωμετρία επηρεάζει πολύ τα αποτελέσματα της μέτρησης. Αντίθετα όμως, το γεγονός αυτό παρέχει μία μέθοδο ελέγχου της ακριβούς κατασκευής ανισοτροπικών σφαιρών.

### 1.3 Παραγωγή και εφαρμογές

Τα προβλήματα που καλούνται να λυθούν για την ευρεία εφαρμογή των μικροκοιλοτήτων είναι η γεωμετρία της διάταξης, η εύκολη παραγωγή και χρήση της σε ευρύτερες διατάξεις και τα υλικά και ο μηχανισμός που θα χρησιμοποιηθεί από τον αισθητήρα. Αρχικά, είναι αναγκαίο οι μικροκοιλοότητες να έχουν υψηλό συντελεστή ποιότητας. Έχουν χρησιμοποιηθεί γεωμετρίες όπως δίσκοι και δακτύλιοι και ο στόχος είναι να επιτευχθεί ο υψηλότερος δυνατός συντελεστής ποιότητας για τον όγκο της διάταξης. Ο κυριότερος παράγοντας στην προσπάθεια αυτή είναι η τεχνική κατασκευής, ώστε να αποφευχθούν οι τραχιές επιφάνειες στις μικροκοιλοότητες και ως εκ τούτου οι απώλειες από σκεδάσεις. Στις παρατηρήσεις αυτές πρέπει να προστεθεί η ευκολία στην παραγωγή και χρήση τους, ώστε να μπορούν τα στοιχεία να παραχθούν μαζικά και να χρησιμοποιηθούν ταυτόχρονα ή σε σειρά. Επίσης, τα υλικά που θα χρησιμοποιηθούν για τη μικροκοιλότητα και το περιβάλλον της πρέπει να επιλεγθούν έτσι ώστε να εξασφαλίζεται μεγάλη ικανότητα περιορισμού του φωτός και συνεπώς ο συντελεστής διάθλασης των υλικών παίζει σημαντικό ρόλο.

Εκτενής αναφορά στη χρήση των μικροκοιλοτήτων στην τεχνολογία των αισθητήρων γίνεται στην [8]. Οι εφαρμογές όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι αισθητήρες με μικροκοιλοότητες εκτείνονται σε ποικίλους τομείς. Στην αναλυτική χημεία δίνεται η δυνατότητα να ανιχνευθεί ένα υλικό, χωρίς να αλλάζει η χημική δομή του. Στη χρωματογραφία αερίων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για ανίχνευση αερίων [9]. Γενικότερα, οι οπτικοί αισθητήρες με μικροκοιλοότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για ανίχνευση κάθε υλικού, που μπορεί να τοποθετηθεί πάνω στην επιφάνεια του αισθητήρα.

Οι διηλεκτρικοί συντονιστές χρησιμοποιούνται ευρέως και ως μέρη στη δημιουργία κεραίων. Στην [10] γίνεται μία ευρεία μελέτη διατάξεων για αυτές τις εφαρμογές και δίνονται οι γενικές αρχές για τον υπολογισμό των συχνοτήτων συντονισμού.

Οι εφαρμογές των μικροκοιλοτήτων δεν περιορίζονται στις μικροκυματικές

διατάξεις, αλλά εκτείνονται και σε πολλούς τομείς της σύγχρονης τεχνολογίας. Εκτενής αναφορά στις ενδιαφέρουσες ιδιότητες, διατάξεις και εφαρμογές γίνεται στην [11], όπου επισημαίνονται τα κύρια σημεία προόδου και έρευνας καθώς και τα προβλήματα που καλείται να λύσει η παρούσα τεχνολογία.

Στην [12] δίνεται άλλη μία εφαρμογή των αισθητήρων με μικροκοιλότητες, για την ανίχνευση νανοσωματιδίων σε ένα διάλυμα. Η ανίχνευση των σωματιδίων βασίζεται στην διπολική αλληλεπίδραση μεταξύ του νανοσωματιδίου και των ρυθμών συντονισμού των κοιλοτήτων. Η αλληλεπίδραση δημιουργεί μετατόπιση στις συχνότητες συντονισμού και ασκεί μία οπτική δύναμη στο νανοσωματίδιο στην κατεύθυνση του μεγίστου της έντασης του ρυθμού, παρέχοντας έτσι την δυνατότητα παγίδευσής του. Με βάση τις ιδιότητες αυτές μπορούν να προσδιοριστούν η πολικότητα και ο συντελεστής τριβής του νανοσωματιδίου. Η καινοτομία και το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής έγκειται στο γεγονός ότι δε χρειάζεται εκ των προτέρων γνώση των ιδιοτήτων του σωματιδίου.

Τέλος, σημαντική είναι η αναφορά στην προσπάθεια βελτίωσης της λειτουργίας των αισθητήρων, για την αποτελεσματικότερη χρήση τους. Η κατασκευή των μικροσυντονιστών μπορεί να βελτιώσει κατά πολύ τον συντελεστή ποιότητας και στη [13] παρουσιάζονται τα όρια βελτίωσης, ως προς τις απώλειες που υπάρχουν λόγω ζεύξης των στοιχείων του αισθητήρα. Λόγω της ύπαρξης ανώτερων ρυθμών συντονισμού δεν μπορούμε να έχουμε σαφή περιγραφή με βάση τη θεωρία εισόδου-εξόδου ανοιχτών συστημάτων, αλλά υπάρχει δυνατότητα μεγάλης βελτίωσης για εκμετάλλευση στην κβαντική οπτική και τη μη γραμμική φωτονική.

Στον τομέα της οπτικής γίνεται χρήση των διατάξεων ενδιαφέροντος για τη μετατροπή οπτικών συχνοτήτων, με τη χρήση μικροκοιλοτήτων πυριτίου [14]. Για την εφαρμογή γίνεται χρήση ρυθμών που μεταφέρουν το οπτικό κύμα πάνω στην επιφάνεια του μικροσυντονιστή (Whispering Gallery Mode—WGM). Ο συντελεστής ποιότητας της τάξης του  $10^{11}$  [14] και οι ρυθμοί μικρών όγκων έχουν καταστήσει τέτοιες συσκευές απαραίτητες στη σύγχρονη οπτική. Στην εργασία αυτή αναδεικνύεται η δυνατότητα τέτοιων διατάξεων να λειτουργήσουν ως μετατροπείς συχνοτήτων ακόμα και στο οπτικό φάσμα, ελέγχοντας τη σκέδαση με επιλογή σφαίρας κατάλληλου μεγέθους. Με τον τρόπο αυτό, όπως αναφέρεται από τους συγγραφείς, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μετατροπείς συνεχών κυμάτων σε θερμοκρασία δωματίου, με μικρό πλάτος γραμμής, ρυθμιζόμενους βιοαισθητήρες, φασματοσκοπικές εφαρμογές και πιθανώς την παραγωγή μη κλασικού φωτός.

Στην [15] επιδεικνύεται η κατασκευή μιας συμπαγούς διάταξης WGM, αποτελούμενης από μικροκατασκευασμένη οπτική ίνα με ενσωματωμένη μικροκοιλότητα. Η ίνα λειτουργεί ως περιβάλλον και διεγείρει τη σφαίρα επεκτείνοντας έτσι τις εφαρμογές. Τα πλεονεκτήματα της διάταξης είναι η ευστάθεια και η εύκολη διέγερση WGM ρυθμών. Παρόλο που ο συνολικός συντελεστής ποι-

ότητα της διάταξης ( $2.2 \cdot 10^3$ ) είναι μειωμένος σε σχέση με αυτόν μίας πολυμερούς μικροκοιλότητας, η συνολική κατασκευή μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ενσωματωμένους βιοαισθητήρες.

Τέλος, στην [16] υλοποιείται η ανωτέρω διάταξη, μελετάται με χρήση φωτοδιαθλαστικότητας και γίνεται εκτενής αναφορά για την απόκριση της διάταξης στη διέγερση και τα χαρακτηριστικά λειτουργίας της.

## 1.4 Περιγραφή της εργασίας

Η παρούσα εργασία σκοπεύει στη μελέτη των ιδιορυθμών μίας ανισοτροπικής σφαίρας, σε ισοτροπικό περιβάλλον.

Παρόλο που πολλές εργασίες έχουν ασχοληθεί με την μελέτη των ρυθμών για παρόμοιες διατάξεις, η εύρεση μίας αποδοτικής μεθόδου υπολογισμού των μιγαδικών ιδιοσυχνοτήτων, που παρέχει παράλληλα μία πλήρη λύση των πεδίων είναι δύσκολη.

Στην παρούσα εργασία δίνεται μία μέθοδος με ακριβή περιγραφή των πεδίων στη διάταξη και ανάπτυξη τους με βάση ένα σύνολο εύχρηστων διανυσματικών κυματοσυναρτήσεων. Αφού το πεδίο αναλυθεί χρησιμοποιούνται χρήσιμες σχέσεις των διανυσμάτων του συνόλου βάσης, για να προσδιοριστεί η ακριβής μορφή του πεδίου στη διάταξη και να υπολογιστούν οι μιγαδικές ιδιοσυχνότητες.

Η επιβεβαίωση της μεθόδου που χρησιμοποιείται γίνεται με αντιπαραβολή των αποτελεσμάτων της για διάφορα υλικά και περιπτώσεις, με την μέθοδο ολοκληρωτικών εξισώσεων. Ακόμα, για την ισοτροπική περίπτωση, γίνεται σύγκριση και των δύο μεθόδων με τα αποτελέσματα της μεθόδου χωρισμού μεταβλητών. Τέλος γίνεται σύγκριση με το εμπορικό πακέτο HFSS και παρατηρήσεις.

Τα σημεία ενδιαφέροντος της εργασίας μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

- Εισάγεται μία μέθοδος πλήρους πεδίου, που υπολογίζει τις ιδιοσυχνότητες ανισοτροπικών μικροκοιλοτήτων που λειτουργούν ως συντονιστές.
- Η μέθοδος μπορεί να παράγει και την εικόνα του πεδίου στη διάταξη, ακόμα και σε ανοιχτές διατάξεις που παρουσιάζουν δυσκολία.
- Η ορθότητα της μεθόδου επιβεβαιώνεται με την μέθοδο των χωρικών ολοκληρωτικών εξισώσεων, τόσο για τις ιδιοσυχνότητες όσο και για την εικόνα των πεδίων, αλλά και με την μέθοδο χωρισμένων μεταβλητών, για τις περιπτώσεις που η τελευταία μπορεί να παράγει αποτελέσματα.
- Οι λύσεις επιβεβαιώνονται, επίσης, με το εμπορικό πακέτο HFSS.



## 1.5 Δομή της εργασίας

Η εργασία έχει οργανωθεί έτσι ώστε να αντικατοπτρίζεται η λογική πορεία που ακολουθήθηκε για τη θεωρητική λύση του προβλήματος και τη δόμηση του υπολογιστικού μέρους. Ακολουθεί η ακριβής δομή καθώς και μια σύντομη περίληψη των επόμενων κεφαλαίων:

- **Κεφάλαιο 2:** *Σφαιρικές Διανυσματικές Κυματοσυναρτήσεις  $M, N, L$*   
Παρουσιάζονται οι σφαιρικές διανυσματικές κυματοσυναρτήσεις, οι ιδιότητές τους και τα σημεία ενδιαφέροντος για την παρούσα εργασία.
- **Κεφάλαιο 3:** *Εισαγωγή Υπολογιστικών Μεθόδων*  
Εισάγεται η μέθοδος διακριτών ιδιοσυναρτήσεων καθώς και η μέθοδος χωρικών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Στη συνέχεια δίνεται η περιγραφή της μεθόδου χωρισμού μεταβλητών, που θα χρησιμοποιηθεί αργότερα για εξακρίβωση της σωστής λειτουργίας της DEM, στην ειδική περίπτωση της ισοτροπικής σφαίρας.
- **Κεφάλαιο 4:** *Αποτελέσματα και Επαλήθευση*  
Δίνονται αποτελέσματα των μεθόδων για την διάταξη ενδιαφέροντος και γίνεται επαλήθευσή τους. Διατυπώνονται επίσης συμπεράσματα για τη λειτουργία και τη χρησιμότητα κάθε μεθόδου.

## Κεφάλαιο 2

# Σφαιρικές Διανυσματικές Κυματοσυναρτήσεις $M, N, L$

### 2.1 Συναρτήσεις Green

Η συνάρτηση Green μιας κυματικής εξίσωσης είναι η λύση της για σημειακή πηγή. Η συνολική λύση ενός προβλήματος, αν η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή, βρίσκεται με χρήση της αρχής της υπέρθεσης, λόγω της γραμμικότητας της κυματικής εξίσωσης, με την προϋπόθεση ότι τα υλικά είναι γραμμικά.

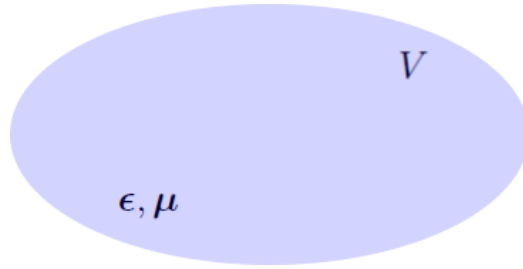
Ως επέκταση, η δυαδική συνάρτηση Green είναι μία δυάδα (ένας τανυστής δευτέρου βαθμού) που συσχετίζει ένα διανυσματικό πεδίο με το διάνυσμα της πηγής ρεύματος. Η χρήση της για ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα, αν και δεν είναι απαραίτητη, κάνει τις λύσεις πιο συμπαγείς και απλές.

Οι αναπαράστασεις της συνάρτησης Green ποικίλουν για ένα ομοιογενές μέσο. Σύμφωνα με τη συνήθη πρακτική, χρησιμοποιείται μόνο η συνάρτηση που συσχετίζει το ηλεκτρικό πεδίο με την πηγή ρεύματος και το μαγνητικό πεδίο προκύπτει λαμβάνοντας την περιστροφή του ηλεκτρικού. Αντίστοιχη πορεία μπορεί να ακολουθηθεί και αντιστρόφως, δηλαδή να βρεθεί η συνάρτηση Green για το μαγνητικό πεδίο, έπειτα το ίδιο το μαγνητικό πεδίο και στη συνέχεια από αυτό να προκύψει το ηλεκτρικό. Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας, στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιηθεί η αναπαράσταση της συνάρτησης Green με διανυσματικές κυματοσυναρτήσεις σε σφαιρικές συντεταγμένες και θα μελετηθούν οι ιδιότητες τους.

## 2.2 Εισαγωγή των σφαιρικών διανυσματικών κυματοσυναρτήσεων $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{L}$

Σε έναν όγκο  $V$  χωρίς πηγές, γεμισμένο με ομογενές υλικό (Σχήμα 2.1), το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ικανοποιούν την διανυσματική εξίσωση:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) - k^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.2.1)$$



Σχήμα 2.1: Τυχαίος όγκος  $V$  χωρίς πηγές.

Επιπλέον το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  μπορεί να κατασκευαστεί από ένα βαθμωτό δυναμικό  $\psi(\mathbf{r})$ . Το βαθμωτό δυναμικό  $\psi(\mathbf{r})$  ικανοποιεί την βαθμωτή κυματική εξίσωση

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.2.2)$$

Ορίζεται ένα διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{c}\psi(\mathbf{r}) \quad (2.2.3)$$

όπου το  $\mathbf{c}$  είναι ένα σταθερό διάνυσμα. Αντικαθιστώντας στην (2.2.1) επιβεβαιώνεται ότι το  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  αποτελεί λύση της. Ορίζεται επίσης το

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}). \quad (2.2.4)$$

Πάλι αντικαθιστώντας στην (2.2.1) επαληθεύεται ότι και το  $\mathbf{N}(\mathbf{r})$  είναι λύση της.

Οι διανυσματικές κυματοσυναρτήσεις  $\mathbf{M}$  και  $\mathbf{N}$  είναι σωληνοειδή πεδία (έχουν μηδενική απόκλιση) και χρησιμοποιούνται για την έκφραση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στον όγκο  $V$ . Για την πλήρη αναπαράσταση όλων των ρυθμών είναι αναγκαίο και ένα πεδίο με μη μηδενική απόκλιση. Ορίζοντας το

$$\mathbf{L} = \nabla\psi(\mathbf{r}) \quad (2.2.5)$$

ισχύει ότι  $\nabla \cdot \mathbf{L}(\mathbf{r}) = \nabla^2\psi = -k^2\psi(\mathbf{r}) \neq 0$  και  $\nabla \times \mathbf{L}(\mathbf{r}) = 0$ . Το  $\mathbf{L}$  είναι ένα αστρόβιλο διανυσματικό πεδίο που χρησιμοποιείται για την έκφραση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στον όγκο  $V$ .

## 2.3 Ιδιότητες των $M, N, L$

Οι χρήσιμες αυτές κυματοσυναρτήσεις έχουν αναλυθεί εκτενώς και ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην αντίστοιχη βιβλιογραφία για μία πλήρη ανάλυση [17],[18]. Στην ενότητα αυτή θα δοθούν χρήσιμες για την παρούσα εργασία ιδιότητες και περιγραφές των κυματοσυναρτήσεων.

### 2.3.1 Ταυτότητες των $M, N, L$

Από τους ορισμούς των κυματοσυναρτήσεων προκύπτουν κάποιες χρήσιμες ταυτότητες για τις σχέσεις που ισχύουν τόσο για την απόκλιση και τον στροβιλισμό τους όσο και μεταξύ τους.

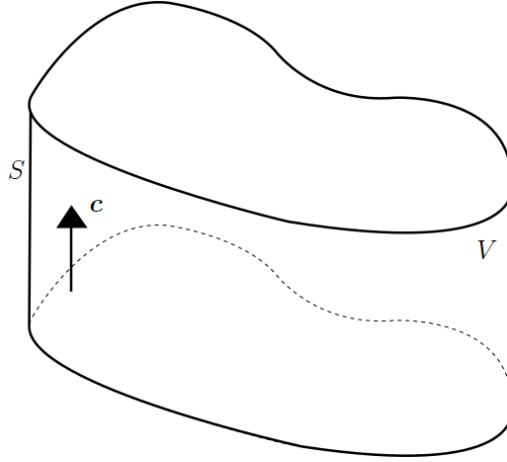
Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

Απόκλιση	Στροβιλισμός
$\nabla \cdot \mathbf{L} = \nabla^2 \psi = -k^2 \psi$	$\nabla \times \mathbf{L} = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$	$\nabla \times \mathbf{M} = k\mathbf{N}$
$\nabla \cdot \mathbf{N} = 0$	$\nabla \times \mathbf{N} = k\mathbf{M}$

Ισχύει επίσης η σχέση  $\mathbf{L} \times \mathbf{c} = \mathbf{M}$ . Η τελευταία σχέση υποδεικνύει ότι η διανυσματική κυματοσυνάρτηση  $\mathbf{M}$  είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν η κυματοσυνάρτηση  $\mathbf{L}$  και το διάνυσμα οδηγός  $\mathbf{c}$ .

### 2.3.2 Ορθογωνιότητα των $M, N, L$

Η ορθογωνιότητα των διανυσματικών κυματοσυναρτήσεων τις καθιστά χρήσιμα και πρακτικά εργαλεία στους υπολογισμούς που απαιτούνται για τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Στην ενότητα αυτή θαδειχθεί ότι οι διανυσματικές κυματοσυναρτήσεις σε ένα χώρο  $V$  είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, με μόνη προϋπόθεση το σύνορο του όγκου  $V$ , το  $S = \partial V$  να αποτελείται από μία ομαλή επιφάνεια που σχηματίζεται από τη μετακίνηση μίας ομαλής κλειστής καμπύλης παράλληλα με το διάνυσμα οδηγό  $\mathbf{c}$  και τερματίζεται από δύο επίπεδες επιφάνειες παράλληλες μεταξύ τους (Σχήμα 2.2). Η απόδειξη ισχύει για σταθερά διανύσματα οδηγούς αλλά μπορεί να γενικευτεί και για μεταβλητά [17], όπως στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.



Σχήμα 2.2: Όγκος  $V$  με σύνορο την επιφάνεια  $S$  και διάνυσμα οδηγό  $\mathbf{c}$ .

Έστω δύο βαθμωτά δυναμικά  $\psi(\mathbf{r})$  και  $\psi'(\mathbf{r})$ , τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.3.1)$$

$$(\nabla^2 + k'^2)\psi'(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.3.2)$$

με  $k \neq k'$  και με προκαθορισμένες οριακές συνθήκες στο  $\partial V$ . Πολλαπλασιάζοντας τις δύο σχέσεις με  $\psi'$  και  $\psi$ , αντίστοιχα, και αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\psi'\nabla^2\psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})\nabla^2\psi'(\mathbf{r}) = (k'^2 - k^2)\psi(\mathbf{r})\psi'(\mathbf{r}). \quad (2.3.3)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\psi'\nabla^2\psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})\nabla^2\psi'(\mathbf{r}) = \nabla \cdot [\psi'\nabla\psi(\mathbf{r}) - \psi\nabla\psi'(\mathbf{r})]. \quad (2.3.4)$$

Ολοκληρώνοντας στον όγκο  $V$  και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss προκύπτει ότι:

$$\int_S dS \hat{n} \cdot (\psi'\nabla\psi - \psi\nabla\psi') = (k'^2 - k^2) \int_V dV(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\psi'(\mathbf{r}), \quad (2.3.5)$$

όπου  $\hat{n}$  διάνυσμα κάθετο στο σύνορο  $\partial V$ , με φορά προς τα έξω.

Συνεπώς, σε περίπτωση που ικανοποιείται μία ομογενής συνθήκη Dirichlet στο σύνορο  $\partial V$  ( $\psi = 0$ ) ή μία ομογενής συνθήκη Neumann σε αυτό ( $\hat{n} \cdot \nabla\psi = 0$ ) τότε για  $k^2 \neq k'^2$  ισχύει η συνθήκη ορθογωνιότητας:

$$\int_V dV \psi(\mathbf{r})\psi'(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.3.6)$$

Από τη σχέση ορθογωνιότητας για τα βαθμωτά δυναμικά συνεπάγονται αντίστοιχες σχέσεις για τις διανυσματικές κυματοσυναρτήσεις.

$$\begin{aligned} \int_V dV \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}'(\mathbf{r}) &= \int_V dV [\nabla \times \mathbf{c}\psi(\mathbf{r})] \cdot [\nabla \times \mathbf{c}\psi'(\mathbf{r})] \\ &= \int_S dS \hat{\mathbf{n}} \cdot [\psi(\mathbf{r})\mathbf{c} \times \nabla \times \mathbf{c}\psi'(\mathbf{r})] \\ &\quad + \int_V dV \psi(\mathbf{r})\mathbf{c} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{c}\psi'(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Ορίζοντας  $\nabla_s = \nabla - \hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{c}} \cdot \nabla$  και  $k_s^2 = k'^2 - k_c^2$  όπου υποτίθεται ότι η  $\psi'(\mathbf{r})$  έχει εξάρτηση  $e^{\pm ik_c c}$  προκύπτει ότι:

$$\mathbf{c} \times \nabla \times \mathbf{c}\psi'(\mathbf{r}) = [c^2 \nabla - \mathbf{c}\mathbf{c} \cdot \nabla] \psi'(\mathbf{r}) = c^2 k_s^2 \psi'(\mathbf{r}). \quad (2.3.8)$$

Συνεπώς η εξίσωση που ικανοποιεί το βαθμωτό δυναμικό γίνεται:

$$(\nabla^2 + k'^2) \psi'(\mathbf{r}) = (\nabla_s^2 + \frac{\partial^2}{\partial c^2} + k'^2) \psi' = (\nabla_s^2 + k_s^2) \psi'(\mathbf{r}). \quad (2.3.9)$$

Με χρήση των (2.3.8) και (2.3.9), η (2.3.7) καταλήγει στην:

$$\begin{aligned} \int_V dV \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}'(\mathbf{r}) &= c^2 \int_S dS \psi(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_s \psi'(\mathbf{r}) \\ &\quad + c^2 k_s^2 \int_V dV \psi(\mathbf{r}) \psi'(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Επιλέγοντας την επιφάνεια  $S$  και το διάνυσμα  $\mathbf{c}$  έτσι ώστε  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_s \psi'(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi'(\mathbf{r})$  τότε η ομογενής συνθήκη Dirichlet ή η ομογενής συνθήκη Neumann για το βαθμωτό δυναμικό μηδενίζει το επιφανειακό ολοκλήρωμα παντού στην  $S$ . Συνεπώς:

$$\int_V dV \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}'(\mathbf{r}) = c^2 k_s^2 \int_V dV \psi(\mathbf{r}) \psi'(\mathbf{r}) = 0, k^2 \neq k'^2. \quad (2.3.11)$$

Αντίστοιχα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \int_V dV \mathbf{N}(\mathbf{r}) \mathbf{N}'(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k \cdot k'} \int_V dV \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{M}'(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{k \cdot k'} \int_S dS \hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{M}(\mathbf{r}) \times \nabla \times \mathbf{M}'(\mathbf{r})] \\ &\quad + \frac{k'}{k} \int_V dV \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}'(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Αφού η  $\psi(\mathbf{r})$  ικανοποιεί είτε μία ομογενή συνθήκη Dirichlet είτε μία ομογενή συνθήκη Neumann στην επιφάνεια  $S$ , το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην τελευταία εξίσωση μηδενίζεται. Κατά συνέπεια:

$$\begin{aligned} \int_V dV \mathbf{N}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}'(\mathbf{r}) &= \frac{k'}{k} \int_V dV \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}'(\mathbf{r}) \\ &= c^2 k_s^2 \frac{k'}{k} \int_V dV \psi(\mathbf{r}) \psi'(\mathbf{r}) = 0, k^2 \neq k'^2. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Όμοια για την τελευταία διανυσματική κυματοσυνάρτηση  $\mathbf{L}$  ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \int_V dV \mathbf{L}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{L}'(\mathbf{r}) &= \int_V dV \nabla \psi(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi'(\mathbf{r}) \\ &= \int_S dS \hat{n} \cdot [\psi(\mathbf{r}) \nabla \psi'(\mathbf{r})] + k'^2 \int_V dV \psi(\mathbf{r}) \psi'(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Οι οριακές συνθήκες και πάλι επιβάλλουν να μηδενίζεται το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της τελευταίας ισότητας. Συνεπώς:

$$\int_V dV \mathbf{L}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{L}'(\mathbf{r}) = k'^2 \int_V dV \psi(\mathbf{r}) \psi'(\mathbf{r}) = 0, k^2 \neq k'^2. \quad (2.3.15)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι οι διανυσματικές κυματοσυναρτήσεις  $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{L}$  είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, αν προκύπτουν από διαφορετικά βαθμωτά πεδία. Αποδεικνύεται επίσης ότι είναι και μεταξύ τους ορθογώνιες αν αντιπροσωπεύουν όλες το ηλεκτρικό πεδίο ή όλες το μαγνητικό πεδίο. Η προϋπόθεση αυτή διασφαλίζει ότι οι κυματοσυναρτήσεις ικανοποιούν την ίδια οριακή συνθήκη πάνω στο σύνορο  $S$ , ενώ για άπειρο όγκο  $V$  η προϋπόθεση δεν είναι απαραίτητη, καθώς όλα τα πεδία τείνουν στο 0.

Συνεχίζοντας όμοια με τις παραπάνω αποδείξεις προκύπτει ότι:

$$\int_V dV \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}'(\mathbf{r}) = \int_V dV [\nabla \times \mathbf{c}\psi(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{N}'(\mathbf{r}). \quad (2.3.16)$$

Όμως, ισχύουν οι σχέσεις :

$$\begin{aligned} [\nabla \times \mathbf{c}\psi(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{N}'(\mathbf{r}) &= \nabla \cdot [\mathbf{c}\psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{N}'] + \psi(\mathbf{r}) \mathbf{c} \cdot \nabla \times \mathbf{N}', \\ \mathbf{c} \cdot \nabla \times \mathbf{N}'(\mathbf{r}) &= k' \mathbf{c} \cdot \mathbf{M}'(\mathbf{r}) = k' \mathbf{c} \cdot \nabla \times \mathbf{c}\psi'(\mathbf{r}) = 0. \end{aligned}$$

Επειδή ένα από τα βαθμωτά δυναμικά θα ικανοποιεί την ομογενή συνθήκη Dirichlet στο σύνορο  $S$  ισχύει επίσης η σχέση:

$$\hat{n} \cdot \mathbf{c}\psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{N}'(\mathbf{r}) = -\mathbf{c}\psi(\mathbf{r}) \cdot \hat{n} \times \mathbf{N}'(\mathbf{r}) = 0.$$

Κατά συνέπεια η (2.3.16) καταλήγει στην:

$$\begin{aligned} \int_V dV \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}'(\mathbf{r}) &= \int_S dS \hat{n} \cdot [\mathbf{c}\psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{N}'(\mathbf{r})] + \int_V dV \psi(\mathbf{r}) \mathbf{c} \cdot \nabla \times \mathbf{N}'(\mathbf{r}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \int_V dV \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{L}'(\mathbf{r}) &= \int_V dV [\nabla \times \mathbf{c}\psi(\mathbf{r})] \cdot \nabla \psi'(\mathbf{r}) \\ &= \int_S dS \hat{n} \cdot (\psi' \nabla \times \mathbf{c}\psi(\mathbf{r})) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Για το τελευταίο ζεύγος διανυσματικών κυματοσυναρτήσεων ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \int_V dV \mathbf{N}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{L}'(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k} \int_V dV (\nabla \times \nabla \times \mathbf{c}\psi(\mathbf{r})) \cdot \nabla \psi'(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{k} \int_S dS \hat{n} \cdot (\mathbf{c} \times \nabla \psi(\mathbf{r})) \times \nabla \psi'(\mathbf{r}) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

## 2.4 Πληρότητα των $M, N, L$

Το σύνολο των διανυσματικών κυματοσυναρτήσεων  $\{\mathbf{M}_n, \mathbf{N}_n, \mathbf{L}_n\}$  είναι πλήρες στο χώρο των λύσεων της (2.2.1), δηλαδή κάθε λύση της εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων που ανήκουν στο σύνολο. Στην παρούσα εργασία θα δοθεί μία σχιαγράφηση της απόδειξης και ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [19] για μία εκτενή μελέτη.

Η απόδειξη χωρίζεται σε δύο σκέλη. Αρχικά πρέπει να αποδειχτεί η ύπαρξη ενός πλήρους συνόλου συναρτήσεων για την (2.2.1) και έπειτα να αποδειχθεί όλες οι λύσεις μπορούν να εκφραστούν σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του συνόλου  $\{\mathbf{M}_n, \mathbf{N}_n, \mathbf{L}_n\}$ .

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο χώρος των λύσεων της διανυσματικής εξίσωσης Helmholtz δε μπορεί να έχει μία βάση αποτελούμενη από πεπερασμένο αριθμό συναρτήσεων. Επίσης είναι γνωστό ότι το σύνολο όλων των επίπεδων κυμάτων που αποτελούν λύσεις της εξίσωσης είναι ένα πλήρες σύνολο, δηλαδή κάθε κύμα μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμική υπέρθεση επίπεδων κυμάτων. Η διανυσματική εξίσωση Helmholtz έχει λύσεις με μη μηδενική απόκλιση. Σε ανισοτροπικά υλικά όμως μπορεί να υπάρξει μεταφορά ορμής, άρα το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να μην είναι κάθετο στο κυματικό διάνυσμα.

Η εξίσωση (2.2.1) έχει και λύσεις που ενδέχεται να έχουν μη μηδενική απόκλιση και είναι γνωστό ότι οι λύσεις αυτές μπορούν να εκφραστούν σαν γραμμικός συνδυασμός γενικευμένων επίπεδων κυμάτων. Η δυσκολία στη χρήση των διανυσμάτων αυτών έγκειται στο γεγονός ότι το σύνολο τους είναι μη αριθμήσιμο, οπότε η μεταβλητή που χρειάζεται για τη διάκριση των συνιστωσών συναρτήσεων είναι συνεχής. Η χρήση ολοκληρωμάτων δεν είναι εύκολη σε όλες τις διατάξεις.

Για το χώρο των λύσεων της εξίσωσης (2.2.1) ισχύει ότι:



- Είναι γραμμικός, δηλαδή αν οι  $\phi_1, \phi_2$  είναι λύσεις τότε και η  $\phi_1 + \phi_2$  είναι λύση.
- Μπορεί να οριστεί το εσωτερικό γινόμενο.
- Μπορεί να οριστεί το μέτρο κάθε λύσης.
- Ο χώρος είναι πλήρης, αφού υπάρχει ένα πλήρες σύνολο, αυτό των επίπεδων κυμάτων.

Αφού ικανοποιούνται αυτές οι συνθήκες ο χώρος των λύσεων αποτελεί έναν χώρο Hilbert και μπορεί ναδειχθεί ότι κάθε τέτοιος χώρος περιέχει μία μετρήσιμη βάση.

Για το δεύτερο σκέλος της απόδειξης αρχικά σημειώνεται ότι το σύνολο  $\{\mathbf{M}_n, \mathbf{N}_n, \mathbf{L}_n\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο και έχει αριθμήσιμα άπειρα μέλη. Επίσης τα μέλη του συνόλου των βαθμωτών συναρτήσεων  $\{\psi_n\}$  είναι συνεχείς συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους έως και δεύτερης τάξεως. Συνεπώς και οι προκύπτουσες κυματοσυναρτήσεις θα είναι συνεχείς.

Υποθέτουμε τώρα μία γενική τυχαία λύση της εξίσωσης (2.2.1), την  $\mathbf{x}$ , που μας δίνεται με τη μορφή συνόλου  $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$  με το διάνυσμα της  $\mathbf{x}$  σε μετρήσιμο αριθμό σημείων. Το πρώτο μέλος του συνόλου, το διάνυσμα  $\mathbf{x}_1$ , μπορεί να εκφραστεί ως  $\alpha_1 \mathbf{L}_1 + \beta_1 \mathbf{M}_1 + \gamma_1 \mathbf{N}_1 = \mathbf{x}_1$  όπου τα  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  είναι σταθερές που ανήκουν στο μιγαδικό επίπεδο. Η λύση σε άλλα σημεία του χώρου θα διαφέρει από την  $\mathbf{x}$ . Στη γενική περίπτωση θα διαφέρει και στο σημείο 2, όπου η λύση είναι το διάνυσμα  $\mathbf{x}_2$ . Τότε μπορεί να επιλεγεί μία δεύτερη τριπλέτα  $\{\mathbf{M}_2, \mathbf{N}_2, \mathbf{L}_2\}$  και να ληφθεί μία γενικότερη λύση σαν γραμμικός συνδυασμός των έξι κυματοσυναρτήσεων ώστε να συμφωνεί με την  $\mathbf{x}$  και στα δύο σημεία. Όμοια μπορεί να ληφθεί λύση που έχει την ίδια τιμή με την  $\mathbf{x}$  σε κάθε ένα από τα σημεία. Η διαφορά της από την δοθείσα λύση μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή διότι αποτελεί μία ακολουθία Cauchy. Σημειώνεται ότι οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού δεν είναι μοναδικοί γιατί εξαρτώνται από τη σειρά με την οποία λαμβάνονται οι τριπλέτες. Η σύγκλιση εξασφαλίζεται από το θεώρημα Reisz-Fischer.

## 2.5 Εκφράσεις των σφαιρικών διανυσματικών συναρτήσεων (SVWFs)

Εκφράσεις των SVWFs υπάρχουν σε πολλά συστήματα συντεταγμένων. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούνται αποκλειστικά οι σφαιρικές συντεταγμένες, λόγω της γεωμετρίας της διάταξης που μελετάται.

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, η λύση της (2.2.2) που δεν απειρίζεται στην αρχή των αξόνων είναι

$$\psi_{nm}(k, \mathbf{r}) = j_n(kr)Y_{nm}(\theta, \phi) \quad (2.5.1)$$

όπου  $j_n(kr)$  είναι η σφαιρική συνάρτηση Bessel α' είδους και

$$Y_{nm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(n-m)!(2n+1)}{(n+m)!4\pi}} P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi} \quad (2.5.2)$$

με  $P_n^m(\cos\theta)$  τη συνάρτηση Legendre.

Στην περίπτωση των σφαιρικών συντεταγμένων επιλέγουμε διάνυσμα  $\mathbf{c} = \mathbf{r}$  και προκύπτει ότι:

$$\mathbf{M}_{nm}(k, \mathbf{r}) = \nabla \times [\mathbf{r}j_n(kr)Y_{nm}(\theta, \phi)] \quad (2.5.3)$$

$$\mathbf{N}_{nm}(k, \mathbf{r}) = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times [\mathbf{r}j_n(kr)Y_{nm}(\theta, \phi)] \quad (2.5.4)$$

$$\mathbf{L}_{nm}(k, \mathbf{r}) = \frac{1}{k} \nabla [j_n(kr)Y_{nm}(\theta, \phi)] \quad (2.5.5)$$

Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε τις βολικές εκφράσεις που δίνονται στην [17]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{mn}(k_l, \mathbf{r}) &= \sqrt{n(n+1)}z_n(k_l r)\mathbf{C}_{mn}(\theta, \phi) \\ \mathbf{N}_{mn}(k_l, \mathbf{r}) &= n(n+1)\frac{z_n(k_l r)}{k_l r}\mathbf{P}_{mn}(\theta, \phi) \\ &\quad + \sqrt{n(n+1)}\frac{1}{k_l r}\frac{d[rz_n(k_l r)]}{dr}\mathbf{B}_{mn}(\theta, \phi) \\ \mathbf{L}_{mn}(k_l, \mathbf{r}) &= \frac{1}{k_l}\frac{dz_n(k_l r)}{dr}\mathbf{P}_{mn}(\theta, \phi) \\ &\quad + \sqrt{n(n+1)}\frac{1}{k_l r}z_n(k_l r)\mathbf{B}_{mn}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

όπου  $z_n$  είναι μία σφαιρική συνάρτηση Bessel α' είδους  $j_n$  ή β' είδους  $y_n$  ή μία σφαιρική συνάρτηση Hankel α' είδους  $h_n^{(1)} = j_n + iy_n$  ή β' είδους  $h_n^{(2)} = j_n - iy_n$ .

Οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel μπορούν να εκφραστούν με τους τύπους Rayleigh ως εξής:

$$j_n(x) = (-x)^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sin x}{x} \quad (2.5.7)$$

$$y_n(x) = -(-x)^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\cos x}{x} \quad (2.5.8)$$

Οι σφαιρικές συναρτήσεις Hankel μπορούν να εκφραστούν ως εξής [18]:

$$h_n^{(1)}(x) = (-i)^{n+1} \frac{e^{ix}}{x} \sum_{x=0}^n \frac{i^m}{m!(2x)^m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (2.5.9)$$

$$h_n^{(2)}(x) = i^{n+1} \frac{e^{-ix}}{x} \sum_{x=0}^n \frac{(-i)^m}{m!(2x)^m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (2.5.10)$$

Τα διανύσματα  $\mathbf{C}_{mn}$ ,  $\mathbf{P}_{mn}$ ,  $\mathbf{B}_{mn}$  είναι τα σφαιρικά επιφανειακά αρμονικά διανύσματα (Spherical Surface Harmonic Vectors - SSHVs) που δίνονται ως [18]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{mn}(\theta, \phi) &= \hat{\mathbf{r}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi} \\ \mathbf{B}_{mn}(\theta, \phi) &= \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{n(n+1)}} \left[ \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{im}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right] \\ \mathbf{C}_{mn}(\theta, \phi) &= \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{n(n+1)}} \left[ \frac{im}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right]. \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Οι συνθήκες ορθογωνιότητας που ισχύουν για τις SSHVs είναι:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{U}_{mn} \cdot \mathbf{U}_{\mu\nu}^* \sin\theta d\theta d\phi = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{m\mu} \delta_{n\nu}, \quad (2.5.12)$$

όπου  $\mathbf{U}_{mn}$  οποιαδήποτε από τις SSHVs,  $\mathbf{U}_{mn}^*$  η μιγαδική συζυγής της και  $\delta_{mn}$  η γνωστή συνάρτηση δέλτα του Kronecker.

## Κεφάλαιο 3

# Εισαγωγή Υπολογιστικών Μεθόδων

### 3.1 Επισκόπηση

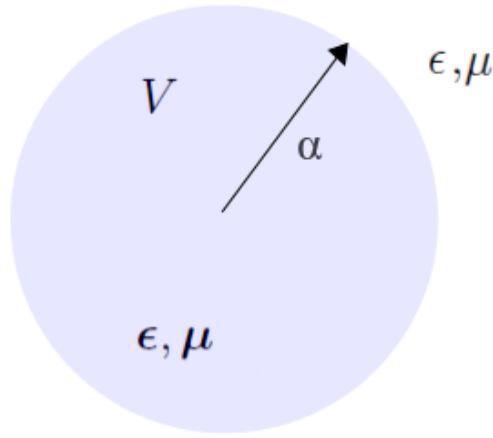
Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτυχθούν οι μέθοδοι που θα χρησιμοποιηθούν για να μελετηθεί η διάταξη ενδιαφέροντος. Η κύρια μέθοδος, των διακριτών ιδιοτιμών, θα χρησιμοποιηθεί εκτενώς και σε όλες τις ειδικές περιπτώσεις, ενώ οι ευρέως χρησιμοποιούμενες μέθοδοι ολοκληρωτικών εξισώσεων και χωρισμένων μεταβλητών θα χρησιμοποιηθούν για επαλήθευση και θεμελίωση της κύριας μεθόδου.

Συνοπτικά, οι τρεις μέθοδοι χρησιμοποιούν διαφορετικά εργαλεία για τη διερεύνηση των πεδίων. Η μέθοδος διακριτών ιδιοτιμών επιτρέπει την ανάπτυξη του πεδίου στην περιοχή ανισοτροπίας σε επιφανειακές διανυσματικές κυματοσυναρτήσεις και η μέθοδος ολοκληρωτικών εξισώσεων χρησιμοποιεί την κατάλληλη συνάρτηση Green, σε συνδυασμό με μία διανυσματική βάση τύπου Dini. Η μέθοδος χωρισμού μεταβλητών χρησιμοποιείται για να επαληθευτεί η ορθότητα των δύο άλλων μεθόδων για ισοτροπικούς συντονιστές.

Η διάταξη που εξετάζεται αποτελείται από μία ανισοτροπική σφαίρα με κέντρο στην αρχή των αξόνων και ακτίνα  $r = a$ , σε ισοτροπικό περιβάλλοντα χώρο (Σχήμα 3.1). Η σφαίρα, με όγκο  $V$  μπορεί να έχει είτε γυροηλεκτρικές είτε γυρομαγνητικές ιδιότητες, που συνοψίζονται στους αντίστοιχους καρτεσιανούς ταυστές  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r})$ ,  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r})$  που δίνονται ως εξής:

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \zeta_1(\mathbf{r}) & -i\zeta_2(\mathbf{r}) & 0 \\ i\zeta_2(\mathbf{r}) & \zeta_1(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

όπου  $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\mu}$  και  $\zeta_{1,2,3} = \epsilon_{1,2,3}, \mu_{1,2,3}$ .



Σχήμα 3.1: Ανισοτροπική σφαίρα σε περιβάλλοντα ιστροπικό χώρο.

Η χρησιμοποίηση περισσότερων της μίας μεθόδου είναι απαραίτητη, καθώς παρέχει επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων.

### 3.2 Μέθοδος Διακριτών Ιδιοτιμών

Η μέθοδος διακριτών ιδιοτιμών επιτρέπει τη μελέτη διατάξεων με ανισοτροπικά υλικά, με το πλεονέκτημα της μεθόδου να έγκειται στη γενικότητα της και στη δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί για ανοιχτές διατάξεις.

Θεωρώντας χρονική εξάρτηση  $e^{-i\omega t}$  για τη διάταξη όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1, το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας ( $r < a$ ) εκφράζεται ως εξής [20]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = & -i \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \bar{E}_{mn} \sum_{l=1}^{\infty} a_l [c_{mnl} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) \\
 & + d_{mnl} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) + \frac{\bar{w}_{mnl}}{\lambda_l} \mathbf{L}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r})] \\
 & - i \sum_{l=1}^{\infty} a_l \frac{w_{00l}}{\lambda_l} \mathbf{L}_{00}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}), \mathbf{r} \in V
 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

όπου  $\bar{E}_{mn} \equiv i^n \{(2n+1)(n-m)!/[n(n+1)(n+m)!]\}^{1/2}$  και  $a_l$  οι άγνωστοι συντελεστές ανάπτυξης.

Οι σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις δίνονται όπως στην (2.5.6):

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{mn}(k_l, \mathbf{r}) &= \sqrt{n(n+1)} z_n(k_l r) \mathbf{C}_{mn}(\theta, \phi) \\ \mathbf{N}_{mn}(k_l, \mathbf{r}) &= n(n+1) \frac{z_n(k_l r)}{k_l r} \mathbf{P}_{mn}(\theta, \phi) \\ &\quad + \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{k_l r} \frac{d[rz_n(k_l r)]}{dr} \mathbf{B}_{mn}(\theta, \phi) \\ \mathbf{L}_{mn}(k_l, \mathbf{r}) &= \frac{1}{k_l} \frac{dz_n(k_l r)}{dr} \mathbf{P}_{mn}(\theta, \phi) \\ &\quad + \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{k_l r} z_n(k_l r) \mathbf{B}_{mn}(\theta, \phi)\end{aligned}$$

με τα σφαιρικά επιφανειακά αρμονικά διανύσματα όπως δόθηκαν στην (2.5.11):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{mn}(\theta, \phi) &= \hat{\mathbf{r}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi} \\ \mathbf{B}_{mn}(\theta, \phi) &= \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{n(n+1)}} \left[ \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{im}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \hat{\boldsymbol{\phi}} \right] \\ \mathbf{C}_{mn}(\theta, \phi) &= \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{n(n+1)}} \left[ \frac{im}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right].\end{aligned}$$

Όπως αναφέρθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο και όπως έχει αποδειχθεί [19] το σύνολο  $\{\mathbf{M}_{mn}, \mathbf{N}_{mn}, \mathbf{L}_{mn}\}$  αποτελεί μία πλήρη βάση στο χώρο των λύσεων για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Συνεπώς η (3.2.1) δίνει μία λύση για το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στη σφαίρα και το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των άγνωστων συντελεστών.

Οι συντελεστές  $c_{mnl}, d_{mnl}, \lambda_l$  που εμφανίζονται στην εξίσωση (3.2.1) [20] είναι οι ιδιοτιμές του προβλήματος:

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{E}_{uv}}{E_{mn}} \bar{e}_{mn}^{uv} & \frac{\bar{E}_{uv}}{E_{mn}} \bar{e}_{mn}^{uv} \\ \frac{\bar{E}_{uv}}{E_{mn}} \bar{g}_{mn}^{uv} & \frac{\bar{E}_{uv}}{E_{mn}} \bar{g}_{mn}^{uv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{mnl} \\ c_{mnl} \end{bmatrix} = \lambda_l \begin{bmatrix} d_{mnl} \\ c_{mnl} \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

όπου  $m \in (-\infty, \infty), n \in [|m|, +\infty), l \in [1, +\infty)$ . Το  $\bar{w}_{mnl}$  δίνεται ως εξής:

$$\bar{w}_{mnl} = \sum_{\substack{u=-\infty \\ (u,v) \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{v=|u|}^{\infty} \frac{\bar{E}_{uv}}{E_{mn}} (\bar{f}_{mn}^{uv} d_{mnl} + \tilde{f}_{mn}^{uv} c_{mnl}) \quad (3.2.3)$$

Ο πίνακας συντελεστών στην (3.2.2) και οι τιμές των  $\bar{f}_{mn}^{uv}, \tilde{f}_{mn}^{uv}$  στην (3.2.3) διαμορφώνονται από εκφράσεις που υπολογίζονται αναλυτικά, έχουν κλειστή μορφή που εξαρτάται από τον τύπο της ανισοτροπίας και δίνονται παρακάτω.

Ο κυματαριθμός  $k_l$  εκφράζεται σε σχέση με τις ιδιοτιμές ως  $k_l = k_s/\sqrt{\lambda_l}$  όπου  $k_s \equiv \omega\sqrt{\epsilon_s\mu}$ . Για γυροηλεκτρικές κοιλότητες  $\epsilon_s \equiv \epsilon_3$  ενώ για κοιλότητες με διαξονική (biaxial) ανισοτροπία υπάρχει ελευθερία επιλογής,  $\epsilon_s = \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ .

Ο πίνακας συντελεστών στην (3.2.2) κατασκευάζεται από αναλυτικές εκφράσεις κλειστής μορφής, ανάλογα με τον τύπο της ανισοτροπίας. Για λόγους πληρότητας θα αναφερθούν οι κλειστές εκφράσεις των συντελεστών για γυροηλεκτρικό και διαξονικό τύπο ανισοτροπίας. Για ανισοτροπία ως προς την ηλεκτρική επιτρεπτότητα (που μπορεί να εφαρμοστεί και για ανισοτροπία στην μαγνητική διαπερατότητα) μπορούμε να εκφράσουμε τον τανυστή ανισοτροπίας ως εξής:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_s \begin{bmatrix} \epsilon_r & -i\epsilon_k & 0 \\ i\epsilon_k & \epsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \epsilon_s \boldsymbol{\epsilon}^{-1} = \begin{bmatrix} \epsilon'_r & -i\epsilon_k & 0 \\ i\epsilon'_k & \epsilon'_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

όπου:

$$\epsilon'_r = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r^2 - \epsilon_k^2}, \epsilon'_k = -\frac{\epsilon_k}{\epsilon_r^2 - \epsilon_k^2} \quad (3.2.5)$$

Η αναλυτική λύση του προβλήματος ιδιοτιμών, για να βρεθούν οι συντελεστές, είναι απλή αλλά κοπιώδης. Οι λύσεις εξαρτώνται από τον τύπο της ανισοτροπίας και μπορούν να δοθούν σε κλειστούς τύπους όπως στο [20]. Οι τύποι αυτοί θα δοθούν εδώ προσαρμοσμένοι για ανισοτροπία στην ηλεκτρική επιτρεπτότητα και όπως χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων και των πεδίων στη διάταξη ενδιαφέροντος.

Για ανισοτροπία γυροηλεκτρικού τύπου οι εκφράσεις των συντελεστών δίνονται στις παρακάτω σχέσεις:

$$\tilde{g}_{uv}^{mn} = \delta_{nv} \delta_{mu} + \frac{[(n^2 + n - m^2)\bar{\epsilon}'_r + m\epsilon'_k] \delta_{nv} \delta_{mu}}{n(n+1)} \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{uv}^{mn} = & - \frac{i(n+m)(n+1)[m\bar{\epsilon}'_r + (n-1)\epsilon'_k] \delta_{n-1,v} \delta_{mu}}{n(n-1)(2n+1)} \\ & - \frac{i(n-m+1)n[m\bar{\epsilon}'_r - (n+2)\epsilon'_k] \delta_{n+1,v} \delta_{mu}}{(n+1)(n+2)(2n+1)} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{uv}^{mn} = & \frac{i(n+m)[m\bar{\epsilon}'_r - (n+1)\epsilon'_k] \delta_{n-1,v} \delta_{mu}}{n(2n+1)} \\ & + \frac{i(n-m+1)[m\bar{\epsilon}'_r + n\epsilon'_k] \delta_{n+1,v} \delta_{mu}}{(n+1)(2n+1)} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_{uv}^{mn} = & \frac{\{[(2n^2 + 2n + 3)m^2 + (2n^2 + 2n - 3)n(n+1)]\bar{\epsilon}'_r\} \delta_{nv} \delta_{mu}}{n(n+1)(2n-1)(2n+3)} \\ & + \frac{(4n^2 + 4n - 3)m\epsilon'_k}{n(n+1)(2n-1)(2n+3)} \\ & - \frac{(n+1)(n+m-1)(n+m)\bar{\epsilon}'_r \delta_{n-2,v} \delta_{mu}}{(n-1)(2n-1)(2n+1)} \\ & - \frac{n(n-m+1)(n-m+2)\bar{\epsilon}'_k \delta_{nv} \delta_{mu}}{(n+2)(2n+1)(2n+3)} + \delta_{nv} \delta_{mu} \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{uv}^{mn} = & - \frac{[(n^2 + n - 3m^2)\bar{\epsilon}'_r - m(2n-1)(2n+3)\epsilon'_k] \delta_{nv} \delta_{mu}}{(2n-1)(2n+3)} \\ & + \frac{(n+1)(n+m-1)(n+m)\bar{\epsilon}'_r \delta_{n-2,v} \delta_{mu}}{(2n-1)(2n+1)} \\ & - \frac{n(n-m+1)(n-m+2)\bar{\epsilon}'_k \delta_{n+2,v} \delta_{mu}}{(2n+1)(2n+3)} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{uv}^{mn} = & - \frac{i(n+m)[m\bar{\epsilon}'_r - (n+1)\epsilon'_k] \delta_{n-1,v} \delta_{mu}}{2n+1} \\ & + \frac{i(n-m+1)[m\bar{\epsilon}'_r + n\epsilon'_k] \delta_{n+1,v} \delta_{mu}}{2n+1}. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Η εναπομείνασα ποσότητα  $w_{00l}$  εξαρτάται επίσης από τον τύπο της ανισοτροπίας και για γυροηλεκτρικές κοιλότητες δίνεται ως εξής:

$$w_{00l} = -\sqrt{2/15} \left( \frac{\epsilon_1 \epsilon_3}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} - 1 \right) d_{0,2,l} - \sqrt{2/3} \frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} c_{0,1,l}. \quad (3.2.12)$$

Για ανισοτροπία διαξονικού τύπου ο τανυστής της επιτρεπτότητας έχει τη



μορφή:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_s \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.13)$$

και ορίζονται οι ποσότητες

$$\begin{aligned} \epsilon'_i &= \epsilon_i^{-1}, i = 1, 2, 3 \\ \epsilon'_d &= \epsilon'_1 - \epsilon'_2, \epsilon'_c = \epsilon'_1 + \epsilon'_2 - 2\epsilon'_3 \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Οι σχέσεις για τους συντελεστές για διαξονική ανισοτροπία διαμορφώνονται ως εξής [21]:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{uv}^{mn} &= \frac{\epsilon'_d(n+m)(n+m-1)(n-m+1)(n-m+2)}{4n(n+1)} \delta_{nv} \delta_{m-2,u} \\ &+ \frac{[n(n+1) - m^2] \epsilon'_c}{2n(n+1)} \delta_{nv} \delta_{mu} + \epsilon'_3 \delta_{nv} \delta_{mu} \\ &+ \frac{\epsilon'_d}{4n(n+1)} \delta_{nv} \delta_{m+2,u} \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{uv}^{mn} &= - \frac{i\epsilon'_d(n+1)(n-m+1)(n+m)(n+m-1)(n+m-2)}{4(n-1)n(2n+1)} \delta_{n-1,v} \delta_{m-2,u} \\ &- \frac{i\epsilon'_c m(n+1)(n+m)}{2n(n-1)(2n+1)} \delta_{n-1,v} \delta_{mu} + \frac{i\epsilon'_d(n+1)}{4n(n-1)(2n+1)} \delta_{n-1,v} \delta_{m+2,u} \\ &+ \frac{i\epsilon'_d n(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)(n+m)}{4(n+1)(n+2)(2n+1)} \delta_{n+1,v} \delta_{m-2,u} \\ &- \frac{i\epsilon'_c mn(n-m+1)}{2(n+1)(n+2)(2n+1)} \delta_{n+1,v} \delta_{mu} \\ &- \frac{i\epsilon'_d n}{4(n+1)(n+2)(2n+1)} \delta_{n+1,v} \delta_{m+2,u} \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{uv}^{mn} &= \frac{i\epsilon'_d(n-m+1)(n+m)(n+m-1)(n+m-2)}{4n(2n+1)} \delta_{n-1,v} \delta_{m-2,u} \\ &+ \frac{i\epsilon'_c m(n+m)}{2n(2n+1)} \delta_{n-1,v} \delta_{mu} - \frac{i\epsilon'_d}{4n(2n+1)} \delta_{n-1,v} \delta_{m+2,u} \\ &- \frac{i\epsilon'_d(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)(n+m)}{4(n+1)(2n+1)} \delta_{n+1,v} \delta_{m-2,u} \\ &+ \frac{i\epsilon'_c m(n-m+1)}{2(n+1)(2n+1)} \delta_{n+1,v} \delta_{mu} + \frac{i\epsilon'_d}{4(n+1)(2n+1)} \delta_{n+1,v} \delta_{m+2,u} \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

$$\begin{aligned}
\bar{e}_{uv}^{mn} = & \frac{\epsilon'_d(n+1)(n+m)(n+m-1)(n+m-2)(n+m-3)}{4(n-1)(2n-1)(2n+1)} \delta_{n-2,v} \delta_{m-2,u} \\
& - \frac{\epsilon'_c(n+1)(n+m)(n+m-1)}{2(n-1)(2n-1)(2n+1)} \delta_{n-2,v} \delta_{mu} \\
& + \frac{\epsilon'_d(n+1)}{4(n-1)(2n-1)(2n+1)} \delta_{n-2,v} \delta_{m+2,u} \\
& - \frac{\epsilon'_d(n-m+1)(n-m+2)(n+m-1)(n+m)(2n^2+2n+3)}{4n(n+1)(2n-1)(2n+3)} \\
& \cdot \delta_{n,v} \delta_{m-2,u} \\
& + \frac{\epsilon'_c[m^2(2n^2+2n+3) + n(n+1)(2n^2+2n-3)]}{2n(n+1)(2n-1)(2n+3)} \delta_{n,v} \delta_{mu} \\
& + \epsilon'_3 \delta_{nv} \delta_{mu} - \frac{\epsilon'_d(2n^2+2n+3)}{4n(n+1)(2n-1)(2n+3)} \delta_{nv} \delta_{m+2,u} \\
& + \frac{\epsilon'_d n(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)(n-m+4)}{4(n+2)(2n+1)(2n+3)} \delta_{n+2,v} \delta_{m-2,u} \\
& - \frac{\epsilon'_c n(n-m+1)(n-m+2)}{2(n+2)(2n+1)(2n+3)} \delta_{n+2,v} \delta_{m,u} \\
& + \frac{\epsilon'_d n}{4(n+2)(2n+1)(2n+3)} \delta_{n+2,v} \delta_{m+2,u} \tag{3.2.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{uv}^{mn} = & - \frac{\epsilon'_d(n+1)(n+m)(n+m-1)(n+m-2)(n+m-3)}{4(2n-1)(2n+1)} \delta_{n-2,v} \delta_{m-2,u} \\
& + \frac{\epsilon'_c(n+1)(n+m)(n+m-1)}{2(2n-1)(2n+1)} \delta_{n-2,v} \delta_{mu} \\
& - \frac{\epsilon'_d(n+1)}{4(2n-1)(2n+1)} \delta_{n-2,v} \delta_{m+2,u} - \frac{\epsilon'_c(n^2+n-3m^2)}{2(2n-1)(2n+3)} \delta_{n,v} \delta_{mu} \\
& - \frac{3\epsilon'_d(n-m+1)(n-m+2)(n+m-1)(n+m)}{4(2n-1)(2n+3)} \delta_{n,v} \delta_{m-2,u} \\
& - \frac{3\epsilon'_d}{4(2n-1)(2n+3)} \delta_{n,v} \delta_{m+2,u} \\
& - \frac{\epsilon'_c n(n-m+1)(n-m+2)}{2(2n+1)(2n+3)} \delta_{n+2,v} \delta_{m,u} \\
& + \frac{\epsilon'_d n(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)(n-m+4)}{4(2n+1)(2n+3)} \delta_{n+2,v} \delta_{m-2,u} \\
& + \frac{\epsilon'_d n}{4(2n+1)(2n+3)} \delta_{n+2,v} \delta_{m+2,u} \tag{3.2.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{uv}^{mn} = & - \frac{i\epsilon'_d(n-m+1)(n+m)(n+m-1)(n+m-2)}{4(2n+1)} \delta_{n-1,v} \delta_{m-2,u} \\
& - \frac{i\epsilon'_c m(n+m)}{2(2n+1)} \delta_{n-1,v} \delta_{mu} + \frac{i\epsilon'_d}{4(2n+1)} \delta_{n-1,v} \delta_{m+2,u} \\
& - \frac{i\epsilon'_d(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)(n+m)}{4(2n+1)} \delta_{n+1,v} \delta_{m-2,u} \\
& + \frac{i\epsilon'_c m(n-m+1)}{2(2n+1)} \delta_{n+1,v} \delta_{mu} + \frac{i\epsilon'_d}{4(2n+1)} \delta_{n+1,v} \delta_{m+2,u}. \quad (3.2.20)
\end{aligned}$$

Για κοιλότητες με διαξονική ανισοτροπία η τελευταία ποσότητα δίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
w_{00l} = & \frac{1}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \epsilon_s d_{-2,2,l} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \left( \frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \epsilon_s d_{0,2,l} \\
& - \frac{1}{\sqrt{30}} \left( \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - \frac{2}{\epsilon_3} \right) \epsilon_s d_{0,2,l}. \quad (3.2.21)
\end{aligned}$$

Οι σταθερές ποσότητες της (3.2.1) υπολογίζονται από το ανωτέρω σύστημα και απομένουν οι άγνωστες σταθερές ανάπτυξης. Αντικαθιστώντας τις *SVWF* όπως στην (2.5.6) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = & -i \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \bar{E}_{mn} \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left\{ \mathbf{C}_{mn}(\theta, \phi) \left[ c_{mnl} \sqrt{n(n+1)} j_n(k_l r) \right] \right. \\
& + \mathbf{P}_{mn}(\theta, \phi) \left[ d_{mnl} n(n+1) \frac{j_n(k_l r)}{k_l r} + \frac{\bar{w}_{mnl}}{\lambda_l} \frac{1}{k_l} \frac{dj_n(k_l r)}{dr} \right] \\
& + \mathbf{B}_{mn}(\theta, \phi) \left[ d_{mnl} \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{k_l r} \frac{d[rj_n(k_l r)]}{dr} \right. \\
& \left. + \frac{\bar{w}_{mnl}}{\lambda_l} \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{k_l r} j_n(k_l r) \right] \left. \right\} \\
& - i \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ a_l \frac{w_{00l}}{\lambda_l} \left[ \frac{1}{k_l} \frac{dj_0(k_l r)}{dr} \mathbf{P}_{00}(\theta, \phi) \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{k_l r} j_n(k_l r) \mathbf{B}_{00}(\theta, \phi) \right] \right\}. \quad (3.2.22)
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, πάλι εντός της σφαίρας ( $r < a$ ) το μαγνητικό πεδίο εκφράζεται

ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) &= -\frac{i}{\omega\mu_s}\nabla\times\mathbf{E}_1 \\
&= -\sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{\infty}\sum_{n=|m|}^{\infty}\bar{E}_{mn}\sum_{l=1}^{\infty}a_l\frac{k_l}{\mu_s\omega}[d_{mnl}\mathbf{M}_{mn}(k_l,\mathbf{r})+c_{mnl}\mathbf{N}_{mn}(k_l,\mathbf{r})] \\
&= -\sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{\infty}\sum_{n=|m|}^{\infty}\bar{E}_{mn}\sum_{l=1}^{\infty}a_l\frac{k_l}{\mu_s\omega}\left\{\mathbf{C}_{mn}(\theta,\phi)\left[d_{mnl}\sqrt{n(n+1)}j_n(k_lr)\right]\right. \\
&\quad +\mathbf{P}_{mn}(\theta,\phi)\left[c_{mnl}n(n+1)\frac{j_n(k_lr)}{k_lr}\right] \\
&\quad \left.+\mathbf{B}_{mn}(\theta,\phi)\left[c_{mnl}\sqrt{n(n+1)}\frac{1}{k_lr}\frac{d[rj_n(k_lr)]}{dr}\right]\right\}. \tag{3.2.23}
\end{aligned}$$

Εκτός της σφαίρας ( $r > a$ ) τα πεδία δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) &= \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{\infty}\sum_{n=|m|}^{\infty}[\gamma_{1mn}\mathbf{M}_{mn}^{(3)}(k_2,\mathbf{r})+\gamma_{2mn}\mathbf{N}_{mn}^{(3)}(k_2,\mathbf{r})] \\
&= \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{\infty}\sum_{n=|m|}^{\infty}\left[\mathbf{C}_{mn}(\theta,\phi)\gamma_{1mn}\sqrt{n(n+1)}h_n^{(1)}(k_2r)\right. \\
&\quad +\mathbf{P}_{mn}(\theta,\phi)\gamma_{2mn}n(n+1)\frac{h_n^{(1)}(k_2r)}{k_2r} \\
&\quad \left.+\mathbf{B}_{mn}(\theta,\phi)\gamma_{2mn}\sqrt{n(n+1)}\frac{1}{k_2r}\frac{d[rh_n^{(1)}(k_2r)]}{dr}\right] \tag{3.2.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_2(\mathbf{r}) &= -\frac{i}{\omega\mu}\nabla\times\mathbf{E}_2 \\
&= \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{\infty}\sum_{n=|m|}^{\infty}\left[\mathbf{C}_{mn}(\theta,\phi)\gamma_{2mn}\sqrt{n(n+1)}h_n^{(1)}(k_2r)\frac{k_2}{i\omega\mu_0}\right. \\
&\quad +\mathbf{P}_{mn}(\theta,\phi)\frac{k_2}{i\omega\mu}\gamma_{1mn}n(n+1)\frac{h_n^{(1)}(k_2r)}{k_2r} \\
&\quad \left.+\mathbf{B}_{mn}(\theta,\phi)\frac{k_2}{i\omega\mu}\gamma_{1mn}\sqrt{n(n+1)}\frac{1}{k_2r}\frac{d[rh_n^{(1)}(k_2r)]}{dr}\right] \tag{3.2.25}
\end{aligned}$$

όπου  $\gamma_{1mn}, \gamma_{2mn}$  άγνωστες σταθερές.

Εφόσον δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία ή ρεύματα τα πεδία είναι συνεχή παντού στο χώρο. Συνεπώς για το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια της σφαίρας ( $r = a$ ) ισχύει ότι:

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0} \quad (3.2.26)$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέρη της (3.2.26) με  $\mathbf{C}_{mn}^* \sin\theta$ , ολοκληρώνοντας και χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ορθογωνιότητας των SSHV προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} -i\bar{E}_{mn} \sum_{l=1}^{\infty} a_l c_{mnl} \sqrt{n(n+1)} j_n(k_l a) &= h_n^{(1)}(k_2 a) \sqrt{n(n+1)} \gamma_{1mn} \\ \Rightarrow \bar{E}_{mn} \sum_{l=1}^{\infty} a_l c_{mnl} j_n(k_l a) - i h_n^{(1)}(k_2 a) \gamma_{1mn} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Πολλαπλασιάζοντας και πάλι τα δύο μέλη της (3.2.26) με  $\mathbf{B}_{mn}^* \sin\theta$ , ολοκληρώνοντας και χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ορθογωνιότητας των SSHV προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} -i\bar{E}_{mn} \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left[ d_{mnl} \frac{1}{k_l a} \frac{d[r j_n(k_l r)]}{dr} \Big|_{r=a} + \frac{\bar{w}_{mnl}}{\lambda_l} \frac{1}{k_l a} j_n(k_l a) \right] \\ - \frac{1}{k_2 a} \frac{d[r h_n^{(1)}(k_2 r)]}{dr} \Big|_{r=a} \gamma_{2mn} = 0. \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Κατά αναλογία με το ηλεκτρικό πεδίο, το μαγνητικό πεδίο ικανοποιεί στην επιφάνεια της σφαίρας την οριακή συνθήκη:

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{0}. \quad (3.2.29)$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέρη της (3.2.29) με  $\mathbf{C}_{mn}^* \sin\theta$ , ολοκληρώνοντας και χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ορθογωνιότητας των SSHV προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} -\bar{E}_{mn} \sum_{l=1}^{\infty} a_l \frac{k_l a}{\omega \mu_s} d_{mnl} \sqrt{n(n+1)} j_n(k_l a) &= \frac{k_l a}{i \omega \mu_0} h_n^{(1)}(k_2 a) \sqrt{n(n+1)} \gamma_{2mn} \\ \Rightarrow -\bar{E}_{mn} \sum_{l=1}^{\infty} a_l \frac{k_2 a}{\omega \mu} d_{mnl} j_n(k_l a) - h_n^{(1)}(k_2 a) \frac{k_2 a}{i \omega \mu} \gamma_{2mn} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Πολλαπλασιάζοντας και πάλι τα δύο μέλη της (3.2.29) με  $\mathbf{B}_{mn}^* \sin\theta$ , ολοκληρώνοντας και χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ορθογωνιότητας των SSHV

προκύπτει ότι:

$$-\bar{E}_{mn} \sum_{l=1}^{\infty} \left[ a_l \frac{k_l a}{\omega \mu_s} c_{mnl} \frac{1}{k_l a} \frac{d[r j_n(k_l r)]}{dr} \right] \Big|_{r=a} - \frac{k_2 a}{i \omega \mu} \frac{1}{k_2 a} \frac{d[r h_n^{(1)}(k_2 r)]}{dr} \Big|_{r=a} \gamma_{1mn} = 0. \quad (3.2.31)$$

Θέτοντας  $x_1 = k_2 a$  προκύπτουν οι σχέσεις:

$$x_1 = k_2 a \quad (3.2.32)$$

$$k_s = \omega \sqrt{\epsilon_s \mu_s} = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_s \mu_s}{\epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \sqrt{\epsilon_3 \mu_3} k_2 \quad (3.2.33)$$

$$k_l a = \frac{k_s}{\sqrt{\lambda_l}} a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \sqrt{\epsilon_3 \mu_3} k_2 a$$

$$\Rightarrow k_l a = \frac{\sqrt{\epsilon_3 \mu_3}}{\sqrt{\lambda_l}} x_1. \quad (3.2.34)$$

Με χρήση των ιδιοτήτων των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel και Hankel, οι όροι που περιέχουν παραγώγους μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$\frac{1}{k_l a} \frac{d}{dr} [r j_n(k_l r)] \Big|_{r=a} = \frac{n+1}{k_l a} j_n(k_l a) - j_{n+1}(k_l a) \quad (3.2.35)$$

$$\frac{1}{x_1} \frac{d}{dr} [r h_n^{(1)}(k_2 r)] \Big|_{r=a} = \frac{n+1}{x_1} h_n^{(1)}(x_1) - h_{n+1}^{(1)}(x_1). \quad (3.2.36)$$

Μετασχηματίζοντας τις σχέσεις που προέκυψαν από τις οριακές συνθήκες προκύπτει το τελικό σύστημα:

$$\bar{E}_{mn} \sum_{l=1}^{\infty} a_l c_{mnl} j_n \left( \frac{\sqrt{\epsilon_3 \mu_3}}{\sqrt{\lambda_l}} x_1 \right) - i h_n^{(1)}(x_1) \gamma_{1mn} = 0 \quad (3.2.37)$$

$$-i \bar{E}_{mn} \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left\{ d_{mnl} \left[ \frac{n+1}{\sqrt{\epsilon_3 \mu_3} x_1} \sqrt{\lambda_l} j_n \left( \frac{\sqrt{\epsilon_3 \mu_3}}{\sqrt{\lambda_l}} x_1 \right) - j_{n+1} \left( \frac{\sqrt{\epsilon_3 \mu_3}}{\sqrt{\lambda_l}} x_1 \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{\bar{w}_{mnl}}{\lambda_l} \frac{\sqrt{\lambda_l}}{\sqrt{\epsilon_3 \mu_3} x_1} j_n \left( \frac{\sqrt{\epsilon_3 \mu_3}}{\sqrt{\lambda_l}} x_1 \right) \right\} \\ - \gamma_{2mn} \left[ \frac{n+1}{x_1} h_n(x_1) - h_{n+1}(x_1) \right] = 0 \quad (3.2.38)$$

$$-\bar{E}_{mn} \sum_{l=1}^{\infty} a_l d_{mnl} \frac{\sqrt{\epsilon_3 \mu_3}}{\mu_3 \sqrt{\lambda_l}} x_1 j_n \left( \frac{\sqrt{\epsilon_3 \mu_3}}{\sqrt{\lambda_l}} x_1 \right) + i x_1 h_n^{(1)}(x_1) \gamma_{2mn} = 0 \quad (3.2.39)$$

$$-\bar{E}_{mn} \sum_{n=1}^{\infty} a_l \frac{c_{mnl}}{\mu_3} \left[ (n+1) j_n \left( \frac{\sqrt{\epsilon_3 \mu_3}}{\sqrt{\lambda_l}} x_1 \right) - j_{n+1} \left( \frac{\sqrt{\epsilon_3 \mu_3}}{\sqrt{\lambda_l}} x_1 \right) \frac{\sqrt{\epsilon_3 \mu_3}}{\sqrt{\lambda_l}} x_1 \right] \\ + i \left[ (n+1) h_n(x_1) - x_1 h_{n+1}(x_1) \right] \gamma_{1mn} = 0. \quad (3.2.40)$$

Οι τέσσερις αυτές σχέσεις σχηματίζουν ένα σύστημα με άγνωστους τις σταθερές ανάπτυξης  $a_l, \gamma_{1mn}, \gamma_{2mn}$ . Ο πίνακας συντελεστών  $a_l$  έχει διπλάσια διάσταση από τους  $\gamma_{1mn}, \gamma_{2mn}$ . Το σύστημα που προκύπτει λύνεται μοναδικά για τις τέσσερις εξισώσεις και προκύπτουν οι κανονικοποιημένες συχνότητες  $x_1$  της ανισοτροπικής κοιλότητας.

### 3.3 Μέθοδος χωρικών ολοκληρωτικών εξισώσεων

Η μέθοδος των χωρικών ολοκληρωτικών εξισώσεων (VIE) χρησιμοποιείται όταν ένα πεπερασμένης έκτασης μέσο είναι είτε ομοιογενές είτε ανομοιογενές. Οι άγνωστοι του προβλήματος εκφράζονται ως χωρικά ρεύματα που ρέουν στο μέσο. Τα ρεύματα αυτά μπορεί να είναι είτε αγωγής είτε επαγόμενα από το ηλεκτρικό πεδίο. Από τις σχέσεις που ικανοποιούνται προκύπτει μία ολοκληρωτική εξίσωση που μπορεί να λυθεί ως προς τα άγνωστα πεδία.

Λαμβάνοντας υπόψιν τα διανυσματικά δυναμικά  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  και  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  και ακολουθώντας παρόμοια βήματα με το [22], χωρίς εξωτερική διέγερση, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_0^2 \mathbb{1} + \nabla \nabla \cdot & -i k_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \nabla \times \\ i k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \nabla \times & k_0^2 \mathbb{1} + \nabla \nabla \cdot \end{bmatrix} \\ \int_{\mathbf{r}' \in V} g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \begin{bmatrix} \mathbb{X}_e(\mathbf{r}') & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{X}_m(\mathbf{r}') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}') \end{bmatrix} d\mathbf{r}' = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in V. \quad (3.3.1)$$

όπου οι συμβολισμοί ερμηνεύονται ως εξής:

- $\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{H}(\mathbf{r})$  είναι το συνολικό ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, αντιστοίχα.
- $\mathbb{1}$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας  $2 \times 2$  και  $\mathbb{O}$  ο μηδενικός πίνακας  $3 \times 3$ .
- $g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = e^{-i k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} / (4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  είναι η συνάρτηση Green του ελεύθερου χώρου και  $k_0$  ο κυματικός αριθμός του ελεύθερου χώρου.

- $\mathbb{X}_e(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r})/\epsilon_0 - \mathbb{1}$  και  $\mathbb{X}_m(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r})/\mu_0 - \mathbb{1}$  οι κανονικοποιημένοι τανυστές ηλεκτρικής και μαγνητικής συνάρτησης αντίστοιχα και  $\epsilon_0, \mu_0$  η ηλεκτρική επιτρεπτότητα και η μαγνητική διαπερατότητα του ελεύθερου χώρου, αντίστοιχα.

Σε όλη τη μέθοδο VIE υιοθετείται χρονική εξάρτηση  $e^{i\omega t}$  και παραλείπεται.

Τα πεδία  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  καθώς και η διηλεκτρική μετατόπιση και το μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  μπορούν να εκφραστούν με βάση τις σφαιρικές κυματοσυναρτήσεις με τον παρακάτω τρόπο:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \\ \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \begin{bmatrix} A_{mnl} M_{mnl}(k_{mnl}^M, \mathbf{r}) \\ K_{mnl} \hat{M}_{mnl}(\kappa_{mnl}^M, \mathbf{r}) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} B_{mnl} N_{mnl}(k_{mnl}^M, \mathbf{r}) \\ \Lambda_{mnl} \hat{N}_{mnl}(\kappa_{mnl}^M, \mathbf{r}) \end{bmatrix} \right\}, \mathbf{r} \in V \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \begin{bmatrix} \Gamma_{mnl} M_{mnl}(k_{mnl}^M, \mathbf{r}) \\ \Sigma_{mnl} \hat{M}_{mnl}(\kappa_{mnl}^M, \mathbf{r}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{mnl} N_{mnl}(k_{mnl}^M, \mathbf{r}) \\ T_{mnl} \hat{N}_{mnl}(\kappa_{mnl}^M, \mathbf{r}) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} Z_{mnl} L_{mnl}(k_{mnl}^M, \mathbf{r}) \\ \Pi_{mnl} L_{mnl}(\kappa_{mnl}^M, \mathbf{r}) \end{bmatrix} \right\}, \mathbf{r} \in V. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Οι εκφράσεις για τις SVWFs έχουν δοθεί στην (2.5.6) ενώ οι εκφράσεις για τις διανυσματικές ποσότητες  $\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{N}}$  δίνονται στο [23]. Οι ποσότητες  $k_{mnl}^M, k_{mnl}^N, k_{mnl}^L, \kappa_{mnl}^M, \kappa_{mnl}^N$  είναι οι κυματαριθμοί Dini με τιμές τις λύσεις των κατάλληλων ιδιοτιμών, ώστε τα διανυσματικά σύνολα  $\{\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{L}}\}, \{\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{N}}\}$  να είναι ορθογώνια στον όγκο  $V$ . Το διάνυσμα  $\mathbf{L}$  δεν είναι μέρος της αναπαράστασης, διότι στη γενική περίπτωση  $\nabla \cdot \mathbf{L}_{mnl}(k_{mnl}^L, \mathbf{r}) \neq 0$  ενώ το μαγνητικό πεδίο και η διηλεκτρική μετατόπιση ικανοποιούν το νόμο του Gauss στον όγκο  $V$  ( $\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0, \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ ).

Για τη δημιουργία του τελικού συστήματος αντικαθίστανται οι εκφράσεις (3.3.3) στην (3.3.1) και η έκφραση της συνάρτησης Green σε όρους SVWFs, όπως στο [18]. Με τον τρόπο αυτό οι εκφράσεις υπολογίζονται αναλυτικά, όπως στο [22]. Τελικά προκύπτει ένα ομογενές σύνολο τεσσάρων άπειρων εξισώσεων με τους αγνώστους  $A_{mnl}, B_{mnl}, \Gamma_{mnl}, \Delta_{mnl}, K_{mnl}, \Lambda_{mnl}, \Sigma_{mnl}, T_{mnl}$ , ενώ οι όροι του περιέχουν και τα  $Z_{mnl}, \Pi_{mnl}$ . Ένα αντίστοιχο σύνολο τεσσάρων ομογενών άπειρων εξισώσεων προκύπτει από τις σχέσεις  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\epsilon}^{-1} \mathbf{D}(\mathbf{r})$  και  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\mu}^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{r})$ .

Οι οκτώ άπειρες ομογενείς εξισώσεις αποτελούν, με κατάλληλη διάταξη των αγνώστων, το τελικό σύστημα  $\mathbf{A}(x)\mathbf{v} = 0$ , όπου ο πίνακας των συντελεστών



είναι συνάρτηση των κανονικοποιημένων κυματαριθμών. Οι σύνθετες τιμές  $x := u + iv, u, v \in \mathbb{R}$  για τις οποίες  $\det(A(x)) = 0$  είναι οι κανονικοποιημένοι κυματαριθμοί συντονισμού.

Οι μιγαδικές συχνότητες υπολογίζονται με τον αλγόριθμο που παρουσιάστηκε στο [24]. Για αυτές τις τιμές δίνονται οι μιγαδικές ιδιοσυχνότητες  $f = x/(2\pi b\sqrt{\mu_0\epsilon_0})$ , με  $\text{Re}(f)$  την φυσική συχνότητα συντονισμού ενώ η ποσότητα  $\text{Re}(f)/\{2\text{Im}(f)\}$  αντιπροσωπεύει τον συντελεστή ποιότητας  $Q$ .

### 3.4 Μέθοδος Χωρισμού Μεταβλητών

Όταν η σφαίρα είναι ισοτροπική μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος του χωρισμού μεταβλητών, που θα φανεί χρήσιμη για τον έλεγχο της μεθόδου διακριτών ιδιοσυναρτήσεων, στην οριακή περίπτωση της ισοτροπικής σφαίρας.

Με την εφαρμογή της μεθόδου προκύπτει η υπερβατική εξίσωση:

$$\mu_r j_n(\tau x) h_n^d(x) - j_n^d(\tau x) h_n(x) = 0 \quad (3.4.1)$$

$$\epsilon_r j_n(\tau x) h_n^d(x) - j_n^d(\tau x) h_n(x) = 0 \quad (3.4.2)$$

όπου χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί:

$$\tau = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (3.4.3)$$

$$h_n^d(x) = h_n(x) + x h_n'(x). \quad (3.4.4)$$

Οι λύσεις της υπερβατικής εξίσωσης προκύπτουν με εφαρμογή κατάλληλης μεθόδου εύρεσης μιγαδικών ριζών και προκύπτουν οι κανονικοποιημένες ιδιοσυχνότητες  $x$  της διάταξης.

## Κεφάλαιο 4

# Αποτελέσματα και Επαλήθευση

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των μεθόδων που χρησιμοποιούνται για τη διάταξη ενδιαφέροντος, για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Επίσης θα γίνει χρήση του εμπορικού πακέτου HFSS και θα γίνει σύγκριση και ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Στόχος είναι η απόδειξη της εγκυρότητας των αποτελεσμάτων μέσω της επαλήθευσης των δύο ανεξάρτητων μεθόδων, τόσο για τις αριθμητικές τιμές των ιδιοσυχνοτήτων όσο και για τις εικόνες των πεδίων που προκύπτουν και να υποδειχθεί η αδυναμία του HFSS να εξετάσει επαρκώς ανοιχτές διατάξεις.

### 4.1 Σύγκριση μεθόδων με διάταξη ισοτροπικής σφαίρας

Η πιο απλή περίπτωση ανάλυσης είναι αυτή της ισοτροπικής σφαίρας σε ισοτροπικό περιβάλλον. Αφού ληφθούν τα αποτελέσματα των μεθόδων παραθέτονται με σειρά αυξανόμενου πραγματικού μέρους και παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1. Το ενδιαφέρον στις εφαρμογές εστιάζεται στις συχνότητες με υψηλό συντελεστή ποιότητας  $Q$  και γιαυτό η ανάλυση επικεντρώνεται στις περιοχές κοντά στον πραγματικό άξονα.

Για τον Πίνακα 4.1 χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές των παραμέτρων:

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 2.54 & 0 & 0 \\ 0 & 2.54 & 0 \\ 0 & 0 & 2.54 \end{bmatrix}, \mu(\mathbf{r}) = \mu_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και ακτίνα σφαίρας  $a = 1$  cm.

Η εύρεση των μιγαδικών λύσεων έγινε με χρήση αποδοτικού αλγορίθμου [24].

Mode	SVM	CFVIE	DEM
$TM_{11}^r$	1.2275 + 0.8026i	1.2276 + 0.8025i	1.2269 + 0.8021i
$TE_{11}^r$	1.7765 + 0.4015i	1.7766 + 0.4015i	1.7759 + 0.4009i
$TM_{21}^r$	2.3063 + 0.8316i	2.3061 + 0.8318i	2.3064 + 0.8316i
$TE_{21}^r$	2.5389 + 0.3395i	2.539 + 0.3395i	2.5390 + 0.3395i
$TM_{12}^r$	2.8187 + 0.5470i	2.8185 + 0.5465i	2.8187 + 0.547i

Πίνακας 4.1: Κανονικοποιημένες μιγαδικές ιδιοσυχνότητες  $x$ .

## 4.2 Σύγκριση μεθόδων με το εμπορικό πακέτο HFSS

Συνεχίζοντας την ανάλυση για σφαίρα με ανισοτροπία μονοαξονικού (uniaxial) τύπου λαμβάνονται αποτελέσματα με παραμέτρους:

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 7.5 & 0 & 0 \\ 0 & 7.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \mu(\mathbf{r}) = \mu_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και ακτίνα σφαίρας  $a = 1$  cm και παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2.

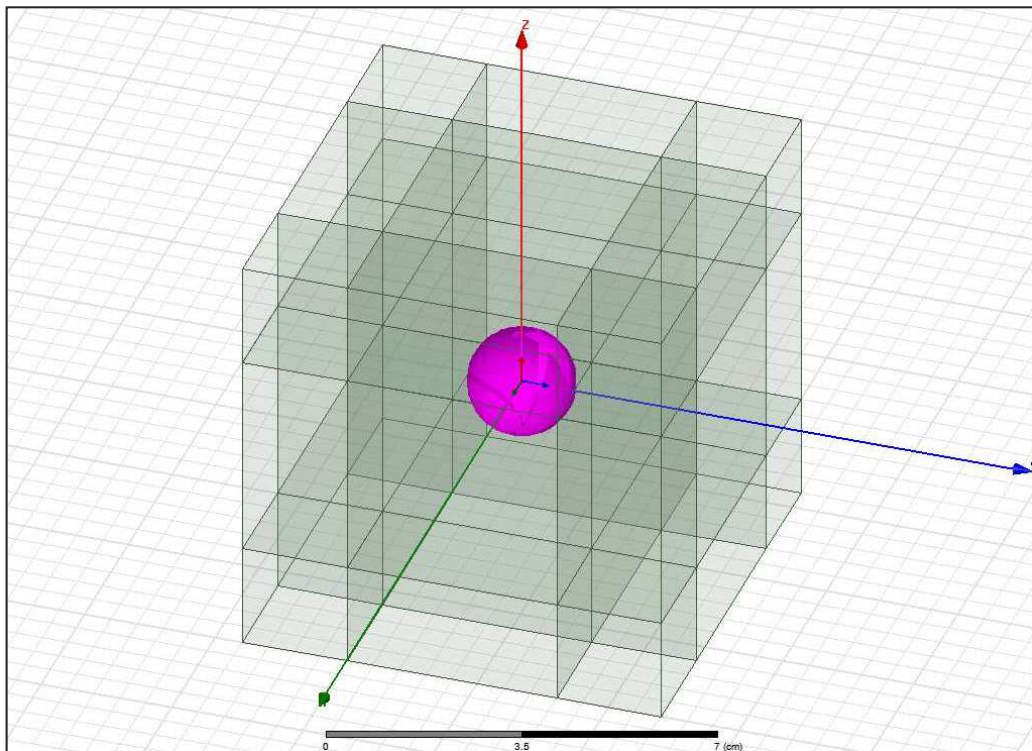
No	m	CFVIE	DEM	HFSS
1	$\pm 1$	5.0511 + 0.3647i	5.0511 + 0.3647i	—
2	0	5.1268 + 0.3831i	5.1268 + 0.3831i	5.12 + 0.38i
3	$\pm 2$	7.2961 + 0.1769i	7.2961 + 0.1768i	—
4	$\pm 1$	7.4039 + 0.1909i	7.4042 + 0.1909i	—
5	0	7.4111 + 0.9619i	7.4111 + 0.9622i	—

Πίνακας 4.2: Μιγαδικές ιδιοσυχνότητες  $f$ (GHz).

Παρατηρώντας την αδυναμία του πακέτου να εντοπίσει τις ιδιοσυχνότητες που επιβεβαιώνονται από τις δύο ανεξάρτητες μεθόδους, συνάγεται το συμπέρασμα ότι υπόκειται σε περιορισμούς. Παρόλο που το HFSS λειτουργεί αξιόπιστα για διατάξεις με κλειστές κοιλότητες ή κοιλότητες με περίβλημα από αγώγιμο υλικό, δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για συντονιστές στον ελεύθερο χώρο. Έτσι το πρόβλημα πρέπει να μοντελοποιηθεί ως πρόβλημα σκέδασης επίπεδων

κυμάτων. Το πραγματικό μέρος της ιδιοσυχνότητας παρατηρείται στις κορυφές της εγκάρσιας τομής του κανονικοποιημένου διαγράμματος της διατομής σκέδασης (scattering cross section — SCS) ως προς τη συχνότητα, με το SCS να κανονικοποιείται διαιρώντας με το τετράγωνο του μήκους κύματος του προσπίπτοντος κύματος. Το φανταστικό μέρος της ιδιοσυχνότητας υπολογίζεται από το μισό του μεγίστου στο πλήρες πλάτος γύρω από την κορυφή (full width half maximum — FWHM) ως  $Im(f) = FWHM/2$ . Για να επιτευχθούν αυτοί οι υπολογισμοί πρέπει να εφαρμοστεί παραμετρική σάρωση ως προς τη συχνότητα και να παρατηρηθεί η συμπεριφορά στο SCS. Η λύση του προβλήματος με αυτόν τον τρόπο είναι κοπιαστική, αφού ο υπολογιστής πρέπει να λύσει πολλά προβλήματα σκέδασης με αρκετά μικρό βήμα, για να υπάρχει ακρίβεια ενός ή δύο δεκαδικών ψηφίων.

Η διάταξη, όπως χρησιμοποιήθηκε στο HFSS, υποδεικνύεται στο Σχήμα 4.1:



Σχήμα 4.1: Απεικόνιση στο HFSS ανιστροπικής σφαίρας σε ανοιχτό περιβάλλοντα χώρο.

Το πακέτο επιστρέφει μη κανονικοποιημένες ιδιοσυχνότητες και γιαυτό στον πίνακα 4.2 παρουσιάζονται όλες οι τιμές ανηγμένες σε GHz. Μόνο για την ισοτροπική περίπτωση το HFSS μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ευρυζωνική διέγερση.

Από την άλλη, στην περίπτωση ανισοτροπίας πρέπει να εντοπιστούν οι συχνότητες μία προς μία, κάτι που καθιστά πρακτικά πολύ δύσκολη την αναζήτηση με μικρό βήμα, για παράδειγμα 0.001 GHz . Εκτελώντας τρεξίματα για πολλές συχνότητες παρατηρείται ότι το πακέτο δε μπορεί να εντοπίσει ιδιοσυχνότητες με μεγάλο φανταστικό μέρος, δηλαδή με μικρό συντελεστή ποιότητας. Επίσης παρατηρείται ότι οι τιμές που λαμβάνονται από τις δύο αναλυτικές μεθόδους είναι ακριβείς και εύκολα προσβάσιμες με τον αποδοτικό τρόπο εύρεσης μιγαδικών ριζών που χρησιμοποιείται. Για να ληφθούν τα ίδια αποτελέσματα με το εμπορικό πακέτο πρέπει να εφαρμοστεί μικρότερο βήμα και διαβάθμιση, που απαιτεί πολύ περισσότερο υπολογιστικό χρόνο και μνήμη αλλά και εκτίμηση για το πλήρες πρόβλημα σκέδασης. Παρόμοια αποτελέσματα ελήφθησαν και στο [25].

Στην μονοαξονική περίπτωση που παρουσιάζεται στον πίνακα 4.2 για το HFSS χρησιμοποιείται επίλυση ρυθμών με τη μέθοδο ελάχιστων στοιχείων, χρησιμοποιώντας συναρτήσεις αναδρομής δεύτερης τάξης σε μέτριο πλέγμα. Η σάρωση για τη συχνότητα  $f$  γίνεται από 5 GHz μέχρι 7.5 GHz με βήμα 0.01 GHz και ως εκ τούτου τα αποτελέσματα δίνονται με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων. Για σάρωση με μεγαλύτερη ακρίβεια απαιτείται περισσότερος υπολογιστικός χρόνος και μνήμη με τη συγκεκριμένη μέθοδο.

Παρόλο που τα αποτελέσματα επαληθεύονται και με τις δύο ανεξάρτητες μεθόδους, παρατηρείται ότι το HFSS δεν εντοπίζει πολλές από τις ιδιοσυχνότητες και δε μπορεί να προβλέψει το πλήρες φάσμα. Για διερεύνηση της λειτουργίας του πακέτου σε ανοιχτές διατάξεις, υπολογίζεται η επόμενη συχνότητα όπως λαμβάνεται από αυτό και είναι η  $7.52 + 0.25i$  GHz . Η συχνότητα αυτή βρίσκεται εκτός του εύρους αναζήτησης και συγκρίνοντας με τα αποτελέσματα των μεθόδων που είναι  $7.5929 + 0.9952i$  GHz ,  $7.5931 + 0.9957i$  GHz για CFVIE, DEM αντίστοιχα παρατηρείται ότι τα αποτελέσματα του HFSS για μονοαξονικές διατάξεις είναι ελλιπή και αναξιόπιστα.

Στη συνέχεια εξετάζεται η περίπτωση γυροηλεκτρικών/γυρομαγνητικών συντονιστών και παραθέτονται τα αποτελέσματα στον πίνακα 4.3. Τώρα αποκάλυπεται ένα πλούσιο φάσμα λόγω της έλλειψης εκφυλισμού, δηλαδή λόγω της διαφορετικής τιμής της ιδιοσυχνότητας για  $+|m|$  και  $-|m|$ . Παρουσιάζονται περισσότερες από 5 συχνότητες, σε αντίθεση με τα άλλα παραδείγματα, για να απεικονιστεί η έλλειψη εκφυλισμού και η ανικανότητα του HFSS να διαχειριστεί γυροτροπικούς συντονιστές. Το πλούσιο φάσμα που εισάγει το γυροτροπικό υλικό δε μπορεί να απεικονιστεί από το πακέτο, το οποίο εντοπίζει μόνο δύο ιδιοσυχνότητες.

Εστιάζοντας στις συχνότητες παρατηρούμε ότι η δεύτερη  $f = 7.55 + 0.32i$  GHz αποκλίνει σημαντικά από τις αντίστοιχες που προκύπτουν από τις άλλες μεθόδους. Στην ισοτροπική περίπτωση υπήρχε εκφυλισμός για όλες τις τιμές του  $m$ . Οι δύο συχνότητες που έχουν βρεθεί από το πακέτο προκύπτουν ως αποκλίσεις από αυτές της ισοτροπικής περίπτωσης, όπου οι τιμές ήταν  $5.1090 +$

2.4341i GHz , 5.1262 + 0.3832i GHz και 7.6209 + 1.0023i GHz , 7.4398 + 0.1942i GHz για TM και TE ρυθμούς αντίστοιχα, όπως προέκυψαν από τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών. Είναι φανερό πως το HFSS δεν είναι ευαίσθητο στις επιπλέον συχνότητες που εισάγονται από το γυροηλεκτρικό υλικό που δεν εμφανίζει εκφυλισμό.

No	m	CFVIE	DEM	HFSS
1	-1	4.9753+0.3469i	4.9753+0.3469i	—
2	-1	5.0846+2.3941i	5.0849+2.3940i	—
3	0	5.0908+2.3977i	5.0911+2.3976i	—
4	1	5.1345+0.3847i	5.1345+0.3847i	5.12+0.36i
5	0	5.1365+0.3854i	5.1365+0.3854i	—
6	1	5.144+2.4842i	5.1442+2.4842i	—
7	-2	7.2239+0.1687i	1.2239+0.1687i	—
8	-1	7.3673+0.2091i	7.3673+0.209i	—
9	2	7.3751+0.186i	0.3751+0.186i	—
10	0	7.4193+0.944i	7.4194+0.9443i	—
11	0	7.4496+0.2146i	7.4496+0.2146i	—
12	1	7.4522+0.2003i	7.4521+0.2003i	—
13	-1	7.4872+0.9523i	7.4872+0.9526i	7.55+0.32i
14	1	7.7411+1.0202i	7.7411+1.0205i	—

Πίνακας 4.3: Μιγαδικές ιδιοσυχνότητες  $f$ (GHz).

Ένα ακόμα μειονέκτημα στην αναζήτηση ιδιοσυχνοτήτων μέσω του εμπορικού πακέτου HFSS είναι ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται για την προσομοίωση. Το πρόβλημα γίνεται έκδηλο αν κάνουμε μία σχετική μελέτη για την υπολογιστική πολυπλοκότητα. Στον Πίνακα 4.4 δίνεται η υπολογιστική απόδοση των μεθόδων και του HFSS που εκτελέστηκε σε υπολογιστή με Dell Precision 2.26 GHz, double quad-core Xeon, για τις εκτελέσεις που χρειάστηκαν για τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.2. Για το HFSS πραγματοποιήθηκε μία σάρωση (first sweep) για συχνότητες από 4.8 GHz έως 5.2 GHz , με βήμα 0.01 GHz (για συντομία παρουσιάζεται ως [4.8:0.01:5.2] GHz) και μία σάρωση (second sweep) για [7.2:0.01:7.8] GHz. Παρατηρώντας τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.4 γίνεται φανερό πως το HFSS δεν είναι αποδοτικό και απαιτεί τεράστιο υπολογιστικό χρόνο για τον υπολογισμό μόνο δύο συχνοτήτων, συγκριτικά με τις δύο μεθόδους. Οι δύο μέθοδοι απαιτούν λιγότερο χρόνο ακόμα και για τον υπολογισμό όλων των συχνοτήτων.

	CFVIE	DEM	HFSS	
	(All f)	(All f)	(First sweep)	(Second sweep)
CPU time (s)	87.5	166.5	595	1479
Memory (GB)	0.05	0.07	0.17	0.18

Πίνακας 4.4: Υπολογιστική απόδοση CFVIE/DEM/HFSS.

Όσον αφορά στον αριθμό των όρων που χρησιμοποιούνται για τα άπειρα αθροίσματα στις μεθόδους CFVIE/DEM αναφέρεται ότι για τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους Πίνακες 4.1-4.3 υπολογίζονται για κάθε τιμή του  $m$ . Τα δύο εναπομείναντα αθροίσματα που χρειάζεται να υπολογιστούν με τη μέθοδο CFVIE είναι ένα ως προς  $n$  και ένα ως προς  $l$ . Για τη μέθοδο DEM χρειάζεται να υπολογιστεί μόνο το άθροισμα ως προς  $n$ , αφού ο αριθμός των όρων για το άπειρο άθροισμα ως προς  $l$  είναι ο διπλάσιος του αθροίσματος ως προς  $n$ . Για σύγκλιση χρησιμοποιήθηκαν 11 όροι για τα αθροίσματα ως προς  $n, l$  στην μέθοδο CFVIE και 5 όροι για το άθροισμα ως προς  $n$  στην μέθοδο DEM.

Στη συνέχεια εξετάζονται συντονισμοί μαγνητικών πλασμονίων (magnetic plasmon resonances — MPRs) σε φερρομαγνητικούς συντονιστές υτρίου, σιδήρου, λυχνίτη (Yttrium, Iron, Garnet — YIG). Το φαινόμενο MPR εμφανίζεται όταν για το υλικό ισχύουν οι σχέσεις [26]:

$$Re(\mu_{1r} + \mu_{2r}) < 0 \quad (4.2.1)$$

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0. \quad (4.2.2)$$

Με την προϋπόθεση ότι το επαγόμενο και το στατικό μαγνητικό πεδίο είναι κάθετα, ο γυρομαγνητικός ταυυστής γίνεται ιστροπικός και περιγράφεται από την επιτρεπτότητα [27]:

$$\mu_{eff} = \mu_{1r} + \mu_{2r} \quad (4.2.3)$$

Στην περίπτωση του MPR μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος χωρισμού μεταβλητών. Αν η εν λόγω συνθήκη δεν ισχύει, η μέθοδος χωρισμού μεταβλητών είναι ανεπαρκής και η MPR πρέπει να μελετηθεί χρησιμοποιώντας τον πλήρη γυρομαγνητικό ταυυστή. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι CFVIE/DEM και εξετάζεται η περίπτωση MPR του συντονιστή YIG, χρησιμοποιώντας τον πλήρη ανιστροπικό ταυυστή. Οι γυρομαγνητικές ιδιότητες εξαρτώνται από το επαγόμενο στατικό μαγνητικό πεδίο  $H_0$ , τον μαγνητισμό κορεσμού  $M_s$  και τον παράγοντα απόσβεσης Gilbert  $\alpha$  [26]. Από τις σχέσεις διασποράς των  $\mu_{1r}, \mu_{2r}$  το MPR εμφανίζεται όταν  $f > f_{res} = \gamma H_0 = 6.1664 \text{ GHz}$  (με  $\gamma = 35.176 \text{ MHz} \times m/kA$ ), όπου  $f_{res}$  είναι η φερρομαγνητική συχνότητα συντονισμού. Χρησιμοποιώντας  $f = 7.5 \text{ GHz}$  και τις ενδεικνύμενες τιμές

$\alpha = 0.0002$ ,  $H_0 = 175.3 \text{ kA/m}$ ,  $M_s = 140 \text{ kA/m}$  [26], λαμβάνουμε τον ταυ-  
στή με απώλειες:

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) = \mu_0 \cdot \begin{bmatrix} -0.6661 - 0.0021i & 0 & 0 \\ 0 & -2.0265 - 0.0021i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

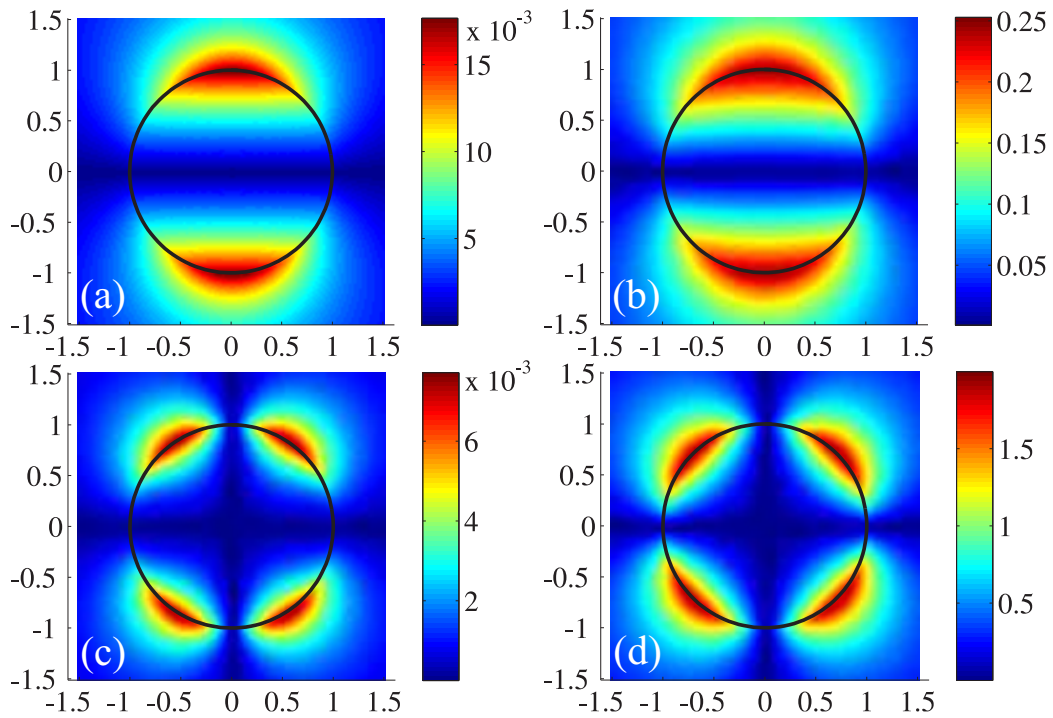
με  $\mu_{1r} + \mu_{2r} = -2.6926 - 0.0042i$ ,  $Re(\mu_{1r} + \mu_{2r}) < 0$ , ενώ θέτουμε  $\epsilon_r = 16$ .

No	m	CFVIE	DEM
1	-1	23.1883 + 0.6324i	23.1883 + 0.6324i
2	-2	24.7342 + 0.245i	24.7124 + 0.2452i
3	1	34.0025 + 0.2104i	34.1284 + 0.2063i
4	0	35.442 + 0.229i	35.4363 + 0.2288i
5	0	42.2131 + 0.3568i	42.3707 + 0.3563i

Πίνακας 4.5: Μιγαδικές ιδιοσυχνότητες για γυρομαγνητικό συντονιστή YIG  
με ακτίνα 0.5 mm.

Στο Σχήμα 4.2 απεικονίζεται το φάσμα του MPR με τις μεθόδους CFVIE/DEM και οι εικόνες απεικονίζουν την περιφερειακή συνιστώσα  $|E_\phi|$  στο  $xz$ -επίπεδο, όπως λαμβάνεται από την CFVIE, για δύο MPR με  $f = 23.1883 + 0.6324i$  GHz και  $f = 35.442 + 0.229i$  GHz αντίστοιχα. Οι εικόνες από την άλλη απεικονίζουν τα MPR που λαμβάνονται από την μέθοδο χωρισμού μεταβλητών, χρησιμοποιώντας ιστροπικές τιμές  $\mu_{eff} = -2.6926 - 0.0042i$ ,  $\epsilon_r = 16$ . Παρόλο που οι MPR του ιστροπικού συντονιστή είναι τύπου  $TE^r$ , οι ρυθμοί του γυρομαγνητικού ταυστή είναι υβριδικοί, αφού η ανισοτροπία δημιουργεί εξάρτηση των συνιστωσών του πεδίου. Επιπλέον, η έλλειψη εκφυλισμού πρέπει να ληφθεί υπόψιν για να αποκαλυφθούν οι MPR, όπως για παράδειγμα ο MPR στην εικόνα 2a προκύπτει για  $m = -1$  ενώ αυτή στην 2c για  $m = 0$ . Η σύγκριση μεταξύ 2a/ c και 2b / d αποκαλύπτει την ύπαρξη MPR σε φερρομαγνητικό YIG, με πλήρεις γυρομαγνητικές ή ιστροπικές ιδιότητες, που εξαρτάται από τον προσανατολισμό μεταξύ του επαγόμενου και του στατικού μαγνητικού πεδίου.





Σχήμα 4.2: Περιφερειακή συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου σε φερρομαγνητικό YIG.

Σαν τελευταία επίδειξη της δυνατότητας του CFVIE να αντιμετωπίζει πιο σύνθετες διατάξεις, παρουσιάζονται οι ιδιοσυχνότητες μιας διάταξης με δύο στρώματα ανομοιογενούς γυροηλεκτρικού συντονιστή στον Πίνακα 4.6. Παρατηρείται λιγότερο πυκνό φάσμα, συγκρίνοντας με τις συχνότητες που ελήφθησαν από την διάταξη του Πίνακα 4.2. Επιπλέον, όσο χαμηλότερη σχετική επιτρεπτότητα έχουν τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται, τόσο μεγαλύτερα φανταστικά μέρη προκύπτουν στις ιδιοσυχνότητες της διάταξης.

No	m	CFVIE
1	-1	5.1952 + 2.8893i
2	0	5.6862 + 4.0588i
3	1	5.8808 + 4.29i
4	-1	7.2625 + 1.2576i
5	0	7.6313 + 1.4616i

Πίνακας 4.6: Μιγαδικές ιδιοσυχνότητες για πολυστρωματικό συντονιστή με ακτίνα 0.5 mm.

### 4.3 Επίλογος

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκαν οι μέθοδοι CFSVIE και DEM και χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό μιγαδικών ιδιοσυχνοτήτων συντονισμού σε ανισοτροπικές σφαίρες, που περιγράφονται από γυροηλεκτρικές ή γυρομαγνητικές ιδιότητες. Οι μέθοδοι τέθηκαν σε σύγκριση τόσο μεταξύ τους, όσο και με το εμπορικό πακέτο HFSS. Παρόλο που το HFSS κρίνεται ανεπαρκές στην αντιμετώπιση ανοιχτών διατάξεων, οι μέθοδοι επιβεβαιώνονται μεταξύ τους αλλά και με τη μέθοδο SVM, για τις περιπτώσεις όπου είναι εφαρμόσιμη. Η συμφωνία των δύο ανεξάρτητων μεθόδων επιβεβαιώνει την ορθότητα των αποτελεσμάτων. Παρουσιάστηκαν διάφορα αριθμητικά αποτελέσματα για ισοτροπικές, ανισοτροπικές και φερρομαγνητικές διατάξεις, όπου έγινε έκδηλη η παρουσία MPRs χρησιμοποιώντας τον πλήρη γυρομαγνητικό τανυστή. Για εκτενέστερη ανάλυση καθώς και την επέκταση της μεθόδου για διάταξη με μεταλλικό πυρήνα, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην [28].

# Παράρτημα

## DEM για ισοτροπική διηλεκτρική σφαίρα σε περιβάλλον με απόσβεση

Υποτίθεται διηλεκτρική σφαίρα με ηλεκτρική επιτρεπτότητα  $\epsilon_1$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_1$  σε περιβάλλον με ηλεκτρική επιτρεπτότητα  $\epsilon_2$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_2$ . Στο παράρτημα αυτό θα γίνει μελέτη των ιδιορρυθμών της διάταξης με την μέθοδο DEM, που παρουσιάστηκε στο κυρίως μέρος της εργασίας.

Το πεδίο εντός της σφαίρας ( $r < a$ ) μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} [A_{1mn} \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}) + A_{2mn} \mathbf{N}_{mn}^{(1)}], \mathbf{r} \in V. \quad (\text{A.1})$$

Αντικαθιστώντας με τις SSHVs προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = & \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \mathbf{C}_{mn}(\theta, \phi) \left[ A_{1mn} \sqrt{n(n+1)} j_n(k_1 r) \right] \\ & + \mathbf{P}_{mn}(\theta, \phi) \left[ A_{2mn} n(n+1) \frac{j_n(k_1 r)}{k_1 r} \right] \\ & + \mathbf{B}_{mn}(\theta, \phi) \left[ A_{2mn} \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{k_1 r} \frac{d[r j_n(k_1 r)]}{dr} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Αντίστοιχα για το μαγνητικό πεδίο ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = & \frac{1}{i\omega\mu_1} \nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \\ = & \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \left[ \frac{A_{1mn}}{i\omega\mu_1} \nabla \times \mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_1, \mathbf{r}) + \frac{A_{2mn}}{i\omega\mu_1} \nabla \times \mathbf{N}_{mn}^{(1)} \right] \\ = & \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \mathbf{C}_{mn}(\theta, \phi) \left[ A_{2mn} \frac{k_1}{i\omega\mu_1} \sqrt{n(n+1)} j_n(k_1 r) \right] \\ & + \mathbf{P}_{mn}(\theta, \phi) \left[ \frac{k_1}{i\omega\mu_1} A_{1mn} n(n+1) \frac{j_n(k_1 r)}{k_1 r} \right] \\ & + \mathbf{B}_{mn}(\theta, \phi) \left[ \frac{k_1}{i\omega\mu_1} A_{1mn} \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{k_1 r} \frac{d[r j_n(k_1 r)]}{dr} \right], \mathbf{r} \in V. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Το πεδίο εκτός της σφαίρας ( $r > a$ ) μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} [A_{3mn} \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(k_1, \mathbf{r}) + A_{4mn} \mathbf{N}_{mn}^{(3)}], \mathbf{r} \in V. \quad (\text{A.4})$$

Αντικαθιστώντας με τις SSHVs προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = & \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \mathbf{C}_{mn}(\theta, \phi) \left[ A_{3mn} \sqrt{n(n+1)} h_n(k_1 r) \right] \\ & + \mathbf{P}_{mn}(\theta, \phi) \left[ A_{4mn} n(n+1) \frac{h_n(k_1 r)}{k_1 r} \right] \\ & + \mathbf{B}_{mn}(\theta, \phi) \left[ A_{4mn} \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{k_1 r} \frac{d[r h_n(k_1 r)]}{dr} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Αντίστοιχα για το μαγνητικό πεδίο ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = & \frac{1}{i\omega\mu_2} \nabla \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \\ = & \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \left[ \frac{A_{3mn}}{i\omega\mu_2} \nabla \times \mathbf{M}_{mn}^{(3)}(k_2, \mathbf{r}) + \frac{A_{4mn}}{i\omega\mu_2} \nabla \times \mathbf{N}_{mn}^{(3)} \right] \\ = & \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \mathbf{C}_{mn}(\theta, \phi) \left[ A_{4mn} \frac{k_2}{i\omega\mu_2} \sqrt{n(n+1)} h_n(k_1 r) \right] \\ & + \mathbf{P}_{mn}(\theta, \phi) \left[ \frac{k_2}{i\omega\mu_2} A_{3mn} n(n+1) \frac{h_n(k_2 r)}{k_2 r} \right] \\ & + \mathbf{B}_{mn}(\theta, \phi) \left[ \frac{k_2}{i\omega\mu_2} A_{3mn} \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{k_2 r} \frac{d[r h_n(k_2 r)]}{dr} \right], \mathbf{r} \in V. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Για να υπάρχει απόσβεση εκτός της σφαίρας απαιτείται να ισχύει η σχέση  $k_2 = i\gamma$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ . Ορίζοντας:

$$\lambda_n = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{(n+1)\pi i}{2}} \quad (\text{A.7})$$

$$A'_{3mn} = \frac{A_{3mn}}{\lambda_n}, \quad A'_{4mn} = \frac{A_{4mn}}{\lambda_n} \quad (\text{A.8})$$

η σφαιρική συνάρτηση Hankel γράφεται ως εξής:

$$h_n^{(1)}(k_2 r) = h_n^{(1)}(\pm i\gamma r) = \frac{k_n(\gamma r)}{\lambda_n} \quad (\text{A.9})$$

όπου  $k_n$  η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δεύτερου είδους (ή συνάρτηση Macdonald) που ορίζεται μεταξύ άλλων τρόπων και ως εξής:

$$k_n(z) = \frac{1}{2} \pi i e^{(n+1)\pi i/2} h_n^{(1)}(ze^{\frac{1}{2}\pi i}). \quad (\text{A.10})$$

Με τους νέους ορισμούς τα πεδία εκτός της σφαίρας μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = & \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \mathbf{C}_{mn}(\theta, \phi) \left[ A'_{3mn} \sqrt{n(n+1)} k_n(\gamma r) \right] \\ & + \mathbf{P}_{mn}(\theta, \phi) \left[ A'_{4mn} n(n+1) \frac{k_n(\gamma r)}{\gamma r e} \right] \\ & + \mathbf{B}_{mn}(\theta, \phi) \left[ A'_{4mn} \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{\gamma r} \frac{d[rk_n(\gamma r)]}{dr} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = & \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \mathbf{C}_{mn}(\theta, \phi) \left[ A'_{4mn} \frac{i\gamma}{\omega\mu_2} \sqrt{n(n+1)} k_n(\gamma r) \right] \\ & + \mathbf{P}_{mn}(\theta, \phi) \left[ \frac{\gamma}{\omega\mu_2} A'_{3mn} n(n+1) \frac{k_n(\gamma r)}{\gamma r} \right] \\ & + \mathbf{B}_{mn}(\theta, \phi) \left[ \frac{\gamma}{i\omega\mu_2} A'_{3mn} \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{\gamma r} \frac{d[rk_n(\gamma r)]}{dr} \right], \mathbf{r} \in V. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Εφόσον δεν υπάρχουν φορτία ή ρεύματα στο χώρο, τα πεδία θα είναι συνεχή παντού. Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες στην επιφάνεια της σφαίρας προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \hat{r} \times [\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_1(\mathbf{r})] &= 0, r = a \\ \hat{r} \times [\mathbf{H}_2(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_1(\mathbf{r})] &= 0, r = a \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις των SSHVs:

- Πολλαπλασιάζοντας την οριακή συνθήκη για τα ηλεκτρικά πεδία με  $C_{mn}^* \sin\theta$  και ολοκληρώνοντας προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \sqrt{n(n+1)} j_n(k_1 a) A_{1mn} &= \sqrt{n(n+1)} k_n(\gamma a) A'_{3mn} \\ \Rightarrow j_n(k_1 a) A_{1mn} - k_n(\gamma a) A'_{3mn} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

- Πολλαπλασιάζοντας την οριακή συνθήκη για τα ηλεκτρικά πεδία με  $B_{mn}^* \sin\theta$  και ολοκληρώνοντας προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{k_1 a} \frac{d[rj_n(k_1 r)]}{dr} \Big|_{r=a} A_{2mn} &= \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{\gamma a} \frac{d[rk_n(\gamma r)]}{dr} \Big|_{r=a} A'_{4mn} \\ \Rightarrow \frac{1}{k_1 a} \frac{d[rj_n(k_1 r)]}{dr} \Big|_{r=a} A_{2mn} - \frac{1}{\gamma a} \frac{d[rk_n(\gamma r)]}{dr} \Big|_{r=a} A'_{4mn} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

- Πολλαπλασιάζοντας την οριακή συνθήκη για τα μαγνητικά πεδία με  $C_{mn}^* \sin\theta$  και ολοκληρώνοντας προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{i\omega\mu_1} \sqrt{n(n+1)} j_n(k_1 a) A_{2mn} &= \frac{i\gamma}{\omega\mu_2} \sqrt{n(n+1)} k_n(\gamma a) A'_{4mn} \\ \Rightarrow \frac{k_1}{i\omega\mu_1} j_n(k_1 a) A_{2mn} - \frac{i\gamma}{\omega\mu_2} k_n(\gamma a) A'_{4mn} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

- Τέλος, πολλαπλασιάζοντας την οριακή συνθήκη για τα μαγνητικά πεδία με  $B_{mn}^* \sin\theta$  και ολοκληρώνοντας προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{i\omega\mu_1} \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{k_1 a} \frac{d[rj_n(k_1 r)]}{dr} \Big|_{r=a} A_{1mn} \\ = \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{\gamma a} \frac{d[rk_n(\gamma r)]}{dr} \Big|_{r=a} A'_{3mn} \\ \Rightarrow \frac{1}{k_1 a} \frac{d[rj_n(k_1 r)]}{dr} \Big|_{r=a} A_{1mn} - \frac{1}{\gamma a} \frac{d[rk_n(\gamma r)]}{dr} \Big|_{r=a} A'_{3mn} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Για να έχουν οι ομογενείς εξισώσεις μη μηδενικές ρίζες πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος να είναι μηδενική:

$$\begin{vmatrix} j_n(k_1 a) & -k_n(\gamma a) \\ \frac{1}{i\omega\mu_1} \frac{d[rj_n(k_1 r)]}{dr} \Big|_{r=a} & -\frac{1}{i\omega\mu_2} \frac{d[rk_n(\gamma r)]}{dr} \Big|_{r=a} \\ \frac{1}{k_1 a} \frac{d[rj_n(k_1 r)]}{dr} \Big|_{r=a} & -\frac{1}{\gamma a} \frac{d[rk_n(\gamma r)]}{dr} \Big|_{r=a} \\ \frac{k_1}{i\omega\mu_1} j_n(k_1 a) & -\frac{i\gamma}{\omega\mu_2} k_n(\gamma a) \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{A.18})$$

Οι λύσεις της πρώτης ορίζουσας αντιστοιχούν στις κανονικοποιημένες συχρότητες των ρυθμών  $TE^r$  και προκύπτει η εξής υπερβατική εξίσωση:

$$-\frac{1}{\omega\mu_2}j_n(k_1a)[k_n(\gamma a) + \gamma ak'_n(\gamma a)] + \frac{1}{\omega\mu_1}k_n(\gamma a)[j_n(k_1a) + k_1aj'_n(k_1a)] = 0. \quad (A.19)$$

Οι λύσεις της δεύτερης ορίζουσας αντιστοιχούν στις κανονικοποιημένες συχρότητες των ρυθμών  $TM^r$  και προκύπτει η εξής υπερβατική εξίσωση:

$$\frac{1}{\omega\mu_2} \frac{\gamma}{k_1} k_n(\gamma a)[j_n(k_1a) + k_1aj'_n(k_1a)] + \frac{1}{\omega\mu_1} \frac{k_1}{\gamma} j_n(k_1a)[k_n(\gamma a) + \gamma ak'_n(\gamma a)] = 0. \quad (A.20)$$

Στην αποκοπή  $\gamma \rightarrow 0$  και χρησιμοποιώντας τις ασυμπτωτικές εκφράσεις:

$$k_n(z) \simeq \sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})\frac{2^{n-1}}{z^{n+1}}, z \in \mathbb{R}, n \geq 0$$

$$k'_n(z) \simeq -\sqrt{\pi}(n+1)\Gamma(n + \frac{1}{2})\frac{2^{n-1}}{z^{n+2}}, z \in \mathbb{R}, n \geq 0 \quad (A.21)$$

προκύπτουν οι σχέσεις:

$$j_n(k_1a) \left( \frac{n}{\omega\mu_2} + \frac{1}{\omega\mu_1} \right) + \frac{k_1a}{\omega\mu_1} j'_n(k_1a) = 0 \quad (A.22)$$

$$j_n(k_1a) \left( \frac{1}{\omega\mu_2} \frac{\gamma}{k_1} - \frac{n}{\omega\mu_1} \frac{k_1}{\gamma} \right) + \frac{1}{\omega\mu_2} \gamma a j'_n(k_1a) = 0. \quad (A.23)$$

Οι σχέσεις (A.19), (A.20) δίνουν τις ιδιοσυχνότητες των ρυθμών TE, TM αντίστοιχα και είναι ακριβείς αφού υπολογίζονται χωρίς προσεγγίσεις. Οι σχέσεις (A.22), (A.23) προκύπτουν μόνο κοντά στην αποκοπή και είναι προσεγγιστικές. Αξίζει να σημειωθεί ότι το σύστημα (A.18) είναι ακριβές ενώ οι σχέσεις (A.22), (A.23) είναι προσεγγιστικές και έχουν καλή ακρίβεια κοντά στην αποκοπή.



## Βιβλιογραφία

- [1] P. G. D. Kajfez, *Dielectric Resonators*. Norwood, MA: Artech House, 1986.
- [2] P. Bhartia and M. A. K. Hamid, «Eigenvalues for a Spherical Cavity with an Impedance Wall», *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 19, pp. 110–111, 1971.
- [3] A. W. Glisson, D. Kajfez, and J. James, «Evaluation of Modes in Dielectric Resonators Using a Surface Integral Equation Formulation», *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 31, pp. 1023–1029, 1983.
- [4] W. Zheng, «Computation of complex resonance frequencies of isolated composite objects», *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 37, pp. 953–961, 1989.
- [5] S.-L. Lin and G. W. Hanson, «An efficient full-wave method for analysis of dielectric resonators possessing separable geometries immersed in inhomogeneous environments», *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 48, pp. 84–92, 2000.
- [6] Z. E. Eremenko and Y. F. Filipov, «Anisotropic Spherical Cavity Resonator I. Azimuthally Homogeneous Oscillations», *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*, vol. 22, pp. 1065–1074, 2001.
- [7] I. Wolff and N. Schwab, «Measurement of the Dielectric Constant of Anisotropic Dielectric Materials Using the Degenerated Modes of a Spherical Cavity», *1980 10th European Microwave Conference*, pp. 241–245, 1980.
- [8] M. R. Foreman, J. D. Swaim, and F. Vollmer, «Whispering gallery mode sensors», *Adv. Opt. Photon.*, vol. 7, pp. 168–240, 2015.
- [9] S. I. Shopova, I. M. White, Y. Sun, H. Zhu, X. Fan, G. Frye-Mason, A. Thompson, and S.-j. Ja, «On-Column Micro Gas Chromatography Detection with Capillary-Based Optical Ring Resonators», *Analytical Chemistry*, vol. 80, pp. 2232–2238, 2008.

- 
- [10] M. K. Rajesh and B. Prakash, «Dielectric resonator antennas—a review and general design relations for resonant frequency and bandwidth», *International Journal of Microwave and Millimeter-Wave Computer-Aided Engineering*, vol. 4, pp. 230–247, 1994.
- [11] J. H. Wade and R. C. Bailey, «Applications of Optical Microcavity Resonators in Analytical Chemistry», *Annual Review of Analytical Chemistry*, vol. 9, pp. 1–25, 2016.
- [12] A. A. P. Trichet, P. R. Dolan, D. James, G. M. Hughes, C. Vallance, and J. M. Smith, «Nanoparticle Trapping and Characterization Using Open Microcavities», *Nano Letters*, vol. 16, pp. 6172–6177, 2016.
- [13] M. H. P. Pfeiffer, J. Liu, M. Geiselmann, and T. J. Kippenberg, «Coupling Ideality of Integrated Planar High- $Q$  Microresonators», *Phys. Rev. Applied*, vol. 7, p. 024026, 2017.
- [14] D. Farnesi, A. Barucci, G. C. Righini, S. Berneschi, S. Soria, and G. Nunzi Conti, «Optical Frequency Conversion in Silica-Whispering-Gallery-Mode Microspherical Resonators», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 112, p. 093901, 2014.
- [15] K. Kosma, G. Zito, K. Schuster, and S. Pissadakis, «Whispering gallery mode microsphere resonator integrated inside a microstructured optical fiber», *Opt. Lett.*, vol. 38, pp. 1301–1303, 2013.
- [16] K. Kosma, I. Konidakis, and S. Pissadakis, «Photorefractive tuning of whispering gallery modes of a spherical resonator integrated inside a microstructured optical fibre», *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 223, pp. 2035–2040, 2014.
- [17] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [18] P. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics Bind 1*. McGraw-Hill, 1953.
- [19] D. Sarkar and N. J. Halas, «General vector basis function solution of Maxwell's equations», *Phys. Rev. E*, vol. 56, pp. 1102–1112, 1997.
- [20] Z. Lin and S. T. Chui, «Electromagnetic scattering by optically anisotropic magnetic particle», *Phys. Rev. E*, vol. 69, p. 056614, 2004.
- [21] S. Liu and Z. Lin, «Opening up complete photonic bandgaps in three-dimensional photonic crystals consisting of biaxial dielectric spheres», *Phys. Rev. E*, vol. 73, p. 066609, 2006.

- 
- [22] G. D. Kolezas, G. P. Zouros, and G. C. Kokkorakis, «Electromagnetic Scattering by Inhomogeneous Conducting-Gyroelectric Objects», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 64, pp. 4804–4814, 2016.
- [23] G. P. Zouros and G. C. Kokkorakis, «Electromagnetic Scattering by an Inhomogeneous Gyroelectric Sphere Using Volume Integral Equation and Orthogonal Dini-Type Basis Functions», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 63, pp. 2665–2676, 2015.
- [24] G. P. Zouros, «CCOMP: An efficient algorithm for complex roots computation of determinantal equations», *Computer Physics Communications*, vol. 222, pp. 339–350, 2018.
- [25] E. Episkopou, S. Papantonis, W. J. Otter, and S. Lucyszyn, «Defining Material Parameters in Commercial EM Solvers for Arbitrary Metal-Based THz Structures», *IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology*, vol. 2, no. 5, pp. 513–524, 2012.
- [26] J. Krupka, B. Salski, P. Kopyt, and W. Gwarek, «Electrodynamic study of YIG filters and resonators», *Scientific Reports*, vol. 6, p. 34 739, Oct. 2016.
- [27] J. Krupka, P. Aleshkevych, B. Salski, P. Kopyt, and A. Pacewicz, «Ferromagnetic Resonance Revised - Electrodynamic Approach», *Scientific Reports*, vol. 7, Jul. 2017.
- [28] G. P. Zouros, G. D. Kolezas, and I. G. Kyrannas, «Complex Resonances of Anisotropic Spherical Resonators», *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 66, no. 10, pp. 5282–5290, Oct. 2018.