Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Παιγνιοθεωρητικά Μοντέλα για Προβλήματα Προσανατολισμού

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τριανταφύλλου Στυλιανός

Επιβλέπων: Δημήτρης Φωτάκης
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογισμών
Αθήνα, Οκτώβριος 2019

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Παιγνιοθεωρητικά Μοντέλα για Προβλήματα Προσανατολισμού

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τριανταφύλλου Στυλιανός

Επιβλέπων: Δημήτρης Φωτάκης
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 18^{η} Οκτωβρίου 2019.

....	....	....
Δημήτρης Φωτάκης	Άρης Παγουρτζής	Νικόλαος Παπασπύρου
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογισμών
Αθήνα, Οκτώβριος 2019

....
Τριανταφύλλου Στυλιανός
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Σε αυτή την διπλωματική εργασία εισάγουμε μια νέα παιγνιοθεωρητική προσέγγιση του Orienteering Problem (OP) και ονομάζεται Multi-agent Orienteering Problem (MOP). Σε αντίθεση με την κλασική μορφή του OP, που ασχολείται με την κατανομή ενός συνόλου παικτών στα μονοπάτια ενός δικτύου, μέσω κεντρικής διαχείρισης, το MOP θεωρεί ότι ο κάθε παίκτης πλέον αποφασίζει για τον εαυτό του και κοιτά αποκλειστικά και μόνο το προσωπικό του συμφέρον. Θεωρείται επίσης ότι ο κάθε παίκτης παίρνει λογικές αποφάσεις και άρα το MOP εμπίπτει στην κατηγορία των non-cooperative games.

Δεδομένου ενός δικτύου και δύο κόμβων του s και t, οι παίκτες του παιχνιδιού καλούνται να επιλέξουν το μονοπάτι που θα ακολουθήσουν για να πάνε από τον κόμβο s στον κόμβο t. Κάθε κόμβος του δικτύου χαρακτηρίζεται από ένα σταθερό κέρδος και μια αύξουσα συνάρτηση καθυστέρησης, η οποία εξαρτάται από το πόσοι παίκτες έχουν επιλέξει μονοπάτι που περιέχει αυτό τον κόμβο. Ο χρόνος που θα πάρει σε κάποιον παίκτη για να μετακινηθεί από τον κόμβο s στον κόμβο t είναι ίσος με τη συνολική καθυστέρηση που θα του επιβληθεί από όλους τους κόμβους, που ανήκουν στο μονοπάτι που έχει αποφασίσει να ακολουθήσει. Επίσης το κέρδος που θα προσκομίσει κάποιος παίκτης, είναι ίσο με το άθροισμα των κερδών όλων των κόμβων του μονοπατιού του. Στόχος κάθε παίκτη είναι να επιλέξει ένα s-t μονοπάτι με το οποίο θα μεγιστοποιήσει το κέρδος του και ταυτόχρονα δεν θα ξεπεράσει ένα συγκεκριμένο χρονικό όριο. Θεωρούμε ότι όλοι οι παίκτες κοιτάνε αποκλειστικά και μόνο το προσωπικό τους συμφέρον, χωρίς να τους ενδιαφέρει να βοηθήσουν ή να υπονομεύσουν κάποιον άλλον παίκτη (selfish agents). Είναι προφανές ότι η "επιτυχία" κάθε παίκτη εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις επιλογές που έχουν κάνει οι υπόλοιποι παίκτες, για παράδειγμα αν όλοι οι παίκτες αποφασίσουν να ακολουθήσουν το πιο κερδοφόρο μονοπάτι, τότε είναι πολύ πιθανό να βγουν όλοι εκτός χρόνου. Το βασικό ερώτημα είναι εάν το συγκεκριμένο παιχνίδι έχει ισορροπία Nash ή όχι, δηλαδή αν υπάρχει κατανομή των παικτών σε s-t μονοπάτια, τέτοια ώστε κανένας παίκτης να μη μπορεί να βελτιώσει το κέρδος του, αλλάζοντας ατομικά το μονοπάτι που ακολουθεί. Αν αποδειχθεί ότι υπάρχει μια τέτοια κατανομή, τότε το επόμενο βήμα είναι η αναζήτηση κάποιου αλγόριθμου που να την υπολογίζει αποδοτικά, αλλά και η εκτίμηση του πόσο χειρότερο μπορεί να είναι το συνολικό κέρδος που θα αποκομίσουν οι παίκτες αν την ακολουθήσουν, σε σχέση με αυτό της βέλτιστης λύσης.

Αρχικά ορίζουμε την atomic παραλλαγή του προβλήματος (AMOP), σύμφωνα με την οποία κάθε παίκτης θεωρείται μη αμελητέα ποσότητα. Δείχνουμε ότι υπάρχει NE σε κάθε στιγμιότυπο του AMOP, που ανήκει στην singleton περίπτωση ή που αποτελείται από δίκτυο με δύο ενδιάμεσους κόμβους. Παρουσιάζουμε δύο στιγμιότυπα του AMOP με δύο μόνο παίκτες, ενός εκ των οποίων μάλιστα το δίκτυο είναι extension parallel, για τα οποία δεν υπάρχει NE. Επιπλέον δείχνουμε ότι το πρόβλημα του να αποφασίσουμε αν ένα στιγμιότυπο του AMOP έχει NE ή όχι, είναι NP-complete.

Στην συνέχεια ορίζουμε τη non-atomic παραλλαγή του προβλήματος (NMOP), σύμφωνα με την οποία κάθε παίκτης θεωρείται μη υπολογίσιμη ποσότητα. Δείχνουμε ότι το Price of Anarchy (PoA) του NMOP είναι unbounded. Περιγράφουμε και ορίζουμε τον χώρο των feasible λύσεων του προβλήματος και παρουσιάζουμε τις δυσκολίες που προκαλεί στην απόδειξη ύπαρξης NE, όταν κάνουμε χρήση των fixed point theorems ή του convex optimization. Καταλήγουμε ότι για κάθε στιγμιότυπο του NMOP υπάρχει NE, δείχνοντας ότι είναι C-Secure σε κάθε κατανομή των παικτών, που δεν αποτελεί NE του.

Δείχνουμε έναν άπληστο αλγόριθμο εύρεσης NE, για στιγμιότυπα του NMOP, με se-

ries parallel δίκτυα και αποδεικνύουμε την ορθότητα του. Τέλος παρουσιάζουμε μερικά αποτελέσματα και συμπεράσματα, σχετικά με την συμπεριφορά ενός δικτύου, κατα τη μεταφορά παικτών ανάμεσα σε δύο μονοπάτια του.

Λέξεις κλειδιά: Orienteering Problem, Nash Equilibrium, Congestion Games, Selfish Routing, Atomic Games, Non-atomic Games, C-secure Games, Series Parallel Networks, Extension Parallel Networks, Convex Optimization, Fixed Point Theorems

Abstract

In this thesis we introduce a new game-theoretical approach of the Orienteering Problem (OP), named Multi-agent Orienteering Problem (MOP). In contrast with the classical form of OP, which is concerned with the distribution of a set of players into paths of some network through central regulation, MOP assumes that every player behaves selfishly and aim at optimizing hew own welfare. For that reason MOP belongs in the class of non-cooperative games.

Given a network G and two distinguished nodes of G, s and t, players have to select which path they are going to follow, in order to reach node t from node s. Each node of G is associated with a constant gain and an increasing delay function, which depends on the number of players, who have chosen a path that includes the node. The time, that will take a player to travel from node s to node t equals the total delay, that will be enforced to her by the nodes of the path that she has selected to follow. Furthermore, the total gain that will be collected by some player is equal to the sum of the gains of the nodes that constitute her chosen path. The goal of each player is to pick an s-t path, that will maximize her collected gain and at the same time it will not exceed a specific time limit. We assume that all players care only for their personal welfare and that they have no interest in aiding or sabotaging any other player (selfish agents). It follows, that the "success" of each player is determined at a great degree by the choices of the other players. For instance, if all players decide to follow the most profitable path, then it is highly likely that everyone is going to surpass the time limit. The main question is if the above-mentioned game always admits a Pure Nash Equilibrium (PNE) or not, meaning if there is a distribution of the players to the s-t paths of G, such that no one would be able to improve her gain, by unilaterally changing her path. In case, such a distribution is proved to exist, then the next step is to construct an efficient algorithm for computing it and also give an assessment of the upper bound of the Price of Anarchy.

At first, we define a model for the atomic variant of the problem (AMOP) and we prove the existence of PNE, for the case of parallel links networks and for general networks with two intermediate nodes. Next, we present two instances of the AMOP, that do not have a PNE, one of which consists of an extension parallel network. Additionally, we prove that the decision problem of whether an instance of AMOP, admits a PNE or not, is NP-complete.

We proceed by defining a model for the non-atomic variant of the problem (NMOP) and showing that the Price of Anarchy for this game is unbounded from above. Moreover, we define and analyze the space of all feasible solutions in NMOP and also present the difficulties that brings upon the proof of existence of a PNE, when fixed point theorems or convex optimization techniques are used. We conclude that for every instance of the NMOP, there exists a PNE, by proving that they are C-secure for every player distribution, that is not a PNE.

Furthermore, we show a greedy algorithm that computes PNEs, for instances of NMOP with series parallel networks and also provide a proof of correctness. Finally we present a number of results and inferences about the behaviour of a network, during the transfer of players between two of its paths.

Keywords: Orienteering Problem, Nash Equilibrium, Congestion Games, Selfish Routing, Atomic Games, Non-atomic Games, C-secure Games, Series Parallel Networks,

Extension Parallel Networks, Convex Optimization, Fixed Point Theorems

Ευχαριστίες

Με την παρούσα διπλωματική εργασία κλείνει ένας πολύ σημαντικός κύκλος της ζωής μου, ο οποίος ήταν γεμάτος ευχάριστες εμπειρίες και μερικές από τις ωραιότερες αναμνήσεις. Ήταν τιμή μου να έχω για επιβλέποντα καθηγητή τον κύριο Φωτάκη, δίπλα στον οποίο έμαθα πολλά και εξελίχθηκα σαν άνθρωπος. Κατά την διάρκεια της προηγούμενης χρονιάς ήταν συνέχεια δίπλα μου, για να με στηρίξει και να με βοηθήσει σε ό,τι και αν χρειαζόμουν εντός και εκτός των πλαισίων της διπλωματικής. Του οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ για την εμπιστοσύνη και το ενδιαφέρον που μου έδειξε, αλλά και για την πολύ ευχάριστη συνεργασία που είχαμε. Κόουτς ήσασταν ο τέλειος μέντορας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα μέλη της οικογένειας μου Κατερίνα, Τάσο, Κώστα, Μυρίνα, γιάγιο και Κώστα Τσ. για την αμέριστη υποστήριξη που μου έχουν προσφέρει όλα αυτά τα χρόνια. Καθώς και την άλλη μου οικογένεια τους φίλους μου, Ηλία Π., Ντίνο Π., Άλκη Φ., Γιώργο Σ., Λεωνίδα Κ., Κοσμά Μ., Κώστα Σ., Κώστα Τ., Στέργιο Τ., Γιώργο Ζ., Γιώργο Γ., Μενέλαο Α., Βασιλική Κ., Ορσαλία Α., Χριστίνα Γ., Μελίνα Μ., καθώς και όλα τα άτομα που μου χάρισαν 6 αξέχαστα φοιτητικά χρόνια. Τέλος θέλω να πω ένα πολύ μεγάλο και αληθινό ευχαριστώ στην κοπέλα μου Μαργαρίτα για όλη την βοήθεια, την στήριξη, αλλά και την όμορφη αγάπη που μου προσφέρει.

Στέλιος

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**

2 Θεωρητικό Υπόβαθρο **4**

3 Προηγούμενη Δουλειά **8**

4 Atomic Multi-agent Orienteering Problem **12**

4.1 Η Περιγραφή του Μοντέλου . . . 12
4.2 Singleton Περίπτωση . . . 13
4.3 Δίκτυα με Δύο Ενδιάμεσους Κόμβους . . . 14
4.4 Γενική Περίπτωση . . . 17
4.5 Extension Parallel Δίκτυα . . . 18
4.6 Πρόβλημα Απόφασης . . . 19
4.7 Συμπεράσματα . . . 23

5 Non-atomic Multi-agent Orienteering Problem **25**

5.1 Περιγραφή του μοντέλου . . . 25
5.2 Price of Anarchy . . . 26
5.3 Ο Χώρος των Feasible Λύσεων . . . 27
5.3.1 Ορισμός του Χώρου . . . 28
5.3.2 Προβλήματα που δημιουργεί στην απόδειξη ύπαρξης NE . . . 28
5.3.2.1 Fixed Point Theorems . . . 28
5.3.2.2 Convex Optimization . . . 29
5.4 C-security και Απόδειξη Ύπαρξης NE . . . 31
5.5 Συμπεράσματα . . . 34

6 Αλγόριθμοι εύρεσης NE για το NMOP **36**

6.1 Ένας άπληστος αλγόριθμος εύρεσης NE για series-parallel δίκτυα . . . 36
6.2 Μελέτη της συμπεριφοράς ενός δικτύου κατά τη μεταφορά ροής ανάμεσα σε δύο μονοπάτια του . . . 40
6.3 Το Base Δίκτυο . . . 43
6.4 Συμπεράσματα . . . 49

7 Μελλοντική Δουλειά **51**

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το Orienteering Problem (OP) είναι ένα πρόβλημα δρομολόγησης, το οποίο ορίστηκε για πρώτη φορά το 1987 από τους Golden et al. [24] και χαίρει αμείωτου ερευνητικού ενδιαφέροντος μέχρι και σήμερα. Στην κλασική του μορφή το πρόβλημα θεωρεί ένα δίκτυο με δύο διακεκριμένους κόμβους s και t και αναζητά ένα s-t μονοπάτι, το οποίο να μεγιστοποιεί το συνολικό συλλεγμένο κέρδος και ταυτόχρονα να μην ξεπερνά σε χρόνο διάσχισης ένα συγκεκριμένο χρονικό όριο. Με την πάροδο των χρόνων έχουν μελετηθεί πολλές παραλλαγές του προβλήματος, όπως το Team OP (TOP) [6], το OP with Time Windows [36], το Time Dependent OP [14] και το Stochastic OP [29]. Το ίδιο το OP, όπως φυσικά και όλες οι παραλλαγές του βρίσκουν χρησιμότητα σε διάφορες σημαντικές πρακτικές εφαρμογές. Η πιο γνωστή από αυτές είναι ο σχεδιασμός τουριστικών διαδρομών (Tourist Trip Design Problem TTDP [21]), που αφορά τον υπολογισμό μιας διαδρομής ανάμεσα στα αξιοθέατα μιας πόλης, η οποία να συνάδει με τις προσωπικές προτιμήσεις του εκάστοτε τουρίστα, αλλά και με τους χρονικούς περιορισμούς που ενδέχεται να έχει. Μια επιπλέον ενδιαφέρουσα πρακτική εφαρμογή του OP και των παραλλαγών του είναι το πρόβλημα του Mobile Crowdsourcing [56, 60], το οποίο σχετίζεται με τον διαμοιρασμό μιας εργασίας ανάμεσα σε χρήστες κινητών τηλεφώνων, όπως για παράδειγμα γίνεται με το recommendation system των Google Maps. Για τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται να ενημερωθεί περισσότερο για το OP προτείνεται το survey [26].

Η βασικότερη υπόθεση, στην οποία στηρίζεται το OP, καθώς και η συντριπτική πλειοψηφία των παραλλαγών του είναι ότι θεωρούν δεδομένη την ύπαρξη μιας κεντρικής μονάδας διαχείρισης και την πλήρη υπακοή των χρηστών σε αυτή. Υπάρχουν όμως και αρκετά εξίσου σημαντικά προβλήματα προσανατολισμού, στα οποία ο κάθε χρήστης κοιτά το προσωπικό του συμφέρον και δρα με μοναδικό γνώμονα αυτό. Στις περιπτώσεις μάλιστα που οι επιλογές ενός χρήστη ενδέχεται να επηρεάσουν άλλους χρήστες, τα προβλήματα αυτά εμπίπτουν πλέον στην κατηγορία των ανταγωνιστικών παιγνίων. Το βασικότερο μοντέλο μελέτης προβλημάτων ιδιοτελούς προσανατολισμού, όπως αυτά που περιγράφηκαν παραπάνω είναι τα network congestion games ή αλλιώς routing games (§18 στο [46]), τα οποία αποτελούν υποκατηγορία της κλάσης των congestion games. Το βασικό ζήτημα σε τέτοια παιχνίδια είναι η εύρεση μιας κατανομής των χρηστών στα s-t μονοπάτια του δικτύου, η οποία να εξασφαλίζει ότι αν αυτή γίνει οικουμενικά αποδεκτή τότε δεν θα συμφέρει κανέναν χρήστη να αλλάξει εκ των υστέρων ατομικά το μονοπάτι που του έχει ανατεθεί. Κατά μια έννοια δηλαδή η συγκεκριμένη κατανομή αποτελεί έναν εναλλακτικό τρόπο ελέγχου και συντονισμού των χρηστών, από εκείνον της κεντρικής διαχείρισης που θεωρούν οι κλασικές παραλλαγές του OP. Όταν εφαρμόζεται μια τέτοια κατανομή, λέγεται ότι το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία.

Για να αποκτήσει όμως μια ισορροπία πρακτικό ενδιαφέρον είναι αναγκαίο το συνολικό κέρδος που θα αποκομίσουν οι χρήστες, στην περίπτωση που την υπακούσουν, να μην είναι πολύ χειρότερο από το βέλτιστο δυνατό. Ακόμα σε πολλές περιπτώσεις είναι υψίστης σημασίας η κατανομή που πετυχαίνει την ισορροπία να είναι δίκαιη, δηλαδή να εξασφαλίζει ότι δεν θα υπάρχουν έντονες διαφορές ανάμεσα στα προσωπικά κέρδη των χρηστών.

Ένα κύριο ερευνητικό κίνητρο για τη μελέτη του OP με ιδιοτελείς χρήστες είναι το πρόβλημα του crowd control σε περιπτώσεις διασυνδεδεμένων παρόχων υπηρεσιών [7]. Φανταστείτε το παράδειγμα ενός διάσημου μουσείου παγκόσμιας ιστορίας, το οποίο δέχεται καθημερινά χιλιάδες επισκέπτες. Κάθε επισκέπτης θα έχει αξιολογήσει τα εκθέματα του μουσείου με ορισμένους πόντους ευχαρίστησης, βασιζόμενος πάντα στις προσωπικές του προτιμήσεις. Αν για παράδειγμα κάποιος είναι μεγάλος λάτρης της Αιγυπτιακής μυθολογίας, θα έχει βαθμολογήσει υψηλά τις σαρκοφάγους και χαμηλότερα εκθέματα που δεν τον συναρπάζουν και τόσο. Είναι λογικό επίσης, ότι ο κάθε επισκέπτης θα έχει ένα συγκεκριμένο χρονικό περιθώριο για το πόσο θα μπορεί να παραμείνει στο μουσείο. Σκοπός λοιπόν του κάθε επισκέπτη θα είναι να υπολογίσει μια διαδρομή στο μουσείο, η οποία να μεγιστοποιεί τους συνολικούς πόντους ευχαρίστησης που θα συλλέξει από τα εκθέματα τα οποία θα επισκεφθεί και ταυτόχρονα να μην ξεπερνά το χρονικό του όριο. Υπάρχει όμως το ενδεχόμενο, κάποιο έκθεμα να βρίσκεται πρώτο στη λίστα μεγάλου μέρους του συνόλου των επισκεπτών, με αποτέλεσμα να προκαλείται έντονη συμφόρηση σε αυτό και τα άτομα να καταλήγουν να δαπανούν αρκετό χρόνο περιμένοντας σε ουρές, ενώ κάλλιστα θα μπορούσαν να τον αξιοποιήσουν καλύτερα. Μια προφανής λύση στο συγκεκριμένο θέμα, η οποία δεν περιλαμβάνει κεντρική διαχείριση, είναι η παροχή προτεινόμενων διαδρομών στους χρήστες. Το μεγάλο ελάττωμα όμως αυτής της λύσης είναι ότι στηρίζεται στην καλή θέληση του επισκέπτη, υπό την έννοια ότι θα ακολουθήσει την διαδρομή που του έχει προταθεί και ας μην είναι η βέλτιστη δυνατή. Κάτι τέτοιο όμως περιλαμβάνει μεγάλη δόση ρίσκου και το πιθανότερο είναι να προκαλέσει περισσότερα ζητήματα από όσα θα λύσει. Εδώ λοιπόν έγκειται η χρησιμότητα της έννοιας της ισορροπίας. Αν ήταν εφικτό δηλαδή να υπολογιστεί ένα σύνολο προτεινόμενων διαδρομών, το οποίο να εγγυάται ότι κανένας επισκέπτης δεν δύναται να καταφέρει κάτι καλύτερο, αλλάζοντας ατομικά τη διαδρομή που του έχει ανατεθεί, τότε η απληστία των ατόμων δεν θα αποτελούσε πλέον πρόβλημα. Στην περίπτωση μάλιστα που οι προτάσεις αυτές εξασφάλιζαν ότι κάθε χρήστης θα αποκομίσει τουλάχιστον έναν σχετικά αποδεκτό αριθμό πόντων ευχαρίστησης και επίσης ο τρόπος υπολογισμού τους ήταν χρονικά αποδοτικός, τότε θα αποτελούσαν έναν αρκετά υποσχόμενο τρόπο σημαντικής βελτίωσης της εμπειρίας των επισκεπτών του μουσείου. Στην συνέχεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα φανεί ο βαθμός δυσκολίας του υπολογισμού ενός τέτοιου συνόλου προτάσεων και σε ποιές περιπτώσεις αυτός είναι εφικτός.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό Υπόβαθρο

Εισαγωγή στην Θεωρία Παιγνίων

Η θεωρία παιγνίων αφορά τη μελέτη μαθηματικών μοντέλων της στρατηγικής αλληλεπίδρασης μεταξύ ορθολογικών (rational) ληπτών αποφάσεων [42], δηλαδή παικτών οι οποίοι λαμβάνουν ορθολογικές αποφάσεις με σκοπό να μεγιστοποιήσουν το προσωπικό τους όφελος. Με απλά λόγια μελετά παιχνίδια, όπου όλοι οι παίκτες είναι ορθολογικοί και οι επιλογές ενός επηρεάζουν και τους υπόλοιπους. Καθιερώθηκε αρχικά ως πεδίο των οικονομικών το 1928 με την εργασία του John von Neumann [45], ο οποίος το 1944 σε συνεργασία με τον Oskar Morgenstern δημοσίευσε το βιβλίο Theory of Games and Economic Behavior [59]. Το 1950 ο John Forbes Nash γενίκευσε τα αποτελέσματα του τελευταίου [44] και κατάφερε να γίνει ένας από τους πιο διακεκριμένους μαθηματικούς/ οικονομολόγους μέχρι και σήμερα. Εκτός των οικονομικών, η θεωρία παιγνίων βρίσκει εφαρμογή και σε άλλους κλάδους, όπως οι κοινωνικές επιστήμες, η λογική και φυσικά η επιστήμη των υπολογιστών.

Υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τύποι παιχνιδιών, εμείς θα αναφέρουμε όμως μόνο ορισμένους από τους οποίους χαρακτηρίζουν τα μοντέλα με τα οποία θα ασχοληθούμε στην παρούσα διπλωματική εργασία. Θα λέμε ότι ένα παιχνίδι είναι ανταγωνιστικό (non-cooperative), αν κάθε παίκτης κοιτά αποκλειστικά και μόνο το προσωπικό του συμφέρον και πράττει ατομικά, χωρίς δηλαδή να συνεργάζεται με άλλους παίκτες (selfish agent). Ένα παιχνίδι θα χαρακτηρίζεται επίσης ως συμμετρικό, αν ισχύουν τα ίδια πράγματα για όλους τους παίκτες και ως non-zero-sum, αν το κέρδος ενός παίκτη δεν σημαίνει απαραίτητα την απώλεια ενός άλλου. Θεωρούμε ακόμα ότι τα παιχνίδια τα οποία θα μελετήσουμε θα είναι sequential και perfect information, δηλαδή κάθε παίκτης θα γνωρίζει τα πάντα για τις αποφάσεις των προηγούμενων παικτών.

Πέρα από το σύνολο των παικτών, κάθε παιχνίδι αποτελείται επίσης από:

- Ένα σύνολο στρατηγικών (strategies) για κάθε παίκτη, δηλαδή το σύνολο των πιθανών αποφάσεων που μπορεί να λάβει. Για παράδειγμα, στο παιχνίδι πέτρα-ψαλίδι-χαρτί το σύνολο των στρατηγικών κάθε ενός από τους δύο παίκτες είναι το {πέτρα, ψαλίδι, χαρτί}.
  - Αμιγής στρατηγική (pure strategy): Κάθε παίκτης επιλέγει ακριβώς μια από τις δυνατές στρατηγικές του.
  - Μικτή στρατηγική (mixed strategy): Κάθε παίκτης επιλέγει με τι πιθανότητα θα παίξει κάθε μια από τις δυνατές στρατηγικές του, προφανώς το συνολικό άθροισμα των πιθανοτήτων που θα κατανείμει θα πρέπει να είναι ίσο με ένα.

- Έναν πίνακα ανταμοιβών (payoff matrix), στον οποίο αναγράφεται η ανταμοιβή κάθε παίκτη, για όλες τις πιθανές εκβάσεις (profiles) του παιχνιδιού.
- Μια βέλτιστη λύση (optimal solution), το profile ή τα profiles του παιχνιδιού που μεγιστοποιούν το συνολικό όφελος των παικτών.

Σημειώνεται, ότι στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα μας απασχολήσει μόνο η περίπτωση των αμιγών στρατηγικών, οπότε όταν αναφερόμαστε από εδώ και στο εξής σε μια κάποια στρατηγική, θα εξυπονοείται ότι είναι αμιγής.

Θα λέμε ότι ένα profile στρατηγικών αποτελεί Nash Equilibrium (NE) ενός παιχνιδιού, αν κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει το όφελος του, αλλάζοντας ατομικά τη στρατηγική του. Τέλος ορίζουμε ως Price of Anarchy (PoA) ενός παιχνιδιού το κλάσμα του συνολικού οφέλους της βέλτιστης λύσης ως προς αυτό του χειρότερου NE, αν σκοπός των παικτών είναι να μεγιστοποιήσουν κάποιο κέρδος και το αντίστροφο, αν πρέπει να ελαχιστοποιήσουν κάποιο κόστος.

Για τον αναγνώστη που επιθυμεί μια εκτενέστερη εισαγωγή στην θεωρία παιγνίων, μια καλή αρχή είναι το [22] και για όσους προτιμούν μια πιο οικονομική προσέγγιση το [10]. Ακόμα παραθέτουμε δύο επιπλέον βιβλία [55, 46] που ασχολούνται με την αλγοριθμική θεωρία παιγνίων.

Routing Games

Τα routing games ή αλλιώς network congestion games είναι μια κατηγορία ανταγωνιστικών παιχνιδιών, όπου οι παίκτες δρομολογούν κίνηση μέσα από ένα δίκτυο (§18 στο [46]). Τέτοια παιχνίδια συνδέονται άμεσα με πρακτικές εφαρμογές, που αφορούν τη δρομολόγηση της κίνησης σε μεγάλα επικοινωνιακά δίκτυα με έλλειψη κεντρικής διαχείρισης, όπως το Internet. Τα μοντέλα που θα εξεταστούν στην παρούσα διπλωματική εργασία θα θεωρούν single-commodity ή αλλιώς two-terminal δίκτυα, δηλαδή δίκτυα που αποτελούνται από ένα μοναδικό ζευγάρι διακεκριμένων κόμβων s (source) και t (sink). Όλα τα μονοπάτια, στα οποία θα αναφερόμαστε από εδώ και πέρα θα είναι s-t μονοπάτια, οπότε το “s-t” πολλές φορές θα παραλείπεται. Επιπρόσθετα όλοι οι κόμβοι ενός δικτύου εκτός των s και t, θα ονομάζονται ενδιάμεσοι κόμβοι. Οι παίκτες λοιπόν θα δρομολογούν την κίνηση τους στα s-t μονοπάτια του δικτύου. Μάλιστα στις περιπτώσεις που θα μας απασχολήσουν, κάθε παίκτης θα δρομολογεί όλη του την κίνηση σε ακριβώς ένα μονοπάτι ή ισοδύναμα κάθε παίκτης θα κατανέμεται σε ακριβώς ένα μονοπάτι. Άρα το σύνολο των πιθανών στρατηγικών κάθε παίκτη σε αυτά τα παιχνίδια θα είναι το σύνολο όλων των s-t μονοπατιών του δικτύου.

Στο κεφάλαιο 3 θα μελετήσουμε την περίπτωση του atomic selfish routing, κατά την οποία κάθε παίκτης θεωρείται μια μη αμελητέα ποσότητα. Στα κεφάλαια 4 και 5, από την άλλη, θα δούμε την περίπτωση του non-atomic selfish routing, στην οποία θεωρείται ότι το πλήθος των παικτών είναι πάρα πολύ μεγάλο, με συνέπεια ατομικά ο καθένας τους να αποτελεί μια αμελητέα ποσότητα. Στο non-atomic μοντέλο μπορούμε να περιγράψουμε ισοδύναμα μια κατανομή των παικτών στα μονοπάτια του δικτύου ως μια κατανομή ροής (flow) σε αυτά τα μονοπάτια, η οποία μπορεί να διαιρεθεί απεριόριστα. Μάλιστα αν θεωρήσουμε ότι το σύνολο των παικτών αντιπροσωπεύονται από το συνεχές [0, 1], τότε θα μιλάμε για τη μοναδιαία ροή.

Convexity

Ορισμός 2.1. *Θα λέμε ότι ένα υποσύνολο S του Ευκλείδιου χώρου είναι convex σύνολο αν κάθε ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία του, βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο S.*

Ορισμός 2.2. *Θα λέμε ότι ένα υποσύνολο S του Ευκλείδιου χώρου είναι convex σύνολο αν κάθε ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία του, βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο S.*

Ορισμός 2.3. *Έστω ένα convex σύνολο X και μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, θα λέμε ότι η f είναι:*

- *Convex αν για κάθε $x, y \in X$ και κάθε $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ τ.ω. $a + b = 1$ ισχύει*

$$f(a \cdot x + b \cdot y) \geq a \cdot f(x) + b \cdot f(y)$$

.

- *Strictly Convex αν για κάθε $x, y \in X$ και κάθε $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ τ.ω. $a + b = 1$ ισχύει*

$$f(a \cdot x + b \cdot y) > a \cdot f(x) + b \cdot f(y)$$

.

- *(Strictly) Concave αν η -f είναι (strictly) convex.*

Ισχύει επίσης ότι αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε θα είναι και convex ανν η δεύτερη παράγωγος της είναι μη αρνητική.

Κεφάλαιο 3

Προηγούμενη Δουλειά

Στο παρόν κεφάλαιο κάνουμε μια σύντομη και επιλεκτική προεπισκόπηση των congestion games, ενός από τα βασικότερα πεδία έρευνας της Αλγοριθμικής Θεωρίας Παιγνίων. Τα αποτελέσματα και οι μελέτες που διατυπώνονται παρακάτω αποτέλεσαν σε μεγάλο βαθμό την βασικότερη πηγή έμπνευσης και καθοδήγησης μας, για το πως έπρεπε να προσεγγίσουμε το πρόβλημα μας, παρόλο που το ίδιο, όπως θα γίνει αντιληπτό και στην συνέχεια, δεν ανήκει σε αυτή την κατηγορία.

Εκτός από τις προοπτικές και τις ενδιαφέρουσες ιδιότητες που τα χαρακτηρίζουν, τα congestion games και οι παραλλαγές/γενικεύσεις τους παρέχουν κομψά μοντέλα για την ανταγωνιστική ανάθεση πόρων σε μεγάλα τηλεπικοινωνιακά αλλά και μεταφορικά δίκτυα. Εισήχθησαν για πρώτη φορά από τον Rosenthal το 1973 στο [51], ο οποίος τα περιέγραφε ως μια κλάση ανταγωνιστικών παιγνίων με ενδιαφέρουσες πρακτικές εφαρμογές, κάθε παιχνίδι της οποίας έχει τουλάχιστον ένα PNE.

Τα congestion games ανήκουν στην κατηγορία των noncooperative games και μοντελοποιούν την αλληλεπίδραση μεταξύ παικτών, που μοιράζονται πόρους [35]. Κάθε παίκτης επιλέγει ένα υποσύνολο των διαθέσιμων πόρων, το οποίο αποτελεί στην ουσία και την στρατηγική του στο παιχνίδι. Όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των παικτών που έχουν επιλέξει κάποιον πόρο, που ανήκει στην στρατηγική του, τόσο περισσότερες θα είναι και οι απώλειες που θα υποστεί, λόγω της συμφόρησης στο συγκεκριμένο πόρο, η συνάρτηση μάλιστα που ορίζει την συγκεκριμένη αναλογία ονομάζεται συνάρτηση κόστους του πόρου. Στόχος λοιπόν κάθε παίκτη στο παιχνίδι είναι να ελαχιστοποιήσει τις απώλειες του.

Ο Rosenthal έδειξε ότι για κάθε παιχνίδι αυτής της κλάσης με πεπερασμένες διαστάσεις, υπάρχει exact potential function, δηλαδή μια πεπερασμένη συνάρτηση Φ με πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των πιθανών profiles στρατηγικών του παιχνιδιού και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία, δεδομένου ενός profile, οποιαδήποτε ατομική αλλαγή στη στρατηγική ενός παίκτη, θα επιφέρει αλλαγή στη τιμή της ακριβώς ίση με αυτή στο προσωπικό κέρδος του παίκτη. Αυτό σημαίνει ότι αν ξεκινήσουμε από ένα οποιοδήποτε profile στρατηγικών και σε κάθε βήμα μειώνουμε τις απώλειες κάποιου παίκτη, τότε ταυτόχρονα θα μειώνεται εξίσου και η τιμή της Φ. Επειδή όμως η Φ είναι πεπερασμένη, θα φτάσει αναπόφευκτα σε κάποιο τοπικό της ελάχιστο, ύστερα από ορισμένες επαναλήψεις του αλγορίθμου. Το profile στρατηγικών, για το οποίο η Φ βρίσκεται σε τοπικό ελάχιστο θα αποτελεί προφανώς PNE, διότι σε αυτή την περίπτωση κανένας παίκτης δεν θα μπορεί αλλάζοντας ατομικά τη στρατηγική του να μειώσει τις απώλειες του. Οι κινήσεις που εκτελούμε σε κάθε βήμα του παραπάνω αλγορίθμου χαρακτηρίζονται ως better response, ενώ ο ίδιος ο αλγόριθμος ονομάζεται Better Response Algorithm (best response αν οι κινήσεις ήταν οι καλύτερες δυνατές κάθε φορά) και συγκλίνει πάντα σε PNE, για παιχνίδια με potential function (ή αλλιώς Potential Games [41]), για τους λόγους που εξηγήσαμε προηγουμένως.

Ύστερα λοιπόν από την δημοσίευση της δουλειάς του Rosenthal πραγματοποιήθηκε αρκετή μελέτη, με σκοπό τον καθορισμό και άλλων κλάσεων παιχνιδιών, οι οποίες διαθέτουν potential function. Μια από αυτές, η οποία μάλιστα έχει προσελκύσει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον, είναι τα weighted congestion games, όπου κάθε παίκτης χαρακτηρίζεται επιπλέον από ένα βάρος, που ουσιαστικά συμβολίζει το πόση συμφόρηση προκαλεί στους πόρους που επιλέγει. Η συγκεκριμένη κλάση είναι προφανώς μη συμμετρική και σε αντίθεση με τα unweighted congestion games, έχει αποδειχθεί ότι δεν έχει πάντα PNE και κατ' επέκταση potential function, ακόμα και στην περίπτωση που συμμετέχουν μόνο δύο παίκτες [19, 23, 37]. Από την θετική πλευρά τώρα οι Fotakis et al. έδειξαν στα [19, 18] ότι κάθε weighted congestion game, με γραμμικές συναρτήσεις κόστους έχει potential function και άρα PNE. Σε παρόμοιο αποτέλεσμα κατέληξαν οι Panagopoulou και Spirakis στο [47], αυτή την φορά για εκθετικές συναρτήσεις καθυστέρησης. Έξι χρόνια μετά όμως από το [19] οι Harks, Klimm και Mohring έδειξαν στο [27] ότι για οποιοδήποτε weighted congestion game, με ακόμα και την ελάχιστη παρέκκλιση από αυτά των [19, 47] δεν εξασφαλίζεται η ύπαρξη potential function. Μια ακόμα αξιοσημείωτη γενίκευση των congestion games είναι τα congestion games with player-specific payoff functions [40], όπου κάθε πόρος δεν σχετίζεται με μια καθολική συνάρτηση κόστους, αλλά με μια για κάθε παίκτη. Ο Milchtaich απέδειξε στο [40], ότι στην singleton περίπτωση, δηλαδή στην περίπτωση που ο κάθε παίκτης επιλέγει ακριβώς έναν πόρο, η κλάση αυτών των παιχνιδιών έχει πάντα PNE, χωρίς απαραίτητα να έχει potential function.

Εκτός όμως από την ύπαρξη της potential function και του PNE υπάρχουν και άλλα ισχυρά ερωτήματα που αφορούν τα congestion games και τις παραλλαγές τους. Το πρώτο από τα δύο αυτά ερωτήματα σχετίζεται με το κατά πόσο φθείρεται η αποτελεσματικότητα ενός συστήματος όταν οι παίκτες του αρχίζουν να φέρονται εγωιστικά (selfish agents), δηλαδή με το Price of Anarchy. Από την επιδραστική δημοσίευση των Koutsoupias και Papadimitriou [34] και μετά, το PoA των congestion games έχει μελετηθεί εκτενώς τόσο στην atomic όσο και στη non-atomic μορφή τους. Πιο συγκεκριμένα οι Lucking et al. [38] έδειξαν ότι στην singleton περίπτωση τα congestion games με γραμμικές συναρτήσεις κόστους έχουν PoA ίσο με $4/3$, ενώ οι Gairing et al. έδειξαν ότι για πολυωνυμικές συναρτήσεις κόστους τάξης d το PoA είναι το πολύ $d+1$. Όσον αφορά τώρα την γενική περίπτωση οι Awerbuch, Azar και Epstein [3] και οι Christodoulou και Koutsoupias [3] απέδειξαν ανεξάρτητα ότι το PoA είναι ίσο με $5/2$ για γραμμικές συναρτήσεις κόστους και $d^{\Theta(d)}$ για πολυωνυμικές συναρτήσεις κόστους τάξης d. Μεταγενέστερα οι Aland et al. [2] υπολόγισαν ακριβή όρια για το PoA των congestion games με πολυωνυμικές συναρτήσεις κόστους. Για τη non-atomic μορφή τώρα των congestion games ο Roughgarden [52] έδειξε ότι το PoA τους εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την κλάση των συναρτήσεων κόστους και το υπολόγισε στην περίπτωση που αυτές είναι μη αρνητικές και η φθίνουσες. Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι συνήθως το κενό στο PoA ανάμεσα στις δύο μορφές είναι αρκετά μεγάλο και ότι υπάρχει η τάση για προσπάθεια βελτίωσης του PoA των atomic games στον βαθμό των non-atomic. Σε αυτή την κατεύθυνση απεδείχθη στα [17, 5] ότι το PoA των atomic congestion games στην singleton περίπτωση για κάποια κλάση συναρτήσεων κόστους είναι το πολύ όσο και στη non-atomic.

Το δεύτερο ερώτημα τώρα αφορά το πόσο αποδοτικά μπορούμε να υπολογίσουμε ένα PNE στα congestion games. Οι Fabrikant, Papadimitriou και Talwar [13] απέδειξαν ότι ο υπολογισμός ενός PNE σε συμμετρικά congestion games είναι PLS-complete (βλ. [30] για την κλάση πολυπλοκότητας PLS), ακόμα και στην περίπτωση που οι συναρτήσεις κόστους είναι γραμμικές. Ενώ οι Ackermann, Roglin και Vocking στο [1] απέδειξαν ότι στα μη συμμετρικά congestion games η σύγκλιση σε PNE είναι γρήγορη ανν το σύνολο των πιθανων στρατηγικών κάθε παίκτη είναι matroid.

Στην συνέχεια θα επικεντρωθούμε σε μια υποκατηγορία των congestion games, την οποία συναντήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα routing games ή αλλιώς network congestion games. Στο [53] αποδεικνύεται ότι σε κάθε non-atomic routing game ένα PNE δεν είναι χειρότερο από τη βέλτιστη λύση του ίδιου παιχνιδιού για διπλάσιους παίκτες. Ακόμα για συμμετρικά routing games σε extension-parallel δίκτυα, αποδεικνύεται στο [16] ότι το PoA της atomic περίπτωσης δεν είναι χειρότερο από αυτό της non-atomic, κάτι το οποίο όμως δεν ισχύει απαραίτητα για άλλους τύπους δικτύων όπως για παράδειγμα τα series-parallel. Στο [17] επίσης αποδείχθηκε ότι η εύρεση ενός PNE είναι PLS-complete και για τα μη συμμετρικά network congestion games.

Οι Ackermann, Roglin και Vocking στο [1] κατέληξαν σε ένα αρκετά αποθαρρυντικό αποτέλεσμα, σύμφωνα με το οποίο ακόμα και για τα συμμετρικά network congestion games με γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης ο χρόνος σύγκλισης σε PNE μπορεί να είναι εκθετικά μεγάλος. Για τον λόγο αυτό κρίθηκε αναγκαία η αναζήτηση κλάσεων δικτύων, γενικότερων από αυτών που αντιστοιχούν στα matroid σύνολα στρατηγικών που είδαμε προηγουμένως και για τις οποίες να υπάρχουν αποδοτικοί αλγόριθμοι εύρεσης PNE στα συμμετρικά network congestion games. Μια τέτοια οικογένεια δικτύων είναι τα series-parallel, για την οποία οι Fotakis, Kontogiannis και Spirakis [20] έδειξαν έναν αλγόριθμο, ο οποίος συγκλίνει σε χρόνο $O(n \cdot m \cdot logm)$ και ο οποίος δεν δουλεύει για οποιαδήποτε δίκτυα, που δεν ανήκουν σε αυτή. Τέλος ο Fotakis στο [16] έδειξε ότι για κάθε συμμετρικό network congestion game με extension-parallel δίκτυο και n παίκτες, ένας best response αλγόριθμος συγκλίνει το πολύ σε n βήματα.

Για τους αναγνώστες που επιθυμούν μια λεπτομερέστερη προεπισκόπηση της ερευνητικής προόδου των congestion games προτείνουμε τα [15, 32].

Κεφάλαιο 4

Atomic Multi-agent Orienteering Problem

Το Atomic Multi-agent Orienteering Problem (AMOP) αποτελεί μια παραλλαγή του MOP, κατά την οποία κάθε παίκτης θεωρείται μια μη αμελητέα ποσότητα, δηλαδή αντιπροσωπεύει μια υπολογίσιμη μερίδα της συνολικής κίνησης του δικτύου. Το περιεχόμενο και η δομή του παρόντος κεφαλαίου είναι εμπνευσμένα σε μεγάλο βαθμό από τη δουλειά των Gourvès et al. [25] πάνω σε ένα πρόβλημα που έχει μερικές ομοιότητες με το AMOP, αλλά δεν αποτελεί ούτε γενίκευση ούτε ειδική περίπτωση του.

4.1 Η Περιγραφή του Μοντέλου

Θεωρούμε ένα σύνολο παικτών $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ και έναν θετικό πραγματικό αριθμό T. Θεωρούμε επίσης ένα δίκτυο G και δύο κόμβους του s και t. Με U θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των υπόλοιπων κόμβων του G και με P το σύνολο όλων των πιθανών s-t μονοπατιών. Το σύνολο όλων των πιθανών στρατηγικών κάθε παίκτη είναι το P και άρα το σύνολο όλων των πιθανών profiles στρατηγικών του παιχνιδιού θα είναι το P^n. Έστω $p \in P^n$ ένα profile στρατηγικών του παιχνιδιού, το p ουσιαστικά είναι ένα διάνυσμα μεγέθους n, το οποίο στην i-οστη του θέση, όπου $i \in N$, περιέχει το μονοπάτι p_i που ακολουθεί ο παίκτης i. Με p_{-i} συμβολίζουμε το διάνυσμα που περιλαμβάνει τα μονοπάτια που ακολουθούν όλοι οι παίκτες σύμφωνα με το p, εκτός από τον i και με (p_{-i}, p'_i) συμβολίζουμε το διάνυσμα/profile σύμφωνα με το οποίο κάθε παίκτης $j \in N$ εκτός του i ακολουθεί το μονοπάτι p_j και ο παίκτης i ακολουθεί το μονοπάτι p'_i.

Κάθε κόμβος $u \in U$ χαρακτηρίζεται από ένα σταθερό μη αρνητικό κέρδος K_u και μια μη αρνητική γνησίως αύξουσα συνάρτηση καθυστέρησης d_u, η οποία εξαρτάται από το πλήθος των παικτών, που έχουν αποφασίσει να ακολουθήσουν κάποιο μονοπάτι που περιέχει τον u. Το πλήθος αυτό το υπολογίζουμε για κάποιο profile $p \in P$ και το συμβολίζουμε με $n_u(p)$. Τονίζουμε ότι το παιχνίδι μας είναι συμμετρικό, δηλαδή το κέρδος και η συνάρτηση καθυστέρησης κάθε κόμβου είναι ίδια για κάθε παίκτη και όπως αναφέρθηκε και πριν, το σύνολο των πιθανών στρατηγικών είναι επίσης το ίδιο για κάθε παίκτη.

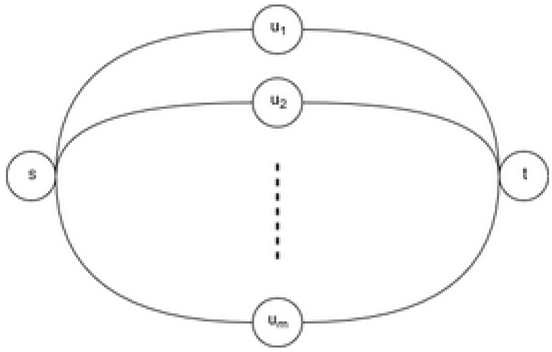
Έστω ένα s-t μονοπάτι $\wp \in P$, το συνολικό κέρδος του $\wp$ θα είναι $K_\wp = \sum_{u \in \wp} K_u$, ενώ ο συνολικός χρόνος καθυστέρησης του, ως προς ένα $p \in P$, $d_\wp(p) = \sum_{u \in \wp} d_u(n_u(p))$. Θα λέμε ότι το $\wp$ είναι feasible ως προς το p, αν ισχύει $d_\wp(p) \leq T$ και infeasible αλλιώς. Θα χαρακτηρίζουμε επίσης το p ως feasible αν όλα τα μονοπάτια του δικτύου, που έχουν επιλεγεί από τουλάχιστον έναν παίκτη, είναι feasible ως προς το p.

Δεδομένου ενός profile στρατηγικών $p \in P$, το κέρδος που αποκομίζει ένας παίκτης $i \in N$ είναι $K_i(p) = K_{p_i}$, αν το p_i είναι feasible ως προς το p και $K_i(p) = 0$ αλλιώς. Τέλος ένα profile στρατηγικών p θα αποτελεί NE ενός στιγμιότυπου του AMOP αν για κάθε παίκτη $i \in N$ ισχύει $K_i(p) \geq K_i(p_{-i}, p'_i)$, για κάθε $p'_i \in P$ και βέλτιστη λύση του αν $\sum_{i \in N} K_i(p) \geq \sum_{i \in N} K_i(p')$, για κάθε $p' \in P^n$.

Τα στιγμιότυπα τα οποία θα μας απασχολήσουν είναι εκείνα των οποίων το δίκτυο θα είναι αναλογικά με το πλήθος των παικτών αρκετά "μεγάλο", έτσι ώστε κάθε παίκτης να έχει τη δυνατότητα να ακολουθήσει κάποιο feasible μονοπάτι και άρα να πετύχει θετικό κέρδος, ανεξαρτήτως με το ποιά μονοπάτια έχουν επιλέξει οι υπόλοιποι παίκτες. Επομένως, κάνοντας αυτή την υπόθεση, είναι αδύνατο για κάποια infeasible κατανομή ροής ενός στιγμιότυπου να αποτελεί NE του. Επιπρόσθετα θεωρούμε για ευκολία ότι ανά δύο όλα τα μονοπάτια του δικτύου έχουν διαφορετικό κέρδος μεταξύ τους.

4.2 Singleton Περίπτωση

Αρχικά, θα εξετάσουμε τι ισχύει για το AMOP στην singleton περίπτωση, δηλαδή στην περίπτωση που όλα τα πιθανά s-t μονοπάτια του δικτύου περιέχουν ακριβώς έναν ενδιάμεσο κόμβο. Με άλλα λόγια σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με δίκτυα της ακόλουθης μορφής.



Δίκτυο 4.1

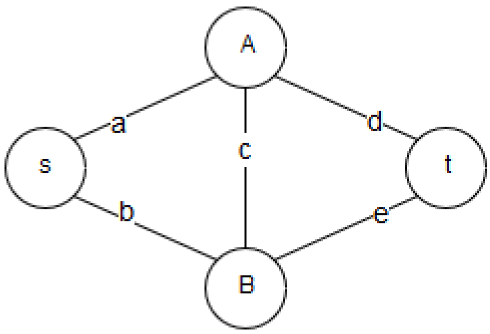
Το βασικό χαρακτηριστικό που ξεχωρίζει τα συγκεκριμένα δίκτυα σε σχέση με τα υπόλοιπα, όσον αφορά το AMOP, είναι ότι η συνολική καθυστέρηση ενός μονοπατιού και κατ' επέκταση το feasibility του εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από το πλήθος των παικτών που ακολουθούν το συγκεκριμένο μονοπάτι. Ένας άπληστος αλγόριθμος, που εκμεταλλεύεται αυτό το χαρακτηριστικό και υπολογίζει ένα NE του παιχνιδιού είναι να αρχίσουμε να προσθέτουμε παίκτες στο πιο κερδοφόρο μονοπάτι μέχρι αυτό να γεμίσει, δηλαδή να φτάσει σε σημείο όπου αν του προσθέταμε έναν ακόμα παίκτη να γινόταν infeasible. Έπειτα θα κάνουμε το ίδιο για το επόμενο πιο κερδοφόρο μονοπάτι και θα επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να έχουν κατανεμηθεί όλοι οι παίκτες σε κάποιο μονοπάτι. Το αποτέλεσμα του παραπάνω αλγορίθμου θα αποτελεί NE, καθώς αν οποιοσδήποτε παίκτης αποφασίσει να αλλάξει ατομικά από το μονοπάτι που του έχει κατανείμει ο αλγόριθμος σε κάποιο μονοπάτι με μεγαλύτερο κέρδος, τότε το τελευταίο μονοπάτι θα γίνει infeasible και άρα τελικά ο παίκτης δεν θα καταφέρει να βελτιώσει το κέρδος του. Επίσης εκτός από NE η έξοδος αυτού του αλγορίθμου αποτελεί και τη βέλτιστη λύση.

4.3 Δίκτυα με Δύο Ενδιάμεσους Κόμβους

Αν κάποιο στιγμιότυπο του AMOP αποτελείται από δίκτυο με μόνο έναν ενδιάμεσο κόμβο, τότε θα υπάρχει μόνο ένα πιθανό s-t μονοπάτι, το οποίο θα μπορούν να ακολουθήσουν οι παίκτες, άρα και ένα μοναδικό πιθανό profile στρατηγικών, το οποίο θα αποτελεί και NE του παιχνιδιού. Θα εξετάσουμε τώρα τι ισχύει για το AMOP στην περίπτωση που αποτελείται από δίκτυα με δύο ενδιάμεσους κόμβους.

Θεώρημα 4.1. *Κάθε στιγμιότυπο του AMOP που αποτελείται από δίκτυο με δύο ενδιάμεσους κόμβους έχει NE.*

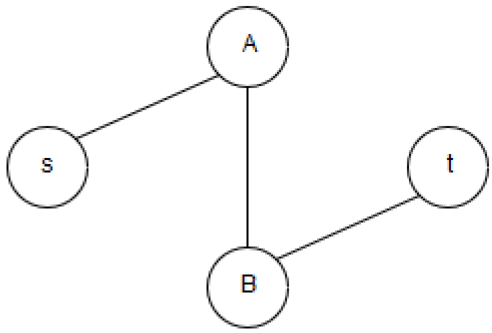
Απόδειξη. Για να μελετήσουμε όλες τις πιθανές διατάξεις ενός δικτύου με δύο ενδιάμεσους κόμβους θα θεωρήσουμε για διευκόλυνση το παρακάτω δίκτυο με βάρη.



Δίκτυο 4.2

Όπου το βάρος κάθε ακμής του δικτύου είναι μία δυαδική μεταβλητή και συμβολίζει το αν θα υπάρχει αυτή η ακμή στο δίκτυο (1) ή όχι (0). Άρα όλες οι πιθανές διατάξεις ενός τέτοιου δικτύου είναι $2^5 = 32$, όσες δηλαδή και οι τιμές της δυαδικής συμβολοσειράς abcde. Από τις 32 αυτές διατάξεις εμάς θα μας απασχολήσουν εντέλει μόνο οι 8, οι διατάξεις δηλαδή για τις οποίες κάθε ενδιάμεσος κόμβος τους εμπεριέχεται σε τουλάχιστον ένα s-t μονοπάτι τους. Οι κόμβοι A και B χαρακτηρίζονται από τα κέρδη K_A και K_B και από τις συναρτήσεις καθυστέρησης d_A και d_B. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $K_B \geq K_A$.

1. 10101

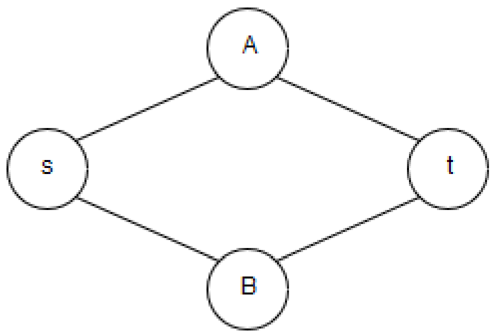


Δίκτυο 4.3

Υπάρχει μόνο ένα s-t μονοπάτι, άρα όπως και στην περίπτωση που είχαμε μόνο έναν ενδιάμεσο κόμβο, έτσι και εδώ θα υπάρχει πάντα ΝΕ.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και στην περίπτωση της διάταξης 01110 υπάρχει πάντα ΝΕ.

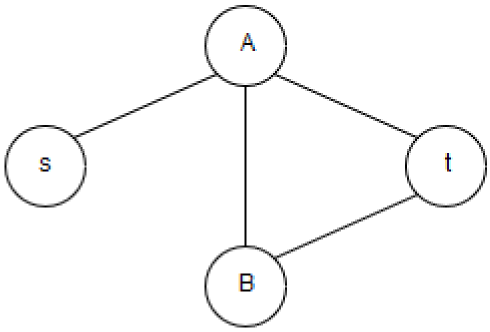
2. 11011



Δίκτυο 4.4

Ανήκει στην κατηγορία που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, άρα έχει πάντα ΝΕ.

3. 10111



Δίκτυο 4.5

Έστω ένα στιγμιότυπο του AMOP που αποτελείται από το παραπάνω δίκτυο, ένα χρονικό όριο T και n παίκτες. Το σύνολο όλων των πιθανών s-t μονοπατιών του εν λόγω δικτύου είναι το $P = \{$A, AB$\}$.

Έστω k ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει $d_A(n) + d_B(k) <= T$. Αν k παίκτες ακολουθήσουν το μονοπάτι AB και οι υπόλοιποι $(n - k)$ το A, τότε θα έχουμε φτάσει σε NE.

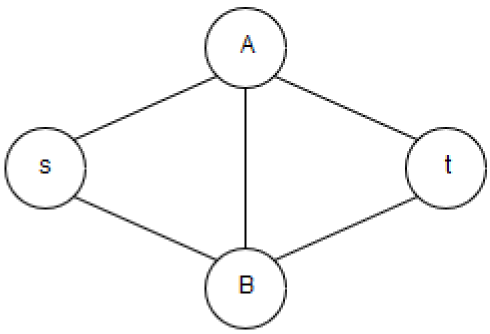
Απόδειξη.

- Κάποιος παίκτης που ακολουθεί το μονοπάτι AB, προσκομίζει συνολικό κέρδος K_A + K_B, το οποίο είναι και το μέγιστο δυνατό.
- Κάποιος παίκτης που ακολουθεί το μονοπάτι A, προσκομίζει συνολικό κέρδος K_A. Αν παρεκκλίνει και ακολουθήσει το μονοπάτι AB, τότε αυτό θα γίνει infeasible αφού θα έχει συνολικό χρόνο καθυστέρησης $d_A(n) + d_B(k + 1) > T$ και άρα ο παίκτης θα προσκομίσει τελικά συνολικό κέρδος $0 < K_A$.

□

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και στις περιπτώσεις των διατάξεων 01111, 11101 και 11110 υπάρχει πάντα NE.

4. 11111



Δίκτυο 4.6

Έστω ένα στιγμιότυπο του AMOP που αποτελείται από το παραπάνω δίκτυο, ένα χρονικό όριο T και n παίκτες. Το σύνολο όλων των πιθανών s-t μονοπατιών του εν λόγω δικτύου είναι το $P = \{\text{A, B, AB, BA}\}$.

Έστω l ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίον ισχύει $d_B(l) \leq T$. Έστω k ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίον ισχύει $d_A(n-l+k) + d_B(l) \leq T$. Τότε αν $(n-l)$ παίκτες ακολουθήσουν το μονοπάτι A, $(l-k)$ παίκτες την B και οι υπόλοιποι k παίκτες τα AB/BA, θα έχουμε NE.

Απόδειξη.

- Κάποιος παίκτης που ακολουθεί ένα εκ των μονοπατιών AB και BA, προσκομίζει συνολικό κέρδος $K_A + K_B$, το οποίο είναι και το μέγιστο δυνατό.

- Κάποιος παίκτης που ακολουθεί το μονοπάτι B προσκομίζει συνολικό κέρδος K_B. Αν παρεκκλίνει ακολουθώντας το μονοπάτι A, θα προσκομίσει κέρδος $K_A \leq K_B$. Αν παρεκκλίνει ακολουθώντας ένα εκ των μονοπατιών AB και BA, τότε αμφότερα αυτά θα γίνουν infeasible, αφού το κάθε ένα τους θα έχει συνολικό χρόνο καθυστέρησης $d_A(n-l+k+1) + d_B(l) > T$ και άρα ο παίκτης θα προσκομίσει τελικά συνολικό κέρδος $0 < K_B$.

- Κάποιος παίκτης που ακολουθεί το μονοπάτι A, προσκομίζει συνολικό κέρδος K_A. Αν παρεκκλίνει ακολουθώντας το μονοπάτι B τότε αυτό θα γίνει infeasible αφού θα έχει συνολικό χρόνο καθυστέρησης $d_B(l+1) > T$. Αν παρεκκλίνει ακολουθώντας ένα εκ των μονοπατιών AB και BA, τότε αμφότερα αυτά θα γίνουν infeasible, αφού το κάθε ένα τους θα έχει συνολικό χρόνο καθυστέρησης $d_A(n-l+k) + d_B(l+1) > T$. Άρα και στις δύο περιπτώσεις ο παίκτης θα προσκομίσει συνολικό κέρδος $0 < K_A$.

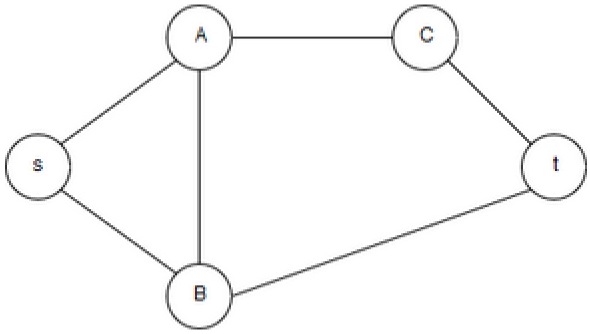
□

Άρα όντως κάθε στιγμιότυπο του AMOP που αποτελείται από κάποιο δίκτυο με δύο ενδιάμεσους κόμβους έχει NE.

□

4.4 Γενική Περίπτωση

Στη συνέχεια θα δείξουμε με τη βοήθεια αντιπαραδείγματος ότι το AMOP δεν έχει πάντα NE. Θεωρούμε ένα στιγμιότυπο του AMOP, το οποίο θα αποτελείται από το δίκτυο 4.7, ένα χρονικό όριο T= 3 και δύο παίκτες.



Δίκτυο 4.7

Θεωρούμε επίσης ότι οι κόμβοι του δικτύου έχουν κέρδη $K_A = 2$, $K_B = 1$ και $K_C = 2$ και ότι για τις συναρτήσεις καθυστέρησης τους ισχύει $d_A(1) = 1$, $d_A(2) = 2$, $d_B(1) = 1$, $d_B(2) = 2$, $d_C(1) = 2$ και $d_C(2) = 3$.

Το σύνολο όλων των πιθανών s-t μονοπατιών του δικτύου είναι το $P = \{$AB, AC, B, BAC$\}$, παρατηρούμε όμως ότι αν κάποιος από τους δύο παίκτες ακολουθήσει το μονοπάτι BAC, τότε όποιο μονοπάτι και να ακολουθήσει ο άλλος παίκτης, το BAC θα γίνει infeasible, άρα είναι εύλογο να το αγνοήσουμε και να θέσουμε $P = \{$AC, AB, B$\}$. Στον επόμενο πίνακα φαίνεται το κέρδος που θα αποκομίσει ο κάθε παίκτης σε κάθε ένα από τα πιθανά profiles στρατηγικών του συγκεκριμένου παιχνιδιού. Εύκολα φαίνεται, παρατηρώντας τον πίνακα, ότι όντως για το συγκεκριμένο στιγμιότυπο δεν υπάρχει NE.

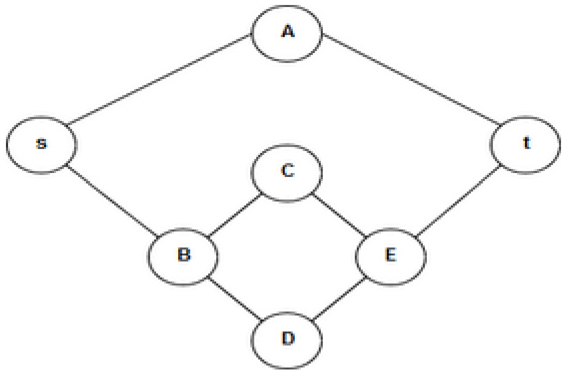
	AC	AB	B
AC	(0, 0)	(0, 3)	(4, 1)
AB	(3, 0)	(0, 0)	(3, 1)
B	(1, 4)	(1, 3)	(1, 1)

Πίνακας 4.1

4.5 Extension Parallel Δίκτυα

Ένα δίκτυο χαρακτηρίζεται ως extension parallel [16], αν όλα τα μονοπάτια του είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή αν κάθε μονοπάτι του περιέχει μία ακμή, η οποία δεν περιλαμβάνεται σε κανένα άλλο μονοπάτι του δικτύου. Θα δείξουμε ότι κάποιο στιγμιότυπο του AMOP μπορεί να μην έχει NE, ακόμα και στην περίπτωση που το δίκτυο του είναι extension parallel.

Θεωρούμε ένα στιγμιότυπο του AMOP, που αποτελείται από το δίκτυο 4.8, το οποίο είναι extension parallel, ένα χρονικό όριο $T = 5$ και δύο παίκτες.



Δίκτυο 4.8

Θεωρούμε επίσης ότι οι κόμβοι του δικτύου έχουν κέρδη $K_D = 1$, $K_B = 1$, $K_C = 1$, $K_D = 2$ και $K_E = 1$ και συναρτήσεις καθυστέρησης $d_A(x) = x$, $d_B(x) = x$, $d_C(x) = x$, $d_D(x) = 2x$ και $d_E(x) = x$. Το σύνολο όλων των πιθανών s-t μονοπατιών του δικτύου είναι το $P = \{$A, BCE, BDE$\}$. Στον επόμενο πίνακα φαίνεται το κέρδος που θα αποκομίσει ο κάθε παίκτης σε κάθε ένα από τα πιθανά profiles στρατηγικών του συγκεκριμένου παιχνιδιού. Εύκολα φαίνεται, παρατηρώντας τον πίνακα, ότι όντως για το συγκεκριμένο στιγμιότυπο δεν υπάρχει NE.

	A	BCE	BDE
A	(1, 1)	(1, 3)	(1, 4)
BCE	(3, 1)	(0, 0)	(3, 0)
BDE	(4, 1)	(0, 3)	(0, 0)

Πίνακας 4.2

Άρα καταλήγουμε ότι το AMOP με extension parallel δίκτυο δεν έχει πάντα NE, όπως κατ΄ επέκταση και το AMOP με series-parallel δίκτυο. Τα series-parallel είναι μια σημαντική οικογένεια δικτύων, που περιέχει αυτή των extension parallel.

4.6 Πρόβλημα Απόφασης

Εώς τώρα έχουμε δει, ότι δεν έχουν όλα τα στιγμιότυπα του AMOP NE. Ορίζουμε ως πρόβλημα απόφασης του AMOP το να αποφασίζουμε αν ένα στιγμιότυπο του AMOP έχει NE ή όχι.

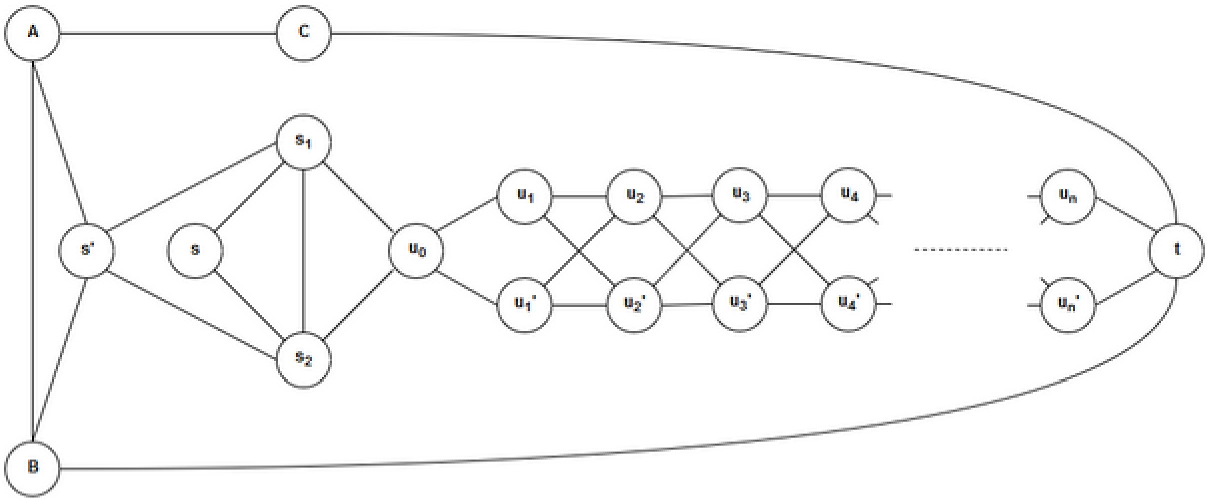
Θεώρημα 4.2. *Το πρόβλημα απόφασης του AMOP είναι NP-complete, ακόμα και για στιγμιότυπα με δύο μόνο παίκτες.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα απόφασης του AMOP με δύο παίκτες είναι NP-complete, θα αναγάγουμε το γνωστό NP-complete πρόβλημα PARTITION σε αυτό. Το PARTITION είναι ένα πρόβλημα απόφασης, κατά το οποίο δοσμένων n ακεραίων αριθμών

$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, τ.ω. $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2 \cdot B > 6$ και $0 < a_i < B$, πρέπει να αποφασίσουμε αν υπάρχει υποσύνολο $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, τ.ω. $\sum_{j \in J} a_j = B = \sum_{j \notin J} a_j$.

Το πρώτο βήμα που πρέπει να κάνουμε σε μια απόδειξη με αναγωγή είναι να δείξουμε ότι το πρόβλημα μας ανήκει στο NP. Όντως δεδομένου ενός στιγμιότυπου του AMOP, μπορούμε να ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν ένα profile στρατηγικών αποτελεί NE του παιχνιδιού ή όχι.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη διαδικασία κατασκευής ενός στιγμιότυπου του AMOP με δύο παίκτες από κάποιο στιγμιότυπο του PARTITION. Πιο συγκεκριμένα, δεδομένου ενός στιγμιότυπου του PARTITION $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ και B, έστω x, κατασκευάζουμε ένα στιγμιότυπο του AMOP, έστω $R(x)$, το οποίο θα αποτελείται από το δίκτυο 4.9, ένα χρονικό όριο $T = 5$ και δύο παίκτες.



Δίκτυο 4.9

Τα κέρδη και οι τιμές των συναρτήσεων καθυστέρησης των κόμβων του δικτύου αναγράφονται στον ακόλουθο πίνακα.

	K	$d(1)$	$d(2)$
s_1	4	0	1
s_2	4	0	1
s'	B - 8	0	0
A	2	1	2
B	1	1	2
C	2	2	3
u_0	1	4,5	5
u_j	a_j	0	1
u'_j	0	0	1

Πίνακας 4.3

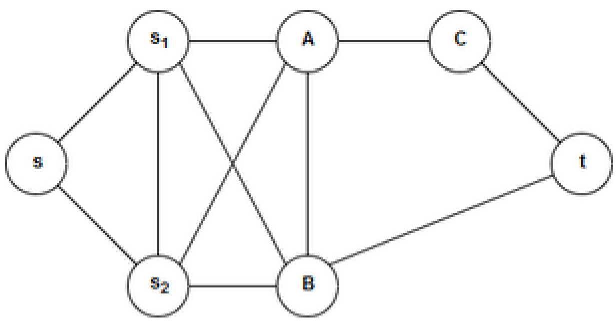
Σημειώνεται ότι ο κόμβος s' χρησιμοποιείται για την απλοποίηση της μορφής του δικτύου και για αυτό επιβάλλει μηδενική καθυστέρηση. Είναι προφανές ότι ο κατασκευαστικος αλγόριθμος R έχει πολυωνυμική πολυπλοκότητα. Το επόμενο βήμα της απόδειξης μας θα είναι να δείξουμε ότι το x έχει εφικτή λύση ανν το $R(x)$ έχει NE.

Ένα profile στρατηγικών του συγκεκριμένου στιγμιότυπου είναι ουσιαστικά ένα ζευγάρι s-t μονοπατιών. Θα δείξουμε πρώτα ότι για να αποτελεί ένα ζευγάρι μονοπατιών NE του στιγμιότυπου $R(x)$, θα πρέπει να είναι της μορφής $(s_1u_0u_1/u'_1 \dots u_n/u'_n, s_2u_0u_1/u'_1 \dots u_n/u'_n)$, όπου όταν γράφουμε u_i/u'_i, για κάποιο $i \in$ [1, n], εννοούμε ότι αυτή τη θέση του μονοπατιού τη καταλαμβάνει είτε ο u_i είτε ο u'_i. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει ζευγάρι μονοπατιών $p = (p_1, p_2)$, το οποίο αποτελεί NE και δεν είναι της παραπάνω μορφής.

Λήμμα 4.1. *Για να αποτελεί ένα ζευγάρι μονοπατιών NE του $R(x)$ είναι αναγκαίο να είναι της μορφής $(s_1u_0u_1/u'_1 \dots u_n/u'_n, s_2u_0u_1/u'_1 \dots u_n/u'_n)$.*

Απόδειξη.

- Δεν υπάρχει ζευγάρι feasible s-t μονοπατιών που να περιέχει u κόμβους και να μην είναι της παραπάνω μορφής. Άρα τουλάχιστον ένα μονοπάτι του p δεν έχει u κόμβους.
- Έστω ότι το p_1 είναι της μορφής $s_1/s_2u_0u_1/u'_1 \dots u_n/u'_n$. Τα best response μονοπάτια στο p_1, που δεν περιέχουν u κόμβους είναι τα $s_1s_2s'BAC$ και $s_2s_1s'BAC$, τα οποία είναι και feasible ως προς το p. Αν όμως θέσουμε ως p_2 κάποιο από τα best response μονοπάτια, τότε το p_1 θα γίνει infeasible ως προς το p, αφού θα του επιβληθεί συνολική καθυστέρηση $5,5 > T$. Άρα ο παίκτης 1 θα αναγκαστεί να αλλάξει σε μονοπάτι που δεν περιέχει τον κόμβο u_0 και άρα κόμβους u γενικά. Οπότε και τα δύο μονοπάτια του p θα πρέπει να μην έχουν u κόμβους.
- Το να δείξουμε ότι δεν υπάρχει ζευγάρι s-t μονοπατιών χωρίς u κόμβους, το οποίο να αποτελεί NE του $R(x)$ είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι το στιγμιότυπο του AMOP, που αποτελείται από το δίκτυο 4.10, χρονικό όριο $T = 5$ και δύο παίκτες δεν έχει NE. Τα κέρδη και οι συναρτήσεις καθυστέρησης των κόμβων του 4.10 έχουν αντίστοιχες τιμές με αυτά του 4.9.



Δίκτυο 4.10

Το σύνολο όλων των πιθανών s-t μονοπατιών του δικτύου είναι το $P = \{s_1AC, s_1AB, s_1B, s_2AC, s_2AB, s_2B, s_1s_2AC/s_2s_1AC, s_1s_2AB/s_2s_1AB, s_1s_2B/s_2s_1B\}$. Στον επόμενο πίνακα φαίνεται το κέρδος που θα αποκομίσει ο κάθε παίκτης σε κάθε ένα από τα πιθανά profiles στρατηγικών του συγκεκριμένου παιχνιδιού. Εύκολα φαίνεται, παρατηρώντας τον πίνακα, ότι όντως για το συγκεκριμένο στιγμιότυπο δεν υπάρχει NE.

	s_1AC	s_1AB	s_1B	s_2AC	s_2AB	s_2B	s_1s_2AC	s_1s_2AB	s_1s_2B
s_1AC	(0, 0)	(8, 7)	(8, 5)	(8, 8)	(8, 7)	(8, 5)	(0, 0)	(8, 11)	(8, 9)
s_1AB	(7, 8)	(7, 7)	(7, 5)	(7, 8)	(7, 7)	(7, 5)	(7, 12)	(7, 11)	(7, 9)
s_1B	(5, 8)	(5, 7)	(5, 5)	(5, 8)	(5, 7)	(5, 5)	(5, 12)	(5, 11)	(5, 9)
s_2AC	(8, 8)	(8, 7)	(8, 5)	(0, 0)	(8, 7)	(8, 5)	(0, 0)	(8, 11)	(8, 9)
s_2AB	(7, 8)	(7, 7)	(7, 5)	(7, 8)	(7, 7)	(7, 5)	(7, 12)	(7, 11)	(7, 9)
s_2B	(5, 8)	(5, 7)	(5, 5)	(5, 8)	(5, 7)	(5, 5)	(5, 12)	(5, 11)	(5, 9)
s_1s_2AC	(0, 0)	(12, 7)	(12, 5)	(0, 0)	(12, 7)	(12, 5)	(0, 0)	(0, 11)	(12, 9)
s_1s_2AB	(11, 8)	(11, 7)	(11, 5)	(11, 8)	(11, 7)	(11, 5)	(11, 0)	(0, 0)	(11, 9)
s_1s_2B	(9, 8)	(9, 7)	(9, 5)	(9, 8)	(9, 7)	(9, 5)	(9, 12)	(9, 11)	(9, 9)

Πίνακας 4.4

Άρα καταλήγουμε ότι για να αποτελεί ένα ζευγάρι μονοπατιών NE του $R(x)$ είναι αναγκαίο να είναι της μορφής $(s_1u_0u_1/u'_1 \dots u_n/u'_n, s_2u_0u_1/u'_1 \dots u_n/u'_n)$.

□

Λήμμα 4.2. *Έστω $p = (p_1, p_2)$ ένα ζευγάρι s-t μονοπατιών του δικτύου 4.9, το οποίο είναι της μορφής $(s_1u_0u_1/u'_1 \dots u_n/u'_n, s_2u_0u_1/u'_1 \dots u_n/u'_n)$. Ισχύει ότι το p θα αποτελεί NE του στιγμιοτύπου $R(x)$ ανν τα p_1, p_2 είναι feasible ως προς το p και κάθε ένα τους έχει συνολικό κέρδος ακριβώς ίσο με $B + 5$.*

Απόδειξη. $\Rightarrow$ Αφού τα p_1, p_2 είναι feasible ως προς το p, θα έχουν και τα δύο χρόνο καθυστέρησης μικρότερο ή ίσο του 5. Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάθε ένας από τους κόμβους u_i, u'_i του δικτύου, για $i \in [1,\, n]$, θα ανήκει είτε στο μονοπάτι p_1 είτε στο p_2. Αν λοιπόν κάποιος παίκτης αποφασίσει να αλλάξει ατομικά το μονοπάτι του σε κάποιο διαφορετικό μονοπάτι της μορφής $s_1/s_2u_0u_1/u'_1 \dots u_n/u'_n$, τότε το νέο αυτό μονοπάτι θα είναι αναγκαστικά infeasible. Αν από την άλλη, ο παίκτης αποφασίσει να αλλάξει ατομικά το μονοπάτι του σε κάποιο μονοπάτι που δεν είναι της μορφής $s_1/s_2u_0u_1/u'_1 \dots u_n/u'_n$, τότε το μέγιστο κέρδος που θα μπορεί να επιτύχει θα είναι $B + 5$. Άρα όντως το p θα αποτελεί NE του στιγμιοτύπου $R(x)$, αφού κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει το κέρδος του, αλλάζοντας ατομικά το μονοπάτι που ακολουθεί.
$\Leftarrow$ Αφού το p αποτελεί NE του $R(x)$, τα p_1 και p_2 θα είναι και τα δύο feasible ως προς το p, διότι αλλιώς θα μπορούσε κάποιος παίκτης να βελτιώσει το κέρδος του αλλάζοντας ατομικά σε μονοπάτι που δεν είναι της μορφής $s_1/s_2u_0u_1/u'_1 \dots u_n/u'_n$. Επίσης τα p_1, p_2 θα έχουν αμφότερα συνολικό κέρδος τουλάχιστον $B + 5$, επειδή αλλιώς αν κάποιος παίκτης άλλαζε ατομικά το μονοπάτι του στο μονοπάτι $s_1s_2s'BAC$, θα αποκόμιζε κέρδος $B+5$ και θα κατάφερνε τελικά να βελτιώσει το κέρδος του. Αφού τα p_1, p_2 είναι feasible, θα ισχύει, όπως είδαμε και πριν, ότι κάθε ένας από τους κόμβους u_i, u'_i του δικτύου, για $i \in [1,\, n]$, θα ανήκει

είτε στο μονοπάτι p_1 είτε στο p_2. Ακόμα οι κόμβοι s_1, s_2 θα περιλαμβάνονται ο ένας στο ένα μονοπάτι και ο άλλος στο άλλο, ενώ ο u_0 και στα δύο. Άρα τα p_1, p_2 θα έχουν και τα δύο μαζί συνολικό κέρδος $2B + 10$. Οπότε αφού έχουμε δείξει ότι $K_{p_1}(p) + K_{p_2}(p) = 2B + 10$, $K_{p_1}(p) >= B + 5$ και $K_{p_2}(p) >= B + 5$, θα ισχύει ότι $K_{p_1}(p) = K_{p_2}(p) = B + 5$. $\square$

Τέλος, θα δείξουμε ότι το x έχει εφικτή λύση, δηλαδή ότι υπάρχει υποσύνολο $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, τέτοιο ώστε $\sum_{j \in J} a_j = B = \sum_{j \notin J} a_j$ ανν το $R(x)$ έχει NE.

$\Rightarrow$ Έχουμε δείξει ότι το $R(x)$ έχει NE ανν υπάρχει ζευγάρι s-t μονοπατιών $p = (p_1, p_2)$ που να είναι της μορφής $(s_1 u_0 u_1/u'_1 \ldots u_n/u'_n, s_2 u_0 u_1/u'_1 \ldots u_n/u'_n)$ και για τα p_1, p_2 να ισχύει ότι είναι feasible και ότι $K_{p_1}(p) = K_{p_2}(p) = B + 5$. Τα p_1, p_2 αποκομίζουν κέρδος 5 από τους κόμβους s_1, u_0 και s_2, u_0 αντίστοιχα, άρα το κάθε ένα θα αποκομίζει κέρδος B από τους υπόλοιπους κόμβους του. Όπως είδαμε και προηγουμένως, αφού τα p_1, p_2 είναι feasible, ισχύει ότι κάθε κόμβος u_i του δικτύου, για $i \in [1, n]$, θα ανήκει σε ακριβώς ένα από τα δύο μονοπάτια. Έστω J ένα υποσύνολο του $\{1, \ldots, n\}$, το οποίο ορίζεται ως $J = \{j | u_j \in p_1\}$, τότε θα ισχύει ότι $\sum_{j \in J} a_j = B = \sum_{j \notin J} a_j$ και άρα το J αποτελεί εφικτή λύση του x.
$\Leftarrow$ Έστω $p = (p_1, p_2)$ ένα ζευγάρι s-t μονοπατιών της μορφής $(s_1 u_0 u_1/u'_1 \ldots u_n/u'_n, s_2 u_0 u_1/u'_1 \ldots u_n/u'_n)$, για τα οποία ισχύει ότι για κάθε $j \in [1, n]$ $u_j \in p_1$ και $u'_j \in p_2$, αν $j \in J$ και $u'_j \in p_1$ και $u_j \in p_2$, αλλιώς. Τα p_1, p_2 είναι feasible ως προς το p και έχουν κέρδη $K_{p_1}(p) = K_{p_2}(p) = B + 5$. Άρα καταλήγουμε ότι το p αποτελεί NE του στιγμιότυπου $R(x)$.

Έχουμε δείξει ότι το πρόβλημα απόφασης του AMOP για δύο παίκτες ανήκει στο NP και ότι αποτελεί γενίκευση του PARTITION, άρα είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο και αυτό. Καταλήγουμε λοιπόν ότι το πρόβλημα απόφασης του AMOP είναι NP-complete, ακόμα και για στιγμιότυπα με δύο παίκτες.

$\square$

4.7 Συμπεράσματα

Όσον αφορά το AMOP, τα πράγματα είναι ξεκάθαρα, τα αποτελέσματα μας είναι σχεδόν όλα αρνητικά και δεν μας παρέχουν κανένα σημάδι αισιοδοξίας. Είναι φανερό λοιπόν ότι χρειάζεται να προσεγγίσουμε το πρόβλημα μας με ένα διαφορετικό μοντέλο, στο οποίο οι παίκτες να επηρεάζουν σε μικρότερο βαθμό την έκβαση του παιχνιδιού.

Κεφάλαιο 5

Non-atomic Multi-agent Orienteering Problem

Αφού είδαμε ότι το AMOP δεν μπορεί να μας δώσει θετικά αποτελέσματα, θεωρήσαμε μια νέα παραλλαγή του MOP, εν ονόματι Non-atomic Orienteering Problem (NMOP). Σύμφωνα με το NMOP, το πλήθος των παικτών είναι αρκετά μεγάλο και κάθε ένας τους αντιπροσωπεύει μια απειροελάχιστη μερίδα της κίνησης του δικτύου.

5.1 Περιγραφή του μοντέλου

Σε αυτό το μοντέλο θεωρούμε ότι οι παίκτες αναπαρίστανται από το συνεχές [0,1]. Κάθε παίκτης θεωρείται αμελητέα ποσότητα και αναπαρίσταται από έναν αριθμό στο διάστημα [0, 1]. Θεωρούμε επίσης έναν θετικό πραγματικό αριθμό T, ένα δίκτυο G και δύο κόμβους του s και t. Με U θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των υπόλοιπων κόμβων του G και με $P = \{1, \ldots, m\}$ το σύνολο όλων των πιθανών s-t μονοπατιών, το οποίο θα αποτελεί και το σύνολο όλων των πιθανών στρατηγικών κάθε παίκτη. Επιπροσθέτως θα συμβολίζουμε με F το σύνολο όλων των πιθανών profile στρατηγικών του παιχνιδιού. Στο θεωρητικό υπόβαθρο είδαμε ότι για τα non-atomic παιχνίδια οι έννοιες profile στρατηγικών του παιχνιδιού, κατανομή των παικτών στα s-t μονοπάτια του δικτύου και κατανομή της μοναδιαίας ροής στα s-t μονοπάτια του δικτύου (ή απλά κατανομή της ροής) είναι ισοδύναμες. Για το F λοιπόν θα ισχύει ότι $F = \{f \in \mathbb{R}^m_{\geq 0} | \sum_{i=1}^m f_i = 1\}$. Άρα μια πιθανή κατανομή ροής θα είναι ουσιαστικά ένα διάνυσμα μεγέθους m, στην i-οστή θέση του οποίου θα βρίσκεται η τιμή της ροής που θα διασχίζει το μονοπάτι i. Για μία κατανομή ροής $f \in F$ και ένα s-t μονοπάτι $p \in P$ θα συμβολίζουμε με f_p τη ροή που κατανέμεται στο μονοπάτι p σύμφωνα με την f, ενώ με f_u θα συμβολίζουμε τη συνολική ροή που θα περνά από έναν κόμβο $u \in U$ και για την οποία θα ισχύει $f_u = \sum_{p \ni u} f_p$.

Κάθε κόμβος $u \in U$ χαρακτηρίζεται από ένα σταθερό μη αρνητικό κέρδος K_u και μια μη αρνητική γνησίως αύξουσα συνάρτηση καθυστέρησης d_u, η οποία εξαρτάται από τη συνολική ροή που περνά από τον u. Τονίζουμε ότι το παιχνίδι μας, όπως και για την atomic παραλλαγή, είναι συμμετρικό, δηλαδή το κέρδος και η συνάρτηση καθυστέρησης κάθε κόμβου είναι ίδια για κάθε παίκτη και όπως αναφέρθηκε και πριν, το σύνολο των πιθανών στρατηγικών είναι επίσης το ίδιο για κάθε παίκτη.

Έστω ένα s-t μονοπάτι $p \in P$, το συνολικό κέρδος του p θα είναι $K_p = \sum_{u \in p} K_u$, ενώ ο συνολικός χρόνος καθυστέρησης του, ως προς μία κατανομή ροής $f \in F$, $d_p(f) =$

$\sum_{u \in p} d_u(f_u)$. Θα λέμε ότι το p είναι feasible ως προς το f, αν ισχύει $d_p(f) \leq T$ και infeasible αλλιώς. Θα χαρακτηρίζουμε επίσης την f ως feasible αν όλα τα μονοπάτια του δικτύου, που έχουν θετική ροή, είναι feasible ως προς την f. Ακόμα θα λέμε ότι το p είναι saturated ως προς την f, αν ισχύει $d_p(f) \geq T$ και unsaturated αλλιώς.

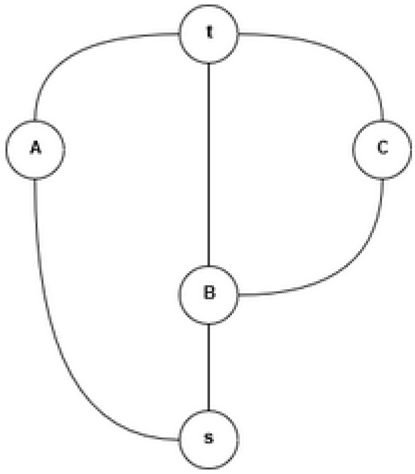
Δεδομένης μιας κατανομής ροής $f \in F$, το κέρδος $K_i(f)$ που αποκομίζει ένας παίκτης i είναι ίσο με το συνολικό κέρδος του μονοπατιού που ακολουθεί, αν αυτό είναι feasible ως προς την f και μηδέν αλλιώς. Υπενθυμίζουμε ότι ένα profile στρατηγικών αποτελεί NE ενός ανταγωνιστικού παιχνιδιού, αν κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει το κέρδος του, αλλάζοντας ατομικά τη στρατηγική του. Ένας ισοδύναμος ορισμός για το παιχνίδι μας είναι ότι μια κατανομή ροής θα αποτελεί NE ενός στιγμιότυπου του NMOP, αν δεν υπάρχει unsaturated μονοπάτι με αυστηρά μεγαλύτερο κέρδος από κάποιο άλλο μονοπάτι που χρησιμοποιείται. Πιο τυπικά μία $f \in F$ αποτελεί NE ενός στιγμιότυπου του NMOP, αν για κάθε $p \in P$ με $f_p > 0$ ισχύει $K_p \geq max\{K_q : q \in P$ και unsaturated ως προς το $f\}$.

Το κέρδος μιας κατανομής ροής $f \in F$ θα λέμε ότι είναι $K(f) = \sum_{p \in P} f_p \cdot k_p = \sum_{u \in U} f_u \cdot k_u$. Ως βέλτιστη λύση ενός στιγμιότυπου του NMOP ορίζουμε την κατανομή ροής $f_{opt} = argmax_f\{K(f)|f \in F$ και είναι feasible$\}$. Ορίζουμε επίσης ως $p_{max}(f)$ (ή απλά p_{max} όταν είναι ξεκάθαρο) το unsaturated μονοπάτι με το μεγαλύτερο κέρδος και ως $p_{min}(f)$ (ή απλά p_{min} όταν είναι ξεκάθαρο) το μονοπάτι με το μικρότερο κέρδος από όλα τα μονοπάτια με θετική ροή. Είναι προφανές ότι αν όλα τα μονοπάτια με θετική ροή είναι feasible και το p_{max} δεν ορίζεται ή $p_{min} = p_{max}$, τότε η f θα αποτελεί NE.

Τα στιγμιότυπα τα οποία θα μας απασχολήσουν είναι εκείνα των οποίων το δίκτυο θα είναι αναλογικά με το πλήθος των παικτών αρκετά "μεγάλο", έτσι ώστε κάθε παίκτης να έχει τη δυνατότητα να ακολουθήσει κάποιο feasible μονοπάτι και άρα να πετύχει θετικό κέρδος, ανεξαρτήτως με το ποιά μονοπάτια έχουν επιλέξει οι υπόλοιποι παίκτες. Επομένως, κάνοντας αυτή την υπόθεση, είναι αδύνατο για κάποια infeasible κατανομή ροής ενός στιγμιότυπου να αποτελεί NE του. Επιπρόσθετα θεωρούμε για ευκολία ότι ανά δύο όλα τα μονοπάτια του δικτύου έχουν διαφορετικό κέρδος μεταξύ τους.

5.2 Price of Anarchy

Θα δείξουμε ότι το NMOP έχει unbounded PoA. Έστω ένα στιγμιότυπο του NMOP, το οποίο αποτελείται από το δίκτυο 5.1 και ένα χρονικό όριο $T = 1$.



Δίκτυο 5.1

Θεωρούμε ότι τα κέρδη και οι συναρτήσεις καθυστέρησης των κόμβων του δικτύου είναι $K_A = 1$, $K_B = 2$, $K_C = K > 5$, $d_A(x) = x$, $d_B(x) = x$ και $d_C(x) = 3 \cdot x$. Επίσης το σύνολο όλων των πιθανών s-t μονοπατιών του δικτύου είναι το $P = \{A, B, BC\}$.

Η βέλτιστη λύση του συγκεκριμένου στιγμιότυπου είναι η κατανομή ροής $f_{opt} = \{\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\}$, με συνολικό κέρδος $K(f_{opt}) = \frac{1}{4} \cdot (K+2) + \frac{3}{4}$, ενώ η μοναδική κατανομή ροής που αποτελεί NE του στιγμιότυπου είναι η $f_e = \{0, 1, 0\}$, με συνολικό κέρδος $K(f_e) = 2$ (και οι δύο κατανομές είναι feasible). Συμπερασματικά το PoA του στιγμιότυπου που μελετάμε είναι ίσο με $\frac{K(f_{opt})}{K(f_e)} = \frac{(\frac{1}{4} \cdot K + \frac{5}{4})}{2} = \frac{1}{8} \cdot K + \frac{5}{8}$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι όσο μεγαλώνει η τιμή του K, θα αυξάνεται ανάλογα και η τιμή του PoA, άρα για K κοντά στο άπειρο, θα απειρίζεται και το PoA. Επομένως το PoA του συγκεκριμένου στιγμιότυπου και κατ΄ επέκταση του NMOP είναι unbounded.

5.3 Ο Χώρος των Feasible Λύσεων

Ως feasible λύση ενός στιγμιότυπου του NMOP, ορίσαμε κάθε κατανομή της μοναδιαίας ροής του στιγμιότυπου, για την οποία όλα τα μονοπάτια του δικτύου με θετική ροή θα είναι feasible ως προς αυτήν. Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε μια λύση ως feasible, αν όλοι οι παίκτες του παιχνιδιού ακολουθούν κάποιο feasible ως προς αυτήν μονοπάτι και κατά συνέπεια αποκομίζουν θετικό κέρδος. Είναι ξεκάθαρο λοιπόν ότι ο χώρος όλων των πιθανών κατανομών ροής δεν ταυτίζεται πάντα με τον χώρο όλων των feasible λύσεων.

Πως μπορεί μια feasible κατανομή ροής να γίνει infeasible στην πράξη ;

Θεωρούμε ένα στιγμιότυπο του NMOP, όπου ο χώρος όλων των κατανομών διαφέρει από εκείνον των feasible, και μια feasible κατανομή της ροής (ή αλλιώς των παικτών) στα μονοπάτια του δικτύου. Υπενθυμίζουμε ότι στα μοντέλα που μελετάμε όλοι οι παίκτες είναι selfish και rational, δηλαδή μοναδικός τους στόχος είναι να βελτιστοποιήσουν το κέρδος τους και πράττουν μόνο με λογικές ενέργειες. Οπότε δεν υπάρχει περίπτωση κάποιος παίκτης να αλλάξει το μονοπάτι που έχει επιλέξει (είτε είναι feasible είτε όχι), για να ακολουθήσει κάποιο άλλο, το οποίο είναι saturated ως προς την κατανομή, αφού με αυτή την κίνηση δεν θα καταφέρει να βελτιώσει το κέρδος του, καθώς αυτό που θα αποκομίσει εν τέλει θα είναι ίσο με μηδέν και άρα σίγουρα όχι καλύτερο από αυτό που είχε πριν. Αυτό που θα μπορούσε να συμβεί όμως, είναι κάποιος παίκτης να αλλάξει το μονοπάτι του για κάποιο άλλο unsaturated ως προς την κατανομή μονοπάτι με μεγαλύτερο κέρδος από το δικό του και να οδηγήσει με αυτή του την κίνηση ένα ή περισσότερα άλλα μονοπάτια σε infeasibility.Τα μονοπάτια που θα γίνουν infeasible θα πρέπει να είναι saturated και να έχουν τουλάχιστον έναν κόμβο κοινό με το μονοπάτι, στο οποίο σκοπεύει να αλλάξει ο παίκτης, με αποτέλεσμα να αυξηθεί η συνολική τους καθυστέρηση, έστω και ελάχιστα.

Το ότι κάποιος παίκτης μπορεί, προσπαθώντας να βελτιώσει το προσωπικό του κέρδος, να μηδενίσει το κέρδος άλλων παικτών και κατά συνέπεια να οδηγήσει την κατανομή της ροής σε infeasibility, είναι το βασικό στοιχείο αυτού του προβλήματος που το κάνει τόσο δύσκολο και απρόβλεπτο. Μια βασική διαφορά της non-atomic παραλλαγής με την atomic είναι ότι στην πρώτη η αλλαγή μονοπατιού ενός μόνο παίκτη δεν μπορεί να καταστήσει κάποιο unsaturated μονοπάτι infeasible, σε αντίθεση με τη δεύτερη. Ο λόγος που ισχύει αυτό είναι επειδή στη non-atomic παραλλαγή, όπως προαναφέραμε, ένας μόνο παίκτης θεωρείται απειροελάχιστη ποσότητα, κάτι το οποίο από την άλλη είναι ενδεικτικό του πόσο ιδιαίτερο είναι το πρόβλημα που μελετάμε, καθώς κάτι το τόσο μικρό έχει τόσο μεγάλη επιρροή.

5.3.1 Ορισμός του Χώρου

Για να ορίσουμε πιο τυπικά τον χώρο τον feasible λύσεων, θα λέμε ότι αποτελείται από κάθε πιθανή κατανομή ροής f, η οποία πληροί τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

$$\sum_{p \in P} f_p = 1$$
$$f_p \geq 0, \forall p \in P$$
$$f_p \cdot (T - d_p(f)) \leq 0, \forall p \in P$$

Όπου P, το σύνολο όλων των s-t μονοπατιών του εκάστοτε δικτύου.

Τώρα που ορίσαμε τον χώρο των feasible λύσεων μπορούμε να φανταστούμε λίγο το πως θα μοιάζει. Πιο συγκεκριμένα κάθε feasible κατανομή της ροής, για την οποία τουλάχιστον ένα μονοπάτι του δικτύου έχει θετική ροή και είναι saturated, θα βρίσκεται στα σύνορα του χώρου. Αν μάλιστα θεωρήσουμε ένα στιγμιότυπο του NMOP, για το οποίο κάθε feasible λύση είναι μια τέτοια κατανομή, το οποίο αποτελεί και μια πολύ φυσιολογική περίπτωση, τότε όλα τα στοιχεία του χώρου των feasible λύσεων θα βρίσκονται στο όριο του.

5.3.2 Προβλήματα που δημιουργεί στην απόδειξη ύπαρξης NE

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε δύο βασικούς τρόπους για την απόδειξη ύπαρξης NE και τους λόγους για τους οποίους η μορφή του χώρου των feasible λύσεων του παιχνιδιού μας, το καθιστά δύσκολο να εφαρμοστούν σε αυτό. Ο πρώτος και κυριότερος τρόπος περιλαμβάνει τα fixed point θεωρήματα των Brouwer και Kakutani και ο δεύτερος convex optimization.

5.3.2.1 Fixed Point Theorems

Ορισμός 5.1. *Ορίζουμε ένα σύνολο ως compact εάν είναι closed και bounded.*

Ορισμός 5.2. *Ως correspondence ϕ από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y, θα ονομάζουμε την συνάρτηση $\phi : X \to 2^Y$, τέτοια ώστε $\phi(x) \neq \emptyset$ για κάθε $x \in X$.*

Ορισμός 5.3. *Θα λέμε ότι μια correspondence ϕ έχει closed graph αν για όλες τις ακολουθίες $\{x_n\}_{n \in N}$ και $\{y_n\}_{n \in N}$, τέτοιες ώστε $x_n \to x$, $y_n \to y$ και $y_n \in \phi(x_n)$ για όλα τα n, θα ισχύει $y \in \phi(x)$.*

Ορισμός 5.4. *Έστω μια συνάρτηση $f : X \to X$ και μια correspondence $\phi : X \to 2^X$. Τότε το $x \in X$ θα αποτελεί fixed point της f αν $f(x) = x$ και της ϕ αν $x \in \phi(x)$.*

Θεώρημα 5.1 (Brouwer's Fixed Point Theorem). *Για κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to X$, όπου το X είναι convex και compact, θα υπάρχει $x \in X$, τέτοιο ώστε $f(x) = x$.*

Θεώρημα 5.2 (Kakutani's Fixed Point Theorem [31]). *Έστω S ένα non-empty, compact και convex υποσύνολο του Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}_n$ και $\phi : S \to 2^S$ μια correspondence με closed graph, τέτοια ώστε το $\phi(x)$ να είναι convex και non-empty, για κάθε $x \in S$. Τότε η ϕ έχει fixed point.*

Το θεώρημα του Kakutani αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Brouwer και για αυτό το λόγο θα περιοριστούμε στην ανάλυση μόνο του πρώτου θεωρήματος ως προς το παιχνίδι μας. Ένας τρόπος για παράδειγμα με τον οποίο θα μπορούσαμε να εκμεταλλευτούμε το θεώρημα του Kakutani για το παιχνίδι μας είναι να κατασκευάσουμε μια correspondence που αντιστοιχίζει κάποια feasible κατανομή ροής σε κάποιο υποσύνολο των feasible κατανομών, που μπορούν να προκύψουν από αυτήν αν μεταφέρουμε κάποια ποσότητα ροής από το μικρότερου κέρδους μονοπάτι με θετική ροή στο μεγαλύτερου κέρδους unsaturated μονοπάτι του δικτύου. Είναι προφανές ότι κάθε fixed point της παραπάνω correspondence αποτελεί NE, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα, όπως στην περίπτωση που το NE αποτελείται μόνο από saturated μονοπάτια.

Χωρίς πολλές λεπτομέρειες αναφέρουμε ότι η βασική δυσκολία στην εφαρμογή των παραπάνω θεωρημάτων στο πρόβλημα μας είναι ότι η συνάρτηση ή η correspondence που θα κατασκευάσουμε πρέπει να είναι συνεχής ή να έχει closed graph ισοδύναμα στον χώρο των feasible λύσεων. Η δυσκολία αυτή λοιπόν έγκειται στο ότι έστω και μια πολύ μικρή αλλαγή σε κάποια κατανομή που βρίσκεται στα σύνορα του χώρου μπορεί να προκαλέσει infeasibility και επίσης στο ότι φαίνεται αδύνατο να μπορέσουμε ύστερα να προβλέψουμε feasible κατανομές οι οποίες να περιέχουν αυτή την αλλαγή, με συνέπεια να μην έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε κάποια feasible γειτονιά της κατανομής και κατ΄ επέκταση ένα συνεχές mapping είτε ένα προς ένα είτε ένα προς πολλά. Μάλιστα, παρ΄ όλο που έχουμε υποθέσει ότι κάθε παιχνίδι θα έχει τουλάχιστον μια feasible κατανομή και ότι πάντα κάποιος παίκτης θα έχει την δυνατότητα να ακολουθήσει κάποιο feasible μονοπάτι ανεξαρτήτως του τι έχουν επιλέξει οι άλλοι παίκτες, υπάρχει και η περίπτωση μια μικρή αλλαγή σε κάποια κατανομή, να οδηγήσει το παιχνίδι σε μια ατέρμονη λούπα infeasibility, όπου συνέχεια η επιλογή ενός παίκτη μπορεί να καθιστά το μονοπάτι ενός άλλου infeasible. Άρα το συμπέρασμα είναι ότι λόγω της πολυπλοκότητας που μπορεί να έχει ο χώρος των feasible λύσεων ενός παιχνιδιού είναι αρκετά δύσκολο έως και αδύνατο ορισμένες φορές να ορίσουμε μια συνεχή correspondence σε αυτόν. Να παρατηρήσουμε επίσης ότι ακόμα και το ότι έχουμε υποθέσει ότι ο χώρος των feasible λύσεων είναι convex δεν διευκολύνει και πολύ τα πράγματα.

5.3.2.2 Convex Optimization

Το convex optimization βρίσκει συχνά εφαρμογή σε προβλήματα της θεωρίας παιγνίων. Εκτός από τον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης ενός προβλήματος, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσέγγιση upper bounds του PoA [53] ή ακόμα και για την εύρεση NE [9] (ειδικά στην περίπτωση των potential games). Ένα πλήρες βιβλίο πάνω στο convex optimization είναι αυτό των Boyd και Vandenberghe [4].

Ορισμός 5.5. *Ένα convex optimization πρόβλημα είναι ένα optimization πρόβλημα, του οποίου η objective συνάρτηση, δηλαδή η συνάρτηση που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε και το σύνολο των feasible λύσεων είναι αμφότερα convex.*

Ορισμός 5.6. *Θα λέμε ότι ένα convex optimization πρόβλημα είναι σε standard form αν γράφεται ως:*

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{\textit{min}} & f(x) \\
\textbf{\textit{s.t.}} & g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m \\
 & h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m'
\end{array}
$$

όπου οι $f, g_1, g_2, \dots, g_n$ είναι convex και οι $h_1, h_2, \dots, h_n$ είναι affine.

Ο λόγος που τα convex optimization προβλήματα προκαλούν τόσο πολύ ενδιαφέρον είναι επειδή για πολλές κατηγορίες τους υπάρχουν πολυωνυμικοί αλγόριθμοι επίλυσης, ενώ στην γενική τους περίπτωση τα optimization προβλήματα θεωρούνται NP-hard.

Αρχικά θα δείξουμε ένα convex optimization πρόγραμμα, σε standard form, του οποίου το αποτέλεσμα αποτελεί τη βέλτιστη λύση ενός στιγμιότυπου του NMOP, που αποτελείται από ένα δίκτυο G, με σύνολο κόμβων U και σύνολο s-t μονοπατιών P και ένα χρονικό όριο T.

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{\textit{min}} & -\sum_{u \in V} f_u \cdot k_u \\
\textbf{\textit{s.t.}} & \sum_{p \ni u} f_p - f_u = 0, \forall u \in U \\
 & \sum_{p \in P} f_p - 1 = 0 \\
 & - f_p \leq 0, \forall p \in P \\
 & f_p(T - d_p(f)) \leq 0, \forall p \in P
\end{array}
$$

Η objective συνάρτηση είναι affine άρα και convex. Τώρα όσον αφορά τον χώρο των feasible λύσεων, όλα τα constraints πλην του τελευταίου είναι affine. Για να είναι τώρα convex το τελευταίο constraint και κατ΄ επέκταση το πρόβλημα σε standard form πρέπει να ισχύει ότι $f_p \cdot d_p(f)$ είναι convex για κάθε μονοπάτι $p \in P$. Για να ισχύει το τελευταίο, για να είναι δηλαδή positive semi-definite ο Hessian πίνακας του $f_p \cdot d_p(f)$ για κάθε μονοπάτι $p \in P$, δεν αρκεί οι συναρτήσεις καθυστέρησης των κόμβων του G να είναι convex (η απόδειξη παραλείπεται). Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι ακόμα και για να υπολογίσουμε την βέλτιστη λύση, η χρήση convex optimization μας περιορίζει κατα πολύ το είδος των συναρτήσεων καθυστέρησης.

Όσον αφορά τώρα την εύρεση NE, τα πράγματα φαίνεται να γίνονται ακόμα χειρότερα από ότι για τον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης. Τουλάχιστον όσες προσπάθειες κάναμε, απαιτούσαν affine συναρτήσεις καθυστέρησης, λόγω του περιορισμού ότι η συνολική καθυστέρηση κάποιων μονοπατιών του δικτύου θα πρέπει να ισούται με το χρονικό όριο T, όταν έχουμε NE. Καταλήγουμε λοιπόν ότι η χρήση convex optimization για το NMOP δεν συνίσταται, καθώς θεωρούμε ότι θα περιορίσει σε μεγάλο βαθμό το είδος των συναρτήσεων καθυστέρησης και άρα το ίδιο το πρόβλημα.

5.4 C-security και Απόδειξη Ύπαρξης NE

Είναι ξεκάθαρο πλέον ότι το κυριότερο εμπόδιο που συναντάμε για την απόδειξη ύπαρξης NE στο NMOP είναι ο χώρος πάνω στον οποίο δουλεύουμε. Οι δύο προηγούμενες τεχνικές που μελετήσαμε απαιτούσαν ο χώρος αυτός να αποτελείται από όλες τις feasible λύσεις ενός στιγμιότυπου, η κάθε μια για διαφορετικούς λόγους. Είναι εύλογο λοιπόν να σκεφτεί κάποιος ότι για να μειώσουμε την πολυπλοκότητα του χώρου πάνω στον οποίο δουλεύουμε, χρειάζεται να αναζητήσουμε μια αποδεικτική μέθοδο, η οποία να μπορεί να εφαρμοστεί στον χώρο όλων των λύσεων και όχι μόνο των feasible. Ρίχνοντας όμως την πολυπλοκότητα του χώρου έχει ως τίμημα να χάσουμε την ιδιότητα της συνέχειας από τις συναρτήσεις κέρδους, αφού πλέον δεν θα είναι σταθερές και ίσες με τα κέρδη των αντίστοιχων μονοπατιών, αλλά θα μπορούν να είναι και μηδέν, στην περίπτωση που το μονοπάτι έχει θετική ροή και είναι infeasible. Άρα επιπλέον θα χρειαστεί η αποδεικτική αυτή μέθοδος να μην απαιτεί οι συναρτήσεις κέρδους να είναι συνεχείς.

Οι McLennan et al. διατύπωσαν στο [39] ένα θεώρημα που συνδυάζει όλα τα παραπάνω και αφορά την ύπαρξη NE σε παιχνίδια με ασυνεχείς συναρτήσεις κέρδους. Το θεώρημα αυτό αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Reny [50] και κάνει χρήση της έννοιας του C-security. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα παιχνίδι

$$\Pi = (X_1, X_2, \dots, X_N, u_1, u_2, \dots, u_N),$$

όπου για κάθε $i \in 1, 2, \dots, N$ το σύνολο των πιθανών στρατηγικών του i-οστού παίκτη X_i είναι μη κενό, compact και convex και η συνάρτηση κέρδους του u_i είναι μια bounded συνάρτηση από το X στο $\mathbb{R}$, όπου $X = \prod_{i=1}^{N} X_i$ το σύνολο όλων των πιθανών profiles στρατηγικών του Π. Θεωρούμε επίσης για κάθε παίκτη i τις correspondences $B_i : X \times \mathbb{R} \to X_i$ και $C_i : X \times \mathbb{R} \to X_i$, τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned} B_i(x, a_i) &= \{y_i \in X_i | u_i(y_i, x_{-i}) \geq a_i\} \\ C_i(x, a_i) &= conB_i(x, a_i), \end{aligned}$$

όπου με $conZ$ συμβολίζουμε το convex hull του συνόλου Z.

Ορισμός 5.7. *(Definition 2.1 [39]) Θα λέμε ότι ένας παίκτης i μπορεί να κάνει secure ένα κέρδος $a_i \in \mathbb{R}$ στο $Z \subset X$, αν υπάρχει κάποιο $y_i \in X_i$, τ.ω. $y_i \in B_i(z, a_i)$ για κάθε $z \in Z$. Θα λέμε επίσης ότι ο i μπορεί να κάνει secure το a_i στο $x \in X$ αν μπορεί να κάνει secure το a_i σε κάποια γειτονιά του x.*

Με άλλα λόγια ένας παίκτης μπορεί να κάνει secure ένα κέρδος σε κάποιο σύνολο profiles στρατηγικών $Z \subset X$, αν μπορεί να πετύχει αυτό το κέρδος σε κάθε ένα από τα profiles που ανήκουν στο Z, είτε παραμένοντας στην στρατηγική του είτε αλλάζοντας την ατομικά.

Ορισμός 5.8. *(Definition 2.6 [39]) Θα χαρακτηρίζουμε το παιχνίδι Π ως C-secure στο $Z \subset X$, αν υπάρχει κάποιο $a \in \mathbb{R}^N$, τ.ω. να ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*

- *Κάθε παίκτης i μπορεί να κάνει secure το a_i στο Z.*
- *Για κάθε $z \in Z$ να υπάρχει κάποιος παίκτης i, για τον οποίο να ισχύει $z_i \notin C_i(z, a_i)$.*

Το παιχνίδι θα λέμε ότι είναι C-secure στο profile $x \in X$ αν είναι είναι C-secure σε κάποια γειτονιά του x.

Συμπερασματικά, θα χαρακτηρίζουμε ως C-secure στο $Z \subset X$ κάθε παιχνίδι της μορφής του Π, για το οποίο μπορεί να υπολογισθεί μια αντιστοίχιση όλων των παικτών σε κέρδη, σύμφωνα με την οποία σε κανένα profile $z \in Z$ δεν πετυχαίνουν όλοι οι παίκτες το κέρδος που τους έχει ανατεθεί ή κάποιο καλύτερο από αυτό, αλλά ο κάθε ένας από αυτούς να μπορεί να το πετύχει ή και να το ξεπεράσει αλλάζοντας ατομικά την στρατηγική του.

Πρόταση 5.1. *(Proposition 2.7 [39]) Αν κάποιο παιχνίδι Π είναι C-secure σε κάθε profile στρατηγικών $x \in X$, το οποίο δεν είναι NE, τότε το Π έχει NE.*

Σημείωση 5.1. *Αν οι συναρτήσεις κέρδους του Π είναι quasiconcave, τότε θα ισχύει ότι $B_i(x, a_i) = C_i(x, a_i)$, για κάθε $x \in X$ και $a_i \in \mathbb{R}$.*

Θεώρημα 5.3. *Για κάθε στιγμιότυπο του NMOP υπάρχει τουλάχιστον μια feasible κατανομή ροής $f \in F$, η οποία αποτελεί NE.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση, θα δείξουμε ότι κάθε στιγμιότυπο του NMOP είναι C-secure σε κάθε πιθανή κατανομή ροής $f \in F$, η οποία δεν αποτελεί NE. Κατ΄ αρχάς το σύνολο όλων των πιθανών κατανομών ροής F, με τον τρόπο που το ορίσαμε στην παράγραφο 5.1, είναι convex και compact (bounded και closed). Επίσης οι συναρτήσεις κέρδους K_i είναι bounded και quasiconcave. Καλούμαστε λοιπόν να κατασκευάσουμε ένα διάνυσμα $a \in \mathbb{R}^N$, το οποίο να πληρεί τις συνθήκες του ορισμού 5.8, όπου N το πλήθος των παικτών του στιγμιότυπου. Υπενθυμίζεται ότι στη non-atomic περίπτωση οι παίκτες αναπαρίστανται από το συνεχές διάστημα [0, 1] και άρα όλοι μαζί αθροιστικά συγκροτούν συνολική ποσότητα ροής ίση με την μονάδα. Η ποσότητα αυτή μπορεί να διαιρεθεί απεριόριστα πολύ, με αποτέλεσμα και το πλήθος των παικτών να μπορεί να είναι απεριόριστα μεγάλο, χωρίς όμως να γίνεται άπειρο. Η τελευταία πρόταση διαισθητικά μεταφράζεται στο ότι κάθε στιγμή μπορούμε να θεωρήσουμε το πλήθος των παικτών όσο μεγάλο επιθυμούμε, αρκεί να μπορούμε να το προσδιορίσουμε, ώστε να θεωρείται πεπερασμένο μέγεθος. Είναι εμφανές επίσης ότι όσο αυξάνεται το πλήθος των παικτών, τόσο θα μειώνεται η μερίδα της ροής που τους αναλογεί και κατά συνέπεια η επιρροή τους στην κατάσταση του παιχνιδιού.

Έστω ένα στιγμιότυπο του NMOP και μια κατανομή ροής $f \in F$, η οποία δεν αποτελεί NE και άρα θα ορίζεται για αυτήν το μονοπάτι $p_{max}(f)$. Θεωρούμε το διάνυσμα $a \in \mathbb{R}^N$, τ.ω. $a = \{K_{p_{max}(f)}$, για κάθε παίκτη $i \in [1, N]\}$, αντιστοιχίζουμε δηλαδή σε κάθε παίκτη κέρδος ίσο με αυτό του unsaturated μονοπατιού με το μεγαλύτερο κέρδος. Ως γειτονιά της f θέτουμε το σύνολο κατανομών της ροής F', το οποίο θα απαρτίζεται από τις κατανομές ροής, για τις οποίες τα μονοπάτια που είναι saturated ως προς την f, θα είναι και ως προς αυτές (χωρίς απαραίτητα να διατηρείται και το feasibility) και επιπλέον το $p_{max}(f)$ θα συνεχίσει να είναι unsaturated. Θεωρούμε ότι το F' δεν περιλαμβάνει κάποια κατανομή που αποτελεί NE, καθώς σε αντίθετη περίπτωση η απόδειξη θα τελείωνε εδώ. Επομένως για κάθε $f' \in F'$ θα ορίζεται το μονοπάτι $p_{max}(f')$, για το οποίο μάλιστα θα ισχύει $p_{max}(f') = p_{max}(f) = p_{max}$.

Το γεγονός ότι η ροή μπορεί να διαιρεθεί απεριόριστα πολύ σε συνδυασμό με το ότι η f δεν αποτελεί NE, εξασφαλίζουν ότι το σύνολο F' δεν είναι κενό. Αυτό ισχύει, διότι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα unsaturated ως προς την f μονοπάτι p με θετική ροή (αντιθέτως η f θα ήταν NE), από το οποίο θα μπορούσαμε να μεταφέρουμε ροή στο p_{max}, τόση ώστε το τελευταίο να παραμείνει unsaturated. Λόγω της αφαίρεσης ροής από το p βέβαια ενδέχεται ορισμένα μονοπάτια που ήταν saturated ως προς την f και έχουν κοινούς κόμβους με το p να γίνουν unsaturated. Στην περίπτωση αυτή θα αφαιρέσουμε περισσότερη ροή από το p, την οποία θα επανατροφοδοτήσουμε στα συγκεκριμένα μονοπάτια, μέχρι να επαναφέρουμε το saturation τους. Επειδή έχουμε θεωρήσει ότι οι συναρτήσεις καθυστέρησης των κόμβων είναι γνησίως αύξουσες, υπάρχει πάντα μια αναλογία της ροής που μπορούμε να αφαιρέσουμε από το p και να προσθέσουμε στα υπόλοιπα μονοπάτια ώστε να πετύχουμε την αποκατάσταση του saturation τους. Τα ζητήματα όμως που προκύπτουν είναι μήπως η προσθήκη ροής σε αυτά τα μονοπάτια οδηγήσει εν τέλει το p_{max} σε saturation και αν το p θα έχει αρκετή ροή ώστε να τα πετύχουμε όλα αυτά. Η αντιμετώπιση όμως αυτών των εμποδίων στη non-atomic περίπτωση είναι εύκολη, καθώς έχουμε τη δυνατότητα να επιλέξουμε απλά να μεταφέρουμε λιγότερη ποσότητα ροής, σε πρώτη φάση, από το p στο p_{max}, τόση ώστε όλα τα παραπάνω να είναι πλέον εφικτά. Με άλλα λόγια είναι δυνατό να υπολογίσουμε κάποια ποσότητα ροής, που αν μεταφέρουμε τόση ή λιγότερη από το p στο p_{max}, να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε τελικά ένα μη κενό σύνολο κατανομών ροής (όχι απαραίτητα feasible), που να ανήκει στο F'. Να παρατηρήσουμε ότι με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο σύνολο μεταφέροντας ροή από το p σε κάποιο saturated μονοπάτι του δικτύου, αφού το feasibility των μονοπατιών εκτός του p_{max} δεν μας αφορά στην προκειμένη περίπτωση.

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε το αν ισχύουν οι προϋποθέσεις 1 και 2 του ορισμού 5.8.

1. Εφόσον το p_{max} είναι unsaturated ως προς κάθε $f' \in F'$, θεωρώντας κάθε φορά την κατάλληλη διαίρεση της ροής ως προς τους παίκτες, κάθε ένας από αυτούς θα μπορεί να πετύχει κέρδος $K_{p_{max}}$, παραμένοντας στο μονοπάτι του ή αλλάζοντας ατομικά στο p_{max} και άρα θα μπορεί να το κάνει secure.

2. Θεωρούμε μια κατανομή ροής $f' \in F'$. Θα αποδείξουμε με εις άτοπον απαγωγή ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας παίκτης i, τέτοιος ώστε $K_i(f') < K_{p_{max}}$. Έστω ότι δεν υπάρχει τέτοιος παίκτης, άρα όλοι τους θα ακολουθούν το p_{max} ή κάποιο μονοπάτι με κέρδος μεγαλύτερο από $K_{p_{max}}$ (feasible ή infeasible). Επομένως όλα τα μονοπάτια εκτός του p_{max}, με θετική ροή θα είναι saturated. Διακρίνουμε λοιπόν τις παρακάτω περιπτώσεις.

   (α) Να μην υπάρχουν μονοπάτια με κέρδος μεγαλύτερο από αυτό του p_{max}, άρα όλη η ροή θα θα βρίσκεται στο μονοπάτι με το μεγαλύτερο κέρδος, το οποίο σημαίνει ότι έχουμε NE και άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

   (β) Να υπάρχουν μονοπάτια με κέρδος μεγαλύτερο του p_{max}, τα οποία εξ' ορισμού θα είναι όλα saturated. Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις αυτής της περίπτωσης.

      i. Να υπάρχει κάποιο infeasible μονοπάτι με θετική ροή. Τότε όλοι οι παίκτες που ακολουθούν αυτό το μονοπάτι έχουν μηδενικό κέρδος, το οποίο είναι αυστηρά μικρότερο από $K_{p_{max}}$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

      ii. Να μην υπάρχει infeasible μονοπάτι με θετική ροή. Τότε $p_{max} = p_{min}(f')$ και άρα το f' θα είναι NE, οπότε καταλήγουμε και πάλι σε άτοπο.

Δείξαμε λοιπόν ότι κάθε στιγμιότυπο του NMOP είναι C-Secure σε κάθε πιθανή κατανομή της ροής $f \in F$, η οποία δεν αποτελεί NE. Επομένως σύμφωνα με την πρόταση 5.1, καταλήγουμε ότι κάθε στιγμιότυπο του NMOP έχει NE, το οποίο μάλιστα για τους λόγους που εξηγήσαμε στην παράγραφο 5.1 θα είναι feasible.

□

5.5 Συμπεράσματα

Το βασικό αποτέλεσμα του συγκεκριμένου κεφαλαίου είναι η απόδειξη ύπαρξης NE για κάθε στιγμιότυπο του NMOP. Είναι αξιοσημείωτο ότι το συγκεκριμένο αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της τοπολογίας του δικτύου του στιγμιοτύπου και ότι η μόνη υπόθεση που γίνεται για το είδος των συναρτήσεων καθυστέρησης των κόμβων είναι ότι είναι γνησίως αύξουσες. Από την απόδειξη του θεωρήματος 5.3, φαίνεται επίσης ότι θα μπορούσαμε να εκμεταλλευτούμε αυτό το συμπέρασμα για να προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την σχέση μεταξύ του πλήθους των παικτών και της ύπαρξης NE στην atomic περίπτωση του παιχνιδιού. Ακόμα η δυσκολία που συναντήσαμε στην απόδειξη ύπαρξης NE, δουλεύοντας στον χώρο των feasible λύσεων αποτελεί ένδειξη ότι ο αλγόριθμος εύρεσης NE, που θα δοκιμάσουμε να κατασκευάσουμε χρειάζεται να έχει exterior point χαρακτηριστικά. Τέλος το ότι το PoA είναι unbounded σε ένα τόσο υγιές στιγμιότυπο, όπως αυτό της παραγράφου 5.2, συνιστά αδιαμφισβήτητα κακό οιωνό για το ερευνητικό μέλλον του MOP γενικά. Παρ' όλα αυτά όμως θα ήταν χρήσιμο να μελετηθεί η πιθανότητα ύπαρξης μιας ενδιαφέρουσας κλάσης στιγμιοτύπων του NMOP, που να έχει τουλάχιστον πεπερασμένο PoA ή ακόμα καλύτερα με σημαντικό πάνω όριο.

Κεφάλαιο 6

Αλγόριθμοι εύρεσης NE για το NMOP

6.1 Ένας άπληστος αλγόριθμος εύρεσης NE για series-parallel δίκτυα

Στην αρχή αυτού του κεφαλαίου θα αναπτύξουμε έναν άπληστο αλγόριθμο εύρεσης NE για στιγμιότυπα του NMOP με series-parallel δίκτυα. Τα series-parallel δίκτυα αποτελούν μια πολύ ενδιαφέρουσα οικογένεια δικτύων, καθώς πολλά προβλήματα της θεωρίας γράφων που είναι NP-complete για γενικά δίκτυα, είναι επιλύσιμα σε γραμμικό χρόνο για series-parallel δίκτυα (π.χ. maximum independent set [58]). Επίσης έχουν και άλλες σημαντικές ιδιότητες και χαρακτηριστικά, όπως το ότι μπορεί να αναγνωρισθεί αν ένα δίκτυο είναι series parallel ή όχι σε γραμμικό χρόνο. Υπάρχουν πολλοί τρόποι, με τους οποίους μπορεί να ορίσει κάποιος τι είναι τα series-parallel δίκτυα. Εμείς θα ακολουθήσουμε ουσιαστικά τον ορισμό που χρησιμοποιείται από τον Eppstein [11]. Σημειώνεται ότι τα series-parallel δίκτυα είναι two-terminal δίκτυα, όπως άλλωστε και όλα τα δίκτυα που μελετάμε σε αυτό το έγγραφο.

Ορισμός 6.1. *Ένα two-terminal δίκτυο G είναι series-parallel, με source κόμβο s και sink κόμβο t, αν μπορεί να κατασκευαστεί από μια αλληλουχία εφαρμογών των ακόλουθων λειτουργιών.*

1. *Δημιούργησε ένα νέο K_2 δίκτυο, δηλαδή ένα δίκτυο που αποτελείται από τους κόμβους s, t και μια ακμή που τους ενώνει.*

2. *Δεδομένων δύο series-parallel δικτύων X και Y, με source και sink κόμβους s_X, s_Y, t_X και t_Y, κατασκεύασε ένα νέο δίκτυο $G = P(X, Y)$ θέτοντας $s = s_X = s_Y$ και $t = t_X = t_Y$. Η λειτουργία P ονομάζεται parallel composition.*

3. *Δεδομένων δύο series-parallel δικτύων X και Y, με source και sink κόμβους s_X, s_Y, t_X και t_Y, κατασκεύασε ένα νέο δίκτυο $G = S(X, Y)$ θέτοντας $s = s_X$, $t_X = s_Y$ και $t = t_Y$. Η λειτουργία S ονομάζεται series composition.*

Θεώρημα 6.1. *Για κάποιο series-parallel δίκτυο G και τρία s-t μονοπάτια του A, B και C ισχύει ότι αν το A έχει κάποιον κοινό ενδιάμεσο κόμβο με το B και κάποιον κοινό ενδιάμεσο κόμβο με το C, τότε θα υπάρχει ενδιάμεσος κόμβος στο G από τον οποίον θα περνάνε και τα τρία μονοπάτια.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό που δώσαμε για τα series-parallel δίκτυα, προκύπτει ότι όλα τα υποδίκτυα ενός series-parallel δικτύου είναι επίσης series-parallel. Θα δουλέψουμε λοιπόν την απόδειξη του θεωρήματος με επαγωγή στο μήκος του κατασκευαστικού δέντρου του G. Είναι προφανές ότι το θεώρημα ισχύει για το K_2 δίκτυο.

Έστω ότι το G είναι αποτέλεσμα του parallel composition των δικτύων G_1 και G_2, δηλαδή $G = P(G_1, G_2)$. Αν το θεώρημα ισχύει για τα μονοπάτια του G_1 και του G_2, τότε θα ισχύει και για τα μονοπάτια του G, αφού κανένα μονοπάτι του G_1 δεν θα έχει ενδιάμεσο κόμβο κοινό με κάποιο από τα μονοπάτια του G_2.

Έστω ότι το G είναι αποτέλεσμα του series composition των δικτύων G_1 και G_2, δηλαδή $G = S(G_1, G_2)$. Το θεώρημα θα ισχύει για τα μονοπάτια του G, αφού όλα τους θα έχουν κοινό κόμβο τον $t_{G_1} = s_{G_2}$.

□

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για μεγαλύτερο αριθμό ενδιάμεσων κόμβων.

Θα χαρακτηρίζουμε ως ασυσχέτιστα δύο s-t μονοπάτια ενός δικτύου G, αν δεν έχουν κανένα κοινό ενδιάμεσο κόμβο μεταξύ τους και ως συσχετισμένα αλλιώς. Επίσης ορίζουμε ως γειτονιά ενός μονοπατιού, το σύνολο όλων των μονοπατιών που είναι συσχετισμένα μαζί του. Όσον αφορά τον αλγόριθμο μας, θα δέχεται ως είσοδο ένα στιγμιότυπο του NMOP

$(T,\ G)$, όπου το G θα είναι ένα series-parallel δίκτυο και θα δίνει ως έξοδο μια feasible κατανομή ροής, η οποία θα αποτελεί NE του στιγμιότυπου. Σημειώνεται ότι δεν έχουμε κάνει κάποια επιπλέον υπόθεση για τις συναρτήσεις καθυστέρησης των κόμβων του G, πέρα από το ότι είναι μη αρνητικές και γνησίως αύξουσες. Παρακάτω φαίνονται αναλυτικά τα βήματα του αλγορίθμου, ενώ η τιμή της αρχικής διαθέσιμης ροής είναι ίση με ένα.

1. Αρχικά, διατάσσουμε όλα τα s-t μονοπάτια του G σε φθίνουσα σειρά, ως προς το συνολικό τους κέρδος.

2. Επιλέγουμε το πρώτο μονοπάτι και του προσθέτουμε όση ροή χρειάζεται μέχρι να γίνει saturated ή μέχρι να τελειώσει η διαθέσιμη ροή.

3. Στη συνέχεια, επιλέγουμε το unsaturated μονοπάτι με το αμέσως επόμενο μεγαλύτερο συνολικό κέρδος και του προσθέτουμε και πάλι όση ροή χρειάζεται μέχρι να γίνει saturated ή μέχρι να τελειώσει η διαθέσιμη ροή.

4. Όσο εμείς προσθέτουμε ροή στο μονοπάτι του προηγούμενου βήματος, τα feasible μονοπάτια που ανήκουν στη γειτονιά του και τα έχει ήδη επισκεφθεί ο αλγόριθμός μας, άρα είναι saturated, γίνονται infeasible. Οπότε εμείς θα χρειαστεί να αφαιρούμε ταυτόχρονα ροή από αυτά τα μονοπάτια, έτσι ώστε κάθε ένα από αυτά να παραμένει saturated και είτε να παραμένει feasible είτε να μηδενιστεί η ροή του.

5. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 3 και 4, μέχρι να τελειώσει η διαθέσιμη ροή.

Απόδειξη ορθότητας του αλγορίθμου. Αρχικά θα δείξουμε ότι κατά την εκτέλεση μιας επανάληψης του αλγορίθμου κανένα από τα μονοπάτια που ήταν saturated προηγουμένως δεν θα γίνει unsaturated και ότι η κατανομή της ροής θα διατηρείται feasible. Θα δουλέψουμε την απόδειξη με επαγωγή στον αριθμό των επαναληψεων. Προφανώς η παραπάνω πρόταση ισχύει, όταν εκτελούμε το βήμα 2. Όταν εκτελούμε το βήμα 3, για κάποια επανάληψη του αλγορίθμου, έστω k και προσθέτουμε ροή σε κάποιο μονοπάτι, έστω p, τότε τα μονοπάτια που ανήκουν στη γειτονιά του p και έχουν θετική ροή θα γίνουν infeasible, με αποτέλεσμα να καταστεί infeasible και η κατανομή της ροής. Αυτό συμβαίνει, διότι για να έχει κάποιο μονοπάτι του δικτύου θετική ροή, σημαίνει ότι το έχει ήδη επισκεφθεί ο αλγόριθμος, άρα είναι saturated και έχει μεγαλύτερο κέρδος από το p. Για να επαναφέρουμε το feasibility της κατανομής της ροής, θα χρειαστεί να αφαιρέσουμε ροή από αυτά τα μονοπάτια, είτε μέχρι να γίνουν feasible είτε μέχρι να μηδενιστεί η ροή τους. Αφαιρώντας ροή όμως από κάποιο μονοπάτι, έστω q, ελλοχεύει ο κίνδυνος για κάποιο άλλο μονοπάτι που είναι συσχετισμένο με αυτό και ήταν saturated να γίνει unsaturated. Από το θεώρημα 6.1 όμως είδαμε ότι αν ένα μονοπάτι του G επηρεάζεται από την αφαίρεση ροής από το q, τότε αναγκαστικά θα επηρεάζεται και από την προσθήκη ροής στο p, δηλαδή θα ανήκει στη γειτονιά του. Άρα το βασικό ερώτημα είναι, αν υπάρχει τρόπος να αφαιρέσουμε ροή από όλα τα μονοπάτια, που ανήκουν στη γειτονιά του p και έχουν θετική ροή, όταν προσθέσουμε ροή a στο p, έτσι ώστε κάθε saturated μονοπάτι που ανήκει στη γειτονιά του να παραμείνει saturated και στην περίπτωση που ήταν feasible είτε να παραμείνει feasible είτε να μηδενιστεί η ροή του. Ένας τρόπος για να υπολογίσουμε μια τέτοια κατανομή ροής είναι να αντικαταστήσουμε την συνάρτηση καθυστέρησης κάθε κόμβου u που ανήκει στο p με τη $d_u(x+a)$ και να τρέξουμε ξανά τον αλγόριθμο στο νέο δίκτυο, για $k-1$ επαναλήψεις (αν $k=1$, θα τρέξουμε μόνο το βήμα 2 του αλγορίθμου). Αφού η "χωρητικότητα" κάθε ενός από τα μονοπάτια που ανήκουν στη γειτονιά του p και είχαν θετική ροή θα μικρύνει, θα μειωθεί αυστηρά και η ροή, που θα του κατανέμει ο αλγόριθμος τη δεύτερη φορά σε σχέση με αυτή που του κατένειμε την πρώτη. Δηλαδή, αν θέσουμε ως f την κατανομή της ροής, που είχε διαμορφωθεί από την αρχική εκτέλεση του αλγορίθμου μέχρι τη $k-1$ επανάληψη, ως f' την κατανομή της ροής, που είχε ως έξοδο η εκτέλεση του αλγορίθμου στο βοηθητικό δίκτυο, και ως Γ το σύνολο των μονοπατιών r της γειτονιάς του p, με $f_r > 0$, τότε για κάθε $r \in \Gamma$ θα υπάρχει $a_r > 0$, τέτοιο ώστε $f'_r = f_r - a_r$. Είναι προφανές από τον τρόπο που υπολογίσαμε το f'_r ότι αν $a_r < f_r$, τότε το r θα είναι feasible και ως προς το f'. Επίσης η δεύτερη εκτέλεση του αλγορίθμου δεν θα τερματιστεί πρόωρα λόγω έλλειψης διαθέσιμης ροής, αφού η συνολική ροή που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι μικρότερη από αυτή της πρώτης και άρα όσα μονοπάτια είναι saturated ως προς την f για το αρχικό δίκτυο θα είναι και ως προς την f' για το βοηθητικό δίκτυο. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι αν ταυτόχρονα με την προσθήκη ροής a στο p, αφαιρέσουμε ροή a_r από κάθε μονοπάτι $r \in \Gamma$, τότε κάθε ένα από τα μονοπάτια που ανήκουν στη γειτονιά του p και ήταν saturated, θα παραμείνει saturated και για όποιο από αυτά ισχύει $a_r < f_r$ (δηλαδή δεν μηδενίστηκε η ροή του κατά την αφαίρεση), θα παραμείνει feasible, με αποτέλεσμα η νέα κατανομή ροής να είναι και αυτή feasible .

Επιπλέον θα δείξουμε ότι κατά την εκτέλεση των βημάτων 3 και 4 η συνολική ροή που θα περνά από τους κόμβους του p θα αυξάνεται αυστηρά. Αυτό θα συμβαίνει, διότι ο λόγος που αφαιρούμε ροή από ένα μονοπάτι $r \in \Gamma$ είναι για να ισορροπήσουμε την αύξηση που υπέστει στη συνολική του καθυστέρηση, λόγω της προσθήκης του a στο p και να επαναφέρουμε οριακά το feasibility του, αν έχει αρκετή ροή για να το κάνουμε αυτό ή να μηδενίσουμε τη ροή του, έτσι ώστε να αποκατασταθεί τελικά το feasibility της κατανομής της ροής (και στις δύο περιπτώσεις το r θα παραμείνει saturated). Επομένως η καθυστέρηση κάθε κόμβου του r που δεν ανήκει και στο p, θα μειωθεί αυστηρά. Αν λοιπόν η συνολική καθυστέρηση που επιβάλλεται στο r, λόγω των κοινών κόμβων του με το p, δεν αυξηθεί αυστηρά, τότε το r δεν είναι εφικτό να παραμείνει saturated. Άρα ύστερα από την προσθήκη ροής στο p και τις αφαιρέσεις ροής που θα χρειαστεί να κάνουμε από τα μονοπάτια του δικτύου που ανήκουν στο Γ, έτσι ώστε να επανέλθει το feasibility της κατανομής, η συνολική ροή που θα περνά από τους κόμβους του p θα αυξηθεί αυστηρά, όπως και η συνολική του καθυστέρηση, με αποτέλεσμα να κάνει ένα βήμα πιο κοντά στο saturation. Καταλήγουμε λοιπόν ότι υπάρχει a, το οποίο αν το προσθέσουμε στο p, αυτό θα γίνει saturated.

Έχουμε δείξει ως τώρα ότι σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου τουλάχιστον ένα επιπλέον μονοπάτι γίνεται saturated, με εξαίρεση ίσως τη τελευταία και όλα όσα ήταν ήδη παραμένουν, το οποίο σε συνδυασμό με το ότι τα δίκτυα που μας ενδιαφέρουν, έχουν πεπερασμένο πλήθος s-t μονοπατιών, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο αλγόριθμός θα εκτελεί το πολύ τόσες επαναλήψεις όσα είναι και τα s-t μονοπάτια του δικτύου. Επίσης έχουμε υποθέσει για τα δίκτυα που μελετάμε ότι είναι αρκετά "μεγάλα" έτσι ώστε κάθε παίκτης να έχει τη δυνατότητα να ακολουθήσει κάποιο μονοπάτι και να αποκομίσει θετικό κέρδος, ανεξαρτήτως των επιλογών των υπολοίπων παικτών. Συμπερασματικά δεν υπάρχει περίπτωση να γίνουν saturated όλα τα μονοπάτια, προτού τελειώσει η διαθέσιμη ροή.

Ας δούμε τώρα τι γίνεται στην περίπτωση που η ροή που χρειάζεται για να γίνει saturated το p ξεπερνά σε τιμή τη διαθέσιμη ροή. Η ενέργεια που θα ακολουθήσει ο αλγόριθμος είναι να προσθέσει στο p όλη τη διαθέσιμη ροή. Παρατηρούμε ότι δεν ισχύει απαραίτητα ότι η ροή που θα προστεθεί στο δίκτυο, κατά την εκτέλεση κάποιας επανάληψης του αλγορίθμου, θα είναι μεγαλύτερη από αυτήν που θα αφαιρεθεί. Άρα η ροή που θα χρειαστεί να αφαιρέσουμε από το δίκτυο, μετά την προσθήκη όλης της διαθέσιμης ροής στο p, μπορεί να αρκεί πλέον για να γίνει saturated το p, οπότε και θα τελειώσουμε με αυτή την επανάληψη και θα προχωρήσουμε στο επόμενο μονοπάτι, αλλιώς θα χρειαστεί να προσθέσουμε ξανά όλη τη διαθέσιμη ροή στο p. Επαναλαμβάνουμε λοιπόν αυτή τη διαδικασία μέχρι να γίνει το p saturated ή να τελειώσει η διαθέσιμη ροή (τελευταία επανάληψη του αλγορίθμου). Η επανάληψη αυτής της διαδικασίας δεν γίνεται να συνεχίζεται αέανα, αφού όπως δείξαμε προηγουμένως με την προσθήκη ροής σε ένα μονοπάτι αυτό πλησιάζει αυστηρά προς το saturation, ανεξάρτητα με το πόση ροή αφαιρέθηκε τελικά από το δίκτυο και άρα η διαδικασία όντως θα τερματίσει κάποια στιγμή. Συνδυάζοντας τα συμπεράσματα που βγάλαμε στις δύο τελευταίες παραγράφους, έχουμε δείξει ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει.

Ακόμα κατά την εκτέλεση των βημάτων 3 και 4 του αλγορίθμου το μοναδικό μονοπάτι, του οποίου αυξάνεται η ροή, είναι το p, άρα όλα τα μονοπάτια που είχαν μηδενική ροή, εκτός από το p, θα συνεχίσουν να έχουν μηδενική ροή.

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, έχουμε δείξει ότι στο τέλος κάθε επανάληψης του αλγορίθμου όλα τα μονοπάτια με κέρδος μεγαλύτερο από αυτό του μονοπατιού που επιλέχθηκε τελευταίο θα είναι saturated (αφού ήταν ήδη saturated και θα παραμείνουν), ενώ όσα έχουν μικρότερο κέρδος, θα έχουν μηδενική ροή. Επίσης το μονοπάτι που επιλέχθηκε θα γίνει saturated, με εξαίρεση ίσως την τελευταία επανάληψη, ενώ η κατανομή της ροής θα διατηρείται feasible. Άρα η κατανομή της ροής που θα διαμορφώνεται στο τέλος κάθε επανάληψης θα αποτελεί NE. Επίσης δείξαμε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει και μάλιστα όχι πριν τελειώσει η διαθέσιμη ροή. Καταλήγουμε λοιπόν ότι η έξοδος του αλγορίθμου είναι όντως μια feasible κατανομή όλης της ροής στα μονοπάτια του δικτύου, η οποία θα αποτελεί NE του στιγμιότυπου.

□

6.2 Μελέτη της συμπεριφοράς ενός δικτύου κατά τη μεταφορά ροής ανάμεσα σε δύο μονοπάτια του

Ο άπληστος αλγόριθμος της προηγούμενης ενότητας δεν δουλεύει για στιγμιότυπα του NMOP με δίκτυο, το οποίο δεν είναι series parallel. Ο κύριος λόγος που συμβαίνει αυτό, είναι επειδή δεν θα ισχύει απαραίτητα το θεώρημα 6.1, άρα είναι δυνατόν σε κάποια επανάληψη του αλγορίθμου να υπάρξει saturated s-t μονοπάτι, το οποίο δεν ανήκει στη γειτονιά του μονοπατιού, του οποίου αυξάνεται η ροή, αλλά να ανήκει στη γειτονιά κάποιου από τα μονοπάτια, από τα οποία αφαιρείται ροή, με αποτέλεσμα να γίνει unsaturated και εν τέλει ο αλγόριθμος να μην καταλήξει σε NE. Για το λόγο αυτό επιχειρήσαμε να κατασκευάσουμε έναν ακόμα άπληστο αλγόριθμο που θα εφαρμόζεται σε όλα τα στιγμιότυπα του NMOP. Ο αλγόριθμος που σκεφτήκαμε, δέχεται ως είσοδο ένα στιγμιότυπο του NMOP (T, G) και μια κατανομή της μοναδιαίας ροής στα μονοπάτια του G, την οποία προσπαθεί να μετατρέψει σε NE. Για να το πετύχει αυτό, σε κάθε επανάληψη του μεταφέρει ροή από το ελαχίστου κέρδους μονοπάτι με θετική ροή (p_{min}) στο μέγιστου κέρδους unsaturated μονοπάτι (p_{max}) και τερματίζει όταν επιτευχθεί NE. Η συνολική ροή που αφαιρείται από τα μονοπάτια του δικτύου σε κάθε επανάληψη, με σκοπό να αποκατασταθεί το feasibility της κατανομής της ροής, όπως δηλαδή γινόταν και στον αλγόριθμο της προηγούμενης ενότητας, θα ανατροφοδοτείται στο p_{min}. Η ορθότητα αυτού του αλγορίθμου βασίζεται στην υπόθεση ότι η ροή που θα καταλήγει να ανατροφοδοτεί σε κάθε επανάληψη στο p_{min} θα είναι αυστηρά μικρότερη από αυτή που μετέφερε αρχικά στο p_{max}, με άλλα λόγια ότι στο τέλος κάθε επανάληψης η ροή του p_{min} θα μειώνεται αυστηρά. Η υπόθεση αυτή όμως, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, δεν ισχύει, άρα ο αλγόριθμος είναι λάθος. Παρ΄ όλα αυτά θα παρουσιάσουμε μερικά ενδιαφέροντα συμπεράσματα που βγάλαμε σχετικά με την ερώτηση του πως συμπεριφέρεται ένα δίκτυο όταν προσθέτουμε ροή σε κάποιο unsaturated μονοπάτι του.

Θεωρούμε λοιπόν ένα χρονικό όριο T και ένα δίκτυο G, για τις συναρτήσεις καθυστέρησης του οποίου δεν κάνουμε κάποια παραπάνω υπόθεση πέρα από το ότι είναι γνησίως αύξουσες και μη αρνητικές. Θεωρούμε επίσης μια κατανομή της μοναδιαίας ροής στα μονοπάτια του G, έστω f, ένα unsaturated ως προς την f s-t μονοπάτι p του G και ένα ακόμα s-t μονοπάτι q, με $f_q > 0$. Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την συμπεριφορά του δικτύου, στην περίπτωση που μεταφέρουμε ροή $a \leq f_q$ από το μονοπάτι q στο μονοπάτι p. Πιο συγκεκριμένα θέλουμε να ελέγξουμε αν η a είναι αυστηρά μεγαλύτερη της συνολικής ροής που θα χρειαστεί να αφαιρέσουμε από τα μονοπάτια που ανήκουν στη γειτονιά του p και έγιναν infeasible μετά τη μεταφορά, έτσι ώστε το κάθε ένα από αυτά να γίνει οριακά feasible (δηλαδή feasible και saturated) ή αν αυτό δεν είναι εφικτό επειδή δεν έχει αρκετή ροή, να μηδενιστεί απλά η ροή του. Η μεγάλη πολυπλοκότητα όμως που μπορεί να έχει το G, καθιστά τον έλεγχο κάτι τέτοιου αρκετά δύσκολο και πολύπλοκο. Για το λόγο αυτό θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια μια σειρά από αλλαγές που μπορούμε να εφαρμόσουμε στο G, έτσι ώστε να κάνουμε τη συγκεκριμένη διαδικασία αρκετά πιο απλή. Για την ακρίβεια θα δείξουμε ότι αν το a είναι αυστηρά μεγαλύτερο από τη συνολική ροή που θα αφαιρέσουμε στην περίπτωση του απλοποιημένου δικτύου που θα κατασκευάσουμε, τότε το ίδιο θα ισχύει και για το G.

Θέτουμε ως Δ το σύνολο που αποτελείται από όλα εκείνα τα feasible μονοπάτια, τα οποία ανήκουν στη γειτονιά του p και θα γίνουν infeasible μετά τη μεταφορά της a στο p. Ακόμα για κάθε $r \in \Delta$, θα συμβολίζουμε με a_r τη ροή που πρέπει να αφαιρέσουμε από το r. Οι μετατροπές και οι απλοποιήσεις που χρειάζεται να εφαρμόσουμε διαδοχικά στο G για να κατασκευάσουμε το απλοποιημένο δίκτυο αναλύονται παρακάτω.

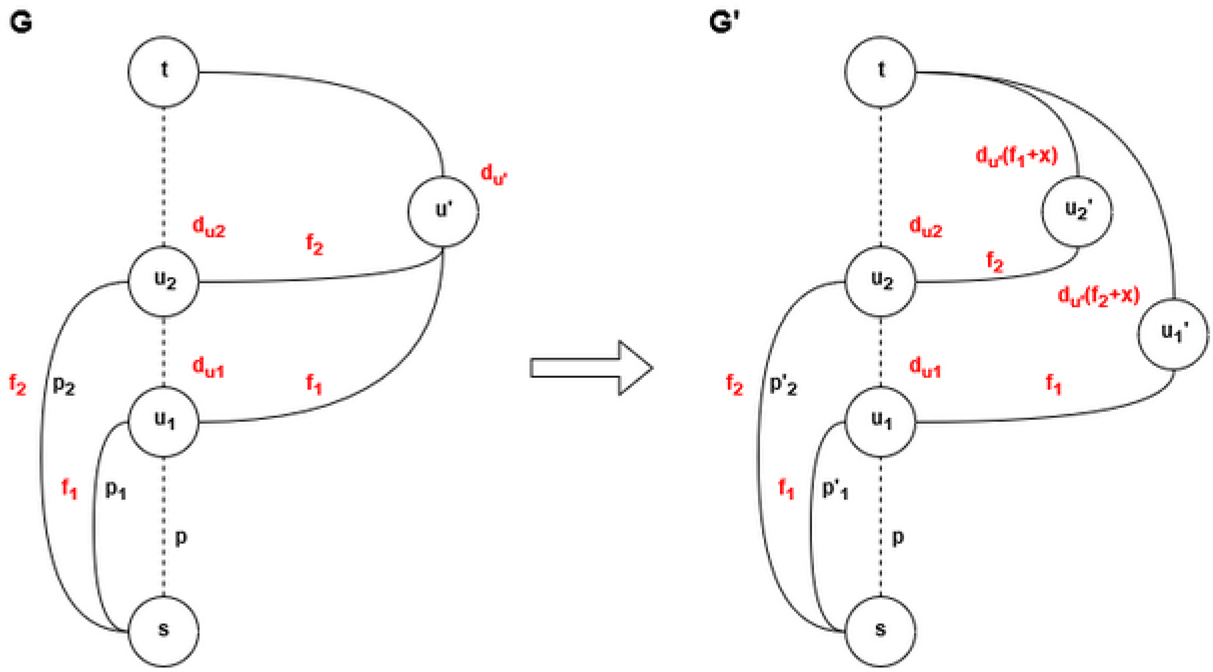
1. Αρχικά εστιάζουμε στο p και απομακρύνουμε τα s-t μονοπάτια του G, που είναι ασυσχέτιστα με αυτό και με όσα ανήκουν στη γειτονιά του, καθώς αυτά τα μονοπάτια δεν θα επηρεαστούν καθόλου από την προσθήκη της a στο p.

2. Συνεχίζοντας στην ίδια φιλοσοφία βγάζουμε εκτός εικόνας όσα μονοπάτια έχουν μηδενική ροή (εκτός προφανώς από το p αν έχει), καθώς και όσα μονοπάτια δεν ανήκουν στη γειτονιά του p και σχετίζονται μόνο με μονοπάτια που έχουν μηδενική ροή. Πάλι η συνολική καθυστέρηση αυτών των μονοπατιών δεν επηρεάζεται ούτε άμεσα ούτε έμμεσα από την αλλαγή στη ροή του p.

3. Έστω τώρα ότι κάποιο μονοπάτι που ανήκει στο Δ έχει x κοινούς κόμβους με το p και ότι κανένα άλλο μονοπάτι δεν περνά από αυτούς τους κόμβους. Τότε για ευκολία μπορούμε να αντικαταστήσουμε αυτούς τους x κόμβους με έναν, ο οποίος θα έχει συνάρτηση καθυστέρησης ίση με το άθροισμά τους (στην προκειμένη φάση τα κέρδη των κόμβων δεν μας απασχολούν και για αυτό δεν αναφέρονται). Αντίστοιχη αντικατάσταση μπορούμε να κάνουμε και με τους κόμβους του p που δεν ανήκουν σε κανένα άλλο μονοπάτι.

4. Όσον αφορά την περίπτωση, όπου δύο ή παραπάνω μονοπάτια περνούν από τον ίδιο κόμβο του p, δεν έχουμε καταφέρει μέχρι στιγμής να σκεφτούμε κάποια ισοδύναμη αντικατάσταση, ώστε με κάποιον τρόπο να περνά από όλους του κόμβους του p το πολύ ένα ακόμα μονοπάτι, χωρίς να κάνουμε κάποια περεταίρω υπόθεση για το είδος των συναρτήσεων καθυστέρησης του G. Παρ᾽ όλα αυτά είμαστε αισιόδοξοι ότι μια τέτοια αντικατάσταση μπορεί να βρεθεί και για αυτό θα την θεωρήσουμε ως δεδομένη στο υπόλοιπο της εργασίας, ενώ σίγουρα αξίζει να ασχοληθούμε μελλοντικά ώστε να καλύψουμε το συγκεκριμένο κενό.

5. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου δύο ή παραπάνω μονοπάτια της γειτονιάς του p συσχετίζονται μεταξύ τους με έναν ή περισσότερους κόμβους, οι οποίοι δεν ανήκουν στο p. Η μετατροπή που θα εφαρμόσουμε στην προκειμένη περίπτωση απεικονίζεται στα επόμενα σχήματα για δύο μονοπάτια και έναν κόμβο, αλλά πολύ εύκολα μπορεί να γενικευθεί για περισσότερους κόμβους και περισσότερα μονοπάτια.



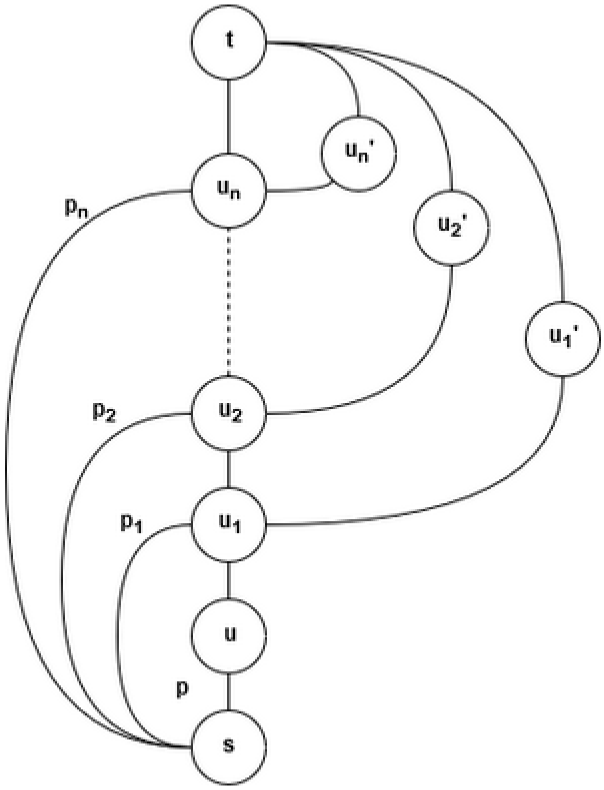
Δίκτυα 6.1 και 6.2

Η συγκεκριμένη μετατροπή δεν αλλοιώνει τις αρχικές συνθήκες της καθυστέρησης κανενός μονοπατιού και δεν επηρεάζει κάποιο τρίτο στοιχείο του δικτύου. Επιπλέον εύκολα μπορεί να επαληθεύσει κανείς ότι το άθροισμα $a'_{p_1} + a'_{p_2}$, δηλαδή η ροή που θα χρειαστεί να αφαιρεθεί από τα μονοπάτια p'_1 και p'_2 του G' μετά από την προσθήκη της a στο p, θα είναι μεγαλύτερη από τη ροή $a_{p_1} + a_{p_2}$ που αντίστοιχα θα αφαιρεθεί από τα p_1 και p_2 του G. Άρα θα ισχύει ότι $a'_{p_1} + a'_{p_2} = a_{p_1} + a_{p_2} + \delta$, όπου $\delta > 0$. Τέλος, εάν ισχύει $a > \sum_{i=3}^{w} a_{p_i} + a'_{p_1} + a'_{p_2}$, όπου w το πλήθος των κόμβων του p, θα έχουμε και $a > \sum_{i=3}^{w} a_{p_i} + a_{p_1} + a_{p_2} + \delta = \sum_{i=1}^{w} a_{p_i} + \delta > \sum_{i=1}^{w} a_{p_i}$, άρα δείξαμε ότι αν η a είναι μεγαλύτερη από τη συνολική ροή που πρέπει να αφαιρεθεί από τα μονοπάτια του G', θα είναι και μεγαλύτερη από την αντίστοιχη συνολική ροή του G.

6. Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου ένα μονοπάτι που ανήκει στη γειτονιά του p έχει κάποιον κόμβο κοινό με μονοπάτια, τα οποία δεν ανήκουν στη γειτονιά του p. Έστω ότι ο κοινός κόμβος είναι ο u με συνάρτηση καθυστέρησης d_u και τα μονοπάτια είναι τα $p''_1, p''_2, \ldots, p''_m$ με ροές $f_{p''_1}, f_{p''_2}, \ldots, f_{p''_m}$, τότε μια ισοδύναμη μετατροπή του δικτύου είναι να αφαιρέσουμε τα $p''_1, p''_2, \ldots, p''_m$ και να αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση καθυστέρησης του u με την $d_u(x + f_{p''_1} + f_{p''_2} + \cdots + f_{p''_m})$.

7. Έστω ένα μονοπάτι που ανήκει στη γειτονιά του p και το οποίο περιέχει κάποιους κόμβους, έστω $u"_1, u"_2, \ldots, u"_m$, από τους οποίους δεν περνάει κανένα άλλο μονοπάτι. Τότε θα μπορούσαμε για ευκολία να αντικαταστήσουμε όλους αυτούς τους κόμβους με ένα νέο κόμβο $u"$ με συνάρτηση καθυστέρησης $d_{u"}(x) = d_{u"_1}(x) + d_{u"_2}(x) + \ldots d_{u"_m}(x)$.

Το ποιές από αυτές τις αλλαγές θα χρειαστεί να εφαρμόσουμε κάθε φορά εξαρτάται από το δίκτυο, το οποίο καλούμαστε να απλοποιήσουμε, όπως επίσης και η σειρά με την οποία θα τις εφαρμόσουμε και το πόσες φορές την κάθε μία. Το δίκτυο που προκύπτει από το G όταν το απλοποιήσουμε σε τέτοιο βαθμό, ώστε να μην μπορούμε πλέον να του εφαρμόσουμε καμία από τις παραπάνω αλλαγές, θα το ονομάζουμε το base δίκτυο του G για το s-t μονοπάτι του p ή απλά το base δίκτυο, όταν είναι ξεκάθαρο το που αναφέρεται και θα το συμβολίζουμε με $B(G, p)$ ή με B αντίστοιχα. Από το τρόπο, με τον οποίον κατασκευάζονται τα base δίκτυα είναι προφανές ότι όλα θα έχουν την ακόλουθη μορφή.



Δίκτυο 6.3 (Base Δίκτυο)

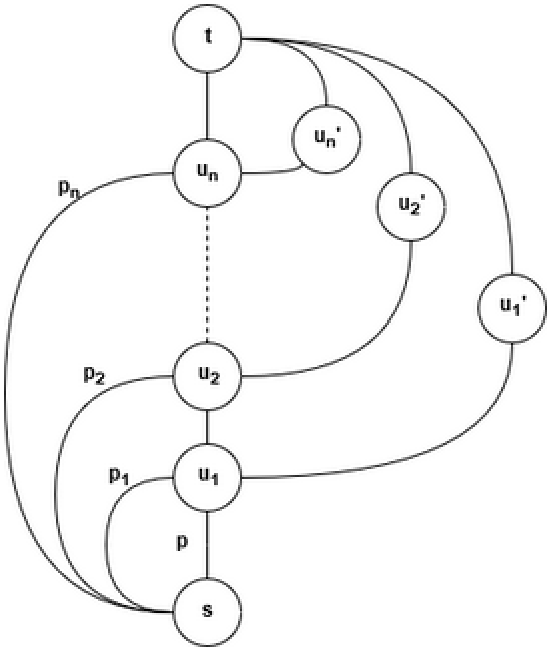
Όπου n είναι το πλήθος των κόμβων του μονοπατιού p στο base δίκτυο. Σύμφωνα με τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάστηκε το B, τα μοναδικά s-t μονοπάτια του, που θα έχουν θετική ροή είναι τα $p_1, p_2, \ldots, p_n$ και ίσως το p. Από την ανάλυση που κάναμε παραπάνω προκύπτει επίσης ότι όντως αν η ροή που θα χρειαστεί να αφαιρέσουμε από τα μονοπάτια $p_1, p_2, \ldots, p_n$ του B, όταν προσθέσουμε ροή a στο p του B, είναι αυστηρά μικρότερη από την a, τότε θα ισχύει ότι και η συνολική ροή που θα χρειαστεί να αφαιρέσουμε από τα μονοπάτια του G που ανήκουν στο Δ, όταν προσθέσουμε ροή a στο p του G, θα είναι αυστηρά μικρότερη από το a, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα. Τέλος να παρατηρήσουμε ότι η κατανομή της ροή του απλοποιημένου δικτύου που προκύπτει δεν είναι κατά ανάγκη μοναδιαία, κάτι το οποίο βέβαια δεν μας απασχολεί για αυτό που μελετάμε αυτή τη στιγμή.

6.3 Το Base Δίκτυο

Στη συγκεκριμένη ενότητα όταν θα αναφερόμαστε στα μονοπάτια του base δικτύου B, θα εννοούμε τα μονοπάτια του $p_1, p_2, \ldots, p_n$ και p.

Ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα θα ήταν να δείξουμε ότι για οποιοδήποτε base δίκτυο B και για κάθε ροή $a \in [0, 1]$, θα ισχύει ότι η a είναι αυστηρά μεγαλύτερη από τη ροή που θα χρειαστεί να αφαιρέσουμε από τα μονοπάτια $p_1, p_2, \ldots, p_n$ του B, όταν προσθέσουμε ροή a στο p του B. Εάν θέσουμε δηλαδή ως a_i τη ροή που θα χρειαστεί να αφαιρέσουμε από το μονοπάτι p_i του B, ώστε εκείνο και όλα τα υπόλοιπα μονοπάτια του B εκτός ίσως του p, να γίνουν οριακά feasible, τότε θα θέλαμε να δείξουμε ότι $a > \sum_{i \in [1,n]} a_i$. Δείχνοντας κάτι τέτοιο, αρχικά θα είχαμε αποδείξει την ορθότητα του αλγορίθμου της προηγούμενης ενότητας και άρα θα είχαμε στα χέρια μας έναν τρόπο για να υπολογίζουμε ένα NE για οποιοδήποτε στιγμιότυπο του NMOP, ξεκινώντας από οποιαδήποτε κατανομή των παικτών του στο δίκτυο του. Επιπλέον θα είχαμε καταφέρει να καθορίσουμε το πως θα συμπεριφερθεί ένα δίκτυο αν μεταφέρουμε ροή από ένα μονοπάτι του σε ένα άλλο, κάτι που αποτελεί μάλλον το πιο κρίσιμο ερώτημα αυτού του προβλήματος και το οποίο το συναντάμε συνέχεια, οπότε θα μας διευκόλυνε αρκετά αν γνωρίζαμε την απάντηση του. Όπως θα δούμε και στη συνέχεια όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Παρ'όλα αυτά θεωρήσαμε ότι αξίζει να αναζητήσουμε τους λόγους για τους οποίους δεν ισχύει και να προσπαθήσουμε να βρούμε αν υπάρχουν προϋποθέσεις, τις οποίες αν πληρεί κάποιο δίκτυο, τότε θα ισχύει το παραπάνω αποτέλεσμα για το base δίκτυο του. Στην συνέχεια θα ακολουθήσουν μερικά από τα συμπεράσματα που βγάλαμε σχετικά με τα base δίκτυα.

Κατ' αρχάς αφού μας ενδιαφέρει η χειρότερη περίπτωση, δηλαδή όταν το $\sum_{i \in [1,n]} a_i$ του base δικτύου γίνεται μέγιστο για κάποιο a, μπορούμε να περιορίσουμε τη μελέτη μας σε δίκτυα τα οποία δεν έχουν κόμβους, από τους οποίους δεν περνάνε άλλα μονοπάτια πέραν του p, αφού αυτοί οι κόμβοι δεν επηρεάζουν το συγκεκριμένο άθροισμα. Τα base δίκτυα τέτοιων δικτύων είναι της ακόλουθης μορφής.



Δίκτυο 6.4

Επίσης το $\sum_{i \in [1,n]} a_i$ θα είναι μεγαλύτερο αν θεωρήσουμε ότι όλα τα μονοπάτια έχουν αρκετή ροή για να γίνουν feasible όταν προσθέσουμε το a στο p και δεν θα μηδενιστεί η ροή τους αντ΄ αυτού. Ένας τρόπος για να το πετύχουμε αυτό είναι να επιλέγουμε a μικρότερες της μικρότερης ροής των μονοπατιών $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$ (οι ροές αυτών των μονοπατιών εξασφαλίζεται ότι θα είναι θετικές από τον τρόπο που κατασκευάζονται τα base δίκτυα). Δηλαδή αν θέσουμε τις ροές των μονοπατιών $p_1, p_2, \ldots, p_n$ και p ως $f_1, f_2, \ldots, f_n$ και f_p αντίστοιχα, θέλουμε να επιλέγουμε $a < min\{f_1, f_2, \ldots, f_n, f_p\}$. Αυτό ισχύει, διότι κάθε a_i θα είναι μικρότερη της a, για τον λόγο που είδαμε στην ενότητα 6.1 και προφανώς θα είναι και μικρότερη ή ίση της f_i, άρα αν επιλέξουμε a μικρότερη της f_i θα ισχύει ότι και η a_i θα είναι μικρότερη της f_i και άρα δεν θα μηδενιστεί η ροή του μονοπατιού i, κατά την προσθήκη της a στο p. Οπότε από εδώ και πέρα θα θεωρούμε ότι $a < min\{f_1, f_2, \ldots, f_n, f_p\}$.

Είναι σχετικά εύκολο να δείξει κάποιος ότι αν ένα base δίκτυο έχει γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης, τότε θα ισχύει $a > \sum_{i\in[1,n]} a_i$ (η απόδειξη για το συγκεκριμένο αποτέλεσμα είναι ουσιαστικά μόνο πράξεις και για αυτό παραλήφθηκε από την εργασία). Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για μια ακόμα, σχετικά περιορισμένη πάλι, οικογένεια base δικτύων.

Θεώρημα 6.2. *Έστω ένα base δίκτυο B, για το οποίο ισχύει ότι όλοι οι κόμβοι που ανήκουν στο μονοπάτι p, χαρακτηρίζονται από την ίδια συνάρτηση καθυστέρησης d_u και ότι όσοι κόμβοι δεν ανήκουν στο p, χαρακτηρίζονται επίσης από την ίδια συνάρτηση καθυστέρησης $d_{u'}$. Τότε αν οι συναρτήσεις d_u και $d_{u'}$ είναι concave και μηδενίζονται στο μηδέν, θα ισχύει ότι $a > \sum_{i\in[1,n]} a_i$ για το base δίκτυο B.*

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι τα μονοπάτια του B θα είναι feasible και όλα, εκτός ίσως από το p, θα έχουν θετική ροή. Ακόμα αφού το B είναι base δίκτυο θα ισχύει ότι όλα τα μονοπάτια του εκτός του p θα είναι saturated. Ο μόνος τρόπος για να ισχύει το τελευταίο είναι όλα τα μονοπάτια του B εκτός ίσως από το p να έχουν την ίδια ροή, έστω f_r. Άρα οι αρχικές σχέσεις του δικτύου, για μια δεδομένη κατανομή ροής f, θα είναι:

$$n \cdot d_u(f_p + f_r) < T \tag{6.1}$$
$$d_u(f_p + f_r) + d_{u'}(f_r) = T \tag{6.2}$$

Ενώ ύστερα από την προσθήκη της a στο p και την αφαίρεση ροής από τα υπόλοιπα μονοπάτια, ώστε αυτά να γίνουν οριακά feasible, οι σχέσεις του δικτύου θα γινόντουσαν:

$$n \cdot d_u(f_p + f_r + a - a_r) \leq T \tag{6.3}$$
$$d_u(f_p + f_r + a - a_r) + d_{u'}(f_r - a_r) = T \tag{6.4}$$

Όπου a_r θα είναι η ροή που θα αφαιρεθεί από κάθε μονοπάτι του δικτύου εκτός του p, η οποία θα είναι και αυτή αναγκαστικά ίδια για όλα τα μονοπάτια. Άρα αυτό που θέλουμε να δείξουμε τελικά είναι ότι $a > n \cdot a_r$. Υπενθυμίζουμε ότι $a_r < a < f_r$.

Αν θεωρήσουμε τώρα την οριακή κατάσταση όπου $f_p = 0$, οι σχέσεις 6.1, 6.2 θα γίνουν:

$$n \cdot d_u(f_r) < T \tag{6.5}$$
$$d_u(f_r) + d_{u'}(f_r) = T \tag{6.6}$$

Μάλιστα το f_r, που ικανοποιεί τις σχέσεις 6.5, 6.6 θα είναι το μέγιστο δυνατό ως προς τη τιμή της f_p, f_r^{max}, αφού όσο θα αυξάνεται το f_p, το f_r μειώνεται αυστηρά. Από τις σχέσεις

6.5, 6.6 καταλήγουμε ότι για το f_r^{max} ισχύει $d_u(f_r^{max}) < \frac{T}{n}$, άρα $d_{u'}(f_r^{max}) > (n-1)\cdot\frac{T}{n} > (n-1)\cdot d_u(f_r^{max})$, το οποίο σε συνδυασμό με το ότι έχουμε υποθέσει $d_u(0) = d_{u'}(0) = 0$ μας δίνει την ακόλουθη σχέση.

$$\frac{d_{u'}(f_r^{max}) - d_{u'}(0)}{f_r^{max} - 0} > (n-1)\cdot\frac{d_u(f_r^{max}) - d_u(0)}{f_r^{max} - 0} \tag{6.7}$$

Λόγω της σχέσης 6.7 (και ίσως κάποιου επιπλέον χαρακτηριστικού που θα χρειαζόταν να προσθέσουμε στις συναρτήσεις καθυστέρησης) θα έχουμε

$$d_{u'}(f_r^{max} + \delta) - d_{u'}(f_r^{max}) > (n-1)\cdot(d_u(f_r^{max} + \delta) - d_u(f_r^{max})), \delta > 0 \tag{6.8}$$

Δηλαδή αν αυξήσουμε την f_r^{max} κατά έναν θετικό αριθμό δ, τότε η αύξηση στη τιμή της $d_{u'}$ θα είναι τουλάχιστον $(n-1)$ φορές μεγαλύτερη από αυτή της d_u. Ενώ κατά την προσθήκη ροής στο μονοπάτι p το εσωτερικό της d_u θα αυξάνεται, ενώ της $d_{u'}$ θα μειώνεται, με αποτέλεσμα όσο η ροή του p μεγαλώνει αυτή η ψαλίδα μεταξύ των δύο συναρτήσεων να μη μειώνεται, λόγω concavity (αν οι συναρτήσεις ήταν strictly concave τότε θα αυξανόταν αυστηρά). Άρα μέχρι να φτάσει το p σε saturation, δηλαδή για f_p και f_r, τέτοια ώστε $d_u(f_p + f_r) < \frac{T}{n}$, θα ισχύει

$$d_{u'}(f_r) - d_{u'}(f_r - \delta) > (n-1)\cdot(d_u(f_p + f_r + \delta) - d_u(f_p + f_r)), \delta > 0 \tag{6.9}$$

Μια δεύτερη ερμηνεία της τελευταίας σχέσης είναι ότι αν αυξήσουμε κατά x την είσοδο $f_p + f_r$ της d_u, τότε για να ισορροπήσουμε την αύξηση στην καθυστέρηση που θα προκληθεί λόγω αυτής της αλλαγής, θα χρειαζόταν να αφαιρέσουμε από την είσοδο f_r της $d_{u'}$ ποσότητα το πολύ $\frac{x}{n-1}$.

Θα επιστρέψουμε τώρα στις σχέσεις 1 και 2, από τις οποίες έχουμε ότι $d_u(f_p + f_r) < \frac{T}{n}$ (σχέση 6.1), άρα θα ισχύει σε αυτή την περίπτωση και η σχέση 6.9. Παρατηρώντας τη σχέση 6.4, βλέπουμε ότι η είσοδος $f_p + f_r$ της d_u αυξάνεται κατά $a - a_r$ και για να ισορροπήσουμε την αύξηση $d_u(f_p + f_r + a - a_r) - d_u(f_p + f_r)$, που θα προκληθεί στην καθυστέρηση και στην ουσία να επαναφέρουμε οριακά σε feasibility τα μονοπάτια $p_1, p_2, \ldots, p_n$, αφαιρούμε a_r από την είσοδο f_r της $d_{u'}$. Από την σχέση 6.9 όμως έχουμε ότι θα πρέπει να ισχύει

$$a_r < \frac{a - a_r}{n-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a > n \cdot a_r$$

$\square$

Παρατηρούμε ότι για τα base δίκτυα της μορφής του παραπάνω θεωρήματος υπάρχει μια ένα προς ένα σχέση μεταξύ των ροών f_p και f_r. Πιο συγκεκριμένα αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση καθυστέρησης d_u είναι αντιστρέψιμη, τότε μπορούμε να εκφράσουμε την f_p ως προς την f_r με την ακόλουθη συνάρτηση.

$$f_p(f_r) = d_u^{-1}(T - d_{u'}(f_r)) - f_r \tag{6.10}$$

Θεώρημα 6.3. *Η συνάρτηση $f_p(f_r)$ είναι γνησίως φθίνουσα και convex.*

Απόδειξη. Η $-d_{u'}$ είναι convex και γνησίως φθίνουσα.

Λήμμα 6.1. *Έστω μια αντιστρέψιμη συνάρτηση $f : \Delta \to \Omega$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και concave. Η αντίστροφη της f^{-1} θα είναι γνησίως αύξουσα και convex.*

Απόδειξη. Αφού η f είναι convex, για x, $y \in \Delta$ θα ισχύει

$$f(a \cdot x + b \cdot y) \geq a \cdot f(x) + b \cdot f(y), \forall a, b \in \mathbb{R} > 0 : a + b = 1$$

Ακόμα από τη στιγμή που η f είναι γνησίως αύξουσα, το ίδιο θα ισχύει και για την αντιστροφή της. Οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(f(a \cdot x + b \cdot y)) \geq f^{-1}(a \cdot f(x) + b \cdot f(y)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow a \cdot x + b \cdot y \geq f^{-1}(a \cdot f(x) + b \cdot f(y)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow a \cdot f^{-1}(f(x)) + b \cdot f^{-1}(f(y)) \geq f^{-1}(a \cdot f(x) + b \cdot f(y))
\end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι η f^{-1} είναι όντως convex.

□

Λήμμα 6.2. *Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και convex και μια συνάρτηση g, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και convex. Η σύνθεσή τους $f \circ g$ θα είναι γνησίως φθίνουσα και convex.*

Απόδειξη. Έχουμε $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ και $f(g(x))'' = f'(g(x)) \cdot g''(x) + f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 \geq 0$, άρα όντως η $f \circ g$ είναι convex. Με ευκολία επίσης φαίνεται ότι είναι και γνησίως φθίνουσα. □

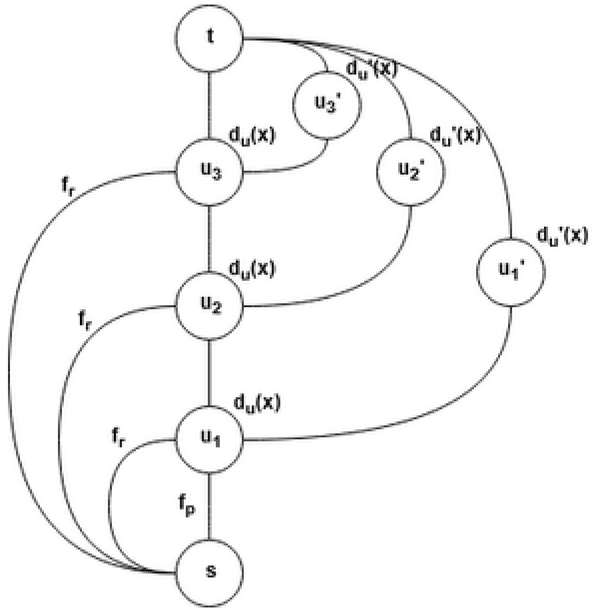
Σύμφωνα με το λήμμα 6.2 θα ισχύει ότι η $d_u^{-1}(T - d_{u'}(f_r))$ είναι γνησίως φθίνουσα και convex. Άρα όντως και η $f_p(f_r) = d_u^{-1}(T - d_{u'}(f_r)) - f_r$ είναι γνησίως φθίνουσα και convex. □

Σημειώνεται ότι στο παραπάνω θεώρημα βασίστηκε η διαίσθηση της απόδειξης του θεωρήματος 6.2. Ο λόγος που στην απόδειξη δόθηκε έμφαση στο σημείο $f_p = 0$, είναι επειδή σε εκείνο το σημείο το a_r θα είναι μέγιστο σε σχέση με το a, που θα προστεθεί. Αμέσως προκύπτει ότι το ίδιο θα ισχύει και για την ανάποδη σχέση.

Θεώρημα 6.4. *Η συνάρτηση $f_r(f_p)$ είναι γνησίως φθίνουσα και convex.*

Το βασικό συμπέρασμα, που μας χαρίζουν τα δύο τελευταία θεωρήματα είναι ότι κατά την αύξηση της f_p, δηλαδή κατά την προσθήκη ροής a στο μονοπάτι p του B, η f_r θα μειώνεται όλο και πιό αργά, άρα όσο περισσότερο a προσθέτω, τόσο λιγότερο a_r θα χρειάζεται να αφαιρώ, εννοείται αναλογικά, από τα υπόλοιπα μονοπάτια του B, με σκοπό να επανέλθει το feasibility τους.

Τώρα ήρθε η στιγμή να δείξουμε ένα παράδειγμα base δικτύου, για το οποίο δεν ισχύει η σχέση $a > \sum_{i\in[1,n]} a_i$. Έστω ένα στιγμιότυπο του AMOP, που αποτελείται από το δίκτυο 6.5 και ένα χρονικό όριο $T = 303$.



Δίκτυο 6.5

Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις καθυστέρησης του παραπάνω δικτύου είναι οι $d_u(x) = x$ και $d_{u'}(x) = x + c_r$, όπου $c_r = 300$. Θεωρούμε επίσης $a = 1$ και αρχικές συνθήκες $f_r = 1.5$, $f_p = 0$. Οι σχέσεις του δικτύου ύστερα από την προσθήκη του a θα έχουν γίνει

$$3 \cdot d_u(f_r + f_p + a - a_r) = 7.5 - 3 \cdot a_r < 303 \quad (6.11)$$

$$d_u(f_p + f_r + a - a_r) + d_{u'}(f_r - a_r) = 304 - 2 \cdot a_r = 303 \quad (6.12)$$

άρα $a_r = 0.5 < f_r$ και $3 \cdot a_r = 1.5 > a$.

Παρατηρούμε ότι ο λόγος, για τον οποίο δεν ισχύει η σχέση $a > \sum_{i\in[1,n]} a_i$ για το συγκεκριμένο base δίκτυο είναι ότι σε αντίθεση με τα δίκτυα του θεωρήματος 6.2 οι συναρτήσεις καθυστέρησης δεν μηδενίζονται στο μηδέν. Για την ακρίβεια το πρόβλημα εντοπίζεται στο ότι η c_r είναι μεγαλύτερη από την αρχική f_p. Άρα συμπεραίνουμε ότι αν η c_r είναι μεγαλύτερη από την αρχική f_p για κάποιο base δίκτυο της παραπάνω μορφής, τότε δεν θα ισχύει απαραίτητα η σχέση $a > \sum_{i\in[1,n]} a_i$, γεγονός που δείχνει ότι μάλλον δεν έχουμε πολλές ελπίδες να ορίσουμε μια σημαντική οικογένεια base δικτύων για τα οποία θα ισχύει πάντα η συγκεκριμένη σχέση.

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα που βγάλαμε σε αυτή την ενότητα μπορεί να είναι κάπως ασήμαντα, αλλά μας δίνουν μια σχετικά καλή διαίσθηση του γιατί ο αλγόριθμος της προηγούμενης ενότητας δεν δουλεύει και μας δείχνουν προς ποιά κατεύθυνση να προχωρήσουμε στη συνέχεια. Γενικά μέσα από το συγκεκριμένο κομμάτι της εργασίας αποκτήσαμε μια καλύτερη κατανόηση του τι συμβαίνει όταν προσθέτουμε ροή σε κάποιο μονοπάτι ενός δικτύου, χωρίς όμως να βλέπουμε ακόμα την πλήρη εικόνα και για αυτό το λόγο δεν επεκταθήκαμε σε περεταίρω ανάλυση και ερμηνεία των παραπάνω αποτελεσμάτων.

6.4 Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε σε αυτή την ενότητα μπορεί να είναι κάπως ασήμαντα, αλλά μας δίνουν μια σχετικά καλή διαίσθηση του γιατί ο αλγόριθμος της προηγούμενης ενότητας δεν δουλεύει και επίσης μας δείχνουν προς ποιά κατεύθυνση να συνεχίσουμε. Γενικά μέσα από το συγκεκριμένο κομμάτι της εργασίας αποκτήσαμε μια καλύτερη κατανόηση του τι συμβαίνει όταν προσθέτουμε ροή σε κάποιο μονοπάτι ενός δικτύου, χωρίς όμως να βλέπουμε ακόμα την πλήρη εικόνα. Για αυτό το λόγο δεν επεκταθήκαμε σε περεταίρω ανάλυση και ερμηνεία των παραπάνω αποτελεσμάτων.

Κεφάλαιο 7

Μελλοντική Δουλειά

Αρχικά θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά σε δύο επιπλέον μοντέλα που μελετήσαμε για το πρόβλημα μας. Η βασική διαφορά τους σε σχέση με τα μοντέλα που αναλύθηκαν προηγουμένως είναι ότι είναι δυναμικά ως προς τον χρόνο, τον οποίο θεωρούν διακριτό, ότι χωρίζεται δηλαδή σε T ισομεγέθη τμήματα. Άρα σε αντίθεση με τα προηγούμενα, στα συγκεκριμένα μοντέλα παίζει ρόλο εκτός από το ποιούς κόμβους θα επισκεφθεί κάθε παίκτης και η σειρά με την οποία θα το κάνει. Το πρώτο μοντέλο είναι πολύ παρόμοιο με εκείνο, με το οποίο ασχολούνται στο [7] με ορισμένες παραλλαγές. Αναλυτικότερα, κάθε κόμβος εξυπηρετεί το πολύ έναν παίκτη κάθε χρονική στιγμή, ενώ ο χρόνος διάσχισης μιας ακμής είναι ίσος με ένα. Αν περισσότεροι του ενός παίκτη βρίσκονται στον ίδιο κόμβο την ίδια χρονική στιγμή, τότε με κάποιον κανόνα προτεραιότητας επιλέγεται το ποιός θα εξυπηρετηθεί, ενώ όλοι οι άλλοι θα περιμένουν στην ουρά αναμονής του κόμβου, μέχρι να έρθει η σειρά τους να εξυπηρετηθούν. Μερικοί κανόνες που εξετάσαμε ήταν οι FIFO, IDs, κέρδος παίκτη μέχρι εκείνη τη στιγμή και προτεραιότητα εισερχόμενης ακμής (βλ. [54]). Για το συγκεκριμένο μοντέλο του MOP δείξαμε ότι σε κάποιες λίγες περιπτώσεις υπάρχει NE, χωρίς όμως να βγάλαμε τελικά κάποιο αξιοσημείωτο αποτέλεσμα. Μπορεί το συγκεκριμένο μοντέλο να αντικατοπτρίζει καλύτερα την πραγματικότητα σε σχέση με τα προηγούμενα, αλλά θεωρήσαμε ότι η μεγάλη δυσκολία που συναντήσαμε στο να το προσεγγίσουμε, το κάνει κάπως θεωρητικά αδιάφορο, τουλάχιστον στην προκειμένη φάση. Στο δεύτερο μοντέλο θεωρήσαμε ότι ο συνωστισμός σε κάποιον κόμβο δεν πληρώνεται από τους παίκτες με χρονική καθυστέρηση, αλλά με μείωση στο κέρδος που θα αποκομίσουν από εκείνο τον κόμβο. Για το συγκεκριμένο μοντέλο, όπως και για κάποιες παραλλαγές του, καταφέραμε να ορίσουμε potential functions. Παρ' όλα αυτά το ότι έχουν μελετηθεί αρκετά παρόμοια με αυτό προβλήματα (βλ. [12, 57]), σε συνδυασμό με το ότι το χαρακτηρίζει μια σχετική ευκολία και το ότι ξεφεύγει από τα πλαίσια του κλασικού orienteering problem, μας οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι δεν άξιζε να ασχοληθούμε περαιτέρω με το συγκεκριμένο μοντέλο. Καταλήγουμε λοιπόν, στο ότι κατά την άποψη μας τα δύο μοντέλα που παρουσιάσαμε παραπάνω, δεν εμφανίζουν κάποιο ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον .

Τα τέσσερα μοντέλα, με τα οποία προσεγγίσαμε το MOP σε αυτή την διπλωματική εργασία ήταν, με τη σειρά με την οποία τα δουλέψαμε, το μοντέλο με τις ουρές, το profit sharing, το AMOP και τέλος το NMOP. Θεωρούμε ότι το μοναδικό το οποίο έχει προοπτικές για θεωρητική έρευνα είναι το τελευταίο. Ένα λογικό και ιδανικό επόμενο βήμα θα ήταν να κατασκευαστεί ένας αποδοτικός και ακριβής αλγόριθμος εύρεσης NE, είτε για αρχικά άδειο δίκτυο είτε για μια αρχική κατανομή ροής. Με βάση μάλιστα τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 2 θα ήταν εύλογο να εξεταστεί η περίπτωση ενός exterior point αλγορίθμου (βλ.

ςιτεπαπαρριζοσ1991ινφεασιβλε). Επίσης θα άξιζε να μελετηθεί μήπως υπάρχουν συνθήκες στα δίκτυα, οι οποίες να εξασφαλίζουν bounded PoA. Στην περίπτωση τώρα των series parallel δικτύων, θα ήταν χρήσιμο να συνεχιστεί η ιδέα του αλγορίθμου που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 6.1 και να προσδιοριστεί το πόσο αποδοτικός μπορεί να γίνει. Επιπλέον κυρίως και για λόγους πληρότητας θα ήταν ωφέλιμο να γίνει μια βαθύτερη μελέτη αναφορικά με την εφαρμογή του convex optimization στο πρόβλημα μας. Τέλος πιστεύουμε ότι θα ήταν αρκετά σημαντικό, όλα τα θεωρητικά αποτελέσματα πάνω στο MOP να δοκιμαστούν σε πραγματικά δεδομένα, για να ελεγχθεί αν μπορούν τελικά να φανούν χρήσιμα σε πρακτικές εφαρμογές.

Bibliography

[1] Heiner Ackermann, Heiko Röglin, and Berthold Vöcking. "On the impact of combinatorial structure on congestion games". In: *Journal of the ACM (JACM)* 55.6 (2008), p. 25.

[2] Sebastian Aland et al. "Exact price of anarchy for polynomial congestion games". In: *SIAM Journal on Computing* 40.5 (2011), pp. 1211–1233.

[3] Baruch Awerbuch, Yossi Azar, and Amir Epstein. "The price of routing unsplittable flow". In: *Proceedings of the thirty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing*. ACM. 2005, pp. 57–66.

[4] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.

[5] Ioannis Caragiannis et al. "Tight bounds for selfish and greedy load balancing". In: *Algorithmica* 61.3 (2011), pp. 606–637.

[6] I-Ming Chao, Bruce L Golden, and Edward A Wasil. "The team orienteering problem". In: *European journal of operational research* 88.3 (1996), pp. 464–474.

[7] Cen Chen, Shih-Fen Cheng, and Hoong Chuin Lau. "Multi-agent orienteering problem with time-dependent capacity constraints". In: *Web Intelligence and Agent Systems: An International Journal* 12.4 (2014), pp. 347–358.

[8] George Christodoulou and Elias Koutsoupias. "The price of anarchy of finite congestion games". In: *Proceedings of the thirty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing*. ACM. 2005, pp. 67–73.

[9] José R Correa, Andreas S Schulz, and Nicolás E Stier-Moses. "Selfish routing in capacitated networks". In: *Mathematics of Operations Research* 29.4 (2004), pp. 961–976.

[10] Avinash K Dixit and Susan Skeath. *Games of Strategy: Fourth International Student Edition*. WW Norton & Company, 2015.

[11] David Eppstein. "Parallel recognition of series-parallel graphs". In: *Information and Computation* 98.1 (1992), pp. 41–55.

[12] Amir Epstein, Michal Feldman, and Yishay Mansour. "Strong equilibrium in cost sharing connection games". In: *Games and Economic Behavior* 67.1 (2009), pp. 51–68.

[13] Alex Fabrikant, Christos Papadimitriou, and Kunal Talwar. "The complexity of pure Nash equilibria". In: *Proceedings of the thirty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing*. ACM. 2004, pp. 604–612.

[14] Fedor V Fomin and Andrzej Lingas. "Approximation algorithms for time-dependent orienteering". In: *Information Processing Letters* 83.2 (2002), pp. 57–62.

[15] Dimitris Fotakis. "A Selective Tour Through Congestion Games". In: *Algorithms, Probability, Networks, and Games*. Springer, 2015, pp. 223–241.

[16] Dimitris Fotakis. "Congestion games with linearly independent paths: Convergence time and price of anarchy". In: *International Symposium on Algorithmic Game Theory*. Springer. 2008, pp. 33–45.

[17] Dimitris Fotakis. "Stackelberg strategies for atomic congestion games". In: *Theory of Computing Systems* 47.1 (2010), pp. 218–249.

[18] Dimitris Fotakis, Spyros Kontogiannis, and Paul Spirakis. "Atomic congestion games among coalitions". In: *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*. Springer. 2006, pp. 572–583.

[19] Dimitris Fotakis, Spyros Kontogiannis, and Paul Spirakis. "Selfish unsplittable flows". In: *Theoretical Computer Science* 348.2-3 (2005), pp. 226–239.

[20] Dimitris Fotakis, Spyros Kontogiannis, and Paul Spirakis. "Symmetry in network congestion games: Pure equilibria and anarchy cost". In: *International Workshop on Approximation and Online Algorithms*. Springer. 2005, pp. 161–175.

[21] Damianos Gavalas et al. "A survey on algorithmic approaches for solving tourist trip design problems". In: *Journal of Heuristics* 20.3 (2014), pp. 291–328.

[22] R Gibbons. "Game Theory for Applied Economists, Princeton University Press, Princeton, NJ, US". In: (1992).

[23] Michel Goemans, Vahab Mirrokni, and Adrian Vetta. "Sink equilibria and convergence". In: *46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'05)*. IEEE. 2005, pp. 142–151.

[24] Bruce L Golden, Larry Levy, and Rakesh Vohra. "The orienteering problem". In: *Naval Research Logistics (NRL)* 34.3 (1987), pp. 307–318.

[25] Laurent Gourvès et al. "Congestion games with capacitated resources". In: *Theory of Computing Systems* 57.3 (2015), pp. 598–616.

[26] Aldy Gunawan, Hoong Chuin Lau, and Pieter Vansteenwegen. "Orienteering problem: A survey of recent variants, solution approaches and applications". In: *European Journal of Operational Research* 255.2 (2016), pp. 315–332.

[27] Tobias Harks, Max Klimm, and Rolf H Möhring. "Characterizing the existence of potential functions in weighted congestion games". In: *Theory of Computing Systems* 49.1 (2011), pp. 46–70.

[28] Brian Hayes. "Computing science: The easiest hard problem". In: *American Scientist* 90.2 (2002), pp. 113–117.

[29] Taylan Ilhan, Seyed MR Iravani, and Mark S Daskin. "The orienteering problem with stochastic profits". In: *Iie Transactions* 40.4 (2008), pp. 406–421.

[30] David S Johnson, Christos H Papadimitriou, and Mihalis Yannakakis. "How easy is local search?" In: *Journal of computer and system sciences* 37.1 (1988), pp. 79–100.

[31] Shizuo Kakutani et al. "A generalization of Brouwer's fixed point theorem". In: *Duke mathematical journal* 8.3 (1941), pp. 457–459.

[32] Spyros Kontogiannis and Paul Spirakis. “Atomic selfish routing in networks: A survey”. In: *International Workshop on Internet and Network Economics*. Springer. 2005, pp. 989–1002.

[33] Richard E Korf. “A complete anytime algorithm for number partitioning”. In: *Artificial Intelligence* 106.2 (1998), pp. 181–203.

[34] Elias Koutsoupias and Christos Papadimitriou. “Worst-case equilibria”. In: *Computer science review* 3.2 (2009), pp. 65–69.

[35] Walid Krichene, Benjamin Drighès, and Alexandre M Bayen. “Online learning of nash equilibria in congestion games”. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 53.2 (2015), pp. 1056–1081.

[36] Nacima Labadie et al. “The team orienteering problem with time windows: An lp-based granular variable neighborhood search”. In: *European Journal of Operational Research* 220.1 (2012), pp. 15–27.

[37] Lavy Libman and Ariel Orda. “Atomic resource sharing in noncooperative networks”. In: *Telecommunication systems* 17.4 (2001), pp. 385–409.

[38] Thomas Lücking et al. “A new model for selfish routing”. In: *Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*. Springer. 2004, pp. 547–558.

[39] Andrew McLennan, Paulo K Monteiro, and Rabee Tourky. “Games with discontinuous payoffs: a strengthening of Reny’s existence theorem”. In: *Econometrica* 79.5 (2011), pp. 1643–1664.

[40] Igal Milchtaich. “Congestion games with player-specific payoff functions”. In: *Games and economic behavior* 13.1 (1996), pp. 111–124.

[41] Dov Monderer and Lloyd S Shapley. “Potential games”. In: *Games and economic behavior* 14.1 (1996), pp. 124–143.

[42] Roger B Myerson. “Game Theory: Analysis of Conflict, Harvard U”. In: *Press, Cambridge, MA* (1991).

[43] John Nash. “Non-cooperative games”. In: *Annals of mathematics* (1951), pp. 286–295.

[44] John F Nash et al. “Equilibrium points in n-person games”. In: *Proceedings of the national academy of sciences* 36.1 (1950), pp. 48–49.

[45] J v Neumann. “Zur theorie der gesellschaftsspiele”. In: *Mathematische annalen* 100.1 (1928), pp. 295–320.

[46] Noam Nisan et al. *Algorithmic game theory*. Cambridge university press, 2007.

[47] Panagiota N Panagopoulou and Paul G Spirakis. “Algorithms for pure Nash equilibria in weighted congestion games”. In: *Journal of Experimental Algorithmics (JEA)* 11 (2007), pp. 2–7.

[48] Christos H Papadimitriou. *Computational complexity*. John Wiley and Sons Ltd., 2003.

[49] Konstantinos Paparrizos. “An infeasible (exterior point) simplex algorithm for assignment problems”. In: *Mathematical Programming* 51.1-3 (1991), pp. 45–54.

[50] Philip J Reny. "On the existence of pure and mixed strategy Nash equilibria in discontinuous games". In: *Econometrica* 67.5 (1999), pp. 1029–1056.

[51] Robert W Rosenthal. "A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria". In: *International Journal of Game Theory* 2.1 (1973), pp. 65–67.

[52] Tim Roughgarden. "The price of anarchy is independent of the network topology". In: *Journal of Computer and System Sciences* 67.2 (2003), pp. 341–364.

[53] Tim Roughgarden and Éva Tardos. "How bad is selfish routing?" In: *Journal of the ACM (JACM)* 49.2 (2002), pp. 236–259.

[54] Robert Scheffler, Martin Strehler, and Laura Vargas Koch. "Equilibria in Routing Games with Edge Priorities". In: *International Conference on Web and Internet Economics*. Springer. 2018, pp. 408–422.

[55] Yoav Shoham and Kevin Leyton-Brown. *Multiagent systems: Algorithmic, game-theoretic, and logical foundations*. Cambridge University Press, 2008.

[56] Ted S Sindlinger. *Crowdsourcing: Why the Power of the Crowd is Driving the Future of Business*. 2010.

[57] Vasilis Syrgkanis. "The complexity of equilibria in cost sharing games". In: *International Workshop on Internet and Network Economics*. Springer. 2010, pp. 366–377.

[58] Robert Endre Tarjan and Anthony E Trojanowski. "Finding a maximum independent set". In: *SIAM Journal on Computing* 6.3 (1977), pp. 537–546.

[59] John Von Neumann, Oskar Morgenstern, and Harold William Kuhn. *Theory of games and economic behavior (commemorative edition)*. Princeton university press, 2007.

[60] Man-Ching Yuen, Irwin King, and Kwong-Sak Leung. "A survey of crowdsourcing systems". In: *2011 IEEE Third International Conference on Privacy, Security, Risk and Trust and 2011 IEEE Third International Conference on Social Computing*. IEEE. 2011, pp. 766–773.