



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Η/Υ
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής

Διπλωματική Εργασία

Συμφωνία Θέσης Μεταξύ Ρομποτικού Χειριστή και Κινούμενου Ρομπότ

Χαράλαμπος Ρούλιος

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ελλάδα, Σεπτέμβριος 2019



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Η/Υ
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής

Διπλωματική Εργασία

Underactuated Consensus Between Robotic Manipulator and Mobile Robot

Χαράλαμπος Ρούλιος

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης, Λέκτορας Ε.Μ.Π
Εγκρίθηκε από την τριμελή επιτροπή την 22^α Οκτώβρη 2019.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Χ. Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π

.....
Κ. Τζαφέστας
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Κ. Κυριακόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π

(Υπογραφή)

Ρούλιος Χαράλαμπος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Η/Υ Ε.Μ.Π

Copyright 51(2019) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights reserved.
First release, October 2019

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

This work is licensed under a Creative Commons “Attribution-NonCommercial - ShareAlike 3.0 Unported” license.



Περίληψη στα Ελληνικά

Ο τομέας της ρομποτικής είναι ένας τεράστιος τομέας της επιστημονικής έρευνας τις τελευταίες δεκαετίες. Εφόσον τα ρομπότ εν γένει είναι απλά κινούμενες μηχανικές δομές, με σκοπό να βοηθούν τους ανθρώπους σε διάφορες εργασίες, μπορούμε να συναντήσουμε διάφορα είδη ρομπότ, όπως επίγεια ρομποτικά οχήματα (ground mobile robots), εναέρια ρομπότ (Unmanned Aerial Vehicle - UAV), υποβρύχια ρομπότ (underwater robots), ρομποτικοί βραχίονες-χειριστές (robotic manipulators) ή και συνδυασμούς των προηγούμενων, όπως κινητοί βραχίονες (mobile manipulators).

Για τους σκοπούς της διπλωματικής αυτής, θα εστιάσουμε στη μοντελοποίηση και στον έλεγχο των επίγειων ρομποτικών οχημάτων και των ρομποτικών χειριστών. Εφαρμογές των ρομποτικών οχημάτων συναντούνται παντού, από απλές εφαρμογές σε αποθήκες έως και σε αυτόνομα οχήματα και στην εξερεύνηση αχαρτογράφητων εξωτερικών περιοχών. Από την άλλη πλευρά, οι ρομποτικοί χειριστές βρίσκουν κυρίως εφαρμογές στη βιομηχανία.

Η έρευνα που πραγματοποιείται στην εργασία αυτή, είναι αφοσιωμένη στην συμφωνία μεταξύ ενός επίγειου ρομποτικού οχήματος και ενός ρομποτικού βραχίονα, έτσι ώστε να συναντηθούν σε μια κοινή θέση. Πιο συγκεκριμένα, ο σκοπός είναι να ελεγχθούν τα 2 ρομπότ με τρόπο ώστε να φτάσουν σε μία κοινή θέση, η οποία να πληροί κάποιους περιορισμούς, ενώ παράλληλα να μεγιστοποιείται το δυνατόν περισσότερο μια δοσμένη συνάρτηση, η οποία θα αφορά τον τον ρομποτικό χειριστή.

Υπάρχουν γενικά δύο προσεγγίσεις για την επίλυση του προβλήματος, η *offline* προσέγγιση και η *online* προσέγγιση, οι οποίες θα εξεταστούν και οι δύο. Η *offline* προσέγγιση, αποτελείται από δύο βασικά βήματα, το πρώτο βήμα αφορά τον εκ των προτέρων προσδιορισμό μιας κατάλληλης τελικής θέσης για την συνάντηση των δύο ρομπότ και το δεύτερο βήμα αφορά τον έλεγχο των δύο ρομπότ ανεξάρτητα, έτσι ώστε να φθάσουν στην επιθυμητή θέση που επιλέχτηκε στο προηγούμενο βήμα. Από την άλλη, η *online* προσέγγιση περιλαμβάνει έναν άμεσο έλεγχο των δύο ρομπότ, ο οποίος επιχειρεί να πετύχει τον ίδιο τελικό σκοπό, χωρίς όμως κάποια εκ των προτέρων γνώση για το που θα καταλήξουν να συναντηθούν.

Στην εργασία αυτή, προτείνονται κάποια σχήματα ελέγχου και για την *offline* αλλά και για την *online* περίπτωση, τα οποία βασίζονται κυρίως στην ανάλυση πλεοναστότητας, σε ότι αφορά τον ρομποτικό βραχίονα και στους αλγορίθμους ελέγχου για μονόκυκλο, σε ότι αφορά το ρομποτικό όχημα. Οι προτεινόμενες λύσεις θα αναλυθούν πρώτα μαθηματικά, έτσι ώστε να βεβαιωθούμε για την ευστάθεια του συνολικού συστήματος, ενώ στη συνέχεια η εγκυρότητα των προτεινόμενων λύσεων θα επιβεβαιωθεί μέσω προσομοιώσεων.

Λέξεις κλειδιά: Συμφωνία, Χειριστής, Βραχίονας, Τροχοφόρο Ρομπότ, Δείκτης Ικανότητας Χειρισμού, Πλεοναστότητα, Ρύθμιση Στάσης, Παρακολούθηση Τροχιάς, Επιγραμμικός Έλεγχος

Abstract in English

Robotics have been a huge field of study over the past few decades. Since generally robots are mechanical structures capable of moving, aiming to assist humans in their tasks, we can meet various types of robots, such as ground mobile robots, aerial robots (Unmanned Aerial Vehicle - UAV), underwater robots, robotic arms (manipulators), or even combinations of those types, such as mobile manipulators.

For our purposes, we will focus on the modelling and control of ground-vehicle mobile robots and robotic manipulators. Applications of mobile robotics can be found anywhere from simple warehouse tasks, to self-driving cars and unknown outdoor environment exploration. On the other hand, robotic manipulators have mainly industrial usage.

This work is dedicated to the consensus between a ground mobile robot and a robotic manipulator, so that they meet at a common location. More specifically, the goal is to control the two robots in a way that they reach a common position with some given constraints, while trying to maximize a given function concerning the manipulator.

There are in general two approaches for the problem, the offline approach and the online approach, which are both investigated in this document. The offline approach consists of two distinct steps, the first step is to a-priori determine a suitable final position for the two robots to meet and the second step is to control each robot independently, so that they both reach their previously selected pose. Meanwhile, the online approach involves a direct control of the robots, which attempts to achieve our goal, without any previous knowledge of the robots' final destination.

In this thesis, there are proposed some control schemes for both the offline and the online case, based mostly on the redundancy analysis regarding the manipulator and on the control algorithms for unicycles, regarding the mobile robot. The proposed solutions are firstly analyzed mathematically, in order to ensure the control scheme's stability and afterwards they are applied to simulations, in order to confirm their validity.

Keywords: Consensus, Manipulator, Wheeled Mobile Robot, WMR, Manipulability Index, Redundancy, Pose Stabilization, Trajectory Tracking, Online Control

Ευχαριστίες

Πρώτα από όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων μου, τον καθηγητή Κωνσταντίνο Ι. Κυριακόπουλο, όχι μόνο για την καθοδήγηση του και για το ότι ήταν πάντα στο πλάι μου όποτε τον χρειαζόμουν, αλλά και για το γεγονός ότι μου έδειξε τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η έρευνα και για το ότι με βοήθησε να πάρω αποφάσεις για τα επόμενα βήματα της επαγγελματικής μου καριέρας. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Κωνσταντίνο Τζαφέστα, ο οποίος είναι καθηγητής ρομποτικής στο τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ, καθώς ήταν το άτομο που με έκανε να αγαπήσω και να επιλέξω την ρομποτική ως τον τομέα που θα ασχοληθώ στο μέλλον.

Τέλος, θα ήθελα φυσικά να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την υποστήριξη τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου αλλά και για τις συμβουλές τους, οι οποίες με έκαναν να κάνω τις σωστές επιλογές τόσο στον προσωπικό όσο και στον επαγγελματικό τομέα.

Χαράλαμπος Ρούλιος,
Αθήνα, Ελλάδα, Σεπτέμβριος 2019

Περιεχόμενα

Περίληψη στα Ελληνικά	i
Abstract in English	ii
Ευχαριστίες	iii
Κατάλογος Σχημάτων	vi
1 Πρόλογος	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Ορισμός του προβλήματος	7
1.3 Προσέγγιση Λύσης	11
1.4 Δομή διπλωματικής εργασίας	11
2 Μοντελοποίηση ρομποτικών χειριστών	12
2.1 Ευθεία κινηματική	12
2.2 Αντίστροφη Κινηματική	14
2.3 Διαφορική κινηματική	15
2.3.1 Ιακωβιανή Μήτρα	15
2.3.2 Υπολογισμός Ιακωβιανής	16
2.3.3 Κινηματικές Ιδιομορφίες	18
2.4 Ανάστροφη Διαφορική Κινηματική	18
2.4.1 Ανάλυση για τετραγωνικές Ιακωβιανές μήτρες	18
2.4.2 Ανάλυση για Χειριστές με Πλεονάζοντες Βαθμούς Ελευθερίας	19
2.4.3 Προσεγγιστική αντιστροφή σε περιοχές ιδιομορφίας	22
2.5 Δείκτες ικανότητας χειρισμού	22
3 Μοντελοποίηση Κινούμενων ρομπότ	25
3.1 Ολόνομοι Και Μη Ολόνομοι Περιορισμοί	25
3.2 Κινηματικό μοντέλο	26
3.2.1 Κινηματικό Μοντέλο Μονόκυκλου	27
3.2.2 Κινηματικό Μοντέλο Δίκυκλου	28
4 Offline Συμφωνία των Ρομπότ	31
4.1 Ανασκόπηση του προβλήματος	31
4.1.1 Τελικός προσανατολισμός των ρομπότ	32

4.1.2	Κατεύθυνση άφιξης του χειριστή	35
4.1.3	Επιλογή συνάρτησης H προς μεγιστοποίηση	36
4.2	Επιλογή ενός βέλτιστου σημείου συνάντησης	37
4.2.1	Χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange	38
4.2.2	Εχμετάλλευση πλεοναστότητας του χειριστή για τη συγκεκριμένη εργασία	41
4.3	Έλεγχος των ρομπότ ώστε να φτάσουν στο βέλτιστο σημείο	44
4.3.1	Έλεγχος του ρομποτικού χειριστή	44
4.3.2	Έλεγχος ενός κινούμενου ρομπότ τύπου μονόκυκλου	50
4.3.3	Έλεγχος ενός κινούμενου ρομπότ τύπου αμαξιδίου	53
4.4	Εξέταση περίπτωσης κεκλιμένου επιπέδου	56
5	Online Συμφωνία των Ρομπότ	58
5.1	Έλεγχος του ρομποτικού χειριστή	59
5.2	Έλεγχος του κινούμενου ρομπότ	59
5.2.1	Σύγκλιση σφάλματος θέσης στο μηδέν	60
5.2.2	Σύγκλιση σφάλματος γωνίας στο μηδέν	61
6	Προσομοιώσεις	62
6.1	Προσομοιώσεις εύρεσης του βέλτιστου σημείου	63
6.1.1	Αλγόριθμος πολλαπλασιαστών Lagrange	63
6.1.2	Αλγόριθμος πλεοναστότητας	63
6.2	Προσομοιώσεις ελέγχου των ρομπότ	64
6.2.1	Έλεγχος του ρομποτικού χειριστή	64
6.2.2	Έλεγχος του κινούμενου ρομπότ	65
6.2.3	Έλεγχος των ρομπότ στην Online προσέγγιση	65
7	Συμπερασματικά Σχόλια	74
7.1	Συμπεράσματα	74
7.2	Μελλοντική έρευνα	75
A'	Κώδικας MATLAB	77
A'.1	Αλγόριθμος Πολλαπλασιαστών Lagrange	77
A'.2	Αλγόριθμος πλεοναστότητας και έλεγχος των δύο ρομπότ	81
A'.3	Online Προσέγγιση	88
	Bibliography	94

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Ο ρομποτικός χειριστής και το τελικό στοιχείο δράσης	2
1.2	Τα δύο είδη αρθρώσεων	2
1.3	Βραχίονες τριών (αριστερά) και έξι (δεξιά) βαθμών ελευθερίας	3
1.4	Τροχοφόρο κινούμενο όχημα (wheeled mobile robot)	4
1.5	Δίποδο βαδίζον ανθρωποειδές ρομπότ (αριστερά) και έξι σκελών βαδίζον ρομπότ (δεξιά)	4
1.6	Όχημα διαφορικής οδήγησης	6
1.7	Τρίκυκλο όχημα	6
1.8	Όχημα τύπου αυτοκινήτου	7
1.9	Τα διάφορα είδη τροχών	7
1.10	Οπτική αναπαράσταση του προβλήματος	8
1.11	Centralized/Decentralized δομή ελέγχου	9
1.12	Επίπεδο (αριστερά) και κεκλιμένο (δεξιά) έδαφος	10
2.1	Θέση και προσανατολισμός του τελικού στοιχείου δράσης	13
2.2	Συστήματα συντεταγμένων προσαρτημένα στα μέλη του ρομπότ	14
2.3	Ελλειψοειδές χειρισμικότητας ταχυτήτων	23
3.1	Μονόκυκλο	27
3.2	Δίκυκλο	29
4.1	Σχηματικό offline προσέγγισης λύσης	31
4.2	Γωνία του αντικειμένου ως προς τον κατακόρυφο άξονα	33
4.3	Γωνία του βραχίονα ως προς τον κατακόρυφο άξονα	34
4.4	Τελικός προσανατολισμός κινούμενου ρομπότ	34
4.5	Επιθυμητή συνάρτηση μεταβλητής z	35
4.6	Παράγωγος επιθυμητής συνάρτησης μεταβλητής z	36
4.7	Τροχιά των μεταβλητών των αρθρώσεων με βάση τον παραπάνω αλγόριθμο	43
4.8	Γεωμετρική αναπαράσταση γωνιών ϕ_e και θ_e	45
4.9	Τροχιά των μεταβλητών των αρθρώσεων με βάση τον παραπάνω αλγόριθμο	49
4.10	Νέες συντεταγμένες μονόκυκλου	51
4.11	Αρχική και επιθυμητή τελική διάταξη ρομπότ (αχνή μπλε γραμμή)	53
4.12	Διαδρομή από την αρχική στην τελική θέση	53

4.13 Αρχική και επιθυμητή τελική διάταξη ρομπότ (αχνή μπλε γραμμή)	55
4.14 Διαδρομή από την αρχική στην τελική θέση	55
4.15 Διαδρομή από την αρχική στην τελική θέση με αλλαγή φοράς κίνησης στη 1η φάση	55
4.16 Ο ρομποτικός χειριστής υπό κλίση	57
6.1 Ενεργές αρθρώσεις του ρομποτικού χειριστή	62
6.2 Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος γωνίας ϕ , του σφάλματος στον άξονα z και της συνάρτησης $H(\mathbf{q})$ μετά την εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange	67
6.3 Η αρχική διάταξη του ρομπότ (αριστερά) και η διάταξη $\mathbf{q}_f$ που προκύπτει μετά την εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange(δεξιά)	67
6.4 Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος γωνίας ϕ , του σφάλματος στον άξονα z και της συνάρτησης $H(\mathbf{q})$ μετά την εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange, στη περίπτωση κεκλιμένου επιπέδου	68
6.5 Η αρχική διάταξη του ρομπότ (αριστερά) και η διάταξη $\mathbf{q}_f$ που προκύπτει μετά την εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange(δεξιά), στη περίπτωση κεκλιμένου επιπέδου	68
6.6 Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος γωνίας ϕ , του σφάλματος στον άξονα z και της συνάρτησης $H(\mathbf{q})$ μετά την εφαρμογή της μεθόδου πλεοναστότητας, στη περίπτωση κεκλιμένου επιπέδου	69
6.7 Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος της γωνίας ϕ , του σφάλματος καρτεσιανής θέσης και της νόρμας του σφάλματος $\mathbf{q}_f - \mathbf{q}$ μετά την εφαρμογή του πρώτου σχήματος ελέγχου για τον ρομποτικό χειριστή	69
6.8 Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος της γωνίας ϕ , του σφάλματος καρτεσιανής θέσης της νόρμας του σφάλματος $\mathbf{q}_f - \mathbf{q}$ μετά την εφαρμογή του δεύτερου σχήματος ελέγχου για τον ρομποτικό χειριστή	70
6.9 Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος της γωνίας ϕ , του σφάλματος καρτεσιανής θέσης και της νόρμας του σφάλματος $\mathbf{q}_f - \mathbf{q}$ μετά την εφαρμογή του τρίτου σχήματος ελέγχου για τον ρομποτικό χειριστή	70
6.10 Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος της γωνίας ϕ , του σφάλματος καρτεσιανής θέσης και της νόρμας του σφάλματος $\mathbf{q}_f - \mathbf{q}$ μετά την εφαρμογή του τέταρτου σχήματος ελέγχου για τον ρομποτικό χειριστή	71
6.11 Γραφικές παραστάσεις του καρτεσιανού σφάλματος στο xy επίπεδο και του σφάλματος της γωνίας θ_m , μετά την εφαρμογή του νόμου ελέγχου για το κινούμενο ρομπότ τύπου μονόκυκλου	71
6.12 Αρχική και τελική διάταξη των ρομποτ στο gazebo	72
6.13 Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος παρακολούθησης της συνάρτησης $z_d(t)$, του σφάλματος της γωνίας ϕ και της συνάρτησης $H(\mathbf{q})$ κατά την εφαρμογή του online νόμου ελέγχου για τον ρομποτικό χειριστή	72
6.14 Γραφικές παραστάσεις του καρτεσιανού σφάλματος θέσης και του σφάλματος της γωνίας θ_m κατά την εφαρμογή του online νόμου ελέγχου για το κινούμενο ρομπότ	73

Κεφάλαιο 1

Πρόλογος

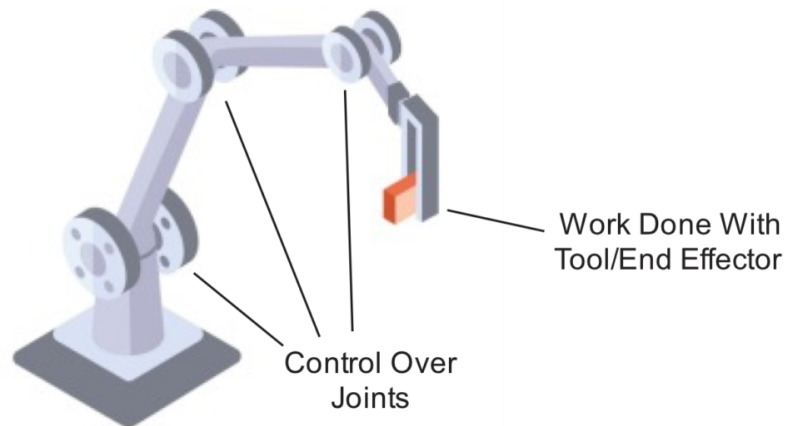
1.1 Εισαγωγή

Ρομποτική

Όπως αναφέρεται στο [1], η ρομποτική είναι ένας τομέας μελέτης εκείνων των μηχανών, οι οποίες μπορούν να αντικαταστήσουν τον άνθρωπο για την εκτέλεση εργασιών, σε ότι αφορά φυσικές δραστηριότητες και λήψη αποφάσεων. Υπάρχει μία ευρεία γκάμα εφαρμογών της ρομποτικής, όχι μόνο σε εργασίες επικίνδυνες ή αδύνατες για τον άνθρωπο, όπως εξερεύνηση τοξικών περιοχών ή άλλων πλανητών, άλλα και στη καθημερινή ζωή, όπως σε μη επανδρωμένα επιβατικά οχήματα ή σε αυτόματες συσκευές καθαρισμού. Φυσικά, η εξέλιξη που υφίσταται ο τομέας της ρομποτικής τις τελευταίες δεκαετίες έχει τεράστιο αντίκτυπο στην βιομηχανία, αφού η χρήση ρομπότ προσφέρει μεγάλο βαθμό αυτονομίας και ασφάλειας και έτσι η παραγωγική διαδικασία επιταχύνεται, ενώ παράλληλα το εργασιακό περιβάλλον γίνεται πιο ακίνδυνο για τους εργαζόμενους, εφόσον οι πιο επικίνδυνες εργασίες ανατίθενται σε ρομπότ. Στην εργασία αυτή θα επικεντρωθούμε κυρίως στην ανάλυση των *ρομποτικών χειριστών (robotic manipulators)* και των *επύχειων τροχοφόρων ρομπότ (ground wheeled mobile robots)*. Στις επόμενες παραγράφους θα γίνει μία γενική παρουσίαση αυτών των κατηγοριών ρομπότ, ενώ η μαθηματική τους μοντελοποίηση θα παρουσιαστεί στο κεφάλαιο 2.

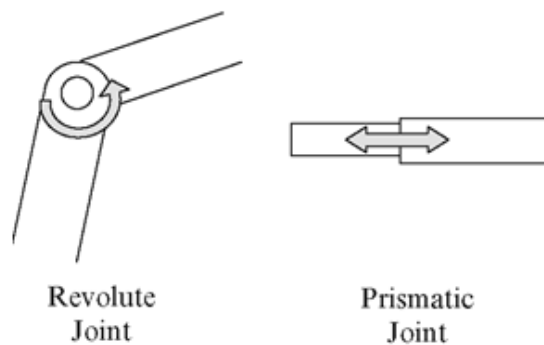
Ρομποτικοί βραχίονες-χειριστές

Η μηχανική δομή των ρομποτικών χειριστών χαρακτηρίζεται από τη σταθερή τους βάση, σε αντίθεση φυσικά με τα ρομποτικά οχήματα, των οποίων η βάση είναι κινητή. Η μηχανική δομή ενός ρομποτικού βραχίονα αποτελείται από μια ακολουθία στερεών σωμάτων (μέλη-links) τα οποία διασυνδέονται μέσω αρθρώσεων (joints). Ο όλος μηχανισμός είναι παρόμοιος πολλές φορές με τη δομή ενός ανθρώπινου χεριού, και για αυτό τα μηχανήματα αυτά ονομάζονται και ρομποτικοί βραχίονες. Πέρα από τον κύριο κορμό τους, οι ρομποτικοί χειριστές αποτελούνται επίσης από ένα *τελικό στοιχείο δράσης (end-effector)*, το οποίο ουσιαστικά είναι αυτό, που εκτελεί την επιθυμητή εργασία.



Σχήμα 1.1: Ο ρομποτικός χειριστής και το τελικό στοιχείο δράσης

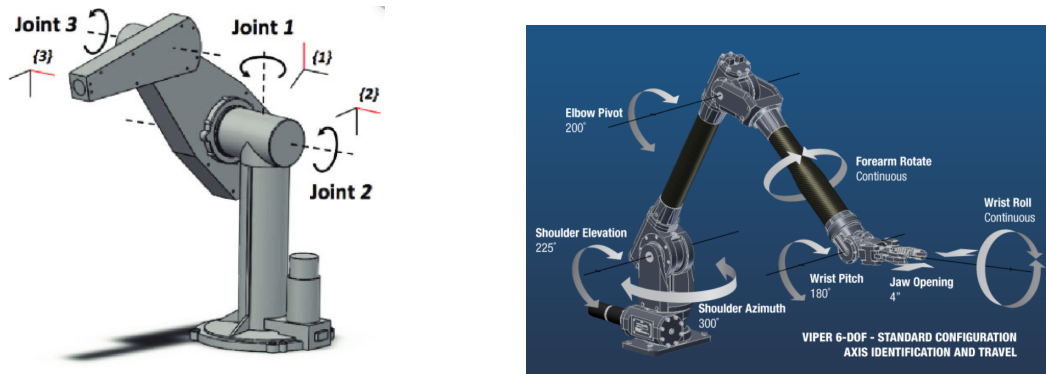
Η κίνηση μίας μηχανικής δομής τέτοιου τύπου, επιτυγχάνεται μέσω των αρθρώσεων. Οι τύποι αρθρώσεων που συναντώνται σε ρομποτικούς χειριστές είναι δύο, οι *πρισματικές αρθρώσεις* (*prismatic joints*) και οι *στροφικές αρθρώσεις* (*revolute joints*). Μία πρισματική άρθρωση δημιουργεί μια σχετική μεταφορική κίνηση μεταξύ των δύο μελών, ενώ μια στροφική άρθρωση δημιουργεί μια σχετική περιστροφική κίνηση μεταξύ των δύο μελών.



Σχήμα 1.2: Τα δύο είδη αρθρώσεων

Κάθε πρισματική ή περιστροφική άρθρωση του δομήματος, παρέχει έναν *βαθμό ελευθερίας* (*degree of freedom-DOF*) στη δομή, δηλαδή μία επιπλέον ανεξάρτητη μεταβλητή η οποία καθορίζει τη θέση του ρομπότ. Στη πιο γενική περίπτωση μίας εργασίας του ρομπότ στον τρισδιάστατο χώρο, απαιτούνται έξι β.ε στο δόμημα, τρεις για να μπορεί το δόμημα να τοποθετηθεί σε οποιοδήποτε σημείο στον χώρο και άλλοι τρεις για να μπορεί το δόμημα να έχει οποιοδήποτε προσανατολισμό, ως προς ένα σύστημα αναφοράς. Αν η εργασία προς εκτέλεση απαιτεί λιγότερους βαθμούς ελευθερίας από ότι έχει διαθέσιμους το η μηχανική δομή, τότε το ρομπότ έχει μεγαλύτερη ευελιξία κινήσεων και λέμε ότι ο ρομποτικός χειριστής είναι πλεονάζων,

από κινηματική οπτική γωνία. Ακόμη, ως *χώρο εργασίας (workspace)* ορίζουμε τον χώρο στον οποίο μπορεί να φτάσει το τελικό στοιχείο δράσης του ρομποτικού χειριστή, χώρος που φυσικά εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ρομπότ. Στο επόμενο σχήμα μπορούμε να δούμε δύο βραχίονες, έναν τριών και έναν έξι βαθμών ελευθερίας:



Σχήμα 1.3: Βραχίονες τριών (αριστερά) και έξι (δεξιά) βαθμών ελευθερίας

Τα χαρακτηριστικά του τελικού στοιχείου δράσης καθορίζονται σύμφωνα με την εργασία που θα πρέπει να εκτελέσει το ρομπότ. Για εργασίες χειρισμού υλικών, το τελικό στοιχείο δράσης αποτελείται από μια αρπάγη κατάλληλου σχήματος και διαστάσεων, που καθορίζονται από το αντικείμενο προς χειρισμό. Για εργασίες συναρμολόγησης, το τελικό στοιχείο δράσης είναι ένα εργαλείο ή μια ειδικευμένη συσκευή, όπως πιστόλι συγκολλήσεως ή ένα τρυπάνι. Επίσης, δεν είναι κάθε βραχίονας κατάλληλος για κάθε εργασία προς εκτέλεση, λόγω της διαφορετικής μηχανικής δομής που μπορεί να έχουν οι βραχίονες και έτσι η επιλογή ενός ρομπότ εξαρτάται από την εκάστοτε εφαρμογή, η οποία θέτει περιορισμούς στις διαστάσεις, το σχήμα του χώρου εργασίας και τη δυναμική επίδοση του χειριστή.

Κινούμενα ρομπότ

Το κύριο χαρακτηριστικό των κινούμενων ρομπότ (mobile robots) είναι η κινούμενη τους βάση, η οποία επιτρέπει στο ρομπότ να κινείται ελεύθερα στο περιβάλλον. Σε αντίθεση με τους χειριστές, τέτοια ρομπότ χρησιμοποιούνται κυρίως σε εφαρμογές όπου απαιτούνται εκτεταμένες, αυτόνομες ικανότητες κίνησης. Ένα τέτοιο ρομπότ είναι ένα μηχανικό κατασκεύασμα, το οποίο αποτελείται από ένα ή περισσότερα στερεά σώματα, εξοπλισμένα με ένα σύστημα κίνησης (locomotion system). Δύο βασικές κατηγορίες κινούμενων ρομπότ που πηγάζουν από τη παραπάνω περιγραφή είναι:

- Τα *τροχοφόρα κινούμενα ρομπότ (wheeled mobile robots)* αποτελούνται από μία βάση ή πλαίσιο και ένα σύστημα τροχών, το οποίο είναι υπεύθυνο για την κίνηση του ρομπότ. Τα ρομπότ αυτά μπορεί να διαθέτουν όχι μόνο διαφορετικό αριθμό αλλά και διαφορετικά είδη τροχών πάνω στο ίδιο ρομπότ, τα οποία θα δούμε πιο αναλυτικά παρακάτω.



Σχήμα 1.4: Τροχοφόρο κινούμενο όχημα (wheeled mobile robot)

- Τα *βαδίζοντα κινούμενα ρομπότ (legged mobile robots)* αποτελούνται από πολλαπλά στερεά σώματα, που διασυνδέονται με πρισματικές ή στροφικές αρθρώσεις και κάποια από τα οποία θυμίζουν σκέλη. Η περιοδική επαφή των σκελών αυτών με το έδαφος, είναι αυτή που προκαλεί την κίνηση του όλου δομήματος. Ρομπότ με τέτοια μηχανική δομή υπάρχουν σε μεγάλη ποικιλία, τα οποία πολλές φορές σχεδιάζονται ώστε να μιμούνται την κίνηση διαφόρων ζωντανών οργανισμών (βιομιμητική ρομποτική-biomimetic robotics), όπως δίποδα ανθρωποειδή ρομπότ, εξάποδα ρομπότ που επιχειρούν να υιοθετήσουν την κίνηση των εντόμων και πολλά άλλα.



Σχήμα 1.5: Δίποδο βαδίζον ανθρωποειδές ρομπότ (αριστερά) και έξι σκελών βαδίζον ρομπότ (δεξιά)

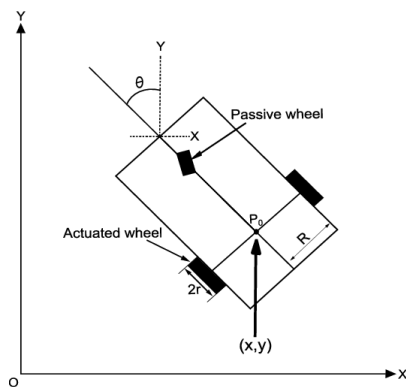
Στη συνέχεια παρουσιάζονται πιο λεπτομερώς τα τροχοφόρα οχήματα, εφόσον από τη μία αποτελούν τη συντριπτική πλειοψηφία των κινούμενων ρομπότ που χρησιμοποιούνται σε πραγματικές εφαρμογές και από την άλλη μας ενδιαφέρουν για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας. Το κύριο χαρακτηριστικό κάθε τροχοφόρου ρομπότ, είναι ο αριθμός και το είδος των τροχών του. Τα είδη των τροχών που χρησιμοποιούνται είναι τέσσερα και παρουσιάζονται παρακάτω,

ενώ φαίνονται οπτικά στο Σχ. 1.9:

- Ο *σταθερός τροχός (fixed wheel)* είναι ο πιο απλός τύπος τροχού και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του τροχού. Ο τροχός είναι άκαμπτα προσαρτημένος στο πλαίσιο και έτσι έχει πάντοτε σταθερό προσανατολισμό.
- Ο *καθοδηγήσιμος τροχός (steerable wheel)* έχει δύο άξονες περιστροφής. Ο πρώτος άξονας είναι ο ίδιος με τον έναν άξονα του σταθερού τροχού, ενώ ο δεύτερος άξονας είναι κάθετος στον πρώτο και διέρχεται από το κέντρο του τροχού, έτσι ώστε ο προσανατολισμός του τροχού να μπορεί να αλλάζει. Αυτό το είδος των τροχών χρησιμοποιείται για να ελέγχεται ο προσανατολισμός και η γωνιακή ταχύτητα του οχήματος.
- Ο *προσανατολιζόμενος τροχός (castor wheel)* έχει και αυτός δύο άξονες περιστροφής, εκ των οποίων ο πρώτος είναι ξανά ίδιος με τον άξονα περιστροφής του σταθερού τροχού. Ο δεύτερος άξονας είναι επίσης κάθετος, αλλά αυτή τη φορά είναι μετατοπισμένος από το κέντρο του τροχού, κατά μία σταθερά. Οι δύο αυτοί άξονες του τροχού προκαλούν μια αυτόματη περιστροφή του τροχού, με τρόπο ώστε να ευθυγραμμιστεί ο τροχός με την διεύθυνση κίνησης του οχήματος, ακολουθώντας δηλαδή την κίνηση που τείνει να εκτελέσει το υπόλοιπο δόμημα. Αυτός ο τύπος τροχού χρησιμοποιείται ως σημείο υποστήριξης για στατική ισορροπία, χωρίς να επηρεάζει την κινητικότητα του οχήματος, αφού ο σκοπός του είναι να ακολουθεί την διεύθυνση κίνησης του ρομπότ.
- Ο *Σουηδικός τροχός (Swedish wheel)* είναι πιο σύνθετος τροχός και αποτελείται από παθητικούς κυλίνδρους τοποθετημένους κατά μήκος του εξωτερικού χείλους και ο άξονας περιστροφής κάθε κυλίνδρου έχει συνήθως κλίση 45 μοίρες ως προς το επίπεδο του τροχού. Ένα όχημα εξοπλισμένο με τέσσερις τέτοιους τροχούς είναι παγκατευθυντικό (omnidirectional), δηλαδή μπορεί οποιαδήποτε στιγμή να κινηθεί προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, πράγμα που δεν είναι δυνατό σε συνηθισμένες διατάξεις με χρήση των προηγούμενων τροχών.

Συνδυάζοντας διαφορετικά είδη και αριθμούς τροχών, μπορούμε να λάβουμε αρκετά διαφορετικά είδη οχημάτων. Μερικές από τις πιο συνηθείς διατάξεις οχημάτων παρουσιάζονται στη συνέχεια:

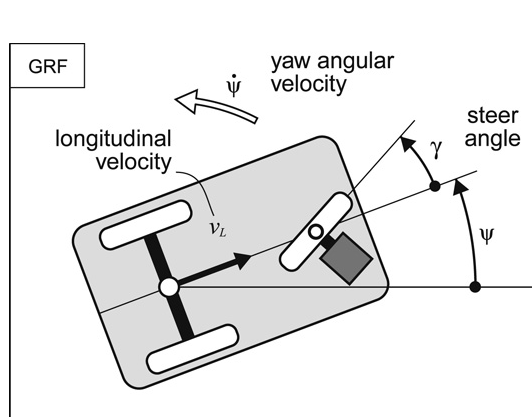
- Ένα όχημα *διαφορικής οδήγησης (differential-drive)* είναι εξοπλισμένο με δύο σταθερούς τροχούς (fixed wheels) με έναν κοινό άξονα περιστροφής και με έναν ή περισσότερους προσανατολιζόμενους τροχούς (castor wheels), των οποίων η λειτουργία είναι να κρατούν το όχημα σε στατική ισορροπία. Οι σταθεροί τροχοί ελέγχονται ανεξάρτητα, δηλαδή μπορεί να επιβληθεί μία γωνιακή ταχύτητα περί τον άξονα του ενός τροχού, ανεξάρτητα από τον άλλο, ενώ ο προσανατολιζόμενος τροχός έχει παθητική λειτουργία. Σε ένα τέτοιο ρομπότ μπορεί να γίνει ανεξάρτητος έλεγχος της γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας του, κάτι που μας ενδιαφέρει για την συνέχεια.



Σχήμα 1.6: Όχημα διαφορικής οδήγησης



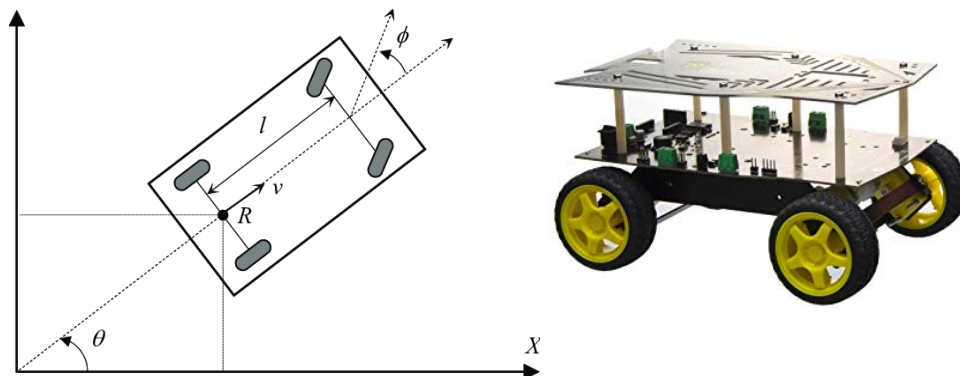
- Ένα τρίκυκλο (*tricycle*) όχημα έχει και αυτό δύο σταθερούς τροχούς, όπως και στη περίπτωση της διαφορικής οδήγησης, αλλά ο τρίτος τροχός αυτή τη φορά είναι καθοδηγήσιμος (*steerable*). Οι δύο σταθεροί τροχοί οδηγούνται από έναν ενιαίο κινητήρα ο οποίος ελέγχει τη ροπή έλξης τους, ενώ ο καθοδηγήσιμος τροχός ελέγχεται ανεξάρτητα από έναν δεύτερο κινητήρα μεταβάλλοντας τον προσανατολισμό του τροχού και άρα του οχήματος, αν αυτό κινείται. Μπορούν εναλλακτικά οι δύο σταθεροί τροχοί να έχουν παθητική λειτουργία, ενώ ο τρίτος τροχός να είναι υπεύθυνος για τον προσανατολισμό, αλλά και για την ταχύτητα του οχήματος οδηγούμενος από δύο κινητήρες.



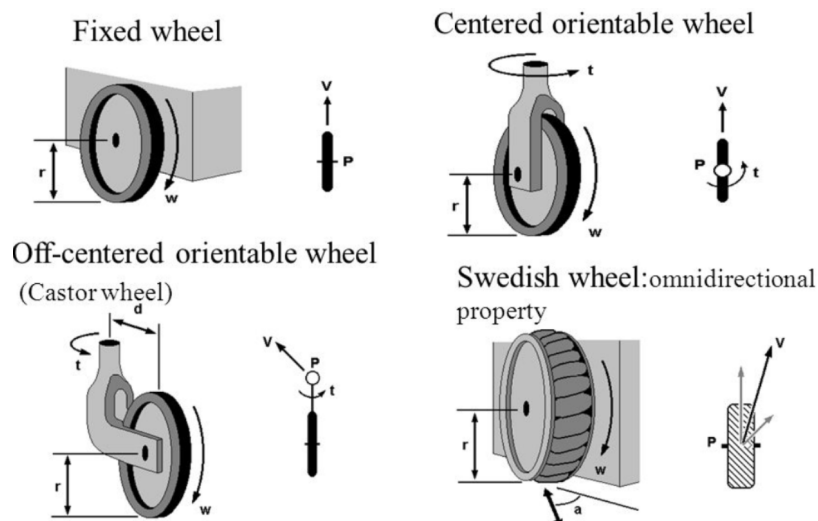
Σχήμα 1.7: Τρίκυκλο όχημα



- Ένα όχημα τύπου αυτοκινήτου (*car-like mobile robot*) έχει δύο σταθερούς τροχούς τοποθετημένους σε έναν πίσω άξονα και δύο καθοδηγήσιμους τροχούς σε έναν μπροστά άξονα. Στη περίπτωση αυτή, έχουμε ξανά δυο κινητήρες, ο ένας εκ των οποίων είναι υπεύθυνος για την εφαρμογή ροπή έλξης, είτε στον εμπρόσθιο, είτε στον οπίσθιο άξονα, ενώ ο άλλος μεταβάλλει τον προσανατολισμό των συζευγμένων μπροστινών τροχών. Σε αυτόν τον τύπο του οχήματος, οι μπροστινοί τροχοί θα πρέπει να έχουν διαφορετικό προσανατολισμό όταν το όχημα κινείται κατά μήκος καμπύλης τροχιάς. Η κινηματική αυτού του είδους ρομπότ θα παρουσιαστεί στο τρίτο κεφάλαιο.



Σχήμα 1.8: Όχημα τύπου αυτοκινήτου



Σχήμα 1.9: Τα διάφορα είδη τροχών

Τέλος, σε αντίθεση με την περίπτωση των ρομποτικών χειριστών, ο χώρος εργασίας ενός κινούμενου ρομπότ είναι δυνητικά απεριόριστος. Παρόλο που ένα κινούμενο ρομπότ μπορεί να φτάσει σε πεπερασμένο χρόνο οπουδήποτε στον χώρο, στη περίπτωση μη παγκατευθυντικών οχημάτων, η τοπική τους κινητικότητα υπόκειται σε περιορισμούς. Για παράδειγμα ένα τρίκυκλο ρομπότ δεν μπορεί να εκτελέσει στιγμιαία κίνηση παράλληλα στον άξονα των δύο τροχών, παρόλα αυτά είναι δυνατόν να φτάσει σε οποιονδήποτε επιθυμητό προορισμό στον χώρο.

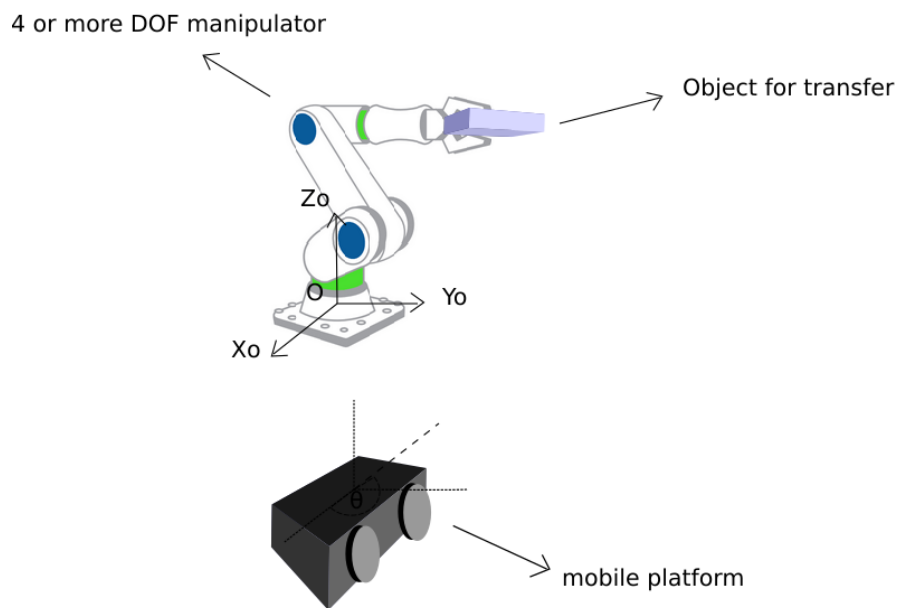
1.2 Ορισμός του προβλήματος

Το πρόβλημα συνίσταται στην συνεργασία και στη συμφωνία θέσης για τη μεταφορά ενός αντικειμένου, από έναν ρομποτικό χειριστή σταθερής βάσης (ο οποίος εν γένει θα έχει κάτω από 6 βαθμούς ελευθερίας), σε ένα μη ολονομικό κινούμενο ρομπότ. Πιο συγκεκριμένα, ζητείται

να γίνει, μια συμφωνία για τη θέση και τον προσανατολισμό που θα πρέπει να λάβει το κινούμενο ρομπότ αλλά και το τελικό στοιχείο δράσης του βραχίονα, έτσι ώστε η θέση αυτή να είναι εντός του workspace του βραχίονα, να πληρεί κάποιους περιορισμούς και να βρίσκεται μακριά από ιδιόμορφη διάταξη, έτσι ώστε να είναι δυνατή και εύκολη η τελική μεταφορά του αντικειμένου μεταξύ των δυο ρομπότ.

Το πρόβλημα έχει τα εξής χαρακτηριστικά, τα οποία μπορεί να αυξήσουν/μειώσουν ανάλογα τη δυσκολία του προβλήματος:

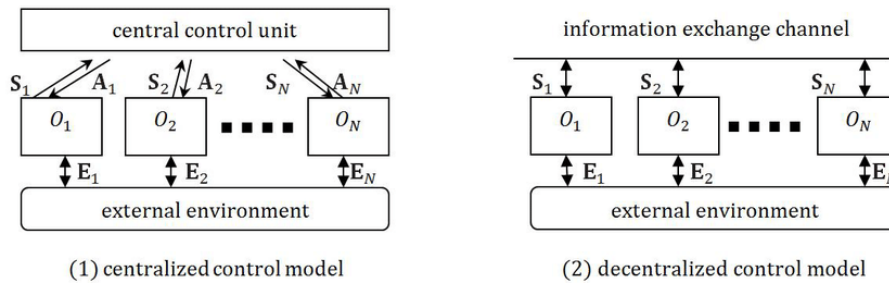
- Βαθμοί ελευθερίας του manipulator, 4 ή 5 ή 6+
- Τύπος του κινούμενου ρομπότ: μη ολονομικό/ολονομικό
- Τύπος προσέγγισης ελέγχου: offline/online
- Τύπος εδάφους: επίπεδο/κεκλιμένο
- Συντονισμός: centralized/decentralized



Σχήμα 1.10: Οπτική αναπαράσταση του προβλήματος

Σε ότι αφορά το τελευταίο από τα παραπάνω χαρακτηριστικά, δηλαδή τον συντονισμό, η εργασία αυτή επικεντρώνεται στην περίπτωση της centralized εκδοχής. Πρόκειται ουσιαστικά για την εφαρμογή ενός συγκεντρωτικού ελέγχου για τα δύο ρομπότ, υποθέτοντας ότι είναι γνωστές οι θέσεις και οι ταχύτητες και των δύο ρομπότ, κάθε χρονική στιγμή. Αυτή η μορφή ελέγχου μπορεί να αντιστοιχιστεί στην ύπαρξη μιας κεντρικής μονάδας ελέγχου και αποφάσεων, η οποία λαμβάνει τα δεδομένα κατάστασης των ρομπότ, τα επεξεργάζεται και στέλνει εντολές ελέγχου και στα δύο ρομπότ.

Από την άλλη μεριά, μία αποκεντρωμένη (decentralized) δομή ελέγχου θα σήμαινε ότι τα δύο ρομπότ είναι δύο εντελώς αυτόνομες και ανεξάρτητες υπάρξεις, οι οποίες λαμβάνουν δεδομένα από το περιβάλλον τους μέσω αισθητήρων και κινούνται αυτόνομα, χωρίς την παρεμβολή κάποιας ενδιάμεσης κεντρικής μονάδας επεξεργασίας. Σε μία τέτοια περίπτωση, η γνώση της κατάστασης του ενός ρομπότ από το άλλο, θα μπορούσε να μην είναι δεδομένη και να έπρεπε τα ρομπότ μέσω των αισθητήριων μονάδων τους (π.χ κάμερες) να αποκτήσουν πληροφορίες για το άλλο. Εναλλακτικά, ακόμη και αν υπήρχε κάποιος δίαυλος επικοινωνίας μεταξύ των ρομπότ, ενδιαφέρον για μελέτη θα είχε η περίπτωση όπου υπάρχουν προβλήματα στην επικοινωνία (καθυστερήση στην άφιξη σήματος, ελλιπής πληροφορία κ.α), με τελικό σκοπό πάντα τα ρομπότ να βρεθούν σε μια κοινή θέση. Εφόσον αυτό το κομμάτι είναι αρκετά ευρύ, μιας και μπορεί να οριστεί με αρκετούς τρόπους ένα τέτοιο decentralized πρόβλημα, αλλά και πιο σύνθετο από έναν centralized συντονισμό, αφήνεται στη παρούσα φάση για μελλοντική έρευνα.



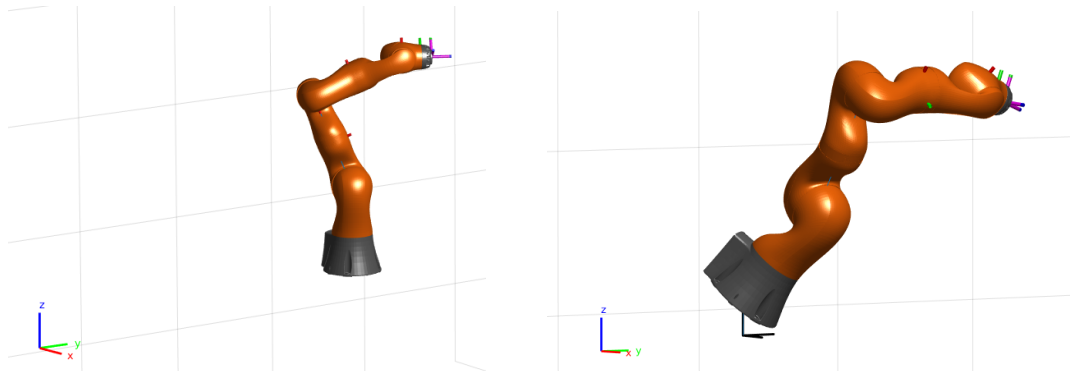
Σχήμα 1.11: Centralized/Decentralized δομή ελέγχου

Σε ότι αφορά τώρα τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά, μπορούν να προκύψουν αρκετές εκδοχές του προβλήματος ανάλογα με την επιλογή του εκάστοτε χαρακτηριστικού. Στην έρευνα που πραγματοποιείται στην εργασία αυτή, επιδιώκεται η αντιμετώπιση της πιο δύσκολης και γενικής εκ των παραπάνω περιπτώσεων που προκύπτουν από τα χαρακτηριστικά αυτά. Πιο συγκεκριμένα:

- Ο ρομποτικός χειριστής θα επιλεγεί να είναι τεσσάρων βαθμών ελευθερίας. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ένας χειριστής έξι βαθμών ελευθερίας μπορεί να τοποθετηθεί σε οποιοδήποτε σημείο (εντός του workspace) στον καρτεσιανό χώρο και επίσης με οποιονδήποτε προσανατολισμό, με βάση κάποιο σταθερό σύστημα συντεταγμένων. Μειώνοντας τους βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή της ελεύθερες μεταβλητές που καθορίζουν τη διάταξη του ρομπότ στον χώρο, περιορίζεται η κινητικότητα του ρομπότ, όπως επίσης και η δυνατότητα του να λαμβάνει συγκεκριμένες στάσεις στον χώρο. Συνεπώς με λιγότερους βαθμούς ελευθερίας, αντιμετωπίζουμε ένα πιο δύσκολο αλλά και γενικό πρόβλημα, αφού εύρεση λύσης για βραχίονα 4 βαθμών ελευθερίας, σημαίνει και εύρεση λύσης για πιο επιδέξιους βραχίονες.
- Το τροχοφόρο κινούμενο ρομπότ θα επιλεγεί να είναι μη ολονομικό (non-holonomic). Όπως θα αναλύσουμε και αργότερα, ένα ολονομικό ρομπότ θα μπορούσε να κινείται ανά πάσα στιγμή προς οποιαδήποτε διεύθυνση στο χώρο, κάνοντας το πρόβλημα αρκετά εύκολο και όχι γενικό. Παράλληλα, στη συντριπτική πλειοψηφία συναντάμε μη ολονομικά

τροχοφόρα κινούμενα ρομπότ, διότι είναι απλούστερα σαν κατασκευές και διότι συνήθως έχουν ίδια δομή με τα βενζινοκίνητα οχήματα τα οποία χρησιμοποιούνται κατακόρον (και είναι επίσης μη ολονομικά).

- Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, θα εξεταστούν και τα δύο σχήματα offline/online ελέγχου.
- Ο τύπος εδάφους που θα εξεταστεί αρχικά θα είναι το επίπεδο έδαφος, αλλά η τελική ανάλυση θα γίνει για κεκλιμένο έδαφος. Ως κεκλιμένο έδαφος εδώ θα θεωρήσουμε μια σχετική περιστροφή του χειριστή ως προς ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων στο έδαφος, έτσι ώστε η σταθερή βάση του χειριστή να βρίσκεται ουσιαστικά υπό κλίση με το οριζόντιο επίπεδο του εδάφους και το κινούμενο ρομπότ. Κάτι τέτοιο, σε συνδυασμό με τον μικρό αριθμό βαθμών ελευθερίας, θα άλλαζε το workspace του ρομπότ, κάνοντας κάποιες περιοχές κοντά στο ρομπότ λιγότερο έως καθόλου προσβάσιμες.



Σχήμα 1.12: Επίπεδο (αριστερά) και κεκλιμένο (δεξιά) έδαφος

Επιπλέον, ορίζοντας πιο αυστηρά τις απαιτήσεις ως προς την κατάληξη των δύο ρομπότ, ο τελικός σκοπός είναι να επιχειρήσουμε:

- Να έρθουν τα 2 ρομπότ σε μια κοινή θέση στον καρτεσιανό χώρο.
- Ο ρομποτικός χειριστής και το κινούμενο ρομπότ να έχουν κατάλληλο προσανατολισμό στη θέση αυτή για να γίνει η μεταφορά του αντικειμένου.
- Ο χειριστής να καταφθάσει στην τελική θέση με μία κατεύθυνση άφιξης (direction of approach) με την οποία να μην υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης με το όχημα.
- Να μεγιστοποιηθεί μια δεδομένη συνάρτηση $H(\mathbf{q})$ της διάταξης του βραχίονα.

Τέλος, να σημειωθεί ότι πέραν του ερευνητικού ενδιαφέροντος για το συγκεκριμένο πρόβλημα, το οποίο όπως είδαμε έχει αρκετές συνιστώσες, η πρακτική εφαρμογή του θα λάμβανε χώρο κυρίως στη βιομηχανία, για την αυτόνομη μεταφορά/παραλαβή φορτίων σε δυναμικά περιβάλλοντα, όπου οι αρχικές και τελικές θέσεις των ρομπότ δεν θα είναι προκαθορισμένες.

1.3 Προσέγγιση Λύσης

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε στην εργασία αυτή, περιλαμβάνει δύο προσεγγίσεις επίλυσης, την offline και την online . Η offline προσέγγιση επίλυσης χωρίζεται σε δύο κύρια βήματα, στην εύρεση ενός βέλτιστου κοινού σημείου συνάντησης για τα δύο ρομπότ, το οποίο θα πρέπει να ικανοποιεί κάποιους περιορισμούς και στον έλεγχο των ρομπότ ώστε να φτάσουν στο σημείο που επιλέχτηκε από το προηγούμενο βήμα. Η online προσέγγιση στηρίζεται στον άμεσο έλεγχο των δύο ρομπότ, χωρίς κάποια γνώση για το σημείο συνάντησης, έτσι ώστε να βρεθούν σε ένα κοινό σημείο που πληροί τις προδιαγραφές που έχουν τεθεί.

Σε ότι αφορά την πρώτη φάση της offline προσέγγισης, αναπτύχθηκαν δύο επαναληπτικοί αλγόριθμοι, για την επιλογή ενός βέλτιστου σημείου συνάντησης, ένας αλγόριθμος που πηγάζει από τη θεωρία περί πολλαπλασιαστών Lagrange και ένας αλγόριθμος που πηγάζει από τη θεωρία περί πλεοναστότητας ρομποτικών χειριστών. Σε ότι αφορά τη δεύτερη φάση που έχει να κάνει με τον έλεγχο των ρομπότ ώστε να φτάσουν στο επιθυμητό τελικό σημείο, αναπτύχθηκαν τέσσερις τεχνικές για τον έλεγχο του ρομποτικού χειριστή και περιγράφηκαν δύο μέθοδοι για το πρόβλημα της ρύθμισης στάσης των κινούμενων ρομπότ, μία για όχημα τύπου μονόκυκλου και μία για όχημα τύπου αυτοκινήτου. Τέλος, αναπτύχθηκε ένα σχετικά απλό σχήμα ελέγχου για την αντιμετώπιση του δυσκολότερου online προβλήματος, για τον συντονισμένο έλεγχο των δύο ρομπότ.

1.4 Δομή διπλωματικής εργασίας

Στο κεφάλαιο 2, θα παρουσιαστεί η μαθηματική μοντελοποίηση και όλο το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο που αφορά την κινηματική συμπεριφορά των ρομποτικών χειριστών. Πιο συγκεκριμένα, θα αναλυθεί η ευθεία κινηματική, η ευθεία και ανάστροφη διαφορική κινηματική με έμφαση στα πλεονάζοντα ρομπότ, ενώ επίσης θα περιλαμβάνεται και η θεωρία περί δεικτών ικανότητας χειρισμού (*manipulability indexes*).

Αντίστοιχα, στο κεφάλαιο 3 θα παρουσιαστεί η θεωρία που είναι απαραίτητη για τα κινούμενα ρομπότ. Η θεωρία αυτή θα περιλαμβάνει ανάλυση των μη ολονομικών περιορισμών και το κινηματικό μοντέλο του μονόκυκλου και του δίκυκλου.

Στη συνέχεια, στο κεφάλαιο 4 θα περιγραφούν αναλυτικά οι προτεινόμενες λύσεις, για το πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε, στην offline περίπτωση, ενώ παράλληλα στο κεφάλαιο 5 θα παρουσιαστεί μία online αντιμετώπιση για το πρόβλημα.

Το κεφάλαιο 6 θα περιλαμβάνει γραφικές παραστάσεις αλλά και στιγμιότυπα (από το περιβάλλον προσομοίωσης gazebo) των προσομοιώσεων, για όλα τα προτεινόμενα σχήματα λύσεων και για συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες των δύο ρομπότ.

Το κεφάλαιο 7 θα είναι αφιερωμένο στα συμπεράσματα της έρευνας που πραγματοποιήθηκε και στο πώς θα μπορούσε να επεκταθεί η δουλειά που έχει γίνει, από μελλοντικές έρευνες. Τέλος, στο παράρτημα περιλαμβάνεται ο κώδικας MATLAB , ο οποίος υλοποιεί τα σχήματα λύσεων και πραγματοποιεί την προσομοίωση του συστήματος.

Κεφάλαιο 2

Μοντελοποίηση ρομποτικών χειριστών

2.1 Ευθεία κινηματική

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ένας ρομποτικός χειριστής αποτελείται από μια ακολουθία στερεών σωμάτων, τα οποία διασυνδέονται μέσω πρισματικών ή περιστροφικών αρθρώσεων, σχηματίζοντας έτσι μία κινηματική αλυσίδα. Στο άκρο αυτής της αλυσίδας συνδέεται το τελικό στοιχείο δράσης, το οποίο είναι υπεύθυνο για την εκτέλεση της επιθυμητής εργασίας.

Ένα από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά ενός ρομποτικού χειριστή είναι ο αριθμός βαθμών ελευθερίας του, δηλαδή ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών που προσδιορίζουν τη στάση (*pose*) του ρομπότ, δηλαδή τη θέση και τον προσανατολισμό του στο χώρο. Κάθε άρθρωση προσθέτει έναν βαθμό ελευθερίας στο μηχανικό δόμημα, αφού η κατάσταση των αρθρώσεων περιγράφεται από μία γενικευμένη μεταβλητή θέσης (μετατόπιση για πρισματική άρθρωση και περιστροφή για περιστροφική άρθρωση). Συνεπώς, η ευθεία κινηματική (*forward kinematics*) ρομποτικών χειριστών αφορά τον υπολογισμό της θέσης και του προσανατολισμού του τελικού στοιχείου δράσης, συναρτήσει των γενικευμένων μεταβλητών των αρθρώσεων.

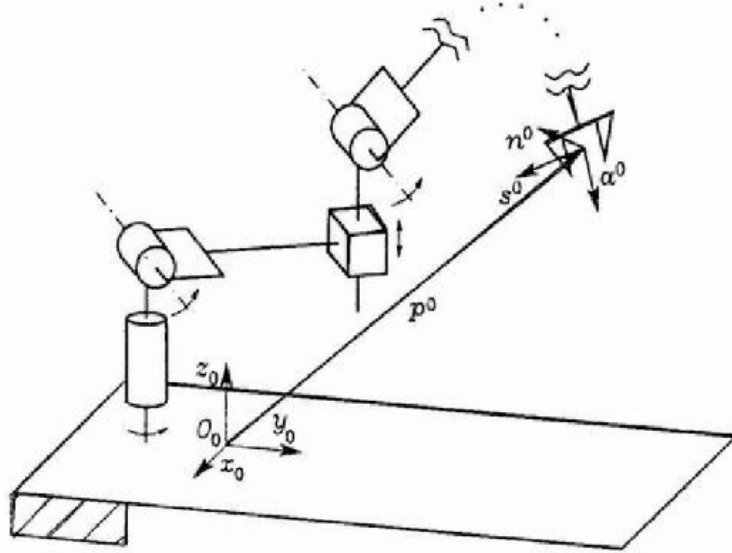
Αρχικά, έστω ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων αναφοράς βάσης $O_b-x_b y_b z_b$ και έστω $\mathbf{q}$ το $(n \times 1)$ διάνυσμα γενικευμένων μεταβλητών θέσης των αρθρώσεων, υποθέτοντας ότι ο βραχίονας έχει n βαθμούς ελευθερίας. Να σημειωθεί ότι η μεταβλητή μίας άρθρωσης i του ρομπότ συμβολίζεται επίσης ως θ_i για περιστροφική άρθρωση ή d_i για πρισματική άρθρωση. Ακόμη, θεωρούμε ένα ακόμη σύστημα συντεταγμένων, αυτή τη φορά προσαρτημένο στο τελικό στοιχείο δράσης.

Ως θέση του τελικού στοιχείου δράσης ορίζουμε ένα 3×1 διάνυσμα $\mathbf{p}_e^b(\mathbf{q})$, το οποίο αναπαριστά τη καρτεσιανή θέση της αρχής του συστήματος συντεταγμένων του τελικού στοιχείου δράσης, ως προς το συντεταγμένο σύστημα βάσης. Για την αναπαράσταση του προσανατολισμού του τελικού στοιχείου δράσης, μπορούμε να ορίσουμε ένα μητρώο περιστροφής $\mathbf{R}_e^b(\mathbf{q}) = [\mathbf{n}_e^b(\mathbf{q}) \ \mathbf{s}_e^b(\mathbf{q}) \ \mathbf{a}_e^b(\mathbf{q})]$ του συστήματος συντεταγμένων του τελικού στοιχείου δράσης, ως προς το συντεταγμένο σύστημα βάσης. Έτσι, για να προσδιορίσουμε με συμπαγή τρόπο την όλη στάση του τελικού στοιχείου δράσης, ορίζουμε το μητρώο του ομογενούς μετασχηματισμού

$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q})$, το οποίο εκφράζει την ευθεία κινηματική του ρομπότ:

$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e^b(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{s}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{a}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e^b(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι και το μητρώο προσανατολισμού $\mathbf{R}_e^b$ αλλά και το διάνυσμα θέσης $\mathbf{p}_e^b$, είναι εξαρτώμενα από το διάνυσμα μεταβλητών των αρθρώσεων $\mathbf{q}$.



Σχήμα 2.1: Θέση και προσανατολισμός του τελικού στοιχείου δράσης

Έστω τώρα ότι ο ρομποτικός χειριστής ο οποίος μελετάμε αποτελείται από $n + 1$ μέλη, συνδεδεμένα με n αρθρώσεις, όπου το μέλος 0 είναι στερεωμένο στο έδαφος, και στο τελευταίο μέλος είναι προσαρτημένο το τελικό στοιχείο δράσης. Σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τη στάση του τελικού στοιχείου δράσης, εκμεταλλευόμενοι την γεωμετρία του μηχανικού δομήματος. Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι να μελετήσουμε την κινηματική σχέση μεταξύ δύο διαδοχικών μελών και έτσι να βρούμε αναδρομικά την κινηματική σχέση της στάσης του τελικού στοιχείου δράσης, σε σχέση με τη βάση του ρομπότ. Για το σκοπό αυτό, θα τοποθετήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων σε κάθε ένα από τα $n + 1$ μέλη του βραχίονα, όπως για παράδειγμα φαίνεται στο Σχ. 2.2.

Συμβολίζοντας ως $\mathbf{A}_i^{i-1}(\mathbf{q}_i)$ τον ομογενή μετασχηματισμό συντεταγμένων μεταξύ του συστήματος συντεταγμένων του μέλους i και του μέλους $i - 1$, τότε ο ομογενής μετασχηματισμός συντεταγμένων που περιγράφει τη θέση και τον προσανατολισμό του συστήματος του μέλους n ως προς το σύστημα του μέλους 0, δίνεται από τη σχέση:

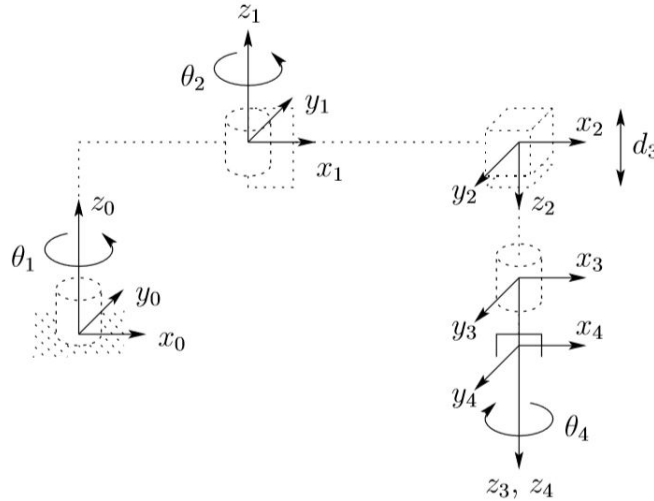
$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(q_1)\mathbf{A}_2^1(q_2)\dots\mathbf{A}_n^{n-1}(q_n) \quad (2.2)$$

Αν τώρα το σύστημα συντεταγμένων του μέλους 0 δεν ταυτίζεται με το επιθυμητό σύστημα βάσης ή το σύστημα του μέλους n δεν ταυτίζεται με το επιθυμητό σύστημα του τελικού στοιχείου δράσης, ορίζουμε τους σταθερούς ομογενείς μετασχηματισμούς $\mathbf{T}_b^0$ και $\mathbf{T}_e^n$ οι οποίοι

αναπαριστούν τη θέση και τον προσανατολισμό του συστήματος του μέλους μηδέν ως προς το σύστημα βάσης και του συστήματος του τελικού στοιχείου δράσης ως προς το σύστημα του μέλους n . Με βάση τα προηγούμενα, η ευθεία κινηματική του ρομπότ θα εκφράζεται τελικά ως:

$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^b \mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) \mathbf{T}_e^n \quad (2.3)$$

Η επιλογή του συστήματος συντεταγμένων που τοποθετείται σε κάθε μέλος, μπορεί γενικά να είναι αυθαίρετη. Αξίζει να σημειώσουμε όμως, ότι πολλές φορές τα συστήματα αυτά καθορίζονται με βάση κάποιους κανόνες, τους οποίους υποδεικνύει η γνωστή σύμβαση *Denavit - Hartenberg (DH)*. Κατά τη σύμβαση αυτή, ο άξονας z_i του μέλους i τοποθετείται κατά μήκος του άξονα της άρθρωσης $i + 1$, ενώ η θέση της αρχής του ίδιου συστήματος συντεταγμένων και οι υπόλοιποι άξονες προσδιορίζονται με βάση την τοποθέτηση του συστήματος συντεταγμένων του προηγούμενου μέλους. Η σύμβαση αυτή περιλαμβάνει και άλλους κανόνες, όπως και την κατασκευή ενός πίνακα, που περιέχει κάποιες γεωμετρικές παραμέτρους των μελών με βάση τα συστήματα συντεταγμένων που τοποθετήθηκαν, όμως δεν θα τη μελετήσουμε περαιτέρω εφόσον δεν μας ενδιαφέρει άμεσα για τους σκοπούς του προβλήματος.



Σχήμα 2.2: Συστήματα συντεταγμένων προσαρτημένα στα μέλη του ρομπότ

2.2 Αντίστροφη Κινηματική

Προηγουμένως μιλήσαμε για την ευθεία κινηματική, η οποία πραγματεύεται το πρόβλημα της εύρεσης της θέσης και του προσανατολισμού του τελικού στοιχείου δράσης, με δεδομένη την διάταξη των αρθρώσεων του χειριστή, δηλαδή με δεδομένο το διάνυσμα των μεταβλητών των αρθρώσεων $\mathbf{q}$. Παρουσιάσαμε επίσης έναν συστηματικό τρόπο με τον οποίο μπορεί να γίνει ο υπολογισμός, με βάση τις εξισώσεις (2.2) και (2.3).

Το πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής συνίσταται φυσικά στο αντίστροφο του παραπάνω προβλήματος, δηλαδή στην εύρεση των μεταβλητών των αρθρώσεων $\mathbf{q}$, για δοσμένη θέση και προσανατολισμό του τελικού στοιχείου δράσης, ή πιθανώς μόνο για δοσμένη θέση. Η

επίλυση του αντίστροφου προβλήματος έχει θεμελιώδη σημασία, ειδικά για εργασίες που πραγματοποιούνται στον χώρο δράσης (*task space*), δηλαδή εργασίες που είναι καθορισμένη η κίνηση του τελικού στοιχείου δράσης στον χώρο. Πολλές φορές, μία κίνηση στον χώρο δράσης χρειάζεται να αντιστοιχιστεί σε κίνηση των αρθρώσεων, δηλαδή στον χώρο των αρθρώσεων (*joint space*). Το πρόβλημα αυτό ουσιαστικά συνίσταται στην επίλυση της εξίσωσης:

$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_{e_d}^b$$

ή αν ενδιαφερόμαστε μόνο για τη θέση του τελικού στοιχείου δράσης:

$$\mathbf{p}_e^b(\mathbf{q}) = \mathbf{p}_{e_d}^b$$

ως προς τις μεταβλητές των αρθρώσεων $\mathbf{q}$, όπου $\mathbf{T}_{e_d}^b$ είναι το δοσμένο μητρώο προσανατολισμού και $\mathbf{p}_{e_d}^b$ η δοσμένη θέση του τελικού στοιχείου δράσης.

Οι παραπάνω εξισώσεις αντιστοιχούν σε ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων ως προς το διάνυσμα $\mathbf{q}$, καθιστώντας το δυσεπίλυτο, πλην ορισμένων απλών περιπτώσεων. Ακόμη, σε αντίθεση με την ευθεία κινηματική, το πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής μπορεί να έχει πολλαπλές λύσεις, άπειρες λύσεις, καμία λύση ή μπορεί να μην είναι δυνατό να υπάρχουν λύσεις σε κλειστή μορφή, λόγω της δυσκολίας επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων.

Ένας χειριστής 7 βαθμών ελευθερίας και άνω (ο οποίος θεωρείται *πλεονάζον-redundant*) έχει άπειρες λύσεις στο πρόβλημα αντίστροφης κινηματικής στο οποίο είναι δοσμένα και η θέση αλλά και ο προσανατολισμός του ρομπότ. Αυτό συμβαίνει διότι απαιτούνται 6 βαθμοί ελευθερίας για να μπορεί ένας χειριστής να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε στάση στο χώρο, συνεπώς με επιπλέον βαθμούς ελευθερίας, το τελικό στοιχείο δράσης μπορεί να έχει μία συγκεκριμένη στάση με άπειρους συνδυασμούς διατάξεων των αρθρώσεων. Αντίστοιχα, ένας χειριστής λιγότερων βαθμών ελευθερίας από 6, δε μπορεί να λάβει οποιαδήποτε δοσμένη στάση στον χώρο, συνεπώς το πρόβλημα αντίστροφης κινηματικής ενδέχεται να μην έχει λύση για κάποιες δοσμένες στάσεις. Ακόμη, για έναν χειριστή 6 βαθμών ελευθερίας μπορεί να προκύψουν έως και 16 παραδεκτές λύσεις, δηλαδή δεν υπάρχει μοναδική λύση.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν δεν είναι πλήρως προσδιορισμένη η επιθυμητή θέση και προσανατολισμός στον χώρο εργασίας, το πρόβλημα της αντίστροφης κινηματικής ενδέχεται να έχει άπειρες λύσεις ακόμα και για χειριστές με λιγότερες από 6 αρθρώσεις. Για παράδειγμα, αν είναι δοσμένη μόνο η θέση $\mathbf{p}_e^b(\mathbf{q})$ του τελικού στοιχείου δράσης, έχουμε μόνο 3 αντί για 6 εξισώσεις προς επίλυση, συνεπώς ακόμα και για έναν ρομποτικό χειριστή τεσσάρων βαθμών ελευθερίας, το αντίστροφο πρόβλημα ενδέχεται να έχει άπειρες λύσεις.

2.3 Διαφορική κινηματική

2.3.1 Ιακωβιανή Μήτρα

Όπως είδαμε προηγουμένως, το αντικείμενο της ευθείας κινηματικής είναι να προσδιοριστούν η θέση και ο προσανατολισμός του τελικού στοιχείου δράσης, συναρτήσει των μεταβλητών των αρθρώσεων $\mathbf{q}$. Η διαφορική κινηματική αφορά τη σχέση μεταξύ της γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας του τελικού στοιχείου δράσης και των ταχυτήτων των αρθρώσεων $\dot{\mathbf{q}}$. Όπως θα

δούμε στη συνέχεια, η σχέση αυτή περιγράφεται από ένα μητρώο το οποίο ονομάζεται *Ιακωβιανή* (*Jacobian*) και το οποίο είναι θεμελιώδες για την κινηματική και δυναμική μοντελοποίηση όλων των ρομπότ.

Ακολουθώντας τον συμβολισμό της εξίσωσης (2.1) και παραλείποντας τους δείκτες b που αφορούν το συντεταγμένο σύστημα βάσης, θέλουμε να εκφράσουμε τη σχέση της γραμμικής ταχύτητας $\dot{\mathbf{p}}_e$ και της γωνιακής ταχύτητας ω_e του τελικού στοιχείου δράσης, συναρτήσει των ταχυτήτων στον χώρο των αρθρώσεων $\dot{\mathbf{q}}$. Οι σχέσεις αυτές είναι τελικά γραμμικές ως προς τις ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}}$ και δίνονται από τους τύπους:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{J}_P(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.4)$$

$$\omega_e = \mathbf{J}_O(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.5)$$

Στις προηγούμενες σχέσεις, το $(3 \times n)$ μητρώο $\mathbf{J}_P(\mathbf{q})$ αναπαριστά την συνεισφορά των ταχυτήτων των αρθρώσεων $\dot{\mathbf{q}}$ στην γραμμική ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης $\dot{\mathbf{p}}_e$, ενώ αντίστοιχα το $(3 \times n)$ μητρώο $\mathbf{J}_O(\mathbf{q})$ αναπαριστά την συνεισφορά των ταχυτήτων των αρθρώσεων στη γωνιακή ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης ω_e . Ενοποιώντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις, καταλήγουμε στη συμπαγή διαφορική κινηματική εξίσωση του ρομποτικού χειριστή:

$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \omega_e \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.6)$$

με το $(6 \times n)$ ενιαίο μητρώο

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_O(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

να αποτελεί την *γεωμετρική Ιακωβιανή* του ρομπότ. Να σημειωθεί ότι τα στοιχεία του μητρώου αυτού εξαρτώνται από τη τρέχουσα διάταξη του ρομπότ, δηλαδή από τις μεταβλητές των αρθρώσεων $\mathbf{q}$.

2.3.2 Υπολογισμός Ιακωβιανής

Στη παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε έναν σχετικά εύκολο και συστηματικό τρόπο υπολογισμού της Ιακωβιανής μήτρας, για έναν ρομποτικό χειριστή n βαθμών ελευθερίας. Αποδεικνύεται ότι η Ιακωβιανή μήτρα μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P1} & \dots & \mathbf{J}_{Pn} \\ \mathbf{J}_{O1} & \dots & \mathbf{J}_{On} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

όπου τα $\mathbf{J}_{Pi}$ και $\mathbf{J}_{Oi}$ είναι (3×1) διανύσματα και ισούται με:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Pi} \\ \mathbf{J}_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

αν η i -οστή άρθρωση είναι πρισματική και

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{P}_i} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{O}_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

αν η i -οστή άρθρωση είναι στροφική.

Από την εξίσωση (2.1) παρατηρούμε ότι η καρτεσιανή θέση του τελικού στοιχείου δράσης $\mathbf{p}_e$ δίνεται από τα τρία πρώτα στοιχεία της τελευταίας στήλης του πίνακα $\mathbf{T}_e^b$. Στην εξίσωση (2.10) το διάνυσμα $\mathbf{p}_{i-1}$ αναπαριστά τη καρτεσιανή θέση του $i-1$ μέλους του ρομποτικού χειριστή. Αντίστοιχα με τις σχέσεις (2.2) και (2.3), ο ομογενής μετασχηματισμός $\mathbf{T}_{i-1}^b$ δίνεται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{T}_{i-1}^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(q_1)\mathbf{A}_2^1(q_2)\dots\mathbf{A}_{i-2}^{i-1}(q_{i-1}) \quad (2.11)$$

και

$$\mathbf{T}_{i-1}^b(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^b\mathbf{T}_{i-1}^0(\mathbf{q}) \quad (2.12)$$

ενώ τελικά το διάνυσμα $\mathbf{p}_{i-1}$ δίνεται από τα τρία πρώτα στοιχεία της τελευταίας στήλης του πίνακα $\mathbf{T}_{i-1}^b(\mathbf{q})$.

Θα πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι όσον αφορά τη γραμμική ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης $\dot{\mathbf{p}}_e$, μπορεί να γίνει χρονική παραγωγή του $\mathbf{p}_e(\mathbf{q})$ και χρήση του κανόνα αλυσίδας έτσι ώστε να λάβουμε:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (2.13)$$

Θέτοντας τώρα ως $\mathbf{J}_{\mathbf{P}_i} = \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial q_i}$, έχουμε:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_{\mathbf{P}_i} \dot{q}_i = [\mathbf{J}_{\mathbf{P}_1} \dots \mathbf{J}_{\mathbf{P}_n}] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{\mathbf{P}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.14)$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το τμήμα της γεωμετρικής Ιακωβιανής που αφορά την συνεισφορά στη γραμμική ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης, μπορεί ισοδύναμα να υπολογιστεί με χρονική παραγωγή της θέσης $\mathbf{p}_e(\mathbf{q})$ του τελικού στοιχείου δράσης. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει για το τμήμα της Ιακωβιανής που αφορά τον ρυθμό μεταβολής του προσανατολισμού, διότι η γωνιακή ταχύτητα ω_e δεν προκύπτει άμεσα από κάποια παραγωγή του μητρώου προσανατολισμού $\mathbf{R}_e(\mathbf{q})$, που έχουμε στην διάθεση μας από την εξίσωση ευθείας κινηματικής (2.1).

Για την αναπαράσταση του προσανατολισμού του ρομπότ έως τώρα, αναφερθήκαμε στο (3×3) μητρώο προσανατολισμού $\mathbf{R}_e(\mathbf{q})$. Το μητρώο αυτό έχει 9 στοιχεία, είναι όμως και ορθοκανονικό (έχει μοναδιαίες στήλες και κάθετες μεταξύ τους), συνεπώς οι γραμμές και οι στήλες του είναι συσχετισμένες μεταξύ τους. Επιπλέον, ο πλήρης προσδιορισμός του προσανατολισμού του τελικού στοιχείου δράσης, είναι δυνατό να γίνει με μόνο 3 μεταβλητές, ενώ με το μητρώο προσανατολισμού χρησιμοποιούνται 9. Συνεπώς, το μητρώο προσανατολισμού $\mathbf{R}_e(\mathbf{q})$ δεν αποτελεί μία ελαχιστοτική αναπαράσταση του προσανατολισμού του ρομπότ. Μία τέτοια

αναπαράσταση με μόνο τρεις μεταβλητές θα μπορούσε για παράδειγμα να γίνει με χρήση γωνιών Euler.

Στη περίπτωση λοιπόν που ο προσανατολισμός του τελικού στοιχείου δράσης προσδιορίζεται από μία ελαχιστοτική αναπαράσταση τριών μεταβλητών, τότε το τμήμα της Ιακωβιανής που αφορά τον προσανατολισμό μπορεί επίσης να προκύψει με παραγωγή των τριών μεταβλητών ως προς το διάνυσμα μεταβλητών των αρθρώσεων $\mathbf{q}$, όπως συμβαίνει και με τη γραμμική ταχύτητα. Μία τέτοια Ιακωβιανή μήτρα η οποία μπορεί εξδλοκλήρου να υπολογιστεί μέσω παραγωγίσεων ως προς το διάνυσμα $\mathbf{q}$, καλείται *Αναλυτική Ιακωβιανή* και θα παίξει σημαντικό ρόλο στις μεθόδους επίλυσης του προβλήματος που θα παρουσιαστούν αργότερα.

2.3.3 Κινηματικές Ιδιομορφίες

Η Ιακωβιανή μήτρα $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ της εξίσωσης (2.6) ορίζει μία γραμμική απεικόνιση μεταξύ των ταχυτήτων στον χώρο των αρθρώσεων $\dot{\mathbf{q}}$ και του διανύσματος v_e ταχυτήτων του τελικού στοιχείου δράσης, στον χώρο δράσης. Εκείνες οι διατάξεις του ρομποτικού χειριστή, για τις οποίες η Ιακωβιανή $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ έχει ελλιπή βαθμό, ονομάζονται *κινηματικές ιδιομορφίες*. Τέτοιες διατάξεις είναι γενικά ανεπιθύμητες για έναν ρομποτικό χειριστή διότι:

- Οι ιδιομορφίες αποτελούν σχηματισμούς του χειριστή, στις οποίες το ρομπότ έχει μειωμένη κινητικότητα και δεν μπορεί να επιβληθεί οποιαδήποτε επιθυμητή ταχύτητα στο τελικό στοιχείο δράσης.
- Στις ιδιομορφες διατάξεις, ενδέχεται να υπάρξει απειρία λύσεων στο ανάστροφο κινηματικό πρόβλημα.
- Κοντά σε έναν ιδιόμορφο μετασχηματισμό, για μικρή επιθυμητή ταχύτητα στον χώρο λειτουργίας μπορεί να απαιτείται μεγάλη ταχύτητα στον χώρο των αρθρώσεων, πράγμα που μπορεί να είναι ανεπιθύμητο ή μη εφικτό.

Οι κινηματικές ιδιομορφίες επίσης χωρίζονται στις *συνοριακές* ιδιομορφίες, οι οποίες συναντώνται όταν ο χειριστής τείνει να φτάσει στα όρια του χώρου λειτουργίας του και στις *εσωτερικές* ιδιομορφίες, οι οποίες συνιστούν το πιο σοβαρό πρόβλημα, όντας ιδιομορφίες οι οποίες μπορούν να συμβούν εντός του χώρου λειτουργίας και πιθανώς να είναι διατάξεις τις οποίες εύκολα να μπορεί να πλησιάσει το ρομπότ.

Να σημειωθεί ότι για τετραγωνικά Ιακωβιανά μητρώα, οι ιδιομορφες διατάξεις συμβαίνουν για τα $\mathbf{q}$ στα οποία η ορίζουσα της Ιακωβιανής $\det(\mathbf{J}(\mathbf{q}))$ μηδενίζεται, πράγμα που ισοδυναμεί με το να έχει ο πίνακας αυτός ελλιπή βαθμό.

2.4 Ανάστροφη Διαφορική Κινηματική

2.4.1 Ανάλυση για τετραγωνικές Ιακωβιανές μήτρες

Προηγουμένως παρουσιάσαμε την διαφορική κινηματική ενός ρομποτικού χειριστή, η οποία πραγματεύεται τον προσδιορισμό της γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας, με δεδομένες τις ταχύτητες στον χώρο των αρθρώσεων. Όπως και στην ανάστροφη κινηματική, έτσι και στην

ανάστροφη διαφορική κινηματική αναζητούμε λύση στο αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή εν προκειμένω στην εύρεση των ταχυτήτων των αρθρώσεων για δεδομένη ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης. Το αντίστροφο πρόβλημα είναι δυσκολότερο από το ευθύ, διότι η αντιστροφή της σχέσης (2.6) πρέπει να μελετηθεί ξεχωριστά για τις διάφορες περιπτώσεις διαστάσεων της Ιακωβιανής, ενώ μπορεί να μην είναι εφικτή στις ιδιόμορφες διατάξεις.

Η αντιστροφή διαφορική κινηματική έχει μεγάλη χρησιμότητα. Σε εργασίες στις οποίες είναι καθορισμένη η κίνηση την οποία θα εκτελέσει το τελικό στοιχείο δράσης, μέσω της αντιστροφής διαφορικής κινηματικής μπορούμε να βρούμε μια τροχιά των αρθρώσεων ($\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)$), η οποία να αντιστοιχίζεται στην επιθυμητή κίνηση του ρομπότ στον χώρο δράσης.

Εάν το πλήθος των γραμμών της Ιακωβιανής είναι ίδιο με το πλήθος των στηλών της, τότε αντιστρέφοντας την Ιακωβιανή $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ στην σχέση (2.6) λαμβάνουμε:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{v}_e \quad (2.15)$$

με την αντιστροφή αυτή να είναι εφικτή όταν η Ιακωβιανή είναι πλήρους τάξης (full rank), δηλαδή όταν δεν βρισκόμαστε σε ιδιόμορφη διάταξη.

Γνωρίζοντας την αρχική διάταξη των αρθρώσεων $\mathbf{q}_0$ και λαμβάνοντας την ταχύτητα των αρθρώσεων $\dot{\mathbf{q}}$ από τη προηγούμενη σχέση, μπορούμε στη περίπτωση του συνεχώς χρόνου να υπολογίσουμε τις μεταβλητές των αρθρώσεων κάθε χρονική στιγμή με ολοκλήρωση, όπως φαίνεται στη παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(s)ds + \mathbf{q}(0)$$

Εναλλακτικά, για σύστημα διακριτού χρόνου με χρόνο δειγματοληψίας Δt , εφαρμόζεται η μέθοδος ολοκλήρωσης Euler για την εύρεση των μεταβλητών των αρθρώσεων την χρονική στιγμή $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, σύμφωνα με τον τύπο:

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \dot{\mathbf{q}}(t_k)\Delta t \quad (2.16)$$

2.4.2 Ανάλυση για Χειριστές με Πλεονάζοντες Βαθμούς Ελευθερίας

Ένας ρομποτικός χειριστής θεωρείται πλεοναστός όταν για την εκτέλεση μιας εργασίας απαιτούνται r βαθμοί ελευθερίας, ο χειριστής έχει n και ισχύει $r < n$. Σε αυτή τη περίπτωση η Ιακωβιανή μήτρα έχει περισσότερες στήλες από ότι γραμμές, συνεπώς το άγνωστο διάνυσμα $\dot{\mathbf{q}}$ προς επίλυση στην εξίσωση (2.6) έχει περισσότερα στοιχεία από τις εξισώσεις που υπάρχουν διαθέσιμες. Έτσι, υπάρχει απειρία λύσεων σε ότι αφορά το αντίστροφο διαφορικό πρόβλημα. Όλα αυτά μεταφράζονται σε μεγαλύτερη ευελιξία του ρομπότ, μιας και είναι δυνατό να πετύχει δοσμένη ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης, με ένα άπειρο σύνολο ταχυτήτων στο χώρο των αρθρώσεων.

Από τα προηγούμενα προκύπτει η ιδέα να βρούμε ένα $\dot{\mathbf{q}}$ για το οποίο να ικανοποιείται η (2.6) αλλά και να είναι τέτοιο, ώστε να ικανοποιείται ένα συναρτησιακό κόστος για τις ταχύτητες των αρθρώσεων, της μορφής:

$$g(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{W} \dot{\mathbf{q}}$$

όπου το $\mathbf{W}$ είναι ένα $(n \times n)$ συμμετρικό και θετικά ορισμένο μητρώο βαρών.

Το κόστος αυτό παριστάνει ένα σταθμισμένο άθροισμα δευτεροβάθμιων όρων των ταχυτήτων των αρθρώσεων και ελαχιστοποιείται όταν μηδενίζονται οι ταχύτητες των αρθρώσεων $\dot{\mathbf{q}}$, δηλαδή όταν το ρομπότ βρίσκεται σε ακινησία.

Το πρόβλημα που μόλις θέσαμε συνίσταται στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $g(\dot{\mathbf{q}})$ υπό τους περιορισμούς της εξίσωσης (2.6) και αποτελεί ένα κλασικό πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς, το οποίο μπορεί να λυθεί με χρήση της μεθόδου πολλαπλασιαστών *Lagrange*. Θεωρούμε το τροποποιημένο συναρτησιακό κόστος

$$g(\dot{\mathbf{q}}, \lambda) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{W} \dot{\mathbf{q}} + \lambda^T (v_e - \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}})$$

όπου λ είναι το $(r \times 1)$ διάνυσμα των πολλαπλασιαστών *Lagrange*. Οι αναγκαίες συνθήκες που προκύπτουν από τη μέθοδο αυτή είναι οι:

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \quad \frac{\partial g}{\partial \lambda} = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

Από την πρώτη συνθήκη και μετά από πράξεις προκύπτει:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T \lambda \quad (2.18)$$

εφόσον το μητρώο $\mathbf{W}$ έχει επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι αντιστρέψιμο. Η δεύτερη από τις παραπάνω συνθήκες δίνει τον ίδιο τον περιορισμό, δηλαδή $v_e = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των δύο συνθηκών, λαμβάνουμε ότι $v_e = \mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T \lambda$. Σε αυτό το σημείο, αν η Ιακωβιανή $\mathbf{J}$ έχει πλήρη βαθμό, τότε το μητρώο $\mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T$ είναι αντιστρέψιμο και λύνοντας ως προς λ βρίσκουμε:

$$\lambda = (\mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} v_e$$

Αντικαθιστώντας το λ αυτό στην εξίσωση (2.18), λαμβάνουμε τελικά την βέλτιστη λύση ως προς $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} v_e \quad (2.19)$$

ενώ με πολλαπλασιασμό κατά μέλη του αποτελέσματος αυτού με $\mathbf{J}$, εύκολα επαληθεύουμε την ισχύ του περιορισμού (2.6).

Μία αρκετά συνήθης περίπτωση είναι να θέσουμε το μητρώο $\mathbf{W}$ ως το μοναδιαίο μητρώο $\mathbf{I}_{n \times n}$, θεωρώντας ότι οι ταχύτητες όλων των αρθρώσεων έχουν το ίδιο βάρος στο συναρτησιακό κόστος προς ελαχιστοποίηση, το οποίο αναπαριστά το μισό της νόρμας στο τετράγωνο των ταχυτήτων. Με την υπόθεση αυτή, το προηγούμενο αποτέλεσμα απλοποιείται στη σχέση:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+ v_e \quad (2.20)$$

όπου ως $\mathbf{J}^+$ συμβολίζεται η εκ δεξιών ψευδοαντίστροφη της $\mathbf{J}$. Η πιο βασική ιδιότητα της εκ δεξιών ψευδοαντίστροφης μήτρας, η οποία δικαιολογεί και το όνομα της, είναι ότι ισχύει $\mathbf{J} \mathbf{J}^+ = \mathbf{I}$, όχι όμως όταν το γινόμενο γίνεται με αντίστροφη σειρά.

Το συναρτησιακό κριτήριο προς ελαχιστοποίηση για το οποίο αναφερόμασταν έως τώρα, σκόπευε στην σταθμισμένη ελαχιστοποίηση των ταχυτήτων των αρθρώσεων υπό τον περιορισμό $v_e = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$. Εναλλακτικά μπορεί να θεωρηθεί ένα συναρτησιακό κόστος της μορφής:

$$g'(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0)^T(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0) \quad (2.21)$$

όπου $\dot{\mathbf{q}}_0$ ένα διάνυσμα ταχυτήτων των αρθρώσεων το οποίο επιθυμούμε να ακολουθήσει το $\dot{\mathbf{q}}$. Με τον ορισμό του παραπάνω συναρτησιακού κόστους, επιχειρούμε να ελαχιστοποιήσουμε την νόρμα του διανύσματος $\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0$. Εφαρμόζοντας τις ίδιες συνθήκες της μεθόδου, για το τροποποιημένο κόστος:

$$g'(\dot{\mathbf{q}}, \lambda) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0)^T(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0) + \lambda^T(v_e - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}})$$

μετά από πράξεις λαμβάνουμε το τελικό βέλτιστο αποτέλεσμα:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+ v_e + (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (2.22)$$

Το αποτέλεσμα είναι αντίστοιχο με αυτό της σχέσης (2.20), μαζί με τον όρο $(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}}_0$, ο οποίος αναπαριστά ένα $(n \times 1)$ διάνυσμα. Ο όρος αυτός έχει ιδιαίτερη σημασία, εφόσον αποτελεί ένα διάνυσμα στον μηδενικό χώρο της Ιακωβιανής $\mathbf{J}$, δηλαδή το γινόμενο $\mathbf{J}(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}}_0$ ισούται με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η συνεισφορά του όρου αυτού στις ταχύτητες των αρθρώσεων, δεν επηρεάζει καθόλου την ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης και αντιστοιχεί σε εσωτερικές κινήσεις του δομήματος, οι οποίες πηγάζουν από την ευελιξία λόγω πλεοναστότητας του χειριστή και από το διάνυσμα $\dot{\mathbf{q}}_0$. Μάλιστα, η ανεξαρτησία της ταχύτητας του τελικού στοιχείου δράσης από το διάνυσμα αναφοράς $\dot{\mathbf{q}}_0$, είναι εμφανής πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (2.22) με $\mathbf{J}$, λαμβάνοντας ξανά ότι $\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = v_e$.

Εκμεταλλευόμενοι τα παραπάνω, μπορούμε να επιλέξουμε το διάνυσμα αναφοράς $\dot{\mathbf{q}}_0$ τέτοιο ώστε να τείνει να μεγιστοποιήσει μία (δευτερεύουσα) αντικειμενική συνάρτηση $w(\mathbf{q})$, έχοντας την κατεύθυνση της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης ως:

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = k_0 \left(\frac{\partial w(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \quad (2.23)$$

με k_0 να είναι μια θετική σταθερά.

Συνολικά, με βάση τις σχέσεις (2.22) και (2.23) η συμπεριφορά του ρομπότ χαρακτηρίζεται από δύο υποεργασίες. Η κύρια υποεργασία είναι να πραγματοποιείται κίνηση των αρθρώσεων ώστε να ακολουθείται η δοσμένη ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης v_e . Ταυτόχρονα, η δεύτερη και δευτερεύουσα υποεργασία συνίσταται στην ελαχιστοποίηση όσο το δυνατόν περισσότερο της νόρμας του διανύσματος $\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0$, άρα τελικά και στη μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $w(\mathbf{q})$.

Συνήθεις επιλογές της αντικειμενικής συνάρτησης $w(\mathbf{q})$ αποτελούν αποστάσεις από εμπόδια, αποστάσεις από μηχανικά όρια αρθρώσεων, όπως επίσης και δείκτες ικανότητας χειρισμού οι οποίοι εκφράζουν το πόσο κοντά βρίσκεται το ρομπότ σε ιδιόμορφη διάταξη και οι οποίοι θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.

2.4.3 Προσεγγιστική αντιστροφή σε περιοχές ιδιομορφίας

Οι προηγούμενες σχέσεις της ανάστροφης διαφορικής κινηματικής, έχουν βάση όταν η Ιακωβιανή είναι πλήρους βαθμού. Σε αντίθετη περίπτωση, το ρομπότ βρίσκεται σε ιδιόμορφη διάταξη, ενώ το σύστημα $\mathbf{v}_e = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$ περιέχει γραμμικά εξαρτημένες εξισώσεις και έτσι δεν είναι δυνατό να αντιστραφεί η Ιακωβιανή.

Πρόβλημα μπορεί όμως να υπάρξει όχι μόνο σε ιδιόμορφες διατάξεις, αλλά και στη γειτονιά μιας ιδιομορφίας. Κατά την αντιστροφή της Ιακωβιανής, εισάγεται ο όρος του αντιστρόφου της ορίζουσας της Ιακωβιανής, ο οποίος λαμβάνει πολύ μεγάλη τιμή κοντά σε ιδιόμορφη διάταξη (διότι η ορίζουσα τείνει προς το μηδέν). Έτσι, για δοσμένη ταχύτητα τελικού στοιχείου δράσης $\mathbf{v}_e$, μπορεί να απαιτούνται πολύ μεγάλες ταχύτητες στον χώρο των αρθρώσεων.

Μια προσεγγιστική μέθοδος επίλυσης του προβλήματος αυτού είναι η *αποσβεστή αντιστροφή ελαχίστων τετραγώνων (DLS)*. Στη μέθοδο αυτή, χρησιμοποιείται μια μη ιδιόμορφη προσέγγιση της ψευδοαντίστροφης της Ιακωβιανής, αντί για την ίδια την ψευδοαντίστροφη, με βάση τη σχέση:

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T + k^2\mathbf{I})^{-1} \quad (2.24)$$

όπου k μικρός συντελεστής απόσβεσης. Παρατηρούμε ότι όταν το k τείνει στο μηδέν, τότε η προσέγγιση $\mathbf{J}^*$ τείνει όλο και περισσότερο στην πραγματική ψευδοαντίστροφη $\mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$. Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια λύση μπορεί να προκύψει επαναδιατυπώνοντας το πρόβλημα με βάση την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού κόστους:

$$g''(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_e - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}})^T(\mathbf{v}_e - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2}k^2\dot{\mathbf{q}}^T\dot{\mathbf{q}} \quad (2.25)$$

Η ελαχιστοποίηση αυτής της μορφής συναρτησιακού κόστους, αντιστοιχεί σε έναν συμβιβασμό ανάμεσα σε μια καλή προσέγγιση της εξίσωσης $\mathbf{v}_e = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$ και σε μικρή νόρμα ταχυτήτων των αρθρώσεων. Κάτι τέτοιο είναι χρήσιμο διότι κοντά σε ομοιόμορφες διατάξεις, η νόρμα ταχυτήτων των αρθρώσεων μπορεί να τείνει να απειριστεί. Σημαντικό ρόλο σε αυτή τη συμβιβαστική λύση παίζει ο συντελεστής k , ο οποίος αναπαριστά τη βαρύτητα με την οποία επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε τη νόρμα ταχυτήτων στον χώρο των αρθρώσεων.

2.5 Δείκτες ικανότητας χειρισμού

Στις προηγούμενες παραγράφους είδαμε ότι οι ιδιομορφίες αποτελούν ένα σοβαρό πρόβλημα στη λειτουργικότητα ενός χειριστή. Για την περαιτέρω ανάλυση της φύσης των ιδιομορφιών και της γειτονιάς τους, μπορούν να οριστούν ορισμένοι δείκτες οι οποίοι ονομάζονται *μέτρα ικανότητας χειρισμού*. Οι δείκτες αυτοί εξαρτώνται από την τρέχουσα στάση και τη γεωμετρία του χειριστή, ενώ μας δίνουν πληροφορία για το πόσο κοντά ή μακριά βρίσκεται ένας χειριστής από μια ιδιόμορφη διάταξη. Ακόμη, τέτοιοι δείκτες είναι χρήσιμοι τόσο για τη φάση σχεδιασμού ενός χειριστή, αλλά και για τον προσδιορισμό κατάλληλων στάσεων του ρομποτικού χειριστή, ώστε να επιτελέσει καλύτερα μία συγκεκριμένη εργασία.

Αρχικά θέλουμε να μελετήσουμε την συμπεριφορά στην κίνηση του τελικού στοιχείου δράσης, για ταχύτητες των αρθρώσεων συγκεκριμένης νόρμας. Το αποτέλεσμα μιας τέτοιας α-

νάλυσης μπορεί να περιγραφεί αποδοτικά από το *ελλειψοειδές χειρισμικότητας ταχυτήτων* (*Manipulability Ellipsoid*). Θεωρούμε αρχικά το σύνολο ταχυτήτων των αρθρώσεων μοναδιαίας νόρμας:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} = 1 \quad (2.26)$$

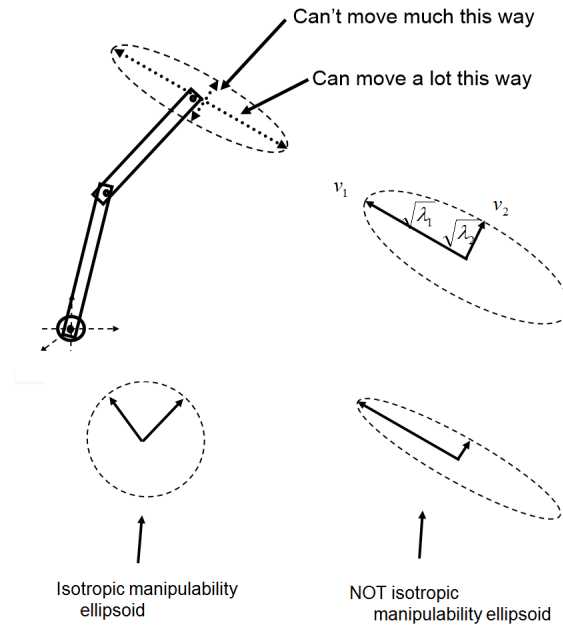
Θέλουμε να περιγράψουμε τις ταχύτητες στον χώρο λειτουργίας, οι οποίες μπορούν να παραχθούν από το σύνολο ταχυτήτων των αρθρώσεων που ικανοποιούν τη παραπάνω σχέση, όταν ο χειριστής βρίσκεται σε δοσμένη στάση. Υποθέτοντας πλεονάζον ρομποτικό χειριστή, αντικαθιστούμε τις ταχύτητες των αρθρώσεων με τη λύση ελαχιστοτικής νόρμας της εξίσωσης (2.20) και έτσι παίρνουμε:

$$\mathbf{v}_e^T (\mathbf{J}^{+T}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^+(\mathbf{q})) \mathbf{v}_e = 1$$

Αντικαθιστώντας την ψευδοαντίστροφη $\mathbf{J}^+$ με τη παράσταση της $\mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1}$ στη προηγούμενη σχέση, λαμβάνουμε:

$$\mathbf{v}_e^T (\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1} \mathbf{v}_e = 1 \quad (2.27)$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί την εξίσωση των σημείων επιφάνειας ελλειψοειδούς στο χώρο, για τις ταχύτητες του τελικού στοιχείου δράσης. Δύο από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά της επιφάνειας αυτής, όντας ελλειψοειδές, είναι η διεύθυνση και το μήκος του μικρού και μεγάλου άξονα του. Κατά τη διεύθυνση του μεγάλου άξονα του ελλειψοειδούς, το τελικό στοιχείο δράσης μπορεί να λάβει μεγάλες ταχύτητες ενώ στην διεύθυνση του μικρού άξονα μικρές. Ακόμη, γίνεται εύκολα κατανοητό ότι όσο το ελλειψοειδές τείνει να μοιάσει με σφαίρα, τόσο καλύτερα μπορεί το τελικό στοιχείο δράσης να κινηθεί προς όλες τις διευθύνσεις στον χώρο.



Σχήμα 2.3: Ελλειψοειδές χειρισμικότητας ταχυτήτων

Από τη προηγούμενη σχέση επίσης βλέπουμε ότι η μορφή του ελλειψοειδούς καθορίζεται από το μητρώο $\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q})$, άρα και από τη τρέχουσα διάταξη του ρομποτικού χειριστή. Οι διευθύνσεις των κυρίων αξόνων του ελλειψοειδούς προσδιορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα του μητρώου $\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q})$, ενώ τα μήκη των αξόνων δίνονται από τις ιδιάζουσες τιμές του $\mathbf{J}$, δηλαδή τις ρίζες των ιδιοτιμών του $\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q})$.

Ένα καθολικό μέτρο της ικανότητας χειρισμού, το οποίο είναι ποσότητα ανάλογη του όγκου του ελλειψοειδούς ταχυτήτων και το οποίο θα αποτελέσει την ποσότητα προς μεγιστοποίηση στο πρόβλημα που λύσουμε στα επόμενα κεφάλαια, είναι το:

$$w(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))} \quad (2.28)$$

Η ποσότητα αυτή είναι πάντα θετική, εκτός από τη περίπτωση που ο χειριστής βρίσκεται σε ιδιόμορφη διάταξη, όπου $w = 0$. Όσο μεγαλύτερος είναι ο δείκτης αυτός, τόσο μεγαλύτερος είναι ο όγκος του ελλειψοειδούς και άρα έχει μεγαλύτερη εκκεντρότητα, κάνοντας το να πλησιάζει τη σφαίρα. Συνεπώς μεγάλος δείκτης w αντιστοιχεί σε διάταξη όπου το ρομπότ είναι ευκίνητο και η οποία βρίσκεται μακριά από ιδιομορφία. Υπάρχουν και άλλα μέτρα ικανότητας χειρισμού, όπως ο λόγος της ελάχιστης προς την μέγιστη ιδιάζουσα τιμή, συνήθως όμως είναι πιο πολύπλοκα υπολογιστικά σε σχέση με το μέτρο (2.28).

Κεφάλαιο 3

Μοντελοποίηση Κινούμενων ρομπότ

3.1 Ολόνομοι Και Μη Ολόνομοι Περιορισμοί

Η πλειοψηφία των κινούμενων ρομπότ είναι τροχοφόρα, δηλαδή η μετακίνησή τους επιτυγχάνεται από τη κίνηση τροχών. Οι τροχοί θέτουν κινηματικούς περιορισμούς στο όχημα, μειώνοντας τη τοπική του ευκίνησία. Οι περιορισμοί αυτοί διακρίνονται σε ολονομικούς (*holonomic*) και μη ολονομικούς (*non-holonomic*). Οι πιο συνήθεις διατάξεις οχημάτων, χαρακτηρίζονται από μη ολονομικούς περιορισμούς κίνησης, οι οποίοι παρόλο που μειώνουν τη στιγμιαία κινητικότητα του οχήματος, αυτό είναι δυνατόν να φτάσει δυνητικά σε οποιοδήποτε σημείο στον χώρο, όπως συμβαίνει και με ένα αυτοκίνητο.

Έστω ότι η διάταξη του μηχανικού συστήματος ενός κινούμενου ρομπότ περιγράφεται από ένα διάνυσμα γενικευμένων συντεταγμένων (*generalized coordinates*) $\mathbf{q}$. Ορίζουμε επίσης τον χώρο διατάξεων (*configuration space*) C , δηλαδή τον χώρο όλων των δυνατών διατάξεων που είναι προσβάσιμες από το ρομπότ.

Η κίνηση ενός τέτοιου συστήματος μπορεί να υπόκειται σε διαφόρων ειδών περιορισμών, οι οποίοι είναι δυνατό να μειώσουν τη διάσταση του χώρου διατάξεων C . Περιορισμοί οι οποίοι μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$h_i(\mathbf{q}) = 0 \quad i = 1, \dots, k < n \quad (3.1)$$

ονομάζονται ολόνομοι (*holonomic*) ή ολοκληρώσιμοι (*integrable*), ενώ ένα μηχανικό σύστημα στο οποίο όλοι οι περιορισμοί μπορούν να γραφούν στη παραπάνω μορφή, ονομάζεται ολόνομο (*holonomic*). Η επίδραση των περιορισμών αυτών είναι να μειώνουν τον χώρο δυνατών διατάξεων, σε έναν υπόχωρο του C διάστασης $n - k$, όπου k το πλήθος των ολόνομων περιορισμών. Οι ολόνομοι περιορισμοί είναι γενικά αποτέλεσμα μηχανικών συνδέσεων μεταξύ διαφόρων μερών του μηχανικού συστήματος. Μια τυπική πηγή τέτοιων περιορισμών είναι οι πρισματικές και οι στροφικές αρθρώσεις που συναντώνται σε ρομποτικούς χειριστές.

Μια πιο γενική μορφή περιορισμών, η οποία περιλαμβάνει και ταχύτητες πέρα από γενικευμένες μεταβλητές διάταξης, είναι:

$$a_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \quad i = 1, \dots, k < n \quad (3.2)$$

Περιορισμοί της μορφής αυτής ονομάζονται *κινηματικοί* (*kinematic*) και περιορίζουν την στιγμιαία επιτρεπτή κίνηση του συστήματος, μειώνοντας το σύνολο γενικευμένων ταχυτήτων που μπορούν να επιτευχθούν σε κάθε διάταξη. Οι κινηματικοί περιορισμοί γράφονται επίσης σε πφαφφιανή μορφή (Pfaffian form), η οποία είναι λιγότερο γενική, αποτελώντας σχέσεις γραμμικές ως προς τις γενικευμένες ταχύτητες:

$$\mathbf{a}_i^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad i = 1, \dots, k \quad (3.3)$$

ή ενοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις με βάση έναν ενιαίο πίνακα $\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$:

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (3.1) ως προς τον χρόνο, προκύπτει εύκολα ότι η ύπαρξη k ολόνομων περιορισμών συνεπάγεται την ύπαρξη επίσης k κινηματικών περιορισμών εφόσον:

$$\frac{dh_i(\mathbf{q})}{dt} = \frac{\partial h_i(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = 0$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά και είναι πιο δύσκολο ναδειχτεί. Ένα σύστημα κινηματικών περιορισμών της μορφής (3.4) μπορεί να είναι ολοκληρώσιμο στη μορφή (3.1), αλλά μπορεί και όχι. Στη περίπτωση που δεν είναι, οι κινηματικοί περιορισμοί καλούνται μη ολόνομοι, ενώ ένα σύστημα στο οποίο υπόκειται τουλάχιστον ένας μη ολόνομος περιορισμός, καλείται μη ολόνομο.

Η ύπαρξη μη ολόνομων περιορισμών επηρεάζει τη κινητικότητα του συστήματος με αρκετά διαφορετικό τρόπο από τους ολόνομους περιορισμούς. Οι ολόνομοι περιορισμοί εισάγουν μια απώλεια προσβασιμότητας στον χώρο διατάξεων C , περιορίζοντας την κίνηση του συστήματος πάνω σε μία επιφάνεια, η οποία ορίζεται από τις εξισώσεις (3.1). Οι μη ολόνομοι περιορισμοί από τη μία, σύμφωνα με την σχέση (3.3), περιορίζουν τις γενικευμένες ταχύτητες σε έναν υπόχωρο διάστασης $n - k$ (υποθέτοντας ότι τα διανύσματα $\mathbf{a}_i^T(\mathbf{q})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα), κάτι που από την άλλη δεν συνεπάγεται μειωμένη προσβασιμότητα στον χώρο C .

3.2 Κινηματικό μοντέλο

Το σύστημα των k πφαφφιανών κινηματικών περιορισμών (3.4) συνεπάγεται ότι οι επιτρεπτές γενικευμένες ταχύτητες σε κάθε διάταξη, ανήκουν στον $(n - k)$ -διάστατο μηδενικό χώρο του πίνακα $\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$. Έστω $\{\mathbf{g}_1(\mathbf{q}), \dots, \mathbf{g}_{n-k}(\mathbf{q})\}$ μία βάση του χώρου $N(\mathbf{A}^T(\mathbf{q}))$. Οι επιτρεπτές τροχιές του μηχανικού συστήματος μπορούν να προσδιοριστούν από τις λύσεις του μη γραμμικού δυναμικού μοντέλου:

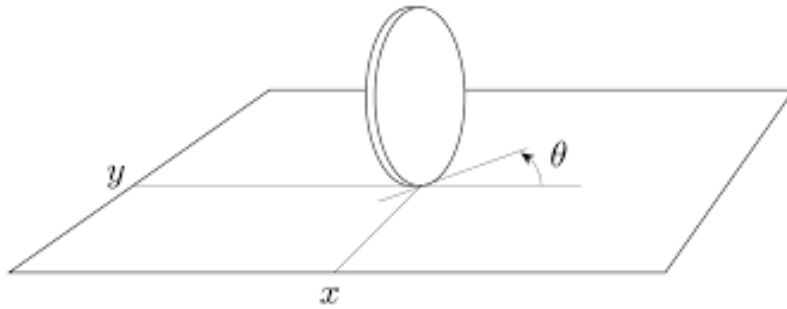
$$\dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\mathbf{q})u_j = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u} \quad m = n - k \quad (3.5)$$

Για αυτό το μη γραμμικό δυναμικό μοντέλο έχουμε ότι το $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα κατάστασης και το $\mathbf{u} = [u_1 \dots u_m]^T \in \mathbb{R}^m$ είναι το διάνυσμα εισόδων. Το προηγούμενο σύστημα επίσης ονομάζεται αμετάβλητο (driftless) διότι για μηδενική είσοδο $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ έχουμε $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.

Η επιλογή των διανυσματικών πεδίων εισόδου (input vector fields) $\mathbf{g}_1(\mathbf{q}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{q})$ (άρα και του πίνακα $\mathbf{G}(\mathbf{q})$) δεν είναι μοναδική, εφόσον αποτελεί βάση του μηδενικού χώρου του $\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$. Γενικά τα διανύσματα αυτά είναι δυνατόν να επιλεγούν με τέτοιο τρόπο ώστε οι είσοδοι u_j να έχουν μία φυσική ερμηνεία. Ακόμη, το διάνυσμα $\mathbf{u}$ μπορεί να μην σχετίζεται άμεσα στις πραγματικές εισόδους ελέγχου του συστήματος, οι οποίες συνήθως είναι γενικευμένες δυνάμεις ή ροπές. Έτσι, το διάνυσμα $\mathbf{u}$ στην εξίσωση (3.5) αναπαριστά ένα είδος εισόδων στην κινηματική του ρομπότ, συνεπώς η σχέση αυτή αναφέρεται σαν το κινηματικό μοντέλο του περιορισμένου μηχανικού συστήματος.

3.2.1 Κινηματικό Μοντέλο Μονόκυκλου

Μονόκυκλο (unicycle) θεωρούμε ένα όχημα το οποίο περιλαμβάνει έναν μοναδικό προσανατολιζόμενο (κατευθυντήριο) τροχό. Η διάταξη του μονόκυκλου περιγράφεται πλήρως από ένα διάνυσμα $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$, όπου (x, y) είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου επαφής του τροχού με το έδαφος και θ είναι η γωνία προσανατολισμού του οχήματος σε σχέση με τον άξονα x .



Σχήμα 3.1: Μονόκυκλο

Η κινητικότητα του μονόκυκλου υπόκειται σε έναν κινηματικό περιορισμό, ο οποίος προκύπτει από το γεγονός ότι σε κάθε διάταξη, η ταχύτητα του σημείου επαφής είναι μηδενική στη διεύθυνση κάθετα στον τοξοειδή άξονα του οχήματος. Ο περιορισμός αυτός επίσης αντιστοιχεί σε καθαρή κύλιση του τροχού και εκφράζεται ως:

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = [\sin \theta \quad -\cos \theta \quad 0] \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.6)$$

Ο περιορισμός αυτός είναι γραμμικός ως προς τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}}$, συνεπώς αποτελεί έναν πφαφριανό περιορισμό. Έτσι, μία βάση του μηδενικού χώρου του πίνακα $\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = [\sin \theta \quad -\cos \theta \quad 0]$ που αφορά τον μοναδικό περιορισμό, μπορεί να επιλεγεί ως:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = [\mathbf{g}_1(\mathbf{q}) \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{q})] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Όλες οι επιτρεπτές γενικευμένες ταχύτητες του μονόκυκλου, προκύπτουν ως γραμμικοί συνδυασμοί των $\mathbf{g}_1(\mathbf{q})$ και $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$. Με βάση τα παραπάνω, το κινηματικό μοντέλο του μονόκυκλου τελικά θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (3.7)$$

όπου οι είσοδοι $u_1 = v$ και $u_2 = \omega$ έχουν ξεκάθαρη φυσική ερμηνεία. Πιο συγκεκριμένα, το v είναι η ταχύτητα οδήγησης (*driving velocity*), δηλαδή το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας του σημείου επαφής, ενώ η ταχύτητα αλλαγής προσανατολισμού (*steering velocity*) ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού γύρω από τον κάθετο άξονα.

Αποδυναμώνεται ότι ο περιορισμός (3.6) είναι μη ολόνομος. Αποδυναμώνεται επίσης ότι το μονόκυκλο είναι ελέγξιμο, δηλαδή ότι από οποιαδήποτε αρχική διάταξη $\mathbf{q}_0$, με κατάλληλη επιλογή των εισόδων v, ω είναι δυνατόν το όχημα να φτάσει σε οποιαδήποτε τελική επιθυμητή διάταξη $\mathbf{q}_f$.

Το όχημα του μονόκυκλου όπως παρουσιάστηκε προηγουμένως και στο Σχ. 3.1, παρουσιάζει θέματα στατικής ισορροπίας. Παρόλα αυτά, η κινηματική του ανάλυση είναι αρκετά χρήσιμη, διότι υπάρχουν οχήματα κινηματικά ισοδύναμα με το μονόκυκλο αλλά είναι πιο σταθερά, όπως τα οχήματα διαφορικής οδήγησης, τα οποία αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 1. Για ένα όχημα διαφορικής οδήγησης, μπορούμε να συμβολίσουμε ως (x, y) τις καρτεσιανές συντεταγμένες του μέσου του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο τροχών και με θ τη γωνία προσανατολισμού των ίδιων τροχών. Το κινηματικό μοντέλο (3.7) του μονόκυκλου μπορεί να εφαρμοστεί και σε ένα όχημα διαφορικής οδήγησης, από τη στιγμή που οι είσοδοι v, ω έχουν μία 1-1 αντιστοιχία με τις πραγματικές εισόδους ω_L, ω_R , που αντιπροσωπεύουν τις γωνιακές ταχύτητες των δύο σταθερών τροχών:

$$v = \frac{r(\omega_R + \omega_L)}{2}, \quad \omega = \frac{r(\omega_R - \omega_L)}{d} \quad (3.8)$$

όπου r η ακτίνα των τροχών και d είναι η απόσταση των κέντρων τους.

3.2.2 Κινηματικό Μοντέλο Δίκυκλου

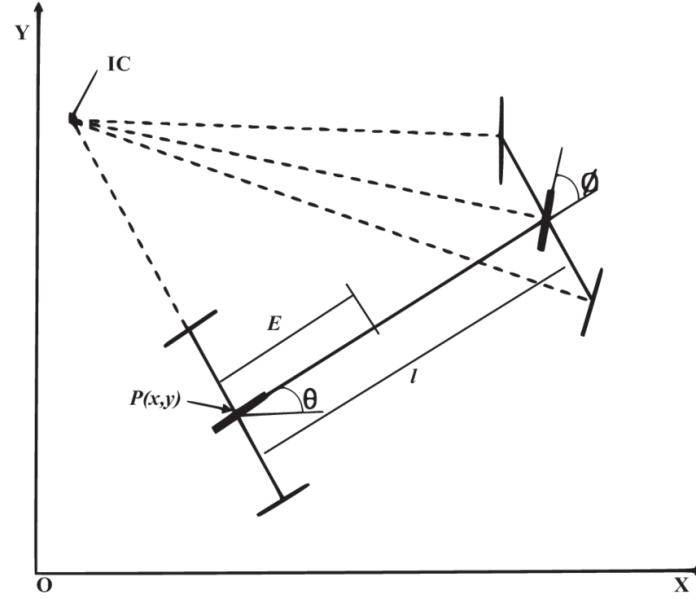
Ως δίκυκλο (*bicycle*) θεωρούμε ένα όχημα το οποίο είναι εξοπλισμένο με έναν κατευθυντήριο μπροστινό τροχό και έναν οπίσθιο σταθερό τροχό. Μια επιλογή του διανύσματος γενικευμένων μεταβλητών για τη διάταξη του οχήματος είναι $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta \ \phi]$, όπου (x, y) είναι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου επαφής του πίσω τροχού με το έδαφος, θ η γωνία προσανατολισμού το οχήματος σε σχέση με τον άξονα x και ϕ είναι η γωνία στροφής του μπροστινού τροχού σε σχέση με το όχημα.

Η κίνηση του οχήματος υπόκειται σε περιορισμούς καθαρής κύλισης, έναν για κάθε τροχό, οι οποίοι εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$\dot{x}_f \sin(\theta + \phi) - \dot{y}_f \cos(\theta + \phi) = 0 \quad (3.9)$$

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (3.10)$$

όπου (x_f, y_f) είναι η καρτεσιανή θέση του σημείου επαφής του μπροστινού τροχού με το έδαφος. Οι περιορισμοί προκύπτουν από το γεγονός ότι στην καθαρή κύλιση, οι δύο τροχοί θα πρέπει να έχουν μηδενική ταχύτητα στην διεύθυνση κάθετα στον εαυτό τους. Οι άξονες μηδενικής κίνησης των δύο τροχών τέμνονται σε ένα σημείο το οποίο ονομάζεται *στιγμιαίο κέντρο περιστροφής* (*instantaneous centre of rotation*), του οποίου η θέση εξαρτάται μόνο από το τρέχον διάνυσμα γενικευμένων μεταβλητών $\mathbf{q}$ και όχι από τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}}$.



Σχήμα 3.2: Δίκυκλο

Χρησιμοποιώντας τον περιορισμό του στερεού σώματος έχουμε:

$$x_f = x + l \cos \theta, \quad y_f = y + l \sin \theta$$

όπου l είναι η απόσταση μεταξύ των τροχών. Με βάση τη τελευταία σχέση, ο περιορισμός (3.9) γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\dot{x} \sin(\theta + \phi) - \dot{y} \cos(\theta + \phi) - l \dot{\theta} \cos \phi = 0 \quad (3.11)$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι οι δύο περιορισμοί (3.10) και (3.11) είναι σε σφαφφανή μορφή, συνεπώς μπορούν να γραφούν ενιαία με βάση τον παρακάτω πίνακα:

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ \sin(\theta + \phi) & -\cos(\theta + \phi) & l \cos \phi & 0 \end{bmatrix}$$

Η διάσταση του μηδενικού χώρου του $\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$ είναι $n - k = 2$ και όλες οι επιτρεπτές ταχύτητες σε μια διάταξη $\mathbf{q}$, μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων μιας βάσης του μηδενικού χώρου, όπως:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \phi / l \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

Επειδή ο μπροστινός τροχός είναι ο κατευθυντήριος, μπορούμε να θέσουμε $u_2 = \omega$, όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα αλλαγής προσανατολισμού του τροχού αυτού. Σε ότι αφορά τη πρώτη είσοδο u_1 , αυτή εξαρτάται από το ποιος τροχός παρέχει τη ροπή έλξης στο όχημα.

Αν το δίκυκλο χαρακτηρίζεται από κίνηση στον μπροστινό τροχό (front-wheel drive) και αν v είναι η ταχύτητα οδήγησης του, τότε έχουμε $u_1 = v$ και το κινηματικό μοντέλο είναι:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \phi / l \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (3.12)$$

Το κινηματικό μοντέλο ενός δικύκλου με κίνηση στον πίσω τροχό (rear-wheel drive) προκύπτει από το γεγονός ότι οι δύο πρώτες εξισώσεις του κινηματικού μοντέλου θα πρέπει να συμπίπτουν με αυτές του μονόκυκλου. Έτσι, θέτοντας $u_1 = v / \cos \phi$, λαμβάνουμε το κινηματικό μοντέλο:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \tan \phi / l \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (3.13)$$

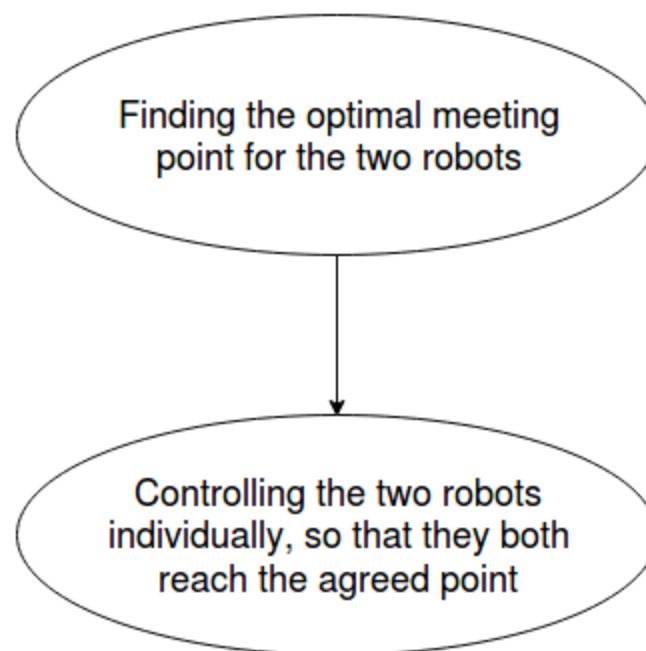
Αποδυνάμει ότι το δίκυκλο, είτε με κίνηση στους μπροστινούς είτε με κίνηση στους πίσω τροχούς είναι ελέγξιμο. Το δίκυκλο χαρακτηρίζεται επίσης από στάθμια σε στατικές συνθήκες, όπως και το μονόκυκλο. Παρόλα αυτά, το δίκυκλο είναι κινηματικά ισοδύναμο με το τρίκυκλο και με το ρομπότ τύπου αυτοκινήτου, τα οποία είναι ευσταθή και έτσι η κινηματική ανάλυση του δικύκλου έχει μεγάλη σημασία και πολλές εφαρμογές στα κινούμενα ρομπότ.

Κεφάλαιο 4

Offline Συμφωνία των Ρομπότ

4.1 Ανασκόπηση του προβλήματος

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε ορισμένες προσεγγίσεις για την επίλυση της offline εκδοχής του προβλήματος. Ως offline αντιμετώπιση του προβλήματος, ορίσαμε στο Κεφάλαιο 1 μία προσέγγιση δύο ξεχωριστών βημάτων, η οποία αναπαρίσταται από το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 4.1: Σχηματικό offline προσέγγισης λύσης

Έχοντας πλέον παρουσιάσει όλο το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο, είμαστε σε θέση να ορίσουμε πιο αυστηρά ορισμένες συνιστώσες του προβλήματος. Αρχικά, θα συμβολίζουμε ως

$\mathbf{q}$ τις γενικευμένες μεταβλητές αρθρώσεων του ρομποτικού χειριστή, ως $\mathbf{p}_e = [x_e \ y_e \ z_e]^T$ το διάνυσμα Καρτεσιανών συντεταγμένων του τελικού στοιχείου δράσης και ως $\mathbf{R}_e = [\mathbf{n}_e \ \mathbf{s}_e \ \mathbf{a}_e]$ το μητρώο προσανατολισμού του τελικού στοιχείου δράσης. Τα μητρώα $\mathbf{p}_e$ και $\mathbf{R}_e$ εξαρτώνται από την διάταξη των αρθρώσεων $\mathbf{q}$. Σε ότι αφορά το κινούμενο ρομπότ θα συμβολίσουμε ως $\mathbf{q}_m = [x_m \ y_m \ \theta_m]^T$ το διάνυσμα κατάστασης του. Παράλληλα, θα συμβολίσουμε ως t_f μία χρονική στιγμή στην οποία θα θεωρούμε ότι έχει πραγματοποιηθεί ο επιθυμητός σκοπός, ενώ ως $\mathbf{q}_f = \mathbf{q}(t_f)$ θα συμβολίσουμε την τελική διάταξη των αρθρώσεων του ρομποτικού χειριστή.

Το πρόβλημα γενικά συνίσταται στην συμφωνία των δύο ρομπότ, έτσι ώστε να βρεθούν σε μία κοινή τελική θέση για την πραγματοποίηση μιας εργασίας, όπως η μεταφορά ενός αντικειμένου από το ένα ρομπότ στο άλλο. Υπενθυμίζουμε ότι πέρα από αυτή τη γενική περιγραφή, το πρόβλημα έχει τέσσερις κύριες συνιστώσες προς επίλυση:

1. Να έρθουν τα 2 ρομπότ σε μια κοινή θέση στον καρτεσιανό χώρο. Με βάση τον προηγούμενο συμβολισμό, απαιτούμε την τελική χρονική στιγμή t_f να ισχύει:

$$\begin{bmatrix} x_e(\mathbf{q}_f) \\ y_e(\mathbf{q}_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m(t_f) \\ y_m(t_f) \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα αν $\mathbf{e}_m$ είναι το σφάλμα θέσης μεταξύ των δύο διανυσμάτων, τότε:

$$\mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} x_e(\mathbf{q}_f) - x_m(t_f) \\ y_e(\mathbf{q}_f) - y_m(t_f) \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2 \times 1}$$

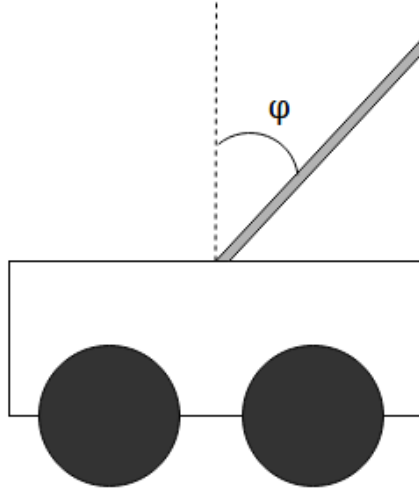
2. Ο ρομποτικός χειριστής και το κινούμενο ρομπότ να έχουν κατάλληλο προσανατολισμό στη τελική θέση για να γίνει η μεταφορά του αντικειμένου.
3. Ο χειριστής να καταφθάσει στην τελική θέση με μία κατεύθυνση άφιξης (direction of approach), με την οποία να μην υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης με το όχημα.
4. Να μεγιστοποιηθεί μια δεδομένη συνάρτηση $H(\mathbf{q})$ της θέσης του βραχίονα, για παράδειγμα κάποιος δείκτης που να αφορά το manipulability.

Στη συνέχεια θα αναλυθούν πιο λεπτομερώς οι τρεις τελευταίες από τις παραπάνω απαιτήσεις, έτσι ώστε να προκύψει ένας πλήρης ορισμός του προβλήματος.

4.1.1 Τελικός προσανατολισμός των ρομπότ

Σε ότι αφορά τον ζητούμενο τελικό προσανατολισμό, θεωρούμε ότι το τροχοφόρο κινούμενο ρομπότ πρόκειται να μεταφέρει ένα αντικείμενο το οποίο θα έχει εν γένει γωνία ψ ως προς τον κάθετο άξονα στο έδαφος, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.2.

Θα κάνουμε την υπόθεση ότι μας ενδιαφέρει μόνο αυτή η γωνία και όχι η γωνία που θα είχε το αντικείμενο γύρω από τον ίδιο του τον άξονα, όπως θα ίσχυε για παράδειγμα για αντικείμενα με κυλινδρική συμμετρία. Η υπόθεση αυτή γίνεται για απλοποίηση, παρόλα αυτά, όπως θα δούμε και παρακάτω είναι δυνατό να προστεθούν και άλλοι περιορισμοί στον προσανατολισμό που σχετίζονται με γωνίες, σε βάρος βέβαια της ελευθερίας κίνησης, της πλεοναστότητας του ρομποτικού χειριστή και της πολυπλοκότητας του προβλήματος.



Σχήμα 4.2: Γωνία του αντικειμένου ως προς τον κατακόρυφο άξονα

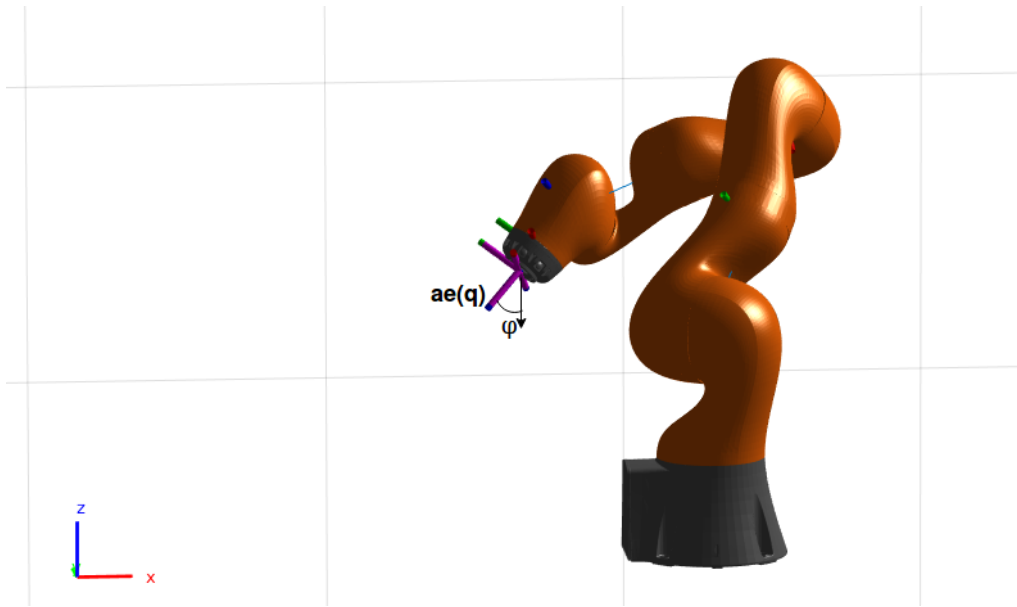
Έτσι αν $\mathbf{Re} = [\mathbf{n}_e \ \mathbf{s}_e \ \mathbf{a}_e]$ είναι το μητρώο προσανατολισμού του τελικού στοιχείου δράσης, με $\mathbf{a}_e$ να είναι το διάνυσμα του οποίου η φορά να οδεύει προς την προέκταση του τελικού στοιχείου δράσης, θα πρέπει το διάνυσμα αυτό να έχει γωνία φ ως προς το διάνυσμα $-\hat{z}$, την τελική χρονική στιγμή t_f , όπως φαίνεται στο Σχ. 4.8.

Έτσι, συμβολίζοντας ως z_d την τελική επιθυμητή συνιστώσα z του τελικού στοιχείου δράσης, ως ϕ_d την επιθυμητή γωνία προσανατολισμού με τον κάθετο άξονα ως προς το έδαφος και ως $\mathbf{a}_d$ το διάνυσμα $[0 \ 0 \ -1]^T$, οι δύο περιορισμοί που αφορούν τη στάση (θέση και προσανατολισμός) του χειριστή στη τελική θέση, μπορούν να γραφούν ως:

$$z_e(\mathbf{qf}) = z_d \quad (4.1)$$

$$\mathbf{a}_d^T \cdot \mathbf{a}_e(\mathbf{qf}) = \cos \phi_d \quad (4.2)$$

Φυσικά, γίνεται η υπόθεση ότι ο ρομποτικός χειριστής έχει τα κατάλληλα γεωμετρικά χαρακτηριστικά ώστε να μπορεί να βρεθεί σε θέση η οποία να ικανοποιεί τους δύο παραπάνω περιορισμούς. Είναι πιθανό ο ρομποτικός χειριστής να μπορεί να ικανοποιεί τον περιορισμό προσανατολισμού για οποιαδήποτε γωνία ϕ_d , όμως το επιθυμητό ύψος z_d , θα πρέπει να βρίσκεται μεταξύ κάποιων ορίων, λόγω του περιορισμένου χώρου στο οποίο έχει πρόσβαση το μηχανικό δόμημα.

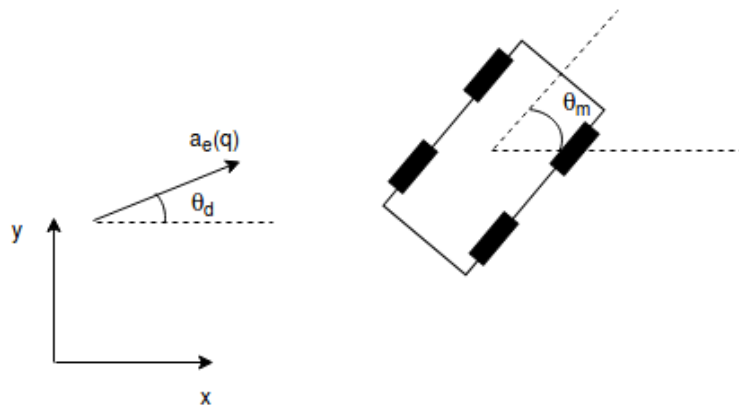


Σχήμα 4.3: Γωνία του βραχίονα ως προς τον κατακόρυφο άξονα

Όσον αφορά τον τελικό προσανατολισμό του κινούμενου ρομπότ, θα απαιτηθεί η γωνία προσανατολισμού του θ_m να ταυτιστεί με τη γωνία θ_d μεταξύ της προβολής του διανύσματος $\mathbf{a}_e$ στο xy επίπεδο και του άξονα x . Ο περιορισμός αυτός εκφράζεται από τη σχέση:

$$\theta_m(t_f) = \text{atan2}(a_{ey}(t_f), a_{ex}(t_f)) = \theta_d \quad (4.3)$$

Ο παραπάνω περιορισμός ουσιαστικά απαιτεί το gripper του τελικού στοιχείου δράσης, να είναι ευθυγραμμισμένο με το όχημα και το αντικείμενο, ώστε να πραγματοποιηθεί σωστή λαβή στο αντικείμενο.



Σχήμα 4.4: Τελικός προσανατολισμός κινούμενου ρομπότ

Να σημειωθεί ότι για γωνία $\phi_d = 0$, λόγω του ότι το διάνυσμα $\mathbf{a}_e$ οφείλει να είναι μοναδιαίο, αναμένουμε οι συνιστώσες $a_{ey}(t_f), a_{ex}(t_f)$ να είναι μηδενικές και άρα να μην ορίζεται μονοσήμαντα κάποιο $\theta_m(t_f)$. Αυτό είναι λογικό εφόσον πλέον το αντικείμενο είναι κάθετο στο έδαφος, συνεπώς δεν θα παίζει ρόλο ο προσανατολισμός του οχήματος στην λαβή.

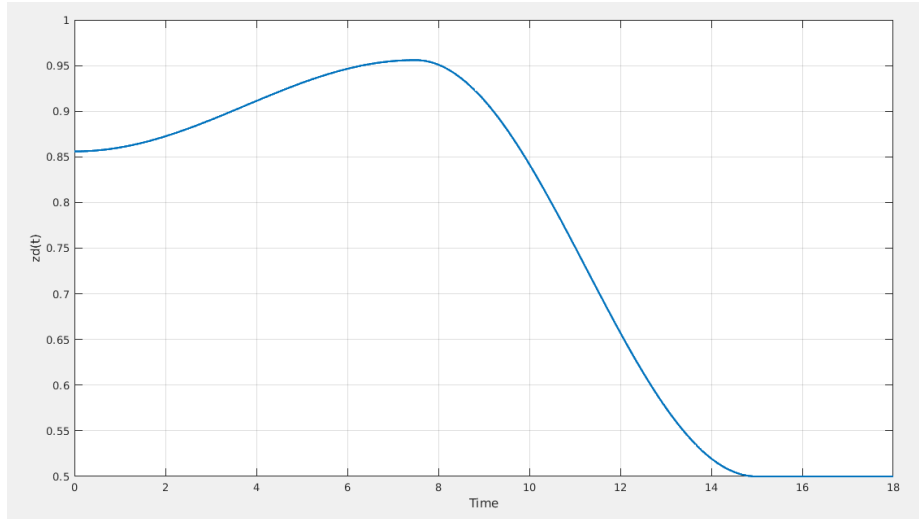
4.1.2 Κατεύθυνση άφιξης του χειριστή

Η κατεύθυνση άφιξης επιλέγεται να είναι τέτοια ώστε να μετακινείται το ρομπότ κατά τον z άξονα με τρόπο τέτοιο, ώστε η κίνηση που θα εκτελείται να χωρίζεται σε ένα στάδιο ανύψωσης και σε ένα στάδιο κατάβασης. Μία τέτοια πορεία του ρομποτικού χειριστή εξασφαλίζει μη σύγκρουση με το σώμα του ρομποτικού οχήματος, αφού ο χειριστής θα προσεγγίζει την τελική θέση με μία κίνηση από πάνω προς τα κάτω και όχι από μία πιθανή κίνηση παράλληλη και κοντά στο έδαφος.

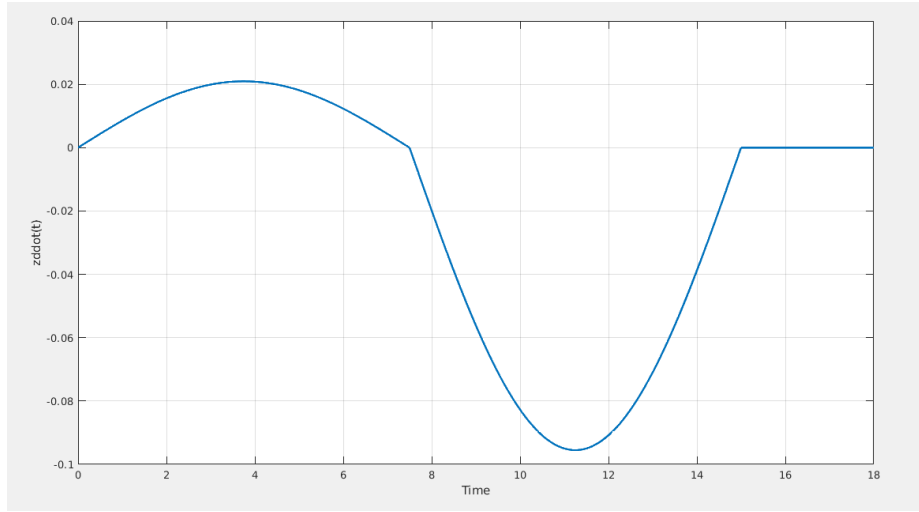
Αρκεί λοιπόν να ορίσουμε μια επιθυμητή χρονομεταβλητή συνάρτηση $z_d(t)$ τέτοια ώστε να εξασφαλίζει τη παραπάνω κίνηση, από το αρχικό, στο τελικό επιθυμητό σημείο z_f . Μια τέτοια συνάρτηση, που να εξασφαλίζει ταυτόχρονα μηδενική αρχική και τελική ταχύτητα, είναι η παρακάτω:

$$z_d(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos(\omega_1 t))(z_{max} - z_{in}) + z_{in} & , t < \frac{T_1}{2} \\ \frac{1}{2}(1 + \cos(\omega_1 t))(z_f - z_{max}) + z_{max} & , \frac{T_1}{2} < t < T_1 \\ 0 & , t > T_1 \end{cases} \quad (4.4)$$

όπου $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, z_{in} η αρχική τιμή του z , z_{max} η μέγιστη τιμή που θέλουμε να λάβει το z , z_f η τελική τιμή που θέλουμε να λάβει το z και T_1 η χρονική στιγμή κατά την οποία επιθυμούμε να λήξει η κίνηση στον z άξονα. Οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης αυτής και της παραγώγου της για $z_{in} = 0.856$, $z_f = 0.5$, $z_{max} = \max(z_{in}, z_f) + 0.1$ φαίνονται παρακάτω:



Σχήμα 4.5: Επιθυμητή συνάρτηση μεταβλητής z

Σχήμα 4.6: Παράγωγος επιθυμητής συνάρτησης μεταβλητής z

4.1.3 Επιλογή συνάρτησης H προς μεγιστοποίηση

Πριν συνεχίσουμε στους τρόπους λύσης, μένει να ορίσουμε τη βαθμωτή συνάρτηση $H(\mathbf{q})$. Η συνάρτηση αυτή θα μπορούσε να εκφράζει διάφορα μεγέθη προς μεγιστοποίηση, όπως για παράδειγμα απόσταση από εμπόδια. Εδώ θα επιλεγεί να αναπαραστήσει το γνωστό μέτρο ικανότητας χειρισμού

$$H(\mathbf{q}) = \mu(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})^T)}$$

στη περίπτωση πλεονάζοντος χειριστή, ή εφόσον εδώ μιλάμε για underactuated ρομποτικό χειριστή (4 βαθμών ελευθερίας) με λιγότερες στήλες από ότι γραμμές της Ιακωβιανής,

$$H(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})^T\mathbf{J}(\mathbf{q}))} \quad (4.5)$$

Με τον ορισμό αυτό, η συνάρτηση πρακτικά αποτελεί ένα γενικό μέτρο του κατά πόσο ο πίνακας τείνει να αποκτήσει ελλειπή βαθμό, ή αλλιώς το πόσο κοντά ή μακριά βρίσκεται ο ρομποτικός χειριστής από ιδιόμορφη διάταξη.

Επιπλέον, οι ρομποτικοί χειριστές χαρακτηρίζονται από μηχανικά όρια των αρθρώσεων, δηλαδή οι γενικευμένες μεταβλητές αρθρώσεων $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ θα πρέπει να έχουν συγκεκριμένο εύρος τιμών και να ικανοποιούν τους ανισοτικούς περιορισμούς:

$$q_{im} \leq q_i(t) \leq q_{iM}$$

όπου q_{iM}, q_{im} είναι το μέγιστο και το ελάχιστο όριο της άρθρωσης i . Στη περίπτωση όπου θέλουμε να λάβουμε υπόψη τα όρια των αρθρώσεων, θα μπορούσαμε να ορίσουμε διαφορετικά την συνάρτηση $H(q)$. Αν $\mu(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})^T\mathbf{J}(\mathbf{q}))}$, η συνάρτηση H μπορεί να οριστεί ως:

$$H(\mathbf{q}) = \mu(\mathbf{q}) - \sum_{i=1}^n b(\min(q_{iM} - q_i, q_i - q_{im})) \quad (4.6)$$

με τη $b(q)$ να είναι μια βαθμωτή συνάρτηση που αυξάνεται απότομα όταν το όρισμα της τείνει στο κοντά μηδέν και είναι μηδενική αλλού:

$$b(q) = \begin{cases} \frac{k}{q} & , q < \epsilon \\ 0 & , q \geq \epsilon \end{cases}$$

Μία τέτοια επιλογή της συνάρτησης H , αποτελεί έναν συμβιβασμό ανάμεσα στη μεγιστοποίηση του όρου $\mu(\mathbf{q})$ και την απομάκρυνση από το όριο μιας άρθρωσης, εφόσον βρισκόμαστε σε απόσταση κάτω μιας σταθεράς ϵ από το όριο μιας άρθρωσης. Παράλληλα, η συνάρτηση $b(q)$ αναπαριστά ένα μεταβλητό βάρος μεταξύ του συμβιβασμού αυτού, το οποίο αυξάνεται ραγδαία όσο μία μεταβλητή άρθρωσης πλησιάζει στο όριο της, δίνοντας περισσότερη προτεραιότητα στα όρια των αρθρώσεων από τον δείκτη ικανότητας χειρισμού $\mu(\mathbf{q})$. Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση H ως $H(\mathbf{q}) = \mu(\mathbf{q}) - k_J H_J(\mathbf{q})$, όπου H_J αποτελεί μέτρο απόστασης των αρθρώσεων, το οποίο χρησιμοποιείται στο [2] και δίνεται από τη σχέση

$$H_J(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_{iM} - q_{im}}{(q_{iM} - q_i)(q_i - q_{im})}$$

Αντίστοιχα, αν θέλαμε παράλληλα να επιτύχουμε αποφυγή εμποδίων, η συνάρτηση $H(\mathbf{q})$ μπορεί να τροποποιηθεί στη παρόμοια μορφή:

$$H(\mathbf{q}) = \mu(\mathbf{q}) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k b(\|\mathbf{o}_j - \mathbf{p}_i(\mathbf{q})\|)$$

όπου k ο αριθμός των εμποδίων, $\mathbf{o}_j$ οι συντεταγμένες του κέντρου του j -οστού εμποδίου και $\mathbf{p}_i(\mathbf{q})$ η θέση της i -οστής άρθρωσης.

Στην ανάλυση που ακολουθεί παρακάτω, η συνάρτηση H θα έχει την απλούστερη μορφή της εξίσωσης (4.5), ώστε να επικεντρωθούμε στην μεγιστοποίηση του δείκτη ικανότητας χειρισμού.

4.2 Επιλογή ενός βέλτιστου σημείου συνάντησης

Είναι εμφανές ότι η επιλογή του σημείου θα γίνει με βάση τον ρομποτικό χειριστή, μιας και οι περιορισμοί και η συνάρτηση προς βελτιστοποίηση εκφράζεται ως προς αυτόν, ενώ το τροχοφόρο κινούμενο ρομπότ μπορεί να λάβει δυνητικά οποιαδήποτε θέση στον χώρο. Πιο συγκεκριμένα, αναζητείται το διάνυσμα $\mathbf{q}_f$ των μεταβλητών των αρθρώσεων το οποίο ικανοποιεί τους περιορισμούς (4.1) και (4.2) και μεγιστοποιεί την H .

Με βάση τα παραπάνω, προκύπτει ότι εν γένει θα ήταν πολύ δύσκολο να λυθούν οι δύο αυτοί περιορισμοί ως προς κάποιες από τις μεταβλητές αρθρώσεων q_i , ώστε να μπορέσουμε να μειώσουμε τον αριθμό μεταβλητών που απαιτούνται, για τον προσδιορισμό της στάσης του ρομπότ. Έτσι, οι προσεγγίσεις λύσεων θα βασιστούν σε επαναληπτικούς αλγορίθμους για την εύρεση του επιθυμητού τελικού σημείου συνάντησης. Ορισμένες ιδέες για το κομμάτι επιλογής του βέλτιστου σημείου συνάντησης είναι:

- Χρήση ενός έτοιμου nonlinear programming solver (όπως της συνάρτησης *fmincon* του Matlab), ο οποίος βρίσκει το ελάχιστο μιας συνάρτησης υπό την ύπαρξη γραμμικών και μη περιορισμών ισότητας και ανισότητας.
- Κατασκευή κάποιου γενετικού αλγορίθμου για την εύρεση του βέλτιστου $\mathbf{q}_f$.
- Χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange.
- Εκμετάλλευση πλεοναστότητας του βραχίονα για την επιτέλεση της συγκεκριμένης εργασίας.

Από τις παραπάνω προτάσεις, οι δύο τελευταίες θα αναλυθούν με λεπτομέρεια στις επόμενες παραγράφους.

4.2.1 Χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange

Όταν επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε μια συνάρτηση $f(\mathbf{x})$, υπό κάποιους περιορισμούς $g_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \dots, r$, σύμφωνα με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, μπορούμε ισοδύναμα να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^r \lambda_i g_i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T g(\mathbf{x})$, ως προς τα $\mathbf{x}, \lambda$, χωρίς περιορισμούς. Έτσι, σε ένα κρίσιμο σημείο της συνάρτησης L θα ισχύει:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} + \lambda^T \frac{dg(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = 0, \quad \frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = g(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.7)$$

Στη περίπτωση μας, η μεταβλητή $\mathbf{x}$ είναι το διάνυσμα γενικευμένων μεταβλητών των αρθρώσεων $\mathbf{q}$, η συνάρτηση f είναι η $-H(\mathbf{q})$ και οι περιορισμοί είναι οι $ze(\mathbf{q}) = z_d$ και $\mathbf{a}_d^T \cdot \mathbf{a}_e(\mathbf{q}) = \cos \phi_d$, ή ισοδύναμα:

$$g_1(\mathbf{q}) = ze(\mathbf{q}) - z_d \quad (4.8)$$

$$g_2(\mathbf{q}) = \mathbf{a}_d^T \cdot \mathbf{a}_e(\mathbf{q}) - \cos \phi_d \quad (4.9)$$

όπου g_1, g_2 οι βαθμωτές συναρτήσεις των περιορισμών. Φυσικά, οι ποσότητες z_d και ϕ_d είναι σταθερές και επιλέγονται με βάση τις προδιαγραφές του προβλήματος.

Τώρα, στη περίπτωση μας, το να βρεθεί αναλυτική λύση των εξισώσεων (4.7) ως προς $\mathbf{q}$, θα ήταν κάτι το πολύ δύσκολο έως αδύνατο, ειδικά με έναν σύνθετο ορισμό της συνάρτησης H , όπως ένας δείκτης manipulability. Έτσι θα ήταν επιθυμητή η χρήση ενός επαναληπτικού αλγορίθμου που να ελαχιστοποιεί την συνάρτηση Lagrange L , ως προς $\mathbf{q}, \lambda$.

Στο [3], παρουσιάζονται 4 επαναληπτικές μέθοδοι που επιτυγχάνουν την ελαχιστοποίηση της $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T g(\mathbf{x})$, συνοδευόμενες τις αντίστοιχες αποδείξεις σύγκλισης. Η πρώτη και πιο απλή μέθοδος που παρουσιάζεται στο παραπάνω έγγραφο αντιστοιχεί στον γνωστό αλγόριθμο Gradient Descent, του οποίου η υλοποίηση απαιτεί υπολογισμό πρώτων παραγώγων ως προς $\mathbf{q}, \lambda$. Οι υπόλοιπες μέθοδοι απαιτούν τη χρήση δεύτερων παραγώγων της L , άρα και της H και των περιορισμών g_1, g_2 . Παράλληλα, οι αποδείξεις που περιλαμβάνονται στο [3], εγγυώνται τοπική και όχι ολική σύγκλιση για τις 4 αυτές μεθόδους.

Σε ότι αφορά την εύρεση των απαιτούμενων παραγώγων, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, η πρώτη παράγωγος των περιορισμών (4.8) και (4.9) υπολογίζεται σχετικά εύκολα, εφόσον είναι γνωστή η ιακωβιανή μήτρα του ρομποτικού χειριστή. Για τη πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $H(\mathbf{q})$, είναι εμφανές ότι αν αυτή οριστεί ως κάποιος δείκτης manipulability όπως στη σχέση (4.5), θα ήταν πολύ δύσκολο να υπολογιστεί η πρώτη παράγωγος αναλυτικά, εκτός από την περίπτωση πολύ απλών χειριστών, όπως χειριστές 2 αρθρώσεων στο επίπεδο. Έτσι, όπως αναφέρεται και στο [4] μπορούμε να καταφύγουμε σε αριθμητική παραγωγή του δείκτη ικανότητας χειρισμού $\mu(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{J}(\mathbf{q}))}$, χρησιμοποιώντας την απλή σχέση:

$$\frac{\partial \mu(\mathbf{q})}{\partial q_i} \approx \frac{\mu(q_1, \dots, q_i + h, \dots, q_n) - \mu(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n)}{h} \quad (4.10)$$

όπου το h επιλέγεται αρκετά μικρό.

Για τις δεύτερες παραγώγους των περιορισμών, θα ήταν απαραίτητη η γνώση παραγώγων δευτέρας τάξης των στοιχείων της Ιακωβιανής μήτρας, κάτι που μπορεί να μην είναι γνωστό ή να υπολογίζεται δύσκολα, αναγκάζοντας μας να καταφύγουμε ξανά σε αριθμητικές παραγωγίσεις. Αντίστοιχα για τις δεύτερες παραγώγους της συνάρτησης H , θα έπρεπε ξανά να γίνει αριθμητικός υπολογισμός, εφόσον μάλιστα ούτε οι πρώτες παράγωγοι μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά. Έτσι, επιλέγεται να χρησιμοποιηθεί η απλούστερη μέθοδος Gradient Descent που απαιτεί υπολογισμό μόνο πρώτων παραγώγων, με τίμημα βέβαια πιο αργή σύγκλιση του επαναληπτικού αλγορίθμου (θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και οι άλλες μέθοδοι εάν όλες δεύτερες παράγωγοι υπολογίζονταν αριθμητικά).

Σύμφωνα λοιπόν με τη μέθοδο αυτή, ο επαναληπτικός αλγόριθμος για την εύρεση των $\mathbf{q}$, λ σε κάθε επανάληψη, έχει ως εξής:

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n - \alpha \frac{\partial L(\mathbf{q}^n, \lambda^n)}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.11)$$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \alpha \frac{\partial L(\mathbf{q}^n, \lambda^n)}{\partial \lambda} \quad (4.12)$$

όπου α μικρή σταθερά που ρυθμίζει τον ρυθμό σύγκλισης του αλγορίθμου. Για τις παραπάνω παραγώγους έχουμε ότι:

$$\frac{\partial L(\mathbf{q}^n, \lambda^n)}{\partial \lambda} = \mathbf{g}(\mathbf{q}^n)$$

και

$$\frac{\partial L(\mathbf{q}^n, \lambda^n)}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{dH(\mathbf{q}^n)}{d\mathbf{q}} + \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{dg_i(\mathbf{q}^n)}{d\mathbf{q}}$$

όπου το $\mathbf{g}(\mathbf{q}^n)$ υπολογίζεται από τις σχέσεις (4.8) και (4.9), το $-\frac{dH(\mathbf{q}^n)}{d\mathbf{q}}$ όπως αναφέρθηκε θα υπολογιστεί αριθμητικά, ενώ οι σχέσεις που δίνουν τις παραγώγους των περιορισμών $\frac{dg_i(\mathbf{q}^n)}{d\mathbf{q}}$ θα υπολογιστούν στη συνέχεια.

Έστω τώρα ότι ο ρομποτικός χειριστής χαρακτηρίζεται από n βαθμούς ελευθερίας (στη δική μας περίπτωση θα είναι underactuated με 4). Αν $\mathbf{J}$ είναι η γεωμετρική Ιακωβιανή του χειριστή, η Ιακωβιανή αυτή μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{p}(2 \times n)} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{z}(1 \times n)} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{o}(3 \times n)} \end{bmatrix}$$

έτσι, ώστε η εξίσωση διαφορικής κινηματικής (2.6), να μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \\ \omega_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{p}} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{z}} \\ \mathbf{J}_{\mathbf{o}} \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (4.13)$$

Με τον συμβολισμό αυτό είναι εμφανές ότι:

$$\frac{dg_1(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{\mathbf{z}} \quad (4.14)$$

Για τον υπολογισμό της παραγώγου $\frac{dg_2(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}}$, αφού τα $k_2, \mathbf{a}_d^T, \cos \phi_d$ είναι σταθερά, έχουμε ότι:

$$\frac{dg_2(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} = \mathbf{a}_d^T \cdot \frac{d\mathbf{a}_e(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}}$$

Κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας για την παράγωγο $\frac{d\mathbf{a}_e(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}}$, προκύπτει

$$\frac{d\mathbf{a}_e(\mathbf{q})}{dt} = \frac{d\mathbf{a}_e(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (4.15)$$

Εφόσον τώρα το τελικό στοιχείο δράσης περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_e , τότε και το διάνυσμα $\mathbf{a}_e$ θα περιστρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Σύμφωνα με το [1], η χρονική παράγωγος του $\mathbf{a}_e$ θα είναι:

$$\dot{\mathbf{a}}_e = \omega_e \times \mathbf{a}_e = -\mathbf{S}(\mathbf{a}_e)\omega_e \quad (4.16)$$

όπου

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}_e) = \begin{bmatrix} 0 & -a_{ez} & a_{ey} \\ a_{ez} & 0 & -a_{ex} \\ -a_{ey} & a_{ex} & 0 \end{bmatrix}$$

είναι η αναπαράσταση του εξωτερικού γινομένου σε μορφή μήτρας. Αντικαθιστώντας τώρα τη γωνιακή ταχύτητα ω_e με το ίσο της, σύμφωνα με τη σχέση (4.13), παίρνουμε:

$$\dot{\mathbf{a}}_e = -\mathbf{S}(\mathbf{a}_e)\mathbf{J}_{\mathbf{o}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (4.17)$$

Συγκρίνοντας το τελευταίο αποτέλεσμα με την σχέση (4.16), προκύπτει ότι:

$$\frac{d\mathbf{a}_e(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} = -\mathbf{S}(\mathbf{a}_e)\mathbf{J}_o(\mathbf{q})$$

και έτσι τελικά προκύπτει ότι η παράγωγος του δεύτερου περιορισμού $g_2(\mathbf{q})$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dg_2(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} = -\mathbf{a}_d^T \mathbf{S}(\mathbf{a}_e) \mathbf{J}_o(\mathbf{q}) \quad (4.18)$$

Σε ότι αφορά τη μέθοδο γενικότερα, στη περίπτωση όπου πέρα από το ύψος z_d και τη γωνία ϕ_d , υπάρχει και άλλος περιορισμός, (όπως για παράδειγμα μια δεύτερη γωνία που να αφορά τον προσανατολισμό του αντικειμένου), μπορεί απλά να προστεθεί ένας ακόμη περιορισμός μαζί με τους (4.8) και (4.8) και να αυξηθεί η διάσταση του λ κατά 1. Επιπλέον, στη περίπτωση όπου θέλουμε να λάβουμε υπόψη τα όρια των αρθρώσεων, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική εκδοχή των πολλαπλασιαστών Lagrange έτσι ώστε να λαμβάνονται υπόψη και ανισοτικοί περιορισμοί, πέρα από τους υπάρχοντες περιορισμούς ισότητων, αντί για την τροποποίηση της συνάρτησης H υπό τη μορφή (4.6).

4.2.2 Εκμετάλλευση πλεοναστότητας του χειριστή για τη συγκεκριμένη εργασία

Αυτή είναι η δεύτερη προσέγγιση λύσης για το πρώτο βήμα της offline περίπτωσης. Η βάση της σκέψης για τη μέθοδο αυτή είναι ότι η κύρια εργασία προς εκτέλεση, είναι να συγκλίνει το διάνυσμα κατάστασης $[z_e(\mathbf{q}) \ \phi(\mathbf{q})]^T$ (όπου $\phi = \text{atan2}(r, -a_{ez})$ με $r = \sqrt{a_{ex}^2 + a_{ey}^2}$) στο επιθυμητό $[z_d \ \phi_d]$, ενώ παράλληλα υπάρχει ο δευτερεύον σκοπός να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση H . Η έννοια της διάσπασης της συνολικής εργασίας του ρομπότ σε υποεργασίες με βάση τη πλεοναστότητα του ρομπότ, εισήχθη στην παράγραφο 2.4.2. Ορίζοντας τώρα ως διάνυσμα κατάστασης το διάνυσμα $\mathbf{x}_{z\phi}(\mathbf{q}) = [z_e(\mathbf{q}) \ \phi(\mathbf{q})]^T$, προκύπτει ότι η χρονική παράγωγος του διανύσματος αυτού θα είναι:

$$\dot{\mathbf{x}}_{z\phi} = \begin{bmatrix} \dot{z}_e \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

Από την εξίσωση (4.13) έχουμε ότι:

$$\dot{z}_e = \mathbf{J}_z \dot{\mathbf{q}} \quad (4.19)$$

οπότε για τον προσδιορισμό της χρονικής παραγώγου $\dot{\mathbf{x}}_{z\phi}$, μένει να υπολογίσουμε την παράγωγο της γωνίας $\phi = \text{atan2}(r, -a_{ez})$. Για τον υπολογισμό αυτό θα συμβολίσουμε αρχικά ως z_a τη ποσότητα $z_a = -a_{ez} = \mathbf{a}_d^T \cdot \mathbf{a}_e$ έτσι ώστε $\phi = \text{atan2}(r, z_a)$. Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial z_a} \frac{dz_a}{dt} = \frac{z_a}{r^2 + z_a^2} \frac{dr}{dt} - \frac{r}{r^2 + z_a^2} \frac{dz_a}{dt}$$

λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι το διάνυσμα $\mathbf{a}_e$ είναι μοναδιαίο, ισχύει $r^2 + z_a^2 = a_{ex}^2 + a_{ey}^2 + a_{ez}^2 = 1$, οπότε παίρνουμε:

$$\dot{\phi} = z_a \frac{dr}{dt} - r \frac{dz_a}{dt}$$

Παραγωγίζοντας στη συνέχεια τη σχέση $r^2 + z_a^2 = 1$ ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$2r\dot{r} + 2z_a\dot{z}_a = 0 \Rightarrow \dot{r} = -\frac{z_a}{r}\dot{z}_a$$

οπότε

$$\dot{\phi} = -\frac{z_a^2}{r}\dot{z}_a - r\dot{z}_a = -\frac{z_a^2 + r^2}{r}\dot{z}_a = -\frac{1}{r}\dot{z}_a$$

Με βάση τον ορισμό του z_a , θα πρέπει να ισχύει ότι $\dot{z}_a = \mathbf{a}_d^T \dot{\mathbf{a}}_e$. Η χρονική παράγωγος όμως του διανύσματος $\mathbf{a}_e$ δίνεται από τη σχέση (4.17), οπότε $\dot{z}_a = -\mathbf{a}_d^T \mathbf{S}(\mathbf{a}_e) \mathbf{J}_o \dot{\mathbf{q}}$. Αντικαθιστώντας το $\dot{z}_a$ στην τελευταία παράσταση του $\dot{\phi}$, έχουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$\dot{\phi} = \frac{1}{r} \mathbf{a}_d^T \mathbf{S}(\mathbf{a}_e) \mathbf{J}_o \dot{\mathbf{q}} \quad (4.20)$$

Πλέον, μπορούμε να εκφράσουμε την χρονική παράγωγο του διανύσματος κατάστασης $\mathbf{x}_{z\phi}$ ως:

$$\dot{\mathbf{x}}_{z\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_z \dot{\mathbf{q}} \\ \frac{1}{r} \mathbf{a}_d^T \mathbf{S}(\mathbf{a}_e) \mathbf{J}_o \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_z \\ \frac{1}{r} \mathbf{a}_d^T \mathbf{S}(\mathbf{a}_e) \mathbf{J}_o \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

ή θέτοντας $\mathbf{J}_{z\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_z \\ \frac{1}{r} \mathbf{a}_d^T \mathbf{S}(\mathbf{a}_e) \mathbf{J}_o \end{bmatrix}$, τελικά έχουμε:

$$\dot{\mathbf{x}}_{z\phi} = \mathbf{J}_{z\phi} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.21)$$

Η μήτρα $\mathbf{J}_{z\phi}$ στη πραγματικότητα αναπαριστά μια αναλυτική Ιακωβιανή που αντιστοιχεί σε ένα σύστημα διαφορικής κινηματικής, στο οποίο λαμβάνονται υπόψη μόνο οι μεταβλητές $[z_e(\mathbf{q}) \ \phi(\mathbf{q})]^T$. Εφόσον η Ιακωβιανή αυτή είναι μεγέθους $2 \times n$ (έναντι του μεγέθους της γεωμετρικής Ιακωβιανής το οποίο είναι $6 \times n$), ακόμα και για έναν ρομποτικό χειριστή 4 βαθμών ελευθερίας, το ρομπότ θεωρείται πλεονάζον. Ως γνωστόν, από τη θεωρία περί πλεοναστότητας, η οποία παρουσιάστηκε στη παράγραφο 2.4.2, για να παραχθεί μία επιθυμητή ταχύτητα v_{ed} στο τελικό στοιχείο δράσης, οι ταχύτητες αρθρώσεων $\dot{\mathbf{q}}$ μπορούν να επιλεγούν ως:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{z\phi}^+ v_{ed} + k_H (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_{z\phi}^+ \mathbf{J}_{z\phi}) \frac{dH(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}}$$

Φυσικά, παράλληλα θα ισχύει $v_{ed} = \mathbf{J}_{z\phi} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{x}}_{z\phi}$. Έστω τώρα $\mathbf{x}_{z\phi_d}$ το επιθυμητό διάνυσμα κατάστασης. Σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε στη παράγραφο 4.1, το επιθυμητό αυτό διάνυσμα για το πρόβλημα θα πρέπει να είναι το $\mathbf{x}_{z\phi_d} = [z_d(t) \ \phi_d]^T$, δηλαδή η επιθυμητή z συνιστώσα να είναι η συνάρτηση $z_d(t)$ που φροντίζει για την κατεύθυνση άφιξης, ενώ η επιθυμητή γωνία ϕ να είναι η σταθερή γωνία ϕ_d που έχει το αντικείμενο με τον κάθετο άξονα.

Επιπλέον, ορίζουμε ως σφάλμα κατάστασης το διάνυσμα $\mathbf{e}_{z\phi} = \mathbf{x}_{z\phi_d} - \mathbf{x}_{z\phi}$. Επιθυμούμε να πετύχουμε σύγκλιση του σφάλματος αυτού στο μηδέν, ώστε το διάνυσμα $\mathbf{x}_{z\phi}$ να ταυτιστεί με το επιθυμητό $\mathbf{x}_{z\phi_d}$. Επιλέγοντας επιθυμητή ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης ως

$v_{ed} = \dot{\mathbf{x}}_{z\phi_d} + \mathbf{K}\mathbf{e}_{z\phi}$, με $\mathbf{K}$ να είναι ένα θετικά ορισμένο τετραγωνικό μητρώο, προκύπτει η εξής δυναμική του σφάλματος:

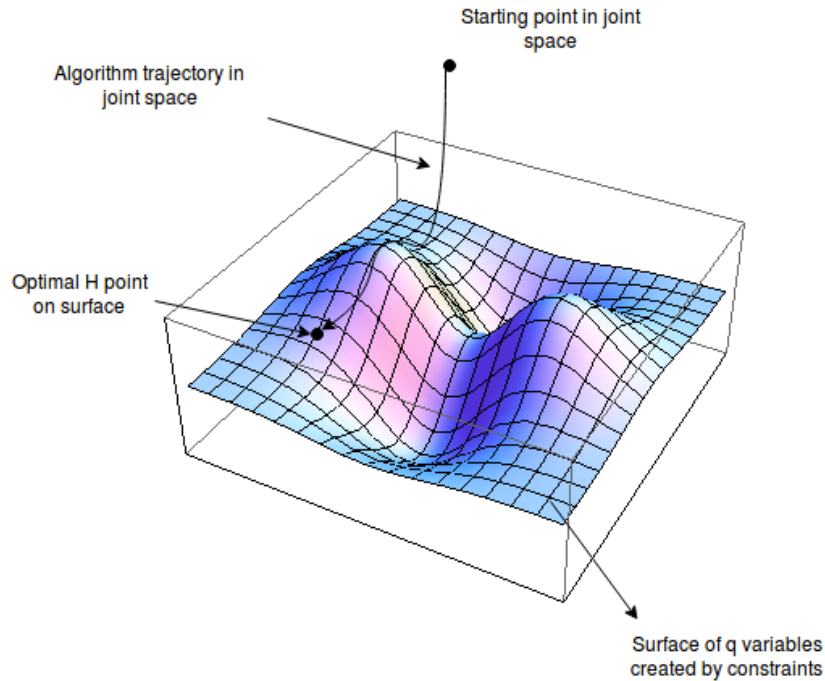
$$\dot{\mathbf{e}}_{z\phi} = \dot{\mathbf{x}}_{z\phi_d} - \dot{\mathbf{x}}_{z\phi} = \dot{\mathbf{x}}_{z\phi_d} - \dot{\mathbf{x}}_{z\phi_d} - \mathbf{K}\mathbf{e}_{z\phi} = -\mathbf{K}\mathbf{e}_{z\phi} \quad (4.22)$$

Το παραπάνω σύστημα πρώτης τάξης υποδηλώνει την ασυμπτωτική σύγκλιση του σφάλματος στο μηδέν, με ρυθμό που καθορίζεται από τις ιδιοτιμές του πίνακα $-\mathbf{K}$. Για να μπορεί να παραχθεί το προηγουμένως επιλεγμένο διάνυσμα ταχυτήτων v_{ed} στον χώρο δράσης, οι γενικευμένες ταχύτητες των αρθρώσεων θα πρέπει να είναι:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{z\phi}^+(\dot{\mathbf{x}}_{z\phi_d} + \mathbf{K}\mathbf{e}_{z\phi}) + k_H(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_{z\phi}^+\mathbf{J}_{z\phi})\frac{dH(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} \quad (4.23)$$

Στη φάση αυτή, εφόσον ο σκοπός είναι η εύρεση μίας τελικής διάταξης που να ικανοποιεί τα κριτήρια που έχουμε θέσει, δεν ενδιαφερόμαστε ακόμα για την διεύθυνση άφιξης στο τελικό σημείο, δηλαδή για την παρακολούθηση της συνάρτησης $z_d(t)$. Πιο συγκεκριμένα, ενδιαφερόμαστε ο επαναληπτικός αλγόριθμος να καταλήξει σε μια διάταξη $\mathbf{q}$ στην οποία να ισχύει $\phi(\mathbf{q}) = \phi_d$ και $z_e(\mathbf{q}) = z_f = z_d(t_f)$, συνεπώς ως επιθυμητό διάνυσμα κατάστασης μπορεί να τεθεί το $\mathbf{x}_{z\phi_d} = [z_f \ \phi_d]$. Το επιθυμητό αυτό διάνυσμα είναι σταθερό, οπότε θα ισχύει $\dot{\mathbf{x}}_{z\phi_d} = \mathbf{0}$, απλουστεύοντας την σχέση (4.23) στην:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{z\phi}^+\mathbf{K}\mathbf{e}_{z\phi} + k_H(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_{z\phi}^+\mathbf{J}_{z\phi})\frac{dH(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} \quad (4.24)$$



Σχήμα 4.7: Τροχιά των μεταβλητών των αρθρώσεων με βάση τον παραπάνω αλγόριθμο

Υπενθυμίζουμε ότι ο όρος $k_H(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}^+ \mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}) \frac{dH(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}}$ δεν επηρεάζει την ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης και εκφράζει εσωτερικές κινήσεις του δομήματος, οι οποίες τείνουν να μεγιστοποιήσουν την συνάρτηση $H(\mathbf{q})$. Κατασκευάζοντας λοιπόν έναν επαναληπτικό αλγόριθμο της μορφής:

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + \alpha \dot{\mathbf{q}} \quad (4.25)$$

με $\dot{\mathbf{q}}$ που δίνεται από την εξίσωση (4.24) και α μικρός συντελεστής, αναμένουμε ασυμπτωτική σύγκλιση των μεταβλητών $\mathbf{q}$ σε έναν υπόχωρο που ορίζεται από τους περιορισμούς (4.1) και (4.2), ενώ παράλληλα, λόγω του όρου $k_H(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}^+ \mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}) \frac{dH(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}}$, αναμένουμε κίνηση πάνω στον ίδιο υπόχωρο, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση H , όπως φαίνεται και στο Σχ. 4.7.

Με αυτή τη μέθοδο παρατηρούμε ότι η ολική ασυμπτωτική σύγκλιση είναι εγγυημένη αυτή τη φορά, ενώ το σφάλμα για τους δύο περιορισμούς συγκλίνει εκθετικά στο μηδέν με ρυθμό που επιλέγουμε, σε αντίθεση με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange στην οποία η σύγκλιση είναι εγγυημένη τοπικά.

Στη περίπτωση που στον τελευταίο αλγόριθμο, η τροχιά συναντά ιδιόμορφες διατάξεις ως προς την Ιακωβιανή $\mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια εναλλακτική μη ιδιόμορφη προσέγγιση της ψευδοαντίστροφης, της μορφής:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}^* = \mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}^T (\mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi} \mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}^T + k^2 \mathbf{I})^{-1} \quad (4.26)$$

με αρκετά μικρό k , η οποία παρουσιάστηκε στη παράγραφο 2.4.3.

Τέλος, ως συνάρτηση H να σημειωθεί ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο δείκτης manipulability της Ιακωβιανής $\mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}$, αντί της πλήρους γεωμετρικής Ιακωβιανής $\mathbf{J}$, έτσι ώστε $H(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}^T(\mathbf{q}))}$.

4.3 Έλεγχος των ρομπότ ώστε να φτάσουν στο βέλτιστο σημείο

Κατά το τέλος του προηγούμενου βήματος, θα έχουμε λάβει πλέον ένα διάνυσμα $\mathbf{q}_f$ των αρθρώσεων, το οποίο (εφόσον οι προηγούμενες μέθοδοι εφαρμόστηκαν επιτυχώς) θα ικανοποιεί τους περιορισμούς και θα έχει μεγιστοποιήσει όσο το δυνατόν περισσότερο την συνάρτηση H . Το διάνυσμα αυτό δίνει την επιθυμητή τελική διάταξη του ρομποτικού χειριστή στον χώρο των αρθρώσεων, ενώ εύκολα με χρήση της ευθείας κινηματικής μπορούμε να προσδιορίσουμε τη τελική διάταξη στον χώρο δράσης. Θα συμβολίσουμε ως $[x_{ef} \ y_{ef} \ z_{ef}]^T$ το διάνυσμα επιθυμητής καρτεσιανής θέσης και $\mathbf{R}_f = [\mathbf{n}_{ef} \ \mathbf{s}_{ef} \ \mathbf{a}_{ef}]$ το μητρώο του επιθυμητού τελικού προσανατολισμού του χειριστή.

4.3.1 Έλεγχος του ρομποτικού χειριστή

Αρχικά θα υποθέσουμε ότι η είσοδος ελέγχου του ρομποτικού χειριστή, θα είναι το διάνυσμα γενικευμένων ταχυτήτων των αρθρώσεων $\dot{\mathbf{q}}$, δηλαδή ότι θα πραγματοποιείται κινηματικός έλεγχος στο ρομπότ. Σκοπός μας στη φάση αυτή είναι να βρεθεί ένας νόμος ελέγχου $\dot{\mathbf{q}}$, έτσι ώστε να οδηγηθεί το ρομπότ από την οποιαδήποτε αρχική του διάταξη $\mathbf{q}_0$, στην επιθυμητή τελική

διάταξη $\mathbf{q}_f$ στον χώρο των αρθρώσεων, λαμβάνοντας πλέον υπόψη την κατεύθυνση άφιξης στην τελική θέση. Εναλλακτικά, θα θέλαμε το ρομπότ να καταλήξει σε μια στάση στην οποία να ισχύει $[x_e(t_f) \ y_e(t_f) \ z_e(t_f)]^T = [x_{ef} \ y_{ef} \ z_{ef}]^T$ και $\mathbf{a}_e(\mathbf{q}(t_f)) = \mathbf{a}_{ef}$ στον χώρο δράσης, αφού λόγω της συμμετρίας που έχουμε υποθέσει, δεν μας ενδιαφέρει η διεύθυνση των διανυσμάτων $\mathbf{n}_e$ και $\mathbf{s}_e$.

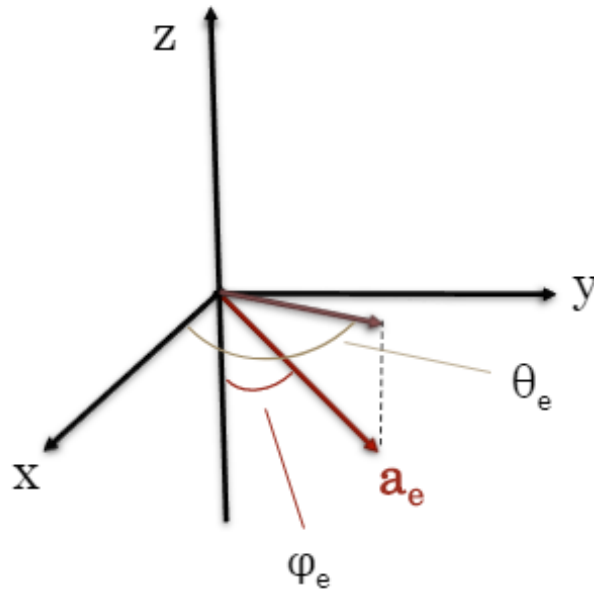
Στην περίπτωση που δε μας ενδιέφερε η κατεύθυνση άφιξης στην τελική θέση και ορίζοντας ως $\mathbf{e}_q = \mathbf{q}_f - \mathbf{q}$ το σφάλμα μεταβλητών των αρθρώσεων, ο νόμος ελέγχου θα μπορούσε να έχει την απλή μορφή

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}_q \mathbf{e}_q \quad (4.27)$$

έτσι ώστε να πετυχαίναμε δυναμική του σφάλματος της μορφής

$$\dot{\mathbf{e}}_q = \dot{\mathbf{q}}_f - \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{K}_q \mathbf{e}_q$$

Ένας τέτοιος απλός νόμος ελέγχου εγγυάται την ασυμπτωτική σύγκλιση του σφάλματος αρθρώσεων στο μηδέν, όμως η κίνηση του ρομπότ στον χώρο δράσης μπορεί να γίνει επικίνδυνη στο πρόβλημα μας. Λαμβάνοντας υπόψη την επιθυμητή κατεύθυνση άφιξης, ο έλεγχος του ρομποτικού χειριστή γενικά μπορεί να γίνει με 2 τρόπους. Άλλοι 2 τρόποι πηγάζουν εάν κατά το βήμα της εύρεσης βέλτιστου σημείου συνάντησης χρησιμοποιήθηκε η δεύτερη μέθοδος, η οποία σχετίζεται με την ανάλυση πλεοναστότητας του ρομποτικού χειριστή, με αποτέλεσμα να προκύπτουν συνολικά 4 τρόποι ελέγχου. Οι τρόποι αυτοί για τον έλεγχο του ρομποτικού χειριστή παρουσιάζονται στη συνέχεια.



Σχήμα 4.8: Γεωμετρική αναπαράσταση γωνιών ϕ_e και θ_e

Πρώτος νόμος ελέγχου

Ο πρώτος τρόπος έχει να κάνει με έλεγχο του ρομπότ με βάση τον χώρο δράσης. Συγκεκριμένα ορίζουμε το παρακάτω διάνυσμα κατάστασης:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ \phi_e \\ \theta_e \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

όπου $\theta_e = \text{atan2}(a_{ey}, a_{ex})$ είναι η γωνία της προβολής του $\mathbf{a}_e$ στο xy επίπεδο με τον άξονα x . Οι δύο γωνίες του παραπάνω διανύσματος φαίνονται στο σχήμα 4.8.

Προηγουμένως αποδείξαμε ότι το $\dot{\phi}_e$ δίνεται από τη σχέση (4.20). Μένει να υπολογιστεί η παράγωγος $\dot{\theta}_e$, η οποία λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (4.16) που δίνει τη παράγωγο του $\mathbf{a}_e$, υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_e &= \frac{\partial \theta_e}{\partial a_{ey}} \frac{da_{ey}}{dt} + \frac{\partial \theta_e}{\partial a_{ex}} \frac{da_{ex}}{dt} = \frac{a_{ex}}{r^2} \dot{a}_{ey} - \frac{a_{ey}}{r^2} \dot{a}_{ex} = \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} -a_{ey} & a_{ex} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_{ex} \\ \dot{a}_{ey} \\ \dot{a}_{ez} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} -a_{ey} & a_{ex} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{a}_e = \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} -a_{ey} & a_{ex} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{a}_e) \mathbf{J}_o \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{a}_e) \mathbf{S}(\mathbf{a}_e) \mathbf{J}_o \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

η οποία τελικά γράφεται ως

$$\dot{\theta}_d = \mathbf{ad}^T \mathbf{S}(\mathbf{a}_e) \mathbf{S}(\mathbf{a}_e) \mathbf{J}_o \dot{\mathbf{q}} / r^2 \quad (4.29)$$

Λαμβάνοντας επίσης υπόψη τη σχέση (4.13), για την χρονική παράγωγο του $[x_e \ y_e \ z_e]$, προκύπτει ότι

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p \\ \mathbf{J}_z \\ \frac{\mathbf{ad}^T \mathbf{S}(\mathbf{a}_e) \mathbf{J}_o}{r} \\ \frac{\mathbf{ad}^T \mathbf{S}(\mathbf{a}_e) \mathbf{S}(\mathbf{a}_e) \mathbf{J}_o}{r^2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{q}} \quad (4.30)$$

Η Ιακωβιανή $\mathbf{J}_1$ αποτελεί μια άλλη αναλυτική Ιακωβιανή μήτρα και έχει διαστάσεις $5 \times n$. Οι διαστάσεις της νέας αυτής Ιακωβιανής μήτρας υποδηλώνουν μη πλεοναστότητα για ρομποτικό χειριστή 5β.ε και κάτω, για την εργασία που πρόκειται να πραγματοποιηθεί.

Ορίζουμε ως $\mathbf{e}_1$ το σφάλμα μεταξύ της επιθυμητής και της τρέχουσας κατάστασης ως

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}_{1d} - \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_d(t) \\ \phi_d \\ \theta_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ \phi_e \\ \theta_e \end{bmatrix}$$

Στη περίπτωση που ο βραχίονας διαθέτει 5 βαθμούς ελευθερίας, ο πίνακας $\mathbf{J}_1$ είναι τετραγωνικός και μπορούμε να υιοθετήσουμε τον νόμο ελέγχου

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_1^{-1}(\mathbf{K}\mathbf{e}_1 + \mathbf{x}_{1d}) \quad (4.31)$$

ή αν διαθέτει πάνω από 5 βαθμούς ελευθερίας, η αντίστροφη της Ιακωβιανής $\mathbf{J}_1^{-1}$ θα αντικατασταθεί με τη ψευδοαντίστροφη της $\mathbf{J}_1^+$. Με το παραπάνω σχήμα ελέγχου πετυχαίνουμε να πετύχουμε δυναμική σφάλματος

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{x}_{1d} - \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_{1d} - \mathbf{J}_1\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{x}_{1d} - \mathbf{x}_{1d} - \mathbf{K}\mathbf{e}_1 = -\mathbf{K}\mathbf{e}_1$$

Αυτή τη φορά, τα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{x}_{1d}$ είναι όλα σταθερά, εκτός από την επιθυμητή συνιστώσα z , η οποία είναι χρονομεταβλητή. Θα ισχύει δηλαδή $\mathbf{x}_{1d} = [0 \ 0 \ \dot{z}_d(t) \ 0 \ 0]^T$.

Με αυτόν τον νόμο ελέγχου αναμένουμε το σφάλμα για την κατάσταση $\mathbf{x}_1$ που ορίσαμε, να συγκλίνει εκθετικά στο μηδέν. Εφόσον το διάνυσμα κατάστασης περιέχει μόνο τις γωνίες ϕ_e και θ_e του $\mathbf{a}_e$ σε ότι αφορά τον προσανατολισμό, ενδέχεται το ρομπότ να καταλήξει με διαφορετικό μητρώο προσανατολισμού από το $\mathbf{R}_f$ το οποίο υπολογίστηκε στο προηγούμενο βήμα, άρα και με διαφορετική τελική διάταξη αρθρώσεων από το $\mathbf{q}_f$. Όπως ειπώθηκε και προηγουμένως, κάτι τέτοιο δεν είναι ανεπιθύμητο, λόγω της υπόθεσης περί συμμετρίας του αντικειμένου. Η μέθοδος αυτή έχει το μειονέκτημα ότι αν ο χειριστής έχει κάτω από 5 βαθμούς ελευθερίας, η Ιακωβιανή $\mathbf{J}_1$ θα είχε παραπάνω γραμμές από ότι στήλες, οπότε θα έπρεπε να καταφύγουμε σε προσεγγιστική λύση με την εκ-αριστερών ψευδοαντίστροφη.

Δεύτερος νόμος ελέγχου

Εάν δεν ενδιαφερόμασταν καθόλου για την κατεύθυνση άφιξης του χειριστή, εφόσον έχουμε ένα επιθυμητό τελικό διάνυσμα $\mathbf{q}_f$ για τις αρθρώσεις, θα χρησιμοποιούσαμε έναν απλό νόμο ελέγχου της μορφής (4.27). Εφόσον τώρα η κατεύθυνση άφιξης αφορά μόνο το z_e , μπορούμε να ορίσουμε μια μεταβλητή κατάστασης x_z στον χώρο δράσης που πρακτικά είναι μόνο το z_e , έτσι ώστε:

$$\dot{x}_z = \dot{z}_e = \mathbf{J}_z\dot{\mathbf{q}} \quad (4.32)$$

Η προηγούμενη εξίσωση αποτελεί μία ακόμη σχέση ευθείας διαφορικής κινηματικής με μόνο μία μεταβλητή κατάστασης, ενώ η αντίστοιχη Ιακωβιανή $\mathbf{J}_z$ είναι διαστάσεων $(1 \times n)$. Προκύπτει έτσι ότι η σχέση (4.32) αντιστοιχεί σε πλεονάζον σύστημα, όμοια με τη περίπτωση του συστήματος (4.21). Εκμεταλλευόμενοι την πλεοναστότητα αυτή, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε έναν νόμο ελέγχου της μορφής:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_z^+(\dot{z}_d + k_z e_z) + k_q(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_z^+\mathbf{J}_z)(\mathbf{q}_f - \mathbf{q}) \quad (4.33)$$

ο οποίος όπως έχουμε δείξει, αναγκάζει μόνο το z_e να συγκλίνει ασυμπτωτικά στο επιθυμητό $z_d(t)$, ενώ η πλεοναστότητα που χαρακτηρίζει τη σχέση (4.32) χρησιμοποιείται για την μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $w(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_f)^T(\mathbf{q} - \mathbf{q}_f)$ με $\frac{dw(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} = (\mathbf{q}_f - \mathbf{q})$. Η συνάρτηση αυτή λαμβάνει φυσικά μέγιστη τιμή όταν $\mathbf{q} = \mathbf{q}_f$.

Αφού αναμένουμε το $z_e(\mathbf{q})$ να συγκλίνει στο $z_d(t_f) = z_f$, τότε η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει το συναρτησιακό $w(\mathbf{q})$ είναι μηδέν, εφόσον το $\mathbf{q}$ είναι δυνατό να γίνει ίσο με $\mathbf{q}_f$ από τη στιγμή που για τη διάταξη του ρομπότ τελικά θα ισχύσει $z_e = z_f$. Αυτή τη φορά δηλαδή η κύρια εργασία του νόμου ελέγχου είναι να συγκλίνει το z_e στο z_f και η δευτερεύουσα είναι να ταυτίσει το $\mathbf{q}$ με το $\mathbf{q}_f$, μέσω των εσωτερικών κινήσεων του μηχανικού δομήματος.

Για να δούμε πιο αναλυτικά τη συμπεριφορά του παραπάνω αλγορίθμου ελέγχου, αρχικά θα συμβολίσουμε ως $\dot{\mathbf{q}}_z$ τον όρο $\dot{\mathbf{q}}_z = \mathbf{J}_z^+(z_d + k_z e_z)$ και ως $\dot{\mathbf{q}}_n$ τον όρο $\dot{\mathbf{q}}_n = k_q(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_z^+ \mathbf{J}_z)(\mathbf{q}_f - \mathbf{q})$. Η πορεία της συνάρτησης $w(\mathbf{q}(t))$ στον χρόνο γίνεται κατανοητή μέσω της χρονικής παραγώγου της

$$\dot{w} = -(\mathbf{q} - \mathbf{q}_f)^T \dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}_f - \mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}}_z + (\mathbf{q}_f - \mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}}_n$$

Στον ορισμό του $\dot{z}_d$ έχει επιλεγεί να ισχύει $\dot{z}_d = 0$ για χρόνο μεγαλύτερο μιας χρονικής στιγμής T_1 , ενώ έχουμε δείξει ότι το e_z θα συγκλίνει εκθετικά στο μηδέν, με ρυθμό που ορίζεται από το k_z . Έτσι, ο όρος $\dot{\mathbf{q}}_z$ πρακτικά μηδενίζεται από μία χρονική στιγμή t_1 και μετά, κάνοντας το $\dot{w}$ να επηρεάζεται μόνο από τον όρο $\dot{\mathbf{q}}_n$.

$$\dot{w} = (\mathbf{q}_f - \mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}}_z + k_q(\mathbf{q}_f - \mathbf{q})^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_z^+ \mathbf{J}_z)(\mathbf{q}_f - \mathbf{q}) \quad (4.34)$$

Ο όρος $\dot{\mathbf{q}}_n$ έχει ιδιαίτερη σημασία, αποτελώντας την προβολή του $\mathbf{q}_f - \mathbf{q}$ στον μηδενικό χώρο της Ιακωβιανής $\mathbf{J}_z(\mathbf{q})$. Στη παραπάνω εξίσωση, η ποσότητα $(\mathbf{q}_f - \mathbf{q})(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_z^+ \mathbf{J}_z)(\mathbf{q}_f - \mathbf{q})$ αποτελεί μια τετραγωνική μορφή. Στο [5] αναφέρεται ότι γενικά μία Ιακωβιανή $\mathbf{J}_g$, μετά από διάσπαση SVD μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{J}_g = [U_{//} \ U_{\perp}] \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{//}^T \\ \mathbf{V}_{\perp}^T \end{bmatrix}$$

με το μητρώο προβολής στο μηδενικό χώρο της $\mathbf{J}_g$ να είναι το $\mathbf{I} - \mathbf{J}_g^+ \mathbf{J}_g = \mathbf{V}_{\perp} \mathbf{V}_{\perp}^T$. Εφόσον λοιπόν ο πυρήνας $\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_z^+ \mathbf{J}_z$ μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο ενός πίνακα με τον ανάστροφο του, σημαίνει ότι είναι και θετικά ημιορισμένος. Έτσι, θα ισχύει

$$(\mathbf{q}_f - \mathbf{q})^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_z^+ \mathbf{J}_z)(\mathbf{q}_f - \mathbf{q}) \geq 0$$

Ο όρος αυτός λοιπόν, όταν δεν είναι μηδενικός, θα αυξάνει τη συνάρτηση $w(t)$. Παράλληλα, σύμφωνα με το [6], αν $\mathbf{q}_0$ είναι διάταξη κατά την οποία μία συνάρτηση $w(\mathbf{q})$ ελαχιστοποιείται υπό τον περιορισμό $\mathbf{t}_0 = \mathbf{k}_t(\mathbf{q}_0)$, τότε θα ισχύει

$$\frac{\partial w(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \mathbf{N}_{\mathbf{J}_t}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}^T \quad (4.35)$$

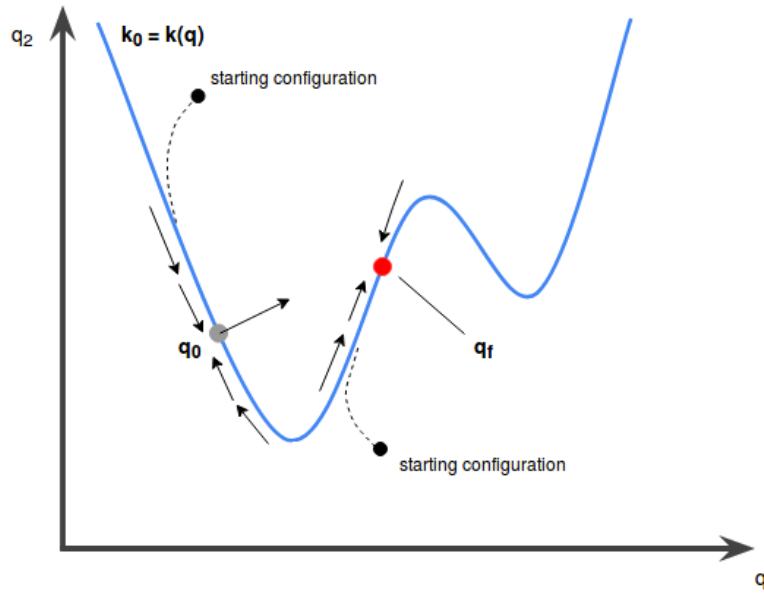
όπου $\mathbf{N}_{\mathbf{J}_t}(\mathbf{q}_0)$ είναι το μητρώο προβολής στον μηδενικό χώρο της Ιακωβιανής $\mathbf{J}_t$. Ένα τέτοιο μητρώο είναι φυσικά το $\mathbf{N}_{\mathbf{J}_t}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{I} - \mathbf{J}_t^+ \mathbf{J}_t$. Στη περίπτωση μας, εκμεταλλευόμενοι ότι το μητρώο $\mathbf{I} - \mathbf{J}_z^+ \mathbf{J}_z$ είναι συμμετρικό, η παραπάνω συνθήκη δίνει

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_z^+(\mathbf{q}_0) \mathbf{J}_z(\mathbf{q}_0))(\mathbf{q}_f - \mathbf{q}_0) = \mathbf{0} \quad (4.36)$$

με το $\mathbf{q}_0$ να αποτελεί τοπικό μέγιστο της w , υπό τον περιορισμό $z_f = z_e(\mathbf{q}_0)$. Στην εξίσωση τώρα $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_z + \dot{\mathbf{q}}_n$, γνωρίζουμε ότι ο όρος $\dot{\mathbf{q}}_z$ συγκλίνει στο μηδέν, κάτι που θα πρέπει επίσης

να συμβαίνει για το $\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{n}}$. Αν το $\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{n}}$ συνέκλινε σε μη μηδενική τιμή, τότε η συνάρτηση $w(\mathbf{q})$ θα αυξανόταν αέναα, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι έχει φραγμένο ολικό μέγιστο στο $\mathbf{q}_{\mathbf{f}}$.

Έστω τώρα $\mathbf{q}_1$ η διάταξη στην οποία θεωρούμε ότι έχει μηδενιστεί ο όρος $\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{z}}$. Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις, προκύπτει ότι ο αλγόριθμος (4.33) θα οδηγήσει σε μία τελική διάταξη $\mathbf{q}_0$ για την οποία θα ισχύει $w(\mathbf{q}_0) \geq w(\mathbf{q}_1)$ (το ίσον ισχύει όταν εξ αρχής το $\mathbf{q}_1$ ικανοποιεί την (4.36)) και στην οποία ικανοποιείται η συνθήκη (4.36). Φυσικά, αφού το $\mathbf{q}_{\mathbf{f}}$ ικανοποιεί τον περιορισμό $\mathbf{z}_{\mathbf{f}} = \mathbf{z}_{\mathbf{e}}(\mathbf{q}_{\mathbf{f}})$, είναι φανερό ότι θα ικανοποιεί την (4.36) (για $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_{\mathbf{f}}$). Αυτό σημαίνει ότι ο αλγόριθμος αυτός θα συγκλίνει στο $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_{\mathbf{f}}$ με κατάλληλες αρχικές συνθήκες, εξασφαλίζοντας τοπική ευστάθεια. Ολική ευστάθεια θα υπήρχε εάν το μοναδικό $\mathbf{q}_0$ που ικανοποιούσε την (4.36), ήταν το $\mathbf{q}_{\mathbf{f}}$, κάτι που όμως εξαρτάται από τη φύση του περιορισμού $\mathbf{z}_{\mathbf{f}} = \mathbf{z}_{\mathbf{e}}(\mathbf{q})$.



Σχήμα 4.9: Τροχιά των μεταβλητών των αρθρώσεων με βάση τον παραπάνω αλγόριθμο

Ο παραπάνω αλγόριθμος γενικεύεται για πλήθος περιορισμών έως και $n - 1$ και έχει ενδιαφέρουσα γεωμετρική ερμηνεία. Μπορούμε να συμβολίσουμε τους περιορισμούς σε μορφή διανύσματος ως $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}(\mathbf{q})$. Οι περιορισμοί αυτοί ορίζουν μία επιφάνεια στον χώρο $\mathbb{R}^n$ των αρθρώσεων, της οποίας τα σημεία τους ικανοποιούν. Ξεκινώντας από ένα αυθαίρετο σημείο $\mathbf{q}_{\mathbf{s}}$ εκτός της επιφάνειας, ο όρος $\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{z}}$ δημιουργεί τροχιά $\mathbf{q}(t)$, η οποία συγκλίνει πάνω στην επιφάνεια, ενώ ο όρος $\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{n}}$ δημιουργεί κινήσεις πάνω στην επιφάνεια. Πιο συγκεκριμένα, το $\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{n}}$ έχει τη κατεύθυνση του $(\mathbf{q}_{\mathbf{f}} - \mathbf{q})$, προβαλλόμενο εφαπτομενικά πάνω στην επιφάνεια, θυμίζοντας κίνηση πάνω σε δυναμικό πεδίο. Ο όρος $\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{n}}$ μηδενίζεται όταν η προβολή του $(\mathbf{q}_{\mathbf{f}} - \mathbf{q})$ στη επιφάνεια είναι μηδενική, δηλαδή όταν το $(\mathbf{q}_{\mathbf{f}} - \mathbf{q})$ είναι κάθετο στην επιφάνεια. Έτσι, αν το $\mathbf{q}_{\mathbf{f}}$ ανήκει στην επιφάνεια, ο όρος $\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{n}}$ μπορεί να μηδενιστεί σε διάταξη $\mathbf{q}_0 \neq \mathbf{q}_{\mathbf{f}}$, εάν η ευθεία που ορίζει το διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια στο σημείο $\mathbf{q}_0$, τέμνει το $\mathbf{q}_{\mathbf{f}}$. Η εκτέλεση του αλγορίθμου μπορεί να φανεί σχηματικά στο Σχ. 4.9, για ένα απλό παράδειγμα δύο αρθρώσεων.

Τρίτος νόμος ελέγχου

Αυτό το σχήμα ελέγχου και το επόμενο μπορούν να εφαρμοστούν εφόσον για την εύρεση του κοινού σημείου, χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος της παραγράφου (4.2.2) που βασίζεται στην πλεοναστότητα. Για μπορέσει να εφαρμοστεί το σχήμα ελέγχου αυτό, θα πρέπει αρχικά στον αλγόριθμο της πλεοναστότητας του πρώτου βήματος να έχει τεθεί $\alpha = dt$ όπου dt το χρονικό διάστημα της δειγματοληψίας.

Υπενθυμίζουμε ότι στον αλγόριθμο της παραγράφου (4.2.2) το επιθυμητό z_e ήταν το σταθερό z_f και όχι η συνάρτηση $z_d(t)$. Για το σχήμα ελέγχου αυτό, θα χρειαστεί στο πρώτο βήμα ως επιθυμητό z_e να τεθεί το $z_d(t)$ έτσι ώστε να ισχύει $\mathbf{x}_{z\phi_d} = [\dot{z}_d(t) \ 0]^T$. Κάτι τέτοιο δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα του προηγούμενου αλγορίθμου, αφού και στις 2 περιπτώσεις η z_e συνιστώσα του ρομποτικού χειριστή αναμένουμε να καταλήξει στη τιμή z_f .

Έτσι, εφαρμόζοντας ως νόμο ελέγχου ακριβώς τον ίδιο τον αλγόριθμο του πρώτου βήματος, δηλαδή την εξίσωση (4.23), αναμένουμε ο ρομποτικός χειριστής να καταλήξει ακριβώς στην ίδια τελική στάση στην οποία κατέληξε ο αλγόριθμος πλεοναστότητας, η οποία στάση φυσικά είναι η επιθυμητή.

Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι ναι μεν ο νόμος ελέγχου είναι σθεναρός (robust) σε διαταραχές ως προς τα z, ϕ , όμως δεν ελέγχεται άμεσα η πορεία των μεταβλητών x_e, y_e , κάνοντας τον σημαντικά επιρρεπή σε διαταραχές ως προς το $x - y$ επίπεδο, με πιθανό αποτέλεσμα να καταλήξει σε διαφορετικό σημείο από το αρχικά επιλεγμένο. Κάτι τέτοιο θα ήταν ανεπιθύμητο, διότι στο πρώτο βήμα έχει ουσιαστικά συμφωνηθεί τα δύο ρομπότ να βρεθούν στη θέση (x_f, y_f) στο επίπεδο, κάτι που θα πραγματοποιηθεί από το κινούμενο ρομπότ και πιθανώς όχι από τον χειριστή, με αποτέλεσμα τα ρομπότ να βρεθούν πιθανώς σε διαφορετική τελική θέση.

Τέταρτος νόμος ελέγχου

Σε αυτόν τον τρόπο, κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου πλεοναστότητας καταγράφουμε την πορεία που ακολούθησαν οι μεταβλητές αρθρώσεων $\mathbf{q}$ μαζί με τις ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}}$, δημιουργώντας έτσι μια τροχιά αναφοράς $\mathbf{q}_d(t)$, $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$. Φυσικά στον αλγόριθμο πλεοναστότητας θα πρέπει ξανά $\alpha = dt$ και να λάβουμε υπόψη το κατεύθυνση άφιξης. Έτσι, η παραπάνω τροχιά αναφοράς στον χώρο των αρθρώσεων είναι η επιθυμητή κίνηση που θέλουμε να εκτελέσει το ρομπότ. Συνεπώς με έναν απλό νόμο ελέγχου της μορφής:

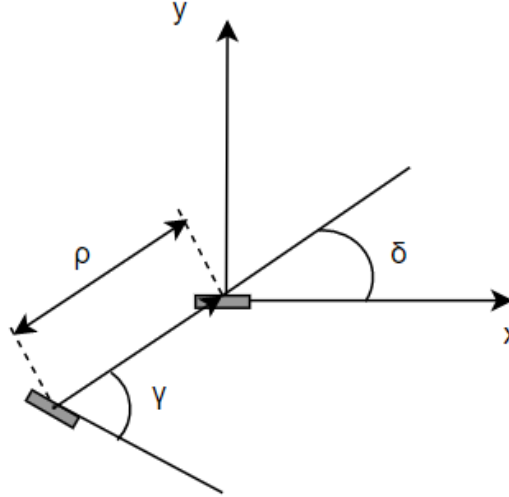
$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_d + K_q(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}) \quad (4.37)$$

αναμένουμε ασυμπτωτική σύγκλιση του σφάλματος $\mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}$ και άρα του $\mathbf{q}_f - \mathbf{q}$ των αρθρώσεων στο μηδέν, πραγματοποιώντας ουσιαστικά παρακολούθηση της τροχιάς που παράχθηκε προηγουμένως.

4.3.2 Έλεγχος ενός κινούμενου ρομπότ τύπου μονόκυκλου

Μετά την εκτέλεση του βήματος της εύρεσης ενός βέλτιστου σημείου, λαμβάνουμε το διάνυσμα $[x_{ef} \ y_{ef} \ z_{ef}]^T$ ως την επιθυμητή καρτεσιανή θέση και $\mathbf{R}_f = [\mathbf{n}_{ef} \ \mathbf{s}_{ef} \ \mathbf{a}_{ef}]$ τον επιθυμητό τελικό προσανατολισμό του ρομποτικού χειριστή. Υπενθυμίζουμε ότι το διάνυσμα κατάστασης

ενός κινούμενου ρομπότ τύπου μονόκυκλου, περιγράφεται από το διάνυσμα τριών μεταβλητών $[x_m \ y_m \ \theta_m]^T$, ενώ το κινηματικό μοντέλο του περιγράφεται από τη σχέση (3.7). Το κινούμενο ρομπότ λοιπόν θα έχει ως επιθυμητή τελική στάση το διάνυσμα $[x_{ef} \ y_{ef} \ \text{atan2}(a_{eyf}, a_{exf})]^T$, λαμβάνοντας υπόψη την απαίτηση (4.3) για τον επιθυμητό προσανατολισμό του οχήματος.



Σχήμα 4.10: Νέες συντεταγμένες μονόκυκλου

Το επιθυμητό αυτό διάνυσμα κατάστασης είναι σταθερό, συνεπώς ο σκοπός μας σε αυτή τη φάση είναι να βρεθεί νόμος ελέγχου ο οποίος για οποιαδήποτε αρχική στάση $[x_{m_i} \ y_{m_i} \ \theta_{m_i}]^T$, το ρομπότ να καταλήξει στην επιθυμητή τελική στάση $[x_{ef} \ y_{ef} \ \text{atan2}(a_{eyf}, a_{exf})]^T$, με εισόδους ελέγχου τη γραμμική και γωνιακή ταχύτητα (v, ω) του οχήματος. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως *ρύθμιση στάσης (pose regulation)*. Στο [1] περιλαμβάνεται ένας νόμος ελέγχου για την επίλυση του προβλήματος αυτού, για τελική επιθυμητή κατάσταση στην αρχή των αξόνων $[0 \ 0 \ 0]^T$, ο οποίος βασίζεται στη χρήση πολικών συντεταγμένων. Συγκεκριμένα, ορίζοντας ως ρ την απόσταση μεταξύ του μονόκυκλου και της αρχής των αξόνων, ως γ τη γωνία μεταξύ του διανύσματος $-[x_m \ y_m]^T$ και του τοξοειδούς άξονα και δ τη γωνία μεταξύ του ίδιου διανύσματος και του άξονα χ , έχουμε:

$$\rho = \sqrt{x_m^2 + y_m^2}$$

$$\gamma = \text{Atan2}(y_m, x_m) - \theta_m + \pi$$

$$\delta = \gamma + \theta$$

Παραγωγίζοντας τις παραπάνω σχέσεις ως προς τον χρόνο, προκύπτει το κινηματικό μοντέλο του μονόκυκλου με βάση τις συντεταγμένες αυτές ως εξής

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= -v \cos \gamma \\
\dot{\gamma} &= \frac{\sin \gamma}{\rho} v - \omega \\
\dot{\delta} &= \frac{\sin \gamma}{\rho} v
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Ορίζοντας τώρα τον νόμο ανάδρασης

$$u = k_1 \rho \cos \gamma, \quad \omega = k_2 \gamma + k_1 \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{\gamma} (\gamma + k_3 \delta) \tag{4.39}$$

προκύπτει ότι το προηγούμενο κινηματικό μοντέλο συγχλίνει ασυμπτωτικά στην επιθυμητή διάταξη $[\rho \ \gamma \ \delta]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$. Η απόδειξη του αποτελέσματος αυτού, σύμφωνα με το [1], βασίζεται στην υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}(\rho^2 + \gamma^2 + k_3 \delta^2)$$

Η χρονική παράγωγος αυτής της συνάρτησης Lyapunov, λαμβάνοντας υπόψη το παραπάνω κινηματικό μοντέλο και μετά από πράξεις, καταλήγει να είναι

$$\dot{V} = -\rho v \cos \gamma + \gamma \left(\frac{v \sin \gamma}{\rho \gamma} (\gamma + k_3 \delta) - \omega \right)$$

Αν αντικαταστήσουμε τα (v, ω) με αυτά του νόμου ελέγχου (4.39) στη παραπάνω σχέση, τότε λαμβάνουμε

$$\dot{V} = -k_1 \rho^2 \cos^2 \gamma - k_2 \gamma^2$$

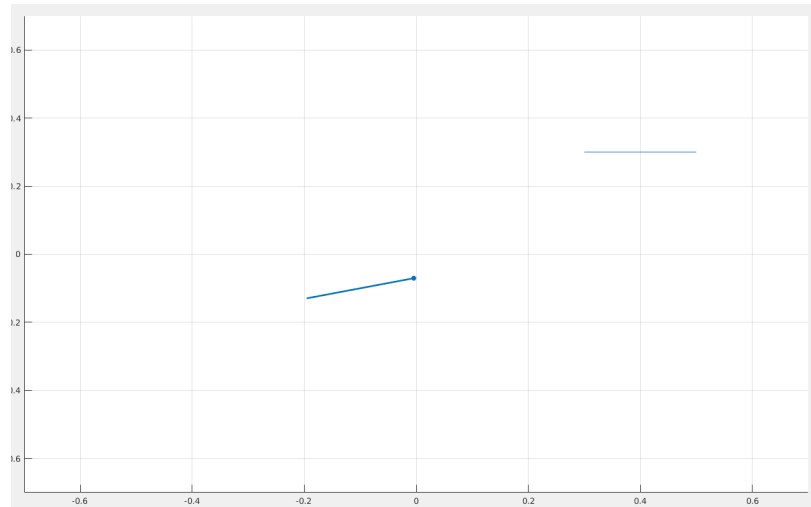
Η παραπάνω έκφραση υποδεικνύει ότι η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov είναι αρνητικά ημι-ορισμένη. Με χρήση του λήμματος Barbalat και με περαιτέρω ανάλυση του συστήματος κλειστού βρόχου, μπορούμε τελικά να συμπεράνουμε ότι και οι τρεις μεταβλητές (ρ, γ, δ) συγχλίνουν στο μηδέν. Αντίστοιχο αποτέλεσμα προκύπτει για μια αυθαίρετη επιθυμητή στάση $[x_d \ y_d \ \theta_d]$ ορίζοντας το σφάλμα καρτεσιανής θέσης

$$\mathbf{e}_m = \mathbf{x}_d(1:2) - \mathbf{x}_m(1:2)$$

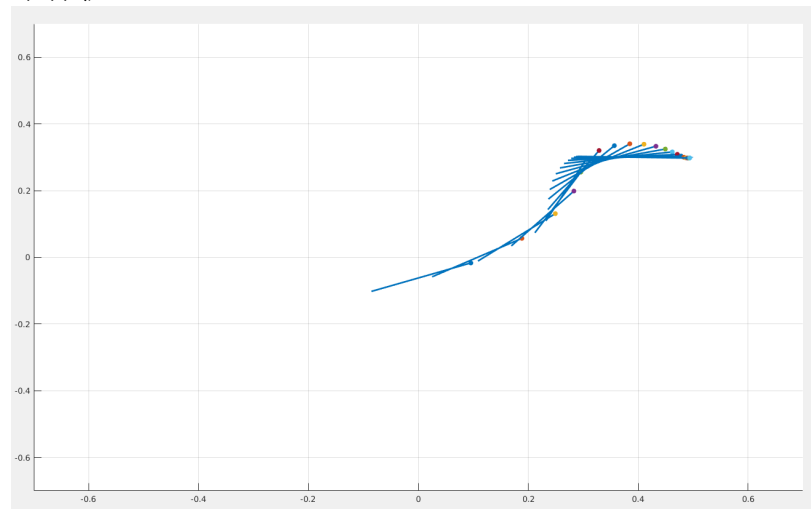
και τροποποιώντας ελαφρώς τον ορισμό των πολικών συντεταγμένων ως

$$\rho = \sqrt{e_{mx}^2 + e_{my}^2}, \quad \gamma = \text{atan2}(e_{my}, e_{mx}) - \theta, \quad \delta = \gamma + \theta - \theta_d$$

Στο Σχ. 4.11 φαίνεται η διαδρομή που ακολουθεί το κινούμενο ρομπότ με τον παραπάνω νόμο ελέγχου, από μια αρχική διάταξη σε μια τελική (το όχημα είναι η παχιά μπλε γραμμή με εμπρός μέρος την κουκκίδα).



Σχήμα 4.11: Αρχική και επιθυμητή τελική διάταξη ρομπότ (αχνή μπλε γραμμή)



Σχήμα 4.12: Διαδρομή από την αρχική στην τελική θέση

4.3.3 Έλεγχος ενός κινούμενου ρομπότ τύπου αμαξιδίου

Το κινηματικό μοντέλο ενός τέτοιου οχήματος με κίνηση στον πίσω τροχό, σύμφωνα με την εξίσωση (3.13) θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \dot{\theta}_m \\ \dot{\psi}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_m \\ \sin \theta_m \\ \tan \psi_m / l \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad (4.40)$$

όπου οι δύο είσοδοι ελέγχου u_1, u_2 αντιστοιχούν στη γραμμική ταχύτητα του οχήματος και στον ρυθμό μεταβολής της γωνίας στροφής των προστά τροχών αντίστοιχα. Στα [7, 8] προτείνεται ένα σχήμα ελέγχου για παρκάρισμα, έτσι ώστε το ρομπότ από οποιαδήποτε αρχική θέση να φτάσει

στην αρχή των αξόνων με γωνία μηδέν, δηλαδή στο τελικό διάνυσμα κατάταξης $\mathbf{q}_f = [0 \ 0 \ 0]^T$, κάτι που εύκολα γενικεύεται για μια αυθαίρετη επιθυμητή διάταξη $[x_d \ y_d \ \theta_d]^T$. Ο έλεγχος που προτείνεται στα συγγράμματα αυτά, γίνεται με τη δεύτερη είσοδο u_2 ελέγχου να είναι η εφαπτομένη της γωνίας $\tan \psi_m$ αντί για το $\dot{\psi}_m$ και χωρίζεται σε 2 φάσεις.

Φάση 1, σύγκλιση των (y_m, θ_m)

Στη πρώτη φάση αυτού του νόμου ελέγχου, το u_1 επιλέγεται σταθερό και ίσο με:

$$u_1 = \pm |V_1| = \text{const.} \quad (4.41)$$

ενώ το πρόσημο καθορίζεται στην αρχή του ελέγχου με βάση τη ποσότητα $\alpha = \text{atan2}(y, x)$ και τον κανόνα If $\cos(\alpha - \theta) > 0$ then $V < 0$ else $V > 0$. Ο κανόνας αυτός υποδηλώνει ότι αν το μπροστινό μέρος του αμαξιδίου είναι πιο κοντά στην επιθυμητή θέση, τότε το όχημα θα εκκινήσει προς τα μπροστά.

Η δεύτερη είσοδος ελέγχου u_2 επιλέγεται να είναι της μορφής

$$u_2 = \tan \psi_m = -\frac{l}{u} \left(k_1 u \frac{\sin \phi}{\phi} y + k_2 \phi \right) \quad (4.42)$$

όπου k_2 θετική σταθερά.

Η απόδειξη για τον παραπάνω νόμο ελέγχου, σύμφωνα με τα [7, 8] βασίζεται στην υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V = [y_m \ \theta_m] \mathbf{K} \begin{bmatrix} y_m \\ \theta_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση αυτή ως προς τον χρόνο και λαμβάνοντας υπόψη το κινηματικό μοντέλο του οχήματος τελικά παίρνουμε

$$\dot{V} = (k_1 y_m \sin \theta_m + \frac{\theta_m}{l} \tan \psi_m) u_1$$

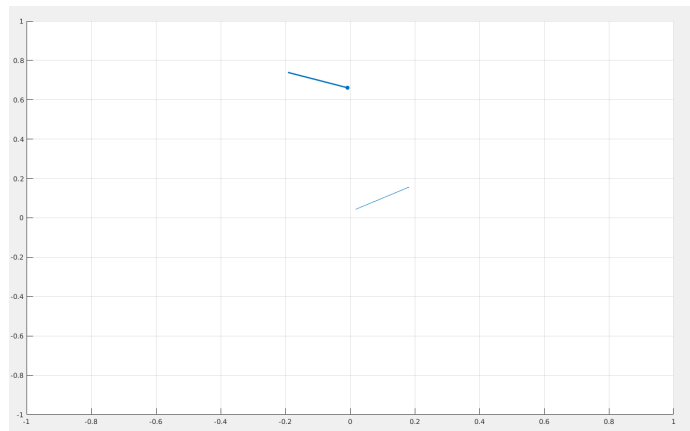
Με την επιλογή των εισόδων ελέγχου με βάσει τις σχέσεις (4.41) και (4.42), η παράγωγος της υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov απλοποιείται στην:

$$\dot{V} = -k_2 \theta_m^2 \leq 0$$

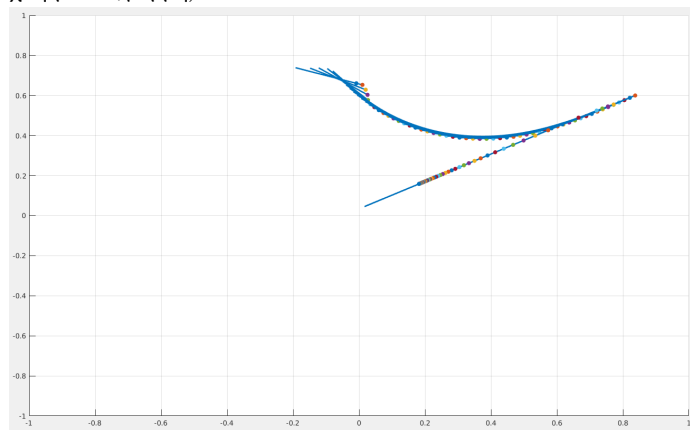
αποτέλεσμα από το οποίο προκύπτει εύκολα ότι οι μεταβλητές y_m, θ_m συγχλίνουν ασυμπτωτικά στο μηδέν. Στη πράξη, θα θεωρήσουμε δύο πολύ μικρά κατώφλια ϵ_1 και ϵ_2 , έτσι ώστε όταν φτάσει η στιγμή που θα ισχύει $y_m < \epsilon_1$ και $\theta_m < \epsilon_2$, να περάσουμε από το σχήμα ελέγχου της φάσης 1, σε αυτό της φάσης 2.

Σε ότι αφορά τη πρώτη φάση, ο έλεγχος για το πρόσημο της ταχύτητας u_1 μπορεί να πραγματοποιηθεί ξανά σε διάφορες περιπτώσεις, όπως όταν το ρομπότ θα έχει διανύσει μια συγκεκριμένη απόσταση ή όταν το ρομπότ πλησιάζει εμπόδιο, έτσι ώστε να αλλάξει φορά της κίνησης του. Μάλιστα, εάν δεν έχει ληφθεί υπόψη να αλλάξει η φορά κίνησης του ρομπότ όταν αυτό διανύει μια απόσταση και εάν τα ϵ_1, ϵ_2 έχουν επιλεγεί πολύ μικρά, τότε το ρομπότ ενδοχομένως να απομακρυνθεί πολύ από το μηδέν πάνω στον x άξονα. Στα σχήματα 4.13 με

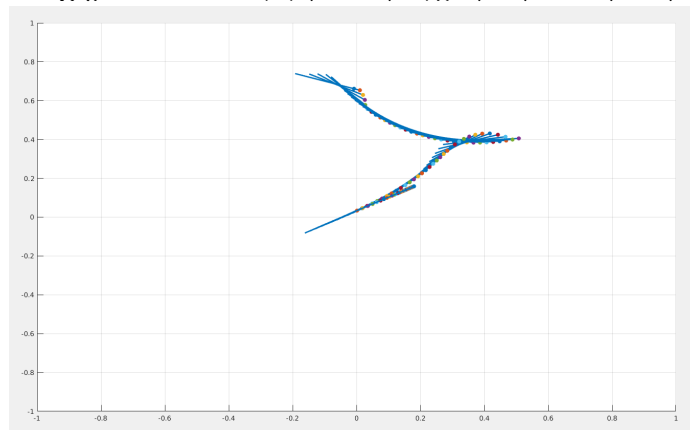
4.15 φαίνεται η πορεία του ρομπότ από μια αρχική σε μια επιθυμητή τελική θέση, χωρίς και με αλλαγή φοράς.



Σχήμα 4.13: Αρχική και επιθυμητή τελική διάταξη ρομπότ (α-χνή μπλε γραμμή)



Σχήμα 4.14: Διαδρομή από την αρχική στην τελική θέση



Σχήμα 4.15: Διαδρομή από την αρχική στην τελική θέση με αλλαγή φοράς κίνησης στη 1η φάση

Φάση 2, σύγκλιση των (x_m, θ_m)

Σε αυτή τη φάση ο νόμος ελέγχου είναι

$$u_1 = -k_3 x, \quad u_2 = \tan \psi_m = -u_1 \theta_m \quad (4.43)$$

Με μία αντίστοιχη υποψήφια συνάρτηση Lyapunov της μορφής

$$V = [x_m \quad \theta_m] \mathbf{K} \begin{bmatrix} y_m \\ \theta_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

προκύπτει ότι

$$\dot{V} = k_1 x_m u_1 \cos \theta_m + \frac{\theta_m}{l} u_1 \tan \psi_m$$

Με την επιλογή του νόμου ελέγχου (4.43), η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov παίρνει τη μορφή

$$\dot{V} = -k_3 x_m^2 (k_1 \cos \theta_m + \frac{k_3}{l} \theta_m^2)$$

Εφόσον τώρα βρισκόμαστε στη φάση 2, θα πρέπει οι μεταβλητές y_m και θ_m να είναι μηδενικές (ή σχεδόν μηδενικές), λόγω του σχήματος ελέγχου της φάσης 1. Συνεπώς, για $\theta_m = 0$ έχουμε ότι

$$\dot{V} = -k_3 k_1 x_m^2 \leq 0$$

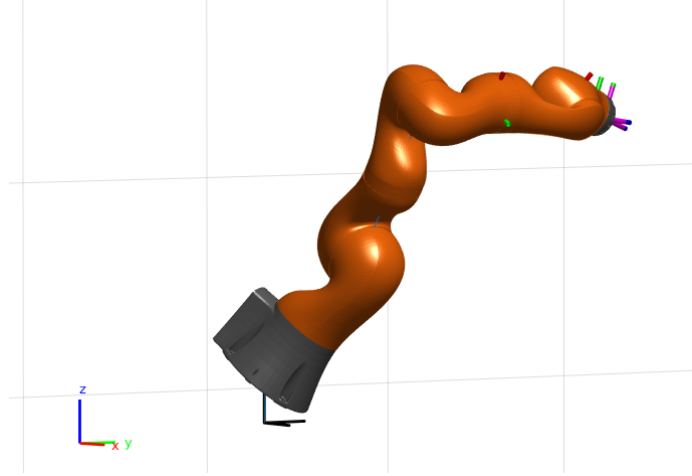
κάτι το οποίο εξασφαλίζει τη σύγκλιση και του x_m στο μηδέν.

4.4 Εξέταση περίπτωσης κεκλιμένου επιπέδου

Ως κεκλιμένο επίπεδο εννοούμε ουσιαστικά η βάση του ρομπότ να βρίσκεται σε κλίση σε σχέση με το έδαφος, ή αλλιώς το σύστημα συντεταγμένων βάσης (base frame) του ρομπότ να έχει περιστραφεί σύμφωνα με ένα μητρώο R_u σε σχέση με το γενικό πλαίσιο αναφοράς (global frame), το οποίο θεωρούμε ότι είναι προσκολλημένο στο έδαφος. Στο Σχ. 4.16 φαίνεται η αρχική διάταξη ενός ρομπότ, ενώ αυτό έχει περιστραφεί κατά $0.7rad$ ως προς τον άξονα z και στη συνέχεια ως προς τον άξονα y :

Το ερώτημα τώρα είναι κατά πόσο μπορούν να εφαρμοστούν οι ίδιοι ή αντίστοιχοι αλγόριθμοι με αυτούς που παρουσιάστηκαν προηγουμένως, στη περίπτωση ενός κεκλιμένου εδάφους. Από τη στιγμή που ο χειριστής είναι τέτοιος (δηλαδή η αντίστροφη κινηματική να το επιτρέπει) που να μπορεί να ικανοποιήσει τους περιορισμούς (4.1) και (4.2) για κάποιο διάνυσμα μεταβλητών των αρθρώσεων $\mathbf{q}$ (πράγμα που συνήθως θα συμβαίνει διότι οι περιορισμοί είναι μόνο 2 ενώ οι βαθμοί ελευθερίας 4+), τότε σημαίνει ότι υπάρχει μονοπάτι εντός του workspace που να οδηγεί τον χειριστή στην επιθυμητή θέση. Έτσι, εφόσον η Ιακωβιανή μήτρα και όλα τα παραπάνω διανύσματα εκφράζονται ως προς το global frame, οι προηγούμενοι αλγόριθμοι μπορούν να εφαρμοστούν ως έχουν, για την περίπτωση του κεκλιμένου επιπέδου. Κάτι τέτοιο συμβαίνει για παράδειγμα στο Matlab, δηλαδή παρόλο που το ρομπότ βρίσκεται υπό κλίση, το robotic

toolbox του Matlab επιστρέφει όλα τα μεγέθη στο global frame, συνεπώς ο κώδικας της προσομοίωσης δε χρειάζεται αλλαγή στη κεκαλιμένη ή μη περίπτωση.



Σχήμα 4.16: Ο ρομποτικός χειριστής υπό κλίση

Αν τώρα είναι διαθέσιμα τα μεγέθη στο κεκαλιμένο base frame του βραχίονα (μεγέθη με τον δείκτη u) και R_u είναι το μητρώο στροφής του base frame σε σχέση με το global frame, τότε όπως αναφέρεται και στο [1], εύκολα μπορούμε να ανάγουμε τα μεγέθη ως προς το global frame με βάση τις σχέσεις:

$$\mathbf{a}_e(\mathbf{q}) = \mathbf{R}_u \mathbf{a}_e^u(\mathbf{q})$$

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = \mathbf{R}_u \begin{bmatrix} x_e^u \\ y_e^u \\ z_e^u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \\ \omega_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_e^u \\ \dot{y}_e^u \\ \dot{z}_e^u \\ \omega_e^u \end{bmatrix}$$

και άρα

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_u \end{bmatrix} \mathbf{J}^u$$

όπου τα μεγέθη χωρίς άνω δείκτες είναι εκφρασμένα ως προς το global frame.

Κεφάλαιο 5

Online Συμφωνία των Ρομπότ

Όπως είχε αναφερθεί και στα πρώτα κεφάλαια, Online είναι η περίπτωση στην οποία δεν επιλέγεται εκ των προτέρων ένα κοινό σημείο συνάντησης, αλλά πραγματοποιείται ένα συγκεντρωτικός έλεγχος (centralized control) των 2 ρομπότ, έτσι ώστε να καταλήξουν σε ένα κοινό σημείο, το οποίο παράλληλα να ικανοποιεί τους απαραίτητους περιορισμούς. Πέρα από το ότι θα πρέπει τα δύο ρομπότ να βρεθούν σε μία κοινή θέση στο καρτεσιανό επίπεδο xy , θα πρέπει επίσης, όπως και στην offline περίπτωση, να ικανοποιούνται οι περιορισμοί (4.1), (4.2) και (4.3), ενώ παράλληλα να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση $H(\mathbf{q})$.

Στην offline περίπτωση, ο έλεγχος των δύο ρομπότ γινόταν ανεξάρτητα από τη τρέχουσα θέση του άλλου και βασιζόταν μόνο στην τελική επιθυμητή κοινή θέση και στην διάταξη του ίδιου του ρομπότ. Στην online προσέγγιση, ο συγκεντρωτικός έλεγχος που θα πραγματοποιηθεί σε κάθε ρομπότ, θα πρέπει να λάβει υπόψη την τρέχουσα κατάσταση του άλλου ρομπότ. Πιο συγκεκριμένα, θεωρώντας ξανά ως είσοδους ελέγχου του ρομποτικού χειριστή τις γενικευμένες ταχύτητες των αρθρώσεων $\dot{\mathbf{q}}$, ο νόμος ελέγχου θα είναι γενικά της μορφής

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(z_d(t), \phi_d, \mathbf{q}, \mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m, \frac{dH(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}}) \quad (5.1)$$

όπου $\mathbf{q}_m = [x_m \ y_m \ \theta_m]^T$ είναι το διάνυσμα γενικευμένων μεταβλητών κατάστασης του κινούμενου ρομπότ. Θεωρώντας τώρα ως είσοδους ελέγχου του κινούμενου ρομπότ (που θα θεωρηθεί τύπου μονόκυκλου) τη γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του (u, ω) , ο νόμος ελέγχου για το κινούμενο ρομπότ θα είναι γενικά της μορφής

$$\begin{aligned} u &= g_1(\mathbf{p}_e, \mathbf{R}_e, v_e, \mathbf{q}_m) \\ \omega &= g_2(\mathbf{p}_e, \mathbf{R}_e, v_e, \mathbf{q}_m) \end{aligned} \quad (5.2)$$

όπου τα $\mathbf{p}_e, \mathbf{R}_e$ εκφράζουν τη στάση του τελικού στοιχείου δράσης και το v_e τη ταχύτητα του.

5.1 Έλεγχος του ρομποτικού χειριστή

Ως νόμο ελέγχου για τον ρομποτικό χειριστή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ξανά το σχήμα ελέγχου (4.23), το οποίο χρησιμοποιήθηκε για τον αλγόριθμο πλεοναστότητας της παραγράφου 4.2.2 και προτάθηκε ως τρίτος νόμος ελέγχου στη παράγραφο 4.3.1, δηλαδή τη σχέση

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}^+(\mathbf{x}_{\mathbf{z}\phi_d} + K\mathbf{e}_{\mathbf{z}\phi}) + k_H(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}^+\mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}) \frac{dH(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}}$$

Όπως έχουμε αποδείξει προηγουμένως, με τον νόμο ελέγχου αυτό αναμένουμε να συγκλίνουν ασυμπτωτικά οι μεταβλητές (z_e, ϕ_e) στις $(z_d(t), \phi_d)$ ή αλλιώς να συγκλίνει η διάταξη του ρομπότ στον υπόχωρο που ορίζουν οι περιορισμοί για τις δύο αυτές μεταβλητές. Παράλληλα αναμένουμε μεγιστοποίηση της συνάρτησης $H(\mathbf{q})$ στον υπόχωρο αυτό. Παρατηρούμε ότι ένας τέτοιος νόμος ελέγχου για τον ρομποτικό χειριστή, είναι ανεξάρτητος από την θέση και τη ταχύτητα του κινούμενου ρομπότ, κάνοντας τον χειριστή να έχει ρόλο leader, σε ότι αφορά τη συνάντηση των δύο ρομπότ.

5.2 Έλεγχος του κινούμενου ρομπότ

Εδώ θα θεωρήσουμε ότι το όχημα είναι τύπου unicycle, οπότε οι είσοδοι ελέγχου του θα είναι τα u, ω . Αν $[x_m \ y_m \ \theta_m]^T$ είναι το διάνυσμα κατάστασης του οχήματος, όπως αναλύσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια ισχύει:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \dot{\theta}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_m \\ \sin \theta_m \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (5.3)$$

Από τη στιγμή που ο ρομποτικός χειριστής έχει επιλεγεί να λειτουργεί αυτόνομα, χωρίς να λαμβάνει υπόψη τη θέση του κινούμενου ρομπότ, ο σκοπός του κινούμενου ρομπότ είναι να ακολουθήσει και να φτάσει το τελικό στοιχείο δράσης του ρομποτικού χειριστή. Επειδή θέλουμε το διάνυσμα κατάστασης του οχήματος να ακολουθεί τη πορεία και να ταυτιστεί με το επιθυμητό χρονομεταβλητό πλέον διάνυσμα $[x_e(t) \ y_e(t) \ \text{atan2}(a_{ey}(t), a_{ex}(t))]^T$, το πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε είναι αντίστοιχο με το γνωστό πρόβλημα της παρακολούθησης τροχιάς (trajectory tracking), όπου η επιθυμητή τροχιά είναι η πορεία του τελικού στοιχείου δράσης.

Στα [1, 9, 10] περιλαμβάνονται νόμοι ελέγχου για την επίλυση του προβλήματος παρακολούθησης τροχιάς, οι οποίοι όμως λειτουργούν μόνο όταν η γραμμική και γωνιακή ταχύτητα u_d, ω_d του τελικού στοιχείου δράσης δεν συγκλίνουν και οι 2 ασυμπτωτικά στο μηδέν, δηλαδή η τροχιά είναι επίμονη (persistent). Στη δική μας περίπτωση, γνωρίζουμε ότι ο ρομποτικός χειριστής θα καταλήξει εν τέλει σε μία σταθερή τελική στάση, συνεπώς η τροχιά προς παρακολούθηση είναι μη επίμονη. Το πρόβλημα παρακολούθησης μη επίμονης τροχιάς είναι δυσεπίλυτο. Στο [10] προτείνεται ένα σχήμα ελέγχου για τη περίπτωση αυτή, με την υπόθεση όμως ότι το ω_d θα συγκλίνει εκθετικά στο μηδέν και ότι είναι γνωστός ο ρυθμός σύγκλισης του.

Λόγω της δυσκολίας του προβλήματος, θα επιλεγεί ένας νόμος ελέγχου 2 φάσεων, όπου στη πρώτη φάση θα συγκλίνει το σφάλμα θέσης στο μηδέν και στη δεύτερη φάση το σφάλμα γωνίας.

Ένας ακόμη λόγος για την επιλογή αυτή, είναι το γεγονός ότι η επιθυμητή γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}_d$ για τον προσανατολισμό του ρομπότ, δεν συνδέεται με την κίνηση του τελικού στοιχείου δράσης στον καρτεσιανό χώρο. Πιο συγκεκριμένα, στο κλασικό πρόβλημα παρακολούθησης τροχιάς, ο σκοπός είναι να γίνει παρακολούθηση του επιθυμητού διανύσματος κατάστασης $[x_d \ y_d \ \theta_d]^T$, ενώ ισχύει:

$$\dot{x}_d = v_d \cos \theta_d$$

$$\dot{y}_d = v_d \sin \theta_d$$

$$\dot{\theta}_d = \omega_d$$

Παράλληλα, για τις εισόδους αναφοράς v_d, θ_d θα πρέπει να ισχύει

$$v_d(t) = \pm \sqrt{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}$$

$$\theta_d(t) = \text{atan2}(\dot{y}_d(t), \dot{x}_d(t)) + k\pi, \quad k = 0, 1$$

και

$$\dot{\theta}_d(t) = \omega_d(t) = \frac{\ddot{y}_d(t)\dot{x}_d(t) - \ddot{x}_d(t)\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d^2(t) + \dot{y}_d^2(t)}$$

Στη περίπτωση μας όμως, η επιθυμητή γωνία αναφοράς $\theta_d = \text{atan2}(a_{ey}(t), a_{ex}(t))$ είναι διαφορετικής μορφής από τη παραπάνω και δεν συνδέεται με τις καρτεσιανές ταχύτητες του τελικού στοιχείου δράσης $\dot{x}_d$ και $\dot{y}_d$. Είναι εύλογο λοιπόν ο έλεγχος του ρομποτικού οχήματος να γίνει ξεχωριστά για τη θέση στο xy επίπεδο και για τη γωνία προσανατολισμού.

5.2.1 Σύγκλιση σφάλματος θέσης στο μηδέν

Το πρόβλημα αυτό είναι επίσης δυσεπίλυτο στη περίπτωση χρονομεταβλητής επιθυμητής θέσης και θα γίνει επιλογή ενός συμβιβαστικού σχήματος ελέγχου το οποίο αναφέρεται στο [1], αυτού της γραμμικοποίησης εισόδου εξόδου (input/output linearization).

Συγκεκριμένα, σε αυτή τη προσέγγιση λύσης ορίζονται δύο νέες μεταβλητές y_1, y_2 και επιλέγεται ένας αριθμός b τέτοιος ώστε

$$y_1 = x_m + b \cos \theta_m \tag{5.4}$$

$$y_2 = y_m + b \sin \theta_m \tag{5.5}$$

με αποτέλεσμα να προκύπτουν εξισώσεις δυναμικής

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_m & -b \sin \theta_m \\ \sin \theta_m & b \cos \theta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\theta_m) \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix}$$

Ορίζοντας δύο νέες μεταβλητές εισόδου u_1, u_2 με βάση τον παρακάτω αντιστρέψιμο μετασχηματισμό

$$\begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}(\theta_m) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

έχουμε τελικά

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Το παραπάνω σύστημα είναι ένα απλό αποσυζευγμένο (decoupled) σύστημα πρώτης τάξης, με εισόδους ελέγχου τα u_1, u_2 . Υιοθετώντας έτσι έναν νόμο ελέγχου της μορφής

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}_{1d} + k_1(y_{1d} - y_1) \\ \dot{y}_{2d} + k_2(y_{2d} - y_2) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

αναμένουμε εκθετική σύγκλιση των y_1, y_2 στα y_{1d}, y_{2d} αντίστοιχα, ενώ οι πραγματικές εισόδους ελέγχου u, ω δίνονται από τη σχέση (5.6). Σε αυτό το σημείο θα επιλέξουμε ως επιθυμητές μεταβλητές $[y_{1d} \ y_{2d}]^T$ τη θέση του τελικού στοιχείου δράσης $[x_e \ y_e]^T$ στο xy επίπεδο. Σύμφωνα με τις εξισώσεις ορισμού των y_1, y_2 (5.4) και (5.4), αναμένουμε η νόρμα του σφάλματος θέσης των 2 ρομπότ να συγκλίνει στη τιμή b , δηλαδή το κινούμενο ρομπότ να καταλήξει σε ακτίνα b από το τελικό στοιχείο δράσης του χειριστή. Έτσι επιλέγοντας b μικρό, προκύπτει ένα αποτέλεσμα με μικρή απόκλιση από το επιθυμητό. Να σημειωθεί ότι b πολύ μικρό μπορεί να οδηγήσει σε πολύ μεγάλες εισόδους u, ω λόγω της αντιστροφής του μετασχηματισμού $\mathbf{T}(\theta_m)$ στην εξίσωση (5.6).

5.2.2 Σύγκλιση σφάλματος γωνίας στο μηδέν

Το κριτήριο για να προχωρήσουμε στη δεύτερη φάση ελέγχου του κινούμενου ρομπότ, είναι να έχουν πλησιάσει τα δύο ρομπότ αρκετά και ο ρομποτικός χειριστής να έχει σχεδόν σταματήσει την κίνηση του. Διαφορετικά, αν $\mathbf{e}_m = \mathbf{p}_e(1:2) - \mathbf{x}_m(1:2)$ είναι το σφάλμα θέσης στο xy επίπεδο και ϵ_1, ϵ_2 μικρές σταθερές, τότε θα πρέπει

$$\|\mathbf{e}_m\| < b + \epsilon_1 \quad \&\& \quad \|\dot{\mathbf{q}}\| < \epsilon_2 \quad (5.9)$$

Εφόσον ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες, μπορεί να επιλεγεί ένας απλός νόμος ελέγχου για το κινούμενο ρομπότ, της μορφής

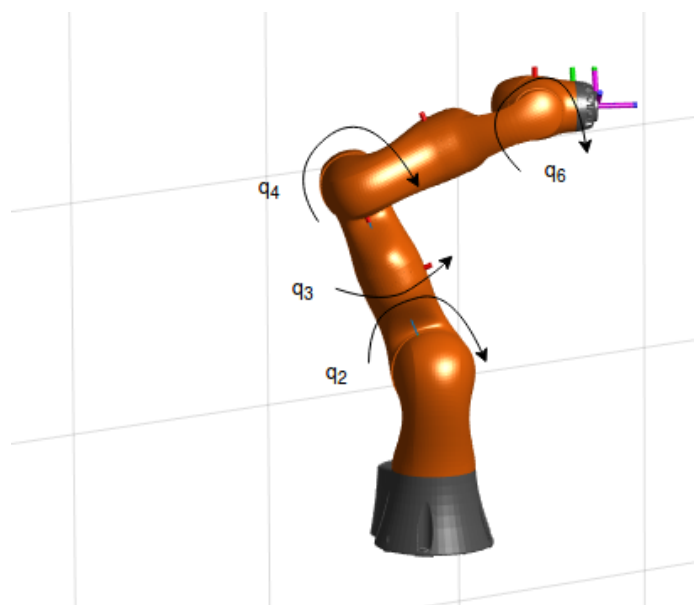
$$u = 0, \quad \omega = \dot{\theta}_d + k_\theta(\theta_d - \theta_m) \quad (5.10)$$

έτσι ώστε να έχουμε ασυμπτωτική σύγκλιση της γωνίας προσανατολισμού θ_m στην επιθυμητή $\theta_d = \text{atan2}(a_{ey}, a_{ex})$. Τέλος, για την εφαρμογή του παραπάνω νόμου ελέγχου απαιτείται ο υπολογισμός της παραγώγου $\dot{\theta}_d$, ο οποίος δίνεται από την σχέση (4.29).

Κεφάλαιο 6

Προσομοιώσεις

Για τις προσομοιώσεις που ακολουθούν, χρησιμοποιείται ο ρομποτικός χειριστής *iowa14*, ο οποίος φαίνεται και στο Σχ. 6.3. Το ρομπότ αυτό είναι διαθέσιμο στην ρομποτική εργαλειοθήκη του MATLAB, η οποία επιπλέον παρέχει τις εξισώσεις κινηματικής και δυναμικής του ρομπότ για τυχούσα διάταξη. Ο χειριστής αυτός είναι κανονικά 7 βαθμών ελευθερίας, ενώ στο δικό μας πρόβλημα μελετάμε τη συμπεριφορά χειριστών με λίγους (ιδιαίτερα για τέσσερις) βαθμούς ελευθερίας. Έτσι, μας δίνεται η δυνατότητα να επιλέξουμε διάφορους συνδυασμούς αρθρώσεων ώστε να έχουμε 4 ενεργούς βαθμούς ελευθερίας και 3 στατικές αρθρώσεις. Για τη προσομοίωση αυτή επιλέγονται οι 2,3,4 και 6 ως ενεργές αρθρώσεις, οι οποίες αφήνουν περιθώριο βελτιστοποίησης της H με δεδομένα z_f, ϕ_d για τον χειριστή.



Σχήμα 6.1: Ενεργές αρθρώσεις του ρομποτικού χειριστή

Στις προσομοιώσεις που ακολουθούν, η αρχική διάταξη του ρομποτικού χειριστή στον χώρο των αρθρώσεων είναι η $\mathbf{q}_0 = [\pi/6 \ -\pi/8 \ 0 \ -\pi/3 \ 0 \ \pi/8 \ \pi/3]^T$. Επίσης σε όλες τις παρακάτω

προσομοιώσεις, η τελική επιθυμητή γωνία επιλεγεται $\phi_d = \pi/4$, ενώ το επιθυμητό z επιλέγεται $z_f = 0.4$ για τον αλγόριθμο των πολλαπλασιαστών Lagrange και $z_f = 0.5$ για τις υπόλοιπες προσομοιώσεις. Για να εστιάσουμε στην μεγιστοποίηση της συνάρτησης $H(\mathbf{q})$, δεν λαμβάνουμε υπόψη όρια των αρθρώσεων του ρομποτικού χειριστή, ενώ εκτός από τη προσομοίωση του Σχ. (6.2), σε όλες τις άλλες προσομοιώσεις θεωρούμε ότι το έδαφος είναι κεκλιμένο.

Σε ότι αφορά το κινούμενο ρομπότ, αυτό είναι σε όλες τις προσομοιώσεις τύπου unicycle, συνεπώς οι είσοδοι ελέγχου του θα είναι η γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του οχήματος v, ω . Η αρχική του διάταξη επιλέγεται να είναι η $\mathbf{q}_{m0} = [2.3 \quad -2.3 \quad 0.6]^T$.

6.1 Προσομοιώσεις εύρεσης του βέλτιστου σημείου

6.1.1 Αλγόριθμος πολλαπλασιαστών Lagrange

Στο Σχ. 6.2 φαίνονται οι αποκρίσεις των χαρακτηριστικών μεγεθών κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου των πολλαπλασιαστών Lagrange, για $z_f = 0.4$ και $\phi_d = \pi/4$, ενώ στο Σχ. 6.4 παρουσιάζονται τα ίδια μεγέθη στη περίπτωση όπου ο ρομποτικός χειριστής είναι υπό κλίση. Παράλληλα, στα σχήματα 6.3 και 6.5 φαίνονται αριστερά οι αρχικές διατάξεις των ρομπότ και δεξιά οι διατάξεις που προκύπτουν μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου.

Παρατηρούμε από τα αποτελέσματα ότι ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να παρουσιάσει έντονη ταλαντωτική συμπεριφορά πριν συγκλίνει σε μηδενικά σφάλματα. Σε κάποιες περιπτώσεις μάλιστα, η ταλάντωση δεν αποσβένει πλήρως με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να αποφανθούμε για την βέλτιστη λύση. Η ομαλότητα της συμπεριφοράς του αλγορίθμου αλλάζει όταν επιλέγονται διαφορετικές αρθρώσεις ως ενεργές για τον συγκεκριμένο χειριστή. Για παράδειγμα, επιλέγοντας ως ενεργές αρθρώσεις τις (1, 2, 6, 7), ο αλγόριθμος συγκλίνει σχεδόν πάντα και χωρίς έντονες ταλαντώσεις. Στη περίπτωση αυτή όμως το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι ευκολότερο, διότι οι αρθρώσεις 1 και 7 δεν επηρεάζουν τον δείκτη ικανότητας χειρισμού αλλά ούτε και τις μεταβλητές z_e και ϕ του τελικού στοιχείου δράσης. Στη περίπτωση μας, όπου και οι τέσσερις εκ των αρθρώσεων 2, 3, 4 και 6 επηρεάζουν τα χαρακτηριστικά μεγέθη, το πρόβλημα γίνεται πιο σύνθετο και ο αλγόριθμος δυσκολεύεται κάποιες φορές να βρει λύση. Υπενθυμίζουμε σε αυτό το πλαίσιο, ότι για τον αλγόριθμο των πολλαπλασιαστών Lagrange που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 4.2.1, είναι εξασφαλισμένη η τοπική και όχι η ολική σύγκλιση.

6.1.2 Αλγόριθμος πλεοναστότητας

Στο Σχ. 6.6 φαίνονται οι αποκρίσεις των χαρακτηριστικών μεγεθών κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου πλεοναστότητας για την εύρεση του βέλτιστου σημείου συνάντησης, για $z_f = 0.5$ και $\phi_d = \pi/4$. Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις είναι πολύ ομαλές, ενώ τα σφάλματα του άξονα z και της γωνίας ϕ συγκλίνουν με εκθετικό ρυθμό στο μηδέν, όπως άλλωστε αναμενόταν και από τη θεωρητική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στην παράγραφο 4.2.2.

Μία ενδιαφέρουσα παρατήρηση προκύπτει από την μορφή της συνάρτησης H στον χρόνο στο Σχ. 6.6. Πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι τα δύο σφάλματα καταλήγουν στη τελική μηδενική τιμή μετά από περίπου 2 δευτερόλεπτα, ενώ η συνάρτηση H λαμβάνει την μέγιστη τιμή της μετά από περίπου 5 δευτερόλεπτα. Αυτό σημαίνει ότι ενώ η κύρια υποεργασία έχει

πραγματοποιηθεί (δηλαδή η σύγκλιση των z_e και ϕ στις επιθυμητές τιμές), η δευτερεύουσα υποεργασία (η μεγιστοποίηση της H) συνεχίζεται με εσωτερική αναδιάταξη του ρομπότ, ώστε να μην επηρεάζονται οι μεταβλητές z_e και ϕ . Εναλλακτικά, ενώ το ρομπότ έχει φτάσει να κανονοποιεί τους περιορισμούς (4.1) και (4.2), συνεχίζει να κινείται πάνω στον υπόχωρο πιθανών διατάξεων που ορίζεται από τους περιορισμούς, ώστε να επιτευχθεί μεγιστοποίηση της H , όπως φαίνεται στο σχήμα 4.7.

Συγκριτικά με τον αλγόριθμο των πολλαπλασιαστών Lagrange για την επιλογή βέλτιστου σημείου, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο αλγόριθμος πλεοναστότητας υπερσχύει. Λόγοι για το συμπέρασμα αυτό αποτελούν η εγγύηση για της ολικής σύγκλισης του αλγορίθμου πλεοναστότητας έναντι της τοπικής του αλγορίθμου πολλαπλασιαστών Lagrange, η ομαλότητα που χαρακτηρίζει την απόκριση των χαρακτηριστικών μεγεθών στον αλγόριθμο πλεοναστότητας, αλλά και το γεγονός ότι οι ρυθμοί σύγκλισης των μεγεθών στον αλγόριθμο πλεοναστότητας ρυθμίζονται από σταθερές.

Ως μειονέκτημα του αλγορίθμου αυτού αποτελεί το ενδεχόμενο να γίνει ιδιόμορφη η Ιακωβιανή $\mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}$ της εξίσωσης (4.21), σε ενδιάμεση διάταξη του χειριστή κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου. Κάτι τέτοιο βέβαια αντιμετωπίζεται είτε υιοθετώντας την προσέγγιση ψευδοαντίστροφης Ιακωβιανής που αναλύεται στη παράγραφο 2.4.3, είτε ορίζοντας την συνάρτηση H με βάση τον δείκτη ικανότητας χειρισμού της Ιακωβιανής $\mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}$, δηλαδή ορίζοντας $H(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}\mathbf{J}_{\mathbf{z}\phi}^T)}$.

6.2 Προσομοιώσεις ελέγχου των ρομπότ

6.2.1 Έλεγχος του ρομποτικού χειριστή

Το αποτέλεσμα της εκτέλεσης ενός εκ των παραπάνω αλγορίθμων είναι να λάβουμε ένα επιθυμητό τελικό διάνυσμα μεταβλητών των αρθρώσεων $\mathbf{q}_f$, το οποίο αντιστοιχεί σε μία στάση στον χώρο δράσης με καρτεσιανή θέση $\mathbf{p}_f = [x_{ef} \ y_{ef} \ z_{ef}]^T$ και μητρώο στροφής $\mathbf{R}_f = [\mathbf{n}_{ef} \ \mathbf{s}_{ef} \ \mathbf{a}_{ef}]$. Επόμενο βήμα είναι ο ανεξάρτητος έλεγχος των δύο ρομπότ ώστε να φτάσουν στο επιλεγμένο σημείο.

Σε ότι αφορά τον έλεγχο του ρομποτικού χειριστή, στην παράγραφο 4.3.1 προτάθηκαν τέσσερα πιθανά σχήματα ελέγχου, έτσι ώστε ο ρομποτικός χειριστής, από οποιαδήποτε αρχική θέση, να μπορεί να φτάσει στην επιθυμητή τελική. Στα σχήματα 6.7 έως 6.10, φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις του σφάλματος της γωνίας ϕ , του σφάλματος καρτεσιανής θέσης και της νόρμας του σφάλματος $\mathbf{q}_f - \mathbf{q}$, μετά την εφαρμογή του έκαστου σχήματος ελέγχου. Με βάση την θεωρία αλλά και τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τα τέσσερα σχήματα ελέγχου, προκύπτουν οι εξής παρατηρήσεις:

- Οι γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή του πρώτου νόμου ελέγχου, χαρακτηρίζονται από μία σχετική μη ομαλότητα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι πραγματοποιήθηκε η προσεγγιστική αντιστροφή της παραγράφου 2.4.3. Παρατηρούμε επίσης ότι τα σφάλματα γωνίας και θέσης συγκλίνουν στο μηδέν, κάτι που δε συμβαίνει για το σφάλμα $\mathbf{q}_f - \mathbf{q}$. Κάτι τέτοιο όμως είναι αναμενόμενο και αποδεκτό όπως έχει αναφερθεί, αφού το πρώτο σχήμα ελέγχου εξασφαλίζει σύγκλιση των μεταβλητών $[x_e \ y_e \ z_e \ \phi_e \ \theta_e]^T$ στις

επιθυμητές, χωρίς να ενδιαφερόμαστε για τις υπόλοιπες, αφήνοντας περιθώριο να διαφέρει το τελικό $\mathbf{q}$ από το $\mathbf{q}_f$.

- Από την εφαρμογή του δεύτερου σχήματος ελέγχου δεν προκύπτουν ιδιομορφίες και η σύγκλιση όλων των μεγεθών στο μηδέν (και του $\mathbf{q}$ στο $\mathbf{q}_f$) γίνεται ομαλά. Το σχήμα ελέγχου αυτό μπορεί να χαρακτηριστεί ως το πιο γενικό, επειδή εφαρμόζεται ανεξάρτητα με το ποιος αλγόριθμος εκτελέστηκε για το πρώτο βήμα του προβλήματος και επειδή γενικεύεται και στη περίπτωση όπου είχαμε περισσότερους περιορισμούς γωνιών προσανατολισμού (ή γενικότερα άλλων μεταβλητών). Από την άλλη η σύγκλιση του $\mathbf{q}$ στο $\mathbf{q}_f$ είναι εξασφαλισμένη τοπικά.
- Το τρίτο και το τέταρτο σχήμα ελέγχου μπορούν να εφαρμοστούν εάν στο πρώτο βήμα του προβλήματος εφαρμόστηκε ο αλγόριθμος πλεοναστότητας, λαμβάνοντας υπόψη και την κατεύθυνση άφιξης. Στο Σχ. 6.9 βλέπουμε ομαλή σύγκλιση των χαρακτηριστικών μεγεθών στο μηδέν, εφόσον το ρομπότ ακολούθησε την πορεία που ακολούθηθηκε και στο βήμα επιλογής βέλτιστου σημείου και δεν υπήρξαν διαταραχές στη κίνηση του ρομπότ.
- Το τέταρτο σχήμα ελέγχου δίνει την ίδια απόκριση με το τρίτο. Θεωρείται όμως προτιμότερο λόγω της απλότητας του, του γεγονότος ότι δεν απαιτεί αντιστροφή κάποιας Ιακωβιανής μήτρας και του ότι είναι εύρωστο ως προς εξωτερικές διαταραχές, κάτι που δεν ισχύει για το τρίτο.

6.2.2 Έλεγχος του κινούμενου ρομπότ

Το σχήμα ελέγχου που παρουσιάζεται στη παράγραφο 4.3.2 επιχειρεί να οδηγήσει το ρομπότ από οποιαδήποτε αρχική διάταξη $\mathbf{q}_{m0}$ στη επιθυμητή διάταξη $\mathbf{q}_{mf} = [x_{ef} \ y_{ef} \ \text{atan2}(a_{ey}, a_{ex})]^T$. Στο Σχ. 6.11 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις του καρτεσιανού σφάλματος στο xy επίπεδο και του σφάλματος της γωνίας θ_m μετά την εφαρμογή του νόμου ελέγχου για το πρόβλημα της ρύθμισης στάσης. Το σχήμα αυτό επιβεβαιώνει την ασυμπτωτική σύγκλιση και των δύο σφαλμάτων στο μηδέν.

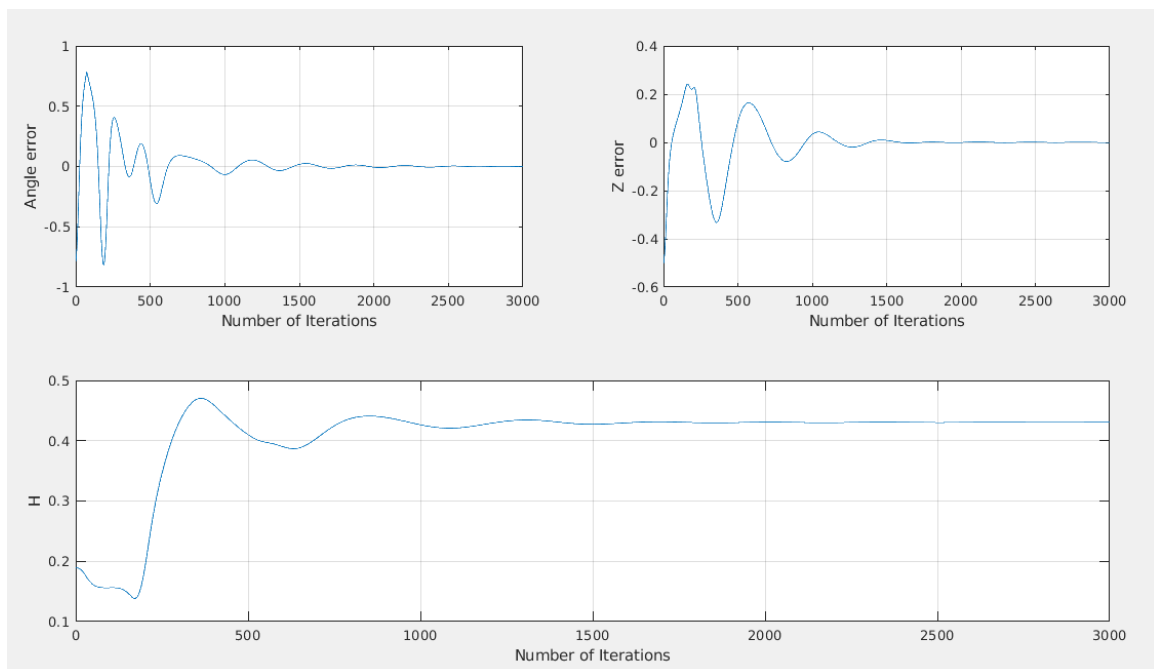
Επιπλέον, το Σχ. 6.12 περιλαμβάνει δύο στιγμιότυπα από την προσομοίωση του ελέγχου στο περιβάλλον gazebo. Πιο συγκεκριμένα, στην αριστερή εικόνα φαίνονται και τα 2 ρομπότ στην αρχική τους διάταξη, ενώ στην δεξιά βλέπουμε την τελική διάταξη των δύο ρομπότ εφόσον έχει πραγματοποιηθεί κινηματικός έλεγχος και στα δύο, επιβεβαιώνοντας οπτικά την ορθότητα των σχημάτων ελέγχου.

6.2.3 Έλεγχος των ρομπότ στην Online προσέγγιση

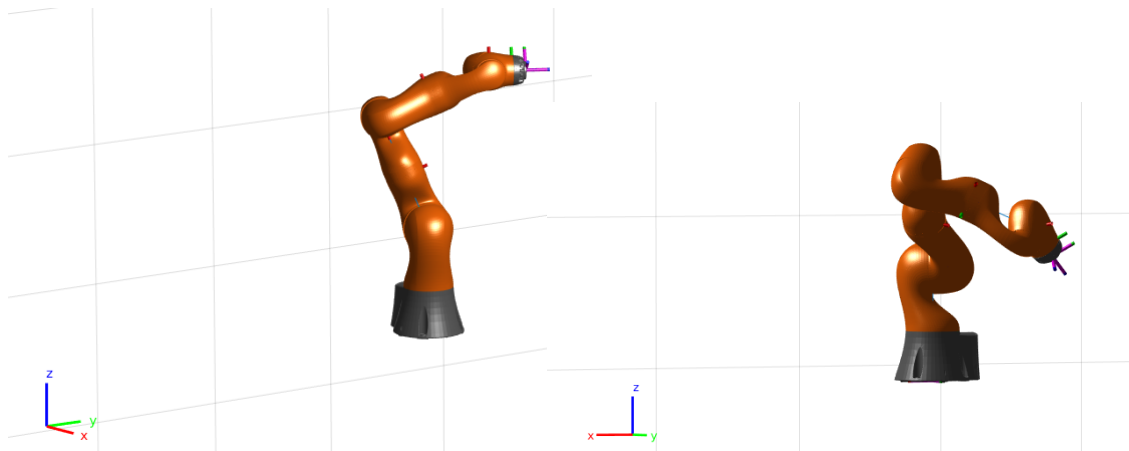
Στην online προσέγγιση δεν επιλέγεται εκ των προτέρων ένα κοινό σημείο συνάντησης, αλλά ελέγχονται άμεσα τα ρομπότ έτσι ώστε να συναντηθούν σε μία κοινή θέση και να ικανοποιούνται οι προδιαγραφές που έχουμε περιγράψει. Για τη προσομοίωση της online προσέγγισης ο ρομποτικός χειριστής εκκινεί με αρχική διάταξη $\mathbf{q}_0 = [0 \ 0 \ \pi/4 \ -\pi/6 \ 0 \ \pi/8 \ \pi/3]^T$ ώστε να δοκιμαστεί μία διαφορετική αρχική σχετική θέση των ρομπότ, ενώ ξανά απαιτούνται $z_e(t_f) = 0.5$ και $\phi_d = \pi/4$.

Ο νόμος ελέγχου για τον ρομποτικό χειριστή δίνεται από τη σχέση (4.23), ενώ το σχήμα ελέγχου του κινούμενου ρομπότ τύπου μονόκυκλου περιγράφεται στην παράγραφο 5.2. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής των δύο αυτών νόμων ελέγχου φαίνονται στα σχήματα 6.13 και 6.14. Πιο συγκεκριμένα στο Σχ. 6.13 βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις του σφάλματος παρακολούθησης της συνάρτησης $z_d(t)$, του σφάλματος της γωνίας ϕ και της συνάρτησης $H(\mathbf{q})$ που αφορούν τον ρομποτικό χειριστή. Τα αποτελέσματα αυτά ουσιαστικά δεν μας δείχνουν κάτι καινούργιο ως προς τη σύγκλιση του χειριστή, διότι ο νόμος ελέγχου που εφαρμόζεται στον χειριστή είναι ανεξάρτητος από διάταξη του κινούμενου ρομπότ, ενώ είναι πρακτικά ίδιος με τον αλγόριθμο πλεοναστότητας που προσομοιώθηκε προηγουμένως.

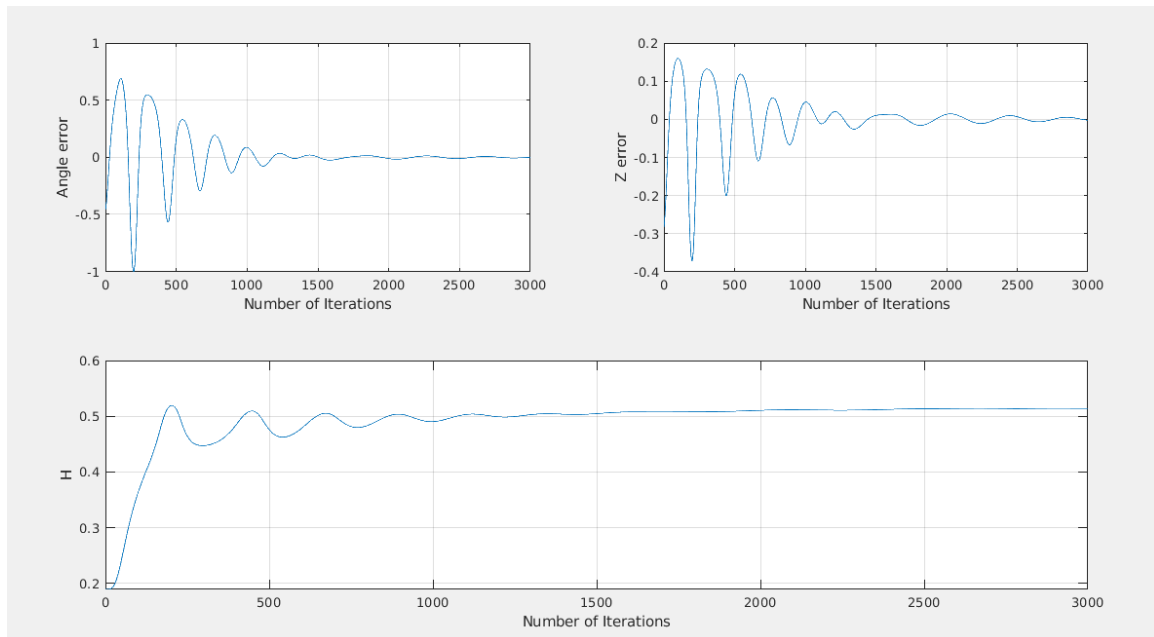
Σε ότι αφορά το κινούμενο ρομπότ, το οποίο προσπαθεί να ακολουθήσει την κίνηση του τελικού στοιχείου δράσης, μπορούμε να δούμε τα αποτελέσματα του σχήματος ελέγχου του στο Σχ. 6.14. Το σχήμα ελέγχου του κινούμενου ρομπότ αποτελείται από τη φάση σύγκλισης του καρτεσιανού σφάλματος θέσης στο μηδέν και από τη φάση σύγκλισης του σφάλματος γωνίας στο μηδέν. Για τη πρώτη φάση, η σταθερά b επιλέγεται ίση με $b = 0.005$, δηλαδή αναμένουμε το κινούμενο ρομπότ να συγκλίνει σε θέση με απόσταση 0.005 από το τελικό στοιχείο δράσης του χειριστή. Όταν τα δύο ρομπότ πλησιάσουν σε απόσταση πολύ κοντά στο b και ο ρομποτικός χειριστής έχει σχεδόν σταματήσει τη κίνηση του, τότε ο έλεγχος του ρομπότ περνά στη δεύτερη φάση. Το Σχ. 6.14 επιβεβαιώνει τη σύγκλιση των σφαλμάτων θέσης κοντά στο b και γωνίας στο μηδέν, ενώ είναι εμφανές ότι η στιγμή εναλλαγής του σχήματος ελέγχου για το όχημα είναι περίπου στο 15^ο δευτερόλεπτο.



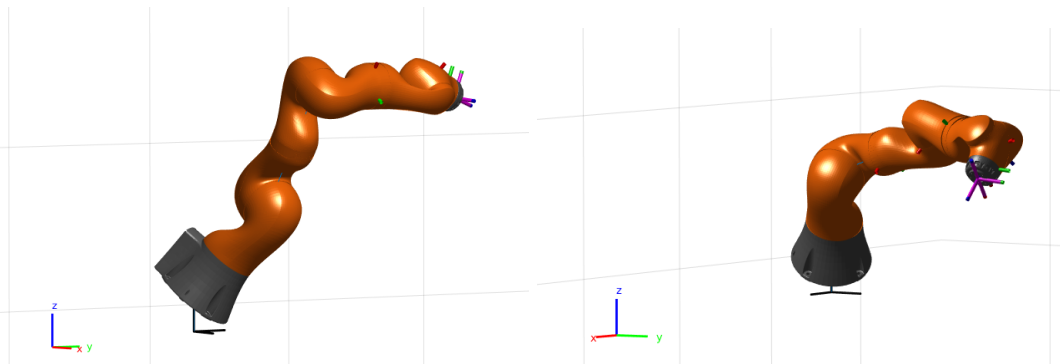
Σχήμα 6.2: Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος γωνίας ϕ , του σφάλματος στον άξονα z και της συνάρτησης $H(\mathbf{q})$ μετά την εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange



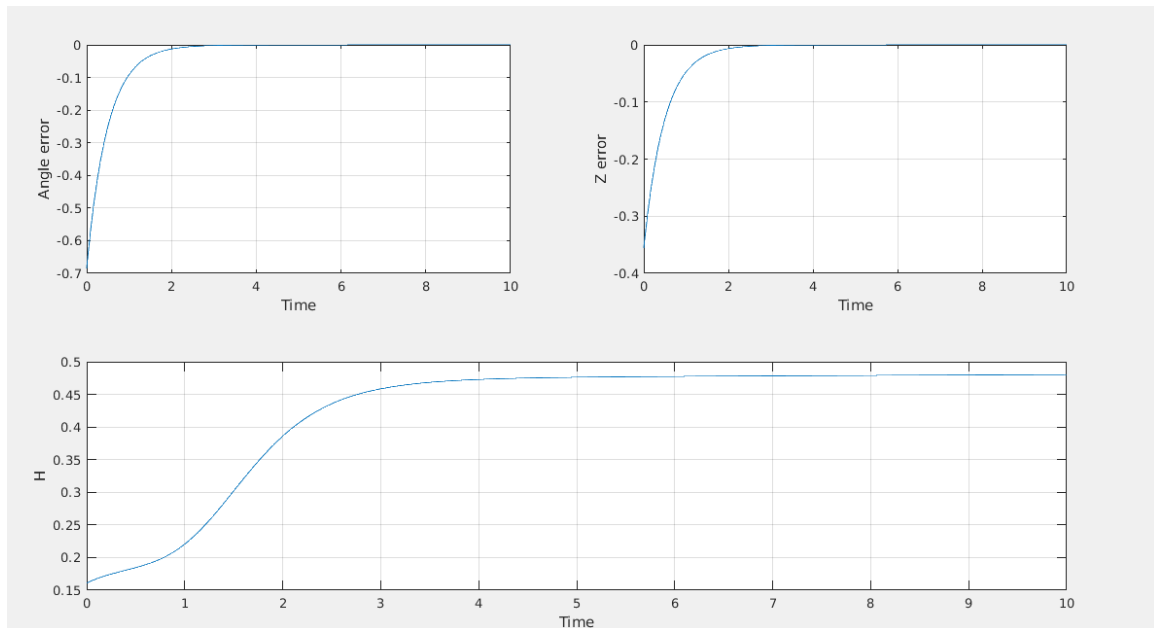
Σχήμα 6.3: Η αρχική διάταξη του ρομπότ (αριστερά) και η διάταξη $\mathbf{q}_f$ που προκύπτει μετά την εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange (δεξιά)



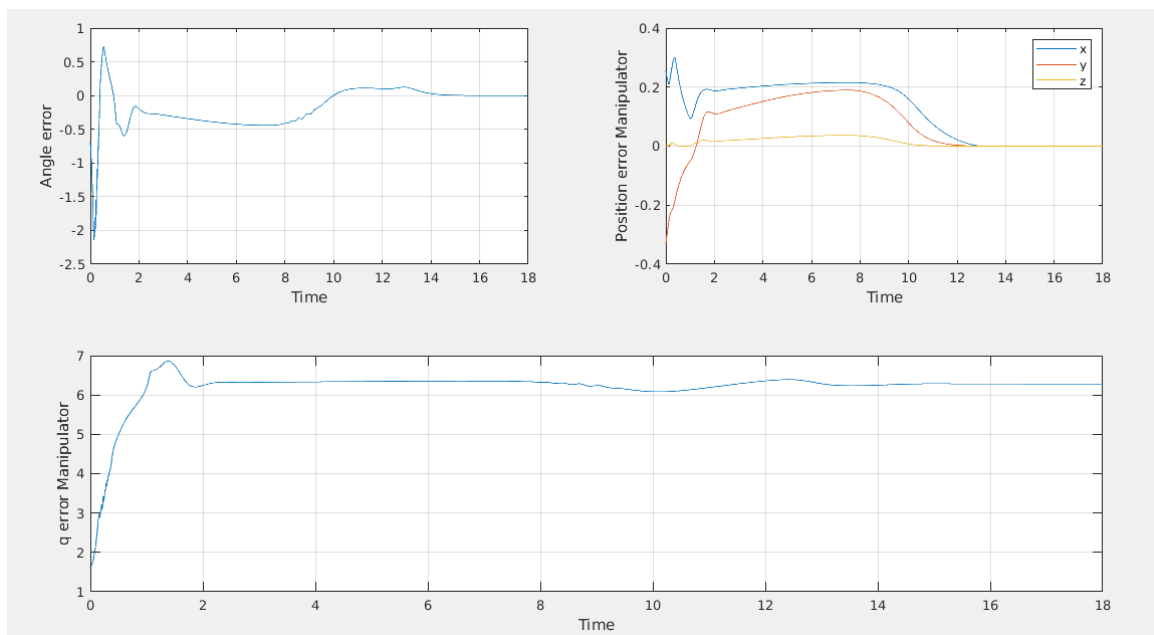
Σχήμα 6.4: Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος γωνίας ϕ , του σφάλματος στον άξονα z και της συνάρτησης $H(\mathbf{q})$ μετά την εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange, στη περίπτωση κεκλιμένου επιπέδου



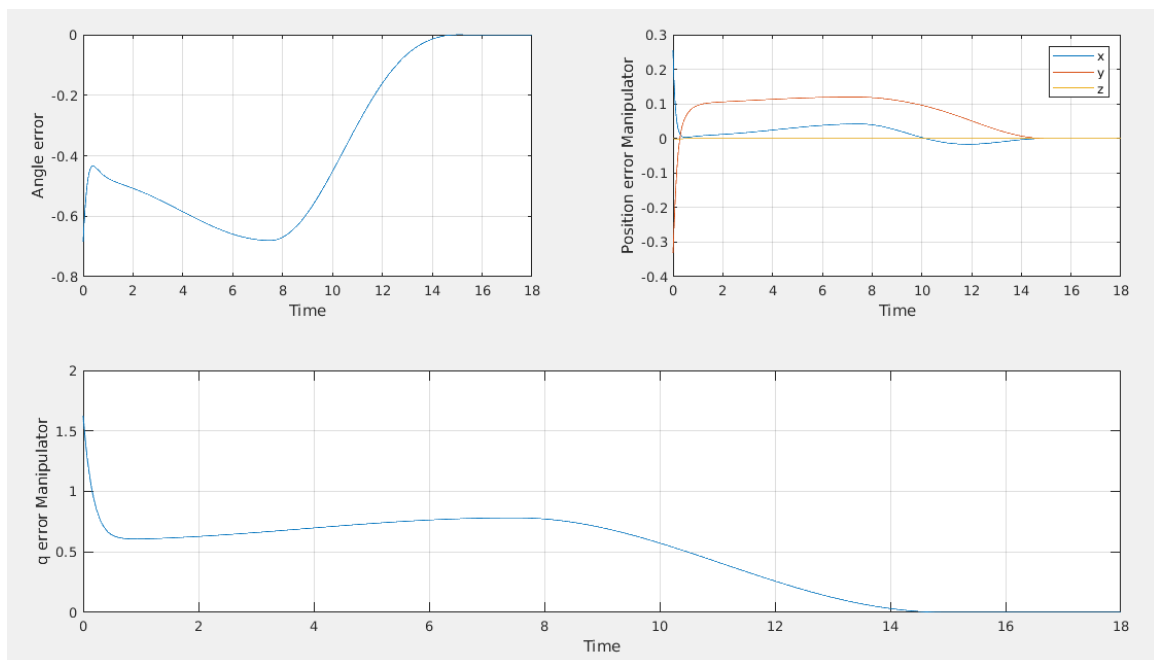
Σχήμα 6.5: Η αρχική διάταξη του ρομπότ (αριστερά) και η διάταξη $\mathbf{q}_f$ που προκύπτει μετά την εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange (δεξιά), στη περίπτωση κεκλιμένου επιπέδου



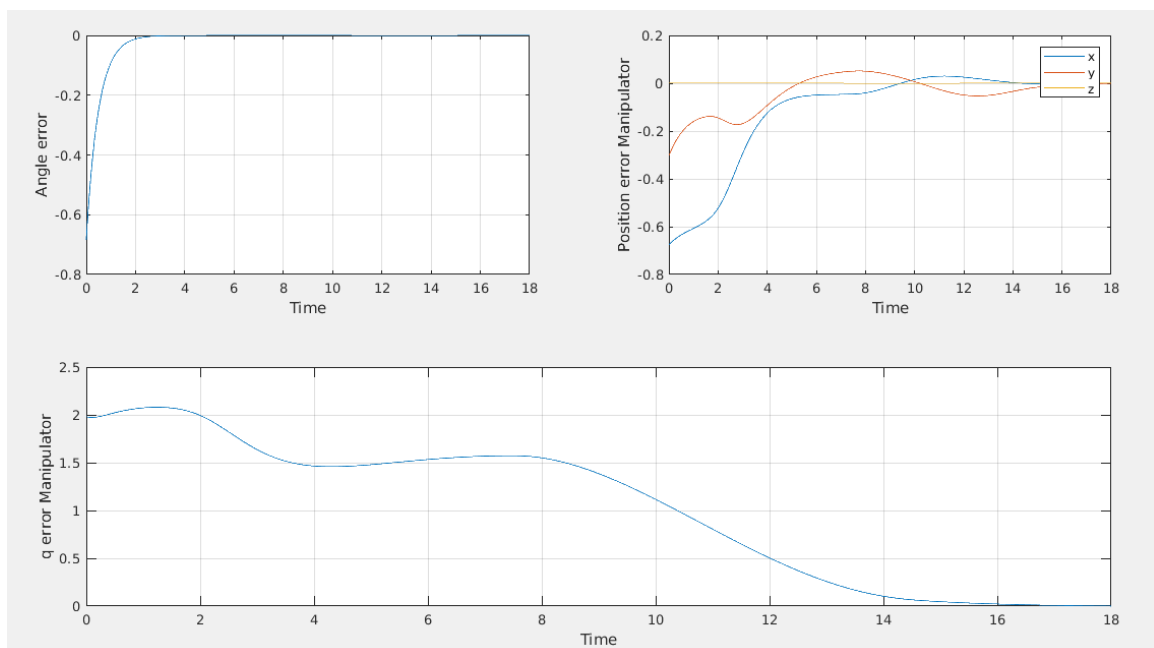
Σχήμα 6.6: Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος γωνίας ϕ , του σφάλματος στον άξονα z και της συνάρτησης $H(\mathbf{q})$ μετά την εφαρμογή της μεθόδου πλεοναστότητας, στη περίπτωση κεκλιμένου επιπέδου



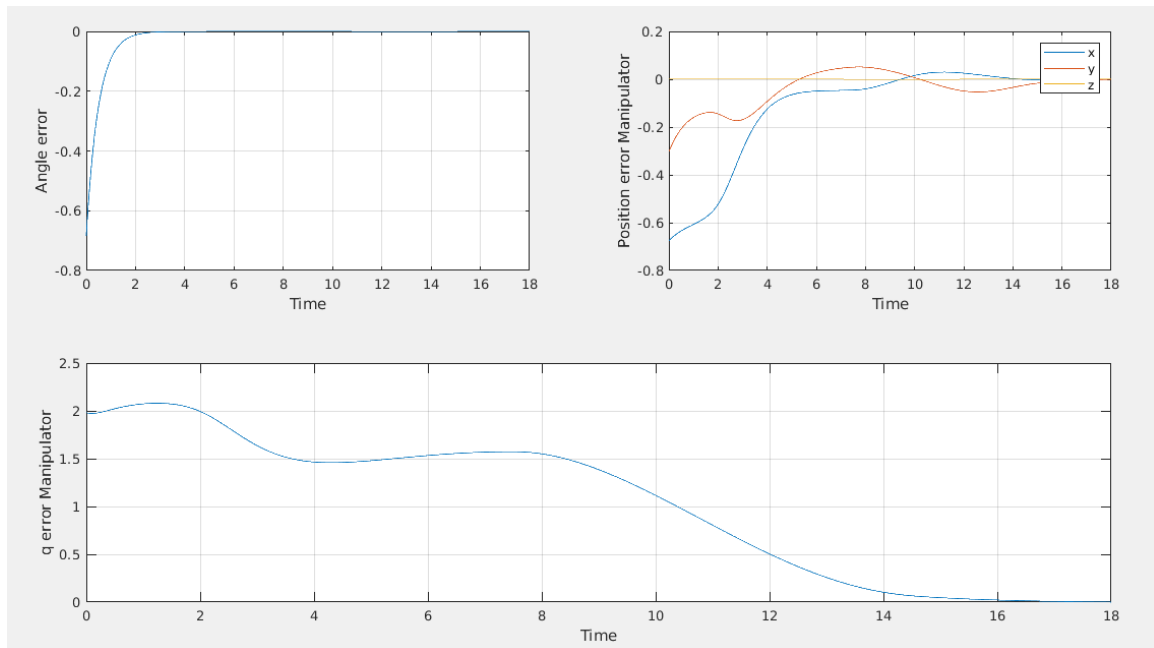
Σχήμα 6.7: Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος της γωνίας ϕ , του σφάλματος καρτεσιανής θέσης και της νόρμας του σφάλματος $\mathbf{q}_f - \mathbf{q}$ μετά την εφαρμογή του πρώτου σχήματος ελέγχου για τον ρομποτικό χειριστή



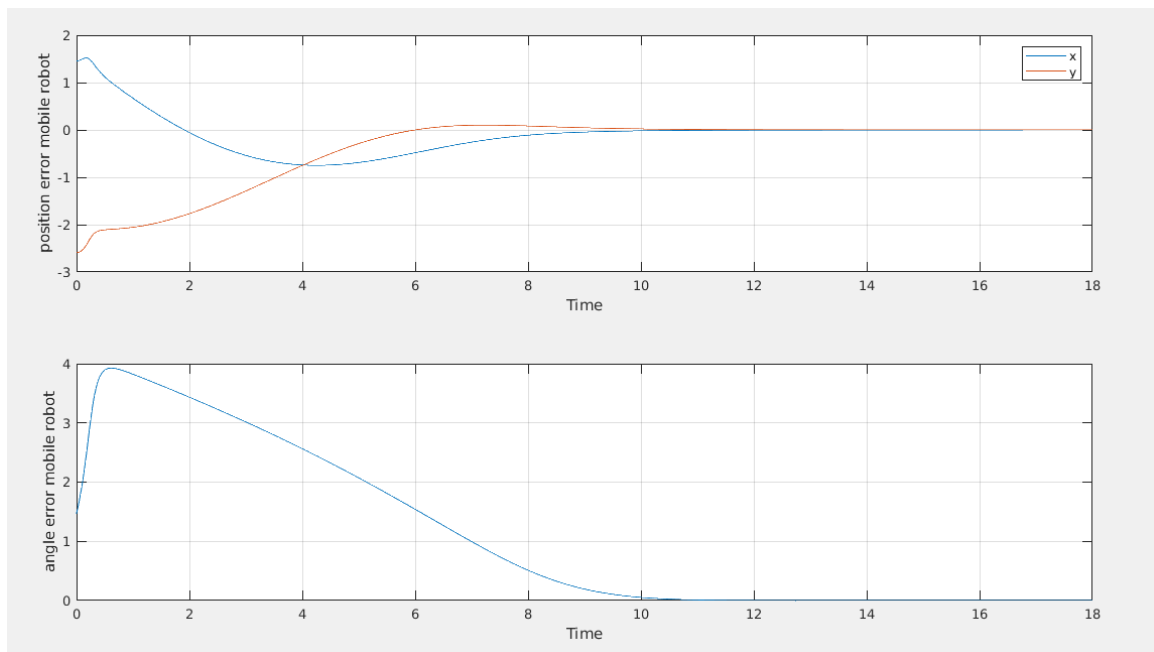
Σχήμα 6.8: Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος της γωνίας ϕ , του σφάλματος καρτεσιανής θέσης της νόρμας του σφάλματος $\mathbf{q}_f - \mathbf{q}$ μετά την εφαρμογή του δεύτερου σχήματος ελέγχου για τον ρομποτικό χειριστή



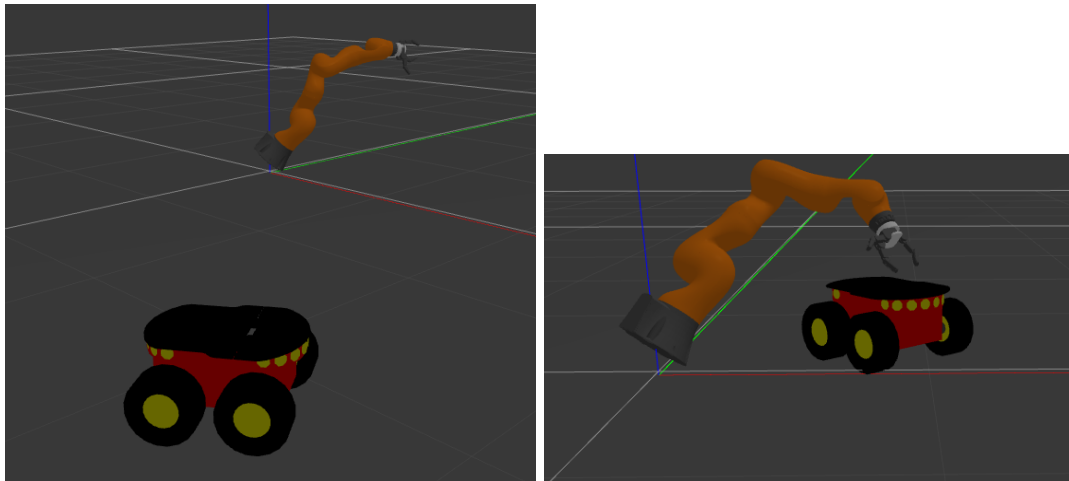
Σχήμα 6.9: Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος της γωνίας ϕ , του σφάλματος καρτεσιανής θέσης και της νόρμας του σφάλματος $\mathbf{q}_f - \mathbf{q}$ μετά την εφαρμογή του τρίτου σχήματος ελέγχου για τον ρομποτικό χειριστή



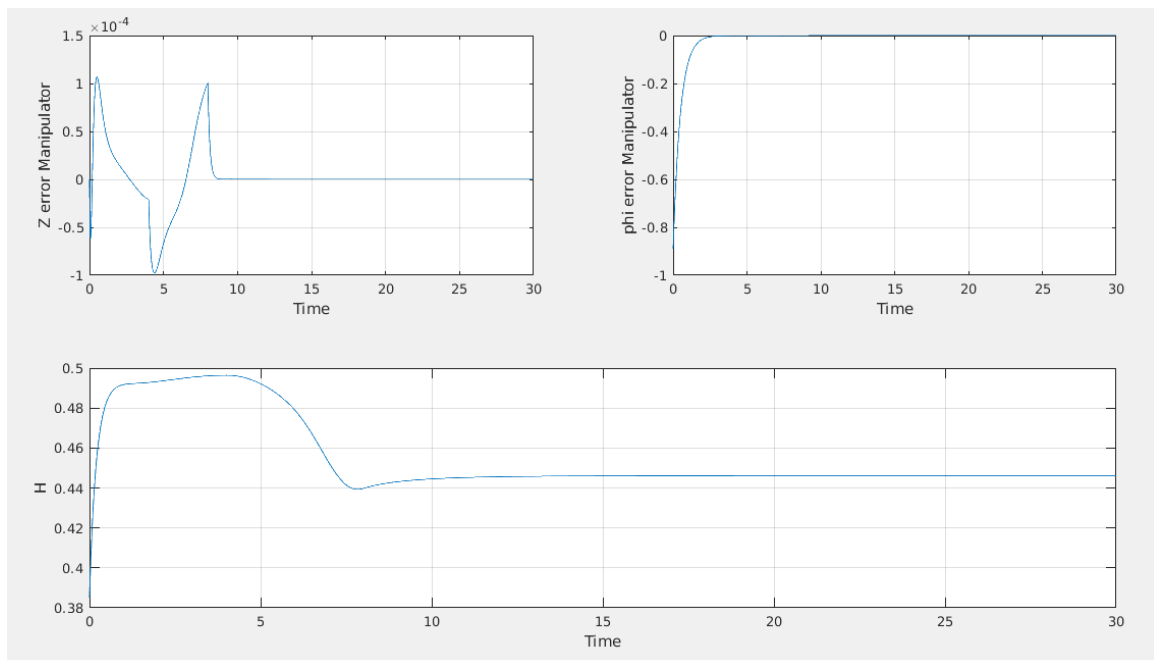
Σχήμα 6.10: Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος της γωνίας ϕ , του σφάλματος καρτεσιανής θέσης και της νόρμας του σφάλματος $\mathbf{q}_f - \mathbf{q}$ μετά την εφαρμογή του τέταρτου σχήματος ελέγχου για τον ρομποτικό χειριστή



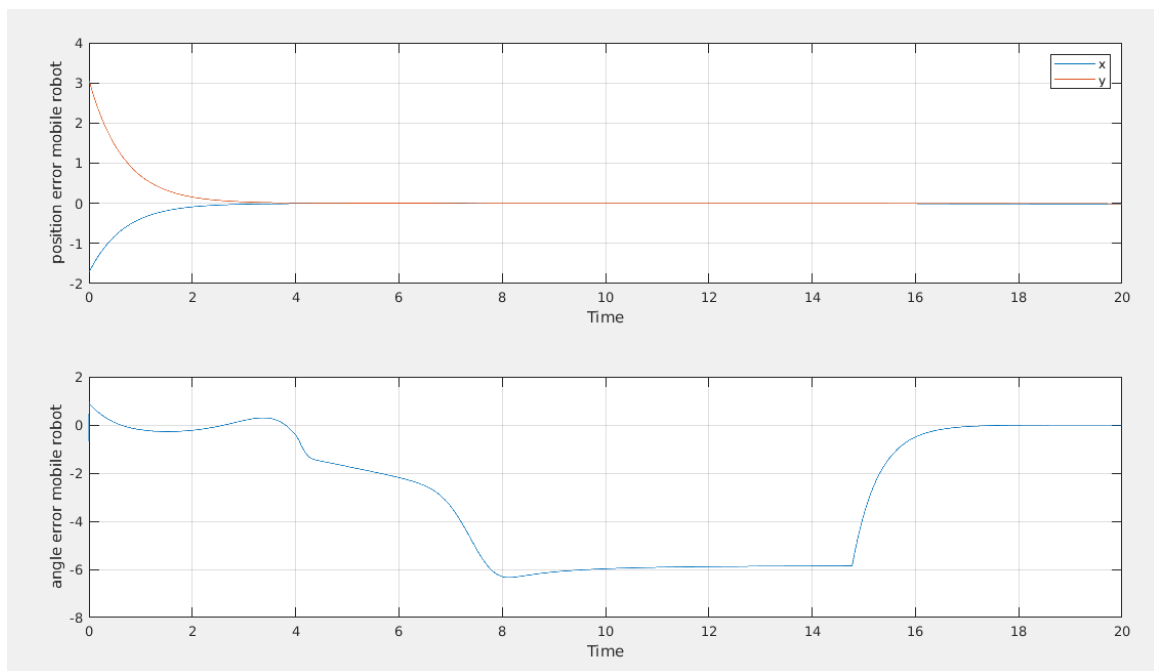
Σχήμα 6.11: Γραφικές παραστάσεις του καρτεσιανού σφάλματος στο xy επίπεδο και του σφάλματος της γωνίας θ_m , μετά την εφαρμογή του νόμου ελέγχου για το κινούμενο ρομπότ τύπου μονόκυκλου



Σχήμα 6.12: Αρχική και τελική διάταξη των ρομποτ στο gazebo



Σχήμα 6.13: Γραφικές παραστάσεις του σφάλματος παρακολούθησης της συνάρτησης $z_d(t)$, του σφάλματος της γωνίας ϕ και της συνάρτησης $H(\mathbf{q})$ κατά την εφαρμογή του online νόμου ελέγχου για τον ρομποτικό χειριστή



Σχήμα 6.14: Γραφικές παραστάσεις του καρτεσιανού σφάλματος θέσης και του σφάλματος της γωνίας θ_m κατά την εφαρμογή του online νόμου ελέγχου για το κινούμενο ρομπότ

Κεφάλαιο 7

Συμπερασματικά Σχόλια

7.1 Συμπεράσματα

Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε στην εργασία αυτή, περιλαμβάνει δύο κύριες προσεγγίσεις επίλυσης, την offline και την online. Η offline προσέγγιση επίλυσης χωρίζεται σε δύο κύρια βήματα, στην εύρεση ενός βέλτιστου κοινού σημείου συνάντησης για τα δύο ρομπότ και στον έλεγχο των ρομπότ ώστε να φτάσουν στο επιλεγμένο σημείο. Η online προσέγγιση βασίζεται στον άμεσο έλεγχο των δύο ρομπότ, χωρίς κάποια εκ των προτέρων γνώση για το σημείο συνάντησης, έτσι ώστε να βρεθούν σε ένα κοινό σημείο που πληροί τις προδιαγραφές που έχουν τεθεί.

Σε ότι αφορά την πρώτη φάση της offline προσέγγισης, αναπτύχθηκαν δύο επαναληπτικοί αλγόριθμοι, ένας αλγόριθμος που πηγάζει από τη θεωρία περί πολλαπλασιαστών Lagrange και ένας αλγόριθμος που πηγάζει από τη θεωρία περί πλεοναστότητας ρομποτικών χειριστών. Σε ότι αφορά τη δεύτερη φάση που έχει να κάνει με τον έλεγχο των ρομπότ, αναπτύχθηκαν τέσσερις τεχνικές για τον έλεγχο του ρομποτικού χειριστή και περιγράφηκαν δύο μέθοδοι για το πρόβλημα της ρύθμισης στάσης των κινούμενων ρομπότ, μία για όχημα τύπου μονόκυκλου και μία για όχημα τύπου αυτοκινήτου. Τέλος, αναπτύχθηκε ένα σχετικά απλό σχήμα ελέγχου για την αντιμετώπιση του δυσκολότερου online προβλήματος, για τον συντονισμένο έλεγχο των δύο ρομπότ.

Με βάση τη θεωρία που αναπτύχθηκε, αλλά και τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων, μπορούμε να καταλήξουμε στα εξής συμπεράσματα:

- Ο επαναληπτικός αλγόριθμος των πολλαπλασιαστών Lagrange έχει αρκετό μαθηματικό ενδιαφέρον και απαιτεί ελάχιστες γνώσεις κινηματικής για τους ρομποτικούς χειριστές. Παρόλα αυτά η σύγκλιση του αλγορίθμου είναι εξασφαλισμένη τοπικά, ο αλγόριθμος είναι πιθανό να εκτελεί έντονες ταλαντώσεις πριν (και αν) συγκλίνει και γενικά ο ρυθμός σύγκλισης δεν μπορεί να ρυθμιστεί.
- Ο επαναληπτικός αλγόριθμος πλεοναστότητας υπερσχύει του αλγορίθμου πολλαπλασιαστών Lagrange, διότι είναι εξασφαλισμένη η ολική σύγκλιση του, η σύγκλιση των σφαλμάτων στο μηδέν είναι ομαλή και εκθετική, ενώ ο ρυθμός σύγκλισης ρυθμίζεται από σταθερά κέρδη. Παράλληλα, η εφαρμογή του αλγορίθμου αυτού ανοίγει τον δρόμο για

δύο ακόμη σχήματα ελέγχου, για το μετέπειτα κομμάτι του ελέγχου του χειριστή. Έχει το μειονέκτημα ότι λόγω της αναγκαιότητας υπολογισμού ψευδοαντίστροφης Ιακωβιανής, είναι δυνατό να διέλθει ο ρομποτικός χειριστής από κάποια ιδιόμορφη διάταξη για την Ιακωβιανή αυτή, αυτό είναι όμως κάτι που αντιμετωπίζεται εύκολα.

- Από τα τέσσερα συνολικά σχήματα ελέγχου που παρουσιάστηκαν για τον έλεγχο του ρομποτικού χειριστή, το δεύτερο σχήμα μπορεί να θεωρηθεί το πιο γενικό, επειδή εφαρμόζεται ανεξάρτητα με το ποιος αλγόριθμος εκτελέστηκε για το πρώτο βήμα του προβλήματος και επειδή γενικεύεται και στη περίπτωση όπου είχαμε περισσότερους περιορισμούς γωνιών προσανατολισμού (ή γενικότερα άλλων μεταβλητών). Ταυτόχρονα, το τέταρτο μπορεί να θεωρηθεί το προτιμότερο λόγω της απλότητας του, του γεγονότος ότι δεν απαιτεί αντιστροφή κάποιας Ιακωβιανής μήτρας και του ότι είναι εύρωστο ως προς εξωτερικές διαταραχές.
- Στην online προσέγγιση του προβλήματος προτείνεται μία σχετικά απλή και συμβιβαστική λύση. Ο ρομποτικός χειριστής εκτελεί κίνηση ανεξάρτητη από το όχημα, ώστε να καταλήξει σε ένα βέλτιστο σημείο. Από την άλλη, το κινούμενο ρομπότ θα πρέπει να ακολουθήσει την κίνηση και να φτάσει το τελικό στοιχείο δράσης του χειριστή. Το πρόβλημα της παρακολούθησης τροχιάς, τη στιγμή που αυτή καταλήγει σε ένα στάσιμο σημείο, είναι δυσεπίλυτο και έτσι υιοθετήθηκε ένα σχήμα ελέγχου το οποίο οδηγεί εγγυημένα τα δύο ρομπότ σε μία προδιαγεγραμμένη μικρή απόσταση b στο xy επίπεδο.

7.2 Μελλοντική έρευνα

Η μελλοντική έρευνα για το πρόβλημα αυτό, μπορεί αρχικά να περιλαμβάνει τη μελέτη του προβλήματος με περισσότερους περιορισμούς. Πιο συγκεκριμένα μπορεί να μελετηθεί το πρόβλημα λαμβάνοντας υπόψη τα όρια των αρθρώσεων, ορίζοντας αυστηρότερους περιορισμούς για τον τελικό προσανατολισμό των ρομπότ, ή ακόμα και με την ύπαρξη εμποδίων στον χώρο εργασίας των ρομπότ. Παρόλο που στην εργασία αυτή έχουν προταθεί λύσεις για τα όρια στις αρθρώσεις, αλλά και για την ύπαρξη περισσότερων περιορισμών για τον προσανατολισμό, εστιάσαμε τη προσοχή σε άλλες, πιο βασικές συνιστώσες του προβλήματος.

Μία άλλη βασική συνιστώσα του προβλήματος που επιδέχεται μεγάλη διερεύνηση και η οποία αναφέρθηκε στον πρόλογο, είναι αυτή του αποκεντρωμένου (decentralized) συντονισμού. Η δουλειά που παρουσιάστηκε αφορά τον centralized συντονισμό, δηλαδή για την εφαρμογή ενός συγκεντρωτικού ελέγχου και για τα δύο ρομπότ, υποθέτοντας ότι είναι γνωστές οι θέσεις και οι ταχύτητες των δύο ρομπότ κάθε χρονική στιγμή. Από την άλλη μεριά, μία αποκεντρωμένη δομή ελέγχου θα σήμαινε ότι τα δύο ρομπότ είναι δύο εντελώς αυτόνομες και ανεξάρτητες υπάρξεις, οι οποίες λαμβάνουν δεδομένα από το περιβάλλον τους μέσω αισθητήρων και κινούνται αυτόνομα, χωρίς την παρεμβολή κάποιας ενδιάμεσης κεντρικής μονάδας επεξεργασίας. Σε μία τέτοια περίπτωση, η γνώση της κατάστασης του ενός ρομπότ από το άλλο, θα μπορούσε να μην είναι δεδομένη και να έπρεπε τα ρομπότ μέσω των αισθητήριων μονάδων τους (για παράδειγμα κάμερες) να αποκτήσουν πληροφορίες για το άλλο. Εναλλακτικά, ενδιαφέρον για μελέτη θα είχε η περίπτωση όπου υπάρχουν προβλήματα στην επικοινωνία (καθυστερήση στην άφιξη σήματος,

ελλιπής πληροφορία κ.α), με τελικό σκοπό πάντα τα ρομπότ να βρεθούν σε μια κοινή θέση. Εφόσον αυτό το κομμάτι είναι αρκετά ευρύ, μιας και μπορούμε να ορίσουμε με αρκετούς τρόπους ένα τέτοιο decentralized πρόβλημα, θα μπορούσε να αποτελέσει ενδιαφέρον αντικείμενο μελέτης ως επέκταση της παρούσας έρευνας.

Παράρτημα Α΄

Κώδικας MATLAB

Α΄.1 Αλγόριθμος Πολλαπλασιαστών Lagrange

Ο κώδικας του αρχείου *Lagrange.m* υλοποιεί τον επαναληπτικό αλγόριθμο που αναπτύχθηκε στη παράγραφο 4.2.1, για την εύρεση του βέλτιστου σημείου συνάντησης των δύο ρομπότ. Στο κομμάτι του κώδικα μέχρι τη γραμμή 20, εισάγεται το ρομπότ από την ρομποτική εργαλειοθήκη του MATLAB, ορίζεται το μητρώο περιστροφής R_u το οποίο ευθύνεται για την κλίση του ρομπότ και επιλέγονται ποιοι βαθμοί ελευθερίας θα θεωρηθούν ενεργοί για τον ρομποτικό χειριστή. Στον κώδικα που περιέχεται μεταξύ των γραμμών 24 και 42, πραγματοποιούνται αρχικοποιήσεις των απαραίτητων μεγεθών, όπως της αρχικής διάταξης του ρομπότ, της Ιακωβιανής του κ.α. Στη συνέχεια, μεταξύ των γραμμών 44 και 106 ακολουθεί η υλοποίηση του αλγορίθμου, ακριβώς όπως αναφέρεται στη παράγραφο 4.2.1. Οι επόμενες γραμμές αφορούν τις γραφικές παραστάσεις των αποτελεσμάτων.

Ο κώδικας αυτός καλεί τις συναρτήσεις *gradH.m* και *Hfunc.m*, στο τμήμα που αφορά την υλοποίηση του αλγορίθμου. Ο κώδικας των δύο αυτών συναρτήσεων ακολουθεί του κυρίως κώδικα *Lagrange.m*. Η συνάρτηση *gradH.m* δέχεται στα ορίσματα της την τρέχουσα διάταξη του ρομποτικού χειριστή και το ποιες αρθρώσεις είναι ενεργοποιημένες και επιστρέφει την κλίση $dH/d\mathbf{q}$, της οποίας η διάσταση ισούται με τον αριθμό των ενεργών αρθρώσεων. Ο υπολογισμός του διανύσματος αυτού γίνεται αριθμητικά, με βάση την εξίσωση (4.10). Ο κώδικας της συνάρτησης *Hfunc.m* υπολογίζει την συνάρτηση προς μεγιστοποίηση H , η οποία είναι ο δείκτης ικανότητας χειρισμού που έχουμε συζητήσει. Για τον υπολογισμό αυτό, απαιτείται μόνο η Ιακωβιανή μήτρα ως όρισμα της συνάρτησης.

```
1 %% Offline-Langrange Algorithm
2 %Lagrange.m
3
4 % General Simulation and robot parameters
5 robot = importrobot('iiwa14.urdf');
6 robot.DataFormat = 'column';
7
8 end_eff_name = 'iiwa_link_ee_kuka';
```

```

9
10 inc= 0.7;
11 T1 = [cos(inc) -sin(inc) 0 0; sin(inc) cos(inc) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
12 T2 = [cos(inc) 0 sin(inc) 0; 0 1 0 0; -sin(inc) 0 cos(inc) 0.1; 0 0 0 1];
13 Ru = T1 * T2; %Incline transform
14 % Ru = eye(4); %No incline
15 setFixedTransform(robot.Bodies{1}.Joint,Ru)
16
17 % dofs = [1 2 6 7];
18 dofs = [2 3 4 6];
19 ndofs = length(dofs);
20 total_dofs = 7;
21
22 Nmax = 3000; %Algorithm Iterations
23
24 %% Manipulator Parameter initialization
25 q = [pi/3; -pi/8; 0; -pi/2; 0; pi/8; pi/3]; %Initial configuration
26 qdot = zeros(total_dofs,1);
27
28 minlim = zeros(ndofs,1);
29 maxlim = zeros(ndofs,1); %Joint Limits
30
31 for i=1:ndofs
32     minlim(i) = robot.Bodies{dofs(i)+1}.Joint.PositionLimits(1);
33     maxlim(i) = robot.Bodies{dofs(i)+1}.Joint.PositionLimits(2);
34 end
35
36 J = zeros(6,ndofs);
37 Re = zeros(3,3);
38
39 %% Errors initialization
40 ez= zeros(1,Nmax);
41 etheta = zeros(1,Nmax);
42 Hplot = zeros(1,Nmax);
43
44 %% Simulation-Finding the Point, Lagrange multipliers
45 a = 0.03;
46 theta_d = pi / 4;
47 zd = 0.4;
48 ad = [0; 0; -1];
49 lambda = [0.1; -0.1];
50
51 kz = 1;

```

```

52 ka = 1;
53
54 if theta_d < 0.1
55     ka = 7;
56 end
57
58 for i = 1:Nmax
59
60     %Manipulator kinematics
61     trans = getTransform(robot,q,end_eff_name);
62     Re = trans(1:3,1:3);
63     p = trans(1:3,4);
64     ze = p(3);
65     ae = Re(:,3);
66
67     ez(i) = zd - ze;
68     etheta(i) = theta_d - acos(ad' * ae);
69
70     fullJac = geometricJacobian(robot,q,end_eff_name);
71     for j=1:ndofs
72         J(:,j) = fullJac(:, dofs(j));
73     end
74     Jo = J(1:3,:);
75
76     Hplot(i) = Hfunc(J);
77     % Hplot(i);
78
79     % Lagrangian
80     g1 = kz * (ze - zd);
81     g2 = ka * (ad' * ae - cos(theta_d));
82
83     Sae = [0 -ae(3) ae(2); ae(3) 0 -ae(1); -ae(2) ae(1) 0];
84     gradg1 = kz * J(6,:)';
85     gradg2 = ka * (-ad' * Sae * Jo)';
86
87     Lx = -gradH(dofs,J,robot,q, end_eff_name) + [gradg1 gradg2] * lambda;
88     Ll = [g1; g2];
89
90
91     %Update
92     for j=1:ndofs
93         q(dofs(j)) = q(dofs(j)) - a * Lx(j);
94     end

```

```

95     lambda = lambda + a * Ll;
96
97
98     %     Joint limits
99     %     for j=1:ndofs
100    %         if q(dofs(j)) >= maxlim(j)
101    %             q(dofs(j)) = maxlim(j);
102    %         elseif q(dofs(j)) <= minlim(j)
103    %             q(dofs(j)) = minlim(j);
104    %         end
105    %     end
106 end
107
108 %% Plotting
109
110 figure;
111 subplot(2,2,1)
112 plot(etheta);
113 subplot
114 ylabel('Angle error');
115 xlabel('Number of Iterations')
116 grid on
117
118 subplot(2,2,2)
119 plot(ez);
120 ylabel('Z error')
121 xlabel('Number of Iterations')
122 grid on
123
124 subplot(2,2,3:4)
125 plot(Hplot);
126 ylabel('H')
127 xlabel('Number of Iterations')
128 grid on

```

```

1 %gradH.m
2 %Calculating the gradient of H, dH/dq
3 function grad = gradH(dofs,J,robot,q,end_eff_name)
4 dq = 0.002;
5 ndof = length(dofs);
6 Jtemp = zeros(6,ndof);
7 grad = zeros(ndof,1);

```

```

8
9  initH = Hfunc(J);
10 for i=1:ndof
11     qtemp = q;
12     qtemp(dofs(i)) = qtemp(dofs(i)) + dq;
13
14     fullJac = geometricJacobian(robot,qtemp,end_eff_name);
15     for j=1:ndof
16         Jtemp(:,j) = fullJac(:,dofs(j));
17     end
18
19     grad(i) = (Hfunc(Jtemp) - initH)/dq; %Arithmetical derivation
20 end
21
22 end

```

```

1  %Hfunc.m
2  %Calculating H function
3  function H = Hfunc(J)
4  %     H = sqrt(det(J * J')); %Redundant manipulator
5     H = sqrt(det(J' * J)); %Underactuated manipulator
6  end

```

Α'.2 Αλγόριθμος πλεοναστότητας και έλεγχος των δύο ρομπότ

Ο παρακάτω κώδικας αποτελεί μία πλήρη αντιμετώπιση του προβλήματος με offline προσέγγιση. Ο κώδικας περιλαμβάνει τον επαναληπτικό αλγόριθμο πλεοναστότητας που παρουσιάστηκε στη παράγραφο 4.2.2, για την εύρεση ενός βέλτιστου σημείου συνάντησης και στη συνέχεια ακολουθεί ο κώδικας που είναι υπεύθυνος για τον έλεγχο των δύο ρομπότ, ώστε να φτάσουν στο επιλεγμένο σημείο.

Πιο συγκεκριμένα, μέχρι την γραμμή 54 περιλαμβάνονται αρχικοποιήσεις οι οποίες είναι ίδιες με αυτές του αρχείου *Lagrange.m*. Στις γραμμές 54 με 74 κατασκευάζονται οι συναρτήσεις z_d και $\dot{z}_d(t)$ που αφορούν την κατεύθυνση άφιξης. Ο αλγόριθμος πλεοναστότητας για την εύρεση του βέλτιστου σημείου περιλαμβάνεται μεταξύ των γραμμών 76 και 138, ενώ τα αποτελέσματα του αλγορίθμου λαμβάνονται στις γραμμές 133-138. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι για να ληφθεί υπόψη η κατεύθυνση άφιξης στον αλγόριθμο αυτό (κάτι που χρειάζεται για το τέταρτο σχήμα ελέγχου του χειριστή) θα πρέπει να μπει σε σχόλιο η γραμμή 109 και να βγει από σχόλιο η γραμμή 110. Στη συνέχεια, από τη γραμμή 151 και μετά ο κώδικας υλοποιεί τους νόμους ελέγχου για τον ρομποτικό χειριστή και το κινούμενο ρομπότ που παρουσιάστηκαν

στις παραγράφους 4.3.1 και 4.3.2 αντίστοιχα. Το κομμάτι του κώδικα αυτό περιλαμβάνει τις υλοποιήσεις και των τεσσάρων σχημάτων ελέγχου για τον ρομποτικό χειριστή. Βάζοντας έτσι σε σχόλια τα άλλα σχήματα ελέγχου και βγάζοντας από τα σχόλια το επιθυμητό, επιλέγουμε ποιος νόμος ελέγχου θα χρησιμοποιηθεί για τον ρομποτικό χειριστή.

Το παρακάτω πρόγραμμα καλεί και αυτό τις δύο απαραίτητες συναρτήσεις *Hfunc.m* και *gradH.m* που παρατέθηκαν προηγουμένως. Ακόμη, να σημειωθεί ότι από τον κώδικα που παρουσιάζεται παρακάτω, έχουν παραληφθεί τμήματα που αφορούν την εμφάνιση γραφικών παραστάσεων, όπως και το τμήμα του κώδικα που αφορά την αποστολή δεδομένων για τη προσομοίωση στο gazebo.

```

1  %% Offline-Redundancy Algorithm and Robot Control
2  %%Inclined_Redundant.m
3
4  % General Simulation and robot parameters
5  robot = importrobot('iiwa14.urdf');
6  robot.DataFormat = 'column';
7
8  end_eff_name = 'iiwa_link_ee_kuka';
9
10 inc= 0.7;
11 T1 = [cos(inc) -sin(inc) 0 0; sin(inc) cos(inc) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
12 T2 = [cos(inc) 0 sin(inc) 0; 0 1 0 0; -sin(inc) 0 cos(inc) 0.1; 0 0 0 1];
13 Ru = T1 * T2; %Incline transform
14 % Ru = eye(4); %No incline
15 setFixedTransform(robot.Bodies{1}.Joint,Ru)
16
17 % dofs = [1 2 6 7];
18 dofs = [2 3 4 6];
19 ndofs = length(dofs);
20 total_dofs = 7;
21
22 dt = 0.01;
23 Time = 18;
24 samples = Time / dt;
25 t = linspace(0,Time,samples);
26
27 %% Manipulator Parameter initialization
28 qd = zeros(total_dofs,samples);
29 qd(:,1) = [pi/6; -pi/8; 0; -pi/3; 0; pi/8; pi/3]; %Initial configuration
30 qdot_des = zeros(total_dofs,samples);
31 qdot = zeros(total_dofs,1);
32
33 minlim = zeros(ndofs,1);

```

```

34 maxlim = zeros(ndofs,1); %Joint Limits
35
36 for i=1:ndofs
37     minlim(i) = robot.Bodies{dofs(i)+1}.Joint.PositionLimits(1);
38     maxlim(i) = robot.Bodies{dofs(i)+1}.Joint.PositionLimits(2);
39 end
40
41 J = zeros(6,ndofs);
42 Re = zeros(3,3);
43 pdot = zeros(6,1);
44
45 kp = 2; %for linear velocity
46 ko = 2; %for angular velocity
47 kh = 2; %for H gradient
48
49 %% Error initialization
50 ez= zeros(1,samples);
51 ephi = zeros(1,samples);
52 Hplot = zeros(1,samples);
53
54 %% Direction of approach
55 trans = getTransform(robot,qd(:,1),end_eff_name);
56 zin = trans(3,4);
57 zf = 0.5;
58 zmax = max(zf,zin) + 0.1;
59 T = Time - 3;
60 t2 = linspace(0,T,T/dt);
61
62 w = 2 * pi / T;
63 zd1 = 1/2 * (1 - cos(w * t2)) * (zmax - zin) + zin;
64 zd2 = 1/2 * (1 + cos(w * t2)) * (zf - zmax) + zmax;
65
66 %Desired z trajectory
67 zd = zd1 .* (1 - heaviside(t2 - T/2)) + zd2 .* heaviside(t2 - T/2);
68
69 %Its derivative
70 zddot = (1/2*w*sin(w*t2)*(zmax - zin)) .* (1 - heaviside(t2 - T/2)) + ...
71         (-1/2 * w * sin(w*t2)*(zf - zmax)) .* heaviside(t2 - T/2);
72
73 zd = [zd zf*ones(1,3/dt)];
74 zddot = [zddot zeros(1,3/dt)];
75
76 %% Simulation-Finding the Point, Redundancy Analysis

```

```

77 phi_d = pi/4;
78 ad = [0; 0; -1];
79 zds = zf;
80
81 for i = 1:samples
82
83     %Manipulator control
84     trans = getTransform(robot,qd(:,i),end_eff_name);
85     Re = trans(1:3,1:3);
86     p = trans(1:3,4);
87     ze = p(3);
88     ae = Re(:,3);
89     r = sqrt(ae(1:2)' * ae(1:2));
90
91     ez(i) = zds - ze;
92     ephi(i) = phi_d - acos(ad' * ae);
93
94     fullJac = geometricJacobian(robot,qd(:,i),end_eff_name);
95     for j=1:ndofs
96         J(:,j) = fullJac(:, dofs(j));
97     end
98     Jo = J(1:3,:);
99
100    Hplot(i) = Hfunc(J);
101    Hplot(i);
102
103    % Redundant
104    Sae = [0 -ae(3) ae(2); ae(3) 0 -ae(1); -ae(2) ae(1) 0];
105
106    Jnew = [J(6,:); (ad' * Sae * Jo)/r];
107    Jnewplus = Jnew' / (Jnew * Jnew' + 0.0000 * eye(2));
108
109    ud = [kp * (zds - ze); ko * (phi_d - atan2(r,-ae(3)))];
110    % ud = [kp * (zd(i) - ze) + zddot(i); ko * (phi_d - atan2(r,-ae(3)))];
111    qdsmall = Jnewplus * ud + (eye(4) - Jnewplus * Jnew) * ...
112        (kh * gradH(dofs,J,robot,qd(:,i), end_eff_name));
113
114    %Update
115    for j=1:ndofs
116        qdot(dofs(j)) = qdsmall(j);
117    end
118
119    qdot_des(:,i) = qdot;

```

```

120
121     qd(:,i+1) = qd(:,i) + qdot*dt;
122
123     %     Joint limits
124     %     for j=1:ndofs
125     %         if qd(dofs(j),i+1) >= maxlim(j)
126     %             qd(dofs(j),i+1) = maxlim(j);
127     %         elseif qd(dofs(j),i+1) <= minlim(j)
128     %             qd(dofs(j),i+1) = minlim(j);
129     %         end
130     %     end
131 end
132
133 %Final pose
134 qf = qd(:,samples);
135 qfsmall = [qf(dofs(1)); qf(dofs(2)); qf(dofs(3)); qf(dofs(4))];
136 tf = getTransform(robot,qf,end_eff_name);
137 pf = tf(1:3,4);
138 aef = tf(1:3,3);
139
140 %% Unicycle Mobile Robot Parameter initialization
141 xm = zeros(3,samples);
142 xm(:,1) = [2.3; -2.3; 0.6]; %x,y,theta
143
144 ulim = 1.0;
145 phiLim = 0.7;
146 km = [0.8 2.5 3];
147
148 posed = [pf(1:2); atan2(aef(2), aef(1))]; %desired pose (x,y,theta)
149 transo = 0;
150
151 %% Simulation-controlling the robots
152
153 eq = zeros(1,samples);
154 exyz = zeros(3,samples);
155 ephi = zeros(1,samples);
156 ep = zeros(2,samples);
157 emtheta = zeros(1,samples);
158
159 q = zeros(total_dofs,samples);
160 q(:,1) = qd(:,1);
161 K = [2 0 0 0; 0 2 0 0; 0 0 15 0; 0 0 0 2];
162

```

```

163 for i = 1:samples
164
165     %Manipulator control
166     trans = getTransform(robot,q(:,i),end_eff_name);
167     Re = trans(1:3,1:3);
168     p = trans(1:3,4);
169     ze = p(3);
170     ae = Re(:,3);
171     r = sqrt(ae(1:2)' * ae(1:2));
172
173     exyz(:,i) = [pf(1) - p(1); pf(2) - p(2); zd(i) - ze];
174     ephi(i) = phi_d - acos(ad' * ae);
175     eq(i) = sqrt((qf - q(:,i))' * (qf - q(:,i)));
176
177     fullJac = geometricJacobian(robot,q(:,i),end_eff_name);
178     for j=1:ndofs
179         J(:,j) = fullJac(:, dofs(j));
180     end
181     Jo = J(1:3,:);
182
183     %Inverse Jacobian - First Control Law
184     % Jnew = [J(4:6,:); (ad' * Sae * Jo)/r];
185     % e = [pf - p; (phi_d - atan2(r,-ae(3)))];
186     % e(3) = zd(i) - ze;
187     % qdsmall = Jnew' / (Jnew * Jnew' + 0.0005 * eye(4)) * ...
188     % (K * e + 1*[0; 0; zddot(i); 0;]);
189
190     %Redundant - Second Control Law
191     qsmall = [q(dofs(1),i); q(dofs(2),i); q(dofs(3),i); q(dofs(4),i)];
192     Jnewz = J(6,:);
193     Jnewzplus = pinv(Jnewz);
194
195     qdsmall = Jnewzplus * (7 * (zd(i) - ze) + zddot(i)) + ...
196     (eye(4) - Jnewzplus * Jnewz) * 5 * (qfsmall - qsmall);
197
198     %Copying A phase - Third Control Law
199     % Sae = [0 -ae(3) ae(2); ae(3) 0 -ae(1); -ae(2) ae(1) 0];
200     %
201     % Jnew = [J(6,:); (ad' * Sae * Jo)/r];
202     % Jnewplus = Jnew' / (Jnew * Jnew' + 0.0000 * eye(2));
203     %
204     % ud = [kp * (zd(i) - ze) + zddot(i); ko * (phi_d - atan2(r,-ae(3)))];
205     % qdsmall = Jnewplus * ud + (eye(4) - Jnewplus * Jnew) * ...

```

```

206 %      (kh * gradH(dofs,J,robot,qd(:,i), end_eff_name));
207
208 %Mobile Robot control
209 %For unicycle
210 ep(:,i) = xm(1:2,i) - posed(1:2);
211 emtheta(i) = xm(3,i) - posed(3);
212
213 ro = norm(ep(:,i));
214
215 %To avoid atan2 discontinuity
216 transn = atan2(ep(2,i),ep(1,i));
217 if transo < - pi/2 && transn > pi/2
218     transn = transn - 2*pi;
219 elseif transn < - pi/2 && transo > pi/2
220     transn = transn + 2*pi;
221 end
222 transo = transn;
223
224 gamma = transn - xm(3,i) + pi;
225 delta = gamma + emtheta(i);
226
227 u = km(1) * ro * cos(gamma);
228 w = km(2) * gamma + km(1) * sin(gamma) * cos(gamma) * ...
229     (gamma + km(3) * delta) / gamma;
230
231 %Update
232 for j=1:ndofs
233     qdot(dofs(j)) = qdsmall(j);
234 end
235
236 %Trajectory following - Fourth Control Law
237 %      qdot = 20 * (qd(:,i) - q(:,i)) + qdot_des(:,i);
238
239 q(:,i+1) = q(:,i) + qdot*dt;
240
241 %      Joint limits
242 %      for j=1:ndofs
243 %          if q(dofs(j),i+1) >= maxlim(j)
244 %              q(dofs(j),i+1) = maxlim(j);
245 %          elseif q(dofs(j),i+1) <= minlim(j)
246 %              q(dofs(j),i+1) = minlim(j);
247 %          end
248 %      end

```

```

249
250     w = min(max(w,-phiLim),phiLim);
251
252     xm(1,i+1) = xm(1,i) + u * cos(xm(3,i) + w * dt / 2) * dt; %x
253     xm(2,i+1) = xm(2,i) + u * sin(xm(3,i) + w * dt / 2) * dt; %y
254     xm(3,i+1) = xm(3,i) + w * dt; %theta
255
256     if xm(3,i) > 2 * pi
257         xm(3,i) = xm(3,i) - 2 * pi;
258     elseif xm(3,i) < -2*pi
259         xm(3,i) = xm(3,i) + 2 * pi;
260     end
261 end

```

Α.3 Online Προσέγγιση

Το αρχείο *Online.m*, υλοποιεί τους νόμους ελέγχου του ρομποτικού χειριστή και του κινούμενου ρομπότ για την online προσέγγιση λύσης, οι οποίοι παρουσιάστηκαν στις παραγράφους 5.1 και 5.2 αντίστοιχα. Ο κώδικας που αφορά τις αρχικοποιήσεις είναι όμοιος με τα προηγούμενα προγράμματα, ενώ η προσομοίωση ξεκινά από την γραμμή 85. Στον παρακάτω κώδικα επίσης καλούνται οι συναρτήσεις *Hfunc.m* και *gradH.m*, ενώ έχουν παραληφθεί τμήματα του κώδικα που αφορούν γραφικές παραστάσεις και τη προσομοίωση στο gazebo.

```

1  %% Online Control
2  %Online.m
3
4  % General Simulation and robot parameters
5  robot = importrobot('iiwa14.urdf');
6  robot.DataFormat = 'column';
7
8  end_eff_name = 'iiwa_link_ee_kuka';
9
10 inc= 0.7;
11 T1 = [cos(inc) -sin(inc) 0 0; sin(inc) cos(inc) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
12 T2 = [cos(inc) 0 sin(inc) 0; 0 1 0 0; -sin(inc) 0 cos(inc) 0.1; 0 0 0 1];
13 Ru = T1 * T2; %Incline transform
14 % Ru = eye(4); %No incline
15 setFixedTransform(robot.Bodies{1}.Joint,Ru)
16
17 % dofs = [1 2 6 7];
18 dofs = [2 3 4 6];

```

```

19 ndofs = length(dofs);
20 total_dofs = 7;
21
22 dt = 0.01;
23 Time = 30;
24 samples = Time / dt;
25
26 %% Manipulator Parameter initialization
27 q = zeros(total_dofs,samples);
28 q(:,1) = [ 0; 0; pi/4; -pi/6; 0; pi/8; pi/3]; %Initial configuration
29 qdot = zeros(total_dofs,1);
30
31 minlim = zeros(ndofs,1);
32 maxlim = zeros(ndofs,1); %Joint Limits
33
34 for i=1:ndofs
35     minlim(i) = robot.Bodies{dofs(i)+1}.Joint.PositionLimits(1);
36     maxlim(i) = robot.Bodies{dofs(i)+1}.Joint.PositionLimits(2);
37 end
38
39 J = zeros(6,ndofs);
40 Re = zeros(3,3);
41
42 %% Error initialization
43 ez= zeros(1,samples);
44 ephi = zeros(1,samples);
45 ep = zeros(2,samples);
46 emtheta = zeros(1,samples);
47 Hplot = zeros(1,samples);
48
49 %% Direction of approach
50 trans = getTransform(robot,q(:,1),end_eff_name);
51 zin = trans(3,4);
52 zf = 0.5;
53 zmax = max(zf,zin) + 0.1;
54
55 T = 8;
56 S = T / dt;
57 t = linspace(0, T, S);
58
59 w = 2 * pi / T;
60 zd1 = 1/2 * (1 - cos(w * t)) * (zmax - zin) + zin;
61 zd2 = 1/2 * (1 + cos(w * t)) * (zf - zmax) + zmax;

```

```

62
63 %Desired z trajectory
64 zd = zd1 .* (1 - heaviside(t - T/2)) + zd2 .* heaviside(t - T/2);
65 zd = [zd zd(S) * ones(1, samples - S)];
66
67 %Its derivative
68 zddot = (1/2*w*sin(w*t)*(zmax - zin)) .* (1 - heaviside(t - T/2)) + ...
69         (-1/2 * w * sin(w*t)*(zf - zmax)) .* heaviside(t - T/2);
70 zddot = [zddot zeros(1,samples-S)];
71
72 %% Unicycle Mobile Robot Parameter initialization
73 xm = zeros(3,samples);
74 xm(:,1) = [2.3; -2.3; 0.6]; %x,y,theta
75
76 b = 0.005; %Final Distance from the manipulator
77
78 ulim = 1.0;
79 phiLim = 0.7;
80 km = [2 1 4];
81
82 transo = 0;
83 posed = zeros(1,3);
84
85 %% Simulation
86 phi_d = pi/4;
87 ad = [0; 0; -1];
88 zds = zf;
89
90 kp = 2; %for linear velocity
91 ko = 2; %for angular velocity
92 kh = 6; %for H gradient
93 kz = 7;
94
95 ky = [1.5 0; 0 1.5];
96 change = false;
97
98 for i = 1:samples
99
100     %Manipulator control
101     trans = getTransform(robot,q(:,i),end_eff_name);
102     Re = trans(1:3,1:3);
103     pe = trans(1:3,4);
104     ze = pe(3);

```

```

105     ae = Re(:,3);
106     r = sqrt(ae(1:2)' * ae(1:2));
107
108     ez(i) = zd(i) - ze;
109     ephi(i) = phi_d - acos(ad' * ae);
110
111     fullJac = geometricJacobian(robot,q(:,i),end_eff_name);
112     for j=1:ndofs
113         J(:,j) = fullJac(:, dofs(j));
114     end
115     Jo = J(1:3,:);
116     Jp = J(4:5,:);
117
118     Hplot(i) = Hfunc(J);
119
120     Sae = [0 -ae(3) ae(2); ae(3) 0 -ae(1); -ae(2) ae(1) 0];
121
122     %Control Law #1
123     Jzp = [J(6,:); (ad' * Sae * Jo)/r];
124     Jzpplus = Jzp' / (Jzp * Jzp' + 0.0000 * eye(2));
125
126     ud = [kz * (zd(i) - ze) + zddot(i); ko * (phi_d - atan2(r,-ae(3)))];
127     qdsmall = Jzpplus * ud + (eye(4) - Jzpplus * Jzp) * ...
128         (kh * gradH(dofs,J,robot,q(:,i), end_eff_name)); % + 0 * kp * ep);
129
130
131     %Mobile Robot control
132     %For unicycle
133
134     %To avoid atan2 discontinuity
135     td = atan2(ae(2), ae(1));
136     if td - posed(3) > pi
137         td = td - 2 * pi;
138     elseif td - posed(3) < -pi
139         td = td + 2 * pi;
140     end
141
142     if r < 0.01
143         tdang = 0;
144     else
145         tdang = 1;
146     end
147

```

```

148     posed = [pe(1:2); tdang*td]; %desired pose (x,y,theta)
149
150     ep(:,i) = -xm(1:2,i) + posed(1:2);
151     emtheta(i) = xm(3,i) - posed(3);
152
153     y = xm(1:2,i) + b * [cos(xm(3,i)); sin(xm(3,i))];
154     yd = posed(1:2);
155     yddot = Jp * qdsmall;
156
157     Tthetainv = [cos(xm(3,i)) sin(xm(3,i)); -sin(xm(3,i))/b cos(xm(3,i))/b];
158
159     ui = yddot + ky * (yd - y);
160
161     res = Tthetainv * ui;
162
163     %First Control Phase
164     u = res(1);
165     w = res(2);
166
167     if norm(qdsmall) < 0.02 && norm(yd - y) < 0.001 || change == true
168         change = true;
169
170         %Second Control Phase
171         u = 0;
172         w = tdang*ad' * Sae * Sae * Jo * qdsmall / r^2 + ...
173         2 * (posed(3) - xm(3,i));
174     end
175
176     %Update
177     for j=1:ndofs
178         qdot(dofs(j)) = qdsmall(j);
179     end
180
181     q(:,i+1) = q(:,i) + qdot*dt;
182
183     % Joint limits
184     for j=1:ndofs
185         if q(dofs(j),i+1) >= maxlim(j)
186             q(dofs(j),i+1) = maxlim(j);
187         elseif q(dofs(j),i+1) <= minlim(j)
188             q(dofs(j),i+1) = minlim(j);
189         end
190     end

```

```
191
192     u = min(max(u,-ulim),ulim);
193     w = min(max(w,-phiLim),phiLim);
194
195     xm(1,i+1) = xm(1,i) + u * cos(xm(3,i) + w * dt / 2) * dt; %x
196     xm(2,i+1) = xm(2,i) + u * sin(xm(3,i) + w * dt / 2) * dt; %y
197     xm(3,i+1) = xm(3,i) + w * dt; %theta
198
199     if xm(3,i+1) > 2 * pi
200         xm(3,i+1) = xm(3,i+1) - 2 * pi;
201     elseif xm(3,i+1) < -2*pi
202         xm(3,i+1) = xm(3,i+1) + 2 * pi;
203     end
204 end
```

Bibliography

- [1] Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Villani Luigi, and Giuseppe Oriolo. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. 01 2011.
- [2] H. Zghal, R. V. Dubey, and J. A. Euler. Efficient gradient projection optimization for manipulators with multiple degrees of redundancy. In *Proceedings., IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1006–1011 vol.2, May 1990.
- [3] Boris Polyak. Iterative methods using lagrange multipliers for solving extremal problems with constraints of the equation type. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 10:42–52, 12 1970.
- [4] Kevin Dufour and Wael Suleiman. On integrating manipulability index into inverse kinematics solver. pages 6967–6972, 09 2017.
- [5] Nathan Ratliff. Multivariate calculus ii: The geometry of smooth maps. 11 2014.
- [6] Bruno Siciliano and Oussama Khatib. *Springer Handbook of Robotics*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2nd edition, 2016.
- [7] Spyros Tzafestas. *Introduction to Mobile Robot Control*. 10 2013.
- [8] Sungon Lee, Youngil Youm, and Wankyun Chung. Control of car-like mobile robots for posture stabilization. In *Proceedings 1999 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Human and Environment Friendly Robots with High Intelligence and Emotional Quotients (Cat. No.99CH36289)*, volume 3, pages 1745–1750 vol.3, Oct 1999.
- [9] Ti-Chung Lee, Kai-Tai Song, Ching-Hung Lee, and Ching-Cheng Teng. Tracking control of unicycle-modeled mobile robots using a saturation feedback controller. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 9(2):305–318, March 2001.
- [10] Yu-Ping Tian and Ke-cai Cao. Time [U+2010]varying linear controllers for exponential tracking of non [U+2010]holonomic systems in chained form. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17:631 – 647, 05 2007.