



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής

Μη Γραμμικός Προσαρμοστικός ΡΙ Έλεγχος για
Συστήματα Πολλών Εισόδων Πολλών Εξόδων

Διπλωματική Εργασία
Οικονομίδης Κωνσταντίνος

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2019



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής Εργαστήριο Αυτομάτου
Ελέγχου

Μη Γραμμικός Προσαρμοστικός ΡΙ Έλεγχος για
Συστήματα Πολλών Εισόδων Πολλών Εξόδων

Διπλωματική Εργασία

Οικονομίδης Κωνσταντίνος

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή, την 1η Οκτωβρίου 2019.

.....
Χ. Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

.....
Κ. Τζαφέστας
Αναπληρωτής
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Κ. Κυριακόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2019

(Υπογραφή)

.....
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΔΗΣ
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Κωνσταντίνος Α. Οικονομίδης, 2019

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved .

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη διπλωματική αυτή εργασία παρουσιάζεται μια τεχνική σχεδίασης προσαρμοστικών νόμων ελέγχου, βασισμένη στη χρήση της μεθόδου του μη γραμμικού αναλογικού-ολοκληρωτικού (nonlinear PI) ελέγχου. Η σχεδίαση αφορά στην επίλυση του προβλήματος παρακολούθησης για μη γραμμικά δυναμικά συστήματα, πολλών εισόδων-πολλών εξόδων, σε κανονική μορφή των οποίων η δυναμική θεωρείται άγνωστη. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου και μη φραγμένες μη γραμμικότητες. Το πρόβλημα λύνεται συνδυάζοντας επιτυχώς την τεχνική του προσαρμοστικού προσεγγιστικού ελέγχου (adaptive approximation control) με την μέθοδο του μη γραμμικού αναλογικού-ολοκληρωτικού (nonlinear PI) ελέγχου. Για την ανάλυση του συνδυαστικού προβλήματος και τη γενίκευση της PI μεθοδολογίας για συστήματα πολλών-εισόδων και πολλών-εξόδων, νέα θεωρητικά αποτελέσματα έχουν αναπτυχθεί στα πλαίσια της παρούσης εργασίας. Παρουσιάζονται προσομοιώσεις για το πρόβλημα έλεγχου ενός ρομποτικό βραχίονα 2 συνδέσμων με ή χωρίς χρήση κάμερας οι οποίες επιβεβαιώνουν τα θεωρητικά αποτελέσματα.

Λέξεις κλειδιά

Μη γραμμικός αναλογικός-ολοκληρωτικός έλεγχος, προσαρμοστικός έλεγχος, κέρδη Nussbaum, άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου, μη περιορισμένες μη αντιστοιχίσιμες μη γραμμικότητες, γραμμικοί παραμετρικοί εκτιμητές

Abstract

In this diploma thesis we design adaptive controllers based on the nonlinear PI control method. The proposed controller class solves the tracking problem for nonlinear, multiple-input and multiple-output systems in canonical form with unknown dynamics. Specifically, we assume systems with unknown control directions and unknown, unmatched nonlinearities without growth restrictions. A solution is provided through the successful combination of adaptive approximation control with the nonlinear PI control method. For the analysis of the combined problem and the generalization of the nonlinear PI methodology for multiple-input multiple-output systems, new theoretical tools have been developed. Simulations are presented for the 2 DOF manipulator tracking control problem in joint and image space (uncalibrated visual servoing) that confirm our theoretical analysis.

Key words

nonlinear PI control, universal adaptive control, Nussbaum gains, unknown control directions, unmatched nonlinearities without growth restrictions

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Χ. Ψυλλάκη, τόσο για την εύρεση ενός ενδιαφέροντος θέματος για τη διπλωματική εργασία, όσο και για τη συνεχή συνεργασία του, κατά την περίοδο της συγγραφής της.

Ταυτόχρονα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Ασημάκη και Δήμητρα Οικονομίδου, για την πολύπλευρη στήριξη που μου παρείχαν όλα αυτά τα χρόνια, αλλά και την ενθάρρυνση της ενασχόλησης μου με το συγκεκριμένο αντικείμενο.

Τέλος, ευχαριστώ τους φίλους μου για τη συντροφιά και τη βοήθεια τους, αυτά τα χρόνια.

"Controls are a modulation, like a self-deforming cast that will continuously change from one moment to the other, or like a sieve whose mesh will transmute from point to point"

-Gilles Deleuze, Postscript on the Societies of Control

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	5
Abstract	7
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	9
Περιεχόμενα	11
Κατάλογος Σχημάτων	13
1 Εισαγωγή	15
1.1 Συστήματα Ελέγχου	15
1.2 Αντικείμενο Διπλωματικής	18
1.3 Οργάνωση Τόμου	18
2 Μαθηματικό Υπόβαθρο	21
2.1 Ορισμοί	21
2.1.1 Χώροι Συναρτήσεων	21
2.1.2 Νεκρή ζώνη (Deadzone)	21
2.1.3 Θεώρημα Lyapunov	22
2.1.4 Θεώρημα Lassale	22
2.1.5 Λήμμα Barbalat	22

2.2	SDU Διάσπαση	23
2.3	HONN	25
2.4	Nussbaum Gains	26
2.4.1	Περιγραφή Προβλήματος	26
2.4.2	Μέθοδος Nussbaum	27
2.5	Μη γραμμικός PI έλεγχος	29
2.6	Μοντελοποίηση Ρομποτικού Βραχίονα	31
2.6.1	Uncalibrated Visual Servoing	33
3	Διατύπωση Προβλήματος	35
4	Θεωρητικά Αποτελέσματα	39
4.1	Βασικό Λήμμα	39
4.2	Σχεδίαση Ελεγκτή	41
4.3	Ύπαρξη Φραγμένων Λύσεων και Σύγκλιση	48
5	Προσομοιώσεις	51
5.1	Παρακολούθηση τροχιάς αναφοράς σε ρομποτικό βραχίονα	51
5.1.1	Αποτελέσματα Προσομοίωσης	53
5.2	Προσομοίωση Uncalibrated Servoing	58
5.2.1	Αποτελέσματα με $\theta = \pi/6$ ($\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$)	59
5.2.2	Αποτελέσματα με $\theta = 5\pi/6$ ($\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$)	64
5.3	Σχολιασμός	69
6	Επίλογος	71
6.1	Συμπεράσματα	71
6.2	Επεκτάσεις	72
	Βιβλιογραφία	73

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Κλασσική μορφή συστήματος ανάδρασης	16
2.1	Συνάρτηση Nussbaum $N(\zeta) = \zeta^2 \sin(\zeta)$ και το $\int_0^\zeta N(s)ds$	28
2.2	Κλασσική μορφή PID ελεγκτή	29
2.3	Παράδειγμα ρομποτικού βραχίονα με δύο βαθμούς ελευθερίας	32
4.1	Συνημίτονα με τετραπλάσιες συχνότητες	46
5.1	Μεταβολή του q_1 συγκριτικά με το q_{1d}	53
5.2	Μεταβολή του q_2 συγκριτικά με το q_{2d}	54
5.3	Χρονική απόκριση των κερδών ελέγχου $\cos(\tilde{\phi}(P)), \cos(4\tilde{\phi}(P))$	54
5.4	Μεταβολή β_1 σε σχέση με το χρόνο	55
5.5	Μεταβολή β_2 σε σχέση με το χρόνο	55
5.6	Μεταβολή της εισόδου u_1 σε σχέση με το χρόνο	56
5.7	Μεταβολή της εισόδου u_2 σε σχέση με το χρόνο	56
5.8	Μεταβολή του σταθμισμένου σφάλματος s_1 σε σχέση με το χρόνο	57
5.9	Μεταβολή του σταθμισμένου σφάλματος s_2 σε σχέση με το χρόνο	57
5.10	Απόκριση y_1 συγκριτικά με την επιθυμητή y_{1d} , για $\theta = 30^\circ$	59
5.11	Απόκριση y_2 συγκριτικά με την επιθυμητή y_{2d} , για $\theta = 30^\circ$	59
5.12	Σφάλμα στην ακολούθηση εντολής για το y_1 , για $\theta = 30^\circ$	60
5.13	Σφάλμα στην ακολούθηση εντολής για το y_2 , για $\theta = 30^\circ$	60

5.14	Είσοδος ελέγχου u_1 , για $\theta = 30^\circ$	61
5.15	Είσοδος ελέγχου u_2 , για $\theta = 30^\circ$	61
5.16	Χρονική απόκριση των κερδών ελέγχου $\cos(\tilde{\phi}(P)), \cos(4\tilde{\phi}(P))$, για $\theta = 30^\circ$	62
5.17	Μεταβολή β_1 , για $\theta = 30^\circ$	62
5.18	Κίνηση του Ρομποτικού Βραχίονα με Βάση το Σύστημα Όρασης, για $\theta = 30^\circ$	63
5.19	Μεταβολή β_2 , για $\theta = 30^\circ$	64
5.20	Απόκριση y_1 συγκριτικά με την επιθυμητή y_{1d} , για $\theta = 150^\circ$	64
5.21	Απόκριση y_2 συγκριτικά με την επιθυμητή y_{2d} , για $\theta = 150^\circ$	65
5.22	Σφάλμα στην ακολούθηση εντολής για το s_1 , για $\theta = 150^\circ$	65
5.23	Σφάλμα στην ακολούθηση εντολής για το s_2 , για $\theta = 150^\circ$	66
5.24	Είσοδος ελέγχου u_1 , για $\theta = 150^\circ$	66
5.25	Είσοδος ελέγχου u_2 , για $\theta = 150^\circ$	67
5.26	Χρονική απόκριση των κερδών ελέγχου $\cos(\tilde{\phi}(P)), \cos(4\tilde{\phi}(P))$, για $\theta = 150^\circ$	67
5.27	Μεταβολή β_1 , για $\theta = 150^\circ$	68
5.28	Μεταβολή β_2 , για $\theta = 150^\circ$	68
5.29	Κίνηση του Ρομποτικού Βραχίονα με Βάση το Σύστημα Όρασης, για $\theta = 150^\circ$	69

Κεφάλαιο 1

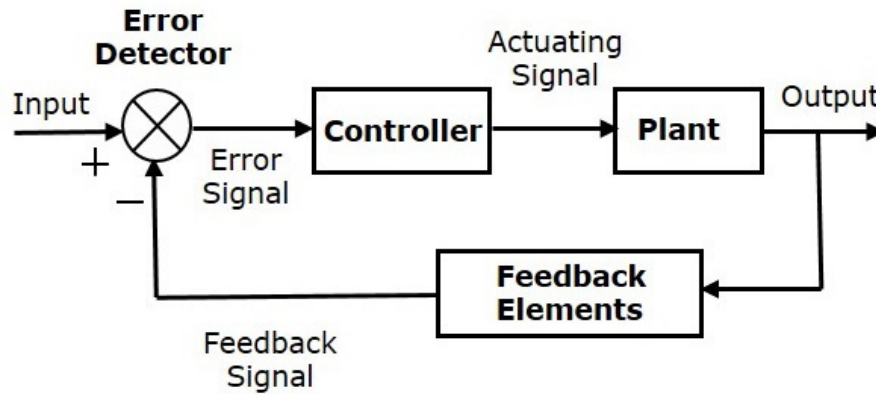
Εισαγωγή

1.1 Συστήματα Ελέγχου

Η θεωρία του αυτόματου ελέγχου, αποτελεί ένα τμήμα των μαθηματικών που ασχολείται τόσο με την ανάλυση δυναμικών συστημάτων, όσο και με τη σχεδίαση κατάλληλων ελεγκτών, με στόχο την επίτευξη επιθυμητών ιδιοτήτων. Συγκεκριμένα, περιλαμβάνει ολόκληρη τη διαδικασία, από τη μοντελοποίηση ενός φυσικού συστήματος, την περιγραφή και ανάλυση του με διάφορες μεθόδους έως και τον έλεγχο του και την αλλαγή των χαρακτηριστικών και των αποκρίσεων του. Κατά συνέπεια οι κεντρικές έννοιες στον αυτόματο έλεγχο είναι η μοντελοποίηση, ανάδραση, η επίδοση, η ευστάθεια και η ευαισθησία στο θόρυβο και στις διαταραχές.

Το θεμελιώδες τμήμα της θεωρίας του αυτόματου ελέγχου, καθώς και το πρώτο το οποίο μελετήθηκε ιστορικά, είναι αυτό των γραμμικών συστημάτων. Ο τρόπος με τον οποίο περιγράφονται αυτά τα συστήματα είναι με τη χρήση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων για συνεχή χρόνο ή με γραμμικές εξισώσεις διαφορών για διακριτό χρόνο. Μάλιστα, όταν οι παράμετροι ενός συστήματος παραμένουν σταθερές σε σχέση με το χρόνο, το σύστημα αυτό ονομάζεται χρονικά αμετάβλητο. Δημιουργείται έτσι το πολύ σημαντικό υποσύνολο των γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων συστημάτων, για τη μελέτη των οποίων έχουν αναπτυχθεί ξεχωριστές τεχνικές. Βασική μεθοδολογία, είναι η μεταφορά του συστήματος στο χώρο συχνοτήτων, όπου χρησιμοποιούνται μαθηματικά εργαλεία, όπως οι μετασχηματισμοί Laplace, Fourier, Z , τα διαγράμματα Bode, ο γεωμετρικός τόπος ριζών, και το κριτήριο ευστάθειας του Nyquist. Επιπλέον, εισάγονται και νέοι όροι για την περιγραφή

τους, όπως το εύρος ζώνης, η απόκριση συχνότητας, οι πόλοι και τα μηδενικά κ.α.



Σχήμα 1.1: Κλασσική μορφή συστήματος ανάδρασης

Παρά την ευκολία της ανάλυσης αλλά και τις δυνατότητες που προσφέρει η γραμμικότητα, στην πραγματικότητα η συντριπτική πλειοψηφία των συστημάτων είναι μη γραμμικά. Δηλαδή, η δυναμική συμπεριφορά τους περιγράφεται από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις διαφορών. Δημιουργείται έτσι ένα άλλο σύνολο συστημάτων, αρκετά ευρύτερο, το οποίο αποτελεί πεδίο μελέτης του μη γραμμικού αυτόματου ελέγχου. Οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη αυτών αλλά και για τη δημιουργία κατάλληλων ελεγκτών, είναι αρκετά πιο δύσκολες και μπορούν να εφαρμοστούν σε πολύ μικρότερα σύνολα συστημάτων. Αυτές περιλαμβάνουν το θεώρημα ευστάθειας του Lyapunov, τον οριακό κύκλο, τους χάρτες Poincare, κ.α.

Βέβαια, παρά όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, υπάρχουν τρόποι αντιμετώπισης των μη γραμμικών συστημάτων, που απλοποιούν αρκετά την ανάλυση τους. Συγκεκριμένα, εφόσον σε ένα σύστημα μας ενδιαφέρουν μόνο τιμές γύρω από ένα σημείο ισορροπίας, μπορούμε να εφαρμόσουμε την τεχνική της γραμμικοποίησης, δηλαδή της προσέγγισης με ένα γραμμικό σύστημα και της εφαρμογής γραμμικών τεχνικών ελέγχου, σε περιοχές κοντά στο σημείο ισορροπίας. Με βάση αυτά που αναφέρθηκαν παραπάνω, είναι φανερός ο λόγος που αυτές οι τεχνικές είναι αρκετά διαδεδομένες και ο γραμμικός έλεγχος θεωρείται ο πιο βασικός τρόπος ανάλυσης συστημάτων. Σε ένα πιο γενικό πλαίσιο όμως, οι λύσεις που προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο αφορούν σχετικά μικρές περιοχές λειτουργίας και δεν έχουν πάντα την απαιτούμενη ακρίβεια, ενώ δεν είναι δυνατή σε όλες τις περιπτώσεις η εφαρμογή της γραμμικοποίησης. Ταυτόχρονα, έχει αποδειχθεί ότι αρκετές φορές η σχεδίαση

μη γραμμικών ελεγκτών είναι πιο αποτελεσματική, καθώς πετυχαίνει καλύτερες επιδόσεις με μικρότερο κόστος, ακόμα και σε γραμμικά συστήματα.

Ο χωρισμός των μελετούμενων συστημάτων σε γραμμικά και μη γραμμικά, καθορίζει τις κυρίαρχες κατηγορίες ελέγχου, αλλά δεν αποτελεί τη μόνη διαχωριστική για το συγκεκριμένο πεδίο. Ο προσαρμοστικός έλεγχος, αποτελεί τη μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για τη σχεδίαση ελεγκτών σε συστήματα, οι παράμετροι των οποίων μπορεί να αλλάζουν ή να είναι άγνωστες. Εν αντιθέσει με τον κλασικό σθεναρό έλεγχο, ο προσαρμοστικός έλεγχος δε χρειάζεται a priori πληροφορίες για τα φράγματα των συγκεκριμένων παραμέτρων. Στην πραγματικότητα, η μεθοδολογία αυτή εστιάζει στην ιδιότητα του ελεγκτή να αλλάζει, ώστε να προσαρμόζεται στην άγνωστη δυναμική του συστήματος, βασιζόμενος στην ιστορία του. Οι χρησιμοποιούμενοι ελεγκτές δηλαδή, περιλαμβάνουν και προηγούμενες τιμές των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος, συνήθως με τη χρήση του ολοκληρώματος τους ή κάποιας συνάρτησης τους:

$$u = \gamma(x(s)), s \leq t \quad (1.1)$$

ή

$$u = \gamma(x(t), \int_0^t x(s)ds), \quad (1.2)$$

ή

$$\begin{aligned} u &= \gamma(x(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) &= f(x(t), z(t)) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι αν και η μεθοδολογία του προσαρμοστικού ελέγχου χρησιμεύει σε αρκετές περιπτώσεις, δημιουργεί ένα αρκετά σοβαρό πρόβλημα. Αυτό είναι η αύξηση της δυναμικής τάξης των συστημάτων, μέσω της εισαγωγής διαφορικών εξισώσεων για την εκτίμηση των παραμέτρων, καθώς και η αύξηση της πολυπλοκότητας τους.

1.2 Αντικείμενο Διπλωματικής

Στην εργασία αυτή, μελετώνται μη γραμμικά δυναμικά συστήματα της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= q_{i+1} \\ \dot{q}_m &= F(q_1, \dots, q_m) + G(q_1, \dots, q_m)u \\ y &= q_1, \end{aligned} \tag{1.4}$$

όπου $q = [q_1^T, \dots, q_m^T]^T \in \mathbb{R}^{nm}$ είναι το διάνυσμα κατάστασης, $u \in \mathbb{R}^n$ είναι η είσοδος του συστήματος, $F: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μια απεικόνιση που περιέχει άγνωστες, συνεχείς, μη γραμμικότητες και $G: \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι πίνακας που περιέχει άγνωστες, ομαλές και μη γραμμικές συναρτήσεις, ενώ $y = q_1 \in \mathbb{R}^n$ είναι η έξοδος του συστήματος. Στην κλάση αυτή των συστημάτων περιλαμβάνονται αρκετά συστήματα όπως για παράδειγμα ένας ρομποτικός βραχίονας με n συνδέσμους.

Στόχος είναι η σχεδίαση ενός ελέγχου u που θα λύνει το πρόβλημα παρακολούθησης για τη συγκεκριμένη κατηγορία συστημάτων με χρήση ενός προσαρμοστικού μη γραμμικού ολοκληρωτικού-αναλογικού (PI) ελεγκτή.

Στην πραγματικότητα, γίνεται επέκταση της τεχνικής της χρήσης των (PI) ελεγκτών στον προσαρμοστικό έλεγχο, που προτάθηκε στο [1] και χρησιμοποιήθηκε στα [2], [3], ενώ γίνεται γενίκευση της μεθόδου για συστήματα πολλών εισόδων-πολλών εξόδων (MIMO).

1.3 Οργάνωση Τόμου

Η εργασία αυτή είναι χωρισμένη σε έξι κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί την εισαγωγή, με κάποια γενικά στοιχεία για τη θεωρία αυτόματου ελέγχου. Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνεται ένα βασικό μαθηματικό υπόβαθρο για την κατανόηση του μη-γραμμικού ελέγχου και γίνεται παρουσίαση τεχνικών σχεδίασης ελεγκτών, κατάλληλων για συστήματα σχετικά με το εξεταζόμενο, ενώ αναφέρονται και άλλες εργασίες που έχουν συνδράμει στην επέκταση των τεχνικών αυτών. Το τρίτο κεφάλαιο περιλαμβάνει την ακριβή περιγραφή του προβλήματος που επιχειρούμε να λύσουμε, καθώς και τις υποθέσεις που λαμβάνουμε υπόψιν. Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση του προτεινόμενου ελεγκτή, ενώ με τη βοήθεια ενός λήμματος και ενός θεωρήματος, γίνεται η απόδειξη της καταλληλότητας του νόμου ελέγχου για την επίλυση του περιγραφόμενου προβλήματος. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης ενός συστήματος ρομποτικού

βραχίονα, με τη χρήση του νόμου ελέγχου, με σκοπό τη διαπίστωση της λειτουργικότητας του. Τέλος, το κεφάλαιο 6 αποτελεί τον επίλογο αυτής της εργασίας, όπου συνοψίζονται κάποια συμπεράσματα, αποτιμάται η συνεισφορά της εργασίας αυτής και προτείνονται πιθανές μελλοντικές επεκτάσεις της προτεινόμενης μεθόδου.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικό Υπόβαθρο

2.1 Ορισμοί

2.1.1 Χώροι Συναρτήσεων

Στην εργασία μας, χρησιμοποιούμε τους παρακάτω χώρους συναρτήσεων:

- \mathbb{L}_∞ , που περιέχει όλες τις ομοιόμορφα φραγμένες συναρτήσεις
- \mathbb{L}_2 , που περιέχει όλες τις τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.
- \mathbb{K}_∞ , που περιέχει όλες τις γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ με $f(0) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

2.1.2 Νεκρή ζώνη (Deadzone)

Ορίζουμε τον τελεστή νεκρής ζώνης:

$$[x]_\delta := \begin{cases} x - \delta \operatorname{sgn}(x) & , |x| > \delta \\ 0 & , |x| \leq \delta \end{cases} \quad (2.1)$$

με κατώφλι $\delta > 0$. Ισχύει ότι $[x]_\delta^2 \leq x^2$, η οποία είναι μία ιδιότητα που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια στην εργασία αυτή.

2.1.3 Θεώρημα Lyapunov

Ένα από τα βασικά θεωρήματα που χρησιμοποιούνται στο μη γραμμικό έλεγχο είναι αυτό του Lyapunov . Εδώ παραθέτουμε τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζεται στο [6]:

Θεώρημα 1. Έστω το αυτόνομο σύστημα $\dot{x} = f(x)$ και το $x = 0$ ένα σημείο ισορροπίας του. Έστω επίσης ότι το $D \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο που περιέχει το $x = 0$ και ότι η $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$V(0) = 0, V(x) > 0 \text{ για } x \neq 0 \quad (2.2)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad (2.3)$$

Τότε το $x = 0$ είναι ευσταθές. Επιπλέον, εάν

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ για } x \neq 0 \quad (2.4)$$

τότε το $x = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

2.1.4 Θεώρημα Lassaie

Το παραπάνω με τη συνεισφορά του Lassaie , οδήγησε στο παρακάτω θεώρημα [5]:

Θεώρημα 2. Έστω το σύστημα $\dot{x} = f(x)$, όπου $x \in \mathbb{R}^n$ και $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο, το οποίο είναι θετικά αμετάβλητο, δηλαδή $x(0) \in \Omega \Rightarrow x(t) \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, έστω $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, μία θετικά ορισμένη συνάρτηση, τέτοια ώστε: $\dot{V}(x) \leq 0$ στο Ω . Ορίζουμε E το σύνολο όλων των σημείων στο Ω όπου $\dot{V}(x) = 0$ και M το μεγαλύτερο αμετάβλητο σύνολο στο E . Τότε κάθε λύση του συστήματος που ξεκινάει στο Ω πλησιάζει το M , καθώς το t πλησιάζει το άπειρο.

2.1.5 Λήμμα Barbalat

Ένα βασικό τμήμα της θεωρίας του μη γραμμικού ελέγχου, είναι το λήμμα Barbalat . Το παραθέτουμε από το [6]:

Λήμμα 1. Έστω $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, μία ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο $[0, \infty)$. Έστω επίσης ότι το $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

Τότε $\phi(t) \rightarrow 0$, καθώς $t \rightarrow \infty$.

Στην εργασία μας χρησιμοποιούμε μία επέκταση του παραπάνω λήμματος, που χρησιμοποιείται συχνά στο πεδίο του μη γραμμικού ελέγχου:

Λήμμα 2. Έστω μία συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $\phi(t) \in \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_\infty$ και $\dot{\phi}(t) \in \mathbb{L}_\infty$, δηλαδή ότι είναι ολοκληρώσιμη και φραγμένη και ότι η παράγωγος της είναι φραγμένη.

Τότε, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$.

Τα παραπάνω μαθηματικά εργαλεία είναι αρκετά χρήσιμα, καθώς με την επιλογή των κατάλληλων συναρτήσεων, απλοποιείται σε μεγάλο βαθμό η διαδικασία της απόδειξης της σύγκλισης μη γραμμικών συστημάτων.

2.2 SDU Διάσπαση

Πέρα από τις προαναφερθείντες μεθοδολογίες, οι οποίες είναι διαδεδομένες στη θεωρία του μη γραμμικού ελέγχου, μία τεχνική στην οποία βασίζεται η εργασία μας είναι η SDU διάσπαση ενός πίνακα G , η οποία διευκολύνει τη διαδικασία σχεδίασης νόμου ελέγχου. Σε αυτό το σημείο παρουσιάζουμε την απόδειξη της, όπως αυτή βρίσκεται στο [7].

Λήμμα 3. Κάθε $m \times m$ πραγματικός πίνακας G , με μη-μηδενικές κύριες υποορίζουσες $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$, μπορεί να παραγοντοποιηθεί μονοσήμαντα ως:

$$G = SDU \quad (2.5)$$

όπου S ένας θετικά ορισμένος πίνακας, D διαγώνιος πίνακας με στοιχεία στη διαγώνιο ± 1 και U άνω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα [8], ότι ο πίνακας G , μπορεί να παραμετροποιηθεί ως $G = L_1 D L_2$, όπου L_1, L_2 κάτω τριγωνικοί πίνακες με μονάδες στη κύρια διαγώνιο και

$$D_P = \text{diag}[\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}}] \quad (2.6)$$

Οπότε αν γράψουμε τον πίνακα D_P , ως

$$D_P = D_+ D \quad (2.7)$$

με D_+ , έναν διαγώνιο πίνακα με θετικά στοιχεία στη διαγώνιο, τότε προκύπτει το παρακάτω:

$$G = L_1 D_+ L_1^T L_1^{-T} D L_2^T \quad (2.8)$$

Εδώ, ορίζουμε τα $S = L_1 D_+ L_1^T$ και $U = D^{-1} L_1^{-T} D L_2^T$ και έτσι καταλήγουμε στην ζητούμενη μορφή. \square

Για να γίνει κατανοητός ο τρόπος διάσπασης των πινάκων, παραθέτουμε το παρακάτω παράδειγμα από το [7]:

Έστω ένας πίνακας K , που ορίζεται ως εξής:

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Αν εφαρμόσουμε την LDU παραγοντοποίηση εδώ, έχουμε

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_1 & 1 \end{pmatrix}, D_P = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

όπου έχουμε ορίσει $l_1 = k_3/\Delta_1$ και $l_2 = k_2/\Delta_1$.

Για τον πίνακα D , γνωρίζουμε ότι $D_P = D^+ D$ και έχουμε

$$D_+ = \begin{pmatrix} d_1^+ & 0 \\ 0 & d_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\Delta_1| & 0 \\ 0 & \frac{|\Delta_2|}{|\Delta_1|} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

κι έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε τον πίνακα D . Επιπλέον, από τις σχέσεις για τα S και U , προκύπτει:

$$S = \begin{pmatrix} d_1^+ & d_1^+ l_1 \\ d_1^+ l_1 & d_2^+ + d_1^+ l_1^2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

και

$$U = \begin{pmatrix} 1 & l_2 - \frac{d_1^+ l_1 \Delta_2}{d_2^+ \Delta_1^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Σε γενικότερη εφαρμογή, οι πίνακες έχουν την παρακάτω μορφή:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & w_{12} & w_{13} & \dots & w_{1n} \\ 0 & 1 & w_{23} & \dots & w_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & w_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Η συγκεκριμένη τεχνική χρησιμοποιείται για την απλούστευση της σχεδίασης στα [10], [11], πάλι για μη γραμμικά MIMO συστήματα.

2.3 HONN

Στη διπλωματική αυτή εργασία, χρησιμοποιούμε μία κλάση νευρωνικών δικτύων τα HONN (high-order neural networks). Συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε τη δυνατότητα που μας προσφέρουν στην προσέγγιση μιας μη γραμμικής συνάρτησης, κάτι το οποίο είναι αρκετά χρήσιμο στον έλεγχο συστημάτων με άγνωστες παραμέτρους.

Πιο συγκεκριμένα, η προσέγγιση με τη χρήση HONN περιγράφεται από μία μη γραμμική εξίσωση της παρακάτω μορφής [12]:

$$y_i = \sum_{k=1}^L w_{ik} (-1)^{d_0(k)} \prod_{j \in I_k} S(x_j)^{d_j(k)} \quad (2.16)$$

όπου x, y είναι τα διανύσματα εισόδου και εξόδου αντίστοιχα, w_{ik} είναι τα βάρη του HONN, $\{I_1, \dots, I_L\}$ είναι τα μη ταξινομημένα υποσύνολα του $\{1, \dots, n\}$ και $d_j(k)$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Η συνάρτηση $S(\cdot)$ είναι σιγμοειδής. Εάν ορίσουμε

$$\begin{aligned} \zeta_k(x) &= (-1)^{d_0(k)} \prod_{j \in I_k} S(x_j)^{d_j(k)} \\ \zeta(x) &= [\zeta_1(x), \dots, \zeta_L(x)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

και W τον $m \times L$ πίνακα του οποίου το (i, k) στοιχείο είναι το w_{ik} , τότε η συνάρτηση εισόδου-εξόδου του HONN μπορεί να γραφεί ως

$$y = W\zeta(x) \quad (2.18)$$

Για την ικανότητα προσέγγισης μη γραμμικών συναρτήσεων με HONN ισχύει η παρακάτω πρόταση [13]:

Πρόταση 1. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και για κάθε συμπαγές υποσύνολο X του \mathbb{R}^n , και για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ένας αριθμός όρων υψηλής τάξης L και ένα διάνυσμα W^* , τέτοιο ώστε για το $\mu \in L$ όρους υψηλής τάξης και $W = W^*$, ισχύει το εξής:

$$\sup_{x \in X} |f(x) - W^*\zeta(x)| < \epsilon \quad (2.19)$$

Το παραπάνω πρακτικά σημαίνει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί σε οποιονδήποτε επιθυμητό βαθμό από ένα . Το σφάλμα προσέγγισης, μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό με την κατάλληλη επιλογή L και $\{I_1, \dots, I_L\}$. Στην πράξη όσο μεγαλύτερο είναι το L , τόσο μικρότερο μπορεί να γίνει το σφάλμα.

2.4 Nussbaum Gains

Στο κομμάτι του προσαρμοστικού ελέγχου, μία αρκετά διαδεδομένη μέθοδος για την αντιμετώπιση του προβλήματος που δημιουργείται από την άγνωστη κατεύθυνση ελέγχου, είναι αυτή που προτάθηκε από τον R. Nussbaum, στην εργασία του [14].

2.4.1 Περιγραφή Προβλήματος

Η εργασία αυτή καταπιάνεται κυρίως με τη λύση του προβλήματος των αγνώστων κατευθύνσεων ελέγχου.

Στην πιο απλή μορφή του προβλήματος υποθέτουμε το γραμμικό σύστημα 1ης τάξης της μορφής:

$$\dot{x}(t) = x(t) + \lambda u \quad (2.20)$$

όπου x η κατάσταση του συστήματος, u η είσοδος και λ μια άγνωστη παράμετρος

με άγνωστο πρόσημο (κατεύθυνση ελέγχου).

Η δυσκολία με την ανάλυση και τον έλεγχο συστημάτων της παραπάνω μορφής έγκειται ακριβώς στον άγνωστο όρο λ . Αυτό συμβαίνει διότι είναι αδύνατον να γνωρίζουμε απο πριν τον τρόπο με τον οποίο θα επηρεάσει ο εφαρμοζόμενος έλεγχος το σύστημα.

Η αρχή για το συγκεκριμένο ζήτημα έγινε με το ερώτημα που τέθηκε από τον A.S. Morse για τον αν μπορεί να βρεθεί δυναμικός ελεγκτής που να οδηγεί το x στο μηδέν ανεξάρτητα από το πρόσημο του λ . Συγκεκριμένα:

Υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, με την ιδιότητα ότι για κάθε μη μηδενικό, πραγματικό αριθμό λ και κάθε ζεύγος αρχικών τιμών $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, η λύση $(x(t), y(t))$ του συστήματος:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t) + \lambda f(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= g(x(t), y(t)) \\ x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0\end{aligned}\tag{2.21}$$

να ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ και να ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ και το $y(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο στο $[0, \infty)$;

Η ισοδυναμία φαίνεται από το γεγονός ότι αν στην (2.20) επιλέξουμε ως είσοδο του συστήματος την έξοδο ενός δυναμικού ελεγκτή της μορφής:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= g(x(t), y(t)) \\ u &= f(x(t), y(t))\end{aligned}$$

τότε προκύπτουν οι (2.21).

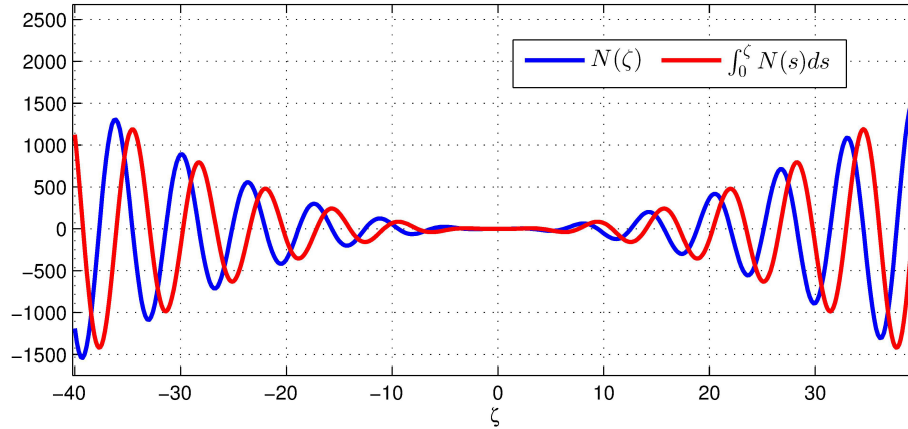
2.4.2 Μέθοδος Nussbaum

Ο R. Nussbaum επιλύει το πρόβλημα, επιλέγοντας συναρτήσεις με ιδιότητες:

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \int_{y_0}^y h(s) ds = +\infty\tag{2.22}$$

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \int_{y_0}^y h(s) ds = -\infty\tag{2.23}$$

Αυτές οι συναρτήσεις έχουν συνήθως τη μορφή $h(y) = k(y) \cos(y)$, με $k \in \mathbb{K}_\infty$.



Σχήμα 2.1: Συνάρτηση Nussbaum $N(\zeta) = \zeta^2 \sin(\zeta)$ και το $\int_0^\zeta N(s) ds$

Η λύση που πρότεινε ο R. Nussbaum, θεωρητικά λύνει το πρόβλημα των άγνωστων κατευθύνσεων ελέγχου. Παρόλα αυτά δημιουργείται ένα δομικό πρόβλημα, το οποίο αφορά τα κέρδη που εισάγονται. Ακριβώς επειδή οι συναρτήσεις k που χρησιμοποιούνται δεν είναι φραγμένες, τα κέρδη που παράγονται μπορούν να γίνουν αρκετά μεγάλα. Έτσι, αν και προκύπτουν και επιθυμητές ιδιότητες για το σύστημα, οι αρνητικές επιδράσεις καθιστούν αρκετά δύσκολη έως αδύνατη την υλοποίηση σε πραγματικές εφαρμογές. Δηλαδή, η λύση αν και ανταποκρίνεται στο μαθηματικό πλαίσιο, δεν μπορεί να εφαρμοστεί καθολικά στην πράξη.

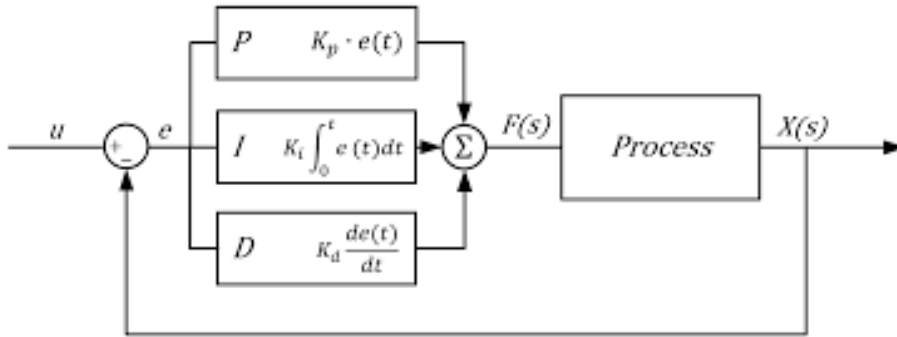
Αυτό το μειονέκτημα της μεθόδου του Nussbaum έγινε γρήγορα αντιληπτό και έχουν γίνει προσπάθειες αντιμετώπισής του. Μία προταθείσα μέθοδος είναι η σχεδίαση με χρήση χωρικά φραγμένων συναρτήσεων Lyapunov (barrier Lyapunov functions, BLFs) που επιτρέπει τον περιορισμό της εξέλιξης της εξόδου και της εισόδου του συστήματος μέσα σε ένα συμπαγές σύνολο. Η τεχνική αυτή προτάθηκε από τον Χ.Ψυλλάκη στην εργασία [16], ενώ χρησιμοποιείται και στο [15].

Επιπροσθέτως, τα σχήματα ελέγχου με κέρδη Nussbaum έχουν προβλήματα σθεναρότητας όπως απεδείχθη στο [1].

2.5 Μη γραμμικός ΠΙ έλεγχος

Μία διαφορετική μεθοδολογία για την εφαρμογή προσαρμοστικού ελέγχου σε μη γραμμικά συστήματα, από αυτήν που παρουσιάστηκε παραπάνω, είναι η εφαρμογή μη γραμμικών ΠΙ ελεγκτών [5]. Αυτή η τεχνική παρουσιάζεται περιληπτικά στη συνέχεια.

Γενικά, οι ΠΙ ελεγκτές αποτελούν μία αρκετά διαδεδομένη και αποτελεσματική τεχνική ελέγχου, καθώς επιτρέπουν τη ρύθμιση συστημάτων, με τη χρήση λίγων παραμέτρων, χωρίς να είναι απαραίτητη η πλήρης γνώση της δυναμικής τους. Βασική τους αδυναμία βέβαια, είναι ότι η αποτελεσματικότητά τους αφορά κυρίως τα γραμμικά συστήματα. Επομένως, χρειάζονται αρκετές αλλαγές στη δομή τους, ώστε να αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο στο μη γραμμικό έλεγχο.



Σχήμα 2.2: Κλασική μορφή PID ελεγκτή

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζεται ο ορισμός των μη γραμμικών ΠΙ ελεγκτών, όπως περιγράφεται στο [5]:

Δεδομένου ενός συνόλου μετρήσιμων σημάτων $y \in \mathbb{R}^n$, τροχιών αναφοράς $y^* = y^*(t) \in \mathbb{R}^n$ και βαθμωτής μεταβλητής $u \in \mathbb{R}$, ορίζουμε τρεις απεικονίσεις $\beta_P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$, $w_I : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$, $v : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Η τρίπλετα $[\beta_P, w_I, \beta_I]$, ορίζει ένα μη γραμμικό ΠΙ ελεγκτή, μέσω του δυναμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_I &= w_I(y, y^*, \beta_I) \\ u &= v(\beta_P(y, y^*) + \beta_I, y, y^*) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Εάν θέσουμε $n = q = 1$ και διαλέξουμε τις γραμμικές συναρτήσεις:

$$\begin{aligned}\beta_P(y, y^*) &= k_P(y - y^*) \\ w_I(y, y^*) &= k_I(y - y^*) \\ u &= -\beta_P(y, y^*) - \beta_I\end{aligned}\quad (2.25)$$

προκύπτει ο κλασικός ορισμός του PI ελεγκτή για συστήματα μίας εισόδου, μίας εξόδου, με k_P το αναλογικό κέρδος και k_I το ολοκληρωτικό.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό προτείνεται μία διαφορετική μεθοδολογία για τον προσαρμοστικό έλεγχο, όπου δεν χρησιμοποιείται η παραμετρική μορφή. Η βασική ιδέα είναι η δημιουργία μίας εξίσωσης σφαλμάτων με έναν όρο διαταραχής, ο οποίος γίνεται μηδενικός. Συγκεκριμένα, επιλέγεται η συνάρτηση της διαταραχής, ώστε να έχει μία ρίζα τουλάχιστον και σε αυτήν οδηγούνται οι τροχιές του συστήματος. Για την κατανόηση της μεθόδου, παρουσιάζεται και το εξής παράδειγμα από το [5]:

Έστω το βαθμωτό σύστημα:

$$\dot{y} = \phi(y) + u \quad (2.26)$$

με ϕ , μία άγνωστη συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε να ισχύει: $\phi_m < \phi(y) < \phi_M$, για σταθερές $\phi_m < \phi_M$. Αρχικά, επιλέγουμε το $\lambda > 0$, ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου $\dot{y} = -\lambda y$, που θέλουμε να κατασκευάσουμε, να έχει την επιθυμητή συμπεριφορά. Στη συνέχεια, ορίζουμε: $z = \beta_P(y) + \beta_I$ και έτσι προκύπτει το παρακάτω σύστημα:

$$\dot{y} = -\lambda y + [\phi(y) + v(z, y) + \lambda y] \quad (2.27)$$

Σε αυτό το σημείο λοιπόν, σκοπός μας είναι να οδηγηθεί το τμήμα $\phi(y) + v(z, y) + \lambda y$ ασυμπτωτικά στο μηδέν. Έτσι καταλήγουμε στο πρόβλημα αναζήτησης ρίζας, στην επιλογή της κατάλληλης τριάδας $[\beta_P, w_I, \beta_I]$. Πρέπει δηλαδή να γίνει τέτοια επιλογή, ώστε για κάθε y , να υπάρχει ένα \tilde{z}_y που να λύνει την αλγεβρική εξίσωση $\phi(y) + v(z, y) + \lambda y = 0$ και το z να συγκλίνει ασυμπτωτικά στο \tilde{z}_y .

Στη συνέχεια, αναλύοντας τη δυναμική του z , προκύπτει:

$$\dot{z} = w_I(y, \beta_I) + \frac{\partial \beta_P}{\partial y} [\phi(y) + v(z, y)] \quad (2.28)$$

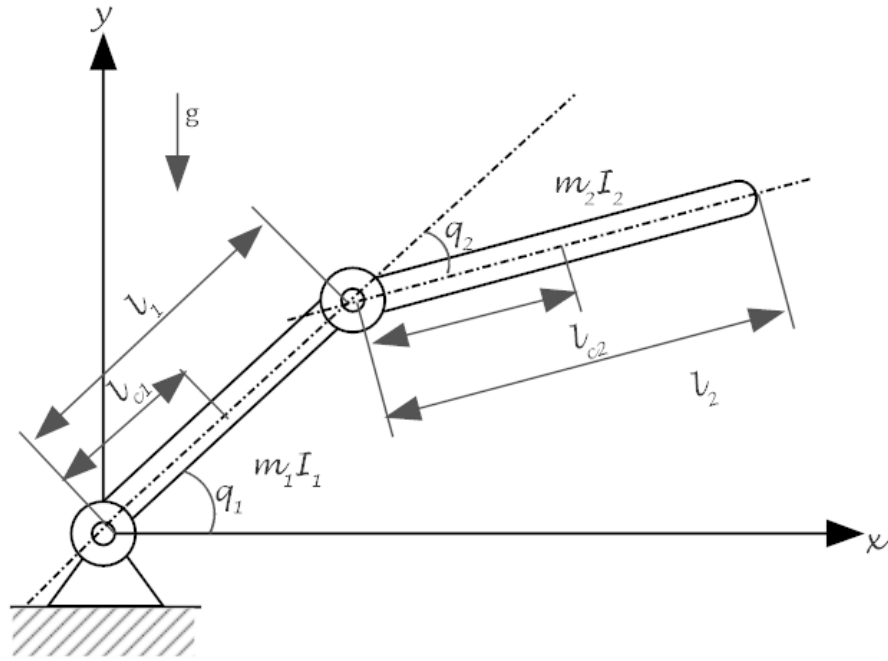
Από την παραπάνω εξίσωση, μπορούμε να προσδιορίσουμε τον ολοκληρωτικό όρο $w_I = \frac{\partial \beta_P}{\partial y} \lambda y$. Πλέον, η ρίζα \tilde{z}_y είναι σημείο ισορροπίας της δυναμικής του z .

Άρα, τώρα πρέπει να επιλέξουμε τις κατάλληλες συναρτήσεις β_P, β_I , ώστε το επιλεγμένο σημείο ισορροπίας να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και οι τροχιές του z να καταλήγουν σε αυτό. Αυτό γίνεται με την επιλογή μίας κατάλληλης συνάρτησης Lyapunov και με αυτόν τον τρόπο, τελικά ο μη γραμμικός ελεγκτής PI προσδιορίζεται πλήρως.

Με βάση την παραπάνω μεθοδολογία και στα πλαίσια του backstepping στα [2], [17], [18] προτείνεται μία τεχνική σχεδίασης μη γραμμικών PI ελεγκτών, η οποία επιτυγχάνει ασυμπτωτική σταθεροποίηση χρονικά μεταβαλλόμενων συστημάτων υπό μορφή αυστηρής ανάδρασης και άγνωστες τις κατευθύνσεις ελέγχου. Την επέκταση αυτής της τεχνικής σε MIMO συστήματα, επιχειρούμε σε αυτή την εργασία.

2.6 Μοντελοποίηση Ρομποτικού Βραχίονα

Μία από τις πολύ διαδεδομένες εφαρμογές του μη γραμμικού ελέγχου, είναι αυτή που αφορά τον έλεγχο ρομποτικών βραχιόνων. Η δυναμική ενός ρομποτικού βραχίονα με n συνδέσμους είναι της μορφής (1.4).



Σχήμα 2.3: Παράδειγμα ρομποτικού βραχίονα με δύο βαθμούς ελευθερίας

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας κάποια από τις μεθόδους υπολογισμού της δυναμικής του ρομποτικού βραχίονα όπως είναι η μέθοδος Lagrange, η Newton-Euler και αφηρώντας τις εξωτερικές δυνάμεις και τη στατική τριβή, καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση [9]:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_u\dot{q} + g(q) = \tau \quad (2.29)$$

με τ την ασκούμενη ροπή στις αρθρώσεις.

Εάν έχουμε μία τροχιά αναφοράς q_d , το ζητούμενο είναι να καθορίσουμε τις ροπές που συμβολίζονται ως τ , ώστε $q(t) \rightarrow q_d(t)$.

Ορίζουμε τις μεταβλητές κατάστασης:

$$x_1 = q \quad (2.30)$$

$$x_2 = \dot{q} \quad (2.31)$$

Έτσι, από την εξίσωση (2.29) προκύπτει:

$$\ddot{q} = B(q)^{-1}(-C(q, \dot{q})\dot{q} - F_u\dot{q} - g(q) + \tau) \quad (2.32)$$

ή ισοδύναμα

$$\dot{x}_2 = B(x_1)^{-1}(-C(x_1, x_2)x_2 - F_u x_1 - g(x_1)) + B(x_1)^{-1}\tau \quad (2.33)$$

Θεωρούμε λοιπόν ως είσοδο του συστήματος, το συνολικό διάνυσμα των ροπών τ κι έτσι καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων κατάστασης:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.34)$$

$$\dot{x}_2 = F(x_1, x_2) + G(x_1)u \quad (2.35)$$

με $F(x_1, x_2) := B(x_1)^{-1}(-C(x_1, x_2)x_2 - F_u x_1 - g(x_1))$, $G(x_1) := B(x_1)^{-1}$ το οποίο βρίσκεται στη μορφή την οποία μελετάμε στην παρούσα εργασία, δηλαδή στην εξίσωση (1.4).

2.6.1 Uncalibrated Visual Servoing

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζεται το πρόβλημα του Uncalibrated Visual Servoing, όπως αυτό αναφέρεται στο [22].

Συγκεκριμένα, μελετάμε ένα σύστημα το οποίο περιλαμβάνει ένα ρομποτικό βραχίονα με δύο βαθμούς ελευθερίας, ο οποίος κινείται στο επίπεδο και ένα σύστημα όρασης αποτελούμενο από μία CCD σταθερή κάμερα, το οποίο αποτυπώνει όλο το επίπεδο κίνησης του ρομπότ. Θεωρούμε ότι η μοντελοποίηση της λειτουργίας της κάμερας είναι μία απεικόνιση από το χώρο των αρθρώσεων του ρομπότ $q \in \mathbb{R}^2$, στη θέση του εργαλείου εφαρμογής στην εικόνα που παράγεται, $y \in \mathbb{R}^2$:

$$y = \alpha e^{J\theta}[k(q) - \theta_1] + \theta_2 c \quad (2.36)$$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$ είναι ο προσανατολισμός της κάμερας σε σχέση με το ρομπότ, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ και $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^2$ είναι η κλίμακα, το εστιακό βάθος και η μετατόπιση του κέντρου αντίστοιχα. Το διανυσματικό πεδίο $k: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ορίζει την κινηματική του ρομπότ.

Επίσης, έχουμε ότι:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e^{J\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Γενικότερα, ισχύει ότι $\dot{k} = \mathcal{J}(q)\dot{q}$, όπου $\mathcal{J}(q)$ η Ιακωβιανή μήτρα. Αν υποθέσουμε την ύπαρξη ενός εσωτερικού βρόχου με γρήγορη σύγκλιση (inner fast loop) για τον έλεγχο ταχύτητας μπορούμε να επικεντρωθούμε στο κινηματικό πρόβλημα εύρεσης των τροχιών αναφοράς για τις ταχύτητες. Με αυτές τις παραδοχές για τη λειτουργία του ρομπότ, μπορούμε να γράψουμε $\dot{q} = \tau$ [22]. Επομένως, παραγωγίζοντας την (2.36), προκύπτει:

$$\dot{y} = \alpha e^{J\theta} u \quad (2.38)$$

με $u = \mathcal{J}(q)\tau$ την είσοδο του συστήματος.

Σαν εφαρμογή του αλγοριθμού ελέγχου που προτείνεται στη παρούσα διπλωματική θα μελετηθεί το παρακάτω πρόβλημα όπως παρουσιάζεται στο [22].

Δοθέντος του συστήματος όρασης (2.38), με μετρήσιμο y και φραγμένη επιθυμητή τροχιά y_d , η οποία έχει γνωστές και φραγμένες παραγώγους πρώτης και δεύτερας τάξης, \dot{y}_d και \ddot{y}_d αντίστοιχα, να βρεθεί ένας νόμος ελέγχου u , τέτοιο ώστε το y να ακολουθεί την επιθυμητή τροχιά όσο το δυνατόν καλύτερα, παρά το γεγονός ότι τα θ και α είναι άγνωστα, δηλαδή ο προσανατολισμός της κάμερας και η απόσταση από το επίπεδο κίνησης είναι άγνωστα.

Κεφάλαιο 3

Διατύπωση Προβλήματος

Έστω μη-γραμμικό σύστημα σε κανονική μορφή, το οποίο περιγράφεται από τις κάτωθι εξισώσεις (1.4):

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= q_{i+1} \\ \dot{q}_m &= F(q_1, \dots, q_m) + G(q_1, \dots, q_m)u,\end{aligned}$$

όπου $q = [q_1^T, \dots, q_m^T]^T \in \mathbb{R}^{nm}$ είναι το διάνυσμα κατάστασης, $u \in \mathbb{R}^n$ είναι η είσοδος του συστήματος, $F : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μια απεικόνιση που περιέχει άγνωστες, συνεχείς, μη γραμμικότητες και $G : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι πίνακας που περιέχει άγνωστες, ομαλές και μη γραμμικές συναρτήσεις, ενώ $y = q_1 \in \mathbb{R}^n$ είναι η έξοδος του συστήματος.

Υπόθεση 1. Οι συναρτήσεις $f_i(x)$, που περιλαμβάνονται στο διάνυσμα F , είναι συνεχείς, ενώ οι συναρτήσεις $g_{ij}(x)$, που περιλαμβάνονται στον G , είναι συνεχείς και κλάσης C^1 .

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι η σχεδίαση ενός νόμου ελέγχου, τέτοιου ώστε, η έξοδος του συστήματος να ακολουθεί την επιθυμητή τροχιά, $y_d = [y_{d1}, \dots, y_{dn}]^T$, ενώ ταυτόχρονα όλα τα σήματα κλειστού βρόχου, να παραμένουν φραγμένα.

Με την υπόθεση ότι η επιθυμητή τροχιά είναι φραγμένη, διαθέσιμη για μέτρηση και $y_d \in C^m$, ορίζουμε τα σφάλματα παρακολούθησης, ως εξής:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &:= q_1 - y_d \\ \epsilon_i &:= q_i - y_d^{(i-1)}, \quad (2 \leq i \leq m).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Για τη δυναμική των σφαλμάτων έχουμε από τις (1.4), (3.1) ότι:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_1 &= \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 &= \epsilon_3 \\ &\vdots \\ \dot{\epsilon}_m &= F + Gu - y_d^{(m-1)}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε και το φιλτραρισμένο σφάλμα παρακολούθησης, ως εξής:

$$s := \lambda_1 \epsilon_1 + \lambda_2 \epsilon_2 + \dots + \lambda_{m-1} \epsilon_{m-1} + \epsilon_m\tag{3.3}$$

με $s \in \mathbb{R}^n$.

Αν ορίσουμε τους παρακάτω πίνακες:

$$\bar{\epsilon} := \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_{m-1} \end{pmatrix}\tag{3.4}$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_{n \times n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_{n \times n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbb{I}_{n \times n} \\ -\lambda_1 \mathbb{I}_{n \times n} & -\lambda_2 \mathbb{I}_{n \times n} & -\lambda_3 \mathbb{I}_{n \times n} & \cdots & -\lambda_{m-1} \mathbb{I}_{n \times m} \end{pmatrix}\tag{3.5}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbb{I}_{n \times n} \end{pmatrix}\tag{3.6}$$

καταλήγουμε στην παρακάτω μορφή για το μειωμένης τάξης σύστημα με διάνυσμα

κατάστασης \bar{e} και είσοδο s :

$$\dot{\bar{e}} = A\bar{e} + Bs. \quad (3.7)$$

Αυτό το σύστημα βρίσκεται σε κανονική ελέγξιμη μορφή, και εφόσον το πολυώνυμο $p^m + \lambda_{m-1}p^{m-1} + \dots + \lambda_1 = 0$ είναι *Hurwitz*, τότε η σύγκλιση του συστήματος εξαρτάται από τον έλεγχο της μεταβλητής s . Σε αυτό το σημείο λοιπόν το πρόβλημα της σύγκλισης του αρχικού συστήματος σφαλμάτων έχει μετασχηματιστεί στο πρόβλημα ρύθμισης της μεταβλητής s στο μηδέν.

Παραγωγίζοντας την (3.3) και με βάση την (3.2) παίρνουμε:

$$\dot{s} = F + Gu + \lambda_1\epsilon_2 + \lambda_2\epsilon_3 + \dots + \lambda_{m-1}\epsilon_m - y_d^{(m)} \quad (3.8)$$

Αν ορίσουμε τα

$$E := \begin{pmatrix} \epsilon_{21} & \epsilon_{31} & \dots & \epsilon_{m1} \\ \epsilon_{22} & \epsilon_{32} & \dots & \epsilon_{m2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \epsilon_{2n} & \epsilon_{3n} & \dots & \epsilon_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \lambda_{m-1} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

με $E = (\epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_m) \in \mathbb{R}^{n \times (m-1)}$ και $\Lambda \in \mathbb{R}^{m-1}$, μπορούμε να γράψουμε την (3.8) ως εξής:

$$\dot{s} = F + Gu + E\Lambda - y_d^{(m)} \quad (3.11)$$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι, εξαιτίας των άγνωστων, μη γραμμικών στοιχείων του πίνακα G , η σχεδίαση ενός νόμου ελέγχου με κάποια από τις κλασικές μεθοδολογίες του μη γραμμικού ελέγχου γίνεται αρκετά δύσκολη.

Επομένως, εφαρμόζουμε στην (3.11) τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε στην παράγραφο 2.2, ώστε να μπορέσουμε να υλοποιήσουμε τον ελεγκτή.

Έτσι το σύστημα αποκτά την εξής μορφή:

$$\dot{s} = F + SDUu + \Lambda E - y_d^{(m)} \quad (3.12)$$

Υπόθεση 2.

- (i) Ο πίνακας G δεν έχει μηδενική κύρια ορίζουσα (*nonsingular*)
- (ii) Οι $S(x)$ και $(d/dt)S(x)$ είναι συνεχείς
- (iii) $\frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial q_{ml}} = 0, \forall i, j = 1, 2, \dots, m$ και $l = 1, 2, \dots, n$
- (iv) Υπάρχουν σταθερές $\lambda_M \geq \lambda_m > 0$ τέτοιες ώστε $\lambda_m \leq \lambda_{\min}(S^{-1}) \leq \lambda_{\max}(S^{-1}) \leq \lambda_M$.

Παρατήρηση 1. Η δεύτερη υπόθεση επιτρέπει την προσέγγιση των άγνωστων μη-γραμμικοτήτων από ένα νευρωνικό δίκτυο. Η τρίτη υπόθεση αποκλείει την εξάρτηση του dG/dt και άρα και του πίνακα dS/dt από την είσοδο του συστήματος. Η υπόθεση αυτή ισχύει για ένα μεγάλο πλήθος συστημάτων (ρομποτικοί βραχίονες, ηλεκτρομηχανικά συστήματα).

Κεφάλαιο 4

Θεωρητικά Αποτελέσματα

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζεται το κύριο λήμμα που χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε ότι με τον προτεινόμενο νόμο ελέγχου επιλύεται επιτυχώς το πρόβλημα παρακολούθησης.

4.1 Βασικό Λήμμα

Λήμμα 4. Έστω οι συνεχείς, διαφορίσιμες και μη-αρνητικές συναρτήσεις $V, P : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}_+$, για τις οποίες ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

•

$$a_0 + a_1 P(t) \leq V(t) \leq b_0 + b_1 P(t) \quad (4.1)$$

με $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, $a_1, b_1 > 0$

•

$$\dot{V}(t) \leq \rho e^{-\lambda t} \text{ όταν } \tilde{\phi}[P(t)] \in [k\delta + \varrho_1, k\delta + \varrho_2] \quad (4.2)$$

για κάθε $k \geq k_0 \in \mathbb{N}$ με $\rho, \lambda, \delta > 0$ και $\varrho_2 > \varrho_1 > 0$.

Για τις συναρτήσεις $\tilde{\phi}$, ισχύει ότι $\tilde{\phi} \in \tilde{A}$, με \tilde{A} , ένα χώρο ο οποίος περιλαμβάνει γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $\tilde{\phi} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, με την ιδιότητα:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\tilde{\phi}^{-1}(x + \epsilon) - \nu \tilde{\phi}^{-1}(x)] = +\infty \quad (4.3)$$

για κάθε $\epsilon, \nu > 0$.

Τότε οι P, V είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο $[0, t_f)$.

Παρατήρηση 2. Υπάρχουν πολλές συνάρτησεις που ανήκουν στη κλάση \tilde{A} όπως για παράδειγμα η $\tilde{\phi}(x) = \sqrt{\ln(1+x)}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με χρήση της εις άτοπο απαγωγής. Έστω ότι η P δεν έχει άνω φράγμα στο \mathbb{R} στο χρονικό διάστημα $[0, t_f)$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες χρονικών στιγμών $\{t_{1k}\}_{k=1}^{\infty}, \{t_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, τέτοιες ώστε:

$$t_{2k} := \inf\{t \in [0, t_f) \mid \tilde{\phi}(P(t)) = k\delta + \varrho_2\} \quad (4.4)$$

$$t_{1k} := \sup\{t < t_{2k} \mid \tilde{\phi}(P(t)) = k\delta + \varrho_1\}. \quad (4.5)$$

Από την (4.1), προκύπτει ότι:

$$a_0 + a_1 P(t_{1k}) \leq V(t_{1k}) \leq b_0 + b_1 P(t_{1k}) \quad (4.6)$$

$$a_0 + a_1 P(t_{2k}) \leq V(t_{2k}) \leq b_0 + b_1 P(t_{2k}) \quad (4.7)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (4.6), (4.7), έχουμε ότι:

$$a_1 P(t_{2k}) - b_1 P(t_{1k}) + a_0 - b_0 \leq \Delta V_k \leq b_1 P(t_{2k}) - a_1 P(t_{1k}) + b_0 - a_0 \quad (4.8)$$

με $\Delta V_k := V(t_{2k}) - V(t_{1k})$. Από τις (4.4), (4.5), γνωρίζουμε ότι:

$$P(t_{1k}) = \tilde{\phi}^{-1}(k\delta + \varrho_1) \quad (4.9)$$

$$P(t_{2k}) = \tilde{\phi}^{-1}(k\delta + \varrho_2) \quad (4.10)$$

Παίρνοντας το όριο για $k \rightarrow \infty$ θα ισχύει:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_1 P(t_{2k}) - b_1 P(t_{1k})) = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_1 \tilde{\phi}^{-1}(k\delta + \varrho_2) - b_1 \tilde{\phi}^{-1}(k\delta + \varrho_1)) \quad (4.11)$$

και από την (4.3) έχουμε:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_1 P(t_{2k}) - b_1 P(t_{1k})) = +\infty \quad (4.12)$$

Κατά συνέπεια, από τις (4.8), (4.12) προκύπτει ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta V_k = +\infty$. Όμως από τις προϋποθέσεις του λήμματος, γνωρίζουμε ότι

$$\dot{V}(t) \leq \rho e^{-\lambda t}, \quad \forall t \in [t_{1k}, t_{2k}], k \geq k_0 \quad (4.13)$$

Έτσι εάν ολοκληρώσουμε αυτή τη σχέση στο $[t_{1k}, t_{2k}]$ προκύπτει:

$$\Delta V_k \leq \frac{\rho}{\lambda}, \quad \forall k \geq k_0 \quad (4.14)$$

Δηλαδή το ΔV_k είναι μικρότερο από μία σταθερά για όλα τα $k \geq k_0$. Καταλήγουμε με αυτόν τον τρόπο σε άτοπο, καθώς το παραπάνω έρχεται σε αντίθεση με τα όσα αποδείχτηκαν πριν. Επομένως, η ποσότητα P δεν γίνεται να αυξάνεται συνεχώς και άρα πρέπει να έχει κάποιο άνω φράγμα. Επειδή ταυτόχρονα είναι και μη-αρνητική, σημαίνει ότι είναι συνολικά φραγμένη. Επιπλέον, από τη σχέση (4.1), προκύπτει ότι και η ποσότητα V είναι φραγμένη. \square

4.2 Σχεδίαση Ελεγκτή

Για τον έλεγχο του συστήματος πολλών εισόδων πολλών εξόδων της μορφής (1.4) σχεδιάζουμε έναν μη γραμμικό PI νόμο ελέγχου. Ορίζουμε τον PI όρο:

$$P(t) = \frac{1}{2} s^T s + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\gamma_i} \beta_i^2 + \lambda \int_0^t \|s(\tau)\|_{\delta}^2 d\tau \quad (4.15)$$

Επιπλέον ορίζουμε την παρακάτω συνάρτηση, η οποία θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη της σύγκλισης:

$$V(t) = \frac{1}{2} s^T S^{-1} s + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\gamma_i} \tilde{\beta}_i^2 + \lambda \int_0^t \|s(\tau)\|_{\delta}^2 d\tau \quad (4.16)$$

Παραγωγίζοντας τη (4.16), προκύπτει το παρακάτω:

$$\dot{V} = s^T S^{-1} \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \frac{d}{dt} (S^{-1}) s + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\beta}_i \dot{\beta}_i + \lambda \|s\|_{\delta}^2 \quad (4.17)$$

Σε αυτό το σημείο αντικαθιστούμε στην (4.17), την (3.12):

$$\dot{V} = s^T S^{-1} \left(F + SDUu + E\Lambda - y_d^{(m)} \right) + \frac{1}{2} s^T \frac{d}{dt} (S^{-1})s + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\beta}_i \dot{\beta}_i + \lambda \|s\|_\delta^2 \quad (4.18)$$

κι έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & s^T DUu + s^T S^{-1} \left(F + E\Lambda - y_d^{(m)} \right) \\ & + \frac{1}{2} s^T \frac{d}{dt} (S^{-1})s + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\beta}_i \dot{\beta}_i + \lambda \|s\|_\delta^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ταυτόχρονα, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$s^T DUu = s^T Du - s^T D(I - U)u \quad (4.20)$$

Και έτσι να φτάσουμε στη μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & s^T Du + s^T S^{-1} \left(F + E\Lambda - y_d^{(m)} \right) \\ & - s^T D(I - U)u - \frac{1}{2} s^T S^{-1} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_{ij}} q_{i+1,j} S^{-1} s \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\beta}_i \dot{\beta}_i + \lambda \|s\|_\delta^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Σε αυτό το σημείο ορίζουμε τη συνάρτηση προσέγγισης για τις άγνωστες μη γραμμικότητες του συστήματος, σε κάποιο συμπαγές σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, όπως δείξαμε στο 2.3

$$F_A(x) = S^{-1} \left(F + E\Lambda - y_d^{(m)} \right) - \frac{1}{2} S^{-1} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_{ij}} q_{i+1,j} S^{-1} s - D(I - U)u \quad (4.22)$$

$$= \theta^{*T} \Phi(x) + \epsilon(x) \quad (4.23)$$

όπου $\theta^* \in \mathbb{R}^l$ το βέλτιστο βάρος εκτίμησης, $\Phi(x) \in \mathbb{R}^l$ το διάνυσμα βάσης του νευρωνικού δικτύου, $\epsilon(x)$ το σφάλμα εκτίμησης και l ο αριθμός των νευρώνων του κρυφού επιπέδου. Για το σφάλμα γνωρίζουμε ότι είναι φραγμένο στο Ω , δηλαδή υπάρχει ένα $\epsilon_M > 0$ τέτοιο ώστε $|\epsilon(x)| < |\epsilon_M|, \forall x \in \Omega$.

Επιπλέον, γράφουμε ότι:

$$F_A(x) = \begin{pmatrix} f_{A1}(x_1) \\ f_{A2}(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{An}(x_n) \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Ενώ, τα διανύσματα βάσης x , ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} x_1^T &= [q_1^T, \dots, q_m^T, s^T, u_2, u_3, \dots, u_n] \\ x_2^T &= [q_1^T, \dots, q_m^T, u_3, \dots, u_n] \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} x_{n-1}^T &= [q_1^T, \dots, q_m^T, s^T, u_n] \\ x_n^T &= [q_1^T, \dots, q_m^T, s^T] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Φαίνεται λοιπόν από τις παραπάνω σχέσεις, ότι κάθε f_{Ai} εξαρτάται μόνο από τις επόμενες εισόδους, u_{i+1}, \dots, u_n . Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική για τη σχεδίαση όπως θα δούμε στη συνέχεια γιατί μας επιτρέπει να αποφύγουμε την ύπαρξη αλγεβρικού βρόχου στη υλοποίηση του νόμου ελέγχου.

Επιπλέον, εισάγουμε μία εκτίμηση β_i της νόρμας του βέλτιστου βάρους $\|\theta_i^*\|$, ενώ επιλέγουμε για νόμο εκτίμησης:

$$\dot{\beta}_i = |s_i| \gamma_i (\|\Phi_i(x_i)\| - \sigma_i \beta_i) \quad (4.27)$$

με σ_i ένα θετικό αριθμό μικρότερο της μονάδας.

Εφόσον η $\|\Phi_i(x_i)\|$ είναι μια ομοιόμορφα φραγμένη συνάρτηση, υπάρχει δηλαδή $\varphi_m > 0$ τέτοιο ώστε $\|\Phi_i(x)\| \leq \varphi_m$, το β_i θα είναι επίσης φραγμένο από το $\beta_{im} := \varphi_{im}/\sigma_i$. Η ιδιότητα αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι

$$\dot{\beta}_i = |s_i| \gamma_i (\|\Phi_i(x_i)\| - \sigma_i \beta_i) \leq 0 \quad , \quad \forall \beta_i > \varphi_{im}/\sigma_i \quad (4.28)$$

Επομένως τα β_i που ορίσαμε είναι φραγμένα.

Ταυτόχρονα ορίζουμε και το σφάλμα εκτίμησης της νόρμας του βέλτιστου βάρους,

ως:

$$\tilde{\beta}_i = \beta_i - \|\theta_i^*\| \quad (4.29)$$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει η εξής μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^n [(\theta_i^* \Phi_i(x_i) + \epsilon_i) s_i + \lambda |s_i|_\delta^2 + d_i u_i s_i] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |s_i| (\beta_i - \|\theta_i^*\|) (\|\Phi_i(x_i)\| - \sigma_i \beta_i) \end{aligned} \quad (4.30)$$

και καταλήγουμε στην παρακάτω ανισότητα, λόγω της ιδιότητας των νευρωνικών δικτύων:

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^n [(\beta_i \|\Phi_i(x_i)\| - \sigma_i \beta_i^2 + \|\theta_i^*\| \beta_i \sigma_i + \epsilon_{i,M}) |s_i| + \lambda s_i^2 + d_i u_i s_i] \quad (4.31)$$

Ως είσοδο ελέγχου του συστήματος, ορίζουμε την:

$$u_i = \kappa_i(P) \left[\lambda + \frac{1 + \beta_i^2 + \|\Phi_i(q_1, q_2, \dots, q_m, s, u_{i+1}, \dots, u_n)\|^2}{|s_i| + e^{-\lambda_0 t}} \right] s_i \quad (4.32)$$

με $\lambda_0 > 0$. Εισάγοντας την (4.32) στην (4.31), οδηγούμαστε στην:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \sum_{i=1}^n \left[(\beta_i \|\Phi_i(x_i)\| + \|\theta_i^*\| \beta_i \sigma_i + \epsilon_{i,M}) |s_i| + \lambda s_i^2 \right. \\ &\quad \left. + d_i \kappa_i(P) s_i^2 \left(\lambda + \frac{1 + \beta_i^2 + \|\Phi_i(x_i)\|^2}{|s_i| + e^{-\lambda_0 t}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ισχύει ότι:

$$|s_i| \leq \frac{s_i^2}{|s_i| + e^{-\lambda_0 t}} + e^{-\lambda_0 t} \quad (4.34)$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq \sum_{i=1}^n \left[& (\beta_i \|\Phi_i(x_i)\| + \|\theta_i^*\| \beta_i \sigma_i + \epsilon_{i,M}) \frac{s_i^2}{|s_i| + e^{-\lambda_0 t}} \right. \\ & + (\beta_i \|\Phi_i(x_i)\| + \|\theta_i^*\| \beta_i \sigma_i + \epsilon_{i,M}) e^{-\lambda_0 t} + \lambda s_i^2 \\ & \left. + d_i \kappa_i(P) \left(\lambda + \frac{1 + \beta_i^2 + \|\Phi_i(x_i)\|^2}{|s_i| + e^{-\lambda_0 t}} \right) s_i^2 \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Η ανίσωση μπορεί να γραφεί και ως:

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^n [\eta_i + d_i \kappa_i(P)] \Theta_i(t) + \rho e^{-\lambda t} \quad (4.36)$$

με μη αρνητική συνάρτηση

$$\Theta_i = \left(\lambda + \frac{1 + \beta_i^2 + \|\Phi_i(x_i)\|^2}{|s_i| + e^{-\lambda_0 t}} \right) s_i^2 \quad (4.37)$$

και παραμέτρους

$$\eta_i = \max\{1, \varphi_{im} \|\theta_i^*\| + \epsilon_{i,M}\} \quad (4.38)$$

$$\rho = \sum_{i=1}^n (\beta_{im} \varphi_{im} + \|\theta_i^*\| \varphi_{im} + \epsilon_{i,M}) \quad (4.39)$$

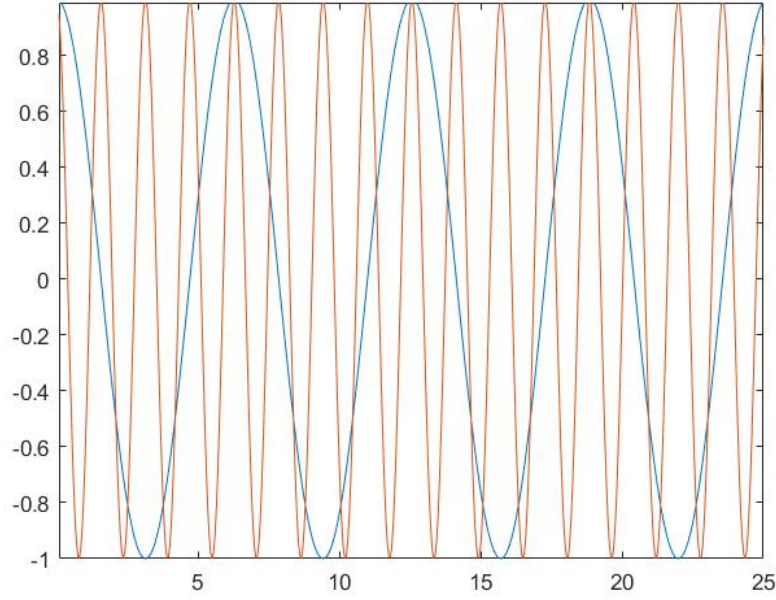
Γνωρίζουμε για την SDU διάσπαση, ότι $d_i \in \{+1, -1\}$. Για το εξεταζόμενο σύστημα, δεν είναι γνωστά τα συγκεκριμένα πρόσημα, αλλά είναι σταθερά. Ως είσοδο του συστήματος, έχουμε ορίσει τη συνάρτηση u_i , η οποία περιλαμβάνει τις συναρτήσεις

$$\kappa_i(P) = \phi(P) \cos(\omega_i \tilde{\phi}(P)) \quad (4.40)$$

με $\omega_1 = 1, \omega_i = 4\omega_{i-1}$ και οι συναρτήσεις $\phi, \tilde{\phi}$, είναι γνησίως αύξουσες και συγκεκριμένα $\phi \in \mathbb{K}_\infty, \tilde{\phi} \in \tilde{A}$. Εξαιτίας των συνεχόμενων τετραπλασιασμών των συχνοτήτων των συνημιτόνων, θα υπάρχουν σίγουρα διαστήματα τιμών της P , για τα οποία θα ισχύει:

$$d_i \kappa_i(P) \leq -\frac{\phi(P)}{\sqrt{2}}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (4.41)$$

Αυτό γίνεται πιο εύκολα κατανοητό, με το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 4.1: Συνημίτονα με τετραπλάσιες συχνότητες

Συγκεκριμένα, τα διαστήματα της P για τα οποία θα ισχύει η (4.41) έχουν πλάτος $\Delta P = \frac{\pi}{4 \cdot 4^{n-1}}$, εξαιτίας του συνημιτόνου με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Αν η P δεν είναι φραγμένη τότε δημιουργούνται δύο ακολουθίες χρονικών στιγμών $\{t_{1k}\}, \{t_{2k}\}$ με

$$t_{2k} := \inf\{t \in [0, t_f] | \tilde{\phi}(P(t)) = 2k\pi + \varrho_2\} \quad (4.42)$$

$$t_{1k} := \sup\{t < t_{2k} | \tilde{\phi}(P(t)) = 2k\pi + \varrho_1\} \quad (4.43)$$

και σταθερές $\varrho_1, \varrho_2 \in [0, 2\pi)$ τέτοιες ώστε

$$d_i \kappa_i(P(t)) \leq -\frac{\phi(P(t))}{\sqrt{2}}, \quad \forall t \in [t_{1k}, t_{2k}], \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (4.44)$$

Επιπλέον ισχύει: $t_{2k} - t_{1k} = \varrho_2 - \varrho_1 = \frac{\pi}{4 \cdot 4^{n-1}}$.

Έτσι, από τις (4.36), (4.44) προκύπτει η παρακάτω ανίσωση:

$$\dot{V} \leq - \sum_{i=1}^n \left[-\eta_i + \frac{\phi(P(t))}{\sqrt{2}} \right] \Theta_i(t) + \rho e^{-\lambda t} \quad , \forall t \in [t_{1k}, t_{2k}] \quad (4.45)$$

Επομένως για

$$k \geq k_0 := \left\lceil \frac{1}{2\pi} \tilde{\phi} \left(\phi^{-1} \left(\sqrt{2} \max_{1 \leq i \leq n} \eta_i \right) \right) \right\rceil \quad (4.46)$$

ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \phi(P(t)) &= (\phi \circ \tilde{\phi}^{-1})(\tilde{\phi}(P(t))) \geq (\phi \circ \tilde{\phi}^{-1})(2k\pi) \\ &\geq \sqrt{2} \max_{1 \leq i \leq n} \eta_i \quad , \forall t \in [t_{1k}, t_{2k}] \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα από την (4.45)

$$\dot{V} \leq \rho e^{-\lambda t} \quad , \forall t \in [t_{1k}, t_{2k}] \quad (4.47)$$

δηλαδή θα καλύπτεται η δεύτερη προϋπόθεση του λήμματος.

Παράλληλα, εξαιτίας των υποθέσεων που ορίσαμε για τη διάσπαση SDU , ισχύει ότι:

$$\frac{1}{2} \lambda_m s^T s \leq \frac{1}{2} s^T S^{-1} s \leq \frac{1}{2} \lambda_M s^T s \quad (4.48)$$

Ενώ, από τον τρόπο με τον οποίο ορίσαμε την εκτίμηση της νόρμας του διανύσματος του νευρωνικού δικτύου, γνωρίζουμε ότι $\tilde{\beta}_i^2 = (\beta_i - \|\theta_i^*\|)^2$ και άρα:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda_m s^T s + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\gamma_i} \left(\frac{1}{2} \beta_i^2 - \frac{3}{2} \|\theta_i^*\|^2 \right) + \lambda \int_0^t \|\|s(\tau)\|\|_\delta^2 d\tau &\leq V \\ &\leq \frac{1}{2} \lambda_M s^T s + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\gamma_i} (2\beta_i^2 - 2\|\theta_i^*\|^2) + \lambda \int_0^t \|\|s(\tau)\|\|_\delta^2 d\tau \end{aligned} \quad (4.49)$$

Επομένως, με βάση τον ορισμό του P από την (4.15), προκύπτει η παρακάτω ανίσωση:

$$a_0 + a_1 P(t) \leq V(t) \leq b_0 + b_1 P(t), \quad (4.50)$$

με παραμέτρους:

$$a_0 = - \sum_{i=1}^n \frac{3}{4\gamma_i} \|\theta_i^*\|^2, a_1 = \min \left\{ \frac{1}{2}, \lambda_m \right\}$$

$$b_0 = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \|\theta_i^*\|^2, b_1 = \max\{2, \lambda_M\}$$

Δηλαδή, καλύπτεται η προϋπόθεση (4.1) του λήμματος.

Συνεπώς οι συναρτήσεις P, V που ορίσαμε είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο \mathbb{R} .

4.3 Ύπαρξη Φραγμένων Λύσεων και Σύγκλιση

Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής θεώρημα σχετικά με τη σύγκλιση των τροχιών του συστήματος.

Θεώρημα 3 (Θεώρημα Σύγκλισης). *Έστω το μη γραμμικό σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις (1.4), και ικανοποιεί τις υποθέσεις που ορίζονται στο κεφάλαιο 3. Αν η είσοδος ελέγχου σχεδιαστεί σύμφωνα με τις (4.32), (4.15) και επιλεγεί ο νόμος προσαρμογής (4.27), τότε όλα τα σήματα κλειστού βρόχου παραμένουν φραγμένα και $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\|s(t)\|\|_{\delta} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|q_1(t) - y_d(t)\| \leq (c_1 \|B\|/c_2)\delta$ όπου c_1, c_2 θετικές σταθερές που θα οριστούν στη συνέχεια.*

Απόδειξη. Στην προηγούμενη παράγραφο αποδείχθηκε ότι οι συναρτήσεις P, V είναι φραγμένες στο \mathbb{R} . Όμως γνωρίζουμε ότι:

$$P = \frac{1}{2} s^T s + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\gamma_i} \beta_i^2 + \lambda \int_0^t \|\|s(\tau)\|\|_{\delta}^2 d\tau$$

και έτσι είναι προφανές ότι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\|\|s(t)\|\|_{\delta}^2$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Κατά τον ορισμό της συνάρτησης P , φροντίσαμε όλοι οι όροι της να είναι θετικοί. Επομένως αφού είναι φραγμένη, τότε και όλοι οι επιμέρους όροι της θα είναι φραγμένοι, δηλαδή και τα $\|s(t)\|$, $\|\|s(t)\|\|_{\delta}$ είναι φραγμένα.

Επιπλέον όπως ήδη έχουμε αποδείξει θα είναι και τα β_i φραγμένα. Επομένως, από τη σχέση (4.32) και τα u_i είναι φραγμένα. Γνωρίζουμε, ότι:

$$\dot{s} = F + SDU u + E\Lambda - y_d^{(m)}$$

Από τις υποθέσεις της εργασίας, γνωρίζουμε ότι το $y_d^{(m)}$ είναι φραγμένο. Παράλληλα, εφόσον τα s_i είναι φραγμένα, από την ανάλυση μας, προκύπτει ότι και τα ϵ_i, q_i θα είναι φραγμένα (για φραγμένες συναρτήσεις $y_d^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, m$) και επομένως ο όρος $F + E\Lambda$ θα είναι φραγμένος. Ταυτόχρονα, ο όρος $SDUu$ είναι φραγμένος με βάση τις υποθέσεις που έχουμε κάνει για το σύστημα και τη συνάρτηση εισόδου που ορίσαμε. Τελικά, θα είναι $\dot{s} \in \mathbb{L}_\infty$.

Ισχύει ότι:

$$\frac{d}{dt}(\|s(t)\|_\delta^2) = 2 \frac{\|s(t)\|_\delta}{\|s(t)\|} s^T \dot{s} \quad (4.51)$$

Από την παραπάνω σχέση και τη προηγούμενη ανάλυση προκύπτει ότι $d/dt(\|s(t)\|_\delta^2) \in \mathbb{L}_\infty$ και επομένως η $\|s(t)\|_\delta^2$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα Barbalat, έχουμε τελικά $\lim_{t \rightarrow \infty} \|s(t)\|_\delta = 0$ δηλαδή όλα τα s_i συγκλίνουν στο διάστημα $[-\delta, \delta]$. Η λύση της (3.4) δίδει:

$$\bar{\epsilon}(t) = e^{At}\bar{\epsilon}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B s(\tau) d\tau \quad (4.52)$$

Αφού ο A είναι Hurwitz υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ τέτοια ώστε $\|e^{At}\| \leq c_1 e^{-c_2 t}$. Από την (4.52) έχουμε

$$\|\bar{\epsilon}(t)\| \leq c_1 \|\bar{\epsilon}(0)\| e^{-c_2 t} + c_1 \|B\| \int_0^t e^{-c_2(t-\tau)} \|s(\tau)\| d\tau \quad (4.53)$$

Αφού η s είναι φραγμένη με $\lim_{t \rightarrow \infty} \|s(t)\|_\delta = 0$ υπάρχουν $c_s, T_\epsilon > 0$ τέτοια ώστε $\|s(t)\| \leq c_s$ για κάθε $t \geq 0$ και $\|s(t)\| \leq (1 + \epsilon)\delta$ για κάθε $\epsilon > 0, t \geq T_\epsilon$. Για το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (4.53) ισχύει ότι για κάθε $t \geq 2T_\epsilon$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-c_2(t-\tau)} \|s(\tau)\| d\tau &= \int_0^{t/2} e^{-c_2(t-\tau)} \|s(\tau)\| d\tau + \int_{t/2}^t e^{-c_2(t-\tau)} \|s(\tau)\| d\tau \\ &\leq \frac{c_s}{c_2} e^{-c_2 t/2} + \frac{(1 + \epsilon)\delta}{c_2} \end{aligned}$$

Παίρνοντας στο όριο $t \rightarrow \infty$ θα έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\epsilon}(t)\| \leq \frac{c_1 \|B\|}{c_2} \delta \quad (4.54)$$

και από τον ορισμό της $\bar{\varepsilon}$ λαμβάνουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|q_1(t) - y_d(t)\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\varepsilon}(t)\| \leq \frac{c_1 \|B\|}{c_2} \delta \quad (4.55)$$

□

Κεφάλαιο 5

Προσομοιώσεις

5.1 Παρακολούθηση τροχιάς αναφοράς σε ρομποτικό βραχίονα

Εφαρμόζουμε τον προτεινόμενο ελεγκτή σε έναν ρομποτικό βραχίονα δύο συνδέσμων, η δυναμική του οποίου περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (5.1)$$

Τα σύμβολα της εξίσωσης αντιπροσωπεύουν τα παρακάτω:

- $q \in \mathbb{R}^2$ - το διάνυσμα γωνιακών θέσεων των αρθρώσεων
- $\dot{q} \in \mathbb{R}^2$ - το διάνυσμα γωνιακών ταχυτήτων των αρθρώσεων
- $\ddot{q} \in \mathbb{R}^2$ - το διάνυσμα των γωνιακών επιταχύνσεων των αρθρώσεων
- $\tau \in \mathbb{R}^2$ - το διάνυσμα των εφαρμοζόμενων ροπών στο ρομποτικό σύστημα

Οι πίνακες M, C, G αντιπροσωπεύουν τη μη-γραμμική δυναμική του συστήματος και για τη συγκεκριμένη υλοποίηση ορίζονται ως εξής:

$$M(q) = \begin{pmatrix} a + b + 2c \cos q_2 & b + c \cos q_2 \\ b + c \cos q_2 & b \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$C(q, \dot{q}) = b \sin q_2 \begin{pmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

$$G(q) = \begin{pmatrix} m_1 g l_{c1} \cos q_1 + m_2 g (l_1 \cos q_1 + l_{c2} \cos q_1 + q_2) \\ m_2 g l_{c2} \cos q_1 + q_2 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

όπου m_1, m_2 είναι οι μάζες των αρθρώσεων, l_1, l_2 , τα μήκη τους, l_{c1}, l_{c2} , οι αποστάσεις από τα αντίστοιχα κέντρα μάζας και I_1, I_2 είναι οι ροπές αδράνειας των δύο συνδέσμων. Οι παράμετροι a, b, c δίδονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} a &= I_1 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 \\ b &= I_2 + m_2 l_{c2}^2 \\ c &= m_2 l_1 l_{c2} \end{aligned}$$

Το σύστημα, μπορεί να γραφεί και ως:

$$\ddot{q} = M(q)^{-1} \tau - M(q)^{-1} C(q, \dot{q}) \dot{q} - M(q)^{-1} G(q) \quad (5.5)$$

Έτσι αν ορίσουμε τα $q_1 = \dot{q}$ και $q_2 = \ddot{q}$, θα ισχύει

$$\dot{q}_1 = q_2 \quad (5.6)$$

$$\dot{q}_2 = M(q_1)^{-1} \tau - M(q_1)^{-1} C(q_1, q_2) q_2 - M(q_1)^{-1} G(q_1) \quad (5.7)$$

Επομένως, για $u = \tau$, $F(q_1, q_2) = -M(q_1)^{-1} C(q_1, q_2) q_2 - M(q_1)^{-1} G(q_1)$, $G = M(q_1)^{-1}$, προκύπτει η μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2 \\ \dot{q}_2 &= F(q_1, q_2) + G(q_1) u \end{aligned}$$

δηλαδή η εξεταζόμενη σε αυτή την εργασία μορφή συστήματος (1.4) με $m = n = 2$. Για την υλοποίηση της μεθόδου, ορίζουμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους του συστήματος και του ελεγκτή.

Παράμετροι ρομποτικού βραχίονα:

$m_1 = 0.1$	$I_1 = 0.0083$	$l_1 = 1$	$l_{c1} = 0.5$	$g = 9.81$
$m_2 = 0.2$	$I_2 = 0.0667$	$l_2 = 2$	$l_{c2} = 1$	

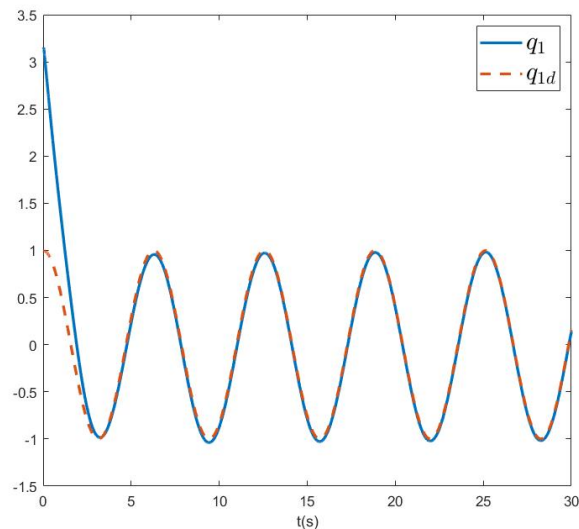
Για την προσομοίωση επιλέγουμε αρχικές συνθήκες $q_0 = [\pi, \pi]$ και $\dot{q}_0 = [0, 0]$,

5.1. ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΤΡΟΧΙΑΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΣΕ ΡΟΜΠΟΤΙΚΟ ΒΡΑΧΙΟΝΑ53

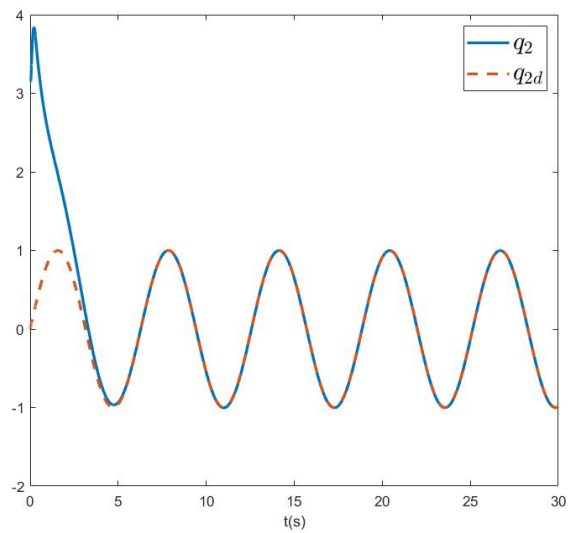
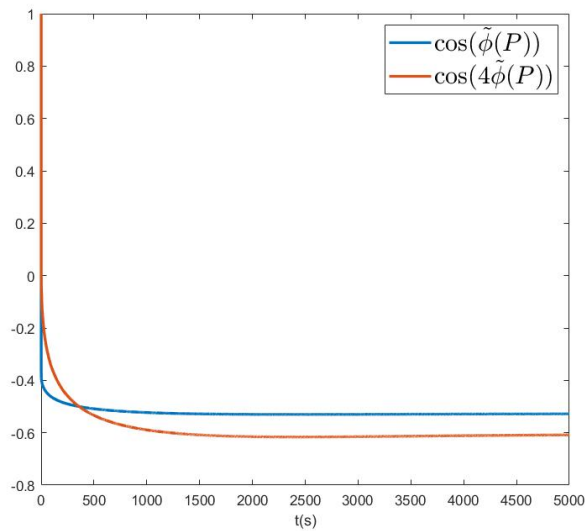
ώστε να απέχει αρχικά η επιθυμητή κίνηση με την πραγματική. Σε ότι αφορά τις παραμέτρους ελέγχου του βραχίονα, επιλέγουμε $\phi(P) = P^{1/2}$ και $\bar{\phi}(P) = \sqrt{\ln(1+P)}$, δηλαδή χρησιμοποιούμε συναρτήσεις με αρκετά μικρά κέρδη. Για τον τελεστή νεκρής ζώνης, επιλέγουμε $\delta = 0.05$, ενώ όσον αφορά τους συντελεστές της ανανέωσης της εκτίμησης που χρησιμοποιούμε για τον έλεγχο, έχουμε: $\gamma_1 = \gamma_2 = 5$ και $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$. Τέλος, για τα σταθμισμένα σφάλματα χρησιμοποιούμε $\lambda_1 = 1$.

5.1.1 Αποτελέσματα Προσομοίωσης

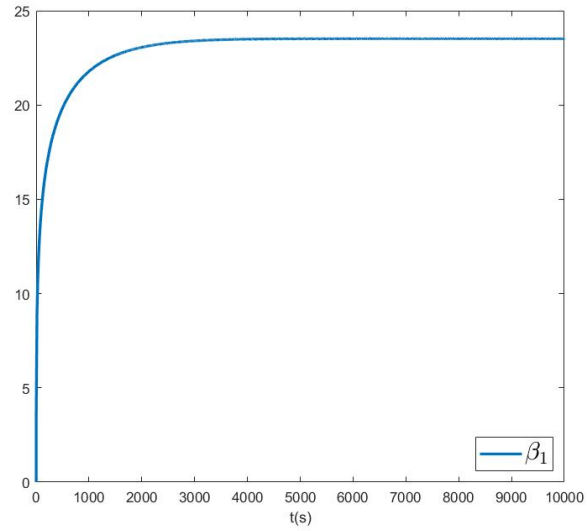
Σε αυτό το σημείο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης σε περιβάλλον Simulink .



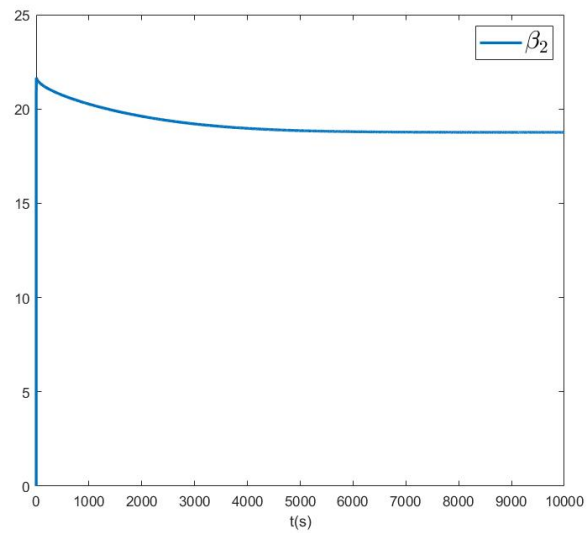
Σχήμα 5.1: Μεταβολή του q_1 συγκριτικά με το q_{1d}

Σχήμα 5.2: Μεταβολή του q_2 συγκριτικά με το q_{2d} Σχήμα 5.3: Χρονική απόκριση των κερδών ελέγχου $\cos(\tilde{\phi}(P))$, $\cos(4\tilde{\phi}(P))$

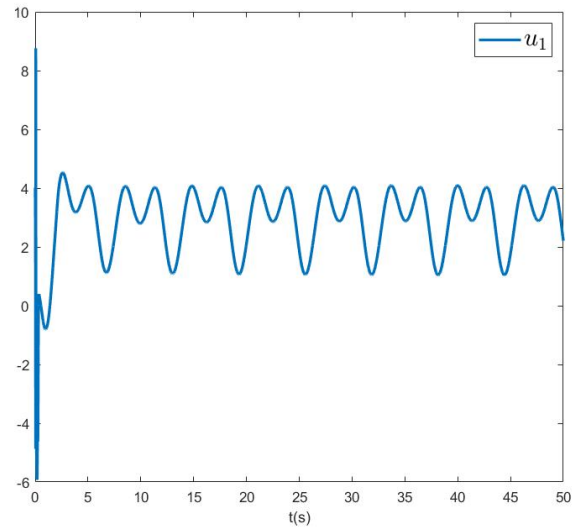
5.1. ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΤΡΟΧΙΑΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΣΕ ΡΟΜΠΟΤΙΚΟ ΒΡΑΧΙΟΝΑ55



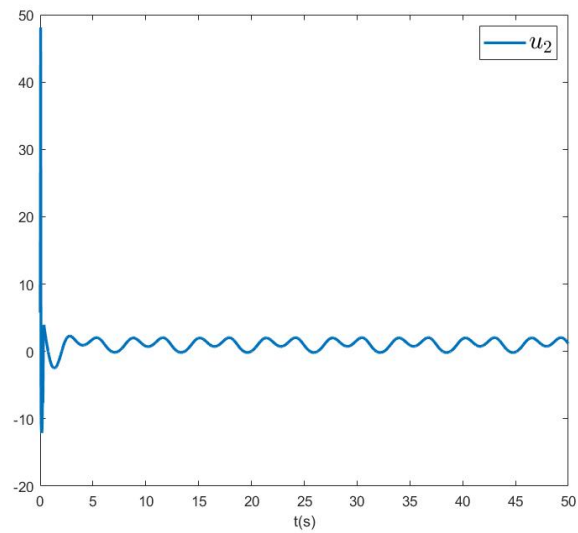
Σχήμα 5.4: Μεταβολή β_1 σε σχέση με το χρόνο



Σχήμα 5.5: Μεταβολή β_2 σε σχέση με το χρόνο

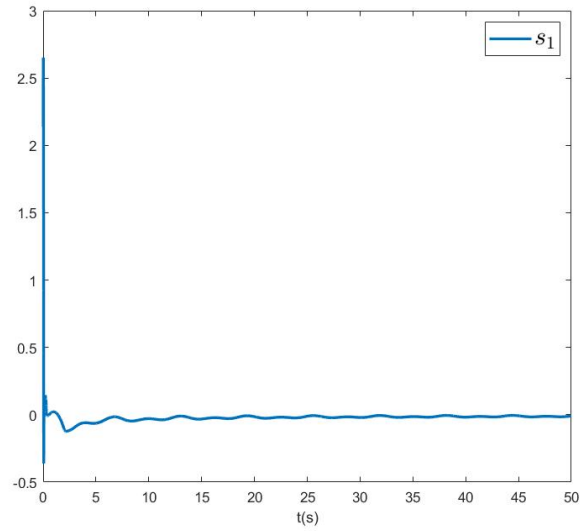


Σχήμα 5.6: Μεταβολή της εισόδου u_1 σε σχέση με το χρόνο

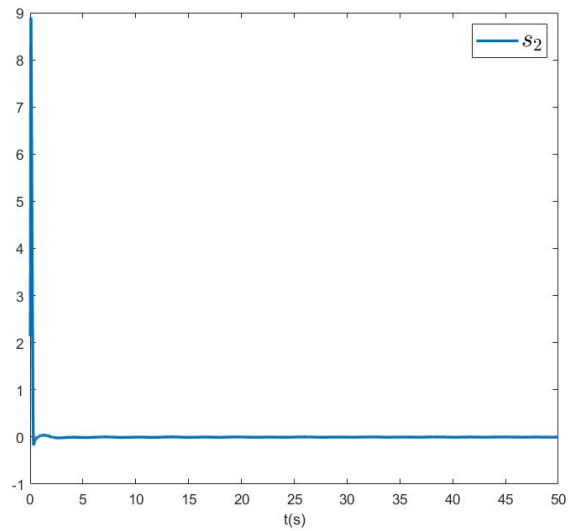


Σχήμα 5.7: Μεταβολή της εισόδου u_2 σε σχέση με το χρόνο

5.1. ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΤΡΟΧΙΑΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΣΕ ΡΟΜΠΟΤΙΚΟ ΒΡΑΧΙΟΝΑ57



Σχήμα 5.8: Μεταβολή του σταθμισμένου σφάλματος s_1 σε σχέση με το χρόνο



Σχήμα 5.9: Μεταβολή του σταθμισμένου σφάλματος s_2 σε σχέση με το χρόνο

5.2 Προσομοίωση Uncalibrated Servoing

Σε αυτή την παράγραφο γίνεται προσομοίωση της λειτουργίας του συστήματος όρασης που περιγράφεται στο 2.6.1.

Το σύστημα στο οποίο ασκούμε τελικά τον έλεγχο, είναι αυτό της μορφής (2.38), το οποίο μπορεί να γραφεί και ως:

$$\dot{y} = Gu \quad (5.8)$$

με $y \in \mathbb{R}^2$ το διάνυσμα κατάστασης, $G \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ την άγνωστη συνάρτηση και $u \in \mathbb{R}^2$ την είσοδο ελέγχου του συστήματος.

Ειδικά σε αυτή την περίπτωση, αντιμετωπίζουμε το Visual Servoing ως έναν μετασχηματισμό από το χώρο του εργαλείου του ρομπότ στο χώρο της κάμερας, χωρίς να λαμβάνεται υπόψιν η ίδια η κίνηση του βραχίονα. Παρόλα αυτά στη συγκεκριμένη προσομοίωση, δώσαμε ως επιθυμητή τροχιά, μία η οποία είναι δυνατή, για ένα βραχίονα 2 αρθρώσεων, με $l_1 = 3$, $l_2 = 3$. Τελικά, η επιθυμητή τροχιά ορίζεται ως:

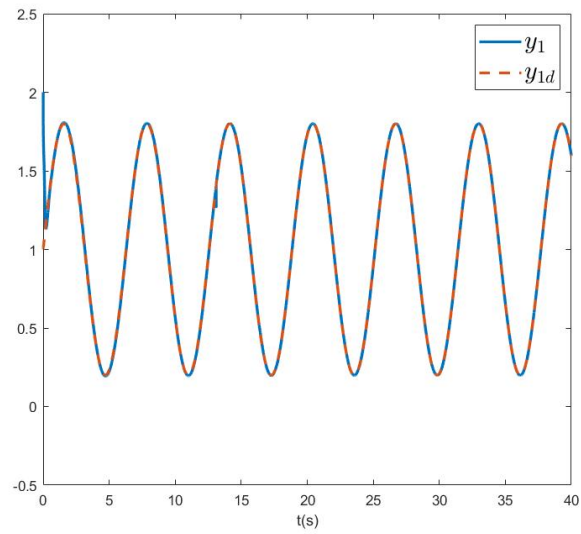
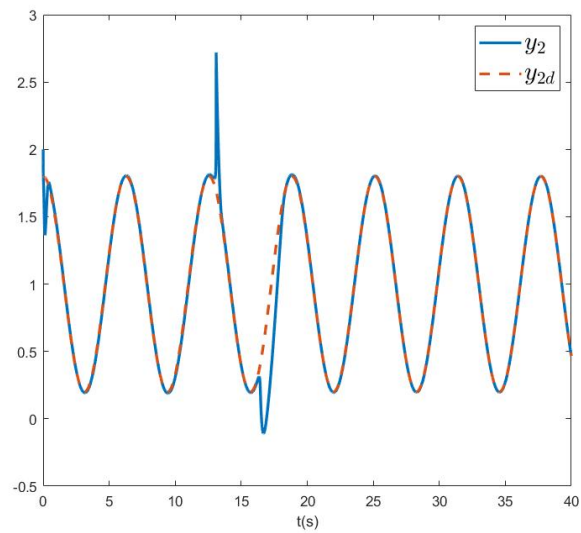
$$y_d(t) = (1 + 0.8 \sin(t), 1 + 0.8 \cos(t))^T \quad (5.9)$$

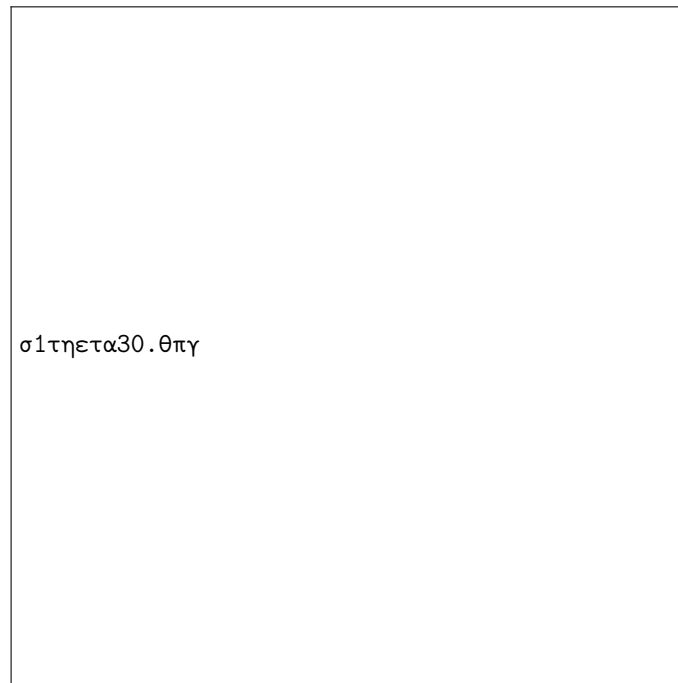
με αρχικές συνθήκες:

$$y(0) = (2, 2)^T \quad (5.10)$$

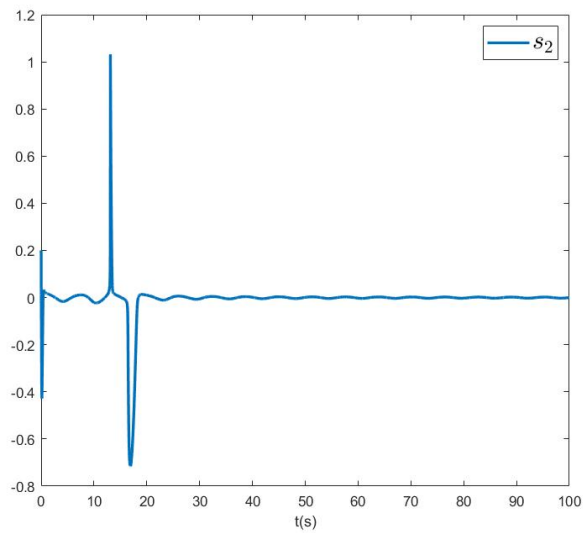
Το συγκεκριμένο σύστημα χρησιμοποιείται για ναδειχθεί ότι ο νόμος ελέγχου είναι αποτελεσματικός για διαφορετικές τοποθετήσεις της κάμερας, αφού με διαφορετικές τιμές του θ , μπορούμε να αλλάξουμε το πρόσημο του, ενώ ανταποκρίνεται και στις διάφορες τιμές του α .

Όσον αφορά τις παραμέτρους που αφορούν το νόμο ελέγχου, επιλέξαμε $\phi(P) = 30P$, $\tilde{\phi}(P) = 4\sqrt{\ln(P+1)}$. Επιπλέον, πήραμε $\gamma_1 = \gamma_2 = 10$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.4$ και $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\delta = 0.05$.

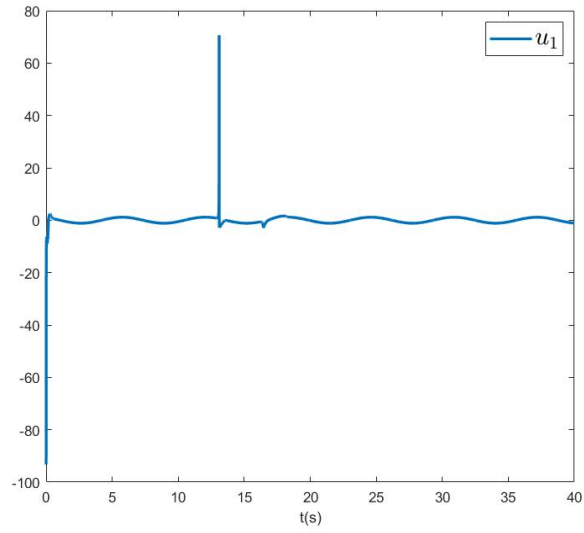
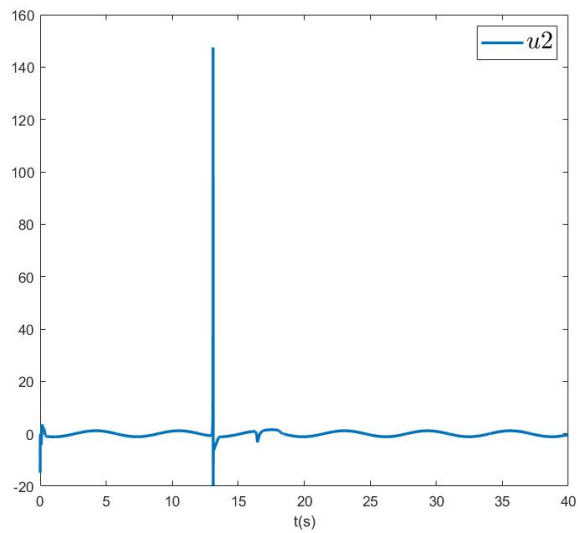
5.2.1 Αποτελέσματα με $\theta = \pi/6$ ($\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$)Σχήμα 5.10: Απόκριση y_1 συγκριτικά με την επιθυμητή y_{1d} , για $\theta = 30^\circ$ Σχήμα 5.11: Απόκριση y_2 συγκριτικά με την επιθυμητή y_{2d} , για $\theta = 30^\circ$

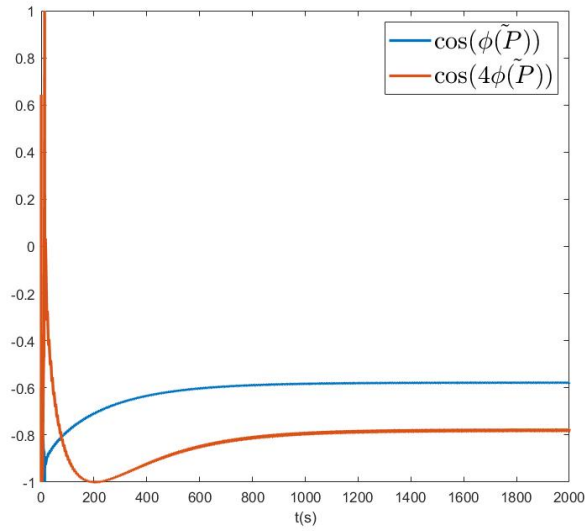


Σχήμα 5.12: Σφάλμα στην ακολουθία εντολής για το y_1 , για $\theta = 30^\circ$

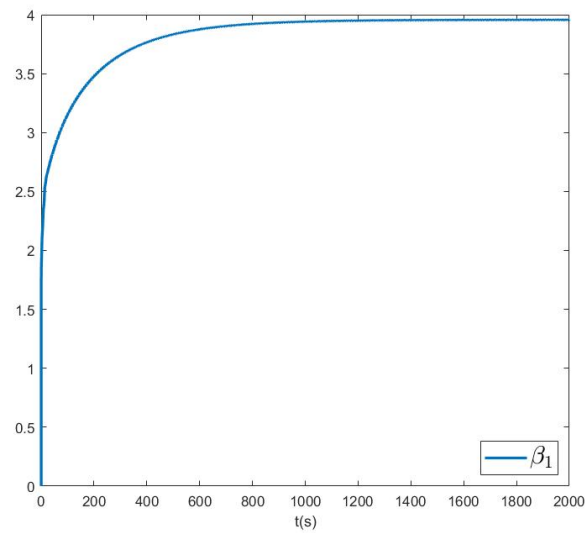


Σχήμα 5.13: Σφάλμα στην ακολουθία εντολής για το y_2 , για $\theta = 30^\circ$

Σχήμα 5.14: Είσοδος ελέγχου u_1 , για $\theta = 30^\circ$ Σχήμα 5.15: Είσοδος ελέγχου u_2 , για $\theta = 30^\circ$

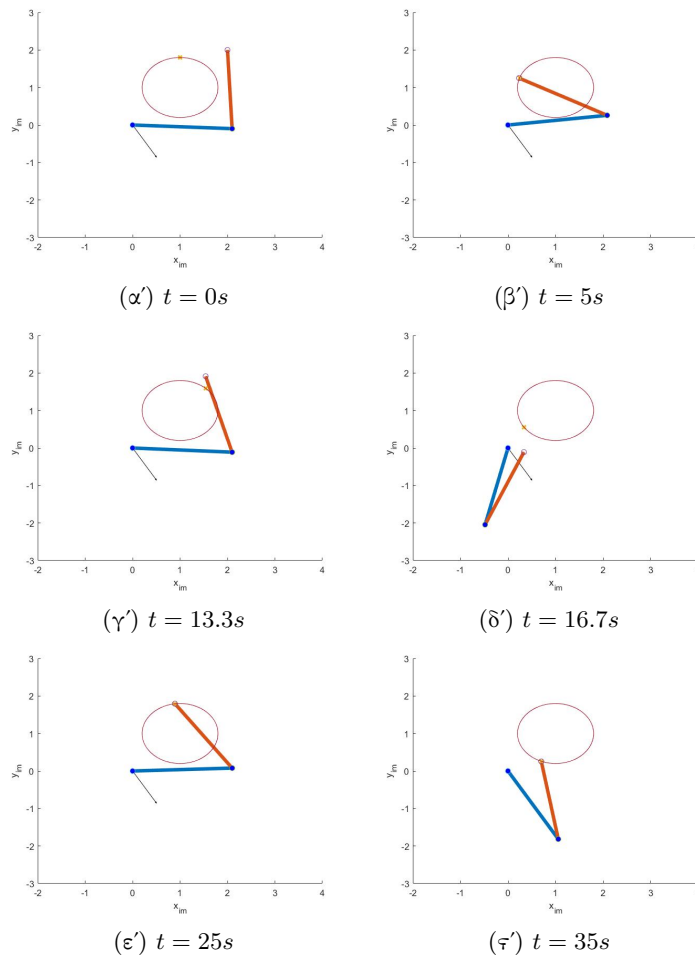


Σχήμα 5.16: Χρονική απόκριση των κερδών ελέγχου $\cos(\tilde{\phi}(P))$, $\cos(4\tilde{\phi}(P))$, για $\theta = 30^\circ$

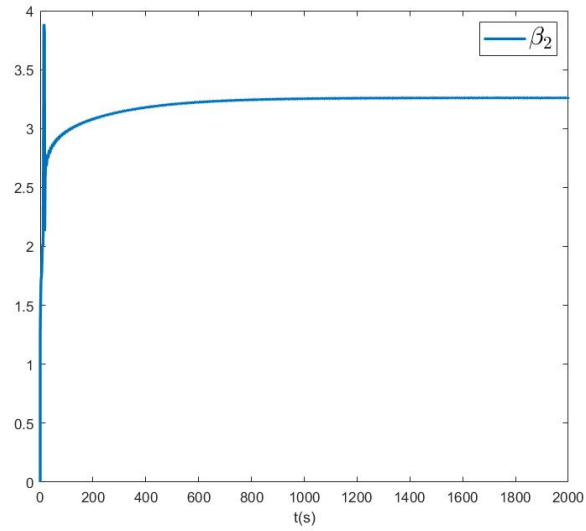


Σχήμα 5.17: Μεταβολή β_1 , για $\theta = 30^\circ$

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζουμε την προσομοίωση της κίνησης ενός ρομποτικού βραχίονα, με παραμέτρους αυτές που ορίστηκαν παραπάνω, όταν δίνεται η τροχιά αναφοράς μέσω του συγκεκριμένου συστήματος όρασης. Χρησιμοποιούμε τις αντίστροφες κινηματικές εξισώσεις για να υπολογίσουμε τις θέσεις των αρθρώσεων, από τη θέση του σημείου δράσης.

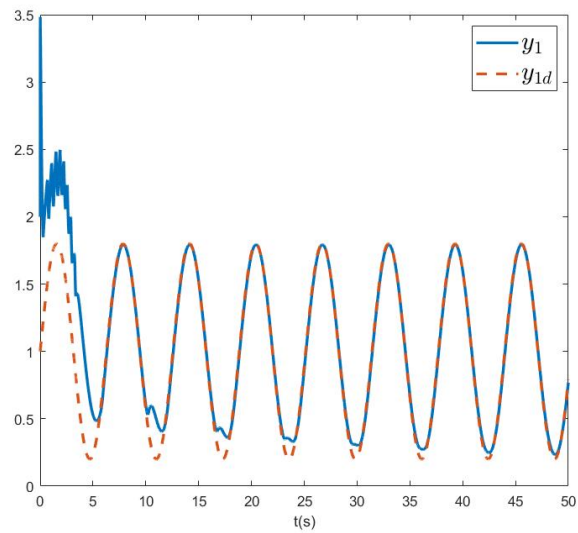


Σχήμα 5.18: Κίνηση του Ρομποτικού Βραχίονα με Βάση το Σύστημα Όρασης, για $\theta = 30^\circ$

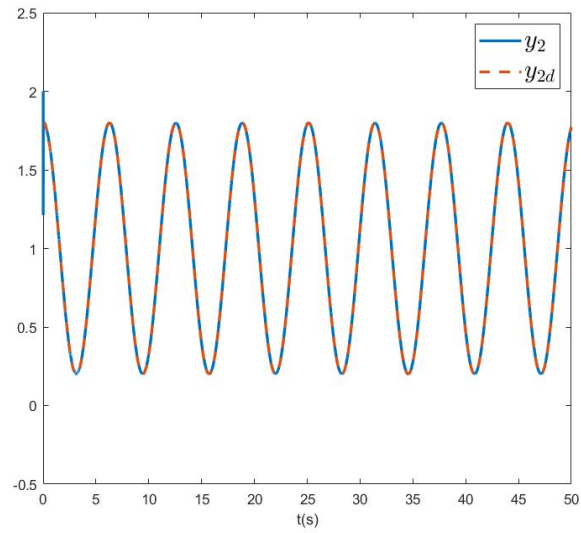


Σχήμα 5.19: Μεταβολή β_2 , για $\theta = 30^\circ$

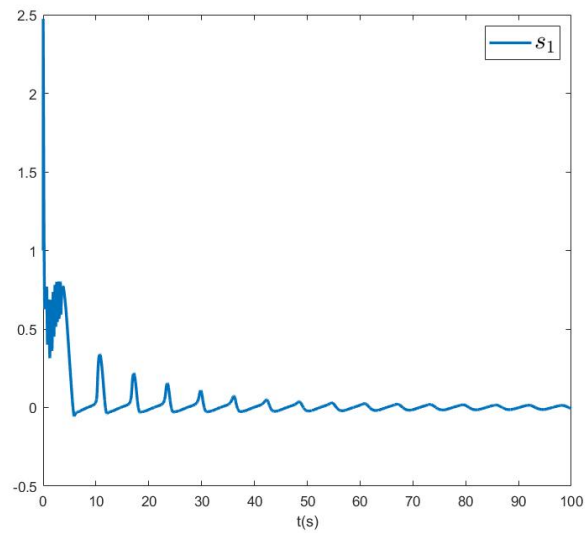
5.2.2 Αποτελέσματα με $\theta = 5\pi/6$ ($\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$)



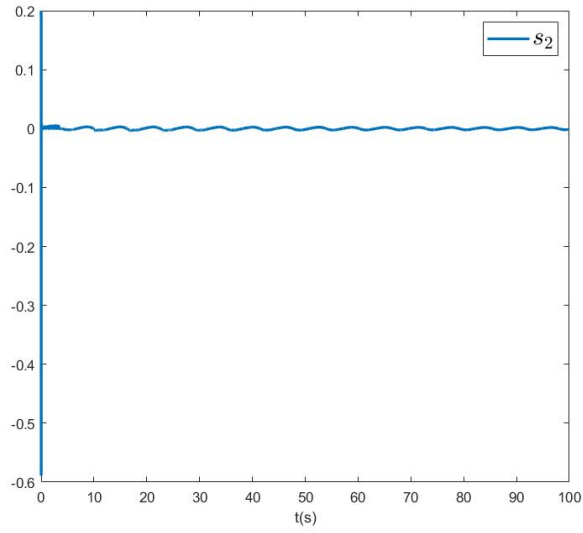
Σχήμα 5.20: Απόκριση y_1 συγκριτικά με την επιθυμητή y_{1d} , για $\theta = 150^\circ$



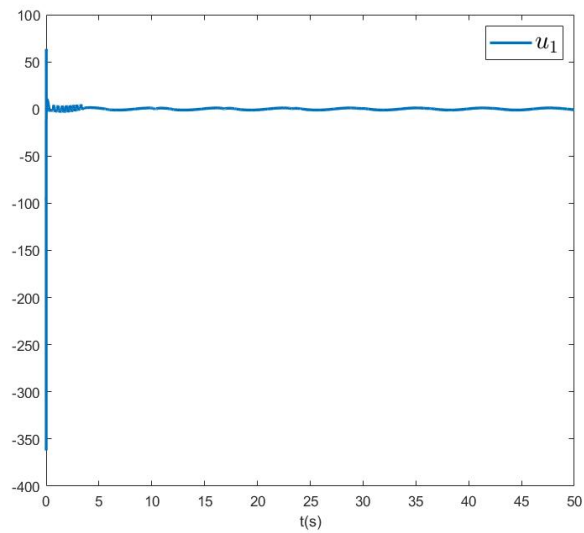
Σχήμα 5.21: Απόκριση y_2 συγκριτικά με την επιθυμητή y_{2d} , για $\theta = 150^\circ$



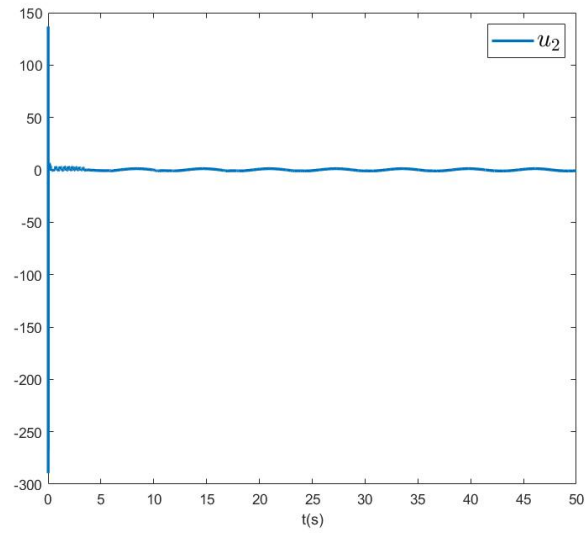
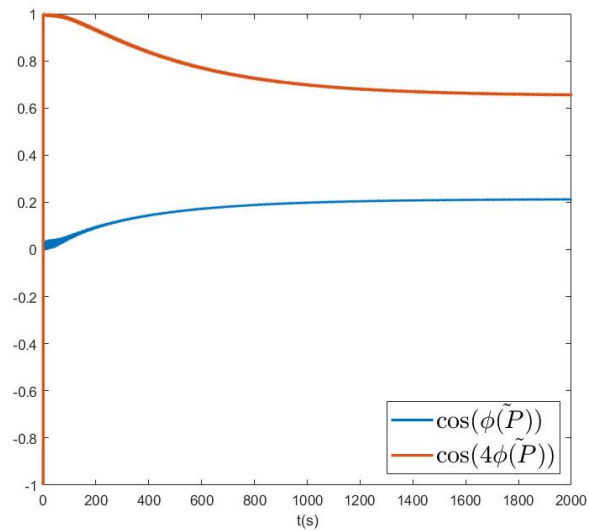
Σχήμα 5.22: Σφάλμα στην ακολουθία εντολής για το s_1 , για $\theta = 150^\circ$

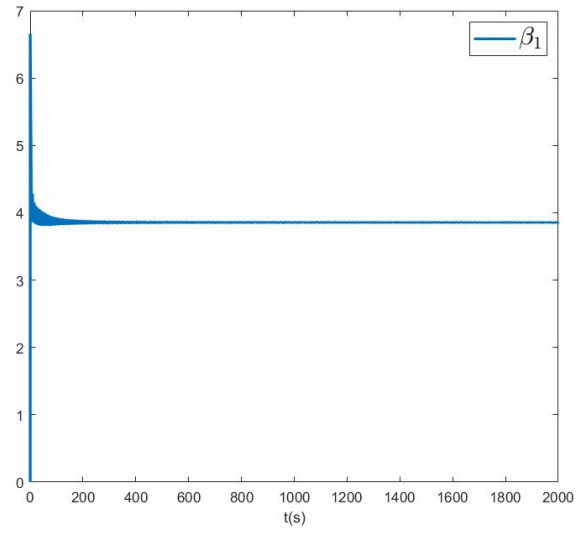


Σχήμα 5.23: Σφάλμα στην ακολούθηση εντολής για το s_2 , για $\theta = 150^\circ$

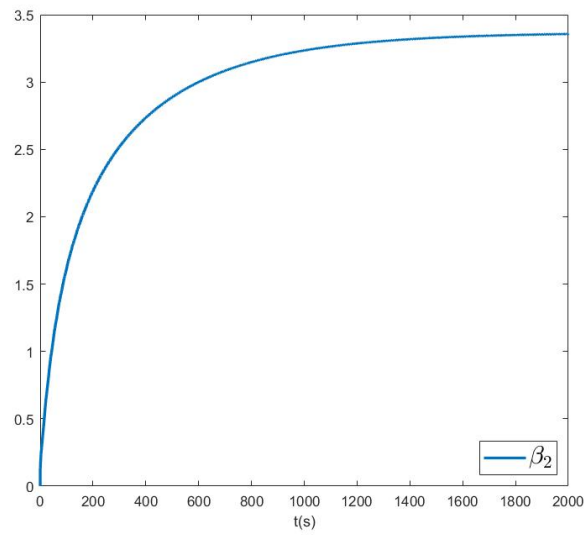


Σχήμα 5.24: Είσοδος ελέγχου u_1 , για $\theta = 150^\circ$

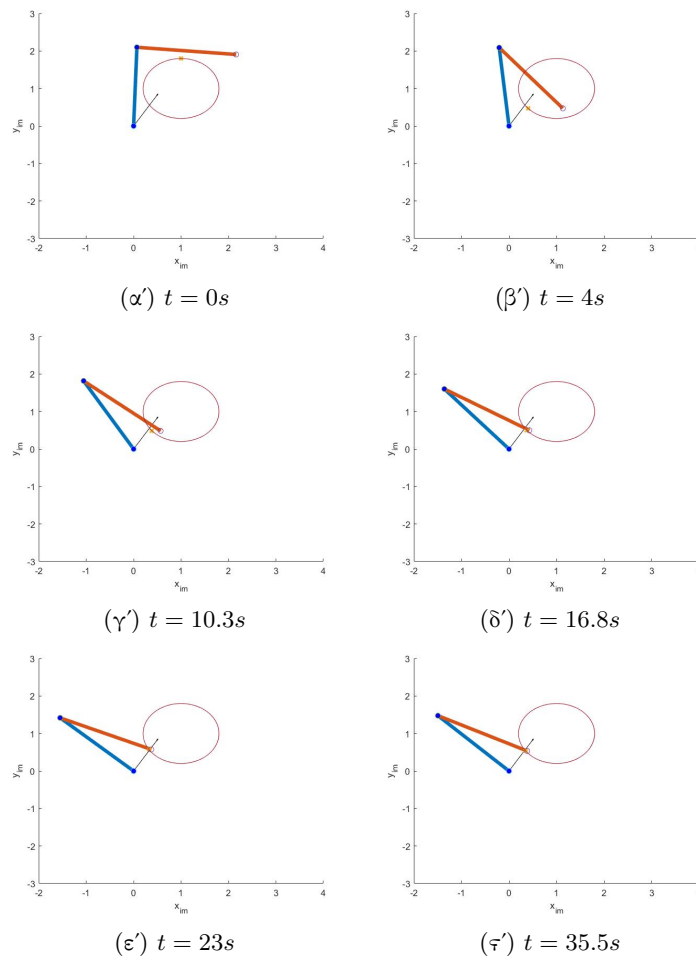
Σχήμα 5.25: Είσοδος ελέγχου u_2 , για $\theta = 150^\circ$ Σχήμα 5.26: Χρονική απόκριση των κερδών ελέγχου $\cos(\tilde{\phi}(P))$, $\cos(4\tilde{\phi}(P))$, για $\theta = 150^\circ$



Σχήμα 5.27: Μεταβολή β_1 , για $\theta = 150^\circ$



Σχήμα 5.28: Μεταβολή β_2 , για $\theta = 150^\circ$



Σχήμα 5.29: Κίνηση του Ρομποτικού Βραχίονα με Βάση το Σύστημα Όρασης, για $\theta = 150^\circ$

5.3 Σχολιασμός

Από τα γραφήματα που παρατέθηκαν, προκύπτει ότι ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου, επιλύει το πρόβλημα της παρακολούθησης τροχιάς αναφοράς, ανεξάρτητα από τις κατευθύνσεις ελέγχου και τη δυναμική του συστήματος. Μάλιστα, στη δεύτερη προσομοίωση, γίνεται φανερό το ότι ανταποκρίνεται σε αντίθετες κατευθύνσεις ελέγχου, για το ίδιο σύστημα. Παρόλα αυτά, παρατηρούμε ότι υπάρχει μία σχετικά μικρή καθυστέρηση στη σύγκλιση στην επιθυμητή τροχιά, καθώς χρησιμοποι-

ύμε για τον έλεγχο συναρτήσεων με χαμηλό κέρδος. Βέβαια, η χρήση τέτοιων συναρτήσεων αποτελεί και ένα συγκριτικό πλεονέκτημα σε σχέση με τις άλλες μεθόδους, καθώς αυξάνει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου στην πρακτική εφαρμογή της. Ταυτόχρονα, είναι δυνατόν με κατάλληλη ρύθμιση του ελεγκτή, να βελτιωθεί ακόμα περισσότερο η απόδοση του, για τα εξεταζόμενα συστήματα.

Κεφάλαιο 6

Επίλογος

6.1 Συμπεράσματα

Όπως φαίνεται τόσο από τα θεωρητικά αποτελέσματα όσο και από τις προσομοιώσεις του Κεφαλαίου 5, ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου επιλύει το πρόβλημα της παρακολούθησης τροχιάς αναφοράς στα συστήματα της μορφής (1.4). Έχει δημιουργηθεί λοιπόν μία νέα μέθοδος σχεδίασης προσαρμοστικών, μη-γραμμικών PI ελεγκτών για συστήματα πολλών-εισοδων πολλών-εξόδων.

Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε λύνει το πρόβλημα των άγνωστων κατευθύνσεων ελέγχου, γενικεύοντας και απλοποιώντας τα αποτελέσματα των [2],[17] για συστήματα πολλών εισόδων-πολλών εξόδων. Επιπροσθέτως, επιτυγχάνεται η αποφυγή της υπερπαραμετροποίησης, αφού δε γίνεται συνολική εκτίμηση των άγνωστων τμημάτων του συστήματος, αλλά μόνο των φραγμάτων που χρειάζονται για τη δημιουργία του ελεγκτή.

Επίσης, η προτεινόμενη προσέγγιση ανήκει στην κατηγορία των PI μη γραμμικών νόμων ελέγχου για τους οποίους έχει αποδειχθεί ότι βελτιώνουν την ευρωστία σε σχέση με τις λύσεις που χρησιμοποιούν κέρδη Nussbaum για ορισμένες κλάσεις συστημάτων [1], [3], [18].

Τέλος, δεν χρειάζεται πληροφορία για περιορισμούς στο μέγεθος της αβεβαιότητας των οποίων η γνώση απαιτείται για την σχεδίαση κάποιων σθεναρών μεθόδων ελέγχου [2]. Η προσέγγιση σε πραγματικό χρόνο των φραγμάτων αυτών μας απαλλάσσει από την αναγκαιότητα για a priori γνώση τους.

6.2 Επεκτάσεις

Επεκτάσεις της παρούσας εργασίας θα μπορούσαν να διερευνηθούν περαιτέρω σε ορισμένες κατευθύνσεις. Μία από αυτές αφορά τη μελέτη της σθυναρότητας του συστήματος που προκύπτει. Λόγω της χρήσης νεκρής ζώνης και drift παραγόντων στην εκτίμηση των παραμέτρων, υπάρχει μια ανοχή σε σφάλματα μέτρησης και διαταραχές. Όμως, το κατά πόσο ο προτεινόμενος αλγόριθμος είναι σθυναρός και σε δυναμικές διαταραχές όπως γίνεται στα [3], [18], [19], είναι ένα δύσκολο ερώτημα να απαντηθεί. Παράλληλα, μπορεί να γίνει επέκταση της εφαρμογής του συγκεκριμένου νόμου ελέγχου και σε άλλα συστήματα πέρα από το ρομποτικό βραχίονα. Τέλος, είναι σημαντικό να διερευνηθεί η δυνατότητα ενσωμάτωσης προδιαγραφών απόδοσης για το σύστημα, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται και η επιθυμητή μεταβατική συμπεριφορά. Αυτό μπορεί να γίνει για παράδειγμα με τη χρήση των Barrier Lyapunov functions, όπως στα [15], [16], [20] και [21].

Βιβλιογραφία

- [1] Ortega, R., Astolfi, A., Barabanov, N.E., 2002. Nonlinear PI control of uncertain systems: an alternative to parameter adaptation. *Syst. Control Lett.*, 47 (3), 259-278.
- [2] Psillakis, H.E., 2016. Integrator backstepping with the nonlinear PI method: an integral equation approach. *Eur. J. Control*, 28, 49-55.
- [3] Psillakis, H.E., 2016. Further results on robustness of the nonlinear PI control method: the ignored actuator dynamics case. 24th Mediterranean Conference on Control and Automation, Athens, Greece.
- [4] Ioannou, P., Sun, J., 2012. *Robust Adaptive Control*. 1st Edition, Dover Publications.
- [5] Astolfi, A., Karagiannis, D. et al, 2008. *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. 1st Edition, Springer.
- [6] Khalil, H., 2001. *Nonlinear Systems*. 3rd Edition, Pearson.
- [7] Costa, R.R., Hsu, L., Imai, A.K., Kokotovic, P., 2003. Lyapunov-based adaptive control of MIMO systems. *Automatica*. 7, 1251-1257.
- [8] Strang, G., 2006. *Linear Algebra and Its Applications*. 4th Edition, Cengage Learning.
- [9] Siciliano B., Sciavicco, L., Villani, L., Oriolo, G., 2009. *Robotics Modelling, Planning and Control*. 1st Edition, Springer.
- [10] Boulkroune, A., M'Saad, M., Chekireb, H., 2010. Design of fuzzy adaptive control for MIMO nonlinear time-delay systems with unknown actuator nonlinearities and control direction. *Information Sciences*, Elsevier, 5041-5059.

- [11] Boulkroune, A., Tadjine, M., M'Saad, M., Farza, M., 2009. Fuzzy adaptive controller for MIMO nonlinear systems with known and unknown control direction. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, 797-820.
- [12] Kosmatopoulos, E.B. High-order neural networks for the learning of robot contact surface shape. *IEEE Trans. Robotics*, 13 (3), 451-455.
- [13] Kosmatopoulos, E.B., Christodoulou M.A., 1995. High-order neural network structures for identification of dynamical systems. *IEEE Trans. Neural Networks*, 6, 422-431.
- [14] Nussbaum, R.D., 1983. Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control. *Syst Control Lett.*, 3 (5), 243-246.
- [15] Yan, S.L., Schaocheng, T., 2017 Barrier Lyapunov functions for Nussbaum gain adaptive control of full state constrained nonlinear systems. *Automatica*, 76, 143-152.
- [16] Psillakis, H.E., 2012. Improving transient performance of Nussbaum gain-based controllers with barrier Lyapunov functions. *Proceedings of the IASTED International Conference on Control and Applications (CA 2012)*, Heraklion, Greece.
- [17] Psillakis, H.E., Lagos A.R., 2018. Unifying adaptive control with the nonlinear PI methodology: Designs for unknown strict-feedback nonlinear systems with nonsmooth actuator nonlinearities. *Int. J. Adapt. Control and Signal Process*, 32 (2), 362-377.
- [18] Psillakis, H.E., 2016. An extension of the Georgiou-Smith example: boundedness and attractivity in the presence of unmodelled dynamics via nonlinear PI control. *Syst. Control Lett.*, 92, 1-4.
- [19] Georgiou, T.T., Smith, M.C., 1997. Robustness analysis of nonlinear feedback systems: an input-output approach. *IEEE Trans. Automatic Contr.*, 42, 1200-1221.
- [20] Niu, B., Zhao, J., 2013. Barrier Lyapunov functions for the output tracking control of constrained nonlinear switched systems. *Syst. Control Lett.*, 62 (10), 963-971.
- [21] An, H., Xia, H., Wang, C., 2017. Barrier Lyapunov function-based adaptive control for hypersonic flight vehicles. *Nonlinear Dynamics*, 88 (3), 1833-1853.

- [22] Astofi, A., Hsu, L., Netto, M.S., Ortega, N., 2002. Two Solutions to the Adaptive Visual Servoing Problem. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18 (3), 2002.