



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής
Εργαστήριο Όρασης Υπολογιστών, Επικοινωνίας Λόγου και Επεξεργασίας Σημάτων

Διαίρεση Τροπικών Πολυωνύμων και Ελαχιστοποίηση
Νευρωνικών Δικτύων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Γεώργιου Α. Σμυρνή

Επιβλέπων: Πέτρος Μαραγκός
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούνιος 2020



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής

Εργαστήριο Όρασης Υπολογιστών, Επικοινωνίας Λόγου και

Επεξεργασίας Σημάτων

Διαίρεση Τροπικών Πολυωνύμων και Ελαχιστοποίηση Νευρωνικών Δικτύων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Γεώργιου Α. Σμυρνή

Επιβλέπων: Πέτρος Μαραγκός
Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 25^η Ιουνίου 2020.

.....
Πέτρος Μαραγκός
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Αριστέιδης Παγουρτζής
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Γεράσιμος Ποταμιάνος
Αναπληρωτής Καθηγητής ΠΘ

Αθήνα, Ιούνιος 2020.

.....

Γεώργιος Α. Σμυρνής

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

© Γεώργιος Α. Σμυρνής, 2020

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Η τροπική άλγεβρα και γεωμετρία αποτελούν μια σκοπιά των μαθηματικών διαφορετική από την κλασική άλγεβρα, της οποίας κύριο χαρακτηριστικό είναι η αντικατάσταση των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με τις πράξεις του μεγίστου και της πρόσθεσης, αντίστοιχα. Οι εφαρμογές τους ποικίλουν, και πρόσφατα υπάρχει προσπάθεια σύνδεσής τους με τον τομέα της μηχανικής μάθησης. Έχει αποδειχθεί ότι ένα από τα σημαντικότερα και πιο επιτυχημένα εργαλεία αυτού του κλάδου, δηλαδή τα νευρωνικά δίκτυα με τμηματικά γραμμικές ενεργοποιήσεις, μπορεί να μοντελοποιηθεί και να μελετηθεί με τη χρήση πολυωνύμων τα οποία κατασκευάζονται μέσω αυτής της μορφής άλγεβρας. Στην παρούσα εργασία, με απώτερο σκοπό την περαιτέρω σύνδεση μεταξύ των δύο αυτών κλάδων, εισάγουμε μία μορφή προσεγγιστικής διαίρεσης τροπικών πολυωνύμων, η οποία μας επιτρέπει να προσομοιώσουμε την κλασική Ευκλείδεια διαίρεση πολυωνύμων. Μέσω αυτής, λαμβάνουμε ένα πηλίκο και ένα υπόλοιπο, τα οποία είναι τέτοια ώστε το αποτέλεσμα της διαίρεσης αφενός να είναι μικρότερο από το διαιρετέο, αφετέρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό που να ικανοποιεί αυτήν την ιδιότητα. Χρησιμοποιώντας ιδέες από τη διαδικασία διαίρεσης αυτή, παρουσιάζουμε ορισμένες μεθόδους για την μείωση του μεγέθους του κρυφού επιπέδου νευρωνικών δικτύων, τα οποία είναι ήδη εκπαιδευμένα για την επίλυση ενός προβλήματος ταξινόμησης, είτε δυαδικής είτε πολλαπλών κλάσεων. Οι μέθοδοι αυτοί αποσκοπούν στην προσέγγιση των τροπικών πολυωνύμων, μέσω των οποίων εκφράζονται τα νευρωνικά δίκτυα αυτά. Για την μελέτη των αποτελεσμάτων των μεθόδων μας, εκτελούμε πειράματα σε μερικές απλές βάσεις δεδομένων, και συγκεκριμένα τις IMDB Movie Review, MNIST και Fashion-MNIST. Τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε δείχνουν ότι οι μέθοδοί μας, οι οποίες στηρίζονται στην προσέγγιση της θεωρητικής δομής του δικτύου, έχουν την ικανότητα να διατηρούν σημαντικό κομμάτι της πληροφορίας που έχει ληφθεί κατά την εκπαίδευση, παρά τη μείωση του μεγέθους του δικτύου.

Λέξεις Κλειδιά: Τροπική Άλγεβρα, Τροπική Γεωμετρία, Μηχανική Μάθηση, Νευρωνικά Δίκτυα, Διαίρεση Τροπικών Πολυωνύμων, Ελαχιστοποίηση Νευρωνικών Δικτύων

Abstract

Tropical algebra and geometry constitute a view of mathematics different from classical algebra, whose main characteristic is the substitution of the operations of addition and multiplication by the operations of maximum and addition, respectively. Their applications are varied, and recently there has been effort to link them with the domain of machine learning. It has been proven that one of the most important and successful tools of this field, namely neural networks with piecewise linear activations, can be modeled and studied using polynomials constructed via this form of algebra. In this thesis, with the ultimate goal of furthering the link between these two fields, we propose a form of approximate division of tropical polynomials, which allows us to simulate the classic Euclidean polynomial division. Via this process, we receive a quotient and a remainder such that the result of the division is, on the one hand, smaller than the dividend, while on the other hand it is the largest one which satisfies this property. Using ideas from this division process, we present certain methods for reducing the size of the hidden layer of networks which are already trained for a classification problem, either binary or multiclass. These methods seek to approximate the tropical polynomials, via which these networks are expressed. To study the results of our methods, we perform experiments in some simple databases, namely the IMDB Movie Review, MNIST and Fashion-MNIST. These results demonstrate that our methods, which are founded in the approximation of the theoretical structure of the network, have the ability to retain a significant portion of the information retained during the training of the network, despite the decrease of its size.

Keywords: Tropical Algebra, Tropical Geometry, Machine Learning, Neural Networks, Tropical Polynomial Division, Neural Network Minimization

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό, θέλω να αφιερώσω την παρούσα εργασία σε όσους με βοήθησαν στην έως τώρα πορεία μου.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Αργύρη και Κανέλα, για τη στήριξη που μου παρείχαν, για το γεγονός ότι με βοήθησαν να γίνω ο άνθρωπος που είμαι σήμερα, καθώς και για το ότι με άντεξαν τόσα χρόνια.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Πέτρο Μαραγκό, για τη βοήθεια που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας, καθώς και για την ώθηση που μου έδωσε για τη θεμελίωση της μετέπειτα ερευνητικής μου καριέρας.

Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τον, πλέον διδάκτορα, Γιώργο Ρετσινά, για τις πολύ χρήσιμες συμβουλές που μου παρείχε, κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους που έκανα έως τώρα, οι οποίοι βοήθησαν στο να μου μείνουν αξέχαστες οι αναμνήσεις των χρόνων μου ως προπτυχιακός φοιτητής.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	17
1.1	Θεωρητικό Πλαίσιο Εργασίας	18
1.2	Θεωρητική Συμβολή Εργασίας	19
1.3	Συμβολισμός	20
1.4	Διάρθρωση Εργασίας	20
2	Θεωρητικό Υπόβαθρο	23
2.1	Στοιχεία Αλγεβρικής Θεωρίας	24
2.1.1	Ομάδες, Δακτύλιοι, Πεδία	24
2.1.2	Ιδανικά (Ideals)	25
2.2	Πολυωνυμικοί Δακτύλιοι	26
2.2.1	Ρίζες Πολυωνύμου	26
2.2.2	Διαίρεση Πολυωνύμων Μίας Μεταβλητής	28
2.3	Βάσεις Groebner	28
2.3.1	Διαίρεση Πολυωνύμων Πολλών Μεταβλητών	28
2.3.2	Βάσεις Groebner - Βασικοί Ορισμοί	30
2.3.3	Αλγόριθμος για την Εύρεση Βάσεων Groebner	33
2.3.4	Παράδειγμα χρήσης βάσεων Groebner σε HMMs	34
2.4	Στοιχεία Τροπικής Άλγεβρας	37
2.4.1	Max-Plus και Min-Plus ημιδακτύλιοι	37
2.4.2	Maslov Dequantization	38
2.5	Τροπικά Πολυώνυμα	38
2.5.1	Τροπική Άλγεβρα και Μηχανική Μάθηση	42
3	Διαίρεση Τροπικών Πολυωνύμων	45
3.1	Ακριβής Διαίρεση Τροπικών Πολυωνύμων	46
3.2	Προσεγγιστική Διαίρεση των Τροπικών Πολυωνύμων	49
3.3	Διαίρεση Τροπικών Πολυωνύμων με Πολλαπλούς Διαιρέτες	53
3.4	Παραδείγματα	54
3.5	Διαίρεση Τροπικών Πολυωνύμων ως Πρόβλημα Γενικευμένου Γεωμετρικού Προγραμματισμού	57
3.5.1	Θεωρία Γεωμετρικού Προγραμματισμού	57
3.5.2	Αλγόριθμος Διάρεσης με Γενικευμένο Γεωμετρικό Προγραμματισμό	59
4	Ελαχιστοποίηση Νευρωνικών Δικτύων	61
4.1	Τροπική Ερμηνεία των Νευρωνικών Δικτύων με Τμηματικά Γραμμικές Ενεργοποιήσεις	63
4.1.1	Νευρωνικά Δίκτυα ως Τροπικές Ρητές Συναρτήσεις	63

4.1.2	Επέκταση Μοντέλου σε Συνελικτικά Δίκτυα	64
4.1.3	Περίπτωση Δικτύων Ενός Κρυφού Επιπέδου - Μίας Εξόδου	66
4.2	Διαίρεση για Ελαχιστοποίηση Σφάλματος	67
4.2.1	Άμεση Προσέγγιση του Newton Πολυτόπου	68
4.3	Πρακτική Εφαρμογή σε Ελαχιστοποίηση Δικτύων	70
4.3.1	Προσέγγιση με Χρήση Ευριστικής Μεθόδου	70
4.3.2	Ντετερμινιστική Μέθοδος Προσέγγισης	73
4.3.3	Παραδείγματα	76
4.4	Ελαχιστοποίηση Νευρωνικών Δικτύων Πολλαπλών Νευρώνων Εξόδου	80
4.4.1	Ελαχιστοποίηση με Μετασχηματισμό Κορυφών	80
4.4.2	Ελαχιστοποίηση ως Πρόβλημα Ενός-Εναντίον-Όλων	83
4.5	Προσθήκη Δεύτερου Βήματος με Feature Approximation	86
5	Πειραματική Ανάλυση	91
5.1	Ελαχιστοποίηση σε Προβλήματα Δυαδικής Ταξινόμησης	92
5.1.1	Σύνολο Δεδομένων IMDB - Αρχική Μέθοδος	92
5.1.2	Σύνολο Δεδομένων IMDB - Επαναληπτική Μέθοδος	95
5.1.3	MNIST Σύνολο Δεδομένων - Ζεύγη 4/9, 3/5	96
5.1.4	MNIST Σύνολο Δεδομένων - Άρτιοι/Περιττοί	97
5.2	Ελαχιστοποίηση σε Προβλήματα Ταξινόμησης Πολλών Κλάσεων	98
5.2.1	Σύνολο MNIST, Ευριστική Μέθοδος	98
5.2.2	Σύνολο MNIST, Ντετερμινιστική Μέθοδος	99
5.2.3	Σύνολο F-MNIST, Ντετερμινιστική Μέθοδος	99
5.2.4	Σύγκριση με Μέθοδο Αναφοράς	100
6	Επίλογος	101
6.1	Αποτελέσματα και Συνεισφορές	102
6.2	Μελλοντικές Κατευθύνσεις	102

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Παράδειγμα νευρωνικού δικτύου.	20
2.1	Παραδείγματα συνόλων $V(p)$, για διάφορα πολυώνυμα. Παρατηρούμε ότι στις συγκεκριμένες περιπτώσεις, τα σύνολα ριζών είναι μία ευθεία και οι γνωστές κωνικές τομές.	27
2.2	Επιτρεπτές πιθανότητες για το HMM-1 που παρουσιάστηκε.	36
2.3	Παραδείγματα τροπικών πολυωνύμων.	39
2.4	Πολύτοπα τροπικών πολυωνύμων. Σχήμα από τα [43], [45].	40
3.1	Ρίζες του πολυωνύμου $\max(x - 1, y - 1, 0)$. Σχήμα από το [43].	46
3.2	Παραγοντοποίηση του $\max(5x, 4x + 0.8, 3x + 1.2, 2x + 1.5, x + 1, 0)$, μέσω δύο αντιγράφων που διαφέρουν κατά 1 οριζόντια και κατά $r = 0.3$ κατακόρυφα.	48
3.3	Μετατοπίσεις διαιρέτη κατά την εκτέλεση της προσεγγιστικής διαίρεσης, για $p(x) = \max(3x, 2x + 1.5, x + 1, 0)$, $d(x) = \max(x, 0)$	52
3.4	Διαίρεση του $\max(3x, 2x + 1.5, x + 1, 0)$ με το $\max(x + 1, 0)$. Σχήμα από το [45].	56
3.5	Διαίρεση του $\max(3x, 2x + 1.5, x + 1, 0)$ με το $\max(x, 0)$. Σχήμα από το [45].	56
3.6	Διαίρεση του $\max(3x, 2x + 1.5, x + 1, 0)$ με τα $\max(x, 0), \max(x + 0.8, 0)$	57
4.1	Τροπική ρητή συνάρτηση $f(x) = p_1(x) - p_2(x)$, όπου $p_1(x) = \max(3x, 2x + 1, 0)$ και $p_2(x) = \max(2x - 1, 0)$	64
4.2	Διαισθητική λειτουργία Φάσης 1 του Αλγορίθμου 7.	72
4.3	Κατασκευή Διαιρέτη μέσω του Αλγορίθμου 8.	75
4.4	Παραδείγματα προσέγγισης νευρωνικού δικτύου.	79
4.5	Δομή πολυτόπων εξόδου.	81
4.6	Διαδικασία ελαχιστοποίησης Ενός-Εναντιόν-Όλων.	85
4.7	Άνω όριο της (4.55).	88
4.8	Λόγος επαναληπτικών βημάτων μεθόδου αναφοράς προς δικής μας μεθόδου. Οι υπολογισμοί έγιναν για $n_1 = 1000$	89
5.1	Ελαχιστοποίηση Δικτύου.	93
5.2	Εξαγωγείς χαρακτηριστικών (feature extractors) των μοντέλων που χρησιμοποιούμε.	94

Κατάλογος Πινάκων

5.1	Μέση ακρίβεια και τυπική απόκλιση στο σύνολο ελέγχου (IMDB). Η μέθοδος αναφοράς αποτελείται από απλή εκπαίδευση νέου δικτύου, αγνοώντας το αρχικό. Επέκταση Πίνακα από το [45].	95
5.2	Μέση ακρίβεια και τυπική απόκλιση στο σύνολο ελέγχου, πρόβλημα (4.16) (IMDB). Πίνακας από το [43].	95
5.3	Σύγκριση χρόνου εκτέλεσης (IMDB). Επέκταση Πίνακα από τα [43], [45].	96
5.4	Μέση ακρίβεια και τυπική απόκλιση στο σύνολο ελέγχου (IMDB). Επέκταση Πίνακα από το [45].	96
5.5	Ακρίβεια στο σύνολο ελέγχου (MNIST). Επέκταση Πίνακα από το [45].	97
5.6	Ακρίβεια στο σύνολο ελέγχου (MNIST, άρτιοι/περιττοί). Επέκταση Πίνακα από το [43].	97
5.7	Ακρίβεια στο MNIST, Ελαχιστοποίηση Ενότητας 4.3.1.	98
5.8	Ακρίβεια στο MNIST, Ελαχιστοποίηση Ενότητας 4.3.2.	99
5.9	Ακρίβεια στο Fashion-MNIST, Ελαχιστοποίηση Ενότητας 4.3.2.	100
5.10	Ακρίβεια/Τυπική Απόκλιση. Σύγκριση μεθόδου Ενότητας 4.5 και μεθόδου αναφοράς [27].	100

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Θεωρητικό Πλαίσιο Εργασίας

Ο κλάδος της τροπικής άλγεβρας και γεωμετρίας (επίσης γνωστής ως max-plus άλγεβρα) αποτελεί έναν κλάδο των μαθηματικών που ασχολείται με την μελέτη του τροπικού ημιδακτυλίου, όπου οι πράξεις εκτελούνται με τη χρήση μεγίστου αντί πρόσθεσης και πρόσθεσης αντί πολλαπλασιασμού. Αυτή η μορφή άλγεβρας υπάρχει εδώ και μεγάλο χρονικό διάστημα στο χώρο των μαθηματικών [15], και επιτρέπει μια πιο αφηρημένη μαθηματική μοντελοποίηση πολλών εφαρμογών. Ενδεικτικά, μπορούμε να αναφέρουμε τις εξής:

- Στο [5] γίνεται μελέτη της χρήσης max-plus άλγεβρας για την επίλυση συστημάτων εξισώσεων που ορίζονται πάνω στην άλγεβρα αυτή. Η μελέτη αυτών των max-γραμμικών συστημάτων επιτρέπει την έκφραση μοντέλων τα οποία στηρίζονται στο μέγιστο μεταξύ ορισμένων επιλογών για την κατασκευή της εξόδου τους. Τα συστήματα αυτά μπορούν να επεκταθούν για την κάλυψη χρονικά εξελισσόμενων μοντέλων [1], καθώς και συστήματα ορισμένα σε γενικότερα πλέγματα (lattices), πάνω στα οποία μπορούμε να ορίσουμε αντίστοιχες πράξεις με αυτές του μεγίστου και του ελαχίστου, η ανάλυση των οποίων γίνεται στο [33].
- Μια κλασικότερη χρήση της συγκεκριμένης άλγεβρας γίνεται και στο πεδίο της όρασης υπολογιστών [32], [42]. Στην περίπτωση αυτή, τα φίλτρα εικόνων που χρησιμοποιούν αυτήν την άλγεβρα ονομάζονται μορφολογικά φίλτρα, και η εφαρμογή τους πάνω σε μια εικόνα γίνεται με αντίστοιχο τρόπο με την κλασική μορφή συνέλιξης. Επιπλέον, η απλή τους μαθηματική έκφραση και υλοποίηση τα καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμα για τη γρήγορη επεξεργασία και εξαγωγή χαρακτηριστικών από εικόνες.
- Η χρήση αυτής της άλγεβρας έχει και εφαρμογή στη μελέτη αλγορίθμων και μοντέλων που χρησιμοποιούνται στη μηχανική μάθηση. Ενδεικτικά, η δυϊκή min-plus εκδοχή της (της οποίας την ισοδυναμία με την προηγούμενη θα αναλύσουμε στη συνέχεια), έχει εφαρμογή στη μελέτη αυτομάτων, τα οποία εκφράζουν πιθανότητες μέσω των οποίων το αυτόματο μεταβαίνει από τη μία κατάσταση στην άλλη [48]. Επιπλέον, η ίδια άλγεβρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη μαρκοβιανών μοντέλων, καθώς ο αλγόριθμος Viterbi για την εύρεση της πιθανότερης ακολουθίας καταστάσεων μπορεί να εκφραστεί μέσω αυτής [47].

Πρόσφατα, έχει γίνει προσπάθεια εφαρμογής των ιδεών αυτών στο πεδίο των νευρωνικών δικτύων. Τα δίκτυα αυτά, αποτελούμενα από πολλούς νευρώνες, διαμορφωμένους κατάλληλα σε επίπεδα, αποτελούν ένα πολύ σημαντικό εργαλείο στη μηχανική μάθηση. Η χρησιμότητά τους, ειδικά στην περίπτωση που περιλαμβάνουν πολλά επίπεδα νευρώνων, έχει παίξει καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη του συγκεκριμένου κλάδου. Ενώ πηγές όπως η [18] ασχολούνται αμιγώς με τη διαμόρφωση των δικτύων αυτών και τεχνικές για την εκπαίδευσή τους, πρόσφατα έχει γίνει προσπάθεια σύνδεσής τους με τον κλάδο της τροπικής άλγεβρας. Πιο συγκεκριμένα, στα [10], [50] γίνεται μελέτη του κατά πόσο νευρωνικά δίκτυα με τμηματικές γραμμικές ενεργοποιήσεις μπορούν να εκφραστούν με τη χρήση τροπικής άλγεβρας. Οι εργασίες αυτές αποδεικνύουν ότι τέτοιου είδους δίκτυα μπορούν να αναπαρασταθούν πλήρως με τη χρήση πολυωνύμων σε αυτόν τον ημιδακτύλιο, κάτι που θα εξετάσουμε αναλυτικότερα στη συνέχεια.

Προφανώς, αυτή η σύνδεση δεν αποτελεί τη μοναδική σχέση της τροπικής άλγεβρας και γεωμετρίας με τον κλάδο της μηχανικής μάθησης. Στη συνέχεια της παρούσας εργασίας, θα αναφέρουμε και άλλες τέτοιες ενδεικτικές συνδέσεις. Ωστόσο, δεδομένου του γεγονότος ότι τα νευρωνικά δίκτυα με τις διάφορες μορφές τους πλέον είναι συνώνυμα της μηχανικής

μάθησης, η μελέτη τους μέσω αυτού του εναλλακτικού τρόπου αποτελεί και μια από τις πλέον σημαντικότερες εφαρμογές της τροπικής άλγεβρας και γεωμετρίας στο συγκεκριμένο τομέα. Επιπρόσθετα, αρκετές τεχνικές που εφαρμόζονται στα νευρωνικά δίκτυα δε δίνουν έμφαση στο θεωρητικό υπόβαθρο της δομής των δικτύων αυτών. Συνεπώς, είναι χρήσιμο σε αυτό το πλαίσιο να γίνει μια πιο αναλυτική, θεωρητική μελέτη των νευρωνικών δικτύων αυτού του τύπου, με σκοπό την επίλυση προβλημάτων που παρουσιάζονται κατά την εφαρμογή τους.

1.2 Θεωρητική Συμβολή Εργασίας

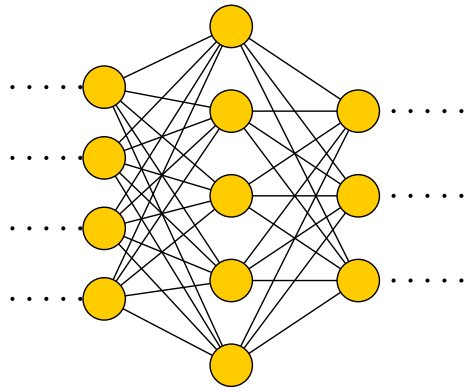
Με βάση το πλαίσιο που περιγράφηκε παραπάνω, η συμβολή της παρούσας εργασίας κινείται σε δύο βασικούς άξονες.

Ο πρώτος άξονας αφορά το κομμάτι της τροπικής άλγεβρας, και πιο συγκεκριμένα τη μελέτη των τροπικών πολυωνύμων. Όπως θα δούμε και παρακάτω, με τη χρήση των πράξεων της τροπικής άλγεβρας μπορεί να γίνει και ορισμός πολυωνύμων στον αντίστοιχο ημιδακτύλιο, προφανώς καλούμενα τροπικά πολυώνυμα. Τα πολυώνυμα αυτά αποτελούν έναν από τους συνδετικούς κρίκους της τροπικής άλγεβρας και γεωμετρίας, καθώς υπάρχει στενή σύνδεση μεταξύ αυτών και των καμπυλών που μπορούμε να ορίσουμε με βάση τον τροπικό ημιδακτύλιο. Προσπαθώντας να προσαρμόσουμε τη διαίρεση κλασικών πολυωνύμων, η οποία αποτελεί πρόβλημα με ευρέως γνωστή λύση, σε αντίστοιχη μορφή διαίρεσης σε τροπικά πολυώνυμα, παρουσιάζεται ένα πρόβλημα το οποίο αποτελεί τροχοπέδη στην προσπάθεια αυτή. Συγκεκριμένα, η έλλειψη αντίθετου στοιχείου στην πράξη της «πρόσθεσης» στον τροπικό ημιδακτύλιο μας εμποδίζει από το να ορίσουμε ακριβή διαίρεση δύο πολυωνύμων (δηλαδή, μια πράξη που να μας δίνει πηλίκο και υπόλοιπο και να διατηρεί την ισότητα των αποτελεσμάτων), παρά μόνο σε ειδικές περιπτώσεις.

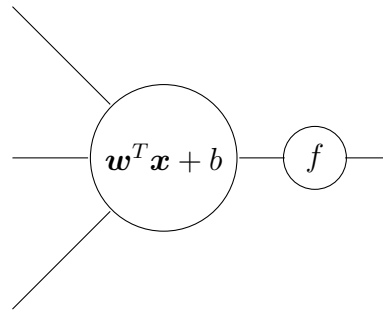
Για να αποφύγουμε το πρόβλημα αυτό, εισάγουμε την τεχνική της προσεγγιστικής διαίρεσης τροπικών πολυωνύμων. Λαμβάνουμε αφορμή από την τεχνική του *residuation*, με βάση την οποία ο «αντίθετος» τελεστής μιας πράξης είναι αυτός που δίνει το μεγαλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, που παράλληλα είναι μικρότερο από αυτό που θα μας έδινε ένας πραγματικός αντίθετος. Με βάση αυτό, ορίζουμε την προσεγγιστική διαίρεση τροπικών πολυωνύμων ως τη διαδικασία που μας δίνει ένα πηλίκο και ένα υπόλοιπο, τα οποία είναι τέτοια ώστε το προκύπτον πολυώνυμο να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο, ενώ παράλληλα να βρίσκεται κάτω από το διαιρετέο. Παράλληλα, παρέχουμε και έναν αλγόριθμο για τη διαδικασία αυτή και αποδεικνύουμε την ορθότητά του.

Ο δεύτερος άξονας της συμβολής της εργασίας αφορά τη μηχανική μάθηση, και συγκεκριμένα τη μελέτη νευρωνικών δικτύων με τμηματικά γραμμικές ενεργοποιήσεις. Αναλυτικότερα, όπως έχει αναδειχθεί μέσω πρόσφατων αναφορών στο συγκεκριμένο τομέα [10], [50], τα δίκτυα αυτά είναι στενά συνδεδεμένα με την έννοια των τροπικών πολυωνύμων και μπορούν να αναπαρασταθούν μέσω αυτών. Τα δίκτυα αυτά χρησιμοποιούνται ευρέως, αλλά παράλληλα υπάρχει ακόμα πολύ μεγάλο περιθώριο θεωρητικής τους μελέτης και ανάλυσης της συμπεριφοράς τους, μέσω της μαθηματικής τους αναπαράστασης.

Η εργασία αυτή προσπαθεί να διαφωτίσει αυτήν την θεωρητική σκοπιά των νευρωνικών δικτύων, μέσω ιδεών που μπορούμε να λάβουμε από την προσεγγιστική διαίρεση πολυωνύμων. Πιο συγκεκριμένα, προτείνουμε μια μέθοδο για τη μείωση του μεγέθους του κρυφού επιπέδου ενός δικτύου, στηριζόμενοι στην περιγραφή του με τη χρήση τροπικών πολυωνύμων. Εκτός από θεωρητικό ενδιαφέρον, δηλαδή τον καθορισμό της ελάχιστης δυνατής πληροφορίας που περιέχει η δομή του δικτύου, η οποία απαιτείται για τη διατήρηση της ακρίβειάς του, η συμβολή αυτή έχει και έντονο πρακτικό χαρακτήρα. Πράγματι, η σμίχρυνση ενός δικτύου



(α') Νευρωνικό Δίκτυο



(β') Μεμονωμένος νευρώνας, f μια συνάρτηση ενεργοποίησης.

Σχήμα 1.1: Παράδειγμα νευρωνικού δικτύου.

μειώνει τόσο το χώρο που απαιτείται για την αποθήκευση των βαρών, όσο και το χρόνο που χρειάζεται για τη δημιουργία προβλέψεων. Πιθανές επεκτάσεις των ιδεών που παρουσιάζουμε σε πολυπλοκότερες αρχιτεκτονικές έχουν ιδιαίτερα μεγάλη σημασία στη σύγχρονη μηχανική μάθηση, η οποία χαρακτηρίζεται από περίπλοκες αρχιτεκτονικές δικτύων και εξαιρετικά μεγάλο όγκο δεδομένων, οπότε η μείωση του μεγέθους των δικτύων που χρησιμοποιούνται έχει πολύ μεγάλη σημασία για την πρακτική τους εφαρμογή.

1.3 Συμβολισμός

Στο σημείο αυτό, θεωρείται χρήσιμο να σημειωθούν τα παρακάτω στοιχεία για το συμβολισμό που χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία:

- Τα σύμβολα \neg , \wedge , \vee , όπου αυτά χρησιμοποιούνται, έχουν τη σημασία που έχουν και στην προτασιακή λογική (not, and, or αντίστοιχα) και για την αναπαράσταση μεγίστου και ελαχίστου χρησιμοποιούμε ρητά τα σύμβολα \max , \min .
- Τα διανύσματα αναπαρίστανται με bold-faced, πεζά γράμματα.
- Οι πίνακες αναπαρίστανται με bold-faced, κεφαλαία γράμματα.
- Για την έκφραση των πράξεων στις ομάδες και στους δακτυλίους, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα των κλασικών πράξεων $+$, \cdot , στα οποία δίνουμε μια αφηρημένη έννοια. Ο λόγος που δε χρησιμοποιούμε τα σύμβολα \oplus και \odot/\otimes , που χρησιμοποιούνται από άλλες ερευνητικές ομάδες για τον ίδιο σκοπό, είναι ότι το πρώτο χρησιμοποιείται ευρέως για να εκφράσει το Minkowski άθροισμα δύο συνόλων, ενώ τα δεύτερα κρίθηκε ότι οδηγούν σε σύγχυση, καθώς για παράδειγμα το σύμβολο \otimes χρησιμοποιείται για να εκφράσει την πράξη εξωτερικού γινομένου ή το Kronecker γινόμενο δύο πινάκων.

1.4 Διάρθρωση Εργασίας

Η παρούσα εργασία διαμορφώνεται στη συνέχεια ως εξής:

- Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται παρουσίαση των βασικών θεωρητικών στοιχείων πάνω στα οποία στηρίζεται η παρούσα εργασία. Συγκεκριμένα, αναλύονται βασικά στοιχεία τόσο

της κλασικής όσο και της τροπικής άλγεβρας, τα οποία θα μας επιτρέψουν στη συνέχεια να δομήσουμε τη διαίρεση τροπικών πολυωνύμων που χρησιμοποιούμε.

- Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται εισαγωγή μιας μεθόδου διαίρεσης τροπικών πολυωνύμων. Όπως αναφέρθηκε, το πρόβλημα της διαίρεσης τροπικών πολυωνύμων δεν είναι καλώς ορισμένο, καθώς δεν υπάρχει λύση για όλα τα πολυώνυμα εισόδου. Αντί αυτού, μετασχηματίζουμε το πρόβλημα σε μια προσεγγιστική εκδοχή του, της οποίας και παρουσιάζουμε τη λύση.
- Στο Κεφάλαιο 4 μελετάμε τρόπους μέσω των οποίων μπορούμε να κάνουμε χρήση των ιδεών που μας παρέχονται από την προαναφερθείσα μέθοδο προσεγγιστικής διαίρεσης πολυωνύμων, με σκοπό τη μείωση του μεγέθους του κρυφού επιπέδου ενός δικτύου δύο επιπέδων, με τμηματικά γραμμικές ενεργοποιήσεις.
- Στο Κεφάλαιο 5 εκτελούμε πειραματική μελέτη των μεθόδων που παρουσιάσαμε, με σκοπό τη σύγκριση ήδη εκπαιδευμένων δικτύων.
- Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε συνοπτικά τα κύρια αποτελέσματα αυτής της εργασίας, καθώς και πιθανές μελλοντικές επεκτάσεις των κεντρικών ιδεών της.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό Υπόβαθρο

2.1 Στοιχεία Αλγεβρικής Θεωρίας

Στο σημείο αυτό, παραθέτουμε ορισμένα βασικά στοιχεία, όσον αφορά τις αλγεβρικές οντότητες που θα χρησιμοποιηθούν στη μετέπειτα ανάλυση, τα οποία παρουσιάζονται εκτενώς στην αντίστοιχη βιβλιογραφία [13], [17], [24]. Τα στοιχεία αυτά αποτελούν θεμέλια της θεωρητικής μας μελέτης, οπότε θεωρείται σημαντικό να παρουσιαστούν εν συντομία, πριν την εις βάθος ανάλυση στα επόμενα τμήματα της εργασίας.

2.1.1 Ομάδες, Δακτύλιοι, Πεδία

Παρακάτω παρουσιάζουμε βασικούς ορισμούς από την κλασική άλγεβρα.

Ορισμός 2.1 (Ομάδα). Έστω ένα σύνολο S , καθώς και μια πράξη $+: S \times S \rightarrow S$ η οποία:

- Είναι προσεταιριστική: $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in S$.
- Έχει ουδέτερο στοιχείο: $\exists 0 \in S : x + 0 = x, \forall x \in S$.
- Έχει αντίθετο στοιχείο: $\forall x \in S : \exists -x \in S : x + (-x) = 0$.

Το σύνολο αυτό, σε συνδυασμό με την πράξη $+$, αποτελούν μια ομάδα, που συμβολίζουμε με $(S, +)$. Αν επιπλέον η πράξη $+$ είναι αντιμεταθετική, τότε η ομάδα ονομάζεται αντιμεταθετική (αβελιανή) ομάδα.

Ένα βασικό παράδειγμα ομάδας αποτελούν τα $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, μαζί με την πράξη της αριθμητικής πρόσθεσης.

Ορισμός 2.2 (Δακτύλιος). Έστω μια αντιμεταθετική ομάδα $(S, +)$. Έστω επίσης μια πράξη $\cdot : S \times S \rightarrow S$, η οποία έχει τις εξής ιδιότητες:

- Είναι προσεταιριστική.
- Είναι επιμεριστική ως προς την $+$: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
- Έχει ουδέτερο στοιχείο: $\exists 1 \in S : x \cdot 1 = x, \forall x \in S$.

Τότε ο $(S, +, \cdot)$ ονομάζεται δακτύλιος (αντιμεταθετικός αν η \cdot είναι αντιμεταθετική).

Τα προαναφερθέντα σύνολα, μαζί με την πράξη του αριθμητικού πολλαπλασιασμού, αποτελούν δακτυλίους.

Ορισμός 2.3 (Πεδίο). Έστω ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος $(S, +, \cdot)$. Ο δακτύλιος αυτός καλείται πεδίο, αν κάθε στοιχείο εκτός του 0 έχει αντίστροφο ως προς την \cdot , δηλαδή:

$$\exists x^{-1} : x \cdot x^{-1} = 1, \forall x \in S \setminus \{0\} \quad (2.1)$$

Παράδειγμα πεδίου αποτελεί το σύνολο των πραγματικών αριθμών, καθώς για κάθε μη μηδενικό του στοιχείο υπάρχει πολλαπλασιαστικός αντίστροφος. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλα παραδείγματα πεδίων, με πράξεις πέρα του πολλαπλασιασμού με τον κλασικό ορισμό.

Θεώρημα 2.1. Το σύνολο $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$, όπου p πρώτος, μαζί με τις πράξεις:

$$x + y = (x + y) \bmod p \quad (2.2)$$

$$x \cdot y = (xy) \bmod p \quad (2.3)$$

είναι πεδίο.

Απόδειξη. Κατά προφανή τρόπο, το σύνολο αυτό αποτελεί δακτύλιο, καθώς οι πράξεις αυτές ικανοποιούν τις απαραίτητες ιδιότητες. Το γεγονός ότι είναι πεδίο μεταφράζεται στην απαίτηση να ισχύει το παρακάτω:

$$\forall x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} : \exists y : (xy) \bmod p = 1 \quad (2.4)$$

Ο y αποτελεί τον *πολλαπλασιαστικό αντίστροφο* του x modulo p , και είναι μοναδικός στην περίπτωση που $\gcd(x, p) = 1$. Το τελευταίο ισχύει, καθώς $x < p$ και p πρώτος. Συνεπώς, το $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ αποτελεί πεδίο. \square

Στη συνέχεια της εργασίας αυτής, θα ασχοληθούμε με **ημιομάδες** και **ημιδακτυλίους**. Αυτά διαφέρουν από τα παραπάνω στο ότι δεν απαιτείται από την πράξη $+$ να έχει αντίθετο στοιχείο. Για παράδειγμα, το $(\mathbb{N}, +)$ δεν είναι ομάδα, καθώς η πράξη της πρόσθεσης δεν έχει αντίθετο στοιχείο στους φυσικούς αριθμούς. Ωστόσο, αποτελεί ημιομάδα, καθώς οι υπόλοιπες ιδιότητες ισχύουν κανονικά.

2.1.2 Ιδανικά (Ideals)

Στα πλαίσια της παραπάνω θεωρίας, χρήσιμος θα είναι και ο ορισμός της έννοιας του **ιδανικού (ideal)** I σε έναν δακτύλιο.

Ορισμός 2.4 (Ιδανικό). *Έστω ένας δακτύλιος $(S, +, \cdot)$. Ως ιδανικό I σε αυτόν τον δακτύλιο ορίζουμε κάθε υποομάδα της ομάδας $(S, +)$, η οποία έχει επιπλέον την ιδιότητα:*

$$x \in I \Rightarrow \lambda \cdot x \in I, \forall \lambda \in S \quad (2.5)$$

Η παραπάνω έννοια αντιστοιχεί, πρακτικά, σε ένα υποσύνολο του S το οποίο είναι κλειστό ως προς τις κλιμακώσεις των στοιχείων του. Για παράδειγμα, το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} αποτελεί ιδανικό του εαυτού του, αλλά όχι του δακτυλίου των μιγαδικών αριθμών, καθώς δεν είναι κλειστό ως προς κλιμακώσεις με μιγαδικούς συντελεστές.

Θεώρημα 2.2. *Έστω ένας δακτύλιος $(S, +, \cdot)$, καθώς και ένα σύνολο στοιχείων του S , έστω $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Το σύνολο:*

$$I = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \{ \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_n \cdot x_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in S \} \quad (2.6)$$

*αποτελεί ένα ιδανικό του S . Επιπλέον, θα λέμε ότι το σύνολο $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ αποτελεί την **γεννήτρια** του ιδανικού.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι προφανής, λόγω της κλειστότητας της πράξης \cdot , οπότε και $\lambda \in S \Rightarrow \kappa \lambda \in S, \forall \kappa \in S$. Με βάση αυτό, και το σύνολο I είναι κλειστό ως προς την πράξη \cdot , άρα αποτελεί ιδανικό. \square

Περισσότερα στοιχεία για το ρόλο της έννοιας του ιδανικού θα δούμε στην αμέσως επόμενη ενότητα. Επιπλέον, για λόγους απλότητας στο συμβολισμό, στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου με την παράθεση στοιχείων θα συμβολίζουμε τον πολλαπλασιασμό, ενώ παράλληλα λόγω της αφηρημένης έννοιας των συμβόλων υπονοούμε ότι τα συμπεράσματά μας ισχύουν για κάθε δακτύλιο.

2.2 Πολυωνυμικοί Δακτύλιοι

Με βάση τις παραπάνω έννοιες, μπορούμε να ορίσουμε μια ειδική κατηγορία δακτυλίων, τους πολυωνυμικούς δακτυλίους. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε ένα πεδίο $K = (S, +, \cdot)$, καθώς και μία μεταβλητή $x \in S$. Μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 2.5 (Πολυώνυμο). Ως πολυώνυμο στο πεδίο K , ονομάζουμε κάθε συνάρτηση της μορφής:

$$p(x) = \sum_{i=1}^k (c_i x^{a_i}), \quad x, c_i \in S, \quad a_i \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

Ως $K[x]$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των πολυωνύμων στο K . Θα συμβολίζουμε επίσης το βαθμό του πολυωνύμου ως $\deg(p)$ και τον όρο μεγαλύτερου βαθμού (leading term) ως $LT(p)$.

Θεώρημα 2.3. Το σύνολο $K[x]$, μαζί με τις πράξεις $+$, \cdot , είναι δακτύλιος.

Απόδειξη. Η παραπάνω παρατήρηση προκύπτει άμεσα από τα εξής:

- Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δύο πολυωνύμων μας δίνουν πάντα ένα πολυώνυμο.
- Και οι δύο πράξεις είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές, ενώ παράλληλα ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση.
- Για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ υπάρχει αντίθετο πολυώνυμο $-p(x)$.

□

Τα παραπάνω μπορούν να επεκταθούν και στην περίπτωση που έχουμε πολυώνυμα πολλών μεταβλητών, δηλαδή, στην περίπτωση που έχουμε d διαστάσεις:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k (c_i \mathbf{x}^{a_i}), \quad c_i \in S, \quad \mathbf{x} \in S^d, \quad \mathbf{a}_i \in \mathbb{N}^d \quad (2.8)$$

Στην περίπτωση αυτή, το σύνολο όλων των παραπάνω πολυωνύμων το συμβολίζουμε ως $K[\mathbf{x}]$, ή και ως $K[x_1, x_2, \dots, x_d]$.

2.2.1 Ρίζες Πολυωνύμου

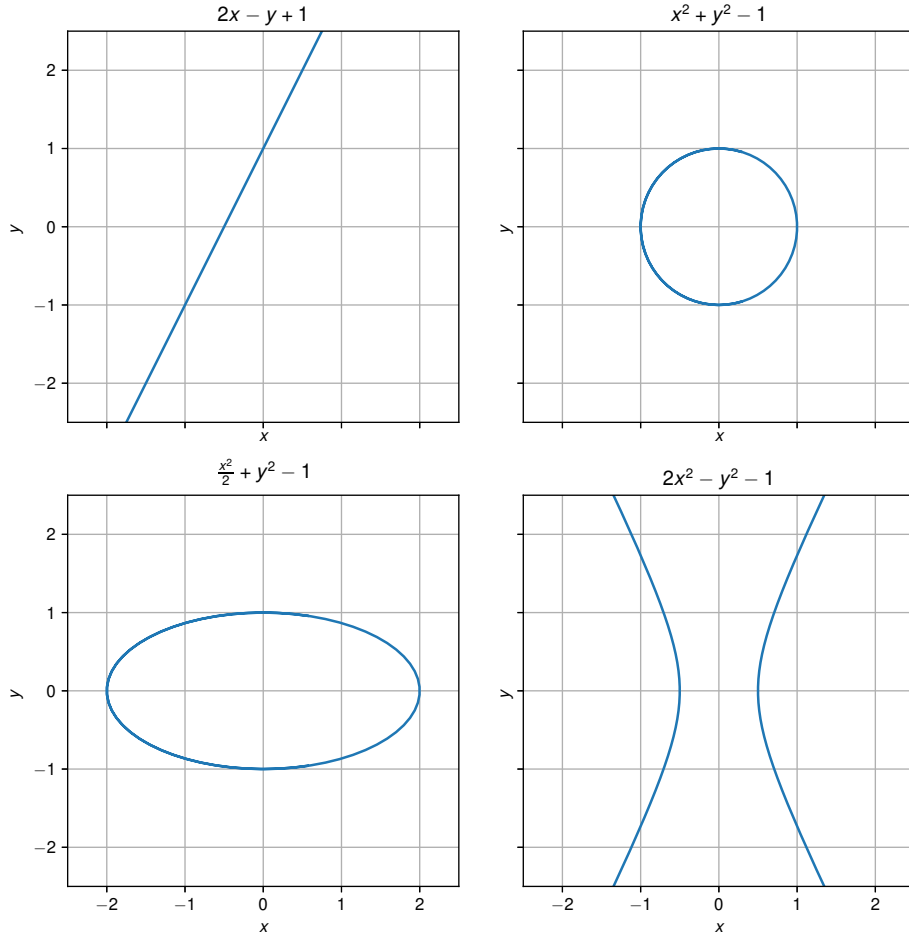
Σημαντικό στοιχείο στην ανάλυση πολυωνύμων είναι οι ρίζες τους. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε το εξής:

Ορισμός 2.6 (Σύνολο Ριζών Πολυωνύμου). Έστω ένα πολυώνυμο $p(\mathbf{x}) \in K[\mathbf{x}]$. Το σύνολο των ριζών $V(p) \subseteq \mathbb{R}^d$ του πολυωνύμου είναι το σύνολο:

$$V(p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : p(\mathbf{x}) = 0\} \quad (2.9)$$

Παραδείγματα τέτοιων συνόλων φαίνονται στο Σχήμα 2.1. Το παραπάνω σύνολο, στην περίπτωση που το πολυώνυμο είναι μονοδιάστατο, μπορεί επίσης να αναλυθεί μέσω διαίρεσης πολυωνύμων. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει ότι:

$$\alpha \in V(p) \Leftrightarrow p(x) = (x - \alpha)q(x) \quad (2.10)$$



Σχήμα 2.1: Παραδείγματα συνόλων $V(p)$, για διάφορα πολυώνυμα. Παρατηρούμε ότι στις συγκεκριμένες περιπτώσεις, τα σύνολα ριζών είναι μία ευθεία και οι γνωστές κωνικές τομές.

Συνεπώς, οι γραμμικοί παράγοντες του πολυωνύμου $p(x)$ καθορίζουν και τις ρίζες του.

Τέλος, εδώ μπορούμε να δούμε μια χρησιμότητα της έννοιας του ιδανικού. Έστω το σύνολο:

$$I = \langle p \rangle = \{q(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \mid q(\mathbf{x}) \in K[\mathbf{x}]\} \quad (2.11)$$

το οποίο, κατά προφανή τρόπο, αποτελεί ένα ιδανικό του πολυωνυμικού δακτυλίου $K[\mathbf{x}]$. Μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει το εξής:

Θεώρημα 2.4. Έστω το ιδανικό $I = \langle p \rangle$, καθώς και το εξής σύνολο:

$$V(I) = \bigcap_{q \in I} V(q) \quad (2.12)$$

δηλαδή η τομή των συνόλων ριζών όλων των πολυωνύμων που ανήκουν στο I . Ισχύει ότι:

$$V(I) = V(p) \quad (2.13)$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, ισχύει ότι $V(I) \subseteq V(p)$, δεδομένου ότι $p \in I$, οπότε το σύνολο $V(p)$ συμπεριλαμβάνεται στην τομή που παράγει το $V(I)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $V(p) \subseteq V(I)$. Πράγματι, έστω $r \in I$, οπότε υπάρχει $q \in K[\mathbf{x}]$, ώστε $r(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) \cdot p(\mathbf{x})$. Συνεπώς ισχύει ότι, αν α μια ρίζα του p :

$$p(\alpha) = 0 \Rightarrow q(\alpha)p(\alpha) = 0 \Rightarrow r(\alpha) = 0 \quad (2.14)$$

Συνεπώς $V(p) \subseteq V(I)$. Με βάση τα παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο. \square

2.2.2 Διαίρεση Πολυωνύμων Μίας Μεταβλητής

Ως ένα τελευταίο στοιχείο της βασικής θεωρίας πολυωνύμων, παρουσιάζουμε μία υπενθύμιση της διαδικασίας διαίρεσης ενός μονοδιάστατου πολυωνύμου $p(x)$, από ένα άλλο μονοδιάστατο πολυώνυμο $d(x)$.

Ορισμός 2.7. Ως **Ευκλείδεια Διαίρεση** ενός πολυωνύμου $p(x)$ από ένα άλλο $d(x)$ ορίζουμε τη διαδικασία εύρεσης δύο πολυωνύμων $q(x), r(x)$, τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} p(x) &= q(x)d(x) + r(x), \forall x \in K \\ \deg(r) &< \deg(d) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Κατά τα γνωστά, το $q(x)$ ονομάζεται πηλίκο και το $r(x)$ υπόλοιπο της διαίρεσης. Η διαδικασία εύρεσής τους παρουσιάζεται στον Αλγόριθμο 1. Όπως προαναφέρθηκε, στην περίπτωση μονοδιάστατων πολυωνύμων, το να είναι ένα στοιχείο a ρίζα του πολυωνύμου ισοδυναμεί με το πηλίκο της διαίρεσης αυτού του πολυωνύμου με το $x - a$ να δίνει μηδενικό υπόλοιπο. Επιπλέον, είναι ευρέως γνωστό ότι τα πολυώνυμα που προκύπτουν ως λύσεις στο πρόβλημα της διαίρεσης πολυωνύμων είναι μοναδικά στην περίπτωση μίας μεταβλητής.

Αλγόριθμος 1 Διαίρεση Πολυωνύμων Μίας Μεταβλητής

Είσοδος: Πολυώνυμα $p(x), d(x)$.

Έξοδος: Πολυώνυμα $q(x), r(x)$ που ικανοποιούν την (2.15).

```

 $q(x) \leftarrow 0$ 
 $r(x) \leftarrow p(x)$ 
while  $\deg(r) \geq \deg(d)$  do
     $q(x) \leftarrow q(x) + \frac{\text{LT}(r)}{\text{LT}(d)}$ 
     $r(x) \leftarrow r(x) - \frac{\text{LT}(r)}{\text{LT}(d)}d(x)$ 
end while

```

2.3 Βάσεις Groebner

2.3.1 Διαίρεση Πολυωνύμων Πολλών Μεταβλητών

Η κλασική διαδικασία διαίρεσης πολυωνύμων, όπως είδαμε παραπάνω, μπορεί να μας δώσει επαρκή στοιχεία για τη μελέτη πολυωνύμων μίας μεταβλητής. Ωστόσο, η ίδια διαδικασία, όπως αυτή παρουσιάστηκε, δεν είναι άμεσα γενικεύσιμη σε πολυώνυμα d μεταβλητών. Αυτό είναι προφανές, αν σκεφτούμε ότι για την εκτέλεση της χρειάζεται να γίνεται συστηματικά η επιλογή ενός όρου από το πολυώνυμο, ο οποίος θεωρούμε ότι έχει το μέγιστο βαθμό.

Το παραπάνω μπορεί να επιτευχθεί ορίζοντας μία διάταξη πάνω στους όρους του \mathbb{N}^d , με βάση την οποία καθορίζουμε τη σειρά των όρων. Παραδείγματα τέτοιων διατάξεων είναι τα εξής:

- Η **λεξικογραφική διάταξη**, με βάση την οποία, δεδομένης μίας διάταξης των μεταβλητών, διατάσσουμε τους όρους σε αύξουσα λεξικογραφική σειρά, δηλαδή θεωρώντας

κάθε μεταβλητή σαν «γράμμα» και κάθε όρο σαν «λέξη», με βάση τη διάταξη που θα προέκυπτε αλφαβητικά. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ότι $x < y$, τότε ορισμένα παραδείγματα αυτής της διάταξης είναι τα εξής:

$$\begin{aligned} \text{LT}(x^2y + 2xy + y^2) &= y^2 \\ \text{LT}(x^2y + 2xy) &= x^2y \end{aligned} \quad (2.16)$$

αφού θεωρούμε ότι $x^2y > xy$ (επειδή το y έχει ίδιο βαθμό και στα δύο) αλλά $y^2 > x^2y$ (αφού ο βαθμός του y έχει μεγαλύτερη σημασία, καθώς είναι μεγαλύτερος λεξικογραφικά).

- Η **διάταξη συνολικού βαθμού**, με τις ισοπαλίες να επιλύονται λεξικογραφικά. Αυτό σημαίνει ότι αθροίζουμε τους εκθέτες των όρων, και μετά από αυτούς βρίσκουμε αυτόν που δίνει το μεγαλύτερο άθροισμα. Ενδεικτικά έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{LT}(x^2y + 2xy + y^2) &= x^2y \\ \text{LT}(2xy + y^2) &= y^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

καθώς ο όρος με συνολικό βαθμό 3 υπερσχύει, αλλά μεταξύ των όρων συνολικού βαθμού 2 έχουμε επίλυση ισοπαλίας με λεξικογραφική διάταξη, όπως πριν.

Ο πρώτος όρος ενός πολυωνύμου p , με βάση την επιλεγμένη διάταξη, συμβολίζεται όπως και προηγουμένως ως $\text{LT}(p)$.

Η επιλογή μίας συγκεκριμένης διάταξης μας επιτρέπει να έχουμε έναν τρόπο να εκτελέσουμε τη διαίρεση πολυωνύμων, οπότε και μπορούμε να βρούμε πολυώνυμα τα οποία να ικανοποιούν την εξής παραλλαγή της (2.15):

$$p(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x})d(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in K^d \quad (2.18)$$

Ως επιπλέον συνθήκη, απαιτούμε κανέναν από τους όρους του $r(\mathbf{x})$ να μη διαιρείται από τον $\text{LT}(d)$. Στην περίπτωση αυτή, παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με την διαίρεση πολυωνύμων μίας μεταβλητής, η χρήση μιας συνθήκης όπως $\deg(r) \geq_* \deg(d)$, όπου \geq_* το σύμβολο της επιλεγμένης διάταξης, δεν μας οδηγεί στο σωστό υπόλοιπο. Για παράδειγμα, αν $p(x, y) = y^3$, $d(x, y) = x^2$, τότε θα έχουμε $q(x, y) = 0$, $r(x, y) = y^3$, οπότε με διάταξη συνολικού βαθμού το υπόλοιπο θα έχει μεγαλύτερο βαθμό. Για το λόγο αυτό, στον Αλγόριθμο 2 παρουσιάζεται η διαδικασία διαίρεσης πολυωνύμων πολλών μεταβλητών (η οποία είναι μια ειδική περίπτωση αυτής που ορίζεται στο [13], με ένα διαιρέτη).

Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε $p(x, y) = x^2y$, $d(x, y) = x + y$ και λεξικογραφική διάταξη των όρων, όπου $x < y$, άρα $\text{LT}(d) = y$. Αρχικά έχουμε $t(x, y) = p(x, y) = x^2y$. Με βάση αυτό, στο πρώτο βήμα του αλγορίθμου θα έχουμε $q(x, y) = \frac{\text{LT}(t)}{\text{LT}(d)} = x^2$ και $t(x, y) = x^2y - \frac{\text{LT}(t)}{\text{LT}(d)}d(x, y) = -x^3$. Στο επόμενο βήμα βλέπουμε ότι ο όρος $\text{LT}(d)$ δεν διαιρεί τον $\text{LT}(t)$, οπότε και παίρνουμε $r(x, y) = -x^3$, $t(x, y) = 0$. Ο αλγόριθμος εδώ τερματίζει, δίνοντάς μας $q(x, y) = x^2$, $r(x, y) = -x^3$.

Η διαδικασία αυτή μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση πολλών πολυωνύμων που παίζουν το ρόλο του διαιρέτη. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε $d_i(\mathbf{x})$, $1 \leq i \leq k$ διαφορετικά πολυώνυμα, και θέλουμε να βρούμε k διαφορετικά πηλίκα $q_i(\mathbf{x})$ και ένα υπόλοιπο $r(\mathbf{x})$ ώστε:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k q_i(\mathbf{x})d_i(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x}) \quad (2.19)$$

Αλγόριθμος 2 Διαίρεση Πολυωνύμων Πολλών Μεταβλητών - Ένας Διαιρέτης

Είσοδος: Πολυώνυμα $p(\mathbf{x}), d(\mathbf{x})$.

Έξοδος: Πολυώνυμα $q(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})$ που ικανοποιούν την (2.18).

```
q(x) ← 0
r(x) ← 0
t(x) ← p(x)
while t(x) ≠ 0 do
  if LT(d) διαιρεί τον LT(t) then
    q(x) ← q(x) +  $\frac{LT(t)}{LT(d)}$ 
    t(x) ← t(x) -  $\frac{LT(t)}{LT(d)}d(x)$ 
  else
    r(x) ← r(x) + LT(t)
    t(x) ← t(x) - LT(t)
  end if
end while
```

Η διαδικασία με την οποία εκτελείται η εύρεση αυτών των πολυωνύμων είναι αυτή του Αλγορίθμου 3, όπου σε κάθε βήμα το πολυώνυμο που θα παίζει το ρόλο του διαιρέτη επιλέγεται σειριακά από τα $d_i(\mathbf{x})$, και μόνο αν δε διαιρείται με κανένα ο πρώτος όρος του πολυωνύμου $t(\mathbf{x})$ τον μεταφέρουμε στο υπόλοιπο (στην επόμενη ενότητα θα δούμε και παράδειγμα εκτέλεσης του αλγορίθμου αυτού, όπου και θα εξετάσουμε το ρόλο αυτής της σειριακής επιλογής).

Η παραπάνω διαδικασία μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε μια αναπαράσταση ενός πολυωνύμου με βάση ένα σύνολο από δοθέντα πολυώνυμα. Παραμένει, ωστόσο, το ερώτημα του κατά πόσο η αναπαράσταση αυτή είναι μοναδική. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αυτό δεν είναι απαραίτητο να ισχύει.

2.3.2 Βάσεις Groebner - Βασικοί Ορισμοί

Έστω ότι έχουμε ένα πολυώνυμο $d(\mathbf{x}) \in K[\mathbf{x}]$, καθώς και το ιδανικό $I_d = \langle d \rangle$. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, στο ιδανικό αυτό ανήκουν όλα τα πολυώνυμα που μπορούν να αναπαρασταθούν ως γινόμενο του $d(\mathbf{x})$ με κάποιο άλλο πολυώνυμο του $K[\mathbf{x}]$. Διαισθητικά, μπορούμε με βάση τα παραπάνω να δούμε ένα κριτήριο σύμφωνα με το οποίο να εξετάσουμε το κατά πόσο, για ένα αυθαίρετο πολυώνυμο $p(\mathbf{x})$, ισχύει $p(\mathbf{x}) \in I_d$. Αν εκτελέσουμε τη διαίρεση του $p(\mathbf{x})$ από το $d(\mathbf{x})$, και υπολογίσουμε το πηλίκο $q(\mathbf{x})$ και το υπόλοιπο $r(\mathbf{x})$, τότε έχουμε ότι:

$$r(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \Leftrightarrow p(\mathbf{x}) \in I_d \quad (2.20)$$

αφού θα ισχύει $p(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x})d(\mathbf{x})$.

Το επόμενο βήμα είναι να επεκτείνουμε το παραπάνω στην περίπτωση που έχουμε πολλά πολυώνυμα με βάση τα οποία κατασκευάζεται το ιδανικό μας, δηλαδή στην περίπτωση που έχουμε:

$$I = \langle d_1, d_2, \dots, d_k \rangle \quad (2.21)$$

Διαισθητικά θα περίμενε κανείς ότι ισχύει η ίδια ισοδυναμία με την (2.20), δηλαδή ότι αν εκτελέσουμε τον αλγόριθμο που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα για διαίρεση ενός πολυωνύμου με πολλούς διαιρέτες, και βρούμε τα σχετικά πηλίκα $q_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, k$, καθώς

Αλγόριθμος 3 Διαίρεση Πολυωνύμων Πολλών Μεταβλητών - Πολλαπλοί Διαιρέτες

Είσοδος: Πολυώνυμα $p(\mathbf{x}), d_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, k$.

Έξοδος: Πολυώνυμα $q_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, k$ και $r(\mathbf{x})$ που ικανοποιούν την (2.19).

```

 $q_i(\mathbf{x}) \leftarrow 0, \forall i = 1, \dots, k$ 
 $r(\mathbf{x}) \leftarrow 0$ 
 $t(\mathbf{x}) \leftarrow p(\mathbf{x})$ 
while  $t(\mathbf{x}) \neq 0$  do
  for  $i = 1, \dots, k$  do
    if  $\text{LT}(d_i)$  διαιρεί τον  $\text{LT}(t)$  then
       $q_i(\mathbf{x}) \leftarrow q_i(\mathbf{x}) + \frac{\text{LT}(t)}{\text{LT}(d_i)}$ 
       $t(\mathbf{x}) \leftarrow t(\mathbf{x}) - \frac{\text{LT}(t)}{\text{LT}(d_i)} d_i(\mathbf{x})$ 
      break
    end if
  end for
  if Κανένα  $\text{LT}(d_i)$  δε διαιρεί τον  $\text{LT}(t)$  then
     $r(\mathbf{x}) \leftarrow r(\mathbf{x}) + \text{LT}(t)$ 
     $t(\mathbf{x}) \leftarrow t(\mathbf{x}) - \text{LT}(t)$ 
  end if
end while
```

και το σχετικό υπόλοιπο $r(\mathbf{x})$, θα ισχύει ότι:

$$r(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \Leftrightarrow p(\mathbf{x}) \in \langle d_1, d_2, \dots, d_k \rangle \quad (2.22)$$

Η μία πλευρά της παραπάνω ισοδυναμίας προφανώς ισχύει, αφού αν $r(\mathbf{x}) = 0$, τότε έχουμε $p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k q_i(\mathbf{x})d_i(\mathbf{x})$, το οποίο είναι ακριβώς ο ορισμός ενός στοιχείου του ιδανικού. Ωστόσο, η αντίστροφη πλευρά αυτής της ισοδυναμίας, ενώ με πρώτη ματιά φαίνεται να ισχύει, λόγω του τρόπου που λειτουργεί ο αλγόριθμος διαίρεσης που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, είναι εσφαλμένη. Ο απλούστερος τρόπος για να το δούμε αυτό είναι μέσω ενός παραδείγματος.

Έστω ότι έχουμε ένα πολυώνυμο $p(x, y)$ ως διαιρετέο και δύο διαιρέτες $d_1(x, y), d_2(x, y)$. Συγκεκριμένα, τα πολυώνυμά μας είναι τα εξής:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= x^2y^2 - x^2 \\ d_1(x, y) &= x^2y \\ d_2(x, y) &= xy - x \end{aligned} \quad (2.23)$$

Έστω ότι ξεκινάμε να εκτελούμε τον αλγόριθμο διαίρεσης που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, θεωρώντας ως διάταξη των όρων τη λεξικογραφική, οπότε και έχουμε:

$$\text{LT}(p) = x^2y^2, \text{LT}(d_1) = x^2y, \text{LT}(d_2) = xy \quad (2.24)$$

Εκτελώντας τον Αλγόριθμο 3, αρχικά θέτουμε $t(x, y) = x^2y^2 - x^2$. Ξεκινώντας από το πολυώνυμο d_1 , έχουμε ότι ο $\text{LT}(d_1)$ διαιρεί τον $\text{LT}(t)$. Συνεπώς, θέτουμε $q_1(x, y) = y$ και $t(x, y) = -x^2$. Στο σημείο αυτό έχουμε ότι ο όρος $\text{LT}(t) = -x^2$ δε διαιρείται από κανέναν από τους $\text{LT}(d_1), \text{LT}(d_2)$. Συνεπώς, η εκτέλεση του αλγορίθμου ολοκληρώνεται, και λαμβάνουμε ως αποτέλεσμα τα πολυώνυμα:

$$q_1(x, y) = y, q_2(x, y) = 0, r(x, y) = -x^2 \quad (2.25)$$

Ωστόσο, αν εκτελέσουμε τον ίδιο αλγόριθμο, διαιρώντας πρώτα με τον όρο $LT(d_2)$, παρατηρούμε ότι και αυτός διαιρεί τον $LT(t)$, οπότε μετά από το πρώτο βήμα θα έχουμε $q_2(x, y) = xy$ και $t(x, y) = x^2y - x^2$. Ο $LT(t)$ πάλι διαιρείται από τον $LT(d_2)$, οπότε και έχουμε ότι $q_2(x, y) = xy + x$ και $t(x, y) = x^2y - x^2 - x(xy - x) = 0$. Συνεπώς, με αυτήν την εκτέλεση λαμβάνουμε:

$$q_1(x, y) = 0, \quad q_2(x, y) = xy + x, \quad r(x, y) = 0 \quad (2.26)$$

Αυτή η εκτέλεση μας δίνει και τη σωστή απάντηση στο ερώτημά μας, δηλαδή ότι $p \in \langle d_1, d_2 \rangle$. Παρατηρούμε όμως ότι αυτό γίνεται μόνο εφόσον κάνουμε τη σωστή επιλογή στη σειρά των πολυωνύμων με τα οποία διαιρούμε, κάτι το οποίο δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων. Συνεπώς, το ερώτημα που εισάγεται εδώ είναι κατά πόσο μπορούμε να βρούμε τρόπο ώστε η εκτέλεση του αλγορίθμου διαίρεσης να μας δίνει κατευθείαν απάντηση στο ερώτημα του κατά πόσο ένα πολυώνυμο ανήκει σε ένα ιδανικό. Αυτό, όπως θα δούμε στη συνέχεια, μπορεί να γίνει με τη χρήση των βάσεων Groebner. Η έννοια αυτών των βάσεων εισήχθη στο [4], αλλά εδώ θα στηριχθούμε σε έναν απλοποιημένο τρόπο ορισμού τους, όπως αυτός παρουσιάζεται στα [24].

Ορισμός 2.8 (Βάση Groebner). Έστω ένα ιδανικό $I \subseteq K[\mathbf{x}]$. Ως βάση Groebner αυτού του ιδανικού θεωρούμε ένα σύνολο πολυωνύμων $\{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq I$ για το οποίο ισχύει ότι:

$$\forall f \in I \setminus \{0\} : \exists i : LT(g_i) \mid LT(f) \quad (2.27)$$

όπου $LT(g_i) \mid LT(f)$ σημαίνει ότι ο $LT(g_i)$ διαιρεί τον $LT(f)$.

Ως πόρισμα του παραπάνω [13], προκύπτει ότι:

$$\langle g_1, \dots, g_k \rangle = I \quad (2.28)$$

Αυτό μας δίνει ότι η βάση αυτή κατασκευάζει το ιδανικό, δηλαδή ότι κάθε πολυώνυμο που ανήκει στο ιδανικό μπορεί να εκφραστεί μέσω των πολυωνύμων της βάσης. Η ιδιότητα (2.27) είναι αυτή που καθορίζει το χαρακτήρα των βάσεων Groebner. Διαισθητικά, η ιδιότητα αυτή εκφράζει το γεγονός ότι κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου διαίρεσης χρησιμοποιώντας βάσεις Groebner, τότε η ιδιότητα (2.22) ισχύει με βεβαιότητα. Αυτό μπορούμε να το δούμε πιο τυπικά στο παρακάτω.

Θεώρημα 2.5. Έστω ένα ιδανικό I , καθώς και μία βάση Groebner $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ αυτού του ιδανικού. Στην περίπτωση αυτή, για τα πηλίκα q_1, q_2, \dots, q_k και για το υπόλοιπο r που προκύπτουν από την εκτέλεση του Αλγορίθμου 3, με διαιρέτες $d_i = g_i$, $i = 1, \dots, k$, ισχύει ότι:

$$r(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \Leftrightarrow p(\mathbf{x}) \in I = \langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle \quad (2.29)$$

Απόδειξη. Αρχικά, μπορούμε να λάβουμε υπόψιν το γεγονός ότι για να είναι καλώς ορισμένη η διάταξη των όρων του πολυωνύμου, θα πρέπει να έχει ελάχιστο στοιχείο. Έχοντας αυτό υπόψιν, βλέπουμε ότι κατά την εκτέλεση του Αλγορίθμου 3, ξεκινώντας από το πρώτο βήμα όπου $t(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$, αν και μόνο αν ισχύει $p(\mathbf{x}) \in I$, τότε θα υπάρχει στοιχείο g_i της βάσης, για το οποίο ισχύει $LT(g_i) \mid LT(p)$. Αυτό σημαίνει ότι στο πρώτο βήμα, αν μπει ο όρος $LT(t)$ στο υπόλοιπο, τότε προφανώς ισχύει $t(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) \notin I$. Επιπλέον, ισχύουν οι εξής δύο παρατηρήσεις:

- Αν το στοιχείο $t(\mathbf{x})$ ανήκει στο ιδανικό, τότε στο ιδανικό ανήκει και το $t'(\mathbf{x}) = t(\mathbf{x}) - \frac{LT(t)}{LT(q_i)} q_i(\mathbf{x})$. Αυτό ισχύει γιατί το στοιχείο $\frac{LT(t)}{LT(q_i)} q_i(\mathbf{x})$ ανήκει κατά προφανή τρόπο στο ιδανικό, και η διαφορά δύο στοιχείων του ιδανικού ανήκει ορισμού σε αυτό (άμεσα από τον ορισμό του ιδανικού).

- Κάθε φορά που γίνεται ένα βήμα της διαίρεσης, ο όρος $LT(t)$ αφαιρείται από το πολυώνυμο $t(\mathbf{x})$. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε βήμα ισχύει $\deg(t') \leq_* \deg(t)$, με βάση τη διάταξη που έχουμε επιλέξει.

Με βάση τα δύο παραπάνω, καθώς εκτελείται ο αλγόριθμος, αν και μόνο αν $p(\mathbf{x}) \in I$, δε θα μπαίνει κανένα στοιχείο στο υπόλοιπο. Επιπλέον, ο αλγόριθμος τερματίζει, ακριβώς επειδή η διάταξη των βαθμών των όρων έχει ελάχιστο στοιχείο, το πολυώνυμο έχει πεπερασμένο πλήθος όρων, και η ακολουθία βαθμών που αποκτά το $t(\mathbf{x})$ είναι φθίνουσα. Με βάση όλα τα παραπάνω, προκύπτει άμεσα το συμπέρασμα ότι ισχύει η (2.29), όπως ήταν και το ζητούμενο. \square

Παρατηρούμε ότι στην παραπάνω απόδειξη δεν κάναμε καμία υπόθεση για τη σειρά με την οποία εξετάζουμε τα στοιχεία της βάσης Groebner κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου διαίρεσης. Αυτό σημαίνει ότι οι βάσεις Groebner ικανοποιούν την ιδιότητα που θέλαμε, δηλαδή ο αλγόριθμος διαίρεσης να δίνει την ίδια απάντηση σχετικά με το κατά πόσο ανήκει ένα πολυώνυμο σε ένα ιδανικό, ανεξαρτήτως της σειράς με βάση την οποία εξετάζουμε τα πολυώνυμα της βάσης.

2.3.3 Αλγόριθμος για την Εύρεση Βάσεων Groebner

Για την εύρεση μιας βάσης Groebner, μπορεί να γίνει χρήση του αλγορίθμου που περιγράφεται στο [4]. Ο αλγόριθμος αυτός μας επιτρέπει, για ένα δεδομένο σύνολο πολυωνύμων $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, να βρούμε μία βάση Groebner $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ για το ιδανικό που κατασκευάζουν τα πολυώνυμα f . Ο αλγόριθμος αυτός στηρίζεται στην έννοια των S-πολυωνύμων.

Ορισμός 2.9 (S-πολυώνυμο). Έστω δύο πολυώνυμα $p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x})$. Ως S-πολυώνυμο των δύο αυτών πολυωνύμων ορίζουμε το πολυώνυμο:

$$S(p, q) = \frac{\mathbf{x}^w}{LT(p)}p - \frac{\mathbf{x}^w}{LT(q)}q \quad (2.30)$$

όπου $\mathbf{x}^w = x_1^{w_1} x_2^{w_2} \dots x_d^{w_d}$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο¹ των όρων $LT(p), LT(q)$.

Για παράδειγμα, αν έχουμε $p(x, y) = x^2y + x$, $q(x, y) = x + y$, με λεξικογραφική διάταξη έχουμε $LT(p) = x^2y, LT(q) = y$, που έχουν ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τον όρο x^2y . Οπότε:

$$S(p, q) = \frac{x^2y}{x^2y} (x^2y + x) - \frac{x^2y}{y} (x + y) = x - x^3 \quad (2.31)$$

Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο αυτό είναι κατασκευασμένο με τέτοιο τρόπο, ώστε να αναιρούνται οι αρχικοί όροι τόσο του p , όσο και του q . Επιπλέον, παρατηρούμε ότι αν τα p, q ανήκουν σε κάποιο ιδανικό, τότε και το αντίστοιχο S-πολυώνυμο ανήκει στο ιδανικό αυτό. Αυτή η παρατήρηση είναι χρήσιμη, καθώς η εύρεση μιας βάσης Groebner στηρίζεται στην βαθμιαία κατασκευή της βάσης, η οποία για να γίνει απαιτεί την προσθήκη νέων πολυωνύμων, τα οποία ανήκουν στο ιδανικό που εξετάζουμε.

Με βάση την παραπάνω έννοια, μπορούμε να παρουσιάσουμε τη διαδικασία μέσω της οποίας μπορούμε να βρούμε μία βάση Groebner για ένα ιδανικό που κατασκευάζεται από ένα σύνολο πολυωνύμων $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Η διαδικασία αυτή φαίνεται στον Αλγόριθμο 4. Περαιτέρω ανάλυση του αλγορίθμου αυτού γίνεται στα [4], [24]. Στο σημείο αυτό, σημειώνουμε

¹Ως ΕΚΠ δύο μονωνύμων ορίζουμε το ελάχιστο μονώνυμο που διαιρείται και από τα δύο.

Αλγόριθμος 4 Αλγόριθμος Εύρεσης Βάσεων Groebner

Είσοδος: Σύνολο πολυωνύμων $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$.

Έξοδος: Βάση Groebner $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ για το ιδανικό $\langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$.

```
G ← F
B ← {S(fi, fj) | 1 ≤ i, j ≤ n}
while B ≠ ∅ do
  s ← Στοιχείο B
  r ← Υπόλοιπο διαίρεσης s με G
  if r ≠ 0 then
    B ← B ∪ {S(g, r) | g ∈ G}
    G ← G ∪ {r}
  end if
end while
```

μόνο ότι η βάση που υπολογίζεται μπορεί να μειωθεί περαιτέρω, αφαιρώντας στοιχεία τα οποία δεν απαιτούνται για να ικανοποιούνται οι απαιτούμενες ιδιότητες μιας βάσης Groebner. Μπορούμε να ορίσουμε ως **Μειωμένη Βάση Groebner** (Reduced Groebner Basis), ένα ελαχιστοτικό σύνολο το οποίο ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες, ενώ παράλληλα οι όροι των στοιχείων του δε διαιρούνται από κανένα αρχικό όρο άλλου στοιχείου. Το σύνολο αυτό είναι και ελάχιστο, καθώς μπορεί να αποδειχθεί το εξής:

Θεώρημα 2.6. *Κάθε ιδανικό έχει μοναδική μειωμένη βάση Groebner.*

2.3.4 Παράδειγμα χρήσης βάσεων Groebner σε HMMs

Στο σημείο αυτό εξετάζουμε ένα παράδειγμα χρήσης βάσεων Groebner, παρεμφερές με αυτό που παρουσιάζεται στο [38], για τη μελέτη μιας δομής HMM-1, δηλαδή ενός κρυφού μαρκοβιανού μοντέλου, όπου κάθε κατάσταση εξαρτάται μόνο από την προηγούμενη. Η δομή αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα μηχανικής μάθησης που παρουσιάζουν χρονική συσχέτιση μεταξύ των δεδομένων εισόδου (ενδεικτικά, σε προβλήματα εστιασμένα σε ανάλυση ηχητικών σημάτων ή κειμένου).

Ως γνωστόν, ένα HMM-1 μπορεί να περιγραφεί πλήρως από τα εξής σύνολα παραμέτρων:

- Τις αρχικές πιθανότητες π_i , που εκφράζουν πόσο πιθανό είναι το μοντέλο να ξεκινήσει στην κατάσταση i την πρώτη χρονική στιγμή (για απλότητα, στη συνέχεια της ανάλυσής μας θα θεωρήσουμε ότι οι αρχικές καταστάσεις είναι ισοπίθανες).
- Τις πιθανότητες μετάβασης s_{ij} , οι οποίες εκφράζουν πόσο πιθανό είναι να γίνει μετάβαση του μοντέλου από την κατάσταση i στην κατάσταση j .
- Τις πιθανότητες παρατήρησης t_{ik} , που εκφράζουν πόσο πιθανό είναι να παρατηρηθεί το σύμβολο (ή εν γένει, η έξοδος) k , δεδομένου ότι το μοντέλο βρίσκεται στην κατάσταση i .

Όταν εξετάζουμε ένα μοντέλο HMM-1, οι παράμετροι αυτοί επαρκούν για την περιγραφή του, καθώς η κάθε κατάσταση επηρεάζεται μόνο από την προηγούμενη, εφόσον αυτή είναι καθορισμένη. Με βάση τους συνηθισμένους κανόνες για την εξαγωγή πιθανοτήτων παρατηρήσεων σε Μπεϋζιανά γραφικά μοντέλα, η πιθανότητα να παρατηρήσουμε μια δεδομένη

ακολουθία συμβόλων είναι ένα άθροισμα γινομένων, καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη σειρά μεταβάσεων (μαζί με τις πιθανότητες να παρατηρήσουμε την έξοδο κάθε συμβόλου σε κάθε κατάσταση).

Ενδεικτικά, στην περίπτωση που έχουμε ένα HMM-1 με 2 πιθανές καταστάσεις, έστω a, b , και δύο πιθανές παρατηρήσεις 0, 1, η πιθανότητα να παρατηρήσουμε την ακολουθία συμβόλων 00 είναι ίση με:

$$p_{00} = \frac{1}{2} (s_{aa}t_{a0}^2 + s_{ab}t_{a0}t_{b0} + s_{ba}t_{b0}t_{a0} + s_{bb}t_{b0}^2) \quad (2.32)$$

ενώ με όμοιο τρόπο ορίζονται οι πιθανότητες p_{01}, p_{10}, p_{11} , για τις υπόλοιπες ακολουθίες συμβόλων (ο παράγοντας 1/2 οφείλεται στο ότι θεωρούμε ως ισοπίθανες τις δύο αρχικές καταστάσεις).

Σημειώνεται ότι, όπως αναφέρεται και στο [38], οι απεικονίσεις f_{HMM} από το σύνολο ακολουθιών εξόδου Σ του HMM στο σύνολο ακολουθιών κρυφών καταστάσεων H δεν αποτελούν όλες τις πιθανές απεικονίσεις μεταξύ αυτών των δύο συνόλων, δηλαδή όλες τις συναρτήσεις $\Sigma \rightarrow H$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, πέρα από την προφανή απαίτηση των παραπάνω πιθανοτήτων να αθροίζονται στη μονάδα, πρέπει να ικανοποιούν και επιπλέον συνθήκες. Συγκεκριμένα, για το παραπάνω παράδειγμα, οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται από τις πιθανότητες $p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}$ είναι οι εξής:

$$p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1 \quad (2.33)$$

$$0 \leq p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11} \leq 1 \quad (2.34)$$

$$p_{\sigma_1\sigma_2} = \frac{1}{2} (s_{aa}t_{a\sigma_1}t_{a\sigma_2} + s_{ab}t_{a\sigma_1}t_{b\sigma_2} + s_{ba}t_{b\sigma_1}t_{a\sigma_2} + s_{bb}t_{b\sigma_1}t_{b\sigma_2}), \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \{0, 1\} \quad (2.35)$$

όπου σ_1, σ_2 οι πιθανές παρατηρήσεις. Στην (2.35) έχουμε την έκφραση για κάθε πιθανή σειρά παρατηρήσεων, ως άθροισμα των πιθανοτήτων των ενδεχομένων όπου κάθε σειρά κρυφών καταστάσεων θεωρείται δεδομένη. Θεωρώντας ότι οι πιθανότητες $s_{ij}, t_{ik}, p_{\sigma_1\sigma_2}$ είναι μεταβλητές (12 στο πλήθος), τότε οι παραπάνω εξισώσεις αντιστοιχούν στα σύνολα ριζών πολυωνύμων 7 μεταβλητών (καθώς λόγω των (2.33) και (2.35), αυθαίρετες 5 από τις μεταβλητές μας θα είναι δεσμευμένες - καθώς έχουμε 5 εξισώσεις). Συνδυάζοντας όλες τις πιθανές εκδοχές της (2.35), οδηγούμαστε στην παρακάτω εξίσωση:

$$p_{00}p_{11} - p_{01}p_{10} = 0 \quad (2.36)$$

Στην εξίσωση αυτή μπορούμε να οδηγηθούμε και μηχανικά, με τη χρήση των βάσεων Groebner (με βάση μία διάταξη όρων όπου οι όροι $p_{\sigma_1\sigma_2}$ έρχονται τελευταίοι, καθώς και με βάση το θεώρημα 5.9.1 του [24]). Πιο συγκεκριμένα, υποθέτοντας για παράδειγμα την εξής διάταξη στις μεταβλητές:

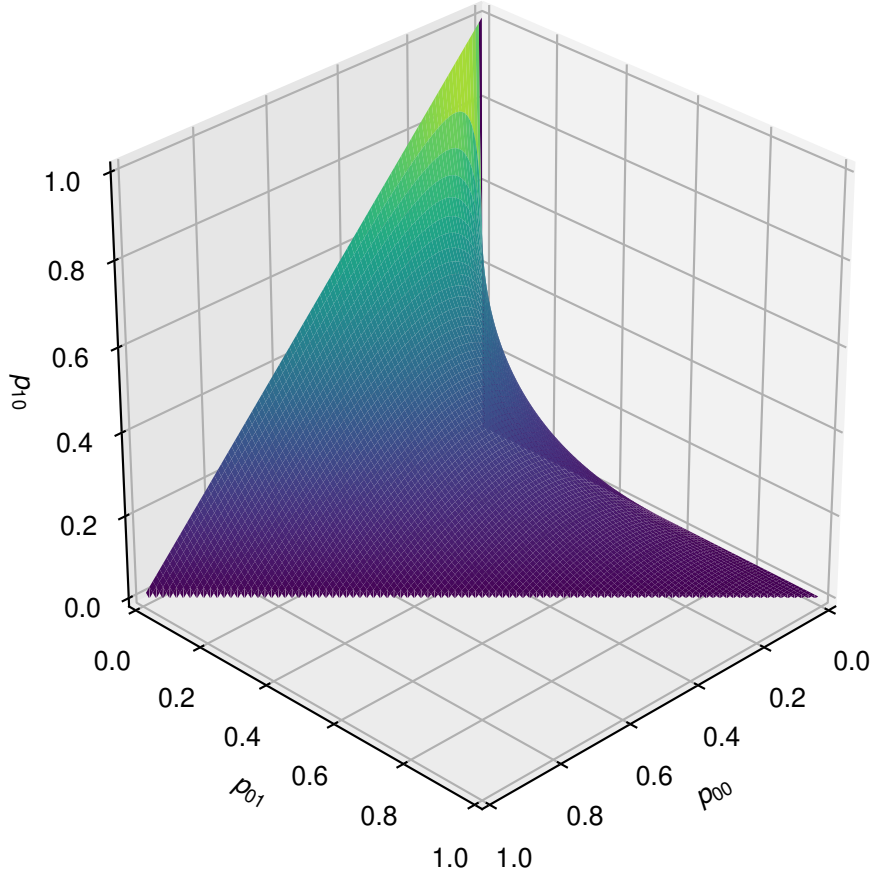
$$p_{00} \leq p_{01} \leq p_{10} \leq p_{11} \leq t_{a0} \leq t_{a1} \leq t_{b0} \leq t_{b1} \leq s_{aa} \leq s_{ab} \leq s_{ba} \leq s_{bb} \quad (2.37)$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Αλγόριθμο 4 για την εύρεση της βάσης του ιδανικού που προκύπτει από τα πολυώνυμα της (2.35) (ο υπολογισμός παραλείπεται λόγω έκτασης). Στην τελική βάση κρατάμε μόνο το πολυώνυμο που αντιστοιχεί στην (2.36), οπότε και έχουμε τη σχέση που ικανοποιείται από τα $p_{\sigma_1\sigma_2}$.

Αντικαθιστώντας μία από αυτές τις πιθανότητες από τις υπόλοιπες, έστω την p_{11} , με βάση την (2.33), λαμβάνουμε την επόμενη εξίσωση:

$$\begin{aligned} p_{00} (1 - p_{00} - p_{01} - p_{10}) - p_{01}p_{10} = \\ p_{00} - p_{00}^2 - p_{00}p_{01} - p_{00}p_{10} - p_{01}p_{10} = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που αντιστοιχεί στο HMM-1 μπορεί να παρασταθεί ως στοιχείο του συνόλου των ριζών της (2.38), το οποίο περιλαμβάνεται εντός του μοναδιαίου κύβου, με βάση την (2.34). Αυτό το τμήμα του συνόλου ριζών μπορούμε να το δούμε στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Επιτρεπτές πιθανότητες για το HMM-1 που παρουσιάστηκε.

Το παραπάνω παράδειγμα μας δείχνει μια ενδεικτική χρήση των βάσεων Groebner. Ωστόσο, χρησιμεύει επιπλέον να εξετάσουμε και τη σύνδεση που μας προσφέρει με το επόμενο μέρος της εργασίας. Πράγματι, ας αντικαταστήσουμε τις πιθανότητες των εξισώσεων (2.35) με τους αρνητικούς λογαρίθμους τους, δηλαδή ας θέσουμε $u_{h_1 h_2} = -\ln s_{h_1 h_2}$ και $v_{h\sigma} = -\ln t_{h\sigma}$, και έστω ότι $\delta_{\sigma_1 \sigma_2}$ είναι ο αρνητικός λογάριθμος της πιθανότητας της πιο πιθανής μετάβασης (δηλαδή του μεγαλύτερου όρου που εμφανίζεται στο άθροισμα της (2.35)). Με αυτόν τον τρόπο, η (2.35) (θεωρώντας ότι ένας όρος υπερिशύει) γίνεται:

$$p_{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{1}{2} \sum_{h_1, h_2 \in \{a, b\}} e^{-u_{h_1 h_2}} e^{-v_{h_1 \sigma_1}} e^{-v_{h_2 \sigma_2}} \approx e^{-\delta_{\sigma_1 \sigma_2}} \quad (2.39)$$

Μέσω της διαδικασίας του dequantization (την οποία θα ορίσουμε σε επόμενη ενότητα) λαμβάνουμε την έκφραση:

$$\delta_{\sigma_1 \sigma_2} = \min_{h_1, h_2 \in \{a, b\}} (u_{h_1 h_2} + v_{h_1 \sigma_1} + v_{h_2 \sigma_2} + \ln 2) \quad (2.40)$$

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται και «τροπικοποίηση» των εξισώσεων της μορφής (2.35). Κάθε όρος του ελαχίστου αντιστοιχεί σε ένα πιθανό ενδεχόμενο για τη διαδοχή των καταστάσεων του μοντέλου, με το ελάχιστο να δίνεται από την πιο πιθανή διαδοχή καταστάσεων.

Όπως θα δούμε και στη συνέχεια, η συγκεκριμένη έκφραση των παραπάνω πιθανοτήτων, με βάση θεωρία τροπικών πολυωνύμων, εισάγει το ένα άνω όριο στο πλήθος των θεμιτών αντιστοιχήσεων μεταξύ ακολουθιών παρατηρήσεων και πιθανότερων κρυφών καταστάσεων.

2.4 Στοιχεία Τροπικής Άλγεβρας

2.4.1 Max-Plus και Min-Plus ημιδακτύλιοι

Η τροπική άλγεβρα παρουσιάζεται με διαφορετικές μορφές στη βιβλιογραφία. Πιο συγκεκριμένα, ο όρος αυτός μπορεί να αναφέρεται στα εξής:

- Στην ανάλυση του max-plus ημιδακτυλίου $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$, με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό να αντικαθίστανται από μέγιστο και πρόσθεση, αντίστοιχα. Η σύμβαση αυτή υιοθετείται, για παράδειγμα, στα [9], [10].
- Στην ανάλυση του min-plus ημιδακτυλίου $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$, με την πρόσθεση αυτή τη φορά να αντικαθίσταται από το ελάχιστο των δύο τελεστών. Η σύμβαση αυτή υιοθετείται στο [29].

Παρά το γεγονός ότι οι δύο ερμηνείες του όρου φαίνονται διαφορετικές, στην πραγματικότητα είναι πολύ στενά συνδεδεμένες μεταξύ τους, υπό το πλαίσιο της *δυσικότητας* που τις διέπει. Πιο συγκεκριμένα, οι ιδιότητες που ισχύουν στο πλαίσιο του ενός ημιδακτυλίου μπορούν άμεσα να μεταφραστούν στον άλλο, δεδομένου ότι υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των δύο ημιδακτυλίων.

Θεώρημα 2.7. *Η συνάρτηση:*

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in \mathbb{R} \\ +\infty, & x = -\infty \end{cases} \quad (2.41)$$

είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ του max-plus και min-plus ημιδακτυλίου.

Απόδειξη. Αρχικά, μπορούμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι ένας ομομορφισμός μεταξύ των σχετικών ημιδακτυλίων, δεδομένου ότι ικανοποιεί τις απαιτούμενες ιδιότητες:

- $f(-\infty) = +\infty, f(0) = 0$: Προφανή λόγω του ορισμού της συνάρτησης.
- $f(\max(a, b)) = \min(f(a), f(b))$: Σε περίπτωση που και τα δύο a, b είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε η ιδιότητα ισχύει ως $-\max(a, b) = \min(-a, -b)$. Αν κάποιο από τα δύο, έστω το a , είναι $-\infty$, τότε έχουμε $\max(a, b) = b$ και $\min(f(a), f(b)) = f(b)$, οπότε και πάλι η ιδιότητα ισχύει.
- $f(a + b) = f(a) + f(b)$: Ομοίως, αν και τα δύο a, b είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε $f(a + b) = -(a + b) = f(a) + f(b)$. Αν $a = -\infty$, τότε $f(a + b) = +\infty$ και $f(a) + f(b) = (+\infty) + f(b) = +\infty$, οπότε η ιδιότητα πάλι ισχύει.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι 1 – 1 και επί. Συνεπώς, αποτελεί έναν ισομορφισμό μεταξύ αυτών των δύο ημιδακτυλίων. \square

Συνεπώς, οι δύο αυτοί ημιδακτύλιοι ταυτίζονται, για κάθε πιθανή ερμηνεία των ιδιοτήτων τους.

2.4.2 Maslov Dequantization

Ένας διαφορετικός τρόπος ερμηνείας των παραπάνω ημιδακτυλίων είναι μέσω του Maslov Dequantization [36].

Ορισμός 2.10 (Maslov Dequantization). Έστω x, y δύο μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Ο μετασχηματισμός

$$u = h \ln x, h \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (2.42)$$

μαζί με τις πράξεις:

$$u +_h v = h \ln (e^{\frac{u}{h}} + e^{\frac{v}{h}}) \quad (2.43)$$

$$u \times_h v = u + v \quad (2.44)$$

ορίζει το Maslov Dequantization του ημιδακτυλίου $(\mathbb{R}_+, +, \cdot)$, όπου $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Η εφαρμογή του παραπάνω μετασχηματισμού δίνει τον ημιδακτύλιο $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, +_h, \times_h)$, για $h > 0$, και τον ημιδακτύλιο $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, +_h, \times_h)$, για $h < 0$. Για πολύ μικρά (κατ' απόλυτη τιμή) h , οι παραπάνω ημιδακτύλιοι τείνουν στον max-plus και στον min-plus, αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.8. Για $h \rightarrow 0$ με $h > 0$, έχουμε ότι:

$$u +_h v \approx \max(u, v) \quad (2.45)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του παραπάνω προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι αν $h \rightarrow 0$, τότε στην περίπτωση που $u > v$, τότε $e^{\frac{u}{h}} \gg e^{\frac{v}{h}}$. Συνεπώς:

$$u +_h v \approx h \ln (e^{\frac{u}{h}}) = \ln (e^u) = u \quad (2.46)$$

□

Με βάση όλα τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι και οι δύο ημιδακτύλιοι αποτελούν μία οριακή περίπτωση ενός μετασχηματισμού. Το ποιος από τους δύο ημιδακτυλίους χρησιμοποιείται είναι καθαρά θέμα συμβολισμού. Συνεπώς, στο εξής η ανάλυσή μας θα εστιάσει στον max-plus ημιδακτύλιο, με όποια συμπεράσματα να μπορούν να μεταφραστούν, με βάση τα παραπάνω, και στην min-plus εκδοχή του. Ο λόγος για τον οποίο γίνεται αυτή η επιλογή είναι ότι η χρήση του max-plus δακτυλίου αφορά άμεσα τη μελέτη νευρωνικών δικτύων, που αποτελεί σημαντικό τμήμα της παρούσας εργασίας.

2.5 Τροπικά Πολυώνυμα

Έστω ο ημιδακτύλιος $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$. Επιπλέον, έστω και μία μεταβλητή $x \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 2.11. Ως **τροπικό μονώνυμο** ονομάζουμε κάθε όρο της μορφής:

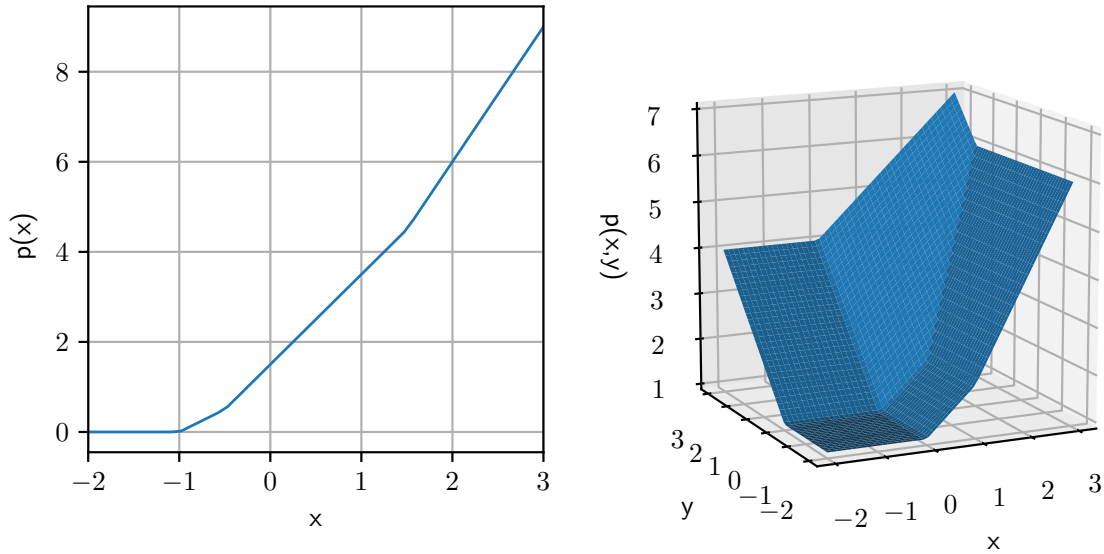
$$ax + b, a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \quad (2.47)$$

Ως **τροπικό πολυώνυμο** ονομάζουμε το μέγιστο πολλών τροπικών μονωνύμων, δηλαδή:

$$p(x) = \max_{i=1}^k (a_i x + b_i) \quad (2.48)$$

Η αναλογία με τα κλασικά πολυώνυμα, ορισμένα στο πεδίο των πραγματικών αριθμών, είναι προφανής. Με αντίστοιχο τρόπο μπορούν να οριστούν και τροπικά πολυώνυμα σε παραπάνω από μία διαστάσεις. Στην περίπτωση αυτή, το πολυώνυμο ορίζεται ως $p(\mathbf{x}) = \max_{i=1}^k (\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + b_i)$. Σημειώνεται ότι θα αναφερόμαστε στα διανύσματα \mathbf{a}_i ως τους **τροπικούς βαθμούς** των όρων του πολυωνύμου (slope vectors).

Παραδείγματα τέτοιων τροπικών πολυωνύμων, για μία και δύο διαστάσεις, φαίνονται στο Σχήμα 2.3. Παρατηρούμε ότι τα πολυώνυμα αυτά αντιστοιχούν σε κυρτές συναρτήσεις, λόγω του κυρτού χαρακτήρα της πράξης μεγίστου.



$$(\alpha') p(x) = \max(3x, 2x + 1.5, x + 1, 0)$$

$$(\beta') p(x, y) = \max(2x, x + y + 1, x + 1, y + 1, 1)$$

Σχήμα 2.3: Παραδείγματα τροπικών πολυωνύμων.

Όπως και τα κλασικά πολυώνυμα, έτσι και τα τροπικά πολυώνυμα είναι κλειστά ως προς τις αντίστοιχες πράξεις. Αυτό σημαίνει ότι, αν p, q δύο τροπικά πολυώνυμα, τότε τα $\max(p, q)$ και $p + q$ είναι επίσης τροπικά πολυώνυμα (η απόδειξη αυτών γίνεται με απλή εκτέλεση πράξεων). Παρά τις προαναφερθείσες ομοιότητες, τα τροπικά πολυώνυμα διαφέρουν από τα κλασικά, ακριβώς επειδή το σύνολο και οι πράξεις με τις οποίες ορίζονται αντιστοιχούν σε ημιδακτύλιο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, για ένα δεδομένο τροπικό πολυώνυμο $p(\mathbf{x})$, να μην υπάρχει πάντα τροπικό πολυώνυμο $q(\mathbf{x})$, τέτοιο ώστε $\max(p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x})) = -\infty$. Αυτή η έλλειψη αντιθέτου είναι χαρακτηριστικό που κληρονομείται από τα βασικά στοιχεία τροπικής άλγεβρας και, όπως θα δούμε στη συνέχεια, περιπλέκει ιδιαίτερα τη διαδικασία με την οποία προσπαθούμε να βρούμε παράγοντες σε ένα τροπικό πολυώνυμο.

Στο σημείο αυτό, θα εισάγουμε δύο πολύ σημαντικά στοιχεία στην ανάλυση των τροπικών πολυωνύμων, όπως αυτά παρουσιάζονται στο [10].

Ορισμός 2.12 (Πολύτοπο Newton). Έστω ένα πολυδιάστατο τροπικό πολυώνυμο $p(\mathbf{x}) = \max_{i=1}^k (\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + b_i)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Ως Πολύτοπο Newton $\text{Newt}(p)$ του πολυωνύμου ορίζουμε τον κυρτό φλοιό του συνόλου $\text{slopes}(p) = \{\mathbf{a}_i\}$ των κλίσεων των γραμμικών όρων (τροπικών βαθμών) του πολυωνύμου, δηλαδή:

$$\text{Newt}(p) = \text{conv} \{ \mathbf{a}_i \mid i = 1, 2, \dots, k \} \tag{2.49}$$

Ορισμός 2.13 (Επεκτεταμένο Πολύτοπο Newton). Έστω το ίδιο πολυδιάστατο τροπικό πολυώνυμο $p(\mathbf{x})$. Ως Επεκτεταμένο Πολύτοπο Newton ορίζουμε τον κυρτό φλοιό του συνόλου των κλίσεων των γραμμικών όρων του πολυωνύμου, έχοντας ως επιπλέον διάσταση τον σταθερό τους όρο. Πιο αναλυτικά:

$$\text{ENewt}(p) = \text{conv} \{(\mathbf{a}_i, b_i) \mid i = 1, 2, \dots, k\} \quad (2.50)$$

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, παρατηρούμε ότι το απλό Πολύτοπο Newton αποτελεί προβολή του επεκτεταμένου στις d πρώτες του διαστάσεις. Επιπρόσθετα, το $\text{ENewt}(p)$ έχει τις εξής ιδιότητες, όσον αφορά τις πράξεις μεταξύ των τροπικών πολυωνύμων:

Θεώρημα 2.9. Έστω δύο τροπικά πολυώνυμα $p(\mathbf{x})$ και $q(\mathbf{x})$, με τα αντίστοιχα πολύτοπα $\text{ENewt}(p)$ και $\text{ENewt}(q)$. Όσον αφορά τα πολύτοπα των πολυωνύμων που μπορούν να παραχθούν από αυτά τα δύο, συγκεκριμένα τα $\max(p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}))$ και $p(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})$, ισχύει ότι:

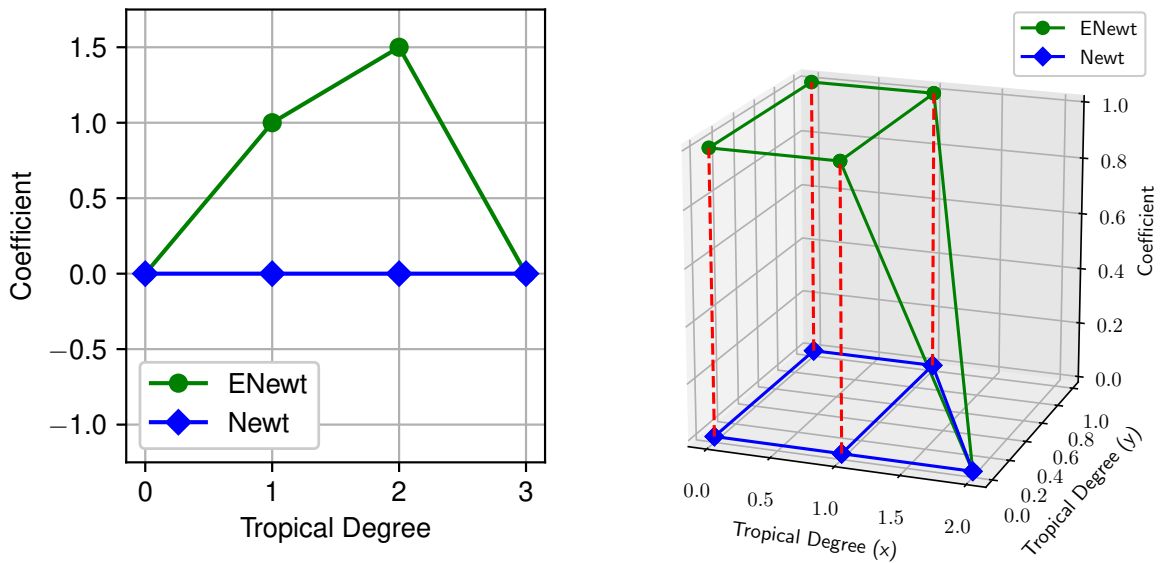
$$\text{ENewt}(\max(p, q)) = \text{conv} \left\{ \text{ENewt}(p) \cup \text{ENewt}(q) \right\} \quad (2.51)$$

$$\text{ENewt}(p + q) = \text{ENewt}(p) \oplus \text{ENewt}(q) \quad (2.52)$$

όπου το σύμβολο \oplus συμβολίζει το Minkowski άθροισμα μεταξύ δύο συνόλων A, B :

$$A \oplus B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \quad (2.53)$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε, ότι τα πολύτοπα αυτά μπορούν εν δυνάμει να οριστούν και για κλασικά πολυώνυμα, μέσω των διανυσμάτων των εκθετών των όρων των πολυωνύμων και των αντίστοιχων συντελεστών. Ωστόσο, στην περίπτωση των τροπικών πολυωνύμων, τα πολύτοπα αυτά αποκτούν ιδιαίτερη σημασία, η οποία φαίνεται με το αμέσως επόμενο θεώρημα. Παραδείγματα των πολυτόπων αυτών, για πολυώνυμα μίας και δύο μεταβλητών, φαίνονται στο Σχήμα 2.4.



$$(\alpha') \max(3x, 2x + 1.5, x + 1, 0)$$

$$(\beta') \max(2x, x + y + 1, x + 1, y + 1, 1)$$

Σχήμα 2.4: Πολύτοπα τροπικών πολυωνύμων. Σχήμα από τα [43], [45].

Θεώρημα 2.10. Έστω ένα τροπικό πολυώνυμο $p(\mathbf{x})$, καθώς και το αντίστοιχο πολύτοπο $\text{ENewt}(p)$. Ισχύει ότι το πολυώνυμο καθορίζεται ως συνάρτηση πλήρως από το πολύτοπο αυτό, δηλαδή, αν $\tilde{p}(\mathbf{x})$ ένα δεύτερο τροπικό πολυώνυμο, τότε:

$$\text{ENewt}(p) = \text{ENewt}(\tilde{p}) \Rightarrow p(\mathbf{x}) = \tilde{p}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (2.54)$$

Επιπλέον, οι μόνοι όροι του πολύτοπου που μετέχουν στον καθορισμό της συνάρτησης που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο, είναι αυτοί που αντιστοιχούν σε κορυφές των άνω όψεων (ως προς την τελευταία διάσταση) του κυρτού φλοιού.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το παραπάνω, αρκεί να δείξουμε ότι μόνο τα στοιχεία των κορυφών του άνω τμήματος του φλοιού αντιστοιχούν σε όρους που επηρεάζουν την τιμή του πολυωνύμου, με την (2.54) να προκύπτει ως ειδική περίπτωση αυτού. Πιο συγκεκριμένα, έστω δύο σημεία $(\mathbf{a}, b_1), (\mathbf{a}, b_2)$ του φλοιού αυτού. Όπως βλέπουμε, τα σημεία αυτά προβάλλονται στο ίδιο σημείο, όταν περνάμε από το ENewt στο Newt . Ωστόσο, αν υποθέσουμε ότι $b_2 > b_1$, τότε $\mathbf{a}^T \mathbf{x} + b_2 > \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b_1, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Αυτό σημαίνει ότι ο όρος που αντιστοιχεί στο ανώτερο σημείο είναι και αυτός ο οποίος καθορίζει την τιμή του τροπικού πολυωνύμου (αφού οδηγεί πάντα σε ανώτερη τιμή). Συνεπώς, τα μόνα σημεία που μπορούν να καθορίσουν την τιμή του πολυωνύμου, είναι αυτά που βρίσκονται στο άνω τμήμα του φλοιού που αντιστοιχεί στο $\text{ENewt}(p)$.

Ας λάβουμε τώρα μόνο μία από τις άνω όψεις του $\text{ENewt}(p)$. Δεδομένης της κυρτότητας της όψης αυτής, αν συμβολίσουμε με $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ τις κορυφές που την ορίζουν, τότε έχουμε ότι, για κάθε σημείο $\mathbf{v} = (\mathbf{a}, b)$ αυτής της όψης, θα ισχύει ότι:

$$\exists \lambda_i \in [0, 1], i = 1, \dots, m, : \mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \quad (2.55)$$

Αυτό σημαίνει ότι το σημείο αυτό της όψης είναι γραμμικός συνδυασμός των κορυφών που την ορίζουν. Έστω τώρα ότι από τις κορυφές αυτές, διαλέγουμε αυτήν που οδηγεί στη μεγαλύτερη τιμή για το πολυώνυμο, δηλαδή την \mathbf{v}_j , όπου:

$$j = \operatorname{argmax}_{i=1, \dots, m} (\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + b_i) \quad (2.56)$$

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να δούμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b &= \sum_{i=1}^m \lambda_i (\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + b_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \lambda_i (\mathbf{a}_j^T \mathbf{x} + b_j) \\ &= \mathbf{a}_j^T \mathbf{x} + b_j \end{aligned} \quad (2.57)$$

Συνεπώς, η τιμή που αντιστοιχεί στο εσωτερικό σημείο θα είναι μικρότερη από αυτή που αντιστοιχεί στην κορυφή της όψης. Συνεπώς, τα μόνα σημεία που επηρεάζουν την τιμή του πολυωνύμου είναι οι κορυφές των άνω όψεων του $\text{ENewt}(p)$, που είναι και το ζητούμενο. \square

Η παραπάνω ιδιότητα είναι χαρακτηριστική των τροπικών πολυωνύμων, καθώς στην περίπτωση των κλασικών πολυωνύμων πάνω στο δακτύλιο των πραγματικών αριθμών, οι εσωτερικοί όροι στο αντίστοιχο πολύτοπο μετέχουν κανονικά στον καθορισμό της ακριβούς συνάρτησης στην οποία αντιστοιχεί το πολυώνυμο. Ως εκ τούτου, η χρησιμότητα των παραπάνω εννοιών αφορά κυρίως τη μελέτη των πολυωνύμων στον τροπικό ημιδακτύλιο.

2.5.1 Τροπική Άλγεβρα και Μηχανική Μάθηση

Οι εφαρμογές της τροπικής άλγεβρας μπορούν να φανούν σε διάφορες κατηγορίες του τομέα της μηχανικής μάθησης. Ενδεικτικά, αναφέρουμε παρακάτω μερικές τέτοιες εφαρμογές (προφανώς η λίστα αυτή δεν είναι εξαντλητική).

- Η πλέον άμεση σύνδεση της τροπικής άλγεβρας με τη μηχανική μάθηση γίνεται μέσω των νευρωνικών δικτύων με ReLU ενεργοποιήσεις. Πράγματι, αυτή τη συσχέτιση μπορούμε να τη δούμε από τις ενεργοποιήσεις των νευρώνων σε αυτά τα δίκτυα, οι οποίοι ως γνωστόν αντιστοιχούν σε συναρτήσεις της παρακάτω μορφής:

$$y = \max(\mathbf{w}^T \mathbf{x} + b, 0) \quad (2.58)$$

δηλαδή, ακριβώς τροπικά πολυώνυμα με δύο όρους. Η περίπτωση αυτή είναι και αυτή που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια αυτής της εργασίας, και θα αναλυθεί περισσότερο σε επόμενο κεφάλαιο.

- Ένας άλλος τρόπος προσέγγισης είναι η χρήση της τροπικής άλγεβρας απευθείας ως δομικό στοιχείο του νευρωνικού δικτύου. Αυτό μπορεί να γίνει με τη χρήση **Μορφολογικών Νευρώνων (Morphological Perceptrons)**, οι οποίοι αντιστοιχούν στην παρακάτω συνάρτηση:

$$y = \max(b, w_1 + x_1, w_2 + x_2, \dots, w_d + x_d) = \max(b, \mathbf{w}^T \boxplus \mathbf{x}) \quad (2.59)$$

όπου η πράξη \boxplus ορίζει τον max-plus πολλαπλασιασμό δύο πινάκων $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, $\mathbf{D} = [d_{ij}]$, ως $\mathbf{C} \boxplus \mathbf{D} = \left[\max_k (c_{ik} + d_{kj}) \right]_{ij}$. Οι δομές αυτές έχουν παρουσιαστεί παλαιότερα στη βιβλιογραφία [40], αλλά πρόσφατα έχει γίνει επιπλέον προσπάθεια μελέτης τους [9], αναδεικνύοντας έναν τρόπο εκπαίδευσης τους που στηρίζεται στην επίλυση ενός προβλήματος κυρτής βελτιστοποίησης. Η βάση της διαδικασίας εκπαίδευσης αυτών των νευρώνων μπορεί να θεωρηθεί ως επέκταση της παρακάτω ιδιότητας των max-plus συστημάτων εξισώσεων:

Θεώρημα 2.11 ([5], [15]). Έστω ένα σύστημα max-plus εξισώσεων $\mathbf{A} \boxplus \mathbf{x} = b$. Το σύστημα αυτό έχει λύση αν και μόνο αν το διάνυσμα:

$$\bar{\mathbf{x}} = (-\mathbf{A}^T) \boxplus' b \quad (2.60)$$

είναι λύση, όπου \boxplus, \boxplus' οι max-plus και min-plus πολλαπλασιασμοί δυο πινάκων, έστω $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, $\mathbf{D} = [d_{ij}]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \boxplus \mathbf{D} &= \left[\max_k (c_{ik} + d_{kj}) \right]_{ij} \\ \mathbf{C} \boxplus' \mathbf{D} &= \left[\min_k (c_{ik} + d_{kj}) \right]_{ij} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Μια αξιοσημείωτη ιδιότητα αυτού του τύπου νευρώνων αποτελεί επίσης η ευκολία με την οποία επιτρέπουν τη μείωση του μεγέθους του δικτύου, αφαιρώντας τις λιγότερο σημαντικές συνδέσεις από το δίκτυο [51].

- Η τροπική άλγεβρα μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση πιο κλασικών μοντέλων μηχανικής μάθησης. Πιο συγκεκριμένα, στο [38], όπως παρουσιάστηκε παραπάνω, μπορεί να γίνει χρήση ιδεών από τροπική άλγεβρα για την εύρεση του πλήθους

των πιθανών συναρτήσεων συμπερασμού $f_{HMM} : \Sigma \rightarrow H$ ενός κρυφού μαρκοβιανού μοντέλου, όπως φαίνεται στο παράδειγμα της Ενότητας 2.3.4. Αυτό μπορεί να γίνει μέσω του πλήθους των κορυφών του πολυτόπου στο οποίο αντιστοιχεί ο λογάριθμος της πιθανότητας που έχουμε για την ακολουθία καταστάσεων του μοντέλου. Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι, όπως αναφέρεται και στο [38], αυτή η μοντελοποίηση ως τροπικό πολυώνυμο εισάγει ένα άνω όριο στις πιθανές συναρτήσεις συμπερασμού του μοντέλου, όπως αναφέραμε και στην Ενότητα 2.3.4. Αυτό οφείλεται στο ότι μόνο οι όροι που βρίσκονται στο άνω μέρος του φλοιού του αντίστοιχου πολυτόπου (οι οποίοι είναι πεπερασμένοι) το επηρεάζουν.

Επιπλέον, μέσω της τροπικής άλγεβρας μπορεί να γίνει και ανάλυση γενικότερων γραφικών μοντέλων. Συγκεκριμένα, στα [33], [47] γίνεται χρήση τροπικής άλγεβρας (με τη min-plus εκδοχή της) για την ανάλυση του αλγορίθμου Viterbi σε ένα κρυφό μαρκοβιανό μοντέλο. Αυτή η σύνδεση καθίσταται προφανής, αν αναλογιστεί κανείς τον τρόπο λειτουργίας του αλγορίθμου Viterbi, όπου σε κάθε βήμα, για κάθε πιθανή κατάσταση, επιλέγεται η προηγούμενη κατάσταση που ελαχιστοποιεί το άθροισμα του αρνητικού λογαρίθμου της πιθανότητας να βρεθούμε σε μία προηγούμενη κατάσταση, συν αυτόν της πιθανότητας να γίνει η απαιτούμενη μετάβαση. Αυτή η συμπεριφορά εκφράζεται εύκολα, μέσω ενός min-plus πολλαπλασιασμού πινάκων. Αντίστοιχη ιδέα μπορεί να εφαρμοστεί και σε κλασικότερα μοντέλα, όπως αυτόματα πεπερασμένων καταστάσεων. Η χρήση αρνητικών λογαρίθμων πιθανότητας για τις μεταβάσεις μεταξύ καταστάσεων οδηγεί στη δυνατότητα να γίνει μελέτη τους με αντίστοιχα μοντέλα τροπικής άλγεβρας [48].

- Τέλος, πρόσφατα έχει γίνει προσπάθεια για χρήση Log-Sum-Exp συναρτήσεων, με σκοπό την μοντελοποίηση αυθαίρετων δεδομένων [6], [7]. Οι συναρτήσεις αυτές, στην περίπτωση που γίνει εισαγωγή μιας παραμέτρου h , είναι της εξής μορφής:

$$f_h(\mathbf{x}) = h \log \left(\sum_k b_k^{\frac{1}{h}} e^{\frac{1}{h} \mathbf{a}_k^T \mathbf{x}} \right) \quad (2.62)$$

Σημειώνουμε εδώ πάλι τη συσχέτιση με την τροπική άλγεβρα η οποία αναδεικνύεται στην περίπτωση που $h \rightarrow 0$ με $h > 0$, οπότε και έχουμε ότι $f_h(\mathbf{x}) \approx \max_k (\mathbf{a}_k^T \mathbf{x})$. Δίκτυα δύο επιπέδων, τα οποία χρησιμοποιούν τις κατάλληλες συναρτήσεις ως ενεργοποιήσεις, ώστε να αντιστοιχούν σε συναρτήσεις της παραπάνω μορφής, αποδεικνύεται ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση ενός αυθαίρετου συνόλου δεδομένων (όπως ισχύει και για τα δίκτυα με πιο κλασικές ενεργοποιήσεις). Αυτό μπορεί να γίνει υπολογίζοντας τη διαφορά δύο συναρτήσεων του παραπάνω τύπου, μια προσέγγιση η οποία θα μας φανεί χρήσιμη και στη συνέχεια. Σημειώνεται επίσης ότι μια τέτοιου είδους προσέγγιση δεδομένων μπορεί να γίνει απευθείας με τη χρήση τροπικών συναρτήσεων, όπως αυτή παρουσιάζεται και στο [34], όπου τα δεδομένα προσεγγίζονται με τη χρήση μιας βέλτιστης τροπικής καμπύλης.

Κεφάλαιο 3

Διαίρεση Τροπικών Πολυωνύμων

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη δυνατότητα διαίρεσης των τροπικών πολυωνύμων, και θα εξετάσουμε μια ειδική μέθοδο για την προσεγγιστική επίλυση αυτού του προβλήματος. Τονίζουμε ότι, για λόγους ομοιότητας με τα κλασικά πολυώνυμα, στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσουμε ότι τα τροπικά μας πολυώνυμα έχουν ακέραιους τροπικούς βαθμούς (slopes), χωρίς αυτό να επηρεάζει την ανάλυσή μας.

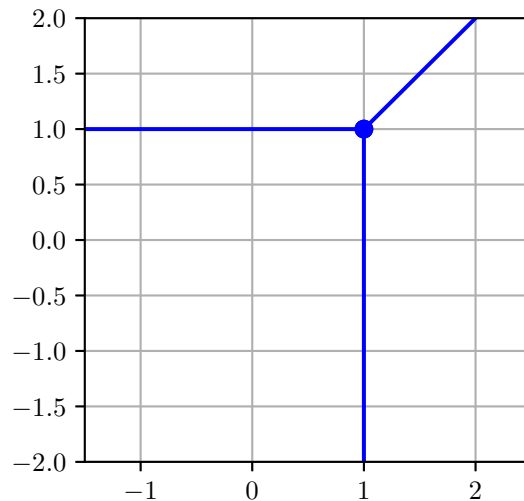
3.1 Ακριβής Διαίρεση Τροπικών Πολυωνύμων

Μια αξιοσημείωτη διαφορά των τροπικών πολυωνύμων σε σχέση με τα κλασικά αφορά την έννοια των ριζών τους. Πράγματι, στην περίπτωση των τροπικών πολυωνύμων ο ορισμός της ρίζας γίνεται με βάση τα όρια των γραμμικών τμημάτων του πολυωνύμου. Πιο συγκεκριμένα:

Ορισμός 3.1 (Ρίζες Τροπικού Πολυωνύμου). Έστω ένα τροπικό πολυώνυμο $p(\mathbf{x}) = \max_{i=1}^k (\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + b_i)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Ως ρίζα του p ονομάζουμε κάθε στοιχείο $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ για το οποίο υπάρχουν τουλάχιστον δύο μέγιστοι όροι του πολυωνύμου που αποκτούν την ίδια τιμή, δηλαδή:

$$\exists j_1, j_2 : j_1 \neq j_2, p(\mathbf{z}) = \mathbf{a}_{j_1}^T \mathbf{z} + b_{j_1} = \mathbf{a}_{j_2}^T \mathbf{z} + b_{j_2} \quad (3.1)$$

Το σύνολο των παραπάνω σημείων το συμβολίζουμε, όπως και πριν, $V(p)$. Οι ρίζες του πολυωνύμου με την παραπάνω έννοια αποτελούν το σύνολο των σημείων όπου η συνάρτηση στην οποία αντιστοιχεί το πολυώνυμο είναι μη παραγωγίσιμη. Ένα παράδειγμα τέτοιου συνόλου φαίνεται στο Σχήμα 3.1, όπου έχουμε την τροπική καμπύλη που ορίζεται από το σύνολο ριζών του $\max(x - 1, y - 1, 0)$.



Σχήμα 3.1: Ρίζες του πολυωνύμου $\max(x - 1, y - 1, 0)$. Σχήμα από το [43].

Στο σημείο αυτό, γεννάται το ερώτημα περί του τρόπου καθορισμού αυτών των ριζών, και κατά ποσό μπορούμε να βρούμε μια αναλογία με τα κλασικά πολυώνυμα ως προς την παραγοντοποίηση του τροπικού πολυωνύμου μέσω γραμμικών όρων. Περιοριζόμενοι σε πολυώνυμα μίας μεταβλητής, μπορούμε να δείξουμε το εξής:

Θεώρημα 3.1. Έστω ότι το τροπικό πολυώνυμο που εξετάζουμε μπορεί να γραφεί ως $p(x) = q(x) + \max(x, r)$, όπου q ένα άλλο τροπικό πολυώνυμο και $r \in \mathbb{R}$. Τότε το r είναι ρίζα του τροπικού πολυωνύμου $p(x)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι, αν διαλέξουμε τον όρο του $q(x)$ που αποκτά μέγιστη τιμή για $x = r$, έστω $\tilde{q}(x)$, τότε στο $p(x)$ με βάση το ότι $p(x) = q(x) + \max(x, r)$ θα πρέπει να υπάρχουν οι όροι $\tilde{q}(x) + x$ και $\tilde{q}(x) + r$, που γίνονται ίσοι (και μεγαλύτεροι όλων των υπολοίπων) για $x = r$. Συνεπώς, το σημείο αυτό αποτελεί ρίζα του τροπικού πολυωνύμου. \square

Πιο ενδιαφέρονσα είναι η μελέτη του κατά πόσο η παραπάνω ιδιότητα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή αν μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο, εφόσον γνωρίζουμε μια ρίζα του. Όσον αφορά το στοιχείο αυτό, μπορούμε να δείξουμε το εξής:

Θεώρημα 3.2. Έστω ένα τροπικό πολυώνυμο $p(x)$. Στην περίπτωση αυτή, αν το σημείο $x = r$ είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε το πολυώνυμο μπορεί να γραφεί ως $p(x) = q(x) + \max(x, r)$, όπου $q(x)$ ένα άλλο τροπικό πολυώνυμο.

Απόδειξη. Έστω ότι οι όροι που δείχνουν ότι το στοιχείο r είναι ρίζα του τροπικού πολυωνύμου είναι οι $a_{j_1}x + b_{j_1}$ και $a_{j_2}x + b_{j_2}$. Για τους όρους αυτούς λοιπόν ισχύει:

$$a_{j_1}r + b_{j_1} = a_{j_2}r + b_{j_2} \Rightarrow r = -\frac{b_{j_2} - b_{j_1}}{a_{j_2} - a_{j_1}} \quad (3.2)$$

Επιπλέον, καθώς οι όροι αυτοί δίνουν μέγιστη τιμή στο πολυώνυμο για $x = r$, θα πρέπει να ανήκουν στις κορυφές του άνω τμήματος του $\text{ENewt}(p)$. Συνεπώς, θα υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που θα συνδέει αυτές τις δύο κορυφές, του οποίου η κλίση θα είναι ίση με $-r$, όπως προκύπτει από την (3.2) (αν θεωρήσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $a_{j_2} > a_{j_1}$). Επιπλέον, δε γίνεται να παρεμβάλλεται άλλη κορυφή μεταξύ τους, αφού αν υπήρχε τέτοια θα έπρεπε να ισχύει, για κάποιο λ :

$$a = \lambda a_{j_1} + (1 - \lambda)a_{j_2}, \quad b > \lambda b_{j_1} + (1 - \lambda)b_{j_2} \Rightarrow \\ ax + b > \lambda a_{j_1}x + (1 - \lambda)a_{j_2}x + \lambda b_{j_1} + (1 - \lambda)b_{j_2} > \max(a_{j_1}r + b_{j_1}, a_{j_2}r + b_{j_2}) \quad (3.3)$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα το ευθύγραμμο τμήμα αυτό είναι και όψη του $\text{ENewt}(p)$.

Δεδομένης της κυρτότητας του $\text{ENewt}(p)$ θα πρέπει αυτό να αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα, διατεταγμένα με φθίνουσα σειρά κλίσης. Συνεπώς, μπορούμε να ισχυριστούμε τα εξής:

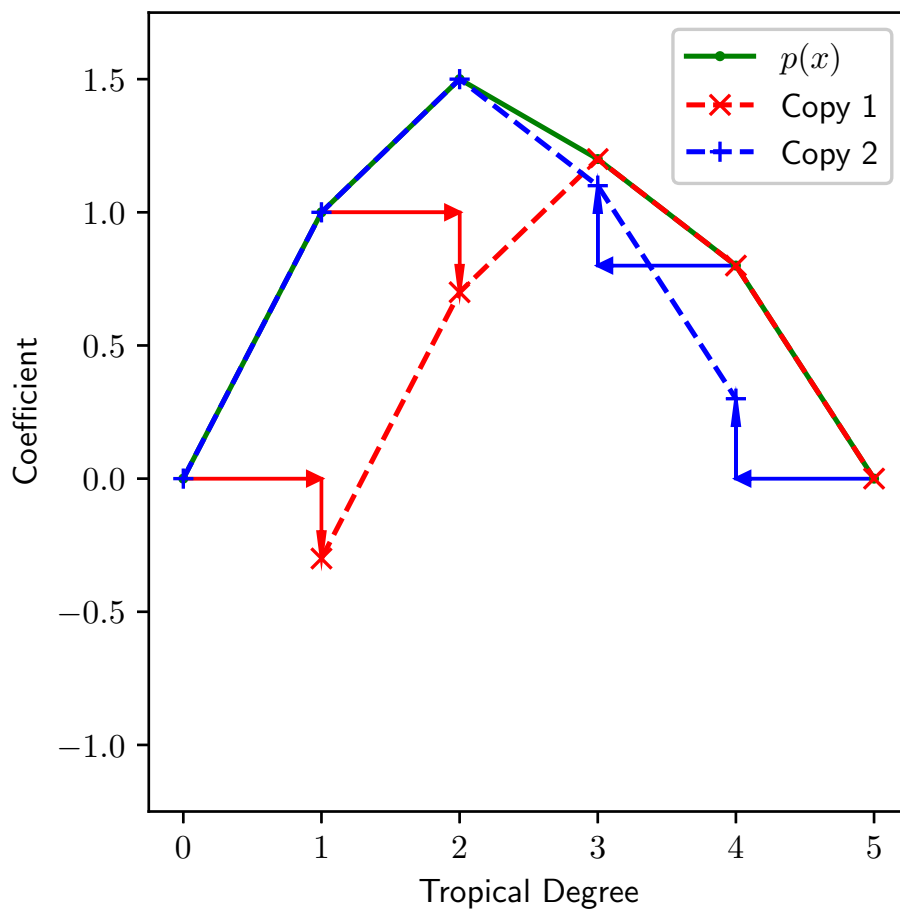
- Για κάθε όρο του τροπικού πολυωνύμου που αντιστοιχεί σε τροπικό βαθμό (δηλαδή slope) μικρότερο ή ίσο του a_{j_1} , μπορούμε να προσθέσουμε στο πολυώνυμο τον όρο που αντιστοιχεί σε προσθήκη x και αφαίρεση r από αυτόν (μετατόπιση κατά μία μονάδα δεξιά και κατά $|r|$ κατακόρυφα), χωρίς να αλλάξει το πολυώνυμο (καθώς όλοι οι νέοι όροι βρίσκονται στο εσωτερικό του φλοιού).
- Για κάθε όρο του πολυωνύμου που αντιστοιχεί σε μεγαλύτερο βαθμό, τότε κατ'αντιστοιχία μπορούμε να προσθέσουμε τον όρο που αντιστοιχεί σε αφαίρεση x και προσθήκη r (μετακίνηση κατακόρυφα και αριστερά). Για τον ίδιο λόγο με πριν, η τιμή του πολυωνύμου δεν επηρεάζεται.

Κατ' αυτόν τον τρόπο έχουμε παράγει δύο αντίγραφα ενός πολυτόπου, τα οποία διαφέρουν κατά 1 στον οριζόντιο και κατά $|r|$ στον κατακόρυφο άξονα. Συνεπώς, έτσι έχουμε εκφράσει το αρχικό μας πολύτοπο ως το Minkowski άθροισμα ενός άλλου πολυτόπου (έστω $\text{ENewt}(q)$) και ενός ευθυγράμμου τμήματος που αντιστοιχεί σε αυτήν την μετατόπιση, συγκεκριμένα αυτό που ορίζεται από τα σημεία $(0, r)$ και $(x, 0)$. Δεδομένης της ιδιότητας (2.52), αυτό μας δίνει ότι το αρχικό πολυώνυμό μας μπορεί να γραφεί ως $p(x) = q(x) + \max(x, r)$, που είναι και το ζητούμενο. \square

Η παραπάνω αποδεικτική διαδικασία φαίνεται και γραφικά, στο Σχήμα 3.2. Στο παραπάνω αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, για να είναι εφικτή η παραγοντοποίηση του πολυώνυμου, αναγκαστήκαμε να προσθέσουμε όρους που δεν περιέχονταν αρχικά στο πολυώνυμο. Η αναγκαιότητα αυτού του σταδίου φαίνεται από το εξής παράδειγμα, όπου το πολυώνυμο που εξετάζουμε είναι το $p(x) = \max(2x, x + 2, 1)$. Προφανής ρίζα του είναι η $x = -1$, αλλά ως έχει δε γίνεται να γραφεί κατά το ζητούμενο τρόπο. Ωστόσο, παρατηρούμε το εξής:

$$\begin{aligned} \max(2x, x + 2, 1) &= \max(2x, x + 2, x - 1, 1) \\ &= \max(x + \max(x, 2), -1 + \max(x, 2)) \\ &= \max(x, 2) + \max(x, -1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Συνεπώς, με προσθήκη όρων μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ισοδύναμο πολυώνυμο, το οποίο μπορεί να παραγοντοποιηθεί κατά τον επιθυμητό τρόπο.



Σχήμα 3.2: Παραγοντοποίηση του $\max(5x, 4x + 0.8, 3x + 1.2, 2x + 1.5, x + 1, 0)$, μέσω δύο αντιγράφων που διαφέρουν κατά 1 οριζόντια και κατά $r = 0.3$ κατακόρυφα.

Πόρισμα 3.1 ([46]). Κάθε μονοδιάστατο τροπικό πολυώνυμο μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως άθροισμα τροπικών γραμμικών όρων, δηλαδή όρων της μορφής $\max(x, r)$. Η αναπαράσταση αυτή είναι μοναδική, για ένα δεδομένο (ως συνάρτηση) πολυώνυμο.

Το πόρισμα αυτό προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 3.2, καθώς με την κατασκευή που περιγράφεται στην απόδειξη του θεωρήματος αυτού, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε το

πολυώνυμό μας μέσω των ριζών του, σε τροπικά γραμμικούς όρους (οι ρίζες θα είναι αριθμήσιμες στο πλήθος, καθώς προκύπτουν από γραμμικές εξισώσεις μεταξύ των όρων, οι οποίοι θεωρούμε ότι δεν ταυτίζονται, ώστε να έχουμε απειρία λύσεων). Ας έχουμε υπόψιν ότι η παραγοντοποίηση αυτή δεν έχει την ίδια έννοια με αυτή των κλασικών πολυωνύμων. Πιο συγκεκριμένα, η παραπάνω κατασκευή μας δίνει ότι πολλά πολυώνυμα μπορεί να έχουν την ίδια παραγοντοποίηση, εφόσον αντιστοιχούν στην ίδια συνάρτηση.

Αντίστοιχη μελέτη με τα παραπάνω γίνεται και στο [14], όπου γίνεται μελέτη των συνθηκών όπου η διαίρεση αυτή τροπικών πολυωνύμων επιτυγχάνει επακριβώς. Ωστόσο, κατά τη μετάβαση σε πολλές μεταβλητές χάνουμε πλέον την ικανότητα να εκτελέσουμε αυτήν την παραγοντοποίηση μοναδικά. Για αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, στην επόμενη ενότητα θα εξετάσουμε έναν τρόπο να εκτελέσουμε μια προσεγγιστική μορφή διαίρεσης τροπικών πολυωνύμων, η οποία μας επιτρέπει να χειριστούμε με έναν πιο γενικό τρόπο τις περιπτώσεις όπου δεν είναι εφικτή μια ακριβής παραγοντοποίηση.

3.2 Προσεγγιστική Διαίρεση των Τροπικών Πολυωνύμων

Έστω ότι έχουμε ένα τροπικό πολυώνυμο $p(\mathbf{x}) = \max_{i=1}^k (\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} + b_i)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, και θέλουμε να εκτελέσουμε τη διαίρεσή του με ένα άλλο τροπικό πολυώνυμο $d(\mathbf{x}) = \max_{i=1}^k (\tilde{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{x} + \tilde{b}_i)$. Όπως και στην περίπτωση της κανονικής διαίρεσης πολυωνύμων, αναφερόμαστε στο πολυώνυμο $p(\mathbf{x})$ ως το διαιρετέο και στο $d(\mathbf{x})$ ως το διαιρέτη της πράξης αυτής. Σκοπός της διαίρεσης στην περίπτωση των κλασικών πολυωνύμων είναι η εύρεση ενός πηλίκου και ενός υπολοίπου (τα οποία συμβολίζουμε με $q(\mathbf{x})$ και $r(\mathbf{x})$ αντίστοιχα) ώστε να ισχύει $p(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x})d(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x})$. Η απαίτηση αυτή, στην περίπτωση των τροπικών πολυωνύμων, μεταφράζεται στην:

$$p(\mathbf{x}) = \max(q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})) \quad (3.5)$$

Όσον αφορά τα τροπικά πολυώνυμα, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, εκτός από την ειδική περίπτωση όπου $p(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})$, δεν είμαστε βέβαιοι για την ύπαρξη μιας μη τετριμμένης διαίρεσης (κατά την οποία θέτουμε $r(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$, οπότε η (3.5) ισχύει τετριμμένα).

Για αποφυγή του παραπάνω προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε μια ιδέα η οποία στηρίζεται στην έννοια του residuation, κατά το οποίο ορίζουμε ως προσεγγιστικό αντίθετο στοιχείο ως προς μια δεδομένη πράξη το μεγαλύτερο δυνατό στοιχείο που προσεγγίζει τη ζητούμενη τιμή για την επίλυση του προβλήματος. Συνεπώς, θα αναζητήσουμε μια λύση η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη (3.5) μεγιστοτικά, δηλαδή θα ψάξουμε να βρούμε τα μεγαλύτερα $q(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})$ για τα οποία ισχύει:

$$p(\mathbf{x}) \geq \max(q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (3.6)$$

Η μεγιστοτικότητα των τροπικών πολυωνύμων που παρέχονται ως λύση του προβλήματος εκφράζεται μέσω της παρακάτω ανισότητας, όπου τα πολυώνυμα $\tilde{q}(\mathbf{x}), \tilde{r}(\mathbf{x})$ έχουν όρους των ίδιων τροπικών βαθμών (slopes) με τα $q(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})$:

$$\max(q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})) \geq \max(\tilde{q}(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x}), \tilde{r}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (3.7)$$

Με βάση τις παραπάνω απαιτήσεις, μπορούμε να δούμε τι χαρακτηριστικά πρέπει να έχουν τα ζητούμενα πολυώνυμα, ώστε να τις ικανοποιούν.

Θεώρημα 3.3. Το πολυώνυμο $q(\mathbf{x})$ πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να ισχύει ότι:

$$\text{Newt}(q + d) \subseteq \text{Newt}(p) \quad (3.8)$$

Αυτό σημαίνει ότι το $q(\mathbf{x})$ πρέπει να είναι τέτοιο ώστε για κάθε όρο του $q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})$ να υπάρχει όρος του $p(\mathbf{x})$ με τον ίδιο τροπικό βαθμό (slope).

Απόδειξη. Έστω (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι υπάρχει στοιχείο $\mathbf{a} \in \text{Newt}(q + d) \setminus \text{Newt}(p)$. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το στοιχείο αυτό μετέχει στον καθορισμό της τιμής του πολυωνύμου $q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})$ (καθώς σίγουρα υπάρχει ένα τέτοιο στοιχείο, δεδομένου ότι το $\text{Newt}(q + d)$ είναι προβολή του $\text{ENewt}(q + d)$). Στην περίπτωση αυτή, αν έχουμε $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε άλλο πιθανό όρο $\hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{x} + \hat{b}$ του p , με $\hat{\mathbf{a}} \neq \mathbf{a}$, μπορούμε να βρούμε πάντα λ , τέτοιο ώστε:

$$\underbrace{\lambda \|\mathbf{a}\|_2^2 + b}_{\text{τιμή } q + d} > \underbrace{\lambda \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{a} + \hat{b}}_{\text{τιμή } p} \Leftrightarrow \lambda (\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}})^T \mathbf{a} > \hat{b} - b \quad (3.9)$$

Συνεπώς, πάντα υπάρχει ένα στοιχείο για το οποίο το πολυώνυμο $q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})$ θα δίνει μεγαλύτερη τιμή από το $p(\mathbf{x})$. Εδώ βρίσκεται το άτοπο, δεδομένου ότι το $q(\mathbf{x})$ είναι τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η (3.6), από την οποία προκύπτει οπωσδήποτε ότι $p(\mathbf{x}) \geq q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})$. Συνεπώς, προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. \square

Θεώρημα 3.4. Το πολυώνυμο $q(\mathbf{x})$ πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε το άνω τμήμα του πολυτόπου $\text{ENewt}(q + d)$ να βρίσκεται κάτω από το άνω τμήμα του $\text{ENewt}(p)$.

Απόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας όρος του $\text{ENewt}(q + d)$ που βρίσκεται πάνω από το $\text{ENewt}(p)$, τότε με βάση την ιδιότητα (2.51) θα έχουμε ότι:

$$\text{ENewt}(\max(p, q + d)) = \text{conv}(\text{ENewt}(p) \cup \text{ENewt}(q + d)) \neq \text{ENewt}(p) \quad (3.10)$$

Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχουν σημεία όπου το πολυώνυμο $p(\mathbf{x})$ είναι μικρότερο από το $q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})$, κάτι μη επιθυμητό. \square

Με βάση τις παραπάνω δύο απαιτήσεις, παρουσιάζουμε τη διαδικασία για την εκτέλεση της απαιτούμενης προσεγγιστικής διαίρεσης τροπικών πολυωνύμων, στον Αλγόριθμο 5. Όπως θα δούμε και πιο τυπικά στη συνέχεια, οι απαιτήσεις αυτές καλύπτονται πλήρως, μέσω των δύο πρώτων βημάτων του αλγορίθμου (το πρώτο περιορίζει το $\text{Newt}(q + d)$, ενώ το δεύτερο το $\text{ENewt}(q + d)$). Όπως και στην περίπτωση της κλασικής διαίρεσης πολυωνύμων, θα αναφερόμαστε στο $q(\mathbf{x})$ ως το πηλίκο και στο $r(\mathbf{x})$ ως το υπόλοιπο της διαίρεσης του $p(\mathbf{x})$ με το $d(\mathbf{x})$.

Ο Αλγόριθμος 5 είναι ισοδύναμος με το μορφολογικό opening του άνω φλοιού του $\text{ENewt}(p)$, που αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση $n_p : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$, με τον άνω φλοιό του $\text{ENewt}(d)$ (ομοίως $n_d : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$). Πράγματι ¹, η διαδικασία του μορφολογικού opening ξεκινά μέσω ενός μορφολογικού erosion:

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{c} \in C} (n_p(\mathbf{x} + \mathbf{c}) - n_d(\mathbf{c})) \quad (3.11)$$

¹Περαιτέρω λεπτομέρειες για τους μορφολογικούς αυτούς τελεστές μπορούν να βρεθούν στα [31], [41], [42]

Αλγόριθμος 5 Αλγόριθμος Διαίρεσης Τροπικών Πολυωνύμων

Έστω $p(\mathbf{x}), d(\mathbf{x})$ δύο τροπικά πολυώνυμα. Ο αλγόριθμος για τη διαίρεση του $p(\mathbf{x})$ από το $d(\mathbf{x})$ είναι ο εξής:

- Έστω C το σύνολο των κλίσεων (τροπικών βαθμών των όρων ενός τροπικού πολυωνύμου) με βάση τις οποίες μπορούμε να μετατοπίσουμε το $\text{Newt}(d)$, έτσι ώστε να περιλαμβάνεται πλήρως στο $\text{Newt}(p)$. Πιο τυπικά:

$$C = \{\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^d : \text{Newt}(\mathbf{c}^T \mathbf{x} + d(\mathbf{x})) \subseteq \text{Newt}(p)\}$$

- Για κάθε στοιχείο $\mathbf{c} \in C$, ορίζουμε ως $q_{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}$ τη μεγαλύτερη τιμή q για την οποία το $\text{ENewt}(p)$ είναι πάνω από το $\text{ENewt}(q + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d(\mathbf{x}))$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής:

$$q_{\mathbf{c}} = \max \{q \in \mathbb{R} : p(\mathbf{x}) \geq q + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$$

- Ως έξοδο του αλγορίθμου θεωρούμε το τροπικό πολυώνυμο:

$$q(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{c} \in C} (q_{\mathbf{c}} + \mathbf{c}^T \mathbf{x})$$

καθώς και το τροπικό πολυώνυμο:

$$r(\mathbf{x}) = \max_{t(\mathbf{x}) \in T} (t(\mathbf{x}))$$

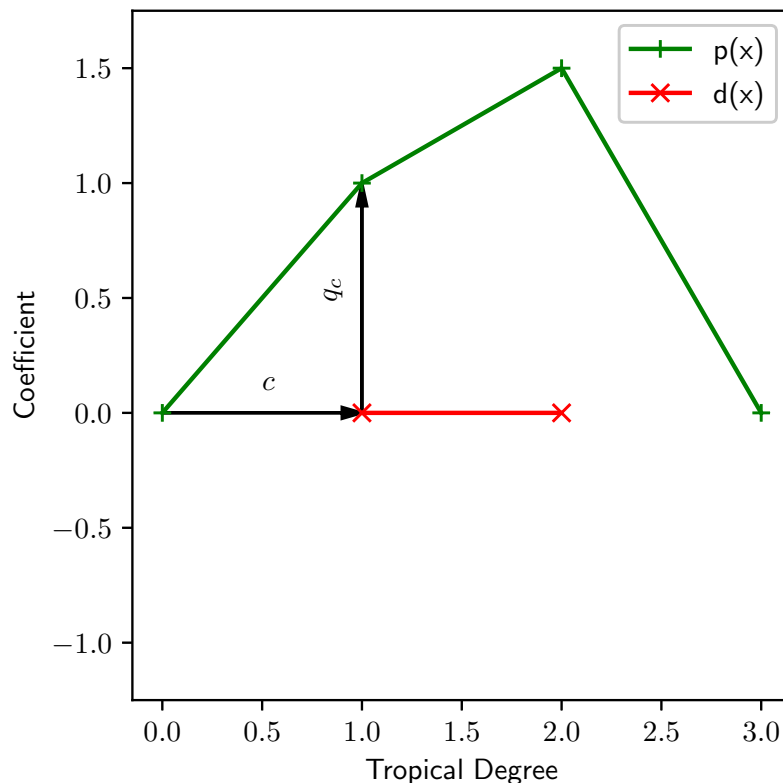
όπου T το σύνολο των όρων $\mathbf{a}_j^T \mathbf{x} + b_j$ για τους οποίους δεν υπάρχει τιμή \mathbf{c} ώστε $\mathbf{a}_j \in \text{Newt}(\mathbf{c}^T \mathbf{x} + d(\mathbf{x}))$.

όπου $C = \{\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^d : \text{Newt}(\mathbf{c}^T \mathbf{x} + d(\mathbf{x})) \subseteq \text{Newt}(p)\}$ είναι το ίδιο σύνολο επιτρεπτών «οριζόντιων» μετατοπίσεων του πολυτόπου του διαιρέτη με τον Αλγόριθμο 5. Στη συνέχεια εφαρμόζεται ένα μορφολογικό dilation:

$$\delta\varepsilon(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{c} \in C} (\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + n_d(\mathbf{c})) \quad (3.12)$$

Η διαδικασία του erosion αφαιρεί όλα τα σημεία του $\text{Newt}(p)$ που δεν μπορούν να καλυφθούν με μετατοπίσεις του διαιρέτη, θέτοντας την αντίστοιχη τιμή τους στο $-\infty$. Παράλληλα, η ίδια διαδικασία μειώνει και τις κορυφές του πολυτόπου. Ισοδύναμα, ο αλγόριθμός μας εκτελεί αντίστοιχη λειτουργία, επιλέγοντας μέσω του C μόνο τις επιτρεπτές μετατοπίσεις του $\text{Newt}(d)$, ώστε να είναι κάτω από το $\text{Newt}(p)$. Το dilation που ακολουθεί αποκαθιστά αυτές τις κορυφές, αλλά με τέτοιο τρόπο ώστε το τελικό πολύτοπο να βρίσκεται κάτω από το αρχικό, καθώς λόγω του infimum η ακριβής ανακατασκευή είναι ανέφικτη. Το τελικό αποτέλεσμα θα είναι ισοδύναμο με το γράφημα που προκύπτει αν ωθήσουμε τη συνάρτηση $n_d(\mathbf{x})$ όσο πιο κοντά γίνεται στην $n_p(\mathbf{x})$, η οποία διαδικασία είναι ισοδύναμη με αυτή του Αλγόριθμου 5. Πράγματι, ο τελευταίος επιλέγει τα q_c ως τα μεγαλύτερα δυνατά, ώστε κάθε αντίγραφο του πολυτόπου του διαιρέτη να είναι κάτω από αυτό του διαιρετέου.

Γραφικά, μπορούμε να δούμε τη λειτουργία του αλγορίθμου στο Σχήμα 3.3, όπου φαίνεται τόσο η οριζόντια μετατόπιση c , καθώς και η κάθετη μετατόπιση q_c , που περιγράφουμε στον Αλγόριθμο 5.



Σχήμα 3.3: Μετατοπίσεις διαιρέτη κατά την εκτέλεση της προσεγγιστικής διαίρεσης, για $p(x) = \max(3x, 2x + 1.5, x + 1, 0)$, $d(x) = \max(x, 0)$.

Παρατηρούμε ότι λόγω της παραπάνω ισοδυναμίας, σε αντίθεση με τη διαίρεση των κλασικών πολυωνύμων, δεν είναι απαραίτητο να γίνει έλεγχος των στοιχείων του C με κάποια

συγκεκριμένη σειρά, ενώ επίσης δεν απαιτείται να ελεγχθούν σειριακά. Αυτό συμβαίνει καθώς δεν υπάρχει η δυνατότητα να αφαιρεθούν όροι από το τελικό αποτέλεσμα (δεδομένης της έλλειψης αντίθετου στοιχείου στον τροπικό ημιδακτύλιο). Συνεπώς, δεν πρόκειται να επηρεαστεί το αποτέλεσμα από τη σειρά με την οποία εξετάζουμε τα στοιχεία του C (παρά το γεγονός ότι αυτό μπορεί να οδηγήσει στο να εξετάσουμε πλεονάζοντες όρους, δε θα επηρεάσουν τη συνάρτηση που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο). Συνεπώς, ο παραπάνω αλγόριθμος μπορεί να παραλληλοποιηθεί με άμεσο τρόπο.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να δείξουμε ότι τα πολυώνυμα που κατασκευάζονται από τον παραπάνω αλγόριθμο ικανοποιούν τις ιδιότητες που ήδη περιγράψαμε. Συγκεκριμένα:

Θεώρημα 3.5. Για κάθε δύο τροπικά πολυώνυμα $p(\mathbf{x}), d(\mathbf{x})$, το πηλίκο $q(\mathbf{x})$ και το υπόλοιπο $r(\mathbf{x})$ ικανοποιούν την ιδιότητα (3.6).

Απόδειξη. Αυτό ισχύει επειδή το $q(\mathbf{x})$ κατασκευάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες που ορίζονται από τα Θεωρήματα 3.3 (λόγω του πρώτου βήματος του αλγορίθμου) και 3.4 (λόγω του δεύτερου βήματος). Επιπλέον, καθώς το υπόλοιπο περιλαμβάνει μόνο όρους που υπάρχουν ήδη στο $p(\mathbf{x})$, τότε ισχύει σίγουρα ότι:

$$\max(r(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})) = p(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (3.13)$$

Συνεπώς, με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι η (3.6) ισχύει. \square

Θεώρημα 3.6. Τα τροπικά πολυώνυμα $q(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})$ είναι μεγιστοτικά, με την έννοια ότι για κάθε άλλα δύο τροπικά πολυώνυμα $\tilde{q}(\mathbf{x}), \tilde{r}(\mathbf{x})$ για τα οποία ισχύει η (3.6), και τα οποία περιέχουν όρους ίδιων τροπικών βαθμών με τα $q(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})$ αντίστοιχα, ισχύει ότι:

$$\max(q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})) \geq \max(\tilde{q}(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x}), \tilde{r}(\mathbf{x})) \quad (3.14)$$

Απόδειξη. Καθώς τα δύο πηλίκα και τα δύο υπόλοιπα περιέχουν όρους των ίδιων βαθμών, μπορούμε να εξετάσουμε κάθε ζεύγος χωριστά.

- Δεδομένου ότι για κάθε όρο του $q(\mathbf{x})$ ισχύει ότι:

$$q_c = \max \{q \in \mathbb{R} : p(\mathbf{x}) \geq q + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\} \quad (3.15)$$

θα πρέπει να ισχύει $q_c \geq \tilde{q}_c, \forall \mathbf{c} \in C$, καθώς και τα δύο είναι μικρότερα από το διαιρετέο. Συνεπώς:

$$q(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{c} \in C} (q_c + \mathbf{c}^T \mathbf{x}) \geq \max_{\mathbf{c} \in C} (\tilde{q}_c + \mathbf{c}^T \mathbf{x}) = \tilde{q}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (3.16)$$

- Δεδομένου ότι το υπόλοιπο που παρέχεται από τον αλγόριθμο ταιριάζει πλήρως με το διαιρετέο, θα πρέπει, με βάση αντίστοιχο επιχειρήμα, να ισχύει ότι $r(\mathbf{x}) \geq \tilde{r}(\mathbf{x})$.

Η επιθυμητή ιδιότητα προκύπτει άμεσα. \square

3.3 Διαίρεση Τροπικών Πολυωνύμων με Πολλαπλούς Διαιρέτες

Όπως και στην περίπτωση της κλασικής διαίρεσης πολυωνύμων, έτσι και εδώ επεκτείνουμε την παραπάνω διαδικασία στην περίπτωση όπου έχουμε πολλά πολυώνυμα ως διαιρέτες.

Συγκεκριμένα, θέλουμε τώρα να διαιρέσουμε το τροπικό πολυώνυμο $p(\mathbf{x})$ με ένα σύνολο τροπικών πολυωνύμων $d_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, n$, δηλαδή θέλουμε να βρούμε ένα σύνολο από πολυώνυμα πηλικά $q_i(\mathbf{x}), 1, \dots, n$, καθώς και ένα υπόλοιπο $r(\mathbf{x})$, ώστε να ισχύει:

$$p(\mathbf{x}) \geq \max \left(\max_{i=1}^n (q_i(\mathbf{x}) + d_i(\mathbf{x})), r(\mathbf{x}) \right) \quad (3.17)$$

Σε αντίθεση με τον ακολουθιακό τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα αυτό στην περίπτωση των κλασικών πολυωνύμων, ο αλγόριθμος που προτείνουμε για το πρόβλημα αυτό είναι άμεση επέκταση αυτού που περιγράφεται στην προηγούμενη ενότητα. Συγκεκριμένα, η διαδικασία αυτή φαίνεται στον Αλγόριθμο 6. Είναι εύκολο να δούμε ότι και εδώ ικανοποιείται η ζητούμενη ιδιότητα για τις εξόδους του αλγορίθμου, δεδομένου ότι τα πηλικά προκύπτουν από τις επιμέρους εκτελέσεις της απλής του εκδοχής, ενώ το υπόλοιπο πάλι αποτελείται από όρους που υπάρχουν και στο αρχικό πολυώνυμο.

Αλγόριθμος 6 Αλγόριθμος Διάρθρωσης Τροπικών Πολυωνύμων - Πολλαπλοί Διαιρέτες

Έστω $p(\mathbf{x})$ ένα τροπικό πολυώνυμο καθώς και ένα σύνολο διαιρετών:

$$d_i(\mathbf{x}) = \max_{j=1}^k \left(\tilde{\mathbf{a}}_{ij}^T \mathbf{x} + \tilde{b}_{ij} \right), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, i = 1, \dots, n$$

Ο αλγόριθμος για τη διαίρεση του $p(\mathbf{x})$ από τα $d_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, n$ είναι:

- Για κάθε έναν από τους διαιρέτες $d_i(\mathbf{x})$, εκτελούμε τον Αλγόριθμο 5, με αντίστοιχες εξόδους $q_i(\mathbf{x}), r_i(\mathbf{x})$.
 - Ως έξοδο λαμβάνουμε τα τροπικά πολυώνυμα $q_i(\mathbf{x})$, και ως υπόλοιπο το πολυώνυμο $r(\mathbf{x})$ που αποτελείται από την τομή των όρων που παρουσιάζονται σε όλα τα $r_i(\mathbf{x})$.
-

Είναι προφανές, με βάση τα παραπάνω, ότι ο Αλγόριθμος 6 δεν επιβάλλει κάποια συγκεκριμένη σειρά στην εξέταση των πολυωνύμων $d_i(\mathbf{x})$. Αυτό μας οδηγεί στην εξής ενδιαφέρουσα ιδιότητα:

Πόρισμα 3.2. Το υπόλοιπο $r(\mathbf{x})$ είναι το ίδιο, ανεξάρτητα από τη σειρά των διαιρετών $d_i(\mathbf{x})$.

Αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση των κλασικών πολυωνύμων, όπως είδαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο. Πράγματι, εκεί η ιδιότητα ισχύει μόνο αν το σύνολο των διαιρετών είναι βάση Groebner για το ιδανικό στο οποίο αντιστοιχεί [13].

3.4 Παραδείγματα

Στο σημείο αυτό, ας δούμε μερικά παραδείγματα της διαδικασίας της προσεγγιστικής διαίρεσης τροπικών πολυωνύμων, όπως αυτή περιγράφηκε παραπάνω:

1. Έστω ότι θέλουμε να διαιρέσουμε το τροπικό πολυώνυμο $p(x)$ με το πολυώνυμο $d(x)$, όπου:

$$p(x) = \max(3x, 2x + 1.5, x + 1, 0), \quad d(x) = \max(x + 1, 0) \quad (3.18)$$

Οι πιθανές τιμές των κλίσεων που περιλαμβάνονται στο σύνολο C είναι $\{0, 1, 2\}$. Για καθεμία από αυτές έχουμε:

$$\begin{aligned} q_0 &= \max \{q \in \mathbb{R} : q + \max(x + 1, 0) \leq p(x)\} = 0 \\ q_1 &= \max \{q \in \mathbb{R} : q + x + \max(x + 1, 0) \leq p(x)\} = 0.5 \\ q_2 &= \max \{q \in \mathbb{R} : q + 2x + \max(x + 1, 0) \leq p(x)\} = -1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Με βάση τα παραπάνω, λαμβάνουμε ως πηλίκο το $q(x) = \max(2x - 1, x + 0.5, 0)$. Επιπλέον, καθώς έχουν καλυφθεί όλοι οι όροι του αρχικού πολυωνύμου, το υπόλοιπο είναι το $r(x) = -\infty$.

2. Έστω τώρα ότι θέλουμε να εκτελέσουμε τη διαίρεση των εξής δύο πολυωνύμων:

$$p(x) = \max(3x, 2x + 1.5, x + 1, 0), \quad d(x) = \max(x, 0) \quad (3.20)$$

Ομοίως με πριν, το σύνολο των πιθανών κλίσεων είναι το $C = \{0, 1, 2\}$. Ωστόσο, αυτή τη φορά έχουμε τις εξής τιμές για τους συντελεστές του πηλίκου:

$$\begin{aligned} q_0 &= \max \{q \in \mathbb{R} : q + \max(x, 0) \leq p(x)\} = 0 \\ q_1 &= \max \{q \in \mathbb{R} : q + x + \max(x, 0) \leq p(x)\} = 1 \\ q_2 &= \max \{q \in \mathbb{R} : q + 2x + \max(x, 0) \leq p(x)\} = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Παρατηρούμε εδώ ότι το αντίγραφο του διαιρέτη που αντιστοιχεί σε τιμή $c = 1$ έχει πολύτοπο που βρίσκεται πιο κάτω από τον αντίστοιχο όρο του $p(x)$. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $q(x) + d(x)$ θα δίνει τελικά χαμηλότερες τιμές από το $p(x)$. Σημειώνεται βέβαια ότι το αντίστοιχο υπόλοιπο είναι πάλι $r(x) = -\infty$, καθώς πάλι καλύπτονται όλοι οι όροι του πολυωνύμου $p(x)$.

3. Έστω τώρα ότι θέλουμε να εκτελέσουμε τη διαδικασία αυτή για μεγαλύτερο αριθμό διαστάσεων. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι τα πολυώνυμά μας τώρα είναι τα:

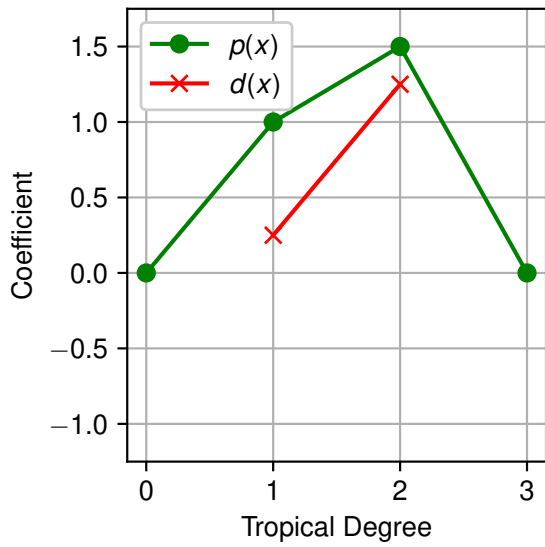
$$p(x, y) = \max(2x, x + y + 1, x + 1, y + 1, 1), \quad d(x, y) = d(y) = \max(y, 0) \quad (3.22)$$

Στην περίπτωση αυτή, έχουμε ότι $C = \{(0, 0), (1, 0)\}$ (σημειώνεται ότι το πρώτο στοιχείο αυτών των μετατοπίσεων αφορά προσθήκη όρων x , ενώ το δεύτερο όρων y). Για αυτές τις μετατοπίσεις, έχουμε τα εξής:

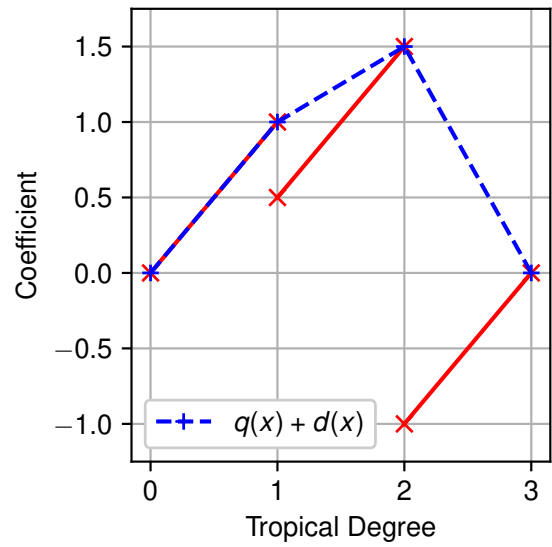
$$\begin{aligned} q_{00} &= \max \{q \in \mathbb{R} : q + \max(y, 0) \leq p(x, y)\} = 1 \\ q_{10} &= \max \{q \in \mathbb{R} : q + x + \max(y, 0) \leq p(x, y)\} = 1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $q(x, y) = \max(x + 1, 1)$. Ωστόσο, επειδή οι μετατοπίσεις μας δεν καλύπτουν έναν όρο του $p(x, y)$, πρέπει να τον προσθέσουμε ως υπόλοιπο, οπότε έχουμε $r(x, y) = r(x) = 2x$. Παρατηρούμε βέβαια ότι με αυτές τις επιλογές, η ιδιότητα (3.6) ισχύει ως ισότητα.

Τα δύο πρώτα παραδείγματα φαίνονται και στα Σχήματα 3.4 και 3.5. Εδώ βλέπουμε πώς το πολυώνυμο διαιρέτης, και στις δύο περιπτώσεις, ωθείται όσο το δυνατόν υψηλότερα, ώστε να ταιριάζει με το διαιρετέο.

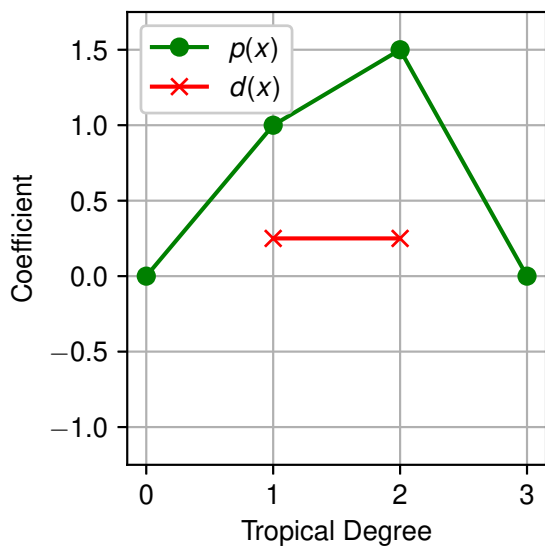


(α')

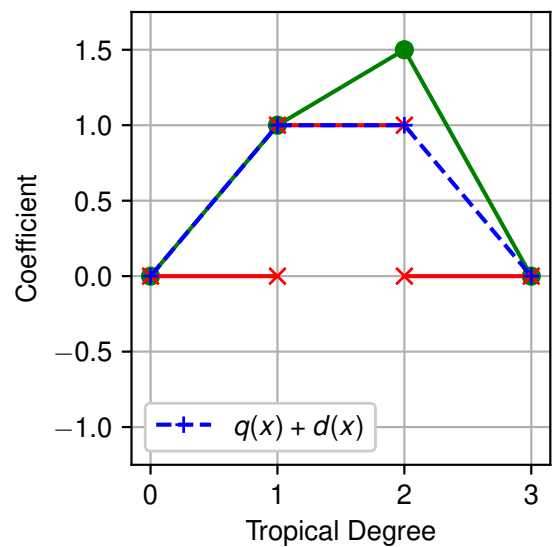


(β')

Σχήμα 3.4: Διαίρεση του $\max(3x, 2x + 1.5, x + 1, 0)$ με το $\max(x + 1, 0)$. Σχήμα από το [45].



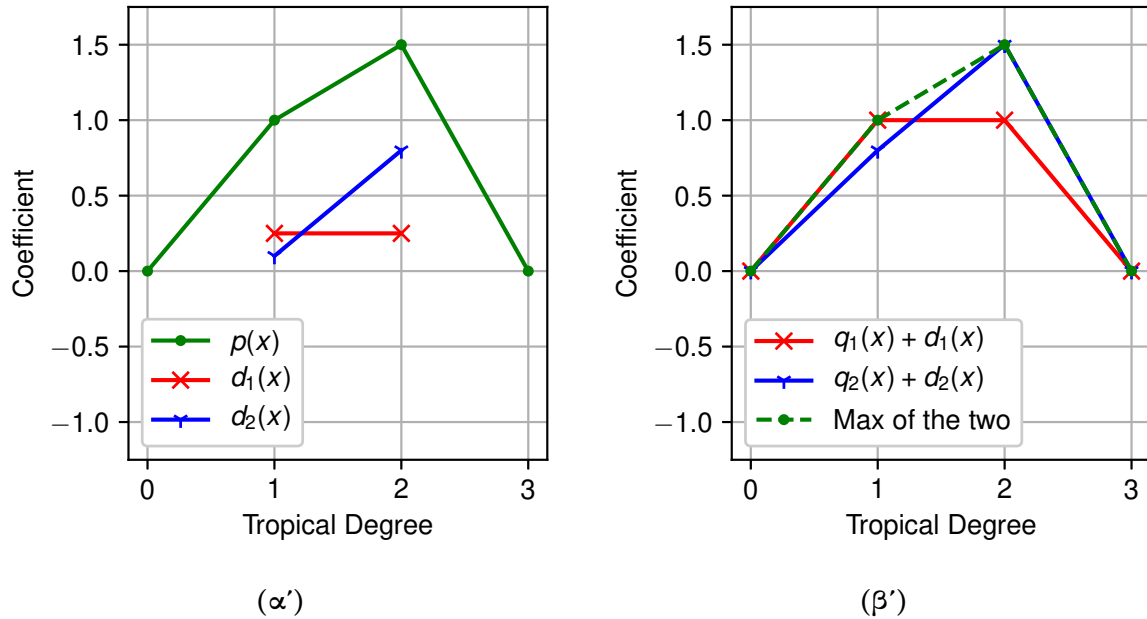
(α')



(β')

Σχήμα 3.5: Διαίρεση του $\max(3x, 2x + 1.5, x + 1, 0)$ με το $\max(x, 0)$. Σχήμα από το [45].

Ως τελευταίο παράδειγμα, μπορούμε να δούμε και γραφικά την επέκταση του παραπάνω, στην περίπτωση που έχουμε πολλούς διαιρέτες. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 3.6, όπου έχουμε πάλι τον διαιρετέο $p(x) = \max(3x, 2x + 1.5, x + 1, 0)$ που είχαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, αλλά αυτή τη φορά έχουμε διαιρέτες $d_1 = \max(x, 0)$, $d_2 = \max(x + 0.8, 0)$. Με όμοια διαδικασία με πριν, μπορούμε να βρούμε ότι $q_1(x) = \max(2x, x + 1, 0)$, $q_2 = \max(2x - 0.8, x + 0.7, 0)$. Στο Σχήμα 3.6 βλέπουμε ότι κανένα από τα δύο επιμέρους αποτελέσματα δε φτάνει ακριβώς το διαιρετέο, αλλά το $\max(q_1(x) + d_1(x), q_2(x) + d_2(x))$ είναι ακριβώς ίσο με αυτόν.



Σχήμα 3.6: Διαίρεση του $\max(3x, 2x + 1.5, x + 1, 0)$ με τα $\max(x, 0)$, $\max(x + 0.8, 0)$

3.5 Διαίρεση Τροπικών Πολυωνύμων ως Πρόβλημα Γενικευμένου Γεωμετρικού Προγραμματισμού

Στο σημείο αυτό, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οι συντελεστές του τροπικού πολυωνύμου $p(x)$ μπορούν να επιλεγθούν ώστε να είναι θετικοί. Αυτό μπορεί να γίνει χωρίς βλάβη της γενικότητας, καθώς μπορούμε να προσθέσουμε ένα μεγάλο θετικό αριθμό στο πολυώνυμο, και να τον αφαιρέσουμε από τα πολυώνυμα που δίνονται ως αποτέλεσμα της διαίρεσης (εκτελώντας, πρακτικά, μια τροπική μορφή «κλιμάκωσης» του τροπικού πολυωνύμου). Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να κάνουμε χρήση ιδεών **Γεωμετρικού Προγραμματισμού (Geometric Programming - GP)** για την ανάλυση της παραπάνω μορφής διαίρεσης.

3.5.1 Θεωρία Γεωμετρικού Προγραμματισμού

Ο Γεωμετρικός Προγραμματισμός [3] αφορά προβλήματα βελτιστοποίησης τα οποία πραγματεύονται posynomials, που αποτελούν ειδική περίπτωση κλασικών πολυωνύμων. Συγχε-

κριμένα, ως posynomial ορίζουμε κάθε συνάρτηση της μορφής:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^k c_i x_1^{a_{1i}} x_2^{a_{2i}} \dots x_d^{a_{di}}, \quad x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}_+ \quad (3.24)$$

όπου επιπλέον ισχύει $c_i > 0, i = 1, \dots, k$. Παρατηρούμε ότι ένα posynomial είναι ένα κλασικό πολυώνυμο, όπου επιπλέον γίνεται περιορισμός των όρων του ώστε να λαμβάνουν αποκλειστικά θετικές τιμές. Επίσης, παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός στους εκθέτες των μεταβλητών, οι οποίοι μπορούν να λαμβάνουν και αρνητικές τιμές (χωρίς κάποια επίδραση στη συνέχεια της συνάρτησης, αφού ούτως ή άλλως περιορίζεται στις θετικές τιμές των μεταβλητών).

Με βάση το παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε ένα πρόβλημα Γεωμετρικού προγραμματισμού ως το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad f(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t.} \quad f_i(\mathbf{x}) \leq 1, i = 1, \dots, m \\ & \quad \quad g_i(\mathbf{x}) = 1, i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (3.25)$$

όπου οι συναρτήσεις f, f_1, \dots, f_m είναι posynomials επί των μεταβλητών, ενώ οι g_1, \dots, g_p είναι μονώνυμα με θετικούς συντελεστές. Για την επίλυση του προβλήματος αυτού, μπορεί να γίνει χρήση των παρακάτω μετατροπών, για το μετασχηματισμό του σε ένα πρόβλημα κυρτής βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $z_i = \ln x_i, i = 1, \dots, d$, τότε μπορούμε να μετασχηματίσουμε το (3.25) στο εξής πρόβλημα:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{z}}{\text{minimize}} \quad \tilde{f}(\mathbf{z}) \\ & \text{s.t.} \quad \tilde{f}_i(\mathbf{z}) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ & \quad \quad \tilde{g}_i(\mathbf{z}) = 0, i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (3.26)$$

όπου $\tilde{f}(\mathbf{z}) = \ln f(e^{\mathbf{z}})$, και ομοίως για τις υπόλοιπες συναρτήσεις. Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα αυτό αποτελεί πλέον ένα πρόβλημα κυρτής βελτιστοποίησης, καθώς η συνάρτηση $\tilde{f}(\mathbf{z})$ είναι κυρτή:

$$\tilde{f}(\mathbf{z}) = \ln f(e^{\mathbf{z}}) = \ln \left(\sum_{i=1}^k e^{\ln c_i + a_{1i}z_1 + \dots + a_{di}z_d} \right) \quad (3.27)$$

Συνεπώς, η \tilde{f} είναι μία συνάρτηση της μορφής Log-Sum-Exp, η οποία μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι κυρτή (για απόδειξη αυτού παραπέμπουμε στο [2, p. 74]). Συνεπώς, το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με τη χρήση μεθόδων κυρτής βελτιστοποίησης.

Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να γενικευθεί περαιτέρω, για την επίλυση προβλημάτων Γενικευμένου Γεωμετρικού Προγραμματισμού. Τα προβλήματα αυτά προκύπτουν αν η απαίτηση οι συναρτήσεις f, f_1, \dots, f_m του προβλήματος (3.25) να είναι posynomials επεκταθεί, ώστε να καλύπτει και την περίπτωση οι συναρτήσεις αυτές να είναι γενικευμένα posynomials. Τα τελευταία περιλαμβάνουν και τις εξής δύο περιπτώσεις κατασκευής τους:

- Ύψωση ενός γενικευμένου posynomial σε θετική ρητή δύναμη.
- Μέγιστο δύο γενικευμένων posynomials.

Από αυτές τις δύο περιπτώσεις, εμάς μας ενδιαφέρει στην παρούσα ανάλυση η δεύτερη, όπως θα δούμε και παρακάτω. Αποδεικνύεται (λόγω μονοτονίας των παραπάνω συναρτήσεων), ότι μπορεί να γίνει αναγωγή ενός προβλήματος Γενικευμένου Γεωμετρικού Προγραμματισμού σε ένα πρόβλημα απλού Γεωμετρικού Προγραμματισμού, για την επίλυσή του [3].

3.5.2 Αλγόριθμος Διαίρεσης με Γενικευμένο Γεωμετρικό Προγραμματισμό

Υπό την παραπάνω θεωρητική σκοπιά, ο αλγόριθμος διαίρεσης τροπικών πολυωνύμων που περιγράψαμε μπορεί να παρουσιαστεί ως πρόβλημα Γενικευμένου Γεωμετρικού Προγραμματισμού (για συντομία GGP). Πράγματι, το πηλίκο της διαίρεσης τροπικών πολυωνύμων μπορεί να βρεθεί λύνοντας το παρακάτω πρόβλημα GGP:

$$\begin{aligned} & \underset{q_c, l_c}{\text{minimize}} && \sum_{c \in C} l_c^{-1} \\ & \text{s.t.} && l_c q_c^{-1} \leq 1, \forall c \in C \\ & && (q \oplus d)_j p_j^{-1} \leq 1, \forall j \in \text{slopes}(p(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (3.28)$$

πάνω στις μεταβλητές q_c και l_c . Υπενθυμίζουμε ότι $\text{slopes}(p(\mathbf{x}))$ είναι το σύνολο των κλίσεων, δηλαδή των τροπικών βαθμών των όρων του τροπικού πολυωνύμου. Εδώ επιπλέον ορίζουμε:

$$(q \oplus d)_j = \max_{c: j-c \in \text{slopes}(p(\mathbf{x}))} (q_c + d_{j-c}) \quad (3.29)$$

ως την max-plus συνέλιξη των ακολουθιών συντελεστών d_i και q_c των $d(\mathbf{x})$ και $q(\mathbf{x})$ αντίστοιχα. Αυτή η max-plus συνέλιξη μας δίνει επιπλέον τους συντελεστές του τροπικού πολυωνύμου $q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})$, όμοια με τον υπολογισμό των συντελεστών γινομένου κλασικών πολυωνύμων μέσω κλασσικής συνέλιξης. Το παραπάνω πρόβλημα είναι GGP, καθώς τόσο ο στόχος ελαχιστοποίησης όσο και οι δύο τύποι ανισοτικών περιορισμών είναι γενικευμένα posynomials των μεταβλητών q_c και l_c .

Θεώρημα 3.7. *Η λύση στο GGP πρόβλημα (3.28) είναι ίση με το πολυώνυμο $q(\mathbf{x})$ που επιστρέφεται από τον Αλγόριθμο 5.*

Απόδειξη. Ο δεύτερος τύπος περιορισμών ισοδυναμεί με τη συνθήκη ότι η μετατοπισμένη εκδοχή του $q(\mathbf{x})$ έχει Επεκτεταμένο Πολύτοπο Newton κάτω από αυτό του $p(\mathbf{x})$. Ο πρώτος τύπος χρησιμεύει για τον περιορισμό των τιμών q_c από κάτω, οπότε και τις εξαναγκάζει προς αύξηση, καθώς ο στόχος βελτιστοποίησης μειώνεται, όσο αυτό το όριο αυξάνεται.

Βλέπουμε ότι, δεδομένου ότι ο δεύτερος τύπος περιορισμών θέτει ένα άνω όριο στην αύξηση της τιμής των q_c , το ίδιο άνω όριο, εμμέσως, τίθεται και στην αύξηση των l_c , μέσω του πρώτου τύπου περιορισμών. Δεδομένου ότι η τιμή προς ελαχιστοποίηση μειώνεται καθώς αυξάνουν όλα τα l_c , το ελάχιστο επιτυγχάνεται ακριβώς όταν όλες οι μεταβλητές τείνουν προς αυτό το άνω όριο. Συνεπώς, το πολυώνυμο $q(\mathbf{x})$ που κατασκευάζεται από τους συντελεστές q_c είναι μεγιστοτικό, άρα και ακριβώς αυτό που κατασκευάζεται από τον αλγόριθμο που ήδη παρουσιάστηκε. \square

Κεφάλαιο 4

Ελαχιστοποίηση Νευρωνικών Δικτύων

Στη βιβλιογραφία αναφέρεται συχνά το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης νευρωνικών δικτύων, ως προς το πλήθος των νευρώνων και των συνδέσεων μεταξύ τους. Το πρόβλημα αυτό ήδη έχει μελετηθεί, με αρκετές μεθόδους να προτείνονται για την επίλυσή του. Ενδεικτικά, μπορούμε να αναφέρουμε τις εξής:

- Στο [26] παρουσιάζεται ο αλγόριθμος Optimal Brain Damage (OBD), και στο [20] ο Optimal Brain Surgeon (OBS), που αποτελεί μια επέκταση του πρώτου, για αυθαίρετο αριθμό παραμέτρων. Και οι δύο αλγόριθμοι στοχεύουν στην μείωση των διαστάσεων του δικτύου, μέσω της αφαίρεσης βαρών (δηλαδή συνδέσεων μεταξύ των νευρώνων), με σκοπό τη διατήρηση της αρχικής τιμής της συνάρτησης σφάλματος του δικτύου. Πιο συγκεκριμένα, αν L η συνάρτηση σφάλματος του δικτύου, και $\mathbf{H} = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial w_{q_i} \partial w_{q_j}} \right]$ η αντίστοιχη Εσσιανή μήτρα, με w_{q_i} τα βάρη του δικτύου, τότε επιλέγεται προς αφαίρεση η παράμετρος με την ελάχιστη σημαντικότητα (saliency):

$$L_q = \frac{1}{2} \frac{w_q^2}{[\mathbf{H}^{-1}]_{qq}} \quad (4.1)$$

και ανανεώνονται τα υπόλοιπα βάρη κατάλληλα. Αυτή η μέθοδος εξασφαλίζει ότι η αύξηση της τιμής της συνάρτησης σφάλματος θα είναι η ελάχιστη δυνατή, στην περίπτωση διαγραφής αυτού του βάρους (δηλαδή τενεί ίσο με 0).

- Μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα είναι αυτή που υιοθετείται από το [8]. Οι συγγραφείς αυτού ασχολούνται με την αφαίρεση ενός νευρώνα εξ' ολοκλήρου, και όχι σταδιακά μηδενίζοντας τα βάρη του. Η επιλογή του νευρώνα προς αφαίρεση γίνεται με σκοπό την ελαχιστοποίηση του μέτρου της εισόδου που δίνει αυτός ο νευρώνας στους επόμενους, ώστε στη συνέχεια να γίνει προσθήκη ενός όσο το δυνατόν μικρότερου διορθωτικού όρου στα βάρη της εισόδου των υπόλοιπων νευρώνων του ίδιου επιπέδου. Η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει επαναληπτικά, μέχρι να φτάσουμε στον επιθυμητό αριθμό νευρώνων του δικτύου.
- Τέλος, πρόσφατα έχει γίνει προσπάθεια εφαρμογής αντίστοιχων μεθόδων σε πιο σύγχρονες αρχιτεκτονικές. Πιο συγκεκριμένα, στο [19] γίνεται αφαίρεση των συνδέσεων μεταξύ των νευρώνων που αντιστοιχούν σε μικρά βάρη, οπότε και η προσέγγιση είναι παρεμφερής με αυτή των [20], [26]. Επιπλέον, στο [27] παρουσιάζεται μία μέθοδος ελαχιστοποίησης συνελικτικών δικτύων, η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με αυτήν του [8]. Αναλυτικότερα, αντιμετωπίζοντας κάθε στοιχείο της εικόνας εισόδου ως ξεχωριστό δείγμα, εφαρμόζεται η ίδια τεχνική, όπου επιλέγονται προς αφαίρεση οι νευρώνες που δίνουν τη μικρότερη κατά μέτρο είσοδο στο επόμενο επίπεδο, και στη συνέχεια με χρήση ελαχίστων τετραγώνων προσεγγίζεται η έξοδος του επόμενου επιπέδου, χρησιμοποιώντας μικρότερο αριθμό νευρώνων.

Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης δικτύου είναι καίριο, δεδομένου του γεγονότος ότι πλέον το μέγεθος των νευρωνικών δικτύων αυξάνεται δραματικά. Παράλληλα, στην παραπάνω βιβλιογραφία είναι κοινή η άποψη ότι ενώ ο μεγάλος αριθμός παραμέτρων απαιτείται κατά την εκπαίδευση του δικτύου (καθώς παρέχουν αρκετούς βαθμούς ελευθερίας), τελικά καταλήγει να είναι πλεονάζων, καθώς ακόμη και με πολύ μεγάλη μείωση του αριθμού των νευρώνων οδηγούμαστε σε παρεμφερή αποτελέσματα, όσον αφορά την επιτυχία του δικτύου στο να κατηγοριοποιεί τα δεδομένα εισόδου.

Στο πλαίσιο αυτό, θα εξετάσουμε κατά πόσο μπορεί να γίνει χρήση της επιπλέον πληροφορίας που μας δίνει η τροπική ερμηνεία των νευρωνικών δικτύων που μελετάμε (σε συνδυασμό

με τα εργαλεία που αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη ενότητα), για την επέκταση των μεθόδων που χρησιμοποιούνται σε αυτό το πρόβλημα. Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε πώς μπορεί να γίνει ακριβώς αυτή η εφαρμογή ιδεών από την διαίρεση τροπικών πολυωνύμων, στο πρόβλημα της ελαχιστοποίησης νευρωνικών δικτύων.

4.1 Τροπική Ερμηνεία των Νευρωνικών Δικτύων με Τμηματικά Γραμμικές Ενεργοποιήσεις

Οι παραπάνω ιδέες της τροπικής γεωμετρίας μπορούν να χρησιμεύσουν στην ανάλυση νευρωνικών δικτύων τα οποία περιλαμβάνουν τμηματικά γραμμικές ενεργοποιήσεις. Ενδεικτικά, τέτοιες συναρτήσεις ενεργοποίησης είναι η ReLU συνάρτηση:

$$\alpha = \max(y, 0) \quad (4.2)$$

και οι maxout ενεργοποιήσεις:

$$\alpha = \max_{k=1}^n(y_i) \quad (4.3)$$

όπου y και y_i οι αποκρίσεις του νευρώνα πριν την ενεργοποίηση.

4.1.1 Νευρωνικά Δίκτυα ως Τροπικές Ρητές Συναρτήσεις

Η περίπτωση των δικτύων που κάνουν χρήση των παραπάνω ενεργοποιήσεων έχει μελετηθεί εκτενώς στα [10], [50], όπου και γίνεται ερμηνεία τους με τη χρήση τροπικής άλγεβρας. Σε αυτές τις μελέτες αποδεικνύεται το εξής θεώρημα, το οποίο είναι κομβικής σημασίας για την μελέτη των δικτύων που κάνουν χρήση ReLU ενεργοποιήσεων.

Θεώρημα 4.1. Έστω ένα νευρωνικό δίκτυο, το οποίο αποτελείται από πολλαπλά πλήρως συνδεδεμένα επίπεδα, τα ενδιάμεσα εκ των οποίων περιλαμβάνουν ReLU ενεργοποιήσεις, και το τελευταίο χωρίς ενεργοποίηση. Αν $f(\mathbf{x})$ η συνάρτηση στην οποία αντιστοιχεί το νευρωνικό δίκτυο, τότε ισχύει:

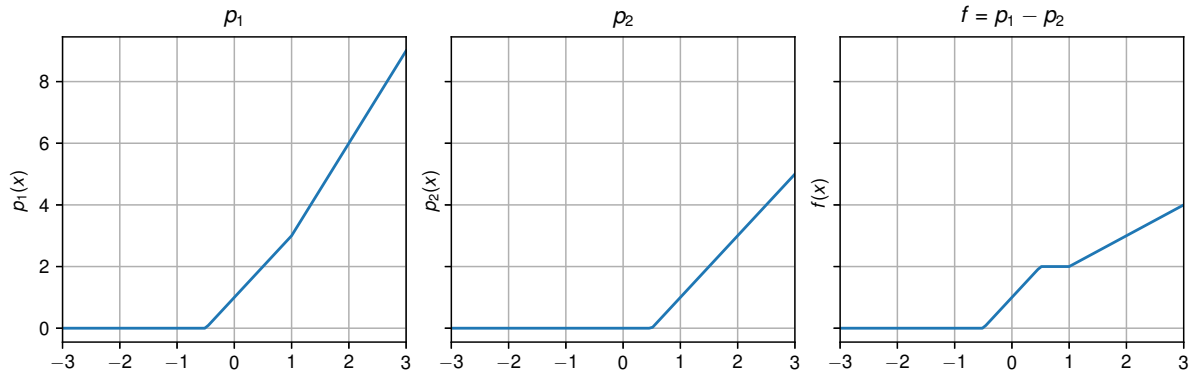
$$f(\mathbf{x}) = p_+(\mathbf{x}) - p_-(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (4.4)$$

όπου p_+, p_- δύο τροπικά πολυώνυμα. Η διαφορά τους καλείται επίσης και **τροπική ρητή συνάρτηση**.

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού μπορεί να γίνει με επαγωγή στο πλήθος των επιπέδων του δικτύου. Για μια αναλυτικότερη απόδειξη παραπέμπουμε στο [50]. Όσον αφορά μία σκιαγράφησή της, η βάση της επαγωγής (δίκτυο δύο επιπέδων) δείχνεται εύκολα, και θα μελετηθεί σε επόμενη ενότητα. Ας υποθέσουμε ότι ένα δίκτυο L επιπέδων έχει συνάρτηση εξόδου που δίνεται από την (4.4), και ότι έχουμε ένα νέο δίκτυο με ένα επιπλέον επίπεδο, που έχει πίνακες βαρών και σταθερών όρων $\mathbf{W} = \mathbf{W}_+ - \mathbf{W}_-, \mathbf{b} = \mathbf{b}_+ - \mathbf{b}_-$ (με καθέναν από τους επιμέρους πίνακες να περιέχει μόνο θετικά στοιχεία). Στην περίπτωση αυτή, για την έξοδο του τελικού δικτύου ισχύει το εξής (δεδομένου ότι προσθέτουμε ReLU ενεργοποίηση στο τέλος του προηγούμενου δικτύου:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{W} \max(f(\mathbf{x}), 0) + \mathbf{b} \\ &= (\mathbf{W}_+ - \mathbf{W}_-) \max(p_+(\mathbf{x}) - p_-(\mathbf{x}), 0) + \mathbf{b}_+ - \mathbf{b}_- \\ &= (\mathbf{W}_+ - \mathbf{W}_-) \max(p_+(\mathbf{x}), p_-(\mathbf{x})) - (\mathbf{W}_+ - \mathbf{W}_-) p_-(\mathbf{x}) + \mathbf{b}_+ - \mathbf{b}_- \\ &= (\mathbf{W}_+ \max(p_+(\mathbf{x}), p_-(\mathbf{x})) + \mathbf{W}_- p_-(\mathbf{x}) + \mathbf{b}_+) - \\ &\quad - (\mathbf{W}_- \max(p_+(\mathbf{x}), p_-(\mathbf{x})) + \mathbf{W}_+ p_-(\mathbf{x}) + \mathbf{b}_-) \end{aligned} \quad (4.5)$$

το οποίο επίσης αποτελεί μία τροπική ρητή συνάρτηση, καθώς και την έξοδο του δικτύου με $L + 1$ επίπεδα, που είναι και το ζητούμενο. \square



Σχήμα 4.1: Τροπική ρητή συνάρτηση $f(x) = p_1(x) - p_2(x)$, όπου $p_1(x) = \max(3x, 2x + 1, 0)$ και $p_2(x) = \max(2x - 1, 0)$.

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας, θα θεωρήσουμε ότι τα τροπικά πολυώνυμα που εξετάζουμε έχουν και αρνητικούς τροπικούς βαθμούς στους όρους τους (σημειώνεται ότι αυτό δεν επηρεάζει την ανάλυση του Κεφαλαίου 3). Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι η ερμηνεία των νευρωνικών δικτύων ως τροπικές ρητές συναρτήσεις μπορεί να επεκταθεί και σε ρητούς τροπικούς βαθμούς (slopes) στους όρους του τροπικού πολυωνύμου (καθώς μπορούμε θεωρητικά να τους μετατρέψουμε σε ακέραιους, πολλαπλασιάζοντας τα βάρη με έναν αρκετά μεγάλο παράγοντα, και να αλλάξουμε τις τιμές εισόδου για να αντισταθμίσουμε την επίδρασή του). Συνεπώς, στην υπόλοιπη ανάλυση αγνοούμε αν οι συντελεστές μας είναι ακέραιοι ή όχι, όπως γίνεται και στο [10] και λαμβάνεται ως πρακτική παραδοχή στο [50]. Στην πράξη, οι δύο περιπτώσεις είναι ισοδύναμες, καθώς έχουμε πεπερασμένη ακρίβεια για την αναπαράσταση πραγματικών αριθμών σε υπολογιστή.

4.1.2 Επέκταση Μοντέλου σε Συνελικτικά Δίκτυα

Μπορούμε να κάνουμε εδώ την παρατήρηση ότι το μοντέλο που παρουσιάσαμε μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση συνελικτικών νευρωνικών δικτύων (CNNs), τα οποία έχουν ReLU ενεργοποιήσεις. Θα αποδείξουμε την ισχύ αυτής της παρατήρησης για μονοδιάστατα συνελικτικά δίκτυα, με την περίπτωση δικτύων ανωτέρων διαστάσεων να αποδεικνύεται με αντίστοιχο τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, ένας νευρώνας του μονοδιάστατου συνελικτικού δικτύου, που δέχεται μια μονοδιάστατη είσοδο $x[n], n = 0, \dots, N - 1$ και έχει πυρήνα βαρών $w[n], n = 0, \dots, M - 1$ και σταθερό όρο b , έχει την εξής έξοδο:

$$y[n] = \max \left(\sum_{i=0}^{M-1} w[i]x[n - i] + b, 0 \right) \quad (4.6)$$

Το $y[n]$ έχει μήκος $N - M + 1$, καθώς λαμβάνουμε μόνο τα σημεία της συνέλιξης όπου υπάρχει πλήρης επικάλυψη του πυρήνα με το σήμα. Στη συνέχεια, μεταξύ των επιπέδων του συνελικτικού δικτύου, επιλέγουμε σε ένα παράθυρο μήκους k τους νευρώνες που δίνουν τη

μεγαλύτερη έξοδο, δηλαδή εκτελούμε max-pooling¹:

$$\tilde{y}[n'] = \max_{i=0, \dots, k-1} y[n'k + i] \quad (4.7)$$

Σημειώνεται ότι, για ευκολία, υποθέτουμε εδώ ότι ισχύει $(N - M + 1) \bmod k = 0$, οπότε και το μήκος του σήματος πριν το max-pooling διαιρείται ακριβώς σε κατάλληλα τμήματα.

Για να δείξουμε ότι το παραπάνω σύστημα είναι και αυτό ισοδύναμο με μία τροπική ρητή συνάρτηση, αρκεί να δείξουμε το εξής:

Θεώρημα 4.2. Έστω ένας συνελκτικός νευρώνας της μορφής που παρουσιάστηκε παραπάνω. Ο νευρώνας αυτός είναι ισοδύναμος με ένα πλήρως συνδεδεμένο δίκτυο το οποίο:

- Δέχεται ως είσοδο ένα διάνυσμα χαρακτηριστικών $\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[N - 1]]^T$.
- Έχει ένα επίπεδο νευρώνων μεγέθους $N - M + 1$, όπου M το μέγεθος του συνελκτικού πυρήνα της (4.6), με πίνακα βαρών ο οποίος έχει την εξής μορφή:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w[M - 1] & w[M - 2] & \dots & w[0] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w[M - 1] & \dots & w[1] & w[0] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & w[0] \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

και σταθερό όρο ίσο με $\mathbf{b} = [b, b, \dots, b]^T$. Το επίπεδο αυτό περιλαμβάνει μία κλασική ReLU ενεργοποίηση.

- Περιλαμβάνει ένα maxout επίπεδο (4.3) μεγέθους $(N - M + 1)/k$, καθένας από τους νευρώνες του οποίου λαμβάνει από την κάθε k -άδα του προηγούμενου δικτύου το μέγιστο. Το επίπεδο αυτό υλοποιεί το max-pooling της (4.7).

Απόδειξη. Η απόδειξη του παραπάνω γίνεται εύκολα με πράξεις, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το στοιχείο $y[n]$, πριν τη ReLU ενεργοποίηση, μπορεί να γραφεί ως:

$$\sum_{i=0}^{M-1} w[i]x[n - i] = [0, 0, \dots, \underbrace{w[M - 1], \dots, w[0], \dots, 0}_{\text{Θέσεις } n-M+1, \dots, n}] \mathbf{x} \quad (4.9)$$

□

Το ότι το πρώτο επίπεδο του παραπάνω ισοδύναμου δικτύου έχει ως έξοδο μία τροπική ρητή συνάρτηση για κάθε νευρώνα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 4.1. Για την έξοδο του maxout επιπέδου, μπορούμε να δείξουμε το εξής:

Λήμμα 4.1. Έστω k τροπικές ρητές συναρτήσεις $h_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, k$. Η συνάρτηση:

$$h(\mathbf{x}) = \max_{i=1}^k (h_i(\mathbf{x})) \quad (4.10)$$

είναι επίσης τροπική ρητή συνάρτηση.

¹Η διαδικασία αυτή ερμηνεύεται και ως το να θέσουμε την έξοδο του επιπέδου ίση με τη μέγιστη σε κάθε παράθυρο, και μετά να την αποδεκατίσουμε.

Απόδειξη. Η απόδειξη αυτού μπορεί να γίνει εύκολα, προσθαφαιρώντας το άθροισμα των συναρτήσεων $g_i(\mathbf{x})$, οπότε και έχουμε:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= \max_{i=1}^k (h_i(\mathbf{x})) \\ &= \max_{i=1}^k (f_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{x})) \\ &= \max_{i=1}^k \left(f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j \neq i} g_j(\mathbf{x}) \right) - \sum_{i=1}^k g_i(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Το αποτέλεσμα είναι μια τροπική ρητή συνάρτηση, καθώς τα επιμέρους της στοιχεία είναι τροπικά πολυώνυμα (μέγιστο και αθροίσματα τροπικών πολυωνύμων). \square

Στη συνέχεια, θα εστιάσουμε σε πλήρως συνδεδεμένα δίκτυα και την τροπική ερμηνεία της συμπεριφοράς τους. Ωστόσο, με βάση την παραπάνω ισοδυναμία, υπάρχει και το ενδεχόμενο της επέκτασης των παρακάτω σε συνελικτικά δίκτυα.

4.1.3 Περίπτωση Δικτύων Ενός Κρυφού Επιπέδου - Μίας Εξόδου

Στο σημείο αυτό, ας εξετάσουμε την πολύ απλή περίπτωση ενός νευρωνικού δικτύου το οποίο περιλαμβάνει μόνο δύο επίπεδα νευρώνων, δηλαδή ένα κρυφό επίπεδο και ένα επίπεδο εξόδου, καθώς και μόνο έναν νευρώνα εξόδου, το οποίο νευρωνικό δίκτυο μπορεί να επιλύσει προβλήματα δυαδικής ταξινόμησης. Με βάση τα παραπάνω, αν θεωρήσουμε ότι στο κρυφό επίπεδο έχουμε n_1 νευρώνες, με πίνακα βαρών $W^1 = [w_{ij}^1]$ και αντίστοιχο διάνυσμα σταθερών όρων b_i^1 , τότε ο καθένας από τους κρυφούς νευρώνες αυτούς έχει έξοδο το εξής τροπικό πολυώνυμο:

$$y_i = \max \left(\sum_{j=1}^{n_1} w_{ij}^1 x_j + b_i^1, 0 \right), \quad i = 1, \dots, n_1 \quad (4.12)$$

Υπενθυμίζουμε ότι δεχόμαστε και αρνητικούς τροπικούς βαθμούς (δηλαδή αρνητικά w_{ij}^1). Με βάση αυτό, η τιμή που υπολογίζεται από τον τελικό νευρώνα εξόδου (χωρίς την τελική ενεργοποίηση) είναι ίση με:

$$\begin{aligned} o &= \sum_{i=1}^{n_1} w_i^2 y_i = \sum_{i=1}^{n_1} w_i^2 \max \left(\sum_{j=1}^d w_{ij}^1 x_j + b_i^1, 0 \right) + b^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} w_{+,i}^2 \max \left(\sum_{j=1}^d w_{ij}^1 x_j + b_i^1, 0 \right) - \sum_{i=1}^{n_1} w_{-,i}^2 \max \left(\sum_{j=1}^d w_{ij}^1 x_j + b_i^1, 0 \right) + b^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

όπου $w^2 = w_+^2 - w_-^2$ ο διαχωρισμός των βαρών του νευρώνα εξόδου σε δύο διανύσματα, το καθένα από τα οποία έχει μη αρνητικά στοιχεία, και o η τελική έξοδος του δικτύου (χωρίς τελική ενεργοποίηση).

Η παραπάνω έκφραση του νευρωνικού δικτύου μας οδηγεί στο εξής:

Θεώρημα 4.3. *Καθένα από τα δύο τροπικά πολυώνυμα που συνθέτουν τη συνάρτηση του νευρωνικού δικτύου που περιγράψαμε μπορεί να διαιρεθεί ακριβώς από το τροπικό πολυώνυμο που αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε από τα γραμμικά τμήματα που κατασκευάζουν το πολύτοπό του.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την έκφραση του νευρωνικού δικτύου, ως τη διαφορά δύο άθροισμάτων (4.13), καθώς και από το γεγονός ότι ο αλγόριθμός μας επιστρέφει το μεγαλύτερο δυνατό τροπικό πολυώνυμο που έχει την επιθυμητή μορφή (συνεπώς, δεδομένου ότι υπάρχει ένα το οποίο ικανοποιεί την (3.6) ως ισότητα, θα επιστραφεί αυτό). \square

Η παραπάνω παρατήρηση ενισχύει τη συσχέτιση της διαδικασίας που παρουσιάσαμε με τα συνδεδειγμένα στοιχεία ενός νευρωνικού δικτύου.

Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε ότι η έκφραση του δικτύου με βάση την (4.13) οδηγεί σε δύο τροπικά πολυώνυμα των οποίων τα πολύτοπα είναι **ζωνότοπα**, δηλαδή το Minkowski άθροισμα πολλών ευθύγραμμων τμημάτων. Λόγω αυτού, μπορούμε να ισχυριστούμε τα εξής για τις κορυφές (vertices) τους:

- Καθεμία από τις κορυφές του πολυτόπου αντιστοιχεί στο άθροισμα κάποιων από τους νευρώνες που αντιστοιχούν στο πολυώνυμο.
- Καθεμία από τις κορυφές του πολυτόπου μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα δυαδικό διάνυσμα, με 1 για κάθε νευρώνα που συμμετέχει στην κατασκευή της.

Οι παραπάνω αναπαραστάσεις θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες στη συνέχεια.

4.2 Διαίρεση για Ελαχιστοποίηση Σφάλματος

Υποθέτουμε τώρα ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε το Newton Πολύτοπο ενός νευρωνικού δικτύου όπως αυτό που περιγράφηκε παραπάνω, το οποίο έχει εκπαιδευθεί για την ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης σφάλματος (όπως, για παράδειγμα, η cross-entropy συνάρτηση σφάλματος, για προβλήματα δυαδικής ταξινόμησης). Η τιμή της συνάρτησης αυτής μπορεί να ιδωθεί ως μία συνάρτηση $l(u)$, όπου u ένας γραμμικός όρος που αντιστοιχεί στην έξοδο του δικτύου (χωρίς την σιγμοειδή συνάρτηση ενεργοποίησης). Εάν τα βάρη διαταραχθούν, το πρώτο επίπεδο θα οδηγήσει σε ένα διαφορετικό γραμμικό όρο u' που θα αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη είσοδο. Εδώ μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ότι το δίκτυο αρχικά ήταν καλώς εκπαιδευμένο, υπό την έννοια ότι τα βάρη αντιστοιχούν σε ένα τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης σφάλματος. Συνεπώς, μία μικρή διαταραχή στα βάρη αναμένεται να οδηγήσει σε αύξηση αυτής της συνάρτησης, όταν υπολογιστεί πάνω σε όλο το σύνολο δεδομένων.

Ως άμεση συνέπεια των παραπάνω, είναι προφανές ότι η αύξηση στην συνάρτηση σφάλματος ελαχιστοποιείται, όταν $u' \approx u$. Σε άλλες μελέτες [21], [27] αυτό αναφέρεται μεταξύ διαφόρων κριτηρίων με βάση τα οποία αφαιρούνται νευρώνες από το δίκτυο. Δεδομένου ότι οι όροι αυτοί αντιστοιχούν σε κορυφές των πολυτόπων που σχετίζονται με το δίκτυο, το κριτήριο αυτό μπορούμε να το εξετάσουμε και με τη σκοπιά της διαίρεσης τροπικών πολυώνυμων.

Πιο συγκεκριμένα, επιθυμούμε να προσαρμόσουμε τον αλγόριθμο που παρουσιάστηκε παραπάνω, έτσι ώστε η διαίρεση με το τροπικό πολυώνυμο $d(\mathbf{x})$ να ελαχιστοποιεί το άθροισμα των αποστάσεων μεταξύ των κορυφών που ενεργοποιούνται για κάθε είσοδο και της προσέγγισής τους (κάτι που οδηγεί και στην ελαχιστοποίηση της αύξησης της συνάρτησης σφάλματος που αναφέρθηκε παραπάνω). Αυτό μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση του παρακάτω προβλήματος βελτιστοποίησης, όπου $p(\mathbf{x})$ είναι το τροπικό πολυώνυμο που αντιστοιχεί είτε στο θετικό είτε στο αρνητικό τμήμα του δικτύου, και D ένα σύνολο δεδομένων:

$$\underset{q_c}{\text{minimize}} \sum_{\mathbf{x} \in D} |q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x})|^2 \quad (4.14)$$

Η ελαχιστοποίηση γίνεται πάνω στους συντελεστές q_c , $\mathbf{c} \in C$ του τροπικού πολυωνύμου:

$$q(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{c} \in C} (q_c + \mathbf{c}^T \mathbf{x}) \quad (4.15)$$

με το σύνολο C να είναι αυτό του Αλγορίθμου 5. Αυτό το πρόβλημα είναι μία ειδική περίπτωση του προβλήματος της max-γραμμικής παρεμβολής, το οποίο μελετάται αναλυτικά στα [30], [35]. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η συνάρτηση που θέλουμε να προσεγγίσουμε, δηλαδή η $p(\mathbf{x}) - d(\mathbf{x})$, είναι η ίδια κυρτή και τμηματικά γραμμική. Συνεπώς, δεδομένου ενός τροπικού πολυωνύμου διαιρέτη, οι αλγόριθμοι που περιγράφονται στα [30] (όπου τα στοιχεία του συνόλου δεδομένων ανατίθενται σε όρους του $q(\mathbf{x})$, και μετά κάθε όρος του $q(\mathbf{x})$ υπολογίζεται εκ νέου μέσω ελαχίστων τετραγώνων) και [35] (μέσω του οποίου δίνεται ένα κάτω φράγμα για τη λύση, το οποίο στη συνέχεια διορθώνεται για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος) μπορούν να χρησιμοποιηθούν, με σκοπό τον υπολογισμό του τροπικού πολυωνύμου ηλίχιου, το οποίο παρέχει την ακριβή λύση στο παραπάνω πρόβλημα. Σημειώνεται επίσης ότι με τη μέθοδο αυτή προσπαθούμε να εκμεταλλευτούμε την επιπλέον πληροφορία που μας δίνει η δομή του διαιρέτη, αντί απλώς να ελαχιστοποιούμε τη διαφορά των εξόδων του νέου δικτύου από το αρχικό, αγνοώντας τη δομή τους.

4.2.1 Άμεση Προσέγγιση του Newton Πολυτόπου

Στην ενότητα αυτή, παρέχουμε μία εναλλακτική προσέγγιση, η οποία αντί να προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει τη διαφορά των ενεργοποιήσεων που αντιστοιχούν σε κάθε είσοδο του δικτύου, επιχειρεί να ταιριάζει άμεσα τις κορυφές των πολυτόπων του μικρότερου δικτύου με αυτές του αρχικού. Για αυτό το σκοπό, θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\underset{q_c}{\text{minimize}} \quad \sum_{j \in \text{slopes}(p(\mathbf{x}))} |(q \oplus d)_j - p_j|^2 \quad (4.16)$$

όπου, ομοίως με πριν, η πράξη $(q \oplus d)_j = \max_{\mathbf{c}: j - \mathbf{c} \in \text{slopes}(p(\mathbf{x}))} (q_c + d_{j-\mathbf{c}})$ είναι η max-plus συνέλιξη των ακολουθιών συντελεστών d_i , q_c , και άρα περιλαμβάνει τους συντελεστές q_c , ως προς τους οποίους γίνεται η ελαχιστοποίηση. Συνεπώς, θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη διαφορά των συντελεστών των $q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x})$. Οι μόνες μεταβλητές είναι, πάλι, οι τιμές των συντελεστών q_c .

Σημειώνεται ότι αυτό δεν είναι άμεση βελτιστοποίηση του κριτηρίου της απόστασης μεταξύ των κορυφών του πολυτόπου που ενεργοποιούνται για κάθε δεδομένη είσοδο, καθώς οι ενεργοποιημένες κορυφές για το πολυώνυμο $q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})$ αλλάζουν καθώς εκτελείται ο αλγόριθμος. Αντιθέτως, είναι ιδανική προσέγγιση μόνο στην ειδική περίπτωση που οι ενεργοποιημένες κορυφές αντιστοιχούν σε ίδιους βαθμούς των όρων των $p(\mathbf{x})$ και $q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})$. Η κατάσταση αυτή είναι πιο πιθανή στην περίπτωση όπου έχουμε μικρότερο διαιρέτη, δεδομένου ότι η προσέγγιση θα τείνει να έχει περισσότερες κορυφές στο άνω μέρος του φλοιού. Ωστόσο, είναι πιο κοντά στην έννοια της τροπικής διαίρεσης, όπως αυτή παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να περιγράψουμε το πρόβλημα αυτό υπό τη μορφή GGP. Κατ' αρχάς, ας δούμε τις εξής ιδιότητες παραγώγων συναρτήσεων που έχουν τη μορφή του στόχου προς ελαχιστοποίηση:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \sum_j (y_j - c_j)^2 = 2(y_i - c_i) \quad (4.17)$$

καθώς και ότι

$$\frac{\partial \sum_j (y_j^2 + c_j^2)}{\partial y_i} \frac{2y_i - 2c_i}{\sum_j 2c_j y_j} = \frac{2y_i - 2c_i}{\left(\sum_j 2c_j y_j\right)^2} \quad (4.18)$$

Συνεπώς, οι συναρτήσεις αυτές ελαχιστοποιούνται και μεγιστοποιούνται για τις ίδιες τιμές του y (δεδομένου ότι οι μερικές παράγωγοί τους μηδενίζονται στις ίδιες θέσεις). Συνεπώς, ο στόχος που περιγράφεται στο πρόβλημα (4.16) επιτυγχάνει το ελάχιστό του για το ίδιο πολυώνυμο $q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})$ με τον παρακάτω:

$$\min_{q_c} \frac{\sum_{j \in \text{slopes}(p(\mathbf{x}))} ((q \oplus d)_j)^2 + p_j^2}{\sum_{j \in \text{slopes}(p(\mathbf{x}))} 2p_j ((q \oplus d)_j)} \quad (4.19)$$

Αυτό εξακολουθεί να μην είναι ένα θεμιτό GGP πρόβλημα, καθώς ο παρονομαστής του κλάσματος δεν είναι μονώνυμο. Ωστόσο, θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την επιθυμητή λύση, με τη χρήση της παρακάτω μεθόδου.

Αρχικά, εισάγουμε μεταβλητές $l_c > 0$, έτσι ώστε:

$$l_c \leq q_c \Rightarrow l_c q_c^{-1} \leq 1, \forall c \in C \quad (4.20)$$

Οι περιορισμοί αυτοί είναι θεμιτοί για GGP, και το παρακάτω ισχύει (θεωρώντας ότι όλα τα q_c και d_c είναι θετικά, οπότε και ισχύει $(q \oplus d)_j \geq 0$):

$$l_c \leq q_c < q_c + d_{j-c} \leq (q \oplus d)_j \leq \sum_{j \in \text{slopes}(p(\mathbf{x}))} (q \oplus d)_j \Rightarrow \frac{1}{\prod_{c \in C: j-c \in \text{slopes}(d(\mathbf{x}))} l_c} > \frac{1}{\left(\sum_{j \in \text{slopes}(p(\mathbf{x}))} (q \oplus d)_j\right)^r} \quad (4.21)$$

όπου $r = |C|$. Επιπλέον, θα επαναεισάγουμε τα άνω όρια στους συντελεστές του $q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})$, αλλά αυτή τη φορά θα χαλαρώσουμε τα όρια αυτά με τη χρήση συντελεστών $\xi_j \geq 1$, ώστε:

$$(q \oplus d)_j p_j^{-1} \xi_j^{-1} \leq 1, \forall j \in \text{slopes}(p(\mathbf{x})), \xi_j^{-1} \leq 1 \quad (4.22)$$

Με βάση όλα τα παραπάνω, μπορούμε τώρα να εκφράσουμε το παρακάτω GGP, που προσπαθεί να προσεγγίσει τη λύση στο (4.16):

$$\text{minimize}_{q_c, l_c, \xi_j} \frac{\left(\sum_{j \in \text{slopes}(p(\mathbf{x}))} ((q \oplus d)_j)^2 + p_j^2\right)^r}{\prod_{c \in C: j-c \in \text{slopes}(d(\mathbf{x}))} l_c} + R \sum_{j \in \text{slopes}(p(\mathbf{x}))} \xi_j \quad (4.23)$$

$$\text{s.t} \quad \begin{aligned} l_c q_c^{-1} &\leq 1, \forall c \in C \\ (q \oplus d)_j p_j^{-1} \xi_j^{-1} &\leq 1, \forall j \in \text{slopes}(p(\mathbf{x})) \quad \xi_j^{-1} \leq 1, \forall j \in \text{slopes}(p(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

όπου R ένας παράγοντας στάθμισης. Το παραπάνω είναι ένα θεμιτό GGP πρόβλημα, καθώς τόσο ο στόχος όσο και οι περιορισμοί είναι posynomials (οι τιμές των p_j είναι πάντα θετικά, λόγω του τρόπου κατασκευής του δικτύου).

Είναι προφανές ότι, λόγω του (4.21), η τιμή του στόχου προς βελτιστοποίηση στο (4.19) είναι, όταν υψωθεί στη δύναμη $r > 0$ (που δεν επηρεάζει τη βελτιστοποίηση), αυστηρά χαμηλότερη από το πρώτο μέρος του στόχου στο (4.23). Ο ρόλος των μεταβλητών l_c είναι πάλι να ωθήσει το q_c όσο πιο υψηλά γίνεται. Ωστόσο, σημειώνεται ότι τα ελάχιστα σημεία των (4.16)/(4.19) και (4.23) μπορεί να διαφέρουν, καθώς η λύση στο (4.23) μπορεί μεν

να κάνει τα δύο προβλήματα να έχουν την ίδια λύση, αλλά η τιμή που επιστρέφεται μπορεί να μην είναι βέλτιστη για το (4.16). Εδώ παίζει ρόλο ο παράγοντας R , περιορίζοντας το πόσο μπορούν να αυξηθούν οι συντελεστές του $q(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})$ πέρα από αυτούς του $p(\mathbf{x})$, με τους αυστηρούς περιορισμούς να ξαναεισάγονται για πολύ μεγάλες τιμές του συντελεστή R . Καθώς διαφορετικές τιμές του συντελεστή αυτού μπορεί να δώσουν διαφορετικές λύσεις, για την εύρεση μίας καλής τιμής πιθανώς μπορεί να γίνει αναζήτηση πάνω σε ένα πεδίο πιθανών τιμών, επιλύοντας πολλά στιγμιότυπα του προβλήματος.

Το παραπάνω είναι ουσιαστικά μία προσαρμογή του αλγορίθμου μας για διαίρεση τροπικών πολυωνύμων: οι μετατοπισμένες εκδοχές του διαιρέτη $d(\mathbf{x})$ αυξάνονται όσο το δυνατόν περισσότερο (εδώ μέχρι την τιμή $\xi_j p_j$), με το αποτέλεσμα να είναι μία προσέγγιση του αρχικού τροπικού πολυωνύμου.

4.3 Πρακτική Εφαρμογή σε Ελαχιστοποίηση Δικτύων

Είναι προφανές ότι τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να είναι δύσκολα να επιλυθούν στη γενική περίπτωση, καθώς όχι μόνο οι μεταβλητές εξόδου αυξάνουν εκθετικά καθώς αυξάνεται η διάσταση d , αλλά επιπλέον απαιτούν και πρότερη γνώση των κορυφών και των όψεων του Newton Πολυτόπου (η εύρεση μόνο των πρώτων απαιτεί εκθετική πολυπλοκότητα με βάση το d , όπως περιγράφεται στο [11]). Για το λόγο αυτό, προτείνουμε μερικούς τρόπους προσέγγισης των λύσεων στα παραπάνω προβλήματα.

4.3.1 Προσέγγιση με Χρήση Ευριστικής Μεθόδου

Εστω p_+ , p_- το θετικό και το αρνητικό μέρος του δικτύου που θέλουμε να προσεγγίσουμε με ένα μικρότερο, το οποίο περιέχει το $f\%$ των νευρώνων του αρχικού στο κρυφό επίπεδο, όπου f ένα επιλεγμένο ποσοστό. Η διαδικασία που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την προσέγγιση είναι αυτή του Αλγορίθμου 7.

Στον Αλγόριθμο 7, η μέθοδος που παρουσιάζεται στη Φάση 1 μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε ένα δίκτυο το οποίο προσπαθεί να προσεγγίσει τις πιο σημαντικές κορυφές του πολυτόπου του δικτύου, κάτι που καταφέρνει τέλεια εφόσον παραμείνουν στο άνω μέρος του φλοιού. Συνεπώς, μας παρέχει ένα πολυώνυμο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως διαιρέτης. Επιπλέον, η διαδικασία αυτή προσπαθεί να ταυτοποιήσει του συσχετισμένους νευρώνες στο δίκτυο, οι οποίοι τείνουν να ενεργοποιούνται μαζί, οδηγώντας έτσι σε μία κανονικοποίηση του δικτύου. Η διαίσθηση πίσω από τη Φάση 1 του αλγορίθμου φαίνεται και γραφικά στο Σχήμα 4.2. Παρατηρούμε ότι η προσθήκη της διαφοράς των βαρών στην περίπτωση αυτή επιχειρεί να προσεγγίσει δύο κορυφές του πολυτόπου που επεξεργαζόμαστε. Η χρήση της διαφοράς της δεύτερης κορυφής με τον πρώτο νευρώνα ως δεύτερο νευρώνα επιτρέπει την προσέγγιση αυτή.

Όσον αφορά τη Φάση 2, μπορούμε να δείξουμε το εξής:

Θεώρημα 4.4. *Αν οι όροι του $d(\mathbf{x})$ περιέχουν τους ίδιους βαθμούς με τους όρους του $p(\mathbf{x})$, τότε $q(\mathbf{x}) = q_0$, και το πρόβλημα βελτιστοποίησης (4.14) αποκτά το ελάχιστο αν θέσουμε:*

$$q_0 = \frac{1}{|X|} \sum_{\mathbf{x} \in X} (p(\mathbf{x}) - d(\mathbf{x})) \quad (4.24)$$

Αλγόριθμος 7 Ευριστικός Αλγόριθμος Ελαχιστοποίησης

- Φάση 1:

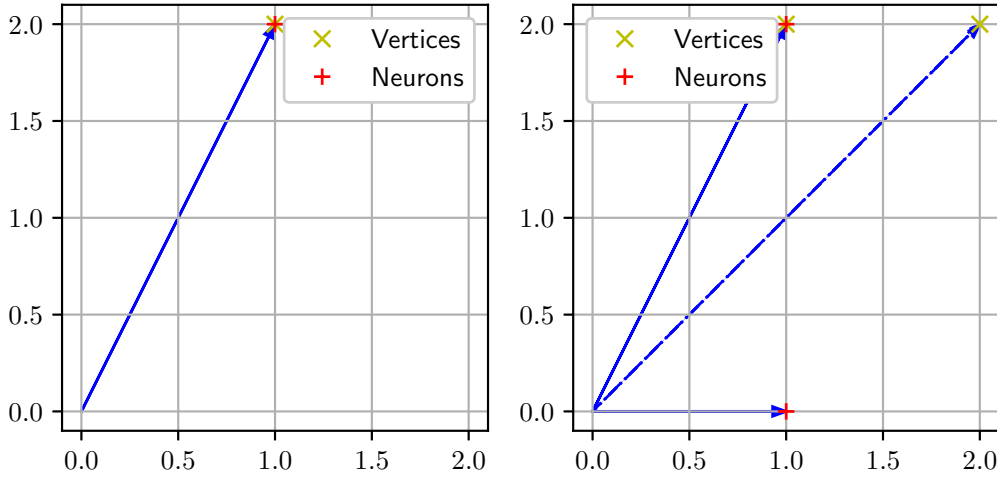
- (Προαιρετικά) Λαμβάνουμε ένα υποσύνολο X του συνόλου δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν για την εκπαίδευση του δικτύου.
- Για κάθε $\mathbf{x}_i \in X$ υπολογίζουμε τις αντίστοιχες κορυφές $\mathbf{u}_+^i, \mathbf{u}_-^i$ του Επεκτεταμένου Newton Πολυτόπου για καθένα από τα p_+, p_- τα οποία ενεργοποιούνται από αυτήν την είσοδο, δηλαδή για τα οποία ισχύει $(\mathbf{u}_+^i)^T \mathbf{x}_i = p_+(\mathbf{x}_i)$ και ομοίως για τα \mathbf{u}_-^i .
- Ταξινομούμε όλες τις κορυφές σε φθίνουσα σειρά, με βάση τον αριθμό των εμφανίσεών τους.
- Για το σύνολο των \mathbf{u}_+^i , θέτουμε το βάρος \mathbf{w}_1 του πρώτου νευρώνα ίσο με την πρώτη κορυφή της ταξινομημένης λίστας.
- Για την κορυφή που βρίσκεται στη θέση j στη λίστα, μέχρι και για $f\%$ νευρώνες στο θετικό μέρος, διαλέγουμε τυχαία ένα από τα προηγούμενα βάρη (έστω \mathbf{w}_k), και θέτουμε ως βάρος του νέου νευρώνα:

$$\mathbf{w}_j \leftarrow \mathbf{u}_+^j - \mathbf{w}_k$$

- Επαναλαμβάνουμε για το αρνητικό μέρος του δικτύου.
- Συγκεντρώνουμε τα βάρη που δημιουργήθηκαν (συνολικά $f\%$ του αρχικού) και τα χρησιμοποιούμε ως το πρώτο επίπεδο του δικτύου, αναθέτοντας βάρη ± 1 στο επίπεδο εξόδου, για το θετικό και το αρνητικό μέρος αντίστοιχα.

- Φάση 2:

- Για κάθε στοιχείο του συνόλου X , υπολογίζουμε την τιμή που αντιστοιχεί στην ενεργοποίηση του νευρώνα εξόδου στο αρχικό δίκτυο, μείον την ίδια ενεργοποίηση στο προσεγγιστικό δίκτυο.
- Θέτουμε ως σταθερό όρο στον νευρώνα εξόδου την μέση τιμή των παραπάνω διαφορών, συν όποιο αρχικό σταθερό όρο είχε ο νευρώνας εξόδου.



Σχήμα 4.2: Διασθητική λειτουργία Φάσης 1 του Αλγορίθμου 7.

Απόδειξη. Θεωρώντας την παραπάνω μορφή στα πολυώνυμα που περιγράψαμε, η συνάρτηση του προβλήματος (4.14) λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\sum_{\mathbf{x} \in X} |q_0 + d(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x})|^2 = \sum_{\mathbf{x} \in X} |q_0 - (p(\mathbf{x}) - d(\mathbf{x}))|^2 \quad (4.25)$$

Παραγωγίζοντας την έκφραση αυτή ως προς q_0 , λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_0} \left(\sum_{\mathbf{x} \in X} |q_0 - (p(\mathbf{x}) - d(\mathbf{x}))|^2 \right) &= 2 \sum_{\mathbf{x} \in X} (q_0 - (p(\mathbf{x}) - d(\mathbf{x}))) \\ &= 2|X| \left(q_0 - \frac{1}{|X|} \sum_{\mathbf{x} \in X} (p(\mathbf{x}) - d(\mathbf{x})) \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Με βάση το παραπάνω, η ελαχιστοποίηση γίνεται ακριβώς στο μέσο όρο των αποστάσεων από τα δοθέντα σημεία, όπως και ήταν επιθυμητό. \square

Με βάση το παραπάνω, στη Φάση 2 του αλγορίθμου, εισάγουμε τον κατάλληλο σταθερό όρο, έτσι ώστε να λάβουμε υπόψιν πιθανές αποκλίσεις που εισήχθησαν στην Φάση 1.

Όσον αφορά τη χρονική πολυπλοκότητα του Αλγορίθμου 7, είναι προφανές ότι ο αριθμός των βημάτων που απαιτούνται για την πρώτη φάση του αλγορίθμου κλιμακώνει ως $|X| \log |X| + N^2$ (όπου N ο αριθμός των νευρώνων που παραμένουν στο νέο δίκτυο), ενώ ο αριθμός των βημάτων για τη Φάση 2 είναι γραμμικός ως προς $|X|$. Συνεπώς, υποθέτοντας ένα σχετικά μικρό χρονικό διάστημα για τον υπολογισμό των εξόδων αυτών των δειγμάτων, η μέθοδος αυτή είναι υλοποιήσιμη, από άποψη χρόνου εκτέλεσης. Επιπλέον, είναι χρονικά προτιμητέα συγκριτικά με την εκπαίδευση ενός νέου δικτύου, η οποία απαιτεί πράξεις που κλιμακώνουν με βάση το μέγεθος $|D|$ του συνόλου δεδομένων για κάθε εποχή εκπαίδευσης.

4.3.2 Ντετερμινιστική Μέθοδος Προσέγγισης

Ενώ η μέθοδος που παρουσιάστηκε προηγουμένως μας επιτρέπει να εκτελέσουμε με απλό τρόπο μια προσέγγιση του δικτύου, η οποία περιλαμβάνει μικρότερο αριθμό νευρώνων, το γεγονός ότι δε δίνει σταθερό πολυώνυμο διαιρέτη περιπλέκει αρκετά την ανάλυσή της απόδοσής της, καθώς αναμένεται να έχει έντονη διακύμανση στην ακρίβεια του δικτύου. Επιπρόσθετα, μπορεί να οδηγήσει στο η συνάρτηση του νευρωνικού δικτύου που προσεγγίζουμε να δίνει διαφορετικά αποτελέσματα, ακόμη και για παραδείγματα που αντιστοιχούν σε επιλεγμένες κορυφές πολυτόπων, καθώς κορυφές που δεν υπήρχαν στο αρχικό δίκτυο έχουν προστεθεί. Για το λόγο αυτό, εξετάζουμε και μία εναλλακτική, ντετερμινιστική μέθοδο για την ελαχιστοποίηση ενός δικτύου εκπαιδευμένο για ένα πρόβλημα δυαδικής ταξινόμησης.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι εξετάζουμε πάλι το αντίστοιχο πρόβλημα ενός δικτύου με ένα νευρώνα εξόδου, και ότι οι κορυφές του πολυτόπου ταξινομούνται κατά τον ίδιο τρόπο με πριν, βάσει του πόσο συχνά αντιστοιχούν στη μέγιστη τιμή του τροπικού πολυωνύμου. Στην περίπτωση αυτή, απαιτούμε από το αποτέλεσμα της ελαχιστοποίησης να περιλαμβάνει μόνο νευρώνες που μπορούν να κατασκευαστούν ως άθροισμα των νευρώνων του αρχικού δικτύου. Έτσι, το πολύτοπο που αντιστοιχεί στο πολυώνυμο διαιρέτη θα περιέχεται πλήρως σε αυτό που αντιστοιχεί στο διαιρέτο. Ισοδύναμα, θέλουμε να επιλέξουμε διακριτά υποσύνολα των νευρώνων του αρχικού δικτύου, καθένα από τα οποία έχει ως αξία το πλήθος των δειγμάτων που αντιστοιχούν στην κορυφή του πολυτόπου που αναπαριστά. Το πρόβλημα αυτό είναι όμοιο με το Set Packing [22] (αφού κάθε κορυφή έχει τη δυαδική αναπαράσταση που αναφέραμε σε προηγούμενη ενότητα), αλλά διαφέρει από αυτό καθώς η αξία κάθε διακριτού υποσυνόλου δεν εξαρτάται μόνο από το ίδιο το υποσύνολο, αλλά και από το ποια άλλα υποσύνολα θα διαλέξουμε (καθώς διαλέγοντας δύο κορυφές του πολυτόπου, διαλέγουμε εμμέσως και το άθροισμά τους). Με σκοπό τη μεγιστοποίηση του αριθμού των δειγμάτων του συνόλου εκπαίδευσης που αντιστοιχούν σε κορυφές που καλύπτονται από τον επιλεγμένο διαιρέτη, κάνουμε χρήση του Αλγορίθμου 8. Σημειώνεται ότι, για προσθήκη σταθερού όρου, εκτελούμε πάλι τη Φάση 2 του Αλγορίθμου 7, ενώ για ευκολία (όπως αναφέραμε πριν), θεωρούμε ότι το αρχικό δίκτυο έχει σταθερό όρο εξόδου ίσο με 0.

Η λειτουργία του αλγορίθμου μας φαίνεται στο Σχήμα 4.3, όπου ο άνω φλοιός του πολυτόπου που αντιστοιχεί σε ένα δίκτυο με τρεις νευρώνες προσεγγίζεται από ένα δίκτυο με δύο νευρώνες, ταιριάζοντας τις κορυφές που επιλέγονται από τον αλγόριθμό μας. Στο σημείο αυτό, μπορούμε να δείξουμε τα εξής (υποθέτοντας προς στιγμήν ότι το νέο δίκτυο έχει μόνο θετικά βάρη εξόδου και άρα προσεγγίζουμε ένα μόνο τροπικό πολυώνυμο - στη γενική περίπτωση ισχύουν χωριστά για το θετικό και το αρνητικό μέρος του δικτύου):

Θεώρημα 4.5. Το πολύτοπο του τροπικού πολυωνύμου διαιρέτη που προκύπτει ως αποτέλεσμα του αλγορίθμου περιέχει μόνο κορυφές που είναι και στο εσωτερικό του πολυτόπου του τροπικού πολυωνύμου του αρχικού δικτύου.

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι, στην περίπτωση που ένας νευρώνας χρησιμοποιείται σε δύο διαφορετικές κορυφές, οπότε και υπάρχουν κοινά bits c στην αναπαράσταση των δύο κορυφών, αν αυτές τεθούν ίσες με $v \wedge \neg c$ τότε δεν υπάρχουν πλέον κοινά νευρώνες. Συνεπώς, αν αθροιστούν τα νέα αυτά στοιχεία, συνεχίζουν να αντιστοιχούν σε ξένα σύνολα, οπότε και το άθροισμά τους θα παραμείνει κορυφή του αρχικού πολυτόπου. Επιπλέον, κανένας από τους νέους νευρώνες που εισάγονται δεν αντιστοιχεί σε κορυφή η οποία περιέχει 1 σε ίδια θέση με κάποια άλλη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε νευρώνας του αρχικού δικτύου εμπεριέχεται το πολύ σε έναν νευρώνα του νέου δικτύου. Συνεπώς, το Newton Πολύτοπο του διαιρέτη, που χρησιμοποιείται για τη δόμηση του νέου δικτύου, εμπεριέχεται πλήρως στο αρχικό πολύτοπο. \square

Αλγόριθμος 8 Ντετερμινιστικός Αλγόριθμος Ελαχιστοποίησης

- Χωρίζουμε ξανά το δίκτυο σε θετικό και αρνητικό τμήμα (με τον ίδιο τρόπο με τον Αλγόριθμο 7 - με βάση τα τροπικά πολυώνυμα της αντίστοιχης τροπικής ρητής συνάρτησης). Υποθέτουμε ότι αρχικά εξετάζουμε το θετικό τμήμα.
- Ομοίως με τον Αλγόριθμο 7, υπολογίζουμε τον αριθμό των φορών που ενεργοποιείται κάθε κορυφή του πολυτόπου, πάνω στο σύνολο εκπαίδευσης (ή, προαιρετικά, σε ένα υποσύνολό του). Ταξινομούμε αυτήν τη λίστα με βάση τον αριθμό αυτό, σε φθίνουσα σειρά, και αντικαθιστούμε κάθε κορυφή με τη δυαδική της αναπαράσταση.
- Ορίζουμε ένα δυαδικό συσσωρευτή \mathbf{a} , μήκους ίσο με το πλήθος των νευρώνων του θετικού τμήματος του δικτύου, και τον αρχικοποιούμε με μηδενικά.
- Θέτουμε την πρώτη κορυφή \mathbf{v}_1 στην παραπάνω λίστα ως τον πρώτο νευρώνα του θετικού τμήματος του νέου δικτύου, και θέτουμε $\mathbf{a} = \mathbf{v}_1$, καθώς και ένα μετρητή $k = 1$ για το πόσους νευρώνες έχουμε προσθέσει ως τώρα.
- Για καθεμία από τις επόμενες κορυφές, έστω \mathbf{v}_i , αν δεν έχει κοινό νευρώνα με καμία από τις προηγούμενες κορυφές, δηλαδή αν $\mathbf{a} \wedge \mathbf{v}_i = 00 \dots 0$, θέτουμε

$$\mathbf{w}_{k+1} \leftarrow \mathbf{v}_i, \mathbf{a} \leftarrow \mathbf{a} \vee \mathbf{v}_i$$

και αυξάνουμε το k κατά 1. Σε αντίθετη περίπτωση κάνουμε τα εξής:

- Θέτουμε $\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{v}_i$ ως το σύνολο νευρώνων όπου παρουσιάζει σύγκρουση η νέα κορυφή με κάποια προηγούμενη.
- Για καθέναν από τους νευρώνες που έχουμε προσθέσει, έστω w_j , σε περίπτωση που ισχύει $w_j \wedge \neg \mathbf{c} \neq 00 \dots 0$ και $w_j \wedge \mathbf{c} \neq 00 \dots 0$, θέτουμε:

$$\mathbf{w}_j \leftarrow w_j \wedge \neg \mathbf{c}, \mathbf{w}_{k+1} \leftarrow w_j \wedge \mathbf{c}$$

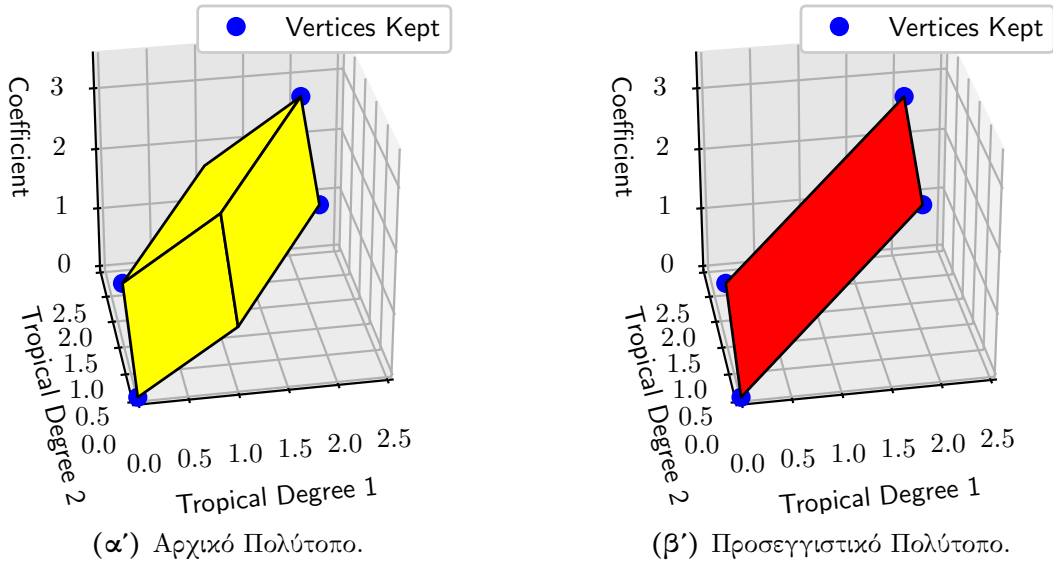
και αυξάνουμε κατά 1 το k . Η συνθήκη υπάρχει ώστε κανένας από τους νέους νευρώνες να μην είναι μηδενικός.

- Θέτουμε τα εξής:

$$\mathbf{w}_{k+1} \leftarrow \mathbf{v}_i \wedge \neg \mathbf{c}, \mathbf{a} \leftarrow \mathbf{a} \vee \mathbf{v}_i$$

και αυξάνουμε το k κατά 1.

- Σε οποιοδήποτε σημείο όπου το k φτάσει τον επιθυμητό αριθμό νευρώνων, σταματάμε τη διαδικασία και αντικαθιστούμε τη δυαδική αναπαράσταση των νευρώνων με την πραγματική τους τιμή, ως το άθροισμα των νευρώνων του αρχικού δικτύου, που αντιστοιχούν σε μονάδα στη δυαδική αναπαράσταση.
 - Επαναλαμβάνουμε για το αρνητικό τμήμα, και θέτοντας βάρη στο νευρώνα εξόδου ± 1 για το θετικό και το αρνητικό τμήμα αντίστοιχα, λαμβάνουμε μια πρώτη προσέγγιση του νέου δικτύου.
 - Προσθέτουμε σταθερό όρο εξόδου, μέσω της Φάσης 2 του Αλγορίθμου 7.
-



Σχήμα 4.3: Κατασκευή Διαίρετη μέσω του Αλγορίθμου 8.

Θεώρημα 4.6. Τα δείγματα που αντιστοιχούν σε κορυφές που έχουν επιλεγεί από τον αλγόριθμο δίνουν την ίδια έξοδο στο νέο διαίρετη και στο πολυώνυμο του αρχικού δικτύου.

Απόδειξη. Όπως αναφέραμε, όλες οι κορυφές του πολυτόπου του νέου δικτύου υπάρχουν και στο αρχικό πολύτοπο. Συνεπώς, κάθε δείγμα το οποίο αντιστοιχεί σε κάποια από αυτές τις κορυφές θα πρέπει να έχει την ίδια τιμή, αφού διαφορετικά θα αντιστοιχούσε σε άλλη κορυφή και στο αρχικό δίκτυο. \square

Θεώρημα 4.7. Έστω n_1 ο αριθμός των νευρώνων του κρυφού επιπέδου στο αρχικό δίκτυο, N ο συνολικός αριθμός των δειγμάτων, και n' ο αριθμός των επιθυμητών νευρώνων στο τελικό δίκτυο. Ισχύει ότι ο αριθμός των δειγμάτων που καλύπτονται σίγουρα από τις επιλεγμένες κορυφές του πολυτόπου του δικτύου (και άρα έχουν την ίδια έξοδο στο προσεγγιστικό δίκτυο και στο αρχικό, αν αγνοήσουμε τον επιπλέον σταθερό όρο εξόδου), είναι τουλάχιστον:

$$\frac{N}{\sum_{j=0}^d \binom{n_1}{j}} O(\log n') \quad (4.27)$$

Απόδειξη. Το μέγιστο μήκος της λίστας που περιλαμβάνει τις ενεργοποιημένες κορυφές του πολυτόπου είναι ίσο με $\sum_{j=0}^d \binom{n_1}{j}$, δηλαδή ίσο με το πλήθος των κορυφών στο άνω τμήμα του πολυτόπου [50]. Καθώς η διάταξη αυτή είναι φθίνουσα, το πλήθος των δειγμάτων στις επιλεγμένες κορυφές είναι τουλάχιστον $NK / \sum_{j=0}^d \binom{n_1}{j}$, αν τα N δείγματα κατανομούνται ομοιόμορφα σε αυτή τη λίστα. Τέλος, το K , ο αριθμός των κορυφών που επιλέγονται σίγουρα, είναι τουλάχιστον $O(\log n')$, καθώς αν υπάρχουν κοινά bit σε κάθε βήμα προσθήκης μιας κορυφής, τότε ο αριθμός των νευρώνων διπλασιάζεται. Όλα τα παραπάνω οδηγούν στο επιθυμητό όριο (τονίζεται πάλι εδώ ότι το όριο αυτό ισχύει χωριστά για το θετικό και το αρνητικό τμήμα του δικτύου, εφόσον υπάρχουν και τα δύο). \square

Σημειώνεται ότι η παραπάνω διαδικασία, αν και ντετερμινιστική, είναι τετραγωνική ως προς τον αριθμό n' των νευρώνων στο τελικό κρυφό επίπεδο. Συνεπώς, ο Αλγόριθμος 7 είναι γρηγορότερος, αλλά παράλληλα και πιθανώς ασταθής ως προς το αποτέλεσμα του. Επιπλέον, το παραπάνω κάτω όριο είναι αρκετά χαμηλότερο από την πραγματική του τιμή, καθώς δε λαμβάνει υπόψιν και το γεγονός ότι σε κάθε βήμα καλύπτονται και επιπλέον κορυφές από τις επιλεγμένες, ο αριθμός των οποίων εξαρτάται από τα ακριβή βάρη των νευρώνων.

4.3.3 Παραδείγματα

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε αριθμητικά παραδείγματα των μεθόδων που περιγράφηκαν στις Ενότητες 4.3.1 και 4.3.2, πάνω σε νευρωνικά δίκτυα της παραπάνω μορφής.

Έστω ότι έχουμε ένα πλήρως συνδεδεμένο δίκτυο δύο επιπέδων, με 4 νευρώνες στο κρυφό επίπεδο. Έστω ότι το δίκτυο αυτό περιγράφεται από τους παρακάτω πίνακες:

$$\mathbf{W}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{w}^2 = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 2] \quad b^2 = 0$$

Παρατηρούμε ότι το δίκτυο αυτό δέχεται εισόδους δύο χαρακτηριστικών, δηλαδή ως δείγματα θα έχουμε στοιχεία του \mathbb{R}^2 . Συνεπώς, ας θεωρήσουμε το παρακάτω σύνολο δεδομένων:

$$D = \{[1, 1]^T, [1, 2]^T, [2, 1]^T, [1, -0.5]^T, [1, -0.75]^T, [-0.5, 1]^T\} \quad (4.29)$$

Με βάση όσα περιγράψαμε παραπάνω, μπορούμε να απορροφήσουμε τους συντελεστές του \mathbf{w}^2 σε αυτούς των πινάκων του πρώτου επιπέδου, καθώς είναι όλοι θετικοί. Συνεπώς, το παραπάνω νευρωνικό δίκτυο αντιστοιχεί σε ένα πολύτοπο το οποίο είναι ίσο με το Minkowski άθροισμα των παρακάτω διανυσμάτων:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Τα διανύσματα αυτά, καθώς και ορισμένοι από τους πιθανούς συνδυασμούς αθροισμάτων τους, αποτελούν τις κορυφές του άνω τμήματος του πολύτοπου, οι οποίες και αποτελούν τα σημεία που δίνουν τιμές που μεγιστοποιούν την τιμή εξόδου του δικτύου, για μια δεδομένη είσοδο.

Σε πρώτη φάση, για την εκτέλεση των αλγορίθμων καλούμαστε να υπολογίσουμε τις εξόδους του δικτύου. Συγκεκριμένα, θέλουμε να βρούμε τους νευρώνες του κρυφού επιπέδου που δίνουν θετική τιμή εξόδου για το δεδομένο διάνυσμα εισόδου, δηλαδή αυτούς που αντιστοιχούν σε θετικές τιμές του διανύσματος $\text{diag}(\mathbf{w}^2)\mathbf{W}^1\mathbf{x} + \text{diag}(\mathbf{w}^2)\mathbf{b}^1$. Συνεπώς, για το πρώτο από τα διανύσματα εισόδου που έχουμε η τιμή αυτή υπολογίζεται παρακάτω:

$$\mathbf{y}_1^1 = \text{diag}(\mathbf{w}^2)\mathbf{W}^1\mathbf{x}_1 + \text{diag}(\mathbf{w}^2)\mathbf{b}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Καθώς όλα τα στοιχεία είναι θετικά, έχουμε ότι η κορυφή του πολύτοπου που ενεργοποιείται σε αυτήν την περίπτωση είναι η 1111, δηλαδή αυτή που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 +$

$\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$. Ομοίως μπορούμε να υπολογίσουμε και τις εξόδους για τα υπόλοιπα διανύσματα εισόδου, οπότε και θα λάβουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$\mathbf{y}_2^1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_3^1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_4^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_5^1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2.25 \\ 2 \\ -1.5 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_6^1 = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Με βάση όλα τα παραπάνω, βλέπουμε ότι η κορυφή 1111, δηλαδή η $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = [5, 5, 2]^T$ έχει τρεις εμφανίσεις, ενώ η 1110, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = [5, 3, 2]^T$ δύο και η 1101, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 = [3, 5, 2]^T$ μία, πάνω στο σύνολο δεδομένων που παρουσιάσαμε παραπάνω.

Οι έξοδοι του δικτύου για καθένα από τα δείγματα εισόδου που παρέχονται μπορούν να υπολογιστούν απλώς αθροίζοντας τα θετικά στοιχεία των παραπάνω διανυσμάτων (αφού πλέον αντιμετωπίζουμε το επίπεδο εξόδου σαν να έχει μοναδιαία βάρη). Συνεπώς, οι έξοδοι αυτές φαίνονται παρακάτω:

$$\mathbf{y}_1^2 = 12, \mathbf{y}_2^2 = 17, \mathbf{y}_3^2 = 17, \mathbf{y}_4^2 = 5.5, \mathbf{y}_5^2 = 4.75, \mathbf{y}_6^2 = 5.5 \quad (4.33)$$

Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε το παραπάνω δίκτυο χρησιμοποιώντας μόνο τρεις νευρώνες. Αρχικά, θα εκτελέσουμε τον αλγόριθμο της Ενότητας 4.3.1. Στην περίπτωση αυτή, θέτουμε ως πρώτο νευρώνα του νέου δικτύου την πρώτη κορυφή που λαμβάνουμε, με βάση τον αριθμό των εμφανίσεων, οπότε και έχουμε ότι $\mathbf{w}_1 = [5, 5, 2]^T$. Ο δεύτερος νευρώνας θα είναι ίσος με τη δεύτερη κορυφή σε αυτή τη λίστα, μείον το νευρώνα που έχουμε ήδη εισάγει, δηλαδή: $\mathbf{w}_2 = [5, 3, 2]^T - [5, 5, 2]^T = [0, -2, 0]^T$. Για το τρίτο νευρώνα θα λάβουμε την τρίτη κορυφή στη λίστα, και έστω ότι από αυτήν αφαιρούμε τον πρώτο νευρώνα (εδώ γίνεται τυχαία επιλογή), οπότε και έχουμε $\mathbf{w}_3 = [3, 5, 2]^T - [5, 5, 2]^T = [-2, 0, 0]^T$. Συνεπώς, οι πίνακες του κρυφού επιπέδου του νέου δικτύου είναι οι:

$$\mathbf{W}^1 = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Αν τώρα υπολογίσουμε τις εξόδους του δικτύου για το νέο κρυφό επίπεδο, θα δούμε ότι αυτές είναι οι εξής:

$$\mathbf{y}_1^2 = 12, \mathbf{y}_2^2 = 17, \mathbf{y}_3^2 = 17, \mathbf{y}_4^2 = 5.5, \mathbf{y}_5^2 = 4.75, \mathbf{y}_6^2 = 5.5 \quad (4.35)$$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές αυτές εξόδου είναι ίδιες με τις προηγούμενες. Συνεπώς, μπορούμε να καθορίσουμε και το δεύτερο επίπεδο της μεθόδου μας, το οποίο αποτελείται από τους εξής δύο πίνακες:

$$\mathbf{W}^2 = [1 \ 1 \ 1 \ 1], \mathbf{b}^2 = 0 \quad (4.36)$$

Ως εναλλακτική, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο της Ενότητας 4.3.2. Στην περίπτωση αυτή, πάλι ως πρώτο νευρώνα λαμβάνουμε την πρώτη κορυφή στη λίστα εμφανίσεων, οπότε $\mathbf{w}_1 = [5, 5, 2]^T$. Στο σημείο αυτό σημειώνουμε το σύνολο συγκρούσεων του αλγορίθμου μας, το οποίο εδώ περιλαμβάνει όλους τους αρχικούς νευρώνες (καθώς η αρχική κορυφή αποτελείται από το άθροισμα όλων). Η δεύτερη κορυφή, όπως αναφέραμε, είναι η 1110, οπότε παρουσιάζει σύγκρουση με την πρώτη στους τρεις πρώτους νευρώνες.

Για την επίλυση αυτής της σύγκρουσης, θα θέσουμε:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_{1111 \wedge \neg 1110} = \mathbf{v}_{0001} = \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_{1111 \wedge 1110} = \mathbf{v}_{1110} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Για τον τρίτο νευρώνα, βλέπουμε ότι η τρίτη κορυφή, δηλαδή η 1101, έχει σύγκρουση με τις προηγούμενες κορυφές σε όλους της τους νευρώνες. Εκτελώντας τον αλγόριθμο, έχουμε ότι ο πρώτος νευρώνας αποτελεί υποσύνολο της νέας κορυφής, οπότε δε χρειάζεται να τον αλλάξουμε. Συνεπώς, συνεχίζοντας στο δεύτερο νευρώνα, μπορούμε να λάβουμε τους εξής δύο νέους νευρώνες:

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_{1110 \wedge \neg 1101} = \mathbf{v}_{0010} = \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_{1110 \wedge 1101} = \mathbf{v}_{1100} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, με τη χρήση αυτού του αλγορίθμου, έχουμε ως πίνακες του κρυφού επιπέδου του δικτύου τους εξής:

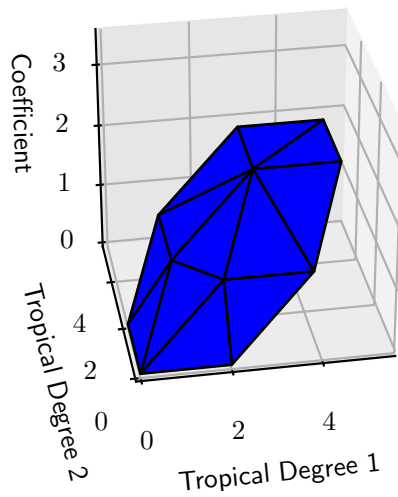
$$\mathbf{W}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Στην περίπτωση αυτή, οι έξοδοι του δικτύου είναι οι εξής:

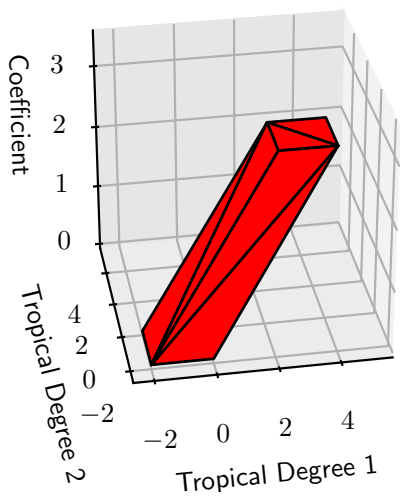
$$\mathbf{y}_1^2 = 12, \mathbf{y}_2^2 = 17, \mathbf{y}_3^2 = 17, \mathbf{y}_4^2 = 5.5, \mathbf{y}_5^2 = 4.75, \mathbf{y}_6^2 = 5.5 \quad (4.40)$$

Παρατηρούμε ότι, και εδώ, οι έξοδοι του δικτύου είναι ίδιες με πριν, οπότε δεν προσθέτουμε ούτε εδώ σταθερό όρο εξόδου. Συνεπώς, πάλι έχουμε ότι το δεύτερο επίπεδο του δικτύου έχει πίνακες βαρών αυτούς που αναφέρονται στην (4.36).

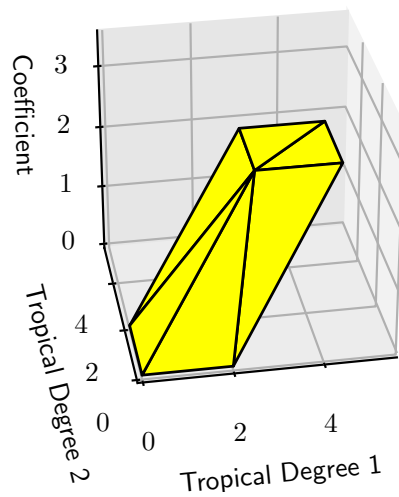
Παρατηρούμε ότι οι προσεγγίσεις που δίνει η εφαρμογή της μεθόδου μας είναι ακριβείς, όποιον και από τους δύο αλγορίθμους και να χρησιμοποιήσουμε. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι η χρήση του δεύτερου αλγορίθμου οδηγεί στην κατασκευή ενός δικτύου του οποίου το πολύτοπο είναι ακριβώς κάτω από αυτό του αρχικού, όπως και περιγράφηκε παραπάνω, και φαίνεται στο Σχήμα 4.4. Αυτό σημαίνει πως σε μια πιο περίπλοκη περίπτωση, είναι πιθανό η δεύτερη προσέγγιση να είναι καλύτερη.



(α') Αρχικό Δίκτυο.



(β') Προσέγγιση με 4.3.1.



(γ') Προσέγγιση με 4.3.2.

Σχήμα 4.4: Παραδείγματα προσέγγισης νευρωνικού δικτύου.

4.4 Ελαχιστοποίηση Νευρωνικών Δικτύων Πολλών Νευρώνων Εξόδου

Με βάση τις διαδικασίες που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να εκτελέσουμε ελαχιστοποίηση του κρυφού επιπέδου ενός δικτύου εκπαιδευμένου για πρόβλημα δυαδικής ταξινόμησης. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επεκταθεί και σε δίκτυα που διαχειρίζονται προβλήματα ταξινόμησης πολλών κλάσεων.

Ωστόσο, παρατηρούμε ότι ενώ η εφαρμογή της διαδικασίας της διαίρεσης τροπικών πολυωνύμων ήταν εύκολη στην προηγούμενη περίπτωση (καθώς ένα δίκτυο με ένα νευρώνα εξόδου αντιστοιχεί σε μόνο μία τροπική ρητή συνάρτηση), στην περίπτωση πολλών νευρώνων εξόδου αυτό δεν ισχύει. Πιο συγκεκριμένα, κάθε νευρώνας εξόδου αντιστοιχεί σε διαφορετική τροπική ρητή συνάρτηση, οπότε για την ελαχιστοποίηση του δικτύου πρέπει να προσεγγίσουμε πολλά Newton Πολύτοπα ταυτόχρονα.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μερικές μεθόδους με τις οποίες μπορούμε να επιτύχουμε την επέκταση αυτή. Οι μέθοδοι που θα παρουσιάσουμε προσπαθούν να προσεγγίσουν πολλά πολύτοπα ταυτόχρονα, τα οποία αντιστοιχούν στους νευρώνες εξόδου του δικτύου. Θα μελετήσουμε, όπως και πριν, την περίπτωση δικτύων δύο επιπέδων, ώστε να παρουσιάσουμε με απλό τρόπο τις μεθόδους μας.

4.4.1 Ελαχιστοποίηση με Μετασχηματισμό Κορυφών

Όπως αναφέραμε παραπάνω, μπορούμε να εξετάσουμε την έξοδο ενός νευρωνικού δικτύου ως ένα σύνολο τροπικών ρητών συναρτήσεων, μία για κάθε νευρώνα εξόδου. Με σκοπό την επίλυση του προβλήματος της εφαρμογής των ιδεών της διαίρεσης τροπικών πολυωνύμων στην ελαχιστοποίηση τέτοιων δικτύων, θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε το πολύτοπο ενός μόνο τροπικού πολυωνύμου, και στη συνέχεια να αλλάξουμε το αποτέλεσμα αυτής της προσέγγισης, με σκοπό να προσεγγίσουμε όλα τα πολύτοπα που αντιστοιχούν στο δίκτυο αυτό ταυτόχρονα. Αρχικά, έστω:

$$\mathbf{W}^1 = [w_{ij}^1], \mathbf{W}^2 = [w_{ij}^2] \quad (4.41)$$

οι $n_1 \times d, n_2 \times n_1$ πίνακες που αντιστοιχούν στα βάρη των νευρώνων σε κάθε επίπεδο, όπου n_1, n_2 το πλήθος των νευρώνων στο κρυφό επίπεδο και στο επίπεδο εξόδου, αντίστοιχα. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι ο πίνακας \mathbf{W}^2 περιλαμβάνει μόνο θετικά στοιχεία (στη συνέχεια θα περιγράψουμε πώς μπορούμε να παρακάμψουμε αυτόν τον περιορισμό). Ας επικεντρωθούμε σε ένα μόνο νευρώνα εξόδου, έστω αυτός που αντιστοιχεί στο διάνυσμα βαρών \mathbf{w}_j^2 . Το Newton Πολύτοπο της συνάρτησης εξόδου που αντιστοιχεί στο νευρώνα αυτό, μπορεί να εκφραστεί ως το Minkowski άθροισμα των παρακάτω διανυσμάτων:

$$w_{ij}^2 [w_{j1}^1, w_{j2}^1, \dots, w_{jd}^1, b_j^1]^T, j = 1, \dots, n_1 \quad (4.42)$$

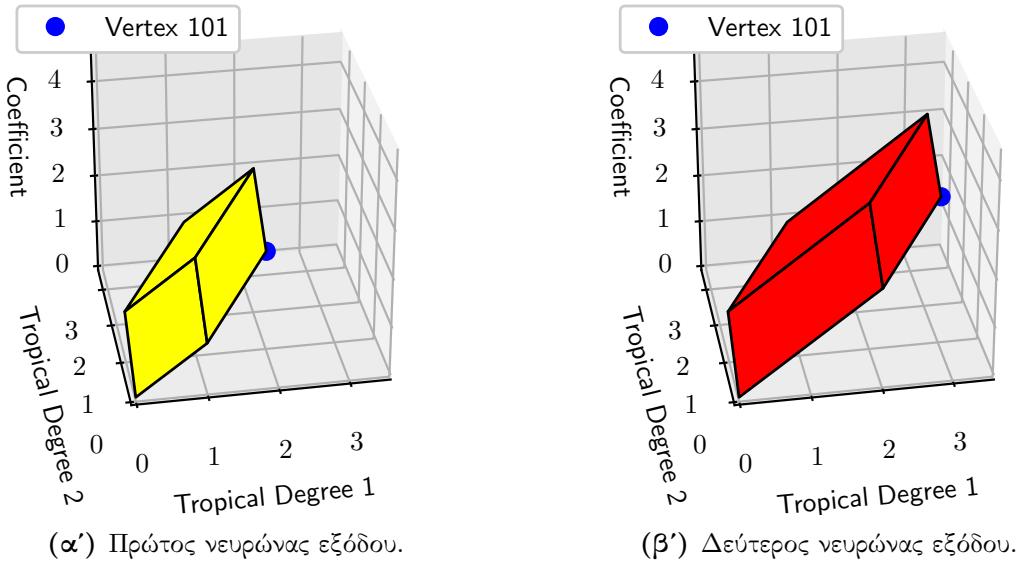
Συνεπώς, το πολύτοπο που αντιστοιχεί σε αυτό το νευρώνα καθορίζεται από τα βάρη του ίδιου του νευρώνα εξόδου (όπως ήταν και αναμενόμενο), οπότε και φαίνεται να μην υπάρχει άμεση σύνδεση μεταξύ των πολυτόπων των νευρώνων εξόδου. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι ακόμη και αν οι κορυφές του πολυτόπου διαφέρουν, συνδέονται μεταξύ τους καθώς προκύπτουν από το ίδιο κρυφό επίπεδο.

Για να περιγράψουμε καλύτερα το παραπάνω, ας σκεφτούμε το εξής παράδειγμα, όπου

έχουμε:

$$\mathbf{W}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{W}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

και δεν υπάρχουν σταθεροί όροι στο επίπεδο εξόδου. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, μπορούμε να αναθέσουμε δυαδικούς δείκτες στις αντίστοιχες κορυφές, με βάση τους νευρώνες το άθροισμα των βαρών των οποίων αντιστοιχεί στην εκάστοτε κορυφή. Στο παράδειγμα μας, για μία δεδομένη είσοδο, έστω την $x = [1, -1.5]^T$, το κρυφό επίπεδο αντιστοιχεί στην έξοδο $\mathbf{W}^1 x + \mathbf{b}^1 = [2, -0.5, 0.5]^T$. Δεδομένου ότι μόνο ο πρώτος και ο τρίτος νευρώνες του κρυφού επιπέδου έχουν ενεργοποιηθεί, αυτό το δείγμα ενεργοποιεί την κορυφή με δείκτη 101. Παρατηρούμε ότι ο δείκτης αυτός είναι κοινός για όλα τα πολύτοπα του δικτύου, καθώς εξαρτάται μόνο από το κοινό κρυφό επίπεδο. Το παραπάνω φαίνεται και στο Σχήμα 4.5, όπου φαίνονται τα πολύτοπα και των δύο νευρώνων εξόδου του παραδείγματος.



Σχήμα 4.5: Δομή πολύτοπων εξόδου.

Οι Αλγόριθμοι 7 και 8 λαμβάνουν υπόψιν τους παραπάνω δυαδικούς δείκτες (ο πρώτος εμμέσως), όταν υπολογίζουν τις κορυφές του τελικού πολύτοπου. Πράγματι, δεδομένης της φύσης του τελευταίου ως ζωνότοπο, καθεμία από τις κορυφές του μπορεί να περιγραφεί μέσω των κορυφών $\mathbf{v}_j = [w_{j1}^1, w_{j2}^1, \dots, w_{jd}^1, b_j^1]^T$ των νευρώνων του κρυφού επιπέδου:

$$\mathbf{v} = \sum_{j \in I} w_{lj}^2 \mathbf{v}_j = (\bar{W}^1)^T \text{diag}(\mathbf{w}_l^2) \mathbb{1}_I \quad (4.44)$$

όπου:

1. I είναι το σύνολο των ενεργοποιημένων νευρώνων του κρυφού επιπέδου, που αντιστοιχούν στο δείκτη της ενεργοποιημένης κορυφής,
2. $\mathbb{1}_I$ είναι το δυαδικό διάνυσμα με 1 στις γραμμές που αντιστοιχούν στους νευρώνες του παραπάνω συνόλου,

3. $\tilde{\mathbf{W}}^1$ είναι μια επεκτεταμένη εκδοχή του πίνακα βαρών του κρυφού επιπέδου, του οποίου η τελευταία στήλη περιλαμβάνει τους σταθερούς όρους των νευρώνων.

Για τον Αλγόριθμο 7 αξίζει να σημειώσουμε ότι η αναπαράσταση αυτή διατηρείται σε όλες τις πράξεις που εκτελούνται, με μοναδική διαφορά το γεγονός ότι το δυαδικό διάνυσμα αντικαθίσταται από ένα αυθαίρετο ακέραιο διάνυσμα \mathbf{t} , όπως φαίνεται στο παρακάτω:

$$\mathbf{v} = (\bar{\mathbf{W}}^1)^T \text{diag}(\mathbf{w}_l^2) \mathbf{t} \quad (4.45)$$

Ο αλγόριθμοι που παρουσιάστηκαν παραπάνω προσπαθούν να διατηρήσουν ένα σύνολο κορυφών στο τελικό, μικρότερο, πολύτοπο. Αν η προσέγγιση εκτελεστεί με μόνο ένα νευρώνα εξόδου, με τα βάρη του ίσα με 1, το αποτέλεσμα θα είναι ένα κρυφό δίκτυο με αντίστοιχο πίνακα βαρών $\tilde{\mathbf{W}}'^1$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να κάνουμε χρήση του πίνακα $\tilde{\mathbf{W}}'^1$ και των βαρών των νευρώνων εξόδου για να προσεγγίσουμε όλες τις κορυφές του πολυτόπου του αρχικού δικτύου. Για τον νευρώνα εξόδου με δείκτη l , θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα:

$$\mathbf{v}'_j w_{lj}^2 = (\bar{\mathbf{W}}^1)^T \text{diag}(\mathbf{w}_l^2) \mathbf{t}_j, \quad j = 1, \dots, n'_1 \quad (4.46)$$

όπου \mathbf{v}'_j είναι η στήλη j του πίνακα $\tilde{\mathbf{W}}'^1$. Μια προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα αυτό μπορεί να βρεθεί άμεσα, με τη χρήση του ψευδοαντιστρόφου του \mathbf{v}'_j , όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_j{}^T \mathbf{v}'_j w_{lj}^2 &= \mathbf{v}'_j{}^T (\bar{\mathbf{W}}^1)^T \text{diag}(\mathbf{w}_l^2) \mathbf{t}_j \Rightarrow \\ w_{lj}^2 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}'_j\|_2^2} \mathbf{v}'_j{}^T (\bar{\mathbf{W}}^1)^T \text{diag}(\mathbf{w}_l^2) \mathbf{t}_j, \quad j = 1, \dots, n'_1 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Με βάση την παραπάνω ιδέα, μπορούμε να προσεγγίσουμε πολλαπλές εξόδους του δικτύου, με την παρακάτω μέθοδο:

- Πρώτα εκτελούμε τη μέθοδο για προσέγγιση δικτύου με ένα νευρώνα εξόδου, θεωρώντας ότι όλα τα βάρη του είναι ίσα με 1. Αυτή η προσέγγιση οδηγεί στον πίνακα $\tilde{\mathbf{W}}'^1$, για το κρυφό επίπεδο του δικτύου. Καθώς εκτελούμε αυτήν την προσέγγιση, κρατάμε επιπλέον και το δείκτη \mathbf{t}_j , που αντιστοιχεί σε καθέναν από αυτούς τους νευρώνες.
- Για κάθε νευρώνα l του δικτύου, υπολογίζουμε τα βάρη του w_{lj}^2 , με τη χρήση της (4.47).

Στο παραπάνω, κάναμε την υπόθεση ότι ο πίνακας βαρών του επιπέδου εξόδου περιλαμβάνει μόνο θετικά βάρη. Αυτή η υπόθεση μπορεί να αφαιρεθεί, αν σπάσουμε τον πίνακα \mathbf{W}^2 σε δύο μέρη (συνεπώς, σπάζοντας και το ίδιο το επίπεδο εξόδου), καθένα από τα οποία περιλαμβάνει μόνο θετικά βάρη, ως εξής:

$$\mathbf{W}^2 = \mathbf{W}_+^2 - \mathbf{W}_-^2 \quad (4.48)$$

Το παραπάνω είναι πάντα εφικτό, ανεξάρτητα από τα ακριβή βάρη του επιπέδου εξόδου. Συνεπώς, μπορούμε να χειριστούμε κάθε τμήμα σαν ένα ξεχωριστό επίπεδο εξόδου (με ένα κοινό κρυφό επίπεδο) και να τα επανασυνθέσουμε αφού προσεγγίσουμε το καθένα χωριστά, θέτοντας τον τελικό πίνακα βαρών ίσο με τη διαφορά τους.

4.4.2 Ελαχιστοποίηση ως Πρόβλημα Ενός-Εναντίον-Όλων

Η παραπάνω μέθοδος για την προσέγγιση των κορυφών του πολυτόπου μέσω ενός μετασχηματισμού μας επιτρέπει να εκτελέσουμε μία αυθαίρετη σμίχρυνση του κρυφού επιπέδου του δικτύου. Ωστόσο, με τη χρήση της παραπάνω μεθόδου χάνουμε αρκετή πληροφορία, σχετικά με τις εξόδους του δικτύου. Πιο συγκεκριμένα, όταν υπολογίζουμε τη σημασία της κάθε κορυφής, διαχειριζόμαστε όλα τα δείγματα με τον ίδιο τρόπο, ανεξαρτήτως της κατηγορίας στην οποία ανήκουν. Αυτό πιθανότατα δεν είναι ιδανικό, δεδομένου ότι, διαισθητικά, η ικανότητα να διακρίνουμε μεταξύ δειγμάτων που ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις φαίνεται να έχει σημασία. Συνεπώς, επιλέγουμε να δούμε το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης πολλαπλών κλάσεων ως ένα πρόβλημα μίας κλάσης εναντίον όλων, αντί ως ένα συνολικό πρόβλημα. Αυτό είναι εφικτό καθώς μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την προσέγγιση κάθε συναρτήσης εξόδου ως ένα χωριστό πρόβλημα, ανεξάρτητο από τις υπόλοιπες.

Πιο συγκεκριμένα, ας εξετάσουμε ένα δίκτυο με ένα κρυφό επίπεδο, με βάρη και σταθερούς όρους \mathbf{W}^1, b^1 και \mathbf{W}^2, b^2 για το πρώτο και το δεύτερο επίπεδο, αντίστοιχα. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ισοδύναμο δίκτυο, προσθέτοντας περισσότερους νευρώνες στο κρυφό επίπεδο, ώστε ο πίνακας βαρών του επιπέδου εξόδου να γίνει μπλοκ διαγώνιος. Αναλυτικότερα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω πίνακες βαρών για τα δύο επίπεδα:

$$\tilde{\mathbf{W}}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{W}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{W}^1 \end{bmatrix}, \tilde{b}^1 = \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^1 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{W}}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{w}_C^2 \end{bmatrix}, \tilde{b}^2 = b^2 \quad (4.49)$$

όπου \mathbf{w}_i^2 είναι η γραμμή i του \mathbf{W}^2 και C ο αριθμός των κλάσεων του προβλήματος, που είναι επίσης ίσο με τον αριθμό των νευρώνων εξόδου του δικτύου. Το τελικό δίκτυο έχει C φορές τους νευρώνες του αρχικού δικτύου στο κρυφό επίπεδο, αλλά λόγω του ότι ο πίνακας βαρών του τελικού επιπέδου εξόδου είναι μπλοκ διαγώνιος, η νέα αρχιτεκτονική αντιστοιχεί στις ίδιες συναρτήσεις εξόδου με το αρχικό δίκτυο.

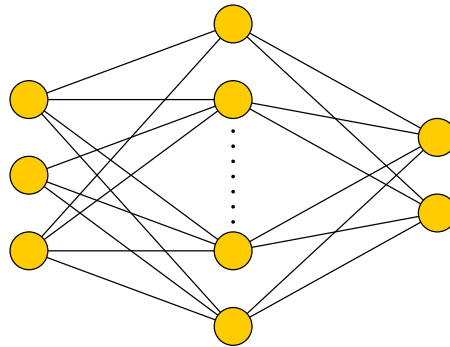
Συνεπώς, έστω πάλι f το ποσοστό με βάση το οποίο θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το κρυφό επίπεδο του δικτύου. Η διαδικασία με την οποία ένα νέο δίκτυο με ένα ποσοστό $f\%$ του αρχικού πλήθους νευρώνων μπορεί να κατασκευαστεί είναι η ακόλουθη:

1. Εκτελούμε τον ίδιο αλγόριθμο ελαχιστοποίησης με πριν, ξεχωριστά για κάθε νευρώνα εξόδου (λαμβάνοντας υπόψιν μόνο το δικό του αντίγραφο του πίνακα \mathbf{W}^1), ενώ παράλληλα κρατάμε μόνο f/C νευρώνες για κάθε τμήμα.
2. Όταν εκτελούμε το προηγούμενο βήμα για κάθε νευρώνα, ελέγχουμε και την κλάση των δειγμάτων που χρησιμοποιούμε για τη μέτρηση των εμφανίσεων κάθε κορυφής του πολυτόπου. Συγκεκριμένα, όταν ελαχιστοποιούμε το πολύτοπο που αντιστοιχεί στο νευρώνα εξόδου i , μετράμε τις εμφανίσεις των δειγμάτων της κλάσης i με βάρος $C - 1$, και των υπόλοιπων με βάρος 1.
3. Συλλέγουμε τα αποτελέσματα και για τα δύο επίπεδα, και κατασκευάζουμε έναν κοινό πίνακα για όλες τις κλάσεις (είτε συγκεντρώνοντας τα κατακόρυφα για το κρυφό επίπεδο, είτε σε μορφή μπλοκ διαγώνιου πίνακα για το επίπεδο εξόδου).
4. Θέτουμε ένα σταθερό όρο στο τελικό δίκτυο εξόδου μέσω μιας σταθμισμένης μέσης διαφοράς ενεργοποιήσεων, όπου πάλι τα δείγματα που αντιστοιχούν στην κλάση του αντίστοιχου νευρώνα αποκτούν βάρος $C - 1$.

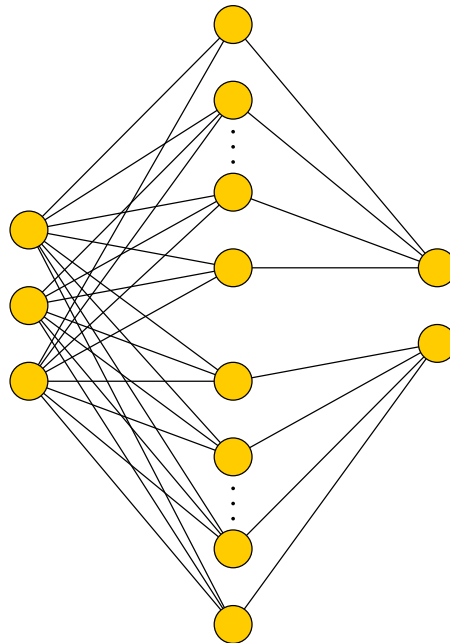
Το δίκτυο που προκύπτει περιέχει το επιθυμητό πλήθος νευρώνων στο κρυφό επίπεδο, καθώς ο αριθμός των νευρώνων στο κρυφό επίπεδο πολλαπλασιάζεται με C , έτσι ώστε κάθε νευρώνας εξόδου να είναι ανεξάρτητος των υπολοίπων. Γραφικά, μπορούμε να δούμε αυτή τη λειτουργία στο Σχήμα 4.6.

Αξίζει να παρατηρήσουμε το βήμα 2 της παραπάνω διαδικασίας. Υποθέτοντας ότι το αρχικό σύνολο δεδομένων είναι ισορροπημένο (δηλαδή περιέχει ίσο αριθμό δειγμάτων για κάθε κλάση), αν η παραπάνω διαδικασία εφαρμοστεί χωρίς αυτό το βήμα, τότε για κάθε «θετικό» δείγμα του κάθε νευρώνα (που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη κλάση) έχουμε $C - 1$ «αρνητικά» (που αντιστοιχούν στις υπόλοιπες κλάσεις). Συνεπώς, το να θέτουμε βάρη στις εμφανίσεις του κάθε δείγματος μας επιτρέπει να εξισορροπήσουμε τεχνητά το σύνολο δεδομένων, ώστε όλα τα δείγματα κάθε κλάσης να επηρεάζουν εξίσου το αποτέλεσμα.

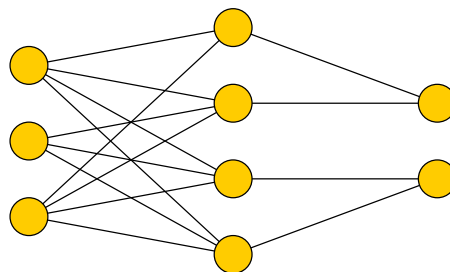
Σημαντικό είναι επίσης να παρατηρήσουμε ότι, δεδομένων των αλγορίθμων που παρουσιάστηκαν για την περίπτωση δικτύου μίας εξόδου, έχουμε τουλάχιστον ένα νευρώνα για το θετικό και έναν για το αρνητικό μέρος του δικτύου. Αυτό επιβάλλει ένα κάτω όριο στον αριθμό των νευρώνων του κρυφού δικτύου που μπορεί να κατασκευαστεί με τη μέθοδό μας, καθώς θα έχουμε τουλάχιστον 2 νευρώνες για καθεμία από τις C κλάσεις. Θεωρητικά, το όριο αυτό εκφράζεται από την ικανότητα προσέγγισης μιας συνάρτησης ως τη διαφορά δύο κυρτών συναρτήσεων. Αν έχουμε μόνο ένα νευρώνα στο κρυφό επίπεδο, με ReLU ενεργοποίηση, τότε η τελική συνάρτηση θα είναι είτε κυρτή είτε κοίλη. Συνεπώς, χρειάζεται τουλάχιστον ένας ακόμα νευρώνας για την προσέγγιση μιας αυθαίρετης συνάρτησης, η ύπαρξη του οποίου είναι αρκετή, καθώς μας δίνει και μια δεύτερη κυρτή συνάρτηση για την προσέγγιση της αρχικής μέσω μιας διαφοράς της παραπάνω μορφής.



(α') Αρχικό δίκτυο.



(β') Αντίγραφα ενδιάμεσου επιπέδου για κάθε νευρώνα εξόδου.



(γ') Τελικό δίκτυο.

Σχήμα 4.6: Διαδικασία ελαχιστοποίησης Ενόσ-Εναντιόν-Όλων.

4.5 Προσθήκη Δεύτερου Βήματος με Feature Approximation

Με βάση όλα τα παραπάνω, και με σκοπό τη σύνδεση με ήδη υπάρχουσες τεχνικές για ελαχιστοποίηση δικτύων, μπορούμε να επεκτείνουμε τη μέθοδό μας, με τη χρήση του βήματος προσέγγισης ελαχίστων τετραγώνων που παρουσιάζεται στα [8] και [27]. Συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε ένα αρχικό δίκτυο όπως περιγράψαμε παραπάνω, με σχετικούς πίνακες $\mathbf{W}^1, \mathbf{b}^1, \mathbf{W}^2, \mathbf{b}^2$. Έστω επίσης ότι έχουμε χρησιμοποιήσει την μέθοδο της Ενότητας 4.4.2 για την ελαχιστοποίηση του δικτύου, και έχουμε κατασκευάσει έναν νέο πίνακα βαρών $\tilde{\mathbf{W}}^1$ και σταθερών όρων $\tilde{\mathbf{b}}^1$, καθώς και έναν νέο σταθερό όρο $\tilde{\mathbf{b}}^2$ στο επίπεδο εξόδου. Με εφαλτήριο την προσέγγιση αυτή, μπορούμε να οδηγηθούμε σε καλύτερη προσέγγιση, δημιουργώντας ένα νέο πίνακα $\tilde{\mathbf{W}}^2$, με τον παρακάτω τρόπο.

Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ως σύνολο δεδομένων το $D = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$, με αντίστοιχες εξόδους $\{\mathbf{y}_1^2, \dots, \mathbf{y}_N^2\}$ στο αρχικό δίκτυο, πριν την τελική ενεργοποίηση. Έστω ότι με τη χρήση του νέου κρυφού επιπέδου έχουμε εξόδους $\{\tilde{\mathbf{y}}_1^1, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_N^1\}$ στο πρώτο επίπεδο (μετά την ReLU ενεργοποίηση του κρυφού επιπέδου). Εστιάζοντας σε έναν νευρώνα εξόδου, έστω με διάνυσμα βαρών \mathbf{w}_l^2 , μπορούμε να θεωρήσουμε το πρόβλημα της εύρεσης του κατάλληλου διανύσματος βαρών ως την επίλυση του συστήματος:

$$\tilde{\mathbf{Y}}^1 \mathbf{w}_l^2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}_1^{1T} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{y}}_N^{1T} \end{bmatrix} \mathbf{w}_l^2 = \begin{bmatrix} y_{l1}^2 - \tilde{b}_l^2 \\ \vdots \\ y_{lN}^2 - \tilde{b}_l^2 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Κάνοντας χρήση λύσης ελαχίστων τετραγώνων, μπορούμε να βρούμε τον βέλτιστο πίνακα βαρών για το πρόβλημα αυτό, ως ίσο με:

$$\mathbf{w}_l^2 = \tilde{\mathbf{Y}}^{1+} \begin{bmatrix} y_{l1}^2 - \tilde{b}_l^2 \\ \vdots \\ y_{lN}^2 - \tilde{b}_l^2 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Συνεπώς, μπορούμε να κάνουμε χρήση αυτής της τεχνικής για να βελτιώσουμε την απόδοση του δικτύου που έχουμε προσεγγίσει μέσω της προηγούμενης μεθόδου.

Ουσιαστικά, αυτό είναι και το διορθωτικό βήμα που χρησιμοποιείται στο [27], μετά την αφαίρεση νευρώνων του δικτύου. Συνεπώς, η μέθοδος που παρουσιάζουμε σε αυτήν την ενότητα αποτελεί μια «κατασκευαστική» εκδοχή του αντίστοιχου αλγορίθμου. Ωστόσο, μπορούμε να δούμε το γεγονός ότι η «κατασκευαστική» μέθοδος υπερέχει της «καταστρεπτικής», ως προς τη χρονική πολυπλοκότητα του αντίστοιχου βήματος. Συγκεκριμένα:

- Στην μέθοδο του [27], επιλέγεται προς αφαίρεση το σύνολο T των νευρώνων που ελαχιστοποιούν την L_2 νόρμα του αθροίσματος των ενεργοποιήσεων τους επί τα αντίστοιχα βάρη πάνω σε όλα τα δεδομένα, δηλαδή το:

$$\sum_{d \in D} \sum_{l=1}^C \left(\sum_{j \in T} w_{lj}^2 \tilde{y}_{jd}^1 \right)^2 \quad (4.52)$$

όπου C το πλήθος των κλάσεων. Το βέλτιστο αυτό σύνολο μπορεί να βρεθεί προσεγγιστικά, βήμα βήμα, προσθέτοντας στο T κάθε φορά έναν ακόμα νευρώνα. Καθώς ο υπολογισμός αυτός περιλαμβάνει κάθε φορά εκ νέου εύρεση του ελαχίστου, αν n_1 το

αρχικό πλήθος νευρώνων του κρυφού επιπέδου και θέλουμε αυτό να γίνει fn_1 , με f ένα αυθαίρετο ποσοστό, τότε τελικά θα εκτελέσουμε:

$$n_1 + (n_1 - 1) + \dots + fn_1 = \frac{(n_1 - fn_1 + 1)(n_1 + fn_1)}{2} = \frac{(1 - f^2)n_1^2 + (1 + f)n_1}{2} \quad (4.53)$$

επαναλήψεις υπολογισμού του (4.52).

- Για τη μέθοδο μας, για κάθε κλάση χωριστά, ξεκινάμε από n_1 νευρώνες και θέλουμε να καταλήξουμε σε $\frac{fn_1}{C}$. Κατά την κατασκευή του κάθε αντιγράφου μέσω του Αλγορίθμου 8, στη χειρότερη περίπτωση, σε κάθε εξωτερική επανάληψη θα προσθέτουμε ένα νευρώνα στο δίκτυο. Συνεπώς, θα εκτελέσουμε συνολικά:

$$C \left(1 + 2 + \dots + \frac{fn_1}{C} \right) = C \frac{\frac{fn_1}{C} \left(\frac{fn_1}{C} + 1 \right)}{2} = \frac{f^2 n_1^2 + fn_1}{2} \quad (4.54)$$

επαναλήψεις της μεθόδου μας.

Σημειώνεται ότι στην παραπάνω ανάλυση αγνοούμε το χρόνο που απαιτείται για τον υπολογισμό των εξόδων του δικτύου πάνω στο σύνολο δεδομένων, καθώς είναι κοινός στις δύο μεθόδους. Σημειώνεται βέβαια ότι η δική μας μέθοδος απαιτεί και χρόνο για την ταξινόμηση των κορυφών, ο οποίος περιλαμβάνει το πολύ $O(|D| \log |D|)$ βήματα. Ωστόσο, μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο αυτό, καθώς από την (4.52) προκύπτει ότι σε κάθε βήμα από τη μέθοδο αναφοράς υπεισέρχονται υπολογισμοί πλήθους που κλιμακώνει με το $|D|$, οπότε υπεισέρχεται και εκεί τέτοιου είδους κλιμάκωση (η οποία μάλιστα είναι μεγαλύτερη, καθώς στη δική μας μέθοδο το $|D|$ δεν εμφανίζεται στα εσωτερικά βήματα του αλγορίθμου). Σε κάθε περίπτωση, για απλοποίηση της σύγκρισης θα εξετάσουμε μόνο το πλήθος βημάτων (τονίζοντας ότι τα βήματα το κάθε βήμα της μεθόδου αναφοράς είναι πιο χρονοβόρο από κάθε βήμα της δικής μας μεθόδου).

Θεωρώντας και στις δύο περιπτώσεις σταθερό χρόνο σε κάθε βήμα λοιπόν, η ακριβής σχέση μεταξύ των πολυπλοκοτήτων τους εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου $f \in (0, 1]$. Συγκρίνοντας τις εκφράσεις των (4.53) και (4.54), έχουμε:

$$\begin{aligned} (1 - f^2)n_1^2 + (1 + f)n_1 &\geq \frac{f^2}{C}n_1^2 + fn_1 \Leftrightarrow \\ \left(1 + \frac{1}{C} \right) n_1 f^2 &\leq n_1 + 1 \Leftrightarrow \\ f &\leq \sqrt{\frac{n_1 + 1}{\left(1 + \frac{1}{C} \right) n_1}} \end{aligned} \quad (4.55)$$

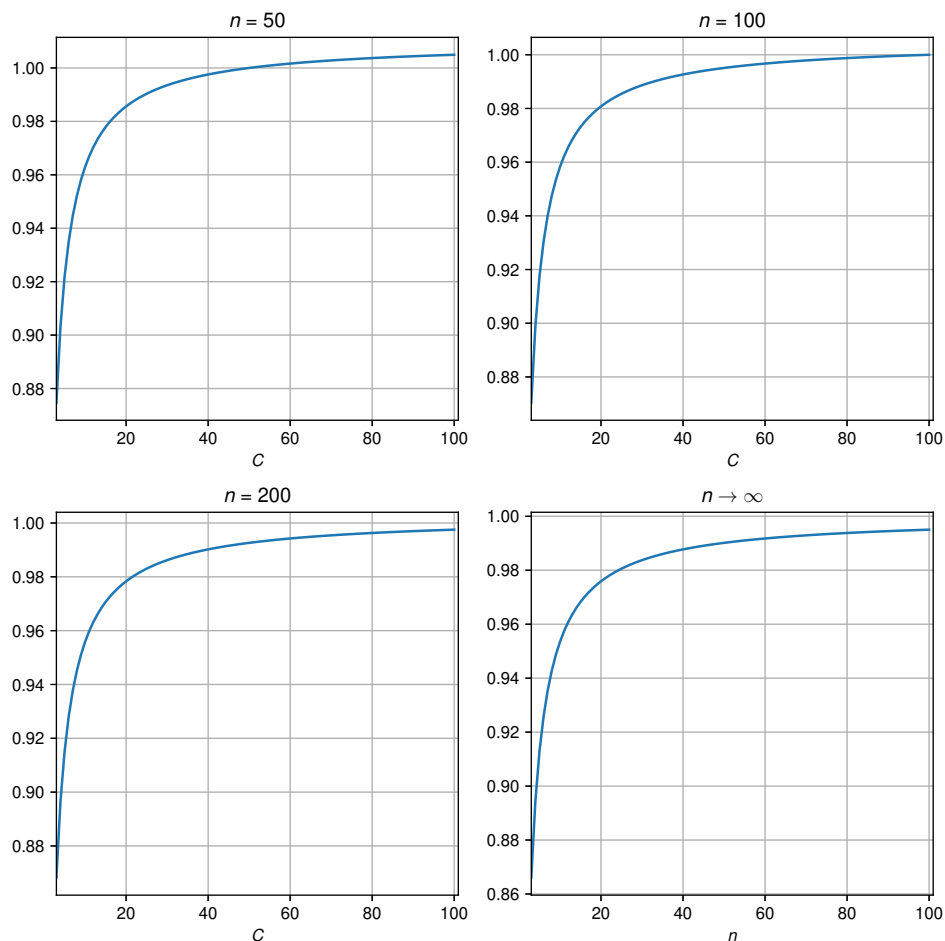
αφού θέλουμε $f \in (0, 1]$. Όταν ικανοποιείται αυτή η ανισότητα, τότε η μεθόδός μας εκτελεί λιγότερα βήματα από αυτή του [27]. Το κατά πόσο αυτή ισχύει, εξαρτάται από την ακριβείς τιμές των n_1, C . Θεωρώντας το n_1 επαρκώς μεγάλο (καθώς ο στόχος μας είναι γενικά η μείωση ενός μεγάλου δικτύου) τότε έχουμε:

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n_1 + 1}{\left(1 + \frac{1}{C} \right) n_1}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{C}}} = \sqrt{\frac{C}{C + 1}} \quad (4.56)$$

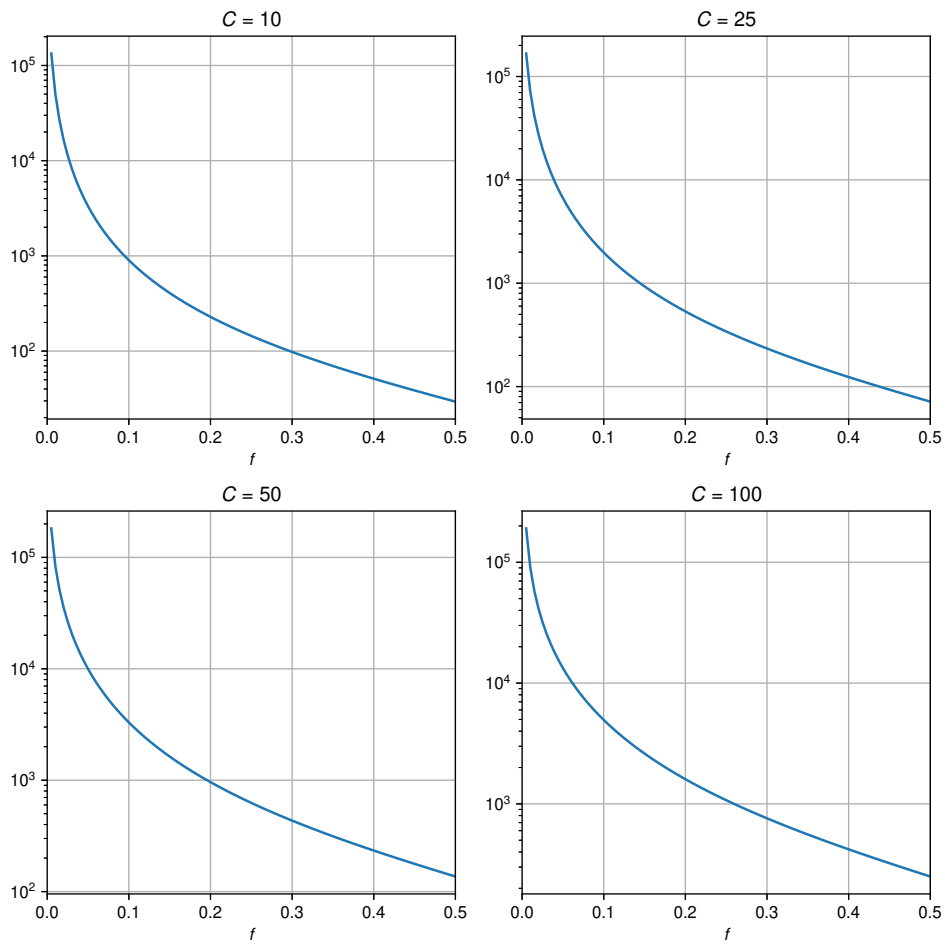
Παρατηρούμε ότι (όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.8), το άνω όριο αυτό είναι άνω του 0.5, και αυξάνει καθώς αυξάνει ο αριθμός των κλάσεων. Αυτό σημαίνει ότι η μεθόδός μας υπερτερεί

χρονικά, όσες περισσότερες κλάσεις έχουμε. Αυτό φαίνεται και στο Σχήμα 4.7, για διάφορες τιμές του n_1 , όπου βλέπουμε ότι το άνω αυτό όριο, άρα και το εύρος των τιμών f όπου η μέθοδός μας υπερτερεί, αυξάνει με το C .

Αξίζει να σημειωθεί βέβαια, ότι η μέθοδος αναφοράς είναι πιο παραλληλοποιήσιμη, καθώς καθένα από τα βήματα υπολογισμού είναι ανεξάρτητο των υπολοίπων, σε αντίθεση με τη δική μας μέθοδο. Ωστόσο, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 4.8, ο λόγος του πλήθους των δύο βημάτων, για μικρές τιμές του f που μας ενδιαφέρουν, είναι τέτοιος που καθιστά τη μέθοδό μας προτιμητέα.



Σχήμα 4.7: Άνω όριο της (4.55).



Σχήμα 4.8: Λόγος επαναληπτικών βημάτων μεθόδου αναφοράς προς δικής μας μεθόδου. Οι υπολογισμοί έγιναν για $n_1 = 1000$.

Κεφάλαιο 5

Πειραματική Ανάλυση

5.1 Ελαχιστοποίηση σε Προβλήματα Δυαδικής Ταξινόμησης

Στο σημείο αυτό θα εφαρμόσουμε τις μεθόδους που παρουσιάσαμε παραπάνω, πάνω σε δίκτυα που έχουν ήδη εκπαιδευθεί για την επίλυση ενός προβλήματος δυαδικής ταξινόμησης. Συγκεκριμένα, θα κάνουμε χρήση των παρακάτω συνόλων δεδομένων:

- Το σύνολο δεδομένων IMDB με αξιολογήσεις ταινιών [28], το οποίο περιλαμβάνει 50000 στοιχεία, τα μισά εκ των οποίων ανήκουν στο σύνολο εκπαίδευσης, και τα άλλα μισά στο σύνολο ελέγχου. Θα κάνουμε χρήση της προτεινόμενης προεπεξεργασίας των δεδομένων, κρατώντας τις 5000 συχνότερες λέξεις (εκτός από τις 50 συχνότερες), ενώ παράλληλα αλλάζουμε το μήκος των ακολουθιών, ώστε όλες να έχουν κοινό μήκος 200.
- Το σύνολο δεδομένων MNIST [25] όπου αρχικά μόνο τα ζεύγη ψηφίων 4-9 και 3-5 λαμβάνονται υπόψιν, για ένα πρόβλημα ταξινόμησης δύο κλάσεων. Τα συγκεκριμένα ζεύγη κλάσεων επιλέγονται καθώς ακόμα και σε ένα σύστημα υψηλής ακρίβειας όπως το [37], τα ζεύγη αυτά κλάσεων παρουσιάζουν μία μείξη μεταξύ τους. Στη συνέχεια, όλο το σύνολο δεδομένων χωρίζεται σε περιττούς και ακέραιους αριθμούς, για ένα πρόβλημα δυαδικής ταξινόμησης.

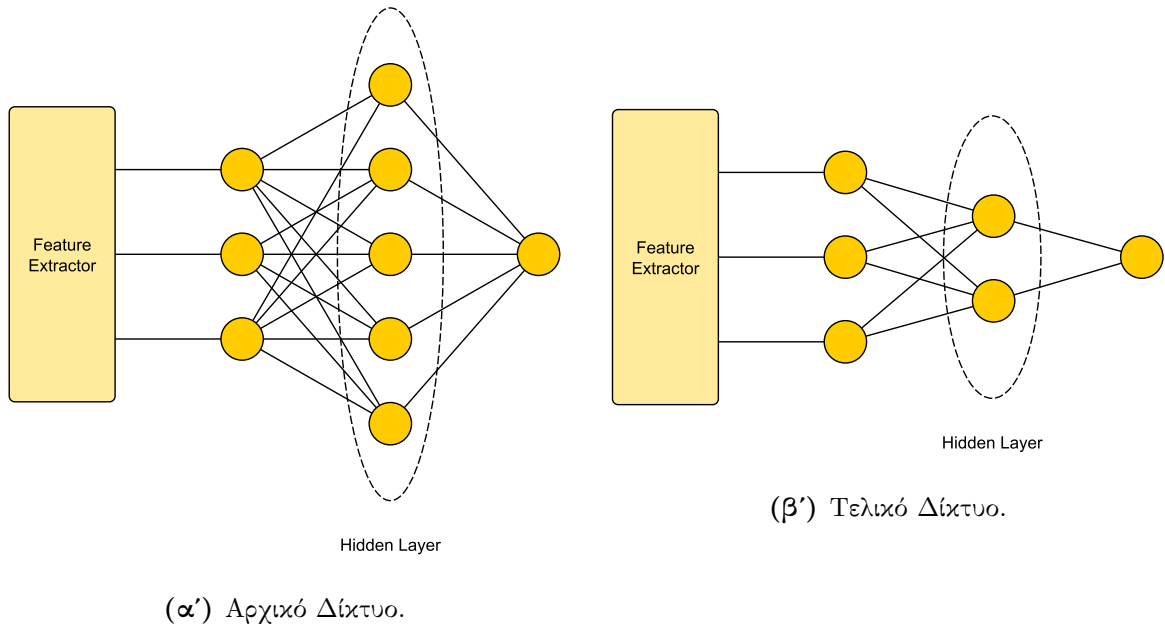
Η μεταβολή στην αρχιτεκτονική των δικτύων που αποσκοπούμε στα πειράματά μας φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Για τα πειράματά μας, κάναμε χρήση της βιβλιοθήκης Keras [12], μέσω της οποίας ορίσαμε μοντέλα προς επιβεβαίωση της ικανότητας της μεθόδου μας για τη μείωση του μεγέθους ενός νευρωνικού δικτύου. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αφορούν 5 εκτελέσεις των πειραμάτων, όπου σημειώνονται οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις μεταξύ των εκτελέσεων αυτών.

Σημειώνεται ότι θα εξετάσουμε τη μέθοδο που παρουσιάζεται στην Ενότητα 4.3.1. Όπως θα δούμε και στη συνέχεια, στην περίπτωση που έχουμε μόνο δύο κλάσεις λαμβάνουμε ήδη εξαιρετικά καλά αποτελέσματα για την ελαχιστοποίηση, οπότε η χρήση της μεθόδου της Ενότητας 4.3.2, σε συνδυασμό και με το γεγονός ότι έχει μεγαλύτερη χρονική πολυπλοκότητα σε σχέση με την προηγούμενη, δεν μας προσφέρει κάτι επιπλέον σε τόσο απλά προβλήματα. Η μέθοδος αυτή θα εξεταστεί καλύτερα στην περίπτωση πολλών κλάσεων, στην Ενότητα 5.2.

5.1.1 Σύνολο Δεδομένων IMDB - Αρχική Μέθοδος

Σε αυτό το πείραμα, εξετάσαμε 3 διαφορετικά μοντέλα, τα οποία εκπαιδεύσαμε στο σύνολο δεδομένων IMDB, χρησιμοποιώντας ένα διαχωρισμό 80% - 20% σε σύνολα εκπαίδευσης και επιβεβαίωσης, με το σφάλμα στο σύνολο επιβεβαίωσης να χρησιμοποιήθηκε για το σταματημό της εκπαίδευσης των μοντέλων, με σκοπό την αποφυγή της υπερπροσαρμογής (overfitting). Το learning rate των μοντέλων μας ήταν ίσο με $5 \cdot 10^{-4}$. Και τα τρία μοντέλα χρησιμοποιούσαν ένα επίπεδο ενσωμάτωσης (Embedding Layer), με σκοπό την εκμάθηση ενός embedding των λέξεων σε ένα χώρο 50 διαστάσεων. Η διαφορά των μοντέλων έγκειται στην αναπαράσταση που χρησιμοποιήθηκε στη συνέχεια:

- Το πρώτο μοντέλο απλώς παρέχει όλα τα σημεία σε ένα πλήρως συνδεδεμένο δίκτυο, με ένα κρυφό επίπεδο που περιλαμβάνει 1024 νευρώνες.



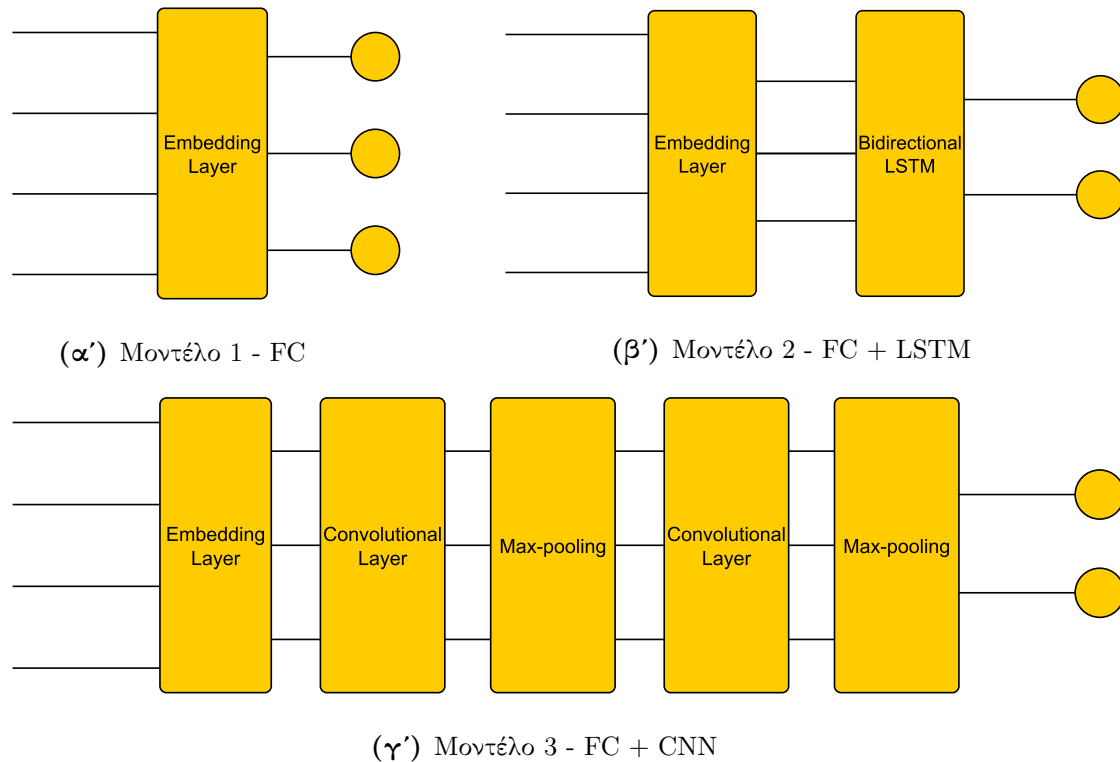
Σχήμα 5.1: Ελαχιστοποίηση Δικτύου.

- Το δεύτερο μοντέλο κάνει χρήση ενός LSTM δύο κατευθύνσεων με 32 μονάδες, πριν δώσει τα δεδομένα σε ένα πλήρως συνδεδεμένο επίπεδο με 256 νευρώνες.
- Το τελευταίο μοντέλο κάνει χρήση ενός CNN μίας διάστασης, πριν δώσει τα δεδομένα σε ένα πλήρως συνδεδεμένο επίπεδο με 256 νευρώνες. Το CNN έχει 2 επίπεδα με 8 και 4 στοιχεία, ReLU ενεργοποιήσεις, συνελκτικούς πυρήνες 3 pixel και max-pooling μεγέθους 5 pixel.

Τα δύο τελευταία μοντέλα χρησιμεύουν για την κατασκευή μιας μικρότερης αναπαράστασης των δεδομένων, λειτουργώντας ως μια μορφή εξαγωγής χαρακτηριστικών για την επίτευξη της ταξινόμησης. Σημειώνεται ότι για προβλήματα ανάλυσης κειμένου, συχνά γίνεται χρήση προεκπαιδευμένων embeddings, όπως για παράδειγμα αυτά που παρέχονται από το [39]. Στην περίπτωση μας επιλέγουμε να μην κάνουμε χρήση τους, καθώς τα μοντέλα που εξετάζουμε δεν είναι αρκετά περίπλοκα για να αξιοποιήσουμε την πρόσθετη πληροφορία που μας δίνεται. Επιπλέον, οι αρχιτεκτονικές αυτές δεν είναι βέλτιστες για το συγκεκριμένο πρόβλημα, αλλά αρκούν για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της μεθόδου μας.

Ο αλγόριθμός μας εφαρμόστηκε στα παραπάνω μοντέλα, χρησιμοποιώντας ένα υποσύνολο 2000 σημείων από το σύνολο δεδομένων για εκπαίδευση (με σκοπό να δείξουμε ότι, ακόμα και με ένα υποσύνολο των δεδομένων, λαμβάνουμε καλά αποτελέσματα). Διάφορα ποσοστά των νευρώνων του κρυφού επιπέδου διατηρήθηκαν ανά πείραμα, με τα σχετικά αποτελέσματα να φαίνονται στον Πίνακα 5.1. Τα αποτελέσματα αυτά φανερώνουν τη χρησιμότητα της μεθόδου μας, καθώς το να χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμό μας οδηγεί σε μία πτώση απόδοσης το πολύ 0.5%, αμελητέα αν σκεφτεί κανείς ότι μας επιτρέπει να μειώσουμε τον αριθμό των νευρώνων του κρυφού επιπέδου κατά έναν παράγοντα ίσο με 100. Σε μερικές περιπτώσεις, οδηγεί και σε καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με το αρχικό δίκτυο.

Επιπλέον, παραθέτουμε και τα αποτελέσματα όπου εφαρμόζουμε ελαχιστοποίηση προσπαθώντας να προσεγγίσουμε τους σταθερούς όρους, αντί τις εξόδους των ενεργοποιημένων κορυφών, με βάση το πρόβλημα (4.16). Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 5.2, όπου και βλέπουμε πως η μέθοδος αυτή έχει χειρότερα αποτελέσματα σε σχέση με την προηγούμενη,



Σχήμα 5.2: Εξαγωγείς χαρακτηριστικών (feature extractors) των μοντέλων που χρησιμοποιούμε.

πιθανώς επειδή γίνεται χρήση ενός μόνο μεγάλου τροπικού πολυωνύμου για διαίρεση (οπότε οι κορυφές των πολυτόπων του προσεγγιστικού δικτύου πιθανώς δεν ταιριάζουν με αυτές του αρχικού). Παρά το γεγονός αυτό, στην περίπτωση του πρώτου και του δεύτερου μοντέλου, μπορούν να θεωρηθούν ικανοποιητικά, καθώς οδηγούν σε πτώση 4.5% σε ακρίβεια, μόνο σε μία περίπτωση (σημειώνεται βέβαια ότι η τυπική απόκλιση της μεθόδου αυτής είναι μεγαλύτερη, γεγονός που δυσχεραίνει ελαφρώς την αξιοπιστία της).

Επιπλέον, στον Πίνακα 5.1 αναφέρονται οι ακρίβειες μοντέλων που έχουν εκπαιδευτεί από το μηδέν. Τα αποτελέσματα για τα μοντέλα αυτά, στην περίπτωση που κάνουμε χρήση μόνο πλήρως συνδεδεμένων επιπέδων στο δίκτυο, είναι καλύτερα από την περίπτωση που εκτελούμε προσέγγιση τους, πιθανώς λόγω του ότι ο αριθμός των παραμέτρων τους επιτρέπει να κάνουν καλή προσέγγιση του αποτελέσματος, παρά τον μειωμένο αριθμό νευρώνων. Ωστόσο, στην περίπτωση των άλλων δύο δικτύων, η ακρίβεια που επιτυγχάνεται από τα εκ νέου εκπαιδευμένα δίκτυα είναι συγκρίσιμη με αυτή των προσεγγιστικών, και μικρότερη στην περίπτωση που κρατάμε πολύ μικρό αριθμό νευρώνων. Σημειώνεται ότι αυτό ισχύει παρά το γεγονός ότι τέθηκε μικρότερο learning rate, ίσο με 10^{-4} , και αυξήθηκαν οι εποχές για την εκπαίδευση του δικτύου, με σκοπό τη βελτίωση της σύγκλισης. Δεδομένου ότι η είσοδος στο πλήρως συνδεδεμένο τμήμα του δικτύου είναι πολύ μικρή στην περίπτωση αυτών των μοντέλων, η συμπεριφορά αυτή μπορεί να εξηγηθεί από το ότι οι δύο αυτές κλάσεις έχουν μεγάλη ανάμειξη σε χαμηλές διαστάσεις εισόδου. Συνεπώς, η μέθοδός μας είναι χρήσιμη, στην περίπτωση που έχουμε μικρό αριθμό από χαρακτηριστικά, δεδομένου ότι μας επιτρέπει να λάβουμε πληροφορία από μία προβολή σε ένα μεγαλύτερο πλήθος διαστάσεων, πριν ελαχιστοποιήσουμε το δίκτυο.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, θεωρητικά, ένα εκ νέου εκπαιδευμένο δίκτυο θα πρέπει να έχει τουλάχιστον τόσο καλά αποτελέσματα όσο το δικό μας προσεγγιστικό δίκτυο, στην περίπτωση που χρησιμοποιηθεί ένας καλός αλγόριθμος ελαχιστοποίησης. Ωστόσο, τα αποτελέσματα

Ποσοστό Νευρώνων	FC (1024)		LSTM + FC (256)		1D CNN + FC (256)	
100% (Αρχικό)	84.056±0.750		85.006±0.353		83.927±0.378	
	Μειωμένο	Αναφορά	Μειωμένο	Αναφορά	Μειωμένο	Αναφορά
90%	84.299±0.360	83.937	85.190±0.211	84.773	84.095±0.419	83.188
75%	84.263±0.348	83.852	85.108±0.220	85.033	84.059±0.374	84.354
50%	84.314±0.322	84.232	85.029±0.374	85.166	84.006±0.378	83.882
25%	84.366±0.344	83.970	85.092±0.295	85.214	83.930±0.323	84.400
10%	84.333±0.396	85.021	85.126±0.204	85.042	84.042±0.412	83.964
5%	84.362±0.366	85.206	85.079±0.245	85.202	84.118±0.496	83.323
2%	84.314±0.413	85.254	84.878±0.447	83.254	83.922±0.363	82.428
1%	84.206±0.418	85.346	85.017±0.350	82.947	83.915±0.359	78.758
0.5%	83.860±0.789	85.256	-	-	-	-

Πίνακας 5.1: Μέση ακρίβεια και τυπική απόκλιση στο σύνολο ελέγχου (IMDB). Η μέθοδος αναφοράς αποτελείται από απλή εκπαίδευση νέου δικτύου, αγνοώντας το αρχικό. Επέκταση Πίνακα από το [45].

Ποσοστό Νευρώνων	FC (1024)	LSTM + FC (256)	1D CNN + FC (256)
100% (Αρχικό)	84.056±0.750	85.006±0.353	83.927±0.378
90%	83.804±1.066	84.988±0.591	83.326±1.326
75%	84.413±0.378	84.483±1.029	82.812±1.749
50%	84.208±0.548	84.097±1.306	82.763±2.160
25%	84.140±0.615	84.774±0.399	83.186±1.280
10%	84.023±0.621	83.159±2.505	83.469±0.785
5%	82.723±1.400	84.883±0.744	83.078±1.263
2%	83.684±1.258	85.014±0.358	83.928±0.357
1%	79.551±4.502	84.997±0.362	83.922±0.358
0.5%	83.971±0.731	-	-

Πίνακας 5.2: Μέση ακρίβεια και τυπική απόκλιση στο σύνολο ελέγχου, πρόβλημα (4.16) (IMDB). Πίνακας από το [43].

του Πίνακα 5.3 δείχνουν ότι η εφαρμογή της μεθόδου μας είναι σημαντικά πιο γρήγορη από την εκπαίδευση όλων των νέων μοντέλων. Συνεπώς, η μέθοδος μας είναι προτιμητέα, καθώς μας επιτρέπει να λάβουμε εξίσου καλά αποτελέσματα, χωρίς επιπλέον κόστος σε χρόνο.

Σημειώνεται τέλος ότι στην περίπτωση του CNN, χρήση γραμμικών αντί ReLU ενεργοποιήσεων στο συνελκτικό τμήμα του δικτύου οδηγεί σε έντονη απώλεια ακρίβειας, τόσο στο αρχικό όσο και στο ελαχιστοποιημένο δίκτυο. Αυτό πιθανώς οφείλεται στο ότι η χρήση αυτών των ενεργοποιήσεων αποτρέπει το δίκτυο από το να πετύχει το απαιτούμενο ελάχιστο στη συνάρτηση σφάλματος, οπότε και η προσέγγιση του δικτύου δεν παρέχει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.

5.1.2 Σύνολο Δεδομένων IMDB - Επαναληπτική Μέθοδος

Σε μια προσπάθεια βελτίωσης των αποτελεσμάτων του Πίνακα 5.1, παρουσιάζουμε μία επαναληπτική εκδοχή του αλγορίθμου μας, όπου η ελαχιστοποίηση διασπάται σε χωριστά στάδια. Σε κάθε στάδιο, το πλήθος των νευρώνων στο κρυφό επίπεδο μειώνεται στο μισό, με τη χρήση του αλγορίθμου που ελαχιστοποιεί το πρόβλημα 4.14 όπως και πριν, αλλά τα δύο πλήρως συνδεδεμένα επίπεδα του δικτύου επανεκπαιδεύονται για 10, το πολύ, εποχές στο

Μοντέλο	Χρόνος εκτέλεσης της μεθόδου μας (sec)	Χρόνος που απαιτείται για την εκπαίδευση όλων των μοντέλων (sec)
FC	86.9 ± 4.5	151.9
LSTM+FC	139.7 ± 0.1	777.8
CNN+FC	21.1 ± 0.9	166.2

Πίνακας 5.3: Σύγκριση χρόνου εκτέλεσης (IMDB). Επέκταση Πίνακα από τα [43], [45].

τέλος κάθε σταδίου, ώστε να αντισταθμιστούν λάθη που έχουν γίνει κατά την προσέγγιση.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 5.4, για το πρώτο και για το τρίτο από τα παραπάνω μοντέλα (το δεύτερο φαίνεται να μην έχει περιθώρια βελτίωσης). Τα αποτελέσματα αυτά είναι, εν γένει, μια βελτίωση σε σχέση με αυτά του Πίνακα 5.1, καθώς η επανεκπαίδευση του δικτύου του επιτρέπει να διορθώσει πιθανά λάθη που έγιναν στην προσέγγισή του. Είναι πιθανό ακόμη καλύτερα αποτελέσματα να είχαν επιτευχθεί με τη χρήση πιο ακριβούς διαδικασίας επανεκπαίδευσης, ώστε να γίνει καλύτερη προσέγγιση του τοπικού ελαχίστου. Επιπλέον, τα αποτελέσματα για το συνελικτικό μοντέλο είναι καλύτερα από αυτά των μοντέλων που εκπαιδεύονται εκ νέου, καθώς εκμεταλλευόμαστε επιπλέον μια καλή αναπαράσταση που έχουμε μάθει εκπαιδεύοντας το μεγάλο δίκτυο. Αυτό δεν ισχύει για το πρώτο μοντέλο, πιθανότατα για τους ίδιους λόγους με πριν.

Ποσοστό νευρώνων	FC (1024)	CNN+FC (256)
100%	84.056 ± 0.750	83.927 ± 0.378
50% - Επανάληψη 1	84.334 ± 0.376	84.080 ± 0.459
25% - Επανάληψη 2	84.379 ± 0.273	84.094 ± 0.484
12.5% - Επανάληψη 3	84.347 ± 0.322	84.105 ± 0.480
6.25% - Επανάληψη 4	84.272 ± 0.430	84.131 ± 0.454
3.1% - Επανάληψη 5	84.235 ± 0.311	84.049 ± 0.558
1.6% - Επανάληψη 6	84.299 ± 0.262	84.054 ± 0.579
0.8% - Επανάληψη 7	84.192 ± 0.385	-

Πίνακας 5.4: Μέση ακρίβεια και τυπική απόκλιση στο σύνολο ελέγχου (IMDB). Επέκταση Πίνακα από το [45].

5.1.3 MNIST Σύνολο Δεδομένων - Ζεύγη 4/9, 3/5

Σε αυτό το πείραμα, διαλέγουμε από τα σύνολα εκπαίδευσης και ελέγχου του MNIST μόνο τα στοιχεία που αντιστοιχούν στις εκάστοτε επιλεγμένες κλάσεις. Το μοντέλο που εξετάζουμε στην περίπτωση αυτή αποτελείται από δύο συνελικτικά επίπεδα, με τον ίδιο αριθμό στοιχείων με πριν (με max-pooling ίσο με 3 αυτή τη φορά), καθώς και από δύο πλήρως συνδεδεμένα επίπεδα, με το κρυφό επίπεδο να περιλαμβάνει 1000 νευρώνες. Κατ' αυτόν τον τρόπο, μπορούμε πάλι να μάθουμε μια μικρή αναπαράσταση των δεδομένων μας. Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε είναι πάλι αυτή που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση στο πρόβλημα (4.14). Τα σχετικά αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 5.5.

Μπορούμε να δούμε ότι η πτώση σε απόδοση που προκαλείται από την μέθοδό μας είναι και πάλι μικρή, καθώς αντιστοιχεί σε πτώση μικρότερη από 0.5%, για παρόμοια μείωση του μεγέθους του δικτύου. Επιπλέον, τα εκ νέου εκπαιδευμένα δίκτυα έχουν την ίδια συμπεριφορά

Ποσοστό Νευρώνων	Ψηφία 3-5, Μειωμένο	Ψηφία 3-5, Αναφορά	Ψηφία 4-9, Μειωμένο	Ψηφία 4-9, Αναφορά
100%	99.180 ± 0.269	-	99.046 ± 0.264	-
75%	99.138 ± 0.383	99.380	99.036 ± 0.290	99.186
50%	99.106 ± 0.438	99.127	99.046 ± 0.282	99.056
25%	99.117 ± 0.370	99.138	98.985 ± 0.337	98.905
10%	99.106 ± 0.375	99.190	99.005 ± 0.309	99.166
2%	99.117 ± 0.435	99.096	98.905 ± 0.367	99.066
1%	99.180 ± 0.325	99.138	98.805 ± 0.371	98.945
0.5%	99.180 ± 0.269	99.117	99.005 ± 0.302	99.026

Πίνακας 5.5: Ακρίβεια στο σύνολο ελέγχου (MNIST). Επέκταση Πίνακα από το [45].

με πριν, μόνο σε μικρότερη κλίμακα. Αυτό πιθανώς οφείλεται στην ευκολία του προβλήματος, καθώς δεν λαμβάνουμε επιπλέον κέρδος από την αναπαράσταση που προκύπτει από ένα μεγαλύτερο δίκτυο (πιθανώς οι κλάσεις διαχωρίζονται εύκολα). Ωστόσο, η μέθοδός μας πάλι έχει τα προαναφερθέντα πλεονεκτήματα που προκύπτουν από την εκπαίδευση μεγαλύτερων δικτύων, καθώς αυτά είναι πιο πιθανό να συγκλίνουν, σε αντίθεση με τα μικρότερα δίκτυα.

5.1.4 MNIST Σύνολο Δεδομένων - Άρτιοι/Περιττοί

Εδώ χρησιμοποιούμε το πλήρες σύνολο δεδομένων, θεωρώντας δύο κλάσεις στο πρόβλημα, διαχωρίζοντας τα ψηφία σε άρτια και περιττά. Το δίκτυο που χρησιμοποιείται εδώ είναι ίδιο με την περίπτωση των ζευγών ψηφίων, με τη διαφορά ότι εδώ χρησιμοποιούμε ελαφρώς μεγαλύτερους συνελικτικούς πυρήνες (μεγέθους 5, αντί για 3). Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 5.6.

Ποσοστό Νευρώνων	Μειωμένο	Αναφορά
100%	98.156 ± 0.323	-
75%	98.062 ± 0.281	98.182
50%	97.914 ± 0.287	98.370
25%	98.030 ± 0.269	98.196
10%	97.994 ± 0.327	98.014
2%	98.030 ± 0.298	98.392
1%	98.034 ± 0.246	97.986

Πίνακας 5.6: Ακρίβεια στο σύνολο ελέγχου (MNIST, άρτιοι/περιττοί). Επέκταση Πίνακα από το [43].

Όπως και πριν, έτσι και εδώ η χρήση της μεθόδου μας οδηγεί σε πολύ μικρή πτώση ακρίβειας. Επιπλέον, τα αποτελέσματα είναι πολύ κοντά σε αυτά που επιτυγχάνονται με τη χρήση εκ νέου εκπαιδευμένων δικτύων. Συνεπώς, η συμπεριφορά τους είναι όμοια με αυτήν των προηγούμενων πειραμάτων. Αξίζει να σημειωθεί βέβαια η ανάγκη για αύξηση του μεγέθους των συνελικτικών πυρήνων. Αυτό ήταν απαραίτητο λόγω της μεγάλης διακύμανσης μεταξύ των στοιχείων που ανήκουν στην ίδια κλάση (καθώς οπτικά τα αντίστοιχα ψηφία διαφέρουν αρκετά). Συνεπώς, μια καλύτερη αναπαράσταση, μέσω ενός ισχυρότερου συνελικτικού τμήματος, ήταν αναγκαία για να είναι αποδεκτή η προσέγγιση.

5.2 Ελαχιστοποίηση σε Προβλήματα Ταξινόμησης Πολλών Κλάσεων

Στη συνέχεια, θα εκτελέσουμε πειράματα πάνω στις μεθόδους που εξετάσαμε για την ελαχιστοποίηση δικτύων εκπαιδευμένων σε προβλήματα πολλών κλάσεων. Πιο συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε τη μέθοδο που αναπτύξαμε παραπάνω, η οποία στηρίζεται στην εκτέλεση των Αλγορίθμων 7 ή 8, για κάθε κλάση χωριστά, με σκοπό την τελική προσέγγιση των δειγμάτων ανεξαρτήτως από την κλάση στην οποία ανήκουν. Οι βάσεις δεδομένων που θα χρησιμοποιήσουμε στο πρόβλημα αυτό είναι οι εξής:

- Η βάση δεδομένων MNIST, η οποία αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα. Αυτή τη φορά, κάνουμε χρήση όλων των κλάσεων που παρέχονται σε αυτό το πρόβλημα.
- Η βάση δεδομένων Fashion-MNIST, ή για συντομία F-MNIST [49]. Η βάση δεδομένων αυτή περιλαμβάνει εικόνες από είδη ρουχισμού, οι οποίες έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά (ανάλυση, πλήθος κατηγοριών) με αυτές του MNIST. Ως εκ τούτου, μπορεί να γίνει άμεση χρήση αυτού του συνόλου δεδομένων, στο ίδιο ακριβώς πρόβλημα.

Όπως και πριν, τα παρουσιαζόμενα αποτελέσματα αφορούν 5 εκτελέσεις των πειραμάτων, ύστερα από τις οποίες έγινε καταγραφή του μέσου όρου και της τυπικής απόκλισης της ακρίβειας των παρουσιαζόμενων μοντέλων. Το δίκτυο που χρησιμοποιήθηκε για τα πειράματα αυτά αποτελούνταν από δύο συνελικτικά επίπεδα και δύο πλήρως συνδεδεμένα επίπεδα. Τα συνελικτικά επίπεδα περιλάμβαναν 16 (για τη MNIST) ή 32 (για την F-MNIST) στοιχεία, το καθένα με 5×5 πυρήνες, ReLU ενεργοποιήσεις και max-pooling με παράγοντα 3. Το πρώτο από τα πλήρως συνδεδεμένα επίπεδα είχε 500 νευρώνες για το πρώτο σύνολο δεδομένων και 1000 για το δεύτερο.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στα παρακάτω πειράματα, αναλογίες οι οποίες οδηγούν σε ποσοστά τα οποία δεν αντιστοιχούν σε ακέραιο αριθμό νευρώνων στρογγυλοποιούνται προς τα κάτω, ώστε το τελικό δίκτυο να είναι πάντα μέσα στα επιθυμητά όρια.

5.2.1 Σύνολο MNIST, Ευριστική Μέθοδος

Στο πρώτο μας πείραμα εξετάζουμε τη χρήση της μεθόδου που περιγράφεται στην Ενότητα 4.3.1 σε κάθε κλάση χωριστά, με σκοπό την ελαχιστοποίηση του συνολικού δικτύου. Τα αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων φαίνονται στον Πίνακα 5.7. Παρατηρούμε ότι η μεθόδός

Ποσοστό Νευρώνων	Μέση Ακρίβεια	Τυπική Απόκλιση
100% (Αρχικό)	98.604	0.027
90%	95.714	1.342
75%	95.048	1.552
50%	95.522	3.003
25%	91.040	5.882
10%	92.790	3.530
5%	92.928	2.589

Πίνακας 5.7: Ακρίβεια στο MNIST, Ελαχιστοποίηση Ενότητας 4.3.1.

μας φαίνεται να διατηρεί αρκετή πληροφορία ώστε να είναι ικανή να διακρίνει τις κλάσεις μεταξύ τους. Συνεπώς, η μέση ακρίβεια του μειωμένου δικτύου είναι κοντά σε αυτή του

αρχικού. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι έχει αρκετά μεγάλη διακύμανση στην απόδοση, κάτι που είναι αναμενόμενο λόγω της εγγενούς τυχαιότητας της μεθόδου.

5.2.2 Σύνολο MNIST, Ντετερμινιστική Μέθοδος

Στο επόμενο πείραμα εξετάζουμε την αντίστοιχη εκδοχή του πειράματός μας, όπου αντί της μεθόδου της Ενότητας 4.3.1 για την ανάλυση κάθε κλάσης χωριστά, χρησιμοποιούμε την μέθοδο που παρουσιάζεται στην Ενότητα 4.3.2, η οποία εκτελεί ελαχιστοποίηση μέσω του Αλγορίθμου 8 για την εύρεση ενός καλύτερου τροπικού πολυωνύμου διαιρέτη. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 5.8.

Ποσοστό Νευρώνων	Μέση Ακρίβεια	Τυπική Απόκλιση
100% (Αρχικό)	98.604	0.027
90%	96.604	1.297
75%	96.560	1.245
50%	96.392	1.177
25%	95.154	2.356
10%	93.478	2.572
5%	92.928	2.589

Πίνακας 5.8: Ακρίβεια στο MNIST, Ελαχιστοποίηση Ενότητας 4.3.2.

Παρατηρούμε ότι η μέση ακρίβεια αυτής της μεθόδου είναι, γενικά, υψηλότερη της προηγούμενης. Αυτό πιθανώς οφείλεται στην πιο ακριβή προσέγγιση των πολυτόπων του αρχικού δικτύου, σε σχέση με την προηγούμενη μέθοδο. Επιπλέον, η διακύμανση που εισάγεται στην περίπτωση αυτή είναι μικρότερη, σε σχέση με αυτή που παρουσιάζεται στον Πίνακα 5.7, κάτι που συνάδει με αυτό που αναμέναμε, λόγω της μικρότερης επίδρασης τυχαίων παραγόντων στην εφαρμογή της μεθόδου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η τελευταία γραμμή των Πινάκων 5.7 και 5.8 είναι η ίδια. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για τόσο μικρά ποσοστά του αρχικού πλήθους νευρώνων, φτάνουμε στο προαναφερθέν κάτω όριο της ελαχιστοποίησης που μπορεί να γίνει εξετάζοντας κάθε κλάση έναντι όλων των υπολοίπων. Ως εκ τούτου, στο σημείο αυτό κρατάμε μόνο έναν νευρώνα για κάθε πολύτοπο, ο οποίος είναι ο ίδιος ανεξάρτητα από το ποια από τις μεθόδους αυτές χρησιμοποιούμε για την ελαχιστοποίηση.

5.2.3 Σύνολο F-MNIST, Ντετερμινιστική Μέθοδος

Τέλος, εξετάζουμε την ελαχιστοποίηση ενός δικτύου εκπαιδευμένο στο σύνολο δεδομένων Fashion-MNIST. Στην περίπτωση αυτή, κάνουμε χρήση μόνο της μεθόδου της Ενότητας 4.3.2, καθώς με βάση τα προηγούμενα φαίνεται να έχει καλύτερη απόδοση. Τα αποτελέσματα στο πείραμα αυτό φαίνονται στον Πίνακα 5.9. Παρατηρούμε ότι η πτώση σε ακρίβεια σε αυτήν την περίπτωση είναι μεγαλύτερη σε σχέση με πριν, αν και το τελικό δίκτυο εξακολουθεί να είναι ικανό να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα στο σύνολο δεδομένων αυτό. Η μείωση απόδοσης αυτή πιθανώς να οφείλεται στην ελαφρώς αυξημένη δυσκολία αυτού του προβλήματος, σε σχέση με το πρόβλημα ταξινόμησης πάνω στο MNIST. Παρόλα αυτά, το αποτέλεσμα αυτό δείχνει την ικανότητα της μεθόδου μας να ελαχιστοποιεί ένα δίκτυο, για παρόμοια προβλήματα πολλών κλάσεων.

Ποσοστό Νευρώνων	Μέση Ακρίβεια	Τυπική Απόκλιση
100% (Αρχικό)	88.658	0.538
90%	83.634	2.894
75%	83.556	2.885
50%	83.300	2.799
25%	82.224	2.845
10%	80.430	3.267

Πίνακας 5.9: Ακρίβεια στο Fashion-MNIST, Ελαχιστοποίηση Ενότητας 4.3.2.

5.2.4 Σύγκριση με Μέθοδο Αναφοράς

Τέλος, πραγματοποιούμε σύγκριση των μεθόδων που αναπτύξαμε, με βάση μια προϋπάρχουσα μέθοδο για την μείωση του μεγέθους του δικτύου. Η μέθοδος αναφοράς που χρησιμοποιούμε εδώ είναι αυτή του [27], προσαρμοσμένη για τη σμίχρυνση ενός πλήρως συνδεδεμένου δικτύου, και εφαρμοζόμενη πάλι στο κρυφό επίπεδο του πλήρως συνδεδεμένου τμήματος του δικτύου (ο τρόπος λειτουργίας αυτής περιγράφηκε στην Ενότητα 4.5). Επιπλέον, εξετάζουμε και την απόδοση της προσθήκης που παρουσιάσαμε στην Ενότητα 4.5, για τα ίδια δίκτυα που χρησιμοποιούμε για τις βάσεις δεδομένων MNIST και Fashion-MNIST. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 5.10.

Ποσοστό Νευρώνων	MNIST, 4.5	MNIST, Αναφορά	F-MNIST, 4.5	F-MNIST, Αναφορά
100% (Αρχικό)	98.604 ± 0.027	-	88.658 ± 0.538	-
90%	98.542 ± 0.064	98.594 ± 0.026	87.758 ± 1.145	88.678 ± 0.501
75%	98.542 ± 0.075	98.596 ± 0.035	87.838 ± 1.231	88.664 ± 0.515
50%	98.570 ± 0.085	98.568 ± 0.043	88.436 ± 0.573	88.612 ± 0.486
25%	98.526 ± 0.094	98.518 ± 0.073	88.440 ± 0.606	88.508 ± 0.515
10%	98.370 ± 0.127	98.348 ± 0.090	88.104 ± 0.403	88.136 ± 0.525
5%	98.236 ± 0.237	97.496 ± 0.350	87.706 ± 0.375	87.450 ± 0.482

Πίνακας 5.10: Ακρίβεια/Τυπική Απόκλιση. Σύγκριση μεθόδου Ενότητας 4.5 και μεθόδου αναφοράς [27].

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος αναφοράς υπερτερεί σε απόδοση, συγκριτικά με όσες παρουσιάσαμε στις προηγούμενες ενότητες. Αυτό πιθανότατα οφείλεται στο γεγονός ότι η μέθοδος του [27] χρησιμοποιεί και δεύτερο βήμα βελτιστοποίησης, το οποίο συνδέεται άμεσα με τις εξόδους του δικτύου. Αυτό το επιπλέον βήμα επιτρέπει την καλύτερη προσαρμογή των βαρών του επιπέδου εξόδου, οπότε και γίνεται εκμετάλλευσή τους για βελτίωση του αποτελέσματος.

Ωστόσο, βλέπουμε ότι η εφαρμογή του ίδιου βήματος διόρθωσης στη δική μας μέθοδο μας παρέχει συγκρίσιμα, και σε ορισμένες περιπτώσεις καλύτερα, αποτελέσματα. Αυτό σημαίνει ότι η μέθοδος μας, η οποία εκτελεί προσέγγιση των Newton Πολυτόπων του δικτύου, μας δίνει μια καλή πρώτη εκτίμηση για το μειωμένο δίκτυο, την οποία μετά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για βελτίωση του αποτελέσματος με άλλες τεχνικές. Επιπλέον, με βάση τη συζήτηση που κάναμε στην Ενότητα 4.5, η μέθοδος μας υπερτερεί για την εύρεση αρχικής εκτίμησης ενός μικρού δικτύου, που είναι και ο στόχος μας στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Κεφάλαιο 6

Επίλογος

6.1 Αποτελέσματα και Συνεισφορές

Παρακάτω φαίνονται συνοπτικά τα κύρια αποτελέσματα και οι αντίστοιχες θεωρητικές συνεισφορές της παρούσας εργασίας:

- Όσον αφορά το θεωρητικό υπόβαθρο, εισαγάγαμε ένα μοντέλο προσεγγιστικής διαίρεσης τροπικών πολυωνύμων. Το μοντέλο αυτό, σε συνδυασμό με τον αλγόριθμο που παρουσιάσαμε για την υλοποίηση αυτής της προσεγγιστικής διαίρεσης τροπικών πολυωνύμων, μας επιτρέπει να επεκτείνουμε ιδέες από τη διαίρεση κλασικών πολυωνύμων, σε αυτά που ορίζονται στον τροπικό ημιδακτύλιο. Αυτή η επέκταση αφενός βοηθάει στην κατανόηση της συμπεριφοράς των τροπικών πολυωνύμων, αφετέρου μπορεί να συμβάλλει στην επίλυση προβλημάτων τα οποία μπορούν να εκφραστούν με τη χρήση τροπικών πολυωνύμων.
- Ως ένα τέτοιο πρόβλημα θεωρήσαμε τη μελέτη νευρωνικών δικτύων που χρησιμοποιούν ReLU ενεργοποιήσεις. Η έκφραση των δικτύων αυτών ως τροπικά πολυώνυμα επιτρέπει την περαιτέρω κατανόηση της δομής τους, και μας δίνει τη δυνατότητα να δούμε από μια πιο θεωρητική σκοπιά τη λειτουργία τους. Στο πλαίσιο αυτό, στην παρούσα εργασία αξιοποιήσαμε τα στοιχεία που μας δίνει η δομή των Newton Πολυτόπων των τροπικών πολυωνύμων που αντιστοιχούν στο δίκτυο, για να μελετήσουμε το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης ενός ήδη εκπαιδευμένου δικτύου. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας ιδέες από τη διαδικασία της προσεγγιστικής διαίρεσης τροπικών πολυωνύμων, προσπαθούμε να προσεγγίσουμε όσο το δυνατόν καλύτερα ένα δεδομένο Newton Πολύτοπο, χρησιμοποιώντας λιγότερους κόμβους. Αυτό μεταφράζεται άμεσα στην προσέγγιση ενός δεδομένου νευρωνικού δικτύου, με ένα που στο αντίστοιχο επίπεδο περιλαμβάνει λιγότερους νευρώνες.
- Τέλος, εκτελέσαμε πειράματα με τη χρήση της μεθόδου μας, και παρατηρήσαμε ότι μας δίνει αρκετά μεγάλη ικανότητα διατήρησης της αρχικής πληροφορίας του δικτύου, τόσο στην περίπτωση προβλημάτων δυαδικής ταξινόμησης, όσο και όταν έχουμε πρόβλημα ανίχνευσης πολλών κλάσεων. Επιπλέον, στην περίπτωση της δυαδικής ταξινόμησης, η προσέγγισή μας είναι αρκετά ταχύτερη από την εναλλακτική του να επανεκπαιδευούμε κάθε νέο δίκτυο από το μηδέν, αφού μας δίνει καλά αποτελέσματα για πολλά ποσοστά σμίκρυνσης ταυτόχρονα. Όσον αφορά την ταξινόμηση πολλών κλάσεων, είδαμε ότι οι μέθοδοι μας, προσθέτοντας ένα επιπλέον διορθωτικό βήμα προσέγγισης των εξόδων του δικτύου, μας δίνουν αποτελέσματα εφάμιλλα με σύγχρονες μεθόδους για την ελαχιστοποίηση του δικτύου, στο πρόβλημα που εξετάζουμε.

Σημαντικό είναι να σημειωθεί ότι τα μέρη της εργασίας που αφορούν το Κεφάλαιο 3 και τις Ενότητες 4.3.1 και 5.1 δημοσιεύθηκαν στο συνέδριο ICASSP 2020, το Μάιο του 2020 [45], ενώ όσα αφορούν τις Ενότητες 4.3.2, 4.4 και 5.2 (πλην της τελευταίας υποενότητας), θα παρουσιαστούν στο συνέδριο ICML 2020, τον Ιούλιο του 2020 [44].

6.2 Μελλοντικές Κατευθύνσεις

Προφανώς, η συγκεκριμένη εργασία αποτελεί μια εκτενή αλλά όχι εξαντλητική μελέτη του θέματος. Πιθανές μελλοντικές προεκτάσεις είναι οι παρακάτω:

- Εξαιρετικό θεωρητικό ενδιαφέρον έχει η μελέτη της διαδικασίας της διαίρεσης τροπικών πολυωνύμων, με βάση τη μέθοδο που παρουσιάσαμε. Η αξία της μεθόδου πηγαινει πέρα από το πλαίσιο της μηχανικής μάθησης και πιθανώς να έχει εφαρμογές σε άλλα προβλήματα, τα οποία μπορούν να εκφραστούν με τη χρήση τροπικών πολυωνύμων. Συνεπώς, έχει ενδιαφέρον η περαιτέρω μελέτη της. Μια πιθανή προσέγγιση εδώ είναι η εύρεση κάποιου αποδοτικότερου αλγορίθμου για την υλοποίησή της, ο οποίος να μπορεί να δώσει αποτελέσματα για πιο περίπλοκες επιλογές διαιρετέου και διαιρέτη. Μια άλλη κατεύθυνση είναι η περαιτέρω μελέτη των ιδιοτήτων αυτής της μορφής προσεγγιστικής διαίρεσης, και πώς αυτές σχετίζονται με ήδη υπάρχοντα στοιχεία της τροπικής άλγεβρας, όπως για παράδειγμα τις ρίζες τροπικών πολυωνύμων και τα ιδανικά στον τροπικό ημιδακτύλιο. Αυτή η προσέγγιση έχει έντονο μαθηματικό χαρακτήρα, πέρα από κάποια πιθανή εφαρμογή.
- Μια άλλη προέκταση είναι η εφαρμογή των ιδεών της τροπικής άλγεβρας σε πιο περίπλοκες αρχιτεκτονικές δικτύων, σε σχέση με αυτές που παρουσιάσαμε. Ενδεικτικά, μπορεί να γίνει προσαρμογή τους για την εφαρμογή σε συνελικτικά δίκτυα, τον τροπικό χαρακτήρα των οποίων παρουσιάσαμε παραπάνω. Εφαρμογή μείζονος σημασίας θα ήταν και σε δίκτυα πολλών επιπέδων. Αυτή τη στιγμή, το όριο που τίθεται στην προσέγγιση για προβλήματα ταξινόμησης πολλών κλάσεων που παρουσιάσαμε (τουλάχιστον 2 νευρώνες στο κρυφό επίπεδο ανά νευρώνα εξόδου) θέτει και όριο στην εφαρμογή αυτή. Σε περίπτωση που αφαιρεθεί το όριο αυτό, μπορούμε να εκτελέσουμε την μέθοδο προσέγγισης που έχουμε για ένα επίπεδο διαδοχικά σε όλα τα επίπεδα, οπότε και μειώνουμε το μέγεθος όλου του δικτύου.
- Σημαντική θα ήταν επίσης και η μελέτη της συμπεριφοράς της μεθόδου μας σε διάφορες βάσεις δεδομένων. Οι βάσεις που χρησιμοποιήσαμε, αν και καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα επιλογών και αρκούν για μια εισαγωγική μελέτη, προφανώς δεν είναι εξαντλητικές. Άξιο κομμάτι μελέτης θα αποτελούσε η εφαρμογή σε βάσεις όπως οι CIFAR-10/100 [23], ή ακόμα και στην ImageNet [16] για ένα πιο περίπλοκο πρόβλημα. Η εφαρμογή σε επιπλέον βάσεις δεδομένων θα έδινε περαιτέρω ισχύ στις μεθόδους μας, καθώς και ακόμα καλύτερη εικόνα για την ικανότητά τους να διατηρούν χρήσιμη πληροφορία από το δίκτυο.

Βιβλιογραφία

- [1] F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, and J.-P. Quadrat, *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*. J. Wiley & Sons, 1992, web ed. 2001.
- [2] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge Univ. Press, 2004.
- [3] S. Boyd, S.-J. Kim, L. Vandenberghe, and A. Hassibi, “A tutorial on geometric programming”, *Optimization and Engineering*, vol. 8, pp. 67–127, May 2007.
- [4] B. Buchberger, “Gröbner Bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory”, in *Multidimensional Systems Theory*. 1985, pp. 184–232.
- [5] P. Butkovič, *Max-linear Systems: Theory and Algorithms*. Springer, 2010.
- [6] G. C. Calafiore, S. Gaubert, and C. Possieri, “Log-Sum-Exp Neural Networks and Posynomial Models for Convex and Log-Log-Convex Data”, *IEEE Trans. Neural Networks and Learning Systems*, vol. 30, no. 5, pp. 1–12, May 2019.
- [7] ———, “A Universal Approximation Result for Difference of Log-Sum-Exp Neural Networks”, *IEEE Trans. Neural Networks and Learning Systems*, 2020.
- [8] G. Castellano, A. M. Fanelli, and M. Pelillo, “An Iterative Pruning Algorithm for Feedforward Neural Networks”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 8, no. 3, pp. 519–531, 1997.
- [9] V. Charisopoulos and P. Maragos, “Morphological Perceptrons: Geometry and Training Algorithms”, in *Proc. Int’l Symp. Mathematical Morphology (ISMM)*, ser. LNCS, vol. 10225, Springer, Cham, 2017, pp. 3–15.
- [10] ———, “A Tropical Approach to Neural Networks with Piecewise Linear Activations”, *arXiv preprint arXiv:1805.08749*, 2018.
- [11] B. Chazelle, “An Optimal Convex Hull Algorithm in Any Fixed Dimension”, *Discrete Comput. Geom.*, vol. 10, no. 1, pp. 377–409, Dec. 1993.
- [12] F. Chollet *et al.*, *Keras*, <https://keras.io>, 2015.
- [13] D. A. Cox, J. Little, and D. O’Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, 3/e (Undergraduate Texts in Mathematics)*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007, ch. 2.
- [14] R. A. Crowell, “The Tropical Division Problem and the Minkowski Factorization of Generalized Permutahedra”, *arXiv preprint arXiv:1908.00241*, 2019.
- [15] R. Cuninghame-Green, *Minimax Algebra*. Springer-Verlag, 1979.

- [16] J. Deng, W. Dong, R. Socher, L.-J. Li, K. Li, and L. Fei-Fei, “ImageNet: A large-scale hierarchical image database”, in *Proc. Conf. Computer Vision & Pattern Recognition*, 2009, pp. 248–255.
- [17] W. J. Gilbert and W. K. Nicholson, *Modern Algebra with Applications*. John Wiley & Sons, 2004, vol. 66.
- [18] I. Goodfellow, Y. Bengio, and A. Courville, *Deep Learning*. MIT Press, 2016.
- [19] S. Han, J. Pool, J. Tran, and W. Dally, “Learning both Weights and Connections for Efficient Neural Network”, in *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2015, pp. 1135–1143.
- [20] B. Hassibi and D. G. Stork, “Second order derivatives for network pruning: Optimal Brain Surgeon”, in *Advances in Neural Information Processing Systems*, 1993, pp. 164–171.
- [21] Y. He, X. Zhang, and J. Sun, “Channel Pruning For Accelerating Very Deep Neural Networks”, in *Proc. Int’l Conf. on Computer Vision*, 2017, pp. 1389–1397.
- [22] R. M. Karp, “Reducibility among Combinatorial Problems”, in *Complexity of computer computations*, Springer, 1972, pp. 85–103.
- [23] A. Krizhevsky, G. Hinton, *et al.*, “Learning Multiple Layers of Features from Tiny Images”, 2009.
- [24] N. Lauritzen, *Concrete Abstract Algebra: From Numbers to Gröbner Bases*. USA: Cambridge University Press, 2003.
- [25] Y. Lecun, L. Bottou, Y. Bengio, and P. Haffner, “Gradient-Based Learning Applied to Document Recognition”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 11, pp. 2278–2324, Nov. 1998.
- [26] Y. LeCun, J. S. Denker, and S. A. Solla, “Optimal Brain Damage”, in *Advances in Neural Information Processing Systems*, 1990, pp. 598–605.
- [27] J.-H. Luo, J. Wu, and W. Lin, “ThiNet: A Filter Level Pruning Method for Deep Neural Network Compression”, in *Proc. Int’l Conf. on Computer Vision*, Oct. 2017.
- [28] A. L. Maas, R. E. Daly, P. T. Pham, D. Huang, A. Y. Ng, and C. Potts, “Learning Word Vectors for Sentiment Analysis”, in *Proc. Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies*, Jun. 2011, pp. 142–150.
- [29] D. Maclagan and B. Sturmfels, *Introduction to Tropical Geometry*. Amer. Math. Soc., 2015.
- [30] A. Magnani and S. P. Boyd, “Convex piecewise-linear fitting”, *Optim. Eng.*, vol. 10, pp. 1–17, 2009.
- [31] P. Maragos, “Morphological Signal and Image Processing”, in *Digital Signal Processing Handbook*, CRC Press, 1998.
- [32] ———, “Morphological Filtering for Image Enhancement and Feature Detection”, in *Image and Video Processing Handbook*, 2nd ed., Elsevier Acad. Press, 2005, pp. 135–156.
- [33] ———, “Dynamical Systems on Weighted Lattices: General Theory”, *Math. Control Signals Syst.*, vol. 29, no. 21, 2017.

- [34] P. Maragos and E. Theodosis, “Tropical geometry and piecewise-linear approximation of curves and surfaces on weighted lattices”, *arXiv preprint arXiv:1912.03891*, 2019.
- [35] ———, “Multivariate Tropical Regression and Piecewise-Linear Surface Fitting”, in *Proc. IEEE Int’l. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, IEEE, 2020, pp. 3822–3826.
- [36] V. P. Maslov, “On a new superposition principle for optimization problems”, *Uspekhi Mat. Nauk [Russian Math. Surveys]*, vol. 42, no. 3, pp. 39–48, 1987.
- [37] O. K. Oyedotun, A. E. R. Shabayek, D. Aouada, and B. Ottersten, “Improving the Capacity of Very Deep Networks with Maxout Units”, in *Proc. IEEE Int’l. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, IEEE, Apr. 2018, pp. 2971–2975.
- [38] L. Pachter and B. Sturmfels, “Tropical geometry of statistical models”, *Proc. National Academy of Sciences*, vol. 101, no. 46, pp. 16 132–16 137, 2004.
- [39] J. Pennington, R. Socher, and C. D. Manning, “GloVe: Global Vectors for Word Representation”, in *Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP)*, 2014, pp. 1532–1543.
- [40] G. X. Ritter and T. W. Beaver, “Morphological perceptrons”, in *IJCNN’99. International Joint Conference on Neural Networks. Proceedings (Cat. No. 99CH36339)*, IEEE, vol. 1, 1999, pp. 605–610.
- [41] C. Ronse and H. Heijmans, “The Algebraic Basis of Mathematical Morphology. Part II: Openings and Closings”, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, vol. 54, pp. 74–97, 1991.
- [42] J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Acad. Press, 1982.
- [43] G. Smyrnis and P. Maragos, “Tropical Polynomial Division and Neural Networks”, *arXiv preprint arXiv:1911.12922v1*, 2019.
- [44] ———, “Multiclass Neural Network Minimization via Tropical Newton Polytope Approximation”, in *Proc. Int’l Conf. on Machine Learning*, PMLR, 2020, forthcoming.
- [45] G. Smyrnis, P. Maragos, and G. Retsinas, “Maxpolynomial Division with Application To Neural Network Simplification”, in *Proc. IEEE Int’l. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, IEEE, 2020, pp. 4192–4196.
- [46] D. Speyer and B. Sturmfels, “Tropical Mathematics”, *Mathematics Magazine*, vol. 82, no. 3, pp. 163–173, 2009.
- [47] E. Theodosis and P. Maragos, “Analysis of the Viterbi Algorithm Using Tropical Algebra and Geometry”, in *2018 IEEE 19th International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC)*, IEEE, 2018.
- [48] ———, “Tropical Modeling of Weighted Transducer Algorithms on Graphs”, in *Proc. IEEE Int’l. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, IEEE, 2019, pp. 8653–8657.
- [49] H. Xiao, K. Rasul, and R. Vollgraf, “Fashion-MNIST: a Novel Image Dataset for Benchmarking Machine Learning Algorithms”, *arXiv preprint arXiv:1708.07747*, 2017.

- [50] L. Zhang, G. Naitzat, and L.-H. Lim, “Tropical Geometry of Deep Neural Networks”, in *Proc. Int’l Conf. on Machine Learning*, vol. 80, PMLR, 2018, pp. 5824–5832.
- [51] Y. Zhang, S. Blusseau, S. Velasco-Forero, I. Bloch, and J. Angulo, “Max-Plus Operators Applied to Filter Selection and Model Pruning in Neural Networks”, in *Proc. Int’l Symp. Mathematical Morphology (ISMM)*, ser. LNCS, vol. 11564, Springer Nature, 2019, pp. 310–322.