



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

**Βέλτιστη λειτουργία Φ/Β μονάδων για ρύθμιση τάσης σε
δίκτυα διανομής με χρήση κατανεμημένου αλγορίθμου τύπου
Consensus ADMM**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Νικόλαου Μαρίτσα

Επιβλέπων: Νικόλαος Χατζηαργυρίου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2020



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

**Βέλτιστη λειτουργία Φ/Β μονάδων για ρύθμιση τάσης σε
δίκτυα διανομής με χρήση κατανεμμένου αλγορίθμου τύπου
Consensus ADMM**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Νικόλαου Μαρίτσα

Επιβλέπων: Νικόλαος Χατζηναργυρίου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 22^η Οκτωβρίου.

.....
Νικόλαος Χατζηναργυρίου
Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

.....
Σταύρος Παπαθανασίου
Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

.....
Πάυλος Γεωργιλάκης
Αναπληρωτής Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2020



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF ELECTRICAL AND COMPUTER ENGINEERING
DIVISION OF ELECTRIC POWER
ELECTRIC ENERGY SYSTEMS LABORATORY

**Optimal operation of PV units for voltage regulation in
distribution networks using a distributed Consensus ADMM
based algorithm**

DIPLOMA THESIS

Of

Nikolaos Maritsas

Supervisor: Nikolaos Hatziargyriou
Professor at the Electrical and Computer
Engineering Department of NTUA

Athens, October 2020

.....

Νικόλαος Μαρίτσας

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Νικόλαος Μαρίτσας, 2020.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Όλο και περισσότερες μονάδες διεσπαρμένης ενέργειας (ΜΔΕ) ενσωματώνονται στα σύγχρονα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας, και ιδίως στα δίκτυα διανομής. Τα ηλεκτρικά οχήματα (ΗΟ), οι φωτοβολταϊκές μονάδες (Φ/Β), οι ανεμογεννήτριες (ΑΓ) αυξάνουν την παρουσία τους κάθε μέρα. Ωστόσο, η στοχαστική φύση των εν λόγω μονάδων οδηγεί σε λειτουργικά σενάρια δύσκολα διαχειρίσιμα από τα δίκτυα διανομής.

Επομένως, οι διαχειριστές δικτύων διανομής (ΔΔΔ) καλούνται να βρουν βέλτιστους τρόπους για να ισορροπήσουν ανάμεσα στη χρήση μεγάλων μεριδίων ΜΔΕ και στην ασφαλή λειτουργία του δικτύου διανομής. Μερικά από τα πιο συνηθισμένα προβλήματα που προκύπτουν λόγω της μεγάλης διείσδυσης των ΜΔΕ στα δίκτυα διανομής είναι η συμφόρηση στις γραμμές διανομής καθώς και οι παραβιάσεις τάσεων.

Ταυτόχρονα, η τεχνολογία πληροφορικής και τηλεπικοινωνιών προχωρά και η χρήση της στον τομέα των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας αυξάνεται. Αυτό οδηγεί σε μια κατάσταση όπου τα δίκτυα διανομής γίνονται «πιο έξυπνα» και εμφανίζονται νέες δυνατότητες για μια πιο αποτελεσματική, οικονομική και ασφαλή λειτουργία τους.

Εκμεταλλεύομενοι την προαναφερθείσα πρόοδο, εστιάζουμε στο θέμα των κατανεμημένων αλγορίθμων ως μέσο για τη βέλτιστη λειτουργία των ΜΔΕ, προκειμένου να ρυθμιστεί η τάση σε ακτινικά δίκτυα διανομής. Οι αλγόριθμοι αυτοί απαιτούν κάθε κόμβο του δικτύου να έχει εγκατεστημένο έναν έξυπνο πράκτορα (smart agent) που να μπορεί να διαχειρίζεται διάφορα δεδομένα και να εκτελεί αποτελεσματικά απαιτούμενους υπολογισμούς. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια υποδομή επικοινωνίας που επιτρέπει στους γειτονικούς κόμβους να επικοινωνούν και να ανταλλάσσουν πληροφορίες.

Για το σκοπό αυτό, η παρούσα διπλωματική εργασία κατασκευάζει έναν κατανεμημένο αλγόριθμο, βασισμένο στη μέθοδο General Form Consensus ADMM, ικανό να επιλύσει το πρόβλημα υπερτάσης, στα δίκτυα διανομής, που δημιουργείται από την παραγωγή Φ/Β σε περιόδους χαμηλής ζήτησης. Κάθε κόμβος του δικτύου καλείται να αποφασίσει το δικό του σημείο ρύθμισης για την έγχυση φωτοβολταϊκής ενεργού ισχύος του, επικοινωνώντας μόνο με τους γειτονικούς του κόμβους του, ώστε να αποτρέψει την εμφάνιση παραβιάσεων υπερτάσης στο δίκτυο.

Τέλος, παρουσιάζονται διάφορα σενάρια λαμβάνοντας υπόψη διαφορετικές παραγωγές ενεργού ισχύος φωτοβολταϊκών και διαφορετικά σημεία σύνδεσης των εγκατεστημένων Φ/Β, προκειμένου να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου. Σε κάθε περίπτωση, τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αποτελέσματα ενός ισοδύναμου κεντρικού αλγορίθμου για την επαλήθευση της εγκυρότητάς τους.

Λέξεις Κλειδιά:

Consensus ADMM, General Form Consensus Optimization, κατανεμημένος αλγόριθμος, φωτοβολταϊκές μονάδες (Φ/Β), βέλτιστη ροή ισχύος, παραβιάσεις τάσης, περιορισμός έγχυσης ενεργού ισχύος Φ/Β

Abstract

More and more distributed energy resources (DERs) are integrated into modern power systems, and especially in distribution networks. Electric Vehicles (EVs), Photovoltaic units (PVs), Wind turbines (WTs) are increasing their presence every day. However, their stochastic nature results in operational scenarios that distribution systems were not designed to handle.

Therefore, the distribution system operators (DSOs) are called to find optimal ways to balance the utilization of large shares of DERs and the secure operation of the distribution network within safe limits. Some of the most common problems occurring due to high penetration of DERs in distribution networks are congestion in distribution lines as well as nodal voltage limit violations.

At the same time, Information and Communication Technology is advancing and its utilization in the power systems field is increasing. This leads to a situation where power grids are becoming "smarter" and new possibilities emerge for a more efficient, more economical, and safer operation of distribution networks.

Taking advantage of the aforementioned advancement, we focus on the topic of distributed algorithms, as a mean to optimally operate DERs in order to regulate the voltage profile in radial distribution networks. These algorithms require each node of the distribution grid to have a smart agent installed that is able to manage various data and perform any required calculations effectively. Moreover, we assume there is a communication infrastructure that allows adjacent nodes to communicate and exchange information.

To this end, the present diploma thesis constructs a General Form Consensus ADMM based distributed algorithm able to resolve the over-voltage violations created by high PV production in time periods of low demand in distribution grids. Each node of the network is called to decide its own set-point to its PV active power injection distributively, i.e. by only communicating with its adjacent nodes, in order to prevent over-voltage violations from occurring on the grid.

Finally, various case-studies are presented considering different PV active power productions and different connection points of the installed PVs, in order to evaluate the effectiveness of the algorithm. In each case-study, results are compared with the results of an equivalent centralized algorithm to verify their validity.

Key Words:

Consensus ADMM, General Form Consensus Optimization, distributed algorithm, Photovoltaic units (PVs), Optimal Power Flow (OPF), voltage violations, PVs active power curtailment

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Χατζηαργυρίου, για την ευκαιρία που μου έδωσε, να εκπονήσω τη διπλωματική μου εργασία, σε ένα θέμα τόσο ενδιαφέρον και δημιουργικό.

Επίσης ευχαριστώ ιδιαίτερα τον υποψήφιο διδάκτορα Παναγιώτη Πεδιαδίτη για την εξαιρετική συνεργασία και τη συνεχή καθοδήγηση κατά τη συγγραφή της εργασίας αυτής.

Από καρδιάς θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ τους φίλους και τις φίλες μου για την ουσιαστική συμπαράσταση και συνεργασία, όλα αυτά τα χρόνια. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την στήριξη και την εμπιστοσύνη τους.

Contents

Περίληψη	1
Abstract	3
Ευχαριστίες	5
Contents	7
List of Figures	11
List of Tables	13
Nomenclature	15
Βέλτιστη λειτουργία Φ/Β μονάδων για ρύθμιση τάσης σε δίκτυα διανομής με χρήση κατανεμημένου αλγορίθμου τύπου Consensus ADMM	17
1 Εισαγωγή	17
1.1 Κίνητρο για τη Συγγραφή της Διπλωματικής Εργασίας	17
1.2 Στόχος της Διπλωματικής Εργασίας	18
1.3 Δομή του Ελληνικού Κειμένου της Διπλωματικής Εργασίας	18
2 Βασική Θεωρία σχετικά με την Κυρτή Βελτιστοποίηση και τη Βέλτιστη Ροή Ισχύος	19
2.1 Εισαγωγή στη Βελτιστοποίηση	19
2.1.1 Μαθηματική Βελτιστοποίηση	19
2.1.2 Κυρτή Βελτιστοποίηση	19
2.2 Βελτιστοποίηση σε Σύγχρονα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας	24
2.2.1 Οικονομική Κατανομή Φορτίου	24
2.2.2 Βέλτιστη AC Ροή Ισχύος	25
3 Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM)	29
3.1 Αλγόριθμοι στους οποίους βασίστηκε ο ADMM	29
3.1.1 Μέθοδος Δυϊκής Ανάβασης (Dual ascent)	29
3.1.2 Μέθοδος Δυϊκής Αποσύνθεσης (Dual Decomposition)	31
3.1.3 Επαυξημένη (Augmented) Συνάρτηση Lagrange και Μέθοδος Πολλαπλασιαστών (Method of Multipliers)	32
3.2 Εισαγωγή στη Μέθοδο Alternating Method of Multipliers	33
3.2.1 Alternating Method of Multipliers (ADMM)	33
3.2.2 Κλιμακωτή Μορφή	34
3.3 Consensus ADMM	34
3.3.1 Global Variable Consensus Optimization	35
3.3.2 General Form Consensus Optimization	36

3.4	Βιβλιογραφική Ανασκόπηση για Εφαρμογές ADMM σε Συστήματα Διανομής	39
4	Μαθηματική Διατύπωση	43
4.1	Μοντέλο Ροών Ισχύος	43
4.1.1	Μοντέλο DistFlow	43
4.1.2	Μοντέλο LinDistFlow	44
4.2	Κεντρική Διατύπωση Προβλήματος	45
4.2.1	Το Πρόβλημα Βελτιστοποίησης του Διαχειριστή Δικτύου Διανομής	45
4.2.2	Επιλογή των Συντελεστών Ευαισθησίας (β) και Κόστους (c_0)	47
4.3	Κατανεμημένη Διατύπωση Προβλήματος	48
4.3.1	Αναδιατύπωση του Κεντρικού Προβλήματος με την Εισαγωγή Τοπικών Μετα-βλητών	48
4.3.2	Προτεινόμενος Αλγόριθμος βασισμένος στη μέθοδο του General Form Consensus ADMM	50
4.3.3	Σύνοψη προτεινόμενου αλγορίθμου	55
5	Σύστημα δοκιμών και δεδομένα	56
5.1	Πλατφόρμα προσομοίωσης	56
5.2	Σύστημα δοκιμών	56
5.3	Όρια Τάσης	58
6	Εφαρμογή: Επίλυση Προβλημάτων Υπερτάσης	59
6.1	Αρχικοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου	59
6.2	Συζήτηση για το συντελεστή ποινής ρ	59
6.3	Περίπτωση 1: 2 Φ/B του 1 MW το καθένα στους κόμβους 31 έως 32	60
6.4	Περίπτωση 2: 4 Φ/B των 0.5 MW το καθένα στους κόμβους 29 έως 32	65
6.5	Περίπτωση 3: 8 Φ/B των 0.25 MW το καθένα στους κόμβους 25 έως 32	69
6.5.1	Συντελεστής ποινής $\rho = 500$	69
6.5.2	Συντελεστής ποινής $\rho = 850$	71
6.6	Περίπτωση 4: 16 Φ/B των 0.125 MW το καθένα στους κόμβους 10 έως 17 και 25 έως 32	75
6.6.1	Συντελεστής ποινής $\rho = 500$ και $\rho = 850$	75
6.6.2	Συντελεστής ποινής $\rho = 1800$	78
6.7	Αριθμητικά Αποτελέσματα	81
7	Συμπεράσματα	85
7.1	Ανακεφαλαίωση του Προτεινόμενου Αλγορίθμου	85
7.2	Σχολιασμός Αποτελεσμάτων	85
7.3	Μελλοντικές Επεκτάσεις	86
1	Introduction	87
1.1	Motivation	87
1.2	Objective	87
1.3	Outline	88
2	Basic theory on Convex Optimization and Optimal Power Flow	89
2.1	Introduction to Optimization	89
2.1.1	Mathematical Optimization	89
2.1.2	Convex Optimization	90
2.2	Optimization in Modern Power Systems	94
2.2.1	Economic Dispatch	94
2.2.2	AC Optimal Power Flow	95

3 Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM)	99
3.1 Precursors	99
3.1.1 Dual Ascent	99
3.1.2 Dual Decomposition	101
3.1.3 Augmented Lagrangians and the Method of Multipliers	102
3.2 Introduction to Alternating Method of Multipliers	103
3.2.1 Alternating Method of Multipliers (ADMM)	103
3.2.2 Scaled Form	104
3.3 Consensus ADMM	104
3.3.1 Global Variable Consensus Optimization	104
3.3.2 General Form Consensus Optimization	106
3.4 Literature review on ADMM applications in distribution systems	109
4 Mathematical formulation	113
4.1 Power flow model	113
4.1.1 DistFlow Model	113
4.1.2 LinDistFlow Model	114
4.2 Centralized problem formulation	115
4.2.1 DSO's optimization problem	115
4.2.2 Setting of sensitivity and cost coefficients	116
4.3 Distributed problem formulation	118
4.3.1 Reformulation of the centralized problem introducing local variables	118
4.3.2 Proposed General Form Consensus ADMM based algorithm	120
4.3.3 ADMM Consensus Based Algorithm in summary	125
5 Analytical presentation of the proposed algorithm	127
5.1 Example topology - distribution system	127
5.2 Breakdown of first step	127
5.3 Breakdown of second step	130
5.3.1 Calculation of Active and Reactive Power Flows Global Components (P_{ik}, Q_{ik})	131
5.3.2 Calculation of Voltages (U_k)	133
5.3.3 Second step in summary	135
5.4 Breakdown of third step	136
6 Test system and data	137
6.1 Simulation platform	137
6.2 The test system	137
6.3 Voltage limits	139
7 Case Study: Resolve Over-Voltage Problems	141
7.1 Initialization of the proposed method	141
7.2 Discussion on the penalty coefficient ρ	142
7.3 Case 1: 2 PVs of 1 MW each on Nodes 31 and 32	142
7.4 Case 2: 4 PVs of 0.5 MW each on Nodes 29 to 32	147
7.5 Case 3: 8 PVs of 0.25 MW each on Nodes 25 to 32	151
7.5.1 Penalty coefficient $\rho = 500$	151
7.5.2 Penalty coefficient $\rho = 850$	153
7.6 Case 4: 16 PVs of 0.125 MW each on Nodes 10 to 17 and 25 to 32	157
7.6.1 Penalty coefficients $\rho = 500$ and $\rho = 850$	158
7.6.2 Penalty coefficient $\rho = 1800$	160
7.7 Numerical Results	163

8 Conclusion	167
8.1 Proposed method - A summary	167
8.2 Results discussion	167
8.3 Future Work	168
Bibliography	169
A Network's data about loads and line series impedance	173
A.1 Data for conventional active and reactive loads	174
A.2 Data for distribution lines series impedance	175

List of Figures

2.1	Examples of convex and non-convex sets in R^2 .	90
2.2	Epigraph of a function f , shown shaded. The lower boundary, shown darker, is the graph of f .	91
2.3	Example of a convex function f .	91
2.4	Example of a concave function f .	92
3.1	General form consensus optimization. Local objective terms are on the left; global variable components are on the right. Each edge in the bipartite graph is a consistency constraint, linking a local variable component and a global variable component.	107
4.1	Part of a distribution graph	114
4.2	Marginal System Price per Month (Yellow), National Demand (Orange) and National Production By Cogeneration of High Efficiency Heat & Power and Renewable Energy Sources (Green)	118
5.1	Example distribution network	127
6.1	33 Bus Distribution Network from Baran-Wu [42]	138
7.1	AC Power Flow - Voltages without PV control, Case1	142
7.2	Objective Function, Case1, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$	143
7.3	Objective Function - Zoom after 1000 iterations, Case1, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$	144
7.4	PV Injections, Case1, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$	144
7.5	PV injections progress, Case1, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$	145
7.6	AC Power Flow - Voltages With Distributed PV Control, Case1	146
7.7	AC Power Flow - Voltages without PV control, Case2	147
7.8	Objective Function, Case2, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$	148
7.9	Objective Function - Zoom after 1000 iterations, Case2, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$	148
7.10	PV Injections, Case2, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$	149
7.11	PV injections progress, Case2, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$	149
7.12	AC Power Flow - Voltages With Distributed PV Control, Case2	150
7.13	AC Power Flow - Voltages without PV control, Case3	151
7.14	Objective Function, Case3, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$	152
7.15	Objective Function - Zoom after 2000 iterations, Case3, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$	152
7.16	PV injections progress, Case3, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$	153
7.17	Objective Function, Case3, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$	154
7.18	Objective Function - Zoom after 1000 iterations, Case3, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$	154
7.19	PV Injections, Case3, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$	155
7.20	PV injections progress, Case3, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$	155
7.21	AC Power Flow - Voltages With Distributed PV Control, Case3	156
7.22	AC Power Flow - Voltages without PV control, Case4	157

7.23	Objective Function, Case4, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$	158
7.24	Objective Function - Zoom after 1000 iterations, Case4, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$. . .	158
7.25	Objective Function, Case4, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$	159
7.26	Objective Function - Zoom after 1000 iterations, Case4, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$. . .	159
7.27	Objective Function, Case4, $\rho = 1800$, $\epsilon = 10^{-3}$	160
7.28	Objective Function - Zoom after 1500 iterations, Case4, $\rho = 1800$, $\epsilon = 10^{-3}$. .	160
7.29	PV Injections, Case4, $\rho = 1800$, $\epsilon = 10^{-3}$	161
7.30	PV injections progress, Case4, $\rho = 1800$, $\epsilon = 10^{-3}$	162
7.31	AC Power Flow - Voltages With Distributed PV Control, Case4	163
7.32	Average Error Per Case, Initialization Without PVs	166
7.33	Iterations Per Case, Initialization Without PVs	166

List of Tables

7.1	Numerical Results, Initialization Without PVs, $\epsilon = 10^{-3}$	164
7.2	Numerical Results, Initialization Without PVs, $\epsilon = 10^{-4}$	165
A.1	Data for conventional active and reactive loads	174
A.2	Data for distribution lines series impedance	175

Nomenclature

N_b	Set of network buses
N_p	Set of buses with PV installed
N_ℓ	Set of leaf network buses
E_{pv}	Connection points to bus mapping matrix for PVs
N_k^+	Cardinality of bus k and its children
y_0	Predicted price
β	Price sensitivity coefficient
c_0	Tariff for PV active power production
\hat{p}_k	Global variable for the active power curtailment of PV installed on bus k
P_{ik}	Global variable for the active power flow from bus i to bus k
Q_{ik}	Global variable for the reactive power flow from bus i to bus k
U_k	Global variable for the squared voltage magnitude of bus k
$\hat{p}_{k,L}$	Local variable for the active power curtailment of PV installed on bus k
$P_{ik,L}^-$	Local variable for the active power flow of line (i, k)
$P_{ik,L}^{+(m_i)}$	Local variable for the active power flow of each line (k, m_i)
$Q_{ik,L}^-$	Local variable for the reactive power flow of line (i, k)
$Q_{ik,L}^{+(m_i)}$	Local variable for the reactive power flow of each line (k, m_i)
$U_{ik,L}^-$	Local variable for the squared magnitude of voltage of bus i
$U_{ik,L}^+$	Local variable for the squared magnitude of voltage of bus k
$\lambda_{P_{ik,L}}^-$	Lagrange multiplier of coupling constraint (4.33)
$\lambda_{P_{ik,L}}^{+(m_i)}$	Lagrange multiplier of coupling constraint (4.34)
$\lambda_{Q_{ik,L}}^-$	Lagrange multiplier of coupling constraint (4.35)
$\lambda_{Q_{ik,L}}^{+(m_i)}$	Lagrange multiplier of coupling constraint (4.36)
$\lambda_{U_{ik,L}}^-$	Lagrange multiplier of coupling constraint (4.37)
$\lambda_{U_{ik,L}}^+$	Lagrange multiplier of coupling constraint (4.38)

U^{min}	Lower squared voltage limit on buses
U^{max}	Upper squared voltage limit on buses
\hat{p}_k^{min}	Lower limit for the curtailed power of PV installed on bus k
\hat{p}_k^{max}	Upper limit for the curtailed power of PV installed on bus k
r_{ik}	Series resistance of line (i, k)
x_{ik}	Series inductance of line (i, k)
P_k	Active Power injection on bus k
Q_k	Reactive Power injection on bus k
P_k^c	Conventional active power demand (load) on bus k
Q_k^c	Conventional reactive power demand (load) on bus k
ρ	Penalty coefficient
ϵ	Tolerance for the stopping criterion of the proposed algorithm

Βέλτιστη λειτουργία Φ/Β μονάδων για ρύθμιση τάσης σε δίκτυα διανομής με χρήση κατανεμημένου αλγορίθμου τύπου Consensus ADMM

1 Εισαγωγή

Σε αυτό το Κεφάλαιο, συζητείται το κίνητρο για τη διπλωματική εργασία. Επιπλέον, παρουσιάζεται ο στόχος και το περίγραμμα των διαφόρων κεφαλαίων του ελληνικού κειμένου αυτής της διπλωματικής εργασίας.

1.1 Κίνητρο για τη Συγγραφή της Διπλωματικής Εργασίας

Με την αυξανόμενη διείσδυση των μονάδων διεσπαρμένης ενέργειας (ΜΔΕ), το κεντρικό μοντέλο λειτουργίας, το οποίο είναι πιο διαδεδομένο στα σημερινά συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας, θα μπορούσε ενδεχομένως να ενισχυθεί με κατανεμημένους αλγόριθμους βελτιστοποίησης [32]. Αντί να συλλέγονται όλες οι παράμετροι ενός προβλήματος, όπως οι ροές ισχύος, και να πραγματοποιείται ένας κεντρικός υπολογισμός, οι κατανεμημένοι αλγόριθμοι χρησιμοποιούν έξυπνους πράκτορες, εγκατεστημένους στους κόμβους του εκάστοτε συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας, που διαχειρίζονται συγκεκριμένες παραμέτρους του προβλήματος μέσω επικοινωνίας με ένα περιορισμένο σύνολο γειτονικών κόμβων.

Εμείς, ως νέοι ηλεκτρολόγοι μηχανικοί και μηχανικοί υπολογιστών, είμαστε υποχρεωμένοι να παρακολουθούμε τις τεχνολογικές τάσεις που λαμβάνουν χώρα στον τομέα μας και να εκπαιδευσουμε τους εαυτούς μας, ώστε να είμαστε σε θέση να συμβάλλουμε σε υπερσύγχρονες λύσεις που μπορούν να διασφαλίσουν την υλοποίηση του οράματος για ένα πιο «εύρωστο», ασφαλές και αξιόπιστο μοντέλο συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας με μεγάλα μερίδια ΜΔΕ.

Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει κανείς να επεκτείνει τις γνώσεις του στον τομέα της πληροφορικής και των τηλεπικοινωνιών, δεδομένου ότι τα τελευταία χρόνια η έρευνα συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας δείχνει ότι οι τελευταίες τεχνολογίες λύσεις γεννιούνται συνδυάζοντας τη γνώση του ηλεκτρολόγου μηχανικού για τα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας και τη γνώση του τομέα της πληροφορικής και των τηλεπικοινωνιών.

Οι προαναφερθέντες λόγοι παρακίνησαν την έρευνα και τη σύνταξη αυτής της διπλωματικής εργασίας. Φαίνεται πολύτιμο για τους νέους επαγγελματίες να εξοικειωθούν με έννοιες που όλα δείχνουν να είναι το μέλλον στον τομέα των ΜΔΕ και των Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας.

1.2 Στόχος της Διπλωματικής Εργασίας

Η αυξανόμενη διείσδυση των μονάδων διεσπαρμένης ενέργειας (ΜΔΕ) στα δίκτυα διανομής θέτει ένα πλήθος από προβλήματα και προκλήσεις, όπως το φαινόμενο της ανύψωσης των μέτρων τάσεων των ζυγών, για το οποίο απαιτούνται αξιόπιστες και αποδοτικές μέθοδοι αντιμετώπισης. Ο στόχος αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι να κατασκευάσει έναν κατανεμημένο αλγόριθμο, ικανό να επιλύσει το πρόβλημα υπερτάσης που δημιουργείται από την υψηλή παραγωγή φωτοβολταϊκών μονάδων (Φ/Β) σε περιόδους χαμηλής ζήτησης στα δίκτυα διανομής. Με βάση τη μέθοδο General Form Consensus ADMM, κάθε κόμβος του δικτύου που εξετάζεται επικοινωνεί με τους γειτονικούς του κόμβους, προκειμένου να καταλήξει σε μια από κοινού απόφαση για την οικονομικά βέλτιστη λύση που θα ελαχιστοποιήσει την περικοπή των εγχύσεων ενεργού ισχύος των Φ/Β, διασφαλίζοντας ταυτόχρονα την ασφαλή λειτουργία του δικτύου. Η κατανεμημένη φύση της μεθόδου εξασφαλίζει το απόρρητο των δεδομένων κάθε κόμβου περιορίζοντας την ανταλλαγή πληροφοριών μόνο μεταξύ γειτονικών κόμβων.

1.3 Δομή του Ελληνικού Κεμένου της Διπλωματικής Εργασίας

Αυτή η διπλωματική εργασία οργανώνεται ως εξής. Το Κεφάλαιο 2 θα διεξάγει μια σύντομη συζήτηση στα θέματα της κυρτής βελτιστοποίησης και της βελτιστοποίησης στα σύγχρονα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας. Το Κεφάλαιο 3 θα δώσει ένα αναλυτικό θεωρητικό υπόβαθρο απαραίτητο για να κατανοήσει κανείς την προτεινόμενη μέθοδο, καθώς και μία βιβλιογραφική ανασκόπηση διαφορών εφαρμογών της προτεινόμενης μεθόδου. Το Κεφάλαιο 4 περιγράφει τη μαθηματική φόρμουλα βελτιστοποίησης τόσο του κατανεμημένου αλγόριθμου που βασίζεται στον General Form Consensus ADMM, όσο και ενός ισοδύναμου κεντρικού αλγορίθμου. Στο Κεφάλαιο 5 θα παρουσιαστεί το δίκτυο διανομής που χρησιμοποιείται για τις προσομοιώσεις αυτής της διπλωματικής εργασίας, τα όρια τάσης και άλλα δεδομένα που σχετίζονται με το εξεταζόμενο δίκτυο. Το Κεφάλαιο 6 θα παρουσιάσει τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων που πραγματοποιήθηκαν για να αποδειχθεί η αξία του προτεινόμενου αλγορίθμου. Τέλος, το Κεφάλαιο 7 ολοκληρώνει αυτήν τη διπλωματική εργασία και συζητά τις μελλοντικές εργασίες που θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν.

2 Βασική Θεωρία σχετικά με την Κυρτή Βελτιστοποίηση και τη Βέλτιστη Ροή Ισχύος

Σε αυτό το Κεφάλαιο, θα πραγματοποιηθεί μια σύντομη συζήτηση σχετικά με τα θέματα της κυρτής βελτιστοποίησης και τη βέλτιστης ροής ισχύος. Ουσιαστικά, αυτό παρέχει ένα χρήσιμο εργαλείο για τον αναγνώστη ώστε να κατανοήσει το στόχο αυτής της διπλωματικής εργασίας.

2.1 Εισαγωγή στη Βελτιστοποίηση

2.1.1 Μαθηματική Βελτιστοποίηση

Καταρχάς, ένα πρόβλημα με την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{subject to} \quad & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

αναφέρεται ως πρόβλημα μαθηματικής βελτιστοποίησης ή απλώς πρόβλημα βελτιστοποίησης [1]. Το διάνυσμα: $x = (x_1, \dots, x_n)$ ονομάζεται μεταβλητή βελτιστοποίησης ή μεταβλητή απόφασης του προβλήματος, ενώ η συνάρτηση: $f_0 : R^n \rightarrow R$ είναι η αντικειμενική συνάρτηση. Επιπλέον, οι συναρτήσεις $f_i : R^n \rightarrow R, i = 1, \dots, m$, είναι οι συναρτήσεις (ανισοτικών) περιορισμών. Τέλος, οι σταθερές b_1, \dots, b_m είναι τα όρια των περιορισμών. Συμβολίζουμε x^* το βέλτιστο διάνυσμα, αν $f_0(x^*)$ είναι η μικρότερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μεταξύ όλων των μεταβλητών απόφασης που ικανοποιούν τις συναρτήσεις περιορισμών f_i . Με άλλα λόγια, για οποιαδήποτε λύση z με:

$$f_1(z) \leq b_1, \dots, f_m(z) \leq b_m,$$

ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$f_0(x^*) \leq f_0(z).$$

Ανάλογα με το είδος της αντικειμενικής συνάρτησης και τις συναρτήσεις περιορισμών, ταξινομούμε τα διάφορα προβλήματα βελτιστοποίησης σε κατηγορίες με κοινές ιδιότητες. Μία από τις πιο διαδεδομένες κατηγορίες προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι τα κυρτά προβλήματα βελτιστοποίησης.

Γενικά, τα προβλήματα βελτιστοποίησης είναι δύσκολο να επιλυθούν. Πολλές μέθοδοι επίλυσης περιλαμβάνουν συμβιβασμούς, όπως πολύ μεγάλο υπολογιστικό χρόνο ή ακόμη και έλλειψη ικανότητας να βρεθεί η λύση. Ένα από τα πλεονεκτήματα των προβλημάτων κυρτής βελτιστοποίησης είναι ότι μπορούν να επιλυθούν αποτελεσματικά και αξιόπιστα.

2.1.2 Κυρτή Βελτιστοποίηση

Πριν προχωρήσουμε στη διατύπωση της μαθηματικής φόρμουλας ενός κυρτού προβλήματος βελτιστοποίησης, θα συζητηθούν διάφοροι ορισμοί σχετικοί με την κυρτή ανάλυση.

Ορισμός. Έστω $A \subset R$ είναι ένα σύνολο πραγματικών αριθμών. Αν $M \in R$ είναι ένα άνω όριο του A έτσι ώστε $M \geq M'$ για κάθε άνω όριο M' του A , τότε το M ονομάζεται supremum του A , και συμβολίζεται με $M = \sup A$. Αν $m \in R$ είναι ένα κάτω όριο του A έτσι ώστε $m \leq m'$ για κάθε κάτω όριο m' του A , τότε το m ονομάζεται infimum του A , και συμβολίζεται με $m = \inf A$ [2].

Συνοπτικά, το supremum ενός συνόλου είναι το μικρότερο άνω όριο του συνόλου, ενώ το infimum ενός συνόλου είναι το μεγαλύτερο κάτω όριο του συνόλου.

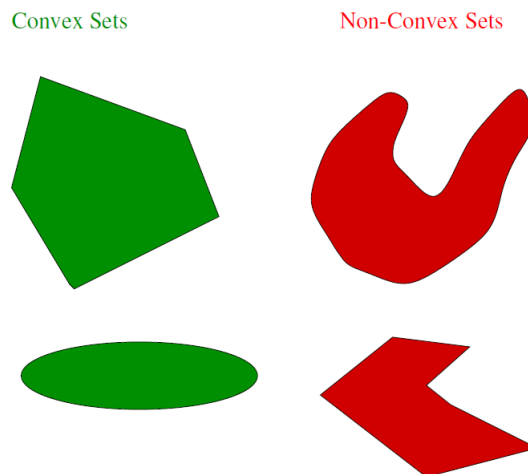
Αν το σύνολο A δεν φράσσεται από άνω, τότε γράφουμε $\sup A = +\infty$, και αν το σύνολο A δεν φράσσεται από κάτω, τότε γράφουμε $\inf A = -\infty$. Αν $A = \emptyset$ είναι ένα άδειο σύνολο,

τότε κάθε πραγματικός αριθμός είναι άνω και ένα κάτω όριο του συνόλου A , και τότε γράφουμε $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$. Λέμε ότι το supremum ή το infimum ενός συνόλου υπάρχει μόνο εάν είναι ένας πεπερασμένος πραγματικός αριθμός.

Ορισμός. Ένα σύνολο X λέγεται κυρτό εάν

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$$

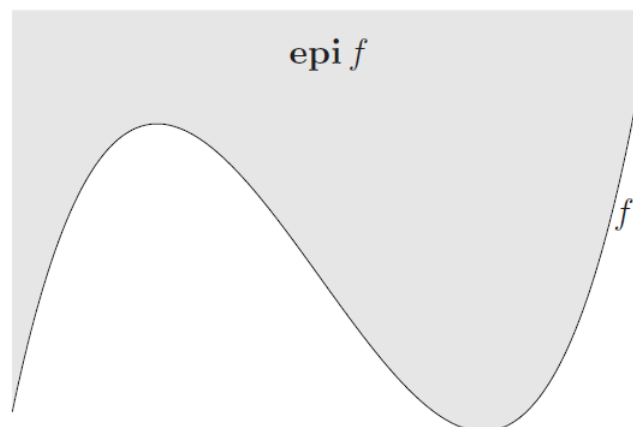
Μια άλλη ερμηνεία αυτού του ορισμού είναι ότι ένα σύνολο είναι κυρτό εάν, για οποιαδήποτε δύο σημεία του συνόλου, όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος που τα ενώνει ανήκουν μέσα στο σύνολο [4].



Σχήμα 2.1: Παραδείγματα κυρτών και μη κυρτών συνόλων στο χώρο R^2 .

Ορισμός. Η επιγραφή μιας συνάρτησης $f : R^n \rightarrow R$ είναι ένα σύνολο σημείων που βρίσκονται πάνω στη γραφική παράστασή της ή που βρίσκονται πάνω από τη γραφική παράστασή της [1]

$$\text{epi } f = \{(x, t) \mid x \in \text{dom}_f \text{ (domain of function } f), f(x) \leq t\}$$



Σχήμα 2.2: Η επιγραφή μιας συνάρτησης f , φαίνεται σκιασμένη. Το κάτω όριο, που φαίνεται πιο σκούρο, είναι η γραφική παράσταση της f .

Ορισμός. Μια συνάρτηση $f : R^n \rightarrow R$ ονομάζεται κυρτή, εάν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα κυρτό σύνολο και

$$\forall x_1, x_2 \in \text{dom}_f, \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Αυτός ο ορισμός μπορεί να ερμηνευθεί με πολλούς τρόπους. Ένας θα ήταν να σκεφτούμε ότι όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει δύο σημεία $f(x_1)$ και $f(x_2)$ βρίσκονται εξ' ολοκλήρου πάνω από το γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. Ένας άλλος τρόπος να ερμηνεύσουμε τον ορισμό θα ήταν να σκεφτούμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή εάν και μόνο εάν η επιγραφή της αποτελεί κυρτό σύνολο [3].

Μια συνάρτηση ονομάζεται αυστηρώς κυρτή αν αλλάξουμε ελαφρώς τον προαναφερθέντα ορισμό, έτσι ώστε:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$



Σχήμα 2.3: Παράδειγμα μιας κυρτής συνάρτησης f .

Ορισμός. Μια συνάρτηση $f : R^n \rightarrow R$ ονομάζεται κοίλη, εάν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα κυρτό σύνολο και

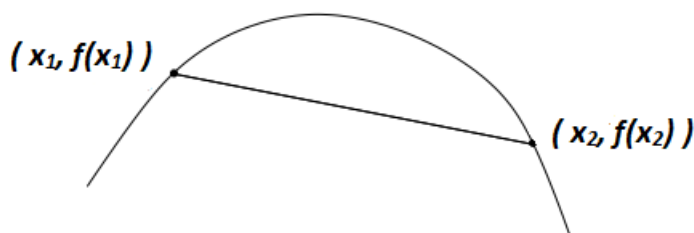
$$\forall x_1, x_2 \in \text{dom}_f, \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει δύο σημεία $f(x_1)$ and $f(x_2)$ βρίσκονται εξ' ολοκλήρου κάτω από το γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

Μια συνάρτηση ονομάζεται αυστηρώς κοίλη αν αλλάξουμε ελαφρώς τον προαναφερθέντα ορισμό, έτσι ώστε:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$



Σχήμα 2.4: Παράδειγμα μιας κοίλης συνάρτησης f .

Ορισμός. Μια συνάρτηση $f : R^n \rightarrow R$ ονομάζεται γραμμική, εάν έχει την ακόλουθη μορφή:

$$f(x) = A^T x + b.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι μια γραμμική συνάρτηση είναι κυρτή και κοίλη ταυτόχρονα [3].

Ένα κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης έχει την ακόλουθη μορφή [1]:

$$\min f_0(x) \tag{2.1}$$

$$\text{subject to : } f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{2.2}$$

$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p. \tag{2.3}$$

Οι ανισότητες (2.2) ονομάζονται **ανισοτικοί περιορισμοί** και οι ισότητες (2.3) ονομάζονται **ισοτικοί περιορισμοί**. Αν $m = p = 0$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν περιορισμοί, τότε λέμε ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης δεν έχει περιορισμούς. Σε αυτό το πρόβλημα, προσπαθούμε να βρούμε μια μεταβλητή βελτιστοποίησης (ή αλλιώς μεταβλητή απόφασης) $x \in R^n$ που να ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση (ή αλλιώς συνάρτηση κόστους) $f_0(x)$, μεταξύ όλων των πιθανών x που ικανοποιούν τους ανισοτικούς περιορισμούς $f_i : R^n \rightarrow R$ και τους ισοτικούς περιορισμούς $h_i : R^n \rightarrow R$.

Ωστόσο, η τυπική μορφή ενός κυρτού προβλήματος βελτιστοποίησης ακολουθείται από ορισμένες συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για να είναι πράγματι κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης.

- η αντικειμενική συνάρτηση πρέπει να είναι **κυρτή**,
- οι συναρτήσεις ανισοτικών περιορισμών πρέπει να είναι **κοίλες**,
- οι συναρτήσεις ισοτικών περιορισμών πρέπει να είναι **γραμμικές**.

Το σύνολο σημείων για τα οποία ορίζεται η αντικειμενική συνάρτηση και όλες οι συναρτήσεις περιορισμών ονομάζεται πεδίο ορισμού του προβλήματος βελτιστοποίησης και το δηλώνουμε με:

$$D = \bigcap_{i=0}^m \text{dom}_{f_i} \cap \bigcap_{i=1}^p \text{dom}_{h_i}.$$

Τα πεδία ορισμού της κυρτής αντικειμενικής συνάρτησης και των κυρτών ανισοτικών περιορισμών είναι κυρτά σύνολα σύμφωνα με τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης. Επίσης, τα πεδία ορισμού των γραμμικών ισοτικών περιορισμών (που είναι και κυρτές και κοίλες συναρτήσεις ταυτόχρονα) είναι κυρτά σύνολα. Είναι γνωστό ότι η τομή ενός πεπερασμένου αριθμού κυρτών συνόλων είναι ένα κυρτό σύνολο. Συμπερασματικά, το πεδίο ορισμού ενός κυρτού προβλήματος βελτιστοποίησης είναι ένα κυρτό σύνολο. Ως εκ τούτου, ελαχιστοποιούμε μια κυρτή αντικειμενική συνάρτηση ως προς ένα κυρτό σύνολο.

Ένα σημείο $x \in D$ καλείται **εφικτό σημείο (feasible point)**, εάν ικανοποιεί τόσο τους περιορισμούς ανισότητας και όσο και τους περιορισμούς ισότητας του προβλήματος βελτιστοποίησης [1], [3].

Το κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης που περιγράφεται από τις σχέσεις (2.1) - (2.3) ονομάζεται εφικτό (feasible) εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα εφικτό σημείο. Διαφορετικά, ονομάζεται ανέφικτο (infeasible). Το σύνολο όλων των εφικτών σημείων ονομάζεται **εφικτό σύνολο (feasible set)** ή το σύνολο περιορισμών.

Υποδηλώνουμε τη **βέλτιστη τιμή (optimal value) p^*** του υπό εξέταση κυρτού προβλήματος βελτιστοποίησης ως [1], [3]:

$$p^* = \inf\{f_0(x) \mid f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p\}.$$

Υπάρχουν περιπτώσεις που η βέλτιστη τιμή μπορεί να είναι $\pm\infty$. Εάν το πρόβλημα είναι ανέφικτο, σύμφωνα με τη συνήθη σύμβαση ότι το infimum ενός κενού συνόλου είναι $+\infty$, έχουμε ότι $p^* = +\infty$. Εάν υπάρχουν εφικτά σημεία x_k έτσι ώστε $p^* = -\infty$, τότε λέμε ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης δεν φράσσεται από κάτω.

Ένα σημείο x^* θεωρείται ένα **βέλτιστο σημείο (optimal point)**, που σημαίνει ότι επιλύει το πρόβλημα βελτιστοποίησης, εάν ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$f_0(x^*) = p^*.$$

Το σύνολο όλων των βέλτιστων σημείων που επιλύουν το πρόβλημα βελτιστοποίησης ονομάζεται **βέλτιστο σύνολο (optimal set)** και συμβολίζεται ως:

$$X_{opt} = \{x \mid f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad f_0(x^*) = p^*\}.$$

Εάν το βέλτιστο σύνολο δεν είναι κενό, τότε λέμε ότι το βέλτιστο σημείο επιτυγχάνεται και λέμε ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι επιλύσιμο.

Λέμε ότι ένα εφικτό σημείο x είναι **τοπικά βέλτιστο (locally optimal)** [1], αν υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε:

$$f_0(x) = \inf\{f_0(z) \mid f_i(z) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad h_i(z) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad \|z - x\|_2 \leq \epsilon\}.$$

Αυτή η εξίσωση σημαίνει ότι το x ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση $f_0(x)$ ως προς τα κοντινά σημεία z σε απόσταση ϵ από το x εντός του εφικτού συνόλου. Αντίθετα, ένα εφικτό σημείο x είναι **καθολικά βέλτιστο (globally optimal)**, εάν ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση $f_0(x)$ σε ολόκληρο το εφικτό σύνολο. Με άλλα λόγια, χρησιμοποιούμε τους όρους καθολικό βέλτιστο και βέλτιστο εναλλάξιμα, εννοώντας το ίδιο πράγμα.

Μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες των κυρτών προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι ότι οποιοδήποτε τοπικά βέλτιστο σημείο είναι επίσης καθολικά βέλτιστο [1]. Στη συνέχεια ακολουθεί η απόδειξη για αυτόν τον ισχυρισμό. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα εφικτό σημείο x που είναι τοπικά βέλτιστο. Έστω $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε:

$$z : \text{feasible point}, \quad \|z - x\|_2 \leq \epsilon \Rightarrow f_0(x) \leq f_0(z) \quad (2.4)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το x δεν είναι καθολικά βέλτιστο. Με άλλα λόγια, υπάρχει ένα εφικτό σημείο y , τέτοιο ώστε $f_0(y) < f_0(x)$. Προφανώς, $\|y - x\|_2 > \epsilon$ διότι διαφορετικά, θα ήταν $f_0(x) \leq f_0(y)$. Εξετάζουμε το σημείο z που δίνεται από τη σχέση:

$$z = (1 - \lambda)x + \lambda y, \quad \lambda = \frac{\epsilon}{2\|y - x\|_2} \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Τα σημεία (x, y) ανήκουν στο εφικτό σύνολο, το οποίο έχει αποδειχθεί ότι είναι κυρτό σύνολο πιο πάνω. Το σημείο z είναι ο κυρτός συνδυασμός των δύο σημείων (x, y) ενός κυρτού συνόλου. Έτσι, το σημείο z ανήκει επίσης στο εφικτό σύνολο από τον ορισμό του κυρτού συνόλου.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τον όρο $\|z - x\|_2$

$$\begin{aligned} \|z - x\|_2 &= \|(1 - \lambda)x + \lambda y - x\|_2 = \|\lambda y - \lambda x\|_2 = \\ &= \lambda\|y - x\|_2 = \frac{\epsilon}{2\|y - x\|_2} \cdot \|y - x\|_2 = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

Συμπερασματικά, το σημείο z ικανοποιεί την σχέση (2.4). Ως εκ τούτου, αναμένουμε $f_0(x) \leq f_0(z)$. Ωστόσο, δεδομένου ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι κυρτή και το εφικτό

σημείο x δεν είναι βέλτιστο καθολικά, δηλαδή $f_0(y) < f_0(x) \Rightarrow f_0(x) - f_0(y) > 0$, συνειδητοποιούμε ότι:

$$\begin{aligned} f_0(z) &\leq (1 - \lambda)f_0(x) + \lambda f_0(y) && \Rightarrow \\ f_0(z) &\leq f_0(x) - \lambda f_0(x) + \lambda f_0(y) && \Rightarrow \\ f_0(z) &\leq f_0(x) - \lambda(f_0(x) - f_0(y)) && \Rightarrow \\ f_0(z) &< f_0(x) \end{aligned}$$

Επομένως, η αρχική μας υπόθεση είναι λανθασμένη και μπορούμε να συμπεράνουμε με ασφάλεια ότι το σημείο x είναι καθολικά βέλτιστο.

2.2 Βελτιστοποίηση σε Σύγχρονα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας

2.2.1 Οικονομική Κατανομή Φορτίου

Ενδεχομένως, το πιο σημαντικό καθήκον ενός διαχειριστή συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας είναι να παρέχει ηλεκτρική ενέργεια σε όλα τα φορτία του συστήματος με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Για να γίνει αποτελεσματικά αυτό, πρέπει να ξέρει πόση είναι η ζήτηση ηλεκτρικής ενέργειας για τα φορτία, ποιες γεννήτριες είναι διαθέσιμες, πόση ενέργεια μπορούν να παράγουν και με ποιο κόστος [5].

Η Οικονομική Κατανομή Φορτίου (ΟΚΦ) είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που στοχεύει στον προσδιορισμό της λειτουργίας των διαθέσιμων γεννητριών με το χαμηλότερο κόστος, δεδομένης της συνολικής ζήτησης ηλεκτρικής ενέργειας και των ελάχιστων και μέγιστων ορίων λειτουργίας κάθε γεννήτριας. Ορισμένοι αλγόριθμοι ΟΚΦ ενδέχεται να περιλαμβάνουν περιορισμούς δικτύου (π.χ. περιορισμούς συμφόρησης γραμμής) και άλλοι όχι, μερικοί αλγόριθμοι ΟΚΦ ενδέχεται να θεωρούν περιορισμούς ράμπας των γεννητριών (δηλαδή πρέπει να οριστεί ένας μέγιστος ρυθμός αλλαγής παραγόμενης ισχύος λόγω της αδυναμίας της γεννήτριας να αλλάξει επίπεδο παραγωγής ενέργειας στιγμιαία) και άλλοι όχι κοκ.

Εδώ, παρουσιάζουμε τον απλούστερο αλγόριθμο για τη λύση της ΟΚΦ, ο οποίος έχει το ακόλουθο μοντέλο μαθηματικής βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N f_i(P_i) && (2.5) \\ \text{subject to :} \quad & \sum_{i=1}^N P_i = P_d \\ & P_{i,\min} \leq P_i \leq P_{i,\max}, \end{aligned}$$

Όπου $f_i(P_i)$ είναι μια κατά προσέγγιση γραμμική ή τετραγωνική συνάρτηση κόστους αντίστοιχα [8] της ενεργού ισχύος P_i που παράγεται από καθεμία από τις υποτιθέμενες γεννήτριες N , οι οποίες χρησιμοποιούνται για την κάλυψη της συνολικής ζήτησης ενεργού ισχύος P_d . Τέλος, τα $P_{i,\min}, P_{i,\max}$ είναι τα όρια που ορίζονται στην ικανότητα παραγωγής ενεργού ισχύος από κάθε γεννήτρια.

Αυτή η διατύπωση του προβλήματος ΟΚΦ προϋποθέτει ένα δίκτυο «χαλκού» (copper-plate network). Με αυτό εννοούμε ότι το δίκτυο έχει απεριόριστη δυνατότητα μετάδοσης ενέργειας, η οποία μας επιτρέπει να παραμελήσουμε τους περιορισμούς ορίων γραμμής, τους περιορισμούς ροής ισχύος και τις απώλειες γραμμών. Επομένως, ένα δίκτυο «χαλκού» προϋποθέτει μια χωρίς απώλειες και χωρίς περιορισμούς ροή ηλεκτρικής ενέργειας από το σημείο A έως το σημείο B [5].

Παρόλο που η οικονομική κατανομή φορτίου είναι μια εύκολη και υπολογιστικά γρήγορη προσέγγιση για τον καθορισμό της παραγωγής ενέργειας που απαιτείται για τη

λειτουργία ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας, είναι σχετικά ανακριβής λόγω της μη συνεκτίμησης των περιορισμών του δικτύου.

Παραδοσιακά, το σύστημα μεταφοράς και διανομής ηλεκτρικής ενέργειας σχεδιάστηκε έτσι ώστε όταν λυθεί το πρόβλημα ΟΚΦ να μην υπάρχουν παραβιάσεις στα λειτουργικά όρια του συστήματος. Ως εκ τούτου, η απλή επίλυση της ΟΚΦ ήταν συνήθως αρκετή. Ωστόσο, με την παγκόσμια τάση απορρύθμισης των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας, το σύστημα μεταφοράς γίνεται όλο και πιο περιορισμένο [6].

Μία λύση στο πρόβλημα βελτιστοποίησης της παραγωγής διασφαλίζοντας τα όρια λειτουργίας των γραμμών μεταφοράς είναι ο συνδυασμός του προβλήματος οικονομικής κατανομής φορτίου με το πρόβλημα της πλήρους AC ροής ισχύος. Το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως βέλτιστη AC ροή ισχύος (ACOPF). Τα βέλτιστα μοντέλα ροής ισχύος AC είναι μια πολύ πιο ρεαλιστική απεικόνιση του τρόπου λειτουργίας ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας. Περισσότερες λεπτομέρειες θα δοθούν στην ακόλουθη ενότητα.

2.2.2 Βέλτιστη AC Ροή Ισχύος

Η βέλτιστη AC ροή ισχύος (ACOPF) είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που θεωρεί τις εξισώσεις AC ροής ισχύος. Υποθέτοντας ότι οι παράμετροι του μοντέλου είναι σωστές, αυτή είναι η πιο ακριβής αναπαράσταση των ροών ισχύος σε ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία ρύθμισης (set-points) της παραγωγής που καθορίζονται από το εν λόγω πρόβλημα βελτιστοποίησης αντιστοιχούν όσο το δυνατόν πιο κοντά στην πραγματικότητα [5], [9].

Όσον αφορά τη φόρμουλα της μαθηματικής βελτιστοποίησης του προβλήματος ACOPF, θα μπορούσαμε να υποδηλώσουμε μια γενική διατύπωση ως εξής:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{Αντικειμενική Συνάρτηση} & (2.6) \\ \text{subject to :} \quad & \text{Εξισώσεις AC ροής Ισχύος} \\ & \text{Περιορισμοί Δικτύου} \\ & \text{Λειτουργικοί Περιορισμοί} \end{aligned}$$

2.2.2.1 Πιθανές Αντικειμενικές Συναρτήσεις της ACOPF

Τα προβλήματα βέλτιστης AC ροής ισχύος αντιμετωπίζουν μια ποικιλία φαινομένων που λαμβάνουν χώρα σε ένα σύγχρονο σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας. Εδώ παραθέτουμε τρία από αυτά, μεταξύ πολλών παραδειγμάτων [5].

Ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής. Ένας από τους πιο κοινούς στόχους ενός προβλήματος ACOPF είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής της απαραίτητης ηλεκτρικής ενέργειας. Αυτού του είδους η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για την εκκαθάριση των αγορών ηλεκτρικής ενέργειας, αλλά και σε καθετοποιημένες επιχειρήσεις κοινής ωφέλειας (vertically integrated utilities) που θέλουν να μειώσουν το κόστος λειτουργίας τους. [7].

Ελαχιστοποίηση ενεργών και άεργων απωλειών ισχύος. Η ελαχιστοποίηση των ενεργών και άεργων απωλειών ισχύος είναι πιθανώς μια από τις πιο σημαντικές καθημερινές λειτουργίες ενός διαχειριστή συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας.

Διατήρηση σταθερού προφίλ τάσης. Μερικές φορές οι διαχειριστές συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας μπορεί να θέλουν να διατηρήσουν ένα προφίλ σταθερής τάσης σε όλους ή σε μέρος των κόμβων του συστήματος. Αυτό, για παράδειγμα, μπορεί να βοηθήσει στην αποφυγή προβλημάτων αστάθειας τάσης. Η βελτιστοποίηση σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να τους βοηθήσει να εντοπίσουν ποιο είναι το προτιμώμενο σύνολο ενεργειών, που συνήθως σχετίζονται με την έγχυση ή την απορρόφηση της άεργης ισχύος, για να επιτευχθεί το επιθυμητό προφίλ. Η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να έχει για

παράδειγμα την ακόλουθη μορφή (μεταξύ πολλών δυνατοτήτων):

$$\min \sum_i (V_i - V_{setpoint,i})^2$$

όπου V_i είναι η τάση κάθε κόμβου i ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας και $V_{setpoint,i}$ είναι μια επιθυμητή τάση κάθε κόμβου i , που ο διαχειριστής του συστήματος θέλει να διατηρήσει. Η τετραγωνική αντικειμενική συνάρτηση σε αυτήν την περίπτωση μας βοηθά να ελαχιστοποιήσουμε τόσο τις θετικές όσο και τις αρνητικές αποκλίσεις της τάσης από το επιθυμητό σημείο ρύθμισης.

2.2.2.2 Εξισώσεις AC Ροής Ισχύος

Δεν θα αναφερθούμε σε πολλές λεπτομέρειες σχετικά με τις εξισώσεις AC ροής ισχύος, καθώς περιμένουμε από τον αναγνώστη να έχει βασικές γνώσεις σχετικά με τον νόμο Kirchhoff και τις απαραίτητες εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τη λειτουργία ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας [6]. Θα παρουσιάσουμε εκτενώς τις εξισώσεις του μοντέλου μας στο Κεφάλαιο 4.

2.2.2.3 Περιορισμοί Δικτύου (ΠΔ) και Λειτουργικοί Περιορισμοί (ΛΠ)

Ακόμα κι αν μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο μεταβλητών που ικανοποιούν τις εξισώσεις AC ροής ισχύος και επιτυγχάνουν τον στόχο της αντικειμενικής συνάρτησης, πολλές από αυτές τις δυνατές καταστάσεις δεν έχουν νόημα λειτουργικά στο δίκτυο ή δεν είναι λειτουργικά εφικτές. Έτσι, για να μοντελοποιηθεί η συμπεριφορά του συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας πιο ρεαλιστικά, πρέπει να διατυπωθούν πρόσθετοι περιορισμοί.

Ανάλογα με την εφαρμογή και τους στόχους της, πολλοί περιορισμοί δικτύου και λειτουργικοί περιορισμοί μπορούν να συμπεριληφθούν στο πρόβλημα βελτιστοποίησης [10]. Εδώ παραθέτουμε τέσσερις από αυτούς τους περιορισμούς, τους οποίους συναντήσαμε πιο συχνά στη σχετική βιβλιογραφία.

Κάτω και άνω όριο ενεργού και αέργου ισχύος της γεννήτριας (ΛΠ). Η ενεργός ισχύς μιας γεννήτριας ορίζεται ως το πραγματικό μέρος της φαινόμενης ισχύος που παράγεται από μια γεννήτρια, ενώ η άερπη ισχύς μιας γεννήτριας ορίζεται ως το φανταστικό μέρος της φαινόμενης ισχύος που παράγεται από μια γεννήτρια. Αυτές οι ποσότητες είναι φυσικά περιορισμένες σε κάθε γεννήτρια.

$$\begin{aligned} P_{Gen}^{min} &\leq P_{Gen} \leq P_{Gen}^{max} & \forall Gen \in \{Set\ of\ Network's\ Generators\} \\ Q_{Gen}^{min} &\leq Q_{Gen} \leq Q_{Gen}^{max} & \forall Gen \in \{Set\ of\ Network's\ Generators\} \quad \text{οπου} \end{aligned}$$

- P_{Gen}^{min} είναι το χαμηλότερο όριο για την παραγωγή ενεργού ισχύος κάθε γεννήτριας του δικτύου.
- P_{Gen}^{max} είναι το ανώτερο όριο για την παραγωγή ενεργού ισχύος κάθε γεννήτριας του δικτύου.
- Q_{Gen}^{min} είναι το χαμηλότερο όριο για την παραγωγή άεργου ισχύος κάθε γεννήτριας του δικτύου.
- Q_{Gen}^{max} είναι το ανώτερο όριο για την παραγωγή άεργου ισχύος κάθε γεννήτριας του δικτύου.

Συχνά, το κατώτερο όριο της ενεργού ισχύος είναι μηδέν. Επιπλέον, σε ορισμένες περιπτώσεις και τα δύο όρια της άεργου ισχύος δεν καθορίζονται άμεσα αλλά έμμεσα ως συναρτήσεις της ενεργού ισχύος της γεννήτριας

Κατώτερα και ανώτερα όρια μέτρου τάσης σε κάθε κόμβο (ΠΔ). Για να διατηρήσουμε την ασφαλή λειτουργία του συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας, συνήθως δεσμεύουμε το μέτρο της τάσης κάθε κόμβου σε ένα μικρό εύρος αποδεκτών ορίων. Στη συντριπτική πλειονότητα των περιπτώσεων, επιτρέπουμε μια μέγιστη απόκλιση τάσης της τάξης του 10% ή λιγότερο σύμφωνα με το Ευρωπαϊκό Πρότυπο EN 50160 [11]. Αυτό σημαίνει ότι τα όρια τάσης είναι συνήθως $V_{min} = 0.9$ p.u. και $V_{max} = 1.1$ p.u. Ωστόσο, συχνά μπορούμε να επιβάλουμε ακόμη αυστηρότερα όρια, π.χ. $V_{min} = 0.95$ p.u. και $V_{max} = 1.05$ p.u. ανάλογα με το σύστημα που μελετάμε και την εφαρμογή [5].

Αυτά τα όρια δίδονται συχνά από πολύ αυστηρά πρότυπα. Πολύ υψηλές ή πολύ χαμηλές τάσεις θα μπορούσαν να προκαλέσουν προβλήματα στις συσκευές του καταναλωτή που συνδέονται στο δίκτυο ή αστάθεια στο σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας. Αυτό θα μπορούσε να οδηγήσει σε μια ανεπιθύμητη και οικονομικά ακριβή μη διαθεσιμότητα ηλεκτρικής ενέργειας για τους καταναλωτές. Επομένως, είναι ζωτικής σημασίας να συμπεριληφθεί ο ακόλουθος περιορισμός στην ACOPF.

$$V_{Node}^{min} \leq |V_{Node}| \leq V_{Node}^{max} \quad \forall Node \in \{Set\ of\ Network's\ Nodes\}$$

όπου V_{Node}^{min} είναι το χαμηλότερο επιτρεπτό όριο για το μέτρο της τάσης κάθε κόμβου, ενώ V_{Node}^{max} είναι το υψηλότερο επιτρεπτό όριο για το μέτρο της τάσης κάθε κόμβου.

Μέγεθος ρεύματος κλάδου - μέγιστο όριο (ΠΔ). Οι τιμές μέγιστου ρεύματος για τους κλάδους μεταφοράς, π.χ. γραμμές και μετασχηματιστές, πρέπει να οριστούν λόγω περιορισμών του υλικού των κλάδων. Τα μεγάλα ρεύματα ενδέχεται να καταστρέψουν τις γραμμές μεταφοράς.

$$|I_{Line}| \leq I_{Line}^{max} \quad \forall Line \in \{Set\ of\ Network's\ Lines\}$$

όπου I_{Line}^{max} είναι το άνω όριο του μεγέθους ρεύματος κλάδου.

MVA-ισχύς κλάδου - μέγιστο όριο (ΠΔ). Για τους ίδιους λόγους με αυτούς για το όριο μέγιστου μεγέθους ρεύματος κλάδου, πρέπει να εφαρμόζονται μέγιστες τιμές μεγέθους φαινόμενης ισχύος για τους κλάδους μεταφοράς.

$$|S_{Line}| \leq S_{Line}^{max} \quad \forall Line \in \{Set\ of\ Network's\ Lines\}$$

όπου S_{Line}^{max} είναι το άνω όριο του μεγέθους της MVA-ισχύος κλάδου.

2.2.2.4 Η Ανάγκη Βελτίωσης των Τεχνικών Επίλυσης του Προβλήματος Βελτιστοποίησης ACOPF

Συμπερασματικά, η ACOPF είναι ένα καλά δομημένο πρόβλημα και έχει αναπτυχθεί κατά τη διάρκεια 50 χρόνων έρευνας. Ωστόσο, οι εξισώσεις AC ροής ισχύος είναι τετραγωνικές εξισώσεις (δεδομένου ότι η ισχύς εξαρτάται από το τετράγωνο της τάσης) και εάν τις συμπεριλάβουμε σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης ως περιορισμούς ισότητας, αυτές οδηγούν σε ένα μη γραμμικό, μη κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Τα μη γραμμικά, μη κυρτά προβλήματα είναι γενικά πολύ πιο δύσκολο να επιλυθούν και δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι ο επιλυτής (solver) μπορεί να βρει το καθολικό ελάχιστο (global minimum) [5].

Οι ακαδημαϊκοί ερευνητές και η βιομηχανία έχουν αναπτύξει διάφορες προσεγγίσεις για την επίλυση του προβλήματος ACOPF, με διαφορετικές διατυπώσεις, αλγόριθμους και υποθέσεις. Μια προσέγγιση είναι η γραμμικοποίηση του προβλήματος ACOPF και η αποσύνθεσή του σε υποπροβλήματα. Η ACOPF δεν είναι υποθετικό πρόβλημα. Αντιθέτως, επιλύεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα (π.χ. 15 λεπτά) μέσω προσεγγίσεων και αποφάσεων. Μετά από 50 χρόνια, δεν υπάρχει ακόμη μία εμπορικά βιώσιμη πλήρης ACOPF μέθοδος επίλυσης [12].

Η Ομοσπονδιακή Ρυθμιστική Επιτροπή Ενέργειας των ΗΠΑ (FERC) [12] δηλώνει ότι ο απώτερος στόχος για ένα λογισμικό αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας θα πρέπει να είναι

για βέλτιστη AC ροή ισχύος που να εγγυάται την ασφαλή λειτουργία του δικτύου και να διαχειρίζεται/δεσμεύει κατάλληλα τις διαθέσιμες μονάδες παραγωγής [7].

Η FERC επιπροσθέτως επισημαίνει ότι μια αποδοτική τεχνική επίλυσης της ACOPF θα μπορούσε δυνητικά να εξοικονομήσει δεκάδες δισεκατομμύρια δολάρια ετησίως. Οι σημερινοί επιλυτές δεν επιστρέφουν το κενό μεταξύ της προσεγγιστικής και της καθολικής βέλτιστης λύσης. Αν κάνουμε μια πρόχειρη εκτίμηση ότι οι σημερινοί επιλυτές αποκλίνουν κατά μέσο όρο κατά 10% από την καθολικά βέλτιστη λύση της ACOPF, και το παγκόσμιο ενεργειακό κόστος είναι \$400 δισεκατομμύρια, εάν καταφέρουμε να μειώσουμε το κενό μεταξύ της προσεγγιστικής και της καθολικής βέλτιστης λύσης κατά 10%, το οικονομικό αντίκτυπο θα ήταν τεράστιο [12].

3 Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM)

Σε αυτό το Κεφάλαιο, εξετάζουμε τους αλγόριθμους που θεωρούνται πρόδρομοι του ADMM. Επιπλέον, παρουσιάζουμε τη διατύπωση του ADMM. Τέλος, η μέθοδος Consensus ADMM παρουσιάζεται σε δύο μορφές της: Global Variable Consensus ADMM και General Form Consensus ADMM.

3.1 Αλγόριθμοι στους οποίους βασίστηκε ο ADMM

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση της μεθόδου Alternating Directional Method of Multipliers (ADMM), αξίζει να αναφέρουμε ορισμένους αλγόριθμους που θεωρούνται πρόδρομοι του ADMM και επί των οποίων σχεδιάστηκε αυτός ο αλγόριθμος.

3.1.1 Μέθοδος Δυϊκής Ανάβασης (Dual ascent)

Θεωρούμε το πρόβλημα της κυρτής βελτιστοποίησης με ισοτικούς περιορισμούς [13]:

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ \text{subject to : } Ax = b, \end{aligned} \quad (3.1)$$

όπου $x \in R^n$, $A \in R^{m \times n}$. Επιπλέον, δίνεται ότι η $f : R^n \rightarrow R$ είναι κυρτή.

Στη μαθηματική βελτιστοποίηση, η μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange είναι μια στρατηγική για την εύρεση των τοπικών μεγίστων ή ελαχίστων μιας συνάρτησης που υπόκειται σε περιορισμούς (π.χ. περιορισμοί ισότητας και ανισότητας ενός προβλήματος βελτιστοποίησης). Η ιδέα είναι να μετατραπεί ένα πρόβλημα με περιορισμούς σε μια μορφή έτσι ώστε η δοκιμή παραγώγων (δοκιμή της περίπτωσης όπου η παράγωγος μιας συνάρτησης ισούται με μηδέν προκειμένου να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης) να μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα μη περιορισμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης [14].

Η συνάρτηση Lagrangian για πρόβλημα (3.1) είναι η ακόλουθη:

$$L(x, y) = f(x) + y^T (Ax - b)$$

όπου y είναι η δυϊκή μεταβλητή (dual variable) επίσης γνωστή ως Lagrangian πολλαπλασιαστής. Παρατηρούμε ότι:

$$\sup_y L(x, y) = \sup_y [f(x) + y^T (Ax - b)] = \begin{cases} f(x), & \text{if } Ax = b. \\ \infty, & \text{if } Ax \neq b. \end{cases}$$

Έτσι, το αρχικό πρόβλημα (3.1) μπορεί να αναδιατυπωθεί ως:

$$x^* = \inf_x \sup_y L(x, y)$$

Τώρα ορίζουμε το δυϊκό πρόβλημα βελτιστοποίησης (dual problem) του (3.1) ως:

$$\begin{aligned} y^* &= \sup_y \inf_x L(x, y) = \sup_y g(y) \Leftrightarrow \\ g(y^*) &= \max_y g(y) \end{aligned} \quad (3.2)$$

και θεωρούμε τη δυϊκή συνάρτηση Lagrange, ή απλά τη δυϊκή συνάρτηση (dual function) ως την ελάχιστη τιμή της Lagrangian συνάρτησης ως προς x .

$$g(y) = \inf_x L(x, y)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η δυϊκή συνάρτηση g είναι πάντα κοίλη, ακόμα και όταν το αρχικό πρόβλημα δεν είναι κυρτό, επειδή είναι point-wise infimum γραμμικών συναρτήσεων [15]. Επίσης, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι για τη βέλτιστη τιμή x^* του πρωτεύοντος (primal) προβλήματος, ισχύει η ακόλουθη ανισότητα [1]:

$$g(y) \leq f(x^*)$$

Η βέλτιστη λύση του δυϊκού προβλήματος (dual problem) (3.2) παραμένει κατώτερο όριο για τη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος (primal problem) (3.1). Αυτή η αρχή εκφράζεται στο **θεώρημα ασθενούς δυϊκότητας (weak duality theorem)**:

$$g(y^*) \leq f(x^*)$$

Σε περίπτωση που υπάρχει ένα ζευγάρι τιμών (x^*, y^*) έτσι ώστε $g(y^*) = f(x^*)$, τότε λέμε ότι ισχύει η **ισχυρή δυϊκότητα (strong duality)**.

Υποθέτοντας ότι το δυϊκό χάσμα (duality gap) των προβλημάτων (3.1), (3.2) είναι μηδέν, που σημαίνει ότι ισχύει η ισχυρή δυϊκότητα, τότε γνωρίζουμε ότι οι βέλτιστες τιμές τόσο του πρωτεύοντος όσο και του δυϊκού προβλήματος βελτιστοποίησης θα είναι ίδιες. Επομένως, μπορούμε να ανακτήσουμε τη βέλτιστη τιμή της πρωτεύουσας μεταβλητής (x^*) βρίσκοντας το όρισμα της ελάχιστης τιμής, σε σχέση με τη μεταβλητή x , της Lagrangian συνάρτησης, δεδομένης της βέλτιστης τιμής της δυϊκής μεταβλητής (y^*):

$$\begin{aligned} f(x^*) = g(y^*) &= \inf_x L(x, y^*) \Rightarrow \\ x^* &= \operatorname{argmin}_x L(x, y^*), \end{aligned}$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η δυϊκή συνάρτηση g είναι πάντα κοίλη. Εκμεταλλευόμενοι αυτό, στον αλγόριθμο Δυϊκής Ανάβασης χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της ανάβασης βαθμίδας (gradient ascent method) [16] για την επίλυση του δυϊκού προβλήματος (3.2). Με άλλα λόγια, υποθέτοντας ότι η δυϊκή συνάρτηση $g(y)$ είναι παραγωγίσιμη, υπολογίζουμε την κλίση:

$$\nabla_y g(y) = \nabla_y L(x^{r+1}, y) = Ax^{r+1} - b$$

και εκτελούμε επαναληπτικά τα ακόλουθα βήματα:

$$x^{r+1} := \operatorname{argmin}_x L(x, y^r) \tag{3.3}$$

$$y^{r+1} := y^r + a^r (Ax^{r+1} - b), \tag{3.4}$$

όπου $a^r > 0$ είναι το βήμα αύξησης και ο εκθέτης r αναφέρεται στον αριθμό της επανάληψης. Το πρώτο βήμα του αλγορίθμου είναι υπεύθυνο για την ελαχιστοποίηση του Lagrangian ως προς x , ενώ το δεύτερο βήμα είναι η ανανέωση της δυϊκής μεταβλητής y . Το δεύτερο βήμα δικαιολογεί το όνομα του αλγορίθμου, καθώς με την κατάλληλη επιλογή του βήματος αύξησης (a^r), η δυϊκή συνάρτηση αυξάνεται σε κάθε επανάληψη $g(y^{r+1}) > g(y^r)$ αφού το g είναι κοίλη και η κλίση $\nabla_y g(y)$ πάντα έχει κατεύθυνση προς το μέγιστο της g . Η επιλογή του βήματος αύξησης επηρεάζει σημαντικά την ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου [20], γιατί καθορίζει την αλλαγή των κλίσεων $\nabla_y g(y)$, $\nabla_y L(x^{r+1}, y)$.

Συνοψίζοντας, αν βεβαιωθούμε ότι ισχύει η ισχυρή δυϊκότητα και επιλέξουμε ένα αποτελεσματικό βήμα αύξησης, τότε και τα δύο x^r , y^r συγκλίνουν προς το βέλτιστο δυϊκό σημείο. Δυστυχώς, υπάρχει ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών που αυτές οι υποθέσεις δεν ισχύουν. Έτσι, η Δυϊκή Ανάβαση δεν μπορεί πάντα να χρησιμοποιηθεί. Ένα πολύ προφανές παράδειγμα της αποτυχίας του αλγορίθμου είναι όταν η αντικειμενική συνάρτηση f είναι μια μη φραγμένη γραμμική συνάρτηση. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η δυϊκή μεταβλητή παίρνει την τιμή μηδέν. Τότε, η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης Lagrangian

$L(x, 0) = f(x)$ ως προς x θα έχει ως αποτέλεσμα μείον άπειρο ή συν άπειρο. Κατά συνέπεια, η ισχυρή δυϊκότητα δεν ισχύει.

Η απάντηση στην προσπάθειά μας να διασφαλίσουμε το μηδενικό δυϊκό χάσμα μεταξύ των προβλημάτων (3.1), (3.2) είναι η κυρτή βελτιστοποίηση. Με εξαίρεση ορισμένες περιπτώσεις, σε κυρτά προβλήματα βελτιστοποίησης, η ισχυρή δυϊκότητα ισχύει [17].

3.1.2 Μέθοδος Δυϊκής Αποσύνθεσης (Dual Decomposition)

Η επιθυμία για αποσύνθεση του αρχικού προβλήματος βελτιστοποίησης σε υποπροβλήματα που μπορούν να λυθούν παράλληλα οδήγησαν στη δημιουργία της μεθόδου Δυϊκής Αποσύνθεσης. Για να συμβεί αυτό, η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (3.1) πρέπει να είναι προσθετικά διαχωρίσιμη (additively separable) [18] ως προς τα υποδιανύσματα x_i , που σημαίνει ότι η αρχική συνάρτηση $f(x)$, που εξαρτάται με τη μεταβλητή διάνυσμα x , μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα των f_i συναρτήσεων που εξαρτώνται από τις μεταβλητές-υποδιανύσματα x_i [13]:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_N)$ και οι μεταβλητές $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ είναι υποδιανύσματα του x .

Χωρίζουμε τον πίνακα A σε τμήματα που ονομάζονται μπλοκς ή υποπίνακες (partitioning) [19].

$$A = [A_1 \dots A_N]$$

Στη συνέχεια, καταφέρνουμε να διαχωρίσουμε τη Lagrangian, καθώς πλέον μπορεί να γραφτεί ως:

$$L(x, y) = f(x) + y^T(Ax - b) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i) + y^T(Ax - b) \Leftrightarrow$$

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^N L_i(x_i, y) = \sum_{i=1}^N \left(f_i(x_i) + y^T A_i x_i - \frac{1}{N} y^T b \right)$$

Αυτός ο μετασχηματισμός επιτρέπει τον παράλληλο υπολογισμό του καθενός x_i , διότι το βήμα ελαχιστοποίησης ως προς x (3.5) «σπάει» σε N ξεχωριστά και ανεξάρτητα προβλήματα. Αναλυτικά, ο αλγόριθμος εκτελείται ως εξής:

$$x_i^{r+1} := \underset{x_i}{\operatorname{argmin}} L_i(x_i, y^r) \quad (3.5)$$

$$y^{r+1} := y^r + a^T(Ax^{r+1} - b), \quad (3.6)$$

Όπως εύκολα μπορεί κανείς να διακρίνει, τα βήματα αυτού του αλγορίθμου είναι παρόμοια με αυτά που περιγράφονται στη μέθοδο Dual Ascent. Η διαφορά είναι η διαχωρισιμότητα της αντικειμενικής συνάρτησης η οποία μας επιτρέπει να εκτελέσουμε το βήμα x -ελαχιστοποίησης της Lagrangian ανεξάρτητα για κάθε υποδιάνυσμα x_i . Τα βήματά του απαιτούν μια λειτουργία διασποράς (scatter) και μια λειτουργία συλλογής (gather). Συγκεκριμένα, στο βήμα ανανέωσης της δυϊκής μεταβλητής (3.6), συλλέγουμε (**gather**) κάθε ένα από τα υποδιανύσματα x_i και τους υποπίνακες A_i για τον υπολογισμό του υπολοίπου

$$Ax^{r+1} - b = \sum_{i=1}^N \left(A_i x_i - \frac{1}{N} b \right)$$

Αφού υπολογιστεί η καθολική (global) δυϊκή μεταβλητή y^{r+1} , πρέπει να μεταδοθεί (**scatter**) σε όλους τους επεξεργαστές (processors) προκειμένου να εκτελέσουν παράλληλα τα N ανεξάρτητα βήματα ελαχιστοποίησης της Lagrangian ως προς x_i (3.5).

Σε αυτήν τη μορφή, η Δυϊκή Αποσύνθεση απαιτεί από κάθε επεξεργαστή να συλλέξει όλες τις μεταβλητές x_i και στη συνέχεια να υπολογίσει την καθολική δυϊκή μεταβλητή, ώστε να είναι σε θέση να πραγματοποιήσει το βήμα x -ελαχιστοποίησης και πάλι στην επόμενη επανάληψη. Δυστυχώς, αυτό σημαίνει ότι η τιμή της y^{r+1} θα υπολογιστεί N φορές, μία για κάθε υποδιάνυσμα/επεξεργαστή x_i . Μια άλλη προσέγγιση σε αυτό το πρόβλημα θα ήταν ο διορισμός ενός κύριου επεξεργαστή (master processor) ο οποίος θα είναι υπεύθυνος για την επαναλαμβανόμενη συλλογή όλων των πληροφοριών από τους επεξεργαστές, τον υπολογισμό της αξίας της καθολικής δυϊκής μεταβλητής y^{r+1} και έπειτα τη μετάδοσή της πίσω σε αυτούς [13].

3.1.3 Επαυξημένη (Augmented) Συνάρτηση Lagrange και Μέθοδος Πολλαπλασιαστών (Method of Multipliers)

Η επιθυμία για σημαντική βελτίωση των ιδιοτήτων σύγκλισης της Δυϊκής Ανάβασης ενέπνευσε την ανάπτυξη των επαυξημένων συναρτήσεων Lagrangian και την κατασκευή της Μεθόδου Πολλαπλασιαστών. Προσθέτοντας έναν ακόμα όρο στην αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (3.1) και χρησιμοποιώντας τον παράγοντα ποινής (penalty factor) ρ ως βήμα αύξησης στην (3.10), η μέθοδος Δυϊκής Ανάβασης γίνεται πιο “εύρωστη” (robust) και να έχουμε καλύτερη σύγκλιση χωρίς προϋποθέσεις όπως είναι το μηδενικό δυϊκό χάσμα, γιατί διασφαλίζουμε ότι το νέο πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι δυϊκά εφικτό (dual feasible) σε κάθε βήμα όπως αποδεικνύεται αργότερα. Η διατύπωση του νέου προβλήματος δίνεται παρακάτω [13]:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) + \frac{\rho}{2} \|Ax - b\|_2^2 \\ \text{subject to :} \quad & Ax = b, \end{aligned} \quad (3.7)$$

η επαυξημένη Lagrangian που αντιστοιχεί στο παραπάνω κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι:

$$L_p(x, y) = f(x) + y^T (Ax - b) + \frac{\rho}{2} \|Ax - b\|_2^2 \quad (3.8)$$

Είναι προφανές ότι τα προβλήματα (3.1) και (3.7) είναι ισοδύναμα διότι για οποιοδήποτε x που είναι εφικτό σημείο ο πρόσθετος όρος της αντικειμενικής γίνεται μηδέν. Η παράμετρος ρ , που είναι γνωστή ως παράμετρος ποινής, πρέπει να είναι θετική ($\rho > 0$) και αυτό που κάνει είναι να εφαρμόζει ένα κόστος, όταν ο περιορισμός της ισότητας $Ax = b$ παραβιάζεται. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Δυϊκής Ανάβασης για το πρόβλημα (3.7) με ρ ως βήμα αύξησης, παράγεται ένας αλγόριθμος, που ονομάζεται Μέθοδος Πολλαπλασιαστών (Method of Multipliers), ο οποίος αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

$$x^{r+1} := \underset{x}{\operatorname{argmin}} L_p(x, y^r) \quad (3.9)$$

$$y^{r+1} := y^r + \rho(Ax^{r+1} - b), \quad (3.10)$$

Τα βήματα της Μεθόδου Πολλαπλασιαστών είναι παρόμοια με αυτά που περιγράφονται στη μέθοδο Δυϊκής Ανάβασης. Αυτό που διαφέρει είναι η προσθήκη του τετραγωνικού όρου ποινής στην αντικειμενική συνάρτηση, που οδηγεί στη λεγόμενη Επαυξημένη (Augmented) συνάρτηση Lagrange. Ακόμα μία διαφορά είναι ότι σε αυτήν την περίπτωση, επιλέγουμε το βήμα αύξησης να είναι ο παράγοντας ποινής.

Θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα (3.7) είναι δυϊκά εφικτό σε κάθε επανάληψη μέσα από την αξιολόγηση των συνθηκών βελτιστοποίησης (optimality conditions) του προβλήματος. Αρχικά, υποθέτουμε ότι f είναι παραγωγίσιμη για απλότητα. Οι συνθήκες βελτιστοποίησης για το πρόβλημα (3.1) είναι να είναι πρωτεύοντως και δυϊκά εφικτό (primal and dual feasibility)

$$Ax^* - b = 0$$

$$\nabla_x f(x^*) + A^T y^* = 0$$

αντίστοιχα. Εξ' ορισμού το x^{r+1} ελαχιστοποιεί την εξίσωση $L_p(x, y^r)$. Άρα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_x L_p(x^{r+1}, y^r) \\ &= \nabla_x f(x^{r+1}) + A^T (y^r + \rho(Ax^{r+1} - b)) \\ &= \nabla_x f(x^{r+1}) + A^T y^{r+1} \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι με τη χρήση του ρ ως βήμα αύξησης στο βήμα ανανέωσης της δυϊκής μεταβλητής, η επανάληψη (x^{r+1}, y^{r+1}) είναι δυϊκά εφικτή, δεδομένου ότι ικανοποιεί την εξίσωση που αντιπροσωπεύει την συνθήκη βελτιστοποίησης ώστε το πρόβλημα να είναι δυϊκά εφικτό, όπως φαίνεται παραπάνω. Καθώς η Μέθοδος Πολλαπλασιαστών (Method of Multipliers) εκτελείται, το πρωτεύον υπόλοιπο (primal residual) $Ax^{r+1} - b$ συγκλίνει στο μηδέν, οδηγώντας στη βελτιστοποίηση, αφού ο επιλυτής του προβλήματος βελτιστοποίησης προσπαθεί να εκμηδενίσει τυχόν παραβιάσεις του περιορισμού της ισότητας, εξαλείφοντας το κόστος $(\rho/2)\|Ax - b\|_2^2$.

Οι ιδιότητες σύγκλισης της Μεθόδου Πολλαπλασιαστών είναι βελτιωμένες σε σύγκριση με τη Δυϊκή Ανάβαση. Ωστόσο, αυτή η βελτίωση συνοδεύονται από ένα μειονέκτημα το οποίο είναι ότι ο τετραγωνικός χαρακτήρας του όρου της ποινής που προστίθεται στην αντικειμενική αποτρέπει την επαυξημένη συνάρτηση Lagrange από το να διαχωρίζεται ακόμα και αν η f είναι διαχωρίσιμη. Ως αποτέλεσμα, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αποσύνθεση και, ως εκ τούτου, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το βήμα ελαχιστοποίησης ως προς x παράλληλα για κάθε υποδιάνυσμα x_i . Θα εξετάσουμε αυτό το ζήτημα στην ακόλουθη ενότητα.

3.2 Εισαγωγή στη Μέθοδο Alternating Method of Multipliers

3.2.1 Alternating Method of Multipliers (ADMM)

Η ιδέα του ADMM γεννήθηκε από τη επιθυμία να συνδυάσουμε την ικανότητα αποσύνθεσης του αλγορίθμου Δυϊκής Αποσύνθεσης με τις βελτιωμένες ιδιότητες σύγκλισης της Μεθόδου Πολλαπλασιαστών. Ο αλγόριθμος μπορεί να χειριστεί προβλήματα με την ακόλουθη μορφή [13]:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) + g(z) \\ \text{subject to} \quad & Ax + Bz = c, \end{aligned} \tag{3.11}$$

όπου $x \in R^n$ και $z \in R^m$, ενώ $A \in R^{p \times n}$, $B \in R^{p \times m}$ και $c \in R^p$.

Επιπλέον, δίνεται ότι f και g είναι κυρτές συναρτήσεις. Αυτό που διαφέρει από το γενικό πρόβλημα βελτιστοποίησης με ισοτικούς περιορισμούς (3.1) είναι ότι η μεταβλητή, που προηγουμένως ονομαζόταν x , έχει χωριστεί σε δύο μέρη x και z εδώ. Επίσης, έστω ότι η αντικειμενική συνάρτηση διαχωρίζεται ως προς αυτό τον διαχωρισμό. Η βέλτιστη τιμή του προβλήματος (3.11) συμβολίζεται ως:

$$p^* = \inf\{f(x) + g(z) \mid Ax + Bz = c\}.$$

Ομοίως με τη Μέθοδο Πολλαπλασιαστών, κατασκευάζουμε την Επαυξημένη Lagrangian.

$$L_p(x, z, y) = f(x) + g(z) + y^T (Ax + Bz - c) + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz - c\|_2^2 \tag{3.12}$$

Ο αλγόριθμος ADMM εκτελεί τα ακόλουθα βήματα σε κάθε επανάληψη:

$$x^{r+1} := \operatorname{argmin}_x L_p(x, z^r, y^r) \tag{3.13}$$

$$z^{r+1} := \operatorname{argmin}_z L_p(x^{r+1}, z, y^r) \tag{3.14}$$

$$y^{r+1} := y^r + \rho(Ax^{r+1} + Bz^{r+1} - c), \tag{3.15}$$

Διαμορφώνουμε το πρόβλημα (3.11) κατά τρόπο που να ταιριάζει στη Μέθοδο των Πολλαπλασιαστών προκειμένου να συγκρίνουμε τους δύο αλγόριθμους.

$$(x^{r+1}, z^{r+1}) := \underset{x, z}{\operatorname{argmin}} L_p(x, z, y^r) \quad (3.16)$$

$$y^{r+1} := y^r + \rho(Ax^{r+1} + Bz^{r+1} - c), \quad (3.17)$$

Όπως μπορεί κανείς εύκολα να διακρίνει, η μόνη διαφορά μεταξύ των δύο προαναφερθεισών μεθόδων είναι ότι στην περίπτωση της Μεθόδου Πολλαπλασιαστών οι μεταβλητές x, z ανανεώνονται από κοινού, ενώ στην περίπτωση του ADMM, η ανανέωση πραγματοποιείται με εναλλακτικό/διαδοχικό (alternating) τρόπο, που είναι ο λόγος για το όνομα του αλγορίθμου που συζητάμε. Ακόμα και αν αυτή η διαφορά φαίνεται ασήμαντη αρχικά, είναι αυτό που επιτρέπει την αποσύνθεση του αλγορίθμου όταν οι συναρτήσεις f, g είναι διαχωρίσιμες.

Είναι αξιοσημείωτο το ότι μια κατάσταση (state) του ADMM αποτελείται από τα z^r και y^r . Μια συνάρτηση του ζεύγους τους χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της επόμενης κατάστασης (z^{r+1}, y^{r+1}) . Η μεταβλητή x^r δεν αποτελεί μέρος της κατάστασης του ADMM σε κάθε επανάληψη. Είναι απλώς ένα ενδιάμεσο βοηθητικό αποτέλεσμα, που υπολογίζεται από τα αποτελέσματα της προηγούμενης επανάληψης (z^{r-1}, y^{r-1}) .

3.2.2 Κλιμακωτή Μορφή

Στη βιβλιογραφία, μια ελαφρώς διαφορετική μορφή του ADMM συναντάται επίσης συχνά. Με τη χρησιμοποίηση της ταυτότητας «διαφορά τετραγώνων», ο όρος των Lagrangian πολλαπλασιαστών εισάγεται εντός της Ευκλείδειας νόρμας. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε το υπόλοιπο ($w = Ax + Bz - c$). Τότε, το δεύτερο μισό της Augmented Lagrangian (3.12) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{aligned} y^T w + \frac{\rho}{2} \|w\|_2^2 &= \frac{\rho}{2} \left\| w + \frac{1}{\rho} y \right\|_2^2 - \frac{1}{2\rho} \|y\|_2^2 \\ &= \frac{\rho}{2} \|w + u\|_2^2 - \frac{\rho}{2} \|u\|_2^2 \end{aligned}$$

όπου $u = (1/\rho)y$ είναι η κλιμακωτή (scaled) δυϊκή μεταβλητή. Αυτός ο μετασχηματισμός μας επιτρέπει να εκφράσουμε τα βήματα του ADMM με έναν εναλλακτικό τρόπο ως εξής:

$$x^{r+1} := \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left(f(x) + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz^r - c + u^r\|_2^2 \right) \quad (3.18)$$

$$z^{r+1} := \underset{z}{\operatorname{argmin}} \left(g(z) + \frac{\rho}{2} \|Ax^{r+1} + Bz - c + u^r\|_2^2 \right) \quad (3.19)$$

$$u^{r+1} := u^r + Ax^{r+1} + Bz^{r+1} - c. \quad (3.20)$$

όπου u^r είναι το τρέχον άθροισμα (running sum) των υπολοίπων ($w = Ax + Bz - c$). Επομένως, έχουμε ότι:

$$u^r = u^0 + \sum_{j=1}^r w^j.$$

3.3 Consensus ADMM

Σε αυτήν την ενότητα, συζητάμε έναν αλγόριθμο, βασισμένο στον ADMM, κατάλληλο για την επίλυση ενός γενικού προβλήματος βελτιστοποίησης συναίνεσης (consensus) με κατανομημένο τρόπο. Αρχικά, θα αντιμετωπίσουμε προβλήματα όπου υπάρχει μια κοινή καθολική μεταβλητή που χρησιμοποιείται για τον συντονισμό όλων των τοπικών μεταβλητών του προβλήματος. Συνεχίζοντας, θα συζητήσουμε την περίπτωση όπου υπάρχουν

υποδιανύσματα της καθολικής μεταβλητής που συντονίζουν συγκεκριμένες τοπικές μεταβλητές του προβλήματος. Η τελευταία περίπτωση χρησιμοποιείται στη μέθοδο που εφαρμόζεται σε αυτήν τη διπλωματική εργασία.

3.3.1 Global Variable Consensus Optimization

Έστω ότι τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί του προβλήματός μας διαχωρίζονται σε N μέρη, έτσι ώστε [13]:

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x)$$

όπου $x \in R^n$ και οι $f_i : R^n \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ είναι κυρτές συναρτήσεις. Αναφερόμαστε στην f_i ως τον i_{th} όρο στην αντικειμενική συνάρτηση. Εάν θέλουμε να εισαγάγουμε περιορισμούς σε κάθε όρο, τότε εκχωρούμε στην f_i την τιμή $+\infty$ όταν αυτοί παραβιάζονται. Ο τελικός μας στόχος είναι να καταστήσουμε αυτό το πρόβλημα επιλύσιμο με καταναμημένο τρόπο από διάφορους επεξεργαστές (processors) που θα είναι υπεύθυνοι για τον κάθε όρο f_i της αντικειμενικής συνάρτησης ξεχωριστά.

Υποθέτοντας ότι μπορούμε να χωρίσουμε τη μεταβλητή x σε τοπικές (local) μεταβλητές $x_i \in R^n$, Αυτό το πρόβλημα μπορεί να αναδιατυπωθεί, συμπεριλαμβανομένης μιας καθολικής (global) μεταβλητής z , ως εξής:

$$\min \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \tag{3.21}$$

$$\text{subject to : } x_i - z = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Αυτή η περίπτωση βελτιστοποίησης ονομάζεται global consensus πρόβλημα. Το όνομά του εμπνεύστηκε από το γεγονός ότι όλες οι τοπικές μεταβλητές πρέπει να συμφωνήσουν με μια κοινή αλήθεια, η οποία σε αυτή την περίπτωση είναι η καθολική μεταβλητή z .

Κατασκευάζουμε την επαυξημένη Lagrangian συνάρτηση του προβλήματος (3.21).

$$L_p(x_1, \dots, x_N, z, y_1, \dots, y_N) = \sum_{i=1}^N \left(f_i(x_i) + y_i^T (x_i - z) + \frac{\rho}{2} \|x_i - z\|_2^2 \right)$$

Επίσης, στην κλιμακωτή μορφή έχουμε:

$$L_{p, sf}(x_1, \dots, x_N, z, y_1, \dots, y_N) = \sum_{i=1}^N \left(f_i(x_i) + \frac{\rho}{2} \|x_i - z + \frac{1}{\rho} y_i\|_2^2 - \frac{1}{2\rho} \|y_i\|_2^2 \right)$$

Αναλύοντας τα βήματα του αλγορίθμου ADMM, λαμβάνοντας υπόψη την προαναφερθείσα Augmented Lagrangian, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} x_i^{r+1} &:= \underset{x_i}{\operatorname{argmin}} \left(f_i(x_i) + y_i^{rT} (x_i - z_i^r) + \frac{\rho}{2} \|x_i - z_i^r\|_2^2 \right) \\ z^{r+1} &:= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(x_i^{r+1} + \frac{1}{\rho} y_i^r \right) \left(\Leftarrow \nabla_z L_{p, sf}(x_1^{r+1}, \dots, x_N^{r+1}, z, y_1^r, \dots, y_N^r) = 0 \right) \\ y_i^{r+1} &:= y_i^r + \rho(x_i^{r+1} - z^{r+1}). \end{aligned}$$

Συμβολίζουμε τον μέσο όρο ενός διανύσματος με ένα σύμβολο γραμμής $\overline{(\cdot)}$. Στη συνέχεια, ο αλγόριθμος μπορεί να απλοποιηθεί ακόμη περισσότερο. Αρχικά, ξαναγράφουμε τόσο το βήμα ανανέωσης της καθολικής μεταβλητής, καθώς και το βήμα δυϊκής

ανανέωσης ως εξής:

$$\begin{aligned} z^{r+1} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(x_i^{r+1} + \frac{1}{\rho} y_i^r \right) && \Rightarrow \\ z^{r+1} &= \bar{x}^{r+1} + \frac{1}{\rho} \bar{y}^r && (3.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_i^{r+1} &= y_i^r + \rho(x_i^{r+1} - z^{r+1}) && \Rightarrow \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^{r+1} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^r + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\rho(x_i^{r+1} - z^{r+1})) && \Rightarrow \\ \bar{y}^{r+1} &= \bar{y}^r + \rho(\bar{x}^{r+1} - z^{r+1}) && (3.23) \end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε την εξίσωση (3.22) στην (3.23), έχουμε ότι:

$$\bar{y}^{r+1} = 0 \quad (3.24)$$

Αυτό σημαίνει ότι μετά την πρώτη επανάληψη πάντα θα ισχύει: $\bar{y}^r = 0$. Ως αποτέλεσμα, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (3.22) ως:

$$z^r = \bar{x}^r \quad (3.25)$$

Έτσι, τελικά η μέθοδος global consensus αναδιατυπώνεται στα δύο ακόλουθα βήματα:

$$\begin{aligned} x_i^{r+1} &:= \underset{x_i}{\operatorname{argmin}} \left(f_i(x_i) + y_i^{rT} (x_i - \bar{x}^r) + \frac{\rho}{2} \|x_i - \bar{x}^r\|_2^2 \right) \\ y_i^{r+1} &:= y_i^r + \rho(x_i^{r+1} - \bar{x}^{r+1}). \end{aligned}$$

Ορίζουμε το πρωτεύον (primal residual) και το δυϊκό υπόλοιπο (dual residual) ως τα ποσά που όταν συγκλίνουν στο μηδέν, τότε το πρόβλημα (3.21) να είναι πρωτευόντως και το δυϊκά εφικτό (primal and dual feasibility) όπως αποδεικνύεται στο [13].

$$\begin{aligned} \text{primal residual} : w^r &= (x_1^r - \bar{x}^r, \dots, x_N^r - \bar{x}^r), \\ \text{dual residual} : s^r &= -\rho(\bar{x}^r - \bar{x}^{r-1}, \dots, \bar{x}^r - \bar{x}^{r-1}). \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, μπορούμε να ερμηνεύσουμε τον Global Variable Consensus ADMM ως μια μέθοδο επίλυσης προβλημάτων στα οποία η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί κατανέμονται σε πολλούς επεξεργαστές. Κάθε επεξεργαστής πρέπει να χειρίζεται μόνο τον δικό του όρο αντικειμενικής και περιορισμών, καθώς και έναν τετραγωνικό όρο που ανανεώνεται σε κάθε επανάληψη. Οι τετραγωνικοί όροι ενημερώνονται με τέτοιο τρόπο ώστε οι τοπικές μεταβλητές να συγκλίνουν σε μια κοινή τιμή (δηλαδή την καθολική μεταβλητή), η οποία είναι η λύση του αρχικού προβλήματος (3.21).

3.3.2 General Form Consensus Optimization

Εξετάζουμε τώρα μια περίπτωση στην οποία έχουμε τοπικές (local) μεταβλητές $x_i \in R^{n_i}$, $i = 1, \dots, N$ με την αντικειμενική συνάρτηση $f_1(x_1) + \dots + f_N(x_N)$ είναι είναι προσθετικά διαχωρίσιμη [18] ως προς τις τοπικές μεταβλητές x_i . Κάθε μία από αυτές τις τοπικές μεταβλητές αποτελείται από μια επιλογή των στοιχείων της καθολικής (global) μεταβλητής $z \in R^n$. Κάθε στοιχείο κάθε τοπικής μεταβλητής αντιστοιχεί σε κάποιο στοιχείο καθολικής μεταβλητής που συμβολίζουμε με z_g . Ο κανόνας χαρτογράφησης (mapping) που συνδέει τοπικούς και παγκόσμιους δείκτες (indices) μπορεί να γραφτεί ως $g = \mathbf{G}(i, j)$. Αυτός

ο χάρτης αναδεικνύει τη σχέση μεταξύ του τοπικού στοιχείου $(x_i)_j$ και του καθολικού στοιχείου z_g [13].

Η συνοχή μεταξύ τοπικών και καθολικών μεταβλητών επιτυγχάνεται με τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$(x_i)_j = z_{G(i,j)} = z_g, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_i.$$

όπου i είναι ο δείκτης του τοπικού στοιχείου, ενώ το j είναι ο δείκτης του καθολικού στοιχείου.

Για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι το $\tilde{z}_i \in R^{n_i}$ ορίζεται ως $(\tilde{z}_i)_j = z_{G(i,j)} = z_g$. Ουσιαστικά, \tilde{z}_i αντιπροσωπεύει την ιδέα της καθολικής μεταβλητής για το τι τιμή πρέπει να έχει η τοπική μεταβλητή x_i . Οι περιορισμοί συναίνεσης (consensus constraints) μπορούν να δηλωθούν εύκολα ως $x_i - \tilde{z}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N$.

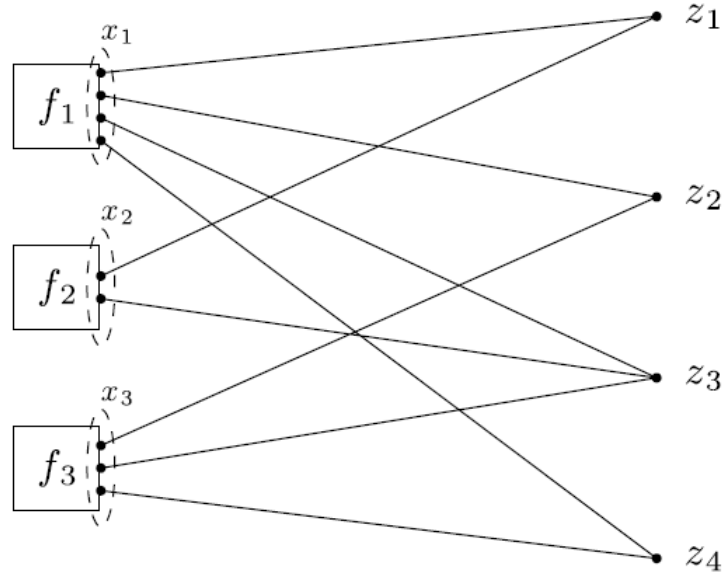
Επομένως, το general form consensus πρόβλημα ορίζεται ως:

$$\min \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \tag{3.26}$$

$$\text{subject to : } x_i - \tilde{z}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

με μεταβλητές x_1, \dots, x_N και $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_N$ (οι \tilde{z}_i είναι γραμμικές συναρτήσεις της καθολικής μεταβλητής z , δηλαδή διανύσματα, που αποτελούνται από μια επιλογή στοιχείων της καθολικής μεταβλητής, που αντιστοιχούν στις τοπικές μεταβλητές x_i).

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ένα απλό παράδειγμα προκειμένου να γίνει κατανοητή η λειτουργία του αλγόριθμου General Form Consensus ADMM. Σε αυτό το παράδειγμα, έχουμε $N = 3$ υποσυστήματα, καθολική μεταβλητή διάστασης $n = 4$, και τοπικές μεταβλητές διαστάσεων $n_1 = 4, n_2 = 2, n_3 = 3$. Η χαρτογράφηση μεταξύ καθολικών και τοπικών στοιχείων παρουσιάζεται στο ακόλουθο διμερές γράφημα (bipartite graph). Κάθε ακμή (edge) αντιπροσωπεύει έναν περιορισμό συναίνεσης.



Σχήμα 3.1: General form consensus optimization. Οι τοπικοί όροι της αντικειμενικής συνάρτησης βρίσκονται στα αριστερά. Τα στοιχεία της καθολικής μεταβλητής βρίσκονται στα δεξιά. Κάθε ακμή του διμερούς γραφήματος είναι ένας περιορισμός συναίνεσης (consensus constraint), που συνδέει ένα στοιχείο τοπικής μεταβλητής με ένα στοιχείο καθολικής μεταβλητής.

Έτσι, ακολουθώντας τα σύμβολα που επεξηγήθηκαν προηγουμένως και σύμφωνα με τους περιορισμούς συνέπειας που ορίζονται από κάθε ακμή του διμερούς γραφήματος στο Σχήμα (3.1), έχουμε ότι:

- Διάνυσμα Καθολικής Μεταβλητής ($n = 4$) :

$$z = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T$$

- Διάνυσμα Τοπικής Μεταβλητής x_1 ($n_1 = 4$) :

$$x_1 = [(x_1)_1 \ (x_1)_2 \ (x_1)_3 \ (x_1)_4]^T$$

- Διάνυσμα Τοπικής Μεταβλητής x_2 ($n_2 = 2$) :

$$x_2 = [(x_2)_1 \ (x_2)_2]^T$$

- Διάνυσμα Τοπικής Μεταβλητής x_3 ($n_3 = 3$) :

$$x_3 = [(x_3)_1 \ (x_3)_2 \ (x_3)_3]^T$$

- Η ιδέα της Καθολικής Μεταβλητής για το Διάνυσμά Τοπικής Μεταβλητής x_1 ($n_1 = 4$) :

$$\tilde{z}_1 = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T$$

- Η ιδέα της Καθολικής Μεταβλητής για το Διάνυσμά Τοπικής Μεταβλητής x_2 ($n_2 = 2$) :

$$\tilde{z}_2 = [z_1 \ z_3]^T$$

- Η ιδέα της Καθολικής Μεταβλητής για το Διάνυσμά Τοπικής Μεταβλητής x_3 ($n_3 = 3$) :

$$\tilde{z}_3 = [z_2 \ z_3 \ z_4]^T$$

Η επαυξημένη Lagrangian του προβλήματος (3.26) έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} L_p(x, z, y) &= \sum_{i=1}^N \left(f_i(x_i) + y_i^T (x_i - \tilde{z}_i) + \frac{\rho}{2} \|x_i - \tilde{z}_i\|_2^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(f_i(x_i) + \frac{\rho}{2} \left\| x_i - \tilde{z}_i + \frac{1}{\rho} y_i \right\|_2^2 - \frac{1}{2\rho} \|y_i\|_2^2 \right) \end{aligned}$$

όπου οι Lagrangian πολλαπλασιαστές $y_i \in R^{n_i}$. Ο ADMM σε αυτή τη μορφή αποτελείται από τα βήματα:

$$x_i^{r+1} := \operatorname{argmin}_{x_i} \left(f_i(x_i) + y_i^{rT} (x_i - \tilde{z}_i^r) + \frac{\rho}{2} \|x_i - \tilde{z}_i^r\|_2^2 \right) \quad (3.27)$$

$$z^{r+1} := \operatorname{argmin}_z \left(\sum_{i=1}^m \left(-y_i^{rT} \tilde{z}_i + \frac{\rho}{2} \|x_i^{r+1} - \tilde{z}_i^{r+1}\|_2^2 \right) \right) \quad (3.28)$$

$$y_i^{r+1} := y_i^r + \rho(x_i^{r+1} - \tilde{z}_i^{r+1}). \quad (3.29)$$

Όπως είναι εμφανές, τα βήματα ανανέωσης των x_i και y_i μπορούν να εκτελεστούν ανεξάρτητα από διαφορετικούς επεξεργαστές, που ανταλλάζουν τις απαραίτητες τιμές προκειμένου να μπορούν να πραγματοποιήσουν τους υπολογισμούς τους για κάθε υποσύστημα i .

Το z-βήμα ανανέωσης αποσυντίθεται μεταξύ των στοιχείων της καθολικής μεταβλητής z , αφού η L_p είναι πλήρως διαχωρίσιμη ως προς τα εν λόγω καθολικά στοιχεία. Έτσι, κάθε στοιχείο z_g της καθολικής μεταβλητής z μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο τύπο:

$$z_g^{r+1} := \underset{z_g}{\operatorname{argmin}} L_p(x, z, y) := \frac{\sum_{\mathbf{G}(i,j)=g} \left((x_i^{r+1})_j + \frac{1}{\rho} (y_i^r)_j \right)}{\sum_{\mathbf{G}(i,j)=g} 1} \quad (3.30)$$

Από την τελευταία εξίσωση, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάθε z_g βρίσκεται από τον μέσο όρο των τοπικών καταχωρήσεων $x_i^{r+1} + \frac{1}{\rho} y_i^r$ που αντιστοιχούν στον καθολικό δείκτη g . Εάν εισάγουμε την εξίσωση (3.30) στην (3.29) ως προς τον κανόνα χαρτογράφησης $\mathbf{G}(i, j) = g$, τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι μετά την πρώτη επανάληψη ισχύει:

$$\sum_{\mathbf{G}(i,j)=g} (y_i^r)_j = 0 \quad (3.31)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.31) στην (3.30), τελικά παίρνουμε ότι:

$$z_g^{r+1} := \frac{\sum_{\mathbf{G}(i,j)=g} (x_i^{r+1})_j}{N_g} \quad (3.32)$$

όπου N_g είναι ο αριθμός των στοιχείων τοπικών μεταβλητών που αντιστοιχούν στο στοιχείο καθολικής μεταβλητής z_g . Με άλλα λόγια, το z-βήμα ανανέωσης είναι τοπικός μέσος όρος για κάθε στοιχείο z_g και όχι καθολικός μέσος όρος, όπως ήταν στο global consensus πρόβλημα. Συνοψίζοντας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι **μόνο οι επεξεργαστές που έχουν γνώμη για το στοιχείο z_g θα «ψηφίσουν» στη διαμόρφωση του z_g .**

3.4 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση για Εφαρμογές ADMM σε Συστήματα Διανομής

Όπως έχει εξηγηθεί στο Κεφάλαιο 1, στόχος μας είναι να αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο βασισμένο στο General Form Consensus Optimization που είναι προϊόν της μεθόδου ADMM. Ως αποτέλεσμα, σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε διάφορες εφαρμογές αλγορίθμων που βασίζονται στον ADMM σε δίκτυα διανομής με εγκατεστημένες μονάδες διεσπασμένης ενέργειας (ΜΔΕ). Αυτές οι εφαρμογές θα συζητηθούν περιληπτικά και θα εξηγηθούν συνθέτοντας μια βιβλιογραφική ανασκόπηση που ενέπνευσε την ιδέα αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Στο [20] οι συγγραφείς στοχεύουν να ελαχιστοποιήσουν τις απώλειες ισχύος ενός δικτύου διανομής ελέγχοντας την άεργο ισχύ από τους μετατροπείς (inverters) των φωτοβολταϊκών (Φ/Β) που είναι εγκατεστημένα στο δίκτυο. Αρχικά, χρησιμοποιούν ένα γραμμικοποιημένο μοντέλο ροών ισχύος κλάδου [31], συγκεκριμένα το LinDistFlow [32], για να περιγράψουν τις εξισώσεις ροής ισχύος. Ως εκ τούτου, «κυρτοποιούν» το πρόβλημα βελτιστοποίησης, καθώς απαλλάσσονται από τα μη γραμμικά μέρη των εξισώσεων AC ροής ισχύος. Προκειμένου να επιτύχουν τον στόχο τους, χρησιμοποιούν τρεις διαφορετικούς αλγόριθμους: Δυϊκή Αναβαση χωρίς να λαμβάνονται υπόψη περιορισμοί για τα όρια της τάσης κάθε κόμβου, ένας αλγόριθμος που βασίζεται στον Consensus ADMM χωρίς να λαμβάνονται υπόψη περιορισμοί για τα όρια της τάσης κάθε κόμβου και, τέλος, ένας αλγόριθμος που βασίζεται στον Consensus ADMM που εξετάζει περιορισμούς για τα όρια της τάσης κάθε κόμβου. Οι συγγραφείς εξετάζουν 7 περιπτώσεις με διαφορετικά σενάρια σχετικά με τον αριθμό των κόμβων του δικτύου, σχετικά με το ποσοστό διείσδυσης των Φ/Β, σχετικά με την έγχυση ενεργού ισχύος των Φ/Β (θεωρείται σταθερή), σχετικά με τη

μέγιστη δυνατή φαινόμενη ισχύς των Φ/Β, (και ως εκ τούτου τα όρια άεργους ισχύος των inverters Φ/Β) και σχετικά με τα προφίλ φορτίου για το δίκτυο. Τα αποτελέσματα όλων των αλγορίθμων συγκρίνονται μεταξύ τους στο τμήμα συμπερασμάτων του paper, με βάση τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται για κάθε μέθοδο και, ως εκ τούτου, την ταχύτητα σύγκλισης κάθε αλγορίθμου. Τέλος, οι συγγραφείς ερευνούν την ακρίβεια της προσέγγισης LinDistFlow. Για να γίνει αυτό, λαμβάνουν τις τιμές της άεργου ισχύος των inverters Φ/Β που υπολογίζονται με την προσέγγιση LinDistFlow και τις αντικαθιστούν στις εξισώσεις DistFlow. Στη συνέχεια, επιλύουν ακριβώς τις εξισώσεις DistFlow [32] και συγκρίνουν τις σχετικές απώλειες των εξισώσεων DistFlow και LinDistFlow.

Στο [21] ο συγγραφέας χρησιμοποιεί ένα μοντέλο ροών ισχύος ζυγού [31] για να διατυπώσει ένα πρόβλημα βέλτιστης ροής ισχύος (OPF). Στη συνέχεια, επαναδιατυπώνει τη φόρμουλα του προβλήματος με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει τον αλγόριθμο Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM), με βάση το έργο των [22], [23]. Πιο συγκεκριμένα, χωρίζει το εξεταζόμενο δίκτυο σε περιοχές στις οποίες επιλύει τοπικά προβλήματα OPF, στοχεύοντας στο να ελαχιστοποιήσει το κόστος της έγχυσης ενεργού ισχύος σε κάθε κόμβο. Κάθε περιοχή έχει έναν κόμβο ο οποίος είναι υπεύθυνος να επικοινωνεί με τον πλησιέστερο κόμβο μιας άλλης γειτονικής περιοχής. Ας ονομάσουμε αυτόν τον κόμβο "messenger". Κάθε messenger επικοινωνεί με τον παρακείμενο messenger τις τιμές της τάσης του και τη γνώμη του για την τάση που πρέπει να έχει ο παρακείμενος messenger του (εντοπίζεται από το τοπικό πρόβλημα OPF της περιοχής του). Η αντικειμενική συνάρτηση κάθε messenger περιλαμβάνει επίσης έναν όρο που προσπαθεί να εγγυηθεί ότι η γνώμη των messengers σχετικά με τις τάσεις των γειτονικών messengers τους θα συγκλίνει σε μια συναινετική αλήθεια. Ωστόσο, όπως εξηγείται στην ενότητα (2.2.2) η βέλτιστη AC ροή ισχύος (ACOPF) είναι ένα μη γραμμικό, μη κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Επιπλέον, ο ADMM συγκλίνει μόνο σε σενάρια κυρτών προβλημάτων. Ως αποτέλεσμα, δεδομένου ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης που μελετάται δεν «κυρτοποιείται», ο προτεινόμενος αλγόριθμος δεν είναι βέβαιο ότι θα συγκλίνει.

Στο [24] οι συγγραφείς εφαρμόζουν μία Semi-Definite Programming (SDP) χαλάρωση στη διατύπωση του προβλήματος βέλτιστης ροής ισχύος (OPF). Ουσιαστικά, παρέχουν ένα κατώτερο όριο της βέλτιστης λύσης αγνοώντας το γεγονός ότι η τάξη του πίνακα λύσης της OPF πρέπει να είναι ίση με 1. Ως εκ τούτου, παρέχουν ένα κατώτερο όριο στη βέλτιστη λύση του προβλήματος δεδομένου ότι επεκτείνουν και «κυρτοποιούν» την εφικτή περιοχή του προβλήματος. Ο στόχος τους είναι να ελαχιστοποιήσουν τις απώλειες ισχύος σε όλο το δίκτυο μέσω του ελέγχου των εγχύσεων άεργου ισχύος των ΜΔΕ που είναι εγκατεστημένες στο δίκτυο. Ταυτόχρονα, θεωρούν περιορισμούς για την έγχυση ισχύος και την τάση κάθε κόμβου. Για να επιτύχουν το στόχο τους, χρησιμοποιούν τον αλγόριθμο Consensus Alternating Direction Method of Multipliers (Consensus ADMM) εφαρμόζοντας περιορισμούς συναίνεσης μεταξύ των τοπικών μεταβλητών των γειτονικών κόμβων. Τέλος, οι συγγραφείς παρουσιάζουν προσομοιώσεις στα μη ισορροπημένα δίκτυα διανομής του IEEE με 13, 34, 37 και 123 ζυγούς, για να επεξηγήσουν την επεκτασιμότητα και τη εγκυρότητα του προτεινόμενου αλγορίθμου, εστιάζοντας κυρίως στον χρόνο σύγκλισης (ToC) σε κάθε περίπτωση. Αξίζει να σημειωθεί ότι, παρόλο που επιλύουν μια SDP Relaxed Optimal Power Flow (ROPF), αποδεικνύεται εμπειρικά στο [25] ότι η υπό μελέτη χαλάρωση του αρχικού προβλήματος είναι ακριβής για όλα τα εξεταζόμενα δίκτυα διανομής. Με άλλα λόγια, κάθε βέλτιστη λύση της ROPF είναι επίσης βέλτιστη για το αρχικό πρόβλημα OPF.

Στο [26] οι συγγραφείς εισάγουν μια στοχαστική φόρμουλα βελτιστοποίησης (χρησιμοποιώντας το μοντέλο LinDistFlow) για διαχείριση της ενεργού και άεργου ισχύος σε συστήματα διανομής με υψηλό επίπεδο διείσδυσης οικιακών φωτοβολταϊκών (Φ/Β). Η αντικειμενική συνάρτηση που χρησιμοποιούν αποτελείται από 3 διαφορετικούς στόχους: την ελαχιστοποίηση απωλειών ισχύος, τη ρύθμιση τάσεων και την ικανοποίηση των πελατών. Η ικανοποίηση των πελατών παρουσιάζεται μέσω μιας συνάρτησης χρησιμότητας (utility

function) σύμφωνα με την οποία κάθε πελάτης είναι περισσότερο ικανοποιημένος όταν χρησιμοποιεί τη μέγιστη δυνατή κατανάλωση ενέργειας. Οι μεταβλητές αποφάσεων περιλαμβάνουν: τη διαχείριση των ελέγξιμων φορτίων (controllable loads) μέσω ρύθμισης της ζήτησής τους (demand response), καθώς και τον έλεγχο της κατανάλωσης ή παραγωγής άεργου ισχύος από τους inverters των Φ/Β με ένα τρόπο προσαρμοσμένο στη стоχαστική ενεργό ισχύ που παράγεται από τις Φ/Β μονάδες. Επιπλέον, η стоχαστική φύση της ανανεώσιμης ηλιακής ενέργειας παρουσιάζεται μέσω J διαφορετικών σεναρίων, που κάθε ένα έχει μια συγκεκριμένη πιθανότητα να συμβεί, συγκεκριμένα π^j , $j \in \{1, \dots, J\}$. Στη συνέχεια, αναπτύσσεται ένας αποκεντρωμένος αλγόριθμος με βάση τον Consensus Alternating Direction Method Of Multipliers (Consensus ADMM). Ο αλγόριθμος περιλαμβάνει ενημερώσεις κλειστής μορφής (closed-form updates) ανά κόμβο και απαιτεί επικοινωνία μόνο μεταξύ γειτονικών κόμβων. Η απόδοση του αλγορίθμου αξιολογείται σε ένα τυπικό δίκτυο διανομής μέσω προσομοιώσεων σε υπολογιστικό σύστημα. Τέλος, η προτεινόμενη μέθοδος αποδεικνύεται ότι έχει ανώτερη αποτελεσματικότητα ρύθμισης τάσης σε σύγκριση με τις εναλλακτικές τοπικές μεθόδους ελέγχου αέργου ισχύος.

Στο [27] οι συγγραφείς προτείνουν μια μέθοδο για το βέλτιστο έλεγχο των συνεισφορών άεργου ισχύος των Μονάδων Διεσπαρμένης Ενέργειας (ΜΔΕ) που υπάρχουν στα συστήματα διανομής ηλεκτρικής ενέργειας, με στόχο τη διατήρηση των τάσεων κάθε κόμβου εντός των επιθυμητών ορίων. Για την περίπτωση που το δίκτυο είναι ισορροπημένο, χρησιμοποιούν την προσέγγιση μοντελοποίησης DistFlow (για ακτινικά δίκτυα διανομής) για τη διαμόρφωση ενός προβλήματος βέλτιστης ροής ισχύος (OPF). Στη συνέχεια, αξιοποιούν τις ιδιότητες των συνθηκών λειτουργίας του συστήματος για να «χαλαρώσουν» ορισμένους μη γραμμικούς όρους αυτού του προβλήματος OPF, το οποίο τελικά οδηγεί σε ένα κυρτό τετραγωνικό πρόβλημα (QP). Συγκεκριμένα, αντιμετωπίζουν τις μη γραμμικές ποσότητες απωλειών ισχύος των εξισώσεων ροής ισχύος είτε ως σταθερές, είτε ως γραμμικές προσεγγίσεις των μη γραμμικών όρων που ανανεώνονται σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου. Επιπλέον, περιλαμβάνουν μια μαθηματική φόρμουλα του ίδιου προβλήματος που αφορά όμως μη ισορροπημένα τριφασικά συστήματα, ώστε να επεκτείνουν τις ιδέες που εισήχθησαν για την περίπτωση ισορροπημένου δικτύου. Οι συγγραφείς συγκρίνουν την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου που βασίζεται σε QP με έναν αλγόριθμο που βασίζεται σε Semi-Definite Programming (SDP) για βέλτιστη ρύθμιση των μετασχηματιστών ρύθμισης τάσης σε μη ισορροπημένα συστήματα διανομής, όπως προτείνεται στο [28]. Επιπλέον, για την αποτελεσματική επίλυση αυτού του QP, προτείνουν έναν αλγόριθμο βασισμένο στον Consensus Alternating Direction Method of Multipliers (Consensus ADMM). Τέλος, μελετούν αρκετές περιπτώσεις για να ελέγξουν την αποτελεσματικότητα των μεθόδων τους σε μη ισορροπημένα τριφασικά συστήματα διανομής ηλεκτρικής ενέργειας με 15 και 123 ζυγούς αντίστοιχα.

Στο [29] οι συγγραφείς προτείνουν έναν κατανεμημένο αλγόριθμο για online διαχείριση ενέργειας (online energy management) σε μικροδίκτυα με υψηλή διείσδυση Μονάδων Διεσπαρμένης Ενέργειας (ΜΔΕ). Η υψηλή διείσδυση ΜΔΕ στα μικροδίκτυα συνοδεύεται από τη стоχαστική τους φύση όσον αφορά την παραγωγή ενέργειας. Σε γενικές γραμμές, οι πιο πρόσφατες τεχνικές πρόβλεψης που αφορούν non-dispatchable ΜΔΕ, όπως η ηλιακή ενέργεια, δεν είναι αρκετά ακριβείς, γεγονός που οδηγεί σε μη αποδοτικό προγραμματισμό ενέργειας. Για να αντιμετωπιστεί το ζήτημα της υψηλής αβεβαιότητας στα μικροδίκτυα, οι συγγραφείς αυτού του paper προτείνουν μία μέθοδο online διαχείρισης ενέργειας που βασίζεται στον αλγόριθμο online ADMM. Ο online αλγόριθμος παρέχει λιγότερο συντηρητικό έλεγχο σε σύγκριση με μια «εύρωστη» (robust) προσέγγιση βελτιστοποίησης. Η αποτελεσματικότητα του προτεινόμενου αλγορίθμου επαληθεύεται από διάφορα αριθμητικά παραδείγματα στο τελικό μέρος του paper.

Στο [30] προτείνεται ένας κατανεμημένος αλγόριθμος για τη διασφάλιση της βέλτιστης ροής ισχύος (OPF) σε υβριδικά συστήματα AC-DC. Στόχος της μεθόδου είναι η ελαχιστοποί-

ηση των απωλειών ισχύος σε όλο το δίκτυο AC-DC. Αυτό σημαίνει ότι οι συγγραφείς συμπεριλαμβάνουν και τις απώλειες των μετατροπέων ισχύος (inverters). Επιπλέον, χρησιμοποιούν ένα μοντέλο ροών ισχύος ζυγού [31] για να διατυπώσουν το πρόβλημα OPF. Ενώ οι κεντρικές διατυπώσεις της OPF απαιτούν πληροφορίες πολλών μεταβλητών όλων των κόμβων δικτύου, η παρούσα προσέγγιση βασίζεται στην επίλυση της OPF κατανεμημένα σε κάθε agent AC και AC-DC που απαιτεί μόνο την ανταλλαγή τάσεων που αντιστοιχούν σε γειτονικούς κόμβους. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος βασίζεται στη μέθοδο General Form Consensus Optimization. Οι περιπτώσεις που μελετώνται με την κεντρική προσέγγιση είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες όταν η επικοινωνία των κόμβων με την κεντρική μονάδα αποτύχει. Αυτός ο αλγόριθμος εφαρμόζεται σε ένα σύστημα 3 DC - 5 AC ζυγών, δείχνοντας ότι τα ληφθέντα αποτελέσματα συμπίπτουν με εκείνα της κεντρικής διατύπωσης. Επιπλέον, η δυναμική συμπεριφορά αυτού του συστήματος που λειτουργεί με τον προτεινόμενο αλγόριθμο αναλύεται σε πλατφόρμα πραγματικού χρόνου σε ένα ρεαλιστικό περιβάλλον επικοινωνίας.

4 Μαθηματική Διατύπωση

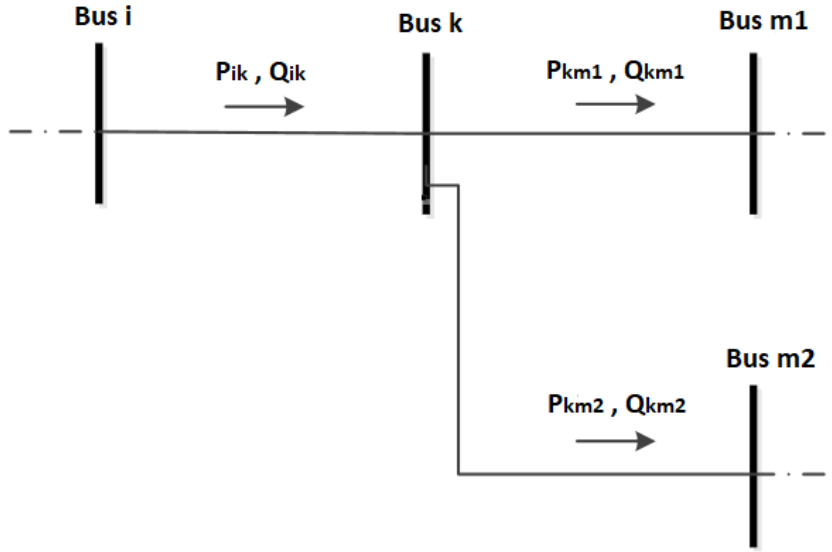
Αυτό το Κεφάλαιο θα παρουσιάσει τη μαθηματική φόρμουλα της μεθόδου που προτείνεται σε αυτή τη διπλωματική εργασία για τη βέλτιστη λειτουργία των Μονάδων Διεσπαρμένης Ενέργειας (ΜΔΕ), συγκεκριμένα φωτοβολταϊκών (Φ/Β), σε μία χρονική περίοδο κατά τη διάρκεια της ημέρας. Ο σκοπός της μεθόδου είναι να επιλυθούν οι παραβάσεις υπερτάσης που δημιουργούνται από την υψηλή παραγωγή Φ/Β σε χρονικές περιόδους χαμηλής ζήτησης στα δίκτυα διανομής. Όταν παράγεται υψηλή ενεργός ισχύς από τα Φ/Β και η ζήτηση στο δίκτυο είναι χαμηλή, το πρόβλημα της υπερτάσης είναι πολύ πιθανό να εμφανιστεί όπως εξηγείται στο [33]. Επομένως, προτείνουμε μια μέθοδο για την επίλυση ενός ρεαλιστικού και συχνού προβλήματος.

4.1 Μοντέλο Ροών Ισχύος

4.1.1 Μοντέλο DistFlow

Για τους σκοπούς αυτής της διπλωματικής εργασίας, χρησιμοποιήσαμε το καλά μελετημένο μοντέλο ροών ισχύος κλάδου του [32] γνωστός ως *DistFlow*. Είναι σημαντικό να διευκρινιστεί στο μοντέλο αυτό, το ακτινικό δίκτυο διανομής αναπαρίσταται ως ένας κατευθυνόμενος γράφος. Θα χρησιμοποιούμε (i, j) και $i \rightarrow j$ εναλλάξ για να δηλώσουμε την κατευθυνόμενη γραμμή από το ζυγό i στο ζυγό j . Επιπλέον, χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς P_k και Q_k για να υποδηλώσουμε τις εγχύσεις ενεργού και άεργου ισχύος αντίστοιχα στον κόμβο i . Ακόμα, χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς P_{ik} και Q_{ik} για να υποδηλώσουμε τις ροές ισχύος από τον κόμβο i στον κόμβο k . Θεωρούμε U_i το τετραγωνικό μέτρο της τάσης του κόμβου i και με το συμβολισμό ℓ_{ik} υποδηλώνουμε το τετραγωνικό μέτρο του ρεύματος από τον κόμβο i στον κόμβο k . Επίσης, θεωρούμε $r_{ik} + jx_{ik}$ τη σύνθετη αντίσταση της γραμμής από τον κόμβο i στον κόμβο k . Τέλος, ορίζουμε (\cdot) ως το μιγαδικό συζυγή μιας ποσότητας.

Πριν παρουσιάσουμε τις εξισώσεις του μοντέλου, παρουσιάζουμε ένα τμήμα ενός υποθετικού δικτύου διανομής όπου απεικονίζονται η ενεργός και η άεργος ροή ισχύος, προσπαθώντας να βοηθήσουμε τον αναγνώστη να κατανοήσει τη σημειογραφία (notation) με σαφήνεια.



Σχήμα 4.1: Τμήμα ενός υποθετικού δικτύου διανομής

Οι εξισώσεις που αντιπροσωπεύουν το μοντέλο DistFlow δίνονται παρακάτω: [32]

$$U_i = V_i \bar{V}_i = |V_i|^2 \quad (4.1)$$

$$\ell_{ik} = \frac{P_{ik}^2 + Q_{ik}^2}{U_i} \quad (4.2)$$

$$P_{ik} = r_{ik} \ell_{ik} - P_k + \sum_{m_i: k \rightarrow m_i} P_{km_i} \quad (4.3)$$

$$Q_{ik} = x_{ik} \ell_{ik} - Q_k + \sum_{m_i: k \rightarrow m_i} Q_{km_i} \quad (4.4)$$

$$U_k = U_i - 2(r_{ik} P_{ik} + x_{ik} Q_{ik}) + (r_{ik}^2 + x_{ik}^2) \ell_{ik} \quad (4.5)$$

4.1.2 Μοντέλο LinDistFlow

Ωστόσο, όπως εξηγείται στο Κεφάλαιο 2, η χρησιμοποίηση των εξισώσεων του DistFlow μοντέλου, όπως και οποιοδήποτε άλλου μοντέλου εξισώσεων ροής ισχύος AC, θα οδηγούσε σε προβλήματα μη κυρτής βελτιστοποίησης. Επομένως, παραθέτουμε μια γραμμική προσέγγιση του μοντέλου που ονομάζεται *LinDistFlow*. Προκειμένου να ξεπεραστεί αυτή η μη κυρτότητα, αυτό το μοντέλο παραμελεί τις απώλειες στο μοντέλο DistFlow εξισώνοντας το τετράγωνο του μέτρου ρεύματος οποιασδήποτε γραμμής του συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας με το μηδέν ($\ell_{ik} = 0$).

Ως αποτέλεσμα, λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις που αντιπροσωπεύουν το μον-

τέλο LinDistFlow [32]:

$$U_i = V_i \bar{V}_i = |V_i|^2 \quad (4.6)$$

$$P_{ik} = -P_k + \sum_{m_i: k \rightarrow m_i} P_{km_i} \quad (4.7)$$

$$Q_{ik} = -Q_k + \sum_{m_i: k \rightarrow m_i} Q_{km_i} \quad (4.8)$$

$$U_k = U_i - 2(r_{ik}P_{ik} + x_{ik}Q_{ik}) \quad (4.9)$$

4.2 Κεντρική Διατύπωση Προβλήματος

4.2.1 Το Πρόβλημα Βελτιστοποίησης του Διαχειριστή Δικτύου Διανομής

Για να εξηγήσουμε τη μέθοδο, εισάγεται το πρόβλημα βελτιστοποίησης του Διαχειριστή Δικτύου Διανομής (ΔΔΔ). Στην περίπτωση μας, υποθέτουμε ότι ο aggregator που διαχειρίζεται τα φωτοβολταϊκά (Φ/Β) που είναι εγκατεστημένα στο δίκτυο θα πληρώνεται για τη μέγιστη δυνατή παραγωγή ισχύος (maximum power point production) των Φ/Β [34]. Ωστόσο, η εισροή της μέγιστης δυνατής παραγωγής ισχύος των φωτοβολταϊκών μπορεί να προκαλέσει παραβιάσεις υπερτάσης λόγω πιθανών ανάστροφων ροών ισχύος. Από τεχνική άποψη, ο ΔΔΔ στοχεύει να ρυθμίσει τον περιορισμό της παραγωγής φωτοβολταϊκών ώστε να διασφαλίσει ότι το δίκτυο θα λειτουργεί με ασφάλεια. Από οικονομική άποψη, ο στόχος του ΔΔΔ να ελαχιστοποιήσει τον περιορισμό της ενεργού ισχύος Φ/Β μεταφράζεται στο να αποφευχθεί η αποζημίωση του aggregator για ενέργεια που δεν χρησιμοποιήθηκε λόγω περιορισμών δικτύου.

Συμβολίζουμε την περικοπή της ενεργού ισχύος που παράγεται από το Φ/Β στο ζυγό k με \hat{p}_k . Εμπνευσμένοι από τα [35], [36], στην περίπτωση μας, η τιμή ηλεκτρικής ενέργειας με την οποία θα πληρωθεί ο aggregator εξαρτάται από την περικοπή παραγωγής του εκάστοτε Φ/Β. Δηλαδή, η συνάρτηση που προσομοιώνει το κόστος της περικοπτόμενης ενεργού ισχύος είναι:

$$y_0 = \beta \hat{p}_k + c_0, \quad (4.10)$$

όπου c_0 αντιπροσωπεύει το feed-in tariff για παραγωγή φωτοβολταϊκής ενέργειας και $\beta \hat{p}_k$ αντιπροσωπεύει έναν όρο ευαισθησίας (price sensitivity term). Ο όρος ευαισθησίας της τιμής y_0 θα συζητηθεί διεξοδικά στην ενότητα (4.2.2). Αυτή η προσέγγιση οδηγεί στη δόμηση του προβλήματος του ΔΔΔ με Τετραγωνιστικό Προγραμματισμό (Quadratic Programming) πολλαπλασιάζοντας την τιμή y_0 με την περικοπή της ενεργού ισχύος που παράγεται από Φ/Β στο εκάστοτε ζυγό \hat{p}_k όπως στο [38].

$$y_0 \cdot \hat{p}_k = \beta \hat{p}_k^2 + c_0 \hat{p}_k, \quad (4.11)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο τετραγωνικός προγραμματισμός είναι η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης (ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση) μιας τετραγωνικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών που υπόκεινται σε γραμμικούς περιορισμούς (linear constraints) [37].

Έστω $E_{pv,k}$ ένα στοιχείο πίνακα που δηλώνει εάν στον εξεταζόμενο κόμβο k του δικτύου συνδέεται Φ/Β ($E_{pv,k} = 1$) ή όχι ($E_{pv,k} = 0$). Επιπλέον, έστω \hat{p}_k^{min} , \hat{p}_k^{max} η ελάχιστη και η μέγιστη δυνατή περικοπή ενεργού ισχύος του Φ/Β στον κόμβο k . Η ποσότητα \hat{p}_k^{max} μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως η μέγιστη δυνατή παραγωγή του Φ/Β που είναι εγκατεστημένο στο ζυγό k . Έτσι, η ποσότητα $(\hat{p}_k^{max} - \hat{p}_k)$ είναι η πραγματική έγχυση της ενεργού ισχύος από το Φ/Β στο ζυγό k . Τέλος, συμβολίζουμε με P_k^c , Q_k^c το συμβατικό ενεργό και άεργο φορτίο στο ζυγό k .

Συμπερασματικά, Ο ΔΔΔ στοχεύει στην ελαχιστοποίηση της περικοπτόμενης ενεργού ισχύος φωτοβολταϊκών έχοντας ως περιορισμούς τις εξισώσεις ροής ισχύος που περιγράφονται από το μοντέλο LinDistFlow (βλέπε Ενότητα 4.1.2), τα όρια τάσεων και τα όρια λειτουργίας του φωτοβολταϊκού μετατροπέα (inverter) που αντικατοπτρίζουν την ικανότητά περικοπής της ενεργού ισχύος που παράγει το Φ/Β [34].

Έτσι, το πρόβλημα βελτιστοποίησης του ΔΔΔ διατυπώνεται ως εξής:

$$\min \sum_{k=1}^{N_b} (E_{pv,k} \cdot (\beta \hat{p}_k^2 + c_0 \hat{p}_k)) \quad (4.12)$$

subject to :

$$U_0 = 1 \text{ pu}^2 \quad (4.13)$$

$$P_{ik} = -P_k + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} P_{km_i} \quad (4.14)$$

$$P_k = -P_k^c + E_{pv,k} \cdot (\hat{p}_k^{max} - \hat{p}_k) \quad (4.15)$$

$$Q_{ik} = -Q_k + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} Q_{km_i} \quad (4.16)$$

$$Q_k = -Q_k^c \quad (4.17)$$

$$U_k = U_i - 2(r_{ik}P_{ik} + x_{ik}Q_{ik}) \quad (4.18)$$

$$U^{min} \leq U_k \leq U^{max} \quad (4.19)$$

$$\hat{p}_k^{min} \leq \hat{p}_k \leq \hat{p}_k^{max}, \quad (4.20)$$

Όπως εξηγήθηκε προηγουμένως, η αντικειμενική συνάρτηση (4.12) αντιπροσωπεύει το στόχο του ΔΔΔ να ελαχιστοποιήσει τον περιορισμό της ενεργού ισχύος των Φ/Β και έτσι να αποφύγει την αποζημίωση του aggregator για ενέργεια που δεν χρησιμοποιήθηκε λόγω περιορισμών δικτύου. Η εξίσωση (4.13) αντανακλά την απαίτησή μας το μέτρο της τάσης του ζυγού αναφοράς να είναι 1 pu. Οι εξισώσεις (4.14) και (4.16) αντιπροσωπεύουν το γραμμικοποιημένο ενεργό και το άεργο ισοζύγιο ισχύος στο δίκτυο, όπως αναφέρεται στο μοντέλο LinDistFlow. Οι εξισώσεις (4.15) και (4.17) αντιπροσωπεύουν τις εγχύσεις ενεργού και άεργου ισχύος στο ζυγό k και διατυπώνονται ως η αφαίρεση της ενεργού και άεργου παραγωγής μείον το ενεργό και άεργο συμβατικό φορτίο αντίστοιχα στο ζυγό k . Η εξίσωση (4.18) αντανακλά μια γραμμική προσέγγιση για τη διαφορά στο τετράγωνο του μέτρου της τάσης από τον ένα ζυγό στον άλλο, όπως αναφέρεται στο μοντέλο LinDistFlow. Η εξίσωση (4.19) ορίζει το ελάχιστο και μέγιστο όριο του τετραγώνου του μέτρου τάσης σε κάθε κόμβο. Τέλος, η εξίσωση (4.20) ορίζει το ελάχιστο και μέγιστο όριο περικοπτόμενης ενεργού ισχύος που μπορεί να προσφέρει ο μετατροπέας του Φ/Β στον κόμβο k .

Προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα βελτιστοποίησης που περιγράφεται από εξισώσεις (4.12) - (4.20), τα δεδομένα κάθε κόμβου πρέπει να συγκεντρωθούν σε έναν κεντρικό επεξεργαστή, ο οποίος θα αποφασίσει τα σημεία ρύθμισης (set-points) των Φ/Β προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση σε σχέση με τους περιορισμούς του προβλήματος. Δεδομένου ότι απαιτείται καθολική πληροφορία (global information), για να λυθεί το πρόβλημα βελτιστοποίησης που περιγράφηκε, το πρόβλημα κατάσσεται ως

κεντρικό (centralized) [32].

4.2.2 Επιλογή των Συντελεστών Ευαισθησίας (β) και Κόστους (c_0)

Με βάση τα έργα των [35], [36] καθορίσαμε το κόστος της περικοπτόμενης παραγωγής φωτοβολταϊκών σύμφωνα με την εξίσωση (4.10). Αυτός ο τύπος αντικειμενικής συνάρτησης μας επιτρέπει να διατυπώσουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης του ΔΔΔ με τετραγωνικό προγραμματισμό (βλέπε 4.12). Δεδομένου ότι οι ισοτικοί περιορισμοί (4.13) - (4.20) είναι γραμμικοί, το πρόβλημα μετατρέπεται σε αυστηρά κυρτό πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού. Επομένως, η βελτιστοποίηση εγγυάται ότι θα βρει το καθολικό βέλτιστο σημείο.

Όπως περιγράφεται στο [36], η ιδέα πίσω από τη διαμόρφωση της τιμής y_0 είναι να γραμμικοποιηθεί η τιμή του ηλεκτρικού ρεύματος γύρω από μια συγκεκριμένη μέση τιμή και να χρησιμοποιηθεί το διάγραμμα οριακής τιμής συστήματος που περιλαμβάνει τους σταθμούς παραγωγής ενέργειας για να εκτιμηθεί η παράμετρος ευαισθησίας β . Ωστόσο, όπως εξηγείται στο [38], πρέπει να επιλέξουμε την παράμετρο ευαισθησίας β προσεκτικά προκειμένου να αντανakλά ρεαλιστικά αποτελέσματα.

Επομένως, η τιμή που επιλέξαμε να εκχωρήσουμε στο β είναι:

$$\beta = 10 \text{ euros}/MW^2 \cdot h$$

Όσον αφορά το κόστος παραγωγής ενεργού ισχύος από τα Φ/Β, το οποίο ορίζουμε ότι είναι το ίδιο για την περικοπή της, σύμφωνα με την ευρωπαϊκή νομοθεσία (**άρθρο 15 παρ. 1 Ν. 3468/2006 σε συνδυασμό με το ΦΕΚ Β' 97/2012**) [39], μετά το 2015, η τιμή παραγωγής ηλιακής ενεργού ενέργειας κάτω των 100 MW για διασυνδεδεμένα συστήματα στην Ελλάδα καθορίζεται μέσω του ακόλουθου τύπου:

$$c_0 = 1.2 \cdot MAS P^{-1}$$

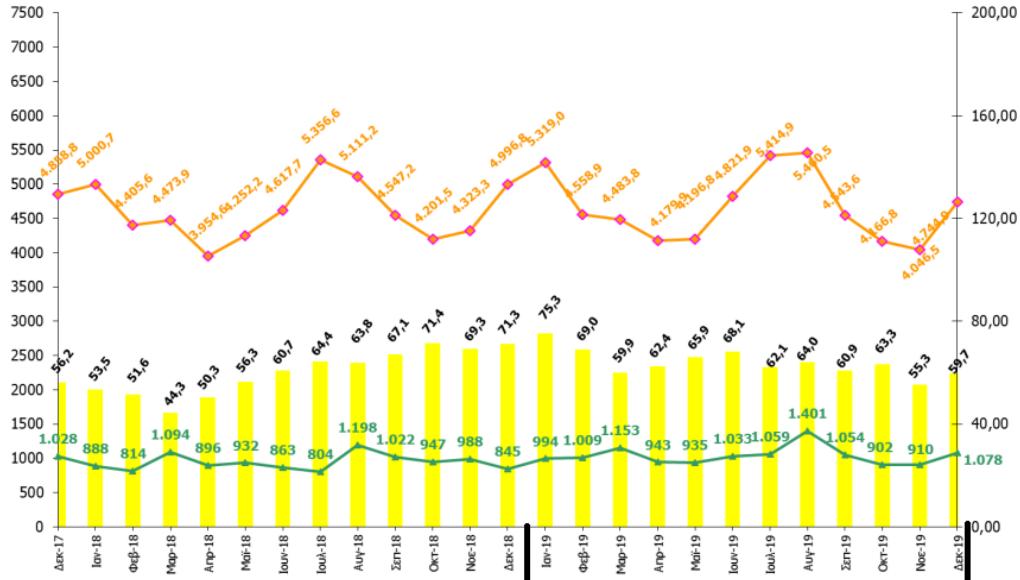
όπου $MAS P^{-1}$ είναι η μέση οριακή τιμή συστήματος του προηγούμενου έτους. Η τιμή c_0 αντιπροσωπεύει με ποια τιμή αποζημιώνεται κάθε MWh που παράγεται από Φ/Β. Ως εκ τούτου, είναι εγγενώς το κόστος της περικοπής παραγωγής φωτοβολταϊκών.

Για να υπολογίσουμε το $MAS P^{-1}$, χρησιμοποιήσαμε δεδομένα από τον ιστότοπο του Διαχειριστή Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας & Εγγυήσεων Προέλευσης (ΔΑΠΕΕΠ ΑΕ) [40] στην Ελλάδα σχετικά με την μέση οριακή τιμή συστήματος ανά μήνα του έτους 2019.

GWh

ΓΡΑΦΗΜΑ 15

€/ MWh



Σχήμα 4.2: Οριακή τιμή συστήματος ανά μήνα (Κίτρινο), Εθνική Ζήτηση (Πορτοκαλί) και Εθνική παραγωγή μέσω Συμπααραγωγής Ηλεκτρισμού-Θερμότητας Υψηλής Απόδοσης (ΣΗΘΥΑ) & και Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας (Πράσινο)

Στη συνέχεια, υπολογίσαμε την μέση οριακή τιμή συστήματος του έτους 2019 και την πολλαπλασιάσαμε με τον συντελεστή 1.2 ως μας υποδεικνύει ο τύπος του c_0 που ορίστηκε παραπάνω. Το αποτέλεσμα από τον υπολογισμό που περιγράφεται είναι:

$$c_0 = 76.59 \text{ euros/MWh.}$$

4.3 Κατανεμημένη Διατύπωση Προβλήματος

4.3.1 Αναδιατύπωση του Κεντρικού Προβλήματος με την Εισαγωγή Τοπικών Μεταβλητών

Αρχικά, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας μικροϋπολογιστής συνδεδεμένος σε κάθε ζυγό k του δικτύου (π.χ. Raspberry [41]). Κάθε μικροϋπολογιστής λειτουργεί ως πράκτορας (agent) που μπορεί να επεξεργαστεί τις ακόλουθες τοπικές πληροφορίες [20], [27]:

- τοπική μεταβλητή για τη ροή ενεργού ισχύος της γραμμής (i, k) ($P_{ik,L}^-$)
- τοπική μεταβλητή για τη ροή ενεργού ισχύος κάθε γραμμής (k, m_i) ($P_{ik,L}^{+(m_i)}$)
- τοπική μεταβλητή για τη ροή άεργου ισχύος της γραμμής (i, k) ($Q_{ik,L}^-$)
- τοπική μεταβλητή για τη ροή άεργου ισχύος κάθε γραμμής (k, m_i) ($Q_{ik,L}^{+(m_i)}$)
- τοπική μεταβλητή για το τετράγωνο του μέτρου της τάσης του πατέρα του κόμβου k , δηλαδή του κόμβου i ($U_{ik,L}^-$)
- τοπική μεταβλητή για το τετράγωνο του μέτρου της τάσης του κόμβου k ($U_{ik,L}^+$)

- τοπική μεταβλητή για την περικοπή της φωτοβολταϊκής παραγωγής στον κόμβο k , αν $k \in N_p$ ($\hat{p}_{k,L}$)

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που περιγράφεται από τις σχέσεις (4.12) - (4.20) μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής:

$$\min \sum_{k=1}^{N_b} (E_{pv,k} \cdot (\beta p_{k,L}^2 + c_0 p_{k,L})) \quad (4.21)$$

subject to :

$$U_{0k,L}^- = 1 pu^2 \quad (4.22)$$

$$P_{ik,L}^- = -P_k + \sum_{m_i: k \rightarrow m_i} P_{ik,L}^{+(m_i)} \quad (4.23)$$

$$P_k = -P_k^c + E_{pv,k} \cdot (p_{k,L}^{max} - p_{k,L}) \quad (4.24)$$

$$P_{ik,L}^{+(m_i)} = 0 \quad for\ k \in N_\ell \quad (4.25)$$

$$Q_{ik,L}^- = -Q_k + \sum_{m_i: k \rightarrow m_i} Q_{ik,L}^{+(m_i)} \quad (4.26)$$

$$Q_k = -Q_k^c \quad (4.27)$$

$$Q_{ik,L}^{+(m_i)} = 0 \quad for\ k \in N_\ell \quad (4.28)$$

$$U_{ik,L}^+ = U_{ik,L}^- - 2(r_{ik} P_{ik,L}^- + x_{ik} Q_{ik,L}^-) \quad (4.29)$$

$$U^{min} \leq U_{ik,L}^- \leq U^{max} \quad (4.30)$$

$$U^{min} \leq U_{ik,L}^+ \leq U^{max} \quad (4.31)$$

$$\hat{p}_k^{min} \leq p_{k,L} \leq \hat{p}_k^{max}, \quad (4.32)$$

όπου N_ℓ είναι ένα σύνολο που αποτελείται από κόμβους που είναι φύλλα του κατευθυνόμενου γραφού - ακτινικού δικτύου διανομής.

Όπως εξηγήθηκε προηγουμένως, η αντικειμενική συνάρτηση (4.21) αντιπροσωπεύει το στόχο του ΔΔΔ ελαχιστοποιήσει τον περιορισμό της ενεργού ισχύος των Φ/Β και έτσι να αποφύγει την αποζημίωση του aggregator για ενέργεια που δεν χρησιμοποιήθηκε λόγω περιορισμών δικτύου. Σύμφωνα με την εξίσωση (4.22), οι κόμβοι που είναι παιδιά του πρώτου κόμβου (feeder) στην αρχή του δικτύου, γνωρίζουν ότι το μέτρο της τάσης του ζυγού αναφοράς είναι 1 pu. Οι εξισώσεις (4.23) και (4.26) αντιπροσωπεύουν το γραμμικοποιημένο ενεργό και το άεργο ισοζύγιο ισχύος κάθε κόμβου k , όπως αναφέρεται στο μοντέλο LinDistFlow. Οι εξισώσεις (4.24) και (4.27) αντιπροσωπεύουν τις εγχύσεις ενεργού

και άεργου ισχύος στο ζυγό k και διατυπώνονται ως η αφαίρεση της ενεργού και άεργου παραγωγής μείον το ενεργό και άεργο συμβατικό φορτίο αντίστοιχα στο ζυγό k . Σύμφωνα με τις εξισώσεις (4.25) και (4.28) οι κόμβοι που είναι φύλλα του κατευθυνόμενου γραφου - δικτύου διανομής γνωρίζουν ότι δεν υπάρχουν άλλοι κόμβοι μετά από αυτούς και επομένως δεν υπάρχει ροή ενεργού και άεργου ισχύος μετά από αυτούς. Η εξίσωση (4.29) αντανακλά μια γραμμικοποιημένη προσέγγιση για τη γνώμη που έχει ο κόμβος k σχετικά τη διαφορά στο τετράγωνο του μέτρου της τάσης ανάμεσα στον κόμβο που είναι πατέρας του k και στον κόμβο k , όπως αναφέρεται στο μοντέλο LinDistFlow. Οι εξισώσεις (4.30) και (4.31) ορίζουν το ελάχιστο και μέγιστο όριο της τοπικής μεταβλητής για το τετράγωνο του μέτρου της τάσης του πατέρα του κόμβου k καθώς και της τοπικής μεταβλητής για το τετράγωνο του μέτρου της τάσης του κόμβου k . Τέλος, η εξίσωση (4.32) ορίζει το ελάχιστο και μέγιστο όριο περικοπτόμενης ενεργού ισχύος που μπορεί να προσφέρει ο μετατροπέας του Φ/Β στον κόμβο k .

Ωστόσο, για να ολοκληρωθεί η αναδιατύπωση του αρχικού προβλήματος, πρέπει να δημιουργήσουμε ένα σύνολο **περιορισμών συναίνεσης (coupling constraints)** μεταξύ τοπικών μεταβλητών και καθολικών στοιχείων που θα εγγυηθούν ότι όλες οι τοπικές μεταβλητές θα φτάσουν σε μια **συναινετική λύση** με τους γειτονικούς κόμβους τους, και ως εκ τούτου εγγυάται ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης που περιγράφεται από τις σχέσεις (4.21)-(4.38) είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα βελτιστοποίησης που περιγράφεται από τις σχέσεις (4.12) - (4.20). Για να λύσουμε το δεύτερο πρόβλημα και να καταλήξουμε στα ίδια αποτελέσματα με το πρώτο πρόβλημα, πρέπει να γνωρίζουμε εκ των προτέρων τις τιμές των καθολικών στοιχείων. Οι περιορισμοί μεταξύ των τοπικών στοιχείων και των καθολικών στοιχείων που θα καθορίσουν μια κοινή αλήθεια, δίνονται παρακάτω.

$$P_{ik,L}^- = P_{ik} \quad (4.33)$$

$$P_{ik,L}^{+(m_i)} = P_{km_i} \quad (4.34)$$

$$Q_{ik,L}^- = Q_{ik} \quad (4.35)$$

$$Q_{ik,L}^{+(m_i)} = Q_{km_i} \quad (4.36)$$

$$U_{ik,L}^- = U_i \quad (4.37)$$

$$U_{ik,L}^+ = U_k \quad (4.38)$$

όπου $(P_{ik}, P_{km_i}, Q_{ik}, Q_{km_i}, U_i, U_k)$ είναι τα στοιχεία της καθολικής μεταβλητής που συντονίζουν τις αντίστοιχες τοπικές μεταβλητές.

Αρχικά, η αναδιατύπωση δεν έχει κανένα νόημα, καθώς επιλύουμε το ίδιο ακριβώς πρόβλημα βελτιστοποίησης αλλά με πολύ περισσότερους περιορισμούς. Ωστόσο, οι εξισώσεις (4.33) - (4.38) και η εισαγωγή όλων αυτών των νέων τοπικών - βοηθητικών μεταβλητών, που αναφέρονται σε κάθε κόμβο ξεχωριστά, είναι το κλειδί για την πλήρη αποσύνθεση του αρχικού προβλήματος και για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο που θα λύσει το πρόβλημα του ΔΔΔ με κατανεμημένο τρόπο.

4.3.2 Προτεινόμενος Αλγόριθμος βασισμένος στη μέθοδο του General Form Consensus ADMM

Σε αυτήν την ενότητα, θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο εμπνευσμένο από τη μέθοδο General Form Consensus ADMM που καταφέρνει να επιλύσει το προαναφερθέν πρόβλημα ΔΔΔ κατανεμημένα. Κάθε κόμβος k του δικτύου, εκτός από το ζυγό αναφοράς, θα λύσει

το δικό του πρόβλημα βελτιστοποίησης έχοντας το δικό του σύνολο τοπικών περιορισμών. Ο λόγος για τον οποίο ο feeder δεν εκτελεί τοπική βελτιστοποίηση είναι επειδή η τάση του είναι σταθερή [20], [27].

Αρχικά, κατασκευάζουμε την επαυξημένη Lagrangian.

$$L_p(\cdot) = \sum_{k=1}^{N_b} L_{p,k,L}(\cdot) \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} L_{p,k,L}(\cdot) = & E_{pv,k} \cdot (\beta \hat{p}_{k,L}^2 + c_0 \hat{p}_{k,L}) \\ & + \lambda_{P_{ik,L}}^- (P_{ik,L}^- - P_{ik}) + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} [\lambda_{P_{ik,L}}^+(m_i) (P_{ik,L}^+(m_i) - P_{km_i})] \\ & + \lambda_{Q_{ik,L}}^- (Q_{ik,L}^- - Q_{ik}) + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} [\lambda_{Q_{ik,L}}^+(m_i) (Q_{ik,L}^+(m_i) - Q_{km_i})] \\ & + \lambda_{U_{ik,L}}^- (U_{ik,L}^- - U_i) + \lambda_{U_{ik,L}}^+ (U_{ik,L}^+ - U_k) \\ & + \frac{\rho}{2} (P_{ik,L}^- - P_{ik})^2 + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} \left[\frac{\rho}{2} (P_{ik,L}^+(m_i) - P_{km_i})^2 \right] \\ & + \frac{\rho}{2} (Q_{ik,L}^- - Q_{ik})^2 + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} \left[\frac{\rho}{2} (Q_{ik,L}^+(m_i) - Q_{km_i})^2 \right] \\ & + \frac{\rho}{2} (U_{ik,L}^- - U_i)^2 + \frac{\rho}{2} (U_{ik,L}^+ - U_k)^2, \end{aligned} \quad (4.40)$$

όπου $\lambda_{P_{ik,L}}^-$, $\lambda_{P_{ik,L}}^+(m_i)$, $\lambda_{Q_{ik,L}}^-$, $\lambda_{Q_{ik,L}}^+(m_i)$, $\lambda_{U_{ik,L}}^-$, $\lambda_{U_{ik,L}}^+$ είναι οι Lagrangian πολλαπλασιαστές που αντιστοιχούν στις εξισώσεις (4.33) - (4.38) αντίστοιχα, και $\rho > 0$ είναι ο συντελεστής ποινής.

Μετά την αναδιατύπωση του αρχικού κεντρικού προβλήματος, είναι προφανές ότι υπάρχει μια μοναδική ομάδα τοπικών μεταβλητών που αντιστοιχούν σε κάθε κόμβο του δικτύου διανομής. Αυτό είναι κάτι πολύ χρήσιμο, καθώς μας επιτρέπει να βελτιστοποιήσουμε κυκλικά τη επαυξημένη Lagrangian συνάρτηση, σε σχέση με τις τοπικές μεταβλητές κάθε κόμβου. Φυσικά, θα πρέπει να αρχικοποιήσουμε τον αλγόριθμό μας, δηλαδή τις καθολικές μεταβλητές και τους Lagrangian πολλαπλασιαστές. Θα μιλήσουμε περισσότερο για την αρχικοποίηση στο Κεφάλαιο 6.

Προς το παρόν, θα εξηγήσουμε τον προτεινόμενο αλγόριθμο που βασίζεται στη μέθοδο General Form Consensus ADMM, παρουσιάζοντας τα βήματα που συνθέτουν τη μέθοδο λεπτομερώς, με βάση τη θεωρία που αποτυπώθηκε στην ενότητα (3.3.2).

4.3.2.1 Πρώτο βήμα του αλγορίθμου - Τοπική βελτιστοποίηση

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, σε αυτό το βήμα κάθε πράκτορας (agent) (εκτός από το ζυγό αναφοράς) επιλύει το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης σε σχέση μόνο με τις τοπικές μεταβλητές του εκάστοτε ζυγού. Με άλλα λόγια, **οι μόνες μεταβλητές απόφασης του προβλήματος βελτιστοποίησης κάθε ζυγού είναι οι τοπικές μεταβλητές του**. Κάθε κόμβος-πράκτορας έχει υπολογίσει και γνωρίζει από την προηγούμενη επανάληψη της μεθόδου τις τιμές των καθολικών στοιχείων (P_{ik} , P_{km_i} , Q_{ik} , Q_{km_i} , U_i , U_k) που αντιστοιχούν στις τοπικές μεταβλητές του, καθώς και τους πολλαπλασιαστές Lagrange ($\lambda_{P_{ik,L}}^-$, $\lambda_{P_{ik,L}}^+(m_i)$, $\lambda_{Q_{ik,L}}^-$, $\lambda_{Q_{ik,L}}^+(m_i)$, $\lambda_{U_{ik,L}}^-$, $\lambda_{U_{ik,L}}^+$) που αντιστοιχούν στις εξισώσεις (4.33) - (4.38) αντίστοιχα.

$$\min L_{p,k,L}(\cdot) \quad (4.41)$$

subject to :

$$U_{0k,L}^- = 1 pu^2 \quad (4.42)$$

$$P_{ik,L}^- = -P_k + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} P_{ik,L}^{+(m_i)} \quad (4.43)$$

$$P_k = -P_k^c + +E_{pv,k} \cdot (p_{k,L}^{\hat{max}} - p_{k,L}) \quad (4.44)$$

$$P_{ik,L}^{+(m_i)} = 0 \quad \text{for } k \in N_\ell \quad (4.45)$$

$$Q_{ik,L}^- = -Q_k + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} Q_{ik,L}^{+(m_i)} \quad (4.46)$$

$$Q_k = -Q_k^c \quad (4.47)$$

$$Q_{ik,L}^{+(m_i)} = 0 \quad \text{for } k \in N_\ell \quad (4.48)$$

$$U_{ik,L}^+ = U_{ik,L}^- - 2(r_{ik}P_{ik,L}^- + x_{ik}Q_{ik,L}^-) \quad (4.49)$$

$$U^{min} \leq U_{ik,L}^- \leq U^{max} \quad (4.50)$$

$$U^{min} \leq U_{ik,L}^+ \leq U^{max} \quad (4.51)$$

$$\hat{p}_k^{min} \leq p_{k,L} \leq \hat{p}_k^{max}, \quad (4.52)$$

Σε αυτό το βήμα, κάθε ζυγός ελαχιστοποιεί τη δική του επαυξημένη συνάρτηση Lagrangian σε σχέση με το δικό του μοναδικό σύνολο τοπικών μεταβλητών. Σύμφωνα με την αντικειμενική συνάρτηση (4.41), κάθε κόμβος προσπαθεί να βρει την ελάχιστη περικοπή της παραγωγής του Φ/Β (εάν υπάρχει εγκατεστημένο σε αυτό το ζύγο) και ταυτόχρονα προσπαθεί να μειώσει τη διαφορά μεταξύ των τοπικών μεταβλητών και των καθολικών στοιχείων που αντιστοιχούν σε αυτές. Επομένως, κάθε ζυγός στοχεύει στην επίτευξη του αρχικού στόχου, δηλαδή στην ελαχιστοποίηση της περικοπής ενεργού ισχύος φωτοβολταϊκών, ενώ καταλήγει σε μια συναινετική λύση με τους γειτονικούς του κόμβους, εννοώντας ότι οι γειτονικοί κόμβοι πρέπει να συμφωνήσουν με τους καθολικά στοιχεία που συντονίζουν τις τοπικές μεταβλητές τους.

Η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης κάθε κόμβου k , περιορίζεται τοπικά από το σύνολο εξισώσεων (4.42) - (4.52). Για την ερμηνεία καθενός από αυτούς τους περιορισμούς βλέπε Ενότητα (4.3.1).

Μετά από αυτό το βήμα, οι τιμές των τοπικών μεταβλητών για την επανάληψη $[r+1]$ υπολογίστηκαν από κάθε κόμβο k . Έτσι, κάθε κόμβος έχει εκτιμήσει τις ακόλουθες τιμές

που βελτιστοποιούν την τοπική αντικειμενική τους συνάρτηση (4.41) σε σχέση με τους τοπικούς περιορισμούς του (4.42) - (4.52).

- $P_{ik,L}^-[r+1]$
- $P_{ik,L}^{+(m_i)}[r+1]$
- $Q_{ik,L}^-[r+1]$
- $Q_{ik,L}^{+(m_i)}[r+1]$
- $U_{ik,L}^-[r+1]$
- $U_{ik,L}^+[r+1]$
- $p_{k,L}[r+1]$

4.3.2.2 Δεύτερο βήμα του αλγορίθμου - Ενημέρωση στοιχείων καθολικής μεταβλητής

Σε αυτό το βήμα, έχοντας αποκτήσει τις βέλτιστες τοπικές μεταβλητές από το πρώτο βήμα, οι γειτονικοί κόμβοι επικοινωνούν μεταξύ τους για να αποφασίσουν μια καλύτερη τιμή για τα καθολικά στοιχεία που συντονίζουν τις τοπικές μεταβλητές τους. Οι ενημερωμένες τιμές του P_{ik} , Q_{ik} , U_k βρίσκονται με την επίλυση των εξισώσεων:

$$\nabla L_p(\cdot)_{(P_{ik})} = \nabla L_p(\cdot)_{(Q_{ik})} = \nabla L_p(\cdot)_{(U_k)} = 0$$

Ως αποτέλεσμα, λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$P_{ik}[r+1] = \frac{P_{ik,L}^-[r+1] + P_{ji,L}^{+(k)}[r+1]}{2} \quad (4.53)$$

$$Q_{ik}[r+1] = \frac{Q_{ik,L}^-[r+1] + Q_{ji,L}^{+(k)}[r+1]}{2} \quad (4.54)$$

$$U_k[r+1] = \frac{U_{ik,L}^+[r+1] + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} U_{km_i,L}^-[r+1]}{N_k^+} \quad (4.55)$$

όπου N_k^+ υποδηλώνει τον αριθμό των κόμβων που αποτελούνται από τον κόμβο k και τα παιδιά του. Επίσης, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις, όπου αυτές οι εξισώσεις παρακάμπτονται.

- Η τάση του feeder είναι πάντα σταθερή.

$$U_0[r+1] = U_{0k,L}^-[r+1] = 1 pu^2$$

- Όταν ο κόμβος k είναι παιδί του feeder έχουμε ότι:

$$P_{0k}[r+1] = P_{0k,L}^-[r+1]$$

$$Q_{0k}[r+1] = Q_{0k,L}^-[r+1]$$

- Όταν ο κόμβος k είναι φύλλο του κατευθυνόμενου γράφου - ακτινικού δικτύου διανομής έχουμε ότι:

$$U_k[r+1] = U_{ik,L}^+[r+1]$$

4.3.2.3 Τρίτο βήμα του αλγορίθμου - Ενημέρωση δυϊκών μεταβλητών

Σε αυτό το βήμα, αφού υπολογίστηκαν οι βέλτιστες τοπικές μεταβλητές και ενημερώθηκαν τα στοιχεία της καθολικής μεταβλητής που αντιστοιχούν σε αυτές, κάθε κόμβος ενημερώνει τους πολλαπλασιαστές Lagrange που διαχειρίζεται ως εξής:

$$\lambda_{P_{ik,L}}^- [r+1] = \lambda_{P_{ik,L}}^- [r] + \rho(P_{ik,L}^- [r+1] - P_{ik}[r+1]) \quad (4.56)$$

$$\lambda_{P_{ik,L}}^{+(m_i)} [r+1] = \lambda_{P_{ik,L}}^{+(m_i)} [r] + \rho(P_{ik,L}^{+(m_i)} [r+1] - P_{km_i}[r+1]) \quad (4.57)$$

$$\lambda_{Q_{ik,L}}^- [r+1] = \lambda_{Q_{ik,L}}^- [r] + \rho(Q_{ik,L}^- [r+1] - Q_{ik}[r+1]) \quad (4.58)$$

$$\lambda_{Q_{ik,L}}^{+(m_i)} [r+1] = \lambda_{Q_{ik,L}}^{+(m_i)} [r] + \rho(Q_{ik,L}^{+(m_i)} [r+1] - Q_{km_i}[r+1]) \quad (4.59)$$

$$\lambda_{U_{ik,L}}^- [r+1] = \lambda_{U_{ik,L}}^- [r] + \rho(U_{ik,L}^- [r+1] - U_i[r+1]) \quad (4.60)$$

$$\lambda_{U_{ik,L}}^+ [r+1] = \lambda_{U_{ik,L}}^+ [r] + \rho(U_{ik,L}^+ [r+1] - U_k[r+1]) \quad (4.61)$$

4.3.2.4 Κριτήριο τετρατισμού

Το κριτήριο τετρατισμού (stopping criterion) που οδηγεί στην ολοκλήρωση του αλγορίθμου είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} \|\text{primal residual}\|_2^2 &\leq \epsilon, \\ \|\text{dual residual}\|_2^2 &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Η τετραγωνική Ευκλείδεια νόρμα του πρωτεύοντος υπολοίπου και η τετραγωνική Ευκλείδεια νόρμα του δυϊκού υπολοίπου για κάθε κόμβο k ορίζονται κάτωθεν:

$$\begin{aligned} \|\text{primal residual}\|_2^2 &= \|P_{ik,L}^- [r] - P_{ik}[r]\|_2^2 + \|P_{ik,L}^{+(m_i)} [r] - P_{km_i}[r]\|_2^2 + \\ &\|Q_{ik,L}^- [r] - Q_{ik}[r]\|_2^2 + \|Q_{ik,L}^{+(m_i)} [r] - Q_{km_i}[r]\|_2^2 + \\ &\|U_{ik,L}^- [r] - U_i[r]\|_2^2 + \|U_{ik,L}^+ [r] - U_k[r]\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \|\text{dual residual}\|_2^2 &= \rho^2 \cdot (\|P_{ik}[r+1] - P_{ik}[r]\|_2^2 + \\ &\|Q_{ik}[r+1] - Q_{ik}[r]\|_2^2 + \\ &\|U_k[r+1] - U_k[r]\|_2^2) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Η ιδέα είναι ότι όταν οι τιμές των τοπικών μεταβλητών είναι σχεδόν πανομοιότυπες με τις τιμές των καθολικών υποδιανυσμάτων (γραμμικές συναρτήσεις της καθολικής μεταβλητής) που αντιστοιχούν σε αυτές και όταν όλοι οι κόμβοι έχουν υπολογίσει νέες τιμές για τα καθολικά στοιχεία που είναι σχεδόν ταυτόσημες με αυτές που υπολογίστηκαν στην προηγούμενη επανάληψη, τότε κάθε κόμβος θα είναι σίγουρος για την τιμή της έγχυσης ενεργού ισχύος από το Φ/Β που θα χρησιμοποιήσει και η αντικειμενική συνάρτηση θα συγκλίνει στη βέλτιστη τιμή της, όπως αποδεικνύεται στο [13].

Περαιτέρω λεπτομέρειες σχετικά με την αξία του ϵ που οδηγεί σε ικανοποιητικά αποτελέσματα θα συζητηθούν στο Κεφάλαιο 6.

4.3.3 Σύνοψη προτεινόμενου αλγορίθμου

Προτεινόμενος Αλγόριθμος βασισμένος στη μέθοδο του General Form Consensus ADMM

1. Αρχικοποίηση

- Για κάθε κόμβο k αρχικοποίησε τις τιμές
 $P_{ik}[0], Q_{ik}[0], U_k[0], \lambda_{P_{ik,L}}^-[0], \lambda_{P_{ik,L}}^{+(m_i)}[0], \lambda_{Q_{ik,L}}^-[0], \lambda_{Q_{ik,L}}^{+(m_i)}[0], \lambda_{U_{ik,L}}^-[0], \lambda_{U_{ik,L}}^+[0]$.
Επίσης, εισήγαγε τα δεδομένα $r_{ik}, x_{ik}, \rho, P_k^c, Q_k^c$.

2. Επανάλαβε

- **Τοπική βελτιστοποίηση:** Κάθε κόμβος k , εκτός από το feeder, λύνει το πρόβλημα βελτιστοποίησης που περιγράφεται από τις εξισώσεις (4.41) - (4.52).

- **Ανταλλαγή πληροφοριών από γειτονικούς κόμβους:** Οι γειτονικοί κόμβοι επικοινωνούν τις τιμές

$$P_{ik,L}^-[r+1], P_{ik,L}^{+(m_i)}[r+1], Q_{ik,L}^-[r+1], Q_{ik,L}^{+(m_i)}[r+1], U_{ik,L}^-[r+1], U_{ik,L}^+[r+1]$$

που έχουν υπολογίσει από τις τοπικές βελτιστοποιήσεις τους.

- **Ενημέρωση καθολικών στοιχείων:** Οι γειτονικοί κόμβοι ψηφίζουν και αποφασίζουν τις ενημερωμένες τιμές

$$P_{ik}[r+1], Q_{ik}[r+1], U_k[r+1] \text{ σύμφωνα με τις εξισώσεις (4.53) - (4.55).}$$

- **Ενημέρωση δυϊκών μεταβλητών:** Κάθε κόμβος k , εκτός από το feeder, υπολογίζει τις νέες τιμές των πολλαπλασιαστών Lagrange

$$\lambda_{P_{ik,L}}^-[r+1], \lambda_{P_{ik,L}}^{+(m_i)}[r+1], \lambda_{Q_{ik,L}}^-[r+1], \lambda_{Q_{ik,L}}^{+(m_i)}[r+1], \lambda_{U_{ik,L}}^-[r+1], \lambda_{U_{ik,L}}^+[r+1]$$

σύμφωνα με τις εξισώσεις (4.56) - (4.61).

3. Μέχρι

- Το ακόλουθο κριτήριο να ισχύει για κάθε κόμβο k .

$$\|primal\ residual\|_2^2 \leq \epsilon,$$
$$\|dual\ residual\|_2^2 \leq \epsilon$$

σύμφωνα με τις εξισώσεις (4.62) - (4.63).

5 Σύστημα δοκιμών και δεδομένα

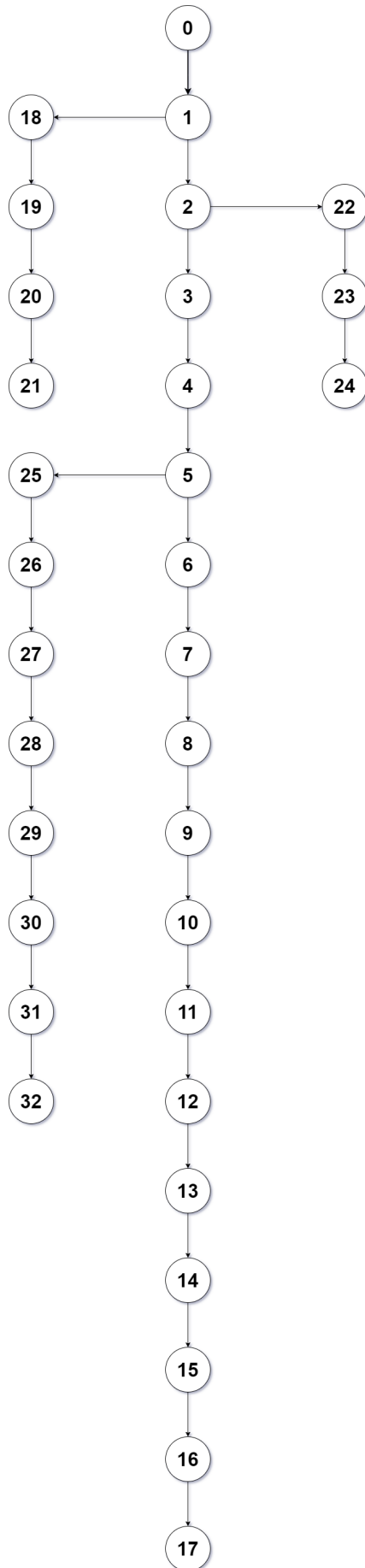
5.1 Πλατφόρμα προσομοίωσης

Όλες οι προσομοιώσεις πραγματοποιήθηκαν χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού υψηλού επιπέδου Python [43]. Πιο συγκεκριμένα, τα προβλήματα βελτιστοποίησης που περιγράφονται σε αυτήν τη διπλωματική εργασία δημιουργήθηκαν με τη βοήθεια του Python module Pyomo [44], [45] και επιλύθηκαν χρησιμοποιώντας τον επιλυτή προβλημάτων βελτιστοποίησης Gurobi [46]. Επιπλέον, τα Python modules PYPOWER [47], Pandapower [48], Pandas [49], NumPy [50] ήταν ζωτικής σημασίας για τον χειρισμό των δεδομένων του δικτύου διανομής. Επιπροσθέτως, αποτέλεσαν αρωγό για την επίλυση του προβλήματος AC ροής ισχύος χρησιμοποιώντας τα ληφθέντα αποτελέσματα από τον προτεινόμενο αλγόριθμο που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 4. Τέλος, το Python module matplotlib [51] ήταν απαραίτητο για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων αυτής της διπλωματικής εργασίας και για την αξιολόγηση της προτεινόμενης μεθόδου που βασίζεται στον General Form Consensus ADMM.

5.2 Σύστημα δοκιμών

Η κατανεμημένη μέθοδος που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 4 αξιολογείται στο Δίκτυο Διανομής 33 του Baran-Wu [42]. Είναι ένα δίκτυο διανομής μέσης τάσης 12.66 kV με ένα υποσταθμό τροφοδοσίας YT/MT και με 5 βρόγχους που στην παρούσα διπλωματική εργασία θεωρούνται ανοιχτοί και ως αποτέλεσμα το δίκτυο είναι ακτινικό. Το συνολικό ενεργό φορτίο είναι 3.715 MW, ενώ το συνολικό άεργο φορτίο είναι 2.3 MVAR. Επιπλέον, περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα συμβατικά ενεργά και άεργα φορτία, καθώς και τη σύνθετη αντίσταση κάθε γραμμής του δικτύου δίνονται στο Παράρτημα Α.

Η τοπολογία του δικτύου διανομής παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.1. Ο κόμβος 0 είναι ο υποσταθμός τροφοδοσίας YT/MT (feeder) του δικτύου διανομής.



Σχήμα 5.1: Δίκτυο διανομής 33 ζυγών από Baran-Wu [42]

5.3 Όρια Τάσης

Σκοπός μας σε αυτή τη διπλωματική εργασία, όπως εξηγήθηκε στο Κεφάλαιο 1, είναι να επιλύσουμε τα προβλήματα υπερτάσης που προκύπτουν από την παραγωγή φωτοβολταϊκών σε περιόδους χαμηλής ζήτησης σε δίκτυα διανομής. Από τεχνική άποψη, ο Διαχειριστής Δικτύου Διανομής (ΔΔΔ) στοχεύει στη διασφάλιση της ασφαλούς λειτουργίας του δικτύου, τηρώντας τα όρια τάσης. Από οικονομική άποψη, ο ΔΔΔ στοχεύει στην ελαχιστοποίηση της περικοπής των φωτοβολταϊκών, προκειμένου να αποφευχθεί η αποζημίωση του aggregator που διαχειρίζεται τα φωτοβολταϊκά για ενέργεια που δεν εγχύθηκε στο δίκτυο λόγω περιορισμών του δικτύου.

Επομένως, ενώ κάθε πράκτορας (agent) επιλύει το δικό του πρόβλημα βελτιστοποίησης και επικοινωνεί με τους γείτονές του για να βρεθούν ποιες εγχύσεις ενεργού ισχύος των φωτοβολταϊκών είναι ασφαλείς και μπορούν να απορροφηθούν από το δίκτυο, πρέπει να ληφθεί υπόψη ένας περιορισμός απόκλισης τάσης. Αυτός ο περιορισμός εξασφαλίζει ότι η τάση κάθε κόμβου θα είναι πάντα εντός αποδεκτών ορίων.

Σύμφωνα με τα ευρωπαϊκά πρότυπα [11] οι αποδεκτές αποκλίσεις τάσης στα συστήματα διανομής είναι της τάξης του $\pm 10\%$ της ονομαστικής τάσης του feeder. Ωστόσο, για τους σκοπούς αυτής της διπλωματικής εργασίας, θεωρούμε αυστηρότερα όρια τάσης.

- $V_{min} = 0.95 pu$
- $V_{max} = 1.05 pu$

6 Εφαρμογή: Επίλυση Προβλημάτων Υπερτάσης

Σε αυτήν την ενότητα, αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της υπερτάσης που δημιουργείται από την παραγωγή φωτοβολταϊκών σε περιόδους χαμηλής ζήτησης στο υπό εξέταση δίκτυο διανομής. Στις ακόλουθες προσομοιώσεις, **το προφίλ φορτίου του συστήματος διανομής είναι το 20% του ονομαστικού, το οποίο μεταφράζεται σε 0.743 MW συνολικό ενεργό φορτίο και 0.46 MVAR συνολικό άεργο φορτίο**. Ταυτόχρονα, υποθέτουμε ότι υπάρχει συνολική έγχυση ενεργού ισχύος 2 MW από τα εγκατεστημένα Φ/Β, που είναι περίπου το 53,8% του συνολικού ονομαστικού ενεργού φορτίου (3.715 MW).

Σε αυτά τα σενάρια, κάθε πράκτορας (agent) - κόμβος του συστήματος, στον οποίο είναι εγκατεστημένο Φ/Β, προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει την περικοπή του. Ωστόσο, δεν επιτρέπεται στα φωτοβολταϊκά να εισάγουν την πλήρη παραγωγή ενεργού ισχύος τους, καθώς θα προκαλούσε υπερτάσεις (πάνω από το προκαθορισμένο όριο των 1.05 pu) και θα έθετε σε κίνδυνο την ασφαλή λειτουργία του δικτύου. Επομένως, κάθε πράκτορας καλείται να βρει κατανεμημένα το δικό του σημείο ρύθμισης (set-point), ανταλλάσσοντας τις απαραίτητες πληροφορίες μόνο με τους γειτονικούς κόμβους του.

Είναι πολύ σημαντικό να αναφέρουμε ότι για κάθε περίπτωση που εξετάζεται, πέρα από τη μέθοδο που προτείνουμε, θα εκτελεστεί και ο κεντρικός αλγόριθμος που περιγράφεται από τις σχέσεις (4.12) - (4.20). Τα αποτελέσματα του κατανεμημένου προτεινόμενου αλγορίθμου αναμένεται να συγκλίνουν στα αντίστοιχα αποτελέσματα της κεντρικής μεθόδου, επαληθεύοντας την αποτελεσματικότητά του.

6.1 Αρχικοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου

Προκειμένου να αξιοποιήσουμε την προτεινόμενη μέθοδο, πρέπει να αρχικοποιήσουμε ορισμένες παραμέτρους. Πρώτον, πρέπει να ορίσουμε τις καθολικές μεταβλητές που αναφέρονται στις ροές ισχύος και τις τάσεις: $P_{ik}[0]$, $Q_{ik}[0]$, $U_k[0]$. Επιλέγουμε να αρχικοποιήσουμε αυτές τις παραμέτρους λύνοντας ένα πρόβλημα γραμμικοποιημένης ροής ισχύος στο δίκτυο (χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του μοντέλου LinDistFlow), λαμβάνοντας υπόψη το 20% των ονομαστικών φορτίων, ενώ θεωρούμε ότι δεν έχουμε διείσδυση Φ/Β. Αυτές οι συνθήκες αρχικοποίησης ισχύουν για κάθε περίπτωση που εξετάζεται.

Όσον αφορά τους πολλαπλασιαστές Lagrange που αντιστοιχούν σε καθεμία από τις εξισώσεις συναίνεσης που εξηγούνται στο Κεφάλαιο 4 (βλέπε εξισώσεις 4.33 - 4.38), θέτουμε τις αρχικές τιμές τους στο μηδέν.

$$\lambda_{P_{ik=L}}^- [0] = \lambda_{P_{ik=L}}^+ (m_i) [0] = \lambda_{Q_{ik=L}}^- [0] = \lambda_{Q_{ik=L}}^+ (m_i) [0] = \lambda_{U_{ik=L}}^- [0] = \lambda_{U_{ik=L}}^+ [0] = 0$$

Επιπλέον, έχει μεγάλη σημασία να αναφερθεί ότι οι ακόλουθες περιπτώσεις εξετάζονται για ανοχές (tolerances) $\epsilon = 10^{-3}$ και $\epsilon = 10^{-4}$, και τα αποτελέσματά τους συγκρίνονται και συζητούνται.

6.2 Συζήτηση για το συντελεστή ποινής ρ

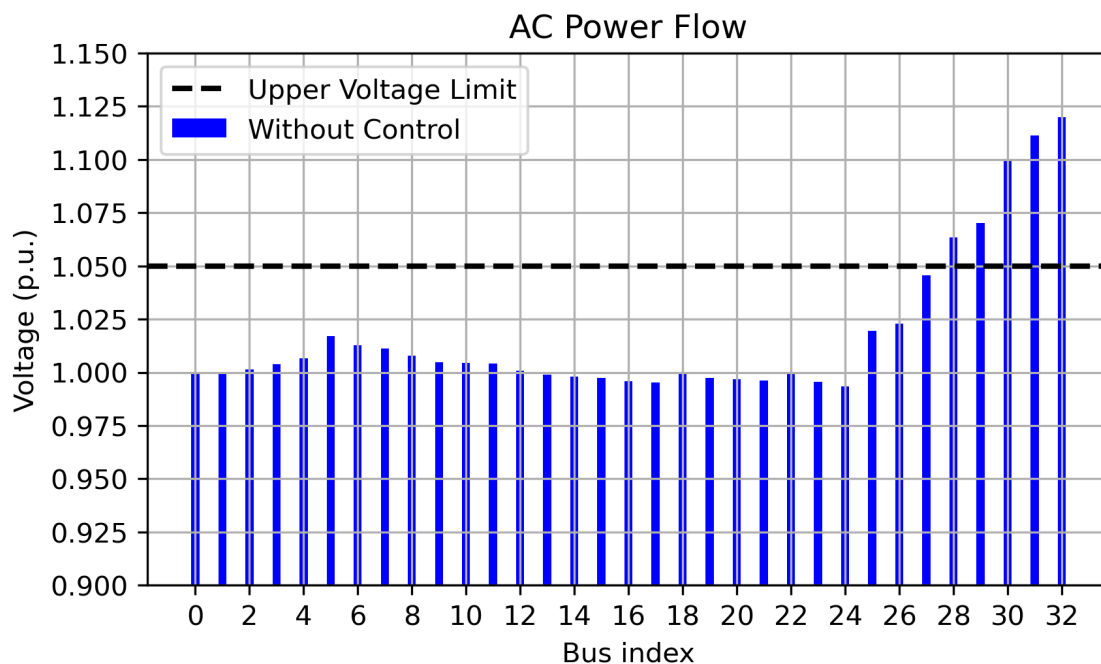
Η επιλογή του παράγοντα ποινής είναι ζωτικής σημασίας για τη σύγκλιση του προτεινόμενου αλγορίθμου. Ενώ πειραματιζόμαστε με διαφορετικές τιμές του συντελεστή ποινής, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι εάν η προαναφερθείσα τιμή είναι πολύ μικρή, η σύγκλιση του αλγορίθμου γίνεται σημαντικά πιο αργή και ως αποτέλεσμα, ο αλγόριθμος τερματίζεται πριν φτάσει στη βέλτιστη αντικειμενική τιμή για τη δεδομένη ανοχή ($\epsilon = 10^{-3}$).

Από την άλλη πλευρά, η επιλογή μιας πολύ μεγάλης τιμής για το συντελεστή ποινής θα προκαλούσε ταλαντώσεις του αθροίσματος των τιμών των αντικειμενικών συναρτήσεων (βλέπε 4.40) κάθε κόμβου, γύρω από την αντίστοιχη τιμή της κεντρικής αντικειμενικής συνάρτησης, έχοντας ως αποτέλεσμα η σύγκλιση του αλγορίθμου να γίνει πιο αργή.

Και τα δύο αυτά συμπεράσματα σχετίζονται με το γινόμενο του παράγοντα ποιινής με τη διαφορά μεταξύ τοπικών και καθολικών μεταβλητών (βλέπε Εξισώσεις 4.56 - 4.61). Αυτό το γινόμενο καθορίζει το ρυθμό με τον οποίο κάθε κόμβος προσπαθεί να επιτύχει τη βέλτιστη τιμή της δικής του επαυξημένης Lagrangian συνάρτησης. Αυτό μεταφράζεται στο πόσο γρήγορα επιτυγχάνεται μια συναινετική λύση μεταξύ γειτονικών κόμβων. Εάν το προϊόν είναι πολύ μικρό, η βέλτιστη τιμή κάθε Lagrangian είναι δύσκολο να επιτευχθεί, καθώς η κινητήρια δύναμη προς αυτήν την τιμή είναι μικρή. Ωστόσο, εάν το προαναφερθέν προϊόν είναι πολύ μεγάλο, κάθε κόμβος προσπαθεί να βελτιστοποιήσει τον δικό του στόχο πολύ επιθετικά και ως αποτέλεσμα η συναινετική λύση μεταξύ γειτονικών κόμβων καθίσταται πιο αργή. Αυτό το γεγονός δικαιολογεί τις ταλαντώσεις του αθροίσματος των τιμών των αντικειμενικών συναρτήσεων κάθε κόμβου.

6.3 Περίπτωση 1: 2 Φ/Β του 1 MW το καθένα στους κόμβους 31 έως 32

Σε αυτή την περίπτωση υποθέτουμε ότι υπάρχουν 2 Φ/Β συνδεδεμένα στους κόμβους 31 και 32 του δικτύου, με δυνατότητα παραγωγής έως 1 MW το καθένα. Ωστόσο, εάν τα Φ/Β εισάγουν τη μέγιστη δυνατή παραγωγή ενέργειας στους κόμβους που είναι εγκατεστημένα, θα προκαλούσαν παραβιάσεις υπερτάσεων. Για να επαληθευτεί ο προαναφερθέν ισχυρισμός, επιλύεται ένα πρόβλημα AC ροής ισχύος. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 6.1: AC Ροή Ισχύος - Τάσεις Χωρίς Έλεγχο Φ/Β, Περίπτωση 1

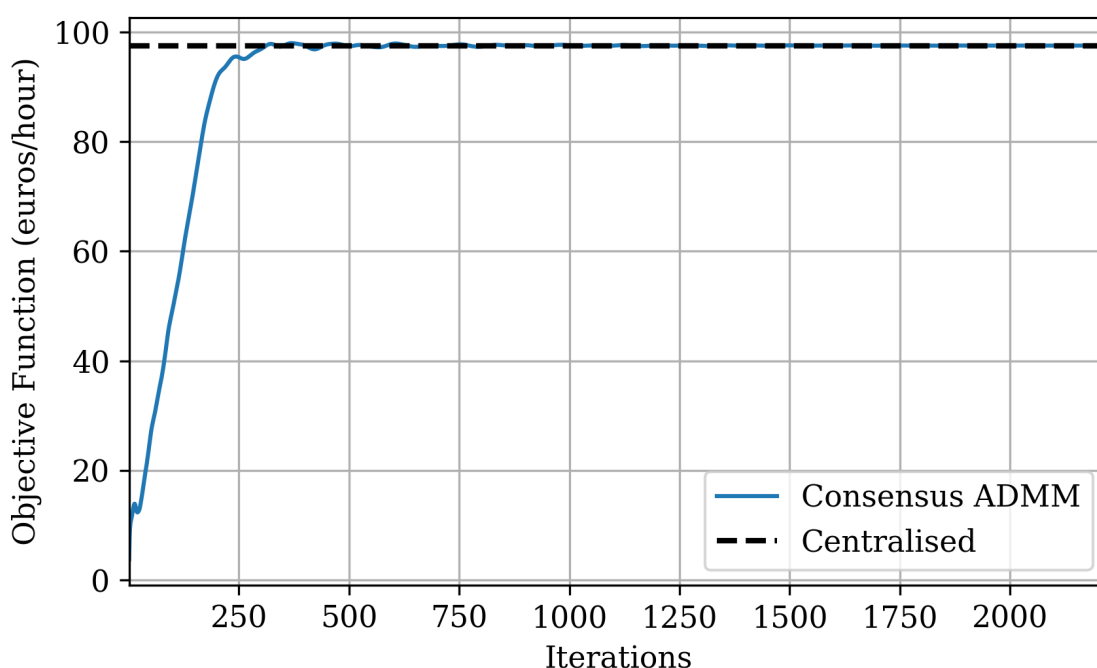
Στο σχήμα (6.1), είναι προφανές ότι εάν τα φωτοβολταϊκά που είναι εγκατεστημένα στους κόμβους 31 και 32 εισάγουν τη μέγιστη δυνατή παραγωγή τους στο δίκτυο χωρίς κανένα έλεγχο, τότε προκαλούνται ανάστροφες ροές ενεργού ισχύος. Αυτές οι ανάστροφες ροές ενεργού ισχύος προκαλούν την αύξηση των τάσεων των κόμβων 28 έως 32 και καταγράφονται παραβιάσεις υπερτάσεων.

Επομένως, χρησιμοποιείται η προτεινόμενη μέθοδος αυτής της διπλωματικής εργασίας με σκοπό την επίλυση του προβλήματος υπερτάσης που φαίνεται στο σχήμα (6.1). Στη συνέχεια, καταδεικνύεται η αποτελεσματικότητα του αλγόριθμου που βασίζεται στον General Form Consensus ADMM, μέσω της σύγκρισης των αποτελεσμάτων του με τα αντίστοιχα

αποτελέσματα του κεντρικού αλγορίθμου.

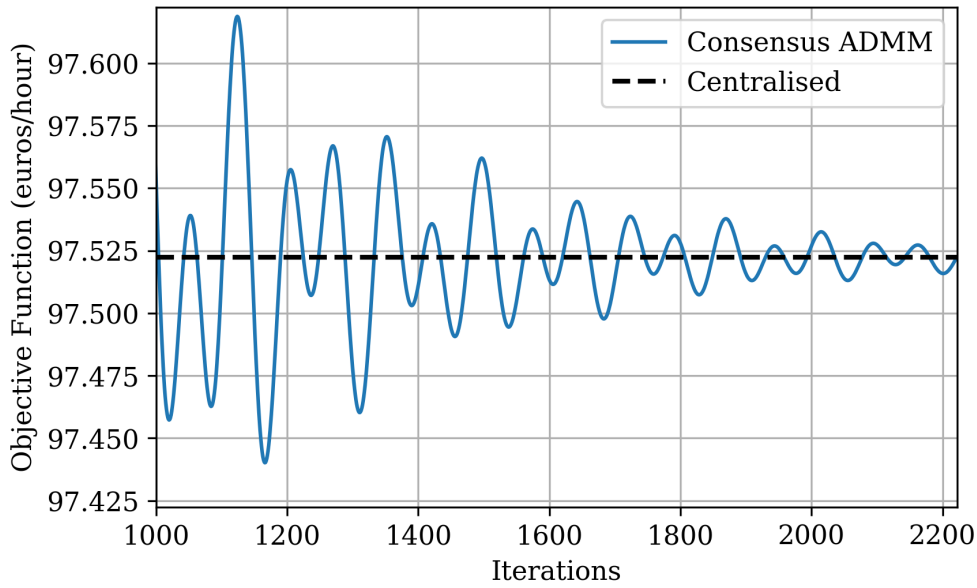
Εμπειρικά, διαπιστώνεται ότι η τιμή του συντελεστή ποινής (penalty coefficient) $\rho = 500$ για τον προτεινόμενο αλγόριθμο, μας δίνει ένα καλό αντάλλαγμα μεταξύ ταχύτητας σύγκλισης και ακρίβειας. Εκτελούμε τόσο τον κεντρικό όσο και τον κατανεμημένο αλγόριθμο του Κεφαλαίου 4. Η μέθοδος που βασίζεται στον General Form Consensus συγκλίνει μετά από **2221 επαναλήψεις**.

Στο σχήμα (6.2), η πρόοδος του άθροισματος των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης κάθε κόμβου (βλέπε 4.40) στην προτεινόμενη κατανεμημένη μέθοδο παρουσιάζεται ως προς τις επαναλήψεις που απαιτούνται για τη σύγκλιση της μεθόδου. Από τώρα και στο εξής, το προαναφερθέν άθροισμα θα καλείται απλώς η αντικειμενική συνάρτηση του προτεινόμενου αλγορίθμου για λόγους ευκολίας. Όπως μπορεί να διακρίνει κανείς, ο προτεινόμενος αλγόριθμος συγκλίνει στην αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του κεντρικού αλγορίθμου. Το γεγονός αυτό επαληθεύει την αποτελεσματικότητά του.



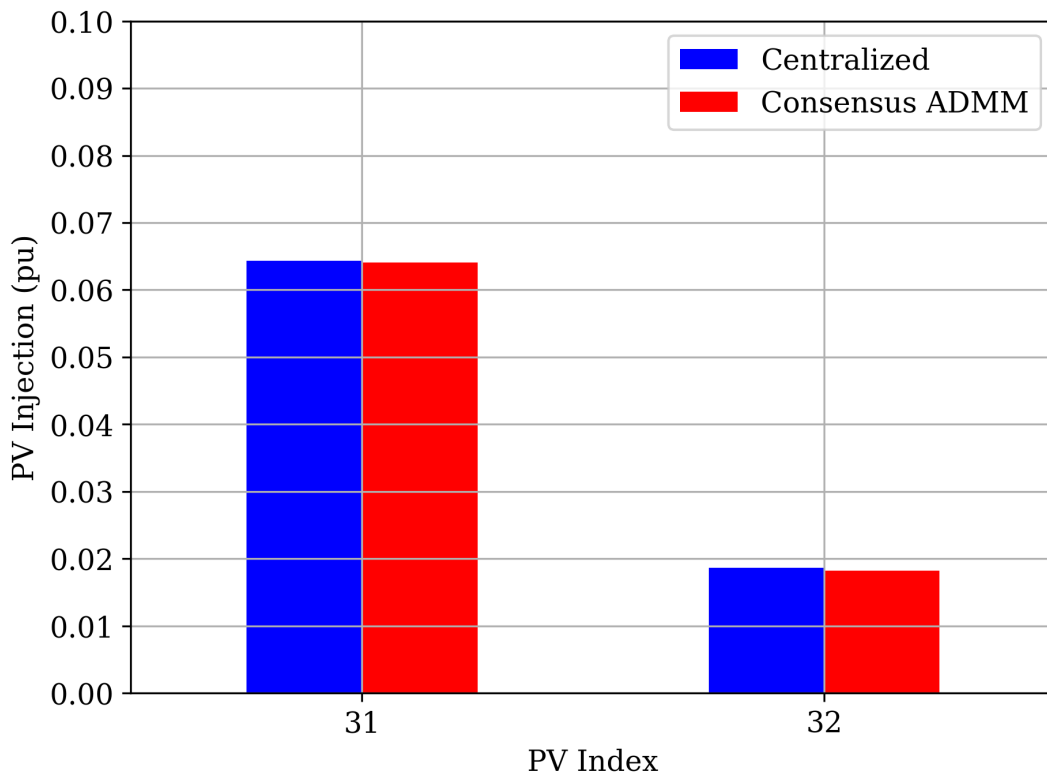
Σχήμα 6.2: Αντικειμενική Συνάρτηση, Περίπτωση 1, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

Επιπλέον, το ίδιο σχήμα παρουσιάζεται με μεγέθυνση μετά τις πρώτες 1000 επαναλήψεις για να αναδειχθεί η σύγκλιση της κατανεμημένης λύσης στην αντίστοιχη κεντρική τιμή.



Σχήμα 6.3: Αντικειμενική Συνάρτηση - Μεγέθυνση μετά από 1000 επαναλήψεις, Περίπτωση 1, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

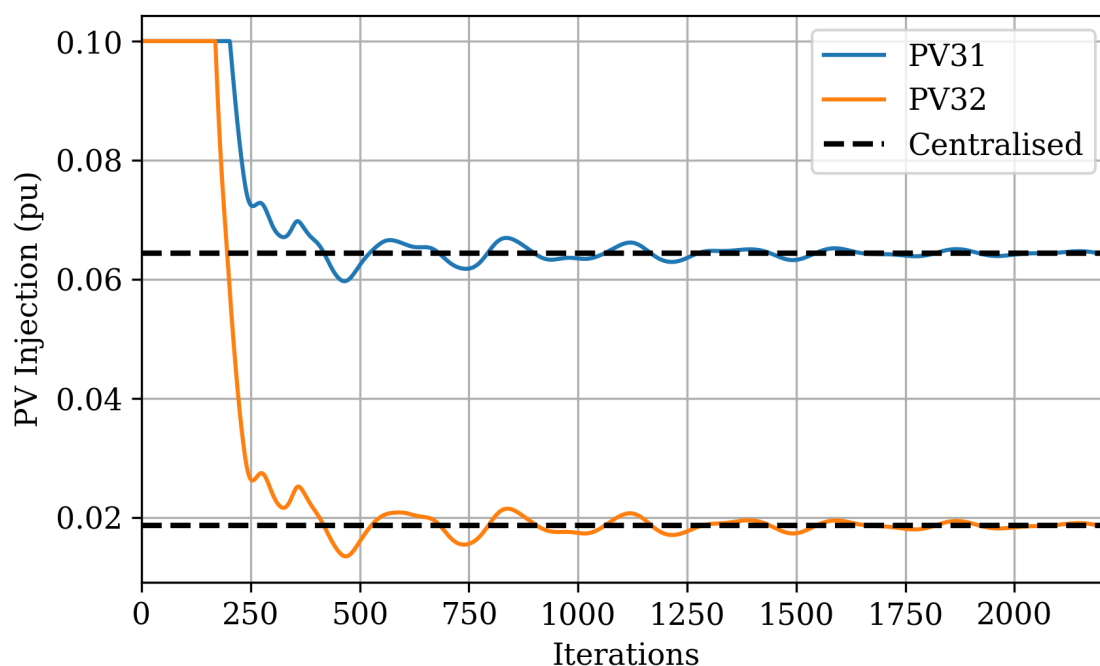
Επιπλέον, αξίζει να απεικονιστεί η σύγκριση των παραγωγών ενεργού ισχύος Φ/Β όπως υπολογίζονται από τον κατανεμημένο και τον κεντρικό αλγόριθμο αντίστοιχα. Για άλλη μια φορά, επιβεβαιώνουμε ότι τα κατανεμημένα αποτελέσματα για τις φωτοβολταϊκές εγχύσεις στο δίκτυο είναι σχεδόν ίδια με τα αντίστοιχα κεντρικά αποτελέσματα.



Σχήμα 6.4: Εγχύσεις Φ/Β, Περίπτωση 1, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

Τέλος, παρουσιάζεται η πρόοδος των εγχύσεων ενεργού ισχύος Φ/Β ως προς τις επαναλήψεις

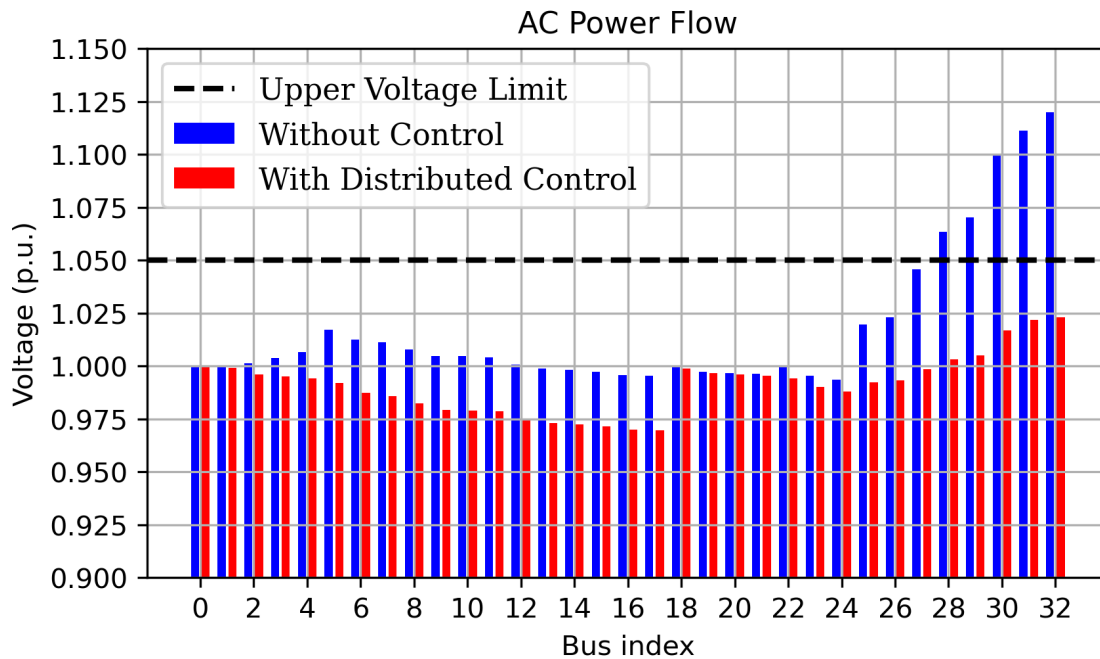
στο ακόλουθο σχήμα για την επαλήθευση της σύγκλισης των τιμών παραγωγής Φ/B με τις αντίστοιχες κεντρικές τιμές τους.



Σχήμα 6.5: Εξέλιξη των Εγχύσεων Φ/B, Περίπτωση 1, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι περίπου στις 500 επαναλήψεις όταν η αντικειμενική συνάρτηση της προτεινόμενης μεθόδου αρχίζει να ταλαντώνεται γύρω από την κεντρική τιμή, οι τιμές της παραγωγής φωτοβολταϊκών που εγχέονται στους κόμβους 30 και 31 αρχίζουν επίσης να ταλαντώνονται. Αυτό συμβαίνει επειδή οι γειτονικοί κόμβοι επικοινωνούν τις βέλτιστες τοπικές μεταβλητές τους και προσπαθούν να καταλήξουν σε μια συνεννοητική λύση που θα καθορίσει τελικά τις εγχύσεις των Φ/B τους.

Παρ' όλα αυτά, ένα πρόβλημα AC ροής ισχύος πρέπει να λυθεί ξανά λαμβάνοντας υπόψη τις εγχύσεις ενεργού ισχύος Φ/B που αποφασίστηκαν με την προτεινόμενη μέθοδο, για να εξεταστεί αν αντιμετωπίστηκε αποτελεσματικά το πρόβλημα υπερτάσης του σχήματος (6.1). Το παρακάτω σχήμα παρουσιάζει τις τάσεις κάθε κόμβου, όπως υπολογίζονται από τη ροή ισχύος AC χωρίς έλεγχο των Φ/B, καθώς και τις τάσεις κάθε κόμβου, όπως υπολογίζονται από τη ροή ισχύος AC λαμβάνοντας υπόψη τις φωτοβολταϊκές εγχύσεις που υπολογίζονται από την προτεινόμενη μέθοδο.



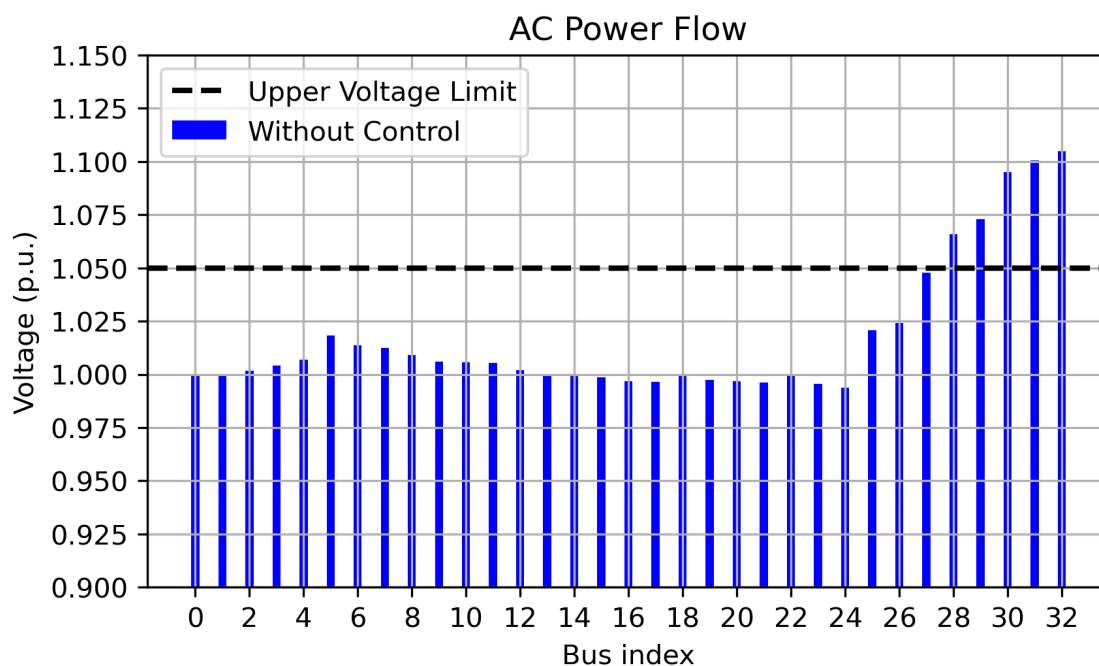
Σχήμα 6.6: AC Ροή Ισχύος - Τάσεις Με Κατανεμημένο Έλεγχο Φ/Β, Περίπτωση 1

Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει εύκολα, υπάρχει ένα κενό μεταξύ του ανώτερου ορίου τάσης και των τιμών τάσης με τον κατανεμημένο έλεγχο όπως υπολογίστην από τη ροή ισχύος AC. Αυτό το κενό δικαιολογείται από τη χρήση ενός γραμμικού μοντέλου (LinDistFlow) στη διαμόρφωση της μεθόδου μας. Ένα τέτοιο μοντέλο αναμένεται να αποκλίνει στην ακρίβειά του από ένα μοντέλο ροής ισχύος AC. Αυτό είναι προφανές εδώ όπου χρησιμοποιούμε τις εγχύσεις που λάβαμε από τη μέθοδο για να υπολογίσουμε τις προκύπτουσες ροές ισχύος χρησιμοποιώντας τη ροή ισχύος AC. Παρόλο που το μοντέλο LinDistFlow υπολογίζει ότι αυτές οι εγχύσεις αγγίζουν τα όρια τάσης, η ροή ισχύος AC αποκαλύπτει ότι στην πραγματικότητα οι τάσεις είναι περίπου 2.5% χαμηλότερα.

Δυστυχώς, αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα της περικοπτόμενης παραγωγής ενεργού ισχύος από τους Φ/Β που είναι εγκατεστημένα στο δίκτυο ήταν περισσότερη από ό, τι χρειαζόταν. Μία λύση σε αυτό το πρόβλημα θα ήταν η εκ νέου εκτέλεση της προτεινόμενης κατανεμημένης μεθόδου με ένα πιο «χαλαρό» ανώτατο όριο τάσης που μπορούμε να καθορίσουμε μετά την παρατήρηση του προαναφερθέντος κενού, όπως επιχειρείται στο [38]. Για παράδειγμα, αν θέσουμε το ανώτερο όριο τάσης στο 1.075 pu, θα έχουμε αποτελέσματα πιο κοντά στο ανώτατο όριο τάσης 1.05 pu στη ροή ισχύος AC. Με αυτόν τον τρόπο, θα επιτυχαγάναμε καλύτερα αποτελέσματα για την απαραίτητη περικοπτόμενη παραγωγή ενεργού ισχύος από τα Φ/Β του δικτύου.

6.4 Περίπτωση 2: 4 Φ/Β των 0.5 MW το καθένα στους κόμβους 29 έως 32

Σε αυτήν την περίπτωση, υποθέτουμε ότι υπάρχουν 4 Φ/Β συνδεδεμένα στους κόμβους 29 έως 32 του δικτύου, με δυνατότητα παραγωγής έως 0.5 MW το καθένα. Για άλλη μια φορά, εάν τα Φ/Β εισάγουν τη μέγιστη παραγωγή ενεργού ισχύος τους στους κόμβους που είναι εγκατεστημένα, τότε θα προκαλούνταν παραβιάσεις υπερτάσεων. Εδώ, το προφίλ τάσης του δικτύου είναι παρόμοιο με την Περίπτωση 1, αν και με χαμηλότερα επίπεδα τάσης στο τέλος των γραμμών. Αυτό συμβαίνει επειδή η φωτοβολταϊκή ισχύς συγκεντρώνεται λιγότερο στους πιο απομακρυσμένους κόμβους από τον feeder. Τα εν λόγω αποτελέσματα παρουσιάζονται στο ακόλουθο σχήμα:

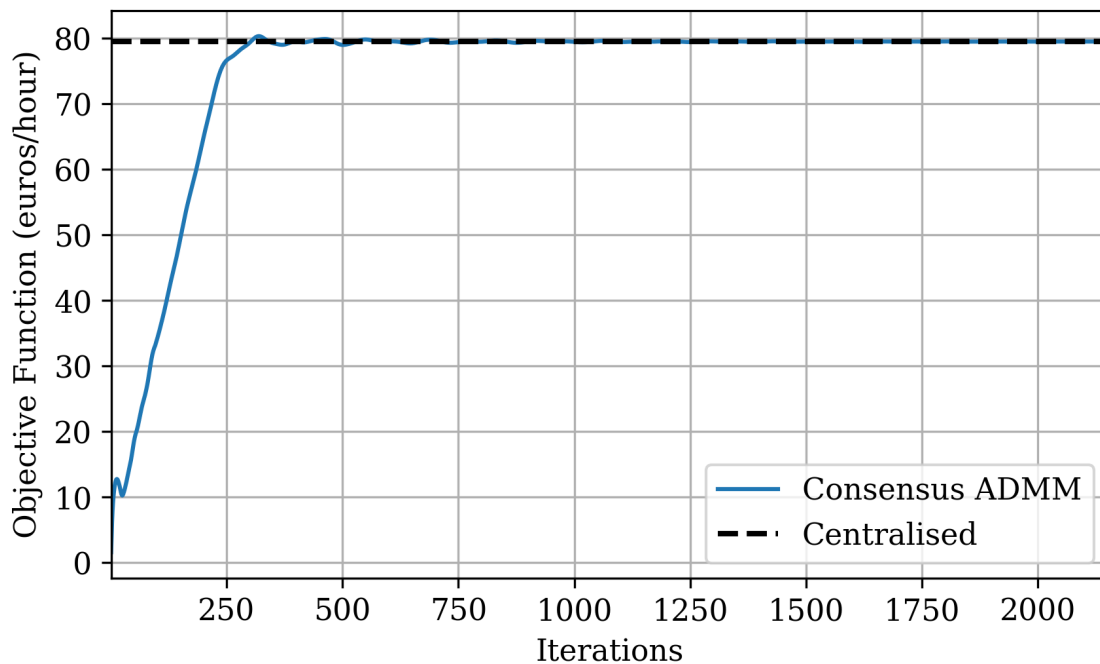


Σχήμα 6.7: AC Ροή Ισχύος - Τάσεις Χωρίς Έλεγχο Φ/Β, Περίπτωση 2

Ως εκ τούτου, χρησιμοποιούμε για άλλη μια φορά την προτεινόμενη μέθοδο αυτής της διπλωματικής εργασίας για την επίλυση του προβλήματος υπερτάσης που φαίνεται στο σχήμα (6.7).

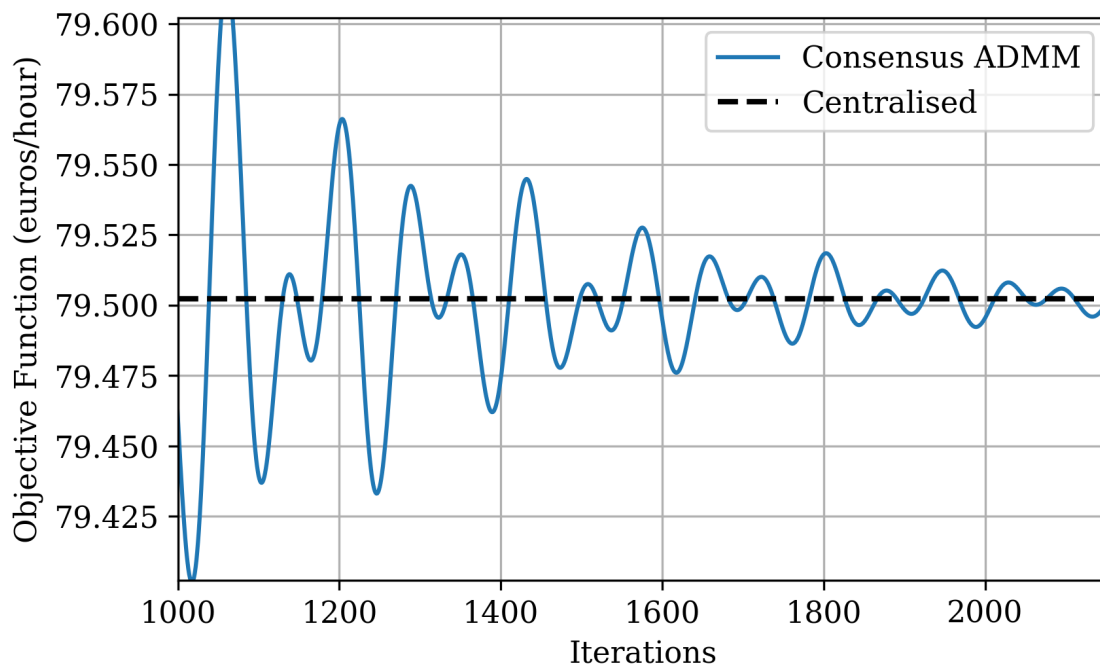
Σε αυτήν την περίπτωση, ορίζουμε το συντελεστή ποινής για τον προτεινόμενο αλγόριθμο σε $\rho = 500$. Με αυτόν τον τρόπο, συγκρίνουμε τα επικείμενα αποτελέσματα με αυτά που αποκτήθηκαν στην ενότητα (6.3). Εκτελούμε τόσο τον κεντρικό όσο και τον κατανεμημένο αλγόριθμο. Η προτεινόμενη μέθοδος συγκλίνει μετά από **2152 επαναλήψεις**.

Στη συνέχεια, παρατίθεται η πρόοδος της αντικειμενικής συνάρτησης του κατανομμένου αλγορίθμου ως προς τις επαναλήψεις που απαιτούνται για τη σύγκλιση της μεθόδου.



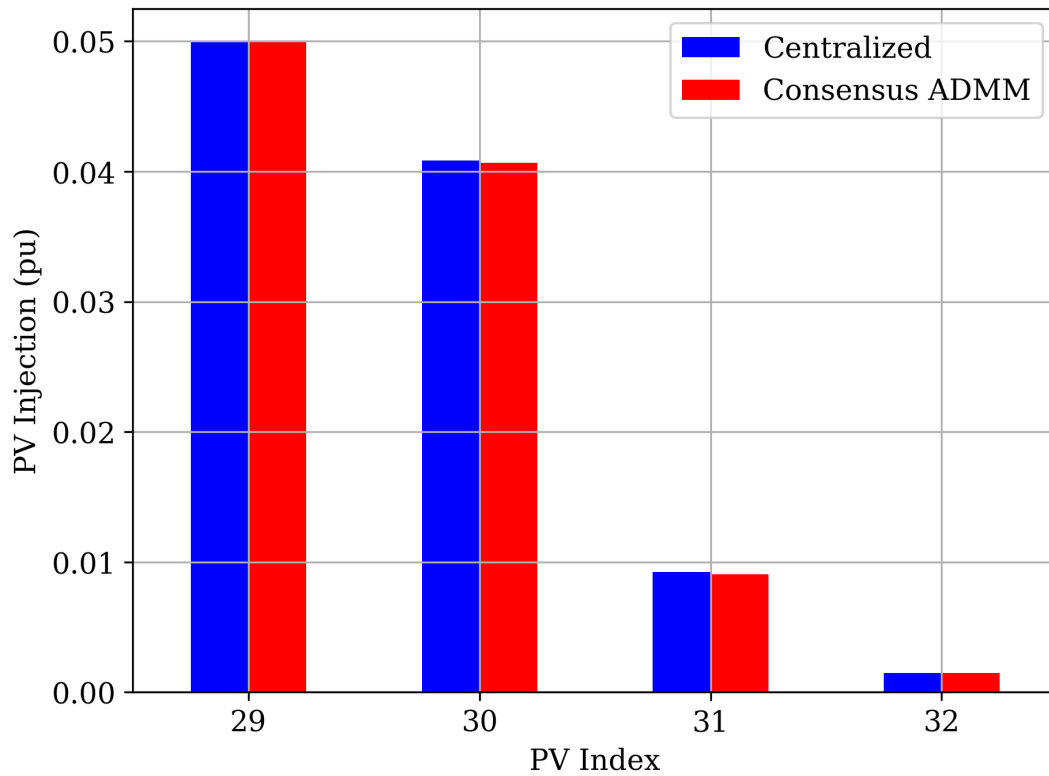
Σχήμα 6.8: Αντικειμενική Συνάρτηση, Περίπτωση 2, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

Είναι σαφές ότι η αντικειμενική συνάρτηση της προτεινόμενης μεθόδου συγκλίνει στην αντίστοιχη τιμή του κεντρικού αλγορίθμου. Για να επαληθευτεί αυτό, το ίδιο σχήμα εμφανίζεται μεγεθυμένο μετά τις πρώτες 1000 επαναλήψεις.

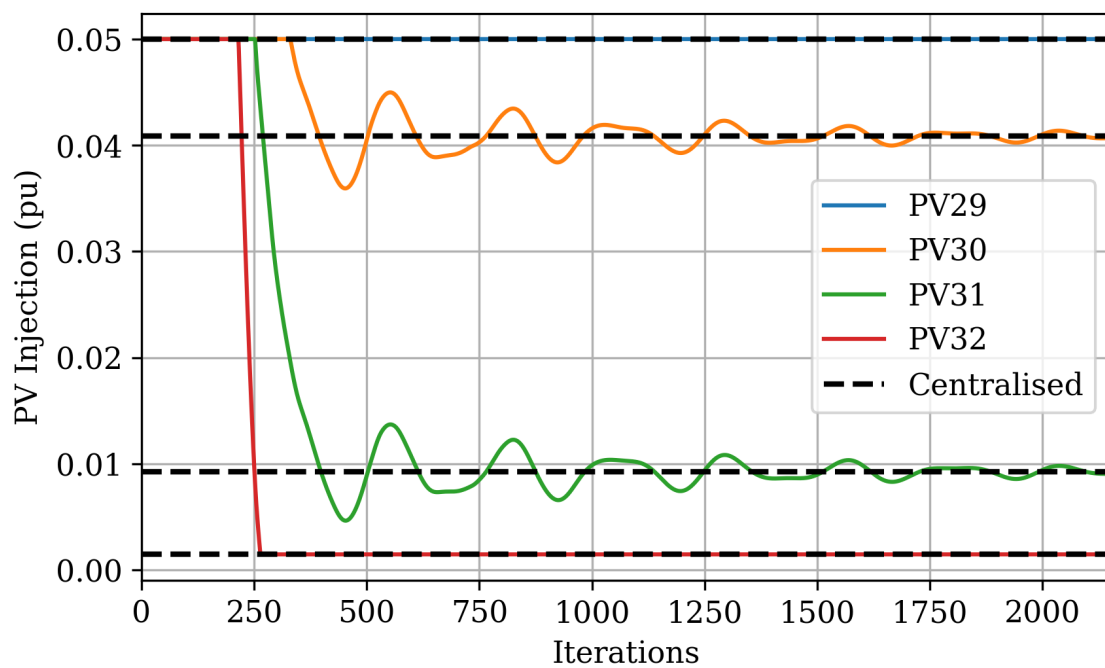


Σχήμα 6.9: Αντικειμενική Συνάρτηση - Μεγέθυνση μετά από 1000 επαναλήψεις, Περίπτωση 2, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

Στο σχήμα 6.10, συγκρίνουμε τις παραγωγές ενεργού ισχύος Φ/Β του κατανεμημένου και του κεντρικού αλγορίθμου, για να δείξουμε ότι είναι σχεδόν ίδιες. Επίσης, στο σχήμα 6.11 παρουσιάζεται η πρόοδος των εγχύσεων ενεργού ισχύος PV σε σχέση με τις επαναλήψεις.



Σχήμα 6.10: Εγχύσεις Φ/Β, Περίπτωση 2, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

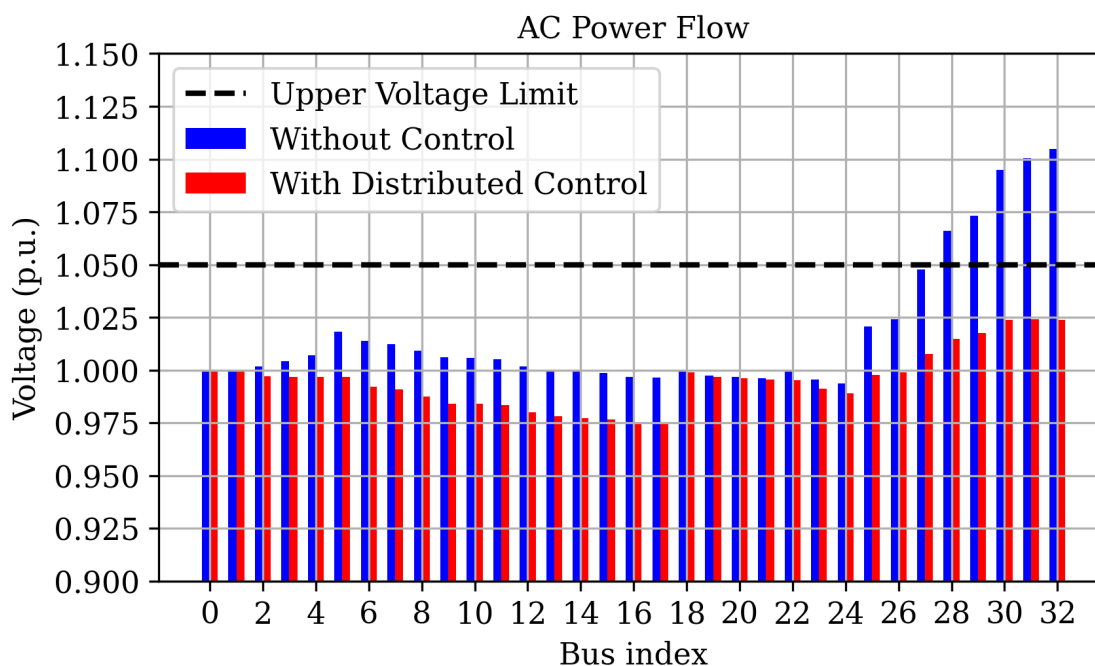


Σχήμα 6.11: Εξέλιξη των Εγχύσεων Φ/Β, Περίπτωση 2, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

Παρατηρούμε ότι όταν δεν απαιτείται περικοπή (βλέπε Κόμβο 29) ή ένας κόμβος πρέπει να περιορίσει σχεδόν ολόκληρη τη φωτοβολταϊκή του παραγωγή (βλέπε Κόμβο 32), τότε αυτοί οι κόμβοι βρίσκουν τις βέλτιστες τιμές της φωτοβολταϊκής τους έγχυσης πιο εύκολα.

Συμπερασματικά, η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου επιβεβαιώνεται καθώς οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης και οι τιμές κάθε φωτοβολταϊκής έγχυσης στον κατανεμημένο αλγόριθμο συγκλίνουν στις αντίστοιχες κεντρικές τιμές.

Στη συνέχεια, επιλύουμε ένα πρόβλημα AC ροής ισχύος, λαμβάνοντας υπόψη τις φωτοβολταϊκές εγχύσεις ενεργού ισχύος, όπως υπολογίζονται από τον προτεινόμενο κατανεμημένο αλγόριθμο. Το παρακάτω σχήμα καταδεικνύει ότι οι παραβιάσεις υπερτάσεων που καταγράφονταν στην περίπτωση που δεν ελέγχονταν οι εγχύσεις από τα Φ/Β, επιλύεται αποτελεσματικά με την αρωγή του κατανεμημένου αλγορίθμου.



Σχήμα 6.12: AC Ροή Ισχύος - Τάσεις Με Κατανεμημένο Έλεγχο Φ/Β, Περίπτωση 2

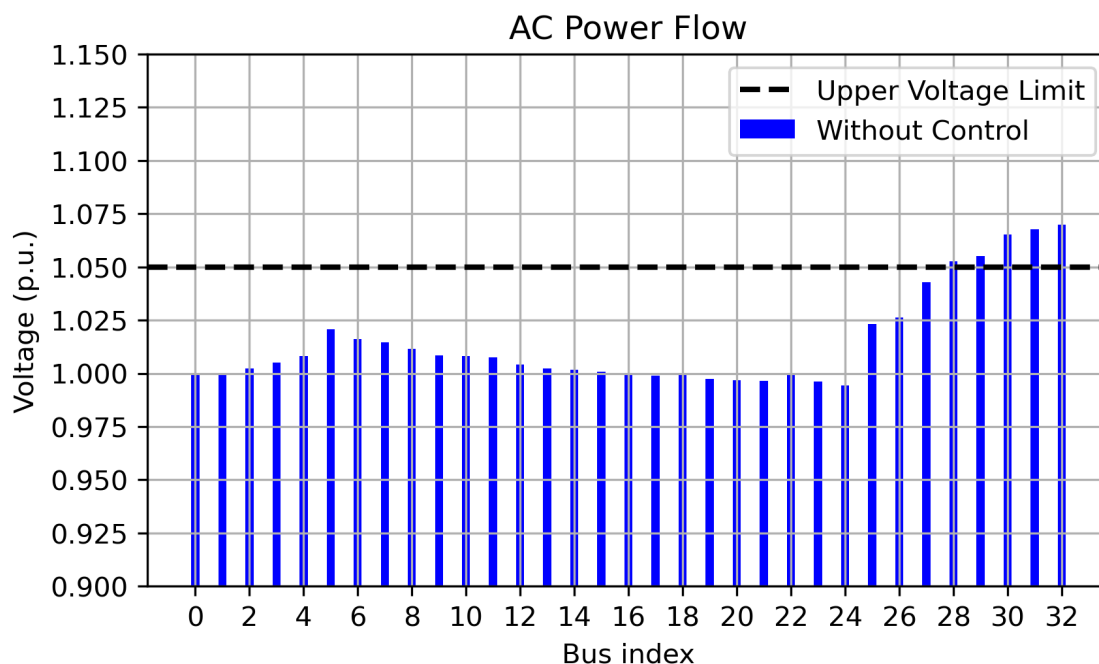
Παρατηρούμε ότι η Περίπτωση 2 συγκλίνει γρηγορότερα από την Περίπτωση 1. Αυτό το θέμα είναι στην πραγματικότητα πολύ περίπλοκο. Υπάρχουν δύο δυνάμεις που συγκρούονται σε αυτές τις προσομοιώσεις. Από τη μία πλευρά, οι παραβιάσεις τάσης που συμβαίνουν στην Περίπτωση 2 είναι μικρότερες από αυτές που συμβαίνουν στην Περίπτωση 1. Εκτός από αυτό, η συνολική περικοπτόμενη παραγωγή ενεργού ισχύος από τις Φ/Β μονάδες είναι μικρότερη (βλέπε πίνακα 6.1). Βάσει αυτού του γεγονότος, αναμένουμε τον προτεινόμενο αλγόριθμο να συγκλίνει γρηγορότερα.

Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν περισσότερα Φ/Β εγκατεστημένα στο δίκτυο. Ως εκ τούτου, περισσότεροι κόμβοι προσπαθούν να βρουν τη βέλτιστη περικοπτόμενη παραγωγή ενεργού ισχύος σε σχέση με τους περιορισμούς δικτύου και τους περιορισμούς συναίνεσης που εξασφαλίζουν τη συναινετική λύση μεταξύ των γειτονικών κόμβων. Βάσει αυτού του γεγονότος, αναμένουμε την προτεινόμενη μέθοδο να συγκλίνει πιο αργά.

Συνολικά, πιστεύουμε ότι η πρώτη δύναμη που περιγράφεται παραπάνω είναι πιο σημαντική από τη δεύτερη, επειδή η διαφορά στον αριθμό των Φ/Β που είναι εγκατεστημένα στο δίκτυο (από τη μία περίπτωση στην άλλη) δεν είναι αρκετά μεγάλη για να επικρατήσει η δεύτερη δύναμη.

6.5 Περίπτωση 3: 8 Φ/Β των 0.25 MW το καθένα στους κόμβους 25 έως 32

Εδώ, υποθέτουμε ότι υπάρχουν 8 Φ/Β συνδεδεμένα στους κόμβους 25 έως 32 του δικτύου, με δυνατότητα παραγωγής έως 0.25 MW το καθένα. Σε περίπτωση που τα φωτοβολταϊκά εγχύσουν τη μέγιστη παραγωγή ενεργού ισχύος τους στους κόμβους τους, παρατηρούνται παραβιάσεις υπερτάσεων στο δίκτυο παρόμοιες με αυτές που περιγράφηκαν στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, αλλά ακόμη μικρότερες για τον ίδιο λόγο που εξηγείται στην Περίπτωση 2. Τα αποτελέσματα δίνονται στην ακόλουθο σχήμα:



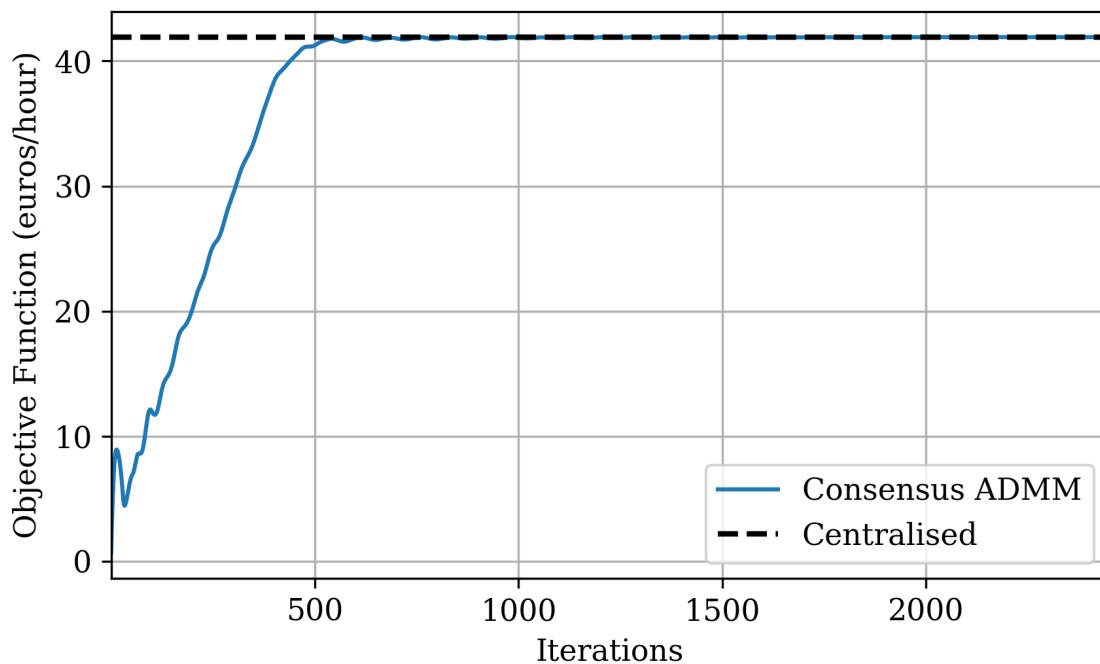
Σχήμα 6.13: AC Ροή Ισχύος - Τάσεις Χωρίς Έλεγχο Φ/Β, Περίπτωση 3

Για άλλη μια φορά, χρησιμοποιούμε την προτεινόμενη μέθοδο αυτής της διπλωματικής εργασίας για την επίλυση του προβλήματος υπερτάσης που φαίνεται στο σχήμα (6.13).

6.5.1 Συντελεστής ποιικής $\rho = 500$

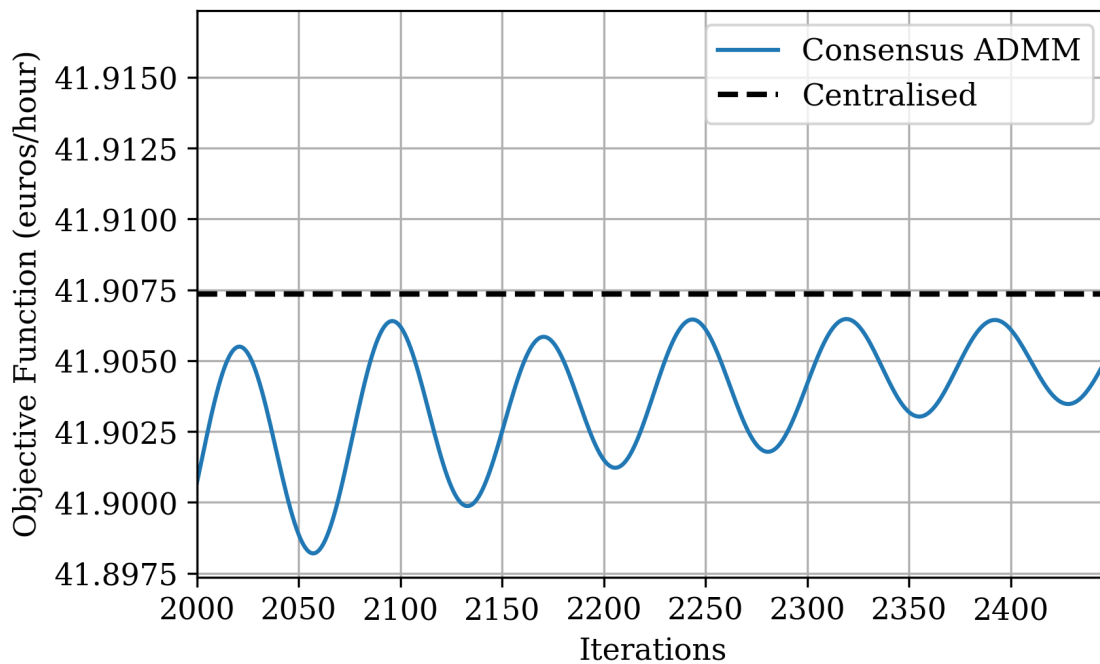
Πρώτον, ορίζουμε το συντελεστή ποιικής για τον προτεινόμενο αλγόριθμο $\rho = 500$ γιατί θέλουμε να συγκρίνουμε τα επικείμενα αποτελέσματα με αυτά που αποκτήθηκαν στην ενότητα (6.3) και στην ενότητα (6.4). Η προτεινόμενη μέθοδος συγκλίνει μετά από **2447 επαναλήψεις**.

Ακολουθως, παρουσιάζεται η πρόοδος της αντικειμενικής συνάρτησης του κατανευμένου αλγορίθμου.



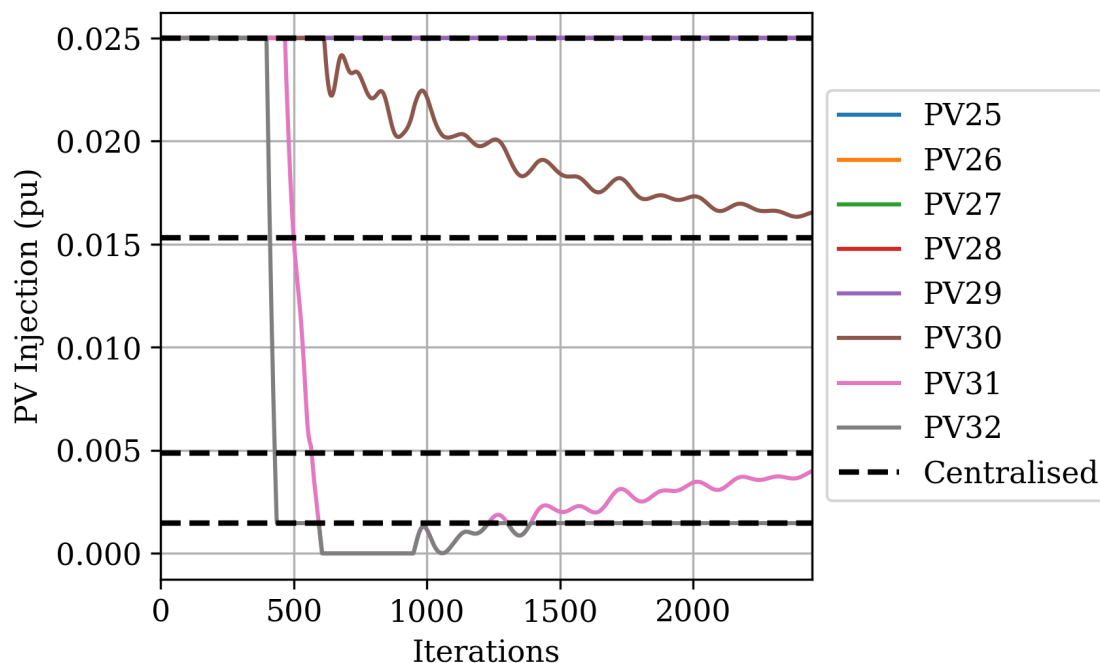
Σχήμα 6.14: Αντικειμενική Συνάρτηση, Περίπτωση 3, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

Αν κάνουμε ζουμ μετά τις πρώτες 2000 επαναλήψεις στο προηγούμενο σχήμα παίρνουμε ότι:



Σχήμα 6.15: Αντικειμενική Συνάρτηση - Μεγέθυνση μετά από 2000 επαναλήψεις, Περίπτωση 3, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

Όπως μπορεί κανείς να δει εύκολα, η αντικειμενική συνάρτηση δεν φτάνει στη βέλτιστη τιμή της. Λόγω αυτού του γεγονότος, οι τιμές των φωτοβολταϊκών εγχύσεων φαίνεται να διαφέρουν σημαντικά από τις αντίστοιχες κεντρικές τιμές (βλέπε Σχήμα 6.16). Επομένως, θεωρούμε ότι η μέθοδος ήταν ανεπιτυχής.



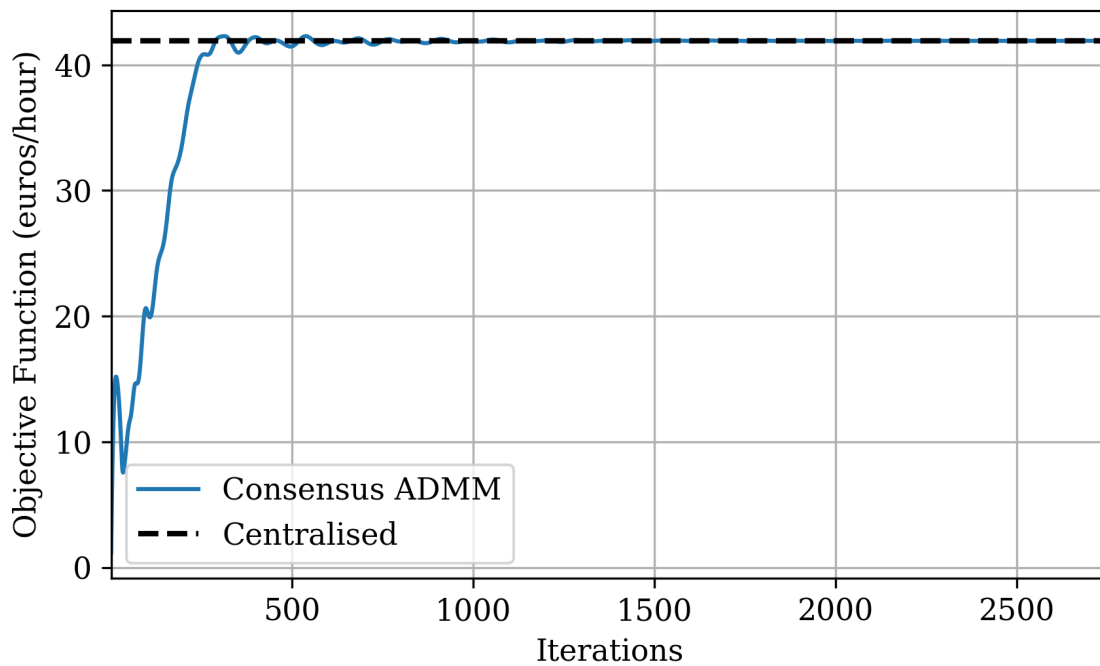
Σχήμα 6.16: Εξέλιξη των Εγχύσεων Φ/Β, Περίπτωση 3, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

Για να βοηθήσουμε τη μέθοδο να επιτύχει τη βέλτιστη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης, προσπαθούμε να αυξήσουμε το συντελεστή ποινής σε $\rho = 850$. Με αυτόν τον τρόπο, προσπαθούμε να αυξήσουμε το γινόμενο του παράγοντα ποινής με τη διαφορά μεταξύ τοπικών και καθολικών μεταβλητών (βλέπε εξισώσεις 4.56 - 4.61). Ως εκ τούτου, αυξάνουμε το ρυθμό που κάθε κόμβος προσπαθεί να επιτύχει τη βέλτιστη τιμή της δικής του αντικειμενικής συνάρτησης.

6.5.2 Συντελεστής ποινής $\rho = 850$

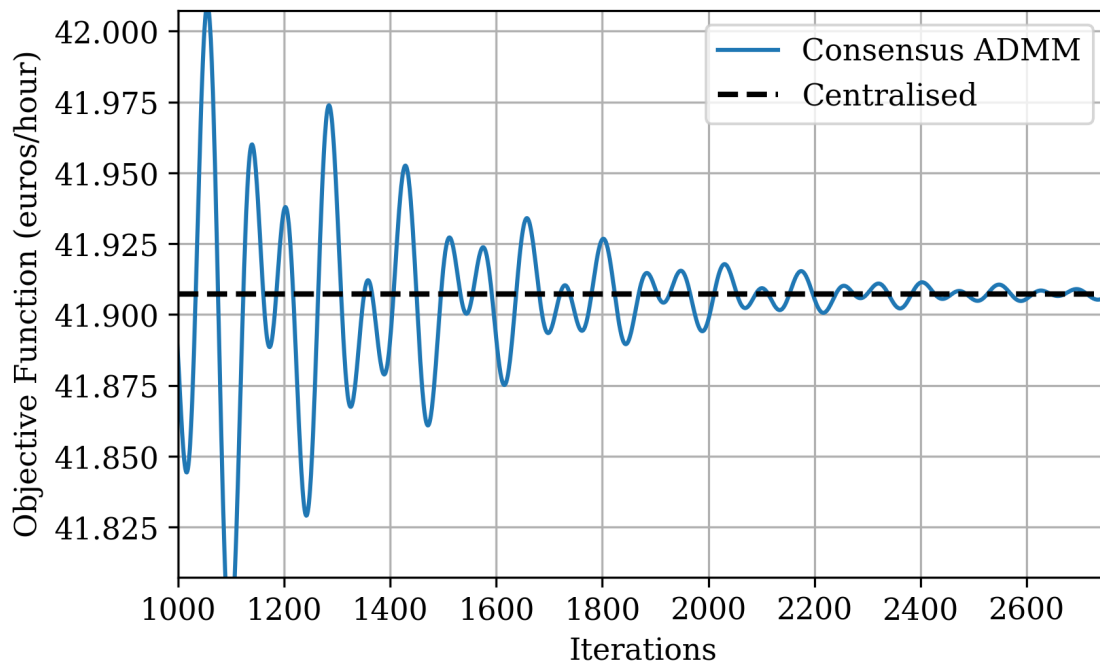
Εμπειρικά, διαπιστώνεται ότι ο καθορισμός του συντελεστή ποινής για τον προτεινόμενο αλγόριθμο στην τιμή $\rho = 850$ μας δίνει ένα καλό αντάλλαγμα μεταξύ της ταχύτητας σύγκλισης και ακρίβειας. Η προτεινόμενη μέθοδος συγκλίνει μετά από **2753 επαναλήψεις**.

Στη συνέχεια, εμφανίζεται η πρόοδος της αντικειμενικής λειτουργίας του κατανεμημένου αλγορίθμου.



Σχήμα 6.17: Αντικειμενική Συνάρτηση, Περίπτωση 3, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$

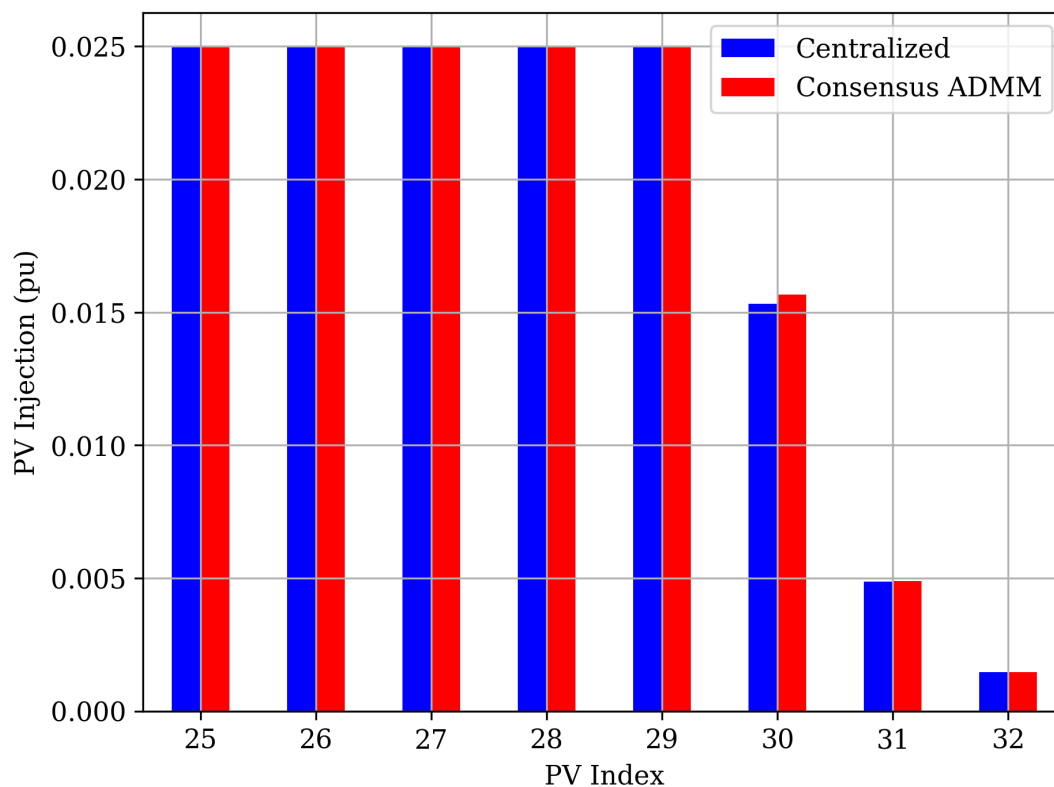
Επιπλέον, το ίδιο σχήμα παρουσιάζεται μεγεθυμένο μετά τις πρώτες 1000 επαναλήψεις για να διευκρινιστεί η σύγκλιση της κατανεμημένης λύσης στην αντίστοιχη κεντρική τιμή.



Σχήμα 6.18: Αντικειμενική Συνάρτηση - Μεγέθυνση μετά από 1000 επαναλήψεις, Περίπτωση 3, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$

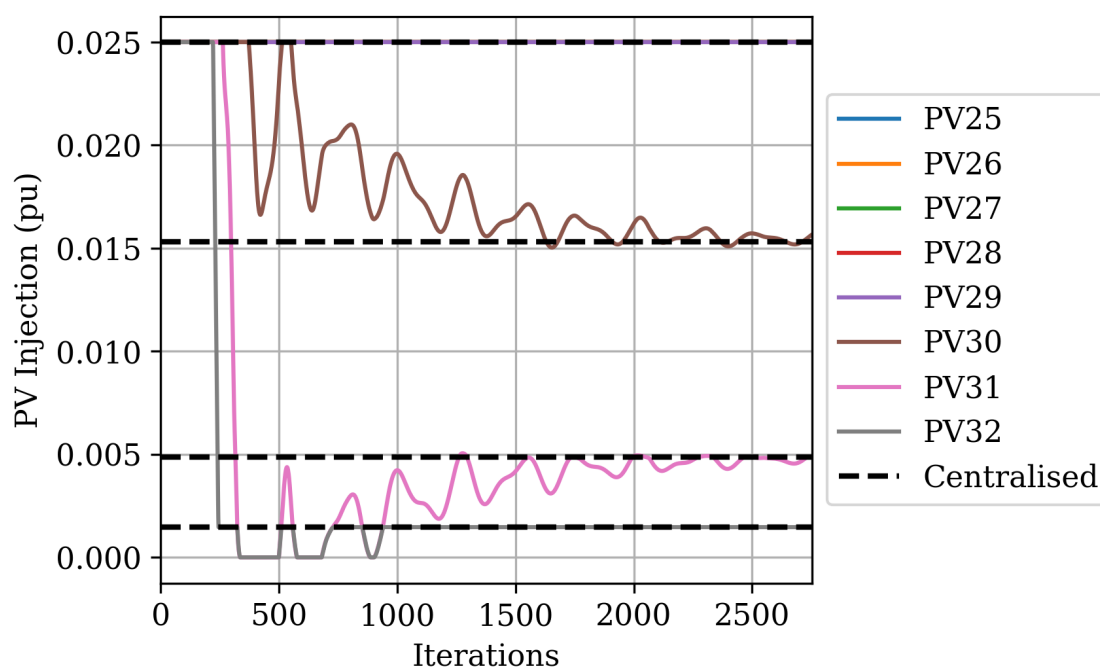
Επιπλέον, αξίζει να δείξουμε τη σύγκριση της παραγωγής ενεργού ισχύος Φ/B μεταξύ

του κατανεμημένου και του κεντρικού αλγορίθμου.



Σχήμα 6.19: Εγχύσεις Φ/Β, Περίπτωση 3, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$

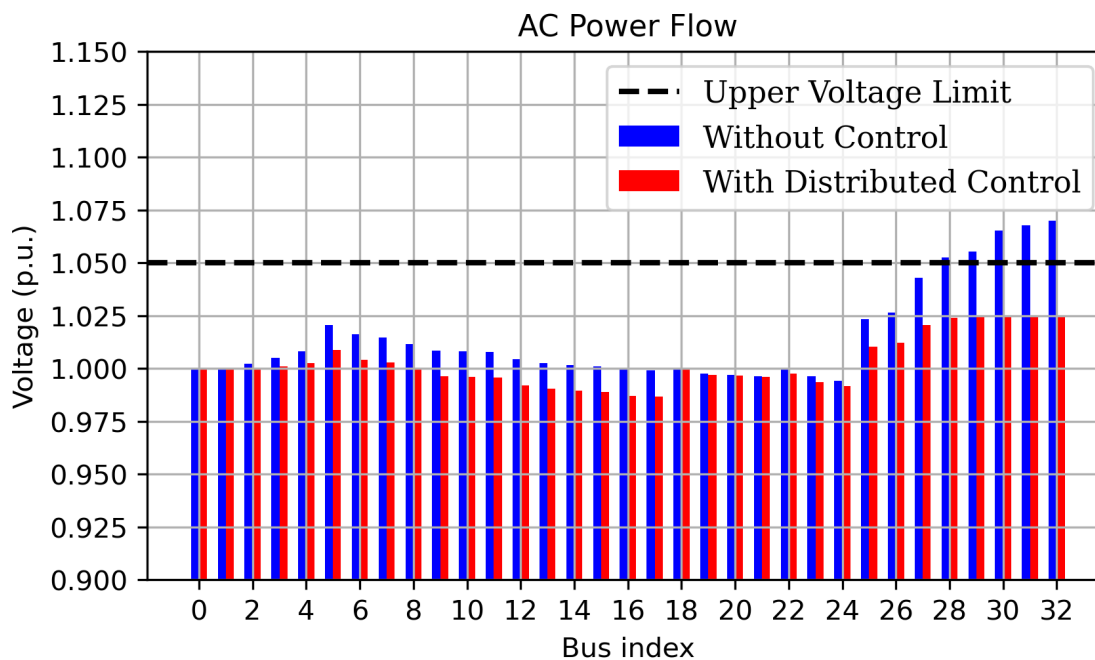
Τέλος, η πρόοδος των εγχύσεων ενεργού ισχύος Φ/Β παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 6.20: Εξέλιξη των Εγχύσεων Φ/Β, Περίπτωση 3, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$

Παρατηρώντας τα σχήματα (6.19) και (6.20), είναι εμφανής η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου για ακόμα μία φορά καθώς οι τιμές κάθε φωτοβολταϊκής έγχυσης στον κατανεμημένο αλγόριθμο συγκλίνουν στις αντίστοιχες κεντρικές τιμές.

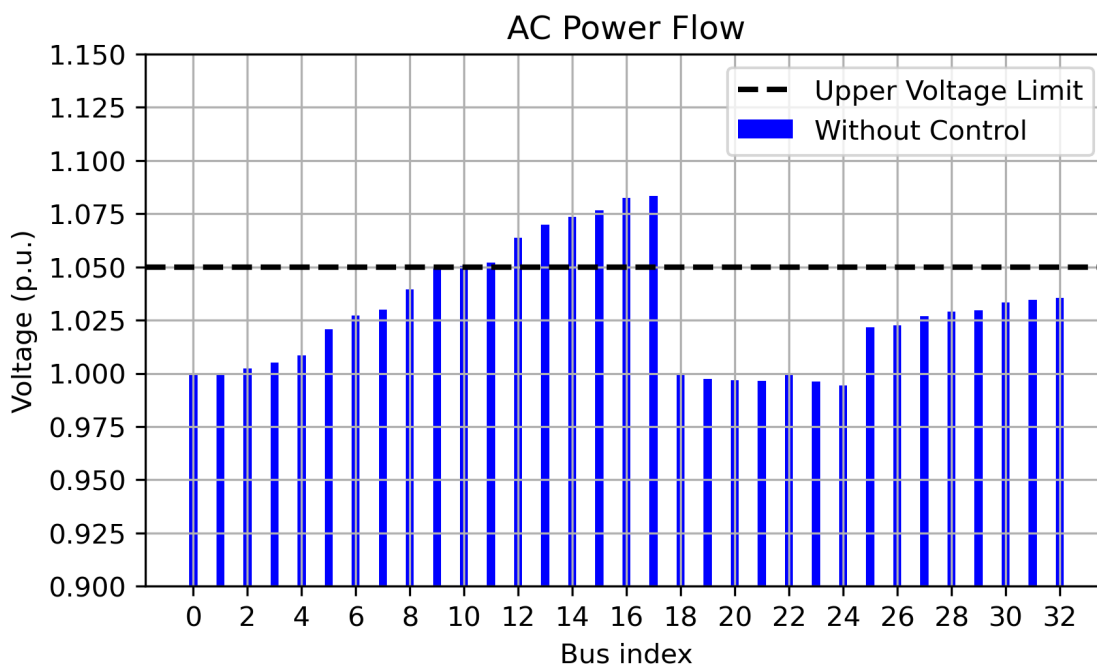
Παρόλα αυτά, ένα πρόβλημα AC ροής ισχύος πρέπει να λυθεί ξανά χρησιμοποιώντας τις φωτοβολταϊκές εγχύσεις ενεργού ισχύος, όπως υπολογίστηκαν με τη προτεινόμενη μέθοδο, προκειμένου να εξεταστεί ότι οι υπερτάσεις αντιμετωπίστηκαν αποτελεσματικά. Το παρακάτω σχήμα παρουσιάζει τις τάσεις κάθε κόμβου, όπως υπολογίζονται από τη ροή ισχύος AC χωρίς και με τη συνεισφορά της προτεινόμενης μέθοδο.



Σχήμα 6.21: AC Ροή Ισχύος - Τάσεις Με Κατανεμημένο Έλεγχο Φ/Β, Περίπτωση 3

6.6 Περίπτωση 4: 16 Φ/Β των 0.125 MW το καθένα στους κόμβους 10 έως 17 και 25 έως 32

Σε αυτήν την περίπτωση, υποθέτουμε ότι υπάρχουν 16 Φ/Β συνδεδεμένα στους κόμβους 10 έως 17 και 25 έως 32 του δικτύου, με δυνατότητα παραγωγής έως 0.125 MW το καθένα. Ωστόσο, εάν τα φωτοβολταϊκά εισάγουν τη μέγιστη παραγωγή ενεργού ισχύος τους στους κόμβους που είναι εγκατεστημένα, θα προκαλούνταν παραβιάσεις υπερτάσεων στο δίκτυο. Μέσω της επίλυσης ενός προβλήματος AC ροής ισχύος. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο ακόλουθο σχήμα:

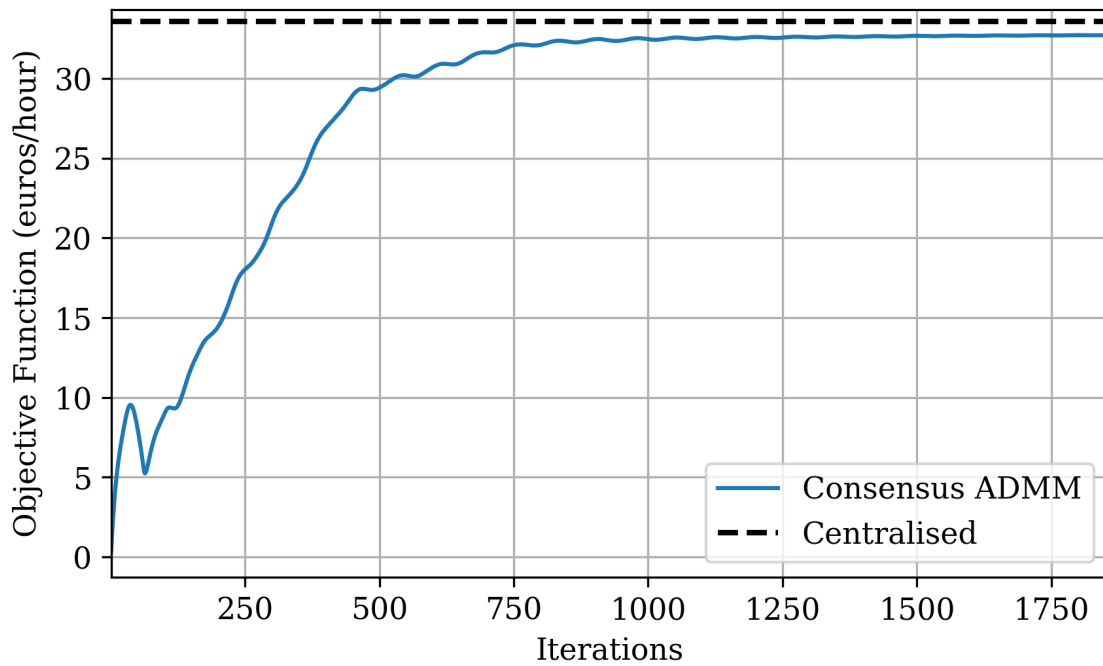


Σχήμα 6.22: AC Ροή Ισχύος - Τάσεις Χωρίς Έλεγχο Φ/Β, Περίπτωση 4

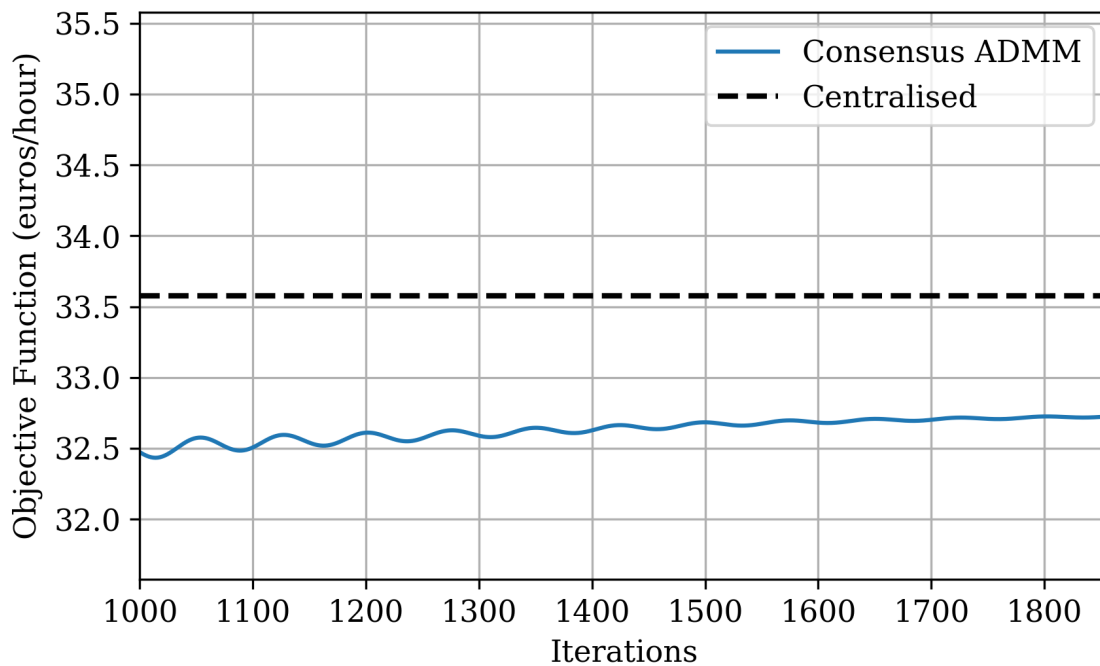
Σε αυτήν την περίπτωση, βλέπουμε ότι οι παραβιάσεις τάσης συμβαίνουν μόνο στους κόμβους 12-17 και όχι στους κόμβους 25-32. Και πάλι ωστόσο, χρησιμοποιείται η προτεινόμενη μέθοδος αυτής της διπλωματικής εργασίας με σκοπό την επίλυση του προβλήματος υπερτάσης που φαίνεται στο σχήμα (6.22). Επιπλέον, καταδεικνύεται η εγκυρότητα του αλγόριθμου που βασίζεται στον General Form Consensus ADMM, μέσω της σύγκρισης των αποτελεσμάτων του με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του κεντρικού αλγόριθμου.

6.6.1 Συντελεστής ποινής $\rho = 500$ και $\rho = 850$

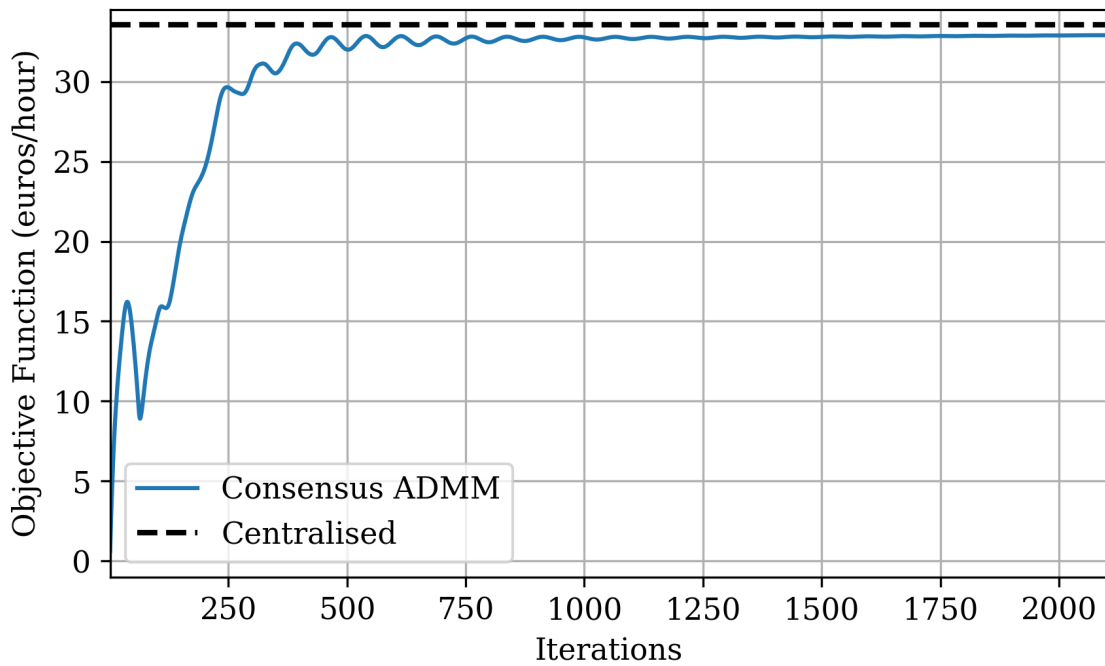
Με τον ίδιο τρόπο όπως στην Περίπτωση 3, ο ορισμός του συντελεστή ποινής σε $\rho = 500$ ή σε $\rho = 850$ δεν θα ήταν αρκετός ώστε η αντικειμενική συνάρτηση να φτάσει στη βέλτιστη τιμή της. Για να υποστηρίξουμε αυτόν τον ισχυρισμό, τρέχουμε τόσο τον κεντρικό όσο και τον κατανεμημένο αλγόριθμο για $\rho = 500$ και $\rho = 850$ και παρουσιάζουμε την πρόοδο της αντικειμενικής συνάρτησης για να δείξουμε ότι ο συντελεστής ποινής δεν είναι αρκετά υψηλός και ως απόρροια αυτού η μέθοδος αποκλίνει.



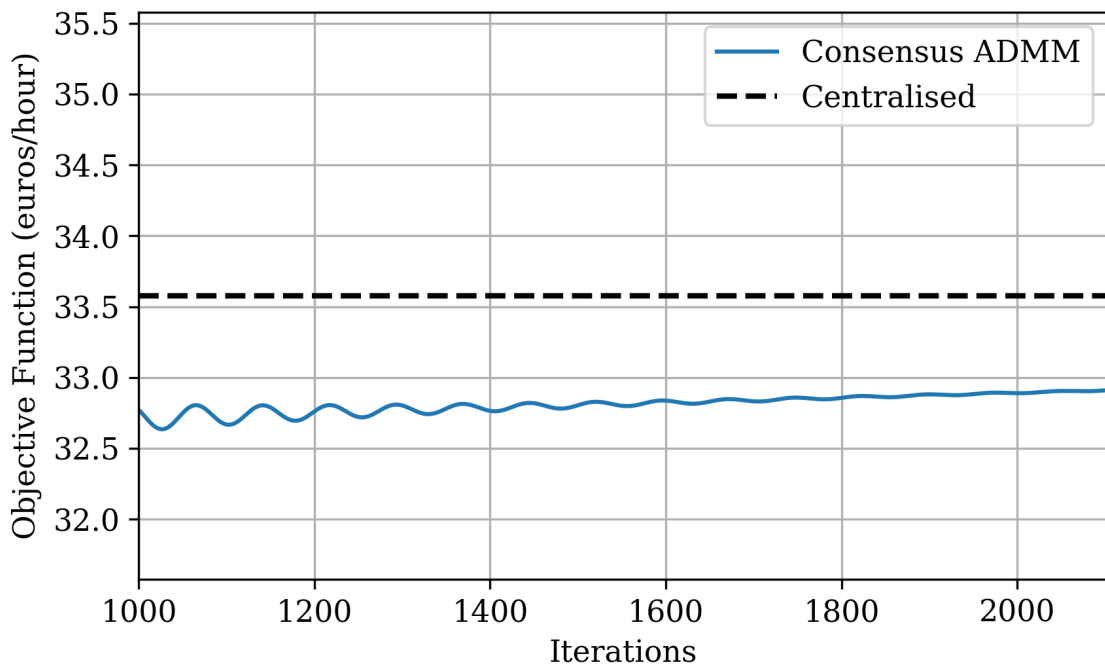
Σχήμα 6.23: Αντικειμενική Συνάρτηση, Case4, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$



Σχήμα 6.24: Αντικειμενική Συνάρτηση - Μεγέθυνση μετά από 1000 επαναλήψεις, Περίπτωση 4, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$



Σχήμα 6.25: Αντικειμενική Συνάρτηση, Περίπτωση 4, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$



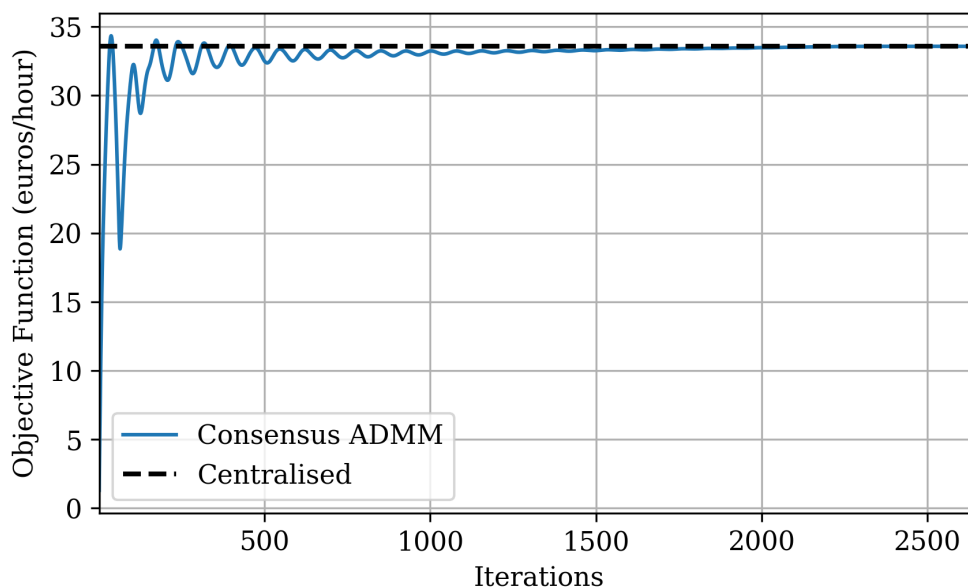
Σχήμα 6.26: Αντικειμενική Συνάρτηση - Μεγέθυνση μετά από 1000 επαναλήψεις, Περίπτωση 4, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$

Για να βοηθήσουμε τη μέθοδο να επιτύχει τη βέλτιστη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης, αυξάνουμε το συντελεστή ποινής σε $\rho = 1800$.

6.6.2 Συντελεστής ποινής $\rho = 1800$

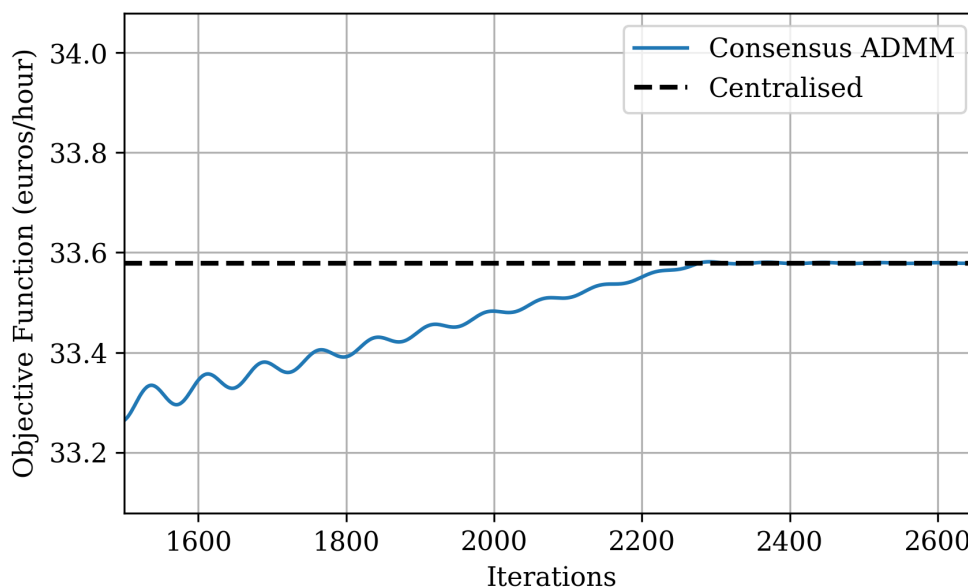
Εμπειρικά, διαπιστώσαμε ότι αν θέσουμε το συντελεστή ποινής για τον προτεινόμενο αλγόριθμο σε $\rho = 1800$ παίρνουμε ένα καλό αποτέλεσμα μεταξύ ταχύτητας σύγκλισης και ακρίβειας. Η προτεινόμενη μέθοδος συγκλίνει μετά από **2655 επαναλήψεις**.

Ακολούθως, παρουσιάζεται η πρόοδος της αντικειμενικής λειτουργίας της κατανεμμένης μεθόδου.



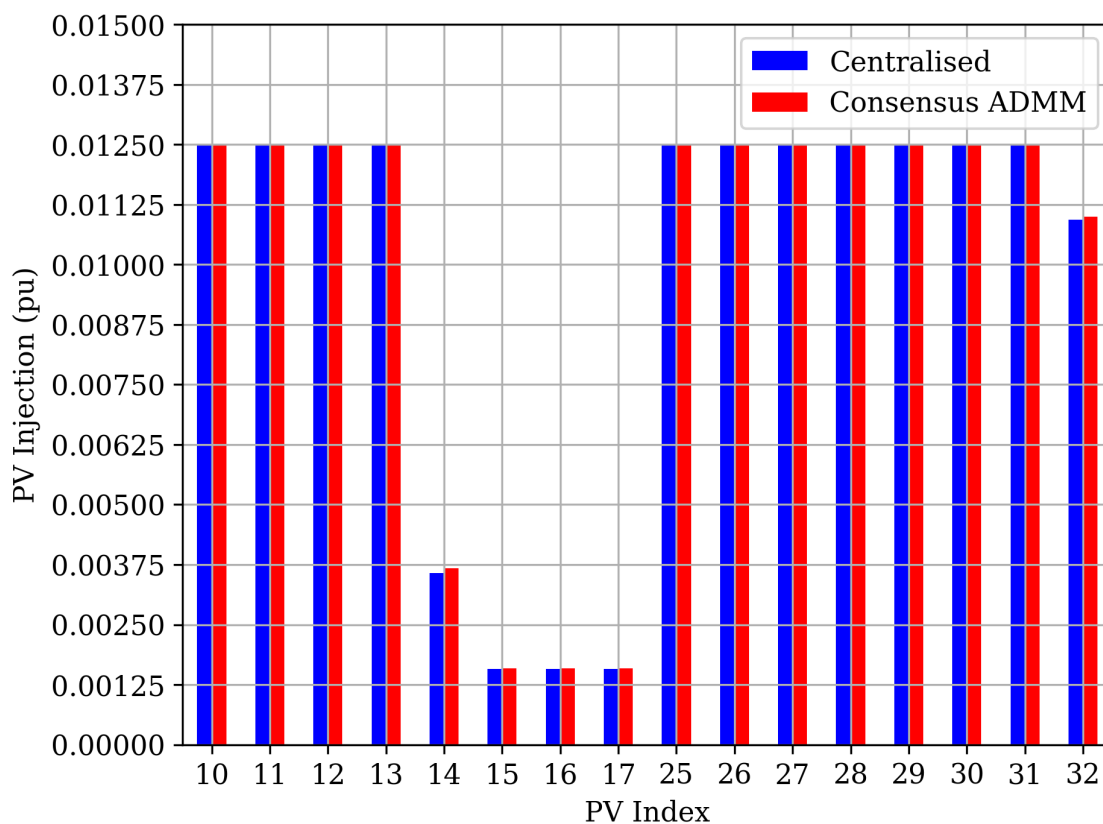
Σχήμα 6.27: Αντικειμενική Συνάρτηση, Περίπτωση 4, $\rho = 1800$, $\epsilon = 10^{-3}$

Επιπλέον, το ίδιο σχήμα παρουσιάζεται μεγεθυμένο μετά τις πρώτες 1500 επαναλήψεις για να διευκρινιστεί η σύγκλιση της κατανεμμένης λύσης στην κεντρική τιμή.



Σχήμα 6.28: Αντικειμενική Συνάρτηση - Μεγέθυνση μετά από 1500 επαναλήψεις, Περίπτωση 4, $\rho = 1800$, $\epsilon = 10^{-3}$

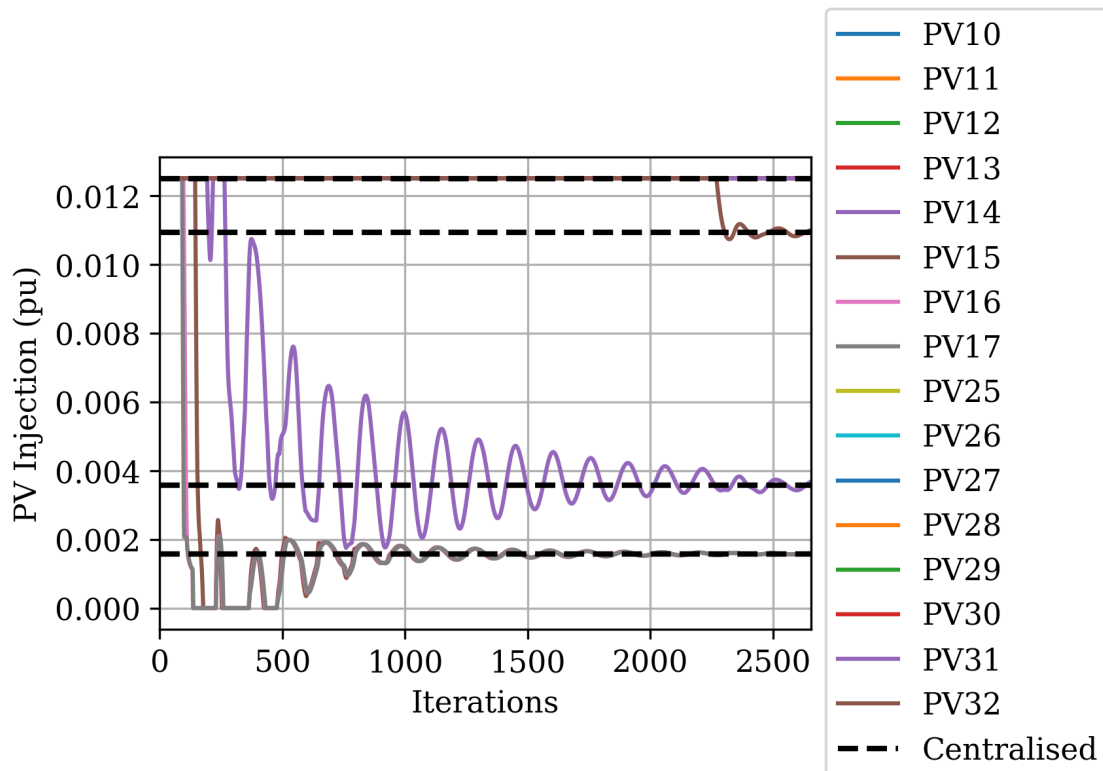
Επιπλέον, αξίζει να απεικονιστεί η σύγκριση της παραγωγής ενεργού ισχύος PV μεταξύ του κατανεμημένου και του κεντρικού αλγορίθμου.



Σχήμα 6.29: Εγχύσεις Φ/B, Περίπτωση 4, $\rho = 1800$, $\epsilon = 10^{-3}$

Αυτό που πρέπει να συζητηθεί εδώ, είναι ότι τόσο ο προτεινόμενος όσο και ο κεντρικός αλγόριθμος, οι οποίοι χρησιμοποιούν το γραμμικοποιημένο μοντέλο ροής ισχύος LinDistFlow, αποφασίζουν ότι η παραγωγή φωτοβολταϊκού στον κόμβο 32 πρέπει να περιοριστεί. Ωστόσο, παρατηρώντας τα επίπεδα τάσης στο πρόβλημα AC ροής ισχύος χωρίς έλεγχο Φ/B (βλέπε 6.22) είναι σαφές ότι δεν υπάρχει παραβίαση τάσης. Αυτό επιβεβαιώνει για άλλη μια φορά το συμπέρασμά μας σχετικά με την απόκλιση στην ακρίβεια του μοντέλου LinDistFlow.

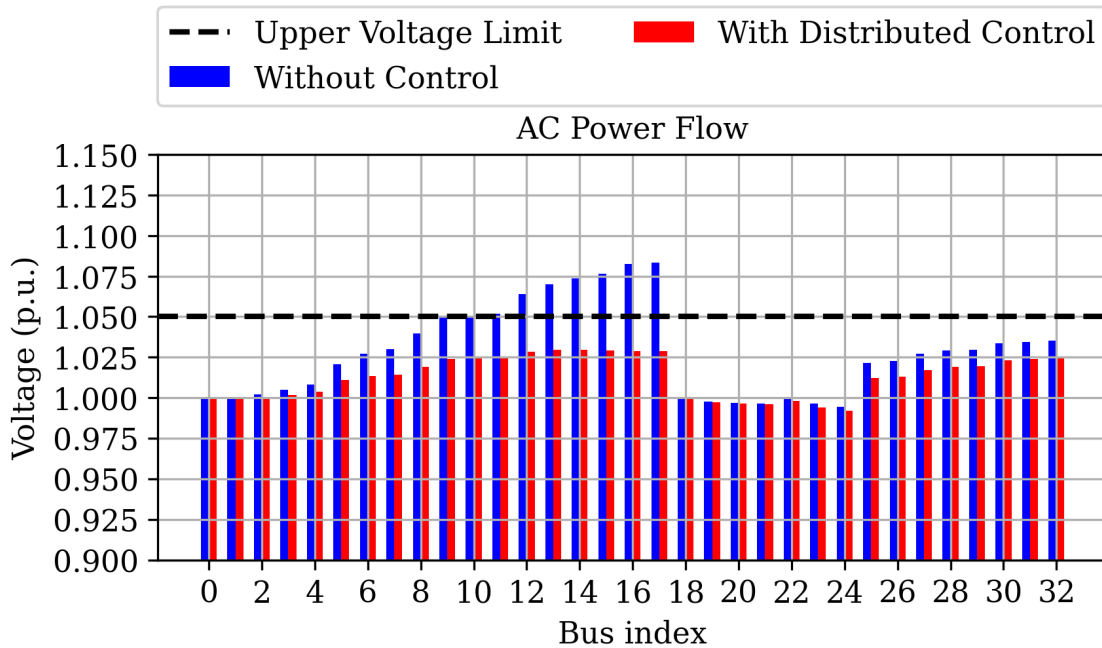
Τέλος, η πρόοδος των εγχύσεων ενεργού ισχύος Φ/B παρουσιάζεται στο ακόλουθο γράφημα για την επαλήθευση της σύγκλισης των τιμών παραγωγής PV στις αντίστοιχες κεντρικές τιμές τους.



Σχήμα 6.30: Εξέλιξη των Εγχύσεων Φ/Β, Περίπτωση 4, $\rho = 1800$, $\epsilon = 10^{-3}$

Συμπερασματικά, η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου επιβεβαιώνεται καθώς οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης και οι τιμές κάθε φωτοβολταϊκής έγχυσης στον καταναμημένο αλγόριθμο συγκλίνουν στις αντίστοιχες κεντρικές τιμές.

Παρ' όλα αυτά, ένα πρόβλημα AC ροής ισχύος πρέπει να λυθεί ξανά με βάση τις νέες εγχύσεις ενεργού ισχύος PV που αποφασίστηκαν με την καταναμημένη μέθοδο, προκειμένου να εξεταστεί ότι η κατάσταση υπερτάσης αντιμετωπίστηκε αποτελεσματικά. Η απόδοση της μεθόδου φαίνεται στο κάτωθεν σχήμα.



Σχήμα 6.31: AC Ροή Ισχύος - Τάσεις Με Κατανεμημένο Έλεγχο Φ/Β, Περίπτωση 4

6.7 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Σε αυτήν την ενότητα, παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα, σε μορφή πινάκων, που αποκτήθηκαν τόσο από τον κατανεμημένο όσο και από τον κεντρικό αλγόριθμο σε κάθε σενάριο που μελετάται. Υπενθυμίζουμε ότι αυτά τα αποτελέσματα αναφέρονται στην αρχικοποίηση του προτεινόμενου αλγορίθμου χωρίς να ληφθούν υπόψη τα εγκατεστημένα φωτοβολταϊκά στο δίκτυο, και λαμβάνοντας υπόψη μόνο το 20% των ονομαστικών φορτίων του δικτύου. Παρουσιάζουμε αποτελέσματα και για τις δύο ανοχές (tolerances) $\epsilon = 10^{-3}$ και $\epsilon = 10^{-4}$.

Στους ακόλουθους πίνακες, παρουσιάζουμε την τιμή της έγχυσης κάθε φωτοβολταϊκού, την τιμή της συνολικής περικοπής και την τιμή της αντικεμενικής συνάρτησης ανά περίπτωση τόσο για τον κεντρικό όσο και για τον κατανεμημένο αλγόριθμο. Η συνολική περικοπή υπολογίζεται ως εξής:

$$Total\ Curtailment = Total\ Production\ Capability - Total\ Power\ Injection$$

όπου Total Production Capability είναι 2 MW ή 0.2 pu.

Επιπλέον, υπολογίζουμε το σχετικά σφάλματα μεταξύ της κατανεμημένης μεθόδου και της κεντρικής μεθόδου ως εξής:

$$Error(\%) = \frac{Distributed\ Result - Centralised\ Result}{Centralised\ Result} \cdot 100\%$$

Τέλος, καταγράφουμε τον συνολικό αριθμό επαναλήψεων που απαιτούνται για τη σύγκλιση του κατανεμημένου αλγορίθμου σε κάθε περίπτωση. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι προαναφερθέντες πίνακες.

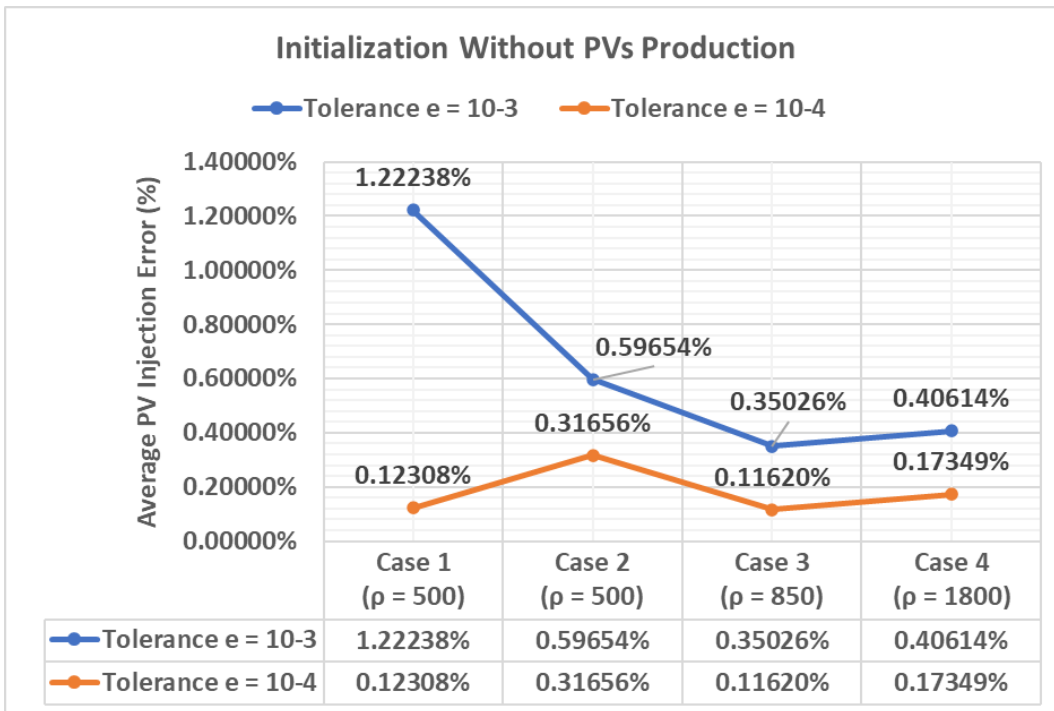
Initialization Without PVs					
Tolerance $\epsilon = 10^{-3}$					
Case (ρ)	Results	Centralised	Distributed	Error (%)	Iterations
Case 1 (ρ 500)	Injection Of PV31 (pu)	0.0643613	0.0640367	0.50434%	2221
	Injection Of PV32 (pu)	0.0186146	0.0182534	1.94042%	
	Total Curtailment (pu)	0.1170241	0.1177099	0.58603%	
	Objective Function (Euros/hour)	97.5224864	97.5220655	0.00043%	
Case 2 (ρ 500)	Injection Of PV29 (pu)	0.0500000	0.0500000	0.00000%	2152
	Injection Of PV30 (pu)	0.0408464	0.0406767	0.41534%	
	Injection Of PV31 (pu)	0.0092388	0.0090567	1.97083%	
	Injection Of PV32 (pu)	0.0014667	0.0014667	0.00000%	
	Total Curtailment (pu)	0.0984482	0.0988000	0.35727%	
	Objective Function (Euros/hour)	79.5022540	79.5014762	0.00098%	
Case 3 (ρ 850)	Injection Of PV25 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	2753
	Injection Of PV26 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV27 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV28 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV29 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV30 (pu)	0.0153247	0.0156539	2.14803%	
	Injection Of PV31 (pu)	0.0048667	0.0048985	0.65404%	
	Total Curtailment (pu)	0.0533419	0.0529809	0.67678%	
	Objective Function (Euros/hour)	41.9073612	41.9069654	0.00094%	
Case 4 (ρ 1800)	Injection Of PV10 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	2655
	Injection Of PV11 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV12 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV13 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV14 (pu)	0.0035699	0.0036781	3.02948%	
	Injection Of PV15 (pu)	0.0015778	0.0015932	0.97669%	
	Injection Of PV16 (pu)	0.0015778	0.0015930	0.96655%	
	Injection Of PV17 (pu)	0.0015778	0.0015929	0.95958%	
	Injection Of PV25 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV26 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV27 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV28 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV29 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV30 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV31 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
Injection Of PV32 (pu)	0.0109289	0.0109907	0.56593%		
Total Curtailment (pu)	0.0432679	0.0430521	0.49875%		
	Objective Function (Euros/hour)	33.5789617	33.5788649	0.00029%	

Table 6.1: Αριθμητικά Αποτελέσματα, Αρχικοποίηση Χωρίς Φωτοβολταϊκά, $\epsilon = 10^{-3}$

Initialization Without PVs					
Tolerance $\epsilon = 10^{-4}$					
Case (ρ)	Results	Centralised	Distributed	Error (%)	Iterations
Case 1 (ρ 500)	Injection Of PV31 (pu)	0.0643613	0.0643947	0.05196%	3110
	Injection Of PV32 (pu)	0.0186146	0.0186507	0.19420%	
	Total Curtailment (pu)	0.1170241	0.1169545	0.05947%	
	Objective Function (Euros/hour)	97.5224864	97.5223972	0.00009%	
Case 2 (ρ 500)	Injection Of PV29 (pu)	0.0500000	0.0500000	0.00000%	2524
	Injection Of PV30 (pu)	0.0408464	0.0409363	0.22012%	
	Injection Of PV31 (pu)	0.0092388	0.0093354	1.04614%	
	Injection Of PV32 (pu)	0.0014667	0.0014667	0.00000%	
	Total Curtailment (pu)	0.0984482	0.0982617	0.18950%	
Case 3 (ρ 850)	Objective Function (Euros/hour)	79.5022540	79.5020498	0.00026%	
	Injection Of PV25 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	3497
	Injection Of PV26 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV27 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV28 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV29 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV30 (pu)	0.0153247	0.0154318	0.69867%	
	Injection Of PV31 (pu)	0.0048667	0.0048779	0.23096%	
	Injection Of PV32 (pu)	0.0014667	0.0014667	0.00000%	
Total Curtailment (pu)	0.0533419	0.0532236	0.22180%		
Case 4 (ρ 1800)	Objective Function (Euros/hour)	41.9073612	41.9073125	0.00012%	
	Injection Of PV10 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	3117
	Injection Of PV11 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV12 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV13 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV14 (pu)	0.0035699	0.0036155	1.27538%	
	Injection Of PV15 (pu)	0.0015778	0.0015842	0.40753%	
	Injection Of PV16 (pu)	0.0015778	0.0015841	0.40120%	
	Injection Of PV17 (pu)	0.0015778	0.0015841	0.39803%	
	Injection Of PV25 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV26 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV27 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV28 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV29 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV30 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV31 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV32 (pu)	0.0109289	0.0109610	0.29363%	
Total Curtailment (pu)	0.0432679	0.0431712	0.22340%		
Objective Function (Euros/hour)	33.5789617	33.5789523	0.00003%		

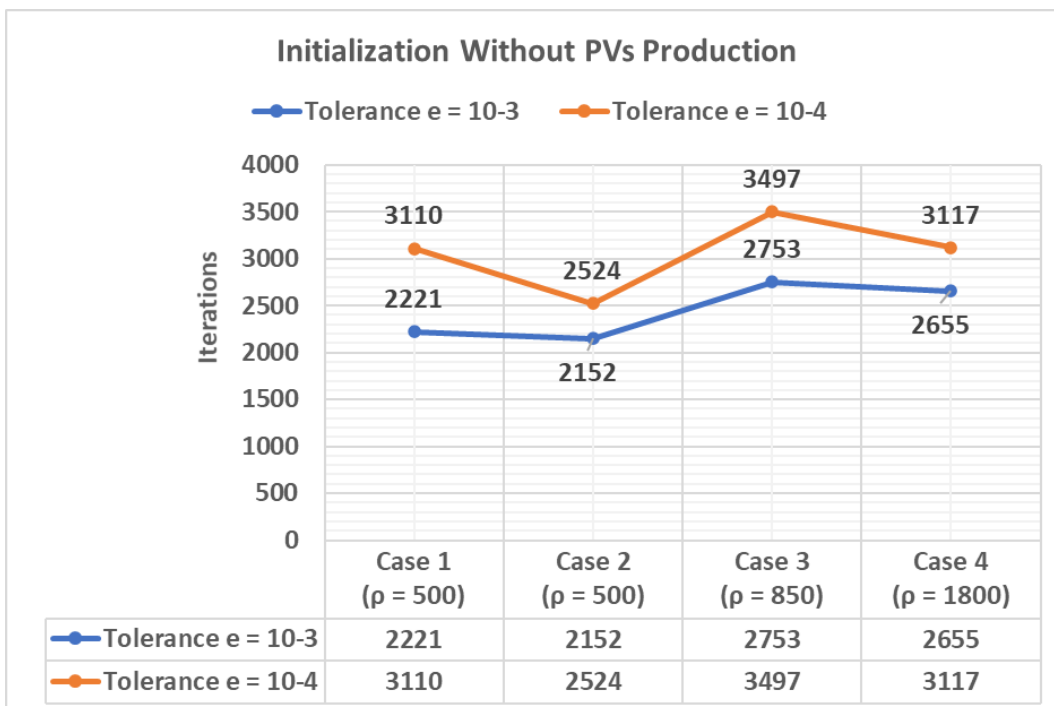
Table 6.2: Αριθμητικά Αποτελέσματα, Αρχικοποίηση Χωρίς Φωτοβολταϊκά, $\epsilon = 10^{-4}$

Η εκτέλεση του κατανεμημένου αλγορίθμου με ανοχή $\epsilon = 10^{-4}$ μας επιτρέπει να επιτύχουμε πιο ακριβή αποτελέσματα, που σημαίνει ότι είναι πιο κοντά στα αντίστοιχα αποτελέσματα της κεντρικής μεθόδου. Η σύγκριση μεταξύ των μέσων σφαλμάτων των φωτοβολταϊκών εγχύσεων για $\epsilon = 10^{-3}$ και $\epsilon = 10^{-4}$ για κάθε περίπτωση παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα για να αναδειχθεί η προαναφερθείσα βελτίωση στην ακρίβεια.



Σχήμα 6.32: Μέσο Σφάλμα Ανά Περίπτωση, Αρχικοποίηση χωρίς Φωτοβολταϊκά

Ωστόσο, αυτή η βελτίωση στην ακρίβεια συνοδεύεται από ένα «κόστος», καθώς υπάρχει σημαντική αύξηση του αριθμού των επαναλήψεων για την προτεινόμενη μέθοδο σύγκλισης σε κάθε περίπτωση. Η διαφορά μεταξύ του αριθμού των επαναλήψεων για τις ανοχές $\epsilon = 10^{-3}$ και $\epsilon = 10^{-4}$ παρουσιάζονται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 6.33: Επαναλήψεις Ανά Περίπτωση, Αρχικοποίηση χωρίς φωτοβολταϊκά

7 Συμπεράσματα

Στο τελευταίο κεφάλαιο περιγράφεται εν συντομία η προτεινόμενη μέθοδος. Συζητείται η μεθοδολογία και τα κυριότερα χαρακτηριστικά της και υπογραμίζονται τα πλεονεκτήματα και οι αδυναμίες της. Στη συνέχεια, τα αποτελέσματα από τις περιπτώσεις που μελετήσαμε (case studies) συζητούνται μαζί με τον βαθμό στον οποίο η εφαρμογή της μεθόδου θεωρείται επιτυχής. Τέλος, αναφέρονται πιθανές μελλοντικές εργασίες επέκτασης της διπλωματικής εργασίας.

7.1 Ανακεφαλαίωση του Προτεινόμενου Αλγορίθμου

Αυτή η διπλωματική εργασία παρουσιάζει έναν κατανεμημένο αλγόριθμο ικανό να επιλύσει το πρόβλημα υπερτάσης που δημιουργείται από την υψηλή παραγωγή φωτοβολταϊκών (Φ/Β) σε περιόδους χαμηλής ζήτησης στα δίκτυα διανομής. Συγκεκριμένα, ο Διαχειριστής Δικτύου Διανομής (ΔΔΔ) στοχεύει στην ελαχιστοποίηση της περικοπής της παραγωγής των Φ/Β στο δίκτυο έχοντας ως περιορισμούς: (i) τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις της βέλτιστης AC ροής ισχύος όπως αναφέρονται στο μοντέλο ροής ισχύος κλάδου LinDistFlow, (ii) τα όρια του μέτρου της τάσης κάθε κόμβου, (iii) την πιθανή περικοπή που μπορεί να προσφέρει ο μετατροπέας (inverter) κάθε Φ/Β. Το προαναφερθέν πρόβλημα βελτιστοποίησης του ΔΔΔ επιλύεται με κατανεμημένο τρόπο.

Με βάση τον προτεινόμενο αλγόριθμο, θεωρείται ότι ο aggregator που διαχειρίζεται την παραγωγή φωτοβολταϊκών θα πληρώνεται για τη μέγιστη δυνατή παραγωγή (maximum power point production) των Φ/Β. Επομένως, ελαχιστοποιώντας την περικοπή των εγχύσεων ενεργού ισχύος των Φ/Β, ο ΔΔΔ επιδιώκει να αποφύγει την αποζημίωση του aggregator για ενεργό ισχύ που δεν χρησιμοποιήθηκε για την ασφαλή λειτουργία του δικτύου, και τη διατήρηση των τάσεων εντός επιτρεπτών ορίων.

Με βάση τη μέθοδο General Form Consensus Optimization, κάθε κόμβος του δικτύου διανομής επικοινωνεί με τους γειτονικούς του κόμβους προκειμένου να καταλήξει σε συναίνεση με τη βέλτιστη λύση (από οικονομική άποψη) που θα ελαχιστοποιήσει την περικοπή των εγχύσεων ενεργού ισχύος των Φ/Β, διατηρώντας τις αποκλίσεις τάσης εντός των κατάλληλων ορίων. Η κατανεμητική φύση της μεθόδου επιτρέπει την προστασία των δεδομένων κάθε κόμβου περιορίζοντας την ανταλλαγή πληροφοριών μόνο μεταξύ γειτονικών κόμβων.

7.2 Σχολιασμός Αποτελεσμάτων

Αυτή η διπλωματική εργασία παρουσιάζει μια σειρά περιπτώσεων (case studies) που αποδεικνύουν την εγκυρότητα της μεθόδου. Ένα δίκτυο μέσης τάσης χρησιμοποιήθηκε ως βάση για τις προσομοιώσεις, του οποίου τα όρια τάσης παραβιάζονται σοβαρά στην περίπτωση της χρησιμοποίησης της μέγιστης δυνατής παραγωγής ενεργού ισχύος από τα Φ/Β που είναι εγκατεστημένα στο δίκτυο σε κάθε περίπτωση. Αυτό υπογραμμίζει την ανάγκη για μια μέθοδο που ρυθμίζει βέλτιστα τον περιορισμό της παραγωγής ενεργού ισχύος των εγκατεστημένων Φ/Β, τηρώντας παράλληλα τους περιορισμούς του δικτύου.

Πρώτον, η μέθοδος δοκιμάστηκε και λύθηκε τόσο με κεντρικό όσο και με κατανεμημένο τρόπο. Η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων του προτεινόμενου κατανεμημένου αλγορίθμου αποδεικνύεται από τη σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της κεντρικής μεθόδου. Στη συνέχεια, τα αποτελέσματα των φωτοβολταϊκών εγχύσεων που υπολογίζονται από τον κατανεμημένο αλγόριθμο χρησιμοποιούνται ως είσοδος σε ένα πρόβλημα AC ροής ισχύος. Με αυτόν τον τρόπο, αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα της υπερτάσης που προκύπτει εάν ενσωματωθεί η μέγιστη δυνατή παραγωγή φωτοβολταϊκών, αντιμετωπίζεται με επιτυχία μέσω της προτεινόμενης μεθόδου.

Ωστόσο, ορισμένες αδυναμίες του προτεινόμενου αλγορίθμου πρέπει να περιγραφούν. Αρχικά, υπάρχει μια σημαντική απόκλιση μεταξύ των τάσεων της AC ροής ισχύος (μετά την εφαρμογή των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου) και του ανώτατου ορίου τάσης που ορίζεται στην προτεινόμενη μέθοδο. Ο λόγος για αυτό είναι ότι το μοντέλο LinDistFlow που χρησιμοποιείται είναι μια γραμμική προσέγγιση και συνεπώς αναμένεται να καταγραφούν αποκλίσεις.

Επιπλέον, ο ΔΔΔ καλείται να ρυθμίσει εκ νέου την παράμετρο σφάλματος (penalty parameter) σε κάθε περίπτωση με αποτέλεσμα η μέθοδος να μην είναι αρκετά πρακτική. Επίσης, η σύγκλιση του κατανεμημένου αλγορίθμου χρειάζεται πολλές επαναλήψεις. Συγκεκριμένα, ο αριθμός των επαναλήψεων είναι της τάξης των χιλιάδων. Δεδομένου ότι, κατά τις προσομοιώσεις δεν πραγματοποιήθηκαν πράγματι παράλληλοι υπολογισμούς μεταξύ των κόμβων, ο βαθμός πρακτικότητας της προτεινόμενης μεθόδου από την άποψη χρόνου σύγκλισης (time of convergence - ToC) δεν έχει ακόμη ερευνηθεί.

Για καθεμία από αυτές τις αδυναμίες, προτείνονται μελλοντικές εργασίες προκειμένου να βελτιωθεί η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης μεθόδου και να επεκταθεί η διπλωματική εργασία.

7.3 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Αρχικά, μπορούν να πραγματοποιηθούν μελλοντικές εργασίες για τη βελτίωση της απόκλισης μεταξύ των τάσεων που προκύπτουν από την AC ροή ισχύος (λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου) και των τάσεων της προτεινόμενης μεθόδου. Μία λύση θα ήταν να χαλαρώσουμε το ανώτερο όριο τάσης στον προτεινόμενο αλγόριθμο για να επιτυγχάνονται πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα, τα οποία θα είναι πιο κοντά στο προκαθορισμένο ανώτερο όριο τάσης (1.05 pu) όταν εκτελούμε την AC ροή ισχύος, όπως εξηγείται στην Ενότητα 6.3.

Επιπροσθέτως, η εφαρμογή ενός προσαρμοστικού βήματος (adaptive step) αντί ενός σταθερού ως παράγοντα ποινής θα πρέπει να μελετηθεί ως λύση στην ανάγκη του ΔΔΔ να ρυθμίζει κατάλληλα το συντελεστή ποινής (penalty coefficient) σε κάθε περίπτωση.

Τέλος, ο βαθμός πρακτικότητας της προτεινόμενης μεθόδου πρέπει να ερευνηθεί. Πιο συγκεκριμένα, τα προβλήματα βελτιστοποίησης κάθε κόμβου του δικτύου (το πρώτο βήμα του προτεινόμενου αλγορίθμου) πρέπει να επιλυθούν παράλληλα χρησιμοποιώντας κατάλληλα εργαλεία υπολογισμού (π.χ. υπολογιστικά συστήματα πολλαπλών πυρήνων). Με αυτόν τον τρόπο, ο πραγματικός χρόνος σύγκλισης της προτεινόμενης μεθόδου θα μελετηθεί, και ως εκ τούτου θα εκτιμηθεί ο βαθμός πρακτικότητας της μεθόδου.

Chapter 1

Introduction

In this Chapter, the motivation for the diploma thesis is discussed. Moreover, the objective and the outline of the different chapters of this thesis are presented.

1.1 Motivation

With the increasing penetration of distributed energy resources, the centralized paradigm, most prevalent in current power systems, will potentially be augmented with distributed optimization algorithms [32]. Rather than collecting all problem parameters and performing a central calculation, distributed algorithms are computed by many agents that obtain certain problem parameters via communication with a limited set of neighbors.

We, as young electrical and computer engineers, are obligated to keep track of the technological tendencies taking place in our field and train ourselves to be able to contribute toward state-of-the-art solutions that can ensure the realization of the vision of a more robust, secure, and reliable power system model with large shares of Distributed Energy Resources (DERs).

To do so, one should extend their knowledge in the field of informatics and telecommunications since the past few years of electrical power systems research indicate that state-of-the-art solutions are born by combining knowledge of electrical engineering and knowledge of Information and Communication Technology.

The aforementioned reasons motivated the research and writing down of this diploma thesis. It seems of value to young professionals to familiarize themselves with concepts that appear to be the future in the field of Distributed Energy Resources (DERs) and Electrical Power Systems.

1.2 Objective

The increasing penetration of Distributed Energy Resources (DERs) in distribution networks poses a number of problems and challenges, like the voltage rise effect, which requires reliable and efficient methods of coping. The objective of this diploma thesis is to construct a distributed algorithm able to resolve the over-voltage problem created by photovoltaic units (PVs) production in times of low demand in distribution networks. Based on General Form Consensus ADMM, each node of the grid communicates with its adjacent nodes in order to come to a decision consensus to the financially optimal solution, that will minimize the curtailment of the PVs active power injections while ensuring the secure operation of the network. The distributive nature of the method allows for the data privacy of each node by restricting the exchange of information only between adjacent nodes.

1.3 Outline

This diploma thesis is organized as follows. Chapter 2 will include a brief discussion on the matters of convex optimization and optimization in modern power systems. Chapter 3 will give a thorough theoretical background necessary to understand the proposed method and also a literature review on the subject. Chapter 4 describes the mathematical formulation of both the General Form Consensus ADMM based distributed algorithm and its equivalent centralized algorithm. Chapter 5 will display an analytical presentation of each step of the proposed method. Chapter 6 will present the test system used for the simulations of this thesis, the voltage limits, and other data related to the examined network. Chapter 7 will present the results of the simulations performed to prove and demonstrate the value of the proposed algorithm. Finally, Chapter 8 concludes this thesis and discusses future work.

Chapter 2

Basic theory on Convex Optimization and Optimal Power Flow

In this Chapter, a brief discussion upon the subjects of Convex Optimization and Optimal Power Flow (OPF) will be carried out. In essence, this will provide a helpful tool for the reader to understand the objective of this diploma thesis.

2.1 Introduction to Optimization

2.1.1 Mathematical Optimization

To begin with, a problem with the following form:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{subject to: } \quad & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

is referred to as a mathematical optimization problem, or just an optimization problem [1]. The vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ is called the optimization or decision variable of the problem, while the function $f_0 : R^n \rightarrow R$ is the objective function. Furthermore, the functions $f_i : R^n \rightarrow R$, $i = 1, \dots, m$, are the (inequality) constraint functions. Finally, the constants b_1, \dots, b_m are the limits, or bounds, of the constraints. We denote x^* as the optimal vector, if $f_0(x^*)$ is the smallest objective value among all variable vectors that satisfy the constraints functions f_i . In other words, for any solution z with:

$$f_1(z) \leq b_1, \dots, f_m(z) \leq b_m,$$

the following condition holds:

$$f_0(x^*) \leq f_0(z).$$

Depending on the form of the objective and the constraint functions, we classify the different optimization problems into families with common properties. One of the most famous classes is convex optimization problems.

Generally, optimization problems are hard to solve. Many solving methods involve compromises like very long computational time or even lack of ability to even find the solution. One of the advantages of convex optimization is that it can be solved efficiently and reliably.

2.1.2 Convex Optimization

Before we proceed to the formulation of a convex optimization problem, several definitions relative to convex analysis will be discussed.

Definition. Suppose that $A \subset \mathbb{R}$ is a set of real numbers. If $M \in \mathbb{R}$ is an upper bound of A such that $M \leq M'$ for every upper bound M' of A , then M is called the supremum of A , denoted $M = \sup A$. If $m \in \mathbb{R}$ is a lower bound of A such that $m \geq m'$ for every lower bound m' of A , then m is called infimum of A , denoted $m = \inf A$ [2].

In summary, the supremum of a set is its least upper bound and the infimum is its greatest lower bound.

If A is not bounded from above, then we write $\sup A = +\infty$, and if A is not bounded from below, we write $\inf A = -\infty$. If $A = \emptyset$ is the empty set, then every real number is both an upper and a lower bound of A , and we write $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$. We will only say the supremum or infimum of a set exists if it is a finite real number.

Definition. A set X is convex if

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$$

Another interpretation of this definition is that a set is convex if, given any two points in a set, the line segment connecting them lies entirely inside the set [4].

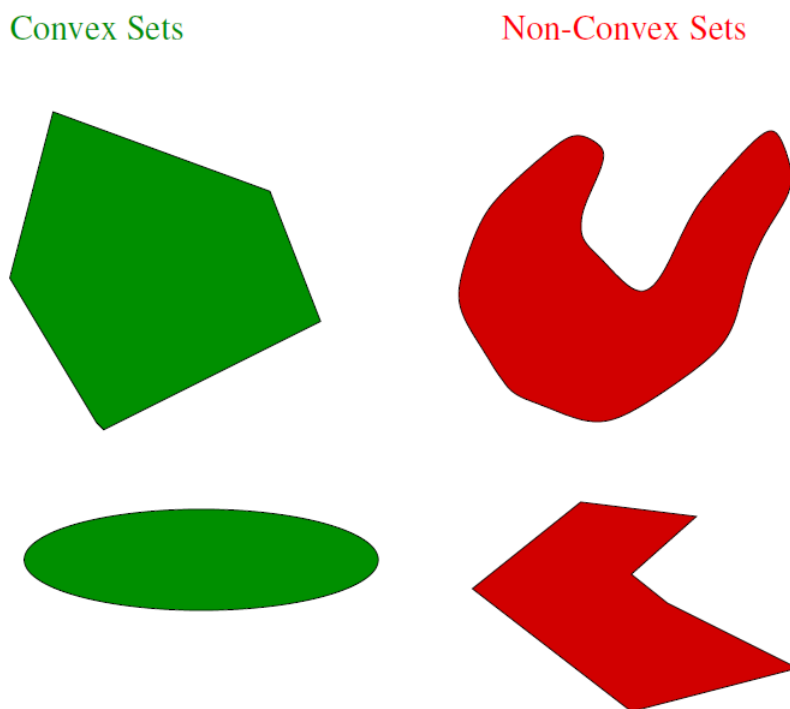


Figure 2.1: Examples of convex and non-convex sets in \mathbb{R}^2 .

Definition. The epigraph of a function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is a set of points lying on or above its graph [1]

$$\text{epi } f = \{(x, t) \mid x \in \text{dom}_f \text{ (domain of function } f), f(x) \leq t\}$$

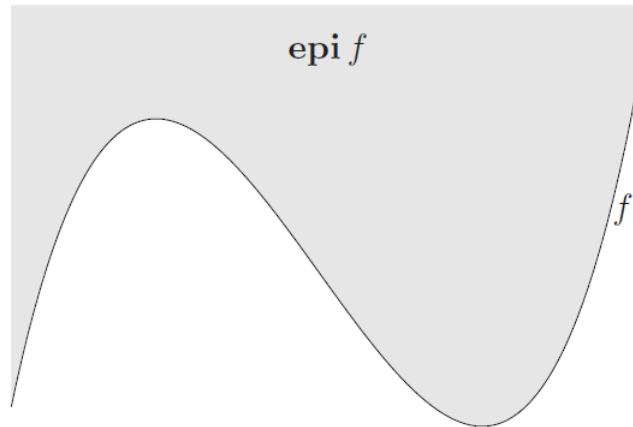


Figure 2.2: Epigraph of a function f , shown shaded. The lower boundary, shown darker, is the graph of f .

Definition. A function $f : R^n \rightarrow R$ is convex if the domain of f is a convex set and

$$\forall x_1, x_2 \in \text{dom}_f, \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

That definition can be interpreted in many ways. One would be to think that the line segment connecting any two points $f(x_1)$ and $f(x_2)$ lies entirely on or above the function $f(x)$. Another would be to think that function f is convex if and only if its epigraph is a convex set [3].

A function is called strictly convex if we slightly change the aforementioned definition, so that:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$



Figure 2.3: Example of a convex function f .

Definition. A function $f : R^n \rightarrow R$ is concave if the domain of f is a convex set and

$$\forall x_1, x_2 \in \text{dom}_f, \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

That definition can be seen as a rule that the line segment connecting any two points $f(x_1)$ and $f(x_2)$ lies entirely on or below the function $f(x)$.

A function is called strictly concave if we slightly change the aforementioned definition, so that:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

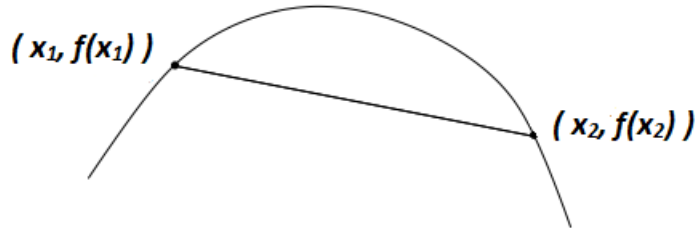


Figure 2.4: Example of a concave function f .

Definition. A function $f : R^n \rightarrow R$ is called affine, if it has the following form:

$$f(x) = A^T x + b.$$

In other words, an affine function is a linear function plus a constant. It's worth mentioning that an affine function is both convex and concave [3].

A convex optimization problem has the following form [1]:

$$\min f_0(x) \tag{2.1}$$

$$\text{subject to : } f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{2.2}$$

$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p. \tag{2.3}$$

The inequalities (2.2) are called **inequality constraints** and the equations (2.3) are called **equality constraints**. If $m = p = 0$, which means there are no constraints, we denote that the optimization problem is unconstrained. In this problem, we seek to find an optimization or decision variable $x \in R^n$ that minimizes the objective or cost function $f_0(x)$, among all possible x that satisfy the inequality constraint functions $f_i : R^n \rightarrow R$ and the equality constraint functions $h_i : R^n \rightarrow R$.

However, the standard form of a convex optimization problem is followed by some conditions that must hold in order to be convex indeed.

- the objective function must be **convex**,
- the inequality constraint functions must be **convex**,
- the equality constraint functions must be **affine**.

The set of points for which the objective and all constraint functions are defined is called the domain of the optimization problem and we denote it by

$$D = \bigcap_{i=0}^m \text{dom}_{f_i} \cap \bigcap_{i=1}^p \text{dom}_{h_i}.$$

The domains of the convex objective function and of the convex inequality constraint functions are convex sets according to the definition of the convex function. Also, the domains of the affine equality constraint functions (which are both convex and concave functions) are convex sets. It is known that the intersection of a finite number of convex sets is a convex set. In conclusion, the domain of a convex optimization problem is a convex set. Hence, we minimize a convex objective function over a convex set.

A point $x \in D$ is called **feasible point**, if it satisfies both inequality and equality constraints of the optimization problem [1], [3].

The convex optimization problem described by (2.1) - (2.3) is referred to as feasible if there is at least one feasible point. Otherwise, it's called infeasible. The set of all feasible points is called the **feasible set** or the constraint set.

We denote the **optimal value** p^* of the under examination convex optimization problem as [1], [3]:

$$p^* = \inf\{f_0(x) \mid f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p\}.$$

There are cases that the optimal value can be $\pm\infty$. If the problem is infeasible, by the standard convention that the infimum of an empty set is $+\infty$, we have $p^* = +\infty$. If there are feasible points x_k such that $p^* = -\infty$, then we note that the optimization problem is unbounded below.

A point x^* is considered to be an **optimal point**, which means it solves the optimization problem, if the following equation holds:

$$f_0(x^*) = p^*.$$

The set of all the optimal points that solve the optimization problem is called **optimal set** and it is denoted as:

$$X_{opt} = \{x \mid f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad f_0(x) = p^*\}.$$

If the optimal set is not empty, we say that the optimal point is attained or achieved and we note that the optimization problem is solvable.

We say that a feasible point x is **locally optimal** [1], if there is an $\epsilon > 0$ such that:

$$f_0(x) = \inf\{f_0(z) \mid f_i(z) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad h_i(z) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad \|z - x\|_2 \leq \epsilon\}.$$

This equation translates to x minimizing the objective function $f_0(x)$ over nearby points z in a distance ϵ in the feasible set. On the contrary, a feasible point x is **globally optimal**, if it minimizes the objective function $f_0(x)$ over the entire feasible set. In other words, we use the terms globally optimal and optimal interchangeably, meaning the same thing.

One of the most important properties of the convex optimization problems is that any locally optimal point is also globally optimal [1]. We are now going to prove this statement. We assume there is a feasible point x which is locally optimal. Let $\epsilon > 0$ such that:

$$z : \text{feasible point}, \quad \|z - x\|_2 \leq \epsilon \Rightarrow f_0(x) \leq f_0(z) \quad (2.4)$$

We now assume that x is not globally optimal. In other words, there exists a feasible point y , such that $f_0(y) < f_0(x)$. Obviously, $\|y - x\|_2 > \epsilon$ because otherwise, it would be $f_0(x) \leq f_0(y)$. We examine the point z given by

$$z = (1 - \lambda)x + \lambda y, \quad \lambda = \frac{\epsilon}{2\|y - x\|_2} \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

The points (x, y) belong to the feasible set, which has been proven to be a convex set. The point z is the convex combination of the two points (x, y) of a convex set. Thus, the point z also belongs to the feasible set by definition of the convex set.

Subsequently, we examine the term $\|z - x\|_2$

$$\begin{aligned} \|z - x\|_2 &= \|(1 - \lambda)x + \lambda y - x\|_2 = \|\lambda y - \lambda x\|_2 = \\ &= \lambda\|y - x\|_2 = \frac{\epsilon}{2\|y - x\|_2} \cdot \|y - x\|_2 = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

In conclusion, point z satisfies the condition (2.4). Hence, we expect $f_0(x) \leq f_0(z)$. However, since the objective function is convex and the feasible point x is not globally optimal, meaning $f_0(y) < f_0(x) \Rightarrow f_0(x) - f_0(y) > 0$, we see that

$$\begin{aligned}
 f_0(z) &\leq (1 - \lambda)f_0(x) + \lambda f_0(y) && \Rightarrow \\
 f_0(z) &\leq f_0(x) - \lambda f_0(x) + \lambda f_0(y) && \Rightarrow \\
 f_0(z) &\leq f_0(x) - \lambda(f_0(x) - f_0(y)) && \Rightarrow \\
 f_0(z) &< f_0(x)
 \end{aligned}$$

Therefore, our original assumption is false and we can safely conclude that the point x is globally optimal.

2.2 Optimization in Modern Power Systems

2.2.1 Economic Dispatch

Possibly, the most significant task of a power system operator is to supply electricity to all loads in the system with the minimum possible cost. To do so efficiently, one needs to know how much electricity demand of the loads will be, which generators are available, how much energy they are able to produce, and at what cost [5].

Economic Dispatch (ED) is an optimization problem that aims to determine the operation of the least-cost available generators, given the total electricity demand, and the minimum and maximum operating limits of each generator. Some economic dispatch algorithms might include network constraints (e.g. line congestion constraints) and others might not, some algorithms may consider ramp constraints of the generators (i.e. a maximum rate of change of produced power must be set due to the inability of the generator to change instantaneously power production level) and others may not, etc.

Here, we present the simplest algorithm for the solution of economic dispatch, which has the following mathematical optimization formulation:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^N f_i(P_i) && (2.5) \\
 \text{subject to :} \quad & \sum_{i=1}^N P_i = P_d \\
 & P_{i,\min} \leq P_i \leq P_{i,\max},
 \end{aligned}$$

Where $f_i(P_i)$ is an approximate linear or quadratic cost function respectively [8] of the power P_i produced by each of the assumed N generators, which are dispatched to cover the electric demand P_d . Finally, the $P_{i,\min}, P_{i,\max}$ are the limits set to the power production capability of each generator.

This ED problem assumes a copperplate network. By that, we mean that the network has infinite transmission capacity, which allows us to neglect line limit constraints, power flow constraints, and line losses. Therefore, a copperplate network assumes a lossless and unrestricted flow of electricity from point A to point B [5].

Even though economic dispatch is an easy and calculatingly fast approximation to define the power generation needed for the operation of a power system, it is moderately accurate due to its inconsideration of the network constraints.

Traditionally, the transmission system was designed so that when the generation was dispatched economically there would be no limit violations. Hence, just solving economic

dispatch was usually sufficient. However, with the worldwide trend toward deregulation of the electric utility industry, the transmission system is becoming increasingly constrained [6].

One solution to the problem of optimizing the generation while enforcing the transmission lines is to combine economic dispatch with full AC power flow. The result is known as the AC optimal power flow (ACOPF). AC optimal power flow models are a much more realistic representation of how a power system operates. More details will be given to the following section.

2.2.2 AC Optimal Power Flow

The AC Optimal Power Flow (ACOPF) is an optimization problem that considers the full AC power flow equations. Assuming that the model parameters are correct, this is the most accurate representation of the power flows in a system. This means that the set-points determined by the optimization correspond as close as possible to reality [5], [9].

In terms of mathematical optimization, we could denote a general formulation as follows:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{Objective Function} & (2.6) \\ \text{subject to :} \quad & \text{AC Power Flow Equations} \\ & \text{Network Constraints} \\ & \text{Operational Constraints} \end{aligned}$$

2.2.2.1 Frequently Used Objective Functions in ACOPF

AC Optimal Power Flow optimization problems tackle a variety of phenomena occurring in a modern power system. Here we list three of those, among several examples [5].

Minimization of generation costs. One of the most common goals of an ACOPF problem is to minimize the cost of the production of the necessary electric energy. This kind of objective function can be used both for clearing electricity markets, but also in vertically integrated utilities that want to reduce their operating costs [7].

Minimization of active and reactive power losses. The minimization of the active and reactive power losses is probably among the most important daily functions of the system operator.

Maintaining a constant voltage profile. At times power system operators may want to maintain a constant voltage profile across all or a part of the system nodes. This, for example, might help in avoiding voltage instability problems. Optimization in this case may help them identify what is the preferable set of actions, usually related to the injection or absorption of reactive power, to achieve the desired profile. The objective function can have for example the following form (among several possibilities):

$$\min \sum_i (V_i - V_{setpoint,i})^2$$

where V_i is the voltage of each node i of the power system and $V_{setpoint,i}$ is the target voltage of each node i , that the system operator wants to maintain. The quadratic objective function in this case helps us minimize both the positive and the negative deviations of the voltage from the desired setpoint.

2.2.2.2 AC Power Flow Equations

We won't get into much details about the AC Power Flow Equations, since we expect the reader to have a basic knowledge of Kirchhoff law and of the necessary equations that are used to describe the functionality of a power system [6]. We will present the equations of our model extensively in Chapter 4.

2.2.2.3 Network Constraints (NC) and Operational Constraints (OC)

Even though we might be able to find a numerical set of variables that satisfy the AC power flow equations and achieve the goal of the objective, many of these physically possible states do not make operational sense or are not operationally possible. Thus, in order to model the power system behavior more realistically, additional constraints have to be formulated.

Depending on the application and its goals, many network and operational constraints can be included in the optimization problem [10]. Here we list four of those, that we encountered most frequently in the relevant literature.

Lower and upper generator active and reactive power limits (OC). The active power of a generator is defined to be the real part of the apparent power produced by a generator, while the reactive power of a generator is defined to be the imaginary part of the apparent power produced by a generator. These quantities are physically limited in each generator.

$$\begin{aligned} P_{Gen}^{min} \leq P_{Gen} \leq P_{Gen}^{max} & \quad \forall Gen \in \{Set\ of\ Network's\ Generators\} \\ Q_{Gen}^{min} \leq Q_{Gen} \leq Q_{Gen}^{max} & \quad \forall Gen \in \{Set\ of\ Network's\ Generators\} \quad \text{where} \end{aligned}$$

- P_{Gen}^{min} is a numerically given lower bound for the active power production of each generator of the network.
- P_{Gen}^{max} is a numerically given upper bound for the active power production of each generator of the network.
- Q_{Gen}^{min} is a numerically given lower bound for the reactive power production of each generator of the network.
- Q_{Gen}^{max} is a numerically given upper bound for the reactive power production of each generator of the network.

Often, the lower limit of the active power is zero. Moreover, at times both limits of the reactive power are not defined directly but as functions of the active generator power.

Lower and upper nodal voltage magnitude limits (NC). To maintain safe operation, we usually bound the voltage magnitude within a small range of acceptable limits. In the vast majority of cases, we allow a maximum voltage deviation of 10% or less as the European Standard EN 50160 commands [11]. This means that the voltage bounds are usually $V_{min} = 0.9$ p.u. and $V_{max} = 1.1$ p.u. However, we can often impose even tighter limits, i.e. $V_{min} = 0.95$ p.u. and $V_{max} = 1.05$ p.u. depending on the system and the application.

These limits are often given by very strict standards. Too high or too low voltages could cause problems with respect to end user power apparatus damage or instability in the power system. This could lead to unwanted and economically expensive partial unavailability of power for end users. Therefore, it's of vital importance to include the following constraint to the ACOPT.

$$V_{Node}^{min} \leq |V_{Node}| \leq V_{Node}^{max} \quad \forall Node \in \{Set\ of\ Network's\ Nodes\}$$

where V_{Node}^{min} is a numerically given lower bound for each nodal voltage magnitude, while V_{Node}^{max} is a numerically given upper bound for each nodal voltage magnitude.

Branch current magnitude - maximum limit (NC). The maximum current magnitude values for transmission branches, e.g. lines and transformers, have to be set due to limitations of the branch material. Excessive currents would damage the transmission lines.

$$|I_{Line}| \leq I_{Line}^{max} \quad \forall Line \in \{Set\ of\ Network's\ Lines\}$$

where I_{Line}^{max} is a numerically given upper bound of the branch magnitude current.

Branch MVA-power - maximum limit (NC). For the same reasons as the ones for maximum current magnitude limit, maximum apparent magnitude values have to be implied for transmission branches.

$$|S_{Line}| \leq S_{Line}^{max} \quad \forall Line \in \{Set\ of\ Network's\ Lines\}$$

where S_{Line}^{max} is a numerically given upper bound of the branch MVA-power.

2.2.2.4 Discussion on the Need for Improving the Methods For Solving the ACOPF Optimization Problem

In conclusion, the ACOPF is a well-structured problem and has developed during 50 years of research. However, the AC power flow equations are quadratic equations (since the power is dependent on the square of the voltage), and if we include them in an optimization problem as equality constraints, they result in a non-linear, non-convex optimization problem. Non-linear, non-convex problems are in general much harder to solve, and there is no guarantee that the solver can find the global minimum [5].

Academia and industry have developed various approaches to solving the ACOPF, with different formulations, algorithms, and assumptions. One approach has been to linearize the full ACOPF problem and decompose it into subproblems. The ACOPF is not a hypothetical problem – it is solved every few minutes (e.g. 15 minutes) through approximations and judgment. After 50 years, there is not yet a commercially viable full ACOPF [12].

The US Federal Energy Regulatory Commission (FERC) [12] states that the ultimate goal for an electricity market software should be a security-constrained AC optimal power flow with unit commitment [7]. FERC goes on further to indicate that a good optimization solution technique could potentially save tens of billions of dollars annually.

FERC goes on further to indicate that a good optimization solution technique could potentially save tens of billions of dollars annually. Today's solvers do not return the gap between the given and globally optimal solution; if we make a rough estimate that today's solvers are on average off by 10%, and world energy costs are \$400 billion, closing the gap by 10% is a huge financial impact [12].

Chapter 3

Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM)

In this Chapter, we review the algorithms that are considered the precursors of ADMM. Furthermore, we present the formulation of the ADMM. Last but not least, Consensus ADMM is also presented in its two forms: Global Variable Consensus ADMM and General Form Consensus ADMM.

3.1 Precursors

Before we proceed in the analysis of the Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM), it's worth mentioning some algorithms which are considered precursors of ADMM and upon which this algorithm was designed.

3.1.1 Dual Ascent

Consider the equality-constrained convex optimization problem [13]:

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ \text{subject to : } Ax = b, \end{aligned} \tag{3.1}$$

where variable $x \in R^n$, $A \in R^{m \times n}$. Furthermore, it is given that $f : R^n \rightarrow R$ is convex.

In mathematical optimization, the Lagrange multipliers method is a strategy for finding the local maxima or minima of a function subject to constraints (e.g., subject to equality and inequality constraints of an optimization problem). The idea is to convert a constrained problem into a form such that the derivative test (testing the case where the derivative of a function equals zero in order to find the stationary points of a function) of an unconstrained problem can still be applied [14].

The Lagrangian function for problem (3.1) is the following:

$$L(x, y) = f(x) + y^T (Ax - b)$$

where y is the dual variable also known as Lagrangian multiplier. We notice that:

$$\sup_y L(x, y) = \sup_y [f(x) + y^T (Ax - b)] = \begin{cases} f(x), & \text{if } Ax = b. \\ \infty, & \text{if } Ax \neq b. \end{cases}$$

So, the original problem (3.1) can be reformulated as:

$$x^* = \inf_x \sup_y L(x, y)$$

We now define the dual optimization problem of (3.1) as

$$\begin{aligned} y^* &= \sup_y \inf_x L(x, y) = \sup_y g(y) \Leftrightarrow \\ g(y^*) &= \max_y g(y) \end{aligned} \quad (3.2)$$

and we denote the Lagrange dual function (or just dual function) as the minimum value of the Lagrangian over x .

$$g(y) = \inf_x L(x, y)$$

It's worth mentioning that the dual function g is always concave, even when the initial problem is not convex, because it is a point-wise infimum of affine functions [15]. Also, it can easily be proven that for the optimal value x^* of the primal problem the following inequality holds [1]:

$$g(y) \leq f(x^*)$$

The optimal solution of the dual problem (3.2) is still a lower bound to the optimal solution of the primal problem (3.1). This principle is expressed in the **weak duality theorem**:

$$g(y^*) \leq f(x^*)$$

In case there exists a pair of values (x^*, y^*) so that $g(y^*) = f(x^*)$, then we denote that **strong duality** holds.

Assuming that the duality gap of the problems (3.1), (3.2) is zero, which means that strong duality holds, we know that the optimal values of both primal and dual problems are gonna be identical. Therefore, we can retrieve the optimal value of the primal variable (x^*) by finding the argument of the minimum, with respect to variable x , of the Lagrangian function given the optimal value of the dual variable (y^*):

$$\begin{aligned} f(x^*) &= g(y^*) = \inf_x L(x, y^*) \Rightarrow \\ x^* &= \operatorname{argmin}_x L(x, y^*), \end{aligned}$$

As mentioned before, the dual function is always concave. Taking advantage of that, in the Dual Ascent algorithm we utilize the method of gradient ascent [16] to solve the dual optimization problem (3.2). In other words, assuming that dual function $g(y)$ is differentiable, we calculate the gradient:

$$\nabla_y g(y) = \nabla_y L(x^{r+1}, y) = Ax^{r+1} - b$$

and we iteratively execute the following steps:

$$x^{r+1} := \operatorname{argmin}_x L(x, y^r) \quad (3.3)$$

$$y^{r+1} := y^r + a^r (Ax^{r+1} - b), \quad (3.4)$$

where $a^r > 0$ is a step size and the superscript r is referring to the number of the iteration. The first step of the algorithm is responsible for the x -minimization of the Lagrangian, while the second step is executing the update of the dual variable y . That second step justifies the name of the algorithm, since with the appropriate selection of the step size (a^r), the dual function is increasing in each iteration $g(y^{r+1}) > g(y^r)$ since g is concave and the gradient $\nabla_y g(y)$ always points to the direction towards the optimal maxima of g . The selection of the step size is affecting immensely the convergence rate of the method [20], because it defines the change of the gradients $\nabla_y g(y)$, $\nabla_y L(x^{r+1}, y)$.

To sum up, if we make sure that strong duality holds and we choose an effective step size, then both x^r, y^r converge to an optimal dual point. Unfortunately, there is a wide variety of applications that these assumptions do not hold. Thus, Dual Ascent cannot always be utilized. A very obvious example of the algorithm's failure is when the objective function f is an unbounded affine function. Namely, let's assume that the dual variable takes the value zero. Then, the minimization of the Lagrangian function $L(x, 0) = f(x)$ with respect to x would result in minus or plus infinity. Consequently, strong duality doesn't hold.

The answer to our quest to ensure zero duality gap between problems (3.1), (3.2) is convex optimization. With the exception of some cases, in convex optimization problems, strong duality holds [17].

3.1.2 Dual Decomposition

The will to decompose the original optimization problem into subproblems that can be solved in parallel led to the creation of the Dual Decomposition method. To do so, the objective function of the problem (3.1) has to be additively separable [18] with respect to subvectors x_i , meaning that the original function $f(x)$, depending on the variable vector x , can be written as the sum of f_i functions depending on variable subvectors x_i [13]:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$$

where $x = (x_1, \dots, x_N)$ and the variables $x_i \in R^{n_i}$ are subvectors of x .

We interpret the matrix A as having been broken into sections called blocks or submatrices (partitioning) [19]

$$A = [A_1 \dots A_N]$$

Then, we manage to separate Lagrangian since it can be written as:

$$L(x, y) = f(x) + y^T (Ax - b) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i) + y^T (Ax - b) \Leftrightarrow$$

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^N L_i(x_i, y) = \sum_{i=1}^N \left(f_i(x_i) + y^T A_i x_i - \frac{1}{N} y^T b \right)$$

This transformation enables the parallel computation of each x_i since the x -minimization step (3.5) breaks into N separate and independent problems. Explicitly, the algorithm is carried out as follows:

$$x_i^{r+1} := \underset{x_i}{\operatorname{argmin}} L_i(x_i, y^r) \tag{3.5}$$

$$y^{r+1} := y^r + a^r (Ax^{r+1} - b), \tag{3.6}$$

As one can easily see, the steps of this algorithm are similar to the ones described in the Dual Ascent method. The difference is the separability of the objective function which lets us execute the x -minimization problem independently for each subvector x_i . Its steps require a scatter and a gather operation. Specifically, in the dual update step (3.6), we collect (**gather**) each and every one of the subvectors x_i and submatrices A_i in order to calculate the residual

$$Ax^{r+1} - b = \sum_{i=1}^N \left(A_i x_i - \frac{1}{N} b \right)$$

After the global dual variable y^{r+1} is computed, it must be broadcasted (**scatter**) to all the processors in order to execute the parallel N independent x -minimization steps (3.5).

In this form, Dual Decomposition requires every processor to collect all the variables x_i and then compute the global dual variable in order to be able to carry out the x-minimization step once again. Unfortunately, this means that the value of y^{r+1} will be calculated N times, one for each subvector/processor x_i . Another approach to this problem would be to appoint a master processor which will be responsible for iteratively gather all the information from the processors, compute the value of the global dual variable y^{r+1} and then broadcast it back to them [13].

3.1.3 Augmented Lagrangians and the Method of Multipliers

The will to improve significantly the convergence properties of the Dual Ascent method inspired the development of augmented Lagrangian functions and the construction of the Method of Multipliers. By adding another term in the objective function of the problem (3.1) and using penalty factor ρ as update step in (3.10), robustness is achieved and the convergence is becoming independent from the large number of assumptions previously required, because we ensure the dual feasibility of the optimization problem each step of the way as proven later on. The formulation of the new problem is [13]:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) + \frac{\rho}{2} \|Ax - b\|_2^2 \\ \text{subject to :} \quad & Ax = b, \end{aligned} \quad (3.7)$$

while the Augmented Lagrangian corresponding to the above convex optimization problem is:

$$L_p(x, y) = f(x) + y^T(Ax - b) + \frac{\rho}{2} \|Ax - b\|_2^2 \quad (3.8)$$

It is obvious that problems (3.1) and (3.7) are equivalent since for any x that is feasible the additional term becomes zero. The parameter ρ , which is known as the penalty parameter, has to be positive ($\rho > 0$) and basically what it does is applying a cost, when the equality constraint $Ax = b$ is being violated. Utilizing the Dual Ascent method for problem (3.7) with ρ as update step, it yields an algorithm, called Method of Multipliers, composed by the following steps:

$$x^{r+1} := \underset{x}{\operatorname{argmin}} L_p(x, y^r) \quad (3.9)$$

$$y^{r+1} := y^r + \rho(Ax^{r+1} - b), \quad (3.10)$$

The steps of the Method of Multipliers algorithm are similar to the ones described in Dual Ascent method. What differs is the addition of the extra quadratic penalty part to the objective function that leads to the so called Augmented Lagrangian Function. Also, in this case, we choose the gradient ascent step to be the penalty factor ρ .

We will prove that the problem (3.7) is always dual feasible by evaluating the optimality conditions of the optimization problem. To begin with, we assume f is differentiable for simplicity. The optimality conditions for problem (3.1) are primal and dual feasibility.

$$Ax^* - b = 0 \qquad \nabla_x f(x^*) + A^T y^* = 0$$

respectively. Since, by definition x^{r+1} minimizes the equation $L_p(x, y^r)$, we get that:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_x L_p(x^{r+1}, y^r) \\ &= \nabla_x f(x^{r+1}) + A^T (y^r + \rho(Ax^{r+1} - b)) \\ &= \nabla_x f(x^{r+1}) + A^T y^{r+1} \end{aligned}$$

We see that by using ρ as the step size in the dual update, the iterate (x^{r+1}, y^{r+1}) is dual feasible since it satisfies by default the equation representing the optimality condition for dual feasibility as shown above. As the Method of Multipliers is being executed, the primal residual $Ax^{r+1} - b$ converges to zero, yielding optimality, since the optimizer is trying to reduce any violations of the equality constraint to zero by eliminating the penalty cost $(\rho/2)\|Ax - b\|_2^2$.

The convergence properties of Method of Multipliers are superior in comparison with Dual Ascent. However, these advantages comes with a cost which is that the quadratic nature of the penalty term prevents Augmented Lagrangian from being separable while f is separable. As a result, we cannot use decomposition and thus, we cannot compute the x -minimization step in parallel for each subvector x_i . We will address this issue in the following section.

3.2 Introduction to Alternating Method of Multipliers

3.2.1 Alternating Method of Multipliers (ADMM)

The idea of ADMM was born by the will to combine the decomposability of the Dual Decomposition algorithm with the improved convergence properties of the Method of Multipliers. The algorithm can handle problems in the following form [13]:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) + g(z) \\ \text{subject to: } \quad & Ax + Bz = c, \end{aligned} \quad (3.11)$$

where variable $x \in R^n$ and $z \in R^m$, while $A \in R^{p \times n}$, $B \in R^{p \times m}$ and $c \in R^p$.

Furthermore, it is given that f and g are convex. What differs from the general equality-constrained optimization problem (3.1) is that the variable, previously called just x , has been split into two parts x and z here. Also, let the objective function be separable across this splitting. The optimal value of the problem (3.11) will be denoted by:

$$p^* = \inf\{f(x) + g(z) \mid Ax + Bz = c\}.$$

Similarly to the Method of Multipliers, we construct the Augmented Lagrangian.

$$L_p(x, z, y) = f(x) + g(z) + y^T(Ax + Bz - c) + \frac{\rho}{2}\|Ax + Bz - c\|_2^2 \quad (3.12)$$

The ADMM algorithm executes the following steps in each iteration:

$$x^{r+1} := \underset{x}{\operatorname{argmin}} L_p(x, z^r, y^r) \quad (3.13)$$

$$z^{r+1} := \underset{z}{\operatorname{argmin}} L_p(x^{r+1}, z, y^r) \quad (3.14)$$

$$y^{r+1} := y^r + \rho(Ax^{r+1} + Bz^{r+1} - c), \quad (3.15)$$

We form the problem (3.11) in a way fitting the Method of Multipliers in order to compare the two algorithms.

$$(x^{r+1}, z^{r+1}) := \underset{x, z}{\operatorname{argmin}} L_p(x, z, y^r) \quad (3.16)$$

$$y^{r+1} := y^r + \rho(Ax^{r+1} + Bz^{r+1} - c), \quad (3.17)$$

As one can easily see, the only difference between the two aforementioned methods is that in the case of Method of multipliers the variables x, z are updated jointly, while in the case of ADMM the update is being carried out in an alternating or sequential way,

which is the reason for the name of the algorithm we are discussing. Even if this difference seems insignificant at first, it is what enables the decomposition of the algorithm when the functions f, g are separable.

It is markable to mention that ADMM state consists of z^r and y^r . A function of their pair is used to compute the next state (z^{r+1}, y^{r+1}) . The variable x^r is not part of the state. It is just an intermediate result, calculated by the previous iteration's results (z^{r-1}, y^{r-1}) .

3.2.2 Scaled Form

In the literature, a slightly different form of ADMM is also common. By yielding the difference of two squares identity, the term of Lagrangian multipliers is inserted inside the Euclidean norm. More specifically, let the residual be $(w = Ax + Bz - c)$, then the second half of the Augmented Lagrangian (3.12) can be written as:

$$\begin{aligned} y^T w + \frac{\rho}{2} \|w\|_2^2 &= \frac{\rho}{2} \left\| w + \frac{1}{\rho} y \right\|_2^2 - \frac{1}{2\rho} \|y\|_2^2 \\ &= \frac{\rho}{2} \|w + u\|_2^2 - \frac{\rho}{2} \|u\|_2^2 \end{aligned}$$

where $u = (1/\rho)y$ is the scaled dual variable. That transformation let us express ADMM's steps in an alternative way as follows:

$$x^{r+1} := \operatorname{argmin}_x \left(f(x) + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz^r - c + u^r\|_2^2 \right) \quad (3.18)$$

$$z^{r+1} := \operatorname{argmin}_z \left(g(z) + \frac{\rho}{2} \|Ax^{r+1} + Bz - c + u^r\|_2^2 \right) \quad (3.19)$$

$$u^{r+1} := u^r + Ax^{r+1} + Bz^{r+1} - c. \quad (3.20)$$

where u^r is clearly the running sum of the residuals $(w = Ax + Bz - c)$. So, we have:

$$u^r = u^0 + \sum_{j=1}^r w^j.$$

3.3 Consensus ADMM

In this section, we are discussing an ADMM-based algorithm best fitting to solve a generic consensus optimization problem in a distributed way. Firstly, we are gonna tackle problems where there is a common global variable used to coordinate all the local variables of the problem. Carrying on, we will discuss the case where there are subvectors of the global variable coordinating specific local variables depending on the communication structure of the nodes of the problem. This format is the one used in the method that is applied in this thesis.

3.3.1 Global Variable Consensus Optimization

Let both the objective function and the constraints of our problem be separable into N parts, so that [13]:

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x)$$

where $x \in R^n$ and $f_i : R^n \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ are convex. We refer to f_i as the i_{th} term in the objective. If we want to insert constraints, we assign f_i the value $+\infty$ when they are violated.

Our final aim is to solve the problem above in such a way that each term can be handled by its own processing element, such as a thread or a processor.

Assuming we can split the variable x into local variables $x_i \in R^n$, this problem can be reformulated, including a global variable z , into:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \\ \text{subject to: } \quad & x_i - z = 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.21)$$

This optimization case is called global consensus problem. Its name was inspired by the fact that all local variables ought to agree with a common truth, in which case is the global variable z .

Let us construct the Augmented Lagrangian Function of problem (3.21)

$$L_p(x_1, \dots, x_N, z, y_1, \dots, y_N) = \sum_{i=1}^N \left(f_i(x_i) + y_i^T (x_i - z) + \frac{\rho}{2} \|x_i - z\|_2^2 \right)$$

Also, in scaled form we have:

$$L_{p,sf}(x_1, \dots, x_N, z, y_1, \dots, y_N) = \sum_{i=1}^N \left(f_i(x_i) + \frac{\rho}{2} \|x_i - z + \frac{1}{\rho} y_i\|_2^2 - \frac{1}{2\rho} \|y_i\|_2^2 \right)$$

Analyzing the steps of the ADMM algorithm, considering the aforementioned Augmented Lagrangian, we get:

$$\begin{aligned} x_i^{r+1} &:= \underset{x_i}{\operatorname{argmin}} \left(f_i(x_i) + y_i^{rT} (x_i - z_i^r) + \frac{\rho}{2} \|x_i - z_i^r\|_2^2 \right) \\ z^{r+1} &:= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(x_i^{r+1} + \frac{1}{\rho} y_i^r \right) \left(\Leftarrow \nabla_z L_{p,sf}(x_1^{r+1}, \dots, x_N^{r+1}, z, y_1^r, \dots, y_N^r) = 0 \right) \\ y_i^{r+1} &:= y_i^r + \rho(x_i^{r+1} - z^{r+1}). \end{aligned}$$

Let the average of a vector be denoted with an overline symbol $\overline{(\cdot)}$. Then, the algorithm can be simplified even further. Firstly, we rewrite the global variable update step, as well as the dual update step:

$$\begin{aligned} z^{r+1} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(x_i^{r+1} + \frac{1}{\rho} y_i^r \right) \Rightarrow \\ z^{r+1} &= \overline{x}^{r+1} + \frac{1}{\rho} \overline{y}^r \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} y_i^{r+1} &= y_i^r + \rho(x_i^{r+1} - z^{r+1}) \Rightarrow \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^{r+1} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^r + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\rho(x_i^{r+1} - z^{r+1})) \Rightarrow \\ \overline{y}^{r+1} &= \overline{y}^r + \rho(\overline{x}^{r+1} - z^{r+1}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

If we replace equation (3.22) in (3.23), we get:

$$\overline{y}^{r+1} = 0 \quad (3.24)$$

That means that after the first iteration it will always be $\bar{y}^r = 0$. As a result, we can rewrite (3.22) as:

$$z^r = \bar{x}^r \quad (3.25)$$

So, finally the global consensus method reduces just to the two following steps:

$$\begin{aligned} x_i^{r+1} &:= \underset{x_i}{\operatorname{argmin}} \left(f_i(x_i) + y_i^{rT} (x_i - \bar{x}^r) + \frac{\rho}{2} \|x_i - \bar{x}^r\|_2^2 \right) \\ y_i^{r+1} &:= y_i^r + \rho(x_i^{r+1} - \bar{x}^{r+1}). \end{aligned}$$

We define the primal and the dual residuals as the amounts that when converging to zero, primal and dual feasibility is achieved in problem (3.21) as proved in [13].

$$\begin{aligned} \text{primal residual} : w^r &= (x_1^r - \bar{x}^r, \dots, x_N^r - \bar{x}^r), \\ \text{dual residual} : s^r &= -\rho(\bar{x}^r - \bar{x}^{r-1}, \dots, \bar{x}^r - \bar{x}^{r-1}). \end{aligned}$$

To sum up, we can interpret Global Variable Consensus ADMM as a method for solving problems in which the objective and constraints are distributed across multiple processors. Each processor only has to handle its own objective and constraint term, plus a quadratic term that is updated each iteration. The quadratic terms are updated in such a way that the local variables converge to a common value (e.g. global variable), which is the solution of the original problem (3.21).

3.3.2 General Form Consensus Optimization

We now consider a case in which we have local variables $x_i \in R^{n_i}$, $i = 1, \dots, N$ with the objective $f_1(x_1) + \dots + f_N(x_N)$ being additively separable [18] with respect to local variables x_i . Each of these local variables consists of a selection of the components of the global variable $z \in R^n$. Each component of each local variable corresponds to some global variable component z_g . The mapping rule that connects local and global indices can be written as $g = \mathbf{G}(i, j)$. That map reveals the relationship between local component $(x_i)_j$ and global component z_g [13].

Consistency between local and global variables is achieved by the following equations:

$$(x_i)_j = z_{\mathbf{G}(i,j)} = z_g, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n_i.$$

where i is the index of the local component, while j is the index of the global component.

For simplicity reasons, let $\tilde{z}_i \in R^{n_i}$ be defined by $(\tilde{z}_i)_j = z_{\mathbf{G}(i,j)} = z_g$. Essentially, \tilde{z}_i represents the global variable's idea of what local variable x_i should be. The consensus constraints can be declared easily as $x_i - \tilde{z}_i = 0$, $i = 1, \dots, N$.

Therefore, the general form consensus problem is:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \\ \text{subject to} \quad & x_i - \tilde{z}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.26)$$

with variables x_1, \dots, x_N and $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_N$ (\tilde{z}_i are linear functions of global variable z , e.g. vectors with composed by a selection of global variable components corresponding to local variables x_i).

Let us demonstrate a simple example in order to visualize the functionality of the General Form Consensus ADMM algorithm. In this paradigm, we have $N = 3$ subsystems, global variable dimension $n = 4$, and local variable dimensions $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$. The mapping

between global and local components is presented in the following bipartite graph. Each edge stands for a consensus constraint.

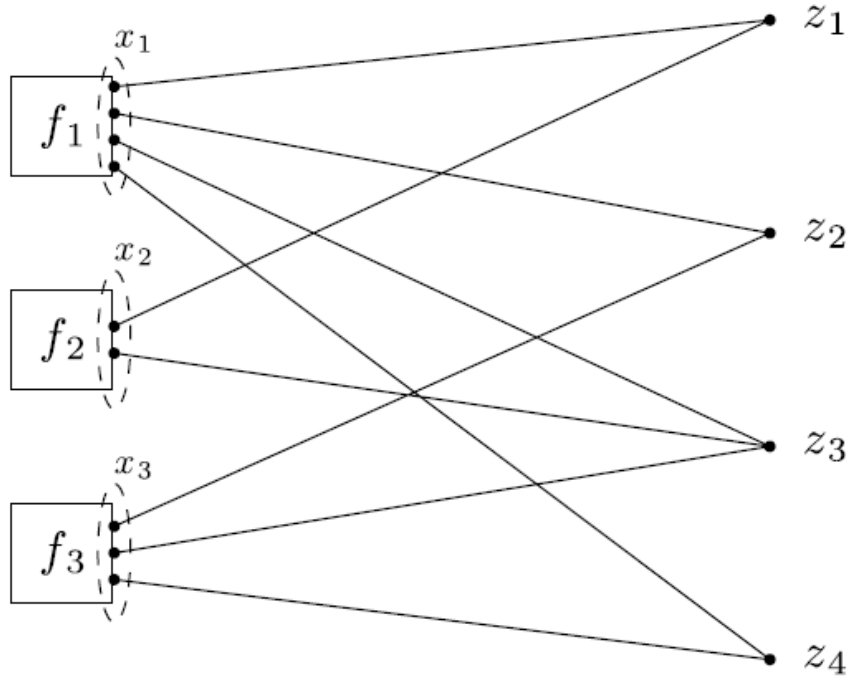


Figure 3.1: General form consensus optimization. Local objective terms are on the left; global variable components are on the right. Each edge in the bipartite graph is a consistency constraint, linking a local variable component and a global variable component.

So following the notation given before and according to the consistency constraints defined by each edge in the bipartite graph in Figure (3.1), we have the following:

- **Global Variable Vector** ($n = 4$) :

$$z = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T$$

- **Local Variable Vector** x_1 ($n_1 = 4$) :

$$x_1 = [(x_1)_1 \ (x_1)_2 \ (x_1)_3 \ (x_1)_4]^T$$

- **Local Variable Vector** x_2 ($n_2 = 2$) :

$$x_2 = [(x_2)_1 \ (x_2)_2]^T$$

- **Local Variable Vector** x_3 ($n_3 = 3$) :

$$x_3 = [(x_3)_1 \ (x_3)_2 \ (x_3)_3]^T$$

- **Global Variable's idea about Local Variable Vector** x_1 ($n_1 = 4$) :

$$\tilde{z}_1 = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T$$

- **Global Variable's idea about Local Variable Vector x_2 ($n_2 = 2$) :**

$$\tilde{z}_2 = [z_1 \quad z_3]^T$$

- **Global Variable's idea about Local Variable Vector x_3 ($n_3 = 3$) :**

$$\tilde{z}_3 = [z_2 \quad z_3 \quad z_4]^T$$

The Augmented Lagrangian of problem (3.26) is:

$$\begin{aligned} L_p(x, z, y) &= \sum_{i=1}^N \left(f_i(x_i) + y_i^T (x_i - \tilde{z}_i) + \frac{\rho}{2} \|x_i - \tilde{z}_i\|_2^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(f_i(x_i) + \frac{\rho}{2} \|x_i - \tilde{z}_i + \frac{1}{\rho} y_i\|_2^2 - \frac{1}{2\rho} \|y_i\|_2^2 \right) \end{aligned}$$

where Lagrangian multipliers $y_i \in R^{n_i}$. The ADMM is composed of the steps:

$$x_i^{r+1} := \underset{x_i}{\operatorname{argmin}} \left(f_i(x_i) + y_i^{rT} (x_i - \tilde{z}_i^r) + \frac{\rho}{2} \|x_i - \tilde{z}_i^r\|_2^2 \right) \quad (3.27)$$

$$z^{r+1} := \underset{z}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{i=1}^m \left(-y_i^{rT} \tilde{z}_i + \frac{\rho}{2} \|x_i^{r+1} - \tilde{z}_i^{r+1}\|_2^2 \right) \right) \quad (3.28)$$

$$y_i^{r+1} := y_i^r + \rho(x_i^{r+1} - \tilde{z}_i^{r+1}). \quad (3.29)$$

As the reader can see, x_i and y_i update steps can be executed independently by different processors that exchange the necessary values in order to carry out their calculations for each subsystem i .

The z -update step decouples across the components of z , since L_p is fully separable in all its components. So each component z_g of the global variable z can be computed using the following formula:

$$z_g^{r+1} := \underset{z_i}{\operatorname{argmin}} L_p(x, z, y) := \frac{\sum_{\mathbf{G}(i,j)=g} \left((x_i^{r+1})_j + \frac{1}{\rho} (y_i^r)_j \right)}{\sum_{\mathbf{G}(i,j)=g} 1} \quad (3.30)$$

From the last equation, we can conclude that z_g is being found from the average of the local entries $x_i^{r+1} + \frac{1}{\rho} y_i^r$ that correspond to that global index g . If we insert equation (3.30) to equation (3.29) with respect to the mapping rule $\mathbf{G}(i, j) = g$ we can prove that after the first iteration:

$$\sum_{\mathbf{G}(i,j)=g} \left((y_i^r)_j \right) = 0 \quad (3.31)$$

Replacing equation (3.31) in equation (3.30), we finally get:

$$z_g^{r+1} := \frac{\sum_{\mathbf{G}(i,j)=g} \left((x_i^{r+1})_j \right)}{N_g} \quad (3.32)$$

where N_g is the number of local variable entries that correspond to global variable entry z_g . In other words, the z -update is local averaging for each component z_g rather than global averaging. Summarizing, we could say that **only the processing elements that have an opinion on a feature z_g will vote on z_g .**

3.4 Literature review on ADMM applications in distribution systems

As explained in Chapter 1, our goal is to develop a General Form Consensus Optimization Algorithm which is a product of the ADMM method. As a result, in this section, we present various applications of mostly distributed ADMM based algorithms used in distribution grids with DERs installed. These applications will be briefly discussed and explained composing a literature review that provided inspiration for the concept of this diploma thesis.

In [20] the authors aim to minimize the power losses of a distribution network controlling a finite reactive power capacity from the inverters of the photovoltaic panels (PVs) installed in the grid. To begin with, they use a linearized Branch Flow Model (BFM) [31], namely LinDistFlow [32], to describe the power flow equations. Hence, they convexify the optimization problem by getting rid of the non-linear parts of the power flow equations. In order to achieve their goal, they yield three different algorithms: Dual Ascent without considering constraints for the nodal voltage limits, a Consensus ADMM based algorithm without considering constraints for the nodal voltage limits, and, finally, a Consensus ADMM based algorithm considering constraints for the nodal voltage limits. The authors examine 7 cases with different scenarios about the number of nodes of the grid, about the PVs penetration percentage, about the active power injection of the PVs (it's assumed constant), about the maximum apparent power capacity of the PVs, and thus the reactive power limits of the PVs inverters, and about load profiles for the network. The results of all algorithms are compared to the conclusion section of the paper, with regard to the number of iterations needed for each method and, hence, the speed of convergence of each algorithm. Last but not least, the authors investigate the validity of the LinDistFlow approximation. To do so, they take the values of the reactive power of PVs inverters calculated with the LinDistFlow approximation and substitute them into the DistFlow equations. Then, they solve the DistFlow[32] equations exactly and compare the relative losses of the DistFlow and the LinDistFlow model equations.

In [21] the author utilizes a Bus Injection Modelling (BIM) [31] approach to formulate an Optimal Power Flow (OPF) problem. Then, he reformulates the problem formulation in such a way, so he would be able to yield an Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM) algorithm, based on the work of [22], [23]. More specifically, he splits the examined network into regions upon which he solves OPF problems locally, aiming to minimize the cost of nodal active power injections. Each region has a node that is responsible to communicate with its nearest node of another adjacent region. Let's denote that node as "messenger". Each messenger communicates the values of its voltage and its opinion about the voltage that its adjacent messenger should have (found by the local OPF problem of its region), with its adjacent messenger. The objective function of each messenger also includes a term that tries to guarantee that the messengers' opinion about the voltages of their adjacent messengers will converge to a consensus truth. However, as explained in section (2.2.2) the ACOPF is a non-linear, non-convex optimization problem. Moreover, ADMM is to converge only in convex scenarios. As a result, since non-convexification is applied to the problem formulation, the proposed algorithm is not assured to converge.

In [24] the authors apply a Semi-Definite Programming (SDP) relaxation to the formulation of the Optimal Power Flow (OPF) problem. Basically, they provide a lower bound of the optimal solution by ignoring the fact that the rank of the solution matrix of the OPF has to equal one. Hence, they provide a lower bound to the optimal solution of the problem since they extend and convexify the feasible region. Their goal is to minimize the power losses across the network via handling the reactive power injections of the Distributed Energy Resources (DERs) installed on the grid. At the same time, they consider constraints for the power injection of each node and for the nodal voltages. To do so, they yield a Consensus Alternating Direction Method of Multipliers (Consensus ADMM) based algorithm by applying

coupling constraints among the local variables of adjacent nodes. Finally, the authors present simulations on IEEE 13, 34, 37, and 123 bus unbalanced distribution networks to illustrate the scalability and optimality of the proposed algorithm, focusing mainly on its time of convergence (ToC) in each case. It's worth mentioning that, even though they solve an SDP Relaxed Optimal Power Flow (ROPF), it is shown empirically in [25] that the relaxation is exact for all the tested distribution networks. In other words, every optimal solution of ROPF is also optimal for the original OPF problem.

In [26] the authors introduce a stochastic optimization formulation, using a LinDistFlow model approach, for real and reactive power management in such distribution systems with a high level of residential-scale PV penetration. Their objective consists of 3 different goals: power loss minimization, voltage regulation, and customer satisfaction. Customer satisfaction is presented via a utility function according to which each customer is pleased most when he utilizes the maximum power consumption possible. Decision variables include demand response schedules of programmable loads, as well as reactive power consumption or generation by the PV inverters in a fashion adaptive to the uncertain real power generated by the PV units. Moreover, the stochastic nature of solar renewable power is presented via J different scenarios, that each one has a specific probability to occur, namely π^j , $j \in \{1, \dots, J\}$. Then, a decentralized algorithm based on the consensus Alternating Direction Method Of Multipliers (Consensus ADMM) is developed. The algorithm features closed-form updates per node and requires communication only between neighboring nodes. The performance of the algorithm is evaluated on a typical rural distribution circuit using computer simulations. Finally, the proposed method is demonstrated to have superior voltage regulation effectiveness in comparison to local reactive power control alternative schemes.

In [27] the authors propose a method to optimally set the reactive power contributions of Distributed Energy Resources (DERs) present in distribution systems with the goal of regulating bus voltages within desired limits. For the case when the network is balanced, they use the DistFlow modeling approach for radial power systems to formulate an optimal power flow (OPF) problem. Then, they leverage properties of the system operating conditions to relax certain nonlinear terms of this OPF, which results in a convex quadratic program (QP). Namely, they treat the non-linear power losses quantities of the power flow equations as either constant computed from the initial distribution line segment power flows and the reference voltage or as linear approximations of the nonlinear terms based on the current distribution line segment power flows and the reference voltage. Moreover, they include the unbalanced three-phase formulation to extend the ideas introduced for the balanced network case. The authors compare the effectiveness of their QP-based algorithm with a Semi-Definite Programming (SDP) based algorithm for optimally tap setting of voltage regulation transformers in unbalanced distribution systems proposed in [28]. Furthermore, to efficiently solve this QP, they also propose an algorithm based on the Consensus Alternating Direction Method of Multipliers (Consensus ADMM). Finally, they present several case studies to demonstrate their methods in unbalanced three-phase distribution systems with 15 and 123 buses respectively.

In [29] the authors propose a distributed algorithm for online energy management in microgrids with a high penetration of Distributed Energy Resources (DERs). High penetration of DERs comes along with their stochastic nature of power generation to the microgrids. In general, the state-of-the-art forecasting for non-dispatchable DERs, such as solar energy, is not sufficiently accurate, which results in inaccurate energy scheduling. To address the high uncertainty issue in the networked microgrids, the writers of this paper propose online energy management based on the online alternating direction method of multipliers algorithm. The online algorithm provides a less conservative schedule than the robust optimization-based approach. The effectiveness of the proposed algorithm is verified by various numerical examples at the conclusion part of the paper.

In [30] a distributed algorithm for ensuring Optimal Power Flows (OPF) in hybrid AC-DC systems is proposed. The objective of the method is the minimization of the power losses all over the AC-DC network. That means that the authors consider power converter losses. Moreover, they use a Bus Injection Modelling (BIM) [31] approach to formulating the OPF problem. While centralized OPF formulations require information on many variables of all the network nodes, the present approach relies on solving an OPF distributively in each AC agent and AC-DC agent that only requires to exchange the voltages corresponding to adjacent nodes. The proposed algorithm is based on General Form Consensus Optimization. Operation schemes based on this approach would be especially interesting when communications with the central unit fail. This algorithm is applied to a 3 DC - 5 AC bus system, showing that the obtained results coincide with those of the centralized formulation. Additionally, the dynamic behavior of this system operated under the proposed algorithm is analyzed in a real-time platform in a realistic communication environment.

Chapter 4

Mathematical formulation

This Chapter will present the mathematical formulation of the method proposed in this thesis for the optimal operation of DERs, namely PVs, on a single time period during the day. The purpose of the method is to resolve the over-voltage violations created by high PV production in time periods of low demand in distribution grids. During high output power of PV and low demand, the problem of voltage rise is very common to appear as explained in [33]. Therefore, we propose a method to resolve a realistic and frequent problem.

4.1 Power flow model

4.1.1 DistFlow Model

For the purposes of this diploma thesis, we used the well studied Branch Flow Model (BFM) of [32] known as *DistFlow*. It's important to clarify that this model considers that a radial distribution system is presented as a directed graph with an arbitrary notation. We will use (i, j) and $i \rightarrow j$ interchangeably to denote the directed line from bus i to bus j . Moreover, we yield the notation to use P_k and Q_k to denote nodal injections to node k and P_{ik} and Q_{ik} to denote branch flows from node i to node k . Denote by U_i the squared magnitude of the voltage of bus i and by ℓ_{ik} the squared magnitude of the current flow from bus i to bus k . Also, let the $r_{ik} + jx_{ik}$ be the series impedance of the line from bus i to bus k . Finally, we define $\overline{(\cdot)}$ as the complex conjugate of a quantity.

Before we lay out the equations of the model, we present part of a hypothetical distribution network that includes the active and reactive power flows, attempting to help the reader understand the notation clearly.

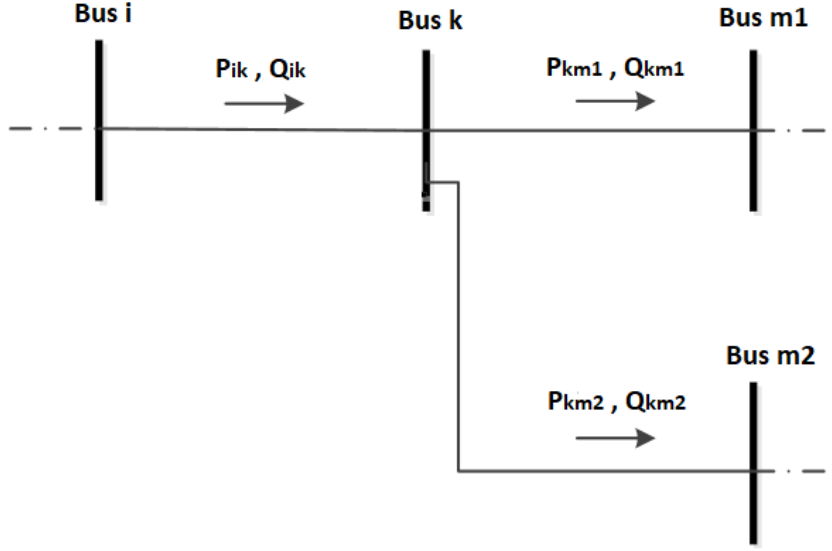


Figure 4.1: Part of a distribution graph

The equations representing DistFlow Model are given below [32]:

$$U_i = V_i \bar{V}_i = |V_i|^2 \quad (4.1)$$

$$\ell_{ik} = \frac{P_{ik}^2 + Q_{ik}^2}{U_i} \quad (4.2)$$

$$P_{ik} = r_{ik} \ell_{ik} - P_k + \sum_{m_i: k \rightarrow m_i} P_{km_i} \quad (4.3)$$

$$Q_{ik} = x_{ik} \ell_{ik} - Q_k + \sum_{m_i: k \rightarrow m_i} Q_{km_i} \quad (4.4)$$

$$U_k = U_i - 2(r_{ik} P_{ik} + x_{ik} Q_{ik}) + (r_{ik}^2 + x_{ik}^2) \ell_{ik} \quad (4.5)$$

4.1.2 LinDistFlow Model

However, as explained in Chapter 2, utilizing the equations of the DistFlow model, as of any other AC power flow equations model, would lead to non-convex optimization problems. Therefore, we yield a linear approximation of the model called *LinDistFlow*. In order to overcome the non-convexity, this model neglects the losses in the DistFlow model by setting the squared current's magnitude of any line of the electric power system to zero ($\ell_{ik} = 0$).

As a result, we get the following equations which represent the LinDistFlow model [32]:

$$U_i = V_i \bar{V}_i = |V_i|^2 \quad (4.6)$$

$$P_{ik} = -P_k + \sum_{m_i: k \rightarrow m_i} P_{km_i} \quad (4.7)$$

$$Q_{ik} = -Q_k + \sum_{m_i: k \rightarrow m_i} Q_{km_i} \quad (4.8)$$

$$U_k = U_i - 2(r_{ik} P_{ik} + x_{ik} Q_{ik}) \quad (4.9)$$

4.2 Centralized problem formulation

4.2.1 DSO's optimization problem

To explain the method, the optimisation problem of the DSO is introduced. In our case, we assume that the aggregator that manages the PVs installed in the network, is gonna be paid for the PVs maximum power point production [34]. However, harvesting the PVs maximum power point production may cause over-voltage violations due to potential reverse power flows. From a technical perspective, the DSO aims to set the curtailment of the PV production to ensure that the network will operate safely. From a financial perspective, the DSO's goal to minimize the PV active power curtailment translates to avoiding compensating the aggregator for energy that was not used due to network constraints.

Let us denote the curtailment of the active power produced by PV in bus k by \hat{p}_k . Inspired by [35], [36], in this paradigm the electricity price that the aggregator will be compensated with depends on the curtailed PV production. Namely, the function that simulates the cost of the curtailed active power is:

$$y_0 = \beta \hat{p}_k + c_0, \quad (4.10)$$

where c_0 represents the feed-in tariff for PV active power production and $\beta \hat{p}_k$ represents a sensitivity part. The price sensitivity term will be discussed thoroughly in section (4.2.2). This approximation leads to structuring the DSO's problem with Quadratic Programming (QP) by multiplying price y_0 with the curtailment of the active power produced by PV on bus \hat{p}_k as in [38].

$$y_0 \cdot \hat{p}_k = \beta \hat{p}_k^2 + c_0 \hat{p}_k, \quad (4.11)$$

It's worth mentioning that Quadratic programming is the process of solving the problem of optimizing (minimizing or maximizing) a quadratic function of several variables subject to linear constraints on these variables [37].

Let us denote $E_{pv,k}$ as a matrix element that states if the examined node k is a connection point of a PV on the grid ($E_{pv,k} = 1$) or not ($E_{pv,k} = 0$). Also, define \hat{p}_k^{min} , \hat{p}_k^{max} as the minimum and the maximum possible curtailment of PV on node k respectively. The quantity \hat{p}_k^{max} can also be considered as the maximum power point production of the PV installed on bus k . Thus, the quantity $(\hat{p}_k^{max} - \hat{p}_k)$ is the actual injection of the active power produced by PV on bus k . Last but not least, let P_k^c , Q_k^c be the conventional active and reactive load on bus k .

All in all, the DSO aims to minimize the curtailment of PVs active power production subject the power flow equations described by the LinDistFlow model (see section 4.1.2), the voltage magnitude limits and the operational limits of the PV inverter responsible for setting its curtailment [34].

So, the DSO's optimization problem is formulated as follows:

$$\min \sum_{k=1}^{N_b} (E_{pv,k} \cdot (\beta \hat{p}_k^2 + c_0 \hat{p}_k)) \quad (4.12)$$

subject to :

$$U_0 = 1 \text{ pu}^2 \quad (4.13)$$

$$P_{ik} = -P_k + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} P_{km_i} \quad (4.14)$$

$$P_k = -P_k^c + E_{pv,k} \cdot (\hat{p}_k^{max} - \hat{p}_k) \quad (4.15)$$

$$Q_{ik} = -Q_k + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} Q_{km_i} \quad (4.16)$$

$$Q_k = -Q_k^c \quad (4.17)$$

$$U_k = U_i - 2(r_{ik}P_{ik} + x_{ik}Q_{ik}) \quad (4.18)$$

$$U^{min} \leq U_k \leq U^{max} \quad (4.19)$$

$$\hat{p}_k^{min} \leq \hat{p}_k \leq \hat{p}_k^{max}, \quad (4.20)$$

As explained before, the objective function (4.12) represents the DSO's aim to minimize the PVs active power curtailment and thus avoid compensating the aggregator for energy that was not used due to network constraints. Equation (4.13) reflects our demand for the voltage magnitude of the slack bus to be 1 pu. Equations (4.14) and (4.16) represent the linearized active and the reactive power balance in the network respectively as stated in the LinDistFlow model. Equations (4.15) and (4.17) represent the active and reactive nodal injections as subtraction of active and reactive generation minus active and reactive conventional load respectively on bus k . Equation (4.18) reflects a linearised approximation for voltage differences from one node to the other as stated in the LinDistFlow model. Equation (4.19) sets the minimum and maximum voltage magnitude limits of each node. Finally, equation (4.20) sets the minimum and maximum PV production curtailment limits that an PV inverter is capable to offer on node k .

In order to solve the optimization problem described by equations (4.12) - (4.20), the data of each node have to be collected by a central processor, which will decide the set-points of the PVs in order to minimize the objective function with respect to the constraints of the problem. Since global information is needed, in order to come to a solution, the problem is labeled as **centralized** [32].

4.2.2 Setting of sensitivity and cost coefficients

Based on the works of [35], [36] we defined the cost of the curtailed PVs production according to the equation (4.10). Choosing this type of cost function allows us to formulate the DSO's optimization problem with Quadratic Programming (QP), meaning of quadratic form, with a positive definite Hessian matrix (see 4.12). Since constraints (4.13) - (4.20) are affine, the problem becomes a strictly convex QP problem. Therefore, the optimizer is guaranteed to find the global optimal point.

As outlined in [36], the idea behind the price y_0 is to linearize the electricity price around a certain average price and use the merit order of power plants to estimate the sensitivity parameter β . However, as explained in [38], we should choose the sensitivity parameter β carefully in order to reflect realistic results.

All in all, we assigned β the following value:

$$\beta = 10 \text{ euros}/\text{MW}^2 \cdot h$$

As for the cost for the production of active power by the PVs, which we define that it is the same for their curtailment, according to European law (**art. 15 par. 1 Law No. 3468/2006 in conjunction with FEK B' 97/2012**) [39], after the year 2015 the price for solar active power production under 100 MW for interconnected systems in Greece is set via the following formula:

$$c_0 = 1.2 \cdot \text{MAS}P^{-1}$$

where $\text{MAS}P^{-1}$ is the Marginal Average System Price of the previous year. The price c_0 represents how much each MWh produced by PVs is compensated. Therefore, it is inherently the cost of curtailment of PVs production.

In order to calculate $\text{MAS}P^{-1}$, we used data from the website of Renewable Energy Sources Operator & Guarantees of Origin (DAPEEP SA) [40] in Greece about the marginal average system Price per month of the year 2019.

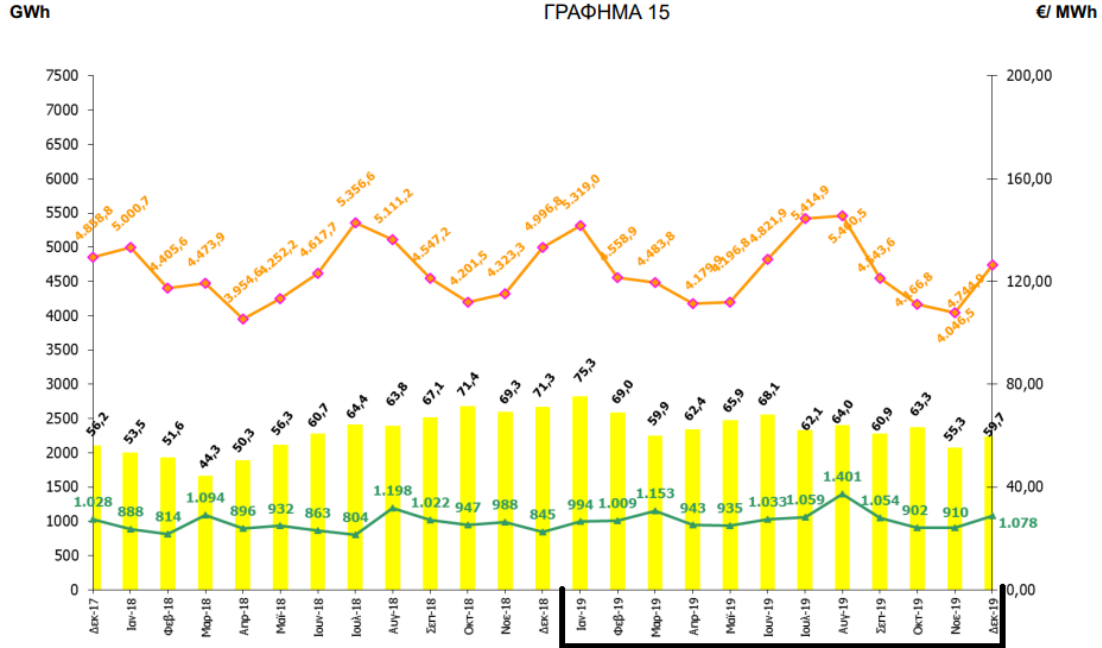


Figure 4.2: Marginal System Price per Month (Yellow), National Demand (Orange) and National Production By Cogeneration of High Efficiency Heat & Power and Renewable Energy Sources (Green)

Afterward, we calculated the marginal average system price of the year 2019 and we multiplied it with the coefficient 1.2 as the formula commands. The result from the calculation described is:

$$c_0 = 76.59 \text{ euros}/MWh.$$

4.3 Distributed problem formulation

4.3.1 Reformulation of the centralized problem introducing local variables

To begin with, we assume there is a microcomputer attached in each bus k of the grid (e.g. Raspberry [41]). Each microcomputer serves as an agent that can process the following local information [20], [27]:

- local variable for active power flow of line (i, k) ($P_{ik,L}^-$)
- local variable for active power flow of each line (k, m_i) ($P_{ik,L}^{+(m_i)}$)
- local variable for reactive power flow of line (i, k) ($Q_{ik,L}^-$)
- local variable for reactive power flow of each line (k, m_i) ($Q_{ik,L}^{+(m_i)}$)
- local variable for squared magnitude of voltage of node k 's father, e.g. node i ($U_{ik,L}^-$)
- local variable for squared magnitude of voltage of node k ($U_{ik,L}^+$)
- local variable for the curtailment of the PV production of node k , if $k \in N_p$ ($\hat{p}_{k,L}$)

The optimization problem described by conditions (4.12) - (4.20) can be rewritten as follows:

$$\min \sum_{k=1}^{N_b} (E_{pv,k} \cdot (\beta p_{k,L}^2 + c_0 p_{k,L})) \quad (4.21)$$

subject to :

$$U_{0k,L}^- = 1 \text{ pu}^2 \quad (4.22)$$

$$P_{ik,L}^- = -P_k + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} P_{ik,L}^{+(m_i)} \quad (4.23)$$

$$P_k = -P_k^c + E_{pv,k} \cdot (p_{k,L}^{max} - p_{k,L}) \quad (4.24)$$

$$P_{ik,L}^{+(m_i)} = 0 \quad \text{for } k \in N_\ell \quad (4.25)$$

$$Q_{ik,L}^- = -Q_k + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} Q_{ik,L}^{+(m_i)} \quad (4.26)$$

$$Q_k = -Q_k^c \quad (4.27)$$

$$Q_{ik,L}^{+(m_i)} = 0 \quad \text{for } k \in N_\ell \quad (4.28)$$

$$U_{ik,L}^+ = U_{ik,L}^- - 2(r_{ik} P_{ik,L}^- + x_{ik} Q_{ik,L}^-) \quad (4.29)$$

$$U^{min} \leq U_{ik,L}^- \leq U^{max} \quad (4.30)$$

$$U^{min} \leq U_{ik,L}^+ \leq U^{max} \quad (4.31)$$

$$\hat{p}_k^{min} \leq p_{k,L} \leq \hat{p}_k^{max}, \quad (4.32)$$

where N_ℓ is a set composed of nodes that are leaves of the directed graph - electric power system.

As explained before, objective function (4.21) represents the DSO's aim to minimize the PVs active power curtailment and thus avoid compensating the aggregator for energy that was not used due to network constraints. Equation (4.22) reflects that the nodes that are children of the feeder know that the voltage magnitude of the slack bus is 1 pu. Equations (4.23) and (4.26) represent the linearized active and the reactive power balance of each node k respectively as stated in LinDistFlow model. Equations (4.24) and (4.27) represent the active and reactive nodal injections as a subtraction of active and reactive generation minus active and reactive conventional load respectively on bus k . Equations (4.25) and (4.28) reflects that the nodes that are leaves of the distribution system know that there are not any more nodes downstream and therefore there is no active and reactive power flow downstream. Equation (4.29) reflects a linearised approximation for node k 's opinion about

voltage difference between node k 's father and node k as stated in the LinDistFlow model. Equations (4.30) and (4.31) sets the minimum and maximum voltage magnitude limits of node k 's opinion about node k 's father and node k . Finally, equation (4.32) sets the minimum and maximum PV production curtailment limits that a PV inverter is capable to offer on node k .

Most importantly, for the reformulation to be complete, we need to establish a set of **coupling constraints** between local variables and global components, that are going to guarantee that all the local variables will come to a **consensus solution** with their adjacent nodes, and hence guarantee that the optimization problem described by conditions (4.21)-(4.38) is equivalent to the optimization problem described by conditions (4.12) - (4.20). In order to solve the second one and conclude the same results as the centralised one, we need to know the values of the global components in advance. The constraints between the local variables and the global components that will determine a common truth, are given below.

$$P_{ik,L}^- = P_{ik} \quad (4.33)$$

$$P_{ik,L}^{+(m_i)} = P_{km_i} \quad (4.34)$$

$$Q_{ik,L}^- = Q_{ik} \quad (4.35)$$

$$Q_{ik,L}^{+(m_i)} = Q_{km_i} \quad (4.36)$$

$$U_{ik,L}^- = U_i \quad (4.37)$$

$$U_{ik,L}^+ = U_k \quad (4.38)$$

where $(P_{ik}, P_{km_i}, Q_{ik}, Q_{km_i}, U_i, U_k)$ are the global variable components coordinating the respective local variables.

At first, this reformulation doesn't make any sense, since we solve the exact same optimization problem but with a lot more constraints. However, equations (4.33) - (4.38) and the introduction of all of these new local - auxiliary variables, that refer to each node alone, are the key to fully decompose the initial problem and to be able to utilize a method that will solve the DSO's problem distributively.

4.3.2 Proposed General Form Consensus ADMM based algorithm

In this section, we will present an algorithm inspired by the General Form Consensus ADMM method that manages to solve the aforementioned DSO's problem in a distributed manner. Every node k of the network, except slack bus, will solve its own optimization problem having its own set of local constraints. The reason why the feeder does not perform a local optimization is because its voltage is fixed [20], [27].

First of all, let us construct the augmented Lagrangian.

$$L_p(\cdot) = \sum_{k=1}^{N_b} L_{p,k,L}(\cdot) \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned}
L_{p,k,L}(\cdot) &= E_{pv,k} \cdot (\beta \hat{p}_{k,L}^2 + c_0 \hat{p}_{k,L}) \\
&+ \lambda_{P_{ik,L}}^- (P_{ik,L}^- - P_{ik}) + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} [\lambda_{P_{ik,L}}^{+(m_i)} (P_{ik,L}^{+(m_i)} - P_{km_i})] \\
&+ \lambda_{Q_{ik,L}}^- (Q_{ik,L}^- - Q_{ik}) + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} [\lambda_{Q_{ik,L}}^{+(m_i)} (Q_{ik,L}^{+(m_i)} - Q_{km_i})] \\
&+ \lambda_{U_{ik,L}}^- (U_{ik,L}^- - U_i) + \lambda_{U_{ik,L}}^+ (U_{ik,L}^+ - U_k) \\
&+ \frac{\rho}{2} (P_{ik,L}^- - P_{ik})^2 + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} \left[\frac{\rho}{2} (P_{ik,L}^{+(m_i)} - P_{km_i})^2 \right] \\
&+ \frac{\rho}{2} (Q_{ik,L}^- - Q_{ik})^2 + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} \left[\frac{\rho}{2} (Q_{ik,L}^{+(m_i)} - Q_{km_i})^2 \right] \\
&+ \frac{\rho}{2} (U_{ik,L}^- - U_i)^2 + \frac{\rho}{2} (U_{ik,L}^+ - U_k)^2,
\end{aligned} \tag{4.40}$$

where $\lambda_{P_{ik,L}}^-$, $\lambda_{P_{ik,L}}^{+(m_i)}$, $\lambda_{Q_{ik,L}}^-$, $\lambda_{Q_{ik,L}}^{+(m_i)}$, $\lambda_{U_{ik,L}}^-$, $\lambda_{U_{ik,L}}^+$ are the Lagrangian multipliers corresponding to equations (4.33) - (4.38) respectively, and $\rho > 0$ is the penalty coefficient.

After the reformulation, it's obvious that there is a unique group of local variables corresponding to each node of the power system. This is something deeply useful since it allows us to optimize the Augmented Lagrangian function cyclically, with respect to the local variables of each node. Of course, we will have to initialize our algorithm, namely the global variables and the Lagrangian multipliers. We will discuss more about the initialization in Chapter 7.

For now, we will proceed explaining the General Form Consensus ADMM based algorithm by presenting the steps that compose the method in detail, based on the knowledge that was reported in section (3.3.2).

4.3.2.1 First step of the algorithm - Local optimization

As already mentioned, in this step each agent (**besides slack bus**) will be solving the following optimization problem with respect only to the local variables referring to this agent - bus. In other words, **the only decision variables of this instance of optimization problem are the local variables**. Each node has calculated and knows the values of the global components (P_{ik} , P_{km_i} , Q_{ik} , Q_{km_i} , U_i , U_k) corresponding to its local variables and the Lagrange Multipliers ($\lambda_{P_{ik,L}}^-$, $\lambda_{P_{ik,L}}^{+(m_i)}$, $\lambda_{Q_{ik,L}}^-$, $\lambda_{Q_{ik,L}}^{+(m_i)}$, $\lambda_{U_{ik,L}}^-$, $\lambda_{U_{ik,L}}^+$) corresponding to equations (4.33) - (4.38) respectively from the previous iteration of the method.

$$\min L_{p,k,L}(\cdot) \quad (4.41)$$

subject to :

$$U_{0k,L}^- = 1 \text{ pu}^2 \quad (4.42)$$

$$P_{ik,L}^- = -P_k + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} P_{ik,L}^{+(m_i)} \quad (4.43)$$

$$P_k = -P_k^c + +E_{pv,k} \cdot (p_{k,L}^{\hat{max}} - p_{k,L}) \quad (4.44)$$

$$P_{ik,L}^{+(m_i)} = 0 \quad \text{for } k \in N_\ell \quad (4.45)$$

$$Q_{ik,L}^- = -Q_k + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} Q_{ik,L}^{+(m_i)} \quad (4.46)$$

$$Q_k = -Q_k^c \quad (4.47)$$

$$Q_{ik,L}^{+(m_i)} = 0 \quad \text{for } k \in N_\ell \quad (4.48)$$

$$U_{ik,L}^+ = U_{ik,L}^- - 2(r_{ik}P_{ik,L}^- + x_{ik}Q_{ik,L}^-) \quad (4.49)$$

$$U^{min} \leq U_{ik,L}^- \leq U^{max} \quad (4.50)$$

$$U^{min} \leq U_{ik,L}^+ \leq U^{max} \quad (4.51)$$

$$\hat{p}_k^{min} \leq p_{k,L} \leq \hat{p}_k^{max}, \quad (4.52)$$

In this step, each bus minimizes its own Lagrangian function with respect to its own unique set of local variables. According to objective function (4.41), each node tries to find the minimum curtailment of its PV's production (if installed) and at the same time tries to decrease the gap between the local variables and the global components corresponding to them. Thus, each bus aims to achieve the initial goal, e.g. the minimization of PV curtailment, while at the same time coming to a consensus solution, e.g. the adjacent nodes should agree to their global coordinators.

The minimization of the objective function of each node k , is locally constrained by the set of equations (4.42) - (4.52). For the interpretation of each of these constraints see section (4.3.1).

After this step, the values of the local variables for the iteration $[r+1]$ have been calculated by each node k . So, each node has estimated the following values that optimize its local objective function (4.41) with respect to its local constraints (4.42) - (4.52).

- $P_{ik,L}^-[r+1]$
- $P_{ik,L}^{+(m_i)}[r+1]$
- $Q_{ik,L}^-[r+1]$
- $Q_{ik,L}^{+(m_i)}[r+1]$
- $U_{ik,L}^-[r+1]$
- $U_{ik,L}^+[r+1]$
- $p_{k,L}^{\hat{}}[r+1]$

4.3.2.2 Second step of the algorithm - Global components update

In this step, having calculated the optimal local variables from the first step of the algorithm, the adjacent nodes communicate with each other in order to decide a better value for the global components that coordinate their local variables. The updated values of P_{ik} , Q_{ik} , U_k are being found by solving equations:

$$\nabla L_p(\cdot)_{(P_{ik})} = \nabla L_p(\cdot)_{(Q_{ik})} = \nabla L_p(\cdot)_{(U_k)} = 0$$

As a result, we get the following equations:

$$P_{ik}[r+1] = \frac{P_{ik,L}^-[r+1] + P_{ji,L}^{+(k)}[r+1]}{2} \quad (4.53)$$

$$Q_{ik}[r+1] = \frac{Q_{ik,L}^-[r+1] + Q_{ji,L}^{+(k)}[r+1]}{2} \quad (4.54)$$

$$U_k[r+1] = \frac{U_{ik,L}^+[r+1] + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} U_{km_i,L}^-[r+1]}{N_k^+} \quad (4.55)$$

where N_k^+ denotes the cardinality of node k and its children. Also, there are three cases, where these equations are bypassed.

- The voltage of the feeder is always fixed.

$$U_0[r+1] = U_{0k,L}^-[r+1] = 1 \text{ pu}^2$$

- When node k is child of the feeder since there are no upstream boundaries we have

$$P_{0k}[r+1] = P_{0k,L}^-[r+1]$$

$$Q_{0k}[r+1] = Q_{0k,L}^-[r+1]$$

- When node k is a leaf node since there are no downstream boundaries we have

$$U_k[r+1] = U_{ik,L}^+[r+1]$$

While reviewing relevant literature around this algorithm, we realised that notation can be misleading and even though a theoretical background was established in Chapter 3, the equations of the second step of the algorithm are hard to understand. Thus, we decided to explain the method's steps in full detail upon an example topology in Chapter 5, that we hope to clarify any questions arising in the mathematical formulation.

4.3.2.3 Third step of the algorithm - Dual variables update

In this step, having calculated both the optimal local variables and the updated global components corresponding to them, each node updates the Lagrange Multipliers that manages as follows:

$$\lambda_{P_{ik,L}}^- [r + 1] = \lambda_{P_{ik,L}}^- [r] + \rho(P_{ik,L}^- [r + 1] - P_{ik}[r + 1]) \quad (4.56)$$

$$\lambda_{P_{ik,L}}^{+(m_i)} [r + 1] = \lambda_{P_{ik,L}}^{+(m_i)} [r] + \rho(P_{ik,L}^{+(m_i)} [r + 1] - P_{km_i}[r + 1]) \quad (4.57)$$

$$\lambda_{Q_{ik,L}}^- [r + 1] = \lambda_{Q_{ik,L}}^- [r] + \rho(Q_{ik,L}^- [r + 1] - Q_{ik}[r + 1]) \quad (4.58)$$

$$\lambda_{Q_{ik,L}}^{+(m_i)} [r + 1] = \lambda_{Q_{ik,L}}^{+(m_i)} [r] + \rho(Q_{ik,L}^{+(m_i)} [r + 1] - Q_{km_i}[r + 1]) \quad (4.59)$$

$$\lambda_{U_{ik,L}}^- [r + 1] = \lambda_{U_{ik,L}}^- [r] + \rho(U_{ik,L}^- [r + 1] - U_i[r + 1]) \quad (4.60)$$

$$\lambda_{U_{ik,L}}^+ [r + 1] = \lambda_{U_{ik,L}}^+ [r] + \rho(U_{ik,L}^+ [r + 1] - U_k[r + 1]) \quad (4.61)$$

4.3.2.4 Stopping criterion

The stopping criterion that leads to the termination of the algorithm is the following:

$$\begin{aligned} \|\text{primal residual}\|_2^2 &\leq \epsilon, \\ \|\text{dual residual}\|_2^2 &\leq \epsilon \end{aligned}$$

The squared euclidean norm of primal and dual residuals for every node k are denoted as:

$$\begin{aligned} \|\text{primal residual}\|_2^2 &= \|P_{ik,L}^- [r] - P_{ik}[r]\|_2^2 + \|P_{ik,L}^{+(m_i)} [r] - P_{km_i}[r]\|_2^2 + \\ &\|Q_{ik,L}^- [r] - Q_{ik}[r]\|_2^2 + \|Q_{ik,L}^{+(m_i)} [r] - Q_{km_i}[r]\|_2^2 + \\ &\|U_{ik,L}^- [r] - U_i[r]\|_2^2 + \|U_{ik,L}^+ [r] - U_k[r]\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \|\text{dual residual}\|_2^2 &= \rho^2 \cdot \left(\|P_{ik}[r + 1] - P_{ik}[r]\|_2^2 + \right. \\ &\|Q_{ik}[r + 1] - Q_{ik}[r]\|_2^2 + \\ &\left. \|U_k[r + 1] - U_k[r]\|_2^2 \right) \end{aligned} \quad (4.63)$$

The idea is that when the values of the local variables are almost identical with the values of the global subvectors (e.g. linear functions of global variable) corresponding to them and when all nodes have calculated new values for the global components that are almost identical with the ones that were calculated in the previous iteration, then each node will be sure about the maximum value of the PV's active power injection that it will utilize and the objective function will converge to its optimal value as proven in [13].

Further details about the value of ϵ that leads to satisfying results will be discussed in Chapter 7.

4.3.3 ADMM Consensus Based Algorithm in summary

ADMM Consensus Based Algorithm

1. Initialization

- For every node k initialize values

$$P_{ik}[0], Q_{ik}[0], U_k[0], \lambda_{P_{ik,L}}^-[0], \lambda_{P_{ik,L}}^{+(m_i)}[0], \lambda_{Q_{ik,L}}^-[0], \lambda_{Q_{ik,L}}^{+(m_i)}[0], \lambda_{U_{ik,L}}^-[0], \lambda_{U_{ik,L}}^+[0].$$

Also, input data $r_{ik}, x_{ik}, \rho, P_k^c, Q_k^c$.

2. Repeat

- **Local Optimization:** For every node k , besides slack, solve the optimization problem described by equations (4.41) - (4.52).

- **Peer-to-peer information exchange:** Adjacent nodes communicate the values

$$P_{ik,L}^-[r+1], P_{ik,L}^{+(m_i)}[r+1], Q_{ik,L}^-[r+1], Q_{ik,L}^{+(m_i)}[r+1], U_{ik,L}^-[r+1], U_{ik,L}^+[r+1]$$

calculated from their local optimizations.

- **Global Components Update:** Adjacent nodes vote and decide the updated values

$$P_{ik}[r+1], Q_{ik}[r+1], U_k[r+1] \text{ according to equations (4.53) - (4.55).}$$

- **Dual Variables Update:** For every node k , besides slack, calculate the new values of Lagrange Multipliers

$$\lambda_{P_{ik,L}}^-[r+1], \lambda_{P_{ik,L}}^{+(m_i)}[r+1], \lambda_{Q_{ik,L}}^-[r+1], \lambda_{Q_{ik,L}}^{+(m_i)}[r+1], \lambda_{U_{ik,L}}^-[r+1], \lambda_{U_{ik,L}}^+[r+1]$$

according to equations (4.56) - (4.61).

3. Until

- For every node k the following criterion is satisfied.

$$\begin{aligned} \|\text{primal residual}\|_2^2 &\leq \epsilon, \\ \|\text{dual residual}\|_2^2 &\leq \epsilon \end{aligned}$$

according to equations (4.62) - (4.63).

Chapter 5

Analytical presentation of the proposed algorithm

5.1 Example topology - distribution system

In order to fully explain the steps of the proposed method we use an example distribution network, which has the following form:

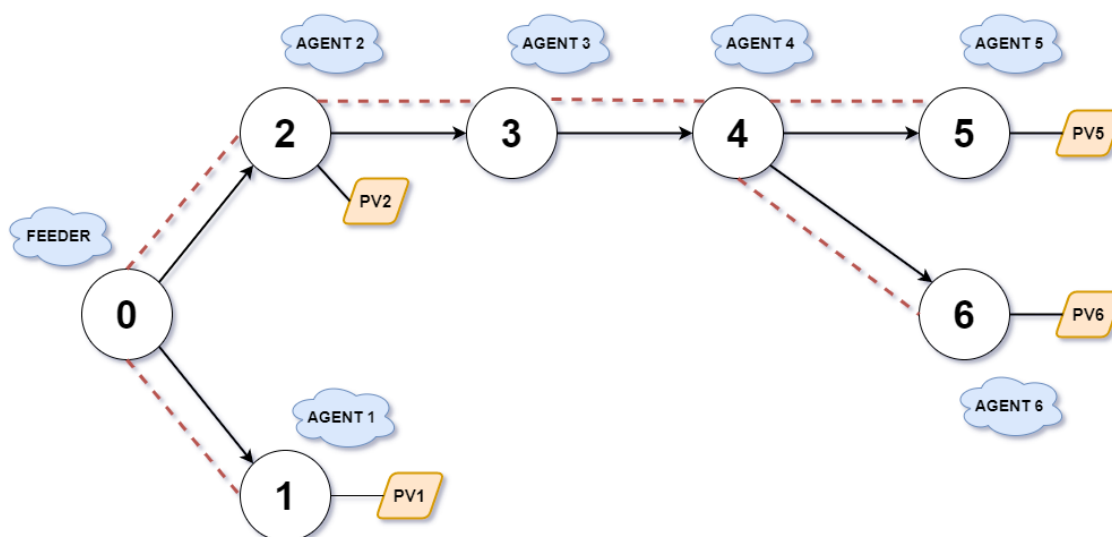


Figure 5.1: Example distribution network

The red dotted lines represent the communication infrastructure between the agents. In order for the reader to understand clearly, we will retain the notation of the global form consensus ADMM given in Subsection (3.3.2) as much as possible.

5.2 Breakdown of first step

In this step, each agent - node of the distribution network minimizes its own Lagrangian function (see 4.40) with respect to its own unique set of local variables and subject to its own unique set of constraints (see 4.42 - 4.52). Each agent's goal is to find the minimum curtailment of its PV's production (if installed) and at the same time decrease the gap between its local variables and the global components corresponding to them.

Let \mathbf{X}_k be the subvectors containing the set of local variables corresponding to nodes $k = 1, 2, \dots, 6$ and participating to the boundaries constraint equations (4.33) - (4.38). With

that being established we have:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1 &= \left[P_{01,L}^- \quad P_{01,L}^+ \quad Q_{01,L}^- \quad Q_{01,L}^+ \quad U_{01,L}^- \quad U_{01,L}^+ \right]^T \\
\mathbf{X}_2 &= \left[P_{02,L}^- \quad P_{02,L}^{+(3)} \quad Q_{02,L}^- \quad Q_{02,L}^{+(3)} \quad U_{02,L}^- \quad U_{02,L}^+ \right]^T \\
\mathbf{X}_3 &= \left[P_{23,L}^- \quad P_{23,L}^{+(4)} \quad Q_{23,L}^- \quad Q_{23,L}^{+(4)} \quad U_{23,L}^- \quad U_{23,L}^+ \right]^T \\
\mathbf{X}_4 &= \left[P_{34,L}^- \quad P_{34,L}^{+(5)} \quad P_{34,L}^{+(6)} \quad Q_{34,L}^- \quad Q_{34,L}^{+(5)} \quad Q_{34,L}^{+(6)} \quad U_{34,L}^- \quad U_{34,L}^+ \right]^T \\
\mathbf{X}_5 &= \left[P_{45,L}^- \quad P_{45,L}^+ \quad Q_{45,L}^- \quad Q_{45,L}^+ \quad U_{45,L}^- \quad U_{45,L}^+ \right]^T \\
\mathbf{X}_6 &= \left[P_{46,L}^- \quad P_{46,L}^+ \quad Q_{46,L}^- \quad Q_{46,L}^+ \quad U_{46,L}^- \quad U_{46,L}^+ \right]^T
\end{aligned}$$

Now, let \mathbf{Z} be the vector of all global variables, namely active power flows, reactive power flows and voltages, and \mathbf{Z}_k be the subvectors containing a set of global variables components that are responsible for the coordination of each \mathbf{X}_k for $k = 1, 2, \dots, 6$. With that being established we have:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_1 &= \left[P_{01} \quad 0 \quad Q_{01} \quad 0 \quad U_0 \quad U_1 \right]^T \\
\mathbf{Z}_2 &= \left[P_{02} \quad P_{23} \quad Q_{02} \quad Q_{23} \quad U_0 \quad U_2 \right]^T \\
\mathbf{Z}_3 &= \left[P_{23} \quad P_{34} \quad Q_{23} \quad Q_{34} \quad U_2 \quad U_3 \right]^T \\
\mathbf{Z}_4 &= \left[P_{34} \quad P_{45} \quad P_{46} \quad Q_{34} \quad Q_{45} \quad Q_{46} \quad U_3 \quad U_4 \right]^T \\
\mathbf{Z}_5 &= \left[P_{45} \quad 0 \quad Q_{45} \quad 0 \quad U_4 \quad U_5 \right]^T \\
\mathbf{Z}_6 &= \left[P_{46} \quad 0 \quad Q_{46} \quad 0 \quad U_4 \quad U_6 \right]^T
\end{aligned}$$

The entries of the subvectors \mathbf{Z}_k that are zero are because those nodes are leafs of the graph and thus, there is neither active nor reactive power flowing out of them.

Last but not least, let \mathbf{Y}_k be a vector that contains Lagrange Multipliers for every element of vector $\mathbf{X}_k - \mathbf{Z}_k$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_1 &= [\lambda_{P_{01,L}}^- \quad \lambda_{P_{01,L}}^+ \quad \lambda_{Q_{01,L}}^- \quad \lambda_{Q_{01,L}}^+ \quad \lambda_{U_{01,L}}^- \quad \lambda_{U_{01,L}}^+]^T \\
\mathbf{Y}_2 &= [\lambda_{P_{02,L}}^- \quad \lambda_{P_{02,L}}^{+(3)} \quad \lambda_{Q_{02,L}}^- \quad \lambda_{Q_{02,L}}^{+(3)} \quad \lambda_{U_{02,L}}^- \quad \lambda_{U_{02,L}}^+]^T \\
\mathbf{Y}_3 &= [\lambda_{P_{23,L}}^- \quad \lambda_{P_{23,L}}^{+(4)} \quad \lambda_{Q_{23,L}}^- \quad \lambda_{Q_{23,L}}^{+(4)} \quad \lambda_{U_{23,L}}^- \quad \lambda_{U_{23,L}}^+]^T \\
\mathbf{Y}_4 &= [\lambda_{P_{34,L}}^- \quad \lambda_{P_{34,L}}^{+(5)} \quad \lambda_{P_{34,L}}^{+(6)} \quad \lambda_{Q_{34,L}}^- \quad \lambda_{Q_{34,L}}^{+(5)} \quad \lambda_{Q_{34,L}}^{+(6)} \quad \lambda_{U_{34,L}}^- \quad \lambda_{U_{34,L}}^+]^T \\
\mathbf{Y}_5 &= [\lambda_{P_{45,L}}^- \quad \lambda_{P_{45,L}}^+ \quad \lambda_{Q_{45,L}}^- \quad \lambda_{Q_{45,L}}^+ \quad \lambda_{U_{45,L}}^- \quad \lambda_{U_{45,L}}^+]^T \\
\mathbf{Y}_6 &= [\lambda_{P_{46,L}}^- \quad \lambda_{P_{46,L}}^+ \quad \lambda_{Q_{46,L}}^- \quad \lambda_{Q_{46,L}}^+ \quad \lambda_{U_{46,L}}^- \quad \lambda_{U_{46,L}}^+]^T
\end{aligned}$$

After the reformulation of the centralized problem, as explained in section (4.3.1) we have the following optimization problem:

$$\min \sum_{k=1}^{N_b} (E_{pv,k} \cdot (\beta p_{\hat{k},L}^2 + c_t p_{\hat{k},L})) \quad (5.1)$$

subject to :

$$\mathbf{X}_k - \mathbf{Z}_k = 0$$

Equations (4.42) – (4.52)

For nodes 3 and 4, we have $E_{pv,3} = E_{pv,4} = 0$, meaning that PVs are not installed on these nodes. On the contrary, for nodes 1, 2, 5 and 6 we have $E_{pv,1} = E_{pv,2} = E_{pv,5} = E_{pv,6} = 1$, meaning that PVs are installed on these nodes.

Next, we build an Augmented Lagrangian that includes the boundaries constraints equations $\mathbf{X}_k - \mathbf{Z}_k$:

$$L_p(\cdot) = \sum_{k=1}^{N_b} L_{p,k,L}(\cdot) \quad (5.2)$$

$$L_{p,k,L}(\cdot) = E_{pv,k} \cdot (\beta p_{\hat{k},L}^2 + c_t p_{\hat{k},L}) + \mathbf{Y}_k^T (\mathbf{X}_k - \mathbf{Z}_k) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{X}_k - \mathbf{Z}_k\|_2^2 \quad (5.3)$$

This equation leads to equation (4.40).

$$\begin{aligned}
L_{p,k,L}(\cdot) &= E_{pv,k} \cdot (\beta p_{\hat{k},L}^2 + c_t p_{\hat{k},L}) \\
&+ \lambda_{P_{ik,L}}^- (P_{ik,L}^- - P_{ik}) + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} [\lambda_{P_{ik,L}}^+(m_i) (P_{ik,L}^+(m_i) - P_{km_i})] \\
&+ \lambda_{Q_{ik,L}}^- (Q_{ik,L}^- - Q_{ik}) + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} [\lambda_{Q_{ik,L}}^+(m_i) (Q_{ik,L}^+(m_i) - Q_{km_i})] \\
&+ \lambda_{U_{ik,L}}^- (U_{ik,L}^- - U_i) + \lambda_{U_{ik,L}}^+ (U_{ik,L}^+ - U_k) \\
&+ \frac{\rho}{2} (P_{ik,L}^- - P_{ik})^2 + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} \left[\frac{\rho}{2} (P_{ik,L}^+(m_i) - P_{km_i})^2 \right] \\
&+ \frac{\rho}{2} (Q_{ik,L}^- - Q_{ik})^2 + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} \left[\frac{\rho}{2} (Q_{ik,L}^+(m_i) - Q_{km_i})^2 \right] \\
&+ \frac{\rho}{2} (U_{ik,L}^- - U_i)^2 + \frac{\rho}{2} (U_{ik,L}^+ - U_k)^2,
\end{aligned}$$

Instead of solving problem (5.1), the first step of the algorithm commands that each node (besides slack) will execute the following optimization problem

$$\min_{\mathbf{X}_k, p_{\hat{k},L}} E_{pv,k} \cdot (\beta p_{\hat{k},L}^2 + c_t p_{\hat{k},L}) + \mathbf{Y}_k^T (\mathbf{X}_k - \mathbf{Z}_k) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{X}_k - \mathbf{Z}_k\|_2^2$$

subject to :

$$\text{Equations (4.42) – (4.52)}$$

Please note that each node has calculated and knows the values of \mathbf{Z}_k , \mathbf{Y}_k from the previous iteration of the proposed method while solving its own optimization problem described above. At first, we give each node an initial approximation of these values and after solving their optimization problems, each node communicates with its adjacent nodes in order to update these approximations about each global component and about Lagrange Multipliers. Specifically, these actions take place in the second and third place of the algorithm.

After breaking down this step, it is clear that the optimizations problems of each node have a deeply local character, since none of the decision variables of a node are straightly dependent to the decision variables of another node. Hence, each smart agent can perform their optimization problems distributively and in parallel.

From each optimization problem we get $\mathbf{X}_k[r+1]$. Now, we are ready to move on to the next step of the algorithm.

5.3 Breakdown of second step

In this step, having calculated the optimal local variables from the first step of the algorithm, the adjacent nodes communicate with each other in order to decide a better value for the global components that coordinate their local variables.

First of all, we cannot update \mathbf{Z}_k independently for each node because different \mathbf{Z}_k contain same components of the global variable \mathbf{Z} [13]. For example, both \mathbf{Z}_5 and \mathbf{Z}_4 contain P_{45} ,

Q_{45} , U_4 . However, we notice that the sum of all Augmented Lagrangian functions referring to each node alone:

$$L_p(\cdot) = \sum_{k=1}^{N_b} L_{p,k,L}$$

is separable to each global component alone. So, we will have to work with $L_p(\cdot)$ (see 5.2) and we will have to examine it with respect to each global variable component separately.

5.3.1 Calculation of Active and Reactive Power Flows Global Components (P_{ik} , Q_{ik})

The second step of the algorithm (minimization of $L_p(\cdot)$ with respect to the global variable \mathbf{Z}) decouples across the components of \mathbf{Z} , since L_p is fully separable in the components of \mathbf{Z} . Therefore, we can calculate each and every global component separably.

5.3.1.1 Case where Node k is child of the feeder

Let us examine the paradigm of active power value P_{01} . We calculate the minimum argument of equation (5.2) with respect to P_{01} . We see that P_{01} is only included in vector \mathbf{Z}_1 . Therefore,

$$\begin{aligned} P_{01}[r+1] &:= \underset{P_{01}}{\operatorname{argmin}} L_p(X_k[r+1], Z, Y[r]) && \Leftrightarrow \\ &\frac{\partial L_p(X_k[r+1], Z, Y[r])}{\partial P_{01}} = 0 && \Leftrightarrow \\ -\lambda_{P_{01,L}}^- [r] - \rho(P_{01,L}^- [r+1] - P_{01}[r+1]) &= 0 && \Leftrightarrow \\ \lambda_{P_{01,L}}^- [r] &= -\rho(P_{01,L}^- [r+1] - P_{01}[r+1]) && (5.4) \end{aligned}$$

But if we examine the Lagrange multiplier $\lambda_{P_{01,L}}^-$ according to equation (4.56), as the third step of the General Form Consensus ADMM based algorithm commands we'll see that

$$\lambda_{P_{01,L}}^- [r+1] = \lambda_{P_{01,L}}^- [r] + \rho(P_{01,L}^- [r+1] - P_{01}[r+1]) \quad (5.5)$$

Inserting the value of $\lambda_{P_{01,L}}^- [r]$ from equation (5.4) to equation (5.5) we get that

$$\lambda_{P_{01,L}}^- [r+1] = 0 \quad (5.6)$$

This means that after the first iteration the value of $\lambda_{P_{01,L}}^-$ will always be zero. That conclusion lets us reform equation (5.4) as

$$\begin{aligned} -\rho(P_{01,L}^- [r+1] - P_{01}[r+1]) &= 0 \Leftrightarrow \\ P_{01}[r+1] &= P_{01,L}^- [r+1] && (5.7) \end{aligned}$$

We can calculate the updated values of $P_{02}[r+1]$, $Q_{01}[r+1]$, $Q_{02}[r+1]$ the exact same way.

5.3.1.2 Case where Node k 's father has only one child

Let us examine the paradigm of P_{23} . We calculate the minimum argument of equation (5.2) with respect to P_{23} . We see that P_{23} is included in vectors \mathbf{Z}_2 and \mathbf{Z}_3 . Therefore,

$$-\lambda_{P_{02,L}}^{+(3)}[r] - \lambda_{P_{23,L}}^{-}[r] - \rho(P_{02,L}^{+(3)}[r+1] - P_{23}[r+1]) - \rho(P_{23,L}^{-}[r+1] - P_{23}[r+1]) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{P_{02,L}}^{+(3)}[r] + \lambda_{P_{23,L}}^{-}[r] = -\rho(P_{02,L}^{+(3)}[r+1] + P_{23,L}^{-}[r+1] - 2P_{23}[r+1]) \quad (5.8)$$

But if we examine the Lagrange Multipliers $\lambda_{P_{02,L}}^{+(3)}$ and $\lambda_{P_{23,L}}^{-}$ according to equations (4.56) - (4.57), as the third step of the General Form Consensus ADMM based algorithm commands we'll see that

$$\lambda_{P_{02,L}}^{+(3)}[r+1] = \lambda_{P_{02,L}}^{+(3)}[r] + \rho(P_{02,L}^{+(3)}[r+1] - P_{23}[r+1]) \quad (5.9)$$

$$\lambda_{P_{23,L}}^{-}[r+1] = \lambda_{P_{23,L}}^{-}[r] + \rho(P_{23,L}^{-}[r+1] - P_{23}[r+1]) \quad (5.10)$$

We add equations (5.9) and (5.10)

$$\lambda_{P_{02,L}}^{+(3)}[r+1] + \lambda_{P_{23,L}}^{-}[r+1] = \lambda_{P_{02,L}}^{+(3)}[r] + \lambda_{P_{23,L}}^{-}[r]$$

$$+ \rho(P_{02,L}^{+(3)}[r+1] + P_{23,L}^{-}[r+1] - 2P_{23}[r+1]) \quad (5.11)$$

Inserting the value of $(\lambda_{P_{02,L}}^{+(3)}[r] + \lambda_{P_{23,L}}^{-}[r])$ from equation (5.8) to equation (5.11) we get

$$\lambda_{P_{02,L}}^{+(3)}[r+1] + \lambda_{P_{23,L}}^{-}[r+1] = 0 \quad (5.12)$$

This means that after the first iteration the value of $(\lambda_{P_{02,L}}^{+(3)}[r+1] + \lambda_{P_{23,L}}^{-}[r+1])$ will always be zero. That conclusion lets us reform equation (5.8) as

$$-\rho(P_{02,L}^{+(3)}[r+1] + P_{23,L}^{-}[r+1] - 2P_{23}[r+1]) = 0 \Leftrightarrow$$

$$P_{23}[r+1] = \frac{P_{02,L}^{+(3)}[r+1] + P_{23,L}^{-}[r+1]}{2} \quad (5.13)$$

We can calculate the updated values of $P_{34}[r+1]$, $Q_{23}[r+1]$, $Q_{34}[r+1]$ the exact same way.

5.3.1.3 Case where Node k 's father has more than one children

Let us examine the paradigm of P_{45} . We calculate the minimum argument of equation (5.2) with respect to P_{45} . We see that P_{45} is included in vectors \mathbf{Z}_4 and \mathbf{Z}_5 . Therefore,

$$-\lambda_{P_{34,L}}^{+(5)}[r] - \lambda_{P_{45,L}}^{-}[r] - \rho(P_{34,L}^{+(5)}[r+1] - P_{45}[r+1]) - \rho(P_{45,L}^{-}[r+1] - P_{45}[r+1]) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{P_{34,L}}^{+(5)}[r] + \lambda_{P_{45,L}}^{-}[r] = -\rho(P_{34,L}^{+(5)}[r+1] + P_{45,L}^{-}[r+1] - 2P_{45}[r+1]) \quad (5.14)$$

But if we examine the Lagrange Multipliers $\lambda_{P_{34,L}}^{+(5)}$, $\lambda_{P_{45,L}}^{-}$ according to equations (4.56) - (4.57), as the third step of the General Form Consensus ADMM based algorithm commands we'll see that

$$\lambda_{P_{34,L}}^{+(5)}[r+1] = \lambda_{P_{34,L}}^{+(5)}[r] + \rho(P_{34,L}^{+(5)}[r+1] - P_{45}[r+1]) \quad (5.15)$$

$$\lambda_{P_{45,L}}^{-}[r+1] = \lambda_{P_{45,L}}^{-}[r] + \rho(P_{45,L}^{-}[r+1] - P_{45}[r+1]) \quad (5.16)$$

Next, we add equations (5.15), (5.16).

$$\begin{aligned} \lambda_{P_{34,L}}^{+(5)}[r+1] + \lambda_{P_{45,L}}^{-}[r+1] &= \lambda_{P_{34,L}}^{+(5)}[r] + \lambda_{P_{45,L}}^{-}[r] \\ &+ \rho(P_{34,L}^{+(5)}[r+1] + P_{45,L}^{-}[r+1] - 2P_{45}[r+1]) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Inserting the value of $(\lambda_{P_{34,L}}^{+(5)}[r] + \lambda_{P_{45,L}}^{-}[r])$ from equation (5.14) to equation (5.17) we get

$$\lambda_{P_{34,L}}^{+(5)}[r+1] + \lambda_{P_{45,L}}^{-}[r+1] = 0 \quad (5.18)$$

This means that after the first iteration the value of $(\lambda_{P_{34,L}}^{+(5)}[r] + \lambda_{P_{45,L}}^{-}[r])$ will always be zero. That conclusion lets us reform equation (5.14) as

$$\begin{aligned} -\rho(P_{34,L}^{+(5)}[r+1] + P_{45,L}^{-}[r+1] - 2P_{45}[r+1]) &= 0 \Leftrightarrow \\ P_{45}[r+1] &= \frac{P_{34,L}^{+(5)}[r+1] + P_{45,L}^{-}[r+1]}{2} \end{aligned} \quad (5.19)$$

We can calculate the updated values of $P_{46}[r+1]$, $Q_{45}[r+1]$, $Q_{46}[r+1]$ the exact same way.

5.3.2 Calculation of Voltages (U_k)

Before we begin to examine different case, we mark once again that the voltage of the feeder is always fixed and equal to 1 pu.

5.3.2.1 Case where Node k is leaf of the graph - distribution system

Let us examine the paradigm of active power value U_1 . We calculate the minimum argument of equation (5.2) with respect to U_1 . We see that U_1 is only included in vector \mathbf{Z}_1 . Therefore,

$$\begin{aligned} -\lambda_{U_{01,L}}^{+}[r] - \rho(U_{01,L}^{+}[r+1] - U_1[r+1]) &= 0 \Leftrightarrow \\ \lambda_{U_{01,L}}^{+}[r] &= -\rho(U_{01,L}^{+}[r+1] - U_1[r+1]) \end{aligned} \quad (5.20)$$

But if we examine the Lagrange multiplier $\lambda_{U_{01,L}}^{+}$ according to equation (4.61), as the third step of the ADMM Consensus based algorithm commands we'll see that

$$\lambda_{U_{01,L}}^{+}[r+1] = \lambda_{U_{01,L}}^{+}[r] + \rho(U_{01,L}^{+}[r+1] - U_1[r+1]) \quad (5.21)$$

Inserting the value of $\lambda_{U_{01,L}}^{+}[r]$ from equation (5.20) to equation (5.21) we get that

$$\lambda_{U_{01,L}}^{+}[r+1] = 0 \quad (5.22)$$

This means that after the first iteration the value of $\lambda_{U_{01,L}}^{+}$ will always be zero. That conclusion lets us reform equation (5.20) as

$$\begin{aligned} -\rho(U_{01,L}^{+}[r+1] - U_1[r+1]) &= 0 \Leftrightarrow \\ U_1[r+1] &= U_{01,L}^{+}[r+1] \end{aligned} \quad (5.23)$$

We can calculate the updated values of $U_5[r+1]$ and $U_6[r+1]$, the exact same way.

5.3.2.2 Case where Node k has only one child

Let us examine the paradigm of U_2 . We calculate the minimum argument of equation (5.2) with respect to U_2 . We see that U_2 is included in vectors \mathbf{Z}_2 and \mathbf{Z}_3 . Therefore,

$$-\lambda_{U_{02,L}}^+[r] - \lambda_{U_{23,L}}^- [r] - \rho(U_{02,L}^+[r+1] - U_2[r+1]) - \rho(U_{23,L}^- [r+1] - U_2[r+1]) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{U_{02,L}}^+[r] + \lambda_{U_{23,L}}^- [r] = -\rho(U_{02,L}^+[r+1] + U_{23,L}^- [r+1] - 2U_2[r+1]) \quad (5.24)$$

But if we examine the Lagrange Multipliers $\lambda_{U_{02,L}}^+$ and $\lambda_{U_{23,L}}^-$ according to equations (4.60) - (4.61), as the third step of the General Form Consensus ADMM based algorithm commands we'll see that

$$\lambda_{U_{02,L}}^+[r+1] = \lambda_{U_{02,L}}^+[r] + \rho(U_{02,L}^+[r+1] - U_2[r+1]) \quad (5.25)$$

$$\lambda_{U_{23,L}}^- [r+1] = \lambda_{U_{23,L}}^- [r] + \rho(U_{23,L}^- [r+1] - U_2[r+1]) \quad (5.26)$$

We add equations (5.25) and (5.26).

$$\lambda_{U_{02,L}}^+[r+1] + \lambda_{U_{23,L}}^- [r+1] = \lambda_{U_{02,L}}^+[r] + \lambda_{U_{23,L}}^- [r]$$

$$+ \rho(U_{02,L}^+[r+1] + U_{23,L}^- [r+1] - 2U_2[r+1]) \quad (5.27)$$

Inserting the value of $(\lambda_{U_{02,L}}^+[r] + \lambda_{U_{23,L}}^- [r])$ from equation (5.24) to equation (5.27) we get

$$\lambda_{U_{02,L}}^+[r+1] + \lambda_{U_{23,L}}^- [r+1] = 0 \quad (5.28)$$

This means that after the first iteration the value of $(\lambda_{U_{02,L}}^+[r+1] + \lambda_{U_{23,L}}^- [r+1])$ will always be zero. That conclusion lets us reform equation (5.24) as

$$-\rho(U_{02,L}^+[r+1] + U_{23,L}^- [r+1] - 2U_2[r+1]) = 0 \Leftrightarrow$$

$$U_2[r+1] = \frac{U_{02,L}^+[r+1] + U_{23,L}^- [r+1]}{2} \quad (5.29)$$

We can calculate the updated values of $U_3[r+1]$ the exact same way.

5.3.2.3 Case where Node k has more than one children

Let us examine the paradigm of U_4 . We calculate the minimum argument of equation (5.2) with respect to U_4 . We see that U_4 is included in vectors \mathbf{Z}_4 , \mathbf{Z}_5 and \mathbf{Z}_6 . Therefore,

$$-\lambda_{U_{34,L}}^+[r] - \lambda_{U_{45,L}}^- [r] - \lambda_{U_{46,L}}^- [r] - \rho(U_{34,L}^+[r+1] - U_4[r+1])$$

$$- \rho(U_{45,L}^- [r+1] - U_4[r+1])$$

$$- \rho(U_{46,L}^- [r+1] - U_4[r+1]) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{U_{34,L}}^+[r] + \lambda_{U_{45,L}}^- [r] + \lambda_{U_{46,L}}^- [r] = -\rho(U_{34,L}^+[r+1] + U_{45,L}^- [r+1]$$

$$+ U_{46,L}^- [r+1] - 3U_4[r+1]) \quad (5.30)$$

But if we examine the Lagrange Multipliers $\lambda_{U_{34,L}}^+$, $\lambda_{U_{45,L}}^-$ and $\lambda_{U_{46,L}}^-$ according to equations (4.60) - (4.61), as the third step of the General Form Consensus ADMM based algorithm commands we'll see that

$$\lambda_{U_{34,L}}^+[r+1] = \lambda_{U_{34,L}}^+[r] + \rho(U_{34,L}^+[r+1] - U_4[r+1]) \quad (5.31)$$

$$\lambda_{U_{45,L}}^-[r+1] = \lambda_{U_{45,L}}^-[r] + \rho(U_{45,L}^-[r+1] - U_4[r+1]) \quad (5.32)$$

$$\lambda_{U_{46,L}}^-[r+1] = \lambda_{U_{46,L}}^-[r] + \rho(U_{46,L}^-[r+1] - U_4[r+1]) \quad (5.33)$$

We add equations (5.31), (5.32) and (5.33).

$$\begin{aligned} \lambda_{U_{34,L}}^+[r+1] + \lambda_{U_{45,L}}^-[r+1] + \lambda_{U_{46,L}}^-[r+1] &= \lambda_{U_{34,L}}^+[r] + \lambda_{U_{45,L}}^-[r] + \lambda_{U_{46,L}}^-[r] \\ &+ \rho(U_{34,L}^+[r+1] + U_{45,L}^-[r+1] \\ &+ U_{46,L}^-[r+1] - 3U_4[r+1]) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Inserting the value of $(\lambda_{U_{34,L}}^+[r] + \lambda_{U_{45,L}}^-[r] + \lambda_{U_{46,L}}^-[r])$ from equation (5.30) to equation (5.34) we get

$$\lambda_{U_{34,L}}^+[r+1] + \lambda_{U_{45,L}}^-[r+1] + \lambda_{U_{46,L}}^-[r+1] = 0 \quad (5.35)$$

This means that after the first iteration the value of $(\lambda_{U_{34,L}}^+[r+1] + \lambda_{U_{45,L}}^-[r+1] + \lambda_{U_{46,L}}^-[r+1])$ will always be zero. That conclusion lets us reform equation (5.30) as

$$\begin{aligned} -\rho(U_{34,L}^+[r+1] + U_{45,L}^-[r+1] + U_{46,L}^-[r+1] - 3U_4[r+1]) &= 0 \Leftrightarrow \\ U_4[r+1] &= \frac{U_{34,L}^+[r+1] + U_{45,L}^-[r+1] + U_{46,L}^-[r+1]}{3} \end{aligned} \quad (5.36)$$

5.3.3 Second step in summary

The results we got by analytically presenting the second step of the method can be modeled as:

$$\begin{aligned} P_{ik}[r+1] &= \frac{P_{ik,L}^-[r+1] + P_{ji,L}^{+(k)}[r+1]}{2} \\ Q_{ik}[r+1] &= \frac{Q_{ik,L}^-[r+1] + Q_{ji,L}^{+(k)}[r+1]}{2} \\ U_k[r+1] &= \frac{U_{ik,L}^+[r+1] + \sum_{m_i:k \rightarrow m_i} U_{km_i,L}^-[r+1]}{N_k^+} \end{aligned}$$

where N_k^+ denotes the cardinality of node k and its children.

Moreover, we established some special cases that summarise to the following:

- Voltage of the feeder is always fixed.

$$U_0[r+1] = U_{0k,L}^-[r+1] = 1 \text{ pu}^2$$

- When node k is child of the feeder since there are no upstream boundaries we have

$$P_{0k}[r+1] = P_{0k,L}^-[r+1]$$

$$Q_{0k}[r+1] = Q_{0k,L}^-[r+1]$$

- When node k is a leaf node since there are no downstream boundaries we have

$$U_k[r+1] = U_{ik,L}^+[r+1]$$

5.4 Breakdown of third step

In this step each node updates its Lagrange Multipliers. After the calculation of each and every one of the global components, we are ready to reform the vectors $\mathbf{Z}_k[r+1]$ for $k = 1, 2, \dots, 6$. As a result, each agent is in a position to update the Lagrange Multipliers in a distributed way. According to the third step of Consensus ADMM based algorithm's third step

$$\mathbf{Y}_k[r+1] = \mathbf{Y}_k[r] + \rho(\mathbf{X}_k[r+1] - \mathbf{Z}_k[r+1]) \quad (5.37)$$

This equation leads to equations (4.56) - (4.61)

$$\lambda_{P_{ik,L}}^- [r+1] = \lambda_{P_{ik,L}}^- [r] + \rho(P_{ik,L}^- [r+1] - P_{ik}[r+1])$$

$$\lambda_{P_{ik,L}}^{+(m_i)} [r+1] = \lambda_{P_{ik,L}}^{+(m_i)} [r] + \rho(P_{ik,L}^{+(m_i)} [r+1] - P_{km_i}[r+1])$$

$$\lambda_{Q_{ik,L}}^- [r+1] = \lambda_{Q_{ik,L}}^- [r] + \rho(Q_{ik,L}^- [r+1] - Q_{ik}[r+1])$$

$$\lambda_{Q_{ik,L}}^{+(m_i)} [r+1] = \lambda_{Q_{ik,L}}^{+(m_i)} [r] + \rho(Q_{ik,L}^{+(m_i)} [r+1] - Q_{km_i}[r+1])$$

$$\lambda_{U_{ik,L}}^- [r+1] = \lambda_{U_{ik,L}}^- [r] + \rho(U_{ik,L}^- [r+1] - U_i[r+1])$$

$$\lambda_{U_{ik,L}}^+ [r+1] = \lambda_{U_{ik,L}}^+ [r] + \rho(U_{ik,L}^+ [r+1] - U_k[r+1])$$

Chapter 6

Test system and data

6.1 Simulation platform

All the simulations were performed using the high-level, general-purpose programming language Python [43]. More specifically, the optimisation problems described in this diploma thesis were built with the help of the Python module Pyomo [44], [45] and they were solved using the Gurobi [46] solver. Furthermore, Python modules PYPOWER [47], Pandapower [48], Pandas [49], Numpy [50] were vital for the manipulation of the distribution network's data and for the ac power flow using the acquired results from the proposed algorithm described in Chapter 4. Last but not least, Python module matplotlib [51] was essential for the presentation of the results of this diploma thesis and for the evaluation of the proposed General Form Consensus ADMM based method.

6.2 The test system

The distributed method described in Chapter 4 is evaluated on the Baran-Wu 33 Bus Network [42]. It is a 12.66 kV, 1 feeder substation with 5 looping branches **which in this study, are assumed to be open, causing the distribution grid to be radial**. The total active load is 3.715 MW, while the total reactive load is 2.3 MVAR. Moreover, more details about the system's conventional active and reactive loads, and also the lines series impedance are given in Appendix A.

The distribution network's topology is presented in Figure 6.1. Node 0 is considered to be the feeder of the distribution network.

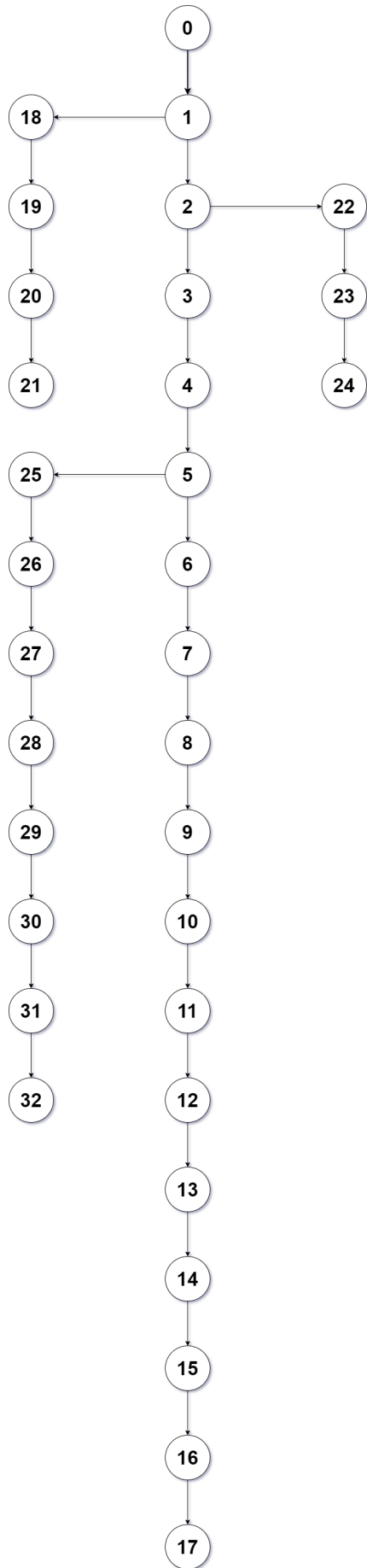


Figure 6.1: 33 Bus Distribution Network from Baran-Wu [42]

6.3 Voltage limits

Our aim in this diploma thesis, as explained before, is to resolve the over-voltage problems occurring by high PV production during periods of low demand in distribution networks. From a technical perspective, the DSO is aiming to secure the operation of the grid by respecting the voltage limits. From a financial perspective, the DSO is aiming to minimize the curtailment of the PVs in order to avoid compensating the aggregator that manages the PVs for energy that was not injected to the grid due to network constraints.

Therefore, while each agent solves its own optimization problem and communicates with its neighbors in order to find which PV active power injections are safe to absorb, a voltage level constraint must be taken into consideration that ensures that the voltage of each agent will always be within acceptable boundaries.

According to European standards [11] the acceptable voltage deviations in distribution systems are of the order of $\pm 10\%$ of the nominal voltage of the feeder. However, for the purposes of this thesis we consider tighter voltage limits.

- $V_{min} = 0.95 pu$
- $V_{max} = 1.05 pu$

Chapter 7

Case Study: Resolve Over-Voltage Problems

In this section, we tackle the over-voltage problem created by PV production in times of low demand in the under examination distribution network. In the following simulations, **the load profile of the distribution system is 20% of the nominal, which translates to 0.743 MW total active load and 0.46 MVAR total reactive load.** At the same time, **we assume there is a total of 2 MW active power injection from the PVs installed, which is around the 53.8% of the total nominal active load (3.715 MW).**

In these scenarios, each agent - node of the system, upon which PVs are installed, tries to minimize its curtailment. However, PVs are not permitted to inject their full active power production, since it would cause an over-voltage situation (above the predefined limit of 1.05 pu) and it would compromise the secure operation of the network. Therefore, each agent is called to find its own set-point distributively by exchanging the necessary information with only its adjacent nodes.

It is of high importance to mention that for each case study examined, the centralized algorithm described by conditions (4.12) - (4.20) will also be executed. The results of the distributed proposed algorithm are expected to converge to the respective results of the centralized method, verifying its efficacy.

7.1 Initialization of the proposed method

In order to utilize the proposed method, we need to initialize some parameters. Firstly, we need to set the global variables referring to the power flows and the voltages $P_{ik}[0]$, $Q_{ik}[0]$, $U_k[0]$. We choose to initialize those parameters by solving a linearized power flow problem of the network using the LinDistFlow model equations, considering 20% of the nominal loads but without any PVs penetration. These initialization conditions hold for every case scenario examined.

As for the Lagrange multipliers corresponding to each of the consensus boundary conditions explained in Chapter 4, we set their initial values to zero.

$$\lambda_{P_{ik=L}}^- [0] = \lambda_{P_{ik=L}}^{+(m_i)} [0] = \lambda_{Q_{ik=L}}^- [0] = \lambda_{Q_{ik=L}}^{+(m_i)} [0] = \lambda_{U_{ik=L}}^- [0] = \lambda_{U_{ik=L}}^+ [0] = 0$$

Furthermore, please note that the following case studies are examined for tolerances $\epsilon = 10^{-3}$ and $\epsilon = 10^{-4}$, and their results are compared and discussed.

7.2 Discussion on the penalty coefficient ρ

The choice of the penalty factor is of vital importance for the convergence of the proposed algorithm. While experimenting with different values of penalty coefficient we concluded that if the aforementioned value is too small the convergence of the algorithm is becoming significantly slower and as a result, the algorithm terminates before it reaches the optimal objective value for the given tolerance ($\epsilon = 10^{-3}$).

On the other hand, choosing a very large value for the penalty coefficient would cause the sum of the values of the objective functions of each node (see 4.40) to oscillate around the respective value of the centralized objective function, causing also the convergence of the algorithm to become slower.

Both of these conclusions relate to the product of the penalty factor with the difference between local and global variables (see equations 4.56 - 4.61). This product determines the rate that each node tries to achieve the optimal value of its own Lagrangian Function. This translates to how fast a consensus solution between adjacent nodes is achieved. If the product is too small, the optimal value of each Lagrangian is difficult to be achieved since the driving force toward it is small. However, if the aforementioned product is too large, each node tries to optimize its own objective too aggressively and as a result consensus solution between adjacent nodes is becoming slower. That fact justifies the oscillations of the sum of the objective values of each node's Augmented Lagrangian functions.

7.3 Case 1: 2 PVs of 1 MW each on Nodes 31 and 32

In this case, we assume that there are 2 PVs connected on the nodes 31 to 32 of the grid, being able to produce up to 1 MW each. However, if the PVs inject their maximum active power production to the nodes that they are installed without any control, it would cause over-voltage violations. To verify this, an AC power flow problem is solved. The results are presented in the following figure:

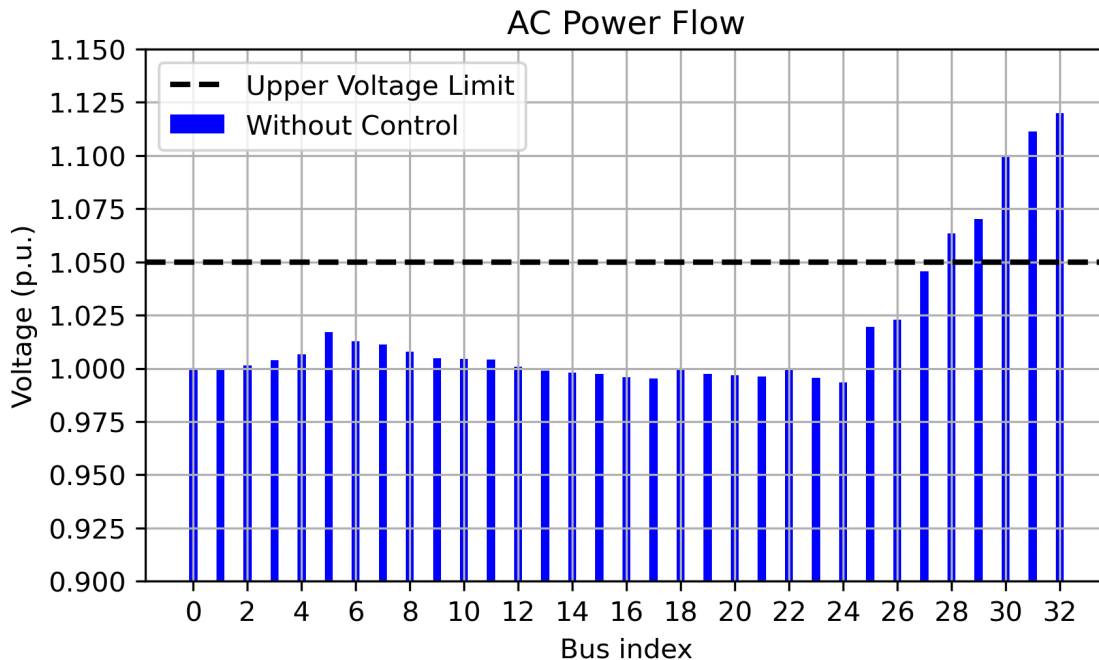


Figure 7.1: AC Power Flow - Voltages without PV control, Case1

In figure (7.1), it is obvious that if the PVs installed on nodes 31 and 32 inject their maximum point production to the network without any control, it would cause inverse active power flows. These inverse active power flows would cause the voltages of nodes 28 to 32 to rise, creating over-voltage violations.

Therefore, the proposed method of this diploma thesis is utilized aiming to solve the over-voltage problem illustrated in figure (7.1). Furthermore, the validity of the General Form Consensus based algorithm is exhibited via the comparison of its results with the results of its equivalent centralised algorithm.

Empirically, it is found that setting the penalty coefficient for the proposed algorithm to $\rho = 500$ gives us a good trade-off between convergence speed and accuracy. We run both centralized and distributed algorithms. The General Form Consensus based method converged after **2221 iterations**.

In figure (7.2), the progress of the sum of the values of the objective function (see 4.40) in the proposed distributed method is presented throughout the iterations needed for the method to converge. From now on, the aforementioned sum will just be called the objective function of the proposed algorithm for simplicity reasons. As one can easily see, the proposed algorithm converges to the respective objective function value of the centralized algorithm verifying its efficacy.

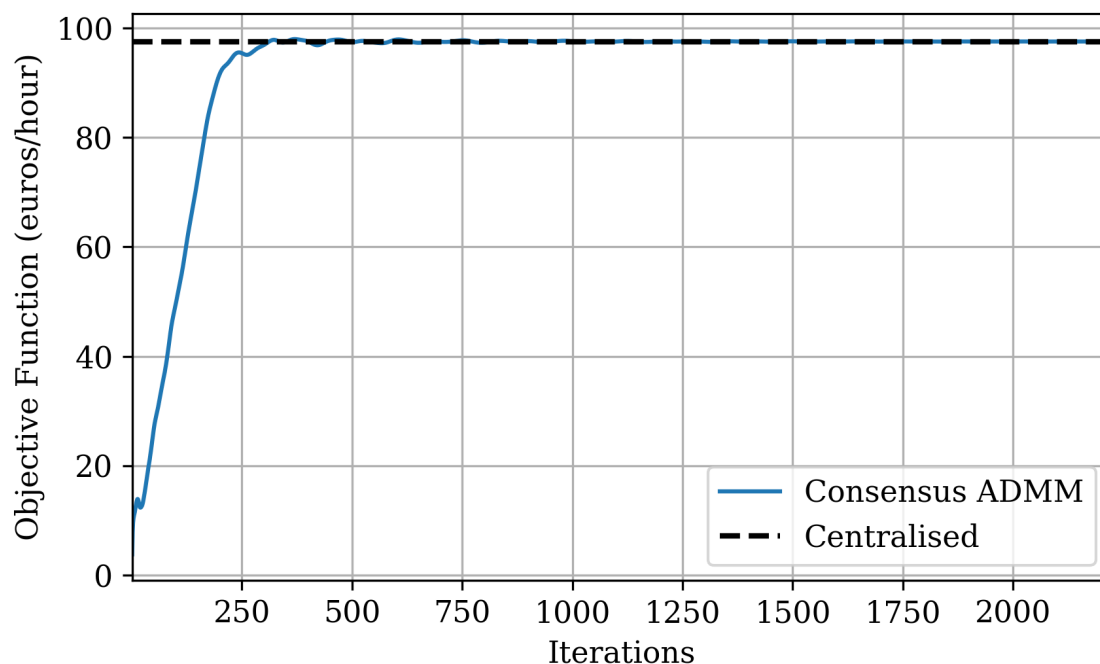


Figure 7.2: Objective Function, Case1, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

In addition, the same figure is presented zoomed after the first 1000 iterations to clarify the convergence of the distributed solution to the centralized value.

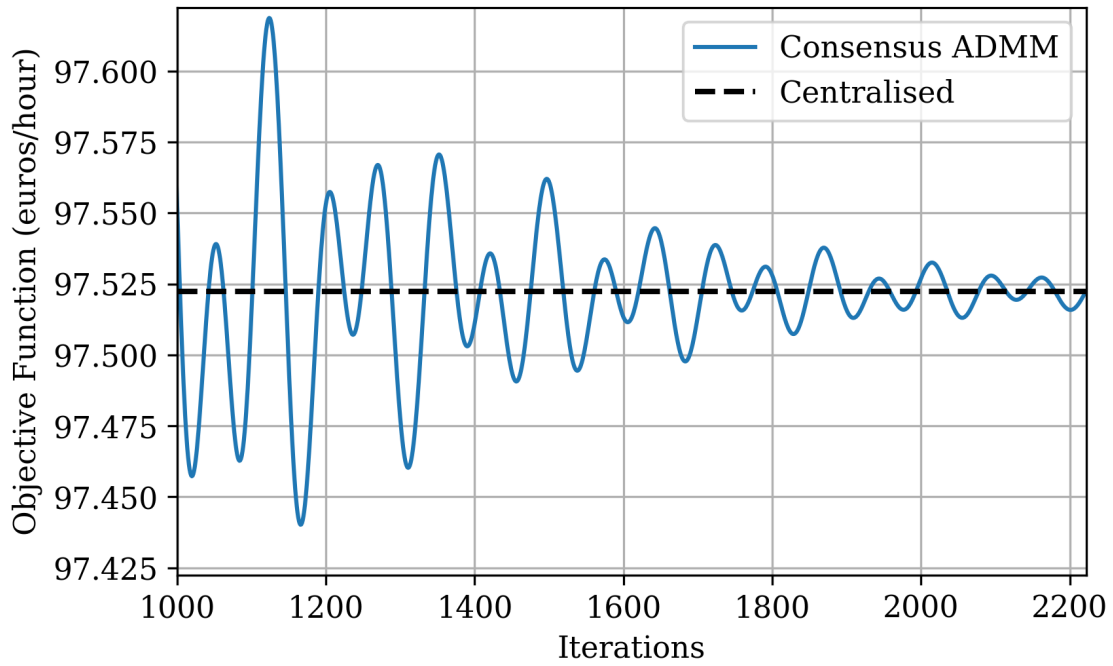


Figure 7.3: Objective Function - Zoom after 1000 iterations, Case1, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

Moreover, it is worth illustrating the comparison of PVs active power productions as calculated in the distributed and centralised algorithms respectively. Once again, we confirm that the distributed results for the PV injections in the network are almost equal to their respective centralised results.

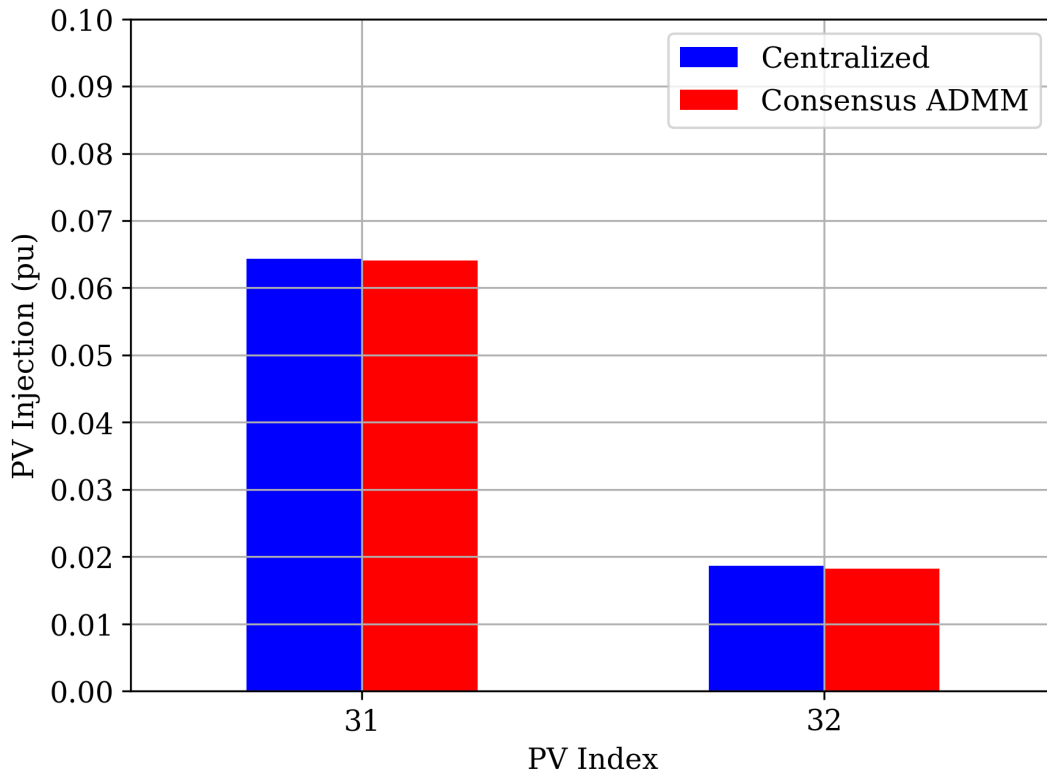


Figure 7.4: PV Injections, Case1, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

Finally, the progress of the PVs active power injections is presented in the following graph to verify the convergence of the PVs production values to their equivalent centralised values.

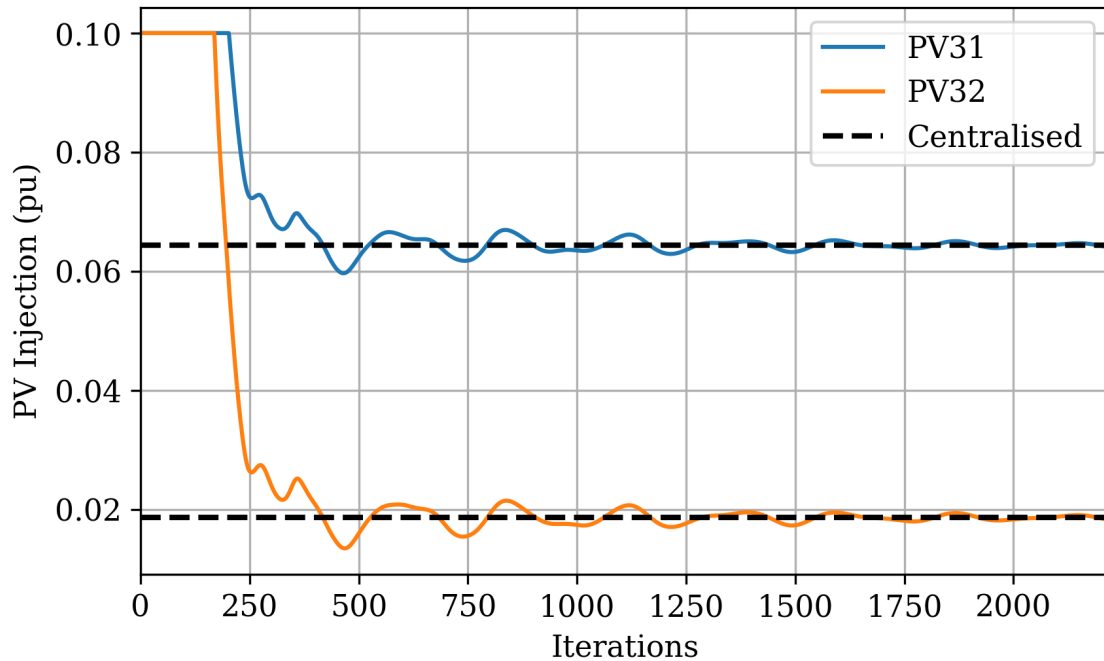


Figure 7.5: PV injections progress, Case1, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

One can observe that at around 500 iterations, when the objective function of the proposed method starts to oscillate around the target centralised value, the values of the PVs production injected on buses 30 and 31 also start to oscillate. That is because the adjacent nodes communicate their optimal local variables and try to come to a consensus solution that will finally determine their PVs injections.

Nonetheless, an AC power flow problem needs to be solved again yielding the PV active power injections decided by the General Form Consensus based method in order to examine that the over-voltage situation was encountered effectively. The following figure presents the voltages of every node as they calculated by the AC power flow without control and with the PV injections estimated by the proposed method.

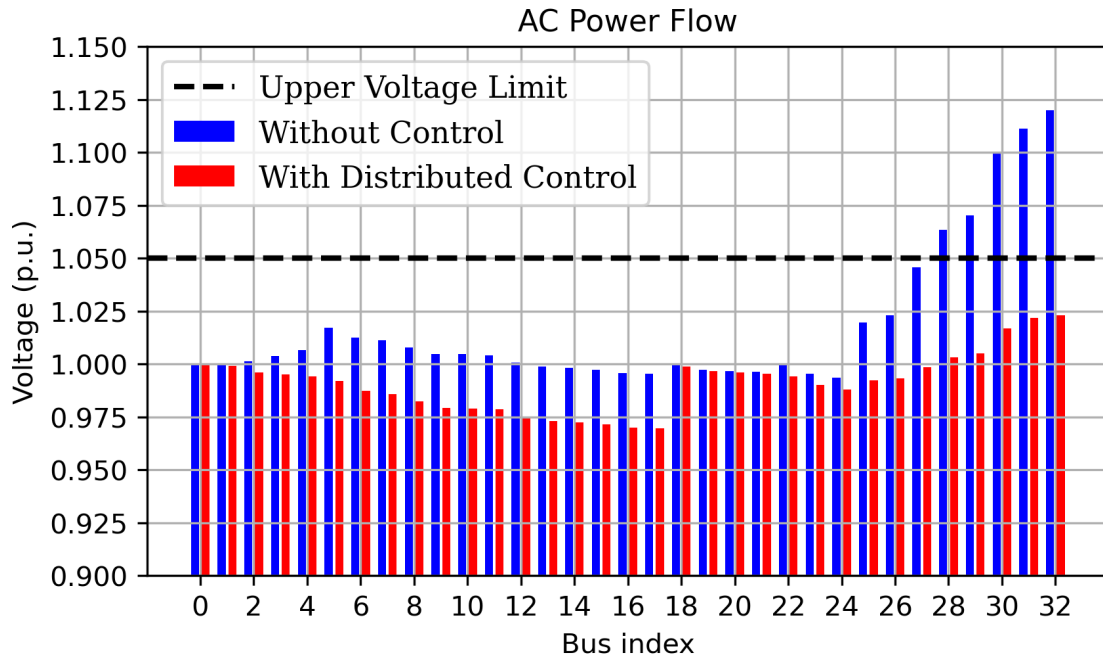


Figure 7.6: AC Power Flow - Voltages With Distributed PV Control, Case1

As one can easily notice, there is a gap between the upper voltage limit and the voltage values with distributed control. This gap is justified from the use of a linearized model (LinDistFlow) in the formulation of our method. Such a model is expected to deviate in its accuracy from an AC power flow model. This is obvious here, where we use the injections we obtained from the method to calculate the resulting power flows using AC power flow. Although the LinDistFlow model calculates that these injections touch the voltage limits, the AC power flow reveals that they are in fact roughly 2.5% lower.

Unfortunately, this means that the amount of curtailed active power production from the PVs installed in the grid was more than needed. One solution to that problem would be to rerun the proposed distributed method with a relaxed upper voltage limit that we can define after observing the aforementioned gap, as attempted in [38]. For example, if we set the upper voltage limit to 1.075 pu we would get results closer to the 1.05 pu upper voltage limit in the AC Power Flow. In that way, we would achieve better results for the necessary curtailed active power production from the PVs of the network.

7.4 Case 2: 4 PVs of 0.5 MW each on Nodes 29 to 32

In this case, we assume there are 4 PVs connected on the nodes 29 to 32 of the grid, being able to produce up to 0.5 MW each. Once again, if the PVs inject their maximum active power production to the nodes that they are installed, it would cause over-voltage violations. Here, the voltage profile of the network is similar to Case 1 although with lower voltage levels at the end of the lines. That is because PV power is concentrated less at the furthest nodes from the feeder. These results are presented in the following figure:

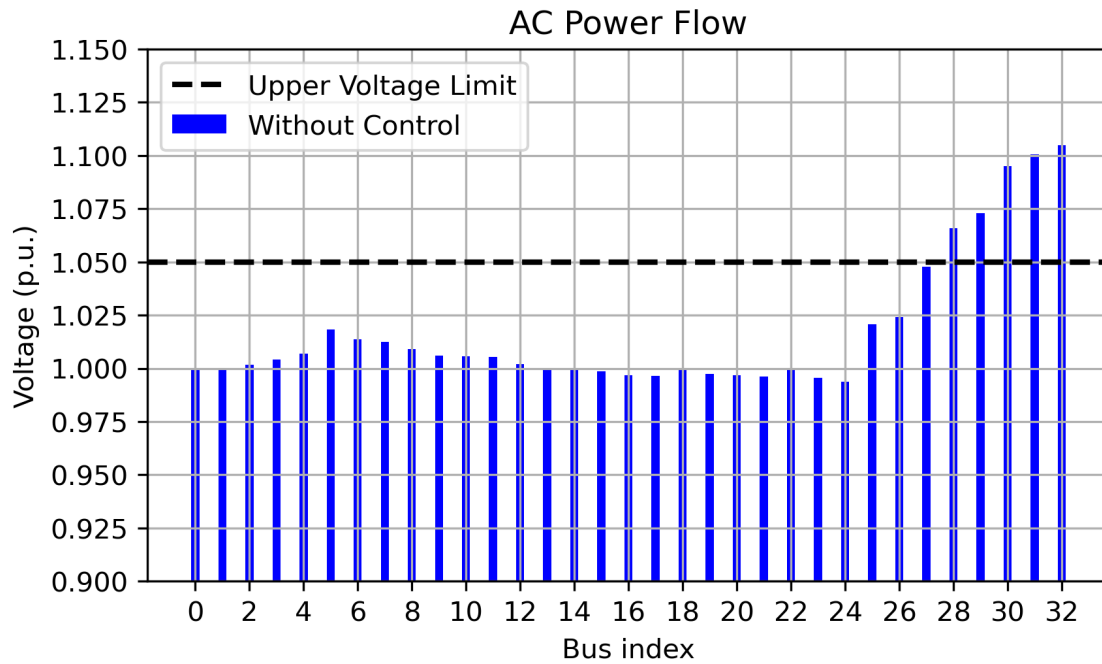


Figure 7.7: AC Power Flow - Voltages without PV control, Case2

Hence, we utilize the proposed method of this diploma thesis once again in order to solve the over-voltage problem illustrated in figure (7.7).

In this case, we set the penalty coefficient for the proposed algorithm to $\rho = 500$. That way, we compare the results with the ones acquired in section (7.3). We run both centralized and distributed algorithms. The General Form Consensus based method converged after **2152 iterations**.

The progress of the objective function of the distributed algorithm is presented throughout the iterations needed for the method to converge.

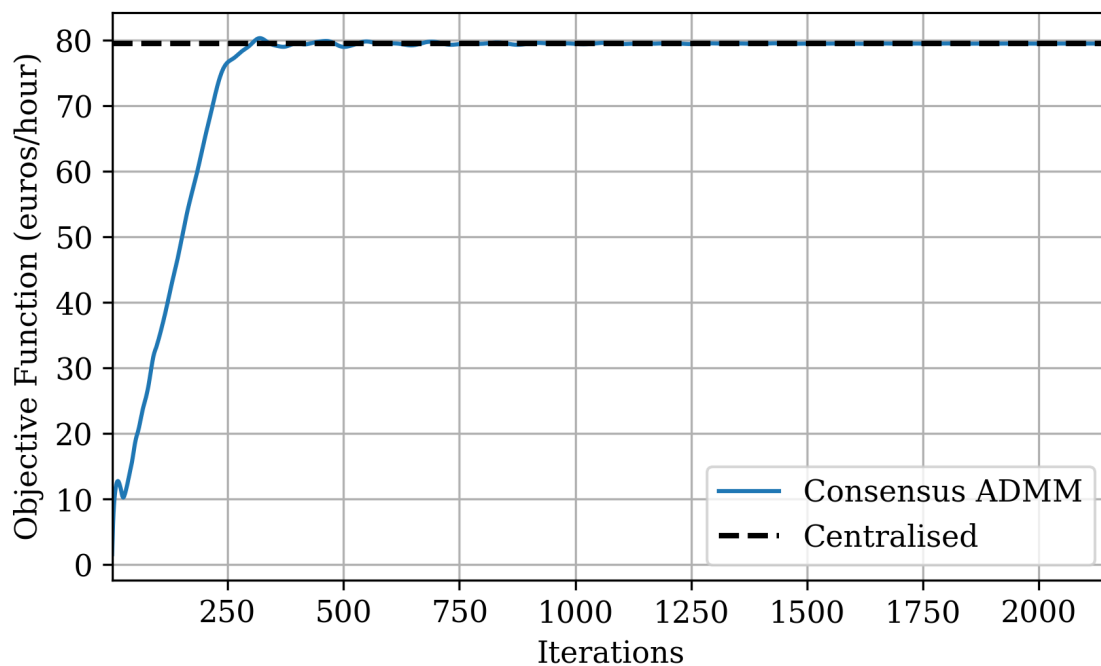


Figure 7.8: Objective Function, Case2, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

It is clear that the objective function of the proposed method is converging to the respective value of the centralised algorithm. To verify this, the same figure is presented zoomed after the first 1000 iterations.

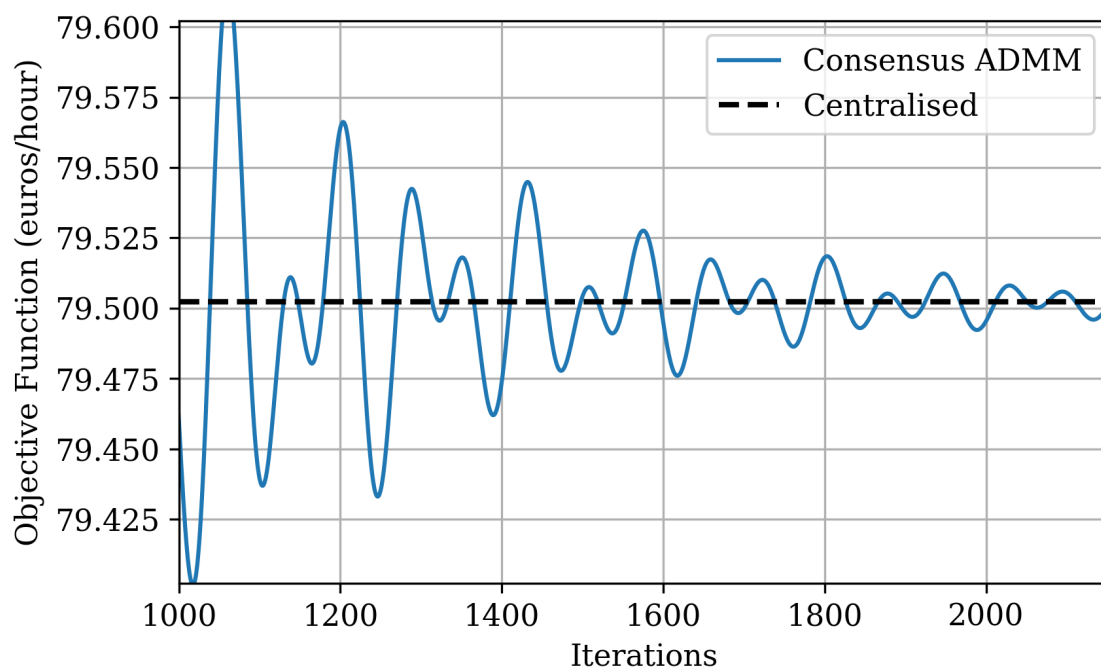


Figure 7.9: Objective Function - Zoom after 1000 iterations, Case2, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

In figure 7.10, we compare the PVs active power productions of the distributed and the centralised algorithm, to illustrate that they are almost identical. Also, in figure 7.11 the progress of the PVs active power injections with respect to the iterations is presented.

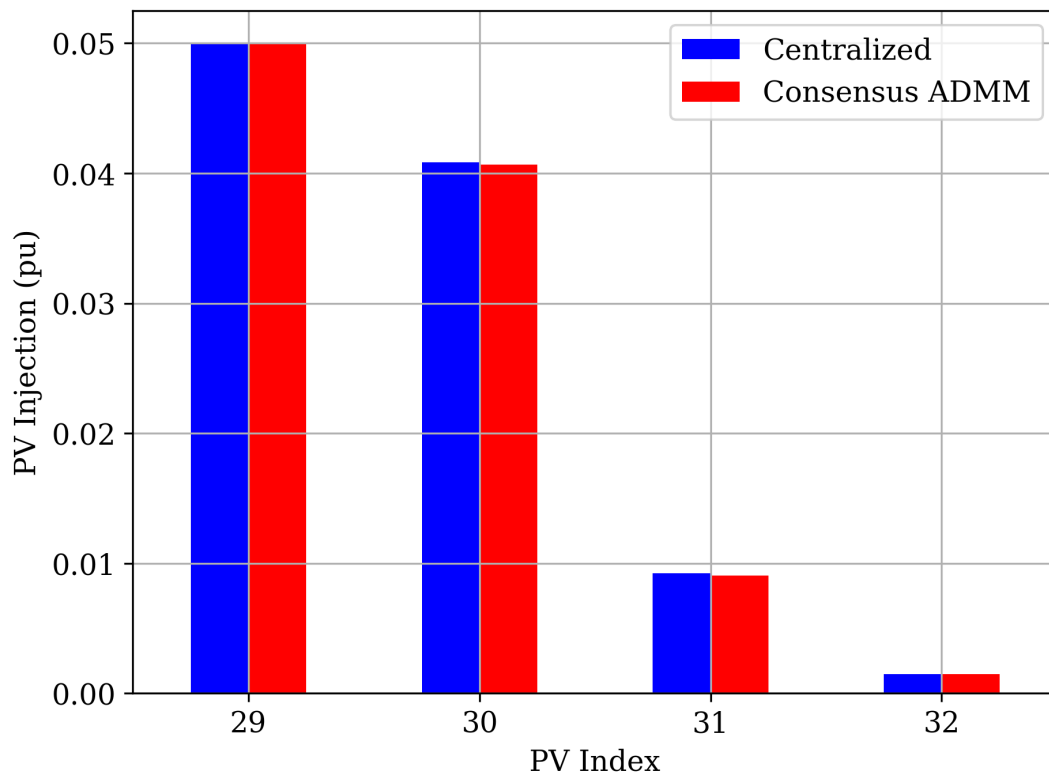


Figure 7.10: PV Injections, Case2, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

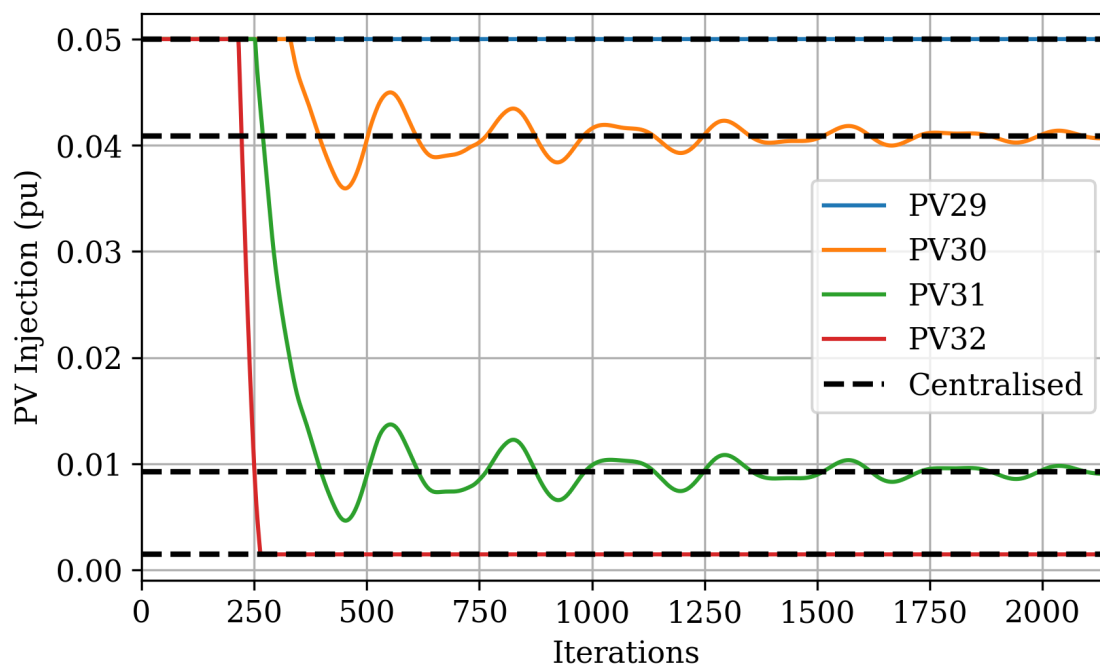


Figure 7.11: PV injections progress, Case2, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

Furthermore, we notice that when no curtailment is required (see node 29) or a node has to almost curtail its whole PV production (see node 32), then these nodes find the optimal values of their PV injection more easily.

In conclusion, the efficacy of the proposed method is confirmed since the values of the objective function and the values of each PV injection in the distributed algorithm are converging to the respective centralised values.

Next, we solve an AC power flow problem considering the PV active power injections as calculated by the proposed distributed algorithm. The following figure presents the over-voltage violations occurring to the scheme without control is effectively resolved.

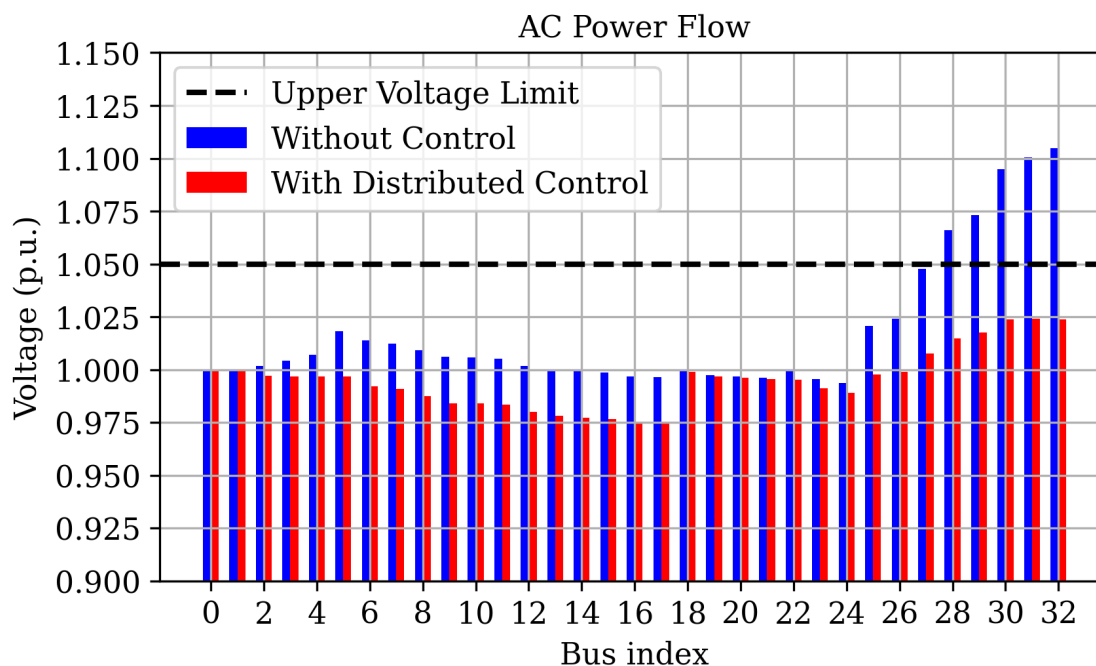


Figure 7.12: AC Power Flow - Voltages With Distributed PV Control, Case2

We notice that Case 2 converges faster than Case 1. This matter is actually very complicated. There are two forces colliding in these simulations. On one hand, the voltage violations occurring in Case 2 are smaller than the ones occurring in Case 1. In addition to that, the total curtailed active power production from the PVs is smaller (see table 6.1). Based on that fact, we expect the proposed algorithm to converge faster.

On the other hand, there are more PVs installed in the network. Therefore, more nodes are trying to find their optimal curtailed active power production with respect to the network constraints and to the coupling constraints ensuring the consensus solution between adjacent nodes. Based on that fact we expect the proposed method to converge slower.

All in all, we believe that the first force described is of more importance than the second one because the difference in total PVs installed to the grid is not great enough for the second force to prevail.

7.5 Case 3: 8 PVs of 0.25 MW each on Nodes 25 to 32

Here, we assume that there are 8 PVs connected on the nodes 25 to 32 of the grid, being able to produce up to 0.25 MW each. In case the PVs inject their maximum active power production to their nodes, over-voltage violations occur in the grid similar to the ones described in the two previous cases but even smaller for the same reason explained in Case 2. The results are given in the following figure:

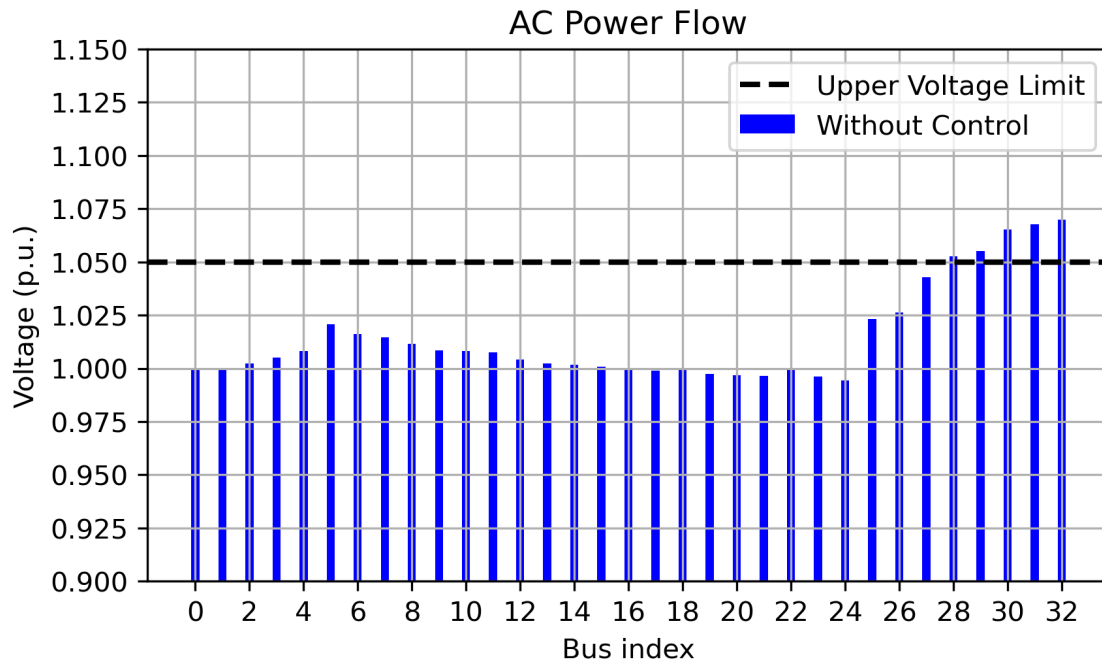


Figure 7.13: AC Power Flow - Voltages without PV control, Case3

Once again, we use the proposed method of this diploma thesis to solve the over-voltage problem illustrated in figure (7.13).

7.5.1 Penalty coefficient $\rho = 500$

Firstly, we set the penalty coefficient for the proposed algorithm to $\rho = 500$ because we want to compare the results with the ones acquired in (7.3) and in (7.4). We run both centralized and distributed algorithms. The General Form Consensus based method converged after **2447 iterations**.

Next, the progress of the objective function of the distributed formulation is presented.

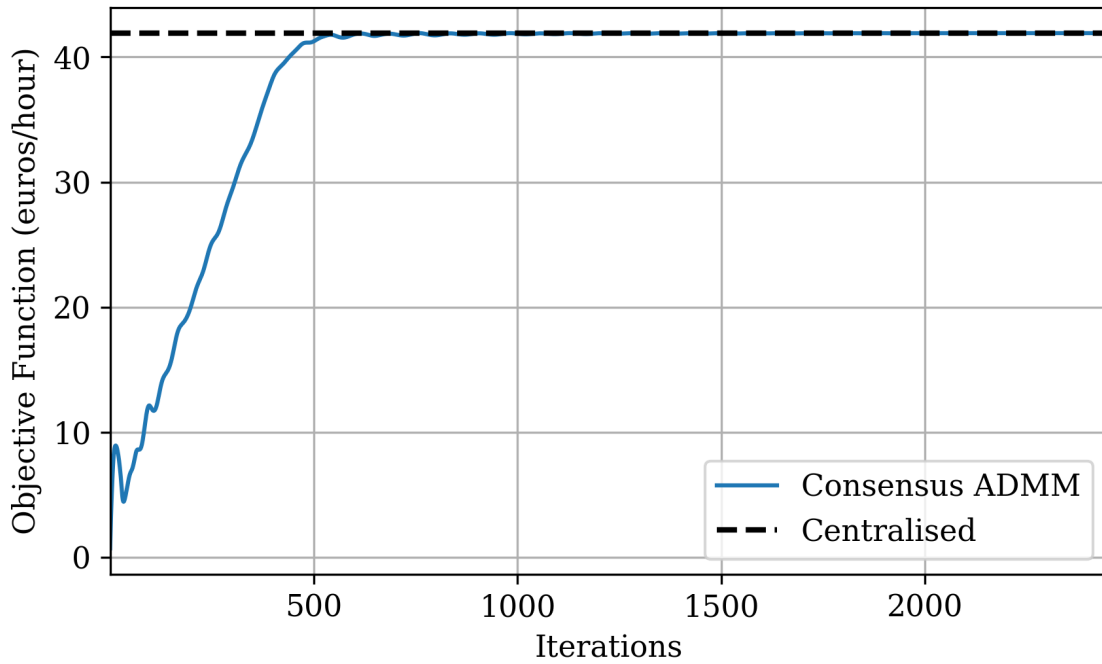


Figure 7.14: Objective Function, Case3, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

If we zoom after the first 2000 iterations in the previous graph we get:

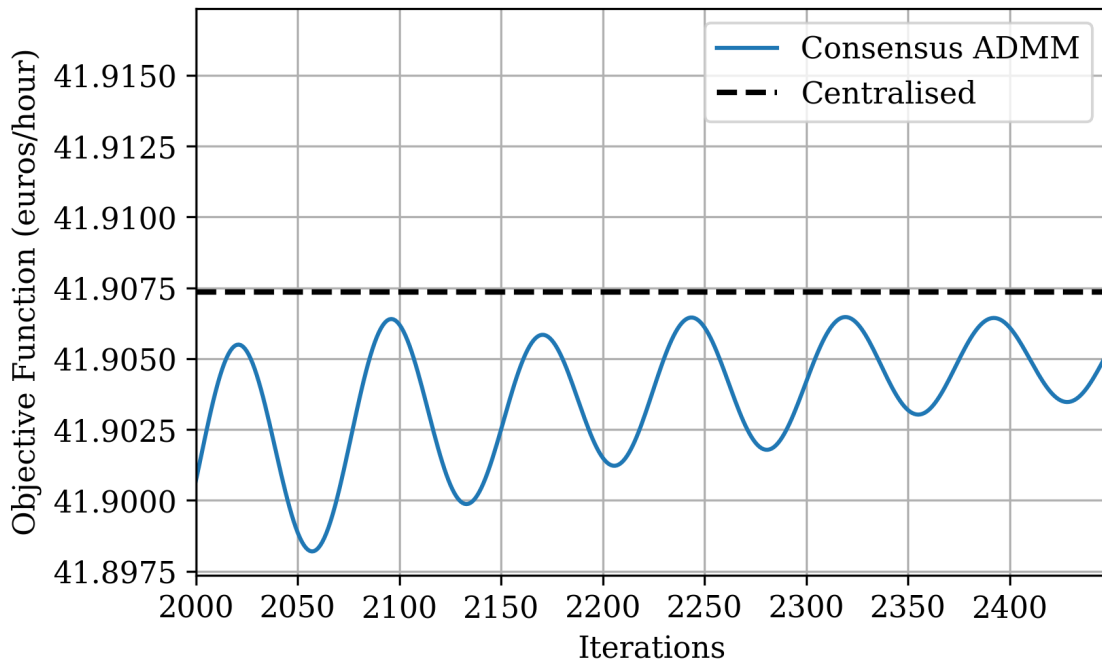


Figure 7.15: Objective Function - Zoom after 2000 iterations, Case3, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

Well as one can easily see, the objective function does not reach its optimal value. Due to that fact, the values of the PV injections appear to be significantly different from the respective centralised values to the point that we consider that simulation a failure.

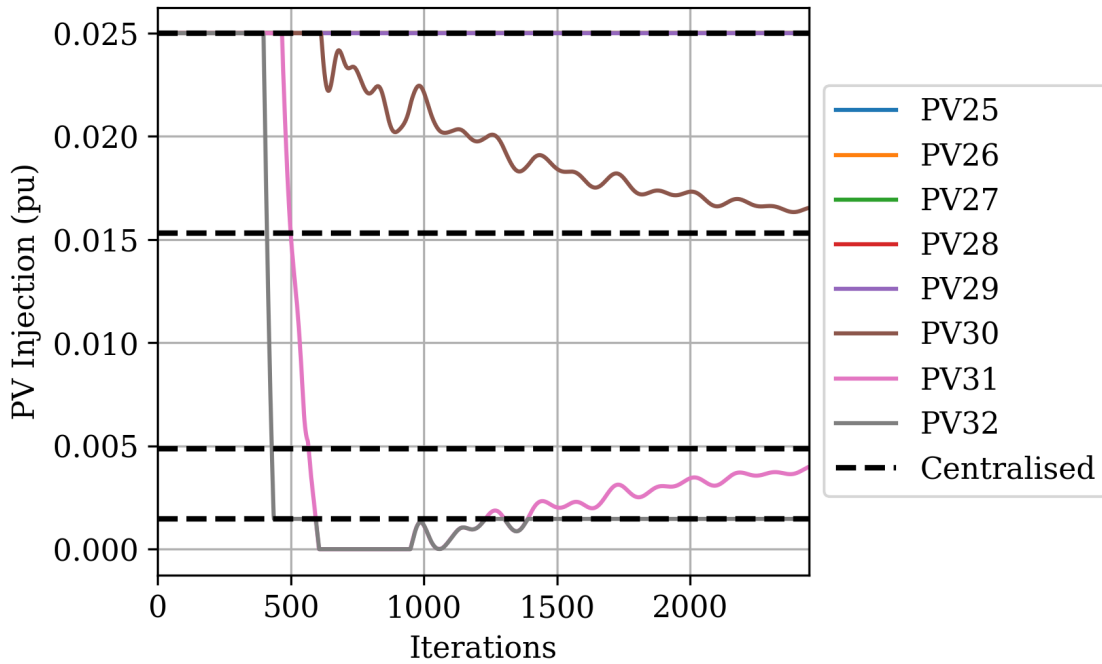


Figure 7.16: PV injections progress, Case3, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

In order to help the method reach the optimal objective function value we try to increase the penalty coefficient to $\rho = 850$. In that way, we attempt to increase the product of the penalty factor with the difference between local and global variables (see equations 4.56 - 4.61). Hence, we increase the rate that each node tries to achieve the optimal value of its own Lagrangian Function.

7.5.2 Penalty coefficient $\rho = 850$

Empirically, it is found that setting the penalty coefficient for the proposed algorithm to $\rho = 850$ gives us a good trade-off between convergence speed and accuracy. We run both centralized and distributed algorithms. The General Form Consensus based method converged after **2753 iterations**.

Coming up, the progress of the objective function of the distributed algorithm is displayed.

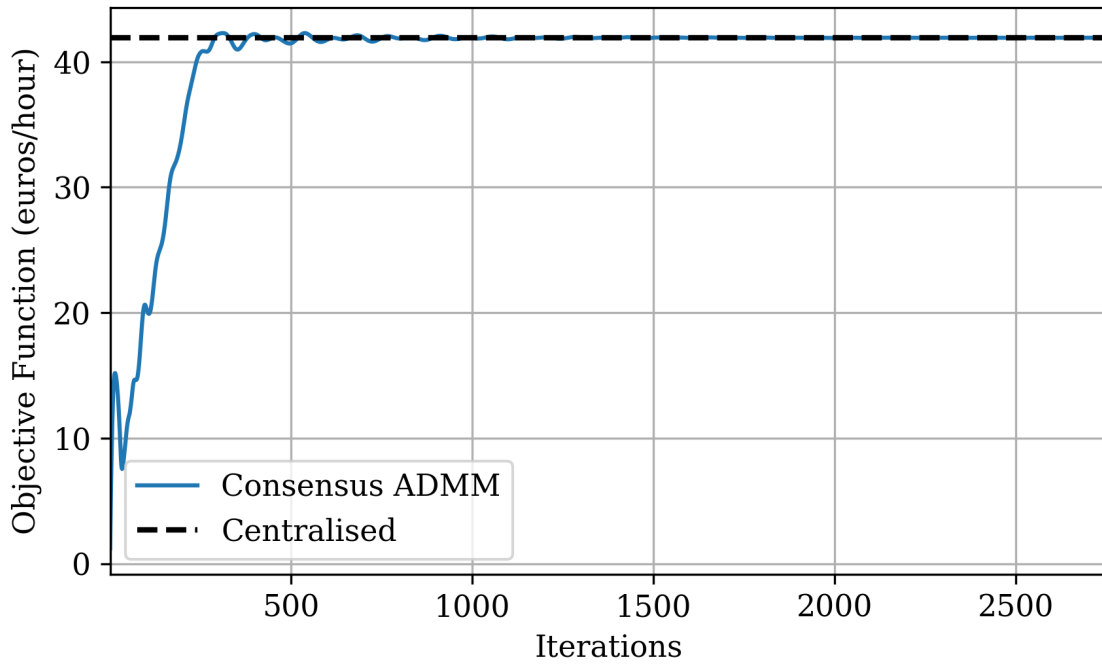


Figure 7.17: Objective Function, Case3, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$

In addition, the same figure is presented zoomed after the first 1000 iterations to clarify the convergence of the distributed solution to the centralised value.

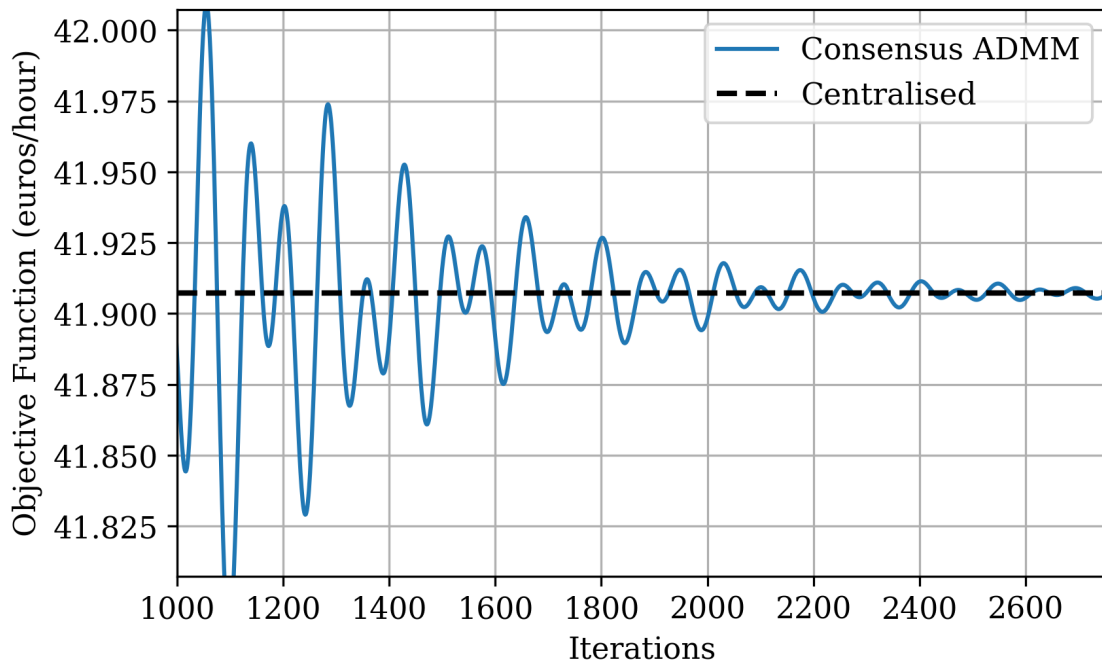


Figure 7.18: Objective Function - Zoom after 1000 iterations, Case3, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$

Furthermore, it is worth showing the comparison of PVs active power production between the distributed and the centralised algorithm.

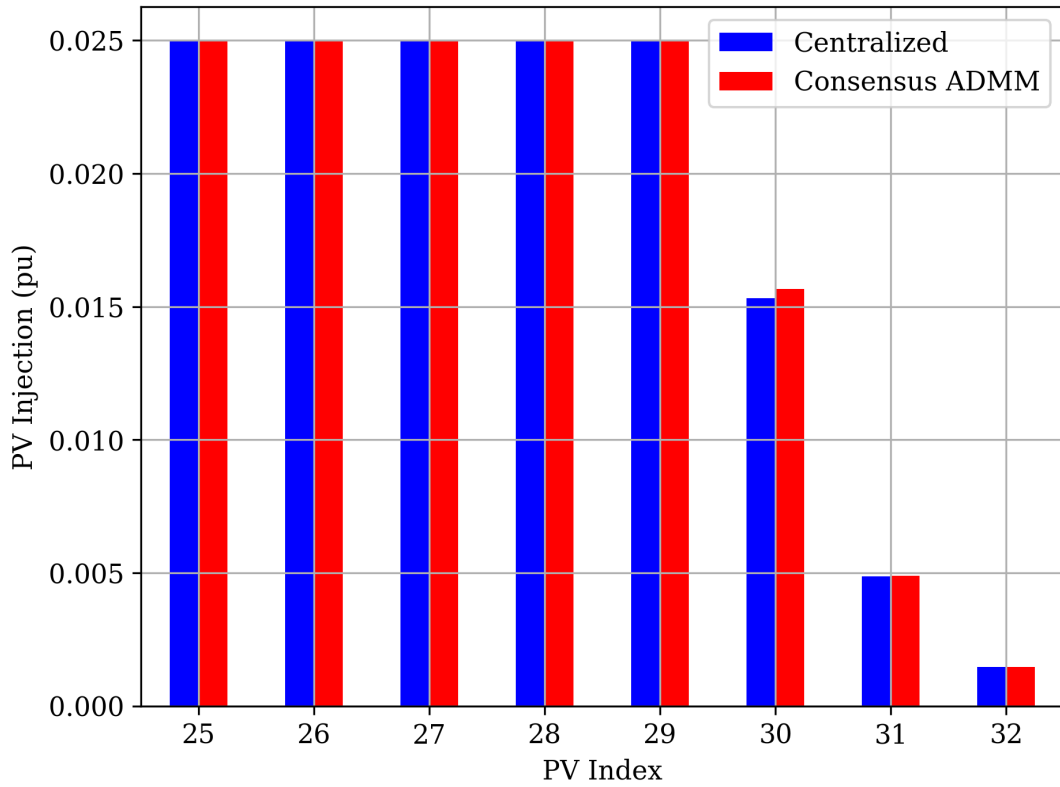


Figure 7.19: PV Injections, Case3, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$

Finally, the progress of the PVs active power injections is presented.

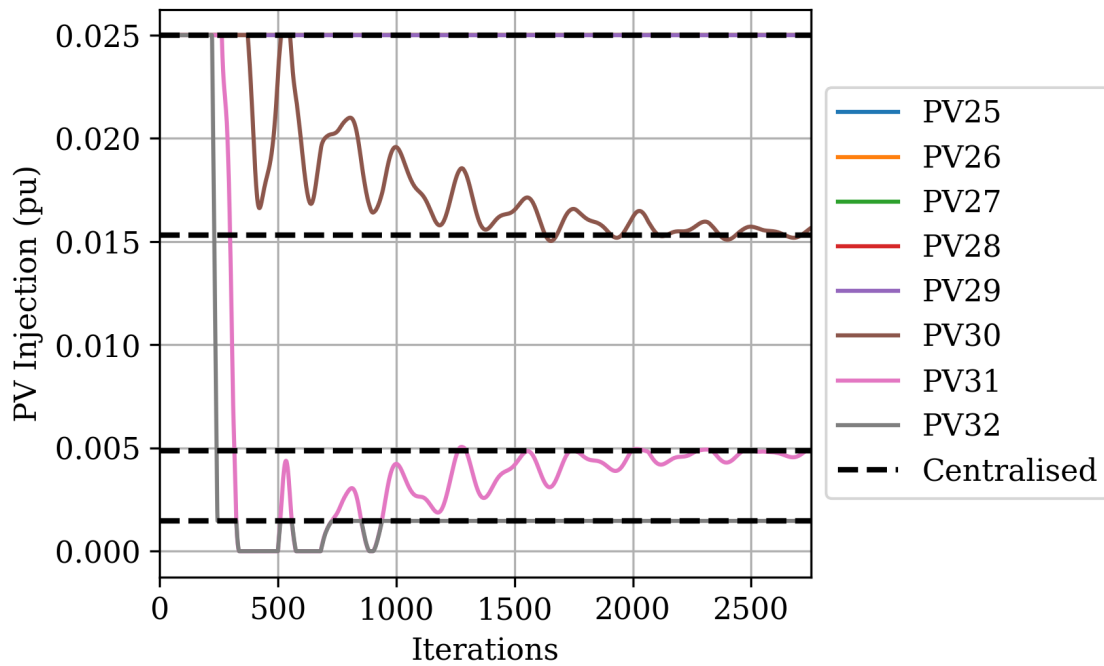


Figure 7.20: PV injections progress, Case3, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$

Observing the figures (6.19) and (6.20), the effectiveness of the proposed method is obvious once again as the values of each photovoltaic injection in the distributed algorithm converge to the corresponding ones in the centralised algorithm.

However, an AC power flow problem needs to be solved again using the PV active power injections as decided by the General Form Consensus based method in order to examine that the over-voltage situation was encountered effectively. The following figure presents the voltages of every node as they calculated by the AC power flow without and with the yielding of the proposed method.

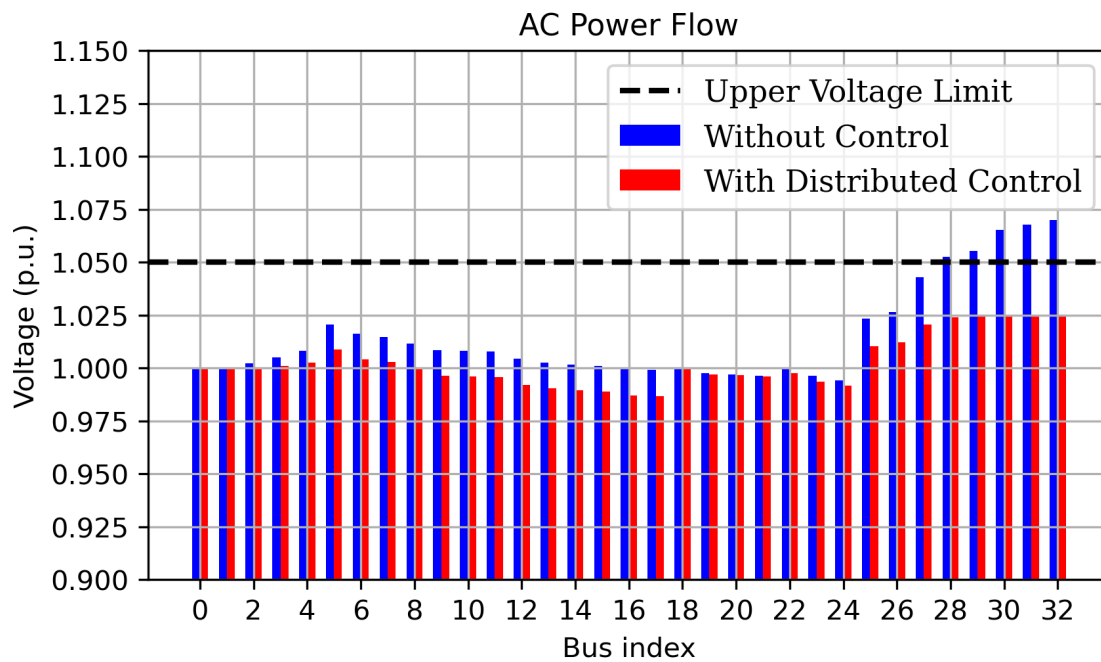


Figure 7.21: AC Power Flow - Voltages With Distributed PV Control, Case3

7.6 Case 4: 16 PVs of 0.125 MW each on Nodes 10 to 17 and 25 to 32

In this case, we assume that there are 16 PVs connected on the nodes 10 to 17 and 25 to 32 of the grid, being able to produce up to 0.125 MW each. However, if the PVs inject their maximum active power production to the nodes that they are installed, it would cause over-voltage violations. To verify this, an AC power flow problem. The results are presented in the following figure:

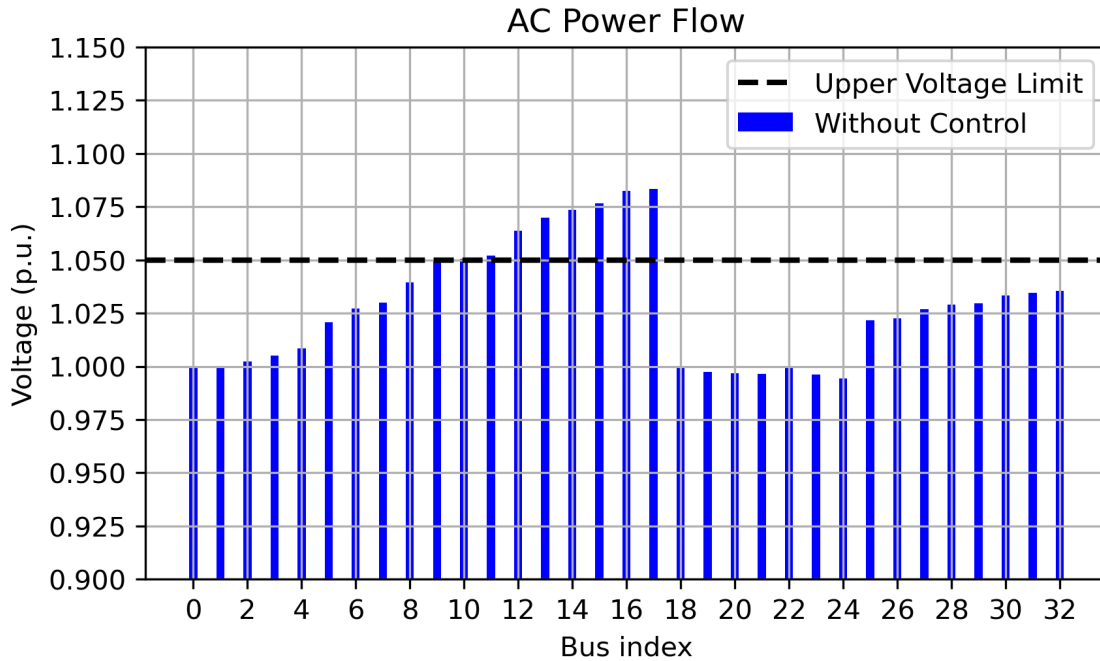


Figure 7.22: AC Power Flow - Voltages without PV control, Case4

In this case, we see that voltage violations are only occurring to the nodes 12-17 and not to the nodes 25-32. Still, the proposed method of this diploma thesis is utilized aiming to solve the over-voltage problem illustrated in figure (7.22). Furthermore, the validity of the General Form Consensus based algorithm is exhibited via the comparison of its results with the results of its equivalent centralised algorithm.

7.6.1 Penalty coefficients $\rho = 500$ and $\rho = 850$

In the same fashion as in Case 3, setting the penalty coefficient to $\rho = 500$ or to $\rho = 850$ would not be enough for the objective function to reach its optimal value. To back up this allegation we run both centralized and distributed algorithms for $\rho = 500$ and $\rho = 850$ and present the progress of the objective function in order to demonstrate that the penalty coefficient is not high enough and thus the method diverges.

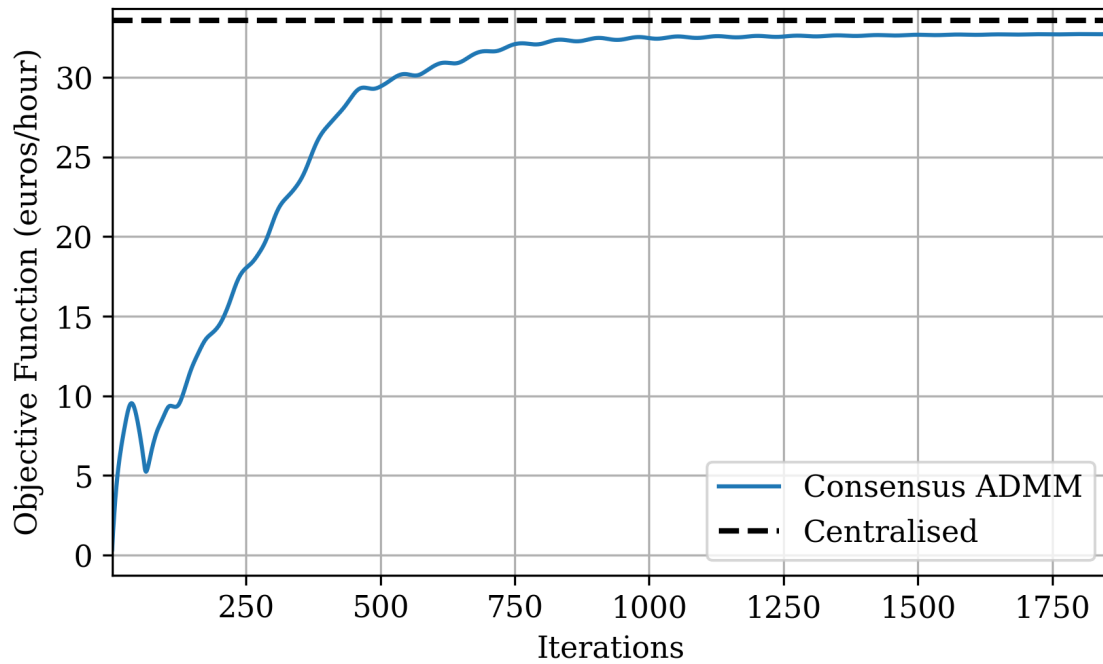


Figure 7.23: Objective Function, Case4, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

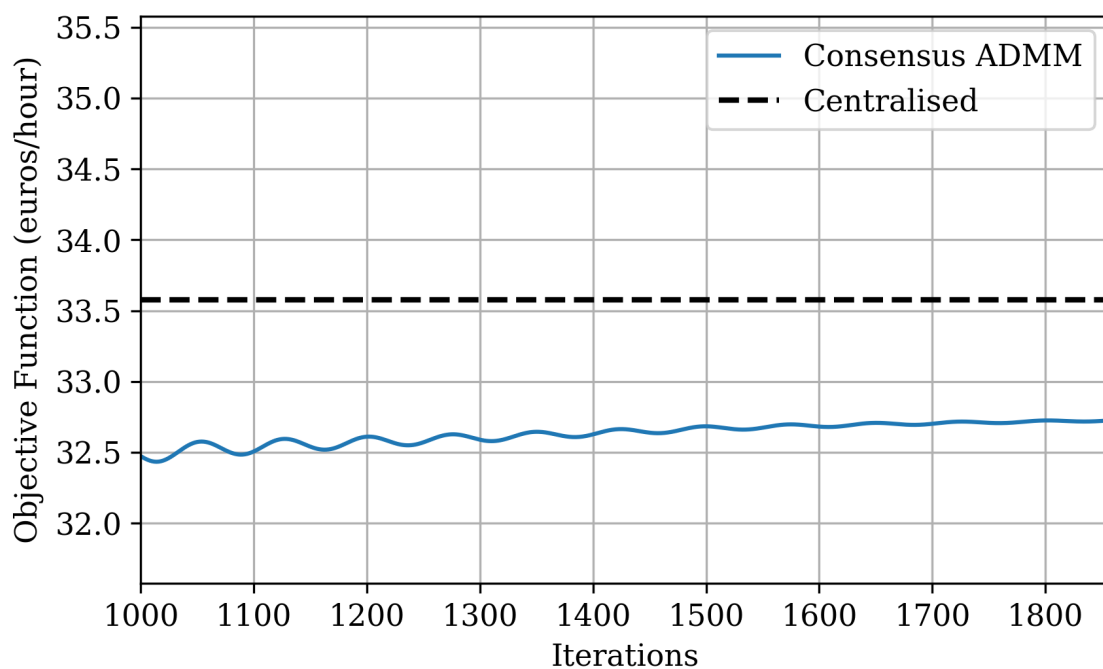


Figure 7.24: Objective Function - Zoom after 1000 iterations, Case4, $\rho = 500$, $\epsilon = 10^{-3}$

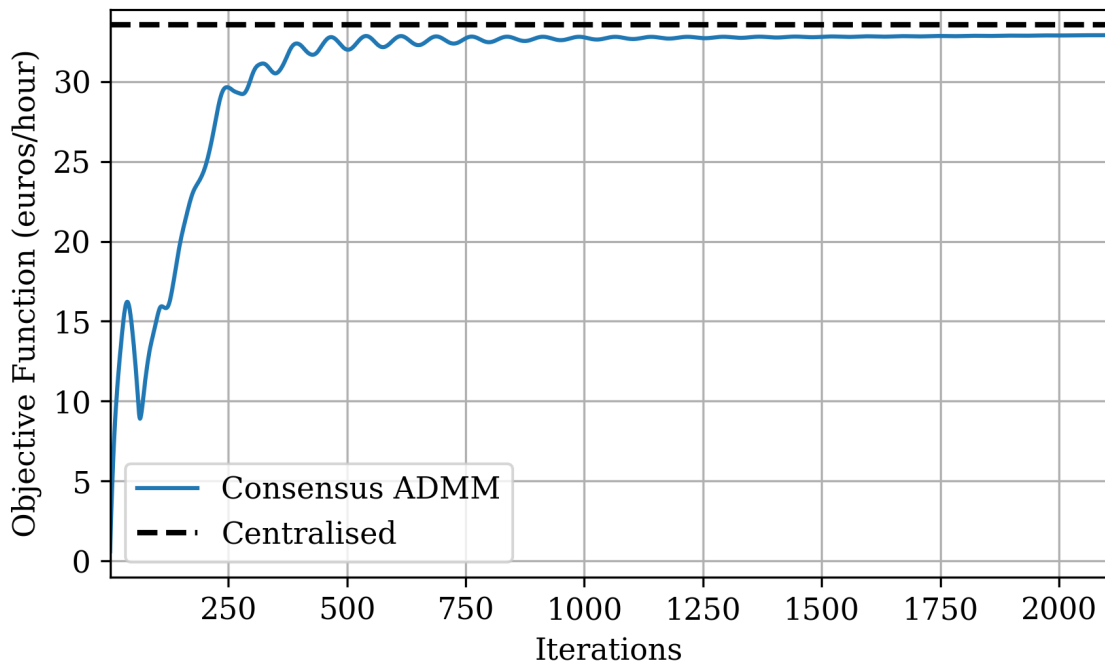


Figure 7.25: Objective Function, Case4, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$

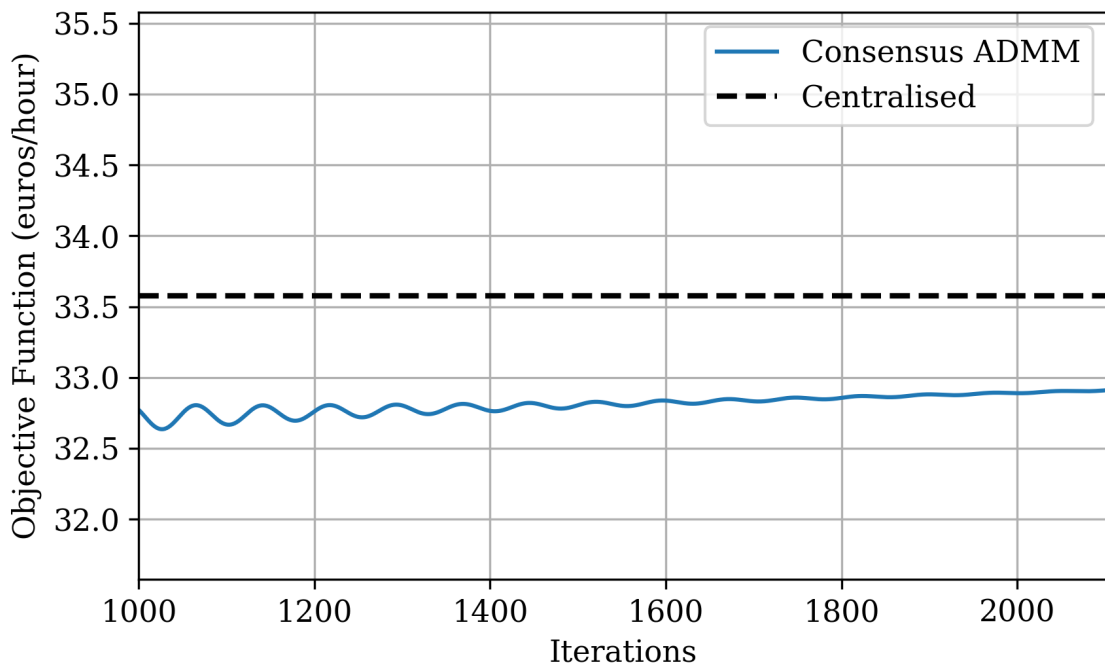


Figure 7.26: Objective Function - Zoom after 1000 iterations, Case4, $\rho = 850$, $\epsilon = 10^{-3}$

In order to help the method reach the optimal objective function value we try to increase the penalty coefficient to $\rho = 1800$.

7.6.2 Penalty coefficient $\rho = 1800$

Empirically, we found that setting the penalty coefficient for the proposed algorithm to $\rho = 1800$ gives us a good trade-off between convergence speed and accuracy. We run both centralized and distributed algorithms. The General Form Consensus based method converged after **2655 iterations**.

Coming up, the progress of the objective function of the distributed formulation is presented.

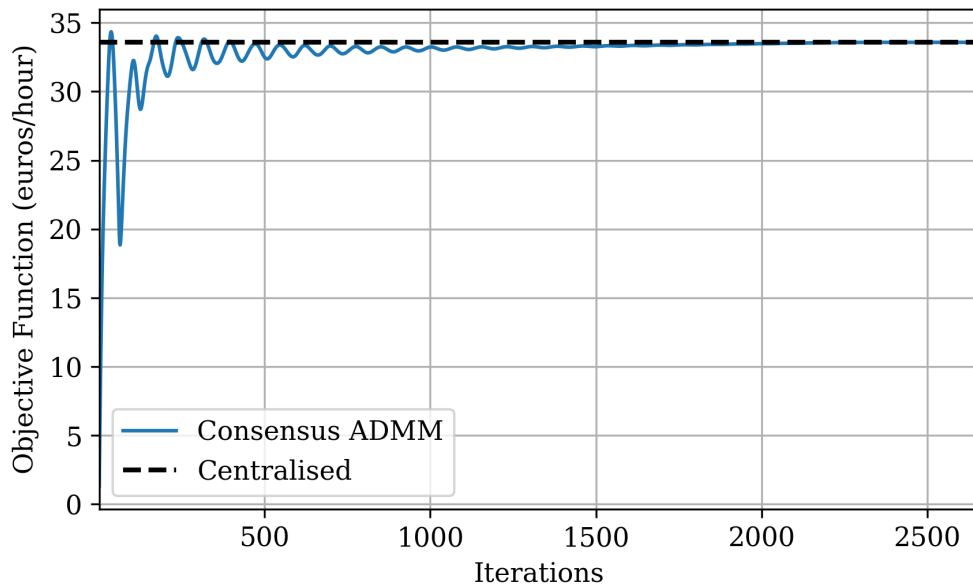


Figure 7.27: Objective Function, Case4, $\rho = 1800$, $\epsilon = 10^{-3}$

In addition, the same figure is presented zoomed after the first 1500 iterations to clarify the convergence of the distributed solution to the centralised value.

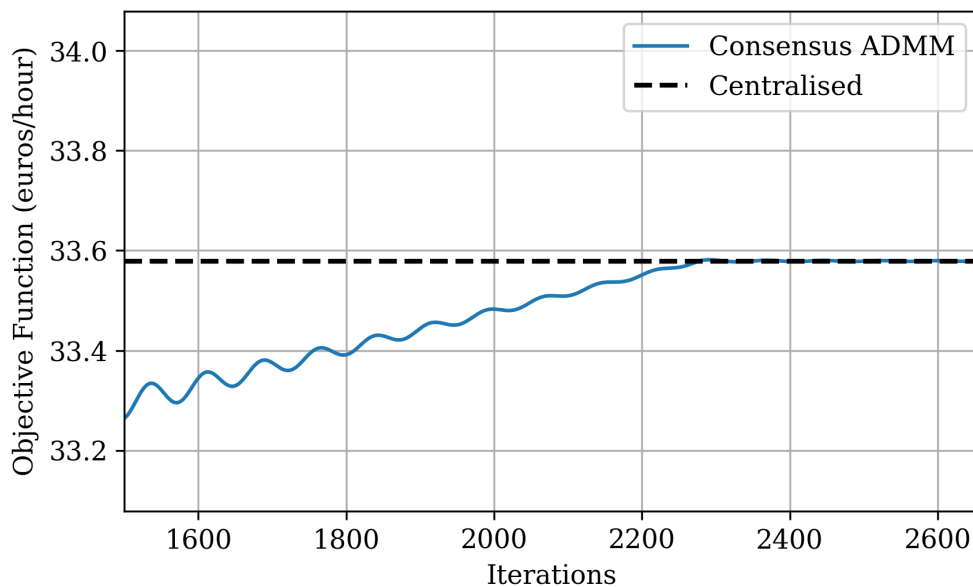


Figure 7.28: Objective Function - Zoom after 1500 iterations, Case4, $\rho = 1800$, $\epsilon = 10^{-3}$

Moreover, it is worth illustrating the comparison of PVs active power production between the distributed and the centralised algorithm.

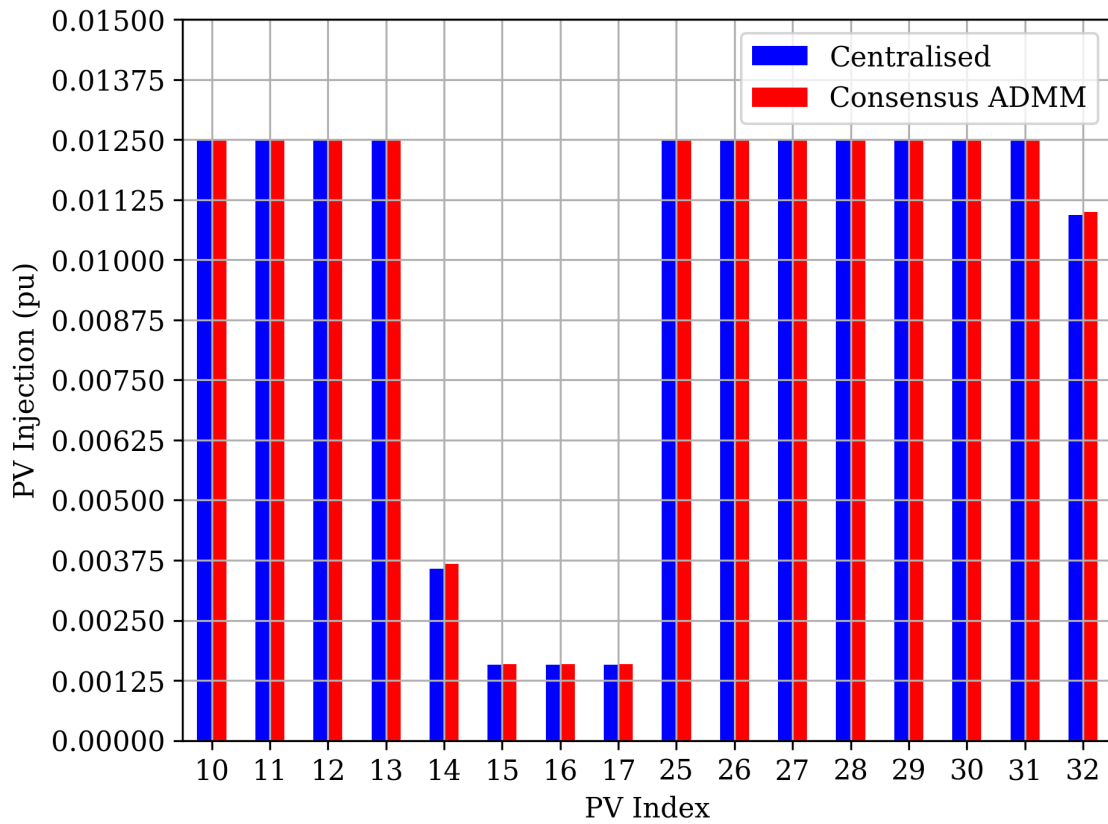


Figure 7.29: PV Injections, Case4, $\rho = 1800$, $\epsilon = 10^{-3}$

What needs to be discussed here, is that both the proposed and centralised methods that use the linearised power flow model LinDistFlow, come to a decision that the PV production of node 32 needs to be curtailed while in the AC power flow voltage levels (see 7.22) it is clear that there is no voltage violation. This once again is confirming our conclusion about the deviation in accuracy of the LinDistFlow model.

Finally, the progress of the PVs active power injections is presented in the following graph to verify the convergence of the PVs production values to their equivalent centralised values.

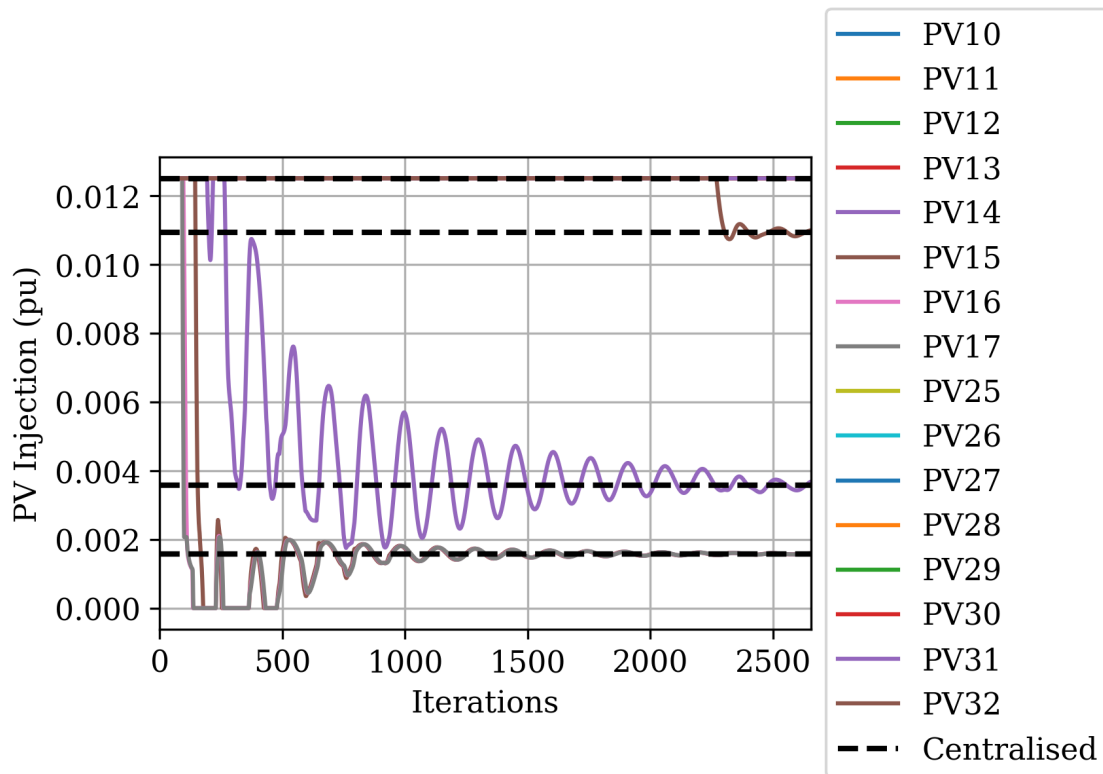


Figure 7.30: PV injections progress, Case4, $\rho = 1800$, $\epsilon = 10^{-3}$

In conclusion, the efficacy of the proposed method is confirmed since the values of the objective function and the values of each PV injection in the distributed algorithm are converging to the respective centralised values.

Nonetheless, an AC power flow problem needs to be solved again considering the PV active power injections as decided by the General Form Consensus based method in order to examine that the over-voltage situation was encountered effectively. The results are presented in the following graph.

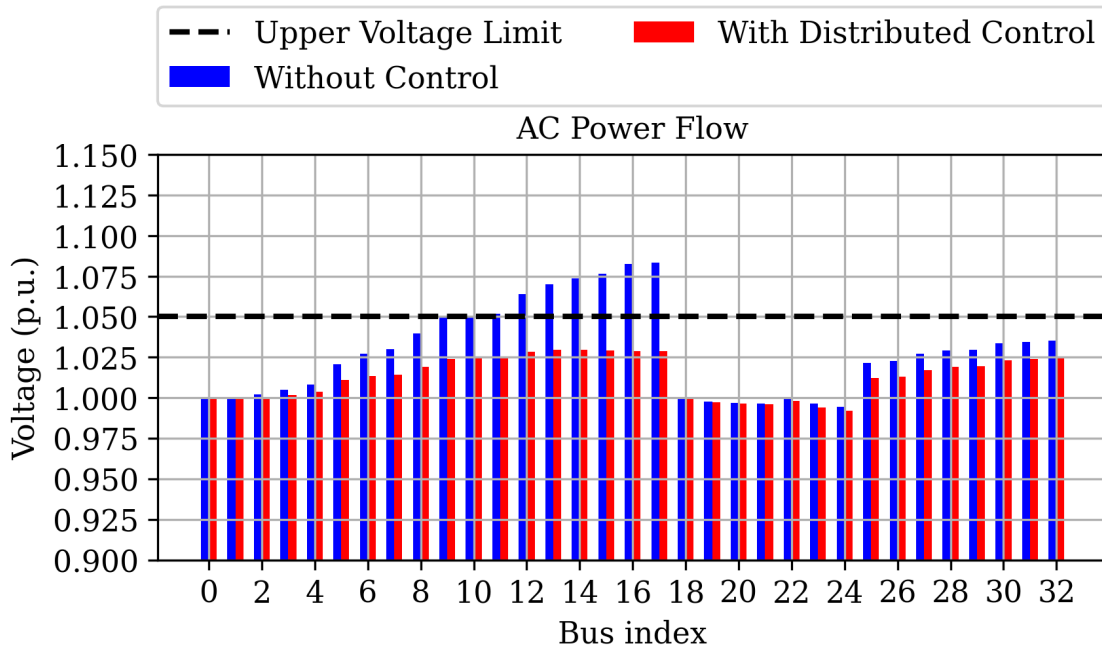


Figure 7.31: AC Power Flow - Voltages With Distributed PV Control, Case4

7.7 Numerical Results

In this section, we present the numerical results in form of tables acquired from both distributed and centralized algorithms from every case scenario. We remind that these results refer to the initialization of the proposed algorithm without considering any PVs installed in the network and considering only 20% of the nominal loads of the grid. We present results for both tolerances $\epsilon = 10^{-3}$ and $\epsilon = 10^{-4}$.

In the following tables, we demonstrate the value of the injection of each PV, the value of the total curtailment, and the value of the objective function per case for both centralized and distributed algorithms. The total curtailment is calculated as follows:

$$\text{Total Curtailment} = \text{Total Production Capability} - \text{Total Power Injection}$$

where Total Production Capability is 2 MW or 0.2 pu.

Furthermore, we calculate the percentage errors between the distributed method and the centralised method as follows:

$$\text{Error}(\%) = \frac{\text{Distributed Result} - \text{Centralised Result}}{\text{Centralised Result}} \cdot 100\%$$

Finally, we write down the total number of iterations needed for the convergence of the distributed algorithm in each case. Next, the aforementioned tables are presented.

Initialization Without PVs					
Tolerance $\epsilon = 10^{-3}$					
Case (ρ)	Results	Centralised	Distributed	Error (%)	Iterations
Case 1 ($\rho = 500$)	Injection Of PV31 (pu)	0.0643613	0.0640367	0.50434%	2221
	Injection Of PV32 (pu)	0.0186146	0.0182534	1.94042%	
	Total Curtailment (pu)	0.1170241	0.1177099	0.58603%	
	Objective Function (Euros/hour)	97.5224864	97.5220655	0.00043%	
Case 2 ($\rho = 500$)	Injection Of PV29 (pu)	0.0500000	0.0500000	0.00000%	2152
	Injection Of PV30 (pu)	0.0408464	0.0406767	0.41534%	
	Injection Of PV31 (pu)	0.0092388	0.0090567	1.97083%	
	Injection Of PV32 (pu)	0.0014667	0.0014667	0.00000%	
	Total Curtailment (pu)	0.0984482	0.0988000	0.35727%	
Case 3 ($\rho = 850$)	Objective Function (Euros/hour)	79.5022540	79.5014762	0.00098%	2753
	Injection Of PV25 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV26 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV27 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV28 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV29 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV30 (pu)	0.0153247	0.0156539	2.14803%	
	Injection Of PV31 (pu)	0.0048667	0.0048985	0.65404%	
Case 4 ($\rho = 1800$)	Injection Of PV32 (pu)	0.0014667	0.0014667	0.00000%	2655
	Total Curtailment (pu)	0.0533419	0.0529809	0.67678%	
	Objective Function (Euros/hour)	41.9073612	41.9069654	0.00094%	
	Injection Of PV10 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV11 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV12 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV13 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV14 (pu)	0.0035699	0.0036781	3.02948%	
	Injection Of PV15 (pu)	0.0015778	0.0015932	0.97669%	
	Injection Of PV16 (pu)	0.0015778	0.0015930	0.96655%	
	Injection Of PV17 (pu)	0.0015778	0.0015929	0.95958%	
	Injection Of PV25 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV26 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV27 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
Injection Of PV28 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%		
Injection Of PV29 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%		
Injection Of PV30 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%		
Injection Of PV31 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%		
Injection Of PV32 (pu)	0.0109289	0.0109907	0.56593%		
Total Curtailment (pu)	0.0432679	0.0430521	0.49875%		
Objective Function (Euros/hour)	33.5789617	33.5788649	0.00029%		

Table 7.1: Numerical Results, Initialization Without PVs, $\epsilon = 10^{-3}$

Initialization Without PVs					
Tolerance $\epsilon = 10^{-4}$					
Case (ρ)	Results	Centralised	Distributed	Error (%)	Iterations
Case 1 ($\rho = 500$)	Injection Of PV31 (pu)	0.0643613	0.0643947	0.05196%	3110
	Injection Of PV32 (pu)	0.0186146	0.0186507	0.19420%	
	Total Curtailment (pu)	0.1170241	0.1169545	0.05947%	
	Objective Function (Euros/hour)	97.5224864	97.5223972	0.00009%	
Case 2 ($\rho = 500$)	Injection Of PV29 (pu)	0.0500000	0.0500000	0.00000%	2524
	Injection Of PV30 (pu)	0.0408464	0.0409363	0.22012%	
	Injection Of PV31 (pu)	0.0092388	0.0093354	1.04614%	
	Injection Of PV32 (pu)	0.0014667	0.0014667	0.00000%	
	Total Curtailment (pu)	0.0984482	0.0982617	0.18950%	
Case 3 ($\rho = 850$)	Objective Function (Euros/hour)	79.5022540	79.5020498	0.00026%	3497
	Injection Of PV25 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV26 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV27 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV28 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV29 (pu)	0.0250000	0.0250000	0.00000%	
	Injection Of PV30 (pu)	0.0153247	0.0154318	0.69867%	
	Injection Of PV31 (pu)	0.0048667	0.0048779	0.23096%	
Injection Of PV32 (pu)	0.0014667	0.0014667	0.00000%		
Case 4 ($\rho = 1800$)	Total Curtailment (pu)	0.0533419	0.0532236	0.22180%	3117
	Objective Function (Euros/hour)	41.9073612	41.9073125	0.00012%	
	Injection Of PV10 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV11 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV12 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV13 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV14 (pu)	0.0035699	0.0036155	1.27538%	
	Injection Of PV15 (pu)	0.0015778	0.0015842	0.40753%	
	Injection Of PV16 (pu)	0.0015778	0.0015841	0.40120%	
	Injection Of PV17 (pu)	0.0015778	0.0015841	0.39803%	
	Injection Of PV25 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV26 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV27 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV28 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
	Injection Of PV29 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%	
Injection Of PV30 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%		
Injection Of PV31 (pu)	0.0125000	0.0125000	0.00000%		
Injection Of PV32 (pu)	0.0109289	0.0109610	0.29363%		
Total Curtailment (pu)	0.0432679	0.0431712	0.22340%		
Objective Function (Euros/hour)	33.5789617	33.5789523	0.00003%		

Table 7.2: Numerical Results, Initialization Without PVs, $\epsilon = 10^{-4}$

Running the distributed algorithm with tolerance $\epsilon = 10^{-4}$ lets us achieve more accurate results, meaning that they are closer to the respective centralised results. The comparison between the average errors of the PV injections for $\epsilon = 10^{-3}$ and $\epsilon = 10^{-4}$ for each case is presented in the following graph to illustrate the aforementioned improvement in accuracy.

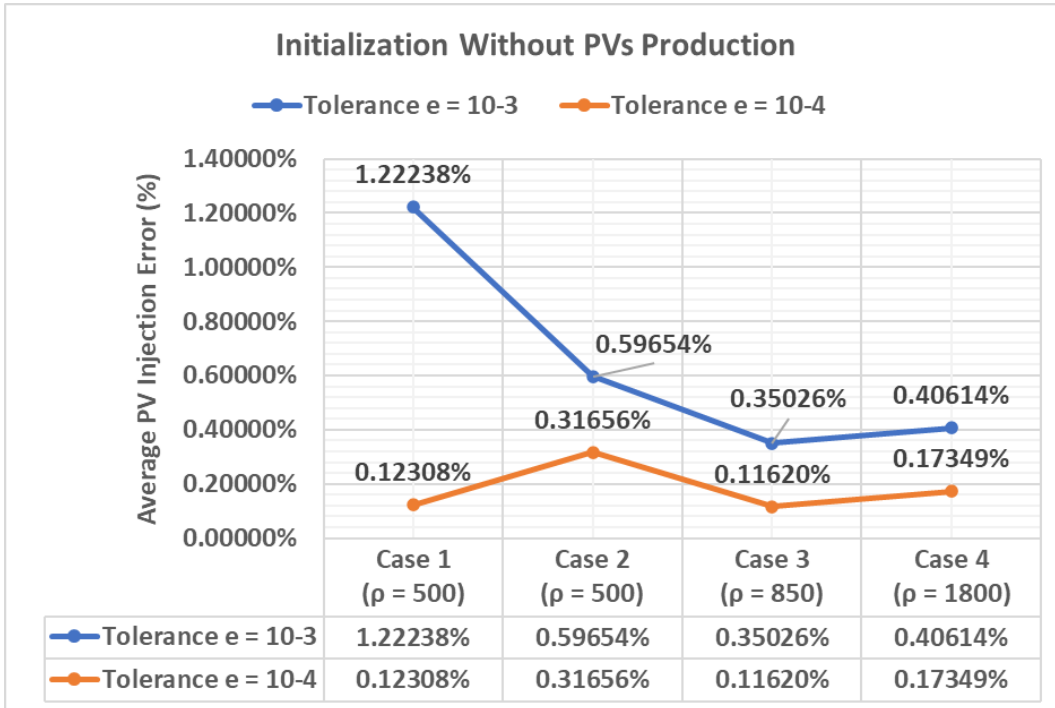


Figure 7.32: Average Error Per Case, Initialization Without PVs

However, this improvement in accuracy comes with a cost since there is a significant increase in the number of iterations for the proposed method to converge in each case. The difference between the number of iterations for tolerances $\epsilon = 10^{-3}$ and $\epsilon = 10^{-4}$ are presented in the following graph.

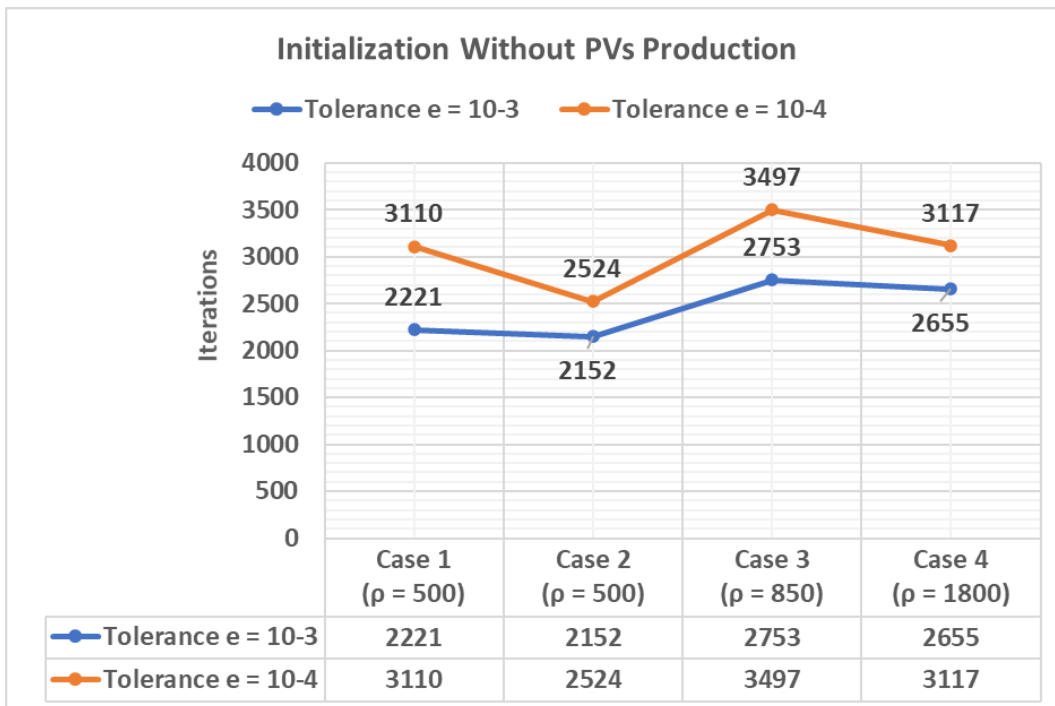


Figure 7.33: Iterations Per Case, Initialization Without PVs

Chapter 8

Conclusion

In the final Chapter, the proposed method is briefly described. Its methodology and most important qualities are discussed and its merits and weaknesses are outlined. Then the results from the case studies are discussed along with the degree to which the implementation of the method is deemed successful. Finally, possible future work is mentioned.

8.1 Proposed method - A summary

This thesis presents a distributed algorithm able to resolve the over-voltage problem created by PV production in times of low demand in distribution networks. Namely, the DSO aims to minimize the curtailment of the PVs production in the network subject to (i) the linearised AC Power flow equations as stated in the branch flow model LinDistFlow, (ii) the voltage magnitude limits, (iii) the possible curtailment that the inverter of every PV can offer. The aforementioned optimization problem of the DSO is being solved in a distributive manner.

On the basis of the proposed algorithm, it is assumed that the aggregator that manages the PVs production will be paid for the PVs maximum power point production. Therefore, by minimizing the curtailment of the PVs active power injections, the DSO seeks to avoid compensating the aggregator for active power production that was not used while securing the safe operation of the network.

Based on General Form Consensus Optimization, each node of the power system communicates with its adjacent nodes in order to come to a decision consensus to the financially optimal solution that will minimize the curtailment of the PVs active power injections while keeping voltage deviations within appropriate limits. The distributive nature of the method allows for data privacy of each node by restricting the exchange of information only between adjacent nodes.

8.2 Results discussion

This thesis presents a number of case studies that prove the validity of the method. A Medium Voltage network was used as the basis for the simulations, the voltage level limits of which are severely violated in the case of harvesting the maximum point active power production by the PVs incorporated in each case. This highlights the need for a method that optimally sets the curtailment of the installed PVs while respecting network constraints.

Firstly, the method was tested, solved both in a centralized and distributed manner. The validity of the results of the proposed distributed algorithm is being proven by the comparison with the respective results from the centralized method. Afterward, the results of the PV injections calculated by the distributed algorithm are used as input in an AC Power Flow

problem. This way, it is proven that the problem of over-voltage that would occur if the maximum point PV production was incorporated, is successfully tackled by the proposed method.

However, some open points of the proposed algorithm need to be outlined. To begin with, there is a significant divergence between the voltages of the AC power flow, after the results of the General Form Consensus Optimization based method was implemented, and the upper voltage limit defined in the proposed method. The reason for that is that the LinDistFlow model used in our formulation is a linearized approximation and therefore errors are expected to occur.

Moreover, the DSO is called to fine-tune the penalty parameter in each case causing the method to be impractical. Also, the convergence of the distributed algorithm needs many iterations, meaning the number of iterations is in the order of thousands. Since the conditions of the simulations did not indeed yield parallel calculations among the nodes, the degree of how practical the proposed method is, in terms of the time of convergence, is yet to be researched.

For each one of these weaknesses, future work is proposed in order to improve the efficacy of the proposed method.

8.3 Future Work

First of all, future work can be carried out on the gap between the AC power flow voltages and the voltages of the proposed method. One solution would be to relax the upper voltage limit in the proposed algorithm in order to achieve closer results to the 1.05 pu voltage limit in the AC power flow, as explained in Section 7.3.

Furthermore, the implementation of an adaptive step as a penalty factor should be considered as a solution to the DSO's need to fine-tune the penalty coefficient in each case. Moreover, the degree of how practical the proposed method is should be researched. More specifically, the optimization problems of each node of the network (the first step of the proposed algorithm) should be solved in parallel using appropriate calculation tools (e.g. multi-core computer systems). That way, the real time of convergence of the proposed method will be examined, and hence the degree of how practical the method really is will be determined.

Bibliography

- [1] Lemaréchal, Claude. (2006). S. Boyd, L. Vandenberghe, Convex Optimization. European Journal of Operational Research - EJOR. 170. 326-327. 10.1016/j.ejor.2005.02.002.
- [2] Boros, Zoltán & Szaz, Arpad. (2008). Infimum and supremum completeness properties of ordered sets without axioms. An. Ştiin. Univ. Ovidius Constanza Ser. Mat.. 16. 31-37.
- [3] Hindi, Haitham. (2004). A tutorial on convex optimization. 3252-3265 vol.4. 10.23919/ACC.2004.1384411.
- [4] Kolter, Zico. (2009). Convex Optimization Overview.
- [5] Chatzivasileiadis, Spyros. (2018). Lecture Notes on Optimal Power Flow (OPF).
- [6] Glover, J. . (2012). Power system analysis and design.
- [7] Farsi, F.N. & Albadi, Mohammed & Hosseinzadeh, Nasser & Badi, A.H.. (2015). Economic Dispatch in power systems. 2015 IEEE 8th GCC Conference and Exhibition, GCCCE 2015. 10.1109/IEEEGCC.2015.7060068.
- [8] Farsi, F.N. & Albadi, Mohammed & Hosseinzadeh, Nasser & Badi, A.H.. (2015). Economic Dispatch in power systems. 2015 IEEE 8th GCC Conference and Exhibition, GCCCE 2015. 10.1109/IEEEGCC.2015.7060068.
- [9] Lal, Nitesh & Elyas, Sameena. (2014). A Review on Load Flow Analysis,. International Journal of Innovative research and development. 3. 337-341.
- [10] Bacher, Rainer & Frauendorfer, Karl & Glavitsch, Hans. (1993). Power System Models, Objectives and Constraints in Optimal Power Flow Calculations. 217-263. 10.1007/978-3-662-12646-2_8.
- [11] Masetti, Carlo. (2010). Revision of European Standard EN 50160 on power quality: Reasons and solutions. 1 - 7. 10.1109/ICHQP.2010.5625472.
- [12] Mary, A.C. & Cain, B. & O'Neill, Richard. (2012). History of optimal power flow and formulations. Fed. Energy Regul. Comm.. 1. 1-36.
- [13] Boyd, Stephen & Parikh, Neal & Chu, Eric & Peleato, Borja & Eckstein, Jonathan. (2011). Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers. Foundations and Trends in Machine Learning. 3. 1-122. 10.1561/22000000016.
- [14] Lagrange multiplier, Wikipedia - The Free Encyclopedia. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier, Access 29/08/2020
- [15] Duality (optimization), Wikipedia - The Free Encyclopedia. Available at: [https://en.wikipedia.org/wiki/Duality_\(optimization\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Duality_(optimization)), Access 29/08/2020

- [16] Gradient descent, Wikipedia - The Free Encyclopedia. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient_descent, Access 29/08/2020
- [17] Lavaei, Javad & Low, Steven. (2012). Zero Duality Gap in Optimal Power Flow Problem. *IEEE Transactions on Power Systems*. 27. 10.1109/TPWRS.2011.2160974.
- [18] Additively separable function, Wikipedia - The Free Encyclopedia. Available at: https://calculus.subwiki.org/wiki/Additively_separable_function, Access 29/08/2020
- [19] Block matrix, Wikipedia - The Free Encyclopedia. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Block_matrix, Access 29/08/2020
- [20] Sulc, Petr & Backhaus, Scott & Chertkov, Michael. (2013). Optimal Distributed Control of Reactive Power Via the Alternating Direction Method of Multipliers. *IEEE Transactions on Energy Conversion*. 29. 10.1109/TEC.2014.2363196.
- [21] Erseghe, Tomaso. (2014). Distributed optimal power flow using ADMM. *Power Systems, IEEE Transactions on*. 29. 2370-2380. 10.1109/TPWRS.2014.2306495.
- [22] Schizas, Ioannis & Ribeiro, Alejandro & Giannakis, G.B.. (2008). Consensus in Ad Hoc WSNs With Noisy Links— Part I: Distributed Estimation of Deterministic Signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 56. 350-364. 10.1109/TSP.2007.906734.
- [23] Schizas, Ioannis & Giannakis, G.B. & Roulletiotis, Stergios & Ribeiro, Alejandro. (2008). Consensus in Ad Hoc WSNs With Noisy Links Part II: Distributed Estimation and Smoothing of Random Signals. *Signal Processing, IEEE Transactions on*. 56. 1650-1666. 10.1109/TSP.2007.908943.
- [24] Peng, Qiuyu & Low, Steven. (2014). Distributed Algorithm for Optimal Power Flow on a Radial Network. 10.1109/CDC.2015.7403309.
- [25] Gan, Lingwen & Low, Steven. (2014). Convex relaxations and linear approximation for optimal power flow in multiphase radial networks.
- [26] Bazrafshan, Mohammadhafez & Gatsis, Nikolaos. (2015). Decentralized stochastic programming for real and reactive power management in distribution systems. 2014 IEEE International Conference on Smart Grid Communications, SmartGridComm 2014. 218-223. 10.1109/SmartGridComm.2014.7007649.
- [27] Robbins, Brett & Dominguez-Garcia, Alejandro. (2015). Optimal Reactive Power Dispatch for Voltage Regulation in Unbalanced Distribution Systems. *IEEE Transactions on Power Systems*. 31. 1-11. 10.1109/TPWRS.2015.2451519.
- [28] Robbins, Brett & Zhu, Hao & Dominguez-Garcia, Alejandro. (2015). Optimal Tap Setting of Voltage Regulation Transformers in Unbalanced Distribution Systems. *IEEE Transactions on Power Systems*. 31. 1-12. 10.1109/TPWRS.2015.2392693.
- [29] Ma, Wann-Jiun & Wang, Jianhui & Gupta, Vijay & Chen, Chen. (2016). Distributed Energy Management for Networked Microgrids Using Online Alternating Direction Method of Multipliers with Regret. *IEEE Transactions on Smart Grid*. PP. 1-1. 10.1109/TSG.2016.2569604.
- [30] Aragüés-Peñalba, Monica & Nguyen, Tung Lam & Caire, Raphael & Sumper, Andreas & Galceran-Arellano, Samuel & Tran-Quoc, T. (2020). General form of consensus optimization for distributed OPF in HVAC-VSC-HVDC systems. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*. 121. 106049. 10.1016/j.ijepes.2020.106049.

- [31] Bose, Subhonmesh & Low, Steven & Chandy, K.. (2012). Equivalence of Branch Flow and Bus Injection Models. 2012 50th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing, Allerton 2012. 1893-1899. 10.1109/Allerton.2012.6483453.
- [32] Molzahn, Daniel & Dörfler, Florian & Sandberg, Henrik & Low, Steven & Chakrabarti, Sambuddha & Baldick, R. & Lavaei, Javad. (2017). A Survey of Distributed Optimization and Control Algorithms for Electric Power Systems. IEEE Transactions on Smart Grid. PP. 1-1. 10.1109/TSG.2017.2720471.
- [33] Ali, Abdelfatah & Raisz, David & Mahmoud, Karar. (2017). Optimal capacity of PV inverter considering reactive power capability and active power curtailment. 10.1109/MEP-CON.2017.8301368.
- [34] Hsiao, Ying-Tung & Chen, China-Hong. (2002). Maximum power tracking for photovoltaic power system. Conference Record - IAS Annual Meeting (IEEE Industry Applications Society). 2. 1035 - 1040 vol.2. 10.1109/IAS.2002.1042685.
- [35] Verzijlbergh, Remco & Vries, L.J. & Lukszo, Z.. (2014). Renewable Energy Sources and Responsive Demand. Do We Need Congestion Management in the Distribution Grid?. Power Systems, IEEE Transactions on. 29. 2119-2128. 10.1109/TPWRS.2014.2300941.
- [36] Verzijlbergh, R.A. & Lukszo, Z. & Ilic, Marija. (2012). Comparing different EV charging strategies in liberalized power systems. 1-8. 10.1109/EEM.2012.6254807.
- [37] Quadratic programming, Wikipedia - The Free Encyclopedia. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_programming, Access 29/08/2020
- [38] Pediaditis, Panagiotis & Ziras, Charalampos & Hu, Junjie & You, Shi & Hatziarziou, Nikos. (2020). Decentralized DLMPs with synergetic resource optimization and convergence acceleration. Electric Power Systems Research. 187. 106467. 10.1016/j.epsr.2020.106467.
- [39] Feed-in tariff I, Greece, Legal Sources On Renewable Energy. Available at: <http://www.res-legal.eu/search-by-country/greece/single/s/res-e/t/promotion/aid/feed-in-tariff-i/lastp/139/>, Access 29/08/2020
- [40] Marginal Average System Price per month for 2018 and 2019, Renewable Energy Sources Operator & Guarantees of Origin (DAPEEP SA). Available at: https://www.dapeep.gr/wp-content/uploads/RES_CHP/20200326_DELTIO_APE_JANUARY.pdf, Access 29/08/2020
- [41] Nguyen, Tung Lam & Tran-Quoc, T. & Caire, Raphael & Luu, Ngoc-An & Besanger, Yvon. (2019). Controller Hardware-in-the-loop Implementation for Agent-based Distributed Optimal Power Flow Using ADMM on Cyber-Physical Microgrids. 712-717. 10.1109/GTDA-sia.2019.8715852.
- [42] Baran, Mesut & Wu, Felix. (1989). Network Reconfiguration in Distribution Systems for Loss Reduction and Load Balancing. Power Engineering Review, IEEE. 9. 101-102. 10.1109/MPER.1989.4310642.
- [43] Python, Available at: <https://www.python.org/doc/essays/blurb/>, Access 29/08/2020
- [44] Hart, William & Laird, Carl & Watson, Jean-Paul & Woodruff, David & Hackebeil, Gabriel & Nicholson, Bethany & Sirola, John. (2017). Pyomo – Optimization Modeling in Python. 10.1007/978-3-319-58821-6.

- [45] Pyomo, Available at: <https://pyomo.readthedocs.io/en/stable/>, Access 29/08/2020
- [46] Gurobi, Available at: <https://www.gurobi.com/documentation/>, Access 29/08/2020
- [47] PYPOWER, Available at: <https://rwl.github.io/PYPOWER/>, Access 29/08/2020
- [48] Pandapower, Available at: <https://pandapower.readthedocs.io/en/v2.3.1/>, Access 29/08/2020
- [49] Pandas, Available at: <https://pandas.pydata.org>, Access 29/08/2020
- [50] Numpy, Available at: <https://numpy.org>, Access 29/08/2020
- [51] Matplotlib.pyplot, Available at: https://matplotlib.org/3.1.1/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.html, Access 29/08/2020

Appendix A

Network's data about loads and line series impedance

A.1 Data for conventional active and reactive loads

For the purposes of this diploma thesis, we consider a time period during the day in which for the conventional active and reactive loads installed to each bus of the system is equivalent to 20% of the nominal. Next, we present a tabular which includes the nominal load per node.

Bus k	P_k^c (MW)	Q_k^c (MVar)
0	0.000	0.000
1	0.100	0.060
2	0.090	0.040
3	0.120	0.080
4	0.060	0.030
5	0.060	0.020
6	0.200	0.100
7	0.200	0.100
8	0.060	0.020
9	0.060	0.020
10	0.045	0.030
11	0.060	0.035
12	0.060	0.035
13	0.120	0.080
14	0.060	0.010
15	0.060	0.020
16	0.060	0.020
17	0.090	0.040
18	0.090	0.040
19	0.090	0.040
20	0.090	0.040
21	0.090	0.040
22	0.090	0.050
23	0.420	0.200
24	0.420	0.200
25	0.060	0.025
26	0.060	0.025
27	0.060	0.020
28	0.120	0.070
29	0.200	0.600
30	0.150	0.070
31	0.210	0.100
32	0.060	0.040
Total	3.715	2.300

Table A.1: Data for conventional active and reactive loads

A.2 Data for distribution lines series impedance

Furthermore, we present data for the series impedance of each line. The values are given per unit and have been calculated for the whole length of each line. Last but not least, these values were calculated with respect to voltage base 12.66 kV and complex power base 10 MVA.

Vbase 12.66 kV		Sbase 10 MVA	
From Bus	To Bus	R(p.u.)	X(p.u.)
0	1	0.0057526	0.0029324
1	2	0.0307595	0.0156668
2	3	0.0228357	0.0116300
3	4	0.0237778	0.0121104
4	5	0.0510995	0.0441115
5	6	0.0116799	0.0386085
6	7	0.0443860	0.0146685
7	8	0.0642643	0.0461705
8	9	0.0651378	0.0461705
9	10	0.0122664	0.0040555
10	11	0.0233598	0.0077242
11	12	0.0915922	0.0720634
12	13	0.0337918	0.0444796
13	14	0.0368740	0.0328185
14	15	0.0465635	0.0340039
15	16	0.0804240	0.1073775
16	17	0.0456713	0.0358133
1	18	0.0102324	0.0097644
18	19	0.0938508	0.0845668
19	20	0.0255497	0.0298486
20	21	0.0442301	0.0584805
2	22	0.0281515	0.0192356
22	23	0.0560285	0.0442425
23	24	0.0559037	0.0437434
5	25	0.0126657	0.0064514
25	26	0.0177320	0.0090282
26	27	0.0660737	0.0582559
27	28	0.0501761	0.0437122
28	29	0.0316642	0.0161285
29	30	0.0607953	0.0600840
30	31	0.0193729	0.0225799
31	32	0.0212759	0.0330805

Table A.2: Data for distribution lines series impedance

It's of vital importance to mention that we change the series line impedance in such

way so the **R/X ratio equals 3 in each line** which is common in distribution grids. The reason behind that action is that we want to amplify the voltage deviations occurred on the network so we can present the effectiveness of the proposed in a better way.