



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών

Υπολογιστών

Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής και Συστημάτων

Πληροφορικής

Μη Γραμμικός Έλεγχος σε Μη Επανδρωμένα Τετρακόπτερα

Διπλωματική Εργασία

Δημήτρης Νικήτας

Επιβλέπων Καθηγητής

Πέτρος Π. Σωτηριάδης

Καθηγητής

Αθήνα, Ιανουάριος 2021



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών

Υπολογιστών

Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής και Συστημάτων

Πληροφορικής

Μη Γραμμικός Έλεγχος σε Μη Επανδρωμένα Τετρακόπτερα

Διπλωματική Εργασία

Δημήτρης Νικήτας

Επιβλέπων Καθηγητής

Πέτρος Π. Σωτηριάδης

Εγκρίθηκε από την εξεταστική τριμέλη επιτροπή στις 19 / 1 / 2021

.....
Πέτρος Π. Σωτηριάδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π

.....
Ευάγγελος Παπαδόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π



.....

Δημήτρης Γ. Νικήτας

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Δημήτρης Νικήτας, 2021

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Σε αυτή τη δουλειά, κατασκευάζεται το μη γραμμικό μαθηματικό μοντέλο για ένα τετρακόπτερο UAV μελετώντας την κινηματική, την δυναμική και ενσωματώνοντας στοιχεία αεροδυναμικής θεωρίας ελίκων. Στην αρχή, εξετάζονται γραμμικές τεχνικές ελέγχου, όπως τοποθέτηση πόλων και LQR για τη γραμμικοποιημένη δυναμική. Στη συνέχεια, σχεδιάζονται δύο κασκοδικής δομής μη γραμμικοί ελεγκτές που βασίζονται στην τεχνική Back-stepping. Συγκρίνεται η επίδοση γραμμικών και μη γραμμικών ελεγκτών. Έπειτα ορίζεται το πρόβλημα ελαχίστου χρόνου για τη μετάβαση Rest to Rest, χρησιμοποιώντας την αρχή ελαχίστου του Pontryagin. Κατόπιν, σχεδιάζεται σχεδόν βέλτιστος ελεγκτής ο οποίος λύνει το πρόβλημα είτε για την επίπεδη κίνηση, είτε για την κατακόρυφη, χωρίς υπολογιστική επιβάρυνση. Ο ελεγκτής είναι κλειστού βρόχου και προτείνεται η ιδέα του κασκοδικού Bang-Bang ελέγχου. Για την πραγματοποίηση των προσομοιώσεων κατασκευάστηκε προσομοιωτής και γραφικά σε περιβάλλον MATLAB. Ένας εκ των σκοπών της παρούσας εργασίας είναι να αποτελέσει σημείο αναφοράς για πιθανό διπλωματικό του εργαστηρίου που θα εκτελέσει το πειραματικό μέρος.

Λέξεις κλειδιά: Τετρακόπτερο, Drone (Δρόνος), Μοντελοποίηση, Γραμμικός έλεγχος, Μη γραμμικός έλεγχος, Βέλτιστος έλεγχος ελαχίστου χρόνου, Back-stepping, Bang-Bang.

Abstract

In this work, a non-linear mathematical model is derived through kinematic and dynamic analysis and elemental blade theory. Firstly, linear control strategies based on the linearized model, such as pole placement and LQR, are tested. Furthermore, two non-linear cascaded controllers are obtained through Back-stepping design. These nonlinear strategies' performance is compared to that of the linear ones. Then, the least problem for Rest to Rest transition is defined using Pontryagin's Maximum Principle for quadrotor dynamics. A novel near optimal controller is designed which solves the problem for either planar or altitude motion, requiring only a minimum of computational effort, in contrast with most time optimal controllers. The controller is closed loop and the idea of cascaded Bang-Bang control is proposed. A simulator and a graphic environment were developed in MATLAB for algorithm testing. An intent of this thesis is to provide a reference point for a new potential thesis in the lab related to the execution of the experimental part.

Keywords: Quadrotor, UAV, Drone, Modelling, Linear Control, Nonlinear control, Time optimal control, Bang-Bang, Back-stepping.

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άτομα τα οποία με βοήθησαν σε αυτό το μονοπάτι της ζωής μου. Αρχικά, θέλω να ευχαριστήσω τον καθηγητή Πέτρο Παύλο Σωτηριάδη ο οποίος ήταν υπεύθυνος για τη Διπλωματική Εργασία μου. Στα πρώτα στάδια έδειξε ενδιαφέρον μέχρι να βρεθεί το κατάλληλο θέμα που θα με παρακινούσε να δουλέψω σκληρά. Στη συνέχεια, μου έδειξε την εμπιστοσύνη του, όταν μου πρότεινε να δημοσιεύσουμε μαζί μέρος της έρευνας σε κάποιο περιοδικό του IEEE. Από το Εργαστήριο Ηλεκτρονικής θα ήθελα να ευχαριστήσω και τον Υποψήφιο Διδάκτορα Κωνσταντίνο Παπαφώτη για την πολύτιμη καθοδήγησή του.

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά τα φιλαράκια μου, παλιά και καινούργια, για τις ωραίες στιγμές που περάσαμε παρέα, τη συμπαράσταση και την υποστήριξη που μου έδειξαν. Τέλος, θέλω μέσα από την καρδιά μου να πω ένα ευχαριστώ στα πολύ κοντινά μου πρόσωπα που είναι πάντα εκεί για μένα.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή.....	12
1.1 Η εξέλιξη των Drones	13
1.2 Ο ρόλος του αυτομάτου ελέγχου	14
1.3 Οργάνωση της εργασίας	15
2 Μοντελοποίηση Drone	16
2.1 Περιγραφή λειτουργίας.....	16
2.2 Γωνίες Euler.....	20
2.3 Μηχανική ανάλυση.....	21
2.3.1 Κινηματική και δυναμική ανάλυση	21
2.3.2 Στοιχεία θεωρίας ελίκων	24
2.4 Μαθηματικό Μοντέλο	25
2.4.1 Μη γραμμικό μοντέλο.....	25
2.4.2 Μη γραμμικό μοντέλο με εικονική είσοδο	26
2.4.3 Γραμμικό μοντέλο.....	27
2.5 Αδυναμία μοντέλου	29
3 Έλεγχος συστήματος.....	30
3.1 Γραμμικές τεχνικές ελέγχου.....	30
3.1.1 Τοποθέτηση πόλων.....	30
3.1.2 Γραμμικός τετραγωνικός ρυθμιστής (LQR).....	32
3.1.3 Προσομοιώσεις	33
3.2 Μη γραμμικός έλεγχος.....	35
3.2.1 Κασκοδικός μη γραμμικός ελεγκτής	35
3.2.2 Μη γραμμικός Back-stepping ελεγκτής	42
3.2.3 Προσομοιώσεις.....	44
4 Βέλτιστος έλεγχος ελαχίστου χρόνου.....	49
4.1 Πρόβλημα ελαχίστου χρόνου και έλεγχος Bang-Bang.....	49
4.2 Η περίπτωση του διπλού ολοκληρωτή	52
4.3 Βέλτιστος έλεγχος ελαχίστου χρόνου για τετρακόπτερο UAV	55
4.3.1 Διατύπωση του προβλήματος	55
4.3.2 Ρυθμιστής υψομέτρου	56
4.3.3 Ρυθμιστής διαμήκους κίνησης	58
4.3.4 Ρυθμιστής πλευρικής κίνησης	61
4.4 Βελτίωση στρατηγικής ελέγχου	63
4.4.1 Σημειώσεις εφαρμογής	63

4.4.2 Βελτιστοποίηση απόφασης αλλαγής (STO).....	63
4.5 Αξιολόγηση της στρατηγικής ελέγχου	64
4.5.1 Ασυμπτωτική Βελτιστότητα.....	64
4.5.2 Προσομοιώσεις	66
5 Επίλογος	72
Παράρτημα Α.....	73
Παράρτημα Β.....	76
Βιβλιογραφία	78

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Τα Drones είναι μικρής κλίμακας μη επανδρωμένα αεροσκάφη (Unmanned Aerial Vehicle – UAV) στην ευρύτερη κατηγορία των τετρακοπτέρων (Quadcopters or Quadrotors) τα οποία που μπορούν εκτελέσουν κινήσεις τύπου VTOL (Vertical Take-off and Landing). Δηλαδή, μπορούν να απογειωθούν και να προσγειωθούν με κάθετη κίνηση προς τα πάνω σε αντιδιαστολή με την κίνηση των κλασικών αεροσκαφών. Σε κατηγορία VTOL ανήκουν και τα ελικόπτερα. Επίσης, μπορούν να αιωρούνται και να εκτελούν ποικιλία κινήσεων μεταφορικών και περιστροφικών.



Εικόνα 1.1: Εμπορικό τετρακόπτερο Zero-X Plus Drone

Η πτήση μπορεί να πραγματοποιείται μέσω τηλεκατεύθυνσης με τη βοήθεια κάποιου χειριστήριου, αλλά μπορεί να είναι και αυτόνομη ή μερικώς αυτόνομη. Για να γίνει αυτό απαιτείται η ανάπτυξη λογισμικού το οποίο θα μπορεί να καθοδηγεί το Drone ώστε να πραγματοποιήσει μία επιθυμητή πορεία η οποία μπορεί να σχεδιάστηκε από το ίδιο ή από άνθρωπο, αλλά χωρίς περαιτέρω επέμβαση του ανθρώπου για χειρισμό.

Πρόκειται για μία ελαφριά και μικρού μεγέθους κατασκευή η οποία αποτελείται από ένα μηχανικό σώμα και συνήθως τέσσερις προπέλες σε διάταξη σταυρού. Ανάλογα το σκοπό χρήσης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και περισσότερες προπέλες και το σχήμα ποικίλει. Στο κεντρικό κομμάτι της κατασκευής και στο εσωτερικό του σώματος υπάρχει μια πληθώρα από ηλεκτρονικά συστήματα χάρη στα οποία επιτυγχάνεται ο συντονισμός και ο έλεγχος του αεροσκάφους κατά την πτήση.



Εικόνα 1.2: Χειροκίνητη πλοήγηση τετρακοπτέρου με τη βοήθεια ενσωματωμένης κάμερας

Είναι πλέον νόρμα τα Drone να διαθέτουν ένα μικροεπεξεργαστή και τους απαραίτητους αισθητήρες ώστε να λαμβάνουν πληροφορία από το περιβάλλον και να προσαρμόζουν αναλόγως την πορεία τους. Για παράδειγμα, μέσω οπτικής πληροφορίας ένα σκάφος μπορεί να αλλάξει την πορεία του για να αποφύγει την πρόσκρουση σε κάποιο εμπόδιο.

1.1 Η εξέλιξη των Drones

Τα τετρακόπτερα χαρακτηρίζονται από την οικονομική και σχετικά εύκολη κατασκευής τους, καθώς και της δυνατότητας εναέριας πτήσης χωρίς ανάγκη για ανθρώπινο δυναμικό σε αντίθεση με τα ελικόπτερα. Αυτοί οι λόγοι τα καθιστούν ιδιαίτερα περιζήτητα για στρατιωτικούς σκοπούς όπως κατασκοπευτικούς και αναγνωριστικούς αλλά και στη γραμμή παραγωγής για μεταφορά πόρων και την εύκολη επίβλεψη εκτάσεων και μηχανημάτων. Τα τελευταία χρόνια έχουν κερδίσει το ενδιαφέρον τόσο των ερευνητών που ασχολούνται με τη βελτιστοποίηση της κίνησής τους και την ανάπτυξη νέων προϊόντων όσο και των ιδιωτών σε επίπεδο χόμπυ και ψυχαγωγίας. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας της εξέλιξης και των καινοτομιών στους τομείς των μικροϋπολογιστών και των αισθητήρων (Τεχνολογία MEMS) που έδωσαν τη δυνατότητα για καλύτερο έλεγχο της πτήσης.

Παραδείγματα εφαρμογών της χρήσης Drone με χειριστήριο είναι η λήψη φωτογραφιών σε σημεία που δεν είναι δυνατή η πρόσβαση όπως θάλασσα ή κοντά σε ηφαίστειο, η επίβλεψη μεγάλης έκτασης καλλιερχειών καθώς και ο έλεγχος επικίνδυνων σημείων όπως κατεδαφισμένων κτιρίων μετά από σεισμό που δε προτείνεται η συνεχής ανθρώπινη παρουσία.

Βέβαια, όλα αυτά απαιτούν ανθρώπινη παρέμβαση για τον έλεγχο του τετρακοπτέρου. Η αυτόνομη λειτουργία έρχεται για να απαλλάξει τον άνθρωπο από αυτή τη δουλειά ώστε να μπορεί ασχοληθεί ταυτόχρονα και με άλλες εργασίες. Έστω πως υπάρχει η ανάγκη για προμήθεια συγκεκριμένων φαρμάκων και πόρων σε ένα πλοίο στη θάλασσα. Ο προγραμματιστής μπορεί να

τοποθετήσει τις συντεταγμένες του πλοίου στο Drone και αυτό με τη σειρά του να πραγματοποιήσει τη μεταφορά χωρίς να χρειάζεται να ασχοληθεί κάποιος με τη πλοήγηση του. Ταυτόχρονα το τετρακόπτερο μπορεί να τρέχει αλγορίθμους απόρριψης διαταραχών από τον αέρα και τη βροχή ώστε να μη χαλάει η πορεία του. Αυτό θα ήταν αρκετά δύσκολο για να επιτευχθεί μέσω απομακρυσμένης πλοήγησης. Μία άλλη εφαρμογή είναι η χρήση Drone για προγραμματισμένη πτήση πάνω από δάση με υψηλό κίνδυνο για πυρκαγιά και μέσω κάμερας να εστιάζει στις πιο πιθανές εστίες με βάση την οπτική πληροφορία που παίρνει και εφόσον χρειαστεί ειδοποιεί εγκαίρως την πυροσβεστική. Αυτό είναι μια επίπονη εργασία μιας και ένας δασοφύλακας θα χρειαζόταν πολλή ώρα για να καλύψει μικρές εκτάσεις και η χρήση ελικοπτέρου είναι οικονομικά ανέφικτη.



Εικόνα 1.3: Αυτόνομο Drone που μεταφέρει φάρμακα

Είναι σαφές πως τα Drones έχουν και περιορισμούς με κυριότερους το μικρό χρόνο πτήσης και την αδυναμία αυτοπροσδιορισμού της θέσης τους κάθε στιγμή με ακρίβεια. Συνεπώς, δεν μπορούν να αντιμετωπίσουν τα πάντα αλλά μπορούν να σχεδιαστούν για εργασίες ειδικού σκοπού. Πάντοτε, θα υπάρχει η ανάγκη για χρήση τους συνεργατικά με το ανθρώπινο δυναμικό για γρηγορότερα, ασφαλέστερα και οικονομικότερα αποτελέσματα.

1.2 Ο ρόλος του αυτομάτου ελέγχου

Όπως αναφέρθηκε τα Drones αποτελούν πόλο ενδιαφέροντος για τους ερευνητές και συγκεκριμένα για τους Ηλεκτρολόγους Μηχανικούς, τους Μηχανολόγους Μηχανικούς και τους Αεροναυπηγούς. Εν συνεπεία, πλήθος αλγορίθμων ελέγχου της κίνησης ενός τετρακοπτέρου και παρακολούθησης τροχίας έχουν προταθεί. Το πρόβλημα ελέγχου ορίζεται ως εξής. Είναι επιθυμητή η μετάβαση από ένα σημείο σε ένα άλλο ακολουθώντας κάποια ορισμένη τροχιά

η οποία παράγεται από το ενσωματωμένο λογισμικό που διαθέτει ή δίνεται εξωτερικά. Μέσω του επεξεργαστή δίνονται εντολές στις προπέλες για την ταχύτητα που πρέπει να κινούνται ώστε να ακολουθείται η επιθυμητή τροχιά. Η εντολές που αποστέλλει ο επεξεργαστής καθορίζονται από την στρατηγική ελέγχου (Control Strategy) που έχουμε ορίσει και τα δεδομένα που λαμβάνει κάθε στιγμή από τους αισθητήρες. Δηλαδή μέσω του Control Theory μελετάμε τον τρόπο που επιβαλλόμαστε στο μηχανικό σύστημα μέσω των εισόδων του (προπέλες) ώστε να κάνει αυτό που είναι ζητούμενο.

Το μοντέλο κίνησης ενός τετρακοπτέρου όπως θα δειχθεί είναι περίπλοκο και μη γραμμικό και η εύρεση κατάλληλης στρατηγικής ελέγχου αποτελεί πρόκληση ακόμα και σήμερα.

1.3 Οργάνωση της εργασίας

Η εργασία οργανώνεται ως εξής:

Κεφάλαιο 2: Εισαγωγή στον τρόπο λειτουργίας του τετρακοπτέρου. Κινηματική και δυναμική μελέτη του φυσικού συστήματος με σκοπό την εξαγωγή μαθηματικού μοντέλου. Αναφέρεται τόσο η γραμμική όσο και η μη γραμμική μοντελοποίηση.

Κεφάλαιο 3: Εφαρμογή τεχνικών ελέγχου για γραμμικά συστήματα όπως τοποθέτηση πόλων και LQR. Χρήση μη γραμμικών μεθόδων ελέγχου όπως Backstepping, Input to State Stability, Modular Design και κασκοδικών βρόχων τοποθέτησης πόλων. Οι εφαρμογές των τεχνικών ελέγχου συνοδεύονται από προσομοιώσεις για τα προβλήματα reference και trajectory following. Σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Κεφάλαιο 4: Εισαγωγικά στοιχεία για το πρόβλημα ελαχίστου χρόνου στα 2^{ns} τάξης γραμμικά συστήματα. Υλοποίηση καινοτόμου αλγορίθμου που επιλύει το πρόβλημα ελαχίστου χρόνου για το σύστημα του τετρακοπτέρου με ανάλυση και προσομοιώσεις που επαληθεύουν τη βελτιστότητα.

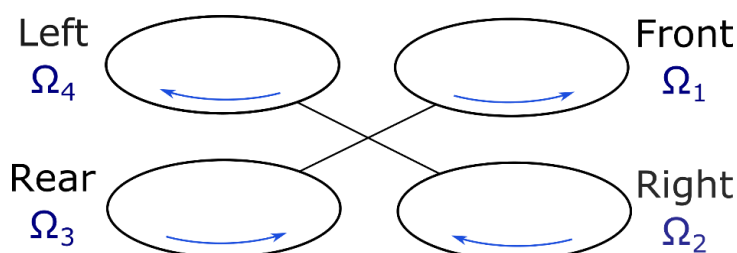
Κεφάλαιο 5: Σύνοψη, ανασκόπηση των τεχνικών ελέγχου που χρησιμοποιήθηκαν και ιδέες για μελλοντικές επεκτάσεις.

Κεφάλαιο 2

Μοντελοποίηση Drone

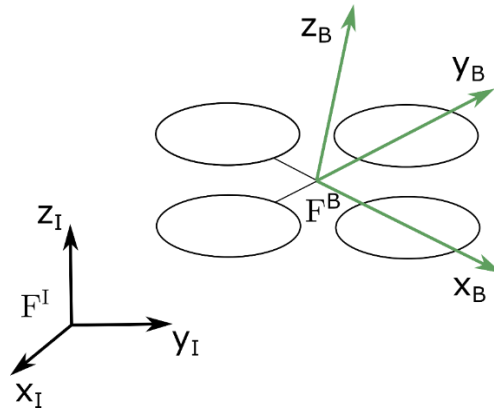
2.1 Περιγραφή λειτουργίας

Τα τετρακόπτερα είναι ικανά για τρισδιάστατη μεταφορική κίνηση, δηλαδή κίνηση στο χώρο και τρισδιάστατη περιστροφική κίνηση, δηλαδή περιστροφή στο χώρο. Επομένως, διαθέτουν έξι βαθμούς ελευθερίας, τρεις για τη μεταφορική και τρεις για την περιστροφική αντίστοιχα. Από την άλλη πλευρά, διαθέτουν μόνο τέσσερις προπέλες και συνεπώς τέσσερις εισόδους. Τα τετρακόπτερα είναι υποβοηθούμενα (under-actuated) καθώς οι βαθμοί ελευθερίας είναι λιγότεροι από τις εισόδους και εν συνεχεία είναι εφικτός ο έλεγχος μόνο των τεσσάρων βαθμών ελευθερίας από τους έξι. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί μερικώς με χρήση περισσότερων προπελών. Οι δύο προπέλες πρέπει να κινούνται δεξιόστροφα και οι άλλες δύο αριστερόστροφα έτσι ώστε να μην περιστρέφεται συνέχεια το Drone με βάση της αρχή διατήρησης της στροφορμής. Για βέλτιστη λειτουργία προτείνεται οι απέναντι προπέλες να έχουν ίδια φορά περιστροφής.



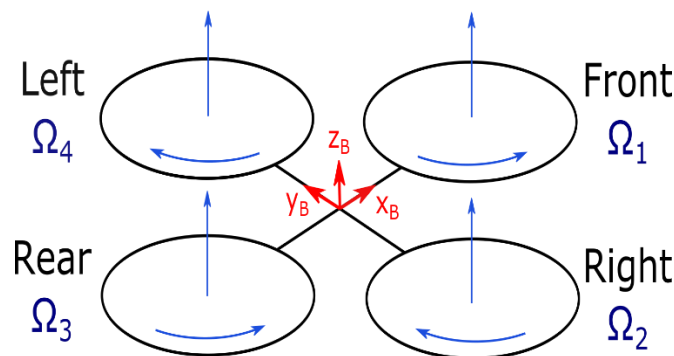
Εικόνα 2.1: Απλοποιημένο σχηματικό ενός τετρακοπτερου.

Όπως αναφέρθηκε τα Drone πραγματοποιούν τρισδιάστατη μεταφορική κίνηση. Αυτή η κίνηση γίνεται ως προς κάποιο σταθερό σύστημα αναφοράς \mathcal{F}^I - Inertia Frame με στοιχεία $[x_I, y_I, z_I]$ που ορίζεται από το έδαφος με το z_I να είναι αντίθετης κατεύθυνσης από αυτή της βαρύτητας. Ακόμα ορίζεται το κινούμενο σύστημα αναφοράς \mathcal{F}^B - Body Frame με στοιχεία $[x_B, y_B, z_B]$ με βάση τον προσανατολισμό του Drone, έτσι ώστε το επίπεδο που ορίζουν οι άξονες x_B, y_B να συμπίπτει με το επίπεδο που ορίζει το σώμα της κατασκευής όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 2.2: Inertia and body frame systems.

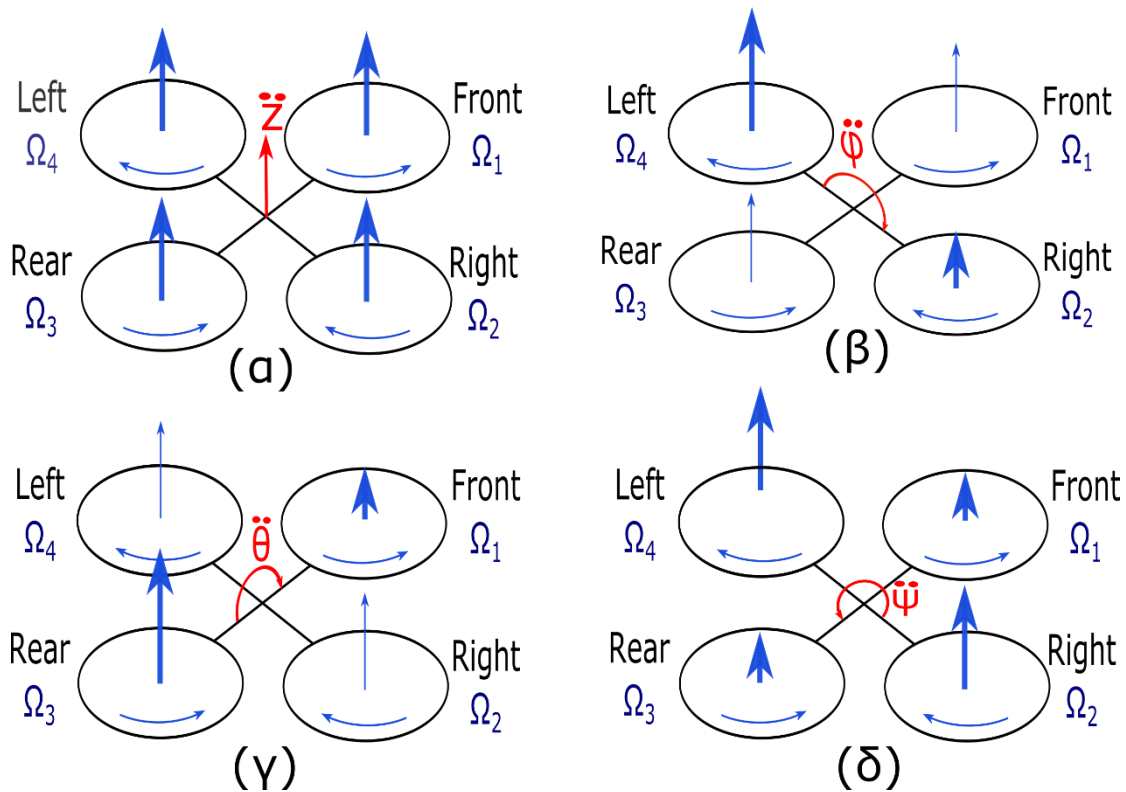
Καθώς οι προπέλες περιστρέφονται αναγκάζουν το σώμα αέρα που βρίσκεται από πάνω τους να κινηθεί προς τα κάτω παράγοντας έτσι ώση (thrust) προς τα πάνω. Όσο πιο γρήγορα κινούνται, τόσο μεγαλύτερες ποσότητες αέρα κινούνται και τόσο μεγαλύτερη ώση παράγεται. Οι κινήσεις που μπορεί να πραγματοποιήσει ένα τετρακόπτερο μεταβάλλοντας τις ταχύτητες των προπελών είναι τέσσερις και συγκεκριμένα μία μεταφορική ως προς τον άξονα z_B και τρεις περιστροφικές ως προς τους άξονες x_B, y_B, z_B .



Εικόνα 2.3: Σχηματικό λειτουργίας Drone σε αιώρηση.

Για να αιωρείται ένα τετρακόπτερο χρειάζεται οι προπέλες να παράγουν αρκετή ώση ώστε να αντισταθμίζεται η βαρύτητα. Αυξάνοντας, την ταχύτητά τους ομοιόμορφα (ίση αύξηση ταχύτητας για κάθε προπέλα) από αυτό το σημείο, η ώση αυξάνεται και το τετρακόπτερο κινείται κάθετα σε σχέση με τον προσανατολισμό του προς τα πάνω. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται η απογείωση και αντιστοίχως μειώνοντας την ταχύτητα των προπελών το Drone χάνει ύψος και μπορεί να επιτευχθεί η προσγείωση. Βάση αυτής της λειτουργίας το τετρακόπτερο ανήκει στην κατηγορία VTOL (Vertical Take-off and Landing).

Η επίτευξη των περιστροφικών κινήσεων γύρω από τους άξονες x_B, y_B λειτουργεί ως εξής. Η αλλαγή της ταχύτητας μεμονωμένης προπέλας μη μεταβάλλοντας τις άλλες δημιουργεί διαφορά ώσης μεταξύ της προπέλας αυτής και της απέναντί της. Αυτή η διαφορά ώσης πιέζει τον άξονα που είναι αυτή η προπέλα να ανέβει πιο ψηλά.



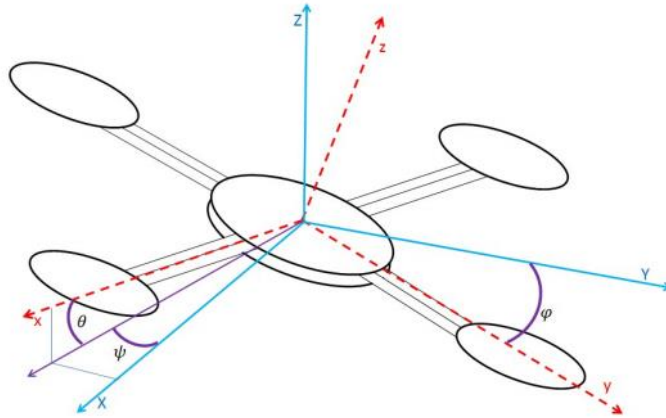
Εικόνα 2.4: (α) Thrust movement, (β) Roll rotation, (γ) Pitch rotation, (δ) Yaw rotation. Με έντονο χρώμα συμβολίζονται οι προπέλες που συμμετέχουν στην κάθε κίνηση.

Καθώς το σημείο αυτό ανυψώνεται το απέναντι σημείο χαμηλώνει δημιουργώντας έτσι στροφική κίνηση. Για παράδειγμα, η αύξηση της ταχύτητας Ω_4 διατηρώντας την ταχύτητα Ω_2 δημιουργεί ροπή ως προς τον άξονα x_B η οποία μεταφράζεται σε στροφική κίνηση κατά γωνία γύρω από τον άξονα αυτό. Αντιστοίχως, η στροφική κίνηση γύρω από τον άξονα y_B γίνεται με αύξηση της ταχύτητας Ω_3 . Συνηθίζεται, για καλύτερη επίδοση όταν αυξάνεται η ταχύτητα μίας προπέλας η συμπληρωματική της να χαμηλώνει ταχύτητα ώστε η ροπή να είναι μεγαλύτερη και η γωνιακή κίνηση πιο γρήγορη.

Από την άλλη, η περιστροφή ως προς τον άξονα z_B βασίζεται στην ανομοιογένεια των γωνιακών ταχυτήτων των προπελών με τρόπο τέτοιο ώστε το τετρακόπτερο να αναγκάζεται να περιστραφεί λόγω της αρχής διατήρησης της στροφορμής.

Οι γωνίες γύρω από τους άξονες x_B, y_B, z_B στη βιβλιογραφία ονομάζονται Roll, Pitch, Yaw αντιστοίχως και τις συμβολίζουμε ως φ, θ, ψ . Με ρύθμιση των προπελών μπορούμε να έχουμε ταυτόχρονη ώση προς τα πάνω και στροφική κίνηση προς όλους τους άξονες.

Η μεταφορική κίνηση του Drone πέρα της υψομετρικής αλλαγής που εξηγήθηκε προηγουμένως είναι αποτέλεσμα των παραγόμενων γωνιών φ, θ . Οφείλεται στο γεγονός πως η ώση που είναι κάθετη στο Drone όταν βρίσκεται υπό γωνία διαθέτει συνιστώσες σε όλους τους άξονες του σταθερού συστήματος αναφοράς.

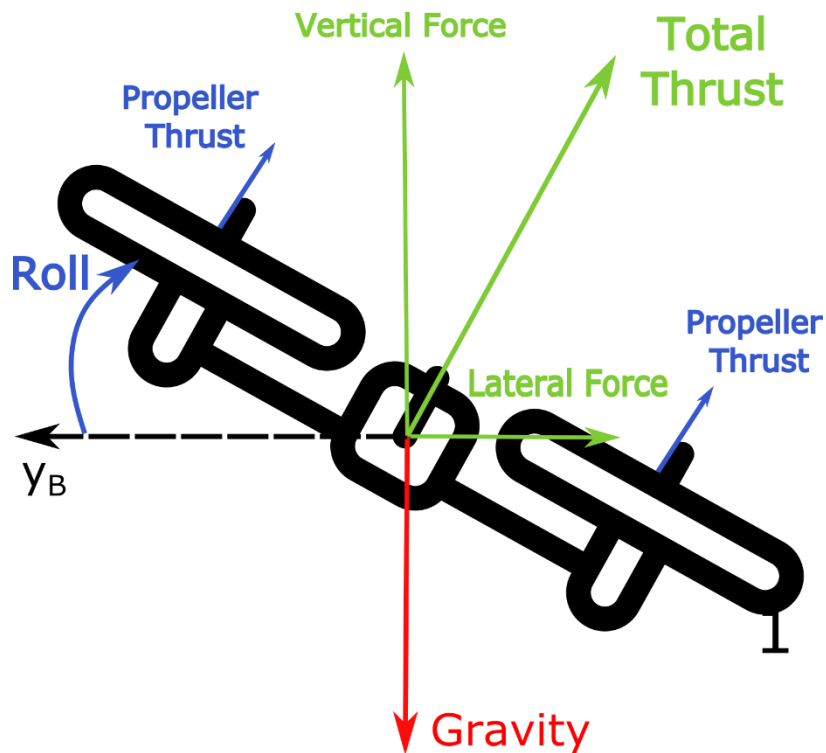


Εικόνα 2.5: Οι γωνίες Roll, Pitch, Yaw

Οπότε αφού υπάρχει δύναμη σε αυτές τις συνιστώσες, υπάρχει επιτάχυνση που συνεπάγεται μεταφορική κίνηση. Αυτό φαίνεται οπτικά στο παρακάτω σχηματικό.

Κατανοώντας πως η μεταφορική κίνηση είναι απόρροια της περιστροφικής προϋδεαζόμαστε για την περίπλοκη δυναμική που χαρακτηρίζει το φυσικό σύστημα. Η γωνία ψ έχει να κάνει με τον προσανατολισμό του τετρακοπτέρου και όχι με την επίτευξη της μεταφορικής κίνησης, για αυτό και παραλείπεται πολλές φορές στην ανάλυση.

Μέχρι στιγμής έχει διαμορφωθεί μια διαίσθηση για τον τρόπο λειτουργίας του τετρακοπτέρου. Στη συνέχεια, το φυσικό σύστημα αντιμετωπίζεται πιο μαθηματικά και ποσοτικά.



Εικόνα 2.6: Η γωνία Roll δημιουργεί συνιστώσες στον άξονα $-y$ με συνέπεια τη επίτευξη μεταφορικής κίνησης στον άξονα αυτό.

2.2 Γωνίες Euler

Οι γωνίες Roll, Pitch, Yaw ονομάζονται και γωνίες Euler. Οι γωνίες Euler περιγράφουν τον προσανατολισμό ενός αντικειμένου στον τρισδιάστατο χώρο. Οι γωνίες Euler διαθέτουν συγκεκριμένη διάταξη συμμετοχής. Δηλαδή, για ένα ενδεικτικό σετ γωνιών Euler θεωρούμε πρώτα κίνηση κατά γωνία ως προς x , μετά γωνία ως προς y και τέλος κατά γωνία στο z , αλλά σε ένα άλλο σετ γωνιών Euler μπορεί να θεωρείται διαφορετική σειρά.

Μείζον μειονέκτημα τους είναι πως δύναται να χάσουν ένα βαθμό ελευθερίας στον τρισδιάστατο χώρο, το οποίο συμβαίνει όταν κατά τις περιστροφές δύο άξονες του Body Frame ευθυγραμμίζονται με τους σταθερούς άξονες του Inertia Frame, καθιστώντας την κίνηση στο δισδιάστατο χώρο. Οι εκφάνσεις αυτές ονομάζονται Euler angles singularities και στη βιβλιογραφία το πρόβλημα αναφέρεται ως "Gimbal Lock". Ανάλογα το σετ γωνιών που χρησιμοποιούμε τα singularities εμφανίζονται σε συγκεκριμένες τιμές των γωνιών.

Προς αποφυγή αυτής της παθογένειας των γωνιών Euler χρησιμοποιούνται αλγεβρικές δομές όπως τα Quaternion με αντίτιμο τη διαισθητική επάρκεια που προσφέρουν οι γωνίες. Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιηθούν οι γωνίες Euler με την εφαρμογή πινάκων περιστροφής διότι προσφέρουν καλύτερη κατανόηση του προσανατολισμού και θα εξηγηθεί αυτή η επιλογή έναντι των Quaternion. Εμείς θεωρούμε το σετ γωνιών Euler XYZ με αντίστοιχες γωνίες ϕ, θ, ψ και πίνακες περιστροφής $R_x(\phi), R_y(\theta), R_z(\psi)$.

Παρακάτω ορίζονται οι πίνακες περιστροφής ως προς τους αντίστοιχους άξονες.

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

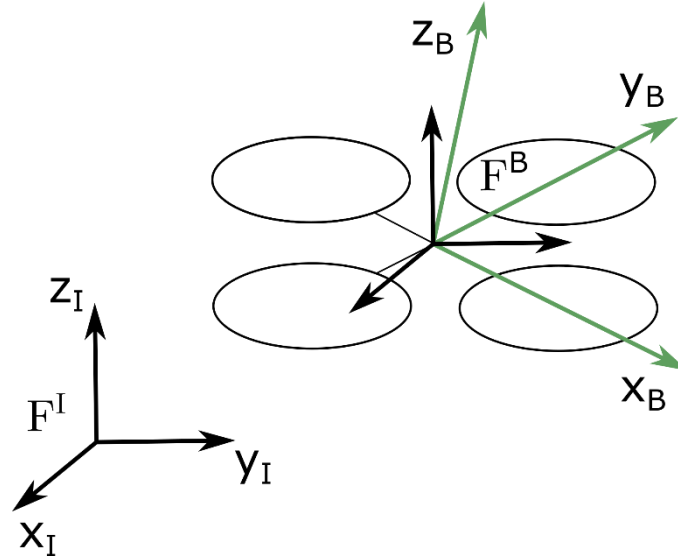
$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Όπου $c_\phi = \cos(\phi), s_\phi = \sin(\phi), c_\theta = \cos(\theta), s_\theta = \sin(\theta), c_\psi = \cos(\psi), s_\psi = \sin(\psi)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω με σειρά $\phi \rightarrow \theta \rightarrow \psi$ (σετ XYZ) προκύπτει ο συνολικός πίνακας περιστροφής R .

$$R = R_{XYZ}(\phi, \theta, \psi) = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi) \quad (2.4)$$

$$R = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Ο πίνακας R περιγράφει την περιστροφή από το Body Frame στο Inertia Frame.



Εικόνα 2.7: Σχετική θέση μεταξύ των δύο συστημάτων συντεταγμένων

2.3 Μηχανική ανάλυση

2.3.1 Κινηματική και δυναμική ανάλυση

Για τη μοντελοποίηση θα χρειαστεί να τεθούν κάποιες δικαιολογημένες υποθέσεις που θα απλοποιήσουν τη διαδικασία. Συγκεκριμένα, θεωρούμε πως το τετρακόπτερο είναι συμμετρικό και rigid body. Συνεπώς, μπορούν να εφαρμοστεί η κινηματική ανάλυση για 3D Rigid Body Dynamics. Θεωρούμαι τις καταστάσεις $[x \ y \ z]^T$ ως προς το σταθερό σύστημα I που περιγράφουν τη μεταφορική θέση του τετρακοπτέρου, τις καταστάσεις $[\phi \ \theta \ \psi]^T$ που περιγράφουν την περιστροφική θέση ως προς το σταθερό σύστημα I . Συνεχίζοντας, θεωρούμε τις καταστάσεις $\mathbf{v}_B = [u \ v \ w]^T \in \mathbb{R}^3$ και $\boldsymbol{\omega}_B = [p \ q \ r]^T \in \mathbb{R}^3$ που περιγράφουν την γραμμική και τη γωνιακή ταχύτητα αντιστοίχως, ως προς το μεταβλητό σύστημα αναφοράς B . Χρησιμοποιώντας τον πίνακα περιστροφής R έχουμε:

$$\mathbf{v} = R \mathbf{v}_B \quad (2.6)$$

Όπου $\mathbf{v} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T \in \mathbb{R}^3$ η ταχύτητα του τετρακοπτέρου εκφρασμένη στο σύστημα I . Για τις γωνιακές ταχύτητες ισχύει:

$$\boldsymbol{\omega}_B = J \boldsymbol{\omega} \quad (2.7)$$

Όπου $\boldsymbol{\omega} = [\phi \ \dot{\theta} \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ η γωνιακή ταχύτητα στο σύστημα I . Ο όρος J συμβολίζει την ιακωβιανή που αντιστοιχεί στον πίνακα περιστροφής από το σταθερό πλαίσιο I στο μεταβλητό πλαίσιο B ο οποίος είναι ο $R^{-1} = R^T = R_x(-\phi)R_y(-\theta)R_z(-\psi)$ και δίνεται από την παρακάτω σχέση.

$$J = [\hat{x}_I \quad R_x(-\phi) \hat{y}_I \quad R_x(-\phi)R_y(-\theta) \hat{z}_I] \quad (2.8)$$

με $\hat{x}_I = [1 \ 0 \ 0]^T$ $\hat{y}_I = [0 \ 1 \ 0]^T$ $\hat{z}_I = [0 \ 0 \ 1]^T$ τα μοναδιαία διανύσματα του πλαισίου I . Οπότε συνολικά, αντιστρέφοντας και θέτοντας $T = J^{-1}$ προκύπτει:

$$\boldsymbol{\omega} = T \boldsymbol{\omega}_B \quad (2.9)$$

με

$$T = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & s_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & \frac{s_\phi}{c_\theta} & \frac{c_\phi}{c_\theta} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

όπου $t_\theta = \tan(\theta)$. Με αυτόν τον τρόπο εκφράζουμε τη γραμμική και γωνιακή ταχύτητα στο πλαίσιο I μέσω της γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας στο πλαίσιο B . Συνοψίζοντας.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= R \mathbf{v}_B \\ \boldsymbol{\omega} &= T \boldsymbol{\omega}_B \end{aligned} \quad (2.11)$$

Παρατηρώντας τον πίνακα T μπορούμε να δούμε ότι εμφανίζει singularity για $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Αυτό είναι το πρόβλημα Gimbal Lock. Για να αντιμετωπιστεί υπάρχουν δύο τακτικές. Η πρώτη είναι η εναλλαγή σε άλλο σετ γωνιών Euler όταν πλησιάσει κοντά στην ιδιάζουσα τιμή, και συγκεκριμένα σε τέτοιο σετ που να μην εμφανίζει στην ίδια τιμή singularity. Αυτή η λύση είναι επίπονη υπολογιστικά και υστερεί της χρήσης Quaternion. Η δεύτερη πρόταση είναι ο περιορισμός την γωνίας μακριά από το singularity αυτό (π.χ. $|\theta| \leq \pi/4$). Αυτή η πρακτική είναι πολύ γόνιμη και ρεαλιστική στην περίπτωση που ο σκοπός του τετρακόπτερου δεν είναι να κάνει maneuvering, δηλαδή να αναποδογυρίζει συχνά. Στις περισσότερες εφαρμογές αυτό δεν είναι ζητούμενο και τέτοιου είδους περιορισμοί αρκούν για ομαλή κίνηση.

Αφού έχουν οριστεί καλώς οι σχετικές κινήσεις ο 2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα εφαρμόζεται για το τετρακόπτερο ως εξής.

$$\mathbf{F}^{(I)} = m \dot{\mathbf{v}} \quad (2.12)$$

όπου m η μάζα του τετρακόπτερου, $\mathbf{F}^{(I)}$ η δύναμη που ασκείται στο Drone εκφρασμένη στο πλαίσιο I και $\dot{\mathbf{v}} = [\ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z}]^T$ η επιτάχυνση του τετρακόπτερου εκφρασμένη στο πλαίσιο I . Στη συνέχεια της ανάλυσης οι άνω δείκτες υποδηλώνουν σε πιο πλαίσιο είναι εκφρασμένο το μέγεθος. Η δύναμη υπολογίζεται ως εξής.

$$\mathbf{F}^{(I)} = -mg\mathbf{e}_z + R_B^I f_t^{(B)} \quad (2.13)$$

Όπου $\mathbf{e}_z = [0 \ 0 \ 1]^T$, $f_t^{(B)} = f_t$ η δύναμη που ασκείται κάθετα στον προσανατολισμό του Drone λόγω της ώσης των προπελών και $R_B^I = R$ ο πίνακας που μετασχηματίζει την ώση από το πλαίσιο B στο πλαίσιο I . Με βάση τις εξισώσεις (2.12)-(2.13) εξάγεται η ακόλουθη σχέση.

$$\dot{\mathbf{v}} = -g\mathbf{e}_z + R \frac{f_t}{m} \quad (2.14)$$

Η εξίσωση του Euler δίνει τις ροπές που ασκούνται στο τετρακόπτερο:

$$\mathbb{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times (\mathbb{I}\boldsymbol{\omega}_B) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.15)$$

Όπου $\boldsymbol{\tau} = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T$ η συνολική ροπή που ασκείται στο σώμα και \mathbb{I} ο τανυστής αδρανείας. Θεωρούμε συμμετρική διάταξη ως προς και τους 3 άξονες.

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Λύνοντας ως προς τη χρονική παράγωγο προκύπτει

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_B = \mathbb{I}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega}_B \times (\mathbb{I}\boldsymbol{\omega}_B)) \quad (2.17)$$

Παραγωγίζοντας της (2.11) παίρνουμε την ακόλουθη σχέση.

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{T} \boldsymbol{\omega}_B + T \dot{\boldsymbol{\omega}}_B \quad (2.18)$$

Με την υπόθεση μικρών γωνιών $\varphi, \theta \cong 0$ προκύπτει $T \cong \mathcal{J}_{3 \times 3}$ όπου $\mathcal{J}_{3 \times 3}$ μοναδιαίος πίνακας και κατ' επέκταση $\boldsymbol{\omega}_B \cong \boldsymbol{\omega}$. Έχει δειχθεί με προσομοιώσεις πως η προσέγγιση αυτή δίνει σχεδόν ίδια αποτελέσματα με τη μη θεώρηση μικρών γωνιών. Συγκεκριμένα, η χρήση μη γραμμικού πίνακα T παρατηρήθηκε πως έδινε μικρότερο σφάλμα ελέγχου της τάξης του 1% που είναι αμελητέο σε σχέση με το θόρυβο που υπεισέρχεται από τις μετρήσεις. Βασισμένοι σε αυτό από τη (2.17) εξάγουμε την παρακάτω σχέση.

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbb{I}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbb{I}\boldsymbol{\omega})) \quad (2.19)$$

Το μοντέλο του μηχανικού συστήματος ενός τετρακοπτερού δίνεται από τις

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} &= -g\mathbf{e}_z + R m^{-1}f_t \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbb{I}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbb{I}\boldsymbol{\omega}))\end{aligned}\quad (2.20)$$

Όπου τα στοιχεία $[\mathbf{v} \ \dot{\mathbf{v}} \ \boldsymbol{\omega} \ \dot{\boldsymbol{\omega}}]^T$ αποτελούν τις μεταβλητές κατάστασης (states) και τα στοιχεία $[f_t \ \boldsymbol{\tau}]^T$ τις εισόδους (inputs).

2.3.2 Στοιχεία θεωρίας ελίκων

Σε αυτήν την υποενότητα ο σκοπός είναι διασαφήνιση της σχέσης μεταξύ της ταχύτητας των προπελών και των εισόδων του μηχανικού συστήματος με απώτερο σκοπό τον έλεγχο του. Ορίζουμε το διάνυσμα γωνιακών ταχυτήτων για τις προπέλες $\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3 \ \Omega_4]^T$ των οποίων η διάταξη και η φορά φαίνεται στην Εικόνα 2.3. Πριν δοθούν οι μαθηματικές εκφράσεις υπενθυμίζεται από την υπο ενότητα «Τρόπος λειτουργίας» πως η ροπή τ_ϕ γύρω από τον άξονα x εξαρτάται από τις γωνιακές ταχύτητες των προπελών Ω_2, Ω_4 , η ροπή τ_θ γύρω από τον άξονα y εξαρτάται από τις γωνιακές ταχύτητες των προπελών Ω_1, Ω_3 , ενώ η ώση και η ροπή τ_ψ από το σύνολο των ταχυτήτων.

Οι παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις δίνονται από την Αεροδυναμική Θεωρία Ελίκων (Blade Theory) κατά την οποία θεωρείται πως η ώση που παράγει η κάθε προπέλα είναι ανάλογη του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητά της, $f_i \sim \Omega_i^2$. Συνολικά προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} f_t \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -bl & 0 & bl \\ -bl & 0 & bl & 0 \\ -d & d & -d & d \end{bmatrix}}_E \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix}\quad (2.21)$$

όπου b είναι η σταθερά thrust factor, d η σταθερά drag factor και l η απόσταση μεταξύ του κέντρου του τετρακοπτερού και του κέντρου της προπέλας και E ο πίνακας αντιστοίχισης. Οι σταθερές αυτές είτε δίνονται από τον κατασκευαστή είτε υπολογίζονται προσεγγιστικά με μεθόδους System Identification για το μηχανισμό της προπέλας. Επειδή θεωρήθηκε συμμετρική διάταξη, η απόσταση l είναι ίδια για κάθε προπέλα. Διαφορετικά θα υπάρχουν διαφορετικές αποστάσεις l_i . Υπολογίζεται πως $\det(E) = -8b^3l^2d \neq 0$. Οπότε γνωρίζοντας κάθε στιγμή την επιθυμητή γενικευμένη δύναμη $\mathbf{F}_d = [f_t \ \tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T$ που θέλουμε να εφαρμοστεί στο σύστημα (2.20) μπορούμε να προσαρμόσουμε τις ταχύτητες των προπελών με ακρίβεια ώστε να παραχθούν αυτές οι δυνάμεις. Αυτό επιτυγχάνεται λύνοντας τη σχέση (2.21) ως εξής.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}^2 &= E^{-1} \mathbf{F}_d \\ \{\mathbf{F}_d \text{ such as } \boldsymbol{\Omega}^2 \geq 0\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

με $\boldsymbol{\Omega}^2 = [\Omega_1^2 \ \Omega_2^2 \ \Omega_3^2 \ \Omega_4^2]^T$ και $\boldsymbol{\Omega}^2 \geq 0 \Leftrightarrow \Omega_i^2 \geq 0$ for $i \in \{1,2,3,4\}$. Εμφανίζεται ο περιορισμός $\{\mathbf{F}_d \text{ such as } \boldsymbol{\Omega}^2 \geq 0\}$ που δηλώνει πως οι προπέλες μπορούν να παράξουν ώση μόνο σε μια κατεύθυνση, δηλαδή καθέτως προς τα πάνω, και συνεπώς οι ζητούμενες δυνάμεις θα πρέπει να το ικανοποιούν αυτό. Η συνθήκη αυτή αποφαίνεται πως δεν είναι περιοριστική για τις περισσότερες εφαρμογές.

2.4 Μαθηματικό Μοντέλο

2.4.1 Μη γραμμικό μοντέλο

Το μηχανικό μοντέλο σε επίπεδο γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.20). Σε επίπεδο θέσης και προσανατολισμού το μοντέλο περιγράφεται ως εξής.

$$\begin{cases} \ddot{x} = (c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) \frac{f_t}{m} \\ \ddot{y} = (c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) \frac{f_t}{m} \\ \ddot{z} = c_\phi c_\theta \frac{f_t}{m} - g \\ \ddot{\phi} = \frac{1}{I_x} \tau_\phi + \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{I_y} \tau_\theta + \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} = \frac{1}{I_z} \tau_\psi + \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\theta} \dot{\phi} \end{cases} \quad (2.23)$$

Οι επιταχύνσεις θέσης χαρακτηρίζονται από ισχυρούς μη γραμμικούς όρους με γινόμενα αρμονικών συναρτήσεων των γωνιών, ενώ οι επιταχύνσεις γωνίας χαρακτηρίζονται από ασθενή μη γραμμικότητα που οφείλεται στο φαινόμενο Coriolis. Δηλαδή, η θέση εξαρτάται έντονα από τον προσανατολισμό και από την είσοδο f_t ενώ οι γωνίες λειτουργούν σαν ανεξάρτητο υποσύστημα με ξεχωριστή είσοδο η κάθε μία. Συνολικά το σύστημα είναι 12^{ης} τάξης, μη γραμμικό με μόνο τέσσερις εισόδους.

Μιας και το σύστημα είναι υποβοηθούμενο είναι επιτακτική η γνώση των καταστάσεων θέσης και γωνίας, γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας, γραμμικής και γωνιακής επιτάχυνσης ώστε να υπάρχει καλύτερη δυνατότητα ελέγχου. Είναι νόρμα για τα μοντέρνα Drone να φέρουν ένα πληθωρικό σύστημα αισθητήρων το οποίο απαρτίζεται τουλάχιστον από GPS για αυτο-εντοπισμό θέσης και IMU για την εύρεση γραμμικών και γωνιακών συνιστωσών (γωνίας, ταχύτητας και

επιτάχυνσης) του τετρακοπτέρου. Σε πολλές εφαρμογές μέσω χρήσης κάμερας και LIDAR επιτυγχάνεται και οπτικός αυτο-προσδιορισμός της κατάστασης που βρίσκεται το τετρακόπτερο κάθε στιγμή.

Για τον συνδυασμό αυτών των δεδομένων με σκοπό τη συνεχή ανίχνευση κατάστασης του τετρακοπτέρου χρησιμοποιούνται διάφορες εκδοχές του Φίλτρου Kalman όπως Extended Kalman Filter (EKF), Unscented Kalman Filter (UKF), Particle Filter καθώς και μη γραμμικοί παρατηρητές κατάστασης.

Με βάση αυτά σε όλη τη μελέτη μας θεωρούμε δικαιολογημένα μετρήσιμες όλες τις καταστάσεις.

2.4.2 Μη γραμμικό μοντέλο με εικονική είσοδο

Για να απλοποιηθεί το μοντέλο μελέτης (2.20), (2.23) μπορούμε να εφαρμόσουμε απλές τεχνικές Feedback Linearization ώστε να απαλειφθεί η ασθενής μη γραμμικότητα που εμφανίζεται στις επιταχύνσεις των γωνιών. Βασιζόμενοι στη σχέση (2.20) και στις διαθέσιμες μετρήσεις των γωνιακών ταχυτήτων μέσω του γυροσκοπίου (IMU) είναι επιτρεπτή η ακόλουθη αντικατάσταση.

$$\begin{aligned} f_t &= m u_1 \\ \boldsymbol{\tau} &= \mathbb{I}(\boldsymbol{\omega} \times (\mathbb{I}\boldsymbol{\omega})) + [u_2 \ u_3 \ u_4]^T \end{aligned} \quad (2.24)$$

Όπου $[u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T$ είναι οι νέες εικονικές εισοδοί στο σύστημα το οποίο είναι ισοδύναμο αλλά πιο γραμμικό. Συγκεκριμένα το σύστημα (2.20) απλοποιείται στο ακόλουθο.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= -g\mathbf{e}_z + R u_1 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= [u_2 \ u_3 \ u_4]^T \end{aligned} \quad (2.25)$$

Και το (2.23) στο ακόλουθο.

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{x} = (c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi)u_1 \\ \ddot{y} = (c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi)u_1 \\ \ddot{z} = c_\phi c_\theta u_1 - g \\ \ddot{\phi} = u_2 \\ \ddot{\theta} = u_3 \\ \ddot{\psi} = u_4 \end{cases}} \quad (2.26)$$

Αυτό είναι το μοντέλο του τετρακοπτέρου που θα λαμβάνεται υπόψιν από εδώ και στο εξής. Ορίζοντας το γενικό διάνυσμα κατάστασης

$$\mathbf{x} = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \phi \ \theta \ \psi \ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T \in \mathbb{R}^{12} \quad (2.27)$$

και το διάνυσμα εισόδων,

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T \in \mathbb{R}^4 \quad (2.28)$$

η σχέση (2.26) γράφεται σε affine μορφή ως

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.29)$$

όπου

$$f(\mathbf{x}) = [\dot{x} \ 0 \ \dot{y} \ 0 \ \dot{z} \ -g \ \dot{\phi} \ 0 \ \dot{\theta} \ 0 \ \dot{\psi} \ 0]^T \quad (2.30)$$

$$g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

με

$$\begin{aligned} g_1 &= (c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) \\ g_2 &= (c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) \\ g_3 &= c_\phi c_\theta \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.4.3 Γραμμικό μοντέλο

Η εξαγωγή του γραμμικού μοντέλου θα βασιστεί στη γραμμικοποίηση του μη γραμμικού μοντέλου και είναι μια συνηθισμένη τακτική των μηχανικών. Η γραμμικοποίηση γίνεται με την υπόθεση μικρών γωνιών γύρω από το σημείο ισορροπίας $\{ (\varphi, \theta, \psi) = (0, 0, 0) \}$ και $u_1 = g$ } έτσι ώστε να απορρίπτει τη σταθερή συνιστώσα του βάρους. Το γραμμικοποιημένο σύστημα εκφράζεται ως εξής.

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (2.33)$$

με $A \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ και $B \in \mathbb{R}^{12 \times 4}$ και συγκεκριμένα

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{eq} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Και

$$B = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{eq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Παρατηρώντας το πόσο αραιοί (sparse) είναι πίνακες φαίνεται πως η γραμμικοποίηση εκφυλίζει τελείως τη δυναμική του συστήματος. Εξαιτίας της έλλειψης σύζευξης της δυναμικής το γραμμικό σύστημα μπορεί να διασπαστεί στα παρακάτω ανεξάρτητα γραμμικά υποσυστήματα μικρότερης τάξης. Το υποσύστημα υψομέτρου (altitude system) είναι

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \quad (2.36)$$

το υποσύστημα εμπρόσθιας κίνησης (longitudinal movement) δίνεται ως

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_3 \quad (2.37)$$

Το υποσύστημα πλευρικής κίνησης (lateral movement)

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad (2.38)$$

και το υποσύστημα προσανατολισμού

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_4 \quad (2.39)$$

Αν και η γραμμικοποίηση είναι ανεπαρκής για την εύρεση κατάλληλης τεχνικής ελέγχου, η παραπάνω διάσπαση σε υποσυστήματα δίνει διόρατική πληροφορία για το πως η δυναμική είναι συζευγμένη και η γωνιακή κίνηση επηρεάζει τη μεταφορική κίνηση.

2.5 Αδυναμία μοντέλου

Μπορεί να παρατηρηθεί από την εξίσωση (2.26) πως όταν $\phi \vee \theta = \pm\pi/2$ τότε ο έλεγχος στον κάθετο άξονα z χάνεται (i.e. $\ddot{z} = -g$). Αυτά είναι ιδιάζοντα σημεία αλλά δεν οφείλονται στην επιλογή σετ γωνιών Euler, παρά στη γεωμετρία της κίνησης. Ωστόσο, τυγχάνει το σετ γωνιών Euler που επιλέχθηκε να εμφανίζει και αυτό singularity σε αυτές τις τιμές. Για αυτό είναι σημαντικό, εφόσον το Drone δεν κάνει κάποια εξεζητημένη κίνηση με πλήρεις περιστροφές, να εξασφαλίζεται μέσω του ελέγχου ότι δεν θα πλησιάζει κοντά στις ιδιάζουσες αυτές τιμές. Ένας τρόπος για να γίνει αυτό είναι να τεθεί το επιθυμητό εύρος στο οποίο πρέπει να κινούνται οι γωνίες. Δηλαδή

$$\begin{aligned} |\phi| &\leq \phi_{MAX} < \pi/2 \\ |\theta| &\leq \theta_{MAX} < \pi/2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Μία λογική ανάθεση τιμής σε αυτά τα όρια, μακριά από τα ιδιάζοντα σημεία αλλά δίνοντας και ελευθερία για επαρκείς στροφές, είναι

$$\phi_{MAX} = \theta_{MAX} = \frac{\pi}{4} \quad (2.41)$$

Η επιλογή είναι ισορροπημένη αλλά όχι δεσμευτική. Ανάλογα τις απαιτήσεις της εφαρμογής το όριο μπορεί να αλλάζει.

Από την άλλη, η δυνατότητα ελέγχου στο σύστημα περιορίζεται από φυσικά αίτια όπως υποδεικνύει η σχέση (2.22) καθώς και το γεγονός ότι οι προπέλες έχουν μέγιστη γωνιακή ταχύτητα λειτουργίας. Οι περιορισμοί αυτοί αναλύονται στο Παράρτημα Β.

Κεφάλαιο 3

Έλεγχος Συστήματος

3.1 Γραμμικές τεχνικές ελέγχου

Οι μέθοδοι που θα αναλυθούν σε αυτήν την υποενότητα είναι επαρκείς σε επίπεδο απλών εφαρμογών καθώς, χωρίς ιδιαίτερες απαιτήσεις σε ταχύτητα ευρωστία ελέγχου. Για το γραμμικό έλεγχο θα θεωρηθεί ως σύστημα αναφοράς το πλήρες σύστημα (2.33) – (2.35) που είναι MI (Multiple Inputs). Η ίδια λογική μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση μοντελοποίησης με υποσυστήματα που αναφέρθηκε, που το καθένα είναι SI (Single Inputs).

Για να είναι αποτελεσματικός ο γραμμικός έλεγχος θα πρέπει το σύστημα (A,B) να είναι ελέγξιμο, δηλαδή ο πίνακας ελεγχσιμότητας $C = [B \ AB \ \dots \ A^{11}B]$ να έχει $rank(C) \geq 12$, το οποίο επαληθεύεται στην περίπτωσή μας.

Πριν ξεκινήσουμε θα ορίσουμε 3 προβλήματα ελέγχου τα οποία συχνά συγχέονται.

Stabilization: Η διαδικασία οδήγησης του διανύσματος κατάστασης σε σημείο ισορροπίας.

Reference Following: Η διαδικασία οδήγησης του διανύσματος κατάστασης σε σημείο που υποδεικνύεται από την σταθερή είσοδο αναφοράς του συστήματος.

Trajectory Following: Η διαδικασία οδήγησης του διανύσματος κατάστασης σε τροχιά που υποδεικνύεται από τη χρονο-μεταβλητή είσοδο αναφοράς του συστήματος.

3.1.1 Τοποθέτηση πόλων

Ο σκοπός της τοποθέτησης πόλων (pole placement) στα γραμμικά συστήματα είναι η εξασφάλιση της ασυμπτωτικής σύγκλισης της τροχιάς του τετρακοπτέρου σε μία επιθυμητή κατάσταση. Η επιλογή των πόλων καθορίζει το πόσο γρήγορα γίνεται αυτή η σύγκλιση.

Επειδή το πραγματικό σύστημα είναι μη γραμμικό δεν υπάρχει απόδειξη πως ο γραμμικός αυτός έλεγχος εξασφαλίζει ασυμπτωτική σύγκλιση αλλά τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά.

Για να επιτευχθεί αυτό χρειάζεται κατάλληλος έλεγχος ανάδρασης (feedback control) της μορφής

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x} \quad (3.1)$$

με $K \in \mathbb{R}^{4 \times 12}$ ζητούμενο σταθερό πίνακα που να θέτει τους πόλους του συστήματος (3.2) σε συγκεκριμένες ευσταθείς ιδιοτιμές $\lambda_i < 0$ με $i \in \{1, 2, \dots, 12\}$. Εφαρμόζοντας τον έλεγχο στην (2.35) έχουμε

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x} \quad (3.2)$$

με λύση

$$\mathbf{x}(t) = e^{(A-BK)(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) \quad (3.3)$$

Όπου $A - BK$ Hurwitz και συνεπώς $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ εκθετικά και με ταχύτητα που ορίζεται από την επιλογή των πόλων.

Αυτός ο έλεγχος λύνει το πρόβλημα stabilization. Ωστόσο, εμείς θέλουμε επίλυση του προβλήματος reference following. Θέτοντας επιθυμητό διάνυσμα $\mathbf{x}_d = const$ και σφάλμα παρακολούθησης $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$ και είσοδο

$$\mathbf{u} = -K_1\mathbf{x} - K_2 \int_0^t \mathbf{e}(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

Ορίζοντας την ενδιάμεση μεταβλητή $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{x}}$ έχουμε το επαυξημένο σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & J_{12 \times 12} \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \quad (3.5)$$

Με $J_{12 \times 12}$ το μοναδιαίο πίνακα. Αντικαθιστώντας το έλεγχο (3.4) προκύπτει

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & J_{12 \times 12} \\ 0 & A \end{bmatrix}}_{A'} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}}_{B'} \left(-[K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \right) \quad (3.6)$$

Και ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & J_{12 \times 12} \\ -BK_2 & A - BK_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Ο πίνακας $K = [K_1 \ K_2]$ επιλέγεται έτσι ώστε να τοποθετεί τους πόλους του επαυξημένου συστήματος (A', B') σε ζητούμενες τιμές. Δηλαδή πρώτα βρίσκουμε

τον πίνακα K και στη συνέχεια τους υποπίνακες K_1 & K_2 . Εφόσον οι ιδιοτιμές είναι ευσταθείς ($\lambda_i < 0$) τότε το σφάλμα $\mathbf{e} \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Συνεπώς $\mathbf{e} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_d$ εκθετικά. Στο MATLAB η εύρεση του πίνακα K γίνεται μέσω των συναρτήσεων

$$\begin{aligned} K &= \text{place}(A, B, L) \\ K &= \text{acker}(A, B, L) \end{aligned}$$

με L το διάνυσμα επιθυμητών ιδιοτιμών.

3.1.2 Γραμμικός τετραγωνικός ρυθμιστής (LQR)

Το πρόβλημα του LQR (Linear Quadratic Regulator) έγκειται στην εύρεση εισόδου που να ελαχιστοποιεί το κριτήριο

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt \quad (3.8)$$

Όπου $Q = Q^T > 0$ το κόστος κατάστασης και $R > 0$ (θετικά ορισμένος) το κόστος εισόδου. Επιλέγουμε είσοδο πάλι της μορφής $\mathbf{u} = -K\mathbf{x}$ και το πρόβλημα είναι η εύρεση του σταθερού πίνακα K . Θέτοντας επιθυμητό σταθερό ή χρονομεταβλητό διάνυσμα $\mathbf{x}_d(t)$ και σφάλμα παρακολούθησης $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$ και είσοδο $\mathbf{u} = -K\mathbf{e}$, προκύπτει

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{e}^T (Q + K^T R K) \mathbf{e} + \mathbf{x}_d^T (Q + K^T R K) \mathbf{x}_d] dt \quad (3.9)$$

Υποθέτοντας $V^T V = (Q + K^T R K)$

$$J = \int_0^{\infty} (\|V\mathbf{e}\|^2 + \|V\mathbf{x}_d\|^2) dt \geq 0 \quad (3.10)$$

Είναι εμφανές πως για να είναι πεπερασμένο το κριτήριο, πρέπει $\mathbf{e} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_d$. Στο MATLAB η εύρεση του πίνακα K γίνεται μέσω της συνάρτησης

$$K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$$

Με τη μέθοδο LQR επιτυγχάνεται και reference following και trajectory following.

3.1.3 Προσομοιώσεις

Για να εξασφαλίσουμε πως οι γωνίες θα είναι φραγμένες ($|\theta| \leq \theta_{MAX}, |\phi| \leq \phi_{MAX}$), στη μέθοδο LQR μπορούμε να τροποποιήσουμε καταλλήλως τον πίνακα κόστους κατάστασης Q έτσι ώστε η κάθε κατάσταση να μην υπερβαίνει κάποια μέγιστη τιμή. Μία μέθοδος Tuning των πινάκων κόστους Q, R εξηγείται στην βιβλιογραφική ανασκόπηση του Κεφαλαίου. Μία άλλη μέθοδος η οποία μπορεί να εφαρμοστεί και στην τεχνική τοποθέτησης πόλων είναι με χρήση τελεστή προβολής (Projection Operator) το οποίο για το απλό πρόβλημα μας μεταφράζεται ως

```

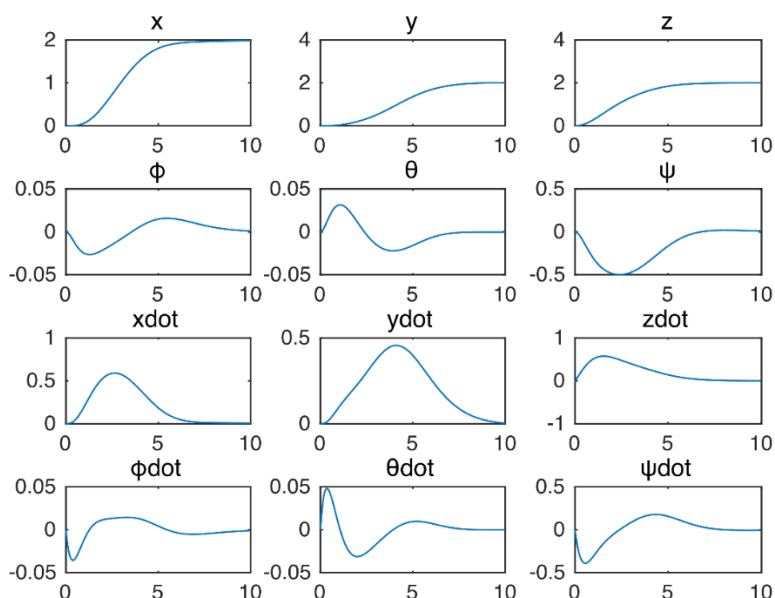
if  $|\theta| > \theta_{MAX}$  and  $\text{sign}(\theta) = \text{sign}(u_3)$  ##Respectively for  $\phi, u_2$ 
     $u_3 = 0$  ##sign denotes sign function
end

```

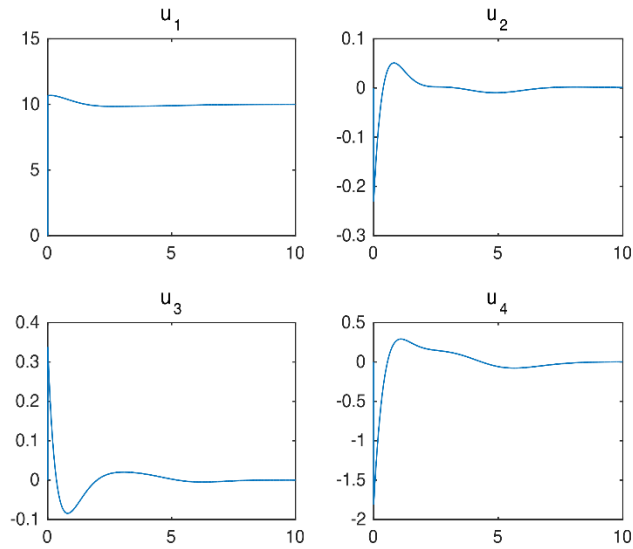
Δηλαδή αν η γωνία κατά μέτρο είναι μεγαλύτερη από το όριο και ο γραμμικός έλεγχος θα την κάνει ακόμα μεγαλύτερη, μηδενίζεται ο έλεγχος και αναμένεται γραμμικός έλεγχος ο οποίος θα μειώσει τη γωνία κατά μέτρο. Στη συνέχεια παρατίθενται παραδείγματα εφαρμογής των τεχνικών που αναφέρθηκαν.

3.1.3.1 Pole Placement

- Reference Following with target $(x_d, y_d, z_d, \psi_d) = (2, 2, 2, 0)$



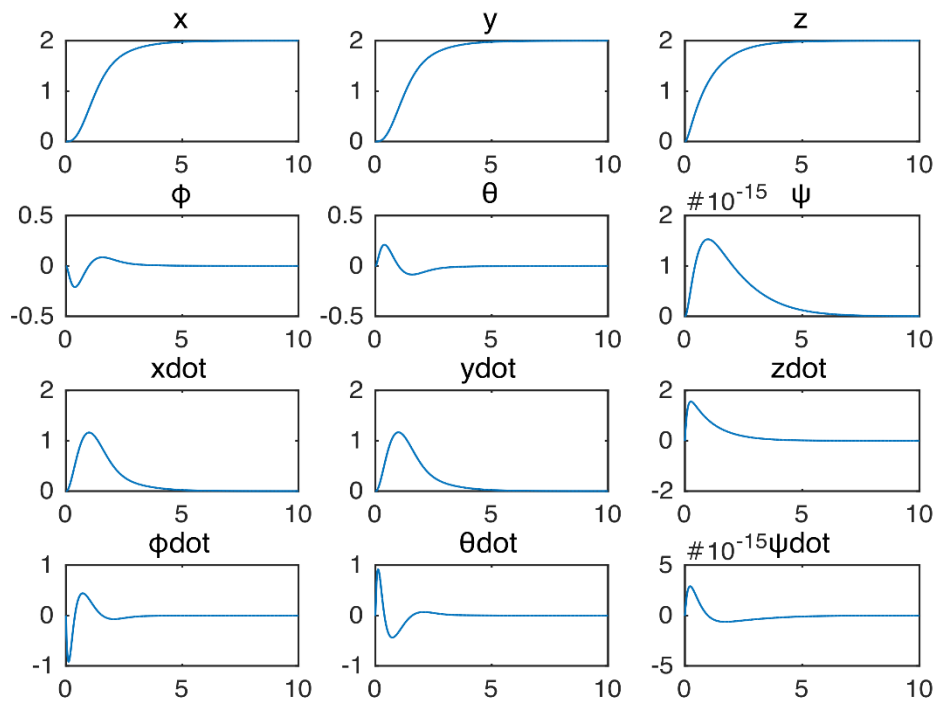
Εικόνα 3.1: Απόκριση καταστάσεων σε βηματική συνάρτηση με έλεγχο τοποθέτησης πόλων



Εικόνα 3.2: Πολύ ομαλή (smooth) απόκριση εικονικών εισόδων

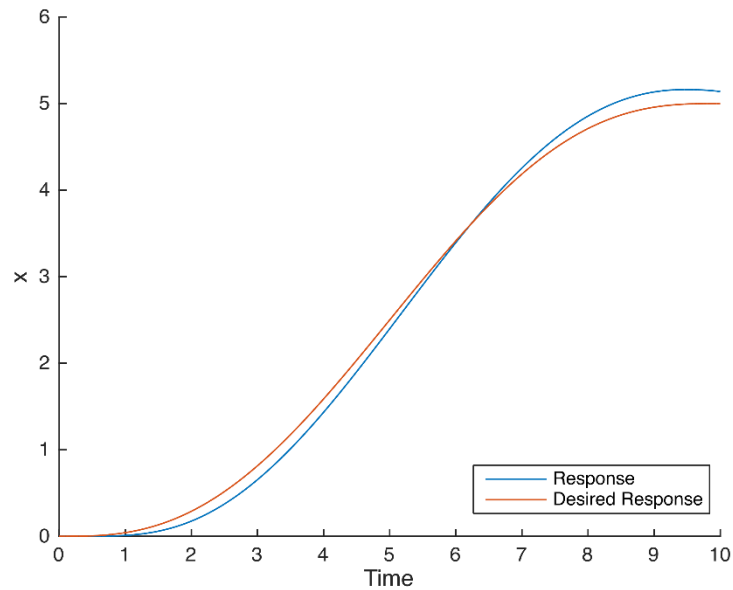
3.1.3.2 Linear Quadratic Regulator

- Reference Following with target $(x_d, y_d, z_d, \psi_d) = (2, 2, 2, 0)$



Εικόνα 3.3: Απόκριση καταστάσεων σε βηματική συνάρτηση πλάτους 2, με έλεγχο LQR.

- Trajectory Following (Trajectory produced by polynomial interpolation)



Εικόνα 3.4: Απόκριση κατάστασης κατά την εργασία παρακολούθησης τροχιάς με μέθοδο ελέγχου LQR.

Συνολικά, η μέθοδος LQR δίνει καλύτερα αποτελέσματα (γρηγορότερη απόκριση) χωρίς απαιτητικό tuning, ενώ υποστηρίζει και παρακολούθηση τροχιάς.

3.2 Μη γραμμικός έλεγχος

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούν δύο μη γραμμικές στρατηγικές που συνυπολογίζουν όλη τη δυναμική του συστήματος και όχι μόνο τους γραμμικούς όρους. Και οι δύο βασίζονται στην τεχνική Back-stepping. Η πρώτη αντιμετωπίζει το σύστημα σαν κασκοδική σύνδεση υποσυστημάτων, ενώ η δεύτερη σαν ενιαίο σύστημα.

3.2.1 Κασκοδικός μη γραμμικός ελεγκτής

3.2.1.1 Έλεγχος υψόμετρου (Altitude Control)

Το υψόμετρο υποδεικνύεται από τη μεταβλητή z στο μοντέλο (2.26) και είναι η μετατόπιση κατά τον άξονα z_1 που είναι αντίθετος στη βαρύτητα. Συνεπώς το μοντέλο αναφοράς για το υψόμετρο είναι

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= c_\phi c_\theta u_1 - g \end{aligned} \quad (3.11)$$

Με τις βοηθητικές μεταβλητές $[z_1 \ z_2]^T = [z \ \dot{z}]^T$. Ο σκοπός είναι να επιτευχθεί παρακολούθηση επιθυμητής τροχιάς $z_d(t)$ που μπορεί να είναι σταθερό υψόμετρο αναφοράς ή χρονομεταβλητή υψομετρική τροχιά. Αν το σύστημα ήταν απλός διπλός ολοκληρωτής τότε έλεγχος της μορφής

$$u_z = -k_1(z_1 - z_d) - k_2(z_2 - \dot{z}_d) + \ddot{z}_d \quad (3.12)$$

θα καθιστούσε εκθετική σύγκλιση ως προς την τροχιά αν επιλεγούν $k_{1,2} > 0$. Για να συμπεριφέρεται το σύστημα (3.11) σαν διπλός ολοκληρωτής πρέπει να εφαρμοστεί είσοδος γραμμικοποίησης (feedback linearization)

$$u_1 = \frac{1}{c_\phi c_\theta} (u_z + g) \quad (3.13)$$

Έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= u_z \end{aligned} \quad (3.14)$$

Που όπως αναφέρθηκε συγκλίνει εκθετικά στην επιθυμητή τροχιά. Η είσοδος u_1 δεν απειρίζεται εφόσον οι γωνίες θ, φ είναι περιορισμένες σύμφωνα με την υπόθεση (2.40) – (2.41) και u_z φραγμένο για φραγμένη τροχιά $z_d(t)$. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται ο όρος u_1 που εμφανίζεται στο μοντέλο (2.26) στις πρώτες 3 γραμμές. Επομένως, η δυναμική των γραμμικών μετατοπίσεων μετά την επιλογή της εισόδου u_1 γίνεται η ακόλουθη

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \left(t_\theta c_\psi + \frac{t_\phi s_\psi}{c_\theta} \right) (u_z + g) \\ \ddot{y} &= \left(t_\theta s_\psi - \frac{t_\phi c_\psi}{c_\theta} \right) (u_z + g) \\ \ddot{z} &= u_z \end{aligned} \quad (3.15)$$

Εφόσον ο όρος u_z καθορίζεται από τον έλεγχο υψομέτρου, ο έλεγχος μεταφορικής κίνησης στο επίπεδο (x, y) θα καθοριστεί μέσω των γωνιών φ, θ, ψ .

3.2.1.2 Έλεγχος εμπρόσθιας κίνησης (Longitudinal Control)

Ως εμπρόσθια κίνηση ορίζουμε την κίνηση που γίνεται ως προς τον σταθερό άξονα x_I και επομένως μας ενδιαφέρει δυναμική (x, \dot{x}, \ddot{x}) , δηλαδή η πρώτη γραμμή της (3.15).

$$\ddot{x} = \left(t_\theta c_\psi + \frac{t_\phi s_\psi}{c_\theta} \right) (u_z + g) \quad (3.16)$$

Στη συνέχεια θα εφαρμοστεί η μέθοδος Back-Stepping για την εύρεση ελέγχου για το παραπάνω σύστημα. Θέτοντας, τώρα, μια επιθυμητή τροχιά $x_d(t)$ και την απόκλιση από αυτή $z_1 = x - x_d$, ορίζουμε υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (3.17)$$

με παράγωγο

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1 \dot{z}_1 \\ &= z_1 (\dot{x} - \dot{x}_d) \\ &= -k_1 z_1^2 + z_1 (\dot{x} - \dot{x}_d + k_1 z_1) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Για να είναι η V_1 συνάρτηση Lyapunov θα θέλαμε ιδανικά $\dot{x} = \dot{x}_d - k_1 z_1$ έτσι ώστε $\dot{V}_1 \leq 0$. Έτσι ορίζουμε τη νέα απόκλιση $z_2 = \dot{x} - (\dot{x}_d + k_1 z_1)$ και τη νέα υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (3.19)$$

με παράγωγο

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\ &= -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_2 (\ddot{x} - \ddot{x}_d + k_1 \dot{z}_1) \\ &= -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 + z_2 (z_1 + \ddot{x} - \ddot{x}_d + k_1 \dot{z}_1 + k_2 z_2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Για να είναι η V_2 συνάρτηση Lyapunov θα θέλαμε ιδανικά $z_1 + \ddot{x} - \ddot{x}_d + k_1 \dot{z}_1 + k_2 z_2 = 0$ έτσι ώστε $\dot{V}_2 \leq 0$. Η διαφορετικά $\ddot{x} = (\ddot{x}_d - k_1 \dot{z}_1 - k_2 z_2 - z_1)$. Επομένως, αν το σύστημα ήταν διπλός ολοκληρωτής ο επιθυμητός έλεγχος θα ήταν

$$u_x = \ddot{x}_d - k_1 \dot{z}_1 - k_2 z_2 - z_1 \quad (3.21)$$

Έτσι ώστε $\ddot{x} = u_x$. Αντικαθιστώντας από την (3.16) προκύπτει

$$\left(t_\theta c_\psi + \frac{t_\phi s_\psi}{c_\theta} \right) (u_z + g) = u_x \quad (3.22)$$

Και λύνοντας ως προς τη γωνία θ που δείχθηκε, στην περιγραφή λειτουργίας και κατά τη διάσπαση σε γραμμικά υποσυστήματα, πως επηρεάζει την εμπρόσθια κίνηση

$$t_{\theta_d} = \frac{u_x c_\theta - t_\phi s_\psi (u_z + g)}{(u_z + g) c_\psi c_\theta} \quad (3.23)$$

Και ισοδύναμα

$$\theta_d = \text{atan2} \left(\frac{u_x c_\theta - t_\phi s_\psi (u_z + g)}{(u_z + g) c_\psi c_\theta} \right) \quad (3.24)$$

Με θ_d την επιθυμητή γωνία έτσι ώστε να έχουμε $\ddot{x} = u_x$ που εγγυάται εκθετική σύγκλιση του συστήματος στην επιθυμητή τροχιά. Ορίζουμε τώρα το σφάλμα από την επιθυμητή γωνία $e_\theta = \theta - \theta_d$ και η \dot{V}_2 γράφεται πλέον ως

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 + z_2 \left(\left(t_\theta c_\psi + \frac{t_\phi s_\psi}{c_\theta} \right) (u_z + g) - \frac{\left(t_{\theta_d} c_\psi + \frac{t_\phi s_\psi}{c_\theta} \right) (u_z + g)}{u_x} \right) \quad (3.25)$$

Και ισοδύναμα

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 + z_2 c_\psi (u_z + g) e_\theta \quad (3.26)$$

Στη λογική του modular design για τη μορφή της \dot{V}_2 μπορεί να αποδειχθεί πως οι καταστάσεις z_1, z_2 είναι φραγμένες σαν μέτρο από μια ποσότητα ανάλογη του e_θ . Επομένως, αν επιτευχθεί $e_\theta \rightarrow 0$ εκθετικά τότε $z_1, z_2 \rightarrow 0$ εκθετικά. Η πλήρης απόδειξη και η περιγραφή του modular design βρίσκεται στο Παράρτημα Α.

Άρα το νέο ζητούμενο για να έχουμε ασυμπτωτική παρακολούθηση τροχιάς είναι η εξασφάλιση πως το σφάλμα e_θ συγκλίνει στο 0. Αν πιο συγκεκριμένα εξασφαλιστεί πως το σφάλμα $\tilde{\theta} = \theta - \theta_d$ συγκλίνει στο 0 τότε και το σφάλμα $e_\theta = \tan(\theta) - \tan(\theta_d)$ θα συγκλίνει στο 0. Το σύστημα την γωνίας θ είναι σύμφωνα με το μοντέλο μας

$$\ddot{\theta} = u_3 \quad (3.27)$$

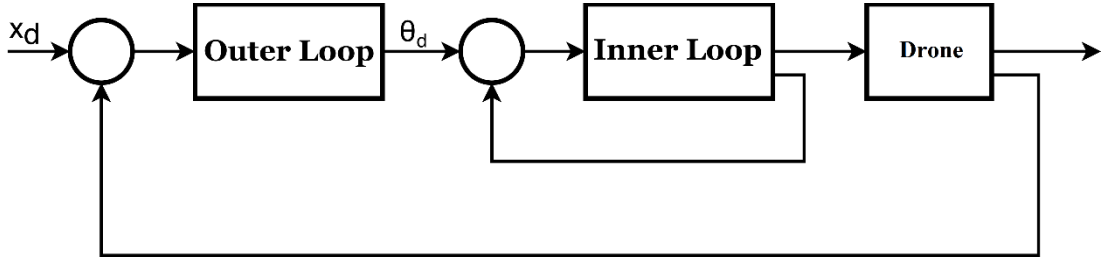
Το οποίο είναι διπλός ολοκληρωτής και όπως αναφέρθηκε ο κατάλληλος έλεγχος για σύγκλιση σε τροχιά είναι

$$u_3 = -k_3(\theta - \theta_d) - k_4(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) + \ddot{\theta}_d \quad (3.28)$$

Επομένως ο παραπάνω έλεγχος εγγυάται ασυμπτωτική σύγκλιση στην επιθυμητή τροχιά με εκθετικό ρυθμό που εξαρτάται από τα κέρδη k_1, k_2, k_3, k_4 .

Η μορφή της στρατηγικής ελέγχου προσομοιάζει χρήση κασκοδικού PD controller όπου k_1, k_2 είναι τα κέρδη του εξωτερικού PD και k_3, k_4 τα κέρδη του εσωτερικού PD. Για να λειτουργήσει αποδοτικά αυτό το σχήμα θα πρέπει το εσωτερικό loop (σύστημα γωνίας θ (3.27)) να είναι τουλάχιστον 5 με 10 φορές γρηγορότερο σε

σχέση με το εξωτερικό loop (σύστημα μετατόπισης x (3.16)) έτσι ώστε ο χρόνος που απαιτείται για τη σύγκλιση στην κατάλληλη γωνία θ_d να είναι αμελητέος για το εξωτερικό loop το οποίο έτσι θα βλέπει ότι η γωνία θ είναι ίση με τη ζητούμενη.



Εικόνα 3.5: Κασκοδική δομή ελέγχου για την εμπρόσθια κίνηση (Longitudinal Control)

Σημείωση 1: Η είσοδος (3.21), $u_x = \ddot{x}_d - k_1 \dot{z}_1 - k_2 z_2 - z_1$, αν αναλυθούν οι όροι, είναι ισοδύναμη με ευσταθή είσοδο για διπλό ολοκληρωτή

$$u_x = \ddot{x}_d - k_1'(x - x_d) - k_2'(\dot{x} - \dot{x}_d) \quad (3.29)$$

Και επομένως επιλέγεται τέτοιας μορφής ευσταθής είσοδος με κατάλληλα επιλεγμένα κέρδη ανάλογα την ταχύτητα απόκρισης που είναι θεμιτή.

Σημείωση 2: Αναφέρθηκε πως οι γωνία θ είναι περιορισμένη στο διάστημα $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ και επομένως η επιθυμητή γωνία θ_d τροποποιείται ως εξής

$$\theta_d = SAT \left(atan2 \left(\frac{u_x c_\theta - t_\phi s_\psi (u_z + g)}{(u_z + g) c_\psi c_\theta} \right), \theta_{MAX} \right) \quad (3.30)$$

Όπου SAT η συνάρτηση κορεσμού.

3.2.1.3 Έλεγχος πλευρικής κίνησης (Lateral Control)

Ως πλευρική κίνηση ορίζουμε την κίνηση που γίνεται ως προς τον σταθερό άξονα y_l και επομένως μας ενδιαφέρει δυναμική (y, \dot{y}, \ddot{y}) , δηλαδή η δεύτερη γραμμή της (3.15).

$$\ddot{y} = \left(t_\theta s_\psi - \frac{t_\phi c_\psi}{c_\theta} \right) (u_z + g) \quad (3.31)$$

Η αντιμετώπιση του συστήματος γίνεται πάλι μέσω Back-Stepping με όμοια λογική με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην εμπρόσθια κίνηση. Για αυτό θα αναφερθούν μόνο τα ενδιάμεσα αποτελέσματα. Ξεκινώντας με τον εικονικό έλεγχο οδήγησης

$$u_y = \ddot{y}_d - k_1(y - y_d) - k_2(\dot{y} - \dot{y}_d) \quad (3.32)$$

και καθώς η πλευρική κίνηση υποδείχθηκε πως συνδέεται με τη γωνία ϕ ο παραπάνω έλεγχος ισοδυναμεί με την επιθυμητή γωνία

$$\phi_d = \text{atan2}\left(\frac{-u_y c_\theta - s_\theta s_\psi (u_z + g)}{(u_z + g) c_\psi}\right) \quad (3.33)$$

ενώ για να επιτευχθεί η παρακολούθηση της επιθυμητής γωνίας που εγγυάται και σύγκλιση στην τροχιά επιλέγεται ο έλεγχος διπλού ολοκληρωτή

$$u_2 = -k_3(\phi - \phi_d) - k_4(\dot{\phi} - \dot{\phi}_d) + \ddot{\phi}_d \quad (3.34)$$

Η ανάλυση που ακολουθήθηκε είναι τελείως όμοια με την ανάλυση στην προηγούμενη υποενότητα και για αυτό παραλείφθηκε.

3.2.1.4 Έλεγχος προσανατολισμού (Yaw Control)

Η γωνία Yaw ερμηνεύει σε ποια κατεύθυνση «κοιτάει» το Drone και συγκεκριμένα η προπέλα που έχει οριστεί σαν μπροστινή. Συνήθως τα Drone έχουν προσανατολισμό προς τον στόχο τους. Η συγκεκριμένη γωνία δεν παράγει κίνηση μέσα από τη μεταβολή της και για αυτό συχνά επιλέγεται για διευκόλυνση σαν σταθερή ψ_d . Επειδή το σύστημα για τη γωνία ψ είναι διπλός ολοκληρωτής επιλέγεται έλεγχος της μορφής

$$u_4 = -k_3(\psi - \psi_d) - k_4(\dot{\psi} - \dot{\psi}_d) + \ddot{\psi}_d \quad (3.35)$$

Στην περίπτωση $\psi_d = 0$ οι σχέσεις (3.24) και (3.33) απλοποιούνται σημαντικά. Στην περίπτωση αυτή το μοντέλο απλοποιείται στο παρακάτω

$$\begin{cases} \ddot{x} = (c_\phi s_\theta) u_1 \\ \ddot{y} = (-s_\phi) u_1 \\ \ddot{z} = c_\phi c_\theta u_1 - g \\ \ddot{\phi} = u_2 \\ \ddot{\theta} = u_3 \end{cases} \quad (3.36)$$

το οποίο θα είναι η αναφορά μας για τα επόμενα Κεφάλαια. Η περίπτωση όπου $\psi = \psi_d = \text{const} \neq 0$ μπορεί να αναχθεί στην παραπάνω δομή κάνοντας το ακόλουθο μετασχηματισμό περιστροφής

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_d) & \sin(\psi_d) \\ -\sin(\psi_d) & \cos(\psi_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Παραγωγίζοντας προκύπτει

$$\begin{bmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_d) & \sin(\psi_d) \\ -\sin(\psi_d) & \cos(\psi_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left((c_\phi s_\theta c_{\psi_d} + s_\phi s_{\psi_d}) c_{\psi_d} + (c_\phi s_\theta s_{\psi_d} - s_\phi c_{\psi_d}) s_{\psi_d} \right) u_1 \\ \left(-(c_\phi s_\theta c_{\psi_d} + s_\phi s_{\psi_d}) s_{\psi_d} + (c_\phi s_\theta s_{\psi_d} - s_\phi c_{\psi_d}) c_{\psi_d} \right) u_1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Και ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\phi s_\theta u_1 \\ -s_\theta u_1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Άρα πάλι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο (3.36).

3.2.1.5 Αλγόριθμος στρατηγικής ελέγχου

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω μπορούμε να εξάγουμε έναν απλό αλγόριθμο που εγγυάται ασυμπτωτική σύγκλιση σε επιθυμητή τροχιά με ελάχιστο υπολογιστικό κόστος ο οποίος μπορεί να ενσωματωθεί σε μικροελεγκτή ή μικροεπεξεργαστή.

Algorithm 1

input: x_d, y_d, z_d, ψ_d

while($task=True$)

1. Compute stable controls for linear motion

$$u_x = \ddot{x}_d - k_1(x - x_d) - k_2(\dot{x} - \dot{x}_d)$$

$$u_y = \ddot{y}_d - k_1(y - y_d) - k_2(\dot{y} - \dot{y}_d)$$

$$u_z = \ddot{z}_d - k_1(z - z_d) - k_2(\dot{z} - \dot{z}_d)$$

2. Compute desired angles, satisfying stable controls

$$\theta_d = SAT \left(atan2 \left(\frac{u_x c_\theta - t_\phi s_\psi (u_z + g)}{(u_z + g) c_\psi c_\theta} \right), \theta_{MAX} \right)$$

$$\phi_d = SAT \left(atan2 \left(\frac{-u_y c_\theta - s_\theta s_\psi (u_z + g)}{(u_z + g) c_\psi} \right), \phi_{MAX} \right)$$

3. Compute their first and second derivative if more accuracy needed. On very smooth flights, desired angles alone are usually adequate.

4. Define controls

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{1}{c_\phi c_\theta} (u_z + g) \\
 u_2 &= -k_3(\phi - \phi_d) - k_4(\dot{\phi} - \dot{\phi}_d) + \ddot{\phi}_d \\
 u_3 &= -k_3(\theta - \theta_d) - k_4(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) + \ddot{\theta}_d \\
 u_4 &= -k_3(\psi - \psi_d) - k_4(\dot{\psi} - \dot{\psi}_d) + \ddot{\psi}_d
 \end{aligned}$$

return

end

complexity: $\mathcal{O}(1)$ at every loop

3.2.2 Μη γραμμικός Back-stepping ελεγκτής

Στην προηγούμενη ενότητα υλοποιήθηκε ένας ελεγκτής από το συνδυασμό τεχνικών Back-stepping και modular design. Σε αυτή την ενότητα υλοποιείται ένας ελεγκτής αποκλειστικά με τη μέθοδο Back-stepping. Αρχικά θα μελετηθεί το σύστημα εμπρόσθιας κίνησης και με αντίστοιχο τρόπο αντιμετωπίζεται και το σύστημα πλευρικής κίνησης, ενώ ο έλεγχος υψομετρικής κίνησης u_1 και προσανατολισμού u_4 παραμένουν ίδιοι. Η διαφοροποίηση της μεθόδου από την προηγούμενη ξεκινάει από τη σχέση (3.26)

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 + z_2 c_\psi (u_z + g)(t_\theta - t_{\theta_d}) \quad (3.41)$$

Για να είναι η V_2 συνάρτηση Lyapunov θα θέλαμε ιδανικά $t_\theta = t_{\theta_d}$ έτσι ώστε $\dot{V}_2 \leq 0$. Έτσι ορίζουμε τη νέα κατάσταση απόκλισης $z_3 = e_\theta = t_\theta - t_{\theta_d}$ και τη νέα υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} z_3^2 \quad (3.42)$$

με παράγωγο

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3 &= \dot{V}_2 + z_3 \dot{z}_3 \\
 &= -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 + z_2 c_\psi (u_z + g) z_3 + z_3 (g(\theta) \dot{\theta} - g(\theta_d) \dot{\theta}_d) \\
 &= -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 - k_3 z_3^2 \\
 &\quad + z_3 (z_2 c_\psi (u_z + g) + g_x(\theta) \dot{\theta} - g_x(\theta_d) \dot{\theta}_d + k_3 z_3)
 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Όπου $g_x(\theta) = \tan(\theta)' = \frac{1}{\cos^2 \theta}$. Για να είναι η V_3 συνάρτηση Lyapunov θα θέλαμε ιδανικά

$$\dot{\theta} = g_x^{-1}(\theta) [g_x(\theta_d)\dot{\theta}_d - k_3 z_3 - z_2 c_\psi(u_z + g)] = \mu_x$$

έτσι ώστε $\dot{V}_2 \leq 0$. Έτσι ορίζουμε τη νέα κατάσταση απόκλισης από αυτήν την ιδανική τιμή, $z_4 = \dot{\theta} - \mu_x$ και τη νέα υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V_4 = V_3 + \frac{1}{2} z_4^2 \quad (3.44)$$

με παράγωγο

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &= \dot{V}_3 + z_4 \dot{z}_4 \\ &= - \sum_{i=1}^3 k_i z_i^2 + z_3 z_4 + z_4 (\ddot{\theta} - \dot{\mu}_x) \\ &= - \sum_{i=1}^4 k_i z_i^2 + z_4 (z_3 + \ddot{\theta} - \dot{\mu}_x + k_4 z_4) \\ &= - \sum_{i=1}^4 k_i z_i^2 + z_4 (z_3 + u_3 - \dot{\mu}_x + k_4 z_4) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Επιλέγοντας είσοδο

$$u_3 = \frac{d\mu_x}{dt} - k_4 z_4 - z_3 \quad (3.46)$$

η V_4 είναι συνάρτηση Lyapunov αφού $\dot{V}_4 \leq 0$, και επομένως

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \rightarrow 0 \quad (3.47)$$

Και συνεπώς $x \rightarrow x_d$. Για να είναι αποδοτικός ο ελεγκτής πάλι προτείνεται τα k_3, k_4 να επιλεγούν έτσι ώστε να παρέχουν τουλάχιστον 5 με 10 φορές γρηγορότερη απόκριση σε σχέση με τα k_1, k_2 .

Για την πλευρική κίνηση παρατίθενται τα καιρία αποτελέσματα ενώ παραλείπεται η διαδικασία καθώς είναι τελείως παρόμοια με την παραπάνω ανάλυση. Συγκεκριμένα

$$u_2 = \frac{d\mu_y}{dt} - k_4 z_4 - z_3 \quad (3.48)$$

με

$$\begin{aligned} z_1 &= y - y_d \\ z_2 &= \dot{y} - (\dot{y}_d + k_1 z_1) \\ z_3 &= t_\phi - t_{\phi_d} \\ z_4 &= \dot{\phi} - \mu_y \end{aligned} \quad (3.49)$$

και

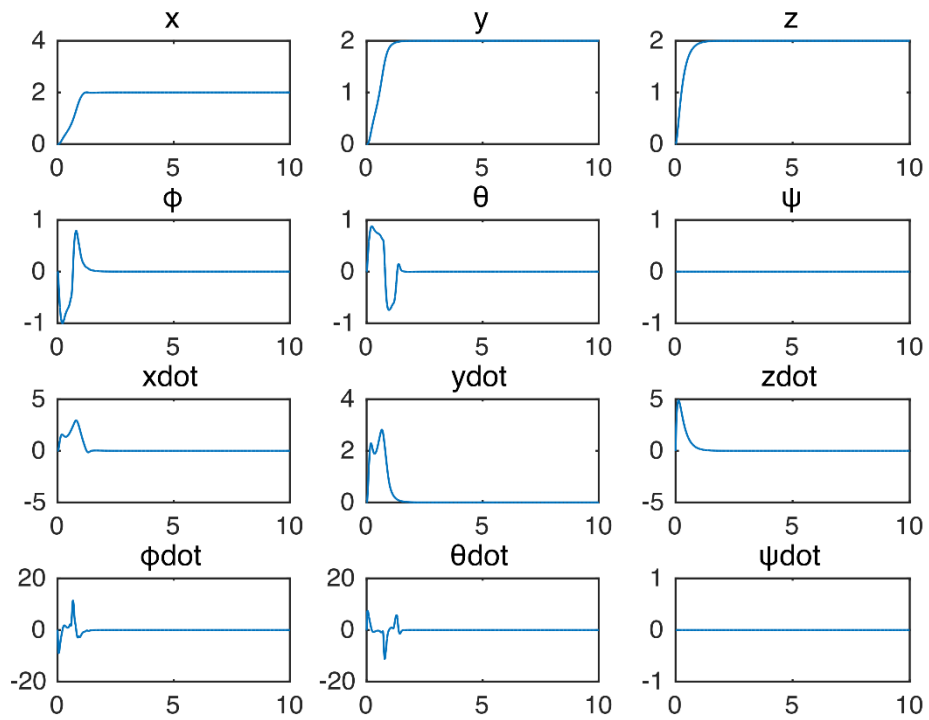
$$\begin{aligned} g_y(\phi) &= \frac{1}{\cos^2 \phi} \\ \mu_y &= g_y^{-1}(\phi) \left[g_y(\phi_d) \dot{\phi}_d - k_3 z_3 + \frac{z_2 c_\psi (u_z + g)}{c_\theta} \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

Εφόσον υπολογιστεί η παράγωγος των μ_x, μ_y , κάθε φορά οι είσοδοι u_2, u_3 υπολογίζονται μέσω των (3.41), (3.43) σε χρόνο $\mathcal{O}(1)$. Ο περιορισμός για μέγιστη γωνία αντιμετωπίζεται με τελεστή προβολής όπως στην γραμμική περίπτωση.

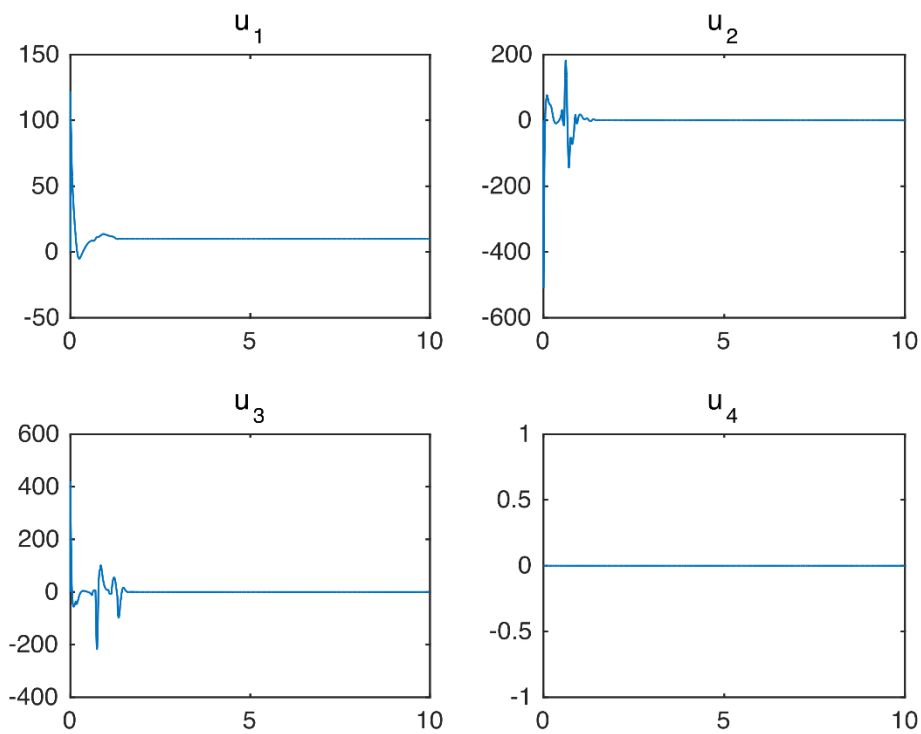
3.2.3 Προσομοιώσεις

Για την προσομοίωση επιλέγεται η χρήση της πρώτης τεχνικής, του κασκοδικού μη γραμμικού ελέγχου, διότι με την επιλογή ίδιων gain η απόκριση τους είναι ίδια ενώ η πρώτη μέθοδος είναι πιο σθεναρή ως προς τα σφάλματα μετρήσεων διότι χρησιμοποιεί λιγότερους όρους που προέρχονται από τις μετρήσεις. Παράλληλα, ο αλγόριθμος είναι απλός και εύκολα υλοποιήσιμος σε μικρούπολογιστή.

▪ Reference Following



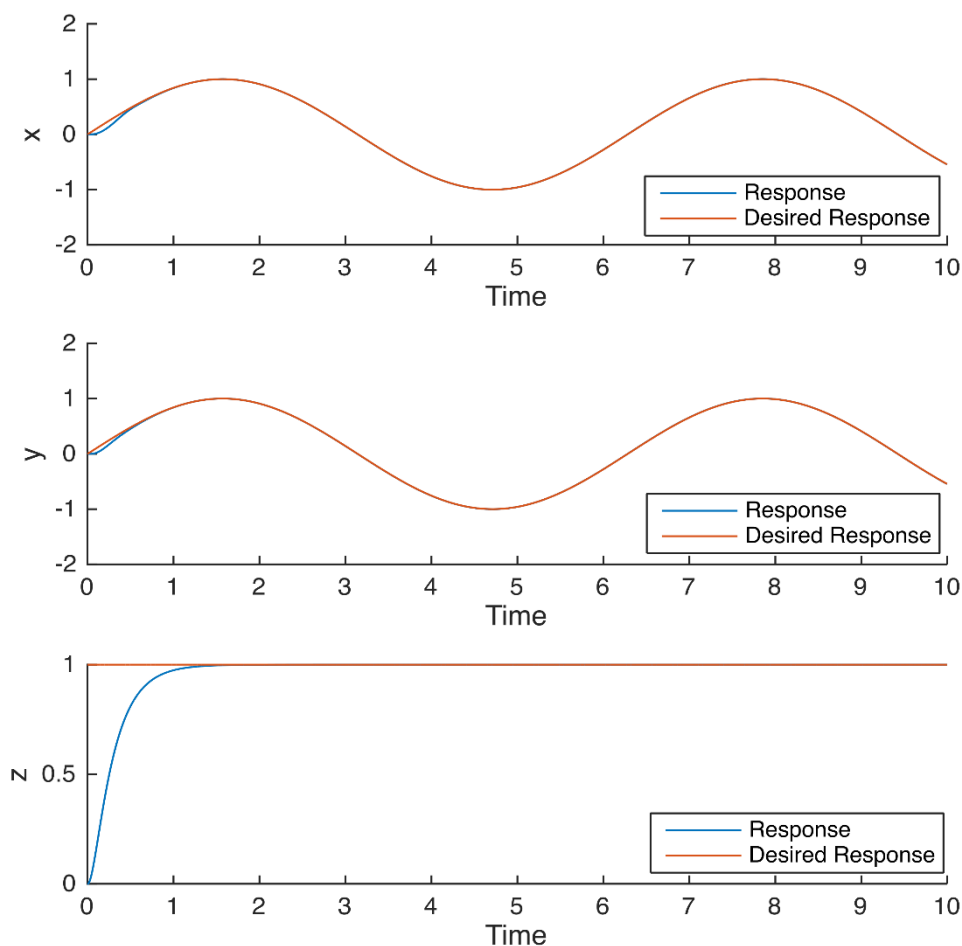
Εικόνα 3.6: Απόκριση κατάστασης σε βηματική είσοδο πλάτους 2



Εικόνα 3.7: Είσοδος παρακολούθησης σταθερής αναφοράς

Παρατηρούμε πως ο μη γραμμικός έλεγχος υπερτερεί του γραμμικού σε ταχύτητα απόκρισης, ενώ υπάρχει και δυνατότητα για loop shaping (π.χ. damping ratio) επιλέγοντας κατάλληλα τα κέρδη του ελεγκτή. Επίσης, οι εισόδοι είναι περισσότερο ανώμαλες σε σχέση με τις γραμμικές εισόδους καθώς συμπεριλαμβάνονται μη γραμμικοί όροι.

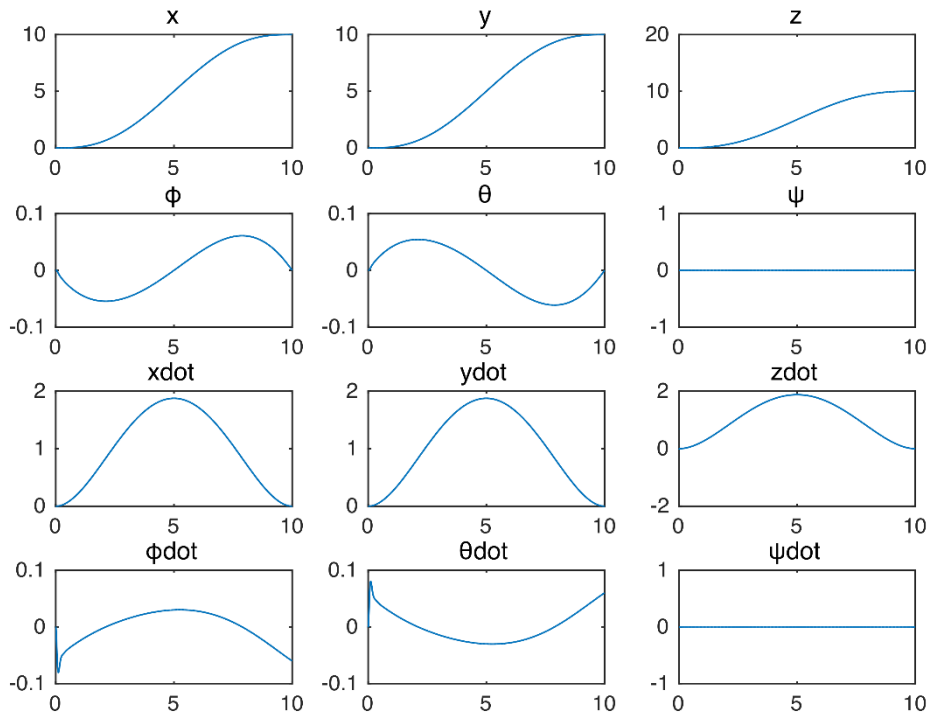
- Trajectory Following (Sine Wave)



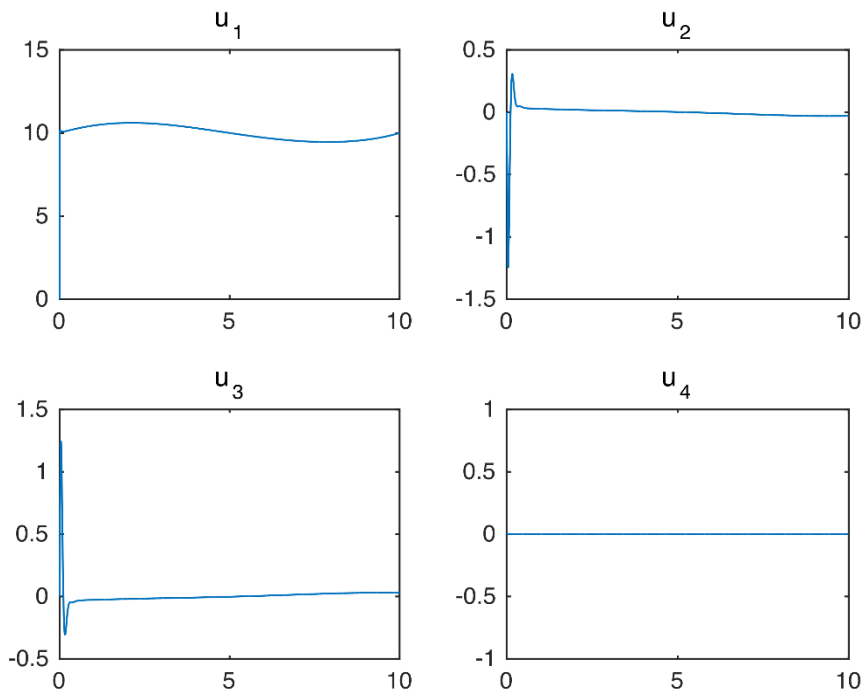
Εικόνα 3.8: Απόκριση κατάστασης σε παρακολούθηση ημιτονοειδούς συνάρτησης.

Παρατηρούμε πως πολύ γρήγορα το σφάλμα παρακολούθησης γίνεται αμελητέο σε βαθμό που δεν μπορούμε να διακρίνουμε τη διαφορά μεταξύ ζητούμενης τροχιάς και πραγματικής.

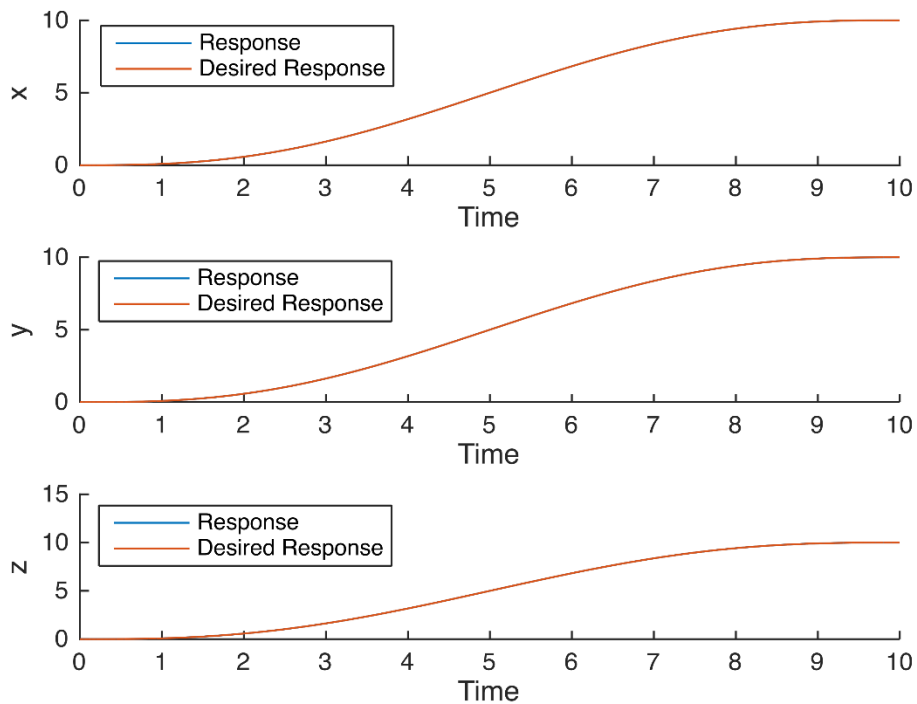
▪ Trajectory Following (Polynomial Interpolation)



Εικόνα 3.9: Απόκριση κατάστασης σε παρακολούθηση τροχιάς παραγμένης με τη μέθοδο της πολωνυμικής παρεμβολής.



Εικόνα 3.10: Είσοδος παρακολούθησης τροχιάς παραγμένης με τη μέθοδο της πολωνυμικής παρεμβολής



Εικόνα 3.11: Γράφημα που αναδεικνύει την ακρίβεια που μπορεί να επιτευχθεί μέσω μη γραμμικού ελέγχου.

Παρατηρούμε πως οι καταστάσεις μεταβάλλονται πολύ ομαλά, το σφάλμα είναι αμελητέο, οι απαιτούμενες εισόδους είναι πολύ κοντά στο 0 χωρίς peaks και το τετρακόπτερο μπορεί στο ίδιο διάστημα χρόνου να καλύπτει μεγαλύτερες αποστάσεις στο χώρο. Συγκεκριμένα, σε διάστημα 10 sec ο γραμμικός έλεγχος μετά βίας ακολουθεί μια τροχιά με στόχο την τιμή 2, ενώ ο μη γραμμικός έλεγχος με ευκολία ακολουθεί μια τροχιά με στόχο την τιμή 10.

Κεφάλαιο 4

Βέλτιστος έλεγχος ελαχίστου χρόνου

4.1 Πρόβλημα ελαχίστου χρόνου και έλεγχος Bang-Bang

Σε αυτήν την ενότητα, μελετάμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του χρόνου μετάβασης ενός συστήματος LTI από μία αρχική κατάσταση σε μία επιθυμητή τελική κατάσταση όταν η είσοδος είναι φραγμένη. Αρχικά, θα ασχοληθούμε με τη γενική περίπτωση για μη γραμμικά συστήματα και στη συνέχεια θα εμβαθύνουμε σε αποτελέσματα που προκύπτουν για τα γραμμικά συστήματα και συγκεκριμένα το διπλό ολοκληρωτή.

Θεωρούμε μη γραμμικό σύστημα σε affine μορφή

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.1)$$

ενώ

$$|u| \leq M \quad (4.2)$$

όπου $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}^n, g \in \mathbb{R}^n$, και επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε το κριτήριο που είναι ο τελικός χρόνος

$$J = t_f = \int_0^{t_f} 1 dt \quad (4.3)$$

Σχηματίζουμε τώρα τη χαμιλτονιανή \mathcal{H} του συστήματος

$$\mathcal{H} = 1 + \lambda^T (f(x) + g(x)u) \quad (4.4)$$

Όπου λ είναι τα costates (συντελεστές Lagrange). Για τις βέλτιστες τιμές των states x^* , costates λ^* και input u^* θα ισχύει

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \right)_* = f(x^*) + g(x^*)u^* \\ \lambda^* &= - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right)_* \end{aligned} \quad (4.5)$$

Με συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} x^*(0) &= x_0 \\ x^*(t_f) &= x_d \end{aligned} \quad (4.6)$$

με x_d η επιθυμητή τελική κατάσταση. Η βέλτιστη είσοδος u^* δίνεται από τη συνθήκη Pontryagin

$$\mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda^*) \leq \mathcal{H}(x^*, u, \lambda^*) \quad (4.7)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την ανισότητα

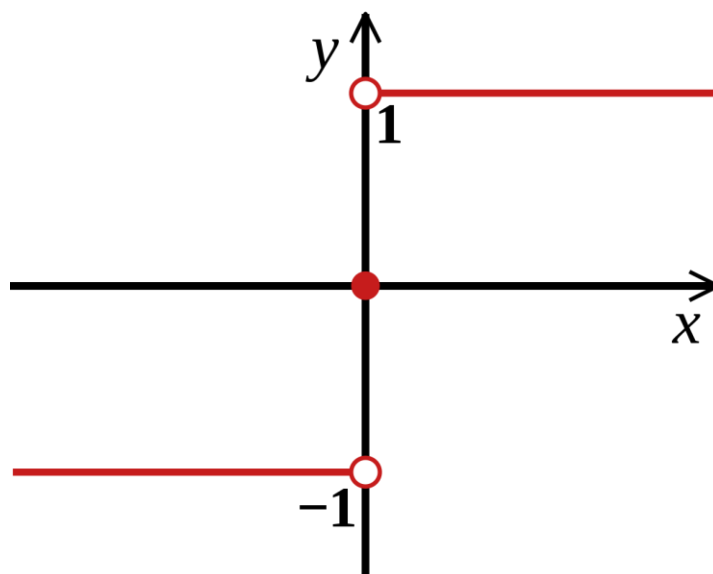
$$\lambda^{*T} g(x^*) u^* \leq \lambda^{*T} g(x^*) u \quad (4.8)$$

η λύση της οποίας είναι

$$u^* = \min_{|u| \leq M} \{ \lambda^{*T} g(x^*) u \} \quad (4.9)$$

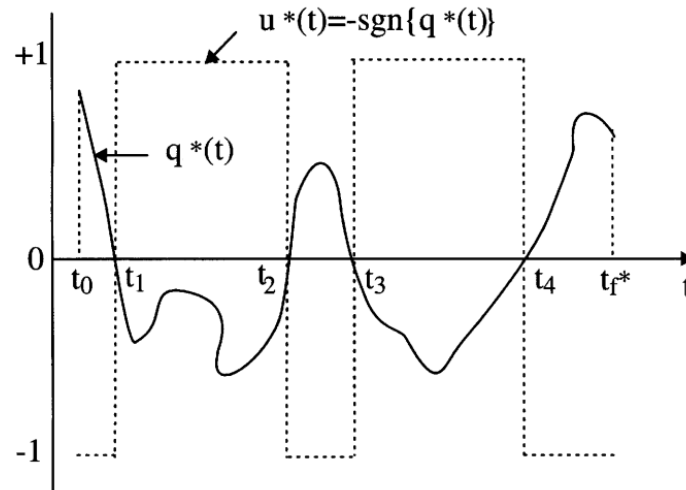
το οποίο είναι ισοδύναμο με τη λύση

$$u^* = -M \operatorname{sgn}(q^*(t)) \quad (4.10)$$



Εικόνα 4.1: Συνάρτηση προσήμου

με $q^*(t) = g^T(x^*(t)) \lambda^*(t)$. Ο έλεγχος αυτής της μορφής λέγεται Bang-Bang διότι το σήμα εισόδου θα είναι βρίσκεται είτε στη μέγιστη δυνατή τιμή του είτε στην ελάχιστη, δηλαδή $u = \pm M$. Η αλλαγή από το ένα άκρο στο άλλο ονομάζεται switch. Για ένα καλώς ορισμένο σύστημα τα singularities τα οποία εμφανίζονται όταν $q^* = 0$ έχουν μηδενικό μέτρο. Για τα γραμμικά συστήματα αρκεί το σύστημα να είναι ελέγξιμο.



Εικόνα 4.2: Βέλτιστος έλεγχος ελαχίστου χρόνου για $M=1$

Η βελτιστοποίηση ελαχίστου χρόνου που ισοδυναμεί με τη λύση του παραπάνω προβλήματος συνοριακών συνθηκών είναι ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα και τις περισσότερες φορές είναι αδύνατη η εύρεση τόσο αναλυτικής λύσης όσο και αριθμητικής. Η δυσκολία στην εύρεση αριθμητικής λύσης έγκειται στο γεγονός ότι η διαφορική είναι εν γένει υψηλοβάθμια, πεπλεγμένη και μη γραμμική καθώς και ότι εμφανίζεται η συνάρτηση προσήμου η οποία είναι ασυνεχής καθιστώντας τις κλασικές προσεγγίσεις αδύναμες. Αυτό αντιμετωπίζεται χρησιμοποιώντας συνεχείς προσεγγίσεις τέτοιων συναρτήσεων όπως περιγράφεται στο άρθρο των [S. N. Avvamukov και Yu K. Kiselev]. Στη γραμμική περίπτωση η διαφορική μπορεί να λυθεί θεωρητικά μέσω των γενικευμένων λύσεων Filippov.

Ωστόσο, το αποτέλεσμα που θα δώσει η αριθμητική λύση θα είναι στην καλύτερη ένα σήμα εισόδου σε ανοικτό βρόχο, το οποίο είναι λιγότερο σθεναρό σε σχέση με έναν ελεγκτή κλειστού βρόχου. Διαθέτουμε αναλυτικά αποτελέσματα που να οδηγούν στην κατασκευή ελεγκτή κλειστού βρόχου για γραμμικά συστήματα μέχρι 2^{ns} τάξης και για πολύ απλά συστήματα 3^{ns} τάξης. Επομένως, η εφαρμογή αυτής της τεχνικής βέλτιστου ελέγχου για το υψηλής τάξης και μη γραμμικό μοντέλο του τετρακοπτέρου είναι εξαιρετικά δύσκολη. Ως εκ τούτου, στη συνέχεια, αναφέρονται αναλυτικά αποτελέσματα για το μοντέλο του διπλού ολοκληρωτή και στη συνέχεια με βάση αυτά θα γίνει προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος ελαχίστου χρόνου για το για τα τετρακόπτερα.

4.2 Η περίπτωση του διπλού ολοκληρωτή

Ο διπλός ολοκληρωτής αποτελεί το πιο απλό μη τετριμμένο σύστημα 2^{ης} τάξης και περιγράφεται ως εξής

$$\ddot{x} = u \quad (4.11)$$

Αν και απλό αυτό το μοντέλο έχει μεγάλη αξία από φυσικής άποψης καθώς αναπαριστά το 2^ο νόμο του Νεύτωνα $m\ddot{x} = F$ για κανονικοποιημένη μάζα και εξωτερική διέγερση. Ορίζοντας σαν καταστάσεις τη θέση $x_1 = x$ και την ταχύτητα $x_2 = \dot{x}$ το σύστημα γράφεται

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad (4.12)$$

Το οποίο είναι ένα γραμμικό σύστημα με πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ακολουθώντας για αυτό το σύστημα την ίδια διαδικασία με πριν θεωρώντας τον περιορισμό στην είσοδο $|u| \leq M$, προκύπτουν οι βέλτιστες τροχιές για τα states

$$\dot{x}^* = Ax^* + Bu^* \quad (4.13)$$

και για τα costates

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1}\right)_* = 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2}\right)_* = -\lambda_1^* \end{aligned} \quad (4.14)$$

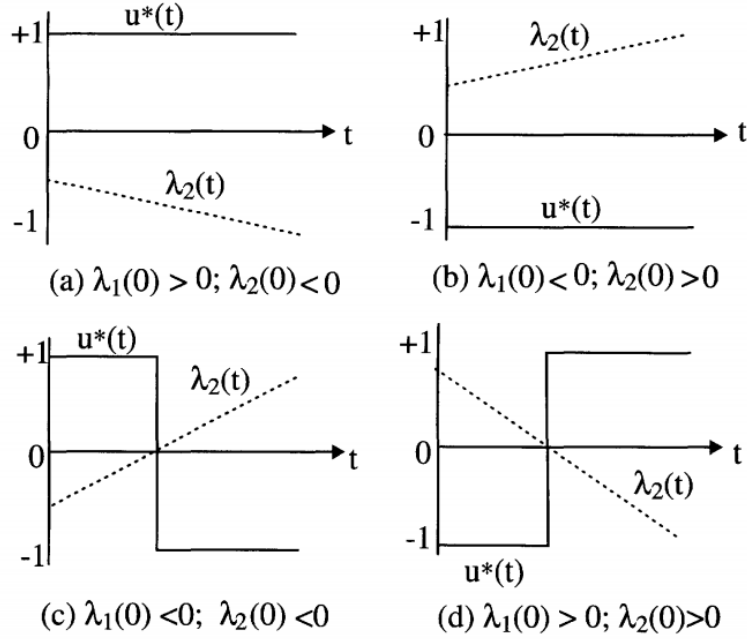
Λύνοντας την παραπάνω διαφορική έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda_1^*(t) &= \lambda_1^*(0) \\ \lambda_2^*(t) &= \lambda_2^*(0) - \lambda_1^*(0)t \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ο βέλτιστος έλεγχος δίνεται σύμφωνα με (4.10) για $g(x) = B$ ως

$$u^*(t) = -M \operatorname{sgn}(\lambda_2^*(t)) \quad (4.16)$$

Η βέλτιστη τροχιά $\lambda_2^*(t)$ είναι μονότονη σύμφωνα με την (4.15) και επομένως θα υπάρχει το πολύ μία αλλαγή προσήμου και επομένως το πολύ ένα switch στην είσοδο. Άρα οι δυνατές είσοδοι είναι $\{+M\}, \{-M\}, \{+M, -M\}, \{-M, M\}$.



Εικόνα 4.3: Πιθανά costates και αντίστοιχες εισοδοι για $M=1$

Ακολουθεί η αναλυτική λύση για το παραπάνω πρόβλημα συνοριακών συνθηκών. Η ανάλυση αυτή παραλείπεται καθώς μπορεί να βρεθεί στα περισσότερα βιβλία Βέλτιστου Ελέγχου, όπως αυτά των Kirk, Naidu, Athans & Falb, Καραμπετάκη. Ως τελική κατάσταση θα ληφθεί η αρχή των αξόνων. Δηλαδή $(x_d, \dot{x}_d) = (0, 0)$. Παρακάτω, αναφέρονται οι βασικές έννοιες της λύσης.

Έστω η συνάρτηση αλλαγής (switching function)

$$\gamma_M(x_1(t), x_2(t)) := x_1 + \frac{1}{2M} x_2 |x_2| \quad (4.17)$$

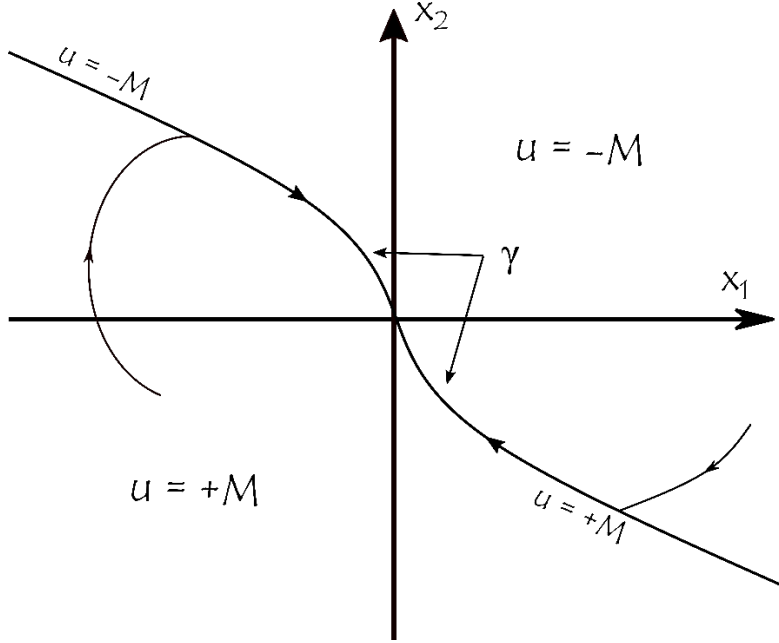
Η λύση κλειστού βρόχου δίνεται ως εξής

$$u = u_M^*(\gamma, x_1, x_2) := \begin{cases} -M \operatorname{sgn}(\gamma) & \gamma \neq 0 \\ M \operatorname{sgn}(x_1) & \gamma = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Η συνάρτηση u^* υποδεικνύει τον Bang-Bang έλεγχο για το διπλό ολοκληρωτή. Ο ελεγκτής οδηγεί το σύστημα από την αρχική κατάσταση στην αρχή των αξόνων. Στην περίπτωση που επιθυμούμε να φτάσουμε σε κάποιο επιθυμητό σημείο x_d ορίζουμε τις νέες καταστάσεις $x'_1 = x_1 - x_d$, $x'_2 = x_2$ και οδηγούμε μέσω του παραπάνω ελεγκτή το νέο σύστημα στην αρχή των αξόνων και συνεπώς στην επιθυμητή θέση. Άρα το πρόβλημα σύγκλισης στην αρχή των αξόνων είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα reference following.

Η καμπύλη $\gamma = 0$ ονομάζεται καμπύλη αλλαγής (switching curve). Αν το διάνυσμα κατάστασης ξεκινήσει πάνω σε αυτή την καμπύλη τότε θα παραμείνει μέχρι τέλους και δε θα υπάρχει αλλαγή (switch) στην είσοδο. Αν το σύστημα δε ξεκινήσει πάνω στην καμπύλη, τότε η είσοδος ξεκινάει με μία ακραία τιμή και

μόλις γίνει η τομή με την καμπύλη η είσοδος αλλάζει στην άλλη ακραία τιμή μέχρι το τέλος. Όπως αναφέρθηκε, θα υπάρξει το πολύ μία αλλαγή.



Εικόνα 4.4: Καμπύλη αλλαγής (switching function) γ και βέλτιστες τροχιές για διαφορετικές αρχικές συνθήκες.

Η λύση ανοικτού βρόχου θα είναι

$$u^*(t) = v^*(t) := \begin{cases} -M \operatorname{sgn}(\gamma(0)) & t \in [0, t_s] \\ M \operatorname{sgn}(\gamma(0)) & t \in (t_s, t_f] \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\gamma(0) = x_{10} + \frac{1}{2M} x_{20} |x_{20}| \quad (4.20)$$

Ενώ ο τελικός χρόνος (final time) και ο ενδεχόμενος χρόνος αλλαγής (switching time) υπολογίζονται ως

$$t_f = \begin{cases} \frac{x_{20}}{M} + \sqrt{\frac{4x_{10}}{M} + \frac{2x_{20}^2}{M^2}} & \gamma(0) > 0 \\ -\frac{x_{20}}{M} + \sqrt{-\frac{4x_{10}}{M} + \frac{2x_{20}^2}{M^2}} & \gamma(0) < 0 \\ \frac{|x_{20}|}{M} & \gamma(0) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

και

$$t_s = \frac{1}{2} \left(t_f - \operatorname{sgn}(\gamma(0)) \frac{x_{20}}{M} \right) \quad (4.22)$$

Όπου $[x_{10} \ x_{20}]^T = [x_1(0) \ x_2(0)]^T$. Στη συνηθισμένη περίπτωση εκκίνησης με μηδενική ταχύτητα $x_{20} = 0$, οι χρόνοι απλοποιούνται ως ακολούθως

$$\begin{aligned} t_s &= \sqrt{\frac{|x_{10}|}{M}} \\ t_f &= 2 t_s \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.3 Βέλτιστος έλεγχος ελαχίστου χρόνου για τετρακόπτερο UAV

4.3.1 Διατύπωση του προβλήματος

Ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου συγκροτείται από ένα κριτήριο βελτιστοποίησης, τους περιορισμούς και το μοντέλο αναφοράς. Στην περίπτωση μας η παράμετρος βελτιστοποίησης είναι ο τελικός χρόνος t_f . Το μοντέλο έχει κατασκευαστεί στο Κεφάλαιο 2 και περιγράφεται από τη (3.36).

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (c_\phi s_\theta) u_1 \\ \ddot{y} &= (-s_\phi) u_1 \\ \ddot{z} &= c_\phi c_\theta u_1 - g \\ \ddot{\phi} &= u_2 \\ \ddot{\theta} &= u_3 \end{aligned}$$

Διαθέτουμε τους περιορισμούς κατάστασης

$$\begin{aligned} |\phi| &\leq \phi_{MAX} < \frac{\pi}{2} \\ |\theta| &\leq \theta_{MAX} < \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

ενώ οι περιορισμοί εισόδου μοντελοποιούνται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_1 \leq M_1 \\ |u_2| &\leq M_2 \\ |u_3| &\leq M_3 \end{aligned} \quad (4.25)$$

που εξάγονται στο Παράρτημα Β και οφείλονται στην πεπερασμένη γωνιακή ταχύτητα των προπελών. Εξαιτίας της συμμετρίας στη διάταξη θεωρείται $M_1 = M_2 = M$.

Σε αυτήν τη διπλωματική παρουσιάζουμε μία στρατηγική ελέγχου κλειστού βρόχου η οποία λύνει το πρόβλημα βελτιστοποίησης ελαχίστου χρόνου,

επιτυγχάνοντας σχεδόν βέλτιστη λύση. Στην πληθώρα των αλγορίθμων βέλτιστου ελέγχου για το πρόβλημα TOMP (Time Optimal Motion Planning) σε τετρακόπτερα, προτείνεται η αριθμητική βελτιστοποίηση ενός κριτηρίου με περιορισμούς, σε λύση. Αυτές οι τεχνικές «υποφέρουν» από υψηλό κόστος επεξεργασίας καθώς απαιτούν υπολογιστικά βαρύνουσες τεχνικές βελτιστοποίησης όπως ο Μη Γραμμικός Προγραμματισμός (NLP). Με αυτόν τον τρόπο παράγεται offline μία βέλτιστη τροχιά στον χρόνο, η οποία αποτελεί το σήμα αναφοράς για τον ελεγκτή του τετρακοπίτερου. Ωστόσο, σε δυναμικά μεταβαλλόμενα περιβάλλοντα, μπορεί να εμφανιστούν απρόσμενες διαταραχές και μη μοντελοποιημένη δυναμική, οδηγώντας το τετρακόπτερο εκτός της πορείας που παράχθηκε offline. Η μόνη περίπτωση αυτές οι τεχνικές να είναι βιώσιμες σε πραγματικό χρόνο είναι μέσω συνεχούς ασύρματης επικοινωνίας με ένα ισχυρό υπολογιστικό σύστημα (workstation) το οποίο διαθέτει τους απαιτούμενους υπολογιστικούς πόρους. Με σκοπό την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος έχουν προταθεί ιδέες για RTOS (Real Time Operating Systems).

Αντιθέτως, το δικό μας σχήμα ελέγχου είναι κλειστού βρόχου με είσοδο αναφοράς τις συντεταγμένες του στόχου καθιστώντας το έτσι πιο εύρωστο και αποδοτικό σε συστήματα πραγματικού χρόνου με περιορισμένους πόρους. Αν και κλειστού βρόχου, ο τελικός χρόνος μπορεί να υπολογισθεί εντός κάποιων περιθωρίων σφάλματος. Ο αλγόριθμος αυτός ταιριάζει σε εφαρμογές αναζήτησης, παρακολούθησης, μεταφοράς και γενικότερα κάλυψης, ενώ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και από αλγορίθμους για Path Generation.

4.3.2 Ρυθμιστής υψομέτρου

Για το σύστημα υψομέτρου ένας Feedback Linearization ελεγκτής χρησιμοποιείται στη (5). Ο έλεγχος ορίζεται ως

$$u_1 = \frac{1}{c_\phi c_\theta} (u_z + g) \quad (4.26)$$

όπου u_z είναι ο νέος εικονικός έλεγχος με περιορισμό

$$-g \leq u_z \leq M_1 - g \quad (4.27)$$

μετατρέποντας τη δυναμική σε αυτή ενός διπλού ολοκληρωτή

$$\ddot{z} = u_z \quad (4.28)$$

Προκειμένου να επιτευχθεί η μετάβαση ελαχίστου χρόνου από την αρχική κατάσταση στην τελική θέση z_d θα χρησιμοποιήσουμε έλεγχο Bang-Bang όπως

περιγράφηκε προηγουμένως για το διπλό ολοκληρωτή. Η λύση θα είναι ίδιας μορφής (4.17) – (4.18) με μικρές διαφοροποιήσεις καθώς όπως φαίνεται από την (4.17) τα όρια δεν είναι συμμετρικά. Θέτουμε $[z_1 \ z_2]^T = [z - z_d \ \dot{z}]^T$ και

$$\gamma_z = z_1 + \frac{1}{\tilde{M}_1} z_2 |z_2| \quad (4.29)$$

και ο βέλτιστος έλεγχος θα είναι

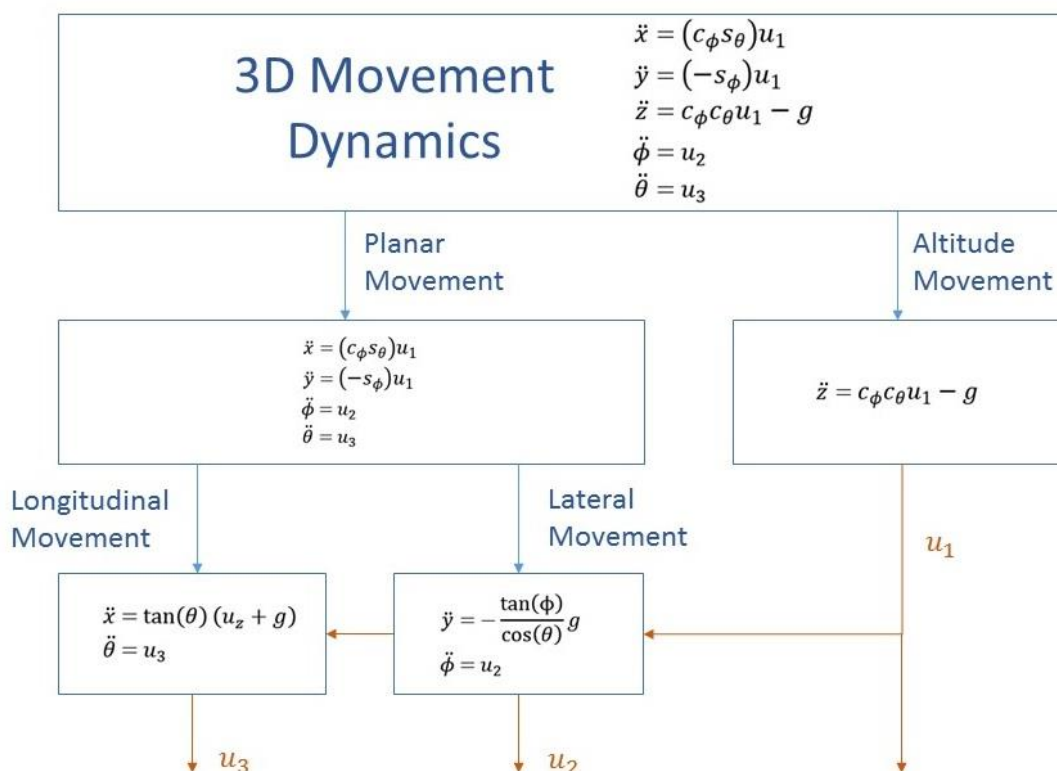
$$u_z = u_{\tilde{M}_1}^*(\gamma_z, z_1, z_2) \quad (4.30)$$

όπου

$$\tilde{M}_1 = g\mathbb{I}(z_2) + (M_1 - g)\mathbb{I}(-z_2) \quad (4.31)$$

με $\mathbb{I}(z)$ συνάρτηση ενεργοποίησης

$$\mathbb{I}(z) = \begin{cases} 1 & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \quad (4.32)$$



Εικόνα 4.5: Διάσπαση της δυναμικής του τετρακοπτήρου σε υποσυστήματα

4.3.3 Ρυθμιστής διαμήκους κίνησης

Σε αυτήν την υποενότητα παρουσιάζεται ο πυρήνας της ιδέας. Αντικαθιστώντας το έλεγχο u_1 από την προηγούμενη υποενότητα στο μοντέλο είναι εμφανές πως το σύστημα (x, θ) αποτελεί ένα ανεξάρτητο υποσύστημα υπεύθυνο για την διαμήκη κίνηση, δηλαδή την κίνηση στον άξονα x όπου θεωρήσαμε βρίσκεται η μπροστινή πλευρά του τετρακοπτέρου. Το υποσύστημα μοντελοποιείται ως

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \tan(\theta) (u_z + g) \\ \ddot{\theta} &= u_3\end{aligned}\quad (4.33)$$

Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να γίνει μία υπόθεση που θα απλοποιήσει το σύστημα ελαφρώς. Σε επιχειρήσεις παρακολούθησης τα Drones πρέπει να καλύψουν μεγάλες αποστάσεις παρατηρώντας και συλλέγοντας δεδομένα, ενώ κινούνται κυρίως στο επίπεδο $x - y$ χωρίς να αλλάζουν συνέχεια το υψόμετρό τους.

Υπόθεση. Ο εικονικός έλεγχος u_z είναι σταθερός κατά την κίνηση στο επίπεδο $x - y$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε πως $u_z = 0$ για το υπόλοιπο της ανάλυσης. Αυτό σημαίνει πως το Drone είναι ήδη στο επιθυμητό ύψος. Σε επόμενη ενότητα προτείνεται μια υβριδική μέθοδος η οποία χαλαρώνει σημαντικά αυτή τη συνθήκη χωρίς να αλλοιώνει την αποτελεσματικότητά της.

Ας θέσουμε τις καταστάσεις $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [x - x_d \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$ με x_d την επιθυμητή θέση. Η παραπάνω δυναμική γράφεται ως

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g \tan(x_3) \quad |x_3| \leq \pi/4 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= u_3 \quad |u_3| \leq M\end{aligned}\quad (4.34)$$

Αξιολογώντας τη σχέση με σκοπιά Back-stepping, ο όρος $g \tan(x_3)$ συμπεριφέρεται σαν έλεγχος για το σύστημα (x_1, x_2) . Με βάση αυτό το σύστημα χωρίζεται εικονικά σε δύο συστήματα διπλών ολοκληρωτών.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \quad |u| \leq g\end{aligned}\quad (4.35)$$

όπου

$$u = g \tan(x_3)\quad (4.36)$$

και

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= u_3 \quad |u_3| \leq M\end{aligned}\tag{4.37}$$

Η (4.37) περιγράφει τη δυναμική του εικονικού ελέγχου u . Αν απαιτήσουμε το σύστημα (x_3, x_4) να παράγει μόνο ακραία σήματα $x_{3d} = \pm M$, έτσι ώστε $u = \pm g$, τότε ο έλεγχος u μπορεί να θεωρηθεί Bang-Bang με καθυστέρηση για το υποσύστημα (x_1, x_2) . Για να επιταχυνθεί η επίτευξη της επιθυμητής γωνίας x_{3d} , ο έλεγχος u_3 πρέπει να επιλεχθεί και αυτόν να είναι Bang-Bang ώστε οι μεταβάσεις να γίνονται στον ελάχιστο χρόνο. Συνολικά, το σύστημα γωνίας (4.37) που οδηγείται από έλεγχο Bang-Bang παράγει κατάλληλο σήμα Bang-Bang (4.36) το οποίο τροφοδοτεί ένα εικονικό διπλό ολοκληρωτή (4.35). Καθώς το σύστημα (4.35) προσομοιάζει διπλό ολοκληρωτή θα πρέπει να χρειάζεται το πολύ ένα switch στον έλεγχο.

Για να λειτουργεί αυτό το σχήμα ελέγχου είναι απαραίτητο να ισχύει $M \geq 5g$ έτσι ώστε ο εσωτερικός βρόχος (x_3, x_4) να είναι τουλάχιστον 5 με 10 φορές πιο γρήγορος συγκριτικά με τον εξωτερικό βρόχο (x_1, x_2) το οποίο είναι πολύ σύνηθες στα Drone και υπάρχουν ενδεικτικά τιμές στο Παράρτημα Β. Αυτό είναι σημαντικό καθώς ο απαιτούμενο χρόνος παραγωγής του σήματος $x_3 = \pm \theta_{MAX}$ θα είναι αμελητέος για την πιο αργή δυναμική του υποσυστήματος (x_1, x_2) . Ένα πλεονέκτημα του αλγορίθμου είναι η εκτίμηση του τελικού χρόνου χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.22) – (4.24) με ανοχή κάποιου σφάλματος.

Συνοψίζοντας, η κεντρική ιδέα είναι πως ένας ελεγκτής Bang-Bang παράγει σήμα για ένα εικονικό ελεγκτή Bang-Bang. Το σχήμα αυτό ονομάζεται Cascaded Bang-Bang. Συνεπώς, υπάρχουν δύο υποσυστήματα τα οποία ξεχωριστά δουλεύουν στην λογική του βελτιστού χρόνου. Ωστόσο, δεν υπάρχει διαβεβαίωση πως η βελτιστότητα στα υποσυστήματα οδηγεί σε βελτιστότητα στο πλήρες σύστημα διαμήκους κίνησης. Πρόκειται για μία σχεδόν βέλτιστη λύση. Οι προσομοιώσεις είναι πολύ ενθαρρυντικές ενώ σε επόμενη ενότητα αποδεικνύεται η βελτιστότητα του αλγορίθμου.

Ο εικονικός Bang-Bang ελεγκτής ορίζεται ως

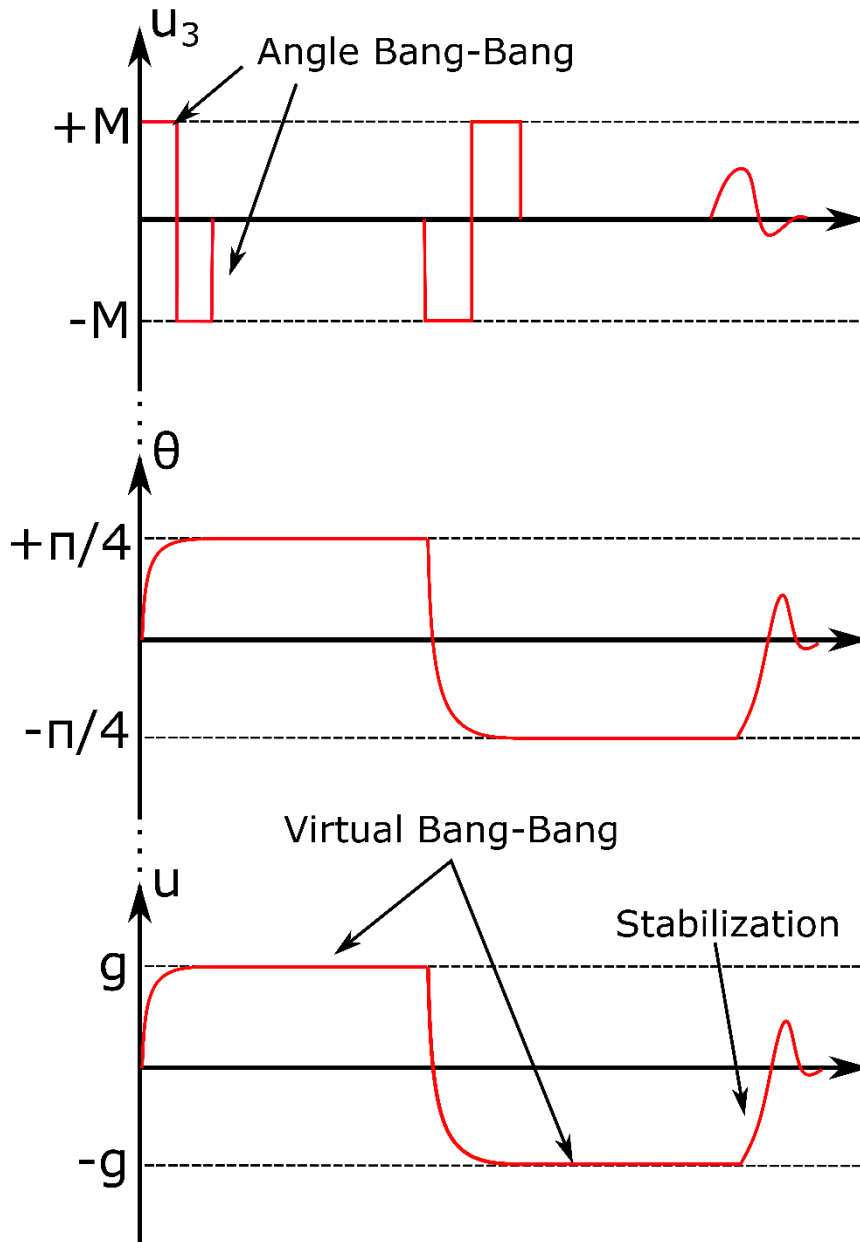
$$u = u_g^*(\gamma_x, x_1, x_2)\tag{4.38}$$

και η συνάρτηση αλλαγής (switching function) ως

$$\gamma_x = x_1 + \frac{1}{2g} x_2 |x_2|\tag{4.39}$$

Έτσι είναι απαραίτητο η γωνία $x_3 (= \theta)$ να ακολουθεί το επιθυμητό σήμα u

$$\theta_d = \frac{\pi}{4} \text{sgn}(u)\tag{4.40}$$



Εικόνα 4.6: Απόκριση Cascaded Bang-Bang ελεγκτή στο χρόνο

Αντικαθιστώντας $x_3 = \theta - \theta_d$ ο εσωτερικός ελεγκτής Bang-Bang γράφεται

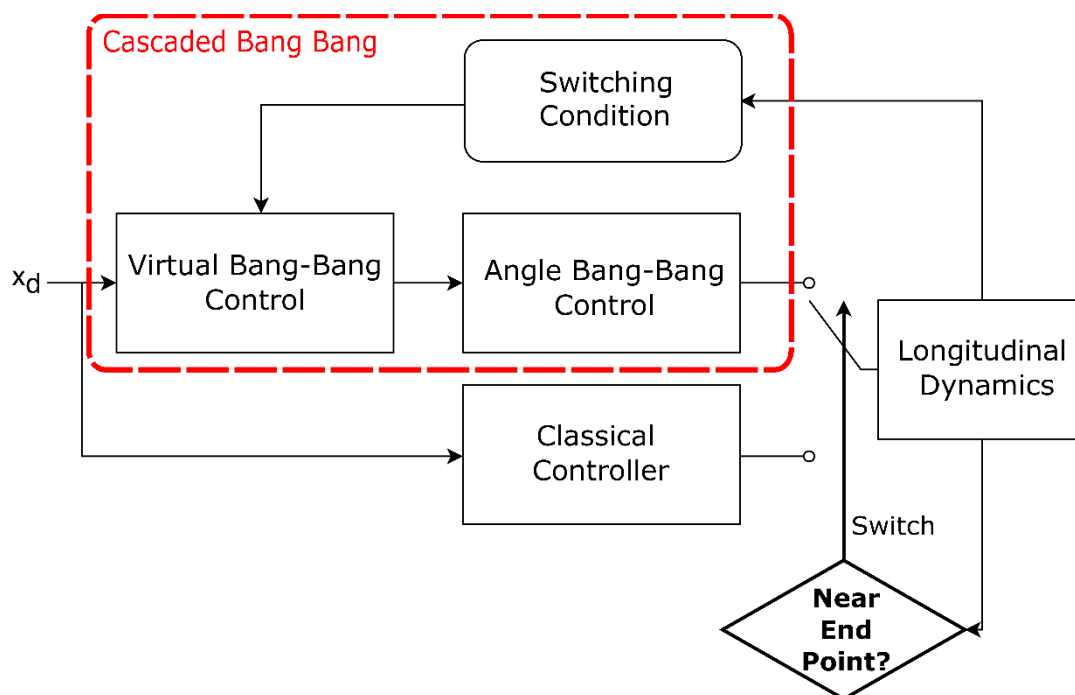
$$u_3 = u_M^*(\gamma_\theta, x_3, x_4) \quad (4.41)$$

Με

$$\gamma_\theta = x_3 + \frac{1}{2M} x_4 |x_4| \quad (4.42)$$

Αφού το σύστημα δεν είναι τέλειος διπλός ολοκληρωτής, δε θα σταματήσει στο επιθυμητό σημείο με μηδενική ταχύτητα. Για να αποφευχθεί αυτό, προτείνεται η

αλλαγή ελεγκτή, σε έναν πιο αργό μη γραμμικό ελεγκτή σαν αυτούς που περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα ώστε να υπάρξει επαρκής σταθεροποίηση του συστήματος στο τελικό σημείο.



Εικόνα 4.7: Σχήμα ελέγχου Cascaded Bang-Bang με μετάβαση σε μη γραμμικό ελεγκτή

4.3.4 Ρυθμιστής πλευρικής κίνησης

Η πλευρική δυναμική, δηλαδή η κίνηση στον άξονα y είναι παρόμοια με την διαμήκη που μελετήθηκε αλλά παρουσιάζει ανεπιθύμητο coupling. Οπότε, η βασική ιδέα παραμένει ίδια. Μετά την αντικατάσταση του ελέγχου u_1 στο σύστημα φαίνεται πως οι καταστάσεις (y, ϕ) ορίζουν ένα υποσύστημα που ορίζει την πλευρική κίνηση. Αυτό το υποσύστημα περιγράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\frac{\tan(\phi)}{\cos(\theta)} g \\ \ddot{\phi} &= u_2 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Εξαιτίας του συζευγμένου παράγοντα $1/\cos(\theta)$ πρέπει να διακριθούν 4 περιπτώσεις για τις ενδεχόμενες τιμές της γωνίας θ .

Περίπτωση 1. Δεν υπάρχει κίνηση στον άξονα x (δηλαδή $\theta = 0$) κατά τη μετάβαση. Σε αυτήν την περίπτωση, θεωρώντας τις καταστάσεις $[x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8]^T = [y \ -y_d \ \dot{y} \ \phi \ \dot{\phi}]$ το μοντέλο γράφεται ως

$$\begin{aligned}
\dot{x}_5 &= x_6 \\
\dot{x}_6 &= -g \tan(x_7) \quad |x_7| \leq \pi/4 \\
\dot{x}_7 &= x_8 \\
\dot{x}_8 &= u_9 \quad |u_2| \leq M
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Αυτό το πρόβλημα είναι όμοιο με το προηγούμενο πρόβλημα που λύσαμε με εικονικό έλεγχο $u = -g \tan(x_3)$ με $|u| \leq g$ και αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο λαμβάνοντας υπόψιν τον όρο (-1) στο u .

Περίπτωση 2. Υπάρχει συνεχής κίνηση στον άξονα x και συνεπώς $\theta = \pm\pi/4$. Εφόσον η γωνία θ σταθεροποιείται γρήγορα στις ακραίες τιμές, υποθέτουμε πως $\cos(\theta) = \sqrt{2}/2$. Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιώντας τις ίδιες καταστάσεις με πριν έχουμε το μοντέλο

$$\begin{aligned}
\dot{x}_5 &= x_6 \\
\dot{x}_6 &= -g\sqrt{2} \tan(x_7) \quad |x_7| \leq \pi/4 \\
\dot{x}_7 &= x_8 \\
\dot{x}_8 &= u_9 \quad |u_2| \leq M
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Αυτό το πρόβλημα είναι όμοιο με το προηγούμενο πρόβλημα που λύσαμε με εικονικό έλεγχο $u = -g\sqrt{2} \tan(x_3)$ με $|u| \leq g\sqrt{2}$ και αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο λαμβάνοντας υπόψιν τον όρο (-1) στο u .

Περίπτωση 3. Υπάρχει κίνηση στον άξονα x (δηλαδή $\theta = \pm\pi/4$) αλλά πριν ολοκληρωθεί η κίνηση στον άξονα y . Το σημείο x_d επιτυγχάνεται πριν από το y_d και έτσι $\theta = 0$ από εκείνη τη στιγμή. Ας θεωρήσουμε κίνηση στον άξονα x για το χρονικό διάστημα $[0, t_x]$. Έτσι έλεγχος Bang-Bang επιλέγεται με τα χαρακτηριστικά της δεύτερης περίπτωσης, δηλαδή $|u| \leq g\sqrt{2}$ για το διάστημα $[0, t_x]$ με αρχικές συνθήκες την αρχική κατάσταση. Έπειτα, επιλέγεται νέος έλεγχος Bang-Bang με τα χαρακτηριστικά της πρώτης περίπτωσης, δηλαδή $|u| \leq g$ χρησιμοποιώντας ως αρχικές συνθήκες για το νέο έλεγχο, την τρέχουσα κατάσταση.

Περίπτωση 4. Τα επιθυμητά σημεία x_d, y_d επιτυγχάνονται σε πολύ κοντινές χρονικές περιόδους και δεν έχουν νόημα οι αλλαγές της περίπτωσης 3. Σε αυτήν την περίπτωση στο τέλος της κίνηση ενεργοποιείται ο μη γραμμικός ελεγκτής ο οποίος μπορεί να διαχειριστεί την κίνηση και στους δύο άξονες.

4.4 Βελτίωση στρατηγικής ελέγχου

4.4.1 Σημειώσεις εφαρμογής

Αναφέρονται προτάσεις για την ενσωμάτωση του παραπάνω ελεγκτή σε μικρο-υπολογιστικό περιβάλλον. Σε ένα πραγματικό σύστημα με διακριτές μετρήσεις είναι σχεδόν αδύνατο να επιτευχθεί με ακρίβεια η συνθήκη αλλαγής $\gamma = 0$ που είναι καίριο σημείο για τον έλεγχο κλειστού βρόχου. Εντούτοις προτείνεται ο έλεγχος να τροποποιηθεί σύμφωνα με τα παρακάτω

$$u = u_M^*(\gamma, x_1, x_2) = \begin{cases} -M \operatorname{sgn}(\gamma) & |\gamma| > \epsilon \\ M \operatorname{sgn}(x_1) & |\gamma| \leq \epsilon \end{cases} \quad (4.46)$$

Η σταθερά ϵ πρέπει να είναι μικρή και να παράγει ικανοποιητικά αποτελέσματα προσομοίωσης. Δεν είναι υποχρεωτικό αυτή η σταθερά να είναι σταθερή για κάθε ελεγκτή Bang-Bang. Για παράδειγμα, η σταθερά ϵ που χρησιμοποιείται στον ελεγκτή γωνίας θα πρέπει να είναι μικρότερη από αυτή που χρησιμοποιείται στον ελεγκτή θέσης επειδή το πεδίο ορισμού της γωνίας είναι περιορισμένο και μικρό σε αντίθεση με το πεδίο ορισμού της θέσης. Στις προσομοιώσεις χρησιμοποιούνται οι τιμές $\epsilon_\theta = \epsilon_\phi = 0.01$ και $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0.1$. Η επιλογή αυτή μπορεί να αλλάξει ώστε να εγγυάται σθεναρότητα ως προς το θόρυβο των μετρήσεων.

4.4.2 Βελτιστοποίηση απόφασης αλλαγής (STO)

Πρόκειται για τη βελτιστοποίηση της ενδεχόμενης στιγμής που γίνεται αλλαγή από το ένα άκρο του ελέγχου στο άλλο. Η βελτιστοποίηση αυτή αφορά την κίνηση στο επίπεδο $x - y$. Θα παρουσιαστεί η μέθοδος για την διαμήκη κίνηση και με τελείως όμοιο τρόπο μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση της πλευρικής κίνησης.

Με βάση της θεωρία Bang-Bang η πιθανή και μία αλλαγή στον έλεγχο αποφασίζεται όταν ικανοποιείται η συνθήκη $\gamma = 0$. Όταν ο έλεγχος μεταβαίνει από το μέγιστο σημείο στο ελάχιστο, η γωνία ϕ πρέπει να μεταβεί από θ_{MAX} σε $-\theta_{MAX}$. Για να γίνει αυτό ενεργοποιείται η είσοδος u_3 ως εξής $u_3 = \{-M, +M\}$. Ο χρόνος αλλαγής από $-M \rightarrow M$, t_s και ο χρόνος ολοκλήρωσης της αλλαγής γωνίας δίνονται με ακρίβεια από τις σχέσεις (4.21) – (4.23). Κατά τη διάρκεια αυτής της μετάβασης η θέση και η ταχύτητα αρχίζουν και μεταβάλλονται ελαφρώς μαζί με τη γωνία και αυτό θα πρέπει να συμπεριληφθεί στη σχεδίαση.

Γραμμικοποιώντας το σύστημα (4.34) προκύπτει

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= u_3 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Μετά τη γραμμικοποίηση το σύστημα μπορεί να ολοκληρωθεί και να βρεθεί η αναλυτική λύση του στο χρόνο. Για ακρίβεια η θεώρηση $\tan(x_3) \cong x_3$ γύρω από το σημείο $x_3 = 0$ δεν απέχει από την πραγματικότητα ιδιαίτερα για μικρές γωνίες. Ο έλεγχος θα είναι $u_3 = -M$ για $t \in [t_o, t_s)$ όπου t_o είναι η στιγμή που ξεκινάει η αλλαγή της γωνίας. Τη γνωστή στιγμή t_s οι καταστάσεις θα είναι

$$\begin{aligned} x_1(t_s) &= x_{10} + x_{20} \cdot t_s + g \left(\frac{x_{30}}{2} t_s^2 + \frac{x_{40}}{6} t_s^3 + \frac{M}{24} t_s^4 \right) \\ x_2(t_s) &= x_{20} + g \left(x_{30} \cdot t_s + \frac{x_{40}}{2} t_s^2 + \frac{M}{6} t_s^3 \right) \\ x_3(t_s) &= x_{30} + x_{40} \cdot t_s + \frac{1}{2} M t_s^2 \\ x_4(t_s) &= x_{40} + M \cdot t_s \end{aligned} \quad (4.48)$$

με x_{i0} τις καταστάσεις τη χρονική στιγμή t_o . Ο έλεγχος θα είναι $u_3 = M$ για $t \in (t_s, t_f)$. Ακολουθώντας τον ίδιο υπολογισμό αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις το t_s με $t_f - t_s$ και τα x_{i0} με τις καταστάσεις $x_i(t_s)$ μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια τα $x_1(t_f), x_2(t_f)$ ενώ $x_3(t_f) = -\theta_{MAX}$ & $x_4(t_f) = 0$.

Επομένως, για να ελαχιστοποιήσουμε τα φαινόμενα μετάβασης η συνθήκη που πρέπει να ελέγχεται online δεν είναι η $\gamma(x_1(t), x_2(t)) = 0$ αλλά η $\gamma(x_1(t + t_f), x_2(t + t_f)) = 0$ με τον τρόπο που περιγράφεται παραπάνω. Με αυτόν τον τρόπο είναι εξασφαλισμένο πως όταν το σύστημα φτάσει στο σημείο που θα αποφασίζεται η αλλαγή με βάση τη συνθήκη $\gamma = 0$ ο έλεγχος θα είναι ήδη $u = -g$ χωρίς καμία καθυστέρηση καθώς η μετάβαση έχει γίνει ήδη. Αυτή η διαδικασία έχει κόστος υπολογισμού $\mathcal{O}(1)$ και είναι ο μόνος απαιτούμενος υπολογισμός.

4.5 Αξιολόγηση της στρατηγικής ελέγχου

4.5.1 Ασυμπτωτική Βελτιστότητα

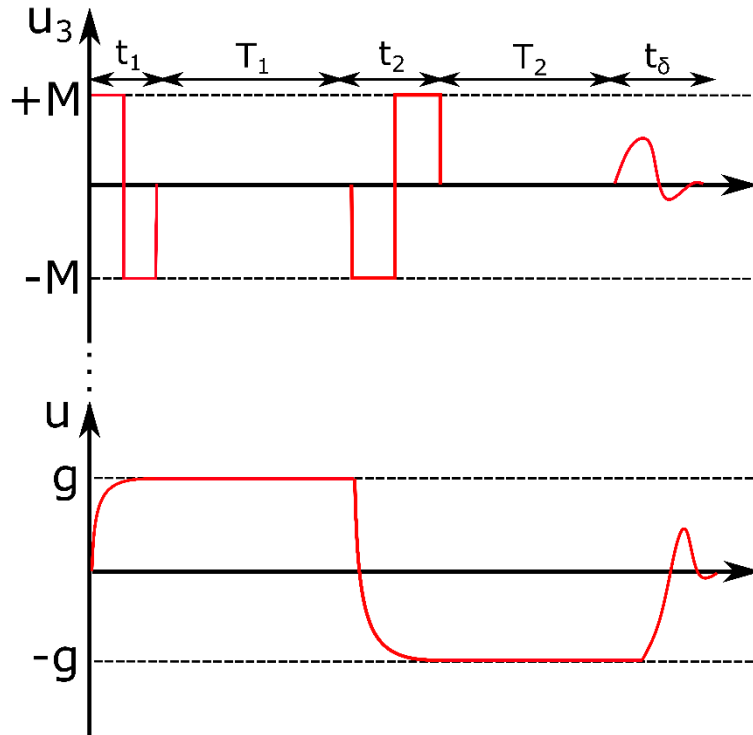
Ο χρόνος που χρειάζεται για να εκτελεστεί μια εργασία εξαρτάται από την απόσταση που πρέπει να καλυφθεί. Σε αυτό το σημείο θα διακριθούν τρία είδη τελικού χρόνου. Ιδανικά το σύστημα (4.35) θα συμπεριφέρεται σα διπλός ολοκληρωτής και οι χρόνοι αλλαγής και ολοκλήρωσης T_s, T_f μπορούν να υπολογιστούν από τις (4.21) – (4.23). Επίσης, υπάρχει ο χρόνος τ_f που αντιστοιχεί στον δικό μας αλγόριθμο. Οπότε το ακόλουθο είναι αληθές

$$T_f \leq \tau_f \leq t_f \quad (4.49)$$

Ο τελικός χρόνος μπορεί να δοθεί σύμφωνα με την Εικόνα 4.8 ως

$$t_f = t_1 + T_1 + t_2 + T_2 + t_\delta \quad (4.50)$$

Όπου t_δ είναι απαιτούμενο χρόνος για το κομμάτι της σταθεροποίησης στο τέλος και



Εικόνα 4.8: Χρονικές περιόδους της κίνησης

$$t_1 = 2 \sqrt{\frac{\theta_{MAX}}{M}} \quad (4.51)$$

$$t_2 = 2 \sqrt{\frac{2\theta_{MAX}}{M}}$$

είναι οι περιόδους που χρειάζονται για την αλλαγή της γωνίας. Οι χρόνοι T_1 και T_2 αντιστοιχούν στις περιόδους με έλεγχο $u = MAX$ και $u = -MAX$ αντιστοίχως. Για ένα διπλό ολοκληρωτή, που δε θα υπήρχαν μεταβατικά φαινόμενα οι χρόνοι αυτοί υπολογίζονται ως

$$T_1^p = \sqrt{\frac{|x_d|}{g}}$$

$$T_2^p = \sqrt{\frac{|x_d|}{g}} \quad (4.52)$$

$$T_f^p = T_1^p + T_2^p = T_f$$

Στον αλγόριθμό μας, όμως, η θέση και η ταχύτητα αρχίζουν να αυξάνονται κατά το μεταβατικό στάδιο $[0, t_1]$ και επομένως το σύστημα θα φτάσει στην καμπύλη αλλαγής γρηγορότερα από ότι αν ξεκινούσε με μηδενικές συνθήκες. Άρα

$$T_1 \leq T_1^p \quad (4.53)$$

Κατά το μεταβατικό στάδιο $[(t_1 + T_1), (t_1 + T_1) + t_2]$ το σύστημα αρχίζει να φρενάρει με αποτέλεσμα να φτάνει στην αρχή των αξόνων πιο γρήγορα σε σχέση με το άμα το φρενάρισμα ξεκινούσε τη στιγμή at $t = (t_1 + T_1) + t_2$. Άρα

$$T_2 \leq T_2^p \quad (4.54)$$

Συνολικά από τις (4.51), (4.53) – (4.54)

$$t_f \leq t_1 + t_2 + t_\delta + T_f \quad (4.55)$$

Άρα θα ισχύει

$$T_f \leq t_f \leq t_1 + t_2 + t_\delta + T_f \quad (4.56)$$

Διαιρούμε με T_f και αντικαθιστούμε τις τιμές

$$1 \leq \frac{t_f}{T_f} \leq \frac{t_f}{T_f} \leq 1 + \frac{\left(t_\delta \sqrt{g} + 2(1 + \sqrt{2}) \sqrt{\frac{\theta_{MAX} g}{M}} \right)}{\sqrt{|x_d|}} \quad (4.57)$$

Είναι εμφανές πως όσο $x_d \uparrow$ όχι μόνο $t_f \rightarrow t_f$ αλλά επίσης $t_f, \tau_f \rightarrow T_f$. Με άλλα λόγια, ο αλγόριθμος όχι μόνο προσεγγίζει το βέλτιστο χρόνο αλλά είναι και όσο γρήγορος μπορεί να είναι ένας ολοκληρωτής 2^{ης} τάξης για μεσαίες προς μεγάλες αποστάσεις. Αυτό συμβαίνει διότι στις μεγάλες αποστάσεις τα μεταβατικά φαινόμενα είναι αμελητέα. Εξασφαλίζοντας $M \gg g$ η σύγκλιση επιταχύνεται.

4.5.2 Προσομοιώσεις

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων είναι πολύ ενθαρρυντικά για την αποτελεσματικότητα του σχήματος ελέγχου. Τυπικές τιμές για τις μηχανικές παραμέτρους ενός τετρακοπτέρου παρατίθενται στον ΠΙΝΑΚΑ 1 και με βάση αυτές γίνεται η προσομοίωση. Τα σύγχρονα Drone χρησιμοποιούν Brushless DC motors (BLDC) για γρήγορη απόκριση και αυξημένη γωνιακή ταχύτητα στις προπέλες. Στην προσομοίωση θεωρούμαι το ενδεικτικό μοντέλο για DC motor όπως αναφέρεται στην [36]

$$\dot{\Omega} = A_p \Omega + B_p V + C_p \quad (43)$$

Όπου Ω δηλώνει το διάνυσμα των γωνιακών ταχυτήτων στους ρότορες. Οι παράμετροι του μοντέλου περιγράφονται στον ΠΙΝΑΚΑ II.

ΠΙΝΑΚΑΣ I
Quadcopter Mechanical Parameters

Symbol	Quantity	Value
m	Mass	1 [kg]
I_x	Moment of inertia about x Axis	$8.1 \cdot 10^{-3}$ [kg m ²]
I_y	Moment of inertia about y Axis	$8.1 \cdot 10^{-3}$ [kg m ²]
I_z	Moment of inertia about z Axis	$14.2 \cdot 10^{-3}$ [kg m ²]
l	Center of quadrotor to center of propeller distance	0.24 [m]
b	Thrust factor	$54.2 \cdot 10^{-6}$ [kg m]
d	Drag factor	$1.1 \cdot 10^{-6}$ [kg m ²]

ΠΙΝΑΚΑΣ II
BLDC Motor Parameters

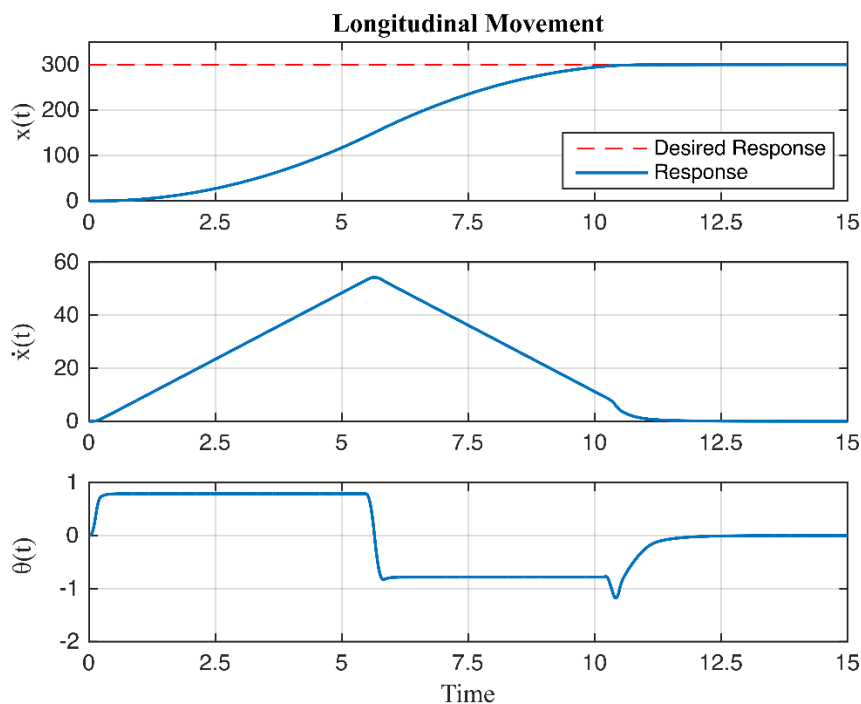
Symbol	Quantity	Value
V_N	Propeller's nominal voltage	14 [V]
A_P	Propeller's speed coefficient	-22.7 [rad/s]
B_P	Input voltage coefficient	514 [rad ² /s ² V ⁻¹]
C_P	Propeller's constant coefficient	494 [rad ² /s ²]
Ω_{MAX}	Propeller's max speed	≥ 8000 [rpm]
Ω_H	Hovering speed	2000 [rpm]

Θα μελετήσουμε την απόκριση στην περίπτωση της κίνησης στο επίπεδο και της κίνησης στον κάθετο άξονα. Το πρώτο «πείραμα» έχει σαν επιθυμητό στόχο το σημείο $(x_d, y_d) = (300, 200)$ με αρχικές τιμές $x(0) = \dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0$ και φράγμα εισόδου $M = 60$. Οι τιμές διαλέγονται μεγάλες γιατί ο έλεγχος λειτουργεί καλύτερα σε μεγάλες αποστάσεις. Για να διαπιστωθεί η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου παρατίθενται και οι τελικοί χρόνοι για διπλό ολοκληρωτή.

$$T_x = 2 \sqrt{\frac{|x_d|}{g}} = 10.95 \text{ sec}$$

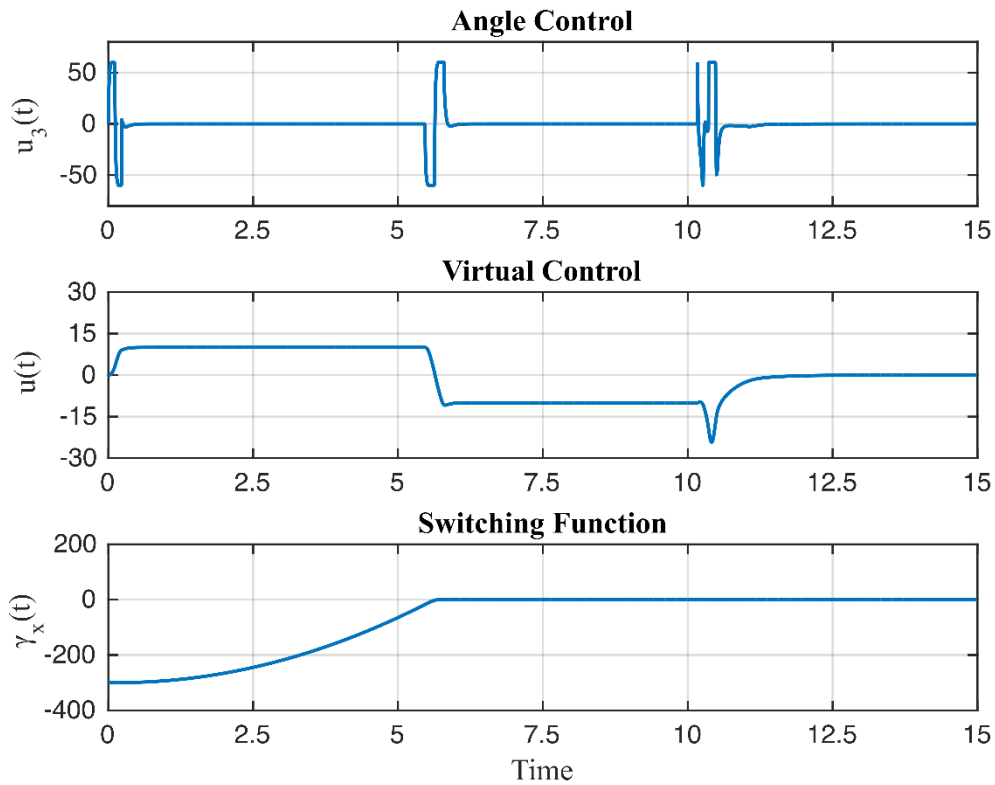
$$T_y = 2 \sqrt{\frac{|y_d|}{g\sqrt{2}}} = 7.52 \text{ sec} \quad (44)$$

Σύμφωνα με το παρακάτω γράφημα φαίνεται πως ο τελικός χρόνος που προκύπτει από το σχήμα ελέγχου είναι πολύ κοντά στον ιδανικό. Είναι διακριτό πως κοντά στο τέλος υπάρχει μια ανωμαλία. Αυτό οφείλεται στην έναρξη λειτουργίας του μη γραμμικού ελέγχου για σταθεροποίηση. Στο χρόνο $t = T_x$ το



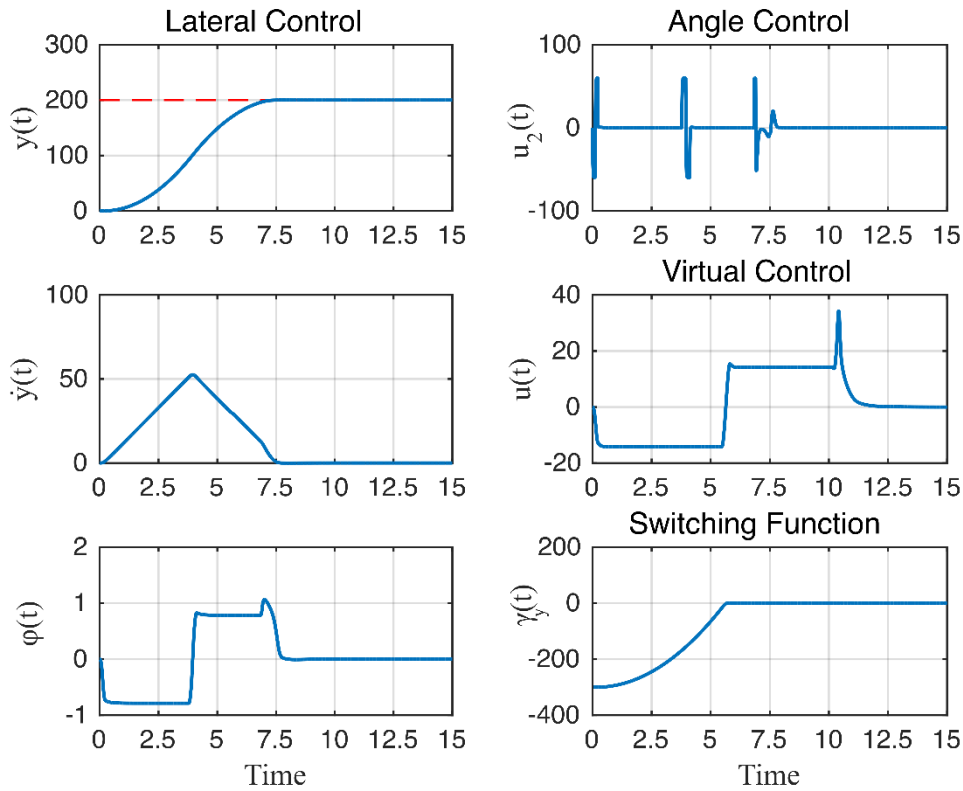
Εικόνα 4.9: Διαμήκης κίνηση: Θέση, Ταχύτητα, Γωνία

σφάλμα θέσης είναι $\varepsilon_x, \varepsilon_y \sim 0.1$ και το σχετικό σφάλμα $\sigma_x, \sigma_y \sim 10^{-3}$ τα οποία είναι αμελητέα. Η απόκριση του σχήματος ελέγχου είναι η ακόλουθη.



Εικόνα 4.10: Έλεγχος διαμήκους κίνησης: Ελεγκτές Bang-Bang και συνάρτηση αλλαγής.

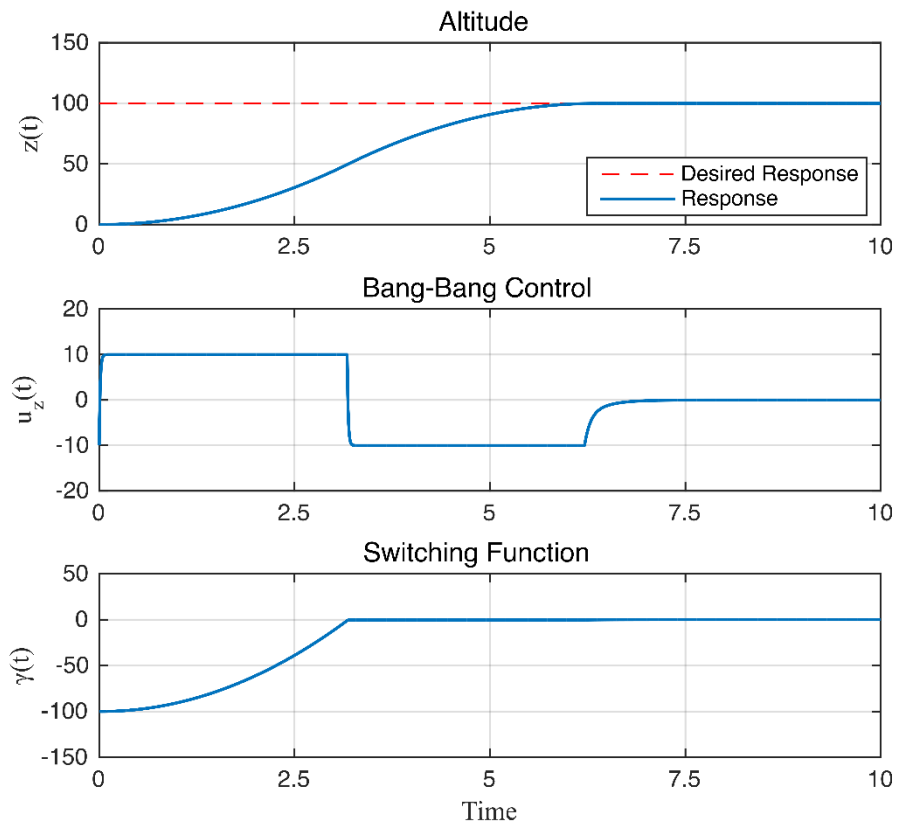
Παρατηρούμε πως όταν $\gamma = 0$ ο εικονικός έλεγχος αλλάζει όπως ήταν επιθυμητό. Ο εικονικός έλεγχος είναι σχεδόν Bang-Bang. Γρηγορότερος έλεγχος γωνίας, δηλαδή μεγαλύτερο φράγμα M οδηγεί σε βελτίωση. Η ανωμαλία στο τέλος οφείλεται στο μη γραμμικό ελεγκτή. Ο έλεγχος u_3 καθυστερεί να πιάσει τις μέγιστες τιμές εξαιτίας της καθυστέρησης που προσθέτει το μοντέλο του ρότορα. Ίδια συμπεράσματα μπορούμε να εξαγάγουμε και από την πλευρική κίνηση.



Εικόνα 4.11: Απόκριση πλευρικής κίνησης και αντίστοιχων ελεγκτών Bang-Bang

Ο κασκοδικός Bang-Bang ελεγκτής υπερτερεί του κασκοδικού PID και όμοια δομημένων ελεγκτών με τον ίδιο τρόπο που ο Bang-Bang ελεγκτής υπερτερεί της τοποθέτησης πόλων στο πρόβλημα ελαχίστου χρόνου στο διπλό ολοκληρωτή. Επίσης, διαπιστώνεται οικονομία καυσίμου καθώς οι εξωτερικοί έλεγχοι u_2, u_3 είναι κατά το πλείστον μηδενικοί.

Για το δεύτερο «πείραμα» ζητείται έλεγχος στον κάθετο άξονα με $z_d = 100$ και φράγμα εισόδου $M_1 = 10$. Ο απαιτούμενος χρόνος για τη μεταφορά μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια ως $2\sqrt{z_d/M_1} = 6.32 \text{ sec}$ και είναι ίδιος με την απόκριση. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς το υποσύστημα υψομέτρου μπορεί να έρθει σε δομή διπλού ολοκληρωτή. Πάλι εμφανίζεται μία καθυστέρηση που εισάγεται από την καθυστέρηση του ρότορα.



Εικόνα 4.12: Απόκριση υψομετρικής κίνησης και έλεγχος Bang-Bang

Επίλογος

Κατά τη διάρκεια της παρούσας εργασίας συζητήθηκε η μοντελοποίηση τρισδιάστατης κίνησης ενός τετρακοπτερου UAV, η χρήση γραμμικών τεχνικών ελέγχου σε ισχυρά μη γραμμικά μοντέλα, σαν πρώτη αντιμετώπιση ενός μηχανικού. Στη συνέχεια, αναζητείται η εύρεση ισχυρότερων μη γραμμικών σχημάτων ελέγχου που βασίζονται στη σχεδίαση Lyapunov. Εφόσον, φτάνουμε στο σημείο όπου το πρόβλημα ελέγχου λύνεται και μάλιστα ικανοποιητικά, γίνεται ένα βήμα παρά πέρα και αναζητείται μια μέθοδος που θα το λύνει βέλτιστα. Τελικώς, κατασκευάζεται ένα ασυμπτωτικά βέλτιστο σχήμα ελέγχου.

Αλλα θέματα που με απασχόλησαν και εργάστηκα καθόλη την διπλωματική εργασία ήταν το πρόβλημα πλοήγησης ενός Drone σε 2-διάστατο χώρο με εμπόδια και η απόρριψη διαταραχών κατά τη λειτουργία. Το πρώτο αντιμετωπίστηκε με χρήση συναρτήσεων οδήγησης και θεώρηση αισθητηριακών συστημάτων. Για το δεύτερο «επιστρατεύτηκαν» τεχνικές προσαρμοστικού ελέγχου με ιδιαίτερη έμφαση στον προσδιορισμό των αγνώστων παραμέτρων χωρίς τη συνθήκη Επιμένουσας Διέγερσης (Persistence of Excitation).

Η εργασία αυτή αποτέλεσε την αφορμή για συστηματική έρευνα πάνω σε ένα αντικείμενο ενδιαφέροντος και ανέπτυξα τις προϋπάρχουσες γνώσεις μου. Επαλήθευσα, έτσι, την έλξη μου στην έρευνα.

Παράρτημα Α

Input to State Stability

Consider a time-invariant system of ordinary differential equations of the form

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Where $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ is Lebesgue measurable essentially bounded external input and f is a Lipschitz continuous function.

Definition 1: We denote by \mathcal{K} the set of continuous increasing functions $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ with $\gamma(0) = 0$.

Definition 2: The set of unbounded functions $\gamma \in \mathcal{K}$ we denote by \mathcal{K}_∞ .

Definition 3: We denote $\beta \in \mathcal{KL}$ if $\beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}$ for all $t \geq 0$ and $\beta(r, \cdot)$ is continuous and strictly decreasing to zero for all $r > 0$.

Definition 4: System is called Input-to-State Stable (ISS) if there exist functions $\gamma \in \mathcal{K}$ and $\beta \in \mathcal{KL}$ so that for all initial values x_0 , all admissible bounded inputs u and all times $t \geq 0$, the following inequality holds

$$|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t) + \gamma \sup |u(t)|$$

for all t_0 and t such that $0 \leq t_0 \leq t$.

Theorem 1: If a system is called ISS and $|u(t)| \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$, then $|x(t)| \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$.

Theorem 2: The system is ISS if and only if there exists a smooth positive definite radially unbounded function V and class \mathcal{K}_∞ functions ρ_1, ρ_2 such that the following dissipativity inequality is satisfied.

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) = -\rho_1(|x|) + \rho_2(|u|)$$

The idea of ISS and the above theorems are owned by Control Theorist E. Sontag. Let's apply theory to our Lyapunov candidate function (3.26)

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &= -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 + z_2 c_\psi (u_z + g) e_\theta \\
&\leq -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 + |z_2| |u_z + g| |e_\theta| \\
&\leq -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 + M_1 |z_2| |e_\theta|
\end{aligned}$$

We choose $k_2 = c_2 M_1^2 + c_2$ and we add and subtract term $\frac{1}{4c_2} |e_\theta|^2$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &\leq -k_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_2 M_1^2 z_2^2 + M_1 |z_2| |e_\theta| - \frac{1}{4c_2} |e_\theta|^2 + \frac{1}{4c_2} |e_\theta|^2 \\
&= -k_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - \left(\sqrt{c_2} |z_2| M_1 - \frac{1}{2\sqrt{c_2}} |e_\theta| \right)^2 + \frac{1}{c_2} |e_\theta|^2 \\
&\leq -k_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + \frac{1}{4c_2} |e_\theta|^2 \\
&\leq -k \|z\|^2 + \frac{1}{4c_2} |e_\theta|^2
\end{aligned}$$

where $k = \max\{k_1, c_2\}$. Considering as state $z = [z_1 \ z_2]^T$ and input $u = e_\theta$, $\rho_1(\|z\|) = k \|z\|^2$, $\rho_2(|u|) = \frac{1}{4c_2} |u|^2$. Norm used is the Euclidean Norm. Using Theorem 2, ISS for the system is derived and using Theorem 1, asymptotic stability for the states is proved, since we can ensure $|e_\theta| \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$. We can avoid using Theorems for scalar function V as it follows

$$\dot{V} \leq -k \|z\|^2 + \frac{1}{4c_2} |e_\theta|^2$$

Since $V = \|z\|^2$ inequality can be written as

$$\dot{V} \leq -kV + \frac{1}{4c_2} |e_\theta|^2$$

Let's solve the inequality ($c_2 \rightarrow 4c_2$ for ease)

$$V(t) \leq V(0)e^{-kt} + c_2^{-1} \int_0^t e^{-k(t-\tau)} |e_\theta(\tau)| d\tau$$

Thus

$$V(t) \leq V(0)e^{-kt} + c_2^{-1} \int_0^t e^{-k(t-\tau)} |e_\theta(\tau)| d\tau$$

Error e_θ converges to 0 exponentially with fast eigenvalue $\lambda > k$. So

$$\begin{aligned}
 V(t) &\leq V(0)e^{-kt} + c_2^{-1} \int_0^t e^{-k(t-\tau)} e^{-\lambda\tau} |e_\theta(0)| d\tau \\
 &= V(0)e^{-kt} + c_2^{-1} |e_\theta(0)| e^{-kt} \frac{e^{(k-\lambda)t} - 1}{k - \lambda} \\
 &= V(0)e^{-kt} + c_2^{-1} e^{-kt} \frac{1 - e^{(k-\lambda)t}}{\lambda - k} |e_\theta(0)| \\
 &\leq V(0)e^{-kt} + (\lambda - k)^{-1} c_2^{-1} e^{-kt} |e_\theta(0)|
 \end{aligned}$$

RHS converges to 0 as $t \rightarrow \infty$ and hence $V(t) \rightarrow 0$ and equivalently $z_1, z_2 \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$.

Παράρτημα Β

Input Bounds

Propellers' speed can reach up to a maximum point which is known by the set up. We want to translate this limitation to constraints for virtual inputs u_i . Let's consider

$$|\Omega_i| \leq \Omega_{MAX} \quad (\text{B.1})$$

Combining equations (2.21) and (B.1) gives

$$u_1 = \frac{b}{m} \sum_{i=1}^4 \Omega_i^2 \leq \frac{4b \Omega_{MAX}^2}{m} \quad (\text{B.2})$$

Furthermore, $u_1 \geq 0$, because u_1 is equal to a sum of squared terms. Equations (2.21) and (2.244) can be written in matrix form in the following way

$$\begin{aligned} \vec{v} &= E \vec{\Omega}^2 \\ \vec{v} &= M \vec{u} + B(\phi, \theta, \psi) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

where $\vec{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T$, $\vec{\Omega}^2 = [\Omega_1^2 \ \Omega_2^2 \ \Omega_3^2 \ \Omega_4^2]^T$ and $\vec{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T$ and matrices E, M and B are defined as

$$E = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -bl & 0 & bl \\ -bl & 0 & bl & 0 \\ -d & d & -d & d \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

and

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -(I_y - I_z)\phi\psi \\ -(I_z - I_x)\theta\psi \\ -(I_x - I_y)\phi\theta \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Matrix K is invertible since $\det(K) = -8b^3l^2d \neq 0$. Hence, solving (B.3) with respect to $\vec{\Omega}^2$ results to the following

$$\vec{\Omega}^2 = E^{-1}M \vec{u} + K^{-1}B \quad (\text{B.6})$$

Equation (B.6) is identical to condition $0 \leq \Omega_i^2 \leq \Omega_{MAX}^2$. With i denoting the row index for the matrices a condition for virtual inputs can be extracted

$$0 \leq (E^{-1}M)_i \vec{u} + (E^{-1}B)_i \leq \Omega_{MAX}^2 \quad (\text{B.7})$$

for $i = 1, 2, 3, 4$. Under the assumption of $\psi = \psi_d$ (i.e. $u_4 = 0$), inequalities are equivalent to the following ones

$$\begin{aligned} |u_2| &\leq \min \left\{ \frac{u_1 l}{2I_x}, \frac{\left(\Omega_{MAX}^2 - \frac{m u_1}{4b} \right) 2bl}{I_x} \right\} \\ |u_3| &\leq \min \left\{ \frac{u_1 l}{2I_y}, \frac{\left(\Omega_{MAX}^2 - \frac{m u_1}{4b} \right) 2bl}{I_y} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B. 8})$$

In the case studied, where u_1 is defined as $\frac{1}{c_\phi c_\theta} (u_z + g)$ and $u_z = c = \text{const}$ we may derive a stricter constant bound defined as

$$\begin{aligned} |u_2| &\leq \min \left\{ \frac{sl}{2I_x}, \frac{\left(\Omega_{MAX}^2 - \frac{mS}{4b} \right) 2bl}{I_x} \right\} \\ |u_3| &\leq \min \left\{ \frac{sl}{2I_y}, \frac{\left(\Omega_{MAX}^2 - \frac{mS}{4b} \right) 2bl}{I_y} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B. 9})$$

where

$$\begin{aligned} s &= \min\{u_1\} = c + g \\ S &= \max\{u_1\} = (c_{\phi_{MAX}} c_{\theta_{MAX}})^{-1} (c + g) \end{aligned} \quad (\text{B. 10})$$

For small quadcopters first argument is usually smaller, meaning that dynamics limit rotations more intensively than maximum propeller speed does.

Βιβλιογραφία

- [1] Καραμπετάκης, Βέλτιστος έλεγχος συστημάτων, Αθήνα: Ζήτη, 2009.
- [2] Q. L. Zhiwei Kong, "Mathematical Modeling and Modal Switching Control of a Novel Tiltrotor UAV," *Journal of Robotics*, vol. 2018, pp. 1-12, 2018.
- [3] Y. Bouktir, "Trajectory planning for a quadrotor helicopter," in *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Ajaccio, France, 2008.
- [4] Slotine Li, APPLIED NONLINEAR CONTROL, Boston: Prentice Hall, 1991.
- [5] M. H. Sevkuthan KURAK, «Control and Estimation of a Quadcopter Dynamical Model,» *Periodicals of Engineering and Natural Sciences*, τόμ. 6, αρ. 1, pp. 63-75, 2018.
- [6] Sergei Lupashin, «A Simple Learning Strategy for High-Speed Quadrocopter Multi-Flips,» σε *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2010.
- [7] S. Boubdallah, Design and control of quadrotors, Lausanne: ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE, 2008.
- [8] S. Sundar, «Time-optimal obstacle avoidance,» σε *IEEE Xplore*, 1995.
- [9] Samir Bouabdallah, "Design and control of an indoor micro quadrotor," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004*, New Orleans, LA, USA, 2004.
- [10] F. Sabatino, "Quadrotor control: modeling, nonlinear control design, and simulation," 2015.
- [11] Robin Ritz, "Quadrocopter performance benchmarking using optimal control," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, San Francisco, 2011.
- [12] R. Dorf, Modern Control Systems.
- [13] R. Beard, «Quadrotor Dynamics and Control Rev 0.1,» February 19, 2008.
- [14] Qingkai Wei, "Bang-Bang Control Applied in Airfoil Roll Control with Plasma Actuators," *Journal of Aircraft*, vol. 50, pp. 670-676, 2013.
- [15] P. Ioannou, Robust Adaptive Control.
- [16] Optimal Control An Introduction - Theory to Application, Michael Athan, Peter Falb.
- [17] D. S. Naidu, Optimal Control Systems (Electrical Engineering Series), University of California: CRC Press, 2003.
- [18] M. Hehn, "Performance benchmarking of quadrotor systems using time-optimal control," *Autonomous Robots*, vol. 33, no. 1-2, p. 69-88, 2012.

- [19] T. Lee, «Geometric Tracking Control of a Quadrotor UAV on SE(3),» σε *49th IEEE Conference on Decision and Control*, Hilton Atlanta Hotel, Atlanta, GA, USA, 2010.
- [20] D. KOTARSKI, «Mathematical Modelling of Multirotor UAV,» *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, τόμ. 1, pp. 233-238, 2015.
- [21] Konstantinos Papafotis, "MAG.I.C.AL.–A Unified Methodology for Magnetic," *IEEE SENSORS JOURNAL*, vol. 18, pp. 8241-8251, 2019.
- [22] K. Ogata, *Modern Control Engineering*.
- [23] Jin-Oh Kim, «Real-Time Obstacle Avoidance Using Harmonic Potential Functions,» *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1992.
- [24] Ian D. Cowling, "A Prototype of an Autonomous Controller for a," in *A prototype of an autonomous controller for a quadrotor UAV*, Kos, Greece, 2007.
- [25] H. Khalil, *Non Linear Systems*, New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [26] H. Xie, «A trajectory tracking LQR controller for a quadrotor: Design and experimental evaluation,» σε *IEEE Region 10 Conference*, 2015.
- [27] Hector Garcia de Marina, "UAV attitude estimation using unscented Kalman filter and TRIAD," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 59, no. 11, pp. 4465 - 4474, 2012.
- [28] Gabriel Hoffmann, "Quadrotor Helicopter Trajectory Tracking Control," in *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Honolulu, Hawaii, 2008.
- [29] Gabriel M. Hoffmann, «Quadrotor Helicopter Trajectory Tracking Control,» Stanford University, Stanford, California.
- [30] Fei Gao, "Optimal Time Allocation for Quadrotor Trajectory Generation," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Madrid, Spain, 2018.
- [31] Z. Fang και W. Gao, «Adaptive integral backstepping control of a Micro-Quadrotor,» σε *2nd International Conference on Intelligent Control and Information Processing*, Harbin, China, 2011.
- [32] Emily Fresk and G. Nikolakopoulos, «Full Quaternion Based Attitude Control for a Quadrotor,» σε *European Control Conference*, Zurich, Switzerland, 2013.
- [33] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory*, San Jose, California: Dover Publications Inc., 1998.
- [34] R. Dandrea, "Real-Time Trajectory Generation for Quadcopters," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 31, no. 4, p. 877–892, 2015.
- [35] C. I. Connolly, «Path Planning Using Laplace's Equation,» σε *IEEE Conference on Robotics and Automation*, 1995.
- [36] T. Bresciani, "Modelling, Identification and Control," 2008.
- [37] M. BENOSMAN, *LEARNING-BASED CONTROL: An Extremum Seeking Approach - Theory and Applications*, Cambridge, MA, USA: Elsevier, 2016.

- [38] G. Balamurugan, J. Valarmathi και V. P. S. Naidu, «Survey on UAV navigation in GPS denied environments,» σε *International Conference on Signal Processing, Communication, Power and Embedded System (SCOPE5)*, Paralakhemundi, India, 2016.
- [39] A. C. Satici, H. Poonawala και M. W. Spong, «Robust Optimal Control of Quadrotor UAVs,» *IEEE Access*, τόμ. 1, pp. 79-93, 2013.
- [40] VAHIDI, "Recursive least squares with forgetting for online estimation of," *Vehicle System Dynamics*, vol. 43, no. 1, pp. 31-55, 2005.
- [41] S. J. Andrew Zulu, "A Review of Control Algorithms for Autonomous Quadrotors," *Open Journal of Applied Sciences*, vol. 4, pp. 547-556, 2014.
- [42] Abdulkader Joukhadar, «Advanced UAVs Nonlinear Control Systems and Applications,» σε *Aerial Robotic Systems*, 2019, p. 19.