Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Τμημα Ηλεκτρολογων Μηχανικων Και Μηχανικων Υπολογιστων

ΤΟΜΕΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ, ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ & ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΛΟΓΙΚΗΣ & ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Σχεδιασμός Σχεδόν Βέλτιστων Δημοπρασιών σε Συνθήκες Ελλιπούς Πληροφορίας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Ιωάννη Γ. Μαυροθαλασσίτη

Επιβλέπων: Δημήτριος Φωτάκης
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ, ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ & ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΛΟΓΙΚΗΣ & ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Σχεδιασμός Σχεδόν Βέλτιστων Δημοπρασιών σε Συνθήκες Ελλιπούς Πληροφορίας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Ιωάννη Γ. Μαυροθαλασσίτη

Επιβλέπων: Δημήτριος Φωτάκης
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την $14^{η}$ Ιουλίου 2021.

....	....	....
Δημήτριος Φωτάκης Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π	Αριστείδης Παγουρτζής Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Ευάγγελος Μαρκάκης Αν. Καθηγητής Ο.Π.Α.

Αθήνα, Ιούλιος 2021.

....

Μαυροθαλασσίτης Ιωάννης
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Στην διπλωματική αυτή εργασία ασχολουμαστε με τον σχεδιασμο μηχανισμών σε συνθήκες ελλιπούς πληροφορίας. Πιο συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρει να σχεδιάσουμε δημοπρασίες που μεγιστοποιούν το κέρδος του δημοπράτη, όταν αυτός δεν έχει ολοκληρωμένη πληροφορία όσον αφορά τις πιθανές αξίες των παικτών για το αντικείμενο που δημοπρατεί.

Μελετάμε δημοπρασίες όπου ο πωλητής ενδιαφέρεται να πουλήσει επανηλημένα το προϊόν του σε έναν πελάτη, ο οποίος πιθανώς να έχει διαφορετική αξία για το αγαθό αυτό ανάμεσα σε διαφορετικούς γύρους. Επίσης ο πελάτης δεν είναι πλήρως στρατηγικός και σχεδιάζει τις μελλοντικές του στρατηγικές, ενώ μαθαίνει από τα αποτελέσματα που λαμβάνει κατά τη διάρκεια της δημοπρασίας. Αυτό το μοντέλο για την μελέτη των επαναλαμβανόμενων δημοπρασιών μελετείται αρχικά στην δημοσίευση [see Bra+18], παρόλα αυτά στην δημοσίευση αυτή θεωρείται πως έχουμε πλήρη γνώση της κατανομής D, με βάση την οποία ο πλειοδότης θα αποκτάει σε κάθε γύρο του την αξιολόγηση του για το αντικείμενο.

Επεκτείνουμε την δουλειά αυτή κατασκευάζοντας έναν "Prior Free" μηχανισμό, ο οποίος πετυχαίνει $\frac{1}{1+\frac{n-1}{n-1+v_1}}$ προσέγγιση του βέλτιστου κέρδους όπου θα μπορούσαμε να πετύχουμε εάν ξέραμε την κατανομή D με το n να εκφράζει το εύρος των πιθανών αξιολογήσεων όπου μπορεί να έχει ο πλειοδότης και v_1 είναι η ελάχιστη αξιολόγηση όπου μπορεί να έχει αυτός. Ο λόγος προσέγγισης αυτός είναι βέλτιστος και καμία δημοπρασία δυναμική ή στατική δεν μπορεί να πετύχει καλύτερο κέρδος, χωρίς περισότερη πληροφορία.

Επιπλέον κατασκευάζουμε μια δημοπρασία για την περίπτωση όπου έχουμε ελλιπή πληροφορία για τις αξιολογήσεις των παικτών. Πιο αναλυτικά, εξετάζουμε την περίπτωση, όπου οι πλειοδότες αποκτούν την αξιολόγηση τους για το αντικείμενο, με βάση ένα μείγμα απο κατανομές. Υποθέτουμε πως ο δημοπράτης έχει πλήρη γνώση των κατανομών από τις οποίες δημιουργείται το μείγμα, αλλά δεν γνωρίζει τον τρόπο με τον οποίο δημιουργείται το τελικό μείγμα. Στην περίπτωση αυτή παρέχουμε μια δημοπρασία που για το setting αυτό πετυχαίνει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος.

Τέλος για την δεύτερη περίπτωση εάν έχουμε μείγμα το πολύ τριών κατανομών, προσφέρουμε ακριβή όρια τα οποία περιγράφουν τη προσέγγιση του βέλτιστου κέρδους, όπου πετυχαίνει η δημοπρασία με ακριβεία είτε οι κατανομές που μας δίνονται είναι πολύ κοντά, είτε είμαστε στην περίπτωση όπου σχεδιάζουμε "Prior Free" μηχανισμό.

Λέξεις Κλειδιά: Σχεδιασμός Μηχανισμών,Βελτιστοποίηση Κέρδους, Επαναλαμβανόμενη Δημοπρασία, Δυναμική Δημοπρασία, Online Learning,"Prior Free" Μηχανισμός, Μείγμα Κατανομών, Δημοπρασία Πρώτης Τιμής

Abstract

This thesis is concerned with designing computationally efficient mechanisms in settings with reduced information. More precisely we seek to design a mechanism that maximizes the auctioneers revenue in settings where the auctioneer has incomplete information about the bidders valuations.

We study repeated auctions, where the bidders valuations may differ between different rounds. The bidders also learn between different rounds and are not fully strategic. This setting for revenue maximization was primarily studied at [Bra+18], in it however it is assumed that the auctioneer has complete information over a distribution D, from which the bidder draws his valuation.

We provide a Prior-Free Mechanism which achieves a $\frac{1}{1+\frac{n-1}{n-1+v_1}}$ approximation of the optimal revenue revenue, where n is the range of the potential valuations and v_1 is the lowest possible valuation of the bidder.

Moreover, we provide an auction for the setting where we have incomplete information about the bidders valuations. More specifically, we assume that the bidders draw their valuations from a mixture of distributions, where we have full information over every single one of the distributions, but don't know how the mixture is formed from them. In this setting we provide an auction that achieves the highest possible approximation of the optimal revenue.

Finally in the second setting for the scenario where we have a mixture of less than four distributions we provide elegant formulas which depict the exact approximation of the optimal revenue that our auction achieves.

Keywords: Mechanism Design, Revenue Maximization, Repeated Auctions, Dynamic Auctions, Online Learning, Prior Free Mechanism, Mixtures of Distributions,First Price Auction

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας και των προπτυχιακών μου σπουδών θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους όπου με βοήθησαν και με στήριξαν στην προσπάθεια μου αυτή.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Φωτάκη, διότι με ενέπνευσε να ασχοληθώ με τον τομέα της Θεωρητικής Πληροφορικής, μέσα απο τα μαθήματα του τα τελευταία χρόνια. Επίσης, Θέλω να τον ευχαριστήσω για την υποστήριξη και την βοήθεια όπου μου παρείχε στην διπλωματική καθόλη την διάρκεια της, με συζητήσεις και παρατηρήσεις ,όπου πολλές φορές ήταν καταλητικής σημασίας. Τέλος θα ήθελα να τον ευχαριστήσω, διότι μέσα από την συνεργασία μας επηρέασε σε σημαντικό βαθμό την παρούσα και την μελλοντική μου πορεία.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της κριτικής επιτροπής, κ.Μαρκάκη και κ.Παγουρτζή, τόσο ως εξεταστές μου, αλλά και για τις γνώσεις όπου μου παρείχαν ως καθηγητές μου. Στο πλαίσιο αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές όπου είχα την τύχη να παρακολουθήσω μαθήματα τους και θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον κ.Παπασπύρου, όπου με βοήθησε ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια της σχολής και μου προσέφερε αρκετές γνώσεις.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα παιδιά, φίλους και συμγοιτητές μου, οι οποίοι με βοήθησαν να οριμάσω σαν άνθρωπος, μου προσέφεραν όμορφες στιγμές και αναμνήσεις και με υποστήριξαν τα περασμένα χρόνια. Σας ευχαριστώ όλους πάρα πολύ!

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και ειδικά τους γονείς μου για την στήριξη, την κατανόηση και την αγάπη όπου μου παρείχαν όλα αυτά τα χρόνια.

Contents

Chapter 1

Εκτενής Ελληνική Περίληψη

1.1 Εισαγωγή

Ένα από τα πιο συνηθισμένα προβλήματα στο τομέα του σχεδιασμού μηχανισμών είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους του πωλητή. Ο στόχος της μεγιστοποίησης του κέρδους του διοργανωτή της δημοπρασίας έχει μελετηθεί από πολλές διαφορετικές οπτικές. Στον κλασσικό σχεδιασμό μηχανισμών η βέλτιστη δημοπρασία έχει δωθεί από την δουλειά του Myerson [Mye81]. Παρόλα αυτά, η δουλειά αυτή έγινε το 1981 και σήμερα ζούμε σε έναν κόσμο τριάντα χρόνια αργότερα, όπου έχουν αναδυθεί νέα περιβάλλοντα, λόγω της συνεχής ανάπτυξης και αλλαγής των αγορών παγκοσμίως. Σε πολλές περιπτώσεις υπάρχει αύξηση της πληροφορίας που πρέπει να διαχειριστούν τόσο οι πλειοδότες, όσο και ο δημοπράτης. Σε άλλες περιπτώσεις υπάρχει πληροφορία την οποία αγνοεί ο δημοπράτης ή αδυνατεί να αποκτήσει. Τέλος υπάρχουν δημοπρασίες οι οποίες πρέπει να εκτελεστούν επανηλημένα ,κατα την διάρκεια πολλών γύρων, το οποίο έχει ως συνέπεια να δημιουργείται ένα δυναμικό περιβάλλον, αφού και οι πλειοδότες και ο δημοπράτης έχουν την ευκαιρία να αλλάζουν την στρατηγική τους με το πέρασμα των γύρων. Όλα αυτά τα φαινόμενα έχουν δημιουργήσει την ανάγκη για περρισότερα μοντέλα, τα οποία συγχρόνως χρειάζεται να είναι και πιο εκφραστικά, προκειμένου να περιγράφουν με ακρίβεια τα προβλήματα όπου συναντάμε στην πράξη.

Το πρώτο ζήτημα όπου μας ενδιαφέρει είναι η τεράστια αύξηση του όγκου της πληροφορίας όπου χρειάζεται να επεξεργάζονται οι πλειοδότες, το οποίο τους αποτρέπει απο το να έχουν πλήρως στρατηγικές συμπεριφορές, δηλαδή να επεξαργάζονται όλα τα δυνατά ενδεχόμενα και να επιλέγουν πάντα το βέλτιστο για αυτούς. Εάν η δημοπρασία στην οποία συμμετέχουν είναι φιλαλήθης [Vic61] τότε ο πλειοδότης θα μπορούσε πάντα να ακολουθεί μια βέλτιστη στρατηγική για όλα τα πιθανά ενδεχόμενα, επιλέγοντας πάντα μια φιλαλήθη στρατηγική. Σε αντίθετη περίπτωση, όμως, όπου η δημοπρασία δεν είναι φιλαλήθης, όπως είναι για παράδειγμα η δημοπρασία Πρώτης Τιμής, η Γενικευμένη Δημοπρασία Πρώτης Τιμής, η Γενικευμένη δημοπρασία Δεύτερης Τιμής, καθώς και άλλες τότε είναι δύσκολο για τον πλειοδότη να να αιτιολογήσει πλήρως την κάθε επιλογή του και να είναι πλήρως στρατηγικός, ειδικά εάν έχουμε να κάνουμε με περιβάλοντα επαναλαμβανόμενων δημοπρασιών. Έχουν υπάρξει πολλές μελέτες στον τομέα αυτό, που ως στόχο έχουν την εύρεση αλγορίθμων που μπορούν να χρησιμοποιούν οι πλειοδότες προκειμένου να μεγιστοποιούν το κέρδος τους όσο αυτό είναι δυνατόν.[FPS18]. Συνέπεια της αδυναμίας των πλειοδοτών να είναι πλήρως στρατηγικοί σε τέτοια περιβάλοντα είναι η συμπεριφορά τους να ομοιάζει με την εκτέλεση ενός "online" αλγορίθμου. Επίσης πρέπει να σημειώσουμε πως και ο δημοπράτης πρέπει να υπερβεί ορισμένα προβλήματα σε τέτοια περιβάλοντα, όπου υπάρχει τεράστιος όγκος πληροφορίας.[DV13].

Ένα διαφορετικό πρόβλημα το οποίο αφορά κυρίως τον δημοπράτη είναι η υπόθεση σχετικά με τις πληροφορίες που του είναι διαθέσιμες στον κλασικό σχεδιασμό μηχανισμών. Στο κλασσικό μοντέλο γίνεται η υπόθεση ότι ο δημοπράτης γνωρίζει την πιθανοτική κατανομή όπου ακολουθεί η αξιόλογηση του πλειοδότη για το αντικείμενο της δημοπρασίας. Στην πράξη όμως υπάρχουν πολλά ενδεχόμενα, όπου η υπόθεση αυτή απέχει από την πραγματικότητα, διότι προκειμένου ο δημοπράτης να αποκτήσει την σχετική γνώση αυτή χρειάζεται να διεξάγει έρευνα και δεν υπάρχει πάντα αυτή η δυνατότητα, ή μπορεί να έχασε την εικόνα μετά από κάποια αλλαγή που έγινε στην αγορά. Προκειμένου να αντιμετοπιστεί αυτό το πρόβλημα νέα μοντέλα πρέπει να δημιουργηθούν, τα μοντέλα αυτά είναι το "prior independent" και το "prior free" μοντέλο, τα οποία κάνουν λίγες ή ακόμη και καμία υπόθέση σχετικά με την κατανομή της αξιολόγησης των πλειοδοτών για το αντικείμενο της δημοπρασίας. Η πιο πολύ δουλειά στα μοντέλα αυτά έχει ως στόχο τον σχεδιασμό ενός μηχανισμού, όπου για κάθε δυνατή κατανομή πετυχαίνει ένα κλάσμα του βέλτιστου κέρδους, όπου θα πετύχαινε ο βέλτιστος μηχανισμός στο Bayesian μοντέλο.[HR08] Αυτή η γραμμή δουλειάς εκφράζει το αντιστάθμισμα σε ένα μοντέλο, ανάμεσα στην πληροφορία όπου υπολείπεται ο πλειοδότης και στο κέρδος όπου αυτός μπορεί να πετύχει.

Τέλος οι επαναλαμβανόμενες δημοπρασίες έχουν δημιουργήσει την ανάγκη για δυναμικά περιβάλοντα στις δημοπρασίες, όπου οι πλειοδότες και ο δημοπράτης έχουν την δυνατότητα να προσαρμόζουν συνέχεια την στρατηγική τους. Για παράδειγμα ένας πλειοδότης μπορεί να επιλέξει να δηλώσει χαμηλότερη τιμή απο την πραγματική αξία που έχει για αυτόν το αντικείμενο όπου πουλείται, προκειμένου να μπορέσει να το αποκτήσει στο μέλλον σε χαμηλότερη τιμή. Έτσι θυσιάζει ένα μέρος της ωφέλειας που θα είχε σήμερα προκείμενου να μεγιστοποιήσει την συνολική του ωφέλεια σε βάθος χρόνου. Για τον λόγο αυτό μια στατική δημοπρασία όπου ο πλειοδότης θα καθόριζε εξαρχής τις πληρωμές και την άναθεση των αντικειμένων για όλους τους γύρους θα αποθάρυνε τέτοιες συμπεριφορές και συνεπώς θα ήταν ασφαλέστερη.[HR08]. Επίσης είναι εμφανές πως τα δυναμικά περιβάλοντα και ειδικά οι δυναμικές δημοπρασίες είναι ιδιαίτερα περίπλοκα στον σχεδιασμό τους καθώς και στην διαχείρηση τους.[Pap+16]

Ο στόχος της διπλωματικής αυτής είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους για τον δημοπράτη, σε συνθήκες ελειπούς πληροφορίας. Πρωταρχικά, μας ενδιαφέρει να αναπτύξουμε έναν "prior free" μηχανισμό για μια επαναλαμβανόμενη δημοπρασία όπου οι πλειοδότες δεν είναι πλήρως στρατιγικοί αλλά η συμπεριφορά τους χαρακτηρίζεται από κάποιον "mean based" αλγόριθμο. Επίσης μας ενδιαφέρει να σχεδιάσουμε μια δημοπρασία η απόδοση της οποίας μειώνεται κομψά καθώς μειώνεται και διαθέσιμη πληροφορία στον δημοπράτη απο το "Bayesian" μοντέλο μέχρι το "prior free" μοντέλο.

1.2 Σχετικές Δουλειές

Η διπλωματική αυτή εργασία είναι μια επέκταση της δουλειάς των Braverman, Mao, Schneider και Weinberg [Bra+18], αφού κατασκευάζουμε μηχανισμούς με σχεδόν βέλτιστες προσεγγίσεις το κέρδους όπου μπορεί να επιτευχθεί με την χρήση της δημοπρασίας όπου παρουσιάζεται στην προαναφερθείσα δημοσίευση, για μοντέλα ελιπούς πληροφορίας. Συνεπώς η διπλωματικής συνδέεται άμεσα με τους παρακάτω τομείς έρευνας.

Ο πρώτος τομέας εραύνας με τον οποίο συνδέεται πρωταρχικά η διπλωματική αυτή εργασία είναι ο σχεδιασμός "prior-independent" και "prior-free" μηχανισμών. Η έρευνα σε αυτή την κατεύθυνση προσανατολίζεται γύρω απο τον σχεδιασμό δημοπρασιών οι οποίοι πετυχαίνουν μια προσέγγιση του βέλτιστου κέρδους που θα μπορούσε να πετύχει οποιοσδήποτε μηχανισμός ακόμη και σε "Bayesian" μοντέλο πληροφορίας.[CR14]. Παρόλα αυτά η πλειοψηφία των μηχανισμών όπου έχουν σχεδιασθεί στο κομμάτι της έρευνας αυτό απαιτούν την λήψη δειγμάτων προκειμένου να διαμορφώσουν εμπειρικούς κανόνες, σύμφωνα με τους οποίους θα λειτουργήσουν, σε αντίθεση με τον μηχανισμό όπου προτείνουμε, που για την κατασκεύη του οποίου δεν είναι απαραίτητη η λήψη δειγμάτων. Έρευνα σχετική με την κυρίρχη κατεύθυνση όπου αναφέραμε σχεδιάζει δυναμικές δημοπρασίες, όπου ο δημοπράτης προσπαθεί να μάθει την αξιολόγηση των παικτών για το αντικείμενο, μέσα απο δείγματα [GN17],[BSV17] και έπειτα να σχεδιάσει μια βέλτιστη δημοπρασία. Μια πρόσφατη σχετικά δουλειά των Hartline και Roughgarden [HR08] μας παρέχει μια μέθοδο, σύμφωνα με την οποία μπορεί κανείς να σχεδιάσει αποδοτικούς "prior-independent" και "prior-free" μηχανισμούς. Η μέθοδος αυτή δεν χρειάζεται δείγματα, τουλάχιστον σε θεωρητικό επίπεδο και συνεπώς είναι αρκετά κοντά στην διπλωματική αυτή εργασία.

Δεύτερη κατεύθυνση σχετικής έρευνας είναι οι δυναμικές δημοπρασίες που παρέχουν την βάση του μοντέλου μας.[Pap+16][Mir+16b][Mir+16a] Στο μοντέλο αυτό έχουμε έναν πελάτη και έναν πωλητή, ο πωλητής πουλάει επανηλημένα το ίδιο αντικείμενο για T γύρους. Σε αντίθεση με το δικό μας μοντέλο, η αξιολόγηση του πελάτη για το αντικείμενο προέρχεται από μια κατανομή D και ο πελάτης αποκτά καινούργια αξιολόγηση στην αρχή κάθε γύρου, με βάση την κατανομή αυτή, η οποία ειναι γνωστή στον πωλητή, επίσης ο πλειοδότης είναι πλήρως στρατηγικός και μπορεί να αιτιολογήσει πλήρως και ορθά όλες του τις επιλογές, ενώ στο δικό μας μοντέλο δεν είναι, αφού οι επιλογές του και οι στρατηγικές του μοντελοποιούνται από έναν "mean based" αλγόριθμο, δηλαδή μια υποκατηγορία των "online" αλγορίθμων.

Επιπροσθέτως, στο δικό μας μοντέλο οι πλειοδότες κάνουν "no-regret learning", τέτοιες συμπεριφορές έχουν μελετηθεί υπό την σκοπιά του Τιμήματος της Αναρχίας σε συνδυαστικές δημοπρασίες [Rou12] [ST13]. Οι δουλειές αυτές έχουν ως αντικείμενο την μεγιστοποίηση του κοινωνικού οφέλους, ενώ η δουλειά αυτή ασχολείται με την μεγιστοποίηση του κέρδους σε μια δημοπρασία. Επίσης στο δικό μας μοντέλο ο πλειοδότης χρησιμοποιεί αλγορίθμους μάθησης "no-regret" προκειμένου να μπορέσει να ανταπεξέλθει με τις συνεχείς αλλαγές της δημοπρασίας, δηλαδή με τις αλλαγές στον κανόνα με τον οποίο ο δημοπράτης κατανέμει τα αγαθά καθώς και με τις αλλαγές στο πόσο τα κοστολογεί, αφού οι αλλαγές αυτές δεν είναι γνωστές εξαρχής στον πλειοδότη.Αντιθέτως στις μελέτες όπου αφορούν το τίμημα της αναρχίας η δημοπρασία είναι πλήρως γνωστή από πριν και οι πλειοδότες χρησιμοποιούν "no-regret learning" προκειμένου να ανταπεξέλθουν στις στρατηγικές των άλλων πλειοδοτών και στις αλλαγές που αυτές έχουν.

Τέλος, όπως επισήμανα και νωρίτερεα η συμπεριφορά των παικτών μπορεί να μοντελοποιηθεί με την χρήση "Online learning" αλγορίθμων, συνεπώς η διπλωματική αυτή συνδέεται άμεσα και με παλαιότερες δουλειές οι οποίες ασχολούνται με τον σχεδιασμό τέτοιων αλγορίθμων. Πιο συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρουν αλγόριθμοι, όπως είναι ο "Follow the Perturbed Leader"[KV02], ή αλγόριθμοι όπου λειτουργούν διαφορετικά ανάλογα με τις πληροφορίες όπου τους παρέχουμε, για παράδειγμα το "Multiplicative Weight Update method" όπου στο "bandit setting" υλοποιείται μέσω του "EXP3" [Aue+02], τον "Hedge" αλγόριθμο για το "expert setting", καθώς και πιο σύγχρονους αλγορίθμους όπως είναι ο "WIN-EXP" αλγόριθμος [FPS18].

Εν κατακλείδι η διπλωματική εργασία αυτή βρίσκεται στην τομή πολλών διαφορετικών υπο περιοχών του Σχεδιασμού Μηχανισμών καθώς και της "Online learning" που αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για τον κλάδο αυτό.

1.3 Μοντέλο

Το μοντέλο όπου θα χρησιμοποιήσουμε αποτελείται από έναν δημοπράτη και έναν πλειοδότη και στη δημοπρασία υπάρχει μονάχα ένα αντικείμενο. Ο δημοπράτης θέλει να πουλήσει ένα αντικείμενο στον πλειοδότη, ενώ μεγιστοποιεί το κέρδος. Η δημοπρασία επαναλαμβάνεται για T γύρους και γίνεται ως εξής:

1. Στην αρχή κάθε γύρου ο πλειοδότης αποκτά μια αξιολόγηση για το αντικείμενο σύμφωνα με έναν απο τους παρακάτω δύο τρόπους. Η πρώτη περίπτωση είναι ότι αποκτά την αξιολόγηση σύμφωνα με μια κατανομή D, η οποία όμως δεν είναι γνωστή στον δημοπράτη και επίσης ο δημοπράτης δεν έχει και την δυνατότητα να την μάθει μέσω δειγματοληψίας. Η δεύτερη περίπτωση είναι ότι διαλέγει την αξιολόγηση του μέσα από ένα μείγμα κατανομών. Το μείγμα των κατανομών

το κατασκευάζουμε απο το σύνολο $S = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ και η διαδικασία με την οποία γίνεται η κατασκευή αυτή δεν είναι γνωστή στον δημοπράτη και ούτε έχει την δυνατότητα να την μάθει. Παρόλα αυτά ο δημοπράτης έχει πλήρη και ακριβή γνώση των κατανομών του συνόλου S.

2. Στην συνέχεια ο πλειοδότης δεν μαθαίνει την αξιολόγηση που έχει ο πλειοδότης πρωτού αυτούς του την ανακοινώσει. Ο πλειοδότης δηλώνει την αξιολόγηση του με βάση ένα σύνολο επιλογών όπου του παρέχει ο δημοπράτης, το σύνολο αυτό θα το ονομάζουμε σύνολο A, το σύνολο A παραμένει σταθερό για όλους τους γύρους. Στην αρχή κάθε γύρου ο δημοπράτης διαλέγει ποιές από τις δοθείσες επιλογές θα δίνουν το αγαθό στον πλειοδότη και ποιές όχι.

3. Ο πλειοδότης είτε λαμβάνει το αντικείμενο, είτε όχι, ανάλογα με την επιλογή που έκανε. Ο δημοπράτης κοστολογεί το αντικείμενο στον πλειοδότη ανάλογα με την αξιολόγηση που δήλωσε και τον χρεώνει το ανάλογο ποσό. Τέλος ο πλειοδότης παρατηρεί είτε μόνον την επιλογή αυτή είτε κάποιο σύνολο απο επιλογές και διαμορφώνει τις μελλοντικές στρατηγικές του.

Μερικές σημειώσεις σχετικά με το μοντέλο είναι οι εξής. Οι πλειοδότες κάνουν μάθηση "no-regret" και συγκεκριμένα χρησιμοποιούν "mean-based" αλγορίθμους. Όσον αφορά το κέρδος της δημοπρασίας, αυτό δεν επηρεάζεται από το "regret" του αλγορίθμου που χρησιμοποιείται και ασυμπτωτικά είναι πάντα, το ίδιο. Επιπλεόν, η δημοπρασία είναι "individually rational" για όλους τους πλειοδότες όπου συμμετέχουν σε αυτή για κάθε γύρο ξεχωριστά, αυτό σημαίνει πως για κάθε χρονική στιγμή t ισχύει πως $p_i^t < v_i$ για κάθε επιλογή i όπου δίνει ο δημοπράτης στον πλειοδότη για να δηλώσει την αξιολόγηση του.

1.4 Η συνεισφορά μας

Αξιοποιώντας τα αποτελέσματα της δημοσίευσης [Bra+18] προσφέρουμε σχεδόν βέλτιστες δημοπρασίες για τα προαναφερθέντα περιβάλλοντα, όπου ο δημοπράτης έχει περιορισμένες πληροφορίες σχετικά με τις αξιολογήσεις των παιχτών.

Το πρώτο αποτέλεσμα είναι ένας "Prior Free" μηχανισμός, ο οποίος πετυχαίνει προσέγγιση τουλάχιστον $\frac{1}{1+\frac{n-1}{v_1+n-1}}$ του βέλτιστου κέρδους για το μοντέλο αυτό, που είναι το κέρδος όπου προτάθηκε στην δημοσίευση [Bra+18]. Επίσης σχεδιάζουμε έναν "Prior Free" μηχανισμό, ο οποίος πετυχαίνει τον ίδιο λόγο προσέγγισης, ασυμπτωτικά στην χειρότερη περίπτωση, αλλά είναι ταχύτερος υπολογιστικά. Στο παραπάνω κλάσμα το n συμβολίζει το εύρος των αξιών όπου μπορεί να έχει το αγαθό για τον πλειοδότη, ενώ το v_1 αντιπροσωπεύει την ελάχιστη αξιολόγηση όπου θα μπορούσε να έχει το αγαθό αυτό για τον πλειοδότη.

ΤΟ δύτερο αποτέλεσμα αφορά το μοντέλο στο οποίο ο πλειοδότης τραβάει την αξιολόγηση του για το αντικείμενο με βάση το μίγμα των κατανομών, όπως αυτό περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα. Σε αυτό το μοντέλο, παρέχουμε μια δημοπρασία, η οποία είναι πολύ πιο απαιτητική υπολογιστηκά, αφού χρειάζεται την επίλυση k γραμμικών προγραμμάτων, όπου k είναι ο αριθμός διαφορετικών κατανομών που έχουμε μέσα στο set. Στην περίπτωση όπου έχουμε $k \leq 3$ παρέχουμε κομψά όρια τα οποία προσεγγίζουν το βέλτιστο κέρδος καθώς το σύνολο των κατανομών του μείγματος γίνεται μια κατανομή και συγγλινουν στο όριο του Prior Free μηχανισμού όταν οι κατανομές γίνουν ντετερμινιστικές. Δυστυχώς η κατασκευή τέτοιων ορίων γίνεται δύσκολη για περρισότερες κατανομές.

Ο λόγος του μέγιστου κέρδους όπου επιτυγχάνουν οι δημοπρασίες αυτές είναι ιδιαίτερα σημαντικός διαισθητικα. Γενικά εκφράζει με μια τιμή την αξία μιας τέτοιας πληροφορίας για τον δημοπράτη. Όπως είναι προφανές η ποσότητα του κέρδους που χάνεται είναι ανάλογη του μέγιστου κέρδους όπου θα μπορούσε να πετύχει κανείς με την δημοπρασία αυτή. Συνεπώς όταν κάποιος θέλει να αποφανθεί εάν είναι καλή ιδέα να διεξαχθεί έρευνα προκειμένου εν δυνάμει να βελτιώσει το κέρδος του, δεν πρέπει ποτέ να υπερβεί αυτό τον λόγο, μετά το τέλος της δημοπρασίας.

Επιπλέον, δείχνουμε πως οι μηχανισμοί όπου παρέχουμε είναι βέλτιστοι για αυτά τα μοντέλα. Αυτό το αποτέλεσμα είναι αρκετά σημαντικό, αφού δείχνει την βελτιστότητα ενός στατικού μηχανισμού ακόμη και έναντι δυναμικών μηχανισμών στο περιβαλλον αυτό. Το γεγονός αυτό είναι προσχαρές αφού ένας στατικός μηχανισμός είναι σχεδόν πάντοτε ταχύτερος απο άποψη υπολογισμών στην υλοποίηση και απλούστερος.

Τέλος οφείλω να παρουσιάσω έναν τρόπο με τον οποίο η δημοπρασία μπορεί να λειτουργήσει χωρίς δειγματοληψία στην πράξη. Συνοπτικά κάθε εμπόρευμα όπου πουλιέται έχει μια τιμή κάτω απο την οποία ο πωλητής-δημοπράτης υποσθεται ζημία, συνεπώς μπορούμε να ορίζουμε αυτή εώς ελάχιστη τιμή, ενώ ως μέγιστη μπορούμε να ορίσουμε μια τιμή αυθαίρετα μεγαλύτερη, αυτό το διάστημα ορίζει της ενδιαφέρουσες αξιολογήσεις απο τους παίκτες. Ο μηχανισμός αυτός πετυχαίνει όλα τα αποτελέσματα όπου δίξαμε παραπάνω, εδώ οφείλουμε να τονίσουμε πως όπως είναι λογικό η λήψη δειγματων και η έρευνα με σκοπό την εύρεση μιας ακριβής κατανομής για τις αξιολογήσεις των παικτών θα βελτίωνε πάντα το κέρδος όπου μας παρέχει ο μηχανισμός.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε μερικές απαραίτητες Έννοεις απο τον Σχεδιασμό Μηχανισμών, καθώς και από το online Learning, προκειμένου να παρουσιάσουμε το τεχνικό κομμάτι των αποτελεσμάτων μας.

1.5 Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων

Η Θεωρία Παιγνίων ως αντίκειεμενο έχει να κατασκευάσει ένα θεωρητικό μοντέλο, προκειμένου να μπορούμε να μελετήσουμε κοινωνικές καταστάσεις μεταξύ των παικτών. Από όλους τους τομείς που συγκαταλέγοντε στην αλγοριθμική θεωρία παιγνίων θα αναφερθούμε συνοπτικά στον σχεδιασμό μηχανισμών, διότι η διπλωματική αυτή έχει ως αντικείμενο την κατασκευή δημοπρασιών.

1.5.1 Σχεδιασμός Μηχανισμών

Το βασικό μοντέλο του σχεδιασμού μηχανισμών, πάνω στο οποίο θα δουλέψουμε και εμείς είναι το ακόλουθο:

Μοντέλο:Ας υποθέσουμε πως έχουμε έναν μηχανισμό στον οποίο συμμετέχουν n άνθρωποι, τους ανθρώπους αυτούς θα τους αποκαλούμε πλειοδότες. Επίσης ας συμβολίσουμε το σύνολο των εκβάσεων της δημοπρασίας με $\mathcal{O}$. Κάθε πλειοδότης έχει μια προσσωπική συνάρτηση αξιολόγησης, σύμφωνα με την οποία αξιολογεί το αποτέλεσμα και υπολογίζει την ικανοποίηση ή την δυσαρέσκεια του.$v_i : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^+$. Επίσης ο κάθε πλειοδότης έχει ένα σύνολο από στρατηγικές, τις οποίες μπορεί να ακολουθήσει και το σύνολο αυτό συμβολίζεται με b_i. Το πρώτο κομμάτι του μηχανισμού αποτελείται από μία συνάρτηση f, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε σύνολο στρατηγικών όπου λαμβάνει από όλους τους χρήστες ένα αποτέλεσμα $f : (b_1, b_2, \ldots, b_n) \to \mathcal{O}$, το δεύτερο κομμάτι του μηχανσιμού αποτελείται από τον κανόνα πληρωμών ο οποίος σύμφωνα με το σύνολο των στρατηγικών όπου έχουν επιλέξει όλοι οι παίκτες δημιουργεί ένα διάνυσμα πληρωμών $p : (b_1, b_2, \ldots, b_n) \to \mathbb{R}^n_+$.O τελικός μηχανισμός χαρακτηρίζεται από το ζεύγος των συναρτήσεων (f, p).

Ο σκοπός των πλειοδότων πάντα είναι να μεγιστοποιήσουν την ικανοποίηση τους για τον σκοπό της διπλωματικής αυτής υποθέτουμε πως η ικανοποίηση των παικτών είναι "quasi-linear",δηλαδή αν οι παίκτες έχουν ακολουθήσει διάνυσμα στρατηγικών $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, τότε το utility τους δίνεται από την εξίσωση:

$$u_i(f(\mathbf{b})) = v_i(f(\mathbf{b})) - p_i(b)$$

Επίσης, επιθυμούμε ο μηχανισμός όπου κατασκευάζουμε να είναι "individually rational" το οποίο σημαίνει πως εάν ένας άνθρωπος συμμετέχει στον μηχανισμό μας, τότε πάντα θα έχει μεγαλύτερη ικαοποίηση πάντα σε σχέση με το να μην συμμετείχε ποτέ. Η ιδιότητα αυτή στην πράξη είναι σχεδόν πάντα απαραίτητη προκειμένου οι πλειοδότες να παρακινούνται να συμμετεχουν στην δημοπρασία.

Τέλος, θα μας ενδιέφερε στην δημοπρασία να μην υπάρχουν νοσηρές συμπεριφορές δηλαδή διακρίσεις ανάμεσα στους παιχτες. Για τον σκοπό αυτό θα θέλαμε η δημοπρασίες μας να είναι κρυφής προσφοράς.

Ορισμός 1.5.1 (Δημοπρασία Κρυφής Προσφοράς) *Μια δημοπρασία είναι κρυφής πορσφοράς, εάν όλοι οι πλειοδότες παραδίδουν ταυτόχρονα στον δημοπράτη τις κρυφές προσφορές τους, χωρίς να ξέρουν τις προσφορές των άλλων πλειοδοτών.*

Οι δύο μεγαλύτεροι κλάδοι με τους οποίους ασχολείται ο σχεδιασμός μηχανισμών είναι η μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας και η μεγιστοποίηση του κέρδους.

Η μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας δεν αφορά την διπλωματική αυτή, συνοπτικά ομώς ως σκοπό έχουμε την μεγιστοποίηση της παρακάτω συνάρτησης:

$$SW = \sum_{i=1}^{n} u_i(o)$$

Όπου o είναι ένα αποτέλεσμα της δημοπρασίας.

Πρωτού προχωρήσουμε στο τομέα της μεγιστοποίησης του κέρδους αξίζει να αναφέρουμε την ιδιότητα του Φιλαλήθη μηχανισμού. Η ιδίοτητα αυτή είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα και σημαντική, αφού οι μηχανισμοί που μπορούν να εγγυηθούν την φιλαλήθεια τους έχουν την ιδιότητα πως οι πλειοδότες θα δηλώνουν πάντα την πραγματική τους αξιολόγηση για το αντικείμενο.

Ορισμός 1.5.2 (Φιλαλήθης Μηχανισμός) *Ένας Μηχανισμός (f, p) ονομάζεται φιλαλήθης εάν για κάθε i, v_{-i} έχουμε πως:*

$$u_i(f(v_i, v_{-i})) \geq u_i(f(v_i', v_{-i})), \forall v_i' \in [\mathcal{B}]$$

όπου το v_i είναι η πραγματική αξιολόγηση του πλειοδότη i.

1.5.2 Δημοπρασίες για Μεγιστοποίηση Κέρδους

Ορισμός 1.5.3 (Κέρδος) *Το κέρδος του δημοπράτη σε μία δημοπρασία (f, p), η οποία έχει n συμμετέχοντες και αυτοί έχουν υποβάλει προσφορές b, τότε το κέρδος του μηχανισμού μπορεί να οριστεί ως:*

$$REV = \sum_{i=1}^{n} p_i(b)$$

Είναι ιδιαίτερα δύσκολο να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος του δημοπράτη χωρίς κάποια επιπλέον πληροφορία διότι εάν υποχρεώνουμε τον πλειοδότη να πληρώνει την προσφορά όπου έκανε τότε αυτός θα δηλώνει μικρότερο ποσό με σκοπό να πληρώνει λιγότερο και να αυξάνει την ικανοποίηση του. Συνεπώς μπορούμε να τον χρεώνουμε μια προαποφασισμένη τιμή εάν αγοράσει το αγαθό.Αυτό όμως εγγυμονεί τον κίνδυνο είτε να υπερκοστολογήσουμε το προϊόν και αυτό να μείνει απούλυτο, είτε να το υποκοστολογήσουμε και να χάσουμε ένα κομμάτι του κέρδους όπου θα μπορούσαμε να έχουμε. Συνεπώς ορίζουμε το παρακάτω κυρίαρχο μοντέλο για την βελτιστοποίηση του κέρδους.

Μοντέλο:(Bayesian Μοντέλο για Μεγιστοποίηση Κέρδους) Το Bayesian μοντέλο χαρακτηρίζεται από τα παρακάτω στοιχεία:

- Υπάρχει ένα σύνολο από N πλειοδότες, η αξιολόγηση v_i κάθε πλειοδότη αποκτάτε απο μια κατανομή D_i με συνάρτηση αθροιστικής κατανομής F_i και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_i, αυτές οι κατανομές είναι απο κοινού γνωστές στην δημοπρασία και τις γνωρίζει και ο δημοπράτης.

- Οι αξιολογήσεις των παικτών για τα διάφορα αντικείμενα είναι προσωπικές και δεν είναι απο κοινού γνωστές.

Στο κλασσικό αυτό μοντέλο η βέλτιστη δημοπρασία δώθηκε από τον Myerson [Mye81], για περιβάλοντα όπου έχουμε ένα αντικείμενο ή η αξιολόγηση των παικτών εξαρτάται από μια μόνον παράμετρο και είναι ένας φιλαληθης μηχανισμός, πιο συγκεκριμένα ο μηχανισμός όπου προτείνεται είναι μια δημοπρασία δεύτερης τιμής με δεσμευμένη τιμή.

Το θέμα της διπλωματικής εργασίας αυτής είναι ο σχεδιασμός ενός μηχανισμού για μοντέλα ελειπούς πληροφορίας. Στην συνέχεια λοιπόν θα παρουσιάσουμε δύο από τις κυριότερες κατευθύνσεις έρευνας για συνθ'ηκες ελειπούς πληροφορίας.

1.5.3 Prior Independent Μηχανισμοί

Σε έναν Prior Independent μηχανισμό ο πλειοδότης ξέρει ότι η αξιολόγηση που έχει ο πλειοδότης για το αντικείμενο προέρχεται από μια κατανομή D, αλλά δεν γνωρίζει την ακριβή κατανομή D. Αυτό σημαίνει πως χρειάζεται να θυσιάσουμε ένα κομμάτι του κέρδους όπου θα είχαμε στο Bayesian μοντέλο, προκειμένου να αποκτήσουμε ακριβέστερεσ πληροφορίες σχετικά με την κατανομή D.

Χωρίς να παρέχουμε κάποιον ακριβή ορισμό επισημαίνουμε στο σημείο αυτό ότι η πολυπλοκότητα δειγμάτων ενός μηχανισμού ή μίας συνάρτησης είναι ο ελάχιστος αριθμός δειγμάτων όπου χρειάζεται να έχουμε ώστε να κάνουμε μια ακριβή εκτίμηση με μεγάλη πιθανότητα.

Για δημοπρασίες με ένα αγαθό για παράδειγμα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

- Προκειμένου να επιτευχθει $\frac{1}{4}-$προσέγγιση του βέλτιστου κέρδους αρκεί να έχουμε αποκλειστικά ένα μόνο δείγμα από την κατανομή.[HR09]

- Όταν έχουμε ως στόχο να πετύχουμε $1-\epsilon$ προσέγγιση του βέλτιστου κέρδους, αντιθέτως, χρειαζόμαστε $O(\frac{1}{\epsilon^3})$ δείγματα, για κανονικές κατανομές, εάν οι πλειοδότες τραβάνε τις αξιολογήσεις τους για το αντικείμενο τραβούνται ως i.i.d.

Αυτά τα δύο αποτελέσματα μόνα τους υποδηλώουν ότι ο σχεδιασμός Prior-Independent μηχανισμών είναι αρκετά δυσκολότερος, αφού πολλά δείγματα χρειάζονται για την επιτευξη υποβέλτιστου κέρδους, σε αντίθεση με το σενάριο όπου γνωρίζουμε απο πριν την κατανομή των αξιολογήσεων των πλειοδοτών. Παρόλα αυτά ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα για την δημοπρασία του Vickrey [Vic61] είναι το ακόλουθο θεώρημα από τους Jeremy Bulow και Peter Klemperer.

Θεώρημα 1.5.1 (Θεώρημα Bulow-Klemperer) *Για i.i.d. και κανονικές κατανομές για τις αξιολογήσεις των πλειοδοτών, το εκτειμόμενο κέρδος από μια δημοπρασία δεύτερης τιμής στην οποία συμμετέχουν $n + 1$ πράκτορες είναι τουλάχιστον το εκτιμώμενο κέρδος της βέλτιστης δημοπρασίας για n πράκτορες.*

Η επίσημη απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [BK94]. Διαισθητικά το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό, αφού η υψηλότερη προσφορά στην περίπτωση των $n+1$ πλειοδοτών θα μας προσφέρει το υψηλότερο κέρδος της δεύτερης χαμηλότερης προσφοράς, η οποία όμως είναι η υψηλότερη πορσφορά για n πλειοδότες και είναι μεγαλύτερη ή ίση απο το εκτιμόμενο κέρδος στην περίπτωση όπου έχουμε n πλειοδότες.

1.5.4 Prior Free Μηχανισμοί

Ένας ακόμη πιο δύσκολος τομέας για τον σχεδιασμό μηχανισμών από τον Prior Independent, αφορά τον σχεδιασμό Prior Free μηχανισμών, όπου ο δημοπράτης όχι μόνο δεν γνωρίζει την ακριβή κατανομή D σύμφωνα με την οποία ο πλειοδότης αποκτά την αξιολόγηση του, αλλα μπορεί και η κατανομή αυτή να μην υπάρχει ή να του είναι αδύνατον να την μάθει. Στο μοντέλο αυτό δεν ισχύει το Θεώρημα Bulow-Klemperer, αφού οι κατανομές των πλειοδοτών δεν προέρχονται από κάποια κατανομή και συνεπώς προφανώς δεν είναι i.i.d. .Συνήθως σε ένα τέτοιο μοντέλο κατασκευάζουμε εμπειρικούς μηχανισμούς οι οποίοι όμως δεν είναι πάντα αποδοτικοί σε κάθε δυνατό σενάριο.

Ένας συνηθισμένος μηχανισμός τόσο σε αυτό το μοντέλο όσο και στο προηγούμενο είναι ο μηχανισμός τυχαίας δειγματοληψίας. Είναι ένας φιλαλήθης μηχανισμός, που όπως υπονοεί και το όνομα χρησιμοποιεί διεγματοληψίαπροκειμένου να πετύχει μια προσέγγιση του βέλτιστου κέρδους. Δύο παραδείγματα τέτοιων μηχανισμών δόθηκαν στην προηγούμενη ενότητα.

Η μέλετη Prior Free μηχανισμών παρόλα αυτά είναι ιδιαίτερα πλούσια. Ένα από τα πίο αξιοσημείωτα αποτελέσματα είναι η δημοσίευση των Hartline και Roughgarden [HR08]. Στην δημοσίευση αυτή προτείνεται μια γενική μεθοδολογία η οποία συνδέει την μελέτη των Prior Free μηχανισμών με την μελέτη χειρότερης περίπτωσης. Αυτή η μεθοδολογία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την διπλωματική εργασία αυτή, αφού παρέχει μια κατευθυντήρια γραμμή για τις τεχνικές αποδείξεις των δημοπρασιών καθώς και για την απόδειξη βελτιστότητας.

1.5.5 Δημοπρασία Πρώτης Τιμής

Μια από τις πιο λογικές προσεγγίσεις για την μεγιστοποίηση του κέρδους θα ήταν να χρεώνουμε στον πλειοδότη με την υψηλότερη προσφορά την προσφορά που έκανε και να του δίνουμε το αντικείμενο. Αυτή η στρατηγική όμως θυσιάζει τον φιλαλήθεια του του μηχανισμού, αλλα διαισθητικά πετυχαίνει υψηλότερο κερδός σε σχέση με τον κλασσικό μηχανισμό της δημοπρασίας δεύτερης τιμής, αφού ο πλειοδότης με την υψηλότερη αξία για το αγαθό πρέπει πάντα να δηλώνει υψηλότερη τιμή απο την δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά.

Λόγο του ότι ο μηχανισμός αυτός θυσιάζει την φιλαλήθεια είναι είναι δύσκολο να αιτιολογήσουμε το ακριβές κέρδος από την δημοπρασία αυτή, ακόμη και για μηχανισμούς ενός γύρου. Παρόλα αυτά η δημοπρασία πρώτης τιμής έχει μελετηθεί αρκετά και είναι το αντικείμενο πολλών διαφορετικών δημοσιεύσεων, για πολλά διαφορετικά μοντέλα.[RS81][Ely+94][MM87]

1.5.6 Δυναμικές και Στατικές Δημοπρασίες

Εώς το σημείο αυτό αναφερθήκαμε αποκλειστικά σε δημοπρασίες ενός γύρου, όπου ο δημοπράτης έπρεπε να πουλήσει ένα σύνολο αντικειμένων σε έναν γύρο. Αυτό σημαίνει πως τόσο ο δημοπράτης, όσο και ο πλειοδότης έχουν στην κατοχή τους αποκλειστικά την πληροφορία όπου είναι διαθέσιμη πριν την αρχή της δημοπρασίας και σύμφωνα με αυτή πρέπει να αποφασίσουν την στρατηγική τους. Σε δημοπρασίες με πολλαπλούς γύρους, παρόλα αυτά οι πλειοδότες όπως και ο δημοπράτης έχουν την επιλογή να προσαρμόσουν και να αλλάξουν τις στρατηγικές τους σύμφωνα με την πληροφορία όπου έχουν παρατηρήσει τους προήγουμενους γύρους. Παρόλα αυτά δεν υποστηρίζουν όλα τα μοντέλα τέτοιες αλλαγές στην στρατηγική των παικτών, για τον λόγο αυτό διαχωρίζουμε τις δημοπρασίες σε δύο ομάδες, τις στατικές και τις δυναμικές δημοπρασίες.

Σε στατικές δημοπρασίες οι πλειοδότες υποβάλουν τις προσφορές για τα αντικείμενα και όλους τους γύρουςστην αρχή της δημοπρασίας. Αυτό σημαίνει πως οι στρατηγικές των πλειοδοτών και συνεπώς και οι στρατηγικές του δημοπράτη δεν αλλάζουν μετά την αρχή της δημοπρασίας, το οποίο πρακτικά δημιουργεί ένα στατικό περιβάλλον. Σε ένα δυναμικό περιβάλλον η υποβολή των προσφορών των πλειοδοτών γίνεται μέσα σε πολλούς γύρους, οι πλειοδότες παίρνουν ανατροφοδότηση κάθε γύρο ανάλογα με την επιλογή τους και έτσι τους προσφέρεται η δυνατότητα να αλλάξουν την μελλοντική συμπεριφορά τουςκαι την στρατηγική τους με στόχο να μεγιστοποιήσουν την ικανοποίηση τους.

Οι στατικές δημοπρασίες χρησιμοποιούντε στην πράξη είτε όταν έχουμε ιδιαίτερα μεγάλο αριθμό συμμετεχόντων, είτε σε καταστάσεις όπου έχουμε πολύ μικρό αριθμό συμμετεχόντων, ενώ οι δυναμικές δημοπρασίες υπερτερούν σε καταστάσεις όπου έχουμε έναν μεσαίο αριθμό από συμμετέχοντες. Μια διαίσθηση πίσω από το φαινόμενο αυτό είναι ότι όταν έχουμε έναν πολύ μεγάλο αριθμό από πλειοδότες σε μία δημοπρασία, μια δυναμική δημοπρασία θα είχε πολύ μεγάλη υπολογιστική πολυπλοκότητα καθώς και πολυπλοκότητα για την επικοινωνία, το οποίο την καθίστα μη υλοποιήσιμη στην πράξη. Σε περιβάλοντα όπου έχουμε πολύ μικρό αριθμό συμμετεχόντων, οι αθέμιτες συνεργασίες ανάμεσα στους παίκτες ειναι ιδιαίτερα πιθανές και οι στατικές δημοπρασίες περιορίζουν τα αποτελέσματα όπου μπορεί να επιφέρουν αυτές οι συνεργασίες. Τέλος οι δυναμικές δημοπρασίες είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικές σε μοντέλα όπου έχουμε έναν μεσαίο αριθμό από πλειοδότες, αφού η επίδραση που έχουν οι αθέμιτες συνεργασίες περιορίζεται και δεν χρειάζονται πολύ μεγάλοι υπολογιστικοί πόροι. Σε τέτοιες συνθήκες οι δυναμικές δημοπρασίες με την προσαρμοστική φύση τους επιτρέπουν στους πλειοδότες να μεταβάλουν τις συμπεριφορές τους, προκειμένου να αυξήσουν την ικανοποίηση τους και επιτρέπουν και στον δημοπράτη να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

Οι δυναμικές δημοπρασίες έχουν μελετηθεί από πολλές διαφορετικές σκοπιές. Μια συνηθισμένη τέτοια σκοπιά είναι ότι έχουμε T γύρους όπου ο δημοπράτης πουλάει ένα μόνον αντικείμενο σε έναν μόνο πλειοδότη για κάθε γύρο. Επίσης ο πλειοδότης είναι πλήρως στρατηγικός, το οποίο σημαίνει πως μπορεί να επιλέξει να ικανοποιηθεί λιγότερο σήμερα, προκειμένου να ενισχύσει την ικανοποίηση του σε συνολικά πάνω σε όλη την διαδικασία. Στο μοντέλο αυτό έχουμε πολλές δημοσιεύσεις, μερικές από τις οποίες είναι [Pap+16][ADH16]

1.6 Online Learning

Το "Online Learning" ως σκοπό έχει την κατασκευή αλγορίθμων μάθησης, οι οποίοι έχουν την δυνατότητα να επεξαργάζονται τα δεδομένα σειριακά και δεν χρειάζονται τα δεδομένα από όλες τις χρονικές στιγμές. Επίσης οι άλγοριθμοι αυτοί στην μέση περίπτωση έχουν την δυνατότητα να βελτιώνουν την απόδοση τους στο πέρασμα του χρόνου. Επίσης οι αλγόριθμοι "Online Learning" έχουν την δυνατότητα να αντιμετοπίζουν εχθρικές συμπεριφορές που ως στόχο έχουν να μειώσουν την απόδοση τους.Το μοντέλο όπου μας ενδιαφέρει για την ανάπτυξη των αλγορίθμων αυτών, ονομάζεται Online" λήψη αποφάσεων και είναι το εξής:

<u>Μοντέλο:</u> Στο μοντέλο για την "Online" λήψη αποφάσεων έχουμε:

- Ένα σύνολο από πιθανές δράσεις A για τον αλγόριθμο όπου $|A| = n$
- Ένα σύνολο από διανύσματα ανταμοιβής $R^1, \dots, R^T : A \to [-1, 1]$ τα οποία λαμβάνουμε κατά την διάρκεια του προβλήματος. Το οποίο σημαίνει πως την χρονική στιγμή t πρέπει να λάβουμε την απόφαση μας, σύμφωνα με όλα τα διανύσματα $R^i, \forall i \leq t - 1$

Είναι εμφανές ότι οι αλγόριθμοι αυτοί μη έχωντας όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για κάθε χρονική στιγμή έχουν χαμηλότερη απόδοση από έναν απλοικό αλγόριθμο ο οποίος θα είχε όμως όλη την απαραίτητη πληροφορία για κάθε χρονική στιγμή, ακόμη και εάν αυτή είναι μελλοντική. Οπότε πρέπει να βρούμε μια μετρική η οποία να είναι μια καλή ένδειξη για την απόδοση του αλγορίθμου, ακόμη και στην χειρότερη περίπτωση.

Ορισμός 1.6.1 (Online Regret) *Το Regret ενός Online αλγορίθμου ορίζεται ως η διαφορά ανάμεσα στο κέρδος που θα είχαμε εάν επιλέγαμε σε κάθε γύρο την βελτιστη επιλογή, μετά το τέλος της δημοπρασίας και δεν έχουμε την δυνατότητα να αλλάζουμε την επιλογή αυτή, μείον το άθροισμα των επιλογών του αλγορίθμου μας για όλους τους γύρους της δημοπρασίας. Εάν συμβολίσουμε με p_t την επιλογή του αλγορίθμου μας των γύρο t και με r_i^t την επιβράβευση που παίρνει ο αλγόριθμος τον γύρο t εάν παίξει επιλογή i, τότε έχουμε τον παρακάτω τύπο για το Online Regret.*

$$Regret(A) = \max_i \sum_{t=1}^{T} r_i^t - \sum_{t=1}^{T} r_{p_t}^t$$

1.6.1 Mean-based Αλγόριθμοι

Η χαρακτηριστική ιδιότητα που πρέπει να έχει ένας αλγόριθμος για να μπορούμε να εφαρμόσουμε την δημοπρασία μας και να έχουμε αυτά τα μαθηματικά όρια όπου δείξαμε είναι ο αλγόριθμος να είναι Mean-Based. Το να είναι ένας αλγόριθμος Mean-Based διαισθητικά σημαίνει πως εάν μια επιλογή εώς τώρα φένεται να είναι πιο κερδοφόρα με έναν οσοδήποτε μικρό σταθερό παράγοντα, για κάθε γύρο, ως προς κάποια άλλη τότε η δεύτερη έχει αμελητέα πιαθνότητα να συμβεί.

Ορισμός 1.6.2 (Mean Based Αλγόριθμος) *Έστω πως συμβολίζουμε με $\sigma_i^t = \sum_{s=1}^{t} r_i^s$. Ένας αλγόριθμος ονομάζεται $\gamma - mean - based$, εάν για κάθε i και κάθε j τέτοιο ώστε $\sigma_i^t < \sigma_j^t - \gamma \cdot T$, έχουμε πως η πιθανότητα να διαλέξουμε μια επιλογή i τον γύρο t είναι το πολύ γ. Θα ονομάζουμε έναν αλγόριθμο $mean - based$ εάν είναι $\gamma - mean - based$ για κάποιο $\gamma = o(1)$.*

1.7 Τεχνικές Αποδείξεις

Όλες οι δημοπρασίες όπου προτείνονται στην πράξη εφαρμόζονται ως Δημοπρασίες πρώτης τιμής και κρυφής προσφοράς. Όπου ο δημοπράτης θα ξεκινάει να δίνει το αντικείμενο από μια χρονική στιγμή και μετά για κάθε επιλογή όπου δίνει στον πλειοδότη, σύμφωνα με την οποία θα δηλώσει την αξιολόγηση του για το αντικείμενο. Οι αποδείξεις όπου παρέχουμε παρακάτω καθώς και οι υπολογισμοί έχουν να κάνουν με το ποσοστό του χρόνου όπου θα παρέχεται το αγαθό στην κάθε επιλογή. Πρωτού προχωρήσουμε στην παρουσίαση των τεχνικών αποτελεσμάτων θα παραθέσω το Γραμμικό Πρόγραμμα που παρουσιάζεται στην δημοσίευση [Bra+18], αφού θα είναι πλήρως απαραίτητο για την ορθή περιγραφή και κατανόηση της τεχνικής δουλειάς.

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} q_i \cdot (v_i x_i - u_i) \\
\textbf{subject to} & \begin{array}{c} u_i \geq (v_i - v_j)x_j, \forall i, j \in [m] : i > j \\ u_i \geq 0, 1 \geq x_i \geq 0, \forall i \in [m] \end{array}
\end{array}
\tag{1.1}
$$

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του προγράμματος, για την βέλτιστη λύση, για μια κατανομή D συμβολίζεται ως $MBRev(D)$

1.7.1 Prior Free Μηχανισμός

Το πρώτο μοντέλο όπου θα μελετήσουμε είναι το Prior Free, όπου δεν γνωρίζουμε την κατανομή D από την οποία οι πλειοδότες τραβάνε την αξιολόγηση τους. Προκειμένου να αποδείξουμε μια προσέγγιση του βέλτιστου κέρδους για κάθε πιθανή κατανομή.

Λήμμα 1.7.1 *Αν οι συναρτήσεις f, f_1, f_2 είναι διαφορετικές αντικειμενικές συναρτήσεις του γραμμικού προγράμματος (1) για διαφορετικές κατανομές D, τέτοιες ώστε να ισχύει, πως:*

$$f(x) = \lambda f_1(x) + (1 - \lambda) f_2(x)$$

και εάν θεωρήσουμε x_1^*, x_2^* τις βέλτιστες κατανομές για τις συναρτήσεις f_1, f_2 αντίστοιχα. Τότε, εάν για κάποιο x_{avg} ισχύει πώς:

$$\frac{f_1(x_{avg})}{f_1(x_1^*)} = \frac{f_2(x_{avg})}{f_2(x_2^*)} = c$$

Τότε εάν x^* είναι η βέλτιστη διανομή για την f, θα έχω, πώς:

$$\frac{f(x_{avg})}{f_(x^*)} \geq c$$

Απόδειξη:

$$\frac{f(x_{avg})}{f(x^*)} = \frac{\lambda f_1(x_{avg}) + (1 - \lambda) f_2(x_{avg})}{\lambda f_1(x^*) + (1 - \lambda) f_2(x^*)} \geq \frac{\lambda f_1(x_{avg}) + (1 - \lambda) f_2(x_{avg})}{\lambda f_1(x_1^*) + (1 - \lambda) f_2(x_2^*)} = \frac{f_1(x_{avg})}{f_1(x_1^*)} = c$$

Μέσα από μια αναδρομική απόδειξη μπορεί κανείς να επεντείνει το παραπάνω λήμμα για πολλές κατανομές $D_1, D_2, D_3, \ldots$ τέτοιες ώστε οι υπόλοιπες κατανομές να είναι κυρτός συνδυασμός τους. Στην δικιά μας περίπτωση οι κατανομές αυτές είναι οι ντετερμινιστικές κατανομές, δηλαδή αυτές όπου ο δημοπράτης γνωρίζει ντετερμινιστικά την αξιολόγηση που θα έχει ο πλειοδότης για το αντικείμενο.Οπότε μας αρκεί να βρούμε μια διανομή x για την οποία όλες οι ακραίες κατανομές $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ έχουν τον ίδιο λόγο προσέγγισης του βέλτιστου κέρδους.

Για απλότητα για την υπόλοιπη υποενότητα θα συμβολίζω με f_i την συνάρτηση όπου αντιστοιχεί στην κατανομή P_i. Έχωντας αυτό τον συμβολισμό μπορούμε να περιγράψουμε την βέλτιστη λύση x_{avg}, από το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \frac{f_1(x)}{MBRev(P_1)} &= \frac{f_2(x)}{MBRev(P_2)} \\ \frac{f_2(x)}{MBRev(P_2)} &= \frac{f_3(x)}{MBRev(P_3)} \\ &\vdots \\ \frac{f_{n-1}(x)}{MBRev(P_{n-1})} &= \frac{f_n(x)}{MBRev(P_n)} \\ x_n &= 1 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Σημείωση: Για λόγους απλότητας σε περίπτωση όπου οι πιθανές αξιολογήσεις από τους πλειοδότες δεν σχηματίζουν διάστημα όπου οι διαδοχικές αξιολογήσεις έχουν διαφορά μικρότερη ή ίση του 1, τότε εισάγουμε εικονικές αξιολογήσεις στις κενές θέσεις αυτές, προκειμένου να έχουμε έναν κλειστό τύπο για την διανομή των αγαθών και μια ακριβέστερη μαθηματική προσεγγιση του ποσοστού του κέρδους όπου επιτυγχάνουμε.

Λήμμα 1.7.2 *Εάν $v_{i+1} = v_i + 1, \forall i \geq 1$, τότε $x_i = (1 + \frac{i-1}{v_1+i-1}) \cdot x_1 \forall i \geq 1$ είναι μια εφικτή διανομή η οποία ικνοποιεί το παραπάνω σύστημα, σύστημα (1.2).*

Απόδειξη: Έχουμε, πως:

$$\frac{1}{v_1+1} \geq \frac{1}{v_1+x}(1+\frac{1}{v_1+1}), \forall x \geq 2$$

Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε, πώς:

$$\frac{1}{v_1+1} \geq \frac{1}{v_1+x}(1+\frac{1}{v_1+1}) \Leftrightarrow \frac{v_1+x}{v_1+1} \geq \frac{v_1+2}{v_1+1}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την ταυτότητα ως καθοριστικό παράγοντα για την επαγωγική μας απόδειξη.
Βάση:

$$x_2 = (1+\frac{1}{v_1+1}) \cdot x_1$$

Ο τύπος αυτός αποδεικνυεται εύκολα, από τις συνθήκες όπου έχουμε.

Επαγωγικό Βήμα:

$$x_k = (1+\frac{k-1}{v_1+k-1})x_1 \quad , \forall k \leq i$$

Στην συνέχεια, από τις εξισώσεις μας, έχουμε, πώς:

$$x_1 = x_{i+1} - \max_{j<i+1}\{(1-\frac{v_j}{v_i+1})x_j\} = x_{i+1} - \max_{j<i+1}\{(1-\frac{v_1+j-1}{v_1+i})(1+\frac{j-1}{v_1+j-1})\cdot x_1\}$$

Είναι εύκολο να δείξουμε, πώς για καθε $2 \leq j \leq i$, έχουμε πώς:(Το δεξί μέλος της ανισότητας μεγιστοποιείται για $j = i$, η υπόλοιπη διαδικασία είναι απλοί υπολογισμοί)

$$(1 - \frac{v_1+j-1}{v_1+i})(1 + \frac{j-1}{v_1+j-1}) \leq \frac{i}{v_1+i}$$

Οπότε, αφού για $j = 1$, η εξίσωση μεγιστοποιείται στην τιμή $\frac{i}{v_1+i}$,παίρνουμε πως το μέγιστο της φόρμουλας είναι το παραπάνω κλάσμα και το αποτέλεσμα ακολουθεί άμεσα από αυτό.

Έχοντας υπολογίσει τον κανόνα διανομής παίρνουμε την παρακάτω προσέγγιση, χειρότερης περίπτωσης, από το σύστημα (1.2) και το Λήμμα (1.7.1), αφού αυτά μας εγγυούνται ότι έχουμε τον ίδιο λόγο προσέγγισης για όλες τις κατανομές.

$$A = \frac{f_1(x_{avg})}{v_1} = \frac{v_1 \cdot x_1}{v_1} = x_1 = \frac{1}{1 + \frac{n-1}{n-1+u_1}}$$

1.7.2 Μείγμα Κατανομών

Στο δεύτερο αυτό μοντέλο, έχουμε, ένα μειγμα κατανομών, όπως προαναφέραμε, όπου οι κατανομές από τις οποίες κατασκευάζεται το μείγμα βρίσκονται στο σύνολο $S = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$. Τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά του μοντέλου είναι αυτά όπου προαναφέραμε.

Στην γενική περίπτωση, όπου έχουμε μείγμα n κατανομών, ο κανόνας διανομής υπολογίζεται από το παρακάτω γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{aligned} \textbf{maximize} \quad & \sum_{i=1}^{m} q_i^1 \cdot (v_i x_i - u_i) \\ \textbf{subject to} \quad & u_i \geq (v_i - v_j)x_j, \forall i,j \in [m] : i > j \\ & u_i \geq 0, 1 \geq x_i \geq 0, \forall i \in [m] \\ & \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^1 \cdot (v_i x_i - u_i)}{MBRev(D_1)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^j \cdot (v_i x_i - u_i)}{MBRev(D_j)}, \forall j \in [k] \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ως D_1 τοποθετούμε όλες τις δυνατές κατανομές από το σύνολο S όπου μας δίνονται αρχικά, προκειμένου να καλύψουμκάθε πιθανή αναδιάταξη για τις κατανομές, σε μια πιθανή βέλτιστη λύση.Έτσι ορίζουμε τον παρακάτω κανόνα διανομής.

Allocation Rule:Εκτελούμε το Γραμμικό Πρόγραμμα (1.3), μία φορά με κάθε μια από τις κατανομές, ως αντικειμενική συνάρτηση.Αφού εκτελέσουμε το γραμμικό πρόγραμμα, μια φορά για κάθε μια από τις κατανομές, έχουμε ένα σύνολο λύσεων

$\{\frac{f_1(x_{opt1})}{MBRev(D_1)}, \frac{f_2(x_{opt2})}{MBRev(D_2)}, \ldots, \frac{f_n(x_{optn})}{MBRev(D_n)}\}$. Έπειτα υλοποιούμε τον κανόνα διανομής για τον οποίο ισχύει πως: $\frac{f_i(x_{opti})}{MBRev(D_i)} = \max_{j\in[n]} \frac{f_j(x_{optj})}{MBRev(D_j)}$

Όπως προανέφερα και στην εισαγώγη η παροχή ενός ακριβή τύπου για την προσέγγιση του βέλτιστου κέρδους, όπου πετυχαίνει η δημοπρασία αυτή, είναι δύσκολο να οριστεί.Οπότε θα παρουσιάσω την προσέγγιση όπου έχουμε για 2 ή 3 κατανομές, αντίστοιχα.
Για δύο κατανομές έχουμε προσέγγιση:

$$A = \frac{f_1(x_{avg})}{MBRev(D_1)} = c\frac{c_2}{c_1 + c_2} + \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot (1 - c_2) = 1 - \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}$$

όπου τα c_1, c_2 ορίζονται από τους παρακάτω τύπους:

$$c_1 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^2 (v_i x_{opt1}^i - u_{opt1}^i)}{MBRev(D_2)}$$

$$c_2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^1 (v_i x_{opt2}^i - u_{opt2}^i)}{MBRev(D_1)}$$

Για την προσέγγιση όπου επιτυγχάνεται για τρείς κατανομές χρειάζεται να διευκρινίσω πως με $x_{i,j}$ συμβολίζουμε το σημείο, όπου πετυχαίνει την παραπάνω προσέγγιση (για 2 κατανομές), για τις κατανομές i, j.Για 3 κατανομές έχουμε λοιπόν λόγο προσέγγισης:

$$A = \kappa \cdot \frac{f_1(x')}{f_1(x_1)} + (1 - \kappa) \cdot \frac{f_1(x_{2,3})}{f_1(x_1)}$$

,όπου:

$$\kappa = \frac{\frac{f_2(x_{2,3})}{f_2(x_2)} - \frac{f_1(x_{2,3})}{f_1(x_1)}}{\frac{f_2(x_{2,3})}{f_2(x_2)} - \frac{f_1(x_{2,3})}{f_1(x_1)} + \frac{f_1(x')}{f_1(x_1)} - \frac{f_2(x')}{f_2(x_2)}}$$

$$x' = \lambda \cdot x_{1,3} + (1 - \lambda) \cdot x_{1,2}$$

$$\lambda = \frac{\frac{f_2(x_{2,3})}{f_2(x_2)} - \frac{f_1(x_{1,2})}{f_1(x_1)}}{\frac{f_1(x_{1,3})}{f_1(x_1)} - \frac{f_1(x_{1,2})}{f_1(x_1)}}$$

1.7.3 Βελτιστότητα

Τέλος θα αναφερθούμε συνοπτικά στην βελτιστότητα των παραπάνω αποτελεσμάτων. Προκειμένου να δείξουμε την βελτιστότητα θα κατασκευάσουμε μια παραλλαγή του γραμμικού προγράμματος που χρησιμοποιείται στην δημοσίευση [Bra+18] για να δειχθεί η βελτιστότητα της δημοπρασίας σε Bayesian μοντέλο.

$$\begin{array}{ll} \textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} q_i^1 \cdot (v_i x_i - u_i) \\ \textbf{subject to} & \begin{array}{c} u_i \geq v_i \cdot y_j - \overline{p_j} - \frac{\delta}{T}, \forall i \in [m], j \in [K] : v_i \geq b_j \\ \overline{p_j} \leq b_j \cdot y_j, j \in [K] \\ x_i = y_j, i \in [m], j = argmax_{j \in [K] : b_j \leq v_i} b_j \\ \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^1 \cdot (v_i x_i - u_i)}{MBRev(D_1)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^j \cdot (v_i x_i - u_i)}{MBRev(D_j)}, \forall j \in [k], (\alpha) \\ \overline{p_j} \geq 0, 1 \geq y_j \geq 0, j \in [K] \end{array} \end{array} \tag{1.4}$$

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα θα επιλύσουμε το γραμμικό πρόγραμμα αυτό για κάθε δυνατή αντικειμενική συνάρτηση, του συνόλου S. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα σημείο στην εφικτή περιοχή του γραμμικού προγράμματος (1.1), το οποίο όμως δεν είναι βέλτιστη λύση για το (1.4), για καμία αντικειμένική συνάρτησης. Ειδάλως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την απόδειξη του [Bra+18] για να δείξουμε και εμείς την βελτιστότητα του κανόνα διανομής που προτείνουμε. Πιό συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε, πως υπάρχει κάποιο $x_{\max}$ τέτοιο, ώστε:

$$A = \min_{j \in [n]} \frac{f_j(x_{\max})}{f_j(x_j)}$$

Και θα υποθέσουμε, πως το x_{max} αυτό είναι διαφορετικό από αυτό όπου υπολογίσαμε αρχικά.Έστω, πως η βέλτιστη λύση όπου υπολογίσαμε εμείς έχει ως χειρότερο λόγο προσέγγισης τον λόγο προσέγγισης της κατανομής D_i το οποίο σημαίνει πως για το x_{max}, όπου υπολογίσαμε παίρνουμε καλύτερο λόγο προσέγγισης για την D_i και τουλάχιστον το ίδιο καλή προσέγγιση για όλες τις άλλες κατανομές. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού για την εκτέλεση του αλγορίθμου με αντικειμενική συνάρτηση την f_i θα έπρεπε να έχουμε βρεί τουλάχιστον εξίσου καλή λύση. Συνεπώς αφού το Γραμμικό πρόγραμμα (1.4) πετυχαίνει κέρδος το οποίο φράσεται άνω από το πρόγραμμα (1.3) πετυχαίνουμε βέλτιστο κέρδος με την δημοπρασία αυτή.

Chapter 2

Introduction

2.1 Introduction

One of the most common problems regarding mechanism design is Revenue Maximization. The goal of maximizing the profit of the auctioneer has been studied in many settings. In classic mechanism design the optimal auction was designed by Myerson [Mye81]. However since then many different settings have risen, due to the evolution and progression of markets world wide. In many cases there has been a big increase of the information that the bidders and the auctioneer need to process. In others there is information that the auctioneer does not have access to. Finally there are auctions that needed to be conducted repeatedly or over multiple rounds, which prompts a dynamic environment, since both the bidders and the auctioneer have the opportunity to adjust their strategies. All of these phenomenon have created the need for more expressive settings, which are specific to different problems in practice.

The fact that there is an increase of information that the bidders need to process prevents them from being fully strategic. If the auction in which the bidder participates is truthful [Vic61] then he would be able to reason easily on how he should bid. On the other hand if he takes part in a non-truthful auction like a First Price auction, a Generalized First Price auction, a Generalized Second Price auction, etc. then it would be hard to argue about how he should bid in the first round, let alone submitting multiple bids over multiple rounds, since in that scenario his utility in future rounds is directly correlated with his actions today. There have been many studies which aimed at designing efficient algorithms that maximize the users utility in repeated auctions which are non truthful.[FPS18]. Nevertheless the behavior of the bidders in such problems usually resembles that of an online algorithm. Also there are problems that the auctioneer needs to overcome, when there is so much information to be processed [DV13].

A different problem which involves mainly the auctioneer regards the information assumptions which are made in traditional mechanism design. It is assumed that the seller has complete information over a distribution which the bidders valuations might follow. However, there are many scenarios in practice where this is not the case, since in order to gather this information the auctioneer would have to conduct research, which would be costly or because there are common market shifts which prevent him from having an exact estimate of the bidders potential valuations. In order to resolve this new settings where introduced, namely the prior independent, prior free setting, which take little to no assumptions of the distribution of the bidders valuations. Most work in this field aims at providing an approximation of the optimal revenue which we would be able to achieve in a Bayesian setting [HR08]. This field of work expresses the trade off in each setting between acquiring more information on the bidders and the optimal revenue which we might achieve.

Finally repeated auctions have created the need for dynamic environments where both the bidders and the auctioneer may change their strategies through time.For example a bidder may chose to understate his valuation and lose the item today so that he will receive it tomorrow in a lower price and with this process maximize his utility. For this reason a static auction from the perspective of the auctioneer is safer, since such behavior from the bidders would be ineffective and they would be deterred from trying it[HR08]. It is apparent though that dynamic settings and especially dynamic auctions are more complex to handle and design [Pap+16].

The Goal of this thesis is to optimize the revenue that an auctioneer can potentially gather in settings of reduced information. We are primarily interested in developing a prior free mechanism for a repeated auction where the bidders mean-based learn. As well as designing an auction, whose performance degrades gracefully, as the available information drops from the Bayesian setting down to the prior free one.

2.2 Related Work

This thesis is an extension on the work of Braverman,Mao,Schneider and Weinberg [Bra+18], since we provide a near-optimal approximation of the revenue achieved in the aforementioned publication in a setting with reduced information. Consequently it is related to the following lines of work.

First and foremost the line of work which is most closely related to this thesis is the one which focuses on designing mechanisms for prior-independent or prior-free settings. In these settings the current line of work aims at designing auctions that achieve an approximation of the optimal revenue achievable by any mechanism should we have more information on the valuations of the bidders.[CR14]

However, most of these mechanisms require samples in order to create an empirical rule based on which they will operate, while our mechanisms require no samples. Some research in such a manner designs dynamic auctions, where the auctioneer tries to learn the bidders valuations from samples[GN17], [BSV17] and construct optimal auctions. A Recent work by Hartline and Roughgarden [HR08] provides a method for efficient mechanism design in prior-free or prior-independent settings. In a more abstract manner the method does not require sampling and in that sense is closer to this thesis.

Secondly, the dynamic auction setting which we mentioned earlier provides the foundation on which we will work .[Pap+16][Mir+16a][Mir+16b] At this setting we have a single buyer and the seller sells a single item for T rounds. In contrast to our setting, the valuation of the bidder is drawn from a distribution D at the start of each round and the distribution D is known to the seller, also the bidder is fully strategic, while in our setting he is not, since his choices and his behaviors are modeled by a mean based algorithm, a category of online learning algorithms.

In addition, in our setting bidders no-regret learn, such behavior has been studied from the perspective of the Price of Anarchy on combinatorial auctions [Rou12][ST13]. These works are focused around the maximization of social welfare, while this thesis aims at maximizing revenue. Also in our setting the bidder no regret learns in order to keep up with the changes in the auctions allocation rule over time, since they are not publicly known a priori, while in the settings of the aforementioned publications the auction is publicly known and the bidders adjust their strategies to keep up with the strategic changes of their counterparts.

Finally, as I pointed out earlier the behavior of the bidders is modeled through Online Learning Algorithms, therefore this thesis is related to previous work that designs or proposes algorithms for Online Decision Making problems. More specifically we are concerned with mean based algorithms.One such algorithm is the Follow the Perturbed Leader [KV02]. Other algorithms operate differently under different information settings like the Multiplicative Weight Update method from which came the EXP3 algorithm [Aue+02], the Hedge algorithm and more modern versions like the WIN-EXP algorithm [FPS18].

In conclusion this thesis lies in the intersection of many different lines of work, or more accurately utilizes online learning, a tool outside mechanism design to further research conducted in the field.

2.3 Model

In our model there is one seller and one buyer for a single item. The auctioneer wants to sell the item to the bidder while maximizing his revenue. The auction is repeated for T rounds as follows:

1. At the start of each round the bidder draws his valuation in one of the two following ways. The first case is that the bidder draws his valuation based on a distribution D, which is not known to the auctioneer and the auctioneer is unable to learn the distribution through sampling. The second case is that he chooses a distribution from a set of distributions $S = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$, he will then go on to choose his valuation based on the distribution D_i, which he chose, in this scenario we have complete information about each of the D_i, but lack any kind information regarding how he makes his initial choice from the set S.

2. The auctioneer does not get to observe the bidders valuation after it is drawn. The auctioneer gives to the bidder a set of arms A, in order to declare his value, the set A is always a superset on the potential set of values of the bidder. The set A remains the same for all rounds. At the start of each round the auctioneer chooses which of these arms will allocate the item and the payment rule for each one of them.

3. The bidder receives the item should he have declared an arm which receives the item at that round and pays the proportionate amount to the seller, according to the payment rule. Then he may observe either the utility he receives from that arm only or the utility he would have received from playing a particular set of arms.

A few side notes on the model are that the bidders no-regret learn using mean-based algorithms. As far as the revenue is concerned, asymptotically it does not matter if the bidder observes the utility of all the arms at each time step or not, meaning that he can either learn on the expert or the bandit setting. Moreover, the auction is individually rational for all bidders who do not overbid their true valuations, meaning that for arm i, which corresponds to a valuation of v_i the price which the payment rule will charge at any time step t, would be $p_i^t < v_i$.

2.4 Contributions

Utilizing the results of [Bra+18] we provide near-optimal auctions for settings where the auctioneer has reduced information over the bidders potential valuations.

The first result is a Prior-Free mechanism, which achieves a $\frac{1}{1+\frac{n-1}{n-1+v_1}}$ approximation of the Optimal Revenue for this model, the revenue that the auction suggested in [Bra+18] achieves. Also we design a Prior-free mechanism, which achieves the same approximation ratio but has lower computational complexity. In this fraction n represents the range of the valuations and v_1 represents the minimum valuation of that range.

The second result involves a setting where the bidders valuations are drawn from a mixture of distributions. In this setting we have complete information over all Distributions but incomplete information over their mixture. In this setting we provide an auction which is way more demanding computationally, it requires the solution of k linear programs, where k is the number of different distributions from which the mixture is constructed. In the case where $k \leq 3$, we provide elegant bounds which degrade from optimality in the case where the two distributions converge together to the bounds provided for the prior free mechanism. Unfortunately for more distributions such bounds proved exceedingly hard to produce.

The fraction of the revenue that the mechanisms achieve is important intuitively. In general it expresses the value of such information to the auctioneer. As is apparent the quantity of the revenue which is lost with the loss of information is analogous to the maximum revenue. Therefore when someone is deciding whether or not to conduct additional research in order to increase his potential revenue he should take into consideration how much his revenue can increase. For example if an auctioneer has no knowledge of the distribution of the players valuations but instead knows that the bidders valuations follow a normal distribution, prior independent setting, then the amount he should pay for the research of the market should be no higher than $\frac{Rev\_Auct}{1+\frac{n-1}{n-1+v_1}}$, where Rev_Auct is the revenue he gathered from the auction.

Furthermore, we show that these mechanisms provide optimal revenue for these settings. This result is important in the sense that it shows the optimality of a static auction even when dynamic auctions are considered. This minimizes the computational resources, which would otherwise be required, while maintaining optimal revenue.

Finally I have to point out, since I claimed that no sampling is required in practice in order to implement this mechanism, that there is a procedure through which one can estimate an accurate range where the bidders valuations of the commodity are relevant. By that I mean that a merchant, or anyone in possession of an item has acquired it and has paid some expenses, in that process, either for the manufacturing process or by buying it from someone else. In order for the procedure to be profitable or at least not harmful to the merchant he can calculate a certain price above which he should sell the item. Be setting this price as the lower value of the range of the mechanism and a higher price several times higher than that, leaving a big margin for gross profit, then the auctioneer has a range estimate for all the relevant bidder valuations for the auction, without requiring any samples. Of course as I mentioned earlier taking some samples will always increase the performance of the algorithm.

Chapter 3

Algorithmic Game Theory

Game Theory is the field, which seeks to provide a theoretical framework, for social situations among players. It aims on providing a mathematical model for any interaction between players in a strategic setting and through it an interpretation for such situations. The pioneers of Game Theory were the mathematician John von Neumann and economist Oskar Morgenstern through their work in the 1940s [NM47].Before proceeding we have to separate games, into two major categories, non-cooperative ones and cooperative ones, based on the level of collaboration enforced on the participants of the games.

- **Non-Cooperative Games:** Non-Cooperative Games are those between individual players and in which alliances cannot operate, unless the players opt to follow them.
- **Cooperative Games:** In contrast with Non-Cooperative Games, in Cooperative Games players are separated in groups either because of some external rule or the nature of the game. In such a scenario the players in the same group make a collective decision.

Arguably the first significant extension in the field was provided by mathematician John Nash [Nas+50]. Nash's work focuses on finding a set of strategies, which is stable. This means that no single player of the game can change their strategy to improve the outcome for themselves, should the other strategies remain the same.Consequently,for non-cooperative games, this set of strategies is considered optimal and no-one can deviate without decreasing their overall utility, such a set of strategies is referred to as a "Nash equilibrium". Following the work of Nash the field flourished, practice and real life problems inspired new mathematical models, in order to describe them, comprehend them and achieve as much of an optimal solution as possible.

Algorithmic Game Theory is the intersection of traditional game theory and computer science, it's goal is to design efficient algorithms for strategic environments. Attention to this field was primarily drawn in the early 2000s by Nisan and Ronen [NR01]. One of the most famous contributions to the field is the concept of the Price of Anarchy. The Price of Anarchy measures how the welfare of a system degrades due to selfish behavior of it's members. It practically measures how much more efficient the system would be if it's members acted in a collaborative manner and not in a selfish one. More formally we could give the following definition:

Definition 3.0.1 (Price of Anarchy [KP99]) *For a game G with a set of players n and a set of Strategies $S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ where S_i refers to the set of strategies that player i has. The utility of each player is a function $u_i : S \to \mathbb{R}$. The welfare of the system is a function $W(s) = \sum_{i=1}^{n} u_i(s)$, lets denote by E the set of Nash Equilibria of the game, then the Price of Anarchy is defined as follows:*

$$PoA = \frac{\max_{s \in S} W(s)}{\max_{e \in E} W(e)}$$

Example:(Prisoner's Dilemma) An example that demonstrates simply both the concept of the Nash Equilibrium as well as the Price of Anarchy,is the Prisoner's Dilemma.In the prisoner's dilemma two members of the same criminal organization,for convenience they will be called member A and member B, are apprehended and interrogated in different locations. Their interrogators inform them of the situation which is as follows:

- If neither one of them confesses for their recent crime, they will both serve a sentence of 2 years in prison for other minor offenses.
- If either member of the organization, member A or member B confesses, then they will serve no time in prison at all and the other member B or A respectively will serve a sentence of 10 years.
- If both of them confess they will serve a sentence of 5 years each.

Without any form of collaboration the criminals will both confess since this is the only Nash Equilibrium of the game and they will both serve a 5 year sentence. In comparison if neither one of them confessed they would both serve a 2 years sentence, this difference is the Price of Anarchy.

Algorithmic Game Theory fosters a lot of smaller fields of study, some of the most notable ones are Algorithmic Mechanism Design,Computational Social Choice and Potential Games . Potential Games have the characteristic that the incentive of all players to change their strategy can be modeled using the same function, the potential function. Computational Social Choice is a field that studies the aggregation of preferences, threw a voting mechanism and is also concerned with the computational complexity of the manipulations that it has to apply to this information. Finally, Algorithmic Mechanism design is of interest to this thesis and we will take an extensive look on it in the following sections.

3.1 Mechanism Design

Mechanism Design is a field that lies in the intersection between economics and Game Theory, in this field the goal is to design a Mechanism threw which we will achieve a particular goal.The foundations of this field were laid by Leonid Hurwicz, Eric Maskin and Roger Myerson,with their respective work and publications.[see Hur73][see ML79][see Mye81].

Before giving a more formal definition of Mechanism Design I have to point out that Mechanism Design is a Bayesian Game. A Bayesian Game is game in which players have incomplete information about the other players and consequently have to devise strategies that cover every contingency. In Mechanism design we assume the unique role of the auctioneer and we choose the payoff function for each of the participants strategies. More often than not an auctioneer will have incomplete information about the participants in the mechanism and consequently Mechanism Design becomes a Bayesian Game.

Setup: Let's assume that the mechanism has n participants in it, we will call this participants bidders. Also let the set of potential outcomes be represented by $\mathcal{O}$. Each bidder has a private valuation function, for bidder i we will use the notation $v_i : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^+$, representing the value of the bidder for each outcome, also each bidder has a set of actions,(strategies) that he can follow, for bidder i that set is inscribed by b_i. The first part of the mechanism is a function f, which maps a vector consisting of the actions of the bidders to the set of outcomes, $f : (b_1, b_2, \dots, b_n) \to \mathcal{O}$, the second part of the mechanism is a payment rule $p : (b_1, b_2, \dots, b_n) \to \mathbb{R}^n_+$. Our Mechanism is defined by the pair of functions (f, p).

The goal of the bidders is to maximize the utility they extract from the mechanism.The utilities of the bidder are assumed to be quasi-linear.

Definition 3.1.1 (Quasi-Linear Utility) *In a mechanism (f,p) were the actions,submitted by the bidders, form the vector* $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$*, we will say that bidders have quasi-linear utilities if the utility of each bidder is defined by the following equation:*

$$u_i(f(\boldsymbol{b})) = v_i(f(\boldsymbol{b})) - p_i(b)$$

In most natural mechanisms the utility of the bidder is Quasi-Linear, since the utility expresses the satisfaction of the bidder from an outcome, which in most cases is his valuation of that outcome minus the payment he has to make to the mechanism for that outcome. An important and desirable property for our mechanism would be that it is individually rational, meaning that if an agent chooses to participate in the mechanism he will always have higher utility, than if he did not.

Definition 3.1.2 (Individually Rational) *A mechanism (f,p) is individual-rational if for all actions* $\boldsymbol{b}$ *we have that:*

$$u_i(f(\boldsymbol{b})) \geq 0$$

In the previous definition we assume that when someone does not participate in the mechanism they have 0 utility.Otherwise the left hand side in the definition has to be replaced by the utility of not participating.Another important definition is that of the dominant strategy.

Notation:For a vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ we will denote by $\mathbf{x}_{-i} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$

Definition 3.1.3 (Dominant Strategy) *For a bidder, bidder i, we will say that a bidding strategy* b_i *is a dominant strategy, if regardless of the set of bidding strategies the other bidders opt for, then:*

$$u_i(f(b_i, \boldsymbol{b}_{-i})) \geq u_i(f(b_i', \boldsymbol{b}_{-i})), \forall\ b_i' \in \mathcal{B}$$

Where $\mathcal{B}$ *is he set of bidding strategies for bidder i.*

The existence of a dominant strategy for an agent in a game means that he will always profit for choosing that over any other strategy, should the actions of the other agents remain the same.
Finally an important definition is that of the sealed-bid auction:

Definition 3.1.4 (Sealed-bid auction) *In a sealed-bid auction the bidders simultaneously submit their sealed bids to the auctioneer, without knowing each other bids.*

When an auction is sealed-bid then there is no discrimination between its participants, in most settings they will be considered identical.

Having provided some basic definitions, we will proceed to discuss one of the most usual objectives of Mechanism Design, as well as some basic ideas around it.

3.2 Welfare Maximization

Definition 3.2.1 (Social Welfare) *For a Mechanism (f,p) and an outcome $o \in \mathcal{O}$ and n bidders participating in the auction, then the Social Welfare of the outcome o is calculated by the following formula:*

$$SW = \sum_{i=1}^{n} u_i(o)$$

Welfare Maximization is a desired property for many Mechanisms, since through such Mechanisms we can achieve higher overall utility for the participants of the Mechanism. For example, such Mechanisms may be important for a branch of local government that seeks to build a new park, a bridge , etc, however not all members of the city will utilize this government project at the same degree and therefore their valuations may differ and increasing people taxes more than they are willing to pay will lead to displeased citizens.

It is quiet evident from the previous example that any Mechanism seeking to Maximize Social Welfare should be individual-rational. Also since in such Mechanisms we would like to charge all of its participants a price proportionate to their valuations, so that they would all have positive utilities, we would like them to report their true valuation in their action and not something less in order to decrease the amount that we charge them and increase their overall utility. Such a Mechanism is called truthful or strategy-proof and the formal definition of this property is the following:

Definition 3.2.2 (Truthful Mechanism) *A Mechanism (f,p) is truthful if for all i, v_{-i} we have that:*

$$u_i(f(v_i, v_{-i})) \geq u_i(f(v_i', v_{-i})), \ \forall v_i' \in [\mathcal{B}]$$

where v_i is the true valuation of bidder i.

A more brief and less formal definition is that a truthful mechanism is one, where for each bidder truth telling is dominant strategy. Intuitively the price that a bidder pays in a truthful mechanism must be independent of his bid. For example, if a bidder pays his own bid in a mechanism, he will be tempted to decrease that bid as much as he can in order to maximize his utility, assuming that the bidders utilities are quasi-linear.

3.2.1 Single-item Auctions

The Simplest setting, which we will cover is the Single-item Auction. In this set up we have a single indivisible item to give away and we want to give it to the bidder with the highest valuation, our profits from the auction are rather unimportant to us. For a more practical context, let's assume that we want to give our old gaming console to one of our friends, we do not want to profit from this transaction, but we definitely want to please the group as much as possible.

The solution for this problem was given by W. Vickrey [see Vic61]. The proposed Mechanism is a sealed-bid, second price auction.This means that a single round of such an auction is conducted as follows:

1. All of the bidders submit their bids in private to the auctioneer, without any knowledge of what the other bids are.
2. The auctioneer allocates the item to the person with the highest bid
3. Then the auctioneer charges the bidder who was allocated the item the second highest bid.

In the aforementioned publication by Vickrey it is shown that this auction is truthful. Therefore, since we always allocate the item to the person with the highest bid the fact that it is a truthful mechanism guarantees that the person with the highest valuation acquires it and for this reason the mechanism maximizes social welfare.

3.2.2 Myerson's Lemma

In his publication in 1981 Myerson [Mye81], Myerson studies for which mechanisms (f,p), given the allocation rule f we can choose a payment rule p, such that the resulting mechanism is truthful.Before we proceed with Myerson's Lemma we need to define some properties, which are desirable for our mechanism or some properties, which our mechanism is required to have.

Definition 3.2.3 (Incentive Compatible) *We call a Mechanism Incentive Compatible if it is always preferable for all participants in the mechanism to act according to their true preferences.*

Definition 3.2.4 (Dominant Strategy Incentive Compatible - DSIC) *We call a Mechanism Dominant Strategy Incentive Compatible if acting truthfully is always a weakly dominant strategy.*

There is another category of incentive compatible mechanisms, the Bayesian-Nash incentive-compatible mechanism [Nis+]. However such a mechanism is not truthful, since it only guarantees there is a Nash equilibrium in which truth-telling is optimal. Since we are interested in truthful mechanisms we want truth-telling to be a dominant strategy in all scenarios and therefore we want the mechanism to be DSIC.

Definition 3.2.5 (Implementable) *We call a Mechanism (f,p) implementable if there is a payment rule p such that the mechanism (f,p) is DSIC.*

Definition 3.2.6 (Monotone Allocation Rule) *An allocation rule f is characterized as monotone, if for every bidder i and bids b_{-i} by the other bidders, the allocation rule $f_i(b_i, b_{-i})$ is non-decreasing in b_i.*

In practice the majority of mechanisms used have a monotone allocation rule. A mechanism with non-monotone allocation rule would mean that if a bidder was to bid more than his original bid he would receive a smaller amount of the good.Such an auction, however, would be illogical. The final definition we have to present is that of the Single Parameter Environment, since it provides some technical context regarding Myerson's Lemma.

Definition 3.2.7 (Single Parameter Environment) *In a single parameter environment the utility of the bidder can be expressed as a single variable.In such environments we will assume that the bidder has a value v_i per unit of the auctioned item he gets.*

Myerson proved that a Mechanism is implementable if and only if it is monotone, while providing a formula with which we can compute the only payment rule that makes the mechanism truthful. More formally, Myerson's Lemma is the following:

Theorem 3.2.1 (Myerson's Lemma) *A mechanism (f,p) for a single parameter environment is truthful for every bidder i and every bidding profile b_{-i} by the other participants then:*

1. *$f_i(b_i, b_{-i})$ is non decreasing in the first argument*
2. *The payment rule is given by the following formula, for all bidders:*

$$p_i(b_i, b_{-i}) = \int_0^{b_i} z \cdot \frac{d}{dz} f(z, b_{-i}) dz$$

The analytic proof of this Theorem can be found in Myerson's publication. It is worth noting though that when we apply Myerson's lemma on the problem of the previous section we get Vickrey's auction.

3.2.3 The VCG Mechanism

Finally the last truthful Mechanism we will present is the Vickrey-Clarke-Groves auction[Vic61],[Cla71],[Gro73]. It is a generalization on the auction proposed by Vickrey and it maximizes social welfare.

Notation: We will denote by $SW(x)$ the social welfare achieved by a feasible allocation x. We will also denote by $SW^{-i}(x_{-i})$ the social welfare achieved by the mechanism if participant i was not a part of the mechanism, for a feasible allocation x_{-i}, of the goods between the other members of the mechanism.

Suppose there are n participants in the mechanism and we have a set of potential outcomes $\mathcal{O}$. The VCG-Mechanism operates as follows:

1. It allocates a set of items to each participant of the mechanism, such that the resulting allocation is a feasible outcome and so that it is welfare maximizing given the bids that the participants submitted for each item.

2. The payment rule of the Mechanism then charges each of the participants a price according to the following formula:

$$p_i(x*) = SW^*_{-i}(x^*_{-i}) - \sum_{j \neq i} b_j(x^*)$$

   Where x^* is the optimal feasible allocation for social welfare maximization and x^*_{-i} is the optimal allocation when we exclude the i^{th} bidder.

The VCG-Mechanism is DSIC and maximizes social welfare. We can make tha following tranformation, given the previous payment rule, for some outcome o:

$$u_i(o) = v_i(o) - p_i(o) = v_i(o) + \sum_{j \neq i} b_j(o) - SW^*_{-i}(x^*_{-i})$$

BY reporting truthfully the mechanism maximizes the second term and since the third term is out of the bidders control, this maximizes the bidders utility.

3.3 Revenue Maximization

Definition 3.3.1 (Revenue) *For a mechanism (f,p), which has n participants and a set of submitted bids b then the revenue of this Mechanism can be defined as:*

$$REV = \sum_{i=1}^{n} p_i(b)$$

Revenue Maximization, traditionally, requires more information in comparison to social welfare maximization. This is due to the fact that social welfare maximization encourages truth telling, whereas revenue maximization motivates people to report lower values if we do not utilise a truthful mechanism.

Example: Let's assume we want to sell a single item to a single bidder without knowing his private valuation. If the price depends on his bid then he will not report truthfully and he will submit a negligible bid in order to minimize his payment and maximize his utility. Instead we need to set a price independent of the bid that the bidder submits.

Definition 3.3.2 (Posted Price Mechanism) *A posted price mechanism presents each agent with a (possibly different) price, and the agent can either accept or reject the mechanism's offer.*

This however begs the question how can we choose the proper price to charge a bidder a priori without any knowledge about his true valuation of the item we are selling to him. In this scenario there are two risks, we either overprice the item and it remains unsold or we under-price it and miss out on a lot of revenue. For these reasons it is usually assumed that we have some prior knowledge on the potential distribution the bidder's valuation might follow. Consequently, we will assume that we know this distribution and for bidder i we will denote it by D_i.More formally for the rest of this chapter we will assume the following model:

Setup:(Bayesian Model for Revenue Maximization) The Bayesian model is defined by the following characteristics:

- There is a set of N bidders, the valuation v_i of each bidder is drawn from a cumulative distribution function F_i, with probability density function f_i, these distributions are common knowledge for all participants of the auction.
- The valuations of the bidders are private and are not common knowledge.

3.3.1 Bayesian-Optimal Mechanisms

In this setting we want to design the optimal Mechanism for the previous setting. Since it is a probabilistic model we will seek to maximize our expected revenue.

Notation: Let F_i be the cumulative distribution function for the distribution D_i and let f_i be its probability density function.

The expected revenue, ER, when we have a single bidder in a single-parameter environment, for a posted price mechanism, with fixed price r, is:

$$ER = r \cdot P[v \geq r]$$

which is the reserved price and the probability the bidder has a higher valuation than that reserved price, respectively.The previous formula is equal to:

$$ER = r \cdot (1 - F(r))$$

So given a cumulative distribution function, we can find the value of r, for which the previous formula is maximized using the following equation:

$$\frac{d(ER)}{dr} = 0 \Rightarrow -r \cdot f(r) + (1 - F(r)) = 0$$

By solving this equation we will always get the optimal revenue for this simplistic setting. This motivates the question how can we extend this simplistic solution in a setting with multiple agents. Since we seek to maximize the revenue gathered by the auctioneer a simple second price auction would not guarantee it, since it engulfs the possibility that the second highest bid is extremely low. In such a scenario we would lose a substantial amount of the revenue we would achieve with a posted price mechanism. When facing multiple bidders, a single reserved price may lower the potential revenue, when the second price is higher than the reserved one. So a natural mechanism would be an intersection of the two, a second price mechanism with a reserved price.The total revenue the auctioneer receives is:

$$ER = E[\sum_{i=1}^{n} p_i(v)]$$

The quantity on the right hand side of the previous equation is the summary of the Expected payment from all participants in the mechanism.

$$E[\sum_{i=1}^{n} p_i(v)] = \sum_{i=1}^{n} E_{v_{-i}}[E_{v_i}[p_i(v_i, v_{-i})]]$$

$$E_{v_i}[p_i(v_i, v_{-i})] = \int_0^{v_{max}} p_i(v_i, v_{-i}) \cdot f(v_i) dv_i$$

Utilizing Myerson's payment rule, so that we get a truthful mechanism we have the following equation:

$$E_{v_i}[p_i(v_i, v_{-i})] = \int_0^{v_{max}} \int_0^{v_i} z \cdot x_i'(z, v_{-i}) dz \cdot f(v_i) dv_i$$

With the proper manipulation we get this equation:

$$E_{v_i}[p_i(v_i, v_{-i})] = \int_0^{v_{max}} (z - \frac{1 - F_i(z)}{f_i(z)}) \cdot x_i(z, v_{-i}) \cdot f_i(z) dz$$

$x_i(z, v_{-i})$ is the allocation function for the i^{th} participant if he submits a bid of z and f_i is the probability density function. However, the first term of the integral is not the valuation of the bidder.

3.3.2 Virtual Valuations & Virtual Welfare

Definition 3.3.3 (Virtual Valuations [Mye81]) *Let f_i be the probability density function of D_i for some agent i, then the virtual valuation of that agent is given by the formula:*

$$\phi_i(v_i) = v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$$

where F_i is the cumulative distribution function, of D_i.

An important property of the virtual valuation in comparison to the real valuation is that it can be negative, but in these settings they are both independent of the other agents bids and actions. As a reminder for a single bidder we have that the revenue is maximized for the value r, for which:

$$\frac{d(r(1 - F(r)))}{dr} = 0 \Rightarrow -r \cdot f(r) + 1 - F(r) = 0 \Rightarrow \phi(r) = 0$$

So the revenue is maximized when the virtual valuation is equal to 0. The price r for which this happens is called the Monopoly price.

The virtual valuation consists of two terms, while the first term is the real valuation of bidder i the second term expresses the "information rent". The information rent expresses the part of the value of the bidder we cannot extract, due to non-deterministic information prior to the auction. A second interpretation, which is a little bit more technical, is that it expresses the slope of the revenue curve at point v_i, which also explains why the expected revenue is maximized, for the price r, which makes the virtual valuation equal to 0.

From the final equation of the previous section we get that:

$$E_{v_i}[p_i(v_i, v_{-i})] = \int_0^{v_{max}} (z - \frac{1 - F_i(z)}{f_i(z)}) \cdot x_i(z, v_{-i}) \cdot f_i(z) dz =$$

$$= \int_0^{v_{max}} (\phi_i(z) \cdot x_i(z, v_{-i})) \cdot f_i(z) dz = E_{v_i}[\phi_i(v_i) \cdot x_i(v_i, v_{-i})]$$

By taking an expectation over v_{-i} we get that $E_v[p_i(v)] = E_v[\phi_i(v) \cdot x_i(v)]$ and by summing over all bidders we conclude that:

$$E_v[\sum_{i=1}^{n} p_i(v)] = E_v[\sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) \cdot x_i(v)]$$

The right hand side of the previous equation is called the Expected Virtual Welfare. For a truthful Mechanism we will show in the following section that the problem of revenue maximization reduces to finding the mechanism that maximizes the Expected Virtual Welfare.

3.3.3 Truthful Mechanism

In the previous section we showed that by utilizing Myerson's Payments the problem of revenue maximization reduces to a problem of welfare maximization. We seek to maximize the quantity $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) \cdot x_i(v)$, where instead of v_i we have $\phi_i(v)$. Consequently, it suffices to find the optimal allocation so that we maximize the virtual welfare. The only constraint, with which the allocation rule should comply is that it should be monotone on the submitted bids, in order for it to be implementable and to allow us to use Myerson's Lemma.

For a single item scenario we should give the item to the person with the highest virtual valuation, however this allocation rule is not monotone with regards to bids. The distributions D_i, of the bidders valuations, for which this payment rule is truthful are called regular and more formally a regular distribution has the following definition.

Definition 3.3.4 (Regular Distribution [BK94]) *For a distribution D_i with a cumulative distribution function F_i and a probability density function f_i, then the distribution D_i is called regular, if the virtual valuation defined by the following equation is non-decreasing.*

$$\phi_i(v_i) = v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$$

For regular distributions allocating the good to the person with the Highest virtual valuation is a monotone allocation rule, however it does not always maximize the revenue. Since the revenue equals the expected virtual welfare, we should only allocate items to bidders with positive virtual valuations, in order to maximize the expected virtual welfare and the revenue of the mechanism.

So Given that we have valuations drawn independently and from identical distributions(i.i.d.) and that these distributions are regular, then the optimal mechanism for revenue maximization is:

1. Collect all bids b_i from all bidders and then calculate the corresponding virtual bids $\phi_i(b_i)$.
2. Allocate the item to the highest bidder, given that $\phi_i(b_i) \geq 0$, otherwise don't allocate the item.
3. Charge the highest bidder the maximum of the second highest bid or the threshold payment, for which the virtual valuation is 0.

This Mechanism is called **Second Price auction with reserve price**.

3.3.4 Prior-Independent Mechanisms

In a prior-independent mechanism the auctioneer knows that the valuations of the bidders are drawn from some unknown distribution, but does not know the exact distribution from which they are drawn. This means that we have to sacrifice a part of our revenue in order to gather information about the distribution the bidders valuation follows.

Without providing a formal definition, at this point we need to clarify that the sample complexity of a mechanism or a function in general is the minimum number of samples we need to have in order to estimate it with high precision.

For a single item auction for example we have the following two results:

- In order to achieve $\frac{1}{4}$-approximation of the optimal revenue we need a single sample of the distribution.[HR09]
- When we seek to achieve a $1-\epsilon$ approximation of the optimal revenue, however, we need $O(\frac{1}{\epsilon^3})$ samples, for regular distributions, if the bidders valuations are drawn i.i.d.

These two results alone suggest that designing Prior-Independent Mechanisms is much harder, since a lot of samples are required for suboptimal revenue, in comparison to the scenario where we know a priori the distribution of the bidders valuations. However a very interesting result has been shown about the Vickrey auction, by Jeremy Bulow and Peter Klemperer.

Theorem 3.3.1 (Bulow-Klemperer Theorem) *For i.i.d. and regular distributions for the bidders valuations, the expected revenue of the second-price auction on n + 1 agents is at least the expected revenue of the optimal auction on n agents.*

The formal proof of this theorem can be found in [BK94]. Intuitively this result is logical since the highest bidder grants us revenue equal to the highest bid of the remaining n bidders, which for a single item auction should be equal to or higher compared to the highest achievable revenue for n bidders.

3.3.5 Prior-free Mechanism

An even more challenging setting is designing Prior-free Mechanisms, in a Prior-free mechanism the designer does not have any information about the bidders valuations, not even that they are random variables of some unknown distribution, like in a Prior-Independent Mechanism. In this setting the Bulow-Klemper Theorem does not hold since we do not have any distributions for the bidders valuations, let alone them being i.i.d. . Usually in such a setting, without additional assumptions, empirical mechanisms have to be employed, however they are not effective in all possible scenarios.

A common mechanism in both this and the prior-independent setting is the random sampling mechanism. It is a truthful mechanism, which as the name suggests uses sampling to achieve an approximation of the optimal welfare. Two examples of such mechanisms were given in the previous section, as far as revenue in aucions is concerned.

The study of Prior-free Mechanisms, however is a rich one. Notably, one of the most notable publications was by Hartline and Roughgarden [HR08]. In this publication a general template is introduced which connects prior free mechanism design with worst case analysis. This template is useful in this thesis since it provided a guideline to follow, for the design of both auctions in chapter 6 and chapter 7, as well as the idea behind the proof of optimality for the auctions.

A second noteworthy publication on this field has to do with budget feasible mechanism design [Bei+12]. This class of mechanisms studies auctions where the participants in the auction are given a certain budget, which they cannot exceed [Sin10], usually these mechanisms are studied under welfare maximization problems and consequently it is required that they are truthful. Despite the difference between this setting and ours the techniques used are similar and also the work studies mechanism design in both a prior-free setting as well as a bayesian one, like our work, which studies different information settings.

3.3.6 First Price Auction

One of the most logical approaches to maximize revenue would be to charge the highest bidder his own bid.This strategy would sacrifice the truthful part of the mechanism, but should intuitively achieve higher revenue in comparison to the second price auction, due to the fact that since the highest bidder has a higher valuation he should always bid higher than the second highest bid.

Due to the fact that we have sacrificed truthfulness it is much harder to argue about the precise revenue of this auction in a single round mechanism. However, the first price auction has been studied in many publications and in a lot of different settings.[RS81][Ely+94][MM87]

3.4 Dynamic & Static Auctions

Up to this point we have been studying single round auctions, where the auctioneer had to sell a single or even several items to a set of bidders, in a single round. This meant that both the auctioneer and the bidders have only the information which was available to them before the start of the auction.In a multi-round auction, however the bidders as well as the auctioneer have the option to adjust and change their future actions based on the feed beck from the previous rounds. However, not all auctions and settings facilitate such changes. For this reason we separate the auctions into two groups, static and dynamic auctions.

In a static auction the bidders submit their bids for all items and all rounds at the start of the auction. This means that the bidders actions and therefore the actions of the auctioneer do not change after the start of the auction, which creates a static environment. In a dynamic auction bidding takes place over several rounds, bidders receive feedback at each round based on their actions and can opt to change their future behavior and strategies in order to maximize their utility.

Static auctions are used either in settings with a very large number of participants, or in a setting with a small number of participants, while dynamic auctions excel in settings with a medium number of bidders. An intuition behind this phenomenon is that when there is a very large number of bidders in the auction, dynamic auctions have a high complexity both in the information required for the communication as well as high computational complexity, which makes them impractical in these scenarios. In a setting with a small number of participants collaboration between the bidders is probable, static auctions minimize the negative effects this phenomenon has in comparison to dynamic ones. Finally, dynamic auctions excel in settings where the effects of implicit collisions are minimized, as long as they don't require an immense amount of computational resources. In such settings the adaptive nature of dynamic auctions allows bidders to adjust their behavior and achieve higher utility for themselves and they also allow the auctioneer to maximize his revenue.

Dynamic auctions have been studied through various perspectives and in many settings.One commonly used setting is an auction consisting of T rounds, where the auctioneer sells a single item to a single buyer in each round. Also the bidder is fully strategic and he may choose to harm his utility early on in the process in order to maximize it in the overall process. This setting has been studied in many publications like [Pap+16],[ADH16].

Auctions and Mechanisms in general have been used in computer science to model resource allocation problems, where different agents(programs, users) need to utilize the same resource for a certain task. One such publication studies the second price mechanism for allocating computational resources in a cloud system and to model the problem properly, they use a dynamic auction. [LLW10]

Dynamic Auctions are also widely used in economics, one of the most iconic publications in this setting [Aus06], proposes an auction to allocate efficiently an arbitrary number of different goods in such a way that the utility of every agent is maximized with his acquisition of commodities. More formally we can say that the auction achieves a Walrasian Equilibrium.[Arr+51]

Chapter 4

Technical Tools

4.1 Online Convex Optimization

In computer science the term "Online" refers to a problem, for which the input is given in a serial fashion one piece of information at each time step. In such settings traditional algorithms can't operate, since they require the whole input in advance and given that they can produce an optimal result. So in online settings, where traditional algorithms are not applicable, we use Online Algorithms [BE05].

An Online Algorithm is one that can process its input in a serial fashion, step by step and produce a result at each of these steps, while utilizing only the information that it has gathered from the previous time steps. One of the first publications studying the restrictions that these algorithms and settings face in comparison to traditional algorithms was by Karp, in 1992 [Kar92].

Since then many intriguing problems have been expressed in an Online setting, from these problems we will opt to focus our attention to Convex Optimization, since it is the most relevant to this thesis. Traditional Convex Optimization is one of the most famous optimization problems in computer science, partly due to its applications to modern machine learning. In this problem we are given a convex set and a function which is convex on that set, our goal is to find the optimal solution. For a maximization problem this solution would be the point with the maximum value, for a minimization one it would be the point with the minimum value. To solve this problem usually a gradient descent method is employed, which as the name suggests utilizes the gradient to find a local optimum, which due to the convexity of the space and the function on it is a global optimal. A more extensive study of this problem can be found in [BBV04].

Convex Optimization Problems, however, do not arise solely in static settings and consequently the field of Online Convex Optimization arose. In Online Convex Optimization we have a decision set of the choices we may follow at each time step, which we may model as a convex set. The crucial difference between the two versions is that in the Online one we do not possess the gradient of every point and in every direction on demand, this difference led to the development of Online Gradient Descent. As the name suggests this algorithm is an adjustment of the static version to this new setting of information flow. A more extensive analysis on the subject can be found in this book by Elad Hazan [Haz19].

Online Convex Optimization and the Online setting in general is of interest to this thesis since it can model adversarial behaviors and more importantly dynamic settings, where the adversaries may opt to change their decisions.

4.2 Online Learning

We are primarily interested in algorithms capable of improving their performance over multiple rounds. However, if someone follows naively their best option up to the current time step a slight perturbation from an adversary could decrease their performance dramatically. To address this issue the field of Online Learning has been developed, providing algorithms robust to adversarial corruption.

Although these Algorithms have applications in many settings we are most interested in their performance on solving Online Decision Making problems.

4.2.1 Online Decision Making

In Online Decision Making we seek to make optimal choices, as far as possible, in a setting where we can only utilize the information we have gathered up to the current time step, similarly to online convex optimization.

Example:A realistic example of such a problem is the stock market. Each day a stock broker has at his disposal all the information about each stock from the past and can use it at his advantage but will always receive a reward, corresponding to his choice.It is evident that his choice will not always be correct, which demonstrates the uncertainty and the potentially adversarial feedback one might receive in such settings.

At this point we can give more formally the following definition.

Setup: In an Online Decision Making problem we have:

- A set of actions A with $|A| = n$

- A set of reward vectors $R^1, \ldots, R^T : A \to [-1, 1]$, which we get online.This means that at time t we have all the vectors up to R^{t-1} to utilize.

It is evident that since online algorithms don't have all the required information at any time step they will usually have suboptimal performance, compared to an algorithm that a priori knows the pay-off of each action.Therefore in order to evaluate the performance of such an algorithm we need a metric.It might seem reasonable to compare the performance of our algorithm to the optimal choices for this input a posteriori. Such a comparison, however, is quite lacklustre, since adversarial choice of the pay-off of each arm will lead to poor performance for any algorithm and will provide few to no information about the performance of the algorithm.For this reason,the following metric is used.

Definition 4.2.1 (Online Regret) *The Regret of an Online algorithm is defined as the difference between the revenue of the optimal single arm strategy and the revenue achieved by our algorithm.If we denote by p_t the arm chosen by our algorithm at each time step then the Regret of algorithm A is calculated as:*

$$Regret(A) = \max_i \sum_{t=1}^{T} r_i^t - \sum_{t=1}^{T} r_{p_t}^t$$

Now we will briefly present the most well known online learning algorithms, as well as the regret which they achieve.[KV05]

Follow-the-Perturbed-Leader

The most natural and logical action at each time step would be to chose the arm which provides the highest utility up to that time step. However such a naive approach would allow an adversary to determine our future choices and minimize our performance. A common solution would be to introduce some randomization to the algorithm. The Follow-the-Perturbed-Leader algorithm intuitively picks the option with the highest total reward up to this time frame since it is more likely to continue to give out more utility in comparison to our other choices and in order to diminish the effect that an adversarial choice of the rewards would have, we add some noise-perturbation to the cumulative rewards.
This algorithm achieves a Regret of $O(\sqrt{T})$ approximately.

Multiplicative weight update method

The Multiplicative weight update method is a process commonly used in decision making and to make predictions. The first time a similar method was introduced was in the 1950's in game theory with the name of "fictitious play" [Rob51], while the first multiplicative weight update algorithm for the purpose of learning was the winnow algorithm [Lit88]. In multiplicative weight update methods we treat

Algorithm 1: Follow-the-Perturbed-Leader algorithm

Initialize a new constant $\epsilon = \sqrt{\frac{\log K}{T}}$

while $t \leq T$ **do**

For each option, sample $perturb_i \geq 0$ independantly at random from the distribution $d(x) = \epsilon \cdot e^{-\epsilon x}$

Choose option i with largest cumulative reward at time $t-1$,we can denote this as σ_i^{t-1}, in addition with the perturbation.So we chose the i that maximizes $\sigma_i^{t-1} + perturb_i$

our potential options, as experts whose advice we may opt to follow or not. There are two families of algorithms the Halving algorithms and the Weighted majority algorithms.

The Halving algorithms assume that one of the experts always makes the optimal choice and therefore as time progresses they eliminate all the experts, who they have observed to give negative advice. Such algorithms however are not particularly useful in an adversarial setting, since we need the experts to give mixed advice, meaning that part of the time the advice will be correct and part of the time it will not.

The Weighted majority algorithms on the other hand does not assume there is an expert who is always right. Instead whenever an expert makes an error or when an expert makes a good decision and we observe either of these cases we modify the likelihood of opting to listen to them, decreasing it or increasing it respectively. We refer to this likelihood as the weight of the expert. There are two versions of the algorithm the deterministic one and the probabilistic one, the deterministic always chooses to follow the advice of the expert with the highest weight, while the probabilistic one utilizes the weights as probabilities in order to choose an expert at random. For the Online setting the deterministic version is very risky since it can be exploited by an adversary. On the other hand the randomized one presents an interesting meta-algorithm, which is a strong alternative to the follow the perturbed leader algorithm. [AHK12]

Finally in different settings, based on the information made available to the algorithms variations different regrets can be achieved. For example, if the algorithm gets to observe the pay-off of the advice of all the experts at each time step then he can make much better decisions in the future, compared to the scenario where he only observes the pay-off of the advice of a single expert.The main two settings are:

- **The Bandit Setting:**In a Bandit setting the learner only gets information about the option which he chose,therefore the reward vector has a single element regarding only his current choice.
- **The expert Setting:**In an expert setting the learner gets feedback about all arms.

Of course weighted majority algorithms have been developed for other settings of information and not only for these two extreme scenarios. One example is this publication [FPS18] written by Zhe Feng, Chara Podimata, Vasilis Syrgkanis.

Now we will briefly present two variations of this method, one for each setting of information.

Hedge Algorithm

The first variation of the method is the Hedge algorithm. It is an algorithm for the expert setting. The algorithm at each time step assigns a probability to each option proportionate to its weight, then utilizing those probabilities chooses one at random. Finally he observes the reward that all of the arms provide and updates their future weights accordingly. The update rule has a step ϵ which is chosen in order to minimize the regret of the algorithm.

Algorithm 2: Hedge Algorithm

For K arms we initialize each weight as $w_{i,0} = 1$ and we set a new constant $\epsilon = \sqrt{\frac{\log K}{T}}$
while $t \leq T$ **do**
  Set the probability for each choice to be $p_{i,t} = \frac{w_{i,t-1}}{\sum_j w_{j,t-1}}$.
  Choose an option at random using these probabilities.
  For each option j observe their reward r_j^t
  for $j = 1$ *to* K **do**
    Set $w_{j,t} = w_{j,t-1} \cdot e^{\epsilon \cdot r_j^t}$

This algorithm achieves a Regret of $O(\sqrt{T \log N})$.[AHK12]

EXP3

The EXP3 algorithm like the Hedge algorithm is a Weighted majority algorithm. It is designed however to operate in the bandit setting in contrast with the Hedge algorithm. In order to increase its performance, since it only gets to observe a single pay-off at each time step, it has a slightly different update rule. Since every arm gets updated with probability $p_{i,t}$ at time step t, we divide the reward received at that time step with this probability, in order to account for the time steps we failed to observe a reward. The EXP3 yields a regret of $O(\sqrt{K \cdot \log K \cdot T})$.[Haz19]

Algorithm 3: EXP3

For K arms we initialize each weight as $w_{i,0} = 1$ and we set a new constant $\epsilon \in (0, 1)$
while $t \leq T$ **do**
- Set the probability for each choice to be $p_{i,t} = (1 - K\epsilon) \cdot \frac{w_{i,t-1}}{\sum_j w_{j,t-1}} + \epsilon$.
- Choose an option at random using these probabilities and observe the reward for that arm at that time frame r_i^t.
- Set $w_{i,t} = w_{i,t-1} \cdot e^{\epsilon \cdot r_i^t / p_{i,t}}$

4.2.2 Mean Based Algorithms

Having briefly presented some of the more common algorithms used in this field we need to define a very important property which they all share.That is that they are all Mean-Based Algorithms.This means that the probability of them choosing a certain option is very highly concentrated around the option with the highest reward-utility at that time. More formally we can give the following definition.

Definition 4.2.2 (Mean-Based Algorithm) *Let $\sigma_i^t = \sum_{s=1}^t r_i^s$.An algorithm is called γ-mean-based, if for every i that there is a j such that $\sigma_i^t < \sigma_j^t - \gamma \cdot T$, we have that the probability of choosing arm i on round t is at most γ. We will say that an algorithm is mean-based if it is γ-mean-based for some $\gamma = o(1)$.*

All of the previously mentioned algorithms are mean-based. The proofs can be found in [see Bra+18, Appendix D]

Chapter 5

Prior-free Mechanism

In the first setting which we will discuss the bidder draws his valuation from a distribution D, which is not known to the auctioneer. Also, the bidder no-regret learns using a mean based algorithm. In this section we provide an auction which achieves an approximation of the revenue defined in [Bra+18], should we have had complete information over the distribution D. The Mechanism does not require that the valuations of the bidders come from a specific distribution D, but operates in all scenarios where the valuation of the bidder comes from a finite support. In this sense the mechanism is Prior-free.

5.1 Auction

The suggested auction is a first price sealed bid mechanism, where the bidder pays the full price which he declared as his bid. So we just need to define which arms will allocate the item for every round of the auction. The allocation rule is monotone. Also once an arm begins to allocate the item from round t, it will continue to allocate the item for the remaining rounds, after round t. Also this auction is static, which means that the auctioneer will not adjust it and will avoid learning from the bids submitted by the buyer, which decreases the complexity of implementing such an auction. However the static nature of this mechanism does not detract from its performance, since no other mechanism static or dynamic can achieve a greater approximation of the optimal revenue.

5.1.1 Allocation Rule

Since we do not know the distribution D, from which the player draws his valuation, we can assume that the process in conducted as follows:

- The auctioneer first decides on an allocation rule $\mathcal{X}$, for all rounds of the auction.

- An adversary selects a distribution D, over the support, from which the bidder will draw his valuation. Let's denote by $Rev_{\mathcal{X}}(D)$ the revenue the auctioneer achieves with the allocation rule $\mathcal{X}$ should the bidder draw his valuation from distribution D. Borrowing the notation introduced in [Bra+18] the optimal revenue for distribution D is denoted as $MBRev(D)$. The distribution D is chosen so that it will minimize the fraction:

$$\frac{Rev_{\mathcal{X}}(D)}{MBRev(D)}$$

So the purpose of this allocation rule is to maximize the minimum ratio that the revenue of any distribution may have over its optimal revenue.

$$\min_{d\in D}\max_{x\in\mathcal{X}}\frac{Rev_x(d)}{MBRev(d)}$$

Burrowing the Linear program used in [Bra+18], to characterise the optimal revenue, we can easily notice that when we have two different distributions the only thing that changes direction is the objective function, while the constraints remain the same.

$$\begin{aligned} \textbf{maximize} \quad & \sum_{i=1}^{m} q_i \cdot (v_i x_i - u_i) \\ \textbf{subject to} \quad & u_i \geq (v_i - v_j)x_j, \forall i,j \in [m] : i > j \\ & u_i \geq 0, 1 \geq x_i \geq 0, \forall i \in [m] \end{aligned} \tag{5.1}$$

Given the previous observation we can develop some intuition as to how we can proceed. We have a convex space and a set of function with arbitrary directions of maximization. It would be hard to define a point which maximizes this ratio for all the functions in our set since it consists of the objective function for any possible distribution D and therefore the set is infinite and it is not even countable. However, we have the following Lemma for the approximation ratio of any set of such functions.

Lemma 5.1.1 *For, f, f_1, f_2, different objective functions of (1) for different distributions, where:*

$$f(x) = \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_2(x), \lambda \in [0,1]$$

and for x_1^*, x_2^* the optimal allocation for f_1, f_2 respectively.Then if for some x_{avg}:

$$\frac{f_1(x_{avg})}{f_1(x_1^*)} = \frac{f_2(x_{avg})}{f_2(x_2^*)} = c$$

Then for x^* the optimal allocation for f:

$$\frac{f(x_{avg})}{f(x^*)} \geq c$$

Proof:

$$\frac{f(x_{avg})}{f(x^*)} = \frac{\lambda f_1(x_{avg}) + (1-\lambda) f_2(x_{avg})}{\lambda f_1(x^*) + (1-\lambda) f_2(x^*)} \geq \frac{\lambda f_1(x_{avg}) + (1-\lambda) f_2(x_{avg})}{\lambda f_1(x_1^*) + (1-\lambda) f_2(x_2^*)} = \frac{f_1(x_{avg})}{f_1(x_1^*)} = c$$

Threw a recursive proof we can show that this statement is true for an arbitrary large set of functions. Intuitively what this tells us is that if for a set of distributions $D_1, D_2, D_3, \ldots$ we can find a set of distributions $P_1, P_2, \ldots, P_n$, such that the distributions $P_1, P_2, \ldots, P_n$ form a convex set in the probability space, inside which all of the distributions $D_1, D_2, D_3, \ldots$ reside, then we just need to find a point x_{avg}, for which the approximation ratio of the optimal revenue of the distributions $P_1, P_2, \ldots, P_n$ is maximized. In our case it is simple to find such a set of distributions $\mathcal{P}$, since the distributions may be represented by any point inside the n-simplex, where n is the number of arms on the support. Therefore we just need to find the optimal solution, which maximizes the minimum approximation ratio for the functions of deterministic distributions.

For simplicity, for the rest of this chapter, we will represent with f_i the objective function corresponding to P_i. With this representation we get the following system of equations, from which we can calculate our optimal solution, x_{avg}.

$$\begin{aligned}
\frac{f_1(x)}{MBRev(P_1)} &= \frac{f_2(x)}{MBRev(P_2)} \\
\frac{f_2(x)}{MBRev(P_2)} &= \frac{f_3(x)}{MBRev(P_3)} \\
&\vdots \\
\frac{f_{n-1}(x)}{MBRev(P_{n-1})} &= \frac{f_n(x)}{MBRev(P_n)} \\
x_n &= 1
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Since the distribution P_i represents a scenario where $q_i = 1$ and $q_j = 0, \forall j \neq i$, we know that $MBRev(P_i) = v_i$. The allocation rule is provided by the solution of this system and since the approximation ratio is the same as the time we allocate the good to the lowest possible bid, we will give an allocation rule here and we will characterize the approximate revenue which it achieves in the following section.

So in the previous system we can substitute:

$$f_i(x) = v_i \cdot x - \max_{j<i}\{(v_i - v_j) \cdot x_j\} \ , \ x \geq \max_{j<i} x_j$$

$$MBRev(P_i) = v_i$$

Allocation Rule: The allocation rule for this scenario is provided by the solution of the system of Linear equations, system (6.2). The allocation rule requires that

$x_n = 1$, which means that the highest possible bid will always allocate the item and for the rest of the possible bids the percentage of the time which they will allocate the item is calculated by their respective x_i.

Note: The utility of each bidder for each arm can be expressed through the equation

$$u_i = \max_{j<i}\{(v_i - v_j) \cdot x_j\}$$

assuming that at least one of the original constraints, of the Linear Program of [Bra+18] is tight. Also it is logical that a bidder with valuation v_i will profit at least as much as if he would play any arm with a lower value.

5.1.2 Revenue Bound

It would be extremely hard to provide an exact approximation rule for all possible distributions and supports for the allocation described in the previous section. This is due to the fact that such an approximation would have to rely on the support and on this scenario we have no control over it.

Fortunately it suffices to lower bound the minimum value for x_1,then we have that the approximation of the optimal revenue of any distribution is greater than x_1. This is due to the fact that

$$\frac{f_1(x)}{MBRev(D_1)} = \frac{v_1 \cdot x_1}{v_1} = x_1$$

In order to prove an approximation bound for this auction we will utilize the following lemma.

Lemma 5.1.2 $x_j \leq j \cdot x_1,\ \forall j \geq 2$. *For all x_i, which satisfy the constraints of system (6.2).*

Proof:
We will use an induction on j.
Base: For $j = 2$ we have that $x_2 = (2 - \frac{v_1}{v_2}) \cdot x_1 \leq 2 \cdot x_1$
Induction Step:

$$x_1 = x_j - \max_{i<j}\{(1 - \frac{v_i}{v_j})x_i\} \geq x_j - \max_{i<j}\{(1 - \frac{v_i}{v_j})i \cdot x_1\} \Rightarrow$$

$$\max_{i<j}\{(i + 1 - i \cdot \frac{v_i}{v_j})x_1\} \geq x_j \Rightarrow x_1 \cdot j \geq x_j$$

Therefore we get the property that $x_j \leq j \cdot x_1$

From system (6.2), we have that

$$x_n \leq n \cdot x_1 \Rightarrow x_1 \geq \frac{x_n}{n} \overset{(2)}{\Longrightarrow} x_1 \geq \frac{1}{n}$$

So we get that the approximation of the optimal revenue, that this allocation rule achieves is at least $\frac{1}{n}$.

I have to point out that both in this section as well as the following ones it is easy to show that all of the constraints of the Linear Program of [Bra+18] are satisfied for the proposed allocation rules and therefore we can complete the proof of the revenue approximation in a similar manner.

5.2 Auxiliary Auction

The revenue bound for the allocation rule of the previous section is not aesthetically pleasing since even a naive approach, like setting the allocation rule $x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \ldots, x_n = 1$ would achieve the same approximation. We can provide a better bound for the aforementioned auction by introducing an auxiliary mechanism, bounding its revenue and then showing that the auction of the previous section upper bounds the revenue of the auction of this section.

The auction of this section is a first price sealed bid mechanism, but regardless of whether or not the support forms an arithmetic sequence with step equal to 1 we will assume that it does. In the case where it does not we will just create extra arms that do not correspond to any of the bidders potential valuations. After that we just need to define an allocation rule in order to characterise the approximate revenue which this auction achieves. Also it is worth noting that it is of no concern to us whether or not we have created virtual arms and options.

5.2.1 Allocation Rule

The exact allocation rule is once again calculated by solving a system of equations similar to system (6.2). However in this system of equations we will assume that the bidder may have any valuation even if it corresponds to a virtual arm. So we will have n functions and distributions, where n is the range between the lowest and highest real potential valuation of the bidder. So we get the following system.

$$
\begin{aligned}
\frac{f_1(x)}{MBRev(P_1)} &= \frac{f_2(x)}{MBRev(P_2)} \\
\frac{f_2(x)}{MBRev(P_2)} &= \frac{f_3(x)}{MBRev(P_3)} \\
&\vdots \\
\frac{f_{n-1}(x)}{MBRev(P_{n-1})} &= \frac{f_n(x)}{MBRev(P_n)} \\
x_n &= 1
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

We will again make the same substitution, like in the previous section:

$$f_i(x) = v_i \cdot x - \max_{j<i}\{(v_i - v_j) \cdot x_j\}\ ,\ x \geq \max_{j<i} x_j$$

$$MBRev(P_i) = v_i$$

In an elegant manner, since we have ordered the valuations in ascending order and $v_{i+1} = v_i + 1$, we can compute the exact allocation rule and the approximation of the optimal revenue which it provides. I will present the extensive proof in the following section, as to how the allocation rule is calculated along with the proof of the revenue bound. Briefly the allocation rule and the auction is designed as follows:

__**Allocation Rule:**__ We take as input the minimum and the maximum valuation that the bidder might have then we assume that he might have any of the intermediate valuations. We will allocate to the highest valuation the item for all rounds $x_n = 1$ and to the lowest valuation only for the last $\frac{1}{1+\frac{n-1}{n-1+u_1}}$ fraction of the total rounds. For the i^{th} lowest arm we will allocate the item to it for the last $\frac{1+\frac{i-1}{i-1+u_1}}{1+\frac{n-1}{n-1+u_1}}$ fraction of the total rounds. All arms will charge the bidder the price of that arm.

5.2.2 Revenue Bound

At this section I will show that the aforementioned allocation rule is the exact solution of system (6.3), as well as that it achieves an approximation of the optimal revenue of the order of $\frac{1}{1+\frac{n-1}{n-1+u_1}}$.

Lemma 5.2.1 *If $v_{i+1} = v_i + 1, \forall i \geq 1$ then $x_i = (1 + \frac{i-1}{v_1+i-1}) \cdot x_1, \forall i \geq 1$, is a feasible allocation rule which satisfies system (6.3).*

Proof: We have that:

$$\frac{1}{v_1+1} \geq \frac{1}{v_1+x}(1+\frac{1}{v_1+1}), \forall x \geq 2$$

This can be easily verified.

$$\frac{1}{v_1+1} \geq \frac{1}{v_1+x}(1+\frac{1}{v_1+1}) \Leftrightarrow \frac{v_1+x}{v_1+1} \geq \frac{v_1+2}{v_1+1}$$

We will use this as a critical step in our induction.
Base:

$$x_2 = (1+\frac{1}{v_1+1}) \cdot x_1$$

This derives easily from our conditions.

Induction Step:

$$x_k = (1+\frac{k-1}{v_1+k-1})x_1 \quad ,\forall k \leq i$$

Then from our equations we get that:

$$x_1 = x_{i+1} - \max_{j<i+1}\{(1-\frac{v_j}{v_i+1})x_j\} = x_{i+1} - \max_{j<i+1}\{(1-\frac{v_1+j-1}{v_1+i})(1+\frac{j-1}{v_1+j-1}) \cdot x_1\}$$

It is easy to show that for any $2 \leq j \leq i$, we have that:(the right hand side is maximized for $j = i$ the rest is just calculations)

$$(1-\frac{v_1+j-1}{v_1+i})(1+\frac{j-1}{v_1+j-1}) \leq \frac{i}{v_1+i}$$

So since for $j = 1$ the formula evaluates to $\frac{i}{v_1+i}$,we get that the maximum of the formula is this fraction and the result follows directly,from this.

So we have shown that the allocation rule, which is the solution of system (6.3) is the one presented in the previous section. So we just need to prove the approximation ratio of the optimal revenue. The approximation ratio, however is rather apparent, since the approximation of any distribution, which is not one of the P_i is greater than that of any of the P_i, due to Lemma 5.1.1. The approximation ratio for all the basic distributions P_i is calculated from system (6.3) and is the same for every i. So the approximation ratio of the optimal revenue is:

$$A = \frac{f_1(x_{avg})}{v_1} = \frac{v_1 \cdot x_1}{v_1} = x_1 = \frac{1}{1+\frac{n-1}{n-1+u_1}}$$

So we get a better approximation ratio than $\frac{1}{n}$. However the auction which is calculated from system (6.2) achieves in principle at least as much revenue as this one, since in this one we allocate the item to virtual arms losing a part of our revenue, compared to if we did not do that, since bidders with hugher valuations we decrease their bids earlier on to maximize their utility. So both auctions have an approximation ratio of $\frac{1}{1+\frac{n-1}{n-1+u_1}}$ for any finite support.

It is evident though that the two mechanisms are not identical and there is a trade off between them. The first auction might achieve a slightly higher revenue in a peculiar set of valuations, which asymptotically though in the general case is negligible. The second auction on the other hand is very simplistic as far as computation goes. It has a closed type for the allocation rule, which asymptotically has great performance, while the first auction requires extra work when we design the auction, since we need to calculate the solution of system (6.2).

Chapter 6

Mixture of Distributions

In the second setting which we will discuss, as we previously mentioned, the bidder chooses a distribution from a set of distributions $S = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$, he will then go on to choose his valuation based on the distribution D_i, which he chose, in this scenario we have complete information about each of the D_i, but lack any kind information regarding how he makes his initial choice from the set S. Also the bidder no-regret learns using a mean based algorithm. In this section we provide an auction which achieves an approximation of the revenue defined in [Bra+18], should we have had complete information over the way the bidder makes his initial choice, of the distribution, from which he will draw his valuation.

6.1 Mixing Two Distributions

This is a more convoluted problem than the one we faced in the previous chapter, so we will primarily provide a study of the scenario where we have the set $S = \{D_1, D_2\}$. In this scenario we design again an auction, which is a first price sealed bid mechanism. We will now attempt to define as much as possible it's allocation rule, as well as it's revenue bound.

6.1.1 Allocation Rule

Primarily we will state the Linear Program provided in [Bra+18] for this scenario, in order to gain a more concrete grasp of the problem.

$$\begin{aligned} \textbf{maximize} \quad & q \cdot \sum_{i=1}^{m} q_i^1 \cdot (v_i x_i - u_i) + (1-q) \cdot \sum_{i=1}^{m} q_i^2 \cdot (v_i x_i - u_i) \\ \textbf{subject to} \quad & u_i \geq (v_i - v_j) x_j, \forall i, j \in [m] : i > j \\ & u_i \geq 0, 1 \geq x_i \geq 0, \forall i \in [m] \end{aligned} \tag{6.1}$$

In the previous Linear Program we don't know the value of q, so the execution of the program is impossible. Fortunately, it is rather apparent that for any value of q

the objective function is a convex combination of the two objective functions, which correspond to D_1, D_2 respectively. Consequently, Lemma 5.1.1 from Chapter 6 aids us in this scenario, since it states that if we achieve an approximation ratio for the two distributions D_1, D_2, then we achieve that approximation for all possible objective functions. Given this observation we can restate the Linear Program in a different way:

$$\begin{aligned} \textbf{maximize} \quad & \sum_{i=1}^{m} q_i^1 \cdot (v_i x_i - u_i) \\ \textbf{subject to} \quad & u_i \geq (v_i - v_j)x_j, \forall i,j \in [m] : i > j \\ & u_i \geq 0, 1 \geq x_i \geq 0, \forall i \in [m] \\ & \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^1 \cdot (v_i x_i - u_i)}{MBRev(D_1)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^2 \cdot (v_i x_i - u_i)}{MBRev(D_2)} \end{aligned} \tag{6.2}$$

This Linear Program maximizes the revenue achieved in the scenario where the bidder draws his valuation according to D_1, while it ensures that should the bidder have drawn his valuation according to D_2 he would have had the same or better approximation of the optimal revenue.

<u>Allocation Rule:</u> The allocation rule for our auction is calculated using the aforementioned Linear Program. More specifically if in the final solution the value of a variable $x_i = \frac{l}{k},\ k > l > 0$ then we will allocate the item to the arm i for the last $\frac{l}{k}$ rounds of the auction.

It is worth noting that the auction is monotone since if $x_i = \frac{l}{k} \Rightarrow x_{i+1} \geq \frac{l}{k}$ in any optimal solution.[Bra+18]

6.1.2 Revenue Bound

Before we proceed with the presentation of the exact revenue bounds, I will introduce some very useful notation, in order to simplify the Bound and the calculations.

<u>Notation:</u> We will symbolize with x_{opt1} the optimal allocation that the proposed Linear Program in [Bra+18] calculates if it was given distribution D_1 and u_{opt1} is the respective valuations. In like manner we define x_{opt2} and u_{opt2} for the distribution D_2. Given these vectors we define the following two quantities:

$$c_1 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^2 (v_i x_{opt1}^i - u_{opt1}^i)}{MBRev(D_2)}$$

$$c_2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^1 (v_i x_{opt2}^i - u_{opt2}^i)}{MBRev(D_1)}$$

The quantity c_1 represents the fraction of the Optimal Revenue that distribution D_2 loses when we implement the allocation rule x_{opt1} and the quantity c_2 represents the fraction of the Optimal Revenue that distribution D_1 loses when we implement the allocation rule x_{opt2}.

At this point we want to find the projections of x_{opt1} and x_{opt2} on the separating hyperplane where

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^1 \cdot (v_i x_i - u_i)}{MBRev(D_1)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^2 \cdot (v_i x_i - u_i)}{MBRev(D_2)}$$

In order to calculate the projections we use the following formula:

$$x_i^H = x_i - \frac{< a, x > -b}{||a||^2} \cdot a$$

where x_i^H is the projection, x_i is the initial point, a is a vector and b a single dimensional constant, such that they define the hyperplane H through the equation $< a, x >= b,\ \forall x \in H$.

In our case the hyperplane H is defined with the vector
$a = \{(\frac{q_1^1}{MBRev(D_1)} - \frac{q_1^2}{MBRev(D_2)})v_1, \ldots, (\frac{q_n^1}{MBRev(D_1)} - \frac{q_n^2}{MBRev(D_2)})v_n, (\frac{q_1^1}{MBRev(D_1)} - \frac{q_1^2}{MBRev(D_2)}), \ldots, (\frac{q_n^1}{MBRev(D_1)} - \frac{q_n^2}{MBRev(D_2)})\}$

The first n terms correspond to the allocation terms, while the last n terms correspond to the utility ones. The constant b in our case is 0. So after some substitutions and calculations we get the following two formulas for the two projections, of $\boldsymbol{x_{opt1}}, \boldsymbol{x_{opt2}}$ respectively.

$$\boldsymbol{x_{opt1}^H} = \boldsymbol{x_{opt1}} - \frac{c_1}{||a||^2} \cdot \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{x_{opt2}^H} = \boldsymbol{x_{opt2}} + \frac{c_2}{||a||^2} \cdot \boldsymbol{a}$$

In order to proceed we need to define a point which lies both in the separation plane as well as inside the convex set defined by the initial constraints of the Linear Program. The idea on how to calculate such a point is promoted by the following, two dimensional figure. The representation is not precise but is intended to promote a train of thought with which we will compute a x_{avg}, which would satisfy the previous requirements.

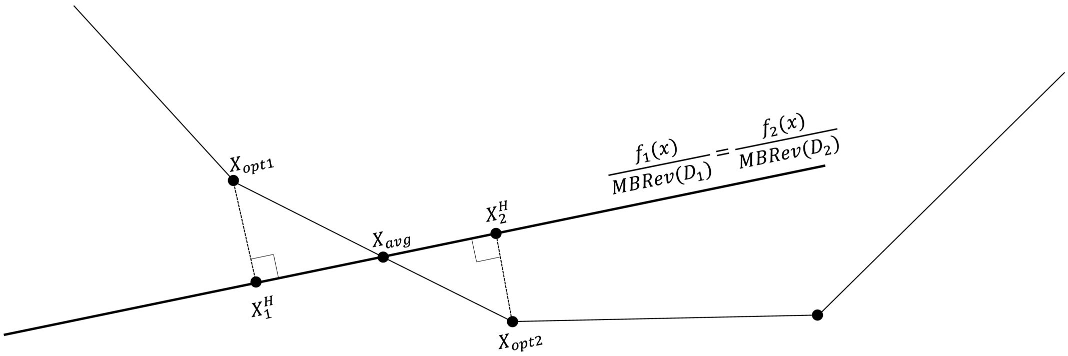

Figure 6.1: Representation of the initial constraints with the additional Hyperplane

We can easily notice in the previous figure that we have similar triangles so x_{avg} should satisfy the following equation.

$$\boldsymbol{x^H_{opt1}} - \boldsymbol{x_{avg}} = \frac{c_1}{c_2}(\boldsymbol{x_{avg}} - \boldsymbol{x^H_{opt2}})$$

By solving the equation for $\boldsymbol{x_{avg}}$ we get the following formula:

$$\boldsymbol{x_{avg}} = \frac{c_2\boldsymbol{x^H_{opt1}} + c_1\boldsymbol{x^H_{opt2}}}{c_1 + c_2}$$

By substituting the initial formulas for $\boldsymbol{x^H_{opt1}}$ and $\boldsymbol{x^H_{opt2}}$ we get that:

$$\boldsymbol{x_{avg}} = \frac{c_2\boldsymbol{x_{opt1}} + c_1\boldsymbol{x_{opt2}}}{c_1 + c_2}$$

Since $\boldsymbol{x_{avg}}$ is a linear combination of both the optimal solutions and their projections on the hyperplane it is a feasible solution of the new LP and also the approximation ratio which it provides is more often than not tight. A more elaborate proof on the optimality of this allocation rule is done in section 6.3 . Finally the approximation ratio of the optimal revenue provided in [Bra+18] can be calculated by substituting x_{avg} on the following ratio:

$$A = \frac{f_1(x_{avg})}{MBRev(D_1)} = c\frac{c_2}{c_1 + c_2} + \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot (1 - c_2) = 1 - \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}$$

It is worth noting, before we proceed to the more general case that as the two distributions converge to the same distribution the approximation converges to 1 and as the distributions diverge the approximation converges to that of Chapter 6.

6.2 Mixing N Distributions

Finally the general case where we have a set $S = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$, where n can be arbitrarily large. The auction is again a first price sealed bid mechanism, at this point we will attempt to provide an allocation rule and an approximation ratio in the general case. This problem however is way more convoluted than the two case scenario.

6.2.1 Allocation Rule

In order to compute the allocation rule we will state once more the Linear Program provided in [Bra+18], but in this general setting, in order to gain some more insight in the problem.

$$\begin{array}{ll} \textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot (\sum_{i=1}^{m} q_i^j \cdot (v_i x_i - u_i)) \\ \textbf{subject to} & \begin{array}{c} u_i \geq (v_i - v_j)x_j, \forall i, j \in [m] : i > j \\ u_i \geq 0, 1 \geq x_i \geq 0, \forall i \in [m] \end{array} \end{array} \tag{6.3}$$

Where w_j is the probability of the bidder drawing his valuation from distribution D_j, obviously $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, but we have no other information over the w_j. A naive approach would be to assume that an application of Lemma 5.1.1 like the previous section suffices, however, this is not the case. Let's assume that it was and we could arbitrarily form the following Linear Program:

$$\begin{array}{ll} \textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} q_i^1 \cdot (v_i x_i - u_i) \\ \textbf{subject to} & \begin{array}{c} u_i \geq (v_i - v_j)x_j, \forall i, j \in [m] : i > j \\ u_i \geq 0, 1 \geq x_i \geq 0, \forall i \in [m] \\ \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^1 \cdot (v_i x_i - u_i)}{MBRev(D_1)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^j \cdot (v_i x_i - u_i)}{MBRev(D_j)}, \forall j \in [k] \end{array} \end{array} \tag{6.4}$$

The distribution D_1 is arbitrarily chosen as the objective function. So someone might argue that this Linear Program provides an optimal allocation for this scenario, since we lower bound the approximate revenue for all "corner" distributions and through them we lower bound the approximation ratio for every other distribution which can be expressed as their convex combination. This however is false because unlike the scenario with two distributions many problems can occur, due to the fact that we have more than two distributions. One problem that might occur is that the distribution we might choose as an objective function might be a convex combination of a subset of the other distributions which in general, due to Lemma 5.1.1 decreases the overall potential maximum approximation, compared to if we had some other distribution as the objective function. Having made this observation we can design the following allocation rule, which we will then show in section 6.3 that it is optimal, along with every other auction, from the previous scetions.

Allocation Rule: Execute the linear program (6.4), once for each distribution, by setting it as our objective function. After we execute all of the linear programs we will have a set of solutions $\{x_{opt1}, x_{opt2}, \ldots, x_{optn}\}$, some of these solutions might be the same. Calculate the respective approximation ratio, for each one of them $\{\frac{f_1(x_{opt1})}{MBRev(D_1)}, \frac{f_2(x_{opt2})}{MBRev(D_2)}, \ldots, \frac{f_n(x_{optn})}{MBRev(D_n)}\}$. Afterwards implement the allocation rule x_{opti}, for which $\frac{f_i(x_{opti})}{MBRev(D_i)} = \max_{j\in[n]} \frac{f_j(x_{optj})}{MBRev(D_j)}$

6.2.2 Revenue Bound

Before proceeding with the proof I would like to introduce some notation.

$$c_{i,j}^k = \frac{\sum_{j=1}^m q_j^i \cdot (v_j \cdot x_j^k - u_j^k)}{MBRev(D_i)} - \frac{\sum_{i=1}^m q_i^j \cdot (v_i \cdot x_i^k - u_i^k)}{MBRev(D_j)}$$

This quantity denotes the difference between the fraction of the optimal revenue of the i^{th} distribution and the fraction of the revenue of the j^{th} distribution which the optimal solution of the k^{th} distribution achieves.The optimal solution refers to the optimal solution of the Linear Program introduced at [see Bra+18, page 10],for an initial distribution of D_k.

Now for every pair of distributions we have a viable solution that provides the same ratio of their optimal revenue for both distributions.As a reminder,for distributions D_i, D_j with optimal solutions x_i, x_j respectively, this solution is given by the formula $x_{i,j} = \frac{c_{i,j}^i \cdot x_j + c_{j,i}^j \cdot x_i}{c_{i,j}^i + c_{j,i}^j}$.Also as a reminder we denote as f_i the function we seek to optimize for distribution D_i,with this notation $c_{i,j}^k = \frac{f_i(x_k)}{f_i(x_i)} - \frac{f_j(x_k)}{f_j(x_j)}$. We will continue with our study with the case of three distributions.So without loss of generality lets assume that:

$$\frac{f_1(x_{1,2})}{f_1(x_1)} \leq \frac{f_2(x_{2,3})}{f_2(x_2)} \leq \frac{f_3(x_{1,3})}{f_3(x_3)}$$

Since $\frac{f_3(x_{1,3})}{f_3(x_3)} = \frac{f_1(x_{1,3})}{f_1(x_1)}$ there is a $x' = \lambda \cdot x_{1,3} + (1-\lambda) \cdot x_{1,2}$, such that $\frac{f_1(x')}{f_1(x_1)} = \frac{f_2(x_{2,3})}{f_2(x_2)}$, we can calculate the value of x' as follows:

$$\lambda \cdot \frac{f_1(x_{1,3})}{f_1(x_1)} + (1-\lambda) \cdot \frac{f_1(x_{1,2})}{f_1(x_1)} = \frac{f_2(x_{2,3})}{f_2(x_2)} \Rightarrow$$

$$\lambda \cdot (\frac{f_1(x_{1,3})}{f_1(x_1)} - \frac{f_1(x_{1,2})}{f_1(x_1)}) = \frac{f_2(x_{2,3})}{f_2(x_2)} - \frac{f_1(x_{1,2})}{f_1(x_1)} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{\frac{f_2(x_{2,3})}{f_2(x_2)} - \frac{f_1(x_{1,2})}{f_1(x_1)}}{\frac{f_1(x_{1,3})}{f_1(x_1)} - \frac{f_1(x_{1,2})}{f_1(x_1)}}$$

Then we can substitute λ in the previous equation for x'.We know that $\frac{f_2(x_{1,2})}{f_2(x_2)} \leq \frac{f_2(x_{2,3})}{f_2(x_2)}$ and that $\frac{f_2(x_{1,3})}{f_2(x_2)} \leq \frac{f_2(x_{2,3})}{f_2(x_2)}$. Consequently we have that $\frac{f_2(x_{2,3})}{f_2(x_2)} \geq \frac{f_2(x')}{f_2(x_2)}$. In a similar manner we can argue that $\frac{f_1(x')}{f_1(x_1)} \geq \frac{f_1(x_{2,3})}{f_1(x_1)}$. Now we can argue that $\frac{f_3(x')}{f_3(x_3)} \geq \frac{f_3(x_{2,3})}{f_3(x_3)}$. However after some calculations we end up with the following inequality and we have an intersection inside the convex set of the three vertices x_1, x_2, x_3 if and only if it holds.

$$\frac{f_3(x_{1,2})}{f_3(x_3)} \leq \frac{f_3(x_{2,3})}{f_3(x_3)} \tag{6.5}$$

Unfortunately there is no guarantee that this inequality will always hold and consequently we might not have a point inside the convex set, for which the approximation ratio of the optimal revenue is the same same. Fortunately if that is the case when we have three distributions we can get the approximation provided by a point which is a linear combination of x' and $x_{2,3}$, since for that point the value of the other distribution is always higher.

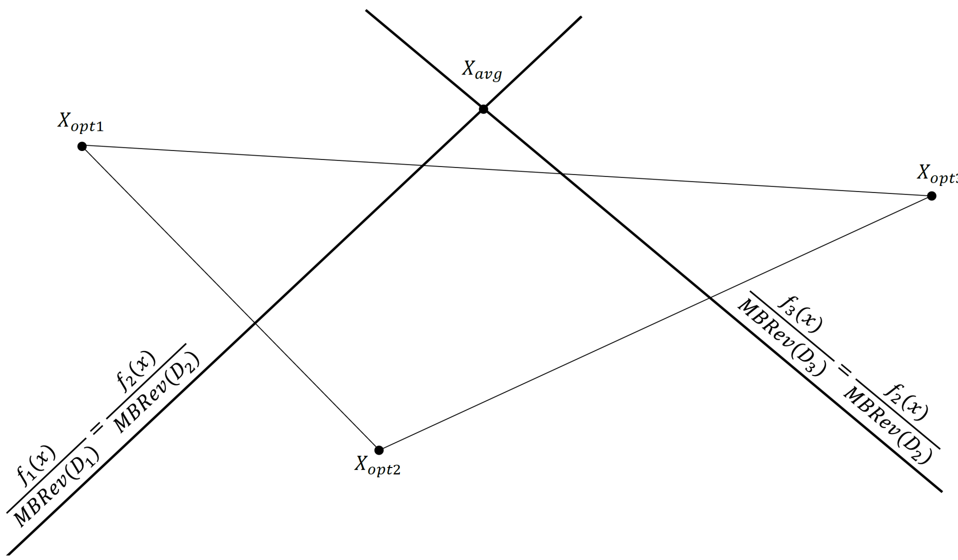

Figure 6.2: An illustration of the scenario where all points that the three distributions have the same value lie outside the convex set.

$$x'_{avg} = \kappa x' + (1 - \kappa) x_{2,3}$$

$$\frac{f_1(x'_{avg})}{f_1(x_1)} = \frac{f_2(x'_{avg})}{f_2(x_2)}$$

After some calculation we can show that:

$$\kappa = \frac{\frac{f_2(x_{2,3})}{f_2(x_2)} - \frac{f_1(x_{2,3})}{f_1(x_1)}}{\frac{f_2(x_{2,3})}{f_2(x_2)} - \frac{f_1(x_{2,3})}{f_1(x_1)} + \frac{f_1(x')}{f_1(x_1)} - \frac{f_2(x')}{f_2(x_2)}}$$

After substituting x_{avg} to the approximation ratio we get:

$$A = \kappa \cdot \frac{f_1(x')}{f_1(x_1)} + (1-\kappa) \cdot \frac{f_1(x_{2,3})}{f_1(x_1)}$$

This approximation holds whether or not inequality (6.5) holds.

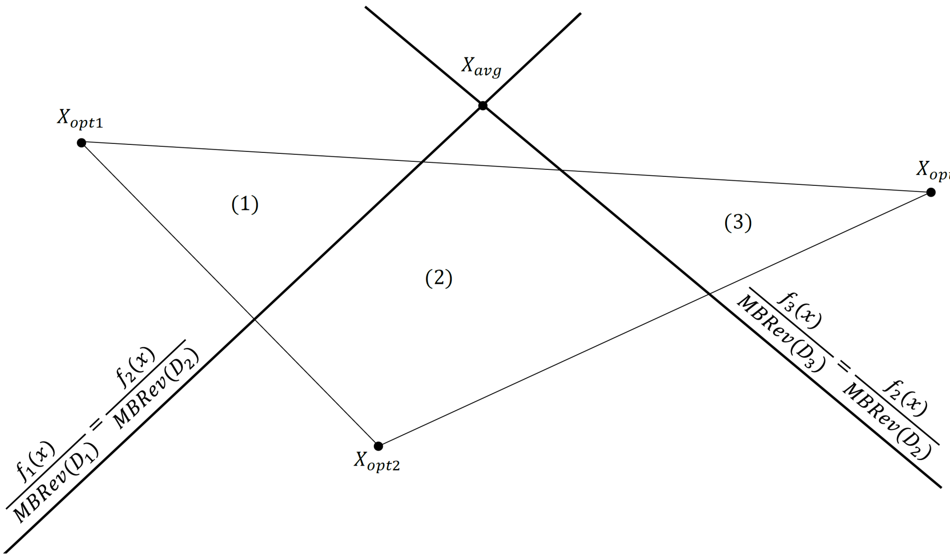

Figure 6.3: In this case even though x_{avg} lies outside the feasible region of the LP we can define a point inside area (2) for which, it will hold that $\frac{f_1(x'_{avg})}{f_1(x_1)} = \frac{f_3(x'_{avg})}{f_3(x_3)} < \frac{f_2(x'_{avg})}{f_2(x_2)}$

Regrettably, for a larger set of distributions the problem is rather convoluted and such a tailored approximation is hard to construct.

6.3 Optimality

Finally in this last section I will prove that the auction of section (6.2) provides optimal revenue for the seller. In addition to that I will briefly show that the mechanisms of every other section are more specific cases of this general one and consequently they are also optimal.

In order to prove the optimality of this allocation and payment rule, I will utilize the following Linear Programs.

$$\begin{array}{ll}
\textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} q_i^1 \cdot (v_i x_i - u_i) \\
& u_i \geq v_i \cdot y_j - \overline{p_j} - \frac{\delta}{T}, \forall i \in [m], j \in [K] : v_i \geq b_j \\
& \overline{p_j} \leq b_j \cdot y_j, j \in [K] \\
\textbf{subject to} & x_i = y_j, i \in [m], j = argmax_{j \in [K] : b_j \leq v_i} b_j \\
& \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^1 \cdot (v_i x_i - u_i)}{MBRev(D_1)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{m} q_i^j \cdot (v_i x_i - u_i)}{MBRev(D_j)}, \forall j \in [k], (\alpha) \\
& \overline{p_j} \geq 0, 1 \geq y_j \geq 0, j \in [K]
\end{array} \tag{6.6}$$

We will solve one Linear Program for each potential objective functions, from the functions that we were primarily given. The Optimal Revenue for each one of the Linear Programs of (6.6) is captured by one of the Linear Programs of (6.4), utilising a similar proof as that of [Bra+18]. Let's assume that there is a point in the feasible set H, which is defined as the union of all of the feasible sets of (6.6), which achieves a better approximation ratio of the optimal revenue for all distributions. More formally, we assume that there is a $x_{\max}$ such that:

$$A = \min_{j \in [n]} \frac{f_j(x_{\max})}{f_j(x_j)}$$

is maximized and that the point $x_{\max}$ is different than the one we calculated through the computation of (6.6). For the point $x_{\max}$ let's assume that the distribution D_i has the worst approximation ratio, then for the Linear Program, which has D_i as the objective function, we have calculated a point with higher approximation for D_i and at least as much for all other functions. This however is a contradiction and we can deduce that our solution is optimal.

Finally we will briefly explain why the auctions presented in the other chapters are designed from this general mechanism, but their specific environment enables us to minimize the computational resources required.

For the auction presented in section (6.1) we solve only a single Linear Program, instead of solving two. This is due to the fact that the separating hyperplane, for two distributions, lies always between the two optimal solutions and always intersects the feasible set, so a single Linear Program suffices.

For the setting where we have no information of the distribution D the constraints will be rephrased and will represent the extreme cases where the value of the bidder is practically drawn from a deterministic distribution. In such a case as we imply in Chapter 6 all of the constraints will be tight, since more values lead to a bigger fragmentation of the time between them.

Chapter 7

Conclusion & Future Directions

7.1 Conclusion

In conclusion the main result of this thesis is an estimation of the revenue that an auctioneer may lose due to incomplete information. The revenue bounds, as well as the auctions themselves provide some new information. The revenue bounds measure how much more additional information might potentially improve the expected revenue of the auction. They also demonstrate that the increase of knowledge of the distribution provides an increase of the potential revenue analogous to that distributions optimal Revenue.

The auctions provide a lot of knowledge, as far as the computational complexity is concerned. In a very simplistic setting, like the prior free mechanism the computational resources required are very limited. We even provide a default allocation, which achieves the best asymptotic bound and requires little to no calculations to implement.The setting, on the other hand, where we have a Mixture of Distributions we need to dedicate a lot more computational resources. In the current state of the result we always require the solution of n Linear Programs, one for each distribution, in order to generate the $MBRev$ for every potential distribution. In addition to that we require the solution of an extra n Linear Programs, to provide the optimal approximation of the revenue. So in this sense if an auctioneer seeks to improve his knowledge of a distribution through some research but is not able to calculate the exact form of the distribution he should be willing to spent an increased amount of time and resources on calculating the optimal allocation rule.

7.2 Future Directions

Improvements to this thesis can be made by providing an exact approximation rule for the general case, of the auction on section 6.2, the problem however seems to be extremely challenging. Two different research directions are the following.

The first one would be on how we can provide a rather accurate approximation of the $MBRev(D_i)$ for some distribution D_i in order to limit the computational resources required. For computing a general auction. Also what is the trade-off of improving the runtime in such a manner and how much the potential revenue will decrease due to this estimation. In a similar train of thought one might seek to find an efficient way to eliminate some of the distributions that need to be processed as objective functions, in order to guarantee that no point is left unchecked, rather than executing a Linear Program for each one of them.

Another intriguing direction would be to extend this result to settings where we are capable of learning the distribution of the bidder,**placeholder, citation** and try to find better approximations of the optimal revenue in these settings.

Bibliography

[ADH16] Itai Ashlagi, Constantinos Daskalakis, and Nima Haghpanah. “Sequential mechanisms with ex-post participation guarantees”. In: *Proceedings of the 2016 ACM Conference on Economics and Computation*. 2016, pp. 213–214.

[AHK12] Sanjeev Arora, Elad Hazan, and Satyen Kale. “The multiplicative weights update method: a meta-algorithm and applications”. In: *Theory of Computing* 8.1 (2012), pp. 121–164.

[Arr+51] Kenneth J Arrow et al. “An extension of the basic theorems of classical welfare economics”. In: *Proceedings of the second Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*. The Regents of the University of California. 1951.

[Aue+02] Peter Auer et al. “The nonstochastic multiarmed bandit problem”. In: *SIAM journal on computing* 32.1 (2002), pp. 48–77.

[Aus06] Lawrence M Ausubel. “An efficient dynamic auction for heterogeneous commodities”. In: *American Economic Review* 96.3 (2006), pp. 602–629.

[BBV04] Stephen Boyd, Stephen P Boyd, and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.

[BE05] Allan Borodin and Ran El-Yaniv. *Online computation and competitive analysis*. cambridge university press, 2005.

[Bei+12] Xiaohui Bei et al. “Budget feasible mechanism design: from prior-free to bayesian”. In: *Proceedings of the forty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing*. 2012, pp. 449–458.

[BK94] Jeremy Bulow and Paul Klemperer. *Auctions vs. negotiations*. Tech. rep. National Bureau of Economic Research, 1994.

[Bra+18] Mark Braverman et al. “Selling to a no-regret buyer”. In: *Proceedings of the 2018 ACM Conference on Economics and Computation*. 2018, pp. 523–538.

[BSV17] Maria-Florina Balcan, Tuomas Sandholm, and Ellen Vitercik. "Generalization Guarantees for Multi-item Profit Maximization: Pricing, Auctions, and Randomized Mechanisms". In: *arXiv preprint arXiv:1705.00243* (2017).

[Cla71] Edward H Clarke. "Multipart pricing of public goods". In: *Public choice* (1971), pp. 17–33.

[CR14] Richard Cole and Tim Roughgarden. "The sample complexity of revenue maximization". In: *Proceedings of the forty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing*. 2014, pp. 243–252.

[DV13] Shahar Dobzinski and Jan Vondrák. "Communication complexity of combinatorial auctions with submodular valuations". In: *Proceedings of the Twenty-Fourth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. SIAM. 2013, pp. 1205–1215.

[Ely+94] Bernard Elyakime et al. "First-price sealed-bid auctions with secret reservation prices". In: *Annales d'Economie et de Statistique* (1994), pp. 115–141.

[FPS18] Zhe Feng, Chara Podimata, and Vasilis Syrgkanis. "Learning to bid without knowing your value". In: *Proceedings of the 2018 ACM Conference on Economics and Computation*. 2018, pp. 505–522.

[GN17] Yannai A Gonczarowski and Noam Nisan. "Efficient empirical revenue maximization in single-parameter auction environments". In: *Proceedings of the 49th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*. 2017, pp. 856–868.

[Gro73] Theodore Groves. "Incentives in teams". In: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1973), pp. 617–631.

[Haz19] Elad Hazan. "Introduction to online convex optimization". In: *arXiv preprint arXiv:1909.05207* (2019).

[HR08] Jason D Hartline and Tim Roughgarden. "Optimal mechanism design and money burning". In: *Proceedings of the fortieth annual ACM symposium on Theory of computing*. 2008, pp. 75–84.

[HR09] Jason D Hartline and Tim Roughgarden. "Simple versus optimal mechanisms". In: *Proceedings of the 10th ACM conference on Electronic commerce*. 2009, pp. 225–234.

[Hur73] Leonid Hurwicz. "The design of mechanisms for resource allocation". In: *The American Economic Review* 63.2 (1973), pp. 1–30.

[Kar92] Richard M Karp. "On-Line Algorithms Versus Off-Line Algorithms: How Much". In: *Algorithms, Software, Architecture: Information Processing 92: Proceedings of the IFIP 12th World Computer Congress, Madrid, Spain, 7-11 September 1992.* Vol. 1. North-Holland. 1992, p. 416.

[KP99] Elias Koutsoupias and Christos Papadimitriou. "Worst-case equilibria". In: *Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*. Springer. 1999, pp. 404–413.

[KV02] Adam Kalai and Santosh Vempala. "Geometric algorithms for online optimization". In: *Journal of Computer and System Sciences*. Citeseer. 2002.

[KV05] Adam Kalai and Santosh Vempala. "Efficient algorithms for online decision problems". In: *Journal of Computer and System Sciences* 71.3 (2005), pp. 291–307.

[Lit88] Nick Littlestone. "Learning quickly when irrelevant attributes abound: A new linear-threshold algorithm". In: *Machine learning* 2.4 (1988), pp. 285–318.

[LLW10] Wei-Yu Lin, Guan-Yu Lin, and Hung-Yu Wei. "Dynamic auction mechanism for cloud resource allocation". In: *2010 10th IEEE/ACM International Conference on Cluster, Cloud and Grid Computing*. IEEE. 2010, pp. 591–592.

[Mir+16a] Vahab Mirrokni et al. "Optimal dynamic mechanisms with ex-post IR via bank accounts". In: *arXiv preprint arXiv:1605.08840* (2016).

[Mir+16b] Vahab S Mirrokni et al. "Dynamic Auctions with Bank Accounts." In: *IJCAI*. Vol. 16. 1. 2016, pp. 387–393.

[ML79] Eric Maskin and JJ Laffont. "A differential approach to expected utility maximizing mechanisms". In: *Aggregation and revelation of preferences* (1979).

[MM87] R Preston McAfee and John McMillan. "Auctions and bidding". In: *Journal of economic literature* 25.2 (1987), pp. 699–738.

[Mye81] Roger B Myerson. "Optimal auction design". In: *Mathematics of operations research* 6.1 (1981), pp. 58–73.

[Nas+50] John F Nash et al. “Equilibrium points in n-person games”. In: *Proceedings of the national academy of sciences* 36.1 (1950), pp. 48–49.

[Nis+] Noam Nisan et al. “Algorithmic Game Theory, 2007”. In: *Google Scholar Google Scholar Digital Library Digital Library* ().

[NM47] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press, 1947.

[NR01] Noam Nisan and Amir Ronen. “Algorithmic mechanism design”. In: *Games and Economic behavior* 35.1-2 (2001), pp. 166–196.

[Pap+16] Christos Papadimitriou et al. “On the complexity of dynamic mechanism design”. In: *Proceedings of the twenty-seventh annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*. SIAM. 2016, pp. 1458–1475.

[Rob51] Julia Robinson. “An iterative method of solving a game”. In: *Annals of mathematics* (1951), pp. 296–301.

[Rou12] Tim Roughgarden. “The price of anarchy in games of incomplete information”. In: *Proceedings of the 13th ACM Conference on Electronic Commerce*. 2012, pp. 862–879.

[RS81] John G Riley and William F Samuelson. “Optimal auctions”. In: *The American Economic Review* 71.3 (1981), pp. 381–392.

[Sin10] Yaron Singer. “Budget feasible mechanisms”. In: *2010 IEEE 51st Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. IEEE. 2010, pp. 765–774.

[ST13] Vasilis Syrgkanis and Eva Tardos. “Composable and efficient mechanisms”. In: *Proceedings of the forty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*. 2013, pp. 211–220.

[Vic61] William Vickrey. “Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders”. In: *The Journal of finance* 16.1 (1961), pp. 8–37.