



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Διάδοση και Σκέδαση Ηλεκτρομαγνητικών
Κυμάτων σε Ελλειπτικές Κυλινδρικές
και Σφαιροειδείς Διατάξεις

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Δ. ΚΟΛΕΖΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΡΟΥΜΕΛΙΩΤΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΣΗΜΜΥ, ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2021



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Διάδοση και Σκέδαση Ηλεκτρομαγνητικών
Κυμάτων σε Ελλειπτικές Κυλινδρικές
και Σφαιροειδείς Διατάξεις

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Δ. ΚΟΛΕΖΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΡΟΥΜΕΛΙΩΤΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΣΗΜΜΥ, ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Συμβουλευτική Επιτροπή: Ιωάννης Α. Ρουμελιώτης
Ιωάννης Α. Τσαλαμέγκας
Ηλίας Ν. Γλύτσος

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 21^η Ιουλίου 2021.

..... Ι. Α. Ρουμελιώτης Ομότ. Καθηγητής ΕΜΠ Ι. Α. Τσαλαμέγκας Ομότ. Καθηγητής ΕΜΠ Η. Ν. Γλύτσος Καθηγητής ΕΜΠ
..... Α. Δ. Παναγόπουλος Αναπλ. Καθηγητής ΕΜΠ Σ. Π. Σαββαΐδης Καθηγητής ΠΑΔΑ Κ. Α. Τσακμακίδης Επίκ. Καθηγητής ΕΚΠΑ
 Γ. Ι. Φικιώρης Καθηγητής ΕΜΠ	

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2021

.....
Γεώργιος Δ. Κολέζας
Διδάκτωρ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών ΕΜΠ

Copyright ©Γεώργιος Δ. Κολέζας, 2021.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Στους γονείς μου

*Though much is taken, much abides; and though
We are not now that strength which in old days
Moved earth and heaven, that which we are, we are—
One equal temper of heroic hearts,
Made weak by time and fate, but strong in will
To strive, to seek, to find and not to yield.*
– ALFRED, LORD TENNYSON

*Blessed be the light
That burns away the night.*
– MARK SHELTON, 1988

Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στον Τομέα Ηλεκτρομαγνητικών Εφαρμογών, Ηλεκτροοπτικής και Ηλεκτρονικών Υλικών της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ, υπό την επίβλεψη του Καθηγητή Ιωάννη Ρουμελιώτη, κατά την περίοδο 2014-2021. Αντικείμενο της αποτελεί η μελέτη της διάδοσης και της σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε ελλειπτικές κυλινδρικές και σφαιροειδείς διατάξεις. Πρωταρχικός μας σκοπός υπήρξε η επέκταση ανάλογων θεμάτων διάδοσης και σκέδασης, που είχαν μελετηθεί κατά το παρελθόν από τον επιβλέποντα και τους συνεργάτες του. Οι μεθοδολογίες που χρησιμοποιούνται έχουν ως αφετηρία την εφαρμογή του χωρισμού των μεταβλητών για την επίλυση της εξίσωσης Helmholtz και την απόκτηση των κατάλληλων ιδιοσυναρτήσεων για την ανάπτυξη των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων στα υπό εξέταση προβλήματα. Παρά την εξέλιξη και την ευρεία χρήση καθαρά αριθμητικών τεχνικών και αλγορίθμων (που πλέον υλοποιούνται σε εμπορικά πακέτα λογισμικού προσομοίωσης), ο χωρισμός των μεταβλητών παραμένει ένα θεμελιώδες εργαλείο για τη μελέτη των προβλημάτων που θα μας απασχολήσουν, καθώς οδηγεί σε λύσεις που επιτρέπουν την πληρέστερη κατανόηση και διευκολύνουν τη φυσική ερμηνεία των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων και αλληλεπιδράσεων.

Η συμβολή της διατριβής εντοπίζεται στο ότι αναπτύσσει αξιόπιστες και αποδοτικές υπολογιστικές μεθόδους, προσαρμοσμένες στις συγκεκριμένες γεωμετρίες. Αυτές οι μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μοντελοποίηση και τη μελέτη πραγματικών διατάξεων, αλλά και ως μέθοδοι αναφοράς για την επικύρωση νέων αριθμητικών τεχνικών.

Ευχαριστίες

Φτάνοντας στο τέλος μιας πορείας επτά ετών, οφείλω να εκφράσω θερμές ευχαριστίες στον επιβλέποντα μου, Καθηγητή Ιωάννη Ρουμελιώτη, για την καθοδήγηση, την ηθική υποστήριξη, και την ενεργό συνδρομή του στην προσπάθειά μου, αλλά και διότι—για όλους εμάς τους μαθητές του—αποτελεί παράδειγμα επιστήμονα, δασκάλου, και ανθρώπου.

Για την πολύτιμη και απεριόριστη βοήθεια που μου προσέφερε σε όλα τα στάδια εκπόνησης της διατριβής αυτής, τη συνεργασία, τις συζητήσεις, και τη διεύρυνση των ερευνητικών μου οριζόντων, ευχαριστώ ιδιαίτερα τον Δρ. Γρηγόριο Ζούρο.

Τέλος, θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στα άλλα δύο μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής μου, Καθηγητές Ιωάννη Τσαλαμέγκα και Ηλία Γλύτση, όπως και στους Καθηγητές Γεώργιο Φικιώρη, Γεράσιμο Παγιατάκη, και Νικόλαο Τσίτσα, στον Δρ. Γεράσιμο Κοκκοράκη, καθώς και στον συμφοιτητή και συνοδοιπόρο Υποψήφιο Διδάκτορα Σωτήριο Μπουργιώτη, με τους οποίους είχα την τύχη να συνεργαστώ σε διάφορες περιστάσεις, κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής μου.

Περίληψη

Η παρούσα διδακτορική διατριβή πραγματεύεται την επίλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων συνοριακών τιμών σε ελλειπτικές κυλινδρικές και σφαιροειδείς γεωμετρίες. Ως εκ τούτου, το περιεχόμενο της αναπτύσσεται σε δύο θεματικούς άξονες: ο πρώτος περιλαμβάνει τη μελέτη της διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε σύνθετους μεταλλικούς κυματοδηγούς με ένα ελλειπτικό και ένα κυκλικό τοίχωμα, ενώ ο δεύτερος τη μελέτη της ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης από ανισοτροπικά σφαιροειδή.

Το πρώτο κεφάλαιο έχει εισαγωγικό χαρακτήρα. Σε αυτό παρουσιάζονται κάποιες γενικές πληροφορίες για τα συστήματα συντεταγμένων και τις ειδικές μαθηματικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων σε ελλειπτικές και σφαιροειδείς γεωμετρίες.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται μια αποδοτική μέθοδος για τον υπολογισμό των κυματαριθμών αποκοπής ελλειπτικών-κυκλικών και κυκλικών-ελλειπτικών ομοαξονικών μεταλλικών κυματοδηγών. Για μικρές τιμές της εκκεντρότητας του ελλειπτικού τοιχώματος—δηλ., όταν το σχήμα του προσεγγίζει το κυκλικό—, εξάγονται κλειστοί τύποι για τους κυματαριθμούς αποκοπής που έχουν τη μορφή $x_{nm}(h) = x_{nm}^{(0)} [1 + g_{nm}^{(2)} h^2 + g_{nm}^{(4)} h^4 + O(h^6)]$, όπου οι συντελεστές $g_{nm}^{(2)}$ και $g_{nm}^{(4)}$ είναι ανεξάρτητοι της εκκεντρότητας h και δίνονται από απλές αλγεβρικές σχέσεις που δεν απαιτούν τον υπολογισμό των συναρτήσεων Mathieu, ενώ ο όρος $x_{nm}^{(0)}$ αντιστοιχεί στους κυματαριθμούς αποκοπής του κυκλικού ομοαξονικού κυματοδηγού. Αυτές οι αναλυτικές εκφράσεις ισχύουν για κάθε τιμή των δεικτών n και m , κάθε TM_{nm} και TE_{nm} ρυθμού υψηλότερης τάξης. Η απόδοση και η ακρίβεια της μεθόδου ελέγχονται μέσω της σύγκρισης με την ακριβή λύση του προβλήματος και δίνονται αριθμητικά αποτελέσματα για διάφορους ρυθμούς υψηλότερης τάξης.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσονται δύο μέθοδοι για τον υπολογισμό της σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από σφαιροειδή σώματα με ανισοτροπικές ιδιότητες. Η πρώτη είναι μια γενική μέθοδος πλήρους κύματος που βασίζεται στην έκφραση των πεδίων σε σειρές σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων. Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια του σφαιροειδούς, αποκτούμε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων που δίνει τη λύση του προβλήματος. Η δεύτερη μέθοδος είναι μια τεχνική διαταραχής η οποία, για μικρές τιμές της εκκεντρότητας του σφαιροειδούς—δηλ., όταν το σχήμα του προσεγγίζει το σφαιρικό—, οδηγεί σε απλές αλγεβρικές εκφράσεις της μορφής $S(h) = S^{(0)} [1 + g^{(2)} h^2 + g^{(4)} h^4 + O(h^6)]$, για τον υπολογισμό των διατομών σκέδασης. Οι συντελεστές $g^{(2)}$ και $g^{(4)}$ είναι ανεξάρτητοι της εκκεντρότητας h και των σφαιροειδών συναρτήσεων, ενώ ο όρος $S^{(0)}$ αντιστοιχεί στη σκέδαση από ανισοτροπική σφαίρα. Και οι δύο τρόποι επίλυσης χρησιμοποιούν ένα ειδικό ανάπτυγμα σφαιρικών ιδιοδιανυσμάτων με διακριτούς κυματαριθμούς, για την περιγραφή των πεδίων στην ανισοτροπική περιοχή. Η μέθοδος των σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων επαληθεύεται μέσω της σύγκρισης της με ανεξάρτητες αριθμητικές τεχνικές και στη συνέχεια χρησιμοποιείται ως αναφορά για τη διερεύνηση της ακρίβειας της μεθόδου διαταραχής. Οι δύο μέθοδοι συγκρίνονται ως προς την απόδοση και δίνονται αριθμητικά αποτελέσματα για διάφορα είδη ανισοτροπίας.

Λέξεις Κλειδιά: Ελλειπτικοί κυματοδηγοί, κυματαριθμοί αποκοπής, λύση κλειστής μορφής, ανισοτροπία, ηλεκτρομαγνητική σκέδαση, μέθοδος διαταραχής, μέθοδος πλήρους κύματος, σφαιροειδείς.

Abstract

The topic of this doctoral dissertation is concerned with the solution of electromagnetic (EM) boundary-value problems in elliptical cylindrical and spheroidal configurations. Therefore, its content is organized along two directions: the first studies the propagation of EM waves in elliptical-circular and circular-elliptical metallic waveguides. The second investigates the EM scattering from spheroids with anisotropic material properties. In both cases, the starting point of our approach is the separation of variables method and the expansion of the EM fields in terms of appropriate eigenfunctions, followed by the satisfaction of the pertinent boundary conditions. Apart from their theoretical and mathematical interest, the topics under study are also of practical value. The latter is due to the additional degree of freedom introduced by the elliptical or spheroidal boundary in the design of a device, as compared to the respective circular or spherical boundary. That is, by varying the ellipticity of the waveguide's wall, certain bandwidth requirements may be achieved. Likewise, by varying the eccentricity of the spheroidal scatterer, a specified scattering response may be obtained. In the particular case of the anisotropic spheroid, anisotropy can provide another degree of freedom in the design, opening up possibilities for novel effects and applications.

The dissertation is composed of three chapters. The first chapter is introductory and presents general information on the coordinate systems and the special mathematical functions involved in the solution of problems in elliptical and spheroidal configurations.

In the second chapter, we develop an efficient and accurate method for the calculation of the cutoff wavenumbers of coaxial elliptical-circular and circular-elliptical metallic waveguides. In general, metallic waveguides with elliptical cross sections are of great interest in engineering, with many practical applications including antenna and radar feeders, microwave measurement techniques, matching devices, and filters. In particular, elliptical-circular and circular-elliptical waveguides may be used to fulfil certain bandwidth requirements, and the knowledge of their cutoff wavenumbers is helpful when one boundary of a coaxial circular waveguide is deformed. In this case, one can successfully retrieve the correct cutoff wavenumbers by approximating this deformation with an ellipse.

Many different numerical methods have been applied to obtain the cutoff wavenumbers of single or composite elliptical metallic waveguides. For instance, a polynomial approximation was applied by the authors in [13] to represent the boundary of a hollow elliptical waveguide and to study its propagation characteristics. In [15], the cutoff wavenumbers were obtained by directly calculating the parametric zeros of the modified Mathieu functions and their derivatives. In [17], the cutoff wavenumbers were calculated by the application of a differential quadrature technique for the discretization of the Helmholtz equation. In [19], the authors used the method of fundamental solutions in combination with the singular value decomposition technique, to calculate the cutoff wavenumbers. The cutoff wavenumbers of confocal coaxial elliptical waveguides were studied in [21], using Mathieu functions of the first and second kind, while in [22] the method of moments was used to solve the Helmholtz equation in elliptical coordinates. The general exact solution for the evaluation of the cutoff wavenumbers in eccentric elliptical waveguides was presented in [25], using Mathieu functions and their addition theorem.

It is apparent that the calculation of the cutoff wavenumbers in waveguides having at least one elliptical boundary, needs the introduction of Mathieu functions and their numerical evaluation, or yet another numerical technique like the method of moments or the method of fundamental solutions. The main disadvantage of these approaches is that the algorithm used to retrieve the roots of a function or a determinant, or any other intermediate quantity (like the eigenvalues) requires iteration. Moreover, the execution of the numerical algorithm is time consuming, since it must pass through all the initial points of a desired interval, in order to calculate the roots that may exist in this interval and correspond to the desired cutoff wavenumber. On the contrary, the wavenumbers that can be calculated using a closed-form solution are obtained immediately, without the need for iteration.

Closed-form methods for the calculation of the cutoff wavenumbers of elliptical-type waveguides are limited. In [26], the authors derived closed-form expressions for the cutoff wavelengths of the single elliptical metallic waveguide, while in [27] closed-form expressions for the cutoff wavenumbers of elliptical dielectric waveguides were obtained. In [31], closed-form expressions were extracted for the geometry of an eccentric circular-elliptical or elliptical-circular metallic waveguide. Another attempt for obtaining analytical formulas for the cutoff wavenumbers of coaxial elliptical-circular and circular-elliptical metallic waveguides was made in [30], although some of the results in that paper turn out to be ambiguous. Apart from the problem of the calculation of the cutoff wavenumbers, closed-form methods were also applied in the solution of scattering problems, like the scattering from an elliptical dielectric cylinder [28], or the scattering from an elliptical dielectric cylinder having a circular metallic core [29]. Nonetheless, scattering problems require the straightforward solution of a non homogeneous linear system of equations, contrary to waveguiding problems where a homogeneous system is obtained and the roots of its determinant must be evaluated.

The method proposed in this work allows for the calculation of the cutoff wavenumbers of coaxial elliptical-circular and circular-elliptical metallic waveguides, using simple closed-form expressions. Both TM and TE modes are considered and the derived expressions are valid for every higher-order mode. Employing the separation of variables method, the longitudinal field components are expressed in terms of Mathieu functions and the boundary condition at the elliptical wall is satisfied. Then, using appropriate expansion formulas connecting the elliptical with the circular wave functions, we proceed to satisfy the boundary condition at the circular wall. In this way, an infinite determinantal equation is obtained that provides the cutoff wavenumbers of the corresponding waveguide. When we specialize the solution to small values of the eccentricity h —i.e., the cross section of the elliptical wall of the waveguide approaches the circular shape—, the above determinant can be expressed in closed form, leading to simple algebraic expressions for the normalized cutoff wavenumbers in the form $x_{nm}(h) = x_{nm}^{(0)} [1 + g_{nm}^{(2)} h^2 + g_{nm}^{(4)} h^4 + O(h^6)]$, with the indices n and m corresponding to the mode indices. The expansion coefficients $g_{nm}^{(2)}$ and $g_{nm}^{(4)}$ are given by analytical closed-form formulas, which are independent of h and do not require the computation of Mathieu functions, while the term $x_{nm}^{(0)}$ corresponds to the normalized cutoff wavenumbers of the coaxial circular metallic waveguide ($h = 0$).

Once the coefficients $g_{nm}^{(2)}$ and $g_{nm}^{(4)}$ are known, the cutoff wavenumbers can be obtained immediately, for each small value of h , by fast “back-of-the-envelope” calculations. On the contrary, numerical techniques require repetition, from the beginning, for each different h .

As mentioned above, coaxial elliptical-circular and circular-elliptical waveguides were previously examined in [30], and may also be considered as a special case of the geometries studied in [31]. In these works, closed-form solutions were obtained for the cutoff wavenumbers, employing only terms of the order of h^2 . Herein, we present an extension of [30] and [31], where terms up to the order of h^4 are considered. Our motivation is to obtain closed-form formulas that yield more accurate results for the cutoff wavenumbers, compared to the $O(h^2)$ solution. Moreover, we locate and resolve some erroneous points found in [30]. This means that the use of [30] for the calculation of the cutoff wavenumbers of elliptical-circular and circular-elliptical waveguides is precarious, and that this dissertation presents the original formulas for obtaining correct results.

The correctness of our closed-form solution is verified by comparing to the general exact solution [25] and numerical results are given for the cutoff wavenumbers of various higher-order modes. The efficiency and accuracy of our solution are demonstrated by illustrative examples. The latter reveal that the restriction to small values of h is not so severe, and larger values of the eccentricity can be used with acceptable small errors in the cutoff wavenumbers. Thus, the developed method comprises an efficient tool for studying the propagation characteristics of the specific waveguiding structures, as well as for providing benchmark results and testing the accuracy of new numerical techniques.

The third chapter is devoted to the development of two independent methods for the calculation of EM scattering from prolate or oblate anisotropic spheroids. The interaction of EM waves with spheroidal scatterers has been studied extensively during the past decades, due to its numerous applications in areas such as microwave engineering, astrophysics, atmospheric physics, and optics.

Many works examine the EM scattering from conducting or isotropic spheroids, employing a variety of approaches. In particular, methods based on the separation of variables in spheroidal coordinates have been extensively used [40,42,43,45,47]. These methods employ the spheroidal wave functions for the expansion of the fields and proceed to satisfy appropriate boundary conditions at the scatterer’s surface, thus leading to an infinite system of linear non homogeneous equations for the unknown field expansion coefficients, that is solved by truncation. Another approach is the asymptotic technique employed in [42,68,69], where, for small values of its eccentricity, the spheroid is considered as a perturbation of the respective sphere and closed-form expressions can be extracted for the scattering cross sections. Also, general methods for the calculation of EM scattering from three-dimensional non spherical bodies may be used to simulate spheroidal shapes, including the integral equation method [54], the extended boundary condition method (EBCM) that leads to the computation of the so-called T-matrix [56], and the discrete-dipole approximation (DDA) [63].

In recent years, there has been a growing interest in anisotropic materials, which are expected to play a central role in many new technological applications ranging from the

microwave to the optical frequency regime. For example, the materials that have been proposed for the synthesis of EM cloaks have anisotropic properties [72], whereas the use of anisotropic high-index dielectrics may pave the way to new nanophotonic effects [78]. In this context, the spheroidal geometry may provide the advantage of greater flexibility in the design of a device, by varying two different degrees of freedom, i.e., the geometrical shape and the material anisotropy.

The modeling of anisotropic spheroidal configurations and the investigation of their scattering characteristics, require a theoretical tool for the solution of EM scattering from anisotropic spheroidal bodies. However, the number of works on anisotropic spheroids remains limited. In [89], an integral equation technique for the case of an anisotropic ellipsoid was developed, but results were given only for spherical shapes, whereas a spheroidal scatterer with spheroidal anisotropy in the electrostatic regime was considered in [90]. In addition, researchers have resorted to more general methods for the modeling of anisotropic spheroids. These include the method of moments for the scattering volume integral equation (VIE) [91], the extension of the EBCM to anisotropic scatterers [94,97], and certain versions of DDA that can handle material anisotropy [117]. Still, these methods face certain limitations like the breakdown of EBCM when dealing with spheroids of high aspect ratio, or the high discretization—translated to increased computational cost—required by VIE and DDA, in order to give accurate results. It is therefore apparent that efficient and accurate methods for the EM modeling of spheroids with anisotropic properties are needed, capable of overcoming the limitations of existing techniques.

The above discussion provides the motivation for the development of the two methods proposed in this dissertation, i.e., a spheroidal series solution and a perturbation technique. The developed theory supports prolate and oblate spheroids with uniaxial, biaxial, or gyroelectric properties in the permittivity, and a scalar permeability. The different cases of anisotropy are described by appropriate Cartesian permittivity tensors. A common feature of the introduced methods is that they employ a discrete eigenfunction method (DEM) for the series expansion of the unknown fields in the spheroid's interior. DEM was originally constructed for gyromagnetic and biaxial spheres [83,84] and provides the expansion of the EM field, in the respective anisotropic medium, in terms of spherical vector wave functions (VWFs) with discrete wavenumbers. The latter are obtained from the solution of an eigenvalue problem, the characteristic matrix of which depends on the elements of the permittivity tensor.

The first of the proposed methods, is a formal series solution employing a formulation based on the spheroidal eigenvectors. In order to solve the scattering problem, the incident and scattered fields in the region surrounding the spheroid are expanded in terms of spheroidal VWFs. Using DEM, the transmitted field in the anisotropic interior of the spheroid is initially expanded in terms of spherical eigenvectors, with discrete wavenumbers. The spherical expansion of the transmitted field is then transformed into an equivalent spheroidal expansion and the boundary conditions at the spheroid's surface are imposed. This way, an infinite system of linear non homogeneous equations involving the unknown field expansion coefficients is obtained. This system is solved numerically

by truncation, allowing for the computation of bistatic and total scattering cross sections.

The developed method has the novel feature that, for the first time, EM scattering from an anisotropic spheroid is addressed using a formal series solution method based on spheroidal eigenvectors. All previous works employing spheroidal functions are limited to isotropic permittivities. Furthermore, we use a different expansion for the transmitted field—as compared to the one in [42] for isotropic spheroids—by introducing the irrotational spheroidal eigenvector into the formulation, and finally arrive at a new system of equations. To the writer’s knowledge, the irrotational spheroidal eigenvector has not been used before in published works on the scattering from spheroids.

The second method developed in this work, is a fast asymptotic solution to the scattering problem, valid for small values of the spheroid’s eccentricity. To this end, the incident and scattered fields in the surrounding region, as well as the transmitted field in the anisotropic region, are expanded in terms of spherical VWFs. Again, DEM is employed for the expansion of the fields in the anisotropic interior of the spheroid. As long as the eccentricity h of the spheroid is kept small, the latter is treated as a perturbation of the respective sphere which corresponds to $h = 0$. Thus, we apply Maclaurin series expansions versus h for the incident, scattered, and transmitted fields, and in sequence for the boundary conditions, at the perturbed spherical boundary. This results—after great analytical effort—in simple algebraic expressions for the scattering cross sections, having the general form $S(h) = S^{(0)} [1 + g^{(2)}h^2 + g^{(4)}h^4 + O(h^6)]$, and valid for small values of h . The expansion coefficients $g^{(2)}$ and $g^{(4)}$ are independent of h and do not require the computation of the spheroidal functions, while the term $S^{(0)}$ corresponds to the scattering from the non perturbed anisotropic sphere ($h = 0$). The great advantage of this method is that it provides fast and accurate results in the appropriate range of small values of h , while numerical techniques require a high CPU time for convergence. Furthermore, when a new calculation of the scattering cross sections is needed for a different value of the eccentricity, the aforementioned algebraic expression gives the result immediately—simply by applying the new small value of h . On the contrary, numerical methods require repetition, from the beginning, for every new value of the eccentricity.

The proposed shape perturbation procedure was applied in [42] and [68] to construct a closed-form solution for isotropic dielectric and metallic spheroids, respectively. However, a distinction should be made between the present method and previous works. In particular, our method does not yield a closed-form solution to the scattering problem, as [42] does. This is owed to the fact that, as mentioned above, DEM requires the numerical solution of an eigenvalue problem, involving the elements of the anisotropic permittivity tensor, thus ruling out the possibility of a completely closed-form solution. Therefore, the closed-form expressions of [42] cannot be used in the present case, and a different approach is followed in order to solve the perturbed problem, based on the successive solution of linear systems of different orders. Taking this into account, the present work is a non trivial extension of [42] to anisotropic spheroids.

Having developed the two methods, we initially verify the validity of the formal series solution by comparing results with two other independent computational tools, namely, a general purpose implementation of DDA and a commercial finite-element method solver.

Once the correctness of the method is established, it is used as reference method for testing the results of the shape perturbation technique, in order to determine the range of values of the eccentricity for which the latter can be used with acceptable error. Comparisons reveal the superior performance of the perturbation method, in terms of required computational time. However, the asymptotic technique is valid for small eccentricities, while the spheroidal series solution is capable of handling larger values of eccentricity, allowing for the examination of more elongated bodies.

The two methods can be applied in the modeling and investigation of novel EM applications, like anisotropic photonic antennas or spheroidal optomagnonic cavities. Furthermore, they can be used as reference methods, providing benchmark results for the validation of new numerical techniques.

Key Words: Closed-form solution, cutoff wavenumbers, elliptical waveguides, anisotropy, electromagnetic scattering, full-wave method, shape perturbation method, spheroid.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
Κεφάλαιο 1 Συναρτήσεις Mathieu-Σφαιροειδείς συναρτήσεις	11
1.1 Εισαγωγή	11
1.2 Συναρτήσεις Mathieu	11
1.2.1 Ελλειπτικές συντεταγμένες	11
1.2.2 Συναρτήσεις Mathieu	12
1.2.3 Εκφράσεις για μικρές εκκεντρότητες	13
1.2.4 Υπολογισμός συντελεστών	15
1.3 Σφαιροειδείς συναρτήσεις	16
1.3.1 Σφαιροειδείς συντεταγμένες	16
1.3.2 Σφαιροειδείς συναρτήσεις	17
1.3.3 Σφαιροειδείς διανυσματικές κυματικές συναρτήσεις	19
Κεφάλαιο 2 Ανάλυση ελλειπτικών-κυκλικών κυματοδηγών	23
2.1 Εισαγωγή	23
2.2 TM ρυθμοί	25
2.2.1 Κατάστρωση προβλήματος	25
2.2.2 Λύση για μικρές εκκεντρότητες	28
2.3 TE ρυθμοί	33
2.3.1 Κατάστρωση προβλήματος	33
2.3.2 Λύση για μικρές εκκεντρότητες	35
2.4 Αριθμητικά αποτελέσματα	38
2.4.1 Γενικά	38
2.4.2 Έλεγχος ακρίβειας	42
2.4.3 Έλεγχος απόδοσης	43
2.4.4 Σύγκριση με [30]	49
2.5 Συζήτηση και συμπεράσματα	50
Κεφάλαιο 3 Σκέδαση από ανισοτροπικά σφαιροειδή	53
3.1 Εισαγωγή	53
3.2 Μέθοδος σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων	56
3.2.1 Επίμηκες σφαιροειδές	56
3.2.2 Πεπλατυσμένο σφαιροειδές	64
3.3 Μέθοδος διαταραχής σφαιρικού συνόρου	64
3.3.1 Επίμηκες σφαιροειδές	64

3.3.2	Πεπλατυσμένο σφαιροειδές	69
3.4	Αριθμητικά αποτελέσματα	69
3.4.1	Γενικά	69
3.4.2	Έλεγχος ΜΣΙ	70
3.4.3	Έλεγχος ΜΔΣΣ	74
3.4.4	Λοιπά αποτελέσματα - Σύγκλιση	80
3.5	Συζήτηση και συμπεράσματα	87
Παράρτημα		91
Βιβλιογραφία		97

Εισαγωγή

Γενικά

Η παρούσα διδακτορική διατριβή πραγματεύεται την επίλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων διάδοσης και σκέδασης σε ελλειπτικές κυλινδρικές και σφαιροειδείς γεωμετρίες, αντιστοίχως. Η προσέγγιση μας έχει ως αφετηρία την εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών για την επίλυση της εξίσωσης Helmholtz στα σχετικά συστήματα συντεταγμένων. Με αυτό τον τρόπο προκύπτουν οι ιδιοσυναρτήσεις που χρησιμοποιούνται ως βάση για την ανάπτυξη των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων στις συγκεκριμένες γεωμετρίες. Ακολούθως, η ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών του υπό εξέταση προβλήματος οδηγεί στην απόκτηση της λύσης, κατόπιν εφαρμογής της κατάλληλης μεθοδολογίας.

Κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής, η σχετική έρευνα επικεντρώθηκε αρχικά στην κυματοδηγηση σε σύνθετους ελλειπτικούς κυματοδηγούς, και στη συνέχεια στη μελέτη της σκέδασης από ανισοτροπικά σφαιροειδή σώματα. Ως εκ τούτου, το περιεχόμενο της παρούσας διατριβής διαρθρώνεται ως εξής: στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των συναρτήσεων Mathieu και των σφαιροειδών συναρτήσεων, εστιάζοντας στα απαραίτητα στοιχεία για τα κεφάλαια που ακολουθούν. Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφεται η εφαρμογή μιας προσεγγιστικής τεχνικής διαταραχής σε ομοαξονικούς μεταλλικούς κυματοδηγούς με ένα ελλειπτικό και ένα κυκλικό τοίχωμα, για τον υπολογισμό των κυματοαριθμών αποκοπής σε κλειστή μορφή. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ανάπτυξη δύο μεθόδων υπολογισμού της σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από ανισοτροπικά σφαιροειδή. Η πρώτη μέθοδος είναι μια γενική λύση που κάνει χρήση των σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων για την κατάστρωση του προβλήματος, ενώ η δεύτερη είναι μια τεχνική διαταραχής που οδηγεί σε απλές αλγεβρικές σχέσεις για τις διατομές σκέδασης.

Εκτός από θεωρητικό και μαθηματικό ενδιαφέρον, τα θέματα που πραγματεύεται η παρούσα εργασία εμφανίζουν και πρακτική αξία. Η τελευταία εντοπίζεται στον πρόσθετο βαθμό ελευθερίας που εισάγει το ελλειπτικό ή το σφαιροειδές σχήμα κατά τη σχεδίαση μιας διάταξης, σε σχέση με το κυκλικό ή το σφαιρικό, αντιστοίχως. Έτσι, η μεταβολή της ελλειπτικότητας του τοιχώματος ενός κυματοδηγού, μπορεί να εξασφαλίσει την ικανοποίηση συγκεκριμένων αναγκών εύρους ζώνης συχνότητας. Αντιστοίχως, η μεταβολή της εκκεντρότητας ενός σφαιροειδούς σχεδαστή μπορεί να οδηγήσει στην επίτευξη επιθυμητών χαρακτηριστικών σκέδασης. Ειδικά για την περίπτωση του ανισοτροπικού σφαιροειδούς, η ανισοτροπία δύναται να αποτελέσει έναν πρόσθετο βαθμό ελευθερίας, με σημαντικές προοπτικές αξιοποίησης στο πλαίσιο σύγχρονων ηλεκτρομαγνητικών εφαρμογών.

Διάδοση σε ελλειπτικούς κυματοδηγούς

Οι ελλειπτικές διατάξεις κυματοδήγησης έχουν προσελκύσει την προσοχή πολλών ερευνητών, λόγω των εφαρμογών που αυτές βρίσκουν στην τροφοδοσία κεραιών και συστημάτων ραντάρ, σε δακτυλιοειδείς ελλειπτικές τυπωμένες κεραίες, σε μικροκυματικές τεχνικές μετρήσεων, και σε μικροκυματικά στοιχεία όπως φίλτρα και διατάξεις προσαρμογής [1–7].

Σε σύγκριση με τους κυκλικούς κυματοδηγούς, οι ελλειπτικοί κυματοδηγοί προσφέρουν πρόσθετους βαθμούς ελευθερίας κατά τη σχεδίαση ενός μικροκυματικού στοιχείου, μέσω της μεταβολής της εκκεντρότητας τους, αλλά και της διαφορετικής εστιακής απόστασης μεταξύ των δύο ελλειπτικών συνόρων στην περίπτωση ομοαξονικών κυματοδηγών. Αυτή η διεύρυνση των παραμέτρων σχεδίασης έχει ως αποτέλεσμα να παρέχεται μεγαλύτερη ευελιξία για την επίτευξη ενός επιθυμητού χαρακτηριστικού, όπως για παράδειγμα η ικανοποίηση συγκεκριμένων απαιτήσεων εύρους ζώνης συχνότητας. Εκτός αυτού, η ελλειπτική γεωμετρία παρουσιάζει ένα επιπλέον ενδιαφέρον, καθώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μοντελοποιήσει την παραμόρφωση των τοιχωμάτων απλών ή ομοαξονικών κυκλικών κυματοδηγών, η οποία ενδέχεται να προκύψει λόγω αποκλίσεων και ατελειών κατά την κατασκευή τους.

Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, γίνεται φανερό το ιδιαίτερο ενδιαφέρον που παρουσιάζει η ανάλυση των ελλειπτικών μεταλλικών κυματοδηγών. Σε αυτό το πλαίσιο, ο προσδιορισμός των κυματαριθμών αποκοπής αποτελεί ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα για τη σχεδίαση του κυματοδηγού και τη μελέτη της διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο εσωτερικό του.

Η πρώτη θεωρητική ανάλυση του προβλήματος του ελλειπτικού μεταλλικού κυματοδηγού έγινε το 1938 από τον Chu [8]. Συγκεκριμένα, ο συγγραφέας υπολόγισε τα μηδενικά των ακτινικών (ή τροποποιημένων) συναρτήσεων Mathieu και των παραγώγων τους, ως προς την ακτινική ελλειπτική συντεταγμένη, και παρουσίασε αριθμητικά αποτελέσματα για έξι διαφορετικούς ρυθμούς διάδοσης. Διορθώσεις σε ορισμένα από τα αποτελέσματα της [8] παρουσιάστηκαν σε μεταγενέστερες εργασίες [9–11]. Τις τελευταίες δεκαετίες, πολλές αριθμητικές μέθοδοι έχουν προταθεί για τον υπολογισμό των κυματαριθμών αποκοπής απλών ή σύνθετων ελλειπτικών μεταλλικών κυματοδηγών [12–25]. Έτσι, στις [12–14] χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Rayleigh-Ritz με κατάλληλες πολυωνυμικές σειρές, για να περιγραφούν οι διαμήκεις συνιστώσες των πεδίων και το καμπύλο σύνορο ενός ελλειπτικού μεταλλικού κυματοδηγού, και να μελετηθούν τα χαρακτηριστικά διάδοσης στο εσωτερικό του. Στην [15], βρέθηκαν τα μήκη κύματος αποκοπής ενός ελλειπτικού μεταλλικού κυματοδηγού μέσω του αριθμητικού υπολογισμού των παραμετρικών μηδενικών των τροποποιημένων συναρτήσεων Mathieu και των παραγώγων τους, ενώ αποτελέσματα για την ίδια διάταξη δόθηκαν στην [16], όπου παρουσιάστηκε μια μέθοδος για τον ταχύ υπολογισμό των εν λόγω συναρτήσεων. Στις [17] και [18], υπολογίστηκαν τα μήκη κύματος αποκοπής με εφαρμογή δύο διαφορετικών αριθμητικών τεχνικών—differential quadrature και collocation, αντιστοίχως—που βασίζονται στη διακριτοποίηση της εξίσωσης Helmholtz και τη μετατροπή της σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, ενώ στην [19] οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν τη μέθοδο των θεμελιωδών λύσεων (method of fundamental solutions) για τον υπολογισμό των μηκών κύματος αποκοπής. Επιπλέον, η πιο σύνθετη περίπτωση της διάδοσης υβριδικών ρυθμών σε έναν μεταλλικό κυματοδηγό ελλειπτικής διατομής με έναν ομοεστιακό διηλεκτρικό πυρήνα στο εσωτερικό του μελετήθηκε στην [20], όπου χρησιμοποιήθηκαν οι ακτινικές συναρτήσεις Mathieu πρώτου και δεύτερου είδους

για την κατάστροψη του προβλήματος και την εξαγωγή των χαρακτηριστικών εξισώσεων για την εύρεση των κυματαριθμών αποκοπής.

Ενώ οι παραπάνω εργασίες εξετάζουν απλούς ελλειπτικούς κυματοδηγούς ενός τοιχώματος, οι κυματαριθμοί αποκοπής ομοαξονικών κυματοδηγών με ομοεστιακά ελλειπτικά τοιχώματα μελετήθηκαν στην [21], με αριθμητική επίλυση των χαρακτηριστικών εξισώσεων στις οποίες εμπλέκονται οι ακτινικές συναρτήσεις Mathieu πρώτου και δεύτερου είδους, και οι παράγωγοί τους, ενώ στην [22] η μέθοδος των ροπών (method of moments) εφαρμόστηκε για τη μετατροπή της εξίσωσης Helmholtz σε ένα πρόβλημα υπολογισμού ιδιοτιμών. Τα μήκη κύματος αποκοπής ενός ελλειπτικού κυματοδηγού εντός του οποίου έχει τοποθετηθεί μια αγώγιμη λωρίδα (stripe) υπολογίστηκαν στις [23, 24], με τη βοήθεια των συναρτήσεων Mathieu. Τέλος, η ακριβής λύση για την πιο γενική περίπτωση έκκεντρων κυματοδηγών με ελλειπτικά τοιχώματα παρουσιάστηκε στην [25], κάνοντας χρήση των συναρτήσεων Mathieu και του προσθετικού τους θεωρήματος (addition theorem).

Από την παραπάνω επισκόπηση της βιβλιογραφίας, διαπιστώνουμε πως υπάρχουν δύο βασικές προσεγγίσεις για τον υπολογισμό των κυματαριθμών αποκοπής σε κυματοδηγούς που διαθέτουν τουλάχιστον ένα ελλειπτικό σύνορο: η πρώτη απαιτεί την εισαγωγή και τον αριθμητικό υπολογισμό των συναρτήσεων Mathieu, οι οποίες προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών στη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz για το ελλειπτικό κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Η δεύτερη προσέγγιση περιλαμβάνει την εφαρμογή κάποιας αριθμητικής τεχνικής, όπως η μέθοδος των ροπών ή η μέθοδος των θεμελιωδών λύσεων, για την απόκτηση των κυματαριθμών μέσω της επίλυσης ενός προβλήματος ιδιοτιμών. Το βασικό μειονέκτημα και των δύο προσεγγίσεων, συνίσταται στο ότι η εκτέλεση των αριθμητικών αλγορίθμων που τις υλοποιούν πρέπει να επαναλαμβάνεται κάθε φορά που θεωρούμε μια νέα τιμή της εκκεντρότητας. Επιπλέον, μέθοδοι όπως αυτές των [15] και [25], πρέπει να υπολογίζουν επαναληπτικά τις συναρτήσεις Mathieu, καθώς αναζητούν τις ρίζες των χαρακτηριστικών εξισώσεων μέσα σε ένα συγκεκριμένο διάστημα του παραμετρικού χώρου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την επανάληψη της υπολογιστικής εργασίας και την αύξηση του υπολογιστικού χρόνου. Αντιθέτως, αν έχουμε στη διάθεση μας μια λύση κλειστής μορφής για τους κυματαριθμούς αποκοπής, τότε αυτοί μπορούν να υπολογιστούν αμέσως, χωρίς την ανάγκη εφαρμογής κάποιου επαναληπτικού αλγορίθμου.

Ο αριθμός των εργασιών που πραγματεύονται τον αναλυτικό υπολογισμό των κυματαριθμών αποκοπής σε κλειστή μορφή είναι περιορισμένος. Η μεθοδολογία που ακολουθείται στην περίπτωση αυτή, είναι η εφαρμογή μιας προσεγγιστικής τεχνικής διαταραχής (shape perturbation method). Η τεχνική αυτή έχει ως βάση τη γνωστή λύση του προβλήματος του κυκλικού κυματοδηγού, το οποίο προσεγγίζει το υπό εξέταση πρόβλημα του ελλειπτικού κυματοδηγού, για μικρές τιμές της εκκεντρότητας του ελλειπτικού συνόρου του τελευταίου. Με αυτό τον τρόπο, οι συγγραφείς της [26] εξήγαγαν εκφράσεις σε κλειστή μορφή για τα μήκη κύματος αποκοπής ενός απλού ελλειπτικού μεταλλικού κυματοδηγού, ενώ στην [27] αποκτήθηκαν εκφράσεις κλειστής μορφής για τους κυματαριθμούς αποκοπής ελλειπτικών διηλεκτρικών κυματοδηγών. Η ίδια μέθοδος έχει εφαρμοστεί και για τη λύση, σε κλειστή μορφή, προβλημάτων σκέδασης από διατάξεις ελλειπτικών διηλεκτρικών κυλίνδρων απείρου μήκους [28, 29]. Η διαφορά έγκειται στο ότι τα προβλήματα σκέδασης οδηγούν σε μη ομογενή γραμμικά συστήματα εξισώσεων, ενώ τα προβλήματα κυματοδηγής οδηγούν σε ομογενή

συστήματα, η ορίζουσα των οποίων τίθεται ίση με μηδέν προκειμένου να ανακτηθούν οι κυματαριθμοί αποκοπής.

Η προσεγγιστική τεχνική εφαρμόστηκε επίσης στην [30], προκειμένου να υπολογιστούν σε κλειστή μορφή οι κυματαριθμοί αποκοπής ομοαξονικών ελλειπτικών-κυκλικών και κυκλικών-ελλειπτικών κυματοδηγών με μεταλλικά τοιχώματα, για μικρές τιμές της εκκεντρότητας του ελλειπτικού τοιχώματος, ενώ η πιο γενική περίπτωση έκκεντρων ελλειπτικών-κυκλικών και κυκλικών-ελλειπτικών μεταλλικών κυματοδηγών αναλύθηκε στην [31].

Στην παρούσα διατριβή η προσεγγιστική μέθοδος εφαρμόζεται για τον υπολογισμό, σε κλειστή μορφή, των κυματαριθμών αποκοπής σύνθετων ομοαξονικών μεταλλικών κυματοδηγών με ένα ελλειπτικό και ένα κυκλικό τοίχωμα. Με αυτό τον τρόπο παρέχεται μια επέκταση στις [30] και [31], στις οποίες χρησιμοποιήθηκαν αναπτύγματα με όρους μέχρι δεύτερης τάξης, ενώ τώρα λαμβάνουμε υπόψη και τους όρους τέταρτης τάξης, επιτυγχάνοντας υψηλότερη ακρίβεια. Επιπλέον, εντοπίζονται ορισμένα προβληματικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην [30] και αποσαφηνίζεται η πηγή προέλευσης τους.

Εκτός της επίτευξης υψηλότερης ακρίβειας, η μέθοδος που αναπτύσσουμε παρουσιάζει το πλεονέκτημα της εξαγωγής απλών αλγεβρικών σχέσεων που επιτρέπουν τον ταχύ υπολογισμό των κυματαριθμών αποκοπής. Αυτά τα δύο στοιχεία την καθιστούν ιδανική ως μέθοδο αναφοράς για τον έλεγχο και την επαλήθευση των αποτελεσμάτων νέων αριθμητικών τεχνικών.

Σκέδαση από ανισοτροπικά σφαιροειδή

Η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από σφαιροειδή σώματα έχει μελετηθεί ευρέως κατά τις τελευταίες δεκαετίες, λόγω του μεγάλου αριθμού εφαρμογών της σε επιστημονικά και τεχνολογικά πεδία όπως τα συστήματα ραντάρ και τηλεπισκόπησης, η αστροφυσική, η φυσική της ατμόσφαιρας, η οπτική, και η βιοϊατρική [32]. Για παράδειγμα, οι σταγόνες της βροχής μπορούν να μοντελοποιηθούν ως πεπλατυσμένα σφαιροειδή, σε εφαρμογές υπολογισμού της εξασθένησης μικροκυματικών σημάτων σε συνθήκες διάδοσης μέσα από βροχόπτωση [33]. Παρομοίως, το σφαιροειδές σχήμα έχει χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση των κόκκων της διαστρικής σκόνης, σε αστροφυσικές εφαρμογές [34]. Από την άλλη, ένα σφαιροειδές πολυστρωματικό μοντέλο έχει προταθεί για το ανθρώπινο κεφάλι, στη μελέτη της αλληλεπίδρασης του τελευταίου με την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμπεται από τις κεραίες συσκευών κινητής τηλεφωνίας [32]. Αλλά και στο αναδυόμενο πεδίο της νανοφωτονικής, πρόσφατες εργασίες κατέδειξαν το ενδιαφέρον που εμφανίζει η σφαιροειδής γεωμετρία για εφαρμογές συντονιζόμενων νανοκεραίων [35, 36].

Η μεθοδολογία που υιοθετείται σε πολλές από τις εργασίες που εξετάζουν την ηλεκτρομαγνητική σκέδαση από σφαιροειδείς διατάξεις έχει ως αφετηρία την εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών στη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz, για τα δύο σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων (επίμηκες και πεπλατυσμένο). Με αυτό τον τρόπο, προκύπτουν οι σφαιροειδείς κυματικές συναρτήσεις, οι οποίες αποτελούν τη βάση για την κατασκευή των αντίστοιχων σφαιροειδών διανυσματικών κυματικών συναρτήσεων (ή σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων). Οι τελευταίες έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως στην επίλυση προβλημάτων σκέδασης

με ανάλυση πλήρους κύματος (full-wave) [37–46], η οποία συνίσταται στην ανάπτυξη των πεδίων σε σειρές σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων, την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στην επιφάνεια του σφαιροειδούς σχεδαστή, και την αριθμητική επίλυση των γραμμικών συστημάτων εξισώσεων που προκύπτουν. Πιο συγκεκριμένα, διάφορες περιπτώσεις σκέδασης από διατάξεις τέλεια αγωγίμων σφαιροειδών έχουν εξεταστεί στις [37–39], με χρήση της μεθοδολογίας των σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων. Η ίδια μεθοδολογία εφαρμόστηκε από τους Asano και Yamamoto στην κλασική τους εργασία για τον υπολογισμό της σκέδασης από ένα ομογενές διηλεκτρικό σφαιροειδές [40], την οποία ακολούθησε μια πιο λεπτομερής διερεύνηση των χαρακτηριστικών σκέδασης για διάφορες τιμές των παραμέτρων του προβλήματος [41]. Η επίλυση της σκέδασης από διηλεκτρικό σφαιροειδές με τη μέθοδο των σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων παρουσιάστηκε και πιο πρόσφατα στην [42], όπου οι συγγραφείς ακολούθησαν μια διαφορετική διαδικασία για την κατασκευή του τελικού συστήματος εξισώσεων και εφαρμόσαν βελτιωμένους αλγόριθμους για τον υπολογισμό των σφαιροειδών συναρτήσεων. Τέλος, ερευνητές έχουν προχωρήσει και στη μελέτη πιο σύνθετων περιπτώσεων, όπως ενός διστρωματικού σφαιροειδούς [43], ενός χειραλικού (chiral) σφαιροειδούς [44], και δύο σφαιροειδών σε τυχαίο προσανατολισμό μεταξύ τους [45, 46].

Ο χωρισμός των μεταβλητών και οι σφαιροειδείς συναρτήσεις αποτελούν τη βάση της τεχνικής που παρουσίασαν οι συγγραφείς της [47] για τον υπολογισμό της σκέδασης από διηλεκτρικά σφαιροειδή. Ωστόσο, στην προκειμένη περίπτωση, η κατάστρωση του προβλήματος γίνεται μέσω δύο ειδών κατάλληλων βαθμωτών δυναμικών και όχι των σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων. Η τεχνική αυτή στη συνέχεια επεκτάθηκε για να δώσει αποτελέσματα για διστρωματικά [48, 49] και πολυστρωματικά [50] σφαιροειδή.

Αν και η χρήση των σφαιροειδών συντεταγμένων αποτελεί την πιο φυσική επιλογή για την ανάλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων σε σφαιροειδείς διατάξεις, ο αριθμός των εργασιών που αναπτύσσουν λύσεις πλήρους κύματος για τον υπολογισμό της σκέδασης σε σφαιροειδείς συντεταγμένες και γεωμετρίες (βλ. παραπάνω) είναι σαφώς περιορισμένος σε σχέση με το πλήθος των μελετών που εξετάζουν γεωμετρίες σε άλλα συστήματα συντεταγμένων, όπως το σφαιρικό ή το κυκλικό κυλινδρικό. Αυτό οφείλεται στη μη ύπαρξη ορθογωνιότητας μεταξύ των σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων και στη σημαντική υπολογιστική εργασία που απαιτείται για τον αριθμητικό υπολογισμό των σφαιροειδών συναρτήσεων. Οι δύο αυτοί παράγοντες καθιστούν την επίλυση προβλημάτων σε σφαιροειδείς συντεταγμένες μια απαιτητική διαδικασία, σε όρους κατάστρωσης και προγραμματιστικής υλοποίησης.

Εναλλακτικά, ορισμένες ευρέως διαδεδομένες αριθμητικές τεχνικές, όπως η μέθοδος των ροπών [51], η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (finite-element method) [52], ή η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (finite-difference time-domain) [53], μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων σκέδασης από σφαιροειδή. Εκτός αυτών των γενικών μεθόδων, οι οποίες είναι διαθέσιμες σε διάφορα εμπορικά πακέτα λογισμικού και έχουν ένα πολύ πιο ευρύ πεδίο εφαρμογής, πολλοί ερευνητές έχουν αναπτύξει και εφαρμόσει έναν αριθμό εξειδικευμένων τεχνικών με αντικείμενο τον υπολογισμό της σκέδασης από σφαιροειδή ή άλλα τρισδιάστατα μη σφαιρικά σώματα. Έτσι, οι συγγραφείς της [54] παρουσίασαν μια μέθοδο που βασίζεται στη χωρική ολοκληρωτική εξίσωση και τον μετασχηματισμό της σε ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων, για τον υπολογισμό της σκέδασης από διηλεκτρικά σφαιροειδή και ελλειψοειδή. Μια άλλη τεχνική που έχει εφαρ-

μοστεί για τη μελέτη της ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης από σφαιροειδή, είναι η μέθοδος της εκτεταμένης συνοριακής συνθήκης (extended boundary condition method, EBCM), η οποία βασίζεται στην ανάπτυξη των πεδίων σε σειρές σφαιρικών διανυσματικών κυματικών συναρτήσεων και οδηγεί στον υπολογισμό της T-μήτρας (T-matrix) [55]. Η μέθοδος αυτή έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως και αποτελεί ένα ισχυρό αριθμητικό εργαλείο για τον υπολογισμό της σκέδασης από μη σφαιρικά σώματα. Μεταξύ άλλων, εφαρμογές της μεθόδου σε σφαιροειδείς γεωμετρίες έχουν παρουσιαστεί στις [56–58], ενώ βελτιώσεις και τροποποιήσεις έχουν προταθεί ώστε να ξεπεραστούν τα προβλήματα σύγκλισης που αντιμετωπίζει, όταν το σφαιροειδές γίνεται πολύ επίμηκες/πεπλατυσμένο ή το ηλεκτρικό του μέγεθος πολύ μεγάλο [59, 60]. Επιπλέον, έχουν αναπτυχθεί εναλλακτικές προσεγγίσεις—εκτός της EBCM—για την απόκτηση της T-μήτρας, όπως ο απευθείας υπολογισμός της σε σφαιροειδείς συντεταγμένες [61] ή μια διαδικασία αναδρομικού υπολογισμού που έχει ως αφετηρία τη χωρική ολοκληρωτική εξίσωση και μπορεί να συνδυαστεί με την EBCM [62]. Ακόμα μια δημοφιλής μέθοδος που έχει αναπτυχθεί για την ανάλυση της σκέδασης από τρισδιάστατα διηλεκτρικά σώματα—συμπεριλαμβανομένων και των σφαιροειδών—είναι η προσέγγιση διακριτών διπόλων (discrete-dipole approximation, DDA) [63, 64]. Η βασική αρχή της DDA συνίσταται στη διακριτοποίηση του σχεδαστή σε έναν πεπερασμένο αριθμό στοιχειωδών διπόλων, τα οποία διεγείρονται από το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η DDA παρουσιάζει πολύ μεγάλη ευελιξία στη μοντελοποίηση τρισδιάστατων γεωμετριών, όμως η απόδοση της μειώνεται σημαντικά αν ο δείκτης διάθλασης του σχεδαστή δεν περιοριστεί σε σχετικά χαμηλές τιμές. Τέλος, αναφέρουμε και τη γενικευμένη τεχνική πολυπόλων (generalized multipole technique), της οποίας η βασική ιδέα είναι η χρήση πολλαπλών αναπτυγμάτων για την έκφραση των πεδίων στο εσωτερικό και το εξωτερικό του σχεδαστή, και η ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών σε έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων στην επιφάνεια του τελευταίου. Πρόκειται για μια μέθοδο με πολλές παραλλαγές [65], που—μεταξύ άλλων—μπορεί να εφαρμοστεί για τον υπολογισμό της σκέδασης από σφαιροειδή.

Για την περίπτωση σφαιροειδών των οποίων το σχήμα προσεγγίζει το σφαιρικό—δηλ., για μικρές τιμές εκκεντρότητας—, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ασυμπτωτική τεχνική, όπου το σφαιροειδές σύνορο του σχεδαστή θεωρείται ως διαταραχή της αντίστοιχης σφαίρας. Μια πρώτη εφαρμογή της μεθόδου για αγωγή σφαιροειδή παρουσιάστηκε στην [66], ενώ μια γενική παρουσίαση της για διηλεκτρικά σώματα δόθηκε στην [67]. Τα τελευταία χρόνια, η μέθοδος εφαρμόστηκε στις [68] και [69], για την εξαγωγή κλειστών σχέσεων για τις διατομές σκέδασης αγωγίμων σφαιροειδών, κάνοντας χρήση ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων των σφαιρικών και σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων, αντιστοίχως, και αποκτώντας εκφράσεις μεγαλύτερης ακρίβειας από την [66]. Ακολούθως, η μέθοδος επεκτάθηκε και σε διηλεκτρικά σφαιροειδή [42], με τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα να εφαρμόζονται στα σφαιρικά ιδιοδιανύσματα. Συγκρίσεις που πραγματοποιήθηκαν στις [42, 69], έδειξαν πως η ασυμπτωτική τεχνική είναι σαφώς πιο αποδοτική από τη μέθοδο των σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων σε όρους υπολογιστικού χρόνου, αφού δεν απαιτεί τον αριθμητικό υπολογισμό των σφαιροειδών συναρτήσεων, ενώ παρουσιάζει ικανοποιητική ακρίβεια στο κατάλληλο εύρος μικρών τιμών της εκκεντρότητας.

Πρέπει να επισημανθεί πως όλες οι παραπάνω μελέτες και μέθοδοι εστιάζουν σε αγωγή ή ισοτροπικά διηλεκτρικά σφαιροειδή. Ωστόσο, πολλά φυσικά υλικά, καθώς και ορισμένα νέα

τεχνητά μεταϋλικά (metamaterials), δεν χαρακτηρίζονται από ιστροπικές ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες αλλά παρουσιάζουν ανισοτροπία [70]. Σε αντίθεση με τα ιστροπικά μέσα, στα ανισοτροπικά μέσα οι ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες είναι συναρτήσεις της κατευθύνσεως. Αυτό σημαίνει πως η επιτρεπτότητα ή/και η μαγνητική διαπερατότητα δεν είναι βαθμωτά μεγέθη, αλλά έχουν τη μορφή τανυστή, με αποτέλεσμα τα ανισοτροπικά μέσα να παρουσιάζουν μια ποικιλία φαινομένων, τα οποία δεν συναντώνται στα ιστροπικά μέσα.

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων ετών, έχει σημειωθεί μια αύξηση του ενδιαφέροντος για τα ανισοτροπικά υλικά, τα οποία βρίσκουν όλο και περισσότερες τεχνολογικές εφαρμογές από τις μικροκυματικές έως τις οπτικές συχνότητες [71–78]. Για παράδειγμα, τα υλικά που έχουν προταθεί για τη σύνθεση μανδύων ηλεκτρομαγνητικής απόκρυψης (cloaking) έχουν ανισοτροπικές ιδιότητες [72, 73], ενώ η χρήση ανισοτροπικών ημιαγωγών με υψηλούς δείκτες διάθλασης μπορεί να ανοίξει τον δρόμο για νέες ναοφωτονικές εφαρμογές [78]. Σε αυτό το πλαίσιο, η σφαιροειδής γεωμετρία μπορεί να προσφέρει το πλεονέκτημα της επίτευξης συγκεκριμένων χαρακτηριστικών στην απόκριση σκέδασης, μέσω του ελέγχου δύο βαθμών ελευθερίας: της εκκεντρότητας και της ανισοτροπίας. Αυτό με τη σειρά του, καθιστά αναγκαία την ανάπτυξη αξιόπιστων και αποδοτικών υπολογιστικών μεθόδων για τη μελέτη της σκέδασης από σφαιροειδή με ανισοτροπικές ιδιότητες.

Αν και στη βιβλιογραφία συναντάται ένας μεγάλος αριθμός εργασιών για την αλληλεπίδραση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με ανισοτροπικές σφαίρες [79–88], η μελέτη ανισοτροπικών σφαιροειδών είναι σαφώς πιο περιορισμένη. Συγκεκριμένα, μια μέθοδος χωρικής ολοκληρωτικής εξίσωσης για την περίπτωση ενός ανισοτροπικού διηλεκτρικού ελλειψοειδούς παρουσιάστηκε στην [89], με αριθμητικά αποτελέσματα να δίνονται μόνο για σφαιρικές γεωμετρίες, ενώ ένας σφαιροειδής σχεδαστής με σφαιροειδή μονοαξονική ανισοτροπία εξετάστηκε στην [90], με την ανάλυση να περιορίζεται στην ηλεκτροστατική περίπτωση. Ως εκ τούτου, η μελέτη ανισοτροπικών σφαιροειδών μπορεί να πραγματοποιηθεί με χρήση γενικών υπολογιστικών μεθόδων, που δεν εξαρτώνται από το σχήμα του σχεδαστή. Μια διαθέσιμη επιλογή είναι η περιγραφή της σκέδασης μέσω της χωρικής ολοκληρωτικής εξίσωσης, και η διακριτοποίηση της τελευταίας με τη μέθοδο των ροπών [91, 92] ή κάποια αντίστοιχη αριθμητική τεχνική [93]. Επιπλέον, η εφαρμογή της EBCM έχει επεκταθεί σε μια σειρά από εργασίες για τον υπολογισμό της T-μήτρας μη σφαιρικών σωμάτων—μεταξύ αυτών και σφαιροειδή—με διάφορα είδη ανισοτροπίας [94–97]. Ωστόσο, δεν έχουν αναφερθεί αντίστοιχες επεκτάσεις της μεθόδου για να αντιμετωπιστούν ανισοτροπικά σφαιροειδή με μεγάλες τιμές λόγου αξόνων. Ακόμα, ορισμένες υλοποιήσεις της DDA, όπως η ADDA [64], υποστηρίζουν τη μοντελοποίηση ανισοτροπικών σωμάτων, με τον περιορισμό σε χαμηλούς δείκτες διάθλασης να εξακολουθεί να ισχύει. Στην ίδια αρχή με την DDA βασίζεται και η προσέγγιση συζευγμένων διπόλων, που παρουσιάσαν οι συγγραφείς στην [98] για τρισδιάστατους σχεδαστές με μονοαξονική ανισοτροπία. Τέλος, επεκτάσεις μεθόδων που ανήκουν στην οικογένεια των γενικευμένων τεχνικών πολυπόλων έχουν προταθεί για τον υπολογισμό της σκέδασης από ανισοτροπικά σώματα, οι οποίες χρησιμοποιούν κατάλληλα αναπτύγματα των πεδίων στον ανισοτροπικό χώρο [99] ή τη δυαδική συνάρτηση Green για μονοαξονικά μέσα [100].

Από την παραπάνω συζήτηση, διαπιστώνουμε μια έλλειψη υπολογιστικών μεθόδων προσαρμοσμένων στη σφαιροειδή γεωμετρία και ικανών να μοντελοποιήσουν ανισοτροπικές ιδι-

ότητες. Αυτό το κενό έρχεται να καλύψει η παρούσα διατριβή, αναπτύσσοντας δύο μεθόδους για τη σκέδαση από ανισοτροπικά σφαιροειδή: η πρώτη βασίζεται στη μεθοδολογία των σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων, ενώ η δεύτερη στην τεχνική διαταραχής του σφαιρικού συνόρου για σφαιροειδή μικρής εκκεντρότητας. Και οι δύο μέθοδοι παρουσιάζουν ορισμένα πλεονεκτήματα σε σχέση με άλλες χρησιμοποιούμενες τεχνικές. Συγκεκριμένα, η εφαρμογή τους δεν απαιτεί την υψηλή διακριτοποίηση και τον συνεπαγόμενο αυξημένο υπολογιστικό χρόνο που χρειάζονται η DDA και η μέθοδος της χωρικής ολοκληρωτικής εξίσωσης, προκειμένου να δώσουν αποτελέσματα με ικανοποιητική ακρίβεια. Επιπλέον, η μέθοδος των σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων μπορεί να καλύψει υψηλότερες τιμές του λόγου αξόνων του σφαιροειδούς, προτού συναντήσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζει η μέθοδος της εκτεταμένης συνοριακής συνθήκης. Από την άλλη, η μέθοδος της διαταραχής οδηγεί σε απλές αλγεβρικές εκφράσεις για τις διατομές σκέδασης, που επιτρέπουν την ταχεία απόκτηση αριθμητικών αποτελεσμάτων με ικανοποιητική ακρίβεια, όταν περιοριστούμε στο κατάλληλο εύρος μικρών τιμών της εκκεντρότητας. Οι δύο προτεινόμενες μέθοδοι μπορούν να αποτελέσουν αξιόπιστα υπολογιστικά εργαλεία για τη μελέτη σύγχρονων ηλεκτρομαγνητικών εφαρμογών, ενώ τα αποτελέσματά τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αναφορά για την επικύρωση μελλοντικών αριθμητικών τεχνικών επίλυσης προβλημάτων ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης.

Σχετικές δημοσιεύσεις

Από την έρευνα που πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο της εκπόνησης της παρούσας διατριβής έχουν προκύψει οι ακόλουθες δημοσιεύσεις σε έγκριτα διεθνή επιστημονικά περιοδικά με κριτές:

1. G. D. Kolezas, G. P. Zouros, and J. A. Roumeliotis, “Efficient and accurate calculation of the cutoff wavenumbers of coaxial elliptical-circular and circular-elliptical metallic waveguides,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 62, pp. 2242–2250, 2014.
2. G. D. Kolezas, G. P. Zouros, and K. L. Tsakmakidis, “Engineering subwavelength nanoantennas in the visible by employing resonant anisotropic nanospheroids,” *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, vol. 25, p. 4700912, May/June 2019.
3. G. D. Kolezas, G. P. Zouros, G. K. Pagiatakis, and J. A. Roumeliotis, “All-anisotropic spheroidal photonic antennas: theory and modeling,” *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, vol. 27, p. 8300312, January/February 2021.

Επίσης, έχουν προκύψει οι ακόλουθες δημοσιεύσεις σε διεθνή επιστημονικά συνέδρια με κριτές:

1. G. D. Kolezas, G. P. Zouros, and J. A. Roumeliotis, “Analytical calculation for cutoff wavenumbers of metallic waveguides with elliptical-circular and circular-elliptical cross section,” in *European Microwave Conference EuMC 2014*, (Rome), pp. 1170–1173, 6–9 October 2014.

2. G. D. Kolezas, G. P. Zouros, and J. A. Roumeliotis, “Asymptotic solution to the scattering by anisotropic spheroids,” in IEEE International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET 2018, (Kyiv), pp. 136–139, 2–5 July 2018.
3. G. D. Kolezas, G. P. Zouros, G. K. Pagiatakis, and J. A. Roumeliotis, “A technique for nanoscale modeling of uniaxial spheroids,” in International Conference on Microwaves, Communications, Antennas and Electronic Systems COMCAS 2019, (Tel Aviv), pp. 1–4, 4–6 November 2019.

Κεφάλαιο 1

Συναρτήσεις Mathieu- Σφαιροειδείς συναρτήσεις

1.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται μια επισκόπηση των συναρτήσεων Mathieu και των σφαιροειδών συναρτήσεων, οι οποίες προκύπτουν κατά την επίλυση της εξίσωσης Helmholtz στο ελλειπτικό και στα δύο σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων, αντιστοίχως. Η παρουσίαση περιορίζεται στα απολύτως απαραίτητα για την κατανόηση του περιεχομένου των υπόλοιπων κεφαλαίων της διατριβής. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις συναρτήσεις Mathieu, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [101], ενώ για τις σφαιροειδείς συναρτήσεις στο [102].

1.2 Συναρτήσεις Mathieu

1.2.1 Ελλειπτικές συντεταγμένες

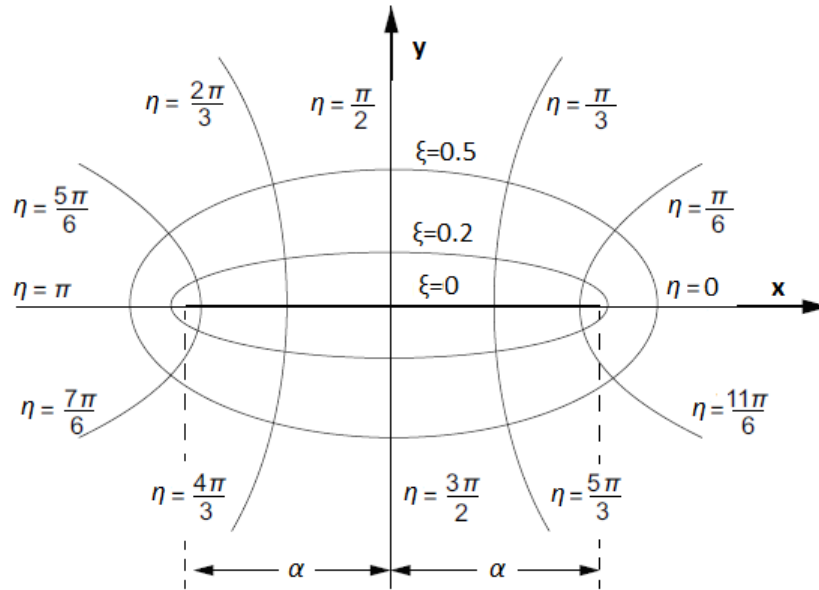
Το ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων (ξ, η, z) είναι ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, το οποίο συνδέεται με το καρτεσιανό σύστημα (x, y, z) μέσω του μετασχηματισμού

$$x = \alpha \cosh \xi \cos \eta, \quad y = \alpha \sinh \xi \sin \eta, \quad z = z. \quad (1.1)$$

Στην (1.1), $0 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \eta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$, ενώ 2α είναι η εστιακή απόσταση (βλ. και σχ. 1.1). Σε αυτό το σύστημα η επιφάνεια με $\xi = \xi_0$ αποτελεί επιφάνεια κυλίνδρου ελλειπτικής διατομής, με εστιακή απόσταση ίση με 2α . Ο μεγάλος και ο μικρός ημιάξονας της διατομής του κυλίνδρου έχουν μήκος $c_0 = \alpha \cosh \xi_0$ και $b_0 = \alpha \sinh \xi_0$, αντιστοίχως.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το μέγεθος της εκκεντρότητας h , η οποία ορίζεται ως ο λόγος της εστιακής απόστασης προς το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης:

$$h \equiv \frac{2a}{2c_0} = \frac{1}{\cosh \xi_0}. \quad (1.2)$$



Σχήμα 1.1: Ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων.

Η εκκεντρότητα h παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$. Για $h = 0$ η ελλειπτική διατομή μετατρέπεται σε κυκλική, ενώ για $h = 1$ η ελλειπτική διατομή εκφυλίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα με $-a \leq x \leq a$ και $y = 0$. Ενδιάμεσες τιμές του h , για c_0 σταθερό, αντιστοιχούν σε ελλειπτικές διατομές λιγότερο ή περισσότερο πεπλατυσμένες.

1.2.2 Συναρτήσεις Mathieu

Οι συναρτήσεις Mathieu συνδέονται με την επίλυση της δισδιάστατης βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz στο ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων. Συγκεκριμένα, με εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών στην εξίσωση Helmholtz προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{d^2 S}{d\eta^2} + \left[b - \frac{(h')^2}{2} \cos(2\eta) \right] S = 0, \quad (1.3)$$

και

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} - \left[b - \frac{(h')^2}{2} \cosh(2\xi) \right] R = 0, \quad (1.4)$$

όπου $h' = k\alpha$ με k κατάλληλο κυματαριθμό, και b σταθερά διαχωρισμού.

Οι εξισώσεις (1.3) και (1.4) ονομάζονται εξισώσεις Mathieu. Για προβλήματα κυματοδήγησης, όπως αυτά που θα εξεταστούν στην παρούσα διατριβή, οι λύσεις της (1.3) πρέπει να είναι περιοδικές συναρτήσεις της γωνιακής μεταβλητής η . Αυτό συμβαίνει αν η παράμετρος b παίρνει διακριτές τιμές b_m^e και b_m^o —όπου m ακέραιος αριθμός—που αντιστοιχούν σε άρτιες (even) και περιττές (odd) λύσεις της (1.3). Τότε, οι λύσεις της τελευταίας είναι οι άρτιες και οι περιττές γωνιακές συναρτήσεις Mathieu, που συμβολίζονται ως $Se_m(h', \cos \eta)$ και $So_m(h', \cos \eta)$, αντιστοίχως. Οι λύσεις της (1.4) για τις χαρακτηριστικές τιμές b_m^e και b_m^o , είναι οι άρτιες και οι περιττές ακτινικές συναρτήσεις Mathieu, που συμβολίζονται ως

$Ze_m(h', \cosh \xi)$ και $Zo_m(h', \cosh \xi)$, αντιστοίχως. Ο δείκτης m στις γωνιακές και τις ακτινικές συναρτήσεις, παίρνει ακέραιες τιμές και αποτελεί την τάξη της συνάρτησης.

Οι γωνιακές συναρτήσεις Mathieu δίνονται από τις σχέσεις [103]:

$$Se_m(h', \cos \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^e(h', m) \cos(n\eta), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

και

$$So_m(h', \cos \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^o(h', m) \sin(n\eta), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

ενώ οι ακτινικές συναρτήσεις Mathieu από τις [103]:

$$Ze_m(h', \cosh \xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n-m}{2}} B_n^e(h', m) Z_n(h' \cosh \xi), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

και

$$Zo_m(h', \cosh \xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \xi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-m}{2}} n B_n^o(h', m) Z_n(h' \cosh \xi), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.8)$$

όπου $B_n^e(h', m)$ και $B_n^o(h', m)$ είναι συντελεστές ανάπτυξης και Z_n είναι οι συναρτήσεις Bessel ίδιου είδους με τις Ze_m ή Zo_m . Στις εκφράσεις (1.5)–(1.8), τα m και n είναι και τα δύο άρτια ή περιττά.

Τέλος, οι γωνιακές συναρτήσεις Mathieu ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις ορθογωνιότητας [103]:

$$\int_0^{2\pi} Se_m(h', \cos \eta) Se_n(h', \cos \eta) d\eta = M_m^e(h') \delta_{mn}, \quad (1.9)$$

και

$$\int_0^{2\pi} So_m(h', \cos \eta) So_n(h', \cos \eta) d\eta = M_m^o(h') \delta_{mn}, \quad (1.10)$$

ενώ

$$\int_0^{2\pi} Se_m(h', \cos \eta) So_n(h', \cos \eta) d\eta = 0, \quad \forall m, n. \quad (1.11)$$

Στις (1.9) και (1.10), $M_m^e(h')$ και $M_m^o(h')$ είναι συντελεστές κανονικοποίησης [103], ενώ δ_{mn} είναι το δέλτα του Kronecker, με $\delta_{mn} = 1$ για $m = n$, και $\delta_{mn} = 0$ για $m \neq n$.

1.2.3 Εκφράσεις για μικρές εκκεντρότητες

Για μικρές τιμές της εκκεντρότητας h , οι συντελεστές $B_n^e(h', m)$ και $B_n^o(h', m)$ μπορούν να αναπτυχθούν σε δυνάμεις του h . Γράφοντας την παράμετρο h' ως

$$h' = \frac{k\alpha c_0}{c_0} = xh, \quad (1.12)$$

όπου $x = kc_0$, συμπεραίνουμε πως μικρές τιμές του h σημαίνουν και μικρές τιμές του h' , οπότε δεν θα γίνεται διάκριση μεταξύ των δύο στην ανάλυση που ακολουθεί.

Για μικρές τιμές του h και θέτοντας $n = m \pm 2q$, οι συντελεστές B_n^e και B_n^o έχουν τα αναπτύγματα [104]:

$$\begin{aligned} B_{m\pm 2q}^e(h', m) &= [\alpha_{2q,0}^{e\pm}(h')^{2q} + \alpha_{2q,2}^{e\pm}(h')^{2q+2} + \alpha_{2q,4}^{e\pm}(h')^{2q+4} + \dots] B_m^e(h', m) \\ &= [\alpha_{2q,0}^{e\pm} x^{2q} h^{2q} + \alpha_{2q,2}^{e\pm} x^{2q+2} h^{2q+2} + \alpha_{2q,4}^{e\pm} x^{2q+4} h^{2q+4} + \dots] B_m^e(h', m), \end{aligned} \quad (1.13)$$

και

$$\begin{aligned} B_{m\pm 2q}^o(h', m) &= [\alpha_{2q,0}^{o\pm}(h')^{2q} + \alpha_{2q,2}^{o\pm}(h')^{2q+2} + \alpha_{2q,4}^{o\pm}(h')^{2q+4} + \dots] B_m^o(h', m) \\ &= [\alpha_{2q,0}^{o\pm} x^{2q} h^{2q} + \alpha_{2q,2}^{o\pm} x^{2q+2} h^{2q+2} + \alpha_{2q,4}^{o\pm} x^{2q+4} h^{2q+4} + \dots] B_m^o(h', m), \end{aligned} \quad (1.14)$$

όπου $q = 0, 1, 2, \dots$, $m \geq 0(+)$ και $m \geq 2q(-)$ για την περίπτωση των άρτιων συντελεστών, ενώ $m \geq 1(+)$ και $m \geq 2q + 1(-)$ για την περίπτωση των περιττών συντελεστών. Για τους συντελεστές ανάπτυξης $\alpha_{2q,2k}^{e-}$ και $\alpha_{2q,2k}^{o-}$, με $q > 0$ και $k = 0, 1, 2, \dots$, ισχύει $\alpha_{2q,2k}^{e-} = 0$ αν $m < 2q$, και $\alpha_{2q,2k}^{o-} = 0$ αν $m < 2q + 1$. Επιπλέον, $\alpha_{0,0}^{e\pm} = \alpha_{0,0}^{o\pm} = 1$, ενώ $\alpha_{0,2k}^{e\pm} = \alpha_{0,2k}^{o\pm} = 0$ για $k \geq 1$. Τέλος, οι όροι $B_m^e(h', m)$ και $B_m^o(h', m)$ στις (1.13) και (1.14), αντιστοίχως, για μικρές τιμές του h , αναπτύσσονται και αυτοί ως εξής [104]:

$$B_m^e(h', m) = 1 + g_2^e(h')^2 + g_4^e(h')^4 + g_6^e(h')^6 + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k}^e x^{2k} h^{2k}, \quad (1.15)$$

$$B_m^o(h', m) = \frac{1}{m} + g_2^o(h')^2 + g_4^o(h')^4 + g_6^o(h')^6 + \dots = \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k}^o x^{2k} h^{2k}. \quad (1.16)$$

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας θα χρησιμοποιήσουμε αναπτύγματα τέταρτης τάξης—δηλ., $O(h^4)$ —για τα διάφορα μεγέθη. Λαμβάνοντας υπόψη αυτή την παρατήρηση, από επισκόπηση των εκφράσεων (1.13)–(1.16), προκύπτει πως οι συντελεστές που περιέχουν όρους μέχρι τέταρτης τάξης είναι οι $B_{m\pm 2q}^e(h', m)$ και $B_{m\pm 2q}^o(h', m)$, με $q = 0, 1, 2$. Αυτοί είναι οι συντελεστές που θα χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση που θα παρουσιαστεί στο κεφ. 2. Πιο συγκεκριμένα, οι άρτιοι συντελεστές έχουν τα αναπτύγματα

$$B_m^e(h', m) = 1 + g_2^e x^2 h^2 + g_4^e x^4 h^4 + O(h^6), \quad m \geq 0, \quad (1.17)$$

$$B_{m+2}^e(h', m) = \alpha_{2,0}^{e+} x^2 h^2 + (\alpha_{2,2}^{e+} + \alpha_{2,0}^{e+} g_2^e) x^4 h^4 + O(h^6), \quad m \geq 0, \quad (1.18)$$

$$B_{m-2}^e(h', m) = \alpha_{2,0}^{e-} x^2 h^2 + (\alpha_{2,2}^{e-} + \alpha_{2,0}^{e-} g_2^e) x^4 h^4 + O(h^6), \quad m \geq 2, \quad (1.19)$$

$$B_{m+4}^e(h', m) = \alpha_{4,0}^{e+} x^4 h^4 + O(h^6), \quad m \geq 0, \quad (1.20)$$

$$B_{m-4}^e(h', m) = \alpha_{4,0}^{e-} x^4 h^4 + O(h^6), \quad m \geq 4. \quad (1.21)$$

Ομοίως, τα αναπτύγματα των περιττών συντελεστών έχουν τη μορφή

$$B_m^{\circ}(h', m) = \frac{1}{m} + g_2^{\circ} x^2 h^2 + g_4^{\circ} x^4 h^4 + O(h^6), \quad m \geq 1, \quad (1.22)$$

$$B_{m+2}^{\circ}(h', m) = \frac{1}{m} \alpha_{2,0}^{\circ+} x^2 h^2 + \left(\frac{1}{m} \alpha_{2,2}^{\circ+} + \alpha_{2,0}^{\circ+} g_2^{\circ} \right) x^4 h^4 + O(h^6), \quad m \geq 1, \quad (1.23)$$

$$B_{m-2}^{\circ}(h', m) = \frac{1}{m} \alpha_{2,0}^{\circ-} x^2 h^2 + \left(\frac{1}{m} \alpha_{2,2}^{\circ-} + \alpha_{2,0}^{\circ-} g_2^{\circ} \right) x^4 h^4 + O(h^6), \quad m \geq 3, \quad (1.24)$$

$$B_{m+4}^{\circ}(h', m) = \frac{1}{m} \alpha_{4,0}^{\circ+} x^4 h^4 + O(h^6), \quad m \geq 1, \quad (1.25)$$

$$B_{m-4}^{\circ}(h', m) = \frac{1}{m} \alpha_{4,0}^{\circ-} x^4 h^4 + O(h^6), \quad m \geq 5. \quad (1.26)$$

Οι υπόλοιποι των συντελεστών $B_{m\pm 2q}^{\circ}(h', m)$ και $B_{m\pm 2q}^{\circ}(h', m)$ —για $q > 2$ —είναι τάξης h^6 ή μεγαλύτερης, και δεν θα ληφθούν υπόψη στην ανάλυση του κεφ. 2.

1.2.4 Υπολογισμός συντελεστών

Στα αναπτύγματα (1.17)–(1.26) της προηγούμενης υποενότητας, εμφανίζονται οι συντελεστές $\alpha_{2,0}^{\circ\pm}$, $\alpha_{2,2}^{\circ\pm}$, $\alpha_{4,0}^{\circ\pm}$, g_2° , και g_4° , καθώς και οι αντίστοιχοι περιττοί. Οι συντελεστές αυτοί εξαρτώνται από το m , και ο πλήρης προσδιορισμός τους είναι απαραίτητος για τον υπολογισμό των διαφόρων αναπτυγμάτων. Στη συνέχεια, παρατίθενται οι εκφράσεις για τους συντελεστές αυτούς, όπως υπολογίζονται αναλυτικά στην [104]. Για τους άρτιους συντελεστές έχουμε

$$\alpha_{2,0}^{\circ+} = -\frac{1}{8\epsilon_m(m+1)}, \quad m \geq 0, \quad (1.27)$$

$$\alpha_{2,0}^{\circ-} = \begin{cases} \frac{1}{16(m-1)}, & m \geq 2, \\ 0, & m = 0, 1, \end{cases} \quad (1.28)$$

$$\alpha_{2,2}^{\circ+} = \begin{cases} -\frac{1}{1024}, & m = 1, \\ 0, & m \neq 1, \end{cases} \quad (1.29)$$

$$\alpha_{2,2}^{\circ-} = \begin{cases} \frac{1}{1024}, & m = 3, \\ 0, & m \neq 3, \end{cases} \quad (1.30)$$

$$\alpha_{4,0}^{\circ+} = \frac{1}{256\epsilon_m(m+1)(m+2)}, \quad m \geq 0, \quad (1.31)$$

$$\alpha_{4,0}^{\circ-} = \begin{cases} \frac{1}{512(m-2)(m-1)}, & m \geq 4, \\ 0, & m = 0, 1, 2, 3. \end{cases} \quad (1.32)$$

Αντιστοίχως, για τους περιττούς συντελεστές έχουμε

$$\alpha_{2,0}^{\circ+} = -\frac{1}{16(m+1)}, \quad m \geq 1, \quad (1.33)$$

$$\alpha_{2,0}^{\circ-} = \begin{cases} \frac{1}{16(m-1)}, & m \geq 3, \\ 0, & m = 1, 2, \end{cases} \quad (1.34)$$

$$\alpha_{2,2}^{\circ+} = \begin{cases} \frac{1}{1024}, & m = 1, \\ 0, & m \neq 1, \end{cases} \quad (1.35)$$

$$\alpha_{2,2}^{o-} = \begin{cases} -\frac{1}{1024}, & m = 3, \\ 0, & m \neq 3, \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\alpha_{4,0}^{o+} = \frac{1}{512(m+1)(m+2)}, \quad m \geq 1, \quad (1.37)$$

$$\alpha_{4,0}^{o-} = \begin{cases} \frac{1}{512(m-2)(m-1)}, & m \geq 5, \\ 0, & m = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \quad (1.38)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, ϵ_m είναι ο συντελεστής Neumann, με $\epsilon_0 = 1$ και $\epsilon_m = 2$ για $m \geq 1$. Επιπλέον, έχουμε

$$g_2^e = -\alpha_{2,0}^{e+} - \alpha_{2,0}^{e-}, \quad (1.39)$$

$$g_4^e = (\alpha_{2,0}^{e+} + \alpha_{2,0}^{e-})^2 - \alpha_{2,2}^{e+} - \alpha_{2,2}^{e-} - \alpha_{4,0}^{e+} - \alpha_{4,0}^{e-}, \quad (1.40)$$

και

$$g_2^o = -\frac{1}{m^2} [(m+2)\alpha_{2,0}^{o+} + (m-2)\alpha_{2,0}^{o-}], \quad (1.41)$$

$$g_4^o = \frac{1}{m^3} [(m+2)\alpha_{2,0}^{o+} + (m-2)\alpha_{2,0}^{o-}]^2 - \frac{1}{m^2} [(m+2)\alpha_{2,2}^{o+} + (m-2)\alpha_{2,2}^{o-} + (m+4)\alpha_{4,0}^{o+} + (m-4)\alpha_{4,0}^{o-}]. \quad (1.42)$$

Κλείνουμε με μια παρατήρηση πάνω στον συμβολισμό που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια: όπως γίνεται φανερό παραπάνω, οι συντελεστές των σχέσεων (1.27)–(1.42) εξαρτώνται από την τιμή του m . Για παράδειγμα, όπου παραπάνω γράφουμε $\alpha_{2,0}^{e+}$ εννοούμε $\alpha_{2,0}^{e+}(m)$. Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει στο κεφ. 2, η παρένθεση και το όρισμα της θα παραλείπονται για λόγους απλούστευσης συμβολισμού. Αντιθέτως, όπου χρειάζεται, θα υιοθετηθεί ο συμβολισμός $\alpha_{2,0}^{e+,m}$ αντί του $\alpha_{2,0}^{e+}(m)$ για να γίνει ρητή αναφορά στην τιμή που παίρνει το m στη σχέση υπολογισμού του συντελεστή. Για παράδειγμα, γράφοντας $\alpha_{2,0}^{e+,m+2}$ θα εννοούμε πως ο $\alpha_{2,0}^{e+}$ υπολογίζεται από την (1.27) με την τιμή $m+2$, αντί της τιμής m . Οι ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν και για τους υπόλοιπους συντελεστές των (1.28)–(1.42).

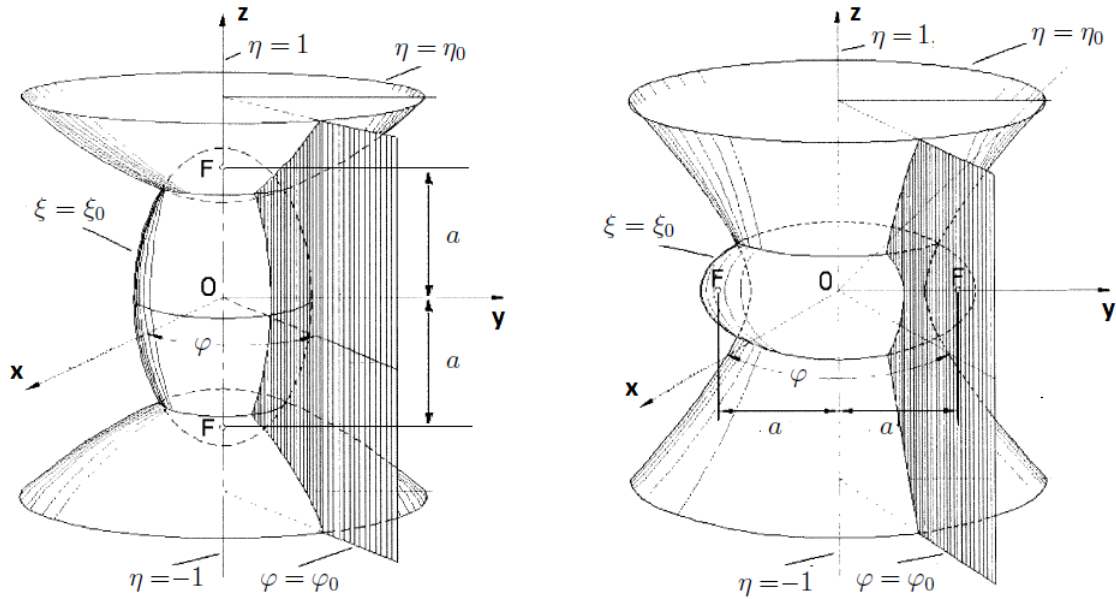
1.3 Σφαιροειδείς συναρτήσεις

1.3.1 Σφαιροειδείς συντεταγμένες

Τα δύο σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων είναι ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων, τα οποία δημιουργούνται από την περιστροφή του διδιάστατου ελλειπτικού συστήματος συντεταγμένων περί έναν από τους δύο άξονες συμμετρίας των ελλείψεων. Πιο συγκεκριμένα, το επίμηκες (prolate) σφαιροειδές σύστημα δημιουργείται από την περιστροφή περί τον μεγάλο άξονα, ενώ το πεπλατυσμένο (oblate) σφαιροειδές σύστημα από την περιστροφή περί τον μικρό άξονα. Σε κάθε περίπτωση, ως άξονας περιστροφής θεωρείται ο άξονας z , ενώ η εστιακή απόσταση είναι ίση με $2a$ (βλ. και σχ. 1.2).

Οι επιμήκεις και πεπλατυσμένες σφαιροειδείς συντεταγμένες (η, ξ, φ) συνδέονται με τις καρτεσιανές συντεταγμένες μέσω του μετασχηματισμού

$$x = a[(1 - \eta^2)(\xi^2 \mp 1)]^{1/2} \cos \varphi, \quad y = a[(1 - \eta^2)(\xi^2 \mp 1)]^{1/2} \sin \varphi, \quad z = a\eta\xi, \quad (1.43)$$



Σχήμα 1.2: Σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων: επίμηκες (αριστερά) και πεπλατυσμένο (δεξιά) [32].

με $-1 \leq \eta \leq 1$, $1 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ για το επίμηκες σύστημα, και $-1 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ για το πεπλατυσμένο. Στα ζεύγη προσήμων στην (1.43), το άνω πρόσημο αντιστοιχεί στις επιμήχεις, ενώ το κάτω πρόσημο στις πεπλατυσμένες σφαιροειδείς συντεταγμένες.

Στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα, η επιφάνεια $\xi = \xi_0 > 1$ αποτελεί επιφάνεια σφαιροειδούς εκ περιστροφής, με μεγάλο και μικρό ημιάξονα μήκους $c_0 = a\xi_0$ και $b_0 = a(\xi_0^2 - 1)^{1/2}$, αντιστοίχως. Για $\xi = 1$, η σφαιροειδής επιφάνεια εκφυλίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα $-a \leq z \leq a$, επί του άξονα z . Κατ' ανάλογο τρόπο, στο πεπλατυσμένο σφαιροειδές σύστημα, η επιφάνεια $\xi = \xi_0 > 0$ αποτελεί επιφάνεια σφαιροειδούς εκ περιστροφής, με μεγάλο και μικρό ημιάξονα μήκους $b_0 = a(\xi_0^2 + 1)^{1/2}$ και $c_0 = a\xi_0$, αντιστοίχως. Για $\xi = 0$, η σφαιροειδής επιφάνεια εκφυλίζεται σε δίσκο ακτίνας $R = a$, επί του επιπέδου xy , με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Στο όριο που η εστιακή απόσταση $2a$ τείνει στο μηδέν, και τα δύο σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων απλοποιούνται στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Επιπλέον, για πεπερασμένη εστιακή απόσταση $2a$, η επιμήκης/πεπλατυσμένη σφαιροειδής επιφάνεια γίνεται σφαιρική καθώς το ξ τείνει στο άπειρο, και ισχύει

$$a\xi \rightarrow r, \quad \eta \rightarrow \cos\theta, \quad \text{για } \xi \rightarrow \infty. \quad (1.44)$$

1.3.2 Σφαιροειδείς συναρτήσεις

Οι σφαιροειδείς συναρτήσεις συνδέονται με την επίλυση της τρισδιάστατης βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz στα δύο σφαιροειδή συστήματα συντεταγμένων. Συγκεκριμένα, θεωρώντας το επίμηκες σφαιροειδές σύστημα και εφαρμόζοντας τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλη-

τών στην εξίσωση Helmholtz, αποκτούμε τις διαφορικές εξισώσεις [102]:

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dS}{d\eta} \right] + \left[\lambda - c^2 \eta^2 - \frac{\mu^2}{1 - \eta^2} \right] S = 0, \quad (1.45)$$

και

$$\frac{d}{d\xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{dR}{d\xi} \right] - \left[\lambda - c^2 \xi^2 + \frac{\mu^2}{\xi^2 - 1} \right] R = 0, \quad (1.46)$$

όπου $c = k\alpha$ με k τον κυματαριθμό, και μ, λ σταθερές διαχωρισμού.

Για τα προβλήματα σκέδασης που θα εξεταστούν στην παρούσα διατριβή, μας ενδιαφέρουν μόνο οι λύσεις των (1.45) και (1.46) που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να σχηματίσουν μια λύση της εξίσωσης Helmholtz που θα ικανοποιεί τις φυσικές απαιτήσεις του προβλήματος. Αυτό σημαίνει πως $\mu = m$ και $\lambda = \lambda_{mn}$, όπου m και n ακέραιοι αριθμοί. Τότε, οι λύσεις της (1.45) είναι οι επιμήχεις σφαιροειδείς γωνιακές συναρτήσεις, τάξης m και βαθμού n , που συμβολίζονται ως $S_{mn}(c, \eta)$. Θεωρούμε μόνο τις συναρτήσεις πρώτου είδους, οι οποίες είναι πεπερασμένες σε όλο το εύρος τιμών $-1 \leq \eta \leq 1$ της γωνιακής συντεταγμένης η . Η σταθερά λ_{mn} είναι συνάρτηση της παραμέτρου c και οι διακριτές τιμές $\lambda_{mn}(c)$ για τις οποίες η (1.45) έχει λύσεις πεπερασμένες στο $\eta = \pm 1$ είναι οι ιδιοτιμές της εξίσωσης. Από την αντικατάσταση $c \rightarrow -jc$ στην (1.45), προκύπτουν οι αντίστοιχες πεπλατυσμένες σφαιροειδείς ιδιοτιμές $\lambda_{mn}(-jc)$ και γωνιακές συναρτήσεις πρώτου είδους $S_{mn}(-jc, \eta)$. Για τις ίδιες τιμές των m και λ_{mn} με την (1.45), οι λύσεις της (1.46) είναι οι επιμήχεις σφαιροειδείς ακτινικές συναρτήσεις του i -οστού είδους ($i = 1, 2, 3, 4$), που συμβολίζονται ως $R_{mn}^{(i)}(c, \xi)$. Οι αντικατάστασεις $\xi \rightarrow j\xi$ και $c \rightarrow -jc$ στην (1.46), μας δίνουν τις αντίστοιχες πεπλατυσμένες σφαιροειδείς ακτινικές συναρτήσεις $R_{mn}^{(i)}(-jc, j\xi)$.

Οι σφαιροειδείς γωνιακές συναρτήσεις δίνονται με τη μορφή των άπειρων αθροισμάτων

$$S_{mn}(c, \eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(c) P_{m+r}^m(\eta), \quad (1.47)$$

και

$$S_{mn}(-jc, \eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(-jc) P_{m+r}^m(\eta), \quad (1.48)$$

όπου $P_n^m(\eta)$ είναι οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους, τάξης m και βαθμού n , ενώ $d_r^{mn}(c)$ και $d_r^{mn}(-jc)$ είναι κατάλληλοι συντελεστές ανάπτυξης. Εδώ και στη συνέχεια, ο τόνος στο σύμβολο της άθροισης υποδηλώνει πως $r = 0, 2, 4, \dots$, όταν η διαφορά $n - |m|$ είναι άρτια, ενώ $r = 1, 3, 5, \dots$, όταν η διαφορά $n - |m|$ είναι περιττή. Λεπτομέρειες για τον αριθμητικό υπολογισμό των ιδιοτιμών λ_{mn} και των συντελεστών ανάπτυξης d_r^{mn} μπορούν να βρεθούν στα [32, 102]. Οι επιμήχεις σφαιροειδείς γωνιακές συναρτήσεις ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση ορθογωνιότητας [102]:

$$\int_{-1}^1 S_{mn}(c, \eta) S_{m'n'}(c, \eta) d\eta = N_{mn}(c) \delta_{nn'}, \quad (1.49)$$

με τον συντελεστή κανονικοποίησης $N_{mn}(c)$ να δίνεται από τη σχέση

$$N_{mn}(c) = 2 \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(r+2m)! [d_r^{mn}(c)]^2}{(2r+2m+1)r!}, \quad (1.50)$$

ενώ η αντικατάσταση $c \rightarrow -jc$ μας δίνει την αντίστοιχη σχέση ορθογωνιότητας για τις πεπλατυσμένες γωνιακές συναρτήσεις.

Όπως και στην περίπτωση των γωνιακών συναρτήσεων, οι επιμήκεις ακτινικές συναρτήσεις μπορούν να γραφούν υπό τη μορφή του άπειρου αθροίσματος

$$R_{mn}^{(i)}(c, \xi) = \frac{1}{\rho_{mn}} \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right)^{m/2} \sum_{r=0,1}^{\infty} j^{r+m-n} d_r^{mn}(c) \frac{(2m+r)!}{r!} z_{m+r}^{(i)}(c\xi), \quad (1.51)$$

όπου $z_n^{(i)}(c\xi)$ είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel i -οστού είδους και τάξης n , ενώ

$$\rho_{mn} = \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(c) \frac{(2m+r)!}{r!}. \quad (1.52)$$

Οι αντικατάστασεις $\xi \rightarrow j\xi$ και $c \rightarrow -jc$ στις (1.51) και (1.52), μας δίνουν τις αντίστοιχες εκφράσεις για τις πεπλατυσμένες ακτινικές συναρτήσεις $R_{mn}^{(i)}(-jc, j\xi)$.

1.3.3 Σφαιροειδείς διανυσματικές κυματικές συναρτήσεις

Οι σφαιροειδείς διανυσματικές κυματικές συναρτήσεις (ή σφαιροειδή ιδιοδιανύσματα) αποτελούν βασικό εργαλείο για το ανάπτυγμα των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων σε προβλήματα σκέδασης από σφαιροειδείς γεωμετρίες. Γενικά, οι διανυσματικές κυματικές συναρτήσεις αποτελούν λύσεις της ομογενούς διανυσματικής εξίσωσης Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (1.53)$$

όπου ο τελεστής ∇^2 ορίζεται ως $\nabla^2 \equiv \nabla \nabla \cdot - \nabla \times \nabla \times$.

Αν ψ είναι μια λύση της ομογενούς βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz, τότε τρεις ανεξάρτητες διανυσματικές λύσεις της (1.53) αποκτούνται ως εξής [102, 105]:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{k} \nabla \psi, \quad (1.54)$$

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\psi \mathbf{a}), \quad (1.55)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times (\psi \mathbf{a}), \quad (1.56)$$

όπου \mathbf{a} μπορεί να είναι ένα από τα σταθερά μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, ή το διάνυσμα θέσης \mathbf{r} . Από τις σχέσεις (1.54)–(1.56) προκύπτει πως η διανυσματική συνάρτηση \mathbf{L} είναι αστρόβιλη—δηλ., $\nabla \times \mathbf{L} = \mathbf{0}$ —, ενώ οι διανυσματικές συναρτήσεις \mathbf{M} και \mathbf{N} είναι σωληνοειδείς—δηλ., $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ και $\nabla \cdot \mathbf{N} = 0$. Επιπλέον, είναι εύκολο να δειχτεί πως $\nabla \times \mathbf{M} = k\mathbf{N}$ και $\nabla \times \mathbf{N} = k\mathbf{M}$.

Με βάση τα παραπάνω, για την κατασκευή των σφαιροειδών διανυσματικών κυματικών συναρτήσεων, χρησιμοποιούνται οι λύσεις της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz στις σφαιροειδείς συντεταγμένες. Για το επίμηκες σύστημα, αυτές έχουν τη μορφή

$$\psi_{mn}^{(i)}(c, \eta, \xi, \varphi) = S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(i)}(c, \xi) e^{jm\varphi}, \quad (1.57)$$

και επιλέγοντας ως διάνυσμα \mathbf{a} το διάνυσμα θέσης \mathbf{r} , τα σφαιροειδή ιδιοδιανύσματα του i -οστού είδους δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{L}_{mn}^{(i)} = \frac{1}{k} \nabla \psi_{mn}^{(i)}, \quad (1.58)$$

$$\mathbf{M}_{mn}^{r(i)} = \nabla \times (\psi_{mn}^{(i)} \mathbf{r}), \quad (1.59)$$

$$\mathbf{N}_{mn}^{r(i)} = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times (\psi_{mn}^{(i)} \mathbf{r}), \quad (1.60)$$

όπου ο άνω δείκτης r στον συμβολισμό των ιδιοδιανυσμάτων $\mathbf{M}_{mn}^{r(i)}$ και $\mathbf{N}_{mn}^{r(i)}$ υποδηλώνει πως το διάνυσμα \mathbf{r} έχει χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή τους. Ο ίδιος δείκτης απουσιάζει από τον συμβολισμό του $\mathbf{L}_{mn}^{(i)}$, αφού το διάνυσμα \mathbf{r} δεν εμπλέκεται στην κατασκευή του συγκεκριμένου ιδιοδιανύσματος. Από τις (1.58)–(1.60), προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις για τις συνιστώσες των μιγαδικών επίμηκων σφαιροειδών διανυσματικών κυματικών συναρτήσεων:

$$\mathbf{L}_{mn,\eta}^{(i)}(c, \eta, \xi, \varphi) = \frac{(1 - \eta^2)^{1/2}}{c(\xi^2 - \eta^2)^{1/2}} \frac{dS_{mn}(c, \eta)}{d\eta} R_{mn}^{(i)}(c, \xi) e^{jm\varphi}, \quad (1.61)$$

$$\mathbf{L}_{mn,\xi}^{(i)}(c, \eta, \xi, \varphi) = \frac{(\xi^2 - 1)^{1/2}}{c(\xi^2 - \eta^2)^{1/2}} S_{mn}(c, \eta) \frac{dR_{mn}^{(i)}(c, \xi)}{d\xi} e^{jm\varphi}, \quad (1.62)$$

$$\mathbf{L}_{mn,\varphi}^{(i)}(c, \eta, \xi, \varphi) = \frac{jm}{c(1 - \eta^2)^{1/2}(\xi^2 - 1)^{1/2}} S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(i)}(c, \xi) e^{jm\varphi}, \quad (1.63)$$

$$\mathbf{M}_{mn,\eta}^{r(i)}(c, \eta, \xi, \varphi) = \frac{-jm\xi}{(\xi^2 - \eta^2)^{1/2}(1 - \eta^2)^{1/2}} S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(i)}(c, \xi) e^{jm\varphi}, \quad (1.64)$$

$$\mathbf{M}_{mn,\xi}^{r(i)}(c, \eta, \xi, \varphi) = \frac{jm\eta}{(\xi^2 - \eta^2)^{1/2}(\xi^2 - 1)^{1/2}} S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(i)}(c, \xi) e^{jm\varphi}, \quad (1.65)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{mn,\varphi}^{r(i)}(c, \eta, \xi, \varphi) &= \frac{(1 - \eta^2)^{1/2}(\xi^2 - 1)^{1/2}}{\xi^2 - \eta^2} \left[\xi \frac{dS_{mn}(c, \eta)}{d\eta} R_{mn}^{(i)}(c, \xi) - \eta S_{mn}(c, \eta) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{dR_{mn}^{(i)}(c, \xi)}{d\xi} \right] e^{jm\varphi}, \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{mn,\eta}^{r(i)}(c, \eta, \xi, \varphi) &= \frac{(1 - \eta^2)^{1/2}}{c(\xi^2 - \eta^2)^{1/2}} \left[\frac{dS_{mn}(c, \eta)}{d\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi(\xi^2 - 1)R_{mn}^{(i)}(c, \xi)}{\xi^2 - \eta^2} \right) \right. \\ &\quad - \eta S_{mn}(c, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2} \frac{dR_{mn}^{(i)}(c, \xi)}{d\xi} \right) + \frac{m^2 \eta}{(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)} \\ &\quad \left. \times S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(i)}(c, \xi) \right] e^{jm\varphi}, \end{aligned} \quad (1.67)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{mn,\xi}^{r(i)}(c, \eta, \xi, \varphi) = & -\frac{(\xi^2 - 1)^{1/2}}{c(\xi^2 - \eta^2)^{1/2}} \left[-\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta(1 - \eta^2)S_{mn}(c, \eta)}{\xi^2 - \eta^2} \right) \frac{dR_{mn}^{(i)}(c, \xi)}{d\xi} \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} \frac{dS_{mn}(c, \eta)}{d\eta} \right) \xi R_{mn}^{(i)}(c, \xi) - \frac{m^2 \xi}{(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)} \\
& \left. \times S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(i)}(c, \xi) \right] e^{jm\varphi}, \tag{1.68}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{mn,\varphi}^{r(i)}(c, \eta, \xi, \varphi) = & \frac{jm(1 - \eta^2)^{1/2}(\xi^2 - 1)^{1/2}}{c(\xi^2 - \eta^2)} \left[\frac{d}{d\eta} (\eta S_{mn}(c, \eta)) \frac{R_{mn}^{(i)}(c, \xi)}{\xi^2 - 1} \right. \\
& \left. + \frac{S_{mn}(c, \eta)}{1 - \eta^2} \frac{d}{d\xi} (\xi R_{mn}^{(i)}(c, \xi)) \right] e^{jm\varphi}. \tag{1.69}
\end{aligned}$$

Οι αντικατάστασεις $\xi \rightarrow j\xi$ και $c \rightarrow -jc$ στις (1.61)–(1.69), μας δίνουν τις αντίστοιχες εκφράσεις για τα πεπλατυσμένα σφαιροειδή ιδιοδιανύσματα.

Σημειώνουμε πως, αντί της εκθετικής συνάρτησης $e^{jm\varphi}$, η συνάρτηση $\psi_{mn}^{(i)}$ μπορεί να σχηματιστεί και με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\cos(m\varphi)$ ή $\sin(m\varphi)$, οπότε προκύπτουν τα άρτια ή τα περιττά σφαιροειδή ιδιοδιανύσματα, αντιστοίχως. Η σχέση που συνδέει τα μιγαδικά ιδιοδιανύσματα με τα άρτια/περιττά προκύπτει εύκολα ως

$$\mathbf{X}_{mn}^{(i)} = \mathbf{X}e_{mn}^{(i)} + j\mathbf{X}o_{mn}^{(i)}, \tag{1.70}$$

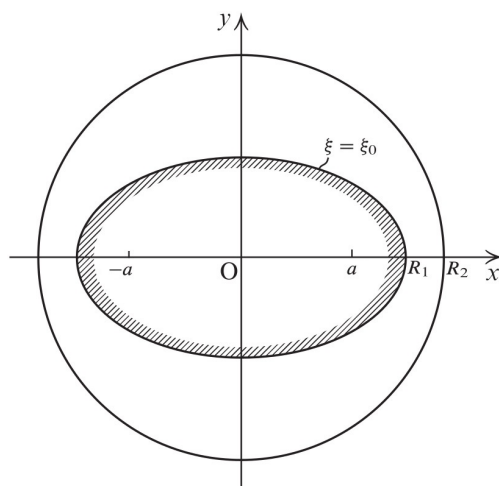
όπου $\mathbf{X} = \{\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{L}\}$ και $\mathbf{X}e/\mathbf{X}o$ τα αντίστοιχα άρτια/περιττά ιδιοδιανύσματα.

Κεφάλαιο 2

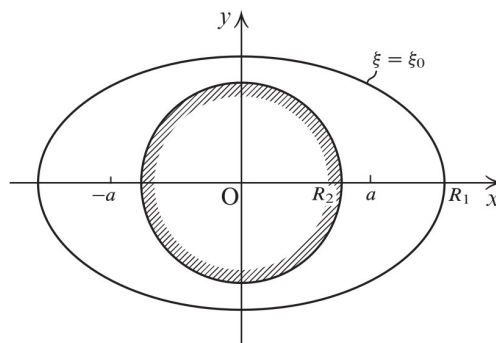
Ανάλυση ελλειπτικών-κυκλικών και κυκλικών-ελλειπτικών ομοαξονικών μεταλλικών κυματοδηγών

2.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζονται οι κυματαριθμοί αποκοπής δύο διαφορετικών διατάξεων κυματοδήγησης. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε δύο είδη ομοαξονικών κυματοδηγών απείρου μήκους: α) τον ελλειπτικό-κυκλικό· β) τον κυκλικό-ελλειπτικό. Η γεωμετρία των δύο διατάξεων φαίνεται στα σχ. 2.1 και 2.2, αντιστοίχως. Ως άξονας των κυματοδηγών θεωρείται ο άξονας z . Και στις δύο περιπτώσεις, το κυκλικό σύνορο έχει ακτίνα R_2 , ενώ το ελλειπτικό σύνορο έχει μήκος μεγάλου άξονα $2R_1$ και εστιακή απόσταση μήκους $2a$. Σε ελλειπτικές συντεταγμένες, το ελλειπτικό σύνορο αντιστοιχεί στην επιφάνεια $\xi = \xi_0$. Θεωρούμε πως οι κυματοδηγοί διαθέτουν τέλεια αγωγή μεταλλικά τοιχώματα και ο χώρος μεταξύ τους πληρούται με ομογενές μέσο επιτρεπτότητας ϵ και μαγνητικής διαπερατότητας μ , το οποίο δεν εμφανίζει απώλειες. Η χρονική εξάρτηση είναι της μορφής $e^{-j\omega t}$.



Σχήμα 2.1: Ελλειπτικός-κυκλικός κυματοδηγός.



Σχήμα 2.2: Κυκλικός-ελλειπτικός κυματοδηγός.

Σκοπός μας είναι η απόκτηση αναλυτικών κλειστών σχέσεων για τον υπολογισμό των κυματαριθμών αποκοπής k_c των δύο ειδών κυματοδηγών, όταν το σχήμα του ελλειπτικού τοιχώματος προσεγγίζει το κυκλικό. Για αυτό τον σκοπό, χρησιμοποιούμε την παράμετρο της εκκεντρότητας, η οποία (βλ. και σχέση (1.2)) ορίζεται ως

$$h \equiv \frac{\alpha}{R_1}, \quad (2.1)$$

και παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$. Για $h = 0$ το ελλειπτικό τοίχωμα μετατρέπεται σε κυκλικό, ενώ για $h = 1$ εκφυλίζεται στην αγωγή με $-a \leq x \leq a$ και $y = 0$. Ενδιάμεσες τιμές του h , για R_1 σταθερό, αντιστοιχούν σε ελλειπτικά τοιχώματα λιγότερο ή περισσότερο πεπλατυσμένα.

Η ανάλυση μας γίνεται για εγκάρσιους μαγνητικούς (TM) και εγκάρσιους ηλεκτρικούς (TE) ρυθμούς. Έχοντας ως αφετηρία τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών για την έκφραση των πεδιακών συνιστωσών, εφαρμόζουμε μια προσεγγιστική τεχνική διαταραχής στα ομογενή γραμμικά συστήματα που προκύπτουν από την επιβολή των συνοριακών συνθηκών στα μεταλλικά τοιχώματα των κυματοδηγών. Η τεχνική αυτή ισχύει για μικρές τιμές της εκκεντρότητας h και οδηγεί στην απόκτηση κλειστών εκφράσεων της μορφής $x(h) = x^{(0)} [1 + g^{(2)}h^2 + g^{(4)}h^4 + O(h^6)]$, όπου x είναι ο κανονικοποιημένος κυματαριθμός αποκοπής με αναφορά στο μήκος του εκάστοτε εσωτερικού συνόρου—δηλ., $x = k_c R_1$ για τη γεωμετρία του σχ. 2.1 και $x = k_c R_2$ για τη γεωμετρία του σχ. 2.2. Οι συντελεστές $g^{(2)}$ και $g^{(4)}$ δίνονται από απλές αλγεβρικές σχέσεις και είναι ανεξάρτητοι του h , ενώ ο όρος $x^{(0)}$ αντιστοιχεί στους κανονικοποιημένους κυματαριθμούς αποκοπής του κυκλικού ομοαξονικού κυματοδηγού. Επομένως, από τη στιγμή που θα βρεθούν οι συντελεστές $g^{(2)}$ και $g^{(4)}$, οι κυματαριθμοί αποκοπής μπορούν να αποκτηθούν αμέσως, για κάθε μικρή τιμή της εκκεντρότητας h .

Κίνητρο για την παρούσα μελέτη αποτελεί η απόκτηση εκφράσεων μεγαλύτερης ακρίβειας για τους κυματαριθμούς αποκοπής, σε σχέση με προηγούμενες λύσεις του προβλήματος στις οποίες χρησιμοποιήθηκε αντίστοιχη μεθοδολογία. Πιο συγκεκριμένα, οι κυματαριθμοί αποκοπής των διατάξεων που εξετάζουμε υπολογίστηκαν και στην [30], όπου εφαρμόστηκε μια προσεγγιστική μέθοδος για μικρές εκκεντρότητες ανάλογη με τη δική μας. Ωστόσο, στις εκφράσεις της [30] χρησιμοποιήθηκαν μόνο όροι τάξης h^2 για τον υπολογισμό των κυματαριθμών. Η τελευταία παρατήρηση ισχύει και για τις εκφράσεις που αποκτήθηκαν από τους συγγραφείς της [31], στην οποία εξετάστηκαν έκκεντροι κυματοδηγοί με ένα ελλειπτικό

και ένα κυκλικό τοίχωμα, ειδική περίπτωση των οποίων μπορούν να θεωρηθούν οι διατάξεις που εξετάζονται στον παρόν κεφάλαιο. Αντιθέτως, στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιούνται και οι όροι h^4 , με αποτέλεσμα η λύση μας να παρουσιάζει μεγαλύτερη ακρίβεια σε σχέση με τις $O(h^2)$ λύσεις των [30, 31]. Επιπλέον, ορισμένα από τα αποτελέσματα της [30] είναι προβληματικά, όπως θα φανεί και από τη διερεύνηση που θα παρουσιαστεί στην ενότητα 2.4 του παρόντος κεφαλαίου, με συνέπεια οι σχέσεις που υπάρχουν στην [30] να μην μπορούν να θεωρηθούν αξιόπιστες. Επομένως, σε αυτή τη διατριβή παρουσιάζονται οι ορθές εκφράσεις που επιτρέπουν τον ακριβή υπολογισμό των κυματαριθμών αποκοπής.

Το υπόλοιπο κεφάλαιο έχει την εξής δομή: στις ενότητες 2.2 και 2.3 πραγματοποιούνται η κατάστρωση και η επίλυση του προβλήματος για τους TM και TE ρυθμούς, αντιστοίχως. Στην ενότητα 2.4 παρουσιάζονται διάφορα αριθμητικά αποτελέσματα, ενώ στην ενότητα 2.5 συζητούνται διάφορα χαρακτηριστικά της μεθόδου μας και εξάγονται συμπεράσματα.

2.2 TM ρυθμοί

2.2.1 Κατάστρωση προβλήματος

Ξεκινούμε με την εξέταση των TM ρυθμών. Στην περίπτωση αυτή, για τη διαμήκη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου ισχύει $H_z = 0$, ενώ η διαμήκης συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου E_z θα ικανοποιεί τη δισδιάστατη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)E_z = 0, \quad (2.2)$$

όπου $k = \omega(\epsilon\mu)^{1/2}$ ο κυματαριθμός του χώρου μεταξύ των δύο μεταλλικών τοιχωμάτων του κυματοηγού. Εφόσον εξετάζουμε κυματοδηγούμενα κύματα κατά μήκος του άξονα z , η μορφή της E_z σε ελλειπτικές συντεταγμένες θα είναι

$$E_z(\xi, \eta, z) = e_z(\xi, \eta)e^{j\beta z}, \quad (2.3)$$

όπου β η σταθερά διάδοσης. Γράφοντας $e_z(\xi, \eta) = R(\xi)S(\eta)$ και αντικαθιστώντας την (2.3) στην (2.2), ο χωρισμός των μεταβλητών σε ελλειπτικές συντεταγμένες δίνει τις δύο εξισώσεις Mathieu (βλ. κεφ. 1):

$$\frac{d^2 S}{d\eta^2} + \left[b - \frac{(h')^2}{2} \cos(2\eta) \right] S = 0, \quad (2.4)$$

και

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} - \left[b - \frac{(h')^2}{2} \cosh(2\xi) \right] R = 0, \quad (2.5)$$

όπου η σταθερά b είναι ιδιοτιμή που παίρνει διακριτές τιμές, και $h' = k_c a$ με $k_c = (k^2 - \beta^2)^{1/2}$ τον κυματαριθμό αποκοπής. Όπως είδαμε στο κεφ. 1, οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (2.4) και (2.5) είναι οι γωνιακές και οι ακτινικές συναρτήσεις Mathieu, αντιστοίχως.

Με βάση τα παραπάνω, η διαμήκης συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου εκφρασμένη σε ελλειπτικές συντεταγμένες, έχει τη μορφή

$$E_z(\xi, \eta, z) = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} [A_{1,i} J e_i(h', \cosh \xi) + A_{2,i} Y e_i(h', \cosh \xi)] S e_i(h', \cos \eta) + \sum_{i=1}^{\infty} [B_{1,i} J o_i(h', \cosh \xi) + B_{2,i} Y o_i(h', \cosh \xi)] S o_i(h', \cos \eta) \right\} e^{j\beta z}, \quad (2.6)$$

όπου $J e_i$ ($J o_i$) και $Y e_i$ ($Y o_i$) είναι οι άρτιες (περιττές) ακτινικές συναρτήσεις Mathieu πρώτου και δεύτερου είδους, αντιστοίχως, $S e_i$ ($S o_i$) είναι οι άρτιες (περιττές) γωνιακές συναρτήσεις Mathieu, ενώ $A_{1,i}$, $A_{2,i}$, $B_{1,i}$, και $B_{2,i}$ είναι άγνωστοι συντελεστές ανάπτυξης.

Η συνοριακή συνθήκη για τις εφαπτομενικές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου απαιτεί τον μηδενισμό τους στα αγωγή τοιχώματα του κυματοδηγού. Αρχικά, ικανοποιούμε την παραπάνω συνοριακή συνθήκη για τη συνιστώσα E_z στο ελλειπτικό σύνορο $\xi = \xi_0$, οπότε έχουμε

$$E_z(\xi = \xi_0, \eta, z) = 0 \Rightarrow \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} [A_{1,i} J e_i(h', \cosh \xi_0) + A_{2,i} Y e_i(h', \cosh \xi_0)] S e_i(h', \cos \eta) + \sum_{i=1}^{\infty} [B_{1,i} J o_i(h', \cosh \xi_0) + B_{2,i} Y o_i(h', \cosh \xi_0)] S o_i(h', \cos \eta) \right\} = 0. \quad (2.7)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (2.7) με $S e_m(h', \cos \eta)$, ολοκληρώνοντας από $\eta = 0$ έως 2π , και κάνοντας χρήση της ορθογωνιότητας των γωνιακών συναρτήσεων Mathieu βρίσκουμε πως

$$A_{2,m}/A_{1,m} = -J e_m(h', \cosh \xi_0)/Y e_m(h', \cosh \xi_0) \equiv q e_m. \quad (2.8)$$

Ομοίως, πολλαπλασιάζοντας την (2.7) με $S o_m(h', \cos \eta)$ και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία βρίσκουμε πως

$$B_{2,m}/B_{1,m} = -J o_m(h', \cosh \xi_0)/Y o_m(h', \cosh \xi_0) \equiv q o_m, \quad (2.9)$$

οπότε η (2.6) γράφεται

$$E_z(\xi, \eta, z) = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} A_i [J e_i(h', \cosh \xi) + q e_i Y e_i(h', \cosh \xi)] S e_i(h', \cos \eta) + \sum_{i=1}^{\infty} B_i [J o_i(h', \cosh \xi) + q o_i Y o_i(h', \cosh \xi)] S o_i(h', \cos \eta) \right\} e^{j\beta z}, \quad (2.10)$$

όπου θέσαμε $A_{1,i} \equiv A_i$ και $B_{1,i} \equiv B_i$.

Στη συνέχεια, πρέπει να ικανοποιηθεί η συνοριακή συνθήκη για την E_z στο κυκλικό σύνορο $\rho = R_2$. Για τον σκοπό αυτό, η έκφραση (2.10) μετασχηματίζεται από ελλειπτικές σε κυκλικές κυλινδρικές συντεταγμένες, κάνοντας χρήση των σχέσεων [103]:

$$Z e_i(h', \cosh \xi) S e_i(h', \cos \eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} j^{n-i} B_n^e(h', i) Z_n(k_c \rho) \cos(n\varphi), \quad i \geq 0, \quad (2.11)$$

$$Z_{0i}(h', \cosh \xi) S_{0i}(h', \cos \eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} j^{n-i} B_n^o(h', i) Z_n(k_c \rho) \sin(n\varphi), \quad i \geq 1. \quad (2.12)$$

Στις σχέσεις (2.11) και (2.12), Z_n είναι οι κυλινδρικές συναρτήσεις Bessel ή Neumann, Z_{ei} (Z_{0i}) είναι οι άρτιες (περιττές) ακτινικές συναρτήσεις Mathieu πρώτου ή δεύτερου είδους, και B_n^e (B_n^o) είναι οι άρτιοι (περιττοί) συντελεστές ανάπτυξης των συναρτήσεων Mathieu (βλ. κεφ. 1). Τονίζουμε πως στις (2.11) και (2.12), οι δείκτες i και n είναι ταυτόχρονα άρτιοι ή περιττοί.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (2.11) και (2.12) στην (2.10), αποκτούμε την έκφραση της E_z σε κυκλικές κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$E_z(\rho, \varphi, z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} j^{n-i} A_i B_n^e(h', i) [J_n(k_c \rho) + q e_i Y_n(k_c \rho)] \cos(n\varphi) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} j^{n-i} B_i B_n^o(h', i) [J_n(k_c \rho) + q o_i Y_n(k_c \rho)] \sin(n\varphi) \right\} e^{j\beta z}, \quad (2.13)$$

όπου J_n και Y_n είναι οι κυλινδρικές συναρτήσεις Bessel και Neumann, αντιστοίχως. Η ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης για την E_z στο κυκλικό σύνορο $\rho = R_2$ δίνει

$$E_z(\rho = R_2, \varphi, z) = 0 \Rightarrow \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} j^{n-i} A_i B_n^e(h', i) [J_n(x_2) + q e_i Y_n(x_2)] \cos(n\varphi) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} j^{n-i} B_i B_n^o(h', i) [J_n(x_2) + q o_i Y_n(x_2)] \sin(n\varphi) \right\} = 0, \quad (2.14)$$

όπου $x_2 = k_c R_2$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (2.14) με $\cos(n\varphi)$, ολοκληρώνοντας από $\varphi = 0$ έως 2π , και κάνοντας χρήση της ορθογωνιότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, αποκτούμε τη σχέση

$$\sum_{i=0}^{\infty} j^{n-i} A_i B_n^e(h', i) [J_n(x_2) + q e_i Y_n(x_2)] = 0. \quad (2.15)$$

Αντίστοιχη διαδικασία, με την τριγωνομετρική συνάρτηση $\sin(n\varphi)$ αντί της $\cos(n\varphi)$, μας δίνει τη σχέση

$$\sum_{i=1}^{\infty} j^{n-i} B_i B_n^o(h', i) [J_n(x_2) + q o_i Y_n(x_2)] = 0. \quad (2.16)$$

Οι εξισώσεις (2.15) και (2.16) γράφονται σε συνεπτυγμένη μορφή ως

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{ni} A_i = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

και

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni} B_i = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.18)$$

αντιστοίχως, όπου ο δείκτης ν αντικαταστάθηκε με n . Στις (2.17) και (2.18), οι δείκτες i και n είναι ταυτόχρονα άρτιοι ή περιττοί, και έχουμε

$$a_{ni} = j^{n-i} B_n^e(h', i) [J_n(x_2) + qe_i Y_n(x_2)], \quad (2.19)$$

$$b_{ni} = j^{n-i} B_n^o(h', i) [J_n(x_2) + qo_i Y_n(x_2)]. \quad (2.20)$$

Οι σχέσεις (2.17) και (2.18) αποτελούν δύο άπειρα ομογενή συστήματα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τους συντελεστές ανάπτυξης A_i και B_i , αντιστοίχως. Όπως βλέπουμε, υπάρχει απεμπλοκή των συντελεστών A_i και B_i , και επομένως το σύστημα (2.17) αντιστοιχεί σε άρτιους (even) TM ρυθμούς (ETM), ενώ το σύστημα (2.18) σε περιττούς (odd) TM ρυθμούς (OTM). Προκειμένου τα δύο αυτά γραμμικά συστήματα να έχουν μη μηδενική λύση, θα πρέπει οι αντίστοιχες ορίζουσες να είναι ίσες με μηδέν. Σε συμβολική μορφή αυτό μπορεί να γραφεί ως

$$\det(a) = 0, \quad (2.21)$$

και

$$\det(b) = 0, \quad (2.22)$$

για τα συστήματα (2.17) και (2.18), αντιστοίχως.

Επειδή $h' = k_c a$ και $x_2 = k_c R_2$, ο κυματαριθμός αποκοπής k_c υπεισέρχεται στις (2.21) και (2.22) μέσω των σχέσεων (2.19) και (2.20). Επομένως, οι (2.21) και (2.22) είναι μη γραμμικές εξισώσεις με γενική μορφή $f(k_c) = 0$ και ο υπολογισμός των ριζών τους μας δίνει τους κυματαριθμούς αποκοπής των κυματοδηγών που εξετάζουμε. Ο υπολογισμός αυτός είναι δυνατός αν διατηρηθεί πεπερασμένος αριθμός όρων στα άπειρα συστήματα (2.17) και (2.18), και στη συνέχεια χρησιμοποιηθεί κάποια αριθμητική μέθοδος για την εύρεση των ριζών των οριζουσών. Σε γενικές γραμμές, πρόκειται για μια πολύπλοκη διαδικασία, όπως γίνεται φανερό από τις εκφράσεις (2.19) και (2.20), καθώς απαιτείται ο αριθμητικός υπολογισμός των συναρτήσεων Mathieu και των συντελεστών $B_n^{e,o}(h', i)$, για κάθε διαφορετική τιμή του h' , κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου που υπολογίζει τις ρίζες των (2.21) και (2.22). Ωστόσο, όταν η εκκεντρότητα h του ελλειπτικού συνόρου του κυματοδηγού περιοριστεί σε μικρές τιμές ($h \ll 1$), είναι δυνατός ο υπολογισμός των k_c σε κλειστή μορφή, ακολουθώντας τη μέθοδο που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

2.2.2 Λύση για μικρές εκκεντρότητες

Για μικρές τιμές της εκκεντρότητας h του ελλειπτικού συνόρου του κυματοδηγού, οι συντελεστές a_{ni} και b_{ni} των σχέσεων (2.19) και (2.20) μπορούν να γραφούν ως δυναμοσειρές του h . Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του αναπτύγματος σε δυνάμεις του h των συντελεστών $B_n^{e,o}(h', i)$, καθώς και των ποσοτήτων qe_i και qo_i , που εμφανίζονται στις εκφράσεις των a_{ni} και b_{ni} . Για την ανάλυση μας διατηρούμε όρους έως τέταρτης τάξης—δηλ., μέχρι και τη δύναμη h^4 . Όροι μεγαλύτερης τάξης θεωρούνται αμελητέοι και δεν λαμβάνονται υπόψη. Σε αναλογία με την (1.12), η παράμετρος h' γράφεται

$$h' = \frac{k_c a R_1}{R_1} = x_1 h, \quad (2.23)$$

όπου $x_1 = k_c R_1$, και επισημαίνουμε ξανά πως μικρές τιμές του h σημαίνουν και μικρές τιμές του h' , οπότε δεν θα γίνεται διάκριση μεταξύ των δύο στην ανάλυση που ακολουθεί. Τα αναπτύγματα των συντελεστών B_n^e και B_n^o , για μικρές τιμές του h , δόθηκαν στο κεφ. 1. Για τη λύση του προβλήματος πρέπει να βρεθούν και τα αντίστοιχα αναπτύγματα των q_{e_i} και q_{o_i} . Εξετάζουμε χωριστά τους ETM και OTM ρυθμούς.

Άρτιοι ρυθμοί (ETM)

Για την εύρεση του αναπτύγματος του όρου q_{e_i} της (2.8), χρησιμοποιούμε τη σχέση (1.7) για τις άρτιες ακτινικές συναρτήσεις Mathieu, διατηρώντας τους συντελεστές B_n^e των οποίων τα αναπτύγματα περιέχουν όρους μέχρι τάξης h^4 , οπότε

$$\begin{aligned}
Je_i(h', \cosh \xi_0) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n-i}{2}} B_n^e(h', i) J_n(h' \cosh \xi_0) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[(-1)^{\frac{i-4-i}{2}} B_{i-4}^e(h', i) J_{i-4}(x_1) + (-1)^{\frac{i-2-i}{2}} B_{i-2}^e(h', i) J_{i-2}(x_1) \right. \\
&\quad + (-1)^{\frac{i-i}{2}} B_i^e(h', i) J_i(x_1) + (-1)^{\frac{i+2-i}{2}} B_{i+2}^e(h', i) J_{i+2}(x_1) \\
&\quad \left. + (-1)^{\frac{i+4-i}{2}} B_{i+4}^e(h', i) J_{i+4}(x_1) + O(h^6) \right] \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\Sigma_i^{(0)}(x_1) + \Sigma_i^{(2)}(x_1) h^2 + \Sigma_i^{(4)}(x_1) h^4 + O(h^6) \right] B_i^e(h', i), \quad (2.24)
\end{aligned}$$

όπου έχει ληφθεί υπόψη πως $h' \cosh \xi_0 = x_1$, αφού $h = 1/\cosh \xi_0$. Οι συντελεστές $\Sigma_i^{(0),(2),(4)}$ στην (2.24) δίνονται από τις σχέσεις

$$\Sigma_i^{(0)}(x_1) = J_i(x_1), \quad (2.25)$$

$$\Sigma_i^{(2)}(x_1) = -[\alpha_{2,0}^{e-} J_{i-2}(x_1) + \alpha_{2,0}^{e+} J_{i+2}(x_1)] x_1^2, \quad (2.26)$$

$$\Sigma_i^{(4)}(x_1) = [\alpha_{4,0}^{e-} J_{i-4}(x_1) + \alpha_{4,0}^{e+} J_{i+4}(x_1) - \alpha_{2,2}^{e-} J_{i-2}(x_1) - \alpha_{2,2}^{e+} J_{i+2}(x_1)] x_1^4. \quad (2.27)$$

Ομοίως, έχουμε πως

$$Ye_i(h', \cosh \xi_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\mathbb{T}_i^{(0)}(x_1) + \mathbb{T}_i^{(2)}(x_1) h^2 + \mathbb{T}_i^{(4)}(x_1) h^4 + O(h^6) \right] B_i^e(h', i), \quad (2.28)$$

όπου τα $\mathbb{T}_i^{(0),(2),(4)}$ προκύπτουν από τα αντίστοιχα $\Sigma_i^{(0),(2),(4)}$, με αντικατάσταση της συνάρτησης Bessel J_i από τη συνάρτηση Neumann Y_i . Τότε

$$\begin{aligned}
q_{e_i} &= -\frac{Je_i(h', \cosh \xi_0)}{Ye_i(h', \cosh \xi_0)} = -\frac{\Sigma_i^{(0)}(x_1) + \Sigma_i^{(2)}(x_1) h^2 + \Sigma_i^{(4)}(x_1) h^4 + O(h^6)}{\mathbb{T}_i^{(0)}(x_1) + \mathbb{T}_i^{(2)}(x_1) h^2 + \mathbb{T}_i^{(4)}(x_1) h^4 + O(h^6)} \\
&= \Lambda_i^{(0)}(x_1) + \Lambda_i^{(2)}(x_1) h^2 + \Lambda_i^{(4)}(x_1) h^4 + O(h^6). \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω συντελεστές $\Lambda_i^{(0),(2),(4)}$ προκύπτουν από το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το $h = 0$ του κλάσματος qe_i και έχουν τις εκφράσεις

$$\Lambda_i^{(0)}(x_1) = -\Sigma_i^{(0)}(x_1)/\Gamma_i^{(0)}(x_1), \quad (2.30)$$

$$\Lambda_i^{(2)}(x_1) = -[\Sigma_i^{(2)}(x_1)\Gamma_i^{(0)}(x_1) - \Sigma_i^{(0)}(x_1)\Gamma_i^{(2)}(x_1)]/[\Gamma_i^{(0)}(x_1)]^2, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_i^{(4)}(x_1) = & -\left\{ \Sigma_i^{(0)}(x_1)[\Gamma_i^{(2)}(x_1)]^2 - \Sigma_i^{(0)}(x_1)\Gamma_i^{(0)}(x_1)\Gamma_i^{(4)}(x_1) - \Sigma_i^{(2)}(x_1)\Gamma_i^{(2)}(x_1)\Gamma_i^{(0)}(x_1) \right. \\ & \left. + \Sigma_i^{(4)}(x_1)[\Gamma_i^{(0)}(x_1)]^2 \right\} / [\Gamma_i^{(0)}(x_1)]^3. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Έχοντας υπόψη το ανάπτυγμα (2.29), από εξέταση της σχέσης (2.19) για τους όρους a_{ni} , διαπιστώνουμε πως εκφράσεις μέχρι τάξης h^4 έχουν οι a_{nn} , $a_{n,n\pm 2}$, και $a_{n,n\pm 4}$. Πιο συγκεκριμένα, ο a_{nn} έχει την έκφραση

$$\begin{aligned} a_{nn} = & B_n^e(h', n) [J_n(x_2) + qe_n Y_n(x_2)] = [1 + g_2^e x_1^2 h^2 + g_4^e x_1^4 h^4 + O(h^6)] \\ & \times \left\{ J_n(x_2) + [\Lambda_n^{(0)}(x_1) + \Lambda_n^{(2)}(x_1)h^2 + \Lambda_n^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6)] Y_n(x_2) \right\} \\ = & u_{nn}(x_1, x_2) + [u_{nn}(x_1, x_2)g_2^e + \Lambda_n^{(2)}(x_1)Y_n(x_2)]x_1^2 h^2 \\ & + \left\{ u_{nn}(x_1, x_2)g_4^e + [\Lambda_n^{(4)}(x_1) + g_2^e \Lambda_n^{(2)}(x_1)]Y_n(x_2) \right\} x_1^4 h^4 + O(h^6), \end{aligned} \quad (2.33)$$

όπου η ποσότητα $u_{ni}(x_1, x_2)$ ορίζεται ως

$$u_{ni}(x_1, x_2) \equiv J_n(x_2) + \Lambda_i^{(0)}(x_1)Y_n(x_2) = J_n(x_2) - \frac{J_i(x_1)}{Y_i(x_1)}Y_n(x_2). \quad (2.34)$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\begin{aligned} a_{n,n\pm 2} = & -B_n^e(h', n \pm 2) [J_n(x_2) + qe_{n\pm 2} Y_n(x_2)] \\ = & -\alpha_{2,0}^{e\mp, n\pm 2} u_{n,n\pm 2}(x_1, x_2) x_1^2 h^2 - [(\alpha_{2,0}^{e\mp, n\pm 2} g_2^{e, n\pm 2} + \alpha_{2,2}^{e\mp, n\pm 2}) u_{n,n\pm 2}(x_1, x_2) \\ & + \alpha_{2,0}^{e\mp, n\pm 2} \Lambda_{n\pm 2}^{(2)}(x_1) Y_n(x_2)] x_1^4 h^4 + O(h^6), \end{aligned} \quad (2.35)$$

και

$$a_{n,n\pm 4} = B_n^e(h', n \pm 4) [J_n(x_2) + qe_{n\pm 4} Y_n(x_2)] = \alpha_{4,0}^{e\mp, n\pm 4} u_{n,n\pm 4}(x_1, x_2) x_1^4 h^4 + O(h^6). \quad (2.36)$$

Επειδή $x_1 = k_c R_1$ και $x_2 = k_c R_2$, έχουμε

$$x_2 = x_1 R_2 / R_1, \quad (2.37)$$

και διαπιστώνουμε πως οι όροι a_{nn} , $a_{n,n\pm 2}$, και $a_{n,n\pm 4}$ έχουν την ακόλουθη δομή:

$$a_{nn} = C_{nn}^{(0)}(x_1) + C_{nn}^{(2)}(x_1)h^2 + C_{nn}^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.38)$$

$$a_{n,n\pm 2} = C_{n,n\pm 2}^{(2)}(x_1)h^2 + C_{n,n\pm 2}^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.39)$$

$$a_{n,n\pm 4} = C_{n,n\pm 4}^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.40)$$

όπου τα $C_{nn}^{(0),(2),(4)}$, $C_{n,n\pm 2}^{(2),(4)}$, και $C_{n,n\pm 4}^{(4)}$ προκύπτουν από απλή επισκόπηση των σχέσεων (2.33), (2.35), και (2.36), αντιστοίχως.

Διατηρώντας τους συντελεστές μέχρι $O(h^4)$, το σύστημα (2.17) αποκτά τη μορφή

$$a_{n,n-4}A_{n-4} + a_{n,n-2}A_{n-2} + a_{nn}A_n + a_{n,n+2}A_{n+2} + a_{n,n+4}A_{n+4} = 0, \quad \begin{cases} n = 0, 2, 4, \dots \\ \text{ή} \\ n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}, \quad (2.41)$$

με $a_{n,n-2q} = 0$ για $n < 2q$, $q = 1, 2$. Παρατηρώντας τη μορφή του συστήματος (2.41), διαπιστώνουμε πως υπάρχει αποσύζευξη των συντελεστών A_i σε δύο ομάδες, τις $\{A_0, A_2, A_4, \dots\}$ και $\{A_1, A_3, A_5, \dots\}$, αντιστοίχως. Σε κάθε περίπτωση, η δομή που παρουσιάζει το σύστημα, σε συνδυασμό με τις σχέσεις (2.38)–(2.40), επιτρέπουν τον υπολογισμό της ορίζουσας $\det(a)$ σε κλειστή μορφή, μέχρι τάξης h^4 . Έτσι έχουμε [106]:

$$\det(a) = P(a_{ss}) \left[1 - \sum_{w=0}^{\infty} \frac{a_{w+2,w} a_{w,w+2}}{a_{ww} a_{w+2,w+2}} \right]. \quad (2.42)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, $P(a_{ss}) = a_{00}a_{22}a_{44} \dots$, ενώ ο τόνος στο σύμβολο της άθροισης υποδηλώνει άθροιση για άρτιες τιμές του δείκτη w , για την περίπτωση των συντελεστών A_i με άρτιους δείκτες. Αντιθέτως, για την περίπτωση των συντελεστών A_i με περιττούς δείκτες, $P(a_{ss}) = a_{11}a_{33}a_{55} \dots$, ενώ ο τόνος στο σύμβολο της άθροισης υποδηλώνει άθροιση για περιττές τιμές του w .

Ακολουθώντας τη μέθοδο που περιγράφεται με λεπτομέρεια στην [106], η (2.42) μπορεί να εκφραστεί ως δυναμοσειρά του h . Έτσι, προκύπτει το ανάπτυγμα

$$\det(a) = \Delta^{(0)}(x_1) + \Delta^{(2)}(x_1)h^2 + \Delta^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.43)$$

όπου τα $\Delta^{(0),(2),(4)}$ είναι εκφράσεις των $C_{nn}^{(0),(2),(4)}$ και $C_{n,n\pm 2}^{(2)}$ των σχέσεων (2.38) και (2.39). Οι αναλυτικές εκφράσεις των $\Delta^{(0),(2),(4)}$ δίνονται στην [106].

Για μικρές τιμές του h , αναμένουμε οι κανονικοποιημένοι κυματαριθμοί αποκοπής $x_1 \equiv x_1(h)$ να αντιστοιχούν ένας προς έναν και να έχουν τιμές κοντά στους κυματαριθμούς $x_1^{(0)}$ των ΤΜ ρυθμών του κυκλικού ομοαξονικού κυματοδηγού (που αντιστοιχεί σε $h = 0$). Επομένως, θεωρούμε το ανάπτυγμα

$$x_1(h) = x_1^{(0)} + x_1^{(2)}h^2 + x_1^{(4)}h^4 + O(h^6). \quad (2.44)$$

Η σημασία της (2.44) είναι πως όταν η εκκεντρότητα είναι μικρή, και επομένως το ελλειπτικό σύνορο προσεγγίζει τον κύκλο, τότε οι κυματαριθμοί αποκοπής της διάταξης μπορούν να υπολογιστούν αν, στους αντίστοιχους κυματαριθμούς $x_1^{(0)}$ του κυκλικού ομοαξονικού κυματοδηγού, προστεθούν οι διορθωτικοί όροι τάξης h^2 και h^4 . Οι κυματαριθμοί αποκοπής $x_1^{(0)}$ για τους ΤΜ ρυθμούς είναι γνωστοί από την κλασική θεωρία κυματοδότησης και προκύπτουν ως ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης [107]:

$$J_n(x_2^{(0)})Y_n(x_1^{(0)}) - J_n(x_1^{(0)})Y_n(x_2^{(0)}) = 0 \quad \text{ή} \quad u_{nn}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 0, \quad x_2^{(0)} = x_1^{(0)}R_2/R_1. \quad (2.45)$$

Εφαρμόζοντας την ανάλυση που περιγράφεται στην [106], και η οποία συνίσταται στην ανάπτυξη των ποσοτήτων $C_{nn}^{(0),(2),(4)}$ και $C_{n,n\pm 2}^{(2)}$ γύρω από το $x_1 = x_1^{(0)}$ βάσει της (2.44), την

αντικατάσταση των αναπτυγμάτων αυτών στην ορίζουσα (2.43), και την εξίσωση της με το μηδέν, καταλήγουμε στις ακόλουθες κλειστές σχέσεις για τα $x_1^{(2)}$ και $x_1^{(4)}$:

$$x_1^{(2)} = - \left[\frac{dC_{nm}^{(0)}(x_1)}{dx_1} \right]^{-1} C_{nm}^{(2)}(x_1), \quad \text{για } x_1 = x_1^{(0)}, \quad (2.46)$$

$$x_1^{(4)} = - \left[\frac{dC_{nm}^{(0)}(x_1)}{dx_1} \right]^{-1} \left[\frac{(x_1^{(2)})^2}{2} \frac{d^2 C_{nm}^{(0)}(x_1)}{d^2 x_1} + x_1^{(2)} \frac{dC_{nm}^{(2)}(x_1)}{dx_1} + C_{nm}^{(4)}(x_1) - \frac{C_{n+2,n}^{(2)}(x_1)C_{n,n+2}^{(2)}(x_1)}{C_{n+2,n+2}^{(0)}(x_1)} - \frac{C_{n,n-2}^{(2)}(x_1)C_{n-2,n}^{(2)}(x_1)}{C_{n-2,n-2}^{(0)}(x_1)} \right], \quad \text{για } x_1 = x_1^{(0)}. \quad (2.47)$$

Οι σχέσεις (2.44), (2.46), και (2.47) επιτρέπουν τον υπολογισμό των κανονικοποιημένων κυματαριθμών αποκοπής x_1 των ETM ρυθμών, για οποιαδήποτε μικρή τιμή της εκκεντρότητας h , όπου η κανονικοποίηση έχει γίνει με αναφορά στο μήκος R_1 του μεγάλου ημιάξονα του ελλειπτικού συνόρου.

Περιττοί ρυθμοί (OTM)

Η ανάλυση των OTM ρυθμών ακολουθεί τα ίδια βήματα με αυτή που παρουσιάστηκε παραπάνω για τους ETM ρυθμούς. Στην περίπτωση των OTM ρυθμών, πρέπει να βρεθεί το ανάπτυγμα του όρου q_{oi} της (2.9). Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε τη σχέση (1.8) για τις περιττές ακτινικές συναρτήσεις Mathieu, διατηρώντας τους συντελεστές B_n^o των οποίων τα αναπτύγματα περιέχουν όρους μέχρι τάξης h^4 . Εργαζόμενοι με τρόπο ανάλογο με αυτόν που παρουσιάστηκε για το ανάπτυγμα του όρου q_{ei} , βρίσκουμε τελικά πως

$$q_{oi} = K_i^{(0)}(x_1) + K_i^{(2)}(x_1)h^2 + K_i^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.48)$$

όπου

$$K_i^{(0)}(x_1) = - \Pi_i^{(0)}(x_1) / P_i^{(0)}(x_1), \quad (2.49)$$

$$K_i^{(2)}(x_1) = - [\Pi_i^{(2)}(x_1)P_i^{(0)}(x_1) - \Pi_i^{(0)}(x_1)P_i^{(2)}(x_1)] / [P_i^{(0)}(x_1)]^2, \quad (2.50)$$

$$K_i^{(4)}(x_1) = - \left\{ \Pi_i^{(0)}(x_1)[P_i^{(2)}(x_1)]^2 - \Pi_i^{(0)}(x_1)P_i^{(0)}(x_1)P_i^{(4)}(x_1) - \Pi_i^{(2)}(x_1)P_i^{(2)}(x_1)P_i^{(0)}(x_1) + \Pi_i^{(4)}(x_1)[P_i^{(0)}(x_1)]^2 \right\} / [P_i^{(0)}(x_1)]^3, \quad (2.51)$$

και

$$\Pi_i^{(0)}(x_1) = iJ_i(x_1), \quad (2.52)$$

$$\Pi_i^{(2)}(x_1) = - [(i-2)\alpha_{2,0}^- J_{i-2}(x_1) + (i+2)\alpha_{2,0}^+ J_{i+2}(x_1)] x_1^2, \quad (2.53)$$

$$\Pi_i^{(4)}(x_1) = [(i-4)\alpha_{4,0}^- J_{i-4}(x_1) + (i+4)\alpha_{4,0}^+ J_{i+4}(x_1) - (i-2)\alpha_{2,2}^- J_{i-2}(x_1) - (i+2)\alpha_{2,2}^+ J_{i+2}(x_1)] x_1^4, \quad (2.54)$$

ενώ τα $P_i^{(0),(2),(4)}$ προκύπτουν από τα αντίστοιχα $\Pi_i^{(0),(2),(4)}$, με αντικατάσταση της συνάρτησης Bessel J_i από τη συνάρτηση Neumann Y_i .

Από εξέταση της σχέσης (2.20) για τους συντελεστές b_{ni} , διαπιστώνουμε πως όρους μέχρι τάξης h^4 έχουν οι b_{nn} , $b_{n,n\pm 2}$, και $b_{n,n\pm 4}$. Σε αναλογία με τις σχέσεις (2.38)–(2.40), οι συγκεκριμένοι συντελεστές γράφονται ως

$$b_{nn} = D_{nn}^{(0)}(x_1) + D_{nn}^{(2)}(x_1)h^2 + D_{nn}^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.55)$$

$$b_{n,n\pm 2} = D_{n,n\pm 2}^{(2)}(x_1)h^2 + D_{n,n\pm 2}^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.56)$$

$$b_{n,n\pm 4} = D_{n,n\pm 4}^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.57)$$

όπου, λαμβάνοντας και υπόψη πως $x_2 = x_1 R_2 / R_1$, έχουμε

$$D_{nn}^{(0)}(x_1) = \frac{1}{n} u_{nn}(x_1, x_2), \quad (2.58)$$

$$D_{nn}^{(2)}(x_1) = \left[u_{nn}(x_1, x_2) g_2^\circ + \frac{1}{n} K_n^{(2)}(x_1) Y_n(x_2) \right] x_1^2, \quad (2.59)$$

$$D_{nn}^{(4)}(x_1) = \left\{ u_{nn}(x_1, x_2) g_4^\circ + \left[\frac{1}{n} K_n^{(4)}(x_1) + g_2^\circ K_n^{(2)}(x_1) \right] Y_n(x_2) \right\} x_1^4, \quad (2.60)$$

$$D_{n,n\pm 2}^{(2)}(x_1) = - \frac{1}{n \pm 2} \alpha_{2,0}^{\circ\mp, n\pm 2} u_{n,n\pm 2}(x_1, x_2) x_1^2, \quad (2.61)$$

$$D_{n,n\pm 2}^{(4)}(x_1) = - \left[(\alpha_{2,0}^{\circ\mp, n\pm 2} g_2^{\circ, n\pm 2} + \frac{1}{n \pm 2} \alpha_{2,2}^{\circ\mp, n\pm 2}) u_{n,n\pm 2}(x_1, x_2) + \frac{1}{n \pm 2} \alpha_{2,0}^{\circ\mp, n\pm 2} K_{n\pm 2}^{(2)}(x_1) Y_n(x_2) \right] x_1^4, \quad (2.62)$$

$$D_{n,n\pm 4}^{(4)}(x_1) = \frac{1}{n \pm 4} \alpha_{4,0}^{\circ\mp, n\pm 4} u_{n,n\pm 4}(x_1, x_2) x_1^4. \quad (2.63)$$

Ακολουθώντας στη συνέχεια τα βήματα που παρουσιάστηκαν για την περίπτωση των ETM ρυθμών, βρίσκουμε πως οι κανονικοποιημένοι κυματαριθμοί αποκοπής των OTM ρυθμών υπολογίζονται από το ανάπτυγμα της σχέσης (2.44), όπου τα $x_1^{(2)}$ και $x_1^{(4)}$ βρίσκονται με εφαρμογή των σχέσεων (2.46) και (2.47), με τα $D_{nn}^{(0),(2),(4)}$ και $D_{n,n\pm 2}^{(2)}$ να αντικαθιστούν τα $C_{nn}^{(0),(2),(4)}$ και $C_{n,n\pm 2}^{(2)}$, αντιστοίχως.

2.3 ΤΕ ρυθμοί

2.3.1 Κατάστρωση προβλήματος

Η ανάλυση των ΤΕ ρυθμών είναι ανάλογη με αυτή της ενότητας 2.2 για τους ΤΜ ρυθμούς και για αυτό τον λόγο παρουσιάζεται με πιο συνοπτικό τρόπο. Για τους ΤΕ ρυθμούς ισχύει $E_z = 0$, ενώ η διαμήκης συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου έχει τη μορφή

$$H_z(\xi, \eta, z) = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} [C_{1,i} J e_i(h', \cosh \xi) + C_{2,i} Y e_i(h', \cosh \xi)] S e_i(h', \cos \eta) + \sum_{i=1}^{\infty} [D_{1,i} J o_i(h', \cosh \xi) + D_{2,i} Y o_i(h', \cosh \xi)] S o_i(h', \cos \eta) \right\} e^{j\beta z}, \quad (2.64)$$

όπου $C_{1,i}$, $C_{2,i}$, $D_{1,i}$, και $D_{2,i}$ είναι άγνωστοι συντελεστές ανάπτυξης.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την περίπτωση των TM ρυθμών, ικανοποιούμε αρχικά τη συνοριακή συνθήκη μηδενισμού της εφαπτομενικής συνιστώσας E_η του ηλεκτρικού πεδίου, στο ελλειπτικό σύνορο $\xi = \xi_0$. Από την εξίσωση Maxwell-Ampere προκύπτει πως η E_η είναι ανάλογη της παραγώγου $\partial H_z / \partial \xi$, και ικανοποιώντας τη συνοριακή συνθήκη $\partial H_z / \partial \xi = 0$ για $\xi = \xi_0$, η H_z τελικά γράφεται

$$H_z(\xi, \eta, z) = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} C_i [Je_i(h', \cosh \xi) + qe'_i Ye_i(h', \cosh \xi)] Se_i(h', \cos \eta) + \sum_{i=1}^{\infty} D_i [Jo_i(h', \cosh \xi) + qo'_i Yo_i(h', \cosh \xi)] So_i(h', \cos \eta) \right\} e^{j\beta z}, \quad (2.65)$$

με

$$qe'_i \equiv -Je'_i(h', \cosh \xi_0) / Ye'_i(h', \cosh \xi_0), \quad (2.66)$$

και

$$qo'_i \equiv -Jo'_i(h', \cosh \xi_0) / Yo'_i(h', \cosh \xi_0), \quad (2.67)$$

όπου Je'_i (Jo'_i) και Ye'_i (Yo'_i) είναι οι πρώτες παράγωγοι των άρτιων (περιττών) ακτινικών συναρτήσεων Mathieu πρώτου και δεύτερου είδους, αντιστοίχως, ως προς τη μεταβλητή ξ .

Στη συνέχεια, μετασχηματίζουμε την έκφραση της H_z σε κυκλικές κυλινδρικές συντεταγμένες και ικανοποιούμε τη συνοριακή συνθήκη για την εφαπτομενική συνιστώσα E_φ στο κυκλικό σύνορο του κυματοδηγού, λαμβάνοντας υπόψη πως αυτή είναι ανάλογη της παραγώγου $\partial H_z / \partial \rho$. Όπως και στην περίπτωση των TM ρυθμών, καταλήγουμε τελικά σε δύο άπειρα ομογενή συστήματα γραμμικών εξισώσεων:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{ni} C_i = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.68)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_{ni} D_i = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.69)$$

όπου οι δείκτες i και n είναι ταυτόχρονα άρτιοι ή περιττοί, και

$$c_{ni} = j^{n-i} B_n^e(h', i) [J'_n(x_2) + qe'_i Y'_n(x_2)], \quad (2.70)$$

$$d_{ni} = j^{n-i} B_n^o(h', i) [J'_n(x_2) + qo'_i Y'_n(x_2)], \quad (2.71)$$

όπου J'_n και Y'_n είναι οι πρώτες παράγωγοι των συναρτήσεων Bessel πρώτου και δεύτερου είδους, αντιστοίχως, ως προς το όρισμά τους.

Οι σχέσεις (2.68) και (2.69) αποτελούν δύο άπειρα ομογενή συστήματα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τους συντελεστές ανάπτυξης C_i και D_i , αντιστοίχως. Όπως και στην περίπτωση των TM ρυθμών, διαπιστώνουμε πως υπάρχει απεμπλοκή των συντελεστών C_i και D_i , και επομένως το σύστημα (2.68) αντιστοιχεί σε άρτιους TE ρυθμούς (ETE), ενώ

το σύστημα (2.69) σε περιττούς ΤΕ ρυθμούς (ΟΤΕ). Κατά τα γνωστά, προκειμένου τα δύο αυτά γραμμικά συστήματα να έχουν μη μηδενική λύση, θα πρέπει οι αντίστοιχες ορίζουσες να είναι ίσες με μηδέν, το οποίο σε συμβολική μορφή γράφεται

$$\det(c) = 0, \quad (2.72)$$

και

$$\det(d) = 0, \quad (2.73)$$

για τα συστήματα (2.68) και (2.69), αντιστοίχως.

Και σε αυτή την περίπτωση, ο κυματαριθμός αποκοπής k_c υπεισέρχεται στις (2.72) και (2.73) μέσω των σχέσεων (2.70) και (2.71). Ο υπολογισμός των ριζών των μη γραμμικών εξισώσεων (2.72) και (2.73) μας δίνει τους κυματαριθμούς αποκοπής των ΤΕ ρυθμών. Όταν η εκκεντρότητα h του ελλειπτικού συνόρου του κυματοδηγού περιοριστεί σε μικρές τιμές, είναι δυνατός ο υπολογισμός των k_c σε κλειστή μορφή, όπως θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

2.3.2 Λύση για μικρές εκκεντρότητες

Η λύση είναι ανάλογη αυτής που παρουσιάστηκε στην ενότητα 2.2 για τους ΤΜ ρυθμούς. Επομένως, για μικρές τιμές της εκκεντρότητας h του ελλειπτικού συνόρου του κυματοδηγού, οι συντελεστές c_{ni} και d_{ni} των σχέσεων (2.70) και (2.71) γράφονται ως δυναμοσειρές του h . Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του αναπτύγματος σε δυνάμεις του h των συντελεστών $B_n^{e,o}(h', i)$, καθώς και των ποσοτήτων qe'_i και qo'_i , που εμφανίζονται στις εκφράσεις των c_{ni} και d_{ni} . Για την ανάλυση μας διατηρούμε όρους μέχρι τάξης h^4 . Εξετάζουμε χωριστά τους ΕΤΕ και ΟΤΕ ρυθμούς.

Άρτιοι ρυθμοί (ΕΤΕ)

Για την εύρεση του αναπτύγματος του όρου qe'_i της (2.66), χρησιμοποιούμε τη σχέση (1.7) για τις άρτιες ακτινικές συναρτήσεις Mathieu, διατηρώντας τους συντελεστές B_n^e των οποίων τα αναπτύγματα περιέχουν όρους μέχρις τάξης h^4 , οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} Je'_i(h', \cosh \xi_0) &\equiv \frac{dJe_i(h', \cosh \xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} h' \sinh \xi_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n-i}{2}} B_n^e(h', i) J'_n(h' \cosh \xi_0) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} h' \sinh \xi_0 [\Sigma_i^{(0)}(x_1) + \Sigma_i^{(2)}(x_1)h^2 + \Sigma_i^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6)] B_i^e(h', i), \end{aligned} \quad (2.74)$$

με

$$\Sigma_i^{(0)}(x_1) = J'_i(x_1), \quad (2.75)$$

$$\Sigma_i^{(2)}(x_1) = -[\alpha_{2,0}^{e-} J'_{i-2}(x_1) + \alpha_{2,0}^{e+} J'_{i+2}(x_1)] x_1^2, \quad (2.76)$$

$$\Sigma_i^{(4)}(x_1) = [\alpha_{4,0}^{e-} J'_{i-4}(x_1) + \alpha_{4,0}^{e+} J'_{i+4}(x_1) - \alpha_{2,2}^{e-} J'_{i-2}(x_1) - \alpha_{2,2}^{e+} J'_{i+2}(x_1)] x_1^4. \quad (2.77)$$

Ομοίως, έχουμε πως

$$Ye'_i(h', \cosh \xi_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} h' \sinh \xi_0 [T_i^{(0)}(x_1) + T_i^{(2)}(x_1)h^2 + T_i^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6)] B_i^e(h', i), \quad (2.78)$$

όπου τα $T_i^{(0),(2),(4)}$ προκύπτουν από τα αντίστοιχα $\Sigma_i^{(0),(2),(4)}$ των (2.75)–(2.77), με αντικατάσταση της παραγώγου της συνάρτησης Bessel J'_i από την παράγωγο της συνάρτησης Neumann Y'_i . Εργαζόμενοι με τρόπο ανάλογο με αυτόν που παρουσιάστηκε για το ανάπτυγμα του όρου qe_i , βρίσκουμε τελικά πως

$$qe'_i = -\frac{Je'_i(h', \cosh \xi_0)}{Ye'_i(h', \cosh \xi_0)} = \Lambda_i^{(0)}(x_1) + \Lambda_i^{(2)}(x_1)h^2 + \Lambda_i^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.79)$$

όπου για τα $\Lambda_i^{(0),(2),(4)}$ ισχύουν οι εκφράσεις (2.30)–(2.32) της ενότητας 2.2, με τα $\Sigma_i^{(0),(2),(4)}$ και $T_i^{(0),(2),(4)}$ τώρα να δίνονται από τις εκφράσεις της παρούσας ενότητας.

Έχοντας υπόψη την (2.79), οι συντελεστές c_{ni} που περιέχουν όρους μέχρι τάξης h^4 είναι οι c_{nn} , $c_{n,n\pm 2}$, και $c_{n,n\pm 4}$. Σε αναλογία με τις σχέσεις (2.38)–(2.40), οι συγκεκριμένοι συντελεστές γράφονται ως

$$c_{nn} = C_{nn}^{(0)}(x_1) + C_{nn}^{(2)}(x_1)h^2 + C_{nn}^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.80)$$

$$c_{n,n\pm 2} = C_{n,n\pm 2}^{(2)}(x_1)h^2 + C_{n,n\pm 2}^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.81)$$

$$c_{n,n\pm 4} = C_{n,n\pm 4}^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.82)$$

όπου, λαμβάνοντας και υπόψη πως $x_2 = x_1 R_2/R_1$, έχουμε

$$C_{nn}^{(0)}(x_1) = p_{nn}(x_1, x_2), \quad (2.83)$$

$$C_{nn}^{(2)}(x_1) = [p_{nn}(x_1, x_2)g_2^e + \Lambda_n^{(2)}(x_1)Y'_n(x_2)]x_1^2, \quad (2.84)$$

$$C_{nn}^{(4)}(x_1) = \left\{ p_{nn}(x_1, x_2)g_4^e + [\Lambda_n^{(4)}(x_1) + g_2^e \Lambda_n^{(2)}(x_1)]Y'_n(x_2) \right\} x_1^4, \quad (2.85)$$

$$C_{n,n\pm 2}^{(2)}(x_1) = -\alpha_{2,0}^{e\mp, n\pm 2} p_{n,n\pm 2}(x_1, x_2)x_1^2, \quad (2.86)$$

$$C_{n,n\pm 2}^{(4)}(x_1) = -\left\{ [\alpha_{2,0}^{e\mp, n\pm 2} g_2^{e, n\pm 2} + \alpha_{2,2}^{e\mp, n\pm 2}] p_{n,n\pm 2}(x_1, x_2) + \alpha_{2,0}^{e\mp, n\pm 2} \Lambda_{n\pm 2}^{(2)}(x_1)Y'_n(x_2) \right\} x_1^4, \quad (2.87)$$

$$C_{n,n\pm 4}^{(4)}(x_1) = \alpha_{4,0}^{e\mp, n\pm 4} p_{n,n\pm 4}(x_1, x_2)x_1^4, \quad (2.88)$$

και η ποσότητα $p_{ni}(x_1, x_2)$ στις παραπάνω σχέσεις ορίζεται ως

$$p_{ni}(x_1, x_2) \equiv J'_n(x_2) - \frac{J'_i(x_1)}{Y'_i(x_1)} Y'_n(x_2). \quad (2.89)$$

Όπως και στην περίπτωση των TM ρυθμών, για μικρές τιμές του h , οι κανονικοποιημένοι κυματαριθμοί αποκοπής της διάταξης μπορούν να γραφούν σε μορφή αναπτύγματος ως

$$x_1(h) = x_1^{(0)} + x_1^{(2)}h^2 + x_1^{(4)}h^4 + O(h^6), \quad (2.90)$$

όπου οι κυματαριθμοί $x_1^{(0)}$ αντιστοιχούν στους κυματαριθμούς αποκοπής των ΤΕ ρυθμών του κυκλικού ομοαξονικού κυματοδηγού ($h = 0$) και προκύπτουν ως ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης [107]:

$$J'_n(x_2^{(0)})Y'_n(x_1^{(0)}) - J'_n(x_1^{(0)})Y'_n(x_2^{(0)}) = 0 \quad \text{ή} \quad p_{nn}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 0, \quad x_2^{(0)} = x_1^{(0)}R_2/R_1. \quad (2.91)$$

Για τον υπολογισμό της ορίζουσας του συστήματος (2.68) σε κλειστή μορφή ακολουθείται η ίδια διαδικασία με την περίπτωση των ΤΜ ρυθμών. Με αυτό τον τρόπο, βρίσκουμε τελικά πως οι κανονικοποιημένοι κυματαριθμοί αποκοπής των ΕΤΕ ρυθμών υπολογίζονται από το ανάπτυγμα (2.90), όπου τα $x_1^{(2)}$ και $x_1^{(4)}$ προκύπτουν με εφαρμογή των σχέσεων (2.46) και (2.47), με τα $C_{nn}^{(0),(2),(4)}$ και $C_{n,n\pm 2}^{(2)}$ των (2.83)–(2.86).

Περιττοί ρυθμοί (ΟΤΕ)

Στην περίπτωση των ΟΤΕ ρυθμών, πρέπει να βρεθεί το ανάπτυγμα του όρου $q\alpha'_i$ της (2.67). Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε τη σχέση (1.8) για τις περιττές ακτινικές συναρτήσεις Mathieu, διατηρώντας τους συντελεστές B_n^o των οποίων τα αναπτύγματα περιέχουν όρους μέχρι τάξης h^4 , οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} Jo'_i(h', \cosh \xi_0) &\equiv \left. \frac{dJo_i(h', \cosh \xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-i}{2}} i B_n^o(h', i) \\ &\times \left[\frac{1}{\cosh^2 \xi_0} J_n(h' \cosh \xi_0) + \tanh \xi_0 h' \sinh \xi_0 J'_n(h' \cosh \xi_0) \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\Pi_i^{(0)}(x_1) + \Pi_i^{(2)}(x_1)h^2 + \Pi_i^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6)] B_i^o(h', i), \end{aligned} \quad (2.92)$$

όπου

$$\Pi_i^{(0)}(x_1) = ix_1 J'_i(x_1), \quad (2.93)$$

$$\Pi_i^{(2)}(x_1) = \left[\frac{iJ_i(x_1) - ix_1 J'_i(x_1)}{x_1^2} - (i-2)\alpha_{2,0}^- x_1 J'_{i-2}(x_1) - (i+2)\alpha_{2,0}^+ x_1 J'_{i+2}(x_1) \right] x_1^2, \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \Pi_i^{(4)}(x_1) &= \left\{ (i-4)\alpha_{4,0}^- x_1 J'_{i-4}(x_1) + (i+4)\alpha_{4,0}^+ x_1 J'_{i+4}(x_1) \right. \\ &\quad - (i-2) \left[\alpha_{2,0}^- \frac{J_{i-2}(x_1) - x_1 J'_{i-2}(x_1)}{x_1^2} + \alpha_{2,2}^- x_1 J'_{i-2}(x_1) \right] \\ &\quad \left. - (i+2) \left[\alpha_{2,0}^+ \frac{J_{i+2}(x_1) - x_1 J'_{i+2}(x_1)}{x_1^2} + \alpha_{2,2}^+ x_1 J'_{i+2}(x_1) \right] \right\} x_1^4. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Ομοίως, έχουμε πως

$$Yo'_i(h', \cosh \xi_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [P_i^{(0)}(x_1) + P_i^{(2)}(x_1)h^2 + P_i^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6)] B_i^o(h', i), \quad (2.96)$$

όπου τα $P_i^{(0),(2),(4)}$ προκύπτουν από τα αντίστοιχα $\Pi_i^{(0),(2),(4)}$ των (2.93)–(2.95), με αντικατάσταση της συνάρτησης Bessel J_i και της παραγώγου της J'_i από τη συνάρτηση Neumann

Y_i και την παράγωγο της Y_i' , αντιστοίχως. Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση του όρου qe_i' , βρίσκουμε τελικά πως

$$qo_i' = -\frac{Jo_i'(h', \cosh \xi_0)}{Yo_i'(h', \cosh \xi_0)} = K_i^{(0)}(x_1) + K_i^{(2)}(x_1)h^2 + K_i^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.97)$$

όπου για τα $K_i^{(0),(2),(4)}$ ισχύουν οι εκφράσεις (2.49)–(2.51) της ενότητας 2.2, με τα $\Pi_i^{(0),(2),(4)}$ και $P_i^{(0),(2),(4)}$ τώρα να δίνονται από τις εκφράσεις της παρούσας ενότητας.

Επομένως, οι συντελεστές d_{ni} που περιέχουν όρους μέχρι τάξης h^4 , είναι οι d_{nn} , $d_{n,n\pm 2}$, και $d_{n,n\pm 4}$. Σε αναλογία με τις σχέσεις (2.58)–(2.63), οι συγκεκριμένοι συντελεστές γράφονται ως

$$d_{nn} = D_{nn}^{(0)}(x_1) + D_{nn}^{(2)}(x_1)h^2 + D_{nn}^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.98)$$

$$d_{n,n\pm 2} = D_{n,n\pm 2}^{(2)}(x_1)h^2 + D_{n,n\pm 2}^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.99)$$

$$d_{n,n\pm 4} = D_{n,n\pm 4}^{(4)}(x_1)h^4 + O(h^6), \quad (2.100)$$

όπου, λαμβάνοντας και υπόψη πως $x_2 = x_1 R_2/R_1$, έχουμε

$$D_{nn}^{(0)}(x_1) = \frac{1}{n} p_{nn}(x_1, x_2), \quad (2.101)$$

$$D_{nn}^{(2)}(x_1) = \left[p_{nn}(x_1, x_2) g_2^o + \frac{1}{n} K_n^{(2)}(x_1) Y_n'(x_2) \right] x_1^2, \quad (2.102)$$

$$D_{nn}^{(4)}(x_1) = \left\{ p_{nn}(x_1, x_2) g_4^o + \left[\frac{1}{n} K_n^{(4)}(x_1) + g_2^o K_n^{(2)}(x_1) \right] Y_n'(x_2) \right\} x_1^4, \quad (2.103)$$

$$D_{n,n\pm 2}^{(2)}(x_1) = -\frac{1}{n \pm 2} \alpha_{2,0}^{o\mp, n\pm 2} p_{n,n\pm 2}(x_1, x_2) x_1^2, \quad (2.104)$$

$$D_{n,n\pm 2}^{(4)}(x_1) = -\left\{ \left[\alpha_{2,0}^{o\mp, n\pm 2} g_2^{o, n\pm 2} + \frac{1}{n \pm 2} \alpha_{2,2}^{o\mp, n\pm 2} \right] p_{n,n\pm 2}(x_1, x_2) + \frac{1}{n \pm 2} \alpha_{2,0}^{o\mp, n\pm 2} K_{n\pm 2}^{(2)}(x_1) Y_n'(x_2) \right\} x_1^4, \quad (2.105)$$

$$D_{n,n\pm 4}^{(4)}(x_1) = \frac{1}{n \pm 4} \alpha_{4,0}^{o\mp, n\pm 4} p_{n,n\pm 4}(x_1, x_2) x_1^4. \quad (2.106)$$

Και στην περίπτωση των ΟΤΕ ρυθμών, οι κανονικοποιημένοι κυματαριθμοί αποκοπής υπολογίζονται από το ανάπτυγμα της σχέσης (2.90), όπου τα $x_1^{(2)}$ και $x_1^{(4)}$ βρίσκονται με εφαρμογή των σχέσεων (2.46) και (2.47), με τα $D_{nn}^{(0),(2),(4)}$ και $D_{n,n\pm 2}^{(2)}$ των (2.101)–(2.104) να αντικαθιστούν τα $C_{nn}^{(0),(2),(4)}$ και $C_{n,n\pm 2}^{(2)}$, αντιστοίχως.

2.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

2.4.1 Γενικά

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για διάφορους κυματοδηγούμενους ρυθμούς υψηλότερης τάξης, στις διατάξεις των σχ. 2.1 και 2.2. Επιπλέον, εξετάζονται η ακρίβεια και η απόδοση της προσεγγιστικής τεχνικής που αναπτύχθηκε στις

ενότητες 2.2 και 2.3, μέσω της συγκρίσεως της με την ακριβή λύση του προβλήματος, η οποία παρουσιάστηκε στην [25].

Για την απόκτηση των κυματαριθμών αποκοπής εργαζόμαστε ως εξής: για συγκεκριμένο ${}^E_0\text{TM}_{nm}$ ρυθμό και δεδομένη τιμή του λόγου R_1/R_2 , υπολογίζεται αριθμητικά ο κυματαριθμός αποκοπής $x_1^{(0)} \equiv x_{1,nm}^{(0)}$ του αντίστοιχου TM_{nm} ρυθμού του κυκλικού ομοαξονικού κυματοδηγού, από τη χαρακτηριστική εξίσωση (2.45). Χρησιμοποιούμε τον διπλό δείκτη nm , όπου το n υποδηλώνει την τάξη του ρυθμού και το m τη m -οστή ρίζα ($m \geq 1$) της εξίσωσης (2.45). Στη συνέχεια, και για την περίπτωση των ${}^E\text{TM}_{nm}$ ρυθμών, ο όρος $x_{1,nm}^{(2)}$ υπολογίζεται από τον $x_{1,nm}^{(0)}$ με εφαρμογή της (2.46), ενώ ο όρος $x_{1,nm}^{(4)}$ υπολογίζεται από τους $x_{1,nm}^{(0)}$ και $x_{1,nm}^{(2)}$ με εφαρμογή της (2.47). Για την περίπτωση των ${}^O\text{TM}_{nm}$ ρυθμών η διαδικασία είναι η ίδια, με τη διαφορά πως στις (2.46) και (2.47) χρησιμοποιούνται τα $D_{nn}^{(0),(2),(4)}$ και $D_{n,n\pm 2}^{(2)}$ των σχέσεων (2.58)–(2.61) αντί των $C_{nn}^{(0),(2),(4)}$ και $C_{n,n\pm 2}^{(2)}$, όπως εξηγήθηκε στην ενότητα 2.2. Όμοια διαδικασία ακολουθείται και για τους ${}^E_0\text{TE}_{nm}$ ρυθμούς, μόνο που τώρα χρησιμοποιείται η χαρακτηριστική εξίσωση (2.91) για τον υπολογισμό του $x_{1,nm}^{(0)}$ του αντίστοιχου TE_{nm} ρυθμού του κυκλικού ομοαξονικού κυματοδηγού, ενώ στον υπολογισμό των $x_{1,nm}^{(2)}$ και $x_{1,nm}^{(4)}$ χρησιμοποιούνται τα $C_{nn}^{(0),(2),(4)}$, $C_{n,n\pm 2}^{(2)}$ και $D_{nn}^{(0),(2),(4)}$, $D_{n,n\pm 2}^{(2)}$ της ενότητας 2.3. Τότε, έχοντας στη διάθεση μας τα $x_{1,nm}^{(0)}$, $x_{1,nm}^{(2)}$ και $x_{1,nm}^{(4)}$, οι κανονικοποιημένοι κυματαριθμοί αποκοπής υπολογίζονται διατηρώντας όρους μέχρι τάξης h^4 στα αναπτύγματα (2.44) ή (2.90), τα οποία μπορούν να γραφούν ως

$$x_{1,nm}(h) = x_{1,nm}^{(0)} [1 + g_{nm}^{(2)} h^2 + g_{nm}^{(4)} h^4 + O(h^6)], \quad (2.107)$$

όπου $g_{nm}^{(2)} = x_{1,nm}^{(2)}/x_{1,nm}^{(0)}$ και $g_{nm}^{(4)} = x_{1,nm}^{(4)}/x_{1,nm}^{(0)}$. Οι συντελεστές $g_{nm}^{(2)}$ και $g_{nm}^{(4)}$ είναι ανεξάρτητοι της εκκεντρότητας h και δίνονται από απλές κλειστές σχέσεις, οι οποίες δεν περιλαμβάνουν στις εκφράσεις τους τις συναρτήσεις Mathieu. Είναι φανερό πως, από τη στιγμή που θα βρεθούν οι συντελεστές $g_{nm}^{(2)}$ και $g_{nm}^{(4)}$, οι κυματαριθμοί αποκοπής μπορούν να αποκτηθούν αμέσως από την (2.107), για κάθε μικρή τιμή της εκκεντρότητας h και για κάθε ρυθμό υψηλότερης τάξης, κάνοντας χρήση ενός απλού υπολογιστή χειρός. Αντιθέτως, οι διάφορες αριθμητικές τεχνικές απαιτούν επανάληψη της εκτέλεσης του αλγορίθμου που τις υλοποιεί, κάθε φορά που θεωρούμε μια διαφορετική τιμή του h .

Σημειώνεται πως οι κανονικοποιημένοι κυματαριθμοί αποκοπής δίνονται με αναφορά στο μήκος του εκάστοτε εσωτερικού συνόρου του κυματοδηγού—δηλ., $x_{nm} = k_{c,nm}R_1$ για τη γεωμετρία του σχ. 2.1, ενώ $x_{nm} = k_{c,nm}R_2$ για τη γεωμετρία του σχ. 2.2. Έτσι, $x_{nm} = x_{1,nm}$ για τον ελλειπτικό-κυκλικό κυματοδηγό και $x_{nm} = x_{2,nm}$ για τον κυκλικό-ελλειπτικό κυματοδηγό. Στη δεύτερη περίπτωση, ο κυματαριθμός υπολογίζεται από τη σχέση $x_{2,nm} = x_{1,nm}R_2/R_1$. Επιπλέον, επισημαίνεται πως η εκκεντρότητα h και ο λόγος R_1/R_2 προσδιορίζουν με μοναδικό τρόπο τη γεωμετρία του κυματοδηγού και η εκάστοτε τιμή του ξ_0 μπορεί να βρεθεί από τη σχέση $h = 1/\cosh \xi_0$.

Στους Πίνακες 2.1–2.4, δίνονται οι κυματαριθμοί αποκοπής $x_{1,nm}^{(0)}$ ($x_{2,nm}^{(0)}$) και οι συντελεστές $g_{nm}^{(2)}$ και $g_{nm}^{(4)}$ για τους δέκα πρώτους ${}^E_0\text{TM}_{nm}$ και ${}^E_0\text{TE}_{nm}$ ρυθμούς υψηλότερης τάξης, για τέσσερις διαφορετικές τιμές του λόγου R_1/R_2 . Εξετάζουμε και τα δύο είδη κυματοδηγών, με τον ελλειπτικό-κυκλικό να αντιστοιχεί σε λόγο $R_1/R_2 < 1$ και τον κυκλικό-ελλειπτικό σε $R_1/R_2 > 1$. Με τη βοήθεια των τιμών που δίνονται στους πίνακες, μπορούμε να εφαρ-

μόσουμε την (2.107), όπως περιγράφηκε παραπάνω, για να υπολογίσουμε τους κυματαριθμούς αποκοπής και να μελετήσουμε διάφορα χαρακτηριστικά των κυματοδηγών.

Είναι γνωστό πως σε ομοαξονικούς μεταλλικούς κυματοδηγούς, όπως οι διατάξεις των σχ. 2.1 και 2.2, ο εγκάρσιος ηλεκτρομαγνητικός ρυθμός (TEM) εμφανίζει κυματαριθμό αποκοπής $k_c=0$ και περιοχή λειτουργίας από το μηδέν έως την αποκοπή του πρώτου ρυθμού υψηλότερης τάξης. Σε αυτή την περίπτωση, η διάταξη χρησιμοποιείται ως γραμμή μεταφοράς και όχι ως κυματοδηγός, και το εύρος ζώνης λειτουργίας του TEM ρυθμού μπορεί να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από εκείνο του αντίστοιχου κυκλικού ομοαξονικού καλώδιου, αναλόγως των τιμών των $g_{nm}^{(2)}$ και $g_{nm}^{(4)}$. Για παράδειγμα, για την ελλειπτική-κυκλική διάταξη του Πίνακα 2.1, τα $g_{nm}^{(2)}$ και $g_{nm}^{(4)}$ του πρώτου ρυθμού υψηλότερης τάξης είναι θετικά και επομένως η αύξηση της εκκεντρότητας του ελλειπτικού συνόρου οδηγεί σε αύξηση του εύρους ζώνης λειτουργίας του TEM ρυθμού, σε σύγκριση με το αντίστοιχο κυκλικό ομοαξονικό καλώδιο. Αντιθέτως, για την κυκλική-ελλειπτική διάταξη του Πίνακα 2.2, τα $g_{nm}^{(2)}$ και $g_{nm}^{(4)}$ του πρώτου ρυθμού υψηλότερης τάξης είναι αρνητικά και επομένως η αύξηση της εκκεντρότητας οδηγεί σε μείωση του εύρους ζώνης λειτουργίας του TEM ρυθμού.

Για εφαρμογές κυματοδήγησης, μας ενδιαφέρουν οι ρυθμοί υψηλότερης τάξης που διαδίδονται στη διάταξη. Από τα αποτελέσματα των Πινάκων 2.1–2.4, διαπιστώνουμε πως οι τιμές των $g_{nm}^{(2)}$ και $g_{nm}^{(4)}$ είναι τέτοιες ώστε, για οποιαδήποτε μικρή τιμή του h , ο πρώτος ρυθμός υψηλότερης τάξης για τον ελλειπτικό-κυκλικό κυματοδηγό να είναι πάντα ο OTE_{11} , και δεύτερος ο ETE_{11} . Αντιθέτως, στον κυκλικό-ελλειπτικό κυματοδηγό η διαδοχή των δύο ρυθμών αντιστρέφεται. Οι παρατηρήσεις αυτές για τη διαδοχή των δύο πρώτων ρυθμών επιβεβαιώνονται και από άλλα αποτελέσματα που δεν παρουσιάζονται εδώ. Σημειώνουμε πως στον κυκλικό ομοαξονικό κυματοδηγό, οι δύο ρυθμοί ${}^E_0TE_{11}$ είναι εκφυλισμένοι στον βασικό ρυθμό TE_{11} [107]. Η εισαγωγή εκκεντρότητας στο σύνορο του κυματοδηγού έχει ως αποτέλεσμα την άρση του εκφυλισμού και τον διαχωρισμό σε ETE_{11} και OTE_{11} ρυθμούς. Για δεδομένη μικρή τιμή της εκκεντρότητας h , το εύρος μονορυθμικής λειτουργίας (single mode operation) των διατάξεων που εξετάζουμε μπορεί να προσδιοριστεί από τη διαφορά $\Delta k_c = k_{c2} - k_{c1}$, με k_{c2} τον κυματαριθμό αποκοπής του δεύτερου ρυθμού υψηλότερης τάξης και k_{c1} τον κυματαριθμό αποκοπής του πρώτου ρυθμού υψηλότερης τάξης. Τότε, το αντίστοιχο εύρος ζώνης μονορυθμικής λειτουργίας βρίσκεται από τη σχέση $\Delta f_c = \Delta k_c/[2\pi(\epsilon\mu)^{1/2}]$.

Πίνακας 2.1: $x_{1,nm}^{(0)}$, $g_{nm}^{(2)}$, και $g_{nm}^{(4)}$ για ελλειπτικό-κυκλικό κυματοδηγό με $R_1/R_2 = 1/5$.

No	Ρυθμός	$x_{1,nm}^{(0)}$	$g_{nm}^{(2)}$	$g_{nm}^{(4)}$
1	OTE_{11}	0.34102	0.012622	0.0055301
2	ETE_{11}	0.34102	0.055901	0.007595
3	OTE_{21}	0.60695	0.0061265	-0.00096746
4	ETE_{21}	0.60695	0.0061265	-6.2003e - 006
5	ETM_{01}	0.76319	-0.070298	-0.017446
6	${}^E_0TE_{31}$	0.83981	0.0007338	-0.00033316
7	OTM_{11}	0.84715	-0.067247	-0.0073892
8	ETE_{01}	0.84715	-0.044831	-0.01406
9	ETM_{11}	0.84715	-0.022416	-0.0062898
10	OTE_{12}	0.99217	-0.037669	9.8354e - 005

Πίνακας 2.2: $x_{2,nm}^{(0)}$, $g_{nm}^{(2)}$, και $g_{nm}^{(4)}$ για κυκλικό-ελλειπτικό κυματοδηγό με $R_1/R_2 = 5$.

No	Ρυθμός	$x_{2,nm}^{(0)}$	$g_{nm}^{(2)}$	$g_{nm}^{(4)}$
1	ETE ₁₁	0.34102	-0.0052356	-0.018526
2	OTE ₁₁	0.34102	0.43671	0.29441
3	ETE ₂₁	0.60695	0.24387	-0.017295
4	OTE ₂₁	0.60695	0.24387	0.1896
5	ETM ₀₁	0.76319	0.3203	0.18741
6	$\overset{E}{\circ}$ TE ₃₁	0.83981	0.24927	0.030959
7	ETM ₁₁	0.84715	0.14742	0.12259
8	ETE ₀₁	0.84715	0.29483	0.34874
9	OTM ₁₁	0.84715	0.44225	0.37624
10	ETE ₁₂	0.99217	0.11414	0.21972

Πίνακας 2.3: $x_{1,nm}^{(0)}$, $g_{nm}^{(2)}$, και $g_{nm}^{(4)}$ για ελλειπτικό-κυκλικό κυματοδηγό με $R_1/R_2 = 1/2$.

No	Ρυθμός	$x_{1,nm}^{(0)}$	$g_{nm}^{(2)}$	$g_{nm}^{(4)}$
1	OTE ₁₁	0.67734	-0.03199	0.026001
2	ETE ₁₁	0.67734	0.21599	0.042685
3	OTE ₂₁	1.3406	0.077991	0.0058876
4	ETE ₂₁	1.3406	0.077991	0.039677
5	$\overset{E}{\circ}$ TE ₃₁	1.9789	0.058359	0.0039719
6	$\overset{E}{\circ}$ TE ₄₁	2.5876	0.038406	-0.0083401
7	ETM ₀₁	3.1231	-0.25416	-0.30151
8	$\overset{E}{\circ}$ TE ₅₁	3.1695	0.02258	-0.012877
9	OTM ₁₁	3.1966	-0.35717	-0.023585
10	ETE ₀₁	3.1966	-0.23811	-0.31595

Πίνακας 2.4: $x_{2,nm}^{(0)}$, $g_{nm}^{(2)}$, και $g_{nm}^{(4)}$ για κυκλικό-ελλειπτικό κυματοδηγό με $R_1/R_2 = 2$.

No	Ρυθμός	$x_{2,nm}^{(0)}$	$g_{nm}^{(2)}$	$g_{nm}^{(4)}$
1	ETE ₁₁	0.67734	-0.11019	-0.13164
2	OTE ₁₁	0.67734	0.42619	0.32511
3	ETE ₂₁	1.3406	0.17201	0.063387
4	OTE ₂₁	1.3406	0.17201	0.12156
5	$\overset{E}{\circ}$ TE ₃₁	1.9789	0.19164	0.059960
6	$\overset{E}{\circ}$ TE ₄₁	2.5876	0.21159	0.035967
7	ETM ₀₁	3.1231	0.50416	-0.71908
8	$\overset{E}{\circ}$ TE ₅₁	3.1695	0.22742	0.022817
9	ETM ₁₁	3.1966	0.24406	-0.032698
10	ETE ₀₁	3.1966	0.48811	-0.52376

2.4.2 Έλεγχος ακρίβειας

Στη συνέχεια πραγματοποιούμε μια σειρά ελέγχων, για να διαπιστώσουμε την ακρίβεια της μεθόδου μας. Για τον σκοπό αυτό, τα αποτελέσματα της προσεγγιστικής λύσης που αναπτύχθηκε συγκρίνονται με αυτά μιας μεθόδου αναφοράς. Ως τέτοια επιλέγεται η ακριβής λύση του προβλήματος όπως αυτή παρουσιάστηκε στην [25], όπου υπολογίζονται οι κυματαριθμοί αποκοπής για την πιο γενική περίπτωση έκκεντρων μεταλλικών κυματοδηγών με ελλειπτικά τοιχώματα, κάνοντας χρήση των συναρτήσεων Mathieu και του προσθετικού τους θεωρήματος. Πιο συγκεκριμένα, στην [25] οι κυματαριθμοί αποκοπής βρίσκονται ως ρίζες μιας εξίσωσης σε μορφή ορίζουσας, η οποία επιλύεται με αριθμητικό τρόπο. Για τις ανάγκες της σύγκρισης, ορίζουμε το ποσοστιαίο σχετικό σφάλμα ως

$$\Pi\Sigma \equiv \left| \frac{x_{\text{app}} - x_{\text{ex}}}{x_{\text{ex}}} \right| \times 100\%, \quad (2.108)$$

όπου x_{app} η τιμή του κυματαριθμού όπως υπολογίζεται με την προσεγγιστική (approximate) μέθοδο από την κλειστή σχέση (2.107), και x_{ex} η αντίστοιχη τιμή που προκύπτει από την ακριβή (exact) λύση της [25]. Για τον υπολογισμό του κυματαριθμού μέσω της (2.107) θεωρούμε δύο περιπτώσεις: στην πρώτη διατηρούμε όρους μέχρι τάξης h^2 · στη δεύτερη χρησιμοποιείται το πλήρες ανάπτυγμα μέχρι τάξης h^4 . Κατ' αυτό τον τρόπο, μπορούμε να διαπιστώσουμε την επίπτωση που έχει η χρήση των όρων τέταρτης τάξης στη μείωση του σφάλματος. Οι έλεγχοι μας περιορίζονται στους δύο πρώτους ρυθμούς υψηλότερης τάξης, οι οποίοι είναι οι ${}^E\text{TE}_{11}$ όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Οι ρυθμοί αυτοί παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον σε πρακτικές εφαρμογές, καθώς καθορίζουν την περιοχή μονορυθμικής λειτουργίας του κυματοδηγού.

Αρχικά, θεωρούμε έναν ελλειπτικό-κυκλικό κυματοδηγό με $R_1/R_2 = 1/5$. Στο σχ. 2.3, απεικονίζεται το ποσοστιαίο σφάλμα $\Pi\Sigma$ για τον κυματαριθμό αποκοπής του πρώτου ρυθμού υψηλότερης τάξης ${}^E\text{TE}_{11}$, ως συνάρτηση της μεταβολής της εκκεντρότητας h . Αντιστοίχως, στο σχ. 2.4 δίνεται το $\Pi\Sigma$ για τον κυματαριθμό αποκοπής του δεύτερου ρυθμού υψηλότερης τάξης ${}^E\text{TE}_{11}$. Είναι φανερό πως όταν χρησιμοποιούμε τη λύση $O(h^2)$ το σφάλμα είναι μεγαλύτερο, σε σύγκριση με τη λύση $O(h^4)$. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τους όρους τέταρτης τάξης οδηγούμαστε σε μείωση του σφάλματος. Όπως είναι αναμενόμενο, η αύξηση της τιμής της εκκεντρότητας h οδηγεί και σε αύξηση του $\Pi\Sigma$, καθώς το ελλειπτικό σύνορο παύει να προσεγγίζει τον κύκλο, με αποτέλεσμα η ακρίβεια της προσεγγιστικής μεθόδου να υποβαθμίζεται. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει πως η παράμετρος h πρέπει να περιοριστεί σε ένα κατάλληλο εύρος μικρών τιμών, ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος μας με αξιόπιστα αποτελέσματα. Ωστόσο, η απαίτηση για μικρές τιμές της εκκεντρότητας δεν είναι τόσο περιοριστική, όπως συμπεραίνεται και από τα αποτελέσματα των σχημάτων. Συγκεκριμένα, η λύση κλειστής μορφής διατηρεί τα σφάλματα πολύ χαμηλά, τόσο για τον ${}^E\text{TE}_{11}$ όσο και για τον ${}^E\text{TE}_{11}$ ρυθμό, για ένα μεγάλο εύρος τιμών της παραμέτρου h . Ακόμα και για την τιμή $h = 0.9$, το $\Pi\Sigma$ είναι μικρότερο του 0.33% και για τους δύο ρυθμούς. Αυτό σημαίνει πως η μέθοδος μας μπορεί να χρησιμοποιηθεί με πολύ μικρό σφάλμα και για διατάξεις με πεπλατυσμένα ελλειπτικά σύνορα.

Η περίπτωση ενός κυκλικού-ελλειπτικού κυματοδηγού με $R_1/R_2 = 5$ εξετάζεται στα σχ. 2.5 και 2.6, όπου και πάλι δίνονται τα σφάλματα για τους δύο πρώτους ρυθμούς υψη-

λότερης τάξης—δηλ., τους ETE_{11} και $O TE_{11}$, αντιστοίχως. Σε αυτή την περίπτωση, μικρά σφάλματα κάτω του 0.43% παρατηρούνται για τον ETE_{11} ρυθμό για τιμές του h έως 0.7. Για τον $O TE_{11}$ ρυθμό, σφάλματα μικρότερα του 1.3% παρατηρούνται για τιμές του h έως 0.6. Επομένως, βλέπουμε πως και σε αυτή την περίπτωση ο περιορισμός σε μικρές τιμές της εκκεντρότητας h δεν είναι τόσο αυστηρός, αφού μπορούμε να υπολογίσουμε τους κυματοαριθμούς αποκοπής με πολύ μικρό σφάλμα για τιμές του h έως 0.6 ή 0.7.

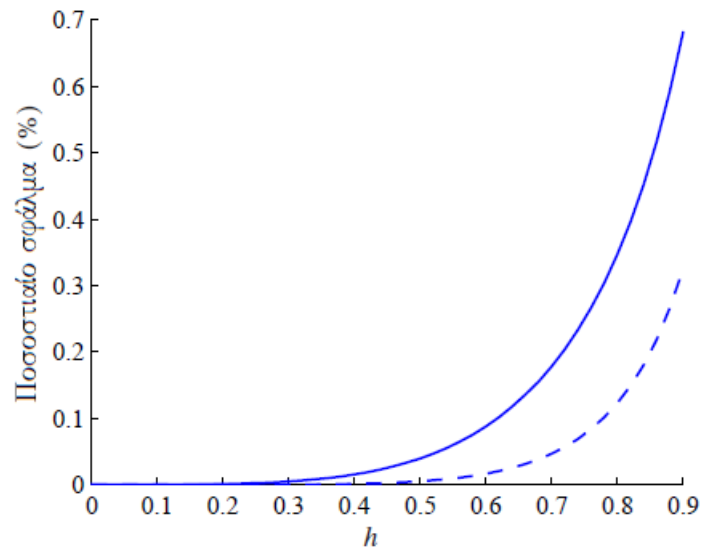
Ακολουθώντας, ελέγχουμε την ακρίβεια της μεθόδου μας για διαφορετικά μεγέθη του μεταλλικού πυρήνα του κυματοδηγού. Για τον σκοπό αυτό, υπολογίζουμε τα ποσοστιαία σφάλματα συναρτήσεως του λόγου R_1/R_2 , για τους δύο πρώτους ρυθμούς υψηλότερης τάξης και για τρεις διαφορετικές τιμές της εκκεντρότητας—δηλ., $h = 0.3, 0.4$, και 0.5 —, όπου ο υπολογισμός των κυματοαριθμών αποκοπής με την (2.107) γίνεται μέχρι τάξης h^4 . Η περίπτωση του ελλειπτικού-κυκλικού κυματοδηγού παρουσιάζεται στα σχ. 2.7 και 2.8, όπου απεικονίζονται αποτελέσματα για τον πρώτο ($O TE_{11}$) και τον δεύτερο (ETE_{11}) ρυθμό υψηλότερης τάξης, αντιστοίχως. Από τα σχήματα διαπιστώνεται πως αν και το ΠΣ αυξάνεται με την αύξηση του λόγου R_1/R_2 , διατηρείται παρ' όλα αυτά πολύ χαμηλό για ολόκληρο το υπό εξέταση εύρος τιμών του R_1/R_2 . Όπως είναι αναμενόμενο, η αύξηση της εκκεντρότητας οδηγεί και σε αύξηση του ΠΣ. Όμως το τελευταίο παραμένει μικρότερο από 0.07% και 0.1% για τον πρώτο και τον δεύτερο ρυθμό υψηλότερης τάξης, αντιστοίχως, για $h = 0.5$ και $R_1/R_2 = 0.7$.

Στα σχ. 2.9 και 2.10 δίνονται αποτελέσματα για την περίπτωση του κυκλικού-ελλειπτικού κυματοδηγού. Τώρα οι καμπύλες σχεδιάζονται συναρτήσεως του λόγου R_2/R_1 , προκειμένου να υπάρχει αντιστοιχία των οριζόντιων αξόνων με τα σχ. 2.7 και 2.8, και το ΠΣ να εξεταστεί για αύξηση του μεγέθους του πυρήνα. Βλέπουμε πως για $h = 0.3$ και 0.4 , το ΠΣ διατηρείται μικρότερο του 0.4% και για τους δύο ρυθμούς υψηλότερης τάξης, σε ολόκληρο το υπό εξέταση εύρος τιμών του R_2/R_1 . Για $h = 0.5$, μεγαλύτερες τιμές σφάλματος κάνουν την εμφάνιση τους καθώς ο λόγος R_2/R_1 λαμβάνει υψηλότερες τιμές. Συγκεκριμένα, για τον ETE_{11} ρυθμό το ΠΣ αρχίζει να γίνεται μεγαλύτερο από 0.5% για $R_2/R_1 \geq 0.6$, ενώ για τον $O TE_{11}$ ρυθμό το ΠΣ αρχίζει να γίνεται μεγαλύτερο του 0.5% για $R_2/R_1 \geq 0.5$. Διαφορετικά, όταν $h = 0.5$ και ο λόγος R_2/R_1 είναι μικρότερος από 0.6 ή 0.5, αντιστοίχως, τα σφάλματα διατηρούνται σε χαμηλά επίπεδα, κάτω του 0.5% για τους δύο πρώτους ρυθμούς υψηλότερης τάξης.

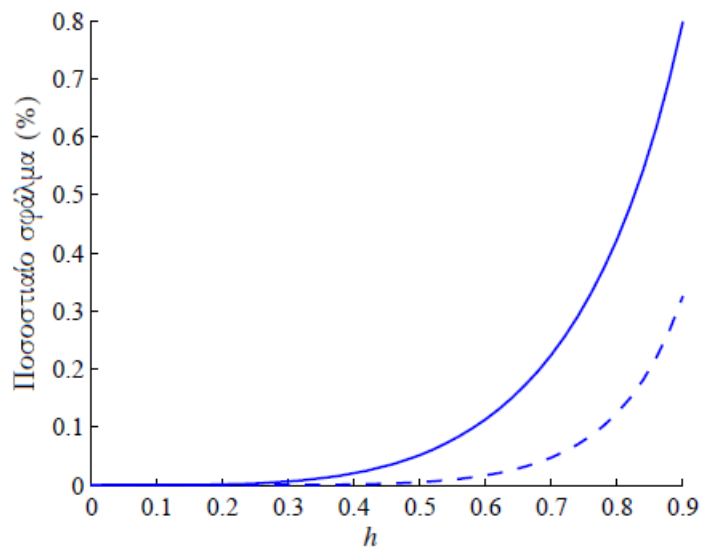
Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε πως η προτεινόμενη λύση κλειστής μορφής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί με ακρίβεια το μονορυθμικό εύρος λειτουργίας για μια μεγάλη ποικιλία των γεωμετρικών παραμέτρων των υπό εξέταση κυματοδηγών, ακόμα και για σχετικά μεγάλες τιμές της εκκεντρότητας του ελλειπτικού συνόρου.

2.4.3 Έλεγχος απόδοσης

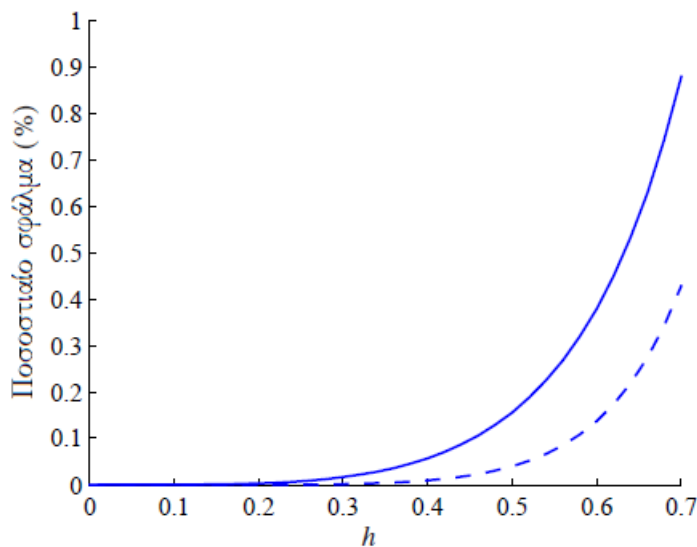
Σε ό,τι αφορά στην απόδοση, το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου μας σε σύγκριση με την ακριβή λύση της [25], ή οποιαδήποτε άλλη αριθμητική τεχνική, είναι η απλότητα της κλειστής σχέσης (2.107), η οποία την καθιστά πολύ αποδοτική—από πλευράς απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου—για τον προσδιορισμό των κυματοαριθμών αποκοπής. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η μέθοδος μας απαιτεί τον καθορισμό του λόγου R_1/R_2 και στη συνέχεια υπολογίζει τα $x_{1, nm}^{(0)}$, $g_{nm}^{(2)}$, και $g_{nm}^{(4)}$. Οι τιμές των τελευταίων αποκτούνται ταχύτατα με χρήση



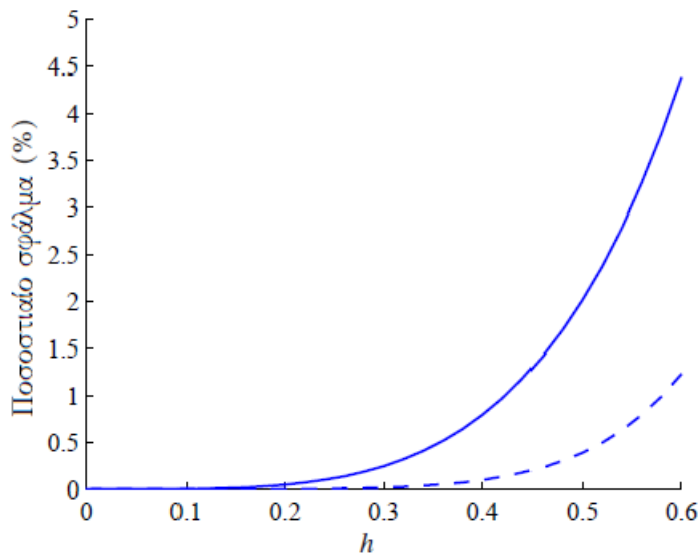
Σχήμα 2.3: Ελλειπτικός-κυκλικός κυματοδηγός με $R_1/R_2 = 1/5$: ποσοστιαίο σφάλμα για τον υπολογισμό του κυματαριθμού αποκοπής του $OT_{E_{11}}$ ρυθμού με την (2.107). Συνεχής γραμμή: όροι μέχρι $O(h^2)$. Διακεκομμένη γραμμή: όροι μέχρι $O(h^4)$.



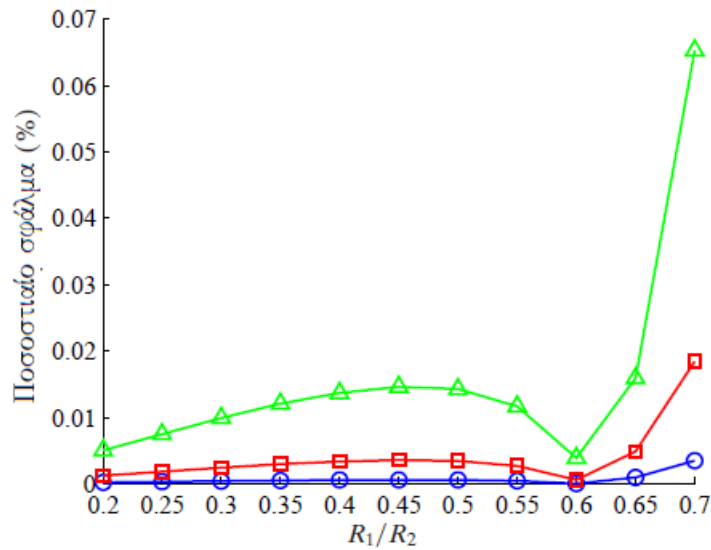
Σχήμα 2.4: Ελλειπτικός-κυκλικός κυματοδηγός με $R_1/R_2 = 1/5$: ποσοστιαίο σφάλμα για τον υπολογισμό του κυματαριθμού αποκοπής του $ET_{E_{11}}$ ρυθμού με την (2.107). Συνεχής γραμμή: όροι μέχρι $O(h^2)$. Διακεκομμένη γραμμή: όροι μέχρι $O(h^4)$.



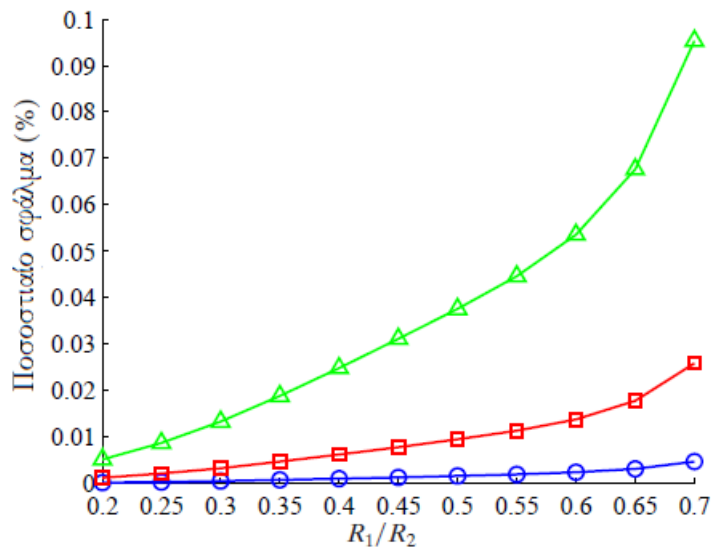
Σχήμα 2.5: Κυκλικός-ελλειπτικός κυματοδηγός με $R_1/R_2 = 5$: ποσοστιαίο σφάλμα για τον υπολογισμό του κυματαριθμού αποκοπής του $E\text{TE}_{11}$ ρυθμού με την (2.107). Συνεχής γραμμή: όροι μέχρι $O(h^2)$. Διακεκομμένη γραμμή: όροι μέχρι $O(h^4)$.



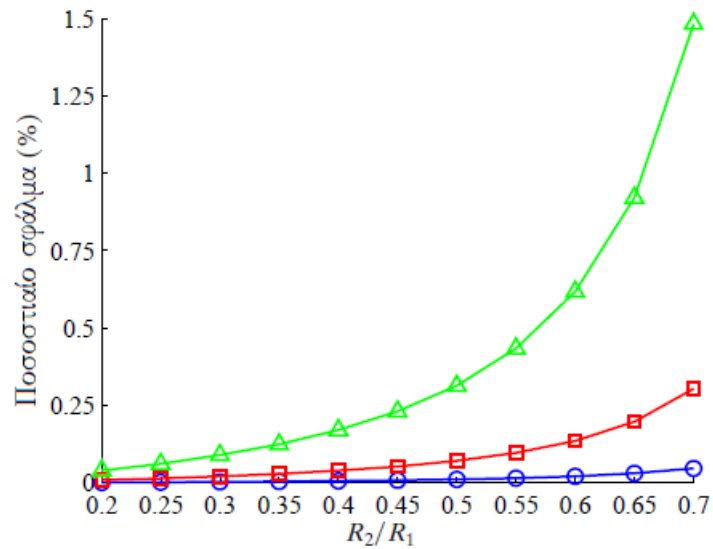
Σχήμα 2.6: Κυκλικός-ελλειπτικός κυματοδηγός με $R_1/R_2 = 5$: ποσοστιαίο σφάλμα για τον υπολογισμό του κυματαριθμού αποκοπής του $O\text{TE}_{11}$ ρυθμού με την (2.107). Συνεχής γραμμή: όροι μέχρι $O(h^2)$. Διακεκομμένη γραμμή: όροι μέχρι $O(h^4)$.



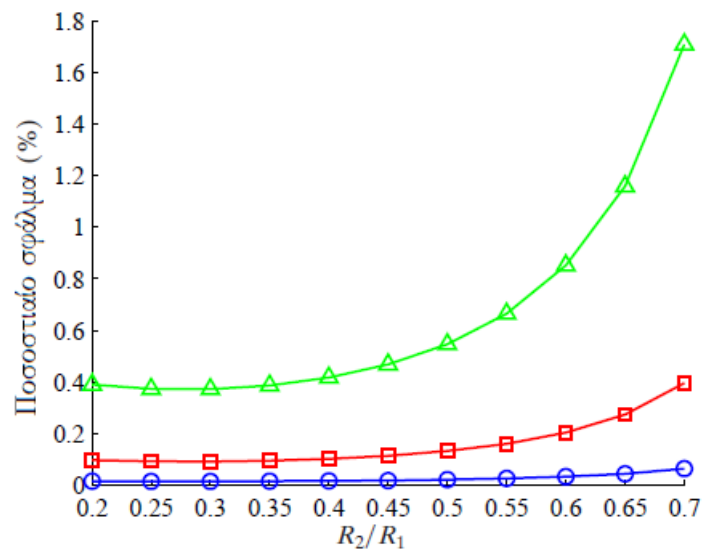
Σχήμα 2.7: Ελλειπτικός-κυκλικός κυματοδηγός: ποσοστιαίο σφάλμα για τον υπολογισμό του κυματαριθμού αποκοπής του OTE_{11} ρυθμού με την (2.107), συναρτήσεσι του λόγου R_1/R_2 . Μπλε γραμμή/κύκλοι: $h = 0.3$. Κόκκινη γραμμή/τετράγωνα: $h = 0.4$. Πράσινη γραμμή/τρίγωνα: $h = 0.5$.



Σχήμα 2.8: Ελλειπτικός-κυκλικός κυματοδηγός: ποσοστιαίο σφάλμα για τον υπολογισμό του κυματαριθμού αποκοπής του ETE_{11} ρυθμού με την (2.107), συναρτήσεσι του λόγου R_1/R_2 . Μπλε γραμμή/κύκλοι: $h = 0.3$. Κόκκινη γραμμή/τετράγωνα: $h = 0.4$. Πράσινη γραμμή/τρίγωνα: $h = 0.5$.



Σχήμα 2.9: Κυκλικός-ελλειπτικός κυματοδηγός: ποσοστιαίο σφάλμα για τον υπολογισμό του κυματαριθμού αποκοπής του TE_{11} ρυθμού με την (2.107), συναρτήσεως του λόγου R_2/R_1 . Μπλε γραμμή/κύκλοι: $h = 0.3$. Κόκκινη γραμμή/τετράγωνα: $h = 0.4$. Πράσινη γραμμή/τρίγωνα: $h = 0.5$.



Σχήμα 2.10: Κυκλικός-ελλειπτικός κυματοδηγός: ποσοστιαίο σφάλμα για τον υπολογισμό του κυματαριθμού αποκοπής του OTE_{11} ρυθμού με την (2.107), συναρτήσεως του λόγου R_2/R_1 . Μπλε γραμμή/κύκλοι: $h = 0.3$. Κόκκινη γραμμή/τετράγωνα: $h = 0.4$. Πράσινη γραμμή/τρίγωνα: $h = 0.5$.

Πίνακας 2.5: Χρόνος CPU (s) για τον υπολογισμό του κυματαριθμού αποκοπής του OTE_{11} ρυθμού του ελλειπτικού-κυκλικού κυματοδηγού, με χρήση της λύσης κλειστής μορφής και της ακριβούς λύσης της [25]. Τιμές παραμέτρων: $R_1/R_2 = 1/5$.

h	Χρόνος CPU κλειστής λύσης	Χρόνος CPU ακριβούς λύσης
0.3	0.02	1120
0.3, 0.5	0.02	2247
0.3(0.02)0.5	0.02	12330

απλών ρουτινών, σε ένα προγραμματιστικό περιβάλλον όπως το MATLAB. Ακολούθως, αρκεί η απλή εφαρμογή της (2.107) με την επιθυμητή τιμή του h , για τον υπολογισμό του κυματαριθμού $x_{1, nm}$. Από την άλλη, η ακριβής λύση απαιτεί τον καθορισμό του h και του λόγου R_1/R_2 εκ των προτέρων, προκειμένου να δώσει αποτελέσματα.

Στον Πίνακα 2.5, εξετάζουμε την απόδοση της μεθόδου μας σε σύγκριση με την αριθμητική λύση της [25], σε όρους απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου της κεντρικής μονάδας επεξεργασίας (central processing unit, CPU) ενός απλού επιτραπέζιου ηλεκτρονικού υπολογιστή, στον οποίο έχουν υλοποιηθεί προγραμματιστικά και οι δύο μέθοδοι. Η σύγκριση γίνεται για τον υπολογισμό του κυματαριθμού αποκοπής του πρώτου ρυθμού υψηλότερης τάξης, στην περίπτωση του ελλειπτικού-κυκλικού κυματοδηγού (OTE_{11} ρυθμός). Αρχικά, εξετάζεται μία τιμή της εκκεντρότητας h και βλέπουμε πως η μέθοδος μας χρειάζεται μόνο 0.02 s, ενώ η ακριβής λύση 1120 s. Επομένως, η κλειστή λύση παρουσιάζει μια μείωση του υπολογιστικού χρόνου κατά 56000 φορές σε σύγκριση με την ακριβή λύση. Η ίδια επίδοση επιτυγχάνεται και για άλλες τιμές του λόγου R_1/R_2 . Ο ελάχιστος χρόνος που απαιτεί η κλειστή λύση οφείλεται στην απλότητα της αλγεβρικής σχέσης (2.107). Αντιθέτως, η ακριβής λύση είναι χρονοβόρος στην εκτέλεση της, καθώς ο αριθμητικός αλγόριθμος της πρέπει να σαρώσει όλα τα αρχικά σημεία εντός ενός προκαθορισμένου διαστήματος, προκειμένου να υπολογίσει τη ρίζα που υπάρχει σε αυτό και αντιστοιχεί στον επιθυμητό κυματαριθμό αποκοπής του πρώτου ρυθμού υψηλότερης τάξης. Αν θεωρήσουμε δύο διαφορετικές τιμές της εκκεντρότητας h , ο απαιτούμενος χρόνος της μεθόδου μας δεν αλλάζει, ενώ η ακριβής λύση χρειάζεται τώρα 2247 s—δηλ., διπλάσιο χρόνο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως τα $g_{nm}^{(2)}$ και $g_{nm}^{(4)}$ είναι ανεξάρτητα της εκκεντρότητας και επομένως δεν χρειάζεται να υπολογιστούν ξανά για κάθε διαφορετική τιμή της, αλλά αρκεί η εφαρμογή της (2.107) με τη νέα τιμή του h . Αντιθέτως, η αριθμητική τεχνική της [25] πρέπει να εκτελεστεί εκ νέου για κάθε διαφορετική τιμή της εκκεντρότητας που θεωρούμε. Το πλεονέκτημα αυτό της μεθόδου μας καθίσταται ακόμα πιο εμφανές στην περίπτωση που επιθυμούμε να υπολογίσουμε τον κυματαριθμό αποκοπής για δεδομένο λόγο R_1/R_2 , αλλά για πολλές διαφορετικές τιμές του h . Έτσι, για $h = 0.3(0.02)0.5$ —δηλ., το h μεταβάλλεται από 0.3 έως 0.5 με βήμα 0.02, άρα 11 διαφορετικές τιμές του h —διαπιστώνουμε πως η μέθοδος μας χρειάζεται και πάλι 0.02 s, ενώ η ακριβής λύση 12330 s, και επομένως η κλειστή λύση επιτυγχάνει μια εντυπωσιακή μείωση του υπολογιστικού χρόνου κατά 616500 φορές.

Στον Πίνακα 2.6, παρουσιάζουμε την απόδοση της μεθόδου μας όταν υπολογίζεται μια ακολουθία ρυθμών. Συγκεκριμένα, για την ελλειπτική-κυκλική διάταξη και για δεδομένες τιμές της εκκεντρότητας h και του λόγου R_1/R_2 , υπολογίζονται οι κυματαριθμοί αποκο-

Πίνακας 2.6: Χρόνος CPU (s) για τον υπολογισμό των κυματαριθμών αποκοπής στο εύρος $x_{1, nm} \in [0.2, 1.6]$ για τον ελλειπτικό-κυκλικό κυματοδηγό, με χρήση της λύσης κλειστής μορφής και της ακριβούς λύσης της [25]. Τιμές παραμέτρων: $R_1/R_2 = 1/5$ και $h = 0.1$.

Τύπος ρυθμών	Χρόνος CPU κλειστής λύσης	Χρόνος CPU ακριβούς λύσης
${}^E_0\text{TM}_{nm}$	0.2	4053
${}^E_0\text{TE}_{nm}$	0.3	6196

πής όλων των ${}^E_0\text{TM}_{nm}$ ρυθμών, εντός του εύρους $x_{1, nm} \in [0.2, 1.6]$. Ο ίδιος υπολογισμός επαναλαμβάνεται για όλους τους ${}^E_0\text{TE}_{nm}$ ρυθμούς εντός του ίδιου εύρους. Και πάλι, διαπιστώνουμε πως η κλειστή λύση απαιτεί ελάχιστο χρόνο για να δώσει αποτελέσματα, σε αντίθεση με τη χρονοβόρο αριθμητική λύση της [25]. Σημειώνεται πως ο μεγαλύτερος υπολογιστικός χρόνος που απαιτεί η ακριβής λύση για την περίπτωση των ${}^E_0\text{TE}_{nm}$ ρυθμών, οφείλεται στον αριθμητικό υπολογισμό των παραγώγων των συναρτήσεων Mathieu.

Από την παραπάνω συζήτηση και τα αποτελέσματα των Πινάκων 2.5 και 2.6, γίνεται φανερό πως η μέθοδος μας είναι ανώτερη σε επίδοση σε σύγκριση με την ακριβή αριθμητική λύση, όσον αφορά στη μείωση του απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου για τον υπολογισμό των κυματαριθμών αποκοπής.

2.4.4 Σύγκριση με [30]

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, η εξαγωγή κλειστών σχέσεων για τον υπολογισμό των κυματαριθμών αποκοπής των διατάξεων που εξετάζουμε παρουσιάστηκε και στην [30], όπου οι συγγραφείς έδωσαν εκφράσεις μέχρι τάξης h^2 . Η παρούσα μελέτη αποτελεί επέκταση της [30], όπου τώρα περιλαμβάνονται και όροι τάξης h^4 , καθιστώντας την παρούσα κατάσταση πιο ακριβή.

Ωστόσο, πέρα από την επίτευξη μεγαλύτερης ακρίβειας με τις εκφράσεις που παρουσιάζουμε στην παρούσα διατριβή, μια προσεκτική εξέταση των σχέσεων που δίνονται στην [30], φανερώνει πως ορισμένες εξ αυτών δεν είναι ορθές. Τα σφάλματα στις σχέσεις της [30] εντοπίζονται σε δύο διαφορετικά σημεία. Καταρχάς, στις εξισώσεις (45)–(48) και (61) της [30] απουσιάζει ο όρος j^{m-i} στα αθροίσματα ως προς m [105]. Επιπλέον, ορισμένα από τα αναπτύγματα για τους συντελεστές $B_i^o(h, m)$ που δίνονται στην εξίσωση (A6) της [30] είναι εσφαλμένα. Πιο συγκεκριμένα, οι εκφράσεις που περιέχουν σφάλματα είναι αυτές από τον συντελεστή $B_2^o(h, 2)$ και εξής, όπου ο παράγοντας $1/i$ έχει παραλειφθεί. Για παράδειγμα, $B_2^o(h, 2) = 1 + h^2/24 + O(h^4)$ στην [30], ενώ η ορθή έκφραση είναι $B_2^o(h, 2) = 1/2 + h^2/48 + O(h^4)$. Αυτά τα λάθη μεταφέρονται και σε άλλα αναπτύγματα που υπάρχουν στην [30] και, κατά συνέπεια, οδηγούν σε σημαντικά σφάλματα στον υπολογισμό ορισμένων από τους κυματαριθμούς αποκοπής.

Στον Πίνακα 2.7, παρουσιάζεται η σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων της μεθόδου μας με αντίστοιχα της [30] και της ακριβούς λύσης [25], για τους κυματαριθμούς αποκοπής διαφόρων ρυθμών υψηλότερης τάξης. Και σε αυτή την περίπτωση, η [25] χρησιμοποιείται ως μέθοδος αναφοράς. Για τον υπολογισμό των κυματαριθμών με τις σχέσεις της [30], χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα (2.107) μέχρι τάξης h^2 με τις τιμές του όρου g_{nm} —αντιστοιχεί στον

Πίνακας 2.7: Σύγκριση των κυματαριθμών αποκοπής της παρούσας μελέτης με την [30] και την ακριβή λύση της [25]. Τιμές παραμέτρων: $h = 0.2$.

$x_{1,nm}$: Ελλειπτικός-κυκλικός κυματοδηγός με $R_1/R_2 = 2/3$.

Ρυθμός	Παρούσα μελέτη	[30]	[25]
OTE ₁₁	0.8006	0.8397	0.8006
ETE ₁₁	0.8167	0.8166	0.8167
OTE ₂₁	1.6147	1.6337	1.6147
ETE ₂₁	1.6151	1.6147	1.6151
OTE ₃₁	2.4165	2.4282	2.4165
ETE ₃₁	2.4165	2.4163	2.4165
OTE ₄₁	3.2113	3.2194	3.2113
ETE ₄₁	3.2113	3.2112	3.2113

$x_{2,nm}$: Κυκλικός-ελλειπτικός κυματοδηγός με $R_1/R_2 = 3/2$.

Ρυθμός	Παρούσα μελέτη	[30]	[25]
ETE ₁₁	0.7969	1.8935	0.7969
OTE ₁₁	0.8227	4.0704	0.8227
ETE ₂₁	1.6177	1.2724	1.6177
OTE ₂₁	1.6177	2.0109	1.6177
ETE ₃₁	2.4217	2.1690	2.4217
OTE ₃₁	2.4217	2.4048	2.4217
ETE ₄₁	3.2201	3.0054	3.2201
OTE ₄₁	3.2201	3.1158	3.2201

όρο $g_{nm}^{(2)}$ —που δίνονται στους σχετικούς πίνακες της [30]. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2.7, τα αποτελέσματα της [30] είναι προβληματικά, ειδικά για τις περιπτώσεις των περιπτών ρυθμών και του κυκλικού-ελλειπτικού κυματοδηγού. Αντιθέτως, τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος μας παρουσιάζουν απόλυτη συμφωνία με την ακριβή λύση, αποδεικνύοντας πως δύναται να υπολογίσει με ακρίβεια και τους κυματαριθμούς αποκοπής ρυθμών υψηλότερης τάξης από τους βασικούς ${}^E_0TE_{11}$. Τονίζεται πως η μη συμφωνία των αποτελεσμάτων της [30] με αυτά της [25] δεν οφείλεται μόνο στη μικρότερη ακρίβεια που συνεπάγεται η χρήση όρων μέχρι $O(h^2)$, αλλά και στα σφάλματα που εντοπίζονται στις σχέσεις της [30] και επισημάνθηκαν προηγουμένως.

Από τα παραπάνω, συμπεραίνεται πως η [30] δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον αξιόπιστο υπολογισμό των κυματαριθμών αποκοπής, και για τα δύο είδη των υπό εξέταση σύνθετων κυματοδηγών. Επομένως, η μέθοδος που παρουσιάζεται στην παρούσα διατριβή είναι η μοναδική υπάρχουσα τεχνική που επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό των κυματαριθμών αποκοπής σε κλειστή μορφή.

2.5 Συζήτηση και συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύχθηκε μια προσεγγιστική μέθοδος για τον υπολογισμό, σε κλειστή μορφή, των κυματαριθμών αποκοπής ομοαξονικών ελλειπτικών-κυκλικών και κυκλικών-

ελλειπτικών μεταλλικών κυματοδηγών. Συγκεκριμένα, εξήχθησαν απλές αλγεβρικές εκφράσεις για τους κυματοαριθμούς αποκοπής, οι οποίες ισχύουν για κάθε μικρή τιμή της εκκεντρότητας h του ελλειπτικού συνόρου του κυματοδηγού, για κάθε λόγο R_1/R_2 , και για κάθε ρυθμό υψηλότερης τάξης. Η προγραμματιστική υλοποίηση των εκφράσεων αυτών παρουσιάζει μεγάλη ευκολία και δεν απαιτεί τον αριθμητικό υπολογισμό των συναρτήσεων Mathieu.

Η επαλήθευση και ο έλεγχος της ακρίβειας της μεθόδου πραγματοποιήθηκαν μέσω της σύγκρισης με την ακριβή αριθμητική λύση του προβλήματος. Διαπιστώθηκε πως τα σφάλματα διατηρούνται σε πολύ χαμηλές τιμές, ακόμα και για πιο υψηλές τιμές του h —δηλ., όταν η διατομή του ελλειπτικού συνόρου διαφέρει αρκετά από την κυκλική. Ειδικά για την ελλειπτική-κυκλική διάταξη, η μέθοδος μας παρουσιάζει σφάλματα μικρότερα από 0.33% για εκκεντρότητες μέχρι την τιμή $h = 0.9$, για τους δύο πρώτους ρυθμούς υψηλότερης τάξης. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακό, καθώς η συγκεκριμένη τιμή της εκκεντρότητας αντιστοιχεί σε λόγο μεγάλου προς μικρό άξονα της ελλειπτικής διατομής του τοιχώματος του κυματοδηγού περίπου ίσο με 2.29. Από την άλλη, για την κυκλική-ελλειπτική διάταξη, τα σφάλματα είναι μικρότερα από 0.43% μέχρι την τιμή $h = 0.6$ για τον πρώτο ρυθμό υψηλότερης τάξης, και μικρότερα από 1.3% μέχρι την τιμή $h = 0.7$ για τον δεύτερο. Γενικά, παρατηρούμε πως μεγαλύτερα σφάλματα εμφανίζονται για πιο μικρές τιμές της εκκεντρότητας στην περίπτωση του κυκλικού-ελλειπτικού κυματοδηγού. Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να ερμηνευθεί αν ληφθεί υπόψη πως η λύση για μικρές εκκεντρότητες που αναπτύσσουμε, ισχύει καταρχήν για μικρές τιμές της παραμέτρου $h' = x_1 h$ (βλ. σχέση (2.23)) και όχι απευθείας της εκκεντρότητας h . Επειδή $x_1 = k_c R_1$, στην κυκλική-ελλειπτική διάταξη, το μεγαλύτερο σε μέγεθος εξωτερικό ελλειπτικό σύνορο σημαίνει μεγαλύτερες τιμές του x_1 και επομένως περιορισμό σε μικρότερες τιμές του h , ώστε να έχουμε μικρές τιμές του h' . Αντιθέτως, στην ελλειπτική-κυκλική διάταξη, το μικρότερο σε μέγεθος ελλειπτικό σύνορο συνεπάγεται μικρότερες τιμές του x_1 , οπότε το h μπορεί να λάβει υψηλότερες τιμές.

Η ακρίβεια της μεθόδου ελέγχθηκε και για ένα μεγάλο εύρος των γεωμετρικών παραμέτρων των κυματοδηγών, και διαπιστώθηκε πως—για λόγους R_1/R_2 και R_2/R_1 από 0.2 έως 0.7—τα σφάλματα παραμένουν σε πολύ χαμηλά επίπεδα, κάτω του 0.1% και του 1.8%, για τον ελλειπτικό-κυκλικό και τον κυκλικό-ελλειπτικό κυματοδηγό, αντιστοίχως. Επιπλέον συγκρίσεις έδειξαν πως, πέραν των βασικών ρυθμών ${}^E\text{TE}_{11}$, η μέθοδος μας μπορεί να υπολογίσει με επιτυχία και τους κυματοαριθμούς αποκοπής άλλων ρυθμών υψηλότερης τάξης. Σημειώνεται πως περαιτέρω αύξηση της ακρίβειας είναι δυνατή αν ληφθούν υπόψη στα αναπτύγματα όροι ανώτερης τάξης (h^6 και εξής), αλλά αυτό συνεπάγεται σημαντική επιπλέον αναλυτική προσπάθεια και πιο πολύπλοκες αλγεβρικές εκφράσεις των συντελεστών που θα προκύψουν.

Όσον αφορά στην απόδοση, η προσεγγιστική μέθοδος παρουσιάζει σαφές πλεονέκτημα σε σχέση με τις υπάρχουσες αριθμητικές τεχνικές, ειδικά στην περίπτωση που απαιτείται υπολογισμός για πολλαπλές τιμές της εκκεντρότητας. Αυτό οφείλεται στην απλότητα της αλγεβρικής σχέσης (2.107), στην οποία οι όροι $x_{1, nm}^{(0)}$, $g_{nm}^{(2)}$, και $g_{nm}^{(4)}$ είναι ανεξάρτητοι της εκκεντρότητας h . Επομένως, οι ποσότητες αυτές χρειάζεται να υπολογιστούν μόνο μία φορά και στη συνέχεια είναι διαθέσιμες για χρήση με κάθε μικρή τιμή του h . Έτσι, κάθε φορά που είναι απαραίτητος ο υπολογισμός ενός συγκεκριμένου κυματοαριθμού για μια νέα μικρή τιμή του h , η εφαρμογή της (2.107) δίνει αμέσως το νέο αποτέλεσμα. Ενδεικτικά, η

μέθοδος μας απαιτεί μόνο 0.02 s χρόνου CPU για τον υπολογισμό της αποκοπής του πρώτου ρυθμού υψηλότερης τάξης για μία ή πολλές τιμές της εκκεντρότητας, ενώ η ακριβής λύση έχει πολλαπλάσιες απαιτήσεις σε όρους υπολογιστικού χρόνου και ο αλγόριθμος που την υλοποιεί πρέπει να εκτελείται εκ νέου για κάθε διαφορετική τιμή της εκκεντρότητας.

Παράλληλα, αποσαφηνίστηκαν οι πηγές των σφαλμάτων σε μια προηγούμενη δημοσιευμένη εργασία, στην οποία χρησιμοποιήθηκε η ίδια μεθοδολογία, και της οποίας η παρούσα μελέτη αποτελεί επέκταση. Η ύπαρξη των σφαλμάτων αυτών, καθιστά τη μέθοδο που παρουσιάζεται στην παρούσα διατριβή τη μοναδική αξιόπιστη τεχνική για την εύρεση των κυματαριθμών αποκοπής σε κλειστή μορφή. Ως εκ τούτου, η μέθοδος μας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ταχύ και ακριβή υπολογισμό των κυματαριθμών αποκοπής σύνθετων ομοαξονικών κυματοδηγών, καθώς και για τη μελέτη της επίδρασης της ελλειπτικότητας ενός από τα σύνορα στα χαρακτηριστικά του κυματοδηγού. Επιπλέον, ως αναλυτική μέθοδος, δύναται να χρησιμοποιηθεί και ως μέθοδος αναφοράς για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων άλλων, αριθμητικών μεθόδων.

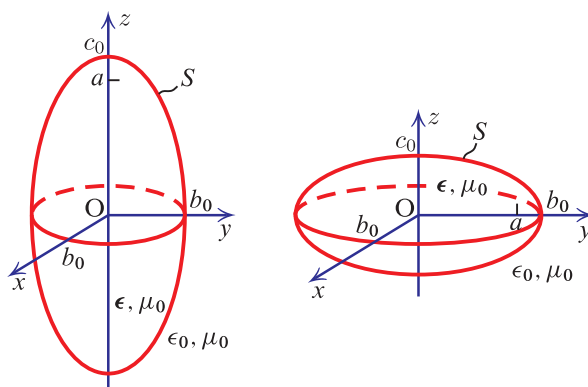
Η μελέτη που παρουσιάστηκε στο παρόν κεφάλαιο μπορεί να επεκταθεί στο πιο σύνθετο πρόβλημα του υπολογισμού των κυματαριθμών αποκοπής σε ομοαξονικούς κυματοδηγούς όπου και τα δύο τοιχώματα είναι ελλειπτικά με μικρή εκκεντρότητα. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να θεωρηθούν δύο εκκεντρότητες h_1 και h_2 (μία για κάθε ελλειπτικό σύνορο). Επίσης, υπάρχει η δυνατότητα της μελέτης της διάδοσης σε διατάξεις με συνδυασμό ελλειπτικών και κυκλικών συνόρων που περιέχουν διηλεκτρικές και αγώγιμες περιοχές, όπως, π.χ., οι γραμμές Goubau [108]. Τέλος, μια άλλη επέκταση έχει να κάνει με τη δυνατότητα εφαρμογής της προσεγγιστικής τεχνικής σε ελλειπτικούς μεταλλικούς κυματοδηγούς που πληρούνται με κατάλληλο ανισοτροπικό μέσο, για το οποίο υπάρχει η δυνατότητα διάδοσης TM και TE ρυθμών [109].

Κεφάλαιο 3

Σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από ανισοτροπικά σφαιροειδή σώματα

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται η σκέδαση επίπεδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από ανισοτροπικά σφαιροειδή σώματα. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε δύο είδη σφαιροειδών: α) το επίμηκες· β) το πεπλατυσμένο. Η γεωμετρία του κάθε σχεδαστή φαίνεται στο σχ. 3.1. Το επίμηκες (πεπλατυσμένο) σφαιροειδές έχει μεγάλο ημιάξονα μήκους c_0 (b_0), μικρό ημιάξονα μήκους b_0 (c_0), και εστιακή απόσταση $2a$. Η επιφάνεια S του σφαιροειδούς έχει εξίσωση $\xi = \xi_0$. Το σφαιροειδές αποτελείται από ανισοτροπικό μέσο του οποίου η επιτρεπτότητα έχει τη μορφή του τανυστή ϵ , ενώ η μαγνητική διαπερατότητα του θεωρείται ίση με εκείνη του ελεύθερου χώρου. Εξετάζουμε τις περιπτώσεις της μονοαξονικής (uniaxial), της διαξονικής (biaxial), και της γυροηλεκτρικής (gyroelectric) ανισοτροπίας, όπου το διαξονικό και το



Σχήμα 3.1: Ανισοτροπικά σφαιροειδή: επίμηκες (αριστερά) και πεπλατυσμένο (δεξιά).

γυροηλεκτρικό μέσο περιγράφονται από τους καρτεσιανούς τανυστές επιτρεπτότητας

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

και

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & -j\epsilon_2 & 0 \\ j\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

αντιστοίχως. Η περίπτωση του μονοαξονικού μέσου αποκτάται από τον διαξονικό ή τον γυροηλεκτρικό τανυστή θέτοντας $\epsilon_2 = \epsilon_1$ ή $\epsilon_2 = 0$, αντιστοίχως. Το μέσο που περιβάλλει το σφαιροειδές είναι ο ελεύθερος χώρος με επιτρεπτότητα ϵ_0 και μαγνητική διαπερατότητα μ_0 . Θεωρούμε αρμονική χρονική μεταβολή της μορφής $e^{-j\omega t}$.

Για την περιγραφή του σχήματος του σχεδαστή, είναι αναγκαίο να οριστεί μια παράμετρος που να χαρακτηρίζει πόσο επίμηκες ή πεπλατυσμένο είναι το σφαιροειδές. Έτσι, για το επίμηκες σφαιροειδές, ορίζουμε την εκκεντρότητα h ως τον λόγο της εστιακής απόστασης προς το μήκος του μεγάλου άξονα του σφαιροειδούς:

$$h \equiv \frac{2a}{2c_0} = \frac{1}{\xi_0}, \quad (3.3)$$

όπου το h παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$. Για $h = 0$ το σφαιροειδές μετατρέπεται σε σφαίρα, ενώ για $h = 1$ η επιφάνεια του εκφυλίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα $-a \leq z \leq a$, επί του άξονα z . Ενδιάμεσες τιμές του h , για c_0 σταθερό, αντιστοιχούν σε λιγότερο ή περισσότερο επίμηκη σφαιροειδή. Διατηρούμε την ίδια παράμετρο και για τον χαρακτηρισμό των πεπλατυσμένων σφαιροειδών, αν και σε αυτή την περίπτωση δεν αντιστοιχεί στον αυστηρό ορισμό της εκκεντρότητας, η οποία δίνεται από τον λόγο $1/(\xi_0^2 + 1)^{1/2}$. Για το πεπλατυσμένο σφαιροειδές, το h παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, \infty)$, όπου πάλι η τιμή $h = 0$ αντιστοιχεί σε σφαιρική επιφάνεια, ενώ για $h \rightarrow \infty$ η σφαιροειδής επιφάνεια εκφυλίζεται σε δίσκο ακτίνας $R = a$, επί του επιπέδου xy , με κέντρο την αρχή των αξόνων. Ενδιάμεσες τιμές του h , για c_0 σταθερό, αντιστοιχούν σε λιγότερο ή περισσότερο πεπλατυσμένα σφαιροειδή.

Δεδομένης της τιμής του h , ο λόγος του μεγάλου προς τον μικρό ημιάξονα—και κατ' επέκταση ο λόγος αξόνων—είναι $c_0/b_0 = (1-h^2)^{-1/2}$ για το επίμηκες, και $b_0/c_0 = (1+h^2)^{1/2}$ για το πεπλατυσμένο σφαιροειδές. Σημειώνουμε πως, παρότι το h δεν αντιστοιχεί ακριβώς στην εκκεντρότητα για την περίπτωση του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς, στο όριο $h \rightarrow 0$ και τα δύο είδη σφαιροειδών τείνουν στη σφαίρα ακτίνας $R = c_0 = b_0$. Αυτό μας επιτρέπει να διατηρήσουμε το h ως ενιαία παράμετρο, για μικρές τιμές της οποίας εφαρμόζεται η τεχνική διαταραχής που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

Σκοπός μας είναι η ανάπτυξη δύο ανεξάρτητων μεθόδων για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών σχέδασης του σφαιροειδούς στην περιοχή συντονισμού (resonance region)—δηλ., για διαστάσεις σχεδαστή συγκρίσιμες με το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η πρώτη μέθοδος είναι μια τεχνική πλήρους κύματος, η οποία χρησιμοποιεί τα σφαιροειδή ιδιοδιανύσματα για την κατάστροψη του προβλήματος. Έτσι, το

προσπίπτον και το σχεδαζόμενο πεδίο αναπτύσσονται σε όρους σφαιροειδών διανυσματικών κυματικών συναρτήσεων. Το επαγόμενο πεδίο στο εσωτερικό του ανισοτροπικού σχεδαστή, αρχικά αναπτύσσεται σε όρους σφαιρικών διανυσματικών κυματικών συναρτήσεων με διακριτούς κυματαριθμούς. Στη συνέχεια, το σφαιρικό ανάπτυγμα του επαγόμενου πεδίου μετασχηματίζεται σε ένα ισοδύναμο ανάπτυγμα σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων και ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια του σφαιροειδούς. Κατ' αυτό τον τρόπο, αποκτούμε ένα άπειρο σύστημα γραμμικών εξισώσεων για τους άγνωστους συντελεστές ανάπτυξης των πεδίων. Η αριθμητική επίλυση του συστήματος αυτού, επιτρέπει τον υπολογισμό ποσοτήτων όπως η διστατική διατομή ραντάρ και η ολική διατομή σκέδασης.

Η δεύτερη μέθοδος που χρησιμοποιούμε είναι μια ασυμπτωτική τεχνική, η οποία ισχύει για μικρές τιμές της εκκεντρότητας—δηλ., όταν το σχήμα του σφαιροειδούς προσεγγίζει το σφαιρικό. Προκειμένου να αποκτηθεί η λύση του προβλήματος, τα πεδία αναπτύσσονται σε όρους σφαιρικών ιδιοδιανυσμάτων και εφαρμόζεται μια μέθοδος διαταραχής του σφαιρικού συνόρου για την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών στην επιφάνεια του σφαιροειδούς. Με αυτό τον τρόπο, καταλήγουμε τελικά σε απλές αλγεβρικές εκφράσεις με τη γενική μορφή $S(h) = S^{(0)} [1 + g^{(2)}h^2 + g^{(4)}h^4 + O(h^6)]$ για τις διατομές σκέδασης, όπου ο όρος $S^{(0)}$ αντιστοιχεί στη σκέδαση από ανισοτροπική σφαίρα, ενώ οι εκφράσεις των συντελεστών $g^{(2)}$ και $g^{(4)}$ είναι ανεξάρτητες της εκκεντρότητας h και των σφαιροειδών συναρτήσεων.

Οι δύο μέθοδοι που αναπτύσσουμε στο παρόν κεφάλαιο, έχουν το κοινό γνώρισμα πως κάνουν χρήση ενός ειδικού αναπτύγματος σφαιρικών διανυσματικών ιδιοσυναρτήσεων για την περιγραφή των πεδίων στο εσωτερικό του ανισοτροπικού σφαιροειδούς. Η συγκεκριμένη προσέγγιση παρουσιάστηκε αρχικά για τον υπολογισμό της σκέδασης από σφαίρες με διάφορα είδη ανισοτροπίας [83–85], και βασίζεται στο ανάπτυγμα των πεδίων στην ανισοτροπική περιοχή σε όρους σφαιρικών ιδιοδιανυσμάτων με διακριτούς κυματαριθμούς. Οι τελευταίοι αποκτούνται από την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος ιδιοτιμών, του οποίου ο πίνακας εξαρτάται από τα στοιχεία του τανυστή επιτρεπτότητας.

Το κίνητρο για την παρούσα εργασία εντοπίζεται στην ανάγκη επέκτασης και των δύο μεθόδων (σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων και διαταραχής) σε ανισοτροπικά σφαιροειδή, ώστε να αποτελέσουν αξιόπιστα αριθμητικά εργαλεία για τη μελέτη σύγχρονων ηλεκτρομαγνητικών εφαρμογών όπως, π.χ., οι μαγνητο-οπτικές διατάξεις [77] ή οι ανισοτροπικές νανοκεραίες [78]. Έως τώρα, οι εργασίες που παρουσιάζουν λύσεις πλήρους κύματος για το πρόβλημα της σκέδασης κάνουν χρήση των σφαιροειδών συναρτήσεων, έχουν περιοριστεί στην εξέταση ισοτροπικών μέσων [40–42, 45, 47, 50]. Με την παρούσα διατριβή παρέχεται μια επέκταση σε ανισοτροπικά μέσα, η οποία συνεπάγεται την εισαγωγή στην κατάστρωση του προβλήματος του αστρόβιλου σφαιροειδούς ιδιοδιανύσματος, το οποίο δεν συναντάται σε προηγούμενες εργασίες. Ως εκ τούτου, το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει είναι διαφορετικό από εκείνα παλαιότερων εργασιών όπως η [42]. Από την άλλη, η μέθοδος της διαταραχής έχει εφαρμοστεί για ισοτροπικά σφαιροειδή στην [42], όπου εξήχθησαν αναλυτικές σχέσεις για τον υπολογισμό των συντελεστών $g^{(2)}$ και $g^{(4)}$, με αποτέλεσμα μια λύση κλειστής μορφής για το πρόβλημα της σκέδασης. Η επέκταση σε ανισοτροπικά σφαιροειδή που προτείνουμε στην παρούσα διατριβή διαφοροποιείται από την [42], καθώς δεν επιτρέπει την απόκτηση κλειστών εκφράσεων για τα $g^{(2)}$ και $g^{(4)}$. Αυτό συμβαίνει λόγω της ανάγκης αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος ιδιοτιμών που συνδέεται με την περιγραφή των πεδίων στην ανισοτροπική

περιοχή. Επομένως, οι αναλυτικοί τύποι της [42] (ή αντίστοιχοι με αυτούς) δεν είναι εφικτό να χρησιμοποιηθούν στην παρούσα περίπτωση και υιοθετείται μια διαφορετική προσέγγιση, που βασίζεται στη διαδοχική επίλυση γραμμικών συστημάτων διαφορετικών τάξεων.

Οι δύο μέθοδοι μπορούν να λειτουργήσουν συμπληρωματικά, παρουσιάζοντας η καθεμία τα πλεονεκτήματα της. Όσον αφορά στην ασυμπτωτική μέθοδο, το πλεονέκτημα της έγκειται στην απλότητα των προκύπτουσών αλγεβρικών σχέσεων για τις διατομές σκέδασης. Αυτό με τη σειρά του επιτρέπει την ταχεία απόκτηση αριθμητικών αποτελεσμάτων με ικανοποιητική ακρίβεια, στο κατάλληλο εύρος μικρών τιμών της εκκεντρότητας. Από την άλλη, η υλοποίηση της μεθόδου των σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων συνεπάγεται αυξημένο υπολογιστικό χρόνο, λόγω της ανάγκης αριθμητικού υπολογισμού των σφαιροειδών συναρτήσεων. Ωστόσο, σε αντίθεση με την ασυμπτωτική τεχνική, η μέθοδος αυτή έχει τη δυνατότητα να χειριστεί μεγαλύτερο εύρος τιμών της εκκεντρότητας, επιτρέποντας την εξέταση πιο επιμήκων/πεπλατυσμένων σωμάτων.

Το υπόλοιπο κεφάλαιο έχει την εξής δομή: στην ενότητα 3.2 λύνεται το πρόβλημα της σκέδασης με τη μέθοδο των σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων, ενώ η μέθοδος της διαταραχής ακολουθεί στην ενότητα 3.3. Στην ενότητα 3.4 παρουσιάζεται η επαλήθευση των δύο μεθόδων, διερευνάται η απόδοση τους, και δίνονται διάφορα αριθμητικά αποτελέσματα. Τέλος, στην ενότητα 3.5 συζητούνται διάφορα χαρακτηριστικά των δύο μεθόδων που αναπτύχθηκαν και εξάγονται συμπεράσματα.

3.2 Μέθοδος σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων

3.2.1 Επίμηκες σφαιροειδές

Θεωρούμε γραμμικά πολωμένο επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, το οποίο προσπίπτει στο επίμηκες σφαιροειδές του σχ. 3.1. Το επίπεδο πρόσπτωσης είναι το xz και η κατεύθυνση διάδοσης σχηματίζει γωνία θ_0 με τον θετικό ημιάξονα z . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις πρόσπτωσης: την TE, όπου το διάνυσμα του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετο στο επίπεδο πρόσπτωσης· την TM, όπου το διάνυσμα του προσπίπτοντος μαγνητικού πεδίου είναι κάθετο στο επίπεδο πρόσπτωσης.

TE πρόσπτωση

Στην περίπτωση της TE πρόσπτωσης, το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο έχει την έκφραση

$$\mathbf{E}^{\text{inc}} = \mathbf{e}_y e^{jk_b(x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0)}, \quad (3.4)$$

όπου $k_b = \omega(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}$ είναι ο κυματαριθμός του περιβάλλοντος (ελεύθερου) χώρου.¹ Η (3.4) μπορεί να γραφεί σε μορφή αναπτύγματος άρτιων/περιττών σφαιροειδών διανυσματικών κυματικών συναρτήσεων ως [102]:

$$\mathbf{E}^{\text{inc}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \left[c_{mn}(c_b, \theta_0) \mathbf{M}e_{mn}^{r(1)}(c_b, \mathbf{r}_s) + d_{mn}(c_b, \theta_0) \mathbf{N}o_{mn}^{r(1)}(c_b, \mathbf{r}_s) \right]. \quad (3.5)$$

¹Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό k_b αντί του πιο διαδεδομένου k_0 .

Στην (3.5), $\mathbf{r}_s = (\eta, \xi, \varphi)$ είναι το διάνυσμα θέσης στο σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων, $\mathbf{M}e_{mn}^{r(1)}$ και $\mathbf{N}o_{mn}^{r(1)}$ είναι τα άρτια και περιττά σφαιροειδή ιδιοδιανύσματα του πρώτου είδους, και $c_b = k_b a$. Οι συντελεστές ανάπτυξης c_{mn} και d_{mn} δίνονται από τις σχέσεις [102]:

$$c_{mn}(c, \theta_0) = \frac{-2\varepsilon_m j^n}{N_{mn}(c)} \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{d_r^{mn}(c)}{(r+m)(r+m+1)} \left. \frac{dP_{m+r}^m(\cos \theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0}, \quad (3.6)$$

$$d_{mn}(c, \theta_0) = \frac{4mj^{n-1}}{N_{mn}(c)} \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{d_r^{mn}(c)}{(r+m)(r+m+1)} \frac{P_{m+r}^m(\cos \theta_0)}{\sin \theta_0}, \quad (3.7)$$

όπου ε_m ο συντελεστής Neumann— $\varepsilon_0 = 1$ και $\varepsilon_m = 2$ για $m \geq 1$ —, P_n^m οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre τάξης m και βαθμού n , d_r^{mn} οι συντελεστές ανάπτυξης των σφαιροειδών γωνιακών συναρτήσεων του πρώτου είδους, και N_{mn} οι αντίστοιχοι συντελεστές κανονικοποίησης (βλ. ενότητα 1.3.2). Στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης θα χρησιμοποιηθούν μιγαδικά ιδιοδιανύσματα για την κατάστρωση του προβλήματος, καθώς οι εκφράσεις των πεδίων στην ανιστροπική περιοχή, στο εσωτερικό του σφαιροειδούς, έχουν μορφή αναπτύγματος μιγαδικών ιδιοδιανυσμάτων [84, 85], και προκειμένου να διευκολυνθούμε στην ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών στη συνέχεια. Για τον λόγο αυτό, προχωρούμε στην επαναδιατύπωση της (3.5) σε όρους μιγαδικών σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων και αποκτούμε το ανάπτυγμα

$$\mathbf{E}^{\text{inc}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \left[C_{mn}(c_b, \theta_0) \mathbf{M}_{mn}^{r(1)}(c_b, \mathbf{r}_s) + D_{mn}(c_b, \theta_0) \mathbf{N}_{mn}^{r(1)}(c_b, \mathbf{r}_s) \right], \quad (3.8)$$

όπου $\mathbf{M}_{mn}^{r(1)}$ και $\mathbf{N}_{mn}^{r(1)}$ είναι τα μιγαδικά σφαιροειδή ιδιοδιανύσματα του πρώτου είδους με $\mathbf{M}_{mn}^{r(1)} = \mathbf{M}e_{mn}^{r(1)} + j\mathbf{M}o_{mn}^{r(1)}$ και $\mathbf{N}_{mn}^{r(1)} = \mathbf{N}e_{mn}^{r(1)} + j\mathbf{N}o_{mn}^{r(1)}$, ενώ οι συντελεστές C_{mn} και D_{mn} δίνονται από τις σχέσεις

$$C_{mn}(c, \theta_0) = \begin{cases} \frac{c_{mn}(c, \theta_0)}{2} & m > 0, \\ c_{mn}(c, \theta_0) & m = 0, \\ \frac{c_{|m|n}(c, \theta_0)}{2} (-1)^{|m|} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} & m < 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

$$D_{mn}(c, \theta_0) = \begin{cases} \frac{-jd_{mn}(c, \theta_0)}{2} & m > 0, \\ 0 & m = 0, \\ \frac{jd_{|m|n}(c, \theta_0)}{2} (-1)^{|m|} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} & m < 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Το σχεδαζόμενο πεδίο γράφεται επίσης με τη μορφή σειράς σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων ως

$$\mathbf{E}^{\text{sc}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \left[A_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{r(3)}(c_b, \mathbf{r}_s) + B_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{r(3)}(c_b, \mathbf{r}_s) \right], \quad (3.11)$$

όπου $\mathbf{M}_{mn}^{r(3)}$ και $\mathbf{N}_{mn}^{r(3)}$ είναι τα μιγαδικά σφαιροειδή ιδιοδιανύσματα του τρίτου είδους, ενώ A_{mn} και B_{mn} είναι άγνωστοι συντελεστές ανάπτυξης.

Και για τους δύο ταυστές των σχέσεων (3.1) και (3.2), το επαγόμενο πεδίο στο εσωτερικό του σφαιροειδούς μπορεί να γραφεί σε μορφή αναπτύγματος σφαιρικών διανυσματικών κυματικών συναρτήσεων ως [84, 85]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{int}} = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \bar{E}_{mn} \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left[c_{mnl} \mathbf{m}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) + d_{mnl} \mathbf{n}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) + \frac{\bar{w}_{mnl}}{\lambda_l} \mathbf{l}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) \right] \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} a_l \frac{w_{00l}}{\lambda_l} \mathbf{l}_{00}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

όπου

$$\bar{E}_{mn} = j^n \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{n(n+1)(n+m)!}}, \quad (3.13)$$

ενώ $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ είναι το διάνυσμα θέσης στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων και $\mathbf{m}_{mn}^{(1)}$, $\mathbf{n}_{mn}^{(1)}$, $\mathbf{l}_{mn}^{(1)}$ είναι τα μιγαδικά σφαιρικά ιδιοδιανύσματα του πρώτου είδους [110], οι αναλυτικές εκφράσεις των οποίων δίνονται στη συνέχεια. Σημειώνεται πως στις αθροίσεις ως προς m και n στην (3.12), το ζεύγος $(m, n) = (0, 0)$ δεν λαμβάνεται υπόψη. Επιπλέον, a_l είναι άγνωστοι συντελεστές ανάπτυξης, ενώ τα c_{mnl} , d_{mnl} , \bar{w}_{mnl} , w_{00l} , και λ_l είναι γνωστές ποσότητες, οι οποίες προκύπτουν από την επίλυση ενός προβλήματος ιδιοτιμών [84, 85], όπως περιγράφεται με περισσότερες λεπτομέρειες στο Παράρτημα. Τα στοιχεία του πίνακα του προβλήματος ιδιοτιμών εξαρτώνται από τα στοιχεία του ταυστή επιτρεπτότητας (3.1) ή (3.2). Τέλος, οι διακριτοί κυματριθμοί k_l δίνονται από τη σχέση $k_l = \omega(\epsilon_s \mu_0 / \lambda_l)^{1/2}$, όπου $\epsilon_s = \epsilon_3$ ή $\epsilon_s = \epsilon_0$ για την περίπτωση του γυροηλεκτρικού ή του διαζονικού ταυστή, αντιστοίχως [84, 85].

Τα σφαιρικά ιδιοδιανύσματα $\mathbf{m}_{mn}^{(1)}$, $\mathbf{n}_{mn}^{(1)}$, και $\mathbf{l}_{mn}^{(1)}$ στην (3.12), δίνονται από τις σχέσεις [110]:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{mn}^{(1)}(k, \mathbf{r}) &= \sqrt{n(n+1)} j_n(kr) \mathbf{C}_{mn}(\theta, \varphi), \\ \mathbf{n}_{mn}^{(1)}(k, \mathbf{r}) &= n(n+1) \frac{j_n(kr)}{kr} \mathbf{P}_{mn}(\theta, \varphi) + \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{kr} \frac{d[rj_n(kr)]}{dr} \mathbf{B}_{mn}(\theta, \varphi), \\ \mathbf{l}_{mn}^{(1)}(k, \mathbf{r}) &= \frac{1}{k} \frac{dj_n(kr)}{dr} \mathbf{P}_{mn}(\theta, \varphi) + \sqrt{n(n+1)} \frac{j_n(kr)}{kr} \mathbf{B}_{mn}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (3.14)$$

όπου j_n είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel, ενώ

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{mn}(\theta, \varphi) &= \mathbf{e}_r P_n^m(\cos \theta) e^{jm\varphi}, \\ \mathbf{B}_{mn}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left[\frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{jm}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \mathbf{e}_\varphi \right] e^{jm\varphi}, \\ \mathbf{C}_{mn}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left[\frac{jm}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta - \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \mathbf{e}_\varphi \right] e^{jm\varphi}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

είναι τα αρμονικά σφαιρικά ιδιοδιανύσματα [103].

Στη συνέχεια, το ανάπτυγμα (3.12) του πεδίου στο εσωτερικό του σφαιροειδούς, μετασχηματίζεται σε ένα ανάπτυγμα σφαιροειδών διανυσματικών κυματικών συναρτήσεων, κάνο-

ντας χρήση των ακόλουθων σχέσεων που συνδέουν τα σφαιρικά με τα ομόκεντρα τους σφαιροειδή ιδιοδιανύσματα [111]:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) &= \sum_{\ell=|m|, |m|+1}^{\infty} \Gamma_{mnl}(c_l) \mathbf{M}_{m\ell}^{r(1)}(c_l, \mathbf{r}_s), \\ \mathbf{n}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) &= \sum_{\ell=|m|, |m|+1}^{\infty} \Gamma_{mnl}(c_l) \mathbf{N}_{m\ell}^{r(1)}(c_l, \mathbf{r}_s), \\ \mathbf{l}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) &= \sum_{\ell=|m|, |m|+1}^{\infty} \Gamma_{mnl}(c_l) \mathbf{L}_{m\ell}^{(1)}(c_l, \mathbf{r}_s), \end{aligned} \quad (3.16)$$

με

$$\Gamma_{mnl}(c) = \frac{2j^{\ell-n}}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{d_{n-|m|}^{m\ell}(c)}{N_{m\ell}(c)}, \quad (3.17)$$

και $c_l = k_l a$. Ο τόνος στο σύμβολο της άθροισης υποδηλώνει πως $\ell = |m|, |m| + 2, \dots$, όταν η διαφορά $n - |m|$ είναι άρτια, ενώ $\ell = |m| + 1, |m| + 3, \dots$, όταν η διαφορά $n - |m|$ είναι περιττή. Το μιγαδικό σφαιροειδές ιδιοδιάνυσμα του πρώτου είδους $\mathbf{L}_{m\ell}^{(1)}$ αποτελεί την αστρόβιλη λύση της ομογενούς διανυσματικής εξίσωσης Helmholtz. Εφαρμόζοντας την (3.16), η (3.12) αποκτά τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{int}} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left[C_{mnl} \mathbf{M}_{mn}^{r(1)}(c_l, \mathbf{r}_s) + D_{mnl} \mathbf{N}_{mn}^{r(1)}(c_l, \mathbf{r}_s) + \frac{\bar{W}_{mnl}}{\lambda_l} \mathbf{L}_{mn}^{(1)}(c_l, \mathbf{r}_s) \right] \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_l \frac{w_{00\ell}}{\lambda_l} \Gamma_{00\ell}(c_l) \mathbf{L}_{0\ell}^{(1)}(c_l, \mathbf{r}_s), \end{aligned} \quad (3.18)$$

όπου τα C_{mnl} , D_{mnl} , και \bar{W}_{mnl} προκύπτουν από τα c_{mnl} , d_{mnl} , και \bar{w}_{mnl} , αντιστοίχως, με χρήση της σχέσης

$$\frac{C_{mnl}}{D_{mnl}} = \sum_{\ell=0,1}^{\infty} \bar{E}_{m,|m|+\ell} \Gamma_{m,|m|+\ell,n}(c_l) \frac{c_{m,|m|+\ell,l}}{d_{m,|m|+\ell,l}} \cdot \frac{1}{\bar{w}_{m,|m|+\ell,l}}. \quad (3.19)$$

Τα μαγνητικά πεδία \mathbf{H}^{inc} , \mathbf{H}^{sc} , και \mathbf{H}^{int} προκύπτουν από τις εκφράσεις (3.8), (3.11), και (3.18), αντιστοίχως, κάνοντας χρήση της εξίσωσης Maxwell-Faraday $\mathbf{H} = -j/(\omega\mu)\nabla \times \mathbf{E}$ και των ιδιοτήτων των σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων. Έτσι έχουμε

$$\mathbf{H}^{\text{inc}} = -\frac{jk_b}{\omega\mu_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \left[D_{mn}(c_b, \theta_0) \mathbf{M}_{mn}^{r(1)}(c_b, \mathbf{r}_s) + C_{mn}(c_b, \theta_0) \mathbf{N}_{mn}^{r(1)}(c_b, \mathbf{r}_s) \right], \quad (3.20)$$

$$\mathbf{H}^{\text{sc}} = -\frac{jk_b}{\omega\mu_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \left[B_{mn} \mathbf{M}_{mn}^{r(3)}(c_b, \mathbf{r}_s) + A_{mn} \mathbf{N}_{mn}^{r(3)}(c_b, \mathbf{r}_s) \right], \quad (3.21)$$

$$\mathbf{H}^{\text{int}} = -\frac{j}{\omega\mu_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k_l a_l \left[D_{mnl} \mathbf{M}_{mn}^{r(1)}(c_l, \mathbf{r}_s) + C_{mnl} \mathbf{N}_{mn}^{r(1)}(c_l, \mathbf{r}_s) \right]. \quad (3.22)$$

Έχοντας στη διάθεση μας τα αναπτύγματα των πεδίων, προχωρούμε στην ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών για τη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού

και του μαγνητικού πεδίου στην επιφάνεια $\xi = \xi_0$ του σφαιροειδούς. Κατ' αυτό τον τρόπο, αποκτούμε τέσσερις βαθμωτές εξισώσεις για τις εφαπτομενικές πεδιακές συνιστώσες, ως εξής:

$$E_{\eta}^{\text{inc}}(\eta, \xi_0, \varphi) + E_{\eta}^{\text{sc}}(\eta, \xi_0, \varphi) = E_{\eta}^{\text{int}}(\eta, \xi_0, \varphi), \quad (3.23)$$

$$E_{\varphi}^{\text{inc}}(\eta, \xi_0, \varphi) + E_{\varphi}^{\text{sc}}(\eta, \xi_0, \varphi) = E_{\varphi}^{\text{int}}(\eta, \xi_0, \varphi), \quad (3.24)$$

$$H_{\eta}^{\text{inc}}(\eta, \xi_0, \varphi) + H_{\eta}^{\text{sc}}(\eta, \xi_0, \varphi) = H_{\eta}^{\text{int}}(\eta, \xi_0, \varphi), \quad (3.25)$$

$$H_{\varphi}^{\text{inc}}(\eta, \xi_0, \varphi) + H_{\varphi}^{\text{sc}}(\eta, \xi_0, \varphi) = H_{\varphi}^{\text{int}}(\eta, \xi_0, \varphi). \quad (3.26)$$

Οι πλήρεις εκφράσεις των (3.23)–(3.26) είναι μακροσκελείς και δεν παρατίθενται για λόγους συντομίας. Οι εκφράσεις αυτές περιέχουν τις σφαιροειδείς κυματικές συναρτήσεις και πρέπει να ισχύουν για κάθε τιμή των συντεταγμένων η και φ , στο αντίστοιχο εύρος $-1 \leq \eta \leq 1$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$. Λαμβάνοντας υπόψη το ανάπτυγμα (1.47) για τις σφαιροειδείς γωνιακές συναρτήσεις Legendre $P_n^m(\eta)$ και των εκθετικών συναρτήσεων $e^{jm\varphi}$, μπορούμε με κατάλληλους και εκτεταμένους χειρισμούς των (3.23)–(3.26) να επιτύχουμε την άρση της εξάρτησης από τις μεταβλητές η και φ . Κατ' αυτό τον τρόπο, οδηγούμαστε τελικά σε ένα άπειρο σύστημα μη ομογενών γραμμικών εξισώσεων για τον υπολογισμό των συντελεστών A_{mn} , B_{mn} , και a_l . Το σύστημα συγκροτείται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=|m|}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left[K_{mns}^{(1)}(c_l) C_{mnl} + j\Lambda_{mns}^{(1)}(c_l, x_l) D_{mnl} + j\Pi_{mns}^{(1)}(c_l, x_l) \frac{\bar{W}_{mnl}}{\lambda_l} \right] \\ & + \delta_{m0} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_l \frac{w_{00\ell}}{\lambda_l} \Gamma_{00\ell}(c_l) \Pi_{0\ell s}^{(1)}(c_l, x_l) - \sum_{n=|m|}^{\infty} \left[K_{mns}^{(3)}(c_b) A_{mn} + j\Lambda_{mns}^{(3)}(c_b, x_b) B_{mn} \right] \\ & = \sum_{n=|m|}^{\infty} \left[K_{mns}^{(1)}(c_b) C_{mn}(c_b, \theta_0) + j\Lambda_{mns}^{(1)}(c_b, x_b) D_{mn}(c_b, \theta_0) \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=|m|}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left[K'_{mns}{}^{(1)}(c_l) C_{mnl} + j\Lambda'_{mns}{}^{(1)}(c_l, x_l) D_{mnl} + j\Pi'_{mns}{}^{(1)}(c_l, x_l) \frac{\bar{W}'_{mnl}}{\lambda_l} \right] \\ & - \sum_{n=|m|}^{\infty} \left[K'_{mns}{}^{(3)}(c_b) A_{mn} + j\Lambda'_{mns}{}^{(3)}(c_b, x_b) B_{mn} \right] \\ & = \sum_{n=|m|}^{\infty} \left[K'_{mns}{}^{(1)}(c_b) C_{mn}(c_b, \theta_0) + j\Lambda'_{mns}{}^{(1)}(c_b, x_b) D_{mn}(c_b, \theta_0) \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=|m|}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_l \frac{x_l}{x_b} \left[K_{mns}^{(1)}(c_l) D_{mnl} + j\Lambda_{mns}^{(1)}(c_l, x_l) C_{mnl} \right] - \sum_{n=|m|}^{\infty} \left[K_{mns}^{(3)}(c_b) B_{mn} + j\Lambda_{mns}^{(3)}(c_b, x_b) A_{mn} \right] \\ & = \sum_{n=|m|}^{\infty} \left[K_{mns}^{(1)}(c_b) D_{mn}(c_b, \theta_0) + j\Lambda_{mns}^{(1)}(c_b, x_b) C_{mn}(c_b, \theta_0) \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=|m|}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_l \frac{x_l}{x_b} \left[K'_{mns}(c_l) D_{mnl} + j \Lambda'_{mns}(c_l, x_l) C_{mnl} \right] - \sum_{n=|m|}^{\infty} \left[K'_{mns}(c_b) B_{mn} + j \Lambda'_{mns}(c_b, x_b) A_{mn} \right] \\
& = \sum_{n=|m|}^{\infty} \left[K'_{mns}(c_b) D_{mn}(c_b, \theta_0) + j \Lambda'_{mns}(c_b, x_b) C_{mn}(c_b, \theta_0) \right]. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, ο δείκτης m μεταβάλλεται από $-\infty$ έως ∞ και, για κάθε m , ο δείκτης s από $|m|$ έως ∞ . Επιπλέον, $x_b = k_b c_0$, $x_l = k_l c_0$, ενώ δ_{m0} στην (3.27) είναι το δέλτα του Kronecker. Οι αναλυτικές εκφράσεις των συντελεστών $K'_{mns}(1,3)$, $K'_{mns}(1,3)$, $\Lambda'_{mns}(1,3)$, και $\Lambda'_{mns}(1,3)$ έχουν εξαχθεί στην [69, βλ. εξισώσεις (5) έως (8)] και επαναλαμβάνονται εδώ για λόγους πληρότητας:

$$\begin{aligned}
K_{mns}^{(i)}(c) &= \frac{2m}{\xi_0^2 - 1} R_{mn}^{(i)}(c, \xi_0) N_{6,mns}(c) + \frac{m}{(\xi_0^2 - 1)^2} R_{mn}^{(i)}(c, \xi_0) N_{12,mns}(c) \\
&\quad - \frac{m}{\xi_0} R_{mn}^{(i)'}(c, \xi_0) N_{7,mns}(c), \tag{3.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{mns}^{(i)}(c, x) &= \frac{1}{x} \left\{ \left[R_{mn}^{(i)}(c, \xi_0) + \xi_0 R_{mn}^{(i)'}(c, \xi_0) \right] N_{1,mns}(c) + \left[\frac{3\xi_0^2 - 1}{(\xi_0^2 - 1)^2} R_{mn}^{(i)}(c, \xi_0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} R_{mn}^{(i)'}(c, \xi_0) \right] N_{2,mns}(c) + \left\{ \left[\frac{x^2}{\xi_0^2 - 1} + \frac{m^2}{(\xi_0^2 - 1)^2} - \frac{\lambda_{mn}(c)}{\xi_0^2 - 1} \right] R_{mn}^{(i)}(c, \xi_0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2\xi_0}{\xi_0^2 - 1} R_{mn}^{(i)'}(c, \xi_0) \right\} N_{3,mns}^\dagger(c) + \frac{x^2 - \lambda_{mn}(c)}{(\xi_0^2 - 1)^2} R_{mn}^{(i)}(c, \xi_0) N_{5,mns}^\dagger(c) \right\}, \tag{3.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K'_{mns}(i)(c) &= R_{mn}^{(i)}(c, \xi_0) N_{1,mns}(c) + \frac{2m^2}{\xi_0^2 - 1} R_{mn}^{(i)}(c, \xi_0) N_{0,mns}(c) \\
&\quad + \frac{m^2}{(\xi_0^2 - 1)^2} R_{mn}^{(i)}(c, \xi_0) N_{9,mns}(c) - \frac{1}{\xi_0} R_{mn}^{(i)'}(c, \xi_0) N_{3,mns}^\dagger(c), \tag{3.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda'_{mns}(i)(c, x) &= \frac{m}{x} \left\{ \left[\frac{3\xi_0^2 - 1}{(\xi_0^2 - 1)^2} R_{mn}^{(i)}(c, \xi_0) + \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} R_{mn}^{(i)'}(c, \xi_0) \right] N_{6,mns}^\dagger(c) + \left\{ \left[\frac{x^2}{\xi_0^2 - 1} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{m^2}{(\xi_0^2 - 1)^2} - \frac{\lambda_{mn}(c)}{\xi_0^2 - 1} \right] R_{mn}^{(i)}(c, \xi_0) + \frac{2\xi_0}{\xi_0^2 - 1} R_{mn}^{(i)'}(c, \xi_0) \right\} N_{7,mns}(c) \\
&\quad + \frac{x^2 - \lambda_{mn}(c)}{(\xi_0^2 - 1)^2} R_{mn}^{(i)}(c, \xi_0) N_{13,mns}(c) + \frac{1}{\xi_0^2 - 1} R_{mn}^{(i)}(c, \xi_0) N_{10,mns}(c) \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\xi_0^2 - 1} R_{mn}^{(i)}(c, \xi_0) N_{6,mns}(c) \right\}, \tag{3.34}
\end{aligned}$$

όπου $R_{mn}^{(i)}$ οι σφαιροειδείς ακτινικές συναρτήσεις του i -οστού είδους, $R_{mn}^{(i)'}$ οι αντίστοιχες παράγωγοι ως προς ξ , και λ_{mn} οι ιδιοτιμές της διαφορικής εξίσωσης (1.45). Στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης, εισάγονται στις εξισώσεις (3.27) και (3.28) οι νέοι συντελεστές $\Pi_{mns}^{(1)}$ και $\Pi'_{mns}(1)$, οι οποίοι οφείλονται στην παρουσία του αστρόβιλου ιδιοδιανύσματος $\mathbf{L}_{mn}^{(1)}$ στην (3.18). Σημειώνουμε πως οι συντελεστές αυτοί απουσιάζουν από τις αντίστοιχες εξισώσεις

της [42], αφού η λύση του ισοτροπικού προβλήματος δεν περιλαμβάνει το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{L}_{mn}^{(1)}$. Οι εκφράσεις των νέων συντελεστών έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned} \Pi_{mns}^{(1)}(c, x) = \frac{R_{mn}^{(1)}(c, \xi_0)}{x} & \left[N_{1,mns}(c) + \frac{m^2}{\xi_0^2 - 1} N_{0,mns}(c) + \frac{2}{\xi_0^2 - 1} N_{2,mns}(c) \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\xi_0^2 - 1)^2} N_{4,mns}(c) \right], \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\Pi'_{mns}(c, x) = \frac{R_{mn}^{(1)}(c, \xi_0)}{x} \left[\frac{m}{(\xi_0^2 - 1)^2} N_{12,mns}^\dagger(c) + \frac{2m}{\xi_0^2 - 1} N_{6,mns}^\dagger(c) + \frac{m}{\xi_0^2 - 1} N_{6,mns}(c) \right]. \quad (3.36)$$

Στις (3.31)–(3.36), τα διάφορα N και N^\dagger είναι ολοκληρώματα, οι αναλυτικές εκφράσεις των οποίων περιλαμβάνουν τους συντελεστές ανάπτυξης d_r^{mn} των σφαιροειδών γωνιακών συναρτήσεων και δίνονται στις [42, 69].

Το σύστημα εξισώσεων (3.27)–(3.30) λύνεται με αποκοπή (truncation)—δηλ., διατηρούμε πεπερασμένο αριθμό εξισώσεων με τον ίδιο αριθμό αγνώστων, αναλόγως των απαιτήσεων σε ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Με αυτό τον τρόπο, προσδιορίζονται οι αριθμητικές τιμές των άγνωστων συντελεστών ανάπτυξης A_{mn} , B_{mn} , και a_l . Επισημαίνεται πως αν και έχουμε τρία σύνολα αγνώστων, το σύστημα (3.27)–(3.30) συγχροτείται από τέσσερα σύνολα εξισώσεων. Ωστόσο, το διάνυσμα των συντελεστών a_l έχει διπλάσιο μέγεθος από τα αντίστοιχα των A_{mn} και B_{mn} , με αποτέλεσμα ο πίνακας του συστήματος που προκύπτει από την αποκοπή να είναι τετραγωνικός.

TM πρόσπτωση

Στην περίπτωση της TM πρόσπτωσης, το προσπίπτον μαγνητικό πεδίο έχει την έκφραση

$$\mathbf{H}^{\text{inc}} = \mathbf{e}_y \sqrt{\frac{\epsilon_b}{\mu_b}} e^{jk_b(x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0)}, \quad (3.37)$$

ενώ το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}^{inc} βρίσκεται στο επίπεδο πρόσπτωσης και το ανάπτυγμα του δίνεται από τη σχέση [40]:

$$\mathbf{E}^{\text{inc}} = j \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[d_{mn}(c_b, \theta_0) \mathbf{M}o_{mn}^{r(1)}(c_b, \mathbf{r}_s) + c_{mn}(c_b, \theta_0) \mathbf{N}e_{mn}^{r(1)}(c_b, \mathbf{r}_s) \right]. \quad (3.38)$$

Σε αυτή την περίπτωση, η λύση δίνεται και πάλι από τα τέσσερα σύνολα εξισώσεων (3.27)–(3.30), όπου οι αντικαταστάσεις $D_{mn}(c, \theta_0) \rightarrow jC_{mn}(c, \theta_0)$ και $C_{mn}(c, \theta_0) \rightarrow jD_{mn}(c, \theta_0)$ πρέπει να γίνουν στα δεξιά μέλη.

Διατομές σκέδασης

Έχοντας υπολογίσει τους συντελεστές A_{mn} και B_{mn} του σχεδιαζόμενου πεδίου, αντικαθιστούμε στην (3.11) τις ασυμπτωτικές εκφράσεις των σφαιροειδών ακτινικών συναρτήσεων

$R_{mn}^{(3)}$ για $c_b \xi \rightarrow \infty$ [102], και αποκτούμε την ακόλουθη έκφραση για το σχεδασζόμενο μακρινό πεδίο:

$$\mathbf{E}^{\text{sc}} \sim \frac{e^{jk_b r}}{k_b r} \mathbf{f}(\theta, \varphi). \quad (3.39)$$

Στην παραπάνω σχέση, $\mathbf{f}(\theta, \varphi) \equiv f_\eta(\theta, \varphi)\mathbf{e}_\eta + f_\varphi(\theta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi$ είναι το πλάτος σκέδασης, για τις συνιστώσες του οποίου ισχύει

$$f_\eta(\theta, \varphi) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} (-j)^n \left[\frac{m}{\sin \theta} S_{mn}(c_b, \cos \theta) A_{mn} + \frac{dS_{mn}(c_b, \cos \theta)}{d\theta} B_{mn} \right] e^{jm\varphi}, \quad (3.40)$$

και

$$f_\varphi(\theta, \varphi) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} (-j)^{n+1} \left[\frac{dS_{mn}(c_b, \cos \theta)}{d\theta} A_{mn} + \frac{m}{\sin \theta} S_{mn}(c_b, \cos \theta) B_{mn} \right] e^{jm\varphi}, \quad (3.41)$$

όπου S_{mn} είναι οι σφαιροειδείς γωνιακές συναρτήσεις του πρώτου είδους. Τότε, η διστατική διατομή ραντάρ (bistatic radar cross section) δίνεται από τη σχέση [112]:

$$\sigma(\theta, \varphi) \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|\mathbf{E}^{\text{sc}}|^2}{|\mathbf{E}^{\text{inc}}|^2} = \frac{\lambda_b^2}{\pi} |\mathbf{f}(\theta, \varphi)|^2, \quad (3.42)$$

με $\lambda_b = 2\pi/k_b$ το μήκος κύματος του περιβάλλοντος χώρου. Στα προβλήματα σκέδασης, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν η εμπρόσθια και η οπίσθια διατομή, οι οποίες—για το προσπίπτον κύμα της (3.4)—ορίζονται ως

$$\sigma_f \equiv \sigma(\theta_0, 0), \quad (3.43)$$

και

$$\sigma_b \equiv \sigma(\pi - \theta_0, \pi), \quad (3.44)$$

αντιστοίχως.

Εκτός της διατομής ραντάρ, μας ενδιαφέρει και η ολική διατομή σκέδασης, η οποία δίνεται από τη σχέση [112]:

$$Q_t = \frac{\lambda_b^2}{4\pi^2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |\mathbf{f}(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (3.45)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά με αποτέλεσμα

$$Q_t = \frac{\lambda_b^2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \sum_{\nu=|m|}^{\infty} \text{Re} [j^{\nu-n} (A_{mn} A_{m\nu}^* + B_{mn} B_{m\nu}^*)] \\ \times \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(c_b) d_r^{m\nu}(c_b) \frac{(|m|+r)(|m|+r+1)(|m|+r+m)!}{(2|m|+2r+1)(|m|+r-m)!}, \quad (3.46)$$

όπου Re είναι το πραγματικό μέρος, ο αστερίσχος υποδηλώνει τον συζυγή μιγαδικό, και τα n και ν είναι και τα δύο άρτια ή και τα δύο περιττά.

3.2.2 Πεπλατυσμένο σφαιροειδές

Για την περίπτωση του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς, τα αντίστοιχα σύνολα εξισώσεων (3.27)–(3.30) αποκτούνται με τις αντικαταστάσεις $c_b \rightarrow -jc_b$, $c_l \rightarrow -jc_l$, και $\xi_0 \rightarrow j\xi_0$ στις εκφράσεις των $K_{mns}^{(1),(3)}$, $K'_{mns}^{(1),(3)}$, $\Lambda_{mns}^{(1),(3)}$, $\Lambda'_{mns}^{(1),(3)}$, $\Pi_{mns}^{(1)}$, $\Pi'_{mns}^{(1)}$, C_{mn} , και D_{mn} . Επιπλέον, για τον υπολογισμό των διατομών σκέδασης, η αντικατάσταση $c_b \rightarrow -jc_b$ πρέπει να πραγματοποιηθεί στις (3.40), (3.41), και (3.46).

3.3 Μέθοδος διαταραχής σφαιρικού συνόρου

3.3.1 Επίμηκες σφαιροειδές

TE πρόπτωση

Όπως και στην ενότητα 3.2, θεωρούμε γραμμικά πολωμένο επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, το οποίο προσπίπτει στο επίμηκες σφαιροειδές του σχ. 3.1. Για TE πρόπτωση (βλ. σχέση (3.4)), το ανάπτυγμα του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου σε όρους σφαιρικών ιδιοδιανυσμάτων έχει τη μορφή [83]:

$$\mathbf{E}^{\text{inc}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \bar{E}_{mn} [q_{mn} \mathbf{m}_{mn}^{(1)}(k_b, \mathbf{r}) + p_{mn} \mathbf{n}_{mn}^{(1)}(k_b, \mathbf{r})], \quad (3.47)$$

όπου οι συντελεστές ανάπτυξης q_{mn} και p_{mn} δίνονται από τις σχέσεις [83]:

$$q_{mn} = -\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{n(n+1)(n+m)!}} \left. \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0}, \quad (3.48)$$

$$p_{mn} = -\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{n(n+1)(n+m)!}} \frac{m}{\sin \theta_0} P_n^m(\cos \theta_0). \quad (3.49)$$

Με ανάλογο τρόπο, το σχεδαζόμενο πεδίο γράφεται επίσης με τη μορφή σειράς σφαιρικών ιδιοδιανυσμάτων ως

$$\mathbf{E}^{\text{sc}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \bar{E}_{mn} [a_{mn} \mathbf{m}_{mn}^{(3)}(k_b, \mathbf{r}) + b_{mn} \mathbf{n}_{mn}^{(3)}(k_b, \mathbf{r})], \quad (3.50)$$

όπου $\mathbf{m}_{mn}^{(3)}$ και $\mathbf{n}_{mn}^{(3)}$ είναι τα σφαιρικά ιδιοδιανύσματα του τρίτου είδους, ενώ a_{mn} και b_{mn} είναι άγνωστοι συντελεστές ανάπτυξης. Τα σφαιρικά ιδιοδιανύσματα $\mathbf{m}_{mn}^{(3)}$ και $\mathbf{n}_{mn}^{(3)}$ δίνονται από τις σχέσεις [110]:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{mn}^{(3)}(k, \mathbf{r}) &= \sqrt{n(n+1)} h_n(kr) \mathbf{C}_{mn}(\theta, \varphi), \\ \mathbf{n}_{mn}^{(3)}(k, \mathbf{r}) &= n(n+1) \frac{h_n(kr)}{kr} \mathbf{P}_{mn}(\theta, \varphi) + \sqrt{n(n+1)} \frac{1}{kr} \frac{d[rh_n(kr)]}{dr} \mathbf{B}_{mn}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (3.51)$$

όπου h_n είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις Hankel του πρώτου είδους και \mathbf{P}_{mn} , \mathbf{B}_{mn} , \mathbf{C}_{mn} τα αρμονικά σφαιρικά ιδιοδιανύσματα της (3.15).

Για το επαγόμενο πεδίο στο εσωτερικό του σφαιροειδούς, ισχύει και πάλι το ανάπτυγμα της σχέσης (3.12):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{int}} = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \bar{E}_{mn} \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left[c_{mnl} \mathbf{m}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) + d_{mnl} \mathbf{n}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) + \frac{\bar{w}_{mnl}}{\lambda_l} \mathbf{l}_{mn}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}) \right] \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} a_l \frac{w_{00l}}{\lambda_l} \mathbf{l}_{00}^{(1)}(k_l, \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Τα αντίστοιχα αναπτύγματα των μαγνητικών πεδίων \mathbf{H}^{inc} , \mathbf{H}^{sc} , και \mathbf{H}^{int} βρίσκονται από την εξίσωση Maxwell-Faraday $\mathbf{H} = -j/(\omega\mu)\nabla \times \mathbf{E}$.

Έχοντας στη διάθεση μας τα αναπτύγματα των πεδίων, προχωρούμε στην ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών για τη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στην επιφάνεια S του σφαιροειδούς:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{\text{inc}} + \mathbf{E}^{\text{sc}} - \mathbf{E}^{\text{int}})|_S = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{\text{inc}} + \mathbf{H}^{\text{sc}} - \mathbf{H}^{\text{int}})|_S = \mathbf{0}, \quad (3.53)$$

όπου \mathbf{n} είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην S , με φορά προς τον έξω χώρο. Για τον σκοπό αυτό εφαρμόζουμε μια ασυμπτωτική μέθοδο όπου, για μικρές τιμές της εκκεντρότητας ($h \ll 1$), το σφαιροειδές αντιμετωπίζεται ως διαταραχή της σφαίρας με ακτίνα $R = c_0$. Σε αυτό το πλαίσιο, η επιφάνεια του σφαιροειδούς εκφράζεται σε σφαιρικές συντεταγμένες ως

$$r = \frac{c_0}{\sqrt{1 - h^2 \sin^2 \theta / (h^2 - 1)}}, \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (3.54)$$

Αναπτύσσοντας την (3.54) σε δυναμοσειρά ως προς h , αποκτούμε την έκφραση

$$r = c_0 \left[1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} h^2 - \left(\frac{\sin^2 \theta}{2} - \frac{3 \sin^4 \theta}{8} \right) h^4 + O(h^6) \right]. \quad (3.55)$$

Όταν το παραπάνω ανάπτυγμα αντικατασταθεί στις ακτινικές ποσότητες που περιέχουν οι σφαιρικές διανυσματικές κυματικές συναρτήσεις των (3.14) και (3.51), μας δίνει τις ασυμπτωτικές εκφράσεις των τελευταίων στην επιφάνεια του σφαιροειδούς [68]. Για παράδειγμα, το ανάπτυγμα της συνάρτησης $z_n(kr) - z_n = j_n, h_n$ —για $r \in S$, γράφεται ως

$$\begin{aligned} z_n(kr)|_S = z_n(x) - \frac{x z_n'(x)}{2} \sin^2 \theta h^2 + \left\{ -\frac{x z_n'(x)}{2} \sin^2 \theta \right. \\ \left. + \frac{1}{8} [3x z_n'(x) + x^2 z_n''(x)] \sin^4 \theta \right\} h^4 + O(h^6), \end{aligned} \quad (3.56)$$

όπου $x = kc_0$, ενώ z_n' και z_n'' είναι οι παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης, αντιστοίχως. Κατ' ανάλογο τρόπο αναπτύσσουμε σε δυναμοσειρά του h το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια S και παίρνουμε

$$\mathbf{n} = \left[1 - \frac{h^4 \sin^2(2\theta)}{8} \right] \left[\mathbf{e}_r + \frac{\sin(2\theta)}{2} (h^2 + h^4 \cos^2 \theta) \mathbf{e}_\theta + O(h^6) \right]. \quad (3.57)$$

Επιπλέον, για μικρές τιμές του h , οι άγνωστοι συντελεστές ανάπτυξης a_{mn} , b_{mn} , και a_l στις (3.50) και (3.52), μπορούν να γραφούν σε μορφή αναπτύγματος ως

$$a_l = a_l^{(0)} + a_l^{(2)}h^2 + a_l^{(4)}h^4 + O(h^6), \quad (3.58)$$

$$a_{mn} = a_{mn}^{(0)} + a_{mn}^{(2)}h^2 + a_{mn}^{(4)}h^4 + O(h^6), \quad (3.59)$$

$$b_{mn} = b_{mn}^{(0)} + b_{mn}^{(2)}h^2 + b_{mn}^{(4)}h^4 + O(h^6), \quad (3.60)$$

όπου οι συντελεστές $a_l^{(0)}$, $a_{mn}^{(0)}$, και $b_{mn}^{(0)}$ αντιστοιχούν στη λύση του προβλήματος της σκέδασης από ανισοτροπική σφαίρα ακτίνας $R = c_0$ [84, 85].

Προκειμένου να ικανοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια του σφαιροειδούς, αντικαθιστούμε στην (3.53) τα αναπτύγματα των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων όπως αυτά προκύπτουν από την αντικατάσταση της (3.55) στις σφαιρικές διανυσματικές κυματικές συναρτήσεις, καθώς και τις ασυμπτωτικές εκφράσεις (3.57)–(3.60). Με αυτό τον τρόπο, και ομαδοποιώντας όρους κατά δυνάμεις του h , οι δύο συνοριακές συνθήκες της (3.53) μετατρέπονται σε δύο διανυσματικές εξισώσεις με γενική μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{mn}^{(0)}(\theta, \varphi) + \mathbf{X}_{mn}^{(2)}(\theta, \varphi)h^2 + \mathbf{X}_{mn}^{(4)}(\theta, \varphi)h^4 + O(h^6) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{Y}_{mn}^{(0)}(\theta, \varphi) + \mathbf{Y}_{mn}^{(2)}(\theta, \varphi)h^2 + \mathbf{Y}_{mn}^{(4)}(\theta, \varphi)h^4 + O(h^6) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

όπου $\mathbf{X}_{mn}^{(i)}$ και $\mathbf{Y}_{mn}^{(i)}$, $i=0, 2, 4$, είναι διανυσματικές εκφράσεις που περιέχουν τους συντελεστές ανάπτυξης q_{mn} , p_{mn} , $a_l^{(i)}$, $a_{mn}^{(i)}$, και $b_{mn}^{(i)}$, καθώς και τα αρμονικά σφαιρικά ιδιοδιανύσματα της (3.15). Διατηρώντας όρους μέχρι $O(h^4)$ στην (3.61), θέτοντας κάθε $\mathbf{X}_{mn}^{(i)}$ και $\mathbf{Y}_{mn}^{(i)}$ ίσο με το μηδέν, και ομαδοποιώντας τις προκύπτουσες εξισώσεις σε ζεύγη μηδενικής, δεύτερης, και τέταρτης τάξης, παίρνουμε

$$\mathbf{X}_{mn}^{(0)}(\theta, \varphi) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y}_{mn}^{(0)}(\theta, \varphi) = \mathbf{0}, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{X}_{mn}^{(2)}(\theta, \varphi) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y}_{mn}^{(2)}(\theta, \varphi) = \mathbf{0}, \quad (3.63)$$

$$\mathbf{X}_{mn}^{(4)}(\theta, \varphi) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y}_{mn}^{(4)}(\theta, \varphi) = \mathbf{0}. \quad (3.64)$$

Σε καθεμία από τις παραπάνω έξι εξισώσεις κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων ορθογωνιότητας των αρμονικών σφαιρικών ιδιοδιανυσμάτων ως εξής: αρχικά παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο κάθε εξίσωσης με τον όρο $\mathbf{B}_{\mu\nu}^* \sin\theta d\theta d\varphi$ και ολοκληρώνουμε από $\theta = 0$ έως π , και από $\varphi = 0$ έως 2π . Ακολούθως, επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με $\mathbf{C}_{\mu\nu}^* \sin\theta d\theta d\varphi$ και πραγματοποιώντας τις ίδιες ολοκληρώσεις. Με αυτό τον τρόπο, κάθε διανυσματική εξίσωση δίνει δύο βαθμωτές εξισώσεις και τα τρία ζεύγη των (3.62)–(3.64) μετατρέπονται σε τρία αντίστοιχα γραμμικά συστήματα εξισώσεων. Κάθε σύστημα περιλαμβάνει τέσσερα άπειρα σύνολα μη ομογενών γραμμικών εξισώσεων, τα οποία έχουν τη

μορφή

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_{mnl} j_n(x_l) a_l^{(i)} - h_n(x_b) a_{mn}^{(i)} = Y_{1,mn}^{(i)}, \quad (3.65)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_l^{(i)}}{x_l} \left[d_{mnl} j_n^d(x_l) + \frac{\bar{w}_{mnl}}{\lambda_l} j_n(x_l) \right] - \frac{h_n^d(x_b)}{x_b} b_{mn}^{(i)} = Y_{2,mn}^{(i)}, \quad (3.66)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \tau_l d_{mnl} j_n(x_l) a_l^{(i)} - h_n(x_b) b_{mn}^{(i)} = Y_{3,mn}^{(i)}, \quad (3.67)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \tau_l c_{mnl} \frac{j_n^d(x_l)}{x_l} a_l^{(i)} - \frac{h_n^d(x_b)}{x_b} a_{mn}^{(i)} = Y_{4,mn}^{(i)}. \quad (3.68)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, ο δείκτης m μεταβάλλεται από $-\infty$ έως ∞ και, για κάθε m , ο δείκτης n από $|m| + \delta_{m0}$ έως ∞ . Επιπλέον, $\tau_l = k_l/k_0 = [\epsilon_s/(\epsilon_0 \lambda_l)]^{1/2}$ (βλ. και ενότητα 3.2) και $z_n^d(x) \equiv z_n(x) + x z_n'(x)$, με $z_n = j_n, h_n$. Οι εξισώσεις (3.65)–(3.68) προκύπτουν ύστερα από μακροσκελείς αλγεβρικούς χειρισμούς και συγκροτούν το γραμμικό σύστημα i -οστής τάξης, το οποίο έχει τη γενική μορφή

$$\mathbb{A} \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{Y}^{(i)}, \quad i = 0, 2, 4. \quad (3.69)$$

Στην (3.69), \mathbb{A} είναι ο πίνακας του συστήματος, $\mathbf{v}^{(i)} = (a_l^{(i)}, a_{mn}^{(i)}, b_{mn}^{(i)})^T$ είναι το διάνυσμα των άγνωστων συντελεστών, και $\mathbf{Y}^{(i)} = (Y_{1,mn}^{(i)}, Y_{2,mn}^{(i)}, Y_{3,mn}^{(i)}, Y_{4,mn}^{(i)})^T$ το διάνυσμα των δεξιών μελών των εξισώσεων. Όπως και στην ενότητα 3.2, το σύστημα λύνεται με αποκοπή, ενώ το διάνυσμα των συντελεστών $a_l^{(i)}$ έχει διπλάσιο μέγεθος από τα αντίστοιχα των $a_{mn}^{(i)}$ και $b_{mn}^{(i)}$, με αποτέλεσμα ο πίνακας του συστήματος που προκύπτει από την αποκοπή να είναι τετραγωνικός. Οι εκφράσεις των δεξιών μελών των (3.65)–(3.68) δίνονται στο Παράρτημα, όπου φαίνεται ότι το διάνυσμα $\mathbf{Y}^{(0)}$ εξαρτάται από τα q_{mn} και p_{mn} , το $\mathbf{Y}^{(2)}$ από τα q_{mn} , p_{mn} , $a_l^{(0)}$, $a_{mn}^{(0)}$, και $b_{mn}^{(0)}$, ενώ το $\mathbf{Y}^{(4)}$ από τα q_{mn} , p_{mn} , $a_l^{(0),(2)}$, $a_{mn}^{(0),(2)}$, και $b_{mn}^{(0),(2)}$. Επομένως, τα συστήματα επίλυσης με διαδοχικό τρόπο—δηλ., το σύστημα μηδενικής τάξης λύνεται πρώτο και υπολογίζονται τα $a_l^{(0)}$, $a_{mn}^{(0)}$, και $b_{mn}^{(0)}$, τα οποία στη συνέχεια χρησιμοποιούνται για την κατασκευή του δεξιού μέλους του συστήματος δεύτερης τάξης. Η επίλυση του τελευταίου μας δίνει τα $a_l^{(2)}$, $a_{mn}^{(2)}$, και $b_{mn}^{(2)}$, τα οποία με τη σειρά τους χρησιμοποιούνται—μαζί με τα $a_l^{(0)}$, $a_{mn}^{(0)}$, και $b_{mn}^{(0)}$ —για την κατασκευή του δεξιού μέλους του συστήματος τέταρτης τάξης. Η επίλυση του τελευταίου μας δίνει τα $a_l^{(4)}$, $a_{mn}^{(4)}$, και $b_{mn}^{(4)}$. Σημειώνεται πως ο πίνακας \mathbb{A} είναι ο ίδιος και για τα τρία συστήματα και επομένως χρειάζεται να υπολογιστεί μόνο μία φορά κατά την προγραμματιστική υλοποίηση της μεθόδου.

TM πρόσπτωση

Στην περίπτωση της TM πρόσπτωσης, το προσπίπτον μαγνητικό πεδίο έχει την έκφραση (3.37), οπότε είναι εύκολο να δείχτεί πως το ανάπτυγμα του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{E}^{\text{inc}} = j \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \bar{E}_{mn} [p_{mn} \mathbf{m}_{mn}^{(1)}(k_b, \mathbf{r}) + q_{mn} \mathbf{n}_{mn}^{(1)}(k_b, \mathbf{r})]. \quad (3.70)$$

Σε αυτή την περίπτωση, η λύση δίνεται και πάλι από τα τέσσερα σύνολα εξισώσεων (3.65)–(3.68), όπου οι αντικαταστάσεις $p_{mn} \rightarrow jq_{mn}$ και $q_{mn} \rightarrow jp_{mn}$ πρέπει να γίνουν στα δεξιά μέλη.

Διατομές σκέδασης

Έχοντας υπολογίσει τους συντελεστές a_{mn} και b_{mn} του σχεδαζόμενου πεδίου, αντικαθιστούμε στην (3.50) τις ασυμπτωτικές εκφράσεις των σφαιρικών συναρτήσεων Hankel h_n για $k_b r \rightarrow \infty$ [105], και αποκτούμε την ακόλουθη έκφραση για το σχεδαζόμενο μακρινό πεδίο:

$$\mathbf{E}^{\text{sc}} \sim \frac{e^{jk_b r}}{k_b r} \mathbf{f}(\theta, \varphi), \quad (3.71)$$

όπου $\mathbf{f}(\theta, \varphi) \equiv f_\theta(\theta, \varphi)\mathbf{e}_\theta + f_\varphi(\theta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi$ είναι το πλάτος σκέδασης, με

$$f_\theta(\theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} j^{-n} \bar{E}_{mn} \left[\frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) a_{mn} + \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} b_{mn} \right] e^{jm\varphi}, \quad (3.72)$$

$$f_\varphi(\theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} j^{-n+1} \bar{E}_{mn} \left[\frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} a_{mn} + \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) b_{mn} \right] e^{jm\varphi}. \quad (3.73)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα αναπτύγματα (3.59) και (3.60) για τους συντελεστές a_{mn} και b_{mn} , αντιστοίχως, εφαρμόζουμε τη σχέση (3.42), και αποκτούμε τελικά την ακόλουθη έκφραση για τη διστατική διατομή ραντάρ:

$$\sigma(\theta, \varphi) = \sigma^{(0)}(\theta, \varphi) + \sigma^{(2)}(\theta, \varphi)h^2 + \sigma^{(4)}(\theta, \varphi)h^4 + O(h^6), \quad (3.74)$$

όπου

$$\sigma^{(0)}(\theta, \varphi) = \frac{\lambda_b^2}{\pi} [|f_\theta^{(0)}(\theta, \varphi)|^2 + |f_\varphi^{(0)}(\theta, \varphi)|^2], \quad (3.75)$$

$$\sigma^{(2)}(\theta, \varphi) = \frac{\lambda_b^2}{\pi} 2\text{Re} [f_\theta^{(0)*}(\theta, \varphi) f_\theta^{(2)}(\theta, \varphi) + f_\varphi^{(0)*}(\theta, \varphi) f_\varphi^{(2)}(\theta, \varphi)], \quad (3.76)$$

$$\sigma^{(4)}(\theta, \varphi) = \frac{\lambda_b^2}{\pi} \left\{ |f_\theta^{(2)}(\theta, \varphi)|^2 + |f_\varphi^{(2)}(\theta, \varphi)|^2 + 2\text{Re} [f_\theta^{(0)*}(\theta, \varphi) f_\theta^{(4)}(\theta, \varphi) + f_\varphi^{(0)*}(\theta, \varphi) f_\varphi^{(4)}(\theta, \varphi)] \right\}, \quad (3.77)$$

και τα $f_\theta^{(i)}(\theta, \varphi)$ και $f_\varphi^{(i)}(\theta, \varphi)$ δίνονται από τις (3.72) και (3.73), αντιστοίχως, αντικαθιστώντας τα a_{mn} με $a_{mn}^{(i)}$ και τα b_{mn} με $b_{mn}^{(i)}$, για $i = 0, 2, 4$. Τότε, η (3.74) μπορεί να γραφεί ως

$$\sigma(\theta, \varphi) = \sigma^{(0)}(\theta, \varphi) [1 + g_\sigma^{(2)}(\theta, \varphi)h^2 + g_\sigma^{(4)}(\theta, \varphi)h^4 + O(h^6)], \quad (3.78)$$

όπου ο όρος μηδενικής τάξης $\sigma^{(0)}(\theta, \varphi)$ αντιστοιχεί στο πρόβλημα της σκέδασης από ανισοτροπική σφαίρα [84, 85], ενώ $g_\sigma^{(2)}(\theta, \varphi)$ και $g_\sigma^{(4)}(\theta, \varphi)$ είναι κατάλληλοι διορθωτικοί όροι δεύτερης και τέταρτης τάξης, αντιστοίχως. Ειδικά για τις διατομές των (3.43) και (3.44) έχουμε

$$\sigma_{f,b} = \sigma_{f,b}^{(0)} [1 + g_{f,b}^{(2)}h^2 + g_{f,b}^{(4)}h^4 + O(h^6)]. \quad (3.79)$$

Κατ' ανάλογο τρόπο, η ολική διατομή σκέδασης μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$Q_t = Q_t^{(0)} + Q_t^{(2)}h^2 + Q_t^{(4)}h^4 + O(h^6) = Q_t^{(0)} [1 + g_t^{(2)}h^2 + g_t^{(4)}h^4 + O(h^6)], \quad (3.80)$$

όπου

$$Q_t^{(0)} = \frac{\lambda_b^2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} (|a_{mn}^{(0)}|^2 + |b_{mn}^{(0)}|^2), \quad (3.81)$$

$$Q_t^{(2)} = \frac{\lambda_b^2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} 2\text{Re}(a_{mn}^{(0)*}a_{mn}^{(2)} + b_{mn}^{(0)*}b_{mn}^{(2)}), \quad (3.82)$$

$$Q_t^{(4)} = \frac{\lambda_b^2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} [|a_{mn}^{(2)}|^2 + |b_{mn}^{(2)}|^2 + 2\text{Re}(a_{mn}^{(0)*}a_{mn}^{(4)} + b_{mn}^{(0)*}b_{mn}^{(4)})], \quad (3.83)$$

και ο όρος μηδενικής τάξης $Q_t^{(0)}$ αντιστοιχεί στο πρόβλημα της ανισοτροπικής σφαίρας [84, 85], ενώ $g_t^{(2)}$ και $g_t^{(4)}$ είναι κατάλληλοι διορθωτικοί όροι.

Σημειώνουμε πως οι όροι $g_\sigma^{(2),(4)}$, $g_{f,b}^{(2),(4)}$, και $g_t^{(2),(4)}$ στις (3.78), (3.79), και (3.80), αντιστοίχως, είναι ανεξάρτητοι της εκκεντρότητας h και στις σχέσεις υπολογισμού τους δεν εμπλέκονται οι σφαιροειδείς συναρτήσεις.

3.3.2 Πεπλατυσμένο σφαιροειδές

Για την περίπτωση του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς, οι συντελεστές $a_l^{(i)}$, $a_{mn}^{(i)}$, και $b_{mn}^{(i)}$ βρίσκονται και πάλι από τα συστήματα των εξισώσεων (3.65)–(3.68). Τώρα όμως, το $-h^2$ χρησιμοποιείται στη θέση του h^2 για τον υπολογισμό των a_l , a_{mn} , και b_{mn} στις (3.58)–(3.60), καθώς και στον υπολογισμό των διατομών (3.74), (3.79), και (3.80).

3.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

3.4.1 Γενικά

Στην παρούσα ενότητα, αρχικά ελέγχεται η ορθότητα των αποτελεσμάτων της μεθόδου σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων μέσω της σύγκρισης με δύο άλλες ανεξάρτητες αριθμητικές τεχνικές, για διάφορα είδη ανισοτροπίας του σφαιροειδούς σχεδιαστή. Στη συνέχεια, η μέθοδος σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων χρησιμοποιείται ως μέθοδος αναφοράς για την επαλήθευση και τον έλεγχο της ακρίβειας της μεθόδου διαταραχής, όπως και για την εξακρίβωση του εύρους τιμών της εκκεντρότητας h , εντός του οποίου η τελευταία δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα. Επιπλέον, οι δύο μέθοδοι συγκρίνονται ως προς την απόδοση τους. Τέλος, παρουσιάζονται κάποια πρόσθετα αριθμητικά αποτελέσματα και γίνεται μια σύντομη διερεύνηση της σύγκλισης των δύο μεθόδων.

Στο εξής, η μέθοδος σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων θα αναφέρεται συντομογραφικώς ως ΜΣΙ, ενώ η μέθοδος διαταραχής του σφαιρικού συνόρου ως ΜΔΣΣ. Η υλοποίηση της ΜΣΙ πραγματοποιήθηκε σε προγραμματιστικό περιβάλλον Python. Για την επίλυση του γραμμικού συστήματος που προκύπτει από την αποκοπή των συνόλων εξισώσεων (3.27)–(3.30),

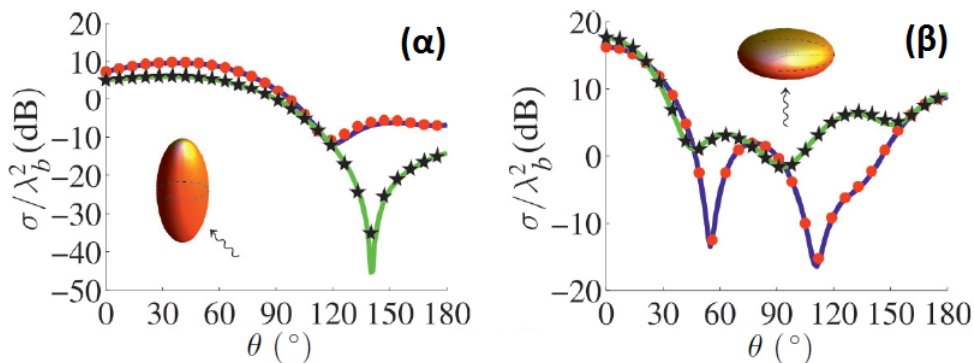
καθώς και για τον υπολογισμό των διατομών σκέδασης (3.42) και (3.46), είναι απαραίτητος ο αξιόπιστος αριθμητικός υπολογισμός των σφαιροειδών συναρτήσεων [113]. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στον υπολογισμό της σφαιροειδούς ακτινικής συνάρτησης δεύτερου είδους $R_{mn}^{(2)}$ —η οποία απαιτείται για τον υπολογισμό της $R_{mn}^{(3)}$ —και της παραγώγου της. Για τον σκοπό αυτό, η υλοποίηση της μεθόδου κάνει χρήση ενός συνδυασμού αριθμητικών τεχνικών που παρουσιάζονται στις [113–115]. Από την άλλη, η ΜΔΣΣ δεν απαιτεί τον υπολογισμό των σφαιροειδών συναρτήσεων και υλοποιήθηκε σε προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB, κάνοντας χρήση ενσωματωμένων αριθμητικών ρουτινών.

Στη συνέχεια, η εκκεντρότητα h και η παράμετρος μεγέθους x_b χρησιμοποιούνται για να προσδιορίσουν με μοναδικό τρόπο τη γεωμετρία του σφαιροειδούς σκεδαστή. Η εκάστοτε τιμή του ξ_0 μπορεί να βρεθεί από τη σχέση (3.3). Σε όλα τα αποτελέσματα που δίνονται για τη ΜΣΙ και τη ΜΔΣΣ, έχουν διατηρηθεί αρκετοί όροι στα αθροίσματα που δίνουν τις υπό εξέταση διατομές σκέδασης, ώστε οι μέθοδοι να συγκλίνουν (βλ. και υποενότητα 3.4.4).

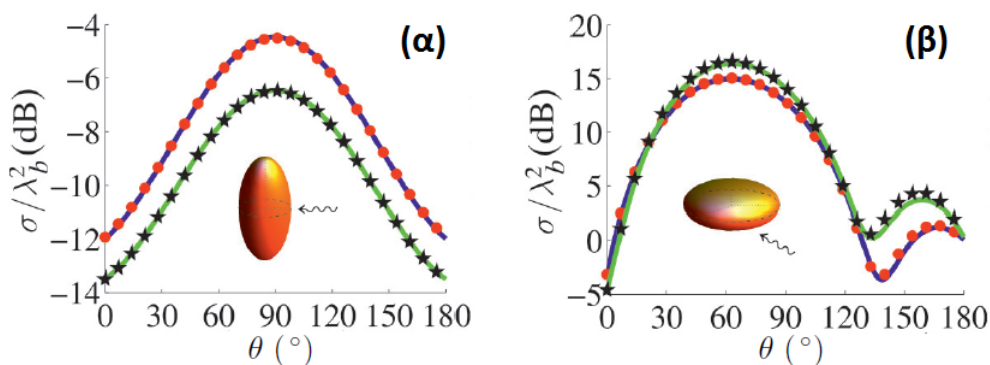
3.4.2 Έλεγχος ΜΣΙ

Για τον έλεγχο και την επαλήθευση των αποτελεσμάτων της ΜΣΙ, πραγματοποιούμε μια σειρά από συγκρίσεις με δύο ανεξάρτητα υπολογιστικά εργαλεία: α) τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων του εμπορικού λογισμικού πακέτου προσομοίωσης ηλεκτρομαγνητικών πεδίων Ansys HFSS™. β) το λογισμικό ανοιχτού κώδικα ADDA [116], το οποίο υλοποιεί τη μέθοδο της προσέγγισης διακριτών διπόλων (DDA) [63] για τη σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από διηλεκτρικά σώματα. Το HFSS επιτρέπει τη μοντελοποίηση και των τριών ειδών ανισοτροπίας που εξετάζουμε, ενώ το ADDA υποστηρίζει μονοαξονικά και διαξονικά μέσα. Η προγραμματιστική υλοποίηση της μεθόδου μας, το HFSS, και το ADDA εκτελούνται στον ίδιο επιτραπέζιο ηλεκτρονικό υπολογιστή. Σε όλα τα αποτελέσματα που δίνονται στην παρούσα υποενότητα, θεωρούμε την περίπτωση της TE πρόσπτωσης με κύμα της μορφής (3.4). Προς αποφυγή συγχύσεως, θα θεωρήσουμε πως για τη μονοαξονική περίπτωση, οι τιμές των στοιχείων επιτρεπτότητας αναφέρονται στον γυροηλεκτρικό ταυστή της σχέσης (3.2) με $\epsilon_2 = 0$.

Στα σχ. 3.2(α) και 3.2(β), παρουσιάζονται αποτελέσματα (σε dB) για την κανονικοποιημένη διστατική διατομή ραντάρ $\sigma(\theta, \varphi)/\lambda_b^2$ της (3.42), για μονοαξονικά επιμήκη και πεπλατυσμένα σφαιροειδή, αντιστοίχως. Για κάθε περίπτωση εξετάζονται δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου h . Η συμφωνία μεταξύ της μεθόδου μας και του HFSS είναι εμφανής. Αντίστοιχα αποτελέσματα για διαξονικά και γυροηλεκτρικά σφαιροειδή, για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης, παρουσιάζονται στα σχ. 3.3 και 3.4. Και σε αυτές τις περιπτώσεις, διαπιστώνουμε τη συμφωνία της ΜΣΙ με το HFSS. Σε ό,τι αφορά στην απόδοση των δύο μεθόδων, οι απαιτήσεις του HFSS σε υπολογιστικό χρόνο CPU και σε κατανάλωση μνήμης εξαρτώνται από την τιμή της παραμέτρου h . Για παράδειγμα, η περίπτωση του σχ. 3.2(α) για $h = 0.8$, απαιτεί 1363 s για την εκτέλεση του προγράμματος και 20.3 GB μνήμης RAM, ενώ για $h = 0.92$, τα αντίστοιχα μεγέθη είναι 974 s και 5.6 GB. Αντιθέτως, ο κώδικας που υλοποιεί τη ΜΣΙ απαιτεί 33 s και 0.9 GB για $h = 0.8$, και 82 s και 0.93 GB για $h = 0.92$. Κατ' ανάλογο τρόπο, στην περίπτωση του σχ. 3.4(α) για $h = 0.8$, οι απαιτήσεις του HFSS είναι και πάλι αυξημένες—δηλ., για την εκτέλεση του απαιτούνται 1955 s και 14.8 GB μνήμης RAM. Αντιθέτως, η υλοποίηση της ΜΣΙ χρειάζεται 33 s για την εκτέλεση του κώδικα και

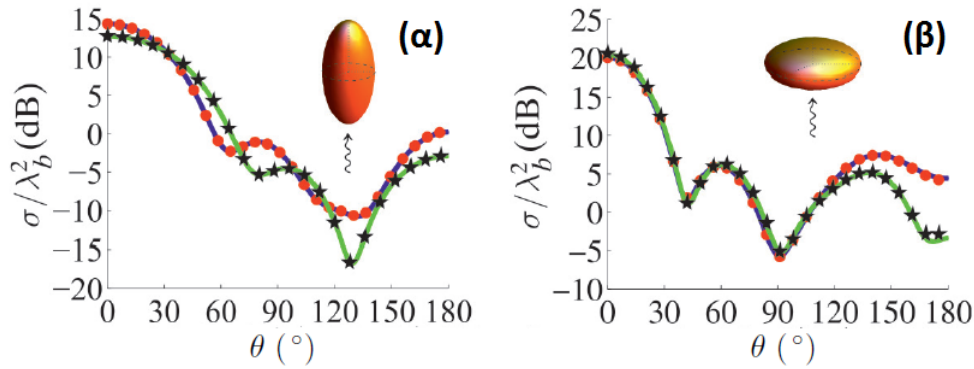


Σχήμα 3.2: Διστατική διατομή ραντάρ $\sigma(\theta, \varphi)/\lambda_b^2$ για μονοαξονικά σφαιροειδή με $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 2.54\epsilon_0$: επίπεδο $\varphi = 0^\circ$. (α) Επίμηκες σφαιροειδές: $x_b = \pi$, TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 45^\circ$. Μπλε γραμμή/κόκκινες τελείες: $h = 0.8$: μπλε γραμμή: ΜΣΙ· κόκκινες τελείες: HFSS. Πράσινη γραμμή/μαύρα αστέρια: $h = 0.92$: πράσινη γραμμή: ΜΣΙ· μαύρα αστέρια: HFSS. (β) Πεπλατυσμένο σφαιροειδές: $x_b = 0.8\pi$, TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$. Μπλε γραμμή/κόκκινες τελείες: $h = 0.866$: μπλε γραμμή: ΜΣΙ· κόκκινες τελείες: HFSS. Πράσινη γραμμή/μαύρα αστέρια: $h = 1.2$: πράσινη γραμμή: ΜΣΙ· μαύρα αστέρια: HFSS.



Σχήμα 3.3: Διστατική διατομή ραντάρ $\sigma(\theta, \varphi)/\lambda_b^2$ για διαξονικά σφαιροειδή με $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 2.5\epsilon_0$, $\epsilon_3 = 4\epsilon_0$: επίπεδο $\varphi = 0^\circ$. (α) Επίμηκες σφαιροειδές: $x_b = 0.8\pi$, TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 90^\circ$. Μπλε γραμμή/κόκκινες τελείες: $h = 0.9$: μπλε γραμμή: ΜΣΙ· κόκκινες τελείες: HFSS. Πράσινη γραμμή/μαύρα αστέρια: $h = 0.92$: πράσινη γραμμή: ΜΣΙ· μαύρα αστέρια: HFSS. (β) Πεπλατυσμένο σφαιροειδές: $x_b = 0.8\pi$, TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 60^\circ$. Μπλε γραμμή/κόκκινες τελείες: $h = 0.9$: μπλε γραμμή: ΜΣΙ· κόκκινες τελείες: HFSS. Πράσινη γραμμή/μαύρα αστέρια: $h = 1.1$: πράσινη γραμμή: ΜΣΙ· μαύρα αστέρια: HFSS.

0.92 GB μνήμης. Σημειώνεται πως οι υπολογιστικές απαιτήσεις του HFSS μειώνονται καθώς η εκκεντρότητα h λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές (βλ. παραπάνω σχόλιο για σχ. 3.2(α)). Αυτό οφείλεται στο ότι η αύξηση του h οδηγεί σε μείωση του όγκου του σφαιροειδούς—για x_b σταθερό—και, κατά συνέπεια, σε μείωση του αριθμού των στοιχείων που χρησιμοποιούνται για τη διακριτοποίηση του σχεδιαστή. Από την άλλη, καθώς το σφαιροειδές γίνεται πιο επίμηκες, η ΜΣΙ χρειάζεται περισσότερους όρους για να συγκλίνει με αποτέλεσμα την αύξηση των υπολογιστικών της απαιτήσεων—οι οποίες ωστόσο παραμένουν χαμηλότερες από τις αντίστοιχες του HFSS. Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν για το σύνολο των συγκρίσεων που πραγματοποιήθηκαν μεταξύ της ΜΣΙ και του HFSS, οι οποίες δεν παρουσιάζονται εδώ για

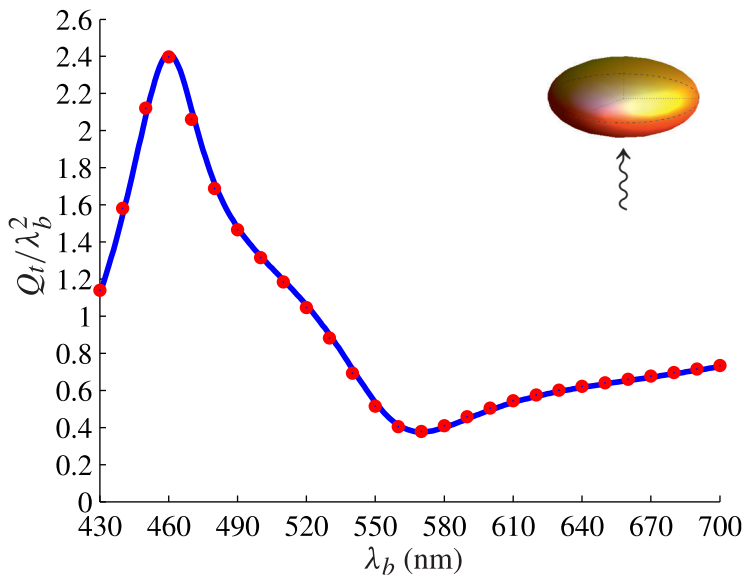


Σχήμα 3.4: Διστατική διατομή ραντάρ $\sigma(\theta, \varphi)/\lambda_b^2$ για γυροηλεκτρικά σφαιροειδή με $\epsilon_1 = 3.5\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0.5\epsilon_0$, $\epsilon_3 = 2.5\epsilon_0$: επίπεδο $\varphi = 0^\circ$. (α) Επίμηχες σφαιροειδές: $x_b = 1.2\pi$, TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$. Μπλε γραμμή/κόκκινες τελείες: $h = 0.8$: μπλε γραμμή: ΜΣΙ· κόκκινες τελείες: HFSS. Πράσινη γραμμή/μαύρα αστέρια: $h = 0.9$: πράσινη γραμμή: ΜΣΙ· μαύρα αστέρια: HFSS. (β) Πεπλατυσμένο σφαιροειδές: $x_b = \pi$, TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$. Μπλε γραμμή/κόκκινες τελείες: $h = 1$: μπλε γραμμή: ΜΣΙ· κόκκινες τελείες: HFSS. Πράσινη γραμμή/μαύρα αστέρια: $h = 1.2$: πράσινη γραμμή: ΜΣΙ· μαύρα αστέρια: HFSS.

λόγους συντομίας. Διαπιστώνουμε λοιπόν πως η μέθοδος μας είναι ταχύτερη στην εκτέλεση και παρουσιάζει χαμηλότερες απαιτήσεις σε μνήμη σε σύγκριση με το λογισμικό HFSS.

Σε ό,τι αφορά στην ολική διατομή σκέδασης, χρησιμοποιούμε το ADDA για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων της μεθόδου μας. Σε αντίθεση με τις παραπάνω συγκρίσεις που πραγματοποιήθηκαν για ένα συγκεκριμένο μήκος κύματος—μέσω της κανονικοποιημένης παραμέτρου x_b —και ενδεικτικές τιμές επιτρεπτότητας, τώρα θεωρούμε ένα εύρος μηκών κύματος και ρεαλιστικές τιμές παραμέτρων. Έτσι, επιλέγουμε να μελετήσουμε ένα πεπλατυσμένο μονοαξονικό νανοσφαιροειδές με μήκος μικρού ημιάξονα $c_0 = 100$ nm και $h = 1.2$. Θεωρούμε τιμές του προσπίπτοντος μήκους κύματος λ_b στο ορατό φάσμα των 430 nm–700 nm, και τιμές των στοιχείων του ταχυστή επιτρεπτότητας $\epsilon_1 = 7.0668\epsilon_0$ και $\epsilon_3 = 8.8027\epsilon_0$. Οι τιμές αυτές της επιτρεπτότητας αντιστοιχούν στις μέσες τιμές του πραγματικού κρυσταλλικού υλικού TiO_2 , στη συγκεκριμένη περιοχή μηκών κύματος που εξετάζουμε [117, βλ. σελ. 33.66], και προσεγγίζουν το άνω όριο της επιτρεπτότητας που μπορεί να χειριστεί το ADDA χωρίς να αντιμετωπίσει προβλήματα αυξημένων απαιτήσεων σε υπολογιστικούς πόρους για την επίτευξη σύγκλισης. Στο σχ. 3.5 παρουσιάζεται η κανονικοποιημένη ολική διατομή σκέδασης Q_t/λ_b^2 συναρτήσει του προσπίπτοντος μήκους κύματος λ_b , για την περίπτωση του σφαιροειδούς που εξετάζουμε. Από το σχήμα, γίνεται φανερό η ταύτιση αποτελεσμάτων μεταξύ της ΜΣΙ και του ADDA. Για την παραγωγή των αποτελεσμάτων, το ADDA έχει αρχικοποιηθεί με υψηλή διακριτοποίηση 256 διπόλων ανά μήκος κύματος και έχει εκτελεστεί για 28 διαφορετικές τιμές του λ_b , με συνολικό απαιτούμενο χρόνο CPU 3268 s, που αντιστοιχεί σε έναν μέσο χρόνο εκτέλεσης 117 s ανά μήκος κύματος. Αντιθέτως, η μέθοδος μας αρχικοποιήθηκε για να δώσει αποτελέσματα στο εύρος 430 nm–700 nm με βήμα 1 nm—δηλ., για 271 διαφορετικές τιμές του μήκους κύματος—, με συνολικό απαιτούμενο χρόνο CPU 5252 s, που αντιστοιχεί σε 19 s ανά μήκος κύματος.

Μια επιπλέον σύγκριση της ΜΣΙ με το ADDA παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.1, ο οποίος περιέχει τιμές της διατομής Q_t/λ_b^2 για δύο διαφορετικές περιπτώσεις μονοαξονικών



Σχήμα 3.5: Ολική διατομή σκέδασης Q_t/λ_b^2 για μονοαξονικό πεπλατυσμένο σφαιροειδές με $c_0 = 100$ nm, $h = 1.2$, $\epsilon_1 = 7.0668\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 8.8027\epsilon_0$. TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$. Συνεχής γραμμή: ΜΣΙ· τελείες: ADDA.

σφαιροειδών και διάφορες τιμές της εκκεντρότητας τους. Και για τις δύο περιπτώσεις, η ΜΣΙ έχει συγκλίνει σε πέντε σημαντικά ψηφία, ενώ το ADDA έχει εκτελεστεί με δύο διαφορετικές διακριτοποιήσεις, οι οποίες αντιστοιχούν σε διαφορετική επιλογή του αριθμού διπόλων ανά μήκος κύματος—υψηλότερες τιμές έχουν επιλεγεί για την περίπτωση (β) λόγω των μεγαλύτερων τιμών της επιτρεπτότητας. Βλέπουμε πως—όταν το δεύτερο εκτελείται με υψηλή διακριτοποίηση—υπάρχει συμφωνία μεταξύ ΜΣΙ και ADDA σε δύο σημαντικά ψηφία, η οποία αποτελεί μια ακόμη επιβεβαίωση της εγκυρότητας της μεθόδου μας. Σημειώνουμε επίσης πως οι τιμές που δίνει η ΜΣΙ για $h = 0.0001$ —δηλ., για σχεδόν σφαιρικό σχήμα του σφαιροειδούς—ταυτίζονται με αυτές που υπολογίζονται με εφαρμογή της μεθόδου για τη σκέδαση από ανισοτροπική σφαίρα [85]. Παράλληλα διαπιστώνουμε και ένα βασικό μειονέκτημα των αριθμητικών τεχνικών όπως η DDA, το οποίο συνίσταται στην ανάγκη αύξησης της διακριτοποίησης του σχεδαστή, προκειμένου να επιτευχθεί υψηλότερη ακρίβεια. Κάτι τέτοιο ωστόσο, έχει ως συνέπεια την πιο αργή σύγκλιση και την κατακόρυφη αύξηση στην κατανάλωση υπολογιστικών πόρων. Ενδεικτικά, για το πεπλατυσμένο σφαιροειδές της περίπτωσης (β) με $h = 1.1$, το ADDA χρειάζεται 87 s και 0.15 GB μνήμης όταν εκτελείται με 50 δίπολα ανά μήκος κύματος, ενώ οι απαιτήσεις του ανέρχονται στα 3048 s και 3.6 GB αν η διακριτοποίηση τεθεί ίση με 150 δίπολα ανά μήκος κύματος. Ακόμα υψηλότερη διακριτοποίηση οδηγεί σε εκτόξευση του υπολογιστικού χρόνου και της απαιτούμενης μνήμης. Αντιθέτως, η ΜΣΙ έχει συγκλίνει σε 66 s και χρειάζεται 0.45 GB μνήμης. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη και τα σχόλια για το σχ. 3.5, βλέπουμε πως η ΜΣΙ είναι σαφώς πιο αποδοτική από το ADDA, τουλάχιστον στην περίπτωση που το τελευταίο εκτελείται με υψηλή διακριτοποίηση ώστε να εξασφαλιστεί ικανοποιητική σύγκλιση του.

Από τα αποτελέσματα των σχ. 3.2–3.5 και του Πίνακα 3.1, και τη συζήτηση που τα συνοδεύει, καταδεικνύεται η ορθότητα της ΜΣΙ και η δυνατότητα της να περιγράψει με αποδοτικό τρόπο τη σκέδαση από ανισοτροπικά σφαιροειδή. Επιπλέον, διαπιστώνουμε πως υπολογιστι-

Πίνακας 3.1: Τιμές Q_t/λ_b^2 για μονοαξονικά σφαιροειδή· TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$. (α): Επίμηκες σφαιροειδές με $x_b = 1.5\pi$, $\epsilon_1 = 2.54\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 1.8\epsilon_0$. (β): Πεπλατυσμένο σφαιροειδές με $x_b = \pi$, $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 5.5\epsilon_0$.

h	(α)			h	(β)		
	ΜΣΙ	ADDA ⁽¹⁾	ADDA ⁽²⁾		ΜΣΙ	ADDA ⁽³⁾	ADDA ⁽⁴⁾
0.0001	6.2095	6.1782	6.2038	0.0001	1.4837	1.5284	1.4945
0.2	5.8504	5.8674	5.8513	0.2	1.5181	1.5472	1.5253
0.4	5.3565	5.4495	5.3684	0.9	2.6662	2.7157	2.6770
0.6	5.2945	5.3692	5.3109	1.1	5.7654	5.8096	5.7816
0.866	3.8899	3.8945	3.8924	1.5	4.2358	4.3039	4.2488
ADDA ⁽¹⁾ : 20 δίπολα ανά μήκος κύματος ADDA ⁽²⁾ : 100 δίπολα ανά μήκος κύματος				ADDA ⁽³⁾ : 50 δίπολα ανά μήκος κύματος ADDA ⁽⁴⁾ : 150 δίπολα ανά μήκος κύματος			

κά εργαλεία όπως το HFSS και το ADDA είναι μη αποδοτικά, ειδικά για εφαρμογές όπως, π.χ., η μοντελοποίηση νανοκεραίων, όπου είναι απαραίτητος ο υπολογισμός φασμάτων όπως αυτό του σχ. 3.5 για πολλές διαφορετικές τιμές μιας γεωμετρικής παραμέτρου του σχεδαστή. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η ΜΣΙ μπορεί να αξιοποιηθεί ως μια αποδοτική εναλλακτική λύση.

3.4.3 Έλεγχος ΜΔΣΣ

Όπως έχει τονιστεί παραπάνω, η ΜΔΣΣ είναι μια προσεγγιστική μέθοδος, η οποία ισχύει για μικρές τιμές της εκκεντρότητας h —δηλ., όταν το σχήμα του σφαιροειδούς προσεγγίζει το σφαιρικό. Στη συνέχεια πραγματοποιούμε μια σειρά ελέγχων, προκειμένου να εξακριβώσουμε το εύρος τιμών της παραμέτρου h στο οποίο η ΜΔΣΣ δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα. Ως μέθοδο αναφοράς για τον έλεγχο της ΜΔΣΣ, χρησιμοποιούμε τη ΜΣΙ, η επαλήθευση της οποίας παρουσιάστηκε στην υποενότητα 3.4.2. Οι δύο μέθοδοι υλοποιούνται προγραμματιστικά στον ίδιο επιτραπέζιο ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Στον Πίνακα 3.2, παρουσιάζεται η σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων της ΜΔΣΣ με αντίστοιχα της ΜΣΙ, για την εμπρόσθια και την οπίσθια διατομή σκέδασης ενός μονοαξονικού πεπλατυσμένου σφαιροειδούς και μικρές τιμές εκκεντρότητας μέχρι $h = 0.4$. Θεωρούμε αξονική TE ή TM πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$ (για τη συγκεκριμένη γωνία τα δύο είδη πρόσπτωσης δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα λόγω της συμμετρίας του προβλήματος). Για τον υπολογισμό των διατομών με τη ΜΔΣΣ έχει χρησιμοποιηθεί η σχέση (3.79). Τα αποτελέσματα των στηλών ΜΔΣΣ⁽²⁾ έχουν υπολογιστεί διατηρώντας όρους μέχρι τάξης h^2 στην (3.79), ενώ των στηλών ΜΔΣΣ⁽⁴⁾ με το πλήρες ανάπτυγμα μέχρι τάξης h^4 . Σε κάθε περίπτωση, θεωρούμε πως το ακριβές αποτέλεσμα δίνεται από τη ΜΣΙ. Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.2, γίνεται αμέσως φανερό πως η λύση τέταρτης τάξης βελτιώνει την ακρίβεια της ΜΔΣΣ σε σχέση με τη λύση δεύτερης τάξης. Για παράδειγμα, ακόμα και για τη σχετικά αυξημένη τιμή $h = 0.4$, η λύση δεύτερης τάξης δίνει ένα σχετικό σφάλμα 39% για την οπίσθια διατομή, ενώ η λύση τέταρτης τάξης το μειώνει στο 0.85%. Επιπλέον, για $h < 0.2$, ακόμα και η λύση δεύτερης τάξης προσεγγίζει ικανοποιητικά το ακριβές αποτέλεσμα, ειδικά για την εμπρόσθια διατομή σκέδασης. Γενικά, για όλες τις τιμές του h που εξετάζονται στον Πίνακα 3.2, η

πλήρης λύση της ΜΔΣΣ δίνει σχετικά σφάλματα μικρότερα του 1%. Σε σχέση με τον απαιτούμενο χρόνο CPU, η ΜΔΣΣ δίνει το αποτέλεσμα και για τις οκτώ εξεταζόμενες τιμές του h σε χρόνο μικρότερο του 1 s. Αυτό οφείλεται στην απλή μορφή της αλγεβρικής σχέσης (3.79), στην οποία οι συντελεστές $g_{f,b}^{(2),(4)}$ είναι ανεξάρτητοι του h . Αντιθέτως, η προγραμματιστική υλοποίηση της ΜΣΙ χρειάζεται κατά μέσο όρο 30 s για να δώσει αποτελέσματα για μία μόνο τιμή της εκκεντρότητας και η εκτέλεση της πρέπει να επαναλαμβάνεται για κάθε νέα τιμή του h .

Η σύγκριση των δύο μεθόδων για την ολική διατομή σκέδασης ενός μονοαξονικού και ενός γυροηλεκτρικού σφαιροειδούς παρουσιάζεται στους Πίνακες 3.3 και 3.4, αντιστοίχως. Εξετάζονται και τα δύο είδη σφαιροειδών (επίμηκες και πεπλατυσμένο), για δύο διαφορετικές περιπτώσεις προσπίπτοντος κύματος—δηλ., πλάγια TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 60^\circ$ για το μονοαξονικό σφαιροειδές και αξονική TE ή TM με $\theta_0 = 0^\circ$ για το γυροηλεκτρικό. Στη δεύτερη περίπτωση, τα δύο είδη πρόσπτωσης δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα λόγω συμμετρίας. Για τον υπολογισμό της διατομής Q_t/λ_b^2 με τη ΜΔΣΣ έχει χρησιμοποιηθεί η σχέση (3.80). Και σε αυτή την περίπτωση διαπιστώνουμε πως η λύση τέταρτης τάξης βελτιώνει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, για τον Πίνακα 3.3, τα σχετικά σφάλματα διατηρούνται μικρότερα του 1% σε όλο το εύρος των εξεταζόμενων τιμών του h , τόσο για το επίμηκες όσο και για το πεπλατυσμένο σφαιροειδές. Αντίστοιχες παρατηρήσεις ισχύουν και για τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.4, όπου διαπιστώνουμε την πολύ ικανοποιητική συμφωνία της ΜΔΣΣ με τη ΜΣΙ, με τα σχετικά σφάλματα να παραμένουν χαμηλότερα του 0.15% για όλες τις εξεταζόμενες τιμές της εκκεντρότητας. Όπως και στην περίπτωση του Πίνακα 3.2, ο απαιτούμενος χρόνος CPU της προγραμματιστικής υλοποίησης της ΜΔΣΣ, για όλες τις εξεταζόμενες τιμές του h , είναι μικρότερος του 1 s. Από την άλλη, η ΜΣΙ χρειάζεται κατά μέσο όρο 25 s για να δώσει αποτελέσματα για μία μόνο τιμή της εκκεντρότητας.

Ένας αριθμός παρόμοιων ελέγχων, που πραγματοποιήθηκαν για διάφορους συνδυασμούς ανισοτροπίας και παραμέτρων του προβλήματος, έδειξε πως ισχύουν αντίστοιχες παρατηρήσεις με τις παραπάνω, με τη ΜΔΣΣ να παρουσιάζει πολύ χαμηλά σφάλματα για τιμές εκκεντρότητας μικρότερες από 0.3 ή 0.4, αναλόγως και των υπόλοιπων τιμών των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται.

Πίνακας 3.2: Τιμές $\sigma_{f,b}/\lambda_b^2$ για μονοαξονικό πεπλατυσμένο σφαιροειδές με $x_b = 1.3\pi$, $\epsilon_1 = 2.2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 3.5\epsilon_0$: TE ή TM πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$.

h	Εμπρόσθια διατομή			Οπίσθια διατομή		
	ΜΔΣΣ ⁽²⁾	ΜΔΣΣ ⁽⁴⁾	ΜΣΙ	ΜΔΣΣ ⁽²⁾	ΜΔΣΣ ⁽⁴⁾	ΜΣΙ
0.0001	62.359	62.359	62.359	0.79282	0.79282	0.79282
0.1	63.172	63.175	63.176	0.81417	0.81245	0.81244
0.15	64.195	64.213	64.215	0.84622	0.83750	0.83747
0.2	65.641	65.699	65.710	0.90111	0.87355	0.87341
0.25	67.524	67.667	67.710	0.98886	0.92158	0.92104
0.3	69.862	70.158	70.289	1.1224	0.98286	0.98120
0.35	72.677	73.226	73.555	1.3174	1.0589	1.0546
0.4	75.995	76.932	77.657	1.5925	1.1516	1.1419

Πίνακας 3.3: Τιμές Q_t/λ_b^2 για μονοαξονικό σφαιροειδές με $x_b = 1.1\pi$, $\epsilon_1 = 3\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 1.5\epsilon_0$. ΤΕ πρόσπτωση με $\theta_0 = 60^\circ$.

h	Επίμηκες			Πεπλατυσμένο		
	$M\Delta\Sigma\Sigma^{(2)}$	$M\Delta\Sigma\Sigma^{(4)}$	ΜΣΙ	$M\Delta\Sigma\Sigma^{(2)}$	$M\Delta\Sigma\Sigma^{(4)}$	ΜΣΙ
0.0001	3.7293	3.7293	3.7293	3.7293	3.7293	3.7293
0.1	3.7299	3.7289	3.7289	3.7322	3.7311	3.7311
0.15	3.7356	3.7302	3.7301	3.7407	3.7352	3.7353
0.2	3.7528	3.7354	3.7350	3.7617	3.7444	3.7448
0.25	3.7905	3.7482	3.7467	3.8044	3.7621	3.7639
0.3	3.8606	3.7728	3.7683	3.8807	3.7929	3.7983
0.35	3.9774	3.8148	3.8022	4.0048	3.8421	3.8551
0.4	4.1580	3.8806	3.8439	4.1937	3.9163	3.9427

Πίνακας 3.4: Τιμές Q_t/λ_b^2 για γυροηλεκτρικό σφαιροειδές με $x_b = \pi$, $\epsilon_1 = 1.5\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0.8\epsilon_0$, $\epsilon_3 = 2.5\epsilon_0$. ΤΕ ή ΤΜ πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$.

h	Επίμηκες			Πεπλατυσμένο		
	$M\Delta\Sigma\Sigma^{(2)}$	$M\Delta\Sigma\Sigma^{(4)}$	ΜΣΙ	$M\Delta\Sigma\Sigma^{(2)}$	$M\Delta\Sigma\Sigma^{(4)}$	ΜΣΙ
0.0001	1.5832	1.5832	1.5832	1.5832	1.5832	1.5832
0.1	1.5701	1.5700	1.5700	1.5965	1.5964	1.5964
0.15	1.5542	1.5537	1.5537	1.6135	1.6130	1.6130
0.2	1.5326	1.5311	1.5311	1.6380	1.6364	1.6364
0.25	1.5060	1.5023	1.5022	1.6707	1.6669	1.6670
0.3	1.4754	1.4676	1.4674	1.7125	1.7047	1.7048
0.35	1.4418	1.4274	1.4267	1.7645	1.7501	1.7501
0.4	1.4065	1.3820	1.3801	1.8279	1.8035	1.8032

Ως επόμενο βήμα, πραγματοποιούμε μια σειρά ελέγχων για την κανονικοποιημένη διστατική διατομή ραντάρ $\sigma(\theta, \varphi)/\lambda_b^2$. Τα αποτελέσματα της $M\Delta\Sigma\Sigma$ υπολογίζονται με την έκφραση της (3.78), μέχρι τάξης h^4 , και συγκρίνονται με τα αντίστοιχα της ΜΣΙ. Αρχικά, στο σχ. 3.6 απεικονίζεται η διατομή ραντάρ για διαξονικό επίμηκες σφαιροειδές και τρεις διαφορετικές τιμές της εκκεντρότητας h . Για $h = 0.1$, παρατηρείται ταύτιση μεταξύ $M\Delta\Sigma\Sigma$ και ΜΣΙ. Βλέπουμε πως για $h = 0.3$ η συμφωνία μεταξύ των δύο μεθόδων παραμένει, με εξαίρεση τη βύθιση στην περιοχή της γωνίας $\theta = 105^\circ$. Αύξηση της τιμής της εκκεντρότητας σε $h = 0.4$, οδηγεί στην εμφάνιση αποκλίσεων στα αποτελέσματα της $M\Delta\Sigma\Sigma$, σε σχέση με τα αντίστοιχα της ΜΣΙ, όπως φαίνεται πιο καθαρά στην περιοχή μεταξύ $\theta = 70^\circ$ και 140° . Ο απαιτούμενος χρόνος CPU για την εκτέλεση της ΜΣΙ—για τον υπολογισμό ενός από τα διαγράμματα του σχ. 3.6—είναι 55 s. Ο αντίστοιχος χρόνος της $M\Delta\Sigma\Sigma$ περιορίζεται σε 3 s.

Η σκέδαση από μονοαξονικό πεπλατυσμένο σφαιροειδές εξετάζεται στο σχ. 3.7, για τρεις διαφορετικές τιμές της εκκεντρότητας. Παρατηρούμε πως, για $h = 0.1$ και 0.3 , έχουμε ταύτιση των διαγραμμάτων της $M\Delta\Sigma\Sigma$ με τα αντίστοιχα της ΜΣΙ. Ακόμα και για $h = 0.4$, η $M\Delta\Sigma\Sigma$ παρουσιάζει ικανοποιητική συμφωνία με τη ΜΣΙ, εκτός από την περιοχή γύρω από τη γωνία $\theta = 88^\circ$ όπου το διάγραμμα παρουσιάζει βύθιση. Για το σχ. 3.7, ο απαιτούμενος χρόνος CPU της ΜΣΙ για τον υπολογισμό ενός από τα διαγράμματα είναι 25 s, ενώ ο αντίστοιχος

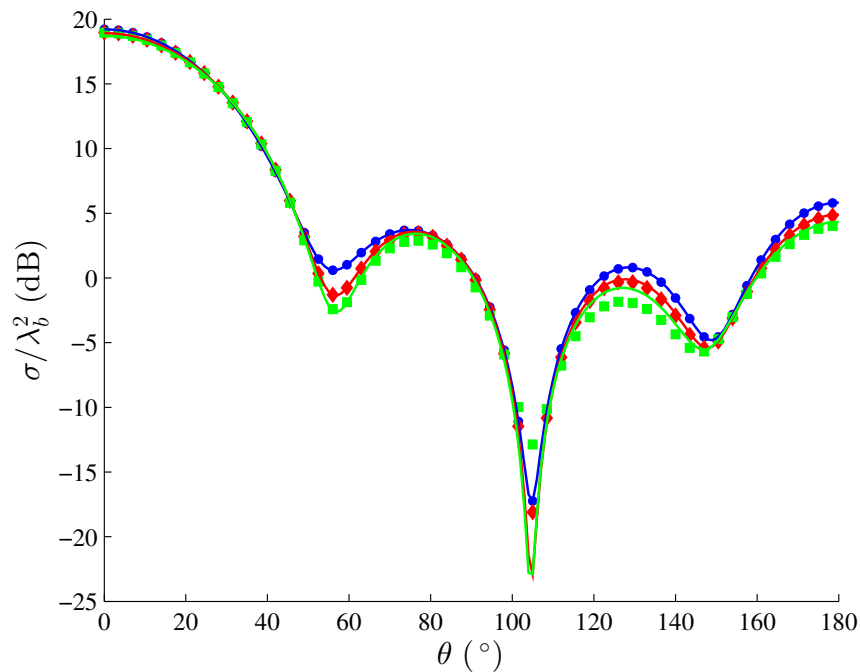
χρόνος της ΜΔΣΣ είναι μικρότερος από 1 s.

Η περίπτωση ενός γυροηλεκτρικού επιμήκους σφαιροειδούς παρουσιάζεται στο σχ. 3.8. Για $h = 0.1$, παρατηρούμε και πάλι ταύτιση μεταξύ ΜΔΣΣ και ΜΣΙ, ενώ για $h = 0.3$ η συμφωνία μεταξύ των δύο μεθόδων εξακολουθεί να υφίσταται, με εξαίρεση μια απόκλιση στην περιοχή της γωνίας $\theta = 135^\circ$ όπου το διάγραμμα παρουσιάζει βύθιση. Ωστόσο, για $h = 0.5$, τα αποτελέσματα της ΜΔΣΣ εμφανίζουν σημαντική διαφορά από εκείνα της μεθόδου αναφοράς, και η ΜΔΣΣ αποτυγχάνει να περιγράψει τη σκέδαση από το σφαιροειδές. Ο χρόνος CPU της ΜΣΙ για τον υπολογισμό ενός από τα διαγράμματα του σχ. 3.8 είναι 20 s, ενώ ο αντίστοιχος χρόνος της ΜΔΣΣ μικρότερος από 1 s.

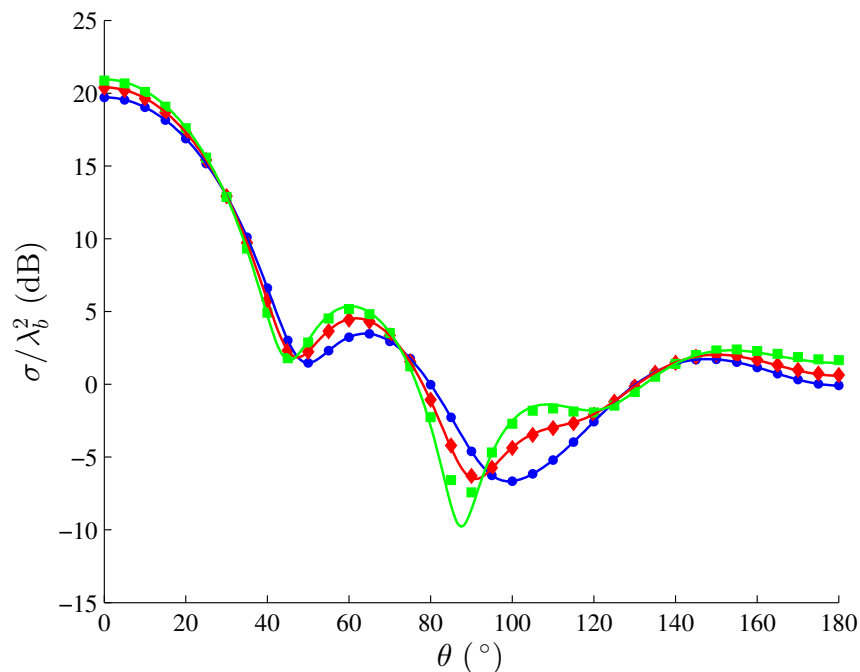
Ένας τελευταίος έλεγχος σχετικά με το εύρος τιμών εφαρμογής της ΜΔΣΣ παρουσιάζεται στο σχ. 3.9. Συγκεκριμένα, στο σχήμα απεικονίζεται η μεταβολή της κανονικοποιημένης οπίσθιας διατομής σκέδασης σ_b/λ_b^2 , συναρτήσει της παραμέτρου μεγέθους x_b , για μονοαξονικό πεπλατυσμένο σφαιροειδές και τρεις διαφορετικές τιμές της εκκεντρότητας h . Ο υπολογισμός της διατομής γίνεται με χρήση της (3.79), μέχρι τάξης h^4 . Παρατηρούμε πως για τιμές της εκκεντρότητας μέχρι $h = 0.35$, τα αποτελέσματα της ΜΔΣΣ βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με τη ΜΣΙ, σε ολόκληρο το εξεταζόμενο εύρος τιμών της παραμέτρου x_b . Περαιτέρω αύξηση της τιμής του h οδηγεί στην εμφάνιση αποκλίσεων στα αποτελέσματα της ΜΔΣΣ, όπως φαίνεται από τις καμπύλες που αντιστοιχούν σε $h = 0.5$. Και σε αυτή την περίπτωση όμως, οι αποκλίσεις γίνονται έντονες για $x_b > 5$, ενώ η ΜΔΣΣ περιγράφει ικανοποιητικά την απόκριση σκέδασης του σφαιροειδούς για μικρότερες τιμές του x_b , με εξαίρεση μια περιοχή γύρω από το $x_b = 3$.

Για τα αποτελέσματα του σχ. 3.9, η ΜΔΣΣ έχει εκτελεστεί για 121 διαφορετικές τιμές της παραμέτρου μεγέθους x_b —δηλ., $x_b \in [1, 7]$ με βήμα 0.05. Όπως επισημάνθηκε παραπάνω, η απλή μορφή της αλγεβρικής σχέσης (3.79) έχει ως αποτέλεσμα ο συνολικός απαιτούμενος χρόνος CPU, και για τις τρεις εξεταζόμενες τιμές της εκκεντρότητας, να είναι ίσος με 70 s. Αντιθέτως, η ΜΣΙ αρχικοποιήθηκε για να δώσει αποτελέσματα στο εύρος $x_b \in [1, 7]$ με βήμα 0.2—δηλ., για 31 διαφορετικές τιμές του x_b . Σε αυτή την περίπτωση, ο απαιτούμενος χρόνος CPU είναι 535 s για $h = 0.15$, 1008 s για $h = 0.35$, και 1257 s για $h = 0.5$. Οι διαφορετικοί χρόνοι εκτέλεσης οφείλονται στο γεγονός πως καθώς το h αυξάνεται και το σφαιροειδές γίνεται πιο πεπλατυσμένο, περισσότεροι όροι απαιτούνται για την επίτευξη σύγκλισης (βλ. και υποενότητα 3.4.4). Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν για την εμπρόσθια και την ολική διατομή σκέδασης, καθώς και για τα υπόλοιπα είδη ανισοτροπίας.

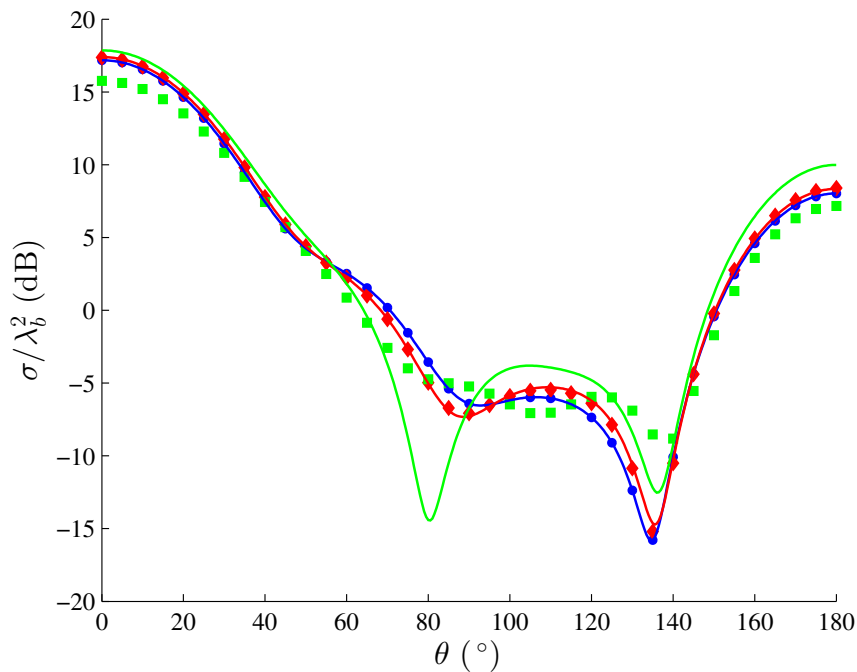
Από τα παραπάνω αποτελέσματα γίνεται φανερό πως η ΜΔΣΣ είναι σαφώς πιο αποδοτική από τη ΜΣΙ σε όρους απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου. Επιπλέον, εμφανίζει ικανοποιητική ακρίβεια στο κατάλληλο εύρος μικρών τιμών της εκκεντρότητας h —ιδίως όταν πρόκειται για τον υπολογισμό των διατομών $\sigma_{f,b}$ και Q_t , οι οποίες είναι αυτές που συνήθως μας ενδιαφέρουν στα προβλήματα σκέδασης. Συγκεκριμένα, εφόσον η τιμή του h διατηρείται μικρή έως 0.3 ή 0.4—ή και έως 0.5 σε συνδυασμό με μικρότερες τιμές του x_b —, η ΜΔΣΣ παρουσιάζει εξαιρετική επίδοση στον υπολογισμό των χαρακτηριστικών σκέδασης, ειδικά όταν χρειάζεται να εξεταστούν πολλαπλές τιμές του h .



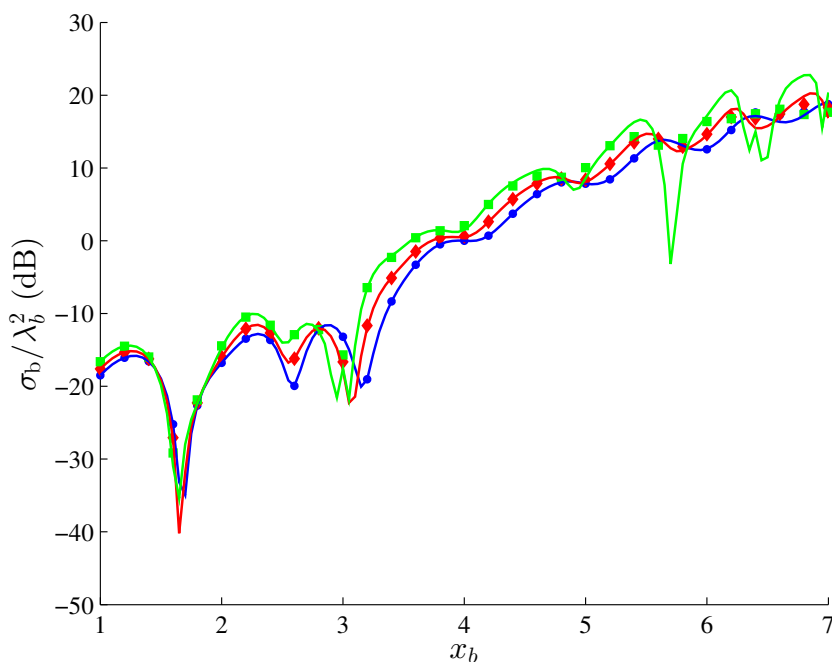
Σχήμα 3.6: Διστατική διατομή ραντάρ $\sigma(\theta, \varphi)/\lambda_b^2$ για διαξονικά επιμήκη σφαιροειδή με $x_b = 1.2\pi$, $\epsilon_1 = 3.2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 2.5\epsilon_0$, $\epsilon_3 = 1.5\epsilon_0$ · επίπεδο $\varphi = 0^\circ$ · TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$. Συνεχείς γραμμές: ΜΔΣΣ· τελείες/ρόμβοι/τετράγωνα: ΜΣΙ. Μπλε γραμμή/τελείες: $h = 0.1$ · κόκκινη γραμμή/ρόμβοι: $h = 0.3$ · πράσινη γραμμή/τετράγωνα: $h = 0.4$.



Σχήμα 3.7: Διστατική διατομή ραντάρ $\sigma(\theta, \varphi)/\lambda_b^2$ για μονοαξονικά πεπλατυσμένα σφαιροειδή με $x_b = 1.3\pi$, $\epsilon_1 = 2.2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 3.5\epsilon_0$ · επίπεδο $\varphi = 0^\circ$ · TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$. Συνεχείς γραμμές: ΜΔΣΣ· τελείες/ρόμβοι/τετράγωνα: ΜΣΙ. Μπλε γραμμή/τελείες: $h = 0.1$ · κόκκινη γραμμή/ρόμβοι: $h = 0.3$ · πράσινη γραμμή/τετράγωνα: $h = 0.4$.



Σχήμα 3.8: Διστατική διατομή ραντάρ $\sigma(\theta, \varphi)/\lambda_b^2$ για γυροηλεκτρικά επιμήκη σφαιροειδή με $x_b = 1.2\pi$, $\epsilon_1 = 3.5\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0.5\epsilon_0$, $\epsilon_3 = 1.8\epsilon_0$: επίπεδο $\varphi = 90^\circ$: TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$. Συνεχείς γραμμές: ΜΔΣΣ· τελείες/ρόμβοι/τετράγωνα: ΜΣΙ. Μπλε γραμμή/τελείες: $h = 0.1$ · κόκκινη γραμμή/ρόμβοι: $h = 0.3$ · πράσινη γραμμή/τετράγωνα: $h = 0.5$.



Σχήμα 3.9: Οπίσθια διατομή σκέδασης σ_b/λ_b^2 για μονοαξονικά πεπλατυσμένα σφαιροειδή με $\epsilon_1 = 2.2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 3.5\epsilon_0$: TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$. Συνεχείς γραμμές: ΜΔΣΣ· τελείες/ρόμβοι/τετράγωνα: ΜΣΙ. Μπλε γραμμή/τελείες: $h = 0.15$ · κόκκινη γραμμή/ρόμβοι: $h = 0.35$ · πράσινη γραμμή/τετράγωνα: $h = 0.5$.

3.4.4 Λοιπά αποτελέσματα - Σύγκλιση

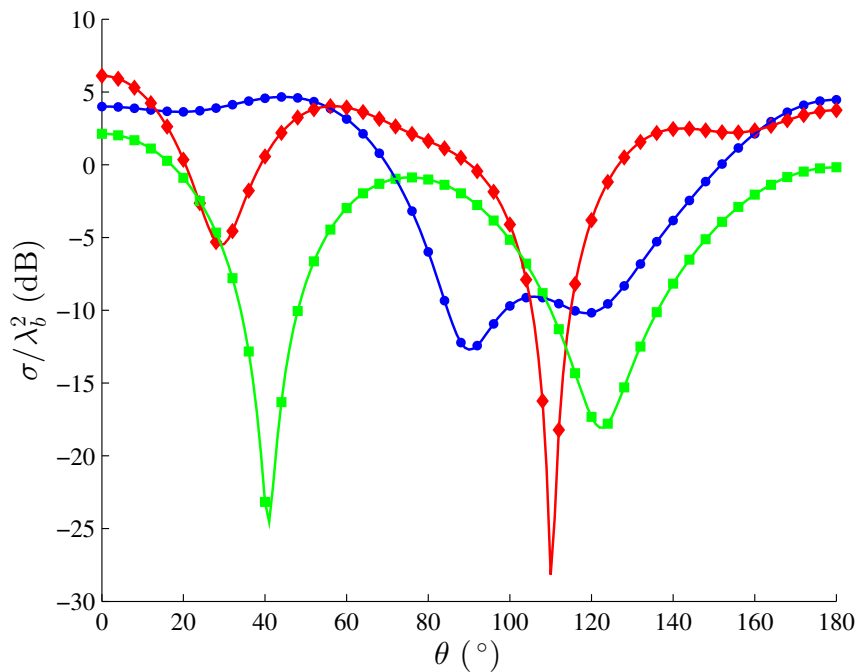
Στην παρούσα υποενότητα παρουσιάζονται ορισμένα ενδεικτικά αριθμητικά αποτελέσματα για τις ΜΣΙ και ΜΔΣΣ, τα οποία μπορούν να χρησιμεύσουν και ως αποτελέσματα αναφοράς για τον έλεγχο της ορθότητας άλλων υπολογιστικών τεχνικών. Επιπλέον, γίνεται ένας σύντομος σχολιασμός της σύγκλισης των δύο μεθόδων.

Η ΜΣΙ δύναται να αποτελέσει ένα αξιόπιστο υπολογιστικό εργαλείο για τη μελέτη της επίδρασης των γεωμετρικών χαρακτηριστικών και της ανισοτροπίας του σφαιροειδούς στην απόκριση σκέδασης, χωρίς να περιορίζεται σε μικρές τιμές της εκκεντρότητας όπως η ΜΔΣΣ. Ένα ενδεικτικό παράδειγμα παρουσιάζεται στο σχ. 3.10, στο οποίο φαίνεται η επίδραση της μεταβολής της εκκεντρότητας στην κανονικοποιημένη διστατική διατομή ραντάρ ενός επιμήκους σφαιροειδούς, για TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$. Οι τιμές των στοιχείων του τανυστή επιτρεπτότητας του σφαιροειδούς αντιστοιχούν στον μονοαξονικό κρύσταλλο LiNbO_3 [97]. Θεωρούμε τρεις διαφορετικές τιμές της εκκεντρότητας. Η τιμή $h = 0.0001$ αντιστοιχεί σε σχεδόν σφαιρικό σχήμα με λόγο αξόνων $c_0/b_0 \approx 1$, ενώ $c_0/b_0 \approx 1.15$ για την τιμή $h = 0.5$, και $c_0/b_0 \approx 1.4$ για $h = 0.7$. Όπως φαίνεται από το σχήμα, μεταβάλλοντας τη γεωμετρία του σφαιροειδούς επιφέρονται αξιοσημείωτες αλλαγές στη διατομή σκέδασης, με σημαντικές βυθίσεις να κάνουν την εμφάνισή τους στα διαγράμματα για $h = 0.5$ και 0.7 . Ο ίδιος τύπος μονοαξονικού σφαιροειδούς εξετάζεται και στο σχ. 3.11, για πλάγια TM πρόσπτωση με $\theta_0 = 60^\circ$ και μεγαλύτερες τιμές της εκκεντρότητας—δηλ., πιο επιμήκεις σχεδιαστές. Συγκεκριμένα, η τιμή $h = 0.86$ αντιστοιχεί σε λόγο αξόνων $c_0/b_0 \approx 1.96$, ενώ $c_0/b_0 \approx 2.11$ για $h = 0.88$, και $c_0/b_0 \approx 2.55$ για $h = 0.92$. Όπως και στο σχ. 3.10, διαπιστώνουμε τη σημαντική επίδραση που έχει η αλλαγή της εκκεντρότητας στην απόκριση σκέδασης του σφαιροειδούς.

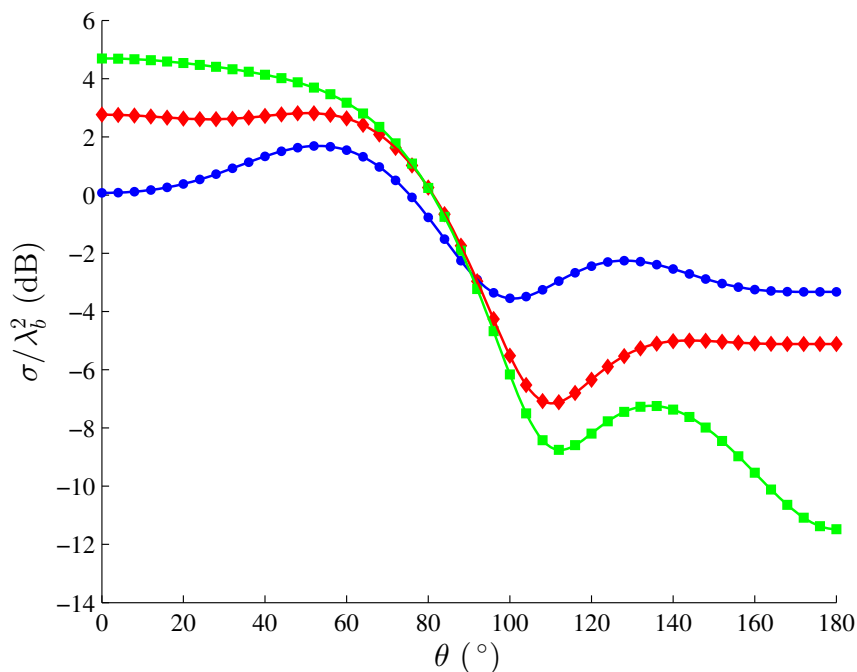
Ως δεύτερο παράδειγμα, στο σχ. 3.12 εξετάζεται η σκέδαση από ένα διαξονικό πεπλατυσμένο σφαιροειδές, για TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$. Σε αυτή την περίπτωση, η εκκεντρότητα του σφαιροειδούς διατηρείται σταθερή στην τιμή $h = 1.1$ —που αντιστοιχεί σε λόγο αξόνων $b_0/c_0 \approx 1.49$ —και μεταβάλλεται το στοιχείο ϵ_2 του τανυστή επιτρεπτότητας της (3.1). Βλέπουμε πως η αύξηση της τιμής του ϵ_2 έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας σημαντικής βύθισης περί τη γωνία $\theta = 90^\circ$, ενώ στις εκατέρωθεν περιοχές η διατομή ραντάρ αυξάνεται.

Ένα παράδειγμα σκέδασης από γυροηλεκτρικό πεπλατυσμένο σφαιροειδές παρουσιάζεται στο σχ. 3.13, για TE κύμα που προσπίπτει πλαγίως υπό γωνία $\theta_0 = 45^\circ$. Η εκκεντρότητα διατηρείται σταθερή στην τιμή $h = 1.2$ —που αντιστοιχεί σε λόγο αξόνων $b_0/c_0 \approx 1.56$ —και εξετάζεται η επίδραση της μεταβολής του μη διαγώνιου στοιχείου ϵ_2 του τανυστή επιτρεπτότητας (3.2). Βλέπουμε πως η τελευταία οδηγεί σε σημαντικές μεταβολές στη διατομή ραντάρ προς την οπίσθια κατεύθυνση σκέδασης—δηλ., στην περιοχή μεταξύ των γωνιών $\theta = 100^\circ$ και 180° . Μια τέτοια συμπεριφορά μπορεί να βρει εφαρμογή σε διατάξεις από μαγνητο-οπτικά υλικά [77], στα οποία η μεταβολή του μη διαγώνιου στοιχείου είναι δυνατή μέσω της εφαρμογής ενός εξωτερικού στατικού μαγνητικού πεδίου, οδηγώντας σε δυναμικά ελεγχόμενη απόκριση του σχεδιαστή.

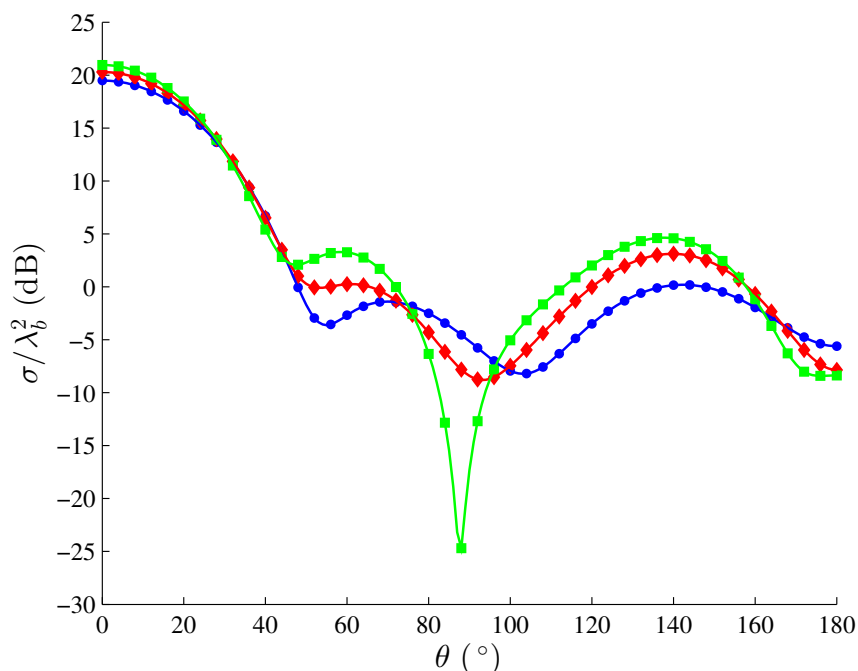
Ως ένα τελευταίο παράδειγμα, επανερχόμαστε στο νανοσφαιροειδές του σχ. 3.5 για να εξετάσουμε την επίδραση της αλλαγής της γεωμετρίας στην ολική διατομή σκέδασης. Έτσι, στο σχ. 3.14 δείχνουμε πως μεταβάλλεται η Q_t/λ_b^2 συναρτήσει του προσπίπτοντος μήκους κύμα-



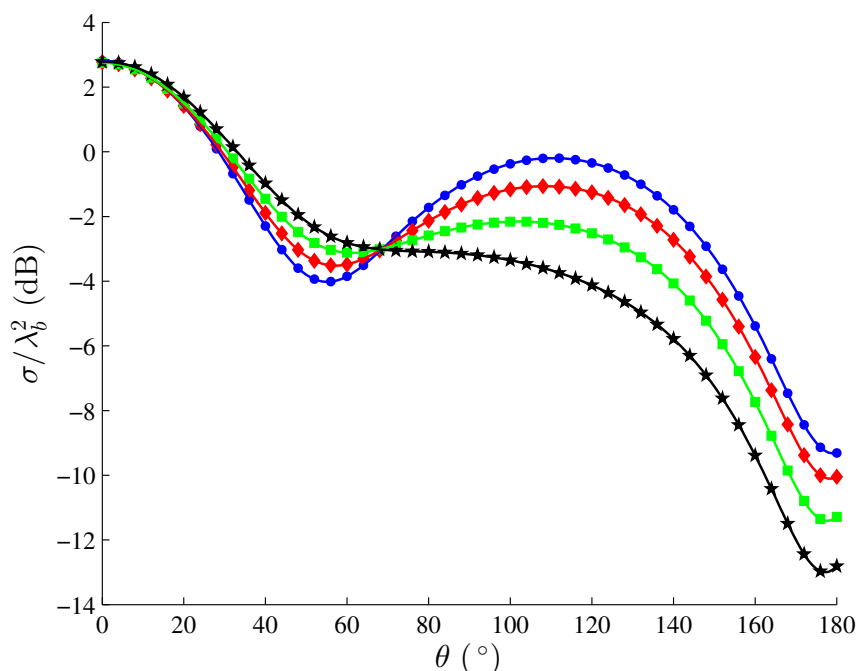
Σχήμα 3.10: Διστατική διατομή ραντάρ $\sigma(\theta, \varphi)/\lambda_b^2$ για μονοαξονικά επιμήκη σφαιροειδή με $x_b = \pi$, $\epsilon_1 = 5.3495\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 4.9284\epsilon_0$ · επίπεδο $\varphi = 0^\circ$ · TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$. Μπλε γραμμή/τελείες: $h = 0.0001$ · κόκκινη γραμμή/ρόμβοι: $h = 0.5$ · πράσινη γραμμή/τετράγωνα: $h = 0.7$.



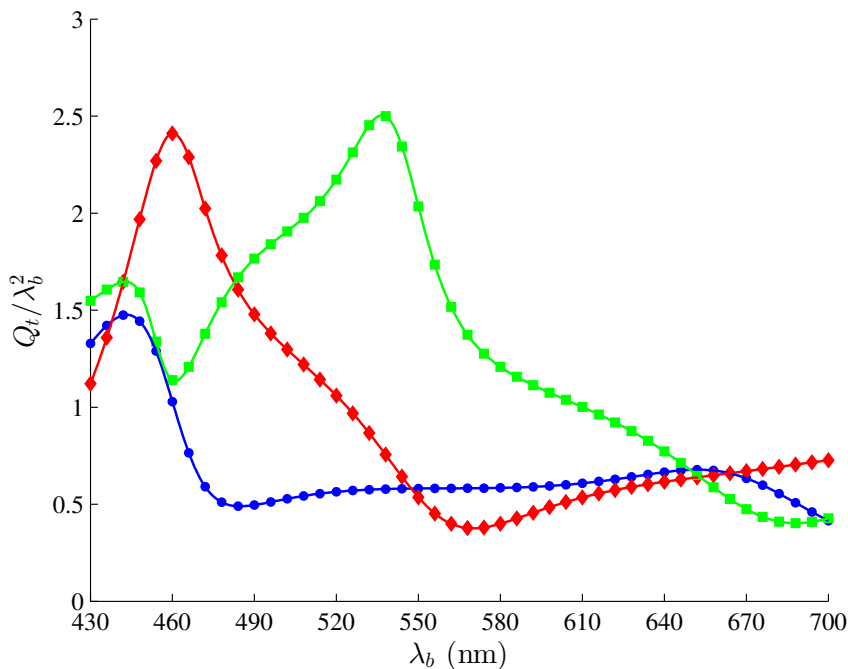
Σχήμα 3.11: Διστατική διατομή ραντάρ $\sigma(\theta, \varphi)/\lambda_b^2$ για μονοαξονικά επιμήκη σφαιροειδή με $x_b = \pi$, $\epsilon_1 = 5.3495\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 4.9284\epsilon_0$ · επίπεδο $\varphi = 90^\circ$ · TM πρόσπτωση με $\theta_0 = 60^\circ$. Μπλε γραμμή/τελείες: $h = 0.86$ · κόκκινη γραμμή/ρόμβοι: $h = 0.88$ · πράσινη γραμμή/τετράγωνα: $h = 0.92$.



Σχήμα 3.12: Διστατική διατομή ραντάρ $\sigma(\theta, \varphi)/\lambda_b^2$ για διαξονικά πεπλατυσμένα σφαιροειδή με $x_b = \pi$, $h = 1.1$, $\epsilon_1 = 3.5\epsilon_0$, $\epsilon_3 = 2.5\epsilon_0$, $\varphi = 0^\circ$. TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$. Μπλε γραμμή/τελείες: $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$, κόκκινη γραμμή/ρόμβοι: $\epsilon_2 = 2.2\epsilon_0$, πράσινη γραμμή/τετράγωνα: $\epsilon_2 = 2.4\epsilon_0$.



Σχήμα 3.13: Διστατική διατομή ραντάρ $\sigma(\theta, \varphi)/\lambda_b^2$ για γυροηλεκτρικά πεπλατυσμένα σφαιροειδή με $x_b = 0.5\pi$, $h = 1.2$, $\epsilon_1 = 3.5\epsilon_0$, $\epsilon_3 = 5\epsilon_0$, επίπεδο $\varphi = 90^\circ$. TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 45^\circ$. Μπλε γραμμή/τελείες: $\epsilon_2 = 0.25\epsilon_0$, κόκκινη γραμμή/ρόμβοι: $\epsilon_2 = 0.5\epsilon_0$, πράσινη γραμμή/τετράγωνα: $\epsilon_2 = 0.75\epsilon_0$, μαύρη γραμμή/αστέρια: $\epsilon_2 = \epsilon_0$.



Σχήμα 3.14: Ολική διατομή σκέδασης Q_t/λ_b^2 για μονοαξονικά πεπλατυσμένα σφαιροειδή με $c_0 = 100$ nm, $\epsilon_1 = 7.0668\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 8.8027\epsilon_0$. TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$. Μπλε γραμμή/τελείες: $h = 0.75$ · κόκκινη γραμμή/ρόμβοι: $h = 1.2$ · πράσινη γραμμή/τετράγωνα: $h = 1.73$.

τος, αν θεωρήσουμε δύο επιπλέον τιμές της εκκεντρότητας—δηλ., $h = 0.75$ και 1.73 —για την ίδια αξονική TE πρόσπτωση. Η τιμή $h = 0.75$ αντιστοιχεί σε λόγο αξόνων $b_0/c_0 = 1.25$, ενώ η $h = 1.73$ σε λόγο $b_0/c_0 \approx 2$. Από το σχήμα βλέπουμε πως, καθώς η εκκεντρότητα αυξάνεται και το σφαιροειδές γίνεται πιο πεπλατυσμένο, οι συντονισμοί—δηλ., οι κορυφές που εμφανίζουν τα διαγράμματα της ολικής διατομής σκέδασης—αποκτούν μεγαλύτερο πλάτος και μετατοπίζονται προς το κόκκινο μήκος κύματος. Ο υπολογισμός φασμάτων σκέδασης, όπως του σχ. 3.14, βρίσκει εφαρμογές στη νανοφωτονική, για τη μελέτη συντονιζόμενων σωματιδίων με μέγεθος μικρότερο του μήκους κύματος της προσπίπτουσας ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (subwavelength), τα οποία λειτουργούν ως νανοκεραίες. Σε αυτό το πλαίσιο, η ανισοτροπία μπορεί να αποτελέσει έναν πρόσθετο βαθμό ελευθερίας για τη διαμόρφωση της οπτικής απόκρισης του σωματιδίου, επιτυγχάνοντας νέες λειτουργίες, που δεν είναι εφικτές με τα ιστροπικά διηλεκτρικά υλικά [78].

Όσον αφορά στη ΜΔΣΣ, ενδεικτικά αριθμητικά αποτελέσματα συγκεντρώνονται στους Πίνακες 3.5 και 3.6, με τη μορφή των απαραίτητων αριθμητικών τιμών για την εφαρμογή των σχέσεων (3.79) και (3.80), αντιστοίχως, λαμβάνοντας υπόψη όρους μέχρι τάξης h^4 . Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.3, οι τιμές των διατομών $\sigma_{f,b}^{(0)}/\lambda_b^2$, $Q_t^{(0)}/\lambda_b^2$ —που αντιστοιχούν στη σκέδαση από σφαίρα και υπολογίζονται σύμφωνα με τις [84, 85]—και των συντελεστών $g_{f,b}^{(2),(4)}$, $g_t^{(2),(4)}$ είναι ανεξάρτητες της εκκεντρότητας h και δεν απαιτούν τον υπολογισμό των σφαιροειδών συναρτήσεων. Επομένως, οι ποσότητες αυτές χρειάζεται να υπολογιστούν μόνο μία φορά και στη συνέχεια είναι διαθέσιμες για χρήση με κάθε μικρή τιμή του h . Έτσι, για επιμήκη σφαιροειδή, οι τιμές του Πίνακα 3.5 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για

Πίνακας 3.5: Τιμές $\sigma_{f,b}^{(0)}/\lambda_b^2$, $g_{f,b}^{(2)}$, και $g_{f,b}^{(4)}$ για $x_b = 1.3\pi$ και TE πρόσπτωση.

Μονοαξονικό σφαιροειδές με $\epsilon_1 = 2.54\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 1.8\epsilon_0$.						
θ_0	Εμπρόσθια διατομή			Οπίσθια διατομή		
	$\frac{\sigma_f^{(0)}}{\lambda_b^2}$	$g_f^{(2)}$	$g_f^{(4)}$	$\frac{\sigma_b^{(0)}}{\lambda_b^2}$	$g_b^{(2)}$	$g_b^{(4)}$
0°	114.49	-2.0469	-4.0136	8.9392	-1.1952	-13.429
30°	107.01	-1.4743	-2.3744	5.1512	-1.1370	-8.1793
60°	102.00	-1.3870	-5.2337	3.2031	0.83357	-28.044
90°	98.269	-1.6567	-4.2081	3.4747	1.2407	-25.905

Διαξονικό σφαιροειδές με $\epsilon_1 = 2.54\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 3\epsilon_0$, $\epsilon_3 = 1.8\epsilon_0$.						
θ_0	Εμπρόσθια διατομή			Οπίσθια διατομή		
	$\frac{\sigma_f^{(0)}}{\lambda_b^2}$	$g_f^{(2)}$	$g_f^{(4)}$	$\frac{\sigma_b^{(0)}}{\lambda_b^2}$	$g_b^{(2)}$	$g_b^{(4)}$
0°	84.360	-0.38080	0.37654	10.180	0.038135	6.4146
30°	74.555	-0.51290	2.1145	5.8036	-0.76331	10.660
60°	67.804	-1.4976	0.23630	4.9129	-4.7828	7.7381
90°	65.472	-1.4023	-2.1076	6.1540	-4.5081	10.634

Γυροηλεκτρικό σφαιροειδές με $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0.8\epsilon_0$, $\epsilon_3 = 2.5\epsilon_0$.						
θ_0	Εμπρόσθια διατομή			Οπίσθια διατομή		
	$\frac{\sigma_f^{(0)}}{\lambda_b^2}$	$g_f^{(2)}$	$g_f^{(4)}$	$\frac{\sigma_b^{(0)}}{\lambda_b^2}$	$g_b^{(2)}$	$g_b^{(4)}$
0°	44.401	-2.1844	1.7356	6.4571	-1.0507	0.41471
30°	31.922	-3.4375	18.489	3.2131	5.3193	33.602
60°	21.948	1.1297	61.231	4.8591	2.2119	36.558
90°	15.312	6.3656	103.88	11.577	0.57360	4.6859

τον γρήγορο υπολογισμό της εμπρόσθιας ή της οπίσθιας διατομής σκέδασης, με έναν απλό υπολογιστή χειρός και εφαρμογή της (3.79) με την επιθυμητή μικρή τιμή της εκκεντρότητας. Για πεπλατυσμένα σφαιροειδή χρησιμοποιούνται οι ίδιες τιμές, αλλά το $-h^2$ αντικαθιστά το h^2 στην (3.79). Οι ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν για τις τιμές του Πίνακα 3.6 και τον γρήγορο υπολογισμό της ολικής διατομής σκέδασης με εφαρμογή της (3.80).

Για παράδειγμα, θεωρώντας το μονοαξονικό επίμηκες σφαιροειδές του Πίνακα 3.5 και TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 60^\circ$, παίρνουμε $\sigma_f/\lambda_b^2 = 95.484$ και $\sigma_b/\lambda_b^2 = 3.1662$ για $h = 0.2$, ενώ τα αντίστοιχα αποτελέσματα της ΜΣΙ είναι $\sigma_f/\lambda_b^2 = 95.638$ και $\sigma_b/\lambda_b^2 = 3.1647$. Τα σχετικά σφάλματα στον υπολογισμό των διατομών με τη ΜΔΣΣ είναι 0.16% και 0.05% για την εμπρόσθια και την οπίσθια διατομή σκέδασης, αντιστοίχως. Ο απαιτούμενος χρόνος CPU για τον υπολογισμό των $\sigma_{f,b}^{(0)}/\lambda_b^2$ και $g_{f,b}^{(2),(4)}$ με τη ΜΔΣΣ είναι μικρότερος του 1 s. Για μια νέα μικρή τιμή του h , οι ίδιες τιμές του Πίνακα 3.5 χρησιμοποιούνται για να δώσουν αμέσως το νέο αποτέλεσμα. Αντιθέτως, η ΜΣΙ χρειάζεται 30 s για να δώσει τα παραπάνω αποτελέσματα και απαιτείται η επανάληψη της εκτέλεσης της για κάθε νέα τιμή του h .

Ως δεύτερο παράδειγμα, για το διαξονικό πεπλατυσμένο σφαιροειδές του Πίνακα 3.5 και TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$, παίρνουμε $\sigma_f/\lambda_b^2 = 83.126$ και $\sigma_b/\lambda_b^2 = 10.300$ για $h = 0.2$, ενώ για την ίδια περίπτωση η ΜΣΙ δίνει $\sigma_f/\lambda_b^2 = 83.402$ και $\sigma_b/\lambda_b^2 = 10.331$. Σε αυτή την

Πίνακας 3.6: Τιμές $Q_t^{(0)}/\lambda_b^2$, $g_t^{(2)}$, και $g_t^{(4)}$ για $x_b = \pi$.

Μονοαξονικό σφαιροειδές με $\epsilon_1 = 2.2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 3.5\epsilon_0$.

θ_0	TE πρόσπτωση			TM πρόσπτωση		
	$\frac{Q_t^{(0)}}{\lambda_b^2}$	$g_t^{(2)}$	$g_t^{(4)}$	$\frac{Q_t^{(0)}}{\lambda_b^2}$	$g_t^{(2)}$	$g_t^{(4)}$
0°	2.5382	-0.92634	-0.11715	2.5382	-0.92634	-0.11715
30°	2.5859	-0.90177	-0.045411	2.9952	-1.0064	0.097535
60°	2.6035	-0.92296	0.87220	3.6042	-0.14828	-0.72309
90°	2.6336	-1.2727	1.4111	3.6342	1.2932	-2.2703

Διαξονικό σφαιροειδές με $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 2.5\epsilon_0$, $\epsilon_3 = 3.5\epsilon_0$.

θ_0	TE πρόσπτωση			TM πρόσπτωση		
	$\frac{Q_t^{(0)}}{\lambda_b^2}$	$g_t^{(2)}$	$g_t^{(4)}$	$\frac{Q_t^{(0)}}{\lambda_b^2}$	$g_t^{(2)}$	$g_t^{(4)}$
0°	3.1192	-0.95231	-0.26298	2.0699	-0.91624	-0.15193
30°	3.1797	-0.86928	-0.39990	2.6454	-1.0624	0.34234
60°	3.1534	-0.79667	1.9573	3.5718	-0.24969	-0.75597
90°	3.2845	-1.3947	1.5924	3.8141	1.1668	-2.8080

Γυροηλεκτρικό σφαιροειδές με $\epsilon_1 = 3\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0.9\epsilon_0$, $\epsilon_3 = 5\epsilon_0$.

θ_0	TE πρόσπτωση			TM πρόσπτωση		
	$\frac{Q_t^{(0)}}{\lambda_b^2}$	$g_t^{(2)}$	$g_t^{(4)}$	$\frac{Q_t^{(0)}}{\lambda_b^2}$	$g_t^{(2)}$	$g_t^{(4)}$
0°	2.4240	-0.29870	-0.89487	2.4240	-0.29870	-0.89487
30°	2.7268	-0.71004	-1.6257	2.6208	0.12141	-2.7538
60°	3.2684	-0.073067	0.66160	2.2430	0.68501	18.950
90°	3.4173	-0.22117	1.6142	1.5602	2.0242	95.400

περίπτωση, τα σχετικά σφάλματα της ΜΔΣΣ είναι 0.33% και 0.3% για την εμπρόσθια και την οπίσθια διατομή σκέδασης, αντιστοίχως, ενώ ο απαιτούμενος χρόνος CPU είναι 3.7 s για τη ΜΔΣΣ και 50 s για τη ΜΣΙ.

Παρομοίως, για το μονοαξονικό πεπλατυσμένο σφαιροειδές του Πίνακα 3.6 και TM πρόσπτωση με $\theta_0 = 30^\circ$, παίρνουμε $Q_t/\lambda_b^2 = 3.2688$ για $h = 0.3$, ενώ η αντίστοιχη τιμή που δίνει η ΜΣΙ είναι $Q_t/\lambda_b^2 = 3.2630$ και το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό της διατομής με τη ΜΔΣΣ είναι 0.18%. Επίσης, για το γυροηλεκτρικό επίμηκες σφαιροειδές του Πίνακα 3.6 με $\theta_0 = 0^\circ$, βρίσκουμε $Q_t/\lambda_b^2 = 2.3413$ για $h = 0.3$ (ίδια τιμή για TE ή TM πρόσπτωση λόγω συμμετρίας). Το αντίστοιχο αποτέλεσμα της ΜΣΙ είναι $Q_t/\lambda_b^2 = 2.3226$ και το σχετικό σφάλμα στον υπολογισμό της διατομής με τη ΜΔΣΣ 0.81%. Και για τα δύο παραπάνω παραδείγματα του Πίνακα 3.6, ο απαιτούμενος χρόνος CPU είναι μικρότερος του 1 s για τη ΜΔΣΣ και 25 s για τη ΜΣΙ. Τέλος, για το διαξονικό επίμηκες σφαιροειδές του ίδιου πίνακα και TE πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$, παίρνουμε $Q_t/\lambda_b^2 = 2.8452$ για $h = 0.3$, ενώ η αντίστοιχη τιμή που δίνει η ΜΣΙ είναι $Q_t/\lambda_b^2 = 2.8465$ και το σχετικό σφάλμα 0.05%. Οι αντίστοιχοι χρόνοι CPU είναι 2 s για τη ΜΔΣΣ και 30 s για τη ΜΣΙ.

Σημειώνεται πως ο αυξημένος χρόνος CPU που χρειάζονται και οι δύο μέθοδοι όταν μοντελοποιούνται διαξονικά σφαιροειδή, οφείλεται στο ότι σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει

απεμπλοκή των τελικών γραμμικών συστημάτων για κάθε τιμή του δείκτη m . Δηλαδή, ενώ στη μονοαξονική και τη γυροηλεκτρική περίπτωση τα συστήματα (3.27)–(3.30) και (3.65)–(3.68) επιλύονται χωριστά για κάθε τιμή του δείκτη m , αυτό δεν συμβαίνει στη διαξονική περίπτωση όπου πρέπει να επιλυθεί ένα σύστημα μεγαλύτερων διαστάσεων που περιλαμβάνει όλους τους άγνωστους συντελεστές για όλες τις τιμές του m , με αποτέλεσμα τον αυξημένο χρόνο εκτέλεσης των μεθόδων. Η μη ύπαρξη απεμπλοκής μεταξύ των m οφείλεται στη διαφορετική δομή του προβλήματος ιδιοτιμών που πρέπει να λυθεί για την περίπτωση του διαξονικού μέσου (βλ. Παράρτημα).

Κλείνουμε την παρούσα υποενότητα με μια σύντομη διερεύνηση σχετικά με τον αριθμό των όρων που πρέπει να διατηρηθούν στα άπειρα αθροίσματα των αναπτυγμάτων των πεδίων, ώστε να εξασφαλιστεί η επιθυμητή σύγκλιση στις διατομές σκέδασης. Αρχικά για τη ΜΣΙ, θεωρούμε την τιμή N_c στην οποία τερματίζεται η άθροιση ως προς τον δείκτη n στα αναπτύγματα (3.8), (3.11), και (3.18). Τότε, τα m και n θα λαμβάνουν τις τιμές $m = -N_c, \dots, N_c$ και $n = |m|, \dots, N_c$, αντιστοίχως. Η τιμή του N_c προσδιορίζει και το μέγεθος της αποκοπής για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων (3.27)–(3.30). Κατ' αυτό τον τρόπο, προκύπτει ένα πλήθος $(N_c + 1)^2$ όρων για καθέναν από τους συντελεστές A_{mn} και B_{mn} του σχεδιαζόμενου πεδίου, οι οποίοι διατηρούνται στις αθροίσεις και εμφανίζονται στο σύστημα (3.27)–(3.30). Ο αριθμός των όρων για την άθροιση ως προς l στο ανάπτυγμα του επαγόμενου πεδίου (3.18), ο οποίος αντιστοιχεί στο πλήθος των άγνωστων συντελεστών a_l , προσδιορίζεται με βάση το πλήθος των συντελεστών του σχεδιαζόμενου πεδίου.

Στον Πίνακα 3.7, δίνεται η τιμή του αριθμού αποκοπής N_c , ώστε να εξασφαλιστεί η σύγκλιση της κανονικοποιημένης ολικής διατομής σκέδασης σε τέσσερα σημαντικά ψηφία, όταν αυτή υπολογίζεται με τη ΜΣΙ. Εξετάζονται διάφορες περιπτώσεις μονοαξονικών σφαιροειδών με τον τανυστή επιτρεπτότητας του σχ. 3.2. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, και για τα δύο είδη σφαιροειδών (επίμηκες και πεπλατυσμένο), η τιμή $h = 0.0001$ αντιστοιχεί σε σχεδόν σφαιρικό σχήμα. Για το επίμηκες σφαιροειδές ο λόγος αξόνων είναι $c_0/b_0 = 1.25$ για $h = 0.6$, και $c_0/b_0 \approx 2$ για $h = 0.866$. Αντιστοίχως, για το πεπλατυσμένο σφαιροειδές, είδαμε πως ο λόγος αξόνων είναι $b_0/c_0 = 1.25$ για $h = 0.75$, ενώ $b_0/c_0 \approx 2$ για $h = 1.73$. Από τα στοιχεία του πίνακα επιβεβαιώνεται μια γενική διαπίστωση που ισχύει στα προβλήματα σκέδασης—δηλ., πως όταν το ηλεκτρικό μέγεθος του σφαιροειδούς αυξάνεται μέσω της παραμέτρου x_b , απαιτούνται περισσότεροι όροι για την επίτευξη της επιθυμητής σύγκλισης. Κατ' ανάλογο τρόπο, η αύξηση της εκκεντρότητας h του σφαιροειδούς για σταθερό x_b , έχει επίσης ως συνέπεια την αύξηση του αριθμού αποκοπής N_c . Αυτό σημαίνει πως καθώς το σφαιροειδές γίνεται πιο επίμηκες/πεπλατυσμένο, μεγαλύτερος αριθμός όρων απαιτείται για τη σύγκλιση των αποτελεσμάτων. Επίσης, παρατηρούμε πως για $h = 0.0001$ ο αριθμός αποκοπής N_c είναι ο ίδιος για τα δύο είδη σφαιροειδών, καθώς έχουν το ίδιο, σχεδόν σφαιρικό σχήμα. Για μεγαλύτερες τιμές του h , διαπιστώνουμε πως απαιτούνται μεγαλύτερες τιμές του N_c για το πεπλατυσμένο σφαιροειδές σε σχέση με το επίμηκες, για τον ίδιο λόγο αξόνων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως, για την περίπτωση του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς, η παράμετρος $x_b = k_b c_0$ αντιστοιχεί στον μικρό ημιάξονα c_0 , ενώ τώρα το ηλεκτρικό μέγεθος του σφαιροειδούς καθορίζεται από τον μεγάλο ημιάξονα $b_0 = c_0(1 + h^2)^{1/2}$. Επομένως, η πραγματική παράμετρος μεγέθους που «βλέπει» το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι ίση με $x_b(1 + h^2)^{1/2}$, με αποτέλεσμα περισσότεροι όροι να είναι απαραίτητοι για τη σύγκλι-

Πίνακας 3.7: Αριθμός αποκοπής N_c για τη σύγκλιση της διατομής Q_t/λ_b^2 σε τέσσερα σημαντικά ψηφία. Μονοαξονικό σφαιροειδές με $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_3 = 2.54\epsilon_0$. ΤΕ ή ΤΜ πρόσπτωση με $\theta_0 = 0^\circ$. (α): $x_b = \pi$ (β): $x_b = 1.4\pi$.

Επίμηκες σφαιροειδές			Πεπλατυσμένο σφαιροειδές		
	(α)	(β)		(α)	(β)
h	N_c	N_c	h	N_c	N_c
0.0001	7	8	0.0001	7	8
0.6	8	9	0.75	9	12
0.866	14	15	1.73	17	19

ση. Αντίστοιχοι έλεγχοι σύγκλισης που πραγματοποιήθηκαν και για τα δύο είδη πρόσπτωσης (ΤΕ και ΤΜ) σε διάφορες περιπτώσεις μονοαξονικών, διαξονικών, και γυροηλεκτρικών σφαιροειδών, έδειξαν πως ισχύουν οι ίδιες παρατηρήσεις με τις παραπάνω.

Σε ό,τι αφορά στη σύγκλιση της ΜΔΣΣ, αν N_c είναι η τιμή στην οποία τερματίζεται η άθροιση ως προς τον δείκτη n στα αναπτύγματα (3.47), (3.50), και (3.52), τότε οι δείκτες m και n θα λαμβάνουν τις τιμές $m = -N_c, \dots, N_c$ και $n = \delta_{m0} + |m|, \dots, N_c$, αντιστοίχως. Έτσι, προκύπτει ένα πλήθος $N_c(N_c + 1)$ όρων για καθέναν από τους συντελεστές a_{mn} και b_{mn} του σχεδασμένου πεδίου, που διατηρούνται στο σύστημα (3.65)–(3.68). Καθώς η μέθοδος χρησιμοποιεί αναπτύγματα σφαιρικών ιδιοδιανυσμάτων, μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας που δίνεται στην [83]—δηλ., $N_c = \lceil x_b + 4x_b^{1/3} + 2 \rceil$.² Με την επιλογή αυτή για τον αριθμό αποκοπής, εξασφαλίζεται σύγκλιση των διατομών σκέδασης σε περισσότερα από πέντε σημαντικά ψηφία.

3.5 Συζήτηση και συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύχθηκαν δύο ανεξάρτητες μέθοδοι για τον υπολογισμό της σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από ανισοτροπικά σφαιροειδή. Η πρώτη (ΜΣΙ) βασίζεται στην ανάπτυξη των πεδίων σε σειρές σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων για την επίλυση του προβλήματος, ενώ η δεύτερη (ΜΔΣΣ) είναι μια ασυμπτωτική τεχνική, η οποία ισχύει για μικρές τιμές της εκκεντρότητας του σφαιροειδούς, κάνει χρήση αναπτύγματος σφαιρικών ιδιοδιανυσμάτων, και οδηγεί σε απλές αλγεβρικές σχέσεις για τις διατομές σκέδασης. Αν και αμφότερες οι μέθοδοι απαιτούν σημαντική αναλυτική προσπάθεια για την κατάστρωση τους και την απόκτηση των τελικών γραμμικών συστημάτων, αναδεικνύονται ωστόσο σε αξιόπιστα υπολογιστικά εργαλεία και παρουσιάζουν ορισμένα πλεονεκτήματα σε σχέση με άλλες αριθμητικές τεχνικές.

Αρχικά σε ό,τι αφορά στη ΜΣΙ, η μη ύπαρξη ορθογωνιότητας μεταξύ των σφαιροειδών ιδιοδιανυσμάτων και η ανάγκη αριθμητικού υπολογισμού των σφαιροειδών συναρτήσεων, καθιστούν τη μέθοδο ιδιαίτερα απαιτητική στην κατάστρωση της και την προγραμματιστική της υλοποίηση. όλα αυτά, η μέθοδος αποτελεί μια έγκυρη και αποδοτική τεχνική για τον υπολογισμό της σκέδασης από ανισοτροπικά σφαιροειδή, όπως φάνηκε από τη διαδικασία

² $\lceil x \rceil$ είναι η συνάρτηση οροφής που αναθέτει στον πραγματικό αριθμό x τον μικρότερο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με τον x .

επαλήθευσης της, η οποία πραγματοποιήθηκε μέσω συστηματικών συγκρίσεων με δύο ανεξάρτητα υπολογιστικά εργαλεία (ADDA και HFSS). Αυτές οι συγκρίσεις έδειξαν πως η ΜΣΙ εμφανίζει πολύ σημαντικό πλεονέκτημα ως προς τον απαιτούμενο χρόνο CPU, σε σχέση με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων του HFSS. Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για τη σύγκριση της ΜΣΙ με την προσέγγιση διακριτών διπόλων του ADDA—τουλάχιστον στην περίπτωση που η τελευταία εκτελείται με υψηλή διακριτοποίηση ώστε να εμφανίσει ικανοποιητική σύγκλιση.

Στη συνέχεια, η ΜΣΙ χρησιμοποιήθηκε ως μέθοδος αναφοράς για τον έλεγχο της ΜΔΣΣ. Συγκεκριμένα, διερευνήθηκε το εύρος τιμών της εκκεντρότητας h , εντός του οποίου οι αλγεβρικές σχέσεις της ΜΔΣΣ μπορούν να χρησιμοποιηθούν με αποδεκτά χαμηλό σφάλμα, και έγινε σύγκριση της απόδοσης των δύο μεθόδων. Ένα γενικό συμπέρασμα που μπορεί να εξαχθεί, είναι πως η ΜΔΣΣ εμφανίζει σφάλματα χαμηλότερα του 1% στον υπολογισμό των διατομών σκέδασης, για τιμές εκκεντρότητας $h \leq 0.3$. Σημειώνεται πως τιμή εκκεντρότητας $h = 0.3$ αντιστοιχεί σε λόγο αξόνων $c_0/b_0 \approx 1.05$ και $b_0/c_0 \approx 1.04$ για το επίμηκες και το πεπλατυσμένο σφαιροειδές, αντιστοίχως. Φαινομενικά, πρόκειται για πολύ μικρές τιμές λόγου αξόνων και τα αντίστοιχα σφαιροειδή διαφοροποιούνται ελάχιστα από το σφαιρικό σχήμα. Ωστόσο, από αποτελέσματα όπως αυτά των Πινάκων 3.2–3.4, διαπιστώνουμε πως αυτές οι μικρές διαφοροποιήσεις συνεπάγονται μη αμελητέες μεταβολές στις τιμές των διατομών σκέδασης. Η ΜΔΣΣ ανιχνεύει αυτές τις μεταβολές με επιτυχία και σε ελάχιστο χρόνο, ενώ άλλες αριθμητικές μέθοδοι πρέπει να εκτελεστούν με πολύ υψηλή διακριτοποίηση προκειμένου να εντοπίσουν τις διαφοροποιήσεις αυτές, με συνέπεια τη σημαντική αύξηση του απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου.

Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν για την περιοχή τιμών των παραμέτρων του προβλήματος που εξετάστηκαν—δηλ., διαστάσεις του σφαιροειδούς συγκρίσιμες με το προσπίπτον μήκος κύματος και όχι πολύ υψηλές τιμές επιτρεπτότητας. Πρόσθετοι αριθμητικοί έλεγχοι που πραγματοποιήθηκαν, δείχνουν πως η ακρίβεια της ΜΔΣΣ μειώνεται καθώς αυξάνεται το ηλεκτρικό μέγεθος του σφαιροειδούς ή/και η τιμή των στοιχείων του τανυστή επιτρεπτότητας. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η ΜΔΣΣ πρέπει να περιοριστεί σε μικρότερες τιμές εκκεντρότητας. Παρ' όλα αυτά, ισχύει ως γενική παρατήρηση πως η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και με μεγαλύτερες τιμές του h για να αποκαλύψει ποιοτικά—αλλά όχι και ποσοτικά—χαρακτηριστικά της απόκρισης σκέδασης. Όπως και στην περίπτωση της προσεγγιστικής τεχνικής για τον υπολογισμό των κυματαριθμών αποκοπής στο κεφ. 2, περαιτέρω αύξηση της ακρίβειας της ΜΔΣΣ είναι δυνατή αν ληφθούν υπόψη στα αναπτύγματα όροι ανώτερης τάξης (h^6 και εξής), όμως κάτι τέτοιο θα έχει ως αποτέλεσμα την κατακόρυφη αύξηση της απαιτούμενης αναλυτικής προσπάθειας για την απόκτηση τους.

Η σύγκριση της απόδοσης των δύο μεθόδων φανερώνει πως το ισχυρό πλεονέκτημα της ΜΔΣΣ έγκειται στην απλότητα των τελικών αλγεβρικών σχέσεων (3.79) και (3.80), που προκύπτουν για τον υπολογισμό των διατομών σκέδασης. Αυτές οι σχέσεις έχουν τη γενική μορφή $S(h) = S^{(0)} [1 + g^{(2)}h^2 + g^{(4)}h^4 + O(h^6)]$, όπου οι όροι $S^{(0)}$, $g^{(2)}$, και $g^{(4)}$ είναι ανεξάρτητοι της εκκεντρότητας h και των σφαιροειδών συναρτήσεων. Επομένως, οι ποσότητες αυτές χρειάζεται να υπολογιστούν μόνο μία φορά και ο υπολογισμός τους απαιτεί ελάχιστο χρόνο, ενώ στη συνέχεια είναι διαθέσιμες για χρήση με κάθε μικρή τιμή του h . Έτσι, κάθε φορά που είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των διατομών για μια νέα μικρή τιμή

του h , η εφαρμογή των (3.79) και (3.80) δίνει αμέσως το νέο αποτέλεσμα. Αυτό με τη σειρά του έχει ως συνέπεια την αδιαμφισβήτητη υπεροχή της ΜΔΣΣ όταν χρειάζονται πολλαπλοί υπολογισμοί για διάφορες τιμές του h . Αντιθέτως, η ΜΣΙ—αλλά και άλλες αριθμητικές τεχνικές—πρέπει να εκτελεστούν ξανά για κάθε νέα τιμή της εκκεντρότητας.

Σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, η ΜΔΣΣ δίνει αποτελέσματα σε χρόνο κάτω του 1 s στην περίπτωση της μονοαξονικής ή της γυροηλεκτρικής ανισοτροπίας, και κάτω των 4 s στην περίπτωση της διαξονικής, ενώ οι αντίστοιχοι χρόνοι της ΜΣΙ είναι πολλαπλάσιοι. Οι μεγαλύτεροι χρόνοι που απαιτούνται για την εκτέλεση της ΜΣΙ, σε σχέση με τη ΜΔΣΣ, αποτελούν συνέπεια της ανάγκης αριθμητικού υπολογισμού των σφαιροειδών συναρτήσεων, που είναι μια χρονοβόρος διαδικασία. Μάλιστα, σε αντίθεση με το ιστροπικό πρόβλημα της [42] όπου οι σφαιροειδείς συναρτήσεις πρέπει να υπολογιστούν για δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου c —δηλ., για το εσωτερικό του σφαιροειδούς και τον εξωτερικό χώρο—, στην ανισοτροπική περίπτωση της ΜΣΙ οι συναρτήσεις αυτές πρέπει να υπολογιστούν για πολλαπλές τιμές c_i της παραμέτρου, όπως φαίνεται από τις εξισώσεις (3.27)–(3.30) του τελικού συστήματος. Ο συνεπαγόμενος αυξημένος υπολογιστικός χρόνος μπορεί να περιοριστεί με κατάλληλη παραλληλοποίηση του υπολογιστικού κώδικα, αλλά παρ' όλα αυτά η ΜΣΙ δεν μπορεί να συναγωνιστεί τη ΜΔΣΣ σε όρους ταχύτητας απόκτησης αποτελεσμάτων. Από την άλλη, η ΜΣΙ δεν περιορίζεται σε μικρές τιμές της εκκεντρότητας (όπως η ΜΔΣΣ) και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση πιο επίμηκων/πεπλατυσμένων σφαιροειδών.

Συμπερασματικά, οι δύο προτεινόμενες μέθοδοι μπορούν να λειτουργήσουν συμπληρωματικά και να αποτελέσουν αξιόπιστα αριθμητικά εργαλεία για τη μελέτη εφαρμογών της σφαιροειδούς γεωμετρίας. Επιπλέον, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μέθοδοι αναφοράς για την επικύρωση μελλοντικών αριθμητικών τεχνικών επίλυσης προβλημάτων ηλεκτρομαγνητικής σχέδασης.

Μελλοντικές επεκτάσεις της έρευνας που παρουσιάστηκε στο παρόν κεφάλαιο, περιλαμβάνουν τη διερεύνηση της δυνατότητας εφαρμογής βελτιωμένων αλγορίθμων για τον αριθμητικό υπολογισμό των σφαιροειδών συναρτήσεων, ώστε να επιτραπεί η μοντελοποίηση σφαιροειδών με πολύ υψηλούς λόγους αξόνων. Μια δεύτερη κατεύθυνση είναι η μελέτη της σύνθετης διάταξης μιας αγωγίμης σφαίρας που περιβάλλεται από ένα ομόκεντρο ανισοτροπικό σφαιροειδές στρώμα, παρόμοια με τη διάταξη που μελετήθηκε στην [118] για ιστροπικό περίβλημα. Σε αυτή την περίπτωση, θα μπορούσε να διερευνηθεί η επίδραση της γεωμετρίας και της ανισοτροπίας του μανδύα στα χαρακτηριστικά σχέδασης της μεταλλικής σφαίρας και η δυνατότητα απόκρυψης αυτής. Τέλος, μια τρίτη κατεύθυνση έχει να κάνει με τον συνδυασμό του αναπτύγματος (3.12) για το ανισοτροπικό μέσο με τη μέθοδο της εκτεταμένης συνοριακής συνθήκης. Αυτό θα οδηγήσει στον υπολογισμό της T-μήτρας για γενικά ανισοτροπικά σώματα εκ περιστροφής—συμπεριλαμβανομένων και των σφαιροειδών—, των οποίων η περιγραφή σε σφαιρικές συντεταγμένες γίνεται μέσω μιας παραμετρικής καμπύλης $r = r(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$. Σε αυτό το πλαίσιο, η ΜΣΙ αναμένεται να αποτελέσει ένα πολύτιμο εργαλείο για συγκρίσεις και επαλήθευση των αποτελεσμάτων της νέας υπολογιστικής μεθόδου.

Παράρτημα

Αναπτύγματα πεδίων σε ανισοτροπικά μέσα

Η μέθοδος για το ανάπτυγμα των πεδίων σε ανισοτροπικά μέσα, σε όρους σφαιρικών ιδιοδιανυσμάτων, έχει περιγραφεί αναλυτικά στις [84] και [85]—για το διαξονικό και το γυροηλεκτρικό μέσο, αντιστοίχως. Τα βασικά σημεία της μεθόδου παρουσιάζονται στις υποενότητες που ακολουθούν.

Γυροηλεκτρικό μέσο

Για την περίπτωση του γυροηλεκτρικού τανυστή της σχέσης (3.2), οι ποσότητες c_{mnl} , d_{mnl} , και λ_l που εμφανίζονται στο ανάπτυγμα (3.12) του επαγόμενου πεδίου, προκύπτουν από την επίλυση του ακόλουθου προβλήματος ιδιοτιμών:

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{E}_{uv}}{\bar{E}_{mn}} \bar{e}_{mn}^{uv} & \frac{\bar{E}_{uv}}{\bar{E}_{mn}} \tilde{e}_{mn}^{uv} \\ \frac{\bar{E}_{uv}}{\bar{E}_{mn}} \bar{g}_{mn}^{uv} & \frac{\bar{E}_{uv}}{\bar{E}_{mn}} \tilde{g}_{mn}^{uv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{mnl} \\ c_{mnl} \end{bmatrix} = \lambda_l \begin{bmatrix} d_{mnl} \\ c_{mnl} \end{bmatrix}, \quad (\text{II.1})$$

όπου οι δείκτες mn και uv υποδηλώνουν τους δείκτες των στοιχείων των σειρών και των στηλών του πίνακα, αντιστοίχως. Πιο συγκεκριμένα, οι συντελεστές c_{mnl} και d_{mnl} αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα του προβλήματος, ενώ λ_l είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Οι δείκτες m , n , και l παίρνουν τιμές στα εύρη που προσδιορίζονται στα αθροίσματα του αναπτύγματος (3.12). Οι συντελεστές \bar{w}_{mnl} και w_{00l} στην (3.12), υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\bar{w}_{mnl} = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{u=-v}^v \frac{\bar{E}_{uv}}{\bar{E}_{mn}} (\bar{f}_{mn}^{uv} d_{uvl} + \tilde{f}_{mn}^{uv} c_{uvl}), \quad (\text{II.2})$$

$$w_{00l} = -\sqrt{\frac{2}{15}} \left(\frac{\epsilon_1 \epsilon_3}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} - 1 \right) d_{02l} - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2} c_{01l}. \quad (\text{II.3})$$

Οι όροι \tilde{g}_{mn}^{uv} , \bar{g}_{mn}^{uv} , \tilde{e}_{mn}^{uv} , \bar{e}_{mn}^{uv} , \tilde{f}_{mn}^{uv} , και \bar{f}_{mn}^{uv} που εμφανίζονται στις (II.1) και (II.2) δίνονται από τις σχέσεις [85]:

$$\tilde{g}_{mn}^{uv} = \left[1 + \frac{(v^2 + v - u^2) \bar{e}'_r + u \epsilon'_k}{v(v+1)} \right] \delta_{vn} \delta_{um}, \quad (\text{II.4})$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{mn}^{uv} = & \frac{-j(v+u)(v+1)[u\bar{\epsilon}'_r + (v-1)\epsilon'_k]}{v(v-1)(2v+1)}\delta_{v-1,n}\delta_{um} \\ & - \frac{jv(v-u+1)[u\bar{\epsilon}'_r - (v+2)\epsilon'_k]}{(v+1)(v+2)(2v+1)}\delta_{v+1,n}\delta_{um}, \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

$$\bar{e}_{mn}^{uv} = \frac{j(v+u)[u\bar{\epsilon}'_r - (v+1)\epsilon'_k]}{v(2v+1)}\delta_{v-1,n}\delta_{um} + \frac{j(v-u+1)(u\bar{\epsilon}'_r + v\epsilon'_k)}{(v+1)(2v+1)}\delta_{v+1,n}\delta_{um}, \quad (\text{II.6})$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_{mn}^{uv} = & \left[1 + \frac{(2v^2+2v+3)u^2 + (2v^2+2v-3)v(v+1)}{v(v+1)(2v-1)(2v+3)}\bar{\epsilon}'_r + \frac{(4v^2+4v-3)u}{v(v+1)(2v-1)(2v+3)}\epsilon'_k \right] \delta_{vn}\delta_{um} \\ & - \frac{(v+1)(v+u-1)(v+u)}{(v-1)(2v-1)(2v+1)}\bar{\epsilon}'_r\delta_{v-2,n}\delta_{um} - \frac{v(v-u+1)(v-u+2)}{(v+2)(2v+1)(2v+3)}\bar{\epsilon}'_r\delta_{v+2,n}\delta_{um}, \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

$$\tilde{f}_{mn}^{uv} = \frac{-j(v+u)[u\bar{\epsilon}'_r - (v+1)\epsilon'_k]}{2v+1}\delta_{v-1,n}\delta_{um} + \frac{j(v-u+1)(u\bar{\epsilon}'_r + v\epsilon'_k)}{2v+1}\delta_{v+1,n}\delta_{um}, \quad (\text{II.8})$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{mn}^{uv} = & - \frac{(v^2+v-3u^2)\bar{\epsilon}'_r - u(2v-1)(2v+3)\epsilon'_k}{(2v-1)(2v+3)}\delta_{vn}\delta_{um} \\ & + \frac{(v+1)(v+u-1)(v+u)\bar{\epsilon}'_r}{(2v-1)(2v+1)}\delta_{v-2,n}\delta_{um} - \frac{v(v-u+1)(v-u+2)\bar{\epsilon}'_r}{(2v+1)(2v+3)}\delta_{v+2,n}\delta_{um}, \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

όπου $\bar{\epsilon}'_r = \epsilon_1/(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) - 1$ και $\epsilon'_k = \epsilon_2/(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)$, με αναφορά στον γυροηλεκτρικό ταυυστή της σχέσης (3.2).

Διαξονικό μέσο

Για την περίπτωση του διαξονικού ταυυστή της σχέσης (3.1), οι ποσότητες c_{mnl} , d_{mnl} , και λ_i που εμφανίζονται στο ανάπτυγμα (3.12) του επαγόμενου πεδίου, προκύπτουν πάλι από την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών (II.1), ενώ για τον υπολογισμό των \bar{w}_{mnl} εξακολουθεί να ισχύει η σχέση (II.2). Τώρα όμως, οι όροι \tilde{g}_{mn}^{uv} , \bar{g}_{mn}^{uv} , \bar{e}_{mn}^{uv} , \bar{e}_{mn}^{uv} , \tilde{f}_{mn}^{uv} , και \bar{f}_{mn}^{uv} που εμφανίζονται στις (II.1) και (II.2) δίνονται από τις σχέσεις [84]:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{mn}^{uv} = & \frac{(v+u)(v+u-1)(v-u+1)(v-u+2)\epsilon'_d}{4v(v+1)}\delta_{vn}\delta_{u-2,m} \\ & + \left[\frac{v(v+1)-u^2}{2v(v+1)}\epsilon'_c + \epsilon'_3 \right] \delta_{vn}\delta_{um} + \frac{\epsilon'_d}{4v(v+1)}\delta_{vn}\delta_{u+2,m}, \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{mn}^{uv} = & - \frac{j(v+1)(v-u+1)(v+u)(v+u-1)(v+u-2)\epsilon'_d}{4v(v-1)(2v+1)}\delta_{v-1,n}\delta_{u-2,m} \\ & - \frac{jv(v+1)(v+u)\epsilon'_c}{2v(v-1)(2v+1)}\delta_{v-1,n}\delta_{um} + \frac{j(v+1)\epsilon'_d}{4v(v-1)(2v+1)}\delta_{v-1,n}\delta_{u+2,m} \\ & + \frac{jv(v-u+1)(v-u+2)(v-u+3)(v+u)\epsilon'_d}{4(v+1)(v+2)(2v+1)}\delta_{v+1,n}\delta_{u-2,m} \\ & - \frac{jv(v-u+1)\epsilon'_c}{2(v+1)(v+2)(2v+1)}\delta_{v+1,n}\delta_{um} - \frac{jv\epsilon'_d}{4(v+1)(v+2)(2v+1)}\delta_{v+1,n}\delta_{u+2,m}, \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{e}_{mn}^{uv} = & \frac{j(v-u+1)(v+u)(v+u-1)(v+u-2)\epsilon'_d}{4v(2v+1)}\delta_{v-1,n}\delta_{u-2,m} + \frac{ju(v+u)\epsilon'_c}{2v(2v+1)}\delta_{v-1,n}\delta_{um} \\
 & - \frac{j\epsilon'_d}{4v(2v+1)}\delta_{v-1,n}\delta_{u+2,m} - \frac{j(v-u+1)(v-u+2)(v-u+3)(v+u)\epsilon'_d}{4(v+1)(2v+1)}\delta_{v+1,n}\delta_{u-2,m} \\
 & + \frac{ju(v-u+1)\epsilon'_c}{2(v+1)(2v+1)}\delta_{v+1,n}\delta_{um} + \frac{j\epsilon'_d}{4(v+1)(2v+1)}\delta_{v+1,n}\delta_{u+2,m}, \tag{II.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{e}_{mn}^{uv} = & \frac{(v+1)(v+u)(v+u-1)(v+u-2)(v+u-3)\epsilon'_d}{4(v-1)(2v-1)(2v+1)}\delta_{v-2,n}\delta_{u-2,m} \\
 & - \frac{(v+1)(v+u)(v+u-1)\epsilon'_c}{2(v-1)(2v-1)(2v+1)}\delta_{v-2,n}\delta_{um} + \frac{(v+1)\epsilon'_d}{4(v-1)(2v-1)(2v+1)}\delta_{v-2,n}\delta_{u+2,m} \\
 & - \frac{(v-u+1)(v-u+2)(v+u-1)(v+u)(2v^2+2v+3)\epsilon'_d}{4v(v+1)(2v-1)(2v+3)}\delta_{vn}\delta_{u-2,m} \\
 & + \left[\frac{u^2(2v^2+2v+3)+v(v+1)(2v^2+2v-3)}{2v(v+1)(2v-1)(2v+3)}\epsilon'_c + \epsilon'_3 \right] \delta_{vn}\delta_{um} \\
 & - \frac{(2v^2+2v+3)\epsilon'_d}{4v(v+1)(2v-1)(2v+3)}\delta_{vn}\delta_{u+2,m} \\
 & + \frac{v(v-u+1)(v-u+2)(v-u+3)(v-u+4)\epsilon'_d}{4(v+2)(2v+1)(2v+3)}\delta_{v+2,n}\delta_{u-2,m} \\
 & - \frac{v(v-u+1)(v-u+2)\epsilon'_c}{2(v+2)(2v+1)(2v+3)}\delta_{v+2,n}\delta_{um} + \frac{v\epsilon'_d}{4(v+2)(2v+1)(2v+3)}\delta_{v+2,n}\delta_{u+2,m}, \tag{II.13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{mn}^{uv} = & - \frac{j(v-u+1)(v+u)(v+u-1)(v+u-2)\epsilon'_d}{4(2v+1)}\delta_{v-1,n}\delta_{u-2,m} - \frac{ju(v+u)\epsilon'_c}{2(2v+1)}\delta_{v-1,n}\delta_{um} \\
 & + \frac{j\epsilon'_d}{4(2v+1)}\delta_{v-1,n}\delta_{u+2,m} - \frac{j(v-u+1)(v-u+2)(v-u+3)(v+u)\epsilon'_d}{4(2v+1)}\delta_{v+1,n}\delta_{u-2,m} \\
 & + \frac{ju(v-u+1)\epsilon'_c}{2(2v+1)}\delta_{v+1,n}\delta_{um} + \frac{j\epsilon'_d}{4(2v+1)}\delta_{v+1,n}\delta_{u+2,m}, \tag{II.14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{f}_{mn}^{uv} = & - \frac{(v+1)(v+u)(v+u-1)(v+u-2)(v+u-3)\epsilon'_d}{4(2v-1)(2v+1)}\delta_{v-2,n}\delta_{u-2,m} \\
 & + \frac{(v+1)(v+u)(v+u-1)\epsilon'_c}{2(2v-1)(2v+1)}\delta_{v-2,n}\delta_{um} - \frac{(v+1)\epsilon'_d}{4(2v-1)(2v+1)}\delta_{v-2,n}\delta_{u+2,m} \\
 & - \frac{3(v-u+1)(v-u+2)(v+u-1)(v+u)\epsilon'_d}{4(2v-1)(2v+3)}\delta_{vn}\delta_{u-2,m} \\
 & - \frac{(v^2+v-3u^2)\epsilon'_c}{2(2v-1)(2v+3)}\delta_{vn}\delta_{um} - \frac{3\epsilon'_d}{4(2v-1)(2v+3)}\delta_{vn}\delta_{u+2,m} \\
 & + \frac{v(v-u+1)(v-u+2)(v-u+3)(v-u+4)\epsilon'_d}{4(2v+1)(2v+3)}\delta_{v+2,n}\delta_{u-2,m} \\
 & - \frac{v(v-u+1)(v-u+2)\epsilon'_c}{2(2v+1)(2v+3)}\delta_{v+2,n}\delta_{um} + \frac{v\epsilon'_d}{4(2v+1)(2v+3)}\delta_{v+2,n}\delta_{u+2,m}, \tag{II.15}
 \end{aligned}$$

όπου $\epsilon'_d = 1/\epsilon_1 - 1/\epsilon_2$ και $\epsilon'_c = 1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 2/\epsilon_3$, με αναφορά στον διαζωνικό τανυστή της σχέσης (3.1). Σε αυτή την περίπτωση, ο όρος w_{00l} υπολογίζεται από τη σχέση

$$w_{00l} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\epsilon'_d d_{-22l} - \frac{1}{\sqrt{30}}\epsilon'_c d_{02l} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\epsilon'_d d_{22l}. \quad (\text{Π.16})$$

Δεξιά μέλη εξισώσεων (3.65)–(3.68)

Για τα δεξιά μέλη του συστήματος μηδενικής τάξης των εξισώσεων (3.65)–(3.68) της ενότητας 3.3, έχουμε τα εξής:

$$Y_{1,mn}^{(0)} = q_{mn} j_n(x_b), \quad (\text{Π.17})$$

$$Y_{2,mn}^{(0)} = p_{mn} \frac{j_n^d(x_b)}{x_b}, \quad (\text{Π.18})$$

$$Y_{3,mn}^{(0)} = p_{mn} j_n(x_b), \quad (\text{Π.19})$$

$$Y_{4,mn}^{(0)} = q_{mn} \frac{j_n^d(x_b)}{x_b}. \quad (\text{Π.20})$$

Αντιστοίχως, για το δεύτερης τάξης σύστημα έχουμε τις εκφράσεις

$$\begin{aligned} Y_{1,mn}^{(2)} = & \sum_{s=n, n\pm 2} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left[q_{ms} B_{1,s}^{(2)}(x_b) + a_{ms}^{(0)} B_{3,s}^{(2)}(x_b) - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(0)} c_{msl} B_{1,s}^{(2)}(x_l) \right] \frac{N_{1,msn}}{n(n+1)I_{mnn}} \\ & - \sum_{s=n\pm 1} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left\{ p_{ms} \Delta_{1,s}^{(2)}(x_b) + b_{ms}^{(0)} \Delta_{3,s}^{(2)}(x_b) - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(0)} \left[d_{msl} \Delta_{1,s}^{(2)}(x_l) + \frac{\bar{w}_{msl}}{\lambda_l} \Gamma_{1,s}^{(2)}(x_l) \right] \right\} \\ & \times \frac{N_{2,msn}}{n(n+1)I_{mnn}} + \sum_{s=n\pm 1} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left\{ s(s+1) p_{ms} \frac{j_s(x_b)}{x_b} + s(s+1) b_{ms}^{(0)} \frac{h_s(x_b)}{x_b} \right. \\ & \left. - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(0)} \left[s(s+1) d_{msl} \frac{j_s(x_l)}{x_l} + \frac{\bar{w}_{msl}}{\lambda_l} j'_s(x_l) \right] \right\} \frac{jmI_{5,msn}}{n(n+1)I_{mnn}}, \quad (\text{Π.21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{2,mn}^{(2)} = & \sum_{s=n, n\pm 2} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left\{ p_{ms} \Delta_{1,s}^{(2)}(x_b) + b_{ms}^{(0)} \Delta_{3,s}^{(2)}(x_b) - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(0)} \left[d_{msl} \Delta_{1,s}^{(2)}(x_l) + \frac{\bar{w}_{msl}}{\lambda_l} \Gamma_{1,s}^{(2)}(x_l) \right] \right\} \\ & \times \frac{N_{1,msn}}{n(n+1)I_{mnn}} - \sum_{s=n\pm 1} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left[q_{ms} B_{1,s}^{(2)}(x_b) + a_{ms}^{(0)} B_{3,s}^{(2)}(x_b) - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(0)} c_{msl} B_{1,s}^{(2)}(x_l) \right] \\ & \times \frac{N_{2,msn}^*}{n(n+1)I_{mnn}} + \sum_{s=n, n\pm 2} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left\{ s(s+1) p_{ms} \frac{j_s(x_b)}{x_b} + s(s+1) b_{ms}^{(0)} \frac{h_s(x_b)}{x_b} \right. \\ & \left. - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(0)} \left[s(s+1) d_{msl} \frac{j_s(x_l)}{x_l} + \frac{\bar{w}_{msl}}{\lambda_l} j'_s(x_l) \right] \right\} \frac{I_{7,msn}}{n(n+1)I_{mnn}}, \quad (\text{Π.22}) \end{aligned}$$

όπου $B_{1,n}^{(2)}(x) = -xj'_n(x)/2$, $\Gamma_{1,n}^{(2)}(x) = j_n(x)/(2x) - j'_n(x)/2$, και $\Delta_{1,n}^{(2)}(x) = j_n(x)/(2x) - j'_n(x)/2 - xj''_n(x)/2$, ενώ για τα $B_{3,n}^{(2)}$ και $\Delta_{3,n}^{(2)}$ αντικαθιστούμε τις j_n , j'_n , j''_n με h_n , h'_n , h''_n ,

αντιστοίχως. Επιπλέον, για το τέταρτης τάξης σύστημα, έχουμε

$$\begin{aligned}
Y_{1,mn}^{(4)} = & Y_{1,mn}^{(2)} + \sum_{s=n,n\pm 2,n\pm 4} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left[q_{ms} B_{1,s}^{(4)}(x_b) + a_{ms}^{(0)} B_{3,s}^{(4)}(x_b) - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(0)} c_{msl} B_{1,s}^{(4)}(x_l) \right] \\
& \times \frac{N_{3,msn}}{n(n+1)I_{mnn}} - \sum_{s=n\pm 1} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left\{ b_{ms}^{(2)} \Delta_{3,s}^{(2)}(x_b) - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(2)} \left[d_{msl} \Delta_{1,s}^{(2)}(x_l) + \frac{\bar{w}_{msl}}{\lambda_l} \Gamma_{1,s}^{(2)}(x_l) \right] \right\} \\
& \times \frac{N_{2,msn}}{n(n+1)I_{mnn}} + \sum_{s=n,n\pm 2} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left[a_{ms}^{(2)} B_{3,s}^{(2)}(x_b) - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(2)} c_{msl} B_{1,s}^{(2)}(x_l) \right] \\
& \times \frac{N_{1,msn}}{n(n+1)I_{mnn}} - \sum_{s=n\pm 1,n\pm 3} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left\{ p_{ms} \Delta_{1,s}^{(4)}(x_b) + b_{ms}^{(0)} \Delta_{3,s}^{(4)}(x_b) \right. \\
& \left. - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(0)} \left[d_{msl} \Delta_{1,s}^{(4)}(x_l) + \frac{\bar{w}_{msl}}{\lambda_l} \Gamma_{1,s}^{(4)}(x_l) \right] \right\} \frac{N_{4,msn}^*}{n(n+1)I_{mnn}} \\
& + \sum_{s=n\pm 1} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left\{ s(s+1) b_{ms}^{(2)} \frac{h_s(x_b)}{x_b} - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(2)} \left[s(s+1) d_{msl} \frac{j_s(x_l)}{x_l} + \frac{\bar{w}_{msl}}{\lambda_l} j_s'(x_l) \right] \right\} \\
& \times \frac{j m I_{5,msn}}{n(n+1)I_{mnn}} + \sum_{s=n\pm 1,n\pm 3} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left\{ s(s+1) p_{ms} \left[\Gamma_{1,s}^{(2)}(x_b) - \frac{j_s(x_b)}{x_b} \right] \right. \\
& \left. + s(s+1) b_{ms}^{(0)} \left[\Gamma_{3,s}^{(2)}(x_b) - \frac{h_s(x_b)}{x_b} \right] - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(0)} s(s+1) d_{msl} \left[\Gamma_{1,s}^{(2)}(x_l) - \frac{j_s(x_l)}{x_l} \right] \right. \\
& \left. - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(0)} \frac{\bar{w}_{msl}}{\lambda_l} \left[E_{1,s}^{(2)}(x_l) - j_s'(x_l) \right] \right\} \frac{j m I_{6,msn}}{n(n+1)I_{mnn}}, \tag{II.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{2,mn}^{(4)} = & Y_{2,mn}^{(2)} - \sum_{s=n\pm 1,n\pm 3} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left[q_{ms} B_{1,s}^{(4)}(x_b) + a_{ms}^{(0)} B_{3,s}^{(4)}(x_b) - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(0)} c_{msl} B_{1,s}^{(4)}(x_l) \right] \\
& \times \frac{N_{4,msn}}{n(n+1)I_{mnn}} + \sum_{s=n,n\pm 2} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left\{ b_{ms}^{(2)} \Delta_{3,s}^{(2)}(x_b) - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(2)} \left[d_{msl} \Delta_{1,s}^{(2)}(x_l) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\bar{w}_{msl}}{\lambda_l} \Gamma_{1,s}^{(2)}(x_l) \right] \right\} \frac{N_{1,msn}}{n(n+1)I_{mnn}} - \sum_{s=n\pm 1} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left[a_{ms}^{(2)} B_{3,s}^{(2)}(x_b) - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(2)} c_{msl} B_{1,s}^{(2)}(x_l) \right] \\
& \times \frac{N_{2,msn}^*}{n(n+1)I_{mnn}} + \sum_{s=n,n\pm 2,n\pm 4} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left\{ p_{ms} \Delta_{1,s}^{(4)}(x_b) + b_{ms}^{(0)} \Delta_{3,s}^{(4)}(x_b) \right. \\
& \left. - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(0)} \left[d_{msl} \Delta_{1,s}^{(4)}(x_l) + \frac{\bar{w}_{msl}}{\lambda_l} \Gamma_{1,s}^{(4)}(x_l) \right] \right\} \frac{N_{3,msn}^*}{n(n+1)I_{mnn}} \\
& + \sum_{s=n,n\pm 2} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left\{ s(s+1) b_{ms}^{(2)} \frac{h_s(x_b)}{x_b} - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(2)} \left[s(s+1) d_{msl} \frac{j_s(x_l)}{x_l} + \frac{\bar{w}_{msl}}{\lambda_l} j_s'(x_l) \right] \right\} \\
& \times \frac{I_{7,msn}}{n(n+1)I_{mnn}} + \sum_{s=n,n\pm 2,n\pm 4} \frac{\bar{E}_{ms}}{\bar{E}_{mn}} \left\{ s(s+1) p_{ms} \left[\Gamma_{1,s}^{(2)}(x_b) - \frac{j_s(x_b)}{x_b} \right] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + s(s+1)b_{ms}^{(0)} \left[\Gamma_{3,s}^{(2)}(x_b) - \frac{h_s(x_b)}{x_b} \right] - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(0)} s(s+1) d_{msl} \left[\Gamma_{1,s}^{(2)}(x_l) - \frac{j_s(x_l)}{x_l} \right] \\
 & - \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(0)} \frac{\bar{w}_{msl}}{\lambda_l} \left[E_{1,s}^{(2)}(x_l) - j'_s(x_l) \right] \left. \vphantom{\sum_{l=1}^{\infty}} \right\} \frac{I_{8,msn}}{n(n+1)I_{mnn}}, \tag{Π.24}
 \end{aligned}$$

όπου $\Gamma_{3,n}^{(2)}(x) = h_n(x)/(2x) - h'_n(x)/2$, $E_{1,n}^{(2)}(x) = -xj''_n(x)/2$, $B_{1,n}^{(4)}(x) = 3xj'_n(x)/8 + x^2j''_n(x)/8$, $\Gamma_{1,n}^{(4)}(x) = -j_n(x)/(8x) + j'_n(x)/8 + xj''_n(x)/8$, και $\Delta_{1,n}^{(4)}(x) = xj''_n(x)/2 + x^2j'''_n(x)/8 - j_n(x)/(8x) + j'_n(x)/8$, ενώ για τα $B_{3,n}^{(4)}$ και $\Delta_{3,n}^{(4)}$ αντικαθιστούμε τις j_n, j'_n, j''_n, j'''_n με h_n, h'_n, h''_n, h'''_n , αντιστοίχως. Τέλος,

$$N_{1,msn} = m^2 I_{msn} + I_{2,msn}, \tag{Π.25}$$

$$N_{2,msn} = -jm[(s+n+2)I_{5,msn} - (s-m+1)I_{m,s+1,n} - (n-m+1)I_{m,s,n+1}], \tag{Π.26}$$

$$N_{3,msn} = m^2 I_{3,msn} + I_{4,msn}, \tag{Π.27}$$

$$N_{4,msn} = jm[(s+n+2)I_{6,msn} - (s-m+1)I_{3,m,s+1,n} - (n-m+1)I_{3,m,s,n+1}]. \tag{Π.28}$$

Σε όλες τις παραπάνω σχέσεις, τα I_{msn} και $I_{k,msn}$, $k = 2, \dots, 8$, είναι ολοκληρώματα που περιλαμβάνουν εκφράσεις των προσαρτημένων συναρτήσεων Legendre και των παραγώγων τους. Οι αναλυτικές τους εκφράσεις δίνονται στο Παράρτημα Α της [68], όπου το I_{msn} συμβολίζεται ως $I(s, n)$ και το $I_{k,msn}$ ως $I_k(s, n)$.

Οι εκφράσεις των $Y_{3,mn}^{(2)}$, $Y_{4,mn}^{(2)}$, $Y_{3,mn}^{(4)}$, και $Y_{4,mn}^{(4)}$ προκύπτουν από αυτές των $Y_{1,mn}^{(2)}$, $Y_{2,mn}^{(2)}$, $Y_{1,mn}^{(4)}$, και $Y_{2,mn}^{(4)}$, αντιστοίχως, αν πραγματοποιήσουμε τις αντικαταστάσεις $q_{mn} \leftrightarrow p_{mn}$, $a_{mn} \leftrightarrow b_{mn}$, $c_{mnl} \rightarrow \tau_l d_{mnl}$, $d_{mnl} \rightarrow \tau_l c_{mnl}$, και θέσουμε $\bar{w}_{mnl} = 0$.

Βιβλιογραφία

- [1] A. K. Bhattacharyya and L. Shafai, “Theoretical and experimental investigation of the elliptical annular ring antenna,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 36, pp. 1526–1530, 1988.
- [2] Y. Xu, F. M. Ghannouchi, and R. G. Bosisio, “Theoretical and experimental study of measurement of microwave permittivity using open ended elliptical coaxial probes,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 40, pp. 143–150, 1992.
- [3] L. Accatino, G. Bertin, and M. Mongiardo, “Elliptical cavity resonators for dual-mode narrow-band filters,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 45, pp. 2393–2401, 1997.
- [4] M. Mongiardo and C. Tomassoni, “Mutual coupling evaluation for arrays of flange-mounted elliptical waveguides,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 49, pp. 763–770, 2001.
- [5] J. Gutiérrez-Vega, R. M. Rodríguez-Dagnino, and S. Chávez-Cerda, “Attenuation characteristics in confocal annular elliptic waveguides and resonators,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 50, pp. 1095–1100, 2002.
- [6] R. Lech, A. Kusiek, and W. Marynowski, “An analysis of elliptical-rectangular multipatch structure on dielectric-coated confocal and nonconfocal elliptic cylinders,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 63, pp. 97–105, 2015.
- [7] A. Kusiek, R. Lech, W. Marynowski, and J. Mazur, “An analysis of multistrip line configuration on elliptical cylinder,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 63, pp. 1800–1808, 2015.
- [8] L. J. Chu, “Electromagnetic waves in elliptic hollow pipes of metal,” *J. Appl. Phys.*, vol. 9, pp. 583–591, 1938.
- [9] J. G. Kretzschmar, “Wave propagation in hollow conducting elliptical waveguides,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 18, pp. 547–554, 1970.
- [10] L. Lewin and A. M. B. Al-Hariri, “The effect of cross-section curvature on attenuation in elliptic waveguides and a basic correction to previous formulas,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 22, pp. 504–509, 1974.

- [11] D. A. Goldberg, L. J. Laslett, and R. A. Rimmer, “Modes of elliptical waveguides: A correction,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 38, pp. 1603–1608, 1990.
- [12] J. B. Davies and J. G. Kretzschmar, “Analysis of hollow elliptical waveguides by polygon approximation,” *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 119, pp. 519–522, 1972.
- [13] B. K. Wang, K. Y. Lam, M. S. Leong, and P. S. Kooi, “Elliptical waveguide analysis using improved polynomial approximation,” *IEE Proc.-Microw. Ant. Propag.*, vol. 141, pp. 483–488, 1994.
- [14] S.-L. Lin, L.-W. Li, T.-S. Yeo, and M.-S. Leong, “Analysis of hollow conducting waveguides using superquadric functions—A unified representation,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 48, pp. 876–880, 2000.
- [15] S. Zhang and Y. Shen, “Eigenmode sequence for an elliptical waveguide with arbitrary ellipticity,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 43, pp. 227–230, 1995.
- [16] M. Schneider and J. Marquardt, “Fast computation of modified Mathieu functions applied to elliptical waveguide problems,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 47, pp. 513–516, 1999.
- [17] C. Shu, “Analysis of elliptical waveguides by differential quadrature method,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 48, pp. 319–322, 2000.
- [18] P.-L. Jiang, S.-Q. Li, and C. H. Chan, “Analysis of elliptical waveguides by a meshless collocation method with the Wendland radial basis functions,” *Microw. Opt. Tech. Lett.*, vol. 32, pp. 162–165, 2002.
- [19] D. L. Young, S. P. Hu, C. W. Chen, C. M. Fan, and K. Murugesan, “Analysis of elliptical waveguides by the method of fundamental solutions,” *Microw. Opt. Tech. Lett.*, vol. 44, pp. 552–558, 2005.
- [20] S. R. Rengarajan and J. E. Lewis, “Dielectric loaded elliptical waveguides,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 28, pp. 1085–1089, 1980.
- [21] F. A. Alhargan and S. R. Judah, “Mode charts for confocal annular elliptic resonators,” *IEE Proc.-Microw. Ant. Propag.*, vol. 143, pp. 358–360, 1996.
- [22] R. Navarro, V. E. Boria, B. Gimeno, A. Coves, and M. Ferrando, “Full modal analysis of confocal coaxial elliptical waveguides,” *IEE Proc.-Microw. Ant. Propag.*, vol. 147, pp. 374–380, 2000.
- [23] T. Rozzi, L. Pierantoni, and M. Ronzitti, “Analysis of the suspended strip in elliptical cross section by separation of variables,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 45, pp. 1778–1784, 1997.
- [24] H. A. Ragheb, “Analysis of a nonconfocal suspended strip in an elliptical cylindrical waveguide,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 48, pp. 1148–1151, 2000.

- [25] G. P. Zouros, “Exact cutoff wavenumbers of composite elliptical metallic waveguides,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 61, pp. 3179–3186, 2013.
- [26] G. D. Tsogkas, J. A. Roumeliotis, and S. P. Savaidis, “Cutoff wavelengths of elliptical metallic waveguides,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 57, pp. 2406–2415, 2009.
- [27] G. P. Zouros and J. A. Roumeliotis, “Exact and closed-form cutoff wavenumbers of elliptical dielectric waveguides,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 60, pp. 2741–2751, 2012.
- [28] G. D. Tsogkas, J. A. Roumeliotis, and S. P. Savaidis, “Electromagnetic scattering by an infinite elliptic dielectric cylinder with small eccentricity using perturbative analysis,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 58, pp. 107–121, 2010.
- [29] G. P. Zouros, D. P. Kanoussis, and J. A. Roumeliotis, “Closed-form solution to the scattering by an infinite lossless or lossy elliptic cylinder coating a circular metallic core,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 30, pp. 1832–1844, 2013.
- [30] J. A. Roumeliotis, A. B. M. Siddique Hossain, and J. G. Fikioris, “Cutoff wavenumbers of eccentric circular and concentric circular-elliptic metallic waveguides,” *Radio Sci.*, vol. 15, pp. 923–937, 1980.
- [31] J. A. Roumeliotis and S. P. Savaidis, “Cutoff frequencies of eccentric circular-elliptic metallic waveguides,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 42, pp. 2128–2138, 1994.
- [32] L. W. Li, X. K. Kang, and M. S. Leong, *Spheroidal wave functions in electromagnetic theory*. New York: Wiley, 2002.
- [33] L.-W. Li, P.-S. Kooi, M.-S. Leong, T.-S. Yeo, and M.-Z. Gao, “Microwave attenuation by realistically distorted raindrops: Part I-Theory,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 43, pp. 811–822, 1995.
- [34] S.-H. Kim and P. G. Martin, “The size distribution of interstellar dust particles as determined from polarization: spheroids,” *Astrophys. J.*, vol. 444, pp. 293–305, 1995.
- [35] B. S. Luk’yanchuk, N. V. Voshchinnikov, R. Paniagua-Domínguez, and A. I. Kuznetsov, “Optimum forward light scattering by spherical and spheroidal dielectric nanoparticles with high refractive index,” *ACS Photonics*, vol. 2, pp. 993–999, 2015.
- [36] C. Ma, J. Yan, Y. Huang, and G. Yang, “Directional Fano resonance in an individual GaAs nanospheroid,” *Small*, vol. 15, p. 1900546, 2019.
- [37] B. P. Sinha and R. H. MacPhie, “Electromagnetic scattering from prolate spheroids for axial incidence,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 23, pp. 676–679, 1975.

- [38] —, “Electromagnetic scattering by prolate spheroids for plane waves with arbitrary polarization and angle of incidence,” *Radio Sci.*, vol. 12, pp. 171–184, 1977.
- [39] M. F. R. Cooray and I. R. Ciric, “Electromagnetic wave scattering by a system of two spheroids of arbitrary orientation,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 37, pp. 608–618, 1989.
- [40] S. Asano and G. Yamamoto, “Light scattering by a spheroidal particle,” *Appl. Opt.*, vol. 14, pp. 29–49, 1975.
- [41] S. Asano, “Light scattering properties of spheroidal particles,” *Appl. Opt.*, vol. 18, pp. 712–723, 1979.
- [42] G. P. Zouros, A. D. Kotsis, and J. A. Roumeliotis, “Efficient calculation of the electromagnetic scattering by lossless or lossy, prolate or oblate dielectric spheroids,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 63, pp. 864–876, 2015.
- [43] M. F. R. Cooray and I. R. Ciric, “Scattering of electromagnetic waves by a coated dielectric spheroid,” *J. Electromagn. Waves & Appl.*, vol. 6, pp. 1491–1507, 1992.
- [44] —, “Wave scattering by a chiral spheroid,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, pp. 1197–1203, 1993.
- [45] —, “Scattering of electromagnetic waves by a system of two dielectric spheroids of arbitrary orientation,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 39, pp. 680–684, 1991.
- [46] S. Nag and B. P. Sinha, “Electromagnetic plane wave scattering by a system of two uniformly lossy dielectric prolate spheroids in arbitrary orientation,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 43, pp. 322–327, 1995.
- [47] N. V. Voshchinnikov and V. G. Farafonov, “Optical properties of spheroidal particles,” *Astrophys. Space Sci.*, vol. 204, pp. 19–86, 1993.
- [48] V. G. Farafonov, N. V. Voshchinnikov, and V. V. Somsikov, “Light scattering by a core-mantle spheroidal particle,” *Appl. Opt.*, vol. 35, pp. 5412–5426, 1996.
- [49] N. V. Voshchinnikov, “Electromagnetic scattering by homogeneous and coated spheroids: calculations using the separation of variables method,” *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, vol. 55, pp. 627–636, 1996.
- [50] V. G. Farafonov and N. V. Voshchinnikov, “Light scattering by a multilayered spheroidal particle,” *Appl. Opt.*, vol. 51, pp. 1586–1597, 2012.
- [51] W. C. Gibson, *Method of Moments in Electromagnetics*. Boca Raton: CRC Press, 2015.
- [52] J. L. Volakis, A. Chatterjee, and L. C. Kempel, “Review of the finite-element method for three-dimensional electromagnetic scattering,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 11, pp. 1422–1433, 1994.

- [53] A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. London: Artech House, 2000.
- [54] A. R. Holt, N. K. Uzunoglu, and B. G. Evans, “An integral equation solution to the scattering of electromagnetic radiation by dielectric spheroids and ellipsoids,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 26, pp. 706–712, 1978.
- [55] M. I. Mishchenko, L. D. Travis, and D. W. Mackowski, “T-matrix computations of light scattering by nonspherical particles: A review,” *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, vol. 55, pp. 535–575, 1996.
- [56] P. Barber and C. Yeh, “Scattering of electromagnetic waves by arbitrarily shaped dielectric bodies,” *Appl. Opt.*, vol. 14, pp. 2864–2872, 1975.
- [57] K. Schmidt, J. Wauer, T. Rother, and T. Trautmann, “Scattering database for spheroidal particles,” *Appl. Opt.*, vol. 48, pp. 2154–2164, 2009.
- [58] W. R. C. Somerville, B. Augu  , and E. C. L. Ru, “A new numerically stable implementation of the T-matrix method for electromagnetic scattering by spheroidal particles,” *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, vol. 123, pp. 153–168, 2013.
- [59] A. Lakhtakia, M. G. Iskander, and C. H. Durney, “An iterative extended boundary condition method for solving the absorption characteristics of lossy dielectric objects of large aspect ratios,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 31, pp. 640–647, 1983.
- [60] M. I. Mishchenko and L. D. Travis, “T-matrix computations of light scattering by large spheroidal particles,” *Opt. Commun.*, vol. 109, pp. 16–21, 1994.
- [61] F. M. Schulz, K. Stamnes, and J. J. Stamnes, “Scattering of electromagnetic waves by spheroidal particles: a novel approach exploiting the T matrix computed in spheroidal coordinates,” *Appl. Opt.*, vol. 37, pp. 7875–7896, 1998.
- [62] L. Bi, P. Yang, G. W. Kattawar, and M. I. Mishchenko, “A numerical combination of extended boundary condition method and invariant imbedding method applied to light scattering by large spheroids and cylinders,” *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, vol. 123, pp. 17–22, 2013.
- [63] B. T. Draine and P. J. Flatau, “Discrete-dipole approximation for scattering calculations,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 11, pp. 1491–1499, 1994.
- [64] M. A. Yurkin and A. G. Hoekstra, “The discrete dipole approximation: An overview and recent developments,” *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, vol. 106, pp. 558–589, 2007.
- [65] T. Wriedt, ed., *Generalized multipole techniques for electromagnetic and light scattering*. Amsterdam: Elsevier, 1999.

- [66] Y. Mushiake, “Backscattering for arbitrary angles of incidence of a plane electromagnetic wave on a perfectly conducting spheroid with small eccentricity,” *J. App. Phys.*, vol. 27, pp. 1549–1556, 1956.
- [67] C. Yeh, “Perturbation approach to the diffraction of electromagnetic waves by arbitrarily shaped dielectric obstacles,” *Phys. Rev.*, vol. 135, p. A1193, 1964.
- [68] A. D. Kotsis and J. A. Roumeliotis, “Electromagnetic scattering by a metallic spheroid using shape perturbation method,” *PIER*, vol. 67, pp. 113–134, 2007.
- [69] G. P. Zouros, A. D. Kotsis, and J. A. Roumeliotis, “Electromagnetic scattering from a metallic prolate or oblate spheroid using asymptotic expansions on spheroidal eigenvectors,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 62, pp. 839–851, 2014.
- [70] T. G. Mackay and A. Lakhtakia, *Electromagnetic Anisotropy and Bianisotropy: A Field Guide*. Singapore: World Scientific, 2010.
- [71] Z.-Y. Li, J. Wang, and B.-Y. Gu, “Creation of partial band gaps in anisotropic photonic-band-gap structures,” *Phys. Rev. B*, vol. 58, pp. 3721–3729, 1998.
- [72] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, “Controlling electromagnetic fields,” *Science*, vol. 312, pp. 1780–1782, 2006.
- [73] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr, and D. R. Smith, “Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies,” *Science*, vol. 314, pp. 977–980, 2006.
- [74] C.-W. Qiu and B. Luk’yanchuk, “Peculiarities in light scattering by spherical particles with radial anisotropy,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 25, pp. 1623–1628, 2008.
- [75] C.-W. Qiu, L. Gao, J. D. Joannopoulos, and M. Soljacic, “Light scattering from anisotropic particles: propagation, localization, and nonlinearity,” *Laser Photon. Rev.*, vol. 4, pp. 268–282, 2010.
- [76] A. Poddubny, I. Iorsh, P. Belov, and Y. Kivshar, “Hyperbolic metamaterials,” *Nat. Photon.*, vol. 7, pp. 958–967, 2013.
- [77] G. Armelles, A. Cebollada, A. García-Martín, and M. U. González, “Magnetoplasmonics: combining magnetic and plasmonic functionalities,” *Adv. Optical Mater.*, vol. 1, pp. 10–35, 2013.
- [78] T. D. Green, D. G. Baranov, B. Munkhbat, R. Verre, T. Shegai, and M. Käll, “Optical material anisotropy in high-index transition metal dichalcogenide Mie nanoresonators,” *Optica*, vol. 7, pp. 680–686, 2020.
- [79] Y. Geng, X. Wu, and L.-W. Li, “Analysis of electromagnetic scattering by a plasma anisotropic sphere,” *Radio Sci.*, vol. 38, pp. 12–1 to 12–12, 2003.
- [80] Y.-L. Geng, X.-B. Wu, L.-W. Li, and B.-R. Guan, “Mie scattering by a uniaxial anisotropic sphere,” *Phys. Rev. E*, vol. 70, p. 056609, 2004.

- [81] —, “Electromagnetic scattering by an inhomogeneous plasma anisotropic sphere of multilayers,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 53, pp. 3982–3989, 2005.
- [82] C.-W. Qiu, S. Zouhdi, and A. Razek, “Modified spherical wave functions with anisotropy ratio: Application to the analysis of scattering by multilayered anisotropic shells,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 55, pp. 3515–3523, 2007.
- [83] Z. F. Lin and C. T. Chui, “Electromagnetic scattering by optically anisotropic magnetic particle,” *Phys. Rev. E*, vol. 69, p. 056614, 2004.
- [84] S. Liu and Z. Lin, “Opening up complete photonic bandgaps in three-dimensional photonic crystals consisting of biaxial dielectric spheres,” *Phys. Rev. E*, vol. 73, p. 066609, 2006.
- [85] J. L.-W. Li and W.-L. Ong, “A new solution for characterizing electromagnetic scattering by a gyroelectric sphere,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 59, pp. 3370–3378, 2011.
- [86] J. L.-W. Li, W.-L. Ong, and K. H. R. Zheng, “Anisotropic scattering effects of a gyrotropic sphere characterized using the T-matrix method,” *Phys. Rev. E*, vol. 85, p. 036601, 2012.
- [87] L. Cao, L.-W. Li, and J. Hu, “A new T-matrix formulation for electromagnetic scattering by a radially multilayered gyroelectric sphere,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 61, pp. 836–842, 2013.
- [88] G. P. Zouros and G. C. Kokkorakis, “Electromagnetic scattering by an inhomogeneous gyroelectric sphere using volume integral equation and orthogonal Dini-type basis functions,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 63, pp. 2665–2676, 2015.
- [89] S. N. Papadakis, N. K. Uzunoglu, and C. N. Capsalis, “Scattering of a plane wave by a general anisotropic dielectric ellipsoid,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 7, pp. 991–997, 1990.
- [90] T. Rimpiläinen, H. Wallén, and A. Sihvola, “Radial anisotropy in spheroidal scatterers,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 63, pp. 3127–3135, 2015.
- [91] R. D. Graglia, P. L. E. Uslenghi, and R. S. Zich, “Moment method with isoparametric elements for three-dimensional anisotropic scatterers,” *Proc. IEEE*, vol. 77, pp. 750 – 760, 1989.
- [92] G. Kobidze and B. Shanker, “Integral equation based analysis of scattering from 3-D inhomogeneous anisotropic bodies,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 52, pp. 2650–2658, 2004.
- [93] C. Forestiere, G. Miano, G. Rubinacci, A. Tamburrino, L. Udupa, and S. Ventre, “A frequency stable volume integral equation method for anisotropic scatterers,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 65, pp. 1224–1235, 2017.

- [94] A. Doicu, “Null-field method to electromagnetic scattering from uniaxial anisotropic particles,” *Opt. Commun.*, vol. 218, pp. 11–17, 2003.
- [95] V. Schmidt and T. Wriedt, “T-matrix method for biaxial anisotropic particles,” *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, vol. 110, pp. 1392–1397, 2009.
- [96] J. J. Wang, Y. P. Han, L. Han, and Z. W. Cui, “Electromagnetic scattering from gyroelectric anisotropic particle by the T-matrix method,” *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, vol. 135, pp. 20–29, 2014.
- [97] J. J. Wang, Y. P. Han, Z. F. Wu, and L. Han, “T-matrix method for electromagnetic scattering by a general anisotropic particle,” *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, vol. 162, pp. 66–76, 2015.
- [98] V. V. Varadan, A. Lakhtakia, and V. K. Varadan, “Scattering by three-dimensional anisotropic scatterers,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 37, pp. 800–802, 1989.
- [99] N. B. Piller and O. J. F. Martin, “Extension of the generalized multipole technique to three-dimensional anisotropic scatterers,” *Opt. Lett.*, vol. 23, pp. 579–581, 1998.
- [100] K. Wang, J.-J. Laurin, Q. Zhang, Q. Zhang, and K. Wu, “Three-dimensional scattering from uniaxial objects with a smooth boundary using a multiple infinitesimal dipole method,” *IEEE Access*, vol. 8, pp. 80 842–80 854, 2020.
- [101] N. W. McLachlan, *Theory and application of Mathieu functions*. Oxford: Oxford University Press, 1951.
- [102] C. Flammer, *Spheroidal wave functions*. Stanford, CA: Stanford University Press, 1957.
- [103] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [104] G. C. Kokkorakis and J. A. Roumeliotis, “Power series expansions for Mathieu functions with small arguments,” *Math. Comput.*, vol. 70, pp. 1221–1235, 2001.
- [105] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill, 1941.
- [106] G. C. Kokkorakis and J. A. Roumeliotis, “Acoustic eigenfrequencies in concentric spheroidal-spherical cavities,” *J. Soun. Vibr.*, vol. 206, pp. 287–308, 1997.
- [107] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*. Hoboken, NJ: Wiley, 2005.
- [108] J. G. Fikioris and J. A. Roumeliotis, “Cutoff wavenumbers of Goubau lines,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 27, pp. 570–573, 1979.
- [109] A.-K. Hamid and F. R. Cooray, “Scattering of a plane wave by a homogeneous anisotropic elliptic cylinder,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 63, pp. 3579–3587, 2015.

- [110] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [111] M. F. R. Cooray and I. R. Ciric, “Rotational-translational addition theorems for vector spheroidal wave functions,” *COMPEL*, vol. 8, pp. 151–166, 1989.
- [112] A. Ishimaru, *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering*. New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
- [113] L. W. Li, M. S. Leong, T. S. Yeo, P. S. Kooi, and K. Y. Tan, “Computations of spheroidal harmonics with complex arguments: a review with an algorithm,” *Phys. Rev. E*, vol. 58, pp. 6792–6806, 1998.
- [114] A. L. Van Buren and J. E. Boisvert, “Accurate calculation of prolate spheroidal radial functions of the first kind and their first derivatives,” *Quart. Appl. Math.*, vol. LX, pp. 589–599, 2002.
- [115] —, “Improved calculation of prolate spheroidal radial functions of the second kind and their first derivatives,” *Quart. Appl. Math.*, vol. LXII, pp. 493–507, 2004.
- [116] M. A. Yurkin and A. G. Hoekstra, “The discrete-dipole-approximation code ADDA: capabilities and known limitations,” *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, vol. 112, pp. 2234–2247, 2011.
- [117] W. J. Tropf, M. E. Thomas, and T. J. Harris, “Properties of crystals and glasses,” in *Handbook of optics*, M. Bass, Ed. New York: McGraw-Hill, Inc., 1995, vol. 2, ch. 33.
- [118] G. P. Zouros, G. D. Kolezas, and J. A. Roumeliotis, “Fast solution of the electromagnetic scattering by composite spheroidal-spherical and spherical-spheroidal configurations,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 63, pp. 3042–3053, 2015.