Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και
Υπολογιστών

Σχεδιασμός Μηχανισμών για Συνδυαστικές Δημοπρασίες με Αξιοποίηση Προβλέψεων Μηχανικής Μάθησης.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΤΣΙΛΙΒΗΣ

Επιβλέπων : Δημήτριος Φωτάκης
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2022

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και
Υπολογιστών

Σχεδιασμός Μηχανισμών για Συνδυαστικές Δημοπρασίες με Αξιοποίηση Προβλέψεων Μηχανικής Μάθησης.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΤΣΙΛΙΒΗΣ

Επιβλέπων : Δημήτριος Φωτάκης
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 9η Σεπτεμβρίου 2022.

....	....	....
Δημήτριος Φωτάκης Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αριστείδης Παγουρτζής Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Βασίλης Γκατζέλης Αν. Καθηγητής DU

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2022

....

Θεόδωρος Τσιλιβής

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Σε αυτή τη διπλωματική, θα ασχοληθούμε με το σχεδιασμό μηχανισμών στο επαυξημένο με προβλέψεις μηχανικής μάθησης πρόβλημα Συνδυαστικών Δημοπρασιών. Στο κλασικό πρόβλημα Συνδυαστικών Δημοπρασιών καλούμαστε να μοιράσουμε M αντικείμενα σε N στρατηγικούς παίκτες με τρόπο τέτοιο ώστε να μεγιστοποιείται η κοινωνική ευημερία του συνόλου. Κάθε παίκτης έχει στόχο να μεγιστοποιήσει την ωφέλεια του, δηλαδή την αξία που λαμβάνει από τα αντικείμενα που του αποδίδονται μείον την τιμή που πλήρωσε για τα αντικείμενα. Μας ενδιαφέρει να σχεδιάσουμε φιλαληθείς μηχανισμούς οι οποίοι ”αναγκάζουν” τους παίκτες να συμμετάσχουν στην δημοπρασία με ειλικρινή τρόπο. Στην παρούσα διπλωματική επιτρέπουμε επιπλέον πληροφορία στο πρόβλημα υπό την μορφή προβλέψεων που εμπεριέχουν άγνωστο σφάλμα. Μελετάμε εις βάθος το πρόβλημα των Συνδυαστικών Δημοπρασιών με προβλέψεις διανυσμάτων τιμών για τις κλάσεις Additive και Submodular. Σε αυτές δοκιμάζουμε διαφορετικές παραδοχές και υποθέσεις και πετυχαίνουμε τόσο θετικά όσο και αρνητικά αποτελέσματα. Το σύνολο των αποτελεσμάτων μας ενθαρρύνει περαιτέρω έρευνα στην συγκεκριμένη εκδοχή του προβλήματος.

Λέξεις κλειδιά

Συνδυαστικές Δημοπρασίες, Σχεδιασμός Μηχανισμών με Προβλέψεις, Κοινωνική Ευημερία, Διανύσματα τιμών, Συνέπεια, Ευρωστία.

Abstract

In this thesis, we study mechanism design for Learning Augmented Combinatorial Auctions. In the classical Combinatorial Auctions problem, the aim is to allocate a set of items M to a set of strategic bidders N in a way that maximises the Social Welfare of the resulting allocation. Every bidder is interested in maximising his own personal gain from the allocation, which can be described as the value that she derives from the items she gets allocated minus the payment she makes for these items. We are interested in designing truthful mechanisms that force the bidders to participate in the auction in an honest way. In this thesis we allow extra information in the form a prediction of a price vector with unknown error. We thus study the Learning Augmented Combinatorial Auctions problem, restricting it on Additive and Submodular valuations. We employ a vast variety of assumptions and ideas and achieve both positive and negative results. Our results are not conclusive and thus encourage further research on this specific iteration of the problem.

Key words

Combinatorial Auctions, Mechanism Design with Predictions, Social Welfare, Price vectors, Consistency, Robustness.

Ευχαριστίες

Η περάτωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας σηματοδοτεί την λήξη της 6ετούς φοίτησης μου στην Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Το συγκεκριμένο ταξίδι αποτέλεσε για εμένα την πλέον διαμορφωτική εμπειρία της ζωής μου. Αισθάνομαι με σιγουριά πως μέσα από την Σχολή μου έχω εντοπίσει τις πραγματικές μου κλίσεις καθώς και έχω προσδιορίσει με διάυγεια τους στόχους μου για το μέλλον.

Σε αυτές τις ευχαριστίες θέλω πρωτίστως να μεριμνήσω τον έναν εκ των δύο επιβλεπόντων μου, τον κύριο Δημήτρη Φωτάκη. Από τα μικρότερα έτη και την απλή παρακολούθηση των μαθημάτων του, κατάφερε με την διδακτική του νοοτροπία και το πάθος για το αντικείμενο να μου διεγείρει το πηγαίο ενδιαφέρον και θαυμασμό για την θεωρητική πληροφορική, στοιχεία που πλέον θεωρώ αναπόσπαστο κομμάτι της προσωπικότητας μου. Επίσης οφείλω βαθύτατες ευχαριστίες στον έτερο επιβλέποντα της εργασίας μου Βασίλη Γκατζέλη του οποίου η συνεισφορά σε αυτή την ερευνητική προσπάθεια ήταν καθοριστικής σημασίας. Και οι δύο επιβλέποντες αποτέλεσαν για εμένα εξαιρετικούς μέντορες και υποδειγματικά πρότυπα ερευνητών και τους ευχαριστώ ειλικρινά για την εμπιστοσύνη και την υποστήριξη τους. Οφείλω να ομολογήσω πως η συνεργασία μαζί τους συντέλεσε σε μεγάλο βαθμό στην επιλογή μου να κυνηγήσω την έρευνα στην θεωρητική πληροφορική στην συνέχεια της ζωής μου.

Κλείνοντας θέλω να ευχαριστήσω τους προσωπικούς μου ανθρώπους, τον πατέρα μου Νάσο και την μητέρα μου Άννα, τους αδερφούς μου Νίκο και Αλέξη, την πάντα αγαπημένη μου Διδώ καθώς και όλους τους φίλους μου, για την αστείρευτη στήριξη τους καθόλη την διάρκεια αυτού μου του ταξιδιού.

Θεόδωρος Τσιλιβής,

Αθήνα, 9η Σεπτεμβρίου 2022

Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων

Κεφάλαιο 1

Εκτεταμένη Ελληνική Περίληψη

1.1 Εισαγωγή

Πρώτος στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να μελετηθεί το πρόβλημα των Συνδυαστικών Δημοπρασιών υπό το πρίσμα αξιοποίησης προβλέψεων μηχανικής μάθησης. Στο πλαίσιο αυτής της προσπάθειας, θα παρουσιάσουμε σύντομα ορισμένα σημεία ενδιαφέροντος αναφορικά με τις ερευνητικές εργασίες που αξιοποιούν προβλέψεις στα μοντέλα τους, θα χτίσουμε τους πυλώνες του τομέα Αλγοριθμικής Θεωρίας Παιγνίων οι οποίοι είναι αναγκαίοι για το κλασικό πρόβλημα των Συνδυαστικών Δημοπρασιών, θα δώσουμε έμφαση στις τελευταιες ερευνητικές προσπάθειες σε αυτό το πρόβλημα και τέλος θα παραθέσουμε την δική μας συνεισφορά στην μελέτη της επαυξημένης με μηχανική μάθηση εκδοχής του προβλήματος.

Προβλήματα Δημοπρασιών προκύπτουν με φυσικό τρόπο σε πολλές και διαφορετικές πτυχές του κόσμου μας. Εμφανίζονται στον μοίρασμα παιχνιδιών σε παιδιά, στην πώληση υπηρεσιών σε καταναλωτές, στην κατασκευή κοινωφελών δημοσίων έργων και αλλού. Η οικονομική επιστήμη εκκίνησε την μελέτη των δημοπρασιών, όμως η πρόοδος του διαδικτύου και της τεχνολογίας ανέδειξαν τις ενδιαφέρουσες πτυχές τέτοιου είδους προβλημάτων και στον κόσμο της θεωρητικής πληροροφικής. Οι δημοπρασίες που προκύπτουν στον τεχνολογικό κόσμο, γίνονται όλο και πιο πολύπλοκες, γεγονός που ενισχύει το ενδιαφέρον για έρευνα και μαθηματική θεμελίωση συγκεκριμένων εκδοχών του προβλήματος. Ενδεικτικά, προβλήματα δημοπρασιών με τεχνολογική υπόσταση είναι οι δημοπρασίες φάσματος (οι οποίες αγγίζουν έσοδα της τάξης των δισεκατομμυριων), οι δημοπρασίες στις πλατφόρμες Facebook, Ebay και Amazon, συγκοινωνιακά προβλήματα και προβλήματα δικτύων. Τα προβλήματα Δημοπρασιών έχουν μελετηθεί υπό το πρίσμα ποικίλων παραδοχών και στοχεύσεων. Στην παρούσα διπλωματική εργασία μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε το κλασικό πρόβλημα Συνδυαστικών Δημοπρασιών το οποίο έχει επαυξηθεί με προβλέψεις μηχανικής μάθησης.

Η έξαρση του τομέα της τεχνητής νοημοσύνης και της μηχανικής μάθησης έχει ξεκινήσει ήδη να αλλάζει τον κόσμο στον οποίο ζούμε. Ο συγκεκριμένος κλάδος της Πληροφορικής και των Μαθηματικών εξελίσσεται ραγδαία, παράγει εντυπωσιακές τεχνολογίες και εφαρμόζεται με τους πιο ευφάνταστους τρόπους. Μοναδικό "αγκάθι" αυτής της πορείας είναι η μερικές φορές ελλιπής μαθηματική θεμελίωση. Είναι εξαιρετικά σύνηθες στον τομέα της Μηχανικής μάθησης η θεωρία να υπολείπεται της εφαρμογής, με αποτέλεσμα να κατασκευάζονται μοντέλα δισεκατομμυρίων παραμέτρων τα οποία έχουν εξαιρετικά αποτελέσματα αλλά λίγη έως ελάχιστη μαθηματική θεμελίωση ως προς το "γιατί δουλεύουν τόσο καλά". Αυτή η νοοτροπία που έχει υιοθετηθεί απο την σχετική κοινότητα έρχεται σε κόντρα με την θεωρητική πληροφορική, η οποία τα τελευταία 50 χρόνια καταφέρνει να απαντά στα δυσκολότερα προβλήματα της με την πιο δυσοίωνη ανάλυση. Η θεωρητική πληροφορική κατά κύριο λόγο διακατέχεται από την ανάλυση χειρότερης περίπτωσης, η οποία υπογραμμίζει την συνθηκολόγηση στην ανάλυση των αλγορίθμων που χρησιμοποιούμε με μοντέλο σύγκρισης τη δυσκολότερη περίπτωση που μπορεί να αντιμετωπίσει ο εκάστοτε αλγόριθμος.

Προσφάτως, εισήχθει στην θεωρητική πληροφορική το μοντέλο επαύξησης με μάθηση, το οποίο πάντρεψε επιτυχώς την αισιοδοξία των μοντέλων μηχανικής μάθησης με την απαισιοδοξία της θεωρητικής πληροφορικής. Ο τρόπος που επιτυγχάνεται αυτό, είναι με την ανάλυση των αλγορίθμων που χρησιμοποιούν προβλέψεις και την αξιολόγηση τον λύσεων τους συναρτήσει του σφάλματος των προβλέψεων. Στόχος μας είναι να καταφέρουμε να εφαρμόσουμε αυτό το μοντέλο στο κλασικό πρόβλημα των Συνδυαστικών Δημοπρασιών.

1.1.1 Όργάνωση Εκτεταμένης Ελληνικής Περίληψης

Η ελληνική περίληψη θα χωριστεί σε 3 υποκεφάλαια σε πλήρη συμφωνία και με το αγγλικό κείμενο.

Το πρώτο υποκεφάλαιο 1.2 θα διεισδύσει στον τομέα σχεδιασμού αλγορίθμων με προβλέψεις. Επί της ουσίας αυτό το κεφάλαιο θα είναι μια σύντομη βιβλιογραφική αναφορά στις πρόσφατες δουλειές στον χώρο. Θα δοθεί κυρίως έμφαση στο τι είδους προβλέψεις αξιοποιούνται σε κάθε πρόβλημα, πως ορίζεται το λάθος των προβλέψεων καθώς και την συμπεριφορά του εκάστοτε αλγορίθμου με προβλέψεις αναφορικά με την συνέπεια του και την ευρωστία του.

Στο δεύτερο υποκεφάλαιο 1.3 θα παρουσιαστούν οι θεμελιώδεις έννοιες της Αλγοριθμικής Θεωρίας Παιγνίων, οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση του προβλήματος Συνδυαστικών Δημοπρασιών. Θα παρουσιάσουμε τις διαφορετικές κλάσεις συναρτήσεων αξιολόγησης, οι οποίες παίζουν σημαντικό ρόλο στην δυσκολία του προβλήματος, θα σχολιάσουμε τεχνικές όπως η δειγματοληψία ή η τυχαιότητα και τέλος θα κλείσουμε με την αναφορά των πιο πρόσφατων αποτελεσμάτων στο χώρο.

Στο τρίτο και τελευταίο υποκεφάλαιο 1.4 θα παραθέσουμε την δική μας συνεισφορά στο πρόβλημα. Θα μελετήσουμε την δύναμη αλλά και τους περιορισμούς των προβλέψεων υπό την μορφή διανυσμάτων τιμών. Θα επιχειρήσουμε να αξιοποιήσουμε διαφορετικά είδη διανυσμάτων τιμών και θα παρατηρήσουμε την επιρροή των σφαλμάτων σε αυτές τις προβλέψεις. Αφού παραθέσουμε όλα μας τα αποτελέσματα, θα κλείσουμε αναφέροντας νέες κατευθύνσεις για την έρευνα στον χώρο.

1.2 Αλγόριθμοι Επαυξημένοι με Μάθηση

Οι τελευταίες 3 δεκαετίες έχουν στιγματιστεί από την ραγδαία ανάπτυξη της τεχνολογίας, η οποία πλέον είναι διαθέσιμη σε όλους σχεδόν τους ανθρώπους. Συνέπεια αυτού είναι η τρομακτική παραγωγή και συλλογή δεδομένων, τα λεγόμενα big data. Έχοντας στην διάθεση τους αυτά καθώς και υπολογιστικά ισχυρές μηχανές, οι ερευνητές πληροφορικής (και όχι μονο) βρήκαν πρόσφορο έδαφος να εφαρμόσουν τεχνικές μηχανικής μάθησης και τεχνητής νοημοσύνης ώστε να αξιοποιήσουν με δημιουργικούς και σημαντικούς τρόπους τους τεράστιους όγκους πληροφορίας. Τα αποτελέσματα αυτής της ενέργειας είναι τόσο θεαματικά που ενισχύουν ακόμα περισσότερο το ενδιαφέρον της ερευνητικης κοινότητας.

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, η μηχανική μάθηση έχει να επιδείξει απίστευτα αποτελέσματα και εφαρμογές, αλλά έχει επίσης και ένα "αγκάθι"· Τα αποτελέσματα της υφίστανται κυρίως σε πρακτικό επίπεδο (στο σύνολο δοκιμής) ενώ οι θεωρητικές εγγυήσεις των μεθόδων είναι, στην καλύτερη περίπτωση, ελλιπείς. Από την άλλη πλευρά, ο τομέας της θεωρητικής πληροφορικής έχει θεμελιωθεί πάνω στην ανάλυση χειρότερης περίπτωσης. Η υιοθέτηση αυτής της νοοτροπίας έχει επιτρέψει τον σχεδιασμό αλγορίθμων οι οποίοι εκτελούνται σχετικά γρήγορα ακόμα και όταν βρίσκονται αντιμέτωποι με την πιο δύσκολη εκδοχή ενός προβλήματος.

Η ενδεχομένως υπερβολική αυστηρότητα της ανάλυσης χειρότερης περίπτωσης αναδεικνύεται εμπράκτως σε πολλά διαφορετικά προβλήματα και σε πολλούς αλγορίθμους. Για παράδειγμα, στα προβλήματα ταξινόμησης οι δύο κλασικοί αλγόριθμοι που μελετώνται σε εισαγωγικά μαθήματα είναι η ταξινόμηση με συγχώνευση (merge-sort) και η γρήγορη ταξινόμηση (quick-sort). Από αυτούς τους δύο αλγορίθμους μικρότερη πολυπλοκότητα έχει ο αλγόριθμος ταξινόμησης με συγχώνευση, αλλά στις περισσότερες εφαρμογές χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος γρήγορης ταξινόμηση διότι, η κακή πολυπλοκότητα δεν μετουσιώνεται στα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε στον πραγματικό κόσμο. Άλλο ένα παράδειγμα τέτοιας συμπεριφοράς είναι ο αλγόριθμος simplex που επιλύει γραμμικά προγράμματα. Ο αλγόριθμος simplex είναι αποδεδειγμένα εκθετικής πολυπλοκότητας [31]. Παρόλα αυτά, ο αλγόριθμος αυτός χρησιμοποιείται επιτυχώς από την δεκαετία του 1950 (πολύ πριν την γέννηση των συμβατικών υπολογιστών) για την επίλυση γραμμικών προγράμματων. Εκτελώντας τον αλγόριθμο σε πραγματικά παραδείγματα γραμμικών προγραμμάτων, έχει παρατηρηθεί πως ο χρόνος εκτέλεσης του αυξάνεται με ήπιο ρυθμό (σε σύγκριση με τον εκθετικό), καθώς πληθαίνουν οι παράμετροι του γραμμικού προγράμματος. Η εν λόγω οξύμωρη συμπεριφορά ταλάνισε την ερευνητική κοινότητα για δεκαετίες, μέχρι που στις αρχές του 21ου αιώνα εισήχθη ο τομέας της "ομαλοποιημένης" ανάλυσης (smoothed analysis) [46]. Στην συγκεκριμένη εργασία αποδείχθηκε πως στα δύσκολα παραδείγματα στα οποία ο αλγόριθμος εκτελείται σε εκθετικό χρόνο, η προσθήκη απειροελάχιστου θορύβου στις παραμέτρους του παραδείγματος μειώνει τον χρόνο εκτέλεσης σε πολυωνυμικό, χωρίς η λύση του νέου γραμμικού προγράμματος να διαφέρει ουσιαστικά από την λύση του αρχικού γραμμικού προγράμματος. Ο τομέας της ομαλοποιημένης ανάλυσης ανήκει σε έναν ευρύτερο κλάδο που έχει εκκινήσει τα τελευταία χρόνια στην Θεωρητική Πληροφορική, ο οποίος ονομάζεται "Πέρα από την Ανάλυση Χειρότερης Περίπτωσης" (Beyond Worst Case Analysis).

Ένα άλλο παρακλάδι του τομέα "Πέρα από την Ανάλυση Χειρότερης Περίπτωσης" είναι και η μοντελοποίηση αλγορίθμων με προβλέψεις. Η συγκεκριμένη μοντελοποίηση προέκυψε στην δουλειά των Θοδωρής Λυκούρης και Sergei Vassilvitskii [35]. Στην συγκεκριμένη δουλειά μελετάτε το πρόβλημα σελιδοποίησης (paging) υπό την επαυξημένη εκδοχή, όπου πέραν όλων των άλλων, ο προτεινόμενος αλγόριθμος έχει πρόσβαση σε ένα σύστημα προβλέψεων. Το σύστημα αυτό θεωρείται μαύρο κουτί και δεν μας ενδιαφέρει σε καμία περίπτωση πως προέκυψε η εκπαίδευση του. Η πληροφορία που μας παρέχει αυτό το μαύρο κουτί είναι απλώς μια πρόβλεψη, η οποία μάλιστα δεν έχει καμία εγγύηση για το πόσο κοντά στην πραγματικότητα είναι. Η προκύπτουσα ερώτηση είναι εάν είναι δυνατό να σχεδιάσουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος με κάποιο τρόπο αξιοποιεί τις προβλέψεις, και, εάν οι προβλέψεις είναι τέλειες, πετυχαίνει εξαιρετικές επιδόσεις, ή ειδάλλως, εάν οι προβλέψεις είναι εξαιρετικά κακές, διατηρεί τις εγγυήσεις του καλύτερου αλγόριθμου χωρίς προβλέψεις. Παραδόξως, η απάντηση σε αυτή την ερώτηση είναι πως κάτι τέτοιο είναι εφικτό και μάλιστα σε μια πληθώρα διαφορετικών προβλημάτων.

Στην περίπτωση [35], οι συγγραφείς επιτυγχάνουν αυτή την συμπεριφορά χρησιμοποιώντας τον καλύτερο υπάρχοντα αλγόριθμο για το πρόβλημα και επιτρέποντας στις προβλέψεις του μαύρου κουτιού να επηρεάζουν την εκτέλεση του αλγορίθμου μόνο σε σημεία που ο αρχικός αλγόριθμος θα έπαιρνε κάποια αμιγώς τυχαία απόφαση (ήτοι σε περίπτωση πλήρης απουσίας γνώσης για κάποια απόφαση ακολούθησε την πιθανώς λανθασμένη υπόδειξη του μαύρου κουτιού). Ενδιαφέρον στην ανάλυση της ποιότητας της λύσης του αλγορίθμου παρουσιάζουν 3 σημεία. Το πρώτο είναι πώς συμπεριφέρεται ο αλγόριθμος με προβλέψεις όταν οι προβλέψεις του μαύρου κουτιού είναι ακριβείς, το δεύτερο είναι πώς συμπεριφέρεται οταν οι προβλέψεις είναι οι χειρότερες δυνατές και το τρίτο με ποιον τρόπο αποτυπώνεται η ποιότητα της λύσης του αλγορίθμου ως συνάρτηση του λάθους των προβλέψεων.

Θεώρημα 1.2.1 (συνέπεια). *Ένας αλγόριθμος με έναν μαύρο κουτί προβλέψεων $h(\cdot)$, του οποίου το σφάλμα μετράτε ως η, είναι b-συνεπής για κάποια συνάρτηση του σφάλματος $a()$ εάν έχει λόγο προσέγγισης στην βέλτιστη λύση $O(b)$, όπου $b = a(0)$.*

Θεώρημα 1.2.2 (ευρωστία). *Ένας αλγόριθμος με έναν μαύρο κουτί προβλέψεων $h(\cdot)$, του οποίου το σφάλμα μετράτε ως η, είναι a-συνεπής για κάποια συνάρτηση του σφάλματος $a()$ εάν έχει λόγο προσέγγισης στην βέλτιστη λύση $O\left(\max_{\eta} a(\eta)\right)$.*

Συνηθίζεται στην ανάλυση αλγορίθμων με προβλέψεις να υπολογίζεται ο λόγος προσέγγισης ως το ελάχιστο ανάμεσα σε δύο όρους, ο ένας εξαρτώμενος από το η και ο άλλος όχι. Σε αυτή την περίπτωση η συνέπεια του αλγορίθμου υπολογίζεται βάζοντας το ελάχιστο σφάλμα η (για τους περισσότερους ορισμούς σφάλματος αυτό είναι 0 ή 1) στην παράσταση ενώ η ευρωστία υπολογίζεται αν βάλεις το μέγιστο δυνατό σφάλμα (εάν το σφάλμα η είναι μη φραγμένο τότε δίνεται ως συνάρτηση του η).

1.2.1 Διαφορετικά Είδη Προβλέψεων

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα μελετήσουμε βιβλιογραφικά τα διαφορετικά προβλήματα τα οποία έχουν επιτυχώς επαυξηθεί με προβλέψεις. Παρατηρείστε πως τα περισσότερα προβλήματα είναι online, δηλαδή η είσοδος του αλγορίθμου δεν είναι γνωστή από την αρχή και αποκαλύπτεται σταδιακά κατα την εκτέλεση του. Σε αυτές τις περιπτώσεις η επίτρεψη προβλέψεων αποτελεί λογική επέκταση του προβλήματος, καθώς οι προβλέψεις επιχειρούν να μειώσουν την αβεβαιότητα που προκύπτει λόγω της online φύσης του προβλήματος.

Στις δουλειές που θα παρουσιάσουμε παρακάτω θα δώσουμε έμφαση στο τι χρησιμοποιείται ως πρόβλεψη, ποια μετρική χρησιμοποιείται για το σφάλμα της πρόβλεψης, ποιες είναι οι εγγυήσεις του εκάστοτε αλγορίθμου με προβλέψεις όσον αφορά την συνέπεια του και την ευρωστία του και τέλος αν αποδίδεται κλειστού τύπου συνάρτηση της μεταβολής του λόγου προσέγγισης καθώς αυξάνεται το σφάλμα της πρόβλεψης. Θα ομαδοποιήσουμε τις διαφορετικές δουλειές με τρόπο συναφή στην πληροφορία που παρέχει η πρόβλεψη στο εκάστοτε πρόβλημα

Πρόβλεψη στην Βέλτιστη Πληροφορία

Σε πολλά online (και μη) προβλήματα υπάρχουν σαφής απαντήσεις στο ποια άγνωστη πληροφορία είναι αναγκαία αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τον καλύτερο δυνατό αλγόριθμο για το πρόβλημα. Φυσική απόρροια τέτοιων αποτελεσμάτων είναι η σχεδίαση αλγορίθμων με προβλέψεις όπου η πρόβλεψη είναι αυτή ακριβώς η βέλτιστη πληροφορία (φυσικά με σφάλμα). Θα παραθέσουμε τώρα ορισμένες τέτοιες εφαρμογές.

Το πρόβλημα σελιδοποίησης μελετήθηκε υπό το πρίσμα προβλέψεων από τους Λυκούρης και Vassilvitskii στην εργασία [35]. Η πρόβλεψη στο μοντέλο τους ήταν μια εκτίμηση του χρόνου επόμενης εμφάνισης κάποιας συγκεκριμένης σελίδας. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι γνωστό πως η αφαίρεση από την κρυφή μνήμη της σελίδας η οποία θα επανεμφανιστεί το αργότερο (σε σύγκριση με τις υπόλοιπες που είναι ήδη στην κρυφή μνήμη) είναι η βέλτιστη τακτική (κανόνας του Belady). Οι συγγραφείς όρισαν το λάθος της πρόβλεψης χρησιμοποιώντας την L_1 νόρμα ως $\eta = \sum_i (y_i - h(x_i))$, όπου y_i είναι ο πραγματικός χρόνος πρώτης επανεμφάνισης για την σελίδα i ενώ $h(x_i)$ είναι η πρόβλεψη. Στα αποτελέσματα τους περιλαμβάνεται κλειστού τύπου συνάρτηση που περιγράφει την μεταβολή του λόγου ανταγωνισμού (competitive ratio) συναρτήσει του σφάλματος των προβλέψεων η. Ο συγγραφέας του [43] πετυχαίνει καλύτερα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας παρόμοιες αλγοριθμικές τεχνικές και αποδίδει και ένα κάτω φράγμα για όλους τους αλγορίθμους που χρησιμοποιούν τέτοιου είδους προβλέψεις. Τέλος στο [49] εφαρμόζονται διαφορετικές τεχνικές που αξιοποιούν υπάρχοντες αλγορίθμους που δεν είναι εύρωστοι, καταλήγοντας σε καλύτερο λόγο ανταγωνισμού για χαμηλές τιμές σφάλματος.

Η εκδοχή του προβλήματος σελιδοποίησης με βάρη μελετάτε στην [29] όπου αποδεικνύεται ότι οι αλγόριθμοι με προβλέψεις που έχουν εφαρμοστεί στο κλασικό πρόβλημα σελιδοποίησης δεν μπορούν να εφαρμοστούν στο πρόβλημα με βάρη. Οι συγγραφείς αυτής της δουλειάς σχεδιάζουν έναν 2-συνεπή αλγόριθμο για το πρόβλημα της σελιδοποιήσης με βάρη ο οποίος όμως δεν έχει εγγυήσεις ευρωστίας.

Ένα άλλο πρόβλημα που έχει μελετηθεί με παρόμοιου τύπου προβλέψεις είναι το online πρόβλημα χρονοδρομολόγησης. Στην εκδοχή του προβλήματος με m μηχανές οι συγγραφείς του [38] χρησιμοποιούν ως πρόβλεψη ένα βάρος για κάθε μηχανή. Τα βάρη αυτά εάν είναι βέλτιστα οδηγούν σε μια κλασματική ανάθεση των εργασιών ή οποία είναι σχεδόν βελτίστη ([2]). Στον αλγόριθμο που προτείνουν τα προβλεπόμενα βάρη ανανεώνονται διαρκώς μέχρι που εν τέλει καταλήγουν να είναι 2-προσεγγιστικά στα πραγματικά βέλτιστα βάρη. Το σφάλμα στην ανάλυση τους ορίζεται ως η νόρμα L_∞ του λόγου πρόβλεψης βάρους προς το βέλτιστο βάρος. Το αποτέλεσμα που αποδεικνύουν οι συγγραφείς περιλαμβάνει και μια συνάρτηση που περιγράφει την μεταβολή του λόγου ανταγωνισμού καθώς μεγαλώνει το σφάλμα πρόβλεψης.

Στην εργασία [42] μελετάται η μη-διορατή εκδοχή του προβλήματος χρονοδρομολόγησης για μία μηχανή και προτείνετε ένα αλγόριθμος που χρησιμοποιεί ως προβλέψεις τον εκτιμώμενο χρόνο περάτωσης της κάθε εργασίας. Το σφάλμα ορίζεται με χρήση της νόρμας L_1 όπως προηγουμένως και ο προτεινόμενος αλγόριθμος εκτελεί παράλληλα τον αλγόριθμο Round-Robin ο οποίος δεν αξιοποιεί καθόλου τις προβλέψεις και τον αλγόριθμο ο οποίος είναι βέλτιστος εάν οι προβλέψεις είναι ακριβείς. Χρησιμοποιείται στο σχήμα αυτό μια υπερπαράμετρος λ η οποία εκφράζει την πίστη μας στην πρόβλεψη και περιλαμβάνεται στην αποτίμηση του λόγου ανταγωνισμού.

Άλλα προβλήματα στα οποία η άγνωστη πληροφορία που είναι αναγκαία για την βέλτιστη λύση δίνεται ως πρόβλεψη στον αλγόριθμο είναι το πρόβλημα της Γραμματέως[5], Το Διμερές Ταίριασμα με Αφίξεις Κορυφών[5], το Γραφικό Ματροειδές πρόβλημα της Γραμματέως[5] και το πρόβλημα Ενοικίασης Πέδιλων Σκι[42].

Πρόβλεψη με την Μορφή Συμβουλής

Ο συγκεκριμένος τύπος προβλέψεων δεν έχει εφαρμοστεί σε πολλες διαφορετικές ερευνητικές εργασίες ακόμα. Στην εργασία [9] παρουσιάζεται μια επαυξημένη εκδοχή της τεχνικής Primal-Dual για online προβλήματα η οποία λαμβάνει υπόψιν στο χτίσιμο της λύσης και την πρόβλεψη/συμβουλή. Οι συγγραφείς εφαρμόζουν επιτυχώς αυτή την ενισχυμένη τεχνική στο πρόβλημα Ενοικίασης Πέδιλων Σκι, στο πρόβλημα Bahncard (γενίκευση του προηγούμενου) και στο πρόβλημα Dynamic TCP Acknowledgement. Αξίζει να σημειωθεί πως στο πρόβλημα Ενοικίασης Πέδιλων Σκι επιτυγχάνουν τα ίδια αποτελέσματα με το [42].

Offline Πρόβλεψη της Online Εισόδου

Ο συγκεκριμένος τύπος προβλέψεων έχει επίσης χρησιμοποιηθεί κατά κύριο λόγο στην εργασία [8]. Η σημαντική διαφορά με την προηγούμενη κατηγορία είναι πως στην συγκεκριμένη εργασία δίνεται ένα μοντέλο μαύρου κουτιού το οποίο λειτουργεί σε οποιοδήποτε online πρόβλημα γράφων αρκεί να ικανοποιούνται συγκεκριμένες τεχνικές προδιαγραφές. Συγκεκριμένα το μοντέλο αυτό χρειάζεται δύο διαφορετικούς αλγορίθμους για να λειτουργήσει, έναν online ON και έναν offline OFF. Ο αλγόριθμος ON πρέπει να είναι ανταγωνιστικός στα υποσύνολα (subset competitive) το οποίο υπονοεί πως ο αλγόριθμος κατανέμει με ομοιόμορφο τρόπο τον λόγο ανταγωνισμού του σε όλα του τα υποσύνολα. Ο αλγόριθμος OFF, ο οποίος θα τρέχει στις προβλέψεις, πρέπει να είναι γ-προσεγγιστικός στην "prize collecting" εκδοχή του προβλήματος.

Το μαύρο κουτί σχήμα αρχικώς εκτελεί τον αλγόριθμο ON μέχρι ένα κατώφλι B. Στην συνέχεια επιλύει το πρόβλημα που ορίζουν οι μέχρι τώρα αποφάσεις του αλγορίθμου ON και οι προβλέψεις στοχεύοντας σε κόστος ανάλογο του προηγούμενου κατωφλιού B χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμος OFF. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να τελειώσουν οι online είσοδοι.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο ορισμός του σφάλματος των προβλέψεων στο εν λόγω μοντέλο. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούνται δύο μεταβλητές για την μέτρηση του σφάλματος. Η μεταβλητή Δ μετράει τον αριθμό των προβλέψεων που είναι πολύ μακριά από κάποιο κομμάτι της πραγματικής εισόδου ενώ η μεταβλητή D συγκεκριμενοποιεί τι σημαίνει το πολύ μακριά. Ο προκύπτον αλγόριθμος πετυχαίνει επιδόσεις ALG τέτοιες ώστε:

$$ALG \leq O(\log \Delta) \cdot OPT + O(D)$$

Οι συγγραφείς αυτής της εργασίας εφαρμόζουν το μοντέλο αυτό στο πρόβλημα του Δέντρου Steiner, στο πρόβλημα του Δάσους Steiner, στο πρόβλημα της Online Χωροθέτησης Υπηρεσιών και στο πρόβλημα της Online Περιορισμένης Χωροθέτησης Υπηρεσιών.

Σχεδιασμός Μηχανισμών με Προβλέψεις

Στην συγκεκριμένη ενότητα θα μιλήσουμε για την αξιοποίηση προβλέψεων στον σχεδιασμό μηχανισμών συγκεκριμένα, καθώς αυτό είναι κοντινότερος τομέας στους στόχους της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Οι σημαντικότερες επιτυχίες μηχανισμών με προβλέψεις έχουν σημειωθεί σε δύο προβλήματα, στο πρόβλημα της Χωροθέτησης Υπηρεσιών και στο πρόβλημα της Μεγιστοποίησης Εσόδων σε Δημοπρασίες Ενός Αντικειμένου.

Το online πρόβλημα Χωροθέτησης Υπηρεσιών έχει μελετηθεί από διαφορετικές ερευνητικές ομάδες. Οι συγγραφείς του [28] προτείνουν ως πρόβλεψη τις πιθανές θέσεις ζήτησης στο πρόβλημα. Εφαρμόζουν τον αλγόριθμο του Meyerson [36] και παράλληλα έναν άλλο αλγόριθμο ο οποίος τοποθετεί υπηρεσίες σε σημεία κοντά στις προβλέψεις. Το σφάλμα ορίζεται με βάση την νόρμα L_∞. Οι συγγραφείς του [25] δουλεύουν με τον ίδιο τύπο προβλέψεων όμως ο προτεινόμενος μηχανισμός τους είναι διαφορετικός. Συγκεκριμένα ο μηχανισμός τους τοποθετεί υπηρεσίες με πιθανότητα ανάλογη της απόστασης της πρόβλεψης από τις ήδη υπάρχουσες υπηρεσίες. Ο μηχανισμός τους είναι 2-συνεπής και αποδεικνύουν για αυτόν μια κλειστού τύπου συνάρτηση που περιγράφει την μεταβολή του λόγου ανταγωνισμού καθώς το σφάλμα αυξάνεται. Τέλος οι συγγραφείς του [4] μελετούν το πρόβλημα υπό λίγο διαφορετική σκοπιά, θεωρώντας πως οι προβλέψεις είναι μια οικογένεια συνόλων που περιγράφουν πιθανές λύσεις του προβλήματος. Υπό αυτό το διαφορετικό μοντέλο αποδεικνύουν μια κλειστού τύπου συνάρτηση που περιγράφει την μεταβολή του λόγου ανταγωνισμού καθώς το σφάλμα αυξάνεται (δεν μπορεί να γίνει ευθεία σύγκριση με τα αποτελέσματα των προηγούμενων ερευνών).

Η offline εκδοχή του προβλήματος με προβλέψεις έχει μελετηθεί στην εργασία [1]. Συγκεκριμένα το πρόβλημα μελετήθηκε υπό δύο συγκεκριμένες σκοπιές, το Egalitarian και το Utilitarian κοινωνικό κόστος. και για τις δύο περιπτώσεις οι συγγραφείς σχεδίασαν μηχανισμούς οι οποίοι χρησιμοποιούν ως πρόβλεψη την εν δυνάμει λύση του προβλήματος.

Όσον αφορά το Egalitarian κοινωνικό κόστος μελετήθηκε το πρόβλημα τόσο στην γραμμή των πραγματικών αριθμών όσο και στον δισδιάστατο χώρο. Για το πρόβλημα στην γραμμή οι συγγραφείς παρουσιάζουν έναν ντετερμινιστικό μηχανισμό ο οποίος πετυχαίνει 1-συνέπεια και 2-ευρωστία (η 2-ευρωστία συμβαδίζει με τον καλύτερο δυνατό λόγο προσέγγισης). Στο πρόβλημα στον δισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^2$, παρουσιάζουν έναν παρόμοιο μηχανισμό ο οποίος πετυχαίνει 1-συνέπεια και $(1+\sqrt{2})$-ευρωστία (Η ευρωστία δεν συμπίπτει με τον καλύτερο λόγο προσέγγισης του προβλήματος ο οποίος είναι πάλι 2). Παρόλα αυτά, οι συγγραφείς της συγκεκριμένης εργασίας αποδεικνύουν πως οποιοσδήποτε μηχανισμός ο οποίος χρησιμοποιεί προβλέψεις και πετυχαίνει συνέπεια καλύτερη από 2 δεν μπορεί να εγγυηθεί ευρωστία καλύτερη από $(1+\sqrt{2})$. Το Utilitarian κοινωνικό κόστος μελετήθηκε μόνο στο δισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^2$, το οποίο παρουσιάζουν ένα μηχανισμό ο οποίος επιδέχεται μιας παραμέτρου εμπιστοσύνης c. Αποδεικνύουν πως η συνάρτηση μεταβολής του λόγου προσεγγίσης (συνάρτηση του c) είναι βέλτιστη υπό την έννοια ότι αποτυπώνει το Pareto Frontier του προβλήματος.

Η ερευνητική εργασία [50] εισάγει μία συστηματική μελέτη του χώρου σχεδίασης μηχανισμών οι οποίοι αξιοποιούν προβλέψεις. Τα προβλήματα τα οποία μελετώνται στην συγκεκριμένη εργασία είναι το πρόβλημα Μεγιστοποίησης Εσόδων σε Δημοπρασίες Ενός Αντικειμένου, το Frugal Path Auction, ο Φιλαλήθης Χρονοπρογραμματισμος Εργασιών και η Χωροθέτηση 2 Υπηρεσιών στην γραμμή. Εμείς θα δώσουμε έμφαση μόνο στο πρώτο πρόβλημα.

Οι ερευνητές ισχυρίζονται πώς το να σχεδιάζουμε μηχανισμούς με προβλέψεις είναι πιο δύσκολο από το να επαυξάνουμε online αλγόριθμος με προβλέψεις. Ο κυριότερος λόγος για τον οποίο το ισχυρίζονται αυτό είναι ότι στους online αλγόριθμους μπορούμε να εναλλασσόμαστε ανάμεσα στον offline αλγόριθμο με προβλέψεις και τον online αλγόριθμο χωρίς προβλέψεις ανάλογα με το πόσο καλά αξιολογούνται (μέχρι στιγμής) οι προβλέψεις που μας έχουν δοθεί. Σε ένα στρατηγικό περιβάλλον όμως αυτό δεν είναι θεμιτό, διότι σε ένα τέτοιο σχήμα οι παίκτες έχουνε λόγους να αλλάζουνε την στρατηγική τους ώστε να οδηγούν τον μηχανισμό στην εκτέλεση του υπό αλγόριθμο που τους εξυπηρετεί περισσότερο. Οι συγγραφείς τονίζουν πώς η συγκεκριμένη δυσκολία στο σχεδιασμό μηχανισμών είναι στενά συνδεδεμένη με την ανάγκη μονοτονίας στους αλγόριθμους διαμοιρασμού που περιλαμβάνουν όλοι οι μηχανισμοί.

Στο πρόβλημα Μεγιστοποίησης Εσόδων σε Δημοπρασίες ενός Αντικειμένου θεωρούμε πως όλες οι αξιώσεις v_i των n παικτών για το αντικείμενο ανήκουν στο διάστημα $[1, h]$. Σε οποιοδήποτε μηχανισμό οι παίκτες επιλέγουν την προσφορά τους για το αντικείμενο b_i, και στόχος τους είναι να μεγιστοποιήσουν την συνάρτηση ωφέλειας τους $u_i = x_i \cdot v_i - p_i$, όπου p_i είναι η πληρωμή εάν λάβουν το αντικείμενο και $x_i = 1$ εάν ο παίκτης i λάβει το αντικείμενο (αλλιώς 0). Στόχευση για αυτόν τον οποίο εκτελεί την δημοπρασία είναι να μεγιστοποιήσει το κέρδος δηλαδή την ποσότητα p_i.

Στην συγκεκριμένη εργασία προτείνεται ένας πολύ απλός μηχανισμός με προβλέψεις για το πρόβλημα, ο οποίος στη συνέχεια επεκτείνεται στον τελικό μηχανισμό. Αρχικώς οι συγγραφείς θεωρούν πως η πρόβλεψη που δίνεται στον μηχανισμό είναι η αξία του ενός αντικειμένου για κάθε παίκτη, δηλαδή ένα διάνυσμα τιμών $\hat{V} = \{\hat{v}_i\}_{i \in N}$. Το σφάλμα ορίζεται ως $\eta = \max\limits_{i \in N} \left\{ \dfrac{v_i}{\hat{v}_i}, \dfrac{\hat{v}_i}{v_i} \right\}$. Ο απλός μηχανισμός τον οποίο προτείνουν ταξινομεί αρχικώς τις προβλέψεις σε φθίνουσα σειρά. στην συνέχεια επιλέγει να δώσει το αντικείμενο στον παίκτη i ο οποίος έχει την μεγαλύτερη προβλεπόμενη τιμή εφόσον ισχύει πως η προσφορά του συγκεκριμένου παίκτη είναι μεγαλύτερη της προβλεπόμενες τιμής του (δηλαδή αν $b_i > \hat{v}_i$) και η πληρωμή τίθεται ίση με b_i. Ειδάλλως ο μηχανισμός αποδέχεται την μεγαλύτερη πραγματική προσφορά για το αντικείμενο ενώ η πληρωμή επιλέγεται ως η δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά. Ο συγκεκριμένος μηχανισμός είναι 1-συνεπής καθώς χωρίς σφάλματα η μεγαλύτερη προβλεπόμενη τιμή συμπίπτει με την πραγματική μεγαλύτερη τιμή και το αντικείμενο πωλείται στον συγκεκριμένο παίκτη με $p_i = OPT$. Από την άλλη ο συγκεκριμένος μηχανισμός ακόμα και για σφάλμα $1 + \epsilon$ μπορεί να έχει ευρωστία h (σημειώστε πως h είναι ο καλύτερος λόγος προσέγγισης για ντετερμινιστικούς μηχανισμούς σε αυτό το πρόβλημα [26]). Ο συγκεκριμένος μηχανισμός μπορεί να παραμετροποιηθεί με μία υπέρ-παράμετρο γ, η οποία καθορίζει την εμπιστοσύνη μας στην πρόβλεψη και να αξιοποιηθεί στον μηχανισμό ώστε να γίνεται η σύγκριση $b_i > \frac{\hat{v}_i}{\gamma}$. Με αυτό τον τρόπο η συνέπεια του μηχανισμού παραμένει ίδια αλλά εάν το σφάλμα είναι μικρότερο του γ ο λόγος προσέγγισης μεταβάλλεται σύμφωνα με τη συνάρτηση $\gamma\eta$. Ο τελικός μηχανισμός τον οποίο προτείνουν οι συγγραφείς επεκτείνει αυτήν ακριβώς την ιδέα.

1.3 Συνδιαστικές Δημοπρασίες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε το κλασικό πρόβλημα Συνδυαστικών Δημοπρασιών. Θα ορίσουμε βασικές έννοιες της Αλγοριθμικής Θεωρία Παιγνίων και των Δημοπρασιών οι οποίες είναι αναγκαίες για να κατανοήσουμε το πρόβλημα. Στη συνέχεια, θα προχωρήσουμε στην παρουσίαση σημαντικών τεχνικών που έχουν χρησιμοποιηθεί σε Δημοπρασίες και τέλος θα παρουσιάσουμε τις τελευταίες δουλειές στο χώρο των Συνδυαστικών Δημοπρασιών.

Τυπικά το πρόβλημα των Συνδυαστικών Δημοπρασιών ορίζεται ως η διαδικασία διαμοιρασμού του συνόλου M που απαρτίζεται από m αντικείμενα στο σύνολο N που αποτελείται από τους n συμμετέχοντες παίκτες. Κάθε παίκτης έχει την δική του συνάρτηση αξιολόγησης $v_i(\cdot)$, η οποία αντιστοιχεί οποιοδήποτε υποσύνολο αντικειμένων $S \subseteq 2^M$ σε έναν πραγματικό αριθμό $v_i(S)$ και περιγράφει την αξία που λαμβάνει ο παίκτης i εάν λάβει κάποιο σύνολο αντικειμένων S. Αν θεωρήσουμε έναν συγκεκριμένο διαμοιρασμό των αντικειμένων $A = (A_1, A_2, ..., A_n)$, τότε μπορούμε να ορίσουμε την Κοινωνική Ευημερία του συγκεκριμένου διαμοιρασμού ως $\sum\limits_{i \in N} v_i(A_i)$.

Η συνήθης διαδικασία η οποία αποτελεί την σχεδίαση μηχανισμών για δημοπρασίες απαιτεί τον ορισμό δύο συγκεκριμένων αλγορίθμων. Ο πρώτος αλγόριθμος είναι ο αλγόριθμος διανομής, ο οποίος με βάση τις εισόδους που λαμβάνει από τους παίκτες υπολογίζει με ποιον τρόπο θα μοιραστούν τα αντικείμενα της δημοπρασίας στους συμμετέχοντες παίκτες. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη ποιος είναι ο στόχος αυτού που διενεργεί την δημοπρασία. Παραδείγματος χάριν, ο στόχος μπορεί να είναι να μεγιστοποιηθεί το κέρδος από τη διαδικασία αλλά μπορεί και να είναι να μεγιστοποιηθεί η Κοινωνική Ευημερία.

Όταν μελετάμε προβλήματα στον Αλγοριθμικής Θεωρίας Παιγνίων, οφείλουμε να λαμβάνουμε πάντα υπόψιν μας την τακτική συμπεριφορά των παικτών. Στην προσπάθεια περιορισμού της στρατηγικής συμπεριφοράς των παικτών οι μηχανισμοί αξιοποιούν τον δεύτερο αλγόριθμο ο οποίος καθορίζει κάποιο κανόνα πληρωμών. Αυτές οι πληρωμές ευθυγραμμίζουν τις στοχεύσεις του μηχανισμού με τις στοχεύσεις των παικτών. Συνηθίζεται έτσι να χρησιμοποιείται ένα διάνυσμα τιμών $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$. Με βάση αυτό το διάνυσμα μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση ωφέλειας κάθε παίκτη i ως μία συνάρτηση η οποία αποτυπώνει κάθε υποσύνολο αντικειμένων $S \subseteq 2^M$ σε ένα πραγματικό αριθμό $u_i(S) = v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j$. Για απλότητα στη γραφή θα χρησιμοποιούμε δεδομένου ενός διανύσματος τιμών $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$ την συντομογραφία $\mathbf{p}\,(S) = \sum_{j \in S} p_j$ και έτσι προκύπτει $u_i(S) = v_i(S) - \mathbf{p}(S)$. Τέλος δεδομένου συγκεκριμένου διαμοιρασμού των αντικειμένων A με πληρωμές $\mathbf{p}$ μπορούμε να ορίσουμε το κέρδος της δημοπρασίας ως $Rev(A) = \sum\limits_{i \in N} \sum\limits_{j \in A_i} p_j$. Χρησιμοποιώντας το κέρδος της δημοπρασίας και τις συναρτήσεις ωφέλειας των παικτών μπορούμε να γράψουμε την Κοινωνική Ευημερία ως $Welfare = \sum\limits_{i \in N} v_i\,(A_i) = \sum\limits_{i \in N} u_i\,(A_i) - \sum\limits_{j \in A_i} p_j = \sum\limits_{i \in N} (u_i\,(A_i)) + Rev(A)$.

Μια καθολική στόχευση κατά την διαδικασία σχεδιασμού μηχανισμών είναι να μην επιτρέπουμε στους παίκτες να ωφελούνται όταν μας δίνουν αναληθείς πληροφορίες. Αν μπορούσαμε με κάποιο τρόπο να διαφυλάξουμε ότι οι παίκτες απαντούν σε όλες τις ερωτήσεις του μηχανισμού ειλικρινά, θα μπορούσαμε να αφοσιωθούμε μόνο στην αλγοριθμική υπόσταση του προβλήματος και το τελικό αποτέλεσμα της διαδικασίας θα ήταν ακριβές. Αυτό ακριβώς αποτυπώνεται στην έννοια της φιλαλήθειας την οποία διατυπώνουμε παρακάτω.

Ορισμός 1.3.1 (φιλαλήθεια). *Ένας μηχανισμός είναι φιλαληθής ανν για κάθε παίκτη i το να αποκαλύπτει την πραγματική του συνάρτηση αξιολόγησης $v_i\,(\cdot)$ είναι κυρίαρχη στρατηγική (μεγιστοποιεί την συνάρτηση ωφέλειας του).*

Όταν σχεδιάζουμε μηχανισμούς για δημοπρασίες μας ενδιαφέρουν τρεις σημαντικές ιδιότητες:

1. Να διαφυλάσσεται η φιλαλήθεια.

2. Να επιτυγχάνεται ο στόχος της δημοπρασίας (π.χ. η Μεγιστοποίηση της Κοινωνικής Ευημερίας).

3. Να είναι η διαδικασία υπολογιστικά αποδοτική.

Στις περισσότερες περιπτώσεις δημοπρασιών δεν μπορούμε να έχουμε ταυτόχρονα και τις τρεις ιδιότητες. Για αυτό το λόγο αναγκαζόμαστε να χαλαρώσουμε μία από αυτές και καταλήγουμε έτσι να χαλαρώνουμε την ιδιότητα 2, δηλαδή τη βελτιστότητα των λύσεων των μηχανισμών. Μία από τις γνωστότερες δημοπρασίες στη βιβλιογραφία και στον χώρο είναι η δημοπρασία δεύτερης τιμής του Vickrey [47] η οποία ικανοποιεί και τις τρεις συνθήκες αλλά αφορά μονάχα το πρόβλημα πώλησης ενός αντικειμένου με στόχο την μεγιστοποίηση της Κοινωνικής Ευημερίας. Είναι γνωστός δεκαετίες τώρα ο (μοναδικός) μηχανισμός ο οποίος μπορεί να επιλύει βέλτιστα όλες τις δημοπρασίες οι οποίες έχουν στόχο τη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας και αυτός είναι ο μηχανισμός VCG [47], [13], [27]. Το πρόβλημα με το μηχανισμό VCG είναι ότι στις περισσότερες περιπτώσεις απαιτεί εκθετικό χρόνο για να τρέξει. Συνεπώς το πρόβλημα το οποίο καλείται η έρευνα να λύσει αυτή τη στιγμή είναι η διατύπωση μηχανισμών οι οποίοι έχουν καλό λόγο προσέγγισης και τρέχουν σε πολυωνυμικό χρόνο.

Συναρτήσεις Αξιολόγησης

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως κάθε παίκτης i σε μία Συνδυαστική Δημοπρασία έχει την προσωπική του συνάρτηση αξιολόγησης $v_i(\cdot)$. Όταν επιχειρούμε να σχεδιάσουμε ένα μηχανισμό για Συνδυαστικές Δημοπρασίες συχνά περιορίζουμε πόσο εκφραστική μπορεί να είναι αυτή η συνάρτηση αξιολόγησης. Παραδείγματος χάρη μία εξαιρετικά απλουστευτική παραδοχή είναι ότι όταν οι παίκτες λαμβάνουν παραπάνω από ένα αντικείμενο ο τρόπος με τον οποίο αξιολογούν το σύνολο των αντικείμενων είναι προσθέτοντας την αξία του κάθε αντικειμένου ξεχωριστά. Σε αυτή την περίπτωση όμως, δεν λαμβάνουμε υπόψιν πως τα αντικείμενα προσθέτουν η αφαιρούν αξία όταν συνυπάρχουν (π.χ. η αξία ενός αναψυκτικού και μιας μπύρας μαζί είναι για τους περισσότερους ανθρώπους μικρότερη από τις επιμέρους αξίες των δύο αντικειμένων).

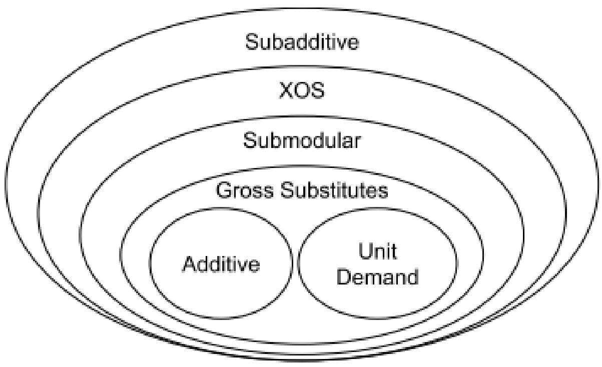
Οι συνήθεις παραδοχές τις οποίες ικανοποιούν όλες οι συναρτήσεις αξιολόγησης είναι οι εξής δύο:

1. **Κανονικοποίηση**: $v_i(\emptyset) = 0, \forall i \in N$.
2. **Μονοτονία**: $v_i(S) \leq v_i(T), \forall S \subseteq T \subseteq M$ and $\forall i \in N$.

Θα παρουσιάσουμε τώρα τις συνήθεις κλάσεις συναρτήσεων αξιολόγησης:

- **Additive**: $v(S) + v(T) = v(S \cup T) + v(S \cap T)\ \forall S, T \subseteq M$.
- **Submodular**: $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T) + v(S \cap T)\ \forall S, T \subseteq M$.
- **Subadditive**: $v(S) + v(T) = v(S \cup T)\ \forall S, T \subseteq M$.
- **Unit demand**: $v(S) = \max_{j \in S} v(\{j\})\ \forall S \subseteq M$.
- **XOS**: $v_i(S) = \max_{1 \leq k \leq l} a_{(i,k)}(S)\ \forall S \subseteq M$, όπου $a_{(i,k)}$ είναι l Additive συναρτήσεις.
- **Gross-Substitutes**: Περιγράφουν συναρτήσεις αξιολόγησεις στις οποίες η μείωση της τιμής ενός αντικειμένου j δεν συνεπάγεται αύξηση της ζήτησης για οποιοδήποτε άλλου αντικειμένου j'.

Η σχέση ανάμεσα στις διαφορετικές κλάσεις συναρτήσεων αξιολόγησης παρουσιάζεται στην παρακάτω είκονα:



Επειδή οι συναρτήσεις αξιολογήσεις είναι συναρτήσεις οι οποίες αντιστοιχίζουν τον εκθετικού μεγέθους χώρο 2^M στους πραγματικούς αριθμούς, προκύπτουν φυσικά ερωτήματα όσον αφορά το πώς ακριβώς περιγράφουμε αυτή την πληροφορία και φυσικά πως την επικοινωνούν οι παίκτες στον μηχανισμό. Οι δύο συνήθεις "λύσεις" οι οποίες χρησιμοποιούνται στην πράξη είναι οι ερωτήσεις ζήτησης και οι ερωτήσεις αξίας.

Definition 1.3.1 (ερώτηση ζήτησης). *Στις ερωτήσεις ζητήσης ο παίκτης i παρατηρεί ένα διάνυσμα τιμών $\boldsymbol{p}$ και του ζητάτε να αποφανθεί ως έξοδο το υποσύνολο S' το οποίο μεγιστοποιεί την συνάρτηση ωφέλειας του δηλαδή:*

$$S' = \arg\max_{S \subseteq 2^M} \{u_i(S)\} = \arg\max_{S \subseteq 2^M} \{v_i(S) - \boldsymbol{p}(S)\}$$

Definition 1.3.2 (ερώτηση αξίας). *Στις ερωτήσεις αξίας ο παίκτης i απαντάει για ένα συγκεκριμένο υποσύνολο αντικειμένων S' πόσο αξίζει για τον ίδιο αυτό το υποσύνολο δηλαδή την τιμή $v_i(S')$.*

Οι ερωτήσεις ζήτησης είναι αυστηρά ισχυρότερες των ερωτήσεων αξίας και για αυτό χρησιμοποιούνται στους περισσότερους μηχανισμούς.

Τυχαιότητα και Δειγματοληψία

Στην Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, καλούμαστε να διαχειριστούμε το γεγονός ότι οι παίκτες έχουν κάποια άγνωστη πληροφορία την οποία προσπαθούμε με κάποιον τρόπο να εκτιμήσουμε. Συχνά βρισκόμαστε στη θέση όπου ο σχεδιασμός μηχανισμών απαιτεί να γνωρίζουμε το εύρος στο οποίο κατανέμεται κάποια άγνωστη σε μας τιμή. Σε τέτοιες περιπτώσεις μία συνήθεις τεχνική η οποία χρησιμοποιείται είναι η δειγματοληψία. Σημαντικό είναι να τονίσουμε εξαρχής πώς στην περίπτωση που δειγματοληπτούμε στους παίκτες, οι παίκτες οι οποίοι ανήκουν στο δείγμα μας δεν θα πρέπει να συμμετάσχουν στο τελικό παίγνιο, καθώς έτσι τους δίνεται η δυνατότητα να δώσουν ψευδείς πληροφορίες (επηρεάζοντας έτσι τις τιμές που θα αντικρίσουν στην συνέχεια) και άρα δεν υφίσταται πλέον η φιλαλήθεια.

Υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να ανάβουμε δείγμα από ένα πληθυσμό. Η πιο απλή σκέψη είναι να χωρίσουμε με εντελώς τυχαίο τρόπο όλους τους παίκτες σε ένα σταθερό αριθμό ομάδων (συνήθως 2) ίσου μεγέθους και αφού επιλέξουμε ποια ομάδα αποτελεί το δείγμα να εξάγουμε το στατιστικό που μας ενδιαφέρει από το δείγμα και να εκτελέσουμε τον μηχανισμό στις άλλες ομάδες. Το πρόβλημα με αυτή τη διαδικασία είναι ότι εισάγει συσχετίσεις ανάμεσα στους παίκτες, το οποίο εν γένει είναι ανεπιθύμητο (κυρίως επειδή δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε πιθανοτικές ανισώσεις όπως Chernoff ή Hoeffding). Προς αποφυγή αυτού συχνά επιλέγουμε να τοποθετήσουμε κάθε παίκτη με ανεξάρτητη πιθανότητα σε οποιαδήποτε από τις ομάδες. Έτσι πετυχαίνουμε τα μεγέθη των ομάδων να είναι περίπου ίσα (είναι ίσα ως αναμενόμενες τιμές) και αφαιρούμε τις συσχετίσεις ανάμεσα στους. Η συγκεκριμένη τεχνική είναι εξαιρετικά δημοφιλής στις τελευταίες ερευνητικές εργασίες σε Συνδυαστικές Δημοπρασίες και χρησιμοποιείται για να αποσπάσουμε από το δείγμα χρήσιμες πληροφορίες π.χ. την τιμή $\psi = \max_i v_i(M)$ ή κάποια άνω φράγματα για την τιμή της βέλτιστης λύσης OPT.

Μέθοδοι δειγματοληψίας όπως είναι αναμενόμενο δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε όλες τις περιπτώσεις. Ένα πολύ απλό παράδειγμα μιας τέτοιας περιπτώσης είναι μία Συνδυαστική Δημοπρασία στης οποίας την βέλτιστη λύση ένας μόνο παίκτης λαμβάνει όλα τα αντικείμενα. Σε αυτή την περίπτωση αν προσπαθήσουμε να κάνουμε δειγματοληψία θα προκύψει ένα εκ δύο σεναρίων, ή ο συγκεκριμένος παίκτης θα βρεθεί στο δείγμα και σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε χάσει την βέλτιστη λύση μας, ή ο συγκεκριμένος παίκτης δεν θα βρεθεί στο δείγμα μας και τα στατιστικά τα οποία θα εκλάβουμε από το δείγμα μπορούν να είναι πολύ μακριά από την πραγματικότητα. Η συγκεκριμένη περίπτωση και άλλες παρόμοιες στις οποίες η βέλτιστη λύση μοιράζεται μόνο σε μία πολύ μικρή μερίδα των παικτών (π.χ. σταθερού μεγέθους) είναι φυσικά αντικρουόμενες με τις περιπτώσεις στις οποίες αντικείμενα πρέπει να μοιραστούν σε πολλούς παίκτες. Τυπικά μπορούμε να ορίσουμε την πρώτη οικογένεια παραδειγμάτων ως τα παραδείγματα στα οποία υπάρχει τουλάχιστον ένας παίκτης i με $v_{i'}(M) > \frac{OPT}{a}$, όπου a μία σταθερά. Θα αποκαλούμε τέτοιους παίκτες από εδώ και στο εξής ως κυρίαρχους παίκτες.

Είναι δύσκολο να σχεδιάσουμε μηχανισμούς οι οποίοι αντιλαμβάνονται αν έχουμε πέσει σε κάποια περίπτωση της πρώτης οικογένειας ή της δεύτερης. Αυτού που συνηθίζεται σε τέτοιες περιπτώσεις είναι να επιτρέπουμε τυχαιότητα στους μηχανισμούς και συγκεκριμένα να σχεδιάζουμε

2 μηχανισμούς· τον πρώτο ώστε να πετυχαίνει καλό λόγο προσέγγισης όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα κυρίαρχος παίκτης στη δημοπρασία, και τον δεύτερο να πετυχαίνει καλό λόγο προσέγγισης όταν δεν υπάρχει κανένας κυρίαρχος παίκτης στη δημοπρασία. Αξιοποιώντας το γεγονός πως η Κοινωνική Ευημερία είναι μη αρνητική ποσότητα μπορούμε να εκτελέσουμε πιθανοτικα έναν εκ των δύο μηχανισμών και έτσι να πετυχαίνουμε σε κάθε περίπτωση η <u>αναμενόμενη</u> Κοινωνική Ευημερία να παρουσιάζει καλό λόγο προσέγγισης.

Ο μηχανισμός ο οποίος χρησιμοποιείται για να καλύπτει τις περιπτώσεις που υπάρχει κυρίαρχος παίκτης στη δημοπρασία είναι μία δημοπρασία δεύτερης τιμής για το πλήρες σύνολο αντικειμένων M. Από τον ορισμό του κυρίαρχου παίκτη καταλαβαίνουμε ότι ο συγκεκριμένος μηχανισμός σε αυτές τις περιπτώσεις πετυχαίνει λόγω προσέγγισης a. Έτσι, η έρευνα στον χώρο προσπαθεί να δώσει μηχανισμούς οι οποίοι πετυχαίνουν καλό λόγο προσέγγισης δεδομένου ότι δεν υπάρχει κανένας κυρίαρχος παίκτης. Η συγκεκριμένη νοοτροπία μπορεί να επιβιώσει μέχρις ότου κατασκευαστεί ένας μηχανισμός ο οποίος έχει σταθερό λόγο προσέγγισης, όποτε πλέον θα πρέπει να αναθεωρηθεί η δημοπρασία δεύτερης τιμής για το πλήρες σύνολο του αντικειμένων M.

Οι καλύτεροι μηχανισμοί οι οποίοι έχουν χρησιμοποιηθεί στην έρευνα του πρόσφατου παρελθόντος επιστρατεύουν κάποιου σχήμα το οποίο σε γύρους προσπαθεί να μάθει διανύσματα καλών τιμών για τα αντικείμενα. Αυτό φυσικά εκκινεί νέες ερώτησεις όπως:

1. Πώς ακριβώς ορίζεται ένα καλό ένα διάνυσμα τιμών;

2. Πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα καλά διανύσματα τιμών;

3. Πώς μαθαίνουμε μέσα στους μηχανισμούς μας καλά διανύσματα τιμών;

Οι απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα διαφέρουν ανάλογα με την κλάση συναρτήσεων αξιολόγησης υπό την οποία ερευνούμε το πρόβλημα. Στην Additive κλάση ένα καλό διάνυσμα τιμών είναι οι βέλτιστες τιμές οι οποίες ορίζονται για κάθε αντικείμενο ως κάποια τιμή η οποία είναι ταυτόχρονα μικρότερη (ή ίση) από την μεγαλύτερη αξιολόγηση από κάποιον παίκτη για αυτό το αντικείμενο και μεγαλύτερη από την δεύτερη μεγαλύτερη αξιολόγηση από κάποιον παίκτη για το ίδιο αντικείμενο.

Στην κλάση XOS μπορούμε να ορίσουμε τις υποστηρικτικές τιμές του βέλτιστου διαμοιρασμού $O = (O_1, ..., O_n)$ με τον εξής τρόπο· ορίζουμε ως υποστηρικτικές τιμές q_j των αντικειμένων $j \in O_i$, τα βάρη της μέγιστης (κατά τον υπολογισμό του O_i) additive συναρτήσης από τις l που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαραστήσουμε την $v_i(\cdot)$. Συσχετιζόμενες με αυτές τις τιμές $\mathbf{q}$ είναι το διάνυσμα τιμών $\mathbf{p}$ που υποστηρίζει τον βέλτιστο διαμοιρασμό $O = (O_1, ..., O_n)$, για το οποίο ισχύει $p_j \leq q_j$ για όλα τα αντικείμενα $j \in M$. Οι συγκεκριμένες τιμές είναι χρήσιμες στον παρακάτω απλό μηχανισμό.

Mechanism 1: Fixed-Price Auction ($\mathbf{p}, M, N$)

Input: A price vector $\mathbf{p}$, a set of items M, an ordered set of bidders N
Output: An Allocation $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n)$
for $i \in N$ **do**
    Suppose S_i is bidder i response to the demand query with items M and price vector $\mathbf{p}$.
    $A_i \leftarrow S_i$
    $M \leftarrow M \setminus A_i$
end
return $\boldsymbol{A} = (A_1, ..., A_n)$

Η δύναμη του συγκεκριμένου μηχανισμού αποτυπώνεται στο εξής λήμμα:

Λήμμα 1.3.1. *[16] Για ένα διαμοιρασμό αντικειμένων $O = (O_1, ..., O_n)$ και ένα διάνυσμα τιμών $\boldsymbol{p} = (p_1, ..., p_m)$ το οποίο υποστηρίζει αυτό το διαμοιρασμό, ο μηχανισμός Fixed-Price Auction που χρησιμο-*

ποιεί τις τιμές $\frac{\mathbf{p}}{2} = \left(\frac{p_1}{2}, ..., \frac{p_m}{2}\right)$ *καταλήγει σε έναν διαμοιρασμό* $A = (A_1, ..., A_n)$ *στον οποίο ισχύει* $\sum_i v_i(A_i) \geq \frac{\sum_{j \in O} p_j}{2}$.

Από τις τρεις ερωτήσεις που θέσαμε παραπάνω μπορούμε να παρατηρήσουμε πως υπό την σκοπιά που έχουμε υιοθετήσει, απαντώνται οι δύο πρώτες. Το σημείο ενδιαφέροντος πλέον καταλήγει να είναι η τρίτη ερώτηση. Η γενική ιδέα που επιστρατεύεται στις τελευταίες ερευνητικές εργασίες είναι ο χωρισμός των παικτών σε ομάδες και η εκτέλεση κάποιου υπο-μηχανισμού σε γύρους (συνήθως Fixed-Price Auction). Στην αρχή αρχικοποιείται το διάνυσμα τιμών. Σε κάθε γύρο, με κατάλληλα μικρή πιθανότητα ο υπο-μηχανισμός αποφασίζει τον τελικό διαμοιρασμό των αντικειμένων. Ειδάλλως ο μηχανισμός προχωράει στον επόμενο γύρο, έχοντας όμως συλλέξει πληροφορία η οποία επιτρέπει στην επόμενη εκτέλεση να έχουμε συγκλίνει σε καλύτερο διάνυσμα τιμών. Η συγκεκριμένη ιδέα εφαρμόζεται στις τελευταίες εργασίες τόσο για το πρόβλημα με συναρτήσεις αξιολόγησης στην κλάση XOS [16, 7, 6] όσο και στην κλάση Subadditive [6].

1.4 Συνδιαστικές Δημοπρασίες με Προβλέψεις

Στις προηγούμενες δύο ενότητες χτίσαμε τα θεμέλια που απαιτούνται για να ξεκινήσουμε να μελετάμε το πρόβλημα των Συνδυαστικών Δημοπρασιών με εξωτερική πληροφορία στην μορφή προβλέψεων μηχανικής μάθησης. Οι προβλέψεις που θα αξιοποιήσουμε έχουν τη μορφή διανυσμάτων τιμών. Θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα για την Additive μορφή του προβλήματος και την Submodular. Τονίζουμε πως μας ενδιαφέρουν μηχανισμοί για Συνδυαστικές Δημοπρασίες χωρίς κυρίαρχους παίκτες. Συγκεκριμένα:

Υπόθεση 1.4.1. *Δεν υπάρχει κανένας παίκτης* $i \in N$ *τέτοιος ώστε* $v_i(M) \geq \frac{OPT}{16}$. *Τέτοιου είδους παίκτες ονομάζονται* ***κυρίαρχοι παίκτες****.*

1.4.1 Προβλέψεις για Συνδυαστικές Δημοπρασίες

Όταν μελετούσαμε το κλασικό πρόβλημα Συνδυαστικών Δημοπρασιών, είδαμε ότι είναι αναγκαία η χρήση πιθανοτικών μηχανισμών, ιδιώς για την ταυτόχρονη ικανοιήση των παραδειγμάτων που έχουν τουλάχιστον έναν κυρίαρχο παίκτη και τον παραδειγμάτων που δεν έχουν. Αυτό είναι εφικτό επειδή στις Συνδυαστικές Δημοπρασίες που μελετάμε επιθυμούμε να μεγιστοποιήσουμε την Κοινωνική Ευημερία, η οποία είναι μη αρνητική ποσότητα. Η συγκεκριμένη νοοτροπία μπορεί να φανεί εξαιρετικά χρήσιμη υπό το πρίσμα μελέτης μηχανισμών με προβλέψεις. Ας θεωρήσουμε πώς έχουμε σχεδιάσει έναν μηχανισμό με προβλέψεις ο οποίος πετυχαίνει σταθερή συνέπεια έστω c και ενδεχομένως μη φραγμένη ευρωστία. Έστω τώρα ενας πιθανοτικός μηχανισμός, ο όποιος με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ εκτελεί τον συγκεκριμένα μηχανισμό με προβλέψεις ή αλλιώς με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ εκτελεί τον καλύτερο μηχανισμό για το πρόβλημα (ας πούμε με λόγο προσέγγισης $O(poly(\log \log m))$). Ο συγκεκριμένος πιθανοτικός μηχανισμός επιτυγχάνει συνέπεια $\frac{c}{2}$ και ευρωστία $O(poly(\log \log m))$. Το συγκεκριμένο επιτυγχάνει εκ πρώτης όψεως ένα σημαντικό ζητούμενο, αλλά από την άλλη δεν ικανοποιεί την επιθυμία μας για ομαλή μεταβολή του λόγου προσεγγίσεις καθώς το σφάλμα μεγαλώνει.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, θα χρησιμοποιήσουμε στις προσπάθειές μας προβλέψεις με την μορφή διανυσμάτων τιμών $\mathbf{p}$. Στην προσπάθειά μας να επιτεθούμε στο πρόβλημα, θα εναλλάσουμε τέσσερα κριτήρια-παραδοχές:

1. Πληροφορία του διανύσματος τιμών.

2. Αναλογικότητα.

3. Συνέπεια.

4. Κλάση μηχανισμών.

Η πληροφορία του διανύσματος τιμών αναφέρεται στις ιδιότητες τις οποίες το διάνυσμα τιμών ικανοποιεί. Η αναλογικότητα αναφέρεται στο εάν η πρόβλεψη θα είναι στις πραγματικές τιμές ή θα αποτυπώνει την σχέση αναλογίας ανάμεσα στην τιμή ενός αντικειμένου και ενός άλλου. Τέλος θα διακρίνουμε περιπτώσεις που μελετάμε μηχανισμούς μονάχα για την συνέπεια τους (βέλτιστη πρόβλεψη).

Διανύσματα Τιμών

Ας παρουσιάσουμε τώρα μερικούς ορισμούς οι οποίοι θα μας είναι χρήσιμοι στην ανάλυση αργότερα. Αρχικώς θα ορίσουμε το αναλογικό διάνυσμα τιμών το οποίο αποτυπώνει τον λόγο ανάμεσα στις τιμές 2 οποιονδήποτε αντικειμένων.

Ορισμός 1.4.1 (αναλογικό διάνυσμα τιμών). *Ορίζουμε ως αναλογικό διάνυσμα τιμών* $\boldsymbol{p}$ *το διάνυσμα που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό κάθε στοιχείου του διανύσματος με μια σταθερά* c*, έτσι ώστε όλα τα αντικείμενα* j *να λαμβάνουν τιμή* p_j *τέτοια ώστε* $p_j \in (0, 1]$.

Ο συγκεκριμένος τύπος διανύσματος τιμών θα χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια με την συγκεκριμένη κλάση μηχανισμών:

Ορισμός 1.4.2 (Sampling & Multiplying Mechanism). *Στην συγκεκριμένη κλάση μηχανισμών ανήκουν όλοι οι μηχανισμοί οι οποίοι λαμβάνουν ως είσοδο ένα διάνυσμα τιμών* $\boldsymbol{p}$*, υπολογίζουν σε ένα δείγμα των παικτών μια (ίσως προσεγγιστικά) βέλτιστη λύση στο δείγμα* OPT'*, επιλέγουν έναν πολλαπλασιαστή* d *σύμφωνα με την κατανομή* $\mathcal{D}$ *και υπολογίζουν ένα νέο διάνυσμα τιμών* $\boldsymbol{p}' = \frac{OPT'}{d \cdot |\boldsymbol{p}|} \cdot \boldsymbol{p}$*, το οποίο στην συνέχεια αξιοποιούν σε μια Fixed-Price Auction στους υπολοιπόμενους παίκτες.*

1.4.2 Additive Κλάση

Ξεκινάμε από τη συγκεκριμένη κλάση καθώς είναι ήδη γνωστός ο βέλτιστος μηχανισμός για αυτήν. Θα μελετήσουμε το πρόβλημα θεωρώντας πως μας δίνεται ένα βέλτιστο αναλογικό διάνυσμα τιμών το οποίο ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.4.3 (βέλτιστο αναλογικό διάνυσμα τιμών). *Ορίζουμε ένα βέλτιστο αναλογικό διάνυσμα τιμών* $\boldsymbol{p} \in (0, 1]^m$*, για το οποίο ισχύει ότι* $\exists$ *σταθερά* c*, τέτοια ώστε* $\forall j \in M$ *η τιμή* $c \cdot p_j$ *να είναι μικρότερη ή ίση της υψηλότερης αξιολόγησης του αντικειμένου* j *και μεγαλύτερη από την δεύτερη υψηλότερη αξιολόγηση του αντικειμένου* j.

Θα ορίσουμε τώρα έναν μηχανισμό από την κλάση των Sampling & Multiplying Mechanism που να μπορεί να αξιοποιήσει την συγκεκριμένη είσοδο. Συγκεκριμένα ορίζουμε τον The Sampling Mechanism:

Mechanism 2: The Sampling Mechanism

Input: A proportional price vector $\mathbf{p}$
Output: An Allocation $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n)$
Split bidders randomly with probability $\frac{1}{2}$ into groups N_1, N_2.
Randomly assign N_1 and N_2 to N_{Sample} and N_{Post}.
Run a 'virtual' second price auction for each item $j \in M$ only on bidders $i \in N_{Sample}$ and output the corresponding Optimal Social Welfare as OPT'.
Randomly set $d = \{64, 8\}$ and define $\mathbf{p}' = \frac{OPT'}{d \cdot |\mathbf{p}|} \cdot \mathbf{p}$.
Run the FPA(N_{Post},M,$\mathbf{p}'$) and output its allocation $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n)$ as the final allocation of the Mechanism.

Η ύπαρξη της κατανομή $\mathcal{D}$ δικαιολογείται από την ευρύτητα που μπορούν να έχουν τα αναλογικά διανύσματα τιμών. Εάν το αρχικό βέλτιστο διάνυσμα τιμών $c \cdot \mathbf{p}$ έχει μεγάλο κέρδος (σε σύγκριση με την Κοινωνική Ευημερία της βέλτιστης λύσης OPT), τότε ο πολλαπλασιαστής $d = 64$ φροντίζει να υπο-εκτιμήσουμε τις τιμές στο τελικό διάνυσμα τιμών, ενώ εάν το αρχικό βέλτιστο διάνυσμα τιμών $c \cdot \mathbf{p}$ έχει μικρό κέρδος, τότε ο πολλαπλασιαστής $d = 8$ φροντίζει να υπερ-εκτιμήσουμε τις τιμές στο τελικό διάνυσμα τιμών. Για τον μηχανισμό The Sampling Mechanism αποδεικνύουμε το συγκεκριμένο θεώρημα:

Θεώρημα 1.4.1. *Ο πιθανοτικός μηχανισμός The Sampling Mechanism με είσοδο έναν βέλτιστο αναλογικό διάνυσμα τιμών επιτυγχάνει σταθερό λόγο προσέγγισης στην βέλτιστη Κοινωνική Ευημερία.*

Ο σταθερός λόγο προσέγγισης του μηχανισμού είναι $\frac{e^2-2}{2048e^2}$. Η απόδειξη του θεωρήματος δίνεται στο πλήρες κείμενο και συγκεκριμένα στο Θεώρημα 5.2.1.

1.4.3 XOS Κλάση

Η ανάλυση και το αποτέλεσμα στην Additive κλάση μας δίνουν τις απαιτούμενες υποσχέσεις για να ξεκινήσουμε να διερευνούμε την Submodular κλάση (στην πραγματικότητα την XOS η οποία την περικλείει). Σε αυτή την μετάβαση το πρώτο πράγμα το οποίο καλούμαστε να επαναξιολογήσουμε είναι η είσοδος που θα θεωρήσουμε. Συγκεκριμένα το πρόβλημα το οποίο προκύπτει είναι ότι στη συγκεκριμένη κλάση δεν ορίζονται βέλτιστες τιμές. Οι δύο εναλλακτικές τις οποίες θα αξιολογήσουμε είναι υποστηρικτικές τιμές $\mathbf{q}$ του βέλτιστου διαμοιρασμού καθώς και οι τιμές $\mathbf{p}$ οι οποίες υποστηρίζουν των βέλτιστο διαμοιρασμό.

Υποστηρικτικές Τιμές

Οι υποστηρικτικές τιμές του βέλτιστου διαμοιρασμού είναι πολύ κοντά στις βέλτιστες τιμές τις οποίες είδαμε στην Additive κλάση. Οι υποστηρικτικές τιμές ενός βέλτιστου διαμοιρασμού εάν περιοριστούμε στην Additive κλάση είναι επακριβώς οι μεγαλύτερες δυνατές βέλτιστες τιμές. Αναμενόμενα λοιπόν μπορούμε να επιλέξουμε έναν μηχανισμό από την κλάση Sampling & Multiplying, ο οποίος πετυχαίνει σταθερό λόγο προσέγγισης αν λάβει ένα αναλογικό διάνυσμα υποστηρικτικών τιμών (του βέλτιστου διαμοιρασμού). Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο Θεώρημα 5.3.1 στο αγγλικό κείμενο.

Θεώρημα 1.4.2. *Υπάρχει ένας μηχανισμός της κλάσης Sampling & Multiplying Mechanism, ο οποίος όταν λαμβάνει ως είσοδο ένα αναλογικό διάνυσμα υποστηρικτικών τιμών (του βέλτιστου διαμοιρασμού), πετυχαίνει σταθερό λόγο προσέγγισης σε Submodular Συνδυαστικές Δημοπρασίες.*

Οι τιμές οι οποίες υποστηρίζουν έναν βέλτιστο διαμοιρασμό είναι αυστηρά πιο αδύναμες από τις αντίστοιχες υποστηρικτικές υπό την έννοια ότι είναι μικρότερες τους και επίσης δεν παρουσιάζουν κάποιο κάτω φράγμα. Για αυτό το λόγο μπορούμε να κατασκευάσουμε περιπτώσεις του προβλήματος στις οποίες με είσοδο ένα αναλογικό διάνυσμα τιμών το οποίο υποστηρίζει τον βέλτιστο διαμοιρασμό, πετυχαίνουμε αυθαιρέτως κακή Κοινωνική Ευημερία. Παρατηρώντας από την άλλη τις τιμές οι οποίες υποστηρίζουν έναν βέλτιστο διαμέρισμα χωρίς αναλογικότητα, αλλά παραμετροποιώντας την απόστασή τους από τις αντίστοιχες υποστηρικτικές ως σφάλμα $\eta = \max_j \in M \left\{ \frac{q_j}{p_j} \right\}$, μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα (στο αγγλικό κείμενο Θεώρημα 5.3.2).

Θεώρημα 1.4.3. *Με είσοδο ένα διάνυσμα τιμών που υποστηρίζει τον βέλτιστο διαμοιρασμό, ο μηχανισμός Fixed-Price Auction που χρησιμοποιεί αυτές τις τιμές πετυχαίνει λόγο προσέγγισης 2η σε XOS Συνδυαστικές Δημοπρασίες.*

a-καλό Διάνυσμα Τιμών

Τα αποτελέσματα της προηγούμενης υποενότητας μας υποδεικνύουν πως χρειαζόμαστε διαφορετική είσοδο/πληροφορία για περιπτώσεις με Submodular παίκτες. Προτείνουμε για αυτό τον λόγο την αξιοποίηση του παρακάτω (αορίστως ορισμένου) αναλογικού διανύσματος τιμών, το οποίο ονομάζουμε a-καλό διάνυσμα τιμών.

Θεώρημα 1.4.4 (a-καλό αναλογικό διάνυσμα τιμών). *Ορίζουμε ως a-καλό αναλογικό διάνυσμα τιμών, ένα διάνυσμα τιμών $\boldsymbol{p} \in (0,1]^m$, για το οποίο υπάρχει μια σταθερά c τέτοια ώστε ο διαμοιρασμός που προκύπτει από τον μηχανισμό Fixed-Price Auction που χρησιμοποιεί τιμές $c \cdot \boldsymbol{p}$ να έχει Κοινωνική Ευημερία $Welfare \geq \frac{OPT}{a}$ (για οποιαδήποτε ακολουθία των N παικτών).*

Επειδή η συγκεκριμένη οικογένεια διανυσμάτων τιμών δεν έχει δοκιμαστεί στην Additive εκδοχή του προβλήματος οφείλουμε να πάμε ορισμένα βήματα πίσω. Το πρώτο σημαντικό ερώτημα που οφείλουμε να απαντήσουμε είναι πως μας επηρεάζει η παράμετρος a καθώς και κατα πόσο είναι αναγκαίο για τον μηχανισμό μας να γνωρίζει αυτή την παράμετρο. Αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα το οποίο υποδηλώνει πως μηχανισμοί από την κλάση Sampling & Multiplying Mechanism δεν μπορούν να αξιοποιήσουν την πληροφορία ενός a-καλού αναλογικού διανύσματος τιμών εάν αγνοούν πλήρως την τιμή a.

Θεώρημα 1.4.5. *Για οποιαδήποτε κατανομή πιθανότητας $\mathcal{D}$ και πιθανότητα δειγματοληψίας $\frac{1}{2}$ που από κοινού ορίζουν έναν συγκεκριμένο μηχανισμό της κλάσης Sampling & Multiplying, υπάρχουν περιπτώσεις του προβλήματος $\mathcal{I}$ (ακόμα και για Additive συναρτήσεις), μια συγκεκριμένη σταθερά a και ένα a-καλό αναλογικό διάνυσμα τιμών $\boldsymbol{p}$, για τα οποία ο Sampling & Multiplying Mechanism αποδίδει διαμοιρασμό με αυθαιρέτως μικρή Κοινωνική Ευημερία με πιθανότητα $1 - o(1)$.*

Από εδώ και στο εξής θα επιχειρήσουμε να σχεδιάσουμε μηχανισμούς που αξιοποιούν κάποιο a-καλό αναλογικό διάνυσμα τιμών έχοντας όμως πλήρη γνώση για την παράμετρο a. Ακόμα και αυτή η εξαιρετικά ισχυρή (και ανακόλουθη) παραδοχή δεν μας επιτρέπει να πετύχουμε τον στόχο μας. Τα a-καλά αναλογικά διανύσματα τιμών μπορούν σε ορισμένες περιπτώσεις να επιτυγχάνουν τις εγγυήσεις τους χωρίς οι πραγματικές τιμές ($c \cdot \mathbf{p}$) να είναι αρκετά υψηλές. Αυτό συνεπάγεται παθογένειες με κυριότερη μια συμπεριφορά αστάθειας γύρω από τα a-καλά αναλογικά διανύσματα τιμών. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα (απόδειξη στο Θεώρημα 5.3.4):

Θεώρημα 1.4.6. *Υπάρχει μια οικογένεια a-καλών διανυσμάτων τιμών $\{C \cdot \boldsymbol{P}\}$ τέτοια ώστε για ένα συγκεκριμένο διάνυσμα τιμών $c \cdot \boldsymbol{p}$ μπορούμε να ορίσουμε μια οικογένεια περιπτώσεων του προβλήματος $\mathcal{I}$ με σταθερές $\{c_1, c_2, \epsilon\}$ που εξαρτώνται από την εκάστοτε περίπτωση, τέτοιες ώστε $c_1 < c < c_2$ και για οποιοδήποτε $c' \in (c_1, (1-\epsilon)c) \cup ((1+\epsilon)c, c_2)$ ισχύει πως ο μηχανισμός Fixed-Price Auction με τιμές $c' \cdot p$ πετυχαίνει διαμοιρασμούς με αυθεραίτως μικρό $\mathbb{E}\left[Welfare\right]$, όπου η τυχαίοτητα προκύπτει μονάχα στην ακολουθία των παικτών.*

Ο τρόπος με τον οποίο αποδεικνύουμε αυτό το θεώρημα είναι κατασκευαστικός. Η αστάθεια που προκύπτει βασίζεται κατα κυρίαρχο λόγο στο γεγονός ότι το κέρδος των a-καλών διανυσμάτων τιμών που επιλέγουμε είναι σημαντικά μικρότερο από την κοινωνική ευημερία στην συγκεκριμένη περίπτωση του προβλήματος.

Εν τέλει το αποτέλεσμα που αποδεικνύουμε είναι πως για μικρό σφάλμα γύρω από το διάνυσμα τιμών δεν διατηρούνται οι εγγυήσεις των a-καλών διανυσμάτων τιμών. Αυτό σε συνδυασμό με το προηγούμενο αποτέλεσμα σκιαγραφεί πως τα a-καλά διανύσματα τιμών δεν φαίνονται να είναι αρκετή πληροφορία για μηχανισμούς που ανήκουν στην κλάση Sampling & Multiplying.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την δύναμη των a-καλών διανυσμάτων τιμών, μπορούμε να εξετάσουμε και άλλους μηχανισμούς. Εμπνευσμένοι από μια ιδέα του Dobzinski [16] μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις τιμές κάνοντας πιθανοτικά scale σε διακριτό χώρο επιλογών, και να λάβουμε το εξής αποτέλεσμα (αναλυτικά η απόδειξη στο Θεώρημα 5.3.5).

Θεώρημα 1.4.7. *Έναν μηχανισμός Fixed-Price Auction που χρησιμοποιεί ένα a-καλό αναλογικό διάνυσμα τιμών, του οποίου ο πολλαπλασιαστής έχει προκύψει από μια κατανομή $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\psi)$ όπου $\psi = O(\log m)$, η οποία αντλεί έναν πολλαπλασιαστή ομοιόμορφα από τους πιθανούς πολλαπλασιαστές, πετυχαίνει λόγο προσέγγισης $O(a \log m)$.*

Διαταραχή στο a-καλό Διάνυσμα Τιμών

Στην προσπάθεια να αποφύγουμε τις παθογένειες του a-καλού διανύσματος τιμών υπό το πρίσμα της κλάσης Sampling & Multiplying, εξετάσαμε ως διέξοδο να επιτρέψουμε διαταραχή. Συγκεκριμένα εξετάσαμε τι θα συμβεί αν μας δίνεται ένα a-καλό διάνυσμα τιμών του οποίου όμως οι τιμές ανά αντικείμενο έχουν δοθεί μικρότερες ή μεγαλύτερες κατα ϵ' (με τυχαίο τρόπο). Η συγκεκριμένη λογική προσπαθεί να επιτεθεί στην αστάθεια της οικογένειας περιπτώσεων που κατασκευάσαμε για το προηγούμενο θεώρημα. Δυστυχώς, αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα το οποίο επί της ουσίας καθιστά τα a-καλά διανύσματα τιμών με διαταραχή αδύνατα να χρησιμοποιηθούν σε μηχανισμούς Sampling & Multiplying.

Θεώρημα 1.4.8. *Υπάρχει μια οικογένεια a-καλών διανυσμάτων τιμών $\{C \cdot \boldsymbol{P}\}$, τέτοια ώστε για ένα συγκεκριμένο διάνυσμα τιμών $c \cdot \boldsymbol{p}$ και για οποιοδήποτε σταθερού μεγέθους υπερκύβο στον χώρο $\mathbb{R}^m$ ο οποίος έχει κέντρο το $c \cdot \boldsymbol{p}$, μπορούμε να ορίσουμε μια οικογένεια περιπτώσεων του προβλήματος $\mathcal{I}$ για τις οποίες ο μηχανισμός Fixed-Price Auction με τιμές $\boldsymbol{p}'$ που αντιστοιχίζονται σε κάποιο από τους κόμβους του υπερκύβου πετυχαίνει διαμοιρασμούς με αυθεραίτως μικρό $\mathbb{E}[Welfare]$, όπου η τυχαίοτητα προκύπτει μονάχα στην ακολουθία των παικτών.*

1.4.4 Σύνοψη και Μελλοντικές Επεκτάσεις

Συνοψίζοντας, στην έρευνα μας επικεντρωθήκαμε σε δύο συγκεκριμένους άξονες. Μελετήσαμε την πληροφορία διανυσμάτων τιμών εαν μας δίνονται σε αναλογική αλλα συνεπή μορφή και αν μας δίνονταν σε μη αναλογική αλλά με σφάλμα μορφή. Παραθέσαμε θετικά και αρνητικά αποτελέσματα και για τις δύο κατηγορίες.

Η κυριότερη δυσκολία που οφείλουν οι επόμενες δουλειές να απαντήσουν είναι η διαχείριση διανυσμάτων τιμών που έχουν μικρό κέρδος. Μια άλλη κατεύθυνση είναι μια δεξιοδική προσπάθεια να αξιολογήσουμε καλύτερα τα στατιστικά που μπορούν να ληφθούν από το δείγμα μας, ιδίως στην περίπτωση των a-καλών διανυσμάτων τιμών.

Κάτι που δεν θεωρήσαμε αρκετά στις προσπάθειες μας είναι η γνώση του σφάλματος των προβλέψεων ή κάποια μέθοδος αξιολόγησης του. Με απλές προσαρμογές σε υπάρχοντες μηχανισμούς [6] μπορούμε να πετύχουμε αποτελέσματα που επηρεάζονται από το σφάλμα ως συνάρτηση του $\log \log \eta$ δεδομένου όμως γνώσης του πραγματικού σφάλματος η. Στην ίδια θεώρηση περιλαμβάνονται και ιδέες που προκύπτουν από το [50] όπου μια υπερπαράμετρος γ ελέγχει πόσο μεγάλο σφάλμα επιτρέπουμε στις τιμές μας.

Κλείνουμε την παρούσα διπλωματική με την υπογράμμιση της πεποίθησης πως το πρόβλημα επιδέχεται παραπάνω έρευνα, η οποία μπορεί να καρποφορήσει ικανοποιητικά θετικά αποτελέσματα.

Chapter 2

Introduction

Different forms of auctions naturally arise in every society with economic values. People are interested in solving allocation problems subject to varying objectives. Slight changes to the desired objective result in big differences in the applied approaches to the problems. The difficulties to overcome are driven by ideas that intersect computer science and economic theory. On many occasions, the pursuit of optimality in our solutions concludes in an unstable dynamic, the necessity of selecting between objective and strategic guarantees. This is the exact trade-off studied in the field of Algorithmic Game Theory.

As research and humanity move forward, new ideas and techniques are inevitably born, fueling yet more research and scientific advance. Thus for people joining the scientific community, there are always new missions to embark on and methods to follow. Deeply influenced by the meteoric rise of Machine-learning, Theoretical Computer science has come up with a mathematical modeling process, that allows it to design, parameterize and analyze algorithms that are augmented with outside information in the form of black box predictions. The main goal of this thesis is to investigate the problem of Combinatorial Auctions under the newly born learning augmented framework.

2.1 Motivation

The importance of Combinatorial Auctions can not be understated. They naturally occur in many situations. One of the most celebrated examples of Combinatorial Auctions is the Spectrum Auctions, a process whereby a government uses an auction system to sell the rights to transmit signals over specific bands of the electromagnetic spectrum and to assign scarce spectrum resources, that amass billions of dollars. Combinatorial Auctions have arisen on websites hosting marketplaces, like eBay, Amazon, and more recently Facebook. Complicated forms of Combinatorial auctions naturally occur on transportation problems (sometimes in a reversed form, where the auctioneer wants to select from different presented offers, subject to some constraints) and also communication network problems (e.g. dynamic routing protocols).

In general, a Combinatorial Auction is an allocation problem subject to some specific objective (usually the maximization of the Social Welfare). Bidders participating in the auction have intrinsic valuation functions which are unknown to the auctioneer. So the problem at hand faces two distinct challenges, solving a difficult optimization problem and addressing the strategic behavior of the bidders. As such, Combinatorial Auctions have been studied both as a pure algorithmic problem and as a game theoretic one. It is well established that there exists a gap between the two approaches, which of course arises from the game theoretic desire for truthfulness.

This problem has been extensively studied under different objectives, leading to different mechanisms and results. Even though it is a fundamental problem in Game Theory and Economics, new research works with inspired concepts, and answers to its variants arise constantly. The classical Social Welfare objective has seen many interesting results, both positive and negative. The most important of the field is the VCG mechanism [47, 13, 27] which however requires solving a difficult optimization problem, which even for Submodular valuations is NP-hard. As a result, the discussion has begun for approximate truthful mechanisms. When investigating approximate mechanisms for Combinatorial auctions the problem is restricted to some specific valuation functions class, usually the Submodular class or the Subadditive class.

The VCG mechanism hardness motivates the question of whether we can simply swap the difficult optimization allocation rule with some approximate polynomial-time rule and get an approximate truthful mechanism. The answer to this question is unfortunately negative [40] in most cases. Intuitively this is based on the fact that in the VCG, the mechanism's and the bidders' objectives are aligned and as such if the mechanism's objective is sub-optimal, we expect bidders to have room to misreport and increase their value. The only approximate scheme that does in fact maintain truthfulness is the class of maximal-in-range (MIR) mechanisms. MIR mechanisms however are not powerful enough to tackle even the Submodular case and admit many negative results and lower bounds [18, 11, 41, 45]. In fact, in Submodular Combinatorial Auctions it is proven that all MIR mechanisms admit a lower bound approximation of $\Omega(m^{\frac{1}{6}})$ [18].

The negative results of the MIR mechanisms have pushed research on Combinatorial auctions away from the VCG mentality. As a result, many new ideas and frameworks have been further investigated. The first important idea is that of randomization. Randomized mechanisms are in fact strictly more powerful than deterministic ones [17]. The second idea, that has pushed research on the Submodular setting is that of price-learning mechanisms (which can only work if we allow randomization). The past two decades many works have arisen in this spirit for Submodular Combinatorial Auctions [19, 15, 32, 16, 7, 6] having reached an approximation ratio of $O\left((\log\log m)^2\right)$ which can not be improved under the existing technical tools. Subadditive Combinatorial Auctions have seen far less volume of work [20, 15, 6], however their approximation ratio was improved to $O\left((\log\log m)^3\right)$ (on the same work as the Submodular state of the art result).

The sub-logarithmic results we just inspected are improved to constant approximations ratios in the pure algorithmic aspect of the problem. For the Submodular class, the problem has a simple greedy 2-approximation algorithm in [34], a tight $1-\frac{1}{e}$ approximation algorithm with value queries from [48] and an almost tight $1-\frac{1}{e}-10^{-6}$ approximation algorithm with demand queries. For the Subadditive class, the problem admits a 2-approximation algorithm that is due to [24]. Whether we can design a truthful mechanism that achieves a constant approximation ratio is probably the most important open question in the field.

It seemed inevitable that the theory community would find proper modeling to utilize machine learning's recent success. The learning augmented framework has managed to overcome the contrast between machine learning's uncertainty and computer science's pessimism, allowing theoretical computer scientists to observe classical problems in an enhanced information setting. Truth be told, the computer science community had already relaxed the worst-case behavior approach, in specific situations where pessimism was unrealistic. The field of Beyond Worst case analysis [10, 44] has officially sprung and has started numerous new fields (one of which is the learning augmented framework) and has already produced marvelous results.

The learning augmented framework has been so far tailored to the specifics of a handful of problems (mostly online problems) and is by no means a black box approach. For each problem specifically, the questions that need to be addressed before attempting this framework are "what type of predictions can be useful for this problem" and "how do we parameterize the error". Surprisingly on some problems, different types of predictions have seen theoretical success. Only recently a unifying black-box approach regarding online graph problems with predictions has been initiated by [8]. The objective of this thesis is to investigate how predictions can be implemented in Combinatorial Auctions.

2.2 Organization

Before we start discussing our work we need to delve into the recent works in the learning augmented field. As such, in chapter 3, we will be presenting a thorough yet short bibliographical report on the different applications of the learning augmented framework. For the most part, we will present the type of predictions used for each of the problems, the mathematical definition of the error functions, and the consistency and robustness guarantees (definitions in chapter 3). We will pay a little more attention to a recent work that has studied the problem of Single Item Maximization with predictions [50], because it is in the same family as the Combinatorial Auctions problem. A short and incomplete list of problems under which the framework has been successfully applied is (paging, ski rental, scheduling, online graph problems, and facility location). A keen and familiar observer might locate the fact that most of these problems are online (this of course is not coincidental).

In chapter 4 we will take a deeper look into the classical problem of Combinatorial Auctions. We will present the standard notation used, we will discuss useful properties, limitations, and common techniques utilized in the problem. We will make a thorough presentation of the importance of the assumption of specific valuation classes for the problem and decompose the state-of-the-art results according to the different classes. We will inspect randomization and sampling as one of the most important tools at our disposal and we will finally briefly discuss the most recent works and results.

Finally, chapter 5 will constitute our contributions to the problem. We will study the power and limitations of predictions in the form of price vectors. We will study different types of price vectors with unique properties, we will observe the effects of error on the predictions and we will conclude on what price vectors can be of use in specific cases. Finally, we will present our thoughts and guidelines for future work

2.3 Contributions

We will present here our aggregated results. Using the Sampling & Multiplying Mechanism Class, we design a mechanism that gets a constant approximation solution when the input vector is optimal and in a proportional form for the Additive Combinatorial Auctions problem (5.2.1). A mechanism from the same mechanism class admits a constant approximation ratio solution for the problem with Submodular valuations when the input of the mechanism is a supporting price vector of the optimal allocations in a proportional form (5.3.1). For a more general price vector input that we coin a-good price vector, we prove that Welfare guarantees are not maintained in a multiplicative neighborhood. We hint at the subject that price vectors for the Submodular class (or more general) need revenue guarantees in order to get positive results for proportional input. Another negative result that we prove is that in our mechanism class, proportional a-good price vector is required to be handed with explicit knowledge of parameter a. Finally, we prove that the a-good price vector's weaknesses cannot be overcome using perturbation. When it comes to predictions with error (instead of proportionality) we show that a commonly used type of auction gets an approximation that is linear to the prediction error for the Submodular problem, when the price vector supports the optimal allocation.

Chapter 3

Learning Augmented Algorithms

The raw computational advancements of the last decades have paved the way for the wide applications of machine learning algorithms and techniques, thus naturally creating a lot of interest in the respective research community. Despite the existence of a lot of theoretical work on learning theory and machine learning techniques in general, theoretical computer scientists had some trouble adjusting to the current trend. The reason for this is the usual nature of machine learning research, which is usually centered around designing a model that beats the state-of-the-art results on specific datasets, rather than theoretically proving the superiority of the learning system that is deployed. Simply put, we desire the use of models that work well in the real world, even though the best model might not be backed by mathematics.

Computer science, on the other hand, has been based on worst-case analysis through its inception. We of course desire algorithms to meet our standards in all cases, thus ensuring robustness. But in many problems, robustness might not be guaranteed and many times it is not even needed. Worst case analysis can be in some cases too pessimistic. The most celebrated example of this is the simplex method of solving linear programs.

Linear programs are a commonly used mathematical tool, that is used to model many different theoretical problems as optimization models. Linear programming is important because it enables a unifying mathematical approach to many different tasks. Simplex is the method that is most commonly used to tackle linear problems. It was developed in the 1940s and has been thoroughly applied in many real-life instances of linear programs, long before the creation of the first computer system. The simplex method is a simple greedy iterative algorithm. In almost all cases the simplex method scales gracefully with the increase of the variables of the linear problem. However, Klee and Minty in [31] designed linear programs that forced the simplex method into exponentially many iterations, thus proving the exponential nature of the method. In summary, we have an algorithm that works well in practice even though its theoretical guarantees suggest otherwise. This and similar situations enabled the creation of the field of Beyond Worst case analysis.

The answer for the contrast regarding the simplex method arises from "smoothed analysis" which was introduced in [46] for exactly this algorithm's running anomaly. Smoothed analysis studied the behavior of linear programs that had been exposed to some random perturbation, either in the objective or in the constraint variables. This was motivated by the fact that linear program instances that had exponential running time, degraded to polynomial running time if small perturbation was applied, and the perturbed instance had nearly identical results. Smoothed analysis falls in the midst of worst-case analysis and average case analysis. The resulting "smoothed" performance of the simplex method much better expresses the real-world running time of the algorithm.

A new and exciting chapter in the Beyond worst-case analysis framework was born in 2018 by the work of Thodoris Lykouris and Sergei Vassilvitskii in [35] and has been since named learning augmented algorithms or algorithms with predictions. The new-found idea they introduced become the theoretical viewpoint of all learning augmented algorithms. It can be summarized as follows: Can we design algorithms that use machine-learned advice as a black box, parameterize their complexity with the error of the input prediction, and achieve theoretical guarantees even in cases where the prediction admits unbounded error? The key idea in their approach was an adaptation of the state-of-the-art algorithm that utilized the prediction on a decision that would have otherwise been random. Even though their work was based around the problem of page caching, they introduced the notions of robustness (how well the algorithm performs on bad predictions) and consistency (how well the algorithm performs on perfect predictions) that have been thoroughly used in most related work ever since. We now present formal and general definitions for robustness and consistency:

Definition 3.0.1 (consistency). *An algorithm with a prediction black box $h(\cdot)$ that observes error η is b-consistent for some error function $a(\eta)$ if it admits an approximation ratio of $O(b)$, where $b = a(0)$*

Definition 3.0.2 (robustness). *An algorithm with a prediction black box $h(\cdot)$ that observes error η is a-robust for some error function $a(\eta)$ if it admits an approximation ratio of $O\left(\max_{\eta} a(\eta)\right)$.*

Robustness and consistency are critical notions in learning augmented theory. In most cases, we are interested in the intersection of the two, namely the curve observed on the approximation ratio when the error of the prediction η degrades from 0 to some upper bound or infinity.

One of the most important parts of designing an algorithm with predictions is selecting what type of prediction you want to use in your model. As we will be shortly presenting, different types of predictions have been applied to different problems with great success. Strangely enough, on some problems, different types of predictions have arisen, with results that cannot be easily compared. In the next subsection, we will try to categorize and present the types of predictions that have been successfully applied.

3.1 Notions of Predictions

In the following bibliographical report, we will be presenting the different notions of predictions that have been successfully used in recent works. Notice that the greatest portion of the problems that have seen successful applications of the learning augmented framework are online problems. The (non-quantifiable) amount of information the predictions offer will be the basis of our categorization and we will be presenting the categories in incremental order (in regards to the information they offer to the algorithm). Different works use the same type of predictions when working on the same problem, with few exceptions. Our interest in this section lies predominantly in observing 3 things in learning augmented algorithms, i) the robustness and the consistency, ii) the trade-off between them (if and when it is possible to be quantified) and iii) the definition of the error of the prediction.

3.1.1 The Optimal Information as a Prediction

In this subsection, we will be observing results that use some kind of prediction that doesn't exactly match the parameters of the problem at hand (neither on the constraints, nor on the output), but instead captures the information required to design the optimal algorithm for the problem. In this sense, whenever the prediction is perfect, the resulting algorithm should be optimal. Such is the prediction used in [35] for the problem of paging - online caching. We will now present results, mostly grouping them based on the studied problem.

For the vanilla version of the **Paging** problem the prediction, that [35] used models the next arrival of each element. Evicting the page whose next request is farthest is also known as Belady's rule and is the optimal strategy for this problem. The error for this prediction is defined to be the L_1 norm meaning $\eta = \sum_i (y_i - h(x_i))$, where y_i is the ground truth and $h(x_i)$ is the prediction. We have already discussed the ideas of this work, so we will now briefly present the extensions that have since arisen. In [43] the author improves on the approximation ratio and namely the dependency on $\frac{\eta}{OPT}$ using similar algorithmic ideas and also presents a lower bound on any caching algorithm with this type of predictions. Later on in [49] attention is turned to a technique that is not robust but with the correct framework, the non-robust algorithm can be coupled with some standard algorithm (e.g. the marker algorithm) and achieve a better competitive ratio when the error is small. The author proves consistency-robustness trade-offs for both deterministic and randomized algorithms as well as a lower bound for learning augmented algorithms with this type of predictions.

The **Weighted Paging** problem has been studied under the learning augmented framework in [29], where the authors inspected the previous works and concluded negative results (for both deterministic and randomized algorithms) for the algorithms used in the unweighted setting and they proved the existence of a deterministic 2-competitive algorithm with enhanced information (perfect prediction).

In [5] the **Secretary** problem is studied and the authors prove for their deterministic algorithm a robustness-consistency trade-off guarantee using two hyperparameters λ,c (λ captures the confidence on the prediction while c bound how much the algorithm loses on worst cases). The prediction estimates the optimal information for the problem which is the maximum value over all arriving secretaries, while the error is again the L_1 norm. In the same work, they also study the problem of **Bipartite Matching with Vertex Arrivals**, where they propose a deterministic algorithm that takes as input a prediction of the edge-weights for nodes of the static (non-online) side of the problem (notice again that this information is optimal). They define the error as the L_∞ over all errors and then prove again a robustness-consistency trade-off using three hyperparameters λ,c,d. With small prediction error, their algorithm converges to a competitive ratio of ½ which is proven to be the best a deterministic algorithm can achieve. Finally, in the same work, the authors augment the **Graphic Matroid Secretary** problem with a prediction vector that captures an estimate of the maximum edge-weight that every node i is adjacent to. The error used again is the L_∞ over all errors. They prove for their deterministic algorithm a robustness-consistency trade-off using three hyperparameters λ,c,d.

This work [38] focuses on **Online Job Scheduling** for m machines with a min-max objective (minimize the makespan). The proposed learning augmented algorithm assigns predicted weights that will be used for fractional assignments (it is already proven in [2] that optimal weights result in a near-optimal solution). In the execution of the algorithm, these weights are updated in order to converge into 2-approximate optimal weights. The error is defined as the L_∞ of the ratio of the predicted weight over the actual weight. The authors prove a trade-off function of the error that captures the consistency and robustness of their algorithm.

For **Non-clairvoyant Job Scheduling** with one machine, work [42] designs an algorithm that uses the estimated processing times of each job as predictions. The error is defined as the L_1 norm. The proposed algorithm is composed of the parallel execution of two different algorithms. One is the Round-Robin that yields the best possible approximation ratio and doesn't make use of the prediction and the other is the optimal algorithm (when the processing times of each job are known) that uses the predictions instead. Again the trade-off between robustness and consistency is parameterized by a hyperparameter λ.

The **Ski Rental** problem is studied in [42] as well, where the input prediction used is an estimate of the (unknown) number of days which is obviously the optimal information for the problem. The error is defined using the L_1 norm. A hyperparameter λ is used to express confidence in the prediction. Their results include a deterministic and a randomized scheme with an analytical presentation of the robustness and consistency trade-off.

3.1.2 Prediction in the Form of Advise

Predictions in the form of advice are yet to be applied to many problems. However, the following work introduces a lot of interesting techniques and has been influential in the field. In [9] is presented an enhanced version of the already established Primal-Dual technique (for online problems) that utilizes predictions in the form of advice. The authors coin this technique as the Primal-Dual

Learning Augmented technique (PDLA). They apply this framework to many covering problems, namely the Weighted Set Cover problem, the **Ski Rental** problem, the **Bahncard** problem, and the **Dynamic TCP Acknowledgement** problem. For the Ski Rental, they retrieve the same guarantees as in [42] and they prove that the consistency-robustness trade-off is optimal. The Bahncard problem is a generalization of the Ski Rental problem, for which the PDLA framework can also be applied. It is important to note that the PDLA technique uses a hyperparameter λ that expresses the confidence in the prediction.

3.1.3 Offline Prediction of the Online Input

This work [8] introduces a powerful framework that can be applied to **Online Graph Problems** coupled with a few interesting ideas. Their framework combines online and offline algorithms with the correct type of predictions and can be applied in a black box fashion as long as certain technical guarantees are met. The authors present a more generalized notion of prediction error that is well suited for graph problems. They use their framework on several classical graph problems (Steiner tree, facility location, etc.) and prove tight bounds for the resulting competitive ratios. The generality and black-box behavior of their framework inspires research on several relative problems and thus deserves a small summary. We will first inspect the prerequisite properties for the framework:

- **Property A**: The online algorithm ON to be used needs to be "subset-competitive". This means that if the online algorithm admits a competitive ratio of f(|R|) (R being the number of requests) then for every request subset $R' \subseteq R$ we have:

  $$ON(R') \leq O(f(|R'|)) \cdot OPT$$

  where $ON(R')$ denotes the total cost incurred by the algorithm in serving the requests of R'.

- **Property B**: The offline algorithm should be a (constant) γ-approximation algorithm for the "prize-collecting" offline problem. In the offline prize-collecting problem, each request in R has a penalty given by $\pi : R \to \mathbb{R}^+$. A solution is a subset of elements $S \subseteq \mathbb{S}$ that minimizes the objective $c(S) + \sum_{r \in R'} \pi(r)$, where $R' \subseteq R$ is the set of requests not satisfied by S.

Before we present the framework, we will shortly discuss the high-level ideas of the procedure. First of all, it is desired that the framework converges to the offline algorithm part of the procedure when the prediction is somewhat accurate or converges to the classic online algorithm that ignores the predictions when the predictions are way off. In the actual framework, that materializes as alternating executions of the offline and the online algorithm. We will now sketch the framework into a few short steps:

1. While maintaining the cost of the solution B so far:
2. (a) Receive the next real request r and serve it using the online algorithm ON.
   (b) When the total cost of the solution doubles, run the offline algorithm on the predictions of the requests R_{bar}, and select the offline solution that satisfies as many requests as possible, while also maintaining budget $O(B)$.

The characterization of the error for this framework is dual, using parameters $\Delta, \mathbb{D}$. The authors coin the error parameters of the prediction "metric error with outliers". Δ captures the number of predicted requests that are outliers, meaning they are predictions that are way off and should not be considered in the execution of the framework. $\mathbb{D}$ is the distance between some predicted request and any actual request. Δ and $\mathbb{D}$ are hyperparameters that produce a Pareto Frontier and can be selected before the execution of the framework. The framework with offline and online algorithms that satisfy Properties A, and B results in an algorithm ALG with the following guarantee:

$$ALG \leq O(\log \Delta) \cdot OPT + O(\mathbb{D})$$

The authors applied their framework to the learning augmented versions of the following problems: the **Online Steiner Tree**, the **Online Steiner Forest**, the **Online Facility Location** and the **Online Capacitated Facility Location**. In conclusion, In order to apply this framework to other learning augmented graph problems, one needs only to design an online algorithm satisfying property A and an offline algorithm satisfying property B.

3.1.4 Predictions in a Strategical Setting

Facility Location with Predictions

The authors of [28] augment the problem of **Online Facility Location** with predictions in the form of a predicted location for the optimal facility for every agent (when they arrive). Their proposed mechanism upon the arrival of each demand point, runs the steps of Meyerson's algorithm [36] and then runs a new procedure to open additional facilities that are "near" the prediction. In their analysis, the error is defined based on the L_∞ norm. The authors prove a consistency-robustness trade-off function of the error, as well as a lower bound for any algorithm even when the error is constant.

An independent work on the problem of **Online Facility Location** [25] works with the same type of predictions but proposes a different mechanism for the problem. The main idea of their mechanism is the rule of opening a facility at a predicted location with probability proportional to the distance of the predicted location to the nearest open facility. The authors prove their mechanism to be 2 consistent, while also providing an explicit consistency-robustness trade-off function of the error (the error is defined in regards to both L_1 and L_∞). Finally, they present a matching lower bound for mechanisms for the Online Facility Location with the same type of predictions.

The **Online Facility Location** problem has also been studied under this framework in [4]. Compared to the two works we previously stated, the authors design a mechanism for the problem using a different predictions setting. The prediction comes in the form of a family of sets, where each set is a potential solution to the problem. They too provide a robustness-consistency trade-off function.

Rounding up the problems in this category, there has been some work on the offline **Facility Location** problem. To be more specific, [1] studies the classical problem of Facility Location for both Egalitarian and Utilitarian social cost objectives. The prediction used in their mechanisms is an estimate of the optimal solution for the problem, i.e. the optimal facility location for the task at hand. For the Egalitarian objective on the line, the authors present a deterministic mechanism that has 1-consistency and 2-robustness (the 2-robustness matches the optimal approximation ratio possible for the problem). For the same objective on $\mathbb{R}^2$, their proposed deterministic mechanism achieves 1-consistency and $(1+\sqrt{2})$-robustness which is not optimal (the optimal mechanism without predictions is a 2-approximation). However, the authors of this work prove, that every mechanism with this type of prediction with consistency better than the 2 (i.e. $2-\epsilon$) will have no better robustness than $1+\sqrt{2}$. For the Utilitarian objective on $\mathbb{R}^2$, their proposed mechanism is equipped with a parameter of confidence c. The resulting robustness-consistency trade-off function (of c) is optimal, in the sense that it captures the Pareto frontier of the problem.

Single Item Revenue Maximization with Predictions

In this subsection, we will focus on recent work on auctions with predictions, which strongly relate to our work's objective. For this reason, we will dive a little bit deeper into the analysis and presentation of this work.

Study [50] initiates a systematic approach for mechanism design with predictions. The authors discuss ideas and techniques that enable the use of predictions on problems with strategic behavior, specifically for Single Item Revenue Maximization, for Frugal Path Auction, for Truthful Job Scheduling, and for Two-Facility Game on the Line. They strongly suggest that augmenting mechanism design with predictions poses more restrictions than the design of learning augmented online algorithms. The reason for this is that learning augmented online algorithms usually switches between the offline algorithms with predictions and the online algorithms without predictions, according to the observed prediction error so far. In a strategic environment, a similar framework could incentivize the players to participate in a way that encourages the execution of the online or the offline part of the framework, according to their own personal goals. The authors suggest that this unwanted behavior is closely related to the necessity of the monotone property for the allocation algorithm that is required in all mechanism design schemes and can be overcome if the prediction is incorporated as a whole mapping in order to satisfy the monotone property.

We will now thoroughly present their contributions to the **Single Item Revenue Maximization** problem, which is closely related to our work. The problem considers one non-divisible item to be sold to one out of n bidders. Each bidder i values the item $v_i \in [1, h]$ and will bid for the item with bid $b_i \in [1, h]$. Each bidder has a quasi-linear utility function $u_i = x_i \cdot v_i - p_i$, where p_i is the payment and x_i is 1 if bidder i gets the item and otherwise 0. The objective in this auction is for the auctioneer to maximize the selling price p_i and the benchmark is the highest private value, meaning $OPT = \max_{i \in N} v_i$. For this problem, the authors equip the auctioneer with a prediction vector $\hat{V} = \{\hat{v}_i\}_{i \in N}$ for the private values of all bidders. The prediction error is defined as $\eta = \max_{i \in N} \left\{ \frac{v_i}{\hat{v}_i}, \frac{\hat{v}_i}{v_i} \right\}$.

It is already proven for the traditional setting of this problem that no deterministic truthful mechanism has an approximation ratio better than h [26]. The authors propose a simple mechanism for the problem that guarantees 1 consistency and h robustness (which matches the traditional bound). That mechanism simply orders bidders decreasingly according to their predicted values. The mechanisms accept the first bidder's bid b_1 if $b_1 \geq \hat{v}_1$ and otherwise accept the highest bid and sets payment for the corresponding threshold bid. If $\eta = 1$ then the mechanism correctly allocates the item to bidder 1 who pays exactly her valuation $b_1 = v_1 = \hat{v}_1 = OPT$ (the mechanism allocation rule is monotone and thus bidders bid truthfully). If $\eta = 1 + \epsilon$ we can select $b_1 = v_1 < \hat{v}_1$ and select all other bidders to have $v_i = b_i = 1$, then the resulting allocation will place the item to some bidder $i \neq 1$ with payment 1, which results to an at most h approximation ratio for the mechanism. Even though the guarantees of this mechanism are good, the approximation ratio degrades in an undesirable manner, even with minimum error. To capture this, the authors of this work proposed the notion of error tolerance, which measures how much prediction error the mechanism tolerates while maintaining a good approximation ratio. If we enhance the aforementioned mechanism with a parameter γ and change the acceptance rule for bidder 1 to $b_1 \geq \frac{\hat{v}_1}{\gamma}$ then for small error $\eta < \gamma$ the mechanism approximation ratio degrades gracefully (with a rate of $\gamma\eta$).

Their proposed mechanism incorporates this idea and their final mechanism is the following:

The allocation rule of this auction is monotone and thus the Mechanism is truthful. It can also be argued that this mechanism has an approximation ratio of at most h. This is trivial as long as it is proved that in all cases the threshold price $\theta(j)$ is at least 1. Since $\theta(i) = b_j$, for some $j \neq i$, and for all bidders in S, $b_i \geq br(i)$, it holds that $\theta(i) \geq br(i)$. However $br(i) \geq 1$ and also $OPT \leq h$. Thus $\theta(i) \geq 1 \geq \frac{OPT}{h}$ and so the at most h approximation claim holds.

We can now inspect the authors' main contribution to the problem. They proved that Single-Item Auction with Predictions mechanism admits an approximation ratio of at most $\min \{f(\eta), h\}$ where:

$$f(\eta) = \begin{cases} \gamma\eta & \text{if } \eta \leq \gamma \\ max \left\{ \gamma^2\eta^2, \frac{h\eta}{\gamma^2} \right\} & \text{if } \eta > \gamma \end{cases}$$

We will now briefly discuss the case analysis used to prove this theorem. We have already

Mechanism 1: Single-Item Auction with Predictions

Input: The prediction vector $\hat{V}$, the bids, and a parameter γ.

Output: The winning bidder and the payment.

Re-index bidders in decreasing order of their predicted value $\hat{v}_i$. Assign a bar $br(i) = 1$ to each bidder $i \in N$.

if $\forall i \in N$, $\hat{v}_i \geq \dfrac{\hat{v}_1}{\gamma^2}$ **then**

$br(1) \leftarrow \max\left\{\dfrac{\hat{v}_1}{\gamma}, 1\right\}$.

else

$br(i) \leftarrow \max\left\{\dfrac{\hat{v}_1}{\gamma}, 1\right\}$.

$\forall i \in N$ with $\hat{v}_i \geq \dfrac{\hat{v}_1}{\gamma^2}$, set $br(i) \leftarrow \max\left\{\dfrac{\hat{v}_1}{\gamma^2}, 1\right\}$.

end

Define the set $S := \{i \in N | b_i \geq br(i)\}$.

Return as the winner, the bidder $j \in S$ with the highest bid, and as payment the threshold bid $\theta(j)$.

discussed the h approximation in the min$\{\cdot, \cdot\}$ term. The analysis is decomposed into two cases corresponding to functions f piecewise components. So:

- If $\eta \leq \gamma$ it can be proven that bidder 1 is always placed in set S. This guarantees however that the winner of the auction gets the item at a threshold price that is at least $br(1)$. If we select bidder's k valuation as the optimal payment we get that:

$$PAY \geq br(1) \geq \frac{\hat{v}_1}{\gamma} \geq \frac{\hat{v}_k}{\gamma} \geq \frac{v_k}{\gamma\eta} = \frac{OPT}{\gamma\eta}$$

- if $\eta > \gamma$ the property of $b_1 \geq br(1)$ doesn't necessarily hold. If it did then the previous analysis would hold for this case as well. As such, the attention is turned to scenarios where $b_1 < br(1)$. In these scenarios, in line with the mechanism, there exist two distinct cases:

  1. $\forall i \in N$, $\hat{v}_i \geq \dfrac{\hat{v}_1}{\gamma^2}$. If that is the case then it can be proven that for all pairs $x, y \in N$ that $\dfrac{v_x}{v_y} \geq \dfrac{1}{\eta^2}\dfrac{\hat{v}_x}{\hat{v}_y} \geq \dfrac{1}{\gamma^2\eta^2}$ which implies that $v_x \geq \dfrac{OPT}{\gamma^2\eta^2}$ for every $x \in N$. This means that:

  $$PAY \geq \frac{OPT}{\gamma^2\eta^2}$$

  2. $\exists i \in N$, $\hat{v}_i < \dfrac{\hat{v}_1}{\gamma^2}$. In this case, we need to define the groups $A := \left\{i > 1 | \hat{v}_i \geq \dfrac{\hat{v}_1}{\gamma^2}\right\}$ and $B := \left\{i > 1 | \hat{v}_i < \dfrac{\hat{v}_1}{\gamma^2}\right\}$. It can be proven that in the case of $A \cap S \neq \emptyset$ the payment is $PAY \geq \frac{OPT}{\gamma^2\eta}$, whereas if $A \cap S = \emptyset$ then the optimal solution is bounded by $OPT \leq \frac{h\eta}{\gamma^2}$.

  Combining the analysis for this case and given that there is no way to quantify whenever one of the cases holds we get for $\eta > \gamma$ an approximation ratio of $max\left\{\gamma^2\eta^2, \dfrac{h\eta}{\gamma^2}\right\}$

The authors finish off their preoccupation with this problem with an impossibility result, that states that any deterministic truthful mechanism with a consistency ratio γ has an approximation ratio of at least $\frac{h}{\eta}$ when $\eta > \gamma$. This highlights their results greatly, in the sense that for any $\gamma < h^{\frac{1}{5}}$, $f(\eta)$ is close to the ratio of $\frac{h}{\eta}$. Regarding the optimality of the mechanism when $\eta \leq \gamma$, they prove that if the error is uniformly distributed between $[1, \gamma]$ then the approximation ratio of any deterministic truthful mechanism with consistency ratio γ is at least $\frac{\gamma(\gamma+1)}{2}$, which is exactly the expected ratio of their proposed mechanism.

In this work, the authors also touch upon the problems of **Frugal Path Auction**, **Truthful Job Scheduling**, and **Two-Facility Game on a Line**. On the Frugal Path Auction and the Truthful Job Scheduling for makespan minimization they devise mechanisms that take as input prediction a vector of the predicted costs of each edge and a vector of the predicted processing times respectively, they similarly define the error to the previous problem and provide a well-defined approximation ratio as a function of γ, η. Finally, for the Two-Facility Game on a Line, the prediction used is the estimated location of each player, and the authors prove consistency and robustness guarantees without specifying how different magnitudes of error in the prediction influence the approximation ratio.

Chapter 4

Mechanisms for Combinatorial Auctions

This chapter will focus on previous works on the problem of Welfare maximization in Combinatorial Auctions. For this purpose, we will first formally define the problem and explain some key game theoretic and auction-specific notions. Afterward, we will briefly present the ideas and mechanisms used in the latest works for this problem. Large sections of this chapter have been inspired and are following the book "Algorithmic Game Theory" by Noam Nisan and Tim Roughgarden [3].

4.1 Problem Description and Preliminaries

In auctions, the usual format is that the auctioneer desires the use of a systematic rule that allocates the auctioned items to the bidders. The choice of the mechanism to be used depends on both the objective of the auctioneer and the desired qualities of the procedure. In some situations the auctioneer is interested in maximizing her own profit, on others she wants to maximize the minimum value obtained by the auction for any bidder and in others, she wants to make the entirety of the bidders (as a whole) as happy as possible and thus maximize the Social Welfare. Naturally, when analyzing the problem it is of great importance to foremost decide on the objective. In this thesis, we will solely be working on the Social Welfare maximization aspect of Combinatorial Auctions.

Formally the problem can be described as the task of allocating a set M of m indivisible items to a set N of n bidders. Each bidder i has a valuation function $v_i(\cdot)$ that maps any subset of items $S \subseteq 2^M$ to a real number $v_i(S)$ and describes exactly how much value bidder i derives from getting the item set S. By denoting the resulting allocation of some mechanism as $A = (A_1, A_2, ..., A_n)$ we can define the Social Welfare of the allocation as $\sum\limits_{i \in N} v_i(A_i)$.

In order to handle the strategic behaviours of the bidders, mechanisms for auctions enforce some kind of payment scheme, with the most usual form being a price vector $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$ for individual items. We will be using later on $|\mathbf{p}| = \sum_{j \in M} p_j$. With the use of the price vector $\mathbf{p}$ we can define the utility function for every bidder i as the function that maps any subset of items $S \subseteq 2^M$ to a real number $u_i(S) = v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j$. Abusing the notation a little bit we will be using from now on $\mathbf{p}(S) = \sum_{j \in S} p_j$ and thus $u_i(S) = v_i(S) - \mathbf{p}(S)$. Finally, given a specific allocation A with payments $\mathbf{p}$ we can define the revenue of the auction as $Rev(A) = \sum\limits_{i \in N} \sum\limits_{j \in A_i} p_j$. Using the definitions of the revenue of an auction and the utility of the bidders we can rewrite Social Welfare as $Welfare = \sum\limits_{i \in N} v_i(A_i) = \sum\limits_{i \in N} u_i(A_i) - \sum\limits_{j \in A_i} p_j = \sum\limits_{i \in N} (u_i(A_i)) + Rev(A)$.

Game theory problems extend algorithmic ones in the sense that they allow strategic intentions to bidders, who can misreport their personal information in an attempt to maliciously lead the mechanism to an outcome that better facilitates them. The ability to misreport makes it difficult to analyze and predict the outcome of the mechanism regarding the final objective and for this reason, we design mechanisms that discourage bidders from diverging from their true valuations.

Definition 4.1.1 (deterministic truthfulness). *A mechanism is truthful iff for every bidder i, revealing their true valuation $v_i(\cdot)$ is a dominant strategy (maximizes their utility $u_i(\cdot)$).*

Due to the nature of Combinatorial Auctions, it is in some cases required to include some randomness in the mechanism in order to simultaneously handle conflicting instances. For this reason, we need to redefine the notion of truthfulness in randomized mechanisms. This yields the following two definitions:

Definition 4.1.2 (truthfulness in expectation). *A randomized mechanism is truthful in expectation iff for every bidder i, revealing their true valuation results in maximizing their expected profit.*

Definition 4.1.3 (universal truthfulness). *A randomized mechanism is universally truthful iff it consists of a probability distribution over deterministic truthful mechanisms.*

Universal truthfulness is a strictly greater guarantee than truthfulness in expectation (proven in [19]) and is the benchmark for most randomized mechanisms. Truthfulness in expectation can be used in environments where bidders are risk neutral and do not have access to the mechanism's randomness realization when they are revealing information.

In all auctions, mechanisms are designed with three important and desirable properties in mind:

1. Incentive guarantees for bidders.
2. Performance guarantees.
3. Computational efficiency.

The first property is equivalent to designing truthful mechanisms. The second property translates to the need for theoretical guarantees for the desired objective, given that bidders acted in a truthful manner (in our case guarantees regarding the maximization of the Social Welfare). The third property demands that we can implement the mechanisms steps in polynomial time regarding n, m.

In most auction formats and environments it is impossible to tightly ensure all three of these properties. In Game Theory property 1 is always needed, and that drives us towards a trade-off between the Performance guarantees and the Computational efficiency of the resulting mechanism.

It is important to mention here the single item auction problem and the optimal mechanism that does actually achieve all three properties simultaneously. Proposed by Vickrey in [47], the so-called "second-price" auction requests all bidders to reveal their valuations to the mechanism, assigns the item to the highest valuation bidder, and charges him a price equal to the valuation of the second highest bidder. This mechanism is of course computationally efficient running in $O(n)$ time and maximizes the Social Welfare since the bidder who wants the item the most gets it. The truthful nature of the mechanism might not be as obvious, but can be easily proven with case analysis on the outcomes of misreporting when overbidding or underbidding.

Things, however, get a lot more complicated when one tries to auction off many items. Through economic theory has arisen the answer to the most general form of Combinatorial Auctions, a truthful mechanism that guarantees the optimal solution to the problem (and that in some cases is hinted [33] to be the only mechanism that can achieve this task). This mechanism is the celebrated VCG [13, 27, 47]. The problem with VCG is that in many cases it needs to optimize over an NP-hard optimization task and is thus intractable. The Vickrey auction is the realization of the VCG mechanism for a single item.

Closely related to VCG are the maximal-in-range (MIR) allocation rules, that commit to a subset of feasible allocations before receiving the players bids. It has been proven that MIR rules can be turned into deterministic truthful mechanisms using VCG-like payments. MIR rules can be of use whenever we can select a range that is large enough such that the solution for that range results in a good approximation, while also being small enough in order to be able to optimize on that range on polynomial time. The polynomial running time does not hold even for modest approximation requirements. MIR lower bounds for many Combinatorial Auction settings can be found in [18, 11, 41, 45]. To overcome the limitations of MIR allocation rules, maximal-in-distributional-range allocation rules arose (MDIR). The MDIR allocation rules probabilistically select the range over a distribution, making them strictly more powerful than MIR rules.

4.1.1 Valuation Functions

The existence of individual and private valuation functions for bidders is an aspect that deeply complicates mechanism design for Combinatorial Auctions. The first important question that needs to be addressed when handling valuation functions is how exactly we access them. Since these functions map the powerset of M to real numbers, the information that they pack can be exponential in size (concerning the number of items m). In Combinatorial Auctions there exist exactly two types of queries that grant us access to the valuation functions.

Definition 4.1.4 (demand queries). *With demand queries bidder i is presented with a price vector $\boldsymbol{p}$ and is requested to output his utility maximizing subset S' subject to these item prices:*

$$S' = \arg\max_{S \subseteq 2^M} \{u_i(S)\} = \arg\max_{S \subseteq 2^M} \{v_i(S) - \boldsymbol{p}(S)\}$$

Definition 4.1.5 (value queries). *With value queries bidder i is presented with a bundle of items S' and is requested to output his valuation of the bundle, $v_i(S')$.*

Both these types of queries have been successfully applied to mechanisms for Combinatorial Auctions. From the designer's perspective, demand queries are easier to handle and more expressive but they do also require some carefully selected price vector **p**.

For the bidders, it is usually more convenient to handle value queries, since they do not demand any comparisons. From a theoretical viewpoint, it is usually computationally challenging for the bidders to answer demand queries (for bidders with complicated valuation functions it can even be computationally intractable). In a lot of realistic situations, however, bidders (humans) do not have well-defined valuation functions but rather have a general ability to evaluate bundles and answer either demand or value queries.

Value queries are strictly less powerful than demand queries. Value queries can be simulated using mt demand queries, where t is the number of bits of precision in the representation of a bundle's value. Simulating demand queries may in some cases require an exponential number of value queries. Proofs for these statements can be found in [3]. A characteristic result that emphasizes the gap between access to demand queries and access to value queries is a result in [45] stating that any universally truthful mechanism for Combinatorial Auctions with Submodular bidders (definition later on) with an approximation ratio of $m^{\frac{1}{2}-\epsilon}$ using only value queries, requires the use of exponentially many value queries· however there are a lot of universally truthful mechanisms using demand queries that achieve sub-logarithmic approximation ratios [16, 7, 6].

All valuations functions assume two common and realistic properties:

1. **Normalization**: $v_i(\emptyset) = 0, \forall i \in N$.
2. **Monotonicity**: $v_i(S) \leq v_i(T), \forall S \subseteq T \subseteq M$ and $\forall i \in N$.

These two properties are sometimes referenced as "free disposal". Notice that normalization also implies "no externalities", meaning that bidder i is only interested in her own allocated bundle A_i and doesn't concern herself with what other bidders i' were allocated. Closely related to these two properties is also the assumption that bidders have "quasi-linear" utility (as described above) and will never bid on bundles S for which they observe negative utility, $u_i(S) < 0$.

Valuation functions are set functions and thus can be categorized into set function classes. The most studied classes in auction design are:

- **Additive**: $v(S) + v(T) = v(S \cup T) + v(S \cap T)\ \forall S, T \subseteq M$.
- **Submodular**: $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T) + v(S \cap T)\ \forall S, T \subseteq M$.
- **Subadditive**: $v(S) + v(T) = v(S \cup T)\ \forall S, T \subseteq M$.
- **Unit demand**: $v(S) = \max_{j \in S} v(\{j\})\ \forall S \subseteq M$.
- **XOS**: $v_i(S) = \max_{1 \leq k \leq l} a_{(i,k)}(S)\ \forall S \subseteq M$, with $a_{(i,k)}$ being l Additive functions.
- **Gross-Substitutes**: Informally, when the price of some item j increases, the demand for other items j' does not decrease.

Restricting the problem to some specific valuation functions class allows for more careful analysis of the problem and thus the design of mechanisms that are "optimally" adapted. As such, for every valuation class there exist some unique state-of-the-art mechanisms that yield different approximation ratios. We will now discuss in detail the valuation classes and the approximation ratios that they admit.

A valuation function $v_i(\cdot)$ in the Additive class can be described using exactly m parameters $(v_i(\{1\}), v_i(\{2\}), ..., v_i(\{m\}))$. Essentially each item is valued independently from others and the valuation of a set of items S can be written as $v_i(S) = \sum_{j \in M} v_i(\{j\})$. There exists a truthful, optimal, and computationally efficient mechanism for Combinatorial Auctions with bidders equipped with Additive valuation functions. This mechanism is exactly m Vickrey auctions, one for each item in M.

A valuation $v_i(\cdot)$ in the Unit demand class can be described with exactly m parameters as well, as it can be easily observed by its mathematical definition. The underlying algorithmic problem when bidders are unit demand is the bipartite matching problem. It can be again proven that we can design a mechanism for auctions with unit-demand bidders that is truthful, optimal, and computationally efficient. In reality, in this valuation class, we can implement the VCG auction in polynomial time with a realistic and practical mechanism.

The Gross-Substitutes valuation class begins the unraveling of open research questions. Combinatorial Auctions with such bidders can still be implemented with the 3 desired properties, but the resulting mechanism uses the Ellipsoid method and as a result, the computational efficiency is guaranteed but the resulting mechanism is impractical.

The problem of Combinatorial Auctions with Submodular bidders is the first one where we do not have an optimal mechanism. As such we are interested in designing truthful and polynomially implementable mechanisms with good approximation ratios. while Furthermore there does not exist (yet) a constant factor approximation mechanism for the problem. The Submodular functions are the discrete version of concave functions. They have many different and equivalent mathematical definitions. The one that captures the relations to concave functions and the "diminishing returns" property is the following:

$$\forall S, T \subseteq M \text{ with } S \subseteq T \text{ and } \forall x \in (M \setminus s) \text{ we have } v(S \cup \{x\}) - v(S) \geq v(T \cup \{x\}) - v(T)$$

Usually, when we are interested in problems with Submodular bidders, we tackle the same problem for XOS bidders. Although the two classes are not the same (Submodular $\subset$ XOS), the XOS class holds some properties that can be of great use in the analysis and design. This class is sometimes referred to as "Fractionally subadditive" and can be mathematically defined in a different and more complex way (in regards to a linear program), that is however not of much use in Combinatorial Auctions mechanism design. The state of the are result for this valuation function class is an $O\left((\log \log m)^2\right)$ approximation result in [6]. Previous important works include an $O\left(\left(\log\log m\right)^3\right)$ by partially the same research team in [7], an $O\left(\sqrt{\log m}\right)$ in [16] and an $O\left(\log m\right)$ in [32].

Finally, there exist a few approximate mechanisms for Combinatorial auctions with Subadditive bidders. The latest and most important one is the [6] , which we referenced for Submodular auctions as well, that admits an $O\left(\left(\log\log m\right)^3\right)$ approximation ratio for Subadditive bidders. The work that paved the way for the latest results was [22], which provided the existence of some intriguing price vectors. We will further investigate the results for Submodular and Subadditive bidders in the next section.

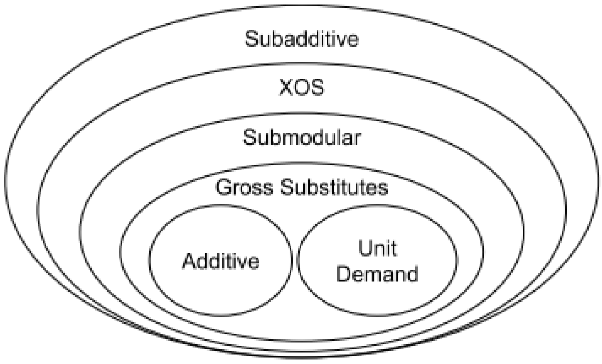


Figure 4.1: Set function classes

In concluding the presentation of the valuation function classes we will now clearly discuss the relations between the classes. The Additive class and Unit demand class stand as the smaller classes in the hierarchy. It is important to note that the two classes are disjoint (as long as $m > 1$ of course). Following on in the hierarchy is the Gross-Substitutes class which includes the Additive and the Unit demand class and is strictly greater. From then on all classes are strictly greater than their previous one. The class that includes all valuation functions is usually referred to as the General (unrestricted) valuations class. The complete ordering of the valuation function classes can be seen on figure 4.1 and is the following:

(Additive, Unit-Demand) $\subset$ Gross-Substitutes $\subset$ Submodular $\subset$ XOS $\subset$ Subadditive $\subset$ General

We have yet to discuss the gap between truthful mechanisms and non-truthful algorithms for the problem of Combinatorial Auctions. For Submodular valuations Vondrak's continuous greedy algorithm [48] achieves an $1-\frac{1}{e}$ approximation ratio using (polynomially many) value queries which is tight [30, 37]. With demand queries it is possible to get an approximation ratio of $1-\frac{1}{e}-10^{-6}$ [24] while the respective lower bound is $\frac{2e-1}{2e}$ due to [21]. For Subadditive valuations, there is a 2-approximation algorithm presented in [23].

4.1.2 Sampling and Randomization

In many scenarios in the field of Algorithmic Game Theory, we are handling problems that are subject to unbounded parameters that critically determine the instance of a problem. In such cases, Mechanisms oblivious to any information of the participating bidders seem too restrictive. On the other hand, as discussed before, we cannot carelessly query bidders, thus allowing them to exploit the procedure for their own personal gain. As a result, we need to introduce some tool, that allows us to carefully draw information from the bidders in a truthful manner. This usually leads either to prior distribution assumptions or to some sampling scheme. In real-world recurring applications, sampling is usually superseded by prior distribution knowledge (which can be estimated using historical data). In theory, sampling is a more general technique and as a result is usually preferred, due to its unassuming nature.

Sampling procedures are usually simple and powerful. If the correct criteria are met, sampling procedures can critically enhance our ability to analyze and ”attack” a problem. The work [26] is a celebrated example of a successful sampling scheme that captures the general underlying idea. The authors of this work, proposed the random sampling optimal price auction (RSOP), for the problem of auctioning digital goods. The basis of their sampling technique was the following:

1. Randomly split bidders into groups A, B.
2. Calculate the monopoly price for group A and post it on group B.
3. Calculate the monopoly price for group B and post it on group A.

This procedure is in fact truthful, the reason being that when calculating the monopoly price within a group, no bidder has an incentive to lie, given that the information that she provides will only be used on the price posted on the other group. This work inspired the field in a meaningful way and for this reason, the authors received the EC 2021 Test of Time Award for this work of theirs.

The way we split the bidders into groups is important to our analysis. Suppose that we want to split bidders into two groups of equal size. The most natural idea would be to randomly assign each bidder to any of the final groups, until one of them reaches the desired cardinality, and then place the remainder bidders on the other set. This way of sampling introduces statistical correlations between bidders which we cannot (easily) pair with concentration bounds (Chernoff-Hoeffding, etc.). The easiest fix is to place each bidder independently in any of the groups with uniform probability. This way, we end up with groups of almost equal size (equal in expectation), and we maintain important concentration properties. This will be the type of sampling we will be using for the remainder of this work.

Splitting bidders into different groups is essential to the analysis of all the latest works for Combinatorial Auctions. In all the latest works, the first split of the bidders into groups is done in order to extract useful information about the instance of the problem. Such information can be an estimate for the upper bound of all bidders valuations ($\psi = \max_i v_i (M)$), an estimate of the value of the optimal solution to the problem (usually denoted as OPT' or $\widetilde{OPT}$). In order to retain truthfulness, after obtaining information from the sampling group, we need to discard all its bidders from participating in the forthcoming auctions. Although it may seem counterintuitive to waste possibly half of all the bidders, in order to extract statistics, it is important to remember that firstly we are usually working with NP-hard problems that do not admit constant factor approximation mechanisms, and secondly that splitting the bidders into groups of almost equal size, results in almost equal distribution of the value of the Optimal Social Welfare between the two groups. So we are losing a constant factor of the optimal solution but do gain statistics that are essential to design mechanisms.

Of course, sampling can not always be as important and useful as we have been discussing so far. In fact, there exist specific families of instances, where sampling ideas are destined to fail. The reason why these instances exist is that on many occasions, optimal solutions are constructed with the participation of only a handful of bidders. On Combinatorial Auctions, in one of the most extreme instances, the optimal solution might be to assign all items to exactly one bidder. In this specific instance, sampling can in no way contribute in a meaningful way. On one hand, if the high-value bidder that single-handedly constitutes the optimal solution is placed on a sampling group, then through sampling we acquire perfect statistics but possibly have no bidders outside the sample group to use that information on. On the other hand, if the high-value bidder is not in the sampling group, then we might not get as accurate statistics and thus design a mechanism with lower ”expectations”, resulting in bidders with smaller valuations acquiring the items in the final allocation.

The issue we just discussed is core in Combinatorial auctions and extends far beyond sampling. To be more precise, when handling a Combinatorial Auction, we need to design a mechanism that somehow understands whether the current instance’s Optimal solution is ”based” on just a handful of bidders getting their preferred items, or many bidders getting a few items and contributing little to the final Social Welfare. An easy answer to this conflict is to introduce randomization to the mechanism. We "abuse" randomization, so that we can condition on specific favorable events and thus design deterministic sub-mechanisms that work well under specific circumstances.

In almost all works in the past decade for Combinatorial auctions, the first step is a fair coin flip, with one side of it resulting in the execution of a second price auction for the entire bundle of items M. A second price auction for the grand bundle M is favourable in cases where the optimal solution includes some bidder i' that consists a big portion of the final Social Welfare (suppose that bidder i' gets bundle $A_{i'}$ in the optimal solution with $v_{i'}\left(A_{i'}\right) > \frac{OPT}{a}$). We will be referring to such bidders as dominant bidders. Making this bidder i' pay for the entire bundle M instead of $A_{i'}$ results in a final allocation with Social Welfare $v_{i'}\left(M\right) > v_{i'}\left(A_{i'}\right) > \frac{OPT}{a}$ and thus an a approximation. Including the coin toss we conclude that on instances where such a bidder does in fact exist, we get $\mathbb{E}\left[\text{Welfare}\right] \geq \frac{OPT}{2a}$, by applying the definition of expectation operator and the non-negativity of Welfare.

The coin flip has now allowed us to direct our focus on mechanisms for instances that do not have any bidder that meets the aforementioned criteria (or more generally, no bidder i has $v_i\left(M\right) > \frac{OPT}{a}$ for some specifically selected a). The fact that no such bidder exists suggests that we can apply sampling techniques that acquire useful statistics with high probability. Conditioning on the knowledge of these statistics, we now aim for the design of a mechanism that admits at most an a approximation. Such a mechanism would lead towards an $\mathbb{E}\left[\text{Welfare}\right] \geq \frac{OPT}{2a}$ for instances with no dominant bidders, where randomness is again taken over the coin flip. We would then be able to state that the randomized mechanism would yield a $2a$ approximation over all instances of the problem.

Our discussion thus far has led us exactly to the most critical point of research surrounding Combinatorial Auctions, the design of a mechanism that works on instances with no dominant bidders. This will remain the critical point of research until the scientific community can properly answer the question "Does a constant factor approximation mechanism exist for Combinatorial auctions with no dominant bidders".

4.2 Price-Learning Mechanisms

We have already touched upon the implications of the absence of dominant bidders, and we have underlined how sampling can be of use in such cases. The absence of dominant bidders however implies an even stronger idea, that maybe we can shift our attention away from the bidders and focus solely on the items. The way we apply this idea to mechanisms is by designing mechanisms that "explore" potential prices for each item. Remember that we require this exploration to be part of a truthful procedure, and as such, after exploring on some group of bidders N_1, we can no longer use these prices for bidders in N_1. This approach needs to be carefully applied because the absence of dominant bidders does not guarantee demand for the items over many bidders. That means that we need to somehow converge on a good price vector while still maintaining a big enough group of bidders, that will in fact be interested in the items coupled with the final price vector and thus admit a good (welfare-wise) final allocation.

With all that in mind, the questions that need to be answered are the following three:

1. What constitutes a good price vector?
2. How do we use a good price vector?
3. How do we learn some good price vector?

Questions 1 and 2 are closely related and defining of the situation. A price vector can be labeled *good* if it is somehow related to the Optimal solution or maybe if it is easy to use. We need to specify what properties we are interested in for our price vectors and these need to be adapted to the valuation class in which we are working.

If we are working on the problem for Additive bidders then a good price vector would be an optimal price for each item j. A price for an item j is optimal if it is less or equal to the highest valuation of this item j among all bidders and also greater than the second highest valuation among all bidders.

For the problem with XOS bidders , as we have touched upon before, any valuation function $v_i(\cdot)$ can be interpreted as the maximum of l Additive valuation functions $a_{(i,k)}(\cdot)$, such that $v_i(S) = \max_{1 \leq k \leq l} a_{(i,k)}(S)$. Now when observing some optimal allocation $O = (O_1, ..., O_n)$ we can use the maximizing clause of bidder's i valuation function (the Additive valuation function out of the k that gets the maximum value on the bundle O_i) and declare the weights of the maximizing clause as the *supporting* prices q_j for items $j \in O_i$. Applying this on every bidder i we get a price vector $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_m)$. Closely related to this price vector $\mathbf{q}$ is any price vector $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_m)$ such that $p_j \leq q_j$ for all items $j \in M$. We say that any price vector $\mathbf{p}$ that satisfies this condition $supports$ the allocation O. These price vectors will be of great use in the following auction format

---

Mechanism 2: Fixed-Price Auction $(\mathbf{p}, M, N)$

Input: A price vector $\mathbf{p}$, a set of items M, an ordered set of bidders N
Output: An Allocation $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n)$
for $i \in N$ **do**
  Suppose S_i is bidder i response to the demand query with items M and price vector $\mathbf{p}$.
  $A_i \leftarrow S_i$
  $M \leftarrow M \setminus A_i$
end
return $\boldsymbol{A} = (A_1, ..., A_n)$

The Fixed-Price auction is a greedy procedure that is dominated by the ordering of the bidder and the input price vector. At first glance, these two seem to be the main weaknesses of this auction format. We can measure the resulting allocation's Social Welfare by comparing it to the Revenue of the sold items. So, If the prices of the items sold are not high enough, we can not get any guarantees about the Social Welfare. On the other, if the item prices are too high, little to no items will be sold in the auction. The following lemma formalizes the idea we just discussed:

Lemma 4.2.1. *[16] For an allocation $O = (O_1, ..., O_n)$ and a price vector $\boldsymbol{p} = (p_1, ..., p_m)$ that supports this allocation, a fixed price auction using prices $\frac{\boldsymbol{p}}{2} = \left(\frac{p_1}{2}, ..., \frac{p_m}{2}\right)$ comes up with an allocation $A = (A_1, ..., A_n)$ that has $\sum_i v_i(A_i) \geq \frac{\sum_{j \in O} p_j}{2}$.*

Notice that the lemma holds for any ordering of the bidders. The simplicity of the Fixed-Price auction coupled with this lemma makes it an attractive tool to use on a mechanism. If we select the Fixed-Price auction to be the core auction in our mechanism, we have successfully answered questions 1 and 2. A supporting price vector $\mathbf{p}$ of the optimal allocation that has revenue that is a good approximation of the Social Welfare **can** be a good price vector and **can** be used on a Fixed-Price auction in a pretty straightforward way. Of course, one can come up with different ideas and notions that answer questions 1,2.

We have now arrived at the most crucial and fragile aspect of the problem, question number 3. How exactly do we learn the prices? This is exactly what recent work in Combinatorial auctions has tried to answer.

A commonly used idea in the price learning procedure is the following. Split the bidders into groups and begin an iterative process. Each group is to be used exactly once, on some specific iteration. On any iteration, run a Fixed-Price auction using prices that have been refined by the previous iterations. With some small probability declare this iteration as the winning one and its allocation the final allocation and conclude the execution of the mechanism. Otherwise, proceed to the next iteration.

In order to be able to explore different prices for each item, we need to define a search space. A common assumption concerning prices is that good prices can belong in the set $\{1, 2, ..., poly\,(m)\}$. This assumption seems restrictive, but can be ignored using standard techniques. Usually this assumption materializes as an ordered candidate prices set B, that has sequencing prices (b_k, b_{k+1}) such that $b_{k+1} = 2b_k$. The lowest element of set B is usually 1 or some small number that is $O\left(\frac{1}{m^2}\right)$. The highest element is sometimes set to be some fraction of ψ, usually $\frac{\psi}{2}$ (remember ψ is some upper bound over all bidder's valuations).

We will now briefly present the latest works on the problem, emphasizing on the new ideas that each work introduced.

Dobzinski in [16] first discusses the idea of prices being upper bounded by m. This means that the size of the candidate prices set is $O\,(\log m)$. He proposes a simple mechanism that uniformly at random selects exactly one of the candidate prices, lets say b_k, runs a Fixed-Price Auction with price vector $\mathbf{p} = \left(\frac{b_k}{2}, ..., \frac{b_k}{2}\right)$ and guarantees that this mechanism yields an approximation ratio of $O\,(\log m)$. The reason this mechanism works is that for each k he argues that the items j that have their supporting price q_j of the optimal allocation equal to b_k yield half their optimal valuation. The supporting prices are important to the analysis of the mechanism and are used to quantify how well the price-learning procedure works.

Building on this idea he then carefully constructs a more sophisticated mechanism, that groups the candidate prices into $a = O\left(\sqrt{\log m}\right)$ options. The mechanism then runs a Fixed-Price Auction each on a disjoint small group of bidders using prices from one of the candidate options of a. Each of these Fixed-Price Auctions has a small probability to be the final allocation. If none of them become the final allocation, the mechanism has retained the highest selling prices for each item over all iterations and runs a final Fixed-Price auction using these refined prices on the remaining bidders.

The reasoning on why this mechanism works is that either some of the a iterations happen to run a Fixed-Price auction with good (comparable to OPT) Social Welfare or if that didn't happen, the resulting price vector for the last Fixed-Price auction has converged on prices that will get good Revenue.

Assadi and Singla take these ideas to the next level on [7]. Again the framework to which they compare the learned prices is the supporting prices q_j of the Optimal allocation. They use some different candidate prices set, retaining its cardinality to $O\,(\log m)$. Their proposed mechanism runs again on iteration, this time $\beta = O\,(\log \log m)$ iterations. On each of the iterations they run $\alpha = O\,(\log \log m)$ Fixed-Price auctions which yields the final allocation with appropriately small probability. The mechanism notes the highest price an item sold over the a Fixed-Price auctions and uses that as the basis for the next iterations. The reasoning is similar to that of [16], either some of the a Fixed-Price auctions yielded an allocation that is a good approximation of OPT, or the prices for the next iteration are closer to the supporting prices. Their approach seems to have reached the limits of what we can achieve using the supporting prices of the Optimal Allocation as our framework and a learning procedure.

Dütting, Kesselheim, and Lucier in [22] paved the way toward a different framework. They proved the existence of "good" prices for Subadditive valuation functions. Notice that the previous two works we discussed were using supporting prices that only apply to XOS valuations. To be more precise they proved the following Lemma:

Lemma 4.2.2. *For every bidder i, Subadditive function v_i and set $U \subseteq M$, there exist price p_j for $j \in U$ and a probablity distribution λ over $S \subseteq U$ such that for all $T \subseteq U$:*

$$\sum_{S \subseteq U} \lambda_S \left(v_i\,(S \setminus T) - \sum_{j \in S} p_j \right) \geq \frac{v_i\,(U)}{a} - \sum_{j \in T} p_j,$$

where $a = O(\log \log m)$

In simpler terms, this lemma can be decomposed into the following "game". Someone picks a set U (usually U is seen as the set that bidder i gets in the optimal allocation). There exists some prices for the items in U and some probability distribution λ over subsets of U such that if for every subset of items T that an adversary from the game (and by removing them pays their price) the expected utility when bidding according to the probability distribution λ on available items plus the toll for the adversary are greater than a factor a of the valuation U.

The existence statement of this lemma is a powerful tool. However, existence does not always guarantee a robust computational procedure. Remember the celebrated existence of Nash Equilibrium in games with finite players and finite strategies [39] that is coupled with hardness results for the calculation of these equilibria [12, 14]. The authors of [22] utilize these prices by allowing valuation functions to be drawn from **known** distributions of Subadditive functions. But they do not present or hint at ways to calculate or approximate these prices in prior free environments.

Unexpectedly, Assadi, Singla, and Kesselheim co-authored work [6], that does use these newly defined prices that have no prior knowledge assumption. Their proposed mechanism, which as of the time of this writing is the state of the art for Combinatorial auctions with Subadditive bidders and XOS bidders, manages to capture the essential information provided by Lemma 4.2.2 while being totally oblivious to the actual prices or anything related to the valuations of the bidders.

Their mechanism is using again $\beta = O(\log \log m)$ iterations. On each iteration, they specify the price for every item j using the upper median of its candidate prices vector $\mathbf{b}_j$. They then run a Fixed-Price Auction that with a small probability yields the final allocation. If the mechanism proceeds to the next iteration, all candidate price vectors are cut in half, keeping the upper half of the vector for items that were sold in the Fixed-Price auction of the previous iteration and the lower half of the vector for items that were not sold. This continues until the candidate price vectors converge into one exact candidate price, at which point a final Fixed-Price auction takes place with the remaining bidders participating. They prove their approximation ratios by meticulously partitioning items into disjoint sets and using these sets to bound the expected utility for each bidder and the expected revenue for each bundle O_i of the (unknown) optimal allocation.

Chapter 5

Mechanisms with Predictions for Combinatorial Auctions

So far we have built a thorough understanding of the problem of Combinatorial Auctions and have touched upon some of the basic ideas of learning augmented algorithms. Our work aims to investigate the types of predictions that can be of use in Combinatorial Auctions, as well as their limitations.

In this chapter, we will analyze our main contributions to the problem. Firstly we will briefly discuss what type of predictions can be used for the problem and then we will define the input price vectors and the mechanism class that we will be using. We will then thoroughly discuss our results for the Additive valuation class and the XOS valuation class using this mechanism class.

Before we begin, we remind the reader that our work is aimed at Combinatorial Auctions where the Optimal Allocation is distributed in some orderly fashion among the bidders that participate in the Optimal solution. This assumption is well justified in the previous chapter and can be formalized as the following:

Assumption 5.0.1. *The exists no bidder $i \in N$ such that ($v_i(M) \geq \frac{OPT}{16}$). This type of bidder is called a dominant bidder.*

5.1 Predictions for Combinatorial Auctions

Before we begin our attempts we will briefly discuss some important underlying ideas. The objective of our work is to come up with some mechanism scheme that utilizes some form of prediction. We are interested in achieving a smooth consistency-robustness trade-off, which hopefully matches the traditional problem's state-of-the-art result. We remind here that the nature of our problem is that of a maximization objective with non-negative terms. The negative results of deterministic mechanisms and the fact that all of the state-of-the-art works produce results in expectation encourage the following utilitarian approach. We can run a probabilistic mechanism that with half probability runs a mechanism that has constant consistency guarantees (let's say c) and $o(\eta)$ robustness (meaning that predictions with high error lead to an approximation ratio that tends to infinity) or with the other half probability runs the state of the art which let's say has complexity of $O(poly(\log \log m))$. Then the resulting mechanism has $\frac{c}{2}$ consistency while still maintaining a robustness ratio of $O(poly(\log \log m))$. Even though the scheme we just described has met our goals, we are interested in pursuing other methods, that apart from the robustness and consistency guarantees, achieve a graceful transition function as the error increases.

Observing the previous works in this area in both the classical field and the learning augmented setting we have concluded on the prediction for our models to be a price vector **p**. This primarily makes sense, because all previous works in the Combinatorial Auctions spectrum, solve the problem by primarily designing a procedure that "learns" some vector of good prices. Thus, the naturally occurring question is of what can we do when these price vectors are given to us as potentially erroneous prediction vectors. Other types of predictions that can be studied for this problem can take the form of advice or set constraints (i.e. prediction on items that should be sold as bundles).

Our work will be attempting to attack the problem through the lens of four different criteria, with which we will be ”experimenting”:

1. Richness of Prices.
2. Proportionality.
3. Desired Consistency.
4. Mechanism Class.

Richness of Prices relates to the properties that the prediction vector will satisfy (e.g. optimality, etc.). Proportionality will be a transformation of the input price vector, which we will be studying in cases where the richness of the prediction vector entails trivial results. The consistency criteria essentially capture whether we are attempting to hit the best possible consistency or we are concerned about the prediction error. We will be applying all the previous ideas to a specific Mechanism class.

5.1.1 Price Vectors

The idea of someone simply handing out a price vector that captures some important features seems uninteresting from a research viewpoint. It seems that if someone gives you prices with some guarantee, then you can just inspect the most appropriate mechanism from previous works and get approximations that are parameterized by the error of the prediction.

A more challenging approach is an input that admits useful qualities but is presented to the mechanism modified, thus engaging the designer to inspect ways that rediscover the initial qualities. That exactly is the spirit of a proportional price vector:

Definition 5.1.1 (proportional price vector). *We define as proportional price vector* $\boldsymbol{p}$ *the price vector that results from a point-wise multiplication with a constant* c *that places all items* j *at prices* p_j *such that* $p_j \in (0, 1]$.

The mechanism class that we will be coupling the proportional prices with is the following:

Definition 5.1.2 (Sampling & Multiplying Mechanism). *We define this class of Mechanisms to include all Mechanisms that take input a price vector* $\boldsymbol{p}$*, calculate on a sample of the bidders the optimal solution* OPT'*, draw a multiplier* d *from a probability Distribution* $\mathcal{D}$ *and outputs a price vector* $\boldsymbol{p}' = \frac{OPT'}{d \cdot |\boldsymbol{p}|} \cdot \boldsymbol{p}$*, that is then posted in a Fixed-Price Auction on the remaining bidders.*

To define a mechanism from this class, one only needs to specify the sampling procedure (usually i.i.d. with fixed probability) and probability distribution $\mathcal{D}$. The Sampling & Multiplying Mechanism class has some natural and appealing qualities. It is simple to implement and makes straightforward use of the input vector. This class encompasses the following general principle:

Suppose that someone presents you with a proportional price vector with some Welfare guarantees on the initial multiplier. It is unintuitive to attempt to replicate the original scale, but it instead makes sense to probabilistically scale the price vector such that the final vector falls in a neighborhood around the initial price vector. This procedure enables probabilistic case analysis reasoning, such that if the price vector overshooting fails then the undershooting should work and vice-versa. This effect can better be observed in the following 2 figures.

The 4 sets of points in the figures represent prices for some auction problem instance. The blue colored set contains the highest possible prices and matches the optimal value per item. The orange colored set contains the initial input prices that are then downscaled to $(0, 1]$, while sets with colors green and red represent the final vectors when d results in undershooting or overshooting respectively. In Figure 5.1 we can observe that the multiplier that results in overshooting surpasses

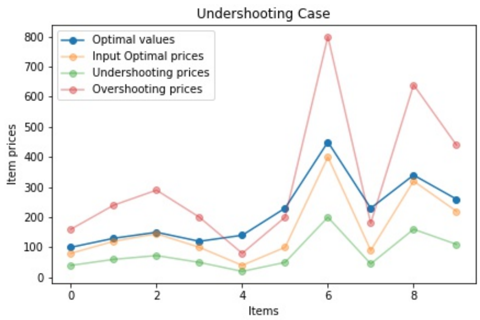


Figure 5.1: Undershooting is preferred

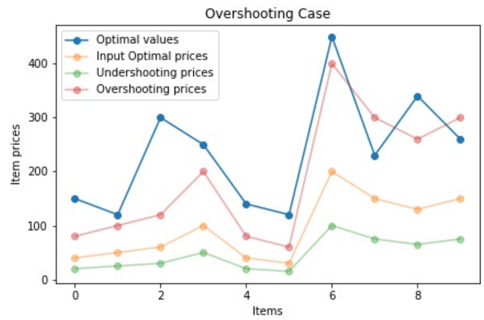


Figure 5.2: Overshooting is preferred

a lot of the item's actual values, while the multiplier that results in undershooting is still appropriate for the task. In Figure 5.2 we observe that the overshooting multiplier behaves near optimally and is thus preferred. This line of thought, despite seeming realistic, does not capture the full difficulty of the underlying problem and, as we will soon prove, fails in a Submodular setting.

5.2 Additive Valuation Class

The problem of Combinatorial Auctions with bidders equipped with Additive valuations is fundamental in the field and has, as we previously stated, an optimal mechanism. It is well motivated, however, to firstly justify our selected model for the problem, by proving that it does indeed work on bidders with Additive valuations. After all, the results for a larger class directly apply to their smaller included classes.

When we restrict the problem to Additive bidders, the first idea that arises as input is a price vector that is optimal (per item). In this class there exist a formal definition for optimal prices, that when they are posted in a Fixed-Price Auction, always guarantee the item being sold to the bidder that values it the most. These prices are directly derived from the Vickrey auction and can be defined regarding proportional price vectors as follows:

Definition 5.2.1 (optimal proportional price vector). *We define as optimal proportional price vector a price vector $\boldsymbol{p} \in (0,1]^m$, such that $\exists$ some constant c, for which $\forall j \in M : c \cdot p_j$ is lower or equal to the highest valuation of item j and greater than the second highest valuation of item j.*

Given that bidder's valuation for one item can be described by real numbers, the previous definition results in infinitely many candidate price vectors for most instances of Additive Combinatorial Auctions. The gap between the first and second valuations of items can determine how far off can the revenue of an optimal price vector be, compared to the Optimal Social Welfare. This leads to the necessity of selecting our mechanism in a way that carefully decomposes instances with regard to the relation between the revenue of the initial optimal price vector and the Optimal Social Welfare of the problem. The probability distribution $\mathcal{D}$ is the tool that the mechanism utilizes to tackle this issue. Let's observe this in a graphical example.

In Figure 5.3 we use blue for the set of the highest possible optimal prices while the orange set is the the lowest possible optimal prices. For this specific instance, we present 3 different optimal price vectors which are colored green, red and purple. The probability distribution $\mathcal{D}$ needs to infer probability mass to different multipliers d such that the 3 price vectors admit some common approximation ratio for at least one of the possible multipliers d (the ratio can be observed for different multipliers for each of the vectors, i.e. for vector 1 the multiplier d_1 gives the approximation ratio, for vector 2 the multiplier d_3 and so on). For the example in Figure 5.3, the green sets of prices needs some large multiplier d_1 that results in undershooting, while the red sets of prices needs some small multiplier d_2 that results in overshooting!

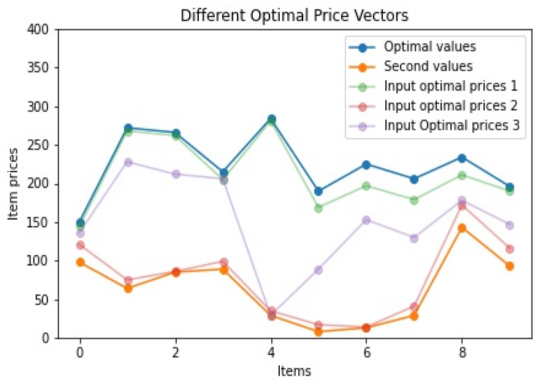


Figure 5.3: Different Optimal Price Vectors

The class of **Sampling & Multiplying Mechanisms** does not specify the sampling procedure. When analyzing the problem and designing mechanisms, most previous works utilized some sampling scheme. The most commonly used one and the one that we will be applying to our mechanisms will be the i.i.d. constant probability sampling procedure. To be more specific, as a first step to the Mechanism, we will divide bidders into two groups, N_{Sample} and N_{Post}, with each bidder being placed to N_{Sample} with constant probability l_{Sample} or to N_{Post} with probability $1 - l_{Sample}$.

We will now define the exact Mechanism we will be reviewing for the Additive class:

Mechanism 3: The Sampling Mechanism

Input: A proportional price vector $\mathbf{p}$
Output: An Allocation $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n)$
Split bidders randomly with probability $\frac{1}{2}$ into groups N_1, N_2.
Randomly assign N_1 and N_2 to N_{Sample} and N_{Post}.
Run a 'virtual' second price auction for each item $j \in M$ only on bidders $i \in N_{Sample}$ and output the corresponding Optimal Social Welfare as OPT'.
Randomly set $d = \{64, 8\}$ and define $\mathbf{p}' = \frac{OPT'}{d \cdot |\mathbf{p}|} \cdot \mathbf{p}$.
Run the FPA(N_{Post},M,$\mathbf{p}'$) and output its allocation $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n)$ as the final allocation of the Mechanism.

Notice that The Sampling Mechanism belongs in the class of **Sampling & Multiplying Mechanisms** with distribution $\mathcal{D} = uniform\,\{\{64\}, \{8\}\}$ and an i.i.d. sampling scheme with probability $\frac{1}{2}$.

5.2.1 Notation

Before we begin our analysis we will present the notation needed. Suppose we are handling an instance of the problem $\mathcal{I}$. $OPT\,(\mathcal{I}) = OPT$ will denote the optimal solution to the instance $\mathcal{I}$ of the problem. We will denote the highest valuation of item j as $first\{j\}$, the value that bidder i gets in the optimal allocation as $value\,(i)$, the random variable OPT_{Sample} as the sum of the valuations of items j for which the highest bidder is in N_{Sample}, the random variable OPT_{Sample} as the sum of the valuations of items j for which the highest bidder is in N_{Post}. Notice that:

- $OPT_{Sample} + OPT_{Post} = OPT$.
- $\mathbb{E}\left[OPT_{Sample}\right] = \sum\limits_{i \in N} \left(\mathbb{P}\left[i \in N_{Sample}\right] \cdot value\,(i)\right) = \frac{1}{2} \sum\limits_{i \in N} value\,(i) = \frac{OPT}{2}$. Similarly $\mathbb{E}\left[OPT_{Post}\right] = \frac{OPT}{2}$.

- $OPT_{Sample} \leq OPT'$ because items whose highest bidders are in N_{Post} contribute 0 Welfare in OPT_{Sample} but can contribute positive Welfare to OPT' if they are sold to non-optimal bidders.

We will be denoting the revenue of a price vector **p** as $Rev\left\{\mathbf{p}\right\} = \sum\limits_{j \in M} p_j$ (remember that all items get allocated when the prices are optimal). We will be calling the set of items whose highest bidder got placed in N_{Sample} as M_{Sample}, and the set of items whose highest bidder got placed in N_{Post} as M_{Post}. Finally we will be using $Rev\left\{\mathbf{p}|Post\right\} = \sum_{j \in M_{Post}} p_j$ and $Rev\left\{\mathbf{p}|Sample\right\} = \sum_{j \in M_{Sample}} p_j$.

Note that $Rev\left\{\mathbf{p}\right\} = Rev\left\{\mathbf{p}|Sample\right\} + Rev\left\{\mathbf{p}|Post\right\}$

5.2.2 Approximation Ratio

Before we can prove the approximation ratio we need to state some useful lemma's, decompose the problem into two cases for the input price vector, and combine them all together.

The following lemma and its proof are following a similar lemma in [16].

Lemma 5.2.1. *A set of bidders N_1 that is generated with i.i.d. sampling on the bidders in N with probability $\frac{1}{2}$ satisfies the property $\left\{\frac{OPT}{4} < OPT_{N_1} < \frac{3OPT}{4}\right\}$ with probability greater than* $1 - \frac{2}{e^2} = 1 - o(1)$.

Proof. We can apply Hoeffding's inequality on the random variable OPT_{Sample}.

Hoeffding's inequality states that for $X_1, ..., X_n$ independent random variables bounded in $[a_i, b_i]$, with $\overline{X} = \frac{\sum_i X_i}{n}$:

$$\mathbb{P}\left(|\overline{X} - \mathbb{E}\left[\overline{X}\right]| \geq t\right) \leq exp\left(-\frac{2n^2t^2}{\sum_i (a_i - b_i)^2}\right)$$

By setting $X = \sum_i X_i$, knowing that for all i, $b_i < d$ and $a_i = 0$, where d is a constant, we get from the Hoeffding inequality with $t = \frac{a \cdot \mathbb{E}[X]}{n}$ that:

$$\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}\left[X\right]\right| \geq a \cdot \mathbb{E}\left[X\right]\right) \leq exp\left(-\frac{2\left(a \cdot \mathbb{E}\left[X\right]\right)^2}{\sum_i (b_i)^2}\right) \leq exp\left(-\frac{2\left(a \cdot \mathbb{E}\left[X\right]\right)^2}{\frac{\mathbb{E}[X]}{p} \cdot d}\right)$$
$$\leq exp\left(-\frac{2a^2 \cdot p \cdot \mathbb{E}\left[X\right]}{d}\right)$$

where the second inequality holds because $\sum_i b_i^2 \leq d \cdot \sum_i b_i = d \cdot \frac{\mathbb{E}[X]}{p}$

Finally applying for $X = OPT_{N_1}$, setting $a = \frac{1}{2}$ and observing that in our case $p = \frac{1}{2}$ and $d = \frac{OPT}{16}$ because we assumed no dominant bidder exists, we get that:

$$\mathbb{P}\left(\left|OPT_{N_1} - \frac{OPT}{2}\right| \geq \frac{OPT}{4}\right) \leq \frac{2}{e^{-2}}$$

□

It is important to emphasize that this lemma holds because of Assumption 5.0.1. A simple example instance where this lemma does not hold is any instance where the optimal allocation is described by one bidder getting all the items M. Of course in this case $\mathbb{P}\left(\frac{OPT}{4} < OPT_{N_1} < \frac{3OPT}{4}\right) = 0$.

Due to this lemma we can argue that the resulting two groups N_1, N_2 of The Sampling Mechanism are exchangeable, because property $\left\{\frac{OPT}{4} < OPT_{N_1} < \frac{3OPT}{4}\right\}$ directly implies the fact that

$\left\{\frac{OPT}{4} < OPT_{N_2} < \frac{3OPT}{4}\right\}$. This is key to our analysis later on. Another useful lemma for our analysis that is straightforward to prove is the following:

Lemma 5.2.2. *The event* $\{Rev\,\{\boldsymbol{p}|Post\} \geq Rev\,\{\boldsymbol{p}|Sample\}\}$ *happens with probability* $\frac{1}{2}$.

To understand why the mechanism works, we need to build some intuition, especially around the scheme of proportional prices. As we hinted before, we will divide all instances into two disjoint cases, regarding how the revenue of the proportional price vector compares to the Optimal Social Welfare. In the case that the revenue is greater than some factor of OPT, we can understand that the re-scaled proportional prices give us a good approximation even if we post prices scaled down. In the case that the revenue is smaller than a factor of OPT we can post prices much greater than the initial ones, and rely on the fact that the items j that end up having prices greater than $first\,\{j\}$ do not contribute much to the Optimal Social Welfare.

Theorem 5.2.1. *The Sampling Mechanism with input an optimal proportional price vector achieves a constant approximation ratio to the Optimal Social Welfare.*

Proof. Lets now formally define the two disjoint cases:

Case 1: The revenue of the initial price vector is greater than a factor of OPT and more specifically, $Rev\,\{c \cdot \mathbf{p}\} \geq \frac{OPT}{32}$.

In this case, The Sampling Mechanism gets a constant factor approximation ratio if we guarantee the following properties:

1. $\left\{\frac{OPT}{4} < OPT_{Sample} < \frac{3OPT}{4}\right\}$.
2. $Rev\,\{\mathbf{p}|Post\} \geq Rev\,\{\mathbf{p}|Sample\}$ which translates to $Rev\,\{c \cdot \mathbf{p}|Post\} \geq \frac{OPT}{64}$ since we assumed for Case 1 that $Rev\,\{c \cdot \mathbf{p}\} \geq \frac{OPT}{32}$.
3. Parameter d is selected as 64 which happens with independent probability of $\frac{1}{2}$.

Our analysis will be based on two things, the probabilistic independence of properties 1, 2, and 3, and the lower bound on the revenue they can provide.

If the three properties hold, we can argue that, the mechanism would guarantee for every item $j \in M_{Post}$, that $p'_j < c \cdot p_j$, since by assumption $Rev\,\{c \cdot \mathbf{p}|Post\} \geq \frac{OPT}{64}$ and also $\sum\limits_{j \in M} p'_j = \frac{OPT'}{64} < \frac{OPT}{64}$.

Proceeding, we need to now lower bound $Rev\,\{\mathbf{p}'|Post\}$. To do so we observe that:

$$Rev\left\{\mathbf{p}'|Post\right\} = \frac{Rev\,\{c \cdot \mathbf{p}|Post\} \cdot \frac{OPT'}{64}}{Rev\,\{c \cdot \mathbf{p}\}} > \frac{1}{2} \cdot \frac{OPT}{4 \cdot 64} = \frac{OPT}{512}$$

In conclusion, we have managed to get a price vector $\mathbf{p}'$ that has prices such that p'_j is lower than $first\,\{j\}$, securing the fact that all items in M_{Post} will be sold in the up-coming Fixed-Price Auction. We have also lower bounded the total revenue of the Fixed-Price Auction by a constant fraction of OPT. Thus, we have proven that for Case 1, as long as the three properties are satisfied, the mechanisms guarantee the following:

$$Welfare \geq Rev\left\{\mathbf{p}'|Post\right\} \geq \frac{OPT}{512}$$

Properties 1 and 2 can be probabilistically guaranteed by lemmas 5.2.1 and 5.2.2. Thus we can lower bound the expected welfare using the law of total expectation (and ignoring other events based on the non-negativity of the Welfare) as:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Welfare\right] &\geq \mathbb{P}\left(\text{Prop 1} \cap \text{Prop 2} \cap \text{Prop 3}\right) \cdot \mathbb{E}\left[Welfare|\text{Prop 1} \cap \text{Prop 2} \cap \text{Prop 3}\right] \\
&= \mathbb{P}\left(\text{Prop 1}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\text{Prop 2}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\text{Prop 3}\right) \cdot \mathbb{E}\left[Welfare|\text{Prop 1} \cap \text{Prop 2} \cap \text{Prop 3}\right] \\
&= \left(1 - \frac{2}{e^2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{OPT}{512} = \frac{\left(e^2 - 2\right) OPT}{2048 e^2}
\end{aligned}
$$

<u>**Case 2:**</u> The revenue is lesser than a factor of OPT and more specifically, $Rev\left\{c \cdot \mathbf{p}\right\} < \frac{OPT}{32}$.

In this case, The Sampling Mechanism gets a constant factor approximation ratio if we guarantee the following property:

1. $\left\{\frac{OPT}{4} < OPT_{Sample} < \frac{3OPT}{4}\right\}$.
2. Parameter d is selected as 8 which happens with an independent probability of $\frac{1}{2}$.

With these two properties, we will prove that the re-scaled prices will overshoot, but the cumulative value of the items that will exceed their highest valuation $first\left\{j\right\}$ is small enough.

we can argue that the re-scaled prices $\frac{OPT'}{8}$ guarantee for every item j that $p'_j > c \cdot p_j$, due to $Rev\left\{c \cdot \mathbf{p}\right\} < \frac{OPT}{32}$ by assumption and also due to $\sum_{j \in M} p'_j = \frac{OPT'}{8} \geq \frac{OPT_{Sample}}{8} > \frac{OPT}{4 \cdot 8} = \frac{OPT}{32}$.

Our only concern now is, what happens to the set of items that are overpriced after the re-scaling. We define the set of items $Lost = \left\{j | p'_j > first\left\{j\right\}\right\}$ as exactly the set of the overpriced items. In reality, the items in $Lost$ have a cumulative value smaller than OPT_{Post}. Due to assumption 1 we can argue that $OPT_{Post} > \frac{OPT}{4}$.

The Worst case for the mechanism in instances that concern Case 2 is the highest overpricing possible. Due to assumption 2, however $\frac{OPT'}{8} \leq \frac{OPT}{8}$ and thus we argue that the items in $Lost$ satisfy the inequality:

$$
first\left\{j\right\} < p'_j = c \cdot p_j \cdot \frac{OPT'}{8 \cdot Rev\left\{c \cdot \mathbf{p}\right\}} < c \cdot p_j \cdot \frac{OPT}{8 \cdot Rev\left\{c \cdot \mathbf{p}\right\}}
$$

Summing over all the items $j \in Lost$ we get:

$$
\begin{aligned}
val(Lost) = \sum_{j \in Lost} first\left\{j\right\} &< \sum_{j \in Lost} \left(c \cdot p_j \cdot \frac{OPT}{8 \cdot Rev\left\{c \cdot \mathbf{p}\right\}}\right) \\
&< \sum_{j \in M} \left(c \cdot p_j \cdot \frac{OPT}{8 \cdot Rev\left\{c \cdot \mathbf{p}\right\}}\right) \\
&= \frac{OPT}{8}
\end{aligned}
$$

Concluding the analysis, we argue that for all items $j \in M_{Post} \backslash Lost$, p'_j is optimal, and also that $val\left(M_{Post} \setminus Lost\right) = OPT_{Post} - val\left(Lost\right) > \frac{OPT}{4} - \frac{OPT}{8} = \frac{OPT}{8}$ thus finalizing the following result conditioned on the fact that properties 1 and 2 hold:

$$
Welfare \geq val\left(M_{Post} \setminus Lost\right) \geq \frac{OPT}{8}
$$

Property 1 can be probabilistically guaranteed by lemma 5.2.1 and thus we can lower bound the expected welfare:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Welfare\right] &\geq \mathbb{P}\left(\text{Prop 1} \cap \text{Prop 2}\right) \cdot \mathbb{E}\left[Welfare | \text{Prop 1} \cap \text{Prop 2}\right] \\ &= \mathbb{P}\left(\text{Prop 1}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\text{Prop 2}\right) \cdot \mathbb{E}\left[Welfare | \text{Prop 1} \cap \text{Prop 2}\right] \\ &= \left(1 - \frac{2}{e^2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{OPT}{8} = \frac{\left(e^2 - 2\right) OPT}{16e^2}\end{aligned}$$

In both cases, we get a constant approximation ratio, and thus the approximation ratio of The Sampling Mechanism is the worst of the two:

$$\boxed{\frac{e^2 - 2}{2048e^2}}$$

□

In concluding our analysis for Additive valuations, we have presented a mechanism that uses the optimal prices as input without error but in a proportional form and guarantees a solution that is a constant approximation of the optimal one.

5.3 XOS Valuation Class

The purpose of the analysis of Additive valuation functions was to lay the foundation and the ideas needed to design a mechanism that works with proportional prices on a greater valuation function class, namely the Submodular or the XOS class.

The first obstacle in that transition involves the notion of proportional prices. When using Submodular set functions, we can no longer argue that some price p_j for some item j is optimal in the same way we did in the Additive case. With Additive valuations, whenever we had a price p_j that was less or equal to $first\left\{j\right\}$ and also greater than the valuation of item j of the second highest bidder, we could argue that with that price the only person who would want to bid on the item would be the highest value bidder. By allowing ourselves Submodular valuation functions, we can no longer define "optimal" prices for items, because now we need to account for the value derived from getting items together.

Lemma 4.2.2 will be of great use in our analysis throughout this subchapter. Remember that if we were able to lower bound the prices p_j with some fraction of q_j, we would be able to get good approximations for XOS Combinatorial Auction using the aforementioned lemma.

5.3.1 Supporting Prices

The Sampling & Multiplying Mechanism class we proposed in the previous subchapter needs an input price vector. The first obvious candidate as a proportional price vector is the supporting prices of the optimal allocation. These prices are powerful enough such that we can easily get a constant approximation of the Social Welfare even if we only get access to their proportional price vector.

Theorem 5.3.1. *There exists a mechanism in the Sampling & Multiplying Mechanism class that, when given a proportional supporting price vector of the Optimal Allocation as input, achieves a constant approximation ratio on the Submodular Combinatorial Auction problem.*

Proof. The way we can prove that is to notice that the supporting price vector of the Optimal allocations sums up to exactly OPT and to remember that we can accurately estimate OPT by applying any non-truthful algorithm for the problem on a sample of the bidders. Then we are only required to select the correct multiplier that guarantees that the re-scaled prices p'_j are in fact smaller than $\frac{q_j}{2}$. We will follow the notation used in the Additive Valuation Class section.

We select the i.i.d. sampling scheme with $\frac{1}{2}$ probability to get sampled and by lemma 5.2.1 it holds that with high probability $\frac{OPT}{4} < OPT_{Sample} < \frac{3OPT}{4}$, which implies that $OPT_{Post} > \frac{OPT}{4}$. On bidders in N_{Sample} we run the non-truthful algorithm of [34] which is a 2-approximation for the Submodular setting and thus we get the estimate $OPT' > \frac{OPT_{Sample}}{2} > \frac{OPT}{8}$. We select the probability distribution $\mathcal{D}$ to set deterministically $d = 8$ (with probability 1) and we have thus achieved $\mathbf{p}' = \frac{OPT'}{8 \cdot |\mathbf{p}|} \cdot \mathbf{p}$ which has:

- $|\mathbf{p}'| = \frac{OPT'}{8 \cdot |\mathbf{p}|} \cdot |\mathbf{p}| < \frac{OPT}{8}$ and also,
- $|\mathbf{p}'| = \frac{OPT'}{8 \cdot |\mathbf{p}|} \cdot |\mathbf{p}| > \frac{OPT}{64}$.

The $\mathbf{p}'$ price vector supports the allocation OPT_{Post} which has value at least $\frac{OPT}{4}$ and as such due to lemma 4.2.1 the Fixed-Price Auction will get an allocation with Welfare greater than $\frac{OPT}{64}$. As such we get the following Expected Welfare:

$$\mathbb{E}\left[Welfare\right] \geq (1 - \frac{2}{e^2})\frac{OPT}{64}$$

□

This theorem makes critical use of lemma 4.2.1. Notice that this lemma allows us to extend our analysis to proportional price vectors with revenue guarantees of the form $Rev\left\{c \cdot p\right\} \geq \frac{OPT}{a}$, as long as we parameter a is considered known to the mechanism. We will touch upon a similar concept later on. Notice as well, that the supporting prices of the Optimal Allocation are equivalent to prices $first\left\{j\right\}$ in the Additive setting. So theorem 5.3.1 directly and trivially extends to the Additive setting.

Suppose now that we attempt to use as input a proportional price vector that supports the Optimal allocation. Remember that the definition of "supports" means that for every item j, $p_j < q_j$ where q_j is the supporting price of item j in the optimal allocation. We will again consider the same two cases for our analysis and we will see why Case 2 can no longer be handled in our setting. A quick explanation of the underlying difficulties is that on XOS (or broader classes) revenue guarantees are important (if not necessary):

Case 1: The revenue is greater than a factor of OPT and more specifically, $Rev\left\{c \cdot \mathbf{p}\right\} \geq \frac{OPT}{32}$.

The key differences in comparison to the previous analysis are the following:

1. In order to use lemma 4.2.2 we need prices to be $p_j' < \frac{q_j}{2}$, which we achieve by posting prices scaled to $\frac{OPT'}{128}$.
2. We can no longer calculate exactly the value OPT', but we can use any non-truthful mechanism to get a constant approximation on OPT'. Using an K-approximation of OPT' concludes to just another factor K on the approximation ratio of the mechanism.

The reader can compare these 2 differences and ideas to tackle them with the proof of theorem 5.3.1 and notice that this is exactly what we employed.

Case 2: The revenue is lesser than a factor of OPT and more specifically, $Rev\left\{c \cdot \mathbf{p}\right\} < \frac{OPT}{32}$.

This case cannot be tweaked in the same way we tweaked **Case 1**. The reason for that is that lemma 4.2.2 needs the revenue of the scaled price vector to be lower bounded. When handling this Low Revenue case, we need to upscale the prices such that the re-scaled price vector is lower bounded and also little or no items disobey the inequality $p_j' < q_j$. But we cannot guarantee that by simply multiplying every price in the price vector with a constant. Let's observe a specific "bad" example:

Suppose that we manufacture an instance where items can be split into two groups using the support prices q_j, the set of items C, for the items j that have $c \cdot p_j \approx q_j$ and also $\sum\limits_{j \in C} q_j = \frac{OPT}{32}$, and set $M \setminus C$ for items j with $c \cdot p_j = \frac{q_j}{OPT^2}$. Following the same analysis, we had in the Additive case, when $OPT' \approx OPT$ scaling with $\frac{OPT'}{8}$ results into:

1. $\forall j \in C,\ p'_j \approx 4q_j > q_j$.
2. $\forall j \in M \setminus C,\ p'_j = \frac{4q_j}{OPT^2}$.

Thus, applying lemma 4.2.2 can only be applied on items $M \setminus C$ and guarantees $Welfare > \frac{31}{8OPT}$, which of course is an unsatisfactory approximation ratio. Notice that the instance we described can be easily adjusted to match any constants in our initial statement.

Before we move towards a different notion of price vectors, we can present a simple result using as input prediction a price vector **p** that supports the Optimal allocation. If we measure the error of this prediction as $\eta = \max_j \in M \left\{ \frac{q_j}{p_j} \right\}$ then lemma 4.2.1 implies the following theorem.

Theorem 5.3.2. *With input prediction a price vector* ***p*** *that supports the Optimal allocation, A Fixed-Price Auction which posts price vector* $\frac{\boldsymbol{p}}{2}$ *achieves a* 2η*-approximation ratio on the XOS Combinatorial Auction problem.*

Notice that theorem 5.3.2 can be observed under the Additive Combinatorial Auctions setting, where instead of q_j the price p_j is compared to $first\,\{j\}$ for the definition of the error. We need to emphasize here that this theorem holds for prices that support the Optimal allocation and that we cannot get a similar same result for any given prices (in that case the error would be defined as $\eta = \max_j \in M \left\{ \frac{q_j}{p_j}, \frac{p_j}{q_j} \right\}$).

In concluding this subsection, we summarize the following results for XOS Combinatorial Auctions:

- A Sampling & Multiplying Mechanism with input Proportional Supporting Prices that gets a constant approximation.
- Proportional Price vectors that support an optimal allocation can get arbitrarily bad approximation ratios.
- A Mechanism with a price vector that supports the optimal allocation, that has a linearly degrading approximation ratio (in regards to the error).

5.3.2 a-good Price Vector

The previous section proved that we need stronger input information to apply some Mechanisms from the Sampling & Multiplying Mechanism Class on instances with Submodular bidders. One way of doing so is by redefining the input proportional prices as a generic vector of prices with the property that exists some multiplier c such that the allocation of a Fixed-Price Auction with prices $c \cdot p$ has Social Welfare greater than $\frac{OPT}{a}$ for any ordering of the bidders. We will now formally define this property of price vectors as "a-good proportional price vector".

Definition 5.3.1 (a-good proportional price vector). *We define as "a-good proportional price vector" a price vector* $\boldsymbol{p} \in (0,1]^m$*, such that* $\exists$ *some constant c, for which the outcome allocation of a Fixed-Price Auction posting prices* $c \cdot \boldsymbol{p}$ *has* $Welfare \geq \frac{OPT}{a}$ *(for any ordering of the bidders in* N*).*

We will be referring to the initial price vector $c \cdot \mathbf{p}$ as the "a-good price vector". Before attempting to use the a-good price vector on problems with Submodular valuations we need to re-examine problems with Additive valuations. Compared to the previous input statement we do not have any guarantees regarding the optimality of the prices within the price vector $c \cdot \mathbf{p}$.

One important question before we begin the analysis is the importance of knowledge of the parameter a. We will now be presenting an example that describes why knowledge of a is both important and necessary.

Example 5.3.1. *Suppose that we have an instance of the Additive problem $\mathcal{I}$ where items are split into two groups, $L = \left\{ j \middle| first\left\{j\right\} = \frac{OPT}{a|L|} \right\}$ and $H = M \setminus L$. Furthermore, suppose that the input vector we are given has prices such that $\forall j \in L, c \cdot p_j = first\left\{j\right\}$ and $\forall j \in H, c \cdot p_j = 0$.*

If The Sampling Mechanism is oblivious to the constant a then the re-scaled price will always overshoot, should we select a large enough a. On the other hand if we have knowledge of a, we can simply tweak The Sampling Mechanism to scale in regard with a, namely $\boldsymbol{p}' = \frac{OPT'}{a \cdot d \cdot |\boldsymbol{p}|} \cdot \boldsymbol{p}$. Then the previous analysis holds and the results only differ to a factor of a. Notice that with $a = 1$ the a-good proportional price vector is also an optimal proportional price vector and thus we retrieve our initial Mechanism.

The previous example captures the idea behind the necessity of knowing a in our analysis. We now formally present this statement and its proof.

Theorem 5.3.3. *For any distribution $\mathcal{D}$ and sample probability $\frac{1}{2}$, defining a specific* ***Sampling & Multiplying Mechanism****, there exists an instance of the problem $\mathcal{I}$ (even with Additive valuations), a constant a and a proportional a-good price vector* **p** *(guaranteeing Welfare $\frac{OPT}{a}$) for which the* ***Sampling & Multiplying Mechanism*** *yields arbitrarily small Welfare with probability $1 - o(1)$.*

Proof. We will prove this theorem on distributions $\mathcal{D}$ who have well-defined mean μ and standard deviation σ. Applying Chebyshev's inequality on the sample d of $\mathcal{D}$ yields:

$$\mathbb{P}\left(\left|d - \mu\right| \geq k\sigma^2\right) \leq \frac{1}{k^2} \implies \mathbb{P}\left(d \geq \mu + k\sigma^2\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

We select $a = 4 \cdot \left(\mu + k\sigma^2\right)$ and define the instance $\mathcal{I}$ with M items and N bidders where there exists an item set $L = \left\{ j \middle| first\left\{j\right\} = \frac{OPT}{a\left|L\right|} \right\}$. For this instance $\mathcal{I}$ and a parameter we can define the a-good price vector **p** such that $\forall j \in L, p_j = first\left\{j\right\} = \frac{OPT}{a\left|L\right|}$ and $\forall j \in \left(M \setminus L\right), p_j = 0$. We can easily verify that this price vector guarantees Welfare at least $\frac{OPT}{a}$.

From lemma 5.2.1 we get that $\mathbb{P}\left(OPT' \in \left(\frac{OPT}{4}, OPT\right)\right) = 1 - o(1)$, while it also holds that $\mathbb{P}\left(d < \mu + k\sigma^2\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$. These two events are independent and thus we get with probability at least $(1 - o(1))$ that $\frac{OPT'}{d} > \frac{OPT}{4 \cdot (\mu + k\sigma^2)} = \frac{OPT}{a}$. That translates to a situation where for items in L, $p'_j > first\left\{j\right\}$ and for all other items $p'_j = 0$. Naturally, these prices cannot have any guarantees, thus concluding the proof.

□

From now on we assume knowledge of a. Moving towards Submodular valuations, the question that remains is whether our new input properly handles the cases where the proportional price vector admits small Revenue with the initial multiplier. We present a more interesting instance where that is not the case. The intuition behind this example is that in a Submodular setting we can have instances where higher prices enhance the competition for valuable goods. This contradicts the general idea in economics that higher prices result in less demand. Let's now justify this intuition with a small example.

Example 5.3.2. *In this instance we are dealing with 3 bidders with the following reasoning (their valuations are presented in table 5.1):*

1. *Bidder 1 that gets a high-value bundle at a low price.*

2. *Bidder 2 that gets a low-value bundle at a low price but is also interested in the bundle assigned to bidder 1.*

3. *Bidder 3 that is interested in the bundle assigned to bidder 1 but their utility for this bundle using the a-good prices is negative.*

v_i	B_1	B_2
i_1	A_1	0
i_2	$2A_2$	$\left(3+\frac{\epsilon}{2}\right)A_2$
i_3	$(1-\epsilon)A_2$	0
$c\cdot p$	A_2	$2A_2$

Table 5.1: Valuations of the 3 bidders.

Suppose that $A_1 \gg A_2$. Notice that a Fixed-Price Auction for any ordering of these 3 bidders we would get the allocation $(B_1, B_2, \emptyset)$ with value $v_1(B_1) + v_2(B_2) = A_1 + \left(3+\frac{\epsilon}{2}\right)A_2$ and revenue $p(B_1) + p(B_2) = 3A_2$.

1. *Multiplying this instance with $(1+\epsilon)\cdot c$ results in:*
   - *Allocation $(B_1, B_2, \emptyset)$ if bidder i_1 comes before bidder i_2 in the Fixed-Price Auction.*
   - *Allocation $(\emptyset, B_1, \emptyset)$ if bidder i_2 comes before bidder i_1 because $u_2(B_1) = (1-\epsilon)A_2 > \left(1-\frac{3\epsilon}{2}\right)A_2 = u_2(B_2)$.*

2. *Multiplying this instance with $(1-\epsilon)\cdot c$ results in:*
   - *Allocation $(B_1, B_2, \emptyset)$ if bidder i_1 comes before bidder i_3.*
   - *Allocation $(\emptyset, B_2, B_1)$ if bidder i_3 comes before bidder i_1 because $u_3(B_1) \geq 0$.*

With $\frac{1}{2}$ probability, we acquire the original outcome even though we are using the wrong multipliers. Since we are mostly interested in acquiring value A_1 (remember $A_1 \gg A_2$), we quantify our result for the expected Welfare as:

$$\mathbb{E}\left[Welfare\right] \geq \frac{A_1}{2}$$

This example motivates us to examine what would happen if we had 3 groups of bidders that behaved like bidders $\{1,2,3\}$, but the 3 groups had different cardinalities. Our reasoning holds for any $\epsilon > 0$ such that $A_1 \gg A_2$. We will use such an instance to prove the following theorem:

Theorem 5.3.4. *There exists a family of a-good price vectors $\{C\cdot \boldsymbol{P}\}$ such that for a specific price vector $c\cdot \boldsymbol{p}$ we can define a family of instances of the problem $\mathcal{I}$ with instance specific constants $\{c_1, c_2, \epsilon\}$, such that $c_1 < c < c_2$ and for any $c' \in (c_1, (1-\epsilon)c) \cup ((1+\epsilon)c, c_2)$, the $\mathbb{E}\left[Welfare\right]$ of a Fixed-Price Auction posting prices $c'\cdot p$ is arbitrarily small, where expectation is taken over the random order of the bidders.*

Proof. We construct groups S_1, S_2, S_3 having bidders with resembling behaviour to bidders $\{1,2,3\}$ respectively and extend bundles (B_1, B_2) to $\left(\left\{B_{(1,1)}, ..., B_{(1,|S_1|)}\right\}, \left\{B_{(2,1)}, ..., B_{(2,|S_2|)}\right\}\right)$. We select bidders in S_1 such that any pair (i, i') within S_1 does not share an interest for the same bundles, i.e. $v_i\left(B_{(2,i')}\right) = 0, v_{i'}\left(B_{(1,i)}\right) = 0$. Similarly we select any pair of bidders in S_2 to not share an interest on the same bundle $B_{(2,l)}$. Bidders in S_2 are valuing bundles $B_{(1,l)}$ in a somewhat unit demand manner, with the extra property that all bundles are valued the same. Bidders in S_3 have

Additive valuations over bundles $B_{(1,l)}$. These valuations for some candidate bidders from the three groups are presented in the table 5.2:

v_i	$B_{(1,k_1)}$	$B_{(1,k_1')}$	$B_{(1,k_1)} \cup B_{(1,k_1')}$	$B_{(2,k_2)}$	$B_{(2,k_2')}$	$B_{(2,k_2)} \cup B_{(2,k_2')}$
$i_{(1,k_1)}$	A_1	0	A_1	0	0	0
$i_{(2,k_2)}$	$2A_2$	$2A_2$	$2A_2$	$\left(3+\frac{\epsilon}{2}\right)A_2$	0	$\left(3+\frac{\epsilon}{2}\right)A_2$
$i_{(3,k_3)}$	$(1-\epsilon)A_2$	$(1-\epsilon)A_2$	$2(1-\epsilon)A_2$	0	0	0
$c \cdot p$	A_2	A_2	$2A_2$	$2A_2$	$2A_2$	$4A_2$

Table 5.2: Valuations of candidate bidders from the 3 groups.

Having set up the valuations and prices for the items, we need to now select the rest of the parameters in the instance, $A_1, A_2, |S_1|, |S_2|, |S_3|$.

We will select these parameters in a way such that we satisfy these conditions:

1. $Welfare = OPT$.
2. $Rev\left\{c \cdot \mathbf{p}\right\} < \frac{OPT}{32}$.

The revenue condition originates from our discussion in subsection 5.3.1. Notice that with these conditions the resulting a-good price vector can be characterized as *optimal*, in the sense that it guarantees the optimal allocation for this Instance. As we hinted before, we are constructing the instance adversarially with an interest in exploiting the different cardinalities of the 3 groups. For this reason we are interested in group S_1 being much smaller than S_2 or S_3, so we select $|S_3| = |S_2| = |S_1|^k$, for some integer $k \geq 3$.

We can now calculate appropriate parameters A_1 and A_2. The revenue condition translates to:

$$Rev\left\{c \cdot \mathbf{p}\right\} = |S_1| \cdot A_2 + |S_2| \cdot 2A_2 = A_2 \cdot \left(|S_1| + 2|S_1|^k\right) < \frac{OPT}{32} \implies A_2 < \frac{OPT}{32\left(|S_1| + 2|S_1|^k\right)}$$

We select $\boxed{A_2 = \dfrac{OPT}{32|S_1|\left(|S_1| + 2|S_1|^k\right)}}$ and have thus met the revenue condition.

The Welfare condition translates to:

$$Welfare = |S_1|A_1 + |S_2|\left(3 + \frac{\epsilon}{2}\right)A_2 = OPT \implies$$
$$A_1 = \frac{OPT}{|S_1|} - \frac{|S_2|}{|S_1|} \cdot \left(3 + \frac{\epsilon}{2}\right)A_2 \implies$$
$$\boxed{A_1 = \frac{OPT}{|S_1|}\left(1 - \frac{6+\epsilon}{64} \cdot \frac{1}{|S_1|\left(|S_1|^{1-k} + 2\right)}\right)}$$

We will keep $|S_1|$ unspecified for now and turn our focus to multipliers $\{(1-\epsilon) \cdot c, (1+\epsilon) \cdot c\}$. We will now proceed to calculate the expected welfare of a Fixed-Price Auction for each multiplier:

- In the case of multiplier $(1-\epsilon) \cdot c$, we have constructed the instance in a way that arrival of any bidder i_3 belonging in S_3 can destabilize the whole instance, by bidding for all bundles $B_{(1,k)}$. We can upper bound the expected welfare by ignoring bidders in S_2 (all bidders in S_2 take their initial bundle). Then the random ordering and Fixed-Price Auction can be viewed as the following experiment:

1. With probability $\frac{|S_3|}{|S_1|+|S_3|} = \frac{|S_1|^k}{|S_1|+|S_1|^k}$ the first bidder of the Fixed-Price Auction is drawn from S_3, he bids for all items $B_{(1,k)}$ and the Fixed-Price Auction gets welfare $|S_1| \cdot (1-\epsilon) \cdot A_2$.

2. With probability $\frac{|S_1|}{|S_1|+|S_1|^k} \cdot \frac{|S_1|^k}{|S_1|-1+|S_1|^k}$ the first bidder is drawn from S_1 and the second bidder from S_3 resulting in an allocation with Welfare $(|S_1|-1) \cdot (1-\epsilon) \cdot A_2 + A_1$.

3. With probability $\left(\prod_{i=1}^{r} \frac{|S_1|-(i-1)}{|S_1|-(i-1)+|S_1|^k}\right) \cdot \frac{|S_1|^k}{|S_1|-r+|S_1|^k}$ the first r bidders are drawn from S_1 and the next bidder is drawn from S_3 resulting in an allocation with Welfare $(|S_1|-r) \cdot (1-\epsilon) \cdot A_2 + r \cdot A_1$.

So we can calculate the expected welfare from this procedure as:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[Welfare\right] = |S_2| \cdot \left(3 + \frac{\epsilon}{2}\right) \cdot A_2 + \\
&\sum_{r=0}^{|S_1|} \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{|S_1|-(i-1)}{|S_1|-(i-1)+|S_1|^k}\right) \cdot \frac{|S_1|^k}{|S_1|-r+|S_1|^k} \cdot \left(\left(|S_1|-r\right) \cdot (1-\epsilon) \cdot A_2 + r \cdot A_1\right) \leq \\
&\sum_{r=0}^{|S_1|} \left(\left(\frac{|S_1|}{|S_1|+|S_1|^k}\right)^r \cdot \left(\left(|S_1|-r\right) \cdot (1-\epsilon) \cdot A_2 + r \cdot A_1\right)\right) + O\left(|S_2| \cdot A_2\right) \leq \\
&\sum_{r=0}^{|S_1|} \left(\left(\frac{|S_1|}{|S_1|+|S_1|^k}\right)^r \cdot \left(|S_1| A_2 + r \cdot \epsilon \cdot A_2 + r \cdot A_1\right)\right) + O\left(|S_2| \cdot A_2\right) = \\
&|S_1| \cdot A_2 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{|S_1|}{|S_1|+|S_1|^k}\right)^{|S_1|+1}}{1 - \left(\frac{|S_1|}{|S_1|+|S_1|^k}\right)}\right) + O\left(|S_2| \cdot A_2\right) + \\
&(\epsilon \cdot A_2 + A_1) \cdot \left(\frac{\left(\frac{|S_1|}{|S_1|+|S_1|^k}\right) - (|S_1|-1) \cdot \left(\frac{|S_1|}{|S_1|+|S_1|^k}\right)^{|S_1|+1} + |S_1| \cdot \left(\frac{|S_1|}{|S_1|+|S_1|^k}\right)^{|S_1|+2}}{\left(1 - \left(\frac{|S_1|}{|S_1|+|S_1|^k}\right)\right)^2}\right) \\
&= O\left(|S_1| \cdot A_2 + |S_2| \cdot A_2 + \frac{1}{|S_1|^{k-1}} \cdot A_1\right) = O\left(\frac{OPT}{|S_1|}\right)
\end{aligned}
$$

We used in order the facts that i) $\frac{a-r}{a-r+b} < \frac{a}{a+b}\ \forall a, b > 0$ and $a > r$, ii) $\frac{b}{a-r+b} < 1\ \forall b > r$, iii) some finite sums definitions and iv) $\frac{1-a^{n+1}}{1-a} < 1$, if $0 < a < 1$. Notice that the outcome parameters occur from the contributions of bidders in $|S_2|$. To finalize this case we get:

$$
\mathbb{E}\left[Welfare\right] = O\left(\frac{OPT}{|S_1|}\right)
$$

- In the case of multiplier $(1+\epsilon) \cdot c$ things get a little more complicated. In the resulting analysis, we can now ignore all bidders in S_3 because they play no role in the outcome of the Fixed-Price Auction (bundles are priced high enough that all their utilities are negative). Calculating the expected welfare in this scenario is much more challenging because the arrival of some bidder from S_2 does not guarantee that no bidder from S_1 gets his most valuable bundle. Notice that in the current situation, all bundles $B_{(1,l)}$ will be sold after the arrival of at most $2|S_1|$ bidders from groups S_1, S_2. The problem however is that it is unlikely that many bidders from S_1 will arrive in the first $2|S_1|$, and when they arrive their desired bundle might not be available.

One way to attempt bound the expected welfare of the Fixed-Price Auction is the following:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Welfare\right] &\leq \sum_{r=0}^{|S_1|} \left(\mathbb{P}\left(\text{Exactly } r \text{ of } S_1 \text{ take their bundle}\right) \cdot r \cdot A_1\right) + |S_2| \cdot A_2 \\
&= \sum_{r=0}^{|S_1|} \sum_{l=r}^{|S_1|-1} \left(a_1 \cdot a_2 \cdot r \cdot A_1\right) + |S_2| \cdot A_2
\end{aligned}$$

where $a_2 = \mathbb{P}\left(\text{draw } l \text{ bidders out of } S_1 \text{ when drawing out of } S_1 \text{ and } S_2\right)$ and,
$a_1 = \mathbb{P}\left(r \text{ out of } l \text{ take their } B_1\right)$.

It is challenging to analytically calculate this expectation so we attempt to upper bound it using simpler tricks. The probability $\mathbb{P}\left(\text{draw } l \text{ bidders out of } S_1 \text{ when drawing out of } |S_1| + |S_2|\right)$ is described by a hypergeometric distribution with parameters $n = |S_1|, K = |S_1|, N = |S_1| + |S_2|$. With that in mind, we can apply concentration bounds for the hypergeometric distribution in order to break down the event space into two disjoint families. Consider the random variable X which follows the hypergeometric distribution that we just described. This hypergeometric distribution has mean $\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{nK}{N} = \frac{|S_1|^2}{\left(|S_1|+|S_1|^k\right)} \leq 1, \forall |S_1| > 0$ and variance $\text{Var}\left[X\right] = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1} = \frac{|S_1|^{2k+2}}{\left(\left(|S_1|+|S_1|^k\right)^3 - \left(|S_1|+|S_1|^k\right)^2\right)}$. For this reason, we will discretize the probability space around $X = 2$

1. By Chebyshev's inequality we get that:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}\left[X\right]\right| \geq a\right) \leq \frac{\text{Var}\left[X\right]}{a^2} \Rightarrow \\
&\mathbb{P}\left(X \geq 2\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}\left[X\right]\right| \geq 1\right) \leq \frac{|S_1|^{2k+2}}{\left(\left(|S_1| + |S_1|^k\right)^3 - \left(|S_1| + |S_1|^k\right)^2\right)}
\end{aligned}$$

   We can upper bound the welfare of the Fixed-Price Auction for this event family with the arbitrary bound $Welfare < OPT$.

2. On the other hand we can arbitrarily upper bound the probability $\mathbb{P}\left(X < 2\right) \leq 1$ and bound the welfare produced by the Fixed-Price Auction as $Welfare \leq 2 \cdot A_1 + O\left(|S_1|^k \cdot A_2\right)$ and as such $Welfare = O\left(\frac{OPT}{|S_1|}\right)$

By applying the formula of the conditional expectation on the discretized space we get:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Welfare\right] &= \mathbb{E}\left[Welfare | X \geq 2\right] \cdot \mathbb{P}\left(X \geq 2\right) + \mathbb{E}\left[Welfare | X < 2\right] \cdot \mathbb{P}\left(X < 2\right) \\
&\leq \frac{|S_1|^{2k+2}}{\left(\left(|S_1| + |S_1|^k\right)^3 - \left(|S_1| + |S_1|^k\right)^2\right)} \cdot OPT + O\left(\frac{OPT}{|S_1|}\right) \\
&= O\left(\frac{OPT}{|S_1|^{k-2}} + \frac{OPT}{|S_1|}\right) = O\left(\frac{OPT}{|S_1|}\right)
\end{aligned}$$

If we select $c_1 = (1-\epsilon)c, c_2 = (1+\epsilon)c$, then we have proven for any $c' \in (c_1, c_2)$ with $c' \neq c$ that a Fixed-Price Auction posting price vector $c' \cdot \mathbf{p}$ on this Instance $\mathcal{I}$ has expected Welfare that is upper bounded:

$$\boxed{\mathbb{E}\left[Welfare\right] = O\left(\frac{OPT}{|S_1|}\right)}$$

$\square$

In concluding the analysis, we have proven that there exists a constant size neighborhood of multipliers around the initial multiplier c that not only does not retain the guarantees for any Fixed-Price Auction (deterministic) but also admits a non-constant upper bound on the expected Welfare. The analysis for the $(1-\epsilon)\cdot c$ is far from tight and can surely be greatly improved. It is important to note that Expected Welfare can get arbitrarily bad because the cardinality of group S_1 can be arbitrarily selected.

Combining this result with our previous discussion about the necessity of knowing parameter a when using an a-good proportional price vector, we have reached a difficult position. On one hand, knowledge of a is both far-fetched (realistically speaking) and necessary, and on the other hand, even if we know parameter a, we shouldn't use that knowledge in order to approximate the initial multiplayer c, because the a-good proportional price vector guarantees are not maintained on multipliers belonging in some small neighborhood around c. In addition, a question that arises is what is the use of parameter a and the guarantees of the a-good proportional price vector, when any attempt to secure an approximate good solution drives us to price vectors far away from the a-good price vector.

The question we just posed mostly relates to the Mechanism Class we are trying to apply to our learning augmented framework. It seems that Mechanisms in the **Sampling & Multiplying Mechanisms** class are not well suited to handle a-good proportional price vectors. However, we can apply a simpler mechanism presented in [16] that we have already discussed in Chapter 4. Key to our following result will be the fact that now we restrict all possible prices to originate from set $\{1, 2, ..., poly\,(m)\}$. This assumption is helpful in the sense that it discretizes the search space into $O\,(\log m)$ candidate prices.

With this assumption, we can design a simple mechanism that utilizes any a a-good proportional price vector $\mathbf{p}$ and gets an $O\,(a \log m)$-approximation ratio. This mechanism simply guesses the multiplier c' and posts the resulting price vector $c' \cdot \mathbf{p}$ in a Fixed-Price Auction. The reason why this idea works is that with uniform probability $c' = c$. Formally, we present the following theorem.

Theorem 5.3.5. *A distribution $\mathcal{D}$ with knowledge of $\psi = O\,(\log m)$ that uniformly draws a multiplier for the a-good price vector and posts the resulting prices on a Fixed-Price Auction, yields an $O\,(a \log m)$ approximation to the Optimal Social Welfare.*

Proof. The proof simply follows from the fact that with probability $(O\,(\log m))^{-1}$ we multiply with the correct multiplier and by definition of the a-good prices that multiplier guarantees an a-approximation the Optimal Social Welfare. So by the law of total expectation, we get:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,[Welfare] &= \sum \mathbb{P}\left(\text{multiplier } c'\right) \cdot \mathbb{E}\left[Welfare \middle| \text{multiplier } c'\right] \\ &\geq \mathbb{P}\left(c' = c\right) \cdot \mathbb{E}\left[Welfare \middle| \text{multiplier c}\right] \\ &= \frac{1}{O\,(\log m)} \cdot \frac{OPT}{a}\end{aligned}$$

□

5.3.3 Perturbation On The a-good Price Vector

The instance we constructed in order to prove theorem 5.3.4 had an interesting dynamic. Even though optimal, the a-good price vector in this instance was fragile to grouped multiplication. On similar occasions, a breakthrough has been achieved by applying a perturbation to the instance at hand. One such occasion is the solution of linear programs using the simplex method.

In this subsection, we will investigate whether the instance's fragility can be overcome using perturbation, with our model still being the **Sampling & Multiplying Mechanisms** class. Theorem 5.3.4 motivates the questions on the flexibility of the oblivious multiplication used in the **Sampling**

& Multiplying Mechanisms. In order to further understand the limits of the a-good proportional price vectors, we will substitute the universal multiplication scheme with the perturbation scheme $(c+\boldsymbol{\epsilon}')\cdot\mathbf{p}$, where $\boldsymbol{\epsilon}_j{}' = \{+\epsilon', -\epsilon'\}$ and we will analyse the expected Welfare of a Fixed-Price Auction running with input price vector the price vector $(c+\boldsymbol{\epsilon}')\cdot\mathbf{p}$.

Theorem 5.3.6. *There exists a family of a-good price vectors $\{C\cdot\boldsymbol{P}\}$, such that for a specific price vector $c\cdot\boldsymbol{p}$ and any constant volume hypercube in $\mathbb{R}^m$ centered around $c\cdot\boldsymbol{p}$, there exists a class of instances of the problem $\mathcal{I}$ for which a Fixed-Price Auction posting a price vector $\boldsymbol{p}'$ from the hypercube's nodes yields arbitrarily small $\mathbb{E}\left[Welfare\right]$, where the expectation is taken over the random order of the bidders.*

Proof. We will be extending the instance in theorem 5.3.4 with some extra restrictions in order to construct a situation where perturbation fails on any perturbation. The new valuation table for the 3 sets of bidders in this example will be the following:

v_i	$B_{(1,k_1)}$	$B_{(1,k_1')}$	$B_{(1,k_1)}\cup B_{(1,k_1')}$	$B_{(2,k_2)}$	$B_{(2,k_2')}$	$B_{(2,k_2)}\cup B_{(2,k_2')}$
$i_{(1,k_1)}$	A_1	0	A_1	0	0	0
$i_{(2,k_2)}$	$2A_2$	$2A_2$	$2A_2$	$\left(3+\frac{\epsilon}{2}\right)A_2$	0	$\left(3+\frac{\epsilon}{2}\right)A_2$
i_3	$(1-\epsilon)A_2$	$(1-\epsilon)A_2$	$2(1-\epsilon)A_2$	$\mathbf{2(1-\epsilon)A_2}$	$\mathbf{2(1-\epsilon)A_2}$	$\mathbf{4(1-\epsilon)A_2}$
p	A_2	A_2	$2A_2$	$2A_2$	$2A_2$	$4A_2$

Table 5.3: Valuations of candidate bidders from the 3 groups.

The only differences with the previous instance's valuations are the emboldened valuations of bidders in S_3. In line with the aforementioned analysis, we will be conditioning the execution of the Fixed-Price Auction regarding the first arrival from S_3. In our new instance, the first bidder from group S_3 that participates in the Fixed-Price Auction will bid for all bundles $B_{(1,l)}$ and $B_{(2,l)}$ that had their price tag lowered by $-\epsilon'$. The reason why this is important is that after this arrival, no bidder $i_{(2,k_2)}$ will be interested in bidding for her own bundle $B_{(2,k_2)}$ (this would happen if $B_{(2,k_2)}$ had its price tag lowered) and thus the remainder problem is a tweaked sub-instance of multiplication case $(1+\epsilon)\cdot c$, for which we have already established an upper bound. We say tweaked because we need to account for the decrease of the cardinality of the group S_2 after the first arrival from S_3. For this reason we change the cardinalities of the 3 groups as $|S_2| = |S_1|^k$ and $|S_3| = |S_1|^{2k}$, for some integer $k > 3$.

We need to introduce a new random variable X that describes the first success in sampling without a replacement (notice that the following technique could also be applied in theorem 5.3.4 for the case of multiplier $(1-\epsilon)c$, yielding our original results). This random variable follows the Negative Hypergeometric distribution with parameters $r = 1, N = |S_1|^{2k} + |S_1|^k + |S_1|, K = |S_1|^k + |S_1|$. The expected value of X is $\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{r\cdot K}{N-K+1} = \frac{|S_1|^k+|S_1|}{|S_1|^{2k}+1} < 1, \forall |S_1| > 1$ and the variance is $\text{Var}\left[X\right] = \frac{r\cdot K\cdot(N+1)\cdot(N-K-r+1)}{(N-K+1)^2\cdot(N-K+2)} = \frac{\left(|S_1|^k+|S_1|\right)\cdot\left(|S_1|^{2k}+|S_1|^k+|S_1|+1\right)\cdot|S_1|^{2k}}{\left(|S_1|^{2k}+1\right)^2\cdot\left(|S_1|^{2k}+2\right)} = O\left(\frac{1}{|S_1|^k}\right)$.

Similarly to our previous task, our main interest is how many bidders from S_1 get their own bundle in the Fixed-Price Auction. For simplicity in our calculations, we bound the Welfare of the Fixed-Price Auction before the first arrival from S_3 with $X\cdot A_1$ which is the best scenario Welfare-wise, where all bidders arriving before the first bidder from S_3 belong in class S_1 and get their own bundle. After the first arrival from S_3, we have a situation that is similar to case $(1+\epsilon)\cdot c$ that arose in the proof of theorem 5.3.4, but perhaps with a smaller group of bidders S_2. The decrease in the size of the group is (probabilistically) a small constant and can be ignored, so we can apply the upper bound we proved in theorem 5.3.4.

We will be applying Chebyshev's inequality to the random variable X for $a = 1$. This yields:

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 1) = O\left(\frac{1}{|S_1|^k}\right)$$

We will use again the arbitrary bounds $\mathbb{P}(X < 2) \leq 1$ and $Welfare \leq OPT$ if $X \geq 2$. We thus get the following approximation ratio:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Welfare] &= \mathbb{E}\left[Welfare \middle| X \geq 2\right] \cdot \mathbb{P}(X \geq 2) + \mathbb{E}\left[Welfare \middle| X < 2\right] \cdot \mathbb{P}(X < 2) \\
&\leq O\left(\frac{1}{|S_1|^k}\right) \cdot OPT + A_1 + O\left(\frac{OPT}{|S_1|}\right) \\
&= O\left(\frac{OPT}{|S_1|^k} + \frac{OPT}{|S_1|}\right) = O\left(\frac{OPT}{|S_1|}\right)
\end{aligned}$$

□

5.4 Synopsis, Notes, and Future Work

Using mechanisms from the **Sampling & Multiplying Mechanisms** class, we have so far proven a constant approximation ratio when a proportional optimal price vector is given as input for the Additive Combinatorial Auctions and a constant approximation ratio when a proportional supporting price vector of the Optimal Allocation is given as input for the XOS Combinatorial Auctions. We have also proven that any mechanism in this class can not yield positive results when the input is a proportional price vector that supports the allocation. If we select the input for our mechanism to be an a-good price vector, we prove that the Welfare guarantees of this input are not maintained around a small neighborhood of the input. We also study perturbated a-good price vectors, proving that they too do not maintain the Welfare guarantees. We discuss and prove that a proportional a-good price vector can not be safely applied to some Mechanism from the **Sampling & Multiplying Mechanisms** class without knowledge of parameter a. Moving our attention away from **Sampling & Multiplying Mechanisms** class, we design a mechanism that has an $O(a \log m)$ approximation ratio when the input is a proportional a-good price vector.

Within this work have prospered different ideas and roads towards applying the learning augmented framework on Combinatorial Auctions. We will now present some of these ideas, highlighting our intuition and answers.

We have already discussed that a price vector with Fixed-Price Auction revenue guarantees of the form $Rev\{c \cdot p\} \geq \frac{OPT}{a}$ together with knowledge of a suffices to prove an $O(a)$-approximation ratio. One idea is to relax this guarantee to be in expectation, meaning a price vector **p** such that for any Fixed-Price Auction posting prices in **p** it holds that $\mathbb{E}[Rev\{c \cdot p\}] \geq \frac{OPT}{a}$. We can prove that the guarantee in expectation is equivalent to the deterministic guarantee. We can construct this proof by observing that $\mathbb{E}[Rev\{c \cdot p\}] \geq \frac{OPT}{a}$ implies that $\exists$ an ordering of the bidders such that $Rev\{c \cdot p\} \geq \frac{OPT}{a}$ and as such we can still apply lemma 4.2.1 and get an $O(a)$-approximation ratio.

Another idea is to observe prices that are a-good and marketing clearing, with market clearing meaning that $\exists$ an ordering of the bidders for which the Fixed-Price Auction using these prices guarantees both $Welfare \geq \frac{OPT}{a}$ and also that all the items are sold. Similarly, we can get input of a-good prices together with the probability of the items being sold in the Fixed-Price Auction. Both these ideas do not seem to help us overcome the issues of a-good prices we discussed already, however they entertain different types of information that can be of use.

In future work, we can observe how well proportionality matches the price vector that corresponds to the prices stated in lemma 4.2.2 (in the Subadditive setting). Our intuition is that the behavior of these prices will be similar to that of supporting prices in the XOS setting, but again knowledge of parameter a might be needed.

We have discussed the importance of parameter a over different inputs and settings. This parameter in some sense can be seen as the error of a prediction vector. With this viewpoint, we seem to have concluded the fact that it is difficult to move Combinatorial Auctions with predictions forward, without knowledge of the error (or maybe an upper bound of the error). On the existing settings, one can easily prove that the mechanism proposed in [6], with input predictions of the prices relating to lemma 4.2.2 and some bound of the error of the predictions, can be adjusted to get an approximation ratio of $O(\log\log m \cdot (\log\log \eta)^2)$ on the Subadditive problem and an approximation ratio of $O(\log\log \eta)^2)$ on the Submodular problem.

Finally, the setting proposed in [50] for the Single Item Revenue Maximization problem with predictions is interesting. Specifically, the technique of designing a mechanism that works great as long as the error is smaller than a hyperparameter seems to be connected to the problem we are tackling in this thesis. One approach to incorporate this in our framework is to run some iterative mechanism that on each iteration with small probability performs some allocation rule that works for bounded error, or otherwise refines the current estimation for the error and proceeds to the next iteration.

We conclude this thesis with our belief that the techniques for a successful application of the learning augmented framework on the problem of Combinatorial Auctions already exist, and future research will reach fruitful results!

Bibliography

[1] P. Agrawal, E. Balkanski, V. Gkatzelis, T. Ou, and X. Tan, "Learning-augmented mechanism design: Leveraging predictions for facility location," 2022. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2204.01120

[2] S. Agrawal, M. Zadimoghaddam, and V. Mirrokni, "Proportional allocation: Simple, distributed, and diverse matching with high entropy," in *Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learning*, ser. Proceedings of Machine Learning Research, J. Dy and A. Krause, Eds., vol. 80. PMLR, 10–15 Jul 2018, pp. 99–108. [Online]. Available: https://proceedings.mlr.press/v80/agrawal18b.html

[3] *Algorithmic Game Theory.* Cambridge University Press, 2007.

[4] M. Almanza, F. Chierichetti, S. Lattanzi, A. Panconesi, and G. Re, "Online facility location with multiple advice," in *Advances in Neural Information Processing Systems*, M. Ranzato, A. Beygelzimer, Y. Dauphin, P. Liang, and J. W. Vaughan, Eds., vol. 34. Curran Associates, Inc., 2021, pp. 4661–4673. [Online]. Available: https://proceedings.neurips.cc/paper/2021/file/250473494b245120a7eaf8b2e6b1f17c-Paper.pdf

[5] A. Antoniadis, T. Gouleakis, P. Kleer, and P. Kolev, "Secretary and online matching problems with machine learned advice," *CoRR*, vol. abs/2006.01026, 2020. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2006.01026

[6] S. Assadi, T. Kesselheim, and S. Singla, "Improved truthful mechanisms for subadditive combinatorial auctions: Breaking the logarithmic barrier," *CoRR*, vol. abs/2010.01420, 2020. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2010.01420

[7] S. Assadi and S. Singla, "Improved truthful mechanisms for combinatorial auctions with submodular bidders," in *2019 IEEE 60th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, 2019, pp. 233–248.

[8] Y. Azar, D. Panigrahi, and N. Touitou, "Online graph algorithms with predictions," *CoRR*, vol. abs/2112.11831, 2021. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2112.11831

[9] É. Bamas, A. Maggiori, and O. Svensson, "The primal-dual method for learning augmented algorithms," *CoRR*, vol. abs/2010.11632, 2020. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2010.11632

[10] *Beyond the Worst-Case Analysis of Algorithms.* Cambridge University Press, 2021.

[11] D. Buchfuhrer, S. Dughmi, H. Fu, R. Kleinberg, E. Mossel, M. Schapira, Y. Singer, and C. Umans, "Inapproximability for vcg-based combinatorial auctions," 01 2010, pp. 518–536.

[12] X. Chen, X. Deng, and S. Teng, "Settling the complexity of computing two-player nash equilibria," *CoRR*, vol. abs/0704.1678, 2007. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/0704.1678

[13] E. H. Clarke, "Multipart pricing of public goods," *Public Choice*, vol. 11, pp. 17–33, 1971. [Online]. Available: http://www.jstor.org/stable/30022651

[14] C. Daskalakis, P. W. Goldberg, and C. H. Papadimitriou, "The complexity of computing a nash equilibrium," *SIAM Journal on Computing*, vol. 39, no. 1, pp. 195–259, 2009. [Online]. Available: https://doi.org/10.1137/070699652

[15] S. Dobzinski, "Two randomized mechanisms for combinatorial auctions," vol. 4627, 01 2007, pp. 89–103.

[16] ——, "Breaking the logarithmic barrier for truthful combinatorial auctions with submodular bidders," *CoRR*, vol. abs/1602.05914, 2016. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1602.05914

[17] S. Dobzinski and S. Dughmi, "On the power of randomization in algorithmic mechanism design," *CoRR*, vol. abs/0904.4193, 2009. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/0904.4193

[18] S. Dobzinski and N. Nisan, "Limitations of vcg-based mechanisms," *Combinatorica*, vol. 31, pp. 379–396, 01 2011.

[19] S. Dobzinski, N. Nisan, and M. Schapira, "Truthful randomized mechanisms for combinatorial auctions," in *Proceedings of the Thirty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, ser. STOC '06. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2006, p. 644–652. [Online]. Available: https://doi.org/10.1145/1132516.1132607

[20] ——, "Approximation algorithms for combinatorial auctions with complement-free bidders," *Mathematics of Operations Research*, vol. 35, no. 1, pp. 1–13, 2010. [Online]. Available: http://www.jstor.org/stable/40538414

[21] S. Dobzinski and J. Vondrák, "The computational complexity of truthfulness in combinatorial auctions," *CoRR*, vol. abs/1202.2789, 2012. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1202.2789

[22] P. Dütting, T. Kesselheim, and B. Lucier, "An o(log log m) prophet inequality for subadditive combinatorial auctions," *CoRR*, vol. abs/2004.09784, 2020. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2004.09784

[23] U. Feige, "On maximizing welfare when utility functions are subadditive," *SIAM Journal on Computing*, vol. 39, no. 1, pp. 122–142, 2009. [Online]. Available: https://doi.org/10.1137/070680977

[24] U. Feige and J. Vondrak, "Approximation algorithms for allocation problems: Improving the factor of 1 - 1/e," in *2006 47th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'06)*, 2006, pp. 667–676.

[25] D. Fotakis, E. Gergatsouli, T. Gouleakis, and N. Patris, "Learning augmented online facility location," *CoRR*, vol. abs/2107.08277, 2021. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2107.08277

[26] A. V. Goldberg, J. D. Hartline, and A. Wright, "Competitive auctions and digital goods," in *Proceedings of the Twelfth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, ser. SODA '01. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001, p. 735–744.

[27] T. Groves, "Incentives in teams," *Econometrica*, vol. 41, no. 4, pp. 617–631, 1973. [Online]. Available: http://www.jstor.org/stable/1914085

[28] S. H. Jiang, E. Liu, Y. Lyu, Z. G. Tang, and Y. Zhang, "Online facility location with predictions," *CoRR*, vol. abs/2110.08840, 2021. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2110.08840

[29] Z. Jiang, D. Panigrahi, and K. Sun, "Online algorithms for weighted paging with predictions," *CoRR*, vol. abs/2006.09509, 2020. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2006.09509

[30] S. Khot, R. J. Lipton, E. Markakis, and A. Mehta, “Inapproximability results for combinatorial auctions with submodular utility functions,” in *Internet and Network Economics*, X. Deng and Y. Ye, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005, pp. 92–101.

[31] V. Klee and G. J. Minty, “How good is the simplex algorithm,” 1970.

[32] P. Krysta and B. Vöcking, “Online mechanism design (randomized rounding on the fly),” in *Automata, Languages, and Programming*, A. Czumaj, K. Mehlhorn, A. Pitts, and R. Wattenhofer, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012, pp. 636–647.

[33] R. Lavi, A. Mu’alem, and N. Nisan, “Towards a characterization of truthful combinatorial auctions,” in *44th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 2003. Proceedings.*, 2003, pp. 574–583.

[34] B. Lehmann, D. Lehmann, and N. Nisan, “Combinatorial auctions with decreasing marginal utilities,” *Games and Economic Behavior*, vol. 55, pp. 270–296, 01 2001.

[35] T. Lykouris and S. Vassilvitskii, “Competitive caching with machine learned advice,” *CoRR*, vol. abs/1802.05399, 2018. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1802.05399

[36] A. Meyerson, “Online facility location,” in *Proceedings 42nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 2001, pp. 426–431.

[37] V. Mirrokni, M. Schapira, and J. Vondrák, “Tight information-theoretic lower bounds for welfare maximization in combinatorial auctions,” 01 2008, pp. 70–77.

[38] B. Moseley, S. Vassilvitskii, S. Lattanzi, and T. Lavastida, “Online scheduling via learned weights,” in *SODA 2020*, 2020.

[39] J. F. Nash, “Equilibrium points in <i>n</i>-person games,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 36, no. 1, pp. 48–49, 1950. [Online]. Available: https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.36.1.48

[40] N. Nisan and A. Ronen, “Computationally feasible vcg mechanisms,” *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 29, 01 2004.

[41] C. Papadimitriou, M. Schapira, and Y. Singer, “On the hardness of being truthful,” in *2008 49th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 2008, pp. 250–259.

[42] M. Purohit, Z. Svitkina, and R. Kumar, “Improving online algorithms via ml predictions,” in *Advances in Neural Information Processing Systems*, S. Bengio, H. Wallach, H. Larochelle, K. Grauman, N. Cesa-Bianchi, and R. Garnett, Eds., vol. 31. Curran Associates, Inc., 2018. [Online]. Available: https://proceedings.neurips.cc/paper/2018/file/73a427badebe0e32caa2e1fc7530b7f3-Paper.pdf

[43] D. Rohatgi, “Near-optimal bounds for online caching with machine learned advice,” *CoRR*, vol. abs/1910.12172, 2019. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1910.12172

[44] T. Roughgarden, “Beyond worst-case analysis,” *CoRR*, vol. abs/1806.09817, 2018. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1806.09817

[45] D. Shahar, “An impossibility result for truthful combinatorial auctions with submodular valuations,” *CoRR*, vol. abs/1011.1830, 2010. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1011.1830

[46] D. A. Spielman and S. Teng, “Smoothed analysis of algorithms: Why the simplex algorithm usually takes polynomial time,” *CoRR*, vol. cs.DS/0111050, 2001. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/cs/0111050

[47] W. Vickrey, “Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders,” *The Journal of Finance*, vol. 16, no. 1, pp. 8–37, 1961. [Online]. Available: http://www.jstor.org/stable/2977633

[48] J. Vondrák, “Optimal approximation for the submodular welfare problem in the value oracle model,” 05 2008, pp. 67–74.

[49] A. Wei, “Better and simpler learning-augmented online caching,” *CoRR*, vol. abs/2005.13716, 2020. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2005.13716

[50] C. Xu and P. Lu, “Mechanism design with predictions,” 2022. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2205.11313