



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Σχεδίαση Κατανεμημένων Ελεγκτών για Βέλτιστη Συμφωνία Μη Γραμμικών Πρακτόρων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας ΕΜΠ

Αθήνα, Νοέμβριος 2022



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Σχεδίαση Κατανεμημένων Ελεγκτών για Βέλτιστη Συμφωνία Μη Γραμμικών Πρακτόρων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 8η Νοεμβρίου 2022.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας ΕΜΠ

.....
Κωνσταντίνος Τζαφέστας
Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Αντώνης Αλεξανδρίδης
Καθηγητής Παν. Πατρών

Αθήνα, Νοέμβριος 2022



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

.....
Γεώργιος Βασιλείου

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

8 Νοεμβρίου 2022

Copyright © – All rights reserved. Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Γεώργιος Βασιλείου, 2022.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΔΗΛΩΣΗ ΜΗ ΛΟΓΟΚΛΟΠΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΗΨΗΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ενυπογράφως ότι είμαι αποκλειστικός συγγραφέας της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, για την ολοκλήρωση της οποίας κάθε βοήθεια είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται λεπτομερώς στην εργασία αυτή. Έχω αναφέρει πλήρως και με σαφείς αναφορές, όλες τις πηγές χρήσης δεδομένων, απόψεων, θέσεων και προτάσεων, ιδεών και λεκτικών αναφορών, είτε κατά κυριολεξία είτε βάσει επιστημονικής παράφρασης. Αναλαμβάνω την προσωπική και ατομική ευθύνη ότι σε περίπτωση αποτυχίας στην υλοποίηση των ανωτέρω δηλωθέντων στοιχείων, είμαι υπόλογος έναντι λογοκλοπής, γεγονός που σημαίνει αποτυχία στην Πτυχιακή μου Εργασία και κατά συνέπεια αποτυχία απόκτησης του Τίτλου Σπουδών, πέραν των λοιπών συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων. Δηλώνω, συνεπώς, ότι αυτή η Πτυχιακή Εργασία προετοιμάστηκε και ολοκληρώθηκε από εμένα προσωπικά και αποκλειστικά και ότι, αναλαμβάνω πλήρως όλες τις συνέπειες του νόμου στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής άλλης πνευματικής ιδιοκτησίας.

Περίληψη

Στην κατανεμημένη βελτιστοποίηση πολυπρακτορικών συστημάτων, δίκτυο ομότιμων κόμβων συνεργάζεται για την επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης γνωστό μόνο από την σύνθεση τοπικών προβλημάτων και όχι σε κάποιον μεμονωμένο πράκτορα. Η πρόσφατη ανάπτυξη αποκεντροποιημένων συστημάτων ευρείας κλίμακας και η ταυτόχρονη συστηματική μελέτη χαρακτηριστικών σύγκλισης και σθεναρότητας μεγάλου εύρους αλγορίθμων έχει σχηματίσει μια ευρεία βιβλιογραφία βελτιστοποίησης πρακτόρων, απουσία δυναμικής συμπεριφοράς. Σε αυτή την εργασία, επιλύεται το πρόβλημα προσεγγιστικής, βέλτιστης συμφωνίας για μη γραμμικούς πράκτορες συνεχούς χρόνου με χρήση υστερημένων, δειγματοληπτούμενων μετρήσεων από γείτονες. Για αυτό τον σκοπό ορίζουμε κατάλληλες βοηθητικές μεταβλητές οι οποίες μετατρέπουν το πρόβλημα βέλτιστης συμφωνίας σε πρόβλημα ρύθμισης των μεταβλητών αυτών. Αυτό το πρόβλημα ρύθμισης μπορεί εν συνεχεία να επιλυθεί χρησιμοποιώντας κλασσικές μεθόδους σταθεροποίησης μη γραμμικών συστημάτων. Οι μετρήσεις ενσωματώνονται με χρήση κατάλληλων συναρτήσεων που εγγυώνται την συνέχεια και διαφορισιμότητα των βοηθητικών μεταβλητών. Επιπλέον, μελετάται το επαγόμενο, διακριτού χρόνου σύστημα το οποίο έχει την μορφή του καθιερωμένου αλγορίθμου κατάβασης βαθμίδας με σταθερό βήμα υπό την επίδραση φραγμένων διαταραχών. Σαν ενδιαμέσο αποτέλεσμα αποδεικνύεται η σθεναρότητα του αλγορίθμου σε τέτοιου είδους διαταραχές.

Θεωρούμε την περίπτωση ισχυρά κυρτού κόστους και επικοινωνίας σε δίκτυο με καθυστερήσεις. Αναπτύσσουμε εκφράσεις του ρυθμού σύγκλισης και σφάλματος μόνιμης κατάστασης συναρτήσει των σχεδιαστικών παραμέτρων του προβλήματος.

Λέξεις Κλειδιά

Κατανεμημένη βελτιστοποίηση, Κυρτή βελτιστοποίηση, Συμφωνία, Κατάβαση Βαθμίδας, Μη-γραμμικός Έλεγχος, Ρυθμός Σύγκλισης, Καθυστερήσεις Επικοινωνίας.

Abstract

Distributed optimization of multi-agent systems concerns a network of peer nodes cooperating to solve an optimization problem known only by the synthesis of local criteria and not to any one agent. Recent developments in large-scale distributed systems and simultaneous interest in the convergence and robustness of a wide variety of optimization methods has created substantial bibliography for agents without internal dynamics. In this thesis, we endeavor to solve the problem of approximate, optimal consensus for continuous-time, nonlinear agents with the use of delay, sampled measurements from neighbours. To this end, we define a set of auxiliary variables which transform the problem of optimal consensus to one of variable regulation. This regulation problem can then be solved with classical methods of stabilization for nonlinear systems. The measurements are integrated with the use of auxiliary functions that guarantee the continuity and differentiability of variables. Furthermore, we study the induced discrete-time system which resembles the established gradient descent algorithm with constant stepsize under bounded disturbances. As an intermediate result, we prove the robustness of the aforementioned algorithm to these disturbances.

We consider the domain of strongly convex costs and communications through a network with delays. We develop expressions for the convergence rate and steady state errors as functions of controllable problem parameters.

Keywords

Distributed optimization, Convex optimization, Consensus, Gradient Descent, Nonlinear Control, Convergence rate, Communication delays.

στην οικογένειά μου

Ευχαριστίες

Αυτή η εργασία δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την αμέριστη υποστήριξη πολλών σημαντικών προσώπων, στα οποία οφείλω απεριόριστη ευγνωμοσύνη. Ιδιαίτερα, θα ήθελα πρώτα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Χαράλαμπο Ψυλλάκη για την εμπιστοσύνη και διαρκή καθοδήγηση που προσέφερε καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου. Συχνά οι προτάσεις του αποτέλεσαν μοναδικό σηματοδότη προόδου και πάντα ενθάρρυναν την σε βάθος εξερεύνηση ιδεών και αποτελεσμάτων της εργασίας. Επιπλέον, ευχαριστώ του γονείς μου, Ηλία και Αναστασία, για την εξαιρετική κατανόηση και υποστήριξη που προσέφεραν. Από την πρώτη τους λέξη με ενθάρρυναν να κυνηγήσω ένα θέμα που αγαπώ και αυτή η σιγουριά πάντα με καθησύχαζε. Τέλος, προσφέρω όλη την αγάπη μου στην αδερφή μου και στους φίλους και συναδέλφους που στάθηκαν δίπλα μου όλα τα χρόνια και μαζί τους έχω μοιραστεί τις πιο ευχάριστες αναμνήσεις της φοιτητικής ζωής.

Αθήνα, Νοέμβριος 2022

Γεώργιος Βασιλείου

Περιεχόμενα

| | |
|--|-----------|
| Περίληψη | 1 |
| Abstract | 2 |
| Ευχαριστίες | 5 |
| 1 Εισαγωγή | 11 |
| 1.1 Αντικείμενο της Διπλωματικής Εργασίας | 13 |
| 1.2 Συγγενείς Εργασίες | 15 |
| 1.2.1 Τμηματικές μέθοδοι βαθμίδων | 16 |
| 1.2.2 Αλγόριθμοι κατανεμημένης κατάβασης βαθμίδων | 17 |
| 1.2.3 Αλγόριθμοι σταθερού βήματος | 18 |
| 1.2.4 Βέλτιστη Συμφωνία Πρακτόρων με Δυναμική | 19 |
| 1.3 Οργάνωση της Εργασίας | 20 |
| 1.4 Συμβολογραφία | 20 |
| 2 Θεωρητικό Υπόβαθρο | 23 |
| 2.1 Κατανεμημένη και Κυρτή Βελτιστοποίηση | 24 |
| 2.1.1 Περιορισμός Μοντέλου σε Κυρτές Συναρτήσεις | 26 |
| 2.1.2 Κριτήρια Βελτιστότητας | 31 |
| 2.1.3 Υπαρξη Ελαχίστου | 35 |
| 2.1.4 Χαρακτηρισμός Δεύτερης Παραγώγου | 36 |
| 2.1.5 Κλάση Τοπικών Προβλημάτων | 37 |
| 2.2 Αλγεβρική Θεωρία Γράφων | 39 |
| 2.3 Αλγόριθμος Κατάβασης Βαθμίδας | 41 |
| 2.3.1 Αλληλεπίδραση Στόχων Συμφωνίας και Βελτιστοποίησης | 42 |
| 2.3.2 Συσσωρευμένο Κριτήριο Κόστους | 43 |
| 2.3.3 Απλοποίηση Γράφων με Καθυστερήσεις | 44 |
| 3 Μέθοδος Βέλτιστης Συμφωνίας | 51 |
| 3.1 Πρόβλημα Προσεγγιστικής, Βέλτιστης Συμφωνίας | 52 |
| 3.2 Σύγκλιση σε Σημείο Ισορροπίας | 55 |
| 3.2.1 Προσδιορισμός Συνάρτησης Φράγματος | 57 |
| 3.2.2 Προσδιορισμός Παραμέτρων γ, ϵ_{d+1} | 59 |
| 3.2.3 Επαλήθευση Ιδιοτιμών του P | 61 |
| 3.2.4 Ρυθμός Σύγκλισης Εκτιμήσεων | 66 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.3 | Απόκλιση από Σημείο Βελτιστότητας | 68 |
| 3.3.1 | Διάσπαση Ιδιοτιμών Πίνακα $\frac{W+W^T}{2}$ | 69 |
| 3.4 | Προσομοίωση Πειραματικών Διατάξεων | 72 |
| 3.5 | Μεταξύ Στιγμών Δειγματοληψίας | 74 |
| 3.6 | Συμπέρασμα | 77 |
| 4 | Σχεδίαση Μη-γραμμικών Ελεγκτών | 79 |
| 4.1 | Fully Actuated Surface Vesel | 79 |
| 4.1.1 | Σύστημα Βοηθητικών Μεταβλητών | 81 |
| 4.2 | Σχεδίαση Ελεγκτή | 81 |
| 4.2.1 | Υπολογισμός Εικονικών Εισόδων | 83 |
| 4.2.2 | Υπολογισμός Πραγματικών Εισόδων | 83 |
| 4.3 | Προσομοίωση Συστημάτων | 84 |
| 4.4 | Συμπέρασμα | 86 |
| 5 | Επίλογος | 91 |
| 5.1 | Σύνοψη | 91 |
| 5.2 | Μελλοντικές Επεκτάσεις | 92 |
| | Βιβλιογραφία | 99 |

Κατάλογος Σχημάτων

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Σύνδεση πρακτόρων σε δακτυλίδι και αναπαράσταση ροής ενδιάμεσων μεταβλητών κατά μια επανάληψη του κανόνα μεταβολής εκτίμησης. | 17 |
| 2.1 | Εμφωλιασμένες Οικογένειες Μη-Γραμμικών Προβλημάτων. | 25 |
| 2.2 | Κατασκευή επεκταμένου γράφου χωρίς καθυστερήσεις. | 45 |
| 2.3 | Γράφος επεκταμένης κατάστασης με αναπαράσταση της αλληλεπίδρασης υπολογιστικών και μη κόμβων. | 47 |
| 3.1 | Ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα P για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου σ . . . | 65 |
| 3.2 | Μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα P για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου σ . . . | 66 |
| 3.3 | Ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα P ως συνάρτηση του επιλεγμένου βήματος a . . | 67 |
| 3.4 | Σφάλμα μόνιμης κατάστασης του σημείου ισορροπίας ως συνάρτηση επιλεγμένου βήματος. | 71 |
| 3.5 | Μοντελοποίηση επικοινωνίας πρακτόρων διαμέσου πίνακα μετάβασης. | 73 |
| 3.6 | Σύγκλιση συσσωρευμένου διανύσματος εξόδου για βήμα $a = 10^{-3}$ και διαφορετικά φράγματα καθυστερήσεων. | 73 |
| 3.7 | Μεταβολή της πρώτης συνιστώσας των εκτιμήσεων πρακτόρων $i = 1, 2$ και 3 . . | 74 |
| 3.8 | Απόκλιση εκτιμήσεων από σημείο ισορροπίας \mathbf{x}_{eq} συναρτήσει της τάξης μεγέθους $O(\epsilon/a)$ | 75 |
| 3.9 | Απόκλιση εκτιμήσεων από το βέλτιστο σημείο \mathbf{x}^* συναρτήσει της τάξης μεγέθους $O(\epsilon/a)$ | 75 |
| 3.10 | Χρονική απόκριση των εκτιμήσεων πρακτόρων και μεταβατική κατάσταση. . . | 76 |
| 3.11 | Χώρος κατάστασης εκτιμήσεων. | 76 |
| 4.1 | Συμβατική ονομασία και συμβολισμός μεταβλητών κατάστασης για την περιγραφή κίνησης θαλάσσιου σκάφους. | 80 |
| 4.2 | Δίκτυο επικοινωνίας μεταξύ των πρακτόρων. | 84 |
| 4.3 | Σύγκλιση τοπικών και συσσωρευμένης μεταβλητής κατάστασης πλησίον βέλτιστου σημείου συμφωνίας (FASV μοντέλο). | 85 |
| 4.4 | Ρύθμιση βοηθητικών μεταβλητών $\eta_i(t)$ για τους πράκτορες. | 85 |
| 4.5 | Μεταβολή συνιστωσών εκτίμησης των πρακτόρων FASV (συνεχίζεται). | 86 |
| 4.5 | Μεταβολή συνιστωσών εκτίμησης των πρακτόρων FASV (συνεχίζεται). | 87 |
| 4.5 | Μεταβολή συνιστωσών εκτίμησης των πρακτόρων FASV. | 87 |
| 4.6 | Νόμοι ελέγχου των πρακτόρων. | 88 |
| 4.7 | Σφάλμα τελικής κατάστασης εκτιμήσεων ως συνάρτηση βήματος. | 89 |
| 4.8 | Πειραματική αξιολόγηση του κριτηρίου ευστάθειας. | 89 |

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σκοπός αυτή της εργασίας είναι η διερεύνηση του αλγορίθμου κατανεμημένης κατάβασης βαθμίδας (Distributed Gradient Descent, DGD) και της εφαρμογής του σε συνεχούς χρόνου, μη-γραμμικά συστήματα για την επίτευξη προσεγγιστικής βελτιστοποίησης. Η εργασία πλαισιώνεται ως μεθοδολογία ενσωμάτωσης του DGD σε τοπικούς ελεγκτές σταθεροποίησης μη-γραμμικών συστημάτων προς μεταβολή του ελεγκτικού τους στόχου χωρίς την υποχρέωση σημαντικού ανασχεδιασμού. Ευελπιστούμε με αυτόν τον τρόπο να ανάγουμε τον σχεδιαστικά περίπλοκο στόχο της (προσεγγιστικής) βελτιστοποίησης στον απλούστερο σχεδιασμό ελεγκτών (πρακτικής) σταθεροποίησης μη-γραμμικών συστημάτων ¹.

Η κλασσική (κεντροποιημένη) θεωρία ελέγχου συνίσταται από μοναδικό ελεγκτή που δρα επί δυναμικού συστήματος (φυσικού ή μηχανικού) με σκοπό την οδήγηση του συστήματος σε κάποια επιθυμητή κατάσταση. Ο στόχος ελέγχου μπορεί να περιλαμβάνει, μεταξύ άλλων, σταθεροποίηση σε σημείο ισορροπίας, παρακολούθηση τροχιάς και ελαχιστοποίηση σφαλμάτων. Συχνά, λαμβάνονται υπ' όψη και κριτήρια ευστάθειας, απόρριψης διαταραχών, βελτιστότητας και ταχύτητας απόκρισης που επηρεάζουν την σχεδίαση και αξιολόγηση των ελεγκτών. Το σύνολο των εργαλείων που έχουν αναπτυχθεί, από τον *φυγοκεντρικό ρυθμιστή* του J. Watt (18ος αι.) μέχρι και τους κανόνες ρύθμισης αναλογικών - ολοκληρωτικών - παραγωγικών (Proportional - Integral - Derivative, PID) ελεγκτών των J. Ziegler, N. Nicols (δεκαετίες 1940-1950), αποτελούν την επονομαζόμενη κλασσική θεωρία ελέγχου [1].

Οι δεκαετίες 1960 έως 1980 είδαν την γέννηση της λεγόμενης *σύγχρονης* θεωρίας ελέγχου, στην οποία η χρήση ψηφιακών υπολογιστικών μεθόδων προώθησε την ανάλυση συστημάτων πολλών εισόδων - εξόδων στο πεδίο του χρόνου. Σε αυτήν την περίοδο οφείλεται και η περιγραφή συστημάτων διαμέσου μεταβλητών κατάστασης οι οποίες κωδικοποιούν την ολόενα αυξανόμενη πολυπλοκότητα εγκαταστάσεων και απαιτήσεων ακρίβειας, κόστους και ταχύτητας. Εν συνεχεία η σύγχρονη θεωρία ελέγχου επικεντρώθηκε σε ερωτήματα βελτιστότητας σε ντετερμινιστικά και στοχαστικά συστήματα, στο σθεναρό έλεγχο και άλλα συναφή θέματα.

Όμως η κλίμακα ενσωμάτωσης των σύγχρονων μηχανικών συστημάτων σε συνδυασμό με την έντονα συνδεδεμένη και οδηγούμενη από δεδομένα φύση των ολοκληρωμένων μεθόδων παραγωγής προδιαγράφει [2] μια διαφορετική μορφή ελεγκτών ευρείας κλίμακας του άμε-

¹Καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας, θα μας απασχολήσουν οι έννοιες προσεγγιστικής συμφωνίας και βελτιστότητας και πρακτικής ευστάθειας. Για ευκολία ανάγνωσης, οι προσδιορισμοί αυτοί θα παραλείπονται συνήθως, εκτός αν απαιτείται διευκρίνιση και σχολιασμός τους. Πλήρεις ορισμοί των όρων δίνονται στο Κεφάλαιο 2.

σου μέλλοντος. Στα κατανεμημένα (distributed) σχήματα ελέγχου, μεγάλος αριθμός από αυτόνομα συστήματα (καλούμενα πράκτορες, agents) συντονίζονται από πληθώρα τοπικών ελεγκτών, κανένας εκ των οποίων δεν διαθέτει όλη την σχετική πληροφορία απόφασης [3]. Οι τοπικοί ελεγκτές επικοινωνούν διαμέσου κάποιου δικτύου που προσδιορίζει το εύρος ζώνης και τους διαύλους επικοινωνίας. Το σύνολο πρακτόρων - ελεγκτών συνιστά ένα νέο, κατανεμημένο, σύστημα επί του οποίου δρα νέος, επίσης κατανεμημένος, νόμος ελέγχου που επάγεται από την αλληλεπίδραση των τοπικών υλοποιήσεων. Η ανάγκη μελέτης και κατανόησης των χαρακτηριστικών συμπεριφορών που προκύπτουν από την αλληλεπίδραση πολλών, απλών υποσυστημάτων προσδιορίζει την περιοχή κατανεμημένου ελέγχου. Στην εργασία αυτή, θα αναφερόμαστε μόνο στο καθολικό σύστημα με τον όρο *σύστημα* ενώ θα προτιμούμε τους όρους *πράκτορας* ή *κόμβος* για τα επί μέρους αυτόνομα υποσυστήματα. Όμοια, θα καλούμε *αλγόριθμο* το καθολικό σχήμα ελέγχου, στον συνεχή ή διακριτό χρόνο και *ελεγκτές* τις τοπικές υλοποιήσεις συστημάτων απόφασης των πρακτόρων. Πληρέστερη περιγραφή του προβλήματος και της σχετικής ορολογίας ακολουθεί στο Κεφάλαιο 2.

Γενικά η μελέτη κατανεμημένων συστημάτων χαρακτηρίζεται από την εστίαση σε τρεις προκλήσεις: *την διαστατικότητα του προβλήματος, την εγκυρότητα πληροφοριών στους πράκτορες και τους περιορισμούς διανομής πληροφοριών* [2, 4]. Αποκεντροποιημένες βιομηχανικές, τηλεπικοινωνιακές και αισθητήριες διατάξεις, που συνθέτονται από μεγάλο αριθμό συντελεστών απόφασης, επωφελούνται υπολογιστικά και σχεδιαστικά από επίσης αποκεντροποιημένους νόμους που χρησιμοποιούν μόνο "τοπική" πληροφορία για την λήψη αποφάσεων. Τέτοιες υλοποιήσεις απαιτούν συνήθως απλές, ατομικές πράξεις οι οποίες επιδέχονται υψηλό βαθμό παραλληλισμού και μειώνουν το φορτίο επικοινωνίας που προσδίδεται στο δίκτυο. Με αυτόν τον τρόπο, ο νόμος ελέγχου μπορεί να σχεδιαστεί ανεξάρτητα του αριθμού πρακτόρων ενώ ταυτόχρονα διευκολύνεται η ad hoc ενσωμάτωση υποσυστημάτων.

Επιπλέον, μέσω ατομικού σχεδιασμού προσδίδεται και βαθμός σθεναρότητας ως προς την ορθότητα των εκτιμήσεων των πρακτόρων ή ακόμα και την μορφή του δικτύου επικοινωνίας. Η ύπαρξη περιορισμών ως προς τον όγκο ή το είδος των πληροφοριών που επιτρέπεται να διατεθούν στο δίκτυο προδιαγράφει την ανάγκη κατανεμημένης σχεδίασης. Θεωρήσεις ασφάλειας, διαθέσιμου εύρους ζώνης και ενσωμάτωσης με ήδη υπάρχοντα επικοινωνιακά / ελεγκτικά συστήματα [5, 6] καθιστούν απαραίτητη την πολυεπίπεδη, τμηματική σχεδίαση ελεγκτικών συστημάτων [7, 8].

Ιστορικά, έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον σχετικά με τα κατανεμημένα συστήματα προσέλκυσαν ελεγκτικοί στόχοι όπως η συμφωνία πρακτόρων (consensus, flocking objectives), τα προβλήματα συνάντησης (rendezvous objectives) και ο έλεγχος σχηματισμού (formation control) [4]. Πιο πρόσφατα όμως, η ευρύτητα ερωτημάτων κατανομής περιορισμένων πόρων σε εφαρμογές αυτόματου ελέγχου, σχεδίασης ηλεκτρονικών κυκλωμάτων, ανάλυσης δεδομένων και μοντελοποίησης, στατιστικής και οικονομικών [9] έχουν φέρει στο προσκήνιο την ανάγκη κατανεμημένης επίλυσης του προβλήματος βέλτιστης συμφωνίας (optimal consensus objective). Η σχεδίαση ευπροσάρμοστων αλυσίδων παραγωγής - κατανάλωσης και η ενσωμάτωση αλγοριθμικών διαχειριστών σε αυτές απαιτεί την ανάθεση των προβλημάτων βελτιστοποίησης σε αυτοματοποιημένους λύτες. Ο από κοινού στόχος αυτών είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης περιοχής λειτουργίας για το συνολικό σύστημα και την οδήγηση των πρακτόρων, με ελάχιστη ανθρώπινη συμμετοχή.

Ήδη, χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν τα ολοένα διασυνδεδεμένα συστήματα παραγωγής και κατανάλωσης ισχύος που σκοπεύουν στον συντονισμό και την βέλτιστη κατανομή ενεργειακών πόρων [10]. Η παραδοσιακή μορφή συστημάτων ηλεκτροπαραγωγής μεταβαίνει σταδιακά από εργοστάσια κεντρικής παραγωγής και προκαθορισμένα φορτία σε αποκεντροποιημένα συστήματα συνδυαστικής παραγωγής-κατανάλωσης [5], συνδεδεμένα με ευέλικτα, "έξυπνα" φορτία. Σε αυτές τις διατάξεις, μεγάλος αριθμός υποσυστημάτων (ηλεκτρικοί κινητήρες, γεννήτριες κ.α.) συντονίζονται για την κάλυψη των στιγμιαίων ενεργειακών απαιτήσεων πλήθους καταναλωτών. Επιπλέον των απαιτήσεων παροχής, τίθενται στο σύστημα αυστηρά κριτήρια ποιότητας συχνοτικού περιεχομένου και τάσης της παρεχόμενης ισχύος καθώς και απαιτήσεις ελαχιστοποίησης οικονομικών κριτηρίων λειτουργίας [11, 12, 13]. Όσο το ηλεκτρικό δίκτυο εκσυγχρονίζεται, η αποδοτική διανομή ενεργειακών πόρων θα αποτελέσει σημαντικό παράγοντα ελκυστικότητας ενεργειακών λύσεων και έτσι θα απαιτεί ισχυρές μεθόδους προσδιορισμού βέλτιστων περιοχών λειτουργίας και ταυτόχρονης οδήγησης των υποσυστημάτων.

Άλλη αξιολογή εφαρμογή αφορά την κατανομή "εμπιστοσύνης" στις μετρήσεις μεγάλων αισθητήριων δικτύων που απαιτώνται σε βιομηχανικές εγκαταστάσεις, έξυπνα κτήρια και δημόσιες υποδομές. Αυτά αποτελούν εκτενή δίκτυα ολοκληρωμένων στοιχείων που ενσωματώνουν κάποια αισθητήρια, υπολογιστική και επικοινωνιακή ικανότητα [14, 10]. Την εντυπωσιακή ικανότητα των κατανεμημένων αυτών διατάξεων στην συλλογή δεδομένων ανταγωνίζεται μόνο ο όγκος πληροφορίας που πρέπει να διανεμηθεί δια μέσω του δικτύου για τον συντονισμό και τον έλεγχο τους. Καθίσταται έτσι απαραίτητη η ανάπτυξη τοπικών μεθόδων που αποσκοπούν στην in-network επεξεργασία της πληροφορίας με χρήση της ελάχιστης δυνατής αλληλεπίδρασης μεταξύ ελεγκτών, εξαλείφοντας την ανάγκη συλλογής δεδομένων και διοχέτευσης πληροφορίας σε κάποιον κεντρικό συντονιστή. Ταυτόχρονα, η ταχεία διεύρυνση των αισθητήριων απαιτήσεων τέτοιων εγκαταστάσεων εισάγει προκλήσεις ραγδαίας επεκτασιμότητας και σθεναρότητας των κατανεμημένων μεθόδων που περαιτέρω δυσχεραίνουν την χρήση πιο συγκεντρωτικών μεθόδων ελέγχου.

Γενικά, η περιοχή κατανεμημένης βελτιστοποίησης αφορά εφαρμογές στις οποίες σημαντικός όγκος πληροφορίας συγκεντρώνεται και αποθηκεύεται σε κάποιο δίκτυο και η ύπαρξη κεντρικού συντονιστή είναι δυσχερής ή ανεπιθύμητη [3, 15]. Αυτή η λακωνική περιγραφή δίνει έμφαση στις προκλήσεις που κρύβει μια τόσο γενική έκφραση του προβλήματος αλλά και στην εκπληκτική χρηστικότητα που έχουν οι μέθοδοι επίλυσης του.

1.1 Αντικείμενο της Διπλωματικής Εργασίας

Η παρούσα εργασία δεν συνδέεται με καμία συγκεκριμένη εφαρμογή κατανεμημένης βελτιστοποίησης, όπως επίσης και με κανένα συγκεκριμένο σύστημα κατανεμημένων πρακτόρων. Αντιθέτως, η κλάση των προς επίλυση προβλημάτων προσδιορίζεται από ποιοτικά χαρακτηριστικά που μοντελοποιούν πραγματικές συμπεριφορές και σχεδιαστικές προκλήσεις σε μεγάλο εύρος εφαρμογών. Ειδικότερα, προσδιορίζουμε τα προβλήματα ενδιαφέροντος βάση δύο παραγόντων.

1. Ως προς το δίκτυο επικοινωνίας των τοπικών ελεγκτών.

Το ερώτημα επικοινωνίας μεταξύ των πρακτόρων, και ειδικότερα οι προκλήσεις επικοινωνίας σε δίκτυα με ατέλειες όπως καθυστερήσεις, απώλεια πακέτων και υποχρέωση συγχρονισμού αποτελούν αναπόσπαστο τμήμα προσδιορισμού οποιουδήποτε καταναμημένου αλγορίθμου [16] - ο σχεδιασμός τοπολογίας επικοινωνίας και ελέγχου είναι άρρηκτα συνδεδεμένος. Στην παρούσα εργασία, η ανταλλαγή πληροφορίας υλοποιείται από κατευθυνόμενο γράφο $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, στον οποίο κάθε κόμβος x_i αναπαριστά την εκτίμηση ενός πράκτορα για την βέλτιστη κατάσταση και κάθε ακμή e_{ij} κάποιον δίαυλο επικοινωνίας με βάρος w_{ij} .

Το πρωτόκολλο επικοινωνίας βασίζεται στην δειγματοληψία και αναμετάδοση των εκτιμήσεων ανά σταθερή περίοδο T , χωρίς επιπρόσθετες υποθέσεις για την σειρά άφιξης ή επεξεργασίας αυτών. Σε αντίθεση με την χρήση των πλήρων εκτιμήσεων, η δειγματοληψία μειώνει την απαιτούμενη επικοινωνία μεταξύ των ελεγκτών [16] και ελευθερώνει σημαντικό εύρος ζώνης για το δίκτυο. Θα δείξουμε επιπλέον πως η δυνατότητα να επιτευχθεί σύγκλιση εκτιμήσεων είναι ανεξάρτητη του ρυθμού δειγματοληψίας και άρα η επιλογή περιόδου δειγματοληψίας μπορεί να ρυθμιστεί βάση των απαιτήσεων ταχύτητας και διαθέσιμων πόρων της εφαρμογής.

Τέλος, επιτρέπουμε την εμφάνιση αγνώστων, ομοιόμορφα άνω φραγμένων καθυστερήσεων στους διαύλους επικοινωνίας, ώστε μόνον οι καθυστερημένες εκτιμήσεις των πρακτόρων να είναι διαθέσιμες στους γείτονές τους. Η υπόθεση αυτή επιτρέπει και την μοντελοποίηση γενικότερων δικτύων με σφάλματα όπως την απώλεια πακέτων ή διαύλων [10], σφάλματα τα οποία δεν εξετάζονται στην συγκεκριμένη εργασία και συνηθίζεται σε προβλήματα συμφωνίας [17, 18, 19, 20] όσο και βελτιστοποίησης [21, 22].

2. *Ως προς την τοπολογία κόστους των πρακτόρων και την σύνθεση αντικειμενικού (καθολικού) κριτηρίου για το συνολικό σύστημα.*

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης προσδιορίζονται από τα χαρακτηριστικά των κριτηρίων κόστους και την ύπαρξη (ή μη) περιορισμών στο χώρο λύσεων. Στην καταναμημένη περίπτωση, κάθε πράκτορας συνεισφέρει στην τοπολογία κόστους μια τοπική συνάρτηση που παραμένει γνωστή μόνον στον ίδιο και το άθροισμα τους συνθέτει το αντικειμενικό κριτήριο προς βελτιστοποίηση. Οι συναρτήσεις κόστους θεωρούνται εξ υποθέσεως ισχυρά κυρτές (strongly convex), συνεχώς διαφορίσιμες και με Lipschitz βαθμίδες σε όλο τον χώρο εκτιμήσεων.

Παρότι αυτά τα χαρακτηριστικά συναρτήσεων και η επίδρασή τους στα προβλήματα βελτιστοποίησης θα μελετηθούν σε βάθος στο Κεφάλαιο 2, αξίζει να αναφερθεί πως αυτές οι υποθέσεις είναι συνηθισμένες για πολλά προβλήματα. Μάλιστα, μια πολύ ενδιαφέρουσα περιοχή μελέτης της καταναμημένης βελτιστοποίησης αφορά τον προσδιορισμό των *ελάχιστων* υποθέσεων για την επιλυσιμότητα προβλημάτων. Η εργασία αυτή εστιάζει στην εύρεση ικανών μόνο συνθηκών για την προτεινόμενη μεθοδολογία, είμαστε όμως ικανοποιημένοι πως έχουν ληφθεί αρκετά γενικές υποθέσεις για τα κριτήρια κόστους και ευελπιστούμε σε μελλοντική εργασία να διευρυνθεί η κλάση επιλύσιμων προβλημάτων.

Αναφέραμε προηγουμένως πως αποσκοπούμε στην παρουσίαση μεθόδου αναγωγής του

προβλήματος επίτευξης προσεγγιστικής, βέλτιστης συμφωνίας μη-γραμμικών πρακτόρων στον σημαντικά απλούστερο, σχεδιασμό ελεγκτών πρακτικής ευστάθειας. Για να επιτύχουμε την τροποποίηση αυτή, ορίζεται κατάλληλος μετασχηματισμός κατάστασης πρακτόρων προς σχηματισμό βοηθητικών μεταβλητών προς ρύθμιση. Εν συνεχεία, αποδεικνύεται πως με την ρύθμιση των μεταβλητών σε περιοχή πλησίον της αρχής των αξόνων, οι τροχιές εξόδου των μη-γραμμικών πρακτόρων οδηγούνται σε βέλτιστη συμφωνία. Η απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος διαρθρώνεται σε δυο μέρη, πρώτα μελετάται η ακολουθία διακριτών, δειγματοληπτούμενων εξόδων πρακτόρων διαμέσου αναγωγής στον αλγορίθμου DGD και τα χαρακτηριστικά σύγκλισης του επί της κλάσης προβλημάτων ενώ στην συνέχεια υπολογίζεται η απόκλιση της στιγμιαίας εξόδου πράκτορα από την πιο πρόσφατη δειγματοληπτούμενη εκτίμησή του. Δευτερεύον αποτέλεσμα που προκύπτει από την παραπάνω μελέτη αφορά την ικανότητα σύγκλισης του αλγορίθμου βαθμίδας με σταθερό βήμα προσαρμογής και φραγμένες διαταραχές. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζεται η σθεναρότητα του αλγορίθμου και προσδιορίζεται η περιοχή σύγκλισης του, ως συνάρτηση των σχεδιαστικών παραμέτρων αλλά και του μεγέθους της παρεμβολής.

1. Αποδεικνύεται, για κατάλληλη επιλογή βήματος a , η εκθετική σύγκλιση του τροποποιημένου DGD στην κλάση ισχυρά κυρτών, Lipschitz διαφορίσιμων συναρτήσεων κόστους και κατευθυνόμενου δικτύου με ομοιόμορφα φραγμένες καθυστερήσεις.
2. Αποδεικνύεται πως η περιοχή απόκλισης από τον πραγματικό βέλτιστο του συστήματος είναι τάξης $O(\sqrt{a} + \frac{\epsilon}{a})^2$, όπου ϵ άνω φράγμα της προαναφερθείσας διαταραχής.

Το δεύτερο σκέλος της εργασίας, αφορά την ενσωμάτωση του αλγορίθμου σε ελεγκτές σταθεροποίησης και προσομοίωση των κατανεμημένων συστημάτων. Προς αυτόν τον σκοπό, στο Κεφάλαιο 4 εφαρμόζουμε τον προτεινόμενο μετασχηματισμό στο Fully-Actuated Surface Vessel (FASV) μοντέλο κίνησης επιφανειακών θαλάσσιων σκαφών. Με την ρύθμιση των βοηθητικών μεταβλητών σχεδιάζουμε backstepping ελεγκτές για την κατανεμημένη, βέλτιστη συμφωνία θέσης των πρακτόρων.

1.2 Συγγενείς Εργασίες

Η συστηματική μελέτη των μεθόδων κατανεμημένης βελτιστοποίησης με καθυστερήσεις επικοινωνίας ξεκινά από το 1980 και τις εργασίες των D. Bertsekas [23], J. Tsitsiklis, D. Bertsekas, M. Athans [24]. Με έναυσμα τις αποκεντροποιημένες εκφράσεις προβλημάτων ανάθεσης πόρων των K. J. Arrow, L. Hurwicz [25] και τις μεθόδους χαστικής χαλάρωσης των D. Chazan, W. Miranker [26] για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων εν παραλλήλω γίνεται η αρχή της μελέτης αποκεντροποιημένων μεθόδων κατάβασης βαθμίδας. Ταυτόχρονα χάρη στην σημαίνουσα διδακτορική εργασία του J. Tsitsiklis [3] τυποποιείται η γλώσσα περιγραφής και μελέτης κατανεμημένων συστημάτων υπό πληθώρα μοντέλων επικοινωνίας

²Χρησιμοποιούμε εδώ τον συμβολισμό $O(\cdot)$ για να αναφερθούμε στην ασυμπτωτική συμπεριφορά μεταβλητών ή ποσοτήτων κατά την πρόοδο του χρόνου. Ως τμήμα της Bachmann-Landau συμβολογραφίας, το γράμμα O συνοδεύεται από άλλα όπως o, Ω, ω για την πληρέστερη περιγραφή μορφών ασυμπτωτικής συμπεριφοράς. Θα επιλέξουμε στην εργασία αυτή να παραλείψουμε τέτοιες λεπτομέρειες και να εστιάσουμε στην τάξη (order) των οριακών ποσοτήτων. Αντίστοιχα θα κάνουμε χρήση τις σχέσης \sim για να δείξουμε την όμοια τάξη δυο ποσοτήτων.

με σφάλματα. Έκτοτε η περιοχή κατανεμημένου υπολογισμού και βελτιστοποίησης ανθίζει και σχηματίζεται ένα συναρπαστικό πεδίο έρευνας εστιασμένο αφενός στην ανάπτυξη ποικιλίας ταχέων αλγορίθμων επίλυσης των ευρύτερων δυνατών προβλημάτων και αφετέρου στην διαπίστευση της πολυπλοκότητας κατανεμημένων προβλημάτων και τον εντοπισμό ελάχιστον υποθέσεων λειτουργίας των αλγορίθμων.

Για την καλύτερη περιγραφή της περιοχής ενδιαφέροντος της εργασίας και την σύνδεσή της με άλλα ερωτήματα βελτιστοποίησης δίνουμε μια σύντομη ανασκόπηση των πιο χαρακτηριστικών μεθόδων που αναπτύχθηκαν στον χώρο. Θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τις κυριότερες ιδέες πίσω από την σχεδίαση και λειτουργία των μεθόδων και να συνδέσουμε τις τυχόν αδυναμίες τους με αλγορίθμους που ακολούθησαν. Συστηματικότερη περιγραφή του θεωρητικού πλαισίου για την εργασία θα δοθεί στην συνέχεια, οπότε θα αρκεστούμε προς το παρόν σε περιγραφικά επιχειρήματα και τα ευρήματα της βιβλιογραφίας.

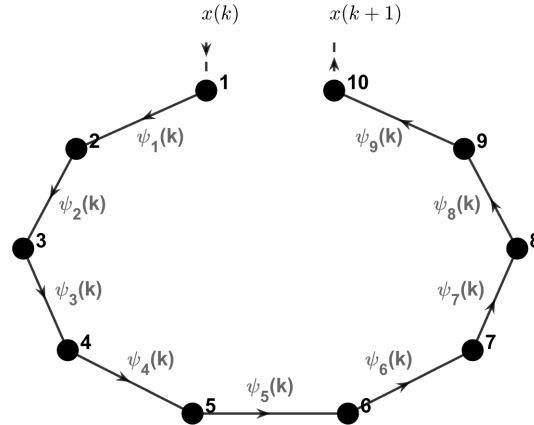
1.2.1 Τμηματικές μέθοδοι βαθμίδων

Πρώτες αυστηρά κατανεμημένες μέθοδοι που διερευνήθηκαν διεξοδικά ήταν οι τμηματικές (incremental) μέθοδοι (υπό)βαθμίδων [27, 28] και οι ασύγχρονες [29] και στοχαστικές [30] μορφές τους. Οι μέθοδοι τροποποιούν την συμβατική μέθοδο βαθμίδας ώστε να επιτυγχάνουν την βελτιστοποίηση ενός σύνθετου κριτηρίου σε κυκλική διάταξη δικτύου πρακτόρων. Εξηγούμε συνοπτικά την ιδέα λειτουργίας τους ως εξής.

Λαμβάνοντας κάποιο σύνθετο, κυρτό κριτήριο $f(x) := \sum_{i=1}^n f_i(x)$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}^m$, θεωρούμε τον νόμο μεταβολής

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \psi_n(k), \text{ όπου} \\ \psi_i(k) &= \Pi_X[\psi_{i-1}(k) - a_k g_{i-1}(k)], \quad i = 1, \dots, n \\ g_i(k) &\in \partial f_i(\psi_i(k)) \text{ και } g_0(k) = x(k). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Έχουμε συμβολίσει $\partial f_i(\psi_i(k))$ το υποδιαφορικό (σύνολο υποβαθμίδων) της f_i στο σημείο $\psi_i(k)$ και $\Pi_X[\cdot]$ κάποιον τελεστή προβολής στο σύνολο X . Διαμέσου του διαδοχικού υπολογισμού των $\psi_i(k)$, ο νόμος προβλέπει την σταδιακή μεταβολή του συνολικού διανύσματος εκτίμησης $x(k)$ με διαδοχικά βήματα βαθμίδας κριτηρίων. Τα διανύσματα $\psi_i(k)$ καλούνται υποκαταστάσεις κάποιου κύκλου k . Το παραπάνω σχήμα, αν και κατανεμημένο, απαιτεί την σύνδεση εκτιμητών σε δίκτυο-δαχτυλίδι και την διαδοχική διάδοση κάποιας εκτίμησης αυστηρά και μόνον στον επόμενο κόμβο κατά μήκος της αλυσίδας. Επιπλέον αδυναμία του σχήματος είναι η εν σειρά εκτέλεση των υπολογισμών λόγω της εξάρτησης του κάθε πράκτορα από το αποτέλεσμα του προηγούμενου. Ειδικότερα, είναι εύκολο να αντιληφθεί κανείς πως ανά πάσα στιγμή μοναδικός πράκτορας i εκτελεί κάποιον υπολογισμό, αφού όλοι οι προηγούμενοι πράκτορες $i - k$, $k = 1, \dots, i - 1$ έχουν ολοκληρώσει τους και οι επόμενοι $i + k$, $k = 1, \dots, n - i$ αναμένουν τα αποτελέσματα των προηγούμενων.



Σχήμα 1.1: Σύνδεση πρακτόρων σε δακτυλίδι και αναπαράσταση ροής ενδιάμεσων μεταβλητών κατά μια επανάληψη του κανόνα μεταβολής εκτίμησης.

Από την παραπάνω θεμελιώδη έλλειψη του γενικού incremental σχήματος προκύπτουν και οι σημαντικότερες αδυναμίες της οικογένειας αλγορίθμων. Παραδείγματος χάριν, η φυσική παραλληλοποίηση υπολογισμών σε ξεχωριστά βήματα υπολογισμού υποβαθμίδων $g_i(k) \in \partial f_i(x(k))$ και συνδυασμού τους ως $x(k+1) = \Pi_X[x(k) - \alpha_k \sum_{i=1}^n g_i(k)]$ οδηγεί σε κεντροποιημένο σχήμα ελέγχου [29]. Παρ' όλα αυτά, τα τμηματικά σχήματα έχουν σημαντική ιστορική σημασία και χρησιμοποιούνται ακόμα και σε σύγχρονες εφαρμογές λόγω της ευκολίας υλοποίησης τους και παραλληλισμού. Χαρακτηριστικά απατώνται συχνά σε περιοχές μηχανικής όπως προβλήματα ελάχιστων τετραγώνων, εκπαίδευσης νευρωνικών δικτύων με "backpropagation" και στον αλγόριθμο expectation-maximization (EM algorithm) [29].

1.2.2 Αλγόριθμοι κατανεμημένης κατάβασης βαθμίδων

Όλες οι προηγούμενες μέθοδοι απαιτούν επικοινωνία με δομή δακτυλίου. Για εφαρμογές σε πιο γενικά, πιθανόν χρονομεταβαλλόμενα, δίκτυα στρεφόμαστε σε αλγορίθμους κατάβασης υποβαθμίδων όπως περιγράφηκαν από τους N. Z. Shor, A. Nedlic et al. [31, 32, 33, 34] και αποτελούν την βάση και της δικής μας εργασίας. Ο αλγόριθμος DGD θα παρουσιαστεί λεπτομερέστερα στην Ενότητα 2.3 οπότε προς το παρόν παρουσιάζουμε τα κοινά χαρακτηριστικά των μεθόδων.

Ειδοποιός διαφορά των αλγορίθμων είναι πως για κριτήριο της μορφής $f(x) := \sum_{i=1}^n f_i(x)$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}^m$ κάθε πράκτορας διατηρεί τοπική εκτίμηση της βέλτιστης κατάστασης $x_i(k) \in \mathbb{R}^m$ και σε κάθε επανάληψη ενημερώνει μόνον την ίδια εκτίμηση ως

$$x_i(k+1) = \Pi_X \left[\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k) - \alpha_k g_i(k) \right], \quad (1.2)$$

$$g_i(k) \in \partial f_i(x_i(k)).$$

Λαμβάνοντας πίνακα μετάβασης $W = [w_{ij}]$ που αντικατοπτρίζει το μοντέλο ανταλλαγής πληροφορίας (συνήθως καλείται κανόνας βαρών - weights rule στην βιβλιογραφία) [32] επιτυγχάνεται αλληλεπίδραση μεταξύ των πρακτόρων διαμέσω της one-hop ανταλλαγής εκτιμήσεων που περιέχεται στον όρο συμφωνίας $\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k)$.

Σημειώνεται πως, σε αντίθεση με την (1.1) η βαθμίδα υπολογίζεται σε σημείο $x_i(k)$ για

κάθε πράκτορα. Με αυτόν τον τρόπο, η μέθοδος είναι πλήρως κατανεμημένη και δεν απαιτεί σειριακό υπολογισμό μετατοπίσεων. Η εν παραλλήλω ενημέρωση είναι σημαντικό πλεονέκτημα έναντι των τμηματικών μεθόδων. Δυστυχώς η διευρυμένη δυνατότητα μοντελοποίησης δικτύων και αυστηρή κατανεμημένη φύση του αλγορίθμου προσφέρεται σε αντάλλαγμα αυστηρότερων υποθέσεων για τα κριτήρια κόστους και μειωμένου ρυθμού σύγκλισης. Χαρακτηριστικά, οι μέθοδοι κατανεμημένης βαθμίδας απαιτούν επιλογή μειούμενης ακολουθίας βημάτων $\{a_k\}$ για να επιτύχουν συμφωνία εκτιμήσεων, ακόμα και στις περιπτώσεις διαφορίσιμων και ισχυρά κυρτών συναρτήσεων [15].

Επιλέγοντας σταθερό βήμα εκμάθησης για τις μεθόδους κατάβασης, οι αλγόριθμοι είναι σημαντικά ταχύτεροι αλλά επιτυγχάνουν σύγκλιση μόνο σε περιοχή γύρω από κάποια θέση συμφωνίας. Οι K. Yuan et al. [35] αποδεικνύουν πως η περιοχή είναι μονοτονικά μειούμενη με την επιλογή μικρότερων βημάτων, γεγονός που δημιουργεί ένα δίλημμα ταχύτητας - ακρίβειας για τον σχεδιαστή. Στην παρούσα εργασία εμείς δείχνουμε περιοχή της τάξης $O(\sqrt{a} + \frac{\epsilon}{a})$. Σταθεροποιώντας λοιπόν δεδομένο $\epsilon > 0$ - που θα αποδειχθεί είναι ισοδύναμο με την επιλογή κάτω ορίου για την περιοχή ευστάθειας των μη-γραμμικών ελεγκτών - τότε με φυσικό τρόπο υπολογίζεται και η κατάλληλη επιλογή βήματος για την ενημέρωση εκτιμήσεων.

1.2.3 Αλγόριθμοι σταθερού βήματος

Μια λύση του διλήμματος ταχύτητας βασίζεται στην χρήση Λαγκρατζιανών δυικών μεταβλητών όπως στις μεθόδους distributed dual decomposition [36] και alternating direction method of multipliers (ADMM) [37, 38]. Σε αντίθεση με τους προηγούμενους consensus-based αλγόριθμους στον χώρο των κύριων μεταβλητών, οι μέθοδοι αυτές επιλύουν το συναφές δυικό πρόβλημα Lagrange, χαλαρώνοντας τους περιορισμούς ισότητας που προκύπτουν από την απαίτηση συμφωνίας [4]. Στις δυικές μεθόδους είναι απαραίτητο η μορφή των κριτηρίων να είναι σχετικά απλή ώστε 1. να διατυπωθεί ένα επιλύσιμο πρόβλημα κυρίων-δυικών μεταβλητών και 2. η επίλυση του (δηλαδή η ενημέρωση εκτιμήσεων και βοηθητικών μεταβλητών) να είναι υπολογιστικά εύκολη και να ολοκληρώνεται με ταχύτητα. Οι E. Wei, A. Ozdaglar έχουν δείξει πως για fixed γράφους, ο κατανεμημένος ADMM υποστηρίζει σταθερά βήματα και επιτυγχάνει ρυθμό σύγκλισης $O(\frac{1}{k})$ [39].

Χάρη σε αυτές και άλλες εργασίες, τα αποτελέσματα της δυικής ανάλυσης έχουν εμπνεύσει επίσης βελτιώσεις και σε προηγούμενους αλγόριθμους, εισάγοντας τροποποιήσεις proximal-βαθμίδας και εκτιμήσεις υψηλότερης τάξης. Αυτοί επωφελούνται από αυξημένη ταχύτητα λόγω εκτίμησης της διεύθυνσης κατάβασης, όμως επεκτείνονται δύσκολα σε ασύγχρονες επικοινωνίες ή σε χρονομεταβαλλόμενους ή κατευθυνόμενους γράφους.

Τέλος αξίζει να αναφερθούν και μέθοδοι σταθερού βήματος που δεν κάνουν χρήση των δυικών μεταβλητών και επιτυγχάνουν ακριβή σύγκλιση σε σημείο συμφωνίας. Οι Jakovetic D. et al. [40] επιτυγχάνουν ρυθμό σύγκλιση $O(\frac{\ln k}{k^2})$ με σχήμα που κάνει χρήση εσωτερικού βρόγχου συμφωνίας και Nesterov acceleration ενώ ο αλγόριθμος EXTRA [41] επιτυγχάνει ρυθμό σύγκλισης $O(\frac{1}{k})$ σε κυρτές συναρτήσεις και εκθετικό σε ισχυρά κυρτές.

1.2.4 Βέλτιστη Συμφωνία Πρακτόρων με Δυναμική

Οι παραπάνω μέθοδοι αφορούν την επίτευξη βέλτιστης συμφωνίας σε πράκτορες δίχως δυναμική, στους οποίους η μεταβολή των εκτιμήσεων καθορίζεται μόνο από κάποιον κανόνα ενημέρωσης. Πρόσφατα όμως σημαντική πρόοδος έχει γίνει και στην μελέτη κατανεμημένων συστημάτων με εγγενή δυναμική καθώς και με σφάλματα μοντελοποίησης ή διαταραχές. Σημαντική εργασία έχει γίνει για την μελέτη βέλτιστης συμφωνίας απλών ολοκληρωτών [42, 43] ή γραμμικών συστημάτων [44, 45, 46, 47].

Οι κατανεμημένες μέθοδοι επίλυσης τέτοιων προβλημάτων απαιτούν πιο περίπλοκα σχήματα ελέγχου από καθιερωμένους αλγορίθμους διακριτού χρόνου. Αυτό ισχύει καθώς στα προβλήματα με δυναμική πρέπει, ταυτόχρονα με το κατανεμημένο σχήμα, να δημιουργηθεί μέθοδος ακύρωσης της τοπικής συμπεριφοράς πρακτόρων. Παραδείγματος χάριν, στην εργασία των Tang et al. [44] γίνεται χρήση τοπικών γεννητριών σήματος προς επίλυση του προβλήματος βέλτιστης συμφωνίας με κατανεμημένο τρόπο. Εν συνεχεία, οι γραμμικοί πράκτορες ελέγχονται σύμφωνα με την αναφορά της γεννήτριας διαμέσου σχήματος reference tracking. Την απαίτηση ομοιογένειας των πρακτόρων χαλαρώνουν οι Li, Wu et al. [47], όμως οι μέθοδοι συνεχίζουν να απαιτούν μη-κατευθυνόμενη επικοινωνία μεταξύ πρακτόρων. Το δυσκολότερο πρόβλημα γραμμικών πρακτόρων σε κατευθυνόμενους γράφους παρουσιάζουν οι Zhang et al. [48].

Σημαντικό ερευνητικό ενδιαφέρον έχει πρόσφατα αναπτυχθεί και για την επίτευξη βέλτιστης συμφωνίας σε γενικότερους, μη-γραμμικούς πράκτορες. Οι προσπάθειες αυτές συνήθως διαρθρώνονται ως μελέτες συγκεκριμένης μορφής μη-γραμμικότητας [49, 50, 51] ή διαμέσου της μελέτης άγνωστων συστημάτων (unknown systems) [22, 52]. Ιδιαίτερα θέλουμε να δώσουμε έμφαση στην εργασία των Gkesoulis, Psillakis et al. [22] ως συγγενή μέθοδο επίλυσης προβλήματος προσεγγιστικής βέλτιστης συμφωνίας σε μη-γραμμικούς πράκτορες με άγνωστη δυναμική. Σε αυτήν, οι συγγραφείς κάνουν χρήση βοηθητικών μεταβλητών κατάστασης προς μετατροπή του προβλήματος σε πρόβλημα ρύθμισης μη-γραμμικών μεταβλητών. Οι μεταβλητές αυτές, καλούμενες Optimal consensus proportional and integral (OCPI) variables, κωδικοποιούν την αναλογική και ολοκληρωτική απόκλιση των εξόδων πρακτόρων και διαμέσου ρύθμισής τους επιλύουν το πρόβλημα βέλτιστης συμφωνίας. Η παραπάνω μέθοδος χρησιμοποιείται για την επίτευξη βέλτιστης συμφωνίας σε πράκτορες με καθυστέρηση ανατροφοδότησης κατάστασης [22].

Σε αντιστοιχία με τους στόχους αυτής της διπλωματικής, η αναγωγή σε πρόβλημα μη γραμμικής ρύθμισης επιτρέπει την χρήση καθιερωμένων τεχνικών μη γραμμικού ελέγχου για την επίλυση πολυπλοκότερων προβλημάτων ελέγχου. Αξίζει να σημειωθεί πως ο ορισμός των μεταβλητών OCPI κάνει χρήση μετρήσεων συνεχούς χρόνου για την απόκλιση εξόδων των πρακτόρων. Η χρήση δειγματοληπτούμενων μετρήσεων, όπως προτείνεται σε αυτή την εργασία, μειώνει την απαιτούμενη ανταλλαγή πληροφορίας διαμέσου του δικτύου. Επιπλέον, η χρήση υστερημένων μετρήσεων επιτρέπει για την εμφάνιση σφαλμάτων στο δίκτυο καθώς και την out-of-order άφιξη δειγμάτων στους πράκτορες.

1.3 Οργάνωση της Εργασίας

Η εργασία διαρθρώνεται σε 5 Κεφάλαια.

Στο Κεφάλαιο 2 δίνεται το θεωρητικό υπόβαθρο εκπόνησης της μελέτης και ορίζεται σε τυπική γλώσσα η κλάση κατανεμημένων προβλημάτων προς επίλυση. Συγκεκριμένα, δίνονται τα κυριότερα αποτελέσματα κυρτής βελτιστοποίησης και θεωρίας γράφων που πλαισιώνουν την εργασία και θα αποδειχθούν χρήσιμα στην εξαγωγή των κυρίων αποτελεσμάτων διακριτού χρόνου στο Κεφάλαιο 3. Επιπλέον, περιγράφεται ποιοτικά η συμπεριφορά του αλγορίθμου κατάβασης βαθμίδων με ιδιαίτερη έμφαση στις προκλήσεις σχεδίασης με σταθερό βήμα προσαρμογής και τις τεχνικές απλοποίησης των προβλημάτων που θα χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση των επόμενων κεφαλαίων.

Το Κεφάλαιο 3 περιέχει το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας: τον μετασχηματισμό κατάστασης προς ορισμό των προς ρύθμιση μεταβλητών και την απόδειξη του σχετικού θεωρήματος βέλτιστης συμφωνίας εκτιμήσεων. Η ανάλυση διαρθρώνεται σε δυο σκέλη: αφενός στην μελέτη του συνεχούς χρόνου μετασχηματισμού κατάστασης για τον ορισμό των ρυθμιζόμενων βοηθητικών μεταβλητών (Ενότητα 3.1) και αφετέρου στην περιγραφή ρυθμού σύγκλισης του δειγματοληπτούμενου αλγορίθμου και του σφάλματος μόνιμης κατάστασης εκτιμήσεων (Ενότητες 3.2 και 3.3). Αποδεικνύεται η εκθετική σύγκλιση της μεθόδου ενημέρωσης σε δεδομένο σημείο ισορροπίας και εν συνεχεία χαρακτηρίζεται η μέγιστη απόκλιση του σημείου αυτού από το σημείο βέλτιστης συμφωνίας. Προς επαλήθευση των αποτελεσμάτων, το κεφάλαιο περιλαμβάνει προσομοιώσεις διακριτών πρακτόρων χωρίς δυναμική (Ενότητα 3.4) ώστε να επαληθευθεί η συμπεριφορά της μεθόδου και η εξάρτησή της από την επιλογή σχεδιαστικών παραμέτρων. Τέλος, οι δειγματοληπτούμενες εκτιμήσεις συνδέονται πάλι με τις συνεχούς χρόνου τροχιές εξόδου των πρακτόρων προς ολοκλήρωση της απόδειξης (Ενότητα 3.5).

Στο Κεφάλαιο 4 γίνεται σχεδιασμός ελεγκτών βέλτιστης συμφωνίας βάσει του προτεινόμενου μετασχηματισμού για βοηθητικές μεταβλητές. Συγκεκριμένα λαμβάνεται δίκτυο συστημάτων κατά το μοντέλο Fully Actuated Surface Vessel (FASV) για την κίνηση επιφανειακών θαλάσσιων σκαφών και ορίζονται κατάλληλες μεταβλητές ρύθμισης για την επίτευξη συμφωνίας θέσης και προσανατολισμού των σκαφών. Με χρήση της μεθόδου backstepping σχεδιάζονται τοπικοί ελεγκτές για το μετασχηματισμένο πρόβλημα ρύθμισης και εκτελείται προσομοίωση τους στο περιβάλλον Matlab.

Στο Κεφάλαιο 5, τέλος, δίνεται μια σύνοψη των ευρημάτων της εργασίας και προτείνονται ερωτήματα για την επέκταση της μεθόδου που αναπτύξαμε.

1.4 Συμβολογραφία

- Συμβολίζουμε \mathbb{R} το σύνολο των πραγματικών, \mathbb{R}_+ το σύνολο των μη-αρνητικών και \mathbb{R}_{++} το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών.
- Τα διανυσματικά μεγέθη που χρησιμοποιούμε αναφέρονται σε διανύσματα - στήλες. Για την αναπαράσταση διανυσμάτων - γραμμών χρησιμοποιούμε συμβολαιογραφία ανάστροφου, δηλαδή αν $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ τότε $x^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ το αντίστοιχο διάνυσμα - γραμμή.

- Όμοια, αν $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ μητρώο, τότε A^T αποτελεί τον ανάστροφο πίνακα και A^{-1} τον αντίστροφο, όπου αυτός ορίζεται. Συμβολίζουμε την i -γραμμή του πίνακα με $[A]_{i \cdot}$ και την j -στήλη με $[A]_{\cdot j}$. Με πεζά γράμματα a_{ij} συμβολίζεται το στοιχείο στην i -γραμμή και j -στήλη. Εάν διευκολύνει τον συμβολισμό, τότε δείχνουμε το ίδιο στοιχείο και με $[A]_{ij}$.
- Με $\lambda_i(A)$ λαμβάνουμε την i -οστή ιδιοτιμή του A και με $u_i(A)$ το αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα. Συμβατικά, αριθμούμε τις ιδιοτιμές ενός πίνακα κατά φθίνουσα σειρά. Αντίστοιχα, συμβολίζουμε $\sigma_i(A)$ την i -οστή μοναδιαία τιμή του πίνακα.
- Για κάποιον πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, θα συμβολίζουμε $\text{null}(A) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = \mathbf{0}_n\}$ τον μηδενικό χώρο και το εύρος $\text{span}(A) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = Ax, x \in \mathbb{R}^m\}$. Ιδιαίτερα θα κάνουμε αναφορά στο εύρος του μοναδιαίου διανύσματος, που με τον παραπάνω συμβολισμό είναι $\text{span}(\mathbf{1}_n) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = \mathbf{1}_n x, x \in \mathbb{R}\}$.
- Θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα \geq, \leq και τις αυστηρές μορφές τους $>, <$, για να δείξουμε την μερική διάταξη σε κάποιον κώνο K . Ειδικότερα, όταν τα ορίσματα είναι διανύσματα στο \mathbb{R}^n τότε ο κώνος λαμβάνεται $K = \mathbb{R}_+^n$ και η ανισότητα αναφέρεται στην κατά-στοιχείο ανισότητα των ορισμάτων. Αν τα ορίσματα είναι συμμετρικοί πίνακες στο $\mathbb{R}^{n \times n}$ τότε ο κώνος λαμβάνεται $K = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X \text{ συμμετρικός και } \lambda_{\min}(X) \geq 0\}$, οπότε η ανισότητα αναφέρεται στην διάταξη θετικά ημιορισμένων πινάκων.
- Ο συμβολισμός $\|\cdot\|_p$ αναπαριστά την p -νόρμα του ορίσματος. Όταν το υπογεγραμμένο p παραλείπεται θα αναφερόμαστε στην 2-νόρμα.
- Θα χρησιμοποιούμε \mathbb{I}_n για να δείξουμε τον $n \times n$ ταυτοτικό πίνακα και $\mathbf{1}_n$ και $\mathbf{0}_n$ για το μοναδιαίο και μηδενικό διάνυσμα n στοιχείων αντίστοιχα. Όπου είναι ευκόλως εννοούμενα από τα συμφραζόμενα, οι δείκτες παραλείπονται.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό Υπόβαθρο

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να θεμελιώσει την θεωρητική βάση μελέτης των προβλημάτων κατανεμημένης βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, πλαισιώνουμε την κλάση των προς επίλυση προβλημάτων. Παραθέτουμε τυπικό ορισμό των ελεγκτικών στόχων που θα μας απασχολήσουν στην εργασία και παρουσιάζουμε τις απαραίτητες υποθέσεις για την λειτουργία της μεθόδου. Ο διττός προσδιορισμός της κλάσης προβλημάτων, όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα - χαρακτηρισμός του πρωτοκόλλου επικοινωνίας και χαρακτηρισμός των κριτηρίων κόστους - αντικατοπτρίζεται και σε αυτό το κεφάλαιο. Ειδικότερα, κάνουμε χρήση της θεωρίας *Κυρτής Βελτιστοποίησης* για την περιγραφή ιδιοτήτων της τοπολογίας κόστους και της *Αλγεβρικής Θεωρίας Γράφων* για την επικοινωνία πρακτόρων.

Στην Ενότητα 2.1 παρουσιάζονται εποπτικά τα προβλήματα κυρτής βελτιστοποίησης και προσδιορίζεται με τυπική γλώσσα η κλάση προβλημάτων που θα απασχολήσει την υπόλοιπη εργασία, τόσο στο επίπεδο των πρακτόρων όσο και στο επίπεδο του συστήματος. Δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην διατήρηση χαρακτηριστικών των συναρτήσεων διαμέσου της πράξης κυρτού αθροίσματος. Η ανάλυση αυτή επιτρέπει την σύνθεση υποπροβλημάτων με φυσικό τρόπο και δείχνει τις εγγενείς δυσκολίες επίλυσής τους. Επιπλέον, περιγράφονται οι υποθέσεις μορφής και ομαλότητας των κριτηρίων κόστους. Εξετάζουμε τέλος πώς οι υποθέσεις κυρτότητας και διαφορισμότητας συνδέονται με την αναγνώριση βελτίστου.

Στην Ενότητα 2.2 δίνουμε τα σημαντικότερα αποτελέσματα της θεωρίας γράφων που θα χρησιμοποιηθούν για την τεκμηρίωση της εργασίας. Εξετάζεται η ανάγκη αλγεβρικής περιγραφής των τοπολογιών επικοινωνίας και των υποθέσεων για την συνδεσιμότητα του δικτύου. Ιδιαίτερα εξετάζεται ο η αυστηρότητα των υποθέσεων επικοινωνίας και πως αυτές αντικατοπτρίζονται στην αλγεβρική περιγραφή.

Στην Ενότητα 2.3 δίνονται τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά του αλγορίθμου κατάβασης βαθμίδας, με ιδιαίτερη εστίαση σε δυο συμπεριφορές που θα απασχολήσουν την εργασία. Συγκεκριμένα, αιτιολογείται η προσεγγιστική σύγκλιση του αλγορίθμου με την επιλογή σταθερού βήματος εκμάθησης, που αναφέρθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο και επίσης η απλοποίηση προβλήματος με καθυστερήσεις με χρήση *επεκταμένου διανύσματος κατάστασης*.

2.1 Κατανεμημένη και Κυρτή Βελτιστοποίηση

Έστω πραγματικό m -διάστατο διάνυσμα x , συναρτήσεις $f_i(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ και $X_i \subseteq \mathbb{R}^m$ μη-κενά σύνολα. Ένα πρόβλημα κατανεμημένης βελτιστοποίησης \mathcal{P} δίνεται με την έκφραση

$$\begin{aligned} \text{mimize} \quad & f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x), \\ \text{subject to} \quad & x \in X = \bigcap_{i=1}^n X_i \end{aligned} \tag{2.1}$$

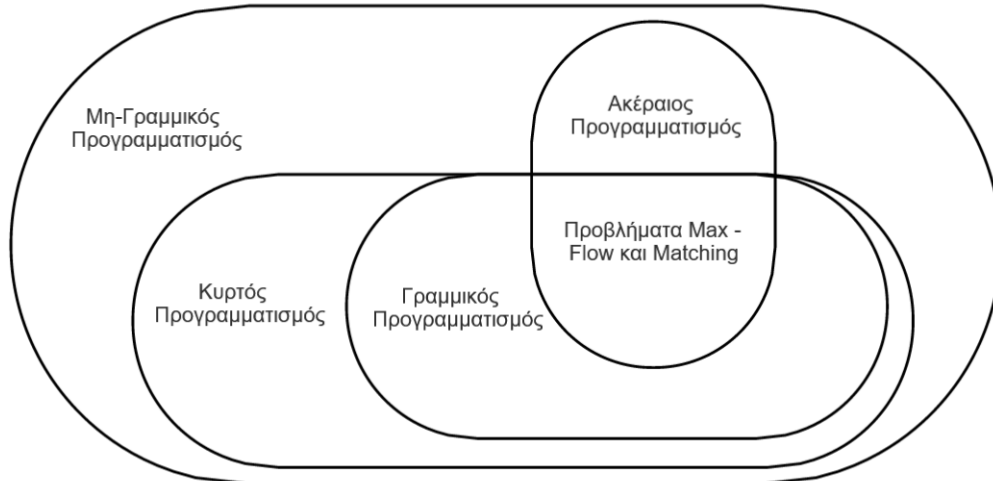
Οι f_i καλούνται τοπικά κριτήρια κόστους και τα σύνολα X_i εφικτά σύνολα (feasible sets) του προβλήματος. Η παραπάνω έκφραση καλεί για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης f δεδομένων κάποιων περιορισμών που δίνονται από το εφικτό σύνολο του προβλήματος. Για αυτόν τον λόγο, τα προβλήματα βελτιστοποίησης καλούνται και προβλήματα ελαχιστοποίησης και οι δύο εκφράσεις θα θεωρούνται ισοδύναμες στην εργασία ¹. Αν το εφικτό σύνολο καλύπτει το σύνολο του χώρου \mathbb{R}^m τότε σχηματίζεται πρόβλημα χωρίς περιορισμούς. Στην τυπική γλώσσα περιγραφής προβλημάτων βελτιστοποίησης του Y. Nesterov [53], η Εξίσωση (2.1) αποτελεί το *μοντέλο* Σ κάποιας κλάσης. Το μοντέλο αναπαριστά το σύνολο της *a priori* γνώσης, διαθέσιμη στον σχεδιαστή για την κατασκευή μιας μεθόδου επίλυσης. Έτσι, η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων αφορά την επίλυση της κλάσης βάση κοινών χαρακτηριστικών του μοντέλου και όχι την σχεδίαση λύσεων βάση κάποιας δεδομένης έκφρασης ².

Εντός της οικογένειας μη-γραμμικών προβλημάτων βρίσκονται εμφωλιασμένα μικρότερα, πιο εξειδικευμένα προβλήματα, που εμπλουτίζουν το γενικό κατανεμημένο μοντέλο (2.1) με πληροφορία απαραίτητη για την επίλυση του. Αυτό επιτυγχάνεται συνήθως με αναφορά στην μορφή και στην ομαλότητα της συνάρτησης κόστους. Ένα από τα ευρύτερα και δυσκολότερα προβλήματα εντός της οικογένειας είναι και η κυρτή βελτιστοποίηση που αποτελεί την εστίαση της εργασίας [54].

Η πολυπλοκότητα των προβλημάτων απαιτεί οι τεχνικές επίλυσης τους να είναι αλγοριθμικές μέθοδοι [54] που εκτελούνται επαναληπτικά (iteratively) σε ψηφιακούς ελεγκτές - μικροϋπολογιστές. Για να μπορέσει μια μέθοδος \mathcal{M} να αντλήσει πληροφορία για το δεδομένο πρόβλημα της κλάσης που αντιμετωπίζει απαιτείται διεπαφή μεταξύ της αριθμητικής μεθόδου και του κόστους και υλοποιείται από τον καλούμενο ανιχνευτή (oracle) \mathcal{O} . Ο ανιχνευτής μπορεί να γίνει αντιληπτός ως ένα τοπικό, μαύρο κουτί [53] που παρέχει στην \mathcal{M} ολη την διαθέσιμη πληροφορία για την τοπολογία κόστους γύρω από κάποιο δοκιμαστικό σημείο.

¹Είναι γνωστό πως τα προβλήματα ελαχιστοποίησης (κόστους) μπορούν να λάβουν έκφραση μεγιστοποίησης κριτηρίων κέρδους με τετριμμένο τρόπο. Η ισοδυναμία προσφέρει μια διαίσθηση για την φύση των προβλημάτων που θα αιτιολογηθεί στην συνέχεια: τα προβλήματα κυρτής βελτιστοποίησης αποτελούν στην ουσία ερωτήματα χαρακτηρισμού των στάσιμων σημείων συναρτήσεων.

²Ένα εξαιρετικό παράδειγμα του δυισμού επίλυσης δεδομένης έκφρασης προβλήματος έναντι της κλάσης προβλημάτων προσφέρει ο Y. Nesterov στην εισαγωγή του *Introductory Lectures on Optimization* [53]. Έστω κάποια μέθοδος επίλυσης που ισχυρίζεται ότι βέλτιστο σημείο οποιουδήποτε προβλήματος είναι το σημείο $x^* = 0$. Αυτή η μέθοδος είναι εσφαλμένη για οποιοδήποτε πρόβλημα δεν ελαχιστοποιείται στην αρχή των αξόνων, για όσα προβλήματα όμως *τυχαίνει* να είναι σωστή, η απόδοσή της είναι ασύγκριτη. Τέτοιες μέθοδοι δεν μπορούν να θεωρηθούν αποδεκτές λύσεις κλάσης προβλημάτων παρότι υπάρχουν κάποια προβλήματα της κλάσης που επιλύονται επιτυχώς (και με βέλτιστο τρόπο).



Σχήμα 2.1: Εμφωλιασμένες Οικογένειες Μη-Γραμμικών Προβλημάτων. Το σχήμα έχει προσαρμοστεί από το βιβλίο *Combinatorial Optimization* των C. Papadimitriou και K. Steiglitz [54]. Αναπαριστάται η ιεραρχία μη-γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησης και η εξέχουσα θέση κυρτής βελτιστοποίησης μεταξύ αυτών.

1. Είναι *τοπικός* επειδή μικρή αλλαγή του κόστους, αρκετά μακριά από το $x(k)$, δεν γίνεται αντιληπτή στο δοκιμαστικό σημείο.
2. Είναι *μαύρο κουτί* επειδή παρέχει την αποκλειστική περιγραφή του κόστους στο $x(k)$, χωρίς να ενημερώνει την \mathcal{M} πως αποκτά αυτή τη πληροφορία.

Στις συναρτησιακές περιγραφές μοντέλων, όπως την (2.1), ο ανιχνευτής συνήθως ορίζεται βάση των χαρακτηριστικών διαφορισιμότητας των κριτηρίων κόστους. Συμβατικά, καλούμε ανιχνευτή n -τάξης εκείνον που δίνει πληροφορία για τις πρώτες n παραγώγους συνάρτησης κόστους στο δοκιμαστικό σημείο.

Κάθε πρόβλημα \mathcal{P} μπορεί να αναπαρασταθεί από πληθώρα μοντέλων. Επιπλέον, μπορεί καθένα από αυτά να εφοδιαστεί και με πληθώρα ανιχνευτών. Δεδομένο ζεύγος (Σ, \mathcal{O}) προσδιορίζει πλήρως κάποια κλάση προβλημάτων βελτιστοποίησης \mathcal{F} , για την οποία μπορεί να σχεδιαστεί επαναληπτική αριθμητική μέθοδος, σύμφωνα με το παρακάτω επαναληπτικό σχήμα. Σημειώνουμε πως συχνά στα χαρακτηριστικά κλάσης προστίθεται και η επιλογή τερματικού κριτηρίου που σηματοδοτεί την επιτυχία του βρόγχου ελαχιστοποίησης και την ολοκλήρωση της αριθμητικής μεθόδου. Καθώς ο σχεδιασμός νόμου ελέγχου γίνεται χωρίς σημείο τερματισμού, η τυπική περιγραφή μας δεν θα περιλαμβάνει τέτοια κριτήρια.

Γενική Επαναληπτική Λύση (2.2) [53]

```

1  input starting point  $x(0)$ 
2  initialize Iteration counter  $k = 0$ , Information set  $I(-1) = \emptyset$ .
3  loop:
4      call oracle  $\mathcal{O}$  at point  $x(k)$ 
5      update information set,  $I(k) \leftarrow I(k-1) \cup (x(k), \mathcal{O}(x(k)))$ 
6      call method  $\mathcal{M}$  at  $I(k)$ ,  $x(k+1) \leftarrow \mathcal{M}(I(k))$ 
7       $k \leftarrow k+1$ 
8      goto loop

```

Στην παραπάνω περιγραφή, το Information Set $I(k)$ αναπαριστά κάποια εσωτερική κατάσταση της μεθόδου M που ενημερώνει την δημιουργία της επόμενης εκτίμησης βελτίστου. Επισημαίνουμε πως, ως συνέπεια της απλοποίησης περιγραφής με αφαίρεση του τερματικού κριτηρίου από την Επαναληπτική Λύση, η τάξη του συνόλου πληροφορίας απειρίζεται με την πάροδο του χρόνου, απαιτώντας "τέλεια" μνήμη από την μέθοδο M . Στην πράξη, το παραπάνω πρόβλημα δεν θα εμφανιστεί στην εργασία. Στην συνέχεια του κεφαλαίου θα λάβουμε τοπικές επαναληπτικές λύσεις που απαιτούν μόνο σταθερή, πεπερασμένη μνήμη. Με αυτόν τον τρόπο, το μέγεθος κάθε $I(k)$ είναι γνωστό στον σχεδιαστή κατά την σχεδίαση της μεθόδου και παραμένει προφανώς πεπερασμένο.

2.1.1 Περιορισμός Μοντέλου σε Κυρτές Συναρτήσεις

Αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο πως το γενικό μοντέλο προβλήματος ελαχιστοποίησης εμπλουτίζεται με την υπόθεση κυρτών και Lipschitz διαφορισίων συναρτήσεων για τον προσδιορισμό της κλάσης προβλημάτων. Θεωρούμε λοιπόν σκόπιμο σε αυτή την ενότητα να υπενθυμίσουμε τους ορισμούς κυρτότητας και διαφορισιότητας και να εξετάσουμε πως η σύνθεση τοπικών συναρτήσεων που επαληθεύουν αυτές τις υποθέσεις επιτρέπει τον σχηματισμό του καθολικού κριτηρίου προς βελτιστοποίηση, όπως αυτό απαντάται στην Εξίσωση (2.1).

Διαισθητικά, η κυρτότητα είναι χαρακτηριστικό της *μορφής* κριτηρίων κόστους σε περιοχή κοντά σε οποιοδήποτε δοκιμαστικό σημείο. Στην ανάλυση που ακολουθεί θα προκύψει η ανάγκη εξαγωγής συμπερασμάτων για την καθολική ελαχιστότητα σημείων με διαθέσιμη μόνο την *τοπική* συμπεριφορά της συνάρτησης. Αυτό το κενό μεταξύ τοπικού και καθολικού χαρακτηρισμού σημείου βελτιστότητας καλύπτεται από την υπόθεση κυρτότητας όπως αναλύεται στην συνέχεια.

Ορισμός 2.1 (Κυρτό Σύνολο [55]). *Κάποιο σύνολο $C \subseteq \mathbb{R}^m$ καλείται κυρτό (convex) αν για όλα τα $x, y \in C$ και όλα τα $a \in [0, 1]$ ισχύει πως $ax + (1 - a)y \in C$.*

Ισοδύναμα, κάποιο σύνολο είναι κυρτό αν και μόνον αν το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ οποιονδήποτε δυο σημείων ανήκει και αυτό στο σύνολο³. Η χρήση κυρτών εφικτών συνόλων και πεδίων ορισμού συναρτήσεων κόστους αιτιολογείται από αυτήν την ιδιότητα ευθύγραμμου τμήματος μεταξύ δυο σημείων. Ο Ορισμός 2.2 κυρτότητας συναρτήσεων που ακολουθεί καθώς και η ύπαρξη κατευθυνόμενων παραγώγων και αναπτυγμάτων Taylor σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού συναρτήσεων βασίζεται ακριβώς στην ικανότητα "απομόνωσης" οποιουδήποτε ευθύγραμμου τμήματος των συνόλων, που προκύπτει από τον Ορισμό 2.1.

Ακολουθούν κάποιες χρήσιμες ιδιότητες των κυρτών συνόλων και οι ορισμοί των συναρτήσεων που προαναφέρθηκαν.

Πρόταση 2.1 ([55]).

³Με βάση τον παραπάνω ορισμό, το κενό σύνολο είναι επίσης κυρτό. Η εργασία θα παραλείπει τον χαρακτηρισμό κυρτών συνόλων ως μη-κενών αφού είναι προφανές πότε τα αποτελέσματα απαιτούν αυτή την άτυπη υπόθεση και πότε όχι. Άλλωστε, είναι εύκολα κατανοητό πως η χρήση *κενών* μη-κυρτών συνόλων ως εφικτά σύνολα οδηγεί σε κακώς ορισμένα προβλήματα βελτιστοποίησης. Για λεπτομερέστερη σύνδεση των μεθόδων κυρτής βελτιστοποίησης με τις βασικές απαιτήσεις επί κυρτών συνόλων ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Convex Optimization των S. Boyd και L. Vandenberghe [9, Κεφάλαιο 2].

1. Η τομή $\bigcap_{i \in I} W_i$ οποιασδήποτε συλλογής κυρτών συνόλων W_i είναι επίσης κυρτή.
2. Το σύνολο που ορίζεται από το διανυσματικό άθροισμα στοιχείων δυο κυρτών συνόλων W_1, W_2 , είναι επίσης κυρτό. Δηλαδή, αν τα W_1 και W_2 είναι κυρτά τότε το σύνολο $W = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ είναι επίσης κυρτό.
3. Το σύνολο $\lambda C = \{\lambda c \mid \lambda \in \mathbb{R}, c \in C\}$ είναι κυρτό αν και μόνο αν το C είναι κυρτό. Επιπλέον, αν $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, τότε

$$(\lambda_1 + \lambda_2)C = \lambda_1 C + \lambda_2 C.$$
4. Το κλείσιμο (closure) και το εσωτερικό ενός κυρτού συνόλου είναι επίσης κυρτά σύνολα.
5. Η εικόνα και η αντίστροφη εικόνα ενός κυρτού συνόλου διαμέσου μιας affine συνάρτησης είναι επίσης κυρτά σύνολα.

Ορισμός 2.2 (Κυρτή Συνάρτηση [55]). Έστω C και X υποσύνολα του \mathbb{R}^m τέτοια ώστε το C να είναι κυρτό και $C \subset X$. Μια συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται κυρτή στο C αν

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (2.3)$$

Η συνάρτηση λέγεται αυστηρά κυρτή στο C (strictly convex) αν η παραπάνω ανισότητα ισχύει αυστηρά για κάθε $x \neq y$.

Ορισμός 2.3 (Ισχυρά Κυρτή Συνάρτηση). Έστω C και X υποσύνολα του \mathbb{R}^m τέτοια ώστε το C να είναι κυρτό και $C \subset X$. Μια συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται ισχυρά κυρτή στο C αν υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}_{++}$ τέτοιο ώστε

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|y - x\|^2, \quad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (2.4)$$

Η παράμετρος μ καλείται συντελεστής ισχυρής κυρτότητας της f .

Για ευκολία ανάγνωσης θα λέμε ότι η συνάρτηση είναι απλώς κυρτή, αυστηρά κυρτή και ισχυρά κυρτή αν ο προσδιορισμός ισχύει σε όλο το πεδίο ορισμού της. Στις αποδείξεις που ακολουθούν λαμβάνουμε συναρτήσεις που είναι κυρτές σε όλο το \mathbb{R}^m , αφού άλλωστε το μοντέλο προβλημάτων που αναλύεται κάνει παρόμοια υπόθεση, όμως τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας ευκόλως προσαρμόζονται για συναρτήσεις που είναι κυρτές μόνο σε περιοχή. Πρώτα, χρησιμοποιούμε το Λήμμα 2.1 για να δείξουμε την ύπαρξη κάποιας "διάταξης" στην κυρτότητα συναρτήσεων.

Λήμμα 2.1. Για κάποια $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές. Η συνάρτηση

$$\text{είναι ισχυρά κυρτή} \Rightarrow \text{είναι αυστηρά κυρτή} \Rightarrow \text{είναι κυρτή}$$

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός πως η αυστηρή κυρτότητα συνεπάγεται κυρτότητα μιας συνάρτησης είναι προφανής. Όσον αφορά την πρώτη συνεπαγωγή, αρκεί να παρατηρήσουμε πως για

$f(x)$ ισχυρά κυρτή με κάποια παράμετρο a ισχύει

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \frac{a}{2}\|x\|^2 \text{ κυρτή} \Rightarrow \\ g(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda \frac{a}{2}\|x\|^2 - (1-\lambda)\frac{a}{2}\|y\|^2 \\ &< \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \frac{a}{2}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2, \quad \forall x \neq y. \end{aligned}$$

Όμως $g(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \frac{a}{2}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2$, οπότε προκύπτει το ζητούμενο. \square

Στην συνέχεια προχωράμε στον προσδιορισμό της διαφορισιμότητας συναρτήσεων. Γνωρίζουμε πως μια συνεχής συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί από διαφορίσιμη συνάρτηση με αυθαίρετη ακρίβεια. Εύλογα λοιπόν μπορούμε να συμπεράνουμε πως η υπόθεση διαφορισιμότητας από μόνη της δεν παρέχει κάποια ουσιαστική πληροφορία για τις ιδιότητες των προβλημάτων [53]. Ως εκ τούτου, τοποθετούνται επιπρόσθετοι περιορισμοί σχετικά με την μεταβολή της βαθμίδας υπό την μορφή *συνθήκης Lipschitz* για την παράγωγο κάποιας τάξης, οδηγώντας στην χρήση των Lipschitz διαφορίσιμων συναρτήσεων που έχουμε προϋδεάσει.

Αν $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^m$, θα συμβολίζουμε $C_L^{k,p}(\mathcal{Q})$ την κλάση συναρτήσεων που είναι

- k φορές παραγωγίσιμες στο \mathcal{Q} και
- η p -παράγωγος ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz με παράμετρο L , δηλαδή

$$\|\nabla^{(p)}f(x) - \nabla^{(p)}f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{Q}.$$

Ορισμός 2.4 (Lipschitz Διαφορισιμότητα). *Κάνοντας κατάχρηση της ορολογίας, καλούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz διαφορίσιμη αν είναι διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της και η βαθμίδα της $\nabla f(x)$ είναι Lipschitz συνεχής. Συνεπώς, μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται Lipschitz διαφορίσιμη αν $f \in C_L^{1,1}(\mathbb{R}^m)$.*

Η χρήση ταυτόχρονα κυρτών και Lipschitz διαφορίσιμων συναρτήσεων κόστους μας μεταφέρει στην περιοχή της *ομαλής* (smooth) βελτιστοποίησης, σε αντίθεση με την μη-ομαλή βελτιστοποίηση που επιτρέπει σημεία μη-διαφορισιμότητας των συναρτήσεων. Ενώ ισχύει πως τα ομαλά προβλήματα είναι γενικά πιο εύκολα από τα αντίστοιχα μη-ομαλά [53], ενδιαφέρον χαρακτηριστικό των κατανεμημένων συστημάτων είναι πως οι δύο περιοχές μοιάζουν πολύ μεταξύ τους ως προς τις μεθόδους λύσης και ως προς τις υποθέσεις για την λειτουργία των αλγορίθμων. Μάλιστα, εμφανίζονται συχνά στην βιβλιογραφία συμπληρωματικές υποθέσεις για προβλήματα που εκτελούν τον ίδιο λειτουργικό σκοπό ⁴.

⁴Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι υποθέσεις φραγμένων βαθμίδων και υποβαθμίδων που απαντώνται συχνά στην βιβλιογραφία. Στην εργασία Distributed subgradient methods for multiagent optimization οι A. Nedić et al. δείχνουν πως η σύγκλιση των μεθόδων μπορεί αν γίνει αυθαίρετα αργή ελλείψει της υπόθεσης φραγμένων υποβαθμίδων. Όμως, οι K. Yuan et al. [35] δείχνουν πως η υπόθεση μπορεί να παραληφθεί επειδή συμπληρώνεται από την χρήση κατάλληλα επιλεγμένου, σταθερού βήματος και φάσματος δικτύου επικοινωνίας. Αντίστοιχα, οι D. Jakovetić et al. [40] προτείνουν την χαλάρωση της υπόθεσης φραγμένων βαθμίδων διαμέσου προβλημάτων με συμπαγή και κυρτά εφικτά σύνολα. Σε κάθε περίπτωση, και οι τρεις υποθέσεις αποσκοπούν στον περιορισμό της μεταβολής απόκλισης εκτιμήσεων από τον μέσο όρο γειτόνων, άρα υποστηρίζουμε πως εκτελούν την ίδια "βασική" λειτουργία.

Θα ξεκινήσουμε την μελέτη των κυρτών και Lipschitz διαφορίσιμων συναρτήσεων με δυο σημαντικά αποτελέσματα που αιτιολογούν την δυνατότητα σύνθεσης των τοπικών συναρτήσεων κόστους σε καθολικό κριτήριο με τα ίδια χαρακτηριστικά κυρτότητας (Θεώρημα 2.1) και διαφορισμότητας (Θεώρημα 2.2) των επιμέρους κριτηρίων.

Θεώρημα 2.1. Έστω $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ κυρτές συναρτήσεις και $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Τότε η συνάρτηση που ορίζεται $f(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)$ είναι επίσης κυρτή. Αν επιπλέον οι f_i είναι αυστηρά κυρτές τότε και η f είναι αυστηρά κυρτή.

Απόδειξη. Θεωρούμε κάποιο $\lambda \in [0, 1]$. Για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}^m$ ισχύει πως

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda f_i(x) + (1 - \lambda)f_i(y)) \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \end{aligned}$$

Όμοια ακολουθεί και η απόδειξη για την διατήρηση της αυστηρής κυρτότητας. \square

Θεώρημα 2.2. Έστω $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ Lipschitz διαφορίσιμες συναρτήσεις με αντίστοιχες παραμέτρους L_i και κάποιες σταθερές $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Τότε η συνάρτηση που ορίζεται $f(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)$ είναι επίσης Lipschitz διαφορίσιμη με παράμετρο $L = \sum_{i=1}^n (\alpha_i L_i)$.

Απόδειξη. Η διαφορισμότητα της f είναι προφανής. Για τις παραγώγους των f_i , για οποιαδήποτε $x, y \in \mathbb{R}^m$ ισχύει

$$\begin{aligned} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i (\nabla f_i(x) - \nabla f_i(y)) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \|\nabla f_i(x) - \nabla f_i(y)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i \|x - y\| = L \|x - y\|. \quad \square \end{aligned}$$

Για την ολοκλήρωση αυτής της ενότητας παραμένει να αποδείξουμε πως η ιδιότητα ισχυρής κυρτότητας διατηρείται αναλλοίωτη υπό την πράξη κυρτού συνδυασμού, σε αναλογία με τα Θεωρήματα 2.1 και 2.2. Παρ' ότι η απόδειξη αποτελεί φυσικό πόρισμα της διατήρησης κυρτότητας, θα ακολουθήσουμε διαφορετική μέθοδο απόδειξης του ζητούμενου ώστε ταυτόχρονα να προσδιορίσουμε τον συντελεστή ισχυρής κυρτότητας του αθροίσματος. Για τον σκοπό αυτό θα χαρακτηρίσουμε την ισχυρή κυρτότητα στις διαφορίσιμες συναρτήσεις.

Θεώρημα 2.3. Έστω $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, διαφορίσιμη. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες.

[0] Η συνάρτηση f είναι ισχυρά κυρτή με συντελεστή μ .

[1] $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2} \|y - x\|^2$, $\forall x, y$.

[2] $(\nabla f(y) - \nabla f(x))^T (y - x) \geq \mu \|y - x\|^2$, $\forall x, y$.

Απόδειξη. Η απόδειξη της ισοδυναμίας θα ακολουθήσει τις συνεπαγωγές $[0] \Rightarrow [1] \Rightarrow [2] \Rightarrow [0]$. Για τον ισχυρισμό $[0] \Rightarrow [1]$, χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor της $f(x+t(y-x))$, $t > 0$ γύρω από το x . Ισχύει πως

$$\begin{aligned} f(x+t(y-x)) - f(x) &= \nabla f(x)^T t(y-x) + O(t) \Rightarrow \\ \frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t} &= \nabla f(x)^T (y-x) + \frac{O(t)}{t}, \end{aligned}$$

με το $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{O(t)}{t} = 0$. Με χρήση του ορισμού ισχυρής κυρτότητας $f(x+t(y-x)) \leq (1-t)f(x) + tf(y) - \frac{\mu}{2}t(1-t)\|x-y\|^2$, οπότε οδηγούμαστε στην ανισότητα

$$\nabla f(x)^T (y-x) + \frac{O(t)}{t} \leq \frac{t(f(y) - f(x)) - \frac{\mu}{2}t(1-t)\|x-y\|^2}{t}$$

Λαμβάνοντας το όριο $t \rightarrow 0$ προκύπτει $\nabla f(x)^T (y-x) \leq f(y) - f(x) - \frac{\mu}{2}\|x-y\|^2$.

Όσον αφορά τον ισχυρισμό $[1] \Rightarrow [2]$, χρησιμοποιούμε το προηγούμενο αποτέλεσμα.

$$\nabla f(x)^T (y-x) \leq f(y) - f(x) - \frac{\mu}{2}\|x-y\|^2 \Rightarrow \nabla f(x)^T (x-y) \geq -f(y) + f(x) + \frac{\mu}{2}\|x-y\|^2.$$

Συμπεραίνουμε πως

$$\begin{aligned} (\nabla f(y) - \nabla f(x))^T (y-x) &= \nabla f(y)^T (y-x) + \nabla f(x)^T (x-y) \\ &\geq -f(y) + f(x) + f(y) - f(x) + \mu\|x-y\|^2 \\ &= \mu\|x-y\|^2. \end{aligned}$$

Τέλος, στρεφόμαστε στον ισχυρισμό $[2] \Rightarrow [0]$. Για οποιοδήποτε x, y , ορίζουμε την βοηθητική συνάρτηση $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(x+t(y-x))$. Η παράγωγος της συνάρτησης είναι μη-μειούμενη από το $[2]$, έτσι

$$g'(t) = \nabla f(x+t(y-x))^T (y-x) \geq g'(0).$$

Τελικά,

$$f(y) = g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(t) dt \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y-x).$$

□

Στρεφόμαστε πλέον στην διατήρηση της ισχυρής κυρτότητας διαμέσου της πράξης κυρτού συνδυασμού, όπως προαναφέραμε.

Θεώρημα 2.4. Έστω $f_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ κυρτές συναρτήσεις και $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Αν οι συναρτήσεις f_i με δείκτη $i \in I \subseteq \{1, \dots, n\}$, όπου $I \neq \emptyset$, είναι ισχυρά κυρτές με συντελεστή μ_i τότε και η $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)$ είναι ισχυρά κυρτή με συντελεστή $\mu = \sum_{i \in I} \mu_i \alpha_i$.

Απόδειξη. Για όσες συναρτήσεις $i \in I$, $\mu_i > 0$ από τον ορισμό. Στις υπόλοιπες λαμβάνουμε $\mu_i = 0$ ώστε να ισχύει η Ανισότητα (2.4) για όλες τις συναρτήσεις. Τότε λαμβάνοντας $f(x) =$

$\sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$, $a_i \in \mathbb{R}_+$, ισχύει

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq \sum_{i=1}^n a_i \left\{ t f_i(x) + (1-t) f_i(y) - \frac{\mu_i}{2} t(1-t) \|x - y\|^2 \right\} \\ &= t \left(\sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \right) + (1-t) \left(\sum_{i=1}^n a_i f_i(y) \right) - \frac{t(1-t)}{2} \left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i \right) \|x - y\|^2 \\ &= t f(x) + (1-t) f(y) - \frac{\mu}{2} t(1-t) \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Προφανώς $\mu = \sum_{i \in I} a_i \mu_i$, οπότε ισχύει το ζητούμενο. \square

Αξίζει να σημειωθεί πως το Θεώρημα 2.4 απαιτεί μόνον *μια τουλάχιστον* από τις επιμέρους τοπικές συναρτήσεις να είναι ισχυρά κυρτή. Σε αντίθεση με τα θεωρήματα διατήρησης κυρτότητας και Lipschitz διαφορισιμότητας, στα οποία το υπό διάδοση χαρακτηριστικό πρέπει να προϋπάρχει σε όλες τις συνιστώσες, για την ισχυρή κυρτότητα αρκεί τα τοπικά κριτήρια να είναι κυρτά και τουλάχιστον ένα ισχυρά κυρτό. Παρ' ότι στην παρούσα εργασία δεν εκμεταλλευόμαστε στο έπακρο την ισχύ του παραπάνω θεωρήματος, θεωρούμε πως αξίζει να επισημανθεί, ως πιθανή δίοδος για διεύρυνση της κλάσης προβλημάτων ή κατά άλλο τρόπο χαλάρωση των υποθέσεων.

2.1.2 Κριτήρια Βελτισότητας

Ο παραπάνω σκελετικός προσδιορισμός των συναρτήσεων που θα μας απασχολήσουν ήδη προσδίδει πληθώρα χρήσιμων αποτελεσμάτων για την ανάλυση κάποιου δοκιμαστικού σημείου. Ειδικότερα, σκοπεύουμε σε αυτή την ενότητα να απαντήσουμε δυο σημαντικά ερωτήματα: Πότε είναι ένα σημείο x^* βέλτιστο για κάποιο πρόβλημα \mathcal{P} και ποιες ικανές ή και αναγκαίες συνθήκες μπορούν να κατασκευαστούν για τον χαρακτηρισμό τους. Όσον αφορά το δεύτερο σημείο μάλιστα, βλέπουμε πως με δεδομένο κάποιο σημείο δοκιμής, μπορούμε ήδη να απαντήσουμε αν αυτό μπορεί να είναι το τοπικό ελάχιστο κάποιας συνάρτησης κόστους. Ξεκινάμε πρώτα με διασαφήνιση της ορολογίας.

Ορισμός 2.5 (Τοπικό Ελάχιστο [55]). *Δεδομένης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ και $X \subseteq \mathbb{R}^m$, λέμε πως σημείο x^* είναι τοπικό ελάχιστο της f στο X αν υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε*

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in X \cup B(x^*; \epsilon).$$

Αν $X = \mathbb{R}^m$ τότε παραλείπεται ο προσδιορισμός "στο X " και το σημείο καλείται απλώς τοπικό ελάχιστο. Το x^* καλείται και (τοπικός) ελαχιστοποιητής της f .

Ορισμός 2.6 (Καθολικό Ελάχιστο). *Αντίστοιχα, αν για δεδομένο τοπικό ελάχιστο x^* ισχύει πως*

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in X,$$

τότε το σημείο καλείται καθολικό ελάχιστο στο X .

Για τις ανάγκες αυτής της εργασίας, επίλυση ενός προβλήματος \mathcal{P} συνίσταται στην αναγνώριση κάποιου καθολικού ελαχίστου στο πεδίο ορισμού της f . Αυτό φυσικά είναι

δυσκολότερο από την εύρεση τοπικού ελαχίστου αφού η πολυπλοκότητα α) αναγνώρισης τοπικών ελαχίστων μιας τοπολογίας κόστους και β) χαρακτηρισμού τους προς προσδιορισμό των καθολικών ελαχίστων αυξάνεται εκθετικά με το μέγεθος προβλήματος και τον αριθμό παραμέτρων [55, 9]. Τα παραπάνω είναι διπλά αληθή για τα κατανεμημένα προβλήματα, στα οποία ο αριθμός των πρακτόρων και τα χαρακτηριστικά του δικτύου επικοινωνίας περαιτέρω δυσχεραίνουν την απόδοση των μεθόδων.

Τα δυο κριτήρια που ακολουθούν αποτελούν πιθανόν τα πιο θεμελιώδη θεωρήματα της βελτιστοποίησης και δίνουν έναν πρώτο χαρακτηρισμό των σημείων που αναζητούμε. Οι αποδείξεις των κριτηρίων είναι πολύ διαδεδομένες στην βιβλιογραφία και ισχύουν, με μικρές παραλλαγές, για μεγάλη κλάση διαφορίσιμων και μη κυρτών συναρτήσεων [9, 31].

Θεώρημα 2.5 (Κριτήριο Βελτιστότητας 1ης Τάξης [9]). Έστω $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο σημείο $x^* \in \mathbb{R}^m$. Αν x^* είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης τότε ισχύει η σχέση

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Το θεώρημα καλείται Κριτήριο 1ης τάξης επειδή αναφέρεται αποκλειστικά στην πρώτη παράγωγο της συνάρτησης. Παρ' ότι προσφέρει μονάχα μια *ικανή* συνθήκη για τα σημεία βελτιστοποίησης συνάρτησης, παραμένει εξαιρετικά ισχυρό εργαλείο, αφού εγγυάται πως μόνο τα στάσιμα σημεία μιας διαφορίσιμης συνάρτησης είναι σημεία ενδιαφέροντος για το πρόβλημα βελτιστοποίησης. Υπενθυμίζει έτσι πως η επίλυση (τοπικών) προβλημάτων βελτιστοποίησης κυρτών συναρτήσεων αποτελεί πρόβλημα χαρακτηρισμού των στάσιμων σημείων της. Το Κριτήριο 2ης τάξης που ακολουθεί προσφέρει μια ισχυρότερη, *ικανή* και *αναγκαία* συνθήκη βελτιστότητας.

Θεώρημα 2.6 (Κριτήριο Βελτιστότητας 2ης Τάξης [9]). Έστω $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές διαφορίσιμη στο σημείο $x^* \in \mathbb{R}^m$. Το x^* είναι τοπικό ελάχιστο της f αν και μόνον αν

$$\nabla f(x^*) = 0 \text{ και } \nabla^2 f(x^*) \geq 0.$$

Κριτήρια Βελτιστότητας σε Κυρτές Συναρτήσεις

Σημειώνεται η ασυμμετρία μεταξύ των παραπάνω θεωρημάτων. Όπως προαναφέραμε, το 1ο Κριτήριο προσφέρει μόνον *ικανή* συνθήκη για τον χαρακτηρισμό του βέλτιστου, ενώ το 2ο Κριτήριο καθιερώνει *ικανή* και *αναγκαία* συνθήκη. Παρ' όλα αυτά, είναι δυνατόν να κατασκευαστεί κριτήριο 1ης τάξης που να χαρακτηρίζει με *ικανή* και *αναγκαία* συνθήκη τα σημεία βελτιστοποίησης, χάρη στην επιπρόσθετη δομή που προσδίδουν οι κυρτές συναρτήσεις. Παραθέτουμε πρώτα κάποια χρήσιμα αποτελέσματα που θα οδηγήσουν στο ζητούμενο κριτήριο.

Θεώρημα 2.7. Έστω $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν το x^* είναι τοπικό ελάχιστο της f τότε είναι και καθολικό ελάχιστο. Επιπλέον, αν η f είναι ισχυρά κυρτή τότε το x^* είναι το μοναδικό σημείο ελαχιστοποίησης.

Απόδειξη. Έστω πως υπάρχει κάποιο $\hat{x} \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $f(\hat{x}) < f(x^*)$. Αφού το x^* είναι τοπικό ελάχιστο, υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in B(x^*; \epsilon)$. Συνεπώς, πρέπει το \hat{x} να βρίσκεται εκτός της μπάλας και άρα $\|\hat{x} - x^*\| \geq \epsilon$.

Λαμβάνουμε $\lambda := \epsilon/(2\|\hat{x} - x^*\|) < 1/2$ και $x_\lambda := x^* + \lambda(\hat{x} - x^*)$. Από την συνθήκη κυρτότητας για την f ισχύει πως

$$f(x_\lambda) = f(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)x^*) \leq (1-\lambda)f(x^*) + \lambda f(\hat{x}) < f(x^*).$$

Όμως το x^* είναι τοπικό ελάχιστο στην $B(x^*; \epsilon)$ και $\|x_\lambda - x^*\| \leq \epsilon/2 \Rightarrow x_\lambda \in B(x^*; \epsilon)$, άρα έχουμε οδηγηθεί σε άτοπο και συμπεραίνουμε πως το x^* είναι καθολικός ελαχιστοποιητής.

Για το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος, λαμβάνουμε την f ισχυρά κυρτή και επιπλέον κάποιο \hat{x} τέτοιο ώστε $f(\hat{x}) = f(x^*)$. Ορίζουμε το σημείο $y := \frac{1}{2}(\hat{x} + x^*)$ για το οποίο προκύπτει

$$f(y) < \frac{1}{2}(f(x^*) + f(\hat{x})) = f(x^*).$$

Έχουμε πάλι οδηγηθεί σε άτοπο αφού το y δεν είναι ελαχιστοποιητής της f και άρα συμπεραίνουμε πως το x^* είναι μοναδικό. \square

Από το Θεώρημα 2.7 είναι εμφανές γιατί η κυρτότητα είναι επιθυμητό χαρακτηριστικό σε ερωτήματα βελτισοποίησης. Κατ' αρχήν το πρόβλημα της καθολικής βελτισοποίησης ανάγεται με τετριμμένο τρόπο σε εύρεση τοπικού ελαχίστου του κριτηρίου κόστους. Ως συνέπεια αυτού, κάποια μέθοδος επίλυσης δεν χρειάζεται να εξερευνήσει όλα τα στάσιμα σημεία ως πιθανά σημεία ελαχίστου αλλά αντιθέτως αρκεί ένα από αυτά να αποδειχθεί τοπικό ελάχιστο ώστε να επιλυθεί το πρόβλημα. Δευτερευόντως, αν η συνάρτηση κόστους είναι ισχυρά κυρτή, τότε το προηγούμενο θεώρημα προσφέρει και έναν *de facto* χαρακτηρισμό για την ορθότητα της μεθόδου. Πιο συγκεκριμένα, με χρήση των Θεωρημάτων 2.7 και 2.8 αρκεί μια μέθοδος να βρει ένα σημείο στασιμότητας ώστε να έχει το μοναδικό, καθολικό ελάχιστο της συνάρτησης.

Λήμμα 2.2. Έστω $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση.

1. Σε οποιοδήποτε x του πεδίου ορισμού της και $d \in \mathbb{R}^m$, η συνάρτηση πηλίκου διαφοράς $g(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) = \frac{f(x + td) - f(x)}{t}$$

είναι μη-μειούμενη.

2. Σε οποιοδήποτε x του πεδίου ορισμού της και $d \in \mathbb{R}^m$, η ποσότητα

$$f'(x; d) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}$$

υπάρχει και καλείται κατευθυνόμενη παράγωγος της f στην διεύθυνση του d .

3. Σε οποιοδήποτε x του πεδίου ορισμού της, η κατευθυνόμενη παράγωγος $f'(x; \cdot)$ είναι υπογραμμική, δηλαδή είναι θετικά ομογενής,

$$f'(x; ad) = af'(x; d), \quad \forall d \in \mathbb{R}^m, a \in \mathbb{R}_+,$$

και υποαδρυστική,

$$f'(x; u + v) \leq f'(x; u) + f'(x; v).$$

Απόδειξη. Για τον ισχυρισμό 1, λαμβάνουμε $0 < t_1 < t_2$ και $x, d \in \mathbb{R}^m$. Αφού το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R}^m , τότε $x + t_1 d, x + t_2 d \in \text{dom} f$. Από τον χαρακτηρισμό κυρτότητας ισχύει το παρακάτω.

$$\begin{aligned} f(x + t_1 d) &= f\left(x + \frac{t_1}{t_2} t_2 d\right) \\ &= f\left(\left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)x + \frac{t_1}{t_2}(x + t_2 d)\right) \\ &\leq \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)f(x) + \frac{t_1}{t_2}f(x + t_2 d). \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\frac{f(x + t_1 d) - f(x)}{t_1} \leq \left(1 - \frac{1}{t_2}\right)f(x) + \frac{1}{t_2}f(x + t_2 d) - f(x) = \frac{f(x + t_2 d) - f(x)}{t_2}.$$

Για τον ισχυρισμό 2, αρκεί να παρατηρήσουμε πως το πηλίκο διαφορών είναι μη-μειούμενο για $t > 0$ (Ισχυρισμός 1) οπότε, αν υπάρχει το όριο, τότε

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}.$$

Επειδή το infimum πάντα υπάρχει, τότε υπάρχει και το όριο από τα θετικά t . Αν το $t < 0$, τότε από την συμμετρική επιλογή $d' = -d$, προκύπτει και η ύπαρξη του ορίου από τα αρνητικά.

Τέλος, όσον αφορά τον ισχυρισμό 3, αρκεί να σημειωθεί πως

$$f'(x; ad) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t(ad)) - f(x)}{t} = a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + (ta)d) - f(x)}{ta} = af'(x; d)$$

και

$$\begin{aligned} f'(x; u + v) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \frac{t}{2}(u + v)\right) - f(x)}{t/2} \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}(x + tu) + \frac{1}{2}(x + tv)\right) - f(x)}{t} \\ &\leq 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}f(x + tu) + \frac{1}{2}f(x + tv) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \\ &= f'(x; u) + f'(x; v). \end{aligned}$$

□

Μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε το κριτήριο 1ης τάξης για κυρτές συναρτήσεις, όπως περιγράψαμε προηγουμένως. Το Θεώρημα 2.8 που ακολουθεί, αποτελεί την βάση αναζήτησης ελαχίστου σε όλες τις μεθόδους βαθμίδας και εύκολα μεταφράζεται και σε προβλήματα μη-ομαλής κυρτής ανάλυσης⁵. Ολοκληρώνεται έτσι η ανάλυση της παραγράφου

⁵Οι μέθοδοι υποβαθμίδας για την βελτιστοποίηση μη-ομαλών προβλημάτων γενικά, μπορούν να ακολουθήσουν μια παρόμοια τροχιά με την ανάλυση διαφορίσιμων συναρτήσεων που έχει προηγηθεί. Μάλιστα, μια τέτοια διαδικασία θα οδηγούσε σε γνώριμα κριτήρια 1ης και 2ης τάξης για τις υποβαθμίδες των συναρτήσεων, περαιτέρω ενισχύοντας την "ισχύ" των θεωρημάτων. Μια θεμελιακή περιγραφή των μη-ομαλών μεθόδων καθώς και της σχέσης τους με τις βασικές υποθέσεις κυρτότητας δίνεται στο πασίγνωστο *Minimization methods for non-differentiable functions* του N. Z. Shor [31].

και σχηματίζεται μια πλήρη απάντηση στα ερωτήματα που τέθηκαν στην αρχή της ενότητας: βέλτιστο σημείο για δεδομένη κυρτή και διαφορίσιμη συνάρτηση είναι *οποιοδήποτε στάσιμο σημείο* του πεδίου ορισμού της.

Θεώρημα 2.8. Έστω $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και x^* κάποιο σημείο διαφορισιμότητας. Το x^* αποτελεί καθολικό ελάχιστο της συνάρτησης αν και μόνον αν $\nabla f(x^*) = 0$.

Ικανή Συνθήκη. Από το Θεώρημα 2.5 έχει ήδη αποδειχθεί πως αφού το x^* είναι τοπικό ελάχιστο τότε $\nabla f(x^*) = 0$. Ταυτόχρονα, με το Θεώρημα 2.7 γνωρίζουμε πως τα τοπικά και καθολικά ελαχιστα είναι ισοδύναμα στην κλάση κυρτών συναρτήσεων, οπότε προκύπτει το ζητούμενο. \square

Αναγκαία Συνθήκη. Για κάποιο x^* με $\nabla f(x^*) = 0$ λαμβάνουμε την κατευθυνόμενη παράγωγο $f'(x^*; x - x^*)$. Αφού δείξαμε πως ο λόγος διαφορών είναι μη-μειούμενος στην κατεύθυνση του d , τότε

$$f'(x^*; x - x^*) \leq \frac{f(x^* + (x - x^*)) - f(x^*)}{1}.$$

Όμως, η κατευθυνόμενη παράγωγος σε σημείο διαφορισιμότητας είναι

$$f'(x^*; x - x^*) = \nabla f(x^*)^T (x - x^*) = 0$$

αρα προκύπτει το ζητούμενο.

$$0 \leq f(x) - f(x^*), \quad \forall x$$

\square

Εάν επιπλέον το κριτήριο κόστους είναι ισχυρά κυρτό, όπως λαμβάνεται και στην δική μας εργασία, τότε το ελάχιστο που προκύπτει από αυτόν τον χαρακτηρισμό δεν είναι μόνο καθολικό αλλά και μοναδικό (Θεώρημα 2.7).

2.1.3 Υπαρξη Ελαχίστου

Η ύπαρξη ενός τουλάχιστον σημείου ελαχιστοποίησης λαμβάνεται συνήθως ως υπόθεση για την τεκμηρίωση των περισσότερων αλγορίθμων βελτιστοποίησης [35, 21, 41, 40]. Αυτό συμβαίνει επειδή η παραπάνω ανάλυση δεν εγγυάται την ύπαρξη ελαχίστου σε αυθαίρετη (ισχυρά) κυρτή συνάρτηση που μπορεί να αποτελέσει τοπικό κριτήριο κόστους. Επιπλέον, παρά την διατήρηση χαρακτηριστικών κυρτότητας και ομαλότητας που δείξαμε παραπάνω δεν έχουμε δείξει πως διατηρείται ή σχηματίζεται κάποιο ελάχιστο σε κυρτό συνδυασμό συναρτήσεων με τουλάχιστον ένα ελάχιστο.

Σε προβλήματα με περιορισμό του εφικτού συνόλου ως $X = \bigcap_{i=1}^n X_i$ όπου $X_i \subset \mathbb{R}^m$ μη-κενά, κλειστά και κυρτά σύνολα οι A. Nedic et al. έχουν δείξει πως για την ύπαρξη ελαχίστου στην (2.1) αρκεί το X να είναι μη-κενό (ειδάλλως το πρόβλημα δεν θα ήταν καλά ορισμένο) και να έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο $\hat{x} \in \text{int}(X) \Leftrightarrow \exists \delta > 0$ τω $\{x \mid \|x - \hat{x}\| \leq \delta\} \subset X$. [56, 21].

2.1.4 Χαρακτηρισμός Δεύτερης Παραγώγου

Ολοκληρώνουμε την παρουσίαση κυρτών και διαφορίσιμων συναρτήσεων δίνοντας ένας πληρέστερο χαρακτηρισμό αποτελεσμάτων ισχυρής κυρτότητας που θα φανούν χρήσιμες στην αιτιολόγηση του ρυθμού σύγκλισης αλγορίθμου στο Κεφάλαιο 3. Για αυτόν τον σκοπό δίνουμε δύο θεωρήματα που προσδιορίζουν τις μέγιστες και ελάχιστες ιδιοτιμές της Χεσσιανής των δυο φορές διαφορίσιμων συνάρτησεων κόστους βάσει των χαρακτηριστικών κυρτότητας και ομαλότητας που έχουμε ήδη υποθέσει.

Θεώρημα 2.9. Έστω $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές διαφορίσιμη συνάρτηση.

1. Hf είναι κυρτή αν και μόνο αν $\nabla^2 f(x) \geq 0$.
2. Hf είναι αυστηρά κυρτή αν $\nabla^2 f(x) > 0$.
3. Hf είναι ισχυρά κυρτή με παράμετρο μ αν και μόνο αν $\nabla^2 f(x) \geq \mu \mathbb{I}$.

Απόδειξη. Για δεδομένη συνάρτηση f , κυρτή και δυο φορές διαφορίσιμη στο x , λαμβάνουμε την συνάρτηση $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = f(y) - \nabla f(x)^T (y - x)$. Ο μετασχηματισμός $y \rightarrow -\nabla f(x)^T (y - x)$ είναι μετασχηματισμός ομοιότητας, οπότε η g είναι κυρτή και διπλά διαφορίσιμη και επιπλέον ισχύει $\nabla g(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ και $\nabla^2 g(y) = \nabla^2 f(y)$. Παρατηρούμε πως $\nabla g(x) = 0$ οπότε από το Θεώρημα 2.8 το σημείο είναι ελάχιστο για την συνάρτηση. Ακολουθώντας το επιχειρήμα απόδειξης για το Θεώρημα 2.6, προκύπτει $\nabla^2 g(x) = \nabla^2 f(x) \geq 0$.

Αντιστρόφως, αν για διπλά διαφορίσιμη στο x συνάρτηση ισχύει $\nabla^2 f(x) > 0$ τότε από το ανάπτυγμα Taylor και το Θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $t \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{1}{2} (y - x)^T \nabla^2 f(x + t(y - x)) (y - x).$$

Αφού όμως η Χεσσιανή είναι θετικά ημιορισμένη, $(y - x)^T \nabla^2 f(x + t(y - x)) (y - x) \geq 0$ για όλα τα t , y και άρα $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$, η συνάρτηση είναι κυρτή.

Ο δεύτερος ισχυρισμός ακολουθεί την ίδια απόδειξη με το παραπάνω επιχειρήμα για την κυρτότητα της συνάρτησης, όπου φυσικά, αφού $\nabla^2 f(x) > 0 \Rightarrow (y - x)^T \nabla^2 f(x + t(y - x)) (y - x) > 0$ για όλα τα t , y και άρα προκύπτει το ζητούμενο.

Τέλος, όσον αφορά τον ισχυρισμό 3, αρκεί να παρατηρήσουμε πως ισχυρή κυρτότητα της f είναι ισοδύναμη με την κυρτότητα της συνάρτησης $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \frac{\mu}{2} x^T x$. Έτσι εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό 1 και τον αντίστροφο του για την g έχουμε το ζητούμενο. \square

Το θεώρημα δείχνει πως υπάρχει συσχέτιση μεταξύ της αυστηρής κυρτότητας συνάρτησης και της θετικά ορισμένης δεύτερης παραγώγου, όμως δεν είναι σχέση ισοδυναμίας αλλά συνεπαγωγής. Μάλιστα, είναι πολύ εύκολο να κατασκευάσουμε αντιπαράδειγμα για την πρόταση "Αυστηρή κυρτότητα συνάρτησης f συνεπάγεται θετικά ορισμένη Χεσσιανή" αφού η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ είναι προφανώς αυστηρά κυρτή αλλά έχει $\nabla^2 f(0) = 0$. Σημειώνουμε πως στις μονομεταβλητές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία πως "η συνάρτηση f είναι ισχυρά κυρτή αν και μόνον αν το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid f''(x) > 0\}$ είναι πυκνό στο \mathbb{R} " αλλά δεν υπάρχει αντίστοιχο αποτέλεσμα για συναρτήσεις με περισσότερες μεταβλητές [57].

Παρόμοιος χαρακτηρισμός της δεύτερης παραγώγου προκύπτει και από την υπόθεση Lipschitz διαφορισιμότητας για κάποια δυο φορές διαφορίσιμη συνάρτηση.

Θεώρημα 2.10 (Θεώρημα 2.1.6 του [53]). Δεδομένη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, δυο φορές διαφορίσιμη ανήκει στην κλάση $C_L^{2,1}(\mathbb{R}^m)$ αν και μόνον αν

$$0 \leq \nabla^2 f(x) \leq LI, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

2.1.5 Κλάση Τοπικών Προβλημάτων

Πλέον, με χρήση των τυπικών περιγραφών βελτιστοποίησης του Y. Nesterov και των ιδιοτήτων που προηγήθηκαν, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε το μοντέλο της Εξίσωσης (2.1) ως n το πλήθος ανεξάρτητων προβλημάτων, μελών της ίδιας κλάσης.

Ορίζουμε πρώτα την κλάση τοπικών προβλημάτων $\mathcal{F}_{local} := (\Sigma_{local}, \mathcal{O}_{local})$.

Ορισμός 2.7 (Μοντέλο Σ_{local}). Έστω $x \in \mathbb{R}^m$ και συνάρτηση $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, ισχυρά κυρτή με παράμετρο $\mu_i > 0$ και δυο φορές διαφορίσιμη με Lipschitz βαθμίδα, $f_i \in C_{L_i}^{2,1}$, $L_i > 0$. Θεωρούμε την συναρτησιακή μορφή του μοντέλου Σ_{local} ως

$$\begin{aligned} & \text{mimimize} && f_i(x), \\ & \text{subject to} && x \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ορισμός 2.8 (Ανιχνευτής \mathcal{O}_{local}). Θεωρούμε ως ανιχνευτή \mathcal{O}_{local} της κλάσης ως το τοπικό, μαύρο κουτί που για δοκιμαστικό σημείο $x \in \mathbb{R}^m$ επιστρέφει $g \in \mathbb{R}^m$,

$$g = \nabla f_i(x) := \mathcal{O}_{local}(x).$$

Λαμβάνουμε n πράκτορες \mathcal{A}_i , κάθε ένας εκ των οποίων είναι εφοδιασμένος με ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{F}_{local}$. Οι πράκτορες συγχρονίζονται με κάποιο ρολόι k και περιέχουν διάνυσμα $x_i(k) \in \mathbb{R}^m$ που καλούμε *εκτίμηση* του πράκτορα. Επισημαίνουμε πως δεν είναι σκοπός μας κάθε πράκτορας να βελτιστοποιήσει το \mathcal{P}_i αλλά αντιθέτως, να συνδυάσουμε τα παραπάνω προβλήματα ώστε να επιλυθεί το πρόβλημα

$$\begin{aligned} & \text{mimimize} && f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x), \\ & \text{subject to} && x \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Το παραπάνω συναρτησιακό μοντέλο θα καλούμε $\Sigma_{distributed}$ και πιθανόν να επιθυμεί κανείς να ορίσει καταναμημένο ανιχνευτή $\mathcal{O}_{distributed} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_{local}$ έτσι ώστε να οριστεί στην πληρότητά της και η κλάση $\mathcal{F}_{distributed} = (\Sigma_{distributed}, \mathcal{O}_{distributed})$. Θα επιλέξουμε να μην ακολουθήσουμε μια τέτοια περιγραφή καταναμημένων προβλημάτων για δυο λόγους. Κατ' αρχήν, λαμβάνοντας ένα $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}_{distributed}$ αποκρύπτουμε το προσδιοριστικό χαρακτηριστικό του προβλήματος: το πρόβλημα δεν επιλέγεται αυθαίρετα ως μέλος της κλάσης αλλά αντιθέτως συντίθεται από τα επιμέρους τοπικά \mathcal{P}_i που προϋπάρχουν και έχουν δοθεί στους πράκτορες. Θεωρούμε πως η κατασκευαστική "σύνθεση" των προβλημάτων από διακριτούς πράκτορες πρέπει να παραμένει στο προσκήνιο της συμβολογραφίας αφού θα διαλευκάνει τις μεθόδους που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια.

Επιπλέον, ο εφοδιασμός κάποιου μοντέλου με ανιχνευτή $\mathcal{O}_{distributed}$ όπως παραπάνω δεν καθιστά σαφή την τοπική φύση των επιμέρους ανιχνευτών. Χαρακτηριστικά, ενώ είναι

σωστό να υποστηρίξει κανείς πως ο καταναμημένος αλγόριθμος στο σύνολό του περιέχει την πληροφορία που διαθέτει ο $\mathcal{O}_{distributed}$, οι τοπικοί ελεγκτές, εφοδιασμένοι μόνο με τους ανιχνευτές \mathcal{O}_{local} έχουν στην διάθεσή τους μόνον την βαθμίδα του τοπικού κριτηρίου στο σημείο της δικής τους εκτίμησης. Παράβαση της παραπάνω αρχής αποτελεί και παράβαση της καταναμημένης φύσης του αλγορίθμου, οπότε την θεωρούμε επιζήμια.

Αντιθέτως θα κάνουμε αναφορά στο πρόβλημα που περιγράφεται από την Εξίσωση (2.6) μόνον ως καταναμημένο πρόβλημα $\mathcal{P}_{distributed}$. Εννοούμε με αυτόν τον τρόπο την σύνθεση των τοπικών προβλημάτων για την αναζήτηση μοναδικής λύσης, σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.9. Ένα σημείο $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^{nm}$ θα καλείται βέλτιστο σημείο συμφωνίας κάποιου καταναμημένου προβλήματος $\mathcal{P}_{distributed} = \bigcup_{i=1}^n P_i$, όπου $P_i \subset \mathcal{F}_{local}$ αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες.

1. (Συνθήκη συμφωνίας.) $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_n \otimes x^*$ για κάποιο $x^* \in \mathbb{R}^m$.
2. (Συνθήκη βελτιστότητας.) Συμβολίζοντας x_i^* , $i = 1, \dots, n$ τα m -υποδιανύσματα που περιέχονται στο \mathbf{x}^* , ισχύει

$$\sum_{i=1}^n \nabla f_i(x_i^*) = \mathbf{0}_m.$$

Το σημείο $x^* \in \mathbb{R}^m$ θα καλούμε βέλτιστο σημείο των τοπικών προβλημάτων \mathcal{P}_i παρότι δεν ισχύει απαραίτητα πως $\nabla f_i(x^*) = 0$ για οποιοδήποτε πράκτορα. Δηλαδή βέλτιστο σημείο συμφωνίας για τα τοπικά προβλήματα δεν είναι απαραίτητα ο ελαχιστοποιητής για όλα (ή οποιοδήποτε) από τα προβλήματα εάν αυτά ληφθούν μεμονωμένα.

Σημειώνεται πως η λύση του καταναμημένου προβλήματος βελτιστοποίησης είναι σημείο στον χώρο \mathbb{R}^{nm} , n ο αριθμός πρακτόρων, παρότι το μοντέλο του προβλήματος $\Sigma_{distributed}$ και οι εκτιμήσεις των πρακτόρων ορίζονται στον \mathbb{R}^m . Αυτό αποτελεί απλά συνεπαγόμενο της συμβολογραφίας και δεν είναι ιδιαίτερα σημαντικό από μόνο του. Για τον λόγο αυτό, κάνοντας κατάχρηση ορισμού, θα καλούμε και το βέλτιστο σημείο τοπικών προβλημάτων x^* ως βέλτιστο σημείο, φροντίζοντας πάντα ο διαχωρισμός να είναι σαφής.

Με βάση την προηγούμενη περιγραφή, ο σκοπός του Κεφαλαίου 3 μπορεί να διατυπωθεί ως αναζήτηση μιας τοπικής επαναληπτικής μεθόδου \mathcal{M}_i ώστε ο Καταναμημένος Αλγόριθμος (2.7) να οδηγεί τις εκτιμήσεις πρακτόρων $x_i(k)$ πλησίον του x^* ⁶.

Καταναμημένος Αλγόριθμος (2.7)

```

1  input upper bound on delay  $d$ 
2  initialize iteration counter  $k = 0$ 
3  for each agent  $i$  do
4  begin
5      input starting point  $x_i(0) \in \mathbb{R}^m$ 
6      initialize agent memory  $\mathcal{N}_i(0), \dots, \mathcal{N}_i(d-1) \leftarrow \emptyset$ 

```

⁶Ο ελεγκτικός στόχος προσέγγισης του σημείου βέλτιστης συμφωνίας εξαρτάται από την συνεχούς χρόνου έκφραση του συστήματος προς έλεγχο που δίνεται στο Κεφάλαιο 3. Σε αυτό το σημείο, αρκούμαστε στην ποιοτική περιγραφή πως δεδομένο σήμα $x(t)$ προσεγγίζει σημείο x_0 αν $\|x(t) - x_0\| \leq c\epsilon$, όπου $c, \epsilon > 0$ και ϵ επιλεγμένο αυθαίρετα από τον σχεδιαστή.

```

7   local_loop:
8       call oracle  $O_{local}$  at point  $x_i(k)$ 
9       call communication iteration  $C(k)$ ,  $N_i(k+d) \leftarrow C(i; k)$ 
10      update information set,  $I_i(k) \leftarrow (x(k), O(x(k)), N_i(k))$ 
11      call method  $M$  at  $I_k$ ,  $x(k+1) \leftarrow M(I_i(k))$ 
12       $k \leftarrow k+1$ 
13      goto local_loop
14  end

```

Για την ορθότητα του παραπάνω σχήματος επισημαίνουμε δυο ιδιαίτερα σημεία. Κατ' αρχήν, ο αλγόριθμος δεν δρα επαναληπτικά στο σύνολο των πρακτόρων αλλά αντιθέτως, εκτελεί κάθε επανάληψη του κύριου βρόγχου εν παραλλήλω, γεγονός που αιτιολογεί και την κατανομημένη φύση του. Μπορούμε έτσι να ερμηνεύσουμε τον κύριο βρόγχο ως γονέα n διεργασιών που εκτελούνται τοπικά στους πράκτορες. Αυτές οι διεργασίες αποτελούν τους ελεγκτές του κάθε υποσυστήματος και έχουν υποχρέωση συγχρονισμού και επικοινωνίας μόνο κατά την κλήση της μεθόδου $C(i; k)$. Είναι εμφανές από την περιγραφή πως η διεργασία-γονέας είναι "εικονική", με την έννοια πως χρησιμοποιείται μόνο ως επίπεδο αφαίρεσης για να αναφερθούμε στο σύνολο των ελεγκτών και την αλληλεπίδρασή τους. Για αυτόν τον λόγο άλλωστε, μοναδική υποχρέωση της είναι ο συγχρονισμός του ρολογιού k που αποτελεί και προϋπόθεση της εργασίας.

Δεύτερο σημείο ενδιαφέροντος είναι η δομή μνήμης N_i των πρακτόρων και η μέθοδος επικοινωνίας $C(i; k)$ οι οποίες δεν έχουν περιγραφεί ως τώρα. Διευθετούμε αυτήν την εκκρεμότητα στην επόμενη ενότητα, ξεκινώντας με περιγραφή τοπολογιών δικτύων διαμέσου της αλγεβρικής θεωρίας γράφων και χρησιμοποιώντας την για να μοντελοποιήσουμε τις υποθέσεις της εργασίας για το δίκτυο επικοινωνίας των πρακτόρων.

2.2 Αλγεβρική Θεωρία Γράφων

Ενας γράφος μπορεί να αναπαριστά ποικιλία δομών ανάλογα με την περιοχή ενδιαφέροντος, οπότε ξεκινάμε την ενότητα με αφαίρεση του εννοιολογικού περιεχομένου από την μαθηματική περιγραφή. Με στοιχεία u, v κάποιου συνόλου \mathcal{V} , όχι απαραίτητα διακριτά μεταξύ τους, κατασκευάζουμε το διατεταγμένο ζεύγος $(u, v) \in \mathcal{E}$. Η συλλογή $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ορίζει κατευθυνόμενο γράφο με σύνολο κόμβων \mathcal{V} και σύνολο ακμών $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ τέτοιο ώστε $(u, v) \in \mathcal{E}$ αν και μόνο αν η κατευθυνόμενη ακμή από τον κόμβο u στον v ανήκει στον γράφο. Από τον γενικό ορισμό το σύνολο \mathcal{V} δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένο. Παρ' ότι η μελέτη άπειρων γράφων αποτελεί ελκυστική περιοχή της θεωρίας, με πολλά ερωτήματα που εμφανίζονται μόνο σε αυτήν [58], θα περιοριστούμε στην παρουσίαση πεπερασμένων γράφων και κατά την συνέπεια στον χαρακτηρισμό συστημάτων με πεπερασμένο αριθμό πρακτόρων.

Αν $(u, v) \in \mathcal{E}$ τότε λέμε πως ο v γειτνεύει τον u και ονομάζουμε $N_{\mathcal{G}}(v)$ το *σύνολο γειτόνων* του κόμβου v , $N_{\mathcal{G}}(v) = \{u \in \mathcal{V} \mid (u, v) \in \mathcal{E}\}$. Σημειώνεται πως οι γείτονες ενός κόμβου καθορίζονται από το πλήθος των εισερχόμενων σε αυτόν ακμές και επιπλέον επιτρέπεται κάποιος κόμβος να γειτνεύει με τον εαυτό του αν $(u, u) \in \mathcal{E}$. Τέλος, καλούμε *έσω-βαθμό* (in-degree) $\mathbf{deg}_{in}(u)$ ενός κόμβου το πλήθος εισερχόμενων ακμών και αντίστοιχα *έξω-βαθμό* (out-degree) $\mathbf{deg}_{out}(u)$ το πλήθος των εξερχόμενων ακμών. Το δε άθροισμα των δύο καλείται βαθμός του

κόμβου.

Μονοπάτι, μήκους n στο κατευθυνόμενο γράφο ονομάζεται οποιαδήποτε ακολουθία διαδοχικών ακμών $(i, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_{n-1}, j)$. Για ευκολία συμβολισμού, γράφουμε το ίδιο μονοπάτι ως $\langle i, u_1, \dots, u_{n-1}, j \rangle$ και λέμε πως ο κόμβος j είναι *προσβάσιμος* από τον i . Μονοπάτι που τερματίζει στον κόμβο έναρξης ονομάζεται *κύκλος*. *Σκελετικό*, γεννητικό ή διασυνδεδεμένο δένδρο (spanning tree) ενός γράφου $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ονομάζεται οποιοσδήποτε συνδεδεμένος, ακυκλικός υπογράφος $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_{\mathcal{T}})$ με ακμές $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{E}$ που διατρέχει όλες τις κορυφές του \mathcal{G} . Αν ο γράφος \mathcal{G} είναι κατευθυνόμενος τότε μπορεί να οριστεί κατευθυνόμενο ή μη-κατευθυνόμενο σκελετικό δένδρο, ανάλογα με το αν οι ακμές του περιορίζονται από την κατεύθυνση ακμών του αρχικού γράφου.

Τέλος, ένας κατευθυνόμενος γράφος \mathcal{G} ονομάζεται *ασθενώς συνδεδεμένος* (weakly connected) αν ο υποκείμενος μη-κατευθυνόμενος γράφος περιέχει τουλάχιστον ένα σκελετικό δένδρο - ισοδύναμα, ο μη-κατευθυνόμενος γράφος είναι συνδεδεμένος. Ο κατευθυνόμενος γράφος \mathcal{G} καλείται *ισχυρά συνδεδεμένος* (strongly connected) όταν κάθε κόμβος του είναι προσβάσιμος από κάθε άλλο κόμβο - ισοδύναμα, κάθε κόμβος αποτελεί ρίζα κάποιου κατευθυνόμενου σκελετικού δένδρου. Από τους ορισμούς είναι εμφανές ότι κάθε ισχυρά συνδεδεμένος γράφος είναι και ασθενώς συνδεδεμένος, μα όχι αντιστρόφως.

Μπορούμε να ορίσουμε μια πιο πυκνή και χρήσιμη μορφή για την αναπαράσταση πεπερασμένων γράφων n κόμβων, διαμέσου του πίνακα μετάβασης $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Σε αυτή την μορφή, αριθμούμε αυθαίρετα και διατάσσουμε τους κόμβους του γράφου ώστε $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$. Στην συνέχεια, θέτουμε μη-μηδενικά τα στοιχεία $[W]_{ij}$ του πίνακα μετάβασης $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αν και μόνον αν η ακμή $(i, j) \in \mathcal{E}$. Η χρήση πίνακα μετάβασης επιτρέπει έναν ακόμα βαθμό ελευθερίας επιπλέον του ζεύγους $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Αν τα στοιχεία του πίνακα δεν επιλεγούν αυθαίρετα αλλά με κάποια δεδομένη μέθοδο, τότε μπορούν να απεικονίσουν βάρη ακμών.

Όσον αφορά την απεικόνιση κάποιου δικτύου επικοινωνίας κόμβων με την χρήση κατευθυνόμενου γράφου, για δεδομένη τοπολογία επικοινωνίας $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο πίνακα μετάβασης ή μίξης σύμφωνα με τον παρακάτω κανόνα.

Υπόθεση 1 (Κανόνας Βαρών).

1. Για όλα τα $i, j \in \mathcal{V}$ ισχύει,
 - (α) $w_{ii} > 0, \forall i \in \mathcal{V}$,
 - (β) $w_{ij} > 0$ αν $(j, i) \in \mathcal{E}$,
 - (γ) $w_{ij} = 0$ αν $(j, i) \notin \mathcal{E}$.

2. Ο πίνακας W είναι διπλά στοχαστικός, δηλαδή ισχύει $W\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$ και $\mathbf{1}_n^T W = \mathbf{1}_n^T$.

Η Υπόθεση 1.2 μπορεί να γίνει χωρίς βλάβη της γενικότητας για οποιοδήποτε γράφο \mathcal{G} , αποτελεί δε απαίτηση σχεδιαστική και όχι ουσιαστικό περιορισμό επί του συνόλου των αποδεκτών για το πρόβλημα γράφων. Για *στοχαστικό πίνακα* W είναι γνωστό πως η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του είναι η μονάδα και το αντίστοιχο δεξί ιδιοδιάνυσμα είναι $\mathbf{1}_n$. Αν ταυτόχρονα ισχύει πως $\mathbf{1}_n^T W = \mathbf{1}_n^T$ τότε ο πίνακας καλείται *διπλά στοχαστικός*. Σε επόμενη ενότητα θα εξετάσουμε λεπτομερέστερα τις συνέπειες διπλής στοχαστικότητας του πίνακα γειννίας του γράφου \mathcal{G} και πως αυτή επηρεάζει τα προβλήματα συμφωνίας και βελτιστότητας.

Υπόθεση 2 (Συνδεσιμότητα Δικτύου). Ο γράφος \mathcal{G} είναι (ασθενώς) συνδεδεμένος και περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα κατευθυνόμενο σκελετικό δένδρο.

Η Υπόθεση 2 είναι αυστηρότερη από την απαίτηση συνδεσιμότητας για τον γράφο \mathcal{G} αφού υποχρεώνει και την ύπαρξη ενός τουλάχιστον κατευθυνόμενου μονοπατιού από κάποια ρίζα προς κάθε άλλο κόμβο στον από κοινού γράφο. Στο επόμενο κεφάλαιο θα γίνει εμφανές πως η ύπαρξη κατευθυνόμενου σκελετικού δένδρου είναι ικανή μα και αναγκαία συνθήκη για την επίτευξη συμφωνίας.

2.3 Αλγόριθμος Κατάβασης Βαθμίδας

Σε αυτή την ενότητα χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 2.1 και 2.2 για να μελετήσουμε τις δυσκολίες που προκύπτουν σε γενικά προβλήματα καταναμημένης βελτιστοποίησης και ειδικότερα αυτές που αντιμετωπίζουν οι αλγόριθμοι που βασίζονται στον DGD. Ειδικότερα θα εξετάσουμε πως η επαναληπτική κατάβαση βαθμίδας, βήμα απαραίτητο για την βελτιστοποίηση του κριτηρίου κόστους, αντιτίθεται στον στόχο συμφωνίας πρακτόρων και δημιουργεί "ασυμφωνία" μεταξύ των δυο ελεγκτικών στόχων. Επιπλέον, θα παρουσιάσουμε την μέθοδο επέκτασης χώρου κατάστασης που αποτελεί ευρέως διαδεδομένη τεχνική για την απλοποίηση συστήματος με καθυστερήσεις επικοινωνίας σε σύστημα χωρίς αυτές και αποτελεί την βάση επίλυσης προβλημάτων με φραγμένες καθυστερήσεις.

Εστω n πράκτορες \mathcal{A}_i εφοδιασμένοι με $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{F}_{local}$. Με $x_i(k) \in \mathbb{R}^m$ την εκτίμηση του \mathcal{A}_i σχηματίζουμε το συνολικό διάνυσμα καταστάσεων $\mathbf{x}(k) = [x_1(k)^T \ x_2(k)^T \ \dots \ x_n(k)^T]^T \in \mathbb{R}^{nm}$. Το \mathbf{x} θα καλούμε *συσσωρευμένο διάνυσμα κατάστασης* ή συσσωρευμένη εκτίμηση των πρακτόρων. Επιπλέον ορίζουμε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$ και $F : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$. Η πρώτη θα καλείται καθολικό κριτήριο κόστους όπως έχουμε ήδη ορίσει, ενώ η δεύτερη συσσωρευμένο κριτήριο κόστους, σε αναλογία με το όρισμά της.

Για δεδομένη διάταξη επικοινωνίας που αναπαριστάται από τον πίνακα μετάβασης $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, η μέθοδος DGD εκτελεί σε κάθε επανάληψη τον επόμενο υπολογισμό.

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k) - a_k \nabla f_i(x_i(k)), \text{ για } i = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Υπενθυμίζουμε πως $a_k > 0$ είναι το βήμα εκμάθησης για την επανάληψη k και για την γενική περίπτωση αυτού του παραδείγματος λαμβάνουμε τον πίνακα W είναι μη-συμμετρικός, διπλά στοχαστικός με $W\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$ και $\mathbf{1}_n^T W = \mathbf{1}_n^T$. Η μέθοδος (2.8) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί σε μητρική μορφή

$$\mathbf{x}(k+1) = (W \otimes \mathbb{I}_m) \mathbf{x}(k) - a_k \nabla F(\mathbf{x}(k)).$$

Στην έκφραση (2.8) για την επαναληπτική μέθοδο φαίνονται τα βασικά βήματα που εκτελεί κάθε πράκτορας σε κάθε ενημέρωση της ίδιας εκτίμησης, όπως αυτά επισημαίνονται από τους K. Yuan et al. [35]:

1. Υπολογισμός της βαθμίδας $\nabla f_i(x_i(k))$ στο σημείο εκτίμησης πράκτορα.
2. Υπολογισμός του σταθμισμένου αθροίσματος εκτιμήσεων γειτόνων $\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k)$.

3. Συνδυασμός των βημάτων κατάβασης και συμφωνίας στον νόμο ενημέρωσης $x_i(k+1) = \sum_{i=1}^n w_{ij}x_j(k) - a_k \nabla f_i(x_i(k))$.

Αξίζει να σημειωθεί πως η παραπάνω απαρίθμηση αντικατοπτρίζει και την γενική περιγραφή που δόθηκε στους Επαναληπτικούς Αλγορίθμους (2.2) και (2.7). Συγκεκριμένα, ο υπολογισμός βαθμίδας αποτελεί την κλήση τους αλγορίθμου στον τοπικό ανιχνευτή πρώτης τάξης $O_{local}(x_i(k))$ που χρησιμοποιήθηκε για τον ορισμό της κλασης προβλημάτων. Εν συνεχεία, ο υπολογισμός σταθμισμένου αθροίσματος γειτόνων υπαινίσσεται την κλήση στην μέθοδο επικοινωνίας των πρακτόρων. Σε αυτή την περίπτωση $C(i; k) = \{x_j(k) \mid j \in N_G(i)\}$. Τέλος, το βήμα πολλαπλασιασμού με την ακολουθία εκμάθησης και άθροισης αποτελεί φυσικά την αριθμητική μέθοδο M_i . Η χρησιμότητα της "μνήμης" πρακτόρων δεν έχει γίνει ακόμα εμφανής, αλλά θα γίνει σαφές πως είναι απαραίτητη για την επίλυση του προβλήματος παρουσία καθυστερήσεων στην ενότητα επέκτασης κατάστασης που θα ακολουθήσει.

Για σταθερό βήμα $a_k \equiv a > 0$ και Lipschitz συνεχείς βαθμίδες, η μέθοδος οδηγείται σε *προσεγγιστική σύγκλιση* (inexact convergence) γύρω από την λύση x^* [32, 41]. Με τον όρο αυτό εννοούμε πως η εκτίμηση $x_i(k)$ κάθε πράκτορα οδηγείται σε κάποιο σημείο εντός της $O(a)$ -περιοχής της λύσης, το οποίο σημείο δεν είναι απαραίτητα σημείο συμφωνίας για τους πράκτορες⁷. Εκτός της $O(a)$ -περιοχής, το κριτήριο κόστους μειώνεται με ρυθμό $O(\frac{1}{k})$. Εάν επιπλέον το κριτήριο κόστους είναι ισχυρά κυρτό τότε ο ρυθμός βελτιώνεται σε R-γραμμικός [35]. Αξίζει να σημειωθεί πως οι K. Yuan et al. [35] αποδεικνύουν πως η συμπεριφορά αυτή απαντάται, ανεξαρτήτως της διαφορισιμότητας των f_i , και για μεθόδους κατάβασης υποβαθμίδας. Παρ' ότι οι μέθοδοι υποβαθμίδας δεν θα εξεταστούν σε αυτήν την εργασία, το αποτέλεσμα είναι σημαντικό γιατί αποδεικνύει πως η συμπεριφορά σύγκλισης σε περιοχή είναι αποτέλεσμα της επιλογής σταθερού βήματος εκμάθησης [4].

2.3.1 Αλληλεπίδραση Στόχων Συμφωνίας και Βελτιστοποίησης

Για να γίνει αντιληπτός ο μηχανισμός προσεγγιστικής σύγκλισης του αλγορίθμου σταθερού βήματος, ας θεωρήσουμε πως επιλέγουμε κάποιο κατάλληλο $a_k \equiv a > 0$ ώστε η μέθοδος (2.8) να είναι ευσταθής. Συνήθως η καταλληλότητα του βήματος διαμορφώνεται από κάποιο άνω όριο. Παραδείγματος χάριν, στην εργασία On the convergence of decentralized gradient descent [35] αποδεικνύεται η επάρκεια τις ανισότητας $a < \frac{1+\lambda_{\min}(W)}{\max(L_{f_i})}$. Σε αυτή τη περίπτωση η ακολουθία $\{x(k)\}$ συγκλίνει σε κάποια οριακή τιμή $x^\infty \in \mathbb{R}^{nm}$ τέτοια ώστε [41]

$$x^\infty = (W \otimes \mathbb{I}_m)x^\infty - a \nabla F(x^\infty). \quad (2.9)$$

Αν το σημείο x^∞ επαληθεύει την συνθήκη συμφωνίας, τότε πρέπει να υπάρχει κάποιο $x^\infty \in \mathbb{R}^m$ ώστε $x^\infty = \mathbf{1}_n \otimes x^\infty$. Ως εκ τούτου, συνεπάγεται πως

$$(W \otimes \mathbb{I}_m)x^\infty = (W \otimes \mathbb{I}_m)(\mathbf{1}_n \otimes x^\infty) = (W\mathbf{1}_n) \otimes (\mathbb{I}_m x^\infty) = (\mathbf{1}_n \otimes x^\infty) = x^\infty.$$

⁷Για αυτό άλλωστε κάναμε και νύξη σε προσεγγιστική βέλτιστη συμφωνία κατά την εισαγωγή της εργασίας. Η ύπαρξη σφάλματος μόνιμης κατάστασης αποτελεί αναπόσπαστο χαρακτηριστικό των μεθόδων σταθερού βήματος και τα ερωτήματα που θα απασχολήσουν την εργασία αφορούν την στρατηγική επιλογής του βήματος, δεδομένης κάποιας επιθυμητής ακρίβειας στην λύση.

Η Εξίσωση (2.9) πλέον γράφεται $\nabla F(\mathbf{x}^\infty) = 0 \Leftrightarrow \nabla f_i(\mathbf{x}^\infty) = 0, \forall i$ που σημαίνει πως το ίδιο \mathbf{x}^∞ είναι βέλτιστο για όλα τα τοπικά κριτήρια. Αφ' ενός, η παραπάνω απαίτηση δεν ισχύει για αυθαίρετη επιλογή κριτηρίων κόστους και αφ' ετέρου είναι διαφορετική από την συνθήκη βελτιστότητας που δόθηκε στον Ορισμό 2.9. Συμπερασματικά, ο όρος μίξης $(W \otimes \mathbb{I}_m)\mathbf{x}(k)$ είναι υπεύθυνος για την συμφωνία των πρακτόρων και ο όρος βαθμίδας $-a\nabla F(\mathbf{x}(k))$ αποτελεί "ανεπιθύμητη" συμπεριφορά ως προς τον στόχο αυτό.

Μια ικανοποιητική αλλά κεντροποιημένη λύση για την μη-μηδενική βαθμίδα στην συμφωνία είναι η χρήση διορθωμένης βαθμίδας κατά τον μέσο όρο,

$$x_i(k+1) = [W]_{i,:} x_i(k) - a \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \nabla f_j(x_j(k)) \quad (2.10)$$

ή με χρήση του συμβολισμού συσσωρευμένου διανύσματος κατάστασης $\mathbf{x}(k)$,

$$\mathbf{x}(k+1) = (W \otimes \mathbb{I}_m)\mathbf{x}(k) - a \frac{1}{n} \mathbf{vec}_{m \times n}^{-1}[\nabla F(\mathbf{x}(k))]\mathbf{1}_n. \quad (2.11)$$

Παραπάνω έχουμε κάνει χρήση των τελεστών διανυσματοποίησης $\mathbf{vec}_{m \times n}[X] : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$ και αντιστρόφου $\mathbf{vec}_{m \times n}^{-1}[x] : \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$, όπου $\mathbf{vec}_{m \times n}^{-1}[x] = (\mathbf{vec}_{n \times n}[\mathbb{I}_n]^T \otimes \mathbb{I}_m)(\mathbb{I}_n \otimes x)$.

Έχουν αναπτυχθεί αλγόριθμοι σταθερού βήματος που βασίζονται στην χρήση μέσου όρου βαθμίδων για την σύγκλιση σε κάποιο σημείο συμφωνίας, διατηρώντας την κατανομημένη φύση του αλγορίθμου DGD. Ο αλγόριθμος DIGing των A. Nedic, A. Olshevsky, W. Shi [15], χρησιμοποιεί βοηθητική μεταβλητή που προσεγγίζει τον μέσο όρο των βαθμίδων ενώ ο αλγόριθμος EXTRA των W. Shi, Q. Ling et al. [41] εκτελεί "διπλά" βήματα ενημέρωσης με διαφορετικούς πίνακες μίξης με σκοπό να σχηματιστούν διορθωτικοί όροι πλησίον του σημείου συμφωνίας. Παρ' ότι δεν αποτελούν το θέμα αυτής της εργασίας, είναι ενδιαφέρονσα δίοδος μελλοντικής μελέτης κατά πόσο μπορούν και αυτές οι μέθοδοι να συγκλίνουν με φραγμένες διαταραχές και αν επιδέχονται την ανάπτυξη αντίστοιχης μεθοδολογίας για την ενσωμάτωσή τους σε μη-γραμμικού ελεγκτές.

2.3.2 Συσσωρευμένο Κριτήριο Κόστους

Στην περιγραφή της προηγούμενης ενότητας κάναμε αναφορά στο συσσωρευμένο κριτήριο κόστους $F(\mathbf{x}(k)) : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}$ και χρησιμοποιήσαμε την παράγωγο $\nabla F(\mathbf{x}(k))$ για την κατάβαση βαθμίδας. Η έκφραση αυτή διευκολύνει γενικά τον συμβολισμό των τοπικών βαθμίδων και όπως φαίνεται παρακάτω διατηρεί κάποια από τα χαρακτηριστικά κυρτότητας και φραγμένων ιδιοτιμών δεύτερης παραγώγου που προσδιορίζουν και το πραγματικό κριτήριο προς βελτιστοποίηση $f(x)$. Ειδικότερα, για n προβλήματα με συναρτησιακό μοντέλο Σ_{local} γνωρίζουμε για την F πως:

1.

$$\nabla F(\mathbf{x}(k)) = [\nabla f_1(x_1(k))^T, \nabla f_2(x_2(k))^T, \dots, \nabla f_n(x_n(k))^T]^T \in \mathbb{R}^{nm}$$

2.

$$\nabla^2 F(\mathbf{x}(k)) = \begin{bmatrix} \nabla^2 f_1(x_1(k)) & & & \\ & \nabla^2 f_2(x_2(k)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \nabla^2 f_n(x_n(k)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nm \times nm}$$

Ως εκ τούτου, ισχύει πως υπάρχουν $\mu, L > 0$ τέτοια ώστε για οποιοδήποτε σημείο $\mathbf{x} = [x_1^T, \dots, x_n^T]^T$, να ισχύει

$$\mu \mathbb{I}_{nm} \leq \nabla^2 F(\mathbf{x}) \leq L \mathbb{I}_{nm}. \quad (2.12)$$

Αφού ο πίνακας $\nabla^2 F$ είναι μπλοκ διαγώνιος τότε έχει για ιδιοτιμές αυτές των επιμέρους πινάκων $\nabla^2 f_i$. Από τα Θεωρήματα 2.10 και 2.9 ισχύει πως $\mu_i \mathbb{I}_m \leq \nabla^2 f_i \leq L_i \mathbb{I}_m$, $\forall i = 1, \dots, n$. Συμπεραίνουμε πως το $\mu = \min_i(\mu_i)$ είναι η μικρότερη ιδιοτιμή του $\nabla^2 F$ και αντίστοιχα $L = \max_i(L_i)$, η μεγαλύτερη. Η αξία της κατασκευής συσσωρευμένης συνάρτησης αναπαριστάται εξ ολοκλήρου στην Εξίσωση (2.12). Πληροφορία για την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης θα χρησιμοποιηθεί στο Κεφάλαιο 3 για την επιλογή ικανού βήματος εκμάθησης και την απόδειξη σύγκλισης της ακολουθίας εκτιμήσεων.

2.3.3 Απλοποίηση Γράφων με Καθυστερήσεις

Επιστρέφουμε στην Εξίσωση (2.8) ώστε να εξετάσουμε την συμπεριφορά της παρουσία καθυστερήσεων. Δεδομένου κάποιου γράφου $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ με πίνακα μετάβασης W , μπορούμε να αντιληφθούμε μεταβλητή χρονική καθυστέρηση επικοινωνίας ως μετατόπιση των πιο πρόσφατων (πιο έγκυρων) εκτιμήσεων πίσω στον χρόνο. Έστω πως ο κόμβος j στέλνει κάποια στιγμή s την εκτίμησή του $x_j(s)$ σε κάποιον γείτονα i . Η εκτίμηση καθυστερεί στον δίαυλο (j, i) και γίνεται διαθέσιμη στον παραλήπτη την στιγμή $k = s + \tau_{ij}(k)$. Σημειώνεται πως αφού οι καθυστερήσεις είναι προϊόν σφάλματος στον δίαυλο, η ίδια εκτίμηση του κόμβου (που δεν είναι απαραίτητο να μεταδοθεί διαμέσου του δικτύου) είναι πάντα διαθέσιμη δίχως καθυστερήσεις στον πράκτορα. Τυπικά, $\tau_{ii}(k) = 0 \forall i \in \mathcal{V}, k \geq 0$. Εάν γνωρίζουμε πως υπάρχει $d \geq 0$ τέτοιο ώστε $0 \leq \tau_{ij}(k) \leq d$ για όλα τα $i, j \in \mathcal{V}$ και όλα τα $k \geq 0$ τότε γνωρίζουμε ότι την στιγμή k κάθε πράκτορας έχει στην διάθεση του όλες τις εκτιμήσεις $x_j(k-d)$, $j \in N_{\mathcal{G}}(i)$. Η παραπάνω περιγραφή αποτελεί την υπόθεση φραγμένων καθυστερήσεων.

Υπόθεση 3 (Φραγμένες Καθυστερήσεις). Έστω πως για τις καθυστερήσεις $\tau_{ij}(k)$ σε δίαυλο (j, i) την χρονική στιγμή k ισχύουν:

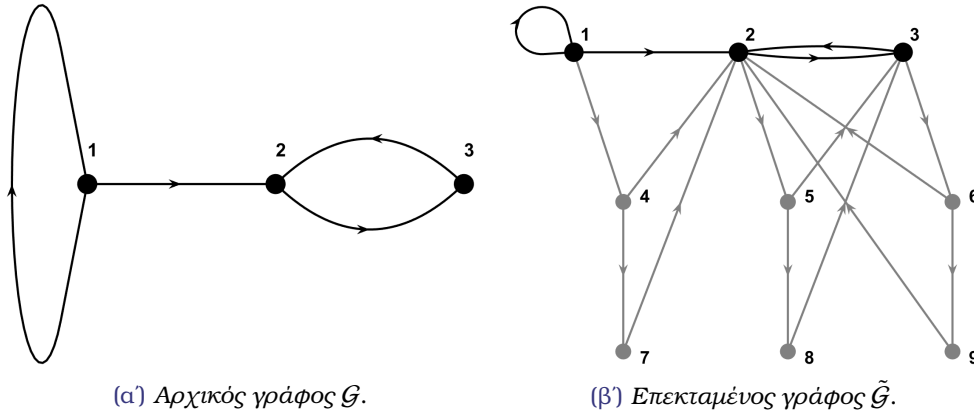
1. $\tau_{i,i}(k) = 0$ για όλους τους κόμβους $i \in \mathcal{V}$ και $k \geq 0$.
2. $\tau_{i,j}(k) = 0$ για όλους τους κόμβους $j \in N_{\mathcal{G}}(i)$ και k τέτοια ώστε η εκτίμηση $x_j(k)$ να μην είναι διαθέσιμη στον i την στιγμή της ενημέρωσης $k+1$.
3. Υπάρχει ακέραιος $d \geq 0$ τέτοιος ώστε $0 \leq \tau_{ij}(k) \leq d$ για όλα τα i, j και όλα τα k .

Δεδομένης της Υπόθεσης 3, μετατρέπουμε τον αρχικό γράφο σε επεκταμένο, χωρίς καθυστερήσεις, με την προσθήκη d εικονικών κόμβων σε βρογχο γύρω από κάθε αρχικό κόμβο, που αναπαριστούν την μεγαλύτερη δυνατή καθυστέρηση αποστολής της εκτίμησής προς τους γείτονές του [3, 17, 18, 19]. Ακολουθώντας την ονομασία των A. Nedic, A. Ozdaglar στην εργασία τους Convergence Rate for Consensus with Delays [17], ονομάζουμε *υπολογιστικούς κόμβους* τους "πραγματικούς" κόμβους του αρχικού γράφου \mathcal{G} και *μη-υπολογιστικούς*

τους κόμβους που προσθέτουμε διαμέσου κατασκευής. Αριθμούμε τους $n(d + 1)$ κόμβους του νέου γράφου $\tilde{\mathcal{G}} = (\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\mathcal{E}})$ ως εξής:

1. Τους υπολογιστικούς κόμβους αριθμούμε όμοια με κομβους του \mathcal{G} , $i = 1, \dots, n$.
2. Τους μη-υπολογιστικούς κόμβους τους αριθμούμε $i + 1, i + 2, \dots, i + n$ σύμφωνα με τον υπολογιστικό κόμβο i στον οποίο είναι συνδεδεμένοι.

Παρακάτω δίνεται παράδειγμα κατασκευής του $\tilde{\mathcal{G}}$ από δεδομένο γράφο \mathcal{G} .



Σχήμα 2.2: Μέθοδος επέκτασης γράφου για απαλοιφή καθυστερήσεων. Με μαύρο εικονίζονται οι υπολογιστικοί κόμβοι, με γκρι οι μη-υπολογιστικοί.

Στο Σχήμα 2.2 φαίνεται η ικανότητα καθυστέρησης μηνυμάτων μεταξύ υπολογιστικών κόμβων δρομολογώντας τα διαμέσου μονοπατιών μη-υπολογιστικών κόμβων του επεκταμένου γράφου. Έτσι, η ακμή με $(1, 2) \in \mathcal{E}$ με καθυστέρηση $t_{2,1}(k) = 1$ είναι ισοδύναμη με την αποστολή μηνύματος στο μονοπάτι $(1, 4, 2) \in \tilde{\mathcal{E}}$. Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα της παραπάνω κατασκευής είναι πως στον επεκταμένο γράφο οι υπολογιστικοί κομβοι διατηρούν τους ιδιοβρόγχους και δεν εμφανίζουν ακμές από τους μη-υπολογιστικούς κόμβους $i + n, i + 2n, \dots, i + dn$ προς τον υπολογιστικό i λόγω της Υπόθεσης 3.1.

Επιλογή κανόνα ενημέρωσης

Η ιδέα της επέκτασης του γράφου είναι ιδιαίτερα ισχυρή για την αντιμετώπιση μεταβλητών, φραγμένων καθυστερήσεων. Πλέον, το πρόβλημα συμφωνίας και βελτιστοποίησης μπορεί να επιλυθεί στον επεκταμένο χώρο κατάστασης $\mathbf{z}(k) = [x_1(k)^T, \dots, x_n(k)^T, x_1(k-1)^T, \dots, x_n(k-d)^T]^T = [\mathbf{x}(k)^T, \mathbf{x}(k-1)^T, \dots, \mathbf{x}(k-d)^T]^T$ χωρίς σημαντική τροποποίηση βέλτιστου σημείου του Ορισμού 2.9. Η εικονική κατασκευή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη αφού επιτρέπει και την μελέτη χρονομεταβαλλόμενων γράφων. Πιο χαρακτηριστικά, έχει χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί ο ρυθμός επίτευξης συμφωνίας στην εργασία των A. Nedić et al. [17] και η επίτευξη βελτιστοποίησης με χρήση μεθόδων προβολής επί ανόμοιων εφικτών συνόλων στην εργασία των P. Lin et al. [21].

Για την εργασία μας, τροποποιούμε την γενική κατασκευή ακολουθώντας σχήματα όπως αυτά που απατώνται στο προαναφερθέν κείμενο [21, Εξίσωση (17)] και τις εργασίες των H. Psillakis et al. [18, Υπόθεση 3] και [19, Υπόθεση 4], κείμενα που εξ' αρχής αποτέλεσαν την έμπνευση για την επιλογή θέματος. Σε αυτές, η ενημέρωση του κόμβου i την στιγμή k δεν χρησιμοποιεί τις ενδιάμεσες (και πιθανόν μη διαθέσιμες) εκτιμήσεις $x_j(k-r)$, $r = 1, \dots, d-1$

αλλά αντιθέτως μόνο τις $x_j(k-d)$, $j \in N_G(i)$ και $x_i(k)$. Λαμβάνουμε τον κανόνα ενημέρωσης

$$x_i(k+1) = \sigma(x_i(k) - x_i(k-d)) + \sum_{j=1}^n w_{ij}x_j(k-d) - a\nabla f_i(x_i(k)) \quad (2.13)$$

οπου σ σχεδιαστική μεταβλητή, τέτοια ώστε $0 < \sigma < \min_{i \in V} w_{ii}$.

Σημείωση 1. Λόγω της άγνωστης και ανομοιογενούς καθυστέρησης στα κανάλια μεταξύ των πρακτόρων, επιλέγουμε ο κανόνας ανανέωσης να λαμβάνει τις "τελευταίες έγκυρες" εκτιμήσεις των πρακτόρων, δηλαδή τις εκτιμήσεις πριν από d μονάδες χρόνου. Ως εκ τούτου, δεν έχει σημασία η σειρά άφιξης των εκτιμήσεων στον κόμβο, αρκεί το πρωτόκολλο επικοινωνίας να προσδιορίζει 1. τον κόμβο προέλευσης της κάθε εκτίμησης και 2. την χρονική στιγμή αποστολής αυτής [18, 19].

Είναι εμφανές από τους όρους $x_i(k-d)$ και $x_j(k-d)$ πως ο Κανόνας 2.13 χρησιμοποιεί τις παρελθοντικές εκτιμήσεις των πρακτόρων για την ενημέρωση κάθε χρονική στιγμή. Καθίσταται λοιπόν απαραίτητο πως ο κάθε πράκτορας διατηρεί ιστορικό ιδίων και γειτονικών εκτιμήσεων. Αυτή η μνήμη έχει εμφανιστεί και στον Κατανεμημένο Αλγόριθμο (2.7) και πλέον μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως διαμέσου της επόμενης υπόθεσης.

Υπόθεση 4 (Μνήμη Πρακτόρων). Κάθε πράκτορας i διατηρεί πεπερασμένη μνήμη ώστε κάθε χρονική στιγμή k να έχει πρόσβαση σε όλες τις εκτιμήσεις $\{x_j(k-d) \mid j \in N_G(i)\}$. Στον Αλγόριθμο (2.7) η δομή αυτή συμβολίζεται ως

$$N_i(k) \leftarrow C(i; k-d) = \{x_j(k-d) \mid j \in N_G(i)\}.$$

Προφανώς, η απαραίτητη μνήμη είναι πεπερασμένη δεδομένου του πεπερασμένου πλήθους γειτόνων κάθε πράκτορα.

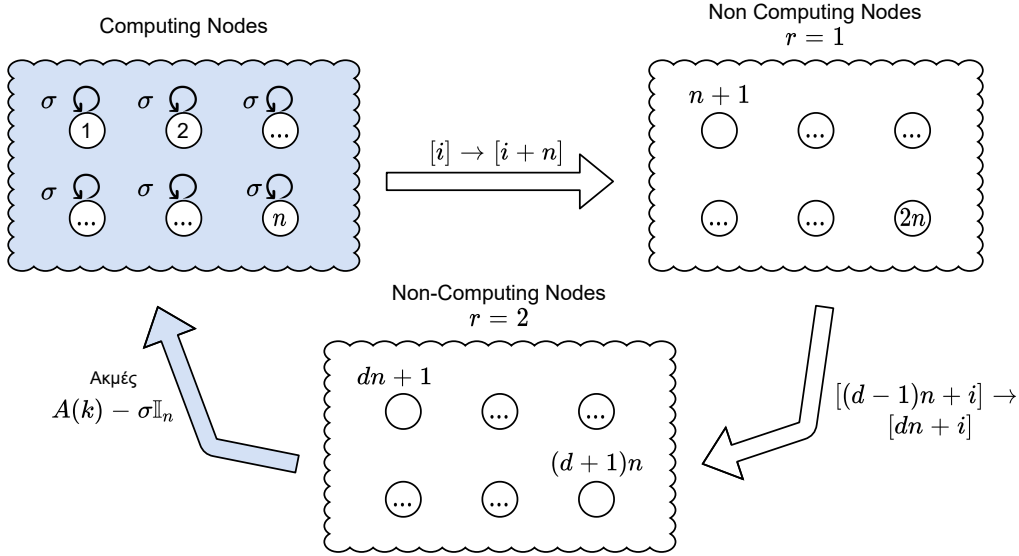
Σημείωση 2. Αφού έχουμε κατά σύμβαση δεχθεί πως κάθε $i \in N_G(i)$ τότε η Εξίσωση (2.13) περιλαμβάνει το άθροισμα

$$\dots - \sigma x_i(k-d) + w_{ii}x_i(k-d) = \dots + (w_{ii}(k) - \sigma)x_i(k-d).$$

Επειδή επιλέγουμε $0 < \sigma < \min w_{ii}$ μπορούμε να ερμηνεύσουμε την παράμετρο σ ως το βάρος που προσδίδει το δίκτυο στις πιο πρόσφατες εκτιμήσεις κάθε κόμβου i έναντι των καθυστερημένων κατά d εκτιμήσεων του ιδίου. Στην συνέχεια της εργασίας θα εξετάσουμε πως η μεταβολή της παραμέτρου σ επηρεάζει την συμπεριφορά του αλγορίθμου.

Κατασκευή επεκταμένου γράφου

Αναφέραμε προηγουμένως πως η (2.13) απαιτεί μια τροποποιημένη κατασκευή επεκταμένου γράφου. Παραθέτουμε στην συνέχεια τους κανόνες κατασκευής του $\tilde{\mathcal{G}}$ και δίνουμε αναπαράσταση αυτής της διαδικασίας για $d = 2$ στο Σχήμα 2.3. Η απαρίθμηση κόμβων παραμένει όπως περιγράφηκε παραπάνω, στην κατασκευή αλλάζουν μόνο οι ακμές μεταξύ υπολογιστικών και μη κόμβων.



Σχήμα 2.3: Γράφος επεκταμένης κατάστασης με αναπαράσταση της αλληλεπίδρασης υπολογιστικών και μη κόμβων.

1. Κάθε υπολογιστικός κόμβος i αποκτά ιδιοβρόγχο βάρους σ και εξερχόμενη ακμή μόνον προς τον μη-υπολογιστικό $i + n$. Οι εξερχόμενες ακμές προς άλλους υπολογιστικούς κόμβους σβήνονται.
2. Κάθε μη-υπολογιστικός κόμβος $i + rn$ όπου $i = 1, \dots, n$ και $r = 1, \dots, d - 1$ έχει εξερχόμενη ακμή μόνον προς τον $i + (r + 1)n$. Οι εξερχόμενες ακμές προς υπολογιστικούς κόμβους (συμπεριλαμβανομένου και του i) σβήνονται.
3. Στους μη-υπολογιστικούς κόμβους $i + dn$, $i = 1, \dots, n$ προσδίδονται οι ακμές του αρχικού γράφου με βάρη $W - \sigma \mathbb{I}_n$. Σε αυτές περιλαμβάνονται και ακμές προς τον αρχικό υπολογιστικό κόμβο i με βάρους $w_{ii} - \sigma > 0$.

Οι εισερχόμενες σε μη-υπολογιστικό κόμβο ακμές αναπαριστούν την καθυστέρηση εκτιμήσεων κατά ακριβώς d χρόνους ενώ η αλληλεπίδραση που περιγράφεται στην αρχική τοπολογία \mathcal{G} κωδικοποιείται στους ιδιοβρόγχους και τις εισερχόμενες ακμές των υπολογιστικών κόμβων.

Λήμμα 2.3. Δεδομένης της υπόθεσης συνδεσιμότητας του γράφου \mathcal{G} (Υπόθεση 2) ο γράφος $\tilde{\mathcal{G}}$ είναι επίσης ασθενώς συνδεδεμένος και επιπλέον περιέχει κατευθυνόμενο σκελετικό δένδρο με βάθος το πολύ $n(d + 1)$ ακμές.

Απόδειξη. Για διευκόλυνση γράφουμε u_i τις ακμές του \mathcal{G} και x_i αυτές του $\tilde{\mathcal{G}}$. Για την απόδειξη, παρατηρούμε πως για όλα τα j , $i = \{1, \dots, n\}$:

1. Υπάρχουν όλα τα μονοπάτια $\langle x_i, x_{n+i}, \dots, x_{dn+i} \rangle$ στο $\tilde{\mathcal{G}}$ και έχουν μήκος d .
2. Επιπλέον υπάρχουν στο $\tilde{\mathcal{G}}$ οι ιδιοβρόγχοι (x_i, x_i) και οι ακμές (x_{nd+i}, x_i) .
3. Οι κόμβοι x_i και x_{dn+i} μοιάζουν με τον u_i αφού

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, (u_j, u_i) \in \mathcal{E} \Rightarrow (x_{dn+j}, x_i) \in \tilde{\mathcal{E}}.$$

Δηλαδή, οι x_i έχουν εισερχόμενες ακμές όσες εισερχόμενες ακμές έχει ο u_i και οι x_{dn+i} έχουν εξερχόμενες ακμές όσες εξερχόμενες έχει ο u_i .

Θα δείξουμε το ζητούμενο κατασκευαστικά. Από τις παρατηρήσεις 1 και 2 παραπάνω

είναι σαφές πως για όλα τα $i \in \{1, \dots, n\}$, οι συνιστώσες $\tilde{V}_i = \{x_i, x_{n+i}, \dots, x_{nd+i}\}$ είναι ισχυρά συνδεδεμένες αφού περιέχουν τον κατευθυνόμενο κύκλο $\langle x_i, x_{n+i}, \dots, x_{nd+i}, x_i \rangle$. Λαμβάνουμε $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_T)$ το κατευθυνόμενο σκελετικό δένδρο στο γράφο \mathcal{G} και με αφετηρία την ρίζα του, το διατρέχουμε κατά βάθος.

Για κάθε ακμή $(u_i, u_j) \in \mathcal{E}_T$ ισχύει

$$\begin{aligned} (u_i, u_j) \in \mathcal{E}_T &\Rightarrow (u_i, u_j) \in \mathcal{E} \\ &\stackrel{3}{\Rightarrow} (x_{nd+i}, x_j) \in \tilde{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

Από το παραπάνω συμπεραίνουμε πως οι συνιστώσες \tilde{V}_i και \tilde{V}_j είναι (ασθενώς) συνδεδεμένες μεταξύ τους, με κατευθυνόμενη ακμή $\tilde{V}_i \rightarrow \tilde{V}_j$. Αφού όμως το \mathcal{T} αποτελεί σκελετικό δένδρο με ρίζα κάποια κορυφή u_r , υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι από την ρίζα προς κάθε άλλο κόμβο του \mathcal{G} . Υπάρχει λοιπόν κατευθυνόμενο μονοπάτι μεταξύ της συνιστώσας \mathcal{V}_r και οποιασδήποτε άλλης συνιστώσας \tilde{V}_i , άρα ο γράφος είναι ασθενώς συνδεδεμένος και επιπρόσθετα περιέχει κατευθυνόμενο σκελετικό δένδρο $\tilde{\mathcal{T}}$ με ρίζα οποιοδήποτε κόμβο $x \in \mathcal{V}_r$.

Όσον αφορά τον μέγιστο αριθμό βημάτων στο δένδρο $\tilde{\mathcal{T}}$ από την ρίζα σε κάποιο άλλο κόμβο προκύπτει προφανώς όταν έχει επιλεγεί για ρίζα ο κόμβος x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ και το \mathcal{T} είναι το μέγιστο μονοπάτι μεταξύ ρίζας-φύλλου, δηλαδή μονοπάτι μήκους n . Από την κατασκευή, το $\tilde{\mathcal{T}}$ περιέχει d ακμές ώστε να διατρέξει όλες τις κορυφές κάθε συνιστώσας και εν συνεχεία μια ακμή για να περάσει στην επόμενη, δηλαδή είναι στην χειρότερη περίπτωση μονοπάτι μήκους $n(d+1)$. \square

Κανόνες ενημέρωσης επεκταμένου κατάστασης

Ο σκοπός της κατασκευής του \mathcal{G} είναι η συλλογή της κατάστασης και μνήμης κόμβων σε μοναδικό διάνυσμα κατάστασης $z(k) \in \mathbb{R}^{nm(d+1)}$ το οποίο να μεταβάλλεται γραμμικά με την κατάσταση του προηγούμενου στιγμιότυπου, λαμβάνοντας έτσι την πιο χρήσιμη μορφή της Εξίσωσης (2.8). Πράγματι, λαμβάνοντας

$$\begin{aligned} z(k) &= [z_1(k)^T, \dots, z_{n(d+1)}(k)^T]^T, \quad z_i(k) \in \mathbb{R}^m \\ &= [x_1(k)^T, \dots, x_n(k)^T, x_1(k-1)^T, \dots, x_n(k-1)^T, \dots, x_n(k-d)^T]^T \in \mathbb{R}^{nm(d+1)}. \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στην Εξίσωση 2.13, προκύπτει

$$\begin{aligned} z_i(k+1) &= \sigma(z_i(k) - z_{nd+i}(k)) \\ &\quad + \sum_{j \in N_G(i)} a_{ij}(k) z_{nd+j}(k) - a \nabla f_i(z_i(k)), \quad \text{για τα } i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Όσον αφορά τα στοιχεία $z_i(k)$, $i \in \{n+1, \dots, n(d+1)\}$, αναπαριστούν τις εκτιμήσεις των κόμβων, καθυστερημένες για $r \leq d$ χρονικές στιγμές. Η καθυστέρηση των εκτιμήσεων όμως δεν τις μεταβάλει ανά χρονική στιγμή, οπότε προφανώς ισχύει

$$z_i(k+1) = z_{i-n}(k), \quad \text{για } i = n+1, \dots, n(d+1).$$

Πλέον μπορούμε να σχηματίσουμε την Εξίσωση (2.14) για την επεκταμένη κατάσταση,

που εύκολα φαίνεται πως για τους υπολογιστικούς πράκτορες ταυτίζεται με την Εξίσωση (2.13) και για τους μη-υπολογιστικούς αντικατοπτρίζει την κατασκευή του $\tilde{\mathcal{G}}$.

$$\mathbf{z}(k+1) = (\tilde{W} \otimes \mathbb{I}_m)\mathbf{z}(k) - \alpha \tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{z}(k)) \quad (2.14)$$

στην οποία $\tilde{\mathbf{d}}(k) = [\nabla F(\mathbf{x}(k))^T, \mathbf{0}_{nm}^T]^T \in \mathbb{R}^{nm(d+1)}$ και

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} \sigma \mathbb{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \dots & \mathbf{0}_{n \times n} & W - \sigma \mathbb{I}_{n \times n} \\ \mathbb{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \dots & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbb{I}_{n \times n} & \dots & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \dots & \mathbb{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{W} \in \mathbb{R}^{n(d+1) \times n(d+1)}.$$

Τέλος, χάριν πληρότητας δίνουμε και τον Κανόνα Ενημέρωσης (2.13) συναρτήσει του συσσωρευμένου διανύσματος κατάστασης $\mathbf{x}(k)$.

$$\mathbf{x}(k+1) = \sigma(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-d)) + (W \otimes \mathbb{I}_m)\mathbf{x}(k-d) - \alpha \nabla F(\mathbf{x}(k)) \quad (2.15)$$

Πλέον έχουμε οδηγηθεί στην πλήρη περιγραφή του προβλήματος προς επίλυση και των προτεινόμενων τοπικών ελεγκτών οδήγησης εκτιμήσεων. Το κατανεμημένο πρόβλημα $\mathcal{P}_{distributed}$ έχει οριστεί ως σύνθεση τοπικών προβλημάτων $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{F}_{local}$ με τυπικό ελεγκτικό στόχο όπως δίνεται στον Ορισμό 2.9. Η κλάση τοπικών προβλημάτων έχει οριστεί από το αντίστοιχο μοντέλο και ανιχνευτή, $\mathcal{F}_{local} = (\Sigma_{local}, \mathcal{O}_{local})$ και η σύνθεσή τους έχει αιτιολογηθεί διαμέσου της διατήρησης κυρτότητας και Lipschitz συνέχειας παραγώγου. Όσον αφορά την μέθοδο επίλυσης, ο Κατανεμημένος Αλγόριθμος (2.7) προσφέρει μια εποπτική περιγραφή της αλληλεπίδρασης τοπικής μεθόδου \mathcal{M}_i , τοπικής μνήμης \mathcal{N}_i και επανάληψης επικοινωνίας $C(i; k)$.

Κεφάλαιο 3

Μέθοδος Βέλτιστης Συμφωνίας

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τα κύρια ευρήματα της εργασίας. Συγκεκριμένα ορίζουμε τις βοηθητικές μεταβλητές και επαναδιατυπώνουμε το πρόβλημα επίτευξης προσεγγιστικής βέλτιστης συμφωνίας ως πρόβλημα ρύθμισης των μη-γραμμικών μεταβλητών αυτών. Στην Ενότητα 3.1 διατυπώνεται το ισοδύναμο πρόβλημα ρύθμισης των μεταβλητών και ορίζεται ο σχετικός μετασχηματισμός. Στην ενότητα αυτή επίσης δίνεται το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας σχετικά με την ισοδυναμία των προβλημάτων βέλτιστης συμφωνίας και ρύθμισης του μετασχηματισμένου χώρου κατάστασης. Εν συνεχεία, το Κεφάλαιο αποδεικνύει το παραπάνω θεώρημα με μελέτη των δειγματοληπτούμενων εκτιμήσεων και εν συνεχεία σύνδεσης αυτών με τις συνεχείς τροχίες εξόδου των πρακτόρων.

Η μελέτη διακριτής συμπεριφοράς της μεθόδου παρουσία διαταραχών γίνεται σε δυο σκέλη. Κατά το πρώτο σκέλος, στην Ενότητα 3.2, εξετάζουμε τα χαρακτηριστικά σύγκλισης σε κάποιο στάσιμο σημείο του προβλήματος. Κατασκευάζουμε όριο για τον ρυθμό σύγκλισης της μεθόδου και συνθήκη ευστάθειας για τον αλγόριθμο που περιλαμβάνει την κατάλληλη επιλογή βήματος. Σε αυτή την ενότητα προσδιορίζεται και η επίδραση των σχεδιαστικών μεταβλητών στην αναμενόμενη απόκλιση εκτιμήσεων από το σημείο ισορροπίας, η οποία ανάλυση συμπληρώνεται από κατάλληλες προσομοιώσεις.

Το δεύτερο σκέλος της δειγματοληπτούμενης συμπεριφοράς περιγράφεται στην Ενότητα 3.3, όπου αποδεικνύεται η φραγμένη απόκλιση του σημείου ισορροπίας από την βέλτιστη λύση προβλήματος, τάξης $O(\sqrt{a})$. Όπως προηγουμένως δίνονται αριθμητικές προσομοιώσεις των ευρημάτων της ενότητας και περιγράφεται η επίδραση των σχεδιαστικών μεταβλητών στο αναμενόμενο σφάλμα. Τέλος, συνδυάζονται τα προαναφερθέντα αποτελέσματα ώστε να οδηγηθούμε στον συνολικό χαρακτηρισμό του ρυθμού σύγκλισης εκτιμήσεων πλησίον της βέλτιστης λύσης του προβλήματος.

Στην Ενότητα 3.4 γίνονται αριθμητικές προσομοιώσεις των διακριτών μεθόδων ενημέρωσης εκτιμήσεων σε πράκτορες χωρίς δυναμική. Η επαλήθευση αυτή προσφέρει ποιοτική ερμηνεία στα αποτελέσματα των προηγούμενων ενοτήτων και επιπλέον χαρακτηρίζει την συμπεριφορά της μεθόδου ως προς την απόκλιση των ρυθμιζόμενων μεταβλητών από την αρχή των αξόνων. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις σχεδιαστικές απαιτήσεις που προκύπτουν για την μέθοδο, δεδομένης κάποιας επιθυμητής ακρίβειας προσέγγισης της λύσης. Συγκεκριμένα μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της μεθόδου από την επιλογή σταθεράς a και το άνω φράγμα διαταραχών που προβλέπεται από την επόμενη υπόθεση.

Τέλος, με την Ενότητα 3.5 ολοκληρώνεται η απόδειξη του βασικού θεωρήματος διαμέσου

μελέτης της απόκλισης $\left\|x_i(t) - x_i\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right)\right\|$ που δένει τις συνεχείς τροχιές εκτιμήσεων των πρακτόρων με τις δειγματοληπτούμενες μετρήσεις που ανταλλάσσουν οι γείτονες.

3.1 Πρόβλημα Προσεγγιστικής, Βέλτιστης Συμφωνίας

Πρώτο μας μέλημα είναι να περιγράψουμε την διάταξη προς μελέτη και το αντίστοιχο πρόβλημα κατανεμημένης, βέλτιστης συμφωνίας. Έστω n μη-γραμμικοί πράκτορες \mathcal{A}_i με διάνυσμα κατάστασης $\xi_i \in \mathbb{R}^M$. Θεωρούμε πως οι πράκτορες ανταλλάσσουν πληροφορία διαμέσου συνδεδεμένου γράφου $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ με πίνακα μίξης $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ που ακολουθεί τον Κανόνα Βαρών (Υποθέσεις 1, 2). Οι πράκτορες διατηρούν διάνυσμα εξόδου $x_i \in \mathbb{R}^m$, $m \leq M$ το οποίο διαδίδουν κάθε χρονική στιγμή $t = kT$ προς τους γείτονές τους. Το διάνυσμα x_i αποτελεί υποσύνολο των μεταβλητών κατάστασης ξ_i .

Χάρη στην περιγραφή που έγινε στο προηγούμενο Κεφάλαιο γνωρίζουμε πως αν κάθε πράκτορας είναι εξοπλισμένος με τοπικό πρόβλημα βελτιστοποίησης $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{F}_{local}$ μπορούμε να ορίσουμε την σύνθεση τους σε πρόβλημα βέλτιστης συμφωνίας $\mathcal{P}_{distributed} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{P}_i$ ως την αναζήτηση του σημείου $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^{nm}$ όπως δόθηκε στον Ορισμό (2.9).

Ορισμός 3.10. Προσεγγιστική επίλυση του προβλήματος $\mathcal{P}_{distributed}$ συνίσταται στην εύρεση τοπικού νόμου ελέγχου u_i για κάθε πράκτορα ώστε το διάνυσμα εξόδου να επαληθεύει $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x^*\| \leq c_i \epsilon$, όπου $c_i, \epsilon > 0$, ϵ αυθαίρετα επιλεγμένη από τον σχεδιαστή και c_i ανεξάρτητη του ϵ . Ισοδύναμα, ως έκφραση του συσσωρευμένου διανύσματος εξόδου $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{nm}$ η εύρεση προσεγγιστικής λύσης γράφεται $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| \leq c \epsilon$ με $c, \epsilon > 0$.

Στρεφόμαστε τώρα στον ορισμό βοηθητικών μεταβλητών $\eta_i(t)$ για την μετατροπή του παραπάνω προβλήματος σε πρόβλημα ρύθμισης των μεταβλητών αυτών. Αναζητούμε $\eta_i(t)$ τέτοια ώστε να είναι m -φορές συνεχώς διαφορίσιμα και στην παρακάτω μορφή:

$$\eta_i(t) := x_i(t) - q\left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right) s_i\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor\right) - \left[1 - q\left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right)\right] s_i\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor - 1\right) \quad (3.1)$$

Διαλέγουμε την συνάρτηση $q(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ και τις ακολουθίες $s_i(k)$ έτσι ώστε, εντός μιας περιόδου δειγματοληψίας $[kT, (k+1)T]$, να μεταβάλλεται με ομαλό τρόπο το σήμα αναφοράς $x_{ref,i}(t) := q\left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right) s_i\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor\right) + \left[1 - q\left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right)\right] s_i\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor - 1\right)$ μεταξύ διαδοχικών δειγμάτων $s_i(k)$. Συγκεκριμένα, αν επιλεγεί η συνάρτηση $q(t)$, m -φορές συνεχώς διαφορίσιμη, με $q(0) = 0$ και $q(T) = 1$ και τις παραγώγους $q^{(i)}(0) = q^{(i)}(T) = 0$, $i = 1, \dots, m$ τότε είναι προφανές πως το σήμα $x_{ref,i}(t)$ ενσωματώνει σταδιακά το δείγμα $s_i(k)$ όσο $t \in (kT, (k+1)T)$.

Η ιδέα σταδιακής ενσωμάτωσης μιας διακριτής ελεγκτικής ακολουθίας $s_i(k)$ σε διαρκώς-μεταβαλλόμενο σήμα αναφοράς για κάθε πράκτορα λαμβάνεται από την εργασία των Η. Psillakis, Q. Wang [18] στην οποία αιτιολογείται λεπτομερέστερα και η επιλογή των παρακάτω συναρτήσεων $q(t)$.

$$q(t) := \begin{cases} 1, & \text{αν } t \geq T \\ \frac{(2m+1)!}{(m!)^2 T^{2m+1}} \int_0^t \left[\frac{T^2}{4} - \left(\tau - \frac{T}{2}\right)^2 \right]^m d\tau, & \text{αν } 0 \leq t < T \end{cases} \quad (3.2)$$

Εύκολα μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει πως η σιγμοειδής συνάρτηση (3.2) επαληθεύει τα

ζητούμενα της προηγούμενης παραγράφου. Αξίζει εδώ να επισημάνουμε πως η ύπαρξη m παραγώγων δεν είναι πάντα απαραίτητη, αλλά εξαρτάται από το υπό-έλεγχο μοντέλο και την ελεγκτική μέθοδο. Ειδικότερα, θα ήταν ακριβέστερο να απαιτήσουμε η $q(t)$ να είναι "αρκο-ύντως" διαφορίσιμη, εννοώντας κατάλληλα διαφορίσιμη ώστε να υπάρχουν όσες παράγωγοι είναι απαραίτητες για τον νόμο ελέγχου που υλοποιείται ¹.

Όσον αφορά την ακολουθία $s_i(k)$, αυτή διαμορφώνει τα διακριτά βήματα κατάβασης βαθμίδας που υλοποιούν τον διακριτό νόμο βέλτιστης συμφωνίας. Συνεπώς επιλέγονται ώστε να ενσωματώνουν τους γνωστούς υπολογισμούς μίξης και κατάβασης βαθμίδας του αλγορίθμου:

$$s_i(k) := \sigma(x_i(kT) - x_i((k-d)T)) + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} x_j((k-d)T) - a \nabla f_i(x_i(kT)). \quad (3.3)$$

Θα αποδειχθεί στην συνέχεια πως ο σχεδιασμός εισόδων τέτοιων ώστε οι συνιστώσες $\{\eta_i\}_j$ να οδηγούνται σε περιοχή γύρω από το 0, συνεπάγεται την προσεγγιστική συμφωνία των πρακτόρων στην αντίστοιχη μεταβλητή εξόδου $\{x_i\}_j$. Θα δείξουμε έτσι πως μπορεί ο σχεδιαστής να επιλέξει υποσύνολο του χώρου κατάστασης να οδηγηθεί σε συμφωνία, διατηρώντας ταυτόχρονα σχεδιαστική ελευθερία για την οδήγηση των υπόλοιπων μεταβλητών εξόδου των πρακτόρων. Δίνουμε παρακάτω το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας.

Θεώρημα 3.11. Έστω n πράκτορες \mathcal{A}_i σε κατανεμημένο πρόβλημα $P_{distributed}$ για το οποίο ισχύουν οι Υποθέσεις 1-4. Έστω επίσης πως κάθε πράκτορας διατηρεί διάνυσμα εξόδου $x_i(t)$. Ορίζουμε τις βοηθητικές μεταβλητές $\eta_i(t)$ σύμφωνα με τις Εξισώσεις (3.1), (3.2), (3.3).

Αν επιλεγεί βήμα εκμάθησης $a < \frac{\sigma}{\max_{i \in \mathcal{N}} L_i}$ και για κάθε πράκτορα σχεδιαστεί τοπικός ελεγκτής ώστε να ισχύει πως $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\eta_i(t)\| \leq \epsilon_i$, $\forall i$ με ϵ_i θετικές σταθερές, τότε τα διανύσματα εξόδου των πρακτόρων οδηγούνται σε προσεγγιστική, βέλτιστη συμφωνία $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x^*\| \leq C_1 \frac{\epsilon}{a} + C_2 \sqrt{a}$, όπου $a, \epsilon = \sqrt{n} \max_i \epsilon_i > 0$ σχεδιαστικές παράμετροι και σταθερές $C_1, C_2 > 0$ ανεξάρτητες από την επιλογή των a, ϵ .

Σημείωση 3. Η ανεξάρτητη ρύθμιση των παραμέτρων ϵ, a αναπαριστά την ικανότητα αυθαίρετης προσέγγισης του ελεγκτικού στόχου. Επιπλέον, η επιλογή σταθεράς $\epsilon \leq a^{3/2}$ οδηγεί στο σφάλμα τελικής κατάστασης σε τάξη $\mathcal{O}(\sqrt{a})$ από το βέλτιστο. Ως εκ τούτου, η σχεδίαση κατάλληλου ελεγκτικού νόμου για την ρύθμιση των βοηθητικών μεταβλητών επιτρέπει την ρύθμιση της περιοχής σύγκλισης διαμέσου μεταβολής του βήματος εκμάθησης.

Το υπόλοιπο Κεφάλαιο αφιερώνεται στην απόδειξη και αριθμητική επαλήθευση του παραπάνω θεωρήματος. Σκιαγραφώντας την μέθοδο που ακολουθεί, η απόδειξη βασίζεται στην σύγκλιση των δειγματοληπτούμενων διανυσμάτων εκτίμησης. Συγκεκριμένα, δείχνεται πρώτα πως η διακριτή ακολουθία $\{x(kT)\}_{k \rightarrow \infty}$ συγκλίνει γύρω από δεδομένο σημείο ισορροπίας x_{eq} . Εν συνεχεία, αποδεικνύεται πως η απόκλιση του σημείου σύγκλισης από το σημείο βέλτιστης συμφωνίας x^* καθορίζεται από το επιλεγμένο βήμα εκμάθησης. Τέλος, η απόδειξη

¹Για τους σκοπούς της εργασίας, η συνάρτηση $q(t)$ δίνεται ως προϊόν της μεθόδου ενσωμάτωσης $s_i(k)$ και όχι ως ανεξάρτητη ελεγκτική παράμετρος. Παρότι η οπτική αυτή μας εξυπηρετεί στην προσπάθεια να παρουσιάσουμε τα χαρακτηριστικά του μετασχηματισμού, ισχύει πως μπορεί να επιλεγεί οποιαδήποτε σιγμοειδής συνάρτηση επαληθεύει τα ζητούμενα στην θέση της (3.2). Κατάλληλη επιλογή συνάρτησης $q(t)$ αποτελεί τμήμα σχεδίασης του ελεγκτικού νόμου, ανάλογα με τις ανάγκες του σχεδιαστή και την ικανότητα του ελεγκτικού μέσου.

ολοκληρώνεται με τον προσδιορισμό φράγματος για την στιγμιαία εκτίμηση ενός πράκτορα από την εκτίμησή του κατά την πιο πρόσφατη στιγμή δειγματοληψίας.

Αν υπάρχουν τοπικοί νόμοι ελέγχου που εγγυώνται πως οι μεταβλητές $\eta_i(t)$ παραμένουν άνω φραγμένες από κάποια σταθερά τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση (3.1) ώστε να οδηγηθούμε στην παρακάτω υπόθεση για τις διακριτές στιγμές δειγματοληψίας $t = kT$.

Υπόθεση 5. Κατά τις στιγμές δειγματοληψίας $t = kT$, οι βοηθητικές μεταβλητές $\eta_i(kT)$ των διανυσμάτων εξόδου επαληθεύουν

$$\|\eta_i((k+1)T)\| \leq \epsilon_i, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall k \geq 0$$

για άγνωστες θετικές ποσότητες ϵ_i .

Συνεπώς, η Εξίσωση (3.1) δίνει τον παρακάτω κανόνα ενημέρωσης των διανυσμάτων εξόδου

$$(3.1) \stackrel{t=kT}{\Rightarrow} \eta_i(kT) = x_i(kT) - s_i(k-1)$$

$$x_i(k+1) = \sigma(x_i(k) - x_i(k-d)) + \sum_{j=1}^n w_{ij}x_j(k-d) - a\nabla f_i(x_i(k)) + \eta_i(k+1). \quad (3.4)$$

Στις Ενότητες 3.2 έως 3.4 θα μελετηθούν οι συνέπειες της παραπάνω Υπόθεσης στις διακριτές ακολουθίες διανυσμάτων εξόδου $\{x_i(kT)\}$, $i = 1, \dots, n$. Χάρην ευκολίας ανάγνωσης, οι ακολουθίες αυτές θα συμβολίζονται ως εξ' ολοκλήρου διακριτές, παραλείποντας την περίοδο δειγματοληψίας. Αν συμβολίσουμε $\eta(k+1) = [\eta_1(k+1)^T, \eta_2(k+1)^T, \dots, \eta_n(k+1)^T]^T \in \mathbb{R}^{nm}$ και $\tilde{\eta} = [\eta(k+1)^T, \mathbf{0}_{mnd}^T]^T \in \mathbb{R}^{nm(d+1)}$ τότε δεδομένης της Υπόθεσης 5, διαδοχικές στιγμές δειγματοληψίας των μεταβλητών εξόδου συνδέονται με τις παρακάτω εκφράσεις ενημέρωσης.

$$x_i(k+1) = \sigma(x_i(k) - x_i(k-d)) + \sum_{j=1}^n w_{ij}x_j(k-d) - a\nabla f_i(x_i(k)) + \eta_i(k+1) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \sigma(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-d)) + (W \otimes \mathbb{I}_m)\mathbf{x}(k-d) - a\nabla F(\mathbf{x}(k)) + \eta(k+1) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{z}(k+1) = (\tilde{W} \otimes \mathbb{I}_m)\mathbf{z}(k) - a\tilde{d}(\mathbf{z}(k)) + \tilde{\eta}(k+1) \quad (3.7)$$

Οι εξισώσεις αυτές έχουν την μορφή μεθόδου κατάβασης βαθμίδας με σταθερό βήμα, υπόκεινται όμως σε άγνωστες φραγμένες διαταραχές. Έχουμε αναφέρει πως δευτερεύον αποτέλεσμα της εργασίας είναι η μελέτη σθεναρότητας της μεθόδου DGD, γεγονός που θα προκύψει από την διακριτή μελέτη των εξισώσεων αυτών στην συνέχεια του κεφαλαίου.

Σημείωση 4. Από την Υπόθεση 5 υπάρχει κάποιο $\epsilon = \sqrt{n} \max_i \epsilon_i > 0$ τέτοιο ώστε $\|\eta(k+1)\| = \|\tilde{\eta}(k+1)\| \leq \epsilon \forall k$. Θα δούμε στην συνέχεια πως τα άνω φράγματα ϵ_i είναι ανάλογα με την περιοχή σύγκλισης του αλγορίθμου, δεν είναι όμως απαραίτητα γνωστά στον σχεδιαστή ώστε να επιτευχθεί κατάλληλη επιλογή βήματος. Αυτό γίνεται για να αποδειχθεί η σύγκλιση του αλγορίθμου ανεξάρτητα του σχεδιασμού μη γραμμικών ελεγκτών που οδηγούν την διαταραχή κοντά στο 0.

3.2 Σύγκλιση σε Σημείο Ισορροπίας

Πρώτο μας μέλημα είναι να δείξουμε πως το διακριτό σύστημα μεταβολής εκτιμήσεων (3.5) είναι ευσταθές δεδομένων των Υποθέσεων 1 έως 5 που έχουν προαναφερθεί. Αν τα η_i είναι ταυτοτικά μηδέν για όλους τους χρόνους τότε γνωρίζουμε από το Κεφάλαιο 2 πως υπάρχει κάποιο σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}_{eq} \in \mathbb{R}^{nm}$ ώστε

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{eq} &= \sigma \mathbf{x}_{eq} + [(W - \sigma \mathbb{I}_n) \otimes \mathbb{I}_m] \mathbf{x}_{eq} - \alpha \nabla F(\mathbf{x}_{eq}) \Rightarrow \\ &[(\mathbb{I}_n - W) \otimes \mathbb{I}_m] \mathbf{x}_{eq} + \alpha \nabla F(\mathbf{x}_{eq}) = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Η εξίσωση αυτή λαμβάνει την θέση ορισμού για το σημείο ισορροπίας του συστήματος και αντικαθίσταται στην έκφραση του νόμου ενημέρωσης για την εύρεση της απόκλισης. Με χρήση της σχέσης (3.6) έχουμε

$$\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{eq} = \sigma \mathbf{x}(k) + [(W - \sigma \mathbb{I}_n) \otimes \mathbb{I}_m] \mathbf{x}(k-d) - \alpha \nabla F(\mathbf{x}(k)) + \eta(k+1) - \mathbf{x}_{eq}.$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την F γράφουμε $\nabla F(\mathbf{x}(k)) = \nabla F(\mathbf{x}_{eq}) + \nabla^2 F(\tau \mathbf{x}(k) + (1-\tau)\mathbf{x}_{eq})(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{eq})$. Συμβολίζοντας καταχρηστικά $\nabla^2 F(k) = \nabla^2 F(\tau \mathbf{x}(k) + (1-\tau)\mathbf{x}_{eq})$, λαμβάνουμε την σχέση που ακολουθεί.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}_{eq} &= \sigma(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{eq}) + [(W - \sigma \mathbb{I}_n) \otimes \mathbb{I}_m](\mathbf{x}(k-d) - \mathbf{x}_{eq}) \\ &\quad - \alpha \nabla F(\mathbf{x}_{eq}) - \alpha \nabla^2 F(k)(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{eq}) + \eta(k+1) \\ &\quad + [(W - \mathbb{I}_n) \otimes \mathbb{I}_m] \mathbf{x}_{eq} \\ &\stackrel{(3.8)}{=} (\sigma \mathbb{I}_n - \alpha \nabla^2 F(k))(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{eq}) \\ &\quad + [(W - \sigma \mathbb{I}_n) \otimes \mathbb{I}_m](\mathbf{x}(k-d) - \mathbf{x}_{eq}) + \eta(k+1) \end{aligned}$$

Πιο συνοπτικά, εκφράζουμε την παραπάνω ως προς το επεκταμένο διάνυσμα $\mathbf{z}(k)$, με σκοπό να απαλειφθεί η εξάρτηση από παρελθοντικά δείγματα και να οδηγηθούμε σε γραμμικό, χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα όπως παρακάτω. Σημειώνεται πως οποιοδήποτε σημείο ισορροπίας για την (3.6) έχει $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k-1) = \dots = \mathbf{x}(k-k') = \mathbf{x}_{eq}$ για όλα τα $k \geq k' \geq 0$ και άρα αποτελεί σημείο συμφωνίας και για τον επεκταμένο χώρο. Έτσι, γράφουμε $\mathbf{z}_{eq} = \mathbf{1}_{d+1} \otimes \mathbf{x}_{eq}$ και

$$\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}_{eq} = \begin{bmatrix} \sigma \mathbb{I}_{nm} - \alpha \nabla^2 F(k) & 0 & \dots & 0 & (W - \sigma \mathbb{I}_n) \otimes \mathbb{I}_m \\ \mathbb{I}_{nm} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{I}_{nm} & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{z}(k) - \mathbf{z}_{eq}) + \tilde{\eta}(k+1). \quad (3.9)$$

Ονομάζουμε $\tilde{A}(k)$ τον χρονομεταβλητό (λόγω του $\nabla^2 F(k)$) πίνακα του συστήματος (3.9) και θεωρούμε τον αντίστοιχο πίνακα μετάβασης $\tilde{\Phi}(k, s) = \tilde{A}(k) \dots \tilde{A}(s)$. Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε άνω φράγμα για την την νόρμα του πίνακα μετάβασης, που επιτυγχάνεται με μελέτη του unforced συστήματος $\Psi(k+1) = \tilde{A}(k)\Psi(k)$ και την απόδειξη ορίου στην μορφή $\|\tilde{\Psi}(k+1)\| \leq h(k)\|\tilde{\Psi}(0)\|$ για κάποια συνάρτηση $h = h(k)$. Τότε, διαμέσου επαγόμενης νόρ-

μας, θα σχηματιστεί άνω φράγμα στον πίνακα μετάβασης για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα μας ενδιαφέρει και άρα θα προκύψει έκφραση για την μεταβολή εκτιμήσεων πρακτόρων στον επεκτασμένο χώρο κατάστασης. Αν επιπλέον δείξουμε πως αυτό το όριο συγκλίνει εκθετικά στην περιοχή ενδιαφέροντος πλησίον του σημείου ισορροπίας τότε θα έχουμε οδηγηθεί στο ζητούμενο της ενότητας.

Το επόμενο Λήμμα διευκρινίζει το παραπάνω επιχείρημα και προϋποθέτει την κατασκευή που θα ακολουθήσει για την εύρεση της επιθυμητής συνάρτησης - φράγματος.

Λήμμα 3.4. Έστω το σύστημα $\Psi(k+1) = \tilde{A}(k)\Psi(k)$ με $\tilde{A}(k)$ όπως παραπάνω και ο πίνακας μετάβασης $\tilde{\Phi}(k, s) = \tilde{A}(k) \dots \tilde{A}(s)$. Αν υπάρχουν $0 < \gamma < 1$, $P = P^T > 0$ τέτοια ώστε να επαληθεύεται η τύπου-Lyapunov ανισότητα

$$\tilde{A}^T(k)P\tilde{A}(k) - \gamma^2 P < 0, \quad \forall \tilde{A}(k),$$

τότε ισχύει

$$\|\tilde{\Phi}(k, 0)\| \leq \gamma^k \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}, \quad \forall k \geq 0.$$

Απόδειξη. Λαμβάνοντας το συναρτησιακό Lyapunov $V(k) = \Psi^T(k)P\Psi(k)$ έχουμε

$$\begin{aligned} V(k+1) - V(k) &= \Psi^T(k)(\tilde{A}(k)P\tilde{A}(k) - P)\Psi(k) \\ &\leq -\Psi^T(k)P\Psi(k)(1 - \gamma^2) \\ &= -V(k)(1 - \gamma^2) \Rightarrow \\ V(k+1) &\leq \gamma^2 V(k) \leq \gamma^{2k} V(0). \end{aligned}$$

Ταυτόχρονα ισχύει πως $\lambda_{\min}(P)\|\Psi(k)\|^2 \leq V(k) \leq \lambda_{\max}(P)\|\Psi(k)\|^2$ οπότε έχουμε οδηγηθεί

$$\begin{aligned} \|V(k)\| \leq \gamma^{2k} \|V(0)\| &\Rightarrow \lambda_{\min}(P)\|\Psi(k)\|^2 \leq \gamma^{2k} \lambda_{\max}(P)\|\Psi(0)\|^2 \\ \Rightarrow \|\Psi(k)\| &\leq \gamma^k \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|\Psi(0)\|. \end{aligned}$$

Τέλος έχουμε $\|\Psi(k+1)\| = \|\tilde{\Phi}(k, 0)\| \cdot \|\Psi(0)\| \leq \gamma^k \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|\Psi(0)\|$ άρα έχουμε το ζητούμενο με $h(k) = \gamma^k \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$. □

Μέσω του Λήμματος 3.4 σχηματίζεται μια εικόνα της συμπεριφοράς του συστήματος (3.9) και άρα και της απόκλισης ακολουθίας εκτιμήσεων από σημείο ισορροπίας. Συγκεκριμένα, για τον σχηματισμό της συνάρτησης φράγματος θα ακολουθήσουμε κατασκευαστική μέθοδο που αποσκοπεί στην επίλυση της Lyapunov ανισότητας του συστήματος με την κατάλληλη επιλογή συμμετρικού και θετικά ορισμένου πίνακα P και παραμέτρου $\gamma \in (0, 1)$.

3.2.1 Προσδιορισμός Συνάρτησης Φράγματος

Θεωρούμε την παρακάτω μπλοκ διαγώνια, συμμετρική μορφή για τον P .

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & & & \\ & P_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & P_{d+1} \end{bmatrix}, \quad P_i \in \mathbb{R}^{nm \times nm} \text{ και } P_i = P_i^T > 0.$$

Θα επιλέξουμε κατάλληλα τα μπλοκ P_i ώστε ο πίνακας $\gamma^2 P - \tilde{A}^T(k)P\tilde{A}(k)$ να είναι θετικά ορισμένος για όλους του χρόνους $k \geq 0$, επαληθεύοντας έτσι την υπόθεση του Λήμματος

3.4. Ο πίνακας γράφεται $\gamma^2 P - \tilde{A}^T(k)P\tilde{A}(k) =$

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 P_1 - (\sigma \mathbb{I} - a \nabla^2 F(k)) \cdot & 0 & \dots & 0 & -(\sigma \mathbb{I} - a \nabla^2 F(k))P_1 \cdot \\ P_1(\sigma \mathbb{I} - a \nabla^2 F(k)) - P_2 & & & & [(W - \mathbb{I}) \otimes \mathbb{I}] \\ 0 & \gamma^2 P_2 - P_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma^2 P_d - P_{d+1} & 0 \\ -[(W^T - \mathbb{I}) \otimes \mathbb{I}] \cdot & 0 & \dots & 0 & \gamma^2 P_{d+1} - [(W^T - \mathbb{I}) \otimes \mathbb{I}] \cdot \\ P_1(\sigma \mathbb{I} - a \nabla^2 F(k)) & & & & P_1[(W - \mathbb{I}) \otimes \mathbb{I}] \end{bmatrix}$$

Επιλέγουμε

- $P_1 = \mathbb{I}_{nm}$.
- $P_i = \frac{1}{\gamma^2}(P_{i+1} + \epsilon_i \mathbb{I}_{nm})$ για τα $i = 2, \dots, d$.
- $P_{d+1} = \frac{1}{\gamma^2} \left[[(W^T - \mathbb{I}) \otimes \mathbb{I}][(W - \mathbb{I}) \otimes \mathbb{I}] + \epsilon_{d+1} \mathbb{I}_{nm} \right]$.

Παραπάνω έχουμε λαβει $\epsilon_i > 0 \forall i$ και επιπλέον για τα $i = 2, \dots, d$ θεωρούμε τα ϵ_i αρκετά μικρά ώστε να ισχύει η προσέγγιση

$$P_2 \approx \frac{1}{\gamma^2} P_3 \approx \dots \approx \frac{1}{\gamma^{2(d-1)}} P_{d+1} \approx \frac{1}{\gamma^{2d}} \left[[(W^T - \mathbb{I}) \otimes \mathbb{I}][(W - \mathbb{I}) \otimes \mathbb{I}] + \epsilon_{d+1} \mathbb{I}_{nm} \right].$$

Η παράμετρος ϵ_{d+1} δεν μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα αφού πρέπει να εξασφαλίζει τις ιδιοτιμές του κάτω δεξιά μπλοκ. Όσον αφορά τον χαρακτηρισμό ιδιοτιμών του πίνακα, παρατηρούμε την μορφή του $\gamma^2 P - \tilde{A}^T(k)P\tilde{A}(k)$.

$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} * & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & * & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & 0 & \dots & * \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^T & C \end{array} \right], \quad \begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{nm \times nm}, \\ B \in \mathbb{R}^{nmd \times nm}, \\ C \in \mathbb{R}^{nmd \times nmd}. \end{array} \quad (3.10)$$

Συμπλήρωμα Schur και Χαρακτηρισμός Ιδιοτιμών

Η μορφή (3.10) μπορεί να απλοποιηθεί διαμέσου απαλοιφής μπλοκ του συμπληρώματος Schur του πίνακα. Η γενική μέθοδος του συμπληρώματος διευκολύνει την αριθμητική επίλυση γραμμικών εξισώσεων πολλών απροσδιορίστων με την απαλοιφή μεταβλητών και

επίλυση του εναπομείναντος μειωμένου συστήματος. Όταν ένας από τους υποπίνακες A ή C διασπάται εύκολα σε ιδιοτιμές-ιδιοδιανύσματα τότε η μέθοδος μπορεί να επιταχύνει σημαντικά την επίλυση γραμμικών εξισώσεων [9].

Γενικά, λαμβάνοντας έναν 2×2 μπλοκ πίνακα $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, με υποπίνακες κατάλληλων διαστάσεων ώστε ο M να είναι τετραγωνικός, αναζητούμε λύση για το γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

Αν ο D είναι αντιστρέψιμος τότε μπορούμε να ακολουθήσουμε μια μορφή απαλοιφής Gauss για την μεταβλητή y γράφοντας $y = D^{-1}(d - Cx)$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση για το x έχουμε

$$Ax + BD^{-1}(d - Cx) = c \Rightarrow (A - BD^{-1}C)x = c - BD^{-1}d.$$

Η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να είναι σημαντικά απλούστερη από την αρχική αν 1. ο υπολογισμός του διαγωνίου πίνακα D^{-1} είναι υπολογιστικά φθηνός και 2. ο αριθμός απροσδιόριστων στο x είναι μικρότερος ή συγκρίσιμος με αυτόν στο y .

Ο πίνακας $(A - BD^{-1}C)$ καλείται *συμπλήρωμα Schur* του D στον M . Όμοια, αν επιλέξουμε πρώτα να απαλείψουμε τις απροσδιόριστες x , μπορεί να οριστεί και το συμπλήρωμα του A στον M αν και μόνον αν ο A είναι αντιστρέψιμος. Είναι εύκολο να δειχθεί πως

$$M = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & BD^{-1} \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ D^{-1}C & \mathbb{I} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Αυτή την διάσπαση χρησιμοποιούμε για τον χαρακτηρισμό ιδιοτιμών του πίνακα M , από τον οποίο προκύπτει το Κριτήριο Schur για θετικά ορισμένους πίνακες που ακολουθεί.

Θεώρημα 3.12 (Schur's Complement for Positive Definiteness). *Για κάποιον συμμετρικό πίνακα M της μορφής*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας C είναι αντιστρέψιμος και $C > 0$ ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις

1. $M > 0$ αν και μόνο αν $A - BC^{-1}B^T > 0$.
2. $M \geq 0$ αν και μόνο αν $A - BC^{-1}B^T \geq 0$.

Απόδειξη. Αφού M συμμετρικός τότε πρέπει A και C συμμετρικοί και η έκφραση (3.11) γίνεται

$$M = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & BC^{-1} \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A - BC^{-1}B^T & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{I} & BC^{-1} \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}^T.$$

Εύκολα φαίνεται πως ο πίνακας $N = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & BC^{-1} \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε ο M είναι

Θετικά ορισμένος αν και μόνον αν

$$\begin{bmatrix} A - BD^{-1}B^T & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} > 0.$$

Όμοια προκύπτει και το δεύτερο ζητούμενο αν απαιτήσουμε ο $M \geq 0$. \square

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.12 στην Εξίσωση (3.10) είναι προφανές πως ο πίνακας $C = \epsilon_{d+1}\mathbb{I}_{nm}$ είναι αντιστρέψιμος και θετικά ορισμένος για όλα τα θετικά ϵ_{d+1} . Όσον αφορά τις ιδιοτιμές του συμπληρώματος $A - BC^{-1}B^T$ παρατηρούμε πως το γινόμενο έχει μια ιδιαίτερα χρήσιμη μπλοκ διαγώνια μορφή.

$$BC^{-1}B^T = \frac{1}{\epsilon_{d+1}} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ * & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \end{bmatrix} = \frac{1}{\epsilon_{d+1}} \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

Από την επιλογή των P_i , καθένα από τα d διαγώνια μπλοκ με μορφή $\gamma^2 P_i - P_{i+1}$ του A έχουν $\gamma^2 P_i - P_{i+1} = \epsilon_i \mathbb{I}_{nm} > 0$. Συνεπώς η διαφορά $A - BC^{-1}B^T > 0$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \mathbb{I} - (\sigma \mathbb{I} - a \nabla^2 F(k))^2 - \frac{1}{\gamma^{2d}} [(W^T \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I})(W \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I}) + \epsilon_{d+1} \mathbb{I}] \\ & - \frac{1}{\epsilon_{d+1}} [(\sigma \mathbb{I} - a \nabla^2 F(k))(W \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I})(W^T \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I})(\sigma \mathbb{I} - a \nabla^2 F(k))] > 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Επιβάλουμε κατασκευαστικά τα παραπάνω μητρώα να είναι θετικά ορισμένα, γεγονός που οδηγεί σε συνθήκη για το βήμα εκμάθησης.

$$a < \frac{\sigma}{\hat{\beta}_{max}} < \frac{\sigma}{\hat{\beta}_{min}}. \quad (3.13)$$

3.2.2 Προσδιορισμός Παραμέτρων γ, ϵ_{d+1}

Συνοψίζοντας, έχουμε ως τώρα δείξει πως ο πίνακας $\gamma^2 P - \tilde{A}^T(k) P \tilde{A}(k)$ που κατασκευάσαμε παραπάνω, είναι θετικά ορισμένος για όλους τους χρόνους k αν και μόνον αν μπορούμε να επιλέξουμε σταθερές $0 < \gamma < 1$ και $\epsilon_{d+1} > 0$ τέτοιες ώστε να επαληθεύεται η Ανίσωση (3.12). Θα δείξουμε στην συνέχεια κατασκευαστική μέθοδο ώστε δεδομένου καταναμετημένου προβλήματος και τοπολογίας επικοινωνίας όπως έχει οριστεί, να επαληθεύουμε την ανίσωση και συνεπώς την σύγκλιση της ακολουθίας εκτιμήσεων.

Παρατηρούμε πρώτα πως η Ανίσωση (3.12) είναι μερική διάταξη για τις ιδιοτιμές του πίνακα, αρκεί λοιπόν να λάβουμε το βαθμωτό ισοδύναμο της αντίστοιχης ελάχιστης ιδιοτιμής:

$$\begin{aligned} (3.12) & \Leftrightarrow \gamma^2 - (\sigma - a \lambda_{min}(\nabla^2 F(k)))^2 - \frac{1}{\gamma^{2d}} [\lambda_{max}((W^T \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I})(W \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I}) + \epsilon_{d+1} \mathbb{I})] > 0 \\ & - \frac{1}{\epsilon_{d+1}} [(\sigma \mathbb{I} - a \nabla^2 F(k))(W \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I})(W^T \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I})(\sigma \mathbb{I} - a \nabla^2 F(k))] \\ & \Leftrightarrow \gamma^2 - (\sigma - a \hat{\beta}_{min})^2 - \frac{1}{\gamma^{2d}} [(1 - \sigma)^2 + \epsilon_{d+1}] - \frac{1}{\epsilon_{d+1}} (1 - \sigma)(\sigma - a \hat{\beta}_{min})^2 > 0. \end{aligned}$$

Συμβολίζουμε τις ποσότητες $\hat{\lambda}_{\min} = \lambda_{\min}(\nabla^2 F(k))$ και $\hat{\lambda}_{\max} = \lambda_{\max}(\nabla^2 F(k))$. Γνωρίζουμε πως το $\hat{\lambda}_{\min} > 0$ αφού έχουμε δείξει πως η F έχει κάτω φράγμα στις ιδιοτιμές, επαγόμενο από τα τοπικά κριτήρια $\mu \leq \lambda_{\min}(\nabla^2 F(\mathbf{x}))$ και $\mu > 0$. Βλέπουμε την παραπάνω παράσταση ως τριώνυμο για την απροσδιόριστη ϵ_{d+1} , οπότε για να επαληθεύεται αρκεί να επιλεγεί ϵ_{d+1} μεταξύ των διακριτών ριζών του.

$$P(y) = \underbrace{\frac{1}{\gamma^{2d}}}_{A} y^2 - \underbrace{\left[\gamma^2 - (\sigma - \alpha \hat{\lambda}_{\min})^2 - \frac{1}{\gamma^{2d}}(1 - \sigma)^2 \right]}_B y + \underbrace{(1 - \sigma)^2 (\sigma - \alpha \hat{\lambda}_{\min})^2}_\Gamma = 0$$

Λαμβάνοντας την διακρίνουσα και τις ρίζες του πολυωνύμου εξετάζουμε ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι γ, ϵ_{d+1} ώστε να επαληθεύουν την (3.12).

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[\gamma^2 - (\sigma - \alpha \hat{\lambda}_{\min})^2 - \frac{1}{\gamma^{2d}}(1 - \sigma)^2 \right]^2 - \frac{4}{\gamma^{2d}}(1 - \sigma)^2 (\sigma - \alpha \hat{\lambda}_{\min})^2 > 0 \\ \Leftrightarrow \gamma^2 - \left(\sigma - \alpha \hat{\lambda}_{\min} + \frac{1 - \sigma}{\gamma^d} \right)^2 &> 0 \\ \stackrel{\alpha < \frac{\sigma}{\hat{\lambda}_{\min}}}{\Leftrightarrow} \gamma - \sigma + \alpha \hat{\lambda}_{\min} - \frac{1 - \sigma}{\gamma^d} &> 0. \end{aligned}$$

Άρα για να υπάρχουν διακριτές ρίζες του πολυωνύμου $P(y)$ πρέπει να μπορεί να γίνει επιλογή $0 < \gamma < 1$ τέτοια ώστε

$$\gamma - \sigma + \alpha \hat{\lambda}_{\min} - \frac{1 - \sigma}{\gamma^d} > 0. \quad (3.14)$$

Η (3.14) έχει μοναδική πραγματική ρίζα όταν $\sigma - \alpha \hat{\lambda}_{\min} > 0$ οπότε αν υπάρχει $\gamma \in (0, 1)$ που την επαληθεύει τότε μπορούμε να επιλέξουμε το μέσο των ριζών του πολυωνύμου $\epsilon_{d+1} = \frac{-B}{2A} > 0$. Είναι προφανές πως η επιλογή αυτή, ως σημείο μεταξύ των ριζών επαληθεύει την Ανίσωση (3.12). Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την έκφραση ϵ_{d+1} ως συνάρτηση του γ .

$$\epsilon_{d+1} = \frac{-B}{2A} = \frac{1}{2} \left[\gamma^{2(d+1)} - \gamma^{2d} (\sigma - \alpha \hat{\lambda}_{\min})^2 - (1 - \sigma)^2 \right] > 0 \quad (3.15)$$

Πλέον, έχουμε τις σχέσεις (3.14) και (3.15) που καθορίζουν την επιλογή μιας ελεύθερης σχεδιαστικής παραμέτρου γ . Η παράμετρος αυτή μπορεί, λόγω της μοναδικής ρίζας της Εξίσωσης (3.14), να επιλεγεί αυθαίρετα στο εύρος $\gamma \in (\gamma_b, 1)$ όπου $\gamma_b > 0$ η τιμή για την οποία ισχύει

$$\gamma_b - (\sigma - \alpha \hat{\lambda}_{\min}) - \frac{1 - \sigma}{\gamma_b^d} = 0 \quad (3.16)$$

Με τον παραπάνω ορισμό, είναι εύκολο να δείξουμε πως η έκφραση (3.15) είναι αύξουσα για όλα τα $\gamma \in (\gamma_b, 1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} \epsilon_{d+1} &= (d+1) \gamma^{2d+1} - d \gamma^{2d-1} (\sigma - \alpha \hat{\lambda}_{\min})^2 \\ &= (d+1) \gamma^{2d} \left[\gamma - \gamma^{-1} \frac{d(\sigma - \alpha \hat{\lambda}_{\min})^2}{d+1} \right]. \end{aligned}$$

Η θετική ρίζα της παραπάνω βρίσκεται στο $(\sigma - \alpha\lambda_{\min})\sqrt{\frac{d}{d+1}} < \gamma_b$ και άρα η παράμετρος είναι αύξουσα για όλα τα $\gamma \in (\gamma_b, 1)$.

Επίδραση του σταθερού βήματος στην επιλογή παραμέτρου γ

Από την Εξίσωση (3.16) είναι σαφές πως το βήμα a επηρεάζει το κάτω όριο για την επιλογή του γ . Όσο το βήμα a προσεγγίζει το 0 οι λύσεις της (3.16) προσεγγίζουν την μονάδα και περιορίζεται το εύρος επιλογής της παραμέτρου. Κοντά στην μονάδα, ο όρος γ_b^{-d} προσεγγίζεται μέσω του αναπτύγματος Taylor $\gamma_b^{-d} \approx 1 + d(1 - \gamma_b)$ και με αντικατάσταση στην Εξίσωση (3.16) προκύπτει

$$\begin{aligned}\gamma_b &\approx (\sigma - \alpha\lambda_{\min}) + (1 - \sigma)[1 + d(1 - \gamma_b)] \\ &= 1 - \alpha\lambda_{\min} + (1 - \sigma)d - (1 - \sigma)d\gamma_b \Rightarrow \\ \gamma_b &\approx \frac{1 - \alpha\lambda_{\min} + (1 - \sigma)d}{1 + (1 - \sigma)d}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Δεν είναι ακόμα εμφανές για ποιον λόγο επιλέγουμε να λάβουμε το ανάπτυγμα Taylor κοντά στην μονάδα και όχι σε άλλο σημείο, όμως η επιλογή θα διευκρινιστεί όταν ερμηνεύσουμε ποιοτικά την συμπεριφορά της $\lambda_{\min}(P)$. Συνοπτικά, θέλουμε η προσέγγιση να είναι όσο το δυνατόν αυστηρότερη για μικρά βήματα εκμάθησης a αφού σε τέτοια επιλογή βήματος έχει σημασία και η αυστηρότητα της περιοχής σύγκλισης. Αφού η ρίζα γ_b είναι φθίνουσα ως προς την επιλογή βήματος, εξυπηρετεί το ανάπτυγμα να ληφθεί στο $\gamma = 1$. Στις μερικές παραγώγους της εκτίμησης παρακάτω φαίνεται η μονοτονική συμπεριφορά της ρίζας γ_b :

- $\frac{\partial}{\partial \sigma} \gamma_b = \frac{-\alpha\lambda_{\min}}{(1 + d(1 - \sigma))^2} < 0, \quad \forall \sigma \in (0, 1).$
- $\frac{\partial}{\partial (\alpha\lambda_{\min})} \gamma_b = \frac{-1}{1 + d(1 - \sigma)} < 0, \quad \forall (\alpha\lambda_{\min}) \in (0, \sigma).$
- $\frac{\partial}{\partial d} \gamma_b = \frac{\alpha\lambda_{\min}(1 - \sigma)}{(1 + d(1 - \sigma))^2} > 0, \quad \forall d \geq 0.$

3.2.3 Επαλήθευση Ιδιοτιμών του P

Από την κατασκευή του P γνωρίζουμε πως η ελάχιστη και μέγιστη ιδιοτιμή του προσδιορίζεται από τα επιμέρους μπλοκ. Μάλιστα, λόγω της επιλογής $\epsilon_i > 0$ ισχύει πως $P_2 \geq P_3 \geq \dots \geq P_{d+1}$ και άρα συμπεραίνουμε πως

1. $\lambda_{\max}(P) = \max\{\lambda_{\max}(P_1), \lambda_{\max}(P_2)\} = \max\{1, \lambda_{\max}(P_2)\}$ και
2. $\lambda_{\min}(P) = \min\{\lambda_{\min}(P_1), \lambda_{\min}(P_{d+1})\} = \min\{1, \lambda_{\min}(P_{d+1})\}.$

Όσον αφορά την μέγιστη ιδιοτιμή του P_2 , μετά την επιλογή της ϵ_{d+1} όπως στην Εξίσωση (3.15), ισχύει η έκφραση

$$\begin{aligned}P_2 &= \frac{1}{\gamma^{2d}} \left[[(W^T - \mathbb{I}) \otimes \mathbb{I}] [(W - \mathbb{I}) \otimes \mathbb{I}] + \epsilon_{d+1} \mathbb{I}_{nm} \right], \\ \lambda_{\max}(P_2) &\leq \frac{1}{\gamma^{2d}} \left[(1 - \sigma)^2 + \frac{1}{2} (1 - (\sigma - \alpha\lambda_{\min})^2 - (1 - \sigma)^2) \right],\end{aligned}$$

στην οποία αντικαταστήσαμε με $\lim_{\gamma \rightarrow 1} \epsilon_{d+1} = \frac{1}{2}(1 - (\sigma - a\lambda_{\min})^2 - (1 - \sigma)^2)$ αφού γνωρίζουμε πως η παράμετρος είναι αύξουσα. Ισχύει λοιπόν:

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(P_2) &\leq (1 - \sigma)^2 + \frac{1}{2}(1 - (\sigma - a\lambda_{\min})^2 - (1 - \sigma)^2) \\ &= 1 - 2\sigma - \frac{1}{2}(a\lambda_{\min})^2 + \sigma a\lambda_{\min} \\ &\leq 1 - 2\sigma - \frac{1}{2}(a\lambda_{\min})^2 + \sigma < 1. \end{aligned}$$

Στην συνέχεια στρεφόμαστε στην ιδιοτιμή $\lambda_{\min}(P)$, για την οποία θα δείξουμε πως $\lambda_{\min}(P_{d+1}) < 1$ και άρα πως η ελάχιστη ιδιοτιμή καθορίζεται από την αντίστοιχη ελάχιστη ιδιοτιμή του τελικού μπλοκ P_{d+1} . Ανακαλούμε πως η σχεδίαση του πίνακα P δίνει την έκφραση

$$\begin{aligned} P_{d+1} &= \frac{1}{\gamma^2}[(W^T \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I})(W \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I}) + \epsilon_{d+1} \mathbb{I}] \Rightarrow \\ \lambda_{\min}(P_{d+1}) &= \frac{1}{\gamma^2}[\sigma_{\min}^2(W \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I}) + \epsilon_{d+1}], \end{aligned}$$

όπου η ϵ_{d+1} όπως έχει ήδη επιλεγεί στην Εξίσωση (3.15) και γ, γ_b ώστε να επαληθεύουν τις σχέσεις (3.14) και (3.16) αντίστοιχα.

Λήμμα 3.5. Για γ, γ_b που επαληθεύουν τις σχέσεις (3.14) και (3.16) αντίστοιχα, ισχύει το άνω φράγμα

$$\gamma_b \leq 1 - a\delta,$$

με $0 < \delta$ τέτοιο ώστε $a\delta < 1$ και

$$\delta = \begin{cases} \hat{\lambda}_{\min}, & \text{αν } d = 0 \\ \frac{\sigma \hat{\lambda}_{\min}}{d} \cdot \frac{1 - \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{\hat{\lambda}_{\min}}{\hat{\lambda}_{\max}}\right)}{(2 - \sigma)^2 + \left(\sigma \frac{\hat{\lambda}_{\min}}{\hat{\lambda}_{\max}}\right)^2}, & \text{αν } d > 0 \end{cases}$$

Απόδειξη. Για $d = 0$ ισχύει προφανώς.

$$(3.16) \Rightarrow \gamma_b = (\sigma - a\lambda_{\min}) + \frac{1 - \sigma}{\gamma_b^d} \leq 1 - a\lambda_{\min}$$

Φαίνεται επίσης πως $a\delta = a\lambda_{\min} < \sigma < 1$.

Για $d > 0$ ισχύει πως $\gamma_b^d < \gamma_b = (\sigma - a\lambda_{\min} + \frac{1 - \sigma}{\gamma_b^d})$. Το πολυώνυμο $x^2 - x(\sigma - a\lambda_{\min}) - (1 - \sigma)$

έχει διακρίνουσα $\Delta = (\sigma - a\hat{\lambda}_{\min})^2 + 4(1 - \sigma) > 0$ αρα ισχύει

$$\begin{aligned}
\gamma_b^d &\leq \frac{\sigma - a\hat{\lambda}_{\min}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma - a\hat{\lambda}_{\min})^2 + 4(1 - \sigma)} \\
&= \frac{\sigma - a\hat{\lambda}_{\min}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(2 - \sigma)^2 + a^2 \hat{\lambda}_{\min}^2} \sqrt{1 - \frac{2\sigma a\hat{\lambda}_{\min}}{(2 - \sigma)^2 + a^2 \hat{\lambda}_{\min}^2}} \\
&\leq \frac{1}{2} \frac{\sigma - a\hat{\lambda}_{\min}}{2} + \frac{1}{2} [(2 - \sigma) + a\hat{\lambda}_{\min}] \left[1 - \frac{\sigma a\hat{\lambda}_{\min}}{(2 - \sigma)^2 + a^2 \hat{\lambda}_{\min}^2} \right] \\
&\stackrel{2}{\leq} 1 - a \frac{\sigma \hat{\lambda}_{\min} \left(1 - \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{\hat{\lambda}_{\min}}{\hat{\lambda}_{\max}} \right) \right)}{(2 - \sigma)^2 + \left(\sigma \frac{\hat{\lambda}_{\min}}{\hat{\lambda}_{\max}} \right)^2} \Rightarrow \\
\gamma_b &\leq 1 - a \frac{\sigma \hat{\lambda}_{\min} / d \left(1 - \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{\hat{\lambda}_{\min}}{\hat{\lambda}_{\max}} \right) \right)}{(2 - \sigma)^2 + \left(\sigma \frac{\hat{\lambda}_{\min}}{\hat{\lambda}_{\max}} \right)^2}.
\end{aligned}$$

Σε αυτή τη περίπτωση, γνωρίζουμε πως $a\sigma\hat{\lambda}_{\min} < \sigma^2 < 1$ αρα αρκεί να δείξουμε πως

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{\hat{\lambda}_{\min}}{\hat{\lambda}_{\max}} \right)}{d \left[(2 - \sigma)^2 + \left(\sigma \frac{\hat{\lambda}_{\min}}{\hat{\lambda}_{\max}} \right)^2 \right]} &< \frac{1 - \frac{\sigma}{2}}{d \left[(2 - \sigma)^2 + \left(\sigma \frac{\hat{\lambda}_{\min}}{\hat{\lambda}_{\max}} \right)^2 \right]} < 1 \Leftrightarrow \\
\frac{1 - \frac{\sigma}{2}}{d \left[(2 - \sigma)^2 + \left(\sigma \frac{\hat{\lambda}_{\min}}{\hat{\lambda}_{\max}} \right)^2 \right]} &< \frac{1 - \frac{\sigma}{2}}{d(2 - \sigma)^2} = \frac{1}{2d(2 - \sigma)} < \frac{1}{2d} < 1, \text{ ισχύει.}
\end{aligned}$$

Και στις δυο περιπτώσεις γράφουμε $\gamma_b \leq 1 - a\delta$ και δείξαμε πως $0 < 1 - a\delta < 1$, οπότε προκύπτει το ζητούμενο. \square

Για την ελάχιστη ιδιοτιμή του P διαλέγουμε να εργαστούμε με $\epsilon_{d+1} = \epsilon_{d+1}(\gamma_b)$.

$$\begin{aligned}
\epsilon_{d+1}(\gamma_b) &\stackrel{(3.15)}{=} \frac{1}{2} \left[\gamma_b^{2(d+1)} - \gamma_b^{2d} (\sigma - a\hat{\lambda}_{\min})^2 - (1 - \sigma)^2 \right] \\
&\stackrel{(3.16)}{=} (1 - \sigma)(\sigma - a\hat{\lambda}_{\min}) \gamma_b^d \\
&\stackrel{(3.17)}{=} (1 - \sigma)(\sigma - a\hat{\lambda}_{\min}) \left(\frac{1 - a\hat{\lambda}_{\min} + (1 - \sigma)d}{1 + (1 - \sigma)d} \right)^d
\end{aligned}$$

Από την έκφραση για το $\hat{\lambda}_{\min}(P_{d+1})$ και για την επιλογή $\gamma = \gamma_b$ λαμβάνουμε το εξής κάτω

¹Με χρήση των ανισοτήτων $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ και $\sqrt{1+a} \leq 1 + a/2$.

²Από κατασκευής, $a \leq \sigma/\hat{\lambda}_{\min}$.

φράγμα.

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(P_{d+1}) &= \frac{1}{\gamma_b^d} \left[\sigma_{\min}^2(W \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I}) + \epsilon_{d+1}(\gamma_b) \right] \\ &\geq (1 + \alpha\delta)^{-2} [\sigma_{\min}^2(W \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I}) \\ &\quad + (1 - \sigma)(\sigma - \alpha\beta_{\min}) \left(\frac{1 - \alpha\beta^{\min} + (1 - \sigma)d}{1 + (1 - \sigma)d} \right)^d].\end{aligned}\quad (3.18)$$

Με χρήση του Λήμματος 3.4 και σημειώνοντας πως έχουμε επιβεβαιώσει την ύπαρξη $0 < \gamma < 1$ και $P = P^T \geq 0$ ώστε να επαληθεύεται η ζητούμενη ανισότητα, έχουμε βρει την ζητούμενη συνάρτηση $h(k)$. Αναφέρουμε πως δεν έχουμε διατηρήσει ελεύθερη την επιλογή της παραμέτρου γ εντός της περιοχής $(\gamma_b, 1)$ οπότε πρέπει για την εγκυρότητα του φράγματος $\lambda_{\min}(P_{d+1})$ να επιλεγεί το μικρότερο δυνατό $\gamma \rightarrow \gamma_b$.

$$\begin{aligned}h(k) &= \gamma_b^k (1 - \alpha\delta) \left[\sigma_{\min}^2(W \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I}) + (1 - \sigma)(\sigma - \alpha\beta_{\min}) \left(\frac{1 - \alpha\beta^{\min} + (1 - \sigma)d}{1 + (1 - \sigma)d} \right)^d \right]^{-0.5} \\ &\leq (1 - \alpha\delta)^{k+1} \left[\sigma_{\min}^2(W \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I}) + (1 - \sigma)(\sigma - \alpha\beta_{\min}) \left(\frac{1 - \alpha\beta^{\min} + (1 - \sigma)d}{1 + (1 - \sigma)d} \right)^d \right]^{-0.5}\end{aligned}\quad (3.19)$$

Η παραπάνω σχέση έχει την μορφή $h(k) \leq (1 - \alpha\delta)^{k+1} c(a)$ με $c(a)$ φθίνουσα στο εύρος $a \in (0, 1)$ και $\lim_{a \rightarrow 0} c(a) = \sigma(1 - \sigma)$. Είναι εύκολο να αντιληφθούμε πως ο εκθετικός όρος περιοχύνει πολύ γρήγορα και άρα εξίσου ικανό άνω φράγμα είναι το

$$h(k) \leq (1 - \alpha\delta)^{k+1} [\sigma_{\min}^2(W \otimes \mathbb{I} - \sigma \mathbb{I}) + (1 - \sigma)\sigma]^{-0.5} = c_1(1 - \alpha\delta)^{k+1}.$$

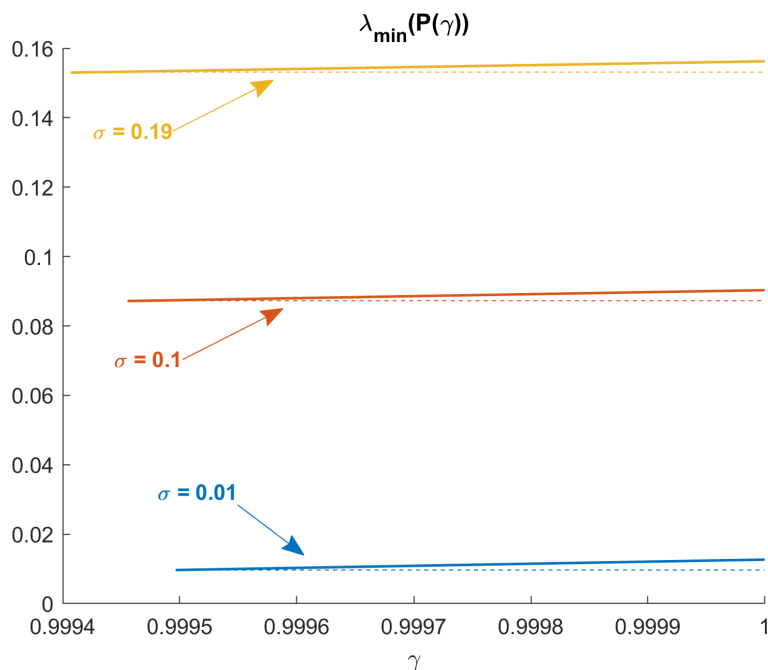
Παρακάτω δίνουμε σχήματα επαλήθευσης της ορθότητας της κατασκευής από το περιβάλλον Matlab. Για τον σκοπό αυτό, επιλέγουμε τα δεδομένα του προβλήματος και την σχεδιαστική παράμετρο σ αυθαίρετες, αλλά κατάλληλες ώστε να ανταποκρίνονται σε κάποιο δυνητικό πρόβλημα που ακολουθεί του Ορισμούς τοπικών προβλημάτων και σύνθεσης καθώς και τις Υποθέσεις Βαρών Γράφου και Φραγμένων Καθυστερήσεων. Στο σημείο αυτό δεν θα εσιάσουμε στην ποιοτική ερμηνεία των αυθαίρετων παραμέτρων αφού δεν σκοπεύουμε σε προσομοίωση αλλά μάλλον αναπαράσταση της μεταβολής ιδιοτιμών του πίνακα P .

Επιλέγουμε γράφο 5 πρακτόρων που αναπαριστάται από τον πίνακα

$$W = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.3 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}.\quad (3.20)$$

Η παραπάνω τοπολογία δικτύου υποχρεώνει την σχεδιαστική παράμετρο $\sigma < 0.2$. Επιπλέον, υποθέτουμε κάποια τοπολογία κόστους που δίνει $\beta_{\min} = 0.015$ και $\beta^{\min} = 6$ ενώ τέλος θεωρούμε άνω φράγμα στις καθυστερήσεις $d = 5$.

Στα Σχήματα 3.1 και 3.2 εικονίζονται η ελάχιστη και μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα P ως συνάρτηση της επιλογής γ στο εύρος $(\gamma_b, 1)$, διατηρώντας σταθερό το γινόμενο $\alpha\beta_{\min}$. Όπως αναφέραμε και κατά την επιλογή του νόμου ενημέρωσης, η χρήση σταθεράς σ οδηγεί στην



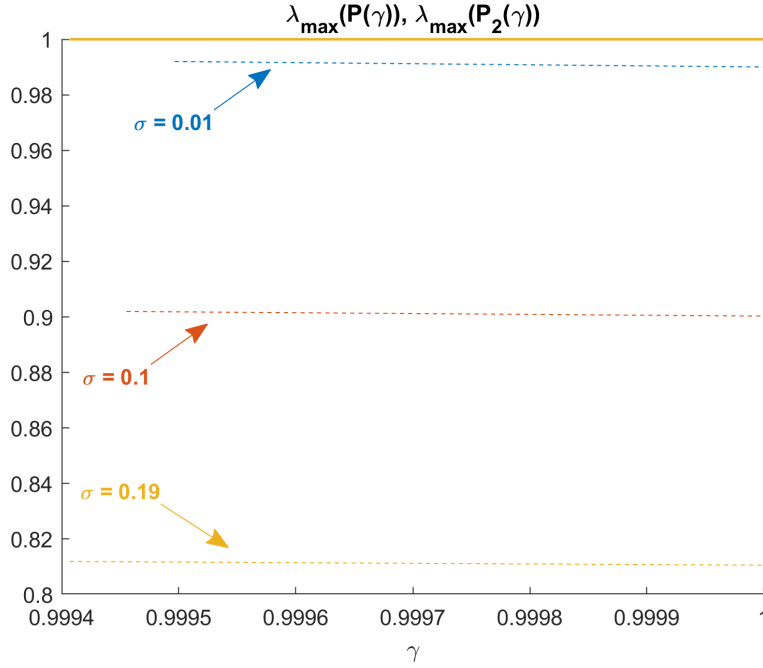
Σχήμα 3.1: Ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα P για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου σ . 1. Με έντονη γραμμή φαίνεται η πραγματική ιδιοτιμή της κατασκευής και 2. με διακεκομμένη εικονίζεται το κάτω φράγμα, υπολογισμένο διαμέσου της προσέγγισης ρίζας γ_b .

κατανομή βάρους μεταξύ των στιγμιαίων και καθυστερημένων ιδιοεκτιμήσεων του πράκτορα. Στα σχήματα εικονίζονται οι τιμές για τρεις επιλεγμένες τιμές της παραμέτρου. Βλέπουμε πως η μεταβολή της ελάχιστης ιδιοτιμής στο 3.1 είναι ανεπαίσθητη καθ' όλο το εύρος και αντίστοιχα το κάτω όριο που δώσαμε και εικονίζεται με διακεκομμένη γραμμή είναι αρκετά αυστηρό, γεγονός που επιβεβαιώνει και την εμπιστοσύνη μας στην προσέγγιση (3.17) του γ_b . Η δε μεταβολή της παραμέτρου σ επηρεάζει τον ρυθμό σύγκλισης μόνο διαμέσου της μεταβολής της ελάχιστης ιδιοτιμής του πίνακα ², όπως είναι αναμενόμενο και από την έκφραση της ακολουθίας $h(k)$.

Επιστρέφουμε στην έκφραση της $\lambda_{\min}(P)$ και εξετάζουμε την εξάρτησή της από την επιλογή βήματος a . Στο Σχήμα 3.3 διατηρούμε σταθερή επιλογή $\gamma = \gamma_b$, όπου η ρίζα γ_b έχει υπολογιστεί με χρήση της προσέγγισης (3.17). Στο σχήμα εικονίζεται πάλι η συμπεριφορά της ιδιοτιμής για τις τρεις προηγούμενες τιμές παραμέτρου σ . Από το σχήμα παρατηρούμε πως:

1. Το κάτω φράγμα της ιδιοτιμής επιβεβαιώνεται αξιόπιστο και μάλιστα αρκετά αυστηρό. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού είδαμε και στα προηγούμενα σχήματα πως η προσέγγιση της ρίζας γ_b είναι ικανοποιητική ακόμα και κοντά στο $\gamma = \gamma_b$.
2. Το φράγμα (3.18) γίνεται αυστηρότερο όσο μειώνεται η παράμετρος σ και όσο μειώνεται το βήμα a . Η παρατήρηση είναι αποτέλεσμα της φθίνουσας συμπεριφοράς της προσέγγισης γ_b ως προς αυτές τις παραμέτρους. Ποιοτικά, όσο μειώνονται οι σ , a , τόσο το γ_b προσεγγίζει την μονάδα και άρα η προσέγγιση (3.17) γίνεται πιο ακριβής.

²Παρά την μεταβολή της μέγιστης ιδιοτιμής στο μπλοκ P_2 του P , όπως αυτή εικονίζεται στο Σχήμα 3.2, η μέγιστη ιδιοτιμή του συνολικού πίνακα παραμένει στην μονάδα.



Σχήμα 3.2: Μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα P για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου σ . 1. Με έντονη γραμμή φαίνεται η πραγματική (μοναδιαία) ιδιοτιμή και 2. με διακεκομμένη εικονίζεται η αντίστοιχη, μέγιστη ιδιοτιμή του μπλοκ P_2 .

3. Γίνεται κατανοητή η επιλογή του αναπτύγματος Taylor της ρίζας γ_b γύρω από την μονάδα στην Εξίσωση (3.17). Επιθυμώντας να διατηρήσουμε πλήρη έλεγχο του μεγέθους της περιοχής σφάλματος, υποχρεωνόμαστε να λάβουμε αυθαίρετα μικρά βήματα προσρμογής και άρα προσεγγίζουμε κατά δύναμιν το σημείο $\gamma = 1$.

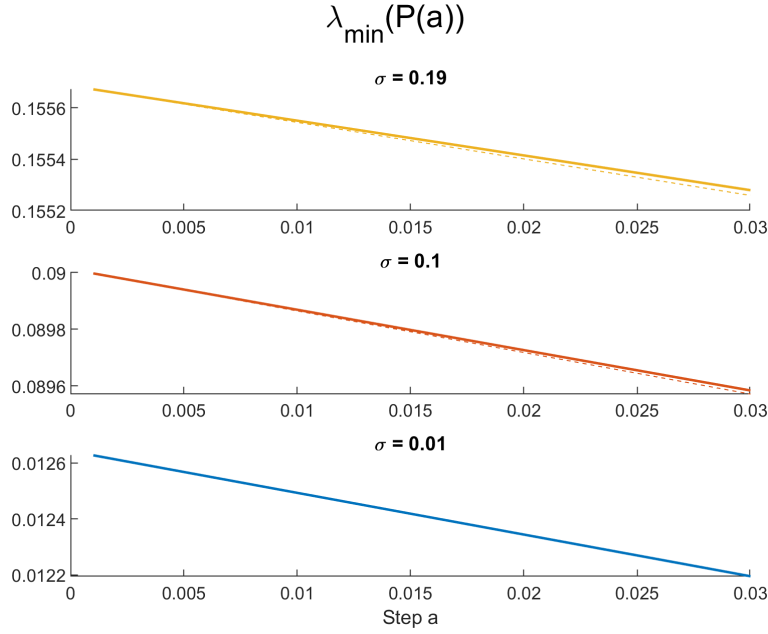
3.2.4 Ρυθμός Σύγκλισης Εκτιμήσεων

Σε αυτό το σημείο έχουμε επιτύχει στην κατασκευή πίνακα P και παραμέτρου γ ώστε να επαληθεύονται τα ζητούμενα του Λήμματος 3.4. Επιπλέον, διαμέσου της κατασκευής έχουμε οδηγηθεί σε έκφραση του φράγματος πίνακα μετάβασης ως προς την σταθερά βήματος a . Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε πώς το άνω όριο που προσδιορίσαμε συνδέεται με την μεταβολή εκτιμήσεων πρακτόρων διαμέσου του κανόνα ενημέρωσης που δίνεται στην Εξίσωση (3.9).

Θεώρημα 3.13. Λαμβάνουμε καταναμημένο πρόβλημα $\mathcal{P}_{distributed}$ αποτελούμενο από n τοπικά προβλήματα $\mathcal{P}_i \in \mathcal{F}_{local}$ τέτοιο ώστε να επαληθεύονται οι Υποθέσεις 1-5 και θεωρούμε τον νόμο ενημέρωσης εκτιμήσεων πρακτόρων

$$x_i(k+1) = \sigma(x_i(k) - x_i(k-d)) + \sum_{j=1}^n w_{ij}x_j(k-d) - a\nabla f_i(x_i(k)) + \eta_i(k+1). \quad (3.5)$$

Τότε, για κατάλληλο βήμα $a \leq \frac{\sigma}{\beta_{max}}$, η ακολουθία $\{\mathbf{x}(k)\}$ συγκλίνει σε γειτονιά σημείου ισορροπίας $\mathbf{x}_{eq} \in \mathbb{R}^{nm}$. Αυτό το σημείο προσδιορίζεται από την τοπολογία επικοινωνίας και κόστους



Σχήμα 3.3: Ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα P ως συνάρτηση του επιλεγμένου βήματος a . 1. Με έντονη γραμμή εικονίζεται η πραγματική ιδιοτιμή της κατασκευής και 2. με διακεκομμένη το κάτω φράγμα, υπολογισμένο διαμέσου της προσέγγισης ρίζας γ_b .

του προβλήματος διαμέσου της Εξίσωσης (3.8).

$$[(\mathbb{I}_n - W) \otimes \mathbb{I}_m] \mathbf{x}_{eq} + a \nabla F(\mathbf{x}_{eq}) = 0 \quad (3.8)$$

Απόδειξη. Λαμβάνουμε τους πίνακες $\tilde{A}(k)$, $\tilde{\Phi}(k, s)$ όπως στην ανάλυση του της προηγούμενης ενότητας. Ακολουθούμε επιπλέον την κατασκευή του P ώστε να οδηγηθούμε στο άνω φράγμα $h(k)$ όπως δίνεται στην (3.19). Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbf{z}_{eq} = \mathbf{1}_{d+1} \otimes \mathbf{x}_{eq}$ και την έκφραση επεκταμένου χώρου κατάστασης,

$$\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}_{eq} = \tilde{A}(k)(\mathbf{z}(k) - \mathbf{z}_{eq}) + \tilde{\eta}(k+1). \quad (3.9)$$

Ακολουθούμε τις παραπάνω ενημερώσεις πίσω, προς τον κάποιον χρόνο s .

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}_{eq} &= \tilde{\Phi}(k, s)(\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}_{eq}) + \sum_{r=s+1}^k \tilde{\Phi}(k, r) \tilde{\eta}(r) + \tilde{\eta}(k+1) \Rightarrow \\ \|\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}_{eq}\| &\leq \|\tilde{\Phi}(k, s)(\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}_{eq})\| + \sum_{r=s+1}^k \|\tilde{\Phi}(k, r) \tilde{\eta}(r)\| + \|\tilde{\eta}(k+1)\| \\ &\leq c_1 (1 - a\delta)^{k+1-s} + c_1 \epsilon \sum_{r=s+1}^k (1 - a\delta)^{k+1-r} + \epsilon. \end{aligned}$$

Ισχύει πως $\sum_{r=s+1}^k a^{k+1-r} = \frac{a}{1-a} (1 - a^{k-s})$ οπότε σχηματίζεται το ζητούμενο φράγμα απόκλισης

από το σημείο \mathbf{z}_{eq} .

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}_{eq}\| &\leq c_1(1 - a\delta)^{k+1-s} \|\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}_{eq}\| + \epsilon + \frac{c_1\epsilon}{a\delta} [1 - (1 - a\delta)^{k-s}] \\ &\leq c_1(1 - a\delta)^{k+1-s} \|\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}_{eq}\| + \epsilon \left(1 + \frac{c_1}{a\delta}\right) \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του επεκταμένου διανύσματος $\mathbf{z}(k) = [\mathbf{x}(k)^T, \dots, \mathbf{x}(k-d)^T]^T$ και με χρήση της ιδιότητας

$$\left\| \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right\| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i \right\| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \|a_i\| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \|a_1\|$$

τελικά οδηγήσαμε στο ζητούμενο.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{eq}\| &\leq c_1 \sqrt{d}(1 - a\delta)^{k-s} \|\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}_{eq}\| + \epsilon \sqrt{d} \left(1 + \frac{c_1}{a\delta}\right) \\ \|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{eq}\| &\sim \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{a}\right). \end{aligned} \tag{3.21}$$

□

Το Θεώρημα 3.13 δείχνει την σύγκλιση του διανύσματος εκτιμήσεων σε περιοχή γύρω από το \mathbf{x}_{eq} , τάξης $\mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{a}\right)$ με εκθετικό ρυθμό³. Το αποτέλεσμα επιβεβαιώνει την προσδοκία σύγκλισης των εκτιμήσεων σε σταθερό σημείο ισορροπίας το οποίο δεν αποτελεί σημείο συμφωνίας για τους πράκτορες στην περίπτωση που η διαταραχή $\eta_i(k)$ είναι ταυτοτικά μηδενική. Επιπλέον, η εξάρτηση της περιοχής από το $\frac{1}{a}$ προσφέρει την εξής ποιοτική ερμηνεία: όσο μικραίνει το βήμα a οι πράκτορες μεταβάλλουν λιγότερο τις εκτιμήσεις τους ανά κύκλο δειγματοληψίας. Έτσι, η αντιστάθμιση της διαταραχής $\eta_i(k)$ γίνεται δυσκολότερη, γεγονός που αυξάνει την ακτίνα της περιοχής απόκλισης από το σημείο ισορροπίας. Στην ενότητα που ακολουθεί θα χαρακτηρίσουμε την σχέση του \mathbf{x}_{eq} με το σημείο βελτιστότητας \mathbf{x}^* και την απόκλιση εκτιμήσεων από αυτό.

3.3 Απόκλιση από Σημείο Βελτιστότητας

Έστω τα σημεία \mathbf{x}_{eq} και \mathbf{x}^* τέτοια ώστε το πρώτο να αποτελεί το σημείο ισορροπίας όπως περιγράφεται στην προηγούμενη ενότητα και Εξίσωση (3.8) και το δεύτερο να αποτελεί την λύση του κατανεμημένου προβλήματος $\mathcal{P}_{distributed}$ όπως δίνεται στον Ορισμό 2.9. Σκοπός της ενότητας είναι να δείξουμε πως η απόκλιση $\|\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*\|$ ανήκει στην τάξη $\mathcal{O}(\sqrt{a})$ και παραμένει αμετάβλητη ανεξαρτήτως οποιασδήποτε παρεμβολής διαμέσου των η_i .

³Πιο συγκεκριμένα, ο ρυθμός σύγκλισης είναι R -γραμμικός. Κατά τον ορισμό των [10, 15], αν ακολουθία $\{x_k\}$ συγκλίνει στο x^* σε κάποιο νόρμα, τότε ο ρυθμός σύγκλισης είναι \mathcal{Q} -γραμμικός αν υπάρχει $0 < \rho < 1$ ώστε $\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} \leq \rho$ και R -γραμμικός αν υπάρχουν $C > 0$, $0 < \rho < 1$ ώστε $\|x_k - x^*\| \leq C\rho^k$. Οι δυο εκφράσεις είναι γεωμετρικές (εκθετικές), διαφέρουν όμως στο ότι η \mathcal{Q} -γραμμική σύγκλιση είναι αυστηρά μονοτονική ενώ αντίθετα η R -γραμμική όχι.

Θυμίζουμε πρώτα πως το σημείο \mathbf{x}^* είναι σημείο συμφωνίας οπότε εξ' Ορισμού 2.9 ισχύει πως $[(\mathbb{I}_n - W) \otimes \mathbb{I}_m] \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Έτσι η Εξίσωση (3.8) μπορεί να γραφτεί ως

$$[(\mathbb{I}_n - W) \otimes \mathbb{I}_m](\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*) + \alpha(\nabla F(\mathbf{x}_{eq}) - \nabla F(\mathbf{x}^*)) = -\alpha \nabla F(\mathbf{x}^*).$$

Επιπλέον θυμίζουμε τα παρακάτω δυο σημεία.

1. Η τετραγωνική μορφή $(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)^T [(\mathbb{I}_n - W) \otimes \mathbb{I}_m](\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)$ μπορεί να γραφτεί $(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)^T [(\mathbb{I}_n - \frac{W+W^T}{2}) \otimes \mathbb{I}_m](\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)$.
2. Η συνάρτηση $F(\mathbf{x})$ είναι ισχυρά κυρτή με παράμετρο $\mu_F > 0$ από την Εξίσωση (2.12) και το Θεώρημα 2.9, οπότε ισχύει πως $(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)^T (\nabla F(\mathbf{x}_{eq}) - \nabla F(\mathbf{x}^*)) \geq \mu_F \|\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*\|^2$.

Με τις παραπάνω παρατηρήσεις οδηγούμαστε στο εξής αποτέλεσμα για τις τετραγωνικές μορφές:

$$\begin{aligned} \alpha \mu_F \|\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*\|^2 + (\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)^T \left[\left(\mathbb{I}_n - \frac{W+W^T}{2} \right) \otimes \mathbb{I}_m \right] (\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*) \\ \leq -\alpha \|(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)^T \nabla F(\mathbf{x}^*)\|. \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.3.1 Διάσπαση Ιδιοτιμών Πίνακα $\frac{W+W^T}{2}$

Ο πίνακας $\frac{W+W^T}{2}$ είναι πραγματικός, συμμετρικός και στοχαστικός οπότε δέχεται διάσπαση ιδιοτιμών - ιδιοδιανυσμάτων.

$$\begin{aligned} \frac{W+W^T}{2} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix}, \\ M_1 \in \mathbb{R}^n, M_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)} \text{ και } \Lambda \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}. \end{aligned}$$

Το $M_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_n$ αποτελεί το ιδιοδιάνυσμα της μοναδιαία ιδιοτιμής του πίνακα, ενώ ο πίνακας M_2 περιέχει ως στήλες τα υπόλοιπα $n-1$ ιδιοδιανύσματα, με αντίστοιχες ιδιοτιμές στις διαγώνιους του Λ . Ο πίνακας $\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix}$ είναι ορθογωνικός οπότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

1. $\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix} = \mathbb{I}_n \Rightarrow M_1 M_1^T + M_2 M_2^T = \mathbb{I}_n$.
2. $M_2^T M_1 = 0$.

Ισχύει λοιπόν πως

$$\begin{aligned} \frac{W+W^T}{2} = M_1 M_1^T + M_2 \Lambda M_2^T = \mathbb{I}_n - M_2 M_2^T + M_2 \Lambda M_2^T \Rightarrow \\ \mathbb{I} - \frac{W+W^T}{2} = M_2 (\mathbb{I} - \Lambda) M_2^T, \text{ για τον οποίο } \mathbb{I} - \Lambda > 0. \end{aligned}$$

Με χρήση της διάσπασης του $\frac{W+W^T}{2}$ επιστρέφουμε στην έκφραση (3.22) στην οποία αντικαθιστούμε

1.

$$\begin{aligned} \alpha\mu_F\|\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*\|^2 &= \alpha\mu_F(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)^T [(M_1 M_1^T + M_2 M_2^T) \otimes \mathbb{I}_m] (\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*) \\ &\geq \alpha\mu_F \|(M_2^T \otimes \mathbb{I}_m)(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)\|^2. \end{aligned}$$

2.

$$(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)^T \left[\left(\mathbb{I}_n - \frac{W + W^T}{2} \right) \otimes \mathbb{I}_m \right] (\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*) \geq \lambda_{\min}(\mathbb{I} - \Lambda) \|(M_2^T \otimes \mathbb{I}_m)(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)\|^2.$$

3.

$$\begin{aligned} -\alpha(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)^T \nabla F(\mathbf{x}^*) &= -\alpha(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)^T [(M_1 M_1^T + M_2 M_2^T) \otimes \mathbb{I}_m] \nabla F(\mathbf{x}^*) \\ &\leq \alpha \|(M_2^T \otimes \mathbb{I}_m) \nabla F(\mathbf{x}^*)\| \|(M_2^T \otimes \mathbb{I}_m)(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)\|. \end{aligned}$$

Τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha\mu_F \|(M_2^T \otimes \mathbb{I}_m)(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)\|^2 + \lambda_{\min}(\mathbb{I} - \Lambda) \|(M_2^T \otimes \mathbb{I}_m)(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)\|^2 \\ \leq \alpha \|(M_2^T \otimes \mathbb{I}_m) \nabla F(\mathbf{x}^*)\| \|(M_2^T \otimes \mathbb{I}_m)(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)\| \Rightarrow \\ \|(M_2^T \otimes \mathbb{I}_m)(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)\| \leq \frac{\alpha \|(M_2^T \otimes \mathbb{I}_m) \nabla F(\mathbf{x}^*)\|}{\alpha\mu_F + \lambda_{\min}(\mathbb{I} - \Lambda)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Τέλος επισημαίνουμε πως η τετραγωνική μορφή $(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)^T \left[\left(\mathbb{I}_n - \frac{W+W^T}{2} \right) \otimes \mathbb{I}_m \right] (\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)$ είναι μη-αρνητική στην (3.22), οπότε αντικαθιστούμε με την (3.23) ως εξής.

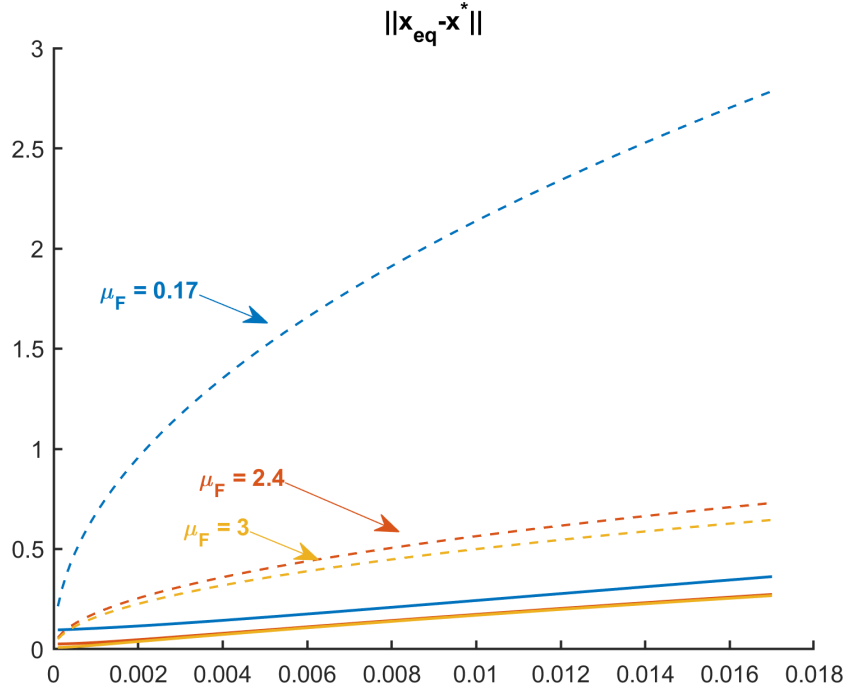
$$\begin{aligned} \alpha\mu_F\|\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*\|^2 &\leq \alpha \|(M_2^T \otimes \mathbb{I}_m) \nabla F(\mathbf{x}^*)\| \|(M_2^T \otimes \mathbb{I}_m)(\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*)\| \\ &\stackrel{(3.23)}{\leq} \frac{\alpha^2 \|(M_2^T \otimes \mathbb{I}_m) \nabla F(\mathbf{x}^*)\|^2}{\alpha\mu_F + \lambda_{\min}(\mathbb{I} - \Lambda)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*\| &\leq \|(M_2^T \otimes \mathbb{I}_m) \nabla F(\mathbf{x}^*)\| \sqrt{\frac{\alpha/\mu_F}{\alpha\mu_F + \lambda_{\min}(\mathbb{I} - \Lambda)}} \\ \|\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*\| &\sim \mathcal{O}(\sqrt{a}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Όσον αφορά την συνάρτηση $g(a) = \sqrt{\frac{\alpha/\mu_F}{\alpha\mu_F + \lambda_{\min}(\mathbb{I} - \Lambda)}}$, αυτή είναι αύξουσα με το βήμα a και παντού θετική. Έχει δε πεπερασμένο όριο $\lim_{a \rightarrow 0} g(a) = \sqrt{\frac{1}{\mu_F^2}} = \frac{1}{\mu_F}$. Όσο $\mu_F \rightarrow 0$, η $g(a)$ προσεγγίζει επακριβώς την $\sqrt{\frac{a}{\lambda_{\min}(\mathbb{I} - \Lambda)}}$ και άρα συνολικά $g(a) \sim \mathcal{O}(\sqrt{a})$.

Σε αναλογία με την προηγούμενη ενότητα, κατασκευάζουμε το Σχήμα 3.4 για την αριθμητική επαλήθευση του φράγματος Εξίσωσης (3.24). Σημειώνεται πως για την διευκόλυνση υπολογισμών λάβαμε τις συναρτήσεις f_i τετραγωνικές, που οδηγούν σε σταθερές Χεσσιανές για τα f_i και άρα γνωστές ιδιοτιμές. Η τετραγωνική μορφή όμως δεν είναι απαραίτητη και δεν έχει χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή του σχήματος εκτός από τον υπολογισμό του εκάστοτε \mathbf{x}^* ανά τοπολογία.

Τελικά χρησιμοποιούμε τις υπολογισμένες αποκλίσεις από το σημείο ισορροπίας και την λύση του καταναμημένου προβλήματος για να οδηγηθούμε σε συνολική έκφραση της απόκλισης των εκτιμήσεων από το σημείο βέλτιστης συμφωνίας και συνεπώς να χαρακτηρίσουμε και την αναμενόμενη περιοχή σφάλματος της λύσης, συναρτήσει των παραμέτρων a, ϵ .



Σχήμα 3.4: Σφάλμα μόνιμης κατάστασης του σημείου ισορροπίας από την λύση \mathbf{x}^* για διαφορετικές τοπολογίες κόστους ως συνάρτηση του βήματος α . 1. Με έντονη γραμμή φαίνεται η απόκλιση υπολογισμένη διαμέσου αριθμητικής επίλυσης και 2. με διακεκομμένη γραμμή δίνεται το άνω φράγμα κατά την Εξίσωση (3.24).

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*\| &\leq \|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{eq}\| + \|\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*\| \\
&\leq c_1 \sqrt{d}(1 - \alpha\delta)^{k-s} \|z(s) - z_{eq}\| + \epsilon \sqrt{d} \left(1 + \frac{c_1}{\alpha\delta}\right) \\
&\quad + \|(M_2^T \otimes \mathbb{I}_m) \nabla F(\mathbf{x}^*)\| \sqrt{\frac{\alpha/\mu_F}{\alpha\mu_F + \lambda_{\min}(\mathbb{I} - \Lambda)}} \\
&= c_1 \sqrt{d}(1 - \alpha\delta)^{k-s} \|z(s) - z_{eq}\| + \epsilon \sqrt{d} \left(1 + \frac{c_1}{\alpha\delta}\right) \\
&\quad + c_2 \sqrt{\frac{\alpha/\mu_F}{\alpha\mu_F + \lambda_{\min}(\mathbb{I} - \Lambda)}} \\
\|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*\| &\sim \mathcal{O}\left(\sqrt{\alpha} + \frac{\epsilon}{\alpha}\right).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα συμπυκνώνεται στο θεώρημα που ακολουθεί και αποτελεί το τελικό συμπέρασμα της ανάλυσης του διακριτού αλγορίθμου παρουσία φραγμένων διαταραχών.

Θεώρημα 3.14. Έστω δεδομένο καταναμημένο πρόβλημα $\mathcal{P}_{distributed}$ αποτελούμενο από n τοπικά προβλήματα τέτοια ώστε να επαληθεύονται οι Υποθέσεις 1-5. Αν θεωρήσουμε τον κανόνα ενημέρωσης εκτιμήσεων (3.5) τότε για κατάλληλο βήμα $\alpha \leq \frac{\sigma}{\lambda_{\max}}$ η ακολουθία $\mathbf{x}(k)$ συγκλίνει σε περιοχή τάξης $\mathcal{O}(\sqrt{\alpha} + \epsilon/\alpha)$ γύρω από την λύση του προβλήματος \mathbf{x}^* σύμφωνα με την Εξίσωση (3.25).

Στην Ενότητα 3.5 που ακολουθεί θα επιστρέψουμε στην συνεχούς χρόνου μεταβλητές

$\eta_i(t)$ και την οδήγηση των εκτιμήσεων $x_i(t)$ μεταξύ των στιγμών δειγματοληψίας, εξετάζοντας ιδιαίτερα την απόκλιση της εκτίμησης από την πιο πρόσφατη δειγματοληπτούμενη τιμή του πράκτορα. Παρεμβάλλουμε όμως στην Ενότητα 3.4 μια σειρά αριθμητικών προσομοιώσεων των διακριτών μεθόδων που παρουσιάστηκαν και της εξάρτησής τους από τις σχεδιαστικές παραμέτρους.

3.4 Προσομοίωση Πειραματικών Διατάξεων

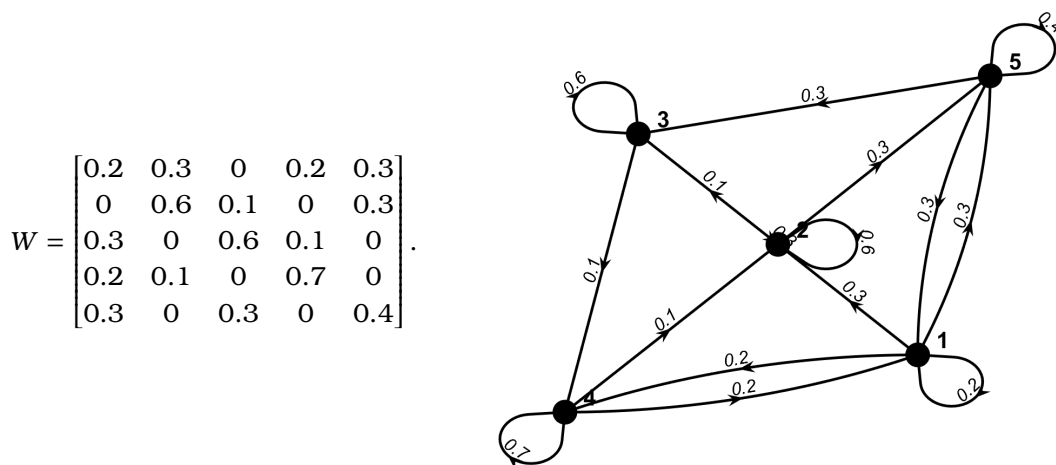
Σχηματίζουμε συνδεδεμένο δίκτυο 5 πρακτόρων λαμβάνοντας τον πίνακα μετάβασης στο Σχήμα 3.5. Κάθε πράκτορας διατηρεί διάνυσμα εξόδου στο \mathbb{R}^2 με αρχικές τιμές $x_1(0) = [0.2, -4.88]^T$, $x_2(0) = [4.53, 2.1]^T$, $x_3(0) = [3.83, 3.2]^T$, $x_4(0) = [4.74, -1.6]^T$ και $x_5(0) = [4.96, 0.5]^T$. Οι τοπικές συναρτήσεις κόστους επιλέγονται τετραγωνικές για διευκόλυνση της ανάλυσης, αλλά όπως προηγουμένως, η μορφή τους είναι απαραίτητη μόνο για διευκόλυνση υπολογισμού \mathbf{x}_{eq} , \mathbf{x}^* .

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0.5x^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix} x + [1 \quad -4]x + 1 \\ f_2(x) &= 0.5x^T \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2.7 & 5 \end{bmatrix} x + [1 \quad -0.5]x + 2 \\ f_3(x) &= 0.5x^T \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} x + [3 \quad -2]x \\ f_4(x) &= 0.5x^T \begin{bmatrix} 3 & -1.1 \\ -0.1 & 4 \end{bmatrix} x + [-5 \quad 0.4]x \\ f_5(x) &= 0.5x^T \begin{bmatrix} 4 & 1.8 \\ 0.8 & 2 \end{bmatrix} x + [-0.2 \quad 5]x + 2 \end{aligned}$$

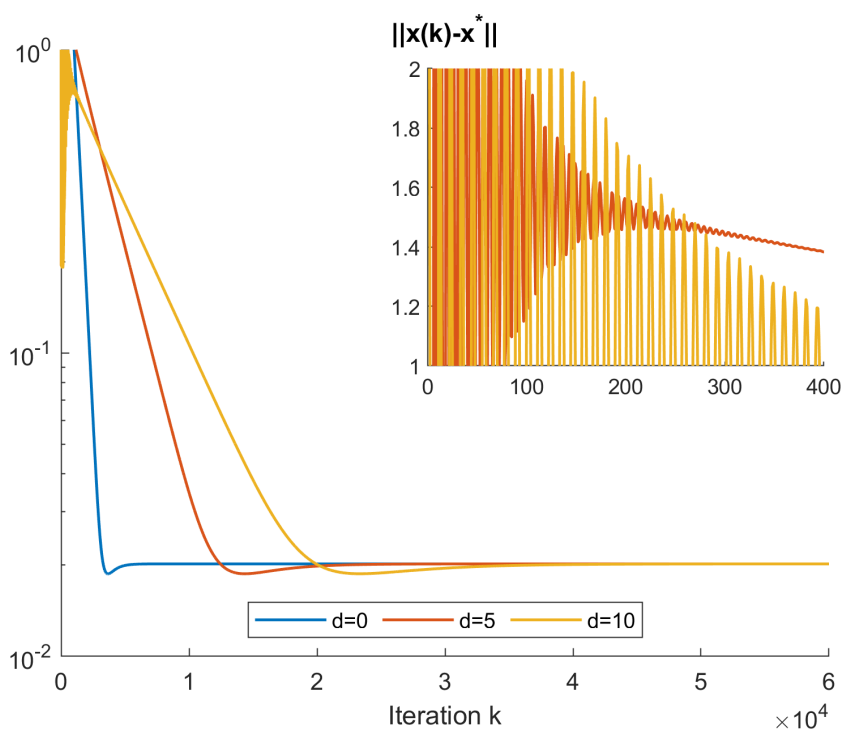
Ισχύει πως $\mathbf{argmin}_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = [-0.007, 0.087]^T$ και $f^* = \mathbf{min}_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = 4.95$, οπότε το σημείο βέλτιστης συμφωνίας είναι $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_n \otimes [-0.007, 0.087]^T$ και επιπλέον υπολογίζουμε $\hat{\lambda}_{min} = \mathbf{min}_i \lambda_{min}(Q_i) = 0.19$ και $\hat{\lambda}_{max} = \mathbf{max}_i \lambda_{max}(Q_i) = 6.53$. Τέλος, επιλέγοντας $\sigma = 0.1$ προκύπτει πως κατά τις προσομοιώσεις πρέπει $a < \frac{\sigma}{\hat{\lambda}_{max}} = 0.0153$. Πρώτα εξετάζουμε την συμπεριφορά του αλγορίθμου χωρίς τις διαταραχές η_i , ώστε να δώσουμε μια εικόνα εξέλιξης εκτιμήσεων με καθυστερήσεις και σταθερό βήμα.

Στο Σχήμα 3.6 φαίνεται η σύγκλιση του συσσωρευμένου διανύσματος εξόδου $\mathbf{x}(k)$ για διαφορετικές τιμές d του αλγορίθμου. Είναι αμέσως εμφανής ο εκθετικός ρυθμός σύγκλισης των εκτιμήσεων και η εξάρτησή του από την ύπαρξη καθυστερήσεων. Επίσης αξιοσημείωτη είναι και η σύγκλιση των εκτιμήσεων στο ίδιο σημείο παρά τον διαφορετικό ρυθμό, γεγονός που φαίνεται και στο Σχήμα 3.7. Αυτό είναι φυσικά αναμενόμενο αφού γνωρίζουμε πως η παρατηρούμενη απόκλιση είναι αποτέλεσμα της επιλογής σταθερού βήματος και όχι της εισαγωγής καθυστερήσεων. Όπως έχουμε ήδη τεκμηριώσει, το σημείο σύγκλισης δεν είναι σημείο συμφωνίας, ανεξαρτήτως της ύπαρξης καθυστερήσεων ή μη γεγονός που επαληθεύεται και στο Σχήμα 3.7.

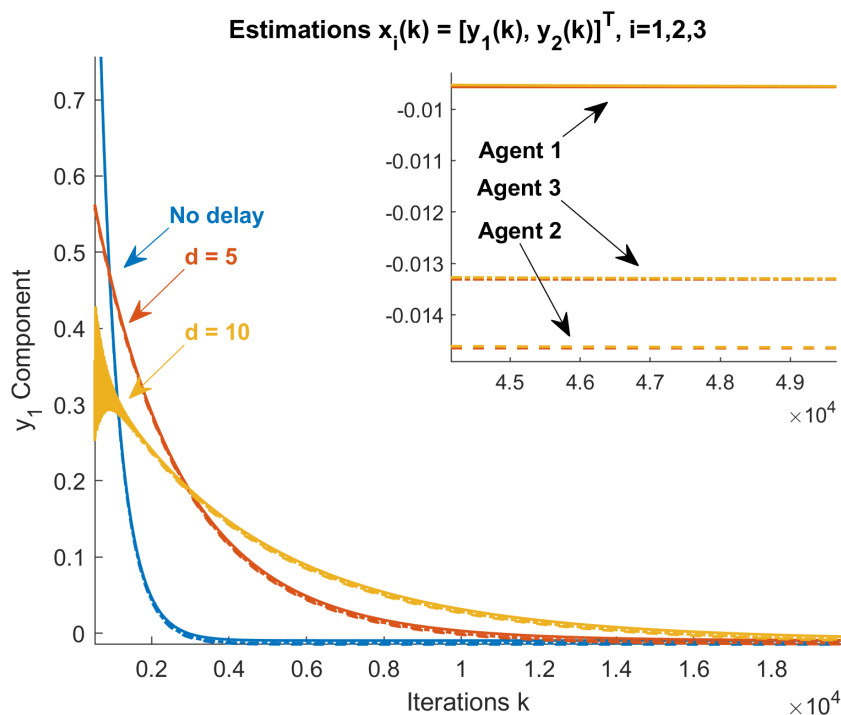
Στις επόμενες προσομοιώσεις λαμβάνουμε $d = 3$ ως δεδομένη σταθερά του προβλήματος.



Σχήμα 3.5: Μοντελοποίηση επικοινωνίας πρακτόρων διαμέσου πίνακα μετάβασης. Στο σχήμα εικονίζεται ο επιλεγμένος γράφος \mathcal{G} επικοινωνίας και η αντίστοιχη έκφραση πίνακα μετάβασης W .



Σχήμα 3.6: Σύγκλιση συσσωρευμένου διανύσματος εξόδου για βήμα $a = 10^{-3}$ και διαφορετικά φράγματα καθυστέρησης. Επισημαίνεται η ταλαντωτική συμπεριφορά των εκτιμήσεων που εμφανίζεται ως αποτέλεσμα της ύπαρξης καθυστέρησης.



Σχήμα 3.7: Μεταβολή της πρώτης συνιστώσας των εκτιμήσεων πρακτόρων $i = 1, 2$ και 3 . Στο σχήμα φαίνεται η εξάρτηση της ταχύτητας σύγκλισης από το δεδομένο άνω όριο καθυστερήσεων αλλά και πως το σημείο ισοροπίας παραμένει αμετάβλητο.

Επιπλέον επιλέγουμε σταθερό βήμα $a = 1.52 \times 10^{-5}$ που ελαχιστοποιεί το σφάλμα $\|\mathbf{x}_{eq} - \mathbf{x}^*\|$ για το δεδομένο δίκτυο και κόστος. Φυσικά, αυτή η επιλογή βήματος δεν είναι βέλτιστη με παρουσία των διαταραχών η_i .

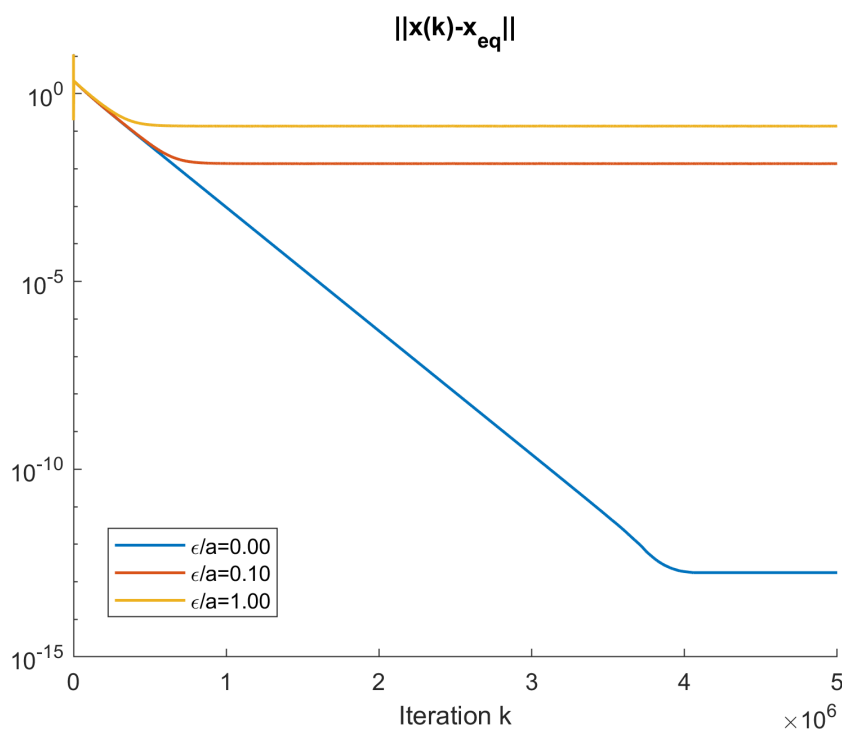
Στο Σχήμα 3.8 επιβεβαιώνεται πως η τάξη μεγέθους τους σφάλματος $\|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{eq}\|$ είναι ανάλογη $O(\epsilon/a)$. Επιπλέον, συγκρίνοντας τις τάξεις μεγέθους στο Σχήμα 3.9 παρατηρούμε πως η απόκλιση εκτιμήσεων από το βέλτιστο καθορίζεται κυρίως από το σφάλμα $\|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{eq}\|$ που εισάγει η διαταραχή και όχι την διαφορά σημείου ισοροπίας - βελτίστου.

Τέλος, στα Σχήματα 3.10 και 3.11 φαίνεται η χρονική απόκριση των πρακτόρων για προσομοίωση του διακριτού συστήματος με βήμα $a = 10^{-4}$ και $\frac{\epsilon}{a} \sim 10^{-3}$. Αξίζει στα δύο σχήματα να σημειωθεί το έντονο μεταβατικό φαινόμενο που εντός λίγων επαναλήψεων οδηγεί τους πράκτορες σε συμφωνία και εν συνέχεια η σταδιακή μεταβολή του σημείου συμφωνίας που προσεγγίζει την λύση \mathbf{x}^* . Ειδικά στο Σχήμα 3.11 φαίνεται πως η περιοχή απόκλισης από το βέλτιστο είναι όντως $O(\epsilon/a) \sim 10^{-3}$ και επιβεβαιώνεται η προηγούμενη παρατήρηση: στην απόκλιση εκτιμήσεων από το βέλτιστο υπερισχύει ο λόγος ϵ/a των διαταραχών $\eta_i(k)$.

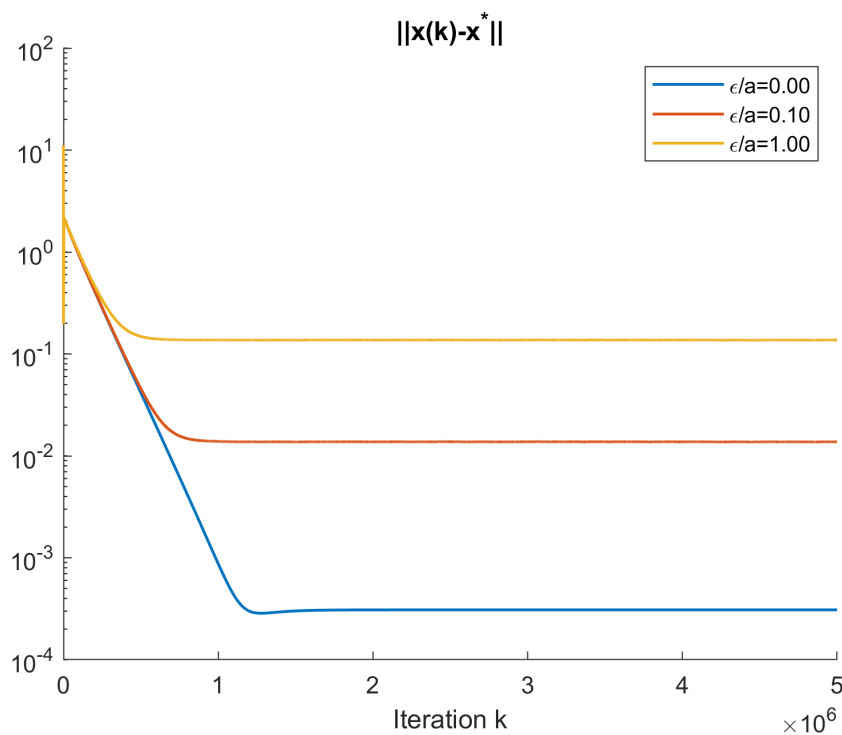
3.5 Μεταξύ Στιγμών Δειγματοληψίας

Εν συνεχεία εξετάζουμε την συμπεριφορά των τροχιών εξόδου κάθε πράκτορα μεταξύ των στιγμών δειγματοληψίας, για $t \in [kT, (k+1)T)$. Αναδιατάσσοντας τον ορισμό των βοηθητικών μεταβλητών στην Εξίσωση (3.1) προκύπτει η έκφραση παρακάτω:

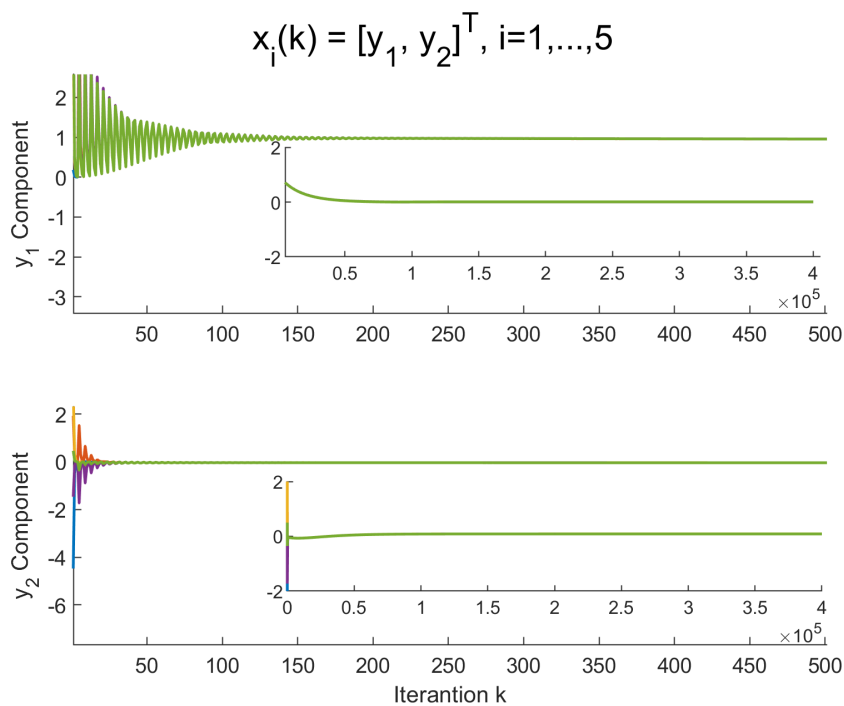
$$x_i(t) = \eta_i(t) + q(t - kT) s_i(k) + [1 - q(t - kT)] s_i(k - 1). \quad (3.26)$$



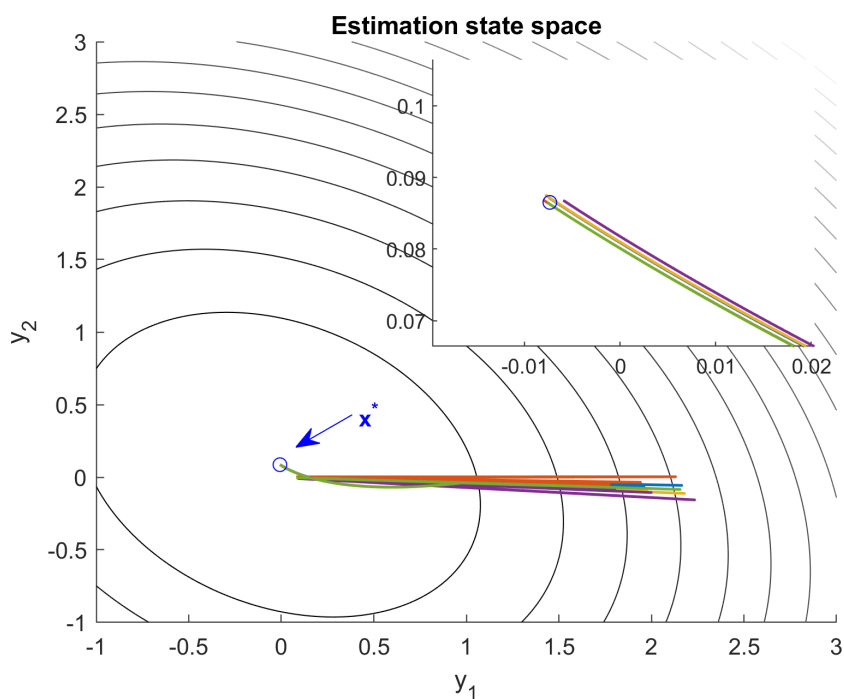
Σχήμα 3.8: Απόκλιση εκτιμήσεων από σημείο ισορροπίας \mathbf{x}_{eq} συναρτήσει της τάξης μεγέθους $O(\epsilon/a)$.



Σχήμα 3.9: Απόκλιση εκτιμήσεων από το βέλτιστο σημείο \mathbf{x}^* συναρτήσει της τάξης μεγέθους $O(\epsilon/a)$.



Σχήμα 3.10: Χρονική απόκριση των εκτιμήσεων παρακτόρων και μεταβατική κατάσταση.



Σχήμα 3.11: Χώρος κατάστασης εκτιμήσεων και η σύγκλιση εντός περιοχής $O(\epsilon/a)$ του στάσιμου σημείου.

$$x_i(kT) = \eta_i(kT) + s_i(k-1) \quad (3.27)$$

όπου, κατά την Εξίσωση (3.3), ισχύει πως $s_i(k) = \sigma(x_i(kT) - x_i((k-d)T)) + \sum_{j=1}^n w_{ij}x_j((k-d)T) - a\nabla f_i(x_i(kT))$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις εκφράσεις (3.26), (3.27) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \|x_i(t) - x_i(kT)\| &= \|\eta_i(t) - \eta_i(kT) + q(t-kT)(s_i(k) - s_i(k-1))\| \\ &\leq \|\eta_i(t) - \eta_i(kT)\| + \|s_i(k) - s_i(k-1)\| \\ &\leq \|\eta_i(t) - \eta_i(kT)\| + \|x_i((k+1)T) - x_i(kT)\| + \|\eta_i((k+1)T) - \eta_i(kT)\| \end{aligned}$$

Κατά την Υπόθεση 5, υπάρχει ελεγκτικός νόμος που οδηγεί όλες τις βοηθητικές μεταβλητές $\|\eta_i(t)\| < \epsilon$, $\forall t \geq t_0$ για θετικά $t_0, \epsilon > 0$. Δια αυτής, οδηγούμαστε στην έκφραση:

$$\|x_i(t) - x_i(kT)\| \leq 4\epsilon + 2\|x_i(kT) - x^*\|. \quad (3.28)$$

Η απόκλιση του στιγμιαίου διανύσματος εξόδου κάθε πράκτορα $x_i(t)$ από το ζητούμενο σημείο x^* δίνεται άμεσα ως αποτέλεσμα των Εξισώσεων (3.28) και (3.25).

$$\begin{aligned} \|x_i(t) - x^*\| &\leq \|x_i(t) - x_i(kT)\| + \|x_i(kT) - x^*\| \\ &\leq 4\epsilon + 3\sqrt{n}\|x(kT) - x^*\| \end{aligned} \quad (3.29)$$

Με εφαρμογή της Εξίσωσης (3.25) στην (3.29) έχουμε το άνω φράγμα που ακολουθεί.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x^*\| \leq \epsilon \left(4 + 3\sqrt{nd} + \frac{c_1}{a\delta} \right) + 3c_2 \sqrt{\frac{n}{\mu_F}} \sqrt{\frac{a}{a\mu_F + \lambda_{\min}(\mathbb{I} - \Lambda)}} \quad (3.30)$$

Παρατηρώντας πως η σταθερά a είναι σχεδιαστική παράμετρος και άρα μπορεί να ληφθεί αυθαίρετα μικρή οδηγούμαστε στο ζητούμενο του Θεωρήματος 3.11 και ολοκληρώνεται η απόδειξη.

3.6 Συμπέρασμα

Στο Κεφάλαιο αυτό ορίσαμε τις βοηθητικές μεταβλητές ελέγχου $\eta_i(t)$ και δείξαμε πως η ρύθμισή τους συνδέεται με τα χαρακτηριστικά βέλτιστης συμφωνίας στις μεταβλητές εξόδου $x_i(t)$ των μη-γραμμικών πρακτόρων. Ειδικότερα, η μελέτη επικεντρώθηκε πρώτα στην συμπεριφορά διαδοχικών δειγματοληπτούμενων εκτιμήσεων πρακτόρων κατά την ρύθμιση των $\eta_i(t)$ και εν συνεχεία την απόσταση της τροχιάς $x_i(t)$, $t \in (kT, (k+1)T)$ με το πρόσφατο δείγμα $x_i(kT)$.

Κατά την μελέτη της συμπεριφοράς διακριτών εκτιμήσεων, δείξαμε πως ο αλγόριθμος DGD που δίνεται από τις ενημερώσεις (3.5), συγκλίνει παρουσία καθυστερήσεων και φραγμένων διαταραχών $\eta_i(k)$ για κατάλληλα βήματα $a < \frac{\sigma}{\beta_{\max}}$. Εξετάσαμε την συμπεριφορά του αλγορίθμου ως συνάρτηση της χαρακτηριστικών παραμέτρων d, μ_F, L_F του προβλήματος και των σχεδιαστικών παραμέτρων βήματος, σ και ϵ . Συγκεκριμένα, ισχύει πως

1. Το διάνυσμα εκτιμήσεων $x(k)$ συγκλίνει πλησίον σημείου ισορροπίας x_{eq} με εκθετικό ρυθμό εξαρτώμενο από το φράγμα καθυστερήσεων και το επιλεγμένο βήμα. Η απόκλιση εκτιμήσεων από το x_{eq} είναι τάξης $O(\epsilon/a)$.

2. Το σημείο ισορροπίας δεν αποτελεί σημείο συμφωνίας για το πρόβλημα ούτε σημείο ελαχιστοποίησης για το καθολικό κριτήριο κόστους $f(x)$. Δείξαμε πως η απόκλιση του σημείου από την βέλτιστη λύση \mathbf{x}^* είναι τάξης $O(\sqrt{a})$.
3. Η συνολική διαφορά $\|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*\| \sim O(\sqrt{a} + \epsilon/a)$ και άρα, για κατάλληλη επιλογή βήματος, ο όρος απόκλισης λόγω των διαταραχών $\eta_i(k)$ γίνεται αμελητέος για τον υπολογισμό του παραπάνω σφάλματος.

Εν συνεχεία, η σύνδεση των συγκλινόντων διακριτών εκτιμήσεων με τις συνεχείς τροχιές εξόδου των πρακτόρων $x_i(t)$ έγινε διαμέσου μελέτης των αποκλίσεων $\|x_i(t) - x_i(\lfloor \frac{t}{T} \rfloor T)\|$. Με τον τρόπο αυτό ολοκληρώθηκε η απόδειξη του θεωρήματος που παρουσιάσαμε στην αρχή του Κεφαλαίου και δείχθηκε πως η ικανότητα προσέγγισης του σημείου βέλτιστης συμφωνίας από τα διανύσματα εξόδου επηρεάζεται από την επιλογή σταθερού βήματος a κατά τον ορισμό των ακολουθιών $s_i(k)$ (Εξίσωση (3.3)) αλλά και από την ικανότητα οδήγησης των βοηθητικών μεταβλητών $\eta_i(t)$ κοντά στο 0.

Το Θεώρημα 3.11 που αποτελεί και το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας θα χρησιμοποιηθεί στο επόμενο κεφάλαιο για τον σχεδιασμό και την προσομοίωση δυο ελεγκτών. Θεωρούμε τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 την κύρια συμβολή της εργασίας, αφού αποδεικνύει πως το πρόβλημα βέλτιστης συμφωνίας μη-γραμμικών πρακτόρων μπορεί να αναχθεί σε ρύθμιση βοηθητικών μεταβλητών σε περιοχή γύρω από την αρχή των αξόνων. Επιπλέον, το κεφάλαιο αυτό θα ενημερώσει τις σχεδιαστικές αποφάσεις για τους ελεγκτές που ακολουθούν, αφού καθορίζει την επιλογή βήματος για ευστάθεια του κατανεμημένου σχήματος και θα χρησιμοποιηθεί για την αιτιολόγηση ελεγκτικών νόμων που επιτυγχάνουν την σταθεροποίηση μη-γραμμικών πρακτόρων σε μη-μηδενικά σημεία.

Κεφάλαιο 4

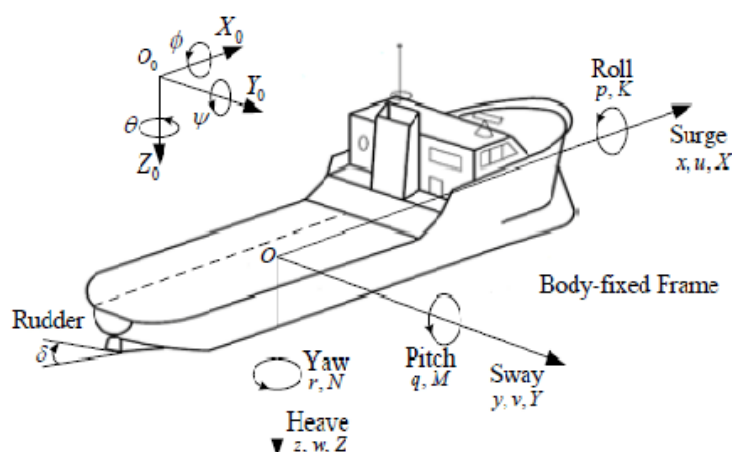
Σχεδίαση Μη-γραμμικών Ελεγκτών

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται σχεδιασμός τοπικών ελεγκτών για μη-γραμμικά συστήματα ώστε να επιτευχθεί η ρύθμιση των βοηθητικών μεταβλητών $\eta_i(t)$ και η βέλτιστη συμφωνία στις μεταβλητές εξόδου των υπό έλεγχο συστημάτων κατά το Θεώρημα 3.11. Συγκεκριμένα, λαμβάνεται το μη-γραμμικό, 3-DOF σύστημα *Fully Actuated Surface Vessel (FASV)* μοντέλο για επιφανειακά θαλάσσια σκάφη και προτείνεται ελεγκτικός νόμος βάσει της backstepping μεθόδου μη-γραμμικού σχεδιασμού.

Στην Ενότητα 4.1 παρουσιάζεται το fully actuated μοντέλο επιφανειακού θαλάσσιου σκάφους FASV, και ορίζεται το σύστημα βοηθητικών μεταβλητών προς ρύθμιση σύμφωνα με τον προτεινόμενο μετασχηματισμό. Λόγω της ύπαρξης τριών βαθμών ελευθερίας επιλέγουμε να οδηγήσουμε τα σκάφη σε συμφωνία θέσης (2-DOF) και προσανατολισμού (1-DOF). Τα τοπικά κριτήρια κόστους λαμβάνονται τετραγωνικά, ως απόσταση από δεδομένο σημείο-στόχο ανά σκάφος. Στην συνέχεια, γίνεται η ρύθμιση των μεταβλητών με χρήση backstepping ελεγκτών (Ενότητα 4.2) και αριθμητική προσομοίωση των πρακτόρων υπό το προτεινόμενο σχήμα (Ενότητα 4.3).

4.1 Fully Actuated Surface Vessel

Για την μοντελοποίηση κίνησης θαλάσσιων οχημάτων σε 6 βαθμούς ελευθερίας συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται δυο συστήματα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Το σύστημα $O_0X_0Y_0Z_0$ παραμένει σταθερό, δεμένο σε κάποιο σημείο αναφοράς O_0 και θεωρείται αδρανειακό για την κίνηση του σκάφους. Το σύστημα αυτό ονομάζεται North - East - Down (NED). Το κινούμενο σύστημα $OXYZ$ είναι δεμένο σε επιλεγμένο σημείο του σκάφους, συνήθως το κέντρο βάρους ή άλλο σημείο συμμετρίας. Οι άξονες XYZ ταυτίζονται με τους κύριους άξονες του οχήματος και επιλέγονται έτσι ώστε να κατευθύνονται ο X από την πρύμνη στην πλώρη, ο Y από αριστερά προς δεξιά και ο Z κανονικός στην επιφάνεια θαλάσσης, προς τα κάτω. Στο Σχήμα 4.1 επίσης αναπαριστώνται και οι σχετικές ταχύτητες



Σχήμα 4.1: Συμβατική ονομασία και συμβολισμός μεταβλητών κατάστασης για την περιγραφή κίνησης θαλάσσιου σκάφους.

και εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σκάφος, εκφρασμένες στο body fixed frame.

$\tau_1 = [X, Y, Z]^T$ εξωτερικές δυνάμεις.

$\tau_2 = [K, M, N]^T$ ροπή εξωτερικών δυνάμεων στο O .

$v_1 = [u, v, w]^T$ γραμμική ταχύτητα του συστήματος $OXYZ$ (ως προς το NED).

$v_2 = [p, q, r]^T$ γωνιακή ταχύτητα του συστήματος $OXYZ$ (ως προς το NED).

Με την παραπάνω παραμετροποίηση, οι 6 βαθμών ελευθερίας εξισώσεις κίνησης του στερεού συνήθως γράφονται

$$\eta_1 = J(\eta_2)v_1$$

$$M_{RB}\dot{v} + C_{RB}(v)v + D(v)v = \tau_{RB}.$$

Παραπάνω έχουμε λάβει $\eta_1 = [x, y, z]^T$, $\eta_2 = [\phi, \psi, \theta]^T$, $v = [v_1, v_2]^T$ και $\tau_{RB} = [\tau_1, \tau_2]^T$.

Η μελέτη των χαρακτηριστικών εξισώσεων κίνησης και των απλοποιήσεων τους είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα και χρήσιμη για την ερμηνεία των μη-γραμμικοτήτων του συστήματος αλλά είναι έξω από την σκοπιά της εργασίας. Αναφέρονται ιδιαίτερα τα θεμελιακά κείμενα των T. Fossen [59, 60]. Για τα επιφανειακά σκάφη θεωρούμε πως η παραμετροποίηση των heave, pitch, roll μπορεί να παραμεληθεί και λαμβάνουμε το μοντέλο κατά αναλογία με άλλες εργασίες ελέγχου fully actuated και underactuated επιφανειακών σκαφών [61, 62, 63, 64].

Ορισμός 4.11. Μοντέλο FASV

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \cos \theta - v \sin \theta & \dot{u} &= \frac{m_{22}}{m_{11}}vr - \frac{d_{11}}{m_{11}}u + \frac{1}{m_{11}}X \\ \dot{y} &= u \sin \theta + v \cos \theta & \dot{v} &= -\frac{m_{11}}{m_{22}}ur - \frac{d_{22}}{m_{22}}v + \frac{1}{m_{22}}Y \\ \dot{\theta} &= r & \dot{r} &= \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}}uv - \frac{d_{33}}{m_{33}}r + \frac{1}{m_{33}}N \end{aligned} \quad (4.1)$$

Στο παραπάνω μοντέλο οι παράμετροι m_{ii} , $d_{ii} > 0$, $i = 1, 2, 3$ και οι ελεγκτικές εισοδοί σχηματίζουν το γενικευμένο διάνυσμα δυνάμεων $\tau = [X, Y, N]^T$. Έξοδος του FASV μοντέλου είναι οι μεταβλητές κατάστασης $[x, y, \theta]$.

4.1.1 Σύστημα Βοηθητικών Μεταβλητών

Όπως προαναφέραμε, επιθυμούμε να οδηγήσουμε n FASV πράκτορες σε συμφωνία των μεταβλητών θέσης x , y και προσανατολισμού θ . Προς αυτόν τον σκοπό, για κάθε πράκτορα ορίζεται η μεταβλητή η_i κατά την Εξίσωση (3.1):

$$\eta_i(t) = x_i(t) - q \left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) s_i \left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor \right) - \left[1 - q \left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) \right] s_i \left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor - 1 \right). \quad (4.2)$$

Παραπάνω, η συνάρτηση $q(t)$ δίνεται από την Εξίσωση (3.2) και οι ακολουθίες $s_i(k)$ από την Εξίσωση (3.3). Στο υπόλοιπο της ενότητας παραλείπουμε το υπογεγραμμένο i των ποσοτήτων η_i , x_i και s_i αφού κάθε ελεγκτής δρα μόνο στον τοπικό πράκτορα. Για απλοποίηση του συμβολισμού, θα γράφουμε επιπλέον $q = q \left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right)$, $s = [s_x, s_y, s_\theta]^T = s_i \left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor \right)$ και $s^- = [s_x^-, s_y^-, s_\theta^-]^T = s_i \left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor - 1 \right)$. Έτσι, διατυπώνεται το πρόβλημα ρύθμισης της μεταβλητής $\eta = [\eta_x, \eta_y, \eta_\theta]^T$ κατά το Θεώρημα 3.11 για το σύστημα (4.3).

$$\begin{cases} \dot{\eta}_x = u \cos(\eta_\theta + qs_\theta + (1-q)s_\theta^-) - v \sin(\eta_\theta + qs_\theta + (1-q)s_\theta^-) - \dot{q}\Delta s_x \\ \dot{\eta}_y = u \sin(\eta_\theta + qs_\theta + (1-q)s_\theta^-) + v \cos(\eta_\theta + qs_\theta + (1-q)s_\theta^-) - \dot{q}\Delta s_y \\ \dot{\eta}_\theta = r - \dot{q}\Delta s_\theta \end{cases} \quad (4.3\alpha)$$

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{m_{22}}{m_{11}} vr - \frac{d_{11}}{m_{11}} u + \frac{1}{m_{11}} X \\ \dot{v} = -\frac{m_{11}}{m_{22}} ur - \frac{d_{22}}{m_{22}} v + \frac{1}{m_{22}} Y \\ \dot{r} = \frac{m_{11}-m_{22}}{m_{33}} uv - \frac{d_{33}}{m_{33}} r + \frac{1}{m_{33}} N \end{cases} \quad (4.3\beta)$$

Παραπάνω έχουμε χάριν συντομίας γράψει $\dot{q} = \dot{q} \left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right)$ και $\Delta s = [\Delta s_x, \Delta s_y, \Delta s_\theta]^T = s - s^-$. Επιπλέον θα γράφουμε¹

$$\begin{aligned} \cos_\theta &= \cos(\eta_\theta + qs_\theta + (1-q)s_\theta^-) \\ \sin_\theta &= \sin(\eta_\theta + qs_\theta + (1-q)s_\theta^-). \end{aligned}$$

Ισχύει πως $\frac{d}{dt} \cos_\theta = -\sin_\theta r$ και $\frac{d}{dt} \sin_\theta = \cos_\theta r$.

4.2 Σχεδίαση Ελεγκτή

Επιλέγουμε να σχεδιάσουμε ελεγκτή για το σύστημα (4.3) βασιζόμενοι στην τεχνική backstepping² αφού μπορούμε να το μετασχηματίσουμε σε εικονικό, ατομικό υποσύστημα, εμφωλιασμένο εντός μπλοκ ολοκληρωτή. Ο ολοκληρωτής αυτός γίνεται εμφανής αν θεωρήσουμε την εικονική είσοδο $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$ όπου $\tau_1 = \frac{m_{22}}{m_{11}} vr - \frac{d_{11}}{m_{11}} u + \frac{1}{m_{11}} X$, $\tau_2 =$

¹ Αποφεύγουμε τον συνήθη συμβολισμό $c_a = \cos(a)$ και $s_a = \sin(a)$ αφού με s_θ ήδη αναφερόμαστε στην τρίτη ακολουθία της ακολουθίας $s_i \left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor \right)$.

² Η τεχνική backstepping για τον έλεγχο μη-γραμμικών συστημάτων αναπτύχθηκε την δεκαετία του 1990 από τους P. Kokotovic, M. Arcak, M. Kristic, I. Kanellakopoulos et al. [65]. Μέχρι σήμερα οι διάφορες μορφές της βρίσκουν ευρεία εφαρμογή, ιδιαίτερα σε προβλήματα προσαρμοστικού και σθεναρού ελέγχου. Η αναδρομική μέθοδος χρησιμοποιεί την εμφωλιασμένη μορφή μη-γραμμικών συστημάτων για να πετύχει σταθεροποίηση κάποιου ατομικού υποσυστήματος και εν συνεχεία να διαδώσει την ευστάθεια διαμέσου όλο και μεγαλύτερων κλειστών βρόγχων. Λαμβάνει το όνομά της επειδή κάθε επανάληψη μοιάζει να εκτελεί "βήμα προς τα πίσω" διαμέσου κάποιου ολοκληρωτή.

$-\frac{m_{11}}{m_{22}}\omega r - \frac{d_{22}}{m_{22}}v + \frac{1}{m_{22}}Y$ και $\tau_3 = \frac{m_{11}-m_{22}}{m_{33}}\omega v - \frac{d_{33}}{m_{33}}r + \frac{1}{m_{33}}N$ που οδηγεί το υποσύστημα (4.3β') σε άμεσα οδηγούμενη μορφή.

Λαμβάνουμε πρώτα τον αντίστροφο μετασχηματισμό στροφής για το υποσύστημα (4.3α):

$$z = \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \\ z_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \eta \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_x = u + z_y r - \dot{\eta}(\cos\theta \Delta s_x + \sin\theta \Delta s_y) \\ \dot{z}_y = v - z_x r - \dot{\eta}(-\sin\theta \Delta s_x + \cos\theta \Delta s_y) \\ \dot{z}_\theta = r - \dot{\eta} \Delta s_\theta \end{cases}$$

Με $\xi = [u, v, r]^T$ το σύστημα (4.3) γράφεται στην μορφή του μπλοκ ολοκληρωτή που ακολουθεί.

$$\dot{z} = f(z, t) + G(z)\xi \quad (4.4\alpha')$$

$$\dot{\xi} = \tau \quad (4.4\beta')$$

όπου

$$f(z, t) = -\dot{\eta} \begin{bmatrix} \cos\theta \Delta s_x + \sin\theta \Delta s_y \\ -\sin\theta \Delta s_x + \cos\theta \Delta s_y \\ \Delta s_\theta \end{bmatrix}, \quad G(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_y \\ 0 & 1 & -z_x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λαμβάνοντας το διάνυσμα ξ ως εικονική είσοδο για το υποσύστημα της Εξίσωσης (4.4α'), είναι προφανές πως επιλογή της εισόδου

$$\xi = \varphi(z, t) = -G^{-1}(z)[f(z, t) + K_1 z], \quad K_1 > 0, \quad (4.5)$$

οδηγεί το υποσύστημα σε ασυμπτωτική ευστάθεια. Συγκεκριμένα, με χρήση της συνάρτησης $V_1 = \frac{1}{2}z^T z$ προκύπτει πως

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V_1}{\partial z} \dot{z} = -z^T K_1 z < 0, \quad \forall z \neq \mathbf{0}.$$

Για την επιλεγμένη εικονική είσοδο $\xi = \varphi(z, t)$, η $V_1(z)$ είναι radially unbounded και θετικά ορισμένη ενώ η παράγωγος \dot{V}_1 είναι αρνητικά ορισμένη, άρα το υποσύστημα είναι globally uniform asymptotically stable (GUAS). Επιστρέφουμε πλέον στο συνολικό σύστημα (4.4) και λαμβάνουμε την συνάρτηση $V_2 = V_1(z) + \frac{1}{2}[\xi - \varphi(z, t)]^T [\xi - \varphi(z, t)]$ οπότε ισχύει

$$\dot{V}_2 = -z^T K_1 z + \frac{\partial V_1}{\partial z} G(z) [\xi - \varphi(z, t)] + [\xi - \varphi(z, t)]^T \left[\tau - \frac{\partial \varphi}{\partial z} (f(z, t) + G(z)\xi) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right].$$

Επιλέγοντας εισόδους

$$\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial z} (f(z, t) + G(z)\xi) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} G(z) \right)^T - K_2 [\xi - \varphi(z, t)], \quad K_2 > 0 \quad (4.6)$$

η συνάρτηση V_2 γίνεται $\dot{V}_2 = -z^T K_1 z - [\xi - \varphi(z, t)]^T K_2 [\xi - \varphi(z, t)] < 0, \quad \forall (z, \xi) \neq (\mathbf{0}, \varphi(\mathbf{0}, t))$. Συνεπώς, με χρήση ελεγκτικού νόμου που δίνεται από τις Εξισώσεις (4.5) και (4.6), το σύστημα (4.4) καθίσταται globally uniform asymptotically stable και οδηγείται στα σημεία $(\mathbf{0}, \varphi(\mathbf{0}, t))$.

4.2.1 Υπολογισμός Εικονικών Εισόδων

Οι Εξισώσεις (4.5) και (4.6) δίνουν την επιλεγμένη εικονική είσοδο τ για οποιοσδήποτε θετικά ορισμένους πίνακες K_1, K_2 . Διαλέγοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας τους διαγώνιους πίνακες $K_1 = \text{diag}([k_x, k_y, k_\theta])$ και $K_2 = \text{diag}([k_u, k_v, k_r])$, μπορούν οι εικονικοί νόμοι να υπολογιστούν αναλυτικά.

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{z}, t) &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_y \\ 0 & 1 & z_x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{q}(\cos\theta \Delta s_x + \sin\theta \Delta s_y) + k_x z_x \\ -\dot{q}(-\sin\theta \Delta s_x + \cos\theta \Delta s_y) + k_y z_y \\ -\dot{q}\Delta s_\theta + k_\theta z_\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{q}(\cos\theta \Delta s_x + \sin\theta \Delta s_y) - k_x z_x - z_y(\dot{q}\Delta s_\theta - k_\theta z_\theta) \\ \dot{q}(-\sin\theta \Delta s_x + \cos\theta \Delta s_y) - k_y z_y + z_x(\dot{q}\Delta s_\theta - k_\theta z_\theta) \\ \dot{q}\Delta s_\theta - k_\theta z_\theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ταυτόχρονα υπολογίζονται οι μερικές παράγωγοι που ακολουθούν.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}, t) = \begin{bmatrix} -k_x & -(\dot{q}\Delta s_\theta - k_\theta z_\theta) & k_\theta z_y + \dot{q}(-\sin\theta \Delta s_x + \cos\theta \Delta s_y) \\ \dot{q}\Delta s_\theta - k_\theta z_\theta & -k_y & -k_\theta z_x - \dot{q}(\cos\theta \Delta s_x + \sin\theta \Delta s_y) \\ 0 & 0 & -k_\theta \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \ddot{q} \begin{bmatrix} \cos\theta \Delta s_x + \sin\theta \Delta s_y - z_y \Delta s_\theta \\ -\sin\theta \Delta s_x + \cos\theta \Delta s_y + z_x \Delta s_\theta \\ \Delta s_\theta \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

4.2.2 Υπολογισμός Πραγματικών Εισόδων

Οι πραγματικές εισόδους X, Y, N για τον έλεγχο του FASV, εξάγονται από τις επιλεγμένες εικονικές εισόδους $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$ και την Εξίσωση (4.6).

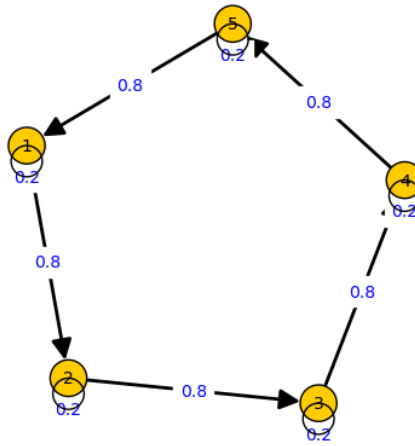
$$X = d_{11}u - m_{22}vr + m_{11}\tau_1 \quad (4.10\alpha)$$

$$Y = d_{22}v + m_{11}ur + m_{22}\tau_2 \quad (4.10\beta)$$

$$N = d_{33}r - (m_{11} - m_{22})uv + m_{33}\tau_3. \quad (4.10\gamma)$$

Η παραπάνω σχεδίαση συμπυκνώνεται στο εξής θεώρημα για την συμφωνία εξόδων των FASV συστημάτων.

Θεώρημα 4.15. Έστω n μη γραμμικοί πράκτορες FASV σύμφωνα με την Εξίσωση (4.1), συνδεδεμένοι με διάταξη επικοινωνίας που ικανοποιεί τις Υποθέσεις 1-4. Έστω επιπλέον πως κάθε πράκτορας είναι εφοδιασμένος με τοπική συνάρτηση κόστους σύμφωνα με τον ορισμό της κλάσης \mathcal{F}_{local} . Με εφαρμογή του μετασχηματισμού διανύσματος εξόδου (4.2) και τοπικού νόμου ελέγχου που δίνεται από τις Εξισώσεις (4.10) και (4.5), (4.6) το συσσωρευμένο διάνυσμα εξόδου $\mathbf{x}(t)$ των πρακτόρων οδηγείται σε προσεγγιστική βέλτιστη συμφωνία $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| \leq c\epsilon$, $c, \epsilon > 0$, ϵ αυθαίρετα επιλεγμένο από τον σχεδιαστή και c σταθερά ανεξάρτητη της επιλογής αυτής.



Σχήμα 4.2: Δίκτυο επικοινωνίας μεταξύ των πρακτόρων.

4.3 Προσομοίωση Συστημάτων

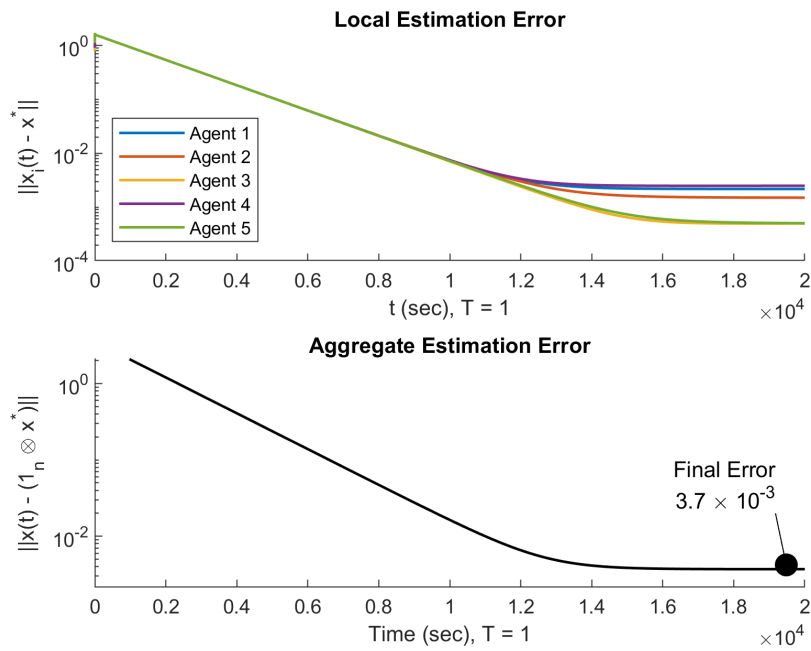
Για την επαλήθευση της σχεδίασης του Θεωρήματος 4.15, δίνουμε αριθμητική προσομοίωση των επιλεγμένων ελεγκτών. Ως δίκτυο επικοινωνίας λαμβάνεται δαχτυλίδι πέντε πρακτόρων κατά το Σχήμα 4.2, στο οποίο κάθε πράκτορας εφοδιάζεται με τοπικό κριτήριο $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i(x_i) = \|x_i - x_i^*\|^2$. Διαλέγουμε τα σημεία $x_1^* = [1, 0, \pi/2]^T$, $x_2^* = [-1, 0, \pi/2]^T$, $x_3^* = [0.5, 0.5\sqrt{3}, \pi/2]^T$, $x_4^* = [-0.5, 0.5\sqrt{3}, \pi/2]^T$ και $x_5^* = [0.5, -0.5\sqrt{3}, \pi/2]^T$. Αντίστοιχα, σε κάθε πράκτορα δίνεται αρχική θέση $x_i(0) = x_i^*$ και μηδενική αρχική ταχύτητα.

Για τις παραμέτρους της Εξίσωσης (3.3), θεωρούμε άνω φράγμα καθυστερήσεων $d = 3$ και επιλέγουμε τις σταθερές $\sigma = 0.1$ και βήμα $a = 10^{-3}$. Με αμελητέο φράγμα $\|\eta_i\| < \varepsilon$ αναμένουμε απόκλιση $\mathcal{O}(\sqrt{a}) \sim 10^{-2}$ από το βέλτιστο. Επαληθεύουμε πως το επιλεγμένο βήμα ικανοποιεί την συνθήκη ευστάθειας της τοπολογίας κόστους $a < \frac{\sigma}{\lambda_{\max}} = 0.1$.

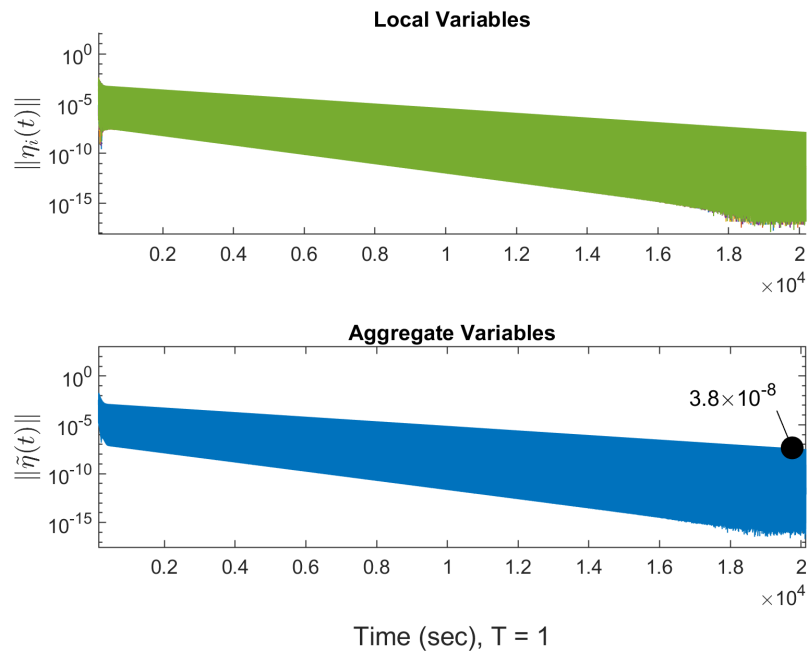
Όσον αφορά τις παραμέτρους των FASV μοντέλων, θεωρούμε όμοιους πράκτορες, σύμφωνα με το [66, Πίνακα 1]. Συγκεκριμένα λαμβάνουμε $m_{11} = 25.6$, $m_{22} = 33.8$, $m_{33} = 1.76$ και $d_{11} = 2$, $d_{22} = 10$, $d_{33} = 1$. Για την ρύθμιση κερδών στους τοπικούς ελεγκτές επιλέγουμε $K_1 = \text{diag}([1, 1, 2]^T)$ και $K_2 = \text{diag}([1, 1, 2]^T)$.

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης δίνονται στα Σχήματα 4.3 έως 4.6. Στο Σχήμα 4.3 δίνεται η απόκλιση 1. των τοπικών εκτιμήσεων $x_i(t)$ από το σημείο x^* και 2. του συσσωρευμένου διανύσματος κατάστασης από την λύση του καταναμημένου προβλήματος $\mathbf{x}^* = \mathbf{1}_n \otimes x^*$. Η απόκλιση στην περιοχή σύγκλισης είναι της τάξης 10^{-3} όπως αναμένουμε από την επιλογή βήματος. Συμπεραίνουμε πως το σφάλμα της τάξης $\mathcal{O}(\sqrt{a})$ κυριαρχεί. Μάλιστα, στο Σχήμα 4.4 φαίνεται πως κατά την μόνιμη κατάσταση της προσομοίωσης οι μεταβλητές ρύθμισης $\|\eta_i\| \leq 3.8 \times 10^{-8}$, οπότε ο λόγος $\frac{\varepsilon}{a} \sim 10^{-5}$ είναι πράγματι αμελητέος. Αφού ο όρος $\mathcal{O}(\sqrt{a})$ επικρατεί στον προσδιορισμό του σφάλματος δεν αναμένεται βελτίωση της απόκλισης με την πάροδο του χρόνου προσομοίωσης.

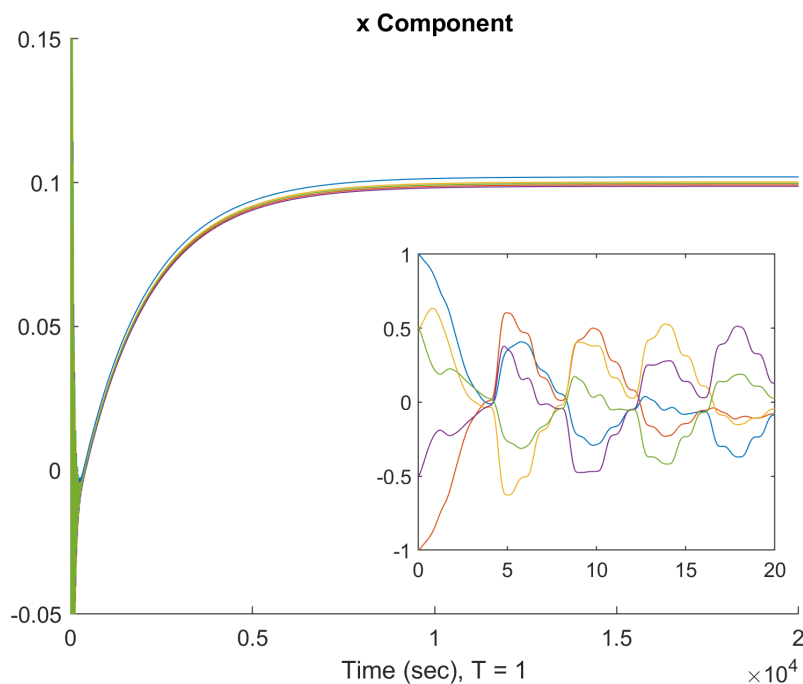
Στο Σχήμα 4.5 δίνονται οι συνιστώσες των μεταβλητών εξόδου των πρακτόρων ενώ στο Σχήμα 4.6 αναπαριστώνται οι ελεγκτικές είσοδοι. Αξιοσημείωτη είναι η ταχεία επίτευξη συμφωνίας των πρακτόρων κοντά στο 0 ενώ εν συνέχεια ο στόχος x^* προσεγγίζεται με μικρές ελεγκτικές μεταβολές σε μεγαλύτερη χρονική κλίμακα. Σημειώνεται πως η ταχεία



Σχήμα 4.3: Σύγκλιση τοπικών και συσσωρευμένης μεταβλητής κατάστασης πλησίον του βέλτιστου σημείου συμφωνίας. Το τελικό σφάλμα απόκλισης της συσσωρευμένης κατάστασης είναι 3.7×10^{-3} .



Σχήμα 4.4: Ρύθμιση βοηθητικών μεταβλητών $\eta_i(t)$ για τους πράκτορες. Η μεταβλητή $\|\tilde{\eta}(t)\|$ οδηγείται σε τάξη 10^{-8} , σχηματίζοντας λόγο $\frac{\epsilon}{a} \sim 10^{-5}$.



Σχήμα 4.5: Μεταβολή συνιστωσών εκτίμησης των πρακτόρων FASV (συνεχίζεται).

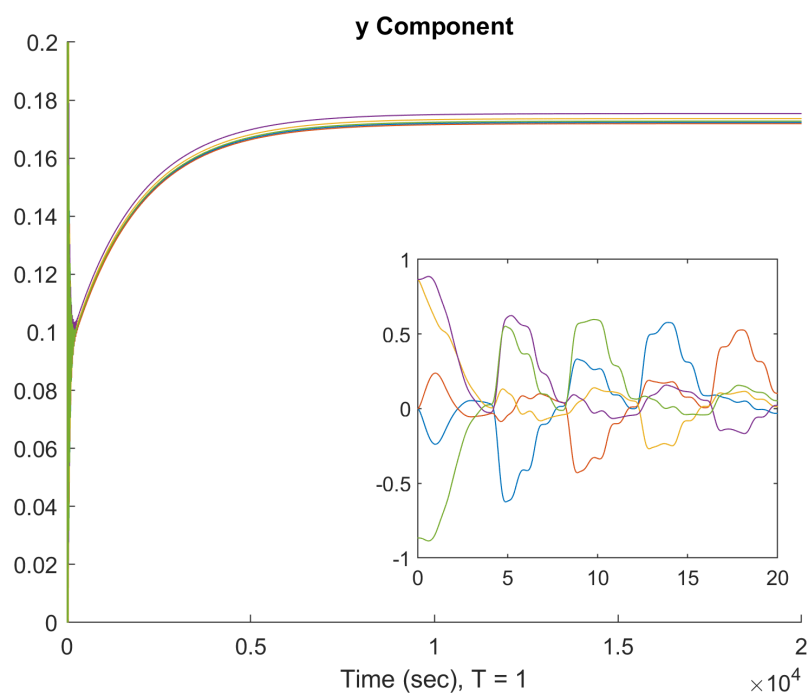
συμφωνία στο $\mathbf{0}$ είναι αποτέλεσμα της ρύθμισης των βοηθητικών μεταβλητών με τις ακολουθίες $s_i(k)$, $k \leq 0, \forall i \in \mathcal{V}$ αρχικοποιημένες στο μηδέν. Η επίδραση των όρων συμφωνίας και βαθμίδας της Εξίσωσης (3.3) φαίνεται να είναι πιο σταδιακή και να επιτυγχάνεται με μικρότερη ρύθμιση των εισόδων στο Σχήμα 4.6. Επισημαίνεται επιπλέον η αναμενόμενη ταλαντωτική συμπεριφορά στις εισόδους που είναι αποτέλεσμα της ύπαρξης καθυστερήσεων στην ανταλλαγή εκτιμήσεων. Αντίστοιχη συμπεριφορά παρατηρήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, Σχήμα 3.6, μόνο για καθυστερήσεις $d > 0$.

Τέλος, στα Σχήματα 4.7 και 4.8 αξιολογείται το σφάλμα μόνιμης κατάστασης ως συνάρτηση της επιλογής βήματος a . Συγκεκριμένα, στο πρώτο σχήμα φαίνεται πως η ρύθμιση των βοηθητικών μεταβλητών στο 0 επιτρέπει την αυθαίρετη ρύθμιση του μεγέθους σφάλματος τελικής κατάστασης διαμέσου της επιλογής κατάλληλου βήματος. Αντίστοιχα, εξετάζοντας το άνω φράγμα που δόθηκε για την ευστάθεια του συστήματος $a < \frac{\sigma}{\lambda_{\max}(\mathcal{Q})} = 0.1$ φαίνεται μέσω προσομοίωσης πως αυτό είναι αρκετά αυστηρό.

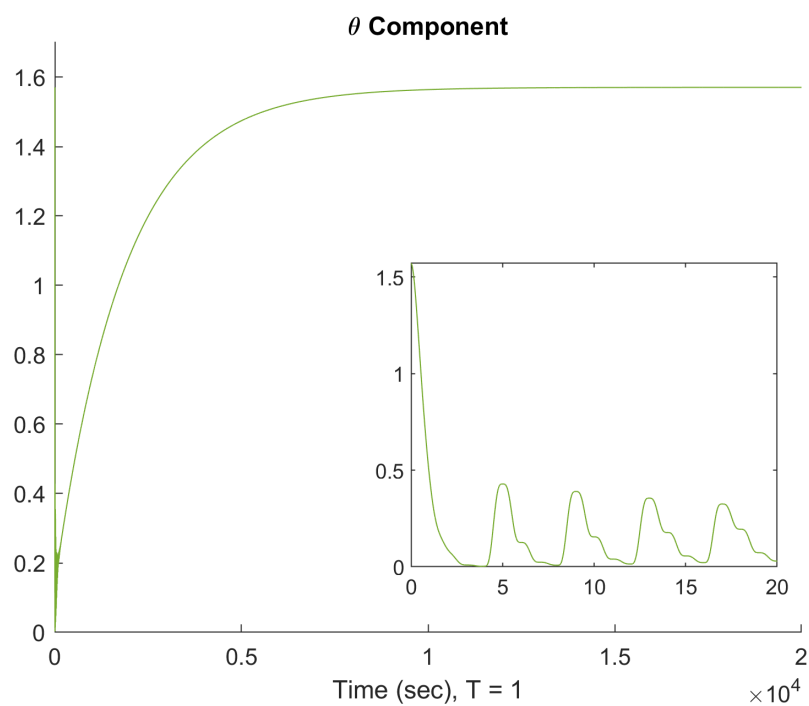
4.4 Συμπέρασμα

Στο Κεφάλαιο παρουσιάσαμε εφαρμογή του Θεωρήματος 3.11 για την βέλτιστη συμφωνία επιφανειακών θαλάσσιων σκαφών διαμέσου σχεδιασμού ρυθμιστών των βοηθητικών μεταβλητών $\eta_i(t)$. Συγκεκριμένα εξετάσαμε την συμπεριφορά των FASV συστημάτων υπό το τροποποιημένο σχήμα ελέγχου για να υποδείξουμε τα πλεονεκτήματα αλλά και τις προκλήσεις σχεδίασης με βάση τον μετασχηματισμό (3.1)-(3.3).

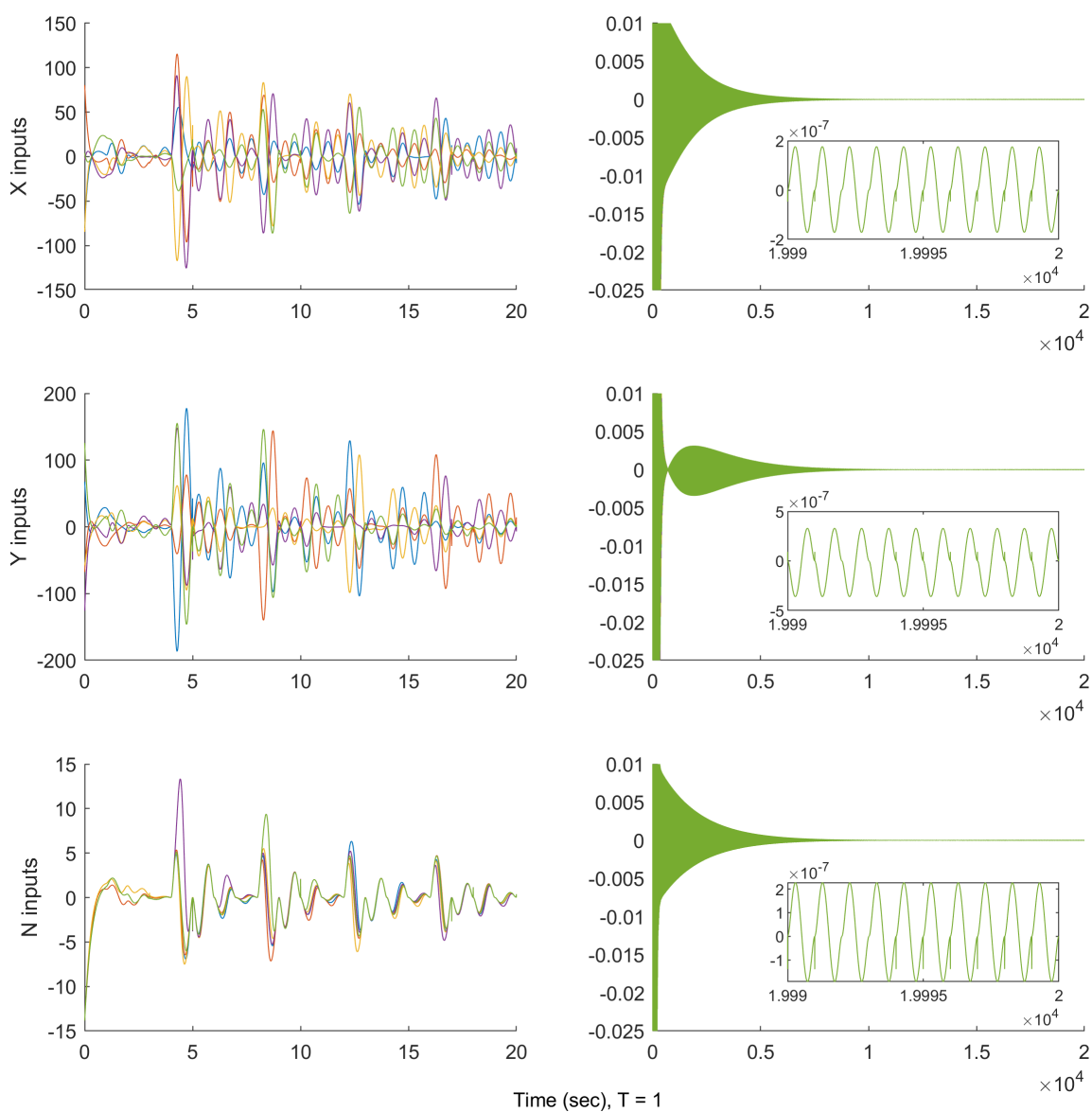
Ο προτεινόμενος μετασχηματισμός επέτρεψε την αναδιατύπωση του προβλήματος βέλτιστης συμφωνίας ως ένα απλούστερο πρόβλημα ρύθμισης των μη-γραμμικών μεταβλητών (4.3). Ως εκ τούτου, με χρήση γνωστών τεχνικών μη-γραμμικής σχεδίασης, κατασκευάσα-



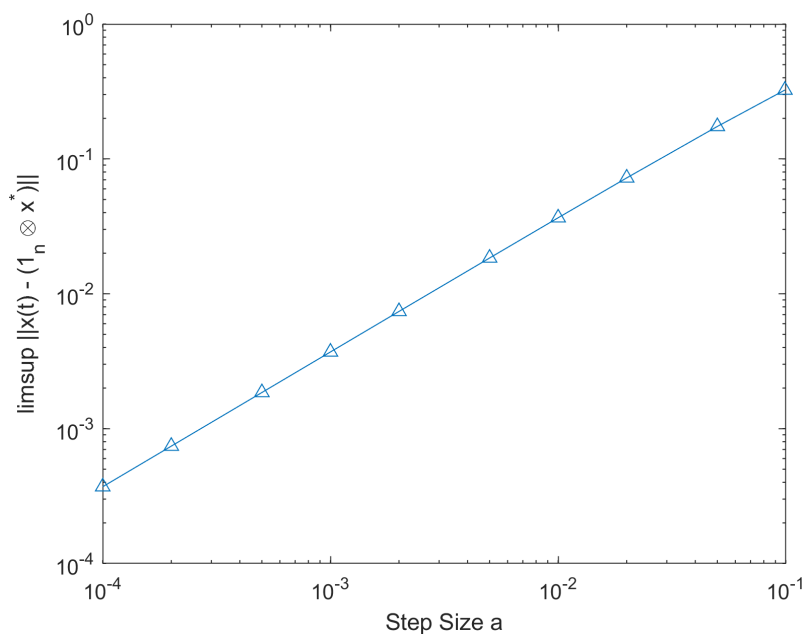
Σχήμα 4.5: Μεταβολή συνιστωσών εκτίμησης των πρακτόρων FASV (συνεχίζεται).



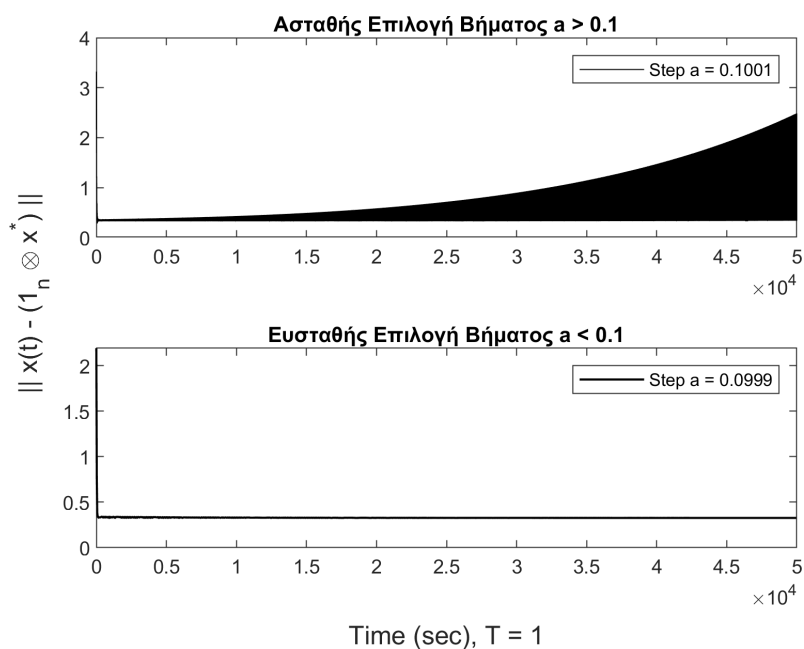
Σχήμα 4.5: Μεταβολή συνιστωσών εκτίμησης των πρακτόρων FASV.



Σχήμα 4.6: Νόμοι ελέγχου των πρακτόρων.



Σχήμα 4.7: Σφάλμα τελικής κατάστασης εκτιμήσεων ως συνάρτηση βήματος. Από την μονοτονική συμπεριφορά των δειγμάτων φαίνεται πως η επίδραση του όρου $\frac{\epsilon}{a}$ είναι μικρή για μεγάλο εύρος βημάτων a .



Σχήμα 4.8: Πειραματική αξιολόγηση του κριτηρίου ευστάθειας $a < \frac{\sigma}{\lambda_{\max}(\mathcal{Q})}$. Φαίνεται πως το άνω φράγμα επιλογής βήματος για το κριτήριο είναι αρκετά αυστηρό αφού η επιλογή $a = 0.1001$ οδηγεί τις εκτιμήσεις των πρακτόρων στην αστάθεια ενώ για βήμα $a = 0.0999$ παραμένουν ευσταθείς.

με ένα εύκολα υλοποιήσιμο σχήμα ελέγχου που επιτυγχάνει τον ασυμπτωτικό μηδενισμό των προς ρύθμιση μεταβλητών. Συνεπώς, οι μεταβλητές εξόδου x_i οδηγούνται σε περιοχή $O(\sqrt{a})$ γύρω από το σημείο βέλτιστης συμφωνίας του προβλήματος και μπορεί να επιτευχθεί αυθαίρετα ικανή προσέγγιση του στόχου για κατάλληλα μικρό βήμα και ικανό αριθμό επαναλήψεων. Κατά την σχεδίαση εκμεταλλευτήκαμε τους 3 βαθμούς ελευθερίας του μοντέλου για να δείξουμε την επίτευξη συμφωνίας σε όλες τις μεταβλητές NED του σκάφους.

Επιπλέον, επαληθεύσαμε αριθμητικά τον προτεινόμενο ελεγκτή με προσομοίωση πέντε πρακτόρων. Παρουσιάστηκε προσομοίωση του αλγορίθμου στην οποία διαπιστώθηκε πως καθοριστικός παράγοντας στην απόκλιση των εκτιμήσεων από το σημείο βέλτιστης συμφωνίας είναι η επιλογή βήματος και άρα μπορεί να επιτευχθεί αυθαίρετα ικανή προσέγγιση του στόχου με κατάλληλη επιλογή της σταθεράς a . Αυτή η συμπεριφορά επιτεύχθηκε ανεξαρτήτως ρύθμισης παραμέτρων του ελεγκτή. Δείξαμε τέλος, με αριθμητική μέθοδο πως το προτεινόμενο άνω φράγμα $\frac{\sigma}{\lambda_{max}}$ για την ευστάθεια την μεθόδου είναι αρκετά αυστηρό.

Επίλογος

5.1 Σύνοψη

Τα συστήματα κατανεμημένης βελτιστοποίησης αποσκοπούν στην αποδοτική κατανομή πόρων μεταξύ ίσων πρακτόρων για την επίτευξη συναίνεσης των συμμετεχόντων γύρω από περιοχή λειτουργίας που βελτιστοποιεί συνολικό κριτήριο κόστους, αποτελούμενο από τις επί μέρους εκφράσεις κόστους των πρακτόρων. Οι πιο ικανοί και χρήσιμοι αλγόριθμοι επίλυσης τέτοιων προβλημάτων εστιάζουν τουλάχιστον σε έναν από τους παρακάτω πυλώνες κατανεμημένου υπολογισμού.

1. *Είναι εύκολα επεκτάσιμοι και αποδοτικοί σε μεγάλη κλίμακα ενσωμάτωσης.* Χαρακτηριστικό των κατανεμημένων συστημάτων είναι η "απλότητα" των πρακτόρων που τα συνθέτουν και η ευκολία επαύξησης του κατανεμημένου συστήματος δίχως όρια. Η πολυπλοκότητα ενός κατανεμημένου συστήματος προκύπτει από τις αλληλεπιδράσεις των πρακτόρων και άρα κάποια αποδοτική μέθοδος επίλυσης πρέπει να κλιμακώνεται ικανοποιητικά με το πλήθος και τις διαύλους επικοινωνίας των κόμβων.
2. *Είναι ανεκτικοί στην απώλεια κόμβων ή ακμών επικοινωνίας.* Στον αντίποδα της αύξησης κλίμακας ενσωμάτωσης, η ευπλαστότητα κατανεμημένων συστημάτων καθώς και η πληθώρα σφαλμάτων συγχρονισμού, καθυστέρησης και απώλειας πακέτων απαιτεί οι μέθοδοι επίλυσης να είναι ανθεκτικές ως προς τις ατέλειες επικοινωνίας ή ακόμα και την αποσύνδεση κόμβων από το δίκτυο. Εξασφαλίζεται έτσι η μέγιστη δυνατότητα λειτουργίας των μεθόδων χωρίς την ανάγκη παρακολούθησης ηγετικού κόμβου ή επικοινωνίας διαμέσου φορτωμένων διαύλων.
3. *Διατηρούν την ιδιωτικότητα και ασφάλεια εκτιμήσεων των πρακτόρων.* Με αυτόν τον τρόπο στο δίκτυο διαδίδεται μόνο η απολύτως απαραίτητη πληροφορία μεταξύ γειτόνων και ελαχιστοποιούνται οι πιθανότητες διαρροής των τοπικών κριτηρίων προς βελτιστοποίηση.

Στην εργασία αυτή μελετήσαμε τον διακριτό αλγόριθμο κατάβασης βαθμίδας DGD, έναν από τους καλύτερα τεκμηριωμένους και ευρέως χρησιμοποιούμενους αλγόριθμους βελτιστοποίησης. Μοντελοποιήσαμε προβλήματα κατευθυνόμενων διαύλων με καθυστερήσεις και σταθερό βήμα εκμάθησης, επιτυγχάνοντας έτσι προσέγγιση του στόχου με αυθαίρετα επιλεγμένη ακρίβεια αλλά και ταχύτερο ρυθμό συγκριτικά με αλγόριθμους μειούμενου βήματος.

Ο σκοπός της μελέτης ήταν διπλός. Πρώτα, ως προς την συμπεριφορά της ίδιας της μεθόδου, αποδείξαμε πως η σύγκλιση εκτιμήσεων είναι ανθεκτική σε άγνωστες, φραγμένες διαταραχές στον Κανόνα Ενημέρωσης (3.5) και οδηγείται εκθετικά εντός περιοχής του βέλτιστου σημείου συμφωνίας. Επιπλέον, προσδιορίσαμε το μέγεθος της περιοχής αυτής και την χαρακτηριστική της εξάρτηση 1. από την επιλογή βήματος και 2. από το μέγεθος των διαταραχών.

Στην συνέχεια, χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα της διακριτής ανάλυσης για να κατασκευάσουμε μεθοδολογία οδήγησης μη-γραμμικών συστημάτων ώστε, κατά συγχρονισμένους χρόνους δειγματοληψίας, να μεταβάλουν την κατάστασή τους σύμφωνα με τον διακριτό νόμο. Έτσι, αναδιατυπώνεται ο ελεγκτικός στόχος βέλτιστης συμφωνίας: αντί να επιλύεται το δυσκολότερο πρόβλημα, αρκεί η ρύθμιση τοπικών μη-γραμμικών μεταβλητών των πρακτόρων σε πρακτική ευστάθεια γύρω από το μηδέν. Επιτυγχάνοντας την ρύθμιση των βοηθητικών μεταβλητών στο $\mathbf{0}$ δείξαμε πως καθοριστικός παράγοντας για το μέγεθος της περιοχής σύγκλισης γίνεται το επιλεγμένο βήμα εκμάθησης α και άρα επιτυγχάνεται αυθαίρετα ικανή προσέγγιση του βελτίστου. Θεωρούμε πως αυτή η πρωτότυπη μέθοδος πλαισίωσης ενός προβλήματος βελτιστοποίησης υπό το πρίσμα της σταθεροποίησης είναι το σημαντικότερο αποτέλεσμα της εργασίας μας.

Επαληθεύσαμε τέλος τα ευρήματά μας αριθμητικά, εκτελώντας προσομοιώσεις τόσο για την σύγκλιση του διακριτού Κανόνα Ενημέρωσης (3.5) όσο και στο μη γραμμικό FASV μοντέλο σκαφών.

5.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στα πλαίσια αυτής της εργασίας έχει ήδη δείξει εξαιρετική ισχύ διαμέσου της βελτιστοποίησης μη-γραμμικών συστήματος με "κλασσικές" μεθόδους ρύθμισης και έτσι αποτελεί έναυσμα για περαιτέρω μελέτη ολοκληρωμένων μεθόδων οδήγησης μη-γραμμικών πρακτόρων βάσει διακριτών αλγορίθμων. Παραθέτουμε παρακάτω μερικά από τα πιο καίρια ερωτήματα που γεννώνται από την εργασία.

Ως προς τον αλγόριθμο προς ενσωμάτωση

Μελέτη χαρακτηριστικών σθεναρότητας άλλων αλγορίθμων διακριτής βελτιστοποίησης στις διαταραχές και της ενσωμάτωσής τους σε μη-γραμμικά υποσυστήματα. Ενδιαφέρον θα έχει η μελέτη άλλων αλγορίθμων με σταθερά βήματα προσαρμογής όπως ο Distributed Nesterov gradient with Consensus (DN-C) [40] και ο EXTRA [41]. Επιπλέον, πιθανόν χρήσιμη θα είναι η ανάπτυξη μεθόδου για την χρήση batch-update αλγορίθμων εκτιμήσεων [40] με χρήση ιδιωτικού και δημοσίου ρολογιού. Εκτός από την εξερεύνηση περισσότερων αλγορίθμων, αξίζει να εξεταστεί και ποιες μέθοδοι επιτάχυνσης αλγορίθμων (Nesterov acceleration, proximal-gradient κλπ) μπορούν να ενσωματωθούν στις διακριτές μεθόδους και εάν ή πώς επηρεάζουν την συμπεριφορά του τροποποιημένου, συνεχούς χρόνου συστήματος.

Ως προς τις ελάχιστες υποθέσεις επίτευξης βελτιστοποίησης

Στην βιβλιογραφία βελτιστοποίησης κεντρικό ρόλο διαδραματίζουν οι υποθέσεις λειτουργίας ενός αλγορίθμου και πόσο αυτές μπορούν να χαλαρωθούν. Υπό αυτό το πρίσμα, το πιο

ενδιαφέρον ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής: αν ή πώς διαφέρουν οι αναγκαίες υποθέσεις κάποιου διακριτού αλγορίθμου από τις απαραίτητες υποθέσεις για την χρήση του αλγορίθμου διαμέσου της μεθόδου που παρουσιάστηκε. Αλλιώς, διερωτόμαστε ποιες επιπλέον υποθέσεις εισάγει η μέθοδος ενσωμάτωσης του αλγορίθμου καθεαυτή και πως επηρεάζονται οι πιθανές εφαρμογές. Άλλα ενδιαφέροντα ερωτήματα σχετικά με την χαλάρωση υποθέσεων αφορούν την τοπολογία επικοινωνίας και την μορφή των κριτηρίων κόστους. Συγκεκριμένα, αξίζει να διερευνηθεί 1. ποια επιπλέον σφάλματα επικοινωνίας μπορούν να υποστηριχθούν από τον αλγόριθμο DGD και πως επιδρούν στην μεταβολή καταστάσεων και 2. πως μπορεί ο αλγόριθμος να επεκταθεί στην βελτιστοποίηση μη-κυρτών ή και μη-διαφορισίμων συναρτήσεων.

Ένα ιδιαίτερο σημείο που μας ελκύει στην συγκεκριμένη περιοχή αφορά την ασφάλεια του συστήματος και την ορθότητα των εκτιμήσεων που διατρέχουν το δίκτυο. Αξίζει να εξεταστεί πόσο ανθεκτική είναι αυτή η κατανεμημένη μέθοδος σε κακοπροαίρετους πράκτορες και τι κενά ασφαλείας δημιουργούνται από την χρήση διακριτού νόμου ενημέρωσης για την οδήγηση πρακτόρων συνεχούς χρόνου.

Ως προς την υλοποίηση του ελεγκτή

Τέλος, στρεφόμενοι σε ερωτήματα υλοποίησης των μεθόδων που περιγράφονται, η εργασία παρουσίασε μόνο μια μαθηματική αφαίρεση των υπολογιστικών απαιτήσεων μνήμης και επικοινωνίας για τους πράκτορες και το δίκτυο. Θεωρούμε πως αξίζει να εξεταστεί η αρχιτεκτονική σχεδίαση των online ελεγκτών, ιδιαίτερα όσον αφορά τεχνικές επιτάχυνσης των θεμελιωδών λειτουργιών υπολογισμού βαθμίδας και γραφής / ανάγνωσης της μνήμης εκτιμήσεων των γειτόνων.

Βιβλιογραφία

- [1] K. J. Astrom και R. M. Murray. *Feedback systems: An introduction for scientists and Engineers*. Princeton University Press, 2021.
- [2] D.D. Šiljak και A.I. Zečević. *Control of large-scale systems: Beyond decentralized feedback*. *Annual Reviews in Control*, 29(2):169–179, 2005.
- [3] Jonh N. Tsitsiklis. *Problems in Decentralized Decision Making and Computation*. Διδακτορική Διατριβή, Massachusetts Institute of Technology, 1985.
- [4] A. Nedic και J. Liu. *Distributed Optimization for Control*. *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems*, 1:77–103, 2018.
- [5] Q. Yang, J. A. Barria και T. C. Green. *Communication Infrastructures for Distributed Control of Power Distribution Networks*. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 7(2):316–327, 2011.
- [6] M. Ikeda, D. Siljak και D. White. *An inclusion principle for dynamic systems*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(3):244–249, 1984.
- [7] D. K. Molzahn, F. Dörfler, H. Sandberg, S. H. Low, S. Chakrabarti, R. Baldick και J. Lavaei. *A Survey of Distributed Optimization and Control Algorithms for Electric Power Systems*. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 8(6):2941–2962, 2017.
- [8] Yang Lu και Minghui Zhu. *Privacy preserving distributed optimization using homomorphic encryption*. *Automatica*, 96:314–325, 2018.
- [9] S. Boyd και L. Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [10] Tao Yang, Xinlei Yi, Junfeng Wu, Ye Yuan, Di Wu, Ziyang Meng, Yiguang Hong, Hong Wang, Zongli Lin και Karl H. Johansson. *A survey of distributed optimization*. *Annual Reviews in Control*, 47:278–305, 2019.
- [11] Z. Zhang και M. Chow. *Convergence Analysis of the Incremental Cost Consensus Algorithm Under Different Communication Network Topologies in a Smart Grid*. *IEEE Transactions on Power Systems*, 27(4):1761–1768, 2012.
- [12] S. Yang, S. Tan και J. Xu. *Consensus Based Approach for Economic Dispatch Problem in a Smart Grid*. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(4):4416–4426, 2013.

- [13] G. Chen, F. L. Lewis, E. Feng και Y. Song. *Distributed Optimal Active Power Control of Multiple Generation Systems*. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(11):7079–7090, 2015.
- [14] Michael Rabbat και Robert Nowak. *Distributed Optimization in Sensor Networks*. IPSN '04, σελίδα 20–27, New York, NY, USA, 2004. Association for Computing Machinery.
- [15] Angelia Nedić, Alex Olshevsky και Wei Shi. *Achieving Geometric Convergence for Distributed Optimization Over Time-Varying Graphs*. *SIAM Journal on Optimization*, 27(4):2597–2633, 2017.
- [16] L. Schenato, B. Sinopoli, M. Franceschetti, K. Poolla και S. S. Sastry. *Foundations of Control and Estimation Over Lossy Networks*. *Proceedings of the IEEE*, 95(1):163–187, 2007.
- [17] Angelia Nedić και Asuman Ozdaglar. *Convergence Rate for Consensus with Delays*. *J. of Global Optimization*, 47(3):437–456, 2010.
- [18] Haris E. Psillakis και Qingling Wang. *Distributed Adaptive Consensus of Nonlinear Heterogeneous Agents With Delayed and Sampled Neighbor Measurements*. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 52(4):2340–2350, 2022.
- [19] Haris E. Psillakis. *Adaptive NN Cooperative Control of Unknown Nonlinear Multiagent Systems With Communication Delays*. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 51(9):5311–5321, 2021.
- [20] Athanasios K. Gkesoulis, Haris E. Psillakis και Qingling Wang. *PdI Regulation for Consensus: Application to Unknown Pure-Feedback Agents With State and Communication Delays*. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 8(4):1964–1974, 2021.
- [21] Peng Lin, Wei Ren και Yongduan Song. *Distributed Multi-Agent Optimization Subject to Nonidentical Constraints and Communication Delays*. *Automatica*, 65:120–131, 2016.
- [22] Athanasios K. Gkesoulis, Haris E. Psillakis και Athanasios Rafail Lagos. *Optimal Consensus via OCPI Regulation for Unknown Pure-Feedback Agents With Disturbances and State Delays*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(8):4338–4345, 2022.
- [23] Dimitri P. Bertsekas. *Distributed asynchronous computation of fixed points*. *Mathematical Programming*, 27(1):107–120, 1983.
- [24] J. Tsitsiklis, D. Bertsekas και M. Athans. *Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(9):803–812, 1986.
- [25] K. J. Arrow και L. Hurwicz. *Decentralization and Computation in Resource Allocation*. University of North Carolina Press, 1960.

- [26] D. Chazan και W. Miranker. *Chaotic relaxation*. *Linear Algebra and its Applications*, 2(2):199–222, 1969.
- [27] A. Nedic και D. Bertsekas. *Incremental Subgradient Methods for Nondifferentiable Optimization*. *Siam Journal on Optimization - SIAMJO*, 12, 1999.
- [28] A. Nedić και D. Bertsekas. *Convergence Rate of Incremental Subgradient Algorithms*, σελίδες 223–264. Springer US, Boston, MA, 2001.
- [29] A. Nedić, D. P. Bertsekas και V. S. Borkar. *Distributed asynchronous incremental subgradient methods*. *Studies in Computational Mathematics*, 8(°):381–407, 2001.
- [30] S. S. Ram, A. Nedić και V. V. Veeravalli. *Incremental Stochastic Subgradient Algorithms for Convex Optimization*. *SIAM Journal on Optimization*, 20(2):691–717, 2009.
- [31] N. Z. Shor. *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*. Springer Series in Computational Mathematics 3. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1η έκδοση, 1985.
- [32] A. Nedic και A. Ozdaglar. *Distributed Subgradient Methods for Multi-Agent Optimization*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(1):48–61, 2009.
- [33] A. Nedic. *Asynchronous Broadcast-Based Convex Optimization Over a Network*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(6):1337–1351, 2011.
- [34] S. Ram, A. Nedic και V. Veeravalli. *Distributed Stochastic Subgradient Projection Algorithms for Convex Optimization*. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 147:516–545, 2010.
- [35] Kun Yuan, Qing Ling και Wotao Yin. *On the Convergence of Decentralized Gradient Descent*. *SIAM Journal on Optimization*, 26(3):1835–1854, 2016.
- [36] H. Terelius, U. Topcu και R. M. Murray. *Decentralized Multi-Agent Optimization via Dual Decomposition*. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):11245–11251, 2011. 18τη ΙΦΑΣ Ωορλδ όνγρεοο.
- [37] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato και J. Eckstein. *Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers*. 2011.
- [38] N. Parikh και S. Boyd. *Proximal Algorithms*. *Foundations and Trends in Optimization*, 1(3):127–239, 2014.
- [39] Ermin Wei και Asuman Ozdaglar. *On the $O(1/k)$ convergence of asynchronous distributed alternating Direction Method of Multipliers*. *2013 IEEE Global Conference on Signal and Information Processing*, σελίδες 551–554, 2013.
- [40] Dušan Jakovetić, João Xavier και José M. F. Moura. *Fast Distributed Gradient Methods*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(5):1131–1146, 2014.
- [41] W. Shi, Q. Ling, G. Wu και W. Yin. *EXTRA: An Exact First-Order Algorithm for Decentralized Consensus Optimization*. *SIAM Journal on Optimization*, 25(2):944–966, 2015.

- [42] Xiangyu Wang, Guodong Wang και Shihua Li. *Distributed Finite-Time Optimization for Integrator Chain Multiagent Systems With Disturbances*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(12):5296–5311, 2020.
- [43] Guodong Shi, Karl Johansson και Yiguang Hong. *Reaching an Optimal Consensus: Dynamical Systems That Compute Intersections of Convex Sets*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58, 2011.
- [44] Yutao Tang, Zhenhua Deng και Yiguang Hong. *Optimal Output Consensus of High-Order Multiagent Systems With Embedded Technique*. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 49(5):1768–1779, 2019.
- [45] Jin Zhang, Lu Liu και Haibo Ji. *Exponential Convergence of Distributed Optimal Coordination for Linear Multi-Agent Systems over General Digraphs*. σελίδες 5047–5051, 2020.
- [46] Zhijun Zhong, Yu Zhao, Chengxin Xian και Wenfei Zhang. *Finite-Time Distributed Optimal Tracking for Multiple Heterogeneous Linear Systems*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 68(4):1258–1262, 2021.
- [47] Zhenhong Li, Zizhen Wu, Zhongkui Li και Zhengtao Ding. *Distributed Optimal Coordination for Heterogeneous Linear Multiagent Systems With Event-Triggered Mechanisms*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(4):1763–1770, 2020.
- [48] Jin Zhang, Lu Liu και Haibo Ji. *Exponential Convergence of Distributed Optimal Coordination for Linear Multi-Agent Systems over General Digraphs*. σελίδες 5047–5051, 2020.
- [49] Yutao Tang και Hao Zhu. *Distributed Optimization for High-order Nonlinear Multiagent Systems with Unknown Dynamics*. σελίδες 7025–7030, 2018.
- [50] Youfeng Su και Jie Huang. *Cooperative Global Robust Output Regulation for Nonlinear Uncertain Multi-Agent Systems in Lower Triangular Form*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(9):2378–2389, 2015.
- [51] Yutao Tang και Xinghu Wang. *Optimal Output Consensus for Nonlinear Multiagent Systems With Both Static and Dynamic Uncertainties*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(4):1733–1740, 2021.
- [52] Tengfei Liu, Zhengyan Qin, Yiguang Hong και Zhong Ping Jiang. *Distributed Optimization of Nonlinear Multi-Agent Systems: A Small-Gain Approach*. *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, σελίδες 5252–5257, 2019.
- [53] Y. Nesterov. *Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1η έκδοση, 2014.
- [54] C. H Papadimitriou και K. Steiglitz. *Combinatorial optimization*. Dover Publications, Inc., 2014.

- [55] D. P. Bertsekas, A. Nedić και A. E. Ozdaglar. *Convex Analysis and Optimization*. Optimization and Computation Series, Vol. 1. Athena Scientific, 2003.
- [56] A. Nedic, A Ozdaglar και P. A. Parrilo. *Constrained consensus and optimization in multi-agent networks*. *IRE Transactions on Automatic Control*, 55(4):922–938, 2010.
- [57] M. Grasmair. *Basic Properties of Convex Functions*. Σημειώσεις Διάλεξης, Department of Mathematics, Norwegian University of Sciences and Technology, 2016.
- [58] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer Berlin, 2017.
- [59] T. I. Fossen. *Guidance and control of ocean vehicles*. John Wiley, 1999.
- [60] T. I. Fossen. *Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control*. Wiley, 2014.
- [61] A. Riahifard, S. M. Hosseini Rostami, J. Wang και Hye Jin Kim. *Adaptive Leader-Follower Formation Control of under-Actuated Surface Vessels with Model Uncertainties and Input Constraints*. *Applied Sciences*, 10(7), 2020.
- [62] C. Liu, T. Sun και Q. Hu. *Synchronization Control of Dynamic Positioning Ships Using Model Predictive Control*. *Journal of Marine Science and Engineering*, 9(11), 2021.
- [63] F. Mazenc, K. Pettersen και H. Nijmeijer. *Global uniform asymptotic stabilization of an underactuated surface vessel*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(10):1759–1762, 2002.
- [64] I. Fantoni, R. Lozano, F. Mazenc και K.Y. Pettersen. *Stabilization of a nonlinear underactuated hovercraft*. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304)*, 3:2533–2538 ολ.3, 1999.
- [65] Sundarapandian Vaidyanathan και Ahmad Taher Azar. *An introduction to backstepping control*. *Backstepping Control of Nonlinear Dynamical Systems*, σελίδες 1–32, 2021.
- [66] T. Skjetne, T. I. Fossen και P. V. Kokotović. *Adaptive maneuvering, with experiments, for a model ship in a marine control laboratory*. *Automatica*, 41(2):289–298, 2005.