



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Προσεγγιστική Βέλτιστη Συμφωνία Κινούμενων Ρομπότ με Χαμηλή Συχνότητα Επικοινωνίας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΜΙΧΑΗΛ Μ. ΕΙΡΗΝΑΙΟΥ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούνιος 2023



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Προσεγγιστική Βέλτιστη Συμφωνία Κινούμενων Ρομπότ με Χαμηλή Συχνότητα Επικοινωνίας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΜΙΧΑΗΛ Μ. ΕΙΡΗΝΑΙΟΥ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 30η Ιουνίου 2023.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας ΕΜΠ

.....
Κωνσταντίνος Τζαφέσιος
Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Χαράλαμπος Μπεχλιούλης
Αναπληρωτής Καθηγητής Παν.Πατρών

Αθήνα, Ιούνιος 2023



Copyright © - All rights reserved. Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος.
Ειρηναίος Μιχαήλ, 2023.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα αυτής της εργασίας εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

(Υπογραφή)

.....
Ειρηναίος Μιχαήλ

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π
30 Ιουνίου 2023

Περίληψη

Σε αυτή την εργασία, προτείνουμε μια καινούργια προσέγγιση για την επίλυση του προβλήματος βέλτιστης συμφωνίας κινούμενων ρομπότι τύπου unicycle. Στο προτεινόμενο σχήμα κάθε ρομπότι (πράκτορας) χρησιμοποιεί μόνο δείγματα από τις εξόδους των γειτόνων του ανά μεγάλα χρονικά διαστήματα, κάτι που καθιστά την συχνότητα επικοινωνίας των πρακτόρων αρκετά χαμηλή. Για το σκοπό αυτό εισάγουμε συνεχείς βοηθητικές μεταβλητές εμπνευσμένες από τον Κατανεμημένο Επαυξημένο Lagrangian Αλγόριθμο [1]. Η συνέχεια των μεταβλητών αυτών διασφαλίζεται με την χρήση κατάλληλων συναρτήσεων εξομάλυνσης που μας επιτρέπουν να ενσωματώσουμε σταδιακά τα δείγματα στις νέες μεταβλητές εντός μιας περιόδου δειγματοληψίας. Στο πρώτο κομμάτι της εργασίας αποδεικνύεται ότι με την ρύθμιση των GRADient- based Smoothed optimal consensus with SParse communication (GRASSP) μεταβλητών σε μια γειτονιά του μηδενός, επιτυγχάνεται προσεγγιστική βέλτιστη συμφωνία των πρακτόρων. Στο δεύτερο κομμάτι, σχεδιάζονται πρωτότυποι μη γραμμικοί, κατανεμημένοι ελεγκτές βάση της δυναμικής των unicycle - πρακτόρων για τη ρύθμιση των GRASSP μεταβλητών εξασφαλίζοντας έτσι την προσεγγιστική βέλτιστη συμφωνία των εξόδων τους. Επίσης, με τους προτεινόμενους νόμους ελέγχου αποδεικνύεται ότι όλα τα σήματα κλειστού βρόγχου παραμένουν φραγμένα. Τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα προσομοιώσεων σε μια ομάδα από unicycles, τα οποία επιβεβαιώνουν την αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης προσέγγισης.

Λέξεις Κλειδιά

Κατανεμημένη Βελτιστοποίηση, Βέλτιστη Συμφωνία, Μη Γραμμικός Έλεγχος μη Ολονομικών Συστημάτων, Πολυπρακτορικά Συστήματα, Χαμηλή Συχνότητα Επικοινωνίας

Abstract

In this work, we propose a new framework to solve the problem of optimal consensus for unicycle-type wheeled mobile robots. In the proposed scheme, each robot (agent) only uses samples from the outputs of its neighbors at large time intervals, which results in a relatively low communication frequency among the agents. To achieve this, we introduce continuous auxiliary variables inspired by the Distributed Augmented Lagrangian Algorithm [1]. The continuity of these variables is ensured by using appropriate smoothing functions that gradually incorporate the samples into the new variables within a sampling period. In the first part of the work, it is proven that by regulating the GRAdient-based Smoothed optimal consensus with SParse communication (GRASSP) variables in a neighborhood of zero, approximate optimal consensus of all agent outputs is achieved. In the second part, novel non-linear, distributed controllers based on the dynamics of unicycle - agents are designed in order to regulate the GRASSP variables, thus ensuring the approximate optimal consensus of their outputs. Additionally, it is demonstrated that with the proposed control laws, all closed-loop signals remain bounded. Finally, simulation results are presented for a group of unicycles, that confirm the effectiveness of the proposed approach.

Keywords

Distributed Optimization, Optimal Consensus, Nonlinear Control of Nonholonomic Systems, Multi-Agent Systems, Low Communication Frequency.

στην οικογένειά μου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ.Χαράλαμπο Ψυλλάκη για την επίβλεψη αυτής της διπλωματικής εργασίας και για την δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα καθώς και για την αμέριστη βοήθεια, τις πολύτιμες γνώσεις και τον άπλετο χρόνο που αφιέρωσε κατά την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την δύναμη και υποστήριξη που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια, και όλους τους φίλους μου που ήταν δίπλα μου τονώνοντας με ψυχολογικά σε αυτό το γεμάτο σκαμπανεβάσματα ταξίδι.

Αθήνα, Ιούνιος 2023

Ειρηναίος Μιχαήλ

Περιεχόμενα

Περίληψη	1
Abstract	3
Ευχαριστίες	7
1 Εισαγωγή	17
1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής	19
1.1.1 Συνεισφορά	19
1.2 Σχετικές Εργασίες	20
1.3 Οργάνωση του τόμου	21
2 Θεωρητικό υπόβαθρο	23
2.1 Θεωρία Γράφων	23
2.2 Θεωρία Πινάκων	25
2.3 Θεωρία Lyapunov	26
2.4 Θεωρία Μαθηματικής Ανάλυσης	28
2.5 Επαυξημένος Lagrangian Αλγόριθμος	29
2.5.1 Αλγόριθμος για την Επίλυση της (2.23)	30
3 Προσεγγιστική Βέλτιστη Συμφωνία με χρήση GRASSP μεταβλητών	31
3.1 Το πρόβλημα προσεγγιστικής βέλτιστης συμφωνίας	31
3.1.1 Μεταβλητές GRASSP	32
3.2 Βέλτιστη συμφωνία με μεταβλητές GRASSP	34
4 Κατανεμημένος Έλεγχος για Βέλτιστη Συμφωνία Κινούμενων Ρομπότ	43
4.1 Unicycle-type WMRs	43
4.1.1 Κινηματική των Unicycle	43
4.2 Σχεδίαση ελεγκτών	45
4.3 Προσομοίωση Συστήματος σε περιβάλλον Matlab-Simulink	48
4.3.1 Παράμετροι Προσομοίωσης	48
4.3.2 Σενάριο 1	49
4.3.3 Σενάριο 2	54
4.3.4 Σενάριο 3 (Formation Control)	58
4.3.5 Επίδραση των Παραμέτρων Σχεδίασης στην Απόδοση του Ελεγκτή	59

5 Επίλογος	67
5.1 Σύνοψη και Συμπεράσματα	67
5.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις	68
Βιβλιογραφία	71

Κατάλογος Σχημάτων

4.1	Εξόδοι x_i των unicycle συναρτήση του χρόνου.	50
4.2	Εξόδοι y_i των unicycle συναρτήση του χρόνου.	51
4.3	Γωνιά κατεύθυνσης θ_i των unicycle συναρτήση του χρόνου.	52
4.4	Είσοδοι u_{i1} συναρτήση του χρόνου.	52
4.5	Είσοδοι w_i συναρτήση του χρόνου.	53
4.6	Μεταβλητές GRASSP $\ z_i\ $ συναρτήση του χρόνου.	53
4.7	Εξόδοι x_i των unicycle συναρτήση του χρόνου.	55
4.8	Εξόδοι y_i των unicycle συναρτήση του χρόνου.	55
4.9	Γωνιά κατεύθυνσης θ_i των unicycle συναρτήση του χρόνου.	56
4.10	Είσοδοι u_{i1} συναρτήση του χρόνου.	57
4.11	Είσοδοι w_i συναρτήση του χρόνου.	57
4.12	Μεταβλητές GRASSP $\ z_i\ $ συναρτήση του χρόνου.	58
4.13	Τροχιές των y_i ($1 \leq i \leq 6$).	59
4.14	Εξόδοι x_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για $D = 8$	60
4.15	Εξόδοι y_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για $D = 8$	60
4.16	Εξόδοι x_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για $D = 1$	61
4.17	Εξόδοι y_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για $D = 1$	61
4.18	Είσοδοι w_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για $D = 1$	62
4.19	Εξόδοι x_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για $\epsilon = 0.04$	63
4.20	Εξόδοι y_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για $\epsilon = 0.04$	63
4.21	Μεταβλητές GRASSP $\ z_i\ $ συναρτήση του χρόνου για $\epsilon = 0.04$	64
4.22	Εξόδοι x_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για νέες παραμέτρους.	64
4.23	Εξόδοι y_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για νέες παραμέτρους.	65
4.24	Είσοδοι w_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για νέες παραμέτρους.	65

Κατάλογος Εικόνων

1.1	Κατανεμημένο δίκτυο	19
1.2	Συλλογική κίνηση διαφόρων ειδών ζώων [2]	19
4.1	Κινούμενο ρομπότ τύπου Unicycle	44

Κατάλογος Πινάκων

4.1	Μεταβαλλόμενες Παράμετροι Προσομοίωσης	49
-----	--	----

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η θεωρία ελέγχου κάνει αισθητή την εμφάνιση της στις αρχές του 20ού αιώνα όταν οι αδερφοί Wright πραγματοποίησαν την πρώτη επιτυχημένη πτήση μηχανοκίνητου αεροπλάνου που έγινε ποτέ, υλοποιώντας ένα συμβατικό σύστημα ελέγχου πτήσης του αεροσκάφους σταθερής πτέρυγας (AFCS). Εμπνευσμένοι από αυτό, οι επιστήμονες έχουν στρέψει όλο και περισσότερο την προσοχή τους στην θεωρία ελέγχου. Για παράδειγμα, κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου, αναπτύχθηκαν και εφαρμόστηκαν συστήματα ελέγχου πυροβολικού, συστήματα καθοδήγησης και ελέγχου πυραύλων και διάφορων άλλων ηλεκτρονικών συσκευών. Τις προηγούμενες δεκαετίες, ο έλεγχος ενός μόνο συστήματος αναπτύχθηκε αρκετά και προτάθηκαν πολλές διαφορετικές μεθοδολογίες, όπως ο αναλογικός-ολοκληρωτικός-διαφορικός έλεγχος (PID), ο προσαρμοστικός έλεγχος, ο σθεναρός έλεγχος και ο ασαφής έλεγχος.

Τα τελευταία χρόνια, λόγω της ύπαρξης πολλών σύνθετων συστημάτων που είναι δύσκολο να υλοποιηθούν, αναπτύχθηκε μια διαφορετική προσέγγιση για την ανάλυση τους. Η βασική ιδέα είναι η διάσπαση του σύνθετου συστήματος σε άλλα απλά υπο-συστήματα, όπου θα επικοινωνούν μεταξύ τους και θα εκτελεί το καθένα μια συγκεκριμένη λειτουργία. Αυτά τα πολλαπλά διασυνδεδεμένα συστήματα καλούνται καταναμημένα συστήματα.

Ο έλεγχος των καταναμημένων συστημάτων [3] έχει προσελκύσει ιδιαίτερα τους ερευνητές της κοινότητας του αυτομάτου ελέγχου, που ανέπτυξαν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα. Η πρώτη αφορά τον συγκεντρωτικό (centralized) έλεγχο και βασίζεται στην υπόθεση ύπαρξης ενός ισχυρού κεντρικού συστήματος που είναι διαθέσιμο για τον έλεγχο των υπόλοιπων απλών συστημάτων ή μιας ομάδας αυτών. Ο δεύτερος τρόπος ελέγχου των καταναμημένων συστημάτων καλείται αποκεντρωμένος (decentralized) ή καταναμημένος (distributed). Εδώ δεν απαιτείται η ύπαρξη ενός κεντρικού συστήματος αλλά το κάθε σύστημα ενεργεί με βάση κάποια τοπική πληροφορία που έχει διαθέσιμη. Αν και ο καταναμημένος έλεγχος είναι πιο πολύπλοκος, είναι και ο πιο ρεαλιστικά εφαρμόσιμος λόγω των αναπόφευκτων φυσικών περιορισμών, όπως είναι η περιορισμένη εμβέλεια επικοινωνίας, το πεπερασμένο εύρος ζώνης και ο μεγάλος αριθμός συστημάτων που εμπλέκονται.

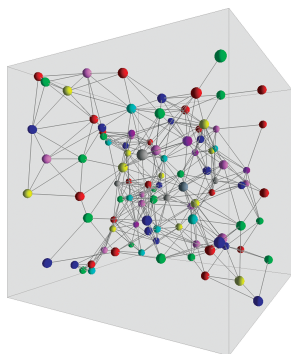
Τα αυτόνομα αυτά συστήματα είναι ευρέως διαδεδομένα ως πράκτορες (agents), όπου οι πολλαπλοί διασυνδεδεμένοι πράκτορες ορίζουν το πολυπρακτορικό σύστημα (multiagent system). Αξίζει να αναφερθεί ότι ο μαθηματικός τρόπος αναπαράστασης τέτοιων συστημάτων-δικτύων γίνεται με τη βοήθεια γράφων όπου κάθε κόμβος του γράφου είναι ένας πράκτορας του συστήματος και οι ακμές που ενώνουν τους πράκτορες εκφράζουν την αλληλεπίδραση

μεταξύ τους και την πιθανή διάχυση κάποιου είδους πληροφορίας. Στην εικόνα 1.1 φαίνεται ένα παράδειγμα κατανεμημένου δικτύου όπου περιγράφηκε. Ένα από τα βασικά προβλήματα που έχουν εφαρμογή τα πολυπρακτορικά συστήματα είναι το πρόβλημα ομοφωνίας (Consensus). Σύμφωνα με αυτό, οι πράκτορες συγκλίνουν σε μια κοινή επιθυμητή κατάσταση, με βάση τους περιορισμούς στην ανταλλαγή πληροφορίας μεταξύ ενός πράκτορα και των υπολοίπων πρακτόρων του δικτύου. Διάφορα πρωτόκολλα Consensus αναπτύχθηκαν στο [4]. Το κίνητρο για την επιστημονική κοινότητα ώστε να εισάγει αυτές τις έννοιες και να ερευνήσει περαιτέρω αυτού του είδους τα συστήματα είναι η μελέτη παρόμοιων συμπεριφορών από τη φύση, όπως σμήνη πουλιών, ψαριών και αγέλες ζώων (Εικόνα 1.2). Σε αυτά τα φυσικά συστήματα κάθε μέλος έχει το δικό του κινησιολογικό ένστικτο, ωστόσο η συνολική κίνηση καθιστά την ομάδα να φαίνεται σαν μια μοναδική οντότητα με τους δικούς της νόμους κίνησης, ψυχολογίας και ανταπόκρισης στα εξωτερικά γεγονότα. Οι συλλογικές κινήσεις επιτρέπουν στην ομάδα να πετύχει τον επιθυμητό της στόχο, πράγμα που το κάθε μέλος μόνο του δεν μπορεί να καταφέρει.

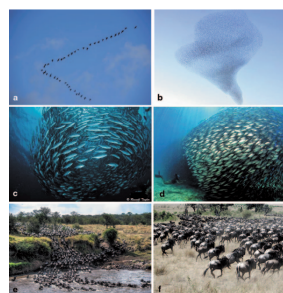
Πιο πρόσφατα, εμφανίστηκαν διάφορα ζητήματα σχετικά με την κατανομή περιορισμένων πόρων σε εφαρμογές αυτόματου ελέγχου, σχεδίασης ηλεκτρονικών κυκλωμάτων, μηχανικής μάθηση κ.λπ. τα οποία δημιούργησαν την ανάγκη κατανεμημένης επίλυσης του προβλήματος βέλτιστης συμφωνίας (optimal consensus task). Το πρόβλημα βέλτιστης συμφωνίας είναι ένα καθιερωμένο πρόβλημα ομοφωνίας (Consensus) όπου μπορεί να λυθεί με τεχνικές συνεργατικού ελέγχου, ταυτόχρονα με την επίλυση ενός κατανεμημένου προβλήματος βελτιστοποίησης (distributed optimization problem). Σύμφωνα με αυτό, κάθε πράκτορας εφοδιάζεται με μια τοπική συνάρτηση κόστους και το σύνολο των πρακτόρων στοχεύει να συγκλίνει προς το ελάχιστο του αθροίσματός των συναρτήσεων αυτών, χρησιμοποιώντας μόνο περιορισμένες, τοπικές πληροφορίες [2].

Οι αλγόριθμοι κατανεμημένης βελτιστοποίησης έχουν απασχολήσει ιδιαίτερα την ερευνητική κοινότητα του αυτομάτου ελέγχου, με σημαντικές εφαρμογές σε έξυπνα δίκτυα, δίκτυα αισθητήρων και ομάδες ρομπότ [5], [6]. Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι κατανεμημένοι με την έννοια ότι ο κάθε πράκτορας έχει διαθέσιμο για χρήση μόνο το διάνυσμα βαθμίδας (gradient) της τοπικής τους συνάρτησης κόστους και τις μετρήσεις από τους γείτονες. Επίσης, ευρέως χρησιμοποιημένοι είναι και στον τομέα της ενέργειας όπου σκοπεύουν στον συντονισμό και την βέλτιστη κατανομή ενεργειακών πόρων. Συγκεκριμένα, ένα από τα κύρια προβλήματα όπου εφαρμόζονται αλγόριθμοι κατανεμημένης βελτιστοποίησης είναι το Economic Dispatch Problem (EDP) που αφορά στη λειτουργία των ηλεκτρικών δικτύων. Η επίλυση του EDP συνίσταται στον εντοπισμό ενός συνδυασμού ισχύος εξόδου μεταξύ όλων των γεννητριών που δίνει το χαμηλότερο κόστος λειτουργίας ενώ διατηρεί τους περιορισμούς του συστήματος [7].

Συνοψίζοντας, η παρουσία των πιο πάνω προβλημάτων στη ζωή μας αυξάνεται ραγδαία, πράγμα που καθιστά επιτακτική ανάγκη την μελέτη, τον σχεδιασμό και την ανάπτυξη των μεθόδων αυτών που θα μας δώσουν την βέλτιστη λύση στα υπάρχοντα προβλήματα αλλά και που θα προνοήσουν λύσεις σε μελλοντικά.



Εικόνα 1.1: Κατανεμημένο δίκτυο



Εικόνα 1.2: Συλλογική κίνηση διαφόρων ειδών ζώων [2]

1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής

Η διπλωματική θα αντιμετωπίσει το πρόβλημα της προσεγγιστικής βέλτιστης συμφωνίας για κινούμενα ρομπότ χρησιμοποιώντας μόνο δείγματα από τις εξόδους των γειτονικών πρακτόρων τα οποία λαμβάνονται σε αραιά χρονικά διαστήματα. Παράλληλα, η σχεδίαση μας θέλουμε να οδηγήσει τα κινούμενα ρομπότ στο σημείο βέλτιστης συμφωνίας με συγκεκριμένο προσανατολισμό. Αρχικά, ορίζουμε τις GRAdient- based Smoothed optimal consensus with SParse communication (GRASSP) μεταβλητές όπου ενσωματώνουμε τα βήματα του κατανεμημένου επαυξημένου lagrangian (EL) αλγόριθμου, με σκοπό να αποδείξουμε ότι επιτυγχάνουμε προσεγγιστική βέλτιστη συμφωνία εφόσον οι GRASSP μεταβλητές συγκλίνουν σε μια γειτονιά του μηδενός. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε έναν κατανεμημένο νόμο ελέγχου χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές αυτές, όπου τα κινούμενα ρομπότ συγκλίνουν προσεγγιστικά στην βέλτιστη τιμή συμφωνίας με συγκεκριμένο προσανατολισμό το κάθετα. Επιπρόσθετα, θα πρέπει όλα τα σήματα στον κλειστό βρόχο να παραμένουν φραγμένα.

1.1.1 Συνεισφορά

Η κύρια ερευνητική συνεισφορά της διπλωματικής συνοψίζεται στα εξής:

1. Λύνουμε το πρόβλημα προσεγγιστικής βέλτιστης συμφωνίας για κινούμενα ρομπότ με μη ολονομικούς περιορισμούς.
2. Ο κάθε πράκτορες έχει χαμηλή συχνότητα επικοινωνίας με τους γείτονες λαμβάνοντας έτσι περιορισμένη πληροφορία και συγκεκριμένα μόνο αραιά δείγματα από τις εξόδους τους. Αυτό είναι πολύ σημαντικό λόγω της ύπαρξης περιορισμών στο εύρος ζώνης σε δίκτυα επικοινωνίας.
3. Εισάγουμε τις GRASSP μεταβλητές όπου επιτρέπουν να επαναδιατυπωθεί το πρόβλημα βέλτιστης συμφωνίας σε ένα πρόβλημα ρύθμισης των νέων μεταβλητών. Έτσι, μας επιτρέπουν τη χρήση κλασικών τεχνικών ελέγχου για την επίλυσή του.
4. Εισάγουμε βοηθητικές συναρτήσεις όπου επιτρέπουν καθυστερήσεις επικοινωνίας μεταξύ των πρακτόρων, καθώς περνά κάποιος χρόνος μέχρι να χρησιμοποιήσουν τα δείγματα από τους γείτονες.

1.2 Σχετικές Εργασίες

Η μελέτη των αλγορίθμων κατανεμημένης βελτιστοποίησης ξεκίνησε από την δεκαετία του 80 από την διδακτορική διατριβή του J. Tsitsiklis [8], ο οποίος ανέπτυξε ένα πλαίσιο για την ανάλυση των κατανεμημένων υπολογιστικών μοντέλων, και συνεχίστηκε στην [9] με την ανάπτυξη κατανεμημένων ασύγχρονων ντετερμινιστικών και στοχαστικών αλγορίθμων βελτιστοποίησης με την χρήση βαθμίδας. Με το πέρασμα των χρόνων και την ολοένα αυξανόμενη εμφάνιση δικτυακών συστημάτων, μεγάλωσε ακόμη περισσότερο το ενδιαφέρον των ερευνητών στο αντικείμενο αυτό με αποτέλεσμα την ανάπτυξη πολλών διαφορετικών μεθόδων κατανεμημένης βελτιστοποίησης τόσο διακριτού χρόνου όσο και συνεχούς.

Στους αλγόριθμους διακριτού χρόνου περιλαμβάνονται οι αλγόριθμοι με μειούμενες τιμές βημάτων [10], όπου προτείνεται ο κατανεμημένος αλγόριθμος κατάβασης υποβαθμίδας (Distributed Gradient Descent (DGD)). Με βάση αυτόν, κάθε πράκτορας εκτελεί ένα βήμα ομοφωνίας και έπειτα ένα βήμα κατάβασης κατά μήκος της τοπικής (υπο)βαθμίδας της δικής του κυρτής αντικειμενικής συνάρτησης. Λόγω της αργής σύγκλισής του, οι D. Jakovetic, J. Xavier και J. M. F. Moura [11] πρότειναν μια παραλλαγή του, όπου χρησιμοποιούν centralized Nesteron gradient μέθοδο εμπνευσμένοι από το [12]. Ακόμη μια κατηγορία αλγορίθμων διακριτού χρόνου είναι οι αλγόριθμοι με σταθερό μέγεθος βήματος όπου συγκλίνουν γραμμικά στη βέλτιστη λύση. Συγκεκριμένα, στην εργασία τους οι W. Shi, Q. Ling, G. Wu και W. Yin [13] πρότειναν τον αλγόριθμο EXTRA που μπορεί να θεωρηθεί ως ο DGD με σταθερό μέγεθος βήματος και με έναν επιπλέον αθροιστικό όρο για τη διόρθωση του σφάλματος που προκαλείται από τον DGD. Σε αυτή την κατηγορία τοποθετούνται και οι αλγόριθμοι με δυϊκή προσέγγιση όπως στο [1], όπου θα αναφερθούμε εκτενέστερα αργότερα καθώς το χρησιμοποιούμε στην ανάλυσή μας.

Από την άλλη, αν και οι κλασσικοί αλγόριθμοι κατανεμημένης βελτιστοποίησης είναι διακριτού χρόνου, αναπτύχθηκαν και αλγόριθμοι συνεχούς χρόνου, κυρίως επειδή πολλά συστήματα, όπως τα ρομπότ, λειτουργούν σε συνεχή χρόνο και υπάρχουν πολλές ανεπτυγμένες τεχνικές ελέγχου χρησιμοποιώντας θεωρία ευστάθειας Lyapunov που διευκολύνουν την ανάλυση. Οι αλγόριθμοι συνεχούς χρόνου χωρίζονται σε first-order gradient-based και σε second-order, ανάλογα με το αν χρησιμοποιούν την πρώτη τάξη βαθμίδας ή τη δεύτερης τάξης Εσσιανή. Οι first-order gradient-based αποτελούνται κυρίως από κατανεμημένους PI αλγόριθμους, που ακολουθούν την δομή του PI ελέγχου [14]. Οι δεύτερης τάξης αλγόριθμοι είναι πιο γρήγοροι στην σύγκλιση όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στον Zero-Gradient-Sum αλγόριθμο που ανέπτυξαν οι Lu και Tang [15]. Περισσότερους αλγόριθμους κατανεμημένης βελτιστοποίησης καθώς και περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τους πιο πάνω που προαναφέρθηκαν μπορούμε να βρούμε στο [16].

Οι μέθοδοι κατανεμημένης βελτιστοποίησης πολυπρακτορικών συστημάτων, εκτός από την υλοποίησή τους σε μη δυναμικά συστήματα που μεταβάλλουν την κατάσταση τους μέσα από κάποιο κανόνα ενημέρωσης, έχουν σημαντική εφαρμογή και σε πράκτορες με δυναμική. Αυτά τα προβλήματα είναι σαφώς πιο πολύπλοκα καθώς ενσωματώνονται σχήματα ακύρωσης της τοπικής συμπεριφοράς του κάθε πράκτορα. Πρόσφατες έρευνες έχουν γίνει για κατανεμημένη βελτιστοποίηση ολοκληρωτών και γραμμικών πρακτόρων [17],[18].

Μια σημαντική πρόκληση που κλήθηκαν να αντιμετωπίσουν οι ερευνητές είναι η βέλτιστη

συμφωνία για μη γραμμικούς πράκτορες. Στο [19] μελετήθηκε η βέλτιστη συμφωνία για μη γραμμικούς πράκτορες με διαταραχές, προστέθηκε αθέτατο μη γραμμικό πολυπρακτορικό σύστημα στο [20] όπου αντιμετωπίστηκε με προσαρμοστική τεχνική και επιπλέον επιλύθηκε για μεγάλης τάξης μη γραμμικά πολυπρακτορικά συστήματα με άγνωστη δυναμική [21]. Επιπρόσθετα, μια καινοτόμος μέθοδος έχει προταθεί από τους A. K. Gkesoulis, H. E. Psillakis και A.-R. Lagos [22] όπου εισάγουν τις Optimal consensus proportional and integral (OCPI) μεταβλητές για να μετατρέψουν το πρόβλημα βέλτιστης συμφωνίας μη γραμμικών πρακτόρων με άγνωστες διαταραχές και καθυστερήσεις κατάστασης σε πρόβλημα ρύθμισης των μεταβλητών αυτών. Επιπλέον, ιδιαίτερη έμφαση θέλουμε να δώσουμε στην εργασία των H. E. Psillakis και K. A. Oikonomidis [23], στην οποία λύνουν το πρόβλημα προσεγγιστικής βέλτιστης συμφωνίας σχεδιάζοντας προσαρμοστικούς ασαφείς κατανεμημένους ελεγκτές για Lagrangian πράκτορες. Με παρόμοιο τρόπο με την παρούσα εργασία, εισάγουν τις καινούργιες EXTRA-based Smoothed Optimal Consensus (EXTRA-SOC) μεταβλητές για να δείξουν αργότερα ότι ρυθμίζοντας αυτές σε μια γειτονία του μηδέν, διασφαλίζεται η προσεγγιστική βέλτιστη συμφωνία των εξόδων των πρακτόρων.

1.3 Οργάνωση του τόμου

Η ενότητα αυτή παρέχει μια σφαιρική εικόνα της δομής της παρούσας εργασίας. Συγκεκριμένα ο τόμος οργανώνεται σε πέντε κεφάλαια, όπου το περιεχόμενο του καθενός σκιαγραφείται παρακάτω:

Κεφάλαιο 1 - Εισαγωγή

Περιγράφει το αντικείμενο μαζί με κάποιες βασικές έννοιες της παρούσας εργασίας, τονίζεται η συνεισφορά της ενώ αναφέρονται αντίστοιχες σχετικές εργασίες της βιβλιογραφίας.

Κεφάλαιο 2 - Θεωρητικό υπόβαθρο

Δίνεται το θεωρητικό μέρος εκπόνησης της μελέτης κάνοντας αναφορές στη θεωρία γράφων 2.1, στη θεωρία πινάκων 2.2, τη θεωρία Lyapunov 2.3, σε μαθηματική ανάλυση 2.4 και στον Επαυξημένο Lagrangian Αλγόριθμο 2.5.

Κεφάλαιο 3 - Προσεγγιστική Βέλτιστη Συμφωνία

Παρουσιάζεται το πρόβλημα προσεγγιστικής βέλτιστης συμφωνίας, εισάγονται οι νέες μεταβλητές GRASSP και αποδεικνύεται το βασικό μας θεώρημα.

Κεφάλαιο 4 - Βέλτιστη Συμφωνία για Κινούμενα Ρομπότ

Γίνεται σχεδιασμός ελεγκτών για βέλτιστη συμφωνία ομάδας κινούμενων ρομπότ τύπου unicycle, επαληθεύονται τα θεωρητικά αποτελέσματα μέσω προσομοιώσεων σε περιβάλλον Matlab-Simulink και δίνονται παραδείγματα από διαφορετικά σενάρια προσομοίωσης.

Κεφάλαιο 5 - Επίλογος

Συνοψίζεται η εργασία και τα συμπεράσματα που προέκυψαν και παράλληλα σκιαγραφούνται ορισμένες πιθανές μελλοντικές επεκτάσεις της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε στη διπλωματική.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό υπόβαθρο

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται το θεωρητικό υπόβαθρο που θα βοηθήσει στη κατανόηση των βασικών εννοιών που λαμβάνουν μέρος στην απόδειξη της διπλωματικής. Αρχικά, παρατίθενται στοιχεία από την θεωρία γράφων, στην συνέχεια στοιχεία της θεωρίας πινάκων, καθώς και της θεωρίας Lyapunov. Ακόμη, παρουσιάζονται απαραίτητοι ορισμοί και θεωρήματα από την θεωρία της μαθηματικής ανάλυσης και τέλος, συστήνεται ο Επαυξημένος Lagrangian Αλγόριθμος.

2.1 Θεωρία Γράφων

Ορισμός 2.1. Γράφος

Ένας πεπερασμένος γράφος \mathcal{G} ορίζεται ως το ζεύγος $\mathcal{G} = (V, E)$ με V το πεπερασμένο σύνολο κόμβων και E το σύνολο ακμών του \mathcal{G} , υποσύνολο του $V \times V$.

Με τον συμβολισμό $V(\mathcal{G})$ και $E(\mathcal{G})$ αναφερόμαστε στους κόμβους και στις ακμές του γράφου, αντίστοιχα.

Σε ένα γράφο οι κόμβοι αναπαρίστανται με κυκλάκια και οι ακμές με γραμμές μεταξύ u_i και u_j αν $\{u_i, u_j\} \in E$. Όταν υπάρχει η ακμή μεταξύ δύο κόμβων u_i και u_j τότε τους κόμβους αυτούς τους ονομάζουμε γειτονικούς και το συμβολίζουμε με $u_i \sim u_j$. Συνεπώς, γειτονιά $N(i) \subseteq V$ του κόμβου u_i καλούμε το σύνολο $\{u_j \in V \mid \{u_i, u_j\} \in E\}$.

Ορισμός 2.2. Μονοπάτι

Μονοπάτι μήκους m ενός γράφου \mathcal{G} δίνεται από μια ακολουθία κόμβων $\{u_{i_0}, u_{i_1}, \dots, u_{i_m}\}$ για $l = 0, 1, \dots, m - 1$ όπου οι κόμβοι u_{i_l} και $u_{i_{l+1}}$ είναι γειτονικοί.

Οι κόμβοι u_{i_0} και u_{i_m} λέγονται τελικοί κόμβοι ενώ οι υπόλοιποι λέγονται εσωτερικοί. Μονοπάτι που τερματίζει στον κόμβο έναρξης ονομάζεται κύκλος. Ο γράφος χωρίς κύκλους λέγεται δάσος.

Ορισμός 2.3. Συνεκτικός Γράφος

Ο γράφος \mathcal{G} ονομάζεται συνεκτικός, αν για κάθε ζεύγος κόμβων στο $V(\mathcal{G})$, υπάρχει ένα μονοπάτι που έχει τους κόμβους αυτούς ως τελικούς.

Διαφορετικά, ο γράφος ονομάζεται μη συνεκτικός.

Ορισμός 2.4. Γράφος με Βάρη

Αν σε ένα γράφο, μαζί με τις ακμές και το σύνολο κόμβων, υπάρχει μια συνάρτηση $w : E \rightarrow \mathbb{R}$

όπου τοποθετεί μια τιμή σε κάθε ακμή, τότε ο γράφος $\mathcal{G} = (V, E, w)$ καλείται γράφος με βάρη. Σε τέτοιους γράφους μπορούν να υπολογιστούν τα πιο σύντομα μονοπάτια μεταξύ δύο κόμβων με τη χρήση των κατάλληλων αλγορίθμων.

Γράφοι με Χρήση Πινάκων

Έχουν παρουσιαστεί μέχρι τώρα οι γράφοι που περιγράφουν τις σχέσεις μεταξύ πεπερασμένου αριθμού αντικειμένων. Σημαντικό είναι να αναφερθεί και ο τρόπος αναπαράστασης ενός γράφου με τη βοήθεια πινάκων.

Ορισμός 2.5. Βαθμός Κόμβου

Ο βαθμός $d(u_i)$ ενός κόμβου σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφο \mathcal{G} είναι ο συνολικός αριθμός των κόμβων που είναι γειτονικοί στον u_i στο \mathcal{G} .

Ορισμός 2.6. Πίνακας Βαθμού

Ο πίνακας βαθμού $\Delta(\mathcal{G})$ ενός μη κατευθυνόμενου γράφου \mathcal{G} είναι ο διαγώνιος πίνακας που στοιχεία της διαγωνίου του είναι οι βαθμοί κόμβων.

Ορισμός 2.7. Πίνακας Γεινίασης

Ο πίνακας γεινίασης $A(\mathcal{G})$ είναι ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας, όπου n ο αριθμός των κόμβων του γράφου, που παρουσιάζει τους κόμβους που είναι γειτονικοί στο γράφο \mathcal{G} . Το στοιχείο (i, j) του $A(\mathcal{G})$ δίνεται από την σχέση

$$[A(\mathcal{G})]_{ij} = \begin{cases} 1, & \{u_i, u_j\} \in E \\ 0, & \text{αλλιού} \end{cases} \quad (2.1)$$

Ορισμός 2.8. Λαπλασιανή Γράφου

Η Λαπλασιανή ενός μη κατευθυνόμενου γράφου \mathcal{G} ορίζεται από την σχέση

$$L(\mathcal{G}) = \Delta(\mathcal{G}) - A(\mathcal{G}) \quad (2.2)$$

όπου $\Delta(\mathcal{G})$ ο πίνακας βαθμού και $A(\mathcal{G})$ ο πίνακας γεινίασης του \mathcal{G} .

Ο πίνακας $L(\mathcal{G})$ είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος και μπορούμε να ταξινομήσουμε τις πραγματικές ιδιοτιμές του ως εξής

$$0 = \lambda_0(\mathcal{G}) \leq \lambda_1(\mathcal{G}) \leq \dots \leq \lambda_{n-1}(\mathcal{G}) \quad (2.3)$$

Με βάση τα πιο πάνω μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι το άθροισμα της κάθε γραμμής της Λαπλασιανής ισούται με μηδέν ($L\mathbb{1}_n = 0$). Άρα, η Λαπλασιανή έχει πάντα μια ιδιοτιμή στο 0 που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα $\mathbb{1}_n = (1_0, \dots, 1_n)^T$.

2.2 Θεωρία Πινάκων

Σε αυτό το σημείο, θα αναφερθούν επιγραμματικά κάποια χρήσιμα στοιχεία από τη θεωρία πινάκων, τα οποία θα μας βοηθήσουν στη συνέχεια στην ανάλυσή μας. Οι αποδείξεις μπορούν να βρεθούν στο [24].

Οι πίνακες αναπαριστούν γραμμικούς τελεστές σε πεπερασμένων διαστάσεων διανυσματικούς χώρους. Όταν αναφερόμαστε για ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, υποδηλώνουμε ότι ο πίνακας αυτός έχει n γραμμές και m στήλες.

Ορισμός 2.9. Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Έστω ότι ο διανυσματικός μας χώρος είναι ο \mathbb{R}^n και $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, δηλαδή είναι ένας τετραγωνικός πίνακας. Τότε, για κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι

$$Ax = \lambda x \quad (2.4)$$

όπου το διάνυσμα x λέγεται ιδιοδιάνυσμα του A που συσχετίζεται με την ιδιοτιμή λ .

Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν δεν έχει μηδενικό ιδιοδιάνυσμα. Η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ , είναι η πολλαπλότητα της ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\det(\lambda \mathbb{I}_{n \times n} - A) = 0 \quad (2.5)$$

Μια ιδιοτιμή καλείται απλή, αν η αλγεβρική πολλαπλότητα της ισούται με τη μονάδα. Η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ , είναι ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων της ιδιοτιμής αυτής.

Θεώρημα 2.1. Ένας πραγματικός, συμμετρικός πίνακας A μπορεί να αναπαρασταθεί ως $Q\Lambda Q^T$, όπου Q είναι ο πίνακας με στήλες το ορθοκανονικό σύνολο ιδιοδιανυσμάτων και Λ ο διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές του A .

Ορισμός 2.10. Θετικά ημιορισμένος και ορισμένος πίνακας

Ο πίνακας A λέγεται θετικά ημιορισμένος αν η τετραγωνική του μορφή $x^T Ax \geq 0 \forall x$ και θετικά ορισμένος αν $x^T Ax > 0$, με $x \neq 0$.

Πρόταση 2.1. Ένας πίνακας είναι θετικά ημιορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικές και θετικά ορισμένος αν είναι όλες θετικές.

Ορισμός 2.11. Μη αρνητικός και θετικός πίνακας

Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζεται μη αρνητικός αν $[A]_{ij} \geq 0$ και θετικός αν $[A]_{ij} > 0$ για $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Ορισμός 2.12. Στοχαστικός και Διπλά Στοχαστικός πίνακας

Στοχαστικός λέγεται ο μη αρνητικός πίνακας που η κάθε γραμμή του έχει άθροισμα 1 και διπλά στοχαστικός αν εκτός από τις γραμμές, έχουν και οι στήλες του άθροισμα τη μονάδα.

Ορισμός 2.13. Γινόμενο Kronecker

Το γινόμενο Kronecker δύο πινάκων $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ με $a_{ij} = [A]_{ij}$ και $b_{ij} = [B]_{ij}$,

συμβολίζεται με $A \otimes B$ και ορίζεται από τον πιο κάτω $n_p \times n_q$ πίνακα

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix}$$

Κάποιες χρήσιμες αλγεβρικές ιδιότητες του Γινομένου Kronecker είναι οι πιο κάτω

$$\begin{aligned} A \otimes (B + C) &= A \otimes B + A \otimes C, \\ (kA) \otimes B &= A \otimes (kB) = k(A \otimes B), \\ (A \otimes B) \otimes C &= A \otimes (B \otimes C), \\ A \otimes 0 &= 0 \otimes A = 0 \end{aligned}$$

όπου οι A, B, C είναι πίνακες με κατάλληλες διαστάσεις, 0 είναι ο μηδενικός πίνακας και k μια σταθερά.

2.3 Θεωρία Lyapunov

Η Θεωρία του Ρώσου μαθηματικού Aleksandr Lyapunov παρέχει ένα σύνολο εργαλείων για την απόδειξη ευστάθειας ή αστάθειας των σημείων ισορροπίας σε δυναμικά συστήματα. Η βασική ιδέα πίσω από τη θεωρία Lyapunov είναι η χρήση μιας βαθμωτής συνάρτησης, γνωστής ως συνάρτηση Lyapunov, για να αξιολογηθεί η συμπεριφορά του συστήματος με την πάροδο του χρόνου.

Η ανάλυση Lyapunov μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ότι η λύση των εξισώσεων κατάστασης είναι φραγμένη. Η συγκεκριμένη θεωρία εφαρμόζεται στη συνέχεια στην ανάλυση και θα ήταν χρήσιμο να αναφερθεί.

Έστω ότι έχουμε το μη αυτόνομο σύστημα

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.6}$$

όπου $f : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι τμηματικά συνεχής στο t , τοπικά Lipschitz για $x \in [0, \infty) \times \mathcal{D}$, και $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ μια περιοχή του 0 .

Ορισμός 2.14. Οι λύσεις της (2.6) είναι

- Ομοιόμορφα Φραγμένες αν υπάρχει μια θετική σταθερά c που για κάθε $a \in (0, c)$, υπάρχει μια $\beta = \beta(a) \geq 0$, με β, c ανεξάρτητα του $t_0 \geq 0$, τέτοια ώστε:

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta, \forall t \geq t_0 \tag{2.7}$$

- Ολικά ομοιόμορφα φραγμένες αν ισχύει η (2.7) για αυθαίρετα μεγάλο a .
- Ομοιόμορφα απόλυτα φραγμένες με απόλυτο φράγμα b αν υπάρχουν θετικές σταθερές b, c , που για κάθε $a \in (0, c)$, υπάρχει $T = T(a, b) \geq 0$, με T, b, c ανεξάρτητα του t_0 , έτσι

ώστε

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \forall t \geq t_0 + T \quad (2.8)$$

- Ολικά ομοιόμορφα απόλυτα φραγμένες αν ισχύει η (2.8) για αυθαίρετα μεγάλο a .

Ορισμός 2.15. Θετικά ορισμένη συνάρτηση $W(x)$

Μια συνεχής συνάρτηση $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι θετικά ορισμένη αν $W(0) = 0$, $W(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ και υπάρχει $r > 0 : \inf_{\|x\| \geq r} W(x) > 0$.

Ορισμός 2.16. Συνάρτηση κλάσης K

Μία συνεχής συνάρτηση $a : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$, λέγεται ότι ανήκει στην κλάση K , αν είναι γνησίως αύξουσα και $a(0) = 0$. Αν $a = \infty$ και $a(r) \rightarrow \infty$, καθώς $r \rightarrow \infty$, τότε η a ανήκει στην κλάση K_∞ .

Ορισμός 2.17. Συνάρτηση κλάσης KL

Μία συνεχής συνάρτηση $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, λέγεται ότι ανήκει στην κλάση KL αν για κάθε s , η απεικόνιση $\beta(r, s)$ ανήκει στην κλάση K ως προς το r και για κάθε σταθερό r , η $\beta(r, s)$ είναι φθίνουσα ως προς s και επίσης $\beta(r, s) \rightarrow 0$, καθώς $s \rightarrow \infty$.

Με τη βοήθεια των πιο πάνω ορισμών μπορούμε να εισάγουμε το βασικό θεώρημα Lyapunov που αποδουκνύει ομοιόμορφα φραγμένες και απόλυτα φραγμένες λύσεις. Η απόδειξη του παραλείπεται όμως μπορεί να βρεθεί στο [25].

Θεώρημα 2.2. Έστω $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ μια περιοχή του 0 και $V : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$a_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq a_2(\|x\|) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W(x), \forall \|x\| \geq \mu > 0 \quad (2.10)$$

$\forall t \geq 0$ και $\forall x \in \mathcal{D}$, όπου a_1, a_2 είναι συναρτήσεις κλάσης K και $W(x)$ είναι μια συνεχής θετικά ορισμένη συνάρτηση. Πέρνοντας $r > 0$ έτσι ώστε η μπάλα $B_r \subset \mathcal{D}$ και υποθέτοντας ότι

$$\mu < a_2^{-1}(a_1(r)) \quad (2.11)$$

τότε, υπάρχει μια συνάρτηση β κλάσης KL που για κάθε αρχική κατάσταση $x(t_0)$, ικανοποιείται η σχέση $\|x(t_0)\| \leq a_2^{-1}(a_1(r))$, και υπάρχει $T \geq 0$ (εξαρτώμενο του $x(t_0)$ και μ) έτσι ώστε η λύση της (2.6) να ικανοποιεί τις πιο κάτω σχέσεις

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (2.12)$$

$$\|x(t)\| \leq a_1^{-1}(a_2(\mu)), \forall t \geq t_0 + T \quad (2.13)$$

Επιπλέον, αν $\mathcal{D} \simeq \mathbb{R}^n$ και a_1 ανήκει στην κλάση K_∞ , τότε οι σχέσεις (2.12), (2.13) ισχύουν για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση $x(t_0)$, χωρίς τον περιορισμό (2.11).

2.4 Θεωρία Μαθηματικής Ανάλυσης

Ορισμός 2.18. Ομαλότητα

Μια συνάρτηση $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ λέγεται L -ομαλή αν ικανοποιείται η πιο κάτω συνθήκη, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad (2.14)$$

Ισοδύναμα :

$$|f(x) - f(y) - \nabla f(y)^\top(x - y)| \leq \frac{L}{2}\|x - y\|^2 \quad (2.15)$$

όπου με $C^1(\mathbb{R}^n)$ εννοούμε το σύνολο με 1 φορά συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις από $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Ορισμός 2.19. Κυρτή συνάρτηση

Η συνάρτηση $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ καλείται κυρτή αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)^\top(x - y) \quad (2.16)$$

Η συνάρτηση λέγεται αυστηρά κυρτή αν η παραπάνω ανισότητα ισχύει αυστηρά για κάθε $x \neq y$.

Ορισμός 2.20. Ισχυρά κυρτή συνάρτηση

Μια συνάρτηση $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ λέγεται σ -ισχυρά-κυρτή, με $\sigma > 0$ αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) - f(y) - \nabla f(y)^\top(x - y) \geq \frac{\sigma}{2}\|x - y\|^2 \quad (2.17)$$

Αν $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, είναι ισχυρά κυρτή και ομαλή:

$$\sigma \mathbb{I}_n \leq \nabla^2 f(x) \leq L \mathbb{I}_n \quad (2.18)$$

όπου $\mathbb{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας μεγέθους n . Άλλη μια χρήσιμη σχέση δίνουν οι (2.15), (2.17) αν ισχύει επίσης ότι $f(x) - f(y) - \nabla f(y)^\top(x - y) \geq 0$, τότε:

$$\frac{\sigma}{2}\|x - y\|^2 \leq f(x) - f(y) - \nabla f(y)^\top(x - y) \leq \frac{L}{2}\|x - y\|^2 \quad (2.19)$$

Ορισμός 2.21. Συνθήκη Lipschitz

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\| \quad (2.20)$$

Η συνάρτηση που ικανοποιεί την (2.20) λέγεται Lipschitz στο x και το K λέγεται σταθερά Lipschitz.

Ορισμός 2.22. Τοπικά Lipschitz

Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται τοπικά Lipschitz στο $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, αν κάθε σημείο του \mathcal{D} έχει μια γειτονιά \mathcal{D}_0 που να ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz για κάποια σταθερά Lipschitz K_0 .

Μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση στο \mathcal{D} δεν είναι απαραίτητα και Lipschitz στο \mathcal{D} γιατί η συνθήκη μπορεί να μην ισχύει ομοιόμορφα.

Ορισμός 2.23. Ολικά Lipschitz

Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται ολικά Lipschitz αν είναι Lipschitz στο \mathbb{R}^n .

Θεώρημα 2.3. Θεώρημα μέσης τιμής

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, b) τότε

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2.21)$$

για κάποιο c στο (a, b) .

Η απόδειξη βρίσκεται στο [26].

2.5 Επαυξημένος Lagrangian Αλγόριθμος

Σε αυτό το μέρος θα επεξηγήσουμε πιο αναλυτικά τον Επαυξημένο Lagrangian Αλγόριθμο [1] τον οποίο θα εφαρμόσουμε αργότερα για να οδηγηθούμε σε κατανεμημένη βελτιστοποίηση.

Έστω ότι έχουμε ένα συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο δίκτυο $\mathcal{G} = (V, E)$ N -κόμβων, όπου V είναι το σύνολο των κόμβων και E το σύνολο των ακμών. Ο κόμβος i έχει συνάρτηση κόστους $f_i(y)$, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ο στόχος είναι να λυθεί το πιο κάτω μη περιορισμένο πρόβλημα μέσω ενός επαναληπτικού, κατανεμημένου αλγόριθμου.

$$\text{minimize } f(y) := \sum_{i=1}^N f_i(y) \quad (2.22)$$

με τον κάθε κόμβο i να επικοινωνεί μόνο με τους γείτονες του.

Ο Επαυξημένος Lagrangian (EL) Αλγόριθμος ακολουθεί μια δυϊκή προσέγγιση όπου αναθέτει ένα τοπικό αντίγραφο $y_i \in \mathbb{R}^n$ της καθολικής μεταβλητής y από την (2.22) για κάθε κόμβο i . Η δυϊκή μέθοδος που χρησιμοποιείται από τον αλγόριθμο είναι η ακόλουθη:

$$(y_1[k+1], \dots, y_N[k+1]) = \operatorname{argmin}_{(y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^{nN}} L_a(y_1, \dots, y_N; \mu_1[k], \dots, \mu_N[k]) \quad (2.23)$$

$$\mu_i[k+1] = \mu_i[k] + a \sum_{j \in N_i} W_{ij} (y_i[k+1] - y_j[k+1]) \quad (2.24)$$

με $a > 0$ βηματική σταθερά και $L_a : \mathbb{R}^{nN} \times \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}$, η EL δυϊκή συνάρτηση

$$L_a(y_1, \dots, y_N; \mu_1, \dots, \mu_N) = \sum_{i=1}^N f_i(y_i) + \sum_{i=1}^N \mu_i^\top y_i + \frac{\rho}{2} \sum_{i,j \in E, i \leq j} W_{ij} \|y_i - y_j\|^2 \quad (2.25)$$

Για την υλοποίηση του αλγόριθμου επιβάλλεται ο περιορισμός για τις ακμές $\sqrt{W_{ij}}(y_i - y_j) = 0, \forall i, j \in E$ όπου το W_{ij} είναι ένα θετικό βάρος. Με $\mu_i := \sum_{j \in N_i} \sqrt{W_{ij}} \lambda_{(i,j)} \operatorname{sign}(j - i)$ ($\operatorname{sign}(0) := 1$) ορίζουμε τις δυϊκές μεταβλητές κάθε κόμβου, όπου N_i είναι η γειτονιά του κόμβου i συμπεριλαμβανομένου και με $\lambda_{(i,j)} \in \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε τις δυϊκές μεταβλητές που οφείλονται στον περιορισμό των ακμών. Ο όρος $\frac{\rho}{2} \sum_{i,j \in E, i \leq j} W_{ij} \|y_i - y_j\|^2$ στην (2.25) έχει τον ρόλο ενός τετραγωνικού κόστους.

Τα $y_i[k]$ και $\mu_i[k]$ στην (2.23), (2.24) είναι οι κύριες και δυϊκές μεταβλητές αντίστοιχα. Όταν το $\rho = 0$, η ανανέωση των κύριων μεταβλητών γίνεται χωρίς να χρειάζεται εσωτερική επικοινωνία μεταξύ των γειτόνων καθώς φεύγει ο τελευταίος όρος στην (2.25). Αν όμως $\rho > 0$

είναι αναγκαία η επικοινωνία αυτή μεταξύ των γειτονικών κόμβων για να μπορούν να λύσουν επαναληπτικά την (2.23). Από την άλλη, η ανανέωση των δυϊκών μεταβλητών επιτρέπει την κατανομημένη υλοποίηση καθώς ο κάθε κόμβος i χρειάζεται από τους γείτονες του μόνο τις κύριες μεταβλητές $y_j[k + 1]$.

2.5.1 Αλγόριθμος για την Επίλυση της (2.23)

Για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της (2.23) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια κλασική μέθοδο με ανανέωση των κύριων μεταβλητών μέσω βαθμίδας. Η ιδέα της μεθόδου είναι, για κάθε εξωτερική επανάληψη k , να χρησιμοποιήσουμε εσωτερικές επαναλήψεις, s , για να λύσουμε την (2.23). Για την ανανέωση των κύριων μεταβλητών στις εσωτερικές επαναλήψεις, χρησιμοποιείται η μέθοδος κατάβασης βαθμίδας στην δυϊκή συνάρτηση $L_a(\cdot; \mu[k])$ και για την ανανέωση των δυϊκών μεταβλητών στις εξωτερικές επαναλήψεις οι κύριες μεταβλητές είναι σταθερές, και εφαρμόζεται η μέθοδος δυϊκής ανάβασης βαθμίδας. Πιο κάτω θα παρουσιάσουμε τα 4 βήματα του αλγορίθμου που περιγράψαμε.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2.1: Αλγόριθμος EL με ανανέωση κύριων μεταβλητών μέσω βαθμίδας

1: **(Αρχικοποιήσεις)** Ο κόμβος i θέτει το $k = 0$, $y_i[k = 0] \in \mathbb{R}^n$, $y_i[k = 0] = y_i[0]$, και $\mu_i[k = 0] = 0$.

2: **(Εσωτερικές επαναλήψεις)** Οι κόμβοι εκτελούν συνεργατικά την μέθοδο κατάβασης βαθμίδας για $s = 0, 1, \dots, \tau - 1$, με $y_i[k, s = 0] := y_i[k]$ και $\bar{y}_i[k, s = 0] := \bar{y}_i[k]$:

$$y_i[k, s + 1] = (1 - \beta\rho)y_i[k, s] + \beta\rho\bar{y}_i[k, s] - \beta(\mu_i[k] + \nabla f_i(y_i[k, s])) \quad (2.26)$$

$$\bar{y}_i[k, s + 1] = \sum_{j \in N_i} W_{ij} y_j[k, s + 1] \quad (2.27)$$

και θέτουμε $y_i[k + 1] := y_i[k, s = \tau]$, $\bar{y}_i[k + 1] = \bar{y}_i[k, s = \tau]$.

3: **(Εξωτερικές επαναλήψεις)** Ο κόμβος i ανανεώνει την δυϊκή μεταβλητή $\mu_i[k]$:

$$\mu_i[k + 1] = \mu_i[k] + a(y_i[k + 1] - \bar{y}_i[k + 1]) \quad (2.28)$$

4: Θέτουμε $k \mapsto k + 1$ και πάμε στο βήμα 2.

Ο αλγόριθμος έχει, ως παράμετρος ρύθμισης, τον πίνακα βαρών W , τον αριθμό τ των εσωτερικών επαναλήψεων ανά εξωτερική επανάληψη, την παράμετρο κόστους $\rho \geq 0$, την κύρια βηματική σταθερά $\beta > 0$ και την δυϊκή βηματική σταθερά $a > 0$. Με τον συμβολισμό $y_i[k, s]$ εννοούμε την κύρια μεταβλητή του κόμβου i στην εσωτερική επανάληψη s και εξωτερική επανάληψη k και με $\mu_i(k)$ την δυϊκή μεταβλητή του κόμβου i στην εξωτερική επανάληψη k . Ο συσχετισμός των κύριων μεταβλητών μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών επαναλήψεων γίνεται με τις σχέσεις $y_i[k, s = 0] := y_i[k]$ και $y_i[k + 1] := y_i[k, s = \tau]$. Επιπλέον, ο κάθε κόμβος διατηρεί τον δικό του σταθευμένο μέσο όρο και τις κύριες μεταβλητές των γειτόνων του $\bar{y}_i[k, s] := \sum_{j \in N_i} W_{ij} y_j[k, s]$ και $\bar{y}_i[k] := \sum_{j \in N_i} W_{ij} y_j[k]$.

Κεφάλαιο 3

Προσεγγιστική Βέλτιστη Συμφωνία με χρήση GRASSP μεταβλητών

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε το πρόβλημα της προσεγγιστικής βέλτιστης συμφωνίας στην Ενότητα 3.1 και εισάγουμε για πρώτη φορά τις νέες μεταβλητές GRASSP στην υποενότητα 3.1.1. Στην συνέχεια, στην Ενότητα 3.2 διατυπώνουμε το βασικό μας θεώρημα και δείχνουμε πως ρυθμίζοντας κατάλληλα τις μεταβλητές αυτές μπορούμε να φτάσουμε σε προσεγγιστική βέλτιστη συμφωνία των εξόδων.

3.1 Το πρόβλημα προσεγγιστικής βέλτιστης συμφωνίας

Για ένα πολυπρακτορικό σύστημα με N πράκτορες με εξόδους $y_i \in \mathbb{R}^n$, $n \in N$ και συναρτήσεις κόστους $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in V$, το πρόβλημα προσεγγιστικής βέλτιστης συμφωνίας που συστήνεται στο [22], είναι να σχεδιαστεί ένας καταναμημένος νόμος ελέγχου για κάθε πράκτορα που να διασφαλίζει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - \mathbf{1}_N \otimes y^*\| \leq c\epsilon, \forall i \in V$$

όπου $y^* \in \mathbb{R}^n$ είναι η βέλτιστη λύση της (2.22), $\epsilon > 0$ είναι η παράμετρος σχεδίασης που μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μικρή, και $c > 0$ είναι μια σταθερά που δεν εξαρτάται από το ϵ .

Στην συνέχεια, κάνουμε τις παρακάτω υποθέσεις σχετικά με το μοντέλο βελτιστοποίησης, το μοντέλο επικοινωνίας και το μοντέλο δικτύου.

Υπόθεση 1. Μοντέλο βελτιστοποίησης

Οι συναρτήσεις κόστους $f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ είναι κυρτές, διπλά διαφορίσιμες με φραγμένη Ερσιανή, και υπάρχουν $0 < h_{\min} \leq h_{\max} < \infty$, τέτοιο ώστε, για κάθε i :

$$h_{\min} \mathbf{I} \leq \nabla^2 f_i(y) \leq h_{\max} \mathbf{I}, \forall y \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω υπόθεση, το πρόβλημα (2.22) είναι επιλύσιμο με βέλτιστη λύση y^* και με $f^* = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) = f(y^*)$ βέλτιστη τιμή. Επιπρόσθετα, η υπόθεση 1

υποδηλώνει ότι η ∇f_i είναι Lipschitz συνεχής και η f_i ισχυρά κυρτή, $\forall i, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\nabla f_i(x) - \nabla f_i(y)\| \leq h_{max}\|x - y\| \quad (3.2)$$

$$f_i(y) \geq f_i(x) + \nabla f_i(x)^\top (y - x) + \frac{h_{min}}{2}\|x - y\|^2 \quad (3.3)$$

Υπόθεση 2. Μοντέλο επικοινωνίας

Το δίκτυο επικοινωνίας αναπαρίσταται από τον γράφο $\mathcal{G} = (V, E)$ που αποτελείται από ένα σύνολο V από N κόμβους, και ένα σύνολο ακμών $E \subset V \times V$, το οποίο περιλαμβάνει και τις ακμές του κόμβου προς τον ίδιο : $\{i, i\} \in E, \forall i$.

Οι πράκτορες σε αυτό το δίκτυο επικοινωνούν μεταξύ τους μόνο κάθε D περιόδους δειγματοληψίας, δηλαδή στα διακριτά σημεία του χρόνου $t = DT$, όπου T είναι η περίοδος δειγματοληψίας και D μια θετική σταθερά. Στο χρονικό σημείο εκείνο, ο πράκτορας i λαμβάνει σχετικά δείγματα της εξόδου $y_j(DT)$ από τον γείτονα του j . Έτσι, για μεγάλα D η επικοινωνία των πρακτόρων γίνεται με πολύ χαμηλή συχνότητα.

Για να ληφθούν υπόψη πιθανές καθυστερήσεις στο επικοινωνιακό δίκτυο, υποθέτουμε ότι η μέτρηση της εξόδου $y_j(DT)$ από τον πράκτορα j είναι διαθέσιμη στον πράκτορα i σε μετέπειτα χρόνο, $DT + d_M$, με $d_M \geq 0$ να καθορίζει τη μέγιστη επιτρεπτή καθυστέρηση επικοινωνίας. Επίσης, επιλέγουμε περίοδο δειγματοληψίας αρκετά μεγάλη, για να είναι μεγαλύτερη από τη μέγιστη καθυστέρηση επικοινωνίας.

Υπόθεση 3. Μοντέλο δικτύου

Ο γράφος \mathcal{G} είναι συνεκτικός και μη κατευθυνόμενος.

Οι πίνακες που συσχετίζονται με τον γράφο \mathcal{G} είναι ο $N \times N$ πίνακας με βάρη W , όπου είναι συμμετρικός, στοχαστικός με $W_{ij} > 0$, για $i \neq j$, αν $\{i, j\} \in E$, και $W_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} W_{ij}$. Επιπλέον, ο W είναι θετικά ορισμένος και η δεύτερη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του είναι $\lambda_{N-1}(W) < 1$.

Επιπρόσθετα, ορίζουμε $\mathcal{L} := \mathbb{I} - W$ το λαπλασιανό πίνακα γράφου με βάρη, όπου $\lambda_2(\mathcal{L}) = 1 - \lambda_{N-1}(W) \in (0, 1]$ είναι το φασματικό κενό δικτύου που υπολογίζει το πόσο καλά είναι συνδεδεμένο το δίκτυο. Έτσι, ο λαπλασιανός πίνακας μπορεί να δεχτεί την ακόλουθη φασματική αποσύνθεση

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{1_N}{\sqrt{N}} & \mathcal{Q} \\ \mathbf{0}_{N-1} & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{N-1}^T \\ \mathbf{0}_{N-1} & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1_N^T}{\sqrt{N}} \\ \mathcal{Q}^T \end{bmatrix} = \mathcal{Q} \Lambda \mathcal{Q}^T \quad (3.4)$$

όπου $\Lambda = \text{diag}([\lambda_2(\mathcal{L}), \dots, \lambda_N(\mathcal{L})])$ και $\mathcal{Q} := [q_2, \dots, q_N] \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$ είναι ο πίνακας με στήλες τα αντίστοιχα δεξιά ιδιοδιανύσματα. Επιπλέον, ισχύει ότι $(1/N)\mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T + \mathcal{Q} \mathcal{Q}^T = \mathbb{I}_N$, $\mathcal{Q}^T \mathcal{Q} = \mathbb{I}_{N-1}$, $\mathbf{1}_N^T \mathcal{Q} = \mathbf{0}$.

3.1.1 Μεταβλητές GRASSP

Με σκοπό την αντιμετώπιση του προβλήματος της προσεγγιστικής βέλτιστης συμφωνίας, προτείνουμε ένα νόμο ελέγχου για κάθε πράκτορα που θα χρησιμοποιεί μόνο δειγματοληπτικές μετρήσεις από τις εξόδους των γειτόνων του. Έχοντας υπόψη αυτό, αρχικά εισάγουμε τις ακόλουθες GRAdient-based Smoothed optimal consensus with SParse communication

(GRASSP) μεταβλητές συνεχούς χρόνου

$$z_i(t) := y_i(t) - r\left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right) s_i\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right) - \left[1 - r\left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right)\right] s_i\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T - T\right) \quad (3.5)$$

όπου το διακριτού χρόνου μεταβλητό διάνυσμα s_i ορίζεται ως:

$$s_i\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right) := y_i\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right) - \beta \nabla f_i\left(y_i\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right)\right) - \alpha \beta \sum_{j \in N_i} \sum_{l=1}^{\lfloor t/DT \rfloor} W_{ij}(y_i(lDT) - y_j(lDT)) \quad (3.6)$$

για κάθε $i \in V$ με $\alpha, \beta > 0$. Οι παράμετροι W_{ij} είναι τα στοιχεία του πίνακα γειτνίασης W του γράφου που περιγράφει την επικοινωνία μεταξύ των πρακτόρων. Ο τελευταίος όρος στο δεξί μέρος της (3.6) αναφέρεται στην επικοινωνία μεταξύ των πρακτόρων. Όσον αφορά τον λόγο που επιλέχθηκε η συγκεκριμένη μεταβλητή s_i , αυτή διαμορφώνει τα διακριτά βήματα του EL αλγορίθμου που θα μας οδηγήσει σε καταναμημένη βελτιστοποίηση.

Η συνάρτηση $r : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$, είναι μια βοηθητική συνεχής συνάρτηση που χρησιμοποιείται για να εισαχθούν τα δείγματα από τους γείτονες μέσω της $s_i(kT)$ στην $z_i(t)$ με ένα συνεχή τρόπο. Την ορίζουμε ως

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, d_M] \\ \frac{t-d_M}{T-d_M} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{t-d_M}{T-d_M}\right), & t \in [d_M, T] \\ 1, & t > T \end{cases} \quad (3.7)$$

Παρατηρούμε ότι η r είναι αύξουσα, συνεχώς διαφορίσιμη για $t \geq 0$ και οι dr/dt και d^2r/dt^2 είναι επίσης συνεχείς στο χρόνο αυτό. Από τον ορισμό, βλέπουμε επίσης ότι είναι μηδενική για $t \in [0, d_M]$, πράγμα που εξασφαλίζει ότι οι GRASSP μεταβλητές μας, θα χρησιμοποιήσουν τα δείγματα μετά από χρόνο d_M από όταν έγινε η τελευταία δειγματοληψία.

Σημείωση 1. Η συνάρτηση $r(t - \lfloor t/T \rfloor T)$ είναι ασυνεχής για $t = kT$, $k \in \mathbb{N}$, όμως οι μεταβλητές $z_i(t)$ είναι δύο φορές συνεχείς διαφορίσιμες συναρτήσεις για δύο φορές συνεχή διαφορίσιμη συνάρτηση $y_i(t)$. Η συνέχεια της z_i στους χρόνους δειγματοληψίας $t = kT$, $k \in \mathbb{N}$, μπορεί να αποδειχθεί καδώς:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow kT^-} z_i(t) &= y_i(kT) - [1 - r(T)]s_i((k-2)T) - r(T)s_i((k-1)T) = y_i(kT) - s_i((k-1)T) \\ \lim_{t \rightarrow kT^+} z_i(t) &= y_i(kT) - [1 - r(0)]s_i((k-1)T) - r(0)s_i(kT) = y_i(kT) - s_i((k-1)T) \end{aligned}$$

Επιπρόσθετα, αφού $d^\ell r(t)/dt^\ell|_{t=kT} = 0$, για $\ell = 1, 2$, οι μεταβλητές z_i έχουν επίσης συνεχή παραγώγους με $z_i^{(\ell)}(kT) = y_i^{(\ell)}(kT)$.

Σημείωση 2. Για $t \in (DT, (D+1)T)$ ισχύει ότι $z_i(t) = y_i(t) - [1 - r(t - DT)]s_i((D-1)T) - r(t - DT)s_i(DT)$. Από τον ορισμό της $r(t)$ στη (4.12) έχουμε ότι $r(t - DT) = 0$, $\forall t \in (DT, DT + d_M)$. Επομένως, η μέτρηση $s_i(DT)$ χρειάζεται μόνο για $t \geq DT + d_M$ στον υπολογισμό του $z_i(t)$. Έτσι, ο νόμος ελέγχου που θα εφαρμόσουμε στα $z_i(t)$, θα πέρνει τις γειτονικές εξόδους $y_j(DT)$, ($j \in N_i$) που θα χρησιμοποιηθούν από το $s_i(DT)$, μόνο μετά από χρόνο $DT + d_M$. Αυτό μας επιτρέπει να λάβουμε υπόψη πιθανές καθυστερήσεις επικοινωνίας μεταξύ των πρακτόρων.

Η ιδέα αυτής της σταδιακής ενσωμάτωσης ενός διακριτού σήματος $s_i(k)$ σε ένα διαρκώς-μεταβαλλόμενο σήμα $z_i(t)$ για κάθε πράκτορα και η επιλογή αυτών των μεταβλητών αναπτύχθηκε στην εργασία των H. E. Psillakis, Q.Wang [27] και H. E. Psillakis, K. A. Oikonomidis [23].

Από την (3.5), το ισοδύναμο σύστημα διακριτού χρόνου είναι το ακόλουθο:

$$z_i[k+1] = y_i[k+1] - y_i[k] + \beta \nabla f_i(y_i[k]) + a\beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \sum_{l=1}^{\lfloor k/D \rfloor} W_{ij}(y_i[lD] - y_j[lD]), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.8)$$

Αν ορίσουμε $z := \text{col}(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^{nN}$, $y := \text{col}(y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^{nN}$, $\nabla f(y) := \text{col}(\nabla f_1(y_1), \dots, \nabla f_N(y_N)) \in \mathbb{R}^{nN}$ και

$$\mu[k] := a \sum_{l=1}^{\lfloor k/D \rfloor} (L \otimes \mathbb{I}_n) y[lD] \quad (3.9)$$

τότε μπορούμε να γράψουμε την (3.8) σε συμπαγή μορφή πίνακα

$$z[k+1] = y[k+1] - y[k] + \beta \nabla f(y[k]) + \beta \mu[k] \quad (3.10)$$

Από τον ορισμό του $\mu[k]$ στην (3.9) πέρνουμε ότι

$$\mu[vD + \ell] = \begin{cases} \mu[vD], & \ell = 1, 2, \dots, D-1 \\ \mu[vD] + a(L \otimes \mathbb{I}_n) y[(v+1)D], & \ell = D \end{cases} \quad (3.11)$$

για κάθε $v \in \mathbb{N}$. Δηλαδή το $\mu[k]$ ανανεώνεται μόνο όταν φτάσουμε στις D περιόδους δειγματοληψίας, οποιαδήποτε άλλη στιγμή παραμένει σταθερό. Επαναχρησιμοποιώντας τον ορισμό του $\mu[k]$ από την (3.9) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mathbf{1}_N^T L = 0$, ισχύει ότι $(\mathbf{1}_N \otimes \mathbb{I}_n)^T \mu[k] = 0$ για όλα τα $k \in \mathbb{N}$.

3.2 Βέλτιστη συμφωνία με μεταβλητές GRASSP

Στο μέρος αυτό, θα δείξουμε ότι μπορούμε να πετύχουμε προσεγγιστική βέλτιστη συμφωνία των εξόδων αν όλες οι μεταβλητές z_i είναι ρυθμισμένες σε μια γειτονιά του 0. Αρχικά διατυπώνουμε το βασικό μας θεώρημα που θα αποδείξουμε στην πορεία.

Θεώρημα 3.4. Θεωρούμε N πράκτορες με εξόδους $y_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in V$. Αν:

1. Ισχύουν οι υποθέσεις 1,2, 3,
2. Όλες οι μεταβλητές $z_i(t)$ που ορίζονται από την (3.5), είναι ομοιόμορφα φραγμένες και υπάρχει $T_z > 0$ τέτοιο ώστε $\|z_i[t]\| < \epsilon$ για κάθε $t \geq T_z$, $i = 1, 2, \dots, N$, με $\epsilon > 0$,

τότε η έξοδος $y(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη και υπάρχει $T_y \geq T_z$ τέτοιο ώστε $\|y(t) - y^*\| < c\epsilon$ για κάθε $t \geq T_y$, όπου c είναι μια θετική σταθερά ανεξάρτητη του ϵ .

Πρώτα εξετάζουμε το ακόλουθο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\nabla F(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\mu} = 0 \quad (3.12)$$

$$(L \otimes \mathbb{I}_n)\mathbf{y} = 0 \quad (3.13)$$

$$(\mathbf{1}_N \otimes \mathbb{I}_n)^\top \boldsymbol{\mu} = 0 \quad (3.14)$$

Στην (3.12), η $F : \mathbb{R}^{Nn} \mapsto \mathbb{R}$ ορίζεται ως $F(\mathbf{y}) = F(y_1, \dots, y_N) = \sum_{i=1}^N f_i(y_i)$ και $\mathbf{y} := \text{col}(y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^{Nn}$, $\boldsymbol{\mu} = \text{col}(\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{R}^{Nn}$. Το πιο κάτω Λήμμα στο [1] αποδεικνύει ότι η λύση $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$ του συστήματος (3.12)-(3.14) είναι η λύση στο πρόβλημα βελτιστοποίησης (2.22).

Λήμμα 3.1. (Λήμμα 2 από [1])

Θεωρούμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης (2.22), και το σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων (3.12)-(3.14), και έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις 1 και 3. Τότε, υπάρχει μοναδικό $(\mathbf{y}^\bullet, \boldsymbol{\mu}^\bullet) \in \mathbb{R}^{Nn} \times \mathbb{R}^{Nn}$ που ικανοποιεί τις (3.12)-(3.14), με $\mathbf{y}^\bullet = \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{y}^*$ όπου $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^n$ είναι η λύση της (2.22) και $\boldsymbol{\mu}^\bullet = -\nabla F(\mathbf{1} \otimes \mathbf{y}^*)$.

Σε αυτό το σημείο, ορίζουμε την Lagrangian συνάρτηση

$$L_a(y_1, \dots, y_N; \mu_1, \dots, \mu_N) = \sum_{i=1}^N f_i(y_i) + \sum_{i=1}^N \mu_i^\top y_i \quad (3.15)$$

και την $\mathbf{y}'[\boldsymbol{\mu}] := \text{argmin}_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{Nn}} L_a(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu})$, για κάθε $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{Nn}$.

Επίσης, συμβολίζουμε με $\mathbf{y}[k] := \text{col}(y_1[k], \dots, y_N[k])$, και $\boldsymbol{\mu}[k] := \text{col}(\mu_1[k], \dots, \mu_N[k])$. Η συνάρτηση $L_a(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu})$ είναι ισχυρά κυρτή στο \mathbf{y} , για κάθε $\boldsymbol{\mu}$. Η εξίσωση (3.10) μπορεί ισοδύναμα να θεωρηθεί ως ένας κανόνας ανανέωσης για το $\mathbf{y}[k]$ με το $\mathbf{z}[k+1]$ σαν ένας όρος διαταραχής.

Το ακόλουθο λήμμα περιγράφει πως το σφάλμα $\mathbf{y}[\nu D + \ell + 1] - \mathbf{y}'[\boldsymbol{\mu}[\nu D]]$ διαδίδεται για $\ell = 0, 1, 2, \dots, D-1$.

Λήμμα 3.2. Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις 1,3. Τότε, από την (3.10) ισχύει ότι:

$$\|\mathbf{y}[(\nu+1)D] - \mathbf{y}'[\boldsymbol{\mu}[\nu D]]\| \leq \xi \|\mathbf{y}[\nu D] - \mathbf{y}'[\boldsymbol{\mu}[\nu D]]\| + cM_D[\nu+1] \quad (3.16)$$

με ξ, c θετικές σταθερές και $M_D[\nu] := \sup_{(\nu-1)D+1 \leq \ell \leq \nu D} \|\mathbf{z}[\ell]\|$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό του \mathbf{y}' , έχουμε ότι

$$\boldsymbol{\mu}[\nu D] + \nabla F(\mathbf{y}'[\boldsymbol{\mu}[\nu D]]) = 0. \quad (3.17)$$

Αν αφαιρέσουμε $\mathbf{y}'[\boldsymbol{\mu}[\nu D]]$ και από τις δύο πλευρές της (3.10) και χρησιμοποιώντας την (3.17) πέρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}[\nu D + \ell + 1] - \mathbf{y}'[\boldsymbol{\mu}[\nu D]] &= \mathbf{y}[\nu D + \ell] - \mathbf{y}'[\boldsymbol{\mu}[\nu D]] \\ &\quad - \beta(\nabla F(\mathbf{y}[\nu D + \ell]) - \nabla F(\mathbf{y}'[\boldsymbol{\mu}[\nu D]])) + \mathbf{z}[\nu D + \ell + 1]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ορίζουμε τώρα τον όρο $\mathcal{Q}_0[vD; \ell] := y[vD + \ell] - y'[\mu[vD]] - \beta(\nabla F(y[vD + \ell]) - \nabla F(y'[\mu[vD]]))$. Προκύπτει

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_0[vD; \ell]\|^2 &= \|y[vD + \ell] - y'[\mu[vD]]\|^2 + \beta^2 \|\nabla F(y[vD + \ell]) - \nabla F(y'[\mu[vD]])\|^2 \\ &\quad - 2\beta(y[vD + \ell] - y'[\mu[vD]])^\top [\nabla F(y[vD + \ell]) - \nabla F(y'[\mu[vD]])] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τις (2.17), (3.2) και καταλήγουμε ότι

$$\|\mathcal{Q}_0[vD; \ell]\|^2 \leq \kappa_\beta \|y[vD + \ell] - y'[\mu[vD]]\|^2 \quad (3.20)$$

όπου $\kappa_\beta := 1 - 2\beta h_{\min} + \beta^2 h_{\max}^2 > 0$.

Στη συνέχεια, πέρνουμε το τετράγωνο της νόρμας της (3.18):

$$\|y[vD + \ell + 1] - y'[\mu[vD]]\|^2 = \|\mathcal{Q}_0[vD; \ell] + z[vD + \ell + 1]\|^2$$

Επομένως, ισχύει :

$$\|y[vD + \ell + 1] - y'[\mu[vD]]\|^2 \leq \|\mathcal{Q}_0[vD; \ell]\|^2 + \|z[vD + \ell + 1]\|^2 + 2z^\top[vD + \ell + 1]\mathcal{Q}_0[vD; \ell]$$

Ακόμη, εφαρμόζοντας ότι $2z^\top[vD + \ell + 1]\mathcal{Q}_0[vD; \ell] \leq c_z \|z[vD + \ell + 1]\|^2 + (1/c_z)\|\mathcal{Q}_0[vD; \ell]\|^2$ για κάθε $c_z > 0$, προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\|y[vD + \ell + 1] - y'[\mu[vD]]\|^2 \leq (1 + 1/c_z)\|\mathcal{Q}_0[vD; \ell]\|^2 + (1 + c_z)\|z[vD + \ell + 1]\|^2$$

Από την (3.20) αποκτούμε το πιο κάτω:

$$\begin{aligned} \|y[vD + \ell + 1] - y'[\mu[vD]]\|^2 &\leq (1 + 1/c_z)\kappa_\beta \|y[vD + \ell] - y'[\mu[vD]]\|^2 \\ &\quad + (1 + c_z)\|z[vD + \ell + 1]\|^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Εκμεταλλεύοντας την ανισότητα $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ για $a, b \geq 0$ έχουμε ως αποτέλεσμα :

$$\|y[vD + \ell + 1] - y'[\mu[vD]]\| \leq v_1 \|y[vD + \ell] - y'[\mu[vD]]\| + v_2 \|z[vD + \ell + 1]\| \quad (3.22)$$

με $v_1 := (1 + 1/c_z)^{1/2} \kappa_\beta^{1/2}$ και $v_2 := (1 + c_z)^{1/2}$.

Τέλος, με αναδρομική εφαρμογή της (3.22) για $\ell = 0, 1, \dots, D-1$, συνδιαζόμενο με το ότι $\mu[vD + \ell] = \mu[vD]$, καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση για το σφάλμα μεταξύ των εξόδων $y[(v+1)D]$ και $y'[\mu[vD]]$:

$$\begin{aligned} \|y[(v+1)D] - y'[\mu[vD]]\| &\leq v_1^D \|y[vD] - y'[\mu[vD]]\| + v_2 \sum_{\ell=1}^D v_1^{D-\ell} \|z[vD + \ell]\| \\ &\leq v_1^D \|y[vD] - y'[\mu[vD]]\| + \frac{v_2(1 - v_1^D)}{1 - v_1} \sup_{vD+1 \leq \ell \leq (v+1)D} \|z[\ell]\| \end{aligned} \quad (3.23)$$

όπου αποδεικνύεται η (3.16) για $\xi := v_1^D$ και $c := v_2(1 - v_1^D)/(1 - v_1)$. \square

Σημείωση 3. Επιλέγοντας $\beta < 2h_{\min}/h_{\max}^2$ διασφαλίζουμε ότι $0 < \kappa_\beta < 1$ και ότι υπάρχει c_z αρκετά μεγάλο τέτοιο ώστε $\nu_1 < 1$.

Υποδηλώνουμε με $y_D[k] := y[kD]$, $\mu_D[k] := \mu[kD]$ και ορίζουμε ως $\tilde{y}[k] := y_D[k] - y^\bullet$ και $\tilde{\mu}[k] := \mu_D[k] - \mu^\bullet$ τα κύρια και δυϊκά σφάλματα, αντίστοιχα. Επίσης, για να διευκολύνουμε την συμβολογραφία, γράφουμε $y'[k+1] := y'[\mu_D[k]]$. Από τον ορισμό του y' , y^\bullet , μ^\bullet έχουμε ότι $\mu_D[k] = -\nabla F(y'(\mu_D[k])) = -\nabla F(y'[k+1])$ και $\mu^\bullet = -\nabla F(y^\bullet)$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής που περιγράφηκε στο (2.21), φτάνουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} \mu_D[k] - \mu^\bullet &= \nabla F(y^\bullet) - \nabla F(y'[k+1]) \\ &= \nabla^2 F(y) \Big|_{y=c y'[k+1] + (1-c)y^\bullet} (y^\bullet - y'[k+1]) \end{aligned} \quad (3.24)$$

για κάποιο $c \in (0, 1)$. Αφού οι $\nabla^2 F(x)$ και $\nabla^2 f_i(x_i)$ είναι θετικά ορισμένοι τότε εξασφαλίζεται η αντιστρεψιμότητά τους, $\forall x \in \mathbb{R}^{Nn}$, $\forall x_i \in \mathbb{R}^n$. Τότε από την υπόθεση 1:

$$\frac{1}{h_{\max}} I \leq (\nabla^2 F(y))^{-1} \leq \frac{1}{h_{\min}} I, \quad \forall y \in \mathbb{R}^{Nn} \quad (3.25)$$

Τελικά, από (3.24) πέρνουμε

$$\|y'[k+1] - y^\bullet\| \leq \left\| \left(\nabla^2 F(y) \Big|_{y=c y'[k+1] + (1-c)y^\bullet} \right)^{-1} \right\| \|\mu_D[k] - \mu^\bullet\| \leq \frac{1}{h_{\min}} \|\mu_D[k] - \mu^\bullet\| \quad (3.26)$$

Τώρα, με τη βοήθεια των πιο πάνω ανισοτήτων, θα αποδείξουμε τα παρακάτω λήμματα. Αρχικά, θα θέσουμε ένα άνω φράγμα για το κύριο σφάλμα $\|\tilde{y}[k+1]\|$.

Λήμμα 3.3. Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις 1, 3. Τότε, για $k = 0, 1, \dots$,

$$\|\tilde{y}[k+1]\| \leq \xi \|\tilde{y}[k]\| + \frac{1+\xi}{h_{\min}} \|\tilde{\mu}[k]\| + cM_D[k+1]$$

Απόδειξη. Γράφουμε το $\|\tilde{y}[k+1]\| = \|(y_D[k+1] - y'[k+1]) + (y'[k+1] - y^\bullet)\|$. Άρα, $\|\tilde{y}[k+1]\| \leq \|y_D[k+1] - y'[k+1]\| + \|y'[k+1] - y^\bullet\|$. Εφαρμόζοντας την (3.16), έχουμε ότι $\|\tilde{y}[k+1]\| \leq \xi \|y_D[k] - y'[k+1]\| + cM_D[k+1] + \|y'[k+1] - y^\bullet\| = \xi \|(y_D[k] - y^\bullet) - (y'[k+1] - y^\bullet)\| + cM_D[k+1] + \|y'[k+1] - y^\bullet\|$. Το τελευταίο είναι άνω φραγμένο ως

$$\|\tilde{y}[k+1]\| \leq \xi \|\tilde{y}[k]\| + (1+\xi) \|y'[k+1] - y^\bullet\| + cM_D[k+1] \quad (3.27)$$

Από (3.26), (3.27) πέρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. \square

Ας ορίσουμε τώρα τις $\tilde{\mu}'[k] := (Q^\top \otimes I_n) \tilde{\mu}[k] \in \mathbb{R}^{(N-1)n}$, $\tilde{\mu}''[k] := (\Lambda^{-1/2} \otimes I_n) \tilde{\mu}'[k]$ και τον $(Nn) \times (Nn)$ πίνακα

$$R[k; c] = \left(\nabla^2 F(y) \Big|_{y=c y'[k+1] + (1-c)y^\bullet} \right)^{-1}, \quad c \in (0, 1) \quad (3.28)$$

Όπως προέκυψε από την ανάλυση του κύριου σφάλματος, θα χρειαστούμε να φράξουμε και το δυϊκό σφάλμα $\|\tilde{\mu}[k+1]\|$ μέσω του μετασχηματισμού του $\|\tilde{\mu}''[k+1]\|$.

Λήμμα 3.4. Έστω ότι $a \leq h_{\min}$, και ισχύουν οι υποθέσεις 1 και 3. Τότε, για όλα τα $k = 0, 1, \dots$

$$\|\tilde{\mu}''[k+1]\| \leq \left[\left(1 - \frac{a\beta_2(\mathcal{L})}{h_{\max}}\right) + \frac{a}{h_{\min}}\xi \right] \|\tilde{\mu}''[k]\| + a\xi\|\tilde{y}[k]\| + acM_D[k+1]$$

Απόδειξη. Αφού ισχύει ότι $(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I})\mathbf{y}^\bullet = (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I})(\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{y}^*) = \mathbf{0}$:

$$(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I})y_D[k+1] = (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I})(y_D[k+1] - y'[k+1]) + (\mathcal{L} \otimes \mathbb{I})(y'[k+1] - \mathbf{y}^\bullet)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση και αφαιρώντας μ^\bullet από τις δύο πλευρές της (3.11) έχουμε:

$$\tilde{\mu}[k+1] = \tilde{\mu}[k] + a(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I})(y'[k+1] - \mathbf{y}^\bullet) + a(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I})(y_D[k+1] - y'[k+1]) \quad (3.29)$$

Εφαρμόζοντας επιπλέον την (3.24) στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\tilde{\mu}[k+1] = (\mathbb{I} - a(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I})R[k; c])\tilde{\mu}[k] + a(\mathcal{L} \otimes \mathbb{I})(y_D[k+1] - y'[k+1]) \quad (3.30)$$

Από τον ορισμό της $\tilde{\mu}'[k]$, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$$\|\tilde{\mu}'[k]\|^2 = \tilde{\mu}^T[k](\mathcal{Q}\mathcal{Q}^T \otimes \mathbb{I}_n)\tilde{\mu}[k] = \tilde{\mu}^T[k](\mathcal{Q}\mathcal{Q}^T + \mathbf{1}\mathbf{1}^T/N \otimes \mathbb{I}_n)\tilde{\mu}[k] = \|\tilde{\mu}[k]\|^2 \quad (3.31)$$

$$(\mathcal{Q}\mathcal{Q}^T \otimes \mathbb{I}_n)\tilde{\mu}[k] = \tilde{\mu}[k] \quad (3.32)$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $\mathcal{Q}^T \otimes \mathbb{I}_n$ την (3.29), εκφράζοντας το $\mathcal{L} = \mathcal{Q}\Lambda\mathcal{Q}^T$ και χρησιμοποιώντας την (3.31), βρίσκουμε ότι

$$\tilde{\mu}'[k+1] = ((\mathbb{I}_N - a\Lambda\mathcal{Q}^T R[k; c]\mathcal{Q}) \otimes \mathbb{I}_n)\tilde{\mu}'[k] + a(\Lambda\mathcal{Q}^T \otimes \mathbb{I}_n)(y_D[k+1] - y'[k+1]) \quad (3.33)$$

Ανακαλούμε τον ορισμό της $\tilde{\mu}''[k]$ και πολλαπλασιάζουμε την (3.33) από αριστερά με τον όρο $\Lambda^{-1/2} \otimes \mathbb{I}_n$:

$$\tilde{\mu}''[k+1] = ((\mathbb{I} - a\Lambda^{1/2}\mathcal{Q}^T R[k; c]\mathcal{Q}\Lambda^{1/2}) \otimes \mathbb{I}_n)\tilde{\mu}''[k] + a(\Lambda^{1/2}\mathcal{Q}^T \otimes \mathbb{I}_n)(y_D[k+1] - y'[k+1]) \quad (3.34)$$

Επιπρόσθετα, χρησιμοποιώντας μεταβλητούς χαρακτηρισμούς ελάχιστων και μέγιστων ιδιοτιμών, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι

$$\frac{\beta_2}{h_{\max}}\mathbb{I} \leq \Lambda^{1/2}\mathcal{Q}^T R[k; c]\mathcal{Q}\Lambda^{1/2} \leq \frac{1}{h_{\min}}\mathbb{I} \quad (3.35)$$

Η δεξιά ανισότητα στην (3.35) ευσταθεί λόγω των ακόλουθων. Πρώτα, χρησιμοποιούμε την δεξιά ανισότητα από την (3.25) για να δείξουμε ότι $\Lambda^{1/2}\mathcal{Q}^T R[k; c]\mathcal{Q}\Lambda^{1/2} \leq \Lambda^{1/2}\mathcal{Q}^T [h_{\min}\mathbb{I}]^{-1}\mathcal{Q}\Lambda^{1/2}$. Σημειώνουμε ότι ο Λ είναι $(N-1) \times (N-1)$, ο \mathcal{Q} είναι $N \times (N-1)$, και ο $[h_{\min}\mathbb{I}]^{-1}$ είναι $N \times N$. Στη συνέχεια, αποσυνθέτουμε τον $N \times N$ πίνακα $[h_{\min}\mathbb{I}]^{-1}$ με χρήση της $(N \times N)$ αποσύνθεση ιδιοτιμής, και χρησιμοποιούμε την ορθογωνιότητα των ιδιοδιανυσμάτων του \mathcal{L} για να δείξουμε ότι ο $((N-1) \times (N-1))$ πίνακας: $\Lambda^{1/2}\mathcal{Q}^T R[k; c]\mathcal{Q}\Lambda^{1/2} \leq \Lambda^{1/2}[h_{\min}\mathbb{I}]^{-1}\Lambda^{1/2}$. Η μέγιστη ιδιοτιμή του $\Lambda^{1/2}[h_{\min}\mathbb{I}]^{-1}\Lambda^{1/2}$ είναι $1/(h_{\min}/\beta_N) \leq 1/h_{\min}$.

Ακόμη, από την υπόθεση που αρχικά κάναμε για $a \leq h_{\min}$:

$$\|\mathbb{I} - a\Lambda^{1/2}\mathcal{Q}^\top R[k; c]\mathcal{Q}\Lambda^{1/2}\| \leq 1 - \frac{a\beta_2}{h_{\max}} \quad (3.36)$$

Εφαρμόζουμε την (3.36), την ανισότητα $\|\Lambda^{1/2}\| \leq 1$ αφού $0 \leq \mathcal{L} \leq \mathbb{I}$, το $\|\mathcal{Q}\| = 1$, και το Λήμμα 3.2 και καταλήγουμε στην πιο κάτω σχέση

$$\|\tilde{\mu}''[k+1]\| \leq \left(1 - \frac{a\beta_2}{h_{\max}}\right)\|\tilde{\mu}''[k]\| + a\xi\|\tilde{y}(k)\| + a\xi\frac{\|\tilde{\mu}[k]\|}{h_{\min}} + acM_D[k+1]$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας ότι $\|\tilde{\mu}[k]\| = \|\tilde{\mu}'[k]\| = \|\Lambda^{1/2}\tilde{\mu}''[k]\| \leq \|\tilde{\mu}''[k]\|$ τελειώνουμε την απόδειξή μας. \square

Στο επόμενο βήμα, εισάγουμε την συνάρτηση $v[k] := (2/h_{\min})\|\tilde{\mu}''[k]\|$. Υποδηλώνουμε με $c_{11} := \xi$, $c_{12} := (1/2)[1 + \xi]$; $c_{13} := c$; $c_{21} := (2a/h_{\min})\xi$, $c_{22} := 1 - a\beta_2/(h_{\max}) + (a/h_{\min})\xi$ και $c_{23} := 2ac/h_{\min}$. Χρησιμοποιώντας ότι $\|\tilde{\mu}[k]\| \leq \|\tilde{\mu}''[k]\|$, το Λήμμα 3.3, και Λήμμα 3.4, πέρνουμε την σχέση:

$$g[k+1] \leq r_1 g[k] + r_2 M_D[k+1] \quad (3.37)$$

όπου $g[k] := \max\{\|\tilde{y}[k]\|, v[k]\}$ και r_1, r_2 οι παράγοντες σύγκλισης με $r_1 := \max\{c_{11} + c_{12}, c_{21} + c_{22}\} = \max\left\{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\xi, \left(1 - \frac{a\beta_2(\mathcal{L})}{h_{\max}}\right) + \frac{3a}{h_{\min}\xi}\right\}$ και $r_2 := \max\{c_{13}, c_{23}\} = \max\left\{c, \frac{2ac}{h_{\min}}\right\}$.

Σημείωση 4. Αφού $c_{21} + c_{22} = 1 - a\beta_2/(h_{\max}) + (3a/h_{\min})\xi$, έτσι το $c_{21} + c_{22} < 1$ αν το $\xi < (1/3)(h_{\min}\beta_2/(h_{\max}))$. Αυτό σε συνδιασμό με την συνθήκη $a \leq h_{\min}$ μας εξασφαλίζουν ότι το $r_1 < 1$.

Λήμμα 3.5. Αν $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|z[k]\| < \epsilon$, $a \leq h_{\min}$ και $\xi < (1/3)(h_{\min}\beta_2/(h_{\max}))$, τότε $\limsup_{k \rightarrow \infty} g[k] < \frac{r_2}{1-r_1}\epsilon$.

Απόδειξη. Από (3.37) έχουμε ότι $g[k+1] \leq r_1 g[k] + r_2 \|z[k+1]\|$. Επομένως, $g[k] \leq r_1^k g[0] + r_2 \sum_{j=1}^k \|z[j]\| r_1^{k-j}$. Από το θεώρημα 3.4, υπάρχει $k_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\|z[k]\| < \epsilon, \forall k \geq k_0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} g[k] &= r_1^{k-k_0} g[k_0] + r_2 \sum_{j=1}^{k-k_0} \|z[k_0+j]\| r_1^{k-k_0-j} \\ &< r_1^{k-k_0} g[k_0] + r_2 \epsilon \sum_{j=1}^{k-k_0} r_1^{k-k_0-j} \\ &= r_1^{k-k_0} g[k_0] + r_2 \epsilon \frac{1 - r_1^{k-k_0}}{1 - r_1} \end{aligned}$$

Από τις υποθέσεις που κάναμε, εξασφαλίζουμε ότι $r_1 < 1$ και έτσι πέρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα:

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} g[\nu] \leq \frac{r_2}{1 - r_1} \epsilon \quad (3.38)$$

\square

ή ισοδύναμα

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \|y[\nu D] - y^\bullet\| \leq \frac{r_2}{1 - r_1} \epsilon \quad (3.39)$$

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \|\mu[\nu D] - \mu^\bullet\| \leq \frac{r_2 h_{\min}}{2(1 - r_1)} \epsilon \quad (3.40)$$

Στους δειγματοληπτικούς χρόνους $\nu D + \ell$ στο διάστημα $[\nu D, (\nu + 1)D)$, το δυϊκό σφάλμα $\mu[\nu D + \ell] - \mu^\bullet$ μένει αμετάβλητο αφού το μ παραμένει αμετάβλητο από την (3.11). Όμως, για το κύριο σφάλμα του y , από τις (3.23), (3.26) και Λήμμα 3.3 προκύπτει το πιο κάτω

$$\|y[\nu D + \ell] - y^\bullet\| \leq \|y[\nu D + \ell] - y'[\nu + 1]\| + \|y'[\nu + 1] - y^\bullet\| \quad (3.41)$$

$$\leq \nu_1^\ell \|y_D[\nu] - y'[\nu + 1]\| + \frac{1}{h_{\min}} \|\tilde{\mu}[\nu]\| + \frac{\nu_2(1 - \nu_1^\ell)}{1 - \nu_1} \sup_{\nu D + 1 \leq s \leq \nu D + \ell} \|z[s]\| \quad (3.42)$$

$$\leq \nu_1^\ell \|\tilde{y}[\nu]\| + \frac{\nu_1^\ell + 1}{h_{\min}} \|\tilde{\mu}[\nu]\| + \frac{\nu_2(1 - \nu_1^\ell)}{1 - \nu_1} \sup_{\nu D + 1 \leq s \leq \nu D + \ell} \|z[s]\| \quad (3.43)$$

$$\leq \frac{\nu_1^\ell + 1}{2} g[\nu] + c_\ell M[\nu D; \ell] \quad (3.44)$$

όπου $c_\ell := \frac{\nu_2(1 - \nu_1^\ell)}{1 - \nu_1}$ και $M[\nu D; \ell] := \sup_{\nu D + 1 \leq s \leq \nu D + \ell} \|z[s]\|$. Αφού $\limsup_{\nu \rightarrow \infty} M[\nu D; \ell] \leq \epsilon$ τελικά καταλήγουμε στην σχέση αυτή στο διάστημα $[\nu D, (\nu + 1)D)$:

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \|y[\nu D + \ell] - y^\bullet\| \leq c_{y,\ell} \epsilon \quad (3.45)$$

με $c_{y,\ell} := c_\ell + (r_2/2)(\nu_1^\ell + 1)/(1 - r_1)$.

Το μόνο που μας έμεινε είναι να εξετάσουμε το σφάλμα για τις ενδιάμεσες χρονικές στιγμές $t \in (kT, (k + 1)T)$. Από τον ορισμό των μεταβλητών GRASSP έχουμε τις πιο κάτω εξισώσεις

$$y([k + 1]T) = z([k + 1]T) - s(kT) \quad (3.46)$$

$$y(kT) = z(kT) - s([k - 1]T) \quad (3.47)$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.45) και (3.46) προκύπτει ότι

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|s(kT) - y^\bullet\| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|y([k + 1]T) - y^\bullet\| + \limsup_{k \rightarrow \infty} \|z[k + 1]\| \leq c_s \epsilon \quad (3.48)$$

όπου $c_s := \max_{\ell=1, \dots, D-1} c_{y,\ell} + 1$.

Από την (3.5) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \|y(t) - y^\bullet\| &\leq \|z(t)\| + r \left(t - \left\lfloor \frac{t}{kT} \right\rfloor \right) \left\| s \left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) - y^\bullet \right\| \\ &\quad + \left[1 - r \left(t - \left\lfloor \frac{t}{kT} \right\rfloor \right) \right] \left\| s \left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T - T \right) - y^\bullet \right\|. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Στο όριο για $t \rightarrow \infty$ η παραπάνω ανισότητα μαζί με την (3.48) δίνει

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y^\bullet\| \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| + \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| s\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right) - y^\bullet \right\| \leq (c_s + 1)\epsilon$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη του βασικού μας θεωρήματος 3.4.

Κεφάλαιο 4

Κατανεμημένος Έλεγχος για Βέλτιστη Συμφωνία Κινούμενων Ρομπότ

Στο κεφάλαιο αυτό συστήνονται τα μοντέλα των κινούμενων ρομπότ τύπου unicycle και γίνεται ο σχεδιασμός των ελεγκτών για βέλτιστη συμφωνία μιας ομάδας από unicycle και ταυτόχρονη ρύθμιση του προσανατολισμού τους. Για το σκοπό αυτό, ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου επιτυγχάνει την οδήγηση των GRASSP μεταβλητών σε μια γειτονιά του μηδενός. Στη συνέχεια, πραγματοποιούμε προσομοιώσεις σε περιβάλλον Matlab-Simulink για να επαληθεύσουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα. Παρατίθενται τρία διαφορετικά σενάρια και τέλος, παρουσιάζεται το πως επηρεάζουν κάποιες σχεδιαστικοί παράμετροι την συμπεριφορά του συνολικού συστήματος.

4.1 Unicycle-type WMRs

Ta Wheeled Mobile Robots (WMRs) έχουν γίνει αντικείμενο μεγάλης έρευνας καθώς αποτελούν αποτελεσματικά εργαλεία σε πραγματικές εφαρμογές. Η συμπεριφορά τους είναι παρόμοια με αυτή ενός μονόκυκλου οχήματος. Τα κινούμενα αυτά ρομποτικά συστήματα είναι μη γραμμικά και μη ολονομικά και έχουν ενθαρρύνει την ανάπτυξη μη γραμμικών τεχνικών ελέγχου που να διασφαλίζουν την επίτευξη μιας θέσης-στόχου με συγκεκριμένο προσανατολισμό από οποιοσδήποτε αρχικές συνθήκες ("πρόβλημα στάθμευσης" [28]). Ο μόνος τρόπος για να αντιμετωπιστούν τέτοια προβλήματα είναι οι μη γραμμικές προσεγγίσεις καθώς δεν μπορούν να μετασχηματιστούν σε γραμμικά προβλήματα και να εφαρμοστεί θεωρία γραμμικού ελέγχου. Τα μη-ολονομικά συστήματα [29] είναι συστήματα όπου επιβάλλονται περιορισμοί στην κίνηση που δεν είναι ολοκληρώσιμοι, δηλαδή δεν μπορούν να γραφούν ως χρονικές παραγώγους κάποιας συνάρτησης των γενικευμένων συντεταγμένων και είναι συνήθως πεπερασμένων διαστάσεων. Τέτοιοι περιορισμοί μπορούν συνήθως να εκφραστούν με όρους μη ολοκληρώσιμων γραμμικών σχέσεων ταχυτήτων.

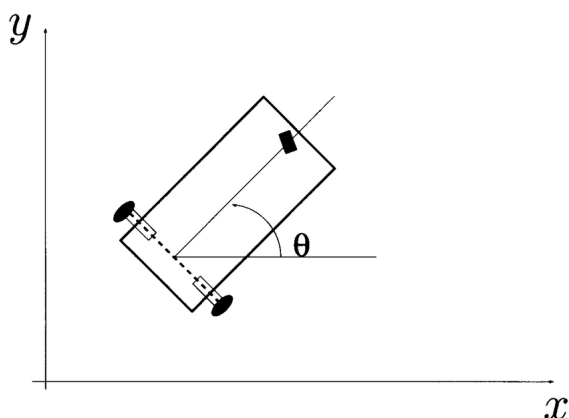
4.1.1 Κινηματική των Unicycle

Ta WMRs τύπου unicycle (Εικόνα 4.1) λειτουργούν ως ακολούθως: οι δύο πίσω τροχοί τους ελέγχονται ανεξάρτητα από κινητήρες, και ένας μπροστινός παθητικός τροχός εμποδίζει το ρομπότ από το να ανατραπεί καθώς κινείται στο επίπεδο. Υποθέτουμε ότι οι μάζες και οι αδράνεις των τροχών είναι αμελητέες και ότι το κέντρο μάζας του ρομπότ βρίσκεται στη

μέση του άξονα που συνδέει τους πίσω τροχούς. Η κινηματική του ρομπότ περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta, \\ \dot{y} &= v \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \tag{4.1}$$

όπου x , y είναι οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας, θ είναι η γωνία κατεύθυνσης που μετριέται από τον άξονα x , v είναι το μέτρο της ταχύτητα μεταφοράς του κέντρου μάζας και ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του ρομπότ. Υποθέτουμε ότι οι τροχοί δεν γλιστρούν, δηλαδή η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι κάθετη στον άξονα των πίσω τροχών. Αυτή η υπόθεση δημιουργεί ένα μη-ολονομικό περιορισμό στην κίνηση του ρομπότ της μορφής $\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0$.



Εικόνα 4.1: Κινούμενο ρομπότ τύπου Unicycle

Με κάθε WMR συσχετίζεται μια συνάρτηση κόστους $f_i(x_i, y_i)$ και μια επιθυμητή κατεύθυνση αναφοράς θ_i^* . Το ζητούμενο είναι να σχεδιαστούν καταναμημένοι νόμοι ελέγχου v_i, ω_i ώστε τα κέντρα μάζας του κάθε οχήματος να προσεγγίζουν τη λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης

$$\min_{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)} \sum_{i=1}^N f_i(x_i, y_i) \tag{4.2}$$

με περιορισμούς

$$x_i - x_j = c_{x,i} - c_{x,j} \tag{4.3}$$

$$y_i - y_j = c_{y,i} - c_{y,j}, \forall i, j \tag{4.4}$$

όπου $c_{x,i}, c_{y,i}$ σταθερές και η γωνία προσανατολισμού θ_i να προσεγγίζει την τιμή αναφοράς της θ_i^* . Αν $c_{x,i} = c_{y,i} = 0$ τότε το πρόβλημα είναι το λεγόμενο optimal consensus problem. Αν $c_{x,i} = c_{y,i} \neq 0$ τότε μιλάμε για προβλήματα formation. Για παράδειγμα, αν $c_{x,i} = R \cos(2(i-1)\pi/N)$ και $c_{y,i} = R \sin(2(i-1)\pi/N)$ τότε στη λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης οι θέσεις των WMR θα σχηματίζουν ένα κανονικό πολύγωνο με N γωνίες και ακτίνα R από το

κέντρο του.

Σημείωση 5. Οι συναρτήσεις κόστους υποθέτουμε ότι ικανοποιούν την Υπόθεση 1.

Χάρην απλούστευσης, οι δείκτες i παραλείπονται στην ανάλυση που ακολουθεί. Θεωρούμε τις GRASSP μεταβλητές $z_x = x - r(t - kT)s(kT) - [1 - r(t - kT)]s(kT - T)$ και $z_y = y - r(t - kT)s(kT) - [1 - r(t - kT)]s(kT - T)$ όπως ορίζονται από την (3.5). Επιλέγουμε επίσης ένα μετασχηματισμό στροφής ως προς το διάνυσμα $[z_x, z_y]$ κατά τη γωνία ϑ και ένα μετασχηματισμό εισόδων της μορφής:

$$\begin{aligned} \eta_x &= z_x \cos \vartheta + z_y \sin \vartheta, \\ \eta_y &= -z_x \sin \vartheta + z_y \cos \vartheta, \\ u_1 &= v + w\eta_y, \\ u_2 &= w \end{aligned} \quad (4.5)$$

Με τη χρήση των παραπάνω μετασχηματισμών καταλήγουμε στην πιο κάτω κινηματική δυναμική μορφή των μετασχηματισμένων εξισώσεων του unicycle:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_x &= u_1, \\ \dot{\eta}_y &= -\eta_x u_2 + d(t), \\ \dot{\tilde{\vartheta}} &= u_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

όπου $\tilde{\vartheta} := \vartheta - \vartheta^*$,

$$d(t) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} R(\vartheta) \dot{r}(t - kT) [s(kT) - s(kT - T)] \quad (4.7)$$

είναι μια γνωστή διαταραχή και

$$R(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

είναι το μητρώο περιστροφής.

4.2 Σχεδίαση ελεγκτών

Βασιζόμενοι στην θεωρία Lyapunov, προτείνουμε τους πιο κάτω πρωτότυπους, μη γραμμικούς, κατανεμημένους ελεγκτές για το σύστημα (4.6) :

$$u_1 = -K_1 \eta_x - 2\rho(t)(1 + |d^2(t)|)\tilde{\vartheta}\xi + 2^{-1/4}K_1 \sqrt{\epsilon} \operatorname{sgn}(\eta_x)|\eta_x|^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

$$u_2 = -K_1 \tilde{\vartheta} + 2\rho(t)(1 + |d^2(t)|)\eta_x \xi + 2^{-1/4}K_1 \sqrt{\epsilon} \operatorname{sgn}(\tilde{\vartheta})|\tilde{\vartheta}|^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

με προσαρμοστικό κέρδος

$$\dot{\rho} = \gamma[(\xi D(\xi, \epsilon))^{\otimes} + \xi D(\xi, \epsilon)], \quad \rho(0) > 0 \quad (4.10)$$

και

$$\xi := \eta_y + \frac{\eta_x \tilde{\vartheta}}{2}, \quad (4.11)$$

$\vartheta \in (0, 1)$, $\gamma > 0$.

Το $D(\xi, \epsilon)$ είναι ο τελεστής νεκρής ζώνης όπου :

$$D(\xi, \epsilon) = \begin{cases} \xi - \epsilon, & \xi > \epsilon \\ \xi + \epsilon, & \xi < -\epsilon \\ 0, & [-\epsilon, \epsilon] \end{cases} \quad (4.12)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε την συνάρτηση $V_1 := \frac{1}{2}(\eta_x^2 + \tilde{\vartheta}^2)$. Παραγωγίζοντας την V_1 και χρησιμοποιώντας τις (4.6), (4.8), (4.9), έχουμε ότι

$$\dot{V}_1 = -K_1(\eta_x^2 + \tilde{\vartheta}^2) + 2^{-1/4}K_1 \sqrt{\epsilon}(|\eta_x|^{\frac{3}{2}} + |\tilde{\vartheta}|^{\frac{3}{2}}) \quad (4.13)$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα

$$\left(\sum_{i=1}^n |z_i|\right)^p \leq \sum_{i=1}^n |z_i|^p \leq n^{1-p} \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^p\right) \quad (4.14)$$

με $p \in (0, 1]$ για τον τελευταίο όρο και πέρνουμε ότι

$$-2K_1 V_1 + K_1 \sqrt{2\epsilon} V_1^{\frac{3}{4}} \leq \dot{V}_1 \leq -2K_1 V_1 + 2^{3/4} K_1 \sqrt{\epsilon} V_1^{\frac{3}{4}}. \quad (4.15)$$

Επομένως, αποκτούμε τα ακόλουθα όρια για την $V_1(t)$ και κατά συνέπεια για τα $|\tilde{\vartheta}|, |\eta_x|$:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} V_1(t) \leq \frac{\epsilon^2}{2} \quad (4.16)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} V_1(t) \geq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 \quad (4.17)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \{|\tilde{\vartheta}|, |\eta_x|\} \leq \epsilon \quad (4.18)$$

Επιπλέον, από τις (4.6),(4.8),(4.9) υπολογίζουμε την παράγωγο του ξ ως

$$\dot{\xi} = -\rho(1 + d^2(t))(\tilde{\vartheta}^2 + \eta_x^2)\xi + d(t) + \frac{K_1 \sqrt{\epsilon}}{2^{5/4}} [\tilde{\vartheta} \operatorname{sgn}(\eta_x) |\eta_x|^{\frac{1}{2}} - \eta_x \operatorname{sgn}(\tilde{\vartheta}) |\tilde{\vartheta}|^{\frac{1}{2}}] \quad (4.19)$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Young με $a = |\tilde{\vartheta}|$, $b = |\eta_x|^{1/2}$ και $p = 3/2$, $q = 3$ έχουμε ότι

$$|\tilde{\vartheta}| |\eta_x|^{1/2} \leq \frac{2}{3} |\tilde{\vartheta}|^{3/2} + \frac{1}{3} |\eta_x|^{3/2} \quad (4.20)$$

Παρομοίως, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$|\tilde{\vartheta}|^{1/2} |\eta_x| \leq \frac{1}{3} |\tilde{\vartheta}|^{3/2} + \frac{2}{3} |\eta_x|^{3/2} \quad (4.21)$$

Προσθέτοντας τις (4.20), (4.21) προκύπτει

$$|\tilde{\vartheta}| |\eta_x|^{1/2} + |\tilde{\vartheta}|^{1/2} |\eta_x| \leq |\tilde{\vartheta}|^{3/2} + |\eta_x|^{3/2} \quad (4.22)$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα (4.14) και πέρνουμε το πιο κάτω

$$|\tilde{\theta}|^{3/2} + |\eta_x|^{3/2} = (\tilde{\theta}^2)^{3/4} + (\eta_x^2)^{3/4} \leq 2^{1/4}(\tilde{\theta}^2 + \eta_x^2)^{3/4} = 2V_1^{3/4} \quad (4.23)$$

Ως επόμενο βήμα, ορίζουμε την $V_\xi = \frac{1}{2}\xi^2$. Χρησιμοποιούμε τις (4.18),(4.19) και προκύπτει ότι

$$\dot{V}_\xi \leq -4\rho(1 + d^2)V_1V_\xi + 2|d|V_\xi + \frac{K_1\sqrt{\epsilon}}{2^{1/4}}|\xi|V_1^{3/4} \quad (4.24)$$

$$\dot{V}_\xi \leq -4\rho(1 + d^2)V_1V_\xi + (d^2 + 1)V_\xi + \frac{K_1\sqrt{\epsilon}}{2^{5/4}}V_\xi + \frac{K_1\sqrt{\epsilon}}{2^{5/4}}V_1^{3/2} \quad (4.25)$$

Εφόσον $V_1(t) \leq \max\{V_1(0), \epsilon^2/2\} = \bar{C}_{V_1}$ και $V_1(t) \geq \min\{V_1(0), \epsilon^2/4\} = \underline{C}_{V_1} > 0$ η ανισότητα (4.25) μας δίνει

$$\dot{V}_\xi \leq -4\rho(1 + d^2)\underline{C}_{V_1}V_\xi + (d^2 + 1)V_\xi + \frac{K_1\sqrt{\epsilon}}{2^{5/4}}V_\xi + \frac{K_1\sqrt{\epsilon}}{2^{5/4}}\bar{C}_{V_1}^{3/2} \quad (4.26)$$

Τότε, από την πιο πάνω ανισότητα χρησιμοποιώντας εις άτοπο απαγωγή, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το κέρδος ρ είναι ομοιόμορφα φραγμένο. Αν αυτό δεν συμβαίνει και λαμβάνοντας υπόψη ότι το ρ είναι μια αύξουσα συνάρτηση λόγω της (4.10), τότε υπάρχει κάποιος χρόνος $T_\rho > 0$ έτσι ώστε

$$\rho(t) > \frac{1}{4\underline{C}_{V_1}} \left(2 + \frac{K_1\sqrt{\epsilon}}{2^{5/4}} + \frac{K_1\bar{C}_{V_1}^{3/2}}{2^{1/4}\epsilon^{3/2}} \right), \quad \forall t \geq T_\rho \quad (4.27)$$

Για $t \geq T_\rho$ έχουμε ότι

$$\dot{V}_\xi \leq - \left(1 + \frac{K_1\bar{C}_{V_1}^{3/2}}{2^{1/4}\epsilon^{3/2}} \right) V_\xi + \frac{K_1\sqrt{\epsilon}}{2^{5/4}}\bar{C}_{V_1}^{3/2} \quad (4.28)$$

Η πιο πάνω ανισότητα μας δίνει

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} V_\xi(t) \leq \frac{\frac{K_1\sqrt{\epsilon}}{2^{5/4}}\bar{C}_{V_1}^{3/2}}{1 + \frac{K_1\bar{C}_{V_1}^{3/2}}{2^{1/4}\epsilon^{3/2}}} < \frac{\epsilon^2}{2} \quad (4.29)$$

Έτσι, υπάρχει κάποιος χρόνος $T_\xi > 0$ τέτοιος ώστε $V_\xi(t) < \epsilon^2/2$ για κάθε $t \geq T_\xi$. Ισοδύναμα, $|\xi(t)| \leq \epsilon$ για κάθε $t \geq T_\xi$. Αυτό υποδηλώνει ότι $D(\xi(t), \epsilon) = 0$ για κάθε $t \geq T_\xi$ και κατα συνέπεια $\rho(t) = \rho(T_\xi)$ για κάθε $t \geq T_\xi$ το οποίο είναι μια αντίφαση αφού υποθέσαμε ότι ρ δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένο.

Από τον ορισμό του ξ , (4.18) και γνωρίζοντας ότι $\limsup_{t \rightarrow \infty} |\xi(t)| \leq \epsilon$, πέρνουμε το πιο κάτω άνω φράγμα για το $|\eta_y(t)|$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\eta_y(t)| \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} |\xi(t)| + \frac{1}{2} \limsup_{t \rightarrow \infty} |\eta_x(t)| \times \limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)| < \epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^2 \quad (4.30)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τις (4.5),(4.30),(4.18) και ότι $\|R(-\vartheta)\| = 1$ πέρνουμε το επιθυμητό φράγμα για το $\left\| \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} \right\|$:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{bmatrix} z_x(t) \\ z_y(t) \end{bmatrix} \right\| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| R(-\vartheta(t)) \begin{bmatrix} \eta_x(t) \\ \eta_y(t) \end{bmatrix} \right\| \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{bmatrix} \eta_x(t) \\ \eta_y(t) \end{bmatrix} \right\| \leq \epsilon \sqrt{2 + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{4}} \quad (4.31)$$

Επομένως με την συγκεκριμένη σχεδίαση, τα z_x, z_y πηγαίνουν σε μια γειτονιά του μηδενός, οπότε μπορούμε να επικαλεστούμε το θεώρημα 3.4 για να αποδείξουμε προσεγγιστική βέλτιστη συμφωνία. Η παραπάνω ανάλυση συνοψίζει την απόδειξη του πιο κάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 4.5. *Για μια ομάδα από ρομποτικά οχήματα που περιγράφονται από την (4.1), αν ισχύουν οι υποθέσεις 1,2,3 και επιλέξουμε ελεγκτές (4.8), (4.9) με προσαρμοστικό κέρδος (4.10), θα πετύχουμε προσεγγιστική βέλτιστη συμφωνία των θέσεων και ρύθμιση των προσανατολισμών. Επιπροσθέτως, όλα τα σήματα κλειστού βρόγχου παραμένουν φραγμένα.*

4.3 Προσομοίωση Συστήματος σε περιβάλλον Matlab-Simulink

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα προσομοιώσεων για το σύστημα (4.6) με 6 κινούμενα ρομπότ - πράκτορες τύπου unicycle όπου θα δείξουμε γραφικά ότι με τους προτεινόμενους ελεγκτές (4.8),(4.9), τα unicycles οδηγούνται σε προσεγγιστική βέλτιστη συμφωνία ενώ οι γωνίες προσανατολισμού συγκλίνουν σε επιθυμητές τιμές.

4.3.1 Παράμετροι Προσομοίωσης

Ο κάθε πράκτορας-unicycle εφοδιάζεται με ένα τοπικό κριτήριο κόστους $f_i(x_i, y_i)$. Οι παράμετροι που θα μεταβάλλουμε κατά την διάρκεια της προσομοίωσης βρίσκονται στον πίνακα 4.1.

Οι αρχικές συνθήκες του πράκτορα i είναι το στοιχείο της i γραμμής των πιο κάτω διανυσμάτων:

$$\begin{aligned} x(0) &= [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5]^T \\ y(0) &= [2 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3]^T \\ \vartheta(0) &= \left[-\frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{2\pi}{4} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \pi \quad \frac{5\pi}{4}\right]^T \end{aligned}$$

Ο Λαπλασιανός πίνακας αναπαριστά επικοινωνία σε μορφή δακτυλίου και είναι ο πιο κάτω:

$$L = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.5 & -0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3 & 0.7 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.6 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0.7 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Παράμετροι Προσομοίωσης	
$x_i(0), y_i(0)$	αρχική θέση κέντρου μάζας
$\theta_i(0)$	αρχική γωνιά κατεύθυνσης
y_{obst}	θέση εμποδίου
ρ	σταθερά ρύθμισης απόστασης εμποδίου
T	περίοδος δειγματοληψίας
d_M	καθυστέρηση επικοινωνίας
L	λαπλασιανός πίνακας
D	αριθμός περιόδων καθυστέρησης επικοινωνίας
α	κύρια βηματική σταθερά αλγορίθμου
β	δυσική βηματική σταθερά αλγορίθμου
c, Q	σταθερές συνάρτησης κόστους
ϵ	παράμετρος ελεγκτή
K_1	κέρδος ελεγκτή
γ	σταθερά προσαρμοστικού κέρδους
ϑ	δύναμη προσαρμοστικού κέρδους

Πίνακας 4.1: Μεταβλητές Παράμετροι Προσομοίωσης

4.3.2 Σενάριο 1

Αρχικά, θα προσομοιώσουμε το σύστημά μας επιλέγοντας για κάθε πράκτορα την τετραγωνική συνάρτηση κόστους $f_i(y_i) = \frac{1}{2}y_i^T Q_i y_i + c_i^T y_i$, όπου $c = \text{col}\{c_1, \dots, c_6\}$ με $c_1 = [1 \ 0]^T$, $c_2 = [0 \ 1]^T$, $c_3 = [3 \ 1]^T$, $c_4 = [2 \ 4]^T$, $c_5 = [1 \ 2]^T$, $c_6 = [3 \ 3]^T$ και ο Q είναι ένας μπλοκ διαγώνιος πίνακας:

$$Q = \text{blkdiag}\{Q_1, \dots, Q_6\}$$

$$\text{με } Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 2 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, Q_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_5 = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix}, Q_6 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Για τις αρχικές προσομοιώσεις η περίοδος δειγματοληψίας επιλέχθηκε $T = 0.3$, ο χρόνος που επιτρέπεται για καθυστέρηση της επικοινωνίας μεταξύ των κινούμενων ρομπότ είναι $d_M = 0.1$ και η επικοινωνία αυτή γίνεται ανά $D = 8$ περιόδους δειγματοληψίας, δηλαδή κάθε 2.4 δευτερόλεπτα, πράγμα που την καθιστά αρκετά χαμηλής συχνότητας. Οι παράμετροι του αλγορίθμου που χρησιμοποιήθηκαν είναι $\alpha = 0.38$, $\beta = 0.08$. Οι παράμετροι του ελεγκτή επιλέχθηκαν ως $\epsilon = 0.02$, $\gamma = 6$, $K_1 = 0.16$ και $\vartheta = 0.001$.

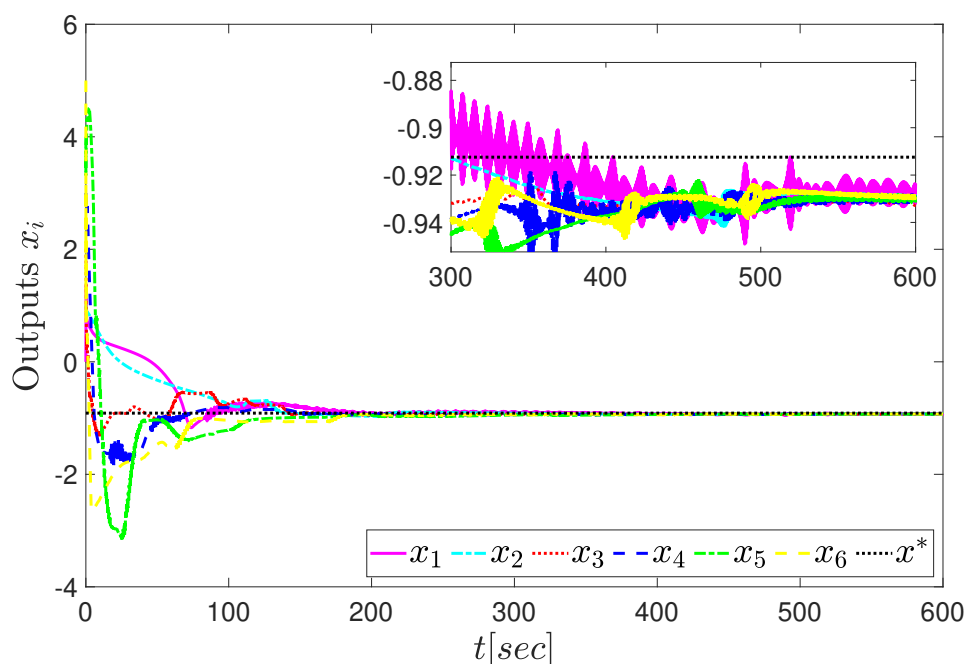
Σημείωση 6. Η συγκεκριμένη επιλογή της συνάρτησης κόστους μας δίνει κάποιους περιορισμούς σχετικά με τις τιμές που μπορούμε να δώσουμε στις παράμετρος του αλγορίθμου α, β . Αυτό γίνεται λόγω της υπόθεσης 1 όπου βρίσκουμε το $h_{\min} = 0.382$ ως την μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα Q και το $h_{\max} = 2.618$ που είναι η μεγαλύτερη του ιδιοτιμή. Έτσι από την Σημείωση 3 έχουμε τον περιορισμό $\beta < 0.1115$ και από το Λήμμα 3.4 προκύπτει ο περιορισμός $\alpha \leq 0.382$. Παράλληλα, από την εξίσωση του κ_β στην (3.20) μπορούμε να βρούμε την τιμή

του β που δίνει βέλτιστο κ_β ως $\beta = 0.056$, και άρα μικρότερο v_1 από την (3.22), που είναι και το επιθυμητό για να έχουμε μικρότερο σφάλμα στην έξοδο. Για αυτό το λόγο επιλέγουμε μια τιμή του β κοντά σε αυτήν.

Υλοποιώντας το πιο πάνω σύστημα πέρνουμε τα πιο κάτω αποτελέσματα για την x_i , y_i και θ_i συνιστώσα του κάθε unicycle. Αναμένουμε σύγκλιση σε μια γειτονιά του βέλτιστου σημείου συμφωνίας που λόγω των συγκεκριμένων τιμών που χρησιμοποιήσαμε για την συνάρτηση κόστους και επιθυμητής τελικής γωνιάς κατεύθυνσης είναι το πιο κάτω:

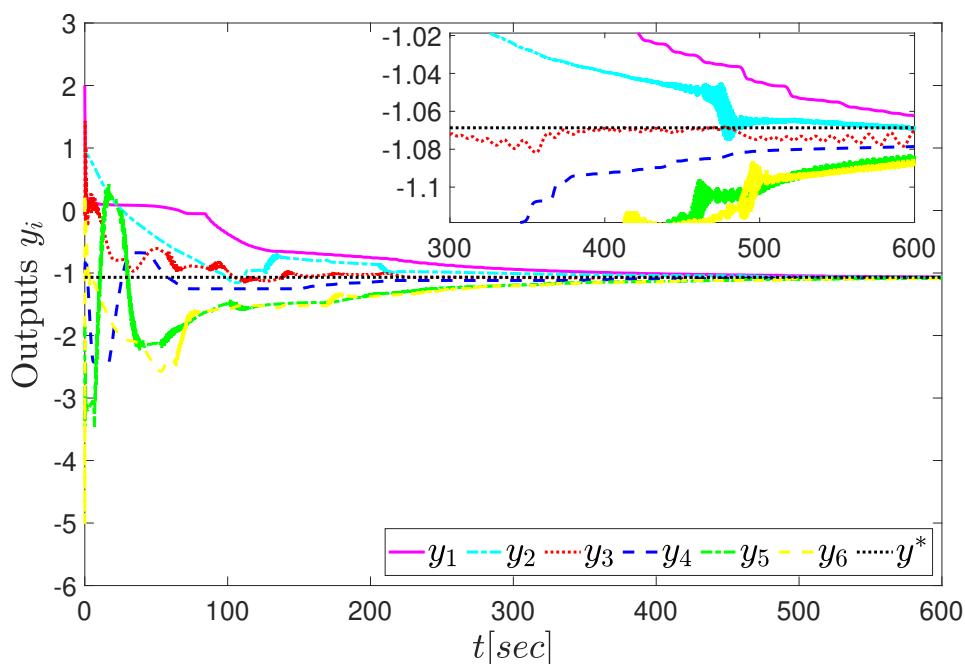
$$x^* = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^6 Q_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^6 c_i = -0.916, \quad y^* = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^6 Q_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^6 c_i = -1.07,$$

$$\theta^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi}{3} & \frac{2\pi}{3} & \pi & \frac{4\pi}{3} & \frac{5\pi}{3} \end{bmatrix}^T.$$



Σχήμα 4.1: Εξόδοι x_i των unicycle συναρτήση του χρόνου.

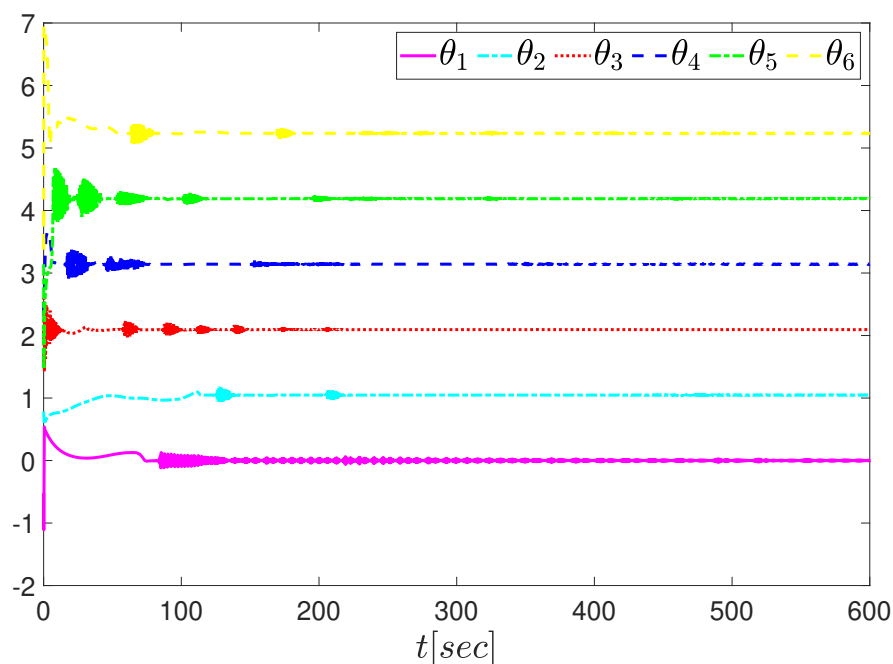
Παρατηρούμε ότι από τα 180 sec οι εξόδοι x_i έχουν φτάσει κοντά στο βέλτιστο σημείο. Βλέποντας καλύτερα μέσω μεγένθυσης την περιοχή από τα 300 μέχρι τα 600 δευτερόλεπτα, παρατηρούμε ότι αρχικά έχει μια απόκλιση περίπου ± 0.03 , που όσο περνάει ο χρόνος μικραίνει και γίνεται κοντά στο -0.01 .



Σχήμα 4.2: Εξόδοι y_i των unicycle συναρτήση του χρόνου.

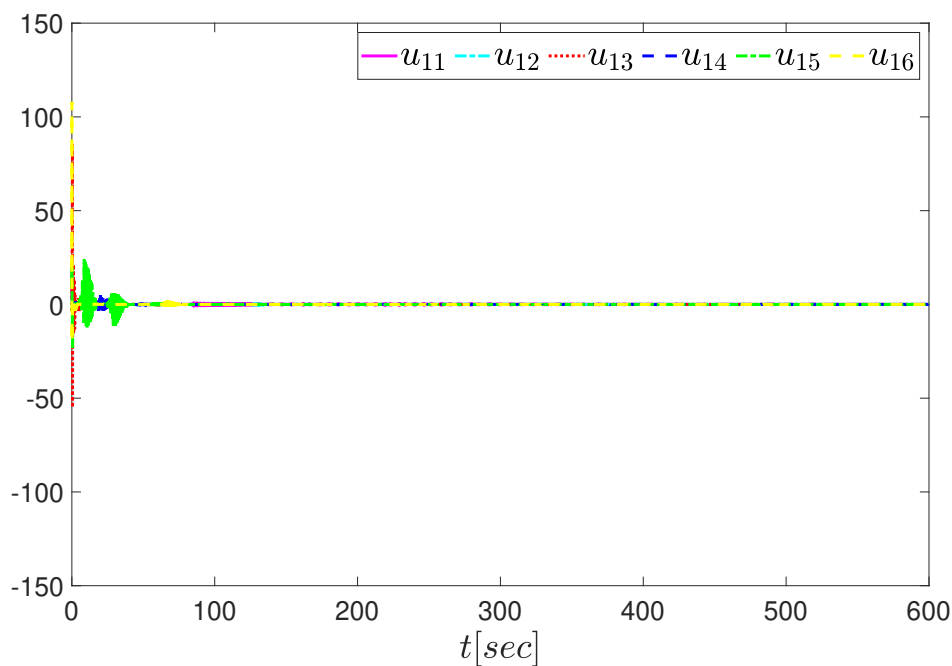
Οι εξόδοι y_i των unicycle βλέπουμε ότι στα 410 s βρίσκονται σε μια γειτονιά των ± 0.05 από το βέλτιστο σημείο συμφωνίας και μειώνεται σταδιακά φτάνοντας το ± 0.01 πετυχαίνοντας έτσι το ζητούμενο σύγκλισης.

Σημείωση 7. Οι εξόδοι x_i με τις εξόδους y_i των unicycle έχουν μια σημαντική διαφορά σε σχέση με την ταχύτητα σύγκλισης αφού όπως παρατηρούμε τα x_i συγκλίνουν σχεδόν 230 s πιο γρήγορα από τα y_i . Αυτό συμβαίνει λόγω της μικρής τιμής του β που μας επέβαλε ο περιορισμός (6), όπου έχει άμεση επίδραση στη ταχύτητα σύγκλισης των y_i και σε συνδιασμό με την τιμή του a , η οποία πάλι είναι σχετικά μικρή.

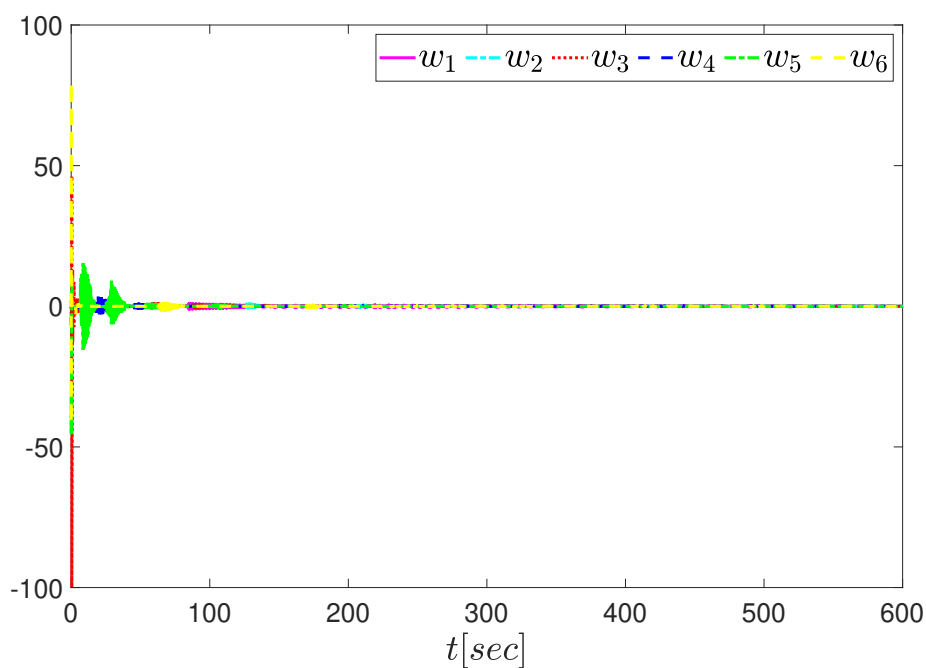


Σχήμα 4.3: Γωνιά κατεύθυνσης θ_i των unicycle συναρτήση του χρόνου.

Με την πιο πάνω γραφική επιβεβαιώνουμε ότι ο προσανατολισμός του κάθε κινούμενου ρομπότ βρίσκεται στην κατεύθυνση που του ορίσαμε θ^* , επιτυγχάνοντας τον πριν ακόμη συμπληρωθούν τα 100 s, πιο γρήγορα και από τις x, y συνιστώσες. Στη συνέχεια, παραθέτουμε τις εισόδους του συστήματος μας u_{i1} και $u_{i2} = w_i$ καθώς και τις μεταβλητές GRASSP z_i .

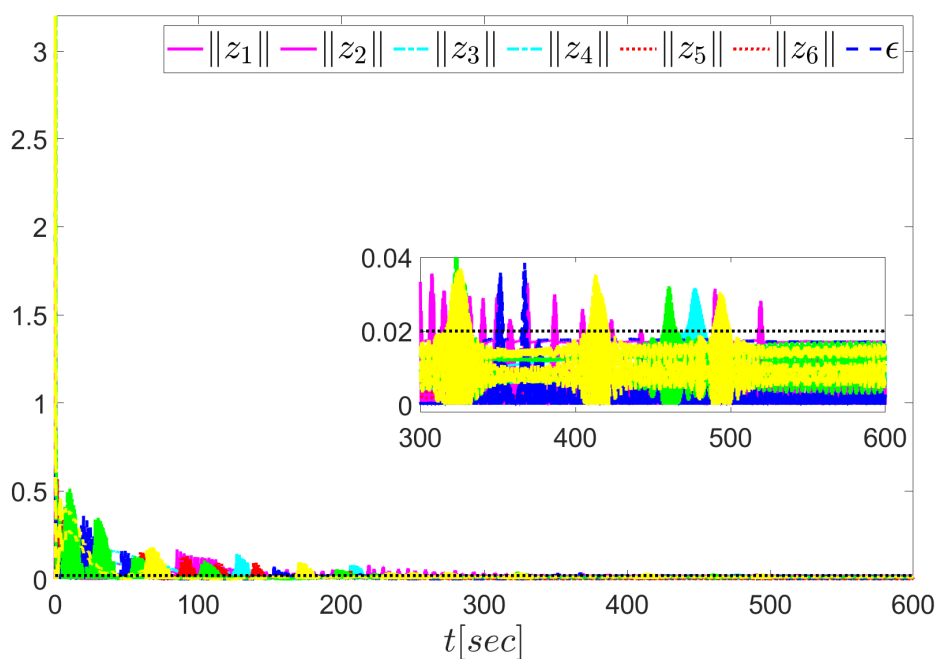


Σχήμα 4.4: Είσοδοι u_{i1} συναρτήση του χρόνου.



Σχήμα 4.5: Είσοδοι w_i συναρτήση του χρόνου.

Παρατηρούμε ότι οι είσοδοι u_{i1} αλλά και οι w_i έχουν ένα σχετικά μεγάλο πλάτος στα πρώτα δευτερόλεπτα με τις u_{i1} να είναι ελάχιστα μεγαλύτερες, το οποίο οφείλεται στην συγκεκριμένη επιλογή των ελεγκτών. Παρόλα αυτά στη συνέχεια μειώνονται αισθητά και φτάνουν σε μια περιοχή κοντά στο μηδέν.



Σχήμα 4.6: Μεταβλητές GRASSP $\|z_i\|$ συναρτήση του χρόνου.

Όπως μπορούμε να δούμε, οι μεταβλητές z_i συγκλίνουν σε μια προκαθορισμένη γειτονιά του μηδέν όπως υπολογίσαμε στην (4.31).

4.3.3 Σενάριο 2

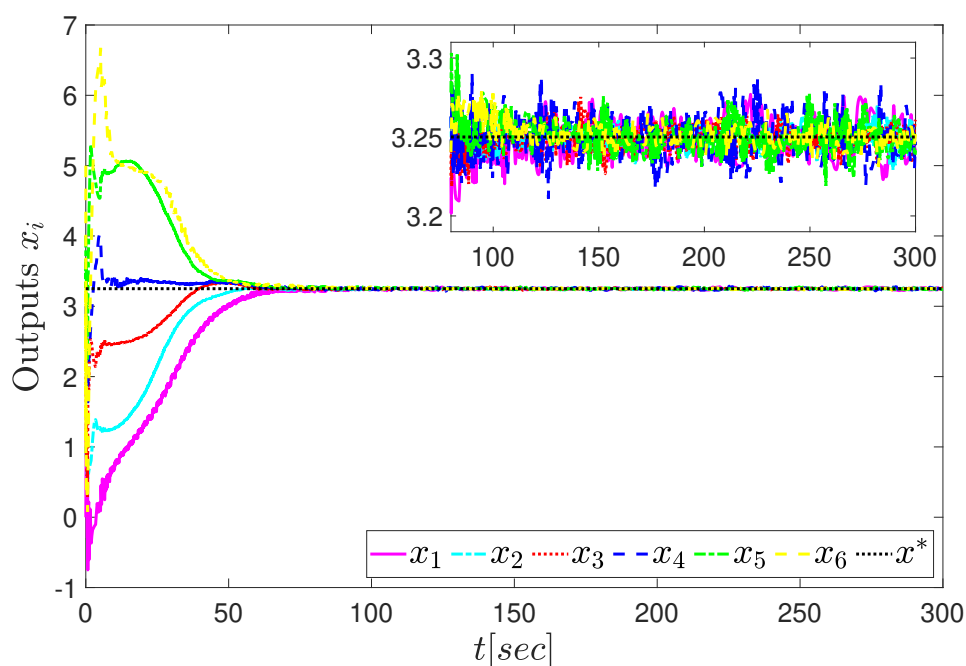
Σε αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε ως τοπική συνάρτηση κόστους για κάθε πράκτορα μας την $f_i(y_i) = \frac{1}{2}(\|y_i - y_i(0)\|^2 - \frac{\rho}{1+\rho}\|y_i - y_{obst}\|^2)$ με $\rho > 0$. Με αυτή την συνάρτηση στέλνουμε τα unicycle σε συμφωνία μακριά από ένα στατικό εμπόδιο με συντεταγμένες κέντρου y_{obst} , διατηρώντας παράλληλα μικρή την απόσταση από την αρχική θέση $y_i(0)$ με σκοπό την μειωμένη κατανάλωση ενέργειας. Η παράμετρος ρ ρυθμίζει την απόσταση από το εμπόδιο όπου για $\rho = 0$ δεν λαμβάνουμε υπόψη μας κάποιο εμπόδιο, ενώ για μεγάλο ρ θα στείλει το σημείο συμφωνίας πολύ μακριά του εμποδίου. Στο συγκεκριμένο σενάριο, χρησιμοποιήσαμε $\rho = 0.5$ και $y_{obst} = [1 \ 0]$ ενώ η περίοδος δειγματοληψίας επιλέχθηκε $T = 0.41$. Στις παράμετρους του ελεγκτή εφαρμόσαμε τις τιμές $\epsilon = 0.02$, $\gamma = 8$, $K_1 = 1$ και $\vartheta = 0.01$. Σχετικά με τις παράμετρους του αλγόριθμου που χρησιμοποιήθηκαν είναι $d_M = 0.1$, $a = 0.65$, $\beta = 1$ και τα unicycle μας ανταλλάσσουν πληροφορίες μεταξύ τους ανά $D = 4$ περιόδους δειγματοληψίας.

Σημείωση 8. Αυτή η συνάρτηση κόστους μας δίνει μεγαλύτερα περιθώρια στην επιλογή του κύριου και δευτερεύοντος βήματος του αλγορίθμου, a, β αντίστοιχα, καθώς η ελάχιστη και η μέγιστη ιδιοτιμή ισούνται και με παρόμοιο τρόπο με πριν υπολογίζονται ως $h_{\min} = h_{\max} = \frac{1}{1+\rho} = 0.666$. Έτσι, προκύπτουν οι περιορισμοί $a \leq 0.666$, $\beta < 2(1 + \rho) = 3$ και το β που δίνει βέλτιστο κβ είναι στο μισό δηλαδή $\beta = 1.5$.

Οι νόμοι ελέγχου (4.8),(4.9) εφαρμόζονται στο σύστημα (4.6) και αναμένουμε οι έξοδοι των πρακτόρων να συγκλίνουν σε μια γειτονιά του βέλτιστου σημείου συμφωνίας που υπολογίζεται αντίστοιχα με πριν ως:

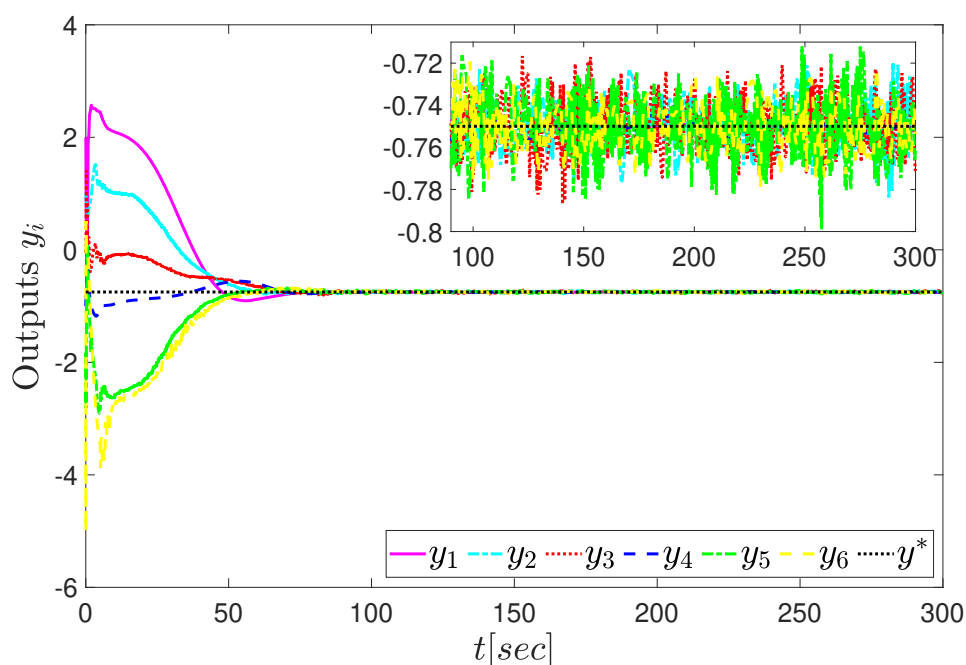
$$x^* = 3.25, \quad y^* = -0.75 \quad \text{και} \quad \vartheta^* = \left[0 \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{2\pi}{3} \quad \pi \quad \frac{4\pi}{3} \quad \frac{5\pi}{3} \right]^T$$

Πιο κάτω φαίνονται τα αποτελέσματα από την προσομοίωση που έγινε σε περιβάλλον Matlab-Simulink:



Σχήμα 4.7: Εξόδοι x_i των unicycle συναρτήση του χρόνου.

Παρατηρούμε ότι σε αυτό το σενάριο οι εξόδοι x_i συγκλίνουν στο βέλτιστο σημείο στα 70 sec περίπου, πολύ πιο γρήγορα απ'ότι στο προηγούμενο.

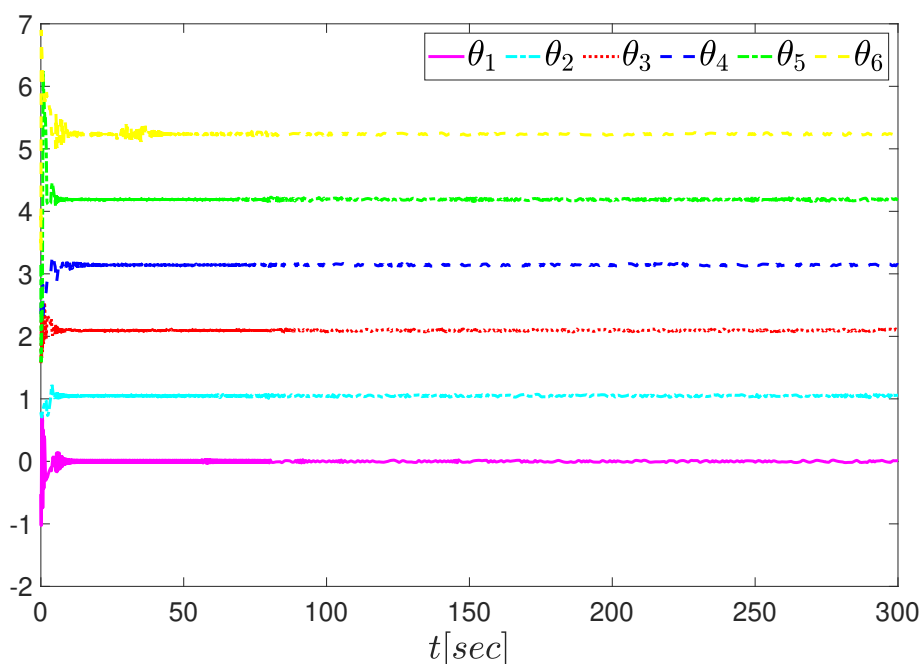


Σχήμα 4.8: Εξόδοι y_i των unicycle συναρτήση του χρόνου.

Εδώ φαίνονται οι εξόδοι y_i να πετυχαίνουν την συμφωνία κατά προσέγγιση στα 80 sec, 5 φορές πιο γρήγορα απ'ότι γινόταν στην προηγούμενη περίπτωση. Από τα 80 μέχρι τα 300

δευτερόλεπτα διατηρούν σχεδόν σταθερή μια μικρή ταλάντωση ± 0.03 γύρω από το επιθυμητό σημείο.

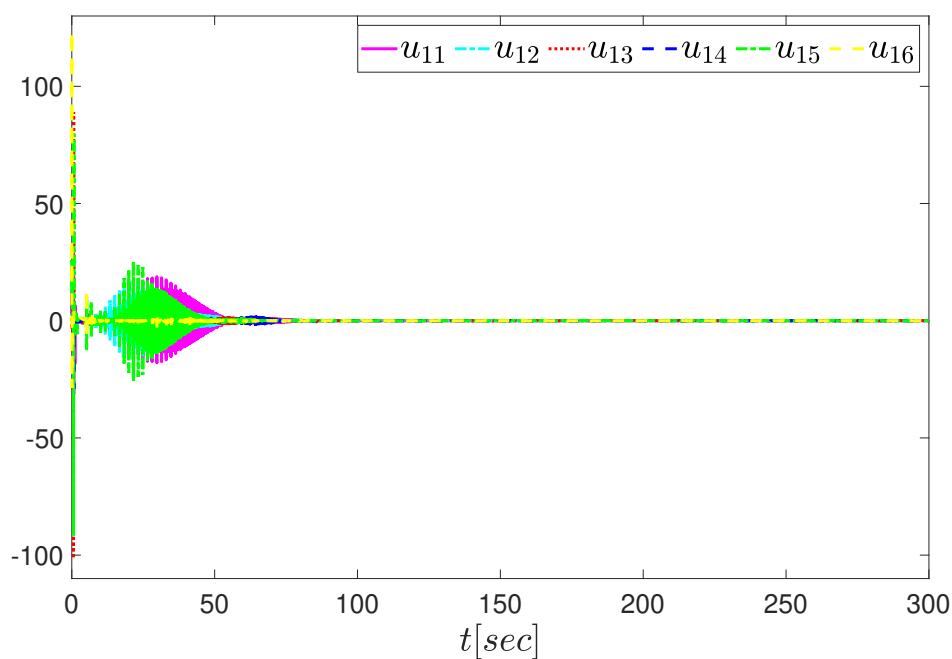
Σημείωση 9. Όπως παρατηρήσαμε πιο πάνω, με αυτή την συνάρτηση κόστους επιτυγχάνουμε πολύ πιο γρήγορη σύγκλιση στο βέλτιστο σημείο συμφωνίας. Αυτό γίνεται λόγω του ότι από την Σημείωση 8, έχουμε την δυνατότητα επιλογής μεγαλύτερων α, β . Ο λόγος που επιλέχθηκε η τιμή $\beta = 1$ και όχι η θεωρητικά βέλτιστη $\beta = 1.5$ ή κάποια άλλη μεγαλύτερη είναι επειδή δεν βελτιώνεται ο χρόνος σύγκλισης εξαιτίας της μικρής τιμής του α και πρέπει να κρατήσουμε μια τιμή κοντά σε αυτήν. Αυτός είναι επίσης και ο λόγος που καθυστερεί λίγο περισσότερο να συγκλίνουν τα y_i σε σύγκριση με τα x_i .



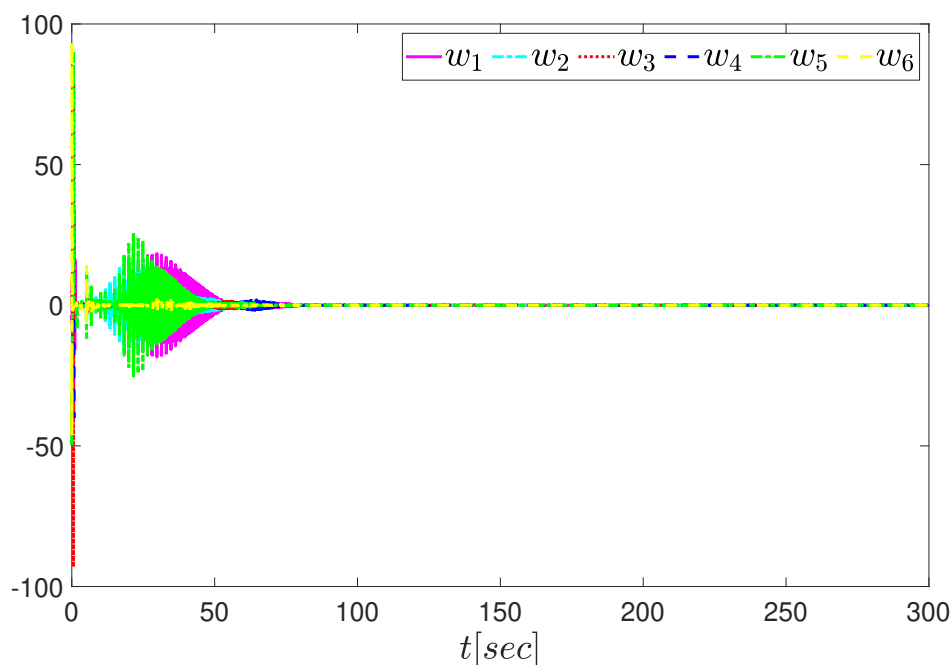
Σχήμα 4.9: Γωνιά κατεύθυνσης θ_i των unicycle συναρτήση του χρόνου.

Παρατηρούμε ότι η γωνιά κατεύθυνσης κάθε unicycle είναι στο σημείο που τους ορίσαμε θ^* σε λιγότερο από 20 sec.

Ακολουθούν και σε αυτή την περίπτωση οι εισόδοι u_{i1}, ω_i και οι βοηθητικές μεταβλητές GRASSP z_i .

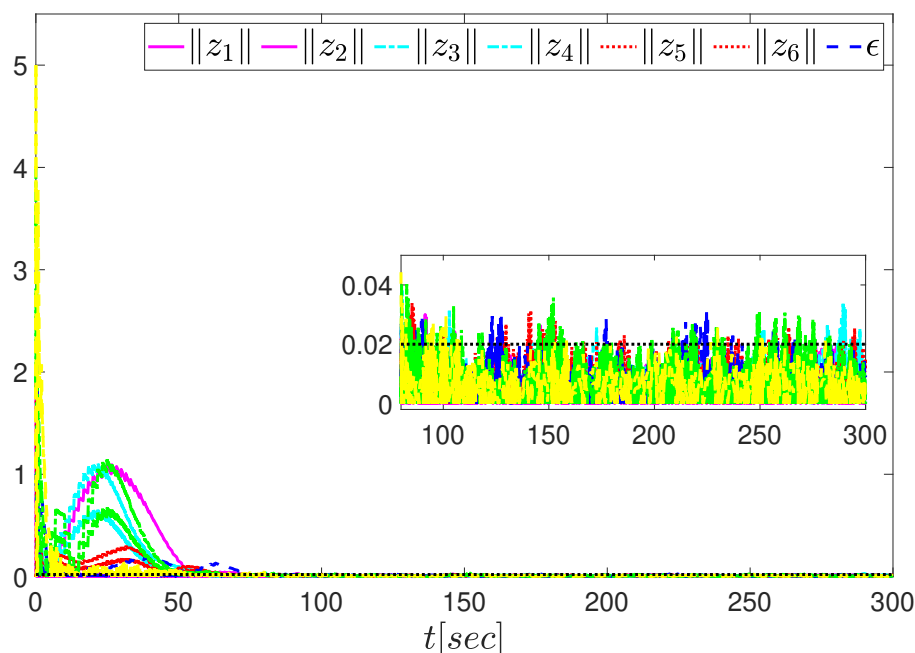


Σχήμα 4.10: Είσοδοι u_{i1} συναρτήση του χρόνου.



Σχήμα 4.11: Είσοδοι w_i συναρτήση του χρόνου.

Ομοίως με πριν, βλέπουμε ένα σχετικά μεγάλο πλάτος εισόδου στα πρώτα δευτερόλεπτα, λίγο μεγαλύτερο στις u_{i1} απότι στις w_i , που αμέσως μετά μειώνεται αισθητά και φτάνει το μηδέν.



Σχήμα 4.12: Μεταβλητές GRASSP $\|z_i\|$ συναρτήση του χρόνου.

Αντίστοιχα, τα z_i πηγαίνουν σε μια γειτονιά του μηδενός ενώ εδώ λόγω του μικρότερου χρόνου προσομοίωσης, μπορούμε να παρατηρήσουμε καλύτερα το ρόλο της συνάρτησης $r(t)$ (4.12) στις μεταβλητές αυτές και να επιβεβαιώσουμε αυτό που περιμέναμε από τον μαθηματικό ορισμό τους στην (3.5).

4.3.4 Σενάριο 3 (Formation Control)

Θέλουμε να στείλουμε τα κινούμενα ρομπότ σε έναν **προκαθορισμένο σχηματισμό (formation)** μακριά από κάποιο στατικό εμπόδιο με συντεταγμένες κέντρου y_{obst} , όπου ταυτόχρονα διατηρείται μικρή η απόσταση του unicycle από την αρχική του θέση $y_i(0)$ έτσι ώστε να καταναλωθεί όσο το δυνατόν λιγότερη ενέργεια. Αυτό είναι γνωστό ως το **πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου σχηματισμού (optimal formation control problem)**, το οποίο στην περίπτωση μας μετατρέπεται σε πρόβλημα βέλτιστης συμφωνίας για τις μεταβλητές $\bar{y}_i := y_i - y_{fi}$, όπου y_{fi} είναι το διάνυσμα που αναπαριστά την θέση του i πράκτορα στον συγκεκριμένο σχηματισμό. Αν επιλέξουμε για παράδειγμα τα unicycle να οδηγηθούν σε εξάγωνο σχηματισμό, τότε :

$$y_{fi} = R \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}i) \\ \sin(\frac{\pi}{3}i) \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, 5$$

για κάποιο $R > 0$. Έτσι, έχουμε ένα πρόβλημα βέλτιστης συμφωνίας για τις μεταβλητές \bar{y}_i με συναρτήσεις κόστους \bar{f}_i που πέρνουν την πιο κάτω μορφή :

$$\bar{f}_i(\bar{y}_i) = f_i(\bar{y}_i + y_{fi}) = \frac{1}{2}(\|\bar{y}_i + y_{fi} - y_i(0)\|^2 - \frac{\rho}{1+\rho}\|\bar{y}_i + y_{fi} - y_{obst}\|^2)$$

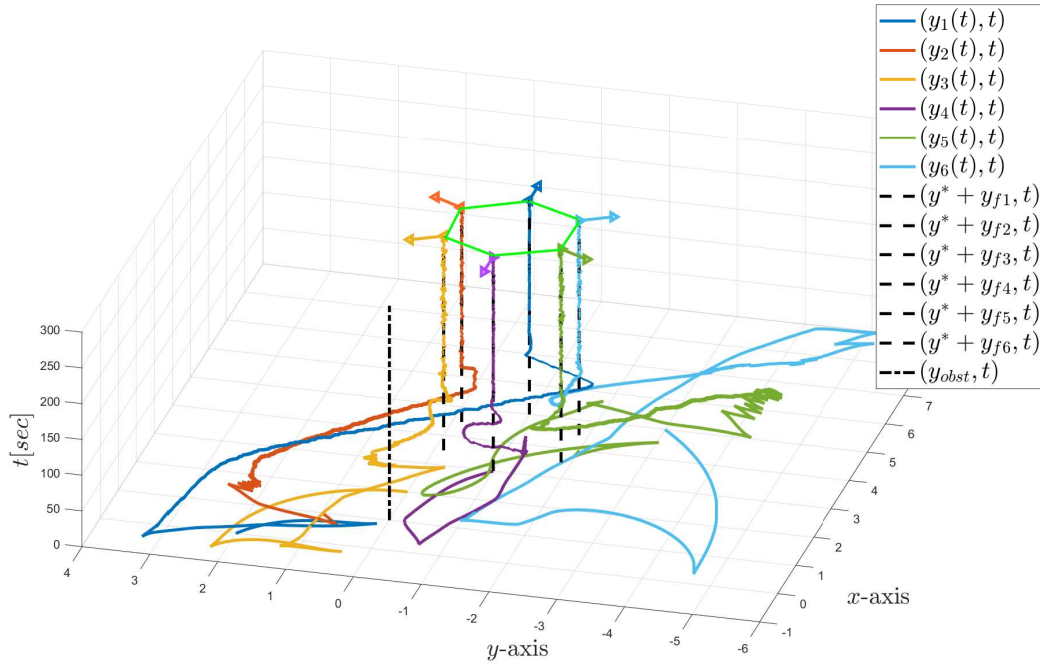
με $\rho > 0$. Τότε, οι μεταβλητές GRASSP γίνονται:

$$z_i(t) := \bar{y}_i(t) - r \left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) s_i \left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) - \left[1 - r \left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) \right] s_i \left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T - T \right)$$

όπου το διακριτού χρόνου μεταβλητό διάνυσμα s_i ορίζεται ως:

$$s_i \left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) := \bar{y}_i \left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) - \beta \nabla f_i \left(y_i \left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T \right) \right) - \alpha \beta \sum_{j \in N_i} \sum_{l=1}^{\lfloor t/DT \rfloor} W_{ij} \left(\bar{y}_i(lDT) - \bar{y}_j(lDT) \right)$$

για κάθε $i \in V$ με $\alpha, \beta > 0$. Οι νόμοι ελέγχου έχουν ακριβώς την ίδια μορφή με πριν και οδηγούν πάλι τις μεταβλητές GRASSP σε μια γειτονιά του μηδέν με αποτέλεσμα να διασφαλίζεται ότι τα κινούμενα ρομπότ θα ακολουθήσουν τον πιο πάνω σχηματισμό. Προκειμένου να αναπαραστήσουμε την εφαρμογή αυτής της προσέγγισης, πραγματοποιήσαμε μια προσομοίωση όπου όλες οι παράμετροι είναι ίδιες με πριν εκτός από τις $T = 0.4$, $\rho = 1$ και $R = 1$.



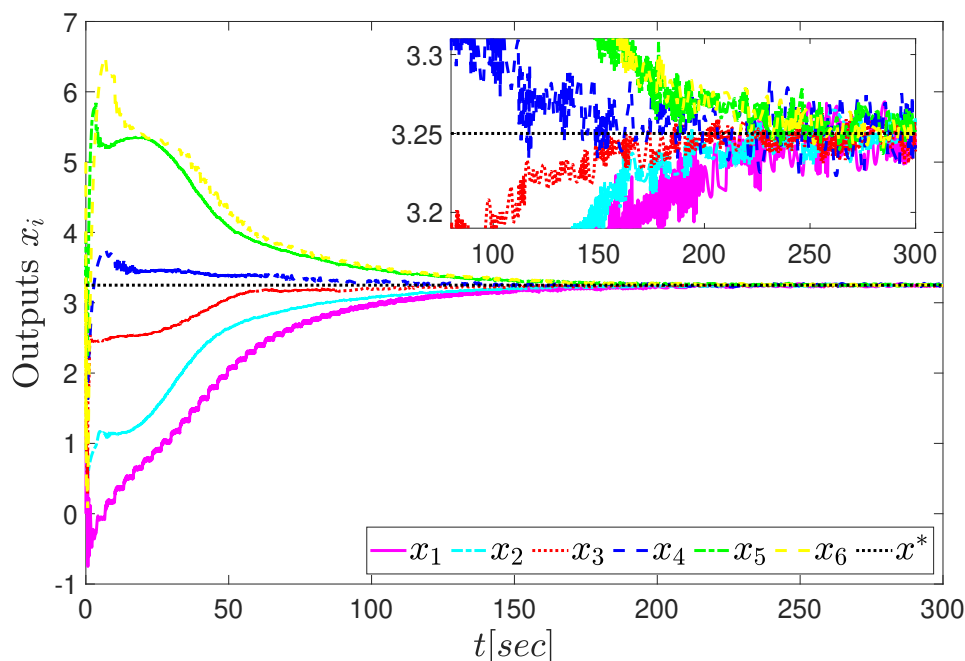
Σχήμα 4.13: Τροχιές των y_i ($1 \leq i \leq 6$).

Παρατηρούμε ότι τα unicycle συγκλίνουν σε ένα εξάγωνο σχηματισμό γύρω από το y^* αποφεύγοντας το εμπόδιο y_{obst} . Επιπλέον, τα βέλη μας δείχνουν τον προσανατολισμό του κάθε unicycle, όπου επιλέξαμε να βλέπουν προς τα έξω στην ευθεία που συνδέει το κέντρο του εξαγώνου με κάθε πράκτορα σε μια λογική προστασίας της ομάδας και της εσωτερικής περιοχής που καλύπτουν.

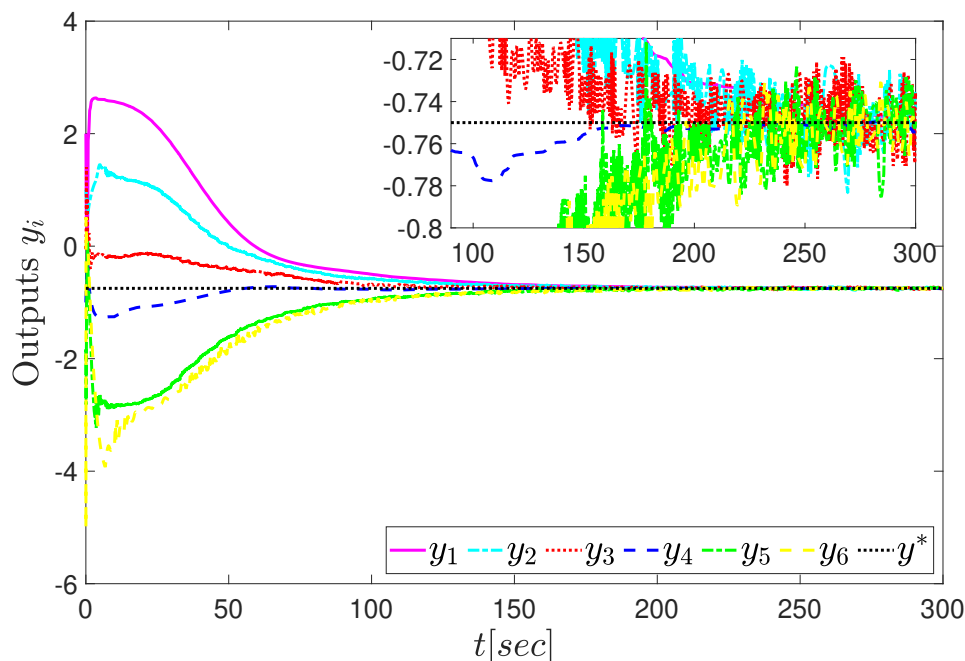
4.3.5 Επίδραση των Παραμέτρων Σχεδίασης στην Απόδοση του Ελεγκτή

Εξίσου σημαντικό είναι να δείξουμε πως επηρεάζουν κάποιες παράμετροι την λειτουργία του συστήματος με σκοπό να κατανοηθεί καλύτερα ο λόγος που επιλέχθηκαν οι συγκεκρι-

κριμένες τιμές. Αρχικά, θα δούμε πως επηρεάζει το D , όπου ορίζει τον αριθμό περιόδων δειγματοληψίας που χρειάζονται για να υπάρχει επικοινωνία μεταξύ των πρακτόρων. Παραθέτουμε συγκριτικές προσομοιώσεις όπου μεταβάλλουμε μόνο την τιμή του D και κρατάμε τις υπόλοιπες παραμέτρους σταθερές. Θα δείξουμε μόνο τις συνιστώσες του συστήματος όπου υπάρχουν σημαντικές αλλαγές.

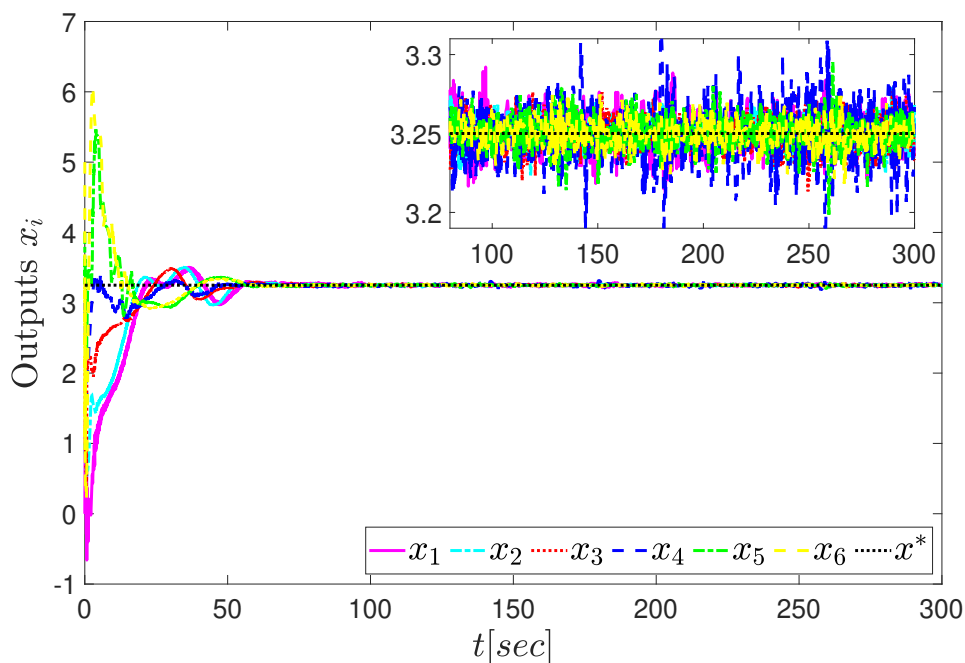


Σχήμα 4.14: Εξόδοι x_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για $D = 8$.

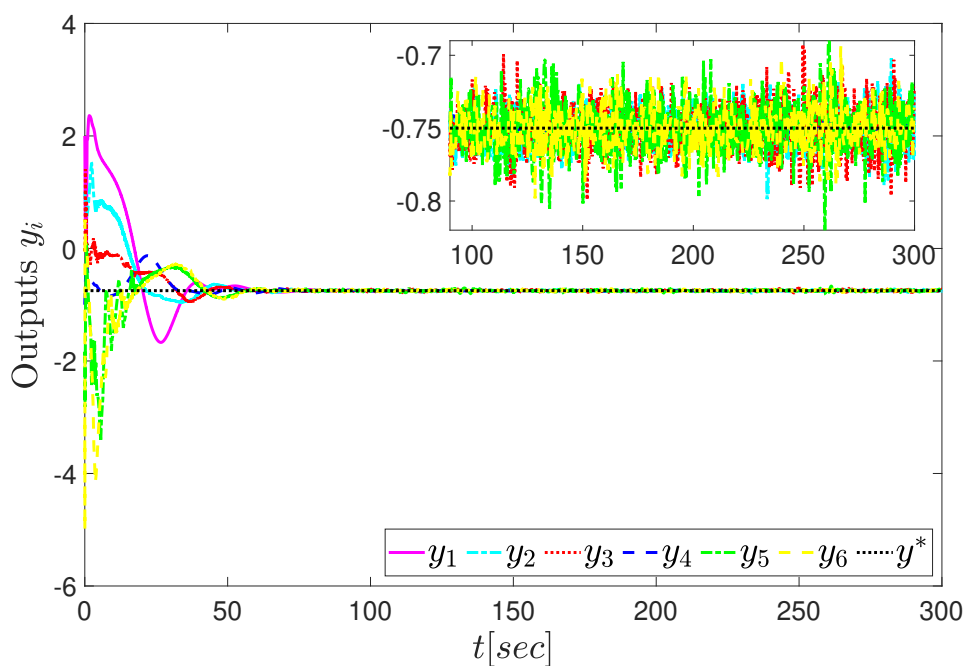


Σχήμα 4.15: Εξόδοι y_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για $D = 8$.

Παρατηρούμε ότι για $D = 8$ τα x_i, y_i χρειάζονται περίπου 225 sec για να συγκλίνουν στο βέλτιστο σημείο συμφωνίας με απόκλιση ± 0.03 . Είναι εμφανές ότι όσο μεγαλύτερο είναι το D τόσο περισσότερο αργεί η σύγκλιση καθώς οι πράκτορες ανταλλάζουν πληροφορίες ανά πιο μεγάλα διαστήματα.



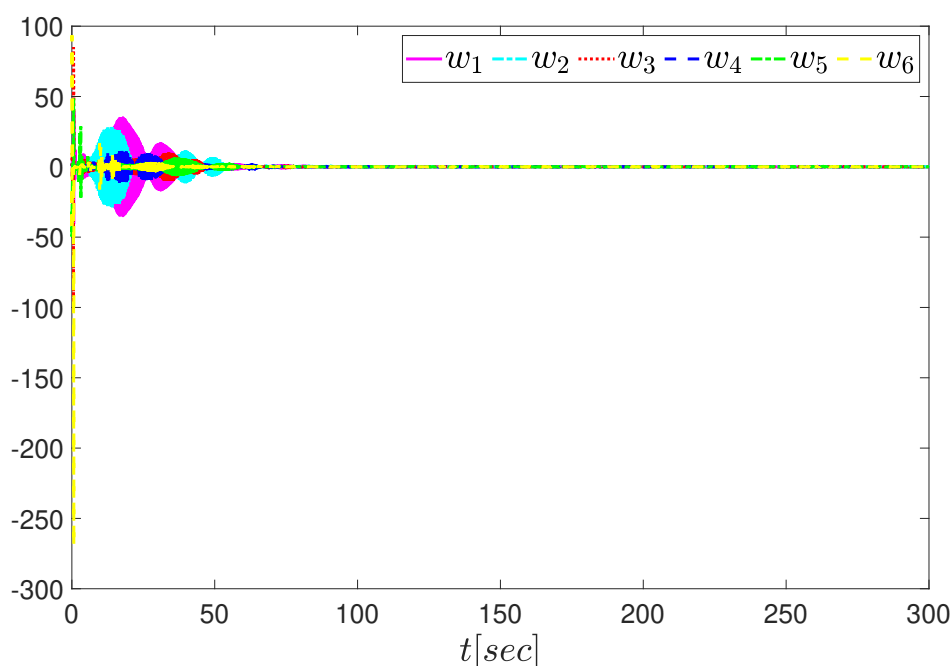
Σχήμα 4.16: Εξόδοι x_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για $D = 1$.



Σχήμα 4.17: Εξόδοι y_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για $D = 1$.

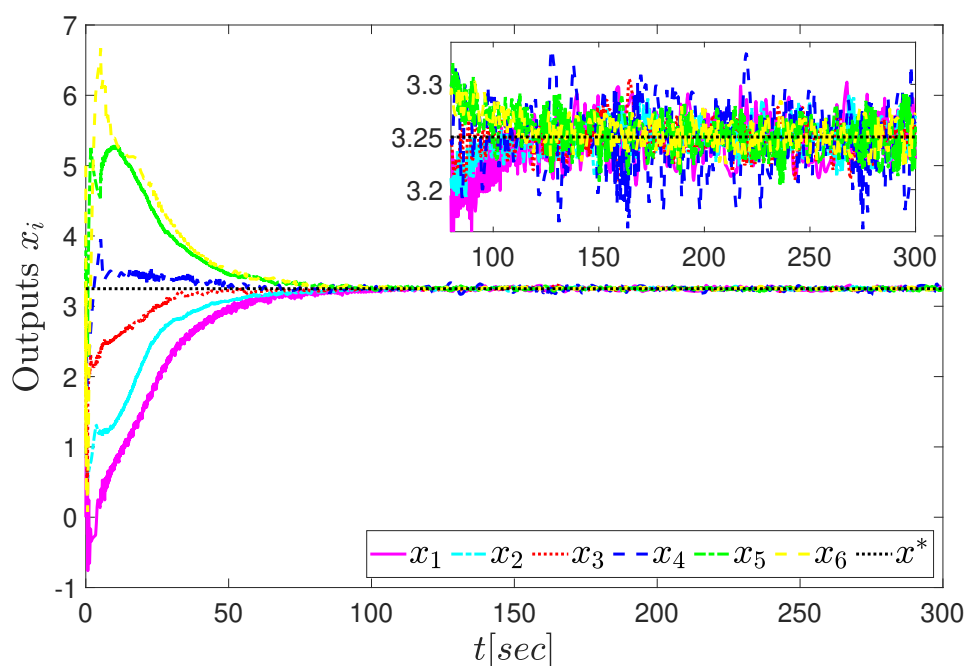
Σε αντίθεση περίπτωση για $D = 1$, όπου οι πράκτορες ανταλλάζουν πληροφορίες με τους

γείτονες σε κάθε περίοδο, τα x_i, y_i συγκλίνουν στο επιθυμητό σημείο στα 60 sec, 10 δευτερόλεπτα πιο γρήγορα απ'ότι γίνεται για $D = 4$.

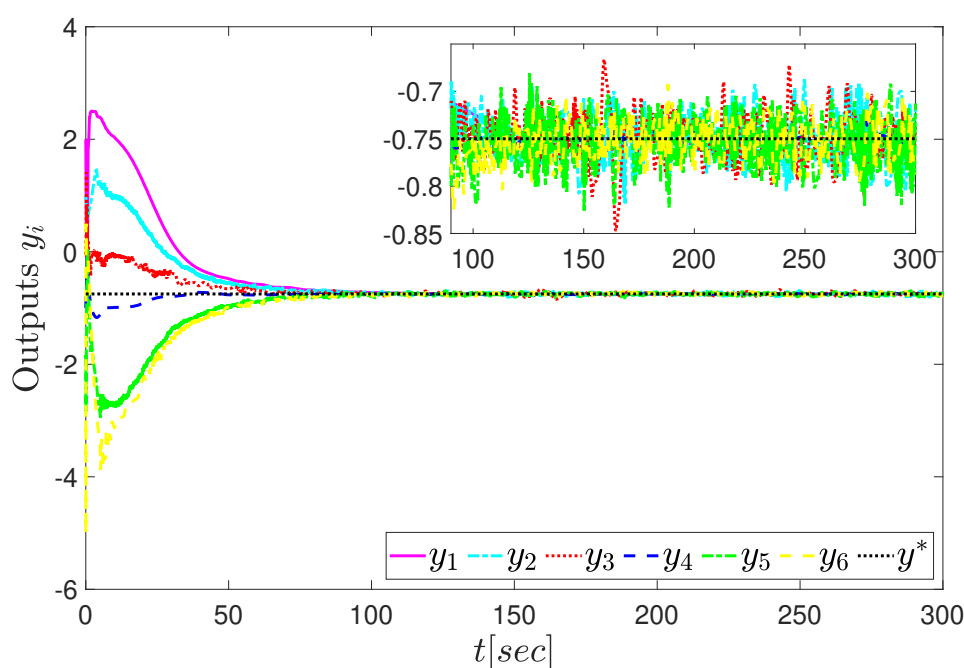


Σχήμα 4.18: Εισόδοι w_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για $D = 1$.

Επίσης, για τόσο μικρό D παρατηρούμε ένα μεγαλύτερο πλάτος στην είσοδο w_i , από 90 μέχρι -265, στα πρώτα δευτερόλεπτα της προσομοίωσης. Γιάυτό τον λόγο μαζί και με το γεγονός ότι επιδιώκουμε χαμηλή συχνότητα επικοινωνίας μεταξύ των πρακτόρων δεν επιλέξαμε αυτή την τιμή για το D στην αρχική προσομοίωση μας. Η αλλαγή του D που δείξαμε, έγινε για το Σενάριο 2. Η επόμενη παράμετρος που θα εξετάσουμε είναι το ϵ . Θα χρησιμοποιήσουμε το διπλάσιο ϵ , δηλ. $\epsilon = 0.04$ κρατώντας τις υπόλοιπες παράμετρους τις ίδιες.



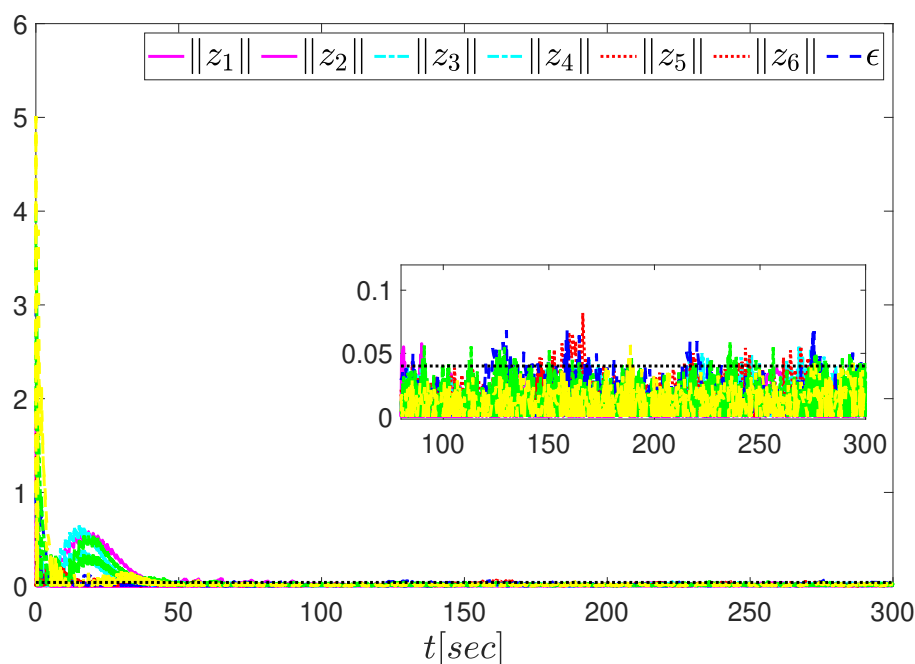
Σχήμα 4.19: Εξόδοι x_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για $\epsilon = 0.04$.



Σχήμα 4.20: Εξόδοι y_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για $\epsilon = 0.04$.

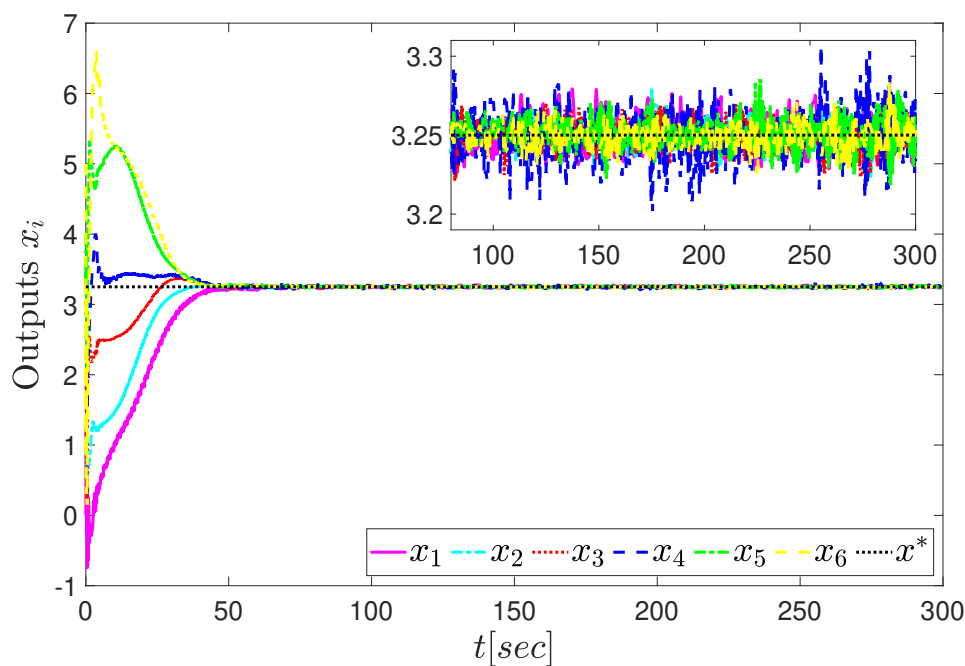
Όπως φαίνεται από τα Σχήματα 4.19, 4.20 για διπλάσιο ϵ , έχουμε και ανάλογη συμπεριφορά στο μόνιμο σφάλμα αφού σε σύγκριση με τα Σχήματα 4.7, 4.8 όπου κυμαινόταν στο ± 0.04 , τώρα κυμαίνεται στο ± 0.08 . Επιπρόσθετα, μπορεί να παρατηρηθεί και μια μικρή καθυστέρηση σύγκλισης των εξόδων x_i, y_i στο βέλτιστο σημείο συμφωνίας σε σύγκριση με αυτό που πετυχαίναμε για $\epsilon = 0.02$. Το ίδιο μπορούμε να δούμε και στα z_i , όπου μεγαλώνει

η γειτονιά γύρω από το μηδέν στην οποία πηγαίνουν οι μεταβλητές αυτές.

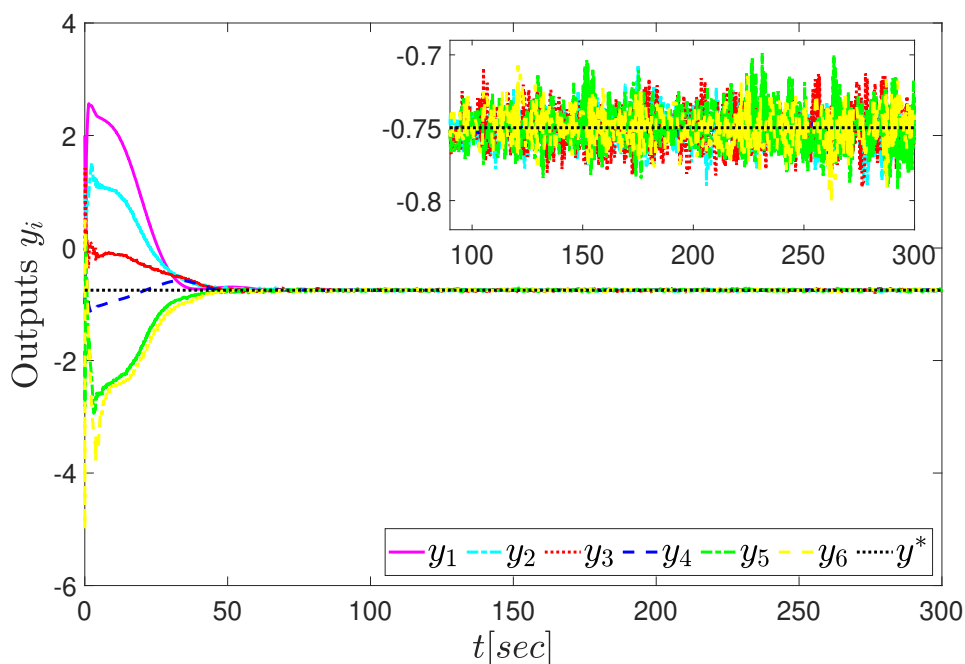


Σχήμα 4.21: Μεταβλητές GRASSP $\|z_i\|$ συναρτήση του χρόνου για $\epsilon = 0.04$.

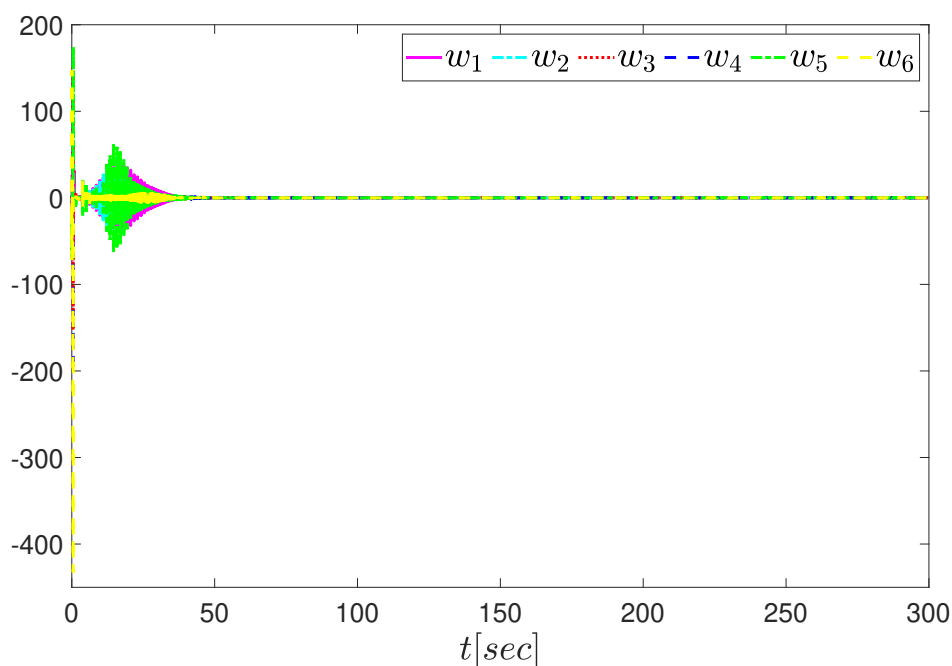
Τώρα θα δούμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραμέτρους για να πάρουμε μια πιο γρήγορη σύγκλιση με κόστος μια πιο μεγάλη είσοδο στην αρχή της προσομοίωσης. Οι διαφορετικές τιμές που εφαρμόσαμε είναι $T = 0.3$, $\gamma = 20$ και $K_1 = 1.5$.



Σχήμα 4.22: Εξόδοι x_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για νέες παραμέτρους.



Σχήμα 4.23: Εξόδοι y_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για νέες παραμέτρους.



Σχήμα 4.24: Εισόδοι w_i των unicycle συναρτήση του χρόνου για νέες παραμέτρους.

Παρατηρούμε ότι τα x_i , y_i συγκλίνουν στο επιθυμητό σημείο στα 50 sec, 20 sec πιο γρήγορα από την μία τα x_i και 30 sec από την άλλη τα y_i . Αυτό το πετυχαίνουμε λόγω του ότι χρησιμοποιούμε μικρότερη περίοδο T και παράλληλα μεγαλύτερα κέρδη γ και K_1 . Για να έχουμε ουσιαστικές αλλαγές όμως πρέπει τα γ και K_1 να μεγαλώνουν ταυτόχρονα αφού από τις (4.8), (4.9) το κέρδος K_1 ελέγχει μόνο τον πρώτο και τελευταίο όρο, ενώ το γ επηρεάζει τον

μεσαίο. Η πιο σύντομη σύγκλιση έχει ως αντάλλαγμα να πέρνουμε μεγαλύτερη είσοδο w_i που φτάνει το -430 όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.24.

Κεφάλαιο 5

Επίλογος

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μια σύνοψη των βασικών αποτελεσμάτων της διπλωματικής και εισάγονται κάποιες προτάσεις για επέκταση της.

5.1 Σύνοψη και Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία προτάθηκε ένα καταναμημένο σύστημα ελέγχου για την επίτευξη προσεγγιστικής βέλτιστης συμφωνίας σε κινούμενα ρομπότ τύπου unicycle, όπου χρησιμοποιούν μόνο δείγματα από τις εξόδους των γειτόνων τους με αρκετά χαμηλή συχνότητα και με επιτρεπόμενη καθυστέρηση στην επικοινωνία. Αυτό έγινε δυνατό με την αναδιατύπωση του προβλήματος βέλτιστης συμφωνίας ως πρόβλημα ρύθμισης κατάλληλων συνεχών βοηθητικών μεταβλητών, ονομαζόμενες GRASSP μεταβλητές.

Αρχικά, παρουσιάσαμε κάποιες βασικές έννοιες από θεωρία γράφων και μαθηματική ανάλυση πάνω στις οποίες στηρίξαμε την μελέτη του συστήματος μας. Στη συνέχεια, παρουσιάστηκε ο Επαυξημένος Lagrangian Αλγόριθμος, τον οποίο ενσωματώσαμε αργότερα στον ορισμό των GRASSP μεταβλητών με σκοπό την επίτευξη καταναμημένης βελτιστοποίησης του πολυπρακτορικού συστήματος. Το βασικό αποτέλεσμα του πρώτου μέρους της διπλωματικής αφορά την απόδειξη ότι μπορούμε να φτάσουμε σε προσεγγιστική βέλτιστη συμφωνία ρυθμίζοντας τις GRASSP μεταβλητές σε μια γειτονιά του μηδενός.

Στο δεύτερο μέρος της διπλωματικής, προτάθηκαν νόμοι ελέγχου που θα οδηγήσουν μια ομάδα κινούμενων ρομπότ τύπου unicycle σε προσεγγιστική βέλτιστη συμφωνία. Προς την κατεύθυνση επαλήθευσης των θεωρητικών μας αποτελεσμάτων, προσομοιώσαμε το σύστημα για μια ομάδα με 6 unicycle κάτω από 3 διαφορετικά σενάρια σε περιβάλλον Matlab-Simulink.

Τα συμπεράσματα που βγάλαμε από τις προσομοιώσεις είναι ότι με την κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων του αλγορίθμου αλλά και του ελεγκτή, οδηγούμε το σύστημα μας σε προσεγγιστική βέλτιστη συμφωνία. Η επιλογή των παραμέτρων είναι τέτοια ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν πιο γρήγορη σύγκλιση στο σημείο βέλτιστης συμφωνίας χωρίς όμως να πέρνουμε πολύ μεγάλες εισόδους. Μέσω των πολλών προσομοιώσεων που παρουσιάστηκαν φαίνονται οι εξαρτήσεις του συστήματος μας από τις διάφορες παραμέτρους και ότι χρειάζεται να γίνει ένας συμβιβασμός μεταξύ γρήγορης σύγκλισης και μεγάλης εισόδου.

5.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στη διπλωματική αυτή θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε διαφορετικά συστήματα όπως σε πράκτορες με δυναμικές Lagrangian έτσι ώστε να μπορεί να συγκριθεί με άλλες υπάρχοντες εργασίες [23]. Επίσης, θα μπορούσε να διερευνηθεί κατά πόσο μπορούν να χαλαρωθούν οι διάφορες υποθέσεις που έγιναν σχετικά με την τοπολογία επικοινωνίας και την μορφή των κριτηρίων κόστους. Συγκεκριμένα, να γίνει προσπάθεια επέκτασης της παρούσας διπλωματικής σε πολυπρακτορικά δίκτυα, όπου ο γράφος δεν είναι συνεκτικός σε κάθε χρονική στιγμή ή είναι κατευθυνόμενος και να εξεταστεί η εφαρμογή της μεθόδου σε μη-κυρτές ή και μη-διαφορίσιμες συναρτήσεις. Επιπρόσθετα, σε ένα τομέα στο οποίο θα είχε έντονο ενδιαφέρον να δοκιμαστεί η μεθοδολογία μας είναι σε θέματα ασφάλειας του δικτύου. Για παράδειγμα, λόγω της χαμηλής συχνότητας επικοινωνίας και της επιτρεπόμενης καθυστέρησης στην ανταλλαγή πληροφορίας που δίνουμε με το προτεινόμενο σχήμα, θα μπορούσαν να εξεταστούν επεκτάσεις και εφαρμογές σε δίκτυα με κακόβουλους πράκτορες.

Βιβλιογραφία

- [1] D. Jakovetic και J. M. F. Moura. *Linear Convergence Rate of a Class of Distributed Augmented Lagrangian Algorithms*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(4):922–936, 2015.
- [2] F. L. Lewis, H. Zhang, K. Hengster-Movric και A. Das. *Cooperative Control of Multi-Agent Systems: Optimal and Adaptive Design Approaches*. Springer, London, 2014.
- [3] Y. Cao W. Ren. *Distributed Coordination of Multi-agent Networks*. Springer, London, 2011.
- [4] R. Olfati-Saber και R. M. Murray. *Consensus protocols for networks of dynamic agents*. *American Control Conference*, Denver, Colorado, 2003.
- [5] D. K. Molzahn, H. Sandberg, S. H. Low, S. Chakrabarti, R. Baldick και J. Lavaei. *A survey of distributed optimization and control algorithms for electric power systems*. *IEEE Trans. Smart Grid*, 8(6):2941–2962, 2017.
- [6] H. Jaleel και J. S. Shamma. *Distributed optimization for robot networks: From real-time convex optimization to game-theoretic self-organization*. *Proceedings of the IEEE*, 108(11):1953–1967, 2020.
- [7] S. Yang, S. Tan και J. Xu. *Consensus Based Approach for Economic Dispatch Problem in a Smart Grid*. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(4):4416–4426, 2013.
- [8] J. N. Tsitsiklis. *Problems in Decentralized Decision Making and Computation*. Διδακτορική Διατριβή, Massachusetts Institute of Technology, 1984.
- [9] J. Tsitsiklis, D. Bertsekas και M. Athans. *Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms*. *IEEE Trans. Automat. Control*, 31(9):803–812, 1986.
- [10] A. Nedic και A. Ozdaglar. *Distributed subgradient methods for multi-agent optimization*. *IEEE Trans. Automat. Control*, 54(1):48–61, 2009.
- [11] D. Jakovetić, J. Xavier και J. M. F. Moura. *Fast Distributed Gradient Methods*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(5):1131–1146, 2014.
- [12] Y. E. Nesterov. *A method for solving the convex programming problem with convergence rate $O(k^2)$* . *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 269(3):543–547, 1983.

- [13] W. Shi, Q. Ling, G. Wu, και W. Yin. *EXTRA: An exact first-order algorithm for decentralized consensus optimization*. *SIAM Journal on Optimization*, 25(2):944–966, 2015.
- [14] J. Wang και N. Elia. *Control approach to distributed optimization*. *48th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, Allerton, 2010.
- [15] J. Lu και C. Y. Tang. *Zero-gradient-sum algorithms for distributed convex optimization: The continuous-time case*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(9):2348–2354, 2012.
- [16] T. Jang, X Yi, J Wu, Y Yuan, D Wu, Z Meng, Y. Hong, H. Wang, Z. Lin και K. H. Johansson. *A survey of distributed optimization*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(9):278–305, 2019.
- [17] X. Wang, G. Wang και S. Li. *Distributed Finite-Time Optimization for Integrator Chain Multiagent Systems With Disturbances*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(12):5296–5311, 2020.
- [18] J. Zhang, L. Liu και H. Ji. *Exponential convergence of distributed optimal coordination for linear multi-agent systems over general digraphs*. *IEEE 39th Chin. Control Conf.*, Allerton, 2020.
- [19] X. Wang, Y. Hong και H. Ji. *Distributed optimization for a class of nonlinear multiagent systems with disturbance rejection*. *IEEE Trans. Cybern.*, 46(7):1655–1666, 2015.
- [20] D. Wang, Z. Wang και C. Wen. *Distributed optimal consensus control for a class of uncertain nonlinear multiagent networks with disturbance rejection using adaptive technique*. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., Syst.*, 51(7):4389–4399, 2021.
- [21] Y. Tang. *Distributed optimization for a class of high-order nonlinear multiagent systems with unknown dynamics*. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 28(17):5545–5556, 2018.
- [22] A. K. Gkesoulis, H. E. Psillakis και A. R. Lagos. *Optimal Consensus via OCPI Regulation for Unknown Pure-Feedback Agents With Disturbances and State Delays*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(8):4338–4345, 2022.
- [23] H. E. Psillakis και K. A. Oikonomidis. *Adaptive Fuzzy Approximate Optimal Consensus of Lagrangian Agents: An EXTRA-Based Smoothing Approach*. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2023.
- [24] A. S. Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers , vol. 1, Deterministic Techniques*. Elsevier Ltd, Amsterdam, 2008.
- [25] H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, New Jersey, 2002.
- [26] W. F. Trench. *Introduction to real analysis*. Pearson Education, Texas, 2013.

-
- [27] H. E. Psillakis και Q. Wang. *Distributed Adaptive Consensus of Nonlinear Heterogeneous Agents With Delayed and Sampled Neighbor Measurements*. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 52(4):2340–2350, 2022.
- [28] M. Aicardi, G. Casalino, A. Bicchi και A. Balestrino. *Closed loop steering of unicycle like vehicles via Lyapunov techniques*. *IEEE Robotics Automation Magazine*, 2(1):27–35, 1995.
- [29] I. Kolmanovsky και N. H. McClamroch. *Developments in nonholonomic control problems*. *IEEE Control Systems Magazine*, 15(6):20–36, 1995.