



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
& ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Συμπεριφορά μεθόδου βοηθητικών πηγών σε
ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα διάδοσης**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Άγγελος Ι. Δημόπουλος

Επιβλέπων : Γεώργιος Ι. Φικιώρης

Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβρης 2024



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Συμπεριφορά μεθόδου βοηθητικών πηγών σε
ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα διάδοσης**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Άγγελος Ι. Δημόπουλος

Επιβλέπων : Γεώργιος Ι. Φικιώρης
Καθηγητής ΗΜΜΥ ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 2/10/2024

.....
Γεώργιος Ι. Φικιώρης
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Ηλίας Ν. Γλύτσης
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Ιωάννης Α.
Ρουμελιώτης
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα , Οκτώβρης 2024

.....

Άγγελος Ι. Δημόπουλος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Άγγελος Ι. Δημόπουλος 2024

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Η μέθοδος των βοηθητικών πηγών (MAS) αποτελεί μια συστηματική προσέγγιση επίλυσης προβλημάτων συνοριακών τιμών. Στην περιοχή του Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού οι εξισώσεις του Maxwell και οι οριακές συνθήκες ικανοποιούνται από ένα σύνολο N το πλήθος βοηθητικών πηγών τοποθετημένων επί αντίστοιχων βοηθητικών επιφανειών. Οι πηγές είναι τέτοιες ώστε να ικανοποιείται η οριακή συνθήκη σε N διακριτά σημεία επιλεγμένα πάνω στο σύνορο. Στην εργασία αυτή, η MAS εφαρμόζεται και αναλύεται σε 2 απλά δισδιάστατα μαγνητοστατικά προβλήματα σκέδασης/διάδοσης κυκλικού & ελλειπτικού συνόρου, των οποίων οι αναλυτικές λύσεις είναι γνωστές. Στην πρώτη περίπτωση, προβλέπεται η σύγκλιση ή η απόκλιση καθώς $N \rightarrow \infty$ των ρευμάτων των πηγών μέσω κλειστών εξισώσεων για αυτά, οι οποίες εξάγονται χρησιμοποιώντας στοιχειώδη ηλεκτρομαγνητική θεωρία και μερικές σχετικά απλές μαθηματικές τεχνικές. Οι κλειστές εξισώσεις για τα ρεύματα, αποκλείουν κάθε περίπτωση για την ύπαρξη σφαλμάτων που προέρχονται από το πεπερασμένο μήκος λέξης του υπολογιστή, τουλάχιστον για χαμηλούς αριθμούς κατάστασης του σχετιζόμενου προβλήματος αντιστροφής πίνακα. Δείχνεται επίσης πως είναι δυνατόν, με ένα σύνολο ρευμάτων που αποκλίνουν να λαμβάνεται ένα συγκλίνον MAS πεδίο. Η σύγκλιση (και το σφάλμα προσέγγισης της MAS) των πηγών εξαρτάται από τη σχετική θέση των βοηθητικών επιφανειών και της περιοχής σύγκλισης των λύσεων. Όλα τα παραπάνω επιβεβαιώνονται και αριθμητικά. Στη δεύτερη περίπτωση, καθώς εξ' όσων είναι γνωστά δεν υπάρχει δυνατότητα για εύρεση της λύσης σε κλειστή μορφή αλλά οι αντίστοιχες ακτίνες σύγκλισης είναι γνωστές, επιβεβαιώνονται οι παραπάνω προβλέψεις μέσω αριθμητικών πειραμάτων σε διατάξεις με διάφορα χαρακτηριστικά. Η συμπεριφορά αυτή, πιστεύεται πως εξακολουθεί να ισχύει και σε διατάξεις αυθαίρετου σχήματος.

Λέξεις κλειδιά – MAS, Σύγκλιση Αριθμητικών Μεθόδων, Αριθμός Κατάστασης, Περιοχή Σύγκλισης, Σκέδαση, Διάδοση

Abstract

The Method of Auxiliary Sources (MAS) is an approximation technique used when solving boundary value problems. In the context of Computational Electromagnetics, Maxwell's equations and the corresponding boundary conditions are satisfied by N auxiliary sources positioned on auxiliary surfaces, whose amplitudes can be computed by a linear system, derived by choosing N collocation points on the boundary surface. In this work, the MAS is applied to two simple 2D magnetostatic scattering/transmission problems of circular and elliptical boundary. The solutions to these two problems are known, at least in the form of a series of eigenfunctions. In the first case, the solution to the linear system, that is the MAS currents, is obtained explicitly. Using these closed formulas, the condition is found under which the sources converge to a continuous surface current or diverge as $N \rightarrow \infty$. It is shown that one can have a divergent set of currents and simultaneously a convergent MAS field. While the matrices associated with the MAS systems are certainly ill-conditioned (*this has been well investigated in the literature*), it is stressed that for relatively low condition numbers, there are no numerical errors present pretraining to finite computer word length. There is strong evidence, and proof for the first case (*analytically*), that the relative position of the auxiliary surfaces and the regions of convergence of the series, controls the behavior (*and the accuracy of the method*) of the auxiliary sources and this should also hold for arbitrary geometries. All the above, in both cases, are supported by numerical experiments.

Key Words – MAS, Convergence of Numerical Methods, Condition Number, Region of convergence, Scattering, Transmission

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τον καθηγητή κύριο Γεώργιο Ι. Φικιώρη για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και την ευκαιρία που μου έδωσε να εργαστώ σε αυτό το θέμα διπλωματικής εργασίας που με ενδιέφερε βαθιά . Η υποστήριξη του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης ήταν αδιάλειπτη, πολύτιμη και καθοριστική για την έκβαση της. Υπό την καθοδήγηση του κ. Φικιώρη κατέκτησα ένα τεράστιο όγκο γνώσης που μου έδωσε μια μοναδική οπτική γωνία στην επιστήμη του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού.

Τις θερμές ευχαριστίες μου θα ήθελα να επισημάνω στον καθηγητή κύριο Ιωάννη Α. Ρουμελιώτη και στο συνεργάτη κύριο Γεώργιο Δ. Κολέζα , για τις πολύτιμες συζητήσεις κατά τη διάρκεια της συγγραφής της διπλωματικής εργασίας , που επιτάχυναν την κατανόηση του αντικειμένου.

Τέλος , ευχαριστώ την οικογένεια μου για τη όλη τη βοήθεια που μου παρείχαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Αφιερώνεται στους γονείς μου , Ιωάννη & Κωνσταντίνα

Και στον αδερφό μου, Γεώργιο

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	5
Abstract.....	6
Ευχαριστίες.....	7
Εισαγωγή.....	13

Κεφάλαιο I

1.1 Αναλυτική λύση εξωτερικού προβλήματος κυκλικού συνόρου.....	14
1.2 Αναλυτική λύση εσωτερικού προβλήματος κυκλικού συνόρου.....	18
1.3 Διατύπωση της μεθόδου των βοηθητικών πηγών (MAS) στο κυκλικό πρόβλημα.....	21
1.3.1 MAS στο εξωτερικό πρόβλημα.....	22
1.3.2 MAS στο εσωτερικό πρόβλημα.....	24
1.4 Λύση του συστήματος MAS, $AI_{MAS} = b$	25
1.4.1 Ιδιότητες κυκλικών (<i>circulant</i>) πινάκων.....	25
1.4.2 Λύση μέσω DFT του συστήματος $AI_{MAS} = b$	27
1.4.3 Ασυμπτωτικές προσεγγίσεις συστημάτων MAS.....	30
1.4.3α Ορισμοί ασυμπτωτικών προσεγγίσεων.....	30
1.4.3β Υπολογισμοί χρήσιμων ασυμπτωτικών μεγεθών σε γενική μορφή.....	31
1.4.3γ Ακριβή και Ασυμπτωτικά συστήματα και ρεύματα MAS.....	34
1.4.3δ Ασυμπτωτικές εκφράσεις για τα οριακά προβλήματα $c_i = \frac{\mu_2}{\mu_1}, c_o = \frac{\mu_1}{\mu_2} \rightarrow \infty$	37
1.4.4 Συμπεριφορά των ρευμάτων MAS συναρτήσει των βοηθητικών επιφανειών.....	38
1.5 Αριθμός κατάστασης (<i>condition number</i>) προβλήματος αριθμητικής επίλυσης εξίσωσης Laplace μέσω MAS.....	41

1.6 Συνεχής έκδοση της μεθόδου των βοηθητικών (<i>Continuous MAS, CMAS</i>).....	48
1.6α Προσδιορισμός Βοηθητικών επιφανειακών ρευματικών κατανομών $K^{i,o}(\varphi)$	48
1.6β Μη επιλύσιμο της ολοκληρωτικής εξίσωσης CMAS και Μέθοδος Ροπών.....	54
1.7 Σύγκλιση στο πραγματικό $\vec{H}$ & μη-μονοσήμαντο των βοηθητικών επιφανειών.....	59
1.8 Αριθμητικά Παραδείγματα.....	62
1.8.1α Εξωτερικό πρόβλημα $\rho_{cyl} < \rho_{fil}$, «ήπια» περίπτωση.....	62
1.8.1β Εξωτερικό πρόβλημα $\rho_{cyl} < \rho_{fil}$, «κρίσιμη» περίπτωση.....	67
1.8.2α Εσωτερικό πρόβλημα $\rho_{cyl} > \rho_{fil}$, «ήπια» περίπτωση.....	73
1.8.2β Εσωτερικό πρόβλημα $\rho_{cyl} > \rho_{fil}$, «κρίσιμη» περίπτωση.....	77

Κεφάλαιο II

2.1.1 Διαφορική γεωμετρία του ελλειπτικού κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων.....	80
2.1.2 Εκφράσεις διαφορικών τελεστών & διανυσματική εξίσωση Laplace.....	82
2.2 Εξωτερικό ελλειπτικό πρόβλημα.....	86
2.3 Εσωτερικό ελλειπτικό πρόβλημα.....	92
2.4 Διατύπωση της MAS στο ελλειπτικό πρόβλημα.....	97
2.4α MAS στο εξωτερικό ελλειπτικό πρόβλημα.....	97
2.4β MAS στο εσωτερικό ελλειπτικό πρόβλημα.....	100
2.5 Αριθμητικά Παραδείγματα.....	102
2.5α Εξωτερικό πρόβλημα $\xi_o < \xi_f$	102
2.5β Εσωτερικό πρόβλημα $\xi_o > \xi_f$	105

Συμπεράσματα – Μελλοντική Εργασία.....	108
Παράρτημα.....	109
Βιβλιογραφία.....	112

Πίνακας Σχημάτων/Εικόνων

- Εικόνα 1 :** Μαγνητοστατικό, εξωτερικό, κυκλικό, κυλινδρικό πρόβλημα διάδοσης
- Εικόνες 2 & 3 :** Σχηματική απεικόνιση της αναλυτικής λύσης του εξωτερικού προβλήματος
- Εικόνα 4 :** Μαγνητοστατικό, εσωτερικό, κυκλικό, κυλινδρικό πρόβλημα διάδοσης
- Εικόνες 5 & 6 :** Σχηματική απεικόνιση της λύσης του εσωτερικού προβλήματος.
- Εικόνα 7 :** MAS στο εξωτερικό πρόβλημα
- Εικόνα 8:** MAS στο εσωτερικό πρόβλημα
- Εικόνα 9:** Τοποθέτηση εσωτερικής επιφάνειας σε απόσταση που προκαλεί αποκλίνοντα ρεύματα MAS
- Εικόνα 10:** Ύπαρξη ανώμαλου σημείου (ειδώλου) στο χώρο όπου οι βοηθητικές πηγές διεγείρουν το ζητούμενο μαγνητικό πεδίο.
- Εικόνα 11:** Ρίζες Πολυωνύμου Wilkinson
- Εικόνα 12:** Ανηγμένα στο ρεύμα διέγερσης I , ρεύματα MAS εσωτερικής επιφάνειας
- Εικόνα 13:** Ανηγμένα ρεύματα εξωτερικής επιφάνειας
- Εικόνα 14:** Υπολογισμός έντασης μαγνητικού πεδίου από αναλυτική λύση του εξωτερικού προβλήματος & από ρεύματα MAS
- Εικόνα 15:** Υπολογισμός εφαπτομενικής συνιστώσας έντασης μαγνητικού πεδίου με δύο μεθόδους.
- Εικόνα 16:** Υπολογισμός πεδίου MAS σε εσωτερικά σημεία της διάταξης για $\rho = 0.41 < \rho_{cyl}$.
- Εικόνα 17α:** Εφαπτομενική συνιστώσα του $\mathbf{H}$ στο εσωτερικό του κύκλου, για $\rho = 0.41 < \rho_{cyl}$.
- Εικόνα 17β:** Μεταβολή των βοηθητικών ρευμάτων που ρέουν στην εξωτερική επιφάνεια.
- Εικόνα 18:** Μεταβολή ρευμάτων εσωτερικής βοηθητικής επιφάνειας
- Εικόνες 19 & 20:** Υπολογισμός $\mathbf{H}$ από MAS με ρεύματα προερχόμενα από διαφορετικές βοηθητικές επιφάνειας.
- Εικόνα 21:** Λύση του 1.27 στην κρίσιμη περίπτωση, για τα ρεύματα εξωτερικής επιφάνειας.
- Εικόνα 22:** Λύση του 1.27 στην κρίσιμη περίπτωση, για τα ρεύματα εσωτερικής επιφάνειας .
- Εικόνα 23:** $H\rho(\varphi)$ για $\rho = 0.42$, με 2 μεθόδους
- Εικόνα 24:** $H\varphi(\varphi)$ για $\rho = 0.42$, με 2 μεθόδους.
- Εικόνες 25 & 26:** Απόλυτο σφάλμα μεταξύ αναλυτικής λύσης και αριθμητικής για κάθε συνιστώσα.
- Εικόνες 27 & 28:** Φύση και τάξη μεγέθους του σφάλματος που διαδίδεται στην τελική λύση από τα σφάλματα στον υπολογισμό των συνοριακών δεδομένων (boundary data).
- Εικόνες 29 & 30 :** Συμπεριφορά του MAS H-field σε αμφότερες τις περιοχές, για την «ήπια» περίπτωση της παραγράφου 1.9.1α.
- Εικόνες 31 & 32:** Γραφική επιβεβαίωση συνοριακών συνθηκών.
- Εικόνες 33 & 34:** MAS ρεύματα εσωτερικού κυκλικού προβλήματος.
- Εικόνες 35-38:** Υπολογισμός MAS H-field σε αμφότερες τις περιοχές, εσωτερικό πρόβλημα.
- Εικόνες 39-42:** Μη μονοσήμαντο στο εσωτερικό πρόβλημα.

Εικόνες 43-46: Μέγιστο απόλυτο σφάλμα MAS λύση συναρτήσει βοηθητικών επιφανειών.

Εικόνες 47-48: Ρεύματα MAS εσωτερικού προβλήματος, κρίσιμη περίπτωση.

Εικόνες 49-53: Υπολογισμός H στο εσωτερικό πρόβλημα, κρίσιμα ρεύματα.

Εικόνες 54 & 55: Γραφική επιβεβαίωση συνοριακών συνθηκών.

Εικόνα 56: Διάταξη εξωτερικού ελλειπτικού προβλήματος διάδοσης.

Εικόνα 57: Διάταξη εσωτερικού ελλειπτικού προβλήματος διάδοσης.

Εικόνα 58: MAS στο εξωτερικό πρόβλημα. Τοποθέτηση βοηθητικών πηγών επί των επιφανειών $\xi_{\alpha u x o}$, $\xi_{\alpha u x i}$.

Εικόνα 59: MAS στο εσωτερικό πρόβλημα. Τοποθέτηση βοηθητικών πηγών επί των επιφανειών $\xi_{\alpha u x o}$, $\xi_{\alpha u x i}$.

Εικόνες 60 & 61: MAS ρεύματα εξ. ελ. προβλήματος, ρέοντα στην εσωτερική (αριστερά) και εξωτερική (δεξιά) βοηθητική επιφάνεια.

Εικόνες 64 & 65: Ρεύματα MAS κρίσιμης περίπτωσης.

Εικόνα 66: Μεταβολή του αριθμού κατάστασης του A στο εξ. ελ. πρόβλημα, στην «ήπια» περίπτωση.

Εικόνες 67 & 68: MAS ρεύματα εσ. ελ. προβλήματος, ρέοντα στην εσωτερική (αριστερά) και εξωτερική (δεξιά) βοηθητική επιφάνεια.

Εικόνα 69: Σκέδαση δυναμικού A^{sc} στο εσωτερικό του κυλίνδρου, $A_1 = A^{sc} + A^i$

Εικόνα 70: Διάδοση δυναμικού στην εξωτερική περιοχή.

Εικόνες 71 & 72: MAS ρεύματα ρέοντα σε κρίσιμες επιφάνειες.

Εικόνες 73 & 74: Αριθμός κατάστασης για ήπια (αριστερά) και κρίσιμη (δεξιά) περίπτωση ρευμάτων.

Εισαγωγή

Η γρήγορη και επιταχυνόμενη εξέλιξη της τεχνολογίας φέρνει στην επιφάνεια όλο και πιο δύσκολες ως προς την ανάλυση διατάξεις και υλικά που πληρούν τα χαρακτηριστικά που απαιτούν οι σχεδιαστές. Για να δημιουργηθεί όμως ένα σύστημα που συνδυάζει τα παραπάνω και να συμπεριφέρεται όπως απαιτεί η σχεδίαση του, δηλαδή να είναι προβλέψιμο και σύμφωνο με τις ανάγκες που εξυπηρετεί, είναι επιτακτική η ανάγκη της μελέτης της αλληλεπίδρασης του με τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Μερικά παραδείγματα για τα παραπάνω μπορούν να είναι προβλήματα σκέδασης (στατικής και μη), ακτινοβολίας, μοντελοποίηση υλικών, σχεδίαση κεραιών, κυματοδηγών, συστημάτων radar, συστημάτων μέτρησης και η λίστα συνεχίζεται.

Η παραπάνω ανάγκη δημιούργησε ένα νέο κλάδο του Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού (*Computational Electromagnetics*) της υπολογιστικής φυσικής στα τέλη της δεκαετίας του '60 με τη θεμελίωση κάποιων πρώτων εργασιών [1]. Ο Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός αποτελεί το σύνολο των μεθόδων εύρεσης των λύσεων στις Εξισώσεις του Maxwell σε περιβάλλον υπολογιστή, συνδυάζοντας υπολογιστικές και αριθμητικές μεθόδους οι οποίες είναι πάντοτε προσεγγιστικές. Κλασσικές πλέον μέθοδοι, για την επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων, θεωρούνται η μέθοδος των ροπών [1] και διάφορες βελτιώσεις αυτής [2][3], αλλά και άλλες όπως η μέθοδος Επίπεδων Κυμάτων στο πεδίο του χρόνου [4]. Άλλες αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, ευρέως πλέον χρησιμοποιούμενες και στη βιομηχανία, είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) (ηλεκτρομαγνητική ανάλυση ηλεκτροκινητήρων) ή η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (FDM).

Μερικές από τις παραπάνω μεθόδους βασίζονται στην αναπαράσταση του σκεδαζόμενου-διαδιδόμενου πεδίου από ένα διακριτό σύνολο πηγών. Ίσως η πιο βασική από αυτές, είναι η μέθοδος των βοηθητικών πηγών (Method Of Auxiliary Sources, MAS) της οποίας θα αναλυθεί η συμπεριφορά, η ακρίβεια και η υπολογιστική ευκολία. Όπως είναι γενικά γνωστό στην επιστήμη του μηχανικού, η εξαγωγή βασικών συμπερασμάτων για την επίδοση ενός συστήματος λαμβάνεται όταν το σύστημα υπόκειται σε απλές, προβλέψιμες, με εκ των προτέρων γνωστά αποτελέσματα περιπτώσεις. Υπό αυτό το πρίσμα, η MAS αναλύεται κατά πρώτο λόγο σε απλές διατάξεις διάδοσης και αναλόγως τα συμπεράσματα, γίνεται παρεκβολή των αποτελεσμάτων και για «δυσκολότερες» διατάξεις.

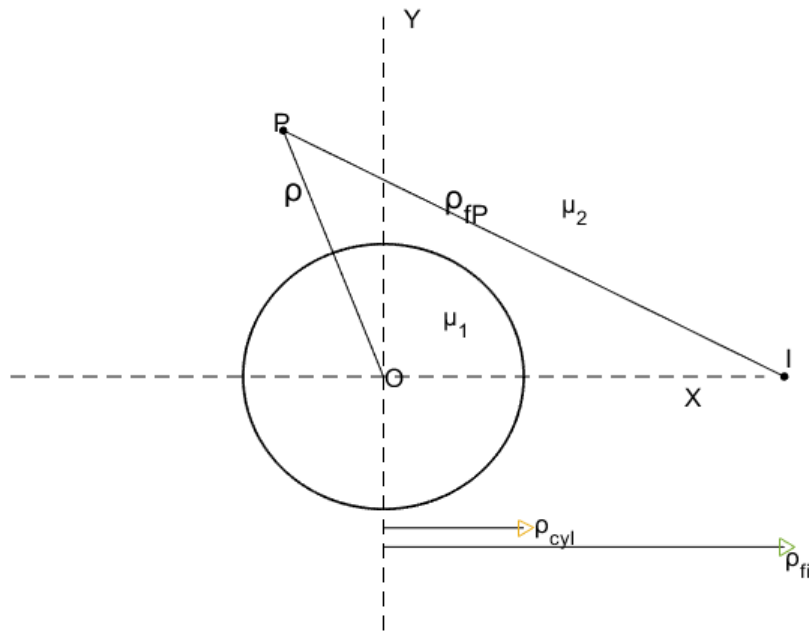
Η συμπεριφορά υπολογιστικών μεθόδων προκαλεί ερευνητικό ενδιαφέρον, όπως φαίνεται από διάφορες εργασίες [5][6][7][29]. Σε κάθε περίπτωση, γίνεται κατανοητό πως κατά την σχεδίαση-επιλογή των επιφανειών/σημείων βοηθητικών πηγών, αλλά και άλλων σημαντικών παραμέτρων που αφορούν την υλοποίηση της μεθόδου, πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν προϋποθέσεις που εξασφαλίζουν ορθά αποτελέσματα.

Κεφάλαιο Ι : Κυκλικό Κυλινδρικό Πρόβλημα Διάδοσης

Μια απλή γεωμετρία στην οποία μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των βοηθητικών πηγών (*Method of Auxiliary Sources, MAS*), είναι η περίπτωση του άπειρου κατά μήκους κυκλικού κυλίνδρου από ομογενές υλικό με μαγνητική διαπερατότητα μ_1 , που «φωτίζεται» από παράλληλο στον άξονα του, επίσης απείρου μήκους αγωγό που διαρρέεται από χρονοσταθερό (ή χαμηλής συχνότητας) και ομοιόμορφο ρεύμα πηγής I . Η πηγή βρίσκεται είτε στο εξωτερικό απέραντο ομογενές υλικό με μαγνητική διαπερατότητα μ_2 είτε στο εσωτερικό του κυλίνδρου.

1.1 : Αναλυτική λύση εξωτερικού προβλήματος κυκλικού συνόρου

Ορίζεται το εξωτερικό πρόβλημα ως η εύρεση της έντασης του μαγνητικού πεδίου $\vec{H}$ παντού στο χώρο της διάταξης του σχήματος 1:



Εικόνα 1 : Μαγνητοστατικό, εξωτερικό, κυκλικό, κυλινδρικό πρόβλημα διάδοσης.

Στο σχήμα ορίζεται το τυχαίο σημείο παρατήρησης P , η απόστασή του από την αρχή των αξόνων O και η απόσταση του από το διεγείρον ρεύμα, $\rho_{fIP} = \ln \sqrt{\rho^2 + \rho_{cyl}^2 - 2\rho\rho_{cyl}\cos\varphi}$, αν $(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου P . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, λόγω συμμετρίας της διάταξης, το διεγείρον ρεύμα τοποθετείται στη θέση $(\rho_{fil}, 0)$. Το πρόβλημα ορίζεται ως εξής :

$$\Delta \vec{A}_1 = \vec{0}, \quad \rho \leq \rho_{cyl}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (1.1)$$

$$\Delta \vec{A}_2 = -\frac{\mu_2 I}{2\pi\rho} \delta(\rho - \rho_{fil})\delta(\varphi) \hat{z}, \quad \rho > \rho_{cyl}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (1.2)$$

όπου έχει γίνει η εισαγωγή του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων (ρ, φ, z) και του διανυσματικού τελεστή Laplace Δ , και των διανυσματικών δυναμικών $\vec{A}_1, \vec{A}_2$ τέτοιων ώστε

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{\mu_1} \vec{\nabla} \times \vec{A}_1, \quad \vec{H}_2 = \frac{1}{\mu_2} \vec{\nabla} \times \vec{A}_2$$

Όπως είναι πολύ γνωστό, το παραπάνω πρόβλημα λύνεται με τη χρήση της μεθόδου των ειδώλων, η οποία προτάθηκε πρώτη φορά στην εργασία [27, Kelvin Treat. Nat. Phil 2] του λόρδου Kelvin. Ο λόρδος Kelvin εισάγει τον όρο είδωλο, ασχολούμενος με το λεγόμενο (αντίστροφο) πρόβλημα του Green [27, p. 53-54] εύρεσης κατανομής ύλης M , επί δοθείσας επιφάνειας S διεγείρουσας δοθέντος δυναμικού U . Σαν παράδειγμα στην εργασία δίνεται [27, p.61], το δυναμικό U που προκαλείται από 2 αντίθετα φορτία φορτία m , $-m$ (το πρόσημο της μάζας καθορίζει την έλξη ή την απόθληση άλλων μαζών) και η σφαίρα S με ακτίνα τέτοια ώστε το αρνητικό φορτίο να αντιστοιχεί στο είδωλο του διεγείροντος φορτίου m . Αφού επεκταθεί η μέθοδος και για συνεχείς κατανομές (για το πρόβλημα Green), τονίζεται η σημασία της για λύσεις προβλημάτων ηλεκτροστατικής [27, p.62]. Καθ' όλη τη διάρκεια της [27], ο συγγραφέας τονίζει πως όλα τα συμπεράσματα που εξάγονται, ισχύουν για πάσης φύσεως νόμους έλξης αντίστροφου τετραγώνου. Στη συνέχεια περιγράφεται η μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί.

Η λύση όμως μπορεί να προέλθει και από το ανάπτυγμα των αγνώστων στις ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace, εκπεφρασμένου στις κυλινδρικές συντεταγμένες αντί να χρησιμοποιηθεί η προαναφερθείσα μέθοδος των ειδώλων. Κατά τη λύση του με τη δεύτερη μέθοδο όμως, είναι πιο εμφανείς ορισμένες πολύ σημαντικές πληροφορίες που σχετίζονται άμεσα με τη συμπεριφορά της MAS, όπως η ακτίνα σύγκλισης της αναλυτικής επέκτασης των λύσεων.

Γνωρίζοντας πως το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι ομαλή συνάρτηση του χώρου, μπορούμε να επιλέξουμε τα κατάλληλα αναπτύγματα και επειδή το διανυσματικό δυναμικό οφείλει να είναι παράλληλο στο ρεύμα διέγερσης (όπως άλλωστε φαίνεται από την (1.2)) κάνουμε τις υποθέσεις :

$$\vec{A}_1 = -\frac{\mu_1 I}{2\pi} \hat{z} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} B_n \rho^n \cos n\varphi + C_1 \right], \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{cyl}, \quad (1.3)$$

$$\vec{A}_2 = -\frac{\mu_2 I}{2\pi} \hat{z} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} C_n \rho^{-n} \cos n\varphi + \ln \rho_{fp} + C_2 \right], \quad \rho_{cyl} < \rho \quad (1.4)$$

Σημειώνεται πως οι ημιτονοειδής όροι παραλείπονται, καθώς στο δεξί μέλος της συνοριακής συνθήκης εμφανίζεται άρτια συνάρτηση. Γράφεται η πρώτη συνοριακή συνθήκη για το διανυσματικό δυναμικό (αμελείται ο διανυσματικός χαρακτήρας των μεγεθών, καθώς το πρόβλημα διαθέτει μόνο z συνιστώσα) :

$$A_1(\rho_{cyl}, \varphi) = A_2(\rho_{cyl}, \varphi) \quad (1.5a)$$

Αναπτύσσοντας την λογαριθμική ποσότητα σε σειρά, (βλ. παράρτημα) όπου $x = \frac{\rho_{cyl}}{\rho_{fil}}$:

$$\ln \rho_{fp} = \ln \rho_{fil} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \cos n\varphi \quad (\alpha)$$

Λαμβάνεται:

$$cB_n \rho_{cyl}^n - C_n \rho_{cyl}^n = \frac{x^n}{n}, \quad n \geq 1 \quad (1.6)$$

$$C_2 - c_0 C_1 = -\ln \rho_{fil}, \quad c_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (1.7)$$

Οι σταθερές C_1, C_2 είναι αυθαίρετες καθώς, αν η λύση του προβλήματος είναι $\vec{B}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1, \vec{B}_2 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_2$, τότε και οι $\vec{B}_1 = \vec{\nabla} \times (\vec{A}_1 + \vec{C}_1'), \vec{B}_2 = \vec{\nabla} \times (\vec{A}_2 + \vec{C}_2')$ είναι επίσης λύση όπου $\vec{C}_1', \vec{C}_2'$ χωρικά σταθερά, αυθαίρετα διανύσματα. Επιλέγοντας ένα σημείο αναφοράς στο χώρο τέτοιο ώστε $\vec{A} = 0$ και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.7), ο προσδιορισμός του είναι δυνατός από ένα σύστημα 2x2.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη γνωστή συνοριακή συνθήκη, η οποία εν τη απουσία πηγών, προβλέπει πως η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι συνεχής :

$$\hat{\rho} \times (\vec{H}_2(\rho_{cyl}, \varphi) - \vec{H}_1(\rho_{cyl}, \varphi)) = \vec{K} = 0$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial \rho}(\rho_{cyl}, \varphi) - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial \rho}(\rho_{cyl}, \varphi) = 0, \quad (1.5\beta)$$

Για να ληφθεί μια εξίσωση για τους συντελεστές των σειρών από τη συνέχεια του $\vec{H}$, αναπτύσσεται σε σειρά η ποσότητα $\frac{d}{d\rho} \ln \rho_{fp}$, το οποίο επιτυγχάνεται με παραγωγή όρο προς όρο της (α). Έτσι λαμβάνεται το δεύτερο πολύ χρήσιμο ανάπτυγμα σε σειρά (βλ. παράρτημα) :

$$q_{fp} = \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \rho_{fp} = \frac{\partial}{\partial \rho} [\ln \rho_{fil} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cos n\varphi] = - \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \cos n\varphi \quad (\beta)$$

Με τον τελευταίο ορισμό του ρ_{fp} , η δεύτερη εξίσωση για τους συντελεστές είναι :

$$nB_n \rho_{cyl}^n + nC_n \rho_{cyl}^{-n} = x^n, \quad n \geq 1 \quad (1.8)$$

Η λύση του 2x2 συστήματος συντελεστών $\forall n$ (1.6), (1.8) είναι :

$$B_n = \frac{2}{c+1} \rho_{fil}^{-n}, \quad n \geq 1 \quad (1.9)$$

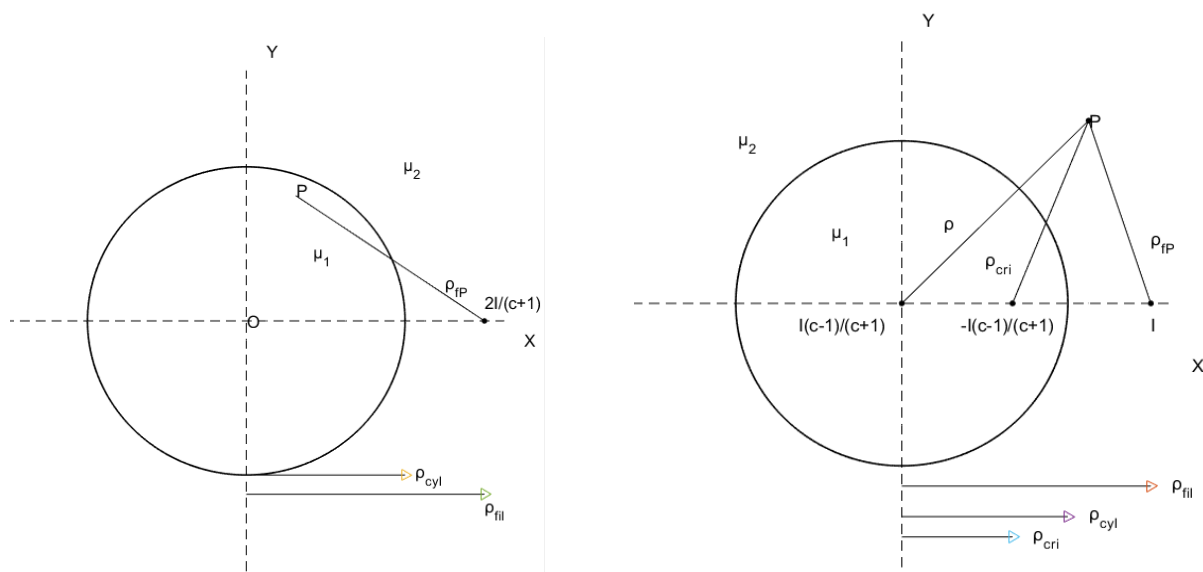
$$C_n = \frac{1-c}{c+1} \rho_{cri}^n, \quad \rho_{cri} = \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}}, \quad n \geq 1 \quad (1.10)$$

Επιστρέφοντας τώρα στις (1.3), (1.4) και χρησιμοποιώντας ξανά το ανάπτυγμα (α) του παραρτήματος, είναι δυνατόν να ληφθούν οι αναλυτικές εκφράσεις για τα διανυσματικά, οι οποίες ταυτίζονται με εκείνα που προβλέπει η μέθοδος των ειδώλων. Όμως, υπάρχει μια πληροφορία που παρέχεται άμεσα από τη μέθοδο του αναπτύγματος σε σειρά και αυτή είναι η περιοχή σύγκλισης των σειρών. Για το μεν διανυσματικό δυναμικό της περιοχής 1 (υλικό 1), η περιοχή σύγκλισης είναι ο δίσκος $D_1(\rho_{fil}) = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \rho \leq \rho_{fil}\}$, ενώ για το δε δυναμικό της περιοχής 2 (υλικό 2) ο τόπος σύγκλισης είναι $D_2(\rho_{cri}) = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \rho \geq \rho_{cri}\}$. Γίνεται αντιληπτό από τους δύο αυτούς δίσκους πως κάθε κλάδος της αναλυτικής λύσης έχει και «νόημα» εκτός της περιοχής που ορίστηκε. Αρχικά το γεγονός αυτό έχει παρατηρηθεί στις εργασίες [5], [7] και η ισχύς του μπορεί να αποδειχθεί και στα πλαίσια της μιγαδικής ανάλυσης, βάσει του θεωρήματος της αναλυτικής

Για το λόγο αυτό ακριβώς επιλέχθηκε η παρουσίαση της αναλυτικής λύσης μέσω της μεθόδου των σειρών, η οποία με φυσικό τρόπο οδηγεί στην παρατήρηση αυτής της ιδιότητας που θα απασχολήσει αρκετά. Τελικά οι πασίγνωστες λύσεις [26, p.495] για κάθε περιοχή είναι :

$$\overrightarrow{\mathbf{A}}_2 = \hat{\mathbf{z}} \left[-\frac{\mu_2 I}{2\pi} \left(\ln \rho_{\text{fp}} - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \ln \rho + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \ln \rho_{\text{cri,P}} + C_2 \right) \right] \quad (1.12)$$

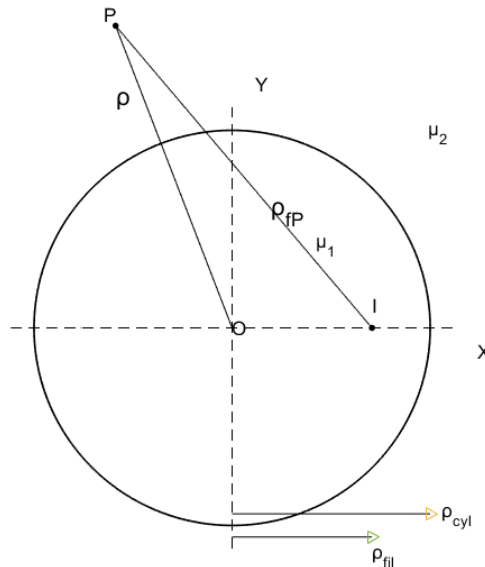
$$\rho_{1,2} = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$



Εικόνα 2 & 3 : Σχηματική απεικόνιση της αναλυτικής λύσης.

1.2 : Αναλυτική λύση εσωτερικού προβλήματος κυκλικού συνόρου

Για την πλήρη μελέτη της συγκεκριμένης γεωμετρίας, τοποθετείται η πηγή της διάταξης και στο εσωτερικό του κυλίνδρου, όπως στην εικόνα 2.



Εικόνα 4 : Μαγνητοστατικό, εσωτερικό, κυκλικό, κυλινδρικό πρόβλημα διάδοσης.

Η μέθοδος που ακολουθείται είναι ίδια με το εσωτερικό πρόβλημα, έτσι ώστε να παρατηρηθούν ξανά τα αντίστοιχα φαινόμενα που αφορούν τις ανωμαλίες των πεδίων και την αναλυτική τους επέκταση. Επομένως, ορίζεται το πρόβλημα :

$$\Delta \vec{A}_1 = -\frac{\mu_1 I}{2\pi\rho} \delta(\rho - \rho_{fil}) \delta(\varphi) \hat{z}, \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{cyl}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (1.13)$$

$$\Delta \vec{A}_2 = 0 \quad \rho_{cyl} \leq \rho, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (1.14)$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, λαμβάνοντας υπόψιν όλες τις ιδιότητες τις οποίες οφείλει να έχει το μαγνητικό πεδίο, θεωρούνται :

$$\vec{A}_1 = \hat{z} \left[-\frac{\mu_1 I}{2\pi} (\ln \rho_{IP} + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \rho_{cyl}^n \cos n\varphi + C_1) \right] \quad (1.15)$$

Επειδή δεν αναμένεται ανώμαλο σημείο εντός του κυλίνδρου εκτός της πηγής, η έκφραση (1.15) αρκεί. Στη γενική περίπτωση όμως, τη μορφή των υποψήφιων λύσεων την καθορίζουν οι συνοριακές συνθήκες. Αν προσωρινώς οριστεί η σειρά με το σταθερό όρο ως $\vec{A}'_1$ και γραφτούν οι συνοριακές συνθήκες, και πιο συγκεκριμένα η συνθήκη συνέχειας της κάθετης στο σύνορο παραγώγου του δυναμικού, παρατηρείται :

$$\frac{\partial A'_1}{\partial \rho}(\rho_{cyl}, \varphi) - \frac{\partial A_2}{\partial \rho}(\rho_{cyl}, \varphi) = \frac{1}{\rho_{cyl}} \frac{1 - x \cos \varphi}{1 + x^2 - 2x \cos \varphi}, \quad x = \frac{\rho_{fil}}{\rho_{cyl}} < 1 \quad (1.16)$$

Στην περίπτωση όπου η διέγερση βρισκόταν εξωτερικά του κύκλου, η διαδικασία επιλογής των υποψήφιων δεν απαιτούσε να εφαρμοστεί η πλήρης γενική μέθοδος, δεδομένου ότι το πρόβλημα

είναι απλό και επίσης λαμβάνοντας υπόψιν πως το αντίστοιχο ανάπτυγμα στο δεξί μέλος της αντίστοιχης εξίσωσης ($\frac{dA}{dn}$ = συνεχής, εξωτερικό πρόβλημα) δίνεται απευθείας από τη **(β)**. Στην παρούσα περίπτωση, η εξής παρατήρηση :

$$x < 1 \rightarrow 1 - x \cos \varphi > 0 \rightarrow \frac{1 - x \cos \varphi}{1 + x^2 - 2x \cos \varphi} > 0 \rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1 - x \cos \varphi}{1 + x^2 - 2x \cos \varphi} d\varphi > 0$$

συνεπάγεται αμέσως πως το ανάπτυγμα του δεξιού μέλους της **(1.16)** περιέχει σταθερό όρο, επομένως και το αριστερό οφείλει να ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα. Η μόνη ιδιοσυνάρτηση που μπορεί να ικανοποιήσει τα παραπάνω είναι η $\ln \rho$, και επειδή στο εσωτερικό το δυναμικό είναι ομαλή συνάρτηση του χώρου, ο λογάριθμος θα πρέπει να είναι συνιστώσα του A_2 .

Απομένει να βρεθεί το ανάπτυγμα της συνάρτησης στο δεξί μέλος της **(1.16)**. Η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική, άρτια, ομαλή σε όλο το διάστημα $[0, 2\pi)$ και επομένως δέχεται συνημιτονικό ανάπτυγμα Fourier, βάσει της επόμενης σχέσης :

$$\frac{1 - x \cos \varphi}{1 + x^2 - 2x \cos \varphi} = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\varphi), \varphi \in [0, 2\pi)$$

Ο υπολογισμός αυτού του αναπτύγματος είναι απλός αρκεί να παρατηρήσει κανείς πως :

$$1 - x \frac{x - \cos \varphi}{1 + x^2 - 2x \cos \varphi} = \frac{1 - x \cos \varphi}{1 + x^2 - 2x \cos \varphi}$$

Επειδή στο αριστερό μέλος το ανάπτυγμα είναι γνωστό (**Παράρτημα (α)**), λαμβάνεται :

$$\frac{1}{\rho_{cyl}} \frac{1 - x \cos \varphi}{1 + x^2 - 2x \cos \varphi} = \frac{1}{\rho_{cyl}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\varphi \right], \quad (\gamma)$$

Επιστρέφοντας τώρα στη συνθήκη συνεχειας της κάθετης παραγώγου λαμβάνεται μια από τις 2 εξισώσεις συντελεστών, έχοντας επιλέξει :

$$\vec{A}_2 = \hat{z} \left[-\frac{\mu_2 I}{2\pi} (C \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{-n} \cos n\varphi + C'_2) \right] \quad (1.17)$$

$$C = 1 \text{ \& } nC_n + nB_n = -x^n, n \geq 1 \quad (1.18)$$

Από τη συνθήκη συνέχειας του δυναμικού λαμβάνεται η δεύτερη εξίσωση συντελεστών και μια εξίσωση για τις σταθερές η οποία ικανοποιείται μαζί με την αναφορά:

$$B_n \rho_{cyl}^n - c_i C_n \rho_{cyl}^{-n} = \frac{x^n}{n}, n \geq 1, c_i = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (1.19)$$

Το σύστημα (1.17), (1.18) έχει λύση :

$$B_n = -\frac{c_i - 1}{c_i + 1} \left(\frac{\rho_{fil}}{\rho_{cyl}^2} \right)^n \frac{1}{n}, C_n = -\frac{2}{1 + c_i} \rho_{fil}^n \frac{1}{n} \quad (1.20)$$

Ορίζεται ο λόγος της θέσης του ειδώλου για το πεδίο στο εσωτερικό υλικό προς το την ακτίνα του κυλίνδρου ως:

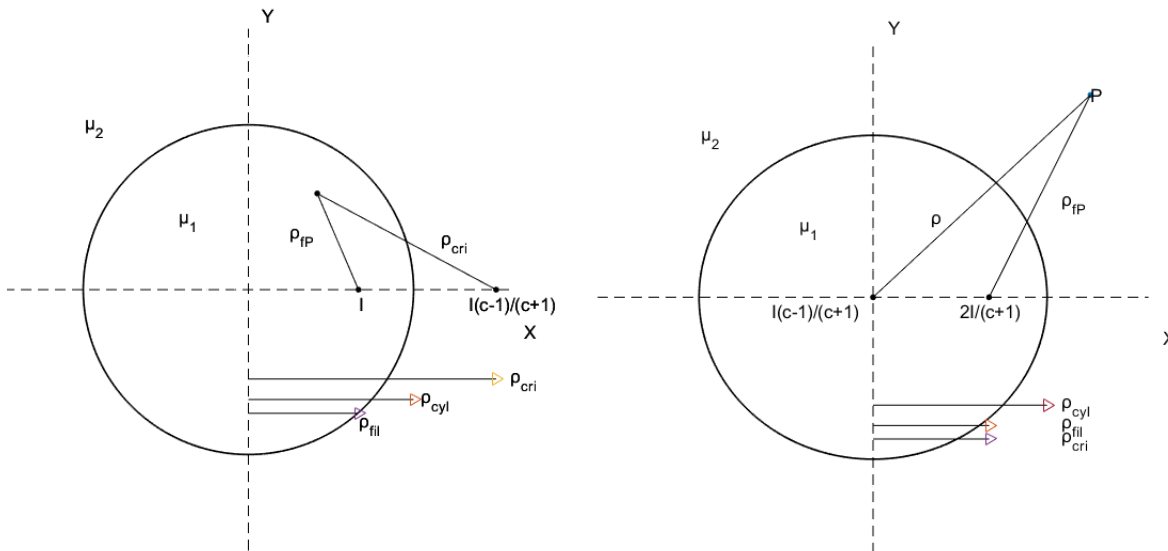
$$\rho_{cri} = \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}}$$

Επιστρέφοντας στις (1.15), (1.17) και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα (α), υπολογίζεται το διανυσματικό δυναμικό παντού στο χώρο [26] :

$$\vec{A}_1 = \hat{z} \left[-\frac{\mu_1 I}{2\pi} \left(\ln \rho_{fp} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \ln \rho_{cri,P} + \text{σταθ.} \right) \right] \quad (1.21)$$

$$\vec{A}_2 = \hat{z} \left[-\frac{\mu_2 I}{2\pi} \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \ln \rho + \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \ln \rho_{fp} + \text{σταθ.} \right) \right] \quad (1.22)$$

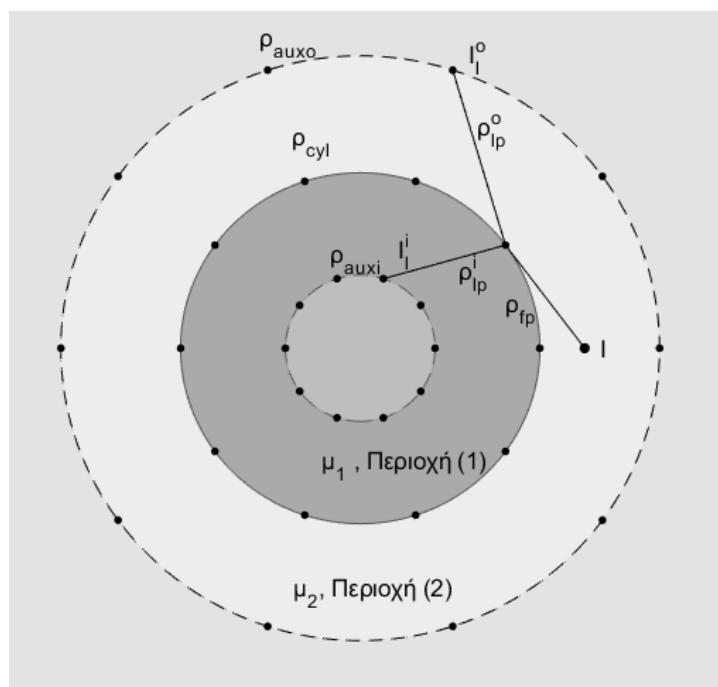
Όπως και στο εσωτερικό πρόβλημα, οι παραπάνω εκφράσεις (1.21), (1.22) είναι ορισμένες για $\rho \leq \rho_{cyl}$ & $\rho > \rho_{cyl}$ αντίστοιχα, ενώ κατά τον υπολογισμό των σειρών ((1.15), (1.17)) φαίνεται πως έχουν «νόημα» έως και στις επιφάνειες $\rho \leq \rho_{cri}$ & $\rho \geq \rho_{fil}$, αντίστοιχα. Οι λόγοι που συμβαίνει αυτό, όπως προαναφέρθηκε αναλύονται πολύ καλά στο [5][14].



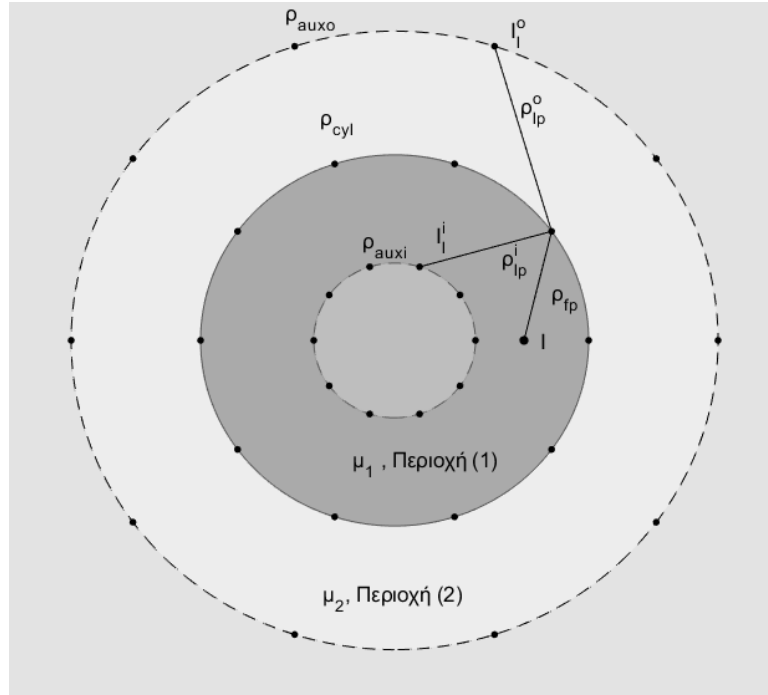
Εικόνα 5 & 6 : Σχηματική απεικόνιση της λύσης του εσωτερικού προβλήματος.

1.3 Διατύπωση της μεθόδου των βοηθητικών πηγών (MAS) στο κυκλικό πρόβλημα

Η μέθοδος αυτή μπορεί να ιδωθεί από τουλάχιστον δύο διαφορετικές οπτικές γωνίες. Η μεν πρώτη είναι εκείνη της φυσικής, κατά την οποία ερευνάται ποια είναι απλούστερη διάταξη που παράγει στον αντίστοιχο χώρο το ίδιο μαγνητικό πεδίο. Το πρόβλημα όμως που αντιμετωπίζεται μέσω MAS, δεν παύει ποτέ να είναι ένα πρόβλημα συννοριακών τιμών (ΠΣΤ), το οποίο μπορεί να διατυπωθεί με εξισώσεις της μορφής (**1.1**, **1.2**, **1.5α**, **1.5β**) (ή τις αντίστοιχες εξισώσεις του εσωτερικού προβλήματος). Μέσω αυτής της μαθηματικής άποψης, μπορεί κανείς να θεωρήσει πως η λύση είναι προσεγγιστικά ένα πεπερασμένο ανάπτυγμα (ή γραμμικός συνδυασμός) κάποιων υποψήφιων συναρτήσεων. Προφανώς όπως και να σκεφτεί κανείς, το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο. Έτσι, ακολουθώντας τη φιλοσοφία που αναπτύσσεται στο [5], στο πρόβλημα (**1.1**, **1.2**, **1.5α**, **1.5β**), σε κάθε περιοχή θεωρούνται N πηγές ομοιόμορφου νηματοειδούς ρεύματος ρέοντος επί άπειρων αγωγών παράλληλων στον άξονα του κυλίνδρου. Άμεσο επόμενο ερώτημα είναι ο γεωμετρικός τύπος τοποθέτησης των ρευμάτων. Μια πρώτη προσέγγιση -και ίσως προφανής- είναι να επιλεγθούν N σημεία επί 2 κύκλων, εντός και εκτός του κυλίνδρου, τα οποία διαμερίζουν την περιφέρεια του σε N ίσα τόξα, όπως στο παρακάτω σχήμα. Μια σημαντική απλοποίηση παρέχεται αν τα σημεία στα οποία τοποθετούνται τα ρεύματα, εντός και εκτός, σχηματίζουν ευθεία με την αρχή των αξόνων.



Εικόνα 7 : MAS στο εξωτερικό πρόβλημα. Διαφαίνονται οι τοποθετημένες πηγές (μαύρες τελείες) σε κάθε βοηθητική επιφάνεια.



Εικόνα 8: MAS στο εσωτερικό πρόβλημα. Διαφαίνονται οι τοποθετημένες πηγές (μαύρες τελείες) σε κάθε βοηθητική επιφάνεια.

1.3.1 MAS στο εξωτερικό πρόβλημα

Όπως αναφέρθηκε η άγνωστη συνάρτηση $\vec{A}$, γράφεται ως το συνολικό μαγνητικό δυναμικό που προκύπτει από την υπέρθεση όλων των μαγνητικών δυναμικών από κάθε βοηθητικό ρεύμα. Κοιτώντας παράλληλα τις εξισώσεις (1.1) & (1.2), για κάθε περιοχή έχουμε :

$$\vec{A}_{N\text{MAS}}^1 = \hat{z} - \left(\frac{\mu_1 I}{2\pi}\right) \left[\sum_{l=0}^{N-1} I_l^0 \ln \rho_{lp}^0 + C_1 \right], 0 < \rho < \rho_{cyl} \quad (1.23)$$

$$\vec{A}_{N\text{MAS}}^2 = \hat{z} - \left(\frac{\mu_2 I}{2\pi}\right) \left[\sum_{l=0}^{N-1} I_l^i \ln \rho_{lp}^i + \ln \rho_{fp} + C_2 \right], \rho_{cyl} < \rho \quad (1.24)$$

Με την αντικατάσταση των (1.23) & (1.24) στις εξισώσεις (1.1) & (1.2), λαμβάνεται ένα νέο ΠΣΤ. Προφανώς, κάθε όρος του αναπτύγματος ικανοποιεί την εξίσωση Laplace με κρουστική διέγερση ανάλογη της $\delta(\rho - \rho_{aux}, \varphi - \varphi_l)$, όπου $\varphi_l = \frac{2\pi l}{N}$, $l \in \{0, \dots, N-1\}$, όπου l δείκτης που αριθμεί τα ρεύματα. Για κάθε πρόβλημα τέτοιου είδους, απομένει να ικανοποιηθούν και οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλει η ηλεκτρομαγνητική θεωρία, πράγμα το οποίο επιτυγχάνει η MAS μέσω ενός γραμμικού συστήματος για τα άγνωστα ρεύματα, όπως φαίνεται παρακάτω.

Εφόσον στο σύνορο πρέπει να ισχύει:

$$A_{N,MAS}^1(\rho_{cyl}, \varphi) = A_{N,MAS}^2(\rho_{cyl}, \varphi), \forall \varphi \in [0, 2\pi) \quad (\mathbf{BC1})$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_{N,MAS}^1}{\partial \rho}(\rho_{cyl}, \varphi) = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_{N,MAS}^2}{\partial \rho}(\rho_{cyl}, \varphi), \forall \varphi \in [0, 2\pi) \quad (\mathbf{BC2})$$

Τότε είναι δυνατή η επιλογή N σημείων εκεί, στα οποία απαιτούμε να ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες. Καταστρώνεται έτσι ένα σύστημα $2N \times 2N$ εξισώσεων (N από κάθε συνθήκη), όσων ακριβώς χρειάζονται για τον πλήρη προσδιορισμό των συντελεστών I^i, I^o . Τα σημεία αυτά που αριθμούνται από το δείκτη $p \in \{0, \dots, N-1\}$ επιλέγονται να είναι τα $(\rho_{cyl} \cos \frac{2\pi p}{N}, \rho_{cyl} \sin \frac{2\pi p}{N})$, συνευθειακά δηλαδή με τα αντίστοιχα ρεύματα [5][6], χωρίς αυτό να είναι απαραίτητο [30] (προσθήκη *offset* γωνίας στις θέσεις των ρευμάτων). Ισοδύναμα, ο δείκτης p αριθμεί τα σημεία στα οποία εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες (*collocation points*). Όπως και στις Εικόνες 7 & 8, ο όρος $\rho_{lp}^{o,i}$ (όπως ορίζεται στο παράρτημα) δείχνει την απόσταση του l -οστού ρεύματος της επιφάνειας ρ_{auxo}, ρ_{auxi} αντίστοιχα, από το p -οστό σημείο εφαρμογής. Έτσι γράφεται :

$$\frac{-\mu_1 I}{2\pi} \left[\sum_{l=0}^{N-1} I_l^o \ln \rho_{lp}^o + C_1 \right] = -\frac{\mu_2 I}{2\pi} \left[\sum_{l=0}^{N-1} I_l^i \ln \rho_{lp}^i + \ln \rho_{fp} + C_2 \right], (l, p) \in \{0, \dots, N-1\}^2$$

$$-\frac{I}{2\pi} \sum_{l=0}^{N-1} I_l^o q_{lp}^o = -\frac{I}{2\pi} \left[\sum_{l=0}^{N-1} I_l^i q_{lp}^i + q_{fp} \right], (l, p) \in \{0, \dots, N-1\}^2$$

$$\text{όπου } \rho_{lp}^{o,i} = \sqrt{\rho_{cyl}^2 + \rho_{auxo,i}^2 - 2\rho_{cyl}\rho_{auxo,i} \cos \left(\frac{2\pi}{N}(l-p) \right)},$$

$$q_{lp}^{o,i} = \frac{\rho_{cyl} - \rho_{auxo,i} \cos \frac{2\pi(l-p)}{N}}{\rho_{cyl}^2 + \rho_{auxo,i}^2 - 2\rho_{cyl}\rho_{auxo,i} \cos \frac{2\pi(l-p)}{N}}$$

Ορίζοντας $c_o = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ ($c_o \sim \text{material contrast ή δείκτης αντίθεσης}$) και απαιτώντας οι σταθερές να αλληλοαναιρούνται, οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται στη μορφή :

$$\sum_{l=0}^{N-1} c_o I_l^o \ln \rho_{lp}^o - I_l^i \ln \rho_{lp}^i = \ln \rho_{fp}, \quad p \in \{0, \dots, N-1\} \quad (1.25)$$

$$\sum_{l=0}^{N-1} I_l^o q_{lp}^o - I_l^i q_{lp}^i = q_{fp}, \quad p \in \{0, \dots, N-1\} \quad (1.26)$$

Σχόλιο : Η εξίσωση που πρέπει να ικανοποιούν οι σταθερές είναι $c_o C_1 = C_2$, οι οποίες μαζί με την αναφορά του δυναμικού βρίσκονται μέσω ενός 2×2 συστήματος, αφού βρεθούν τα ρεύματα MAS.

Οι παραπάνω, $2N$ το πλήθος, εξισώσεις μπορούν να γραφτούν σε μητρική μορφή, ορίζοντας τα διανύσματα $\mathbf{I}_{\text{MAS}} = [\mathbf{I}_1^0 \ \mathbf{I}_1^i]^T$, $\mathbf{b} = [\mathbf{L}^f \ \mathbf{Q}^f]^T \in \mathbb{R}^{2N \times 1}$, τους πίνακες $\mathbf{L}^0, \mathbf{L}^i, \mathbf{Q}^0, \mathbf{Q}^i \in \mathbb{R}^{N \times N}$, αλλά και τον block πίνακα $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \mathbf{L}^0 & -\mathbf{L}^i \\ \mathbf{Q}^0 & \mathbf{Q}^i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$:

$$\mathbf{A} \mathbf{I}_{\text{MAS}} = \mathbf{b} \quad (1.27)$$

Τα επιμέρους διανύσματα $\mathbf{I}_1^0, \mathbf{I}_1^i \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ είναι οι άγνωστοι των εξισώσεων, με διέγερση :

$$\mathbf{L}^f = \ln \sqrt{\rho_{\text{cyl}}^2 + \rho_{\text{fil}}^2 - 2\rho_{\text{cyl}}\rho_{\text{fil}}\cos \frac{2\pi p}{N}} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{Q}^f = \frac{\rho_{\text{cyl}} - \rho_{\text{fil}} \cos \frac{2\pi p}{N}}{\rho_{\text{cyl}}^2 + \rho_{\text{fil}}^2 - 2\rho_{\text{fil}}\rho_{\text{cyl}} \cos \frac{2\pi p}{N}} \quad (1.29)$$

Τα στοιχεία των blocks του πίνακα $\mathbf{A}$ ορίζονται ως εξής :

$$\mathbf{L}_{lp}^{0,i} = \ln \sqrt{\rho_{\text{cyl}}^2 + \rho_{\text{auxo},i}^2 - 2\rho_{\text{cyl}}\rho_{\text{auxo},i}\cos \frac{2\pi(l-p)}{N}}, \quad (1.30)$$

$$\mathbf{Q}_{lp}^{0,i} = \frac{\rho_{\text{cyl}} - \rho_{\text{auxo},i} \cos \frac{2\pi(l-p)}{N}}{\rho_{\text{cyl}}^2 + \rho_{\text{auxo},i}^2 - 2\rho_{\text{cyl}}\rho_{\text{auxo},i}\cos \frac{2\pi(l-p)}{N}}, \quad (1.31)$$

όπου τα l & p , διατρέχουν τα διακριτό διάστημα από 0 έως $N-1$.

1.3.2 MAS στο εσωτερικό πρόβλημα

Με την ίδια λογική και λαμβάνοντας υπόψιν το ΠΣΤ (1.13, 1.14, BC1, BC2), τοποθετούνται ξανά με την ίδια ακριβώς γεωμετρία, όπως περιγράφεται στην Εικόνα 8, οι βοηθητικές πηγές στις αντίστοιχες επιφάνειες και οι υποψήφιες λύσεις γράφονται ως :

$$\overrightarrow{\mathbf{A}}_{\text{MAS}}^1 = \hat{\mathbf{z}} \frac{-\mu_1 I}{2\pi} \left[\sum_{l=0}^{N-1} \mathbf{I}_1^0 \ln \rho_{lp}^0 + \ln \rho_{fp} + C_1 \right], 0 < \rho < \rho_{\text{cyl}}, 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (1.32)$$

$$\overrightarrow{\mathbf{A}}_{\text{MAS}}^2 = \hat{\mathbf{z}} \frac{-\mu_2 I}{2\pi} \left[\sum_{l=0}^{N-1} \mathbf{I}_1^i \ln \rho_{lp}^i + C_2 \right], \rho_{\text{cyl}} < \rho, 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (1.33)$$

Εφαρμόζονται στα N σημεία της επιφάνειας του κυλίνδρου οι **(BC1) & (BC2)** και με τον ορισμό $c_i = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ ($c_i \sim \text{material contrast}$), γράφονται οι τελικές εξισώσεις που δίνουν τα ρεύματα MAS :

$$\sum_{l=0}^{N-1} I_l^0 \ln \rho_{lp}^0 - c_i I_l^i \ln \rho_{lp}^i = -\ln \rho_{fp} \quad , \quad p \in \{0, \dots, N-1\} \quad (1.34)$$

$$\sum_{l=0}^{N-1} I_l^0 q_{lp}^0 - I_l^i q_{lp}^i = -q_{fp}^i \quad , \quad p \in \{0, \dots, N-1\} \quad (1.35)$$

Οι εξισώσεις **(1.34)**, **(1.35)** αποτελούν μια μικρή τροποποίηση των εξισώσεων **(1.25)**, **(1.26)**, καθώς για τις πρώτες ισχύουν επίσης οι **(1.28 – 1.31)**. Κατά συνέπεια, το σύστημα των $2N$ εξισώσεων **(1.34 – 1.35)** μπορεί να γραφεί σε μητρική μορφή :

$$\begin{bmatrix} L^0 & -c_i L^i \\ Q^0 & -Q^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^0 \\ I^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L^f \\ -Q^f \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα $\mathbf{A} \mathbf{I}_{MAS} = \mathbf{b}$, **(1.36)**

1.4 Λύση του συστήματος $\mathbf{A} \mathbf{I}_{MAS} = \mathbf{b}$

1.4.1 Ιδιότητες Κυκλικών Πινάκων (Circulant Matrices)

Σε γενικές γραμμές και σε πρώτη προσέγγιση, ένα γραμμικό σύστημα μεγάλης διάστασης όπως το παραπάνω **(1.36)**, **(1.27)** είναι σχεδόν αδύνατο να αντιμετωπιστεί χωρίς τη βοήθεια κάποιας υπολογιστικής μηχανής. Όμως το παραπάνω σύστημα είναι άμεσα συσχετισμένο με τις γεωμετρικές ιδιότητες του κύκλου κάτι που αποτυπώνεται και στον πίνακα $\mathbf{A}$. Η κατηγορία των πινάκων με τους οποίους σχετίζεται άμεσα ο $\mathbf{A}$ είναι οι κυκλικοί πίνακες, που ορίζονται ως εξής [8]:

Ορισμός 1: Κυκλικός (Κυκλοφορούν ή Κυκλοφορητικός [13]) Πίνακας

$$P \in \mathbb{R}^{N \times N} \sim \text{circulant} \leftrightarrow p_{ij} = p_{i+1, j+1} \quad 0 \leq i, j \leq N-2 \quad \& \quad p_{i, N-1} = p_{i+1, 0}$$

1.4.1.α) Μια πρώτη παρατήρηση που γίνεται εύκολα, είναι $\rho_{lp}^{i,0}, q_{lp}^{i,0} = f(l-p)$. Αυτό που φαίνεται από τις εξισώσεις **(1.25)**, **(1.26)** & **(1.34)**, **(1.35)** και από την προηγούμενη παρατήρηση είναι πως τα αθροίσματα είναι συνελκτικά. Όπως είναι γνωστό στη θεωρία σημάτων, υπάρχουν δύο ειδών συνελίξεις, η γραμμική και η κυκλική. Η μεν υλοποιείται με πίνακες Toeplitz (με υψηλό υπολογιστικό κόστος, προτιμάται αντιστροφή DFT) και η δε με ένα υποσύνολο των πινάκων Toeplitz, τους κυκλικούς πίνακες (circulant) [9]. Οι συνελίξεις που εκτελούνται στα **(1.27)-(1.36)** είναι 4, όπως φαίνεται και από τη μορφή του πίνακα $\mathbf{A}$ ο οποίος διαμερίζεται σε 4 υποπίνακες, οι οποίοι οφείλουν να είναι κυκλικοί, καθώς η i -οστή γραμμή τους είναι η κυκλικά μετατιθέμενη $i-1$ γραμμή.

Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, αποδεικνύεται πως ο πίνακας A είναι τμηματικά κυκλικός (*circulant-block matrix, matrix with circulant blocks*).

Το ίδιο μπορεί να αποδειχθεί και αν θεωρήσει κανείς έναν από τους υποπίνακες P και δει πως επειδή τα στοιχεία είναι της μορφής $p_{ij} = f(i - j) = f((i + 1) - (j + 1)) = p_{i+1, j+1}$, ο P ικανοποιεί ακριβώς τον ορισμό των κυκλικών πινάκων [8].

1.4.1.β) Η i -οστή γραμμή ενός κυκλικού πίνακα είναι η μια κυκλικά ολισθημένη έκδοση της προηγούμενης γραμμής του ή η i φορές κυκλικά ολισθημένη πρώτη γραμμή. Ίσως η σημαντικότερη ιδιότητα (όσον αφορά αυτή την εργασία τουλάχιστον) των κυκλικών πινάκων είναι η σχέση τους με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier (DFT), βάσει του οποίου εύκολα υπολογίζεται διαγωνοποιούνται [9]. Αν οριστεί ο πίνακας :

$$C^{N \times N} \ni W_{kp} = \left\{ \frac{1}{N} e^{j \frac{2\pi k p}{N}} \right\}$$

Τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα P , είναι οι τιμές του DFT της πρώτης του γραμμής :

$$\begin{aligned} P x &= \lambda x \rightarrow W P x = \lambda W x \rightarrow \text{DFT}_k\{x\} \text{DFT}_k\{P_{0p}\} = \lambda_k \text{DFT}_k\{x\} \\ &\rightarrow \lambda_k = \text{DFT}_k\{P_{0p}\} \end{aligned}$$

Για καθεμία ιδιοτιμή λ_k και την l -οστή συνιστώσα του k -οστού ιδιοδιανύσματος x_{kl} και με $P_{0, n-l \% N}$ η κατά l φορές ολισθημένη πρώτη γραμμή του P , πρέπει να ισχύει :

$$\sum_{n=0}^{N-1} P_{0, n-l \% N} x_{kn} = \lambda_k x_{kl} \Rightarrow x_{kl} = e^{j \frac{2\pi k l}{N}}, \forall (k, l)$$

Το παραπάνω προκύπτει από την αντίστοιχη ιδιότητα του DFT. Επομένως, τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα από την προηγούμενη εξίσωση είναι οι στήλες του πίνακα W [8][9], ο οποίος έχει την ιδιότητα $W^{-1} = W^*$, όπου το δεξί μέλος είναι ο συζυγής-ανάστροφος, i.e $W \sim$ ορθοκανονικός (unitary).

1.4.1.γ) Ο κυκλικός πίνακας P έχει το πολύ N διακριτά στοιχεία. Στην περίπτωση του συστήματος MAS, γεωμετρικά παρατηρείται πως τα ρεύματα (είτε εκτός είτε εντός συννοριακής επιφάνειας) ανά 2 ισαπέχουν από το σημείο $(\rho_{cyl} \cos \frac{2\pi p}{N}, \rho_{cyl} \sin \frac{2\pi p}{N})$, $\forall p$. Επομένως το πλήθος των διαφορετικών στοιχείων κάθε block του A , είναι ακριβώς $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1$, πράγμα το οποίο συνεπάγεται πως οι πίνακες αυτοί είναι και συμμετρικοί. Το γεγονός αυτό θα βοηθήσει σε οριακές εκδοχές του προβλήματος του κύκλου, αν για παράδειγμα στην περιοχή (1) ή (2) τοποθετηθεί ένα σιδηρομαγνητικό υλικό ($\mu \rightarrow \infty$, i.e πρόβλημα Neumann) (βλ. 1.4.3.δ).

1.4.1.δ) Μια περαιτέρω ιδιότητα των κυκλικών πινάκων είναι πως αποτελούν το span του συνόλου $\{J_{0 \leq k \leq N-1}^k\}$, όπου $J = \begin{bmatrix} 0 & I_{N-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ (Ορισμός 2 : J , Permutation Matrix) [8]. Αυτό αποδεικνύεται από το γεγονός πως το σύνολο των κυκλικών πινάκων με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό είναι Αβελιανή ομάδα συν του γεγονότος πως $J^m \odot J^n = 0$, εάν $m \neq n$, όπου το $\odot$, αναπαριστά το γινόμενο Hadamard. Το γεγονός αυτό θα σταθεί καθοριστικό, για την ανάλυση της συμπεριφοράς της MAS μέσω του αριθμού κατάστασης (condition number) του πίνακα A .

1.4.2 Λύση μέσω DFT του $\mathbf{A}\mathbf{I}_{\text{MAS}} = \mathbf{b}$

Προφανώς, αντιμέτωπος με ένα γραμμικό σύστημα, για παράδειγμα 100×100 (το οποίο συνήθως περιέχει και μιγαδικούς πίνακες), κανείς «βιάζεται» να ψάξει για λύσεις σε αριθμητική μορφή μέσω αλγορίθμων επίλυσης συστημάτων. Σε αυτή την παράγραφο, με ψύχραιμη αντιμετώπιση του συστήματος (1.27 ή 1.36) και χρήση των ιδιοτήτων του $\mathbf{A}$, ανοίγει η πορεία προς την εύρεση λύσης κλειστής μορφής στο σύστημα. Σε επόμενη ενότητα (1.4.3) γίνεται ο ορισμός των κατάλληλων εργαλείων για την επίτευξη αυτού του στόχου.

Αν και ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι τμηματικά κυκλικός, οι ιδιότητες των τμημάτων του μπορούν ακόμα να χρησιμοποιηθούν, λαμβάνοντας υπόψη την παράγραφο 1.4.1 και τις εργασίες [31], [32].

Θεωρούνται οι εξισώσεις οι (1.25), (1.26). Η διαδικασία επίλυσης του συστήματος (1.34), (1.35) είναι πανομοιότυπη και προφανώς λόγω του $\mathbf{A}$, χρησιμοποιείται ο DFT. Θεωρείται ο νέος δείκτης $k \in \{0, \dots, N-1\}$ και κάθε εξίσωση με δείκτη p , πολλαπλασιάζεται με τον όρο

$\frac{1}{N} e^{j \frac{2\pi kp}{N}}$. Έπειτα όλες οι εξισώσεις αθροίζονται κατά μέλη :

$$\sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{j \frac{2\pi kp}{N}} \left[\sum_{l=0}^{N-1} c_l I_l^o \ln \rho_{lp}^o - I_l^i \ln \rho_{lp}^i \right] = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{j \frac{2\pi kp}{N}} \ln \rho_{fp}$$

$$\sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{j \frac{2\pi kp}{N}} \left[\sum_{l=0}^{N-1} I_l^o q_{lp}^o - I_l^i q_{lp}^i \right] = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{j \frac{2\pi kp}{N}} q_{fp}$$

Βάσει όσων αναφέρθηκαν για τους κυκλικούς πίνακες, το σύστημα $2N \times 2N$ καταρρέει σε N συστήματα 2×2 , καθένα το οποίου βάσει του Ορισμού 3 δίνει το k -οστό μετασχηματισμένο ρεύμα. Οι ιδιότητες των κυκλικών μητρώων είναι γνωστές για τη μείωση της διάστασης που προσφέρουν, όπως παρατηρείται σε επόμενη ενότητα στο ακόμα δυσκολότερο πρόβλημα της εύρεσης των ιδιζουσών τιμών [13] (*singular values*) του $\mathbf{A}$. Ήδη από τις παραπάνω εξισώσεις, φαίνεται η ισοδυναμία των ορισμών, που αναφέρονται σε κυκλικά συμμετρικά συστήματα, της παρούσας εργασίας και εκείνων στο [29].

Ορισμός 3 : Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier ($\Delta\mathbf{M}\Phi$, DFT)

Έστω $\{x_n\}, 0 \leq n \leq N-1$ ένα διάνυσμα στο χώρο $\mathbb{C}^{N \times 1}$. Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier από το δείκτη $n \rightarrow k, 0 \leq k \leq N-1$ ορίζεται μέσω της σχέσης :

$$\mathbf{X}_k = \text{DFT}_k\{x_n\} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{j \frac{2\pi kn}{N}}$$

Ο αντίστροφος Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier δίνεται από τη σχέση :

$$x_n = \text{IDFT}_n\{\mathbf{X}_k\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{X}_k e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}$$

Τα μετασχηματισμένα κατά DFT μεγέθη, συμβολίζονται με **έντονη γραφή**, καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας, σε αντίθεση με τα αντίστροφα τους.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, οι παραπάνω εξισώσεις απλοποιούνται σημαντικά με την εισαγωγή των μεγεθών :

$$\mathbf{L}^o = \mathbf{L}_k^o = \text{DFT}\{ \mathbf{L}^o \}, \mathbf{L}^i = \mathbf{L}_k^i = \text{DFT}\{ \mathbf{L}^i \}, \mathbf{L}^f = \mathbf{L}_k^f = \text{DFT}\{ \mathbf{L}^f \} \quad (1.37)$$

$$\mathbf{Q}^o = \mathbf{Q}_k^o = \text{DFT}\{ \mathbf{Q}^o \}, \mathbf{Q}^i = \mathbf{Q}_k^i = \text{DFT}\{ \mathbf{Q}^i \}, \mathbf{Q}^f = \mathbf{Q}_k^f = \text{DFT}\{ \mathbf{Q}^f \} \quad (1.38)$$

$$\mathbf{I}^o = \mathbf{I}_k^o = \text{DFT}\{ \mathbf{I}^o \}, \mathbf{I}^i = \mathbf{I}_k^i = \text{DFT}\{ \mathbf{I}^i \} \quad (1.39)$$

Εξωτερικό Πρόβλημα $\rho_{\text{fil}} > \rho_{\text{cyl}}$:

$$c_o \mathbf{L}_{\square}^o \mathbf{I}_{\square}^o - \mathbf{L}_{\square}^i \mathbf{I}_{\square}^i = \mathbf{L}_{\square}^f \quad (1.40)$$

$$\mathbf{Q}_{\square}^o \mathbf{I}_{\square}^o - \mathbf{Q}_{\square}^i \mathbf{I}_{\square}^i = \mathbf{Q}_{\square}^f \quad (1.41)$$

Εσωτερικό Πρόβλημα $\rho_{\text{fil}} < \rho_{\text{cyl}}$:

$$\mathbf{L}_{\square}^o \mathbf{I}_{\square}^o - c_i \mathbf{L}_{\square}^i \mathbf{I}_{\square}^i = -\mathbf{L}_{\square}^f \quad (1.42)$$

$$\mathbf{Q}_{\square}^o \mathbf{I}_{\square}^o - \mathbf{Q}_{\square}^i \mathbf{I}_{\square}^i = -\mathbf{Q}_{\square}^f \quad (1.43)$$

Οι εξισώσεις (1.40 – 1.41) & (1.42 – 1.43), στο εξής αναφέρονται ως μειωμένο σύστημα MAS, το οποίο συμβολίζεται για κάθε τιμή του k με $\mathbf{A}_k \mathbf{I}_k = \mathbf{b}_k$. (1.44)

Τα παραπάνω συστήματα λύνονται με απλή αντικατάσταση και οι DFT των ρευμάτων που δίνουν το διανυσματικό δυναμικό εντός και εκτός του κυκλικού κυλίνδρου στο κάθε πρόβλημα είναι, αντίστοιχα :

$\rho_{fil} > \rho_{cyl}$:

$$I_{\square}^o = \frac{Q_{\square}^f L_{\square}^i - Q_{\square}^i L_{\square}^f}{Q_{\square}^o L_{\square}^i - c_o Q_{\square}^i L_{\square}^o} \quad (1.45)$$

$$I_{\square}^i = \frac{c_o Q_{\square}^f L_{\square}^o - Q_{\square}^o L_{\square}^f}{Q_{\square}^o L_{\square}^i - c_o Q_{\square}^i L_{\square}^o} \quad (1.46)$$

$\rho_{fil} < \rho_{cyl}$:

$$I_{\square}^o = \frac{c_i Q_{\square}^f L_{\square}^i - Q_{\square}^i L_{\square}^f}{Q_{\square}^i L_{\square}^o - c_i Q_{\square}^o L_{\square}^i} \quad (1.47)$$

$$I_{\square}^i = \frac{Q_{\square}^f L_{\square}^o - Q_{\square}^o L_{\square}^f}{Q_{\square}^i L_{\square}^o - c_i Q_{\square}^o L_{\square}^i} \quad (1.48)$$

Εκ πρώτης όψεως τα αποτελέσματα φαίνονται περίπλοκα, ακόμα και αν εκμεταλλεύτηκε η συμμετρία του συστήματος. Η ορθότητα των εξισώσεων (1.47), (1.48) επαληθεύεται σε οριακές περιπτώσεις του προβλήματος διάδοσης, για παράδειγμα $\mu_{1,2} \rightarrow \infty \Rightarrow c_{o,i} \rightarrow \infty$ κατάσταση η οποία συνεπάγεται μηδενική ένταση μαγνητικού πεδίου στην περιοχή (1) & (2) αντίστοιχα, όπου υφίσταται το σιδηρομαγνητικό υλικό, όπως πρέπει. Στο πρόβλημα σκέδασης, φαίνεται πως τα ρεύματα στις περιοχές υλικού μικρής διαπερατότητας εξαρτώνται μόνο από τη Neumann συνθήκη (δηλαδή τα Q), όπως πρέπει. Όσον αφορά το πρόβλημα κοιλότητας, αναδύεται μια ιδιαίτερη ιδιότητα, μη-αναμενόμενη, που συζητιέται στη συνέχεια.

.

Κεντρικό ζήτημα αυτής της εργασίας είναι να διαχωριστούν οι συμπεριφορές που είναι εγγενείς στα προβλήματα καθώς και οι αιτίες/συνθήκες που τις προκαλούν όπως γίνεται στις εργασίες [5][6][7][10][11], από εκείνες που οφείλονται σε ατελείς υπολογισμούς, πεπερασμένη ακρίβεια μηχανής και εισαγωγή σφαλμάτων από αλγορίθμους.

1.4.3 Ασυμπτωτικές προσεγγίσεις (Large N – Asymptotic Approximations) συστημάτων MAS

1.4.3α Ορισμοί Ασυμπτωτικών Προσεγγίσεων

Το εργαλείο που αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο για την επίτευξη του στόχου της εργασίας, είναι οι μέθοδοι των ασυμπτωτικών μαθηματικών. Μπορεί να ειπωθεί πως γενικά, σπάνια ένα πρόβλημα επιδέχεται λύση χωρίς προσεγγίσεις και σε αντίθετη περίπτωση οι αναλυτικές εκφράσεις που λαμβάνονται, με μεγάλη πιθανότητα δεν είναι εύχρηστες. Επίσης σε πληθώρα προβλημάτων των εφαρμοσμένων μαθηματικών, οι υπό προσεγγίσεις λύσεις συνήθως παρέχουν πληροφορίες και για τις «πλήρεις λύσεις», που μπορεί να μην υπολογίζονται αναλυτικά. Ακολουθούν χρήσιμοι ορισμοί όπως δίνονται στην εξαιρετική εργασία [12] :

Ορισμός 4: *Ασυμπτωτική Προσέγγιση (Asymptotic Approximation)*

Έστω $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ και κάποιο σημείο $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\}$. Λέγεται πως η g είναι ασυμπτωτική προσέγγιση της f στο z_0 και συμβολίζεται με $f \sim g, z \rightarrow z_0$, αν ισχύει

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f}{g} = 1.$$

Ο Ορισμός 4 ισχύει και στη περίπτωση που το πεδίο ορισμού των f, g είναι το $\mathbb{N}$ και το σύνολο τιμών παραμένει το $\mathbb{C}$, περίπτωση η οποία λόγω της διακριτής φύσης της MAS διαδραματίζει σημαντικό ρόλο.

Ορισμός 5α: *Συμβολισμός $f = o(g)$ (Little-o notation)*

Έστω $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ και κάποιο σημείο $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\}$. Συμβολίζεται με $f = o(g), z \rightarrow z_0$ ή $f \ll g, z \rightarrow z_0$ και λέγεται πως η f είναι “ο” (f is little-o of g) της g , ή απλά η f είναι πολύ μικρότερη της g , εάν ισχύει $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f}{g} = 0$.

Ορισμός 5β: *Συμβολισμός $f = O(g)$ (Big-o notation)*

Έστω $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ και κάποιο σημείο $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\}$. Η συνάρτηση $f(z)$ είναι της τάξης (ή *big-oh*) $g(z)$, αν η ποσότητα $\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right|$ είναι φραγμένη καθώς $z \rightarrow z_0$.

Θα ήταν ασφαλές να ειπωθεί πως δεν υπάρχει κάποια καθολική μέθοδος εύρεσης ασυμπτωτικών προσεγγίσεων. Στο [12] παρουσιάζονται κάποιες κλασσικές και κάποιες ιδιαίτερες τεχνικές, με σοβαρότατες εφαρμογές στη θεωρία κεραιών και στον υπολογιστικό ηλεκτρομαγνητισμό. Σκοπός των συγκεκριμένων προσεγγίσεων είναι η εύρεση μιας «εύχρηστης» συνάρτησης g , τέτοιας ώστε να αντικαθίσταται ικανοποιητικά η «δύσχρηστη» f , κοντά στο x_0 . Στο κεφάλαιο του κύκλου, δε θα απασχολήσουν δυσκολίες όπως αυτές που αναφέρονται στο [12, p.27-28] και αυτά λόγω της συγκεκριμένης μορφής των ασυμπτωτικών συστημάτων.

Ορισμός 6: Ασυμπτωτική Ακολουθία (Asymptotic Sequence)

Έστω μια ακολουθία συναρτήσεων της μορφής, $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Λέγεται πως η $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ασυμπτωτική ακολουθία συναρτήσεων στο $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\}$, εάν $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\psi_{n+1} \ll \psi_n, z \rightarrow z_0$.

Ορισμός 7: Ασυμπτωτικό Ανάπτυγμα (Asymptotic Expansion)

Έστω μια ασυμπτωτική ακολουθία, $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, μια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ και ένα σημείο $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\}$. Έστω επίσης μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Λέμε ότι το παρακάτω ανάπτυγμα είναι ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της f στο z_0 , εάν ισχύει :

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n, \quad z \rightarrow z_0$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 6, η περισσότερη «μάζα» του αναπτύγματος βρίσκεται στον όρο $n = 0$ και για το λόγο αυτός, αποκαλείται κύριος όρος (*dominant term*). Όταν η ασυμπτωτική ακολουθία έχει κατάλληλη μορφή, είναι δυνατόν αποκλειστικά ο κύριος όρος να αποτελεί ικανοποιητική ασυμπτωτική μορφή της f .

1.4.3β Υπολογισμοί χρήσιμων ασυμπτωτικών μεγεθών, σε γενική μορφή

Στην παράγραφο αυτή υπολογίζονται τα δεξιά μέλη των (1.45) έως (1.48) σε γενική μορφή. Για να ληφθεί μια απλούστερη έκφραση για το σύστημα (1.43) σύμφωνα με τη γενική ιδέα και τους ορισμούς της παραγράφου 1.4.3α, αρκεί να βρεθούν ασυμπτωτικές μορφές για τους DFT που ορίστηκαν στις εξισώσεις (1.37), (1.38). Έστω λοιπόν πως πρέπει να υπολογιστεί ο DFT του λογαρίθμου των αποστάσεων $L^{i,o,f}$. Επειδή οι εμφανίσεις αυτού του μεγέθους στο $\mathbf{A}_k \mathbf{I}_k = \mathbf{b}_k$ δε διαφέρουν ουσιαστικά (βλ. παρακάτω επακριβείς ορισμοί), αρκεί να υπολογιστεί η γενική μορφή του, όπως παρακάτω (όπου $u = i, o, f$) :

$$\mathbf{L}^u = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi k}{N} n} \ln \sqrt{\rho_{cyl}^2 + \rho_u^2 - 2\rho_{cyl}\rho_u \cos \frac{2\pi n}{N}}, k \in \{0, \dots, N-1\}$$

Για το σκοπό επικαλούνται τα περιεχόμενα του παραρτήματος και συγκεκριμένα το ανάπτυγμα (α).

Έτσι ορίζοντας $\rho = \max(\rho_u, \rho_{cyl})$ και $x = \frac{\min(\rho_u, \rho_{cyl})}{\rho}$ η τελευταία εξίσωση γράφεται :

$$\mathbf{L}^u = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi k}{N} n} \left[\ln \rho - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \cos m \frac{2\pi n}{N} \right]$$

Όπως είναι γνωστό, ο DFT της σταθερής ακολουθίας είναι ανάλογος της συνάρτησης δέλτα του Kronecker ή γενικότερα μιας δείκτριας συνάρτησης, όπως ορίζεται παρακάτω :

Ορισμός 8: Δείκτρια Συνάρτηση (*Indicator Function*)

Έστω X ένα σύνολο και κάποιο $S \subseteq X$. Η δείκτρια συνάρτηση $\delta_S : X \rightarrow \{0,1\}$ του συνόλου S δίνεται από τον τύπο :

$$\delta_S[x \in X] = \delta_{x,S} = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Από το άθροισμα των n πρώτων δυνάμεων ενός μιγαδικού αριθμού είναι γνωστό πως:

$$\ln p \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi k}{N} n} = N \ln p \delta_{k,0}$$

**Σημείωση :* Σύμφωνα με τον Ορισμό 8 έχει επιλεγθεί $S=0$, ενώ σύμφωνα με τη βιβλιογραφία το S θα έπρεπε να ήταν το σύνολο $\{mN : m \in \mathbb{Z}\}$. Ο DFT όμως είναι N περιοδικός και στο φυσικό πρόβλημα δεν υπάρχουν ρεύματα με δείκτες εκτός του $\{0, \dots, N-1\}$, επομένως κρατείται μόνο η τιμή $k=0$, έναντι του άπειρου αθροίσματος.

Απομένει να υπολογιστεί το μη τετριμμένο διπλό άθροισμα, το οποίο αντιμετωπίζεται με εναλλαγή της σειράς άθροισης :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi k}{N} n} \cos(m \frac{2\pi n}{N})$$

Είναι επιθυμητό να απαλειφθεί από το εσωτερικό άθροισμα η μεταβλητή άθροισης n , λαμβάνοντας πάντα υπόψιν το εύρος τιμών της μεταβλητής m . Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται η μιγαδική έκφραση του συνημιτόνου :

$$\frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi n}{N} (k+m)} + \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi n}{N} (k-m)} \right]$$

Τα παραπάνω αθροίσματα λαμβάνουν μη μηδενική τιμή όταν $k + m = qN$ &

$k - m = -pN$ και $m \geq 1$, συνεπώς προκύπτει πως για $k = 0 : q \geq 1$ & $p \geq 1$ και για $1 \leq k \leq N-1 : q \geq 1$ & $p \geq 0$. Χρησιμοποιώντας τώρα τη γενική φόρμουλα του DFT της σταθερής ακολουθίας (μορφή άπειρης σειράς), το διπλό άθροισμα υπολογίζεται ίσο με :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi k}{N} n} \cos(m \frac{2\pi n}{N}) = \frac{N}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \left[\sum_p \delta_{m,k+pN} + \sum_q \delta_{m,-k+qN} \right]$$

Από την ιδιότητα δειγματοληψίας της δείκτριας συνάρτησης, το διπλό άθροισμα καταρρέει σε απλό, με τα p, q να εξαρτώνται από το k με τον τρόπο που περιγράφεται :

$$\frac{N}{2} \left[\sum_p^{\infty} \frac{x^{pN+k}}{pN+k} + \sum_q^{\infty} \frac{x^{qN-k}}{qN-k} \right]$$

Τα παραπάνω αθροίσματα συγκλίνουν $\forall k$, καθώς $0 < x < 1$, εξ ορισμού (απόδειξη με κριτήριο του λόγου). Το πρόβλημα όμως είναι πως δεν είναι καθόλου εύχρηστα, καθώς δεν υπολογίζονται αναλυτικά και ο μόνος τρόπος να χρησιμοποιηθούν είναι μέσω των ασυμπτωτικών ως προς N εκφράσεων τους. Επειδή οι δείκτες εξαρτώνται από το k , η ανάλυση γίνεται κατά περίπτωση :

Έστω $k = 0$:

$$\frac{N}{2} \left[\sum_{q=1}^{\infty} \frac{x^{qN}}{qN} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{pN}}{pN} \right] = -\ln(1-x^N) \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

Για ρεαλιστικές και σχετικά μικρές τιμές των x, N όπως για παράδειγμα $x = 0.33, N = 20$, τα αθροίσματα είναι πραγματικά ασήμαντα (σε σχέση με το $N \ln p$ με το οποίο προστίθενται, ο $(N \ln p)$).

Έστω $1 \leq k \leq N-1$:

$$\frac{N}{2} \left[\sum_{q=0}^{\infty} \frac{x^{qN+k}}{qN+k} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{pN-k}}{pN-k} \right] \sim \frac{N}{2} \left[\frac{x^k}{k} + \frac{x^{N-k}}{N-k} \right], N \rightarrow \infty$$

Η παραπάνω είναι μια ασυμπτωτική προσέγγιση κύριου όρου, η οποία δε θα δημιουργήσει προβλήματα ακρίβειας, καθώς οι όροι των σειρών φθίνουν σύμφωνα με τις δυνάμεις του x^N . Για τις προηγούμενες αριθμητικές τιμές x, N , ο λόγος μεταξύ διαδοχικών όρων είναι μικρότερος από $1e-10$. Η ανάλυση του DFT είναι πλέον πλήρης και το αποτέλεσμα συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω είναι :

$$L^u \sim N \ln p \delta_{k,0} - \frac{N}{2} \left[\frac{x^k}{k} + \frac{x^{N-k}}{N-k} \right] \delta_{1 \leq k \leq N-1}, \quad N \rightarrow \infty \quad (1.49)$$

Σημείωση: Σε κάθε εμφάνιση της δ , το πεδίο ορισμού του Ορισμού 8 θεωρείται το $X = \{0, \dots, N-1\}$.

Παρατηρούμε πως η γεωμετρική ιδιότητα των ρευμάτων $I_k = I_{N-k}$ (βλ. 1.4.1.γ) θα πρέπει να μεταφέρεται και σε όλα τα στοιχεία του μειωμένου πίνακα $\mathbf{A}_k$ αλλά και του $\mathbf{b}_k$, πράγμα το οποίο και επαληθεύεται στην εξίσωση (1.49), προς το παρόν για τα στοιχεία $\{\mathbf{A}_k\}_{11}, \{\mathbf{A}_k\}_{12}, \mathbf{b}_{k1}$, με τις κατάλληλες αντικαταστάσεις στην (1.49).

Για την εύρεση της ασυμπτωτικής μορφής, αποδείχτηκε πως για $0 \leq k \leq N-1$:

$$\forall f_m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \sum_{m=1}^{\infty} f_m \text{DFT}_k \left\{ \cos \frac{2\pi n}{N} m \right\} = \frac{N}{2} \left[\sum_{p=\delta_{k,0}}^{\infty} f_{pN+k} + \sum_{q=1}^{\infty} f_{qN-k} \right] \quad (\delta)$$

Υπολογίζεται ο DFT των $\mathbf{Q}^{o,f}$ & $\mathbf{Q}^i$ ξεχωριστά καθώς οι μορφές τους είναι διαφορετικές, πράγμα το οποίο γίνεται αντιληπτό από τις ταυτότητες (β) & (γ). Ξανά, για τις εξωτερικές επιφάνειες η μορφή του $\mathbf{Q}^{o,f}$ είναι πρακτικά ίδια και βρίσκεται από τη γενικότερη φόρμουλα, όπου $u = \{o, f\}, \rho = \{\rho_{auxo}, \rho_{fil}\}, x = \frac{\rho_{cyl}}{\rho}$:

$$Q^u = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi k}{N} n} \frac{1}{\rho} \frac{x - \cos \frac{2\pi n}{N}}{1 + x^2 - 2x \cos \frac{2\pi n}{N}}$$

Χρησιμοποιείται το ανάπτυγμα (β), και έπειτα την ταυτότητα (δ) :

$$Q^u = -\frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi k}{N} n} \sum_{m=1}^{\infty} x^{m-1} \cos m \frac{2\pi n}{N}$$

$$\Rightarrow Q^u = -\frac{1}{\rho} \frac{N}{2} \left[\sum_{p=\delta_{k,0}}^{\infty} x^{pN+k-1} + \sum_{q=1}^{\infty} x^{qN-k-1} \right]$$

Οι παραπάνω σειρές υπολογίζονται αναλυτικά, αλλά η μορφή τους είναι τέτοια ώστε η αντίστοιχη ασυμπτωτική μορφή να είναι ίση με εκείνη του κύριου όρου. Επομένως :

$$Q^u \sim \left[-\frac{N}{\rho} \frac{x^{N-1}}{1-x^N} \right] \delta_{k,0} - \frac{N}{2\rho} [x^{k-1} + x^{N-k-1}] \delta_{1 \leq k \leq N-1} \quad (1.50)$$

Εναλλακτικά, η (1.50) αποδεικνύεται από την αναλυτική σχέση χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $x^N \rightarrow 0$ & $\frac{1}{1-x^N} \rightarrow 1, N \rightarrow \infty$. Η ιδιότητα της συμμετρίας περί της τιμής $k = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ (βλ. 1.4.1γ) ισχύει και τα $\{A_k\}_{21}$ & b_{k2} . Η έκφραση (1.50) αρκεί για τον προσδιορισμό των Q^o, Q^f .

Το ασυμπτωτικό $A_k I_k = b_k$ συμπληρώνεται από το ασυμπτωτικό Q^i , το οποίο δίνεται από την ταυτότητα (δ) & το ειδικό ανάπτυγμα (γ), ακολουθώντας τις ίδιες μεθόδους με πριν:

$$Q^i \sim \frac{N}{\rho} \frac{1}{1-x_N} \delta_{k,0} + \frac{N}{2\rho} [x^k + x^{N-k}] \delta_{1 \leq k \leq N-1} \quad (1.51)$$

1.4.3γ Ακριβή και Ασυμπτωτικά συστήματα και ρεύματα MAS

Οι πλήρεις αναλυτικές μορφές των μετασχηματισμένων MAS ρευμάτων δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμες αυτούσιες, αλλά χρησιμοποιούνται για την εύρεση της ασυμπτωτικής προσέγγισης των ρευμάτων. Προτού όμως γραφτούν οι εξισώσεις για $0 \leq k \leq N-1$ είναι επιτακτικό να οριστούν επακριβώς και να συμβολιστούν με οικονομία τα εμπλεκόμενα μεγέθη στις εξισώσεις (1.45) έως (1.48).

$$x_i = \frac{\rho_{auxi}}{\rho_{cyl}}, x_o = \frac{\rho_{cyl}}{\rho_{auxo}}, x_f = \frac{\rho_{cyl}}{\rho_{fil}} \text{ για } \rho_{cyl} < \rho_{fil} \quad (1.52)$$

$$x_i = \frac{\rho_{auxi}}{\rho_{cyl}}, x_o = \frac{\rho_{cyl}}{\rho_{auxo}}, x_f = \frac{\rho_{fil}}{\rho_{cyl}} \text{ για } \rho_{fil} < \rho_{cyl} \quad (1.53)$$

Είναι λογικό τα ρεύματα που βρίσκονται στη θέση $(\rho_{aux}, 0)$ να χρειάζονται ειδική μεταχείριση, καθώς εκείνα «φωτίζονται» περισσότερο από την πηγή. Οι εξισώσεις για τα μετασχηματισμένα ρεύματα στην προαναφερθείσα θέση, για πεπερασμένα c_i & c_o :

$$\rho_{fil} > \rho_{cyl} :$$

$$\mathbf{I}^o = \frac{\frac{x_f^N}{1-x_f^N} \frac{1}{\rho_{fil}} \ln \rho_{cyl} + \frac{1}{1-x_i^N} \frac{1}{\rho_{cyl}} \ln \rho_{fil}}{\frac{x_f^N}{1-x_f^N} \frac{1}{\rho_{auxo}} \ln \rho_{cyl} + c_o \frac{1}{1-x_o^N} \frac{1}{\rho_{cyl}} \ln \rho_{auxo}} \rightarrow \frac{\ln \rho_{fil}}{c_o \ln \rho_{auxo}}, N \rightarrow \infty$$

$$\mathbf{I}^i = \frac{c_o \frac{x_f^N}{1-x_f^N} \ln \rho_{fil} - \frac{x_o^N}{1-x_o^N} \ln \rho_{fil}}{\frac{x_o^N}{1-x_o^N} \ln \rho_{cyl} + c_o \frac{1}{1-x_i^N} \ln \rho_{auxo}} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

$\rho_{fil} < \rho_{cyl}$:

$$\mathbf{I}^o = \frac{c_i \frac{1}{1-x_f^N} \ln \rho_{cyl} - \frac{1}{1-x_i^N} \ln \rho_{cyl}}{\frac{1}{1-x_i^N} \ln \rho_{auxo} + c_i \frac{x_o^N}{1-x_o^N} \ln \rho_{cyl}} \rightarrow (c_i - 1) \frac{\ln \rho_{cyl}}{\ln \rho_{auxo}}, N \rightarrow \infty$$

$$\mathbf{I}^i = \frac{\frac{1}{1-x_f^N} \ln \rho_{auxo} - \frac{x_o^N}{1-x_o^N} \ln \rho_{cyl}}{\frac{1}{1-x_f^N} \ln \rho_{auxo} + c_i \frac{x_o^N}{1-x_o^N} \ln \rho_{cyl}} \rightarrow 1, N \rightarrow \infty$$

Σημείωση : Σύμφωνα με τις εξισώσεις (1.23), (1.24) & (1.32), (1.34), σε καθεμία από τις διατάξεις διάδοσης, τα «ρεύματα» $\mathbf{I}^o, \mathbf{I}^i$ και οι αντίστοιχοι αντίστροφοι μετασχηματισμοί τους I_l^o, I_l^i , είναι αδιάστατα.

Με τον ίδιο τρόπο, για πεπερασμένα c_i & c_o , για $1 \leq k \leq N-1$:

$$\mathbf{I}^o = \frac{(x_f^k + x_f^{N-k}) \left(\frac{x_i^k}{k} + \frac{x_i^{N-k}}{N-k} \right) + (x_i^k + x_i^{N-k}) \left(\frac{x_f^k}{k} + \frac{x_f^{N-k}}{N-k} \right)}{(x_o^k + x_o^{N-k}) \left(\frac{x_i^k}{k} + \frac{x_i^{N-k}}{N-k} \right) + c_o (x_i^k + x_i^{N-k}) \left(\frac{x_o^k}{k} + \frac{x_o^{N-k}}{N-k} \right)}, 1 \leq k \leq N-1, \rho_{cyl} < \rho_{fil}$$

$$\mathbf{I}^i = \frac{c_o (x_f^k + x_f^{N-k}) \left(\frac{x_o^k}{k} + \frac{x_o^{N-k}}{N-k} \right) - (x_o^k + x_o^{N-k}) \left(\frac{x_f^k}{k} + \frac{x_f^{N-k}}{N-k} \right)}{(x_o^k + x_o^{N-k}) \left(\frac{x_i^k}{k} + \frac{x_i^{N-k}}{N-k} \right) + c_o (x_i^k + x_i^{N-k}) \left(\frac{x_o^k}{k} + \frac{x_o^{N-k}}{N-k} \right)}, 1 \leq k \leq N-1, \rho_{cyl} < \rho_{fil}$$

$$\mathbf{I}^o = \frac{c_i (x_f^k + x_f^{N-k}) (\frac{x_i^k}{k} + \frac{x_i^{N-k}}{N-k}) - (x_i^k + x_i^{N-k}) (\frac{x_f^k}{k} + \frac{x_f^{N-k}}{N-k})}{(x_i^k + x_i^{N-k}) (\frac{x_o^k}{k} + \frac{x_o^{N-k}}{N-k}) + c_i (x_o^k + x_o^{N-k}) (\frac{x_i^k}{k} + \frac{x_i^{N-k}}{N-k})}, 1 \leq k \leq N-1, \rho_{fil} < \rho_{cyl}$$

$$\mathbf{I}^i = \frac{(x_f^k + x_f^{N-k}) (\frac{x_o^k}{k} + \frac{x_o^{N-k}}{N-k}) + (x_o^k + x_o^{N-k}) (\frac{x_f^k}{k} + \frac{x_f^{N-k}}{N-k})}{(x_i^k + x_i^{N-k}) (\frac{x_o^k}{k} + \frac{x_o^{N-k}}{N-k}) + c_i (x_o^k + x_o^{N-k}) (\frac{x_i^k}{k} + \frac{x_i^{N-k}}{N-k})}, 1 \leq k \leq N-1, \rho_{fil} < \rho_{cyl}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή οποιουδήποτε συμπεράσματος, παρόλο που έχουν χρησιμοποιηθεί μερικά ασυμπτωτικά. Όμως κάθε συνιστώσα των παραπάνω λόγων κατέχει μια πολύ σημαντική αλγεβρική ιδιότητα, η οποία είναι άμεση απόρροια της συμμετρίας των τμημάτων του πίνακα A και της γεωμετρίας του κύκλου. Η ιδιότητα αυτή είναι $\{Q, L\}_k = \{Q, L\}_{N-k}$ και οι συνιστώσες αυτές αναγκάζονται να την ικανοποιούν, καθώς ισχύει εξ αρχής για κάθε ρεύμα MAS. Η συμμετρία περί τον άξονα x των ρευμάτων, χρεώνεται στη γεωμετρία του κύκλου όπως αναφέρθηκε και αυτό συμβαίνει γιατί τα ρεύματα τα οποία έχουν δείκτες $k, N-k$ ισαπέχουν από την πηγή.

Η ιδιότητα αυτή θα επιτρέψει να βρεθούν ασυμπτωτικές προσεγγίσεις για τα $\mathbf{I}^o, \mathbf{I}^i$ που θα φανούν οικίες και λογικές, λαμβάνοντας υπόψιν τις αναλυτικές λύσεις (1.11), (1.12) & (1.21), (1.22), ενώ παράλληλα θα εμφανίσουν συμπεριφορές της MAS που οφείλουν να λαμβάνονται υπόψιν σε οποιαδήποτε διάταξη, όπως αναλύεται σε οριακές περιπτώσεις του παρόντος προβλήματος διάδοσης [5][6][14]. Σύμφωνα με την ιδιότητα $\{Q, L\}_k = \{Q, L\}_{N-k}$ και τις εξισώσεις (1.52) & (1.53), καθίσταται εφικτή η ενασχόληση αποκλειστικά με τις τιμές του $k \leq \frac{N}{2}$, γεγονός το οποίο βοηθά με την εισαγωγή του ορίου $N \rightarrow \infty$. Σε αντίθετη περίπτωση, η προσέγγιση των πολλών (θεωρητικά άπειρων) ρευμάτων θα δυσκόλευε τη διαχείριση των τιμών του k κοντά στο N .

Έστω λοιπόν μια σταθερή τιμή του $k < \frac{N}{2}$. Επειδή $N \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{x^{N-k}}{N-k} \rightarrow 0$, για οποιοδήποτε x στις εξισώσεις (1.45) – (1.48). Η προσέγγιση αυτή οδηγεί στα ασυμπτωτικά μετασχηματισμένα ρεύματα MAS $\mathbf{I}^o, \mathbf{I}^i$, για κάθε διάταξη :

$\rho_{fil} > \rho_{cyl}$:

$$\mathbf{I}^o \sim \frac{2}{1 + c_o} \left(\frac{\rho_{auxo}}{\rho_{fil}} \right)^k, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \mathbf{I}_k^o = \mathbf{I}_{N-k}^o \quad (1.54)$$

$$\mathbf{I}^i \sim \frac{c_o - 1}{c_o + 1} \left(\frac{\rho_{cri}}{\rho_{auxi}} \right)^k, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \mathbf{I}_k^i = \mathbf{I}_{N-k}^i, \text{ όπου } \rho_{cri} = \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}} \quad (1.55)$$

$\rho_{fil} < \rho_{cyl} :$

$$\mathbf{I}^0 \sim \frac{c_i - 1}{c_i + 1} \left(\frac{\rho_{auxo}}{\rho_{cri}} \right)^k, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \mathbf{I}_k^0 = \mathbf{I}_{N-k}^0 \text{ όπου } \rho_{cri} = \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}} \quad (1.56)$$

$$\mathbf{I}^i \sim \frac{2}{1 + c_i} \left(\frac{\rho_{fil}}{\rho_{auxi}} \right)^k, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \mathbf{I}_k^i = \mathbf{I}_{N-k}^i \quad (1.57)$$

Με αναφορά στις εξισώσεις (1.11) & (1.12), (1.21) & (1.22), τονίζεται η συμφωνία μεταξύ των πλατών των ειδώλων ρευμάτων και των DFT των ρευμάτων MAS.

1.4.3δ Ασυμπτωτικές εκφράσεις για τα οριακά προβλήματα, $c_i = \frac{\mu_2}{\mu_1}, c_o = \frac{\mu_1}{\mu_2} \rightarrow \infty$

Αξίζει να αναφερθεί πως κανείς πρέπει να είναι ιδιαίτερα προσεκτικός κατά τον υπολογισμό των ορίων $\lim_{c_i, c_o \rightarrow \infty} \mathbf{I}^0, \mathbf{I}^i$. Συγκεκριμένα τονίζεται πως **δεν** είναι αναγκαίο να ισχύει :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{I} = \lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{I}$$

Ο σωστός τρόπος να υπολογιστούν οι ασυμπτωτικές εκφράσεις των ρευμάτων για τα οριακά προβλήματα ξεκινά με τον υπολογισμό του $\lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{I}$, και για το αποτέλεσμα αυτού, χρησιμοποιούνται οι τεχνικές των ασυμπτωτικών μαθηματικών. Έτσι, ξεκινώντας από τις εξισώσεις (1.45) – (1.48) και για λαμβάνοντας υπόψιν την ιδιότητα $\mathbf{I}_k = \mathbf{I}_{N-k}, 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$:

$\rho_{fil} > \rho_{cyl} :$

$$\mathbf{I}^0 = 0$$

$$\mathbf{I}^i = -\frac{\mathbf{Q}^f}{\mathbf{Q}^i} = \begin{cases} x_f^N \frac{1 - x_i^N}{1 - x_f^N}, & k = 0 \\ \frac{x_f^k + x_f^{N-k}}{x_i^k + x_i^{N-k}} \sim \left(\frac{x_f}{x_i} \right)^k = \left(\frac{\rho_{cri}}{\rho_{auxi}} \right)^k, & 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

Το εσωτερικό οριακό πρόβλημα εμφανίζει μια ιδιαίτερη ιδιότητα η οποία επηρεάζει τα πλάτη των ρευμάτων MAS. Συγκεκριμένα, με το όριο $c_i \rightarrow \infty$, το πρόβλημα διατυπώνεται μέσω της εξίσωσης (1.13), αλλά με την εξής συνθήκη Neumann [29]:

$$\frac{\partial A(\rho_{cyl}, \varphi)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho_{cyl}}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι συμβατή με τη συνθήκη συμβατότητας των προβλημάτων Neumann [28,p.668] η οποία απαιτεί, για το παρακάτω γενικό πρόβλημα σε χωρίο S:

$$\Delta u = p, p \in S \text{ \& } \frac{\partial u}{\partial n} = f, f \in \partial S \rightarrow \iint_S p dS = \oint_{\partial S} f dl$$

Έτσι στο σύστημα MAS, ακολουθώντας τα ίδια βήματα με τις προηγούμενες παραγράφους, θα εμφανιστεί μια συνιστώσα $\frac{N}{\rho_{cyl}} \delta_{k,0}$ στο δεξί μέλος του συστήματος (όπως φαίνεται τελικά επηρεάζεται μόνο το $I_{k=0}^0$), λόγω της εφαρμογής DFT στην εξίσωση που υπαγορεύει η συνθήκη Neumann. Έτσι :

$$I^0 = \begin{cases} \left(\frac{x_f}{x_0}\right)^N \frac{1-x_0^N}{1-x_f^N} = \left(\frac{\rho_{auxo}}{\rho_{cri}}\right)^N \frac{1-x_0^N}{1-x_f^N}, & k=0 \\ \frac{x_f^k + x_f^{N-k}}{x_0^k + x_0^{N-k}} \sim \left(\frac{\rho_{auxo}}{\rho_{cri}}\right)^k, & 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

Τα ρεύματα της εσωτερικής επιφάνειας είναι μηδενικά **(1.48)**. Τα ως άνω αποτελέσματα βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με την εργασία [29].

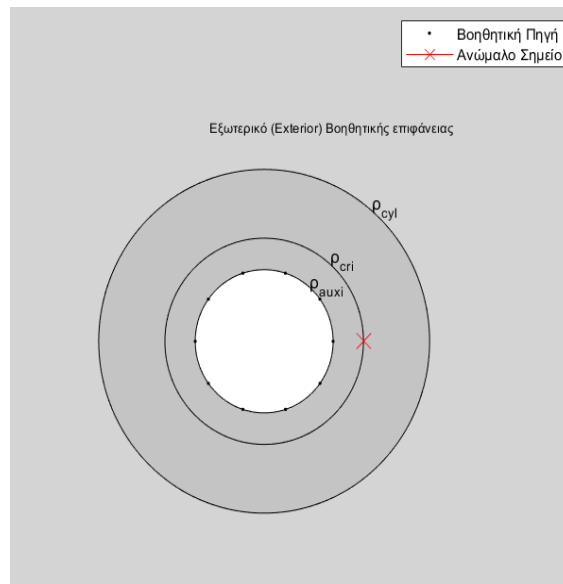
1.4.4 Συμπεριφορά των ρευμάτων MAS συναρτήσει των βοηθητικών επιφανειών

Στο σημείο αυτό κοιτώντας τις εξισώσεις **(1.54) – (1.57)** εξάγονται κάποια πολύ σημαντικά συμπεράσματα που αφορούν τη συμπεριφορά της MAS στο κυκλικό πρόβλημα διάδοσης, αλλά πιστεύεται πως γενικεύονται σε οποιαδήποτε διάταξη. Η MAS μπορεί να αναλυθεί και από τα ρεύματα MAS και τους μετασχηματισμούς τους κατά DFT.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί πως οι μόνοι περιορισμοί που δόθηκαν για τα ρ_{auxi}, ρ_{auxo} είναι να μην εισάγουν ανώμαλα σημεία στο μαγνητικό πεδίο εκεί όπου δεν πρέπει να υπάρχουν και η συνθήκη για να ικανοποιηθεί αυτό είναι απλά, $\rho_{auxi} < \rho_{cyl}$ & $\rho_{auxo} > \rho_{cyl}$. Το γεγονός πως κατά τη λύση του συστήματος δεν εισήχθησαν συγκεκριμένες περιοχές στις οποίες μπορούν να τοποθετηθούν οι επιφάνειες, δημιουργεί υποψία για το μη μονοσήμαντο της λύσης, δηλαδή $\nexists! \rho_{auxi}, \rho_{auxo} : A_{MAS} \rightarrow A_{an}$, όπου A_{an} η αναλυτική λύση του προβλήματος. Θα ήταν λογικό να θεωρηθεί πως αυτό ισχύει και σε μια διάταξη διάδοσης «τυχαίας» γεωμετρίας.

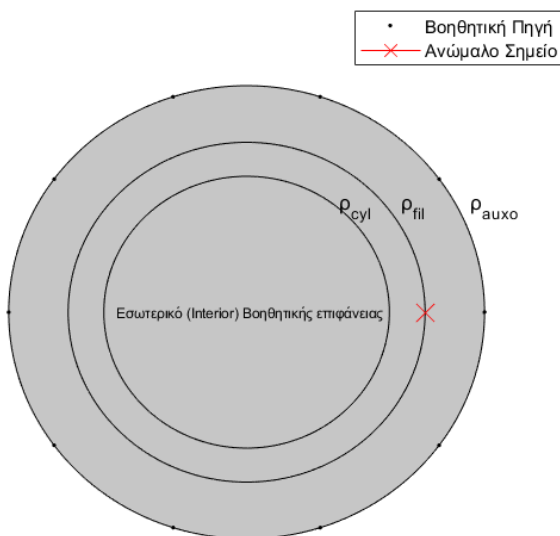
Η μορφή των I^0, I^1 είναι εκθετική και δε συγκλίνει καθώς $N \rightarrow \infty$ για οποιαδήποτε τιμή των ρ_{auxi}, ρ_{auxo} . Από τις εξισώσεις **(1.54)-(1.57)**, βλέπουμε πως τα I^0, I^1 είναι μη φραγμένα & αποκλίνουν ως προς N όταν οι βοηθητικές πηγές τοποθετηθούν έτσι ώστε $\rho_{auxi} < \rho_{cri}$ ή $\rho_{auxo} > \rho_{fil}$, όπως στις Εικόνες 9,10. Κατά συνέπεια αποκλίνουν και τα ρεύματα που παράγουν το μαγνητικό πεδίο σε όλο το χώρο, κάτι που μπορούμε να διαπιστώσουμε από το θεώρημα Plancherel/Parseval, καθώς :

$$\sum_{l=0}^{N-1} |I_l^{i,0}|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |I_k^{i,0}|^2 \sim \frac{1}{N} \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1} \rightarrow \infty$$



Εικόνα 9: Τοποθέτηση εσωτερικής επιφάνειας σε απόσταση που προκαλεί αποκλίνοντα ρεύματα MAS.

Όπως αναφέρεται στο [14, p.106] και όπως είναι γνωστό άλλωστε, το μαγνητικό πεδίο εξωτερικά μιας ομαλούς πηγής επιφανειακού ρεύματος $\vec{K}$ πρέπει να είναι επίσης ομαλή συνάρτηση των χωρικών μεταβλητών και να φθίνει, καθώς το σημείο παρατήρησης απομακρύνεται από τον όγκο της πηγής. Αν όμως τοποθετηθεί η πηγή όπως στην Εικόνα 9 (κυκλικός κύλινδρος $\rho = \rho_{auxi} < \rho_{cri}$), τότε στο εξωτερικό και μακριά της, υφίσταται ένα ανώμαλο σημείο (της αναλυτικής επέκτασης ως προς ρ), το οποίο συνεπάγεται πως το μαγνητικό πεδίο δεν είναι ομαλό, επομένως ούτε η πηγή είναι. Αυτό είναι το φυσικό νόημα της απόκλισης των ρευμάτων, κάτι που θα αποδειχθεί και από την ασυμπτωτική τους έκφραση παρακάτω. Ίδια κατάσταση επικρατεί και για την εξωτερική βοηθητική πηγή, δηλαδή υπάρχει ένας συγκεκριμένος τόπος στον οποίο μπορεί να τοποθετηθεί έτσι ώστε τα ρεύματα να συγκλίνουν σε κάποια ομαλή συνάρτηση $\vec{K}$. Σαν γενική παρατήρηση, τα ρεύματα θα αποκλίνουν όταν οι αντίστοιχες επιφάνειες στις οποίες ρέουν, τοποθετηθούν έτσι ώστε στο χωρίο στο οποίο δημιουργούν μαγνητικό πεδίο, προϋπάρχει ανώμαλο σημείο της αναλυτικής λύσης (το οποίο δε θα είναι *a-priori* γνωστό σε μια αυθαίρετη ηλεκτρομαγνητική διάταξη). Στην Εικόνα 10 φαίνεται η αντίστοιχη περιοχή :



Εικόνα 10: Υπαρξη ανώμαλου σημείου (ειδώλου) στο χώρο όπου οι βοηθητικές πηγές διεγείρουν το ζητούμενο μαγνητικό πεδίο.

Η κατάσταση αυτή είναι παρόμοια με τις ρευματικές κατανομές στις υπερκατευθυντικές κεραίες όπου ένα ομαλό πεδίο παράγεται από έντονα ταλαντούμενα-αποκλίνοντα ρεύματα [15][16][41]. Πιστεύεται πως κάποια αντίστοιχη συνθήκη θα πρέπει να ισχύει και για αυθαίρετου σχήματος διατάξεις. Στην προκειμένη περίπτωση, οι ανωμαλίες των αναλυτικών επεκτάσεων των πεδίων είναι οι θέσεις των ειδώλων ρευμάτων.

Οι παρατηρήσεις για τη σχετική θέση ανώμαλων σημείων και βοηθητικών επιφανειών ισχύουν και για το εσωτερικό πρόβλημα διάδοσης, χωρίς καμία αλλαγή.

Τα παραπάνω ήταν ποιοτική προσέγγιση της συμπεριφοράς των ρευμάτων, εμπνευσμένη από τη φυσική του προβλήματος. Μια επίσης ποιοτική εξήγηση μπορεί να δοθεί και από τη γενική θεωρία του αναπτύγματος συναρτήσεων σε σειρές. Είναι λογικό, οι σταθερές που πολλαπλασιάζουν κάθε συνάρτηση όρο ενός αναπτύγματος να αποκλίνουν, εάν υπάρχει ανώμαλο σημείο της αρχικής συνάρτησης στο πεδίο όπου αυτή αναπτύσσεται σε σειρά.

Τέλος, ο ισχυρισμός βασίζεται στο αδιάσειστο επιχείρημα των ασυμπτωτικών εκφράσεων των ρευμάτων. Έστω λοιπόν κάποιο άρτιο N , που είναι η πιο απλή περίπτωση καθώς για περιττά N ισχύουν παρόμοιες εξισώσεις. Πρέπει να εφαρμοστεί αντίστροφος DFT στις εξισώσεις (1.54) έως (1.57), οι οποίες έχουν ίδια εκθετική μορφή και μπορούν με τις κατάλληλες αντικαταστάσεις να υπολογιστούν από τη γενική εξίσωση :

$$Nx_l = \text{IDFT}_l\{X_k\} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-j \frac{2\pi l}{N} k} = X_{k=0} + X_{k=\frac{N}{2}} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} X_k \cos \frac{2\pi l}{N} k$$

Η τιμή $X_{k=0}$ δίνεται από τις εξισώσεις τις πρώτες εξισώσεις της παραγράφου 1.4.3γ . Στην παραπάνω εξίσωση εκμεταλλεύτηκε η συμμετρία ως προς τη μεσαία τιμή, $k = \frac{N}{2}$. Ως διάνυσμα προς μετασχηματισμό τίθεται (παράλειποντας την πολλαπλασιαστική σταθερά), $X_k = a^k$:

$$Nx_l = X_{k=0} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} a^k \cos \frac{2\pi l}{N} k = X_{k=0} + X_{k=\frac{N}{2}} + 2 \operatorname{Re}\left\{ \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} (a e^{-j \frac{2\pi l}{N}})^k \right\}$$

Το τελευταίο πεπερασμένο άθροισμα υπολογίζεται μέσω της γεωμετρικής σειράς και λαμβάνεται :

$$Nx_l = X_{k=0} + (-1)^l X_{k=\frac{N}{2}} + 2 \operatorname{Re}\left\{ \frac{\gamma^{\frac{N}{2}} - 1}{\gamma - 1} - 1 \right\}, \quad \gamma = a e^{-j \frac{2\pi l}{N}}, 0 \leq l \leq N-1$$

Χωρίς τον τελεστή $\operatorname{Re}\{\}$ η έκφραση είναι κάπως περίπλοκη, αλλά αρκετά ικανοποιητική έτσι να ώστε να υποστηριχθούν τα επιχειρήματα περί σύγκλισης & απόκλισης.

$$Nx_l = X_{k=0} + (-1)^l a^{\frac{N}{2}} + 2 \left[\frac{1 - a \cos \frac{2\pi l}{N}}{1 + a^2 - 2a \cos \frac{2\pi l}{N}} (1 + (-1)^{l+1} a^{\frac{N}{2}}) - 1 \right]$$

Στην ποιοτική ανάλυση που έγινε, ουσιαστικά επιχειρηματολογείται πως $a > 1 \Rightarrow \forall M, M' > 0 : \exists l, l' : I_l > M, I_{l'} < -M', N \rightarrow \infty$. Ακριβώς αυτό, λαμβάνεται από την παραπάνω εξίσωση λόγω του ταλαντούμενου όρου $(-1)^{l+1} a^{\frac{N}{2}}$.

Η παράμετρος a , όπως δείχνουν οι Εικόνες 9, 10 γίνεται μεγαλύτερη της μονάδας όταν $\rho_{auxi} < \rho_{cri} \ \& \ \rho_{auxo} > \rho_{fil}$ στο εξωτερικό πρόβλημα. Όταν το ρεύμα διέγερσης τοποθετείται στο εσωτερικό του κυλίνδρου, τα ρεύματα MAS αποκλίνουν όταν $\rho_{auxi} < \rho_{fil}$ ή $\rho_{auxo} > \rho_{cri} = \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}} > \rho_{cyl}$. Σε αντίθεση περίπτωση, τα ρεύματα συγκλίνουν και στο όριο του συνεχούς, συνθέτουν την επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec{K} = \hat{z} K_z(\varphi)$ αντίστοιχα, όπως αποδεικνύεται στην παράλληλη εργασία [29]. Παρατηρούμε πως το αποτέλεσμα εκείνο μπορεί να μεταφερθεί και στο παρόν πρόβλημα, καθώς η

μόνη προϋπόθεση είναι να συγκλίνουν οι ακολουθίες των ρευμάτων έτσι ώστε να έχουν λύση οι αντίστοιχες ολοκληρωτικές εξισώσεις.

Με την παρούσα παράγραφο, δείχνεται πως η απόκλιση των ρευμάτων είναι εγγενής στην αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Laplace κατά τη μέθοδο MAS και δεν οφείλεται σε ατελείς υπολογισμούς (π.χ λόγω *floating point arithmetic, representation errors*), σφάλματα στρογγυλοποίησης (*round-off error*), αλλά ούτε και στο δυσμενές του αριθμού κατάστασης του προβλήματος (*ill-conditioning*), μέγεθος το οποίο είναι κεντρικό για την αριθμητική ανάλυση & τον έλεγχο ευστάθειας γενικά, αλλά και της MAS. Τα αποτελέσματα της εργασίας [29], του αντίστοιχου προβλήματος σκέδασης από πλήρως διαπερατό μαγνητικό υλικό, μεταφέρονται άρα και στο πρόβλημα διάδοσης. Το γεγονός πως τα ρεύματα αποκλίνουν υπό συνθήκη, έρχεται σε σύγκρουση με τη γενική διαίσθηση που υπάρχει για τις αριθμητικές μεθόδους, κατά την οποία το πέρασμα από το διακριτό στο «συνεχές» πάντα βελτιώνει την απόδοση της διακριτούς τεχνικής επίλυσης που χρησιμοποιείται.

1.5 Αριθμός κατάστασης (*condition number*) προβλήματος αριθμητικής επίλυσης εξίσωσης Laplace μέσω MAS

Η επίλυση ΠΣΤ Laplace με μεθόδους πεπερασμένων αναπτυγμάτων, όπως η MAS, είναι ευρέως γνωστά προβλήματα ασθενούς/κακής κατάστασης [17][18][19]. Η προηγούμενη παράγραφος επιτρέπει να ειπωθεί με σιγουριά πως η μορφή των ρευμάτων που θα ληφθεί στα αριθμητικά πειράματα είναι και η πραγματική. Αυτό επιβεβαιώνεται και από την εύρεση τους με δύο ανεξάρτητες μεθόδους, μέσω της ρουτίνας *Linsolve* της *Matlab*[®] και με χρήση των συναρτήσεων *fft*, *ifft* στα συστήματα (1.45) – (1.46) & (1.47) – (1.48) ξανά από το λογισμικό *Matlab*[®]. Όμως η πεπερασμένη ακρίβεια των υπολογιστικών συστημάτων, αποδεικνύεται πως ορισμένες φορές «μολύνει» τα χρήσιμα αποτελέσματα με μη αγνοήσιμα σφάλματα, ακριβώς λόγω της ασθενούς κατάστασης του προβλήματος. Με την εκτίμηση του αριθμού κατάστασης σε αυτή την παράγραφο, επισημαίνεται η προσοχή που πρέπει να δοθεί στη διαδικασία σχεδίασης των χαρακτηριστικών της MAS, έτσι ώστε τα αποτελέσματα να παραμένουν ελεύθερα από σφάλματα που οφείλονται στο ατελές λογισμικό.

Προφανώς βάσει των προηγούμενων, έχει διαχωριστεί πλήρως η εγγενής από την «τεχνητή» συμπεριφορά και οποιαδήποτε απόκλιση από αυτή θα οφείλεται στο ασθενές της κατάστασης.

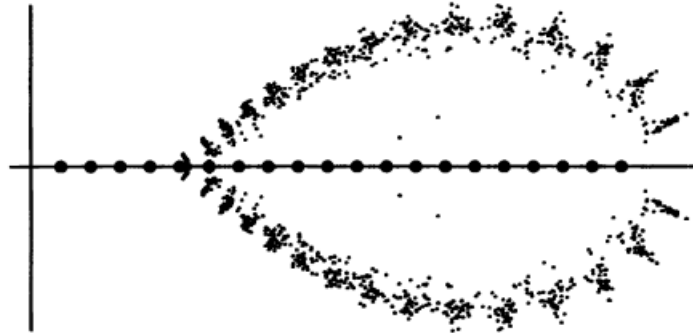
Ορισμός 9: (Σχετικός) Αριθμός Κατάστασης (*(Relative) Condition Number*) [20]

Έστω ένα «πρόβλημα» f , υπό την έννοια $f : X \rightarrow Y$ όπου X είναι ο διανυσματικός χώρος με νόρμα των δεδομένων (*data*) και Y ο επίσης διανυσματικός χώρος νόρμας των λύσεων (*solutions*). Ως σχετικός αριθμός κατάστασης ή απλά αριθμός κατάστασης ορίζεται :

$$\kappa(x \in X) = \sup_{\delta x} \frac{\|\delta f\|_Y}{\|f(x)\|_Y} / \frac{\|\delta x\|_X}{\|x\|_X}$$

Όπου $\delta f \in Y$ είναι η απειροστή διαταραχή που προκλήθηκε στη λύση, από την απειροστή διαταραχή στα δεδομένα $\delta x \in X$ και $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ νόρμες στους αντίστοιχους χώρους.

Από τον ορισμό και μόνο φαίνεται η σημασία αυτού του μεγέθους στην αριθμητική ανάλυση προβλημάτων. Ο σχετικός αριθμός κατάστασης απασχολεί σε αυτή την εργασία και όχι ο απόλυτος, επειδή μελετάται η επίδραση αριθμητικών σφαλμάτων λόγω στρογγυλοποίησης τα οποία εμφανίζονται πάντα ως σχετικά. Ο αριθμός κ συμβολίζει το μέτρο της διαταραχής που «διαδίδεται» στη λύση από τη διαταραχή στα δεδομένα. Κλασσικό παράδειγμα ασθενούς προβλήματος (μεγάλου $\kappa \sim 5.1 \times 10^{13}$ [20]), αποτελεί ο υπολογισμός ριζών του πολυνύμου Wilkinson $p(x) = \prod_{n=1}^k (x - n) = \sum_{n=0}^{20} a_n x^n$ [21], στο οποίο εισέρχονται διαταραχές που προκαλούν αντίστοιχες τεράστιες μεταβολές στις ρίζες του λόγω του μεγάλου κ , όπως στην Εικόνα 11:



Εικόνα 11: Αρχικές ρίζες $x_n = n, 1 \leq n \leq k$ (Μεγάλες τελείες). Ρίζες μετά την είσοδο 100 διαφορετικών διαταραχών της μορφής $\delta a_i = 10^{-10} r_i a_i$ με $r_i \sim N(0,1)$ (Διάσπαρτες μικρές τελείες). [Εικόνα από [20]].

Στην περίπτωση της επίλυσης ΠΣΤ μέσω γραμμικών συστημάτων, ο αριθμός κατάστασης ουσιαστικά αναφέρεται στο πρόβλημα $f(b) = A^{-1}b$. Σε πρακτικά προβλήματα η νόρμα που ενδιαφέρει είναι η 2-νόρμα (*spectral norm*) $\|\cdot\|_2$, σε χώρους πινάκων.

Ορισμός 10 : (Επαγόμενη) p -Νόρμα σε χώρους πινάκων

Έστω η p -νόρμα, $1 \leq p < \infty$, ενός διανύσματος $x \in X \leq \mathbb{R}^n$, όπου X ένας διανυσματικός χώρος, $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, τότε :

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

Σύμφωνα με το [20, p.95], ο αριθμός κατάστασης για το παραπάνω πρόβλημα είναι ίσος με :

$$\kappa = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \quad (1.58)$$

Το κ επομένως μετρά το κατά πόσο μεταβάλλεται το I_{MAS} από τις διαταραχές $\delta A, \delta b$ που εισέρχονται στο σύστημα ως $(A + \delta A)(I_{MAS} + \delta I_{MAS}) = b + \delta b$.

Σύμφωνα με την πασίγνωστη παραγοντοποίηση SVD (*singular value decomposition*) ο πίνακας $A = U\Sigma V^T$, όπου $U, V \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ ορθοκανονικοί και $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{1 \leq i \leq 2N}) \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$, όπου οι ιδιάζουσες τιμές σ_i μπορούν να βρεθούν (ως οι θετικές ρίζες) από το πρόβλημα ιδιοτιμών :

$$A^T A v_i = \sigma_i^2 v_i$$

Το γινόμενο SVD είναι καίριας σημασίας και υπολογιστικής αξίας σε μια πληθώρα αριθμητικών προβλημάτων, πέραν του μεγάλου θεωρητικού και γεωμετρικού του βάθους. Μένει να συνδεθεί η παραγοντοποίηση SVD με τον υπολογισμό αριθμών κατάστασης. Για οποιοδήποτε πίνακα $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, υπολογίζεται η 2-νόρμα :

$$\|P\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|U\Sigma V^T x\|_2$$

Για οποιοδήποτε ορθοκανονικό πίνακα Q ισχύει :

$$\|Q\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Qx\|_2 = \sqrt{(Qx)^T(Qx)} = \sqrt{x^T Q^T Q x} = \sqrt{x^T x} = \|x\|_2$$

Για οποιοδήποτε διαγώνιο πίνακα D ισχύει :

$$\|D\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Dx\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (d_i x_i)^2} \leq |d| \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |d|, |d| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|d_i|\}$$

Αν επιλέξει κανείς το διάνυσμα $x = \hat{e}_i, i = \text{argmax}(|d_j|)$, τότε το παραπάνω γίνεται ισότητα, επομένως :

$$\|D\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \{|d_i|\}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, για τον P λαμβάνεται :

$$\|P\|_2 = \max\{\sigma_i\}$$

Δηλαδή, η 2-νόρμα ενός πίνακα είναι ίση με τη μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή του. Η γεωμετρική ερμηνεία πίσω αυτό είναι πως η SVD παραγοντοποίηση προβλέπει πως κάθε πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, απεικονίζει την n -σφαίρα σε κάποιο n -ελλειψοειδές. Η εξήγηση έρχεται από τη μορφή των πινάκων του γινομένου $A = U\Sigma V^T$. Όπως δείχτηκε, οι πίνακες U, V^T είναι αμρότεροι ορθοκανονικοί, επομένως η επίδραση τους πάνω σε ένα διάνυσμα είναι απλά μια περιστροφή, χωρίς αντίστοιχη κλιμάκωση του μήκους. Ο διαγώνιος πίνακας Σ , όταν δρα πάνω σε ένα διάνυσμα, ουσιαστικά κλιμακώνει με διαφορετικό τρόπο (γενικά) κάθε συνιστώσα. Έτσι η σύνθεση 2 περιστροφών και μιας μη ομογενούς κλιμάκωσης, οδηγεί στην παραμόρφωση της n -σφαίρας σε ένα n -ελλειψοειδές.

Τα μήκη των ημιαξόνων είναι οι ιδιάζουσες τιμές και άρα, το διάνυσμα που ικανοποιεί τη $\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$, απεικονίζεται στο μεγαλύτερο ημιάξονα της έλλειψης.

Επομένως από την εξίσωση (1.58), για μη ιδιάζοντες πίνακες (*nonsingular*), φαίνεται πως ο αριθμός κατάστασης είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με την παραγοντοποίηση SVD καθώς :

$$\kappa = \frac{\max(\sigma_i)}{\min(\sigma_i)}, 1 \leq i \leq n \quad (1.59)$$

Σχόλιο : Αν P μη ιδιάζον, τότε $P^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$

Σε πρώτη ανάλυση, εξετάζονται οι αριθμοί κατάστασης των τμημάτων του πίνακα A των συστημάτων (1.27), (1.36). Για ευκολία επαναλαμβάνονται οι 2 εκδοχές του, για το εξωτερικό & εσωτερικό πρόβλημα αντίστοιχα :

$$\begin{bmatrix} c_o L^o & -L^i \\ Q^o & Q^i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} L^o & -c_i L^i \\ Q^o & -Q^i \end{bmatrix}$$

Τα τμήματα του A είναι κυκλικά και συμμετρικά. Επομένως οι ιδιάζουσες τιμές τους βρίσκονται από το πρόβλημα ιδιοτιμών, με $P = L, Q$:

$$P^T P v_i = P^2 v_i = \sigma_i^2 v_i$$

Τα στοιχεία του πίνακα βάσει όσων αναφέρθηκαν είναι οι κυκλικές συνελίξεις των γραμμών του πίνακα P, δηλαδή $P_{ij} = p_i * p_j$. Σύμφωνα με την ιδιότητα (1.4.1.δ), ο πίνακας P^2 είναι και εκείνος κυκλικός με το διάνυσμα από το οποίο αποτελούνται οι γραμμές να είναι το $p = p_0 * p_k, 0 \leq k \leq N-1$ όπου p_k είναι το p_0 κυκλικά μετατιθέμενο κατά k θέσεις (δεξιά). Σύμφωνα με την ιδιότητα (1.4.1.β), οι ιδιοτιμές του P^2 είναι :

$$\sigma_{1 \leq i \leq N} = \text{DFT}\{p_0 * p_0\} = |\text{DFT}\{p_0\}| \quad (1.60)$$

Οι ιδιάζουσες τιμές των τμημάτων του A υπολογίζονται από τους DFT των πρώτων γραμμών τους, οι οποίοι είναι γνωστοί από τις σχέσεις (1.49) – (1.51). Σε εκείνες τις εξισώσεις, σύμφωνα με την (1.59), πρέπει να βρεθούν τα minima / maxima.

Στην πραγματικότητα, οι ασυμπτωτικές ακολουθίες $|L|, |Q|, N \rightarrow \infty$ αποτελούνται από μια εκθετικά φθίνουσα ακολουθία και μια ξεχωριστή τιμή για $k=0$, η οποία είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το N. Προφανώς και συνεχίζει να ισχύει η ιδιότητα της συμμετρίας και για αυτό η ανάλυση μπορεί και περιορίζεται για $k \leq \frac{N}{2}$, όπου υποτίθεται πως το N είναι άρτιο για ευκολία. Στους πίνακες με τους λογαρίθμους των αποστάσεων ($L^{o,i}$) η σταθερή τιμή είναι της μορφής $ln\rho$, επομένως το minimum επιτυγχάνεται για $1 \leq k \leq \frac{N}{2}$, που από την εξίσωση (1.49) λαμβάνεται :

$$\min |L^{o,i}| = \frac{2}{N} x_{o,i}^{\frac{N}{2}}$$

Η τιμή αυτή είναι εκθετικά μικρή και προϋδεάζει για το ασθενές των πινάκων, καθώς οι εξισώσεις (1.49) – (1.51) ισχύουν για τα x_0, x_i των (1.52) – (1.53), τα οποία είναι αμφότερα μικρότερα της μονάδας.

Αναλόγως τη σχεδίαση των επιφανειών ρ_{auxi}, ρ_{auxo} και συναρτήσεϊ των δεδομένων της διάταξης ρ_{cyl}, ρ_{fil} , το μέγιστο των $|L|$ διαφοροποιείται μεταξύ των τιμών $|L^{o,i}|_{k=0}$ & $|L^{o,i}|_{k=1}$. Αυτό όμως δεν έχει ιδιαίτερη σημασία, καθώς πρόκειται για 2 σταθερές τιμές που δεν αλλάζουν με το N σημαντικά. Επομένως οι ασυμπτωτικοί αριθμοί κατάστασης των πινάκων $L^{o,i}$, είναι :

$$\kappa_L \sim \frac{N}{2} x_{o,i}^{\frac{N}{2}}, \quad x < 1, N \rightarrow \infty$$

Η τελευταία εξίσωση συμβαδίζει, με προσέγγιση πολλαπλασιαστικής σταθεράς, με ότι έχει διαπιστωθεί σε διαφορές εργασίες που σχετίζονται με μεθόδους επίλυσης προβλημάτων Dirichlet/Laplace [18][19] με υπολογιστικές μεθόδους, όσον αφορά τον αριθμό κατάστασης. Τονίζεται πως ο αριθμός αυτός αφορά ένα μόνο τμήμα του συνολικού πίνακα A και πως δίνει μια εκτίμηση για τον ακριβή αριθμό κατάστασης, ενώ χαρακτηρίζει πλήρως την ασυμπτωτική συμπεριφορά του.

Όμως, όπως σποραδικά αναφέρεται κατά μήκος της εργασίας, πολλά από τα επιμέρους ευρήματα μπορούν να εφαρμοστούν σε οριακές περιπτώσεις του προβλήματος διάδοσης. Για παράδειγμα, εάν το τιθέμενο πρόβλημα ήταν σκέδαση από τέλειο κυκλικό κυλινδρικό απείρου μήκους αγωγό (*perfect electric conductor, PEC*) ίδιας ακριβώς γεωμετρίας με τις Εικόνες 1.1 & 1.4 (*Πρόβλημα Dirichlet/Laplace*), τότε ο πίνακας A είναι απλά το τμήμα $L^{o,i}$ και ο κ_L λέει πως με την αύξηση του N, αναπόφευκτα πρέπει να λυθεί ένα ασθενές / ευαίσθητο σε σφάλματα γραμμικό σύστημα.

Σχόλιο : Οι πίνακες δεν εμφανίζονται ως $L^{o,i}$ αυτούσιοι, αλλά λόγω της απόλυτης ομογένειας της νόρμας $\|\cdot\|_p$, τα παραπάνω/παρακάτω αποτελέσματα είναι ορθά την προσθήκη των σταθερών.

Απομένει να μελετηθεί το τμήμα $Q^{i,o}$ του πίνακα, ξανά βάσει των εξισώσεων (1.50) – (1.53) & (1.60). Όπως και πριν από τις εξισώσεις (1.50) – (1.51), (1.52) – (1.53) και την ιδιότητα συμμετρίας της παραγράφου (1.4.1.β), το ελάχιστο του $|Q^i|$ συμβαίνει για $k = \frac{N}{2}$. Όσον αφορά το $|Q^o|$, το ελάχιστο βρίσκεται από τους όρους $|Q_{k=0}^o|, |Q_{k=\frac{N}{2}}^o|$, οι οποίοι είναι ανάλογοι του x^N & $x^{\frac{N}{2}}$. Έπεται πως το ελάχιστο του $|Q^o|$ συμβαίνει για $k = 0$. Οι μέγιστες τιμές που ζητά η εξίσωση (1.59) βρίσκονται εύκολα με απλή επιθεώρηση των εξισώσεων (1.50) – (1.51) λαμβάνοντας υπόψιν τη μονοτονία των Q. Έτσι βρίσκεται πως $\arg\max(|Q^i|) = 0, \arg\max(|Q^o|) = 1$. Όπως και πριν, επιλέγονται οι ασυμπτωτικές εκφράσεις των ακροτάτων και οι αριθμοί κατάστασης γράφονται ως εξής, χρησιμοποιώντας τις (1.52) – (1.53):

$$\kappa_{Q^i} \sim \frac{\frac{1}{\rho_{cyl}}}{\frac{1}{\rho_{cyl}} x_i^{\frac{N}{2}}} = x_i^{-\frac{N}{2}}, \quad \kappa_{Q^o} \sim \frac{\frac{1}{\rho_{cyl}} x_o}{\frac{1}{\rho_{auxo}} x_o^N} = x_o^{-N}$$

Οι αριθμοί κατάστασης των τμημάτων όλων του A εκρήγνυνται εκθετικά με το N. Η ανάλυση των τμημάτων πινάκων του A έγινε υπό την υπόθεση πως η συμπεριφορά αυτών είναι αρκετή έτσι ώστε να καθοριστεί η συνολική συμπεριφορά του A. Το γεγονός πως όλοι οι πίνακες ασυμπτωτικά είναι ασθενούς κατάστασης, θέτει βάσιμες υποψίες πως αντίστοιχη ιδιότητα θα φέρει και ο A. Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί και αριθμητικά και ποιοτικά.

Την επιβεβαίωση της αρχικής υπόθεσης, πως η συμπεριφορά του πίνακα A καθορίζεται πλήρως από τη συμπεριφορά των blocks, δίνει το Θεώρημα 1 που προτείνεται στο [8]. Εκτός από την εκπληκτική υπολογιστική αξία του (που είναι και η μεγαλύτερη συμβολή στους υπολογιστικούς τομείς), το Θεώρημα 1 δίνει αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα (εκτίμηση) για τον ασυμπτωτικό αριθμό κατάστασης του A. Έστω λοιπόν το πρόβλημα ιδιοτιμών, που σχετίζεται με την παραγοντοποίηση SVD :

$$A^T A v_i = \sigma_i^2 v_i$$

Ο πίνακας $A^T A \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ και γράφεται ως (για το εξωτερικό πρόβλημα διάδοσης) :

$$A^T A = \begin{bmatrix} c_o L^o & Q^o \\ -L^i & -Q^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_o L^o & -L^i \\ Q^o & -Q^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_o^2 (L^o)^2 + (Q^o)^2 & -c_o L^o L^i - Q^o Q^i \\ -c_o L^o L^i - Q^o Q^i & (L^i)^2 + (Q^i)^2 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα **1.4.1.δ** κάθε στοιχείο του $A^T A$ είναι επίσης κυκλικός πίνακας, επομένως και ο $A^T A$ είναι τμηματικά κυκλικός. Βάσει του θεωρήματος 1 του [8], οι ιδιοτιμές του $A^T A$ μπορούν να βρεθούν από τις ιδιοτιμές N το πλήθος 2×2 πινάκων, των οποίων τα στοιχεία είναι η k -οστή ($k \in \{0, \dots, N-1\}$) τιμή των πρώτων γραμμών των DFT των block πινάκων του $A^T A$. Όλες οι αναγκαίες ποσότητες είναι γνωστές από τις εξισώσεις **(1.49) – (1.51)**, καθώς τα τετράγωνα/γινόμενα πινάκων είναι κυκλικά με μετατιθέμενο διάνυσμα τη συνέλιξη των πρώτων γραμμών με των επιμέρους παραγόντων.

Επομένως για $0 \leq k \leq N-1$ οι ιδιάζουσες τιμές του A είναι $\sigma_k^2 = \lambda_k$, όπου λ_k :

$$\det(S_k - \lambda_k I_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} c_o^2 (L_k^o)^2 + (Q_k^o)^2 - \lambda_k & -c_o L_k^o L_k^i - Q_k^o Q_k^i \\ -c_o L_k^o L_k^i - Q_k^o Q_k^i & (L_k^i)^2 + (Q_k^i)^2 - \lambda_k \end{vmatrix} = 0$$

Τα έντονα σημειωμένα μεγέθη αποτελούν την k -οστή τιμή των ποσοτήτων των εξισώσεων **(1.49) – (1.51)**. Για τα στοιχεία s_{ij} των παραπάνω πινάκων, θεωρείται πως $x^{N-k} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty, \forall k$. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί στη μορφή :

$$\lambda_k^2 - (s_{11,k} + s_{22,k})\lambda_k + s_{11,k}s_{22,k} - s_{12,k}^2 = 0$$

$$\text{ή } \lambda_k^2 - \alpha_k \lambda_k + \beta_k = 0 \quad (1.61)$$

Όπου $\alpha_k = s_{11} + s_{22} > 0$ και $\beta_k = (c_o L_k^o Q_k^i - L_k^i Q_k^o)^2 \geq 0, \forall k \in \{0, \dots, N-1\}$.

Η εξίσωση ιδιοτιμών για $k = 0$ διαμορφώνεται ως εξής :

$$\lambda_0^2 - (c_o^2 \ln^2 \rho_{auxo} + \ln^2 \rho_{cyl} + \frac{1}{\rho_{cyl}})\lambda_0 + c_o^2 \ln^2 \rho_{cyl} + \frac{1}{\rho_{cyl}^2} = 0 \quad (1.62)$$

Τα στοιχεία α, β για $1 \leq k \leq N/2$ και τα συμμετρικά k ως προς $N/2$, δίνονται από :

$$\alpha_k = \frac{x_o^{2k}}{4} \left(c_o^2 \frac{1}{k^2} + \frac{1}{\rho_{cyl}^2} \right) + \frac{x_i^{2k}}{4} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{\rho_{cyl}^2} \right)$$

$$\beta_k = \frac{1}{4} (x_o x_i)^{2k} \left(\frac{c_o}{k} + \frac{1}{\rho_{cyl}} \right)^2$$

Οι τύποι του Vieta προβλέπουν :

$$\lambda_k^+ \lambda_k^- = \beta_k > 0 \text{ \& } \lambda_k^+ + \lambda_k^- = \alpha_k > 0$$

Επομένως όλες οι ρίζες, όλων των εξισώσεων, είναι θετικές. Το γινόμενο των ριζών φθίνει με ρυθμό $(x_o x_i)^{2k} = \left(\frac{\rho_{auxi}}{\rho_{auxo}}\right)^{2k}$ και το άθροισμα φθίνει με το ρυθμού του γραμμικού συνδυασμού των x_i^{2k}, x_o^{2k} . Μια εύλογη υπόθεση βάσει αυτών των δεδομένων είναι πως οι ρίζες φθίνουν με ρυθμό ανάλογο του $\min\{x_o^{2k}, x_i^{2k}\}$. Όμως, το ενδιαφέρον βρίσκεται στη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή των $\lambda_k^\pm$. Η μορφή **(1.61)** αρκεί για να δώσει μια εκτίμηση για τη συμπεριφορά των ριζών ως k και να αποδείξει πως είναι όλες θετικές. Τα πρώτα συμπεράσματα επιβεβαιώνουν την υπόθεση. Προφανώς η συμπεριφορά $\lambda_k^\pm \sim \min\{x_o^{2k}, x_i^{2k}\}$ δείχνει πως οι ιδιάζουσες τιμές τείνουν πολύ γρήγορα στο 0 καθώς το k πλησιάζει το $N/2$, επομένως και η $\sigma_{min} = \min\{\sigma_k, k \in \{0, \dots, 2N-1\} : \sigma_k = \sqrt{\lambda_k}\}$ συμπεριφέρεται αναλόγως. Η μέγιστη ιδιάζουσα τιμή σ_{max} δίνεται από τον $S_{k=0}$, και δεν εξαρτάται από το N .

Τα τελευταία δείχνουν πως ως προς N , ο πίνακας A είναι οπωσδήποτε ασθενής, καθώς:

$$\kappa_A = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = \frac{\max\{\sqrt{\text{eig}(S_{k=0})}\}}{\min\{\sqrt{\text{eig}(S_{k=N/2})}\}} \sim \frac{1}{\min\{x_o^{N/2}, x_i^{N/2}\}} \quad (1.63)$$

Τονίζεται πως το τελευταίο αποτέλεσμα αποτελεί εκτίμηση και όχι αναλυτικό υπολογισμό του αριθμού κατάστασης, κάτι το οποίο είναι μεν εφικτό, ανώφελο δε, λόγω της περίπλοκης μορφή των ριζών. Παράλληλα, εκείνο που ενδιαφέρει είναι η ασυμπτωτική συμπεριφορά και όχι η ακριβής τιμή του κ . Η εξίσωση **(1.63)** παρέχει επίσης την πληροφορία, πως μια κακώς σχεδιασμένη/επιλεχθείσα βοηθητική επιφάνεια τοποθέτησης των διακριτών πηγών, ακόμα και με σταθερό N (πλήθος πηγών) είναι ικανή να μολύνει τη λύση του συστήματος με αριθμητικά σφάλματα. Στην παρούσα διάταξη υπάρχει η πολυτέλεια του να είναι γνωστό πως αυτό μπορεί να συμβεί. Σε αυθαίρετες διατάξεις όμως, το παράδειγμα αυτό επιστά την προσοχή στον σχεδιαστή ο οποίος στη γενική περίπτωση δε θα γνωρίζει αν η λύση που παρέχει η MAS είναι ορθή ή μολυσμένη από αριθμητικά σφάλματα, σε πλήρη αντίθεση με το κυκλικό πρόβλημα όπου είναι εφικτή η σύγκριση με την αναλυτική λύση. Όπως φαίνεται, η εξέταση του αριθμού κατάστασης είναι απαραίτητη διαδικασία κατά τη χρήση μεθόδων όπως η MAS (ή άλλων που χρησιμοποιούν γραμμικά συστήματα), αλλά χρειάζεται εμπειρία για να αποφανθεί κανείς αν ένας αριθμός κατάστασης της τάξεως του $1e15$ είναι ικανός να προκαλέσει διάδοση σφαλμάτων ή όχι.

Τέλος, ο ισχυρισμός **(1.63)** υποστηρίζεται από την εξέταση της εξίσωσης **(1.61)** στη διαφορετική μορφή :

$$(\lambda_k - s_{11,k})(\lambda_k - s_{22,k}) = s_{12,k}^2 \quad (1.64)$$

Από τη γεωμετρία της παραβολής και λαμβάνοντας υπόψιν το αποδεδειγμένο γεγονός πως οι ρίζες είναι θετικές, πρέπει να ισχύει :

$$0 < \min\{\lambda_k^\pm\} < \min\{s_{11,k}, s_{22,k}\} \text{ \& } \max\{\lambda_k^\pm\} > \max\{s_{11,k}, s_{22,k}\}$$

Επομένως για να ληφθεί ένα φράγμα για τον αριθμό k , αναζητούμε τις ελάχιστες/μέγιστες τιμές των s_{11}, s_{22} για όλες τις τιμές του k , που όπως είναι πλέον γνωστό βρίσκονται για $k = N/2$ & $k = 0$. Επομένως ισχύουν οι δύο ανισοτικές σχέσεις :

$$0 < \min\{\lambda_k^\pm\} < \min\left\{\frac{x_0^{2k}}{4}\left(c_0^2\frac{1}{k^2} + \frac{1}{\rho_{cyl}^2}\right), \frac{x_i^{2k}}{4}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{\rho_{cyl}^2}\right)\right\}$$

$$0 < \max\{c_0^2 \ln^2 \rho_{auxo}, \ln^2 \rho_{cyl} + \frac{1}{\rho_{cyl}^2}\} < \max\{\lambda_k^\pm\}$$

Συνδυάζοντας τις 2 παραπάνω σχέσεις :

$$\kappa_A^2 > \frac{\max\{c_0^2 \ln^2 \rho_{auxo}, \ln^2 \rho_{cyl} + \frac{1}{\rho_{cyl}^2}\}}{\min\left\{\frac{x_0^N}{4}\left(c_0^2\frac{1}{(N/2)^2} + \frac{1}{\rho_{cyl}^2}\right), \frac{x_i^N}{4}\left(\frac{1}{(N/2)^2} + \frac{1}{\rho_{cyl}^2}\right)\right\}} \quad (1.65)$$

Η εξίσωση (1.63) ουσιαστικά μια απλοποίηση της (1.65), αλλά και οι δύο εξισώσεις παρέχουν την ίδια πληροφορία. Ο ρόλος της (1.65) είναι ουσιαστικά να υποστηρίξει τα λεγόμενα της (1.63) (που είναι πιο χονδροειδής).

Σχόλιο: Αν οι 2 τελευταίες ανισότητες δεν δήλωναν το θετικό των εμπλεκόμενων μεγεθών, δε θα ήταν εφικτό να επιβληθεί η (1.65), καθώς $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$. Επομένως η ανάλυση μέσω των εξισώσεων (1.61) - (1.62) είναι απαραίτητη.

1.6 Συνεχής έκδοση της μεθόδου βοηθητικών πηγών (Continuous MAS, CMAS)

1.6a Προσδιορισμός Βοηθητικών επιφανειακών ρευματικών κατανομών $K^{1,0}(\varphi)$

Για να τονιστεί πως η MAS μπορεί να ειπωθεί ως μια διακριτοποίηση ολοκληρωτικών εξισώσεων όπως δείχνει η εργασία [5], αλλά και να υποστηριχτεί περαιτέρω ο ισχυρισμός περί σύγκλισης και απόκλισης των ρευμάτων, στην παρούσα παράγραφο διατυπώνεται η λεγόμενη «συνεχής έκδοση» της MAS. Έχει προβλεφθεί (βλ. σελ 30) πως τα ρεύματα MAS πρέπει να συγκλίνουν σε κάποια συνεχή επιφανειακή κατανομή ρεύματος, η οποία ρέει στην κατά μήκος άπειρη κυκλική κυλινδρική βοηθητική επιφάνεια. Έστω λοιπόν πως στο εξωτερικό πρόβλημα, πως αντί για τη συστοιχία N διακριτών πηγών, υποτίθενται οι κατανομές/πυκνότητες (κανονικοποιημένες ως προς I) $\vec{K}^1 = \hat{z} K^1(\varphi), \rho = \rho_{auxi}$ & $\vec{K}^0 = \hat{z} K^0(\varphi), \rho = \rho_{auxo}$ οι οποίες ρέουν σε καθεμία από τις βοηθητικές επιφάνειες.

Αν η επιφανειακή πυκνότητα θεωρηθεί επαλληλία νηματοειδών ρευμάτων $K^1(\varphi)\rho_{auxi}d\varphi$ και $K^0(\varphi)\rho_{auxo}d\varphi$, τότε το συνολικό διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο $P : (\rho, \varphi)$ της κάθε περιοχής υλικών 1 & 2 μ_1, μ_2 δίνεται από τα ολοκληρώματα επαλληλίας:

$$\vec{A}_1 = \hat{z} \left(-\frac{\mu_1 I}{2\pi}\right) \left[\rho_{auxo} \int_0^{2\pi} K^0(\varphi') \ln \sqrt{\rho^2 + \rho_{auxo}^2 - 2\rho\rho_{auxo}\cos(\varphi - \varphi')} d\varphi' \right], \rho < \rho_{cyl}$$

(1.66)

$$\vec{A}_2 = \hat{z} \left(-\frac{\mu_2 I}{2\pi} \right) \left[\rho_{auxi} \int_0^{2\pi} K^i(\varphi') \ln \sqrt{\rho^2 + \rho_{auxi}^2 - 2\rho\rho_{auxi} \cos(\varphi - \varphi')} d\varphi' + \ln \rho_{fp} \right], \rho < \rho_{cyl}$$

(1.67)

Απαιτείται από τα παραπάνω δυναμικά να ικανοποιήσουν τις συνοριακές συνθήκες **(BC1) & (BC2)**. Ορίζεται, οι «πυρήνες» :

$$L^o(\varphi - \varphi'; \rho) = \ln \sqrt{\rho^2 + \rho_{auxo}^2 - 2\rho\rho_{auxo} \cos(\varphi - \varphi')}$$

$$L^i(\varphi - \varphi'; \rho) = \ln \sqrt{\rho^2 + \rho_{auxo}^2 - 2\rho\rho_{auxo} \cos(\varphi - \varphi')}$$

$$L^f(\varphi; \rho) = \ln \rho_{fp} = \ln \sqrt{\rho^2 + \rho_{fil}^2 - 2\rho\rho_{fil} \cos \varphi}$$

$$Q^o(\varphi - \varphi'; \rho) = \frac{\rho - \rho_{auxo} \cos(\varphi - \varphi')}{\rho^2 + \rho_{auxo}^2 - 2\rho\rho_{auxo} \cos(\varphi - \varphi')}$$

$$Q^i(\varphi - \varphi'; \rho) = \frac{\rho - \rho_{auxi} \cos(\varphi - \varphi')}{\rho^2 + \rho_{auxi}^2 - 2\rho\rho_{auxi} \cos(\varphi - \varphi')}$$

$$Q^o(\varphi; \rho) = \frac{\rho - \rho_{fil} \cos(\varphi)}{\rho^2 + \rho_{fil}^2 - 2\rho\rho_{fil} \cos(\varphi)}$$

Βάσει των τελευταίων εξισώσεων και των γνωστών μεγεθών του Κεφ. 1, από τις συνοριακές συνθήκες για το $\vec{A}$ γράφεται το σύστημα των εξισώσεων, με $\rho = \rho_{cyl}$, υποθέτοντας πως ισχύει $\frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^{2\pi} K^{i,o}(\varphi') L^{i,o}(\varphi, \varphi'; \rho) d\varphi' = \int_0^{2\pi} K^{i,o}(\varphi') \frac{\partial L^{i,o}}{\partial \rho} d\varphi' = \int_0^{2\pi} K^{i,o}(\varphi') Q^{i,o} d\varphi'$:

$$c_o \rho_{auxo} \int_0^{2\pi} K^o(\varphi') L^o(\varphi - \varphi') d\varphi' - \rho_{auxi} \int_0^{2\pi} K^i(\varphi') L^i(\varphi - \varphi') d\varphi' = L^f(\varphi) \quad (1.68)$$

$$\rho_{auxo} \int_0^{2\pi} K^o(\varphi') Q^o(\varphi - \varphi') d\varphi' - \rho_{auxi} \int_0^{2\pi} K^i(\varphi') Q^i(\varphi - \varphi') d\varphi' = Q^f(\varphi) \quad (1.69)$$

Οι συναρτήσεις Q & L που εμφανίζονται στα συνελκτικά ολοκληρώματα είναι λεγόμενοι «πυρήνες διαφοράς» (*difference kernels*) και έχουν περίοδο 2π και είναι ομαλοί σε όλο το διάστημα $(-2\pi, 2\pi)$. Η μορφή των ολοκληρωτικών εξισώσεων παραπέμπει στις γνωστές ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm 1^{ου} είδους με αγνώστους τις ποσότητες $K^i(\varphi)$ & $K^o(\varphi)$, όπως ακριβώς βρίσκεται και στην εργασία [5], με τη μόνη διαφορά όμως πως εδώ, οι εξισώσεις αυτές είναι σε μορφή συστήματος. Οι ρευματικές κατανομές παρόλο που είναι πλασματικές, οφείλουν να είναι να είναι και αυτές περιοδικές με περίοδο 2π , λόγω της γεωμετρίας του κύκλου. Συνεπώς, όλες οι ποσότητες στις (1.68) & (1.69) δέχονται ανάπτυγμα Fourier, επομένως αμφότερες οι εξισώσεις πολλαπλασιάζονται με $e^{in\varphi}$, $n \geq 0$ και το αποτέλεσμα ολοκληρώνεται πάνω στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Οι συντελεστές Fourier όλων των μεγεθών σημειώνονται με K_n^i, L_n^i, Q_n^i & K_n^o, L_n^o, Q_n^o & L_n^f, Q_n^f (προφανής αντιστοιχία) :

$\rho_{fil} > \rho_{cyl}$:

$$c_o \rho_{auxo} L_n^o K_n^o = \rho_{auxi} L_n^i K_n^i + \frac{1}{\pi} L_n^f \quad , n \geq 0 \quad (1.70)$$

$$\rho_{auxo} Q_n^o K_n^o = \rho_{auxi} Q_n^i K_n^i + \frac{1}{\pi} Q_n^f \quad , n \geq 0 \quad (1.71)$$

Για την εξαγωγή των παραπάνω εξισώσεων θεωρηθήκαν αναπτύγματα της μορφής :

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\varphi$$

Οι εξισώσεις για όλα τα αναπτύγματα Fourier είναι γνωστά (βλ. παράρτημα) και περιέχουν μόνο συνημιτονοειδείς όρους. Προφανώς, από την προηγούμενη διαδικασία έπεται πως και τα άγνωστα μεγέθη έχουν αποκλειστικά συνημιτονικό ανάπτυγμα. Πιο συγκεκριμένα με x_i, x_o, x_f από την εξίσωση (1.52) :

$$L_n^i = \begin{cases} \ln \rho_{cyl} & , n = 0 \\ -\frac{x_i^n}{n} & , n \geq 1 \end{cases} \quad , \quad Q_n^i = \frac{1}{\rho_{cyl}} x_i^n, n \geq 0$$

$$L_n^o = \begin{cases} \ln \rho_{auxo} & , n = 0 \\ -\frac{x_o^n}{n} & , n \geq 1 \end{cases} \quad , \quad Q_n^o = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ \frac{1}{\rho_{cyl}} x_o^n & , n \geq 1 \end{cases}$$

$$L_n^f = \begin{cases} \ln \rho_{fil} & , n = 0 \\ -\frac{x_f^n}{n} & , n \geq 1 \end{cases} \quad , \quad Q_n^f = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ \frac{1}{\rho_{cyl}} x_f^n & , n \geq 1 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος (1.70) & (1.71) είναι :

$$K_n^i = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{\pi \rho_{auxi}} \frac{c_o - 1}{c_o + 1} \left(\frac{\rho_{cri}}{\rho_{auxi}} \right)^n & n \geq 1 \end{cases} \quad (1.72)$$

$$K_n^o = \begin{cases} \frac{1}{\pi c_o \rho_{auxo}} \frac{\ln \rho_{fil}}{\ln \rho_{auxo}} & n = 0 \\ \frac{1}{\pi \rho_{auxo}} \frac{2}{c_o + 1} \left(\frac{\rho_{auxo}}{\rho_{fil}} \right)^n & n \geq 1 \end{cases} \quad (1.73)$$

Με επιστροφή στην υποπαράγραφο 1.4.3γ, τονίζεται η συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων διακριτούς & συνεχούς εκδοχής της MAS. Οι τιμές $I_{k=0}^{i,o}$ & $K_{n=0}^{i,o}$ είναι ίσες. Σημειώνεται πως τα $I_{k=0}^{i,o} = \sum_{l=0}^{N-1} I_l^{i,o}$, και με κατάλληλη κανονικοποίηση προσεγγίζουν το $I_{total} = \rho_{auxi,o} \int_0^{2\pi} K^{i,o}(\varphi) d\varphi = 2\pi \rho_{auxi,o} K_{n=0}^{i,o}$, όπως ακριβώς είναι αναμενόμενο.

Υπολογίζεται τώρα η αναλυτική μορφή της πυκνότητας ρεύματος $K^i(\varphi)$, μέσω του αναπτύγματος (β):

$$K^i(\varphi) = 0 + \frac{\rho_{cri}}{\pi \rho_{auxi}} \frac{c_o - 1}{c_o + 1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho_{cri}}{\rho_{auxi}} \right)^n \cos n\varphi, \quad \rho_{auxi} > \rho_{cri}$$

Παρατηρείται αμέσως πως αν η εσωτερική βοηθητική επιφάνεια τοποθετηθεί στην περιοχή στην οποία τα αντίστοιχα ρεύματα MAS I_l^i αποκλίνουν, τότε η ολοκληρωτική εξίσωση δεν έχει λύση καθώς η παραπάνω σειρά αποκλίνει. Στη αντίθετη περίπτωση $\rho_{auxi} < \rho_{cri} = \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}}$, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα (β) υπολογίζεται:

$$K^i(\varphi) = -\frac{\rho_{cri}}{\pi \rho_{auxi}} \frac{c_o - 1}{c_o + 1} \frac{\rho_{cri} - \rho_{auxi} \cos \varphi}{\rho_{cri}^2 + \rho_{auxi}^2 - 2\rho_{cri}\rho_{auxi} \cos \varphi} \quad (1.74)$$

Η επιφανειακή πυκνότητα της «συνεχούς MAS» συγκρίνεται με την κατανομή στην οποία πρέπει να συγκλίνουν τα διακριτά ασυμπτωτικά ρεύματα MAS, από τη γενική μορφή τους στην τελευταία εξίσωση της παραγράφου 1.4.4α (βλ. σελ 29). Επαναλαμβάνεται η εν λόγω εξίσωση, για ευκολία :

$$Nx_l = X_{k=0} + (-1)^l a^{\frac{N}{2}} + 2 \left[\frac{1 - a \cos \frac{2\pi l}{N}}{1 + a^2 - 2a \cos \frac{2\pi l}{N}} (1 + (-1)^{l+1} a^{\frac{N}{2}}) - 1 \right] \quad (1.75)$$

Το μέγεθος Nx_l αναπαριστά το NI^l . Η $X_{k=0}$ ερμηνεύεται ως η τιμή $I_{k=0}^i$ η οποία όπως έχει ειπωθεί, λόγω του νόμου Ampère -Maxwell είναι μηδενική. Για να ληφθεί η επιφανειακή πυκνότητα (κανονικοποιημένη ως προς I) που συνθέτουν οι διακριτές πηγές στο όριο του συνεχούς, αρκεί να διαιρεθούν τα ρεύματα με το μήκος του κυκλικού τόξου που «καταλαμβάνουν», δηλαδή :

$$K_{MAS}^{i,o}(\varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I_1^{i,o}}{\rho_{auxi,o} \frac{2\pi}{N}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{NI_1^{i,o}}{2\pi\rho_{auxi,o}} \quad \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi l}{N} = \varphi \right) \quad (1.76\alpha)$$

Το όριο του αριθμητή, στις περιπτώσεις σύγκλισης, δηλαδή $a < 1$, δίνεται αμέσως από την εξίσωση (1.75) και προκύπτει ίσο με :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Nx_1 = X_{k=0} - 2a \frac{a - \cos\varphi}{1 + a^2 - 2a\cos\varphi} \quad (1.76\beta)$$

Τονίζεται πως η τιμή για $k = 0$ οποιουδήποτε μεγέθους που σχετίζεται με το $AI_{MAS} = \mathbf{b}$ δίνεται από ξεχωριστή μορφή και γενικά δεν πολλαπλασιάζεται με κανένα από τα «πλάτη» $\frac{c-1}{c+1}, \frac{2}{c+1}$. Το ίδιο ισχύει και για τα $X_{k=0}$. Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, για :

$$a = \frac{\rho_{auxi}}{\rho_{cri}}$$

$$K_{MAS}^i(\varphi) \rightarrow -\frac{1}{\pi\rho_{auxi}} \frac{c_0 - 1}{c_0 + 1} a \left[\frac{\cos\varphi - a}{1 + a^2 - 2a\cos\varphi} \right] = K^i(\varphi)$$

όπου $K^i(\varphi)$ η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος της εξίσωσης (1.74).

Η ισότητα αυτή, δεν είναι καθόλου τυχαία και σχολιάζεται αφού αποδειχθεί για αμφότερα τα προβλήματα διάδοσης και για τις δύο βοηθητικές επιφανειακές πυκνότητες. Χρησιμοποιείται η εξίσωση (1.73) και ξανά το ανάπτυγμα (β) για να υπολογιστεί η εξωτερική βοηθητική κατανομή :

$$K^o(\varphi) = \frac{\ln\rho_{fil}}{2\pi c_0 \rho_{auxo}} - \frac{1}{\pi} \frac{2}{1 + c_0} \frac{\rho_{auxo} - \rho_{fil}\cos\varphi}{\rho_{auxo}^2 + \rho_{fil}^2 - 2\rho_{auxo}\rho_{fil}\cos\varphi} \quad (1.78)$$

Για την εύρεση της κατανομής MAS, χρησιμοποιείται ως $X_{k=0}^o = \frac{\ln\rho_{fil}}{c_0 \ln\rho_{auxo}}$ (βλ. σελ. 24). Στην (1.76β), τίθεται $a = \frac{\rho_{auxo}}{\rho_{fil}} < 1$ και με αντικατάσταση στην (1.76α), λαμβάνοντας παράλληλα υπόψιν το πλάτος $\frac{2}{1+c_0}$ της (1.54), προκύπτει η ασυμπτωτική επιφανειακή κατανομή MAS από τα διακριτά ρεύματα :

$$K_{MAS}^o(\varphi) \rightarrow \frac{\ln\rho_{fil}}{2\pi c_0 \rho_{auxo}} - \frac{1}{\pi\rho_{auxo}} \frac{2}{1 + c_0} a \frac{a - \cos\varphi}{1 + a^2 - 2a\cos\varphi} = K^o(\varphi), a = \frac{\rho_{auxo}}{\rho_{fil}} \quad (1.79)$$

Επομένως, όσον αφορά το εξωτερικό πρόβλημα η διακριτή MAS συμφωνεί πλήρως με το συνεχές πρόβλημα, καθώς $N \rightarrow \infty$. Στη συνέχεια, θεωρείται το εσωτερικό πρόβλημα διάδοσης το οποίο δεν εμφανίζει ιδιαίτερες διαφορές από το εξωτερικό. Οι εξισώσεις (1.66) & (1.67) τροποποιούνται στις

$\rho_{fil} < \rho_{cyl}$:

$$\vec{A}_1 = \hat{\mathbf{z}} \left(-\frac{\mu_1 I}{2\pi} \right) \left[L^f(\varphi, \rho) + \rho_{auxo} \int_0^{2\pi} K^o(\varphi') L^o(\varphi - \varphi') d\varphi' \right], \quad \rho < \rho_{cyl} \quad (1.80)$$

$$\vec{A}_2 = \hat{\mathbf{z}} \left(-\frac{\mu_2 I}{2\pi} \right) \rho_{auxi} \int_0^{2\pi} K^i(\varphi') L^i(\varphi - \varphi') d\varphi', \quad \rho \geq \rho_{cyl} \quad (1.81)$$

Το διανυσματικό δυναμικό οδηγεί στις αντίστοιχες ολοκληρωτικές εξισώσεις μέσω των συνοριακών συνθηκών:

$$c_o \rho_{auxo} \int_0^{2\pi} K^o(\varphi') L^o(\varphi - \varphi') d\varphi' - \rho_{auxi} \int_0^{2\pi} K^i(\varphi') L^i(\varphi - \varphi') d\varphi = L^f(\varphi) \quad (1.82)$$

$$\rho_{auxo} \int_0^{2\pi} K^o(\varphi') Q^o(\varphi - \varphi') d\varphi' - \rho_{auxi} \int_0^{2\pi} K^i(\varphi') Q^i(\varphi - \varphi') d\varphi = Q^f(\varphi) \quad (1.83)$$

Κατά συνέπεια, με τον ίδιο τρόπο λαμβάνεται το αντίστοιχο σύστημα για τους συντελεστές Fourier K_n^i, K_n^o των άγνωστων πυκνοτήτων $K^i(\varphi), K^o(\varphi)$:

$$\frac{1}{\pi} L_n^f + \rho_o L_n^o K_n^o = c_i \rho_i L_n^i K_n^i, n \geq 0 \quad (1.84)$$

$$\frac{1}{\pi} Q_n^f + \rho_o Q_n^o K_n^o = \rho_i Q_n^i K_n^i, n \geq 0 \quad (1.85)$$

Στις (1.84) & (1.85), εμπλέκονται :

$$L_n^i = \begin{cases} \ln \rho_{cyl} & , n = 0 \\ -\frac{x_i^n}{n} & , n \geq 1 \end{cases}, Q_n^i = \frac{1}{\rho_{cyl}} x_i^n, n \geq 0$$

$$L_n^o = \begin{cases} \ln \rho_{auxo} & , n = 0 \\ -\frac{x_o^n}{n} & , n \geq 1 \end{cases}, Q_n^o = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ \frac{1}{\rho_{cyl}} x_o^n & , n \geq 1 \end{cases}$$

$$L_n^f = \begin{cases} \ln \rho_{cyl} & , n = 0 \\ -\frac{x_f^n}{n} & , n \geq 1 \end{cases}, Q_n^f = \frac{1}{\rho_{cyl}} x_f^n, n \geq 0$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι :

$$K_n^i = \begin{cases} \frac{1}{\pi \rho_{auxi}} & n = 0 \\ \frac{1}{\pi \rho_{auxi}} \frac{2}{c_i + 1} \left(\frac{\rho_{fil}}{\rho_{auxi}} \right)^n & , n \geq 1 \end{cases} \quad (1.86)$$

$$K_n^0 = \begin{cases} \frac{c_i - 1}{\pi \rho_{auxo}} \frac{\ln \rho_{fil}}{\ln \rho_{auxo}} & n = 0 \\ \frac{1}{\pi \rho_{auxo}} \frac{c_i - 1}{c_i + 1} \left(\frac{\rho_{auxo}}{\rho_{cri}} \right)^n, & n \geq 1 \end{cases} \quad (1.87)$$

Οι (1.86) & (1.87) συγκλίνουν μόνο όταν $\rho_{auxi} > \rho_{fil}$ & $\rho_{auxo} < \rho_{cri} = \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}}$ όπως ακριβώς προβλέπουν και στη διακριτή εκδοχή, οι εξισώσεις (1.56) & (1.57).

Παράλληλα οι συντελεστές για $n = 0$ έχουν την ορθή μορφή, αν ληφθεί υπόψιν ο όρος $\frac{1}{2\pi\rho_{auxi,o}}$ (βλ. σελ. 24) που εισάγεται μέσω του ορίου (1.76α).

Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή για $\rho_{auxi} < \rho_{fil}$ ή $\rho_{auxo} > \rho_{cri} = \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}}$ οι αντίστοιχες σειρές Fourier $K_n^{i,o}(\varphi) = \frac{K_{n=0}^{i,o}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{i,o} \cos n\varphi$ αποκλίνουν και το σύστημα δεν έχει λύση. Το ίδιο συμβαίνει και στο εξωτερικό πρόβλημα.

Στην περίπτωση που το σύστημα δέχεται λύση, οι ακριβείς εκφράσεις για τις ρευματικές κατανομές, είναι :

$$K^o(\varphi) = \frac{\ln \rho_{cyl}}{2\pi \rho_{auxo} \ln \rho_{auxo}} (c_i - 1) - \frac{c_i - 1}{c_i + 1} \frac{\rho_{auxo} - \rho_{cri} \cos \varphi}{\rho_{auxo}^2 + \rho_{cri}^2 - 2\rho_{auxo}\rho_{cri} \cos \varphi} \quad (1.88)$$

$$K^i(\varphi) = \frac{1}{2\pi \rho_i} - \frac{1}{\pi \rho_i} \rho_{fil} \frac{2}{1 + c_i} \frac{\rho_{fil} - \rho_{auxi} \cos \varphi}{\rho_{fil}^2 + \rho_{auxi}^2 - 2\rho_{fil}\rho_{auxi} \cos \varphi} \quad (1.89)$$

Η σύγκλιση των διακριτών εκφράσεων στις συνεχείς, δείχνεται αντικαθιστώντας τις (1.56), (1.57) στις (1.75) & (1.76), λαμβάνοντας παράλληλα υπόψιν τις λεπτομέρειες που αφορούν τα πλάτη $\frac{c_i-1}{c_i+1}, \frac{2}{1+c_i}$ και τις τιμές $I_{k=0}^{i,o}$, όπως αναλύθηκε και στην υποπαράγραφο για το εξωτερικό πρόβλημα. Συνοψίζοντας, και για το εσωτερικό πρόβλημα ισχύει :

$$K_{MAS}^i(\varphi) \rightarrow K^i(\varphi), \quad K_{MAS}^o(\varphi) \rightarrow K^o(\varphi), \quad N \rightarrow \infty$$

όπου $K_{MAS}^i(\varphi), K_{MAS}^o(\varphi)$ λαμβάνονται τελικά από την (1.76α).

1.6β Μη επιλύσιμο της ολοκληρωτικής εξίσωσης CMAS και Μέθοδος Ροπών

Όπως έγινε φανερό στην παράγραφο 1.7α, η διακριτή & συνεχής MAS είναι στενά συνδεδεμένες. Το «πέραςμα» από τη συνεχή έκδοση στη διακριτή, μπορεί να γίνει και με μια από τις κλασσικές υπολογιστικές μεθόδους, της οποίας οι εφαρμογές είναι πέραν του ηλεκτρομαγνητισμού, η οποία ονομάζεται Μέθοδος των Ροπών (*Method of Moments, MoM*) [1]. Επίσης, το γεγονός πως τα άγνωστα μεγέθη ικανοποιούν ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm, επιτρέπει τη σύνδεση του παρόντος προβλήματος με άλλα προβλήματα στο πεδίο του Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού, όπως εκείνα που συζητιούνται στις εργασίες [22] [23][24].

Έστω λοιπόν, η εξίσωση (για παράδειγμα) (1.69) στην οποία εφαρμόζεται η μέθοδος των ροπών. Βάσει αυτής της μεθόδου, όπως και στη MAS, η εύρεση της λύσης του εκάστοτε προβλήματος γίνεται

μέσω ενός γραμμικού συστήματος. Θεωρείται το σύνολο συναρτήσεων βάσης (*basis functions*) $\{u_n(\varphi)\}_{0 \leq n \leq N-1} : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$, βάσει του οποίου αναπτύσσονται ως γραμμικός συνδυασμός οι άγνωστες κατανομές, οι οποίες αντικαθίστανται στην (1.69):

$$K_n^{i,o}(\varphi) = \sum_{l=0}^{N-1} I_l^{i,o} u_l(\varphi)$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{N-1} [I_l^o \int_0^{2\pi} \rho_{auxo} Q^o(\varphi', \varphi) u_l(\varphi') d\varphi' - I_l^i \int_0^{2\pi} \rho_{auxi} Q^i(\varphi', \varphi) u_l(\varphi') d\varphi'] = Q^f(\varphi)$$

Οι συναρτήσεις βάσης u_n , επιλέγονται έτσι ώστε να αρμόζουν στο πρόβλημα. Επόμενο βήμα της μεθόδου, είναι η επιλογή των συναρτήσεων δοκιμής (*test functions*) $\{v_n(\varphi)\}_{0 \leq n \leq N-1} : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ μέσω των οποίων εξάγεται το γραμμικό σύστημα με άγνωστους του συντελεστές $I_l^{i,o}$. Πιο συγκεκριμένα, $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$, υπολογίζεται το συναρτησιακό εσωτερικό γινόμενο στην τελευταία εξίσωση στο διάστημα $[0, 2\pi)$:

$$\sum_{l=0}^{N-1} I_l^o \langle v_n, \rho_{auxo} Q^o \rangle - I_l^i \langle v_n, \rho_{auxi} Q^i \rangle = \langle v_n, Q^f \rangle$$

$$\text{όπου } \langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g^*(x) dx.$$

Σχόλιο: Στην προκειμένη περίπτωση δεν υπάρχουν μιγαδικά μεγέθη.

Η τελευταία εξίσωση έχει ήδη λάβει μορφή γραμμικού συστήματος, κάτι το οποίο φαίνεται αν οριστούν, $a_{nl}^{i,o} = \langle v_n, \rho_{auxi,o} Q^{i,o} \rangle$, $b_n = \langle v_n, Q^f \rangle$:

$$\sum_{l=0}^{N-1} a_{nl}^o I_l^o - a_{nl}^i I_l^i = b_n, \quad n \in \{0, \dots, N-1\}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία στην εξίσωση (1.68), τότε λαμβάνονται $2N$ εξισώσεις για τους $2N$ αγνώστους $I_l^{i,o}$. Η τεχνική αυτή είναι μια πιο γενική διαδικασία από εκείνη που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 1.4. Κατά τη MoM, εάν οι συναρτήσεις δοκιμής είναι οι κρουστικές συναρτήσεις, $\delta(\varphi - \varphi_j)$ όπου $\varphi_j = \frac{2\pi j}{N}$, $j \in \{0, \dots, N-1\}$ και εάν για συναρτήσεις βάσης διαλεχθούν οι, περιορισμένες στο σύνορο $\rho = \rho_{cyl}$ θεμελιώδεις λύσεις της Laplace σε κυκλικές συντεταγμένες (ή *ισοδύναμα συναρτήσεις Green της Laplace*), τότε το γραμμικό σύστημα που προκύπτει είναι το (1.27) ή το (1.36), αναλόγως το πρόβλημα που εξετάζεται.

Προφανώς, η επιλογή των κρουστικών συναρτήσεων η οποία ονομάζεται και σημειακή τεχνική (*point-matching / collocation technique*) είναι πρακτικά μια διακριτοποίηση των ολοκληρωμάτων στις εξισώσεις (1.68), (1.69). Το όριο επομένως καθώς $N \rightarrow \infty$ των πεπερασμένων αθροισμάτων (1.23), (1.24) & (1.32), (1.33) τείνει στα ολοκληρώματα των (1.68), (1.69) & (1.82), (1.83) και κατά συνέπεια η αθροιζόμενη ποσότητα συγκλίνει στο συνεχές ολοκληρωτέο μέγεθος.

Η αναφορά στη μέθοδο των ροπών γίνεται για να συνδεθεί η συμπεριφορά τη MAS με την πρώτη. Σαν ειδική περίπτωση της MoM, η MAS αναμένεται να εμφανίζει συμπεριφορές όπως αυτές που αναλύονται στην εργασία [23][5], όταν εφαρμόζεται σε προβλήματα τα οποία αποδεδειγμένα δεν επιδέχονται λύση. Με απλό τρόπο, δείχνοντας πως οι λύσεις δεν δέχονται ανάπτυγμα σε σειρά Fourier,

στην προηγούμενη παράγραφο αποδείχθηκε πως τα συστήματα (1.68) – (1.69) & (1.82) – (1.83) δεν έχουν λύση όταν $\rho_{auxi} < \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}}$ ή $\rho_{auxo} > \rho_{fil}$ και $\rho_{auxo} > \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}}$ ή $\rho_{auxi} < \rho_{fil}$. Στη συνέχεια αποδεικνύεται πως δεν υπάρχουν $K^i(\varphi)$, $K^o(\varphi)$ που να ικανοποιούν τα παραπάνω συστήματα και για τις παραπάνω περιπτώσεις με τρόπο ανάλογο της εργασίας [5]. Στο σημείο αυτό επίσης, φαίνεται πως η εύρεση της αναλυτικής λύσης με ανάπτυγμα στις ιδιοσυναρτήσεις της Laplace (βλ. παρ. 1.1 & 1.2) συμβάλλει στην γενικότερη κατανόηση του προβλήματος.

Η διαδικασία της απόδειξης δίνεται λεπτομερώς στο [5] και βασίζεται στο Θεώρημα 3.5 περί συναρτήσεων σε μορφή ολοκληρώματος του [12, p.43] αλλά και στο εξαιρετικά σημαντικό θεώρημα της αναλυτικής επέκτασης [12, p.42], του οποίου η τοπολογικά πιο λεπτομερής εκδοχή δίνεται και στο [25]. Σημειώνεται πως στη διατύπωση του [25] υπονοείται πως το πεδίο στο οποίο «συμφωνούν» οι συναρτήσεις στις οποίες αναφέρεται το θεώρημα της αναλυτικής επέκτασης, δεν οφείλει να είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και άρα μπορεί να κάλλιστα να είναι ένα διάστημα της μορφής $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Βάσει των παραπάνω, υποτίθεται πως οι συναρτήσεις $K^o(\varphi)$, $K^i(\varphi)$ στο (1.68) – (1.69) είναι απλά συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[0, 2\pi)$ (η διαδικασία είναι ίδια και για το εσωτερικό πρόβλημα). Τα δεξιά μέλη των (1.68) – (1.69) είναι αναλυτικές συναρτήσεις της μεταβλητής φ και επιπλέον «συμφωνούν» με το αριστερό μέλος στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Θεωρείται μεταβλητό ρ_{auxi} και σταθερό ρ_{auxo} . Σύμφωνα με το θεώρημα της αναλυτικής επέκτασης, το αναλυτικό ανάπτυγμα κάθε μέλους της εξίσωσης πρέπει να είναι το ίδιο. Η μεταβλητή φ αφήνεται να λάβει μιγαδικές τιμές, i.e $\varphi \in \mathbb{C}$. Αμφότεροι οι πυρήνες $L^{i,o}$ & $Q^{i,o}$ αλλά και οι L^f , Q^f εμφανίζουν ανώμαλα σημεία όταν :

$$\cos(\varphi_l - \varphi') = \frac{\rho_{cyl}^2 + \rho_{auxi,o}^2}{2\rho_{cyl}\rho_{auxi,o}}, \quad \cos\varphi_r = \frac{\rho_{cyl}^2 + \rho_{fil}^2}{2\rho_{cyl}\rho_{fil}}$$

αντίστοιχα.

Οι ποσότητες στα αριστερά μέλη (L.H.S) των τελευταίων εξισώσεων είναι μεγαλύτερες της μονάδας, επομένως οι αντίστοιχες λύσεις τους είναι μιγαδικές, καθώς τους έχει επιτραπεί. Επειδή :

$$\cos z = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$$

Οι λύσεις των παραπάνω εξισώσεων είναι :

$$\varphi_l = \varphi' + 2\pi n \pm j \operatorname{arccosh}\left(\frac{\rho_{cyl}^2 + \rho_{auxi,o}^2}{2\rho_{cyl}\rho_{auxi,o}}\right), \quad \varphi_r = 2\pi n \pm j \operatorname{arccosh}\left(\frac{\rho_{cyl}^2 + \rho_{fil}^2}{2\rho_{cyl}\rho_{fil}}\right), n \in \mathbb{Z}$$

Οι λύσεις φ_r , φ_l ορίζουν τα σύνορα των πεδίων του $\mathbb{C}$ εντός των οποίων τα δεξιά και αριστερά μέλη των (1.68) – (1.69) είναι αναλυτικά. Αποδεικνύεται πως για $\rho_{auxi} < \rho_{cri}$ η ισότητα που προβλέπει το θεώρημα της αναλυτικής επέκτασης δε γίνεται να ισχύει, οδηγώντας σε άτοπο.

Στην πραγματικότητα :

$$\frac{\rho_{cyl}^2 + \rho_{fil}^2}{2\rho_{cyl}\rho_{fil}} = \frac{\rho_{cyl}^2 + \rho_{cri}^2}{2\rho_{cyl}\rho_{cri}}, \quad \rho_{auxi}, \rho_{cri} < \rho_{cyl}$$

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\rho_{cyl}^2 + x^2}{2\rho_{cyl}x}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0, \rho_{cyl}]$ και αύξουσα στο διάστημα $[\rho_{cyl}, \infty)$, συνεπώς αν το ρ_{auxi} γίνει μικρότερο από το ρ_{cri} :

$$\rho_{cyl} > \rho_{cri} > \rho_{auxi} \Rightarrow f(\rho_{cri}) < f(\rho_{auxi})$$

Από τη μονοτονία της συνάρτησης arccosh , έπεται πως $|\varphi_r| < |\varphi_l|$. Από το θεώρημα της αναλυτικής επέκτασης έπεται πως το δεξί μέλος (R.H.S) των (1.68) – (1.69) είναι παντού αναλυτικό στο εσωτερικό του συνόλου $V = \{ \varphi \in \mathbb{C} : |\text{Im}\{\varphi\}| < \text{arccosh}(\frac{\rho_{cyl}^2 + \rho_{auxi}^2}{2\rho_{cyl}\rho_{auxi}}) \} (\partial V = \varphi_l)$, πράγμα το οποίο έρχεται σε πλήρη αντίθεση με την ανισότητα $|\varphi_r| < |\varphi_l|$, καθώς στο V περιέχονται τα ανώμαλα σημεία των L^f & Q^f . Επομένως δε γίνεται να υπάρχει συνεχής συνάρτηση $K^i(\varphi)$ που να αποτελεί λύση του (1.68) – (1.69).

Σταθεροποιώντας τώρα το ρ_{auxi} και μεταβάλλοντας το ρ_{auxo} από την τιμή ρ_{cyl} έως $\rho_{fil} > \rho_{cyl}$ αποδεικνύεται το αδύνατον του (1.68) – (1.69), όταν αυτό προέρχεται από μια κακοσχεδιασμένη επιφάνεια ρ_{auxo} . Ξανά, επεκτείνουμε αναλυτικά το δεξί & αριστερό μέλος των εξισώσεων (1.68) – (1.69). Οι «ζώνες» αναλυτικότητας, τα πεδία δηλαδή όπου τα R.H.S & L.H.S είναι αναλυτικά, δίνονται από το $\text{interior}\{\varphi_r\}$ όπως παραπάνω και από :

$$U = \{ \varphi \in \mathbb{C} : |\text{Im}\{\varphi\}| < \text{arccosh}(\frac{\rho_{cyl}^2 + \rho_{auxo}^2}{2\rho_{cyl}\rho_{auxo}}) \}$$

αντίστοιχα.

Βάσει του θεωρήματος της αναλυτικής επέκτασης θα πρέπει: $RHS=LHS, \forall \varphi \in U$. Αυτό, όπως και στην πρώτη περίπτωση, συμβαίνει εάν τα ανώμαλα σημεία του LHS δεν περιέχονται στο U , κάτι που δεν ισχύει, εάν :

$$\begin{aligned} \rho_{cyl} < \rho_{fil} < \rho_{auxo} &\Rightarrow f(\rho_{fil}) < f(\rho_{auxo}) \\ \Rightarrow \text{arccosh}(\frac{\rho_{cyl}^2 + \rho_{fil}^2}{2\rho_{cyl}\rho_{fil}}) &< \text{arccosh}(\frac{\rho_{cyl}^2 + \rho_{auxo}^2}{2\rho_{cyl}\rho_{auxo}}) \end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα συνεπάγεται πως το RHS δεν είναι αναλυτικό όταν $\varphi = \varphi_r \in U$, ενώ το LHS είναι, πράγμα άτοπο βάσει του Θ. αναλυτικής επέκτασης. Προφανώς, καθόλη τη διάρκεια της εργασίας διαπιστώνεται πως τα ρεύματα MAS δε συγκλίνουν σε κάποια μορφή όταν οι επιφάνειες είναι τοποθετημένες εκεί που προβλέπεται το μη-επιλύσιμο του παραπάνω συστήματος.

Η παραπάνω ανάλυση, μαζί με τις ασυμπτωτικές εκφράσεις βέβαια, πιστεύεται πως πιστοποιεί πλήρως ότι η αποκλίνουσα συμπεριφορά είναι εγγενής στο πρόβλημα στις περιπτώσεις «κακής» σχεδίασης και δεν οφείλεται στο ασθενές της κατάστασης ούτε στις υπολογιστικές ατέλειες.

Παραπάνω, ουσιαστικά αποδεικνύεται πως στις περιπτώσεις $\rho_{auxi} < \rho_{cri}$ & $\rho_{auxo} > \rho_{cyl}$ οι λύσεις $K^{i,o}(\varphi)$ δε μπορούν καν να είναι συνεχείς. Κατά την απόπειρα επίλυσης του συστήματος μέσω

εύρεσης συντελεστών Fourier βρέθηκε πως στις παραπάνω περιπτώσεις οι συντελεστές Fourier αποκλίνουν όπως και οι αντίστοιχες λύσεις.

Στην περίπτωση του εσωτερικού προβλήματος διάδοσης, i.e $\rho_{cyl} > \rho_{fil}$, η διερεύνηση για τις συνθήκες επιλυσιμότητας είναι ακριβώς ίδια και παράγει τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Εν συντομία, ξεκινώντας από τις ίδιες υποθέσεις για τα $K^{1,0}(\varphi)$, τα RHS των (1.82) – (1.83) είναι αναλυτικά στην περιοχή :

$$S = \{ \varphi \in \mathbb{C} : |\text{Im}\{\varphi\}| < \text{arccosh}\left(\frac{\rho_{cyl}^2 + \rho_{fil}^2}{2\rho_{cyl}\rho_{fil}}\right) \}$$

Όμως τώρα, το όρισμα της arccosh στο S ανήκει στο φθίνον τμήμα της καμπύλης της $f(x) = \frac{\rho_{cyl}^2 + x^2}{2\rho_{cyl}x}$. Βάσει αυτού αποδεικνύεται πως όταν $\rho_{auxi} < \rho_{fil}$, τότε τα ανώμαλα σημεία του S βρίσκονται εντός της περιοχής όπου είναι αναλυτική η LHS , πράγμα που οδηγεί σε άτοπο όπως πριν.

Σε αντίθεση με το εξωτερικό πρόβλημα, εδώ ισχύει $\rho_{cyl} < \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}} = \rho_{cri}$. Το πεδίο όπου ορίζεται η LHS βάσει της υπόθεσης είναι το :

$$U = \{ \varphi \in \mathbb{C} : |\text{Im}\{\varphi\}| < \text{arccosh}\left(\frac{\rho_{cyl}^2 + \rho_{auxi}^2}{2\rho_{cyl}\rho_{auxi}}\right) \}$$

Εκφράζοντας το S συναρτήσει του ρ_{cri} και χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της f στο τμήμα $[\rho_{cyl}, \infty)$

(στο οποίο ανήκουν τα ρ_{cri}, ρ_{auxo}) αποδεικνύεται πως τα ανώμαλα σημεία (ή το σύνολο) του S βρίσκονται εντός του $D(LHS)$ (domain) όταν $\rho_{auxo} > \rho_{cri}$, το οποίο είναι άτοπο.

1.7 Σύγκλιση στο πραγματικό $\vec{H}$ & μη-μονοσήμαντο των βοηθητικών επιφανειών

Θεωρούνται τώρα οι εξισώσεις (1.23) & (1.24), έναντι εκείνων της σελίδας 52, καθώς συνδέονται μέσω της σχέσης :

$$H_{N,MAS}^{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_{N,MAS}^{1,2}$$

$$H_{N,MAS}^{\varphi} = -\frac{\partial}{\partial \rho} A_{N,MAS}^{1,2}$$

Ο υπολογισμός γίνεται μόνο για το πεπερασμένο άθροισμα, καθώς η διέγερση εμφανίζεται και στη MAS και στην αναλυτική λύση. Επίσης το άθροισμα των θεμελιωδών λύσεων σε καθεμία από τις (1.23) & (1.24), ανήκει στην παρακάτω γενική μορφή:

$$S_N = \sum_{l=0}^{N-1} I_l \ln \rho_l, \quad \rho_l = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos\left(\frac{2\pi l}{N} - \varphi\right)}, \quad \rho_1, \rho_2 > 0$$

Για το εσωτερικό διανυσματικό δυναμικό τίθενται $\rho_1 = \rho_{auxo}$ & $\rho_2 = \rho < \rho_{cyl}$ ενώ για το εξωτερικό επιλέγεται $\rho_1 = \rho_{auxi}$ & $\rho_2 = \rho \geq \rho_{cyl}$. Τα δε I_l δίνονται από την (1.75) η οποία είναι περίπλοκη και για το λόγο, λαμβάνοντας υπόψιν τις (1.54) & (1.55) αυτά αντικαθίστανται από το DFT τους μέσω της 2^{ης} σχέσης του Ορισμού 3:

$$I_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} I_k e^{-j\frac{2\pi l}{N}k} = \begin{cases} \frac{1}{N} (I_{k=0} + I_{k=\frac{N}{2}}) + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} I_k \cos\left(\frac{2\pi l}{N}k\right), & N \text{ άρτιο} \\ \frac{1}{N} I_{k=0} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} I_k \cos\left(\frac{2\pi l}{N}k\right), & N \text{ περιττό} \end{cases}$$

Τα αθροίσματα της τελευταίας εξίσωσης ομοιάζουν με τον συνημιτονικό μετασχηματισμό Fourier (DCT), εργαλείο απαραίτητο στην επεξεργασία σημάτων. Ο τελευταίος σχετίζεται άμεσα με τον DFT για πραγματικά σήματα μέσω του τελεστή $\mathcal{Re}\{\}$, ο οποίος διατηρεί μόνο το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού.

Στην παραπάνω σχέση εφαρμόστηκε η λεγόμενη συμμετρία περί του κέντρου που εμφανίζουν τα φάσματα. Από τα ρ_1, ρ_2 ορίζονται τα $x < 1$, ρ του παραρτήματος, επομένως για το S_N ισχύει :

$$S_N = \ln \rho \sum_{l=0}^{N-1} I_l + \sum_{l=0}^{N-1} I_l \ln \sqrt{1 + x^2 - 2x \cos\left(\frac{2\pi l}{N} - \varphi\right)} = \ln \rho \sum_{l=0}^{N-1} I_l + \sum_{l=0}^{N-1} I_l \ln x_l$$

Το πρώτο άθροισμα είναι απλά η τιμή I_k (βλ. σελ. 23), επομένως το μόνο που απομένει είναι να υπολογιστεί το 2^ο άθροισμα.

Αντικαθίστανται τα ρεύματα I_l από τα φάσματα τους και θεωρείται πως το N είναι άρτιο. Η περίπτωση του περιττού N είναι απλούστερη καθώς :

$$\sum_{l=0}^{N-1} I_l \ln x_l = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} [I_{k=\frac{N}{2}} + I_{k=0} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} I_k \cos(\frac{2\pi l}{N} k) \ln x_l]$$

Στην τελευταία εξίσωση αναδιατάσσεται η σειρά άθροισης και η εξίσωση γράφεται ξανά :

$$\frac{I_{k=\frac{N}{2}} + I_{k=0}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \ln x_l + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} I_k \sum_{l=0}^{N-1} \ln x_l \cos(\frac{2\pi k}{N} l)$$

Παρατηρείται πως αρκεί να υπολογιστεί ο DCT της ποσότητας $\ln x_l$ καθώς το πρώτο άθροισμα είναι απλά η τιμή για $k = 0$ του $DCT_k\{\ln x_l\} = \mathcal{Re}\{DFT_k\{\ln x_l\}\}$. Η ζητούμενη ποσότητα ανήκει στη γενικότερη μορφή των DFT που υπολογίστηκαν στην παράγραφο **1.4.3β**. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα **(α)** και την ταυτότητα **(δ)**, αλλά και μια ασυμπτωτική προσέγγιση κύριου όρου, υπολογίζεται :

$$\mathbf{X}_k = DFT_k\{\ln x_l\} = \delta_{k \geq 1} [-\frac{N}{2} (\frac{(xe^{-j\varphi})^k}{k} + \frac{(xe^{-j\varphi})^{N-k}}{N-k})]$$

Σημειώνεται πως η τιμή της παραπάνω ποσότητας για $k = 0$, i.e $\sum_{l=0}^{N-1} \ln x_l$, είναι ασυμπτωτικά ίση με $x^N \cos N\varphi$ (επίσης ασυμπτωτική προσέγγιση κύριου όρου), όπου $x < 1$. Με επιστροφή στη σχέση για το S_N , διατηρώντας μόνο το πραγματικό μέρος του $\mathbf{X}_k$:

$$S_N = \ln \rho I_{k=0} + (I_{k=\frac{N}{2}} + I_{k=0}) \mathbf{X}_{k=0} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} I_k \mathcal{Re}\{\mathbf{X}_k\} \quad (1.90\alpha)$$

Σε περίπτωση που το N θεωρηθεί περιττό, η μόνη διαφορά είναι :

$$S_N = \ln \rho I_{k=0} + I_{k=0} \mathbf{X}_{k=0} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} I_k \mathcal{Re}\{\mathbf{X}_k\} \quad (1.90\beta)$$

Εφαρμόζονται οι αναγκαίες αντικαταστάσεις για να προσαρμοστεί το S_N στις ειδικές μορφές για τις οποίες ισχύει :

$$A_{N,MAS}^1 = \frac{-\mu_1 I}{2\pi} S_N^1 \quad \& \quad A_{N,MAS}^2 = \frac{-\mu_2 I}{2\pi} [\ln \rho_{fp} + S_N^2] \quad (1.91), (1.92)$$

Όπου, με $\sigma_k = \frac{1}{k} \cos k\varphi$:

$$S_N^2 \sim (\frac{\rho_{cri}}{\rho_{auxi}})^{\frac{N}{2}} (\frac{\rho_{auxi}}{\rho})^N - \frac{c_o - 1}{c_o + 1} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} (\frac{\rho_{cri}}{\rho_{auxi}})^k [\sigma_k (\frac{\rho_{auxi}}{\rho})^k + \sigma_{N-k} (\frac{\rho_{auxi}}{\rho})^{N-k}]$$

$$S_N^1 \sim \frac{\ln \rho_{fil}}{c_o} + \left(\frac{\rho}{\rho_{auxo}}\right)^N \left[\left(\frac{\rho_{auxo}}{\rho_{fil}}\right)^{\frac{N}{2}} + \frac{\ln \rho_{fil}}{c_o \ln \rho_{auxo}} \right] - \frac{2}{c_o + 1} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left(\frac{\rho_{auxo}}{\rho_{fil}}\right)^k \left[\sigma_k \left(\frac{\rho}{\rho_{auxo}}\right)^k + \sigma_{N-k} \left(\frac{\rho}{\rho_{auxo}}\right)^{N-k} \right] \quad (1.93), (1.94)$$

Στη συνέχεια με την ασυμπτωτική προσέγγιση των $S_N^{1,2}$ δείχνεται η σύγκλιση του MAS πεδίου στο αναλυτικό. Για $N \rightarrow \infty$, ή πιο απλά όταν το N λάβει «αρκετά» μεγάλες τιμές^(*), εύκολα από το ανάπτυγμα **(α)** υπολογίζεται πως :

$$\begin{aligned} -\frac{c_o - 1}{c_o + 1} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{\rho_{cri}}{\rho}\right)^k \sigma_k &\rightarrow -\frac{c_o - 1}{c_o + 1} \ln \sqrt{1 + \left(\frac{\rho_{cri}}{\rho}\right)^2 - 2 \frac{\rho_{cri}}{\rho} \cos \varphi} \\ -\frac{2}{c_o + 1} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{\rho}{\rho_{fil}}\right)^k \sigma_k &\rightarrow -\frac{2}{c_o + 1} \ln \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\rho_{fil}}\right)^2 - 2 \frac{\rho}{\rho_{fil}} \cos \varphi} \end{aligned}$$

^(*): Μπορούμε να πούμε απλά N μεγάλο, επειδή η σειρά συγκλίνει και επομένως μπορούμε να βρούμε ένα πλήθος πηγών από το οποίο και εντεύθεν, η στάθμη ακρίβειας είναι μεγαλύτερη από τη ζητούμενη. Το προηγούμενο ακολουθεί από τον ορισμό σύγκλισης του Weierstrass.

Με την τροποποίηση των λογαρίθμων :

$$\begin{aligned} \ln \sqrt{1 + \left(\frac{\rho_{cri}}{\rho}\right)^2 - 2 \frac{\rho_{cri}}{\rho} \cos \varphi} &= -\ln \rho + \ln \sqrt{\rho^2 + \rho_{cri}^2 - 2 \rho \rho_{cri} \cos \varphi} \\ \ln \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\rho_{fil}}\right)^2 - 2 \frac{\rho}{\rho_{fil}} \cos \varphi} &= -\ln \rho_{fil} + \ln \sqrt{\rho^2 + \rho_{fil}^2 - 2 \rho \rho_{fil} \cos \varphi} \end{aligned}$$

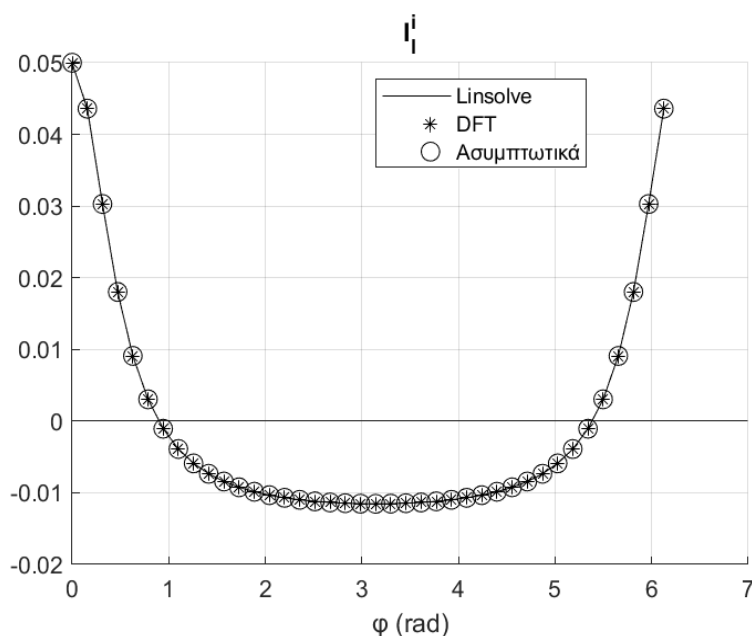
Ήδη από αυτές τις εξισώσεις **(1.93)**, **(1.94)** φαίνεται, με σύγκριση με τις εξισώσεις **(1.11)**, **(1.12)** πως το MAS δυναμικό παράγει την αναλυτική λύση.

Οι συνιστώσες των αθροισμάτων που περιέχουν τον όρο σ_{N-k} είναι εκθετικά μικρές και τείνουν στο 0. Το υπόλοιπο αυτό, εξαρτάται από την απόσταση του σημείου παρατήρησης και όπως θα περίμενε κανείς, γίνεται εντονότερο όσο αυτό πλησιάζει τα όρια της περιοχής της αναλυτικής επέκτασης της λύσης. Αυτό συμφωνεί με την αρχή μεγίστου ελαχίστου η οποία απαγορεύει την ύπαρξη των ακροτάτων στο εσωτερικό των πεδίων ορισμών. Τονίζεται πως οι παραπάνω σχέσεις προβλέπουν πως τα σφάλματα θα είναι εντονότερα όταν οι βοηθητικές επιφάνειες τοποθετούνται κοντά στο σύνορο των 2 περιοχών, δηλαδή όταν $\rho_{auxo} \downarrow \rho_{cyl}$ & $\rho_{auxi} \uparrow \rho_{cyl}$. Το συγκεκριμένο, παρατηρείται στην παράγραφο **1.9.2** για το εσωτερικό πρόβλημα, αλλά προφανώς ισχύει και για το εξωτερικό πρόβλημα διάδοσης.

Μια σημαντική παρατήρηση είναι πως όλα τα παραπάνω, ισχύουν και με τις βοηθητικές επιφάνειες τοποθετημένες στις κρίσιμες περιοχές στις οποίες προβλέπεται απόκλιση των διακριτών πηγών. Ακόμα και οι μη φυσικές ποσότητες που ενσαρκώνουν τα διανυσματικά δυναμικά, συγκλίνουν στις αντίστοιχες αναλυτικές εκφράσεις, χωρίς να απειρίζονται οι σταθερές τους, όταν οι βοηθητικές επιφάνειες είναι στις κρίσιμες περιοχές. Αυτό περαιτέρω σημαίνει πως ακόμα και τα αποκλίνοντα ρεύματα MAS θα παράγουν στο χώρο το σωστό μαγνητικό πεδίο.

1.8 Αριθμητικά Παραδείγματα

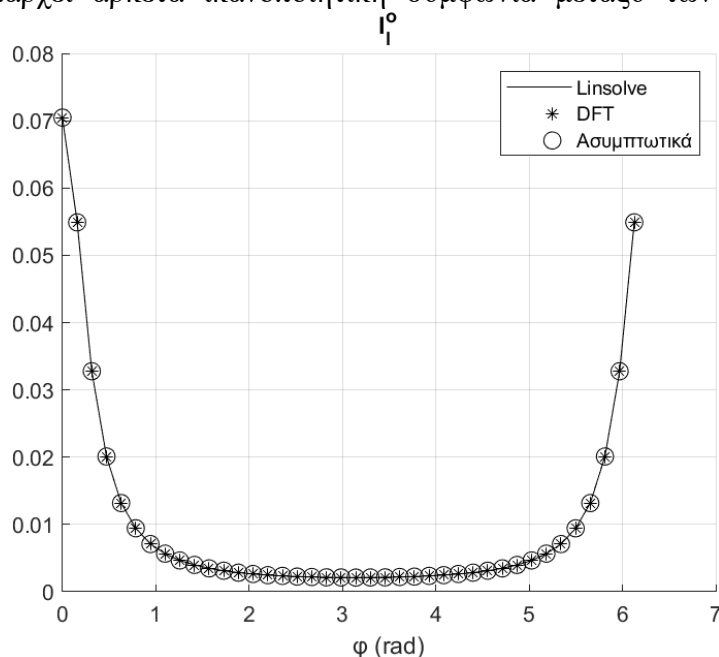
1.8.1α Εξωτερικό πρόβλημα $\rho_{cyl} < \rho_{fil}$, «ήπια» περίπτωση



Εικόνα 12: Ανηγμένα στο ρεύμα διέγερσης I , ρεύματα $MAS I_1^i(\varphi)$

εσωτερικής επιφάνειας.
(1.46).

Το υπόμνημα επίσης φέρει και τη φράση «Ασυμπτωτικά», η οποία αντιστοιχεί στη μέθοδο υπολογισμού των ρευμάτων μέσω της (1.75) με τις κατάλληλες αντικαταστάσεις. Η μέθοδος υπολογισμού αυτή, αποτελεί και το θεμέλιο των επιχειρημάτων αυτής της εργασίας. Όπως φαίνεται υπάρχει αρκετά ικανοποιητική συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων και από διαφορετικές



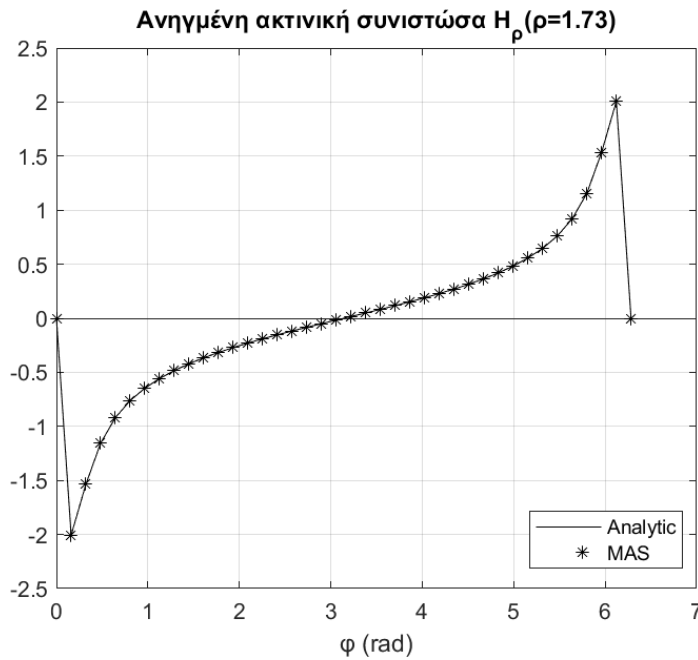
Σαν πρώτο παράδειγμα επιλέχθηκε μια διάταξη με τα εξής γεωμετρικά χαρακτηριστικά $\rho_{cyl} = 1, \rho_{fil} = 2$, και με «δείκτη αντίθεσης» υλικών $c_o = 4$. Για αρχή, επιλέγεται μια «ήπια» περίπτωση βοηθητικών επιφανειών, δηλαδή με ακτίνες εκτός των κρίσιμων περιοχών και πιο συγκεκριμένα $\rho_{auxi} = 0.8 > \rho_{cri} = 0.5$, $\rho_{auxo} = 1.5 < 2 = \rho_{fil}$. Στην εικόνα 12 & 13 απεικονίζονται οι λύσεις του συστήματος (1.27), ληφθείσες με 3 διαφορετικές μεθόδους όπως αναγράφεται στο υπόμνημα. Κατά τη μέθοδο Linsolve χρησιμοποιείται η ομώνυμη ρουτίνα της Matlab®, ενώ για

τη “DFT” λύση χρησιμοποιείται

η ρουτίνα ifft στο σύστημα (1.45) –

μεθόδους. Επόμενο βήμα είναι να ελεγχθεί αν τα ρεύματα παράγουν τη σωστή ένταση μαγνητικού πεδίου $\vec{H}$ σε όλο το χώρο. Για το σκοπό αυτό, υπολογίζεται η περιστροφή, $\vec{\nabla} \times ()$, των εξισώσεων (1.11) & (1.12). Στη συνέχεια, μεταβάλλονται ελαφρώς οι ακτίνες των βοηθητικών επιφανειών (χωρίς να εισέλθουν για αρχή στις κρίσιμες περιοχές) για να δειχθεί το μη-μονοσήμαντο των διακριτών πηγών.

Εικόνα 13: Ανηγμένα ρεύματα $I_1^o(\varphi)$ εξωτερικής επιφάνειας.



Εικόνα 14: Υπολογισμός έντασης μαγνητικού πεδίου από αναλυτική λύση του εξωτερικού προβλήματος & από ρεύματα MAS.

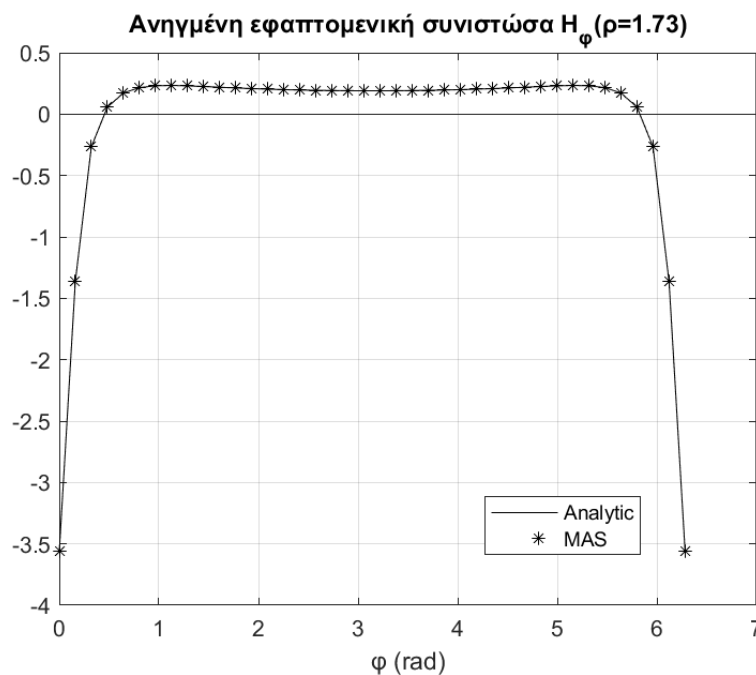
ικανό να προσεγγίσει την πραγματική λύση σε ακρίβεια 5^{ου} δεκαδικού ψηφίου, όπως μπορεί να παρατηρηθεί από τις καμπύλες σφαλμάτων $e_\rho = H^\rho - H_{N,MAS}^\rho$ & $e_\varphi = H^\varphi - H_{N,MAS}^\varphi$, οι οποίες υπάρχει η πολυτέλεια να υπολογιστούν. Μια πολύ σημαντική ιδιότητα των σφαλμάτων είναι ότι και αυτά θα πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση Laplace [18][19], κάτι το οποίο διαπιστώνεται εύκολα υπολογίζοντας το $\nabla^2 e_{\rho,\varphi}$. Αυτό επιβεβαιώνεται και από την υπολογιζόμενη καμπύλη σφάλματος μέσω Matlab[®]. Το γεγονός ότι το σφάλμα έχει αναμενόμενη μορφή στηρίζει περαιτέρω την εγκυρότητα της ανάλυσης, αλλά και των υπολογισμών.

Στην Εικόνα 14, η συνεχής καμπύλη παριστάνει την αναλυτική λύση του εξωτερικού προβλήματος, ενώ τα διακριτά σημεία του γραφήματος αντιστοιχούν στον υπολογισμό του “MAS μαγνητικού πεδίου», δηλαδή στον υπολογισμό του $\vec{H}$ μέσω των σχέσεων, $P = (\rho = 1.73, \varphi)$:

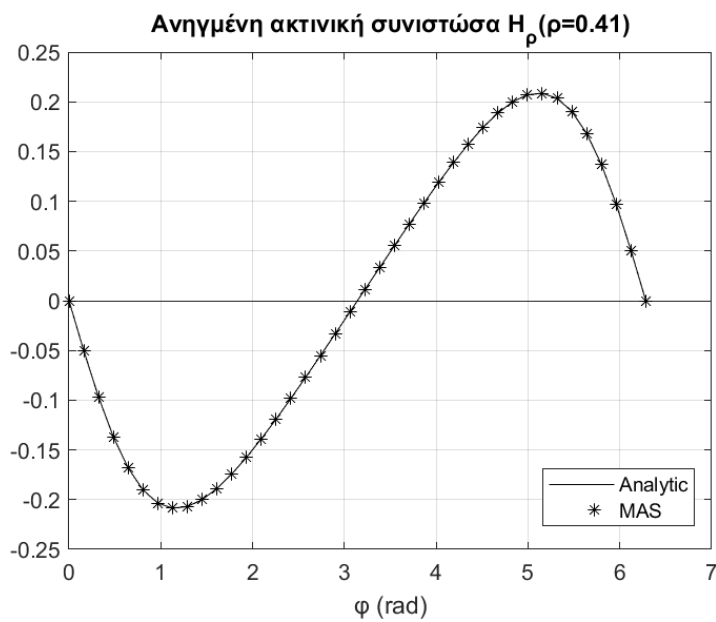
$$\frac{H_{N,MAS}^\varphi}{I/2\pi} = \frac{\partial \ln \rho_{f,P}}{\partial \rho} + \sum_{l=0}^{N-1} I_l^i \frac{\partial \ln \rho_{l,P}^i}{\partial \rho}$$

$$\frac{H_{N,MAS}^\rho}{I/2\pi} = -\frac{\partial \ln \rho_{f,P}}{\partial \varphi} - \sum_{l=0}^{N-1} I_l^i \frac{\partial \ln \rho_{l,P}^i}{\partial \varphi}$$

Ένα πλήθος διακριτών πηγών της τάξης των $N = 40$ ρευμάτων είναι



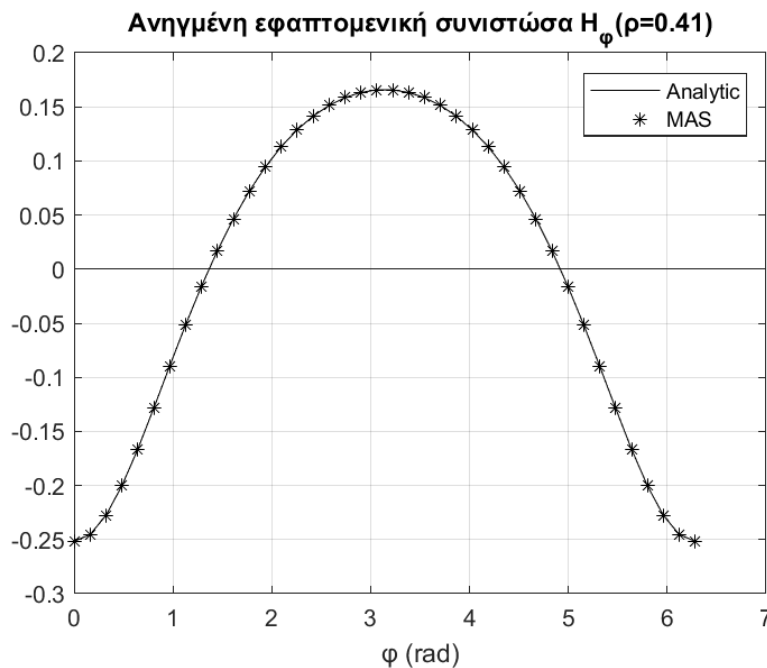
Εικόνα 15: Υπολογισμός εφαπτομενικής συνιστώσας έντασης μαγνητικού πεδίου με δύο μεθόδους.



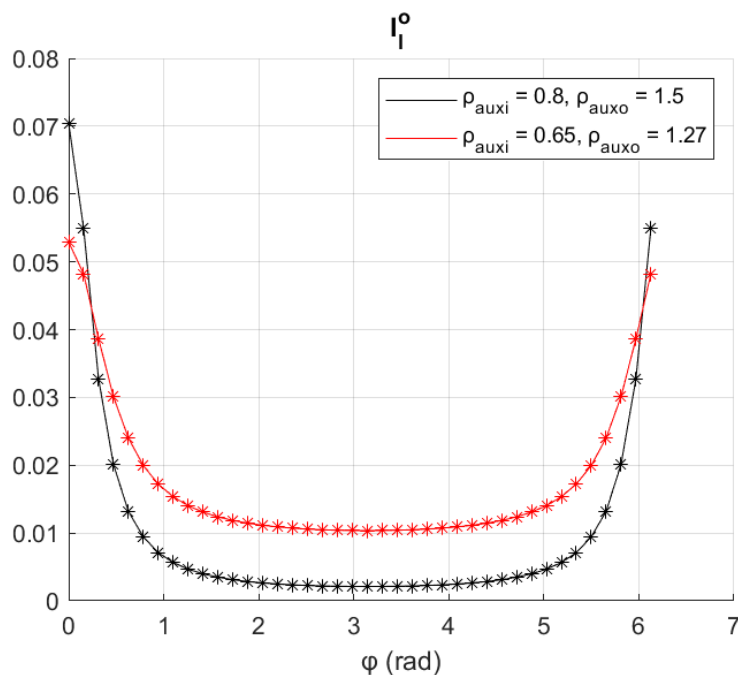
Οι παραπάνω υπολογισμοί έγιναν πάνω σε ένα κύκλο ακτίνας $\rho = 1.73$, δηλαδή στο εξωτερικό του κυλίνδρου και στην περιοχή του υλικού μ_2 . Προφανώς, πρέπει ναδειχθεί η ορθότητα της μεθόδου και για ένα εσωτερικό σημείο. Εκτελείται η ίδια διαδικασία σε έναν εσωτερικό κύκλο ακτίνας $\rho = 0.41$. Η συνεχής καμπύλη παριστάνει την αναλυτική λύση του προβλήματος, ενώ τα διακριτά σημεία τη MAS προσέγγιση της λύσης. Η στάθμη ακρίβειας του παραγόμενου από τα MAS ρεύματα πεδίου, παραμένει στο ίδιο επίπεδο και για εσωτερικά σημεία της διάταξης για αμφότερες τις συνιστώσες.

Εικόνα 16: Υπολογισμός πεδίου MAS σε εσωτερικά σημεία της διάταξης για $\rho = 0.41 < \rho_{cyl}$.

Τα χαρακτηριστικά της διάταξης παρέμειναν ίδια για τους υπολογισμούς στον εσωτερικό κύκλο, συμπεριλαμβανομένων των ρ_{auxi} & ρ_{auxo} . Όπως φαίνεται η επίδοση της MAS είναι αρκετά ικανοποιητική, και σαφώς, αποδίδει το ορθό πεδίο παντού στο χώρο.



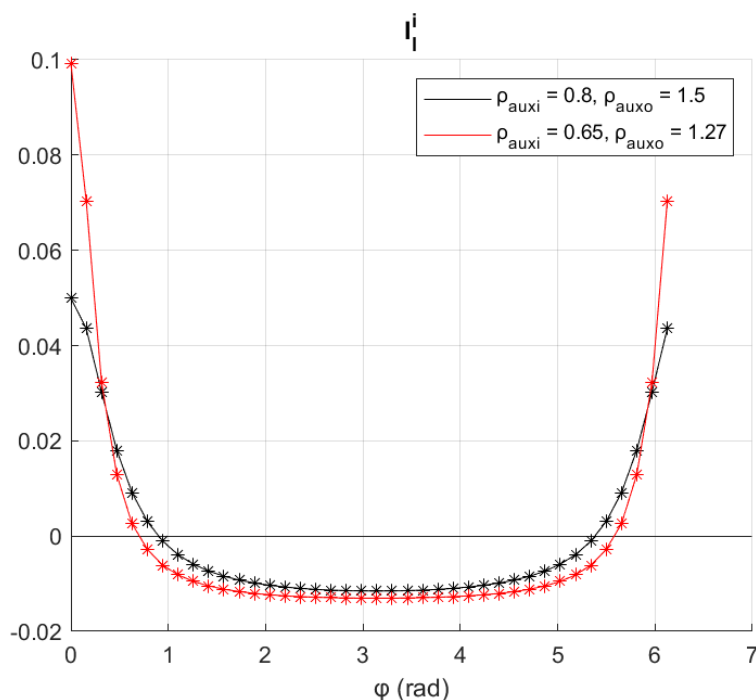
Εικόνα 17α: Εφαπτομενική συνιστώσα του $\vec{H}$ στο εσωτερικό του κύκλου, για $\rho = 0.41 < \rho_{cyl}$.



18.75% & 15.33%).

Εικόνα 17β: Μεταβολή των βοηθητικών ρευμάτων που ρέουν στην εξωτερική επιφάνεια.

Έτσι το φαινόμενο που παρατηρείται πρόκειται όντως περί μη μονοσήμαντου της λύσης.

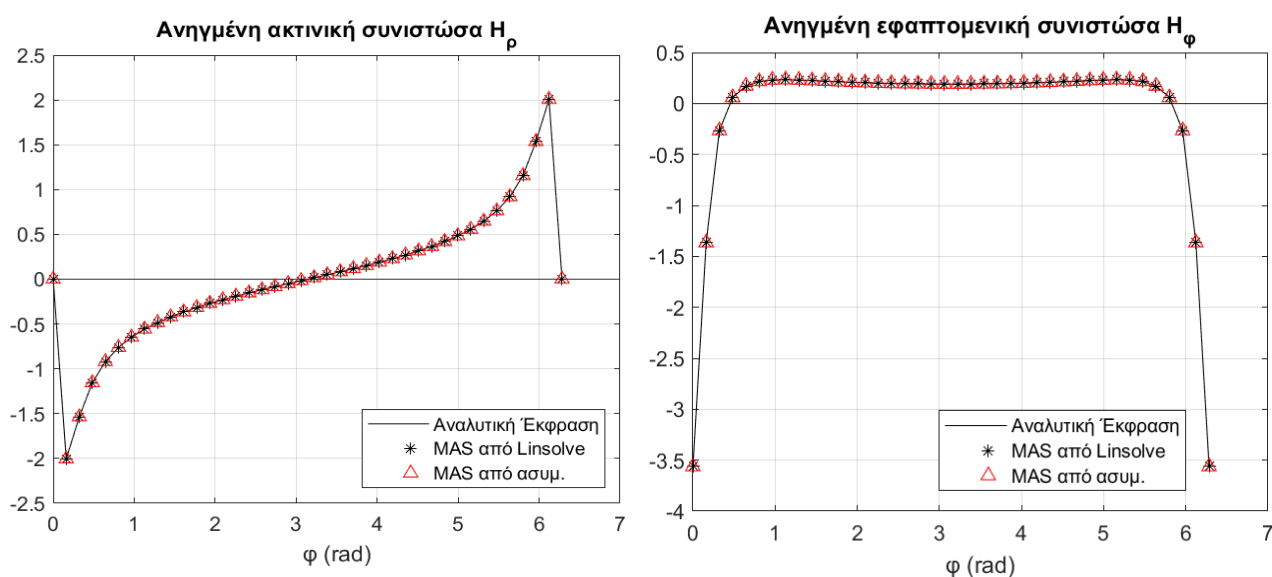


Εικόνα 18: Μεταβολή ρευμάτων εσωτερικής βοηθητικής επιφάνειας.

Με αλλαγή των βοηθητικών μεγεθών, όπως θα φανεί στις επόμενες εικόνες, το παραγόμενο πεδίο παραμένει σωστό, κάτι το οποίο αποδεικνύει το μη μονοσήμαντο της λύσης. Το τελευταίο, έχει την έννοια πως με διαφορετικά ρεύματα MAS λαμβάνεται το σωστό $\vec{H}$ παντού στο χώρο. Για το σκοπό αυτό, τίθεται $\rho_{auxi} = 0.65$ & $\rho_{auxo} = 1.27$ (εκτός των κρίσιμων περιοχών). Σημειώνεται πως με την αλλαγή αυτή δεν εξετάζεται η συνέχεια της λύσης ως προς τις αλλαγές των σχεδιαστικών χαρακτηριστικών, καθώς οι μεταβολές που εισήχθησαν είναι πολύ μεγάλες (

Οι αλλαγές που προκλήθηκαν στα ρεύματα, οι οποίες εξαρτώνται ισχυρά και ευθέως από τον αριθμό κατάστασης του πίνακα Α του (1.27), εμφανίζονται στην εικόνα 17 & 18. Αυτή η συμπεριφορά, οφείλεται στην απάλειψη των παραμέτρων ρ_{auxi} , ρ_{auxo} κατά τη διαδικασία υπολογισμού του $\vec{H}$ μέσω των εξισώσεων της σελίδας 54. Κάτι τέτοιο στην πραγματικότητα ισχύει και αποδεικνύεται στην παράγραφο 1.8 αμέσως πριν την παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

Τονίζεται πως η ευστάθεια της MAS μπορεί να ελεγχθεί αν τεχνητά «μολυνθούν» τα ρεύματα MAS με κάποιο τυχαίο διάνυσμα, σε αντιδιαστολή με αυτό που εξετάζεται στην παρούσα ανάλυση του μονοσήμαντου της λύσης. Η ορθότητα των ασυμπτωτικών ρευμάτων δείχνεται μόνο στην εικόνα 12 & 13. Όπως φαίνεται στην εικόνα 19, η διαφορά που σημειώνεται μεταξύ του H_ρ το οποίο υπολογίζεται από 2 διαφορετικά (αλλά ισάριθμα) σύνολα ρευμάτων για $\rho = 1.73$ και για κάθε φ , είναι ανεπαίσθητη, όπως έχει προβλεφθεί ήδη από την παράγραφο 1.4.4α & 1.8. Επειδή το ίδιο συμβαίνει και για εσωτερικά σημεία (άρα και για την εσωτερική βοηθητική επιφάνεια), επιβεβαιώνεται επομένως πλήρως, πως διαφορετικά ρεύματα παράγουν το ορθό $\vec{H}$ παντού στο χώρο.



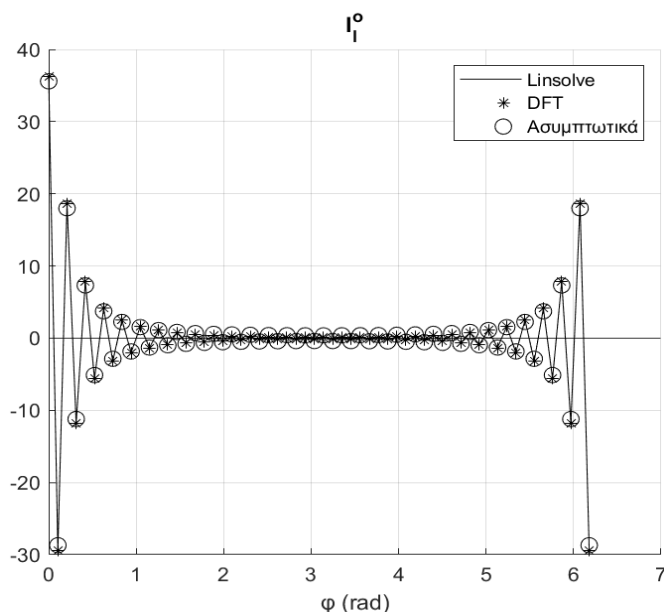
Εικόνα 19 & 20: Υπολογισμός $\vec{H}$ από MAS με ρεύματα προερχόμενα από διαφορετικές βοηθητικές επιφάνειες.

Μια τέτοια συμπεριφορά πρέπει να είναι αναμενόμενη οποτεδήποτε χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές μέθοδοι σαν τη MAS. Προφανώς, αυτό είναι πλεονέκτημα καθώς ο σχεδιαστής δεν απαιτείται να έχει a-priori γνώση για τη λύση του αρχικού προβλήματος που διακριτοποιεί/προσεγγίζει. Ωστόσο, δεν είναι αναγκαίο όλες οι εν δυνάμει επιλογές βοηθητικών επιφανειών να παρέχουν την ίδια ακρίβεια στο τελικό αποτέλεσμα, κάτι που ωθεί στη βελτιστοποίηση της σχεδίασης ως προς την επιλογή της μορφής των επιφανειών, την τεχνική επιλογής διακριτών σημείων σε αυτές (*collocation*) αλλά και την επιλογή του N , που όπως θα φανεί με περαιτέρω αριθμητικά πειράματα, η αύξηση του δεν συνεπάγεται και περισσότερη ακρίβεια ή καλύτερη συμπεριφορά της προσεγγιστικής λύσης.

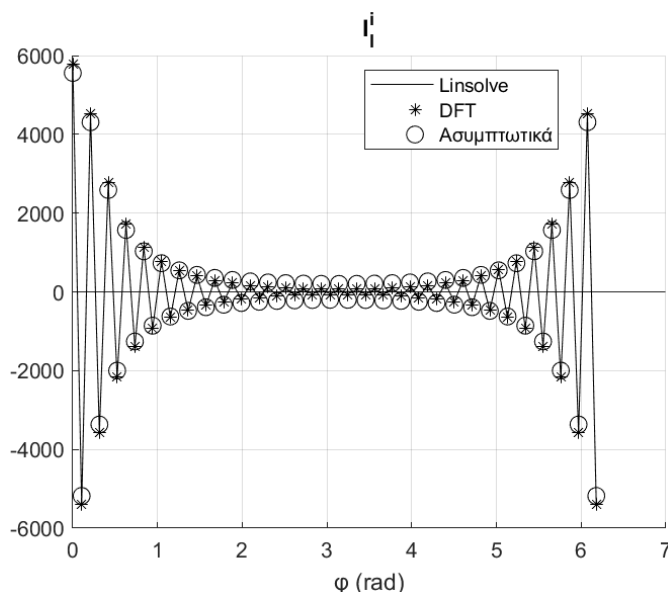
Κατά τη διατύπωση της MAS (βλ. παράγραφο 1.4), ειπώθηκε πως επιλέγεται η «προφανής» επιφάνεια, δηλαδή μια επίσης κυκλική κυλινδρική, και η «προφανής» διακριτοποίηση πάνω σε αυτή, δηλαδή η ομοιόμορφη. Ίσως αυτές οι επιλογές να οφείλονται στην κανονικότητα του κύκλου και σε άλλες γεωμετρίες να μην είναι οι καλύτερες. Η διαίσθηση λέει πως αν μια επιφάνεια εμφανίζει αιχμές σε κάποια σημεία, τότε θα πρέπει να δοθεί μεγαλύτερο «υπολογιστικό βάρος» τοπικά σε αυτά, κάνοντας έτσι την επιλογή των σημείων εφαρμογής των BC μη ομοιόμορφη. Η συμπεριφορά της MAS στην «ήπια» περίπτωση είναι αρκετά προβλέψιμη και δεν εμφανίζει αριθμητικές δυσκολίες, σε αντίθεση με την κρίσιμη περίπτωση που περιγράφεται στην επόμενη παράγραφο.

1.8.1β Εξωτερικό πρόβλημα $\rho_{cyl} < \rho_{fil}$, «κρίσιμη» περίπτωση

Σαν κρίσιμη περίπτωση, αναφέρεται η τοποθέτηση μιας ή και των δύο βοηθητικών επιφανειών στις περιοχές όπου προκαλείται απόκλιση των ρευμάτων, i.e $\rho_{auxi} < \rho_{cri} \& \rho_{auxo} > \rho_{fil}$. Η επιλογή αυτή συμπίπτει με την εκθετική αύξηση του αριθμού κατάστασης του πίνακα A από το (1.27), κάτι που ενδεχομένως προκαλεί ασυμφωνία μεταξύ των ρευμάτων που υπολογίζονται με αντίστροφη του A (μέσω της *Linsolve*) και από τους ασυμπτωτικούς τύπους (1.75). Διατηρούνται σταθερά, όπως στην παράγραφο 1.9.3α, τα χαρακτηριστικά της διάταξης ρ_{fil} , ρ_{cyl} & c_o . Το πλήθος των ρευμάτων γίνεται $N = 60$ και μεταφέρεται το σημείο παρατήρησης στο $\rho = 0.42$. Οι βοηθητικές επιφάνειες τροποποιούνται στις τιμές $\rho_{auxi} = 0.34 < \rho_{cri} \& \rho_{auxo} = 2.47 > \rho_{fil}$.



Εικόνα 21: Λύση του 1.27 στην κρίσιμη περίπτωση, για τα ρεύματα εξωτερικής επιφάνειας.



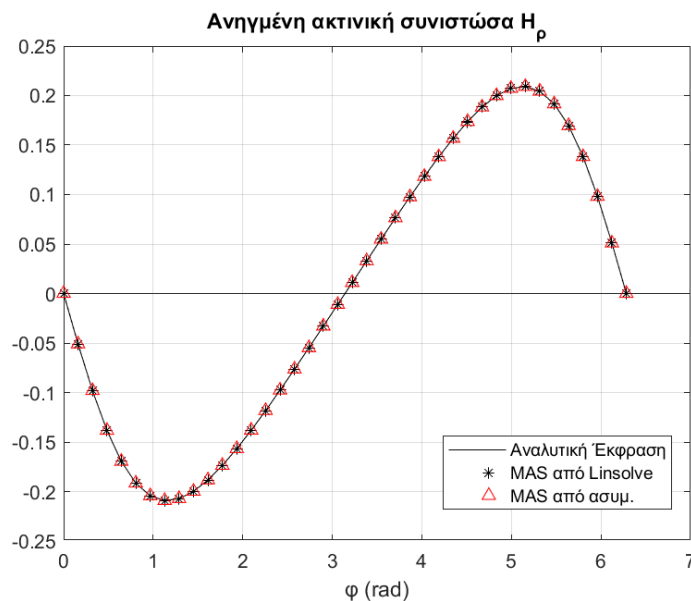
Εικόνα 22: Λύση του 1.27 στην κρίσιμη περίπτωση, για τα I_1^i .

Η μορφή των ρευμάτων είναι πλέον διαφορετική και εμφανίζει ταλαντώσεις γύρω από το 0. Οι ταλαντώσεις είναι πιο έντονες στα σημεία που «φωτίζονται» περισσότερο από το ρεύμα διέγερσης ή ισοδύναμα την πηγή. Οι αριθμητικές λύσεις συμφωνούν με τις ασυμπτωτικές μορφές των ρευμάτων, όχι όμως σε υψηλή στάθμη ακρίβειας. Το σφάλμα στην εικόνα 21 βρίσκεται στο 2^ο δεκαδικό ψηφίο μεταξύ της αριθμητικής (*Linsolve* & *DFT*) λύσης για τα ρεύματα και εκείνης που υπολογίζεται απευθείας από την (1.75). Παράγεται όμως το ίδιο μαγνητικό πεδίο και από τα 3 σύνολα ρευμάτων? Είναι λογικό να αναμένουμε κάτι τέτοιο?

Η κατάσταση είναι ίδια και στην εσωτερική

βοηθητική επιφάνεια, με τη διαφορά πως εκεί το σφάλμα είναι αρκετά μεγάλο. Βέβαια αυτό είναι αναμενόμενο καθώς η εσωτερική επιφάνεια «παραβιάζει» περισσότερο την κρίσιμη περιοχή, δηλαδή ισχύει $\frac{\rho_{cri}}{\rho_{auxi}} > \frac{\rho_{auxo}}{\rho_{fil}}$. Η επιφάνεια αυτή θα καθορίσει και τον αριθμό κατάστασης του πίνακα A. Από την ρουτίνα *cond()* της Matlab®, υπολογίζεται πως $\kappa_A = 2.484e^{+15}$, ο οποίος είναι αρκετά μεγάλος. Αύξηση του N, μείωση του ρ_{auxi} ή αύξηση του ρ_{auxo} είναι ικανή να προκαλέσει μη-προβλέψιμα σφάλματα. Η εκτίμηση (1.65) δίνει $\kappa_A > 8.1502e^{+14}$ (3.044 φορές πάνω από το όριο).

Η εξάρτηση του σφάλματος από τον αριθμό κατάστασης του Λ προφανώς συνεπάγεται και εξάρτηση από όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους και κυρίως του πλήθους των ρευμάτων. Όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα οι ταλαντώσεις που εμφανίζονται είναι πάρα πολύ έντονες με το πλάτος τους στην εσωτερική επιφάνεια να αγγίζει το 6000 και στην εξωτερική το 40. Είναι πολύ σημαντικό να σημειωθεί πως οι ταλαντώσεις **πρέπει** να υπάρχουν στο σύστημα και δεν οφείλονται σε ατελείς υπολογισμούς, πεπερασμένο μήκος λέξης ή ατελές hardware [5][6][7]. Το σφάλμα που υφίσταται μεταξύ των ασυμπτωτικών μορφών των ρευμάτων και των αριθμητικών λύσεων που παρέχεται από τον υπολογιστή, οφείλεται στο ασθενές του πίνακα κατάστασης. Ας σημειωθεί πως ο αριθμός κατάστασης ενσαρκώνει την έννοια του σχετικού σφάλματος και για αυτό τα μεγαλύτερα απόλυτα σφάλματα εμφανίζονται στις μεγαλύτερες κατά πλάτος πηγές.

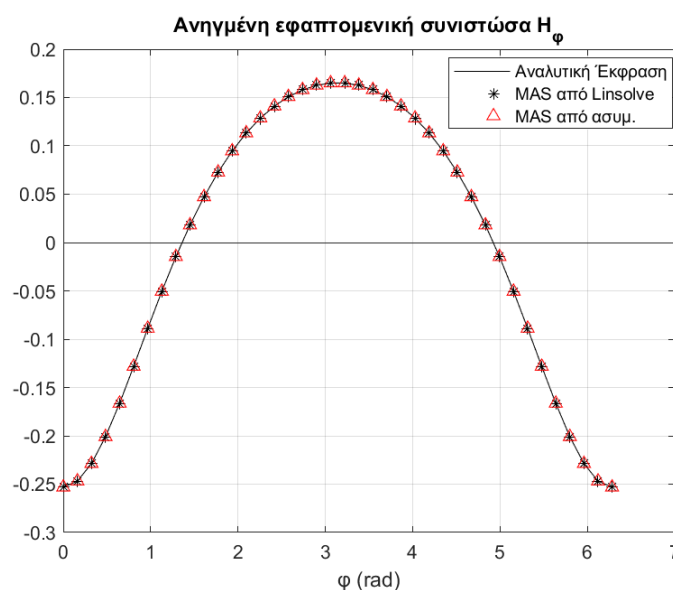


Εικόνα 23: $H_\rho(\varphi)$ για $\rho = 0.42$, με 2 μεθόδους.

Στην εικόνα 23 απεικονίζεται η υπολογιζόμενη συνιστώσα ρ της έντασης του μαγνητικού πεδίου, $H_\rho(\rho = 0.42, \varphi)$. Τα ρεύματα, ακόμα και μολυσμένα με σφάλματα, παράγουν το ορθό μαγνητικό πεδίο, κάτι που δεν ήταν καθόλου αναμενόμενο. Η MAS στην κυκλική γεωμετρία εμφανίζει ευρωστία ως προς τα υπολογιστικά σφάλματα. Το σφάλμα μεταξύ προσεγγιστικού πεδίου και αναλυτικού είναι παρά πολύ μικρό, της τάξης του $1e^{-13}$, αλλά οι καμπύλες απόλυτου σφάλματος δείχνουν πως τα ασυμπτωτικά, που δεν περιέχουν υπολογιστικά σφάλματα όπως τα αριθμητικά ρεύματα, προσεγγίζουν με τον ίδιο τρόπο

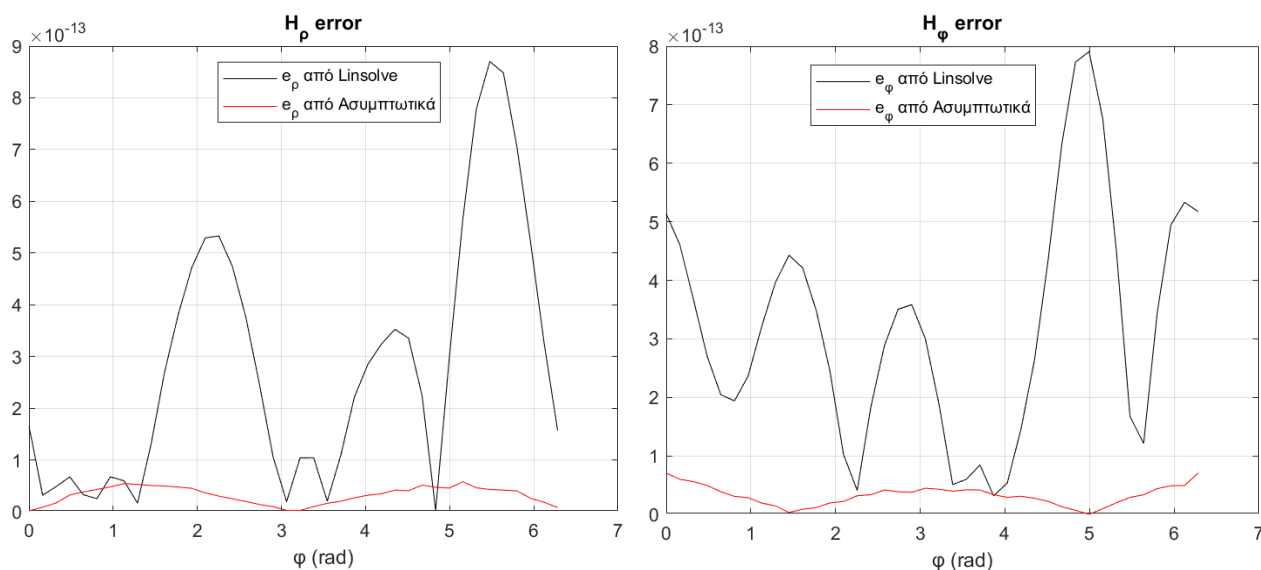
το αναλυτικό μαγνητικό πεδίο. Προφανώς,

αντίστοιχα είναι τα αποτελέσματα και οι εξηγήσεις και για την εφαπτομενική συνιστώσα του $\vec{H}$.



Εικόνα 24: $H_\varphi(\varphi)$ για $\rho = 0.42$, με 2 μεθόδους.

Οι εικόνες 25 & 26 δείχνουν το απόλυτο της διαφοράς $|H - H_{linsolve}|$, $|H - H_{ασυμπ}|$ για κάθε συνιστώσα του πεδίου, όπου H η αναλυτική έκφραση του πεδίου.



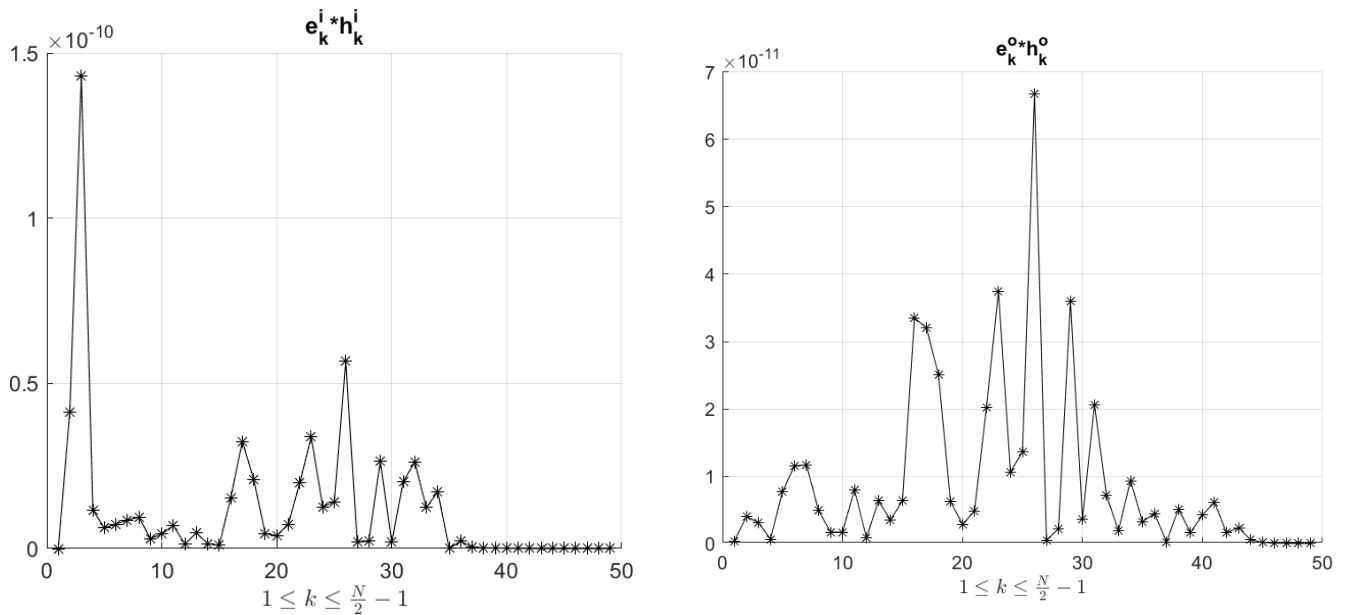
Εικόνα 25 & 26: Απόλυτο σφάλμα μεταξύ αναλυτικής λύσης και αριθμητικής για κάθε συνιστώσα.

Πως εξηγείται η παραγωγή του ορθού πεδίου από ένα σύνολο ρευμάτων που περιέχει σφάλματα? Συμβολίζονται με $I_{l,as}$ τα ασυμπτωτικά ρεύματα και με $I_{l,e}$ τα ρεύματα που παρέχει η ρουτίνα linsolve. Τότε θα υπάρχει κάποιο διάνυσμα σφαλμάτων τέτοιο ώστε :

$$I_{l,as} = I_{l,e} + e_l$$

Ο DFT του σφάλματος $e_k = DFT\{e_l\}$, διέρχεται από τα φίλτρα $h_k = x^k \sigma_k + x^{N-k} \sigma_{N-k}$ τα οποία και καταπιέζουν την επίδραση του, όπως βλέπουμε αριθμητικά. Έτσι γίνεται αντιληπτός ο μηχανισμός διάδοσης του σφάλματος της ενδιάμεσης λύσης, $I_{l,e}$ στην τελική λύση που είναι το $\vec{H}$. Επιλέγεται $N = 100$, $\rho_{auxi} = 0.34$, $\rho_{auxo} = 2.47$, $c_o = 4$ ενώ παράλληλα τοποθετείται το σημείο παρατήρησης σε απόσταση $\rho = 0.97$ & $\rho = 1.03$ για τις αντίστοιχες περιοχές, όπου αναμένουμε τα σφάλματα να είναι εντονότερα.

Σε πρώτη φάση, από την αναλυτική λύση φαίνεται πως η ένταση του μαγνητικού πεδίου κυμαίνεται μεταξύ $0.1 < \|\vec{H}\| < 1$, στα σημεία (κύκλοι στην πραγματικότητα) που αναφέρθηκαν. Τα αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα για την εξωτερική και εσωτερική περιοχή είναι $e_k^i * h_k^i$ & $e_k^o * h_k^o$, όπου $x_i = \frac{\rho_{auxi}}{\rho_{εξ}} < 1$, $x_o = \frac{\rho_{εσ}}{\rho_{auxo}} < 1$, όπως δηλαδή εμφανίζονται και κατά τον υπολογισμό των $A_{N,MAS}^{1,2}$, και για τις παραπάνω ακραίες περιπτώσεις ($cond(A) = 1.4903e^{+21}$) απεικονίζονται στις εικόνες 27 & 28.



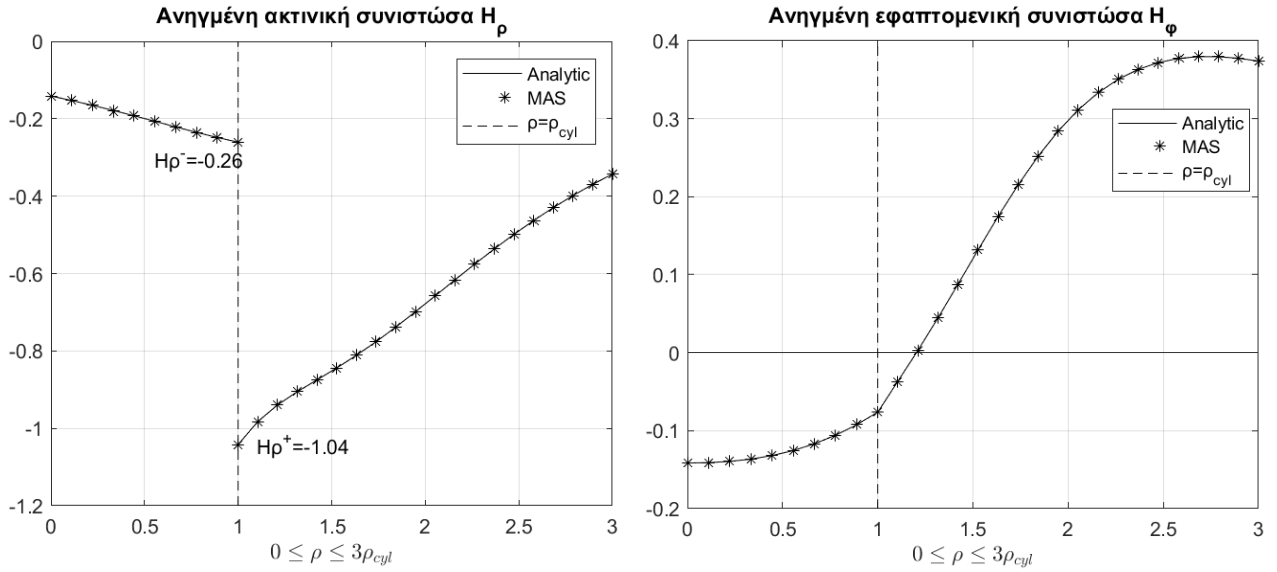
Εικόνα 27 & 28: Φύση και τάξη μεγέθους του σφάλματος που *διαδίδεται* στην τελική λύση από τα σφάλματα στον υπολογισμό των συνοριακών δεδομένων (boundary data).

Όπως φαίνεται στην εικόνα 25 & 26, το τελικό αποτέλεσμα $\bar{\mathbf{H}}_{N,MAS}^{1,2}$, που είναι και το επιθυμητό «αντιλαμβάνεται» σφάλματα της τάξεως $1e^{-11}$, ενώ τα αντίστοιχα σφάλματα στη λύση του (1.27) είναι τραγικά μεγαλύτερα, πέραν των δεκαδικών ψηφίων όπως παρατηρείται στις εικόνες 21 & 22. Η εξήγηση πίσω από αυτό το φαινόμενο δίνεται στις εργασίες [18][19], στις οποίες ουσιαστικά αποδεικνύεται πως η 2-νόρμα του σφάλματος $\|\delta \mathbf{I}_{MAS}\|_2$, το οποίο διατάρασει το $I_{MAS} \rightarrow I_{MAS} + \delta I_{MAS}$, είναι μη φραγμένη και δύναται να λάβει ακραία μεγάλες τιμές. Παράλληλα όμως, η άπειρη νόρμα του σφάλματος στην τελική λύση $\|\mathbf{A}^{1,2} - \mathbf{A}_{N,MAS}^{1,2}\|_\infty$ είναι φραγμένη και δε μπορεί να λάβει οσοδήποτε μεγάλες τιμές. Τα συμπεράσματα των εργασιών [18][19] ισχύουν για πρόβλημα Laplace/Dirichlet, αλλά πιστεύεται πως μεταφέρονται και στο γενικότερο πρόβλημα. Μια ένδειξη υπέρ της υπόθεσης αυτής αποτελεί η παραπάνω αριθμητική παρατήρηση, η οποία ισχύει σε όλο το χώρο λόγω της ανάλυσης στη χειρότερη περίπτωση.

Στις [18][19] εκτελείται ουσιαστικά μια ανάλυση χειρότερης περίπτωσης (*worst case analysis*), όπως ακριβώς γίνεται και με τις τελευταίες εξισώσεις. Η αριθμητική λύση που παρέχει η MAS στο συγκεκριμένο πρόβλημα, είναι εξίσου «εύρωστη» ή αναισθητη, υπό την έννοια ότι παράγει ορθό τελικό αποτέλεσμα παρουσία σφαλμάτων στα ενδιάμεσα αποτελέσματα, με την ικανότητα της καταπίεσης του σφάλματος από το «φίλτρο» $\mathbf{h}_k^{i^0}$.

Τονίζεται πως το $\mathbf{e}_k$ είναι σφάλμα το οποίο προκαλείται λόγω πεπερασμένου μήκους λέξης & πεπερασμένης ακρίβειας (σφάλματα αναπαράστασης, απορρόφησης κ.λ.π). Το σφάλμα αυτό διαδίδεται στο I_{MAS} , μέσω των συστημάτων (1.26) & (1.37) και τελικά από τον υπολογιστή ο χρήστης λαμβάνει κάποιο $I_{MAS}^* = I_{MAS} + \delta I_{MAS}$. Στη συνέχεια κατά τον υπολογισμό της έντασης μαγνητικού πεδίου, αντίστοιχα, λαμβάνεται $(\bar{\mathbf{H}}^{1,2})^* = \bar{\mathbf{H}}_{\square}^{1,2} + \delta \bar{\mathbf{H}}$. Έτσι, δεν πρόκειται για το φυσιολογικό σφάλμα της προσέγγισης της αναλυτικής λύσης από το πεπερασμένο ανάπτυγμα σε θεμελιώδεις λύσεις.

Τέλος, για την πληρότητα και την εγκυρότητα των αριθμητικών αποτελεσμάτων, παρουσιάζεται και η συμπεριφορά της MAS λύσης συναρτήσει της απόστασης ρ , θεωρώντας σταθερή γωνία $\varphi = \pi/4$.



Εικόνα 29 & 30 : Συμπεριφορά του $\vec{H}_{N,MAS}^{1,2}$ σε αμφότερες τις περιοχές, για την «ήπια» περίπτωση της παραγράφου 1.9.1α.

Η λύση MAS οφείλει να σέβεται τις συνοριακές συνθήκες που έπονται των εξισώσεων Maxwell. Στην εικόνα 30, η λύση συμπεριφέρεται όπως της απαιτήθηκε για την εξαγωγή του συστήματος (1.27), δηλαδή η εφαπτομενική συνιστώσα είναι συνεχής ($\hat{\rho} \times (\vec{H}^2 - \vec{H}^1) = 0, \rho = \rho_{cyl}$). Παράλληλα, εφόσον δεν υπάρχει κάποιος φυσικός νόμος που να υποχρεώνει και την ομαλή συμπεριφορά της έντασης του μαγνητικού, καθώς το σημείο διέρχεται διαμέσου της συνοριακής επιφάνειας, αμφότερες οι λύσεις είναι τοπικά μη-παραγωγίσιμες ή καθολικά τμηματικά λείες.

Επιπροσθέτως, η MAS λύση οφείλει να ικανοποιεί και την συνέχεια των κάθετων στην διαχωριστική επιφάνεια συνιστωσών της μαγνητικής επαγωγής, δηλαδή :

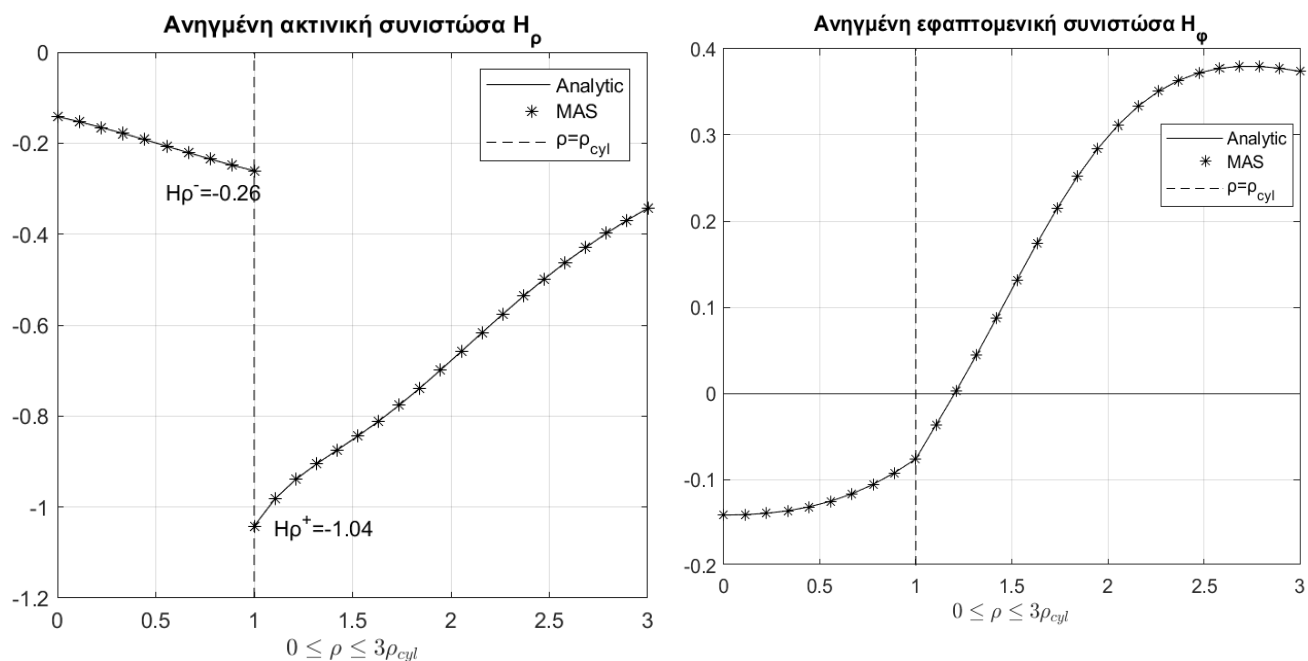
$$\hat{\rho} \cdot (\vec{B}^2 - \vec{B}^1) = 0 \Rightarrow \mu_2 H_\rho^2 = \mu_1 H_\rho^1, \rho = \rho_{cyl}$$

Ισοδύναμα, η τελευταία σχέση ξαναγράφεται :

$$H_\rho^2 = c_o H_\rho^1, \rho = \rho_{cyl}$$

Στην εικόνα 29 αναγράφονται οι οριακές τιμές $H_\rho^+ = -1.04, H_\rho^- = -0.26$ που αντιστοιχούν στις H_ρ^2, H_ρ^1 . Στην παράγραφο 1.9.1α επιλέχθηκε $c_o = 4$, επομένως ο νόμος ικανοποιείται πλήρως.

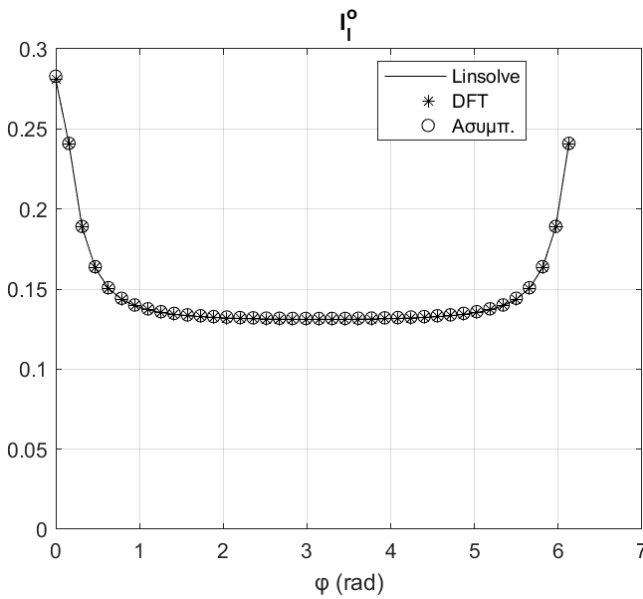
Απομένει να δειχθούν τα αντίστοιχα στην «κρίσιμη» περίπτωση της παραγράφου 1.9.1β. Υπενθυμίζεται πως τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης και ο c_o είναι ίδια με της «ήπιας» περίπτωσης, ενώ οι σχεδιαστικοί παράγοντες είναι $N = 60, \rho_{auxi} = 0.34, \rho_{auxo} = 2.47$. Εκτελείται η ίδια διαδικασία λαμβάνοντας υπόψιν της παραπάνω αλλαγές και τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στις εικόνες 31 & 32.



Εικόνα 31 & 32: Η κατάσταση είναι ακριβώς ίδια και για την κρίσιμη περιοχή, στηρίζοντας περαιτέρω το επιχείρημα περί αναισθησίας/ευρωστίας της MAS στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

1.8.2α Εσωτερικό Πρόβλημα $\rho_{cyl} > \rho_{fil}$, «ήπια περίπτωση»

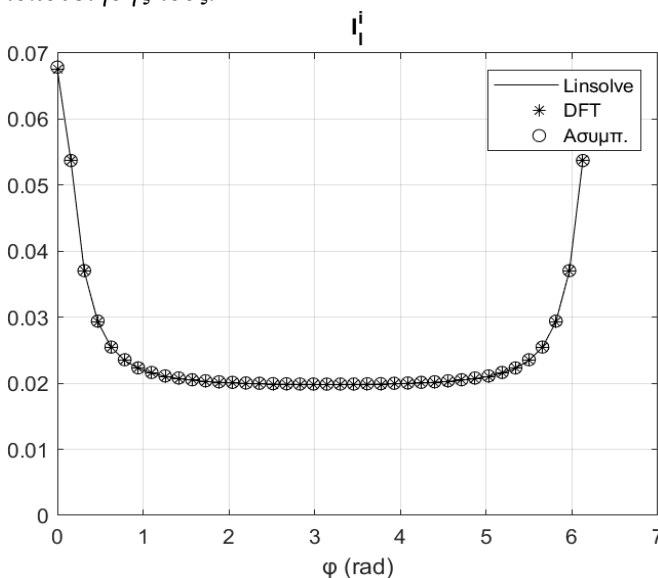
Στην παρούσα παράγραφο επιβεβαιώνονται πειραματικά οι θεωρητικές προβλέψεις που έγιναν για αμφότερες τις εκδοχές του κυκλικού προβλήματος διάδοσης. Σε πρώτη ανάλυση σχεδιάζεται η MAS έτσι ώστε οι επιφάνειες να **μην** περιέχουν τα ανώμαλα σημεία των αναλυτικών επεκτάσεων των πραγματικών λύσεων, στις περιοχές στις οποίες προορίζονται να προσεγγίσουν το μαγνητικό πεδίο. Η τελευταία πρόταση, ουσιαστικά δίνει τη γενική συνθήκη, υπό την οποία το σύνολο των διακριτών πηγών θα συγκλίνει σε μια συνεχή κατανομή, κάτι το οποίο πιστεύεται πως ισχύει/μεταφέρεται [5][6][7][14, p.112] σε οποιαδήποτε διάταξη (χωρίς κυκλική συμμετρία για παράδειγμα). Τα χαρακτηριστικά μιας διάταξης που ικανοποιεί την προηγούμενη συνθήκη είναι $N = 40, \rho_{cyl} = 5.32, \rho_{fil} = 3.42, \rho_{auxi} = 4.35, \rho_{auxo} = 6.43$.



Ο δείκτης αντίθεση των υλικών τίθεται ίσος με $c_i = 7.61$. Για τα αριθμητικά δεδομένα ισχύει $\rho_{auxi} > \rho_{fil}$ & $\rho_{auxo} < \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}} = \rho_{cri}$, επομένως βάσει των εξισώσεων (1.55) & (1.56), προβλέπεται πως ανήκουν στην «ήπια» περίπτωση. Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, η ασυμπτωτική προσέγγιση που λαμβάνεται από την εξίσωση (1.75α) με τις κατάλληλες αλλαγές, δηλαδή $\alpha = \frac{\rho_{fil}}{\rho_{auxi}}$ για τα ρεύματα της επιφάνειας ρ_{auxi} και $\alpha = \frac{\rho_{auxo}}{\rho_{cri}}$ για την εξωτερική βοηθητική επιφάνεια. Η διαφορά των ρευμάτων από διαφορετικές μεθόδους είναι στο 3^ο δεκαδικό ψηφίο, αλλά γενικά δεν

Εικόνα 33: Ρεύματα $\frac{I_1^0}{I}$, συναρτήσει της πολικής γωνίας φ ξεπερνάει το 4^ο δεκαδικό ψηφίο.

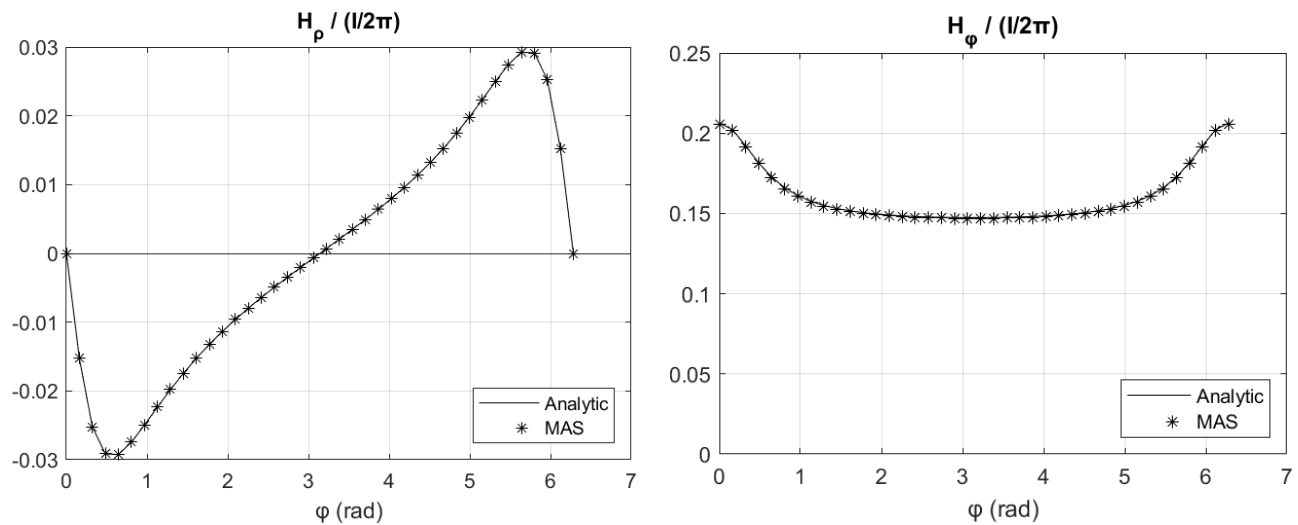
τοποθέτησής τους.



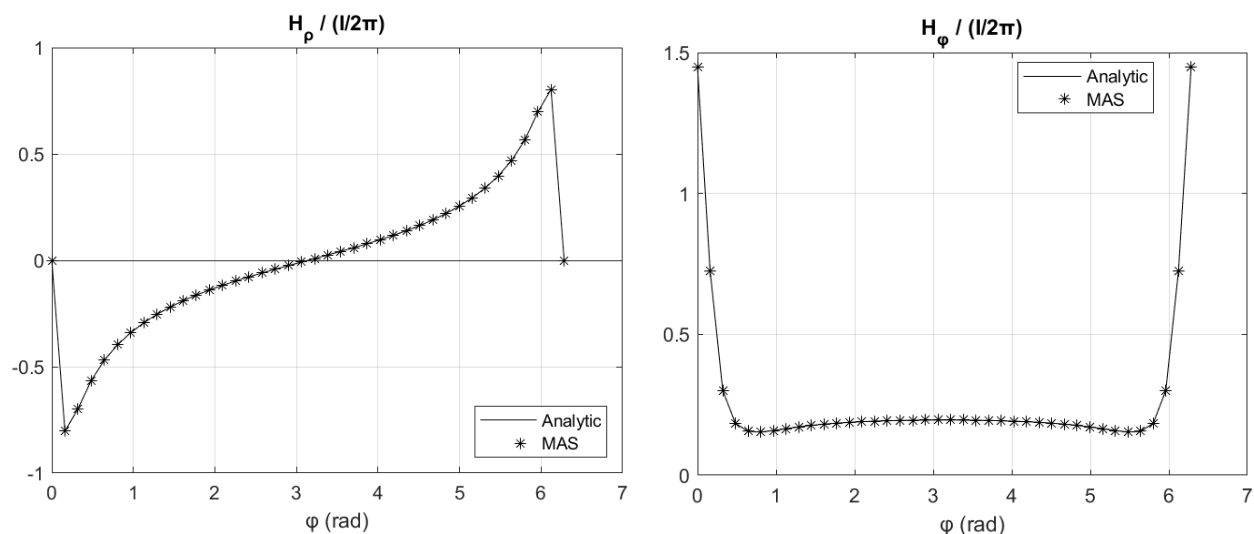
Ίδια είναι και η κατάσταση, όσον αφορά τα ρεύματα τα οποία ρέουν στην εσωτερική επιφάνεια. Τα ρεύματα από τις αριθμητικές λύσεις διαφέρουν από εκείνα των ασυμπτωτικών προσεγγίσεων στο 4^ο δεκαδικό ψηφίο για όλα τα ρεύματα, για όλες τις γωνίες. Εάν ήθελε κανείς να βελτιώσει αυτή τη διαφορά μπορεί να αυξήσει το N ή να μεταβάλλει του λόγους $x_0 < 1, x_i < 1$ των εξισώσεων (1.53), καθώς οι ασυμπτωτικές προσεγγίσεις βασίζονται στο βάρος που κατέχουν οι όροι x_i^N, x_0^N στις εξισώσεις ακριβείς εξισώσεις για τις πηγές MAS (βλ. σελ. 24, 25).

Εικόνα 34: Ρεύματα I_1^1/I , συναρτήσει της πολικής γωνίας φ .

Η παραπάνω πληροφορία αναφέρεται αποκλειστικά για την πιστοποίηση των αποτελεσμάτων των προηγούμενων παραγράφων και όπως γίνεται αντιληπτό, δε θα είναι διαθέσιμη σε μια γενικότερη διάταξη στην οποία εφαρμόζεται MAS. Όπως και πριν, συγκρίνονται τώρα τα μαγνητικά πεδία που παράγουν οι βοηθητικές πηγές με το πραγματικό πεδίο της διάταξης.



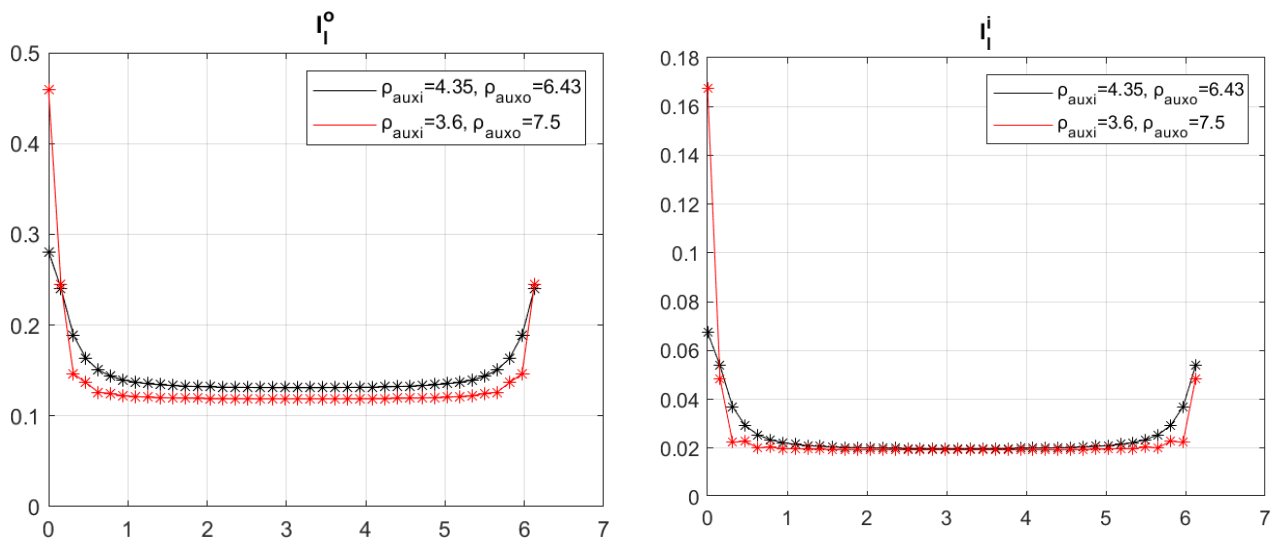
Εικόνα 35 & 36: Υπολογισμός έντασης μαγνητικού πεδίου, παραγόμενου από τις βοηθητικές πηγές (*) και σύγκριση με την αναλυτική λύση (-), σε ένα κύκλο ακτίνας, $\rho = 1.17\rho_{cyl}$.



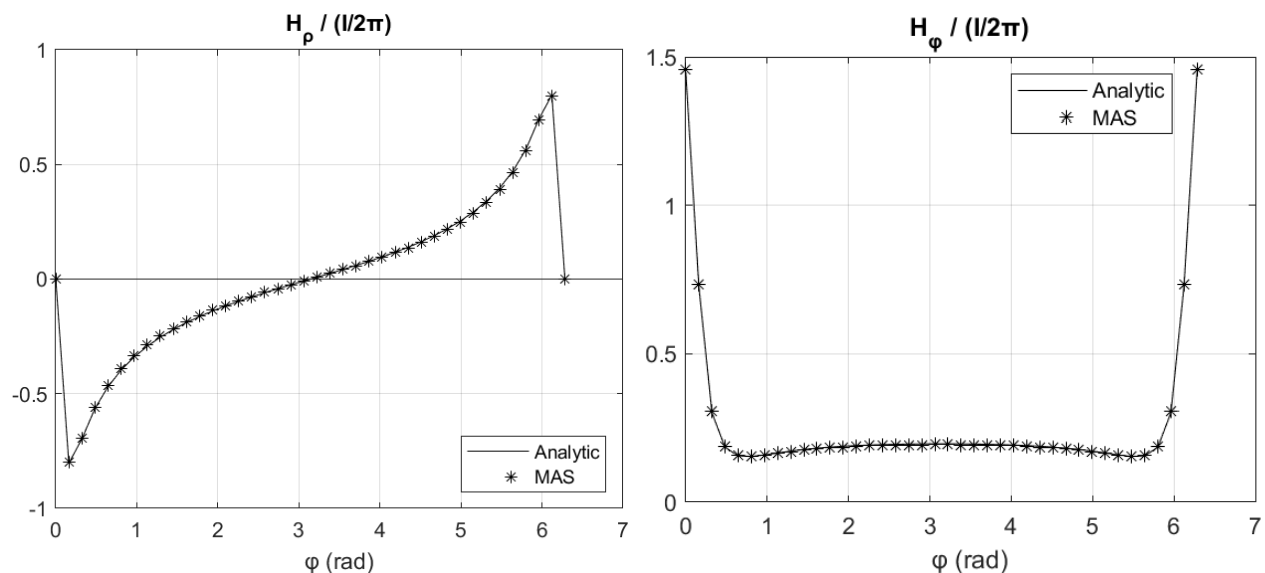
Εικόνα 37 & 38: Υπολογισμός έντασης μαγνητικού πεδίου, παραγόμενου από τις βοηθητικές πηγές (*) και σύγκριση με την αναλυτική λύση (-), σε ένα κύκλο ακτίνας, $\rho = 0.76\rho_{cyl}$.

Όπως αναμένει κανείς, λαμβάνοντας υπόψιν πως το εσωτερικό με το εξωτερικό πρόβλημα μοιράζονται αρκετές ιδιότητες, το σφάλμα προσέγγισης του αναλυτικού μαγνητικού πεδίου από τη MAS, για $N = 40$ είναι της τάξης του $1e^{-5}$, όπως ακριβώς βρίσκεται για το εξωτερικό πρόβλημα για ίδιο πλήθος βοηθητικών πηγών. Η ανάλυση της υποπαραγράφου **1.8.2** είναι συντομότερη από εκείνη της **1.8.1**, καθώς τα αποτελέσματα μεταφέρονται αυτούσια στο εσωτερικό πρόβλημα, με απλές αλλαγές παραμέτρων, όπως για παράδειγμα στις εξισώσεις **(1.90)** (που οδηγούν στις **(1.93)**, **(1.94)**) ή την εξίσωση εκτίμησης σφάλματος προσέγγισης (βλ. σελ. 51).

Αναμενόμενα είναι επίσης τα αποτελέσματα όσον αφορά τη μοναδικότητα των επιφανειών ρ_{auxi} & ρ_{auxo} . Κατά την διατύπωση της MAS σε αμφότερα τα προβλήματα, δεν εισάγεται κανένας περιορισμός για αυτές, επομένως και εδώ, με διαφορετικά & ισάριθμα σύνολα ρευμάτων MAS, θα παράγεται το ίδιο μαγνητικό πεδίο παντού στο χώρο, το οποίο θα συγκλίνει γρήγορα (με εκθετικό ρυθμό [18][19], σελ. 51) στην λύση του προβλήματος (1.13) – (1.14) (BC1) (BC2). Στις επόμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται τα ρεύματα που λαμβάνονται από το (1.36) για $\rho_{auxi} = 5.$, $\rho_{auxo} = 6.94$ και το αντίστοιχο παραγόμενο μαγνητικό πεδίο :



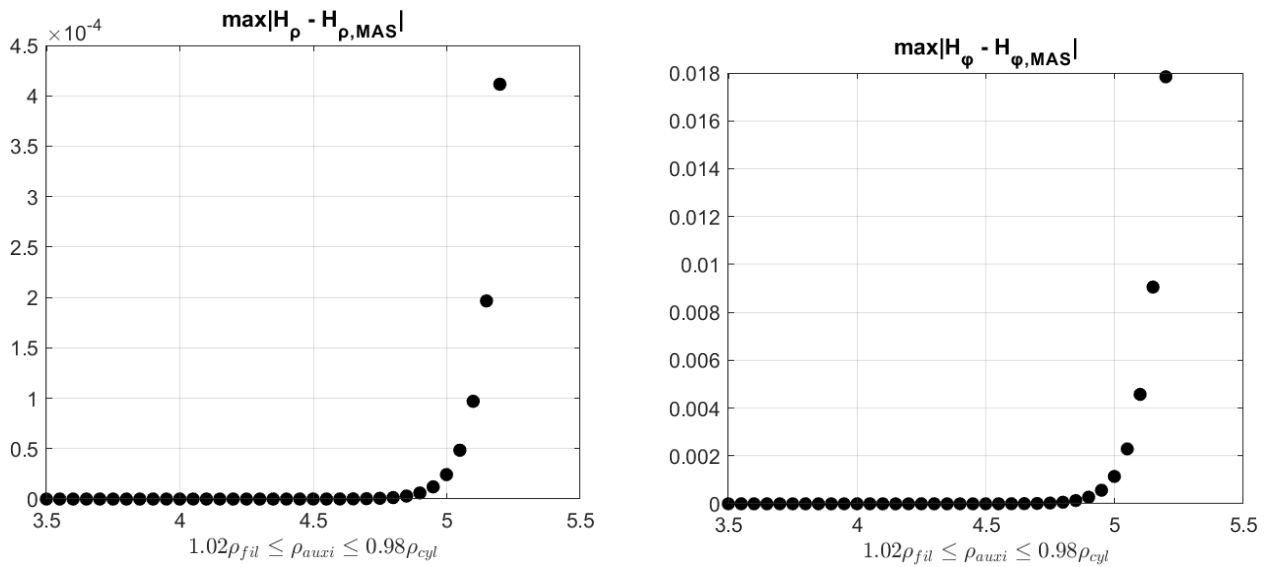
Εικόνες 39 & 40: Δύο διαφορετικές λύσεις του συστήματος του (1.36), οι οποίες παράγουν το σωστό μαγνητικό πεδίο, αποδεικνύοντας το μη-μονοσήμαντο των βοηθητικών επιφανειών.



Εικόνα 41 & 42: Ένταση μαγνητικού πεδίου για $\rho = 0.76\rho_{cyl}$ παραγόμενη από τα κόκκινα ρεύματα των εικόνων 39 & 40.

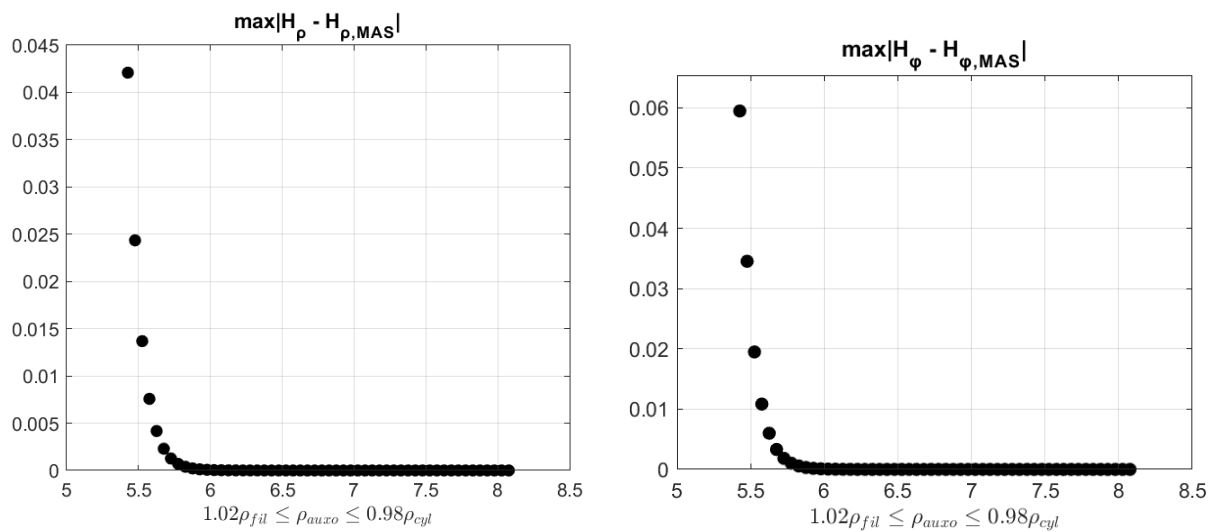
Η θεωρία επιβεβαιώνεται με τα παραπάνω αριθμητικά πειράματα. Αντίστοιχα είναι τα αποτελέσματα και για ένα σημείο της περιοχής του απέραντου υλικού μ_2 .

Η ανάλυση τώρα επανέρχεται σε μια από τις υποθέσεις της παραγράφου **1.8**, βάσει της οποίας προβλέπεται πως η τοποθέτηση των βοηθητικών επιφανειών κοντά στο σύνορο $\rho = \rho_{cyl}$, παράγει τα μεγαλύτερα σφάλματα προσέγγισης. Αυτό συμβαίνει όταν η βοηθητική επιφάνεια με ακτίνα ρ_{auxi} λάβει τη μεγαλύτερη τιμή που της επιτρέπεται, δηλαδή $\rho_{auxi} \downarrow \rho_{cyl}$. Ακριβώς αυτό παρατηρείται αριθμητικά στις εικόνες 43 & 44, όταν όλες οι παράμετροι παραμείνουν σταθερές και η ρ_{auxi} μεταβάλλεται από $1.02\rho_{fil}$ έως $0.98\rho_{cyl}$:



Εικόνα 43 & 44: Μέγιστη τιμή του απόλυτου σφάλματος στην ένταση του μαγνητικού, συναρτήσει της ακτίνας της βοηθητικής ρ_{auxi} , για $\rho = 2.16\rho_{cyl}$.

Αντίστοιχα είναι και τα αποτελέσματα, όσον αφορά την εξωτερική βοηθητική επιφάνεια, καθώς και για την περιοχή 1, υλικού μ_1 . Ξανά, παρατηρείται πως το σφάλμα γίνεται εντονότερο όταν $\rho_{auxo} \downarrow \rho_{cyl}$ από την τελευταία ανίσωση, όπως άλλωστε απεικονίζεται στις παρακάτω εικόνες.

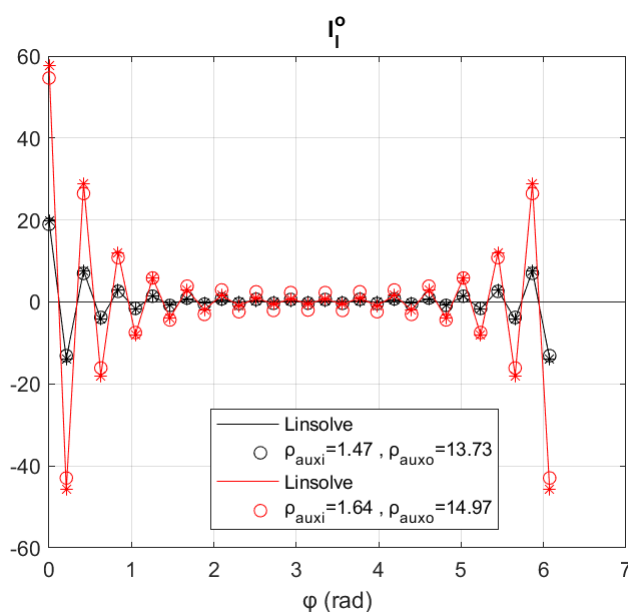


Εικόνες 45 & 46: Μέγιστο απόλυτο σφάλμα μαγνητικού πεδίου υπολογισμένου για $\rho = 0.63\rho_{cyl}$ συναρτήσει της εξωτερικής βοηθητικής επιφάνειας.

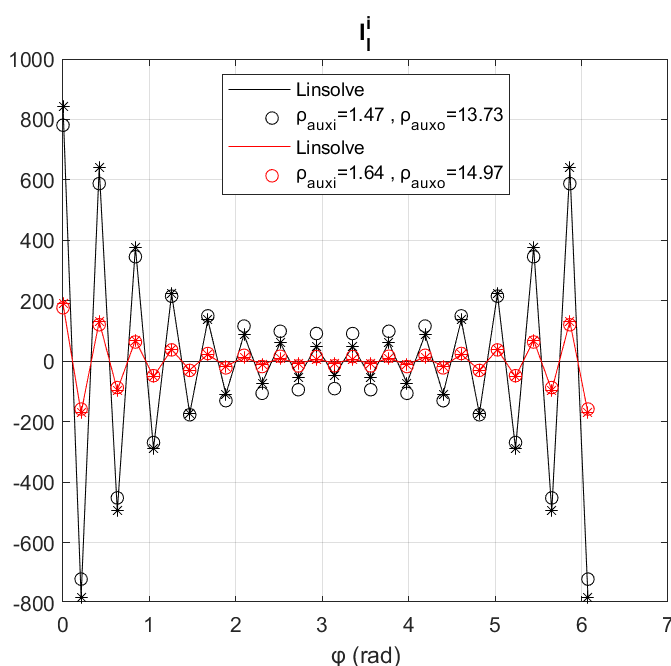
Ίδια ακριβώς αποτελέσματα λαμβάνει κανείς και για το εξωτερικό πρόβλημα διάδοσης.

1.8.2β Εσωτερικό πρόβλημα $\rho_{cyl} > \rho_{fil}$, «κρίσιμη» περίπτωση

Ως επόμενο βήμα στην αριθμητική επιβεβαίωση της θεωρίας, εξετάζεται η περίπτωση όπου καθεμία από τις βοηθητικές επιφάνειες τοποθετούνται εντός των «κρίσιμων» περιοχών. Αυτές, μπορούν να βρεθούν από τις ασυμπτωτικές εκφράσεις (1.54) – (1.55) στην περίπτωση που αυτές αποκλίνουν, δηλαδή $\rho_{auxi} < \rho_{fil}$ & $\rho_{auxo} > \rho_{cri}$. Έτσι, βάσει της αναλογίας των δύο προβλημάτων, και των προηγούμενων συμπερασμάτων, προβλέπεται πως και στην κρίσιμη περίπτωση, το δυναμικό/πεδίο που παράγεται από τα αποκλίνοντα ρεύματα θα είναι και το ορθό. Χρησιμοποιούνται τώρα, για γενικότητα, ψευδοτυχαίοι αριθμοί $\rho_{cyl} = 5.48$, $\rho_{fil} = 2.99$, $c_i = 9.57$, παραγόμενοι από τη ρουτίνα *rand()* της Matlab®. Με την ίδια μέθοδο, επιλέγεται $\rho_{auxi} = 1.47$ & $\rho_{auxo} = 13.73$ και τέλος επιλέγεται $N = 30$.



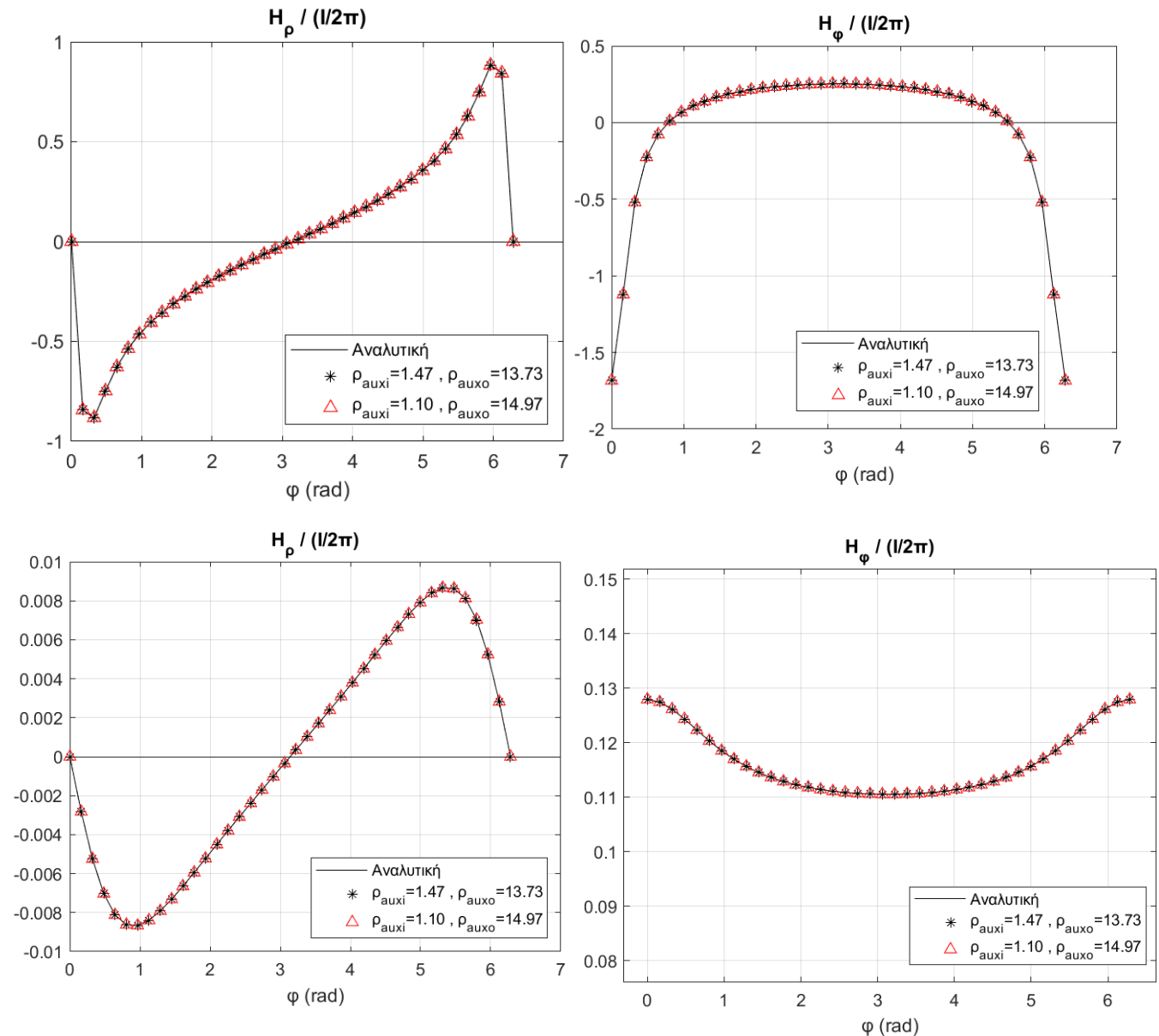
Λαμβάνονται 3 λύσεις με 3 διαφορετικές μεθόδους, όπως και στις προηγούμενες παραγράφους. Αν και ο αριθμός κατάστασης είναι σχετικά μικρός ($cond(A) = 9.29e^{+09}$), οι λύσεις που παρέχονται από το λογισμικό Matlab® εμφανίζουν απόκλιση από την ασυμπτωτική μορφή των ρευμάτων. Τα μέγιστα απόλυτα σφάλματα μεταξύ των ρευμάτων είναι 59.22 για τα εσωτερικά και 0.7566 για τα εξωτερικά. Σε σχετική μορφή, τα σφάλματα είναι -8.21% και -5.77%. Οι αποκλίσεις αυτές είναι αρκετά μεγάλες και εν γένει θα μπορούσαν να **διαδοθούν**, χρησιμοποιώντας το λεξιλόγιο της θεωρίας σφαλμάτων, έως και την τελική λύση.



Κάτι τέτοιο όμως, στην περίπτωση του προβλήματος διάδοσης με κυκλική συμμετρία δε συμβαίνει, όπως εξηγήθηκε και στην παράγραφο 1.9.1, στα πλαίσια του φαινομένου της ευρωστίας/αναισθησίας. Επαναλαμβάνεται πως η αναισθησία της MAS ως προς τα σφάλματα που εμφανίζονται στις πηγές ρευμάτων, μπορεί να εξηγηθεί μέσω της σχέσης για τα $S_N^{1,2}$. Σε αυτές, περιέχονται τα «φάσματα» των ρευμάτων MAS, με αποτέλεσμα να καταπιέζεται από το λεγόμενο «φίλτρο» $\mathbf{h}_k^{i,0}$ του εσωτερικού προβλήματος. Το τελευταίο παρατηρείται αριθμητικά.

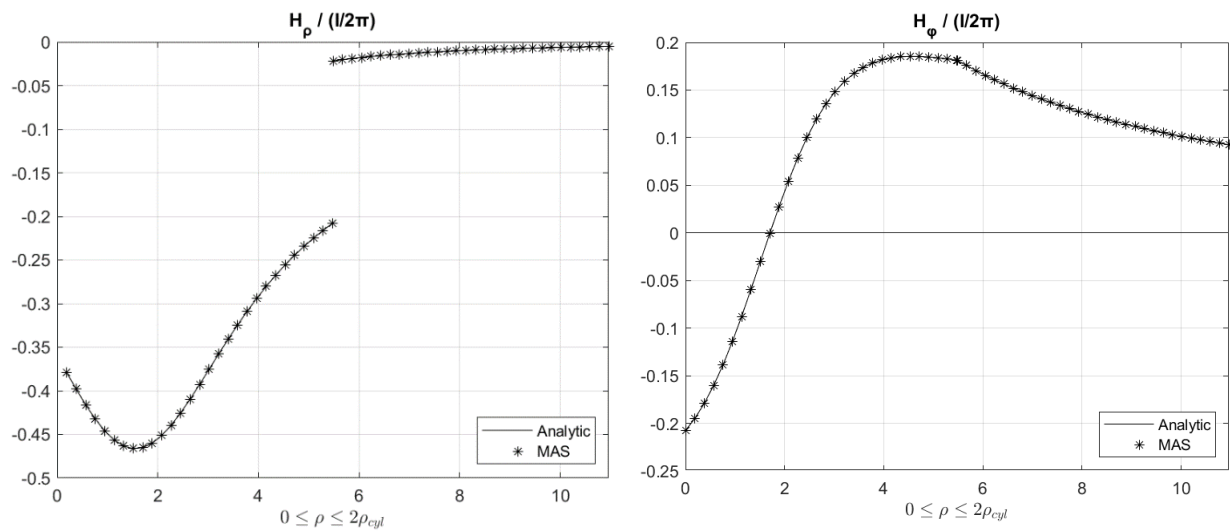
Εικόνα 47 & 48: Λύση του συστήματος (1.36) με 3 διαφορετικούς τρόπους, όπως παρουσιάζονται στο υπόμνημα. Αν και ο πίνακας A έχει ανεκτό αριθμό κατάστασης, τα αριθμητικά σφάλματα είναι παρόντα.

Το επιχείρημα πως η απόκλιση μεταξύ των λύσεων οφείλεται σε αριθμητικά σφάλματα, ίσως μπορεί να υποστηριχθεί περαιτέρω από το μέγεθος του $|H - H_{N,MAS}|$ που εμφανίζει κάθε λύση. Επειδή τα ασυμπτωτικά ρεύματα παράγουν τα μικρότερα σφάλματα ($1e^{-06}$ έναντι $1e^{-08}$), είναι λογικό να υποθέσει κανείς πως τα ρεύματα που παρέχονται από τις άλλες 2 μεθόδους, περιέχουν σφάλματα αριθμητικής φύσεως λόγω της συγκεκριμένης «σχεδίασης» της MAS. Τα παραπάνω αφορούν την ποιοτική ανάλυση της διαφοράς που παρατηρείται στα ρεύματα αλλά η επίδοση όλων των ρευμάτων είναι ικανοποιητική.



Εικόνα 49 - 53: Υπολογισμός μαγνητικού πεδίου για $\rho = 0.43\rho_{cyl}$ (επάνω σειρά) και $\rho = 1.57\rho_{cyl}$, από 2 διαφορετικά και ισάριθμα σύνολα ρευμάτων. Όπως προβλέπει το μη μονοσήμαντο των επιφανειών, αμφότερα τα σύνολα των ρευμάτων προσεγγίζουν με πολύ μεγάλη ακρίβεια την πραγματική λύση.

Για λόγους πληρότητας, παρουσιάζεται και η επίδοση της MAS ως προς την μεταβλητή ρ :



Εικόνα 54 – 55: Αναλυτική και MAS λύση για τα παραπάνω δεδομένα, συναρτήσει της απόστασης. Προφανώς, όπως και στο εξωτερικό πρόβλημα, ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες $c_i H_{2\rho} = H_{1\rho}$ & $H_{2\phi} = H_{1\phi}$.

Κεφάλαιο II : Ελλειπτικό Κυλινδρικό Πρόβλημα Διάδοσης

2.1.1 Διαφορική γεωμετρία του ελλειπτικού κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων

Όπως είναι γνωστό και στη γενική θεωρία των προβλημάτων συνοριακών συνθηκών, η επιλογή του κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων είναι κρίσιμη για την εύρεση της λύσης, αν όχι καθοριστική. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζεται σε αυτό το κεφάλαιο, το οποίο διατυπώνεται αναλυτικά παρακάτω, είναι αρκετά παρόμοιο με το πρόβλημα του Κεφαλαίου 1, μόνο που στη θέση του κυκλικού κυλίνδρου υπάρχει τώρα ένας ελλειπτικός. Προφανώς, η κατάλληλη επιλογή είναι το ομώνυμο σύστημα, το οποίο περιγράφεται από τις εξισώσεις :

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, F \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cosh \xi \cos \eta \\ c \sinh \xi \sin \eta \\ z \end{bmatrix}, c \in (0, +\infty), \xi \in [0, +\infty), \eta \in [0, 2\pi) \quad (2.1)$$

Ο μετασχηματισμός F δεν είναι γραμμικός και επομένως, το σύστημα που ορίζεται δεν είναι καθολικό, αλλά τοπικό (και σωματοπαγές) για κάθε σημείο του χώρου. Όλα τα συστήματα συντεταγμένων ορίζουν ένα σημείο ως τομή 3 χαρακτηριστικών επιφανειών [42, p.131], η μορφή των οποίων εξαρτάται από την F . Το απλούστερο σύστημα, το οποίο είναι το καρτεσιανό, ορίζει ένα σημείο ως τομή 3 κάθετων επιπέδων, τα $x = x_0, y = y_0, z = z_0$. Στην περίπτωση του ελλειπτικού συστήματος, αυτό συμβαίνει μέσω των επιφανειών $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$ & $z = z_0$. Για $\xi = \xi_0$:

$$\left(\frac{x}{c \cosh \xi}\right)^2 = \cos^2 \eta \quad \& \quad \left(\frac{y}{c \sinh \xi}\right)^2 = \sin^2 \eta$$
$$\Rightarrow \left(\frac{x}{c \cosh \xi}\right)^2 + \left(\frac{y}{c \sinh \xi}\right)^2 = 1, z = z_0$$

Παρατηρείται από την τελευταία εξίσωση, πως η επιφάνεια $\xi = \xi_0$ αποτελεί έναν άπειρο κατά μήκος ελλειπτικό κύλινδρο, του οποίου το μήκος εστίας είναι c , όπου c μια προεπιλεγμένη θετική σταθερά, και τα μήκη του μεγάλου και του μικρού ημιάξονα είναι $\cosh \xi$ & $\sinh \xi$ αντίστοιχα. Μεταβάλλοντας το ξ , προκύπτουν ομοεστιακοί ελλειπτικοί κύλινδροι, οι οποίοι καλύπτουν όλο το χώρο. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για το ΠΣΤ που θα αντιμετωπιστεί, καθώς απλοποιεί σημαντικά την έκφραση, αλλά και την εφαρμογή, των συνοριακών συνθηκών.

Με παρόμοιο τρόπο, παρατηρείται πως η επιφάνεια $\eta = \eta_0$ αντιστοιχεί σε έναν επίσης άπειρο υπερβολικό κύλινδρο (κύλινδρος του οποίου η βάση είναι υπερβολή). Η τομή των δύο αυτών κυλίνδρων και του επιπέδου z_0 ορίζουν ένα μοναδικό σημείο στο χώρο, το (ξ_0, η_0, z_0) .

Μια ευρύτερη κλάση συστημάτων, στην οποία ανήκει και το ελλειπτικό, κατέχει την πολύ σημαντική ιδιότητα της ορθογωνιότητας. Αυτό σημαίνει πως η τομή των $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$ & $z = z_0$ γίνεται σε ορθές γωνίες. Ο απλούστερος τρόπος να διαπιστωθεί κάτι τέτοιο είναι να παρατηρηθεί πως ο μετασχηματισμός από το καρτεσιανό στο ελλειπτικό σύστημα, είναι σύμμορφος, γιατί:

$$\zeta = x + jy = c \cosh(\xi + j\eta)$$

Σημείωση: Αρκεί οι κύλινδροι να τέμνονται κάθετα στο τρισδιάστατο σύστημα, καθώς το επίπεδο z_0 τέμνει έτσι και αλλιώς κάθετα και τις δύο επιφάνειες.

Ένας άλλος τρόπος να ληφθεί μια εικόνα για τις τομές των χαρακτηριστικών επιφανειών, είναι μέσω της έκφρασης του διανύσματος θέσης στο νέο σύστημα, πράγμα που θα αποτελέσει τη βάση και για την ανάπτυξη των διαφορικών τελεστών. Έστω λοιπόν, ένα σημείο (x, y, z) και το αντίστοιχο διάνυσμα θέσης :

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = c\cosh\xi\cos\eta\hat{x} + c\sinh\xi\sin\eta\hat{y} + z\hat{z}$$

Από το διάνυσμα θέσης είναι δυνατόν να βρεθούν οι εκφράσεις των στοιχειωδών μηκών, και επομένως και των στοιχειωδών επιφανειών και όγκων. Τα μεγέθη αυτά είναι καίριας σημασίας για την εύρεση των διαφορικών τελεστών. Το τοπικό σύστημα συντεταγμένων ορίζεται από τα ορθογώνια και μοναδιαία διανύσματα, τα οποία είναι κάθετα στις χαρακτηριστικές επιφάνειες του συστήματος:

$$\begin{aligned}\hat{\xi} &= \frac{1}{\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\right\|} \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi} \\ \hat{\eta} &= \frac{1}{\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\right\|} \frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} \\ \hat{z} &= \hat{z}\end{aligned}\quad (2.2)$$

Οι ποσότητες $\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\right\|$, $\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\right\|$ ονομάζονται μετρικοί συντελεστές και έχουν μονάδες μήκους. Στο ελλειπτικό σύστημα προκύπτουν ίσοι μεταξύ τους, πράγμα που απλοποιεί ιδιαίτερα μερικά σχετιζόμενα προβλήματα [43].

$$\lambda(\xi, \eta) = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\right\| = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\right\| = c\sqrt{\cosh^2\xi - \cos^2\eta} \quad (2.3)$$

Παρατηρούμε επίσης πως στην συντεταγμένη που δεν εμφανίζει καμπυλότητα (z), ο μετρικός συντελεστής δεν εξαρτάται από τις χωρικές μεταβλητές και είναι μοναδιαίος.

Το στοιχειώδες μήκος προς κατεύθυνση την κατεύθυνση $\hat{\tau}$ μπορεί να βρεθεί αν σκεφτεί κανείς πως ορίζεται μέσω της σχέσης [42, p.134] :

$$dl = \|\vec{r}(\tau + d\tau) - \vec{r}(\tau)\| = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\tau}\right\| d\tau$$

Έτσι για κάθε σημείο του χώρου (ξ, η, z) τα στοιχειώδη μήκη προς τις ορθογώνιες κατευθύνσεις είναι [42, p.139][43]:

$$\begin{aligned}dl_\xi(\xi, \eta) &= \lambda(\xi, \eta)d\xi \\ dl_\eta(\xi, \eta) &= \lambda(\xi, \eta)d\eta \\ dl_z &= dz\end{aligned}\quad (2.4)$$

Τα αντίστοιχα στοιχειώδη εμβαδά επί των χαρακτηριστικών επιφανειών ορίζονται μέσω των σχέσεων (καθώς ο χώρος που αντιμετωπίζεται είναι τοπικά ευκλείδειος) :

$$\begin{aligned}dS_{\xi} &= dl_{\eta} dl_z \\dS_{\eta} &= dl_{\xi} dl_z \\dS_z &= dl_{\xi} dl_{\eta}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Ο στοιχειώδης όγκος προκύπτει από το γινόμενο των στοιχειωδών επιφανειών, $dV = dS_{\xi} dS_{\eta} dS_z$.

2.1.2 Εκφράσεις διαφορικών τελεστών & διανυσματική εξίσωση Laplace

Ο απλούστερος διαφορικός τελεστής είναι η κλίση (*gradient*) ο οποίος εφαρμόζεται σε βαθμωτές συναρτήσεις της μορφής, $f(\xi, \eta, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Ως γνωστόν, η κλίση είναι άμεσα συνδεδεμένη με την κατευθυνόμενη παράγωγο προς αυθαίρετη διεύθυνση $\hat{\mathbf{I}}$ και το διαφορικό μιας βαθμωτής συνάρτησης, μέσω της σχέσης :

$$(\vec{\nabla} f) \cdot \hat{\mathbf{I}} dl = df, \text{ όπου } dl \text{ το στοιχειώδες μήκος κατά τη διεύθυνση } \hat{\mathbf{I}}$$

Η κλίση επομένως μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως από τις 3 ορθογώνιες διευθύνσεις $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{z}$, κατά μήκος των οποίων έχει προσδιοριστεί το στοιχειώδες μήκος, στις εξισώσεις (2.4). Επομένως [43]:

$$\vec{\nabla} f(\xi, \eta, z) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \xi} \hat{\xi} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \eta} \hat{\eta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \quad (2.6)$$

Σχόλιο: Ο τελεστής *gradient* απεικονίζει στοιχεία του συνόλου $C^k(\mathbb{R}^3)$ στο $C^{k-1}(\mathbb{R}^3)$, όπως ακριβώς και οι παρακάτω τελεστές.

Έστω τώρα λοιπόν ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ το οποίο είναι στοιχείο τουλάχιστον του συνόλου $C^2(\mathbb{R}^3)$. Η απαίτηση αυτή δεν είναι απαραίτητη για τους τελεστές πρώτης τάξης όπως η απόκλιση και ο στροβιλισμός $\nabla \cdot (\vec{\mathbf{F}})$ & $\nabla \times (\vec{\mathbf{F}})$, για τους οποίους αρκεί το σύνολο $C^1(\mathbb{R}^3)$.

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι η εύρεση της αναλυτικής μορφής της απόκλισης, του στροβιλισμού και της λαπλασιανής (για την οποία τέθηκε και ο περιορισμός στη συνάρτηση $\vec{\mathbf{F}}$) ενός διανυσματικού πεδίου. Η απόδειξη για τα παραπάνω μπορεί να γίνει και με πολύ αυστηρότερες προϋποθέσεις για την εν λόγω συνάρτηση, όπως η απαίτηση ύπαρξης αναπτύγματος του αναπτύγματος Taylor παντού στο πεδίο ορισμού. Στην παρούσα ανάλυση αρκεί η χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής ανά συνιστώσα.

Η φόρμουλα για τα παραπάνω μεγέθη αποδεικνύεται με τη χρήση του, ανεξάρτητου από συντεταγμένες, ορισμού των τελεστών με χρήση παραλληλόγραμμων και παραλληλεπιπέδων, ενώ για τη γενίκευση χρειάζονται εργαλεία τοπολογίας & διαφορικής γεωμετρίας, όπως το θεώρημα Jordan και η κατάλληλη επιλογή διαμερίσεων της «τυχαίας» καμπύλης.

Ξεκινώντας από την τελεστή του στροβιλισμού, θεωρείται ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$. Ο ορισμός του στροβιλισμού (*curl*) της $\vec{\mathbf{F}}$ στο σημείο αυτό, κατά τη διεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$ είναι [43]:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{S(\mathbf{x}_0) \rightarrow 0} \frac{1}{S(\mathbf{x}_0)} \oint_{\partial S} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}},$$

Όπου S είναι το εμβαδόν μιας θετικά προσανατολισμένης επίπεδης επιφάνειας της οποίας το κάθετο διάνυσμα είναι $\hat{\mathbf{n}}$, και καθώς αυτό τείνει στο 0, η επιφάνεια συρρικνώνεται στο σημείο $\mathbf{x}_0$. Στο δεξί μέλος υπάρχει η κυκλοφορία της $\vec{\mathbf{F}}$ στο σύνορο ∂S . Η «έξοδος» του $\vec{\nabla} \times ()$ είναι και αυτή ένα διανυσματικό πεδίο, επομένως αρκεί η εύρεση των 3 ορθογώνιων συνιστωσών της.

Θεωρούμε το επίπεδο παραλληλόγραμμο, με κάθετο διάνυσμα το $\hat{\xi}$, στο χώρο (ξ, η, z) , το οποίο έχει κέντρο το $\mathbf{x}_0 = (\xi_0, \eta_0, z_0)$ και εκτείνεται από $(\eta_0 - \frac{\Delta\eta}{2}, \eta_0 + \frac{\Delta\eta}{2})$ & $(z_0 - \frac{\Delta z}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2})$. Η κυκλοφορία της συνάρτησης $\vec{\mathbf{F}}$ στο σύνορο του παραπάνω χωρίου είναι :

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} &= \int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} F_z\left(\xi_0, \eta_0 + \frac{\Delta\eta}{2}, z'\right) - F_z\left(\xi_0, \eta_0 - \frac{\Delta\eta}{2}, z'\right) dz' \\ &+ \int_{\eta_0 - \frac{\Delta\eta}{2}}^{\eta_0 + \frac{\Delta\eta}{2}} F_\eta\left(\xi_0, \eta', z_0 - \frac{\Delta z}{2}\right) \lambda(\xi_0, \eta') - F_\eta\left(\xi_0, \eta', z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right) \lambda(\xi_0, \eta') d\eta' \end{aligned}$$

Το εμβαδόν είναι, $S = \Delta l_\eta \Delta l_z = \lambda \Delta\eta \Delta z$, όπου λ λαμβάνει την τιμή στην κάτω αριστερά κορυφή του παραλληλογράμμου. Εφόσον οι συνιστώσες (μαζί με τους μετρικούς συντελεστές) είναι τουλάχιστον $C^2(\mathbb{R}^3)$ (εξασφαλίζεται σίγουρα η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα), εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής για τις βαθμωτές ολοκληρωτέες συναρτήσεις. Έτσι υπάρχουν σημεία z'', η'' επί των ευθύγραμμων διαστημάτων ολοκλήρωσης τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} &\int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} F_z\left(\xi_0, \eta_0 + \frac{\Delta\eta}{2}, z'\right) \cdot 1 - F_z\left(\xi_0, \eta_0 - \frac{\Delta\eta}{2}, z'\right) \cdot 1 dz' \\ &= [F_z\left(\xi_0, \eta_0 + \frac{\Delta\eta}{2}, z''\right) - F_z\left(\xi_0, \eta_0 - \frac{\Delta\eta}{2}, z''\right)] \Delta z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\eta_0 - \frac{\Delta\eta}{2}}^{\eta_0 + \frac{\Delta\eta}{2}} F_\eta\left(\xi_0, \eta', z_0 - \frac{\Delta z}{2}\right) \lambda(\xi_0, \eta') - F_\eta\left(\xi_0, \eta', z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right) \lambda(\xi_0, \eta') d\eta' \\ &= \left[F_\eta\left(\xi_0, \eta'', z_0 - \frac{\Delta z}{2}\right) \lambda(\xi_0, \eta'') - F_\eta\left(\xi_0, \eta'', z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right) \lambda(\xi_0, \eta'')\right] \Delta\eta \end{aligned}$$

Η οριακή διαδικασία $\lim_{S \rightarrow 0}$, ισοδυναμεί με το όριο $\lim_{\Delta\eta\Delta z \rightarrow 0}$. Σχηματίζοντας το λόγο που υπαγορεύει ο ορισμός και επικαλούμενοι την παραγωγισιμότητα των συνιστωσών, έχοντας παράλληλα υπόψιν πως οι χωρικές μεταβλητές πρέπει να συγκλίνουν στο σημείο $\mathbf{x}_0$, υπολογίζεται [43]:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)) \cdot \hat{\xi} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\partial F_z}{\partial \eta} - \frac{\partial(\lambda F_\eta)}{\partial z} \right]$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια ακριβώς τεχνική και τα αντίστοιχα παραλληλόγραμμα για τις εναπομένουσες συνιστώσες, λαμβάνεται η πλήρης έκφραση του στροβιλισμού :

$$\nabla \times \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) = \hat{\xi} \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\partial F_z}{\partial \eta} - \frac{\partial(\lambda F_\eta)}{\partial z} \right] + \hat{\eta} \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\partial(\lambda F_\xi)}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \xi} \right] + \hat{z} \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{\partial(\lambda F_\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial(\lambda F_\xi)}{\partial \eta} \right] \quad (2.7)$$

Απομένει να βρεθεί η απόκλιση του πεδίου $\vec{\mathbf{F}}$. Θεωρείται σημείο $\mathbf{x}_0 = (\xi_0, \eta_0, z_0)$ στον τρισδιάστατο χώρο. Ο ορισμός της απόκλισης είναι [43]:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{V(\mathbf{x}_0) \rightarrow 0} \frac{1}{V(\mathbf{x}_0)} \oint_{\partial V(\mathbf{x}_0)} \vec{\mathbf{F}} \hat{n} dS$$

Όπου $V(\mathbf{x}_0)$ είναι ο όγκος κλειστής επιφάνειας που περικλείει το σημείο $\mathbf{x}_0$ και με το όριο $\lim_{V(\mathbf{x}_0) \rightarrow 0}$ συρρικνώνεται σε αυτό. Όπως αναφέρθηκε, δίνεται ένα «περίγραμμα» της απόδειξης, και για αυτό ως V επιλέγεται το παραλληλεπίπεδο (κύβος) με κορυφές τα σημεία $(\xi_0 \pm \frac{\Delta\xi}{2}, \eta_0 \pm \frac{\Delta\eta}{2}, z_0 \pm \frac{\Delta z}{2})$, το οποίο πληροί της προϋποθέσεις του ορισμού. Το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους αποτελεί τη συνολική ροή (*flux*) του πεδίου $\vec{\mathbf{F}}$ δια μέσου του συνόρου ∂V , η οποία μπορεί να αναλυθεί στις ορθογώνιες συνιστώσες της, τη ροή δηλαδή στα 3 ζεύγη απέναντι πλευρών του κύβου:

$$\begin{aligned} \Phi_\xi &= \iint_{S_{\eta z}} F_\xi \left(\xi_0 + \frac{\Delta\xi}{2}, \eta', z' \right) \lambda \left(\xi_0 + \frac{\Delta\xi}{2}, \eta' \right) - F_\xi \left(\xi_0 - \frac{\Delta\xi}{2}, \eta', z' \right) \lambda \left(\xi_0 - \frac{\Delta\xi}{2}, \eta' \right) d\eta' dz' \\ \Phi_\eta &= \iint_{S_{\xi z}} F_\eta \left(\xi', \eta_0 + \frac{\Delta\eta}{2}, z' \right) \lambda \left(\xi', \eta_0 + \frac{\Delta\eta}{2} \right) - F_\eta \left(\xi', \eta_0 - \frac{\Delta\eta}{2}, z' \right) \lambda \left(\xi', \eta_0 - \frac{\Delta\eta}{2} \right) d\xi' dz' \\ \Phi_z &= \iint_{S_{\eta\xi}} F_z \left(\xi', \eta', z_0 + \frac{\Delta z}{2} \right) \lambda^2 \left(\xi', \eta' \right) - F_z \left(\xi', \eta', z_0 - \frac{\Delta z}{2} \right) \lambda^2 \left(\xi', \eta' \right) d\eta' d\xi' \end{aligned}$$

Οι επιφάνειες ολοκλήρωσης είναι $S_{\eta z} = [\eta_0 - \frac{\Delta\eta}{2}, \eta_0 + \frac{\Delta\eta}{2}] \times [z_0 - \frac{\Delta z}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}]$, $S_{\xi z} = [\xi_0 - \frac{\Delta\xi}{2}, \xi_0 + \frac{\Delta\xi}{2}] \times [z_0 - \frac{\Delta z}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}]$ και $S_{\eta\xi} = [\eta_0 - \frac{\Delta\eta}{2}, \eta_0 + \frac{\Delta\eta}{2}] \times [\xi_0 - \frac{\Delta\xi}{2}, \xi_0 + \frac{\Delta\xi}{2}]$.

Όπως και για τον τελεστή του στροβιλισμού, εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής για κάθε ολοκλήρωμα, θέτοντας όπου $V = \lambda^2 \Delta \xi \Delta \eta \Delta z$ (με τον λ να λαμβάνει τιμή στην κάτω αριστερά κορυφή) και αφού παρέλθει η οριακή διαδικασία, λαμβάνεται [43]:

$$\nabla \cdot \vec{F}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{\partial(\lambda F_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\lambda F_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\lambda^2 F_z)}{\partial z} \right] \quad (2.8)$$

Το πρόβλημα που θα απασχολήσει στις επόμενους παραγράφους απαιτεί και την έκφραση για τη Λαπλασιανή διανυσματικής συνάρτησης, που ορίζεται ως :

$$\Delta \vec{F} = \vec{\nabla}^2 \vec{F} = \vec{\nabla}(\nabla \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

Όλα τα παραπάνω μεγέθη είναι γνωστά από τις εξισώσεις (2.6) – (2.8), και στην ειδική περίπτωση όπου το διανυσματικό πεδίο είναι της μορφής $\vec{F} = F(\xi, \eta)\hat{z}$, εύκολα διαπιστώνεται πως:

$$\vec{\nabla}^2(F(\xi, \eta)\hat{z}) = \hat{z} \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right] \quad (2.9)$$

Έστω τώρα, πως πρέπει να λυθεί η παρακάτω εξίσωση:

$$\Delta F(\xi, \eta)\hat{z} = \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right] = 0$$

Αμέσως παρατηρείται πως η διανυσματική εξίσωση Laplace, στη συγκεκριμένη περίπτωση, είναι διαχωρίσιμη. Επομένως επιδέχεται λύσεις της μορφής $F(\xi, \eta) = \Xi(\xi)H(\eta)$, και με την αντικατάσταση της στην τελευταία εξίσωση, βρίσκεται :

$$\frac{1}{\Xi(\xi)} \frac{d^2 \Xi(\xi)}{d\xi^2} + \frac{1}{H(\eta)} \frac{d^2 H(\eta)}{d\eta^2} = 0, \forall (\xi, \eta)$$

Εφόσον το τελευταίο πρέπει να ισχύει παντού στο χώρο, οι προσθετέοι στο αριστερό μέλος δε μπορούν παρά να είναι σταθερές. Για $k \in \mathbb{R}$, θα πρέπει να ισχύει :

$$\frac{d^2 \Xi(\xi)}{d\xi^2} - k\Xi(\xi) = 0 = \frac{d^2 H(\eta)}{d\eta^2} + kH(\eta)$$

Τα δυνατά ζεύγη λύσεων παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

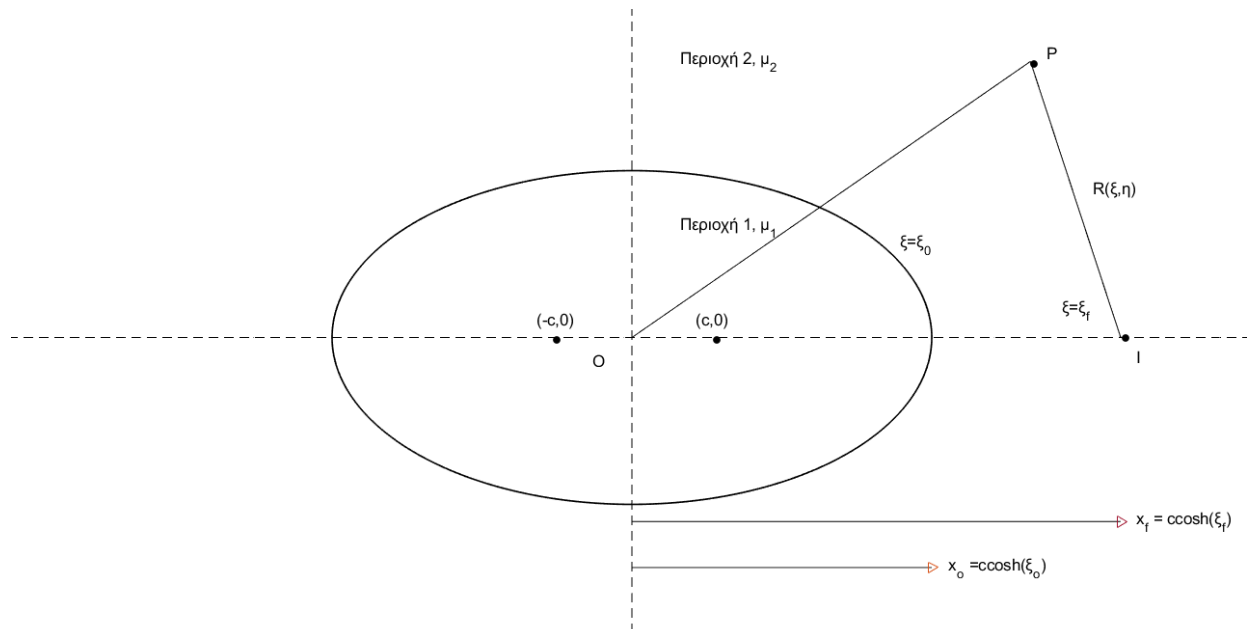
$k \in \mathbb{R}$	$\Xi(\xi)$	$H(\eta)$
$k < 0$	$A \cos(\sqrt{k}\xi) + B \sin(\sqrt{k}\xi)$	$\Gamma \cosh(\sqrt{k}\eta) + \Delta \sinh(\sqrt{k}\eta)$
$k = 0$	$A\xi + B$	$\Gamma\eta + \Delta$
$k > 0$	$A \cosh(\sqrt{k}\xi) + B \sinh(\sqrt{k}\xi)$	$\Gamma \cos(\sqrt{k}\eta) + \Delta \sin(\sqrt{k}\eta)$

Πίνακας 1: Ζεύγη ιδιοσυναρτήσεων της εξίσωσης Laplace.

Προφανώς, η επιλογή του k εξαρτάται από το εκάστοτε ΠΣΤ που εξετάζεται.

2.2 Εξωτερικό ελλειπτικό πρόβλημα

Αναζητείται η ένταση του μαγνητικού πεδίου που διεγείρεται από απείρου μήκους, ευθύγραμμο νηματοειδή αγωγό στη θέση $(\xi = \xi_f, \eta = 0)$, που διαρρέεται από ομοιόμορφο ρεύμα χαμηλής συχνότητας, δίπλα από απείρου μήκους ελλειπτικό κύλινδρο $\xi = \xi_0$, όπως στην εικόνα 56:



Εικόνα 56: Διάταξη εξωτερικού ελλειπτικού προβλήματος διάδοσης.

Με βάση το σχήμα και τις εξισώσεις των παραγράφων 2.1 για οποιοδήποτε c , διατυπώνεται το εξής πρόβλημα συνοριακών τιμών, χρησιμοποιώντας παράλληλα το μετασχηματισμό (2.1) [28, p.764] :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}_1(\xi, \eta, z) = \vec{0}, \quad \xi \in [0, \xi_0], \eta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}, \quad \text{Περιοχή 1}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}_2(\xi, \eta, z) = -\frac{\mu_2 I}{\lambda(\xi, \eta)^2} \delta(\xi - \xi_f) \delta(\eta) \hat{z}, \quad \xi \in (\xi_0, +\infty), \eta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}, \quad \text{Περιοχή 2}$$

$$\vec{A}_1(\xi_0, \eta, z) = \vec{A}_2(\xi_0, \eta, z) \quad (\text{BC 1})$$

$$-\frac{1}{\mu_1} \frac{1}{\lambda(\xi_0, \eta)} \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial \xi}(\xi_0, \eta, z) \hat{\eta} = -\frac{1}{\mu_2} \frac{1}{\lambda(\xi_0, \eta)} \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial \xi}(\xi_0, \eta, z) \hat{\eta} \quad (\text{BC 2}) \quad (2.10)$$

Επειδή η διάταξη είναι άπειρη ως προς z και δεδομένης της ομοιομορφίας του ρεύματος διέγερσης I , αποδεικνύεται πως το $\vec{A}$ δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή z . Επίσης το διανυσματικό δυναμικό οφείλει να είναι παράλληλο στο ρεύμα που το παράγει, επομένως σε αμφότερες τις περιοχές 1,2 ισχύει $\vec{A}_{1,2} = A_{1,2}(\xi, \eta) \hat{z}$. Η Λαπλασιανή επομένως μειώνεται στη μορφή (2.9). Στην περιοχή 2, ο όρος διέγερσης του δεξιού μέλος αντιστοιχεί στην ύπαρξη του αγωγού και μπορεί να ικανοποιηθεί αν στη λύση υπερτεθεί το γνωστό δυναμικό που παράγεται από αυτόν, εκπεφρασμένο όμως στο ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων.

Σύμφωνα με την (2.1), αυτό θα είναι :

$$A^i = -\frac{\mu_2 I}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_f)^2 + y^2} = -\frac{\mu_2 I}{2\pi} \ln R(\xi, \eta; \xi_f) = -\frac{\mu_2 I}{2\pi} \ln \sqrt{(c \cosh \xi \cos \eta - x_f)^2 + (c \sinh \xi \sin \eta)^2}$$

Με αντικατάσταση των $\vec{A}_1 = \hat{z} A^t$, $\vec{A}_2 = \hat{z} (A^i + A^{sc})$ στο πρόβλημα (2.10), οι εξισώσεις γίνονται ομογενείς για το σκεδαζόμενο A^{sc} και το διαδιδόμενο A^t δυναμικό και οι συνοριακές συνθήκες λαμβάνουν τη μορφή:

$$A^{sc}(\xi_0, \eta) - A^t(\xi_0, \eta) = -\frac{\mu_2 I}{2\pi} \ln R(\xi, \eta; \xi_f) \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A^{sc}}{\partial \xi}(\xi_0, \eta) - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A^t}{\partial \xi}(\xi_0, \eta) = -\frac{I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln R(\xi, \eta) \quad (2.12)$$

Το τελευταίο πρόβλημα αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις, κάτι το οποίο απαιτεί να αναπτυχθεί και η συνάρτηση $\ln R(\xi, \eta)$ αντιστοίχως. Με αναφορά στο κλασσικό σύγγραμμα [33, p.256] (βλ. παράρτημα) η ζητούμενη σειρά είναι :

$$\ln R(\xi, \eta; \xi_f) = \ln \frac{c}{2} + \xi_f - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{m} e^{-m\xi_f} \cosh m\xi \cos m\eta, \quad \xi < \xi_f$$

$$\frac{\partial \ln R(\xi, \eta; \xi_f)}{\partial \xi} = - \sum_{m=1}^{+\infty} 2e^{-m\xi_f} \sinh m\xi \cos m\eta, \quad \xi < \xi_f$$

Σχόλιο: Το ανάπτυγμα του λογαρίθμου της απόστασης, συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς ξ στο διάστημα $[0, \xi_f - \varepsilon]$ για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ ενώ παράλληλα είναι παντού παραγωγίσιμο, κάτι που επιτρέπει την διαφορίση όρο προς όρο [34, p.91]. Το ομοιόμορφο της σύγκλισης δείχνει κανείς με την εφαρμογή του κριτηρίου Weierstrass [34, p.49], καθώς οι όροι της σειράς είναι φραγμένοι, ένας προς ένας, από τους όρους της συγκλίνουσας σειράς, $\sum \frac{2}{m} (1 + e^{-2m\xi_f}) \cos m\eta$. Αναλόγως μπορεί να καλυφθεί και η περίπτωση $\eta=0$.

Αντικαθίστανται τα δύο παραπάνω αναπτύγματα για $\xi = \xi_0 < \xi_f$ στις (2.11) – (2.12) :

$$A^{sc}(\xi_0, \eta) - A^t(\xi_0, \eta) = \frac{\mu_2 I}{2\pi} \left[\ln \frac{c}{2} + \xi_f - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{m} e^{-m\xi_f} \cosh m\xi_0 \cos m\eta \right]$$

$$\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A^{sc}}{\partial \xi}(\xi_0, \eta) - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A^t}{\partial \xi}(\xi_0, \eta) = - \sum_{m=1}^{+\infty} 2e^{-m\xi_f} \sinh m\xi_0 \cos m\eta$$

Σχόλιο: Η τελευταία εξίσωση προκύπτει από την απαίτηση $\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{0}$, $\xi = \xi_0$, χρησιμοποιώντας τη (2.7).

Επειδή η ένταση του μαγνητικού πεδίου στην περιοχή 2, σε μεγάλες αποστάσεις πρέπει να τείνει στο 0 και λόγω της άρτιας συμμετρίας των συνοριακών συνθηκών, η κατάλληλη επιλογή συναρτήσεων βάσης για το σκεδαζόμενο δυναμικό είναι (βλ. πίνακα 1) :

$$A^{sc}(\xi, \eta) = -\frac{\mu_2 I}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} S_m e^{-m\xi} \cos m\eta + \frac{\mu_2 I}{2\pi} C_{sc}, \quad \text{όπου } C_{sc} \text{ σταθερά}$$

Για το δε διαδιδόμενο δυναμικό, επειδή στο εσωτερικό του κυλίνδρου το μαγνητικό πεδίο οφείλει να είναι πεπερασμένο και λόγω της συμμετρίας και της μορφής (ύπαρξη $\cosh$ & $\sinh$ αντίστοιχα) των συνοριακών συνθηκών, η κατάλληλη επιλογή είναι :

$$A^t(\xi, \eta) = -\frac{\mu_1 I}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} T_m \cosh m\xi \cos m\eta + \frac{\mu_1 I}{2\pi} C_t, \quad \text{όπου } C_t \text{ σταθερά}$$

Αντικατάσταση αυτών στις εξισώσεις (2.10) – (2.11) οδηγεί στο σύστημα :

$$S_m e^{-m\xi_0} \mu_2 - T_m \cosh m\xi_0 \mu_1 = \mu_2 \frac{2}{m} e^{-m\xi_f} \cosh m\xi_0, \quad m \geq 1$$

$$S_m e^{-m\xi_0} + T_m \sinh m\xi_0 = -\frac{2}{m} e^{-m\xi_f} \sinh m\xi_0, \quad m \geq 1$$

Σχόλιο: Από τις (2.10)-(2.11) προκύπτει και μια εξίσωση για τους σταθερούς συντελεστές C_t, C_{sc} η οποία αποτελεί σύστημα μαζί με την εξίσωση που προκύπτει από την επιλογή της αναφοράς του δυναμικού. Όπως είναι γνωστό, οι τιμές αυτές δεν επηρεάζουν την ένταση του μαγνητικού πεδίου ούτε τη μαγνητική επαγωγή'.

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι :

$$S_m = \frac{1}{m} e^{-m(\xi_f - \xi_0)} (\mu_2 - \mu_1) \frac{\sinh 2m\xi_0}{\mu_1 \cosh m\xi_0 + \mu_2 \sinh m\xi_0}$$

$$T_m = -\frac{2}{m} e^{-m(\xi_f - \xi_0)} \mu_2 \frac{1}{\mu_1 \cosh m\xi_0 + \mu_2 \sinh m\xi_0}$$

Σε περίπτωση που αφαιρεθεί ο κύλινδρος, δηλαδή για $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, η λύση του προβλήματος είναι η αναμενόμενη, δηλαδή δεν υπάρχει σκεδαζόμενο πεδίο (αφού δεν υπάρχει σκεδαστής) και το «διαδιδόμενο» πεδίο είναι ίσο με το προσπίπτον:

$$A^t(\xi, \eta) = -\frac{\mu_1 I}{2\pi} \left[\sum_{m=1}^{\infty} T_{m, \mu_1 = \mu_2} \cosh m\xi \cos m\eta + C_t \right] = -\frac{\mu I}{2\pi} \left[\sum_{m=1}^{+\infty} -\frac{2}{m} e^{-m\xi_f} \cosh m\xi \cos m\eta + C_t \right]$$

$$\Rightarrow A^t(\xi, \eta) = -\frac{\mu I}{2\pi} [\ln R(\xi, \eta) + C'_t] = A^i(\xi, \eta)$$

Το A^t είναι ίσο με το A^i με προσέγγιση σταθεράς που εξαρτάται από την αναφορά, επομένως τα αντίστοιχα μαγνητικά πεδία είναι ίσα.

Τα παραπάνω είναι ενδείξεις για την ορθότητα των αποτελεσμάτων. Η λύση στην περιοχή 2, συμφωνεί με τη λύση του αντίστοιχου ηλεκτροστατικού προβλήματος [35], αν λάβει κανείς υπόψιν τις αλλαγές στα σύμβολα $\varepsilon_r \leftrightarrow \frac{\mu_2}{\mu_1}$, $\xi_1 \leftrightarrow \xi_0$, $\xi_0 \leftrightarrow \xi_f$. Επομένως η πλήρης λύση του προβλήματος είναι :

$\forall \eta, 0 \leq \xi \leq \xi_0 :$

$$\vec{A}_1 = \hat{z} \left(-\frac{\mu_1 I}{2\pi} \right) \left[-\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2\mu_2 e^{-m(\xi_f - \xi_0)}}{m} \frac{\cosh m\xi}{\mu_1 \cosh m\xi_0 + \mu_2 \sinh m\xi_0} \cos m\eta + C_t \right] \quad (2.13)$$

$\forall \eta, \xi_0 \leq \xi :$

$$\vec{A}_2 = \hat{z} \left(-\frac{\mu_2 I}{2\pi} \right) \left[(\mu_2 - \mu_1) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-m(\xi_f - \xi_0 + \xi)}}{m} \frac{\sinh 2m\xi_0}{\mu_1 \cosh m\xi_0 + \mu_2 \sinh m\xi_0} \cos m\eta + \ln R(\xi, \eta) + C_{sc} \right] \quad (2.14)$$

Ο υπολογισμός των άπειρων αθροισμάτων δεν ήταν εφικτός χρησιμοποιώντας τις συνήθεις πηγές [36][37], ή κάποια άλλη στοιχειώδη τεχνική υπολογισμού. Σκοπός της εργασίας είναι η ανάλυση της συμπεριφοράς της MAS και όπως φάνηκε στο κυκλικό πρόβλημα, τα συμπεράσματα για τα πλάτη των βοηθητικών πηγών εξήχθησαν μόνο και μόνο από την ακτίνα σύγκλισης των σειρών ιδιοσυναρτήσεων. Η αδυναμία εύρεσης κλειστών τύπων προφανώς θα εμφανιστεί και κατά τον υπολογισμό των MAS ρευμάτων. Επαναλαμβάνεται πως η απόκλιση των βοηθητικών πηγών πιστεύεται πως οφείλεται στην τοποθέτηση των βοηθητικών πηγών σε περιοχή η οποία περιέχει στο «εσωτερικό» της ανώμαλο σημείο της αναλυτικής λύσης του εκάστοτε προβλήματος (βλ. 1.4.4α).

Κρίνεται λοιπόν επιτακτική η ανάγκη εύρεσης των περιοχών σύγκλισης των άπειρων σειρών τις (2.13) – (2.14). Για το σκεδαζόμενο δυναμικό (αγνοώντας τις πολλαπλασιαστικές σταθερές) :

$$\left| \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-m(\xi_f - \xi_0 + \xi)}}{m} \frac{\sinh 2m\xi_0}{\mu_1 \cosh m\xi_0 + \mu_2 \sinh m\xi_0} \cos m\eta \right| \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \frac{e^{-m(\xi_f - \xi_0 + \xi)}}{m} \frac{\sinh 2m\xi_0}{\mu_1 \cosh m\xi_0 + \mu_2 \sinh m\xi_0} \cos m\eta \right|$$

Επειδή $|\cos m\eta| \leq 1$, αρκεί να εξεταστεί η σύγκλιση τις σειράς για $\eta = 0$. Οι όροι της σειράς είναι θετικοί, επομένως:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-m(\xi_f - \xi_0 + \xi)}}{m} \frac{\sinh 2m\xi_0}{\mu_1 \cosh m\xi_0 + \mu_2 \sinh m\xi_0} = \sum_{m=1}^{+\infty} x_m$$

Μετά από τις αλγεβρικές πράξεις για τους όρους x_m , γράφεται :

$$x_m = \frac{1}{m} \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 + e^{-2m\xi_0}(\mu_1 - \mu_2)} [e^{-m(\xi_f + \xi - 2\xi_0)} - e^{-m(\xi_f + \xi + 2\xi_0)}]$$

Ανεξαρτήτως των τιμών που λαμβάνουν οι διαπερατότητες των υλικών μ_1, μ_2 και το ξ , η ποσότητα $\mu_1 + \mu_2 + e^{-2m\xi_0}(\mu_1 - \mu_2)$ είναι κάτω φραγμένη και θετική, για όλους τις φυσικούς δείκτες m .

Συνεπώς:

$$x_m < c \frac{1}{m} [e^{-m(\xi_f + \xi - 2\xi_0)} - e^{-m(\xi_f + \xi + 2\xi_0)}] \quad \forall m \geq 1, \quad c \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$$

Επομένως η άπειρη σειρά με όρους x_m και κατά συνέπεια και το σκεδαζόμενο δυναμικό θα συγκλίνει όταν καθένα από τα εκθετικά αποσβέννεται, ήτοι :

$$\xi > 2\xi_0 - \xi_f$$

Σχόλιο: Για τη συμπληρωματική περιοχή $\xi \leq 2\xi_0 - \xi_f$, απλή εφαρμογή του κριτηρίου λόγου αποδεικνύει την απόκλιση της σειράς. Το ίδιο ισχύει και για το δυναμικό στην εσωτερική περιοχή.

Σε πλήρη αναλογία με το κυκλικό πρόβλημα, φαίνεται πως η λύση η οποία έχει πεδίο ορισμού $\xi > \xi_0$, έχει «νόημα» και αποτελεί λύση των εξισώσεων του Maxwell ακόμα και εντός του ελλειπτικού κυλίνδρου, δηλαδή και στο διάστημα $(2\xi_0 - \xi_f, \xi_0)$. Εάν όμως, η θέση του ρεύματος πλησιάσει αρκετά την ελλειπτική κυλινδρική επιφάνεια που διαχωρίζει τα 2 υλικά, τότε η σειρά δε συγκλίνει παντού στην περιοχή 1.

Με τον ίδιο τρόπο, εξετάζοντας δηλαδή την απόλυτη σύγκλιση της σειράς της εξίσωσης (2.13) για $\eta = 0$ υπολογίζεται πως η αντίστοιχη ακτίνα είναι :

$$\xi < \xi_f$$

Σημειώνεται πως παρόμοιες συμπεριφορές των σειρών αναφέρονται και στην ανάλυση του αντίστοιχου ηλεκτροστατικού προβλήματος [35][39].

Αν επιτραπεί στην επιφάνεια $\xi = \xi_0$ να λάβει αυθαίρετα μεγάλη τιμή και διατηρώντας παράλληλα τη συνθήκη $\xi_f > \xi_0$, τότε αναδύεται μια αρκετά ενδιαφέρουσα οριακή περίπτωση. Από τη σχέση (2.1) για $\xi_0 \gg 1$, ισχύει:

$$x \sim \frac{c}{2} e^{\xi_0} \cosh \eta, \quad \xi_0 \gg 1$$

$$y \sim \frac{c}{2} e^{\xi_0} \sinh \eta, \quad \xi_0 \gg 1$$

Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν επιφάνεια **κυκλικού** κυλίνδρου ακτίνας $\frac{ce^{\xi_0}}{2}$, η οποία αποτελεί και τη συνοριακή επιφάνεια των υλικών. Έτσι η λύση του προβλήματος θα πρέπει να τείνει σε εκείνη που περιγράφουν οι εξισώσεις (1.11) – (1.12) της παραγράφου 1.1. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις ασυμπτωτικές προσεγγίσεις $\forall m \in \mathbb{N} : \cosh m\xi_0 \sim 0.5e^{m\xi_0}, \sinh 2m\xi_0 \sim 0.5e^{2m\xi_0}, \xi_0 \rightarrow \infty$ στις σχέσεις (2.13) & (2.14) :

$$A_1 \sim \frac{\mu_1 I}{2\pi \mu_1 + \mu_2} \left[\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{m} e^{-m\xi_f} \cosh m\xi \cos m\eta + C_t \right] = -\frac{\mu_1}{2\pi \mu_1 + \mu_2} \frac{2\mu_2 I}{2} [\ln R(\xi, \eta) - \ln \frac{c}{2} - \xi_f + C_t]$$

Το ασυμπτωτικό αυτό διανυσματικό δυναμικό αντιστοιχεί στο μαγνητικό πεδίο του εξωτερικού κυκλικού προβλήματος (1.11). Σύμφωνα με την τελευταία εξίσωση, το εσωτερικό υλικό «βλέπει» μια πηγή με πλάτος $\frac{2\mu_2 I}{\mu_1 + \mu_2}$, που αντιστοιχεί το γνωστό είδωλο.

Το ίδιο οφείλει να συμβαίνει και στην εξωτερική περιοχή, του υλικού μ_2 . Εφαρμόζοντας τα ίδια ασυμπτωτικά :

$$A_2 \sim -\frac{\mu_2 I}{2\pi} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \left[\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} e^{-m(\xi + \xi_f - 2\xi_0)} \cos m\eta \right] - \frac{\mu_2 I}{2\pi} (\ln R(\xi, \eta) + C_{sc})$$

Η σειρά που εμφανίζεται στην τελευταία εξίσωση υπολογίζεται εύκολα (βλ. παράρτημα) :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} e^{-m(\xi + \xi_f - 2\xi_0)} \cos m\eta = -\ln |1 - e^{-\xi - \xi_f + 2\xi_0 - j\eta}|$$

Επειδή ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης τείνει στο άπειρο και η λύση έχει πεδίο ορισμού το εξωτερικό αυτής, χρησιμοποιούνται οι ασυμπτωτικές προσεγγίσεις:

$$\cosh z = \cosh(\xi + j\eta) \sim \frac{1}{2} e^z, \quad \text{Re}\{z\} > \xi_0 \rightarrow +\infty$$

$$\ln \frac{R(\xi, \eta; \xi_{cri})}{R(\xi, \eta; 0)} = \ln \left| \frac{\cosh z - \cosh \xi_{cri}}{\cosh z} \right| = \ln \left| 1 - \frac{\cosh \xi_{cri}}{\cosh z} \right| \sim \ln |1 - e^{-\xi - \xi_f + 2\xi_0 - j\eta}|$$

Η τελευταία σχέση δείχνει πως η τελευταία σειρά είναι ασυμπτωτικά ίση με το λογάριθμο του πηλίκου των αποστάσεων $R(\xi, \eta; \xi_{cri})$, $R(\xi, \eta; 0)$, όπου $\xi_{cri} = 2\xi_0 - \xi_f$. Η συντεταγμένη $(\xi_{cri}, 0)$ δεν είναι καθόλου τυχαία, καθώς παραπέμπει στη γνωστή, από το πρόβλημα κυκλικού συνόρου, θέση του ειδώλου, $(x_{cri}, 0)$:

$$x_{cri} = \frac{c}{2} e^{2\xi_0 - \xi_f} = \frac{\left(\frac{c}{2} e^{\xi_0}\right)^2}{\frac{c}{2} e^{\xi_f}} \sim \frac{x_0^2}{x_f}$$

Τονίζεται η ομοιότητα της τελευταίας σχέσης με την κρίσιμη απόσταση του 1^{ου} Κεφαλαίου :

$$\rho_{cri} = \frac{\rho_{cyl}^2}{\rho_{fil}}$$

Το ρόλο των ρ_{cyl} , ρ_{fil} διαδραματίζουν οι αντίστοιχοι μεγάλοι ημιάξονες των ελλείψεων ce^{ξ_0} , ce^{ξ_f} .

Είναι πλέον προφανές, πως το δυναμικό της περιοχής 2 είναι ασυμπτωτικά ίσο με το δυναμικό της σχέσης (1.12):

$$A_2 \sim -\frac{\mu_2 I}{2\pi} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} [-\ln R(\xi, \eta; \xi_{cri}) + \ln R(\xi, \eta; 0)] - \frac{\mu_2 I}{2\pi} \ln R(\xi, \eta; \xi_f) + C$$

Τέλος, η ένταση του μαγνητικού πεδίου στις περιοχές 1 & 2, δίνεται από τη (2.7) :

$$\vec{H}_{1,2} = \frac{1}{\mu_{1,2}} \left[\frac{1}{\lambda} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial \eta} \hat{\xi} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial \xi} \hat{\eta} \right]$$

Μια ακόμα οριακή έκδοση της παραπάνω διάταξης που προσελκύει ενδιαφέρον, είναι εκείνη που στην περιοχή 1 περιέχει σιδηρομαγνητικό υλικό, δηλαδή $\mu_1 \rightarrow +\infty$, η οποία μελετάται και στην εργασία [29] (στην περιοχή 2 υπάρχει πεπερασμένης διαπερατότητας μαγνητικό υλικό).

$$A_{sc} = \frac{\mu_2 I}{2\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-m(\xi_f - \xi_0 + \xi)}}{m} \frac{\sinh 2m\xi_0}{\cosh m\xi_0} \cos m\eta = \frac{\mu_2 I}{2\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} 2 \frac{e^{-m(\xi_f - \xi_0 + \xi)}}{m} \sinh m\xi_0 \cos m\eta$$
$$A_{sc} = \frac{\mu_2 I}{2\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{m(-\xi_f + 2\xi_0 - \xi)} - e^{m(-\xi_f - \xi)}}{m} \cos m\eta = -\frac{\mu_2 I}{2\pi} \ln \frac{|1 - w_1|}{|1 - w_2|}$$

$$\mu \varepsilon w_1 = e^{2\xi_0 - \xi_f - \xi - j\eta}, w_2 = e^{-\xi - \xi_f - j\eta}$$

Περιοχή 2, μ_2

Περιοχή 1, μ_1

$R(\xi, \eta)$

$\xi = \xi_0$

$(-c, 0)$ $(c, 0)$ $\xi = \xi_f$

O

$x_o = c \cosh(\xi_o)$

$x_f = c \cosh(\xi_f)$

Διατυπώνεται το εξής ΠΣΤ, όπως και πριν για οποιοδήποτε c και χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο μετασχηματισμό τις κρουστικής συνάρτησης:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}_1(\xi, \eta, z) = -\frac{\mu_1 I}{\lambda(\xi, \eta)^2} \delta(\xi - \xi_f) \delta(\eta) \hat{z}, \quad \xi \in [0, \xi_0], \eta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}, \quad \text{Περιοχή 1}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}_2(\xi, \eta, z) = \vec{0}, \quad \xi \in (\xi_0, +\infty), \eta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}, \quad \text{Περιοχή 2}$$

$$\vec{A}_1(\xi_0, \eta, z) = \vec{A}_2(\xi_0, \eta, z) \quad (\text{BC 1})$$

$$-\frac{1}{\mu_1} \frac{1}{\lambda(\xi_0, \eta)} \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial \xi}(\xi_0, \eta, z) \hat{\eta} = -\frac{1}{\mu_2} \frac{1}{\lambda(\xi_0, \eta)} \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial \xi}(\xi_0, \eta, z) \hat{\eta} \quad (\text{BC 2}) \quad (2.15)$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα η βασική διαφορά εδώ είναι η ύπαρξη του αγωγού διέγερσης στο εσωτερικό του συνόρου, $\xi_f < \xi_0$. Η μεθοδολογία επίλυσης αυτού του ΠΣΤ δεν αλλάζει σε σχέση με το εξωτερικό πρόβλημα. Στο ίδιο πλαίσιο, με επιλογή κατάλληλης ειδικής λύσης το πρόβλημα μετατρέπεται σε ομογενές με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Η λύση αυτή δεν είναι παρά το διανυσματικό δυναμικό που διεγείρεται από τον ευθύγραμμο αγωγό, εκπεφρασμένο στο ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων (του οποίου η Λαπλασιανή προφανώς ισούται με $-\frac{\mu_1 I}{\lambda(\xi, \eta)^2} \delta(\xi - \xi_f) \delta(\eta)$).

Έτσι το πρόβλημα επαναδιατυπώνεται με τις υποψήφιες λύσεις (θεωρώντας πως το σκεδαζόμενο πεδίο συνυπάρχει με το προσπίπτον) :

$$\vec{A}_1 = \hat{z}(A^i + A^{sc})$$

$$\vec{A}_2 = \hat{z}A^t$$

Για την επιλογή των κατάλληλων συναρτήσεων βάσης για το ανάπτυγμα της λύσης σε κάθε περιοχή, πρέπει πρώτα να ευρεθεί το ανάπτυγμα των δεδομένων των συνοριακών συνθηκών (*boundary data*). Ξανά, από το [33, p.256] (βλ. παράρτημα) βρίσκεται πως, για $\xi > \xi_f$:

$$\ln R(\xi, \eta; \xi_f) = \ln \frac{c}{2} + \xi - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-m\xi}}{m} \cosh m \xi_f \cos m \eta, \quad \xi > \xi_f$$

Για τις **BC1**, **BC2** ισχύει τώρα:

$$\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A^{sc}}{\partial \xi}(\xi_0, \eta) - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A^t}{\partial \xi}(\xi_0, \eta) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-m\xi_0} \cosh m \xi_f \cos m \eta$$

$$A^{sc}(\xi_0, \eta) - A^t(\xi_0, \eta) = \frac{\mu_1 I}{2\pi} \left(\xi_0 + \ln \frac{c}{2} - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-m\xi_0}}{m} \cosh m \xi_f \cos m \eta \right)$$

Παρατηρείται πως, σε αντίθεση με το εξωτερικό πρόβλημα, η συνθήκη συνέχειας του $\vec{H}$ εμφανίζει μια συνιστώσα που δεν εξαρτάται από τις χωρικές μεταβλητές.

Προφανώς, αμφότερες οι λύσεις A^{sc}, A^t οφείλουν να είναι 2π -περιοδικές και ομαλές στο πεδίο ορισμού τους, ακολουθώντας πάντα τις «διεγέρσεις», τα δεξιά μέλη δηλαδή των **BC1, BC2**. Επομένως:

$$A^{sc}(\xi, \eta) = -\frac{\mu_1 I}{2\pi} \left(C_{sc} + \sum_{m=1}^{+\infty} S_m \cosh m \xi \cos m \eta \right)$$

$$A^t(\xi, \eta) = -\frac{\mu_2 I}{2\pi} \left(C_t + T_0 \xi + \sum_{m=1}^{+\infty} T_m e^{-m \xi} \cos m \eta \right)$$

Η αντικατάσταση των τελευταίων στις συνοριακές συνθήκες οδηγεί στο σύστημα:

$$T_m e^{-m \xi_0} + S_m \sinh m \xi_0 = -2 \frac{e^{-m \xi_0}}{m} \cosh m \xi_f, \quad m \geq 1$$

$$T_m e^{-m \xi_0} \mu_2 - S_m \cosh m \xi_0 \mu_1 = -2 \mu_1 \frac{e^{-m \xi_0}}{m} \cosh m \xi_f, \quad m \geq 1$$

Μαζί με το παραπάνω σύστημα λαμβάνεται μια εξίσωση για τις σταθερές C_{sc}, C_t ενώ παράλληλα και η τιμή του συντελεστή, $T_0 = 1$. Με την επιλογή αναφοράς του δυναμικού είναι δυνατός ο προσδιορισμός των C_{sc}, C_t . Η λύση του συστήματος συντελεστών είναι :

$$S_m = 2(\mu_1 - \mu_2) \frac{e^{-m \xi_0}}{m} \frac{\cosh m \xi_f}{\mu_1 \cosh m \xi_0 + \mu_2 \sinh m \xi_0} \quad (2.16\alpha)$$

$$T_m = -\frac{2}{m} \cosh m \xi_f - 2(\mu_1 - \mu_2) \frac{1}{m} \frac{\cosh m \xi_f \sinh m \xi_0}{\mu_1 \cosh m \xi_0 + \mu_2 \sinh m \xi_0} \quad (2.16\beta)$$

Εξετάζεται τώρα η ισχύς των εξισώσεων για τους συντελεστές στην περίπτωση $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Ορθώς, οι $S_m \equiv 0, \forall m$ και το μαγνητικό δυναμικό στο εσωτερικό της «κοιλότητας» είναι ίσο με εκείνο του ευθύγραμμου αγωγού. Για το «διαδιδόμενο» στο εξωτερικό της διάταξης μαγνητικό δυναμικό, βρίσκεται πως είναι ίσο με εκείνο του αγωγού, με προσέγγιση σταθεράς που εξαρτάται από την αναφορά. Επομένως η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι η αναμενόμενη. Οι συντελεστές S_m, T_m συμφωνούν με εκείνους που βρίσκονται στην εργασία [38].

Το γενικό πρόβλημα της κοιλότητας για αυθαίρετα μ_1, μ_2 έχει λύση:

$\forall \eta, 0 \leq \xi \leq \xi_0 :$

$$\vec{A}_1 = \hat{z} \left(-\frac{\mu_1 I}{2\pi} \right) \left[C_{sc} + \ln R(\xi, \eta) + 2(\mu_1 - \mu_2) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-m \xi_0}}{m} \frac{\cosh m \xi_f}{\mu_1 \cosh m \xi_0 + \mu_2 \sinh m \xi_0} \cosh m \xi \cos m \eta \right]$$

$\forall \eta, \xi_0 \leq \xi :$

$$\vec{A}_2 = \hat{z} \left(-\frac{\mu_2 I}{2\pi} \right) \left[C_t + \xi - 2\mu_1 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-m(\xi-\xi_0)}}{m} \frac{\cosh m \xi_f}{\mu_1 \cosh m \xi_0 + \mu_2 \sinh m \xi_0} \cosh m \eta \right] \quad (2.17\alpha \text{ \& } \beta)$$

Η αδυναμία εύρεσης αναλυτικής λύσης δεν επηρεάζει την ανάλυση της MAS. Σε πλήρη αναλογία με το εξωτερικό πρόβλημα διάδοσης, επόμενο βήμα είναι η εύρεση των ακτινών σύγκλισης των αναλυτικών επεκτάσεων των μαγνητικών δυναμικών, οι οποίες είναι ίσες με εκείνες των $\vec{H}_1, \vec{H}_2$ (*derived power series*).

Εκτελώντας μερικές πράξεις στους όρους του αναπτύγματος για το δυναμικό της περιοχής 1, παρατηρείται πως αρκεί να μελετηθεί η συμπεριφορά της παρακάτω σειράς, υπό την έννοια πως το ανάπτυγμα στη σχέση (2.17), συγκλίνει αν και μόνο εάν συγκλίνει η P:

$$P = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{m(\xi+\xi_f-2\xi_0)}}{m} \cosh m \eta$$

Η ακτίνα σύγκλισης της τελευταίας, άρα και του δυναμικού/πεδίου της περιοχής 1, είναι:

$$\xi < \xi_f$$

Τα ίδια ισχύουν και για την εξωτερική περιοχή 2, στην οποία η ακτίνα σύγκλισης για αμφότερα το δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο είναι :

$$\xi > 2\xi_0 - \xi_f$$

Σχόλιο: Οι σειρές που προσδιορίστηκαν από στα ΠΣΤ (2.10) - (2.15), είναι ουσιαστικά δυναμοσειρές στο πεδίο Argand. Έτσι, από το [34,p.31], προκύπτει πως και η ένταση του μαγνητικού πεδίου έχει την ίδια αναλυτική επέκταση.

Τα σύνολα σύγκλισης αυτά είναι γνωστά και αναμενόμενα, από το πρόβλημα κυκλικού συνόρου. Μια περαιτέρω σύνδεση μεταξύ των δύο προβλημάτων βρίσκεται στο όριο $\xi_0 \rightarrow \infty$, ικανοποιώντας παράλληλα τη συνθήκη:

$$\frac{\xi_0}{\xi_f} = O(1)$$

Βάσει των δύο τελευταίων, ισχύουν:

$$\cosh m \xi_{0,f}, \sinh m \xi_{0,f} \sim \frac{1}{2} e^{m \xi_{0,f}}$$

Στην εξωτερική περιοχή επίσης, όπως και στην παράγραφο 2.2, είναι δυνατόν να ισχυριστεί κανείς πως :

$$\cosh z \sim \frac{1}{2} e^z, \xi > \xi_0 \rightarrow \infty$$

Τα ασυμπτωτικά αυτά οδηγούν στην προσέγγιση :

$$2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-m\xi_0}}{m} \frac{\cosh m\xi_f}{\mu_1 \cosh m\xi_0 + \mu_2 \sinh m\xi_0} \cosh m\xi \cos m\eta \sim \frac{2}{\mu_1 + \mu_2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{m(\xi_f - 2\xi_0)}}{m} \cosh m\xi \cos m\eta$$

Επομένως, από το ανάπτυγμα **6α** (βλ. παράρτημα), στην περιοχή 1 ισχύει :

$$A_1 \sim \left(-\frac{\mu_1 I}{2\pi}\right) [C'_{sc} + \ln R(\xi, \eta; \xi_f) + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \ln R(\xi, \eta; \xi_{cri})]$$

Το δυναμικό αυτό παραπέμπει ακριβώς σε εκείνο της εξίσωσης **(1.21)**, όπως οφείλει.

Με την ίδια τακτική στην περιοχή 2, χρησιμοποιώντας τη μορφή των συντελεστών της εξίσωσης **(2.16α)**, την εξίσωση **(2.17β)** και τα ανάπτυγμα **5, 6β**:

$$A_2 \sim \left(-\frac{\mu_1 I}{2\pi}\right) \left[C'_t + \ln R(\xi, \eta; \xi_f) - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{m(\xi_f - \xi)}}{m} \cos m\eta \right]$$

$$\Rightarrow A_2 \sim -\left(\frac{\mu_1 I}{2\pi}\right) [C'_t + \ln R(\xi, \eta; \xi_f) + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \ln |1 - e^{\xi_f - \xi - j\eta}|]$$

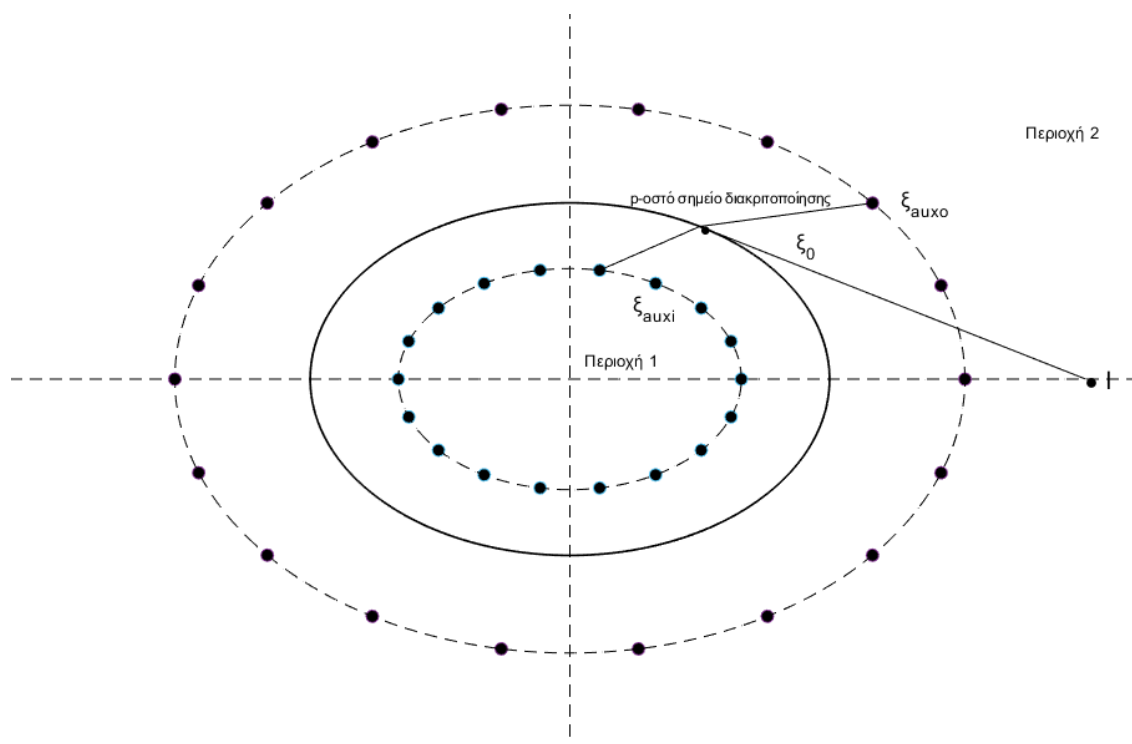
Για το λογάριθμο του δεξιού μέλους, καθώς, $|z| > \xi_0 \rightarrow +\infty$:

$$\ln |1 - e^{\xi_f - \xi - j\eta}| = \ln \left| \frac{e^{\xi + j\eta} - e^{\xi_f}}{e^{\xi + j\eta}} \right| \sim \ln \left| \frac{\cosh z - \cosh \xi_f}{\cosh z} \right| = \ln R(\xi, \eta; \xi_f) - \ln R(\xi, \eta; 0)$$

Και τελικά, το δυναμικό προσεγγίζει ασυμπτωτικά τη λύση του κυκλικού προβλήματος **(1.22)** :

$$A_2 \sim -\frac{\mu_2 I}{2\pi} \left[\frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \ln R(\xi, \eta; \xi_f) + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \ln R(\xi, \eta; 0) \right], \quad \xi_0 \rightarrow +\infty$$

2.4α MAS στο εξωτερικό ελλειπτικό πρόβλημα



Προς επίλυση του ΠΣΤ **(2.10)** μέσω MAS, τοποθετούνται στις βοηθητικές επιφάνειες $\xi = \xi_{\text{aux}i} < \xi_0$, $\xi = \xi_{\text{aux}o} > \xi_0$ και σε γωνίες $\eta_l = \frac{2\pi l}{N}$, $0 \leq l \leq N - 1$, N το πλήθος πλασματικοί αγωγοί φέροντες ρεύμα I_l ο καθένας. Το διανυσματικό δυναμικό σε κάθε περιοχή είναι :

$$\vec{\mathbf{A}}_{2\text{MAS}} = \hat{\mathbf{z}} \left(-\frac{\mu_2 I}{2\pi} \right) \left[\sum_{l=0}^{N-1} I_l^i \ln R(\xi, \eta; \xi_{\text{auxi}}, \eta_l) + \ln R(\xi, \eta; \xi_f) + C_{\text{sc}} \right], \quad \xi > \xi_0 \quad (2.18)$$

$$A_1(\xi_0, \eta_p) = A_2(\xi_0, \eta_p), 0 \leq p \leq N-1$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{N-1} \mu_2 I_l^i \ln R(\xi, \eta_p; \xi_{auxi}, \eta_l) - \mu_1 I_l^o \ln R(\xi, \eta_p; \xi_{auxo}, \eta_l) = -\mu_2 \ln R(\xi, \eta; \xi_f) + \mu_1 C_t - \mu_2 C_{sc}$$

Στην τελευταία εξίσωση, μηδενίζονται οι αυθαίρετες σταθερές C_t, C_{sc} . Για το σύστημα συντεταγμένων, επιλέγεται μοναδιαία απόσταση εστίας από την των αξόνων, $c = 1$. Προφανώς τα ρεύματα MAS δεν εξαρτώνται από αυτή την επιλογή, όπως ακριβώς συμβαίνει και για την ένταση του μαγνητικού πεδίου. Με τον ορισμό των πινάκων $L^{o,i} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ και του διανύσματος διέγερσης $L^f \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ (ανάλογο της συνοριακής διέγερσης στο ΠΣΤ **(2.10)**), η τελευταία εξίσωση γράφεται σε μητρική μορφή με άγνωστο το διάνυσμα των συντελεστών $I \in \mathbb{R}^{2N \times 1}$:

$$L_{lp}^i = \left\{ \ln R \left(\xi_0, \frac{2\pi p}{N}; \xi_{auxi}, \frac{2\pi l}{N} \right) \right\}, (l, p) \leq (N-1, N-1)$$

$$L_{lp}^o = \left\{ \ln R \left(\xi_0, \frac{2\pi p}{N}; \xi_{auxo}, \frac{2\pi l}{N} \right) \right\}, (l, p) \leq (N-1, N-1)$$

$$L_p^f = \ln R \left(\xi_0, \frac{2\pi p}{N}; \xi_f, 0 \right), \quad 0 \leq p \leq N-1$$

$$\begin{bmatrix} \mu_2 L^i & -\mu_1 L^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^i \\ I^o \end{bmatrix} = -\mu_2 L^f, \quad I_{MAS} = \begin{bmatrix} I^i \\ I^o \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Η τοποθέτηση των ρευμάτων δεν έχει αλλοιώσει το τιθέμενο ΠΣΤ ενώ παράλληλα δεν παραβιάζει τους φυσικούς νόμους που διέπουν το πρόβλημα. Κάτι τέτοιο μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα με την εφαρμογή του νόμου του Ampère, επιλέγοντας για βρόχο C_1, C_2 μια έλλειψη $\xi < \xi_0$ & $\xi > \xi_0$ για κάθε περιοχή αντίστοιχα. Για την περιοχή 2 δεν έχει σημασία αν το αρχικό ρεύμα διέγερσης υφίσταται στον εσωτερικό των βρόχων.

$$\oint_{C_2} \vec{H_2} d\vec{l}_\eta = - \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mu_2 \lambda} \frac{\partial A_2}{\partial \xi} (\lambda d\eta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi} d\eta = I_{\delta_{\xi > \xi_f}}$$

Σε οποιοδήποτε συμπαγές διάστημα της περιοχής 2, η σχετιζόμενη σειρά Fourier στη **(2.14)** συγκλίνει ομοιόμορφα και επομένως μπορεί να ολοκληρωθεί όρο προς όρο **[33, p.49]** χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα **6β**. Το ολοκλήρωμα της είναι ίσο με το σταθερό της όρο, επί το μήκος του διαστήματος. Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι:

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \vec{H_2} d\vec{l}_\eta &= \frac{I}{2\pi} 2\pi \left(\delta_{\xi > \xi_f} + \sum_{l=0}^{N-1} I_l^i \right) = I_{\delta_{\xi > \xi_f}} \\ &\Rightarrow \sum_{l=0}^{N-1} I_l^i = 0 \end{aligned}$$

Όπως είναι αναμενόμενο από την κλασσική θεωρία των ειδώλων, το συνολικό MAS ρεύμα είναι 0.

Στην εσωτερική όμως περιοχή, υπάρχει μια αυθαιρεσία ως προς το συνολικό MAS ρεύμα καθώς:

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_\eta = 0 = \frac{I}{2\pi} \sum_{l=0}^{N-1} I_l^o \int_0^{2\pi} \frac{\partial \ln R(\xi, \eta; \xi_{auxo}, \eta_l)}{\partial \xi} d\eta$$

Αναπτύσσοντας την ολοκληρωτέα ποσότητα με τη σειρά **6β**, παρατηρείται πως ο νόμος των βρόχων ικανοποιείται ταυτοτικά (δηλαδή $\forall I_l^o$) κάτι που επιτρέπει στο συνολικό ρεύμα MAS να λάβει αυθαίρετη τιμή, i.e:

$$\sum_{l=0}^{N-1} I_l^o \in \mathbb{R}$$

Το γεγονός αυτό είναι ικανό να δημιουργήσει σοβαρά αριθμητικά προβλήματα [29], σε περίπτωση απόκλισης των ρευμάτων καθώς η εκθετικά μεγάλη ταλάντωση τους υπερτίθεται σε μια εκθετικά μεγάλη μέση τιμή. Επίσης, το MAS πεδίο θα πρέπει να είναι αναλλοίωτο ως προς DC συνιστώσες που υπερτίθενται στα ρεύματα. Με την παρούσα διατύπωση, ο παραπάνω όρος συνοδεύει κάθε ρεύμα που λαμβάνεται από την επίλυση του γραμμικού συστήματος MAS, το οποίο οδηγεί σε υπολογισμό του διανυσματικού δυναμικού με προσέγγιση σταθεράς, όπως αποδεικνύεται για ασυμπτωτικά μεγάλο πλήθος πηγών σε επόμενη παράγραφο.

Στη συνέχεια για να ληφθούν άλλες N εξισώσεις για τους συντελεστές MAS, εφαρμόζεται η Neumann οριακή συνθήκη με A_1 & A_2 από τις (2.17) & (2.18) (βλ. παράρτημα 7.) :

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1(\xi_0, \eta_p)}{\partial \xi} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2(\xi_0, \eta_p)}{\partial \xi}$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{N-1} I_l^o Q(\xi_0, \eta_p; \xi_{auxi}, \eta_l) - I_l^i Q(\xi_0, \eta_p; \xi_{auxo}, \eta_l) = Q(\xi_0, \eta_p; \xi_f, 0)$$

Με την εισαγωγή των μεγεθών $Q^o = \{ Q(\xi_0, \eta_p; \xi_{auxi}, \eta_l) \}$, $Q^i = Q(\xi_0, \eta_p; \xi_{auxo}, \eta_l)$, $Q^f = Q(\xi_0, \eta_p; \xi_f, 0)$, η τελευταία εξίσωση γράφεται με πίνακες :

$$[-Q^i \quad Q^o] \begin{bmatrix} I^i \\ I^o \end{bmatrix} = Q^f, \quad I_{MAS} = \begin{bmatrix} I^i \\ I^o \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Με τη συγχώνευση των (2.17) & (2.18), λαμβάνεται το πλήρες σύστημα MAS, αντίστοιχο της εξίσωσης (1.27) :

$$\mathbf{A} \mathbf{I}_{MAS} = \mathbf{b} \quad (2.20)$$

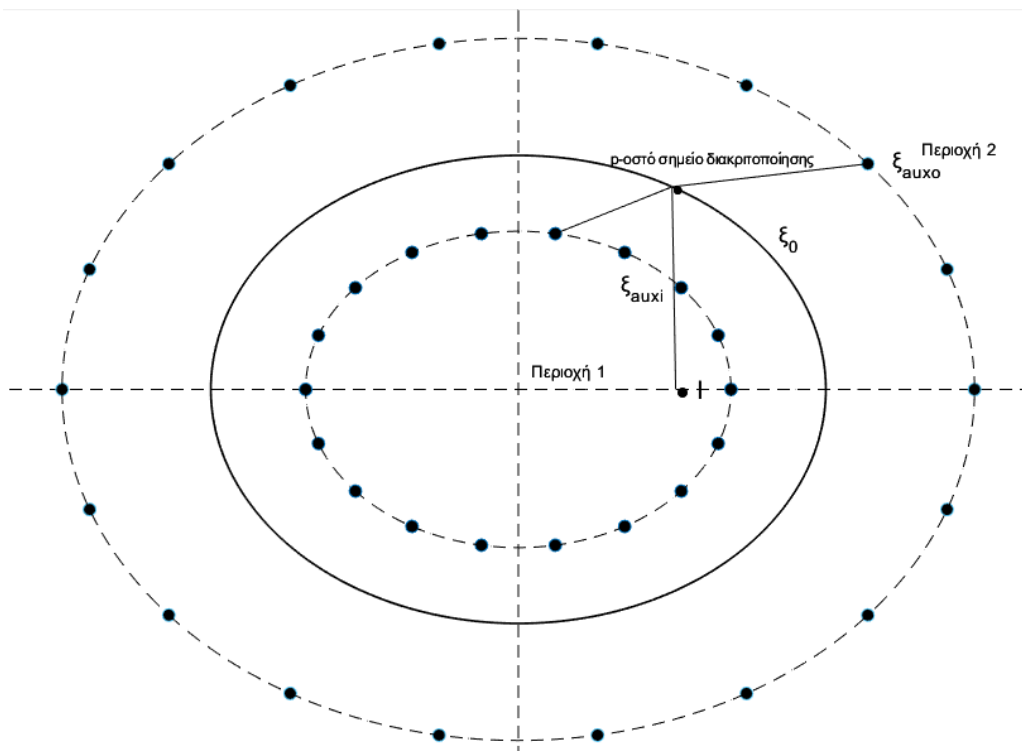
Όπου:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mu_2 L^i & -\mu_1 L^o \\ -Q^i & Q^o \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\mu_2 L^f \\ Q^f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 1}$$

Δυστυχώς, ο πίνακας $\mathbf{A}$ δε φέρει την ιδιότητα ενός τμηματικά κυκλικού πίνακα, κάτι το οποίο παρατηρείται ήδη από την εξίσωση $A_1(\xi_0, \eta_p) = A_2(\xi_0, \eta_p)$ μετά την αντικατάσταση των (2.17) – (2.18), όπου τα αντίστοιχα αθροίσματα δεν είναι συνελκτικά. Επίσης τα στοιχεία των block πινάκων δεν έχουν εξάρτηση από τη διαφορά των δεικτών. Ως συνέπεια, δε μπορούν να εφαρμοστούν οι τεχνικές του 1^{ου} Κεφαλαίου για την επίλυση του (2.20) και επομένως και για την ασυμπτωτική προσέγγιση των ρευμάτων, όπως στο πρόβλημα κυκλικού συνόρου. Η ανάλυση του ελλειπτικού προβλήματος, λόγω δυσκολίας, περιορίζεται στα αριθμητικά πειράματα. Επειδή η MAS δεν παύει να αποτελεί ειδική περίπτωση διακριτοποίησης μιας 1^{ου} είδους Fredholm ολοκληρωτικής εξίσωσης [5] (βλ. παράγραφο 1.7), αναμένεται ο πίνακας $\mathbf{A}$ να είναι ασθενής (*ill-conditioned*).

2.4β MAS στο εσωτερικό ελλειπτικό πρόβλημα



Εικόνα 59: MAS στο εσωτερικό πρόβλημα. Τοποθέτηση βοηθητικών πηγών επί των επιφανειών ξ_{auxo} , ξ_{auxi} .

Η στρατηγική τοποθέτησης πηγών δεν αλλάζει στο εσωτερικό πρόβλημα. Για την επίλυση του ΠΣΤ (2.15) μέσω MAS, ή ισοδύναμα, την εύρεση σκεδαζόμενου και διαδιδόμενου δυναμικού, γράφονται οι παρακάτω εξισώσεις θέτοντας τις ίδιες προϋποθέσεις με το εξωτερικό πρόβλημα :

$$\vec{A}_{1MAS} = \hat{z} \left(-\frac{\mu_1 I}{2\pi} \right) \left[\sum_{l=0}^{N-1} I_l^0 \ln R(\xi, \eta; \xi_{auxo}, \eta_l) + \ln R(\xi, \eta; \xi_f, 0) + C_1 \right], \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0$$

$$\vec{A}_{2MAS} = \hat{z} \left(-\frac{\mu_2 I}{2\pi} \right) \left[\sum_{l=0}^{N-1} I_l^1 \ln R(\xi, \eta; \xi_{auxi}, \eta_l) + C_2 \right], \quad \xi > \xi_0$$

Με αντικατάσταση των $A_{1\text{ MAS}}, A_{2\text{ MAS}}$ στις **(BC1) & (BC2)** του ΠΣΤ **(2.15)**, διατηρώντας το συμβολισμό για τους πίνακες και τη διέγερση :

$$\sum_{l=0}^{N-1} \mu_2 I_l^i L_{lp}^i - \mu_1 I_l^o L_{lp}^o = \mu_1 L_p^f, \quad 0 \leq p \leq N-1$$

$$\sum_{l=1}^{N-1} I_l^i Q_{lp}^i - I_l^o Q_{lp}^o = Q_p^f, \quad 0 \leq p \leq N-1$$

Οι 2 τελευταίες εξισώσεις γράφονται σε συμπαγή μορφή, όπως ακριβώς στην εξίσωση **(1.36)** :

$$\mathbf{A} \mathbf{I}_{\text{MAS}} = \mathbf{b} \quad (2.21)$$

Όπου:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mu_2 L^i & -\mu_1 L^o \\ Q^i & -Q^o \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$$

$$\mathbf{I}_{\text{MAS}} = \begin{bmatrix} I^i \\ I^o \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 1}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mu_1 L^f \\ Q^f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 1}$$

Όπως και στο εξωτερικό πρόβλημα, για να μην παραβιάζεται ο νόμος του Ampère θα πρέπει σε αμφότερες τις περιοχές να είναι:

$$\oint_{\xi=\xi'}^{\xi=\xi_f} \vec{H} d\vec{l}_\eta = I \delta_{\xi' > \xi_f}$$

Καθώς τα αναπτύγματα Fourier των συναρτήσεων βάσης $Q(\xi, \eta; \xi_{\text{auxo}}, \eta_l) = Q^o, Q(\xi, \eta; \xi_{\text{auxi}}, \eta_l) = Q^i$ είναι γνωστά για οποιοδήποτε (ξ, η) , τα παραπάνω ολοκληρώματα υπολογίζονται εύκολα δίνοντας, σε αντίθεση με το εξωτερικό πρόβλημα :

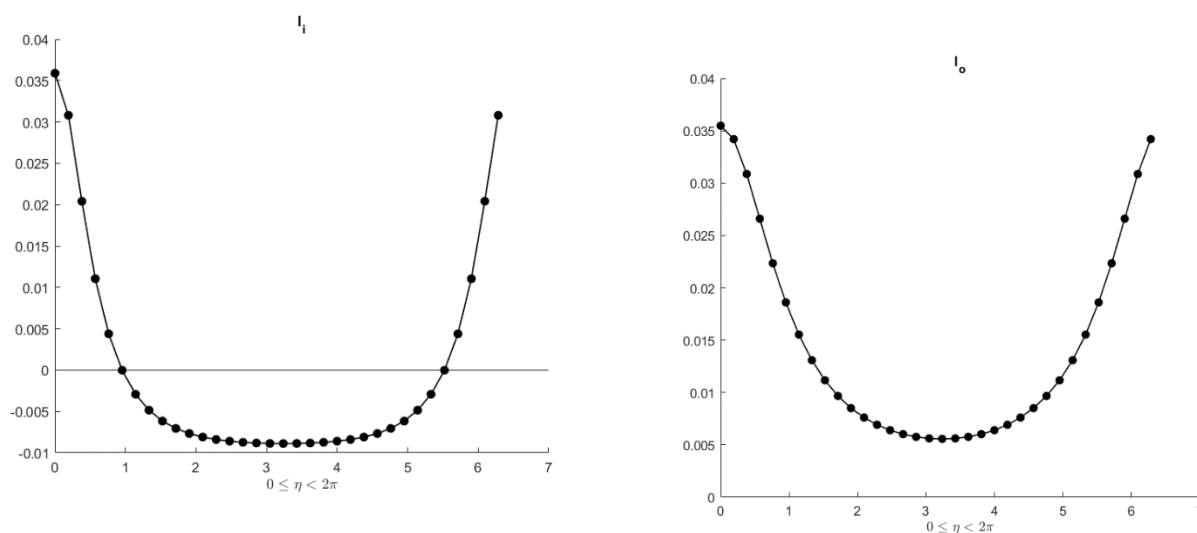
$$\sum_{l=0}^{N-1} I_l^i = 1, \quad \sum_{l=0}^{N-1} I_l^o \in \mathbb{R} \quad (2.22)$$

2.5 Αριθμητικά Παραδείγματα

Σε αμφοτέρες τις διατάξεις του Κεφαλαίου 2, διαπιστώνεται πως τα συμπεράσματα του Κεφαλαίου 1 μεταφέρονται αυτούσια και στο πρόβλημα ελλειπτικής συμμετρίας. Για το λόγο αυτό, η παράγραφος 2.5 παρουσιάζει τα κύρια αποτελέσματα (*MAS* ρεύματα & δυναμικό) αλλά και εκείνα στα οποία δεν υπάρχει πλέον εσοπτεία λόγω της αυξημένης δυσκολίας, όπως ο αριθμός κατάστασης των πινάκων A στις εξισώσεις (2.20) – (2.21). Προφανώς η *MAS* διατηρεί τις ιδιότητες που βρέθηκαν στο Κεφάλαιο 1, όπως το μη-μονοσήμαντο των βοηθητικών επιφανειών και η επίδοση της συναρτήσεως αυτών ή η υπό συνθήκη σύγκλιση των ρευμάτων σε συνεχή κατανομή. Στις δύο επόμενες υποπαράγραφους, παρέχονται τα απαραίτητα διαγράμματα που σχετίζονται με το κύριο συμπέρασμα αυτής της εργασίας, που αφορά τους διαφορετικούς τύπους συμπεριφοράς των πλατών των πηγών.

2.5α Εξωτερικό πρόβλημα $\xi_o < \xi_f$

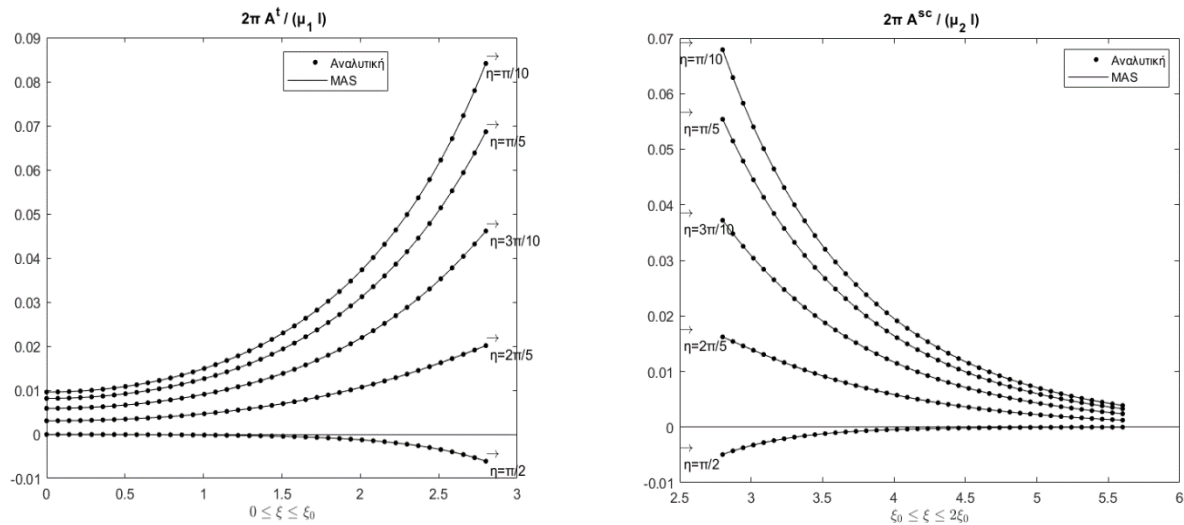
Για τη διάταξη αυτή επιλέχθηκαν, μοναδιαίο μήκος εστιών για το σύστημα συντεταγμένων, συνοριακή επιφάνεια $\xi_o = 2.8$ και το ρεύμα διέγερσης I τοποθετήθηκε στην θέση ($\xi_f = 4.7, \eta = 0$). Τα χαρακτηριστικά των υλικών τέθηκαν στις τιμές $\mu_1 = 3.17, \mu_2 = 1.21$. Οι τιμές των βοηθητικών επιφανειών τοποθετούνται ως ποσοστά των «κρίσιμων» επιφανειών (που όπως τονίζεται, ταυτίζονται με τις ακτίνες σύγκλισης των σειρών (2.13) – (2.14)) $\xi_{cri,1} = 2\xi_o - \xi_f, \xi_{cri,2} = \xi_f$ και συγκεκριμένα, για την «ήπια» περίπτωση, επιλέχθηκε $\xi_{auxo} = 0.8\xi_{cri,2}$ & $\xi_{auxi} = 1.6\xi_{cri,1}$ για τον υπολογισμό του δυναμικού στη εσωτερική και την εξωτερική περιοχή αντίστοιχα. Με τη χρήση $N = 34$ πηγών σε κάθε επιφάνεια και λύνοντας σε περιβάλλον υπολογιστή το σύστημα (2.20), προκύπτουν τα πλάτη των *MAS* ρευμάτων:



Εικόνα 60-61: *MAS* ρεύματα, ρέοντα στην εσωτερική (αριστερά) και εξωτερική (δεξιά) βοηθητική επιφάνεια.

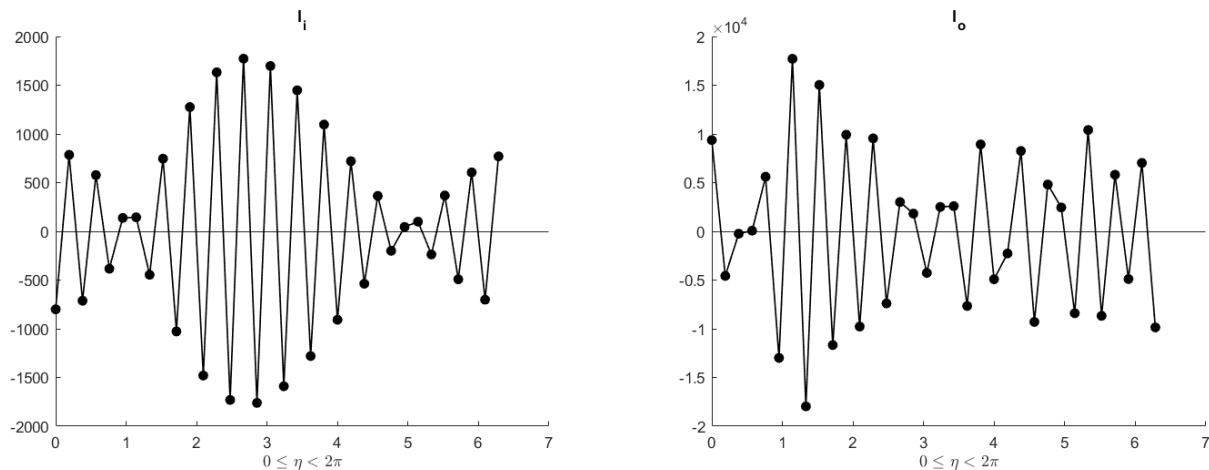
Στα διαγράμματα φαίνεται πως διατηρείται και στο ελλειπτικό πρόβλημα η ιδιότητα συμμετρίας περί του άξονα $x, I_1^{i,0} = I_{N-1}^{i,0}$. Κάτι τέτοιο είναι λογικό, καθώς τα ρεύματα που βρίσκονται σε γωνίες η_1, η_{N-1} ισαπέχουν και «φωτίζονται» με την ίδια ένταση από το ρεύμα διέγερσης.

Η ιδιότητα αυτή μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική μείωση διάστασης και επομένως και υπολογιστικής πολυπλοκότητας του προβλήματος, καθώς αντί ενός $2N \times 2N$ συστήματος, τα ρεύματα προκύπτουν ως λύση ενός προβλήματος διάστασης $(\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1) \times (\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1)$.



Εικόνα 62-63: Αναπαράσταση διαδιδόμενου (αριστερά) και σκεδαζόμενου δυναμικού (δεξιά).

Στην εικόνα 61 υπολογίζεται το διανυσματικό δυναμικό σε 5 διαφορετικές διευθύνσεις, από $\eta = \frac{\pi}{10}$ έως $\eta = \frac{\pi}{2}$, σε αμφότερες τις περιοχές. Η ακρίβεια είναι μεγάλη ακόμα και με μικρό πλήθος πηγών. Εντυπωσιακή είναι και η ιδιότητα της αναισθησίας (βλ. παράγραφο 1.9.1β) που συνεχίζει να υφίσταται. Με την τοποθέτηση των βοηθητικών επιφανειών στις κρίσιμες περιοχές και συγκεκριμένα όταν $\xi_{auxo} = 1.2\xi_{cri,2}$ & $\xi_{auxi} = 0.8\xi_{cri,1}$, η λύση του συστήματος (2.20) υποφέρει από ισχυρά αριθμητικά σφάλματα, όπως υποδεικνύει και ο υπερβολικά μεγάλος αριθμός κατάστασης ($cond(A) \sim 1.7e^{+18}$). Η μορφή των ρευμάτων είναι ακανόνιστη :



Εικόνα 64-65: Ρεύματα MAS κρίσιμης περίπτωσης.

Γενικά, η προβλεπόμενη απόκλιση των ρευμάτων που δεν εξαρτάται από ατέλειες υπολογιστικών συστημάτων, αναδεικνύεται σε χαμηλότερους αριθμούς κατάστασης. Ακόμα και στην παραπάνω περίπτωση όμως, ο υπολογισμός των A^{sc}, A^t από τις (2.17)-(2.18) δίνει σωστά αποτελέσματα.

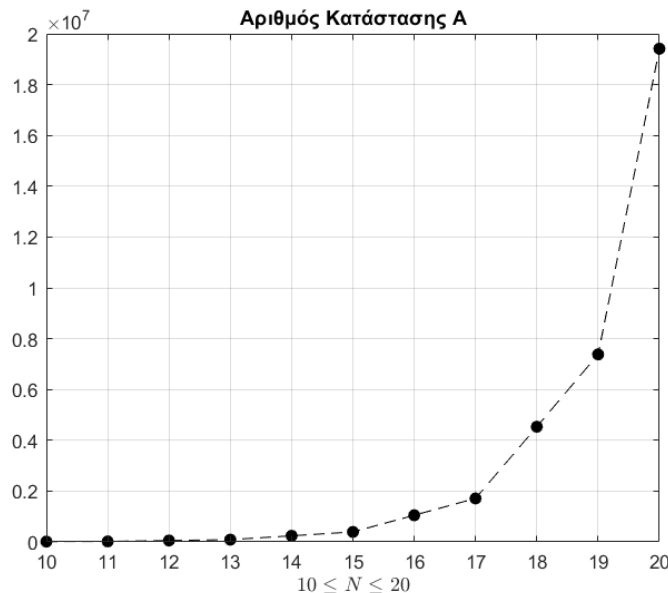
Όπως αποδείχθηκε κατά τη διατύπωση της MAS σε αυτό το πρόβλημα, το άθροισμα των ρευμάτων MAS της εξωτερικής επιφάνειας μπορεί να λάβει αυθαίρετη τιμή. Το γεγονός αυτό δεν επηρεάζει τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου για μεγάλα N. Από τη (2.17):

$$\begin{aligned}
 A^t &= -\frac{\mu_1 I}{2\pi} \sum_{l=0}^{N-1} I_l^0 \ln R(\xi, \eta; \xi_{\text{auxo}}, \eta_l) \\
 &= -\frac{\mu_1 I}{2\pi} \sum_{l=0}^{N-1} I_l^0 \left[\ln \frac{c}{2} + \xi_{\text{auxo}} - \sum_{m=1}^{+\infty} A_m \cos m\eta \cosh m\xi + B_m \sin m\eta \sinh m\xi \right] \\
 &= -\frac{\mu_1 I}{2\pi} \left[\ln \frac{c}{2} + \xi_{\text{auxo}} \right] \sum_{l=0}^{N-1} I_l^0 - \frac{\mu_1 I}{2\pi} \sum_{l=0}^{N-1} I_l^0 \sum_{m=1}^{+\infty} A_m \cos m\eta \cosh m\xi + B_m \sin m\eta \sinh m\xi
 \end{aligned}$$

Το διπλό άθροισμα προσεγγίζει ασυμπτωτικά το διαδιδόμενο δυναμικό της περιοχής 1, με προσέγγιση σταθεράς η οποία αυξάνεται συναρτήσει του πλήθους των πηγών. Για να ληφθεί όμως $A_{\text{MAS}}^t \rightarrow A^t$, στους παραπάνω υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκαν τα ρεύματα $I_l^{0'}$:

$$I_l^{0'} = I_l^0 - \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} I_l^0$$

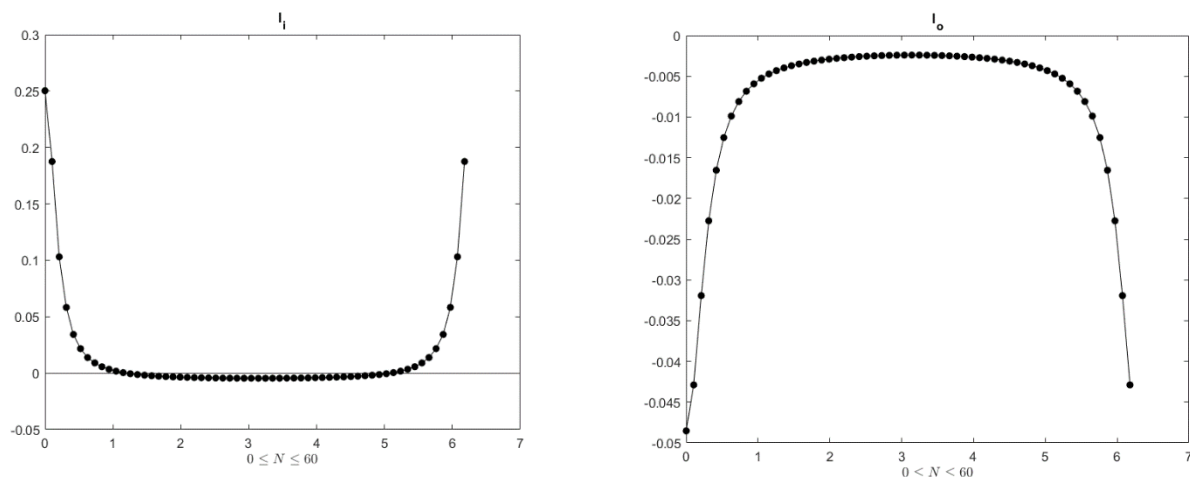
Τέλος, ακόμα και στην περίπτωση των ήπιων ρευμάτων για αρκετά μικρό πλήθος πηγών ο αριθμός κατάστασης του πίνακα A είναι αρκετά μεγάλος. Ο λόγος μεταβολής $\frac{\text{cond}(A)_{n+1}}{\text{cond}(A)_n}$ δεν είναι σταθερός αλλά η έκρηξη είναι το ελάχιστον εκθετική.



Εικόνα 66: Μεταβολή του αριθμού κατάστασης του A στο εξωτερικό πρόβλημα, στην «ήπια» περίπτωση.

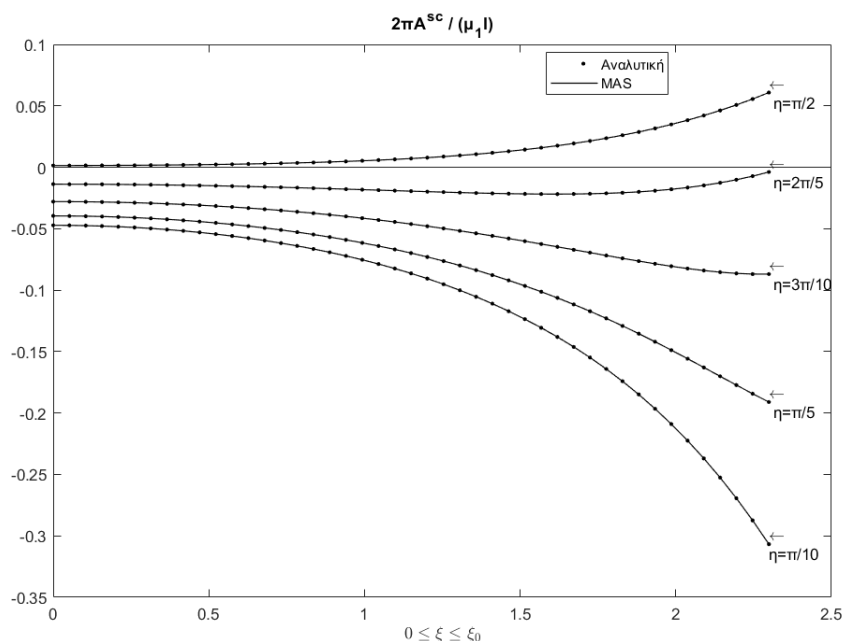
2.5β Εσωτερικό πρόβλημα $\xi_f < \xi_0$

Για την αριθμητική ανάλυση του εσωτερικού προβλήματος επιλέγεται η διάταξη με χαρακτηριστικά $\xi_0 = 1.8, \xi_f = 2.3, \mu_1 = 8.43, \mu_2 = 3.71$. Για τη MAS, επιλέχθηκαν οι επιφάνειες $\xi_{auxo} = 0.9\xi_{cri2}, \xi_{auxi} = 1.1\xi_{cri1}$ όπου $\xi_{cri1} = \xi_f$ & $\xi_{cri2} = 2\xi_0 - \xi_f$, εκτός δηλαδή των κρίσιμων επιφανειών. Η λύση του συστήματος (2.21) για πλήθος πηγών $N = 60$ απεικονίζεται στις παρακάτω εικόνες :

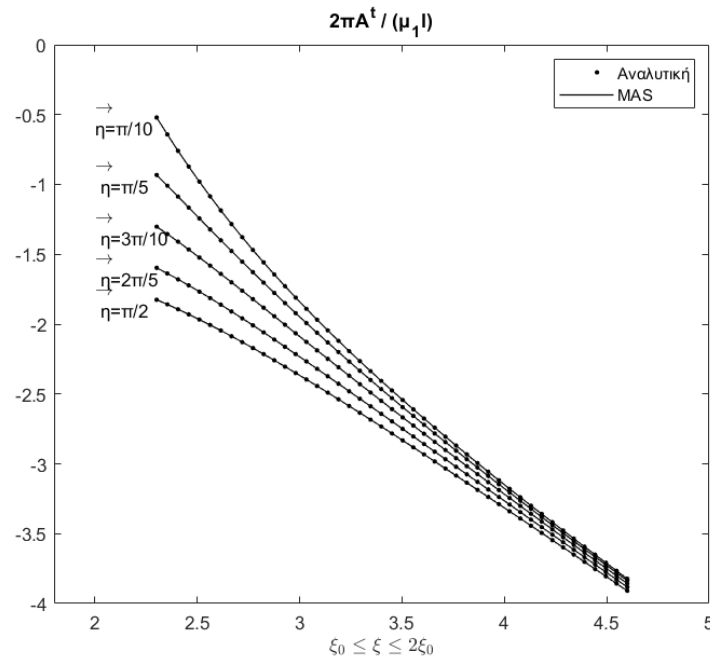


Εικόνα 67 – 68: MAS ρεύματα, ρέοντα στην εσωτερική (αριστερά) και εξωτερική (δεξιά) βοηθητική επιφάνεια

Το δυναμικό που διεγείρουν οι παραπάνω πηγές στο χώρο είναι:

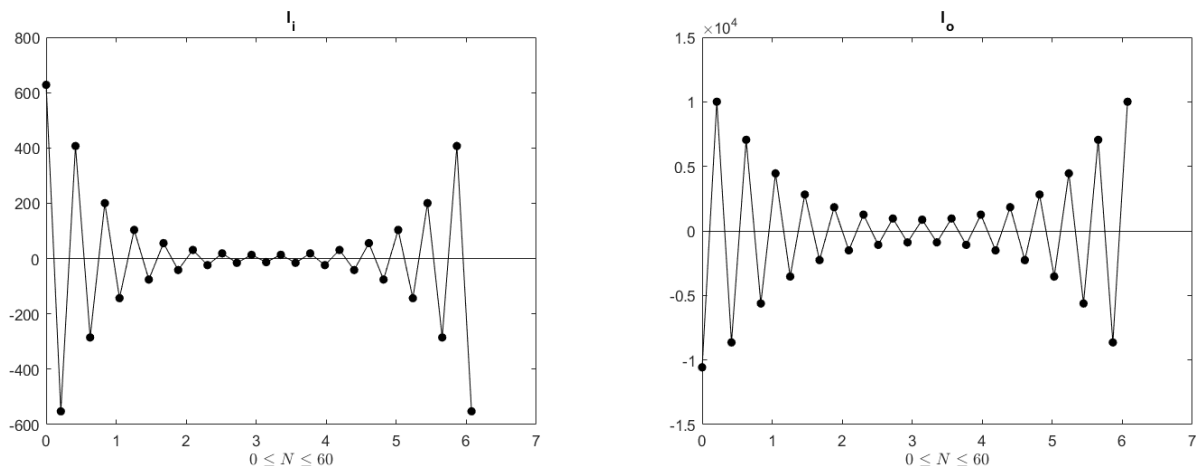


Εικόνα 69: Σκέδαση δυναμικού A^{sc} στο εσωτερικό του κυλίνδρου, $A_1 = A^{sc} + A^i$.



Εικόνα 70: Διάδοση δυναμικού στην εξωτερική περιοχή.

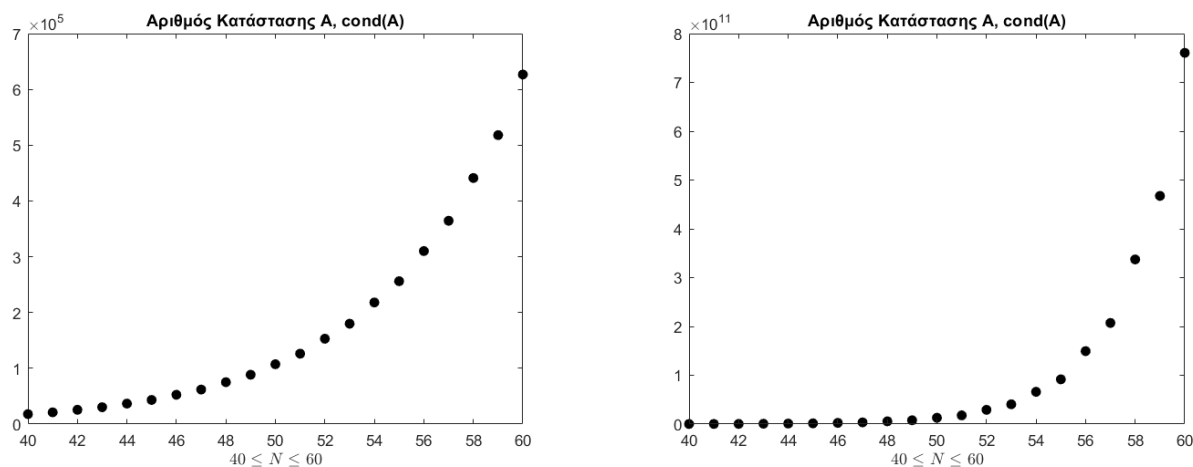
Η σύγκλιση είναι σαφής $A_{MAS} \rightarrow A$, ενώ παράλληλα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί αρκετά μικρότερο πλήθος πηγών. Όπως φαίνεται στις εικόνες **67**, **68** για τοποθέτηση των ρευμάτων σε περιοχές $\xi_{auxo} < \xi_f$ & $\xi_{auxi} > 2\xi_0 - \xi_f$ τα ρεύματα συγκλίνουν σε 2 επιφανειακές κατανομές $\hat{Z}K^i(\eta)$, $\hat{Z}K^o(\eta)$. Σε αντίθετη περίπτωση, επειδή υπάρχει ανώμαλο σημείο της αναλυτικής λύσης εντός των περιοχών όπου οι πηγές καλούνται να διεγείρουν μαγνητικό πεδίο, τα ρεύματα αναγκάζονται να αποκλίνουν για να το καταφέρουν. Με επανασχεδιασμό των επιφανειών στις $1.3\xi_f$, $0.7(2\xi_0 - \xi_f)$ η λύση του συστήματος **(2.21)** εμφανίζει τις αναμενόμενες, ελεύθερες από υπολογιστικές ατέλειες (*error free*) ταλαντευόμενες διακριτές κατανομές :



Εικόνα 71-72: MAS ρεύματα ρέοντα σε κρίσιμες επιφάνειες.

Σύμφωνα με τα πορίσματα των παραγράφων **2.2**, **2.3** για την ασυμπτωτική ως προς $\xi_0 \rightarrow +\infty$ ισότητα του προβλήματος κυκλικού συνόρου με το ελλειπτικό, είναι αναμενόμενη μια τέτοια ομοιότητα των ρευμάτων MAS.

Και με αυτή τη λύση του (2.21), η αλλαγή στην ακρίβεια του A_{MAS} είναι ανεπαίσθητη τόσο που δεν έχει νόημα να απεικονιστεί. Στη συγκεκριμένη διάταξη ο αριθμός κατάστασης είναι :



Εικόνα 73-74: Αριθμός κατάστασης για ήπια (αριστερά) και κρίσιμη (δεξιά) περίπτωση ρευμάτων.

Όπως και στο κυκλικό πρόβλημα, ο αριθμός κατάστασης εξαρτάται έντονα από την τοποθέτηση των βοηθητικών επιφανειών αλλά και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης. Όσο περισσότερο εισέρχονται οι ξ_{auxi} , ξ_{auxo} εντός των αντίστοιχων κρίσιμων περιοχών, τόσο πιο πολύ αυξάνεται ο αριθμός κατάστασης για σταθερό πλήθος πηγών, όπως ακριβώς φαίνεται στα παραπάνω διαγράμματα.

Συμπεράσματα – Μελλοντική Εργασία

Το κύριο συμπέρασμα της εργασίας αφορά τη σύγκλιση των βοηθητικών πηγών MAS και τότε αυτή συνοδεύεται από αντίστοιχη σύγκλιση, του τελικού ζητούμενου που είναι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στο χώρο που παράγεται από αυτές τις πηγές. Πιο συγκεκριμένα, για τις περιπτώσεις των μαγνητοστατικών δισδιάστατων προβλημάτων ελλειπτικού και κυκλικού συνόρου, βρίσκεται πως η τοποθέτηση των πηγών σε βοηθητικές επιφάνειες που δεν περικυκλώνουν τα ανώμαλα σημεία της αναλυτικής λύσης οδηγεί σε απόκλιση των πλατών των πηγών, αλλά και σε ταυτόχρονη σύγκλιση του διεγερόμενου από αυτές μαγνητικού πεδίου. Η συμπεριφορά αυτή πιστεύουμε πως γενικεύεται σε διάταξη αυθαίρετου σχήματος. Σε αντίθετη περίπτωση, τα ρεύματα τείνουν σε ομαλές επιφανειακές κατανομές. Παράλληλα, η εύρεση των πλατών των πηγών αποδεικνύεται ασυμπτωτικά ασθενές πρόβλημα, ανεξαρτήτως των βοηθητικών επιφανειών. Επομένως σε πιο δύσκολες διατάξεις, προτείνεται η τοποθέτηση των επιφανειών με τρόπο ώστε να περιέχουν τα ανώμαλα σημεία των αναλυτικών λύσεων, έτσι ώστε να μην χειριζόμαστε ρεύματα που περιέχουν σφάλματα προερχόμενα από ατελείς υπολογισμούς. Τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται είναι γνωστό πως δεν περιέχουν τέτοιου είδους σφάλματα, καθώς συνοδεύονται από κλειστές εξισώσεις. Τα παρόντα, μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για την ερμηνεία και τον έλεγχο αριθμητικών αποτελεσμάτων προερχόμενων από εφαρμογή MAS σε πραγματικές διατάξεις. Τέλος, σημειώνεται η ομοιότητα της συμπεριφοράς των πηγών, με εκείνη που εμφανίζεται σε γνωστά προβλήματα, όπως η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Hallen & Pocklington με τον προσεγγιστικό πυρήνα.

Επόμενο βήμα σε αυτή τη μελέτη είναι πιθανώς η γενίκευση των παραπάνω εξισώσεων σε κάποιο τρισδιάστατο πρόβλημα παρόμοιας γεωμετρίας ή η περαιτέρω υποστήριξη των λεγομένων με αριθμητικά πειράματα σε διατάξεις που το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δε βρίσκεται αναλυτικά. Επίσης, η ανάλυση μπορεί να επεκταθεί και στην ηλεκτροστατική, σε προβλήματα με χρονομεταβλητές πηγές ή και σε διατάξεις με άλλα υλικά.

Παράρτημα

Οι παρακάτω ορισμοί χρησιμοποιούνται καθ' όλη τη διάρκεια του 1^{ου} Κεφαλαίου :

$$x = \frac{\min(\rho_i, \rho_j)}{\max(\rho_i, \rho_j)}, |x| < 1, \rho = \max(\rho_i, \rho_j), \Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_j$$

$$\rho_{ij} = \ln \sqrt{\rho_i^2 + \rho_j^2 - 2\rho_i\rho_j\cos\Delta\varphi}$$

$$q_{ij} = \frac{d}{d\rho} \ln \rho_{ij} = \frac{\rho_i - \rho_j \cos \Delta\varphi}{\rho_i^2 + \rho_j^2 - 2\rho_i\rho_j \cos \Delta\varphi},$$

Για τη λύση του κυκλικού προβλήματος απαιτούνται τα παρακάτω αναπτύγματα για την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών. Τα **(α)**, **(β)**, **(γ)** αρκούν για αμφότερα το εξωτερικό και εσωτερικό πρόβλημα.

$$1. \ln \rho_{ij} = \ln \rho - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cos n\Delta\varphi, (\alpha)$$

$$2. \rho_j < \rho_i : q_{ij} = \frac{d}{d\rho} \ln \rho_{ij} = \frac{d}{d\rho} \left[\ln \rho - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cos(n\Delta\varphi) \right] = -\frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \cos n\Delta\varphi, (\beta)$$

$$3. \rho_j > \rho_i : q_{ij} = \frac{1}{\rho} \frac{1 - x \cos \Delta\varphi}{1 + x^2 - 2x \cos \Delta\varphi} = \frac{1}{\rho} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\Delta\varphi \right], (\gamma)$$

Η ταυτότητα (δ), ουσιαστικά αποτελεί την φόρμουλα άθροισης του Poisson (*Poisson Summation Formula*):

$$4. \forall f_m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \sum_{m=1}^{\infty} f_m \text{DFT}_k \left\{ \cos \frac{2\pi n}{N} m \right\} = \frac{N}{2} \left[\sum_{p=\delta_{k,0}}^{\infty} f_{pN+k} + \sum_{q=1}^{\infty} f_{qN-k} \right] \quad (\delta)$$

$$5. \sum_{m=1}^{+\infty} (-)^m \frac{z^m}{m} = -\ln(1+z), \quad |z| < 1$$

$$\Rightarrow \text{Re} \left\{ \sum_{m=1}^{+\infty} (-)^m \frac{z^m}{m} \right\} = -\ln|1+z|$$

Στην περίπτωση που εξετάζεται ένα πρόβλημα ελλειπτικής συμμετρίας, i.e η συνοριακή συνθήκη του ΠΣΤ εφαρμόζεται σε χαρακτηριστική επιφάνεια του ελλειπτικού συστήματος συντεταγμένων, η μέθοδος αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις απαιτεί τα εξής αναπτύγματα:

$$R^2(\xi, \eta; \xi_f, \eta_f) = (c \cosh \xi \cos \eta - c \cosh \xi_f \cos \eta_f)^2 + (c \sinh \xi \sin \eta - c \sinh \xi_f \sin \eta_f)^2$$

$$6. \ln R(\xi, \eta; \xi_f, \eta_f) = \ln R(\xi, \eta; \xi_f, \eta_f) = \operatorname{Re}\{ \ln(c \cosh z - c \cosh z_f) \}, \quad z = \xi + j\eta, \quad z_f = \xi_f + j\eta_f$$

$$\begin{aligned} \ln(c \cosh z - c \cosh z_f) &= \ln \frac{c}{2} + \ln(e^z + e^{-z} - e^{z_f} - e^{-z_f}) \\ &= \ln \frac{c}{2} + z_f + \ln(-1 - e^{-2z_f} + e^{z-z_f} + e^{-z-z_f}) \\ &= \ln \frac{c}{2} + z_f + \ln[-(1 - e^{-z_f-z})(1 - e^{-z_f+z})] \\ &= \ln \frac{c}{2} + z_f + j\pi + \ln(1 - e^{-z_f-z}) + \ln(1 - e^{-z_f+z}) \end{aligned}$$

Για $\operatorname{Re}\{z\} < \operatorname{Re}\{z_f\} \Leftrightarrow \xi < \xi_f$, όταν δηλαδή η διέγερση βρίσκεται στο εξωτερικό (*exterior*) του συνόρου μεταξύ των υλικών, οι λογάριθμοι γράφονται σε σειρά Taylor :

$$\ln(1 - e^{-z_f \pm z}) = - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} e^{(-z_f \pm z)m}$$

Με την εφαρμογή του τελεστή $\operatorname{Re}\{\}$:

$$6a. \ln R(\xi, \eta; \xi_f, \eta_f) = \ln \frac{c}{2} + \xi_f - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-m\xi_f}}{m} [\cosh m\xi \cos m\eta_f \cos m\eta + \sinh m\xi \sin m\eta_f \sin m\eta]$$

$$\xi < \xi_f$$

Σε περίπτωση που ισχύει το αντίθετο, δηλαδή η διέγερση βρίσκεται στο εσωτερικό (*interior*) της επιφάνειας διεπαφής και επομένως $\operatorname{Re}\{z\} > \operatorname{Re}\{z_f\} \Leftrightarrow \xi > \xi_f$, τότε με την εξαγωγή του e^z ως κοινό παράγοντα εντός του λογαρίθμου βρίσκεται:

$$6b. \ln R(\xi, \eta; \xi_f, \eta_f) = \ln \frac{c}{2} + \xi - 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-m\xi}}{m} [\cosh m\xi_f \cos m\eta_f \cos m\eta + \sinh m\xi_f \sin m\eta_f \sin m\eta]$$

$$\xi > \xi_f$$

$$7. \quad Q(\xi, \eta; \xi_f, \eta_f) = \frac{\partial \ln R(\xi, \eta; \xi_f, \eta_f)}{\partial \xi}$$

$$= \frac{1}{R^2} (\sinh \xi \cosh \xi - \sinh \xi \cosh \eta \cosh \xi_f \cosh \eta_f - \cosh \xi \sinh \eta \sinh \xi_f \sinh \eta_f)$$

8. Ομοιόμορφη σύγκλιση συναρτησιακής ακολουθίας (uniform convergence)

Έστω ένα σύνολο συναρτήσεων $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, όπου D ένα υποσύνολο του επιπέδου Argand. Λέγεται πως η συναρτησιακή ακολουθία $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ή f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο D σε μια οριακή συνάρτηση $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ και συμβολίζεται με $f_n \rightarrow f$ εάν :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall z \in D \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

Ο όρος «ομοιόμορφα» χρησιμοποιείται γιατί μια τέτοια μορφή σύγκλισης δεν εξαρτάται από το z όπως δείχνει η διάταξη των ποσοδεικτών $\exists N \forall z$. Για να επιτευχθεί ένα επίπεδο ακρίβειας ε περί της f , αρκεί να ληφθεί ένα πλήθος όρων N για κάθε z .

Ιδιαίτερη σημασία έχει η περίπτωση όπου η ακολουθία συναρτήσεων είναι το μερικό άθροισμα μιας άπειρης σειράς, δηλαδή:

$$F_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z) \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z) = F(z)$$

Από τον παραπάνω ορισμό, αν η $F_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε είναι δυνατόν να προσεγγιστεί η F με επίπεδο ακρίβειας ε , με ένα πλήθος όρων για όλο το πεδίο ορισμού.

8α. Ολοκλήρωση συναρτησιακής ακολουθίας όρο προς όρο

Εάν η παραπάνω ακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα, ισχύει η ισότητα για κάποια καμπύλη $\mathcal{C}$ στο D :

$$\int_{\mathcal{C}} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z') dz' = \int_{\mathcal{C}} F(z') dz' = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}} f_k(z') dz'$$

Η εξίσωση αυτή λέει πως η ολοκλήρωση του ορίου της ακολουθίας, μπορεί να επιτευχθεί από την ολοκλήρωση όρο προς όρο. Αν δοθεί κάποιο $\varepsilon > 0$, τότε από τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης, για $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\mathcal{C}|}$ θα υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε :

$$\forall n \geq N \forall z' \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n f_k(z') - F(z') \right| < \varepsilon'$$

Από την ανισότητα ML :

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \sum_{k=1}^n f_k(z') - F(z') dz' \right| < |\mathcal{C}| \sup_{z \in \mathcal{C}} \sum_{k=1}^n |f_k(z') - F(z')| < \varepsilon$$

Η τελευταία ανίσωση είναι που επιτρέπει την ολοκλήρωση όρο προς μιας σειράς συναρτήσεων σε κάποιο διάστημα.

Βιβλιογραφία

- [1] Harrington, Roger F. (1968). *Field Computation by Moment Methods*, Wiley-IEEE Press, 1993
- [2] Greengard, L; Rokhlin, V (1987). "A fast algorithm for particle simulations" *Journal of Computational Physics*. **73** (2). Elsevier BV: 325–348.
- [3] De Hoop, A. T. (1960). "A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems". *Applied Scientific Research, Section B*. **8**: 349–356.
- [4] Ergin, A.Arif; Shanker, Balasubramaniam; Michielssen, Eric (1998). "Fast Evaluation of Three-Dimensional Transient Wave Fields Using Diagonal Translation Operators". *Journal of Computational Physics*. **146** (1). Elsevier BV: 157–180.
- [5] G. Fikioris, "On two types of convergence in the Method of Auxiliary Sources," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 54, no. 7, pp. 2022-2033, July 2006.
- [6] G. Fikioris and I. Psarros, "On the phenomenon of oscillations in the Method of Auxiliary Sources," *IEEE Transactions Antennas Propagat*, vol. 55, no. 5, pp. 1293-1304, May **2007**.
- [7] C. A. Valagiannopoulos, N. L. Tsitsas, and G. Fikioris, "Convergence analysis and oscillations in the method of fictitious sources applied to dielectric scattering problems," *J. Opt. Soc. Am. A.*, vol. 29, no. 1, pp. 1-10, Jan. **2012**.
- [8] Sergej Rjasanow, *Effective algorithms with circulant-block matrices*, Linear Algebra and its Applications, Volume 202, 1994, Pages 55-69, ISSN 0024-3795,
[https://doi.org/10.1016/00243795\(94\)90184-8](https://doi.org/10.1016/00243795(94)90184-8).
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379594901848>
- [9] R. M. Gray, *Toeplitz and Circulant Matrices: A Review*. Document available at [Online]. Available: <http://ee.stanford.edu/~gray/toeplitz.pdf>, Aug. 2002
- [10] H. T. Anastassiou, D. G. Lymperopoulos, and D. I. Kaklamani, "Accuracy analysis and optimization of the method of auxiliary sources (MAS) for scattering by a circular cylinder," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 52, no. 6, pp. 1541–1547, Jun. 2004.
- [11] G. Fikioris, "The approximate integral equation for a cylindrical scatterer has no solution," *J. Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 15, no. 9, pp. 1153–1159, September 2001. DOI: 10.1163/156939301X01075. 53, 54, 60
- [12] G.Fikioris, I.Tsatsoglou, O.Bakas, *Selected Asymptotic Methods with Applications to Computational Electromagnetics and Antennas*, Morgan & Claypool Publishers, 2014
- [13] M. Kolaitis, *English-Greek Dictionary of Pure and Applied Mathematics*, Published by the Technical Chamber of Greece, 1976
- [14] G. Fikioris, N. Tsitsas, "Convergent Fields Generated by Divergent Currents in the Method of Auxiliary Sources", *The Generalized Multipole Technique for Light Scattering*, T. Wriedt, Y. Eremin, Springer, 2018, pp. 93-117
- [15] C. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, 4th Edition, John Wiley & Sons Inc., 2016

- [16] A.E. Krasnok, P.A. Belov, A.E. Miroshnichenko, A.I. Kuznetsov, B.S. Luk'yanchuk, Yu.S. Kivshar, All-dielectric optical nanoantennas, in *Progress in Compact Antennas*, ed. by L. Huitema (2014), <http://www.intechopen.com/books/progress-in-compactantennas/alldielectric-optical-nanoantennas>.
- [17] Z.-C. Li, J. Huang, H.-T. Huang, Stability analysis of method of fundamental solutions for mixed boundary value problems of Laplace's equation, *Computing* 88 (2010) 1–29.
- [18] Kitagawa, T. On the numerical stability of the method of fundamental solution applied to the Dirichlet problem. *Japan J. Appl. Math.* 5, 123–133 (1988). <https://doi.org/10.1007/BF03167903>.
- [19] Takashi Kitagawa, Asymptotic stability of the fundamental solution method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 38, Issues 1–3, 1991, Pages 263–269, ISSN 0377-0427, [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(91\)90175-J](https://doi.org/10.1016/0377-0427(91)90175-J).
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037704279190175J>.
- [20] Lloyd N. Trefethen, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, 1997
- [21] Wilkinson, James Hardy. “The evaluation of the zeros of ill-conditioned polynomials. Part I.” *Numerische Mathematik* 1 (1959): 150–166.
- [22] N. V. Larsen and O. Breinbjerg, “A hybrid MAS/MOM technique for 2D impedance scatterers illuminated by closely positioned sources,” *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 44, no. 2, pp. 112–114, Jan. 20, 2005.
- [23] G. Fikioris and T. T. Wu, “On the application of numerical methods to Hallén's equation,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 49, no. 3, pp. 383–392, Mar. 2001.
- [24] G. Fikioris, J. Lionas, and C. G. Lioutas, “The use of the frill generator in thin-wire integral equations,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 51, no. 8, pp. 1847–1854, Aug. 2003.
- [25] K. Knopp (1945, 1947), *Theory of functions*, Parts I and II, Dover Publications Inc., 1996
- [26] Ι. Ρουμελιώτης, Ι. Τσαλαμέγκας «Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία, Στάσιμα και Μόνιμα Πεδία, Τόμος Β», Εκδόσεις TZIOΛΑ, 2010
- [27] Lord Kelvin, Peter Guthrie, *A Treatise on Natural Philosophy Part II*, Cambridge University Press, 1903
- [28] Ν. Σταυρακάκης, *Διαφορικές Εξισώσεις: Συνήθειες και Μερικές : Θεωρία και Εφαρμογές από τη φύση και τη ζωή*, Εκδόσεις Τσότρας, 2019
- [29] G. Kolezas, G. Fikioris, I. Roumeliotis, “Convergence, divergence, and inherent oscillations in MFS solutions of two-dimensional Laplace-Neumann problems”, 2024
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.07914>
- [30] G. Fikioris and N. L. Tsitsas, “On Convergence and Inherent Oscillations Within Computational Methods Employing Fictitious Sources,” *Computer and Mathematics with Applications* 69, pp. 636–649, 2015.
- [31] R. Vescovo, “Inversion of block-circulant matrices and circular array approach,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 45, no. 10, pp. 1565–1567, Oct. 1997.

- [32] R. W. P. King, G. Fikioris, and R. B. Mack, *Cylindrical Antennas and Arrays*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2002, sec. 4.5 and 10.3.
- [33] H. Bateman, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Dover Publications, 1944
- [34] E. Whittaker, G. Watson, *A course on Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1920
- [35] Sten, J.C.E. Focal image charge singularities for the dielectric elliptic cylinder. *Electrical Engineering* 79, 9–15 (1996). <https://doi.org/10.1007/BF01840702>.
- [36] А. Прудников, Ю. Брычков, О. Маричев, “Интегралы и ряды 1,2,3”, *Физматлит*, 2003
- [37] I. Gradshteyn, I. Ryzhik, *Table of Integrals and Products*, Elsevier, 2007
- [38] J. C. -E. Sten, "Magnetostatic image method for the confocally layered elliptic cylinder," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, no. 1, pp. 199-204, Jan. 1998, doi: 10.1109/20.650229.
- [39] Majic, Matt. (2021). Images of point charges in conducting ellipses and prolate spheroids.
- [40] Papakanellos, Panagiotis J., Nikolaos L. Tsitsas, and Hristos T. Anastassiou. 2024. "The Method of Auxiliary Sources (MAS) in Computational Electromagnetics: A Comprehensive Review of Advancements over the Past Two Decades" *Electronics* 13, no. 17: 3520. <https://doi.org/10.3390/electronics13173520>
- [41] P. Andrianesis and G. Fikioris, “Superdirective-type near fields in the Method of Auxiliary Sources (MAS),” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 60, no. 6, pp. 3056-3060, June **2012**.
- [42] McConnell, A.J. (1957) *Applications of Tensor Analysis*. Dover, New York.
- [43] Ρουμελιώτης, Ι. Α. (2005) *Ειδικά Θέματα Ηλεκτρομαγνητισμού Σημειώσεις*, Αθήνα ΕΜΠ ΣΗΜΜΥ.