Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων και Μηχανικων Υπολογιστων
Τομεας Σηματων, Ελεγχου και Ρομποτικης

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ ΛΑΒΗΣ ΣΕ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΠΙΘΥΜΗΤΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ

Ανάλυση και Σχεδίαση

Διπλωματικη Εργασια

του

ΔΙΟΝΥΣΗ Γ. ΜΠΑΛΖΕΡ ΑΛΤΑΝΗ

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Τζαφέστας
Αναπληρωτής Καθηγητής, Ε.Μ.Π., ΣΗΜΜΥ

Αθήνα, Μάρτιος 2025

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων και Μηχανικων Υπολογιστων
Τομεας Σηματων, Ελεγχου και Ρομποτικης

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ ΛΑΒΗΣ ΣΕ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΠΙΘΥΜΗΤΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ

Ανάλυση και Σχεδίαση

Διπλωματικη Εργασια

του

ΔΙΟΝΥΣΗ Γ. ΜΠΑΛΖΕΡ ΑΛΤΑΝΗ

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Τζαφέστας
Αναπληρωτής Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 20η Μαρτίου 2025.

....	....	....
Κωνσταντίνος Τζαφέστας	Χαράλαμπος Ψυλλάκης	Αθανάσιος Ροντογιάννης
Αναπληρωτής Καθηγητής , Ε.Μ.Π., ΣΗΜΜΥ	Λέκτορας , Ε.Μ.Π., ΣΗΜΜΥ	Αναπληρωτής Καθηγητής , Ε.Μ.Π., ΣΗΜΜΥ

Αθήνα, Μάρτιος 2025

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων και Μηχανικων Υπολογιστων
Τομεας Σηματων, Ελεγχου και Ρομποτικης

....
Διονύσης Μπάλζερ Αλτάνης
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

στη Μούφα

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη μιας μεθόδου τοποθέτησης ενός ρομποτικού χεριού πάνω σε ένα ελλειψοειδές αντικείμενο με στόχο την εκτέλεση επιθυμητών κινήσεων (task-oriented) καθώς και η σύγκρισή της με υπάρχουσες μεθόδους. Το θέμα αυτό περιγράφεται μαθηματικά από ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Η έρευνα ξεκινά με την μελέτη και την ανάλυση κριτηρίων που σχετίζονται αποκλειστικά με τα σημεία επαφής. Στη συνέχεια, εισάγουμε το μοντέλο και την κινηματική ενός απλού ρομποτικού χεριού με τρία δάκτυλα με σκοπό να ασχοληθούμε με κριτήρια που περιλαμβάνουν την διάταξη του στον χώρο. Ασχολούμαστε με το πρόβλημα ύπαρξης λύσης των εξισώσεων κινηματικής για δεδομένα σημεία επαφής καθώς και τον προσδιορισμό τυχαίων αρχικών σημείων για αλγορίθμους βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε αναλυτικά ότι η ύπαρξη λύσης δεν εξαρτάται από τις γωνίες του τριγώνου που σχηματίζεται από τα σημεία επαφής, αλλά μόνο από το μέγεθος του αντικειμένου. Έπειτα, προσδιορίζουμε τον ελάχιστο αριθμό μεταβλητών με τις οποίες μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημά μας ώστε να μειώσουμε την διάσταση του χώρου αναζήτησης καθώς και τους περιορισμούς του προβλήματος. Μελετάμε επίσης την συμπεριφορά των κριτηρίων και δείχνουμε που αναμένουμε να τείνει ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης στην θεωρητική «ιδανική» περίπτωση (σύγκλιση σε ολικό ελάχιστο). Τέλος, εφαρμόζουμε πειραματικά τις μεθόδους μας στο πρόβλημα τοποθέτησης του ρομποτικού χεριού για δεδομένο διάνυσμα επιθυμητής εξωτερικής δύναμης και ροπής και επιβεβαιώνουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα που προέκυψαν.

Λέξεις Κλειδιά

Ρομποτική Λαβή, Ρομποτικό Χέρι, Κινηματική Ανοιχτής Αλυσίδας, Βελτιστοποίηση, Διαδοχικός Τετραγωνικός Προγραμματισμός, Κλειστότητα ως προς Δύναμη, Ιακωβιανή Ρομποτικού Χεριού, Πίνακας Λαβής

Abstract

The goal of this thesis is the development of a method for determining the optimal initial position of a robotic hand on an ellipsoidal object, subject to a sequence of desired forces and torques that we want to exert on the object, as well as its comparison with existing methods. This task is formulated as an optimization problem. The research begins with the study and analysis of criteria that depend exclusively on the contact points. Next, we introduce the model and kinematics of a simple three-fingered robotic hand in order to include criteria related to the configuration of the hand in space. We then tackle the problem of the existence of solutions to the kinematic equations of the robotic hand for given contact points and the determination of random feasible initial points for the optimization algorithms. Specifically, we prove analytically that the existence of a solution depends only on the size of the object and not on the angles of the triangle that is formed by the contact points. Following that, we determine the minimum number of the optimization variables in order to reduce both the dimension of the search space and the number of the problem's constraints. We also study the behaviour of several criteria and show the expected outcome of the algorithm in the theoretical ((idealized)) case (convergence to global minimum). Finally, we apply our methods experimentally to the problem of determining the position of a robotic hand given a desired action vector and we validate the theoretical results obtained.

Keywords

Robotic Grasping, Robotic Hand, Kinematics of Open Chains, Optimization, Sequential Quadratic Programming, Force Closure, Hand Jacobian, Grasp Matrix

Ευχαριστίες

Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω τον καθηγητή Κωνσταντίνο Τζαφέστα για την επίβλεψη αυτής της διπλωματικής εργασίας, την καθοδήγηση και την ευκαιρία που μου έδωσε να την εκπονήσω στο Εργαστήριο Ρομποτικής του Τομέα Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον υποψήφιο διδάκτορα Παρασκευά Οικονόμου για την βοήθεια του, η οποία έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην διαμόρφωση αυτής της εργασίας. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για την υποστήριξη και την συμπαράσταση που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

Αθήνα, Μάρτιος 2025

Διονύσης Μπάλζερ Αλτάνης

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Εικόνων

Κατάλογος Πινάκων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

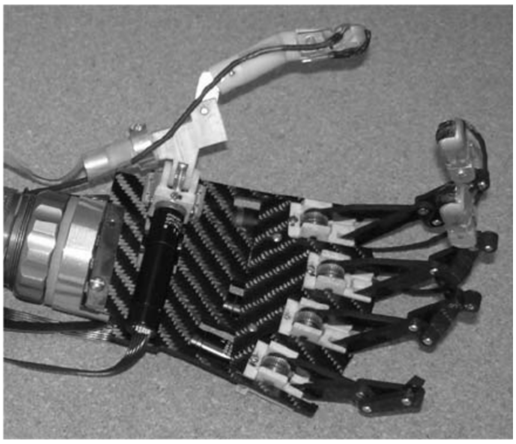
Από τα πρώτα χρόνια ανάπτυξής της, η επιστήμη της ρομποτικής έχει σαν κεντρικό της στόχο τη διευκόλυνση του ανθρώπου. Ξεκινώντας από τη βιομηχανική παραγωγή, υποκαθιστώντας ή συμπληρώνοντας τον εργάτη σε επίπονες και επαναλαμβανόμενες εργασίες, οι ρομποτικές συσκευές έχουν περάσει πλέον και στην καθημερινότητά μας, με στόχο την εκτέλεση εργασιών οι οποίες απαιτούν πιο λεπτομερείς χειρισμούς και αυξημένο βαθμό δεξιότητας.

Πολλές καθημερινές εργασίες απαιτούν επιδέξιο χειρισμό αντικειμένων (dexterous manipulation) και όχι απλή ακινητοποίηση ή μεταφορά. Στην περίπτωση αυτή το τελικό στοιχείο δράσης του ρομπότ (end - effector) αποτελείται από δύο ή παραπάνω ανοιχτές κινηματικές αλυσίδες (open kinematic chains) των οποίων η αρχή βρίσκεται στη βάση του τελεστή. Οι αλυσίδες αυτές σχηματίζουν ένα **ρομποτικό χέρι** (robotic hand). Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας (degrees of freedom) των αλυσίδων αυτών εξαρτάται από τη σχεδίαση και τον εσωτερικό μηχανισμό του ρομπότ και μπορεί να διαφέρει μεταξύ των μηχανών.

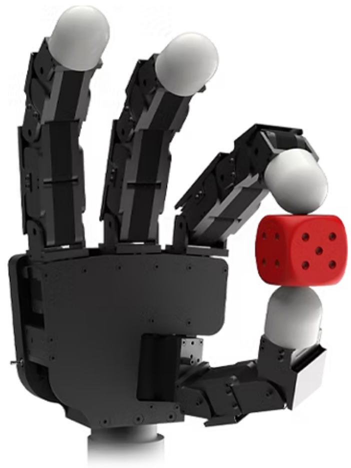
Χειρισμός με ρομποτικό χέρι - Προκλήσεις

Προκειμένου ένα ρομποτικό χέρι να μπορέσει να εκτελέσει μια εργασία (task) με ασφαλή και αποδοτικό τρόπο είναι απαραίτητο να μη χάνει επαφή με το χειριζόμενο αντικείμενο κατά τη διάρκεια της κίνησης, να μπορεί να αντισταθεί σε εξωτερικές διαταραχές και να η τοποθέτησή του να διευκολύνει την εκτέλεση του επιθυμητού χειρισμού (task - oriented configuration) αποφεύγοντας την επιβάρυνση των αρθρώσεών του με μεγάλες ροπές.

Ένα ακόμη σημαντικό πρόβλημα που πρέπει να αντιμετωπιστεί προκειμένου να επιτευχθεί μια λαβή, είναι αυτό του προσδιορισμού του σχήματος του αντικειμένου, ιδιαίτερα στην περίπτωση της αναλυτικής προσέγγισης, αφού η επιφάνεια των περισσότερων αντικειμένων δεν περιγράφεται εύκολα από κάποια συνάρτηση, ειδικά όταν αυτή επιθυμούμε να είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη. Για τον λόγο αυτό, πολλά αντικείμενα προσεγγίζονται από σχήματα ή δέντρα σχημάτων με απλές μαθηματικές περιγραφές. Για παράδειγμα, σε εργασίες που σχετίζονται με τη γεωργία, η επιφάνεια προϊόντων όπως τα μανιτάρια μπορεί να περιγραφεί με μικρό σφάλμα από εξισώσεις ελλειψοειδούς [1], [2]. Προκειμένου να διευκολυνθεί ή ανάλυση και να μελετηθούν οι ιδιότητες της λαβής, η εργασία αυτή ακολουθεί την παραπάνω προσέγγιση, δηλαδή τα αντικείμενα με τα οποία θα ασχοληθούμε, υποθέτουμε ότι είναι ελλειψοειδή.



(α΄) *Southampton Robotic Hand*



(β΄) *Allegro Robotic Hand*

(γ΄) *Robonaut Hand*

Εικόνα 1.1: *Διάφορα Μοντέλα Ρομποτικών Χεριών*

Το πρόβλημα του επιδέξιου χειρισμού αντικειμένων, στο σύνολό του, συνδυάζει τους περισσότερους τομείς της ρομποτικής, του ελέγχου, της βελτιστοποίησης και της θεωρίας συστημάτων γενικότερα. Λόγω λοιπόν της μεγάλης έκτασης που μπορεί να πάρει, θεωρούμε ότι το πρόβλημα της αρχικής τοποθέτησης του χεριού στο αντικείμενο, δηλαδή μιας στατικής λαβής, είναι ένα διαφορετικό βήμα από τον χειρισμό του αντικειμένου και μπορεί να προσεγγιστεί χωρίς να ασχοληθούμε με το πρόβλημα ελέγχου. Η τοποθέτηση ενός ρομποτικού χεριού σε ένα αντικείμενο μπορεί να περιγραφεί σαν πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς, το οποίο έχει αναλυθεί εκτενώς στη διεθνή βιβλιογραφία και έχουν προταθεί πολλά διαφορετικά κριτήρια. Πολλά από αυτά, αν όχι τα περισσότερα, σχετίζονται αποκλειστικά με την ευστάθεια και την ευρωστία της λαβής, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη την επιθυμητή εργασία. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι προσεγγίσεις αυτές είναι απολύτως λογικές, καθώς η αβεβαιότητα είναι σημαντικός παράγοντας στην τοποθέτηση των δακτύλων σε συγκεκριμένα σημεία της επιφάνειας και φυσικά μια ευσταθής λαβή μπορεί να εκτελέσει οποιαδήποτε κίνηση και να ασκήσει δύναμη ή ροπή προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.

Αντικείμενο Εργασίας - Κίνητρο Αντικείμενο αυτής της εργασίας είναι η μελέτη του προβλήματος στατικής λαβής ενός ελλειψοειδούς αντικειμένου, η παρουσίαση των κριτηρίων και η κατασκευή ενός **task - oriented** κριτηρίου διαισθητικά κατανοητού και απλού σε υπολογισμό. Πιο συγκεκριμένα, δεδομένων δυνάμεων και ροπών που πρέπει να ασκηθούν στο αντικείμενο, τη θέση του αντικειμένου στο χώρο και το μοντέλο του ρομποτικού χεριού, αναζητούμε την ιδανική αρχική διάταξη του χεριού (σημεία επαφής και πόζα) έτσι ώστε η ζητούμενη κίνηση να εκτελεστεί με τον αποδοτικότερο τρόπο.

Βασικό ρόλο στην διαμόρφωση της κατεύθυνσης και των στόχων της εργασίας έπαιξε το πρόβλημα σύνθεσης λαβής στο ερευνητικό έργο **SoftGrip** [3], [4], [5] και οι επιστημονικές προκλήσεις που αυτό καλείται να αντιμετωπίσει. Οι ιδέες και η περιγραφή του προβλήματος μας (ελλειψοειδή αντικείμενα) αναπτύχθηκαν λαμβάνοντας υπόψη το έργο αυτό και τις πρακτικές του εφαρμογές (γεωργία). Κεντρικό θέμα αυτών είναι η αυτόματη συγκομιδή γεωργικών προϊόντων (εδώ μανιταριών) με τη χρήση ρομποτικών χεριών. Από τον ορισμό του προβλήματος είναι φανερό ότι οι επιθυμητές κινήσεις βρίσκονται στο επίκεντρό του και είναι αναγκαίο να ληφθούν υπόψη. Η βέλτιστη λύση μπορεί να οριστεί με βάση διάφορα κριτήρια, πολλά από τα οποία θα αναφερθούν παρακάτω, αλλά η συγκεκριμένη εργασία εστιάζει έντονα στο **μέγεθος των δυνάμεων επαφής** και των **ροπών στις αρθρώσεις** του ρομποτικού χεριού, καθώς τα μεγαλύτερα προβλήματα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε στο πλαίσιο αυτό είναι η ευαίσθητη επιφάνεια του αντικειμένου και η εξοικονόμηση ενέργειας.

Συνεισφορά Εργασίας Στα πλαίσια της εργασίας επετεύχθησαν οι παρακάτω στόχοι (πολύ συνοπτικά):

- Αναγνώριση και περιγραφή των ζητημάτων που προκύπτουν κατά την ελαχιστοποίηση των ροπών στις αρθρώσεις καθώς και μελέτη της επίδρασης επιπλέον κριτηρίων και αυστηρότερων περιορισμών στο πρόβλημα αυτό.

- Ανάπτυξη νέας μεθοδολογίας η οποία στηρίζεται σε προϋπάρχουσες ιδέες της βιβλιογραφίας και τις επεκτείνει, λαμβάνοντας υπόψη τις επιθυμητές κινήσεις.

- Θεωρητικά αποτελέσματα:
  - Εύρεση τυχαίων σημείων αρχικών σημείων επαφής για αλγορίθμους βελτιστοποίησης.
  - Ισοδυναμία κριτηρίων.
  - Γενικότερα αποτελέσματα πάνω στην μαθηματική περιγραφή του προβλήματος.

Οργάνωση του τόμου

Η εργασία αυτή είναι οργανωμένη σε οκτώ κεφάλαια: Στο Κεφάλαιο 2 δίνεται το θεωρητικό υπόβαθρο των βασικών εννοιών και μαθηματικών σχέσεων που σχετίζονται με τη διπλωματική αυτή, καθώς και οι αναγκαίοι αλγόριθμοι και τα θεμελιώδη αποτελέσματα απαραίτητα για τη συνέχεια. Αρχικά περιγράφονται οι έννοιες, οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες και οι αλγόριθμοι που σχετίζονται με την ικανότητα της λαβής να ασκήσει δύναμη στο αντικείμενο καθώς και τα μοντέλα τριβής. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι απαραίτητες μαθηματικές σχέσεις που σχετίζονται με το ρομποτικό χέρι και τις δυνάμεις και ροπές που ασκεί στο αντικείμενο. Τέλος, περιγράφονται βασικές έννοιες της θεωρίας βελτιστοποίησης και του αλγορίθμου που χρησιμοποιείται. Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφονται τα κριτήρια που έχουν προταθεί σε σχετικές με το θέμα εργασίες καθώς και τα χαρακτηριστικά του καθενός (υπέρ και κατά). Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα προτεινόμενα κριτήρια της εργασίας και γίνεται ανάλυση του υπολογισμού και κάποιων ιδιοτήτων τους. Στο Κεφάλαιο 5 περιγράφεται και αναλύεται το μοντέλο του ρομποτικού χεριού το οποίο χρησιμοποιείται σε αυτή την εργασία και υπολογίζονται τα μεγέθη που σχετίζονται με αυτό. Η αναλυτική λύση της αντίστροφης κινηματικής του ρομποτικού χεριού δίνεται στο κεφάλαιο 6 και ακολουθεί διερεύνηση ύπαρξης λύσεων για τυχαία αρχικά σημεία επαφής. Στο Κεφάλαιο 7 γίνεται σύνθεση των προηγούμενων αποτελεσμάτων και κατασκευάζεται ο συνολικός αλγόριθμος υπολογισμού της βέλτιστης αρχικής διάταξης του χεριού. Η πειραματική διαδικασία (προσομοιώσεις) και τα αποτελέσματά της δίνονται στο Κεφάλαιο 8. Τέλος, στον επίλογο (Κεφάλαιο 9) παρουσιάζονται η σύνοψη των πορισμάτων της εργασίας αυτής μαζί με τη συνεισφορά της, καθώς και πιθανές μελλοντικές επεκτάσεις.

Μέρος I

Προαπαιτούμενα

Κεφάλαιο 2

Μαθηματική Περιγραφή Προβλήματος

2.1 Form - Force Closure

Στην ενότητα αυτή θα αναλύσουμε τις βασικές έννοιες που αφορούν την ικανότητα μιας λαβής να ακινητοποιεί αντικείμενα καθώς και τεχνικές οι οποίες θα μας επιτρέπουν να εξακριβώνουμε εάν μια λαβή πληρεί αυτήν την προϋπόθεση.

Ορισμός 2.1. *Θα λέμε ότι ένα σώμα βρίσκεται σε **Form Closure** όταν ένα σύνολο στατικών περιορισμών ακινητοποιεί πλήρως το σώμα. [6]*

Το σύνολο των περιορισμών στο οποίο αναφερθήκαμε νωρίτερα σχετίζεται με το γεγονός ότι η κίνηση δύο αντικειμένων που βρίσκονται σε επαφή περιορίζεται από την ιδιότητα της μη διαπερατότητας των σωμάτων. Ο περιορισμός αυτός μπορεί για απλότητα να προσεγγιστεί με πρωτοβάθμιες μεθόδους και να περιγραφεί από μια ανισότητα της μορφής

$$f(\partial, \partial, \mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \tag{2.1}$$

όπου το διάνυσμα ∂ περιγράφει τη διάταξη του ρομποτικού χεριού και το $\mathbf{u}$ τη διάταξη του αντικειμένου στον χώρο εργασίας. Θεωρούμε ότι το χέρι παραμένει ακίνητο και περιοριζόμαστε στη μελέτη των δράσεων που ενεργούν πάνω στο αντικείμενο αγνοώντας την κινηματική ανάλυση του χεριού. Για την πρωτοβάθμια προσέγγιση του περιορισμού επαφής i γράφουμε

$$\hat{\mathbf{n}}_i \mathbf{u} \geq 0, \quad \hat{\mathbf{n}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{C}(\mathbf{p_i}) \end{bmatrix} \mathbf{n}_i \tag{2.2}$$

όπου $\mathbf{C}(\mathbf{p_i})$ είναι ο πίνακας εξωτερικού γινομένου που προκύπτει από το διάνυσμα θέσης της επαφής i, $\mathbf{p}_i$, εκφρασμένο στο πλαίσιο του χεριού και $\mathbf{n}_i$ το κάθετο διάνυσμα από την επαφή i προς το κέντρο του αντικειμένου εκφρασμένο επίσης στο πλαίσιο του χεριού.

Έτσι προκύπτουν οι εξής τρεις περιπτώσεις:

1. **Το αντικείμενο δε βρίσκεται σε form-closure** εάν υπάρχει κίνηση του αντικειμένου $\mathbf{u}$ ώστε να μην παραβιάζεται κανένας περιορισμός:

$$\left\{ \exists \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{*d}, \forall i \in \{1, \dots, n_c\}, \mathbf{n}_i^T \mathbf{u} > 0 \right\} \tag{2.3}$$

2. **Το αντικείμενο βρίσκεται σε form-closure πρώτου βαθμού** εάν για κάθε κίνηση

του αντικειμένου $\mathbf{u}$ παραβιάζεται τουλάχιστον ένας περιορισμός:

$$\left\{\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{*d}, \exists i \in \{1, \ldots, n_c\}, \mathbf{n}_i^T \mathbf{u} < 0\right\} \tag{2.4}$$

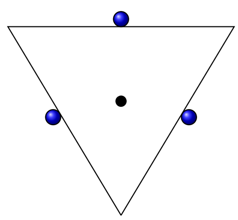
3. **Δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν το αντικείμενο βρίσκεται σε form-closure** όταν η πρώτη περίπτωση δεν ισχύει και υπάρχει κίνηση του αντικειμένου $\mathbf{u}$ τέτοια ώστε τα στοιχεία του $\mathbf{n}_i^T \mathbf{u}$ να είναι θετικά ή μηδέν:

$$\left\{\exists \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{*d}, \forall i \in \{1, \ldots, n_c\}, \mathbf{n}_i^T \mathbf{u} \geq 0\right\} \tag{2.5}$$

Θεώρημα 2.1. *Για ένα επίπεδο σώμα απαιτούνται τουλάχιστον τέσσερις σημειακές επαφές για να βρεθεί σε force closure* ***πρώτου βαθμού***. *Για ένα τρισδιάστατο σώμα ο αριθμός των ελάχιστων επαφών αυξάνεται σε επτά.*

Με πιο απλά λόγια η πρωτοβάθμια προσέγγιση του περιορισμού που επιβάλει μια επαφή, θεωρεί την επαφή σημειακή χωρίς να λαμβάνει υπόψιν ούτε τη γεωμετρία του αντικειμένου, ούτε ενδεχόμενες δυνάμεις τριβής που αναπτύσσονται μεταξύ του δακτύλου και του σώματος αυτού. Η προσέγγιση αυτή είναι ιδιαίτερα αυστηρή και αποτυγχάνει στις οριακές περιπτώσεις κύλισης και ολίσθησης.

Θεωρούμε το πρόβλημα κινηματικού περιορισμού ενός κυκλικού δίσκου στο επίπεδο. Ανεξαρτήτως του αριθμού των επαφών στο σύνορο του θα μπορεί πάντα να στραφεί γύρω από το κέντρο του. Αντίστοιχα σώματα στον τρισδιάστατο χώρο είναι οι σφαίρες και τα ελλειψοειδή (γενικότερα επιφάνειες που προκύπτουν από την πλήρη περιστροφή μιας καμπύλης γύρω από τον άξονα της). Στο σχήμα 2.1 η ανάλυση πρώτου βαθμού προβλέπει ότι το σώμα το οποίο συγκρατείται από τρεις επαφές μπορεί να περιστραφεί γύρω από τον εαυτό του. Με ανάλυση ανώτερου βαθμού όμως (λαμβάνοντας υπόψιν τη γεωμετρία του αντικειμένου) θα διαπιστώναμε ότι το σώμα βρίσκεται στην πραγματικότητα σε form-closure.



Σχήμα 2.1: *Τρεις επαφές συγκρατούν σε form-closure ένα τριγωνικό αντικείμενο*

Μπορούμε να γράψουμε τώρα ένα απλό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με το οποίο μπορούμε να ελέγξουμε εάν ένα αντικείμενο βρίσκεται σε form-closure πρώτου βαθμού.

Αλγόριθμος ελέγχου πρωτοβάθμιου form-closure [7] Έστω $\mathbf{F} = \left[\mathcal{F}_1\ \mathcal{F}_2 \ldots \mathcal{F}_j\right] \in \mathbb{R}^{n \times j}$ ο πίνακας του οποίου τις στήλες αποτελούν οι j δράσεις στις επαφές (δυνάμεις και ροπές κατά τον άξονα που συνδέει την επαφή με το κέντρο του αντικειμένου). Για τρισδιάστατα σώματα έχουμε $n = 6$ και για επίπεδα σώματα $n = 3$. Οι επαφές οδηγούν σε form-closure εάν υπάρχει διάνυσμα βαρών $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^j$, $\mathbf{k} \geq 0$ τέτοιο ώστε $Fk + F_{ext} = 0$ για κάθε $F_{ext} \in \mathbb{R}^n$.

Για να βρίσκεται το σώμα σε form-closure είναι αναγκαίο ο πίνακας $\mathbf{F}$ να είναι πλήρους βαθμού ($rank(\mathbf{F}) = n$). Όταν ο πίνακας $\mathbf{F}$ είναι πλήρους βαθμού τότε η ικανοποίηση της συνθήκης κλειστότητας ισοδυναμεί με την ύπαρξη αυστηρώς θετικού διανύσματος βαρών $\mathbf{k} > 0$ τέτοιο ώστε $\mathbf{Fk} = 0$. Επομένως, το πρόβλημα γράφεται στην παρακάτω μορφή:

$$\begin{array}{ll} \textit{find} & \mathbf{k} \\ \textit{minimizing} & \mathbf{1}^T\mathbf{k} \\ \textit{subject to}: & \mathbf{Fk} = \mathbf{0} \\ & k_i \geq 1, \ i = 1, \ldots, j, \end{array} \tag{2.6}$$

όπου το $\mathbf{1}$ είναι ένα διάνυσμα μεγέθους j το οποίου τα στοιχεία είναι μονάδες. Αν ο πίνακας $\mathbf{F}$ είναι πλήρους βαθμού και υπάρχει λύση στο πρόβλημα (2.6) τότε το σώμα βρίσκεται σε form-closure αλλιώς όχι. Η συνάρτηση κόστους $\mathbf{1}^T\mathbf{k}$ συμπεριλαμβάνεται ώστε να είναι το πρόβλημα καλά ορισμένο ανεξαρτήτως αλγορίθμου επίλυσης που χρησιμοποιείται.

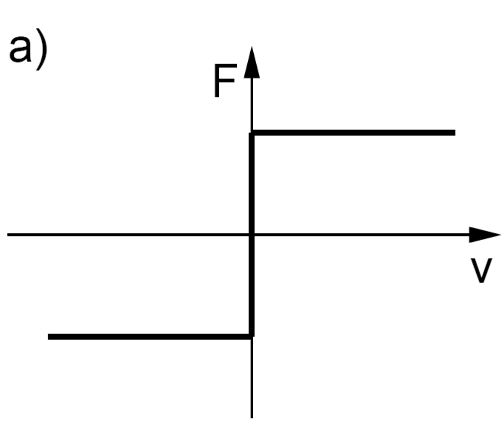
Τριβή Για την ανάπτυξη ενός πιο ακριβούς μοντέλου ανάλυσης της ευστάθειας μιας λαβής θεωρούμε ότι οι επαφές είναι σημειακές **με τριβή**. Ένα ευρέως διαδεδομένο μοντέλο τριβής είναι η **τριβή Κουλόμπ** (**Coulomb friction**). Η προσέγγιση αυτή θεωρεί ότι το μέτρο της εφαπτομενικής δύναμης τριβής f_t που ασκείται από την επαφή, συνδέεται με αυτό της αντίστοιχης κάθετης δύναμης f_n μέσω της ανισότητας $f_t \leq \mu f_n$, όπου μ ο **συντελεστής τριβής**. Η ισότητα ισχύει όταν το σώμα κυλάει ή γλιστράει στην αντίστοιχη επαφή. Συχνά ορίζονται δύο συντελεστές τριβής, ο στατικός μ_s και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μ_k, με $\mu_s \geq \mu_k$. Στην ανάλυση που ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο Κουλόμπ για να περιγράψουμε την τριβή στις επαφές, αλλά, καθώς ενδιαφερόμαστε για στατικές λαβές, θα θεωρήσουμε μόνο έναν συντελεστή τριβής μ για τον οποίο ισχύει $0 < \mu \leq 1$. Το μοντέλο αυτό δίνει λογικά αποτελέσματα για σκληρά, στεγνά υλικά. Υπάρχουν διάφορα μοντέλα τριβής τα οποία προσεγγίζουν τη συμπεριφορά συγκεκριμένων τύπων υλικών. Ορισμένα από αυτά παρουσιάζονται παρακάτω [8]:

1. **Viscous friction**: Η τριβή είναι ανάλογη της ταχύτητας ολίσθησης. Το μοντέλο αυτό συνήθως συνδυάζεται με την τριβή Κουλόμπ για να καλύψει και τη στατική περίπτωση.

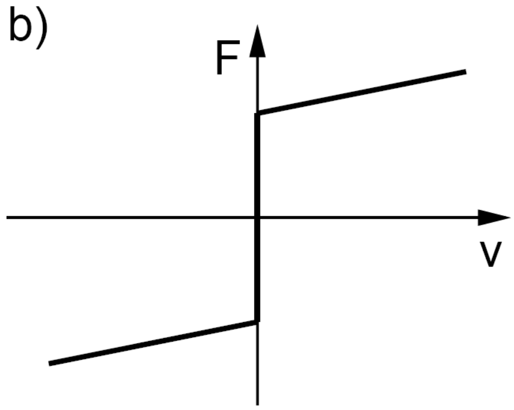
2. **Φαινόμενο Stribeck**: Η καμπύλη Stribeck αποτελεί ένα πιο πολύπλοκο μοντέλο συσχέτισης της τριβής με την ταχύτητα ολίσθησης. Παρόλο που ισχύει και στη στατική περίπτωση, το μοντέλο αυτό περιέχει ενσωματωμένα τα μοντέλα Κουλόμπ και Viscous.

3. **Τριβή ανάλογη της μετατόπισης** (**Presliding displacement**): Η τριβή περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής
$$F_f(x) = -k_t x$$
όπου $F_f(x)$ η τριβή που αναπτύσσεται, k_t είναι ο συντελεστής σκληρότητας (δυσκαμψίας - stiffness) του υλικού και x η μετατόπιση.

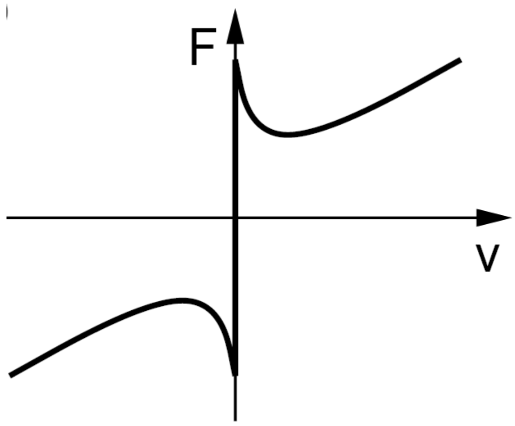
Έχουν χρησιμοποιηθεί πιο πολύπλοκες περιγραφές της καμπύλης *Stribeck* όπως αυτή των Hess και Soom ή αυτή του Tustin. Για μεγαλύτερη εμβάθυνση και εξέταση των μοντέλων τριβής ο αναγνώστης ενθαρρύνεται να αναζητήσει την αντίστοιχη βιβλιογραφία (βλ. [9]).



(α΄) *Coulomb friction model*



(β΄) *Viscous friction model*



(γ΄) *Stribeck friction model*

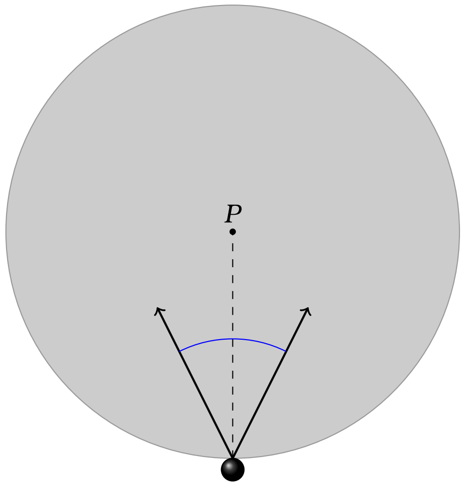
Σχήμα 2.2: *Μοντέλα Τριβής*

Από εδώ και στο εξής και για όλη την υπόλοιπη εργασία θα χρησιμοποιούμε το μοντέλο τριβής Κουλόμπ.

Θεωρώντας ότι το κάθετο διάνυσμα επαφής ταυτίζεται (τοπικά) με τον άξονα $z = [0\ 0\ 1]^T$, για τις εφαπτομενικές δυνάμεις θα πρέπει να ισχύει

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2} \leq \mu f_z, \quad f_z \geq 0 \tag{2.7}$$

Το σύνολο των δυνάμεων που ικανοποιούν την ανισότητα αυτή σχηματίζουν τον **κώνο τριβής**. Το σύνολο των δυνάμεων που μπορεί να ασκήσει η επαφή στο αντικείμενο βρίσκεται εντός του κώνου τριβής. Όταν το αντικείμενο δεν ολισθαίνει στην επαφή τότε η ασκούμενη δύναμη μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε εντός του κώνου τριβής. Όταν εμφανίζεται ολίσθηση, η αντίστοιχη δύναμη βρίσκεται στο σύνορο του.



Σχήμα 2.3: *Κώνος τριβής στο επίπεδο*

Ορισμός 2.2 (Κώνοι δράσεων). *Έχοντας επιλέξει πλαίσιο συντεταγμένων, μπορούμε να μετατρέψουμε κάθε δύναμη* $\mathbf{f}$ *που ασκείται στο αντικείμενο σε δράση* $\mathcal{F} = (\mathbf{p} \times \mathbf{f}, \mathbf{f})$, *η οποία εκφράζει τη ροπή και τη δύναμη που ασκείται από την επαφή στο αντικείμενο. Δεδομένων δύο δράσεων* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, *ο* ***κώνος δράσεων*** *που σχηματίζεται από αυτές είναι ο χώρος που καλύπτει ο θετικός γραμμικός συνδυασμός τους,* $\mathcal{WC} = pos(\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\})$. *Όταν πολλές επαφές ενεργούν σε ένα σώμα το σύνολο των δράσεων που μπορούν να ασκηθούν στο σώμα αποτελείται από την ένωση των επιμέρους κώνων δράσεων και του εσωτερικού του σύνθετου κώνου που σχηματίζεται, δηλαδή τον χώρο που καλύπτει ο θετικός γραμμικός συνδυασμών όλων των επιμέρους κώνων δράσεων.*

$$\mathcal{WC} = pos\left(\{\mathcal{WC}_i\}\right) = \left\{\sum_i k_i \mathcal{F}_i | \mathcal{F}_i \in \mathcal{WC}_i, k_i \geq 0\right\}$$

Γραμμικές Προσεγγίσεις Τριβής Ανάλογα με την εφαρμογή μπορεί να είναι βολικό να θεωρήσουμε ότι ένας κυκλικός κώνος τριβής μπορεί να προσεγγιστεί από έναν πολυεδρικό κυρτό κώνο (polyhedral convex cone). Δύο συνηθισμένες προσεγγίσεις είναι αυτές του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κώνου. Όταν ο πολυεδρικός κώνος είναι εγγεγραμμένος στον κυκλικό, τότε υποτιμούμε τις δυνάμεις που μπορούν να ασκηθούν στο αντικείμενο ενώ όταν ο πολυεδρικός κώνος είναι περιγεγραμμένος στον κυκλικό, τις υπερεκτιμούμε.

Ορισμός 2.3. *Έστω μία λαβή ενός αντικειμένου η οποία επιτυγχάνεται μέσα από n επαφές με τριβή. Η λαβή θα λέμε ότι είναι* ***κλειστή ως προς δύναμη*** *(force - closed) όταν σύνθετος κώνος δράσεων που σχηματίζεται περιέχει εξ ολοκλήρου τον χώρο δυνατών δράσεων. Με άλλα λόγια κάθε εξωτερική δράση* $\mathcal{F}_{ext}$ *ασκούμενη στο αντικείμενο μπορεί να εξισορροπιστεί από δυνάμεις στις επαφές.*

Αλγόριθμοι Ελέγχου Κλειστότητας ως προς Δύναμη

Σε αυτήν την ενότητα θα αναπτύξουμε κάποιους από τους πιο διαδεδομένους στη βιβλιογραφία τρόπους ελέγχου της κλειστότητας ως προς δύναμη μιας λαβής.

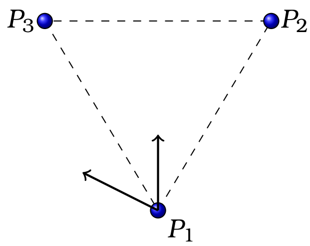
Ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος ελέγχου Μια απλή μέθοδος ελέγχου της κλειστότητας μιας λαβής η οποία είναι προσεγγιστική για τρισδιάστατα αντικείμενα αλλά ακριβής για επίπεδα στηρίζεται στον έλεγχο για form-closure που αναπτύχθηκε προηγουμένως [7]. Για επίπεδα αντικείμενα κάθε κώνος τριβής παρέχει δύο ακμές και στην τρισδιάστατη περίπτωση παρέχει τρεις ή περισσότερες, ανάλογα με την πολυεδρική προσέγγιση που έχει επιλεγεί. Κατασκευάζουμε τον $n \times j$ πίνακα $\mathbf{F}$ του οποίου οι στήλες είναι τα διανύσματα δράσεων $\mathcal{F}_i$ στις j επαφές, όπου $n = 3$ για επίπεδα αντικείμενα και $n = 6$ για τρισδιάστατα. Στη συνέχει ο έλεγχος είναι ίδιος με αυτόν για form-closure. Η λαβή είναι κλειστή ως προς δύναμη εάν:

- ο βαθμός του πίνακα $\mathbf{F}$ είναι n
- υπάρχει λύση στο πρόβλημα (2.6)

Για την ανάπτυξη της επόμενης μεθόδου θα χρειαστούμε την παρακάτω πρόταση [10].

Πρόταση 2.1. *Η τομή τριών επίπεδων κώνων τριβής δεν είναι κενή αν και μόνο αν για δύο κώνους, το σημείο τομής δύο οριακών ευθειών τους δε βρίσκεται στο εξωτερικό του τρίτου κώνου τριβής.*

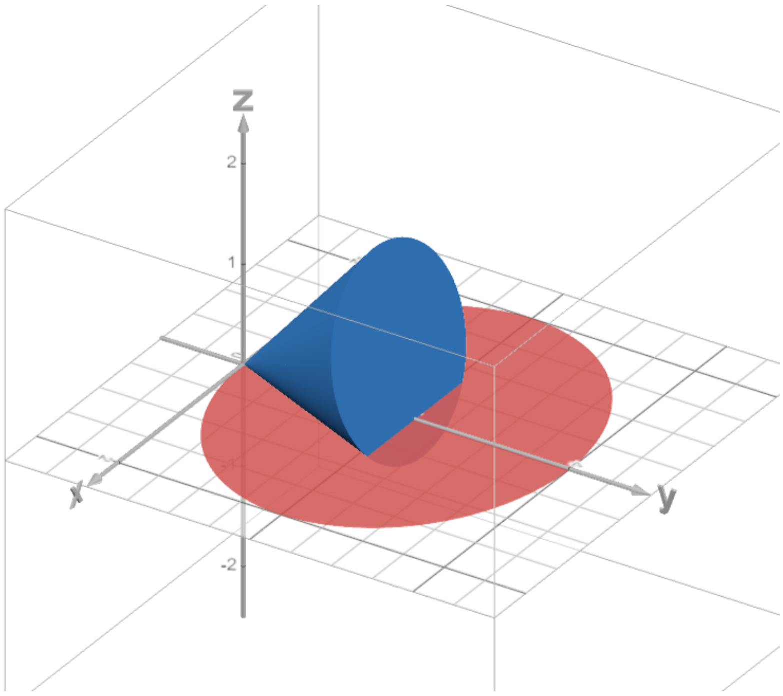
Εάν μια πλευρά του τριγώνου που σχηματίζεται από τα τρία σημεία επαφής τέμνει τον κώνο τριβής μιας επαφής τότε η μεριά του κώνου που κείτεται στο εξωτερικό του τριγώνου δεν παίζει ρόλο στην κλειστότητα της λαβής ως προς δύναμη. Επομένως, τα όρια του κώνου τριβής πρέπει να μεταβληθούν και η πλευρά που βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου να ταυτιστεί με την πλευρά του τριγώνου. Ο Li [10] έχει περιγράψει έναν αλγόριθμο υπολογισμού των νέων ορίων.



Σχήμα 2.4: *Η πλευρά του τριγώνου επαφών $\overrightarrow{P_1P_3}$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κώνου τριβής P_1*
.

Θεώρημα 2.2. *Ένα τρισδιάστατο αντικείμενο περιορισμένο από 3 σημειακές επαφές με τριβή. Η λαβή είναι κλειστή ως προς δύναμη αν και μόνο αν ο κώνος τριβής σε κάθε επαφή τέμνει το επίπεδο S που σχηματίζεται από τις επαφές σε κώνο και η λαβή στο επίπεδο S είναι κλειστή ως προς δύναμη [7].*

Στην περίπτωσή μας, το αντικείμενο είναι ελλειψοειδές και άρα κυρτό, συνεπώς ο υπολογισμός της τομής των κώνων τριβής με το επίπεδο που σχηματίζεται από τις επαφές είναι ακόμα πιο εύκολος αφού κανένας κώνος δε θα έχει πλευρά στο εξωτερικό του αντικειμένου.



Σχήμα 2.5: *Κώνος τριβής και επίπεδο επαφής σε κυκλικό αντικείμενο*

Έστω ότι οι θέσεις των τριών σημείων επαφής δίνονται από τα διανύσματα $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}$. Ο συντελεστής τριβής είναι μ, γνωστός. Σχηματίζουμε τα διανύσματα διαφορών

$$\begin{aligned} \vec{c_1} &= \vec{r_3} - \vec{r_2} \\ \vec{c_2} &= \vec{r_2} - \vec{r_1} \end{aligned} \tag{2.8}$$

με στόχο να υπολογίσουμε το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου επαφών

$$\vec{n} = \vec{c_1} \times \vec{c_2} \tag{2.9}$$

Για κάθε επαφή υπολογίζουμε το βοηθητικό διάνυσμα $\vec{u_i} = -\vec{r_i} \times \vec{n}$ και στη συνέχεια το διάνυσμα $\vec{k_i} = -\vec{u_i} \times \vec{n}$. Υπολογίζουμε τις παρακάτω γωνίες:

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos^{-1}\left(\tfrac{-\vec{k_i} \cdot \vec{r_i}'}{|\vec{k_i}||\vec{r_i}|}\right) \\ a_2 &= \cos^{-1}\left(\tfrac{\vec{k_i} \cdot \vec{r_i}'}{|\vec{k_i}||\vec{r_i}|}\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

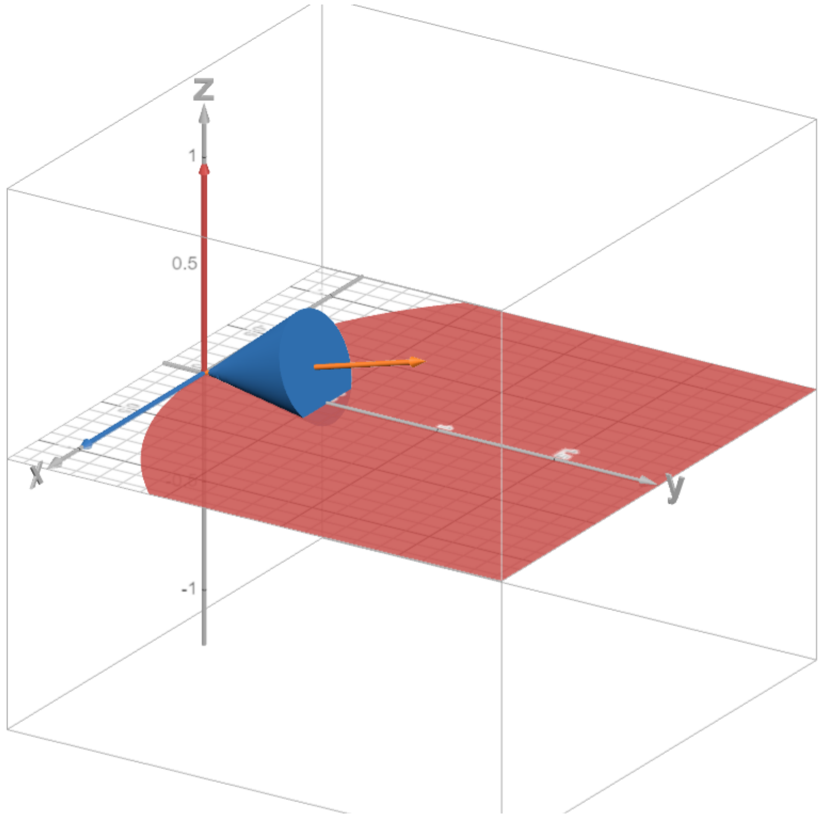
Θέτουμε $a = a_1$. Εάν $a_2 < a_1$ τότε $a = a_2$ και $\vec{k_i} = -\vec{k_i}$. Τελικά, αν

$$a < \frac{\tan^{-1}(\mu)}{2} \tag{2.11}$$

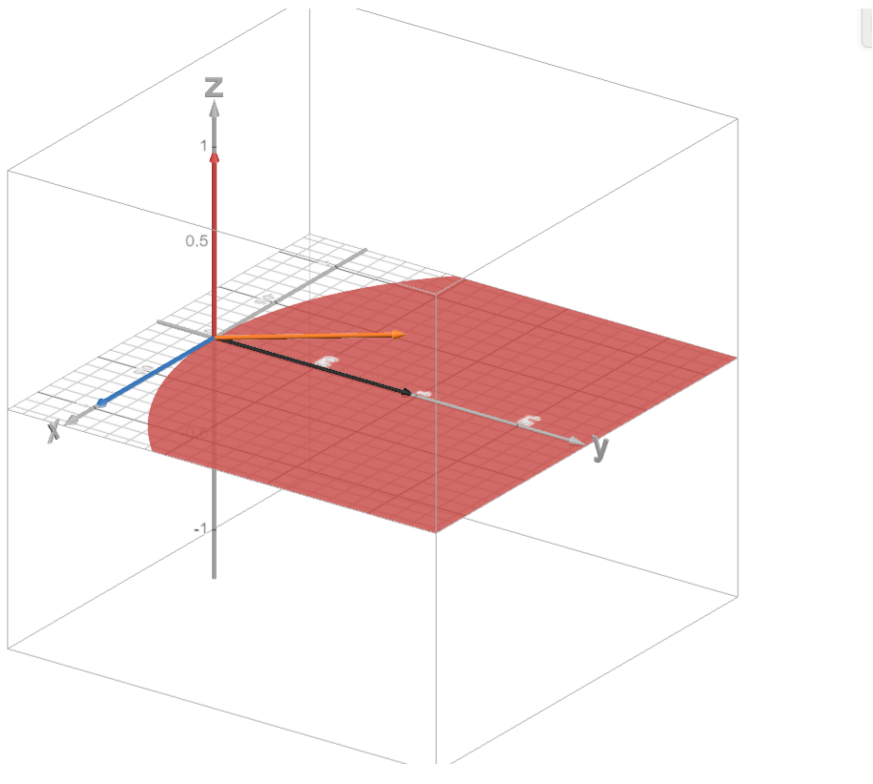
τότε ο κώνος και το επίπεδο τέμνονται και η γωνία του κώνου τομής είναι

$$\vartheta = \cos^{-1}\left[2\cos\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 \cdot (1 + \tan(a)^2) - 1\right] \tag{2.12}$$

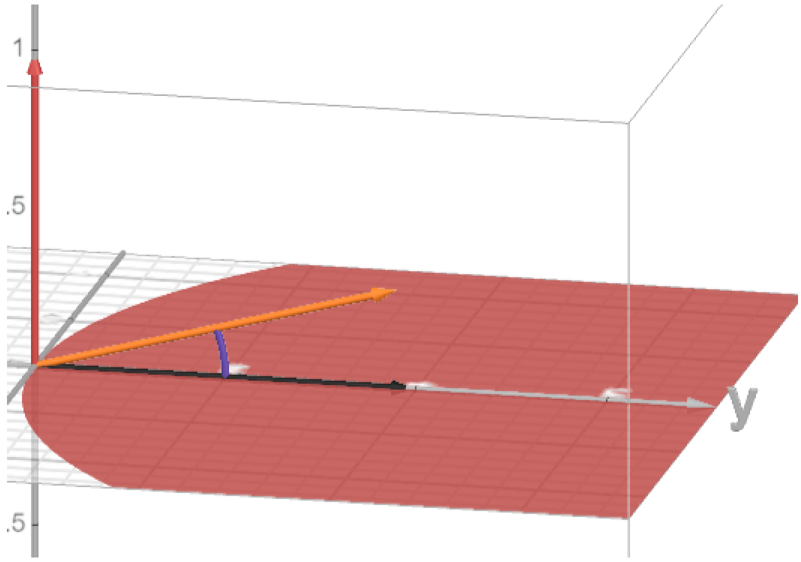
Η διαδικασία φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 2.6: *Διανύσματα $-\vec{r}_i$, $\vec{n}$, $\vec{u}_i$ με πορτοκαλί, κόκκινο και μπλε χρώμα αντίστοιχα*



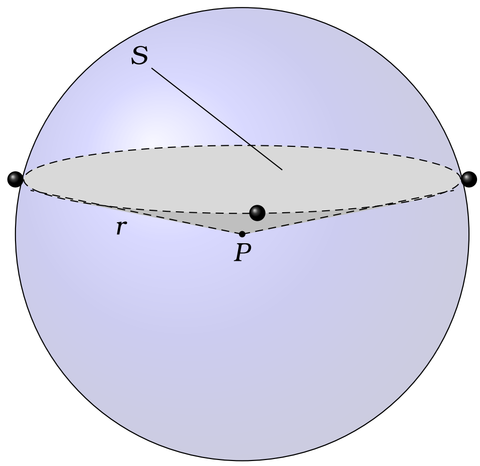
Σχήμα 2.7: *Διάνυσμα $\vec{k}_i$ με μαύρο χρώμα*



Σχήμα 2.8: *Γωνία α μεταξύ διανυσμάτων $-\vec{r}_i$ και $\vec{k}_i$*

Έχοντας υπολογίσει τη γωνία του κώνου τομής με το επίπεδο επαφών είναι πολύ εύκολο να εξετάσουμε εάν αυτή είναι μεγαλύτερη από τη γωνία στην κορυφή της συγκεκριμένης επαφής και αν χρειάζεται να τη μικρύνουμε αναλόγως. Στη συνέχεια ελέγχουμε εάν η λαβή είναι κλειστή ως προς δύναμη με τη μέθοδο που περιγράψαμε παραπάνω [10].

Για την αποφυγή διατάξεων που θα οδηγούσαν σε λαβή μη-κλειστή ως προς δύναμη πρέπει να επιλεγούν σημεία επαφής τα οποία εγγυώνται τη συνθήκη αυτή με όσο το δυνατόν μικρότερη εξάρτηση από τον συντελεστή τριβής. Επομένως, για να πετύχουμε καλές ιδιότητες force closure επιλέγουμε επίπεδα επαφής τα οποία περιέχουν το κέντρο του αντικειμένου.



Σχήμα 2.9: *Σημεία επαφής και επίπεδο S*

Αυτή η προσέγγιση απαιτεί την επιλογή διανύσματος επιπέδου (2 μεταβλητές) καθώς και τον υπολογισμό της τομής του επιπέδου με το ελλειψοειδές. Η καμπύλη που προκύπτει είναι έλλειψη. Επομένως, για την επιλογή των σημείων επαφής αρκεί να επιλέξουμε 3 γωνίες πάνω στο ελλειψοειδές. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κέντρο του αντικειμένου είναι το $(0, 0, 0)$ και ότι οι άξονες ταυτίζονται με τους x, y, z. Έτσι η συνολική διαδικασία προσδιορισμού των σημείων επαφής είναι:

1. Υπολογίζουμε το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου $\vec{n}$ από τις δύο γωνίες στροφής του

$$\vec{n} = [c_\vartheta s_\varphi \; s_\vartheta s_\varphi \; c_\varphi]^T \tag{2.13}$$

2. Αν $n_z \neq 0$ τότε επιλέγουμε σημείο πάνω στο επίπεδο $\vec{p} = [0 \; 1 \; -\frac{n_y}{n_z}]^T$. Αλλιώς αν $n_y \neq 0$ τότε $\vec{p} = [0 \; 0 \; 1]^T$, αλλιώς $\vec{p} = [1 \; 0 \; 0]^T$

3. Υπολογίζουμε τοπικό frame πάνω στο επίπεδο ως εξής:

$$\vec{x}_{plane} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \tag{2.14}$$

$$\vec{y}_{plane} = n \times x_{plane} \tag{2.15}$$

Έτσι ο πίνακας περιστροφής που προκύπτει από τους τρεις αυτούς άξονες είναι ο

$$R = [\vec{x}_{plane} \; \vec{y}_{plane} \; \vec{n}] \tag{2.16}$$

4. Ορίζουμε μεταβλητές k_x και k_y και

$$\overrightarrow{rot}_1 = R \cdot [k_x \; 0 \; 0]^T \tag{2.17}$$

$$\overrightarrow{rot}_2 = R \cdot [0 \; k_y \; 0]^T \tag{2.18}$$

5. Λύνουμε τις εξισώσεις

$$\left(\frac{rot_{1x}}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{rot_{1y}}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{n_x \cdot rot_{1x} + n_y \cdot rot_{1y}}{n_z r_3}\right)^2 = 1 \tag{2.19}$$

$$\left(\frac{rot_{2x}}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{rot_{2y}}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{n_x \cdot rot_{2x} + n_y \cdot rot_{2y}}{n_z r_3}\right)^2 = 1 \tag{2.20}$$

ως προς τα k_x και k_y. Τα μήκη των ακτίνων της έλλειψης που σχηματίζεται δίνονται από τις απόλυτες τιμές των λύσεων. Με αυτή τη διαδικασία το σύνολο των μεταβλητών που απαιτούνται για να προσδιορίσουμε 3 σημεία επαφής είναι 5. Η απόδειξη του ισχυρισμού πως η ζητούμενη έλλειψη υπολογίζεται με τον παραπάνω τρόπο δίνεται στο Παράρτημα Α'.

2.2 Εξισώσεις Ρομποτικής Λαβής

Έστω $\overrightarrow{f_{c_i}}^{(O)}$ η δύναμη επαφής στο σημείο C_i εκφρασμένη στο πλαίσιο αναφοράς R_o του αντικειμένου. Έστω επίσης:

- $\overrightarrow{f_{ext}}^{(O)}$ η συνολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο αντικείμενο

- $\overrightarrow{n_{ext}}^{(O)}$ η συνολική εξωτερική ροπή που ασκείται στο αντικείμενο

Λόγω στατικής ισορροπίας έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n_c} \overrightarrow{f_{c_i}}^{(O)} = -\overrightarrow{f_{ext}}^{(O)} \tag{2.21}$$

$$\sum_{i=1}^{n_c} (\overrightarrow{r_{c_i}}^{(O)} \times \overrightarrow{f_{c_i}}^{(O)}) = -\overrightarrow{n_{ext}}^{(O)} \tag{2.22}$$

όπου $\overrightarrow{r_{c_i}}^{(O)}$ το διάνυσμα θέσης της επαφής C_i εκφρασμένο στο πλαίσιο του αντικειμένου.

Εκφράζουμε τώρα τις δυνάμεις επαφής στο πλαίσιο R_{c_i} της επαφής C_i. Τότε

$$\vec{f_{c_i}}^{(O)} = \mathbf{R}^O_{C_i} \vec{f_{c_i}}^{(C_i)} \tag{2.23}$$

όπου $\mathbf{R}^O_{C_i}$ ο πίνακας στροφής από το πλαίσιο συντεταγμένων C_i σε αυτό του αντικειμένου. Έτσι προκύπτει τελικά ότι:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}^O_{C_1} & \dots & \mathbf{R}^O_{C_n} \\ \left[\vec{r_{c_1}}^{(O)}\right] \mathbf{R}^O_{C_1} & \dots & \left[\vec{r_{c_n}}^{(O)}\right] \mathbf{R}^O_{C_n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \begin{bmatrix} \vec{f_{c_i}}^{(C_1)} \\ \vdots \\ \vec{f_{c_i}}^{(C_n)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \vec{f}^{(O)}_{ext} \\ \vec{n}^{(O)}_{ext} \end{bmatrix} = -\mathbf{F}_{ext} \tag{2.24}$$

Ο πίνακας ο οποίος πολλαπλασιάζει τα διανύσματα δυνάμεων στις επαφές ονομάζεται **πίνακας λαβής** και συμβολίζεται με $\mathbf{G}$. Η εξίσωση (168) γράφεται σε συμπυκνωμένη μορφή

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{f_c} = -\mathbf{F}_{ext} \tag{2.25}$$

και αποτελεί τη μία από τις δύο βασικές εξισώσεις της ρομποτικής λαβής που θα χρησιμοποιήσουμε [11].

Ιακωβιανή Ρομποτικού Χεριού

Οι ροπές στις αρθρώσεις των ρομποτικών δακτύλων συνδέονται με τις δυνάμεις στις επαφές μέσω του ιακωβιανού πίνακα του ρομποτικού χεριού ή απλά της ιακωβιανής $\mathbf{J}_h$. Η εξίσωση που συνδέει τα μεγέθη αυτά αποτελεί τη δεύτερη βασική σχέση που θα χρησιμοποιήσουμε και είναι η παρακάτω:

$$\vec{\tau} = \mathbf{J}_H^T \cdot \vec{f_c} \tag{2.26}$$

όπου θα εκφράσουμε τελικά τις δυνάμεις στα πλαίσια των αντίστοιχων επαφών και τις ροπές στο πλαίσιο του ρομποτικού χεριού.

Για τον υπολογισμό της ιακωβιανής πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε τις επιμέρους ιακωβιανές των ρομποτικών δακτύλων $\mathbf{J}_i$ παραγωγίζοντας τις εξισώσεις που δίνουν τη θέση του άκρου τους στον χώρο:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_i \dot{\mathbf{q}}_i \tag{2.27}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση αυτή με τον πίνακα μετασχηματισμού στροφής που συνδέει το πλαίσιο συντεταγμένων του δακτύλου f_i με αυτό της επαφής C_i, $\mathbf{R}^{(C_i)}_{f_i}$, ώστε να εκφράσουμε τις ταχύτητες στο πλαίσιο της αντίστοιχης επαφής. Ο πίνακας που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό αυτόν είναι ο:

$$\mathbf{J}_{h_i} = \mathbf{B}_{c_i}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{f_i}^{(C_i)} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{R}_{f_i}^{(C_i)} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_i \tag{2.28}$$

Στη συνέχεια μπορούμε να γράψουμε τη συνολική ιακωβιανή του ρομποτικού χεριού ως εξής:

$$\mathbf{J}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{h_1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_{h_n} \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

Η σχέση που συνδέει τις ταχύτητες στις αρθρώσεις με την ταχύτητα του αντικειμένου προκύπτει ότι είναι:

$$\mathbf{J}_h \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}^T \mathbf{V}_o \tag{2.30}$$

όπου $\mathbf{V}_o$ η ταχύτητα του αντικειμένου εκφρασμένη στο πλαίσιο συντεταγμένων του. Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να αναλύσουμε τα κριτήρια που χρησιμοποιούνται συχνά σε παρόμοιες εργασίες.

Αντίστοιχα με την εξίσωση (2.26) οι ταχύτητες στα ακροδάχτυλα $\vec{f}$ συνδέονται με τις ταχύτητες των αρθρώσεων $\vec{\vartheta}$ μέσω της εξίσωσης

$$\vec{v} = \mathbf{J}_h \dot{\vec{\vartheta}} \tag{2.31}$$

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε την ταχύτητα του αντικειμένου $\mathbf{x}$ από τις ταχύτητες στις επαφές μέσω της εξίσωσης

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{G}^T\right)^+ \vec{v} + \mathcal{N}(\mathbf{G}^T)\vec{v_0} \tag{2.32}$$

όπου $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{\mathcal{T}})$ ο πίνακας του οποίου οι στήλες σχηματίζουν μια βάση του μηδενοχώρου του πίνακα λαβής και $\vec{v_0}$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Όταν $\mathcal{N}(\mathbf{G}^{\mathcal{T}}) = \mathbf{0}$ η σχέση απλοποιείται στην

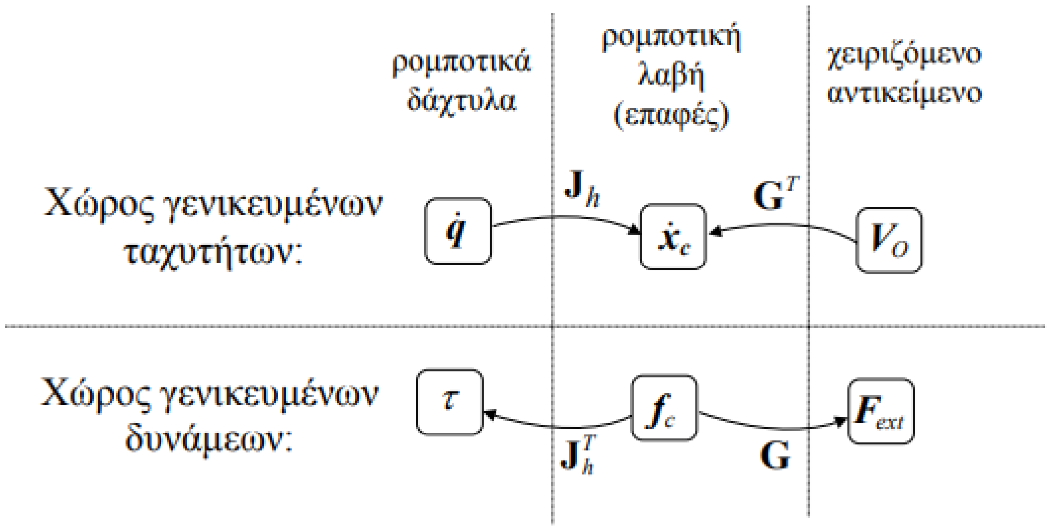
$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{G}^T\right)^+ \vec{v} \tag{2.33}$$

Ορίζοντας τον πίνακα

$$\mathbf{H} = (\mathbf{G}^T)^+ \mathbf{J}_h \tag{2.34}$$

μπορούμε να συσχετίσουμε τις ταχύτητες στις αρθρώσεις με την ταχύτητα του αντικειμένου μέσω της σχέσης

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{H}\dot{\vec{\vartheta}} \tag{2.35}$$



Σχήμα 2.10: *Σχέσεις μεταξύ των χώρων αρθρώσεων, επαφών και αντικειμένου*

2.3 Βελτιστοποίηση - Sequential Quadratic Programming (SQP)

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης το οποίο προκύπτει είναι μη γραμμικό με περιορισμούς. Γι' αυτό τον λόγο ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης που εξετάζεται και αναλύεται είναι ο *διαδοχικός τετραγωνικός προγραμματισμός (sequential quadratic programming)*.
Θεωρούμε ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης περιγράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \;\; f(\mathbf{x}) \\ &\textit{subject to}: \;\; \begin{array}{l} h(\mathbf{x}) = 0 \\ g(x) \leq 0 \end{array} \end{aligned} \tag{2.36}$$

Υποθέτουμε επίσης ότι το πρόβλημα περιέχει τουλάχιστον έναν μη γραμμικό περιορισμό.

Η κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης $f(\mathbf{x})$ συμβολίζεται με $\nabla f(\mathbf{x})$ και τον ίδιο τελεστή (∇) χρησιμοποιούμε για να συμβολίσουμε και την ιακωβιανή μήτρα μιας διανυσματικής συνάρτησης. Ο εσσιανός πίνακας (Hessian) μιας βαθμωτής συνάρτησης είναι η συμμετρική μήτρα της οποίας το στοιχείο (i, j) υπολογίζεται ως

$$Hf(x)_{i,j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j}$$

Θεωρούμε επίσης τη *Λαγκραντζιανή* (*Lagrangian*) του προβλήματος βελτιστοποίησης η οποία γράφεται

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{2.37}$$

όπου τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ είναι τα διανύσματα πολλαπλασιαστών. Ονομάζουμε ενεργούς περιορισμούς σε κάποιο σημείο $\mathbf{x}$ το σύνολο των ανισοτικών περιορισμών οι οποίοι ικανοποιούνται σαν ισότητες, δηλαδή τα στοιχεία i του $g(\mathbf{x})$ για τα οποία ισχύει $g_i(\mathbf{x}) = 0$. Συμβολίζουμε το σύνολο αυτό με $I(\mathbf{x})$. Ονομάζουμε G τον πίνακα ο οποίος αποτελείται από τον πίνακα $\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x})$ και από τις στήλες $\nabla\mathbf{g_i}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g_i}(\mathbf{x}) \in I$.

Πρόταση 2.2. *Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμες. Για κάποιο σημείο $\mathbf{x}^*$ υποθέτουμε ότι ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Υπάρχουν διανύσματα $\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^* > 0$ τέτοια ώστε*

$$\nabla\mathbf{L}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)\mathbf{u}^* + \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)\mathbf{v}^* = 0, \quad h(\mathbf{x}^*) = 0, \quad g(\mathbf{x}^*) \leq 0$$

2. $\mathbf{v_j^*} \geq 0, \quad j = 1, \dots, r$

3. $\mathbf{v_j^*} = 0, \quad \forall j \notin I$

4. $y^T\nabla^2_{xx}\mathbf{L}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)\mathbf{y} > \mathbf{0}$

για κάθε $y \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$\nabla h_i(\mathbf{x}^*)^T y = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \qquad \nabla g_j(\mathbf{x}^*)^T y = 0, \quad \forall j \in I(\mathbf{x}^*)$$

Υποθέτουμε επίσης ότι

$$\mathbf{v_j^*} > 0, \quad \forall j \in I(\mathbf{x}^*)$$

Οι παραπάνω συνθήκες εγγυώνται ότι το σημείο $\mathbf{x}*$ είναι τοπικό ελάχιστο του προβλήματος βελτιστοποίησης και ότι τα διανύσματα συντελεστών στο σημείο λύσης είναι μοναδικά.

Ορισμός 2.4. *Έστω $\left\{\mathbf{x}^k\right\}$ μια ακολουθία η οποία συγκλίνει σε ένα σημείο $\mathbf{x}^*$. Θα λέμε ότι η ακολουθία συγκλίνει*

1. *γραμμικά εάν υπάρχει θετικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε*

$$||\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*|| \leq \xi||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*|| \tag{2.38}$$

2. *υπεργραμμικά εάν υπάρχει ακολουθία θετικών αριθμών $\xi_k \to 0$ τέτοια ώστε*

$$||\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*|| \leq \xi_k||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*|| \tag{2.39}$$

3. *τετραγωνικά εάν υπάρχει θετικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε*

$$||\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*|| \leq \xi||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*||^2 \tag{2.40}$$

για κάθε αρκετά μεγάλο k.

Ορισμός 2.5. *Τετραγωνικά ονομάζονται τα προβλήματα βελτιστοποίησης στα οποία η συνάρτηση κόστους έχει τετραγωνική μορφή και οι περιορισμοί είναι γραμμικοί.*

Πρόταση 2.3. *[12] Έστω $\mathbf{x}^*$ ένα τοπικό ελάχιστο του προβλήματος (2.36), το οποίο ικανοποιεί μαζί με τα αντίστοιχα διανύσματα πολλαπλασιαστών Lagrange $\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*$ τις ικανές συνθήκες δεύτερης τάξης (Πρόταση 2.2). Τότε, αν*

$$c > \sum_{i=1}^{m} |u_i| + \sum_{j=1}^{r} |v_j|$$

το $\mathbf{x}^*$ είναι μη-περιορισμένο τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης $f + cP$, όπου

$$P(x) = max\{0, g_1(x), ..., g_r(x), |h_1(x)|, ..., |h_m(x)|\} \tag{2.41}$$

Το αντίστροφο της πρότασης 2.3 δεν ισχύει απαραίτητα. Μπορεί να υπάρχουν τοπικά ελάχιστα της συνάρτησης ποινής $f + cP$ τα οποία δεν αντιστοιχούν σε τοπικά ελάχιστα της συνάρτησης f.
Ορίζουμε το σύνολο $J(\mathbf{x})$ ως

$$J(\mathbf{x}) = \left\{ j \mid g_j(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}),\ j = 0, 1, ..., r \right\} \tag{2.42}$$

και

$$\partial(\mathbf{x}; \mathbf{d}) = max\left\{\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d} + c\nabla g_j(\mathbf{x})^T \mathbf{d} | \, j \in J(\mathbf{x})\right\} \tag{2.43}$$

Η συνάρτηση $\partial(\mathbf{x}; d)$ παίζει τον ρόλο της παραγώγου αλλά για την $f + cP$ η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη.

Πρόταση 2.4. *Αποδεικνύονται τα παρακάτω:*

(α') Κάθε τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης $f + cP$ είναι και στάσιμο σημείο.

(β') Αν οι f και g_j είναι κυρτές συναρτήσεις τότε ένα στάσιμο σημείο της συνάρτησης $f + cP$ είναι και ολικό ελάχιστο της.

(γ') Για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και συμμετρικό θετικά ορισμένο $\mathbf{H}$, αν $(\mathbf{d}, \xi)$ η βέλτιστη λύση του προβλήματος τετραγωνικού προγραμματισμού (2.46) τότε

$$\partial_c(\mathbf{x}; \mathbf{d}) \le -\mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} \tag{2.44}$$

(δ') Το $\mathbf{x}$ είναι στάσιμο σημείο της συνάρτησης $f + cP$ αν και μόνο αν το πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού (2.46) έχει βέλτιστη λύση την

$$\{\mathbf{d} = \mathbf{0}, \xi = P(\mathbf{x})\}$$

.

Αλγόριθμοι SQP

Οι αλγόριθμοι τύπου SQP αποτελούν μία από τις καλύτερες και πιο εύρωστες μεθόδους επίλυσης προβλημάτων μη γραμμικής βελτιστοποίησης με περιορισμούς. Παρακάτω αναλύουμε τις βασικές ιδέες και τη θεωρία της μεθόδου καθώς και κάποιες θεμελιώδεις ιδιότητές της. Δύο βασικά χαρακτηριστικά της μεθόδου SQP είναι ότι δε βασίζονται σε feasible-point δηλαδή δεν απαιτείται το αρχικό σημείο του αλγορίθμου να ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος καθώς και ότι -ομοίως με άλλους συγγενείς αλγορίθμους- η μόνη εγγυημένη σύγκλιση είναι σε κάποιο τοπικό ελάχιστο και όχι ολικό.

Ο διαδοχικός τετραγωνικός προγραμματισμός είναι μια επαναληπτική μέθοδος η οποία υπολογίζει μια κατεύθυνση καθόδου λύνοντας ένα πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού. Για ευκολία υποθέτουμε αρχικά ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης (2.36) έχει μόνο ανισοτικούς περιορισμούς. Η εξίσωση ενημέρωσης της προσέγγισης είναι:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + a^k \mathbf{d}^k \tag{2.45}$$

όπου a^k είναι ένα μη-αρνητικό βαθμωτό μέγεθος βήματος και $\mathbf{d}^k$ είναι η κατεύθυνση καθόδου η οποία προκύπτει από τη λύση ως προς $(\mathbf{d}, \xi)$ του τετραγωνικού προγράμματος

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{d},\xi}{\text{minimize}} \quad \nabla f(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d} + \tfrac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{B}^k \mathbf{d} + c\xi \\ &\textit{subject to}: \quad g_j(\mathbf{x}^k) + \nabla g_j(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d} \leq \xi \end{aligned} \tag{2.46}$$

Απαιτούμε να είναι ο $\mathbf{B}$ ένας συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας. Από την πρόταση 2.4(c) προκύπτει ότι η λύση $\mathbf{d}$ είναι μια κατεύθυνση καθόδου της συνάρτησης ποινής $f + cP$ στο $\mathbf{x}^k$. Το μέγεθος βήματος επιλέγεται με έναν από τους παρακάτω κανόνες:

1. *Κανόνας ελαχιστοποίησης (Minimization rule)*
   Επιλέγεται a τέτοιο ώστε
   $$f(\mathbf{x}^k + a^k \mathbf{d}^k) + cP(\mathbf{x}^k + a^k \mathbf{d}^k) = min\left\{f(\mathbf{x}^k + a^k \mathbf{d}^k) + cP(\mathbf{x}^k + a^k \mathbf{d}^k)\right\}$$
   για $a \geq 0$

2. *Κανόνας περιορισμένης ελαχιστοποίησης (Limited minimization rule)*
   Επιλέγεται ένας αριθμός $s > 0$ και στη συνέχεια το a^k υπολογίζεται λύνοντας το
   $$f(\mathbf{x}^k + a^k \mathbf{d}^k) = min\left\{f(\mathbf{x}^k + a^k \mathbf{d}^k)\right\}$$
   για $a \in [0, s]$

3. *Κανόνας Armijo*
   Επιλέγονται αριθμοί $s > 0$, $\beta \in (0, 1)$ και $\sigma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ και θέτουμε $a^k = \beta^{m_k} s$ όπου m_k είναι ο πρώτος μη-αρνητικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει
   $$f(\mathbf{x}^k) + cP(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^k + \beta^m s\mathbf{d}^k) - cP(\mathbf{x}^k + \beta^m s\mathbf{d}^k) \geq \sigma\beta^m s{\mathbf{d}^k}^T \mathbf{B}^k \mathbf{d}^k$$

Πρόταση 2.5. *Έστω $\left\{\mathbf{x}^k\right\}$ μια ακολουθία η οποία προκύπτει την εφαρμογή της μεθόδου SQP στην οποία το μέγεθος βήματος επιλέγεται βάσει ενός από τους τρεις προαναφερθέντες κανόνες.*

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί γ και Γ τέτοιοι ώστε

$$\gamma||\mathbf{z}||^2 \le \mathbf{z}^T\mathbf{B}^k\mathbf{z} \le \Gamma||\mathbf{z}||^2, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\varkappa}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Τότε κάθε όριο της $\left\{\mathbf{x}^k\right\}$ είναι στάσιμο σημείο της συνάρτησης ποινής $f + cP$.

Ισοτικοί Περιορισμοί Η προηγούμενη ανάλυση μπορεί να επεκταθεί για να συμπεριλάβει και ισοτικούς περιορισμούς γράφοντας κάθε ισοτικό περιορισμό $h_i(\mathbf{x}) = 0$ σαν συνδυασμό δύο ανισοτικών περιορισμών

$$h_i(\mathbf{x}) \le 0, \quad h_i(\mathbf{x}) \ge 0$$

. Η μέθοδος που αναπτύχθηκε παραπάνω μπορεί να εφαρμοστεί συμπεριλαμβάνοντας και τις διπλές ανισότητες και να προκύψει ένας παρόμοιος αλγόριθμος.

Ενημέρωση Πολλαπλασιαστών Η λύση του τετραγωνικού υποπροβλήματος (2.46) χρησιμοποιείται για να υπολογίσει νέα θέση $\mathbf{x}^{k+1}$ κάνοντας ένα βήμα από το $\mathbf{x}^k$ στην κατεύθυνση του $\mathbf{d}$. Όμως για να συνεχίσει ο αλγόριθμος στη νέα επανάληψη χρειάζεται να ενημερωθούν και οι εκτιμήσεις των πολλαπλασιαστών. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με διάφορους τρόπους ένας εκ των οποίων είναι να χρησιμοποιηθούν οι βέλτιστοι πολλαπλασιαστές του τετραγωνικού προβλήματος. Γράφοντας u_{qp} και v_{qp} τους βέλτιστους πολλαπλασιαστές του τετραγωνικού υποπροβλήματος που λύθηκε και θέτοντας

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}_{qp} - \mathbf{u}^k \\ \mathbf{d}_{\mathbf{v}} &= \mathbf{v}_{qp} - \mathbf{v}^k \end{aligned} \tag{2.47}$$

οι ενημερώσεις των $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ γράφονται

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + a\mathbf{d} \\ \mathbf{u}^{k+1} &= \mathbf{u}^k + a\mathbf{d}_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{v}^{k+1} &= \mathbf{v}^k + a\mathbf{d}_{\mathbf{v}} \end{aligned} \tag{2.48}$$

για κάποιο μέγεθος βήματος a. Η μόνη ενημέρωση που απομένει να γίνει είναι αυτή του πίνακα $\mathbf{B}$. Η επιλογή της νέας εκτίμησης $\mathbf{B}_{k+1}$ παίζει σημαντικό ρόλο στις ιδιότητες σύγκλισης του αλγορίθμου.

Τοπική Σύγκλιση

Για να απλοποιήσουμε την ανάλυση υποθέτουμε ότι:

(α΄) Το σύνολο των ενεργών περιορισμών του μη γραμμικού προβλήματος (2.36) είναι γνωστό (σε πολλές μορφές του αλγορίθμου οι ενεργοί περιορισμοί του τετραγωνικού υποπροβλήματος είναι ίδιοι με αυτούς του αρχικού προβλήματος όταν η εκτίμηση $\mathbf{x}^k$ είναι κοντά στο $\mathbf{x}^*$). Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αγνοήσουμε τους μη-ενεργούς περιορισμούς και να μετατρέψουμε τους ενεργούς σε περιορισμούς ισότητας για τη λύση του τετραγωνικού υποπροβλήματος. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μη γραμμικό πρόβλημα περιέχει μόνο περιορισμούς ισότητας και ο όρος $\mathbf{u}^T\mathbf{g}(\mathbf{x})$ να αγνοηθεί από τη Λαγκραντζιανή. Ξαναγράφουμε το τετραγωνικό υποπρόβλημα μόνο με ισοτικούς περιορισμούς:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{d},\xi}{\text{minimize}} \;\; \nabla f(\mathbf{x}^k)^T\mathbf{d} + \tfrac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{B}^k\mathbf{d} + c\xi \\ &\textit{subject to}: \;\; \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T\mathbf{d} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.49}$$

(β΄) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση ποινής επιτρέπει το μέγεθος βήματος a να γίνει ίσο με 1, ώστε να μπορούμε να συγκρίνουμε απευθείας με τη μέθοδο του Νεύτωνα για να καταλήξουμε σε συμπεράσματα σχετικά με τη σύγκλιση.

Από τις αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη τοπικού ελαχίστου μπορούμε να γράψουμε για τους πολλαπλασιαστές στη θέση $\mathbf{x}^*$

$$\mathbf{u}^* = -\left[\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^T\mathbf{A}\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)\right]^{-1}\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^T\mathbf{A}\nabla\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \tag{2.50}$$

για κάθε πίνακα $\mathbf{A}$ αντιστρέψιμο και θετικά ορισμένο στον μηδενοχώρο του $\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)^T$. Εάν ο $\mathbf{A}$ επιλεγεί να είναι ο μοναδιαίος πίνακας τότε παίρνουμε τη λύση ελαχίστων τετραγώνων των αναγκαίων περιορισμών. Από την υπόθεση ομαλότητας των συναρτήσεων έχουμε ότι το

$$\mathbf{u^0} = -\left[\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x^0})^T\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x^0})\right]^{-1}\mathbf{h}(\mathbf{x^0})^T\nabla\mathbf{f}(\mathbf{x^0}) \tag{2.51}$$

μπορεί να έρθει όσο κοντά στο $\mathbf{u}^*$ θέλουμε επιλέγοντας $\mathbf{x^0}$ κοντά στο $\mathbf{x}^*$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (14) οι εξισώσεις πρώτης τάξης γράφονται

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_k\mathbf{d} + \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x^k})\mathbf{d_u} &= \nabla\mathcal{L}(\mathbf{x^k},\mathbf{u^k}) \\ \nabla\mathbf{h}(\mathbf{x^k})\mathbf{d} &= -\mathbf{h}(\mathbf{x^k}) \end{aligned} \tag{2.52}$$

Θεώρημα 2.3. *Έστω $\mathbf{x^0}$ μια αρχική εκτίμηση της λύσης του μη γραμμικού προβλήματος (2.36) και έστω $\mathbf{u^0}$ οι πολλαπλασιαστές που υπολογίζονται από την εξίσωση (17). Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\left\{(\mathbf{x^k},\mathbf{u^k})\right\}$ προκύπτει από την εξίσωση (14) με $a = 1$ κσι $\mathbf{B}_k = H\mathcal{L}(\mathbf{x^k},\mathbf{u^k})$. Τότε, αν το $\|\mathbf{x^0} - \mathbf{x}^*\|$ είναι αρκετά μικρό, η ακολουθία επαναλήψεων είναι καλά ορισμένη στον χώρο $(\mathbf{x},\mathbf{u})$ και συγκλίνει τετραγωνικά στο $(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)$.*

Η μέθοδος του Νεύτωνα για τον αλγόριθμο SQP αποτελεί τον ιδεατό αλγόριθμο για την επίλυση του μη γραμμικού προγράμματος. Φυσικά, στην πράξη συνήθως δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Τις πιο πολλές φορές είναι δύσκολο να επιλέξουμε σημείο αρκετά κοντά στο $\mathbf{x}^*$ για να εγγυηθούμε ότι η μέθοδος του Νεύτωνα θα συγκλίνει σε ελάχιστο της f. Μακριά από τη λύση ο πίνακας $H\mathcal{L}(\mathbf{x^k},\mathbf{u^k})$ δεν μπορεί να θεωρηθεί θετικά ορισμένος στον κατάλληλο υπόχωρο και άρα η λύση του υποπροβλήματος μπορεί να μην υπάρχει.

Μια δυσκολία που εμφανίζεται όταν χρησιμοποιούνται μη διαφορίσιμες συναρτήσεις ποινής είναι ότι στην περιοχή τοπικών ελαχίστων του προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού ο αλγόριθμος μπορεί να μη συγκλίνει υπεργραμμικά, πράγμα που δε συμβαίνει όταν χρησιμοποιούνται ακριβείς διαφορίσιμες συναρτήσεις ποινής. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται *φαινόμενο Μαράτος (Maratos effect) [13].*

Κεφάλαιο 3

Βιβλιογραφική Επισκόπηση - Κριτήρια Βελτιστοποίησης

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τα πιο συχνά κριτήρια αξιολόγησης της ποιότητας μιας ρομποτικής λαβής. Οι μεγάλες ομάδες στις οποίες αυτά χωρίζονται είναι [14]:

1. Κριτήρια που σχετίζονται με τις θέσεις των σημείων επαφής και τις αντίστοιχες δυνάμεις και άρα με τον πίνακα λαβής $\mathbf{G}$
2. Κριτήρια που σχετίζονται με τη διάταξη του χεριού και άρα με την ιακωβιανή αυτού $\mathbf{J}_h$

Υπάρχουν βεβαίως κι άλλες κατηγορίες κριτηρίων όπως εκείνα που σχετίζονται με αλληλεπίδραση ανθρώπου-ρομπότ και μάθηση, performance-based κριτήρια κ.α. με τα οποία δεν ασχολείται αυτή η εργασία και δε θα αναφερθούν περαιτέρω.

Θα στρέψουμε αρχικά την προσοχή μας στα κριτήρια που σχετίζονται με τις θέσεις και τις δυνάμεις στις επαφές. Κάποια παραδείγματα κριτηρίων που εμφανίζονται συχνά στη βιβλιογραφία είναι τα παρακάτω:

1. Ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή του πίνακα $\mathbf{G}$ [15], [16]

$$Q_{MSV} = \sigma_{\min}(\mathbf{G})$$

   Μια μεγάλη ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή του πίνακα λαβής αυξάνει τις μικρότερες δυνάμεις στις επαφές και άρα αυξάνει την ευστάθεια της λαβής. Το πρόβλημα είναι ότι δεν είναι ανεξάρτητο από αλλαγή συντεταγμένων και τα αποτελέσματα στα οποία οδηγεί μπορεί να μην είναι όσο καλά όσο αναμένεται.

2. Όγκος του ελλειψοειδούς στον χώρο των δράσεων [15]

$$Q_{VEW} = \sqrt{det(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)}$$

   Το κριτήριο αυτό είναι ανεξάρτητο από το σύστημα συντεταγμένων που επιλέγεται αλλά δε δίνει πληροφορία για τις σχέσεις μεταξύ των ιδιαζουσών τιμών του πίνακα λαβής και άρα μεταξύ των δυνάμεων στις επαφές.

3. Ισοτροπικός δείκτης λαβής (Grasp isotropy index) [16]

$$Q_{GII} = \frac{\sigma_{\min}(\mathbf{G})}{\sigma_{\max}(\mathbf{G})}$$

Το κριτήριο αυτό τείνει να δώσει σαν αποτέλεσμα πιο ισορροπημένες λαβές αποφεύγοντας τα προβλήματα που εμφανίζουν τα δύο προηγούμενα.

4. Σχήμα του πολυγώνου λαβής (εδώ τριγώνου) [17], [16]

$$Q_{SGP} = \frac{1}{\theta_{\max}} \sum_{i=1}^{n} |\theta_i - \bar{\theta}|$$

όπου n είναι ο αριθμός των επαφών, θ_i η γωνία του πολυγώνου στην επαφή i, $\bar{\theta}$ η μέση εσωτερική γωνία του αντίστοιχου κανονικού πολυγώνου και $\theta_{\max} = (n-2)(180-\bar{\theta})+2\bar{\theta}$, το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών σε μοίρες όταν το πολύγωνο έχει το ακατάλληλο σχήμα (εκφυλίζεται σε γραμμή). Το κριτήριο αυτό χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να πετύχουμε μια ομοιόμορφη κατανομή των σημείων επαφής.

5. Επιφάνεια του πολυγώνου λαβής [18], [19], [20], [21], [22]. Όπως και συμβαίνει και με τα πρώτα δύο κριτήρια έτσι και η μέθοδος αυτή μπορεί να οδηγήσει σε μη πρακτικές λαβές.

6. Απόσταση του κέντρου βάρους του πολυγώνου λαβής από αυτό του αντικειμένου [23], [24].

   Το κριτήριο αυτό είναι διαισθητικά κατανοητό καθώς μια κοντινή απόσταση μεταξύ των κέντρων μάζας συνήθως σημαίνει έναν πιο εύκολο χειρισμό του αντικειμένου. Τα μειονεκτήματα του συγκεκριμένου κριτηρίου είναι ότι πολλές φορές το κέντρο μάζας δεν είναι γνωστό, ούτε εύκολο να υπολογιστεί καθώς και το γεγονός ότι δεν παίζει ρόλο ο αριθμός των επαφών.

7. Ανεξάρτητες περιοχές επαφής [25], [26], [14], [16], [19].

   Θεωρούμε ότι έχουμε χωρίσει το εξωτερικό του αντικειμένου σε υποομάδες τέτοιες ώστε όταν τα δάκτυλα βρίσκονται σε μία από αυτές τις ομάδες (διαφορετικές όλες μεταξύ τους) η λαβή είναι κλειστή ως προς δύναμη. Το κριτήριο ταυτίζεται με το μέγεθος της μικρότερης τέτοιας περιοχής και είναι αρκετά αποτελεσματικό όταν υπάρχει αβεβαιότητα στην τοποθέτηση των δακτύλων.

8. Αποσύζευξη δυνάμεων και ροπών [18].

   Για την αποφυγή του προβλήματος συσχέτισης δυνάμεων και ροπών μέσω ενός παράγοντα p ο οποίος εμφανίζεται σε πιο πολύπλοκα κριτήρια που σχετίζονται με το σύνολο του χώρου δράσεων, οι δυνάμεις και οι ροπές μπορούν να αποδεσμευτούν και να υπολογιστούν ξεχωριστά δύο μεγέθη.

(α΄)

$$Q_f = \min_{\mathbf{f} \in \partial \mathcal{P}^f} \|\mathbf{f}\|$$

(β΄)

$$Q_\tau = \min_{\mathbf{f} \in \partial \mathcal{P}^\tau} \|\tau\|$$

όπου $\partial \mathcal{P}^f$ και $\partial \mathcal{P}^\tau$ είναι τα όρια των συνόλων των πιθανών δυνάμεων και ροπών αντίστοιχα, που τα δάχτυλα μπορούν να δημιουργήσουν στο αντικείμενο. Τα δύο μεγέθη μπορούν να υπολογιστούν με πιο απλό τρόπο, αφού δεν απαιτείται να οριστεί μετρική στον χώρο των δράσεων. Παρ΄ όλα αυτά είναι δύο διαφορετικές ποσότητες και η σειρά με την οποία υπολογίζονται παίζει ρόλο στο τελικό αποτέλεσμα.

9. Κριτήριο βάσει δεδομένων δράσεων [27], [28], [15].

   Θεωρούμε ότι θέλουμε να εφαρμόσουμε ένα σύνολο γνωστών δράσεων στο αντικείμενο μέσω της λαβής. Οι δράσεις αυτές σχηματίζουν έναν χώρο (*Wrench Space*) ο οποίος προσεγγίζεται από ένα κυρτό σύνολο $\mathcal{E}$ με κέντρο την αρχή των αξόνων, όπως για παράδειγμα ένα ελλειψοειδές. Το κριτήριο είναι ο παράγοντας μεγέθυνσης $\mathcal{n}$ ο οποίος οδηγεί στο μεγαλύτερο σύνολο $\mathcal{n}\mathcal{E}$ το οποίο περιέχεται εξολοκλήρου στο $\mathcal{P}$.

$$Q_{TOM} = \max_{\mathcal{n}\mathcal{E} \subset \mathcal{P}} \mathcal{n}$$

Η επόμενη μεγάλη ομάδα κριτηρίων είναι, όπως αναφέραμε και παραπάνω, τα κριτήρια τα οποία σχετίζονται με τη διάταξη του ρομποτικού χεριού [29]. Παρακάτω παραθέτουμε κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα:

(α΄) Απόσταση από ιδιόμορφες διατάξεις [30].

Προκειμένου τα δάκτυλα του ρομποτικού χεριού να μείνουν μακριά από ιδιόμορφες διατάξεις (όρια γωνιών στις αρθρώσεις) είναι επιθυμητό να μεγιστοποιηθεί η ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή της ιακωβιανής του χεριού (αντίστοιχα με το κριτήριο Q_{MSV}).

(β΄) Όγκος του ελλειψοειδούς χειρισμού [31].

Σε αντιστοιχία με το κριτήριο Q_{VEW} ο όγκος του ελλειψοειδούς που σχετίζεται με την ιακωβιανή γράφεται

$$Q_{VME} = \sqrt{det\left(\mathbf{J}\mathbf{J}^T\right)} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$$

όπου $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ οι ιδιάζουσες τιμές της ιακωβιανής $\mathbf{J}$. Το κριτήριο αυτό παρουσιάζει τα ίδια ακριβώς χαρακτηριστικά (πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα) με το Q_{VEW}.

(γ΄) Ομοιομορφία μετασχηματισμού [32].

Ο μετασχηματισμός στο πεδίο της ταχύτητας είναι ομοιόμορφος όταν η συμβολή της ταχύτητας κάθε άρθρωσης είναι ίδια σε όλα τα στοιχεία της ταχύτητας του αντικειμένου. Τότε το χέρι μπορεί να κινήσει το αντικείμενο προς οποιαδήποτε κατεύθυνση με την ίδια προσπάθεια. Το μέτρο της ομοιομορφίας του μετασχηματισμού είναι αντίστοιχο του κριτηρίου Q_{GII} και γράφεται

$$Q_{UOT} = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{J})}{\sigma_{\min}(\mathbf{J})}$$

Η λογική του κριτηρίου αυτού είναι αντίστοιχη με αυτή του Q_{GII}.

(δ΄) Θέση των αρθρώσεων στα δάκτυλα [33], [34].

Μια λογική προσέγγιση είναι η εύρεση θέσεων στις οποίες οι αρθρώσεις βρίσκονται όσο πιο μακριά από τα όρια κίνησής τους, δηλαδή όσο το δυνατόν πιο κοντά στο μέσο του εύρους τους.

Μια μετρική αυτού του μεγέθους δίνεται από την εξίσωση

$$Q_{PFJ} = \sum_{i=1}^{l} (\vartheta_i - \vartheta_{0i})^2$$

όπου l ο αριθμός των αρθρώσεων του ρομποτικού χεριού, και ϑ_i και ϑ_{0i} η πραγματική θέση και η θέση στη μέση του εύρους της i-οστής άρθρωσης αντίστοιχα. Το κριτήριο μπορεί να γραφεί λαμβάνοντας υπόψη και το εύρος κίνησης της κάθε άρθρωσης ως

$$Q_{PFJ} = \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\vartheta_i - \vartheta_{0i}}{\vartheta_{max_i} - \vartheta_{min_i}} \right)^2$$

όπου ϑ_{max_i} και ϑ_{min_i} οι οριακές θέσεις της i-οστής άρθρωσης. Το κριτήριο αυτό έχει απλή φυσική εξήγηση και είναι απλό στον υπολογισμό του αλλά παρά το γεγονός πως οδηγεί σε άνετες, βολικές λαβές για το χέρι, αυτό δε σημαίνει απαραίτητα ότι τα δάκτυλα μπορούν να ασκήσουν δυνάμεις με αποτελεσματικό τρόπο.

(ε΄) **Συμβατότητα με εργασία** [35], [36], [37], [38].

Θεωρούμε μια σφαίρα μοναδιαίας ακτίνας στον χώρο των ταχυτήτων των αρθρώσεων των δακτύλων. Η εξίσωση 2.35 μετασχηματίζει τη σφαίρα αυτή σε ένα ελλειψοειδές στον χώρο των γενικευμένων ταχυτήτων.

$$\mathbf{x}^T \left(\mathbf{H}\mathbf{H}^T\right)^{-1} \mathbf{x} \leq 1$$

Ο πίνακας $\mathbf{H}$ συσχετίζει τις ροπές στις αρθρώσεις τ με τη δράση $\mathbf{F}$ που επενεργεί στο αντικείμενο μέσω της σχέσης $\vec{\tau} = \mathbf{H}^T\mathbf{F}$. Επομένως, η μοναδιαία σφαίρα στον χώρο των αρθρώσεων του χεριού μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα γενικευμένο ελλειψοειδές στο χώρο των δράσεων το οποίο γράφεται:

$$\mathbf{F}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)\mathbf{F} \leq 1 \qquad (3.1)$$

Οι πίνακες $\mathbf{HH}^T$ και $\left(\mathbf{HH}^T\right)^{-1}$ είναι αντίστροφοι ο ένας του άλλου συνεπώς έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα με αντίστροφες ιδιοτιμές. Κατά συνέπεια, τα αντίστοιχα ελλειψοειδή έχουν ίδιο όγκο και άξονες αλλά με αντιστρόφως ανάλογα μήκη. Οι διευθύνσεις με το μέγιστο κέρδος σε δύναμη και ταχύτητα είναι οι μεγαλύτεροι άξονες των αντίστοιχων ελλειψοειδών. Αν κάποιες δράσεις είναι πιο πιθανές να χρειαστεί να ασκηθούν σε σχέση με άλλες, τότε η λαβή θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να μεγιστοποιείται η απόκριση της στις επιθυμητές διευθύνσεις. Θεωρούμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα δράσης $\hat{\omega}_i$ και την απόστασή α_i από την αρχή των αξόνων έως την επιφάνεια του ελλειψοειδούς δράσεων στη διεύθυνση του $\hat{\omega}_i$. Το μέγεθος $\alpha_i\hat{\omega}_i$ αντιστοιχεί σε ένα σημείο στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\alpha_i\hat{\omega}_i)^T\,(\mathbf{HH}^T)(\alpha_i\hat{\omega}_i) = 1$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\alpha = \left[\hat{\omega}_i^T(\mathbf{HH}^T)\hat{\omega}_i\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Εντελώς αντίστοιχα εάν θεωρήσουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα επιθυμητής ταχύτητας $\hat{\xi}_j$ και την αντίστοιχη απόσταση β_j τότε ικανοποιείται η εξίσωση

$$\left(\beta_j\hat{\xi}_j\right)^T(\mathbf{HH}^T)^{-1}(\beta_j\hat{\xi}_j) = 1$$

και

$$\beta = \left[\hat{\xi}_j^T(\mathbf{HH}^T)^{-1}\hat{\xi}_j\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Με αυτά τα δεδομένα ο δείκτης συμβατότητας με μια εργασία ορίζεται σαν

$$\mathcal{Q}_{TCI} = \sum_{i=1}^{s}\kappa_i\alpha_i^{\pm 2} + \sum_{j=1}^{\zeta}\kappa_j\beta_j^{\pm 2} \qquad (3.2)$$

όπου s και ζ οι αριθμοί των επιθυμητών διευθύνσεων δράσης και ταχύτητας αντίστοιχα. Το εκθετικό $+2$ χρησιμοποιείται όταν θέλουμε μεγάλο μέτρο δύναμης (ή/και ροπής) ή ταχύτητας και το -2 όταν χρειαζόμαστε ακριβή έλεγχο ταχύτητας ή δύναμης.

Ο δείκτης αυτός είναι σχεδιασμένος για συγκεκριμένες εργασίες, όμως στην πράξη οι περιορισμοί των εργασιών μπορεί να είναι ασυνεχείς και ο προσδιορισμός τους μπορεί να είναι δύσκολος.

Μέρος II

Ανάλυση - Σχεδίαση

Κεφάλαιο 4

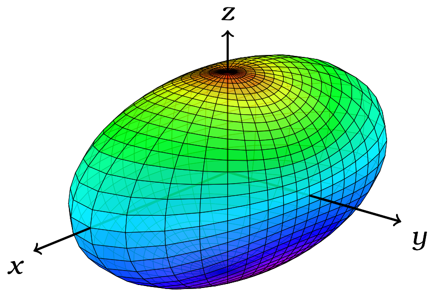
Ανάλυση Προτεινόμενων Κριτηρίων Βελτιστοποίησης Λαβής

Όπως προαναφέραμε, οι εξισώσεις στις οποίες βασίζεται η προσέγγιση μας είναι δύο:

$$\vec{\tau} = \mathbf{J}_h^T \cdot \vec{f_c} \tag{4.1}$$

$$-\vec{f_{ext}} = \mathbf{G} \cdot \vec{f_c} \tag{4.2}$$

Τα δεδομένα του προβλήματος είναι η θέση (x_O, y_O, z_O) και ο προσανατολισμός $(\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z)$ του ελλειψοειδούς καθώς και οι επιθυμητές δράσεις εκφρασμένες στο σύστημα συντεταγμένων του ελλειψοειδούς. Επομένως, είναι γνωστός ο μετασχηματισμός από το σύστημα συντεταγμένων του ελλειψοειδούς στο παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων, $\mathbf{T}_O^G$. Οι δυνάμεις στις επαφές $\vec{f_c}$ (στο πλαίσιο του αντικειμένου) εκφράζονται στο global frame ως $\overrightarrow{f_{cg}} = \mathbf{R}_O^G \cdot \vec{f_c}$, όπου $\mathbf{R}_O^G$ ο μετασχηματισμός στροφής του $\mathbf{T}_O^G$. Όμοια οι δυνάμεις στις επαφές στο πλαίσιο του χεριού εκφράζονται στο global frame ως $\overrightarrow{f_{cg}} = \mathbf{R}_E^G \cdot \vec{f_c}$ (το $\vec{f_c}$ είναι εκφρασμένο στο πλαίσιο του χεριού).

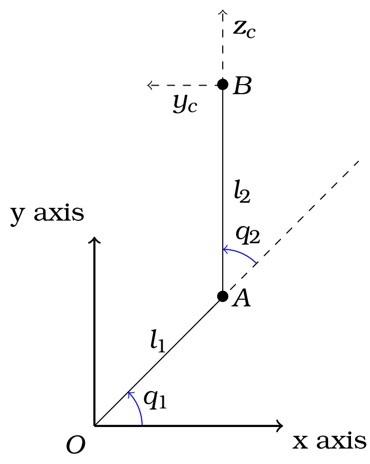


Σχήμα 4.1: *Αντικείμενο και πλαίσιο συντεταγμένων αντικειμένου*

Υπολογισμοί διανυσμάτων - μετασχηματισμών

Τα συστήματα συντεταγμένων των επαφών υπολογίζονται με τον παρακάτω τρόπο:

- Ο άξονας z βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει την επαφή με το κέντρο του αντικειμένου.
- Ο άξονας $\vec{x}$ υπολογίζεται ως $\vec{x} = \vec{z} \times (\vec{j} - \vec{f})$, όπου $\vec{j}$ είναι η θέση του τελευταίου συνδέσμου και $\vec{f}$ η αρχή του δακτύλου στον χώρο.



Σχήμα 4.2: *Δάκτυλο και πλαίσια συντεταγμένων στο επίπεδο*

- Για τον άξονα $\vec{y}$ της επαφής είναι $\vec{y} = \vec{z} \times \vec{x}$

Για τον υπολογισμό του πίνακα λαθής χρειαζόμαστε τον μετασχηματισμό στροφής από το σύστημα συντεταγμένων των επαφών σε αυτό του αντικειμένου $\mathbf{R}_C^O$. Άρα

$$[\vec{x_c}, \vec{y_c}, \vec{z_c}] = \mathbf{R}_C^O \cdot [\vec{x_f}, \vec{y_f}, \vec{z_f}] \Leftrightarrow \tag{4.3}$$

$$\mathbf{R}_C^O = [\vec{x_f}, \vec{y_f}, \vec{z_f}]^{-1}[\vec{x_c}, \vec{y_c}, \vec{z_c}] \tag{4.4}$$

Για τον υπολογισμό του διανύσματος $\vec{r}$ της κάθε επαφής ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Εκφράζουμε τη θέση της επαφής και το κέντρο του αντικειμένου στο παγκόσμιο σύστημα
- Υπολογίζουμε το $\overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{c_G} - \overrightarrow{o_G}$
- Υπολογίζουμε το τελικό διάνυσμα $\vec{r}$ εκφρασμένο στο πλαίσιο του αντικειμένου ως $\vec{r} = \mathbf{R}_G^O \overrightarrow{r_G} = (\mathbf{R}_O^G)^T \overrightarrow{r_G}$

Κριτήριο με βάση τις δυνάμεις επαφής

Η εξίσωση (4.2) συνδέει τις δυνάμεις στις επαφές με τη συνολική εξωτερική δράση (δύναμη και ροπή) που ασκείται στο κέντρο μάζας του αντικειμένου. Κατευθείαν από αυτή τη σχέση προκύπτουν κριτήρια τα οποία σχετίζονται με τις δυνάμεις στις επαφές και τον πίνακα λαθής. Συγκεκριμένα από την (4.2) έχουμε ότι

$$\vec{f_c} = -\mathbf{G}^+ \cdot \overrightarrow{f_{ext}} \tag{4.5}$$

και

$$\vec{f_c}^T \cdot (\mathbf{G}^+)^T \cdot \mathbf{G}^+ \cdot \vec{f_c} = |\overrightarrow{f_{ext}}|^2 \tag{4.6}$$

Από την εξίσωση (4.6) βλέπουμε ότι ένα διάνυσμα που ελαχιστοποιεί το μέτρο του $\overrightarrow{f_{ext}}$ είναι το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $(\mathbf{G}^+)^T \cdot \mathbf{G}^+$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή με το ελάχιστο μέτρο. Όπως είναι γνωστό ένας αντιστρέψιμος πίνακας έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον αντίστροφό του με ανεστραμμένες όμως τις ιδιοτιμές. Δηλαδή εάν ο $\mathbf{A}$ είναι αντιστρέψιμος και $\vec{x}$ ένα ιδιοδιάνυσμα του που αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή λ τότε το $\vec{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα και του $\mathbf{A}^{-1}$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή το $\frac{1}{\lambda}$. Επομένως, το ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή της εξίσωσης (4.6) θα είναι το ιδιοδιάνυσμα που μεγιστοποιεί την παρακάτω τετραγωνική μορφή

$$Q_F = \vec{f_c}^T \cdot ((\mathbf{G}^+)^T \cdot \mathbf{G}^+)^{-1} \cdot \vec{f_c} = \vec{f_c}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{G}^T \cdot \vec{f_c} \tag{4.7}$$

Κριτήριο με βάση τις ροπές των αρθρώσεων

Αφού έχουμε επιθυμητές διευθύνσεις εκφρασμένες στο πλαίσιο του αντικειμένου μας βολεύει να εκφράσουμε και τις δυνάμεις στην έκφραση $\vec{\tau} = (\mathbf{J}_h)^T \cdot \vec{f_c}$ ως προς το συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Αυτό γίνεται μέσω του πίνακα $\mathbf{H} = (\mathbf{G}^T)^+\mathbf{J}_h$ που ορίστηκε παραπάνω. Άρα

$$(\mathbf{H}^T)^+\vec{\tau} = \mathbf{G}(\vec{r_i}) \cdot (\mathbf{J}_h^T)^+ \cdot \vec{\tau} = -\overrightarrow{f_{ext}} \tag{4.8}$$

Συνεπώς, προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε την έκφραση

$$Q_T = \vec{\tau}^T\vec{\tau} = \overrightarrow{f_{ext}}^T\mathbf{H}\mathbf{H}^T\overrightarrow{f_{ext}} \tag{4.9}$$

με περιορισμούς στα δάκτυλα και στις επαφές και μεταβλητές τις γωνίες q_i των αρθρώσεων, τη θέση (x_H, y_H, z_H) και τον προσανατολισμό (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z) του χεριού, δεδομένων των επιθυμητών διευθύνσεων $\vec{f}$.

Μετασχηματισμοί στροφής

Έστω $\mathbf{G}^{(O_s)}$ ο πίνακας λαβής εκφρασμένος ως προς το αρχικό σύστημα συντεταγμένων στο κέντρο του αντικειμένου O_s και έστω διάνυσμα $\vec{f}$ τέτοιο ώστε η τετραγωνική μορφή $\vec{f}^T\mathbf{G}^{(O_s)}\mathbf{G}^{(O_s)T}\vec{f}$ να μεγιστοποιείται υπό περιορισμό μέτρου στο $\vec{f}$. Έστω επίσης πίνακας στροφής $\mathbf{R}$ και

$$\vec{f}' = \mathbf{R}\vec{f} \Leftrightarrow \vec{f} = \mathbf{R}^T\vec{f}' \tag{4.10}$$

Έχουμε επίσης

$$\vec{f_c}' = \mathbf{R}\vec{f_c} \Leftrightarrow \vec{f_c} = \mathbf{R}^T\vec{f_c}' \tag{4.11}$$

Έστω $\mathbf{G}^{(O_R)}$ ο νέος πίνακας λαβής εκφρασμένος στο σύστημα συντεταγμένων το οποίο έχει στραφεί σύμφωνα με τον πίνακα $\mathbf{R}$. Τότε από την εξίσωση της ρομποτικής λαβής έχουμε

$$-\mathbf{G}^{(O_R)+}\vec{f}' = \vec{f_c}' \tag{4.12}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $\mathbf{R}^T$ έχουμε

$$(\mathbf{R}^T\mathbf{G}^{(O_R)+}\mathbf{R})\vec{f} = \vec{f_c} \tag{4.13}$$

Επομένως, σύμφωνα με την προηγούμενη υπόθεση θα πρέπει το $\vec{f}$ να ελαχιστοποιεί την τετραγωνική μορφή $\vec{f}^T(\mathbf{R}^T\mathbf{G}^{(O_R)+T}\mathbf{G}^{(O_R)+}\mathbf{R})\vec{f} = \vec{f}'^T\mathbf{G}^{(O_R)+T}\mathbf{G}^{(O_R)+}\vec{f}'$. Επομένως, το $\vec{f}'$ μεγιστοποιεί την τετραγωνική μορφή (4.7) εκφρασμένη στις νέες συντεταγμένες. Συμπεραίνουμε έτσι ότι η λύση του προβλήματος είναι ανεξάρτητη του προσανατολισμού του συστήματος συντεταγμένων στο κέντρο του αντικειμένου και άρα διατηρεί την ιδιότητά της υπό μετασχηματισμούς στροφής.

Ιδιοδιανύσματα υπό περιορισμό $\vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3} = 0$

Σε περίπτωση που για τα διανύσματα των σημείων επαφής εκφρασμένα ως προς το κέντρο του αντικειμένου ισχύει η σχέση

$$\vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3} = 0 \tag{4.14}$$

Τότε ο πίνακας $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ θα είναι block-διαγώνιος και συγκεκριμένα

$$\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 3I & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \sum_{i=1}^{3}[r_i\times][r_i\times]^T \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Έτσι καταλήγουμε σε 3 ιδιοδιανύσματα της μορφής $\begin{bmatrix} \vec{f} \\ 0 \end{bmatrix}$ και 3 της μορφής $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\tau} \end{bmatrix}$.

Για τα ιδιοδιανύσματα τύπου $\begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\tau} \end{bmatrix}$ ισχύει

$$\begin{gathered} \mathbf{G}\mathbf{G}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\tau} \end{bmatrix} = \lambda_\tau \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\tau} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{3}[r_i\times]^T\vec{\tau} \\ \sum_{i=1}^{3}[r_i\times][r_i\times]^T\vec{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_\tau\vec{\tau} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^{3}[r_i\times][r_i\times]^T\vec{\tau} = \lambda_\tau\vec{\tau} \end{gathered} \tag{4.16}$$

Άρα $\vec{\tau}$ ιδιοδιάνυσμα του $\sum_{i=1}^{3}[r_i\times][r_i\times]^T$.

Έστω ότι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή του $\mathbf{D} = \sum_{i=1}^{3}[r_i x][r_i x]^T$ είναι ο άξονας $\vec{z} = [0\ 0\ 1]^T$ και έστω διάνυσμα $\vec{v} = [a\ 0\ \gamma]^T$ στο επίπεδο xz κανονικοποιημένο. Τότε

$$\vec{z}^T D\vec{z} = \sum_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Από την ιδιότητα του ιδιοδιανύσματος έχουμε

$$\mathbf{D}\vec{z} = \lambda\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\sum_i z_i x_i = \sum_i z_i y_i = 0$$

Έτσι ονομάζουμε

$$M = \vec{v}^T D\vec{v} = a^2 \sum_i (y_i^2 + z_i^2) + \gamma^2 \sum_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Παίρνοντας τη διαφορά $\Lambda - M$

$$\Lambda - M = \sum_i (y_i^2 + x_i^2) - a^2 \sum_i (y_i^2 + z_i^2) - \gamma^2 \sum_i (x_i^2 + y_i^2) \Rightarrow$$

$$\Lambda - M = \sum_i (1 - \gamma^2) x_i^2 - a^2 \sum_i z_i^2 = \sum_i a^2 x_i^2 - a^2 \sum_i z_i^2$$

$$\Lambda - M = \sin^2 \partial \sum_i (x_i^2 - z_i^2)$$

Αφού η διαφορά είναι ανάλογη του τετραγώνου του ημιτόνου της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων, ένας τρόπος ελαχιστοποίησης της είναι η ελαχιστοποίηση του ημιτόνου. Επομένως, ένα κριτήριο για την εύρεση της ιδανικής θέσης δαχτύλων με βάση τις επιθυμητές ροπές θα ήταν το

$$Q_\partial = \cos^2 \partial_1 + \cos^2 \partial_2 + \ldots + \cos^2 \partial_n$$

και στόχος η μεγιστοποίηση του. Με δοσμένες επιθυμητές ροπές που πρέπει να ασκηθούν στο αντικείμενο:

- Υπολογίζουμε το διάνυσμα που ελαχιστοποιεί το Q_∂
- Υπολογίζουμε τις θέσεις που μεγιστοποιούν το $Q_\triangle = \overrightarrow{\tau_{sol}}^T \mathbf{D} \overrightarrow{\tau_{sol}}$ όπου $\overrightarrow{\tau_{sol}}$ το διάνυσμα που υπολογίστηκε στο προηγούμενο βήμα

Κεφάλαιο 5

Κινηματική Ανάλυση Ρομποτικού Χεριού και Ρομποτικής Λαβής

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε και θα αναλύσουμε το μοντέλο του ρομποτικού χεριού που θα χρησιμοποιήσουμε για την προσομοίωση της λαβής καθώς και την παραγωγή θεωρητικών αποτελεσμάτων.

5.1 Βασικά Χαρακτηριστικά

Για το συγκεκριμένο ρομποτικό χέρι γίνονται οι εξής παραδοχές:

1. Το σχήμα της «παλάμης» είναι τριγωνικό με γνωστά τα μήκη των πλευρών
2. Το κάθε δάκτυλο έχει 2 (ή 3 αργότερα) βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή 2 (ή 3 αργότερα) στροφικές αρθρώσεις, και 2 συνδέσμους.

Το κέντρο του χεριού επιλέχθηκε χωρίς βλάβη της γενικότητας ως το βαρύκεντρο του τριγώνου. Το ρομποτικό χέρι αυτό φαίνεται στο σχήμα 5.1.

5.2 Ανάλυση - Συστήματα συντεταγμένων

Θέση Κορυφών Τριγώνου

Για οποιοδήποτε τρίγωνο στο επίπεδο μπορούμε να θέσουμε το σύστημα συντεταγμένων του επιπέδου με τέτοιο τρόπο ώστε η μία κορυφή του τριγώνου να βρίσκεται στο $(0, 0)$ και η απέναντι πλευρά να είναι κάθετη στον άξονα y και να τον τέμνει σε θετική τιμή (Εικόνα 1). Από τον νόμο συνημιτόνων έχουμε:

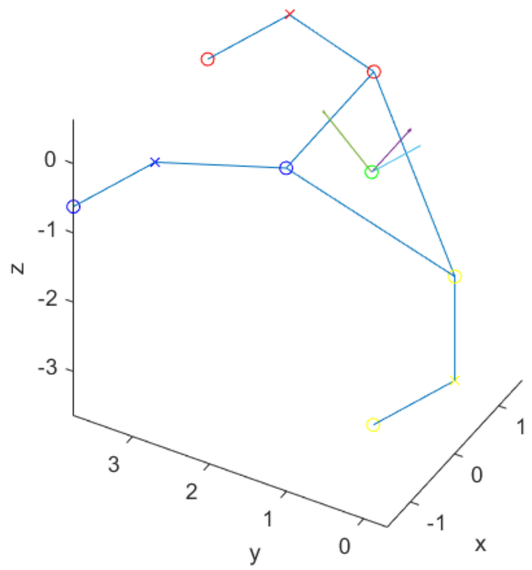
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tag{5.1}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \tag{5.2}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \tag{5.3}$$

Αφού η πλευρά c είναι κάθετη στον άξονα y η γωνία που σχηματίζει η πλευρά a με τον άξονα x είναι ίση με β. Επομένως

$$B = (a \cdot \cos\beta, a \cdot \sin\beta) \tag{5.4}$$



Σχήμα 5.1: *Βασικό μοντέλο ρομποτικού χεριού*

Με την ίδια λογική φτάνουμε σε παρόμοιο αποτέλεσμα για την κορυφή A.

$$B = (b \cdot \cos(\beta + \gamma), b \cdot \sin(\beta + \gamma)) \tag{5.5}$$

Άρα τελικά οι συντεταγμένες του βαρύκεντρου του τριγώνου θα είναι:

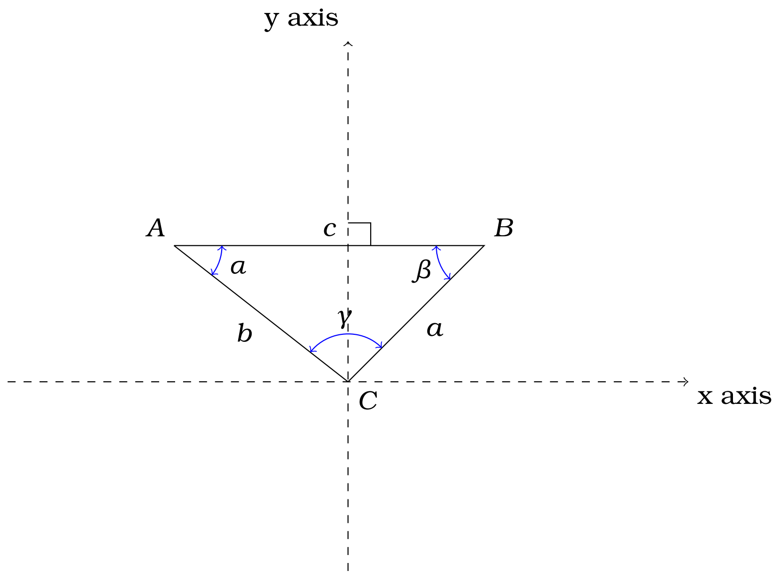
$$E = (\frac{a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos(\beta + \gamma)}{3}, \frac{a \cdot \sin\beta + b \cdot \sin(\beta + \gamma)}{3}) \tag{5.6}$$

Αν θεωρήσουμε σαν αρχή των αξόνων το κέντρο του τριγώνου τότε τα διανύσματα των κορυφών θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\vec{C} - \vec{E} = -\vec{E} \tag{5.7}$$

$$\vec{B} - \vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{2a \cdot \cos\beta - b \cdot \cos(\beta+\gamma)}{3} & \frac{2a \cdot \sin\beta - b \cdot \sin(\beta+\gamma)}{3} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

$$\vec{A} - \vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{2b \cdot \cos(\beta+\gamma) - a \cdot \cos(a)}{3} & \frac{2b \cdot \sin(\beta+\gamma) - a \cdot \sin\beta}{3} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$



Σχήμα 5.2: *Τρίγωνο στο επίπεδο*

Ανάλυση Δακτύλων

Για το κάθε δάκτυλο i, η θέση της επαφής του δίνεται από τις σχέσεις:

$$x = l_1 \cdot \cos(q_1) + l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) \tag{5.10}$$

$$y = l_1 \cdot \sin(q_1) + l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) \tag{5.11}$$

$$\partial = q_1 + q_2 \tag{5.12}$$

Παραγωγίζοντας τις (5.10)-(5.12) παίρνουμε

$$\dot{x} = -l_1 \cdot \sin(q_1) \cdot \dot{q}_1 - l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \tag{5.13}$$

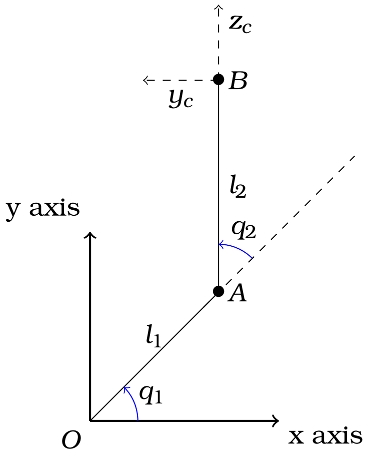
$$\dot{y} = l_1 \cdot \cos(q_1) \cdot \dot{q}_1 + l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \tag{5.14}$$

$$\dot{\partial} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \tag{5.15}$$

Από τις (23) – (25) προκύπτει η ιακωβιανή του κάθε δακτύλου i, $\mathbf{J}_i$.

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \sin(q_1) - l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cdot \cos(q_1) + l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

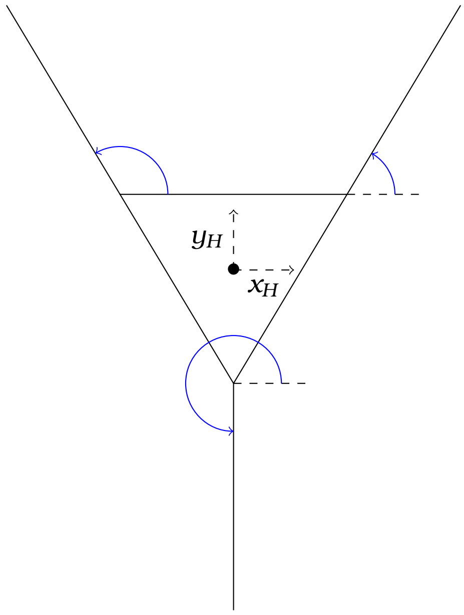
Ο μετασχηματισμός στροφής που εκφράζει το πλαίσιο της επαφής σε αυτό του δακτύλου είναι (βλ. Σχήμα 5.3)



Σχήμα 5.3: *Δάκτυλο και πλαίσια συντεταγμένων επαφής - δακτύλου*

$$\mathbf{R}_C^F = \mathbf{R}_z(q_1 + q_2)\mathbf{R}_y\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{5.17}$$

Αντίστοιχα ο μετασχηματισμός στροφής που εκφράζει το πλαίσιο του δακτύλου σε αυτό του κέντρου του χεριού είναι (βλ. Σχήμα 5.4)



Σχήμα 5.4: *Ρομποτικό χέρι σχεδιασμένο στο επίπεδο*

$$\mathbf{R}_F^H = \mathbf{R}_z\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{R}_y\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{5.18}$$

Συνδυάζοντας τις (5.17) και (5.18) παίρνουμε τον συνολικό μετασχηματισμό στροφής από την επαφή του δακτύλου στο κέντρο του χεριού 4 $\mathbf{R}_C^H$.

$$\mathbf{R}_C^H = \mathbf{R}_z\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{R}_y\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{R}_z(q_1 + q_2)\mathbf{R}_y\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{5.19}$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια τη συνολική ιακωβιανή $\mathbf{J}_{h_i}$ του κάθε δακτύλου. Είναι $\mathbf{J}_{h_i} = \mathbf{B}_{C_i}^T \cdot \mathbf{T}_E^{C_i} \cdot \mathbf{J}_i$

$$\mathbf{T}_E^{C_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_H^C & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & \mathbf{R}_H^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{R}_C^H\right)^T & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & \left(\mathbf{R}_C^H\right)^T \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

$$\mathbf{B}_{C_i}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

Με τους παραπάνω πίνακες μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική ιακωβιανή του χεριού.

$$\mathbf{J}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{h_1} & 0_{3\times2} & 0_{3\times2} \\ 0_{3\times2} & \mathbf{J}_{h_2} & 0_{3\times2} \\ 0_{3\times2} & 0_{3\times2} & \mathbf{J}_{h_3} \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

5.3 Επιπλέον Βαθμοί Ελευθερίας

Στις αρθρώσεις του μοντέλου που περιγράφηκε παραπάνω μπορούν να προστεθούν επιπλέον βαθμοί ελευθερίας. Συγκεκριμένα εάν στις αρθρώσεις που βρίσκονται στα σημεία αρχής των δακτύλων επιτρέψουμε και την περιστροφή γύρω από τον άξονα κάθετο στο επίπεδο της παλάμης, παίρνουμε ένα δεύτερο μοντέλο χεριού που θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω. Αυτή τη φορά η θέση του κάθε δακτύλου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}(q_3) \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos(q_1) + l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \cdot \sin(q_1) + l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

Όπου $\mathbf{R}(q_3)$ ο 3×3 πίνακας στροφής κατά q_3 γύρω από τον άξονα y. Δηλαδή:

$$\mathbf{R}(q_3) = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & 0 & \sin(q_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(q_3) & 0 & \cos(q_3) \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

Επομένως η (23) γράφεται:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_3) \cdot (l_1 \cdot \cos(q_1) + l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2)) \\ l_1 \cdot \sin(q_1) + l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) \\ -\sin(q_3) \cdot (l_1 \cdot \cos(q_1) + l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2)) \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

Παραγωγίζοντας την (5.25) παίρνουμεΧ

$$\dot{x} = -c_3 \cdot (l_1 s_1 \dot{q}_1 + l_2 s_{12} \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)) - s_3 \cdot (l_1 c_1 + l_2 \cdot c_{12}) \cdot \dot{q}_3 \tag{5.26}$$

$$\dot{y} = l_1 \cdot c_1 \cdot \dot{q}_1 + l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \tag{5.27}$$

$$\dot{z} = s_3 \cdot (l_1 s_1 \dot{q}_1 + l_2 s_{12} \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)) - c_3 \cdot (l_1 c_1 + l_2 \cdot c_{12}) \cdot \dot{q}_3 \tag{5.28}$$

όπου c_i και s_i είναι τα $\cos(q_i)$ και $sin(q_i)$ αντίστοιχα. Από τις (5.26)-(5.28) προκύπτει η ιακωβιανή του κάθε δακτύλου i, $\mathbf{J}_i$.

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} -c_3 \cdot (l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & -c_3 l_2 s_{12} & -s_3 \cdot (l_1 c_1 + l_2 \cdot c_{12}) \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} & 0 \\ s_3 \cdot (l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & s_3 l_2 s_{12} & -c_3 \cdot (l_1 c_1 + l_2 \cdot c_{12}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

Ο υπόλοιπος υπολογισμός της ιακωβιανής του χεριού είναι πανομοιότυπος με αυτόν που περιγράφηκε πριν.

5.4 Ανάλυση Ιδιαζουσών Τιμών

Επειδή τα κριτήρια που εξετάζονται είναι τετραγωνικές μορφές ο πίνακας ιακωβιανής του ρομποτικού χεριού εμφανίζεται πολλαπλασιασμένος με τον ανάστροφό του. Είναι λοιπόν χρήσιμο να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των ιδιοτιμών του γινομένου αυτού, δηλαδή την συμπεριφορά των ιδιαζουσών τιμών της ιακωβιανής του χεριού $\mathbf{J}_h$.

Όπως φαίνεται στην ενότητα 5.2 η ιακωβιανή μήτρα του χεριού είναι ένας block-diagonal πίνακας ο οποίος αποτελείται από τις ιακωβιανές μήτρες του κάθε δακτύλου. Αν $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}$ η SVD παραγοντοποίηση ενός block-diagonal πίνακα $\mathbf{A}$ τότε οι πίνακες $\mathbf{U}$ και $\mathbf{V}$ είναι επίσης block-diagonal και αποτελούνται από τους πίνακες $\mathbf{U}_i$ και $\mathbf{V}_i$ οι οποίοι είναι με τη σειρά τους οι πίνακες που προκύπτουν από την ανάλυση ιδιαζουσών τιμών των υποπινάκων του $\mathbf{A}$, δηλαδή $\mathbf{A}_i = \mathbf{U}_i\Sigma_i\mathbf{V}_i$. Οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα $\mathbf{J}_h$ ισούνται με τις ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα $\mathbf{J}_h^T\mathbf{J}_h$. Επομένως:

$$\mathbf{J}_h^T\mathbf{J}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{h_1}^T\mathbf{J}_{h_1} & 0_{2\times2} & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & \mathbf{J}_{h_2}^T\mathbf{J}_{h_2} & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & 0_{2\times2} & \mathbf{J}_{h_3}^T\mathbf{J}_{h_3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \tag{5.30}$$

$$\mathbf{J}_h^T\mathbf{J}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^T\mathbf{J}_1 & 0_{2\times2} & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & \mathbf{J}_2^T\mathbf{J}_2 & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & 0_{2\times2} & \mathbf{J}_3^T\mathbf{J}_3 \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

Όπως είναι φανερό από τα παραπάνω οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα ισούνται με αυτές του block-diagonal πίνακα $\mathbf{J}_s$ όπου

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0_{3\times2} & 0_{3\times2} \\ 0_{3\times2} & \mathbf{J}_2 & 0_{3\times2} \\ 0_{3\times2} & 0_{3\times2} & \mathbf{J}_3 \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

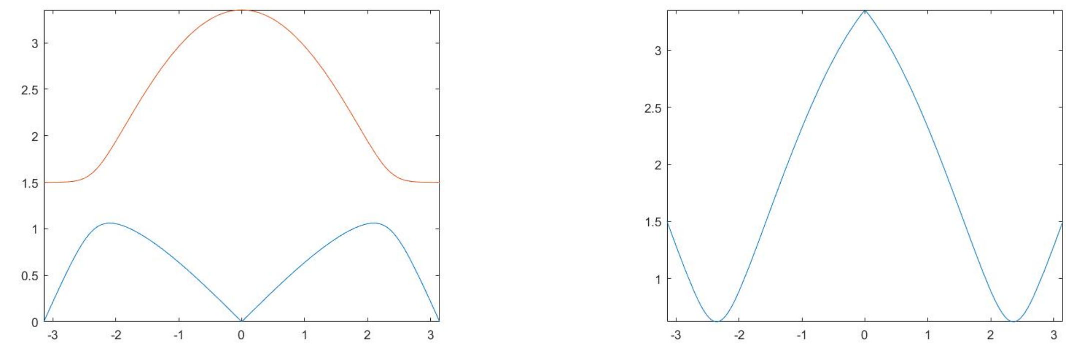
Όπως ήταν αναμενόμενο δηλαδή οι πίνακες στροφής που πολλαπλασιάζονται με τα $\mathbf{J}_i$ δεν επηρεάζουν τις τιμές των ιδιαζουσών τιμών. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να υπολογιστούν οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα $\mathbf{J}_h$ αρκεί να υπολογιστούν αυτές των $\mathbf{J}_i$. Για κάθε υποπίνακα και μήκη συνδέσμων ίσα με 1 προκύπτει ότι αυτές ισούνται με:

$$s_1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{2\cdot c_{i2} - 2\cdot\sqrt{3\cdot c_{i2} + 2\cdot c_{i2}^2 + 5} + 3} \tag{5.33}$$

$$s_2 = \frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{2\cdot c_{i2} + 2\cdot\sqrt{3\cdot c_{i2} + 2\cdot c_{i2}^2 + 5} + 3} \tag{5.34}$$

5.5 Συμπεριφορά των s_1 και s_2

Όπως φαίνεται από τη μορφή των s_1 και s_2, ισχύει ότι $s_1 < s_2$. Τα ακρότατα των δύο συναρτήσεων αντιστοιχούν σε θέσεις ακρότατων της έκφρασης $\delta(q_{i2}) = 2\sqrt{3 \cdot c_{i2} + 2 \cdot c_{i2}^2 + 5}$. Οι θέσεις ακροτάτων της δ αντιστοιχούν με τη σειρά τους σε θέσεις ακρότατων της έκφρασης $\delta_2(q_{i2}) = 3 \cdot c_{i2} + 2 \cdot c_{i2}^2$. Επομένως οι πιθανές θέσεις ακρότατων των s_1 και s_2 είναι οι $q_{i2} = 0,\ q_{i2} = \pi,\ q_{i2} = -\frac{\pi}{3}$. Στις εικόνες που ακολουθούν φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των δύο ιδιαζουσών τιμών καθώς και η γραφική παράσταση της διαφοράς τους. Όπως είναι



(α΄) *Ιδιάζουσες τιμές για* $-\pi \leq q_{i2} \leq 0$

(β΄) *Διαφορά* $s_2 - s_1$ *για* $-\pi \leq q_{i2} \leq 0$

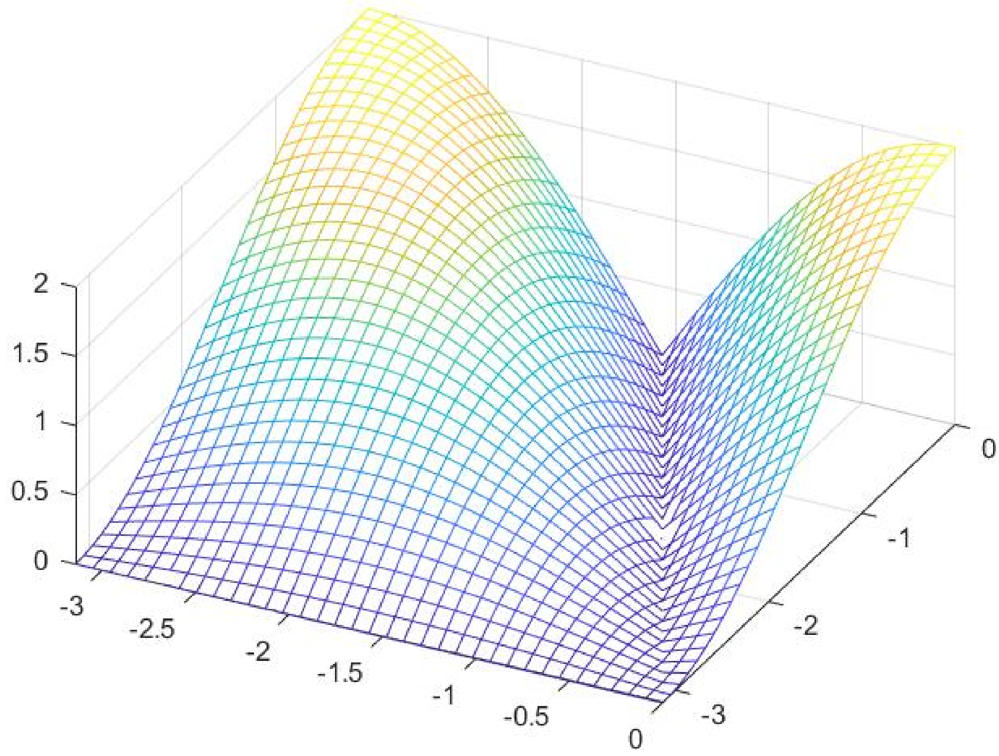
Σχήμα 5.5: *Ιδιάζουσες τιμές* s_1 *και* s_2

φανερό όταν αυξάνεται η s_2 μειώνεται η s_1 και το αντίστροφο. Επομένως μεγιστοποιώντας την μία ελαχιστοποιείται η άλλη. Καλό condition number στον πίνακα $\mathbf{J}_h^T\mathbf{J}_h$ επιτυγχάνεται για q_{i2} κοντά στο $-\frac{\pi}{3}$.

Για το μοντέλο με τον επιπλέον βαθμό ελευθερίας q_3 η τρίτη ιδιάζουσα τιμή της εκάστοτε ιακωβιανής ισούται με

$$s_3 = \sqrt{\cos(2q_1 + q_2) + \frac{\cos(2q_1)}{2} + \frac{\cos(2(q_1 + q_2))}{2} + \cos(q_2) + 1} \tag{5.35}$$

και δεν εξαρτάται από το q_3. Η γραφική τη παράσταση φαίνεται παρακάτω.



Σχήμα 5.6: *Ιδιάζουσα τιμή s_3*

Για να βρούμε τις τιμές στις οποίες μηδενίζεται η s_3 μηδενίζουμε ταυτόχρονα τις παραγώγους τις ως προς q_1 και q_2. Έτσι έχουμε:

$$\frac{\partial s_3}{\partial q_1} = -2\sin(2q_1 + q_2) - \sin(2q_1) - \sin(2q_1 + 2q_2) \tag{5.36}$$

$$\frac{\partial s_3}{\partial q_2} = -\sin(2q_1 + q_2) - \sin(2q_1 + 2q_2) - \sin(q_2) \tag{5.37}$$

Λύνοντας το σύστημα (39) = (40) = 0 με περιορισμένες γωνίες q_1, q_2 παίρνουμε τις λύσεις:

$$(q_1, q_2) = \begin{matrix} \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ (0, \pi) \\ (0, 0) \\ \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \end{matrix} \tag{5.38}$$

Τα πρώτα δύο σημεία αντιστοιχούν σε τοπικά ελάχιστα ενώ τα τελευταία δύο σε τοπικά μέγιστα. Η ευθεία που ενώνει τα δύο πρώτα σημεία είναι η $q_2 = -2q_1 + \pi$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ιδιάζουσας τιμής s_3 παίρνουμε ότι $s_3 = 0$ σε κάθε σημείο της ευθείας.

Κεφάλαιο 6

Γεωμετρική Ανάλυση Ρομποτικής Λαβής και Διερεύνηση Ύπαρξης Λύσεων

6.1 Ελαχιστοποίηση Κριτηρίου Ροπών

Σε περίπτωση που το διάνυσμα $\vec{f_c}$ ανήκει στον μηδενοχώρο του πίνακα $\mathbf{J}_h^T$ τότε θα ισχύει ότι $\vec{\tau} = 0$ και $Q_T = 0$. Επομένως, για ένα τυχαίο διάνυσμα $\vec{f_c}$ το οποίο δεν ανήκει εξαρχής στον μηδενοχώρο του πίνακα μια πλήρως «επιτυχημένη» ελαχιστοποίηση του κριτηρίου θα έφερνε το χέρι σε τέτοια θέση ώστε ο πίνακας $\mathbf{J}_h$ να χάνει βαθμό και το διάνυσμα να ανήκει στον μηδενοχώρο του. Επομένως, πρέπει να μπει ο περιορισμός $\text{rank}(\mathbf{J}_h) = n$, όπου n ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας. Όμως επειδή ο βαθμός χάνεται πάνω στο όριο των περιορισμών θα πρέπει να μπουν όρια στις γωνίες q_{i2} ώστε να εξασφαλίζεται η ισχύς τους.

6.2 Αντίστροφη κινηματική για δεδομένα σημεία επαφής

Ύπαρξη Λύσης

Εύρος Δακτύλων Για να βρούμε αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξη λύσης πρέπει να μελετηθεί το εύρος το κάθε δακτύλου. Για δάκτυλα με 2 στροφικές αρθρώσεις όπως του εξεταζόμενου χεριού και στην περίπτωση που οι γωνίες των δακτύλων δεν είναι περιορισμένες ισχύει ότι:

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1 \cdot \cos(q_1) + l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) \\ y &= l_1 \cdot \sin(q_1) + l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 \cdot \cos(q_2) \tag{6.1}$$

Σε πολικές συντεταγμένες η ακτίνα γράφεται $r^2 = x^2 + y^2$ οπότε

$$r^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 \cdot \cos(q_2) \tag{6.2}$$

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} -1 \ \leq \ \cos(q_2) \leq \ 1 \Rightarrow \\ (l_1 - l_2)^2 \ \leq \ r^2 \ \leq \ (l_1 + l_2)^2 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Επομένως, για μη περιορισμένες γωνίες στο εύρος του κάθε δακτύλου είναι ένας δακτύλιος με ακτίνες $r_1 = |l_1 - l_2|$ και $r_2 = l_1 + l_2$. Για περιορισμένες γωνίες όμως το εύρος του δακτύλου δεν περιλαμβάνει το πάνω μισό του δακτυλίου καθώς και τον δίσκο με κέντρο $(l_1, 0)$ και ακτίνα l_2.

Απόδειξη. Αρκεί ν.δ.ο. $(l_1 - x)^2 + y^2 \geq l_2^2$

$$\begin{aligned}
&(l_1 - x)^2 + y^2 = \\
&l_1^2 + x^2 + y^2 - 2l_1 x = \\
&2l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) - 2l_1(l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2)) = \\
&2l_1^2(1 - \cos(q_1)) + l_2^2 + 2l_1 l_2(\cos(q_1) + \cos(q_1 + q_2))
\end{aligned}$$

Αλλά $l_1 = l_2$.

$$\begin{aligned}
&2l_1^2(1 - \cos(q_1)) + l_2^2 + 2l_1 l_2(\cos(q_1) + \cos(q_1 + q_2)) = \\
&2l_1^2(1 + \cos(q_1 + q_2)) + l_1^2 \geq l_1^2
\end{aligned}$$

Άρα

$$(l_1 - x)^2 + y^2 \geq 0 \tag{6.4}$$

□

Κοινή τομή δακτύλων Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του χεριού το οποίο θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω είναι ότι τα δάκτυλα μπορούν να κλείσουν και τα τρία στο ίδιο σημείο.

Απόδειξη. Για κάθε δάκτυλο θέτουμε $l_1 \cdot \cos(q_1) + l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) = u_i$ και $l_1 \cdot \sin(q_1) + l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) = v_i$. Μπορούμε να θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_h = y_h = z_h = 0$ και $\vartheta_x = \vartheta_y = \vartheta_z = 0$. Οι εξισώσεις ων δακτύλων γράφονται:

1. Αντίχειρας

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}u_3 - \frac{\sqrt{21}}{3} \\ \frac{3}{2}v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

2. Αριστερό

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{4}u_2 - 1 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}u_2 + \frac{\sqrt{21}}{6} \\ \frac{3}{2}v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

3. Δεξύ

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4}u_1 + 1 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}u_1 + \frac{\sqrt{21}}{6} \\ \frac{3}{2}v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

Εξισώνοντας τις (6.6), (6.7) προκύπτει:

$$v_1 = v_2 \tag{6.8}$$

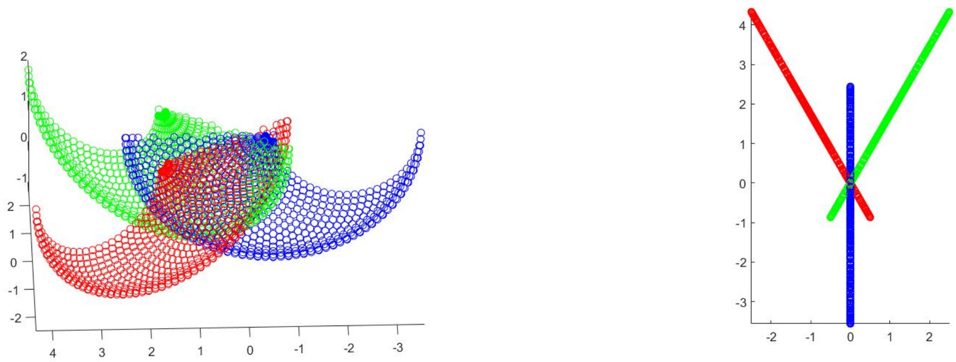
$$u_1 = u_2 = -\frac{4}{3} \tag{6.9}$$

Εξισώνοντας και τις (6.5), (6.6) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$v_3 = v_1 = v_2 \tag{6.10}$$

$$u_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \tag{6.11}$$

Επομένως, τα δάκτυλα τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 0$, $y = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{21}}{6}$ και z ελεύθερο. □



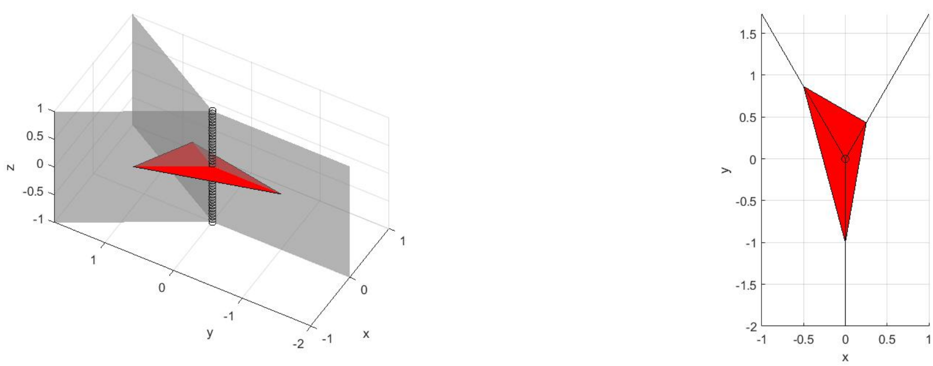
(α΄) *Σύνολο σημείων επαφής των δακτύλων*

(β΄) *Κάτοψη του συνόλου σημείων επαφής των δακτύλων*

Σχήμα 6.1: *Εύρος δακτύλων*

Τύποι τριγώνων Τρία μη συνευθειακά σημεία επαφής ορίζουν ένα τρίγωνο στον χώρο. Ορίζουμε σαν τύπο του τριγώνου το multiset των τριών γωνιών του. Δηλαδή το τρίγωνο με γωνίες $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ είναι τύπου $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3\}$ ανεξάρτητα από τη σειρά εμφάνισης ή υπολογισμού των γωνιών αυτών.

Ύπαρξη λαβής για κάθε τύπο τριγώνου Ο τύπος ενός τριγώνου όπως ορίστηκε παραπάνω εξαρτάται μόνο από τις γωνίες του και όχι από τα μήκη των πλευρών του. Ένα τρίγωνο συγκεκριμένου τύπου μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί «αρκετά» μικρό (όσο μικρό επιθυμούμε) σε σχέση με τα μεγέθη του χεριού. Το εύρος του κάθε δακτύλου μπορεί επομένως να θεωρηθεί ότι είναι ένα επίπεδο.



(α΄) *Ημιεπίπεδα επαφής των δακτύλων*

(β΄) *Κάτοψη ημιεπιπέδων επαφής των δακτύλων*

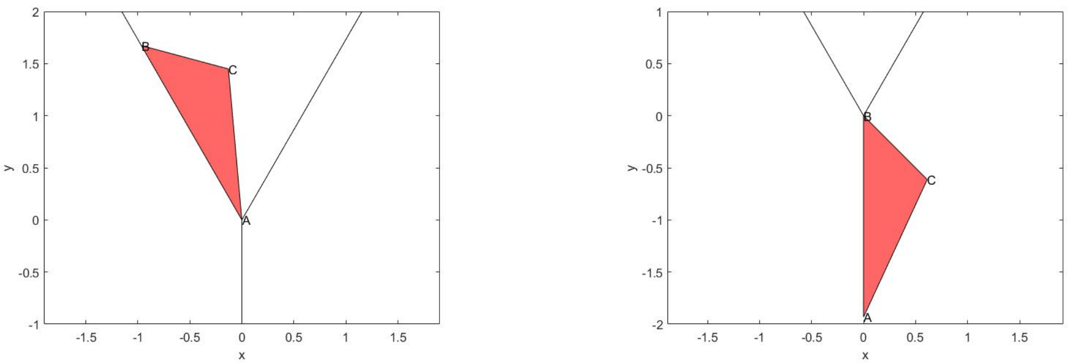
Σχήμα 6.2: *Ημιεπίπεδα επαφής*

Εάν αποδείξουμε ότι κάθε τρίγωνο μπορεί να τοποθετηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε κορυφή του να βρίσκεται σε μία από τις τρεις ημιευθείες που σχηματίζονται από την προβολή τον επιπέδων στο επίπεδο $x-y$ χωρίς να βρίσκονται δύο κορυφές στην ίδια ευθεία τότε έχουμε αποδείξει και ότι οι κορυφές βρίσκονται πάνω στα επίπεδα.

Απόδειξη. 1. Ονομάζουμε κορυφή A την κορυφή που βρίσκεται απέναντι στη μικρότερη πλευρά.

2. Ονομάζουμε κορυφή B την κορυφή που βρίσκεται απέναντι στη μεγαλύτερη πλευρά.

Θεωρούμε ότι η πλευρά B μπορεί να κινηθεί μόνο πάνω στην ευθεία $y = -\sqrt{3},\ x < 0$ και η A αντίστοιχα μόνο πάνω στην ημιευθεία $x = 0,\ y < 0$. Η αρχική θέση της κορυφής A πριν την κίνηση των κορυφών είναι η $A = (0, 0, 0)$. Αντίστοιχα η κίνηση του τριγώνου σταματά όταν $B = (0, 0, 0)$.



(α΄) *Αρχική θέση τριγώνου*

(β΄) *Τελική θέση τριγώνου*

Σχήμα 6.3: *Κίνηση του τριγώνου*

Σε κάθε θέση του τριγώνου ισχύει ότι:

$$\vec{A} = \sigma_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

$$\vec{B} = \sigma_2 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

με $\sigma_1,\ \sigma_2 > 0$. Οι συντελεστές σ_1 και σ_2 συνδέονται με τη σχέση

$$\begin{gathered} |\vec{A} - \vec{B}|^2 = AB^2 \Rightarrow \\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{3}\sigma_1\sigma_2 = AB^2 \end{gathered} \tag{6.14}$$

Λύνοντας την (6.14) ως προς σ_2 προκύπτει ότι

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{4AB^2 - \sigma_1^2}}{2} - \frac{\sqrt{3}\sigma_1}{2} \tag{6.15}$$

Η θέση του σημείου C ισούται με:

$$\vec{C} = \mathbf{T} \cdot \frac{\vec{A} - \vec{B}}{|\vec{A} - \vec{B}|} \cdot AC \tag{6.16}$$

όπου

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(a) & \sin(a) & 0 & 0 \\ -\sin(a) & \cos(a) & 0 & -s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

και a η γωνία που αντιστοιχεί στην κορυφή A.

$$\hat{a} = \cos^{-1}\left(\frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot AC \cdot AB}\right) \tag{6.18}$$

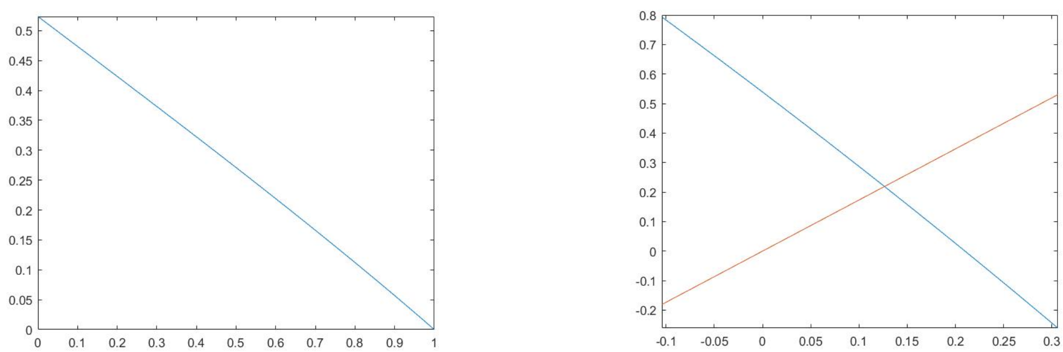
Δηλαδή το σημείο C ισούται με το διάνυσμα μήκους AC στην κατεύθυνση του $\vec{B} - \vec{A}$ στραμμένο κατά γωνία $-\hat{a}$ και μετατοπισμένο κατά $y = -\sigma_1$. Η γωνία k που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{B} - \vec{A}$ με το διάνυσμα $\vec{n_c} = [0\ 1]^T$ υπολογίζεται με τον παρακάτω τρόπο:

$$\hat{k} = \cos^{-1}\left(\frac{-\overrightarrow{AB}^T \overrightarrow{n_c}}{AB}\right) \tag{6.19}$$

Αντικαθιστώντας από τις σχέσεις (6.12), (6.13), (6.15) προκύπτει ότι

$$\hat{k} = \cos^{-1}\left(\frac{\sigma_1 + \sqrt{3(4AB^2 - \sigma_1^2)}}{4AB}\right), \ 0 \le \sigma_1 \le AB \tag{6.20}$$

Η οποία είναι φθίνουσα στο διάστημα που μας ενδιαφέρει.



(α') *Γωνία $\hat{k}$ για AB=1*   (β') *Θέση κορυφής C και ευθεία $y = \sqrt{3}x$*

Σχήμα 6.4: *Γωνία $\hat{k}$ και τομή κορυφής C και ευθείας $y = \sqrt{x}$*

Τότε θα ισχύει ότι $C = (AC \cdot \sin(\hat{a} - \hat{k}),\ AC \cdot \cos(\hat{a} - \hat{k}) - \sigma_1)$. Αφού μας ενδιαφέρει μόνο το διάστημα στο οποίο κινείται το τρίγωνο μπορούμε να θέσουμε γενικά $x = AB \cdot \sin(\hat{a} - \hat{k}),\ 0 \le$

$\hat{k} \leq \frac{\pi}{6}$ όπου το $\hat{k}$ είναι μεταβλητή του σ_1. Στην τελική θέση του τριγώνου είναι $\hat{k} = 0$ και άρα

$$C = (AC \cdot \sin(\hat{a}),\ AC \cdot \cos(\hat{a}) - AB) = \left(AC \sin(\hat{a}),\ AC\left(\cos(\hat{a}) - \frac{AB}{AC}\right)\right) \tag{6.21}$$

Επομένως, $x_C > 0, y_C < 0$ και η κορυφή C βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = \sqrt{3}x$. Στην αρχική θέση του τριγώνου είναι $\hat{k} = \frac{\pi}{6}$.

$$C = \left(AC \cdot \sin\left(\hat{a} - \frac{\pi}{6}\right),\ AC \cdot \cos\left(\hat{a} - \frac{\pi}{6}\right)\right). \tag{6.22}$$

Αφού όμως η $\hat{a}$ είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου τότε ισχύει ότι $a \leq \frac{\pi}{3}$ και άρα $-\frac{\pi}{6} < \hat{a} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}$. Επομένως, $\frac{1}{2} \leq \cos\left(\hat{a} - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$

1. Για $\sin\left(\hat{a} - \frac{\pi}{6}\right) > 0$

$$\sqrt{3} \leq \cot\left(\left(\hat{a} - \frac{\pi}{6}\right)\right) \tag{6.23}$$

   άρα η κλήση του διανύσματος $\vec{C}$ είναι μεγαλύτερη από αυτή της ευθείας $y = \sqrt{3}x$ και η κορυφή βρίσκεται πάνω από αυτήν.

2. Για $\sin\left(\hat{a} - \frac{\pi}{6}\right) \leq 0$ είναι $AB \cdot \cos\left(\hat{a} - \frac{\pi}{6}\right) > 0$ επομένως η κορυφή βρίσκεται πάνω από την ευθεία.

Δείξαμε ότι η συνάρτηση που εκφράζει την κορυφή είναι συνεχής αφού είναι πράξη συνεχών συναρτήσεων και ότι η διαφορά της y συντεταγμένης της με την ευθεία $y = \sqrt{3}x$ δεν διατηρεί πρόσημο. Επομένως, υπάρχει σημείο $(x_s,\ y_s)$ τέτοιο ώστε $\vec{C} = \sigma_3 \cdot [1\ \ \sqrt{3}]^T$. □

Σημείωση:

1. Η ύπαρξη λύσης με τη μία πλευρά του τριγώνου εξολοκλήρου πάνω στην ευθεία τομής των επιπέδων και την τρίτη κορυφή πάνω σε ένα από τα τρία επίπεδα είναι προφανής. Υπάρχει περίπτωση να οδηγήσει όμως σε λιγότερο φυσικές λαβές ή λαβές με κακά χαρακτηριστικά όπως π.χ. πολύ τεντωμένα ή λυγισμένα δάκτυλα.

2. Εάν ορίσουμε ένα επίπεδο αναφοράς - π.χ. το αρχικό επίπεδο του τριγώνου - και στη συνέχεια περιστρέψουμε το τρίγωνο, η προβολή των σημείων του περιστραμμένου τριγώνου πάνω στο επίπεδο θα είναι πάλι ένα τρίγωνο - με εξαίρεση την περίπτωση που το επίπεδο του περιστραμμένου τριγώνου είναι κάθετο στο αρχικό. Επομένως, αφού υπάρχει θέση τέτοια ώστε η προβολή του κάθε σημείου να βρίσκεται πάνω στις ημιευθείες και την ευθεία, τότε υπάρχει θέση στην οποία το περιστραμμένο τρίγωνο έχει τις κορυφές του πάνω στα τρία επίπεδα επαφής. Στην περίπτωση που το επίπεδο του περιστραμμένου τριγώνου είναι κάθετο στο αρχικό το πρόβλημα λύνεται όπως στη σημείωση 1.

Λύση αντίστροφης κινηματικής

Οι εξισώσεις που συνδέουν τα σ_1, σ_2, σ_3 είναι:

$$\sigma_2^2 + \sigma_2\sigma_1\sqrt{3} + \sigma_1^2 = AB^2 \tag{6.24}$$

$$\sigma_3^2 + \sigma_3\sigma_1\sqrt{3} + \sigma_1^2 = BC^2 \tag{6.25}$$

$$\sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_2 + \sigma_2^2 = AC^2 \tag{6.26}$$

με σ_1, $\sigma_2 > 0$. Το σύστημα μπορεί να λυθεί αριθμητικά για τα σ_1, σ_2 σ_3 και να δώσει τα σημεία επαφής

$$\vec{A} = -\sigma_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.27}$$

$$\vec{B} = \sigma_2 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \tag{6.28}$$

$$\vec{C} = \sigma_3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \tag{6.29}$$

Η αντίστροφη κινηματική λύνεται σε σχέση με το τρίγωνο, δηλαδή για ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z ίσα με το 0. Οι εξισώσεις που προκύπτουν λύνονται απευθείας και δίνουν:

$$v_1 = v_2 = v_3 = z_h \tag{6.30}$$

$$u_3 = y_h - \frac{\sqrt{21}}{3} - p_{tx} \tag{6.31}$$

$$u_1 = 2(p_{rx} - 1) \tag{6.32}$$

$$u_2 = -2(p_{lx} + 1) \tag{6.33}$$

$$q_{12} = -\cos^{-1}\left(\frac{v_1^2 + u_1^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right) \tag{6.34}$$

$$q_{11} = -\cos^{-1}\left(\frac{u_1(l_1 + l_2\cos(q_{12})) + v_1l_2\sin(q_{12})}{u_1^2 + v_1^2}\right) \tag{6.35}$$

$$q_{22} = -\cos^{-1}\left(\frac{v_2^2 + u_2^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right) \tag{6.36}$$

$$q_{21} = -\cos^{-1}\left(\frac{u_2(l_1 + l_2\cos(q_{22})) + v_2l_2\sin(q_{22})}{u_2^2 + v_2^2}\right) \tag{6.37}$$

$$q_{32} = -\cos^{-1}\left(\frac{v_3^2 + u_3^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right) \tag{6.38}$$

$$q_{31} = -\cos^{-1}\left(\frac{u_3(l_1 + l_2\cos(q_{32})) + v_3l_2\sin(q_{32})}{u_3^2 + v_3^2}\right) \tag{6.39}$$

Οι εξισώσεις αυτές δεν αποτελούν λύση για τις περιπτώσεις που αναφέρονται στις σημειώσεις 1 και 2. Όπως φαίνεται στην εξίσωση (6.30) η μεταβλητή z_h μένει ελεύθερη και μπορεί να πάρει τιμές εντός ενός διαστήματος $[z_{min}, z_{max}]$ το οποίο εξαρτάται από τα μήκη των δακτύλων. Επομένως, οι ελεύθερες μεταβλητές της λαβής είναι 4 αφού δίνονται 6 εξισώσεις για τις θέσεις των σημείων επαφής στο επίπεδο του τριγώνου και 2 εξισώσεις ώστε τα σημεία να βρίσκονται στο ίδιο ύψος.

Σε περίπτωση που επιτρέπεται και η κίνηση των δακτύλων γύρω από τον άξονα κάθετο στο επίπεδο της παλάμης θέτουμε $q_{i3} = 0$ και παίρνουμε τις λύσεις για τις υπόλοιπες γωνίες από τις παραπάνω εξισώσεις.

6.3 Τυχαία Αρχικά Σημεία

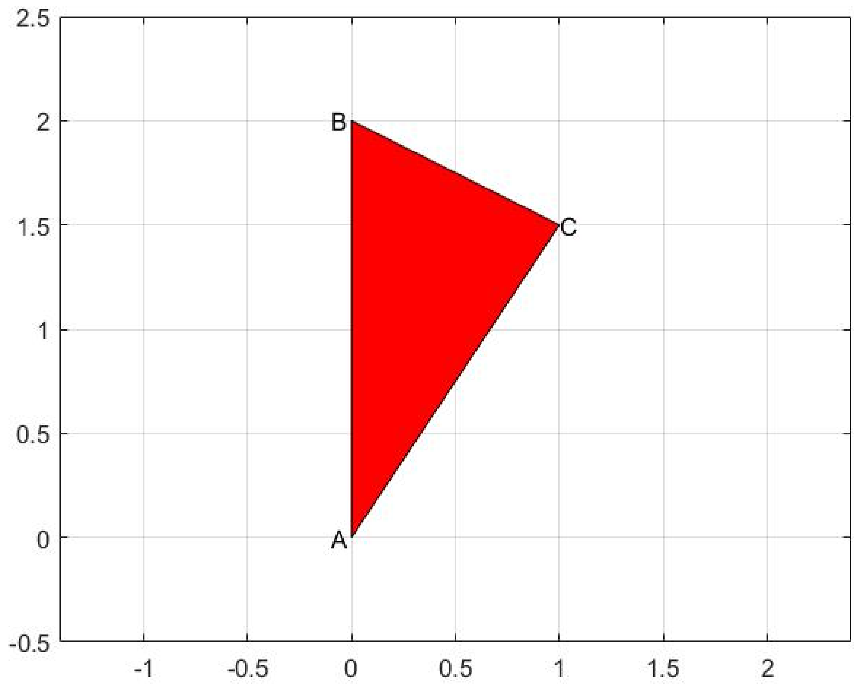
Έστω τρία τυχαία σημεία πάνω στο ελλειψοειδές. Τα σημεία σχηματίζουν ένα τρίγωνο με κορυφές A, B και C. Έστω επίσης ότι η γωνία $A\hat{B}C$ τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τη γωνία που σχηματίζουν οι δύο «δείκτες¨ του χεριού». Σε αυτή την περίπτωση τα δάκτυλα δεν μπορούν να τοποθετηθούν στις κορυφές του τριγώνου με μηδενικές τις γωνίες προσανατολισμού. Για να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα περιστρέφουμε το τρίγωνο, με άξονα περιστροφής το διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$. Δίχως βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η πλευρά AB βρίσκεται πάνω στον άξονα y. Επομένως, για τις κορυφές του τριγώνου ισχύουν:

$$A = [0\ 0\ 0]^T \tag{6.40}$$

$$B = [0\ y_B\ 0]^T \tag{6.41}$$

$$C = [x_C\ y_C\ 0]^T \tag{6.42}$$

$$y_B,\ x_C,\ y_C > 0 \tag{6.43}$$

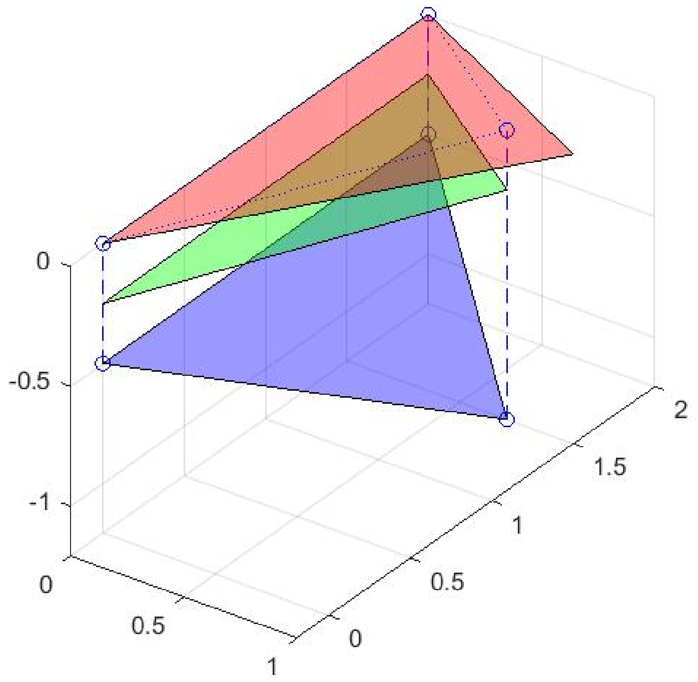


Σχήμα 6.5: *Αρχική θέση τριγώνου*

Η θέση του σημείου P μετά την περιστροφή κατά γωνία ∂ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\partial & 0 & s_\partial \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\partial & 0 & c_\partial \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\partial \\ y_C \\ -s_\partial x_C \end{bmatrix} \tag{6.44}$$

Άρα η προβολή του περιστραμμένου τριγώνου στο επίπεδο xy έχει κορυφές A, B και $C' = [c_\partial x_C \; y_C \; 0]$. Ο παραπάνω μετασχηματισμός έχει νόημα για $0 \leq \partial \leq \frac{\pi}{2}$ λόγω συμμετρίας. Εφαρμόζοντας τον νόμο συνημιτόνων για το προβεβλημένο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABC}{}'$ παίρνουμε:



Σχήμα 6.6: *Αρχικό, περιστραμμένο και προβεβλημένο τρίγωνο*

$$\cos(\hat{A}) = \frac{(AC')^2 + (AB)^2 - (BC')^2}{2(AB)(AC')} = \frac{y_C}{\sqrt{c_\partial^2 x_C^2 + y_C^2}} \tag{6.45}$$

$$\frac{d(c_\partial^2 x_C^2 + y_C^2)}{d\partial} = -\sin(2\partial) x_C^2 \tag{6.46}$$

$$0 \leq \partial \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \partial \leq \pi \tag{6.47}$$

Από (6.45), (6.46) προκύπτει ότι

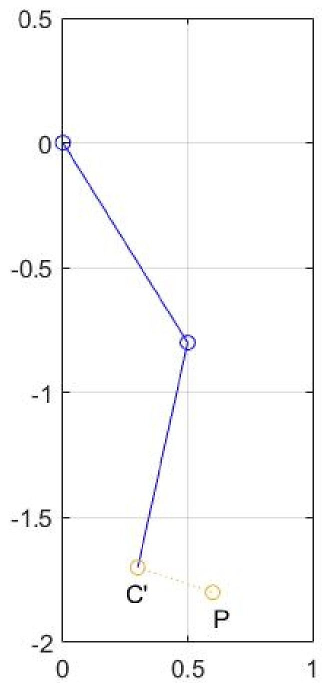
$$-\sin(2\partial)x_C^2 < 0 \Rightarrow c_\partial^2 x_C^2 + y_C^2 \searrow \Rightarrow \sqrt{c_\partial^2 x_C^2 + y_C^2} \searrow \tag{6.48}$$

Το $\cos(\hat{A})$ αυξάνεται και για $0 \leq \partial \leq \frac{\pi}{2}$ η γωνία $\hat{A}$ μειώνεται. Για $\partial = \frac{\pi}{2}$, $\hat{A} = 0$ επομένως η γωνία $\hat{A}$ κινείται στο διάστημα $[0, \; \hat{A}_0]$. Όταν η γωνία $B\hat{A}C'$ του προβεβλημένου τριγώνου είναι μικρότερη από -ή ίση με- τη γωνία μεταξύ των δακτύλων μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διαδικασία που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα. Μετά την εύρεση λύσης για το προβεβλημένο τρίγωνο τα δάκτυλα ακουμπάνε στα σημεία A, B και $C\,'$. Αν το δάκτυλο που ακουμπάει στο $C\,'$ έχει τη βάση του στο σημείο F τότε για να υπάρχει λύση θα πρέπει $|P| \leq l_1 + l_2$που σημαίνει ότι στο για το συγκεκριμένο δάκτυλο, στο frame του, θα πρέπει να υπάρχουν ϕ_1, ϕ_2 τέτοια ώστε:

$$l_1 c_{\phi_1} + l_2 c_{\phi_{1_2}} = P_x \tag{6.49}$$

$$l_1 s_{\phi_1} + l_2 s_{\phi_{1_2}} = P_y \tag{6.50}$$

Επομένως, κάθε τριπλέτα σημείων μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με μια γωνία



Σχήμα 6.7: *Θέσεις σημείων στο frame του δακτύλου*

θ η οποία ικανοποιεί τους παραπάνω περιορισμούς για να δώσει ένα αρχικό σημείο για τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης. Μετά την τοποθέτηση του χεριού με τέτοιο τρόπο ώστε να πιάνει το προβεβλημένο τρίγωνο το επίπεδο της παλάμης βρίσκεται παράλληλα στο αρχικό επίπεδο. Επομένως, τα επίπεδα πάνω στα οποία μπορούν να κινηθούν τα δάκτυλα είναι κάθετα στο αρχικό επίπεδο και διέρχονται από τα σημεία προβολής του περιστραμμένου τριγώνου. Κατ' επέκταση συμπεραίνουμε ότι διέρχονται και από τις κορυφές του περιστραμμένου τριγώνου.

6.4 Διαισθητική Βελτιστοποίηση

Η ανάλυση της προηγούμενης ενότητας επιτρέπει την ανάπτυξη ενός πιο «διαισθητικού» αλγορίθμου βελτιστοποίησης τύπου min-min. Από τη στιγμή που για οποιαδήποτε 3 σημεία υπάρχει λύση γίνεται να πραγματοποιηθεί βελτιστοποίηση του pose του χεριού για δεδομένα σημεία επαφής. Έστω minimize(C, $\vec{x_0}$) ο αλγόριθμος που ελαχιστοποιεί μια συγκεκριμένη συνάρτηση C με αρχικό σημείο το $\vec{x_0}$. Τότε η συνολική συνάρτηση προς βελτιστοποίηση γράφεται:

Αλγοριθμος 6.1: *PoseOptimization*

$\vec{q},\ \vec{p} \leftarrow InverseKinematics(\phi, \partial)$
$\vec{x}_0 \leftarrow [\vec{q}^T,\ \vec{p}^T]^T$
$\vec{x}_{sol}, f_{val} \leftarrow minimize(PoseCost, \vec{x}_0)$
return $[\vec{x}_{sol}, f_{val}]^T$

Αλγοριθμος 6.2: *Min-Min Optimization*

$\vec{x}_0 \leftarrow [\phi_0, \partial_0]^T$
$\vec{x}_{sol}, f_{val} \leftarrow minimize(PoseOptimization[1], \vec{x}_0)$
return $[\vec{x}_{sol}, f_{val}]^T$

Οι παραπάνω αλγόριθμοι περιλαμβάνονται για λόγους πληρότητας και διαισθητικής αντίληψης των ιδιοτήτων του προβλήματος, αλλά δεν είναι αποδοτικοί από άποψη χρόνου και υπολογιστικών πόρων.

Κεφάλαιο 7

Σύνθεση Ρομποτικής Λαβής και Συνολικός Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης

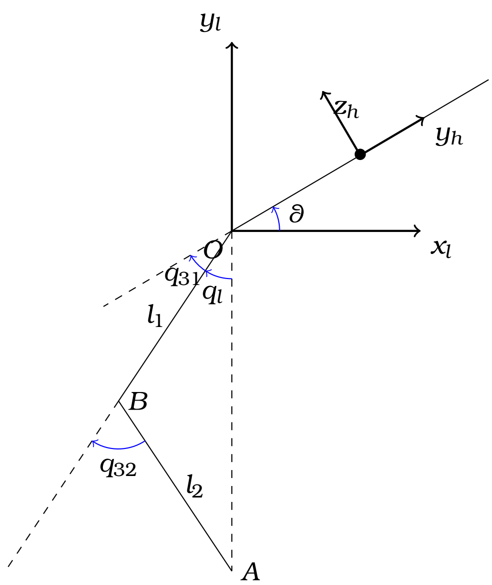
Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με τον προσδιορισμό του ελάχιστου αριθμού μεταβλητών βελτιστοποίησης που απαιτούνται για τη λύση του προβλήματος.

7.1 Προσδιορισμός Αλγορίθμου

Αρχικά υποθέτουμε ότι είναι γνωστές οι γωνίες του άξονα περιστροφής της βάσης (γωνία q_{31}) του «αντίχειρα». Αν ϑ_z και ϕ_z οι παραπάνω γωνίες τότε ο άξονας περιστροφής γράφεται

$$z_l = [c_{\vartheta_z} s_{\phi_z} \; s_{\vartheta_z} s_{\phi_z} \; c_{\phi_z}]^T \tag{7.1}$$

Θα δουλέψουμε στο τοπικό frame του ¨αντίχειρα¨.



Σχήμα 7.1: *Χέρι σχεδιασμένο στο τοπικό frame του αντίχειρα*

Θεωρούμε επίσης γνωστή τη θέση βάσης του αντίχειρα καθώς και τα σημεία επαφής τα οποία υπολογίζουμε με τη μεθοδολογία της προηγούμενης ενότητας. Αρχικά υπολογίζουμε τις γωνίες q_{32} και q_l ως εξής:

$$x_{abs} = |\overrightarrow{p_t} - thumbPosition| \tag{7.2}$$

$$q_{32} = -\cos^{-1}\left(\frac{x_{abs}^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right) \tag{7.3}$$

$$q_l = \cos^{-1}\left(\frac{x_{abs}(l_1 + l_2\cos(q_{32}))}{x_{abs}^2}\right) \tag{7.4}$$

όπου $\overrightarrow{p_t}$ η θέση επαφής του αντίχειρα και *thumbPosition* η θέση της βάσης του. Το τοπικό frame x_l, y_l είναι:

$$\vec{y_l} = thumbPosition - \vec{p_t} \tag{7.5}$$

$$\vec{y_l} = \frac{\vec{y_l}}{|\vec{y_l}|} \tag{7.6}$$

$$\vec{x_l} = \vec{y_l} \times \vec{z_l} \tag{7.7}$$

Για να φέρουμε τα σημεία στο τοπικό frame που μας ενδιαφέρει υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό με χρήση των διανυσμάτων που υπολογίστηκαν παραπάνω.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} x_l & y_l & z_l & thumbPosition \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

Έτσι αν $\vec{p_r}$, $\vec{p_l}$, $\vec{p_t}$ τα αρχικά σημεία επαφής του δεξιού δακτύλου,
αριστερού δακτύλου και αντίχειρα αντίστοιχα, τα μετασχηματισμένα σημεία στο καινούριο σύστημα αναφοράς θα είναι

$$\begin{bmatrix} \vec{p'_r} & \vec{p'_l} & \vec{p'_t} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} \vec{p_r} & \vec{p_l} & \vec{p_t} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.9}$$

Θέτουμε

$$u_r = 2 \cdot (p'_{rz} - 1) \tag{7.10}$$

$$u_l = -2 \cdot (p'_{lz} + 1) \tag{7.11}$$

και

$$f_i = \frac{\sqrt{21}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}u_i + \frac{\sqrt{21}}{3} \tag{7.12}$$

Αν ισχύει ότι $p'_{lx} \neq \vec{0}$ τότε

$$c = \frac{p'_{lx} f_r - p'_{rx} f_l}{p'_{lx} p'_{ry} - p'_{rx} p'_{ly}} \tag{7.13}$$

Όταν $p'_{lx} = 0$ τότε

$$c = \frac{f_l}{p'_{ly}} \tag{7.14}$$

Έτσι καταλήγουμε ότι:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(c) \tag{7.15}$$

$$q_{31} = \vartheta - \frac{\pi}{2} + q_l \tag{7.16}$$

Αν $\vartheta = 0$ τότε θέτουμε

$$v_r = p'_{lx} \tag{7.17}$$

$$v_l = p'_{ly} \tag{7.18}$$

αλλιώς

$$v_r = \frac{-p'_{rx} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) f_r}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)} \tag{7.19}$$

$$v_l = \frac{-p'_{lx} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) f_l}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)} \tag{7.20}$$

Στη συνέχεια η αντίστροφη κινηματική για τις υπόλοιπες γωνίες λύνεται με τη μεθοδολογία που έχει περιγραφεί στο Κεφάλαιο 6.

Βλέπουμε ότι για τον πλήρη προσδιορισμό της διάταξης του χεριού χρειαζόμαστε το πολύ 10 μεταβλητές:

1. 2 για τον προσδιορισμό του άξονα περιστροφής του αντίχειρα
2. 3 για τη θέση της βάσης του αντίχειρα
3. 2 για τον προσδιορισμό του επιπέδου τομής
4. 3 γωνίες των σημείων επαφής πάνω στο επίπεδο αυτό

Κοιτάζοντας όμως την ανάλυση της προηγούμενης ενότητας για την ύπαρξη λύσης, βλέπουμε ότι όταν έχουμε υπολογίσει την αρχική λύση για ένα τρίγωνο (παλάμη παράλληλη στο επίπεδο του τριγώνου) έχουμε σαν πρώτη ελεύθερη μεταβλητή το ύψος της παλάμης. Στη συνέχεια όπως εξηγήσαμε, μπορούμε να παράγουμε οποιαδήποτε σχετική θέση μεταξύ της παλάμης και του τριγώνου απλά περιστρέφοντας το τρίγωνο. Επομένως, μετρώντας ξανά τις ελεύθερες μεταβλητές καταλήγουμε σε $5 + 1 + 3 = 9$. Γι' αυτό τον λόγο θα έπρεπε να μεταβάλλουμε ελαφρώς την παραπάνω προσέγγιση ώστε να χρησιμοποιεί τον ελάχιστο αριθμό μεταβλητών βελτιστοποίησης.

Εάν στην προηγούμενη ανάλυση θεωρήσουμε γνωστά τα σημεία επαφής των τριών δακτύλων, τις δύο γωνίες που ορίζουν τον άξονα περιστροφής του αντίχειρα, καθώς επίσης και την απόσταση από τη βάση του αντίχειρα μέχρι το σημείο επαφής του και τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα αυτό με το επίπεδο επαφής (κατά τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής του αντίχειρα) θα καταλήγαμε σε μια μέθοδο που χρησιμοποιεί 9 μεταβλητές. Όμως αυτό είναι πιο δύσκολο να γραφεί και δε θα το χρησιμοποιήσουμε στα πλαίσια αυτής της εργασίας.

Τελικά καταλήγουμε στην παρακάτω διαδικασία υπολογισμού του κόστους:

1. $\vec{x} \leftarrow [a_1, a_2, \phi_z, \vartheta_z, \phi_1, \phi_2, \phi_3, p_x, p_y, p_z]^T$ όπου a_1, a_2 οι γωνίες του διανύσματος που είναι κάθετο στο επίπεδο τομής, ϕ_z, ϑ_z οι γωνίες του άξονα περιστροφής του αντίχειρα, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 οι γωνίες των σημείων επαφής και p_x, p_y, p_z οι συντεταγμένες της βάσης του αντίχειρα.

2. Υπολόγισε τους άξονες k_x, k_y της έλλειψης που σχηματίζεται.

3. Υπολόγισε τα σημεία επαφής από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{f1} &= [k_x \cdot \cos(\phi_1), k_y \cdot \sin(\phi_1), 0]^T \\
\mathbf{p}_{f2} &= [k_x \cdot \cos(\phi_2), k_y \cdot \sin(\phi_2), 0]^T \\
\mathbf{p}_{f3} &= [k_x \cdot \cos(\phi_3), k_y \cdot \sin(\phi_3), 0]^T
\end{aligned}$$

   Θεωρούμε ότι f_3 είναι ο αντίχειρας.

4. Μετασχημάτισε τα σημεία ώστε να είναι εκφρασμένα στο παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων μέσω του πίνακα στροφής (2.16).

5. Υπολόγισε τα u_r, u_l, v_r, v_l μέσω των εξισώσεων (7.2) - (7.20).

6. Υπολόγισε τις γωνίες των αρθρώσεων από τις σχέσεις (6.34) - (6.39).

7. Υπολόγισε την ιακωβιανή του χεριού $\mathbf{J_h}$ και τον πίνακα λαβής $\mathbf{G}$.

8. Υπολόγισε τα κριτήρια $\vec{\tau}^T\vec{\tau}$ και $\frac{\sigma_{max}(\mathbf{J})}{\sigma_{min}(\mathbf{J})}$

9. Σχημάτισε το άθροισμα $\xi_1\vec{\tau}^T\vec{\tau} + \xi_2\frac{\sigma_{max}(\mathbf{J})}{\sigma_{min}(\mathbf{J})}$, όπου ξ_1, ξ_2 θετικοί πραγματικοί αριθμοί (βλ. *Pareto Optimality* [39]). Η επιλογή των ξ_1, ξ_2 μπορεί να γίνει πειραματικά ή με κάποιον άλλον τρόπο.

Στη συνέχεια, αφού έχουν υπολογιστεί τα κριτήρια, χρησιμοποιούμε διαδοχικό τετραγωνικό προγραμματισμό για να υπολογίσουμε τα στάσιμα σημεία. Σημειώνουμε ότι αφού έχουμε δείξει αναλυτικό τρόπο εύρεσης *feasible* αρχικού σημείου, η χρήση ενός *infeasible* αλγορίθμου όπως ο διαδοχικός τετραγωνικός προγραμματισμός δεν είναι απαραίτητη. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν και πιο απλοί gradient-based αλγόριθμοι αλλά σε αυτή την εργασία η επιλογή έγινε λόγω της ευρωστίας του συγκεκριμένου αλγορίθμου.

7.2 Ιακωβιανή Πλήρους Βαθμού

Εάν υποθέσουμε ότι τα δάχτυλα του ρομποτικού χεριού διαθέτουν 3 βαθμούς ελευθερίας - μια επιπλέον γωνία κάθετη στο επίπεδο της παλάμης τότε η ιακωβιανή του χεριού είναι ο 9×9 πίνακας που υπολογίζεται από τις εξισώσεις (5.29)−(5.32). Για αναφορά ξαναγράφουμε τον τύπο της ιακωβιανής του δακτύλου i, $\mathbf{J}_i$ παρακάτω.

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} -c_3 \cdot (l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & -c_3 l_2 s_{12} & -s_3 \cdot (l_1 c_1 + l_2 \cdot c_{12}) \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} & 0 \\ s_3 \cdot (l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & s_3 l_2 s_{12} & -c_3 \cdot (l_1 c_1 + l_2 \cdot c_{12}) \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

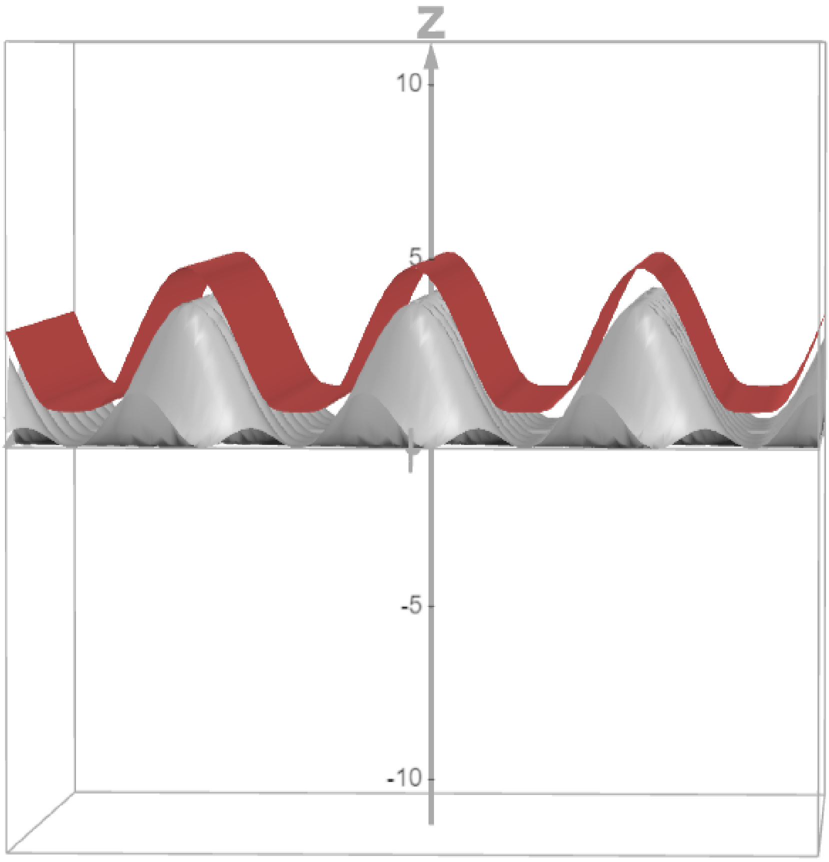
Οι ιδιάζουσες τιμές κ_i του πίνακα αυτού δίνονται από τις:

$$\kappa_1^2 = \frac{l_1^2}{2} + l_1 l_2 c_2 + l_2^2 - \frac{\sqrt{\left(l_1^2 + 2 l_1 l_2 c_2 + 2 l_2^2\right)^2 - 4 l_1^2 l_2^2 s_2^2}}{2} \tag{7.22}$$

$$\kappa_2^2 = \frac{l_1^2}{2} + l_1 l_2 c_2 + l_2^2 + \frac{\sqrt{\left(l_1^2 + 2 l_1 l_2 c_2 + 2 l_2^2\right)^2 - 4 l_1^2 l_2^2 s_2^2}}{2} \tag{7.23}$$

$$\kappa_3^2 = (l_1 c_1 + l_2 c_{12})^2 \tag{7.24}$$

Η σχέση των γραφικών παραστάσεων των κ_2^2 και κ_3^2 φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Σχήμα 7.2: *Τετράγωνα ιδιαζουσών τιμών κ_2^2 (κόκκινο) και κ_3^2 (γκρι)*

Όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 5 δύο από τις ιδιάζουσες τιμές μηδενίζονται. Εάν προσπαθήσουμε να ελαχιστοποιήσουμε τις ροπές στις αρθρώσεις τότε από την εξίσωση (2.26) προκύπτει ότι ξανά το unconstrained global optimum είναι ίσο με 0 και προκύπτει στα σημεία υποβιβασμού τάξης του πίνακα.

Θα δείξουμε μια σύνδεση μεταξύ των ιδιαζόντων διανυσμάτων των πινάκων $\mathbf{G}$ και $\mathbf{J_h}$. Έστω ότι το διάνυσμα δυνάμεων στις επαφές $\vec{f_c}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbf{J_h}\mathbf{J_h}^T$ και αντιστοιχεί στην ελάχιστη ιδιοτιμή του. Τότε επειδή ο πίνακας $\mathbf{J_h}\mathbf{J_h}^T$ είναι block-diagonal το ιδιοδιάνυσμα $\vec{f_c}$ θα πρέπει να αποτελείται από 3 ιδιοδιανύσματα των επιμέρους blocks: έστω $\vec{f_{c1}}$, $\vec{f_{c2}}$, $\vec{f_{c3}}$. Επίσης, επειδή τα blocks $\mathbf{J_{hi}}$ ισούνται με $\mathbf{J}_i\mathbf{R}_i$ όπου $\mathbf{R_i}$ πίνακας στροφής τότε καταλαβαίνουμε ότι το διάνυσμα

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{R}_2 & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{f_{c1}} \\ \vec{f_{c2}} \\ \vec{f_{c3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1\vec{f_{c1}} \\ \mathbf{R}_2\vec{f_{c2}} \\ \mathbf{R}_3\vec{f_{c3}} \end{bmatrix} \tag{7.25}$$

ελαχιστοποιεί την τετραγωνική μορφή

$$\vec{v}^T \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1\mathbf{J}_1^T & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{J}_2\mathbf{J}_2^T & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{J}_3\mathbf{J}_3^T \end{bmatrix} \vec{v} \tag{7.26}$$

Για να πετύχουμε το ελάχιστο δυνατό μέτρο ροπής θα έπρεπε ιδανικά να πετύχουμε και ελάχιστο μέτρο του διανύσματος $\vec{f_c}$ πέραν από την ελαχιστοποίηση των singular values του πίνακα $\mathbf{J}_h$. Υποθέτουμε τώρα, χωρίς βλάβη της γενικότητας στην περίπτωση μηδενικής εξωτερικής ροπής, ότι επιθυμούμε να ασκήσουμε στο αντικείμενο μια δύναμη κατά τη διεύθυνση του άξονα x. Η δράση τότε θα έχει τη μορφή $[a\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$. Χωρίς περιορισμούς, τα δάκτυλα θα τοποθετηθούν στο ίδιο σημείο επαφής, κατά τη διεύθυνση του άξονα x, ώστε να σπρώξουν όλα μαζί προς την ίδια κατεύθυνση πετυχαίνοντας ελάχιστο μέτρο $\vec{f_c}$. Επομένως, θα έχουμε ότι $\overrightarrow{f_{c1}} = \overrightarrow{f_{c2}} = \overrightarrow{f_{c3}}$ και αντίστοιχα $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}$. Επομένως, από την ιδιότητα του ιδιοδυανύσματος θα έχουμε ότι:

$$\operatorname{diag}\{\mathbf{R}\}^T \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1\mathbf{J}_1^T\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{J}_2\mathbf{J}_2^T & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{J}_3\mathbf{J}_3^T \end{bmatrix} \cdot \operatorname{diag}\{\mathbf{R}\}\vec{f_c} = \lambda\vec{f_c} \Leftrightarrow \tag{7.27}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1\mathbf{J}_1^T & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{J}_2\mathbf{J}_2^T & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{J}_3\mathbf{J}_3^T \end{bmatrix} \cdot \operatorname{diag}\{\mathbf{R}\}\vec{f_c} = \lambda \cdot \operatorname{diag}\{\mathbf{R}\}\vec{f_c} \Leftrightarrow \tag{7.28}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1\mathbf{J}_1^T & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{J}_2\mathbf{J}_2^T & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{J}_3\mathbf{J}_3^T \end{bmatrix} \vec{v} = \lambda\vec{v} \tag{7.29}$$

Άρα το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1\mathbf{J}_1^T & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{J}_2\mathbf{J}_2^T & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{J}_3\mathbf{J}_3^T \end{bmatrix}$$

Θα έπρεπε να περιμένουμε λοιπόν ότι εάν χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο αυτό από μόνο του η λύση που θα προκύψει θα είναι κοντά στα όρια των περιορισμών μας (force-closure και όρια κίνησης αρθρώσεων) κάτι το οποίο δεν είναι ιδανικό. Χρησιμοποιώντας ένα έξτρα κριτήριο όπως το condition number της ιακωβιανής του χεριού ουσιαστικά κάνουμε τους περιορισμούς μας πιο αυστηρούς. Συμπερασματικά, μια λογική προσέγγιση του προβλήματος θα ήταν να επιλέγουμε τα σημεία επαφής με διαφορετικά κριτήριά και στη συνέχεια να κάνουμε βελτιστοποίηση της πόζας για τα υπολογισμένα σημεία επαφής. Στο κεφάλαιο 8 (Αποτελέσματα) θα δείξουμε την ισοδύναμη συμπεριφορά κριτηρίων υπολογισμού των σημείων επαφής.

Ο τελικός αλγόριθμος που προτείνουμε σε αυτήν την εργασία λύνει διαδοχικά δύο προβλήματα βελτιστοποίησης:

1. Αν

$$\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

   και $\vec{\tau}$ η επιθυμητή ροπή τότε

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad & Q_{\triangle} = \vec{\tau}^T \mathbf{D} \vec{\tau} \\ \textit{subject to}: \quad & \left| \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i \right|^2 \leq \delta \end{aligned} \tag{7.30}$$

2. • Ελαχιστοποίηση ροπών:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad & Q_T(\mathbf{x}) \\ \textit{subject to}: \quad & h_T(\mathbf{x}) = 0 \\ & g_T(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{7.31}$$

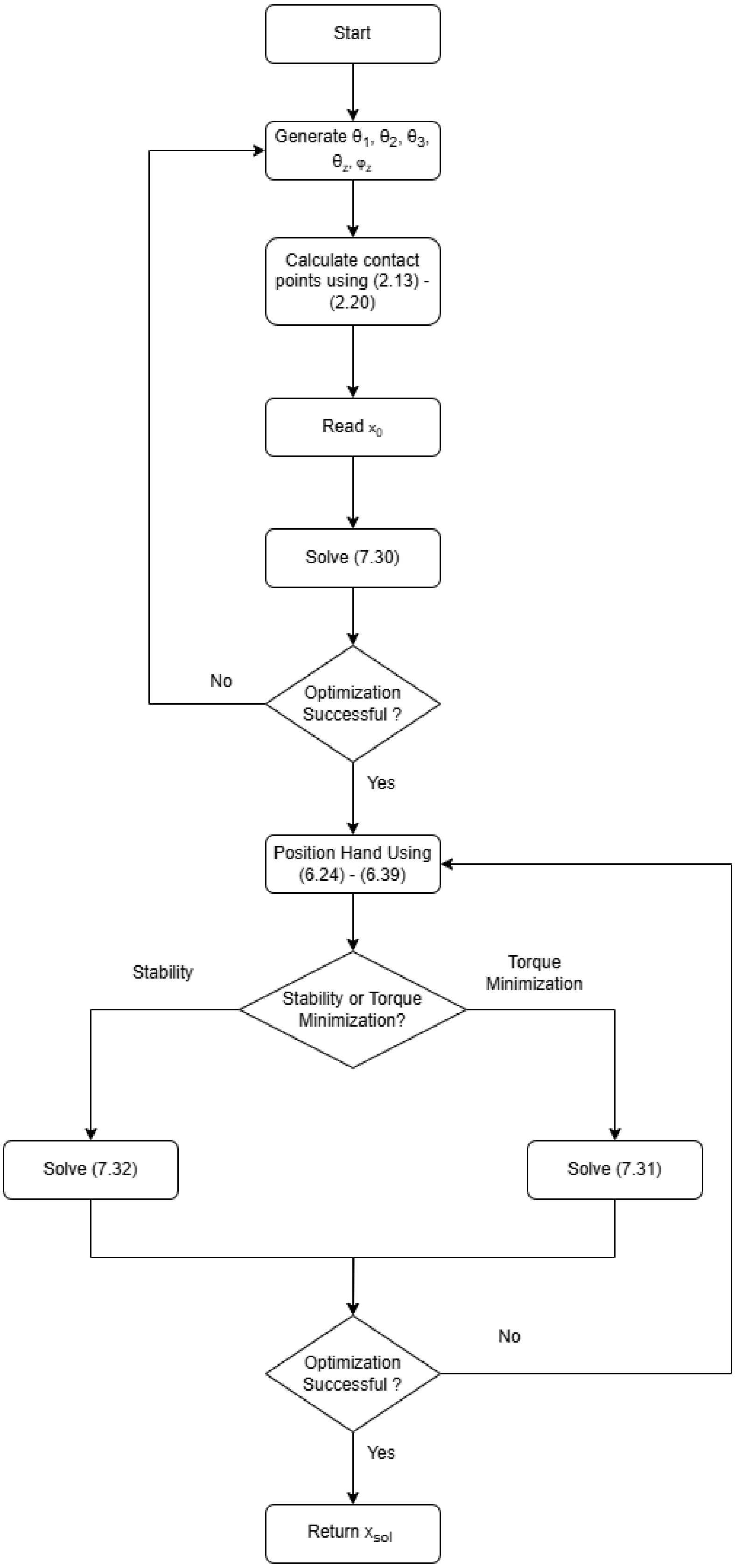
   όπου $h_T(\mathbf{x})$ οι ισοτικοί περιορισμοί που προκύπτουν από το χέρι σαν στερεό αντικείμενο και την ύπαρξη λύσης στις κινηματικές εξισώσεις των δακτύλων για δεδομένα σημεία επαφής και $g_T(\mathbf{x})$ οι ανισοτικοί περιορισμοί που σχετίζονται με την απόσταση από ιδιόμορφες διατάξεις του χεριού (π.χ. $q_{i2} \leq \epsilon$).

   • Ευστάθεια - Αποφυγή ιδιόμορφων διατάξεων:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad & \frac{s_{max}(\mathbf{J_h}(\mathbf{x}))}{s_{min}(\mathbf{J_h}(\mathbf{x}))} \\ \textit{subject to}: \quad & h_J(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \tag{7.32}$$

   όπου $h_J(\mathbf{x})$ οι ισοτικοί περιορισμοί που προκύπτουν από το χέρι σαν στερεό αντικείμενο και την ύπαρξη λύσης στις κινηματικές εξισώσεις των δακτύλων για δεδομένα σημεία επαφής.

Το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Σχήμα 7.3: *Συνολικός προτεινόμενος αλγόριθμος*

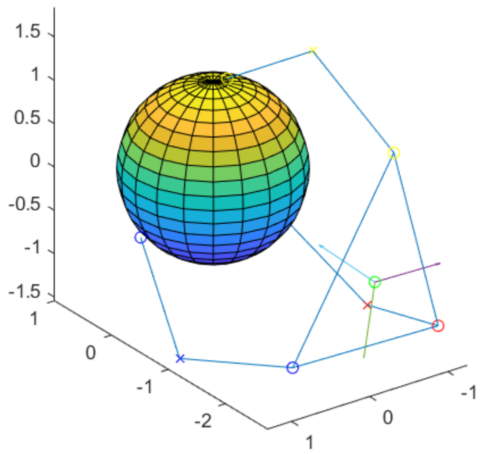
Κεφάλαιο 8

Πειράματα

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε και θα εξηγήσουμε τα πειραματικά αποτελέσματα της εργασίας.

8.1 Αποτελέσματα Προσομοίωσης

Για τη διεξαγωγή πειραμάτων, ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε αρχικά (για μια πρώτη επιβεβαίωση των θεωρητικών αποτελεσμάτων του Κεφαλαίου 7) βασίστηκε στις εξισώσεις (7.1)-(7.20). Η βελτιστοποίηση του κριτηρίου έγινε με sequential quadratic programming. Για τις εικόνες χρησιμοποιήσαμε σφαίρες σαν αντικείμενα για μεγαλύτερη ευκολία στην κατανόηση των θέσεων των σημείων επαφής και των διευθύνσεων δυνάμεων και ροπών.

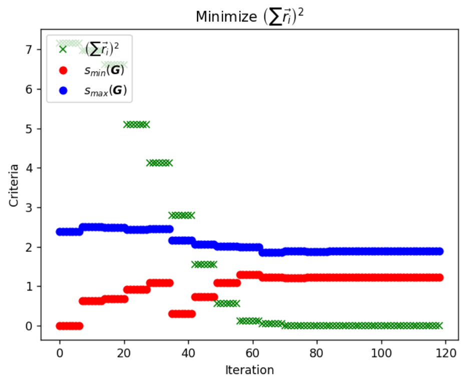


Σχήμα 8.1: *Επιθυμητή ροπή:* $\overline{\tau} = [0\ 1\ 0]^T$

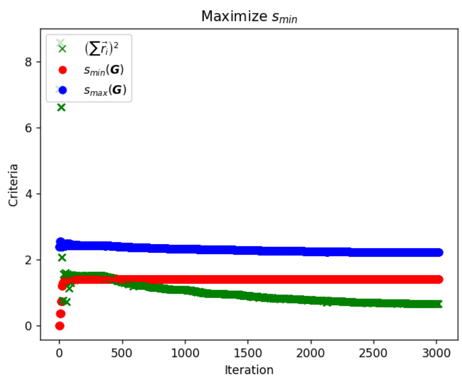
Οι παραπάνω εικόνα αφορά το χέρι το οποίο στα δάκτυλα έχει από 2 βαθμούς ελευθερίας. Βλέπουμε ότι το επίπεδο επαφών δεν είναι κάθετο στην επιθυμητή ροπή. Αυτό προκύπτει από τη μειωμένη ικανότητα κίνησης των δακτύλων. Προκειμένου να στραφεί το αντικείμενο η ο άξονας περιστροφής των αρθρώσεων των δακτύλων πρέπει να είναι παράλληλος στη ροπή και άρα το επίπεδο του εκάστοτε δακτύλου «αρκετά» κάθετο σε αυτήν. Η λύση που προκύπτει μέσω της χρήσης 2 κριτηρίων είναι μακριά από ιδιόμορφες διατάξεις και άρα μακριά από το ολικό ελάχιστο του Q_T

8.2 Σύγκριση γενικής συμπεριφοράς κριτηρίων

Σε αυτήν την υποενότητα θα συγκρίνουμε τη συμπεριφορά κριτηρίων που αφορούν την επιλογή σημείων επαφής. Οι μέθοδοι προς σύγκριση είναι η μεγιστοποίηση της ελάχιστης ιδιάζουσας τιμής του πίνακα λαβής $\mathbf{G}$, $s_{min}(\mathbf{G})$ και το κριτήριο $\left|\sum_{i=1}^{3}\vec{r}_i\right|^2$ που προτάθηκε στην εργασία αυτή. Αρχικά προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε το τετράγωνο του μέτρου του αθροίσματος των διανυσμάτων επαφής και στη συνέχεια προσπαθούμε να μεγιστοποιήσουμε την ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή του πίνακα $\mathbf{G}$. Στις παρακάτω 3 εικόνες παρουσιάζεται η συμπεριφορά των κριτηρίων σε ένα ελλειψοειδές αντικείμενο με ακτίνες $\mathcal{R}_x = 1,\ \mathcal{R}_y = 2\ \mathcal{R}_z = 1$ καθώς και η θέση των σημείων επαφής που προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση του πρώτου.

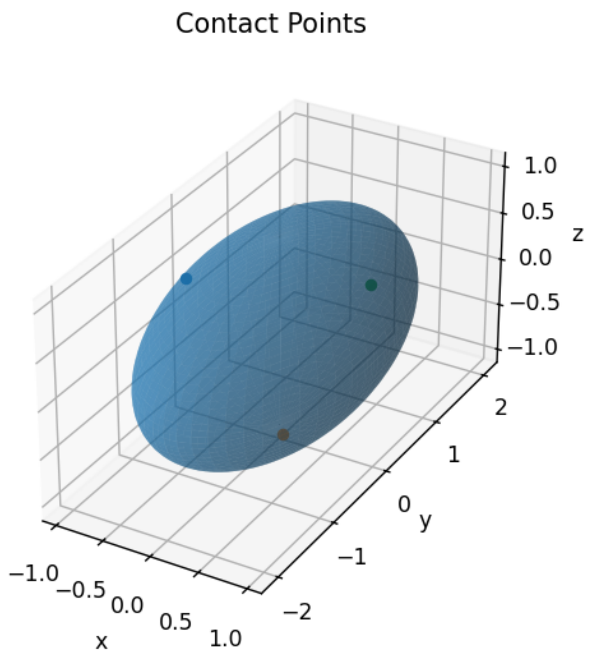


(α′) Ελαχιστοποίηση $\left|\sum_{i=1}^{3}\vec{r}_i\right|^2$



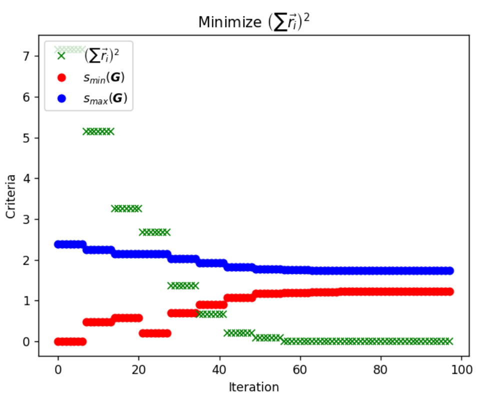
(β′) Μεγιστοποίηση $s_{min}(\mathbf{G})$ (Q_{MSV})

Σχήμα 8.2: *Συμπεριφορά Κριτηρίων σε Ελλειψοειδές*

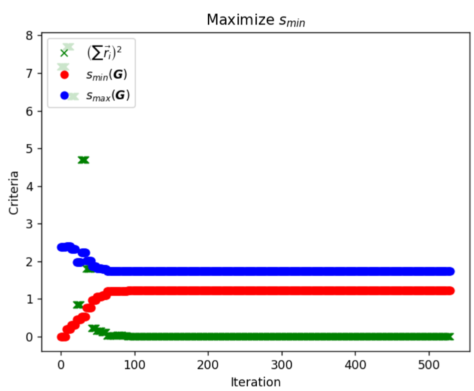


Σχήμα 8.3: *Σημεία επαφής στο ελλειψοειδές μετά την ελαχιστοποίηση του* $\left|\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i\right|^2$

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ίδιας διαδικασίας για σφαίρα ακτίνας $\mathcal{R} = 1$.

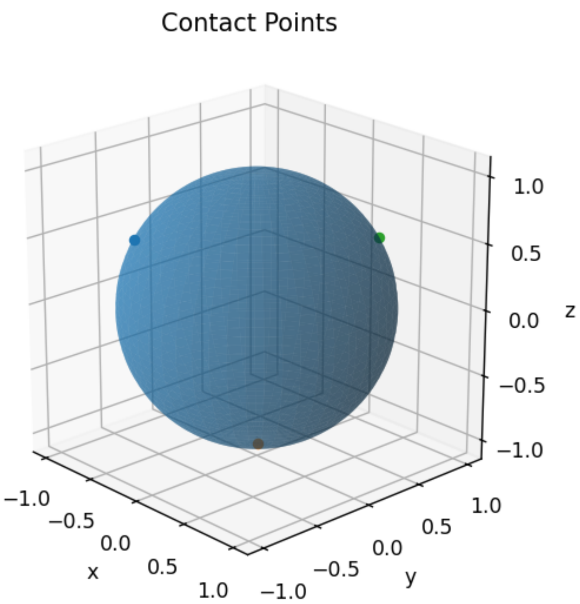


(α΄) *Ελαχιστοποίηση* $\left|\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i\right|^2$



(β΄) *Μεγιστοποίηση* $s_{min}(\mathbf{G})$ $(\mathcal{Q}_{MSV})$

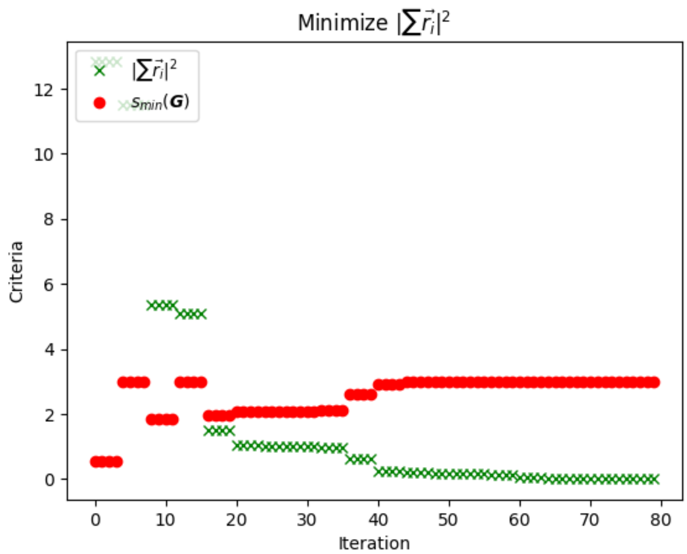
Σχήμα 8.4: *Συμπεριφορά Κριτηρίων σε Ελλειψοειδές*



Σχήμα 8.5: *Σημεία επαφής στο ελλειψοειδές μετά την ελαχιστοποίηση του* $\left|\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i\right|^2$

Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις τα κριτήρια παρουσιάζουν εν γένει την ίδια συμπεριφορά. Στην περίπτωση της σφαίρας παρατηρούμε ότι και οι δύο μέθοδοι πετυχαίνουν **ακριβώς** το ίδιο αποτέλεσμα. Αυτό είναι λογικό αφού το μέτρο της ελάχιστης ιδιάζουσας τιμής του πίνακα λαβής εξαρτάται από το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από τις επαφές. Για τον λόγο αυτό θα αναλύσουμε τη συμπεριφορά των κριτηρίων στην δισδιάστατη περίπτωση (ελλείψεις, κύκλοι), ώστε να καταλήξουμε σε ένα συνολικό συμπέρασμα.

Η παρακάτω προσομοίωση έγινε σε έλλειψη ακτινών $r_x = 1$ και $r_y = 2$ και απεικονίζει την πορεία της ελάχιστης ιδιάζουσας τιμής του πίνακα λαβής κατά την ελαχιστοποίηση του $\left|\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i\right|^2$.



Σχήμα 8.6: *Συμπεριφορά κριτηρίων στην έλλειψη*

Μεγιστοποίηση Επιφάνειας Τριγώνου Έστω ότι θέλουμε να τοποθετήσουμε τα δάκτυλα σε μια έλλειψη με ακτίνες a_1 και a_2. Τότε για $i = 1, 2, 3$ οι συντεταγμένες των σημείων επαφής θα είναι

$$\begin{aligned} x_i &= a_1 \cos(\vartheta_i) \\ y_i &= a_2 \sin(\vartheta_i) \end{aligned} \tag{8.1}$$

Θέτοντας τον περιορισμό $\vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3} = 0$ και αντικαθιστώντας από την παραπάνω σχέση παίρνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{3} \cos(\vartheta_i) = 0 \tag{8.2}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sin(\vartheta_i) = 0 \tag{8.3}$$

Το πρόβλημα είναι συμμετρικό οπότε μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\vartheta_3 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Από τις σχέσεις (8.2), (8.3) εάν μεταφέρουμε το ημίτονο και συνημίτονο ϑ_3 στο άλλο μέλος, τετραγωνίσουμε και προσθέσουμε τις σχέσεις παίρνουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} \sin(\vartheta_1)\sin(\vartheta_2) + \cos(\vartheta_1)\cos(\vartheta_2) = -\tfrac{1}{2} &\Leftrightarrow \\ \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) = -\tfrac{1}{2} &\Leftrightarrow \\ \vartheta_1 - \vartheta_2 \in \left\{\pm\tfrac{2\pi}{3}, \pm\tfrac{4\pi}{3}\right\} & \end{aligned} \tag{8.4}$$

Μία από τις δύο γωνίες ϑ_1 και ϑ_2 θα βρίσκεται στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ή στο $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

1. Έστω ότι $\vartheta_1 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Ισχύει ότι $\vartheta_2 - \vartheta_3 = \pm\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

   (α΄) Αν $\vartheta_2 \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ τότε $\vartheta_2 - \vartheta_3 \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ και άρα $\vartheta_2 - \vartheta_3 = \frac{2\pi}{3}$ ή $\vartheta_2 - \vartheta_3 = \frac{4\pi}{3}$. Όμως $\vartheta_1 - \vartheta_2 \in [-\pi, 0] \Rightarrow \vartheta_1 - \vartheta_2 = -\frac{2\pi}{3}$. Αν όμως $\vartheta_2 - \vartheta_3 = \frac{2\pi}{3}$ τότε προκύπτει ότι $\vartheta_1 = \vartheta_3$, λύση η οποία απορρίπτεται. Επομένως, έχουμε ότι

   $$\vartheta_2 - \vartheta_3 = \frac{4\pi}{3} \tag{8.5}$$

   (β΄) Αν $\vartheta_2 \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ τότε $\vartheta_2 - \vartheta_3 \in [\pi, 2\pi]$ και άρα

   $$\vartheta_2 - \vartheta_3 = \frac{4\pi}{3}$$

2. Έστω ότι $\vartheta_1 \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Επειδή το πρόβλημα έχει συμμετρία καταλήγουμε στις ίδιες ακριβώς περιπτώσεις με αλλαγμένους τους δείκτες $i = 1$ και $i = 2$.

Η επιφάνεια του τριγώνου που σχηματίζεται από τις επαφές ισούται με

$$\frac{1}{2}|(\vec{r_2} - \vec{r_1}) \times (\vec{r_3} - \vec{r_1})| \tag{8.6}$$

Η μη μηδενική z συντεταγμένη του διανύσματος που προκύπτει από το εξωτερικό γινόμενο ισούται με

$$z = a_1 a_2 \left[\sin(\vartheta_3 - \vartheta_1) + \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)\right] \tag{8.7}$$

Επομένως το εμβαδό A θα ισούται με $\frac{1}{2}z^2$. Για να υπολογίσουμε το μέγιστο παραγωγίζουμε την έκφραση ως προς τις τρεις μεταβλητές και εξισώνουμε με το 0. Ως προς τη μεταβλητή ϑ_i η σχέση γράφεται

$$(\sin(\vartheta_3 - \vartheta_1) + \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3))\Big(\cos(\vartheta_i - \vartheta_j) - \cos(\vartheta_i - \vartheta_k)\Big) = 0 \qquad (8.8)$$

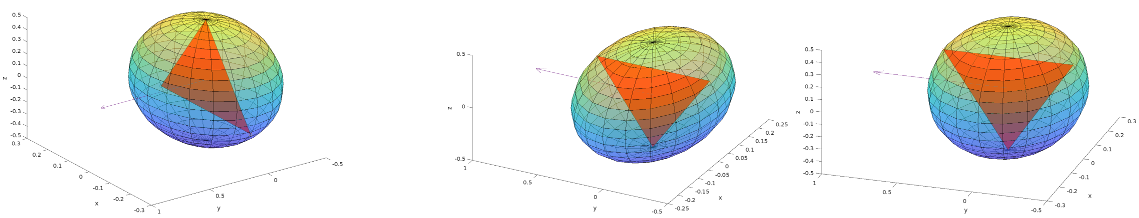
Το μέγιστο εμφανίζεται στο σημείο μηδενισμού της αφαίρεσης συνημιτόνων. Αντικαθιστώντας βλέπουμε ότι οι σχέσεις μεταξύ των γωνιών οι οποίες οδηγούν στην (8.5) μηδενίζουν τις αφαιρέσεις αυτές και δίνουν $A = \frac{27}{8}$. Όπως είδαμε στη δισδιάστατη περίπτωση τα κριτήρια μεγιστοποίησης επιφάνειας και $\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i = 0$ είναι ισοδύναμα. Επομένως, στην τρισδιάστατη περίπτωση μπορούμε να σκεφτούμε το κριτήριο $\left|\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i\right|^2$ σαν μια γενίκευση των παραπάνω κριτηρίων. Όταν αυτό ληφθεί σαν περιορισμός μας επιτρέπει να έχουμε ταυτόχρονα καλή, ευσταθή λαβή καθώς και ελευθερία επιλογής βέλτιστης θέσης ως προς τις επιθυμητές ροπές.

8.3 Σύγκριση κριτηρίων για δεδομένες επιθυμητές δράσεις

Στην υποενότητα αυτή θα συγκρίνουμε τις λύσεις που δίνουν τα κριτήρια $Q_{\triangle}$, Q_{MSV} και Q_{GII} όταν θέλουμε να ασκήσουμε συγκεκριμένες δυνάμεις και ροπές στο αντικείμενο. Θυμίζουμε ότι $Q_{\triangle}$ είναι το κριτήριο αυτής της εργασίας:

$$Q_{\triangle} = \vec{\tau}^T \left(\sum_{i=1}^{3} [r_i \times] [r_i \times]^T \right) \vec{\tau} \qquad (8.9)$$

σε συνδυασμό με τον περιορισμό $\left|\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i\right|^2 = 0$. Όταν θέλουμε να ασκήσουμε μια ροπή στο αντικείμενο η διαδικασία σύγκρισης είναι απλή καθώς ουσιαστικά αρκεί να συγκρίνουμε το μέτρο των εφαπτομενικών στην επιφάνεια του αντικειμένου δυνάμεων στις επαφές, υποθέτοντας ίσες κάθετες δυνάμεις στις επαφές. Τα κριτήρια Q_{MSV} και Q_{GII} δεν είναι σχεδιασμένα για να λάβουν υπόψη τους την επιθυμητή ροπή και η λύση τους θα προκύψει από τις αρχικές συνθήκες του αλγορίθμου βελτιστοποίησης. Η λύση που δίνει η ελαχιστοποίηση του κριτηρίου $Q_{\triangle}$, αντιθέτως, εξαρτάται από την ροπή που θέλουμε να ασκήσουμε στο αντικείμενο και μετατρέπει την αναζήτηση ευσταθών (εύρωστων) λαβών σε hard constraint του προβλήματος βελτιστοποίησης: $\left|\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i\right|^2 = 0$ (ή στον πιο χαλαρό και γενικό περιορισμό $\left|\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i\right|^2 < \epsilon$). Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης ήταν τα αναμενόμενα και φαίνονται στους πίνακες 8.1 και 8.2. Το κόστος το οποίο υπολογίζουμε είναι το μέτρο του διανύσματος δυνάμεων στις επαφές $\left|\vec{f}_c\right|$.



(α΄) $Q_{\triangle}$ (β΄) Q_{GII} (γ΄) Q_{MSV}

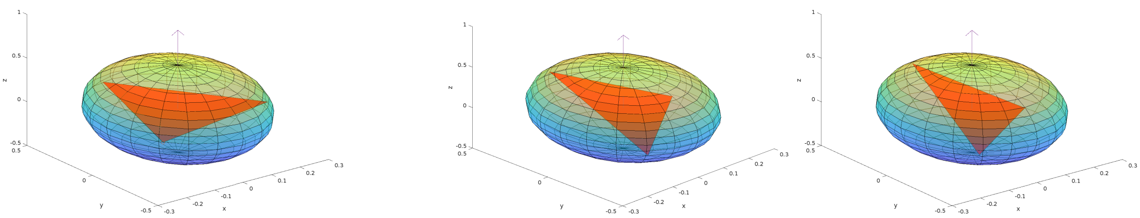
Σχήμα 8.7: *Λύσεις για επιθυμητή ροπή στην κατεύθυνση* $[0\ 1\ 0]^T$ *σε ελλειψοειδές*

Πίνακας 8.1: *Τετράγωνο μέτρου του διανύσματος δύναμης στις επαφές για δεδομένες ροπές*

$\mathcal{Q}_{\triangle}$	$\mathcal{Q}_{GII}$	$\mathcal{Q}_{MSV}$	$\bar{\tau}$	Αντικείμενο
2.1332	2.666	2.665	$[0\ 1\ 0]^T$	Ελλειψοειδές
2.1333	2.6667	2.6668	$[0\ 0\ 1]^T$	Ελλειψοειδές
1.3333	1.4620	1.4559	$[0\ 0\ 1]^T$	Σφαίρα
2.6667	4.8438	4.8785	$[1\ 1\ 0]^T$	Σφαίρα
1.3333	1.3336	1.3333	$[1\ 0\ 0]^T$	Ελλειψοειδές

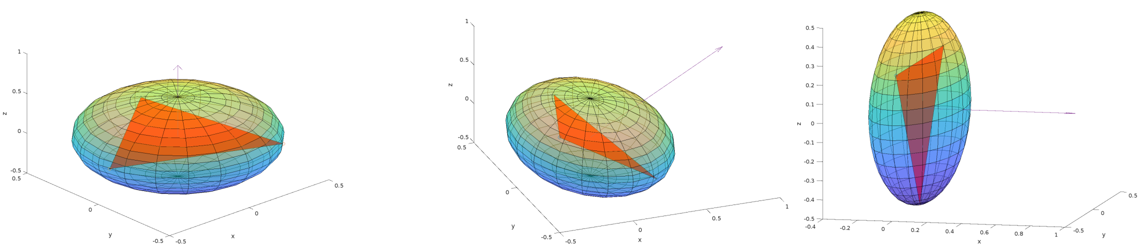
Πίνακας 8.2: *Μέσος όρος του τετραγώνου του μέτρου δύναμης στις επαφές για δεδομένες ροπές (20 επαναλήψεις)*

$\mathcal{Q}_{\triangle}$	$\mathcal{Q}_{GII}$	$\mathcal{Q}_{MSV}$	$\bar{\tau}$	Αντικείμενο
$\mathbf{1.4} \pm 0.29$	2.5 ± 0.32	2.45 ± 0.35	$[0\ 0\ 1]^T$	Σφαίρα (0.5)
$\mathbf{0.15} \pm 0.001$	0.27 ± 0.026	0.27 ± 0.027	$[0\ 0\ 1]^T$	Σφαίρα (1.5)
$\mathbf{0.54} \pm 0.03$	1.26 ± 0.36	1.2 ± 0.34	$[1\ 0\ 0]^T$	Ελλειψοειδές (0.5, 0.5, 1)
$\mathbf{0.06} \pm 0.004$	0.29 ± 0.55	0.07 ± 0.008	$[1\ 0\ 0]^T$	Ελλειψοειδές (1.5, 1.5, 3)



(α΄) $\mathcal{Q}_{\triangle}$ (β΄) $\mathcal{Q}_{GII}$ (γ΄) $\mathcal{Q}_{MSV}$

Σχήμα 8.8: *Λύσεις για επιθυμητή ροπή στην κατεύθυνση* $[0\ 0\ 1]^T$ *σε ελλειψοειδές*



(α΄) *Ροπή* $[0\ 0\ 1]^T$ *σε σφαίρα* (β΄) *Ροπή* $[1\ 0\ 1]^T$ *σε σφαίρα* (γ΄) *Ροπή* $[1\ 0\ 0]^T$ *σε ελλειψοειδές*

Σχήμα 8.9: *Λύσεις του κριτηρίου* $\mathcal{Q}_{\triangle}$ *για διαφορετικές ροπές*

Η σύγκριση των λύσεων όταν η επιθυμητή εργασία είναι άσκηση ή αντιστάθμιση εξωτερικής δύναμης είναι λίγο πιο πολύπλοκη καθώς εμπεριέχει αναγκαστικά τις εσωτερικές δυνάμεις ακινητοποίησης του αντικειμένου (δυνάμεις στον μηδενοχώρο του πίνακα $\mathbf{G}$) οι οποίες προκύπτουν από ένα διαφορετικό πρόβλημα βελτιστοποίησης (πρόβλημα κατανομής δύναμης - 9.1).

$$\begin{aligned} &\underset{\boldsymbol{\vartheta}}{\text{minimize}} \quad \max \left|\overrightarrow{f_{ci}}\right| \\ &\text{subject to: } 0.1 \leq \left|\overrightarrow{f_{ci}}\right| \leq 1, \ \sqrt{f_{ix}^2 + f_{iy}^2} \leq \mu \left|f_{iz}\right| \end{aligned} \tag{8.10}$$

όπου $\boldsymbol{\vartheta}$ οι γωνίες των σημείων επαφής σε πολικές συντεταγμένες, $\overrightarrow{f_{ci}}$ το διάνυσμα της i−οστής επαφής στο πλαίσιο αναφοράς του αντικειμένου, f_{ix}, f_{iy}, f_{iz} οι συντεταγμένες του και μ ο συντελεστής τριβής του αντικειμένου.

Κάποιοι ενδεικτικοί συντελεστές τριβής φαίνονται στην εικόνα 8.10 [40].

Material	Counter-face material	Dry contact static friction (μ)
Aluminum	Aluminum	1.10–1.35
Aluminum	Steel	0.61
Brake (composite)	Cast iron	0.40
Brass	Steel	0.50
Bronze	Cast iron	0.21
Copper	Steel	0.53
Diamond	Steel	0.10
Graphite	Steel	0.10
Polyethene	Steel	0.2
Polystyrene	Steel	0.30–0.35
PTFE (Teflon)	Steel	0.04
Epoxy resin	Steel	0.71
Cyanate ester resin	Steel	0.50
Bismaleimide resin	Steel	0.65

Σχήμα 8.10: *Ενδεικτικοί συντελεστές στατικής τριβής*

Γι' αυτό τον λόγο η σύγκριση των κριτηρίων έγινε με την παρακάτω μεθοδολογία:

1. Αρχικά λύσαμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας και τα τρία κριτήρια με αρχικές συνθήκες οι οποίες μας δίνουν «κοντινές» (φαινομενικά) λύσεις.

2. Στη συνέχεια για την κάθε λύση υπολογίσαμε το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι επίπεδο στο κάθε επιμέρους επίπεδο που σχηματίζεται από τις επαφές. Η αντιστάθμιση δύναμης θα είναι πιο δύσκολη όταν αυτή είναι στην κατεύθυνση του διανύσματος αυτού.

3. Τέλος, υπολογίσαμε την κατανομή δυνάμεων στις επαφές για διαφορετικά μήκη διανύσματος δύναμης και συντελεστές τριβής. Σαν αποτέλεσμα υπολογίστηκε ο μέσος όρος 50 προσωμοιώσεων του μεγίστου μέτρου δύναμης στα δάκτυλα.

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον πίνακα 8.3.

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να συμπεριλάβουμε και τα μέγιστα (κατά προσέγγιση) μήκη των δυνάμεων για τα οποία υπάρχει λύση στο πρόβλημα κατανομής δυνάμεων, όταν το κριτήριο που χρησιμοποιήσαμε ήταν το $Q_{\triangle}$ (Πίνακας 8.4).

Έστω ότι επιθυμούμε να ακινητοποιήσουμε το αντικείμενο. Προφανώς, όταν δεν αντισταθμίζουμε κάποια εξωτερική δράση, οι δυνάμεις στις επαφές θα έχουν διεύθυνση αντίθετη του διανύσματος στην εκάστοτε επαφή $\vec{r_i}$ και θα είναι ίσες μεταξύ τους όταν $\sum_{i=1}^{3} \vec{r_i} = \vec{0}$. Σε οποιαδήποτε άλλη θέση είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η δύναμη που απαιτείται για την ακινητοποίηση του αντικειμένου θα είναι μεγαλύτερη σε μέτρο.

Θεωρητικά λοιπόν, υποθέτοντας ότι το κριτήριο μας έχει λειτουργήσει τέλεια, περιμένουμε τα σημεία επαφής να σχηματίζουν ένα τρίγωνο το οποίο περιέχει το κέντρο του αντικειμένου. Στην περίπτωση αυτή, λόγω του περιορισμού που έχουμε επιβάλει, είναι εύκολο να

Πίνακας 8.3: *Μέγιστο μέτρο δύναμης σε επαφή κατά την αντιστάθμιση κάθετης δύναμης*

μ	Q_{Δ}	Q_{GII}	Q_{MSV}	$\left\|\overrightarrow{f_{ext}}\right\|$
0.65	0.2680	0.3870	0.3464	0.1
0.65	0.2881	0.3911	0.3734	0.2
0.65	0.3534	0.5696	0.5340	0.4
0.71	0.2260	0.3028	0.3080	0.1
0.71	0.2465	0.3785	0.3367	0.2
0.71	0.3094	0.4186	0.4740	0.4

Πίνακας 8.4: *Απώλεια ικανότητας αντιστάθμισης*

μ	$\left\|\overrightarrow{f_{ext}}\right\|^2$
0.65	0.8
0.71	0.9

διαπιστώσουμε ότι οι κάθετες στα $\vec{r_i}$ δυνάμεις στις επαφές θα είναι όλες ίσες με $\frac{1}{3}\overrightarrow{f_{ext}}$ και τα μέτρα δυνάμεων στη διεύθυνση των $\vec{r_i}$ στις επαφές θα είναι όλα ίσα. Επομένως στο σημείο που οριακά έχουμε ολίσθηση του αντικειμένου θα ισχύει ότι:

$$\frac{\left|\overrightarrow{f_{ext}}\right|^2}{9} = \mu^2 \left|f_z\right|^2 \Leftrightarrow \tag{8.11}$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{f_{ext}}\right|^2}{9\mu^2} = \left|f_z\right|^2 \tag{8.12}$$

Όμως στο σημείο απώλειας ικανότητας αντιστάθμισης θα ισχύει ότι:

$$\left|\vec{f_{ci}}\right| = 1 \overset{(8.10)}{\Longleftrightarrow} \tag{8.13}$$

$$\left|\overrightarrow{f_{ext}}\right|^2 = \frac{9\mu^2}{9\mu^2 + 1} \tag{8.14}$$

Η παραπάνω σχέση για $\mu = 0.65$ και $\mu = 0.71$ δίνει $\left|\overrightarrow{f_{ext}}\right|^2 = 0.791$ και $\left|\overrightarrow{f_{ext}}\right|^2 = 0.819$ τα οποία είναι πολύ κοντά στα πειραματικά αποτελέσματα.

Η σχέση που συνδέει τη συμπεριφορά των παραπάνω κριτηρίων βελτιστοποίησης (μεγεθών) γίνεται εμφανής μετά από μια σύντομη ανάλυση του πίνακα λαβής. Συγκεκριμένα, ο πίνακας $\mathbf{G}$ έχει πάντα μια «σταθερή» ιδιάζουσα τιμή ίση με $\sqrt{3}$ (η διεύθυνση του αντίστοιχου ιδιάζοντος διανύσματος εξαρτάται από τα $\vec{r_i}$) η οποία λειτουργεί σαν «σύνορο» τόσο για τις ελάχιστες όσο και για τις μέγιστες ιδιάζουσες τιμές του:

$$\max s_{\min}(\mathbf{G}) \leq \sqrt{3} \geq \min s_{\max}(\mathbf{G}) \tag{8.15}$$

Η μέθοδος που αναπτύχθηκε στην εργασία αυτή μετατρέπει ουσιαστικά το αλγεβρικό πρόβλημα ιδιοτιμών σε γεωμετρικό, καθώς υπάρχουν θέσεις όπου η ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή γίνεται ακριβώς ίση με 3 (*) και ότι αυτές διαθέτουν συγκεκριμένη φυσική (και μαθηματική (*)) σημασία. Για μια λίγο πιο εκτενή ανάλυση παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο Παράρτημα Β΄.

(*) βλ. Παράρτημα Β΄

Μέρος III

Επίλογος

Κεφάλαιο 9

Επίλογος

Στην ενότητα αυτή θα γίνει σύνοψη των αποτελεσμάτων της εργασίας καθώς και παρουσίαση πιθανών προεκτάσεων αυτής.

9.1 Σύνοψη Θεωρητικών Αποτελεσμάτων

1. Στην ενότητα 2 έγινε ανάλυση της πρώτης βασικής ιδέας της εργασίας, δηλαδή της αποσύζευξης δυνάμεων και ροπών με βάση το κριτήριο $Q = \vec{f}^T \mathbf{G}\mathbf{G}^T \vec{f}$, όπου $\vec{f}$ το διάνυσμα επιθυμητής δράσης και $\mathbf{G}$ ο πίνακας λαβής. Είδαμε ότι με ελαχιστοποίηση της ποσότητας $\left|\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i\right|^2$ μπορούμε να πετύχουμε μια αποσύζευξη δύναμης και ροπής με τα εξής πλεονεκτήματα:

    (α΄) Καλά ισορροπημένη λαβή ως προς τις δυνάμεις (τριπλή ιδιοτιμή με ιδιοδιανύσματα e_1, e_2, e_3).

    (β΄) Εύκολη βελτιστοποίηση ως προς την επιθυμητή ροπή χρησιμοποιώντας το κριτήριο

    $$Q_{\triangle} = \vec{\tau}^T \left(\sum_{i=1}^{3} [r_i \times] [r_i \times]^T \right) \vec{\tau}$$

    και μετασχηματισμούς στροφής για μεγαλύτερη ευκολία.

    Η λογική της ανάλυσης αυτής μοιάζει πολύ με αυτή του κριτηρίου αποσύζευξης δυνάμεων και ροπών που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3, χωρίς όμως να εμφανίζει τις ίδιες αδυναμίες. Συγκεκριμένα, ακολουθώντας την μέθοδο που προτάθηκε δε χρειάζεται να επιλέξουμε το κριτήριο που μας ικανοποιεί περισσότερο, καθώς οι δυνάμεις είναι ήδη εξισορροπημένες και μας απομένει αποκλειστικά η ροπή. Επίσης, συνδυάζει τις ιδέες δύο ακόμα προτεινόμενων κριτηρίων της βιβλιογραφίας, συγκεκριμένα του σχήματος του πολυγώνου λαβής και την απόσταση του κέντρου βάρους αυτού από εκείνο του αντικειμένου.

2. Δείξαμε μαθηματικά τα προβλήματα που αντιμετωπίζει η περιγραφή κατά την αλλαγή κλίμακας (Παράρτημα Β).

3. Δείξαμε μαθηματικά την ισοδυναμία κριτηρίων υπό συνθήκες (Κεφάλαιο 8 και Παράρτημα Β).

4. Στο Κεφάλαιο 6 αποδείξαμε ότι το ρομποτικό χέρι με τους δύο βαθμούς ελευθερίας σε κάθε δάκτυλο που μοντελοποιήσαμε μπορεί να «πιάσει» οποιοδήποτε τύπο τριγώνου - δηλαδή η επιτυχία της λαβής εξαρτάται μόνο από το μέγεθος του αντικειμένου. Με αυτόν τον τρόπο μπορέσαμε να περιγράψουμε μια εύκολα γενικεύσιμη διαδικασία επιλογής τυχαίων αρχικών σημείων πάνω στο αντικείμενο η οποία μας επιτρέπει:

    (α΄) Να λύνουμε το πρόβλημα με απλούς αλγορίθμους βελτιστοποίησης.

    (β΄) Να υπολογίζουμε διαφορετικές λύσεις ανάλογα με το αρχικό σημείο.

5. Μετασχηματίσαμε το πρόβλημα ώστε τα δάκτυλα να βρίσκονται πάντα πάνω στο αντικείμενο ανεξάρτητα από τις μεταβλητές βελτιστοποίησης και υπολογίσαμε τον ελάχιστο αριθμό τους.
6. Προτείναμε έναν συνδυασμό κριτηρίων - των $\vec{\tau}^T\vec{\tau}$ και του $Q_{UOT} = \frac{\sigma_{max}(\mathbf{J})}{\sigma_{min}(\mathbf{J})}$, επιχειρώντας να πετύχουμε αποτελέσματα παρόμοια με αυτά του Q_{TCI}, ακολουθώντας διαφορετική μεθοδολογία και διατηρώντας καλές ιδιότητες διάταξης. Η μεθοδολογία αυτή όμως παρουσιάζει γενικότερα προβλήματα όπως δείξαμε στο Κεφάλαιο 7.

9.2 Σύνοψη Πειραματικών Αποτελεσμάτων

Στο Κεφάλαιο 8:

1. Ελέγξαμε πειραματικά την λύση που προκύπτει χρησιμοποιώντας συνδυαστικά δύο διαφορετικά κριτήρια. Το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο: Το ρομποτικό χέρι καταλήγει σε διάταξη η οποία απέχει τόσο από ιδιομορφίες όσο και από το ολικό ελάχιστο του κριτηρίου που θέλαμε ιδανικά να ελαχιστοποιήσουμε.
2. Μελετήσαμε πειραματικά και συγκρίναμε την συμπεριφορά των κριτηρίων $s_{min}(\mathbf{G})$ και $\left|\sum_{i=1}^{3}\vec{r}_i\right|^2$. Με αυτόν τον τρόπο δείξαμε την κοινή τους συμπεριφορά και παρατηρήσαμε ότι το προτεινόμενο κριτήριο $\left|\sum_{i=1}^{3}\vec{r}_i\right|^2$ παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα:
   (α΄) Παρουσιάζει κοινή συμπεριφορά με τα κριτήρια $s_{min}(\mathbf{G})$ και $\frac{s_{min}(\mathbf{G})}{s_{max}(\mathbf{G})}$ και άρα διατηρεί πολύ καλές ιδιότητες ευστάθειας λαβής.
   (β΄) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για $task - specific$ τοποθέτηση του χεριού.
   (γ΄) Αποσυζευγνύει με εύκολο και ακριβή τρόπο δυνάμεις και ροπές και δεν υποπίπτει σε προβλήματα περιγραφής.
3. Χρησιμοποιήσαμε την συνολική διαδικασία που περιγράψαμε και επιβεβαιώσαμε ότι η ευρωστία της λαβής διατηρείται αναλλοίωτη σε σχέση με αυτή των κριτηρίων $s_{min}(\mathbf{G})$ και $\frac{s_{min}(\mathbf{G})}{s_{max}(\mathbf{G})}$, αλλά το μέτρο της συνολική ασκούμενης δύναμης στις επαφές μειώνεται όταν επιθυμούμε να ασκήσουμε κάποια συγκεκριμένη ροπή.

9.3 Προεκτάσεις - Μελλοντική Εργασία

Η ελαχιστοποίηση των δυνάμεων στις επαφές με στόχο την προστασία της επιφάνειας του αντικειμένου, για δεδομένες επιθυμητές δράσεις, είναι το πρώτο βήμα προς την συνολική επίλυση αυτού του προβλήματος. Υπολογίζοντας απομονωμένα τις θέσεις επαφής, δεν λαμβάνουμε υπόψη μας το ρομποτικό χέρι του οποίου τα δάκτυλα θα πρέπει να ασκήσουν τις απαιτούμενες δυνάμεις. Εδώ μπορούμε να εφαρμόσουμε διάφορες τεχνικές, ανάλογα με το επιθυμητό αποτέλεσμα. Για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad Q_{UOT} \\ &\text{subject to: } \overrightarrow{f_{ci}} \times \vec{r}_i = 0 \end{aligned} \tag{9.1}$$

όπου $\overrightarrow{f_{ci}}$ η δύναμη στην i−οστή επαφή που ασκείται από το δάκτυλο του χεριού και $\vec{r}_i$ το αντίστοιχο διάνυσμα επαφής. Ουσιαστικά προσπαθούμε να ακινητοποιήσουμε το αντικείμενο για δεδομένα σημεία επαφής, αποφεύγοντας όσο το δυνατόν περισσότερο ιδιόμορφες διατάξεις.

Επίσης, επειδή τα αλγεβρικά κριτήρια του πίνακα λαβής ενδέχεται να παρουσιάσουν προβλήματα, μια διαφορετική κατεύθυνση έρευνας θα ήταν η μελέτη του προβλήματος σύγκρουσης και αναγνώρισης (labeling) των ιδιαζουσών τιμών του.

Όπως είδαμε, η βελτιστοποίηση της πόζας ενός ρομποτικού χεριού γίνεται με βάση επιθυμητές διευθύνσεις δύναμης και ροπής αλλά χωρίς να λαμβάνεται υπόψη ο συνολικός χειρισμός του αντικειμένου. Η προσέγγιση αυτή είναι λογική από μια άποψη αλλά δεν είναι ξεκάθαρο πόσο κοντά στο πραγματική βέλτιστη τοποθέτηση μας φέρνει. Εάν κοιτάξουμε το συνολικό πρόβλημα χειρισμού ενός αντικειμένου από μακριά, βλέπουμε ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου με παραμέτρους την αρχική θέση του χεριού και τις αρχικές γωνίες των δακτύλων του. Φαίνεται έτσι να υπάρχει στο εσωτερικό του προβλήματος μια κάποια αποσύζευξη των δύο βημάτων:

- Εάν γνωρίζουμε την αρχική θέση του χεριού το πρόβλημα λύνεται με συγκεκριμένο τρόπο, και
- Εάν μπορούσαμε να λύσουμε αναλυτικά τις εξισώσεις βέλτιστου ελέγχου θα λαμβάναμε εξισώσεις παραμετροποιημένες ως προς την αρχική διάταξη του χεριού.

Οι διαφορικές εξισώσεις ενός προβλήματος βέλτιστου ελέγχου όμως δε λύνονται εν γένει αναλυτικά. Μια άλλη προσέγγιση θα ήταν να θεωρήσουμε μια αρχική διάταξη του χεριού - π.χ. αυτή που προκύπτει από ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σαν αυτό της εργασίας - και θεωρώντας διαταραχές γύρω από αυτή να λύνουμε αριθμητικά την εξίσωση βελτιστότητας του Bellman προσπαθώντας να βρούμε μια συσχέτιση μεταξύ των αρχικών συνθηκών και της συνολικής λύσης. Δυστυχώς όμως, η εξίσωση του Bellman συνήθως δεν είναι αριθμητικά ολοκληρώσιμη για μεγάλο αριθμό μεταβλητών [41], [42].

Μπορούμε να δοκιμάσουμε να ξεπεράσουμε τα εμπόδια αυτά με τη βοήθεια της μηχανικής μάθησης [43], [44]. Για παράδειγμα εκπαιδεύοντας ένα ρομποτικό χέρι να χειρίζεται ένα αντικείμενο για πολλές επιθυμητές τροχιές αυτού, θα μπορούσαμε ίσως να εξάγουμε ένα μοντέλο το οποίο θα συσχετίζει την αρχική διάταξη του χεριού με την κίνηση των δακτύλων στο χρόνο και να μελετήσουμε τις μαθηματικές του ιδιότητες. Μια διαφορετική προσέγγιση θα ήταν να επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε αναλυτικά κάποια όρια βελτιστότητας της αποσυζευγμένης προσέγγισης όπως συμβαίνει με παρεμφερή προβλήματα [45], [46].

Τέλος, θα θέλαμε να αναφερθούμε και στο πρόβλημα της όρασης στη ρομποτική. Παρά τις ραγδαίες σχετικές επιστημονικές και τεχνολογικές εξελίξεις, ο ακριβής εντοπισμός σημείων στο χώρο και η τοποθέτηση ρομποτικών δακτύλων σε αυτά παραμένει ένα απαιτητικό πρόβλημα. Αντίστοιχα ο ακριβής έλεγχος των δυνάμεων που ασκούνται στις επαφές είναι εν γένει δύσκολος λόγων θορύβου. Υπό αυτό το πρίσμα είναι λογικό να προτιμηθούν λύσεις οι οποίες δίνουν έμφαση στην ευρωστία και την ευστάθεια της λαβής ώστε να έχουμε ικανοποιητικό έλεγχο του αντικειμένου ακόμα και υπό συνθήκες αβεβαιότητας.

Παράρτημα

Παράρτημα Α΄

Απόδειξη της ισχύς των εξισώσεων (2.13) - (2.20) Ισχύει ότι

$$rot_{1x}^2 = R(1,1)^2 k_x^2 \tag{Α΄.1}$$

$$rot_{1y}^2 = R(1,2)^2 k_x^2 \tag{Α΄.2}$$

$$rot_{2x}^2 = R(2,1)^2 k_y^2 \tag{Α΄.3}$$

$$rot_{2y}^2 = R(2,2)^2 k_y^2 \tag{Α΄.4}$$

Έτσι οι (2.19), (2.20) γράφονται

$$\left(\frac{R(1,i))k_i}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{R(2,i))k_i}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{n_x R(1,i)k_i + n_y R(2,i)k_i}{n_z r_3}\right)^2 = 1 \tag{Α΄.5}$$

Όμως λόγω καθετότητας ισχύει ότι

$$n_x R(1,i) + n_y R(2,i) + n_z R(3,i) = 0 \tag{Α΄.6}$$

Άρα η (Α΄.5) γράφεται μετά από πράξεις:

$$k_i^2 \left(\frac{R(1,i)^2}{r_1^2} + \frac{R(2,i)^2}{r_2^2} + \frac{R(3,i)^2}{r_3^2}\right) = 1 \tag{Α΄.7}$$

Έστω σημείο M πάνω στην έλλειψη που σχηματίζεται από τις ακτίνες k_x, k_y και τον προσανατολισμό R. Τότε $\vec{M} = R \cdot [k_x c_\phi \; k_y s\phi \; 0]^T$ για κάποια γωνία ϕ. Το σημείο βρίσκεται προφανώς πάνω στο επίπεδο με κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$ αφού ο πίνακας μετασχηματισμού R μεταφέρει τα σημεία του επιπέδου $x - y$ πάνω στο επίπεδο τομής. Θα αποδείξουμε ότι βρίσκεται και πάνω στο ελλειψοειδές. Ισχύει ότι

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{j=1}^3 \left(\frac{R(j,1)k_x c_\phi + R(j,2)k_y s_\phi}{r_j}\right)^2 = \\ \textstyle\sum_{j=1}^3 \frac{R(j,1)^2 k_x^2 c_\phi^2 + R(j,2)^2 k_y^2 s_\phi^2 + 2R(j,1)R(j,2)k_x k_y}{r_j^2} \end{gathered} \tag{Α΄.8}$$

Χωρίζοντας το άθροισμα μέσα σε κάθε κλάσμα και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (Α΄.7) το άθροισμα γράφεται

$$c_\phi^2 + s_\phi^2 + 2\sum_{j=1}^{3} R(j,1)R(j,2)c_\phi s_\phi = 1 + 2c_\phi s_\phi R(:,1)R(:,2) = 1 \tag{Α΄.9}$$

αφού οι στήλες του R είναι ανά 2 κάθετες. Επομένως η έλλειψη βρίσκεται εξολοκλήρου πάνω στο επίπεδο τομής και κάθε σημείο της ικανοποιεί την εξίσωση του ελλειψοειδούς. Άρα είναι η έλλειψη που αναζητάμε.

Παράρτημα Β΄

Σύντομη ανάλυση του πίνακα GG^T

Στο παράρτημα αυτό θα παρουσιάσουμε μια σύντομη μελέτη του πίνακα $\mathbf{GG^T}$, ώστε να μπορέσουμε να στηρίξουμε και θεωρητικά τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής.

Β΄.1 Αστάθεια Περιγραφής υπό Μετασχηματισμούς Κλίμακας

Απόδειξη. Έστω πίνακας λαβής $\mathbf{G}$. Τότε θα έχουμε ότι:

$$\mathbf{GG}^T = \begin{bmatrix} 3\mathbf{I} & \sum_{i=1}^{3}[r_i\times]^T \\ \sum_{i=1}^{3}[r_i\times] & \sum_{i=1}^{3}[r_i\times][r_i\times]^T \end{bmatrix} \tag{Β΄.1}$$

Έστω $\vec{v}$ ιδιοδιάνυσμα του $\mathbf{GG}^T$ με $\vec{v} = \begin{bmatrix}\vec{f}\\ \vec{\tau}\end{bmatrix}$, $|\vec{v}| = 1$. Θα ισχύει:

$$\begin{bmatrix} 3\vec{f} + \sum_{i=1}^{3}[r_i\times]^T\vec{\tau} \\ \sum_{i=1}^{3}[r_i\times]\vec{f} + \sum_{i=1}^{3}[r_i\times][r_i\times]^T\vec{\tau} \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}\vec{f}\\ \vec{\tau}\end{bmatrix} \tag{Β΄.2}$$

Από την πρώτη γραμμή της εξίσωσης (Β΄.2) προκύπτει η εξίσωση:

$$(3-\lambda)\vec{f} + \sum_{i=1}^{3}[r_i\times]^T\vec{\tau} = \vec{0} \overset{\lambda\neq 3}{\iff} \vec{f} = \frac{\sum_{i=1}^{3}[r_i\times]^T\vec{\tau}}{\lambda-3} \tag{Β΄.3}$$

Από την δεύτερη γραμμή της εξίσωσης (Β΄.2) και την (Β΄.3) προκύπτει η εξίσωση:

$$\sum_{i=1}^{3}[r_i\times]\sum_{i=1}^{3}[r_i\times]^T\vec{\tau} + \sum_{i=1}^{3}[r_i\times][r_i\times]^T(\lambda-3)\vec{\tau} - \lambda(\lambda-3)\vec{\tau} = \vec{0} \tag{Β΄.4}$$

Εφαρμόζουμε αλλαγή κλίμακας στις συντεταγμένες μας κατά παράγοντα κ συνεπώς $\forall\vec{r_i}$ θα ισχύει $\vec{ri} = \kappa\vec{r}'_i$. Έτσι η εξίσωση (Β΄.3) γράφεται:

$$\vec{f} = \kappa\frac{\sum_{i=1}^{3}[r_i\times]^T\vec{\tau}}{\lambda-3} \tag{Β΄.5}$$

και εντελώς αντίστοιχα η (Β΄.4):

$$-\left[\kappa^2\left(\sum_{i=1}^{3}[r'_i\times]\right)^2 + (\lambda-3)\left(\kappa^2\sum_{i=1}^{3}[r'_i\times]^2 + \lambda\mathbf{I}\right)\right]\vec{\tau} = \vec{0} \overset{\kappa>0}{\iff} \tag{Β΄.6}$$

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{3}[r'_i\times]\right)^2 + (\lambda-3)\left(\sum_{i=1}^{3}[r'_i\times]^2 + \frac{\lambda}{\kappa^2}\mathbf{I}\right)\right]\vec{\tau} = \vec{0} \tag{Β΄.7}$$

Στη νέα περιγραφή τα ιδιοδιανύσματα θα πρέπει να ικανοποιούν την αντίστοιχη εξίσωση:

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]\right)^2 + (\lambda - 3)\left(\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^2 + \lambda_2\mathbf{I}\right)\right]\vec{\tau}' = \vec{0} \tag{Β΄.8}$$

και

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]\right)^2 - 3\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^2\right]\vec{\tau} = -(\lambda - 3)\frac{\lambda}{\kappa^2}\vec{\tau} - \lambda\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^2\,\vec{\tau} \tag{Β΄.9}$$

Έστω ότι τα ιδιοδιανύσματα παραμένουν ίδια, δηλαδή $\vec{\tau}' = \vec{\tau}$. Τότε:

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]\right)^2 + (\lambda - 3)\left(\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^2 + \lambda_2\mathbf{I}\right)\right]\vec{\tau} = \vec{0} \tag{Β΄.10}$$

Και θα πρέπει να ισχύει:

$$-\lambda\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^2\,\vec{\tau} - (\lambda - 3)\frac{\lambda}{\kappa^2}\vec{\tau} + \lambda_2\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^2\,\vec{\tau} + \lambda_2(\lambda_2 - 3)\vec{\tau} = \vec{0} \Leftrightarrow \tag{Β΄.11}$$

$$\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^2\,\vec{\tau} = \frac{(\lambda - 3)\frac{\lambda}{\kappa^2} - \lambda_2(\lambda_2 - 3)}{\lambda_2 - \lambda}\vec{\tau} = \rho\vec{\tau} \tag{Β΄.12}$$

Στη νέα περιγραφή θα ισχύει:

$$\begin{bmatrix} 3\vec{f} + \sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^T\,\vec{\tau} \\ \sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]\vec{f} - \rho\vec{\tau} \end{bmatrix} = \lambda_2\begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{\tau} \end{bmatrix} \tag{Β΄.13}$$

Άρα:

$$\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]\vec{f} - (\rho + \lambda_2)\vec{\tau} = \vec{0} \Leftrightarrow \tag{Β΄.14}$$

$$\vec{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]\vec{f}}{\rho + \lambda_2} \tag{Β΄.15}$$

Αλλά αν $\lambda_2 \neq 3$ έχουμε (όπως και πριν) ότι:

$$\vec{f} = \frac{\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^T\,\vec{\tau}}{\lambda_2 - 3} = \frac{\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^T\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]}{(\lambda_2 - 3)(\lambda_2 + \rho)}\vec{f} \tag{Β΄.16}$$

Επομένως το $\vec{f}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^T\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]$ με ιδιοτιμή $(\lambda_2 - 3)(\lambda_2 + \rho)$. Αντίστοιχα:

$$\frac{\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^T}{(\lambda_2 - 3)}\vec{\tau} - \rho\vec{\tau} = \vec{0} \tag{Β΄.17}$$

Έτσι προκύπτει ότι το $\vec{\tau}$ πρέπει να είναι ιδιοδιάνυσμα του $\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^T\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]$ με ιδιοτιμή $(\lambda_2 - 3)\rho$. Όμως ο πίνακας $\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^T\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]$ είναι θετικά ημιορισμένος. Για να το δούμε αυτό παίρνουμε ένα τυχαίο διάνυσμά, έστω $\vec{u}$. Θα είναι:

$$\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^T\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]\,\vec{u} = \tag{Β΄.18}$$

$$\vec{u}^T\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]^T\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]\,\vec{u} = \tag{Β΄.19}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]\,\vec{u}\right)^T\left(\sum_{i=1}^{3}[r_i'\times]\,\vec{u}\right) = \tag{Β΄.20}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3}r_i'\times\vec{u}\right)^T\left(\sum_{i=1}^{3}r_i'\times\vec{u}\right) = \tag{Β΄.21}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{3}r_i'\times\vec{u}\right|^2 \geq 0 \tag{Β΄.22}$$

Επομένως $(\lambda_2-3)\rho \geq 0$ και αφού $\rho \geq 0$ θα πρέπει $\lambda_2 > 3$ (εκτός αν $\rho = 0$)*. Αν αρχικά είχαμε $\lambda < 3$ και ισχύει $\rho > 0$ τότε:

$$\frac{(\lambda-3)\frac{\lambda}{\kappa^2}-\lambda_2(\lambda_2-3)}{\lambda_2-\lambda} > 0 \Leftrightarrow \lambda_2 < \lambda \tag{Β΄.23}$$

το οποίο είναι άτοπο αφού από υπόθεση $\lambda < 3 < \lambda_2$. Αν όμως $\lambda > 3$ θα πρέπει να ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες που προέκυψαν για τα $\vec{f}$ και $\vec{\tau}$.

Για το πίνακα $[r_i'\times]\,[r_i'\times]^T$ ισχύει ότι:

$$[r_i\times]\,[r_i\times]^T = \begin{bmatrix} r_z^2+r_y^2 & -r_xr_y & -r_zr_x \\ -r_xr_y & r_z^2+r_x^2 & -r_yr_z \\ -r_zr_x & -r_yr_z & r_x^2+r_y^2 \end{bmatrix} \tag{Β΄.24}$$

και η τετραγωνική μορφή

$$\vec{\sigma}^T\,[r_i'\times]\,[r_i'\times]^T\,\vec{\sigma} = \left([r_i'\times]^T\,\vec{\sigma}\right)^T\left([r_i'\times]^T\,\vec{\sigma}\right) = \left|[r_i'\times]^T\,\vec{\sigma}\right|^2 \tag{Β΄.25}$$

μεγιστοποιείται όταν το διάνυσμα $\vec{\sigma}$ είναι κάθετο στο $\vec{r_i}$ και ελαχιστοποιείται όταν τα διανύσματα είναι παράλληλα. Επομένως:

1. Όταν τα διανύσματα είναι κάθετα θα έχουμε $\vec{r_i}^T\vec{\sigma} = \vec{0}$. Από τη σχέση αυτή λαμβάνουμε δύο ιδιοδιανύσματα

$$\vec{\sigma_1} = \begin{bmatrix} \frac{r_z}{r_x^2+r_z^2} \\ 0 \\ -\frac{r_z}{r_x^2+r_z^2} \end{bmatrix},\ \vec{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{r_z}{r_y^2+r_z^2} \\ -\frac{r_y}{r_y^2+r_z^2} \end{bmatrix} \tag{Β΄.26}$$

   με ιδιοτιμή $|\vec{r_i}|^2$.

2. Όταν τα ιδιοδιανύσματα είναι παράλληλα λαμβάνουμε ιδιοτιμή 0 και ιδιοδιάνυσμα $\vec{\sigma_3} = \frac{\vec{r_i}}{|\vec{r_i}|}$.

Έτσι, για να ισχύουν οι απαραίτητες σχέσεις θα πρέπει να ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

1. $$(\lambda_2-3)(\lambda_2+\rho) = \rho(\lambda_2-3) \xLeftrightarrow{\lambda_2\neq 3} \lambda_2 = 0 \tag{Β΄.27}$$

2. $$(\lambda_2-3)(\lambda_2+\rho) = 0,\ \rho(\lambda_2-3) = \left|\sum_{i=1}^{3}\vec{r_i}\right|^2 \tag{Β΄.28}$$

3.
$$(\lambda_2 - 3)(\lambda_2 + \rho) = \left|\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i'\right|^2, \ \rho(\lambda_2 - 3) = 0 \tag{Β΄.29}$$

Αν ισχύει η 1 βλέπουμε ότι πρέπει $\lambda_2 = 0$. Άρα:

$$\sum_{i=1}^{3} [r_i' \times] \vec{f} + \rho \vec{\tau} = \vec{0} \xLeftrightarrow[\rho=\frac{(3-\lambda)}{\kappa^2}]{\lambda_2=0} \tag{Β΄.30}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{3} [r_i \times] \vec{f}}{\kappa^2} + \frac{\lambda - 3}{\kappa^2} \vec{\tau} = \vec{0} \tag{Β΄.31}$$

Όμως έχουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{3} [r_i \times]^T \vec{\tau} + 3\vec{f} = \lambda \vec{f} \tag{Β΄.32}$$

Άρα:

$$\frac{\sum_{i=1}^{3} [r_i \times] \sum_{i=1}^{3} [r_i \times]^T}{\lambda - 3} \vec{\tau} + (\lambda - 3)\vec{\tau} = \vec{0} \Leftrightarrow \tag{Β΄.33}$$

$$\kappa^2 \frac{\sum_{i=1}^{3} [r_i' \times] \sum_{i=1}^{3} [r_i' \times]^T}{\lambda - 3} \vec{\tau} + (\lambda - 3)\vec{\tau} = \vec{0} \tag{Β΄.34}$$

$$\frac{\kappa^2 \cdot (-3\rho)}{\lambda - 3} \vec{\tau} + (\lambda - 3)\vec{\tau} = \vec{0} \tag{Β΄.35}$$

$$\frac{\kappa^2 \cdot 3(\lambda - 3)}{(\lambda - 3)\kappa^2} \vec{\tau} + (\lambda - 3)\vec{\tau} = \vec{0} \tag{Β΄.36}$$

$$\lambda = 0 \tag{Β΄.37}$$

Αν ισχύει η δεύτερη συνθήκη τότε πρέπει $\lambda_2 = 3$ ή $\rho + \lambda_2 = 0$. Θα έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{3} [r_i' \times]^T \vec{f} = \vec{0} \tag{Β΄.38}$$

και άρα $\vec{f}$ παράλληλο στο $\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i'$. Από την δεύτερη σχέση της εξίσωσης ιδιοδιανυσμάτων θα έχουμε ότι:

$$(3 - \lambda_2)\vec{f} = \sum_{i=1}^{3} [r_i' \times] \vec{\tau} \tag{Β΄.39}$$

και άρα $\vec{f}$ κάθετο στο $\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i'$ το οποίο είναι άτοπο εκτός και αν $\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i' = \vec{0}$. Αν η ισχύει η συνθήκη 3, δηλαδή ότι $\rho(\lambda_2 - 3) = 0$ τότε $\lambda_2 = 3$ ή $\rho = 0$ και το διάνυσμα $\vec{\tau}$ θα ανήκει στον μηδενοχώρο του πίνακα $\sum_{i=1}^{3} [r_i \times] [r_i \times]^T$. Έτσι:

$$\vec{\tau}^T \sum_{i=1}^{3} [r_i' \times] [r_i' \times]^T \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \tag{Β΄.40}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \left| r_i' \times \vec{\tau} \right|^2 = 0 \Leftrightarrow \tag{Β΄.41}$$

$$|\vec{r}_i' \times \vec{\tau}| = 0, \ \forall i \tag{Β΄.42}$$

Επομένως θα πρέπει τα διανύσματα $\vec{r}_i$ να είναι όλα συνευθειακά με το $\vec{\tau}$ και άρα $\mathrm{rank}(\mathbf{GG}^T) < 6$. Προφανώς και το άθροισμά τους θα είναι παράλληλο στο $\vec{\tau}$. Έτσι θα ισχύει:

$$3\vec{f} = \lambda_2 \vec{f} \tag{Β΄.43}$$

Άρα $\mathfrak{H}_2 = 3$ και άρα κατ' επέκταση $\sum_{i=1}^{3} \vec{r_i'} = \vec{0}$. Όμως για να καταλήξουμε στα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε υποθέσει ότι $\mathfrak{H} \neq 3$ και $\mathfrak{H}_2 \neq 3$ και αντίστοιχα ότι $\sum_{i=1}^{3} \vec{r_i} \neq \vec{0}$. Στην περίπτωση $\sum_{i=1}^{3} \vec{r_i} = \vec{0}$ θα έχουμε τριπλή ιδιοτιμή ίση με 3. Αν τυχαία έχουμε ιδιοτιμή 3 χωρίς το άθροισμα να μηδενίζεται τότε θα ισχύει:

$$\begin{bmatrix} 3\vec{f} + \sum_{i=1}^{3} [r_i\times]^T \vec{\tau} \\ \sum_{i=1}^{3} [r_i\times]\vec{f} + \sum_{i=1}^{3} [r_i\times][r_i\times]^T \vec{\tau} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{\tau} \end{bmatrix} \tag{Β΄.44}$$

Έτσι κατευθείαν παίρνουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{3} [r_i\times]^T \vec{\tau} = \vec{0} \tag{Β΄.45}$$

και πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη εξίσωση από μπροστά με $\vec{\tau}^T$ παίρνουμε τη συνθήκη:

$$\vec{\tau}^T \sum_{i=1}^{3} [r_i\times][r_i\times]^T \vec{\tau} = 3|\vec{\tau}|^2 \tag{Β΄.46}$$

Ακολουθώντας την ίδια λογική με πριν και εφαρμόζοντας αλλαγή κλίμακας θα πάρουμε τις εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} 3\vec{f} + \sum_{i=1}^{3} [r_i'\times]^T \vec{\tau} \\ \sum_{i=1}^{3} [r_i'\times]\vec{f} + \sum_{i=1}^{3} [r_i'\times][r_i'\times]^T \vec{\tau} \end{bmatrix} = \mathfrak{H}_2 \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{\tau} \end{bmatrix} \tag{Β΄.47}$$

Όμως θα ισχύει κι εδώ ότι $\sum_{i=1}^{3} [r_i'\times]^T \vec{\tau} = \vec{0}$ αφού $\sum_{i=1}^{3} [r_i\times]^T = \kappa^2 \sum_{i=1}^{3} [r_i'\times]^T$. Έτσι από την πρώτη εξίσωση υπολογίζουμε ότι $\mathfrak{H}_2 = 3$. Με την ίδια λογική με πριν:

$$\vec{\tau}^T \sum_{i=1}^{3} [r_i'\times][r_i'\times]^T \vec{\tau} = 3|\vec{\tau}|^2 \tag{Β΄.48}$$

και για να ισχύει αυτό θα πρέπει $\kappa = 1$.

Τελικά η μόνη επιλογή που απομένει να ελέγξουμε είναι ο μηδενισμός του $\sum_{i=1}^{3} \vec{r_i'}$. Τότε θα έχουμε ιδιοδιανύσματα της μορφής $\left[\vec{f}^T \; \vec{0}^T\right]^T$ και $\left[\vec{0}^T \; \vec{\tau}^T\right]^T$ και

$$\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 3\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sum_{i=1}^{3} [r_i\times][r_i\times]^T \end{bmatrix} \tag{Β΄.49}$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα δεν αλλάζουν μορφή κάτω από μετασχηματισμούς κλίμακας. Ο πίνακας στις νέες συντεταγμένες θα γράφεται:

$$\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 3\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sum_{i=1}^{3} [r_i'\times][r_i'\times]^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\kappa^2}\sum_{i=1}^{3} [r_i\times][r_i\times]^T \end{bmatrix} \tag{Β΄.50}$$

Πολλαπλασιάζοντας με οποιοδήποτε ιδιοδιάνυσμα της προηγούμενης περιγραφής θα πάρουμε ότι:

1.
$$\begin{bmatrix} 3\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sum_{i=1}^{3} [r_i'\times][r_i'\times]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{0} \end{bmatrix} = 3\vec{f} \tag{Β΄.51}$$

2.
$$\begin{bmatrix} 3\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sum_{i=1}^{3} [r_i'\times][r_i'\times]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{\tau} \end{bmatrix} = \frac{\mathfrak{H}_\tau}{\kappa^2} \tag{Β΄.52}$$

Επομένως στα σημεία αυτά η περιγραφή είναι ευσταθής. □

Το συμπέρασμα αυτό δεν θα έπρεπε να αποτελεί έκπληξη. Τονίζει όμως ένα σημαντικό ζήτημα της περιγραφής του προβλήματος: **Οι «βέλτιστες» κατευθύνσεις κίνησης δεν παραμένουν ίδιες μετά από αλλαγή κλίμακας**.

Β΄.2 Ιδιοκατευθύνσεις Δύναμης

Είναι λογικό να περιμένουμε ότι οι διευθύνσεις των υπο-ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα $\mathbf{GG^T}$ που αφορούν τη δύναμη (δηλαδή τα πρώτα τρία στοιχεία των ιδιοδιανυσμάτων του) διατηρούνται και μετά από μετασχηματισμό κλίμακας. Αυτό μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε εύκολα αριθμητικά κάνοντας υπολογισμούς με τυχαία νούμερα.

Στους πίνακες Β΄.1 και Β΄.2 φαίνεται ότι οι διαφορές μεταξύ των ιδιοδιανυσμάτων είναι ελάχιστες στις πρώτες τρεις συντεταγμένες οι οποίες αφορούν την δύναμη. Οι μοναδικές διαφορές εμφανίζονται στις τελευταίες τρεις οι οποίες αφορούν την ροπή.

Πίνακας Β΄.1: *Αρχικά Ιδιοδιανύσματα*

0.6911	0.5386	0.5269	-0.4821	-0.6911	0.5385
0.2848	-0.8159	-0.8206	-0.5032	-0.2848	-0.8159
-0.6643	0.2104	0.2215	-0.7172	0.6643	0.2105
0.5878	-0.6709	-13.1412	0.0000	0.4929	0.6772
-0.8922	-0.2536	-13.2885	0.0000	-0.7467	0.2801
0.2290	0.7339	-17.9676	0.0000	0.1927	-0.6468

Πίνακας Β΄.2: *Ιδιοδιανύσματα για* $\kappa = 2$

0.6911	0.5386	0.5203	0.4821	-0.6911	-0.5385
0.2848	-0.8159	-0.8231	0.5032	-0.2848	0.8159
-0.6643	0.2104	0.2277	0.7172	0.6643	-0.2105
0.2915	-0.3252	-22.7786	-0.0000	0.9939	-1.4256
-0.4424	-0.1269	-23.6794	-0.0000	-1.5055	-0.5912
0.1136	0.3403	-33.5436	-0.0000	0.3886	1.3556

Η σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες ροπής των ιδιοδιανυσμάτων αυτών είναι απλή και θα την δείξουμε στην επόμενη ενότητα.

Β΄.3 Ιδιοκατευθύνσεις Ροπής

Παίρνοντας δεδομένο ότι οι ιδιοκατευθύνσεις δύναμης παραμένουν ίδιες (από την προηγούμενη ενότητα) έχουμε τις εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} 3\vec{f} + \sum_{i=1}^{3} [r_i\times]^T \vec{\tau} \\ \sum_{i=1}^{3} [r_i\times]\vec{f} + \sum_{i=1}^{3} [r_i\times][r_i\times]^T \vec{\tau} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{\tau} \end{bmatrix} \tag{Β΄.53}$$

και

$$\begin{bmatrix} 3\vec{f} + \kappa \sum_{i=1}^{3} [r_i \times]^T \vec{\tau}' \\ \kappa \sum_{i=1}^{3} [r_i \times] \vec{f} + \kappa^2 \sum_{i=1}^{3} [r_i \times] [r_i \times]^T \vec{\tau}' \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{\tau}' \end{bmatrix} \tag{Β΄.54}$$

Επομένως, όπως και πριν θα έχουμε:

$$(3-\lambda)\vec{f} + \sum_{i=1}^{3} [r_i \times]^T \vec{\tau} = \vec{0} \xLeftrightarrow{\lambda \neq 3} \vec{f} = \frac{\sum_{i=1}^{3} [r_i \times]^T \vec{\tau}}{\lambda - 3} \tag{Β΄.55}$$

και

$$(3-\lambda_2)\vec{f} + \kappa \sum_{i=1}^{3} [r_i \times]^T \vec{\tau}' = \vec{0} \xLeftrightarrow{\lambda_2 \neq 3} \vec{f} = \kappa \frac{\sum_{i=1}^{3} [r_i \times]^T \vec{\tau}'}{\lambda_2 - 3} \tag{Β΄.56}$$

Εξισώνοντας καταλήγουμε στη σχέση:

$$\sum_{i=1}^{3} [r_i \times]^T \left(\frac{\kappa \vec{\tau}'}{\lambda_2 - 3} - \frac{\vec{\tau}}{\lambda} \right) = 0 \tag{Β΄.57}$$

και τελικά:

$$\frac{\kappa \vec{\tau}'}{\lambda_2 - 3} - \frac{\vec{\tau}}{\lambda} \parallel \sum_{i=1}^{3} \vec{r_i} \tag{Β΄.58}$$

ή

$$\frac{\kappa \vec{\tau}'}{\lambda_2 - 3} - \frac{\vec{\tau}}{\lambda} = \vec{0} \tag{Β΄.59}$$

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε πολύ εύκολα αριθμητικά ότι η σχέση που συνδέει τις ιδιοκατευθύνσεις ροπής είναι η (Β΄.59), δηλαδή όπως ήταν αναμενόμενο η αλλαγή κλίμακας επηρεάζει τις ιδιοτιμές μόνο λόγω της ροπής. Οι επιμέρους διευθύνσεις των ιδανικών δυνάμεων και ροπών παραμένουν ίδιες. Το πρόβλημα όμως της αλλαγής κλίμακας παραμένει.

Β΄.4 Θεωρητική σύγκριση κριτηρίων

Στην γενική περίπτωση που η ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή του πίνακα **G** είναι μικρότερη του 3 χρησιμοποιώντας τα δύο κριτήρια Q_{GII} και Q_{MSV} θα προσπαθήσουμε να την φέρουμε όσο πιο κοντά γίνεται στο σύνορο αυτό, αφού η και μέγιστη ιδιάζουσα τιμή δεν γίνεται να γίνει μικρότερη του 3. Το πρόβλημα με την προσέγγιση αυτή είναι ότι, παρόλο που η γενική συμπεριφορά είναι η ίδια με αυτή όταν χρησιμοποιείται το κριτήριό μας, Q_Δ, μαζί με τον γεωμετρικό περιορισμό $\sum_{i=1}^{3} \vec{r_i} = \vec{0}$, η σταδιακή αύξηση της ελάχιστης ιδιάζουσας τιμής του πίνακα μπορεί να επηρεαστεί και από τις υπόλοιπες ιδιοτιμές. Έστω ότι ο πίνακας

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^{3} [r_i \times] [r_i \times]^T$$

έχει μια ιδιοτιμή μικρότερη του 3 σε κάθε θέση όπου ισχύει $\sum_{i=1}^{3} \vec{r_i} = 0$. Αυξάνοντας την ελάχιστη ιδιάζουσα τιμή δεν θα πετύχουμε ποτέ το 3 αφού στη θέση αυτή ο πίνακας $\mathbf{GG^T}$ θα γινόταν block-diagonal και η ελάχιστη ιδιοτιμή του θα γινόταν η ελάχιστη ιδιοτιμή του **D** που υποθέσαμε ότι ήταν μικρότερη του 3. Αντίστοιχα, εάν σε άλλη κλίμακα οι ιδιοτιμές του **D** είναι μεγαλύτερες του 3 στις αντίστοιχες θέσεις με πριν, τότε μπορεί αυξάνοντας την ελάχιστη ιδιοτιμή να πετύχουμε την πλήρη αποσύζευξη. Αυτό δείχνει ότι δεν έχουμε ξεκάθαρη σχέση μεταξύ των ιδιοτιμων του πίνακα **D** με αυτών του $\mathbf{GG}^T$ και ίσως εμφανίζονται προβλήματα σύγκρουσης ιδιοτιμών και αναγνώρισής αυτών.

Χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία της εργασίας προσπαθούμε να πετύχουμε γεωμετρικά το σημείο όπου ροπές και δυνάμεις απεμπλέκονται, χωρίς να χρειάζεται να ανησυχούμε για την επίδραση των άλλων ιδιαζουσών τιμών. Στο σημείο αυτό μπορούμε με έναν μετασχηματισμό κλίμακας να μεγαλώσουμε τις ιδιοτιμές του $\mathbf{D}$ χωρίς να επηρεάσουμε τις βέλτιστες διευθύνσεις δυνάμεων και ροπών.

Βιβλιογραφία

[1] Retsinas George, Efthymiou Niki και Maragos Petros. *Mushroom Segmentation and 3D Pose Estimation From Point Clouds Using Fully Convolutional Geometric Features and Implicit Pose Encoding*. *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2023.

[2] Retsinas George, Efthymiou Niki, Anagnostopoulou Dafni και Maragos Petros. *Mushroom Detection and Three Dimensional Pose Estimation from Multi-View Point Clouds*. *Sensors*, 2023.

[3] *SoftGrip Project*. https://www.softgrip-project.eu.

[4] Paris Oikonomou, Athanasios Dometios, Mehdi Khamassi και Costas S. Tzafestas. *Reproduction of Human Demonstrations with a Soft-Robotic Arm based on a Library of Learned Probabilistic Movement Primitives*. *2022 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, σελίδες 5212–5218, 2022.

[5] Paris Oikonomou, Athanasios Dometios, Mehdi Khamassi και Costas S. Tzafestas. *Task Driven Skill Learning in a Soft-Robotic Arm*. *2021 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, σελίδες 1716–1723, 2021.

[6] Bicchi Antonio. *On the closure properties of robotic grasping*. *International Journal of Robotics Research*, 14, 1994.

[7] Lynch K., M. και Park F., C. *Modern Robotics: Mechanics, Planning and Control*. Cambridge University Press, 2020.

[8] *Robot Applications - Mogi*. https://www.mogi.bme.hu/TAMOP/robot_applications/ch07.html#ch-8.1.2.

[9] Tijani I. B. και Akmeliawati Rini. *Support vector regression based friction modeling and compensation in motion control system*. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 25:1043–1052, 2012.

[10] Jia Wei Li, Hong Liu και He Gao Cai. *On computing three-finger force-closure grasps of 2-D and 3-D objects*. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(1):155–161, 2003.

[11] *NTUA Robotics 2 Lecture Slides*. https://mycourses.ntua.gr/courses/ECE1204.

[12] Bertsekas Dimitri, P. *Nonlinear Programming 3rd Edition*. Athena Scientific, 2016.

[13] Nicholas Maratos. *Exact penalty function algorithms for finite dimensional and control optimization problems /*. 1978.

[14] Roa Máximo, A. και Suárez Raúl. *Grasp quality measures: review and performance*. *Auton Robot*, σελίδες 65–88, 2015.

[15] Li Z. και Sastry S. *Task-oriented optimal grasping by multifingered robotic hands*. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 4:32–44, 1988.

[16] Byoung Ho Kim, Sang Rok Oh, Byung Ju Yi και Il Hong Suh. *Optimal grasping based on non-dimensionalized performance indices*. *Proceedings 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Expanding the Societal Role of Robotics in the the Next Millennium (Cat. No.01CH37180)*, τόμος 2, σελίδες 949–956 ολ.2, 2001.

[17] Park Y. και Starr G. *Grasp synthesis of polygonal objects using a three-fingered robotic hand*. *International Journal of Robotics Research*, 11:163–184, 1992.

[18] Mirtich B. και Canny J. *Easily computable optimum grasps in 2D and 3D*. *IEEE International Conference on Robotics and Automation—CRA*, σελίδες 739–747, 1994.

[19] Chinellato E., Fisher R., Morales A. και del Pobil A. *Ranking planar grasp configurations for a three-finger hand*. *IEEE International Conference on Robotics and Automation—CRA*, σελίδα 1133–1138, 2003.

[20] Roa M., A., Koiva R. και Castellini C. *Experimental evaluation of human grasps using a sensorized object*. *IEEE RAS/EMBS International Conference on Biomedical Robots and Biomechatronics*, σελίδα 1662–1668, 2012.

[21] Balasubramanian R., Xu L., Brook P., D., Smith J., R. και Matsuoka Y. *Physical human interactive guidance: Identifying grasping principles from human-planned grasps*. *IEEE Transactions on Robotics*, 28:899–910, 2012.

[22] Supuk T., Kodek T. και Bajd T. *Estimation of hand preshaping during human grasping*. *Medical Engineering and Physics*, 27:790–797, 2005.

[23] Ponce J., Sullivan S., Sudsang A., Boissonat J. και Merlet J. *On computing four-finger equilibrium and force-closure grasps of polyhedral objects*. *International Journal of Robotics Research*, 16:11–35, 1997.

[24] Ding D., Liu Y. και Wang S. *Computation of 3-D form-closure grasps*. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 17:515–522, 2001.

[25] Ponce J. και Faverjon B. *On computing three-finger forceclosure grasps of polygonal objects*. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 11:868–881, 1995.

[26] Nguyen V. *Constructing force-closure grasps*. *International Journal of Robotics Research*, 7:3–16, 1998.

[27] Borst C., Fischer M. και Hirzinger G. *Grasp planning: How to choose a suitable task wrench space*. *IEEE International Conference on Robotics and Automation—ICRA*, σελίδα 319–325, 2004.

[28] Haschke R., Steil J., Steuwer I. και Ritter H. *Task-oriented quality measures for dextrous grasping*. *International Conference on Computational Intelligence in Robotics and Automation*, σελίδα 689–694, 2005.

[29] Shimoga K. *Robot grasp synthesis algorithms: A survey*. *International Journal of Robotics Research*, 15:230–266, 1996.

[30] Klein C. και Blaho B. *Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators*. *International Journal of Robotics Research*, 6:72–83, 1987.

[31] Yoshikawa T. *Manipulability of robotic mechanisms*. *International Journal of Robotics Research*, 4:3–9, 1985.

[32] Salisbury J. και Craig J. *Manipulability of robotic mechanisms*. *International Journal of Robotics Research*, 1:4–17, 1982.

[33] Liegeois A. *Automatic supervisory control for the configuration and behavior of multibody mechanisms*. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics*, 7:842–868, 1977.

[34] Balasubramanian R., Xu L., Brook P., D., Smith J., R. και Matsuoka Y. *Human-guided grasp measures improve grasp robustness on physical robot*. *International Conference on Robotics and Automation—ICRA*, σελίδα 2294–2301, 2010.

[35] Chiu S. *Control of redundant manipulators for task compatibility*. *International Conference on Robotics and Automation—ICRA*, σελίδα 1718–1724, 1987.

[36] Chiu S. *Task compatibility of manipulator postures*. *International Journal of Robotics Research*, 7:13–21, 1988.

[37] Sato M. και Yoshikawa Y. *A grasp performance criterion for robot hands consideringmultiple aspects of tasks and hand configuration*. *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, σελίδα 1547–1554, 2011.

[38] Watanabe T. *Manipulability measures taking necessary joint torques for grasping into consideration*. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems—IROS*, σελίδα 598–603, 2010.

[39] Chang Kuang-Hua. *Design Theory and Methods using CAD/CAE*.

[40] Ankur Bajpai, Prateek Saxena και Klaus Kunze. *Tribo-Mechanical Characterization of Carbon Fiber-Reinforced Cyanate Ester Resins Modified With Fillers*. *Polymers*, 12:1725, 2020.

[41] Bellman R., E. και Dreyfus S., E. *Applied Dynamic Programming*. Princeton University Press.

[42] Matanya B. Horowitz, Anil Damle και Joel W. Burdick. *Linear Hamilton Jacobi Bellman Equations in high dimensions*. *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, σελίδες 5880–5887, 2014.

[43] Lu Liangliang, Zhang Ming, He Dingxin, Gu Qiang, Gong Dongjun και Fu Lei. *A Method of Robot Grasping Based on Reinforcement Learning*. *3rd International Conference on Robotics, Intelligent Control and Artificial Intelligence (ICRICA 2021)*, 2021.

[44] Jahanshahi Hadi και Zhu Zheng, H. *Review of machine learning in robotic grasping control in space application*. *Acta Astronautica*, 220:31–61, 2024.

[45] Shi Shengling, Tsiamis Anastasios και De Schutter Bart. *Suboptimality analysis of receding horizon quadratic control with unknown linear systems and its applications in learning-based control*. 2024.

[46] Yuchao Li, Aren Karapetyan, John Lygeros, Karl H. Johansson και Jonas Mårtensson. *Performance Bounds of Model Predictive Control for Unconstrained and Constrained Linear Quadratic Problems and Beyond**. *IFAC-PapersOnLine*, 56(2):8464–8469, 2023.