



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Ανάπτυξη Αλγορίθμου Εύρεσης Ισορροπίας Nash σε πολυπρακτορικό σύστημα με χρήση δειγμάτων από γείτονες

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΜΠΑΜΠΑΡΟΥΤΣΗ Χ. ΙΩΑΝΝΑΣ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Επικουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2025



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΕΩΡΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Ανάπτυξη Αλγορίθμου Εύρεσης Ισορροπίας Nash σε πολυπρακτορικό σύστημα με χρήση δειγμάτων από γείτονες

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΜΠΑΜΠΑΡΟΥΤΣΗ Χ. ΙΩΑΝΝΑΣ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Επικουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 14η Οκτωβρίου 2025.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Επικουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Κωνσταντίνος Τζαφέστας
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ιωάννης Κορδώνης
Επικουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2025



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Copyright © – All rights reserved. Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Ιωάννα Μπαμπαρούτση, 2025.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

(Υπογραφή)

.....

Ιωάννα Μπαμπαρούτση

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

14 Οκτωβρίου 2025

Περίληψη

Η θεωρία παιγνίων βρίσκει όλο και μεγαλύτερη εφαρμογή σε πολυπρακτορικά συστήματα, στα οποία το σύνολο δράσεων (στρατηγική) κάθε πράκτορα διαμορφώνει την επιμέρους συνάρτηση κόστους του, άρα και το κατά πόσο είναι επωφελής ή επιζήμια η κατάσταση στην οποία αυτός βρίσκεται μέσα στο σύστημα. Στο πλαίσιο αυτό κρίνεται ιδιαίτερα σημαντική η αναζήτηση ισορροπίας Nash, δηλαδή η επίτευξη μιας συμβιβαστικής συνθήκης κατά την οποία κανένας πράκτορας δεν έχει όφελος να διαφοροποιηθεί μονομερώς.

Αντικείμενο μελέτης της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η αναζήτηση ισορροπίας Nash σε στατικά παίγνια με διαχωρίσιμους συζευγμένους περιορισμούς για τα σύνολα δράσεων των πρακτόρων. Ειδικότερα, εξετάζονται πολυπρακτορικά συστήματα με συνεχώς διαφορίσιμες, αυστηρά κυρτές και ακτινικά μη φραγμένες συναρτήσεις κόστους και γραμμικές συναρτήσεις περιορισμών. Θεωρούμε τον γράφο γειτνίασης που σχηματίζουν οι πράκτορες και αναπτύσσουμε αλγόριθμο εύρεσης Ισορροπίας Nash με ανταλλαγή δειγμάτων μεταξύ γειτνιαζόντων πρακτόρων. Για την απόδειξη της σύγκλισης τέτοιου τύπου συστημάτων σε ισορροπία Nash επιστρατεύεται η ανάλυση Lyapunov, προσαρμοσμένη σε εξισώσεις κατάστασης που συνδυάζουν τον συνεχή χρόνο με δείγματα. Τέλος, η λειτουργία του προτεινόμενου αλγορίθμου επιβεβαιώνεται μέσω αριθμητικής προσομοίωσης για ένα σύστημα πέντε πρακτόρων και συγκρίνεται με τη διακριτοποιημένη λειτουργία του αντίστοιχου αλγορίθμου συνεχούς χρόνου.

Λέξεις Κλειδιά

Πολυπρακτορικά Συστήματα, Αναζήτηση Ισορροπίας Nash, Στατικά Παίγνια με περιορισμούς, Κυρτή Βελτιστοποίηση, Ανάλυση Lyapunov, Δειγματοληψία από γείτονες

Abstract

Game theory is finding increasingly widespread application in multi-agent systems, where the set of actions (strategy) of each agent shapes their individual cost function, and thus determines whether their current state within the system is beneficial or detrimental. In this context, the search for a Nash equilibrium becomes particularly important — that is, the attainment of a compromise condition in which no agent has an incentive to unilaterally deviate from their strategy.

The subject of this thesis is the Nash equilibrium seeking problem in static games with separable coupled constraints on the agents' action sets. Specifically, we study multi-agent systems with continuously differentiable, strictly convex, and radially unbounded cost functions, and linear constraint functions. We consider the interaction graph formed by the agents and develop a distributed equilibrium-seeking algorithm based on the exchange of sampled data between neighboring agents. To prove the convergence of such systems to a Nash equilibrium, Lyapunov analysis is employed, adapted to state equations that combine continuous time with sampled data. Finally, the performance of the proposed algorithm is validated through numerical simulation for a system of five agents and compared with the discretized version of the corresponding continuous-time algorithm.

Keywords

Multi-Agent Systems, Nash Equilibrium Search, Static Games with Constraints, Convex Optimization, Lyapunov Analysis, Neighbor Sampling

στους γονείς μου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επ. Καθηγητή κ. Χαράλαμπο Ψυλλάκη για την ευκαιρία που μου έδωσε να εκπονήσω την διπλωματική μου εργασία σε ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα, καθώς και για τις πολύωρες και πάντα διαφωτιστικές συζητήσεις μας που συνέβαλαν καταλυτικά στην πρόοδο της εργασίας και εμπλούτισαν σημαντικά τις γνώσεις μου. Επίσης, ευχαριστώ τους γονείς μου για την εμπιστοσύνη και την ηθική συμπαράσταση που μου προσφέρουν όλα αυτά τα χρόνια. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους φίλους μου, που στάθηκαν δίπλα μου σε κάθε δυσκολία αυτής της διαδρομής και με τη συντροφιά και την ανεκτίμητη τρέλα τους έδωσαν ξεχωριστό νόημα σε αυτά τα χρόνια.

Αθήνα, Οκτώβριος 2025

Ιωάννα Μπαμπαρούση

Περιεχόμενα

Περίληψη	5
Abstract	7
Ευχαριστίες	11
1 Εισαγωγή	19
1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής	20
1.2 Οργάνωση του τόμου	20
2 Θεωρητικό υπόβαθρο	23
2.1 Θεωρία Γράφων	23
2.2 Θεωρία Πινάκων	24
2.3 Διανυσματική Ανάλυση	24
2.4 Κυρτή Βελτιστοποίηση	25
2.5 Προβολές και Κώνοι (Δυναμικά Συστήματα σε Προβολή)	26
3 Κατανεμημένη Αναζήτηση Ισορροπίας Nash με χρήση γειτονικών δειγμάτων	29
3.1 Ισορροπία Nash- Εισαγωγή	29
3.2 Μοντελοποίηση του Συστήματος Πολλών Πρακτόρων και της μεταξύ τους Επικοινωνίας	30
3.2.1 Πολυπρακτορικό Σύστημα υπό το πρίσμα της Θεωρίας Παιγνίων	30
3.2.2 Τρόπος Αλληλεπίδρασης- Επικοινωνίας	30
3.2.3 Θεμελιώδεις Παραδοχές/Υποθέσεις	31
4 Ανάπτυξη Αλγορίθμου	33
4.1 Θεμελίωση Αλγορίθμου	33
4.2 Διατύπωση Αλγορίθμου	34
4.3 Ανάλυση Ευστάθειας	35
5 Προσομοίωση	45
5.1 Περιγραφή Συστήματος Προσομοίωσης	45
5.2 Σενάριο Σύγκλισης στο προϋπολογισμένο σημείο ισορροπίας Nash	47
5.3 Σενάριο σύγκλισης στο προϋπολογισμένο σημείο ισορροπίας Nash πάνω στο σύνολο των περιορισμών	47
5.4 Σενάριο σύγκλισης με T εκτός επιτρεπτών ορίων	50
5.5 Σενάριο απόκλισης με T εκτός επιτρεπτών ορίων	51

5.6 Σύγκριση με τη διακριτοποιημένη εκδοχή του αλγορίθμου συνεχούς χρόνου .	52
6 Επίλογος	55
6.1 Σύνοψη- Συμπεράσματα	55
6.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις	55
 Παραρτήματα	 57
A' Αποδείξεις	59
A'.1 Απόδειξη $\ I - W\ _F < \sqrt{\frac{N}{2}}$	59
 Βιβλιογραφία	 63

Κατάλογος Σχημάτων

4.1	$f_{min}(A)$ συναρτήσει του T	42
5.1	Γράφος Επικοινωνίας	45
5.2	Θέσεις q_1 έως q_5 στον χρόνο (Σενάριο 1)	48
5.3	Τροχιές των agents (Σενάριο 1)	48
5.4	Θέσεις q_1 έως q_5 στον χρόνο (Σενάριο 2)	49
5.5	Τροχιές των agents (Σενάριο 2)	49
5.6	Θέσεις q_1 έως q_5 στον χρόνο (Σενάριο 3)	50
5.7	Τροχιές των agents (Σενάριο 3)	50
5.8	Θέσεις q_1 έως q_5 στον χρόνο (Σενάριο 4)	51
5.9	Τροχιές των agents (Σενάριο 4)	51
5.10	Διακριτοποιημένος Αλγόριθμος Συνεχούς Χρόνου για $T=0.05$	53
5.11	Αλγόριθμος με χρήση δειγμάτων από γείτονες για $T=0.05$	53

Κατάλογος Πινάκων

5.1	Αρχικές Συνθήκες	46
-----	----------------------------	----

Εισαγωγή

Η έννοια των πολυπρακτορικών (multi-agent) συστημάτων αναφέρεται στην συγκρότηση και τον σχεδιασμό ενός συνόλου αυτόνομων συστημάτων (πρακτόρων) τα οποία αλληλεπιδρούν- συνεργάζονται δυναμικά με στόχο την επίλυση προβλημάτων που είναι πέρα των δυνατοτήτων και της γνώσης ενός μόνο πράκτορα. Βασικά χαρακτηριστικά που διέπουν τις εφαρμογές των πολυπρακτορικών συστημάτων είναι ότι: κανένας πράκτορας δεν έχει πλήρη πληροφορία, δεν υπάρχει κεντρικός έλεγχος στο σύστημα, τα δεδομένα είναι καταναμημένα και οι υπολογισμοί γίνονται με ασύγχρονο τρόπο.

Τα πολυπρακτορικά συστήματα βρίσκουν εφαρμογή σε πλήθος κλάδων που επηρεάζουν άμεσα την καθημερινότητά μας, όπως είναι η διαχείριση της κυκλοφορίας στο οδικό και εναέριο δίκτυο, η βιομηχανική παραγωγή, η διαχείριση ιατρικών δεδομένων και η ψηφιακή διάγνωση, αλλά και η επίλυση προβλημάτων σε ενεργειακά και οικονομικά συστήματα.

Βασικός στόχος στα περισσότερα πολυπρακτορικά συστήματα είναι η επίτευξη συντονισμού σε μια συμφωνία (coordination, consensus [1], [2]) έτσι ώστε να επιλυθούν οι πιθανές διαφορές/συγκρούσεις που ενδεχομένως προκύπτουν κατά τις επιμέρους προσπάθειες για ικανοποίηση των προσωπικών στόχων και συμφερόντων. (Κεφάλαιο 28 του [3], [4], [5], [6], [7], [8])

Η θεωρία παιγνίων παρέχει τα απαραίτητα θεωρητικά εργαλεία για την ανάλυση των αλληλεπιδράσεων μεταξύ πολλών αυτόνομων πρακτόρων σε ένα σύστημα, όπου οι αποφάσεις του ενός έχουν αντίκτυπο στους υπόλοιπους. Στο πλαίσιο αυτό, οι πράκτορες δρουν ταυτόχρονα και αυτόνομα, αλλά τελικά συνδυάζουν τα δεδομένα/αποτελέσματά τους για την επίτευξη των κοινών στόχων του συστήματος. Οι αλληλεπιδράσεις τους έχουν στρατηγικό χαρακτήρα, καθώς το τελικό αποτέλεσμα για κάθε πράκτορα εξαρτάται όχι μόνο από τις δικές του ενέργειες αλλά και από τις επιλογές και τη δράση των υπολοίπων. Μελετώντας και μοντελοποιώντας κατάλληλα αυτές τις αλληλεπιδράσεις, η θεωρία παιγνίων διευκολύνει την πρόβλεψη της συμπεριφοράς των πρακτόρων και δίνει τη δυνατότητα σχεδιασμού κατάλληλων μηχανισμών που οδηγούν στα ζητούμενα συλλογικά αποτελέσματα.

Ο συνδυασμός των πεδίων των πολυπρακτορικών συστημάτων με την θεωρία παιγνίων έχει "ανοίξει" ένα ευρύτατο ερευνητικό πεδίο με ποικίλες εφαρμογές. Ένα από τα χαρακτηριστικότερα παραδείγματα είναι η αναζήτηση σημείων ισορροπίας Nash σε τέτοιου είδους συστήματα [9],[10] και η διερεύνηση εφικτών προϋποθέσεων για τη σύγκλιση στο(/στα) σημείο(/α) αυτό. Για λόγους υπολογιστικής βιωσιμότητας το ερευνητικό ενδιαφέρον εστιάζει στην αναζήτηση σημείων ισορροπίας Nash σε στατικά παίγνια με κυρτές και διαφορίσιμες συναρ-

τήσεις κόστους. Τέτοιου είδους συναρτήσεις ευνοούν την ανάπτυξη αλγορίθμων αναζήτησης κάνοντας χρήση και των κατάλληλων εργαλείων του κλάδου της Κυρτής Βελτιστοποίησης. [11],[12], [13], [14], [15], [16]

Ανάλογα με τα πρωτόκολλα και τους περιορισμούς που διέπουν την επικοινωνία των πρακτόρων, καθώς και την τοπολογία του δικτύου έχει αναπτυχθεί πλήθος αλγορίθμων συνεχούς αλλά και διακριτού χρόνου για την αναζήτηση ισορροπίας Nash. Είναι σαφές σε κάθε περίπτωση ότι η επικοινωνία μεταξύ των πρακτόρων αποτελεί βασική πρόκληση στον σχεδιασμό αυτών των συστημάτων και των αντίστοιχων αλγορίθμων, καθώς διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στον τρόπο ανταλλαγής πληροφοριών και ατομικών εκτιμήσεων μεταξύ των πρακτόρων άρα και στην επίτευξη του απαραίτητου για την ισορροπία consensus.

1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη αλγορίθμου εύρεσης σημείου ισορροπίας Nash σε πολυπρακτορικό σύστημα με την ταυτόχρονη επιβολή περιορισμών στο σύνολο δράσης των παικτών. Αναλυτικότερα, εξετάζεται ένα στατικό παίγνιο στο οποίο ένα σύνολο από N πράκτορες επιχειρεί να συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας Nash (NE), τηρώντας ταυτόχρονα ένα σύνολο διαχωρίσιμων συζευγμένων περιορισμών επιβεβλημένων στα σύνολα δράσης τους. Συνεπώς, εάν το σημείο NE που προκύπτει από τις συναρτήσεις κόστους των παικτών ικανοποιεί τους δοθέντες περιορισμούς, οι παίκτες θα συγκλίνουν ασυμπτωτικά σε αυτό ακριβώς το σημείο· διαφορετικά, θα καταλήγουν σε ένα νέο σημείο NE το οποίο θα βρίσκεται στο όριο του συνόλου περιορισμών.

Βασικό σημείο για την σχεδίαση του αλγορίθμου είναι ο τρόπος που πραγματοποιείται η επικοινωνία στο σύστημα. Ειδικότερα, η διαπρακτορική επικοινωνία έχει τη μορφή ανταλλαγής δειγμάτων μεταξύ γειτονικών πρακτόρων ανά προκαθορισμένο χρονικό διάστημα T . Επομένως, υπεισέρχονται στον συνεχούς χρόνου αλγόριθμο "δειγματοληπτούμενα" στοιχεία διακριτού χρόνου που χρήζουν ειδικής διαχείρισης στην ανάλυση.

Τέλος, γίνεται διερεύνηση των επιτρεπτών ορίων των διαφόρων παραμέτρων του συστήματος μέσα στα οποία είναι επιτεύξιμη η σύγκλιση στο NE με ιδιαίτερη έμφαση στις επιτρεπτές τιμές της περιόδου επικοινωνίας T .

1.2 Οργάνωση του τόμου

Η ενότητα αυτή παρέχει μια πλήρη εικόνα της δομής της παρούσας εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, ο τόμος αυτός οργανώνεται σε έξι κεφάλαια ακολουθώντας την εξής λογική:

- Στο Κεφάλαιο 2 δίνεται το θεωρητικό υπόβαθρο που αξιοποιήθηκε κατά την περάτωση της εργασίας και κατά συνέπεια κρίνεται διαφωτιστικό για την κατανόησή της. Το κεφάλαιο αυτό περιέχει βασικές έννοιες και θεωρήματα από τους κλάδους: Θεωρία Γράφων, Θεωρία Πινάκων, Διανυσματική Ανάλυση, Κυρτή Βελτιστοποίηση και Θεωρία Προβολών και Κώνων.
- Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται αναλυτική περιγραφή του πλαισίου λειτουργίας της υπό εξέταση κατηγορίας συστημάτων καταλήγοντας στις κατάλληλες υποθέσεις που υιοθετούνται

εξ αρχής και ακολουθούνται σε όλη την ανάλυση.

- Στο Κεφάλαιο 4 διατυπώνεται και τυπικά ο αλγόριθμος, γίνεται η εισαγωγή και επεξήγηση των απαραίτητων μεταβλητών και παραμέτρων και αποδεικνύεται η ευστάθεια κατά Lyapunov και η σύγκλιση του συστήματος υπό ικανές συνθήκες που επισημαίνονται.
- Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα αριθμητικής προσομοίωσης σε όλα τα πιθανά σενάρια με στόχο την πρακτική επιβεβαίωση της λειτουργίας του αλγορίθμου και γίνεται σύγκριση με την διακριτοποιημένη εκδοχή του αντίστοιχου αλγορίθμου συνεχούς χρόνου.
- Στο Κεφάλαιο 6 γίνεται αποτίμηση της συνεισφοράς της παρούσας διπλωματικής εργασίας και εξετάζονται ενδεχόμενες μελλοντικές βελτιώσεις και επεκτάσεις.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό υπόβαθρο

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται αναλυτικά βασικά μαθηματικά εργαλεία και έννοιες που αξιοποιήθηκαν στην τεκμηρίωση και την θεμελίωση της διπλωματικής εργασίας. Η παρουσίασή τους κατηγοριοποιείται σε Θεωρία Γράφων, Θεωρία Πινάκων, Διανυσματική Ανάλυση, Κυρτή Βελτιστοποίηση και Θεωρία Προβολών και Κώνων.

2.1 Θεωρία Γράφων

Ορισμός 2.1.1 Γράφος

Ένας γράφος G είναι μια τριπλέτα $G = (V, E, W)$, όπου:

- $V = \{1, \dots, N\}$ είναι το σύνολο των κόμβων,
- $E \subseteq V \times V$ είναι το σύνολο των ακμών και
- $W = [w_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ είναι ο πίνακας γειτνίασης του γράφου για τον οποίο ισχύει $w_{ij} > 0$ αν $(i, j) \in E$, αλλιώς $w_{ij} = 0$.

Το σύνολο $N_i = \{j \in V \mid (j, i) \in E\}$ ονομάζεται το σύνολο των γειτόνων του κόμβου i .

Ορισμός 2.1.2 Μη-Κατευθυνόμενος Γράφος

Ένας γράφος με συμμετρικό πίνακα γειτνίασης, ονομάζεται μη-κατευθυνόμενος:

$$w_{ij} = w_{ji}, \forall i, j \in V. \quad (2.1)$$

Ορισμός 2.1.3 Μονοπάτι

Μονοπάτι από την κορυφή v_p στην κορυφή v_q ενός μη-κατευθυνόμενου γράφου G ορίζεται η ακολουθία των μη επαναλαμβανόμενων κορυφών $v_p, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}, v_q$ που έχουν την ιδιότητα ότι οι ακμές $(v_p, v_{i_1}), (v_{i_1}, v_{i_2}), \dots, (v_{i_n}, v_q)$ ανήκουν στο $E(G)$.

Ορισμός 2.1.4 Συνεκτικός Γράφος

Ένας μη-κατευθυνόμενος γράφος ονομάζεται συνεκτικός αν υπάρχει μονοπάτι για κάθε ζεύγος κόμβων του στο $V(G)$. Διαφορετικά ο γράφος ονομάζεται μη-συνεκτικός.

2.2 Θεωρία Πινάκων

Ορισμός 2.2.1 Ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων $n \times n$. Τότε κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται δεξιό ιδιοδιάνυσμα του μητρώου A αν ικανοποιεί την εξίσωση

$$Ax = \lambda x \quad (2.2)$$

για κάποια (ενδεχομένως μηδενική) μιγαδική τιμή $\lambda \in \mathbb{C}$, η οποία ονομάζεται ιδιοτιμή του πίνακα A που αντιστοιχεί σε αυτό το ιδιοδιάνυσμα x .

Ορισμός 2.2.2 Θετικά ημιορισμένος και ορισμένος πίνακας

Ένας συμμετρικός πίνακας A λέγεται θετικά ημιορισμένος αν η τετραγωνική του μορφή ικανοποιεί:

$$x^T A x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.3)$$

και θετικά ορισμένος αν:

$$x^T A x > 0, \quad \forall x \neq \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

Ορισμός 2.2.3 Στοχαστικός/Διπλά Στοχαστικός πίνακας

Ένας πίνακας $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι στοχαστικός αν:

1. Όλα τα στοιχεία του είναι μη αρνητικά: $w_{ij} \geq 0, \forall i, j \in V$.
2. Το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του πίνακα είναι ίσο με 1:

$$\sum_{j \in [n]} w_{ij} = 1 \quad (2.5)$$

Σε περίπτωση που εκτός από τις παραπάνω συνθήκες ισχύει και ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του πίνακα είναι ίσο με 1, τότε ο πίνακας λέγεται διπλά στοχαστικός.

2.3 Διανυσματική Ανάλυση

Ορισμός 2.3.1 Βαθμίδα (Gradient)

Έστω βαθμωτή συνάρτηση πολλών μεταβλητών $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, \dots, x_m)$. Ως βαθμίδα (gradient) της συνάρτησης f στο σημείο x_0 ορίζουμε το διάνυσμα στήλη που περιέχει όλες τις μερικές παραγώγους της f στο x_0 , αν υπάρχουν, και το συμβολίζουμε ως

$$\nabla f(x_0) \equiv \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} := \text{col} \left(\left(\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|_{x=x_0} \right)_{i \in [m]} \right). \quad (2.6)$$

Ορισμός 2.3.2 *Ιακωβιανός (Jacobian) Πίνακας*

Έστω διανυσματικό πεδίο $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ κάθε συνιστώσα του οποίου είναι μια βαθμωτή συνάρτηση. Ως Ιακωβιανός πίνακας $J_f(x)$ της $f(x) := \text{col}(f_i(x))_{i \in [n]}$ ορίζεται ο πίνακας που περιέχει σε κάθε γραμμή του το gradient της αντίστοιχης συνάρτησης-συνιστώσας της f :

$$J_f(x) := \text{col}\left((\nabla^\top f_i(x))_{i \in [n]}\right). \quad (2.7)$$

Ορισμός 2.3.3 *Διαφορισμότητα [17]*

Ένα διανυσματικό πεδίο $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ θεωρείται διαφορίσιμο/παραγωγίσιμο στο $\mathbb{R}^m$, αν για κάθε x_0 ο Ιακωβιανός του πίνακας $J_f(x_0)$ είναι καλώς ορισμένος και επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - J_f(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0. \quad (2.8)$$

Εφόσον τα παραπάνω ισχύουν, ονομάζουμε τον πίνακα $J_f(x)$ παράγωγο της f .

Ορισμός 2.3.4 *Συνεχής Παραγωγισιμότητα/Ομαλότητα Συνάρτησης*

Ένα διανυσματικό πεδίο $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται k -φορές συνεχώς παραγωγίσιμο ή k -ομαλό, αν και μόνο αν οι k -πρώτες παράγωγοί του είναι συνεχείς. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f ανήκει στην κλάση C^k .

2.4 Κυρτή Βελτιστοποίηση

Αξιοποιούμε τους παρακάτω ορισμούς όπως προκύπτουν από τη μελέτη του [18]

Ορισμός 2.4.1 *Κυρτότητα*

Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται κυρτή αν ισχύει ότι

$$f(ax + (1 - a)y) \leq af(x) + (1 - a)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, a \in [0, 1]. \quad (2.9)$$

Αν η συνάρτηση είναι επίσης παραγωγίσιμη, τότε ισοδύναμα ισχύει ότι

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.10)$$

Ορισμός 2.4.2 *Αυστηρή Κυρτότητα*

Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται αυστηρά κυρτή αν ισχύει:

$$f(ax + (1 - a)y) < af(x) + (1 - a)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ με } x \neq y \text{ και } a \in (0, 1). \quad (2.11)$$

Ορισμός 2.4.3 *Ισχυρή Κυρτότητα*

Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται ισχυρά κυρτή με παράμετρο $\mu > 0$ αν ισχύει ότι

$$f(ax + (1 - a)y) \leq af(x) + (1 - a)f(y) - \frac{1}{2}\mu a(1 - a)\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, a \in [0, 1]. \quad (2.12)$$

Αν η συνάρτηση είναι επίσης παραγωγίσιμη, τότε ισοδύναμα ισχύει ότι

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.13)$$

Ορισμός 2.4.4 Ακτινικά Μη-φραγμένη Συνάρτηση

Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται ακτινικά μη φραγμένη αν ισχύει ότι

$$\|x\| \rightarrow \infty \implies f(x) \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

δηλαδή,

$$\forall c > 0, \exists r > 0 : \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > r\} \implies f(x) > c. \quad (2.15)$$

Ορισμός 2.4.5 Συνέχεια κατά Lipschitz

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και έστω $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Η f ονομάζεται L -Lipschitz συνεχής στο D , εάν υπάρχει θετική σταθερά L τέτοια ώστε

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad (2.16)$$

για οποιαδήποτε $x, y \in D$. Στην περίπτωση που $D = \mathbb{R}^n$ τότε η f καλείται απλώς Lipschitz συνεχής.

Ορισμός 2.4.6 Ισχυρά Μονότονη Απεικόνιση (Strongly Monotone Mapping)

Μία απεικόνιση $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται ισχυρά μονότονη με παράμετρο $\mu > 0$ αν ισχύει ότι

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.17)$$

Ορισμός 2.4.7 Περιορισμένα Ισχυρά Μονότονη Απεικόνιση (Restricted Strongly Monotone Mapping) [19]

Μια απεικόνιση F λέγεται περιορισμένα ισχυρά μονότονη στο $\mathbb{R}^n$ ως προς οποιοδήποτε σημείο ισορροπίας Nash $x^* \in \Omega$ με σταθερά $\mu_r > 0$ εάν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει:

$$\langle F(x) - F(x^*), x - x^* \rangle \geq \mu_r \|x - x^*\|^2.$$

2.5 Προβολές και Κώνοι (Δυναμικά Συστήματα σε Προβολή)

Για την ανάλυση του εξεταζόμενου συστήματος αξιοποιείται η προβολή δυναμικών συστημάτων ώστε να οριοθετηθούν κατάλληλα οι λύσεις των update laws ορισμένων μεταβλητών. Παραθέτουμε, λοιπόν, ορισμένες ιδιότητες και ορισμούς που αφορούν στην προβολή δυναμικών συστημάτων, όπως παρουσιάζονται στα [20], [21] και [22]:

Ορισμός 2.5.1 Κώνος (Ποδηκός, Εφαπτόμενος, Κανονικός)

Ένα υποσύνολο $C \subset \mathbb{R}^n$ είναι κώνος αν $ax \in C$ για κάθε $x \in C$ και $a > 0$.

Δεδομένου ενός κυρτού κώνου C , ο ποδηκός κώνος του C ορίζεται ως:

$$C^- = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 0, \forall x \in C\}. \quad (2.18)$$

Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό σύνολο. Ορίζουμε τον *εφαπτόμενο κώνο* (ή εφαπτόμενο μέσω επαφής) σε ένα σημείο $x \in K$ ως:

$$T_K(x) = \bigcup_{\delta > 0} \frac{1}{\delta}(K - x), \quad (2.19)$$

και τον *κανονικό κώνο* στο σημείο $x \in K$ ως:

$$N_K(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x^* - x \rangle \leq 0, \forall x^* \in K\}. \quad (2.20)$$

Ιδιότητα 1: Για κάθε $x \in K$ ισχύει: $N_K(x)^- = T_K(x)$ και αντιστρόφως $T_K(x)^- = N_K(x)$. Αν το K είναι κλειστό και κυρτό σύνολο, τότε τόσο οι δομές $N_K(x)$ όσο και $T_K(x)$ είναι κλειστοί κυρτοί κώνοι.

Ορισμός 2.5.2 Τελεστής Προβολής

Ο *τελεστής προβολής* (ή απεικόνιση πλησιέστερου στοιχείου) $P_K : \mathbb{R}^n \rightarrow K$ ορίζεται ως το $P_K(x) \in K$ τέτοιο ώστε:

$$\|x - P_K(x)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall y \in K. \quad (2.21)$$

Ιδιότητα 2: Από τον ορισμό του τελεστή προβολής προκύπτει ότι αν $x \in K$ τότε $P_K(x) = x$, ενώ αν $x \notin K$ (K μη κενό, κλειστό και κυρτό σύνολο, όπως ορίστηκε παραπάνω) τότε $P_K(x) \in \partial K$. Η προβολή $P_K(x)$ είναι μοναδικά καθορισμένη για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, συνεχής κατά Lipschitz με σταθερά Lipschitz ίση με 1 και μονοτονική, δηλαδή:

$$\langle P_K(x) - P_K(y), x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.22)$$

Ορισμός 2.5.3 Προβολή Διανύσματος

Η προβολή διανύσματος $v \in \mathbb{R}^n$ σε σημείο $x \in K$ πάνω στο K ορίζεται ως:

$$\Pi_K(x, v) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{P(x + \delta v) - x}{\delta} = P_{T_K(x)}(v). \quad (2.23)$$

Ιδιότητα 3: Ισχύει ότι:

$$\Pi_K(x, v) = v - P_{N_K(x)}(v). \quad (2.24)$$

Εφόσον για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι $P_{N_K(x)}(v) \in N_K(x)$, τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 2.5.1, ισχύει:

$$\forall x^* \in K, \quad \langle P_{N_K(x)}(v), x^* - x \rangle \leq 0. \quad (2.25)$$

Λαμβάνοντας αυτό υπόψη, συμπεραίνουμε ότι:

$$\langle \Pi_K(x, v), x - x^* \rangle \leq \langle v, x - x^* \rangle. \quad (2.26)$$

Ιδιότητα 4: Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό και κυρτό σύνολο και $F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ ένα διανυσματικό πεδίο. Τότε, ένα προβληθέν δυναμικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί από την ακόλουθη προβληθείσα διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x}(t) = \Pi_K(x(t), F(x(t))), \quad x(0) = x_0 \in K. \quad (2.27)$$

Κάθε λύση του παραπάνω συστήματος θα παραμένει εντός του συνόλου περιορισμού K για κάθε $t \geq 0$, διότι στο σύνορο του K ο τελεστής προβολής περιορίζει τη ροή του F ώστε η λύση να παραμείνει στο K .

Κεφάλαιο 3

Κατανεμημένη Αναζήτηση Ισορροπίας Nash με χρήση γειτονικών δειγμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται αναλυτικά το πλαίσιο και οι προδιαγραφές για την ανάπτυξη του αλγορίθμου. Ειδικότερα, διατυπώνεται η έννοια της ισορροπίας Nash και διασαφηνίζονται η μορφή και οι ιδιότητες των συναρτήσεων κόστους και περιορισμών που διέπουν τα υπό μελέτη πολυπρακτορικά συστήματα. Παράλληλα αναλύεται ο τρόπος αλληλεπίδρασης των πρακτόρων και πιο συγκεκριμένα η μεταξύ τους επικοινωνία με τη μορφή ανταλλαγής δειγμάτων.

3.1 Ισορροπία Nash- Εισαγωγή

Καταρχάς, διατυπώνουμε και τυπικά τον ορισμό των στατικών παιγνίων στα οποία θα εστιάσουμε καθώς και τον ορισμό της ισορροπίας Nash.

Ορισμός 3.1.1 Στατικά παίγνια

Ως στατικό ορίζεται το παίγνιο στο οποίο κάθε παίκτης λαμβάνει μία και μοναδική απόφαση χωρίς να έχει γνώση των αποφάσεων των υπόλοιπων παικτών πριν λάβει τη δική του απόφαση. Τέτοια παίγνια συχνά αναφέρονται και ως παίγνια ταυτόχρονων αποφάσεων, καθώς η σειρά με την οποία λαμβάνονται οι αποφάσεις δεν έχει σημασία.

Ορισμός 3.1.2 Ισορροπία Nash

Ένα παίγνιο N παικτών ορίζεται από την τριπλέτα:

$$\Gamma(N, \{J_1, \dots, J_N\}, \mathcal{A}),$$

όπου $J_i : \mathbb{R}^{n^N} \rightarrow \mathbb{R}$, ($i = 1, \dots, N$) είναι οι ατομικές συναρτήσεις κόστους των παικτών, $q_i \in \mathcal{A}_i$ οι ενέργειες τους και το συνολικό σύνολο εφικτών ενεργειών δίνεται ως:

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_N, \quad \text{με } \mathcal{A}_i \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Ένα διάνυσμα $q^* = \text{col}(q_1^*, q_2^*, \dots, q_N^*) \in \mathcal{A}$ αποτελεί σημείο Ισορροπίας Nash (Nash Equilibrium - NE), εάν για κάθε $i \in \{1, \dots, N\}$ και $q_i \in \mathcal{A}_i$ ισχύει:

$$J_i(q_i^*, q_{-i}^*) \leq J_i(q_i, q_{-i}^*),$$

όπου $q_{-i}^* := \text{col}(q_1^*, \dots, q_{(i-1)}^*, q_{(i+1)}^*, \dots, q_N^*)$.

Στην παρούσα εργασία εξετάζονται στατικά παίγνια, στα οποία οι πράκτορες επιδιώκουν να συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας Nash (NE) [23],[24], υπακούοντας ταυτόχρονα σε ένα σύνολο διαχωρίσιμων συζευγμένων περιορισμών που σχετίζονται με τα σύνολα δυνατών ενεργειών τους (feasible action set).

Επομένως, εάν το σημείο NE που προκύπτει από τις συναρτήσεις κόστους ικανοποιεί αυτόματα τους δοσμένους περιορισμούς, τότε οι παίκτες θα συγκλίνουν ασυμπτωτικά στο συγκεκριμένο σημείο. Διαφορετικά, θα οδηγηθούν σε ένα νέο σημείο ισορροπίας, το οποίο θα βρίσκεται επί του ορίου του επιτρεπτού συνόλου (στο σύνορο του περιορισμού).

3.2 Μοντελοποίηση του Συστήματος Πολλών Πρακτόρων και της μεταξύ τους Επικοινωνίας

Έχοντας διατυπώσει το θεωρητικό πλαίσιο του προβλήματος, στο παρόν υποκεφάλαιο παρατίθεται ενδελεχής παρουσίαση της δομής και των αναγκαίων αρχών/παραδοχών που διέπουν την αλληλεπίδραση των πρακτόρων και γενικότερα την εξέλιξη και λειτουργία του συστήματος (παιγνίου).

3.2.1 Πολυπρακτορικό Σύστημα υπό το πρίσμα της Θεωρίας Παιγνίων

Όπως έχει προαναφερθεί, μελετάμε συστήματα που αποτελούνται από N πράκτορες (π.χ. ρομπότ), οι οποίοι συμμετέχουν σε ένα στατικό μη-συνεργατικό παίγνιο. Κάθε πράκτορας (agent) στοχεύει στην ελαχιστοποίηση της ατομικής συνάρτησης κόστους του J_i , η οποία, όμως, εξαρτάται και από τις στρατηγικές των υπόλοιπων πρακτόρων ($J_i(q_i, q_{-i})$). Επιπλέον, σε καθέναν από τους πράκτορες αντιστοιχεί ένα σύνολο επιτρεπτών δράσεων A_i μέσα στον χώρο εξέλιξης του παιγνίου. Συνεπώς, κάθε πράκτορας επιλέγει στρατηγική $q_i \in A_i \subseteq \mathbb{R}^n$, όπου n η διάσταση του διανύσματος θέσης του q_i ($q_i \in \mathbb{R}^n$).

3.2.2 Τρόπος Αλληλεπίδρασης- Επικοινωνίας

Θεωρούμε την διάταξη του προβλήματος ως έναν μη-κατευθυνόμενο γράφο στον οποίο κάθε κορυφή αντιστοιχεί σε έναν agent, ενώ οι ακμές αναπαριστούν την μεταξύ τους επικοινωνία. Ειδικότερα, σύμφωνα με τον πίνακα γειτνίασης του γράφου κάθε πράκτορας γειτνιάζει, άρα και επικοινωνεί, με ορισμένους από τους υπόλοιπους. Θεωρούμε ότι η επικοινωνία αυτή είναι δύσκολο να πραγματοποιείται σε συνεχή (ζωντανό) χρόνο για ευνόητους πρακτικούς λόγους και περιορισμούς. Εκ των πραγμάτων, λοιπόν, δεν μελετάμε την κεντριοποιημένη αλλά την κατανεμημένη αναζήτηση ισορροπίας και συγχρόνως εγείρεται το ζήτημα της χρονικά περιορισμένης ανταλλαγής πληροφοριών (αλληλεπίδρασης).

Όπως γίνεται αντιληπτό, κάθε agent λαμβάνει περιορισμένη πληροφόρηση η οποία αφορά στη θέση των άμεσων γειτόνων του μόνο. Οι πληροφορίες αυτές λαμβάνονται κατά δείγματα, δηλαδή ανά χρονικά διαστήματα T τα οποία καθορίζονται από τις προδιαγραφές του προβλήματος αλλά και από τις τεχνικές προδιαγραφές του υλικού της διάταξης (αισθητήρες κλπ).

Εφόσον, όμως, η επίτευξη της ισορροπίας Nash εξαρτάται από την στρατηγική όλων των παικτών-πρακτόρων, θα πρέπει ο κάθε agent να “κρατάει” και να ανανεώνει κατά την εξέλιξη του παιγνίου μια εκτίμηση για τη θέση όλων των υπολοίπων (ανεξαρτήτως γειτνίασης). Συνεπώς, σε κάθε χρονική στιγμή kT , $k \in \mathbb{Z}$ κάθε πράκτορας θα πρέπει να λαμβάνει όχι μόνο τη θέση των γειτόνων του αλλά και τις εκτιμήσεις τους για τις θέσεις όλων των άλλων πρακτόρων, καθώς και τοπικές μεταβλητές οι οποίες θα αναλυθούν παρακάτω.

3.2.3 Θεμελιώδεις Παραδοχές/Υποθέσεις

Υπόθεση 1η

Η επικοινωνία μεταξύ των πρακτόρων περιγράφεται από έναν μη κατευθυνόμενο και συνεκτικό γράφο $G = (V, E, W)$ με self-loops. Ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης W είναι συμμετρικός και στοχαστικός και τα διαγώνια στοιχεία του ικανοποιούν τη συνθήκη $w_{ii} > \frac{1}{2}$. Οι πράκτορες ανταλλάσσουν με τους γείτονές τους τις μεταβλητές εξόδου τους q_i (π.χ. θέση), μαζί με τις εκτιμήσεις τους για τις εξόδους των άλλων πρακτόρων $q_l^{(i)}$ ($l \neq i$) και άλλες τοπικά υπολογιζόμενες μεταβλητές (τα διανύσματα θ_i).

Υπόθεση 2η

Η συνάρτηση κόστους J_i είναι συνεχώς διαφορίσιμη, αυστηρά κυρτή και ακτινικά μη-φραγμένη ως προς q_i , για κάθε σταθερό $q_{-i} \in \mathbb{R}^{n(N-1)}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Υπόθεση 3η

Η κλίση της συνάρτησης κόστους, $F_{s_i}(q_i, q_{-i}) := \frac{\partial J_i(q_i, q_{-i})}{\partial q_i} \in \mathbb{R}^n$, είναι ομοιόμορφα Lipschitz συνεχής ως προς q_i για κάθε σταθερό $q_{-i} \in \mathbb{R}^{n(N-1)}$, με σταθερά Lipschitz $L_{F_{s_i}} \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Επιπλέον, η F_{s_i} είναι ομοιόμορφα Lipschitz συνεχής ως προς q_{-i} για κάθε σταθερό $q_i \in \mathbb{R}^n$, με σταθερά Lipschitz $L_{-F_{s_i}} \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Υπόθεση 4η

Θεωρούμε ότι υπάρχουν σημεία Ισορροπίας Nash για το παίγνιο $\Gamma(N, \{J_1, \dots, J_N\}, \Omega)$. Η απεικόνιση $F_s : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}$ που ορίζεται ως $F_s(q) := \text{col}(F_{s_1}(q_1, q_{-1}), \dots, F_{s_N}(q_N, q_{-N}))$ είναι περιορισμένα ισχυρά μονότονη στο Ω για κάθε σημείο ισορροπίας Nash $q^* \in \Omega$, με σταθερά $\mu_{F_s} > 0$. Συνεπώς, ισχύει $\langle F_s(q) - F_s(q^*), q - q^* \rangle \geq \mu_{F_s} \|q - q^*\|^2$, $\forall q \in \Omega$.

Υπόθεση 5η

Η συνάρτηση περιορισμού $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη και γραμμική ως προς q_i , $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Θεωρούμε, λοιπόν, $g_i(q_i) = A_i q_i - b_i$, όπου $A_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^m$.

Υπόθεση 6η

Η εφικτή περιοχή (feasible region) $\Omega := \{q \in \mathbb{R}^{nN} \mid \omega(q) \leq \mathbf{0}^m\}$, όπου $\omega(q) := \sum_{i=1}^N g_i(q_i) : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί τη συνθήκη Slater για τη ισχυρή δυαδικότητα (strong duality) του κυρτού προβλήματος βελτιστοποίησης.

Επισήμανση- Παρατήρηση

Εφόσον εργαζόμαστε με γραμμική συναρτήση περιορισμού g_i , η κλίση της συνάρτησης περιορισμού, $G_i(q_i) := \frac{\partial g_i(q_i)}{\partial q_i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, είναι ομοιόμορφα Lipschitz συνεχής στο q_i με σταθερά $L_{G_i} \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Κεφάλαιο 4

Ανάπτυξη Αλγορίθμου

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ο αλγόριθμος εύρεσης ισορροπίας Nash (NE) για τα συστήματα που περιγράψαμε. Αρχικά στοιχειοθετείται η μαθηματική συμπίκνωση σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων και στη συνέχεια γίνεται η ανάλυση της ευστάθειας κατά Lyapunov και κατά συνέπεια η απόδειξη της σύγκλισης του συστήματος σε σημείο NE.

4.1 Θεμελίωση Αλγορίθμου

Ορίζουμε ως $q_{(j)i} \in \mathbb{R}^n$ την εκτίμηση του πράκτορα j για την πραγματική θέση του πράκτορα i και θέτουμε $q_{(i)i} \equiv q_i$. Ορίζουμε, επίσης, ως $q_{(i)} := \text{col}(q_{(i)1}, \dots, q_{(i)N}) \in \mathbb{R}^{nN}$ το σύνολο των N εκτιμήσεων για τον q_i , $q_{-(i)} := \text{col}(q_{(i)1}, \dots, q_{(i)i-1}, q_{(i)i+1}, \dots, q_{(i)N}) \in \mathbb{R}^{n(N-1)}$, και τον συμπαγή πίνακα $Q := [q_{(1)} \cdots q_{(N)}]^T \in \mathbb{R}^{nN \times N}$. Επιπλέον, θεωρούμε ένα στατικό παίγνιο $\Gamma(N, \{J_1, \dots, J_N\}, \Omega)$ με N παίκτες και ενέργειες (actions) $q_i \in \mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση κόστους του κάθε παίκτη i είναι $J_i(q_i, q_{-i}) : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}$, με κλίση (gradient) $F_{s_i}(q_i, q_{-i}) : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Έστω m το πλήθος των περιορισμών που διέπουν τη δράση κάθε παίκτη i και περιγράφονται από τη διανυσματική συνάρτηση: $g_i(q_i) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, με Ιακωβιανό πίνακα: $G_i(q_i) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$. Η ύπαρξη των παραπάνω περιορισμών διαμορφώνει το εφικτό σύνολο ενεργειών ως εξής:

$$\Omega := \{q \in \mathbb{R}^{nN} \mid \omega(q) \leq \mathbf{0}_m\}, \quad \text{όπου} \quad \omega(q) := \sum_{i=1}^N g_i(q_i) : \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^m. \quad (4.1)$$

Όπως επισημαίνεται και στα [25], [26]: Εφόσον ισχύουν οι Υποθέσεις 2, 5 και 6, ένα σημείο q^* είναι σημείο Ισορροπίας Nash του παραπάνω περιορισμένου (constrained) παιγνίου, αν και μόνο αν υπάρχουν δυαδικές μεταβλητές $\bar{\lambda}_i^* \in \mathbb{R}^m$, με $\bar{\lambda}_i^* = \bar{\lambda}^*$, $\forall i \in V$, τέτοιες ώστε το $(q^*, \bar{\lambda}^*)$ να είναι σαγματικό σημείο των συναρτήσεων Lagrange:

$$\mathcal{L}_i(q, \bar{\lambda}) = J_i(q_i, q_{-i}) + \omega(q)^T \cdot \bar{\lambda}_i, \quad \forall i \in V. \quad (4.2)$$

Αναλυτικότερα, πρέπει οι συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker (KKT) να ικανοποιούνται για κάθε $i \in V$:

- **Στασιμότητα (Stationarity):**

$$F_{s_i}(q_i^*, q_{-i}^*) + G_i^T(q_i^*) \cdot \bar{\lambda}_i^* = \mathbf{0}_n$$

- **Πρωταρχική εφικτότητα (Primal feasibility):**

$$\omega(q^*) \leq \mathbf{0}_m$$

- **Δυαδική εφικτότητα (Dual feasibility):**

$$\bar{\hat{\pi}}_i^* \geq \mathbf{0}_m$$

- **Συμπληρωματική χαλαρότητα (Complementary slackness):**

$$\bar{\hat{\pi}}_i^* \odot \omega(q^*) = \mathbf{0}_m$$

Αν επιπλέον ισχύει η [Υπόθεση 4](#), τότε το σημείο Nash q^* είναι μοναδικό ([25], [26]).

Προς διευκόλυνση της ανάλυσης που ακολουθεί ορίζουμε τις παρακάτω βοηθητικές ποσότητες: $F(Q) := \text{blockdiag}(F_1, \dots, F_N) \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$, όπου $F_i(q_i, q_{-(i)}) := \frac{\partial J_i(q_i, q_{-(i)})}{\partial q_i} \in \mathbb{R}^n$, $L := \mathbb{I}_N - W$, $\bar{W} := W \otimes \mathbb{I}_n \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$, $\bar{F} := F + a(\mathbb{I}_{nN} - \bar{W})Q \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$, όπου a : θετική σταθερά $\hat{W} := W \otimes \mathbb{I}_m \in \mathbb{R}^{mN \times mN}$, $g := \text{col}(g_1, \dots, g_N) \in \mathbb{R}^{mN}$, $G_\Lambda := \text{blockdiag}(G_1^T \hat{\pi}_1, \dots, G_N^T \hat{\pi}_N) \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$. Τέλος, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\Delta X = X(t) - X(kT)$

4.2 Διατύπωση Αλγορίθμου

Αρχικά ορίζουμε την συνάρτηση φ με κατάλληλο τρόπο ώστε η χρήση της στις εξισώσεις να συμβάλλει, όπως θα φανεί αργότερα, στην ευστάθεια του αλγορίθμου:

$$\varphi(t) = \lfloor \frac{t}{T} \rfloor - \frac{t}{T} + 1, t \in [kT, (k+1)T].$$

Η εξέλιξη της θέσης του agent i ακολουθεί την εξίσωση:

$$\dot{q}_i = -\sigma \frac{\partial J_i}{\partial q_i} - A_i^\top \hat{\pi}_i - a\sigma \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} (q_i - q_{(j)i}(kT)), t \in [kT, (k+1)T] \quad (4.3)$$

Η εκτίμηση του agent i για τη θέση του agent j ενημερώνεται ως εξής:

$$\dot{q}_{(i)j} = -a\sigma \sum_{l \in \mathcal{N}_i} w_{il} (q_{(i)j} - q_{(l)j}(kT)), t \in [kT, (k+1)T] \quad (4.4)$$

Οι μεταβλητές των περιορισμών $\hat{\pi}_i$ που συμμετέχουν στις εξισώσεις (4.3), (4.4) λαμβάνονται ως εξής:

$$\dot{\hat{\pi}}_i = \Pi_{\mathbb{R}^m_{\geq 0}} \left(\hat{\pi}_i, A_i q_i(t) - b_i - z_i(kT) + \gamma_1 \varphi(t) A_i (q_i(t) - q_i(kT)) - \gamma_5 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} (\hat{\pi}_i(kT) - \hat{\pi}_j(kT)) \right), \quad (4.5)$$

όπου γ_1, γ_5 είναι θετικές σταθερές

Ορίζουμε:

$$\Lambda := \text{col}(\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_N) \in \mathbb{R}^{mN}, \quad z := \text{col}(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^{mN},$$

$$\dot{z} = \hat{L}\Lambda - \hat{L}\Delta\Lambda\gamma_2\varphi(t), \quad z(0) = 0 \quad (4.6)$$

όπου $\hat{L} := (I_{mN} - \hat{W}) \in \mathbb{R}^{mN \times mN}$ και $\hat{W} := W \otimes I_m \in \mathbb{R}^{mN \times mN}$.

Οι εξισώσεις (4.3) και (4.4) μπορούν, επιπλέον, να συμπυκνωθούν στην εξής μορφή:

$$\dot{Q} = -\sigma F - G_\Lambda - a\sigma[(\mathbb{I} - \bar{W})Q(t) + \bar{W}\Delta Q] = -\sigma \bar{F} - G_\Lambda - a\sigma \bar{W}\Delta Q(t) \quad (4.7)$$

Σύμφωνα με την Υπόθεση 3, η απεικόνιση $F_s(q)$ είναι ομοιόμορφα Lipschitz συνεχής με σταθερά $L_{F_s} := \max_i \sqrt{L_{F_{si}}^2 + L_{-F_{si}}^2}$ (Λήμμα 1 του [19]). Σύμφωνα με το Λήμμα 3 του [27], η απεικόνιση $F(Q)$ που περιέχει τις εκτιμήσεις είναι επίσης Lipschitz συνεχής, με σταθερά $L_F \in [\mu_{F_s}, L_{F_s}]$.

Επιπλέον, για τη μονοτονία της εκτεταμένης απεικόνισης $\bar{F}$, από το Λήμμα 3 του [28] προκύπτει ότι αν $a > a^*$, τότε η $\bar{F}$ είναι περιορισμένα ισχυρά μονότονη (restricted strongly monotone) με σταθερά $\mu_{\bar{F}} = \tilde{\eta}_{\min}\{P\}$, όπου:

$$a^* = \frac{(L_{F_s} + L_F)^2 + 4\mu_{F_s}L_F}{4\mu_{F_s}\tilde{\eta}_{\min}(L)} \quad (4.8)$$

και

$$P := \begin{bmatrix} \frac{\mu_{F_s}}{N} & \frac{-L_{F_s} + L_F}{2\sqrt{N}} \\ \frac{-L_{F_s} + L_F}{2\sqrt{N}} & a\tilde{\eta}_{\min}(L) - L_{F_s} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

4.3 Ανάλυση Ευστάθειας

Θεωρούμε την ακόλουθη συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}\|Q - Q^*\|_F^2 + \frac{1}{2}(z - z^*)^\top \hat{L}^+(z - z^*) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\hat{\eta}_i - \hat{\eta}_i^*\|^2 + \frac{\gamma_1}{2} \varphi(t) \|\Delta Q\|_F^2 + \frac{\gamma_2}{2} \varphi(t) \sum_{i=1}^N \|\Delta \hat{\eta}_i\|^2$$

$$+ \gamma_3 \int_{-T}^0 \int_{t+\vartheta}^t \langle \tilde{\Lambda}, (\mathbb{I} - \hat{W})\tilde{\Lambda} \rangle ds d\vartheta + \gamma_4 \int_{-T}^0 \int_{t+\vartheta}^t \langle \Delta\Lambda, (\mathbb{I} - \hat{W})\Delta\Lambda \rangle ds d\vartheta \quad (4.10)$$

με $Q^* := \mathbf{1}_N^\top \otimes q^*$, $\Lambda^* := \text{col}(\hat{\eta}_1^*, \dots, \hat{\eta}_N^*)$, $z^* := \text{col}(z_1^*, \dots, z_N^*) \in \mathbb{R}^{mN}$ και $z_i^* := \text{col}(z_{i1}^*, \dots, z_{im}^*)$ για κάθε $i \in \mathcal{V}$.

Επιπλέον, έστω $\hat{L}^+ \in \mathbb{R}^{mN \times mN}$ ο Moore-Penrose αντίστροφος του πίνακα $\hat{L}$.

Έστω $L_{\bar{F}}$ και L_{G_i} οι σταθερές Lipschitz των συναρτήσεων $\bar{F}$ και G_i , αντίστοιχα. Εφόσον $\hat{L} \geq 0$, θα ισχύει και $\hat{L}^+ \geq 0$.

Από τον ορισμό του z^* και τη συνθήκη συμπληρωματικής χαλαρότητας, ισχύει ότι $\langle \Lambda^*, g^* - z^* \rangle = \langle \Lambda^*, g^* \rangle = 0$ και $\langle g^* - z^* \rangle \leq 0_{mN}$. Επιπλέον, αφού $\Lambda \geq 0_{mN}$, ισχύει επίσης ότι $\langle \Lambda, z^* - g^* \rangle \geq 0$. Κατά συνέπεια, $\langle \Lambda - \Lambda^*, z^* - g^* \rangle \geq 0$.

Προσθέτοντας αυτόν τον όρο στην παράγωγο της V και εφαρμόζοντας τις σχέσεις (4.5), (4.6), (4.7) και την Ιδιότητα 3 του τελεστή προβολής, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} = & \langle \mathcal{Q} - \mathcal{Q}^*, -\sigma(\bar{F} - \bar{F}^*) - (G_\Lambda - G_{\Lambda^*}) \rangle - a\sigma\langle \tilde{\mathcal{Q}}, \bar{W}\Delta\mathcal{Q} \rangle + (z - z^*)^\top \hat{L}^+ \hat{L} \Lambda \\
 & - \gamma_2 \varphi(z - z^*)^\top \hat{L}^+ \hat{L} \Delta\Lambda + (\Lambda - \Lambda^*)^\top (g - g^* - (z(t) - z^*) + \int_{kT}^t \dot{z}(s)ds + \gamma_1 \varphi(g(t) - g(kT)) \\
 & - \gamma_5(\mathbb{I} - \hat{W})(\Lambda - \Lambda^*) + \gamma_5(\mathbb{I} - \hat{W})\Delta\Lambda) + \frac{\gamma_1}{2} \frac{d\varphi}{dt} \|\Delta\mathcal{Q}\|^2 + \gamma_1 \varphi\langle \Delta\mathcal{Q}, -\sigma(\bar{F} - \bar{F}^*) - (G_\Lambda - G_{\Lambda^*}) \rangle \\
 & - a\sigma\gamma_1 \varphi\langle \Delta\mathcal{Q}, \bar{W}\Delta\mathcal{Q} \rangle + \frac{\gamma_2}{2} \frac{d\varphi}{dt} \|\Delta\Lambda\|^2 + \gamma_2 \varphi\Delta\Lambda^\top (g - g^* - (z(t) - z^*) + \int_{kT}^t \dot{z}(s)ds \\
 & + \gamma_1 \varphi(g(t) - g(kT)) - \gamma_5(\mathbb{I} - \hat{W})(\Lambda - \Lambda^*) + \gamma_5(\mathbb{I} - \hat{W})\Delta\Lambda) + \gamma_3 T \tilde{\Lambda}^\top (\mathbb{I} - \hat{W}) \tilde{\Lambda} \\
 & - \gamma_3 \int_{t-T}^t \langle \tilde{\Lambda}, (\mathbb{I} - \hat{W}) \tilde{\Lambda} \rangle ds + \gamma_4 T \Delta\Lambda^\top (\mathbb{I} - \hat{W}) \Delta\Lambda - \gamma_4 \int_{t-T}^t \Delta\Lambda^\top (\mathbb{I} - \hat{W}) \Delta\Lambda ds \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Για τις ανάγκες της ανάλυσης εισάγουμε τα κάτωθι λήμματα:

Λήμμα 4.1. Για το z όπως ορίζεται από τη σχέση (4.6), ισχύει ότι

$$z^\top \hat{L}^+ \hat{L} = z^\top I_{mN}$$

όπου $\hat{L}^+$ είναι ο αντίστροφος Moore-Penrose του πίνακα $\hat{L}$.

Απόδειξη. Ισχύει ότι $(I_{mN} - \hat{W}) \equiv L \otimes I_m := \hat{L} \in \mathbb{R}^{mN \times mN}$, όπου L είναι ο Λαπλασιανός πίνακας που αντιστοιχεί στο γράφο G . Τότε, η εξίσωση (4.6) μπορεί να επαναγραφεί ως $\dot{z} = \hat{L}(\Lambda - \Delta\Lambda\gamma_2\varphi(t))$. Αφού ο γράφος είναι συνεκτικός, ισχύει ότι: $(1_N^\top \otimes I_m)\hat{L} = 0$ και επομένως $(1_N^\top \otimes I_m)\dot{z} = 0$. Σαν αποτέλεσμα, επειδή $z(0) = 0$, θα ισχύει επίσης ότι $(1_N^\top \otimes I_m)z(t) = 0$, $\forall t \in [0, \infty)$. Από το [26] έχουμε ότι $\hat{L}^+ \hat{L} = I_{mN} - \frac{1}{N}(1_N 1_N^\top \otimes I_m)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα που αφορούν τους πίνακες $\hat{L}$, $\hat{L}^+$ και το διάνυσμα z , η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώνεται. $\square$

Λήμμα 4.2. Ισχύει ότι:

$$\langle G_\Lambda - G_{\Lambda^*}, \mathcal{Q}^* - \mathcal{Q} \rangle + (\Lambda - \Lambda^*)^\top (g - g^*) = 0,$$

g^* , Λ^* και G_{Λ^*} είναι τα διανύσματα g , Λ και ο πίνακας G_Λ στην κατάσταση ισορροπίας Nash (NE) του συστήματος, αντίστοιχα.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\Lambda^\top g(q)$ είναι γραμμική ως προς q , αφού g είναι γραμμική και $\Lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{mN}$.

Άρα ισχύει η εξής ταυτότητα:

$$\langle G_\Lambda, \mathcal{Q}^* - \mathcal{Q} \rangle + \Lambda^\top g(\mathcal{Q}) - \Lambda^\top g(\mathcal{Q}^*) = 0.$$

Ομοίως, η συνάρτηση $(\Lambda^*)^\top g(q)$ είναι επίσης γραμμική ως προς q , και συνεπώς:

$$\langle G_{\Lambda^*}, \mathcal{Q} - \mathcal{Q}^* \rangle + (\Lambda^*)^\top g(\mathcal{Q}^*) - (\Lambda^*)^\top g(\mathcal{Q}) = 0.$$

Αθροίζοντας τις δύο παραπάνω ταυτότητες προκύπτει η ζητούμενη σχέση :

$$\langle G_\Lambda - G_{\Lambda^*}^*, \mathcal{Q}^* - \mathcal{Q} \rangle + (\Lambda - \Lambda^*)^\top (g(\mathcal{Q}) - g(\mathcal{Q}^*)) = 0.$$

□

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω ανισότητες, καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω λήμματα και τις σχέσεις $\|g - g^*\| \leq L_g \|\tilde{\mathcal{Q}}\|$, $\langle F_s(q) - F_s(q^*), q - q^* \rangle \geq \mu_{F_s} \|q - q^*\|^2$, προκύπτει :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\sigma \mu_{\tilde{F}} \|\tilde{\mathcal{Q}}\|^2 - a\sigma \langle \tilde{\mathcal{Q}}, \tilde{W} \Delta \mathcal{Q} \rangle + \tilde{\Lambda}^\top \int_{kT}^t \dot{z}(s) ds - \gamma_5 \tilde{\Lambda}^\top (\mathbb{I} - \hat{W}) \tilde{\Lambda} + \gamma_5 \tilde{\Lambda}^\top (\mathbb{I} - \hat{W}) \Delta \Lambda \\ & + \frac{\gamma_1}{2} \frac{d\varphi}{dt} \|\Delta \mathcal{Q}\|^2 + \gamma_1 \varphi \sigma L_{\tilde{F}} \|\Delta \mathcal{Q}\| \|\tilde{\mathcal{Q}}\| - a\sigma \gamma_1 \varphi \langle \Delta \mathcal{Q}, \tilde{W} \Delta \mathcal{Q} \rangle + \frac{\gamma_2}{2} \frac{d\varphi}{dt} \|\Delta \Lambda\|^2 + \gamma_2 \varphi L_g \|\Delta \Lambda\| \|\tilde{\mathcal{Q}}\| \\ & + \gamma_2 \varphi \Delta \Lambda^\top \int_{kT}^t \dot{z}(s) ds + \gamma_1 \gamma_2 \varphi^2 L_g \|\Delta \Lambda\| \|\Delta \mathcal{Q}\| - \gamma_2 \varphi \gamma_5 \Delta \Lambda^\top (\mathbb{I} - \hat{W}) \tilde{\Lambda} + \gamma_2 \varphi \gamma_5 \Delta \Lambda^\top (\mathbb{I} - \hat{W}) \Delta \Lambda \\ & + \gamma_3 T \tilde{\Lambda}^\top (\mathbb{I} - \hat{W}) \tilde{\Lambda} + \gamma_4 T \Delta \Lambda^\top (\mathbb{I} - \hat{W}) \Delta \Lambda - \gamma_3 \int_{t-T}^t \tilde{\Lambda}^\top (\mathbb{I} - \hat{W}) \tilde{\Lambda} ds - \gamma_4 \int_{t-T}^t \Delta \Lambda^\top (\mathbb{I} - \hat{W}) \Delta \Lambda ds \end{aligned} \quad (4.12)$$

Αναπτύσσουμε τους εξής επιμέρους όρους :

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}^\top \int_{kT}^t \dot{z}(s) ds &= \tilde{\Lambda}^\top \left(\int_{kT}^t \hat{L} \tilde{\Lambda}(s) ds - \gamma_2 \int_{kT}^t \varphi(s) \hat{L} \Delta \Lambda ds \right) = \tilde{\Lambda}^\top \int_{kT}^t (\mathbb{I} - \hat{W}) (\tilde{\Lambda}(s) - \gamma_2 \varphi(s) \Delta \Lambda(s)) ds \\ &= \tilde{\Lambda}^\top (\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2} \int_{kT}^t (\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2} (\tilde{\Lambda}(s) - \gamma_2 \varphi(s) \Delta \Lambda(s)) ds \\ &\leq \frac{\epsilon_1}{2} \tilde{\Lambda}^\top (\mathbb{I} - \hat{W}) \tilde{\Lambda} + \frac{1}{2\epsilon_1} \left\| \int_{kT}^t (\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2} \tilde{\Lambda}(s) ds \right\|^2 + \frac{\epsilon_2}{2} \tilde{\Lambda}^\top (\mathbb{I} - \hat{W}) \tilde{\Lambda} \\ &\quad + \frac{\gamma_2^2}{2\epsilon_2} \left\| \int_{kT}^t \varphi(s) (\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2} \Delta \Lambda(s) ds \right\|^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 \varphi \Delta \Lambda^\top \int_{kT}^t \dot{z}(s) ds &= \gamma_2 \varphi \Delta \Lambda^\top \int_{kT}^t \hat{L} \tilde{\Lambda}(s) ds - \gamma_2^2 \varphi \Delta \Lambda^\top \int_{kT}^t \varphi(s) \hat{L} \Delta \Lambda(s) ds \\ &\leq \gamma_2 \varphi \Delta \Lambda^\top (\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2} \int_{kT}^t (\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2} \tilde{\Lambda}(s) ds \\ &\quad - \gamma_2^2 \varphi \Delta \Lambda^\top (\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2} \int_{kT}^t \varphi(s) (\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2} \Delta \Lambda(s) ds \\ &\leq \gamma_2 \varphi \frac{\epsilon_3}{2} \Delta \Lambda^\top (\mathbb{I} - \hat{W}) \Delta \Lambda + \frac{\gamma_2 \varphi}{2\epsilon_3} \left\| \int_{kT}^t (\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2} \tilde{\Lambda}(s) ds \right\|^2 + \frac{\gamma_2^2 \varphi \epsilon_4}{2} \Delta \Lambda^\top (\mathbb{I} - \hat{W}) \Delta \Lambda \\ &\quad + \frac{\gamma_2^2 \varphi}{2\epsilon_4} \left\| \int_{kT}^t \varphi(s) (\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2} \Delta \Lambda(s) ds \right\|^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz λαμβάνουμε :

$$\left\| \int_{kT}^t (\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2} \tilde{\Lambda}(s) ds \right\|^2 \leq T \int_{kT}^t \tilde{\Lambda}^\top(s) (\mathbb{I} - \hat{W}) \tilde{\Lambda}(s) ds$$

$$\left\| \int_{kT}^t \varphi(s)(\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2} \Delta \Lambda(s) ds \right\|^2 \leq T \int_{kT}^t \Delta \Lambda^T(s)(\mathbb{I} - \hat{W}) \Delta \Lambda(s) ds$$

Επομένως, εάν ισχύουν οι ανισότητες:

$$\gamma_3 \geq \frac{T}{2\epsilon_1} + \frac{T\gamma_2}{2\epsilon_3} \quad (4.15)$$

$$\gamma_4 \geq \frac{T\gamma_2^2}{2\epsilon_2} + \frac{T\gamma_2^2}{2\epsilon_4} \quad (4.16)$$

Τότε:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\sigma\mu_{\bar{F}}\|\tilde{Q}\|^2 + a\sigma\|\tilde{Q}\|\|\tilde{W}\|\|\Delta Q\| + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}\|(\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2}\tilde{\Lambda}\|^2 - \gamma_5\|(\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2}\tilde{\Lambda}\|^2 \\ & + \gamma_5\|(\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2}\tilde{\Lambda}\|\|(\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2}\|\|\Delta \Lambda\| + \frac{\gamma_1}{2}\frac{d\varphi}{dt}\|\Delta Q\|^2 + \gamma_1\varphi\sigma L_{\bar{F}}\|\Delta Q\|\|\tilde{Q}\| \\ & - a\sigma\gamma_1\varphi\bar{\eta}_{\min}(W)\|\Delta Q\|^2 + \frac{\gamma_2}{2}\frac{d\varphi}{dt}\|\Delta \Lambda\|^2 + \gamma_2\varphi L_g\|\Delta \Lambda\|\|\tilde{Q}\| + \|\mathbb{I} - \hat{W}\|\frac{\gamma_2\varphi}{2}(\epsilon_3 + \gamma_2\epsilon_4)\|\Delta \Lambda\|^2 \\ & + \gamma_1\gamma_2\varphi^2 L_g\|\Delta \Lambda\|\|\Delta Q\| + \gamma_2\gamma_5\varphi\|\Delta \Lambda\|\|(\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2}\|\|(\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2}\tilde{\Lambda}\| \\ & + \gamma_2\gamma_5\varphi\|\mathbb{I} - \hat{W}\|\|\Delta \Lambda\|^2 + \gamma_3 T\|(\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2}\tilde{\Lambda}\|^2 + \gamma_4 T\|\mathbb{I} - \hat{W}\|\|\Delta \Lambda\|^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Η (4.17) γράφεται εναλλακτικά με τετραγωνική μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \begin{bmatrix} \|\tilde{Q}\| & \|\Delta Q\| & \|(\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2}\tilde{\Lambda}\| & \|\Delta \Lambda\| \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \sigma\mu_{\bar{F}} & -\frac{a\sigma\|\tilde{W}\| - \gamma_1\sigma L_{\bar{F}}}{2} & 0 & -\frac{\gamma_2 L_g}{2} \\ * & -\frac{\gamma_1}{2}\frac{d\varphi}{dt} + a\sigma\gamma_1\varphi\bar{\eta}_{\min}(W) & 0 & \frac{\gamma_1\gamma_2\varphi^2 L_g}{2} \\ * & * & \gamma_5 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} - \gamma_3 T & -\frac{\gamma_5\|(\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2}\|}{2} - \frac{\gamma_5\varphi\gamma_2\|(\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2}\|}{2} \\ * & * & * & -\frac{\gamma_2}{2}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{\gamma_2\varphi\|\mathbb{I} - \hat{W}\|(\epsilon_3 + \gamma_2\epsilon_4)}{2} - \gamma_2\gamma_5\varphi\|\mathbb{I} - \hat{W}\| - \gamma_4 T\|\mathbb{I} - \hat{W}\| \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \|\tilde{Q}\| \\ \|\Delta Q\| \\ \|(\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2}\tilde{\Lambda}\| \\ \|\Delta \Lambda\| \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, θα πρέπει ο πίνακας:

$$M := \begin{bmatrix} \sigma\mu_{\bar{F}} & -\frac{a\sigma\|\tilde{W}\| - \gamma_1\sigma L_{\bar{F}}}{2} & 0 & -\frac{\gamma_2 L_g}{2} \\ * & -\frac{\gamma_1}{2}\frac{d\varphi}{dt} + a\sigma\gamma_1\varphi\bar{\eta}_{\min}(W) & 0 & \frac{\gamma_1\gamma_2\varphi^2 L_g}{2} \\ * & * & \gamma_5 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} - \gamma_3 T & -\frac{\gamma_5\|(\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2}\|}{2} - \frac{\gamma_5\varphi\gamma_2\|(\mathbb{I} - \hat{W})^{1/2}\|}{2} \\ * & * & * & -\frac{\gamma_2}{2}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{\gamma_2\varphi\|\mathbb{I} - \hat{W}\|(\epsilon_3 + \gamma_2\epsilon_4)}{2} - \gamma_2\gamma_5\varphi\|\mathbb{I} - \hat{W}\| - \gamma_4 T\|\mathbb{I} - \hat{W}\| \end{bmatrix}$$

να είναι θετικά ορισμένος.

Έστω για διευκόλυνση της ανάλυσης:

$$M := \begin{bmatrix} A_{3 \times 3} & b_{3 \times 1} \\ b^T & c_{1 \times 1} \end{bmatrix}$$

Για $A > 0$:

1. $\sigma\mu_{\bar{F}} > 0$, που ισχύει

$$2. \begin{bmatrix} \sigma\mu_{\bar{F}} & -\frac{a\sigma\|\bar{W}\|}{2} - \frac{\gamma_1\sigma L_{\bar{F}}\phi}{2} \\ * & -\frac{\gamma_1}{2}\frac{d\phi}{dt} + \phi a\sigma\gamma_1\hat{J}_{min}(W) \end{bmatrix} > 0 \Rightarrow \sigma\mu_{\bar{F}} \left(-\frac{\gamma_1}{2}\frac{d\phi}{dt} + \phi a\sigma\gamma_1\hat{J}_{min}(W) \right) - \sigma \left(\frac{a\sigma\|\bar{W}\|}{2} + \frac{\gamma_1\sigma\phi L_{\bar{F}}}{2} \right)^2 > 0$$

$$0 \Rightarrow \mu_{\bar{F}} \left(\frac{\gamma_1}{2T} + \phi a\sigma\gamma_1\hat{J}_{min}(W) \right) > \sigma^2 \left(\frac{a\|\bar{W}\|}{2} + \frac{\gamma_1\phi L_{\bar{F}}}{2} \right)^2$$

Για κατάλληλα μικρό σ , υπάρχει T τέτοιο ώστε να ισχύει η παραπάνω ανισότητα.

$$3. \gamma_5 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} - \gamma_3 T > 0$$

Επιλέγουμε $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\gamma_5}{4}$ και λαμβάνουμε:

$$\frac{\gamma_5}{2} - \gamma_3 T > 0 \Rightarrow \gamma_3 < \frac{\gamma_5}{2T} \quad (4.18)$$

Η (4.15) γίνεται:

$$\gamma_3 \geq \frac{T}{2\gamma_5/4} + \frac{T\gamma_2}{2\epsilon_3} = \frac{2T}{\gamma_5} + \frac{T\gamma_2}{2\epsilon_3} \stackrel{(4.18)}{\Rightarrow} \frac{\gamma_5}{2T} > \frac{2T}{\gamma_5} \Rightarrow \gamma_5 > 2T \quad (4.19)$$

Από τον συνδυασμό των παραπάνω σχέσεων προκύπτει ότι

$$\frac{2T}{\gamma_5} + \frac{T\gamma_2}{2\epsilon_3} \leq \gamma_3 < \frac{\gamma_5}{2T} \quad (4.20)$$

και επιλέγουμε

$$\gamma_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{2T}{\gamma_5} + \frac{\gamma_2 T}{2\epsilon_3} + \frac{\gamma_5}{2T} \right) \quad (4.21)$$

Τελικά, θέτοντας $\epsilon_3 = 1$:

$$\gamma_3 = \frac{T}{\gamma_5} + \frac{\gamma_2 T}{4} + \frac{\gamma_5}{4T} \quad (4.22)$$

Επομένως, και από την (4.20) λαμβάνουμε:

$$\frac{2T}{\gamma_5} + \frac{T\gamma_2}{2\epsilon_3} < \frac{\gamma_5}{2T} \stackrel{\epsilon_3=1}{\Rightarrow} \left(\frac{\gamma_5}{2T} \right)^2 - \frac{\gamma_2 T}{2} \left(\frac{\gamma_5}{2T} \right) - 1 > 0.$$

$$\Delta = \left(\frac{\gamma_2 T}{2} \right)^2 + 4 = \frac{(\gamma_2 T)^2}{4} + 4 > 0.$$

$$\frac{\gamma_5}{2T} > \frac{\gamma_2 T}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\gamma_2 T)^2}{4} + 4}$$

Επιλέγουμε, λοιπόν, το γ_5 :

$$\gamma_5 = 1.01T \left(\frac{\gamma_2 T}{2} + \sqrt{\frac{(\gamma_2 T)^2}{4} + 4} \right) \quad (4.23)$$

Έστω, επίσης, ότι επιλέγουμε

$$\gamma_4 = \frac{T\gamma_2^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_4} \right) \quad (4.24)$$

Με τις παραπάνω επιλογές εξασφαλίζεται η ισχύς των ανισοτήτων (4.15), (4.16) και της 3ης συνθήκης για $A > 0$.

Έχοντας εξασφαλίσει $A > 0$, χρησιμοποιούμε το Schur Complement για να εξασφαλίσουμε

και ότι ολόκληρος ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος:

$$c > 0 \quad \text{και} \quad A - \frac{1}{c}bb^T > 0 \implies A > \frac{1}{c}bb^T$$

$$\begin{aligned} c > 0 &\implies \frac{\gamma_2}{2T} - \frac{\gamma_2\varphi\|\mathbb{I} - \hat{W}\|(\epsilon_3 + \gamma_2\epsilon_4)}{2} - \gamma_2\gamma_5\varphi\|\mathbb{I} - \hat{W}\| - \gamma_4T\|\mathbb{I} - \hat{W}\| > 0 \implies \\ &\implies \frac{\gamma_2}{2T} > \left(\frac{\gamma_2\varphi(\epsilon_3 + \gamma_2\epsilon_4)}{2} + \gamma_2\gamma_5\varphi + \gamma_4T \right) \|\mathbb{I} - \hat{W}\| \end{aligned} \quad (4.25)$$

Δεδομένων των $\varphi < 1$, $\epsilon_4 = \frac{\gamma_5}{4}$, $\epsilon_3 = 1$ και της σχέσης $\|I - W\| < \sqrt{0.5N}$, όπου N το πλήθος των agents (Απόδειξη: [Α'.1](#)) λαμβάνουμε την ακόλουθη (συντηρητική) συνθήκη:

$$\frac{\gamma_2}{2T} > \left(\frac{\gamma_2(1 + \gamma_2\frac{\gamma_5}{4})}{2} + \gamma_2\gamma_5 + \gamma_4T \right) \|\mathbb{I} - \hat{W}\| \implies \frac{\gamma_2}{2T} > \left(\gamma_2(\gamma_5(1 + \frac{\gamma_2}{8}) + \frac{1}{2}) + \gamma_4T \right) \sqrt{0.5Nm} \quad (4.26)$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της (4.26) είναι φθίνουσα συνάρτηση του T και καθώς $T \rightarrow 0$ τείνει στο ∞ . Αντίθετα, το δεξί μέλος είναι αύξουσα συνάρτηση του T με πεπερασμένη τιμή για $T = 0$. Άρα $\exists T^*$ τέτοιο ώστε το αριστερό μέλος να ισούται με το δεξί μέλος της ανισότητας. Επομένως, $\forall T \in [0, T^*]$ ισχύει η ανισότητα (4.26).

Επανερχόμαστε, λοιπόν, στην σχέση του Schur Complement που εκκρεμεί: $A > \frac{1}{c}bb^T$.

$$\mathbf{bb}^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \gamma_2^2 L_g^2 & -\gamma_1 \gamma_2^2 \varphi^2 L_g^2 & \gamma_2 \gamma_5 L_g (1 + \varphi \gamma_2) \|(I - \hat{W})^{1/2}\| \\ * & \gamma_1^2 \gamma_2^2 \varphi^4 L_g^2 & -\gamma_1 \gamma_2 \gamma_5 \varphi^2 L_g (1 + \varphi \gamma_2) \|(I - \hat{W})^{1/2}\| \\ * & * & \gamma_5^2 (1 + \varphi \gamma_2)^2 \|(I - \hat{W})^{1/2}\|^2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι το $\mathbf{bb}^T$ είναι ανάλογο του γ_2^2 , όπως επίσης και ότι το β είναι φραγμένο (λόγω του $0 < \varphi < 1$). Η ζητούμενη σχέση γράφεται και ως εξής: $c(T) > \frac{\sup\|\mathbf{bb}^T\|}{\beta_{\min}(A)} \implies$

$$\beta_{\min}(A) \cdot c(T) > \sup_{\varphi} \|\mathbf{bb}^T\| \quad (4.27)$$

Με δεδομένο τον πίνακα A όπως ορίστηκε παραπάνω:

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_{\mu_{\bar{F}}} & -\frac{a\sigma\|\bar{W}\| - \gamma_1\sigma L_{\bar{F}}}{2} & 0 \\ * & -\frac{\gamma_1}{2} \frac{d\varphi}{dt} + a\sigma\gamma_1\varphi\beta_{\min}(W) & 0 \\ * & * & \gamma_5 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} - \gamma_3 T \end{bmatrix}$$

βρίσκουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι η $\beta_1 = \gamma_5 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} - \gamma_3 T \stackrel{\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\gamma_5}{4}}{=} \frac{3}{4}\gamma_5 - \gamma_3 T = (2.02 * \frac{3}{4} - \gamma_3)T$ (για T αρκετά μικρό) καθώς και οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{\mu_{\bar{F}}} & -\frac{a\sigma\|\bar{W}\| - \gamma_1\sigma L_{\bar{F}}}{2} \\ -\frac{a\sigma\|\bar{W}\| - \gamma_1\sigma L_{\bar{F}}}{2} & -\frac{\gamma_1}{2} \frac{d\varphi}{dt} + a\sigma\gamma_1\varphi\beta_{\min}(W) \end{bmatrix} \stackrel{\text{'Εστω}}{=} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A_1 υπολογίζονται ως εξής:

$$\hat{\lambda}_{1,2}(A_1) = \frac{\sigma\mu_{\bar{F}} + \frac{\gamma_1}{2T} + a\sigma\gamma_1\varphi\hat{\lambda}_{\min}(W)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sigma\mu_{\bar{F}} - \frac{\gamma_1}{2T} - a\sigma\gamma_1\varphi\hat{\lambda}_{\min}(W)\right)^2 + 4\left(\frac{a\sigma\|\bar{W}\| - \gamma_1\sigma L_{\bar{F}}}{2}\right)^2}$$

Επειδή, όμως, μας ενδιαφέρει η ελάχιστη ιδιοτιμή, εστιάζουμε στην

$$\hat{\lambda}_{\min}(A_1) = \frac{\sigma\mu_{\bar{F}} + \frac{\gamma_1}{2T} + a\sigma\gamma_1\varphi\hat{\lambda}_{\min}(W)}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\sigma\mu_{\bar{F}} - \frac{\gamma_1}{2T} - a\sigma\gamma_1\varphi\hat{\lambda}_{\min}(W)\right)^2 + 4\left(\frac{a\sigma\|\bar{W}\| - \gamma_1\sigma L_{\bar{F}}}{2}\right)^2}$$

ή

$$\hat{\lambda}_{\min}(A_1) = \frac{a_1 + a_3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 - a_3)^2 + 4a_2^2}$$

Για $T \rightarrow 0^+$:

- $a_3 \rightarrow \infty$
- a_1, a_2 :πεπερασμένα
- $a_1 + a_3 \rightarrow \infty$
- $(a_1 - a_3)^2 + 4a_2^2 \rightarrow a_3^2 \quad (a_3 \gg a_1, a_2)$

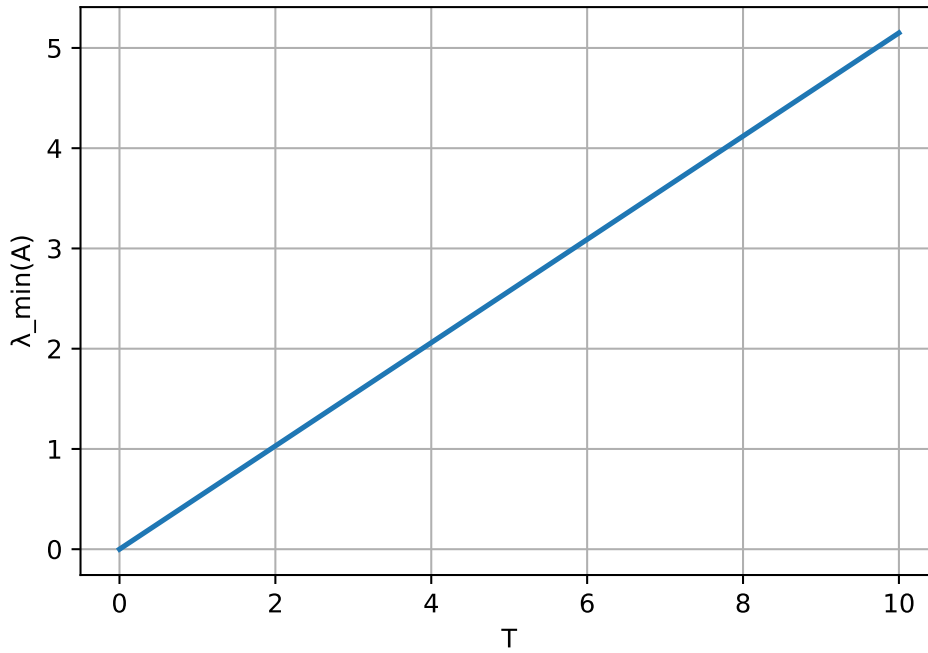
Άρα $\sqrt{(a_1 - a_3)^2 + 4a_2^2} \sim \sqrt{a_3^2} = |a_3| = a_3 (a_3 > 0 \text{ για } T \rightarrow 0)$ Συνεπώς:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \hat{\lambda}_{\min}(A_1) = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{a_1 + a_3}{2} - \frac{a_3}{2} \right) = \frac{a_1}{2} = \frac{\sigma\mu_{\bar{F}}}{2}$$

Συνολικά, λοιπόν, λαμβάνουμε $\hat{\lambda}_{\min}(A) = \min(\hat{\lambda}_{\min}(A_1), (2.02 * \frac{3}{4} - \gamma_3)T)$.

Λαμβάνοντας υπόψη την (4.23) παρατηρούμε ότι για $T \rightarrow 0$ έχουμε $\gamma_5 \rightarrow 0$, όπως επίσης $\frac{\gamma_5}{T} \rightarrow \sim 2$ και σύμφωνα και με την (4.22) τελικά προκύπτει:

$$\hat{\lambda}_{\min}(A) = \min\left(\frac{\sigma\mu_{\bar{F}}}{2}, (2.02 * \frac{3}{4} - \gamma_3)T\right) = (2.02 * \frac{3}{4} - \gamma_3)T \approx 0.515T \quad (\text{για } T \text{ αρκετά μικρό})$$



Σχήμα 4.1: $\lambda_{\min}(A)$ συναρτήσει του T

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε: $\lambda_{\min}(A) \rightarrow (2.02 \cdot \frac{3}{4} - \gamma_3)T$, $c(T) \rightarrow \infty$ με ρυθμό $\frac{\gamma_2}{2T}$ και $bb^T = k \cdot \gamma_2^2$, όπου k θετική σταθερά. Συνεπώς, για μικρό T η (4.27) ικανοποιείται αν:

$$0.515 \cdot T \cdot \frac{\gamma_2}{2T} > \sup_{\varphi} \|bb^T\| \xrightarrow{bb^T = k \cdot \gamma_2^2} 0.2575\gamma_2 > k \cdot \gamma_2^2 \implies \gamma_2 < \frac{0.2575}{k}$$

Επομένως, με τις ανωτέρω επιλογές παραμέτρων και $\forall \gamma_2 \in (0, \frac{0.2575}{k})$ και $\forall T \in [0, T^*]$ ισχύουν οι ικανές συνθήκες ώστε $\dot{V} < 0$.

Από την τετραγωνική μορφή της (4.17) γνωρίζουμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov $V(t)$ δίνεται ως εξής:

$$\dot{V}(t) \leq -z^T(t)Mz(t),$$

όπου

$$z(t) := \begin{bmatrix} \|\tilde{Q}(t)\| \\ \|\Delta Q(t)\| \\ \|(I - W)^{1/2} \tilde{\Lambda}(t)\| \\ \|\Delta \Lambda(t)\| \end{bmatrix}, \quad M > 0.$$

Έχοντας εξασφαλίσει ότι M :θετικά ορισμένος πίνακας, λαμβάνουμε:

$$z^T M z \geq \lambda_{\min}(M) \|z\|^2,$$

και κατά συνέπεια ορίζουμε :

$$\Phi(t) := z^T(t)Mz(t) \geq 0.$$

Από την παραπάνω σχέση για το $\dot{V}$, έχουμε:

$$\dot{V}(t) \leq -\Phi(t).$$

Επειδή $V(t) \geq 0$ και φθίνουσα, είναι φραγμένη κάτω και συνεπώς συγκλίνει, δηλαδή $V(t) \rightarrow V_\infty$. Άρα:

$$\int_0^\infty \Phi(t) dt \leq V(0) - V_\infty < \infty \Rightarrow \Phi(t) \in \mathcal{L}_1.$$

Επίσης, τα σήματα που απαρτίζουν το $z(t)$ είναι ομαλές και φραγμένες συναρτήσεις του χρόνου, οπότε η $\Phi(t)$ είναι συνεχής και επιπλέον *ομοιόμορφα συνεχής*.

Εφόσον, λοιπόν, πληρούνται οι προϋποθέσεις του Λήμματος του Barbalat:

$$\Phi(t) \in \mathcal{L}_1 \quad \text{και} \quad \Phi(t) \text{ ομοιόμορφα συνεχής,}$$

εφαρμόζουμε το λήμμα και καταλήγουμε:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

Δηλαδή:

$$\|\tilde{Q}(t)\| \rightarrow 0, \quad \|\Delta Q(t)\| \rightarrow 0, \quad \|(I - \hat{W})^{1/2} \tilde{\Lambda}(t)\| \rightarrow 0, \quad \|\Delta \Lambda(t)\| \rightarrow 0.$$

Συνεπώς, αποδεικνύεται η ασυμπτωτική σύγκλιση του συστήματος στο σημείο ισορροπίας Nash.

Η ανάλυση που προηγήθηκε συνοψίζεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα

Θεωρούμε τον κατανεμημένο αλγόριθμο ευρεσης ισορροπίας Nash σε στατικό παίγνιο με περιορισμούς που περιγράφεται από τις (4.3)-(4.6). Αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις 1-6 της παραγράφου 3.2.3 και επιλέξουμε παραμέτρους $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_3 = \frac{T}{\gamma_5} + \frac{\gamma_2 T}{4} + \frac{\gamma_5}{4T}$, $\gamma_4 = \frac{T\gamma_2^2}{2}(\frac{1}{\epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_4})$ και $\gamma_5 = 1.01T\left(\frac{\gamma_2 T}{2} + \sqrt{\frac{(\gamma_2 T)^2}{4} + 4}\right)$ τότε υπάρχουν γ_2^* και T^* τέτοια ώστε $\forall \gamma_2 \in (0, \gamma_2^*)$ και $\forall T \in [0, T^*]$ ο αλγόριθμος (4.3)-(4.6) να συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας Nash.

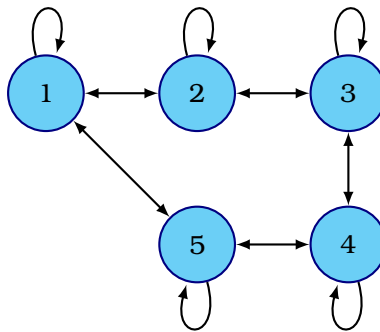
Κεφάλαιο 5

Προσομοίωση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η αριθμητική προσομοίωση του αλγορίθμου και κατά συνέπεια η πρακτική επιβεβαίωση της λειτουργίας του. Αρχικά εξετάζουμε ένα σενάριο κατά το οποίο το σύστημα αναμένεται να συγκλίνει ακριβώς στο (προϋπολογισμένο) σημείο ισορροπίας Nash που βρίσκεται στο εσωτερικό του συνόλου των περιορισμών. Στη συνέχεια, εξετάζουμε σενάριο κατά το οποίο το σύστημα συγκλίνει και πάλι στο θεωρητικό σημείο ισορροπίας Nash όταν αυτό βρίσκεται πάνω στο όριο (boundary) των υποκείμενων περιορισμών. Επιπλέον, παρουσιάζουμε και τα σενάρια σύγκλισης και απόκλισης του αλγορίθμου στην περίπτωση αύξησης του T εκτός των επιτρεπτών ορίων που διερευνήθηκαν στην ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου. Τέλος, γίνεται σύγκριση του αλγορίθμου με την διακριτοποιημένη εκδοχή του αντίστοιχου συνεχούς χρόνου από το [26].

5.1 Περιγραφή Συστήματος Προσομοίωσης

Επιλέγουμε ένα σύστημα 5 agents που περιγράφεται από τον γράφο επικοινωνίας στο σχήμα 5.1. Θεωρούμε διδιάστατο διάνυσμα κατάστασης q_i που αντιστοιχεί στην θέση (x,y) του κάθε



Σχήμα 5.1: Γράφος Επικοινωνίας

agent στο επίπεδο εξέλιξης του παιχνιδιού. Οι αρχικές θέσεις $q_i(0)$ επιλέγονται όπως φαίνεται στον πίνακα 5.1.

Ως συνάρτηση κόστους του παίκτη $i (i = 1, \dots, 5)$ ορίζεται η $J_i = J_{i1} + J_{i2}$, όπου

$$J_{i1} := \frac{\varphi_i}{2} \|q_i - q_{mi}\|^2$$

είναι ένα κόστος που σχετίζεται με την απόσταση της θέσης του πράκτορα i από το σταθερό

$q_1(0)$	$(-18, -18)$
$q_2(0)$	$(-2, -2)$
$q_3(0)$	$(21, 21)$
$q_4(0)$	$(-11, -11)$
$q_5(0)$	$(12, 12)$

Πίνακας 5.1: Αρχικές Συνθήκες

σημείο $q_{mi} = [(1, 1), (-10, -10), (15, 15), (-20, -20), (30, 30)]^T$ και

$$J_{i2} := \frac{\vartheta_i}{2} \sum_{j=1}^N \|q_i - q_j - h_{ij}\|^2$$

είναι ένα κόστος που σχετίζεται με τις σχετικές αποστάσεις μεταξύ όλων των πρακτόρων. Τα στοιχεία h_{ij} προκύπτουν από τον πίνακα:

$$H = \begin{bmatrix} (0, 0) & (3, 3) & (-7, -7) & (5, 5) & (-9, -9) \\ (-8, -8) & (0, 0) & (2, 2) & (-6, -6) & (4, 4) \\ (9, 9) & (-2, -2) & (0, 0) & (7, 7) & (-6, -6) \\ (-6, -6) & (3, 3) & (-5, -5) & (0, 0) & (8, 8) \\ (7, 7) & (-5, -5) & (4, 4) & (-6, -6) & (0, 0) \end{bmatrix}$$

Οι συντελεστές βάρους επιλέγονται ως $\varphi_i = 1 + \frac{i}{100}$ και $\vartheta_i = \frac{i}{100}$, για κάθε $i \in V$.

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial^2 J_i}{\partial q_i^2} = (\varphi_i + (N-1)\vartheta_i)\mathbb{I}_2.$$

Συνεπώς, για οποιαδήποτε $\varphi_i, \vartheta_i > 0$, η J_i είναι ισχυρά κυρτή (και άρα αυστηρά κυρτή) ως προς το q_i . Επιπλέον, από τον ορισμό, η J_i είναι ακτινικά μη φραγμένη ως προς το q_i . Άρα η Υπόθεση 2 (3.2.3) ικανοποιείται και επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα Σημείο Ισορροπίας Nash (NE) για το προτεινόμενο παίγνιο.

Αναφορικά με την απεικόνιση F , ισχύει:

$$\langle F(q) - F(q^*), q - q^* \rangle = (q - q^*)^T (M_0 \otimes I_2) (q - q^*),$$

όπου $M_0 = [\mu_{ij}]_{i,j=1}^5$, με

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \varphi_i + (N-1)\vartheta_i, & \text{αν } i = j \\ -\frac{\vartheta_i + \vartheta_j}{2}, & \text{αν } i \neq j \end{cases}.$$

Για τη συγκεκριμένη επιλογή των σταθερών φ_i, ϑ_i , ο πίνακας M_0 είναι θετικά ορισμένος και συνεπώς

$$\langle F(q) - F(q^*), q - q^* \rangle \geq \mu_{F_s} \|q - q^*\|^2,$$

όπου $\mu_{F_s} = \lambda_{\min}(M_0) = 1.0116$. Άρα, η F είναι περιορισμένα ισχυρά μονότονη και το σημείο NE είναι μοναδικό.

Για την επαυξημένη απεικόνιση $\bar{F}$ υπολογίζουμε από την 4.8 ότι $a^* = 34.4344$. Επιλέγουμε $a = 51.6516 > a^*$, το οποίο οδηγεί σε $\mu_{\bar{F}} = \lambda_{\min}(P) = 0.0804$, όπου ο P δίνεται από την 4.9.

Επιπλέον, επιλέγεται $\sigma = 1.5 \cdot 10^{-2}$ και περίοδος $T = 10^{-3}$.

Με τα παραπάνω δεδομένα το σημείο ισορροπίας Nash υπολογίζεται θεωρητικά ως εξής:

$$\begin{aligned} q_1^* &= (1.0106, 1.0106) \\ q_2^* &= (-8.9978, -8.9978) \\ q_3^* &= (13.6557, 13.6557) \\ q_4^* &= (-16.3186, -16.3186) \\ q_5^* &= (24.7740, 24.7740) \end{aligned} \quad (5.1)$$

5.2 Σενάριο Σύγκλισης στο προϋπολογισμένο σημείο ισορροπίας Nash

Στο σενάριο αυτό εφαρμόζουμε περιορισμούς οι οποίοι δεν παραβιάζονται στο σημείο ισορροπίας Nash. Ειδικότερα, οι διανυσματικές συναρτήσεις περιορισμών που χρησιμοποιούνται είναι:

$$\begin{aligned} g_1 &= [-0.3843, -y_1 - 2.3058, x_1 - 1.6739, -3.7339, x_1 - 7.2186, y_1 - 4.8987], \\ g_2 &= [-x_2 - 0.3843, y_2 - 2.3058, -1.6739, -3.7339, x_2 - 7.2186, y_2 - 4.8987], \\ g_3 &= [-0.3843, -2.3058, -x_3 - 1.6739, y_3 - 3.7339, x_3 - 7.2186, y_3 - 4.8987], \\ g_4 &= [x_4 - 0.3843, -2.3058, -1.6739, -3.7339, x_4 - 7.2186, y_4 - 4.8987], \\ g_5 &= [-0.3843, -2.3058, -1.6739, -y_5 - 3.7339, x_5 - 7.2186, y_5 - 4.8987]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

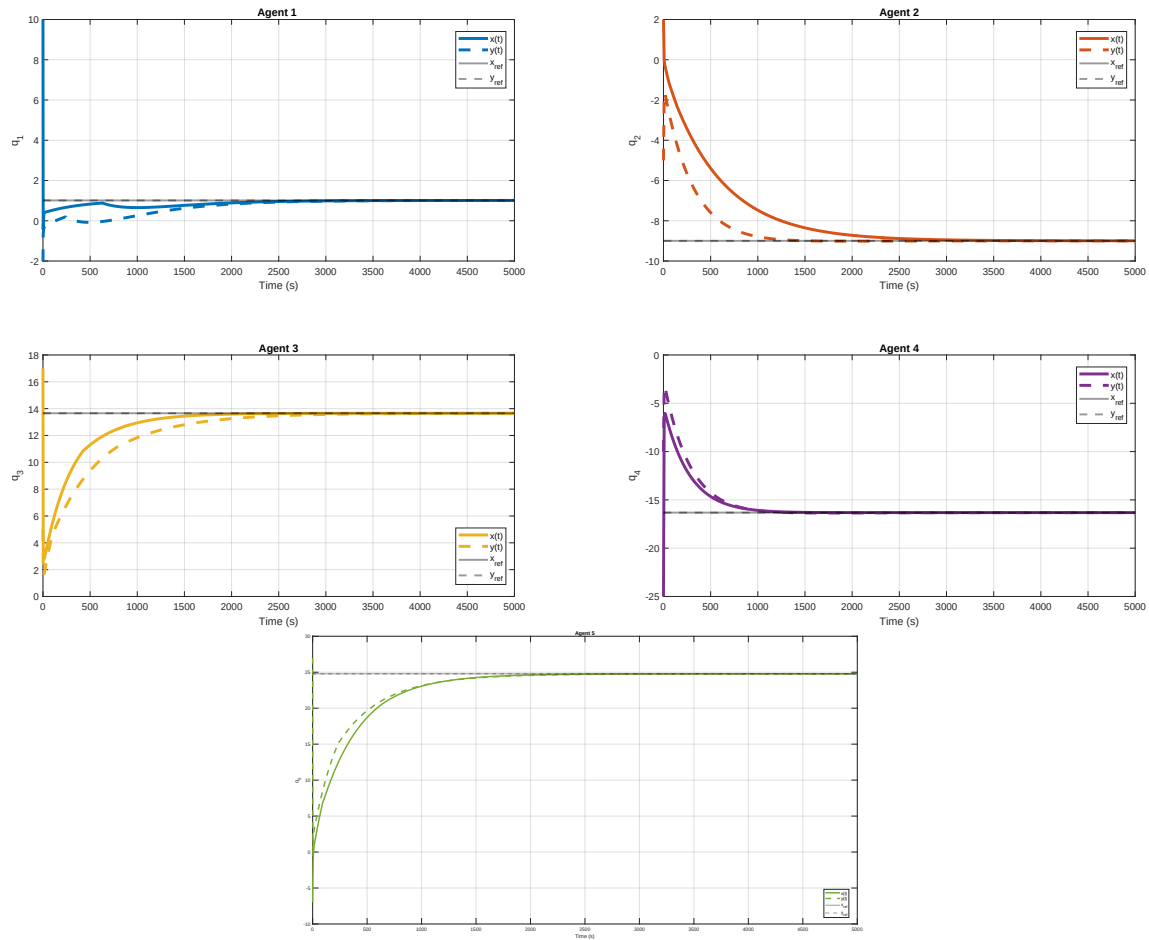
Κάθε g_i είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και γραμμική ως προς q_i , και κάθε G_i είναι ομοιόμορφα Lipschitz συνεχής ως προς q_i . Συνεπώς, οι Υποθέσεις 5 και 7 (3.2.3) ικανοποιούνται. Όπως φαίνεται και στα παρακάτω διαγράμματα 5.2 και 5.3, το σύστημα συγκλίνει στο προαναφερθέν σημείο ισορροπίας (NE).

5.3 Σενάριο σύγκλισης στο προϋπολογισμένο σημείο ισορροπίας Nash πάνω στο σύνο των περιορισμών

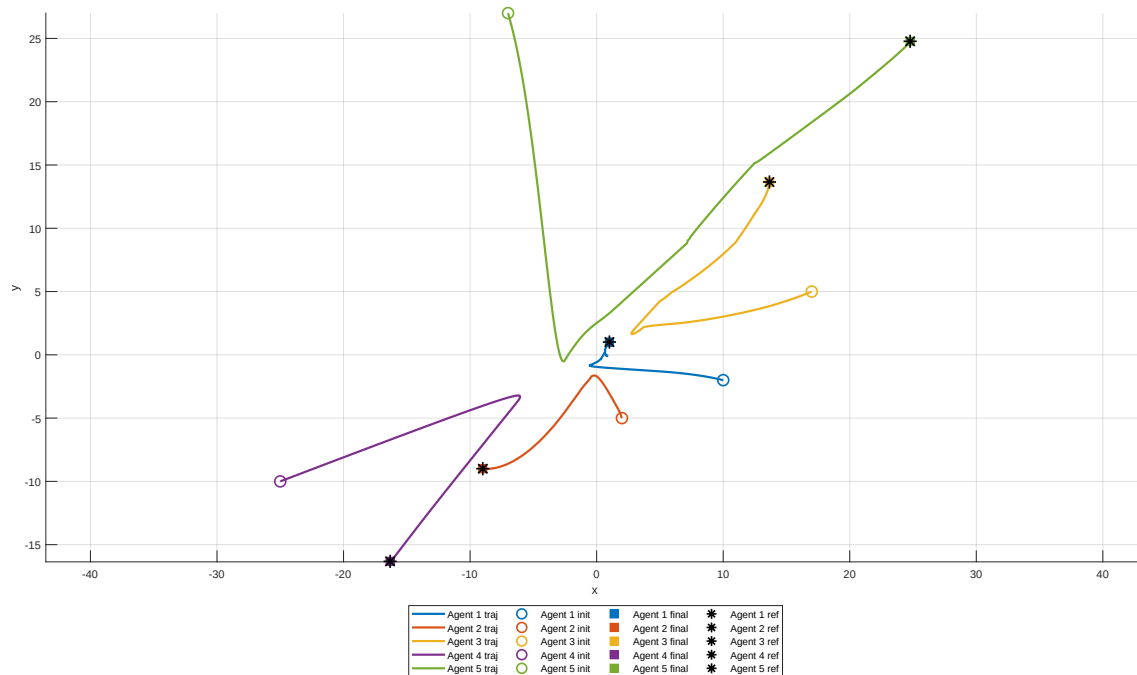
Στο σενάριο αυτό το σημείο ισορροπίας Nash βρίσκεται πάνω στο σύνο των περιορισμών. Ειδικότερα, οι διανυσματικές συναρτήσεις περιορισμών που χρησιμοποιούνται είναι:

$$\begin{aligned} g_1 &= [0, -y_1, x_1, 0, x_1, y_1], \\ g_2 &= [-x_2, y_2, 0, 0, x_2, y_2], \\ g_3 &= [0, 0, -x_3, y_3, x_3, y_3], \\ g_4 &= [x_4, 0, 0, 0, x_4, y_4], \\ g_5 &= [1, 1, 1, -y_5 + 1, x_5 - 12, y_5 - 5]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

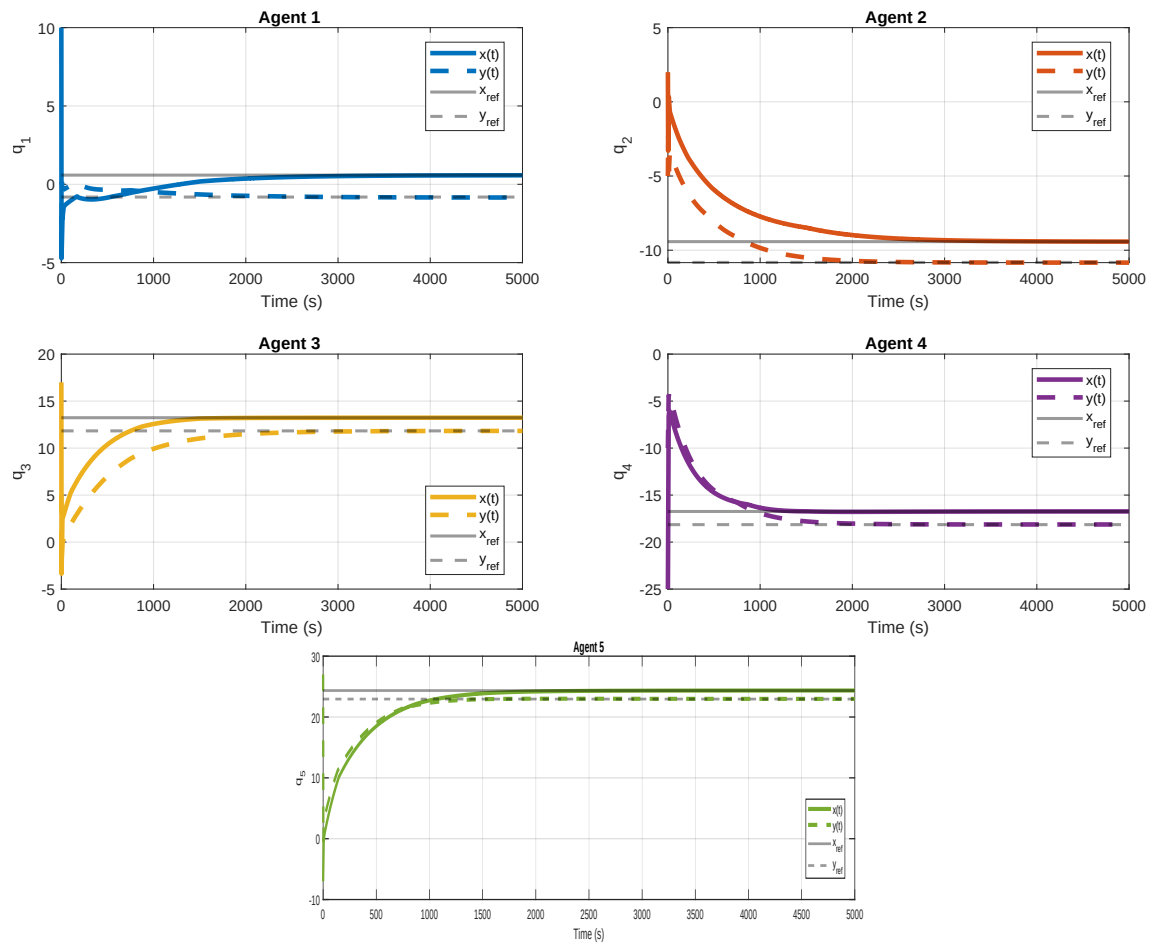
Συνεπώς, το σύστημα αναμένεται να συγκλίνει στο σύνο (boundary) των περιορισμών, πράγμα που επιβεβαιώνεται και από τα διαγράμματα 5.4 και 5.5 της προσομοίωσης.



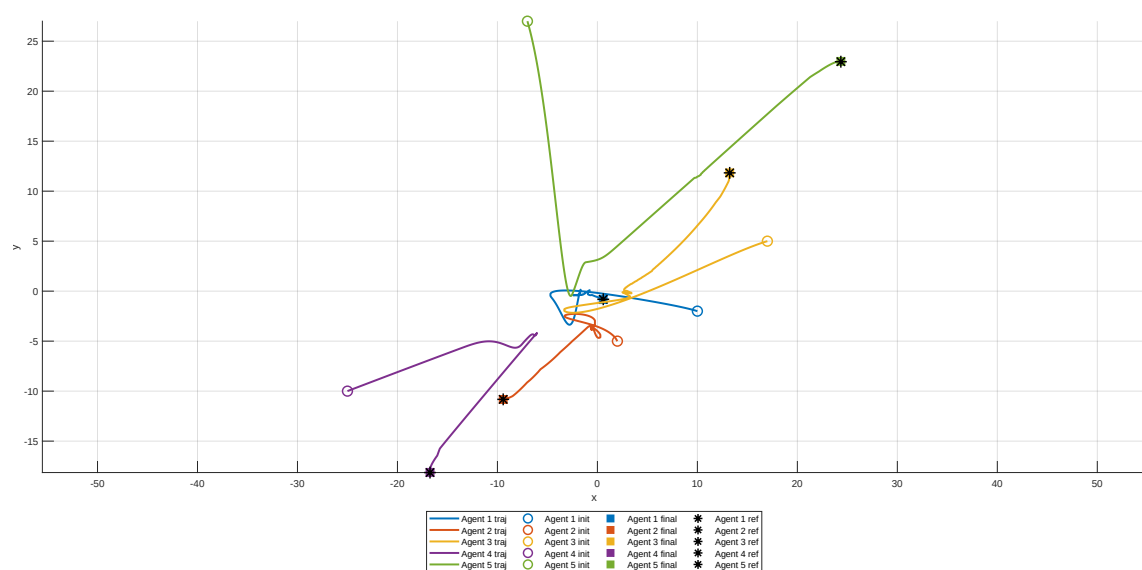
Σχήμα 5.2: Θέσεις q_1 έως q_5 στον χρόνο (Σενάριο 1)



Σχήμα 5.3: Τροχιές των agents (Σενάριο 1)



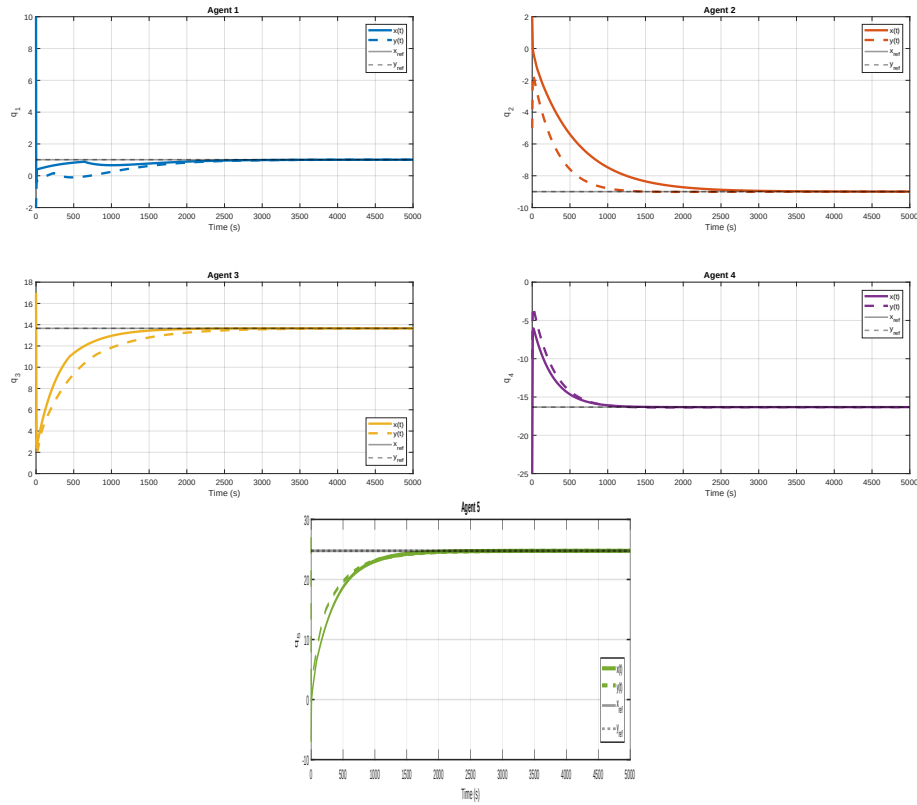
Σχήμα 5.4: Θέσεις q_1 έως q_5 στον χρόνο (Σενάριο 2)



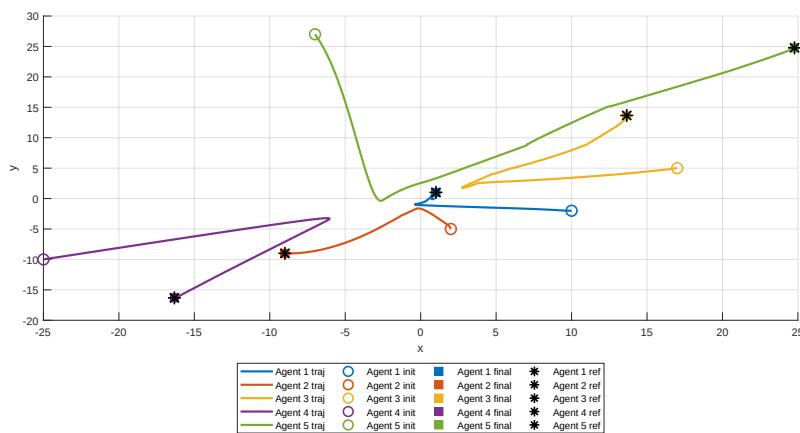
Σχήμα 5.5: Τροχιές των agents (Σενάριο 2)

5.4 Σενάριο σύγκλισης με T εκτός επιτρεπτών ορίων

Όπως επισημάνθηκε παραπάνω, οι προσεγγίσεις που υιοθετήθηκαν κατά την ανάλυση οδηγούν σε συνθήκες ικανές και όχι αναγκαίες για την σύγκλιση του συστήματος. Με άλλα λόγια, μπορεί να επιτευχθεί σύγκλιση και για T εκτός των ορίων που συζητήθηκαν. Προς επίρρωση της διαπίστωσης αυτής παραθέτουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για $T = 0.02$ στα διαγράμματα 5.6 και 5.7, όπου παρατηρείται σύγκλιση στο σημείο NE.



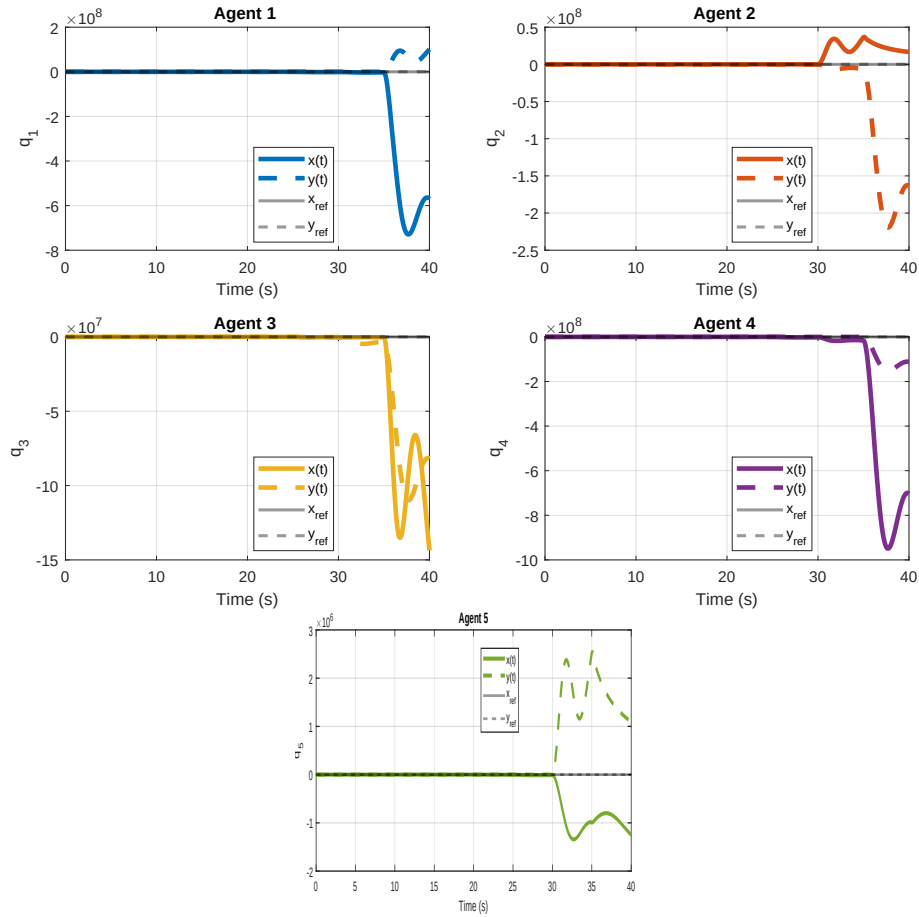
Σχήμα 5.6: Θέσεις q_1 έως q_5 στον χρόνο (Σενάριο 3)



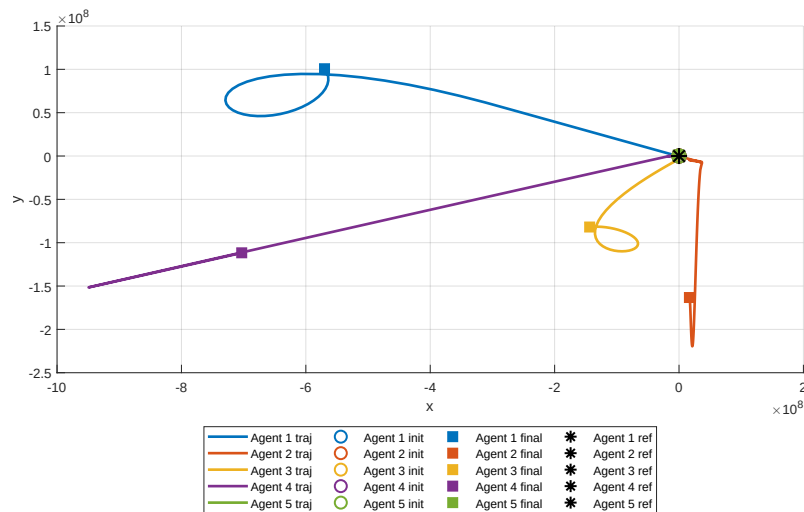
Σχήμα 5.7: Τροχιές των agents (Σενάριο 3)

5.5 Σενάριο απόκλισης με T εκτός επιτρεπτών ορίων

Για το σενάριο αυτό εφαρμόζουμε τους περιορισμούς 5.2 που επιτρέπουν την σύγκλιση στο θεωρητικό σημείο ισορροπίας Nash, αλλά αυξάνουμε την περίοδο σε $T = 5$. Στα διαγράμματα 5.8 και 5.9 είναι εμφανής η αποκλίνουσα συμπεριφορά του συστήματος.



Σχήμα 5.8: Θέσεις q_1 έως q_5 στον χρόνο (Σενάριο 4)



Σχήμα 5.9: Τροχιές των agents (Σενάριο 4)

5.6 Σύγκριση με τη διακριτοποιημένη εκδοχή του αλγορίθμου συνεχούς χρόνου

Στο paper [26] εισάγεται ο αλγόριθμος συνεχούς χρόνου του προβλήματος που εξετάζουμε με χρήση συνεχών μετρήσεων από τους γείτονες.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 5.1: Αλγόριθμος συνεχούς χρόνου [26]

Αρχικοποίηση :

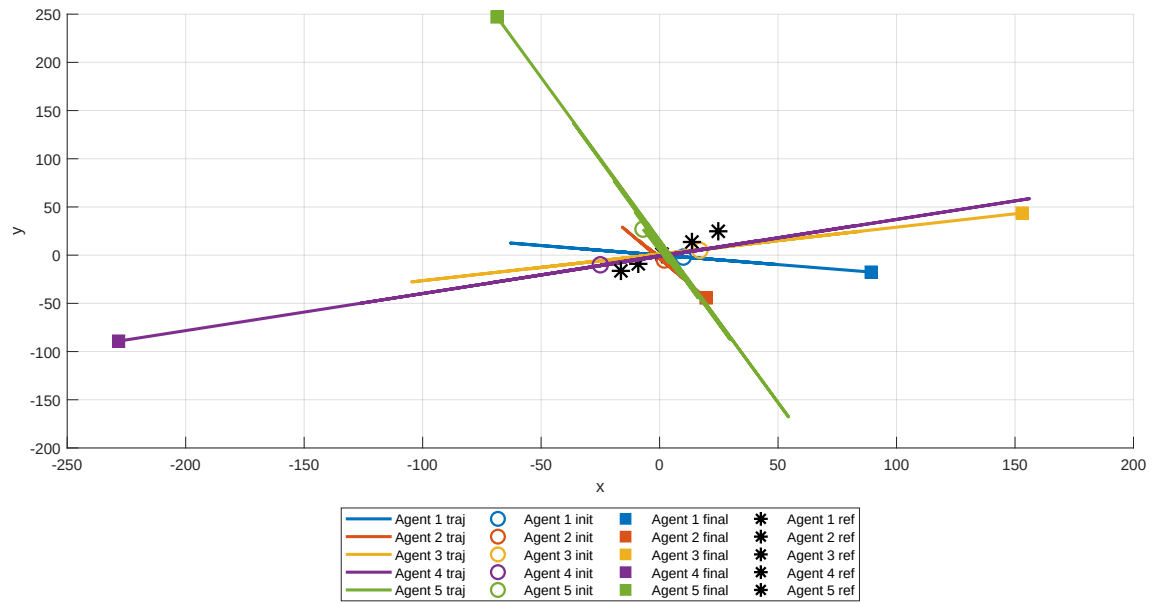
$$c > c := \frac{(\partial_0 + \partial)^2 + 4\mu\partial}{4\mu\bar{\eta}_2(L)}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \mathbf{x}_{-i}^i(0) \in \mathbb{R}^{n-n_i}, \quad \mathbf{z}_i(0) = \mathbf{0}_m, \quad \hat{\eta}_i(0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m;$$

Εξισώσεις: $\forall i \in \mathcal{I}$,

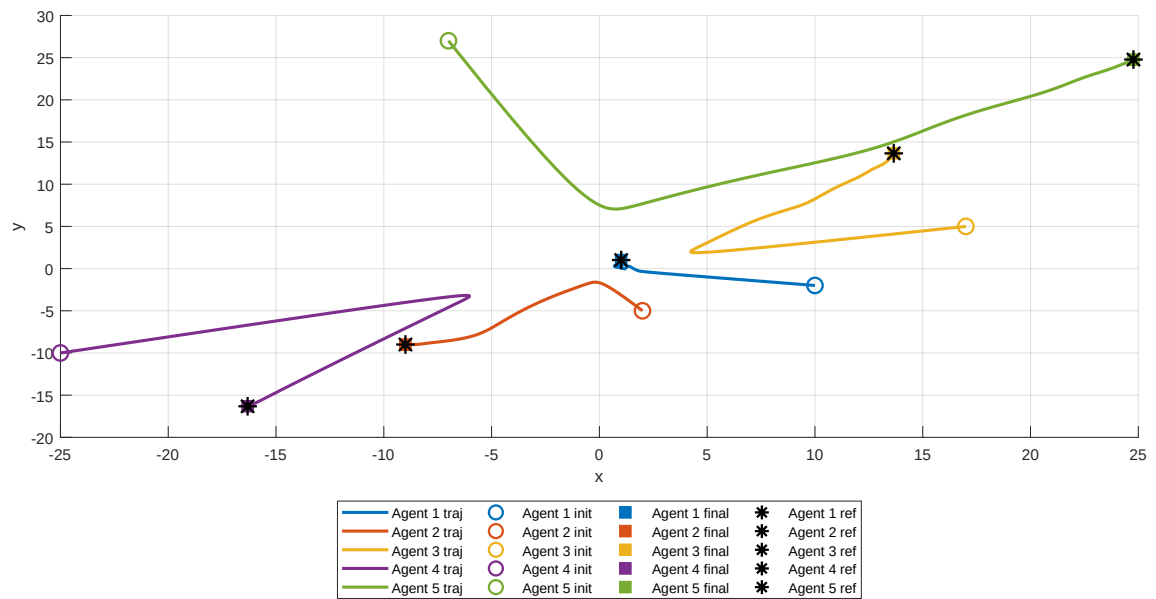
$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= u_i = \Pi_{\Omega_i} \left(x_i, -\nabla_{x_i} J_i(x_i, \mathbf{x}_{-i}^i) - \frac{\partial}{\partial x_i} g_i(x_i)^\top \hat{\eta}_i - c \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j^i) \right), \\ \dot{\mathbf{x}}_{-i}^i &= -c \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_{-i}^i - \mathbf{x}_{-i}^j), \\ \dot{z}_i &= \sum_{j \in N_i} (\hat{\eta}_i - \hat{\eta}_j), \\ \dot{\hat{\eta}}_i &= \Pi_{\mathbb{R}_{\geq 0}^m} \left(\hat{\eta}_i, g_i(x_i) - z_i - \sum_{j \in N_i} (\hat{\eta}_i - \hat{\eta}_j) \right). \end{aligned}$$

Υλοποιήσαμε την αριθμητική προσομοίωση του αλγορίθμου συνεχούς χρόνου για τις ίδιες παραμέτρους και το ίδιο σύστημα των 5 agents που περιγράφηκε παραπάνω. Στη συνέχεια κάνοντας χρήση της ευθείας μεθόδου Euler με χρονικό βήμα T ίσο με την περίοδο δειγματοληψίας από τους γείτονες, πραγματοποιήθηκε η διακριτοποίηση του αλγορίθμου. Αυξάνοντας σταδιακά το χρονικό βήμα (άρα και την περίοδο των δειγμάτων) T διαπιστώθηκε πως για $T \approx 0.05$ ο διακριτοποιημένος αλγόριθμος αρχίζει να αποκλίνει. 5.10

Αντίθετα, για περίοδο δειγμάτων $T = 0.05$ ο αλγόριθμος που αναπτύξαμε εξακολουθεί να συγκλίνει και επομένως εξασφαλίζει μεγαλύτερα διαστήματα τιμών του T για τα οποία το σύστημα είναι ευσταθές. 5.11



Σχήμα 5.10: Διακριτοποιημένος Αλγόριθμος Συνεχούς Χρόνου για $T=0.05$



Σχήμα 5.11: Αλγόριθμος με χρήση δειγμάτων από γείτονες για $T=0.05$

6.1 Σύνοψη- Συμπεράσματα

Στόχος της εργασίας αυτής ήταν η αναζήτηση ισορροπίας Nash(NE) σε πολυπρακτορικά συστήματα που περιγράφονται από έναν γράφο γειτνίασης. Η επικοινωνία μεταξύ γειτονικών πρακτόρων πραγματοποιείται με χρήση δειγμάτων, δηλαδή στοιχείων διακριτού χρόνου τα οποία έπρεπε να ενσωματωθούν κατάλληλα στις εξισώσεις ανανέωσης των μεταβλητών/πληροφοριών κάθε πράκτορα οδηγώντας σε συμφωνία (consensus) και σε ασυμπτωτική σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας NE. Στην παραπάνω στοχοθεσία προστέθηκε και η επιβολή γραμμικών περιορισμών στο σύνολο δράσεων των πρακτόρων. Πιθανή παραβίαση των περιορισμών αυτών στο σημείο NE έπρεπε να οδηγεί σε νέο σημείο ισορροπίας στο όριο των περιορισμών. Για την ικανοποίηση των παραπάνω ζητούμενων αποδείχτηκε η ύπαρξη μοναδικού σημείου ισορροπίας NE, σχεδιάστηκε αλγόριθμος και έγινε αναλυτική μελέτη/απόδειξη της ευστάθειας του συστήματος. Στο πλαίσιο αυτό, δόθηκαν ικανές συνθήκες για τις παραμέτρους του αλγορίθμου και για το χρονικό διάστημα T που απαιτείται για τη λήψη νέων πληροφοριών από τους γείτονες.

Ο αλγόριθμος που παρουσιάστηκε και θεμελιώθηκε αναλυτικά, δοκιμάστηκε στην πράξη μέσω αριθμητικής προσομοίωσης στο περιβάλλον Matlab-Simulink για σύστημα πέντε πρακτόρων τόσο στην περίπτωση τηρούμενων στο σημείο Nash περιορισμών όσο και στην περίπτωση σημείου Nash στο οποίο παραβιάζονταν οι περιορισμοί. Οι πρακτικές αυτές εφαρμογές επιβεβαίωσαν τα θεωρητικά αναμενόμενα αποτελέσματα σύγκλισης (για παραμέτρους στο επιτρεπτό εύρος). Τέλος, παρουσιάστηκε η δυνατότητα σύγκλισης και απόκλισης του συστήματος στην περίπτωση ενός T μεγαλύτερου από το επιτρεπτό (ικανό) εύρος τιμών και αναδείχτηκε η δυνατότητα σύγκλισης για περίοδο T μεγαλύτερη από το μέγιστο δυνατό βήμα διακριτοποίησης του (διακριτοποιημένου) αλγορίθμου συνεχούς χρόνου.

6.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Οι προδιαγραφές του προτεινόμενου αλγορίθμου και τα αποτελέσματα αυτής της διπλωματικής εργασίας θα μπορούσαν να βελτιωθούν και να επεκταθεί το πεδίο εφαρμογής της μεταξύ άλλων ως προς τους παρακάτω άξονες:

- Ανάπτυξη και εφαρμογή κατανεμημένων νόμων ελέγχου στους πράκτορες και ενσωμάτωσή τους στον αλγόριθμο με στόχο την επίτευξη καλύτερης ταχύτητας σύγκλισης ή

ευρύτερων επιτρεπών συνόλων τιμών των παραμέτρων του αλγορίθμου.

- Εφαρμογή σε πραγματικό πολυπρακτορικό σύστημα (π.χ. σε σύνολο ρομπότ ή UAV) με γνωστή ή εκτιμώμενη δυναμική. [29],[30], [31]
- Διερεύνηση καλύτερων (πιο “χαλαρών”) συνθηκών για τα επιτρεπτά T με καλύτερες/μικρότερες προσεγγίσεις κατά την ανάλυση.
- Επέκταση γενικότερα σε κυρτούς και όχι μόνο σε γραμμικούς περιορισμούς επί του πεδίου ενεργειών των πρακτόρων.

Παραρτήματα

Αποδείξεις

A'.1 Απόδειξη $\|I - W\|_F < \sqrt{\frac{N}{2}}$

Έστω ότι ο πίνακας $W \in \mathbb{R}^{N \times N}$ είναι συμμετρικός στοχαστικός πίνακας με βρόχους (self-loops), δηλαδή ισχύει $w_{ii} > \frac{1}{2}$ για κάθε i . Επιπλέον, ισχύουν:

$$W = W^T, \quad \sum_j w_{ij} = 1, \quad w_{ij} \geq 0$$

Στόχος είναι να οριοθετήσουμε τη νόρμα Frobenius:

$$\|I - W\|_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\delta_{ij} - w_{ij})^2$$

Τα στοιχεία του πίνακα $I - W$ δίνονται ως:

$$(I - W)_{ij} = \begin{cases} 1 - w_{ii} & \text{αν } i = j \\ -w_{ij} & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Άρα η νόρμα Frobenius γράφεται ως:

$$\|I - W\|_F^2 = \sum_{i=1}^N (1 - w_{ii})^2 + \sum_{i \neq j} w_{ij}^2$$

Αφού $w_{ii} > \frac{1}{2}$, προκύπτει ότι:

$$0 < 1 - w_{ii} < \frac{1}{2} \Rightarrow (1 - w_{ii})^2 < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N (1 - w_{ii})^2 < \frac{N}{4}$$

Επίσης, επειδή $\sum_j w_{ij} = 1$, έχουμε:

$$\sum_{j \neq i} w_{ij} = 1 - w_{ii} < \frac{1}{2}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sum x_j^2 \leq \left(\sum x_j\right)^2$ για $x_j \geq 0$, προκύπτει:

$$\sum_{j \neq i} w_{ij}^2 \leq \left(\sum_{j \neq i} w_{ij}\right)^2 < \frac{1}{4}$$

Άρα συνολικά:

$$\sum_{i \neq j} w_{ij}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} w_{ij}^2 < \frac{N}{4}$$

Συνεπώς:

$$\|I - W\|_F^2 < \frac{N}{4} + \frac{N}{4} = \frac{N}{2}$$

Και τελικά:

$$\|I - W\|_F < \sqrt{\frac{N}{2}}$$

Βιβλιογραφία

- [1] Wei Ren και Randal W. Beard. *Distributed Consensus in Multi-Vehicle Cooperative Control*. Springer-Verlag, London, 2008.
- [2] H. E. Psillakis και K. A. Oikonomidis. *Adaptive Fuzzy Approximate Optimal Consensus of Lagrangian Agents: An EXTRA-Based Smoothing Approach*. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 31(11):4064–4074, 2023.
- [3] Ι. Βλαχάβας Π. Κεφαλάς, Ν. Βασιλειάδης, Φ. Κόκκορας και Η. Σακελλαρίου. *Τεχνητή Νοημοσύνη*. Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη, 2η έκδοση, 2006.
- [4] H. G. Tanner, A. Jadbabaie και G. J. Pappas. *Flocking in Fixed and Switching Networks*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(5):863–868, 2007.
- [5] A. K. Gkesoulis, H. E. Psillakis και Q. Wang. *PI Regulation for Consensus: Application to Unknown Pure-Feedback Agents With State and Communication Delays*. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 8(4):1964–1974, 2021.
- [6] A. K. Gkesoulis και H. E. Psillakis. *Prescribed Performance Bipartite Consensus for Nonlinear Agents with Antagonistic Interactions: A PI Transformation Approach*. *Journal of the Franklin Institute*, 358(4):2382–2404, 2021.
- [7] A. K. Gkesoulis, H. E. Psillakis και A. R. Lagos. *Optimal Consensus via OCPI Regulation for Unknown Pure-Feedback Agents With Disturbances and State Delays*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(8):4338–4345, 2022.
- [8] A. R. Lagos, H. E. Psillakis και A. K. Gkesoulis. *Almost-Sure Finite-Time Stochastic Min-Max Consensus*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 70(9):3509–3513, 2023.
- [9] X. Chen, Y. Wu, X. Yi, M. Huang και L. Shi. *Linear Convergent Distributed Nash Equilibrium Seeking with Compression*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 70(5):3316–3323, 2025.
- [10] S. Liang, P. Yi και Y. Hong. *Distributed Nash Equilibrium Seeking for Aggregative Games with Coupled Constraints*. *Automatica*, 85:179–185, 2017.
- [11] M. S. Stankovic, K. H. Johansson και D. M. Stipanovic. *Distributed Seeking of Nash Equilibria With Applications to Mobile Sensor Networks*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4):904–919, 2012.

- [12] P. Frihauf, M. Krstic και T. Basar. *Nash Equilibrium Seeking in Noncooperative Games*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(5):1192–1207, 2012.
- [13] M. Ye και G. Hu. *Distributed Nash Equilibrium Seeking by a Consensus Based Approach*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(9):4811–4818, 2017.
- [14] M. Ye, Q. L. Han, L. Ding και S. Xu. *Distributed Nash Equilibrium Seeking in Games With Partial Decision Information: A Survey*. *Proceedings of the IEEE*, 111(2):140–157, 2023.
- [15] F. Salehisadaghiani και L. Pavel. *Distributed Nash Equilibrium Seeking: A Gossip-Based Algorithm*. *Automatica*, 72:209–216, 2016.
- [16] G. Belgioioso, P. Yi, S. Grammatico και L. Pavel. *Distributed Generalized Nash Equilibrium Seeking: An Operator-Theoretic Perspective*. *IEEE Control Systems Magazine*, 42(4):87–102, 2022.
- [17] J. Marsden και A. Tromba. *Vector Calculus*. Macmillan Learning, 6η έκδοση, 2012.
- [18] Iu. E. Nesterov. *Lectures on Convex Optimization*, τόμος 137 στο *Springer Optimization and Its Applications*. Springer, Cham, 2η έκδοση, 2018.
- [19] T. Tatarenko, W. Shi και A. Nedić. *Geometric Convergence of Gradient Play Algorithms for Distributed Nash Equilibrium Seeking*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(11):5342–5353, 2021.
- [20] P. Dupuis και A. Nagurney. *Dynamical Systems and Variational Inequalities*. *Annals of Operations Research*, 44(1):7–42, 1993.
- [21] Anna Nagurney και Ding Zhang. *Projected Dynamical Systems and Variational Inequalities with Applications*. Springer US, Boston, MA, 1η έκδοση, 1996.
- [22] M. D. Johnston. *Case Studies of Existence of Periodic Solutions for Projected Dynamical Systems on Euclidean Spaces*. Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, University of Guelph, 2006.
- [23] L. Liu, M. Lu, S. Wang, F. Deng και J. Chen. *Robust Distributed Nash Equilibrium Seeking Subject to Communication Constraints*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 70(3):1941–1948, 2025.
- [24] C. De Persis και S. Grammatico. *Distributed Averaging Integral Nash Equilibrium Seeking on Networks*. *Automatica*, 110:108548, 2019.
- [25] C. De Persis και S. Grammatico. *Continuous-Time Integral Dynamics for a Class of Aggregative Games With Coupling Constraints*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(5):2171–2176, 2020.
- [26] M. Bianchi και S. Grammatico. *Continuous-Time Fully Distributed Generalized Nash Equilibrium Seeking for Multi-Integrator Agents*. *Automatica*, 129:109660, 2021.

- [27] M. Bianchi και S. Grammatico. *A Continuous-Time Distributed Generalized Nash Equilibrium Seeking Algorithm Over Networks for Double-Integrator Agents*. *European Control Conference (ECC)*, σελίδες 1474–1479, 2020.
- [28] L. Pavel. *Distributed GNE Seeking Under Partial-Decision Information Over Networks via a Doubly-Augmented Operator Splitting Approach*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(4):1584–1597, 2020.
- [29] D. Kalyva και H. E. Psillakis. *A Game Theoretic Approach to Regular Polygon Formation Control of Mobile Robots*. *European Control Conference (ECC2025)*, Thessaloniki, Greece, 2025.
- [30] Y. Tang και P. Yi. *Nash Equilibrium Seeking for High-Order Multiagent Systems With Unknown Dynamics*. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 10(1):321–332, 2023.
- [31] D. Kalyva και H. E. Psillakis. *Distributed Control of a Mobile Robot Multi-Agent System for Nash Equilibrium Seeking with Sampled Neighbor Information*. *Automatica*, 166:111712, 2024.