



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
& ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
& ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Ανάπτυξη της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών για την
Ανάλυση Σύνθετων Διατάξεων Ακτινοβολήσης**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Παναγιώτης Ι. Παπακανέλλος

Αθήνα, Ιούνιος 2004



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
& ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Ανάπτυξη της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών για την Ανάλυση Σύνθετων Διατάξεων Ακτινοβόλησης

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Παναγιώτης Ι. Παπακανελλός

Συμβουλευτική Επιτροπή : Χρήστος Ν. Καψάλης
Παναγιώτης Κ. Κωττής
Δήμητρα Θεοδώρα Ι. Κακλαμάνη

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 14/06/2004

.....
Χ. Καψάλης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Π. Κωττής
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Δ. -Θ. Κακλαμάνη
Επ. Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

.....
Ν. Ουζούνογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ι. Κανελλόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Γ. Φικιώρης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

.....
Σ. Κωτσόπουλος
Αν. Καθηγητής Παν.
Πατρών

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

*Στην αδελφή μου Ελευθερία,
στους γονείς μου Ιωάννη και Μαρία,
και σε όσους πίστεψαν σε μένα*

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας διατριβής αποτελεί η διερεύνηση των δυνατοτήτων εφαρμογής της μεθόδου βοηθητικών πηγών (Method of Auxiliary Sources-MAS) σε προβλήματα ακτινοβολίας. Αν και η MAS είναι μια ευρέως γνωστή αριθμητική μέθοδος, η οποία έχει θεμελιωθεί ισχυρά και έχει εφαρμοστεί με επιτυχία σε πληθώρα προβλημάτων υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού, δεν έχουν εξαντληθεί οι δυνατότητες της, ιδιαίτερα όσον αφορά την εφαρμογή της σε προβλήματα ακτινοβολίας. Αποτελεί δε ιδιαιτερότητα των προβλημάτων ακτινοβολίας το γεγονός ότι η αξιολόγηση της ποιότητας των λύσεων βασίζεται σε ευαίσθητες ως προς τα σφάλματα του κοντινού πεδίου παραμέτρους και, ως εκ τούτου, η αριθμητική σταθεροποίηση των λύσεων είναι δυσκολότερο να επιτευχθεί, ενώ επιπρόσθετες δυσκολίες εμφανίζονται όταν μελετώνται προβλήματα με ανοικτά χωρία.

Αρχικά, στο Κεφάλαιο 1, γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των βασικών τεχνικών διακριτοποίησης των αριθμητικών μεθόδων συναρτησιακών προσεγγίσεων και των σχετικών τεχνικών επίλυσης, καθώς και των ευρύτερα διαδεδομένων αριθμητικών μεθόδων επίλυσης προβλημάτων εφαρμοσμένου ηλεκτρομαγνητισμού.

Ακολούθως, στο Κεφάλαιο 2, γίνεται μια εκτενέστερη παρουσίαση της MAS, για την οποία αναφέρονται τόσο τα πλεονεκτήματα όσο και τα μειονεκτήματα, όπως αυτά έχουν καταγραφεί στη σχετική βιβλιογραφία. Επιπρόσθετα, περιγράφονται κάποιοι εμπειρικοί κανόνες επιλογής παραμέτρων, οι οποίοι αφορούν τον τύπο των βοηθητικών πηγών, καθώς και το πλήθος και την κατανομή των θέσεων των βοηθητικών πηγών και των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών.

Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 3, εξετάζονται προβλήματα ακτινοβολίας στοιχειωδών ακτινοβολητών υπεράνω και εντός του εδάφους, με σκοπό τη διερεύνηση των χαρακτηριστικών σύγκλισης και την εξέταση της ακρίβειας των λύσεων, αλλά και τη συσχέτιση τους με τις παραμέτρους καθορισμού του πλήθους και της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών και των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων εξάγονται κάποιοι πρακτικοί κανόνες επιλογής των παραμέτρων μορφοποίησης των λύσεων. Επιπρόσθετα, εξετάζονται οι δυνατότητες βελτιστοποίησης των λύσεων. Τέλος, εξετάζεται η συμπεριφορά των λύσεων στο μακρινό πεδίο.

Επιπρόσθετα, στο Κεφάλαιο 4, εξετάζονται οι δυνατότητες εφαρμογής της MAS για την ανάλυση κεραιών λεπτού σύρματος και στοιχειοκεραιών. Εξετάζονται διάφορες περιπτώσεις πεδίων διέγερσης, για την εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων σχετικά με την εξάρτηση των χαρακτηριστικών των λύσεων από τον τύπο και το πλήθος των βοηθητικών πηγών. Της ανάλυσης μεμονωμένων κεραιών ακολουθεί η ανάλυση στοιχειοκεραιών παράλληλων στοιχείων σε τυχαίες θέσεις, καθώς και η μελέτη των φαινομένων σύζευξης πομποδεκτών. Πέραν των προηγούμενων, μελετάται και η περίπτωση του διπόλου παχέος σύρματος.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 5, αποπειράται η υβριδοποίηση της MAS με την τεχνική συνταιριάσματος των αντιδράσεων (Reaction Matching-RM), για την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών κατά κάποια ολοκληρωτική έννοια. Από την εφαρμογή της προκύπτουσας μεθόδου (MAS-RM), τόσο σε μεμονωμένες κεραιές λεπτού σύρματος όσο και στοιχειοκεραιές, προκύπτει ότι η κατάλληλη επιλογή των βοηθητικών πηγών μπορεί να οδηγήσει σε ταχύτατα αριθμητικά σταθεροποιούμενες λύσεις. Το γεγονός αυτό παρέχει τη δυνατότητα επίλυσης διατάξεων σχετικά μεγάλης κλίμακας. Για την επίδειξη των δυνατοτήτων της μεθόδου, παρουσιάζονται αποτελέσματα για δίπολα σχετικά μεγάλων ηλεκτρικών διαστάσεων και στοιχειοκεραιές σχετικά μεγάλου αριθμού στοιχείων. Πέραν των προηγούμενων, μελετάται και η περίπτωση του διπόλου παχέος σύρματος.

Λέξεις Κλειδιά: Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός, Αριθμητικές Μέθοδοι, Μέθοδος Βοηθητικών Πηγών, Ανοικτά Χωρία, Κεραιές Σύρματος, Στοιχειοκεραιές.

Summary

The subject of the present thesis is the investigation of the capabilities for the application of the method of auxiliary sources (MAS) to radiation problems. Despite the fact that the MAS is a widely known numerical method, which is well-established and has been applied successfully to a multitude of computational electromagnetism problems, its capabilities have not been exhausted, especially when applied to radiation problems. The radiation problems have the inherent peculiarity that the evaluation of the solution quality is based on quantities with sensitivity to near field errors and, as an outcome, their numerical stability is more difficult to achieve, whereas additional difficulties are encountered when studying problems with open regions.

At first, in Chapter 1, a brief overview is provided with regard to the fundamental discretization techniques of the numerical methods associated with functional approximations and the relevant solution techniques, as well as to the most widely spread numerical methods for solving problems of applied electromagnetism.

Subsequently, in Chapter 2, a more extensive presentation of the MAS is provided, in which both the advantages and the drawbacks of the method are reported, as they have been recorded in the open literature. Moreover, a few practical rules are provided for the selection of the solution parameters, which are associated with the type of the auxiliary sources, as well as with the number and distribution of the auxiliary sources and matching points.

Next, in Chapter 3, radiation problems of elemental radiators above and inside the ground are examined, aiming at the investigation of the convergence behavior and the examination of the solution accuracy, as well as at the correlation of the latter with the parameters associated with the number and distribution of the auxiliary sources and matching points. From the presented results, a few practical rules are extracted for the selection of the parameters forming the solutions. Furthermore, the possibilities for the optimization of the solutions are also examined. Finally, the solution behavior in the far field region is also investigated.

Moreover, in Chapter 4, the capabilities of the MAS for analyzing thin wire antennas and arrays are examined. Various excitation fields are concerned in order to deduce general rules regarding the dependence of the solution behavior upon the type and number of the auxiliary sources. The analysis of isolated antennas is followed by the analysis of arrays of arbitrarily situated parallel elements and by the study of closely spaced transceivers. Apart from the preceding, the case of the thick wire dipole is also examined.

Finally, in Chapter 5, the hybridization of the MAS with the reaction matching (RM) technique is attempted for the stipulation of the boundary conditions in an average sense. From the application of the resulting method (MAS-RM) to both isolated thin wire antennas and arrays, it is concluded that the proper choice of the auxiliary sources yields rapidly stabilizing numerical solutions. This fact can be utilized for the analysis of large-scale problems. For the demonstration of the method capabilities, numerical results are presented for electrically long dipoles and arrays composed of a moderately large number of elements. Apart from the preceding, the case of the thick wire dipole is also examined.

Keywords: Computational Electromagnetics, Numerical Methods, Method of Auxiliary Sources, Open Regions, Wire Antennas, Antenna Arrays.

Πρόλογος

Οι βάσεις των σύγχρονων εφαρμογών των κεραιών, με σημαντικότερες αυτές των ασύρματων επικοινωνιών, ανάγονται στις θεωρητικές εργασίες του J. C. Maxwell¹, αποτέλεσμα των οποίων είναι οι διάσημες ομώνυμες εξισώσεις, που συνδέουν τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία μεταξύ τους, όπως και με τα γενεσιουργά αίτια τους (κατανομές φορτίων και ρευμάτων). Στο διάστημα 1886-1889, μόλις δύο δεκαετίες μετά τη διατύπωση των εξισώσεων αυτών, έγιναν οι πρώτες προσπάθειες πειραματικής επιβεβαίωσης των φαινομένων διάδοσης τοπικά παραγόμενων ηλεκτρικών ταλαντώσεων από τον H. Hertz. Τα αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων ώθησαν πολλούς ερευνητές προς την κατασκευή κεραιών και τη διεξαγωγή πληθώρας πειραμάτων εκπομπής και λήψης σε διάφορες συχνότητες. Οι πρώτες ολοκληρωμένες διατάξεις εκπομπής και λήψης εμφανίστηκαν μια δεκαετία αργότερα, χάρη στις ερευνητικές προσπάθειες του G. Marconi². Μάλιστα, ο τελευταίος ενεπλάκη στη σχεδίαση και υλοποίηση πολλών πρωτοποριακών διατάξεων εκπομπής και λήψης έως το τέλος της ζωής του, συμπεριλαμβανομένων των πρώτων μικροκυματικών ζευξίων πάνω από την επιφάνεια του εδάφους και της θάλασσας, καθώς και του πρώτου συστήματος υπερατλαντικής ασύρματης επικοινωνίας. Η ανακάλυψη του διπολικού transistor, αμέσως μετά το δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο, έδωσε σημαντική ώθηση στις εφαρμογές της ηλεκτρονικής και των επικοινωνιών, συμπίεσε σημαντικά το κόστος υλοποίησης, ενώ απλοποίησε τις διαδικασίες σχεδίασης και κατασκευής πολύπλοκων διατάξεων και συστημάτων μεγάλης κλίμακας. Παράλληλα με τη ραγδαία τεχνολογική ανάπτυξη, εξελίχθηκαν σημαντικά και οι επιστήμες των μηχανικών, οι οποίες εστιάστηκαν σε νέες αριθμητικές μεθόδους και τεχνικές, για την προσέγγιση μαθηματικών και φυσικών προβλημάτων μεγάλης κλίμακας, καθώς και για τη σχεδίαση διατάξεων και την ολοκλήρωση συστημάτων. Σήμερα, η τεχνολογία της ηλεκτρονικής και των τηλεπικοινωνιών εξακολουθεί να εξελίσσεται γοργά με κατεύθυνση προς ταχύτερα, αποδοτικότερα, αποτελεσματικότερα και φιλικότερα προς το χρήστη και το περιβάλλον συστήματα, που καλύπτουν πολύ μεγάλο εύρος εφαρμογών και υπηρεσιών.

Ως γνωστόν, κάθε τεχνολογικό επίτευγμα στηρίζεται σε ιδέες που βασίζονται σε απλές φυσικές γνώσεις και μηχανισμούς. Ο ρόλος του μηχανικού έγκειται στην κάλυψη της απόστασης μεταξύ της βασικής γνώσης και της σχηματοποίησης των δυνατικών εφαρμογών, διαδικασία η οποία απαιτεί πολύ ισχυρό θεωρητικό υπόβαθρο, αναλυτικές και συνθετικές ικανότητες, καθώς και επιδεξιότητα στην υλοποίηση. Πάντως, η σημαντικότερη ίσως προϋπόθεση για τη διαρκή και ουσιαστική τεχνολογική εξέλιξη είναι η ύπαρξη των κατάλληλων αναλυτικών και αριθμητικών «εργαλείων», τα οποία προκύπτουν από τη διεξαγωγή βασικής έρευνας, ενώ εξελίσσονται περαιτέρω μέσω της εφαρμοσμένης έρευνας και των πρακτικών εφαρμογών. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι, παρά την τρομακτική άνοδο της διαθέσιμης υπολογιστικής ισχύος τα τελευταία χρόνια, οι ρεαλιστικές προσομοιώσεις σε υπολογιστή εξακολουθούν να είναι ιδιαίτερα χρονοβόρες, κυρίως όταν απαιτείται σχετικά ακριβής μοντελοποίηση της υπό μελέτη δομής ή διάταξης. Ως εκ τούτου, οι προσομοιώσεις χρησιμοποιούνται για τη μελέτη σημαντικά απλοποιημένων μοντέλων, ενώ τα εξαγόμενα αποτελέσματα αξιοποιούνται εκ των υστέρων, συνηθέστατα σε συνδυασμό με πειραματικά δεδομένα, για τη βελτιστοποίηση της σχεδίασης, ανάλογα με τις ιδιαίτερες ικανότητες του σχεδιαστή. Ωστόσο, λόγω ακριβώς της ταχύτατης εξέλιξης των υπολογιστικών συστημάτων, η κατάσταση αυτή είναι πιθανό να μεταβληθεί δραματικά στο μέλλον. Μάλιστα, πολλοί επιστήμονες έχουν διατυπώσει την άποψη ότι η αύξηση της διαθέσιμης υπολογιστικής ισχύος με τους εκτιμώμενους ρυθμούς θα καταστήσει δυνατή τη

¹J. C. Rautio, “Retracing key moments in the life of Maxwell”, *Microwaves and RF Journal*, Vol. 36, No. 11, pp. 35-51, 1997.

²O. M. Bucci, G. Pelosi and S. Selleri, “The work of Marconi in microwave communications”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 45, No. 5, pp. 46-53, 2003.

δημιουργία νέων τεχνικών, οι οποίες θα συνδυάζουν τις υπάρχουσες αριθμητικές μεθόδους με «ευφυείς» τεχνικές βελτιστοποίησης και θα οδηγούν σε διατάξεις και συστήματα με χαρακτηριστικά που θα υπερτερούν έναντι αυτών που σχεδιάζουν οι επιστήμονες ακολουθώντας συμβατικές πρακτικές και τεχνικές. Σε αυτό το πλαίσιο, καθίσταται σαφής η σημασία της διερεύνησης των πιθανών αδυναμιών των υπάρχοντων αριθμητικών μεθόδων, της μείωσης των απαιτούμενων υπολογιστικών πόρων για την εκτέλεση τους, της βελτίωσης της ακρίβειας τους, αλλά και της επέκτασης του εύρους εφαρμογής τους.

Εντασόμενη στο προαναφερθέν πλαίσιο, η παρούσα διατριβή αποσκοπεί στη διερεύνηση των δυνατοτήτων της μεθόδου βοηθητικών πηγών (Method of Auxiliary Sources-MAS) για τη μελέτη προβλημάτων ακτινοβολίας, μέσω της μελέτης των χαρακτηριστικών σύγκλισης και της εξέτασης της ακρίβειας των λύσεων, αλλά και τον εντοπισμό των σχετικών αδυναμιών της. Η MAS αναπτύχθηκε πριν από αρκετές δεκαετίες στην πρώην ΕΣΣΔ, με σκοπό την επίλυση μαθηματικών και φυσικών προβλημάτων συνοριακών τιμών. Μάλιστα, είναι αξιοσημείωτο ότι πολλές συναφείς αριθμητικές μέθοδοι αναπτύχθηκαν σχεδόν ταυτόχρονα σε άλλες χώρες, οι σημαντικότερες και ευρύτερα γνωστές από τις οποίες αναφέρονται συνοπτικά στα Κεφάλαια 1 και 2. Παρά το γεγονός ότι η MAS και οι άμεσα σχετιζόμενες αριθμητικές μέθοδοι είναι ευρέως γνωστές και αποδεκτές, το πεδίο εφαρμογής τους περιλαμβάνει κυρίως προβλήματα σκέδασης από κλειστά σώματα ή περιοδικές επιφάνειες, ενώ σε προβλήματα ακτινοβολίας έχει χρησιμοποιηθεί κυρίως η τροποποιημένη MAS (Modified MAS-MMAS), η οποία έχει αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια για την ανάλυση λεπτών δομών, λόγω της σημαντικής δυσκολίας εφαρμογής της MAS σε τέτοιες περιπτώσεις. Επιπρόσθετα, αν και φαντάζει σχεδόν βέβαιο ότι οι εμπνευστές της MAS είχαν προσεγγίσει προβλήματα ακτινοβολίας μέσω της MAS, αυτά δεν αποτέλεσαν κύριο πεδίο ενδιαφέροντος τους. Το γεγονός αυτό αποτέλεσε το βασικό κίνητρο για τη διερεύνηση των δυνατοτήτων εφαρμογής της MAS σε προβλήματα ακτινοβολίας. Στα προβλήματα αυτά, τα ΗΜ πεδία παρουσιάζουν ισχυρή χωρική ανομοιομορφία, ενώ τα μεγέθη ενδιαφέροντος εξαρτώνται άμεσα από το προκύπτον κοντινό πεδίο. Το γεγονός αυτό έχει ως συνέπεια η αξιολόγηση της ποιότητας των λύσεων να βασίζεται σε ευαίσθητες παραμέτρους ως προς τα σφάλματα του κοντινού πεδίου, οπότε η σύγκλιση των λύσεων είναι δυσκολότερο να επιτευχθεί.

Αξίζει να τονιστεί ότι βασική επιδίωξη της παρούσας διατριβής αποτελεί η εξέταση της MAS από κάθε πλευρά, συμπεριλαμβανομένων των πιθανών περιορισμών στην εφαρμογή της και κάθε εγγενούς αδυναμίας που έχει αντίκτυπο στα χαρακτηριστικά σύγκλισης των λύσεων και την ακρίβεια των εξαγόμενων αποτελεσμάτων. Αποτελεί πεποίθηση του γράφοντος ότι η γνώση των μειονεκτημάτων μιας αριθμητικής μεθόδου είναι εξίσου σημαντική με τη γνώση των πλεονεκτημάτων της, καθόσον η μελέτη των γενεσιουργών αιτιών των πρώτων αποτελεί ίσως το σημαντικότερο βήμα προς την κατεύθυνση βελτίωσης της. Για τους παραπάνω λόγους, οι λύσεις εξετάζονται διεξοδικά ως προς τη συμπεριφορά σύγκλισης, μεταβάλλοντας τις παραμέτρους διακριτοποίησης του προβλήματος υπό εξέταση³. Επιπρόσθετα, γίνεται προσπάθεια ελέγχου των λύσεων επί ενός μεγάλου εύρους μεταβολής των γεωμετρικών χαρακτηριστικών και φυσικών ιδιοτήτων καθορισμού του προβλήματος. Οι έλεγχοι των λύσεων αφορούν το βαθμό ικανοποίησης των οριακών συνθηκών του προβλήματος σε αρκούντως πυκνά πλέγματα σημείων ελέγχου, όπως και τη συμφωνία των εξαγόμενων αποτελεσμάτων με αποτελέσματα άλλων μεθόδων ή διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα. Σε περιπτώσεις για τις οποίες κρίθηκε σκόπιμο, εξετάζεται και το υπολογιστικό κόστος που συνεπάγεται η εφαρμογή της MAS, κυρίως σε όρους απαιτούμενης μνήμης και χρόνου εκτέλεσης. Από την ενδελεχή μελέτη της συμπεριφοράς σύγκλισης των λύσεων και των σφαλμάτων ικανοποίησης των οριακών συνθηκών, είναι δυνατόν να εξαχθούν κάποιοι πρακτικοί κανόνες επιλογής των παραμέτρων καθορισμού του πλήθους και της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών.

Η ερευνητική εργασία που εκτελέστηκε και παρουσιάζεται στην παρούσα διατριβή μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

³E. K. Miller, "Characterization, comparison, and validation of electromagnetic modeling software", Applied Computational Electromagnetics Society Journal, Vol. 4, No. 3, pp. 8-24, 1989.

- Μελέτη της υπάρχουσας βιβλιογραφίας για τη MAS και τις συγγενείς αριθμητικές μεθόδους.
- Εφαρμογή της MAS σε προβλήματα ακτινοβολίας με ανοικτά χωρία:
 - Εφαρμογή της MAS σε περιπτώσεις προβλημάτων που αφορούν στοιχειώδεις ακτινοβολητές πλησίον της συνοριακής επιφάνειας ημιάπειρου διηλεκτρικού χώρου με απώλειες. Αξιοποίηση συμμετριών και εξέταση δυνατοτήτων μείωσης του υπολογιστικού κόστους.
 - Υλοποίηση προγραμμάτων.
 - Αποτίμηση των σφαλμάτων ικανοποίησης των οριακών συνθηκών. Μελέτη χαρακτηριστικών σύγκλισης των λύσεων.
 - Σύγκριση με διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις (ακριβείς ή προσεγγιστικές).
 - Εξαγωγή απλών κανόνων για τη συσχέτιση των χαρακτηριστικών σύγκλισης των λύσεων και της συμπεριφοράς των σφαλμάτων ικανοποίησης των οριακών συνθηκών με τις παραμέτρους καθορισμού του πλήθους και της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών.
 - Διερεύνηση δυνατοτήτων βελτιστοποίησης.
 - Εξέταση της ακρίβειας των λύσεων στην περιοχή του μακρινού πεδίου.
- Εφαρμογή της MAS για την ανάλυση κεραιών σύρματος και στοιχειοκεραιών:
 - Εφαρμογή της MAS σε μεμονωμένες κεραιές λεπτού σύρματος, για διάφορα πεδία διέγερσης.
 - Υλοποίηση προγραμμάτων.
 - Αποτίμηση των σφαλμάτων ικανοποίησης των οριακών συνθηκών. Εξέταση αριθμητικής ευστάθειας των λύσεων.
 - Σύγκριση των λύσεων που προκύπτουν για διαφορετικούς τύπους βοηθητικών πηγών.
 - Σύγκριση με αποτελέσματα άλλων μεθόδων ή διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα.
 - Εξαγωγή απλών κανόνων για την επιλογή του πλήθους των βοηθητικών πηγών.
 - Γενίκευση για την ανάλυση στοιχειοκεραιών.
 - Αποτίμηση της επίδρασης των φαινομένων σύζευξης σε διατάξεις πομποδεκτών.
 - Γενίκευση για την ανάλυση κεραιών παχέος σύρματος.
- Υβριδοποίηση της MAS με την τεχνική συνταιριάσματος των αντιδράσεων (Reaction Matching-RM). Εφαρμογή για την ανάλυση κεραιών σύρματος και στοιχειοκεραιών:
 - Μορφοποίηση της υβριδικής μεθόδου MAS-RM. Εφαρμογή της MAS-RM σε μεμονωμένες κεραιές λεπτού σύρματος, για διάφορα πεδία διέγερσης.
 - Υλοποίηση προγραμμάτων.
 - Αποτίμηση των σφαλμάτων ικανοποίησης των οριακών συνθηκών. Εξέταση αριθμητικής ευστάθειας των λύσεων.
 - Σύγκριση με αποτελέσματα άλλων μεθόδων ή διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα.
 - Εξαγωγή απλών κανόνων για την επιλογή του πλήθους των βοηθητικών πηγών.
 - Γενίκευση για την ανάλυση στοιχειοκεραιών.
 - Εφαρμογή σε προβλήματα σχετικά μεγάλης κλίμακας (στοιχειοκεραίες μεγάλου αριθμού στοιχείων, κεραιές ηλεκτρικά μεγάλου μήκους). Διερεύνηση των δυνατοτήτων μείωσης του υπολογιστικού κόστους. Σύγκριση με άλλες μεθόδους.
 - Γενίκευση για την ανάλυση κεραιών παχέος σύρματος.

Βεβαίως, το θέμα της εφαρμογής της MAS σε προβλήματα ακτινοβολίας δεν εξαντλείται στην παρούσα διατριβή ούτε περιορίζεται στα θέματα που αναφέρθηκαν παραπάνω. Όπως εξάλλου προαναφέρθηκε, δεν υπάρχει συσσωρευμένη εμπειρία στη

βιβλιογραφία σχετικά με την εφαρμογή της MAS σε προβλήματα ακτινοβολίας. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, η διερεύνηση όλου του εύρους των δυνατοτήτων και των αδυναμιών της MAS κατά συστηματικό τρόπο πιθανότατα θα απαιτούσε την ενασχόληση πολλών ερευνητών. Σε αυτό το πλαίσιο, αποτελεί ελπίδα του γράφοντος ότι η παρούσα διατριβή συνιστά ένα εξελικτικό βήμα προς αυτήν την κατεύθυνση, το οποίο μπορεί να φανεί χρήσιμο σε όποιον ενδιαφέρεται να αποκτήσει σφαιρική γνώση για τη MAS ή προτίθεται να την αναπτύξει περαιτέρω.

Η εκπόνηση της παρούσας διατριβής πραγματοποιήθηκε στο Εργαστήριο Ασυρμάτου Επικοινωνίας και Επικοινωνίας Μεγάλων Αποστάσεων της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ. Η εκπόνηση διήρκεσε λίγο περισσότερο από τέσσερα χρόνια, αρχής γενομένης από το Φεβρουάριο του 2000. Τα προγράμματα που αναπτύχθηκαν υλοποιήθηκαν, κατά κύριο λόγο, σε περιβάλλον Microsoft® Visual C++ 6.0. Επικουρικά, χρησιμοποιήθηκαν πακέτα διερμηνευτών γλωσσών υψηλού επιπέδου, με προεξέχον το πακέτο Mathematica 4.0. Για την επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων και την παραγωγή γραφημάτων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα επεξεργασίας λογιστικών φύλλων Microsoft® Excel 2000, ενώ η συγγραφή του κειμένου έγινε αποκλειστικά σε περιβάλλον Microsoft® Word 2000, ακολουθώντας τον οδηγό συγγραφής διδακτορικών διατριβών της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών (Απόφαση Συνέλευσης 11-02-03).

Αξίζει να αναφερθεί ότι η συγγραφή της παρούσας διατριβής έγινε με γνώμονα την παρουσίαση και ανάδειξη της έρευνας που διεξήχθη. Για το λόγο αυτό, σε πολλές περιπτώσεις, αποφεύχθηκε η απευθείας παράθεση υλικού (τύποι, δεδομένα) που είναι διαθέσιμο στη βιβλιογραφία και δεν είναι απαραίτητο για την κατανόηση του κειμένου. Για τον ίδιο λόγο, αποφεύχθηκε η παράθεση πολύπλοκων μαθηματικών εκφράσεων εντός του κύριου σώματος της διατριβής και προτιμήθηκε η συγκέντρωσή τους στα Παραρτήματα. Επίσης, αν και κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής μελετήθηκε και συγκεντρώθηκε εκτενέστατη βιβλιογραφία, έγιναν προσπάθειες συγκράτησης του μεγέθους των λιστών αναφορών στο ελάχιστο. Για το λόγο αυτό, προτιμήθηκε η αναφορά σε κεφάλαια βιβλίων ή δημοσιεύσεις ανασκόπησης που περιλαμβάνουν σημαντικό αριθμό παραπομπών, αντί για την παράθεση του συνόλου των διαθέσιμων σχετικών δημοσιεύσεων, οι οποίες δεν ήταν δυνατόν να παρατεθούν χωρίς τη σημαντική αύξηση του όγκου της παρούσας διατριβής.

Ολοκληρώνοντας, θα ήθελα να εκφράσω τις βαθύτατες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα Καθηγητή κύριο Χρήστο Καψάλη για τη δυνατότητα που μου έδωσε να πραγματοποιήσω ένα από τα όνειρα μου, καθώς και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μου παρείχε, τόσο για την υλοποίηση της παρούσας διατριβής όσο και τη νοητική και πνευματική μου εξέλιξη. Ευχαριστώ ακόμη από καρδιάς τον κύριο Χρήστο Τσόκα, τεχνικό υπεύθυνο του Εργαστηρίου Ασυρμάτου Επικοινωνίας και Επικοινωνίας Μεγάλων Αποστάσεων, για την άριστη συνεργασία και την υψηλού επιπέδου ανθρώπινη επικοινωνία που είχαμε από την πρώτη μέρα της γνωριμίας μας. Ευχαριστώ ακόμη τους συναδέλφους με τους οποίους συνεργάστηκα τα τελευταία χρόνια, και ιδιαίτερα τους Ι. Χαιρετάκη και Π. Βαρλάμο, για την πολύπλευρη βοήθεια τους. Επίσης, ευχαριστώ το Κοινωνικό Ιδρυμα «Αλέξανδρος Σ. Ωνάσης», του οποίου έτυχα υπότροφος, για τη σημαντική οικονομική και ηθική στήριξη που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διατριβής. Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω τη βαθιά ευγνωμοσύνη μου προς την οικογένεια μου για την πολύπλευρη στήριξη που μου παρείχε για να φέρω εις πέρας την παρούσα διατριβή.

Π. Ι. Παπακανελλος
Αθήνα, Μάιος 2004

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	11
SUMMARY	13
ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	15
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	19
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.....	23
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ	31
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	33
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	33
1.1 Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός	33
1.2 Τεχνικές Διακριτοποίησης	34
1.2.1 Διακριτοποίηση Δυναμικών Μεγεθών	34
1.2.2 Χωρική Διακριτοποίηση.....	35
1.2.3 Χρονική Διακριτοποίηση.....	35
1.3 Γενικά Χαρακτηριστικά Αριθμητικών Μεθόδων Συναρτησιακών Προσεγγίσεων.....	36
1.3.1 Βασικές Αρχές.....	36
1.3.2 Τεχνικές Επίλυσης.....	38
1.3.2.1 Τεχνικές Ελαχιστοποίησης Σφάλματος	38
1.3.2.2 Προβολικές Τεχνικές.....	39
1.3.2.3 Τεχνικές Σημειακής Επιβολής και Γενικευμένης Σημειακής Επιβολής	39
1.4 Συνοπτική Παρουσίαση Αριθμητικών Μεθόδων Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού ..40	
1.4.1 Μέθοδος Ροπών.....	41
1.4.2 Γεωμετρική Θεωρία Περίθλασης	41
1.4.3 Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου	42
1.4.4 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων	43
1.4.5 Τεχνικές Γενικευμένων Πολυπόλων.....	44
1.5 Αναφορές	45
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	47
Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΠΗΓΩΝ ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟ . 47	
2.1 Εισαγωγή.....	47
2.2 Γενική Περιγραφή της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών.....	48
2.2.1 Τύποι Προβλημάτων	48
2.2.2 Συναρτησιακές Προσεγγίσεις ΗΜ Πεδίων.....	49
2.2.3 Οριακές Συνθήκες	52

2.2.4	Δείκτης Κατάστασης	53
2.2.5	Σύγκλιση των Αριθμητικών Λύσεων.....	53
2.2.6	Εκτίμηση Σφαλμάτων.....	54
2.3	Εμπειρικοί Κανόνες Επιλογής Παραμέτρων.....	55
2.3.1	Κατανομή Βοηθητικών Πηγών.....	55
2.3.2	Κατανομή Σημείων Επιβολής Οριακών Συνθηκών.....	58
2.4	Αναφορές.....	59
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3		61
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ MAS ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΠΗΓΩΝ ΠΛΗΣΙΟΝ ΤΗΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΗΜΙΑΠΕΙΡΟΥ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ.....		
3.1	Εισαγωγή.....	61
3.2	Ακτινοβολία Στοχειωδών Ηλεκτρικών Πηγών στο Κενό Υπεράνω Ημιάπειρου Διηλεκτρικού Χώρου.....	63
3.2.1	Νηματοειδής Ηλεκτρική Πηγή.....	63
3.2.1.1	Περιγραφή του Προβλήματος.....	63
3.2.1.2	Εφαρμογή της MAS	63
3.2.1.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα.....	67
3.2.2	Κατακόρυφο Ηλεκτρικό Δίπολο.....	72
3.2.2.1	Περιγραφή του Προβλήματος.....	72
3.2.2.2	Εφαρμογή της MAS	72
3.2.2.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα.....	76
3.2.3	Οριζόντιο Ηλεκτρικό Δίπολο	81
3.2.3.1	Περιγραφή του Προβλήματος.....	81
3.2.3.2	Εφαρμογή της MAS	82
3.2.3.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα.....	86
3.3	Ακτινοβολία Στοχειωδών Ηλεκτρικών Πηγών Εντός Ημιάπειρου Διηλεκτρικού Χώρου.....	91
3.3.1	Νηματοειδής Ηλεκτρική Πηγή.....	91
3.3.1.1	Περιγραφή του Προβλήματος.....	91
3.3.1.2	Εφαρμογή της MAS	91
3.3.1.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα.....	93
3.3.2	Κατακόρυφο Ηλεκτρικό Δίπολο.....	95
3.3.2.1	Περιγραφή του Προβλήματος.....	95
3.3.2.2	Εφαρμογή της MAS	95
3.3.2.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα.....	97
3.3.3	Οριζόντιο Ηλεκτρικό Δίπολο	99
3.3.3.1	Περιγραφή του Προβλήματος.....	99
3.3.3.2	Εφαρμογή της MAS	99
3.3.3.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα.....	101
3.4	Βελτιστοποίηση Λύσεων.....	103
3.5	Συμπεριφορά των Λύσεων στο Μακρινό Πεδίο.....	107
3.6	Αναφορές.....	110
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4		113
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ MAS ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΡΑΙΩΝ ΣΥΡΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΟΚΕΡΑΙΩΝ ΣΤΟΝ ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΧΩΡΟ.....		
4.1	Εισαγωγή.....	113

4.2	Δίπολο Λεπτού Σύρματος με Τροφοδοσία Πηγής Τάσης Διακένου (Gap Voltage Source)	115
4.2.1	Περιγραφή του Προβλήματος	115
4.2.2	Εφαρμογή της MAS	116
4.2.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα	121
4.3	Μονόπολο Λεπτού Σύρματος με Τροφοδοσία Πηγής Μαγνητικού Δακτυλίου (Magnetic Frill Source)	127
4.3.1	Περιγραφή του Προβλήματος	127
4.3.2	Εφαρμογή της MAS	128
4.3.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα	130
4.4	Δίπολο Λεπτού Σύρματος που Διεγείρεται από Εξωτερικό Πεδίο	137
4.4.1	Περιγραφή του Προβλήματος	137
4.4.2	Εφαρμογή της MAS	138
4.4.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα	140
4.5	Στοιχειοκεραίες Παράλληλων Διπόλων	150
4.5.1	Περιγραφή του Προβλήματος	150
4.5.2	Εφαρμογή της MAS	151
4.5.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα	154
4.6	Μελέτη Σύζευξης Διπολικών Πομποδεκτών	161
4.6.1	Περιγραφή του Προβλήματος	161
4.6.2	Εφαρμογή της MAS	162
4.6.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα	162
4.7	Δίπολο Παχές Σύρματος με Τροφοδοσία Πηγής Τάσης Διακένου (Gap Voltage Source)	167
4.7.1	Περιγραφή του Προβλήματος	167
4.7.2	Εφαρμογή της MAS	167
4.7.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα	170
4.8	Αναφορές	173
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	177
ΥΒΡΙΔΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ MAS ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΧΝΙΚΗ ΣΥΝΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΝ (REACTION MATCHING)-ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΕΡΑΙΩΝ ΣΥΡΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΟΚΕΡΑΙΩΝ		
5.1	Εισαγωγή	177
5.2	Δίπολο Λεπτού Σύρματος	179
5.2.1	Περιγραφή του Προβλήματος	179
5.2.2	Εφαρμογή της MAS-RM	180
5.2.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα	185
5.3	Στοιχειοκεραίες Παράλληλων Διπόλων	195
5.3.1	Περιγραφή του Προβλήματος	195
5.3.2	Εφαρμογή της MAS-RM	195
5.3.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα	199
5.4	Άλλες Εφαρμογές	205
5.4.1	Μελέτη της Επίδρασης του Εύρους του Διακένου Τροφοδότησης στη Σύνθετη Αγωγιμότητα Εισόδου Διπόλου	205
5.4.2	Ανάλυση Διπόλου Μεγάλου Μήκους	209

5.5	Δίπολο Παχέος Σύρματος με Τροφοδοσία Πηγής Τάσης Διακένου (Gap Voltage Source)	211
5.5.1	Περιγραφή του Προβλήματος	211
5.5.2	Εφαρμογή της MAS-RM.....	211
5.5.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα	214
5.6	Αναφορές	216
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α		221
ΒΟΗΘΗΤΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ		221
A.1	Νηματοειδείς Ηλεκτρικές Πηγές.....	221
A.2	Νηματοειδείς Μαγνητικές Πηγές.....	222
A.3	Βιβλιογραφία.....	223
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β		225
ΒΟΗΘΗΤΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ.....		225
B.1	Στοιχειώδη Ηλεκτρικά Δίπολα.....	225
B.2	Στοιχειώδη Μαγνητικά Δίπολα.....	227
B.3	Ηλεκτρικά Δίπολα Ημιτονοειδούς Κατανομής Ρεύματος	228
B.4	Ηλεκτρικά Μονόπολα Ημιτονοειδούς Κατανομής Ρεύματος	230
ΕΠΙΛΟΓΟΣ		233
Γενικά		233
Ανακεφαλαίωση.....		233
Συμπεράσματα-Σημεία που Προάγεται η Επιστήμη		235

Ευρετήριο Σχημάτων

Σχήμα 2. 1. Ομοιογενές και ιστροπικό υλικό σώμα, εκτιθέμενο σε γνωστό ΗΜ πεδίο διέγερσης.....	49
Σχήμα 2. 2. Σύνολα βοηθητικών πηγών για την περιγραφή των ΗΜ πεδίων εκτός και εντός του σώματος του Σχήματος 2. 1.....	50
Σχήμα 2. 3. Γενική περίπτωση προβλήματος ΗΜ αλληλεπίδρασης που εμπλέκει περισσότερα του ενός υλικά σώματα.....	50
Σχήμα 2. 4. Πρακτικοί κανόνες τοποθέτησης των πολυπολικών πηγών της μεθόδου MMP.....	56
Σχήμα 2. 5. Γεωμετρικός κανόνας τοποθέτησης των πηγών σε κυλίνδρους ελλειπτικής διατομής.....	57
Σχήμα 3. 1. Γεωμετρία νηματοειδούς ηλεκτρικής πηγής που ακτινοβολεί υπεράνω ημιάπειρου ομοιογενούς διηλεκτρικού χώρου.....	64
Σχήμα 3. 2. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του ΗΜ πεδίου στο χώρο 1.....	65
Σχήμα 3. 3. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του ΗΜ πεδίου στο χώρο 2.....	65
Σχήμα 3. 4. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4α), για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.....	67
Σχήμα 3. 5. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4β), για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.....	68
Σχήμα 3. 6. Τυπικές κατανομές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4α), για διάφορες τιμές της απόστασης μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών.....	69
Σχήμα 3. 7. Τυπικές κατανομές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4β), για διάφορες τιμές της απόστασης μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών.....	70
Σχήμα 3. 8. Τυπικές κατανομές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.9), για διάφορες τιμές της απόστασης μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών.....	70
Σχήμα 3. 9. Απεικόνιση της διαφοράς σε dB μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου της ακριβούς λύσης και της λύσης της MAS κατά μήκος του άξονα y	71
Σχήμα 3. 10. Γεωμετρία κατακόρυφου ηλεκτρικού διπόλου που ακτινοβολεί υπεράνω ημιάπειρου ομοιογενούς διηλεκτρικού χώρου.....	73
Σχήμα 3. 11. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του ΗΜ πεδίου στο χώρο 1.....	74
Σχήμα 3. 12. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του ΗΜ πεδίου στο χώρο 2.....	74
Σχήμα 3. 13. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14α) κατά μήκος του άξονα x , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.....	77
Σχήμα 3. 14. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14β) κατά μήκος του άξονα x , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.....	77
Σχήμα 3. 15. Τυπικές κατανομές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14α) κατά μήκος του άξονα x , για διάφορες τιμές της απόστασης μεταξύ διαδοχικών δακτυλίων βοηθητικών πηγών.....	78

Σχήμα 3. 16. Τυπικές κατανομές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14β) κατά μήκος του άξονα x , για διάφορες τιμές της απόστασης μεταξύ διαδοχικών δακτυλίων βοηθητικών πηγών.....	78
Σχήμα 3. 17. Διάγραμμα της σχετικής μεταβολής της σύνθετης αντίστασης εισόδου συναρτήσει της απόστασης μεταξύ διαδοχικών δακτυλίων βοηθητικών πηγών.....	79
Σχήμα 3. 18. Απεικόνιση της διαφοράς σε dB μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου της προσεγγιστικής αναλυτικής λύσης και της λύσης της MAS, ως συνάρτηση της απόστασης από τον άξονα του διπόλου κατά μήκος του άξονα x	81
Σχήμα 3. 19. Γεωμετρία οριζώντιου ηλεκτρικού διπόλου που ακτινοβολεί υπεράνω ημιάπειρου ομοιογενούς διηλεκτρικού χώρου.....	82
Σχήμα 3. 20. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του HM πεδίου στο χώρο 1.....	83
Σχήμα 3. 21. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του HM πεδίου στο χώρο 2.....	83
Σχήμα 3. 22. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24α) κατά μήκος του άξονα z , για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	86
Σχήμα 3. 23. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24β) κατά μήκος του άξονα z , για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	87
Σχήμα 3. 24. Τυπικές κατανομές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24α) κατά μήκος του άξονα z , για διάφορες τιμές της απόστασης μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών.....	87
Σχήμα 3. 25. Τυπικές κατανομές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24β) κατά μήκος του άξονα z , για διάφορες τιμές της απόστασης μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών.....	88
Σχήμα 3. 26. Διάγραμμα της σχετικής μεταβολής της σύνθετης αντίστασης εισόδου συναρτήσει της απόστασης μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών.....	89
Σχήμα 3. 27. Απεικόνιση της διαφοράς σε dB μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου της προσεγγιστικής αναλυτικής λύσης και της λύσης της MAS, ως συνάρτηση της απόστασης από τον άξονα του διπόλου κατά μήκος του άξονα x	91
Σχήμα 3. 28. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4α), για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	93
Σχήμα 3. 29. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4β), για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	93
Σχήμα 3. 30. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4α), για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	94
Σχήμα 3. 31. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4β), για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	94
Σχήμα 3. 32. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14α) κατά μήκος του άξονα x , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	97
Σχήμα 3. 33. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14β) κατά μήκος του άξονα x , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	97
Σχήμα 3. 34. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14α) κατά μήκος του άξονα x , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	98

Σχήμα 3. 35. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14β) κατά μήκος του άξονα x , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	98
Σχήμα 3. 36. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24α) κατά μήκος του άξονα z , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	101
Σχήμα 3. 37. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24β) κατά μήκος του άξονα z , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	101
Σχήμα 3. 38. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24α) κατά μήκος του άξονα z , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	102
Σχήμα 3. 39. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24β) κατά μήκος του άξονα z , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	102
Σχήμα 3. 40. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4α), για τις θέσεις των βοηθητικών πηγών των σχέσεων (3.43) και (3.44), ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	104
Σχήμα 3. 41. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4β), για τις θέσεις των βοηθητικών πηγών των σχέσεων (3.43) και (3.44), ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.	104
Σχήμα 3. 42. Απεικόνιση της διαφοράς σε dB μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου της ακριβούς λύσης και των λύσεων της MAS κατά μήκος του άξονα y	106
Σχήμα 3. 43. Σύγκριση του ηλεκτρικού πεδίου της προσεγγιστικής αναλυτικής λύσης και της λύσης της MAS, ως συνάρτηση της απόστασης από τον άξονα του διπόλου κατά μήκος του άξονα x . Απεικόνιση σε dB ως προς κοινή απόσταση αναφοράς. ..	108
Σχήμα 3. 44. Σύγκριση του ηλεκτρικού πεδίου της προσεγγιστικής αναλυτικής λύσης και της λύσης της MAS, ως συνάρτηση της απόστασης από τον άξονα του διπόλου κατά μήκος του άξονα x . Απεικόνιση σε dB ως προς κοινή απόσταση αναφοράς. ..	109
Σχήμα 4. 1. Γεωμετρία διπόλου που τροφοδοτείται από πηγή τάσης διακένου.	116
Σχήμα 4. 2. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του άγνωστου HM πεδίου.	117
Σχήμα 4. 3. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (στοιχειώδη δίπολα).	121
Σχήμα 4. 4. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).	122
Σχήμα 4. 5. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα και μονόπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).	122
Σχήμα 4. 6. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του διπόλου.	123
Σχήμα 4. 7. Απεικόνιση του μέτρου της εφραπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον του σημείου τροφοδότησης), για διαφορετικές επιλογές του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).	125
Σχήμα 4. 8. Απεικόνιση του μέτρου της εφραπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον των άκρων), για διαφορετικές επιλογές του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).	125

Σχήμα 4. 9. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον των άκρων), για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.....	126
Σχήμα 4. 10. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του διπόλου.	126
Σχήμα 4. 11. Γεωμετρία μονοπόλου που τροφοδοτείται από ομοαξονική γραμμή μεταφοράς.....	127
Σχήμα 4. 12. Γεωμετρία ισοδύναμου διπόλου που τροφοδοτείται από δακτύλιο μαγνητικού ρεύματος.....	128
Σχήμα 4. 13. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (στοιχειώδη δίπολα).....	130
Σχήμα 4. 14. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).	132
Σχήμα 4. 15. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα και μονόπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).....	132
Σχήμα 4. 16. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου, για διαφορετικές επιλογές του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).	133
Σχήμα 4. 17. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον του σημείου τροφοδότησης), για διαφορετικές επιλογές του πλήθους των βοηθητικών πηγών. ..	133
Σχήμα 4. 18. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον των άκρων), για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.....	134
Σχήμα 4. 19. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του μονοπόλου.	135
Σχήμα 4. 20. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του μονοπόλου.	135
Σχήμα 4. 21. Γεωμετρία μονοπόλου που τροφοδοτείται από ομοαξονική γραμμή μεταφοράς.....	136
Σχήμα 4. 22. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του μονοπόλου.	136
Σχήμα 4. 23. Γεωμετρία διπόλου που διεγείρεται από εξωτερικό ΗΜ πεδίο.....	137
Σχήμα 4. 24. Τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (στοιχειώδη δίπολα).....	140
Σχήμα 4. 25. Τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).	141
Σχήμα 4. 26. Τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα και μονόπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).	141
Σχήμα 4. 27. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου, για διαφορετικές επιλογές του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).	142
Σχήμα 4. 28. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον του κέντρου), για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.....	144

Σχήμα 4. 29. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον των άκρων), για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.	144
Σχήμα 4. 30. Απεικόνιση της κανονικοποιημένης διατομής σκέδασης συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης, για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης.	145
Σχήμα 4. 31. Κατανομή του μέτρου του επαγόμενου ρεύματος στην περίπτωση διέγερσης από στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο, για διάφορες αποστάσεις από το κέντρο του διπόλου.	145
Σχήμα 4. 32. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον των άκρων), για διαφορετικές επιλογές του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).	146
Σχήμα 4. 33. Απεικόνιση της κανονικοποιημένης διατομής σκέδασης συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης.	148
Σχήμα 4. 34. Απεικόνιση της κανονικοποιημένης διατομής σκέδασης συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης.	148
Σχήμα 4. 35. Απεικόνιση της κανονικοποιημένης διατομής σκέδασης συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης.	149
Σχήμα 4. 36. Απεικόνιση της κανονικοποιημένης διατομής σκέδασης συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης.	149
Σχήμα 4. 37. Κατανομή του μέτρου του επαγόμενου ρεύματος σε φορτωμένο δίπολο, για διάφορα τυπικά φορτία.	150
Σχήμα 4. 38. Γεωμετρία παράλληλων διπόλων σε τυχαίες θέσεις.	151
Σχήμα 4. 39. Απεικόνιση της μεταβολής της ίδιας σύνθετης αντίστασης (σε σχέση με την τιμή της στον ελεύθερο χώρο) συναρτήσει της απόστασης.	155
Σχήμα 4. 40. Απεικόνιση της μεταβολής της ίδιας σύνθετης αντίστασης (σε σχέση με την τιμή της στον ελεύθερο χώρο) συναρτήσει της απόστασης.	155
Σχήμα 4. 41. Απεικόνιση της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης συναρτήσει της απόστασης.	157
Σχήμα 4. 42. Απεικόνιση της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης συναρτήσει της απόστασης.	157
Σχήμα 4. 43. Απεικόνιση της μεταβολής της ίδιας σύνθετης αντίστασης (σε σχέση με την τιμή της στον ελεύθερο χώρο) συναρτήσει της απόστασης.	158
Σχήμα 4. 44. Απεικόνιση της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης συναρτήσει της απόστασης.	158
Σχήμα 4. 45. Διαγράμματα ακτινοβολίας πλάτους συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης στο οριζόντιο επίπεδο.	159
Σχήμα 4. 46. Απεικόνιση της ίδιας και των αμοιβαίων σύνθετων αγωγιμοτήτων συναρτήσει της απόστασης.	160
Σχήμα 4. 47. Απεικόνιση της ίδιας και των αμοιβαίων σύνθετων αγωγιμοτήτων συναρτήσει της απόστασης.	160
Σχήμα 4. 48. Διαγράμματα ακτινοβολίας πλάτους συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης στο οριζόντιο επίπεδο.	161
Σχήμα 4. 49. Γεωμετρία της πρώτης περίπτωσης για τη μελέτη φαινομένων σύζευξης.	163
Σχήμα 4. 50. Απεικόνιση της μεταβολής της σύνθετης αντίστασης εισόδου (σε σχέση με την τιμή της στον ελεύθερο χώρο) συναρτήσει της απόστασης.	164
Σχήμα 4. 51. Διαγράμματα ακτινοβολίας πλάτους συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης στο οριζόντιο επίπεδο.	165

Σχήμα 4. 52. Γεωμετρία της δεύτερης περίπτωσης για τη μελέτη φαινομένων σύζευξης.....	165
Σχήμα 4. 53. Απεικόνιση της μεταβολής της σύνθετης αντίστασης εισόδου (σε σχέση με την τιμή της στον ελεύθερο χώρο) συναρτήσει της απόστασης.....	166
Σχήμα 4. 54. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του άγνωστου ΗΜ πεδίου.....	168
Σχήμα 4. 55. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (στοιχειώδη δίπολα).....	170
Σχήμα 4. 56. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).....	171
Σχήμα 4. 57. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα και μονόπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).....	171
Σχήμα 4. 58. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του λόγου της ακτίνας των δακτυλίων βοηθητικών πηγών προς την ακτίνα του διπόλου.....	173
Σχήμα 5. 1. Γεωμετρία διπόλου που διεγείρεται από εξωτερικό ΗΜ πεδίο ή τροφοδοτείται από πηγή τάσης διακένου.....	179
Σχήμα 5. 2. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του άγνωστου ΗΜ πεδίου.....	181
Σχήμα 5. 3. Τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών.....	186
Σχήμα 5. 4. Κατανομή του επαγόμενου ρεύματος.....	186
Σχήμα 5. 5. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου.....	187
Σχήμα 5. 6. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου.....	187
Σχήμα 5. 7. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου.....	188
Σχήμα 5. 8. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών.....	189
Σχήμα 5. 9. Κατανομή του αναπτυσσόμενου ρεύματος.....	189
Σχήμα 5. 10. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του διπόλου.....	190
Σχήμα 5. 11. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του διπόλου.....	191
Σχήμα 5. 12. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του διπόλου.....	191
Σχήμα 5. 13. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου.....	192
Σχήμα 5. 14. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου.....	192
Σχήμα 5. 15. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου.....	193
Σχήμα 5. 16. Τιμές της ίδιας και της αμοιβαίας σύνθετης αγωγιμότητας συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών.....	200
Σχήμα 5. 17. Απεικόνιση της μεταβολής της ίδιας σύνθετης αντίστασης (σε σχέση με την τιμή της στον ελεύθερο χώρο) συναρτήσει της απόστασης.....	200
Σχήμα 5. 18. Απεικόνιση της μεταβολής της ίδιας σύνθετης αντίστασης (σε σχέση με την τιμή της στον ελεύθερο χώρο) συναρτήσει της απόστασης.....	201
Σχήμα 5. 19. Απεικόνιση της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης συναρτήσει της απόστασης.....	201

Σχήμα 5. 20. Απεικόνιση της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης συναρτήσει της απόστασης.....	202
Σχήμα 5. 21. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην περίπτωση συμμετρικής τροφοδότησης.....	203
Σχήμα 5. 22. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην περίπτωση αντισυμμετρικής τροφοδότησης.....	203
Σχήμα 5. 23. Τιμές των μέτρων των ρευμάτων στα κέντρα των στοιχείων (ημιτονοειδή δίπολα).	204
Σχήμα 5. 24. Τιμές των μέτρων των ρευμάτων στα κέντρα των στοιχείων (ημιτονοειδή δίπολα και μονόπολα).	204
Σχήμα 5. 25. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών.	206
Σχήμα 5. 26. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον του σημείου τροφοδότησης).....	207
Σχήμα 5. 27. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον των άκρων).....	207
Σχήμα 5. 28. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του διπόλου.	208
Σχήμα 5. 29. Απεικόνιση του φανταστικού μέρους της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του εύρους του διακένου.	209
Σχήμα 5. 30. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του διπόλου.	210
Σχήμα 5. 31. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών.	215
Σχήμα 5. 32. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του λόγου της ακτίνας των δακτυλίων βοηθητικών πηγών προς την ακτίνα του διπόλου.	216

Ευρετήριο Πινάκων

Πίνακας 3. 1. Μέγιστες τιμές των σχετικών σφαλμάτων των οριακών συνθηκών, για τις βέλτιστες λύσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών.	71
Πίνακας 3. 2. Μέγιστες τιμές των σχετικών σφαλμάτων των οριακών συνθηκών και σχετική μεταβολή της σύνθετης αντίστασης εισόδου, για τις βέλτιστες λύσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών.	80
Πίνακας 3. 3. Μέγιστες τιμές των σχετικών σφαλμάτων των οριακών συνθηκών και σχετική μεταβολή της σύνθετης αντίστασης εισόδου, για τις βέλτιστες λύσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών.	90
Πίνακας 3. 4. Παράμετροι των λύσεων της MAS και μέγιστες τιμές των σχετικών σφαλμάτων των οριακών συνθηκών.	109
Πίνακας 4. 1. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου αυξανόμενης της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών, για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.	124
Πίνακας 4. 2. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου αυξανόμενης της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών, για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.	131
Πίνακας 4. 3. Τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου αυξανόμενης της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών, για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.	143
Πίνακας 4. 4. Τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στα άκρα του διακένου αυξανόμενης της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών, για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.	147
Πίνακας 4. 5. Τιμές της ίδιας και της αμοιβαίας σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου αυξανόμενης της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών. ..	156
Πίνακας 5. 1. Τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου αυξανόμενης της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών. ..	190
Πίνακας 5. 2. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου ασύμμετρα τροφοδοτούμενων διπόλων.	194
Πίνακας 5. 3. Γεωμετρικά χαρακτηριστικά στοιχειοκεραίας Yagi-Uda και τιμές των παραμέτρων καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών.	204
Πίνακας 5. 4. Αριθμοί αγνώστων και χρόνοι εκτέλεσης δοκιμών.	205
Πίνακας 5. 5. Αριθμοί αγνώστων και χρόνοι εκτέλεσης δοκιμών.	211
Πίνακας A. 1. Αντιστοίχιση δυαδικών ποσοτήτων ηλεκτρικών και μαγνητικών πηγών ρεύματος.	223

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός

Ως γνωστόν, η ανάλυση ηλεκτρομαγνητικών (ΗΜ) προβλημάτων βασίζεται στις εξισώσεις του Maxwell και στις σχετικές οριακές συνθήκες, οι οποίες είναι γνωστές από τα τέλη του 19^{ου} αιώνα. Μεταγενέστερες επεκτάσεις της βασικής ΗΜ θεωρίας σε ανομοιογενή, ανισοτροπικά και μη γραμμικά μέσα οδήγησαν σε γενικευμένες εξισώσεις, οι οποίες διέπουν όλα τα φαινόμενα ΗΜ αλληλεπιδράσεων. Ωστόσο, οι εξισώσεις αυτές είναι πολύ δύσκολο να επιλυθούν αναλυτικά, ακόμη και σε ομοιογενή, ισοτροπικά και γραμμικά μέσα, με εξαιρέσεις τις περιπτώσεις κάποιων κανονικών προβλημάτων.

Από τις αρχές του προηγούμενου αιώνα, έγιναν προσπάθειες επέκτασης του εύρους των προβλημάτων που είναι δυνατόν να επιλυθούν αναλυτικά με την ανάπτυξη προχωρημένων μαθηματικών μεθόδων, όπως είναι η μέθοδος Wiener-Hopf, οι οποίες, αν και παρέχουν τη δυνατότητα προσδιορισμού αναλυτικών λύσεων, δεν είναι εύκολα εφαρμόσιμες σε προβλήματα εφαρμοσμένου ηλεκτρομαγνητισμού. Αξίζει δε να σημειωθεί ότι, λόγω της ραγδαίας τεχνολογικής ανάπτυξης με την πάροδο των ετών, τα προς επίλυση προβλήματα χαρακτηρίζονται από όλο και πιο μεγάλη πολυπλοκότητα, η οποία καθιστά απαγορευτική την εφαρμογή αναλυτικών μεθόδων για την επίλυση τους. Σε κάποιες περιπτώσεις, η ανάλυση προβλημάτων που εμπλέκουν ηλεκτρικά μεγάλες δομές, δηλαδή δομές μεγάλων διαστάσεων σε σχέση με το μήκος κύματος στην περιοχή συχνοτήτων ενδιαφέροντος, μπορεί να γίνει με εφαρμογή ασυμπτωτικών μεθόδων υψηλών συχνοτήτων, όπως είναι οι μέθοδοι της γεωμετρικής και φυσικής οπτικής. Οι μέθοδοι αυτές παρέχουν προσεγγιστικές λύσεις, που αφορούν ποσότητες σχετικές μόνο με το μακρινό πεδίο, δηλαδή σε αποστάσεις αρκούντως μεγάλες σε σχέση με τις διαστάσεις της υπό μελέτη δομής και το μήκος κύματος. Οι εγγενείς περιορισμοί των ασυμπτωτικών μεθόδων, σε συνδυασμό και με το περιορισμένο εύρος εφαρμογής των αναλυτικών μεθόδων, ώθησε τους επιστήμονες στην ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων, οι οποίες παρέχουν αριθμητικές λύσεις των εξισώσεων του υπό μελέτη προβλήματος, βασιζόμενες σε κάποιας μορφής διακριτοποίηση αυτών κατά συστηματικό τρόπο [1].

Τις τελευταίες δεκαετίες, διάφορες ερευνητικές ομάδες ασχολήθηκαν με τη βελτίωση των αριθμητικών μεθόδων, τόσο σε σχέση με την ακρίβεια των εξαγόμενων αποτελεσμάτων όσο και τη μείωση των απαιτούμενων υπολογιστικών πόρων, όπως και με την ανάπτυξη υβριδικών μεθόδων, οι οποίες αξιοποιούν τα πλεονεκτήματα των συνιστωσών μεθόδων και επεκτείνουν το δυναμικό πεδίο εφαρμογής τους. Η διαρκής ανάπτυξη και εξέλιξη των αριθμητικών μεθόδων οδήγησε στη γενίκευση της χρήσης τους για την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων ακτινοβολίας και σκέδασης, ενώ τα τελευταία χρόνια εμφανίστηκαν ολοκληρωμένα πακέτα λογισμικού με δυνατότητες ανάλυσης πολύπλοκων προβλημάτων ΗΜ αλληλεπιδράσεων, χωρίς να απαιτείται η δημιουργία νέου κώδικα από το χρήστη. Οι σημαντικότερες αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων ΗΜ αλληλεπιδράσεων παρουσιάζονται συνοπτικά ακολούθως, αφού προηγηθεί μια σύντομη αναφορά στα γενικά χαρακτηριστικά των αριθμητικών μεθόδων και στις μαθηματικές αρχές στις οποίες βασίζονται.

1.2 Τεχνικές Διακριτοποίησης

Είναι γνωστό ότι όλα τα δυναμικά μεγέθη, τα οποία υπεισέρχονται στα προβλήματα εφαρμοσμένου ηλεκτρομαγνητισμού (π.χ. ΗΜ πεδία, πυκνότητες επαγόμενων φορτίων και ρευμάτων), είναι βαθμωτές ή διανυσματικές συναρτήσεις των τριών χωρικών μεταβλητών και του χρόνου. Οι σχέσεις που συνδέουν αυτά τα μεγέθη μεταξύ τους, όπως και με τα γενεσιουργά αίτια τους (π.χ. ΗΜ πεδία διέγερσης, πηγές ισχύος, επιβαλλόμενα φορτία και ρεύματα), είναι οι εξισώσεις του Maxwell στη διαφορική ή ολοκληρωτική τους μορφή. Κατάλληλη εφαρμογή των εξισώσεων του Maxwell στη διαφορική τους μορφή στις διακριτές περιοχές του προβλήματος (περιοχές με διαφορετικές φυσικές ιδιότητες), καθώς και των οριακών συνθηκών που ισχύουν στις συνοριακές επιφάνειες τους, ή, εναλλακτικά, των εξισώσεων του Maxwell στην ολοκληρωτική τους μορφή, οδηγεί στις προς επίλυση εξισώσεις για τον προσδιορισμό των μεγεθών ενδιαφέροντος.

Οι αριθμητικές μέθοδοι βασίζονται, συνήθως, σε κάποιας μορφής χωρική διακριτοποίηση των περιοχών διαφορετικών φυσικών χαρακτηριστικών και των συνοριακών επιφανειών τους, καθώς και σε κάποιας μορφής χωροχρονική διακριτοποίηση των δυναμικών μεγεθών που υπεισέρχονται στις εξισώσεις του Maxwell. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι διάφορες αριθμητικές μέθοδοι ακολουθούν διαφορετικές τεχνικές διακριτοποίησης, οι σημαντικότερες από τις οποίες αναφέρονται ακολούθως.

1.2.1 Διακριτοποίηση Δυναμικών Μεγεθών

Η απευθείας διακριτοποίηση των δυναμικών μεγεθών που υπεισέρχονται στις εξισώσεις του Maxwell μπορεί να γίνει κατά διάφορους τρόπους. Σε κάποιες περιπτώσεις, τα ΗΜ πεδία και οι πυκνότητες φορτίου και ρεύματος υπολογίζονται σε διακριτά σημεία του χώρου, είτε η ανάλυση γίνεται στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο της συχνότητας, και σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, όταν η ανάλυση γίνεται στο πεδίο του χρόνου. Εναλλακτικά, κάποια μεγέθη εκφράζονται απευθείας ως γραμμικοί συνδυασμοί γνωστών συναρτήσεων βάσης με άγνωστους συντελεστές, οπότε καλούνται «πρωτογενή» μεγέθη, ενώ τα υπόλοιπα προκύπτουν δευτερογενώς από τα πρώτα, οπότε καλούνται «δευτερογενή» μεγέθη. Για παράδειγμα, ένα πρωτογενές μέγεθος f προσεγγίζεται μέσω του ανάπτυγματος

$$f = f^{exc} + \sum_{n=1}^N w_n f_n + \eta, \quad (1.1)$$

όπου f^{exc} ο όρος διέγερσης, f_n οι συναρτήσεις βάσης του ανάπτυγματος και w_n άγνωστοι συντελεστές. Με η συμβολίζεται η τιμή του σφάλματος της προσέγγισης. Ο διαχωρισμός των αριθμητικών μεθόδων που βασίζονται σε συναρτησιακές προσεγγίσεις της μορφής της σχέσης (1.1), έχοντας ως κριτήριο την επιλογή των συναρτήσεων βάσης [2], οδηγεί στην ακόλουθη κατηγοριοποίηση:

- Οι συναρτήσεις βάσης f_n επιλέγονται έτσι ώστε το ανάπτυγμα της σχέσης (1.1) να ικανοποιεί ακριβώς τις πεδιακές εξισώσεις και τις οριακές συνθήκες. Αυτή η προσέγγιση αφορά στην ουσία αναλυτικές λύσεις, οι οποίες, λόγω της πεπερασμένης ακρίβειας των υπολογιστών, υπολογίζονται με κάποιο σφάλμα.
- Οι συναρτήσεις βάσης f_n επιλέγονται έτσι ώστε το ανάπτυγμα της σχέσης (1.1) να ικανοποιεί ακριβώς τις πεδιακές εξισώσεις, αλλά οι οριακές συνθήκες ικανοποιούνται κατά προσέγγιση. Οι μέθοδοι που υπάγονται σε αυτήν την κατηγορία συχνά καλούνται ημιαναλυτικές.

- Οι συναρτήσεις βάσης f_n επιλέγονται έτσι ώστε το ανάπτυγμα της σχέσης (1.1) να ικανοποιεί ακριβώς τις οριακές συνθήκες, αλλά οι πεδιακές εξισώσεις ικανοποιούνται κατά προσέγγιση.
- Οι πεδιακές εξισώσεις και οι οριακές συνθήκες ικανοποιούνται κατά προσέγγιση. Αυτού του τύπου οι αριθμητικές μέθοδοι χαρακτηρίζονται συχνά από σημαντικά προβλήματα αριθμητικής αστάθειας και, λόγω του γεγονότος αυτού, δεν έχουν αναπτυχθεί σημαντικά.

1.2.2 Χωρική Διακριτοποίηση

Οι περισσότερες αριθμητικές μέθοδοι βασίζονται σε κάποια μορφή γεωμετρική διακριτοποίηση, η οποία αφορά τις διακριτές περιοχές του προβλήματος, όπως αυτές καθορίζονται από τις φυσικές τους ιδιότητες, τη μορφή των συνοριακών επιφανειών, ή και τα δύο. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται για την αποφυγή απώλειας πληροφορίας αναφορικά με το κάθετο και τα εφαπτομενικά διανύσματα στις συνοριακές επιφάνειες, για την εξασφάλιση της ορθής επιβολής των οριακών συνθηκών.

Σε κάποιες περιπτώσεις, οι διακριτές περιοχές του προβλήματος είναι εξαιρετικά πολύπλοκες, οπότε διαμερίζονται σε υποπεριοχές, εισάγοντας φανταστικές συνοριακές επιφάνειες (fictitious/virtual boundaries). Στη συνέχεια, απαιτείται η επιβολή των οριακών συνθηκών κάποιων ή και όλων των πεδιακών συνιστωσών επί των φανταστικών συνοριακών επιφανειών. Αν και η διαδικασία αυτή αυξάνει το υπολογιστικό κόστος, καθιστά εφικτή την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων σε αρκετές περιπτώσεις, που είναι εξαιρετικά δύσκολο να επιλυθούν διαφορετικά.

1.2.3 Χρονική Διακριτοποίηση

Όσον αφορά τη χρονική συμπεριφορά των δυναμικών μεγεθών, η χρονική εξάρτηση δεν η ίδια παντού στο χώρο πάντοτε και για όλα τα μεγέθη. Ωστόσο, όταν η διέγερση χαρακτηρίζεται από αρμονική χρονική εξάρτηση και ο χώρος είναι γραμμικός, η χρονική εξάρτηση είναι αρμονική με την ίδια συχνότητα για όλα τα μεγέθη παντού στο χώρο. Σε τέτοιες περιπτώσεις, εισάγεται ο φασιστικός φορμαλισμός, οπότε η χρονική εξάρτηση ουσιαστικά απαλείφεται και η ανάλυση γίνεται στο πεδίο της συχνότητας.

Όταν η χρονική εξάρτηση είναι μη αρμονική, όλα τα μεγέθη είναι δυνατόν να εκφραστούν ως ολοκληρώματα Fourier, τα οποία αντιπροσωπεύουν συνεχείς υπερθέσεις αρμονικών συναρτήσεων. Το γεγονός αυτό παρέχει θεωρητικά τη δυνατότητα διακριτοποίησης του προβλήματος στο πεδίο της συχνότητας, την επαναληπτική επίλυση του σε διάφορες συχνότητες και, τελικά, την αντιστροφή της λύσης κατά Fourier, για τον προσδιορισμό της λύσης στο πεδίο του χρόνου. Όμως, η προσέγγιση αυτή πάσχει από σημαντικά αριθμητικά προβλήματα και, σε πολλές περιπτώσεις, καταλήγει σε αποτελέσματα μειωμένης ακρίβειας. Ωστόσο, σε περιπτώσεις μη αρμονικής αλλά απλώς περιοδικής διέγερσης, η πρακτική αυτή μπορεί να ακολουθηθεί, αν και πάλι δεν είναι εξασφαλισμένη η εύρεση λύσης ικανοποιητικής ακρίβειας χωρίς τη διενέργεια μεγάλου αριθμού προσομοιώσεων. Για το λόγο αυτό, σε τέτοιες περιπτώσεις, συνήθως, εφαρμόζονται αριθμητικές μέθοδοι στο πεδίο του χρόνου, οπότε είναι δυνατόν να εξαχθούν συμπεράσματα για την απόκριση συχνότητας σε κάποιο εύρος συχνοτήτων ενδιαφέροντος από το μετασχηματισμό Fourier της λύσης.

1.3 Γενικά Χαρακτηριστικά Αριθμητικών Μεθόδων Συναρτησιακών Προσεγγίσεων

1.3.1 Βασικές Αρχές

Όπως είναι γνωστό από την κλασική ΗΜ θεωρία, οι εξισώσεις του Maxwell και οι σχετικές οριακές συνθήκες εμπλέκουν πολλά διαφορετικά μεγέθη (συνιστώσες ΗΜ πεδίων, κατανομές φορτίου και ρεύματος, παράγωγα μεγέθη). Για τον προσδιορισμό αναλυτικών λύσεων, αρκεί η επίλυση ενός κατάλληλου υποσυνόλου εξισώσεων και οριακών συνθηκών. Όταν οι προκύπτουσες αναλυτικές λύσεις ικανοποιούν τις εξισώσεις αυτού του υποσυνόλου ακριβώς, τότε ικανοποιούν όλες τις εξισώσεις και τις οριακές συνθήκες. Αντίθετα, οι προσεγγιστικές λύσεις, οι οποίες προκύπτουν από τις αριθμητικές μεθόδους, δεν ικανοποιούν ταυτόχρονα όλες τις εξισώσεις του Maxwell και όλες τις οριακές συνθήκες, οπότε η ποιότητα των λύσεων εξαρτάται όχι μόνο από την επιλογή των πρωτογενών μεγεθών, ως προς τα οποία καταστρώνονται οι εξισώσεις του προβλήματος, και των συναρτήσεων βάσης, αλλά και από το συνδυασμό εξισώσεων και οριακών συνθηκών που επιλέγεται κάθε φορά. Τονίζεται ότι από τα σφάλματα ικανοποίησης των εναπομεινάντων εξισώσεων και οριακών συνθηκών μπορεί να αντληθούν σημαντικές πληροφορίες για την ακρίβεια των λύσεων. Σε κάθε περίπτωση, οι εμπνευστές των αριθμητικών μεθόδων στοχεύουν στον προσδιορισμό λύσεων με όσο το δυνατόν μικρότερα σφάλματα προσέγγισης των αναλυτικών λύσεων, οι οποίες δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστούν πάντοτε, με εξαίρεση κάποιες περιπτώσεις κανονικών προβλημάτων. Για τη διερεύνηση διαφόρων τεχνικών ελαχιστοποίησης των σφαλμάτων, γίνεται πρώτα μια συνοπτική αναφορά στις θεωρητικές έννοιες πάνω στις οποίες δομούνται οι αριθμητικές μέθοδοι (εκτενείς λίστες αναφορών είναι διαθέσιμες στη σχετική βιβλιογραφία [1-6]).

Κάθε ΗΜ πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί με τη γενική συμβολική μορφή της σχέσης

$$L(f) = g, \quad (1.2)$$

όπου $L(\bullet)$ ένας γνωστός γραμμικός τελεστής, f το άγνωστο πεδίο και g το πεδίο διέγερσης. Ο τελεστής $L(\bullet)$ αποτελεί έναν κανόνα μετασχηματισμού μεταξύ συναρτήσεων, καθώς συσχετίζει τη συνάρτηση διέγερσης g με τη συνάρτηση απόκρισης f . Τόσο το πεδίο ορισμού όσο και το πεδίο τιμών του τελεστή $L(\bullet)$ θεωρούνται γραμμικοί ή διανυσματικοί χώροι, δηλαδή σε αυτούς ισχύουν η αρχή της υπέρθεσης, η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα, ενώ υπάρχει και το μηδενικό στοιχείο. Ειδική κατηγορία των διανυσματικών χώρων είναι οι χώροι εσωτερικού γινομένου (έστω E), στους οποίους, για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f_1, f_2 \in E$, ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \bullet, \bullet \rangle$ με τις εξής ιδιότητες (βλ. Κεφάλαιο 8 στη σχετική αναφορά [7])

$$\langle \lambda f_1 + \mu f_2, f_3 \rangle = \lambda \langle f_1, f_3 \rangle + \mu \langle f_2, f_3 \rangle, \quad (1.3\alpha)$$

$$\langle f_2, f_1 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle^*, \quad (1.3\beta)$$

$$\langle f_1, f_1 \rangle \geq 0 \text{ και } \langle f_1, f_1 \rangle = 0 \Rightarrow f_1 = 0, \quad (1.3\beta)$$

όπου $\langle f_1, f_2 \rangle^*$ ο συζυγής μιγαδικός του $\langle f_1, f_2 \rangle$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Επεκτείνοντας όσα είναι γνωστά από την αναλυτική γεωμετρία, το εσωτερικό γινόμενο δύο συναρτήσεων αποτελεί ένα μέτρο της ομοιότητας μεταξύ τους. Το συναρτησιακό εσωτερικό γινόμενο ορίζεται με τη βοήθεια κάποιου ολοκληρώματος του γινομένου των συναρτήσεων f_1 και f_2 . Συνήθως, το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\Omega} f_1 f_2^* d\Omega, \quad (1.4)$$

όπου Ω είναι κάποια περιοχή του προβλήματος ($\Omega \equiv D$) ή η συνοριακή επιφάνεια μεταξύ δύο περιοχών του προβλήματος ($\Omega \equiv \partial D$). Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να ερμηνευθεί και ως η προβολή της συνάρτησης f_1 επί της συνάρτησης f_2 . Η προβολή μιας συνάρτησης επί του εαυτού της αποτελεί ένα μέτρο του μεγέθους της συνάρτησης και σχετίζεται με τη νόρμα εσωτερικού γινομένου (φυσική νόρμα), σύμφωνα με τη σχέση

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}, \quad (1.5)$$

για την οποία ισχύουν οι εξής ιδιότητες (βλ. Κεφάλαιο 8 στη σχετική αναφορά [7])

$$\|f\| \geq 0 \text{ και } \|f\| = 0 \Rightarrow f = 0, \quad (1.6\alpha)$$

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|, \quad (1.6\beta)$$

$$\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|. \quad (1.6\gamma)$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (1.5) ορίζεται και η έννοια του μήκους διανύσματος σε διανυσματικούς χώρους, η οποία επεκτείνει τη γνωστή έννοια του μήκους των γεωμετρικών διανυσμάτων. Παρομοίως επεκτείνεται και η έννοια της απόστασης, εισάγοντας τη μετρική απεικόνιση της σχέσης

$$d(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|. \quad (1.7)$$

Επίσης, αντιστοίχως επεκτείνεται και η έννοια της γωνίας μεταξύ συναρτήσεων, όπως υπολογίζεται από το εσωτερικό τους γινόμενο, σύμφωνα με τη σχέση

$$a(f_1, f_2) = \cos^{-1} \left(\frac{\langle f_1, f_2 \rangle}{\|f_1\| \|f_2\|} \right). \quad (1.8)$$

Η απόσταση μεταξύ συναρτήσεων χρησιμοποιείται και για τον ορισμό της συναρτησιακής σύγκλισης κατά Cauchy (Cauchy convergence), σύμφωνα με τη σχέση

$$\lim_{\substack{m, n \rightarrow \infty \\ m \neq n}} \|f^{(m)} - f^{(n)}\| = 0. \quad (1.9)$$

Η σχέση (1.9) υποδηλώνει τη σύγκλιση των όρων της ακολουθίας $\{f^{(n)} \mid n = 1, 2, \dots\}$ προς κάποια συνάρτηση f , αρκεί αυτή να ανήκει στο διανυσματικό χώρο E των όρων της ακολουθίας. Όταν ο χώρος E περιλαμβάνει όλα τα δυνατά όρια των ακολουθιών που ανήκουν σε αυτόν και οι ακολουθίες συγκλίνουν υπό την έννοια της σχέσης (1.9), τότε ο E καλείται χώρος Hilbert.

1.3.2 Τεχνικές Επίλυσης

Οι αριθμητικές μέθοδοι συναρτησιακών προσεγγίσεων είναι δυνατόν να κατηγοριοποιηθούν, ανάλογα με τον τρόπο υπολογισμού των συντελεστών του αναπτύγματος της σχέσης (1.1) και ελαχιστοποίησης του σφάλματος η . Οι κυριότερες τεχνικές επίλυσης, στις οποίες βασίζονται οι περισσότερες αριθμητικές μέθοδοι συναρτησιακών προσεγγίσεων, διακρίνονται ως εξής:

- Τεχνικές Ελαχιστοποίησης του Σφάλματος (Error Minimization Techniques-EMTs). Οι τεχνικές αυτές βασίζονται στην ελαχιστοποίηση της φυσικής νόρμας του σφάλματος της συναρτησιακής προσέγγισης της σχέσης (1.1).
- Προβολικές Τεχνικές (Projection Techniques-PTs). Η εφαρμογή των προβολικών τεχνικών καταλήγει σε μια νέα μορφή του προς επίλυση προβλήματος, η οποία προκύπτει εξισώνοντας τις προβολές των δύο μελών της εξίσωσης (1.2) επί ενός κατάλληλα επιλεγμένου συνόλου συναρτήσεων δοκιμής.
- Τεχνικές Σημειακής Επιβολής (Point Matching-PM) και Γενικευμένης Σημειακής Επιβολής (Generalized PM-GPM). Καλούνται και Τεχνικές Ταξίθεσίας (Collocation Techniques-CTs). Οι τεχνικές αυτές βασίζονται στην επιβολή της εξίσωσης (1.2) σε διακριτά σημεία, τα οποία έχουν προκύψει από κατάλληλη δειγματοληψία των συνοριακών επιφανειών.

Οι τρεις γενικές κατηγορίες τεχνικών επίλυσης προβλημάτων μέσω αριθμητικών μεθόδων συναρτησιακών προσεγγίσεων αναπτύσσονται συνοπτικά ακολούθως, στη βάση των μαθηματικών αρχών της Παραγράφου 1.3.1.

1.3.2.1 Τεχνικές Ελαχιστοποίησης Σφάλματος

Οι EMTs βασίζονται στην ελαχιστοποίηση του σφάλματος η της συναρτησιακής προσέγγισης της σχέσης (1.1), για τον προσδιορισμό κάποιας προσεγγιστικής λύσης της εξίσωσης (1.2). Το σφάλμα η μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση των συντελεστών w_n , οπότε, για την ελαχιστοποίηση του, πρέπει να αναζητηθούν λύσεις των εξισώσεων

$$\frac{\partial \|\eta\|}{\partial w_n} = 0, n = 1, 2, \dots, N. \quad (1.10)$$

Ωστόσο, για την επίλυση των εξισώσεων (1.10) απαιτείται η γνώση της ακριβούς λύσης f , η οποία είναι άγνωστη. Ως εκ τούτου, για την αναζήτηση προσεγγιστικών λύσεων, αξιοποιείται η εξίσωση (1.2), σύμφωνα με την οποία ισχύει

$$L(\eta) = g - L(f^{exc}) - \sum_{n=1}^N w_n L(f_n). \quad (1.11)$$

Στη συνέχεια, αναζητούνται λύσεις που ελαχιστοποιούν τη νόρμα $\|L(\eta)\|$ ή, ισοδύναμα, το εσωτερικό γινόμενο $\langle L(\eta), L(\eta) \rangle$, συνεπώς αναζητούνται λύσεις των εξισώσεων

$$\frac{\partial \|L(\eta)\|}{\partial w_n} = 0, n = 1, 2, \dots, N, \quad (1.12)$$

που καταλήγουν σε γραμμικά συστήματα για τους συντελεστές w_n .

Αξίζει να σημειωθεί ότι ανάλογη διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί όταν το προς ελαχιστοποίηση σφάλμα αφορά όλα τα πρωτογενή μεγέθη, τα οποία προσεγγίζονται από αναπτύγματα της μορφής της σχέσης (1.1), οπότε το προκύπτον γραμμικό σύστημα αφορά το σύνολο των συντελεστών ανάπτυξης των πρωτογενών μεγεθών.

1.3.2.2 Προβολικές Τεχνικές

Οι PTs βασίζονται στην εξίσωση των προβολών της εξίσωσης (1.2) επί ενός κατάλληλα επιλεγμένου συνόλου συναρτήσεων, για τον προσδιορισμό ενός γραμμικού συστήματος ως προς τους συντελεστές w_n του αναπτύγματος της σχέσης (1.1).

Από αυστηρά μαθηματική άποψη, ικανή και αναγκαία συνθήκη για να αποτελεί μια συνάρτηση f ακριβή λύση της εξίσωσης (1.2) είναι να ισχύει η σχέση

$$\langle L(f), t \rangle = \langle g, t \rangle, \quad (1.13)$$

για κάθε συνάρτηση t στο πεδίο τιμών της απεικόνισης $L(\bullet)$. Κατά πλήρη αντιστοιχία, η ισότητα των προβολών δύο διανυσμάτων επί των μοναδιαίων διανυσμάτων βάσης του χώρου τριών διαστάσεων συνεπάγεται την ισότητα αυτών. Στην πράξη, είναι πολύ δύσκολο, αν όχι αδύνατο, να προσδιοριστεί τέτοια λύση, δοθέντος ότι υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης (1.2) για το δεδομένο τελεστή $L(\bullet)$ και τη συνάρτηση διέγερσης g .

Επιβάλλοντας το μηδενισμό των προβολικών σταθμικών υπολοίπων (weighted residuals) της εξίσωσης (1.2), ο προσδιορισμός της λύσης βασίζεται στην ισότητα των προβολών της εξίσωσης (1.13) σε μια βάση συναρτήσεων δοκιμής $\{t_m | m = 1, 2, \dots, M\}$. Συνεπώς, από τις σχέσεις (1.1) και (1.13) με αντικατάσταση προκύπτει

$$\sum_{n=1}^N w_n \langle L(f_n), t_m \rangle = \langle g - L(f^{exc}), t_m \rangle - \langle L(\eta), t_m \rangle, m = 1, 2, \dots, M. \quad (1.14)$$

Όταν $M = N$, η επίλυση του γραμμικού συστήματος των εξισώσεων (1.14) γίνεται άμεσα με απαλοιφή των όρων του σφάλματος, οπότε η προκύπτουσα λύση χαρακτηρίζεται από $\langle L(\eta), t_m \rangle = 0$. Όταν $M > N$, το προκύπτον γραμμικό σύστημα είναι υπερπροσδιορισμένο και επιλύεται χρησιμοποιώντας τεχνικές βελτιστοποίησης. Στην περίπτωση αυτή, οι όροι σφάλματος στις εξισώσεις των σχέσεων (1.14) δεν είναι ακριβώς μηδενικοί, αλλά οι προβολές του σφάλματος είναι σταθμισμένες επί ενός μεγαλύτερου πλήθους συναρτήσεων δοκιμής.

Στην ευρύτερη οικογένεια των PTs εντάσσονται πολυάριθμες παραλλαγές της τεχνικής που περιγράφηκε παραπάνω, οι οποίες διαφοροποιούνται ως προς την επιλογή των συναρτήσεων βάσης και δοκιμής, καθώς και τους διανυσματικούς χώρους στους οποίους αυτές ανήκουν. Όταν ο διανυσματικός χώρος αναζήτησης των λύσεων ταυτίζεται με αυτόν ως προς τη βάση του οποίου επιβάλλεται ισότητα προβολών, η PT ταυτίζεται με τη μέθοδο Galerkin. Τονίζεται ότι το γεγονός αυτό δεν συνεπάγεται την ταύτιση των συναρτήσεων βάσης και δοκιμής, αν και η επιλογή αυτή είναι συνηθέστατη στην πράξη.

1.3.2.3 Τεχνικές Σημειακής Επιβολής και Γενικευμένης Σημειακής Επιβολής

Η τεχνική PM βασίζεται στην ικανοποίηση της εξίσωσης (1.2) σε ένα επίλεκτο σύνολο σημείων στην περιοχή εφαρμογής της, η οποία μπορεί να αφορά κάποια περιοχή του

χώρου ή κάποια συννοριακή επιφάνεια. Η εφαρμογή της τεχνικής PM οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\sum_{n=1}^N w_n L(f_n)|_{\vec{r}=\vec{r}_m} = [g - L(f^{exc})]_{\vec{r}=\vec{r}_m}, m = 1, 2, \dots, M, \quad (1.15)$$

όπου \vec{r}_m τα διανύσματα θέσης των σημείων επιβολής της εξίσωσης (1.2).

Σημαντικά πλεονεκτήματα των τεχνικών PM αποτελούν η απλότητα στη σύλληψη και υλοποίηση, καθώς και το μικρό υπολογιστικό κόστος, που συνεπάγεται η αποφυγή του υπολογισμού σύνθετων ολοκληρωμάτων προβολών. Ωστόσο, η τεχνική PM χαρακτηρίζεται και από κάποια μειονεκτήματα, το σημαντικότερο από τα οποία άπτεται της δυσκολίας επιλογής των σημείων επιβολής της εξίσωσης (1.2), έτσι ώστε να απευαισθητοποιηθούν οι λύσεις από τις ακριβείς θέσεις τους. Επιπρόσθετα, λόγω της σημειακής επιβολής της εξίσωσης (1.2), τα σφάλματα των οριακών συνθηκών μπορεί να είναι μεγάλα σε σημεία μεταξύ των σημείων επιβολής, οπότε οι λύσεις χαρακτηρίζονται από μη σταθμισμένα σφάλματα.

Η τεχνική GPM βασίζεται στην ικανοποίηση της εξίσωσης (1.2) σε ένα επίλεκτο σύνολο σημείων με πλήθος μεγαλύτερο από το πλήθος των αγνώστων ($M > N$), οπότε το προκύπτον γραμμικό σύστημα των εξισώσεων (1.15) είναι υπερπροσδιορισμένο. Για τη βελτίωση της αριθμητικής ευστάθειας της τεχνικής GPM, εισάγονται συντελεστές βαρύτητας στις εξισώσεις (1.15), οι οποίοι επιλέγονται με βάση γεωμετρικές και φυσικές αρχές. Σε περιπτώσεις επιβολής εξισώσεων που εμπλέκουν μεγέθη διαφορετικών διαστάσεων, οι συντελεστές βαρύτητας επιλέγονται έτσι ώστε να αίρουν και τις διαφορές στις διαστάσεις και να οδηγούν σε σταθμισμένες εξισώσεις.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, σε πολλές περιπτώσεις, η τεχνική PM αναφέρεται ως ειδική περίπτωση των PTs, όπου ως συναρτήσεις δοκιμής χρησιμοποιούνται κρουστικές συναρτήσεις $\delta(\vec{r} - \vec{r}_m)$ (συναρτησιοειδή Dirac). Ωστόσο, σύμφωνα με κάποιους ερευνητές [6, 8], αυτή η θεώρηση πάσχει τόσο από ιστορική ανακολουθία, αφού οι PTs αναπτύχθηκαν μεταγενέστερα από την τεχνική PM για την επίλυση προβλημάτων ηλεκτρομαγνητισμού, όσο και από μαθηματική ασυνέπεια, καθώς οι συναρτήσεις Dirac δεν ανήκουν σε κάποιο διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο της μορφής της σχέσης (1.4), οπότε η έννοια της προβολής δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί όπως στην Παράγραφο 1.3.2.2. Συνεπώς, η τεχνική PM δεν αποτελεί μέρος των PTs και, ως εκ τούτου, εξετάζεται χωριστά.

1.4 Συνοπτική Παρουσίαση Αριθμητικών Μεθόδων Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού

Οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων HM αλληλεπιδράσεων αριθμούν πολύ μεγάλο πλήθος, οι σημαντικότερες από τις οποίες συνοψίζονται ως εξής:

- Μέθοδος Ροπών (Method of Moments-MoM).
- Γεωμετρική Θεωρία Περίθλασης (Geometric Theory of Diffraction-GTD).
- Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου (Finite Difference Time Domain method-FDTD method).
- Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method-FEM).
- Τεχνικές Γενικευμένων Πολυπόλων (Generalized Multipole Techniques-GMTs).

Στη συνέχεια, γίνεται συνοπτική αναφορά στις προαναφερθείσες αριθμητικές μεθόδους.

1.4.1 Μέθοδος Ροτών

Η MoM υπάγεται στις PTs και χρησιμοποιείται, συνήθως, για την αριθμητική επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων [9-11]. Η εφαρμογή της MoM σε προβλήματα εφαρμοσμένου ηλεκτρομαγνητισμού βασίζεται στην επιβολή των οριακών συνθηκών του ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου στις συνοριακές επιφάνειες, διαδικασία η οποία οδηγεί στις αντίστοιχες ολοκληρωτικές εξισώσεις (Electric Field Integral Equation-EFIE, Magnetic Field Integral Equation-MFIE) ή σε ολοκληρωτικές εξισώσεις μεικτού τύπου (Combined Field Integral Equation-CFIE). Στη συνέχεια, η εφαρμογή της MoM γίνεται διαμερίζοντας το υπό μελέτη σώμα σε κατάλληλα επιλεγμένα τμήματα, εκφράζοντας τις άγνωστες κατανομές φορτίου ή και ρεύματος ως γραμμικούς συνδυασμούς γνωστών συναρτήσεων βάσης με άγνωστους συντελεστές και, τελικώς, επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες για την ικανοποίηση της προς επίλυση ολοκληρωτικής εξίσωσης προσεγγιστικά, χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις δοκιμής. Από αυτήν τη διαδικασία προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα για τους άγνωστους συντελεστές, η επίλυση του οποίου οδηγεί στη λύση του προβλήματος. Αντίστοιχη διαδικασία ακολουθείται όταν η ολοκληρωτική εξίσωση προκύπτει με εφαρμογή του θεωρήματος Green.

Η MoM θεωρείται πολύ ισχυρή μέθοδος επίλυσης προβλημάτων ακτινοβολίας και σκέδασης που εμπλέκουν σύρματα και ομοιογενή αγωγίμα ή διηλεκτρικά σώματα με διαστάσεις όχι μεγαλύτερες από λίγα μήκη κύματος. Σε περιπτώσεις ηλεκτρικά μεγάλων σωμάτων, η αύξηση του υπολογιστικού κόστους καθιστά την εφαρμογή της MoM μη αποδοτική.

1.4.2 Γεωμετρική Θεωρία Περίθλασης

Η GTD βασίζεται στις προσεγγίσεις της γεωμετρικής οπτικής, σύμφωνα με την οποία, όταν το μήκος κύματος είναι πολύ μικρό σε σχέση με τις διαστάσεις κάποιου σώματος και τις ακτίνες καμπυλότητας της επιφάνειάς του, τα HM πεδία έχουν τοπικά χαρακτήρα επιπέδου κύματος. Ως εκ τούτου, για την εκτέλεση προσεγγιστικών υπολογισμών, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν οι νόμοι της κλασικής οπτικής (π.χ. αρχή διατήρησης της ενέργειας, νόμοι ανάκλασης και διάθλασης, αρχή Fermat, κ.α.), σε συνδυασμό με αναλυτικές λύσεις που είναι γνωστές από την επίλυση κανονικών προβλημάτων [12, 13].

Η GTD βρίσκει εφαρμογή σε προβλήματα σκέδασης από ηλεκτρικά μεγάλες δομές, υπερθέτοντας κύματα ανάκλασης από λείες επιφάνειες και HM πεδία περίθλασης από ακμές και αιχμές, εισάγοντας κατάλληλους συντελεστές ανάκλασης και περίθλασης, οι οποίοι προσδιορίζονται από τα τοπικά χαρακτηριστικά του υπό εξέταση σώματος. Για τη βελτίωση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων, στους αριθμητικούς υπολογισμούς είναι δυνατόν να συμπεριληφθούν και όροι από πολλαπλές ανακλάσεις, δευτερογενή ανάκλαση των όρων περίθλασης, κ.ο.κ. Τα τελευταία χρόνια, αναπτύχθηκε η Ενοποιημένη Θεωρία Περίθλασης (Unified Theory of Diffraction-UTD), η οποία αποτελεί επέκταση της GTD, για την αντιμετώπιση κάποιων προβλημάτων ανακρίβειας της GTD σε περιοχές «σκίασης».

Η GTD και η UTD αποτελούν τις σημαντικότερες και ευρύτερα χρησιμοποιούμενες μεθόδους υψηλών συχνοτήτων, καθώς η πολυπλοκότητα τους δεν συναρτάται με το μέγεθος των υπό μελέτη δομών. Αντίθετα, οι υπόλοιπες αριθμητικές μέθοδοι χαρακτηρίζονται από σχετικούς εγγενείς περιορισμούς, οι οποίοι συνδέονται άμεσα με την εξάρτηση του υπολογιστικού κόστους από το μέγεθος των υπό μελέτη δομών και καθιστούν μη αποδοτική την εφαρμογή τους σε περιπτώσεις σωμάτων μεγάλων διαστάσεων. Επιπρόσθετα, λόγω του γεγονότος ότι η GTD προσδιορίζει άμεσα τα HM πεδία, χωρίς την εισαγωγή άγνωστων συντελεστών, μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί, σε συνδυασμό και με άλλες μεθόδους, για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων HM αλληλεπιδράσεων, τα οποία εμπλέκουν σώματα διαστάσεων που κλιμακώνονται σε μεγάλο εύρος.

1.4.3 Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου

Η μέθοδος FDTD προτάθηκε από τον K. S. Yee το 1966 [14] και είναι ίσως η ευρύτερα χρησιμοποιούμενη μέθοδος για τη μελέτη προβλημάτων μεγάλης και πολύ μεγάλης κλίμακας τα τελευταία χρόνια, αν και είναι ιδιαίτερα απαιτητική σε μνήμη και εξαιρετικά χρονοβόρα. Ωστόσο, η ραγδαία αύξηση της υπολογιστικής ισχύος και η μείωση του κόστους των υπολογιστικών συστημάτων, καθώς και το γεγονός ότι έχουν προταθεί διάφορες τροποποιήσεις της βασικής μεθόδου FDTD που οδηγούν σε σημαντική μείωση του υπολογιστικού της κόστους, οδήγησαν στην ευρύτατη αποδοχή της από την επιστημονική κοινότητα [15, 16].

Η μέθοδος FDTD βασίζεται στη διακριτοποίηση όλων των συνιστωσών του ΗΜ πεδίου στο χρόνο και στο χώρο. Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου συνδέονται μεταξύ τους, λαμβάνοντας απλές κεντρικές προσεγγίσεις διαφορών των χωρικών και χρονικών παραγώγων που υπεισέρχονται στις εξισώσεις του Maxwell στη διαφορική τους μορφή, θεωρώντας ότι οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι παράλληλες στις ακμές των στοιχείων του πλέγματος, ενώ οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετες στις πλευρές των στοιχείων του πλέγματος (ή αντίθετα). Άμεση συνέπεια αυτής της θεώρησης είναι η απευθείας ικανοποίηση των οριακών συνθηκών στις συνοριακές επιφάνειες των στοιχείων του πλέγματος. Επιπρόσθετα, οι συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου διαχωρίζονται μεταξύ τους και χρονικά, οπότε οι προσεγγίσεις των χρονικών παραγώγων οδηγούν σε εξάρτηση κάθε συνιστώσας από την αμέσως προηγούμενη τιμή της και τις τελευταίες τιμές όλων των άλλων συνιστωσών που εμπλέκονται στον υπολογισμό της. Η μέθοδος FDTD εφαρμόζεται εναλλάσσοντας τον υπολογισμό των συνιστωσών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στο πεδίο του χρόνου σε όλα τα στοιχεία του πλέγματος, έως ότου φθάσει σε σύγκλιση, όταν ενδιαφέρει η μόνιμη κατάσταση, ή ολοκληρωθούν τα μεταβατικά φαινόμενα, όταν ενδιαφέρει η μεταβατική κατάσταση. Λόγω του γεγονότος ότι η μέθοδος FDTD είναι μέθοδος υπολογισμού ΗΜ πεδίων στο πεδίο του χρόνου, οι διαστάσεις του πλέγματος θα πρέπει να επιλεγούν κατάλληλα σε σχέση με το χρονικό βήμα, ούτως ώστε η ταχύτητα διάδοσης να μην υπερβαίνει την ταχύτητα του φωτός. Ο περιορισμός αυτός οδηγεί στη γνωστή συνθήκη Courant, η οποία εξασφαλίζει την αριθμητική ευστάθεια της μεθόδου FDTD. Αποτελέσματα της μεθόδου FDTD στο πεδίο της συχνότητας είναι δυνατόν να ληφθούν μέσω διαδοχικών προσομοιώσεων, έως την παρέλευση των μεταβατικών φαινομένων σε μεμονωμένες συχνότητες, αλλά και με υπολογισμό της χρονικής απόκρισης σε παλμική χρονική διέγερση και, ακολούθως, το μετασχηματισμό αυτής με χρήση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier.

Οι απαιτούμενοι υπολογιστικοί πόροι για την εκτέλεση της μεθόδου FDTD εξαρτώνται από τον όγκο της υπό μελέτη δομής, το μέγεθος της περιοχής διακριτοποίησης, καθώς και το μέγεθος των στοιχείων του πλέγματος. Στα όρια του πλέγματος επιβάλλονται ειδικές απορροφητικές συνθήκες, με σκοπό την προσομοίωση άπειρου περιβάλλοντα χώρου, ή κατάλληλες οριακές συνθήκες, όταν το πλέγμα τερματίζεται στα όρια κλειστού χώρου. Λόγω της εφαρμογής των εξισώσεων Maxwell σε διακριτά σημεία, είναι δυνατή η μελέτη ανομοιογενών σωμάτων, καθόσον είναι δυνατή η θεώρηση διαφορετικών φυσικών χαρακτηριστικών σε διαφορετικά στοιχεία του πλέγματος. Σε κάθε περίπτωση, η πυκνότητα της διακριτοποίησης εξαρτάται από τον όγκο του σώματος, το ακριβές σχήμα του, καθώς και τη δομή του. Καμπυλόγραμμα σώματα είναι δυνατόν να μοντελοποιηθούν χρησιμοποιώντας αρκούντως πυκνά πλέγματα, έτσι ώστε τα εξαγόμενα αποτελέσματα να είναι σχετικά αναίσητα σε μικρές αλλαγές του πλέγματος. Ωστόσο, σε περιπτώσεις σωμάτων με αιχμές, η διακριτική ικανότητα των ορθογωνικών πλεγμάτων συχνά εξαντλείται, οπότε χρησιμοποιούνται καμπυλόγραμμα πλέγματα.

Η ακρίβεια της μεθόδου FDTD εξαρτάται τόσο από τα χαρακτηριστικά του πλέγματος και το χρονικό βήμα όσο και από άλλους παράγοντες, όπως ο ακριβής τρόπος μοντελοποίησης της πηγής ή του ΗΜ πεδίου διέγερσης, οι συνθήκες απορρόφησης για την προσομοίωση του περιβάλλοντος χώρου, η ακρίβεια της τεχνικής υπολογισμού του μακρινού πεδίου (ακτινοβολίας ή σκέδασης) από δεδομένα κοντινού πεδίου, εφόσον κάποια ποσότητα

ενδιαφέροντος σχετίζεται με το μακρινό πεδίο, και άλλους. Πρόσθετα σφάλματα υπεισέρχονται λόγω των φαινομένων ψευδούς διασποράς και ανισοτροπίας, τα οποία πηγάζουν από τη διακριτή φύση του πλέγματος. Αυτά τα φαινόμενα οφείλονται στο γεγονός ότι τα ΗΜ πεδία στην περιοχή του πλέγματος διαδίδονται με ταχύτητα φάσης που είναι ελαφρώς διαφορετική από την πραγματική ταχύτητα φάσης στο αντίστοιχο μέσο, ενώ εξαρτάται ασθενώς και από την κατεύθυνση διάδοσης. Άμβλυση της επίδρασης αυτών των φαινομένων στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας πυκνά πλέγματα ή τροποποιώντας κατάλληλα τις εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών της μεθόδου FDTD. Αντιθέτως, οι οριακές συνθήκες απορρόφησης είναι δυνατόν να οδηγήσουν σε ιδιαίτερα σημαντικά σφάλματα, ιδιαίτερα όταν οι ιδιότητες απορρόφησης τους έχουν ισχυρή εξάρτηση από την κατεύθυνση διάδοσης μέσα στο πλέγμα και τη συχνότητα. Λόγω αυτού του γεγονότος, απαιτείται ιδιαίτερα προσεκτική επιλογή του τύπου των οριακών συνθηκών απορρόφησης, ανάλογα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του προβλήματος.

Η μέθοδος FDTD αποτελεί αναμφισβήτητη την πιο διαδεδομένη μέθοδο ανάλυσης σύνθετων προβλημάτων, αν και η άμεση διερεύνηση της αξιοπιστίας του αποτελέσματος μέσω διαδοχικών προσομοιώσεων είναι εξαιρετικά χρονοβόρα, καθόσον αλλαγές στα χαρακτηριστικά του πλέγματος ή τις οριακές συνθήκες απορρόφησης μπορεί να αυξήσουν σημαντικά τους υπολογιστικούς πόρους που απαιτούνται για την επανάληψη της προσομοίωσης.

1.4.4 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

Η FEM αποτελεί μια ιδιαίτερα διαδεδομένη μέθοδο επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων που εμφανίζονται σε προβλήματα εφαρμοσμένων μαθηματικών και φυσικής. Λόγω των μεγάλων απαιτήσεων της FEM σε μνήμη και υπολογιστική ισχύ, μόλις τα τελευταία χρόνια ξεκίνησε η ανάπτυξη της για τη μελέτη ΗΜ αλληλεπιδράσεων σε δύο και τρεις διαστάσεις [17, 18].

Η εφαρμογή της FEM συνίσταται στη υποδιαίρεση του χώρου σε υποπεριοχές κατάλληλα επιλεγμένου κανονικού σχήματος και την επιβολή ειδικών οριακών συνθηκών στα όρια του πλέγματος που προκύπτει. Σε κάθε στοιχείο του πλέγματος, το ΗΜ πεδίο εκφράζεται με τη βοήθεια κατάλληλων συναρτήσεων βάσης, οι οποίες ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες στις συνοριακές γραμμές ή επιφάνειες μεταξύ των στοιχείων. Στη συνέχεια, επιβάλλεται η ελαχιστοποίηση κάποιου μεταβολικού (variational) συναρτησιακού που περιγράφει την αποθηκευμένη ενέργεια στο χώρο, οπότε προκύπτει ένα, συνήθως, μεγάλο γραμμικό σύστημα αραιού πίνακα (sparse matrix) για τους άγνωστους συντελεστές των συναρτήσεων βάσης. Επίλυση του γραμμικού συστήματος με κάποια αποδοτική επαναληπτική μέθοδο για αραιούς πίνακες οδηγεί στον άμεσο υπολογισμό του ΗΜ πεδίου σε όλα τα στοιχεία του πλέγματος.

Η FEM παρέχει τη δυνατότητα μοντελοποίησης πολύπλοκων δομών, καθόσον παρέχει πληθώρα επιλογών όσον αφορά τις θέσεις, το μέγεθος, καθώς και το σχήμα των στοιχείων του πλέγματος. Ωστόσο, απαιτείται ιδιαίτερη εμπειρία και μεγάλο πλήθος δοκιμών με διαφορετικά πλέγματα έως ότου επιτευχθεί σύγκλιση των αντίστοιχων λύσεων. Επιπρόσθετα, σε περιπτώσεις ανοικτών διατάξεων, απαιτείται η εισαγωγή ειδικών στοιχείων, τα οποία εκτείνονται από τα όρια του πλέγματος ως το άπειρο, ή η επιβολή ειδικών συνθηκών απορρόφησης στα άκρα του πλέγματος, για την προσομοίωση του κενού χώρου.

Λόγω των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της, η FEM έχει κυρίως εφαρμοστεί σε προβλήματα δύο διαστάσεων, αλλά και σε προβλήματα τριών διαστάσεων που αφορούν θωρακισμένες διατάξεις (π.χ. μεταλλικοί κυματοηγητοί, κοιλότητες, μικροταινιακές διατάξεις). Πάντως, τα τελευταία χρόνια, έχουν γίνει επιτυχείς προσπάθειες επέκτασης του δυναμικού πεδίου εφαρμογής της FEM σε πολύπλοκα προβλήματα τριών διαστάσεων.

1.4.5 Τεχνικές Γενικευμένων Πολυπόλων

Με τον όρο GMTs περιγράφεται μια οικογένεια αριθμητικών μεθόδων επίλυσης προβλημάτων εφαρμοσμένου ηλεκτρομαγνητισμού. Η ονομασία GMT προτάθηκε το 1989 [19, 20], καθώς οι διάφοροι ερευνητές που είχαν εργαστεί σε συναφείς μεθόδους στο παρελθόν είχαν υιοθετήσει διαφορετικές ονομασίες. Το μαθηματικό και φυσικό υπόβαθρο των GMTs βασίζεται σε πολυάριθμες εργασίες, οι οποίες εμφανίστηκαν πριν από αρκετές δεκαετίες και αφορούσαν ημιαναλυτικές μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων σε μαθηματικά και φυσικά προβλήματα [2, 19-22]. Σημειώνεται ότι οι GMTs θεωρούνται ημιαναλυτικές μέθοδοι, αφού οι λύσεις εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί θεμελιωδών λύσεων του προς επίλυση προβλήματος χωρίς τις οριακές συνθήκες, οπότε ικανοποιούν ακριβώς τις διαφορικές εξισώσεις του Maxwell. Οι οριακές συνθήκες του προβλήματος επιβάλλονται εκ των υστέρων, για τον προσδιορισμό των συντελεστών των αναπτυγμάτων, οπότε η ικανοποίηση τους γίνεται κατά προσέγγιση.

Κατά την τελευταία δεκαετία, η χρήση του όρου GMTs γενικεύτηκε από διάφορες ερευνητικές ομάδες. Οι πλέον γνωστές μέθοδοι που εμπίπτουν σε αυτήν την κατηγορία συνοψίζονται ακολούθως [22]:

- Μέθοδος Βοηθητικών Πηγών (MAS). Θεμελιώθηκε μαθηματικά και φυσικά πριν από αρκετές δεκαετίες στην πρώην ΕΣΣΔ ως ημιαναλυτική μέθοδος επίλυσης μαθηματικών και φυσικών προβλημάτων συνοριακών τιμών. Λίγο αργότερα, ξεκίνησε η εφαρμογή της για την επίλυση προβλημάτων ΗΜ αλληλεπιδράσεων, ενώ σχεδόν ταυτόχρονα, αλλά ανεξάρτητα, αναπτύχθηκαν άλλες συναφείς μέθοδοι από διάφορες ερευνητικές ομάδες, από τις οποίες υιοθετήθηκαν διαφορετικές ονομασίες. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει το ισχυρό του μαθηματικού και φυσικού υποβάθρου της MAS, καθώς και τη στενή σύνδεση της με τη φυσική αντίληψη των φαινομένων. Η MAS έχει κυρίως εφαρμοστεί για την επίλυση προβλημάτων σκέδασης από κλειστά σώματα και περιοδικές επιφάνειες, ενώ έχει εφαρμοστεί και σε προβλήματα αντίστροφης σκέδασης.
- Ανάλυση Αρμονικών Αναπτυγμάτων (Circular Harmonic Analysis-CHA) ή Σφαιρικών Αναπτυγμάτων (Spherical Expansions-SPEX). Βασίζεται στην ανάπτυξη των ΗΜ πεδίων σκέδασης από κλειστά σώματα σε όρους σφαιρικών κυματικών συναρτήσεων, επεκτείνοντας τη θεωρία του Mie για σκέδαση από σφαιρικά σώματα. Οι συντελεστές των αναπτυγμάτων προσδιορίζονται επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες σε διακριτά σημεία στις συνοριακές επιφάνειες. Οι CHA/SPEX έχουν χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση φαινομένων σκέδασης από σχεδόν σφαιρικά και συμμετρικά ως προς άξονα σώματα (π.χ. πεπλατυσμένα σφαιροειδή), καθόσον παρουσιάζουν σημαντικά προβλήματα σύγκλισης σε άλλες περιπτώσεις.
- Μέθοδος Yasuura (Conventional Yasuura's Method-C YM). Αναπτύχθηκε παράλληλα με τη MAS στην Ιαπωνία, με σκοπό την επίλυση προβλημάτων σκέδασης από κλειστά αντικείμενα και περιοδικές επιφάνειες, καθώς και την ανάλυση διατάξεων κυματοδηγών και κοιλοτήτων. Σύμφωνα με τη CYM, τα ΗΜ πεδία εκφράζονται ως κατάλληλα αναπτύγματα ρυθμών (modal expansions), οι άγνωστοι συντελεστές των οποίων προκύπτουν από τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Αργότερα, παρουσιάστηκαν παραλλαγές της CYM για την ανάλυση πιο σύνθετων δομών και σωμάτων με αιχμές (YMSP, YMSSP).
- Μέθοδος Επεκτεταμένης Οριακής Συνθήκης (Extended Boundary Condition Method-EBCM). Προτάθηκε αρχικά για την ανάλυση προβλημάτων σκέδασης από κλειστά σώματα. Σύμφωνα με την EBCM, κάθε κλειστό σώμα αντικαθίσταται από ισοδύναμες κατανομές ρεύματος, οι οποίες προσεγγίζονται από γραμμικούς συνδυασμούς μερικών αναλυτικών λύσεων των κυματικών εξισώσεων. Ο υπολογισμός των συντελεστών ανάπτυξης γίνεται μέσω επιφανειακών ολοκληρωμάτων. Στην περίπτωση συμμετρικών ως προς άξονα σωμάτων, τα επιφανειακά ολοκληρώματα εκφυλίζονται σε επικαμπύλια, γεγονός το οποίο απλοποιεί σημαντικά τη διαδικασία υπολογισμού τους. Η EBCM παρέχει τη δυνατότητα ανάλυσης σωμάτων σχεδόν σφαιρικού σχήματος, αλλά έχει

κάποιους περιορισμούς σε περιπτώσεις πιο πολύπλοκων δομών. Τα τελευταία χρόνια, αναπτύχθηκαν παραλλαγές της βασικής EBCM για την άρση αυτών των περιορισμών, όπως είναι η επαναληπτική EBCM (Iterative EBCM-IEBCM), η οποία βασίζεται σε αναπτύγματα για την περιγραφή των ΗΜ πεδίων σε επικαλυπτόμενες περιοχές του υπό εξέταση σώματος, ενώ η ικανοποίηση των οριακών συνθηκών επιβάλλεται στην επιφάνεια του σώματος και στις συνοριακές επιφάνειες μεταξύ των διαφόρων περιοχών. Άλλες παραλλαγές της EBCM βασίζονται στην επιλογή ειδικών συναρτήσεων βάσης, καθώς και στη χρήση διακριτών πηγών.

- Μέθοδος Πίνακα Μετάβασης (Transition Matrix Method ή T-Matrix Method). Πρακτικά ταυτόσημη της EBCM. Τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιείται ευρέως για την επίλυση προβλημάτων σκέδασης σε οπτικές συχνότητες.
- Μέθοδος Διακριτών Πηγών (Discrete Sources Method-DSM). Αναπτύχθηκε πριν από περίπου δύο δεκαετίες στη Ρωσία, κυρίως για την ανάλυση συμμετρικών ως προς άξονα σωμάτων. Στη συνέχεια, παρουσιάστηκε μια ολοκληρωμένη εκδοχή της DSM χωρίς αυτόν τον περιορισμό. Χαρακτηριστικό της DSM είναι ότι λαμβάνει υπόψη τη συμμετρία του υπό μελέτη σώματος, ενώ οι διακριτές πηγές είναι δυνατόν να κείνται στο μιγαδικό επίπεδο. Η DSM εμφανίζει πολλές ομοιότητες με τη MAS, ενώ κάποιοι ερευνητές χρησιμοποιούν την ονομασία DSM αντί της MAS.
- Μοντέλο ή Μέθοδος Φανταστικών Ρευμάτων (Fictitious Current Model/Method-FCM). Αναπτύχθηκε για την ανάλυση προβλημάτων σκέδασης από κλειστά σώματα και περιοδικές επιφάνειες. Πρακτικά, ταυτίζεται με τη MAS σε περιπτώσεις κλειστών σωμάτων. Η FCM αναπτύχθηκε περαιτέρω για την ανάλυση περιοδικών επιφανειών με χρήση καταναμημένων ρευματικών πηγών, οι οποίες πλεονεκτούν έναντι των διακριτών πηγών ως προς τα χαρακτηριστικά σύγκλισης και την ακρίβεια των λύσεων.
- Μέθοδος Πολλαπλών Πολυπόλων (Multiple MultiPole method-MMP method). Αναπτύχθηκε αξιοσημείωτα τις δύο τελευταίες δεκαετίες ως επέκταση της CHA και της SPEX. Στην πλειονότητα των περιπτώσεων, η μέθοδος MMP εφαρμόζεται σε συνδυασμό με την τεχνική GPM για την επιβολή των οριακών συνθηκών. Η μέθοδος αυτή είναι διαθέσιμη εμπορικά σε διάφορες μορφές (π.χ. MMP2D, MMP3D, MaX) [23, 24], οι οποίες περιλαμβάνουν γραφική διεπαφή για επικοινωνία με το χρήστη, καθώς και δυνατότητες γραφικής παρουσίασης των αποτελεσμάτων και απεικόνισης των σφαλμάτων ικανοποίησης των οριακών συνθηκών για την αξιολόγηση της ποιότητας των λύσεων. Τα τελευταία χρόνια, η εξέλιξη στους υπολογιστές επέτρεψε την εφαρμογή της μεθόδου σε προβλήματα ΗΜ αλληλεπιδράσεων σχετικά μεγάλης κλίμακας.

1.5 Αναφορές

- [1] E. K. Miller, "A selective survey of computational electromagnetics", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 36, No. 9, pp. 1281-1305, 1988.
- [2] C. Hafner, *The Generalized Multipole Technique for Computational Electromagnetics*, Artech House, 1990.
- [3] R. Mittra (Ed.), *Computer Techniques for Electromagnetics*, Pergamon, 1973.
- [4] R. Mittra (Ed.), *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*, Springer-Verlag, 1975.
- [5] A. F. Peterson, S. L. Ray and R. Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*, IEEE Press/Oxford University Press, 1998.
- [6] C. Hafner, *Post-Modern Electromagnetics: Using Intelligent Maxwell Solvers*, John Wiley and Sons, 1999.
- [7] Α. Φελλούρη, *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*, Εκδόσεις Συμεών, 1993.

- [8] Π. Ατλαμάζογλου, *Προβολικές Μέθοδοι Επίλυσης Βιοηλεκτρομαγνητικών Προβλημάτων*, Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ, Αθήνα, 1997.
- [9] M. M. Ney, "Method of moments as applied to electromagnetic problems", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 33, No. 10, pp. 972-980, 1985.
- [10] R. F. Harrington, "The method of moments in electromagnetics", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 1, No. 3, pp. 181-200, 1987.
- [11] R. F. Harrington, "Origin and development of the method of moments for field computations", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 32, No. 3, pp. 31-36, 1990.
- [12] F. A. Molinet, "Geometrical theory of diffraction (GTD). Part I: Foundations of the theory", *IEEE Antennas and Propagation Society Newsletter*, Vol. 29, No. 4, pp. 6-16, 1987.
- [13] F. A. Molinet, "Geometrical theory of diffraction (GTD). Part II: Extensions and future trends of the theory", *IEEE Antennas and Propagation Society Newsletter*, Vol. 29, No. 5, pp. 5-16, 1987.
- [14] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary-value problems involving Maxwell's equations in isotropic media", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 14, No. 3, pp. 302-307, 1966.
- [15] A. Taflove and K. R. Umashankar, "Review of FD-TD numerical modeling of electromagnetic wave scattering and radar cross section", *IEEE Proceedings*, Vol. 77, No. 5, pp. 682-699, 1989.
- [16] K. L. Shlager and J. B. Schneider, "A selective survey of the finite-difference time-domain literature", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 37, No. 4, pp. 39-57, 1995.
- [17] J. P. Webb, "Application of the finite-element method to electromagnetic and electrical topics", *Reports on Progress in Physics*, Vol. 58, pp. 1673-1712, 1995.
- [18] R. Coccioli, T. Itoh, G. Pelosi and P. P. Silvester, "Finite-element methods in microwaves: a selected bibliography", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 38, No. 6, pp. 34-48, 1996.
- [19] A. C. Ludwig, "The generalized multipole technique", *Proceedings IEEE AP-S International Symposium 1989*, pp. 160-163.
- [20] A. C. Ludwig, "A new technique for numerical electromagnetics", *IEEE Antennas and Propagation Society Newsletter*, Vol. 31, No. 1, pp. 40-41, 1989.
- [21] C. Hafner, "On the design of numerical methods", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 35, No. 4, pp. 13-21, 1993.
- [22] T. Wriedt (Ed.), *Generalized Multipole Techniques for Electromagnetic and Light Scattering*, Elsevier Science, 1999.
- [23] C. Hafner and L. Bomholt, *The 3D Electromagnetic Wave Simulator*, John Wiley and Sons, 1993.
- [24] C. Hafner, *MaX-1: A Visual Electromagnetics Platform*, John Wiley and Sons, 1998.

Κεφάλαιο 2

Η Μέθοδος Βοηθητικών Πηγών στον Υπολογιστικό Ηλεκτρομαγνητισμό

2.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1, η MAS είναι μια αριθμητική μέθοδος που έχει θεμελιωθεί πριν από αρκετές δεκαετίες από επιστήμονες στην πρώην ΕΣΣΔ (πληθώρα παραπομπών μπορούν να βρεθούν στις σχετικές αναφορές [1, 2]). Η MAS βασίζεται στην ανάπτυξη των άγνωστων ΗΜ πεδίων στις διακριτές περιοχές ενός ΗΜ προβλήματος συνοριακών τιμών σε γραμμικούς συνδυασμούς γνωστών συναρτήσεων, που αποτελούν αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στην αντίστοιχη περιοχή. Οι όροι των αναπτυγμάτων (συναρτήσεις βάσης) αποδίδονται σε διακριτές βοηθητικές πηγές, οι οποίες είναι τοποθετημένες σε θέσεις που απέχουν κάποια μη μηδενική απόσταση από τις συνοριακές επιφάνειες του προβλήματος. Οι άγνωστοι συντελεστές των αναπτυγμάτων, οι οποίοι αντιστοιχούν στα ρεύματα των βοηθητικών πηγών (τυπικά, χρησιμοποιούνται νηματοειδείς ηλεκτρικές ή μαγνητικές πηγές σε δύο διαστάσεις και στοιχειώδη ηλεκτρικά ή μαγνητικά δίπολα σε τρεις διαστάσεις), προσδιορίζονται επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες των εφαπτομενικών ή και κάθετων συνιστωσών του ΗΜ πεδίου σε διακριτά σημεία που κείνται στις συνοριακές επιφάνειες, σύμφωνα με τις τεχνικές PM και GPM που αναπτύχθηκαν στην Παράγραφο 1.3.2.3. Συνήθως, προτιμάται η τεχνική PM, δηλαδή το πλήθος των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών επιλέγεται έτσι ώστε να προκύψει ίσο πλήθος εξισώσεων και αγνώστων, οπότε το προς επίλυση γραμμικό σύστημα είναι τετραγωνικό. Ωστόσο, σε κάποιες περιπτώσεις, έχει αποδειχθεί ότι πλεονεκτεί η τεχνική GPM, δηλαδή η επιβολή των οριακών συνθηκών σε περισσότερα σημεία, οπότε το πλήθος των εξισώσεων είναι μεγαλύτερο του πλήθους των αγνώστων και, ως εκ τούτου, η επίλυση του γραμμικού συστήματος γίνεται με χρήση τεχνικών βελτιστοποίησης, όπως θα αναφερθεί και στη συνέχεια.

Τα κυριότερα θετικά χαρακτηριστικά της MAS συνοψίζονται ακολούθως:

- Ευκολία προσαρμογής σε μεγάλο εύρος προβλημάτων.
- Ευκολία υλοποίησης, η οποία έγκειται στο γεγονός ότι, για τον προσδιορισμό των εξισώσεων προς επίλυση και, τελικώς, την περιγραφή του ΗΜ πεδίου σε κάθε περιοχή, αρκεί η αναλυτική έκφραση των ΗΜ πεδίων των βοηθητικών πηγών σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων.
- Δυνατότητα μορφοποίησης της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών αξιοποιώντας αναλυτικές τεχνικές, θεωρία ειδώλων, καθώς και ασυμπτωτικές τεχνικές, για την επιτάχυνση της σύγκλισης και τη βελτίωση της ακρίβειας των λύσεων.
- Ημιαναλυτική περιγραφή του ΗΜ πεδίου σε κάθε περιοχή. Το γεγονός αυτό μπορεί να αξιοποιηθεί για τη διερεύνηση των χωρικών χαρακτηριστικών του κοντινού πεδίου, αλλά και της πυκνότητας ισχύος και της έντασης ακτινοβολίας στο μακρινό πεδίο, με τη χρήση αναλυτικών τεχνικών.
- Δυνατότητα άμεσου ελέγχου των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών στις συνοριακές επιφάνειες.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να επισημανθεί ότι η MAS χαρακτηρίζεται και από κάποιους εγγενείς περιορισμούς, κάποιοι από τους οποίους συνοψίζονται ως εξής:

- Δεν υπάρχουν γενικοί κανόνες για τη μορφοποίηση της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών. Σε κάθε περίπτωση, η σύγκλιση των λύσεων είναι εξασφαλισμένη όταν δεν υπάρχουν ιδιάζοντα σημεία της αναλυτικής επέκτασης (analytic continuation) του άγνωστου ΗΜ πεδίου μεταξύ της νοητής επιφάνειας, επί της οποίας κείνται οι βοηθητικές πηγές, και της φυσικής επιφάνειας της υπό μελέτη δομής [1-7]. Ωστόσο, είναι άξιο αναφοράς ότι, τουλάχιστον σε μη τετριμμένες περιπτώσεις, ο προσδιορισμός των ιδιάζόντων σημείων είναι πρακτικά ανέφικτος.
- Δεν υπάρχουν γενικοί κανόνες για την επιλογή του πλήθους των βοηθητικών πηγών. Σε κάθε περίπτωση, απαιτείται η εκτέλεση κάποιου αριθμού δοκιμών, έως ότου προσδιοριστούν αριθμητικά ευσταθή αποτελέσματα και τα σφάλματα των οριακών συνθηκών προκύψουν αρκούντως μικρά.
- Δυσκολία εφαρμογής σε περιπτώσεις ανοικτών χωρίων. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν τα προβλήματα ακτινοβολίας κεραιών πλησίον της συνοριακής επιφάνειας ημιάπειρου διηλεκτρικού χώρου, όπως αυτά που θα συζητηθούν στο Κεφάλαιο 3. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το πλήθος των βοηθητικών πηγών και των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών, όπως και τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά των κατανομών των θέσεων τους, επηρεάζουν από κοινού και κατά πολύπλοκο τρόπο τα χαρακτηριστικά σύγκλισης και την ακρίβεια των λύσεων, οπότε απαιτείται η διενέργεια μεγάλου αριθμού δοκιμών, για τον προσδιορισμό κάποιων υποβέλτιστων κατανομών που οδηγούν σε αποδεκτές λύσεις.
- Δυσκολία εφαρμογής σε δομές που είναι ηλεκτρικά μικρές σε μία ή περισσότερες διαστάσεις, λόγω της αναγκαστικής γειννίας των βοηθητικών πηγών και των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, τα τελευταία χρόνια προτάθηκε μια τροποποίηση της MAS, η οποία καλείται Τροποποιημένη MAS (Modified MAS-MMAS) [2, 8]. Η MMAS διαφοροποιείται συγκριτικά με τη MAS ως προς το γεγονός ότι η κατάστροψη των προς επίλυση εξισώσεων γίνεται απευθείας ως προς τα άγνωστα φορτία και ρεύματα.
- Δυσκολία εφαρμογής σε περιπτώσεις δομών με μεγάλες ηλεκτρικές απώλειες, εντός των οποίων τα ΗΜ πεδία φθίνουν πολύ έντονα, οπότε εμφανίζεται αριθμητική αστάθεια και αδυναμία προσδιορισμού αριθμητικά ευσταθών λύσεων με φυσική σημασία. Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, έχει προταθεί η αξιοποίηση προσεγγιστικών οριακών συνθηκών (π.χ. Impedance Boundary Conditions-IBCs) [9, 10].

2.2 Γενική Περιγραφή της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών

2.2.1 Τύποι Προβλημάτων

Η MAS έχει αναπτυχθεί για τη μελέτη προβλημάτων ΗΜ αλληλεπιδράσεων που εμπλέκουν σώματα που αποτελούνται, τουλάχιστον κατά περιοχές, από γραμμικά, ομοιογενή και ισοτροπικά υλικά, αν και έχουν γίνει προσπάθειες επέκτασης της σε ανισοτροπικά μέσα [1]. Παρά το γεγονός αυτό, οι κατηγορίες προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν με εφαρμογή της MAS παρουσιάζουν μεγάλο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον, καθόσον σχετίζονται με πλήθος επιστημονικών κλάδων και εφαρμογών.

Τα προς επίλυση προβλήματα διατυπώνονται, συνήθως, ως προβλήματα ανάλυσης, δηλαδή θεωρούνται γνωστά τα εμπλεκόμενα σώματα και τα ΗΜ πεδία διέγερσης, ενώ άγνωστα μεγέθη είναι τα ΗΜ πεδία που αναπτύσσονται στις διακριτές περιοχές του προβλήματος. Σύμφωνα με τη MAS, το άγνωστο ΗΜ πεδίο σε κάθε περιοχή εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός αναλυτικών λύσεων της αντίστοιχης εξίσωσης Helmholtz. Στη συνέχεια, για την ολοκλήρωση της επίλυσης, απαιτείται η επιβολή των οριακών συνθηκών σε διακριτά σημεία επί των συνοριακών επιφανειών του προβλήματος. Ως εκ τούτου, η MAS

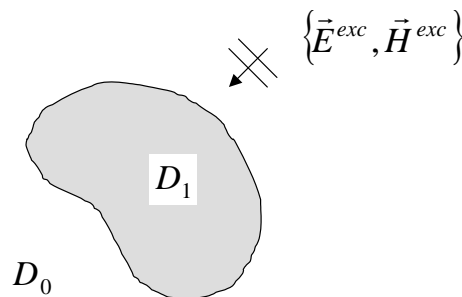
υπάγεται στις ημιαναλυτικές μεθόδους συνοριακών τιμών. Οι προκύπτουσες λύσεις ικανοποιούν επακριβώς τις εξισώσεις του Maxwell κατά περιοχές, αλλά όχι και τις οριακές συνθήκες στις συνοριακές επιφάνειες. Όπως θα αναλυθεί παρακάτω, το γεγονός αυτό παρέχει τη δυνατότητα της εκ των υστέρων εκτίμησης των σφαλμάτων των λύσεων, μέσω του υπολογισμού των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών.

2.2.2 Συναρτησιακές Προσεγγίσεις ΗΜ Πεδίων

Όπως οι περισσότερες αριθμητικές μέθοδοι συναρτησιακών προσεγγίσεων, η MAS εφαρμόζεται στο πεδίο της συχνότητας. Ως εκ τούτου, οι εξαγόμενες λύσεις χαρακτηρίζονται από αρμονική χρονική εξάρτηση της μορφής $\exp(\pm j\omega t)$, όπου $\omega = 2\pi f$ η κυκλική συχνότητα. Θεωρώντας θετικό πρόσημο στον εκθέτη χρονικής εξάρτησης και ακολουθώντας τους συνήθεις κανόνες του φασιθητικού φορμαλισμού, κάθε δυναμικό μέγεθος $\tilde{A}(\vec{r}, t)$ συνδέεται με τον αντίστοιχο φασιθέτη $A(\vec{r})$ μέσω της σχέσης

$$\tilde{A}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{A(\vec{r})\exp(j\omega t)\}, \quad (2.1)$$

όπου $\text{Re}\{\bullet\}$ η συνάρτηση που αποδίδει το πραγματικό μέρος μιας μιγαδικής ποσότητας. Σημειώνεται ότι η σχέση (2.1) ισχύει τόσο για βαθμωτά όσο και για διανυσματικά μεγέθη. Ακολούθως, όλα τα δυναμικά μεγέθη που θα αναφερθούν αφορούν φασιθέτες.



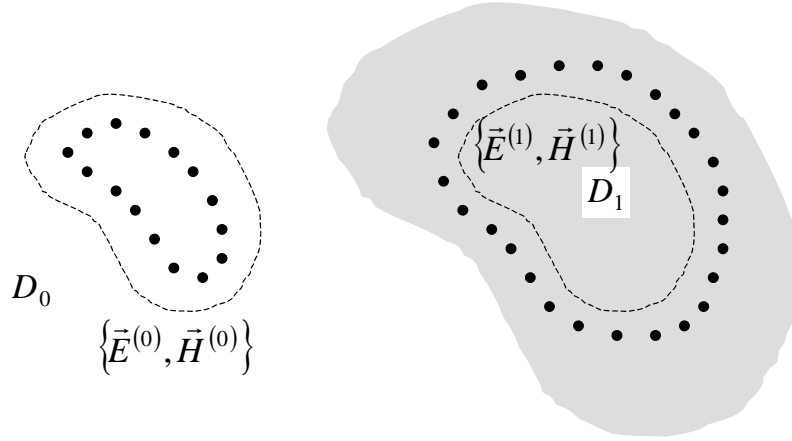
Σχήμα 2. 1. Ομοιογενές και ισοτροπικό υλικό σώμα, εκτιθέμενο σε γνωστό ΗΜ πεδίο διέγερσης.

Στη συνέχεια, μελετάται ένα γενικό πρόβλημα ΗΜ αλληλεπίδρασης, το οποίο αφορά ένα υλικό σώμα από ομοιογενές και ισοτροπικό υλικό που εκτίθεται σε κάποιο γνωστό ΗΜ πεδίο διέγερσης, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1. Σε κάθε περιοχή του προβλήματος, το άγνωστο ΗΜ πεδίο εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των ΗΜ πεδίων που παράγονται από το αντίστοιχο σύνολο βοηθητικών πηγών. Η περιγραφή του ΗΜ πεδίου στο χώρο D_0 προσεγγίζεται από το συνολικό ΗΜ πεδίο που παράγει ένα σύνολο βοηθητικών πηγών εντός του σώματος, οι οποίες ακτινοβολούν σε άπειρο χώρο με τα χαρακτηριστικά του χώρου D_0 , ενώ η περιγραφή του ΗΜ πεδίου στο χώρο D_1 προσεγγίζεται από το συνολικό ΗΜ πεδίο που παράγει ένα σύνολο βοηθητικών πηγών εκτός του σώματος, οι οποίες ακτινοβολούν σε άπειρο χώρο με τα χαρακτηριστικά του χώρου D_1 , όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2. Συνεπώς, τα άγνωστα ΗΜ πεδία εκφράζονται κατά περιοχή μέσω των σχέσεων

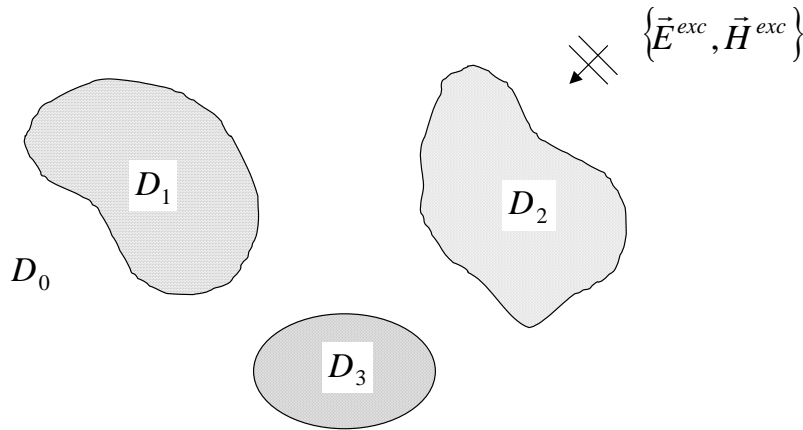
$$\vec{F}^{(0)}(\vec{r}) = \vec{F}^{exc}(\vec{r}) + \sum_n w_n^{(0)} \vec{F}_n^{(0)}(\vec{r}), \quad (2.2\alpha)$$

$$\vec{F}^{(1)}(\vec{r}) = \sum_n w_n^{(1)} \vec{F}_n^{(1)}(\vec{r}), \quad (2.2\beta)$$

όπου $\vec{F}^{(i)}$ το διάνυσμα του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου στην περιοχή D_i ($i=0,1$), $\vec{F}_n^{(i)}$ το αντίστοιχο πεδίο της βοηθητικής πηγής του συνόλου που ακτινοβολεί στην περιοχή D_i και δηλώνει ο δείκτης n , \vec{F}^{exc} το αντίστοιχο πεδίο διέγερσης, ενώ με $w_n^{(i)}$ συμβολίζονται οι άγνωστοι συντελεστές που καθορίζουν τη βαρύτητα της συνεισφοράς κάθε βοηθητικής πηγής στα αναπτύγματα των σχέσεων (2.2).



Σχήμα 2. 2. Σύνολα βοηθητικών πηγών για την περιγραφή των ΗΜ πεδίων εκτός και εντός του σώματος του Σχήματος 2. 1.



Σχήμα 2. 3. Γενική περίπτωση προβλήματος ΗΜ αλληλεπίδρασης που εμπλέκει περισσότερα του ενός υλικά σώματα.

Στη γενικότερη περίπτωση που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.3, στην οποία το πρόβλημα ΗΜ αλληλεπίδρασης αφορά ένα σύνολο σωμάτων, η λύση προκύπτει γενικεύοντας άμεσα τα προαναφερθέντα για την περίπτωση ενός μεμονωμένου σώματος. Σε κάθε περιοχή D_i , το άγνωστο ΗΜ πεδίο εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των ΗΜ πεδίων που παράγονται από το αντίστοιχο σύνολο βοηθητικών πηγών. Κατά πλήρη αντιστοιχία με τα αναπτύγματα των σχέσεων (2.2), τα άγνωστα ΗΜ πεδία εκφράζονται κατά περιοχή ως εξής

$$\vec{F}^{(0)}(\vec{r}) = \vec{F}^{exc}(\vec{r}) + \sum_n w_n^{(0)} \vec{F}_n^{(0)}(\vec{r}), \quad (2.3\alpha)$$

$$\vec{F}^{(i)}(\vec{r}) = \sum_n w_n^{(i)} \vec{F}_n^{(i)}(\vec{r}), i \neq 0. \quad (2.3\beta)$$

Οι συναρτήσεις βάσης $\vec{F}_n^{(i)}$ των συναρτησιακών προσεγγίσεων των σχέσεων (2.2) και (2.3) αντιστοιχούν στα ΗΜ πεδία των βοηθητικών πηγών. Σε κάθε περίπτωση, για τον υπολογισμό των ΗΜ πεδίων των βοηθητικών πηγών, αρκεί να είναι γνωστή η έκφραση του ΗΜ πεδίου μιας βοηθητικής πηγής σε τυχαία θέση \vec{r}' με κατάλληλο προσανατολισμό $\vec{F}_i(\vec{r}; \vec{r}')$, οπότε ισχύει

$$\vec{F}_n^{(i)}(\vec{r}) = \vec{F}_i(\vec{r}; \vec{r}_n^{(i)}), \quad (2.4)$$

όπου $\vec{r}_n^{(i)}$ τα διανύσματα θέσης των κέντρων των βοηθητικών πηγών.

Όσον αφορά την εφαρμογή της MAS, ιδιαίτερη μεγάλη σημασία έχει η επιλογή του τύπου των βοηθητικών πηγών, του πλήθους τους, καθώς και τα χαρακτηριστικά της κατανομής των θέσεων τους στο χώρο. Οι παράγοντες αυτοί καθορίζουν σε σημαντικό βαθμό τις ιδιότητες σύγκλισης των λύσεων, καθώς και την ακρίβεια τους. Όσον αφορά τον τύπο των βοηθητικών πηγών, αυτός επιλέγεται έτσι ώστε τα παραγόμενα ΗΜ πεδία από τις βοηθητικές πηγές να ικανοποιούν την εξίσωση Helmholtz στην αντίστοιχη περιοχή. Σε περιπτώσεις προβλημάτων δύο διαστάσεων, ως βοηθητικές πηγές χρησιμοποιούνται, συνήθως, νηματοειδείς ηλεκτρικές ή μαγνητικές πηγές άπειρου μήκους, ανάλογα με τον τύπο της πόλωσης του ΗΜ πεδίου διέγερσης (TM ή TE, αντίστοιχα). Όταν η πόλωση του ΗΜ πεδίου διέγερσης είναι τυχαία, η επίλυση του προβλήματος γίνεται αναλύοντας το ΗΜ πεδίο διέγερσης σε TM και TE κύματα, λαμβάνοντας την υπέρθεση των επιμέρους λύσεων ή, εναλλακτικά, εισάγοντας βοηθητικές πηγές και των δύο τύπων. Σε περιπτώσεις προβλημάτων τριών διαστάσεων, ως βοηθητικές πηγές, συνήθως, χρησιμοποιούνται ζεύγη εγκάρσιων ηλεκτρικών ή μαγνητικών διπόλων. Σημειώνεται ότι, αν και τα δίπολα θεωρούνται στοιχειώδη (δίπολα Hertz) στις περισσότερες περιπτώσεις, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν και άλλοι τύποι βοηθητικών πηγών, όπως δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος, κ.α. Λεπτομέρειες που αφορούν διάφορους τύπους βοηθητικών πηγών, καθώς και τα παραγόμενα ΗΜ πεδία σε τυπικά συστήματα συντεταγμένων, παρέχονται στα Παραρτήματα Α και Β. Αναφορικά με το πλήθος και την κατανομή των θέσεων των βοηθητικών πηγών, σημειώνεται ότι δεν υπάρχουν γενικοί κανόνες για τον καθορισμό τους, που να εγγυώνται τη σύγκλιση των λύσεων. Γενικά, η αποδοτικότητα της MAS εξαρτάται ισχυρά από το αν οι λύσεις δύνανται να περιγράψουν τα άγνωστα ΗΜ πεδία πλησίον των ιδιάζοντων σημείων των αναλυτικών επεκτάσεων τους, τα οποία μπορεί να είναι μεμονωμένα σημεία στο χώρο ή να σχηματίζουν γραμμές και επιφάνειες [1-7]. Αν η κατανομή των θέσεων των βοηθητικών πηγών επιτρέπει την περιγραφή των ΗΜ πεδίων με ικανοποιητική ακρίβεια πλησίον των ιδιάζοντων σημείων, οι λύσεις αναμένεται να είναι συγκλίνουσες. Σε αντίθετη περίπτωση, οι λύσεις είναι γενικά ανακριβείς και ενδεχομένως αποκλίνουσες με την αύξηση του πλήθους των βοηθητικών πηγών. Μεγάλης σημασίας είναι και ο χαρακτήρας της πεδιακής ιδιομορφίας, αφού αυτή μπορεί να είναι λογαριθμικής μορφής (ιδιομορφία του τύπου $\log|\vec{r} - \vec{r}'|$) ή να έχει συμπεριφορά πόλου τάξης n (ιδιομορφία του τύπου $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-n}$) [1]. Στην πράξη, η σύγκλιση των λύσεων είναι εγγυημένη όταν η νοητή επιφάνεια, επί της οποίας κείνται οι βοηθητικές πηγές κάθε συνόλου, εσωκλείει τα ιδιάζοντα σημεία της αναλυτικής επέκτασης του άγνωστου ΗΜ πεδίου, δηλαδή όταν δεν υπάρχουν ιδιάζοντα σημεία μεταξύ των θέσεων των βοηθητικών πηγών και της αντίστοιχης συνοριακής επιφάνειας. Παρακάτω, θα επανεξεταστεί το θέμα της τοποθέτησης των βοηθητικών πηγών, κυρίως υπό το πρίσμα της επιλογής των θέσεων τους με βάση κάποιους εμπειρικούς κανόνες.

2.2.3 Οριακές Συνθήκες

Σύμφωνα με τη MAS, οι άγνωστοι συντελεστές $w_n^{(i)}$ των αναπτυγμάτων των σχέσεων (2.2) και (2.3) προσδιορίζονται επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες σε διακριτά σημεία σύμφωνα με την τεχνική PM, όπως αναλύθηκε στην Παράγραφο 1.3.2.3. Τα σημεία επιβολής των οριακών συνθηκών κείνται στις συνοριακές επιφάνειες $\partial D_{i,j}$ μεταξύ των περιοχών D_i και D_j , ή στις οριακές επιφάνειες $\partial D_i \equiv \partial D_{i,0}$ των περιοχών D_i , αν μεταξύ τους υπάρχει κενός χώρος. Από την επιβολή των οριακών συνθηκών προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα για τους άγνωστους συντελεστές, η επίλυση του οποίου οδηγεί στην αριθμητική λύση, αφού ο υπολογισμός των HM πεδίων παντού στο χώρο από τις σχέσεις (2.2) και (2.3) είναι άμεσος. Στο σημείο αυτό, σημειώνεται ότι η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld δεν χρειάζεται να επιβληθεί, αφού ικανοποιείται αυτόματα από τα HM πεδία των βοηθητικών πηγών στο χώρο D_0 , ο οποίος περιβάλλει όλα τα σώματα του γενικού προβλήματος.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι οριακές συνθήκες σπάνια επιβάλλονται στο σύνολο τους στις επιφάνειες των σωμάτων. Στις περισσότερες περιπτώσεις, αρκεί η επιβολή μόνο των οριακών συνθηκών των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Σε περιπτώσεις τέλεια αγωγίμων επιφανειών, το εφαπτομενικό μαγνητικό πεδίο είναι ασυνεχές κατά τον όρο της επιφανειακής πυκνότητας του επαγόμενου ρεύματος, οπότε η σχετική οριακή συνθήκη δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του προβλήματος. Σε τέτοιες περιπτώσεις, επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες μόνο του ηλεκτρικού πεδίου.

Γενικά, οι οριακές συνθήκες που ισχύουν στις συνοριακές επιφάνειες $\partial D_{i,j}$ μεταξύ διηλεκτρικών χώρων εκφράζονται ως εξής

$$\vec{E}_{\parallel}^{(i)}(\vec{r}) = \vec{E}_{\parallel}^{(j)}(\vec{r}), \vec{r} \in \partial D_{i,j}, \quad (2.5\alpha)$$

$$\varepsilon_i \vec{E}_{\perp}^{(i)}(\vec{r}) = \varepsilon_j \vec{E}_{\perp}^{(j)}(\vec{r}), \vec{r} \in \partial D_{i,j}, \quad (2.5\beta)$$

$$\vec{H}_{\parallel}^{(i)}(\vec{r}) = \vec{H}_{\parallel}^{(j)}(\vec{r}), \vec{r} \in \partial D_{i,j}, \quad (2.5\gamma)$$

$$\mu_i \vec{H}_{\perp}^{(i)}(\vec{r}) = \mu_j \vec{H}_{\perp}^{(j)}(\vec{r}), \vec{r} \in \partial D_{i,j}, \quad (2.5\delta)$$

όπου ε_i και μ_i οι τιμές της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας και μαγνητικής διαπερατότητας στο χώρο D_i , αντίστοιχα, ενώ οι δείκτες \parallel και \perp υποδηλώνουν εφαπτομενικές και κάθετες συνιστώσες, αντίστοιχα. Σε αγωγίμες επιφάνειες, οι οριακές συνθήκες που εφαρμόζονται περιορίζονται σε αυτές των σχέσεων (2.5α) και (2.5δ).

Είναι γνωστό ότι οι οριακές συνθήκες των εφαπτομενικών και κάθετων συνιστωσών του HM πεδίου δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, δεδομένου ότι, όταν ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες των εφαπτομενικών συνιστωσών στις συνοριακές επιφάνειες $\partial D_{i,j}$ και οι εξισώσεις του Maxwell στις περιοχές D_i και D_j , οι οριακές συνθήκες των κάθετων συνιστωσών ικανοποιούνται αυτόματα. Όμως, όταν οι οριακές συνθήκες των εφαπτομενικών συνιστωσών δεν ικανοποιούνται ακριβώς, και οι οριακές συνθήκες των κάθετων συνιστωσών ικανοποιούνται κατά προσέγγιση.

Από την επιβολή των οριακών συνθηκών των εφαπτομενικών συνιστωσών του HM πεδίου σε διακριτά σημεία επί των συνοριακών επιφανειών του προβλήματος προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα για τους άγνωστους συντελεστές, το οποίο, συνήθως, χαρακτηρίζεται από ίσο πλήθος εξισώσεων και αγνώστων, οπότε επιλύεται χρησιμοποιώντας τυπικούς αλγορίθμους επίλυσης γραμμικών συστημάτων (π. χ. απαλοιφή Gauss, παραγοντοποίηση LU, κ.α.). Όταν το πλήθος των εξισώσεων υπερβαίνει το πλήθος των αγνώστων, το προκύπτον

σύστημα είναι υπερπροσδιορισμένο και η επίλυση του γίνεται εφαρμόζοντας κατάλληλους αλγορίθμους επίλυσης (π.χ. τετραγωνική ελαχιστοποίηση, παραγοντοποίηση SVD, κ.α.) [11, 12].

Το πλήθος και η κατανομή των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών, σε συνδυασμό με το πλήθος και τη κατανομή των θέσεων των βοηθητικών πηγών, επηρεάζουν σημαντικά τα χαρακτηριστικά σύγκλισης και την ακρίβεια των λύσεων. Γενικά, ο αριθμός των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών πρέπει να είναι αρκούντως μεγάλος, ούτως ώστε να μην υπάρχει απώλεια σημαντικής πληροφορίας όσον αφορά τη γεωμετρία του προβλήματος και τη χωρική πολυπλοκότητα των ΗΜ πεδίων στις συνοριακές επιφάνειες, αλλά όχι υπερβολικά μεγάλος ώστε να προκύψει γραμμικό σύστημα με μεγάλο δείκτη κατάστασης (condition number), λεπτομέρειες για τον οποίο αναφέρονται ακολούθως.

2.2.4 Δείκτης Κατάστασης

Ο δείκτης κατάστασης ενός τετραγωνικού πίνακα \mathbf{A} ορίζεται ως εξής

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|, \quad (2.6)$$

όπου με $\|\bullet\|$ συμβολίζεται η νόρμα πίνακα και \mathbf{A}^{-1} ο αντίστροφος πίνακας του \mathbf{A} . Ο δείκτης κατάστασης αποτελεί ένα μέτρο της δυσκολίας που παρουσιάζει η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με πίνακα συντελεστών τον \mathbf{A} . Όταν ο πίνακας ενός γραμμικού συστήματος είναι διαγώνιος, ο δείκτης κατάστασης του είναι ίσος με 1, οπότε η επίλυση του γραμμικού συστήματος είναι τετριμμένη. Αντίθετα, όσο η εξάρτηση μεταξύ των γραμμών του είναι ισχυρότερη, η επίλυση του συστήματος καθίσταται δυσκολότερη. Στην ακραία περίπτωση που δύο ή περισσότερες γραμμές του πίνακα είναι γραμμικά εξαρτημένες, το πληροφοριακό περιεχόμενο του πίνακα δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό μοναδικής λύσης.

Στην περίπτωση κατά την οποία η MAS συνδυάζεται με την τεχνική PM, κατάλληλη επιλογή των σχετικών θέσεων των βοηθητικών πηγών και των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών οδηγεί σε πίνακες με ισχυρή κύρια διαγώνιο και, ως εκ τούτου, μικρό δείκτη κατάστασης. Πάντως, τα γραμμικά συστήματα που προκύπτουν είναι εξαιρετικά ευαίσθητα σε αλλαγές της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών, αλλά και των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών. Όσον αφορά την τεχνική GPM, αυτή, τυπικά, οδηγεί σε πίνακες με μεγάλο δείκτη κατάστασης, χωρίς αυτό να συνεπάγεται ότι υστερεί έναντι της PM, καθώς, σε πολλές περιπτώσεις, ο υπερπροσδιορισμός του γραμμικού συστήματος αυξάνει το πληροφοριακό περιεχόμενο του σχετικά με την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών του προβλήματος. Στην τελευταία περίπτωση, απαιτείται ειδικός χειρισμός του προκύπτοντος γραμμικού συστήματος, ούτως ώστε να εξαχθεί λύση με φυσική σημασία.

2.2.5 Σύγκλιση των Αριθμητικών Λύσεων

Η έννοια της μαθηματικής σύγκλισης των λύσεων που προκύπτουν από την εφαρμογή της MAS σε δοθέν πρόβλημα, τουλάχιστον υπό την έννοια της σχέσης (1.9), είναι εξαιρετικά δύσκολο να αποδειχθεί και, ως εκ τούτου, δεν θα αναλυθεί περαιτέρω. Ωστόσο, αξίζει να τονιστεί ότι ζητήματα που αφορούν την ύπαρξη, τη μοναδικότητα και τη σύγκλιση των λύσεων της MAS έχουν αναλυθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία (πληθώρα παραπομπών μπορούν να βρεθούν στις σχετικές αναφορές [1, 2, 5, 6]).

Όσον αφορά τη σύγκλιση των λύσεων, αυτή είναι, όπως εξάλλου προαναφέρθηκε, άρρηκτα συνδεδεμένη με τις ακριβείς θέσεις τοποθέτησης των βοηθητικών πηγών σε σχέση με τα ιδιάζοντα σημεία των αναλυτικών επεκτάσεων των άγνωστων ΗΜ πεδίων. Ωστόσο, καθώς οι θέσεις των ιδιάζόντων σημείων είναι εξαιρετικά δύσκολο έως αδύνατο να

προσδιοριστούν στην πράξη, εξαιρουμένων ίσως κάποιων τετριμμένων περιπτώσεων, λόγω της πολύπλοκης εξάρτησης τους από τη γεωμετρία του προβλήματος και τα χαρακτηριστικά του ΗΜ πεδίου διέγερσης, η σύγκλιση των λύσεων δεν μπορεί να εξασφαλιστεί από αυστηρά μαθηματική σκοπιά. Για τους προαναφερθέντες λόγους, η σύγκλιση εξετάζεται ελέγχοντας τις λύσεις που προκύπτουν με την αύξηση του πλήθους των βοηθητικών πηγών, διατηρώντας τα χαρακτηριστικά της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών αμετάβλητα. Εάν τα μεγέθη ενδιαφέροντος τείνουν προς κάποιες τιμές αυξανόμενου του πλήθους των βοηθητικών πηγών, τότε οι λύσεις θεωρούνται αξιόπιστες σε πολλές περιπτώσεις. Πάντως, ακόμη και όταν οι λύσεις συμπεριφέρονται κατά αυτόν τον τρόπο, δεν μπορεί να θεωρηθούν συγκλίνουσες από αυστηρά μαθηματική σκοπιά, αφού μπορεί να τείνουν σε λανθασμένη τελική λύση. Για να εξασφαλιστεί η ορθότητα των λύσεων, η διαδικασία επαναλαμβάνεται αλλάζοντας τις παραμέτρους καθορισμού της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών, αλλά και των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών, και ελέγχοντας εκ νέου τη συμπεριφορά των λύσεων. Εάν τα μεγέθη ενδιαφέροντος εξακολουθούν να τείνουν προς τις ίδιες τιμές, οι λύσεις μπορούν να θεωρηθούν συγκλίνουσες. Ανεξάρτητα, πάντως, από τα αποτελέσματα αυτών των δοκιμών, στις περισσότερες περιπτώσεις, ελέγχεται και η συμπεριφορά των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών. Τέλος, σημειώνεται ότι ενδείκνυται και η διεξαγωγή πρόσθετων ελέγχων που αφορούν την ικανοποίηση των εξισώσεων και οριακών συνθηκών που δεν αξιοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό των λύσεων, όπως και ο έλεγχος της συνέπειας των λύσεων ως προς ανεξάρτητες φυσικές αρχές (π.χ. αρχή διατήρησης της ενέργειας), καθώς και η απευθείας σύγκριση με αποτελέσματα άλλων μεθόδων ή πειραματικά δεδομένα.

2.2.6 Εκτίμηση Σφαλμάτων

Η MAS παρέχει αξιοσημείωτες δυνατότητες εκτίμησης και απεικόνισης των σφαλμάτων των λύσεων, κυρίως μέσω του υπολογισμού των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών επί των συνοριακών επιφανειών. Ο έλεγχος αυτών των σφαλμάτων μπορεί να αφορά τόσο τις οριακές συνθήκες που αξιοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό των λύσεων όσο και τις υπόλοιπες οριακές συνθήκες. Τα σφάλματα των πρώτων είναι, όπως άλλωστε αναμένεται, μηδενικά στις θέσεις των σημείων επιβολής τους, αλλά μπορεί να λαμβάνουν μεγάλες τιμές μεταξύ αυτών. Αντίθετα, τα σφάλματα των δευτέρων είναι παντού μη μηδενικά, αν και, σε πολλές περιπτώσεις, είναι σημαντικά μικρότερα στα σημεία μηδενισμού των πρώτων. Σημειώνεται ότι τα σφάλματα των οριακών συνθηκών σε κάποια συνοριακή επιφάνεια απεικονίζονται, συνήθως, κανονικοποιημένα ως προς τη μέγιστη τιμή του αντίστοιχου πεδίου διέγερσης στην επιφάνεια, ούτως ώστε να είναι δυνατή η ποσοτική εκτίμηση του μεγέθους του σφάλματος σχετικά προς τις τιμές της έντασης του αντίστοιχου πεδίου εκατέρωθεν της επιφάνειας.

Αξίζει να τονιστεί ότι ο υπολογισμός των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών δεν αποτελεί ικανό έλεγχο αποτίμησης της ποιότητας και της ακρίβειας των λύσεων παντού στο χώρο. Ωστόσο, οι έλεγχοι που αφορούν τις οριακές συνθήκες θεωρούνται εξαιρετικά ευαίσθητοι σε σφάλματα, δεδομένου ότι μικρά σφάλματα οριακών συνθηκών συνεπάγονται, συνήθως, μικρότερα σφάλματα στον υπολογισμό των ΗΜ πεδίων στο χώρο σε κάποια απόσταση από τις συνοριακές επιφάνειες [13]. Βεβαίως, από αυστηρά μαθηματική σκοπιά, αυτό δεν μπορεί να εξασφαλιστεί πάντοτε, οπότε ο έλεγχος των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών δεν μπορεί να εγγυηθεί συγκλίνουσες λύσεις, οι οποίες τείνουν στην ακριβή λύση με την αύξηση του πλήθους των βοηθητικών πηγών. Για τους λόγους αυτούς, όπως εξάλλου προαναφέρθηκε, είναι σημαντική η διεξαγωγή πρόσθετων ελέγχων που αφορούν την αριθμητική ευστάθεια των λύσεων ως προς μεταβολές των παραμέτρων που υπεισέρχονται στη μορφοποίηση τους, όπως το πλήθος και τα χαρακτηριστικά της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών, αλλά και των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών. Εάν οι λύσεις αποδειχθούν αναισθητες σε τέτοιες μεταβολές και τα σφάλματα των οριακών

συνθηκών βαίνουν μειούμενα αυξανόμενου του πλήθους των βοηθητικών πηγών, οι λύσεις μπορούν να θεωρηθούν ικανοποιητικές, τουλάχιστον από πρακτική σκοπιά.

2.3 Εμπειρικοί Κανόνες Επιλογής Παραμέτρων

2.3.1 Κατανομή Βοηθητικών Πηγών

Για την επιλογή του πλήθους και τη μορφοποίηση της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών, δεν υπάρχουν κανόνες γενικής εφαρμογής σε μεγάλο εύρος προβλημάτων. Ωστόσο, κάποιοι ερευνητές έχουν προτείνει πρακτικούς κανόνες, που είναι κατάλληλοι για διάφορες υποκατηγορίες προβλημάτων. Αυτοί οι κανόνες διακρίνονται γενικά σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με το αν βασίζονται μόνο στη γεωμετρία του προβλήματος ή λαμβάνουν υπόψη και τα χαρακτηριστικά του ΗΜ πεδίου διέγερσης και τις φυσικές ιδιότητες των εμπλεκόμενων σωμάτων. Ακολούθως, αναφέρονται συνοπτικά κάποιοι από τους ευρύτερα διαδεδομένους κανόνες και των δύο κατηγοριών, ενώ γίνεται και συνοπτική αναφορά σε κάποιες τεχνικές προσδιορισμού των θέσεων των βοηθητικών πηγών που είναι δυνατόν να εξαλείψουν την ανάγκη εξεύρεσης γενικών κανόνων ή να αξιοποιηθούν συμπληρωματικά προς αυτούς.

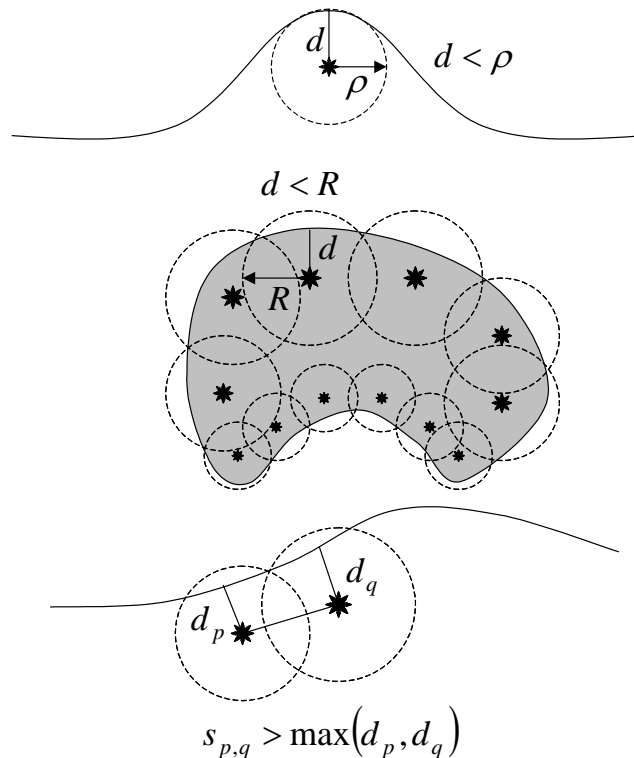
Όσον αφορά τους κανόνες που λαμβάνουν υπόψη μόνο τη γεωμετρία του προβλήματος, αξίζει να σημειωθεί ότι έχουν κυρίως εφαρμοστεί για την τοποθέτηση των πολυπολικών πηγών της μεθόδου MMP [14, 15], αν και παραλλαγές τους μπορούν να διατυπωθούν και για την τοποθέτηση των βοηθητικών πηγών της MAS. Οι κανόνες αυτοί βασίζονται σε κάποιες απλές ιδέες, οι οποίες διατυπώνονται ως εξής:

- Τα άγνωστα ΗΜ πεδία αναμένεται να εμφανίζουν έντονες χωρικές μεταβολές πλησίον των τμημάτων των συνοριακών επιφανειών με πολύπλοκη γεωμετρία (π.χ. αιχμές, ακμές, κ.α.).
- Τα άγνωστα ΗΜ πεδία αναμένεται να είναι ομαλά πλησίον των ομαλών τμημάτων των συνοριακών επιφανειών.
- Οι πηγές πρέπει να τοποθετούνται έτσι ώστε όλα τα τμήματα των συνοριακών επιφανειών να κείνται εντός της περιοχής επίδρασης κάποιας πηγής, δηλαδή το κέντρο της πηγής να μην απέχει περισσότερο από μια κρίσιμη απόσταση από κάποιο τμήμα της συνοριακής επιφάνειας, ούτως ώστε το γωνιακό εύρος που αντιστοιχεί στο εν λόγω τμήμα ως προς το κέντρο της πηγής να είναι σταθερό.
- Οι πηγές πρέπει να κατανέμονται κατά τρόπο τέτοιο ώστε να αποφεύγεται η ισχυρή αριθμητική αλληλεξάρτηση μεταξύ γειτονικών πηγών, η οποία εμφανίζεται όταν η απόσταση μεταξύ τους είναι μικρότερη από τις αποστάσεις των κέντρων τους από τη πλησιέστερη συνοριακή επιφάνεια.

Από τα προαναφερθέντα, είναι δυνατόν να εξαχθούν οι ακόλουθοι εμπειρικοί κανόνες για την τοποθέτηση των πολυπολικών πηγών της μεθόδου MMP [16, 17]:

- Η απόσταση μεταξύ μιας πηγής και της πλησιέστερης συνοριακής επιφάνειας d επιλέγεται μικρότερη από ή ίση με την ελάχιστη τοπική ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας ρ , άρα $d \leq \rho$, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.4.
- Η απόσταση μεταξύ μιας πηγής και της πλησιέστερης συνοριακής επιφάνειας d επιλέγεται έτσι ώστε το τμήμα της συνοριακής επιφάνειας που είναι πλησιέστερο στην πηγή να αντιστοιχεί σε σταθερό γωνιακό εύρος ως προς τη θέση της πηγής. Το τμήμα αυτό της συνοριακής επιφάνειας θεωρείται ότι βρίσκεται εντός της ζώνης επίδρασης της πηγής, η οποία είναι μια κυκλική περιοχή σε δύο διαστάσεις ή σφαιρική περιοχή σε τρεις διαστάσεις ακτίνας $R > d$, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.4. Συνήθως, λαμβάνεται $R = \sqrt{2}d$.

- Η απόσταση μεταξύ γειτονικών πηγών $s_{p,q}$, των οποίων οι περιοχές επίδρασης μερικώς επικαλύπτονται, πρέπει να υπερβαίνει τις ελάχιστες αποστάσεις αυτών από την πλησιέστερη συνοριακή επιφάνεια, συνεπώς $s_{p,q} > \max(d_p, d_q)$, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.4.

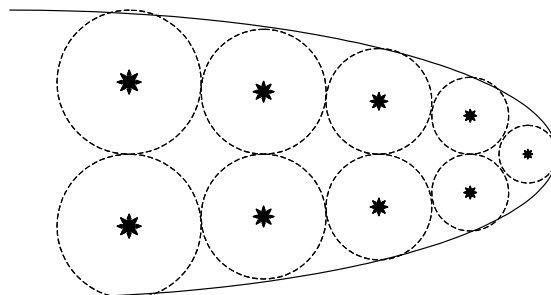


Σχήμα 2. 4. Πρακτικοί κανόνες τοποθέτησης των πολυπολικών πηγών της μεθόδου MMP.

Η εφαρμογή των κανόνων που προαναφέρθηκαν παρέχει τη δυνατότητα αυτοματοποίησης της διαδικασίας τοποθέτησης των πηγών με κατάλληλους αλγορίθμους, αν και, σε πολλές περιπτώσεις, απαιτείται ιδιαίτερη αντιμετώπιση του προβλήματος. Ο πρώτος κανόνας περιορίζει την απόσταση της πηγής από τη συνοριακή επιφάνεια, ανάλογα με την τοπική ακτίνα καμπυλότητας. Σε περιπτώσεις σχεδόν επίπεδων επιφανειών ($\rho \rightarrow +\infty$), η απόσταση μεταξύ πηγής και συνοριακής επιφάνειας περιορίζεται από το μήκος κύματος λ_i στο χώρο D_i εντός του οποίου ακτινοβολεί η πηγή. Για το λόγο αυτό, επιλέγεται $d \leq \min(\rho, \lambda_i)$. Οι άλλοι δύο κανόνες εξασφαλίζουν ότι οι πηγές κατανομονται με μεγαλύτερη πυκνότητα κοντά στα τμήματα των συνοριακών επιφανειών με έντονες ανωμαλίες και μικρότερη πυκνότητα κατά μήκος των ομαλών τμημάτων των συνοριακών επιφανειών. Στην πράξη, η αυτοματοποιημένη διαδικασία τοποθέτησης των πηγών βάσει των προαναφερθέντων κανόνων μπορεί να καταλήξει σε υπερβολικά μεγάλο πλήθος πηγών ή και σε πηγές που τοποθετούνται λανθασμένα στην αντίθετη πλευρά της συνοριακής επιφάνειας, ιδιαίτερα όταν οι συνοριακές επιφάνειες χαρακτηρίζονται από έντονες μεταβολές της καμπυλότητας τους [16, 17]. Σε αυτές τις περιπτώσεις, απαιτείται η εκ των υστέρων απαλοιφή κάποιων πηγών και η επανατοποθέτηση κάποιων άλλων. Λόγω της τοποθέτησης των πηγών σε μεταβλητές αποστάσεις από τις συνοριακές επιφάνειες, η τάξη των πολυπόλων μπορεί να επιλεγεί σταθερή, αν και ενδείκνυται η χρήση πολυπόλων ανώτερης τάξης πλησίον περιοχών με έντονες ανωμαλίες.

Ανεξάρτητα από τους προαναφερθέντες κανόνες, άλλοι ερευνητές έχουν προτείνει έναν απλούστερο κανόνα για την τοποθέτηση των πηγών της MMP, αν και η εφαρμογή του

έχει παρουσιαστεί μόνο σε προβλήματα σκέδασης από κυλίνδρους κυκλικής και ελλειπτικής διατομής [18]. Σύμφωνα με τον εν λόγω κανόνα, σε κάθε κλειστό σώμα, οι πηγές τοποθετούνται στα κέντρα κύκλων που κατανέμονται έτσι ώστε να εφάπτονται της συνοριακής επιφάνειας, ενώ γειτονικοί κύκλοι εφάπτονται και μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5. Αν και ο κανόνας αυτός είναι εύκολα εφαρμόσιμος σε κυλίνδρους, δεν αποτελεί γενικό κανόνα τοποθέτησης των πηγών.



Σχήμα 2. 5. Γεωμετρικός κανόνας τοποθέτησης των πηγών σε κυλίνδρους ελλειπτικής διατομής.

Στην περίπτωση της MAS, οι κανόνες που προαναφέρθηκαν δεν παράγουν ικανοποιητικές κατανομές των θέσεων των βοηθητικών πηγών, καθόσον οι βοηθητικές πηγές που χρησιμοποιούνται αντιστοιχούν σε πολύπολα μηδενικής τάξης και, ως εκ τούτου, δεν παρέχουν δυνατότητες περιγραφής έντονων τοπικών μεταβολών των HM πεδίων. Λόγω του ιδιαίτερου αυτού χαρακτηριστικού της MAS, το πλήθος των πηγών είναι, τυπικά, πολύ μεγαλύτερο από αυτό που απαιτείται για την εφαρμογή της μεθόδου MMP. Για τον προσδιορισμό αριθμητικά ευσταθών γραμμικών συστημάτων κατά την εφαρμογή της MAS, έχουν προταθεί κάποιοι γενικοί κανόνες, οι οποίοι συνδέονται με τα φυσικά χαρακτηριστικά του υπό μελέτη προβλήματος και με τις ιδιότητες του HM πεδίου διέγερσης. Οι κανόνες αυτοί συνοψίζονται ως εξής [1]:

- Οι νοητές επιφάνειες, επί των οποίων κείνται οι βοηθητικές πηγές, επιλέγονται σύμμορφες προς τις συνοριακές επιφάνειες του προβλήματος, δηλαδή η ελάχιστη απόσταση μεταξύ μιας οποιασδήποτε βοηθητικής πηγής και της πλησιέστερης συνοριακής επιφάνειας είναι σταθερή.
- Οι νοητές επιφάνειες, επί των οποίων κείνται οι βοηθητικές πηγές, θα πρέπει να εσωκλείουν όλα τα ιδιάζοντα σημεία της αναλυτικής επέκτασης του αντίστοιχου HM πεδίου. Σημειώνεται ότι η παραβίαση αυτού του κανόνα μπορεί να οδηγήσει σε αποκλίνουσες λύσεις.
- Για περιοχές με πολύπλοκες συνοριακές επιφάνειες, η απόσταση μεταξύ της νοητής επιφάνειας, επί της οποίας κείνται οι βοηθητικές πηγές, και της συνοριακής επιφάνειας επιλέγεται μικρότερη από την ελάχιστη τοπική ακτίνα καμπυλότητας της συνοριακής επιφάνειας.
- Σε προβλήματα σκέδασης από κλειστά αντικείμενα, το σχήμα και οι διαστάσεις της νοητής επιφάνειας, επί της οποίας κείνται οι βοηθητικές πηγές, πρέπει να αντιστοιχούν σε συχνότητες συντονισμού που δεν συμπίπτουν με τη συχνότητα διέγερσης. Σε αντίθετη περίπτωση, επειδή τα σχετικά αυτοδιεγυρόμενα HM πεδία ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες του προβλήματος, η MAS μπορεί να οδηγηθεί σε λανθασμένες λύσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στην υπέρθεση τέτοιων λύσεων και των άγνωστων HM πεδίων του προβλήματος.

Πάντως, είναι άξιο αναφοράς ότι οι παραπάνω κανόνες δεν παρέχουν γενικό και συστηματικό τρόπο τοποθέτησης των βοηθητικών πηγών σε κάθε περίπτωση, αφού δεν εγγυώνται τη σύγκλιση των λύσεων και δεν προσαρμόζονται ανάλογα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του προβλήματος. Μάλιστα, σε αρκετές περιπτώσεις, ενδείκνυται η μη

σύμμορφη κατανομή των βοηθητικών πηγών ως προς τις συνοριακές επιφάνειες, ιδιαίτερα σε προβλήματα σκέδασης από σώματα με αιχμές [19, 20]. Σε αυτές τις περιπτώσεις, πλεονεκτεί η γεινίαση των βοηθητικών πηγών πλησίον της αιχμής προς τη συνοριακή επιφάνεια, έναντι της τοποθέτησης κατά σύμμορφο τρόπο, όπως και η μείωση της μεταξύ τους απόστασης, έως ότου καταστεί συγκρίσιμη με την απόσταση τους από τη συνοριακή επιφάνεια.

Ανεξάρτητα από τους προηγούμενους εμπειρικούς κανόνες, για τη μελέτη της σκέδασης επίπεδων ΗΜ κυμάτων από σκεδαστές μεγάλων διαστάσεων, έχει προταθεί η τοποθέτηση των βοηθητικών πηγών επί των καυστικών επιφανειών [4-7]. Αυτή η κατανομή επιτρέπει την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών με τη χρήση σχετικά μικρού πλήθους βοηθητικών πηγών. Ωστόσο, ακόμη και όταν οι βοηθητικές πηγές τοποθετούνται επί της καυστικής επιφάνειας, η λύση εξαρτάται ισχυρά από τις ακριβείς θέσεις τους, οπότε το πρόβλημα εύρεσης των θέσεων που οδηγούν στην ακριβέστερη δυνατή λύση εξακολουθεί να υφίσταται. Επιπρόσθετα, ο προσδιορισμός της καυστικής επιφάνειας είναι εξαιρετικά δύσκολος, ιδιαίτερα όταν οι σκεδαστές δεν είναι κανονικού σχήματος. Για τους λόγους αυτούς, η τοποθέτηση των βοηθητικών πηγών επί των καυστικών επιφανειών δεν μπορεί να εφαρμοστεί γενικά.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι κατανομές που προκύπτουν από οποιουδήποτε γενικού κανόνες δεν είναι βέλτιστες, δηλαδή δεν οδηγούν στα μικρότερα δυνατά σφάλματα των οριακών συνθηκών, τα οποία αντιστοιχούν σε δεδομένο πλήθος βοηθητικών πηγών. Είναι τουλάχιστον διαισθητικά αναμενόμενο ότι υπάρχουν ανομοιόμορφες κατανομές που συνεπάγονται μικρότερα σφάλματα από αυτά που προκύπτουν με την εφαρμογή των γενικών κανόνων. Κάποιες υποβέλτιστες θέσεις είναι δυνατόν να προσδιοριστούν με τη βοήθεια τεχνικών βελτιστοποίησης, θεωρώντας τις συντεταγμένες των θέσεων των βοηθητικών πηγών ως ανεξάρτητες παραμέτρους, οι οποίες μεταβάλλονται σε προκαθορισμένα διαστήματα, και επιβάλλοντας κάποιους περιορισμούς που σχετίζονται με τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση μεταξύ γειτονικών βοηθητικών πηγών. Η βελτιστοποίηση της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών μπορεί να γίνει με εφαρμογή γενετικών αλγορίθμων (Genetic Algorithms-GAs), κυρίως για σχετικά μικρούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ορίζοντας κάποια κατάλληλη συνάρτηση κόστους, που σχετίζεται με τα σφάλματα των οριακών συνθηκών. Όταν οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται σύμφωνα με την τεχνική GPM, όπως στη μέθοδο MMP, τα σφάλματα των οριακών συνθηκών είναι σταθμισμένα, οπότε οποιαδήποτε συνάρτηση κόστους εξαρτάται ασθενώς από τις θέσεις των βοηθητικών πηγών. Άμεση συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι η αργή σύγκλιση του GA προς κάποιες λύσεις που δεν διαφοροποιούνται σημαντικά από αυτές που προκύπτουν με εφαρμογή των εμπειρικών κανόνων που προαναφέρθηκαν. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, σε πολλές περιπτώσεις, η εφαρμογή αλγορίθμων βελτιστοποίησης οδηγεί σε σημαντική αύξηση του υπολογιστικού κόστους, χωρίς την επίτευξη αξιοσημείωτης βελτίωσης της ποιότητας των λύσεων. Αντίθετα, όταν οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται ακολουθώντας την τεχνική PM, όπως γίνεται στη MAS, τα σφάλματα των οριακών συνθηκών δεν είναι σταθμισμένα, καθιστώντας έτσι δυνατό το σχηματισμό συναρτήσεων κόστους που οδηγούν σε κατανομές των θέσεων των βοηθητικών πηγών που πλεονεκτούν έναντι των ομοιόμορφων κατανομών. Η τεχνική αυτή έχει ήδη χρησιμοποιηθεί για την τοποθέτηση των βοηθητικών πηγών της MAS σε προβλήματα σκέδασης από μεταλλικούς και διηλεκτρικούς κυλίνδρους άπειρου μήκους [21-23].

2.3.2 Κατανομή Σημείων Επιβολής Οριακών Συνθηκών

Όπως έχει προαναφερθεί, το πλήθος των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών είναι ίσο ή μεγαλύτερο από το πλήθος των βοηθητικών πηγών. Στην πρώτη περίπτωση, τα σημεία επιβολής των οριακών συνθηκών τοποθετούνται, συνήθως, στις προβολές των θέσεων των βοηθητικών πηγών επί των συνοριακών επιφανειών, προκειμένου να σχηματιστεί αλγεβρικό σύστημα με μικρό δείκτη κατάστασης. Πάντως, τονίζεται ότι άλλες κατανομές δεν αποκλείονται, αν και, συνήθως, οδηγούν σε υποδεέστερης ποιότητας λύσεις σε σχέση με

αυτή που λαμβάνεται από την τυπική κατανομή. Στην περίπτωση που το πλήθος των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών είναι μεγαλύτερο του πλήθους των βοηθητικών πηγών, οι λύσεις απευαισθητοποιούνται από τις θέσεις των πρώτων και τα σφάλματα των οριακών συνθηκών είναι σχετικά σταθμισμένα.

Στην περίπτωση της μεθόδου MMP, η επιβολή των οριακών συνθηκών μέσω της τεχνικής GPM οδηγεί σε σχετικά μικρά γραμμικά συστήματα, λόγω του μικρού πλήθους των πολυπόλων. Αντίθετα, στην περίπτωση της MAS, τα συστήματα που προκύπτουν είναι σχετικά μεγάλου μεγέθους, οπότε ο υπερπροσδιορισμός του συστήματος συνεπάγεται αξιοσημείωτη επιβάρυνση του υπολογιστικού κόστους. Εξαιτίας του γεγονότος αυτού, η τεχνική GPM δεν έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως σε συνδυασμό με τη MAS.

2.4 Αναφορές

- [1] F. G. Bogdanov, D. D. Karkashadze and R. S. Zaridze, “The method of auxiliary sources in electromagnetic scattering problems”, *Generalized Multipole Techniques for Electromagnetic and Light Scattering*, Edited by T. Wriedt, Elsevier Science, 1999.
- [2] D. I. Kaklamani and H. T. Anastassiou, “Aspects of the method of auxiliary sources (MAS) in computational electromagnetics”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 44, No. 3, pp. 48-64, 2002.
- [3] Y. Leviatan, “Analytic continuation considerations when using generalized formulations for scattering problems”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 38, No. 8, pp. 1259-1263, 1990.
- [4] R. S. Zaridze, R. Jobava, G. Bit-Babik, D. Karkashadze, D. P. Economou and N. K. Uzunoglou, “The method of auxiliary sources and scattered field singularities (caustics)”, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 12, No. 11, pp. 1491-1507, 1998.
- [5] R. Zaridze, G. Bit-Babik, D. Karkashadze, R. Jobava, D. Economou and N. Uzunoglou, *The Method of Auxiliary Sources (MAS): Solution of Propagation, Diffraction, and Inverse Problems Using MAS*, ICCS/NTUA, 1998.
- [6] Δ. Οικονόμου, *Επίλυση Ηλεκτρομαγνητικών Προβλημάτων με τη Μέθοδο Βοηθητικών Πηγών και Μικροκυματικά Συστήματα Ισχύος με Εφαρμογή σε Επιταχυντή Ηλεκτρονίων*, Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ, Αθήνα, 2001.
- [7] R. Zaridze, G. Bit-Babik, K. Tavzarashvili, D. P. Economou and N. K. Uzunoglou, “Wave field singularity aspects in large-size scatterers and inverse problems”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 50, No. 1, pp. 50-58, 2002.
- [8] F. Shubitidze, H. T. Anastassiou and D. I. Kaklamani, “An improved accuracy version of the method of auxiliary sources for computational electromagnetics”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 52, No. 1, pp. 302-309, 2004.
- [9] P. -R. Renaud and J. -J. Laurin, “Shielding and scattering analysis of lossy cylindrical cells using an extended multifilament current approach”, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 41, No. 4, pp. 320-334, 1999.
- [10] H. Anastassiou, D. I. Kaklamani, D. P. Economou and O. Breinbjerg, “Electromagnetic scattering analysis of coated conductors with edges using the method of auxiliary sources (MAS) in conjunction with the standard impedance boundary condition (SIBC)”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 50, No. 1, pp. 59-66, 2002.

- [11] A. Boag, Y. Leviatan and A. Boag, "On the use of SVD-improved point matching in the current-model method", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 41, No. 7, pp. 926-933, 1993.
- [12] B. Pomerianec, Y. Leviatan and A. Boag, "Analysis of the 5:1 dipole benchmark case using the current-model method with an SVD-improved point matching technique", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 7, No. 12, pp. 1577-1593, 1993.
- [13] A. C. Ludwig, "Validating scattering calculations using boundary value and internal field checks", *Proceedings of the IEEE AP-S International Symposium 1988*, pp. 1363-1365.
- [14] C. Hafner, *The Generalized Multipole Technique for Computational Electromagnetics*, Artech House, 1990.
- [15] C. Hafner, *Post-Modern Electromagnetics: Using Intelligent Maxwell Solvers*, John Wiley and Sons, 1999.
- [16] E. Moreno, D. Erni, C. Hafner and R. Vahldieck, "Multiple multipole method with automatic multipole setting applied to the simulation of surface plasmons in metallic nanostructures", *Journal of the Optical Society of America A.*, Vol. 19, No. 1, pp. 101-111, 2002.
- [17] E. Moreno, *MMP Modeling and Optimization of Photonic Crystals, Optical Devices, and Nanostructures*, PhD Dissertation ETH No. 14553, ETH, Zurich, 2002.
- [18] K. I. Beshir and J. E. Richie, "On the location and number of expansion centers for the generalized multipole technique", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 38, No. 2, pp. 177-180, 1996.
- [19] S. Eisler and Y. Leviatan, "Analysis of electromagnetic scattering from metallic and penetrable cylinders with edges using a multifilament current model", *IEE Proceedings Pt. H*, Vol. 136, No. 6, pp. 431-438, 1989.
- [20] Y. Leviatan, Z. Baharav and E. Heyman, "Analysis of electromagnetic scattering using arrays of fictitious sources", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 43, No. 10, pp. 1091-1098, 1995.
- [21] I. I. Heretakis, P. J. Papakanellos and C. N. Capsalis, "Analysis of electromagnetic scattering by infinite conducting cylinders of arbitrary smooth cross section using a genetically optimized MAS technique (GA/MAS)", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 16, No. 11, pp. 1555-1572, 2002.
- [22] I. I. Heretakis and C. N. Capsalis, "Radiation of an infinite current source in the presence of an infinite perfectly conducting cylinder of arbitrary smooth cross section using a genetically optimized MAS technique", *2nd International Conference on Biological Effects of Electromagnetic Fields*, pp. 781-789, 2002.
- [23] I. I. Heretakis, P. J. Papakanellos and C. N. Capsalis, "A stochastically optimized adaptive procedure for the location of MAS auxiliary monopoles: The case of electromagnetic scattering by dielectric cylinders", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, under review.

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογή της MAS για τη Μελέτη της Ακτινοβολίας Στοιχειωδών Πηγών Πλησίον της Συνοριακής Επιφάνειας Ημιάπειρου Διηλεκτρικού Χώρου

3.1 Εισαγωγή

Στην πράξη, η πλειονότητα των κεραιών σύρματος, οι οποίες χρησιμοποιούνται στις διάφορες εφαρμογές, τοποθετούνται επί ή άνωθεν της γήινης επιφάνειας. Όταν η απόσταση της κεραίας από τη γήινη επιφάνεια είναι αρκούντως μεγάλη σε σχέση με το μήκος κύματος λειτουργίας, η κεραία συμπεριφέρεται, τουλάχιστον με καλή προσέγγιση, ως αν ήταν απομονωμένη στον ελεύθερο χώρο. Αντίθετα, όταν η κεραία βρίσκεται σε σχετικά μικρή απόσταση από τη γήινη επιφάνεια, τα χαρακτηριστικά εκπομπής και λήψης της επηρεάζονται σημαντικά σε σχέση με τα θεωρητικά προβλεπόμενα στον ελεύθερο χώρο. Ανεξάρτητα από το αν η σύζευξη μεταξύ της κεραίας και του υποκείμενου μέσου (έδαφος, θάλασσα) είναι τόσο ισχυρή ώστε να αλλοιώσει την κατανομή ρεύματος επί της κεραίας ή όχι, το μακρινό πεδίο εκπομπής επηρεάζεται καθοριστικά από τα επαγόμενα ρεύματα στη γη, καθώς και στα τροποσφαιρικά και ιονοσφαιρικά στρώματα που την περιβάλλουν. Ως εκ τούτου, για τη μελέτη της ακτινοβολίας κεραιών που βρίσκονται πλησίον της γήινης επιφάνειας, απαιτείται η επίλυση εξαιρετικά πολύπλοκων προβλημάτων που εμπλέκουν ανομοιογενή και ανισοτροπικά μέσα, τα οποία είναι ιδιαίτερα δύσκολο έως αδύνατο να αντιμετωπιστούν. Λόγω αυτών των δυσκολιών, είναι αναγκαία η υποδιαίρεση του γενικού προβλήματος σε επιμέρους προβλήματα, τα οποία είναι, τουλάχιστον με καλή προσέγγιση, ανεξάρτητα μεταξύ τους, και είναι συνάμα εφικτή η επίλυση τους. Λόγω της αμελητέας σύζευξης μεταξύ της επίδρασης της γης και της επίδρασης των ατμοσφαιρικών στρωμάτων στην ακτινοβολία των κεραιών, η επίδραση της γης, συνήθως, εξετάζεται ανεξάρτητα. Στη συνέχεια, το προκύπτον ΗΜ πεδίο θεωρείται ως πεδίο διέγερσης των ατμοσφαιρικών στρωμάτων για τον προσδιορισμό του δευτερεύοντος πεδίου, το οποίο αποδίδεται σε τροποσφαιρική και ιονοσφαιρική σκέδαση, ενώ το συνολικό ΗΜ πεδίο προκύπτει δια υπερθέσεως.

Η μελέτη της ακτινοβολίας κεραιών που βρίσκονται υπεράνω και επί της γήινης επιφάνειας έχει συγκεντρώσει το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας από τα πρώτα χρόνια ανάπτυξης των κεραιών για τηλεπικοινωνιακούς σκοπούς, στις αρχές του 20^{ου} αιώνα [1]. Εξαιτίας της εξαιρετικής πολυπλοκότητας του γήινου περιβάλλοντος, αφού τόσο ο φλοιός της γης όσο και η ατμόσφαιρα που τον περιβάλλει χαρακτηρίζονται από έντονη ανομοιογένεια, η επίδραση του στην ακτινοβολία κεραιών εξετάστηκε εξ αρχής στη βάση κάποιων παραδοχών. Σύμφωνα με την απλούστερη αλλά ευρύτατα διαδεδομένη θεώρηση, η επίδραση της γης μελετάται θεωρώντας ότι το γήινο περιβάλλον συνίσταται σε έναν ημιάπειρο διηλεκτρικό χώρο με κάποια μακροσκοπικά ισοδύναμα χαρακτηριστικά, τα οποία εκτιμώνται από πειραματικά δεδομένα [2, 3]. Το πρόβλημα της ακτινοβολίας από βραχεία ηλεκτρικά δίπολα (δίπολα πολύ μικρού μήκους σε σχέση με το μήκος κύματος εκπομπής), τα οποία βρίσκονται επί ή άνωθεν της γήινης επιφάνειας, μελετήθηκε πρώτα από τον Sommerfeld το 1909 [1], ο οποίος προσδιόρισε πολύπλοκες αναλυτικές λύσεις. Τα αμέσως

επόμενα χρόνια, και άλλοι επιστήμονες παρουσίασαν ακριβείς αναλυτικές λύσεις, καθώς και προσεγγιστικές λύσεις, για την εκτέλεση αριθμητικών υπολογισμών. Η σχετική βιβλιογραφία αριθμεί πολύ μεγάλο αριθμό δημοσιεύσεων, που είναι αδύνατο να αναφερθούν εδώ (πληθώρα παραπομπών μπορούν να βρεθούν στις σχετικές αναφορές [1, 4-8]). Πάντως, παρά το γεγονός ότι οι αναλυτικές λύσεις είναι διαθέσιμες εδώ και πολλές δεκαετίες, το ενδιαφέρον για αυτά τα προβλήματα δεν ατόνησε, κυρίως λόγω του γεγονότος ότι οι αναλυτικές λύσεις εμπλέκουν ολοκληρώματα, γνωστά και ως ολοκληρώματα Sommerfeld, που δεν είναι δυνατόν να υπολογιστούν αναλυτικά σε κλειστή μορφή, ενώ και ο αριθμητικός υπολογισμός τους παρουσιάζει δυσκολίες, κυρίως εξαιτίας της έντονης ταλαντωτικής συμπεριφοράς τους (oscillatory integrals). Τις τελευταίες δεκαετίες, παρουσιάστηκαν ειδικές τεχνικές για τον αριθμητικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων αυτού του τύπου με εξαιρετική ακρίβεια. Επιπρόσθετα, παρουσιάστηκαν επεκτάσεις της θεωρίας ειδώλων για την επίλυση προβλημάτων ακτινοβολίας κεραιών υπεράνω της γήινης επιφάνειας, χωρίς την ανάγκη υπολογισμού πολύπλοκων ολοκληρωμάτων (πληθώρα παραπομπών και ιστορικά στοιχεία μπορούν να βρεθούν στις σχετικές αναφορές [9-11]). Η σχετική θεωρία έχει επικρατήσει να αναφέρεται ως θεωρία μιγαδικών ειδώλων (complex image theory), καθώς αποτελεί γενίκευση της κλασικής θεωρίας ειδώλων, η οποία, ως γνωστόν, χρησιμοποιείται για την επίλυση ΗΜ προβλημάτων που εμπλέκουν τέλεια αγωγίμες επιφάνειες.

Με την πάροδο των ετών, το εύρος των εφαρμογών των κεραιών επεκτάθηκε για την κάλυψη αναγκών που αφορούν ωκεανογραφικές και γεωφυσικές έρευνες (π.χ. μέτρηση των ηλεκτρικών και μαγνητικών χαρακτηριστικών του γήινου φλοιού, υποθαλάσσια χαρτογράφηση, κ.α.), αλλά και τηλεπικοινωνιακές εφαρμογές υπό της επιφάνειας της θάλασσας (π.χ. επικοινωνία με υποβρύχια εν καταδύσει), που σχετίζονται με προβλήματα ακτινοβολίας κεραιών εντός ημιάπειρου διηλεκτρικού χώρου [5-8, 12-14]. Επιπρόσθετα, πληθώρα άλλων άμεσα σχετιζόμενων εφαρμογών είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν ως τέτοια προβλήματα [7], στις οποίες συμπεριλαμβάνονται η ανάπτυξη συστημάτων υπερθερμίας για τη θεραπεία όγκων, η μελέτη και κατασκευή κεραιών που λειτουργούν ως αισθητήρες δειγματοληψίας ΗΜ πεδίων (probes), η χρήση κεραιών για την εύρεση κοιτασμάτων πετρελαίου, κ.α. Από τα παραπάνω, καθίσταται σαφής η θεωρητική και πρακτική σημασία της ανάλυσης προβλημάτων ακτινοβολίας κεραιών πλησίον της διαχωριστικής επιφάνειας μεταξύ δύο ημιάπειρων διηλεκτρικών χώρων. Μάλιστα, σε πολλές περιπτώσεις, απαιτείται η γενίκευση αυτών, θεωρώντας επάλληλα στρώματα διηλεκτρικών μέσων, τα οποία εκτείνονται στο άπειρο εγκάρσια στον άξονα μεταβολής των ηλεκτρομαγνητικών ιδιοτήτων τους. Στο σημείο αυτό, αξίζει να αναφερθεί ότι οι διαθέσιμες λύσεις σε τέτοια προβλήματα προέρχονται, τουλάχιστον στην πλειονότητα τους, από αναλυτικές προσεγγίσεις των προβλημάτων, ενώ ελάχιστες είναι οι απόπειρες εφαρμογής αριθμητικών μεθόδων υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού. Όσον αφορά τους υπολογιστικούς πόρους που απαιτούν, οι αριθμητικές μέθοδοι μειονεκτούν σε σχέση με τις διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις. Ωστόσο, είναι πολύ ευκολότερα επεκτάσιμες σε περιπτώσεις πιο πολύπλοκων προβλημάτων, σε αντίθεση με τις αναλυτικές μεθόδους που, εν γένει, δεν επιδέχονται γενίκευσης.

Όσον αφορά τις αριθμητικές μεθόδους που έχουν χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση προβλημάτων ακτινοβολίας κεραιών πλησίον της γήινης επιφάνειας, αξίζει να σημειωθεί ότι η σχετική δυνατότητα έχει ενσωματωθεί στις διάφορες εκδόσεις του NEC (Numerical Electromagnetics Code) [15-18], λαμβάνοντας υπόψη το ανακλώμενο κύμα και επιβάλλοντας μια προσεγγιστική διόρθωση που σχετίζεται με το επιφανειακό κύμα [17, 18]. Η ακρίβεια της προσέγγισης έχει διερευνηθεί εκτενώς επί μεγάλου εύρους μεταβολής των παραμέτρων του προβλήματος [19, 20], όπως η θέση και ο προσανατολισμός του ακτινοβολητή, τα χαρακτηριστικά του διηλεκτρικού χώρου, κ.α.

Όπως έχει προαναφερθεί, η MAS, όπως και οι περισσότερες συγγενείς αριθμητικές μέθοδοι, αναπτύχθηκαν με πρωταρχικό στόχο την επίλυση προβλημάτων σκέδασης από κλειστά σώματα [21]. Στη συνέχεια, η MAS χρησιμοποιήθηκε και για τη μελέτη προβλημάτων ακτινοβολίας, αν και τα χαρακτηριστικά σύγκλισης και η ακρίβεια των λύσεων δεν είχαν διερευνηθεί λεπτομερώς, ειδικά σε περιπτώσεις προβλημάτων που εμπλέκουν ανοικτά χωρία, έως πρόσφατα [22, 23].

Ακολουθώντας, εξετάζονται προβλήματα ακτινοβολίας στοιχειωδών ηλεκτρικών πηγών στο κενό υπεράνω ημιάπειρου διηλεκτρικού χώρου, καθώς και εντός αυτού. Τα προαναφερθέντα προβλήματα επιλέχθηκαν με κριτήριο την απλότητα, το μεγάλο θεωρητικό και πρακτικό τους ενδιαφέρον, καθώς και τη διαθεσιμότητα αναλυτικών λύσεων, για τη διερεύνηση της σύγκλισης και την εξέταση της ακρίβειας των λύσεων της MAS. Η επίλυση των προβλημάτων αυτών είναι δυνατόν να οδηγήσει σε γενικές κατευθυντήριες γραμμές για την εφαρμογή της MAS σε προβλήματα που εμπλέκουν ανοικτά χωρία, όσον αφορά την εξάρτηση του ρυθμού σύγκλισης και της ακρίβειας των λύσεων από τα χαρακτηριστικά των κατανομών των θέσεων των βοηθητικών πηγών, καθώς και των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών.

3.2 Ακτινοβολία Στοιχειωδών Ηλεκτρικών Πηγών στο Κενό Υπεράνω Ημιάπειρου Διηλεκτρικού Χώρου

3.2.1 Νηματοειδής Ηλεκτρική Πηγή

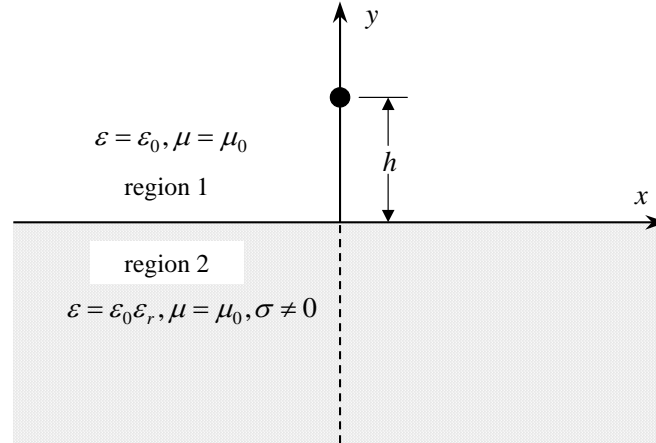
3.2.1.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος δύο διαστάσεων συνίσταται σε μια νηματοειδή ηλεκτρική πηγή συχνότητας $\omega = 2\pi f$, η οποία βρίσκεται στο κενό (χώρος 1) σε ύψος h υπεράνω ημιάπειρου ομοιογενούς διηλεκτρικού χώρου (χώρος 2) διηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ_r, ϵ_0 , μαγνητικής διαπερατότητας μ_0 και αγωγιμότητας σ , όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1. Αναλυτικές εκφράσεις για το παραγόμενο ΗΜ πεδίο στον ελεύθερο χώρο υπάρχουν στο Παράρτημα Α. Λόγω της παρουσίας του χώρου 2, το ΗΜ πεδίο στο χώρο 1 διαφοροποιείται σε σχέση με αυτό που παράγεται στον ελεύθερο χώρο, ενώ εμφανίζεται και ένα ΗΜ πεδίο εντός του χώρου 2. Στην περίπτωση που ο χώρος 2 χαρακτηρίζεται από άπειρη αγωγιμότητα, το ΗΜ πεδίο εντός αυτού είναι μηδενικό και το ΗΜ πεδίο στο χώρο 1 προκύπτει με εφαρμογή της θεωρίας ειδώλων. Για τον προσδιορισμό των άγνωστων ΗΜ πεδίων που αναπτύσσονται στους χώρους 1 και 2, εφαρμόζεται η MAS, όπως περιγράφεται ακολούθως.

3.2.1.2 Εφαρμογή της MAS

Σύμφωνα με τις βασικές αρχές της MAS, το άγνωστο ΗΜ πεδίο σε κάθε περιοχή του προβλήματος εκφράζεται ως υπέρθεση των ΗΜ πεδίων που παράγονται από ένα σύνολο βοηθητικών πηγών, που είναι τοποθετημένες εκτός των ορίων της αντίστοιχης περιοχής. Για την περίπτωση του Σχήματος 3.1, απαιτούνται δύο σύνολα βοηθητικών πηγών για την περιγραφή των άγνωστων ΗΜ πεδίων στους χώρους 1 και 2. Οι βοηθητικές πηγές του πρώτου συνόλου, οι οποίες κείνται κάτωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας, ακτινοβολούν εντός άπειρου χώρου με τα χαρακτηριστικά του χώρου 1, ενώ οι βοηθητικές πηγές του δεύτερου συνόλου, οι οποίες κείνται άνωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας, ακτινοβολούν εντός άπειρου χώρου με τα χαρακτηριστικά του χώρου 2, όπως απεικονίζεται στα Σχήματα 3.2 και 3.3. Εξαιτίας της ανεξαρτησίας του προβλήματος από τη χωρική μεταβλητή z , ως βοηθητικές πηγές χρησιμοποιούνται νηματοειδείς ηλεκτρικές πηγές με άξονες παράλληλους προς τον άξονα z . Οι βοηθητικές πηγές του πρώτου συνόλου τοποθετούνται επί του επιπέδου $y_1 = -d_1$, ενώ οι βοηθητικές πηγές του δεύτερου συνόλου τοποθετούνται επί του επιπέδου $y_2 = d_2$. Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, οι βοηθητικές πηγές τοποθετούνται συμμετρικά εκατέρωθεν του άξονα y . Σημειώνεται ότι ο αριθμός των βοηθητικών πηγών σε κάθε χώρο δεν είναι απαραίτητα ο ίδιος. Για την απλοποίηση του μαθηματικού φορμαλισμού και τη μείωση των παραμέτρων που σχετίζονται με την εφαρμογή

της MAS, το πλήθος των βοηθητικών πηγών ανά σύνολο υποτίθεται ίσο με $2N+1$. Το HM πεδίο στο χώρο 1 περιγράφεται ως άθροισμα του HM πεδίου της πρωτεύουσας πηγής στον ελεύθερο χώρο και ενός γραμμικού συνδυασμού των HM πεδίων των βοηθητικών πηγών του πρώτου συνόλου, ενώ το HM πεδίο στο χώρο 2 περιγράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των HM πεδίων των βοηθητικών πηγών του δεύτερου συνόλου.



Σχήμα 3. 1. Γεωμετρία νηματοειδούς ηλεκτρικής πηγής που ακτινοβολεί υπεράνω ημιάπειρου ομοιογενούς διηλεκτρικού χώρου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα άγνωστα HM πεδία στους χώρους 1 και 2 δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{F}^{(1)}(\vec{\rho}) = \vec{F}^{exc}(\vec{\rho}) + \sum_{n=-N}^N w_n^{(1)} \vec{F}_n^{(1)}(\vec{\rho}), \quad (3.1\alpha)$$

$$\vec{F}^{(2)}(\vec{\rho}) = \sum_{n=-N}^N w_n^{(2)} \vec{F}_n^{(2)}(\vec{\rho}), \quad (3.1\beta)$$

όπου $\vec{F}^{(i)}$ είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου στο χώρο i , \vec{F}^{exc} είναι το αντίστοιχο πεδίο διέγερσης της πρωτεύουσας πηγής στη θέση $\vec{\rho}_h = h\hat{y}$, ενώ $\vec{F}_n^{(i)}$ είναι το αντίστοιχο πεδίο της βοηθητικής πηγής του συνόλου i που καθορίζει ο δείκτης n και είναι τοποθετημένη στο σημείο (x_n, y_i) με διάνυσμα θέσης $\vec{\rho}_n^{(i)}$. Τα πεδία που υπεισέρχονται στις σχέσεις (3.1) προσδιορίζονται με απλή μεταφορά του πεδίου \vec{F}_i μιας νηματοειδούς ηλεκτρικής πηγής, που είναι τοποθετημένη στο κέντρο ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτινοβολεί σε άπειρο χώρο με τα χαρακτηριστικά του χώρου i , ως εξής

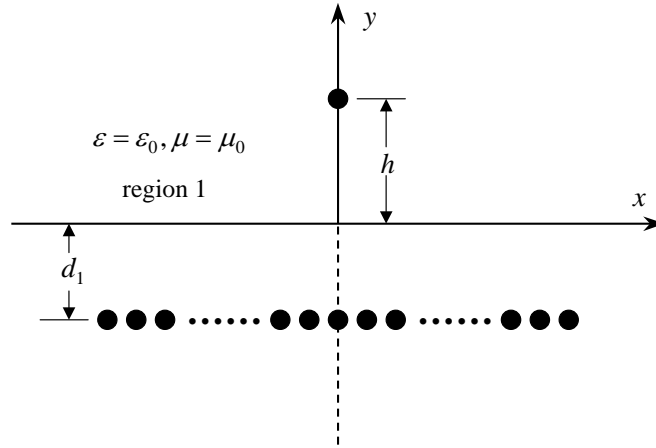
$$\vec{F}^{exc}(\vec{\rho}) = \vec{F}_1(\vec{\rho} - \vec{\rho}_h), \quad (3.2\alpha)$$

$$\vec{F}_n^{(i)}(\vec{\rho}) = \vec{F}_i(\vec{\rho} - \vec{\rho}_n^{(i)}). \quad (3.2\beta)$$

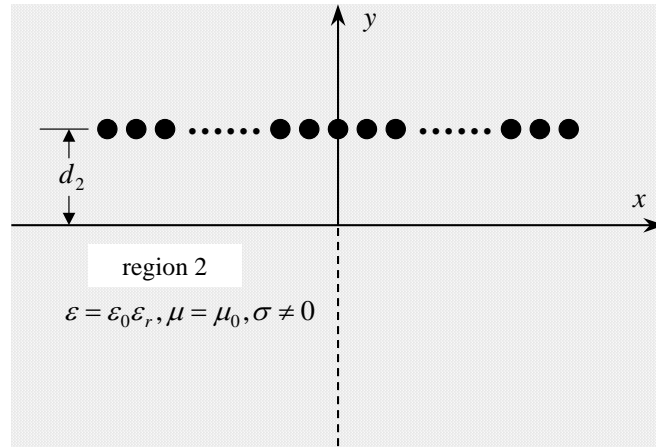
Αξιοποιώντας τις σχέσεις (A.4) του Παραρτήματος A, οι προηγούμενες σχέσεις εκφράζονται ως εξής

$$\vec{F}^{exc}(\vec{\rho}) = \vec{F}_1(\vec{\rho}; \vec{\rho}_h), \quad (3.3\alpha)$$

$$\vec{F}_n^{(i)}(\vec{\rho}) = \vec{F}_i(\vec{\rho}; \vec{\rho}_n^{(i)}). \quad (3.3\beta)$$



Σχήμα 3. 2. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του ΗΜ πεδίου στο χώρο 1.



Σχήμα 3. 3. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του ΗΜ πεδίου στο χώρο 2.

Οι βοηθητικές πηγές θεωρούνται ότι τοποθετούνται ομοιόμορφα στις θέσεις $x_n = n\delta$, όπου δ η απόσταση μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών. Ανομοιόμορφες κατανομές των βοηθητικών πηγών δεν αποκλείονται βάσει των φυσικών αρχών της MAS, αν και οποιαδήποτε τέτοια επιλογή οδηγεί σε αύξηση των παραμέτρων προς διερεύνηση για τη μελέτη των χαρακτηριστικών των λύσεων και, ως εκ τούτου, αποφεύγεται.

Οι άγνωστοι συντελεστές $w_n^{(i)}$ των αναπτυγμάτων των σχέσεων (3.1) προσδιορίζονται επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου επί της διαχωριστικής επιφάνειας, οι οποίες εκφράζονται ως εξής

$$E_z^{(1)}(x,0) - E_z^{(2)}(x,0) = 0, \quad (3.4\alpha)$$

$$H_x^{(1)}(x,0) - H_x^{(2)}(x,0) = 0. \quad (3.4\beta)$$

Αντίστοιχη οριακή συνθήκη ισχύει και για την κάθετη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου H_y , η οποία, πάντως, δεν αξιοποιείται, λόγω του γεγονότος ότι η εν λόγω συνιστώσα κάθε

βοηθητικής πηγής είναι μηδενική στην προβολή της θέσης της επί της διαχωριστικής επιφάνειας, όπου οι συνιστώσες E_z και H_x λαμβάνουν τις μέγιστες τιμές τους. Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, οι άγνωστοι συντελεστές βαρύτητας συμμετρικά τοποθετημένων βοηθητικών πηγών θεωρούνται εκ των προτέρων ίσοι μεταξύ τους, δηλαδή $w_{-n}^{(i)} = w_n^{(i)}$. Η επιβολή των οριακών συνθηκών των σχέσεων (3.4) γίνεται ακριβώς στις προβολές των θέσεων των βοηθητικών πηγών επί της διαχωριστικής επιφάνειας κατά μήκος του θετικού ημιάξονα x , δηλαδή στα σημεία $\vec{\rho}_m = x_m \hat{x}$, όπου $x_m = m\delta$, $m = 0, 1, \dots, N$, οπότε προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\sum_{n=-N}^N (e_{n,m}^{(1)} w_n^{(1)} - e_{n,m}^{(2)} w_n^{(2)}) = -e_m^{exc}, m = 0, 1, \dots, N, \quad (3.5\alpha)$$

$$\sum_{n=-N}^N (h_{n,m}^{(1)} w_n^{(1)} - h_{n,m}^{(2)} w_n^{(2)}) = -h_m^{exc}, m = 0, 1, \dots, N, \quad (3.5\beta)$$

όπου

$$e_{n,m}^{(i)} = \hat{z} \cdot \vec{E}_n^{(i)}(\vec{\rho}_m), \quad (3.6\alpha)$$

$$h_{n,m}^{(i)} = \hat{x} \cdot \vec{H}_n^{(i)}(\vec{\rho}_m), \quad (3.6\beta)$$

$$e_m^{exc} = \hat{z} \cdot \vec{E}^{exc}(\vec{\rho}_m), \quad (3.6\gamma)$$

$$h_m^{exc} = \hat{x} \cdot \vec{H}^{exc}(\vec{\rho}_m). \quad (3.6\delta)$$

Αξιοποιώντας τη συμμετρία του προβλήματος, οι εξισώσεις (3.5) μπορούν, ισοδύναμα, να γραφούν ως εξής

$$\sum_{n=0}^N (E_{n,m}^{(1)} w_n^{(1)} - E_{n,m}^{(2)} w_n^{(2)}) = -e_m^{exc}, m = 0, 1, \dots, N, \quad (3.7\alpha)$$

$$\sum_{n=0}^N (H_{n,m}^{(1)} w_n^{(1)} - H_{n,m}^{(2)} w_n^{(2)}) = -h_m^{exc}, m = 0, 1, \dots, N, \quad (3.7\beta)$$

όπου

$$E_{n,m}^{(i)} = (e_{n,m}^{(i)} + e_{-n,m}^{(i)}) \xi_n, \quad (3.8\alpha)$$

$$H_{n,m}^{(i)} = (h_{n,m}^{(i)} + h_{-n,m}^{(i)}) \xi_n, \quad (3.8\beta)$$

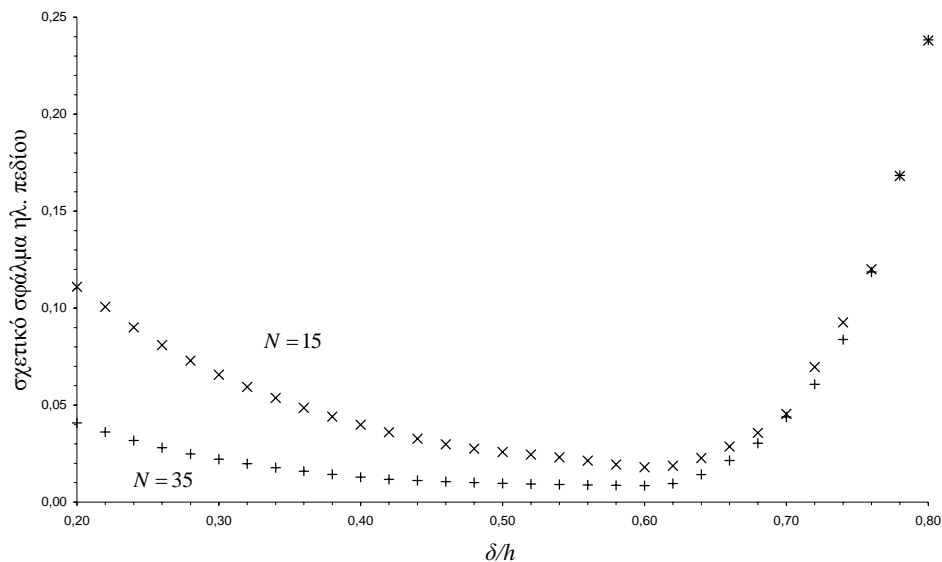
$$\xi_n = \begin{cases} 1, & n \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & n = 0 \end{cases}. \quad (3.8\gamma)$$

Μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος $[2(N+1)] \times [2(N+1)]$ των εξισώσεων (3.7), το ΗΜ πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου προσδιορίζεται άμεσα από τις σχέσεις (3.1)-(3.3).

Λόγω του γεγονότος ότι οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται σε διακριτά σημεία, η συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών E_z και H_x δεν είναι εξασφαλισμένη παντού στη διαχωριστική επιφάνεια. Για την αποτίμηση της ποιότητας των λύσεων, εξετάζονται τα σφάλματα των οριακών συνθηκών των σχέσεων (3.4), μέσω των οποίων αποτιμάται ο βαθμός ικανοποίησης των οριακών συνθηκών. Σημειώνεται ότι ο όρος σφάλμα κάποιας οριακής συνθήκης αναφέρεται στο σχετικό σφάλμα, το οποίο ορίζεται ως ο λόγος του μέτρου της διαφοράς της αντίστοιχης συνιστώσας του ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου εκατέρωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας προς τη μέγιστη τιμή του μέτρου της αντίστοιχης συνιστώσας του πεδίου διέγερσης στη διαχωριστική επιφάνεια. Εκτός των σφαλμάτων των επιβαλλόμενων οριακών συνθηκών, είναι δυνατόν να υπολογιστεί και το σφάλμα της οριακής συνθήκης που αφορά την κάθετη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου H_y , το οποίο παρέχει ένα πρόσθετο κριτήριο ελέγχου της ποιότητας των λύσεων.

3.2.1.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

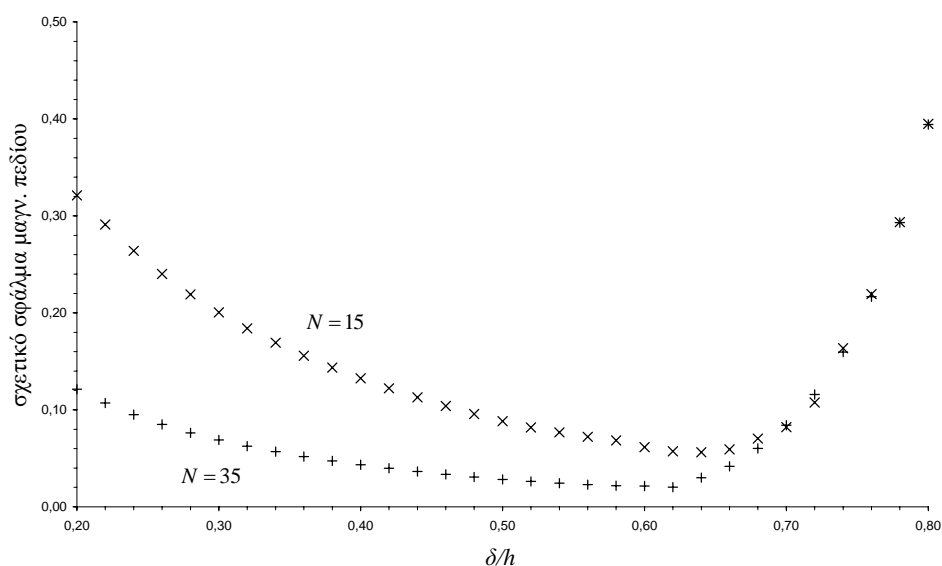
Ακολούθως, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών και την ακρίβεια των λύσεων, καθώς και τη σύνδεση τους με την παράμετρο καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών N και την απόσταση μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών δ . Αξίζει να αναφερθεί ότι είναι αναμενόμενο, λόγω του γεγονότος ότι το πρόβλημα εμπλέκει ημίαιρα χωρία, η συμπεριφορά σύγκλισης και η ακρίβεια των λύσεων να εξαρτώνται ισχυρά από τις παραμέτρους N και δ , αφού σημαντικά σφάλματα μπορεί να εμφανιστούν είτε μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών είτε πέραν των ορίων της περιοχής που αυτά καταλαμβάνουν.



Σχήμα 3. 4. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4a), για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.

Ιδιαίτερη σημασία, τόσο για τη συμπεριφορά σύγκλισης όσο και την ακρίβεια των λύσεων, έχουν οι αποστάσεις d_i μεταξύ των βοηθητικών πηγών και της διαχωριστικής επιφάνειας. Όπως έχει αναφερθεί στην Παράγραφο 2.3.1, οι φυσικές αρχές στις οποίες βασίζεται η MAS επιβάλλουν οι αποστάσεις αυτές να είναι αρκούντως μικρές, ούτως ώστε να μην υπάρχουν ιδιάζοντα σημεία των αναλυτικών επεκτάσεων των άγνωστων HM πεδίων στις

περιοχές μεταξύ των βοηθητικών πηγών και της διαχωριστικής επιφάνειας. Στην προκειμένη περίπτωση, οι βοηθητικές πηγές του πρώτου συνόλου τοποθετούνται σε βάθος που αντιστοιχεί στη θέση του ειδώλου της πρωτεύουσας πηγής, ενώ οι βοηθητικές πηγές του δεύτερου συνόλου τοποθετούνται στις συμμετρικές θέσεις ως προς τη διαχωριστική επιφάνεια, συνεπώς επιλέγεται $d_1 = d_2 = h$. Βεβαίως, η επιλογή αυτή δεν είναι βέλτιστη, δηλαδή δεν οδηγεί στα μικρότερα σφάλματα των οριακών συνθηκών για δεδομένη τιμή του N και κάποια κατάλληλη απόσταση δ . Ωστόσο, επιτρέπει τη διερεύνηση της συμπεριφοράς των λύσεων κατά τρόπο που μπορεί να οδηγήσει σε γενικούς κανόνες για την αντιμετώπιση προβλημάτων που εμπλέκουν ανοικτά χωρία με εφαρμογή της MAS. Άλλες δυνατότητες για την τοποθέτηση των βοηθητικών πηγών θα εξεταστούν στην Παράγραφο 3.4.



Σχήμα 3. 5. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4β), για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.

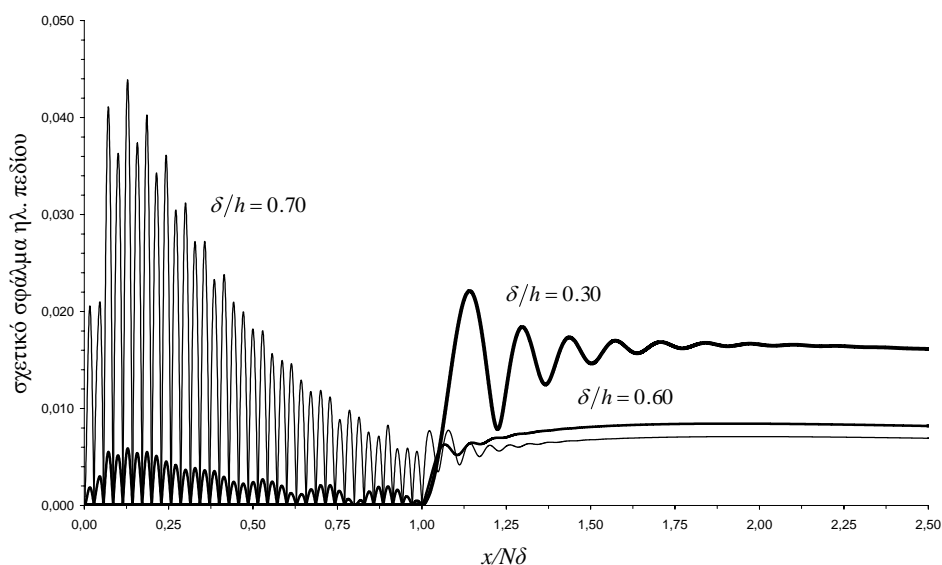
Για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς των λύσεων, εκτελέστηκε μεγάλος αριθμός δοκιμών μεταβάλλοντας την απόσταση δ , για διαφορετικές τιμές του N . Στα Σχήματα 3.4 και 3.5 απεικονίζονται οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, αντίστοιχα, που αντιστοιχούν σε $N = 15$ και $N = 35$, ως προς την παράμετρο δ/h , για την περίπτωση μιας πρωτεύουσας πηγής σε ύψος $h/\lambda = 0.25$ υπεράνω τυπικού λασπώδους εδάφους σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς 15 και ηλεκτρικής αγωγιμότητας 0.012S/m σε συχνότητα 100MHz (μυγαδική σχετική διηλεκτρική σταθερά 15-j2.157). Ξεκινώντας από ιδιαίτερα πυκνές κατανομές των βοηθητικών πηγών και αυξάνοντας την απόσταση δ , οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων μειώνονται, έως ότου προσεγγίσουν τις ελάχιστες τιμές τους. Στη συνέχεια, οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων αυξάνονται με την αύξηση της απόστασης δ . Η συμπεριφορά αυτή παρατηρείται σε ένα μεγάλο εύρος μεταβολής του N και μπορεί να ερμηνευτεί παρατηρώντας τις κατανομές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών επί της διαχωριστικής επιφάνειας. Πιο συγκεκριμένα, για μικρές τιμές της απόστασης δ , τα σφάλματα μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών είναι αμελητέα ($\ll 1\%$), ιδιαίτερα σε σχέση με τα σφάλματα που εμφανίζονται εκτός της περιοχής που αυτά καταλαμβάνουν ($|x| > N\delta$), όπου τα σφάλματα είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερα ($> 1\%$). Με την αύξηση της απόστασης δ , τα σφάλματα μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών αυξάνονται, ενώ τα σφάλματα που εμφανίζονται στην περιοχή με $|x| > N\delta$ μειώνονται, έως ότου τα πρώτα ξεπεράσουν τα δεύτερα.

Περαιτέρω αύξηση της απόστασης δ έχει ως συνέπεια την εμφάνιση σημαντικών σφαλμάτων μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών (>1%), κυρίως πλησίον του ίχνους της πρωτεύουσας πηγής στη διαχωριστική επιφάνεια, τα οποία εξαρτώνται ασθενώς από την τιμή του N , μια και οι διαφορές τους είναι δυσδιάκριτες για $N=15$ και $N=35$. Αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα για τις κατανομές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.6 και 3.7, αντίστοιχα, για $N=35$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου δ/h (0.30, 0.60, 0.70). Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, οι κατανομές των σφαλμάτων παρουσιάζονται μόνο για $x \geq 0$.

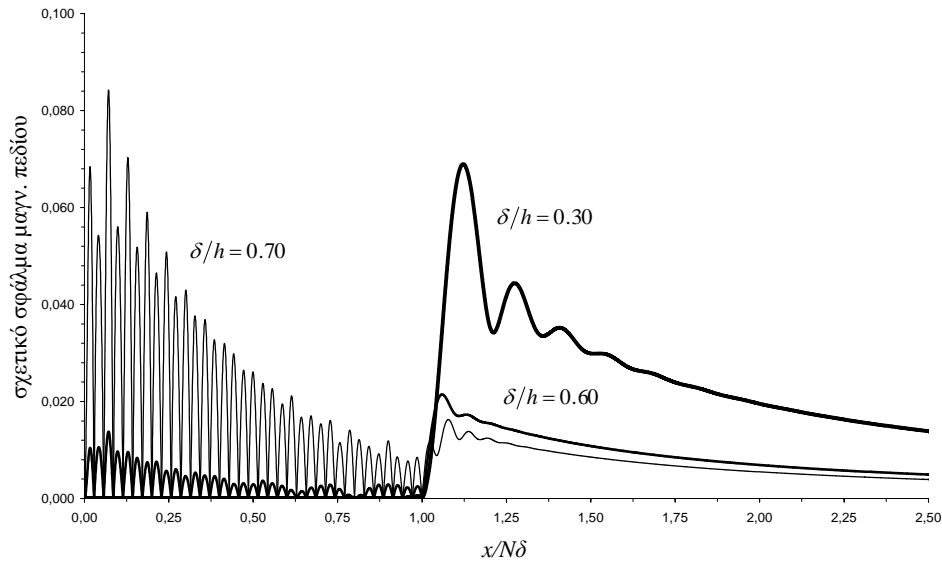
Εκτός από τους προαναφερθέντες ελέγχους που αφορούν το βαθμό ικανοποίησης των επιβαλλόμενων οριακών συνθηκών, μπορεί να ελεγχθεί και η οριακή συνθήκη που αφορά τη συνιστώσα H_y του μαγνητικού πεδίου, η οποία εκφράζεται ως εξής

$$H_y^{(1)}(x,0) - H_y^{(2)}(x,0) = 0. \quad (3.9)$$

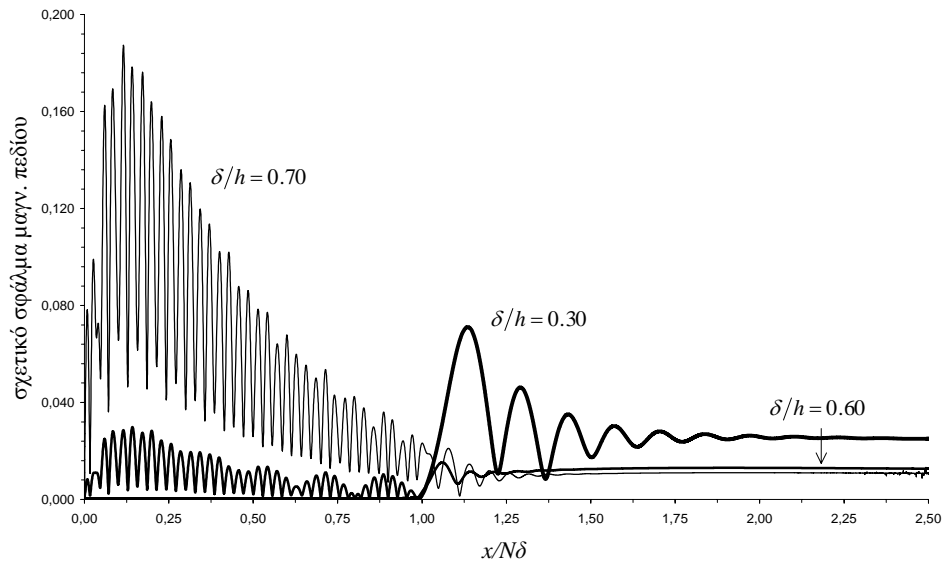
Λόγω του γεγονότος ότι η οριακή συνθήκη της σχέσης (3.9) δεν χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του προβλήματος, αναμένεται τα αντίστοιχα σφάλματα να είναι μη μηδενικά στα σημεία επιβολής των οριακών συνθηκών των σχέσεων (3.4). Οι κατανομές του σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.9), για τις λύσεις που προκύπτουν με τις παραμέτρους που προαναφέρθηκαν, απεικονίζονται στο Σχήμα 3.8. Πράγματι, η σχέση (3.9) δεν ικανοποιείται ακριβώς σε κανένα σημείο επί της διαχωριστικής επιφάνειας, αν και οι τιμές του σφάλματος εμφανίζουν ταλαντώσεις παρόμοιες με αυτές των Σχημάτων 3.6 και 3.7. Επιπρόσθετα, οι τιμές των σφαλμάτων του Σχήματος 3.8 είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με αυτές των Σχημάτων 3.6 και 3.7, γεγονός το οποίο ενισχύει την πεποίθηση ότι οι λύσεις είναι ακριβείς.



Σχήμα 3. 6. Τυπικές κατανομές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4α), για διάφορες τιμές της απόστασης μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών.



Σχήμα 3. 7. Τυπικές κατανομές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4β), για διάφορες τιμές της απόστασης μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών.



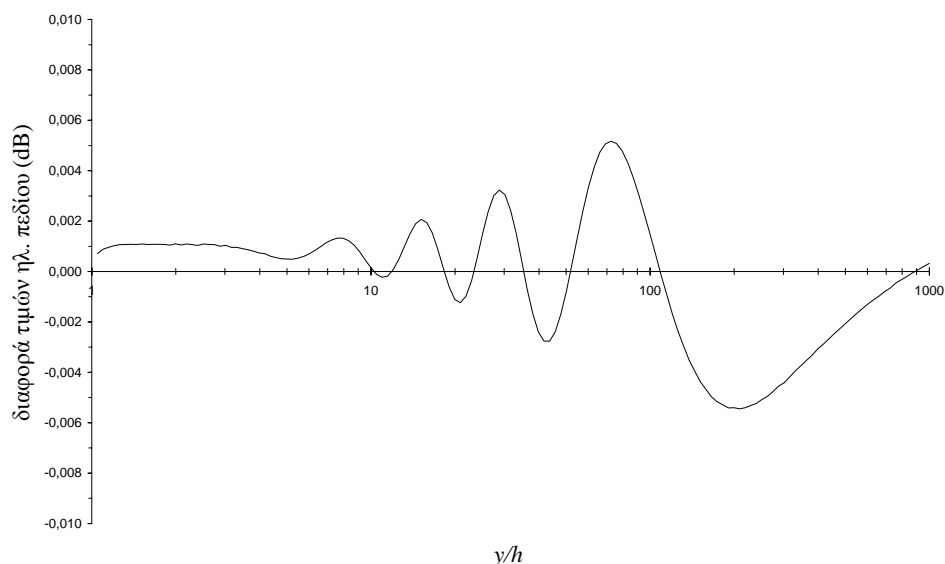
Σχήμα 3. 8. Τυπικές κατανομές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.9), για διάφορες τιμές της απόστασης μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών.

Για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς σύγκλισης των λύσεων, εξετάστηκε η συμπεριφορά των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών αυξανόμενου του N . Σε κάθε περίπτωση, η αύξηση του N , χωρίς τη μεταβολή της απόστασης δ , έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση των σφαλμάτων στην περιοχή με $|x| > N\delta$, όπως άλλωστε αναμένεται, λόγω της μετακίνησης των πιο απομακρυσμένων σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών προς το άπειρο, ενώ τα σφάλματα μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών παραμένουν σχεδόν αναλλοίωτα, λόγω του τοπικού χαρακτήρα των ΗΜ πεδίων των βοηθητικών πηγών.

Ως εκ τούτου, η αύξηση του N συνεπάγεται την ολίσθηση των ελάχιστων σφαλμάτων προς μικρότερες τιμές της απόστασης δ . Η συμπεριφορά αυτή καταδεικνύεται από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1, στον οποίο περιέχονται οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές του N , καθώς και οι αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου δ/h για τις οποίες ελαχιστοποιείται ο γεωμετρικός μέσος των σφαλμάτων. Για κάθε N , η λύση με τα μικρότερα σφάλματα μπορεί να προσδιοριστεί εκτελώντας κάποιες αρχικές δοκιμές γύρω από το αναμενόμενο ελάχιστο και διχοτομώντας τα διαστήματα μεταβολής της παραμέτρου δ/h , έως ότου προσδιοριστεί η λύση που αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή του γεωμετρικού μέσου των σφαλμάτων. Σημειώνεται ότι ο γεωμετρικός μέσος χρησιμοποιείται για την αποτίμηση της ακρίβειας των λύσεων εξαιτίας της σημαντικής διαφοράς στις τιμές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Αντί του γεωμετρικού μέσου των σφαλμάτων, είναι δυνατόν να οριστούν άλλα μέτρα αποτίμησης της ακρίβειας (π.χ. αριθμητικός μέσος, αρμονικός μέσος, μέση τετραγωνική τιμή, κ.α.).

Πίνακας 3. 1. Μέγιστες τιμές των σχετικών σφαλμάτων των οριακών συνθηκών, για τις βέλτιστες λύσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών.

N	δ/h	Μέγιστες Τιμές Σφαλμάτων Οριακών Συνθηκών (%)	
		E_z	H_x
35	0.612	0.806	2.041
40	0.607	0.708	1.646
45	0.600	0.640	1.419
50	0.594	0.584	1.247
55	0.588	0.538	1.111



Σχήμα 3. 9. Απεικόνιση της διαφοράς σε dB μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου της ακριβούς λύσης και της λύσης της MAS κατά μήκος του άξονα y .

Οι έλεγχοι που αφορούν τα σφάλματα των οριακών συνθηκών, σε συνδυασμό και με τις δοκιμές σύγκλισης που περιγράφηκαν παραπάνω, παρέχουν απλώς ενδείξεις για την ακρίβεια των λύσεων. Στην προκειμένη περίπτωση, είναι δυνατή η απευθείας σύγκριση των λύσεων της MAS με την ακριβή λύση του προβλήματος. Σύμφωνα με την τελευταία, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο 1 δίνεται από την αναλυτική σχέση [6]

$$E_z^{(1)}(x, y) = -\frac{jk_1\zeta_1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{u_1} \left(e^{-u_1|y-h|} - \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1} e^{-u_1(y+h)} \right) \cos(\xi x) d\xi, \quad (3.10\alpha)$$

με

$$u_1 = \sqrt{\xi^2 - k_1^2}, \quad (3.10\beta)$$

$$u_2 = \sqrt{\xi^2 - k_2^2}, \quad (3.10\gamma)$$

όπου $k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ ο κυματικός αριθμός στο χώρο 1 και $k_2 = k_1\sqrt{\epsilon_r - j\sigma/\omega\epsilon_0}$ ο κυματικός αριθμός στο χώρο 2, ενώ με $\zeta_1 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ συμβολίζεται η κυματική αντίσταση στο χώρο 1. Η διαφορά σε dB μεταξύ της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου της ακριβούς αναλυτικής λύσης και της λύσης της MAS, που αντιστοιχεί σε $N = 35$ και $\delta/h = 0.60$, απεικονίζεται κατά μήκος του άξονα y (σε σημεία με $x = 0$) στο Σχήμα 3.9. Είναι αξιοσημείωτο ότι η διαφορά μεταξύ της ακριβούς λύσης και της λύσης της MAS είναι μικρότερη από 0.01dB για $y > h$ και 0.02dB για $0 < y < h$, που αντιστοιχεί σε διαφορά τιμών πολύ μικρότερη του 1%. Αυτός ο έλεγχος πιστοποιεί την ακρίβεια της λύσης της MAS, όπως και ότι τα σφάλματα του ηλεκτρικού πεδίου είναι μικρότερα από τα σφάλματα της αντίστοιχης οριακής συνθήκης.

3.2.2 Κατακόρυφο Ηλεκτρικό Δίπολο

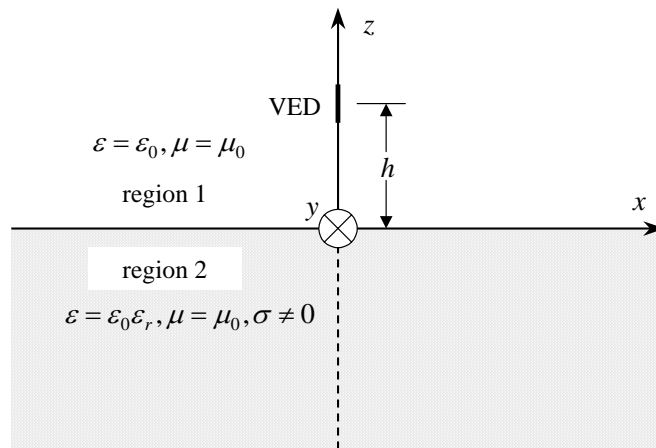
3.2.2.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος τριών διαστάσεων συνίσταται σε ένα βραχύ κατακόρυφο ηλεκτρικό δίπολο (Vertical Electric Dipole-VED), το οποίο βρίσκεται στο κενό (χώρος 1) σε ύψος h υπεράνω ημιάπειρου ομοιογενούς διηλεκτρικού χώρου (χώρος 2) διηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ_r, ϵ_0 , μαγνητικής διαπερατότητας μ_0 και αγωγιμότητας σ , όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 3.10. Αναλυτικές εκφράσεις για το παραγόμενο HM πεδίο στον ελεύθερο χώρο υπάρχουν στο Παράρτημα Β. Λόγω της παρουσίας του χώρου 2, το HM πεδίο στο χώρο 1 διαφοροποιείται σε σχέση με αυτό που ακτινοβολεί το δίπολο στον ελεύθερο χώρο, ενώ εμφανίζεται και ένα HM πεδίο εντός του χώρου 2. Στην περίπτωση που ο χώρος 2 χαρακτηρίζεται από άπειρη αγωγιμότητα, το HM πεδίο εντός αυτού είναι μηδενικό και το HM πεδίο στο χώρο 1 προκύπτει με εφαρμογή της θεωρίας ειδώλων. Για τον προσδιορισμό των άγνωστων HM πεδίων που αναπτύσσονται στους χώρους 1 και 2, εφαρμόζεται η MAS, όπως περιγράφεται ακολούθως.

3.2.2.2 Εφαρμογή της MAS

Σύμφωνα με τις βασικές αρχές της MAS, το άγνωστο HM πεδίο σε κάθε περιοχή του προβλήματος εκφράζεται ως υπέρθεση των HM πεδίων που παράγονται από ένα σύνολο βοηθητικών πηγών, που είναι τοποθετημένες εκτός των ορίων της αντίστοιχης περιοχής. Για την περίπτωση του Σχήματος 3.10, απαιτούνται δύο σύνολα βοηθητικών πηγών για την

περιγραφή των άγνωστων HM πεδίων στους χώρους 1 και 2. Οι βοηθητικές πηγές του πρώτου συνόλου, οι οποίες κείνται κάτωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας, ακτινοβολούν εντός άπειρου χώρου με τα χαρακτηριστικά του χώρου 1, ενώ οι βοηθητικές πηγές του δεύτερου συνόλου, οι οποίες κείνται άνωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας, ακτινοβολούν εντός άπειρου χώρου με τα χαρακτηριστικά του χώρου 2, όπως απεικονίζεται στα Σχήματα 3.11 και 3.12. Εξαιτίας της κατακόρυφης πόλωσης του διπόλου, ως βοηθητικές πηγές χρησιμοποιούνται στοιχειώδη ηλεκτρικά δίπολα με άξονες παράλληλους προς τον άξονα z . Οι βοηθητικές πηγές του πρώτου συνόλου τοποθετούνται επί του επιπέδου $z_1 = -d_1$, ενώ οι βοηθητικές πηγές του δεύτερου συνόλου τοποθετούνται επί του επιπέδου $z_2 = d_2$. Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας του προβλήματος, οι βοηθητικές πηγές κατανέμονται σε $N+1$ ομόκεντρους δακτυλίους με κέντρα επί του άξονα z , καθένας από τους οποίους αποτελείται από N_n βοηθητικές πηγές. Οι βοηθητικές πηγές επί του άξονα z θεωρούνται ότι ανήκουν σε εκφυλισμένους δακτυλίους μηδενικής ακτίνας. Οι κατανομές των βοηθητικών πηγών απεικονίζονται στα Σχήματα 3.11 και 3.12. Για την απλοποίηση του μαθηματικού φορμαλισμού και τη μείωση των παραμέτρων που σχετίζονται με την εφαρμογή της MAS, επιλέγεται ίσο πλήθος δακτυλίων που συνιστούν καθένα από τα δύο σύνολα βοηθητικών πηγών και ίσο πλήθος βοηθητικών πηγών στους αντίστοιχους δακτυλίους των δύο συνόλων. Το HM πεδίο στο χώρο 1 περιγράφεται ως άθροισμα του HM πεδίου του διπόλου στον ελεύθερο χώρο και ενός γραμμικού συνδυασμού των HM πεδίων των βοηθητικών πηγών του πρώτου συνόλου, ενώ το HM πεδίο στο χώρο 2 περιγράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των HM πεδίων των βοηθητικών πηγών του δεύτερου συνόλου.



Σχήμα 3. 10. Γεωμετρία κατακόρυφου ηλεκτρικού διπόλου που ακτινοβολεί υπεράνω ημιάπειρου ομοιογενούς διηλεκτρικού χώρου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα άγνωστα HM πεδία στους χώρους 1 και 2 δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{F}^{(1)}(\vec{r}) = \vec{F}^{exc}(\vec{r}) + \sum_{n=0}^N \sum_{s=1}^{N_n} w_{(n,s)}^{(1)} \vec{F}_{(n,s)}^{(1)}(\vec{r}), \quad (3.11\alpha)$$

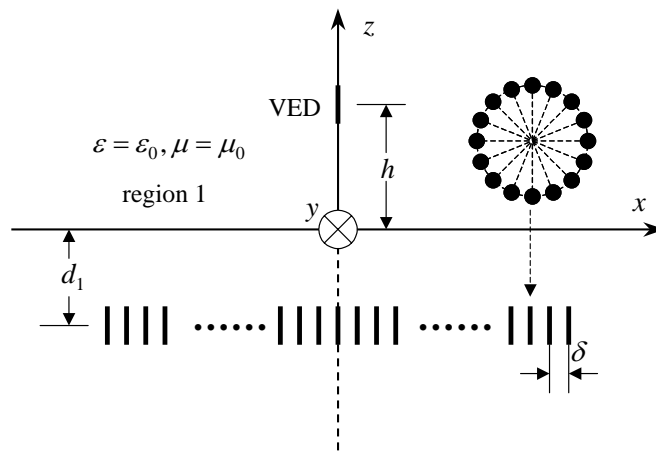
$$\vec{F}^{(2)}(\vec{r}) = \sum_{n=0}^N \sum_{s=1}^{N_n} w_{(n,s)}^{(2)} \vec{F}_{(n,s)}^{(2)}(\vec{r}), \quad (3.11\beta)$$

όπου $\vec{F}^{(i)}$ είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου στο χώρο i , \vec{F}^{exc} είναι το αντίστοιχο πεδίο διέγερσης του διπόλου στη θέση $\vec{r}_h = h\hat{z}$, ενώ $\vec{F}_{(n,s)}^{(i)}$ είναι το

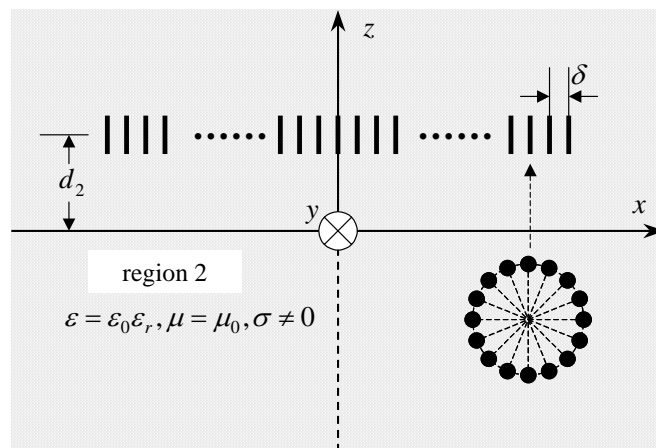
αντίστοιχο πεδίο της βοηθητικής πηγής του συνόλου i που καθορίζει το ζεύγος δεικτών (n, s) και είναι τοποθετημένη στο σημείο $(\rho_n, \phi_{(n,s)}, z_i)$ με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(n,s)}^{(i)}$, όπου ρ_n η ακτίνα του δακτυλίου βοηθητικών πηγών που δηλώνει ο δείκτης n και $\phi_{(n,s)}$ η γωνιακή θέση της βοηθητικής πηγής που καθορίζει το ζεύγος δεικτών (n, s) . Τα πεδία που υπεισέρχονται στις σχέσεις (3.11) προσδιορίζονται με απλή μεταφορά του πεδίου \vec{F}_i ενός στοιχειώδους ηλεκτρικού διπόλου, που είναι τοποθετημένο στο κέντρο ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτινοβολεί σε άπειρο χώρο με τα χαρακτηριστικά του χώρου i , ως εξής

$$\vec{F}^{exc}(\vec{r}) = \vec{F}_1(\vec{r} - \vec{r}_h), \quad (3.12\alpha)$$

$$\vec{F}_{(n,s)}^{(i)}(\vec{r}) = \vec{F}_i(\vec{r} - \vec{r}_{(n,s)}^{(i)}). \quad (3.12\beta)$$



Σχήμα 3. 11. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του HM πεδίου στο χώρο 1.



Σχήμα 3. 12. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του HM πεδίου στο χώρο 2.

Αξιοποιώντας τις σχέσεις (B.7) του Παραρτήματος Β, οι προηγούμενες σχέσεις εκφράζονται ως εξής

$$\vec{F}^{exc}(\vec{r}) = \vec{F}_1(\vec{r}; \vec{r}_h), \quad (3.13\alpha)$$

$$\vec{F}_{(n,s)}^{(i)}(\vec{r}) = \vec{F}_i(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)}^{(i)}). \quad (3.13\beta)$$

Ακολουθως, η κατανομή των δακτυλίων βοηθητικών πηγών θεωρείται ομοιόμορφη, συνεπώς οι ακτίνες τους εκφράζονται ως $\rho_n = n\delta$, όπου δ η απόσταση μεταξύ διαδοχικών δακτυλίων. Ο αριθμός των βοηθητικών πηγών ανά δακτύλιο επιλέγεται ανάλογος της περιμέτρου του και ίσος με $N_n = 8n$ για $n > 1$, ενώ $N_0 = 1$. Επιπρόσθετα, οι βοηθητικές πηγές κατανέμονται ομοιόμορφα επί των δακτυλίων, συνεπώς οι γωνιακές θέσεις τους εκφράζονται ως $\phi_{(n,s)} = 2\pi(s-1)/N_n$. Ανομοιόμορφες κατανομές των δακτυλίων βοηθητικών πηγών δεν αποκλείονται βάσει των φυσικών αρχών της MAS, αν και οποιαδήποτε τέτοια επιλογή οδηγεί σε αύξηση των παραμέτρων προς διερεύνηση για τη μελέτη των χαρακτηριστικών των λύσεων. Για το λόγο αυτό, όπως και στην περίπτωση της Παραγράφου 3.2.1, ανομοιόμορφες κατανομές δεν εξετάζονται.

Οι άγνωστοι συντελεστές $w_{(n,s)}^{(i)}$ των αναπτυγμάτων των σχέσεων (3.11) προσδιορίζονται επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου επί της διαχωριστικής επιφάνειας, οι οποίες εκφράζονται ως εξής

$$E_{\rho}^{(1)}(\rho, \phi, 0) - E_{\rho}^{(2)}(\rho, \phi, 0) = 0, \quad (3.14\alpha)$$

$$H_{\phi}^{(1)}(\rho, \phi, 0) - H_{\phi}^{(2)}(\rho, \phi, 0) = 0. \quad (3.14\beta)$$

Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, οι άγνωστοι συντελεστές βαρύτητας των βοηθητικών πηγών κάθε δακτυλίου θεωρούνται εκ των προτέρων ίσοι μεταξύ τους, συνεπώς $w_{(n,s)}^{(i)} = w_n^{(i)}$. Για τον ίδιο λόγο, η επιβολή των οριακών συνθηκών των σχέσεων (3.14) μπορεί να γίνει σε διακριτά σημεία κατά μήκος του άξονα x . Επειδή το ΗΜ πεδίο ενός διπόλου μηδενίζεται επί του άξονα του, οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται στα σημεία \vec{r}_m που κείνται μεταξύ των προβολών των δακτυλίων βοηθητικών πηγών επί της διαχωριστικής επιφάνειας. Οι θέσεις των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών εκφράζονται ως $(x'_m, 0, 0)$, όπου $x'_m = m\delta + \delta/2$, $m = 0, 1, \dots, N$. Η διαδικασία επιβολής των οριακών συνθηκών των σχέσεων (3.14) σε διακριτά σημεία οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\sum_{n=0}^N \sum_{s=1}^{N_n} (e_{(n,s),m}^{(1)} w_n^{(1)} - e_{(n,s),m}^{(2)} w_n^{(2)}) = -e_m^{exc}, m = 0, 1, \dots, N, \quad (3.15\alpha)$$

$$\sum_{n=0}^N \sum_{s=1}^{N_n} (h_{(n,s),m}^{(1)} w_n^{(1)} - h_{(n,s),m}^{(2)} w_n^{(2)}) = -h_m^{exc}, m = 0, 1, \dots, N, \quad (3.15\beta)$$

όπου

$$e_{(n,s),m}^{(i)} = \hat{\rho} \cdot \vec{E}_{(n,s)}^{(i)}(\vec{r}_m), \quad (3.16\alpha)$$

$$h_{(n,s),m}^{(i)} = \hat{\phi} \cdot \vec{H}_{(n,s)}^{(i)}(\vec{r}_m), \quad (3.16\beta)$$

$$e_m^{exc} = \hat{\rho} \cdot \vec{E}^{exc}(\vec{r}_m), \quad (3.16\gamma)$$

$$h_m^{exc} = \hat{\phi} \cdot \vec{H}^{exc}(\vec{r}_m). \quad (3.16\delta)$$

Αξιοποιώντας τη συμμετρία του προβλήματος, οι εξισώσεις (3.15) μπορούν, ισοδύναμα, να γραφούν ως εξής

$$\sum_{n=0}^N (E_{n,m}^{(1)} w_n^{(1)} - E_{n,m}^{(2)} w_n^{(2)}) = -e_m^{exc}, m = 0, 1, \dots, N, \quad (3.17\alpha)$$

$$\sum_{n=0}^N (H_{n,m}^{(1)} w_n^{(1)} - H_{n,m}^{(2)} w_n^{(2)}) = -h_m^{exc}, m = 0, 1, \dots, N, \quad (3.17\beta)$$

όπου

$$E_{n,m}^{(i)} = \sum_{s=1}^{N_n} e_{(n,s),m}^{(i)}, \quad (3.18\alpha)$$

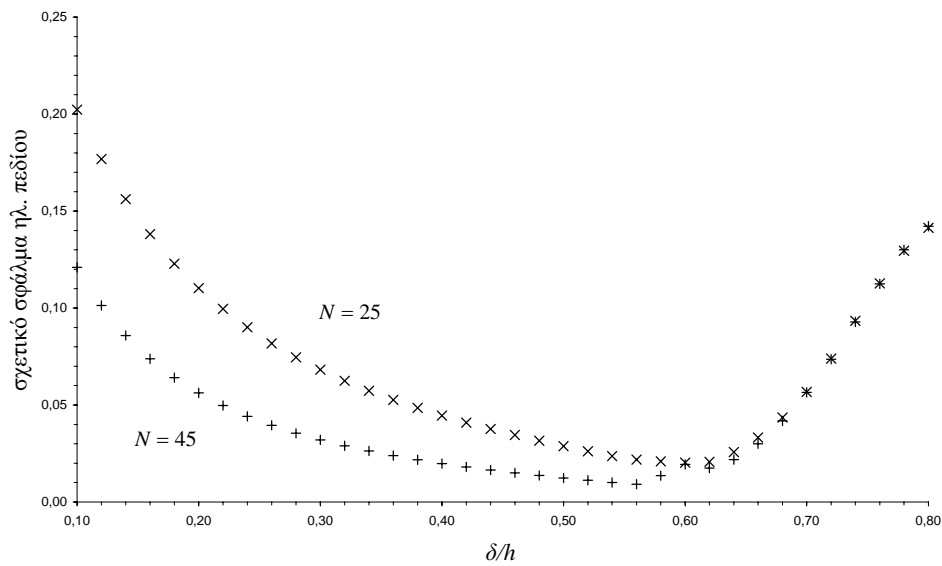
$$H_{n,m}^{(i)} = \sum_{s=1}^{N_n} h_{(n,s),m}^{(i)}. \quad (3.18\beta)$$

Μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος $[2(N+1)] \times [2(N+1)]$ των εξισώσεων (3.17), το HM πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου προσδιορίζεται άμεσα από τις σχέσεις (3.11)-(3.13).

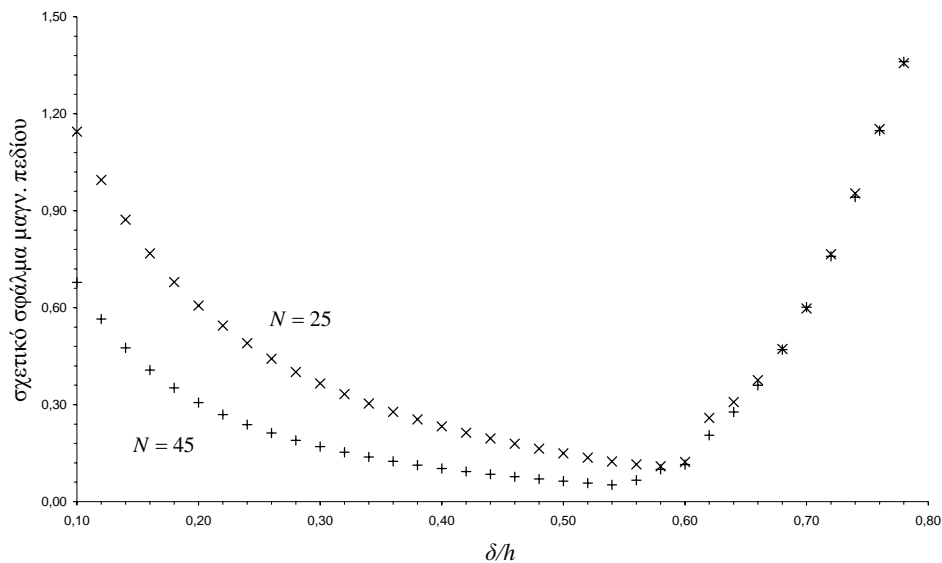
Λόγω του γεγονότος ότι οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται σε διακριτά σημεία, η συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών E_ρ και H_ϕ δεν είναι εξασφαλισμένη παντού στη διαχωριστική επιφάνεια. Για την αποτίμηση της ποιότητας των λύσεων, εξετάζονται τα σφάλματα των οριακών συνθηκών των σχέσεων (3.14), μέσω των οποίων αποτιμάται ο βαθμός ικανοποίησης των οριακών συνθηκών. Σημειώνεται ότι ο όρος σφάλμα κάποιας οριακής συνθήκης αναφέρεται στο σχετικό σφάλμα, το οποίο ορίζεται ως ο λόγος του μέτρου της διαφοράς της αντίστοιχης συνιστώσας του ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου εκατέρωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας προς τη μέγιστη τιμή του μέτρου της αντίστοιχης συνιστώσας του πεδίου διέγερσης στη διαχωριστική επιφάνεια. Εκτός των σφαλμάτων των επιβαλλόμενων οριακών συνθηκών, είναι δυνατόν να υπολογιστεί και το σφάλμα της οριακής συνθήκης που αφορά την κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου E_z , το οποίο παρέχει ένα πρόσθετο κριτήριο ελέγχου της ποιότητας των λύσεων. Στη μελέτη της Παραγράφου 3.2.1, ο έλεγχος της οριακής συνθήκης που δεν επιβλήθηκε έδειξε ότι τα αντίστοιχα σφάλματα είναι μεγαλύτερα, αλλά, πάντως, της ίδιας τάξης μεγέθους, σε σχέση με τα σφάλματα των επιβαλλόμενων οριακών συνθηκών. Για το λόγο αυτό, το σφάλμα της οριακής συνθήκης που αφορά τη συνιστώσα E_z του ηλεκτρικού πεδίου δεν θα παρουσιαστεί εδώ.

3.2.2.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Ακολούθως, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών και την ακρίβεια των λύσεων, καθώς και τη σύνδεση τους με την παράμετρο καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών N και την απόσταση μεταξύ διαδοχικών δακτυλίων βοηθητικών πηγών δ . Όπως και στην περίπτωση της Παραγράφου 3.2.1, είναι αναμενόμενο, λόγω του γεγονότος ότι το πρόβλημα εμπλέκει ημίαιρα χωρία, η συμπεριφορά σύγκλισης και η ακρίβεια των λύσεων να εξαρτώνται ισχυρά από τις παραμέτρους N και δ , αφού σημαντικά σφάλματα μπορεί να εμφανιστούν είτε μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών είτε πέραν των ορίων της περιοχής που αυτά καταλαμβάνουν.



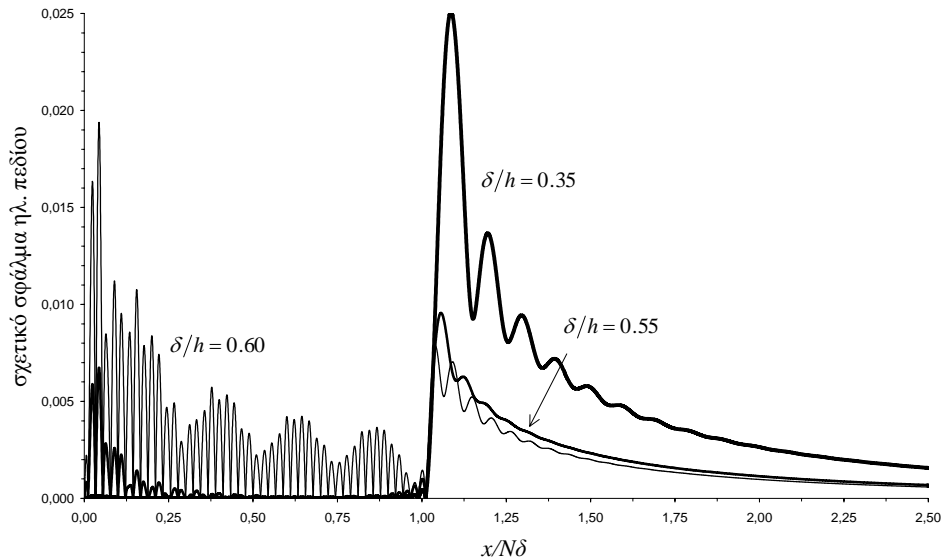
Σχήμα 3. 13. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14α) κατά μήκος του άξονα x , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.



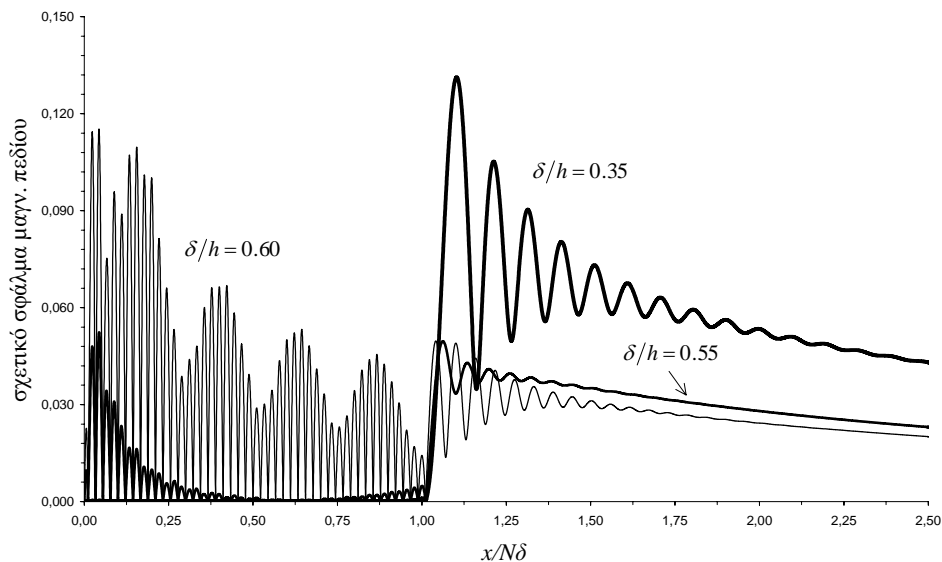
Σχήμα 3. 14. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14β) κατά μήκος του άξονα x , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.

Ιδιαίτερη σημασία, τόσο για τη συμπεριφορά σύγκλισης όσο και την ακρίβεια των λύσεων, έχουν οι αποστάσεις d_i μεταξύ των βοηθητικών πηγών και της διαχωριστικής επιφάνειας. Όπως έχει αναφερθεί στην Παράγραφο 2.3.1, οι φυσικές αρχές στις οποίες βασίζεται η MAS επιβάλλουν οι αποστάσεις αυτές να είναι αρκούντως μικρές, ούτως ώστε να μην υπάρχουν ιδιάζοντα σημεία των αναλυτικών επεκτάσεων των άγνωστων ΗΜ πεδίων στις περιοχές μεταξύ των βοηθητικών πηγών και της διαχωριστικής επιφάνειας. Εδώ, όπως και

στην περίπτωση της Παραγράφου 3.2.1, οι βοηθητικές πηγές του πρώτου συνόλου τοποθετούνται σε βάθος που αντιστοιχεί στη θέση του ειδώλου του διπόλου, ενώ οι βοηθητικές πηγές του δεύτερου συνόλου τοποθετούνται στις συμμετρικές θέσεις ως προς τη διαχωριστική επιφάνεια, συνεπώς επιλέγεται $d_1 = d_2 = h$.

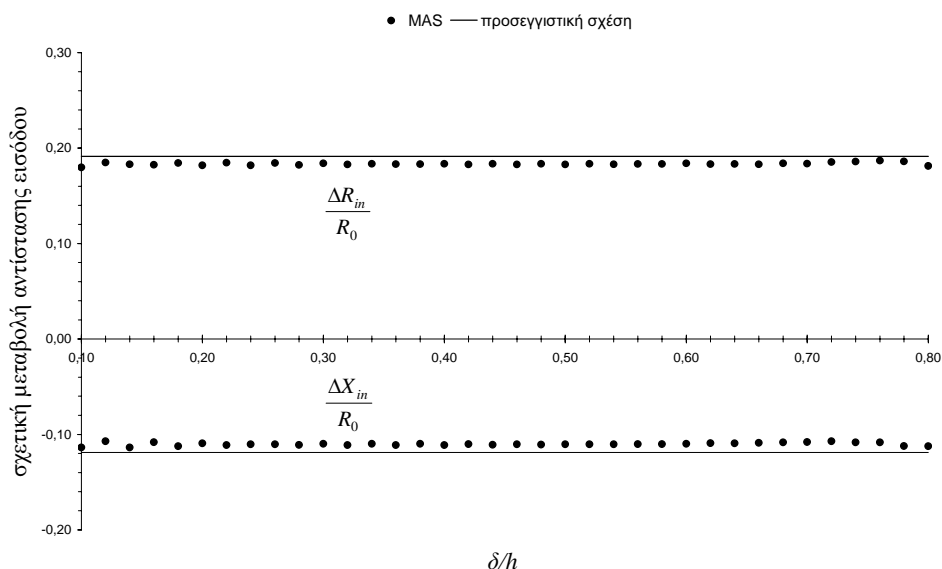


Σχήμα 3. 15. Τυπικές κατανομές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14α) κατά μήκος του άξονα x , για διάφορες τιμές της απόστασης μεταξύ διαδοχικών δακτυλίων βοηθητικών πηγών .



Σχήμα 3. 16. Τυπικές κατανομές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14β) κατά μήκος του άξονα x , για διάφορες τιμές της απόστασης μεταξύ διαδοχικών δακτυλίων βοηθητικών πηγών .

Για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς των λύσεων, εκτελέστηκε μεγάλος αριθμός δοκιμών μεταβάλλοντας την απόσταση δ , για διαφορετικές τιμές του N . Στα Σχήματα 3.13 και 3.14 απεικονίζονται οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, αντίστοιχα, που αντιστοιχούν σε $N = 25$ και $N = 45$, ως προς την παράμετρο δ/h , για την περίπτωση ενός διπόλου σε ύψος $h/\lambda = 0.25$ υπεράνω τυπικού εδάφους σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς 13 και ηλεκτρικής αγωγιμότητας 0.005S/m σε συχνότητα 100MHz (μιαδική σχετική διηλεκτρική σταθερά $13-j0.899$). Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων υπολογίστηκαν επί του άξονα x . Ξεκινώντας από ιδιαίτερα πυκνές κατανομές των δακτυλίων βοηθητικών πηγών και αυξάνοντας την απόσταση δ , οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων μειώνονται, έως ότου προσεγγίσουν τις ελάχιστες τιμές τους. Στη συνέχεια, οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων αυξάνονται με την αύξηση της απόστασης δ . Η συμπεριφορά αυτή παρατηρείται σε ένα μεγάλο εύρος μεταβολής του N και μπορεί να ερμηνευτεί παρατηρώντας τις κατανομές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών επί της διαχωριστικής επιφάνειας. Πιο συγκεκριμένα, για μικρές τιμές της απόστασης δ , τα σφάλματα μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών είναι αμελητέα ($\ll 1\%$), ιδιαίτερα σε σχέση με τα σφάλματα που εμφανίζονται εκτός της περιοχής που αυτά καταλαμβάνουν ($\rho > N\delta + \delta/2$), όπου τα σφάλματα είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερα ($> 1\%$). Με την αύξηση της απόστασης δ , τα σφάλματα μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών αυξάνονται, ενώ τα σφάλματα που εμφανίζονται στην περιοχή με $\rho > N\delta + \delta/2$ μειώνονται, έως ότου τα πρώτα ξεπεράσουν τα δεύτερα. Περαιτέρω αύξηση της απόστασης δ έχει ως συνέπεια την εμφάνιση σημαντικών σφαλμάτων μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών ($> 1\%$), κυρίως πλησίον του ίχνους του διπόλου στη διαχωριστική επιφάνεια, τα οποία εξαρτώνται ασθενώς από την τιμή του N , μια και οι διαφορές τους είναι δυσδιάκριτες για $N = 25$ και $N = 45$. Αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα για τις κατανομές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος του άξονα x παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.15 και 3.16, αντίστοιχα, για $N = 45$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου δ/h (0.35, 0.55, 0.60). Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, οι κατανομές των σφαλμάτων παρουσιάζονται μόνο για $x \geq 0$.



Σχήμα 3. 17. Διάγραμμα της σχετικής μεταβολής της σύνθετης αντίστασης εισόδου συναρτήσει της απόστασης μεταξύ διαδοχικών δακτυλίων βοηθητικών πηγών.

Η μεταβολή της σύνθετης αντίστασης εισόδου του διπόλου ως προς την τιμή της στον ελεύθερο χώρο υπολογίζεται ως υπέρθεση των αμοιβαίων σύνθετων αντιστάσεων μεταξύ του διπόλου και των βοηθητικών πηγών του πρώτου συνόλου, σύμφωνα με τη σχέση

$$\Delta Z_{in} = - \sum_{n=0}^N \sum_{s=1}^{N_n} w_n^{(1)} \left[\hat{z} \cdot \vec{E}_{(n,s)}^{(1)}(\vec{r}_h) \right]. \quad (3.19)$$

Οι τιμές του λόγου $\Delta Z_{in}/R_0$, όπου R_0 είναι η αντίσταση ακτινοβολίας στον ελεύθερο χώρο, που προκύπτουν με $N = 45$, απεικονίζονται συναρτήσει της παραμέτρου δ/h στο Σχήμα 3.17. Είναι καταφανές ότι η σύνθετη αντίσταση εισόδου είναι αξιοσημείωτα σταθερή επί ενός μεγάλου εύρους μεταβολής της απόστασης δ , παρά το γεγονός ότι οι αντίστοιχες μέγιστες τιμές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών εμφανίζουν πολύ σημαντικές μεταβολές, όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.13 και 3.14. Οι στάθμες αναφοράς στο Σχήμα 3.17, που αφορούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του λόγου $\Delta Z_{in}/R_0$, έχουν υπολογιστεί από την προσεγγιστική σχέση [5]

$$\frac{\Delta Z_{in}}{R_0} \approx \frac{3j \exp(-j2k_1 h) n_2 - 1}{(2k_1 h)^3 n_2 + 1} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{4}{n_2} \\ + j \left[2k_1 h + \frac{3}{k_1 h n_2} \left(1 - \frac{2n_2 - 3}{n_2^2} \right) \right] \end{array} \right\}, \quad (3.20)$$

όπου $n_2 = k_2/k_1$. Οι μικρές διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων της MAS και των σταθμών αναφοράς του Σχήματος 3.17 αποδίδονται στο γεγονός ότι η σχέση (3.20) είναι προσεγγιστική, καθώς εξάγει σχετικά ακριβή αποτελέσματα υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει η συνθήκη $|2k_1 n_2 h| \gg 1$.

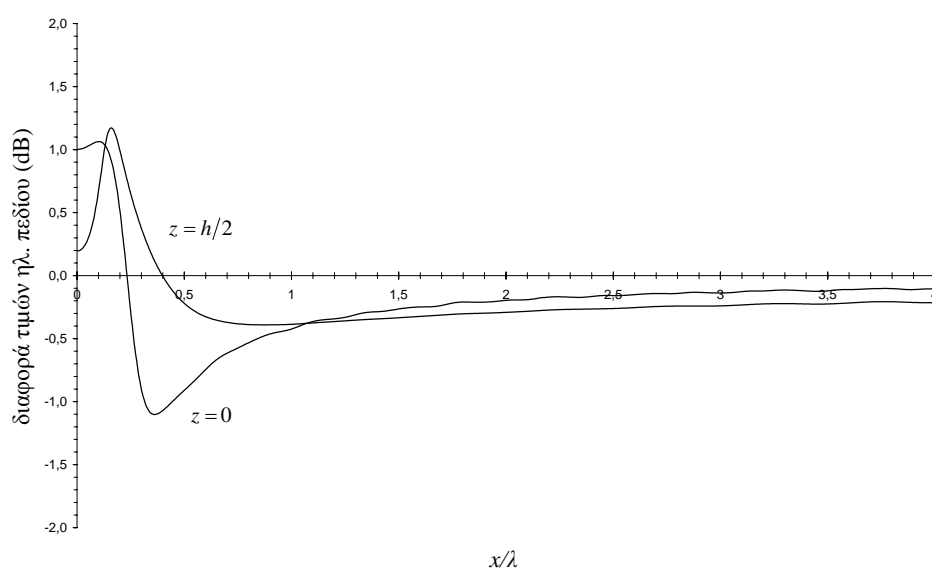
Πίνακας 3. 2. Μέγιστες τιμές των σχετικών σφαλμάτων των οριακών συνθηκών και σχετική μεταβολή της σύνθετης αντίστασης εισόδου, για τις βέλτιστες λύσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών.

N	δ/h	Μέγιστες Τιμές Σφαλμάτων Οριακών Συνθηκών (%)		$\Delta R_{in}/R_0$	$\Delta X_{in}/R_0$
		E_ρ	H_ϕ		
45	0.548	0.966	5.006	0.1831	-0.1102
50	0.542	0.845	4.363	0.1833	-0.1103
55	0.536	0.749	3.856	0.1834	-0.1105
60	0.532	0.665	3.442	0.1832	-0.1106
65	0.527	0.599	3.073	0.1831	-0.1105

Για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς σύγκλισης των λύσεων, εξετάστηκε η συμπεριφορά των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών αυξανόμενου του N . Σε κάθε περίπτωση, η αύξηση του N , χωρίς τη μεταβολή της απόστασης δ , έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση των σφαλμάτων στην περιοχή με $\rho > N\delta + \delta/2$, όπως άλλωστε αναμένεται, λόγω της μετακίνησης των πιο απομακρυσμένων σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών προς το άπειρο, ενώ τα σφάλματα μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών παραμένουν σχεδόν αναλλοίωτα, λόγω του τοπικού χαρακτήρα των ΗΜ πεδίων των βοηθητικών πηγών. Ως εκ τούτου, η αύξηση του N συνεπάγεται την ολίσθηση των ελάχιστων σφαλμάτων προς μικρότερες τιμές της απόστασης δ . Η συμπεριφορά αυτή

καταδεικνύεται από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.2, στον οποίο περιέχονται οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές του N , καθώς και οι αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου δ/h για τις οποίες ελαχιστοποιείται ο γεωμετρικός μέσος των σφαλμάτων. Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.2, είναι προφανές ότι οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων παρουσιάζουν προοδευτική μείωση με την αύξηση του N , ενώ η σύνθετη αντίσταση εισόδου παραμένει σταθερή. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την αναισθησία των τιμών της σύνθετης αντίστασης εισόδου ως προς τη μεταβολή της απόστασης δ , ενισχύει την πεποίθηση ότι οι λύσεις είναι ακριβείς.

Τέλος, εκτός από τις δοκιμές σύγκλισης και τον έλεγχο της σύνθετης αντίστασης εισόδου, είναι δυνατή και η απευθείας σύγκριση των λύσεων της MAS με διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις. Προσεγγιστικές αναλυτικές εκφράσεις για το πλήρες HM πεδίο στο χώρο 1, οι οποίες ισχύουν όταν $|k_2| \geq 3k_1$ και το σημείο παρατήρησης δεν βρίσκεται πολύ κοντά στον άξονα του διπόλου, είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία (βλ. Κεφάλαιο 8 στη σχετική αναφορά [24]). Η διαφορά σε dB μεταξύ της συνιστώσας E_z του ηλεκτρικού πεδίου της προσεγγιστικής αναλυτικής λύσης και της λύσης της MAS, που αντιστοιχεί σε $N = 45$ και $\delta/h = 0.55$, απεικονίζεται συναρτήσει της παραμέτρου x/λ στο Σχήμα 3.18. Τα αποτελέσματα του Σχήματος 3.18 αντιστοιχούν σε $z = 0$ και $z = h/2$. Σημειώνεται ότι η διαφορά είναι περίπου ίση με 0.5dB, εξαιρουμένης της περιοχής πολύ κοντά στον άξονα του διπόλου, λόγω του προσεγγιστικού χαρακτήρα της λύσης αναφοράς.



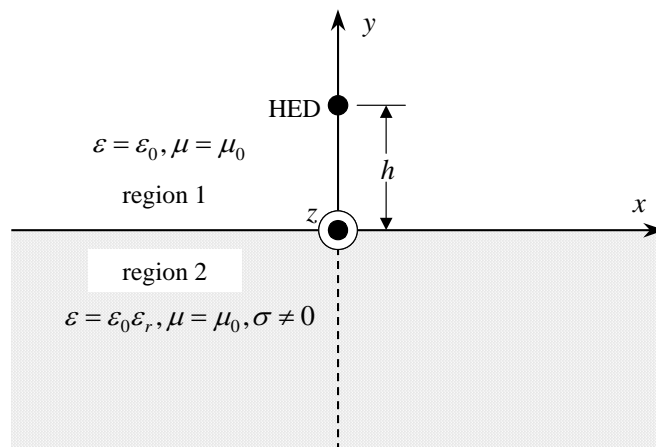
Σχήμα 3.18. Απεικόνιση της διαφοράς σε dB μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου της προσεγγιστικής αναλυτικής λύσης και της λύσης της MAS, ως συνάρτηση της απόστασης από τον άξονα του διπόλου κατά μήκος του άξονα x .

3.2.3 Οριζόντιο Ηλεκτρικό Δίπολο

3.2.3.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος τριών διαστάσεων συνίσταται σε ένα βραχύ οριζόντιο ηλεκτρικό δίπολο (Horizontal Electric Dipole-HED), το οποίο βρίσκεται στο κενό (χώρος 1) σε ύψος h υπεράνω ημιάπειρου ομοιογενούς διηλεκτρικού χώρου (χώρος 2)

διηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ_r, ϵ_0 , μαγνητικής διαπερατότητας μ_0 και αγωγιμότητας σ , όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 3.19. Αναλυτικές εκφράσεις για το παραγόμενο HM πεδίο στον ελεύθερο χώρο υπάρχουν στο Παράρτημα Β. Λόγω της παρουσίας του χώρου 2, το HM πεδίο στο χώρο 1 διαφοροποιείται σε σχέση με αυτό που ακτινοβολεί το δίπολο στον ελεύθερο χώρο, ενώ εμφανίζεται και ένα HM πεδίο εντός του χώρου 2. Στην περίπτωση που ο χώρος 2 χαρακτηρίζεται από άπειρη αγωγιμότητα, το HM πεδίο εντός αυτού είναι μηδενικό και το HM πεδίο στο χώρο 1 προκύπτει με εφαρμογή της θεωρίας ειδώλων. Για τον προσδιορισμό των άγνωστων HM πεδίων που αναπτύσσονται στους χώρους 1 και 2, εφαρμόζεται η MAS, όπως περιγράφεται ακολούθως.

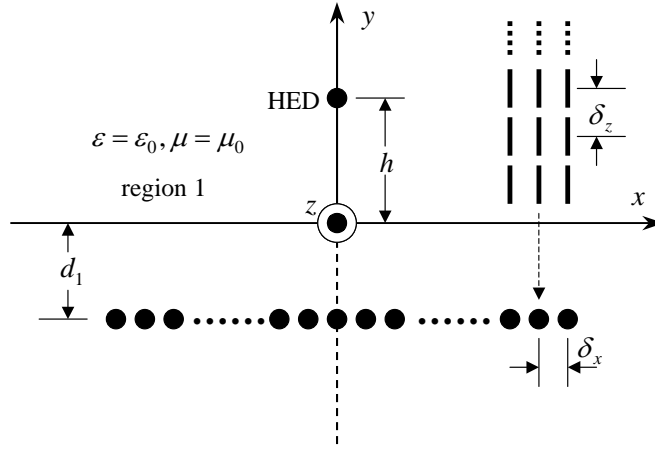


Σχήμα 3. 19. Γεωμετρία οριζώντιου ηλεκτρικού διπόλου που ακτινοβολεί υπεράνω ημιάπειρου ομοιογενούς διηλεκτρικού χώρου.

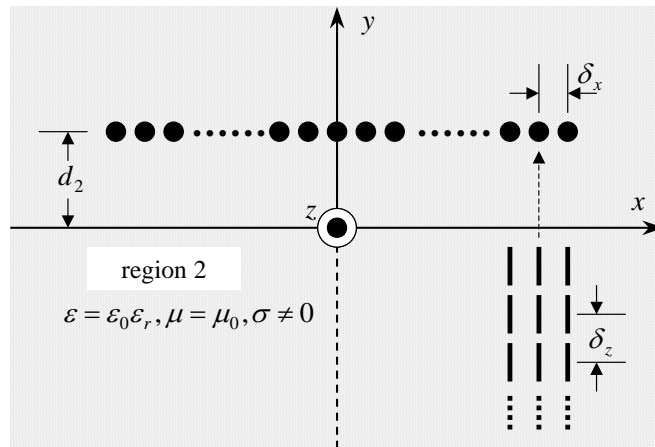
3.2.3.2 Εφαρμογή της MAS

Σύμφωνα με τις βασικές αρχές της MAS, το άγνωστο HM πεδίο σε κάθε περιοχή του προβλήματος εκφράζεται ως υπέρθεση των HM πεδίων που παράγονται από ένα σύνολο βοηθητικών πηγών, που είναι τοποθετημένες εκτός των ορίων της αντίστοιχης περιοχής. Για την περίπτωση του Σχήματος 3.19, απαιτούνται δύο σύνολα βοηθητικών πηγών για την περιγραφή των άγνωστων HM πεδίων στους χώρους 1 και 2. Οι βοηθητικές πηγές του πρώτου συνόλου, οι οποίες κείνται κάτωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας, ακτινοβολούν εντός άπειρου χώρου με τα χαρακτηριστικά του χώρου 1, ενώ οι βοηθητικές πηγές του δεύτερου συνόλου, οι οποίες κείνται άνωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας, ακτινοβολούν εντός άπειρου χώρου με τα χαρακτηριστικά του χώρου 2, όπως απεικονίζεται στα Σχήματα 3.20 και 3.21. Εξαιτίας της οριζόντιας πόλωσης του διπόλου, ως βοηθητικές πηγές χρησιμοποιούνται στοιχειώδη ηλεκτρικά δίπολα με άξονες παράλληλους προς τον άξονα z . Οι βοηθητικές πηγές του πρώτου συνόλου τοποθετούνται επί του επιπέδου $y_1 = -d_1$, ενώ οι βοηθητικές πηγές του δεύτερου συνόλου τοποθετούνται επί του επιπέδου $y_2 = d_2$. Επιπρόσθετα, οι βοηθητικές πηγές κατανέμονται έτσι ώστε να σχηματίζουν $2N_x + 1$ υποσύνολα συγγραμμικών διπόλων, καθένα από τα οποία αποτελείται από $2N_z + 1$ δίπολα. Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, οι βοηθητικές πηγές κατανέμονται συμμετρικά ως προς τους άξονες x και z . Οι κατανομές των βοηθητικών πηγών απεικονίζονται στα Σχήματα 3.20 και 3.21. Για την απλοποίηση του μαθηματικού φορμαλισμού και τη μείωση των παραμέτρων που σχετίζονται με την εφαρμογή της MAS, επιλέγεται ίσο πλήθος υποσυνόλων συγγραμμικών διπόλων και σταθερό πλήθος διπόλων ανά υποσύνολο για καθένα από τα δύο σύνολα βοηθητικών πηγών. Το HM πεδίο στο χώρο 1 περιγράφεται ως

άθροισμα του HM πεδίου του διπόλου στον ελεύθερο χώρο και ενός γραμμικού συνδυασμού των HM πεδίων των βοηθητικών πηγών του πρώτου συνόλου, ενώ το HM πεδίο στο χώρο 2 περιγράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των HM πεδίων των βοηθητικών πηγών του δεύτερου συνόλου.



Σχήμα 3. 20. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του HM πεδίου στο χώρο 1.



Σχήμα 3. 21. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του HM πεδίου στο χώρο 2.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα άγνωστα HM πεδία στους χώρους 1 και 2 δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{F}^{(1)}(\vec{r}) = \vec{F}^{exc}(\vec{r}) + \sum_{n=-N_x}^{N_x} \sum_{s=-N_z}^{N_z} w_{(n,s)}^{(1)} \vec{F}_{(n,s)}^{(1)}(\vec{r}), \quad (3.21\alpha)$$

$$\vec{F}^{(2)}(\vec{r}) = \sum_{n=-N_x}^{N_x} \sum_{s=-N_z}^{N_z} w_{(n,s)}^{(2)} \vec{F}_{(n,s)}^{(2)}(\vec{r}), \quad (3.21\beta)$$

όπου $\vec{F}^{(i)}$ είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου στο χώρο i , \vec{F}^{exc} είναι το αντίστοιχο πεδίο διέγερσης του διπόλου στη θέση $\vec{r}_h = h\hat{y}$, ενώ $\vec{F}_{(n,s)}^{(i)}$ είναι το αντίστοιχο πεδίο της βοηθητικής πηγής του συνόλου i που καθορίζει το ζεύγος δεικτών

(n, s) και είναι τοποθετημένη στο σημείο (x_n, y_i, z_s) με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(n,s)}^{(i)}$, όπου x_n η θέση του υποσυνόλου συγγραμμικών βοηθητικών πηγών που δηλώνει ο δείκτης n και z_s η θέση της βοηθητικής πηγής του ίδιου υποσυνόλου που καθορίζει ο δείκτης s . Τα πεδία που υπεισέρχονται στις σχέσεις (3.21) προσδιορίζονται με απλή μεταφορά του πεδίου \vec{F}_i ενός στοιχειώδους ηλεκτρικού διπόλου, που είναι τοποθετημένο στο κέντρο ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτινοβολεί σε άπειρο χώρο με τα χαρακτηριστικά του χώρου i , ως εξής

$$\vec{F}^{exc}(\vec{r}) = \vec{F}_1(\vec{r} - \vec{r}_h), \quad (3.22\alpha)$$

$$\vec{F}_{(n,s)}^{(i)}(\vec{r}) = \vec{F}_i(\vec{r} - \vec{r}_{(n,s)}^{(i)}). \quad (3.22\beta)$$

Αξιοποιώντας τις σχέσεις (B.6) του Παραρτήματος Β, οι προηγούμενες σχέσεις εκφράζονται ως εξής

$$\vec{F}^{exc}(\vec{r}) = \vec{F}_1(\vec{r}; \vec{r}_h), \quad (3.23\alpha)$$

$$\vec{F}_{(n,s)}^{(i)}(\vec{r}) = \vec{F}_i(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)}^{(i)}). \quad (3.23\beta)$$

Ακολούθως, οι βοηθητικές πηγές θεωρούνται ότι κατανέμονται ομοιόμορφα, συνεπώς οι θέσεις τους καθορίζονται από τις σχέσεις $x_n = n\delta_x$ και $z_s = s\delta_z$, όπου δ_x και δ_z οι αποστάσεις μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών κατά μήκος των αξόνων x και z , αντίστοιχα. Ανομοιόμορφες κατανομές των βοηθητικών πηγών δεν αποκλείονται βάσει των φυσικών αρχών της ΜΑΣ, αν και οποιαδήποτε τέτοια επιλογή οδηγεί σε αύξηση των παραμέτρων προς διερεύνηση για τη μελέτη των χαρακτηριστικών των λύσεων. Για το λόγο αυτό, όπως και στις περιπτώσεις των Παραγράφων 3.2.1 και 3.2.2, ανομοιόμορφες κατανομές δεν εξετάζονται.

Οι άγνωστοι συντελεστές $w_{(n,s)}^{(i)}$ των αναπτυγμάτων των σχέσεων (3.21) προσδιορίζονται επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου επί της διαχωριστικής επιφάνειας. Σημειώνεται ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει δύο εφαπτομενικές συνιστώσες στη διαχωριστική επιφάνεια, τις E_x και E_z . Αν και μπορεί να επιβληθεί η οριακή συνθήκη για οποιαδήποτε από τις δύο, επιλέγεται αυτή που αντιστοιχεί στην αριθμητικά ισχυρότερη συνιστώσα E_z , για λόγους που άπτονται της αριθμητικής ευστάθειας του προκύπτοντος γραμμικού συστήματος. Συνεπώς, οι επιβαλλόμενες οριακές συνθήκες εκφράζονται ως εξής

$$E_z^{(1)}(x, 0, z) - E_z^{(2)}(x, 0, z) = 0, \quad (3.24\alpha)$$

$$H_x^{(1)}(x, 0, z) - H_x^{(2)}(x, 0, z) = 0. \quad (3.24\beta)$$

Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, οι άγνωστοι συντελεστές βαρύτητας συμμετρικά τοποθετημένων βοηθητικών πηγών θεωρούνται εκ των προτέρων ίσοι μεταξύ τους, δηλαδή $w_{(n,s)}^{(i)} = w_{(|n|,|s|)}^{(i)}$. Για τον ίδιο λόγο, η επιβολή των οριακών συνθηκών των σχέσεων (3.24) μπορεί να γίνει στα σημεία $\vec{r}_{(m,t)}$ επί του τεταρτημορίου που αντιστοιχεί στους θετικούς ημιάξονες x και z , των οποίων οι θέσεις εκφράζονται ως $(x_m, 0, z_t)$, $m = 0, 1, \dots, N_x$, $t = 0, 1, \dots, N_z$. Τα σημεία επιβολής των οριακών συνθηκών ταυτίζονται με τις προβολές των θέσεων των βοηθητικών πηγών επί της διαχωριστικής επιφάνειας, όπου οι τιμές των εφαπτομενικών συνιστωσών του παραγόμενου ΗΜ πεδίου είναι μέγιστες. Η διαδικασία

επιβολής των οριακών συνθηκών των σχέσεων (3.24) σε διακριτά σημεία οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\sum_{n=-N_x}^{N_x} \sum_{s=-N_z}^{N_z} \left(e_{(n,s),(m,t)}^{(1)} w_{(n,s)}^{(1)} - e_{(n,s),(m,t)}^{(2)} w_{(n,s)}^{(2)} \right) = -e_{(m,t)}^{exc}, \quad \begin{cases} m = 0, 1, \dots, N_x \\ t = 0, 1, \dots, N_z \end{cases}, \quad (3.25\alpha)$$

$$\sum_{n=-N_x}^{N_x} \sum_{s=-N_z}^{N_z} \left(h_{(n,s),(m,t)}^{(1)} w_{(n,s)}^{(1)} - h_{(n,s),(m,t)}^{(2)} w_{(n,s)}^{(2)} \right) = -h_{(m,t)}^{exc}, \quad \begin{cases} m = 0, 1, \dots, N_x \\ t = 0, 1, \dots, N_z \end{cases}, \quad (3.25\beta)$$

όπου

$$e_{(n,s),(m,t)}^{(i)} = \hat{z} \cdot \vec{E}_{(n,s)}^{(i)}(\vec{r}_{(m,t)}), \quad (3.26\alpha)$$

$$e_{(n,s),(m,t)}^{(i)} = \hat{x} \cdot \vec{H}_{(n,s)}^{(i)}(\vec{r}_{(m,t)}), \quad (3.26\beta)$$

$$e_{(m,t)}^{exc} = \hat{z} \cdot \vec{E}^{exc}(\vec{r}_{(m,t)}), \quad (3.26\gamma)$$

$$h_{(m,t)}^{exc} = \hat{x} \cdot \vec{H}^{exc}(\vec{r}_{(m,t)}). \quad (3.26\delta)$$

Αξιοποιώντας τη συμμετρία του προβλήματος, οι εξισώσεις (3.25) μπορούν, ισοδύναμα, να γραφούν ως εξής

$$\sum_{n=0}^{N_x} \sum_{s=0}^{N_z} \left(E_{(n,s),(m,t)}^{(1)} w_{(n,s)}^{(1)} - E_{(n,s),(m,t)}^{(2)} w_{(n,s)}^{(2)} \right) = -e_{(m,t)}^{exc}, \quad \begin{cases} m = 0, 1, \dots, N_x \\ t = 0, 1, \dots, N_z \end{cases}, \quad (3.27\alpha)$$

$$\sum_{n=0}^{N_x} \sum_{s=0}^{N_z} \left(H_{(n,s),(m,t)}^{(1)} w_{(n,s)}^{(1)} - H_{(n,s),(m,t)}^{(2)} w_{(n,s)}^{(2)} \right) = -h_{(m,t)}^{exc}, \quad \begin{cases} m = 0, 1, \dots, N_x \\ t = 0, 1, \dots, N_z \end{cases}, \quad (3.27\beta)$$

όπου

$$E_{(n,s),(m,t)}^{(i)} = \left(e_{(n,s),(m,t)}^{(i)} + e_{(-n,s),(m,t)}^{(i)} + e_{(n,-s),(m,t)}^{(i)} + e_{(-n,-s),(m,t)}^{(i)} \right) \xi_n \xi_s, \quad (3.28\alpha)$$

$$H_{(n,s),(m,t)}^{(i)} = \left(h_{(n,s),(m,t)}^{(i)} + h_{(-n,s),(m,t)}^{(i)} + h_{(n,-s),(m,t)}^{(i)} + h_{(-n,-s),(m,t)}^{(i)} \right) \xi_n \xi_s, \quad (3.28\beta)$$

$$\xi_n = \begin{cases} 1, n \neq 0 \\ \frac{1}{2}, n = 0 \end{cases}. \quad (3.28\gamma)$$

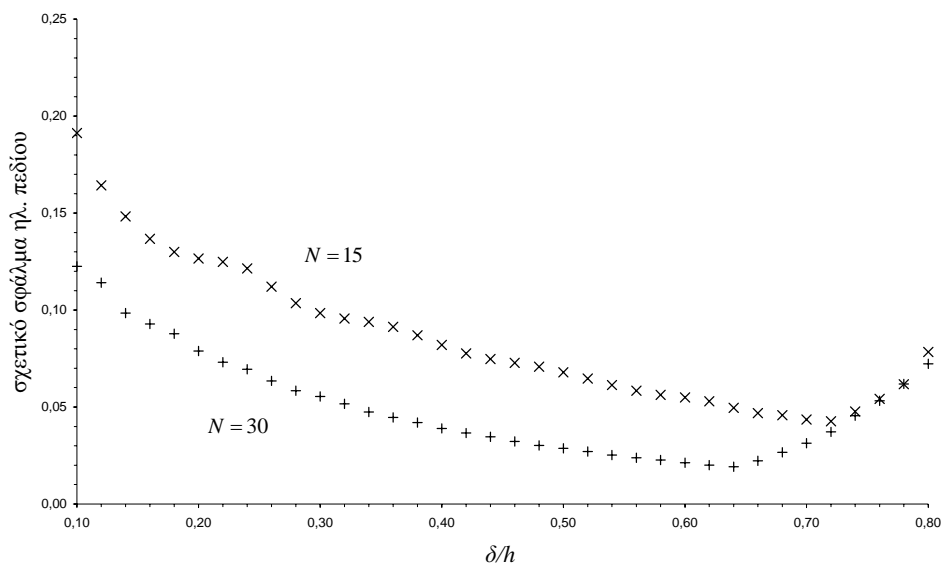
Μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος $[2(N_x + 1)(N_z + 1)] \times [2(N_x + 1)(N_z + 1)]$ των εξισώσεων (3.27), το HM πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου προσδιορίζεται άμεσα από τις σχέσεις (3.21)-(3.23).

Λόγω του γεγονότος ότι οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται σε διακριτά σημεία, η συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών E_z και H_x δεν είναι εξασφαλισμένη παντού στη διαχωριστική επιφάνεια. Για την αποτίμηση της ποιότητας των λύσεων, εξετάζονται τα σφάλματα των οριακών συνθηκών των σχέσεων (3.24), μέσω των οποίων αποτιμάται ο βαθμός ικανοποίησης των οριακών συνθηκών. Σημειώνεται ότι ο όρος σφάλμα κάποιας οριακής συνθήκης αναφέρεται στο σχετικό σφάλμα, το οποίο ορίζεται ως ο λόγος του μέτρου

της διαφοράς της αντίστοιχης συνιστώσας του ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου εκατέρωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας προς τη μέγιστη τιμή του μέτρου της αντίστοιχης συνιστώσας του πεδίου διέγερσης στη διαχωριστική επιφάνεια. Εκτός των σφαλμάτων των επιβαλλόμενων οριακών συνθηκών, είναι δυνατόν να υπολογιστούν και τα σφάλματα των οριακών συνθηκών που δεν επιβλήθηκαν, τα οποία παρέχουν πρόσθετα κριτήρια ελέγχου της ποιότητας των λύσεων. Για το πρόβλημα που εξετάζεται εδώ, οι οριακές συνθήκες που δεν επιβλήθηκαν αφορούν την εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου E_x , καθώς και τις κάθετες συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, E_y και H_y , αντίστοιχα. Στη μελέτη της Παραγράφου 3.2.1, ο έλεγχος της οριακής συνθήκης που δεν επιβλήθηκε έδειξε ότι τα αντίστοιχα σφάλματα είναι μεγαλύτερα, αλλά, πάντως, της ίδιας τάξης μεγέθους, σε σχέση με τα σφάλματα των επιβαλλόμενων οριακών συνθηκών. Για το λόγο αυτό, τα σφάλματα των οριακών συνθηκών που δεν επιβλήθηκαν δεν θα παρουσιαστούν εδώ.

3.2.3.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

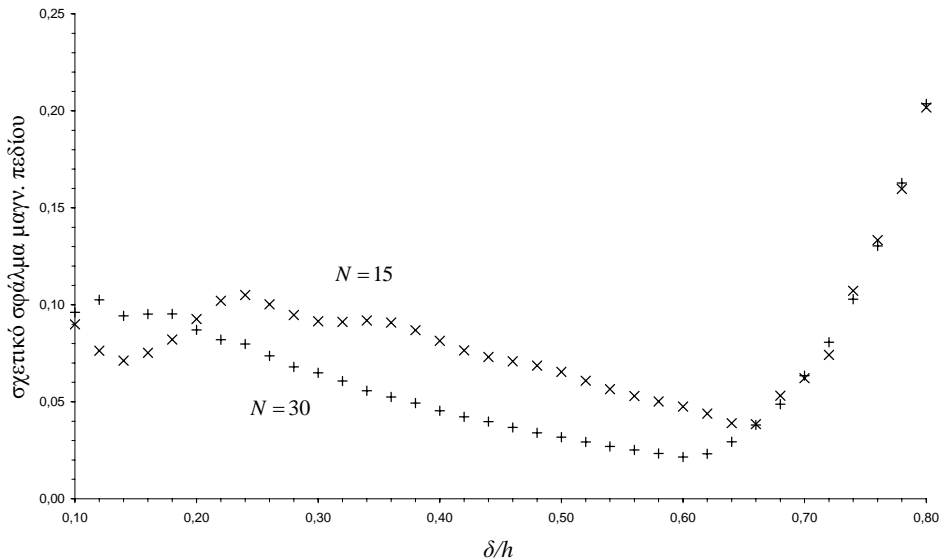
Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, είναι αναμενόμενο τα σφάλματα των οριακών συνθηκών και η ακρίβεια των λύσεων να εξαρτώνται ισχυρά από τις παραμέτρους καθορισμού του αριθμού των βοηθητικών πηγών N_x και N_z , καθώς και τις αποστάσεις μεταξύ τους κατά μήκος των αξόνων x και z , δ_x και δ_z , αντίστοιχα. Δεδομένου ότι η ανάλυση που ακολουθεί αποσκοπεί στη μελέτη της συμπεριφοράς σύγκλισης των λύσεων χωρίς να εξετάζονται οι δυνατότητες βελτιστοποίησης, οι βοηθητικές πηγές τοποθετούνται κατά τον απλούστερο δυνατό τρόπο, οπότε επιλέγεται $N_x = N_z = N$ και $\delta_x = \delta_z = \delta$.



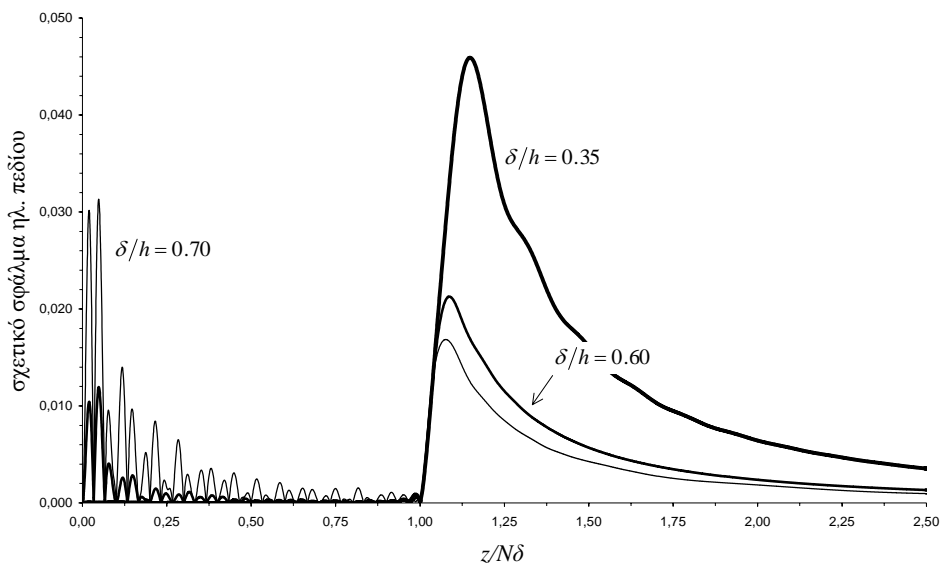
Σχήμα 3. 22. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24a) κατά μήκος του άξονα z , για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.

Ακολουθώς, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών και την ακρίβεια των λύσεων, καθώς και τη σύνδεση τους με την παράμετρο καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών N και την απόσταση μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών δ . Όπως και στις περιπτώσεις των Παραγράφων 3.2.1 και 3.2.2, είναι αναμενόμενο, λόγω του γεγονότος ότι το πρόβλημα

εμπλέκει ημιάπειρα χωρία, η συμπεριφορά σύγκλισης και η ακρίβεια των λύσεων να εξαρτώνται ισχυρά από τις παραμέτρους N και δ , αφού σημαντικά σφάλματα μπορεί να εμφανιστούν είτε μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών είτε πέραν των ορίων της περιοχής που αυτά καταλαμβάνουν.



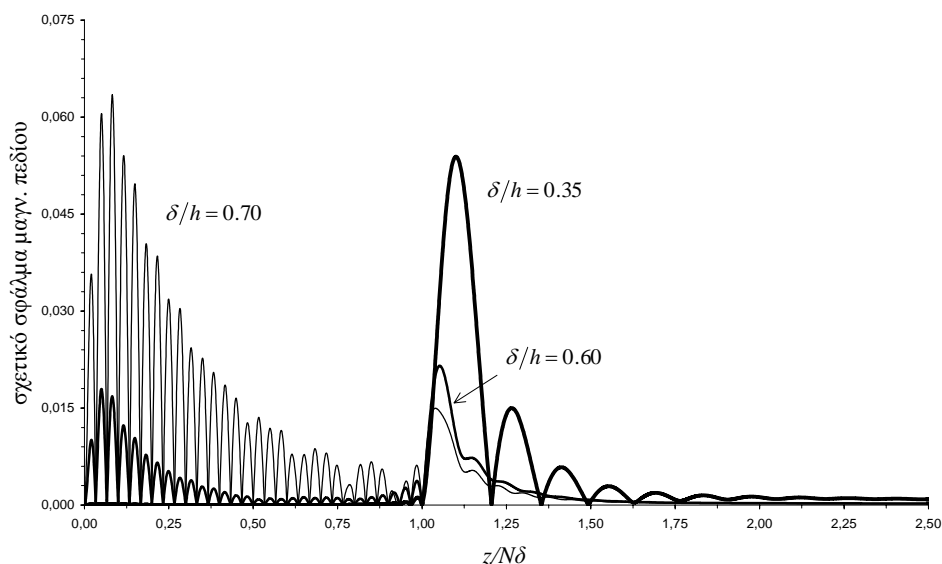
Σχήμα 3. 23. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24β) κατά μήκος του άξονα z , για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.



Σχήμα 3. 24. Τυπικές κατανομές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24α) κατά μήκος του άξονα z , για διάφορες τιμές της απόστασης μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών.

Ιδιαίτερη σημασία, τόσο για τη συμπεριφορά σύγκλισης όσο και την ακρίβεια των λύσεων, έχουν οι αποστάσεις d_i μεταξύ των βοηθητικών πηγών και της διαχωριστικής

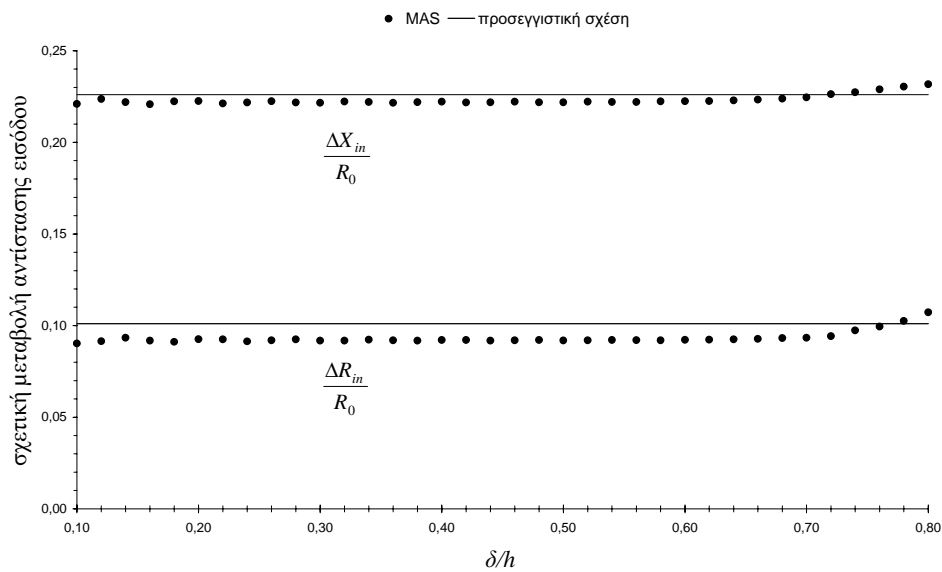
επιφάνειας. Όπως έχει αναφερθεί στην Παράγραφο 2.3.1, οι φυσικές αρχές στις οποίες βασίζεται η MAS επιβάλλουν οι αποστάσεις αυτές να είναι αρκούντως μικρές, ούτως ώστε να μην υπάρχουν ιδιάζοντα σημεία των αναλυτικών επεκτάσεων των άγνωστων ΗΜ πεδίων στις περιοχές μεταξύ των βοηθητικών πηγών και της διαχωριστικής επιφάνειας. Εδώ, όπως και στις περιπτώσεις των Παραγράφων 3.2.1 και 3.2.2, οι βοηθητικές πηγές του πρώτου συνόλου τοποθετούνται σε βάθος που αντιστοιχεί στη θέση του ειδώλου του διπόλου, ενώ οι βοηθητικές πηγές του δεύτερου συνόλου τοποθετούνται στις συμμετρικές θέσεις ως προς τη διαχωριστική επιφάνεια, συνεπώς επιλέγεται $d_1 = d_2 = h$.



Σχήμα 3. 25. Τυπικές κατανομές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24β) κατά μήκος του άξονα z , για διάφορες τιμές της απόστασης μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών.

Για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς των λύσεων, εκτελέστηκε μεγάλος αριθμός δοκιμών μεταβάλλοντας την απόσταση δ , για διαφορετικές τιμές του N . Στα Σχήματα 3.22 και 3.23 απεικονίζονται οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, αντίστοιχα, που αντιστοιχούν σε $N = 15$ και $N = 30$, ως προς την παράμετρο δ/h , για την περίπτωση ενός διπόλου σε ύψος $h/\lambda = 0.25$ υπεράνω τυπικού εδάφους σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς 13 και ηλεκτρικής αγωγιμότητας 0.005S/m σε συχνότητα 100MHz (μιαδική σχετική διηλεκτρική σταθερά $13-j0.899$). Όπως κατέδειξε μεγάλος αριθμός δοκιμών, όταν οι βοηθητικές πηγές κατανέμονται σε ίσες αποστάσεις κατά τους άξονες x και z , οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων εμφανίζονται κατά μήκος του άξονα z , τουλάχιστον όταν η απόσταση δ μεταβάλλεται στο διάστημα εντός του οποίου τα σφάλματα είναι αποδεκτά και οι λύσεις είναι αριθμητικά ευσταθείς. Για το λόγο αυτό, οι τιμές των σφαλμάτων που παρουσιάζονται αφορούν τις μέγιστες τιμές τους κατά μήκος του άξονα z . Ξεκινώντας από ιδιαίτερα πυκνές κατανομές των βοηθητικών πηγών και αυξάνοντας την απόσταση δ , οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων μειώνονται, έως ότου προσεγγίσουν τις ελάχιστες τιμές τους. Στη συνέχεια, οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων αυξάνονται με την αύξηση της απόστασης δ . Η συμπεριφορά αυτή παρατηρείται σε ένα μεγάλο εύρος μεταβολής του N και μπορεί να ερμηνευτεί παρατηρώντας τις κατανομές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών επί της διαχωριστικής επιφάνειας. Πιο συγκεκριμένα, για μικρές τιμές της απόστασης δ , τα σφάλματα μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών είναι αμελητέα ($\ll 1\%$), ιδιαίτερα σε σχέση με τα σφάλματα που εμφανίζονται εκτός της περιοχής που αυτά καταλαμβάνουν ($|x| > N\delta$, $|z| > N\delta$), όπου τα σφάλματα είναι

αρκετές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερα ($>1\%$). Με την αύξηση της απόστασης δ , τα σφάλματα μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών αυξάνονται, ενώ τα σφάλματα που εμφανίζονται στην περιοχή με $|x| > N\delta$ και $|z| > N\delta$ μειώνονται, έως ότου τα πρώτα ξεπεράσουν τα δεύτερα. Περαιτέρω αύξηση της απόστασης δ έχει ως συνέπεια την εμφάνιση σημαντικών σφαλμάτων μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών ($>1\%$), κυρίως πλησίον του ίχνους του διπόλου στη διαχωριστική επιφάνεια, τα οποία εξαρτώνται ασθενώς από την τιμή του N , μια και οι διαφορές τους είναι δυσδιάκριτες για $N = 15$ και $N = 30$. Αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα για τις κατανομές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος του άξονα z παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.24 και 3.25, αντίστοιχα, για $N = 30$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου δ/h (0.35, 0.60, 0.70). Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, οι κατανομές των σφαλμάτων παρουσιάζονται μόνο για $z \geq 0$.



Σχήμα 3. 26. Διάγραμμα της σχετικής μεταβολής της σύνθετης αντίστασης εισόδου συναρτήσει της απόστασης μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών.

Η μεταβολή της σύνθετης αντίστασης εισόδου του διπόλου ως προς την τιμή της στον ελεύθερο χώρο υπολογίζεται ως υπέρθεση των αμοιβαίων σύνθετων αντιστάσεων μεταξύ του διπόλου και των βοηθητικών πηγών του πρώτου συνόλου, σύμφωνα με τη σχέση

$$\Delta Z_{in} = - \sum_{n=-N_x}^{N_x} \sum_{s=-N_z}^{N_z} w_{(n,s)}^{(1)} [\vec{z} \cdot \vec{E}_{(n,s)}^{(1)}(\vec{r}_h)]. \quad (3.29)$$

Οι τιμές του λόγου $\Delta Z_{in}/R_0$, όπου R_0 είναι η αντίσταση ακτινοβολίας στον ελεύθερο χώρο, που προκύπτουν με $N = 30$, απεικονίζονται συναρτήσει της παραμέτρου δ/h στο Σχήμα 3.26. Είναι καταφανές ότι η σύνθετη αντίσταση εισόδου είναι αξιοσημείωτα σταθερή επί ενός μεγάλου εύρους μεταβολής της απόστασης δ , παρά το γεγονός ότι οι αντίστοιχες μέγιστες τιμές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών εμφανίζουν πολύ σημαντικές μεταβολές, όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.22 και 3.23. Οι στάθμες αναφοράς στο Σχήμα 3.26, που αφορούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του λόγου $\Delta Z_{in}/R_0$, έχουν υπολογιστεί από την προσεγγιστική σχέση [5]

$$\frac{\Delta Z_{in}}{R_0} \approx \frac{3j \exp(-j2k_1 h) n_2 - 1}{2(2k_1 h)^3} \frac{n_2 - 1}{n_2 + 1} \left\{ \begin{array}{l} 1 - (2k_1 h)^2 + \frac{2}{n_2} \\ + j \left[2k_1 h + \frac{3}{k_1 h n_2} \left(1 - \frac{2n_2 - 3}{n_2^2} \right) \right] \end{array} \right\}, \quad (3.30)$$

όπου $n_2 = k_2/k_1$. Οι μικρές διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων της MAS και των σταθμών αναφοράς του Σχήματος 3.26 αποδίδονται στο γεγονός ότι η σχέση (3.30) είναι προσεγγιστική, καθώςσον εξάγει σχετικά ακριβή αποτελέσματα υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει η συνθήκη $|2k_1 n_2 h| \gg 1$.

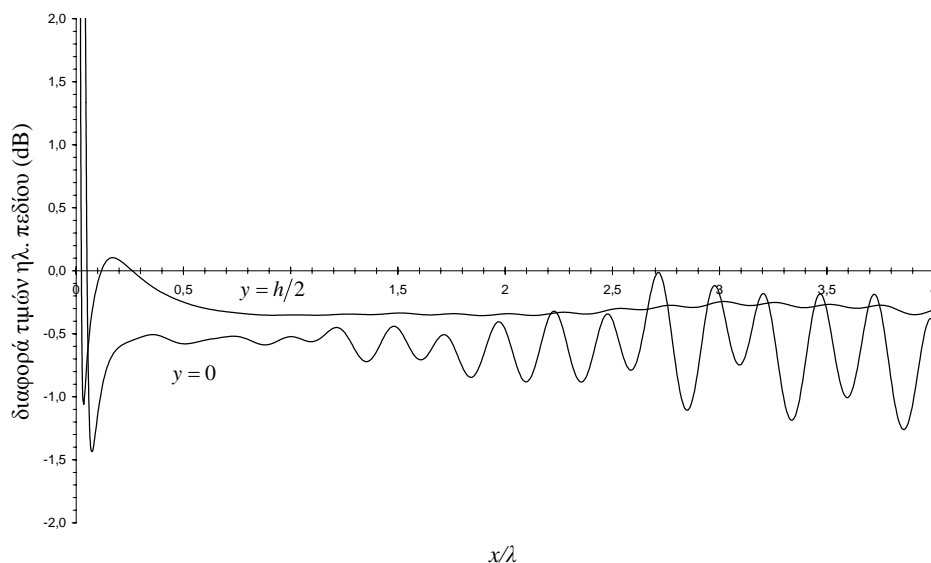
Για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς σύγκλισης των λύσεων, εξετάστηκε η συμπεριφορά των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών αυξανόμενου του N . Σε κάθε περίπτωση, η αύξηση του N , χωρίς τη μεταβολή της απόστασης δ , έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση των σφαλμάτων στην περιοχή με $|x| > N\delta$ και $|z| > N\delta$, όπως άλλωστε αναμένεται, λόγω της μετακίνησης των πιο απομακρυσμένων σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών προς το άπειρο, ενώ τα σφάλματα μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών παραμένουν σχεδόν αναλλοίωτα, λόγω του τοπικού χαρακτήρα των HM πεδίων των βοηθητικών πηγών. Ως εκ τούτου, η αύξηση του N συνεπάγεται την ολίσηση των ελάχιστων σφαλμάτων προς μικρότερες τιμές της απόστασης δ . Η συμπεριφορά αυτή καταδεικνύεται από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3, στον οποίο περιέχονται οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές του N , καθώς και οι αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου δ/h για τις οποίες ελαχιστοποιείται ο γεωμετρικός μέσος των σφαλμάτων. Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.3, είναι προφανές ότι οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων παρουσιάζουν προοδευτική μείωση με την αύξηση του N , ενώ η σύνθετη αντίσταση εισόδου παραμένει σταθερή. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την αναισθησία των τιμών της σύνθετης αντίστασης εισόδου ως προς τη μεταβολή της απόστασης δ , ενισχύει την πεποίθηση ότι οι λύσεις είναι ακριβείς.

Πίνακας 3. 3. Μέγιστες τιμές των σχετικών σφαλμάτων των οριακών συνθηκών και σχετική μεταβολή της σύνθετης αντίστασης εισόδου, για τις βέλτιστες λύσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών.

N	δ/h	Μέγιστες Τιμές Σφαλμάτων Οριακών Συνθηκών (%)		$\Delta R_{in}/R_0$	$\Delta X_{in}/R_0$
		E_z	H_x		
30	0.611	2.064	2.065	0.0924	0.2225
35	0.598	1.676	1.753	0.0922	0.2224
40	0.586	1.385	1.503	0.0921	0.2224
45	0.575	1.162	1.303	0.0922	0.2223
50	0.565	0.992	1.156	0.0921	0.2222

Τέλος, εκτός από τις δοκιμές σύγκλισης και τον έλεγχο της σύνθετης αντίστασης εισόδου, είναι δυνατή και η απευθείας σύγκριση των λύσεων της MAS με διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις. Προσεγγιστικές αναλυτικές εκφράσεις για το πλήρες HM πεδίο στο χώρο 1, οι οποίες ισχύουν όταν $|k_2| \geq 9k_1$ και το σημείο παρατήρησης δεν βρίσκεται πολύ κοντά στον άξονα του διπόλου, είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία (βλ. Κεφάλαιο 9 στη σχετική αναφορά [24]). Η διαφορά σε dB μεταξύ της συνιστώσας E_z του ηλεκτρικού πεδίου της προσεγγιστικής αναλυτικής λύσης και της λύσης της MAS, που αντιστοιχεί σε $N = 30$ και $\delta/h = 0.60$, απεικονίζεται συναρτήσεως της παραμέτρου x/λ στο Σχήμα 3.27. Τα

αποτελέσματα του Σχήματος 3.27 αντιστοιχούν σε $y=0$ και $y=h/2$. Σημειώνεται ότι η διαφορά κυμαίνεται στο διάστημα 0.5-1dB, εξαιρουμένης της περιοχής πολύ κοντά στον άξονα του διπόλου, λόγω του προσεγγιστικού χαρακτήρα της λύσης αναφοράς.



Σχήμα 3. 27. Απεικόνιση της διαφοράς σε dB μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου της προσεγγιστικής αναλυτικής λύσης και της λύσης της MAS, ως συνάρτηση της απόστασης από τον άξονα του διπόλου κατά μήκος του άξονα x .

3.3 Ακτινοβολία Στοιχειωδών Ηλεκτρικών Πηγών Εντός Ημιάπειρου Διηλεκτρικού Χώρου

3.3.1 Νηματοειδής Ηλεκτρική Πηγή

3.3.1.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος δύο διαστάσεων συνίσταται σε μια νηματοειδή ηλεκτρική πηγή συχνότητας $\omega = 2\pi f$, η οποία βρίσκεται εντός του ημιάπειρου ομοιογενούς διηλεκτρικού χώρου (χώρος 2) του Σχήματος 3.1. Όπως και στην περίπτωση του Σχήματος 3.1, η απόσταση της πηγής από τη διαχωριστική επιφάνεια συμβολίζεται με h . Για τον προσδιορισμό των άγνωστων ΗΜ πεδίων που αναπτύσσονται στους χώρους 1 και 2, εφαρμόζεται η MAS, όπως περιγράφεται ακολούθως.

3.3.1.2 Εφαρμογή της MAS

Όπως και στην περίπτωση του Σχήματος 3.1, απαιτούνται δύο σύνολα βοηθητικών πηγών για την περιγραφή των άγνωστων ΗΜ πεδίων στους χώρους 1 και 2. Οι βοηθητικές πηγές του πρώτου συνόλου, οι οποίες κείνται κάτωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας, ακτινοβολούν εντός άπειρου χώρου με τα χαρακτηριστικά του χώρου 1, ενώ οι βοηθητικές πηγές του δεύτερου συνόλου, οι οποίες κείνται άνωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας, ακτινοβολούν εντός άπειρου χώρου με τα χαρακτηριστικά του χώρου 2. Οι βοηθητικές πηγές τοποθετούνται όπως απεικονίζεται στα Σχήματα 3.2 και 3.3. Το ΗΜ πεδίο στο χώρο 1

περιγράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των ΗΜ πεδίων των βοηθητικών πηγών του πρώτου συνόλου, ενώ το ΗΜ πεδίο στο χώρο 2 περιγράφεται ως άθροισμα του ΗΜ πεδίου της πρωτεύουσας πηγής εντός άπειρου χώρου με τα χαρακτηριστικά του χώρου 2 και ενός γραμμικού συνδυασμού των ΗΜ πεδίων των βοηθητικών πηγών του δεύτερου συνόλου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα άγνωστα ΗΜ πεδία στους χώρους 1 και 2 δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{F}^{(1)}(\vec{\rho}) = \sum_{n=-N}^N w_n^{(1)} \vec{F}_n^{(1)}(\vec{\rho}), \quad (3.31\alpha)$$

$$\vec{F}^{(2)}(\vec{\rho}) = \vec{F}^{exc}(\vec{\rho}) + \sum_{n=-N}^N w_n^{(2)} \vec{F}_n^{(2)}(\vec{\rho}), \quad (3.31\beta)$$

όπου $\vec{F}^{(i)}$ είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου στο χώρο i , \vec{F}^{exc} είναι το αντίστοιχο πεδίο διέγερσης της πρωτεύουσας πηγής στη θέση $\vec{\rho}_h = -h\hat{y}$, ενώ $\vec{F}_n^{(i)}$ είναι το αντίστοιχο πεδίο της βοηθητικής πηγής του συνόλου i που καθορίζει ο δείκτης n και είναι τοποθετημένη στο σημείο (x_n, y_i) με διάνυσμα θέσης $\vec{\rho}_n^{(i)}$. Τα πεδία που υπεισέρχονται στις σχέσεις (3.31) προσδιορίζονται με απλή μεταφορά του πεδίου \vec{F}_i μιας νηματοειδούς ηλεκτρικής πηγής, που είναι τοποθετημένη στο κέντρο ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτινοβολεί σε άπειρο χώρο με τα χαρακτηριστικά του χώρου i , ως εξής

$$\vec{F}^{exc}(\vec{\rho}) = \vec{F}_2(\vec{\rho} - \vec{\rho}_h), \quad (3.32\alpha)$$

$$\vec{F}_n^{(i)}(\vec{\rho}) = \vec{F}_i(\vec{\rho} - \vec{\rho}_n^{(i)}). \quad (3.32\beta)$$

Αξιοποιώντας τις σχέσεις (A.4) του Παραρτήματος Α, οι προηγούμενες σχέσεις εκφράζονται ως εξής

$$\vec{F}^{exc}(\vec{\rho}) = \vec{F}_2(\vec{\rho}; \vec{\rho}_h), \quad (3.33\alpha)$$

$$\vec{F}_n^{(i)}(\vec{\rho}) = \vec{F}_i(\vec{\rho}; \vec{\rho}_n^{(i)}). \quad (3.33\beta)$$

Για τις θέσεις των βοηθητικών πηγών ισχύουν όσα αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 3.2.1.2.

Οι άγνωστοι συντελεστές $w_n^{(i)}$ των αναπτυγμάτων των σχέσεων (3.31) προσδιορίζονται επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες των σχέσεων (3.4). Η διαδικασία επιβολής των οριακών συνθηκών των σχέσεων (3.4) σε διακριτά σημεία, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 3.2.1.2, οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

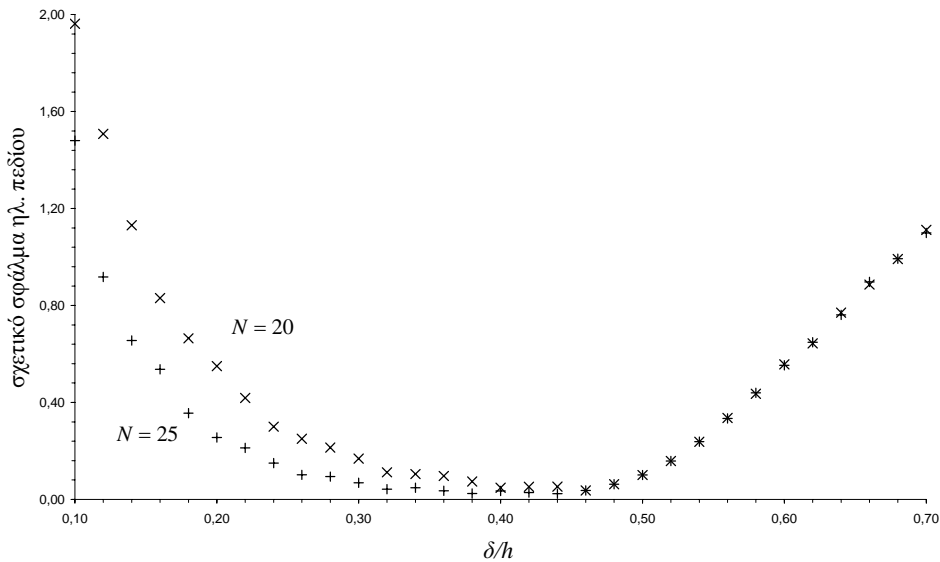
$$\sum_{n=0}^N (E_{n,m}^{(1)} w_n^{(1)} - E_{n,m}^{(2)} w_n^{(2)}) = e_m^{exc}, m = 0, 1, \dots, N, \quad (3.34\alpha)$$

$$\sum_{n=0}^N (H_{n,m}^{(1)} w_n^{(1)} - H_{n,m}^{(2)} w_n^{(2)}) = h_m^{exc}, m = 0, 1, \dots, N. \quad (3.34\beta)$$

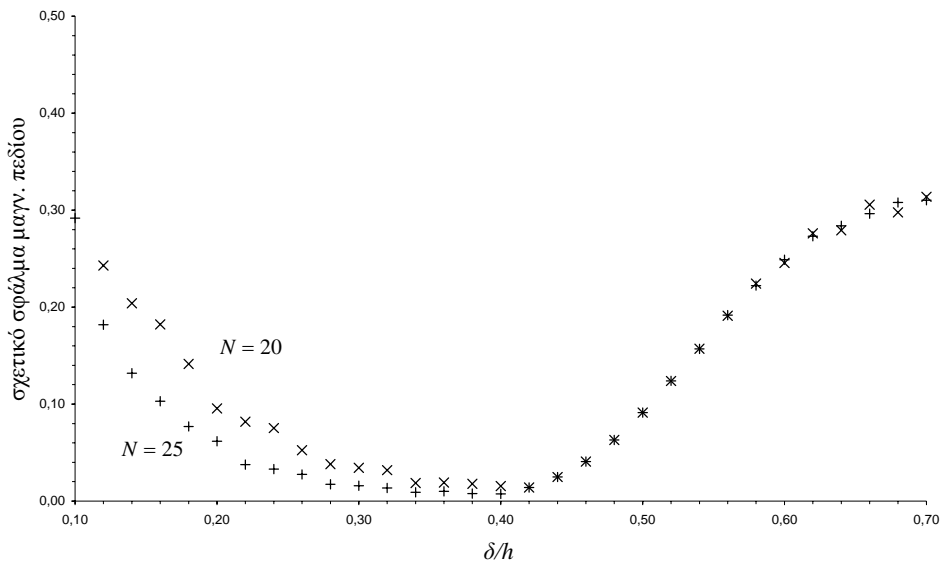
Οι συντελεστές που υπεισέρχονται στις εξισώσεις (3.34) ταυτίζονται με αυτούς των σχέσεων (3.6) και (3.8). Μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος των εξισώσεων (3.34), το ΗΜ πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου προσδιορίζεται άμεσα από τις σχέσεις (3.31)-(3.33).

Κατά πλήρη αντιστοιχία με αυτά που αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 3.2.1.2, η ποιότητα των λύσεων αποτιμάται εξετάζοντας τα σφάλματα των οριακών συνθηκών.

3.3.1.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα



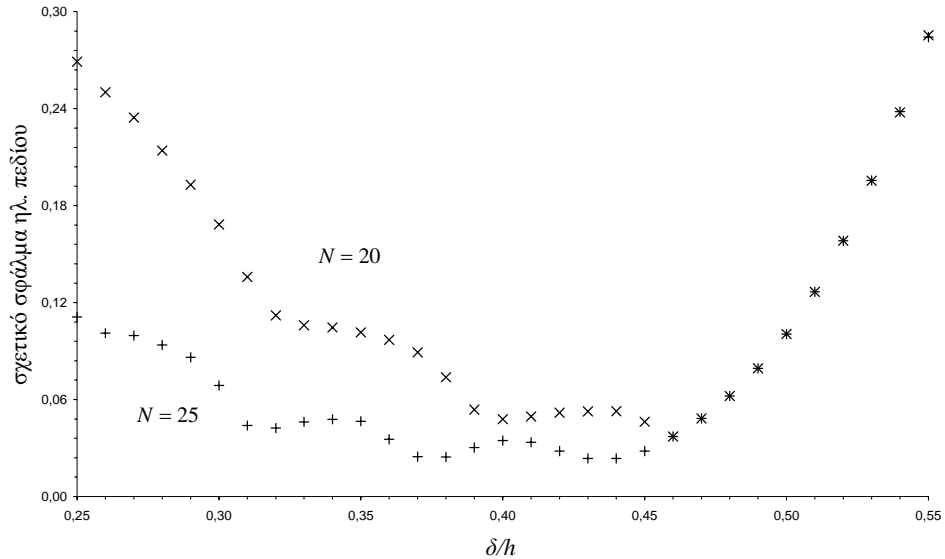
Σχήμα 3. 28. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4α), για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.



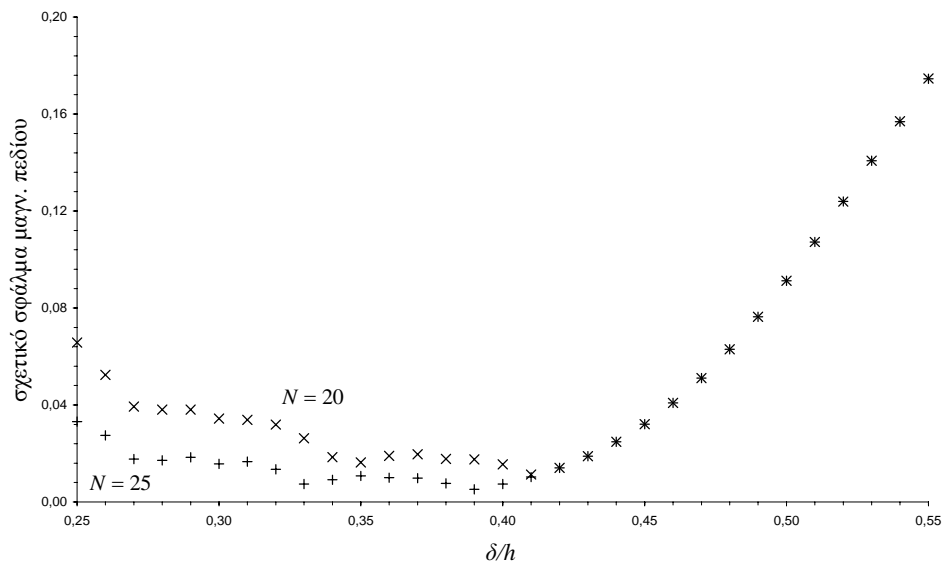
Σχήμα 3. 29. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4β), για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.

Ακολούθως, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών και την ακρίβεια των λύσεων, σε

σχέση με τις παραμέτρους N και δ . Όπως και στην περίπτωση της Παραγράφου 3.2.1, η συμπεριφορά σύγκλισης και η ακρίβεια των λύσεων εξαρτώνται ισχυρά από τις παραμέτρους N και δ , αφού σημαντικά σφάλματα μπορεί να εμφανιστούν είτε μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών είτε πέραν των ορίων της περιοχής που αυτά καταλαμβάνουν.



Σχήμα 3. 30. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4α), για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.



Σχήμα 3. 31. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4β), για διαφορετικούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.

Όπως και στην περίπτωση της Παραγράφου 3.2.1, οι βοηθητικές πηγές τοποθετούνται σε θέσεις με $d_1 = d_2 = h$. Για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς των λύσεων, εκτελέστηκε μεγάλος αριθμός δοκιμών μεταβάλλοντας την απόσταση δ , για διαφορετικές

τιμές του N . Στα Σχήματα 3.28 και 3.29 απεικονίζονται οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, αντίστοιχα, που αντιστοιχούν σε $N = 20$ και $N = 25$, ως προς την παράμετρο δ/h , για την περίπτωση μιας πρωτεύουσας πηγής με $h/\lambda = 0.25$, η οποία βρίσκεται εντός τυπικού λασπώδους εδάφους με τις παραμέτρους της Παραγράφου 3.2.1.3. Ξεκινώντας από ιδιαίτερα πυκνές κατανομές των βοηθητικών πηγών και αυξάνοντας την απόσταση δ , οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων μειώνονται, χωρίς, όμως, να παρουσιάζουν την κανονική συμπεριφορά των Σχημάτων 3.4 και 3.5. Στη συνέχεια, οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων αυξάνονται με την αύξηση της απόστασης δ . Η συμπεριφορά των κατανομών των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών επί της διαχωριστικής επιφάνειας είναι παρόμοια με αυτήν των Σχημάτων 3.6 και 3.7. Ωστόσο, στην περιοχή μεταβολής της απόστασης δ που εμφανίζονται σχετικά μικρά σφάλματα, οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων παρουσιάζουν ταλαντώσεις, όπως απεικονίζεται στα Σχήματα 3.30 και 3.31. Οι ταλαντώσεις αυτές οφείλονται στην έντονη χωρική ανομοιογένεια του ΗΜ πεδίου διέγερσης, η οποία είναι συνέπεια του γεγονότος ότι η πρωτεύουσα πηγή ακτινοβολεί εντός διηλεκτρικού χώρου με απώλειες. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, τα σφάλματα που εμφανίζονται μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών, αλλά και στην περιοχή με $|x| > N\delta$, εμφανίζουν ακανόνιστες αυξομειώσεις με τη μεταβολή της απόστασης δ . Ως εκ τούτου, η αναζήτηση της βέλτιστης απόστασης δ , για την οποία ελαχιστοποιούνται οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων, καθίσταται εξαιρετικά χρονοβόρα, καθώς απαιτείται πολύ μεγάλος αριθμός δοκιμών για τον προσδιορισμό της. Εξάλλου, η ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων δεν είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την εξαγωγή αποδεκτής λύσης, αφού οι λύσεις που αντιστοιχούν σε ένα αρκετά μεγάλο εύρος μεταβολής της απόστασης δ είναι συγκρίσιμες, τουλάχιστον όσον αφορά τα εξαγόμενα αποτελέσματα για τις ποσότητες ενδιαφέροντος.

3.3.2 Κατακόρυφο Ηλεκτρικό Δίπολο

3.3.2.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος τριών διαστάσεων συνίσταται σε ένα βραχύ κατακόρυφο ηλεκτρικό δίπολο, το οποίο βρίσκεται εντός του ημιάπειρου ομοιογενούς διηλεκτρικού χώρου (χώρος 2) του Σχήματος 3.10. Όπως και στην περίπτωση του Σχήματος 3.10, η απόσταση του διπόλου από τη διαχωριστική επιφάνεια συμβολίζεται με h . Για τον προσδιορισμό των άγνωστων ΗΜ πεδίων που αναπτύσσονται στους χώρους 1 και 2, εφαρμόζεται η MAS, όπως περιγράφεται ακολούθως.

3.3.2.2 Εφαρμογή της MAS

Όπως και στην περίπτωση του Σχήματος 3.10, απαιτούνται δύο σύνολα βοηθητικών πηγών για την περιγραφή των άγνωστων ΗΜ πεδίων στους χώρους 1 και 2. Οι βοηθητικές πηγές του πρώτου συνόλου, οι οποίες κείνται κάτωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας, ακτινοβολούν εντός άπειρου χώρου με τα χαρακτηριστικά του χώρου 1, ενώ οι βοηθητικές πηγές του δεύτερου συνόλου, οι οποίες κείνται άνωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας, ακτινοβολούν εντός άπειρου χώρου με τα χαρακτηριστικά του χώρου 2. Οι βοηθητικές πηγές τοποθετούνται όπως απεικονίζεται στα Σχήματα 3.11 και 3.12. Το ΗΜ πεδίο στο χώρο 1 περιγράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των ΗΜ πεδίων των βοηθητικών πηγών του πρώτου συνόλου, ενώ το ΗΜ πεδίο στο χώρο 2 περιγράφεται ως άθροισμα του ΗΜ πεδίου του διπόλου εντός άπειρου χώρου με τα χαρακτηριστικά του χώρου 2 και ενός γραμμικού συνδυασμού των ΗΜ πεδίων των βοηθητικών πηγών του δεύτερου συνόλου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα άγνωστα ΗΜ πεδία στους χώρους 1 και 2 δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{F}^{(1)}(\vec{r}) = \sum_{n=0}^N \sum_{s=1}^{N_n} w_{(n,s)}^{(1)} \vec{F}_{(n,s)}^{(1)}(\vec{r}), \quad (3.35\alpha)$$

$$\vec{F}^{(2)}(\vec{r}) = \vec{F}^{exc}(\vec{r}) + \sum_{n=0}^N \sum_{s=1}^{N_n} w_{(n,s)}^{(2)} \vec{F}_{(n,s)}^{(2)}(\vec{r}), \quad (3.35\beta)$$

όπου $\vec{F}^{(i)}$ είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου στο χώρο i , \vec{F}^{exc} είναι το αντίστοιχο πεδίο διέγερσης του διπόλου στη θέση $\vec{r}_h = -h\hat{z}$, ενώ $\vec{F}_{(n,s)}^{(i)}$ είναι το αντίστοιχο πεδίο της βοηθητικής πηγής του συνόλου i που καθορίζει το ζεύγος δεικτών (n, s) και είναι τοποθετημένη στο σημείο $(\rho_n, \phi_{(n,s)}, z_i)$ με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(n,s)}^{(i)}$, όπου ρ_n η ακτίνα του δακτυλίου βοηθητικών πηγών που δηλώνει ο δείκτης n και $\phi_{(n,s)}$ η γωνιακή θέση της βοηθητικής πηγής που καθορίζει το ζεύγος δεικτών (n, s) . Τα πεδία που υπεισέρχονται στις σχέσεις (3.35) προσδιορίζονται με απλή μεταφορά του πεδίου \vec{F}_i ενός στοιχειώδους ηλεκτρικού διπόλου, που είναι τοποθετημένο στο κέντρο ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτινοβολεί σε άπειρο χώρο με τα χαρακτηριστικά του χώρου i , ως εξής

$$\vec{F}^{exc}(\vec{r}) = \vec{F}_2(\vec{r} - \vec{r}_h), \quad (3.36\alpha)$$

$$\vec{F}_{(n,s)}^{(i)}(\vec{r}) = \vec{F}_i(\vec{r} - \vec{r}_{(n,s)}^{(i)}). \quad (3.36\beta)$$

Αξιοποιώντας τις σχέσεις (B.7) του Παραρτήματος Β, οι προηγούμενες σχέσεις εκφράζονται ως εξής

$$\vec{F}^{exc}(\vec{r}) = \vec{F}_2(\vec{r}; \vec{r}_h), \quad (3.37\alpha)$$

$$\vec{F}_{(n,s)}^{(i)}(\vec{r}) = \vec{F}_i(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)}^{(i)}). \quad (3.37\beta)$$

Για τις θέσεις των βοηθητικών πηγών ισχύουν όσα αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 3.2.2.2.

Οι άγνωστοι συντελεστές $w_n^{(i)}$ των αναπτυγμάτων των σχέσεων (3.35) προσδιορίζονται επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες των σχέσεων (3.14). Η διαδικασία επιβολής των οριακών συνθηκών των σχέσεων (3.14) σε διακριτά σημεία, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 3.2.2.2, οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

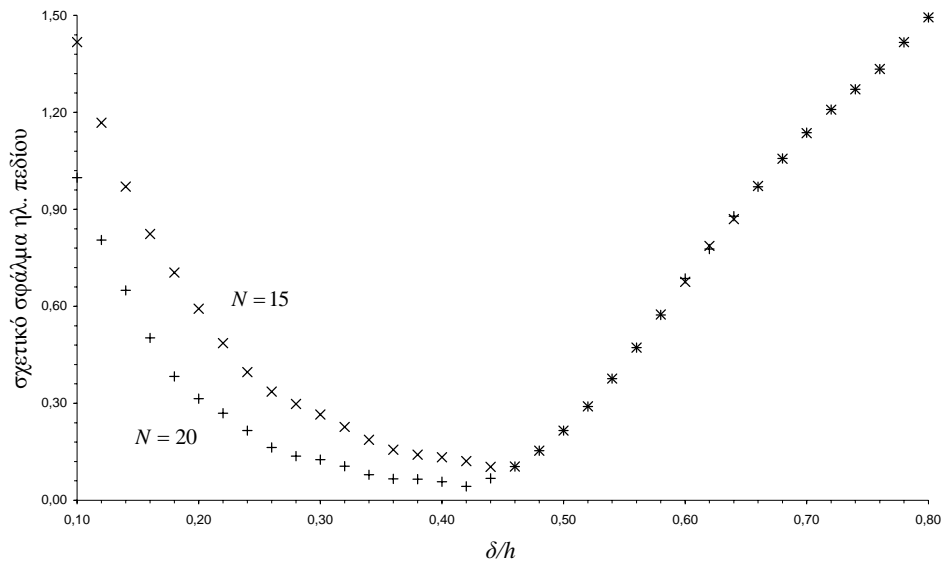
$$\sum_{n=0}^N (E_{n,m}^{(1)} w_n^{(1)} - E_{n,m}^{(2)} w_n^{(2)}) = e_m^{exc}, m = 0, 1, \dots, N, \quad (3.38\alpha)$$

$$\sum_{n=0}^N (H_{n,m}^{(1)} w_n^{(1)} - H_{n,m}^{(2)} w_n^{(2)}) = h_m^{exc}, m = 0, 1, \dots, N. \quad (3.38\beta)$$

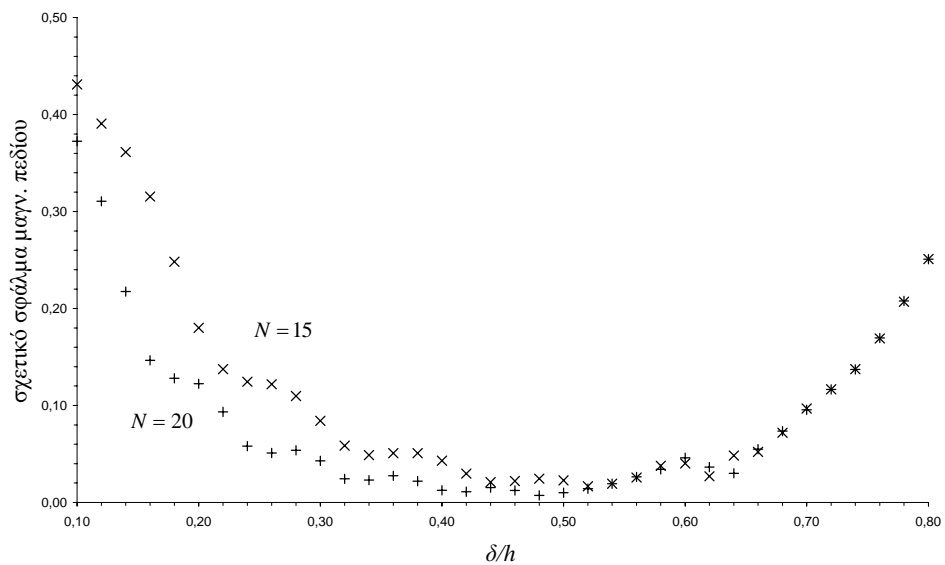
Οι συντελεστές που υπεισέρχονται στις εξισώσεις (3.38) ταυτίζονται με αυτούς των σχέσεων (3.16) και (3.18). Μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος των εξισώσεων (3.38), το ΗΜ πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου προσδιορίζεται άμεσα από τις σχέσεις (3.35)-(3.37).

Κατά πλήρη αντιστοιχία με αυτά που αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 3.2.2.2, η ποιότητα των λύσεων αποτιμάται εξετάζοντας τα σφάλματα των οριακών συνθηκών.

3.3.2.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα



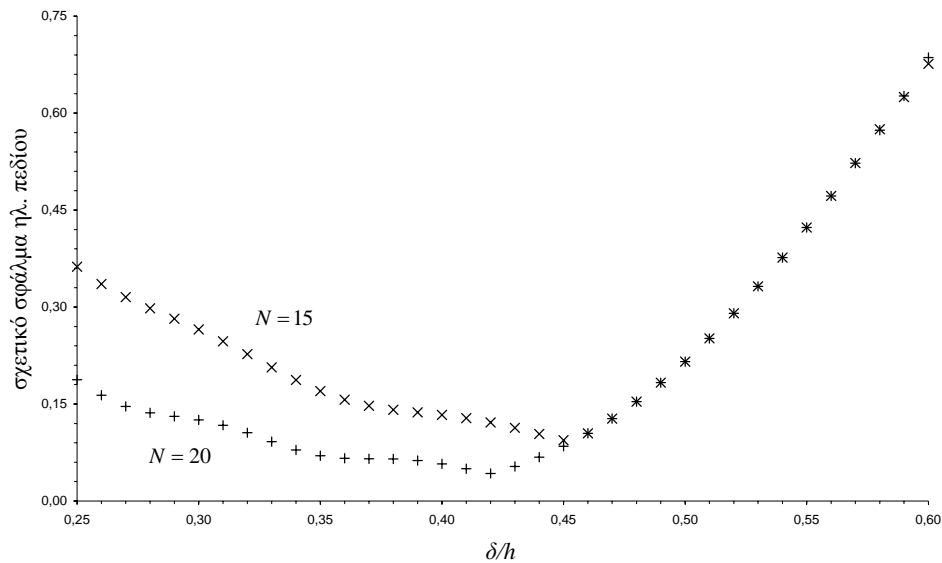
Σχήμα 3. 32. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14α) κατά μήκος του άξονα x , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.



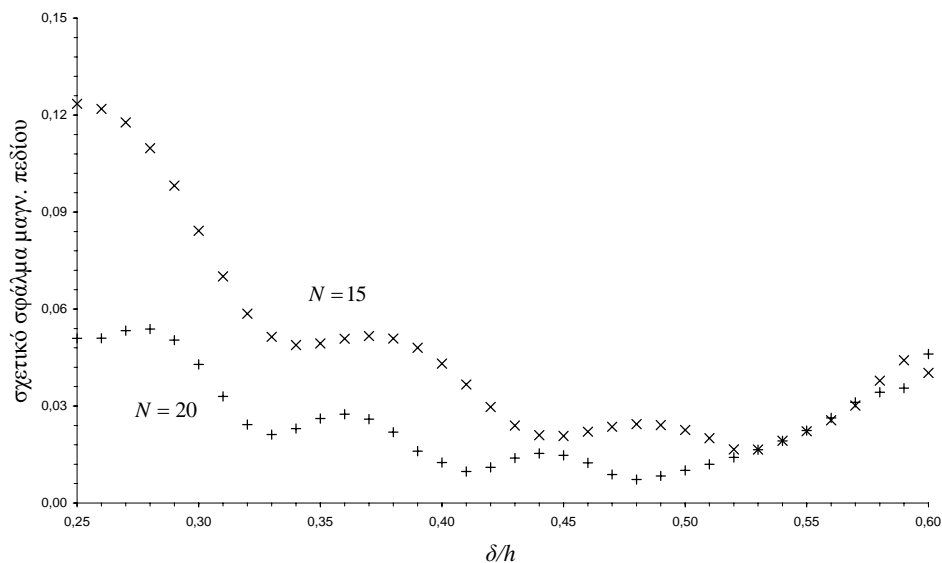
Σχήμα 3. 33. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14β) κατά μήκος του άξονα x , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.

Ακολούθως, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών και την ακρίβεια των λύσεων, σε σχέση με τις παραμέτρους N και δ . Όπως και στην περίπτωση της Παραγράφου 3.2.2, η συμπεριφορά σύγκλισης και η ακρίβεια των λύσεων εξαρτώνται ισχυρά από τις παραμέτρους N και δ , αφού σημαντικά σφάλματα μπορεί να εμφανιστούν είτε μεταξύ των σημείων

επιβολής των οριακών συνθηκών είτε πέραν των ορίων της περιοχής που αυτά καταλαμβάνουν.



Σχήμα 3. 34. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14a) κατά μήκος του άξονα x , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.



Σχήμα 3. 35. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.14b) κατά μήκος του άξονα x , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.

Όπως και στην περίπτωση της Παραγράφου 3.2.2, οι βοηθητικές πηγές τοποθετούνται σε θέσεις με $d_1 = d_2 = h$. Για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς των λύσεων, εκτελέστηκε μεγάλος αριθμός δοκιμών μεταβάλλοντας την απόσταση δ , για διαφορετικές τιμές του N . Στα Σχήματα 3.32 και 3.33 απεικονίζονται οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων

των οριακών συνθηκών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, αντίστοιχα, που αντιστοιχούν σε $N = 15$ και $N = 20$, ως προς την παράμετρο δ/h , για την περίπτωση ενός διπόλου με $h/\lambda = 0.25$, το οποίο βρίσκεται εντός τυπικού εδάφους με τις παραμέτρους της Παραγράφου 3.2.2.3. Ξεκινώντας από ιδιαίτερα πυκνές κατανομές των δακτυλίων βοηθητικών πηγών και αυξάνοντας την απόσταση δ , οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων μειώνονται, χωρίς, όμως, να παρουσιάζουν την κανονική συμπεριφορά των Σχημάτων 3.13 και 3.14. Στη συνέχεια, οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων αυξάνονται με την αύξηση της απόστασης δ . Η συμπεριφορά των κατανομών των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών επί της διαχωριστικής επιφάνειας είναι παρόμοια με αυτήν των Σχημάτων 3.15 και 3.16. Ωστόσο, στην περιοχή μεταβολής της απόστασης δ που εμφανίζονται σχετικά μικρά σφάλματα, οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων παρουσιάζουν ταλαντώσεις, όπως απεικονίζεται στα Σχήματα 3.34 και 3.35. Οι ταλαντώσεις αυτές οφείλονται στην έντονη χωρική ανομοιογένεια του ΗΜ πεδίου διέγερσης, η οποία είναι συνέπεια του γεγονότος ότι το δίπολο ακτινοβολεί εντός διηλεκτρικού χώρου με απώλειες. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, τα σφάλματα που εμφανίζονται μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών, αλλά και στην περιοχή με $\rho > N\delta + \delta/2$, εμφανίζουν ακανόνιστες αυξομειώσεις με τη μεταβολή της απόστασης δ . Ως εκ τούτου, η αναζήτηση της βέλτιστης απόστασης δ , για την οποία ελαχιστοποιούνται οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων, καθίσταται εξαιρετικά χρονοβόρα, καθώς απαιτείται πολύ μεγάλος αριθμός δοκιμών για τον προσδιορισμό της. Εξάλλου, η ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων δεν είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την εξαγωγή αποδεκτής λύσης, αφού οι λύσεις που αντιστοιχούν σε ένα αρκετά μεγάλο εύρος μεταβολής της απόστασης δ είναι συγκρίσιμες, τουλάχιστον όσον αφορά τα εξαγόμενα αποτελέσματα για τις ποσότητες ενδιαφέροντος.

3.3.3 Οριζόντιο Ηλεκτρικό Δίπολο

3.3.3.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος τριών διαστάσεων συνίσταται σε ένα βραχύ οριζόντιο ηλεκτρικό δίπολο, το οποίο βρίσκεται εντός του ημιάπειρου ομοιογενούς διηλεκτρικού χώρου (χώρος 2) του Σχήματος 3.19. Όπως και στην περίπτωση του Σχήματος 3.19, η απόσταση του διπόλου από τη διαχωριστική επιφάνεια συμβολίζεται με h . Για τον προσδιορισμό των άγνωστων ΗΜ πεδίων που αναπτύσσονται στους χώρους 1 και 2, εφαρμόζεται η MAS, όπως περιγράφεται ακολούθως.

3.3.3.2 Εφαρμογή της MAS

Όπως και στην περίπτωση του Σχήματος 3.19, απαιτούνται δύο σύνολα βοηθητικών πηγών για την περιγραφή των άγνωστων ΗΜ πεδίων στους χώρους 1 και 2. Οι βοηθητικές πηγές του πρώτου συνόλου, οι οποίες κείνται κάτωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας, ακτινοβολούν εντός άπειρου χώρου με τα χαρακτηριστικά του χώρου 1, ενώ οι βοηθητικές πηγές του δεύτερου συνόλου, οι οποίες κείνται άνωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας, ακτινοβολούν εντός άπειρου χώρου με τα χαρακτηριστικά του χώρου 2. Οι βοηθητικές πηγές τοποθετούνται όπως απεικονίζεται στα Σχήματα 3.20 και 3.21. Το ΗΜ πεδίο στο χώρο 1 περιγράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των ΗΜ πεδίων των βοηθητικών πηγών του πρώτου συνόλου, ενώ το ΗΜ πεδίο στο χώρο 2 περιγράφεται ως άθροισμα του ΗΜ πεδίου του διπόλου εντός άπειρου χώρου με τα χαρακτηριστικά του χώρου 2 και ενός γραμμικού συνδυασμού των ΗΜ πεδίων των βοηθητικών πηγών του δεύτερου συνόλου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα άγνωστα ΗΜ πεδία στους χώρους 1 και 2 δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{F}^{(1)}(\vec{r}) = \sum_{n=-N_x}^{N_x} \sum_{s=-N_z}^{N_z} w_{(n,s)}^{(1)} \vec{F}_{(n,s)}^{(1)}(\vec{r}), \quad (3.39\alpha)$$

$$\vec{F}^{(2)}(\vec{r}) = \vec{F}^{exc}(\vec{r}) + \sum_{n=-N_x}^{N_x} \sum_{s=-N_z}^{N_z} w_{(n,s)}^{(2)} \vec{F}_{(n,s)}^{(2)}(\vec{r}), \quad (3.39\beta)$$

όπου $\vec{F}^{(i)}$ είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου στο χώρο i , \vec{F}^{exc} είναι το αντίστοιχο πεδίο διέγερσης του διπόλου στη θέση $\vec{r}_h = -h\hat{y}$, ενώ $\vec{F}_{(n,s)}^{(i)}$ είναι το αντίστοιχο πεδίο της βοηθητικής πηγής του συνόλου i που καθορίζει το ζεύγος δεικτών (n, s) και είναι τοποθετημένη στο σημείο (x_n, y_i, z_s) με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(n,s)}^{(i)}$, όπου x_n η θέση του υποσυνόλου συγγραμμικών βοηθητικών πηγών που δηλώνει ο δείκτης n και z_s η θέση της βοηθητικής πηγής του ίδιου υποσυνόλου που καθορίζει ο δείκτης s . Τα πεδία που υπεισέρχονται στις σχέσεις (3.39) προσδιορίζονται με απλή μεταφορά του πεδίου \vec{F}_i ενός στοιχειώδους ηλεκτρικού διπόλου, που είναι τοποθετημένο στο κέντρο ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτινοβολεί σε άπειρο χώρο με τα χαρακτηριστικά του χώρου i , ως εξής

$$\vec{F}^{exc}(\vec{r}) = \vec{F}_2(\vec{r} - \vec{r}_h), \quad (3.40\alpha)$$

$$\vec{F}_{(n,s)}^{(i)}(\vec{r}) = \vec{F}_i(\vec{r} - \vec{r}_{(n,s)}^{(i)}). \quad (3.40\beta)$$

Αξιοποιώντας τις σχέσεις (B.6) του Παραρτήματος Β, οι προηγούμενες σχέσεις εκφράζονται ως εξής

$$\vec{F}^{exc}(\vec{r}) = \vec{F}_2(\vec{r}; \vec{r}_h), \quad (3.41\alpha)$$

$$\vec{F}_{(n,s)}^{(i)}(\vec{r}) = \vec{F}_i(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)}^{(i)}). \quad (3.41\beta)$$

Για τις θέσεις των βοηθητικών πηγών ισχύουν όσα αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 3.2.3.2.

Οι άγνωστοι συντελεστές $w_{(n,s)}^{(i)}$ των αναπτυγμάτων των σχέσεων (3.39) προσδιορίζονται επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες των σχέσεων (3.24). Η διαδικασία επιβολής των οριακών συνθηκών των σχέσεων (3.24) σε διακριτά σημεία, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 3.2.3.2, οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

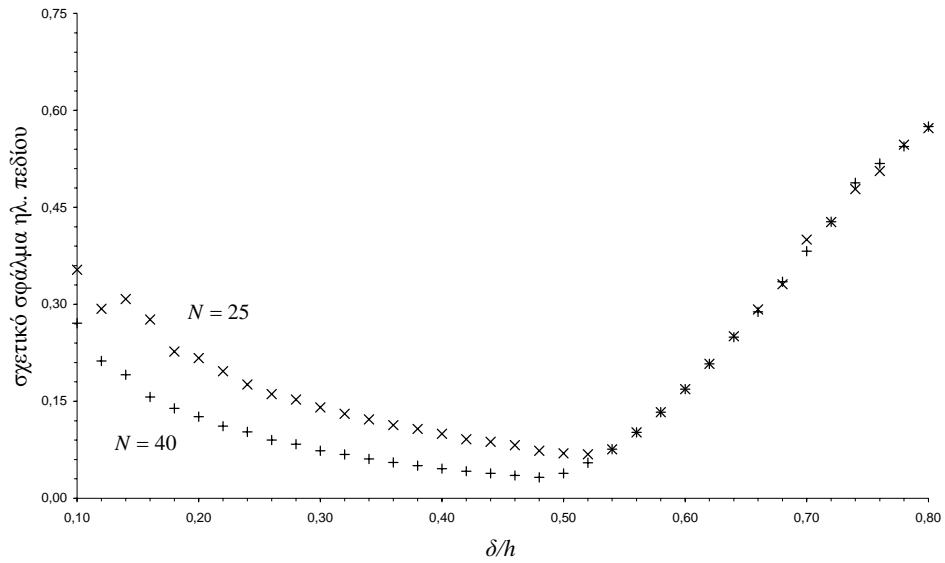
$$\sum_{n=0}^{N_x} \sum_{s=0}^{N_z} \left(E_{(n,s),(m,t)}^{(1)} w_{(n,s)}^{(1)} - E_{(n,s),(m,t)}^{(2)} w_{(n,s)}^{(2)} \right) = e_{(m,t)}^{exc}, \quad \begin{cases} m = 0, 1, \dots, N_x \\ t = 0, 1, \dots, N_z \end{cases}, \quad (3.42\alpha)$$

$$\sum_{n=0}^{N_x} \sum_{s=0}^{N_z} \left(H_{(n,s),(m,t)}^{(1)} w_{(n,s)}^{(1)} - H_{(n,s),(m,t)}^{(2)} w_{(n,s)}^{(2)} \right) = h_{(m,t)}^{exc}, \quad \begin{cases} m = 0, 1, \dots, N_x \\ t = 0, 1, \dots, N_z \end{cases}. \quad (3.42\beta)$$

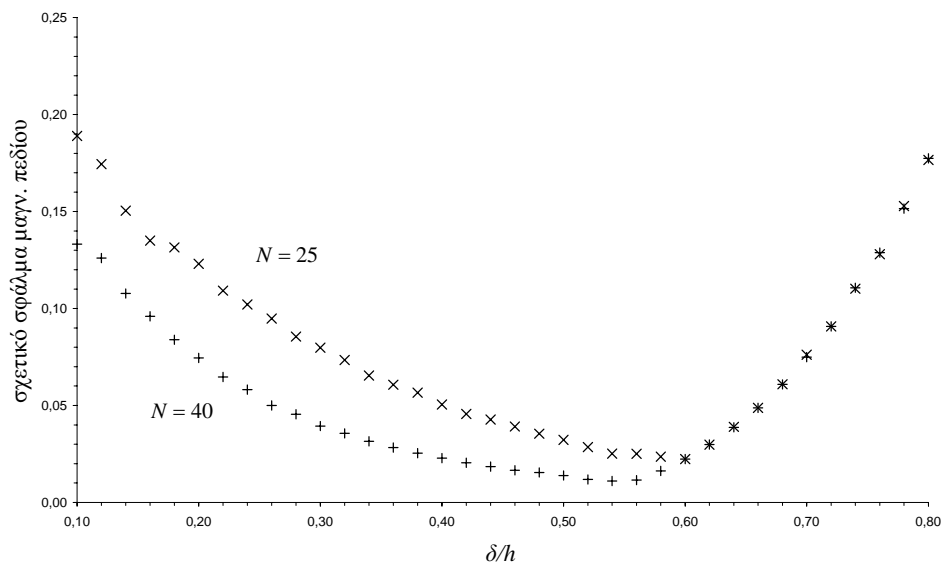
Οι συντελεστές που υπεισέρχονται στις εξισώσεις (3.42) ταυτίζονται με αυτούς των σχέσεων (3.26) και (3.28). Μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος των εξισώσεων (3.42), το ΗΜ πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου προσδιορίζεται άμεσα από τις σχέσεις (3.39)-(3.41).

Κατά πλήρη αντιστοιχία με αυτά που αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 3.2.3.2, η ποιότητα των λύσεων αποτιμάται εξετάζοντας τα σφάλματα των οριακών συνθηκών.

3.3.3.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

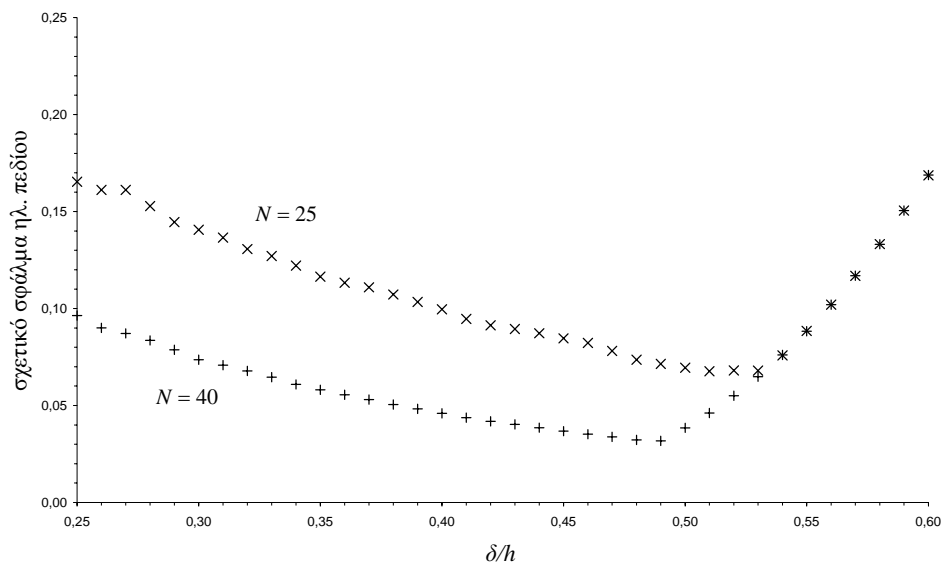


Σχήμα 3. 36. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24α) κατά μήκος του άξονα z , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.

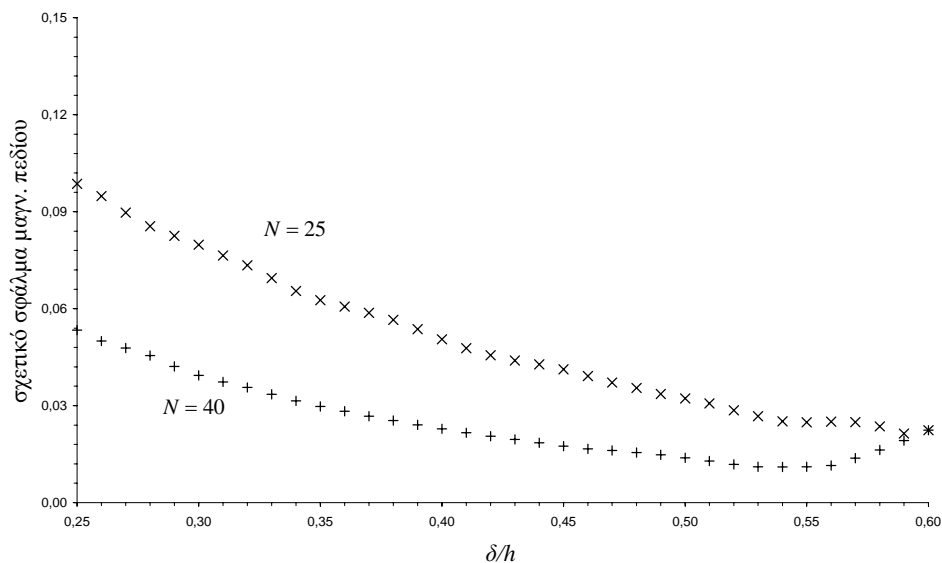


Σχήμα 3. 37. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24β) κατά μήκος του άξονα z , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.

Όπως και στην περίπτωση της Παραγράφου 3.2.3, οι βοηθητικές πηγές τοποθετούνται κατά τον απλούστερο δυνατό τρόπο, οπότε επιλέγεται $N_x = N_z = N$ και $\delta_x = \delta_z = \delta$.



Σχήμα 3. 38. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24α) κατά μήκος του άξονα z , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.



Σχήμα 3. 39. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.24β) κατά μήκος του άξονα z , για διαφορετικούς αριθμούς δακτυλίων βοηθητικών πηγών, ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.

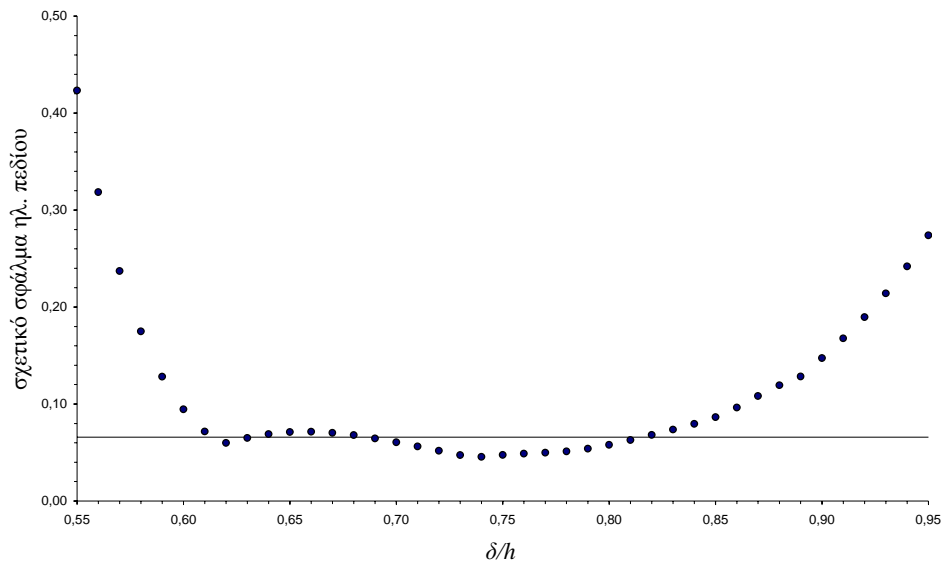
Ακολούθως, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών και την ακρίβεια των λύσεων, σε σχέση με τις παραμέτρους N και δ . Όπως και στην περίπτωση της Παραγράφου 3.2.3, η συμπεριφορά σύγκλισης και η ακρίβεια των λύσεων εξαρτώνται ισχυρά από τις παραμέτρους N και δ , αφού σημαντικά σφάλματα μπορεί να εμφανιστούν είτε μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών είτε πέραν των ορίων της περιοχής που αυτά καταλαμβάνουν.

Όπως και στην περίπτωση της Παραγράφου 3.2.3, οι βοηθητικές πηγές τοποθετούνται σε θέσεις με $d_1 = d_2 = h$. Για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς των λύσεων, εκτελέστηκε μεγάλος αριθμός δοκιμών μεταβάλλοντας την απόσταση δ , για διαφορετικές τιμές του N . Στα Σχήματα 3.36 και 3.37 απεικονίζονται οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, αντίστοιχα, που αντιστοιχούν σε $N = 25$ και $N = 40$, ως προς την παράμετρο δ/h , για την περίπτωση ενός διπόλου με $h/\lambda = 0.25$, το οποίο βρίσκεται εντός τυπικού εδάφους με τις παραμέτρους της Παραγράφου 3.2.3.3. Όπως και στην περίπτωση της Παραγράφου 3.2.3, όταν οι βοηθητικές πηγές κατανέμονται σε ίσες αποστάσεις κατά τους άξονες x και z , οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων εμφανίζονται κατά μήκος του άξονα z , τουλάχιστον όταν η απόσταση δ μεταβάλλεται στο διάστημα εντός του οποίου τα σφάλματα είναι αποδεκτά και οι λύσεις είναι αριθμητικά ευσταθείς. Για το λόγο αυτό, οι τιμές των σφαλμάτων που παρουσιάζονται αφορούν τις μέγιστες τιμές τους κατά μήκος του άξονα z . Ξεκινώντας από ιδιαίτερα πυκνές κατανομές των βοηθητικών πηγών και αυξάνοντας την απόσταση δ , οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων μειώνονται, χωρίς, όμως, να παρουσιάζουν την κανονική συμπεριφορά των Σχημάτων 3.22 και 3.23. Στη συνέχεια, οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων αυξάνονται με την αύξηση της απόστασης δ . Η συμπεριφορά των κατανομών των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών επί της διαχωριστικής επιφάνειας είναι παρόμοια με αυτήν των Σχημάτων 3.24 και 3.25. Ωστόσο, στην περιοχή μεταβολής της απόστασης δ που εμφανίζονται σχετικά μικρά σφάλματα, οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων παρουσιάζουν ταλαντώσεις, όπως απεικονίζεται στα Σχήματα 3.38 και 3.39. Οι ταλαντώσεις αυτές οφείλονται στην έντονη χωρική ανομοιογένεια του ΗΜ πεδίου διέγερσης, η οποία είναι συνέπεια του γεγονότος ότι το δίπολο ακτινοβολεί εντός διηλεκτρικού χώρου με απώλειες. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, τα σφάλματα που εμφανίζονται μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών, αλλά και στην περιοχή με $|x| > N\delta$ και $|z| > N\delta$, εμφανίζουν ακανόνιστες αυξομειώσεις με τη μεταβολή της απόστασης δ . Ως εκ τούτου, η αναζήτηση της βέλτιστης απόστασης δ , για την οποία ελαχιστοποιούνται οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων, καθίσταται εξαιρετικά χρονοβόρα, καθώς απαιτείται πολύ μεγάλος αριθμός δοκιμών για τον προσδιορισμό της. Εξάλλου, η ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων δεν είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την εξαγωγή αποδεκτής λύσης, αφού οι λύσεις που αντιστοιχούν σε ένα αρκετά μεγάλο εύρος μεταβολής της απόστασης δ είναι συγκρίσιμες, τουλάχιστον όσον αφορά τα εξαγόμενα αποτελέσματα για τις ποσότητες ενδιαφέροντος.

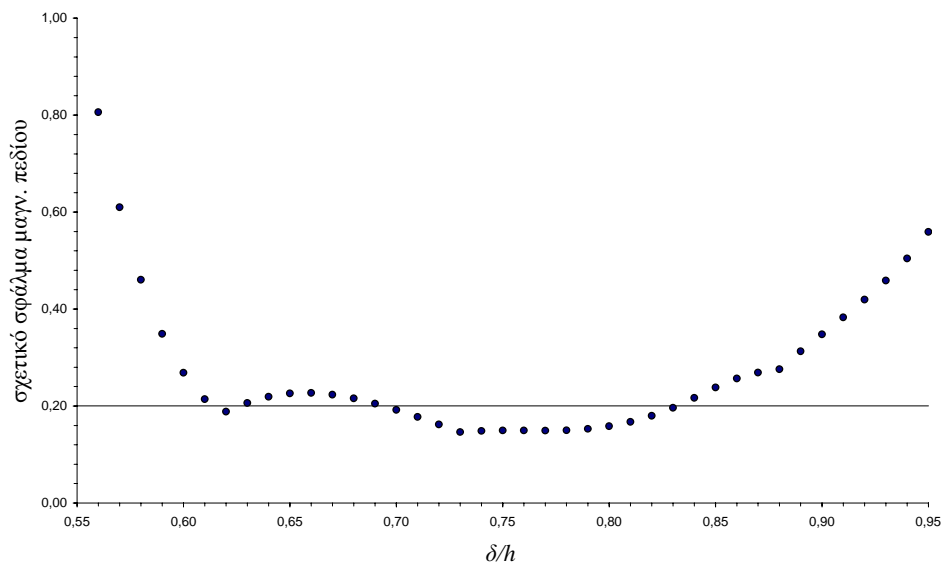
3.4 Βελτιστοποίηση Λύσεων

Όπως προαναφέρθηκε, η θεώρηση ομοιόμορφα κατανεμημένων βοηθητικών πηγών σε σταθερές αποστάσεις από τη διαχωριστική επιφάνεια δεν οδηγεί σε ολικά βέλτιστες λύσεις. Ακόμη και σε περιπτώσεις ομοιόμορφων κατανομών, διαφορετικές επιλογές των αποστάσεων των βοηθητικών πηγών από τη διαχωριστική επιφάνεια είναι δυνατόν να οδηγήσουν σε μικρότερα σφάλματα των οριακών συνθηκών από αυτά που προκύπτουν με $d_1 = d_2 = h$, διατηρώντας σταθερό τον αριθμό των βοηθητικών πηγών [25, 26]. Επιπρόσθετα, είναι τουλάχιστον διαισθητικά αναμενόμενο ότι υπάρχουν ανομοιόμορφες κατανομές των βοηθητικών πηγών που καταλήγουν σε ακόμη μικρότερα σφάλματα. Ακολούθως, διερευνάται η δυνατότητα προσδιορισμού λύσεων αξιοποιώντας τη φυσική αντίληψη και την εκ των προτέρων γνώση του χαρακτήρα της ακριβούς λύσης, για την περίπτωση του προβλήματος της Παραγράφου 3.2.1, κυρίως λόγω της απλότητας του και της ύπαρξης ακριβούς αναλυτικής λύσης. Αν και η σύγκριση των λύσεων γίνεται, συνήθως, με κάποια κριτήρια που συνδέονται με τα σφάλματα των οριακών συνθηκών, εδώ θα εξεταστούν και οι διαφορές των λύσεων ως προς την ακριβή λύση, καθώς δεν υπάρχει τρόπος απευθείας συσχέτισης ή αντιστοίχισης των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών με τα σφάλματα στον

υπολογισμό των HM πεδίων σε όλο το χώρο [27]. Ως εκ τούτου, η μείωση των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών δεν εγγυάται και την ουσιαστική βελτίωση της ποιότητας της λύσης.



Σχήμα 3. 40. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4α), για τις θέσεις των βοηθητικών πηγών των σχέσεων (3.43) και (3.44), ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.



Σχήμα 3. 41. Μέγιστες τιμές του σχετικού σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (3.4β), για τις θέσεις των βοηθητικών πηγών των σχέσεων (3.43) και (3.44), ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους.

Όσον αφορά το πρόβλημα του Σχήματος 3.1, οι τιμές που περιέχονται στον Πίνακα 3.1 αντιστοιχούν στις βέλτιστες λύσεις που προσδιορίστηκαν με $d_1 = d_2 = h$, μεταβάλλοντας την απόσταση δ , για διαφορετικές τιμές του N , έχοντας ως κριτήριο την ελαχιστοποίηση του γεωμετρικού μέσου των μέγιστων τιμών των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών των

σχέσεων (3.4). Ως εκ τούτου, οι λύσεις αυτές δεν είναι δυνατόν να θεωρηθούν ολικά βέλτιστες, αλλά απλώς υποβέλτιστες, αφού, όπως άλλωστε προαναφέρθηκε, άλλες επιλογές των αποστάσεων d_i , αλλά και μη ομοιόμορφες κατανομές των βοηθητικών πηγών, ενδέχεται να οδηγούν σε λύσεις με μικρότερα σφάλματα. Για τη διερεύνηση των δυνατοτήτων βελτιστοποίησης της λύσης του προβλήματος, εξετάστηκε η σύγκλιση των λύσεων όταν οι αποστάσεις d_i επιλεγούν με φυσικά κριτήρια. Πιο συγκεκριμένα, η απόσταση d_1 μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η κεντρική βοηθητική πηγή του πρώτου συνόλου να τοποθετηθεί στη θέση του μιγαδικού ειδώλου της πρωτεύουσας πηγής. Στην προκειμένη περίπτωση, η θέση του μιγαδικού ειδώλου βρίσκεται σε μιγαδική απόσταση από τη συνοριακή επιφάνεια, η οποία υπολογίζεται κατά προσέγγιση από τη σχέση [9]

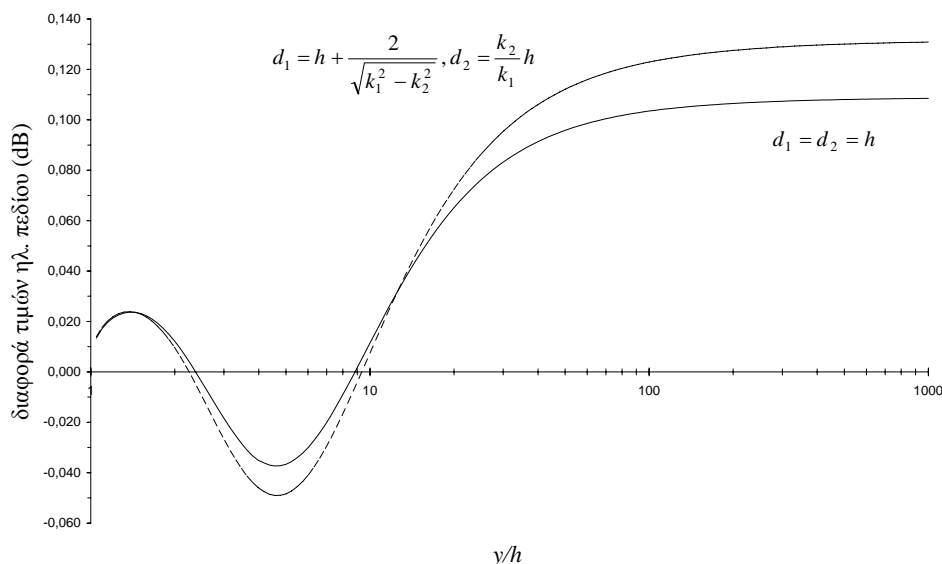
$$d_1 = h + \frac{2}{\sqrt{k_1^2 - k_2^2}}. \quad (3.43)$$

Σύμφωνα με τις αρχές της οπτικής [28, 29], η απόσταση d_2 μπορεί να επιλεγεί ίση με

$$d_2 = \frac{k_2}{k_1} h. \quad (3.44)$$

Εκτενείς δοκιμές κατέδειξαν ότι, όταν οι αποστάσεις d_i επιλεγούν σύμφωνα με τις σχέσεις (3.43) και (3.44), η συμπεριφορά των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών μεταβάλλεται σημαντικά ως προς αυτή που απεικονίζεται στα Σχήματα 3.4 και 3.5, καθώς οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων εμφανίζουν έντονες ταλαντώσεις με τη μεταβολή της απόστασης δ , καθιστώντας ιδιαίτερα χρονοβόρα τη διαδικασία εύρεσης της βέλτιστης απόστασης δ που οδηγεί στα μικρότερα σφάλματα. Επιπρόσθετα, οι προκύπτουσες λύσεις δεν διαφοροποιούνται σημαντικά από αυτές που εξάγονται με $d_1 = d_2 = h$, αφού οι τιμές των σφαλμάτων είναι ελαφρώς μικρότερες των ελάχιστων σφαλμάτων που προκύπτουν για $d_1 = d_2 = h$ [25]. Συνεπώς, η επιλογή των αποστάσεων d_i βάσει των σχέσεων (3.43) και (3.44) είναι ασύμφορη σε σχέση με την επιλογή $d_1 = d_2 = h$, εξαιτίας του σημαντικά μεγάλου αριθμού δοκιμών που πρέπει να πραγματοποιηθούν για τον προσδιορισμό της απόστασης δ που οδηγεί στην ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων, έναντι του μικρού αριθμού δοκιμών που αρκούν όταν $d_1 = d_2 = h$. Άλλωστε, στην περίπτωση κατά την οποία επιλεγεί $d_1 = d_2 = h$, για την ικανοποίηση δεδομένου κριτηρίου που σχετίζεται με τα σφάλματα των οριακών συνθηκών, είναι δυνατή η αύξηση του N και η διερεύνηση των τιμών των σφαλμάτων που προκύπτουν σε μια σχετικά μικρή περιοχή μεταβολής της απόστασης δ , η οποία μπορεί να εκτιμηθεί πραγματοποιώντας λίγες δοκιμές για κάποια δοκιμαστική τιμή του N . Βεβαίως, είναι άξιο αναφοράς ότι, για μικρές τιμές του N , οι διαφορές στις τιμές των σφαλμάτων, οι οποίες αντιστοιχούν στις διαφορετικές επιλογές των αποστάσεων d_i , μπορεί να είναι σημαντικές και η αξιοποίηση των σχέσεων (3.43) και (3.44) να οδηγήσει σε λύσεις πολύ μικρότερων σφαλμάτων. Πάντως, για μικρές τιμές του N , τα σφάλματα των οριακών συνθηκών είναι σημαντικά μεγάλα σε κάθε περίπτωση, οπότε η ακρίβεια των λύσεων πρέπει να αποτιμηθεί βάσει πρόσθετων κριτηρίων. Για τον έλεγχο αυτών των υποθέσεων και τη σύγκριση των λύσεων, εξετάστηκε μια ακραία περίπτωση με $N = 5$. Στην περίπτωση κατά την οποία αξιοποιούνται οι σχέσεις (3.43) και (3.44), οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών, οι οποίες προκύπτουν μεταβάλλοντας την απόσταση δ , απεικονίζονται στα Σχήματα 3.40 και 3.41, μαζί με τις στάθμες των αντίστοιχων σφαλμάτων που αντιστοιχούν στην καλύτερη λύση που εξήχθη για $d_1 = d_2 = h$. Είναι προφανές ότι η πρώτη επιλογή βελτιώνει τα σφάλματα των λύσεων για μικρές τιμές του N , ενώ η ταλάντωση των σφαλμάτων δεν είναι σημαντική και, ως εκ τούτου, δεν επιβαρύνει σημαντικά τη διαδικασία προσδιορισμού της λύσης με τα ελάχιστα σφάλματα. Συνεπώς, οι θέσεις των σχέσεων (3.43)

και (3.44) είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν, σε συνδυασμό με μικρές τιμές του N , για το γρήγορο προσδιορισμό λύσεων αρκετά ικανοποιητικής ακρίβειας. Οι διαφορές σε dB του ηλεκτρικού πεδίου σε σχέση με την ακριβή αναλυτική λύση, οι οποίες προκύπτουν για $N = 5$ και $\delta/h = 0.72$, απεικονίζονται στο Σχήμα 3.42 κατά μήκος του άξονα y . Παρά το γεγονός ότι η λύση που προκύπτει αξιοποιώντας τις σχέσεις (3.43) και (3.44) χαρακτηρίζεται από μικρότερα σφάλματα σε σχέση με τη λύση που προκύπτει με $d_1 = d_2 = h$ (5.2% έναντι 6.6% για το σφάλμα της οριακής συνθήκης του ηλεκτρικού πεδίου, 16.2% έναντι 19.9% για το σφάλμα της οριακής συνθήκης του μαγνητικού πεδίου), η διαφορά της από την ακριβή λύση είναι μεγαλύτερη. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει ότι τα σφάλματα των οριακών συνθηκών δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αποκλειστικά κριτήρια για τη σύγκριση των λύσεων, αφού δεν είναι δυνατόν να συνδεθούν άμεσα με τα σφάλματα των λύσεων σε σχέση με την, εν γένει άγνωστη, ακριβή λύση. Όσο δε αφορά τις θέσεις των σχέσεων (3.43) και (3.44) που εξετάστηκαν, από τα αποτελέσματα προέκυψε ότι δεν οδηγούν σε υπέρτερες λύσεις σε σχέση με αυτές που προκύπτουν για συμβατικές επιλογές των θέσεων των βοηθητικών πηγών, ενώ αυξάνουν και τον απαιτούμενο αριθμό δοκιμών που πρέπει να εκτελεστούν για την εύρεση της λύσης με τα μικρότερα σφάλματα, τα οποία αντιστοιχούν σε δεδομένη επιλογή του N . Ως εκ τούτου, η αξιοποίηση τους δεν ενδείκνυται, εκτός αν αναζητηθούν λύσεις για πολύ μικρές τιμές του N , οπότε το απαιτούμενο πλήθος δοκιμών καθίσταται συγκρίσιμο με αυτό των συμβατικών επιλογών.



Σχήμα 3. 42. Απεικόνιση της διαφοράς σε dB μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου της ακριβούς λύσης και των λύσεων της MAS κατά μήκος του άξονα y .

Όπως προαναφέρθηκε, οι λύσεις που προκύπτουν αξιοποιώντας τις σχέσεις (3.43) και (3.44) δεν είναι εξασφαλισμένο ότι χαρακτηρίζονται από τα μικρότερα δυνατά σφάλματα των οριακών συνθηκών, καθώς μπορεί να υπάρχουν ανομοιόμορφες κατανομές των βοηθητικών πηγών που να οδηγούν σε λύσεις μικρότερων σφαλμάτων. Η εύρεση τέτοιων κατανομών είναι δυνατή με την εφαρμογή τεχνικών βελτιστοποίησης, θεωρώντας τις θέσεις των βοηθητικών πηγών ως ανεξάρτητα διανύσματα, με συντεταγμένες στο πραγματικό ή στο μιγαδικό επίπεδο, και ορίζοντας κατάλληλες συναρτήσεις κόστους, που συνδέονται ευθέως με τα σφάλματα των οριακών συνθηκών [30-32]. Ωστόσο, η εφαρμογή τέτοιων τεχνικών συνεπάγεται σημαντικό πρόσθετο υπολογιστικό κόστος, το οποίο μπορεί να αυξάνει δραματικά τον απαιτούμενο χρόνο για την ολοκλήρωση της επίλυσης του προβλήματος. Εναλλακτικά, αντί της εφαρμογής τεχνικών βελτιστοποίησης, έχει προταθεί η τοποθέτηση

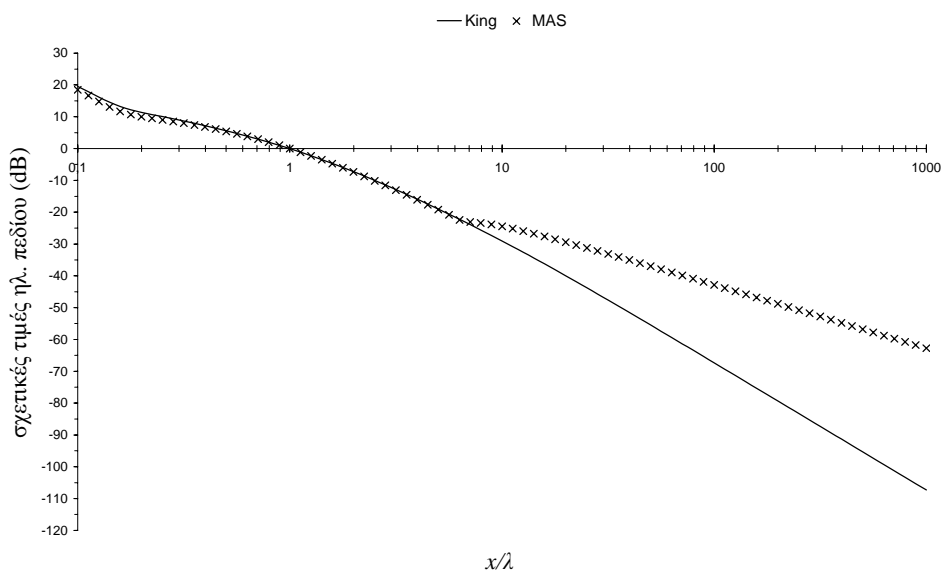
των βοηθητικών πηγών σε θέσεις που αναμένονται να βρίσκονται κοντά στις βέλτιστες και προσδιορίζονται μέσω των καυστικών επιφανειών [28, 29]. Όμως, ακόμη και σε αυτήν την περίπτωση, δεν παρέχεται κάποιος κανόνας που να καθορίζει τις ακριβείς θέσεις των βοηθητικών πηγών επί των καυστικών επιφανειών, οπότε και πάλι απαιτείται η διενέργεια δοκιμών ή η εφαρμογή κατάλληλου αλγορίθμου βελτιστοποίησης, για τον προσδιορισμό της κατανομής που καταλήγει στα μικρότερα σφάλματα. Αν και οι καυστικές επιφάνειες για το πρόβλημα που εξετάστηκε παραπάνω έχουν παρατεθεί στη σχετική αναφορά [28], δεν έχουν παρουσιαστεί οι ακριβείς θέσεις των βοηθητικών πηγών επί των καυστικών επιφανειών ούτε έχουν παρατεθεί αποτελέσματα για τα προκύπτοντα σφάλματα. Συνεπώς, δεν είναι δυνατή η απευθείας σύγκριση τους με τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Μάλιστα, πολυάριθμες δοκιμές φανέρωσαν την εξαιρετικά ισχυρή εξάρτηση των σφαλμάτων από την απόσταση μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών, ενώ κατέδειξαν και κατανομές σφαλμάτων με συμπεριφορά υποδεέστερη αυτής που αντιστοιχεί στις συμβατικές επιλογές για την τοποθέτηση των βοηθητικών πηγών, ιδιαίτερα πέραν των ορίων της περιοχής που καταλαμβάνουν τα σημεία επιβολής των οριακών συνθηκών.

3.5 Συμπεριφορά των Λύσεων στο Μακρινό Πεδίο

Όπως έχει αναφερθεί στα Κεφάλαια 1 και 2, η MAS έχει ένα δυνητικά πολύ ευρύ πεδίο εφαρμογών, αν και έχει κυρίως εφαρμοστεί για την επίλυση προβλημάτων σκέδασης από κλειστά σώματα. Είναι δε αξιοσημείωτο ότι γίνεται συχνά νύξη στη σχετική βιβλιογραφία για δυσκολίες στην εφαρμογή της MAS σε προβλήματα που εμπλέκουν ανοικτά χωρία, αν και σπανίως γίνεται σαφής αναφορά στη φύση αυτών των δυσκολιών. Από την ενδελεχή εξέταση της συμπεριφοράς σύγκλισης των λύσεων της MAS, καθώς και των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών, για τα προβλήματα που εξετάστηκαν στο παρόν Κεφάλαιο, καθίσταται σαφές ότι μια σημαντική δυσκολία στην εφαρμογή της MAS άπτεται της τοποθέτησης των βοηθητικών πηγών, καθόσον η συμπεριφορά των λύσεων επηρεάζεται ισχυρά τόσο από τα σφάλματα μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών όσο και εκτός της περιοχής που αυτά καταλαμβάνουν. Παρά το γεγονός αυτό, από τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν, φαίνεται ότι η κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων καθορισμού των θέσεων των βοηθητικών πηγών οδηγεί σε λύσεις με καλή συμπεριφορά, αφού εμφανίζουν μειούμενα σφάλματα με την αύξηση του πλήθους των βοηθητικών πηγών και αριθμητική ευστάθεια των αποτελεσμάτων, τουλάχιστον στην περιοχή του κοντινού πεδίου. Μάλιστα, όπως φαίνεται από τα Σχήματα 3.17 και 3.26, αλλά και τους Πίνακες 3.2 και 3.3, οι λύσεις χαρακτηρίζονται από αριθμητική ευστάθεια επί ενός μεγάλου εύρους μεταβολής των παραμέτρων καθορισμού των κατανομών των βοηθητικών πηγών, παρά το γεγονός ότι τα αντίστοιχα σφάλματα μεταβάλλονται σημαντικά. Επιπρόσθετα, διεξοδικοί έλεγχοι των κατανομών των σφαλμάτων επί της διαχωριστικής επιφάνειας έδειξαν ότι τα σφάλματα εμφανίζουν μέγιστο, τοπικό ή ολικό, πλησίον του πλέον απομακρυσμένου σημείου επιβολής των οριακών συνθηκών, ενώ τείνουν στο μηδέν (με ή χωρίς ταλαντώσεις) με την αύξηση της απόστασης από αυτό. Ωστόσο, όπως θα δειχθεί ακολούθως, το γεγονός αυτό δεν εξασφαλίζει ότι το σφάλμα στον υπολογισμό του μακρινού πεδίου τείνει στο μηδέν. Όπως έχει άλλωστε προαναφερθεί, είναι εξαιρετικά δύσκολο, αν όχι αδύνατο, να συσχετιστούν τα σφάλματα των οριακών συνθηκών με τα σφάλματα που εμφανίζει η λύση της MAS ως προς την ακριβή λύση. Ως εκ τούτου, η μείωση του σφάλματος με την αύξηση της απόστασης από την περιοχή που καταλαμβάνουν τα σημεία επιβολής των οριακών συνθηκών δεν πρέπει να συσχετίζεται με την ακρίβεια της λύσης στην περιοχή του μακρινού πεδίου.

Ακολούθως, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν το μακρινό πεδίο ακτινοβολίας, για τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν στις Παραγράφους 3.2.2 και 3.2.3. Αρχικά, εξετάζεται η περίπτωση του κατακόρυφου ηλεκτρικού διπόλου υπεράνω του εδάφους, που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.10. Οι τιμές της μέτρου της συνιστώσας E_z του ηλεκτρικού πεδίου, που αντιστοιχούν στις παραμέτρους του Σχήματος 3.18, απεικονίζονται συναρτήσει της παραμέτρου x/λ στο Σχήμα 3.43. Οι παράμετροι της λύσης και τα

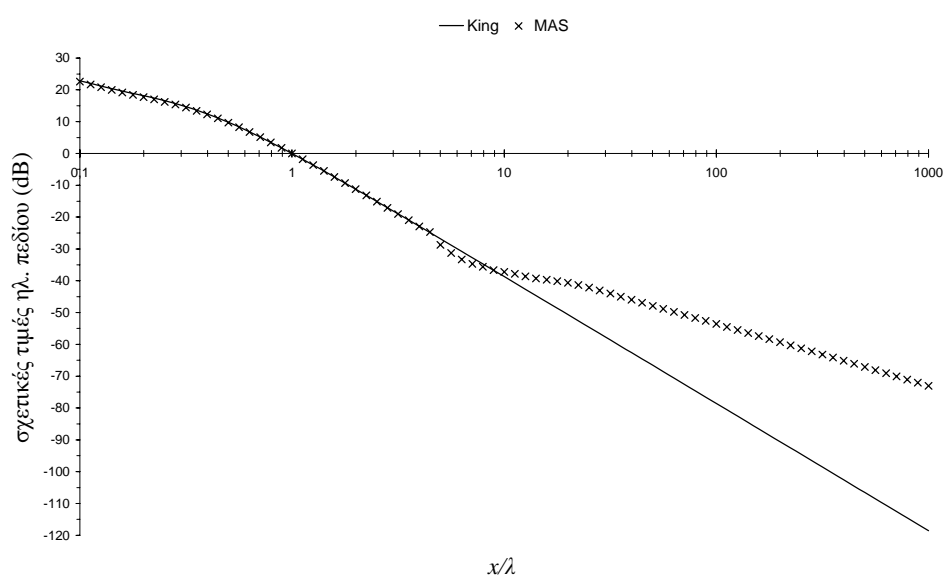
αντίστοιχα σφάλματα των οριακών συνθηκών περιέχονται στον Πίνακα 3.4. Η απεικόνιση αφορά σημεία με $z = h/2$, ενώ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου απεικονίζεται σε dB σχετικά προς την ένταση που προκύπτει για $x = \lambda$. Στο Σχήμα 3.43 απεικονίζονται και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την προσεγγιστική αναλυτική λύση (βλ. Κεφάλαιο 8 στη σχετική αναφορά [24]). Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων, είναι καταφανές ότι η λύση της MAS βρίσκεται σε εξαιρετική συμφωνία με τη λύση αναφοράς έως μια απόσταση με $x/\lambda \sim 7$, η οποία αντιστοιχεί στην απόσταση του πλέον απομακρυσμένου σημείου επιβολής των οριακών συνθηκών, καθόσον $N\delta + \delta/2 \approx 6.26\lambda$. Ωστόσο, για $x/\lambda > 7$, η λύση της MAS αδυνατεί να προβλέψει την αναμενόμενη συμπεριφορά εξασθένησης, παρά το γεγονός ότι τα σφάλματα των οριακών συνθηκών μειώνονται προοδευτικά με την αύξηση της απόστασης, όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.15 και 3.16. Αντίστοιχη συμπεριφορά παρουσιάζουν και οι λύσεις για την περίπτωση του οριζόντιου ηλεκτρικού διπόλου υπεράνω του εδάφους, που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.19. Οι τιμές του μέτρου της συνιστώσας E_z του ηλεκτρικού πεδίου, που αντιστοιχούν στις παραμέτρους του Σχήματος 3.27, απεικονίζονται συναρτήσει της παραμέτρου x/λ στο Σχήμα 3.44. Οι παράμετροι της λύσης και τα αντίστοιχα σφάλματα των οριακών συνθηκών περιέχονται στον Πίνακα 3.4. Η απεικόνιση αφορά σημεία με $y = h/2$, ενώ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου απεικονίζεται σε dB σχετικά προς την ένταση που προκύπτει για $x = \lambda$. Στο Σχήμα 3.44 απεικονίζονται και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την προσεγγιστική αναλυτική λύση (βλ. Κεφάλαιο 9 στη σχετική αναφορά [24]). Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων, είναι καταφανές ότι η λύση της MAS βρίσκεται σε εξαιρετική συμφωνία με τη λύση αναφοράς έως μια απόσταση με $x/\lambda \sim 5$, η οποία αντιστοιχεί στην απόσταση του πλέον απομακρυσμένου σημείου επιβολής των οριακών συνθηκών, καθόσον $N\delta = 4.5\lambda$. Ωστόσο, για $x/\lambda > 5$, η λύση της MAS αδυνατεί να προβλέψει την αναμενόμενη συμπεριφορά εξασθένησης, παρά το γεγονός ότι τα σφάλματα των οριακών συνθηκών μειώνονται προοδευτικά με την αύξηση της απόστασης, όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.24 και 3.25.



Σχήμα 3. 43. Σύγκριση του ηλεκτρικού πεδίου της προσεγγιστικής αναλυτικής λύσης και της λύσης της MAS, ως συνάρτηση της απόστασης από τον άξονα του διπόλου κατά μήκος του άξονα x . Απεικόνιση σε dB ως προς κοινή απόσταση αναφοράς.

Πίνακας 3. 4. Παράμετροι των λύσεων της MAS και μέγιστες τιμές των σχετικών σφαλμάτων των οριακών συνθηκών.

	N	δ/h	Μέγιστες Τιμές Σφαλμάτων Οριακών Συνθηκών (%)	
			Ηλεκτρικό Πεδίο	Μαγνητικό Πεδίο
VED, Σχήμα 3.43	45	0.55	0.956	5.238
HED, Σχήμα 3.44	30	0.60	2.127	2.154



Σχήμα 3. 44. Σύγκριση του ηλεκτρικού πεδίου της προσεγγιστικής αναλυτικής λύσης και της λύσης της MAS, ως συνάρτηση της απόστασης από τον άξονα του διπόλου κατά μήκος του άξονα x . Απεικόνιση σε dB ως προς κοινή απόσταση αναφοράς.

Από τα Σχήματα 3.43 και 3.44 συνάγεται ότι οι λύσεις της MAS είναι ακριβείς μόνο σε μια περιοχή γύρω από τον άξονα του υπό εξέταση διπόλου, η οποία καθορίζεται, σε κάθε περίπτωση, από τις θέσεις των βοηθητικών πηγών και των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών. Ως εκ τούτου, η MAS δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί άμεσα για τον υπολογισμό του μακρινού πεδίου σε περιπτώσεις προβλημάτων που εμπλέκουν άπειρες συνοριακές επιφάνειες. Αν και η αδυναμία πρόβλεψης της κλίσης εξασθένησης στην περιοχή του μακρινού πεδίου είναι εύκολο να διαπιστωθεί, δεν έχει αναφερθεί στη σχετική βιβλιογραφία (π.χ. [28, 33]), παρά το γεγονός ότι συνιστά ένα σημαντικό περιορισμό της MAS. Δοθέντος ότι η MAS βασίζεται στη χρήση διακριτών βοηθητικών πηγών, ο εν λόγω περιορισμός θεωρείται εγγενής. Στην πράξη, είναι δυνατή η άρση αυτού του περιορισμού επιλέγοντας κατάλληλα τις παραμέτρους N και δ , έτσι ώστε η απόσταση $N\delta$ να είναι αρκούντως μεγάλη, για την εξασφάλιση της ακρίβειας της λύσης μέχρι κάποια απόσταση στην περιοχή του μακρινού πεδίου. Στη συνέχεια, το HM πεδίο μπορεί να προσδιοριστεί κατά προσέγγιση παντού, ακόμη και σε αποστάσεις μεγαλύτερες από $N\delta$, αξιοποιώντας την εκ των προτέρων γνώση για την κλίση εξασθένησης στην περιοχή του μακρινού πεδίου. Βεβαίως, η τεχνική

αυτή δεν μπορεί να τύχει γενικής εφαρμογής και καθολικής αποδοχής, καθόσον υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή η συμπεριφορά της ακριβούς λύσης στο μακρινό πεδίο (π.χ. δίπολο εντός κυματοδηγού απείρων πλακών). Στις περιπτώσεις αυτές, η χρήση της MAS ενδείκνυται μόνο για τον προσδιορισμό μεγεθών που σχετίζονται με το κοντινό πεδίο.

3.6 Αναφορές

- [1] J. R. Wait, “The ancient and modern history of EM ground-wave propagation”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 40, No. 5, pp. 7-24, 1998.
- [2] J. E. Hipp, “Soil electromagnetic parameters as functions of frequency, soil density, and soil moisture”, *IEEE Proceedings*, Vol. 62, No. 1, pp. 98-103, 1974.
- [3] I.T.U. Recommendation 527-3, *Electrical Characteristics of the Surface of the Earth*, 1992.
- [4] R. W. P. King, *Theory of Linear Antennas*, Harvard University Press, 1956.
- [5] J. R. Wait, “Characteristics of antennas over lossy earth”, *Antenna Theory*, Edited by R. E. Collin and F. J. Zucker, McGraw-Hill, 1969.
- [6] J. R. Wait, *Electromagnetic Waves in Stratified Media*, Pergamon, 1970.
- [7] R. W. P. King, G. S. Smith, M. Owens and T. T. Wu, *Antennas in Matter*, MIT Press, 1981.
- [8] R. W. P. King, M. Owens and T. T. Wu, *Lateral Electromagnetic Waves*, Springer-Verlag, 1992.
- [9] P. R. Bannister, “Applications of complex image theory”, *Radio Science*, Vol. 21, No. 4, pp. 605-616, 1986.
- [10] J. R. Wait, “Complex image theory-revisited”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 33, No. 4, pp. 27-29, 1991.
- [11] I. V. Lindell, J. J. Hänninen and R. Pirjola, “Wait’s complex-image principle generalized to arbitrary sources”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 48, No. 10, pp. 1618-1624, 2000.
- [12] R. W. P. King and B. Sandler, “Subsurface communications between dipoles in general media”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 25, No. 6, pp. 770-775, 1977.
- [13] R. W. P. King, “Lateral electromagnetic waves along plane boundaries: a summarizing approach”, *IEEE Proceedings*, Vol. 72, No. 5, pp. 595-611, 1984.
- [14] J. R. Wait, “Antennas in the geophysical environment-Some examples”, *IEEE Proceedings*, Vol. 80, No. 1, pp. 200-203, 1992.
- [15] G. J. Burke, A. J. Poggio, J. C. Logan and J. W. Rockway, “NEC-Numerical Electromagnetics Code for antennas and scattering”, *Proceedings of the IEEE AP-S International Symposium 1979*, pp. 147-150.
- [16] E. K. Miller and G. J. Burke, “Low-frequency computational electromagnetics for antenna analysis”, *IEEE Proceedings*, Vol. 80, No. 1, pp. 24-43, 1992.
- [17] G. J. Burke, *Numerical Electromagnetics Code-NEC4: Method of Moments*, Lawrence Livermore National Laboratory, 1992.
- [18] A. Fourie and D. Nitch, *SuperNEC Manuals*, Poynting Software, 2002.

- [19] M. M. Weiner, "Validation of the Numerical Electromagnetics Code (NEC) for antenna wire elements in proximity to earth", *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, Vol. 8, No. 2, pp. 44-71, 1993.
- [20] D. B. Davidson and H. T. Mouton, "Validations of, and limitations on, the use of NEC-4 for radiation from antennas buried within a homogeneous half-space", *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, Vol. 13, No. 3, pp. 302-309, 1998.
- [21] D. I. Kaklamani and H. T. Anastassiou, "Aspects of the method of auxiliary sources (MAS) in computational electromagnetics", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 44, No. 3, pp. 48-64, 2002.
- [22] P. J. Papakanellos, I. I. Heretakis and C. N. Capsalis, "On the convergence properties of the method of auxiliary sources in 2D problems with open boundaries", *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 39, No. 6, pp.518-522, 2003.
- [23] P. J. Papakanellos, I. I. Heretakis and C. N. Capsalis, "On the convergence properties of the method of auxiliary sources in 3D problems with open boundaries", *International Journal of Numerical Modeling*, under review.
- [24] R. W. P. King, G. J. Fikioris and R. B. Mack, *Cylindrical Antennas and Arrays*, Cambridge University Press, 2002.
- [25] P. J. Papakanellos, D. I. Kaklamani and C. N. Capsalis, "Radiation of an infinite current source above a semi-infinite lossy ground using fictitious current auxiliary sources in conjunction with complex image theory techniques", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 49, No. 10, pp. 1491-1503, 2001.
- [26] P. J. Papakanellos and C. N. Capsalis, "Analysis of a vertical electric dipole above a planar dissipative ground using the method of auxiliary sources", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 17, No. 5, pp. 551-570, 2003.
- [27] A. C. Ludwig, "Validating scattering calculations using boundary value and internal field checks", *Proceedings of the IEEE AP-S International Symposium 1988*, pp. 1363-1365.
- [28] R. S. Zaridze, R. Jobava, G. Bit-Babik, D. Karkasbadze, D. P. Economou and N. K. Uzunoglu, "The method of auxiliary sources and scattered field singularities (caustics)", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 12, No. 11, pp. 1491-1507, 1998.
- [29] R. Zaridze, G. Bit-Babik, K. Tavzarashvili, D. P. Economou and N. K. Uzunoglu, "Wave field singularity aspects in large-size scatterers and inverse problems", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 50, No. 1, pp. 50-58, 2002.
- [30] I. I. Heretakis, P. J. Papakanellos and C. N. Capsalis, "Analysis of electromagnetic scattering by infinite conducting cylinders of arbitrary smooth cross section using a genetically optimized MAS technique (GA/MAS)", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 16, No. 11, pp. 1555-1572, 2002.
- [31] I. I. Heretakis and C. N. Capsalis, "Radiation of an infinite current source in the presence of an infinite perfectly conducting cylinder of arbitrary smooth cross section using a genetically optimized MAS technique", *2nd International Conference on Biological Effects of Electromagnetic Fields*, pp. 781-789, 2002.
- [32] I. I. Heretakis, P. J. Papakanellos and C. N. Capsalis, "A stochastically optimized adaptive procedure for the location of MAS auxiliary monopoles: The case of electromagnetic scattering by dielectric cylinders", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, under review.

- [33] S. G. Shepherd and F. Shubitidze, “Method of auxiliary sources for calculating the magnetic and electric fields induced in a layered earth”, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, Vol. 65, No. 10, pp. 1151-1160, 2003.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή της MAS για την Ανάλυση Κεραιών Σύρματος και Στοιχειοκεραιών στον Ελεύθερο Χώρο

4.1 Εισαγωγή

Οι κυλινδρικές κεραιές σύρματος είναι αναμφισβήτητα οι ευρύτερα διαδεδομένες κεραιές στις πρακτικές εφαρμογές. Ειδικότερα, η πλέον συνηθισμένη κεραιά σύρματος είναι το ηλεκτρικό δίπολο, η ανακάλυψη του οποίου έγινε από τον Hertz το 1887, μόλις δύο δεκαετίες μετά τη διατύπωση των εξισώσεων του Maxwell. Η πειραματική επιβεβαίωση του παραγόμενου ΗΜ πεδίου από το δίπολο ώθησε πολλούς ερευνητές στην ανάπτυξη κεραιών, κυρίως για την επίτευξη ασύρματης επικοινωνίας μεταξύ απομακρυσμένων περιοχών, ενώ γέννησε μεγάλο θεωρητικό ενδιαφέρον για την ανάλυση των κεραιών και τη μελέτη του ΗΜ πεδίου που παράγεται κατά την εκπομπή τους.

Τις πρώτες δεκαετίες του 20^{ου} αιώνα, πληθώρα ερευνητών μελέτησαν την ακτινοβολία από τα δίπολα, κυρίως σε όρους ισχύος εκπομπής και ισοδύναμης αντίστασης ακτινοβολίας, θεωρώντας απλοποιημένα φυσικά μοντέλα περιγραφής των διπόλων. Λίγο αργότερα, οι έρευνες στράφηκαν στον υπολογισμό του ακτινοβολουμένου ΗΜ πεδίου σε μεγάλες αποστάσεις από το δίπολο, όπως και στην εκτίμηση της σύνθετης αντίστασης εισόδου που εμφανίζει το δίπολο στους ακροδέκτες σύνδεσης της γεννήτριας διέγερσης. Οι έρευνες αυτές σταδιακά οδήγησαν τους επιστήμονες στην υιοθέτηση ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος κατά μήκος του διπόλου, καθώς και στη θεώρηση της λεγόμενης «επαγόμενης ηλεκτρεγερτικής δύναμης» (induced electromotive force), για τον προσδιορισμό των μεγεθών ενδιαφέροντος. Ωστόσο, από τη σύγκριση πειραματικών και θεωρητικών αποτελεσμάτων για τη σύνθετη αντίσταση εισόδου, κατέστη φανερό ότι η θεώρηση αυτή οδηγεί σε σχετικά ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο σε περιπτώσεις πολύ λεπτών διπόλων που λειτουργούν κοντά στο συντονισμό, ενώ αποτυγχάνει να προβλέψει τη συμπεριφορά του διπόλου σε διαφορετικές περιπτώσεις, με εξαίρεση τα διαγράμματα ακτινοβολίας. Λεπτομέρειες που αφορούν αυτές τις ερευνητικές προσπάθειες και την εξέλιξη των πρώιμων μεθόδων ανάλυσης διπόλων υπάρχουν σε πληθώρα αναφορών στη σχετική βιβλιογραφία [1-3].

Τα αμέσως επόμενα χρόνια, σημειώθηκαν σημαντικές εξελίξεις στις μεθόδους ανάλυσης του διπόλου, οι οποίες εστιάστηκαν στον ακριβή προσδιορισμό της κατανομής ρεύματος και στη μελέτη των χαρακτηριστικών του ως πομπού και δέκτη. Οι πρώτες τέτοιες μέθοδοι βασίστηκαν σε επαναληπτικές μεταβολικές τεχνικές που στόχευαν στον προσδιορισμό λύσεων σε μορφή σειράς για την ολοκληρωτική εξίσωση Hallén, την οποία ικανοποιεί η ακριβής κατανομή ρεύματος και προκύπτει ικανοποιώντας τη συνθήκη συνέχειας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου. Αν και η αριθμητική σταθεροποίηση της σύνθετης αγωγιμότητας ή αντίστασης εισόδου, όπως υπολογίζεται με εφαρμογή των επαναληπτικών μεθόδων, επιτυγχάνεται, συνήθως, μετά από σχετικά μικρό αριθμό επαναλήψεων [4], ο αναλυτικός υπολογισμός του παραγόμενου ΗΜ πεδίου παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες, ενώ η πολυπλοκότητα τους καθιστά εξαιρετικά δύσκολη τη γενίκευσή τους για τη μελέτη συζευγμένων διπόλων. Εξαιτίας αυτών των

δυσκολιών, οι έρευνες στράφηκαν προς τον προσδιορισμό προσεγγιστικών αναλυτικών λύσεων για την κατανομή ρεύματος, όπως είναι οι γνωστές αναλυτικές εκφράσεις τριών και δύο όρων τριγωνομετρικών συναρτήσεων (three-term και two-term theory, αντίστοιχα), από τις οποίες μπορεί να υπολογιστεί και το παραγόμενο HM πεδίο σε κλειστή μορφή, ενώ είναι δυνατή και η γενίκευσή τους για την ανάλυση συζευγμένων διπόλων [3, 5-7]. Οι αναλυτικές αυτές λύσεις ισχύουν με πολύ καλή ακρίβεια επί ενός μεγάλου εύρους μεταβολής της ακτίνας του διπόλου και για σχετικά μικρό μήκος, ενώ έχουν τροποποιηθεί κατάλληλα και για δίπολα μεγάλου μήκους.

Από τα μέσα της δεκαετίας του 1960, η ανάπτυξη των υπολογιστικών συστημάτων κατέστησε δυνατή την επίλυση γραμμικών συστημάτων μέσω κατάλληλων αλγορίθμων. Το γεγονός αυτό επέδρασε καταλυτικά στην ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων για την ανάλυση ευθύγραμμων, τμηματικά ευθύγραμμων, καθώς και καμπυλόγραμμων κεραιών σύρματος [8-11]. Η πλειονότητα των μεθόδων αυτών, οι οποίες υπάγονται στη MoM που αναφέρθηκε στην Παράγραφο 1.4.1, βασίζονται στην προσέγγιση της άγνωστης κατανομής ρεύματος κατά μήκος της κεραίας από μια υπέρθεση κατάλληλων συναρτήσεων βάσης. Οι συναρτήσεις βάσης μπορεί να είναι χωρικά εντοπισμένες σε ένα μικρό τμήμα της κεραίας (sub-domain basis functions) ή να εκτείνονται σε όλο το μήκος της (entire-domain basis functions). Οι άγνωστοι συντελεστές βαρύτητας των σχετικών αναπτυγμάτων προκύπτουν εφαρμόζοντας κάποια από τις τεχνικές που αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 1.3.2. Είναι άξιο αναφοράς ότι, τα τελευταία χρόνια, έγιναν εμπορικά διαθέσιμες διάφορες εκδόσεις του υπολογιστικού κώδικα NEC (Numerical Electromagnetics Code) [12-15], ο οποίος παρέχει τη δυνατότητα ανάλυσης κεραιών σύρματος αυθαίρετου σχήματος, καθώς και μεγάλου πλήθους συζευγμένων κεραιών.

Εναλλακτικά προς τις παραπάνω μεθόδους, είναι δυνατή η ανάλυση κεραιών σύρματος με εφαρμογή της MAS. Αν και η MAS έχει εφαρμοστεί για την ανάλυση διπολικών κεραιών στο παρελθόν [16], τα χαρακτηριστικά σύγκλισης και η ακρίβεια των λύσεων δεν έχουν εξεταστεί κατά συστηματικό τρόπο. Αξίζει, πάντως, να σημειωθεί ότι η εφαρμογή της MAS για την ανάλυση κεραιών σύρματος οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα για τους συντελεστές βαρύτητας των βοηθητικών πηγών, το οποίο είναι σχεδόν όμοιο με αυτό που προκύπτει με εφαρμογή της MoM χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βάσης που αντιστοιχούν στον τύπο των βοηθητικών πηγών και σημειακή επιβολή της οριακής συνθήκης. Η ομοιότητα αυτή αποδίδεται στο γεγονός ότι η MoM εφαρμόζεται, τυπικά, στη βάση της προσέγγισης λεπτού σύρματος (thin wire approximation), η οποία είναι εννοιολογικά συναφής προς τις βασικές αρχές της MAS. Εξάλλου, όπως θα φανεί και παρακάτω, υπάρχουν και κάποιες σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο μεθόδων, οι οποίες καθιστούν αναγκαίο το διαχωρισμό τους. Η ανάλυση κεραιών με εφαρμογή της MAS είναι σημαντική και για έναν επιπλέον λόγο, ο οποίος άπτεται της δυνατότητας προσέγγισης πιο πολύπλοκων προβλημάτων, τα οποία συνίστανται στην αλληλεπίδραση κεραιών με αγωγίμα ή διηλεκτρικά σώματα, με αποκλειστική χρήση της MAS. Αν και τα προβλήματα που εμπλέκουν κεραίες και αγωγίμα ή διηλεκτρικά σώματα είναι δυνατόν να επιλυθούν μέσω υβριδικών τεχνικών MoM/MAS [17], η υβριδοποίηση συνεπάγεται αύξηση της πολυπλοκότητας κατάστρωσης των εξισώσεων του προβλήματος, η οποία είναι δυνατόν να αποφευχθεί αν η κεραία μοντελοποιηθεί μέσω της MAS. Οι λόγοι αυτοί αποτέλεσαν το κίνητρο για τη μελέτη της δυνατότητας ανάλυσης κεραιών σύρματος και στοιχειοκεραιών μέσω της MAS.

Στο παρόν Κεφάλαιο, εξετάζονται προβλήματα ακτινοβολίας και σκέδασης απλών κεραιών σύρματος και στοιχειοκεραιών, για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς και την εξέταση της ακρίβειας των λύσεων της MAS. Ακολούθως, εξετάζονται οι παρακάτω κεραίες και στοιχειοκεραίες:

- Λεπτό δίπολο που τροφοδοτείται από πηγή τάσης.
- Ομοαξονικά τροφοδοτούμενο μονόπολο υπεράνω τέλειου εδάφους.
- Λεπτό δίπολο που λειτουργεί ως δέκτης στον ελεύθερο χώρο.
- Στοιχειοκεραίες παράλληλων διπόλων.
- Συζευγμένα δίπολα που λειτουργούν ως πομποδέκτες.
- Παχύ δίπολο που τροφοδοτείται από πηγή τάσης.

Τα προαναφερθέντα προβλήματα επιλέχθηκαν με κριτήριο την απλότητα, το μεγάλο θεωρητικό και πρακτικό τους ενδιαφέρον, καθώς και τη διαθεσιμότητα αποτελεσμάτων στη βιβλιογραφία, τα οποία έχουν προκύψει ανεξάρτητα μέσω άλλων μεθόδων, αλλά και πειραματικών δεδομένων, για την επιβεβαίωση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων της MAS.

4.2 Δίπολο Λεπτού Σύρματος με Τροφοδοσία Πηγής Τάσης Διακένου (Gap Voltage Source)

4.2.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος συνίσταται σε ένα ηλεκτρικά λεπτό δίπολο μήκους L και ακτίνας a (με $a \ll L$ και $a \ll \lambda$) στον ελεύθερο χώρο, το οποίο τροφοδοτείται από μια πηγή τάσης V_g κυκλικής συχνότητας $\omega = 2\pi f$, η οποία επιβάλλει ένα πεδίο διέγερσης κατά μήκος ενός διακένου με κέντρο στο σημείο z_g και εύρος Δ_g , όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1. Το κέντρο του διπόλου βρίσκεται στο κέντρο του συστήματος συντεταγμένων, ενώ ο άξονας του ταυτίζεται με τον άξονα z . Η ένταση του πεδίου διέγερσης κατά μήκος του διακένου E_z^g σχετίζεται με την τάση τροφοδότησης ως εξής

$$V_g = - \int_{z_g - \Delta_g/2}^{z_g + \Delta_g/2} E_z^g(z) dz. \quad (4.1)$$

Όταν το εύρος του διακένου είναι αρκούντως μικρό, το πεδίο διέγερσης μπορεί να θεωρηθεί σταθερό κατά μήκος του διακένου, οπότε

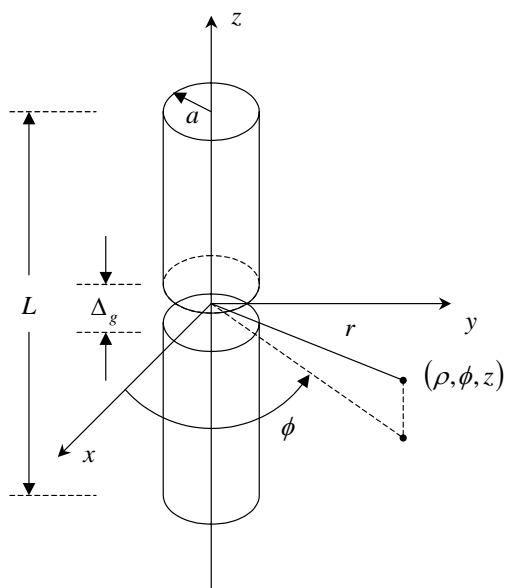
$$E_z^g(z) = \begin{cases} -\frac{V_g}{\Delta_g}, & |z - z_g| < \frac{\Delta_g}{2} \\ 0, & \frac{\Delta_g}{2} < |z - z_g| \leq \frac{L}{2} \end{cases}. \quad (4.2)$$

Αυτό το μοντέλο διέγερσης έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως, κυρίως λόγω της απλότητας του, για την ανάλυση διπόλων σε λειτουργία εκπομπής. Όταν το εύρος του διακένου τείνει στο μηδέν ($\Delta_g \rightarrow 0$), η πηγή παράγει κρουστικό πεδίο διέγερσης, το οποίο είναι ανάλογο της κρουστικής συνάρτησης $\delta(\bullet)$ και εκφράζεται από τη σχέση

$$E_z^g(z) = -V_g \delta(z - z_g). \quad (4.3)$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι το κρουστικό πεδίο διέγερσης έχει χρησιμοποιηθεί ευρύτατα για την ανάλυση του διπόλου κατά έναν εξιδανικευμένο τρόπο, χωρίς το αποτέλεσμα της ανάλυσης να εξαρτάται από την ακριβή φύση της διέγερσης. Στην περίπτωση αυτή, τα αποτελέσματα που λαμβάνονται είναι δυνατόν να διορθωθούν κατάλληλα, ούτως ώστε να συμπεριληφθεί η εξάρτηση από το εύρος του διακένου και η επίδραση της γραμμής μεταφοράς ([2], Κεφάλαια 2 και 3). Πάντως, αξίζει να αναφερθεί ότι το κρουστικό πεδίο διέγερσης συνεπάγεται άπειρη τιμή φανταστικού μέρους του ρεύματος στο σημείο τροφοδότησης, λόγω της άπειρης χωρητικότητας που εμφανίζεται στο διάκενο (knife-edge capacitance). Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, οι μεταβολικές μέθοδοι που έχουν εφαρμοστεί για τον υπολογισμό του ρεύματος είναι αποκλίνουσες όσον αφορά το φανταστικό μέρος του ρεύματος εισόδου. Εκτός από το παλμικό και το κρουστικό πεδίο διέγερσης, έχουν προταθεί

και άλλα μοντέλα πεδίων διέγερσης [18-21], τα οποία είναι πιο ρεαλιστικά και οδηγούν σε ακριβέστερα αποτελέσματα σε σχέση με πειραματικά δεδομένα.

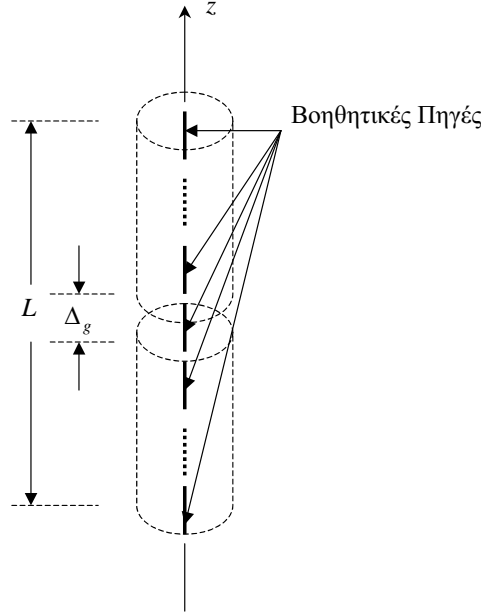


Σχήμα 4. 1. Γεωμετρία διπόλου που τροφοδοτείται από πηγή τάσης διακένου.

4.2.2 Εφαρμογή της MAS

Σύμφωνα με τις βασικές αρχές της MAS, το άγνωστο HM πεδίο σε κάθε περιοχή του προβλήματος εκφράζεται ως υπέρθεση των HM πεδίων που παράγονται από ένα σύνολο βοηθητικών πηγών, που είναι τοποθετημένες εκτός των ορίων της αντίστοιχης περιοχής. Για την περίπτωση του Σχήματος 4.1, ένα σύνολο βοηθητικών πηγών εντός του διπόλου αρκεί για την περιγραφή του ακτινοβολούμενου HM πεδίου, αφού το HM πεδίο εντός του διπόλου είναι μηδενικό. Οι βοηθητικές πηγές μπορεί να είναι οποιουδήποτε τύπου, αρκεί τα παραγόμενα HM πεδία να αποτελούν λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στο κενό. Συνήθως, ως βοηθητικές πηγές χρησιμοποιούνται στοιχειώδη ηλεκτρικά δίπολα (δίπολα απειροστά μικρού μήκους), τα οποία κατανέμονται ομοιόμορφα και σύμμορφα προς το σχήμα της υπό εξέταση δομής [22]. Ωστόσο, διαφορετικοί τύποι βοηθητικών πηγών και ανομοιόμορφες κατανομές των θέσεων τους είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν, ανάλογα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του εκάστοτε προβλήματος, προκειμένου να επιταχυνθεί η σύγκλιση των λύσεων και να βελτιωθεί η ακρίβεια τους. Για το πρόβλημα που εξετάζεται εδώ, οι βοηθητικές πηγές θεωρούνται ομοιόμορφα κατανομημένες κατά μήκος του άξονα z , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2. Ο αριθμός των βοηθητικών πηγών θεωρείται περιττός και ίσος με $2N + 1$, ενώ θα μπορούσε να επιλεγεί άρτιος, χωρίς ουσιαστικές διαφοροποιήσεις στα παρακάτω. Ως βοηθητικές πηγές είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν στοιχειώδη ηλεκτρικά δίπολα. Εναλλακτικά, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν ηλεκτρικά δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος, ενώ είναι επιτρεπτός και ο συνδυασμός των δύο τύπων. Στην πρώτη περίπτωση, οι ακραίες βοηθητικές πηγές τοποθετούνται ακριβώς στα άκρα του διπόλου, λόγω ακριβώς του σημειακού χαρακτήρα τους. Στη δεύτερη περίπτωση, στα άκρα του διπόλου είναι δυνατόν να τοποθετηθούν ηλεκτρικά δίπολα ή κατάλληλα προσανατολισμένα μονόπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος, τα οποία περιγράφονται στο Παράρτημα Β. Περισσότερα για αυτές τις επιλογές θα αναφερθούν παρακάτω. Πάντως, σε κάθε περίπτωση, το σύνολο των βοηθητικών πηγών περιγράφουν το HM πεδίο που παράγεται υπό την παραδοχή ότι η ακτινοβολία από τις επιφάνειες στα άκρα του διπόλου είναι αμελητέα. Σε αντίθετη περίπτωση, θα απαιτείτο ακριβής καθορισμός της γεωμετρίας των άκρων του

διπόλου, η θεώρηση κατάλληλων βοηθητικών πηγών για την περιγραφή του HM πεδίου που παράγεται από αυτά, καθώς και η επιβολή της οριακής συνθήκης μηδενισμού του εφαπτομενικού ηλεκτρικού πεδίου σε αυτά. Αυτή η προσέγγιση δεν έχει εμφανιστεί ακόμη στη βιβλιογραφία, κυρίως λόγω των σημαντικών δυσκολιών που παρουσιάζει στην εφαρμογή. Αντίθετα, η εφαρμογή της μεθόδου MMP είναι πιο εύκολη στην περίπτωση αυτή, εξαιτίας της διαθεσιμότητας γραμμικών και σφαιρικών πολυπόλων [23, 24], συνδυασμοί των οποίων μπορούν να περιγράψουν τα HM πεδία οποιασδήποτε πόλωσης.



Σχήμα 4. 2. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του άγνωστου HM πεδίου.

Το ακτινοβολούμενο HM πεδίο περιγράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των HM πεδίων των βοηθητικών πηγών, συνεπώς

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{n=-N}^N w_n \vec{F}_n(\vec{r}), \quad (4.4)$$

όπου \vec{F} είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου στον κενό χώρο, ενώ \vec{F}_n είναι το αντίστοιχο πεδίο της βοηθητικής πηγής που καθορίζει ο δείκτης n και είναι τοποθετημένη στο σημείο $(0,0,z_n)$ με διάνυσμα θέσης \vec{r}_n . Οι βοηθητικές πηγές θεωρούνται ομοιόμορφα καταναμημένες στις θέσεις $z_n = n\delta$, όπου $\delta = L/(2N)$ η απόσταση μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών. Ανομοιόμορφες κατανομές των βοηθητικών πηγών δεν αποκλείονται βάσει των φυσικών αρχών της MAS, αν και οποιαδήποτε τέτοια επιλογή οδηγεί σε αύξηση των παραμέτρων προς διερεύνηση για τη μελέτη των χαρακτηριστικών των λύσεων και, ως εκ τούτου, αποφεύγεται.

Τα πεδία \vec{F}_n προσδιορίζονται με απλή μεταφορά του πεδίου \vec{F}_S μιας βοηθητικής πηγής, που είναι τοποθετημένη στο κέντρο ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτινοβολεί σε άπειρο κενό χώρο, ως εξής

$$\vec{F}_n(\vec{r}) = \vec{F}_S(\vec{r} - \vec{r}_n). \quad (4.5)$$

Όταν ως βοηθητικές πηγές επιλέγονται στοιχειώδη ηλεκτρικά δίπολα, τα πεδία \vec{F}_n εκφράζονται, με τη βοήθεια των σχέσεων (B.7) του Παραρτήματος Β, ως εξής

$$\vec{F}_n(\vec{r}) = \vec{F}_E(\vec{r}; \vec{r}_n), \quad (4.6)$$

όπου $\vec{F}_E(\vec{r}; \vec{r}_n)$ είναι το πεδίο ενός στοιχειώδους ηλεκτρικού διπόλου μοναδιαίας ροπής με προσανατολισμό κατά την κατεύθυνση του άξονα z και κέντρο στο σημείο με διάνυσμα θέσης \vec{r}_n . Όταν ως βοηθητικές πηγές επιλέγονται ηλεκτρικά δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος, τα πεδία \vec{F}_n εκφράζονται, με τη βοήθεια των σχέσεων (B.14) του Παραρτήματος B, ως εξής

$$\vec{F}_n(\vec{r}) = \vec{F}_D(\vec{r}; \vec{r}_n), \quad (4.7)$$

όπου $\vec{F}_D(\vec{r}; \vec{r}_n)$ είναι το πεδίο ενός ηλεκτρικού διπόλου ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος μοναδιαίου πλάτους με προσανατολισμό κατά την κατεύθυνση του άξονα z και κέντρο στο σημείο με διάνυσμα θέσης \vec{r}_n . Το μήκος των βοηθητικών διπόλων υποτίθεται ίσο με 2δ , ούτως ώστε κάθε βοηθητική πηγή να εκτείνεται μεταξύ των κέντρων των αμέσως γειτονικών της. Στην περίπτωση κατά την οποία οι βοηθητικές πηγές στα άκρα αντικατασταθούν με ηλεκτρικά μονόπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος, τα πεδία \vec{F}_n εκφράζονται, με τη βοήθεια των σχέσεων (B.14) και (B.20) του Παραρτήματος B, ως εξής

$$\vec{F}_n(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{F}_D(\vec{r}; \vec{r}_n), & |n| < N \\ \vec{F}_M^\pm(\vec{r}; \vec{r}_n), & n = \pm N \end{cases}, \quad (4.8)$$

όπου $\vec{F}_M^+(\vec{r}; \vec{r}_n)$ είναι το πεδίο ενός θετικού ηλεκτρικού μονοπόλου ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος μοναδιαίου πλάτους με προσανατολισμό κατά την κατεύθυνση του άξονα z και κέντρο στο σημείο με διάνυσμα θέσης \vec{r}_n , ενώ $\vec{F}_M^-(\vec{r}; \vec{r}_n)$ είναι το πεδίο του αντίστοιχου αρνητικού μονοπόλου.

Οι άγνωστοι συντελεστές w_n του αναπτύγματος της σχέσης (4.4) προσδιορίζονται επιβάλλοντας την οριακή συνθήκη της εφαιτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου σε διακριτά σημεία επί της παράπλευρης επιφάνειας του διπόλου. Πιο συγκεκριμένα, η εφαιτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να μηδενίζεται στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου, εξαιρουμένης της περιοχής του διακένου, όπου θα πρέπει να είναι ίση με το πεδίο διέγερσης, συνεπώς

$$E_z(a, \phi, z) = \begin{cases} -\frac{V_g}{\Delta_g}, & |z - z_g| < \frac{\Delta_g}{2} \\ 0, & \frac{\Delta_g}{2} < |z - z_g| \leq \frac{L}{2} \end{cases}. \quad (4.9)$$

Η επιβολή της οριακής συνθήκης της σχέσης (4.9) μπορεί να γίνει ακριβώς στις προβολές των θέσεων των βοηθητικών πηγών επί της παράπλευρης επιφάνειας του διπόλου κατά μήκος μιας γραμμής σε οποιαδήποτε γωνία ϕ , λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας του προβλήματος. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, επιλέγεται $\phi = 0$, οπότε η οριακή συνθήκη της σχέσης (4.9) επιβάλλεται στα σημεία $(a, 0, z_m)$, όπου $z_m = m\delta$, $m = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, και προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\sum_{n=-N}^N A_{n,m} w_n = -b_m, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \quad (4.10)$$

όπου

$$A_{n,m} = \hat{z} \cdot \vec{E}_n(a,0,z_m), \quad (4.11\alpha)$$

$$b_m = \begin{cases} \frac{V_g}{\Delta_g}, & |z_m - z_g| < \frac{\Delta_g}{2} \\ 0, & |z_m - z_g| > \frac{\Delta_g}{2} \end{cases}. \quad (4.11\beta)$$

Όταν όλες οι βοηθητικές πηγές είναι του ίδιου τύπου, οι συντελεστές του γραμμικού συστήματος των εξισώσεων (4.10) επαναλαμβάνονται από γραμμή σε γραμμή κατά κυκλικό τρόπο. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, ο πίνακας των συντελεστών είναι τύπου Toeplitz και ο υπολογισμός του μπορεί να γίνει από τους συντελεστές της πρώτης ή της τελευταίας γραμμής του ($m = \pm N$), σύμφωνα με τη σχέση

$$A_{n,m} = A_{\pm N \mp |m-n|, \pm N}. \quad (4.12)$$

Στην περίπτωση που οι ακραίες βοηθητικές πηγές είναι διαφορετικού τύπου, η σχέση (4.12) ισχύει για $|n| < N$ θέτοντας $\pm N \rightarrow \pm(N-1)$, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε αυτήν την περίπτωση για τη μείωση του υπολογιστικού κόστους. Σε κάθε περίπτωση, μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος $(2N+1) \times (2N+1)$ των εξισώσεων (4.10), το ΗΜ πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου προσδιορίζεται άμεσα από τις σχέσεις (4.4)-(4.8). Στη συνέχεια, η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου προκύπτει με εφαρμογή της οριακής συνθήκης του μαγνητικού πεδίου, η οποία διατυπώνεται ως εξής

$$\vec{J}_s = \hat{\rho} \times \vec{H} \Big|_{\rho=a}. \quad (4.13)$$

Η ρευματική κατανομή κατά μήκος του διπόλου προκύπτει ολοκληρώνοντας την επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος κατά μήκος της περιφέρειας του διπόλου, οπότε, λόγω συμμετρίας, προκύπτει

$$I(z) = 2\pi a \sum_{n=-N}^N w_n [\hat{\phi} \cdot \vec{H}_n(a,0,z)]. \quad (4.14)$$

Κατόπιν τούτου, ο υπολογισμός της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου $Y_{in} = G_{in} + jB_{in}$, η οποία ορίζεται ως ο λόγος της έντασης του ρεύματος εισόδου $I(z_g)$ προς την τάση τροφοδότησης V_g , είναι άμεσος, όπως και ο υπολογισμός της σύνθετης αντίστασης εισόδου $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$, η οποία ορίζεται ως ο αντίστροφος λόγος. Στην περίπτωση που το διάκενο έχει πεπερασμένο εύρος, ως ρεύμα εισόδου λαμβάνεται το ρεύμα στα άκρα του διακένου, το οποίο προσδιορίζεται από τη σχέση (4.14) ως εξής

$$I_{in} = I\left(z_g \pm \frac{\Delta_g}{2}\right). \quad (4.15)$$

Σε περιπτώσεις ασύμμετρης τροφοδότησης, οι τιμές της έντασης του ρεύματος στα άκρα του διακένου είναι διαφορετικές, αν και οι διαφορές δεν αναμένονται να είναι σημαντικές,

εξαιτίας του μικρού εύρους του διακένου σε σχέση με το μήκος του διπόλου. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η ένταση του ρεύματος εισόδου προσδιορίζεται, συνήθως, από τη μέση τιμή των ρευμάτων στα άκρα του διακένου.

Ιδιαίτερα μεγάλη σημασία για την αριθμητική ευστάθεια των λύσεων έχει το εύρος του διακένου και ο ακριβής τρόπος μοντελοποίησης του. Λόγω της επιβολής της οριακής συνθήκης της σχέσης (4.9) σε διακριτά σημεία, το πραγματικό εύρος του διακένου, επί του οποίου κατανέμεται το πεδίο διέγερσης, εξαρτάται από την τιμή του N . Όταν το εύρος του διακένου είναι μικρότερο από την απόσταση δ μεταξύ διαδοχικών σημείων επιβολής της οριακής συνθήκης σε κάποιο εύρος μεταβολής του N , το πεδίο διέγερσης επιβάλλεται μόνο σε ένα σημείο, με αποτέλεσμα η αύξηση του N να μεταβάλλει σημαντικά το πραγματικό εύρος του διακένου. Στην περίπτωση αυτή, θεωρείται ότι το διάκενο εκτείνεται σε αποστάσεις $\delta/2$ άνωθεν και κάτωθεν του μοναδικού σημείου επιβολής του πεδίου διέγερσης, οπότε το πραγματικό εύρος του διακένου είναι ίσο με δ , δηλαδή μεταβλητό. Το διάκενο σταθερού εύρους μπορεί να μοντελοποιηθεί θεωρώντας ότι το πεδίο διέγερσης εφαρμόζεται σε ένα περιττό πλήθος σημείων επιβολής της οριακής συνθήκης, το οποίο εξαρτάται από την απόσταση δ και, τελικά, από την επιλογή του N . Αυξανόμενου του N , ο αριθμός των σημείων επιβολής του πεδίου διέγερσης αυξάνει, έτσι ώστε το εύρος του διακένου να παραμένει σταθερό, δηλαδή $\Delta_g = N_g \delta$, όπου N_g περιττός φυσικός αριθμός. Συνεπώς, για δεδομένες τιμές των L και Δ_g , κατάλληλες τιμές για το N προκύπτουν από τη σχέση

$$N = \text{round} \left\{ N_g \frac{L}{2\Delta_g} \right\}, N_g = 1, 3, 5, \dots, \quad (4.16)$$

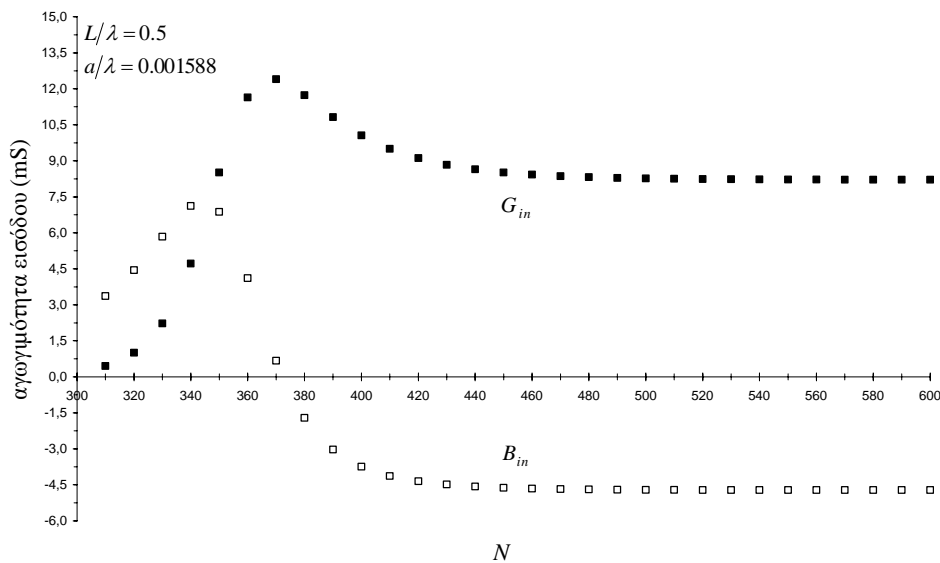
όπου $\text{round}\{\bullet\}$ η συνάρτηση στρογγυλοποίησης στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό. Σε κάθε περίπτωση, το κέντρο του διακένου καθορίζεται από τη θέση του κεντρικού σημείου επιβολής του πεδίου διέγερσης, οπότε η ακριβής θέση του ολισθαίνει ελαφρώς γύρω από το σημείο z_g με μέγιστη απόκλιση $\delta/2$, η οποία μειώνεται με την αύξηση του N .

Από τα παραπάνω, καθίσταται σαφές ότι υπάρχουν δύο εναλλακτικές επιλογές για τη μοντελοποίηση του διακένου. Σύμφωνα με την πρώτη, το πεδίο διέγερσης επιβάλλεται σε ένα μόνο σημείο, το οποίο αντιστοιχεί στο σημείο επιβολής της οριακής συνθήκης που βρίσκεται πλησιέστερα στο σημείο z_g , και το εύρος του διακένου μειώνεται με την αύξηση του N , ενώ το πλάτος του πεδίου διέγερσης αυξάνει και τείνει να λάβει κρουστική μορφή. Αντίθετα, στη δεύτερη περίπτωση, το πεδίο διέγερσης επιβάλλεται σε έναν περιττό αριθμό σημείων και το εύρος του διακένου παραμένει σχεδόν σταθερό. Περισσότερα για τα πεδία διέγερσης και τη συμπεριφορά των αντίστοιχων λύσεων θα αναφερθούν στη συνέχεια.

Για την αποτίμηση της ποιότητας των λύσεων, εξετάζεται η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου. Λόγω του γεγονότος ότι η οριακή συνθήκη της σχέσης (4.9) επιβάλλεται σε διακριτά σημεία, η συνέχεια της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι εξασφαλισμένη παντού στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου. Στην περίπτωση διακένου σταθερού εύρους, ως σχετικό σφάλμα της οριακής συνθήκης ορίζεται ο λόγος του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου προς την τιμή του πεδίου διέγερσης στο διάκενο. Αν και μπορεί να αντληθούν χρήσιμες πληροφορίες για την ακρίβεια των λύσεων από τη συμπεριφορά των σφαλμάτων, ο έλεγχος της αριθμητικής ευστάθειας των αποτελεσμάτων είναι μεγαλύτερης σημασίας, καθώς οι λύσεις εξαρτώνται ισχυρά από την περιγραφή του ηλεκτρικού πεδίου εντός της περιοχής του διακένου και πλησίον αυτής, όπου τα σχετικά σφάλματα μπορεί να λάβουν αρκετά μεγάλες τιμές, λόγω της ασυνέχειας του πεδίου διέγερσης.

4.2.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

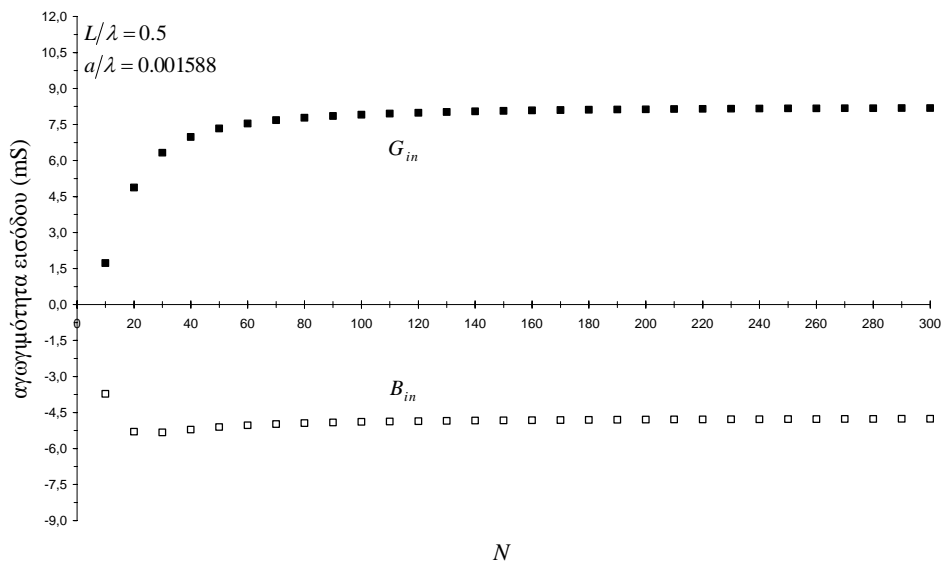
Ακολούθως, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των λύσεων σε σχέση με την παράμετρο καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών N . Αρχικά, εξετάζονται οι τρεις διαφορετικές επιλογές που αφορούν τον τύπο των βοηθητικών πηγών και αναφέρθηκαν παραπάνω. Στην περίπτωση διακένου μεταβλητού εύρους, η συμπεριφορά των λύσεων εξετάζεται αυξανόμενου του N . Στην περίπτωση διακένου σταθερού εύρους, η συμπεριφορά των λύσεων εξετάζεται αυξανόμενων των N_g και N , όπως καθορίζεται από τη σχέση (4.16). Ως παράμετρος ελέγχου της αριθμητικής ευστάθειας των λύσεων χρησιμοποιείται η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου.



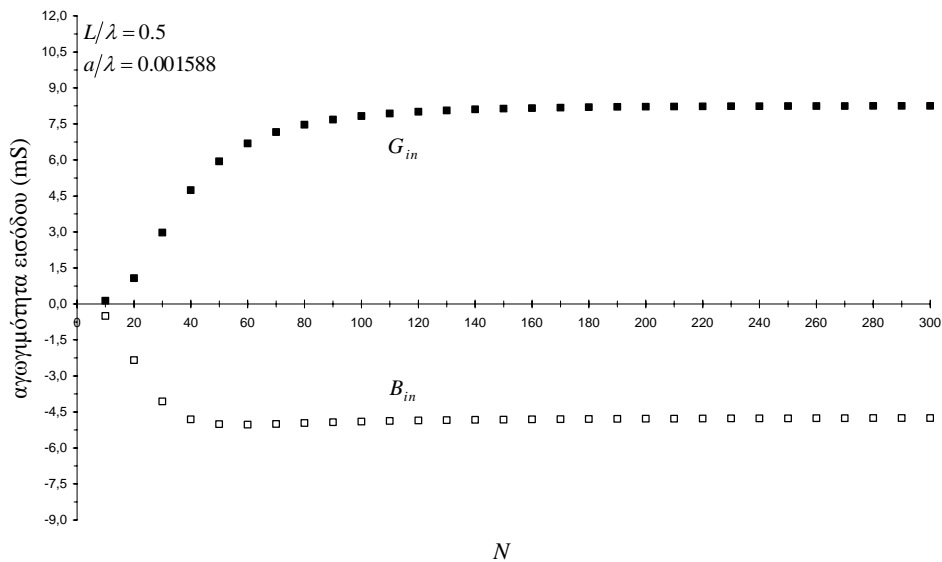
Σχήμα 4. 3. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (στοιχειώδη δίπολα).

Αρχικά, παρουσιάζονται αποτελέσματα που αφορούν ένα δίπολο με $L/\lambda = 0.5$ και $a/\lambda = 0.001588$, το οποίο τροφοδοτείται συμμετρικά από πηγή τάσης διακένου μεταβλητού εύρους. Οι τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου απεικονίζονται συναρτήσει του N στα Σχήματα 4.3-4.5, για τις τρεις προαναφερθείσες επιλογές που αφορούν τον τύπο των βοηθητικών πηγών. Είναι προφανές ότι οι λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας πηγές ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος πλεονεκτούν σε σχέση με τις λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πηγές, αφού η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου σταθεροποιείται αριθμητικά για μικρότερο N . Πάντως, ανεξάρτητα από την επιλογή του τύπου των βοηθητικών πηγών, η MAS τείνει πρακτικά στην ίδια λύση, καθώς οι διαφορές στις τελικές τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου είναι αμελητέες (τυπικά $<1\%$), παρά το γεγονός ότι οι λύσεις αντιστοιχούν σε διάκενο μεταβλητού εύρους και η περιοχή μεταβολής του N δεν είναι ίδια σε όλες τις περιπτώσεις. Από τα Σχήματα 4.4 και 4.5 προκύπτει ότι η αντικατάσταση των βοηθητικών διπόλων στα άκρα του διπόλου με μονόπολα έχει ως αποτέλεσμα μια μικρή επιβράδυνση του ρυθμού αριθμητικής σταθεροποίησης των λύσεων. Ωστόσο, στην περίπτωση κατά την οποία χρησιμοποιούνται δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος ως βοηθητικές πηγές, τα ακραία βοηθητικά δίπολα εκτείνονται εκτός του διπόλου, αφού το τμήμα του άξονα z που καταλαμβάνεται από τις βοηθητικές πηγές εκτείνεται σε μήκος $L + 2\delta$, το οποίο εξαρτάται από το N . Πάντως, το γεγονός αυτό δεν έχει κάποια συνέπεια στη συμπεριφορά των λύσεων συγκριτικά προς τις λύσεις που αντιστοιχούν στις

δύο άλλες επιλογές βοηθητικών πηγών, όπως φαίνεται από τα Σχήματα 4.3-4.5, αφού η κατανομή ρεύματος προκύπτει από την εφαρμογή της οριακής συνθήκης του μαγνητικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου. Μικρές διαφοροποιήσεις αναμένονται μόνο στο παραγόμενο ΗΜ πεδίο πλησίον των άκρων του διπόλου.



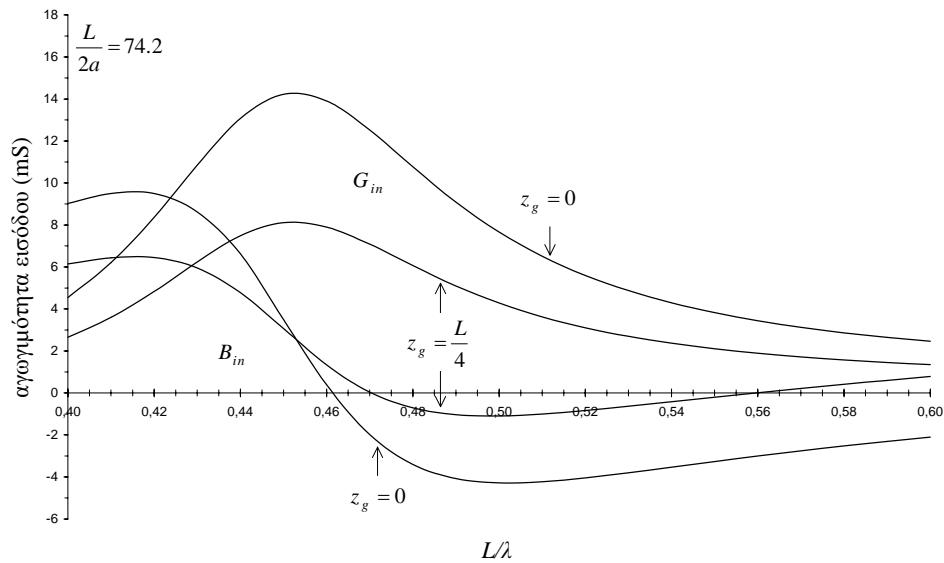
Σχήμα 4. 4. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).



Σχήμα 4. 5. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα και μονόπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).

Στη συνέχεια, στο Σχήμα 4.6, παρουσιάζονται επιλεγμένα αποτελέσματα για τη σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου συμμετρικά και ασύμμετρα τροφοδοτούμενων διπόλων με $L/(2a) = 74.2$ και $0.4 \leq L/\lambda \leq 0.6$. Στην περίπτωση ασύμμετρης τροφοδότησης, το κέντρο του διακένου βρίσκεται στο σημείο $z_g = L/4$. Οι τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου

προσδιορίστηκαν με $N = 150$, θεωρώντας διάκενο μεταβλητού εύρους και χρησιμοποιώντας δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος ως βοηθητικές πηγές. Αυξομείωση του N οδηγεί σε αμελητέα διαφοροποίηση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου, κυρίως όσον αφορά το πραγματικό μέρος G_{in} . Οι διαφορές στο φανταστικό μέρος B_{in} είναι πιο σημαντικές, εξαιτίας της μεταβολής του εύρους του διακένου, η οποία οδηγεί σε μεταβολή της χωρητικότητας που αναπτύσσεται στο διάκενο [25]. Οι τιμές G_{in} σταθεροποιούνται όταν επιλεγεί $N \sim L/(2a)$. Για αρκετά μεγαλύτερες τιμές του N , οι λύσεις οδηγούνται σε αριθμητική αστάθεια, η οποία οφείλεται στην υπερβολική γειτνίαση διαδοχικών βοηθητικών πηγών και σημείων επιβολής της οριακής συνθήκης της σχέσης (4.9), που έχει ως συνέπεια την αύξηση του δείκτη κατάστασης του γραμμικού συστήματος.



Σχήμα 4. 6. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του διπόλου.

Ακολούθως, παρουσιάζονται αποτελέσματα για την περίπτωση διακένου σταθερού εύρους. Επιλεγμένα αποτελέσματα για τη σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου περιέχονται στον Πίνακα 4.1, για συμμετρικά τροφοδοτούμενα δίπολα με $a/\lambda = 0.007022$ και $\Delta_g/\lambda = 0.01$. Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.1 συνάγεται ότι οι λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας στοιχειώδη δίπολα ως βοηθητικές πηγές σταθεροποιούνται αριθμητικά για $N_g \geq 5$, σε αντίθεση με τις λύσεις που αντιστοιχούν στις δύο άλλες επιλογές βοηθητικών πηγών, οι οποίες οδηγούν σε ικανοποιητικά αποτελέσματα ακόμη και για $N_g = 3$. Επιπρόσθετα, φαίνεται ότι η αντικατάσταση των βοηθητικών διπόλων στα άκρα του διπόλου με μονόπολα δεν οδηγεί σε κάποια σημαντική διαφοροποίηση των λύσεων. Πάντως, ανεξάρτητα από την επιλογή του N_g , οι λύσεις αναμένεται να είναι αριθμητικά ευσταθείς για κάποιες τιμές του N που υπερβαίνουν μια κρίσιμη στάθμη, η οποία σχετίζεται άμεσα με το λόγο $L/(2a)$. Συνεπώς, η επιλογή του N από τη σχέση (4.16) για $N_g = 3$ δεν είναι ασφαλής επιλογή σε κάθε περίπτωση. Για το λόγο αυτό, είναι απαραίτητος ο έλεγχος της αριθμητικής ευστάθειας των λύσεων για $N_g > 3$.

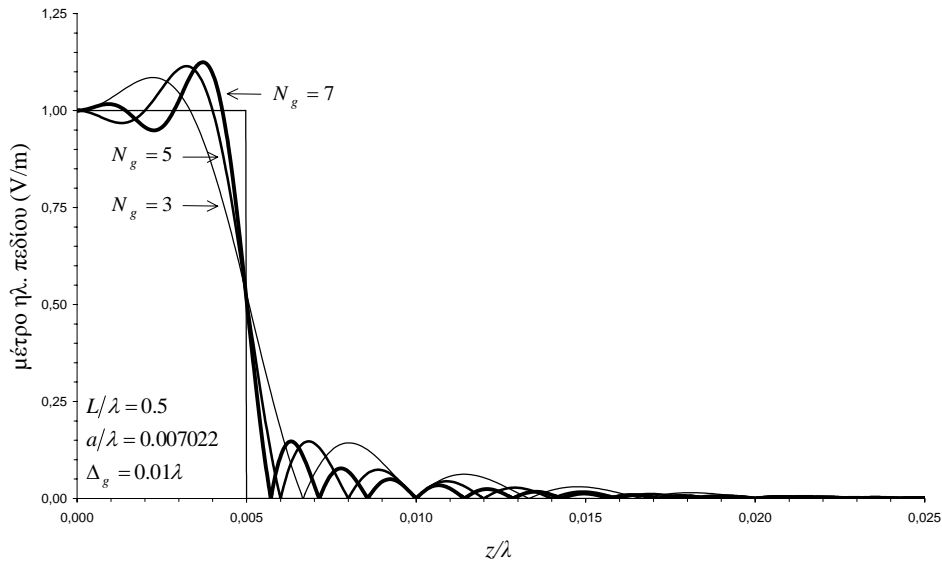
Στη συνέχεια, στα Σχήματα 4.7 και 4.8, απεικονίζεται το μέτρο της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια ενός διπόλου με $L/\lambda = 0.5$, $a/\lambda = 0.007022$ και $\Delta_g = 0.01\lambda$, όταν ως βοηθητικές πηγές χρησιμοποιούνται δίπολα

ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος. Η απεικόνιση αντιστοιχεί σε πεδίο διέγερσης μοναδιαίας έντασης. Λόγω συμμετρίας, η απεικόνιση περιορίζεται στο θετικό ημιάξονα του διπόλου. Από τα Σχήματα 4.7 και 4.8 συνάγεται ότι η αύξηση του N , όπως καθορίζεται από τη σχέση (4.16), έχει ως συνέπεια το ηλεκτρικό πεδίο να προσεγγίζει όλο και περισσότερο το πεδίο διέγερσης στην περιοχή του διακένου, ενώ λαμβάνει όλο και μικρότερες τιμές στην περιοχή εκτός του διακένου, ιδιαίτερα πλησίον των άκρων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.8. Ωστόσο, είναι αξιοσημείωτο ότι το πλάτος των ταλαντώσεων γύρω από τα σημεία ασυνέχειας του πεδίου διέγερσης δεν παρουσιάζει αντίστοιχη μείωση, αν και οι μέγιστες τιμές εκατέρωθεν των σημείων ασυνέχειας μετατοπίζονται πλησιέστερα προς αυτά, μειώνοντας έτσι τη συνολική «ενέργεια» του σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (4.9). Ανάλογη είναι η συμπεριφορά του σφάλματος για τις δύο άλλες επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών. Ωστόσο, για δεδομένες τιμές των N_g και N , τα αντίστοιχα σφάλματα πλησίον των άκρων του διπόλου είναι μεγαλύτερα αυτών που απεικονίζονται στα Σχήματα 4.7 και 4.8, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.9 για $N_g = 5$ και $N = 125$. Αντίθετα, στην περιοχή γύρω από το διάκενο, οι διαφορές μεταξύ των τριών λύσεων είναι αμελητέες.

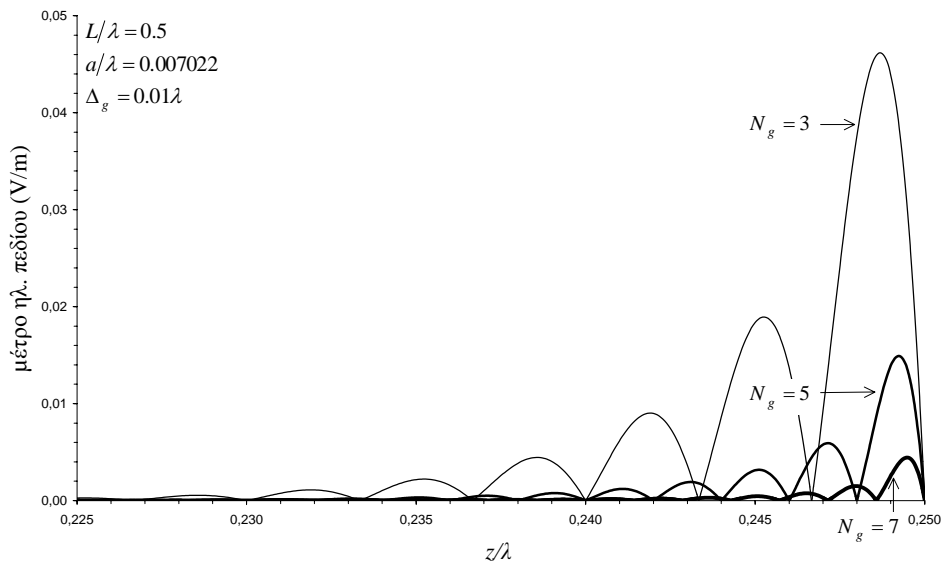
Πίνακας 4. 1. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου αυξανόμενης της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών, για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.

L/λ	N_g	N	Y_{in} (mS)		
			Στοιχειώδη Δίπολα	Ημιτονοειδή Δίπολα	Ημιτονοειδή Δίπολα+ Μονόπολα
0.25	1	13	0.00+j0.46	0.40+j4.89	0.40+j4.89
	3	38	0.34+j4.62	0.36+j4.72	0.35+j4.68
	5	63	0.36+j4.70	0.36+j4.71	0.35+j4.69
	7	88	0.36+j4.72	0.36+j4.73	0.36+j4.71
	9	113	0.37+j4.73	0.37+j4.74	0.36+j4.73
0.50	1	25	0.00+j0.41	6.54-j3.81	6.50-j3.81
	3	75	8.11-j3.54	7.10-j3.87	7.23-j3.87
	5	125	7.15-j3.87	7.11-j3.87	7.17-j3.87
	7	175	7.09-j3.87	7.06-j3.87	7.10-j3.87
	9	225	7.04-j3.87	7.01-j3.86	7.04-j3.87
0.75	1	38	0.00+j0.43	1.43-j0.14	1.43-j0.14
	3	113	1.58-j0.30	1.47-j0.21	1.47-j0.22
	5	188	1.47-j0.22	1.47-j0.22	1.47-j0.22
	7	263	1.47-j0.22	1.46-j0.21	1.47-j0.22
	9	338	1.46-j0.21	1.46-j0.21	1.46-j0.21
1.00	1	50	0.00+j0.41	0.97+j1.67	0.97+j1.67
	3	150	1.03+j1.51	0.98+j1.62	0.98+j1.61
	5	250	0.98+j1.61	0.98+j1.62	0.98+j1.61
	7	350	0.98+j1.62	0.98+j1.62	0.98+j1.62
	9	450	0.98+j1.62	0.98+j1.62	0.98+j1.62

Τέλος, στο Σχήμα 4.10, απεικονίζεται η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου ενός διπόλου με $a/\lambda = 0.007022$ και $\Delta_g/\lambda = 0.01$, ως συνάρτηση της παραμέτρου L/λ . Τα αποτελέσματα του Σχήματος 4.10 προέκυψαν με $N_g = 3$, χρησιμοποιώντας δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος ως βοηθητικές πηγές. Τα αποτελέσματα της MAS βρίσκονται σε ικανοποιητική συμφωνία με διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα ([7], Σχήμα 2.6).



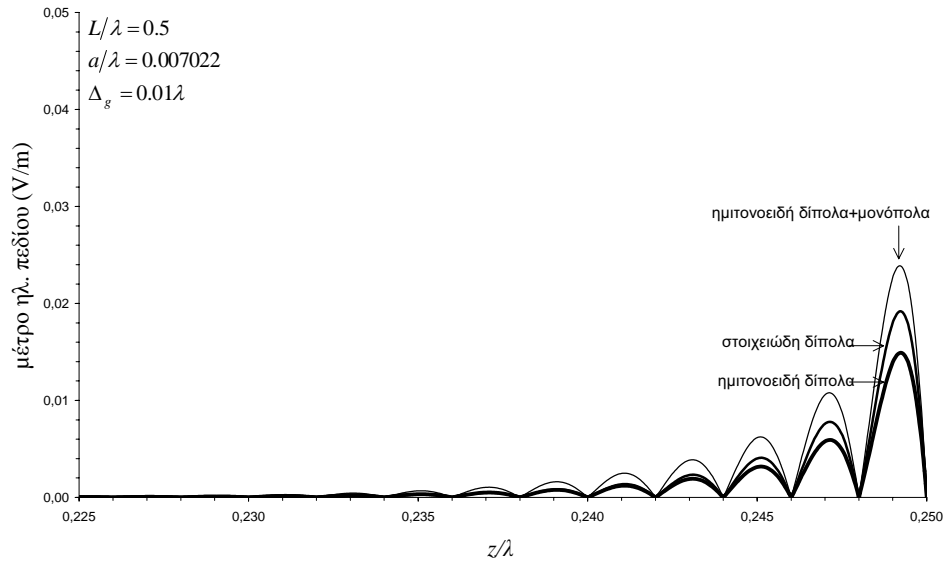
Σχήμα 4. 7. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον του σημείου τροφοδότησης), για διαφορετικές επιλογές του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).



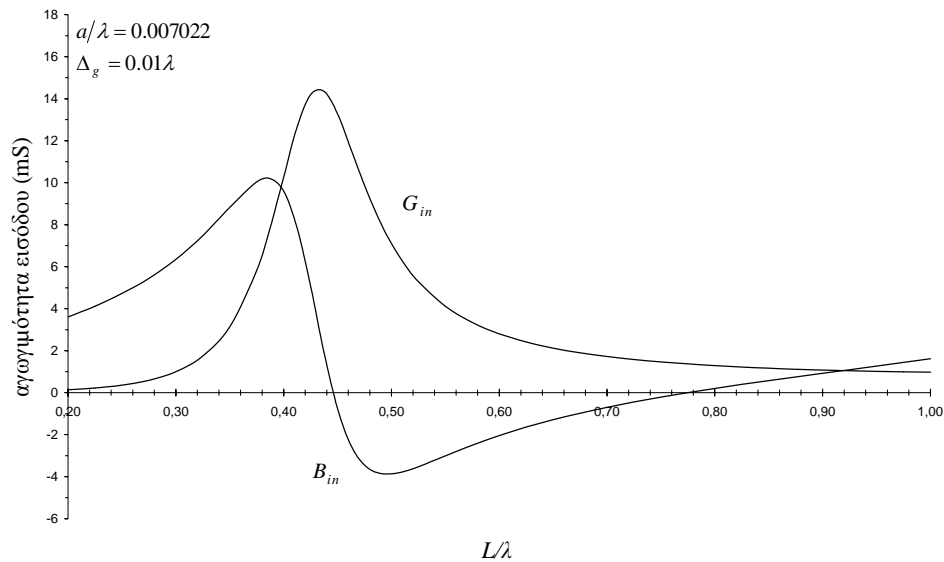
Σχήμα 4. 8. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον των άκρων), για διαφορετικές επιλογές του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).

Σημειώνεται ότι η σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν για $a/\lambda \leq 0.01$ κατέδειξε ικανοποιητική συμφωνία με αποτελέσματα άλλων μεθόδων [26]. Σημειώνεται ακόμη ότι οι πραγματοποιηθείσες δοκιμές έδειξαν ότι οι λύσεις παρουσιάζουν αριθμητική αστάθεια όταν $a/\lambda > 0.01$, όπως άλλωστε αναμένεται, καθόσον, αυξανόμενου του a/λ , ο αριθμός των βοηθητικών πηγών περιορίζεται από το γεγονός ότι η απόσταση δ μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών πρέπει να μην είναι πολύ μικρότερη της ακτίνας a του

διπόλου. Σε διαφορετική περίπτωση, το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από διαδοχικές βοηθητικές πηγές διαφοροποιείται ελάχιστα επί του ίδιου σημείου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου, οπότε το προκύπτον γραμμικό σύστημα εμφανίζει πολύ μεγάλο δείκτη κατάστασης και είναι αριθμητικά ασταθές.



Σχήμα 4. 9. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον των άκρων), για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.

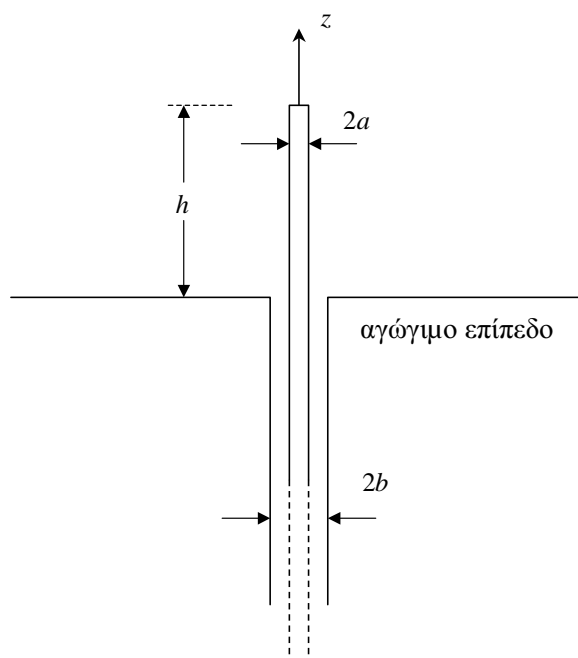


Σχήμα 4. 10. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του διπόλου.

4.3 Μονόπολο Λεπτού Σύρματος με Τροφοδοσία Πηγής Μαγνητικού Δακτυλίου (Magnetic Frill Source)

4.3.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος συνίσταται σε ένα ηλεκτρικά λεπτό μονόπολο μήκους h και ακτίνας a (με $a \ll h$ και $a \ll \lambda$), το οποίο σχηματίζεται ως προέκταση του εσωτερικού αγωγού ομοαξονικής γραμμής μεταφοράς με εξωτερικό αγωγό απειροστά μικρού πάχους και ακτίνας b , που καταλήγει σε ένα άπειρο αγώγιμο επίπεδο, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.11. Η χαρακτηριστική αντίσταση της ομοαξονικής γραμμής είναι ανεξάρτητη της συχνότητας και δίνεται από τη σχέση $Z_c = 60 \ln(b/a)$ (Ω). Για μικρές τιμές των παραμέτρων a/λ και b/λ , η διάταξη ισοδυναμεί με ένα δίπολο μήκους $L = 2h$ και ακτίνας a , το οποίο τροφοδοτείται από ένα δακτύλιο μαγνητικού ρεύματος (magnetic frill), όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.12. Το ΗΜ πεδίο που ακτινοβολείται από το ισοδύναμο δίπολο ταυτίζεται με αυτό του μονοπόλου στο χώρο άνωθεν του αγώγιμου επιπέδου, αφού στο χώρο κάτωθεν του αγώγιμου επιπέδου το ΗΜ πεδίο είναι μηδενικό.



Σχήμα 4. 11. Γεωμετρία μονοπόλου που τροφοδοτείται από ομοαξονική γραμμή μεταφοράς.

Το διαδιδόμενο ΗΜ πεδίο στην ομοαξονική γραμμή τροφοδοσίας αποδίδεται στο ρυθμό TEM. Ωστόσο, στο επίπεδο τερματισμού της ομοαξονικής γραμμής διεγείρονται ρυθμοί TM, που μεταβάλλουν το πεδίο διέγερσης του μονοπόλου από αυτό του απλού ρυθμού TEM. Υποθέτοντας ότι ο ρυθμός TEM είναι επικρατέστερος, η ισοδύναμη πυκνότητα μαγνητικού ρεύματος στο άνοιγμα της ομοαξονικής γραμμής εκφράζεται ως εξής

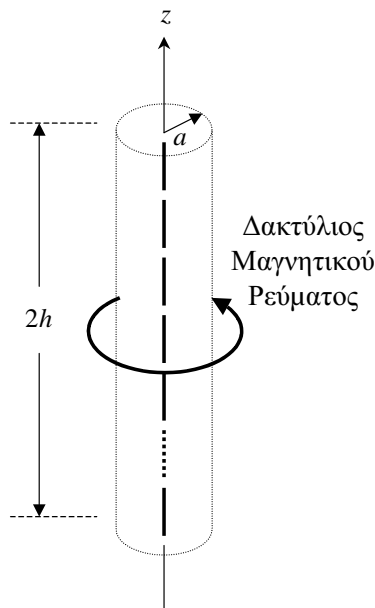
$$\vec{M}_f = \frac{-V_f}{\rho \ln(b/a)} \hat{\phi}, a < \rho < b, \quad (4.17)$$

όπου V_f η ισοδύναμη τάση τροφοδότησης, η οποία είναι ανάλογη του πλάτους της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του ρυθμού TEM στην ομοαξονική γραμμή. Ακριβείς σχέσεις για το ΗΜ πεδίο που παράγεται από την πυκνότητα μαγνητικού ρεύματος της σχέσης (4.17) είναι

διαθέσιμες στη σχετική βιβλιογραφία [27-29] και δεν παρατίθενται εδώ. Σε πολλές περιπτώσεις, αντί των πολύπλοκων εκφράσεων του HM πεδίου του δακτυλίου μαγνητικού ρεύματος, χρησιμοποιείται για το ηλεκτρικό πεδίο διέγερσης η προσεγγιστική σχέση

$$E_z^f(z) \approx \frac{-V_f}{2\ln(b/a)} \left[\frac{\exp(-jk_0\sqrt{z^2+a^2})}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{\exp(-jk_0\sqrt{z^2+b^2})}{\sqrt{z^2+b^2}} \right], \quad (4.18)$$

όπου k_0 ο κυματικός αριθμός στο κενό.



Σχήμα 4. 12. Γεωμετρία ισοδύναμου διπόλου που τροφοδοτείται από δακτύλιο μαγνητικού ρεύματος.

4.3.2 Εφαρμογή της MAS

Για την περίπτωση του ισοδύναμου διπόλου του Σχήματος 4.12, ένα σύνολο βοηθητικών πηγών εντός του διπόλου αρκεί για την περιγραφή του ακτινοβολούμενου HM πεδίου, αφού το HM πεδίο εντός του διπόλου είναι μηδενικό. Η ανάλυση του ισοδύναμου διπόλου μπορεί να γίνει ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε στην Παράγραφο 4.2.2. Ως εκ τούτου, οι βοηθητικές πηγές θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες κατά μήκος του άξονα z , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2. Ο αριθμός των βοηθητικών πηγών θεωρείται ίσος με $2N+1$, ενώ για την επιλογή του τύπου τους ισχύουν όσα αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 4.2.2. Το ακτινοβολούμενο HM πεδίο περιγράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των HM πεδίων των βοηθητικών πηγών, σύμφωνα με τη σχέση (4.4). Τα HM πεδία των βοηθητικών πηγών προσδιορίζονται, ανάλογα με τον τύπο τους, από τις σχέσεις (4.5)-(4.8).

Οι άγνωστοι συντελεστές w_n του αναπτύγματος της σχέσης (4.4) προσδιορίζονται επιβάλλοντας την οριακή συνθήκη της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου σε διακριτά σημεία επί της παράπλευρης επιφάνειας του μονοπόλου. Πιο συγκεκριμένα, η εφαπτομενική συνιστώσα του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου, το οποίο προκύπτει ως άθροισμα του ηλεκτρικού πεδίου διέγερσης και του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το

σύνολο των βοηθητικών πηγών, πρέπει να μηδενίζεται στην παράπλευρη επιφάνεια του μονοπόλου, συνεπώς

$$E_z(a, \phi, z) + E_z^f(z) = 0, 0 \leq z \leq h. \quad (4.19)$$

Εξαιτίας της συμμετρικής διέγερσης του ισοδύναμου διπόλου, οι συντελεστές βαρύτητας συμμετρικά τοποθετημένων βοηθητικών πηγών θεωρούνται εκ των προτέρων ίσοι μεταξύ τους, δηλαδή $w_{-n} = w_n$. Η επιβολή της οριακής συνθήκης της σχέσης (4.19) μπορεί να γίνει ακριβώς στις προβολές των θέσεων των βοηθητικών πηγών επί της παράπλευρης επιφάνειας του μονοπόλου κατά μήκος μιας γραμμής σε οποιαδήποτε γωνία ϕ , λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας του προβλήματος. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, επιλέγεται $\phi = 0$, οπότε η οριακή συνθήκη της σχέσης (4.19) επιβάλλεται στα σημεία $(a, 0, z_m)$, όπου $z_m = m\delta$, $m = 0, 1, \dots, N$, και προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\sum_{n=0}^N A_{n,m} w_n = -b_m, m = 0, \dots, N, \quad (4.20)$$

όπου

$$A_{n,m} = (A_{n,m}^+ + A_{n,m}^-) \xi_n, \quad (4.21\alpha)$$

$$A_{n,m}^\pm = \hat{z} \cdot \vec{E}_{\pm n}(a, 0, z_m), \quad (4.21\beta)$$

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ \frac{1}{2}, & n = 0 \end{cases}, \quad (4.21\gamma)$$

$$b_m = E_z^f(a, 0, z_m). \quad (4.21\delta)$$

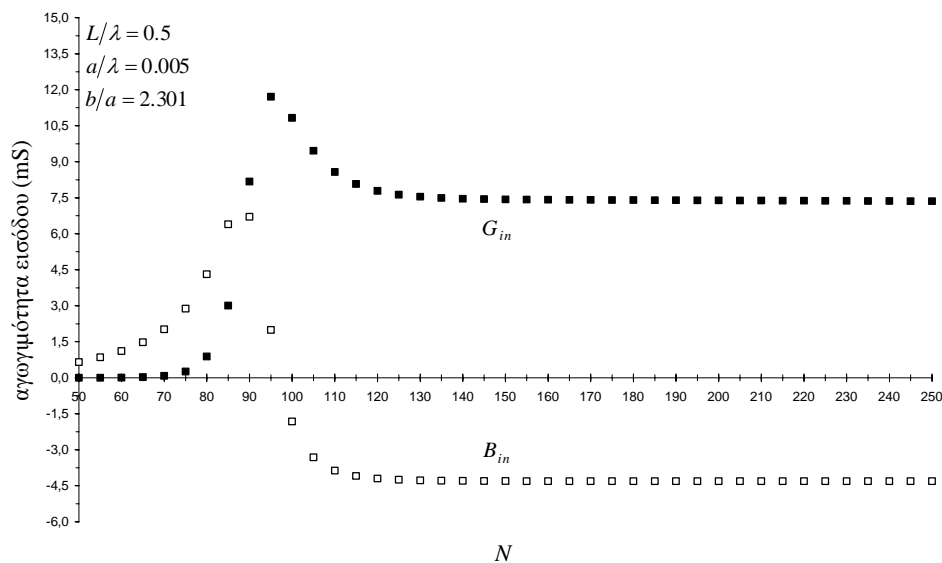
Μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος $(N+1) \times (N+1)$ των εξισώσεων (4.20), το ΗΜ πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου προσδιορίζεται άμεσα από τις σχέσεις (4.4)-(4.8). Στη συνέχεια, η εφαρμογή της οριακής συνθήκης του μαγνητικού πεδίου της σχέσης (4.13) οδηγεί στη ρευματική κατανομή κατά μήκος του ισοδύναμου διπόλου της σχέσης (4.14). Κατόπιν τούτου, είναι δυνατός ο υπολογισμός της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου $Y_{in} = G_{in} + jB_{in}$ από το λόγο της έντασης του ρεύματος εισόδου $I(0)$ προς την ισοδύναμη τάση τροφοδότησης V_f , όπως και ο υπολογισμός της σύνθετης αντίστασης εισόδου $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$ από τον αντίστροφο λόγο. Σημειώνεται ότι η σύνθετη αντίσταση του μονοπόλου είναι η μισή αυτής του αντίστοιχου διπόλου.

Για την αποτίμηση της ποιότητας των λύσεων, εξετάζεται η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του ισοδύναμου διπόλου. Λόγω του γεγονότος ότι η οριακή συνθήκη της σχέσης (4.19) επιβάλλεται σε διακριτά σημεία, ο μηδενισμός της εφαπτομενικής συνιστώσας του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι εξασφαλισμένος παντού στην παράπλευρη επιφάνεια του ισοδύναμου διπόλου. Ως σχετικό σφάλμα της οριακής συνθήκης ορίζεται ο λόγος του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του ισοδύναμου διπόλου προς τη μέγιστη τιμή του πεδίου διέγερσης.

4.3.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Ακολούθως, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των λύσεων σε σχέση με την παράμετρο καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών N . Αρχικά, εξετάζονται οι τρεις διαφορετικές επιλογές που αφορούν τον τύπο των βοηθητικών πηγών και αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 4.2.2. Σε κάθε περίπτωση, εξετάζεται η συμπεριφορά των λύσεων αυξανόμενου του N , θεωρώντας ως παράμετρο ελέγχου τη σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου.

Αρχικά, παρουσιάζονται αποτελέσματα που αφορούν ένα ισοδύναμο δίπολο με $L/\lambda = 0.5$ και $a/\lambda = 0.005$, το οποίο τροφοδοτείται από πηγή δακτυλίου μαγνητικού ρεύματος με $b/a = 2.301$, η οποία αντιστοιχεί σε ομοαξονική γραμμή τροφοδοσίας με χαρακτηριστική αντίσταση 50Ω . Οι τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου απεικονίζονται συναρτήσει του N στα Σχήματα 4.13-4.15, για τις τρεις προαναφερθείσες επιλογές που αφορούν τον τύπο των βοηθητικών πηγών. Είναι προφανές ότι οι λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας πηγές ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος πλεονεκτούν σε σχέση με τις λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πηγές, αφού η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου σταθεροποιείται αριθμητικά για μικρότερο N . Πάντως, ανεξάρτητα από την επιλογή του τύπου των βοηθητικών πηγών, η MAS τείνει πρακτικά στην ίδια λύση, καθώς οι διαφορές στις τελικές τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου είναι μικρές (τυπικά $<5\%$). Από τα Σχήματα 4.14 και 4.15 προκύπτει ότι η αντικατάσταση των βοηθητικών διπόλων στα άκρα του διπόλου με μονόπολα έχει ως αποτέλεσμα μια μικρή επιβράδυνση του ρυθμού αριθμητικής σταθεροποίησης των λύσεων.



Σχήμα 4.13. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (στοιχειώδη δίπολα).

Ακολούθως, στον Πίνακα 4.2, παρουσιάζονται αποτελέσματα για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς των λύσεων αυξανόμενου του N . Σε κάθε περίπτωση, η ομοαξονική γραμμή τροφοδοσίας χαρακτηρίζεται από $b/a = 2.301$, οπότε η χαρακτηριστική της αντίσταση ισούται με 50Ω . Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.2 συνάγεται ότι οι λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας στοιχειώδη δίπολα ως βοηθητικές πηγές σταθεροποιούνται αριθμητικά για πολύ μεγαλύτερες τιμές του N σε σχέση με αυτές που απαιτούνται για τις δύο άλλες επιλογές βοηθητικών πηγών, οι οποίες οδηγούν σε αριθμητικά ευσταθή

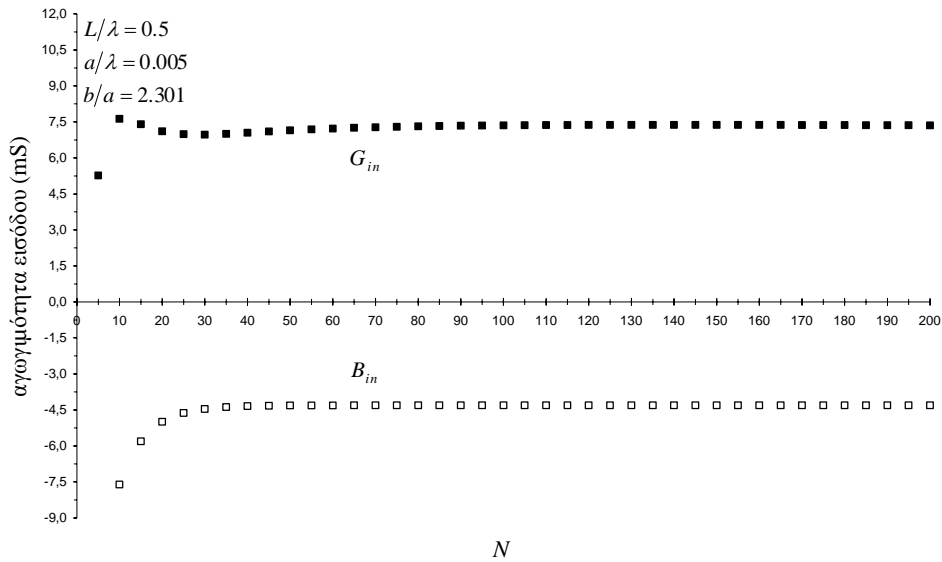
αποτελέσματα για $N \sim L/a$, ή ακόμη και $N \sim L/(2a)$, για σχετικά μικρές τιμές της παραμέτρου a/λ . Εκτενείς δοκιμές κατέδειξαν ότι αυτή η συμπεριφορά εμφανίζεται σε πολύ μεγάλο εύρος μεταβολής της παραμέτρου L/λ .

Πίνακας 4. 2. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου αυξανόμενης της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών, για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.

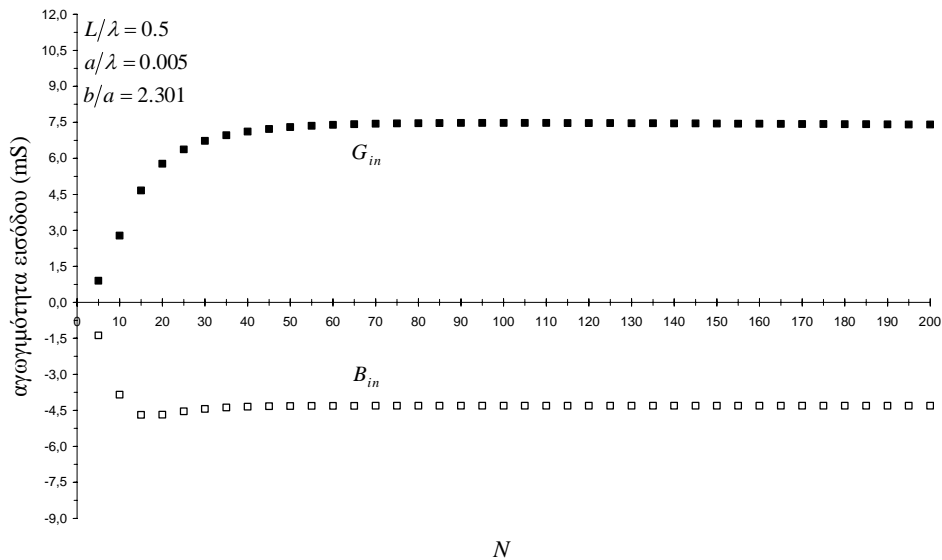
L/λ	a/λ	N	Y_{in} (mS)		
			Στοιχειώδη Δίπολα	Ημιτονοειδή Δίπολα	Ημιτονοειδή Δίπολα+ Μονόπολα
0.50	0.001	250	0.00+j0.13	8.40-j5.05	8.46-j5.04
		500	0.09+j1.80	8.47-j5.02	8.51-j5.01
		750	8.83-j4.88	8.47-j5.02	8.50-j5.01
		1000	8.48-j5.02	8.47-j5.02	8.49-j5.02
	0.005	50	0.00+j0.65	7.15-j4.32	7.30-j4.32
		100	10.83-j1.82	7.36-j4.31	7.47-j4.31
		150	7.43-j4.31	7.38-j4.31	7.45-j4.31
		200	7.39-j4.31	7.36-j4.31	7.41-j4.31
	0.010	25	0.02+j1.38	6.55-j3.74	6.76-j3.77
		50	7.73-j3.52	6.84-j3.77	7.01-j3.79
		75	6.93-j3.78	6.87-j3.77	6.97-j3.78
		100	6.89-j3.78	6.84-j3.77	6.91-j3.78
1.00	0.001	500	0.00+j0.13	0.44+j0.60	0.45+j0.60
		1000	0.17+j1.91	0.44+j0.59	0.44+j0.59
		1500	0.45+j0.58	0.44+j0.59	0.44+j0.59
		2000	0.44+j0.59	0.44+j0.59	0.44+j0.59
	0.005	100	0.00+j0.65	0.83+j1.23	0.84+j1.22
		200	1.01+j0.92	0.83+j1.22	0.83+j1.21
		300	0.84+j1.21	0.83+j1.21	0.83+j1.21
		400	0.83+j1.21	0.83+j1.22	0.83+j1.21
	0.010	50	0.02+j1.38	1.17+j1.72	1.17+j1.70
		100	1.22+j1.57	1.17+j1.69	1.17+j1.67
		150	1.17+j1.68	1.17+j1.68	1.17+j1.67
		200	1.17+j1.68	1.17+j1.69	1.17+j1.68

Στη συνέχεια, στο Σχήμα 4.16, απεικονίζεται το μέτρο της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια ενός ισοδύναμου διπόλου με $L/\lambda = 0.5$, $a/\lambda = 0.005$ και $b/a = 2.301$, όταν ως βοηθητικές πηγές χρησιμοποιούνται δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος. Η απεικόνιση αντιστοιχεί σε πεδίο διέγερσης μοναδιαίας έντασης στο σημείο τροφοδότησης. Λόγω συμμετρίας, η απεικόνιση περιορίζεται στο θετικό ημιάξονα του ισοδύναμου διπόλου. Από το Σχήμα 4.16 συνάγεται ότι η αύξηση του N έχει ως συνέπεια τη μείωση του σφάλματος, τόσο στην περιοχή κοντά στο δακτύλιο μαγνητικού ρεύματος όσο και πλησίον των άκρων. Είναι αξιοσημείωτο ότι το σφάλμα πλησίον του σημείου τροφοδότησης είναι πολλές τάξεις μεγέθους μικρότερο από αυτό πλησίον των άκρων ($\ll 1\%$ έναντι $>1\%$, αντίστοιχα), όπως φαίνεται στο ένθετο γράφημα. Ανάλογη είναι η συμπεριφορά του σφάλματος για τις δύο άλλες επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών. Ωστόσο, για δεδομένη τιμή του N , τα αντίστοιχα σφάλματα είναι μεγαλύτερα αυτών που απεικονίζονται στο Σχήμα 4.16, όπως φαίνεται στα Σχήματα 4.17 και 4.18 για $N = 100$. Είναι ακόμη άξιο παρατήρησης το γεγονός ότι το σφάλμα που προκύπτει

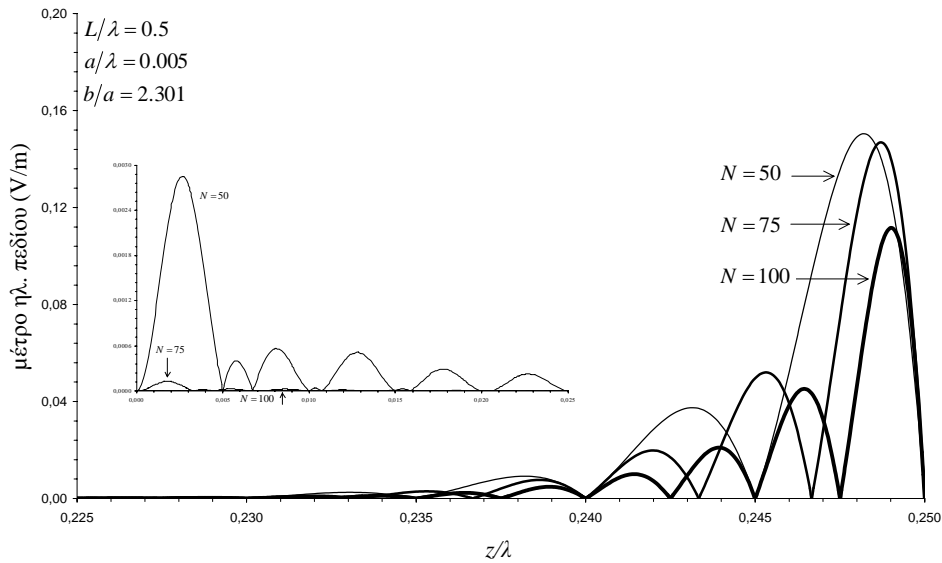
όταν ως βοηθητικές πηγές χρησιμοποιούνται στοιχειώδη δίπολα παρουσιάζει ταλαντωτική συμπεριφορά με σχεδόν σταθερό πλάτος κοντά στην πηγή και τιμές που είναι πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες τιμές των σφαλμάτων που αντιστοιχούν στις άλλες επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει το μειονέκτημα της χρήσης στοιχειωδών διπόλων ως βοηθητικών πηγών και εξηγεί, τουλάχιστον εν μέρει, τις προαναφερθείσες διαφορές στο ρυθμό αριθμητικής σταθεροποίησης των λύσεων.



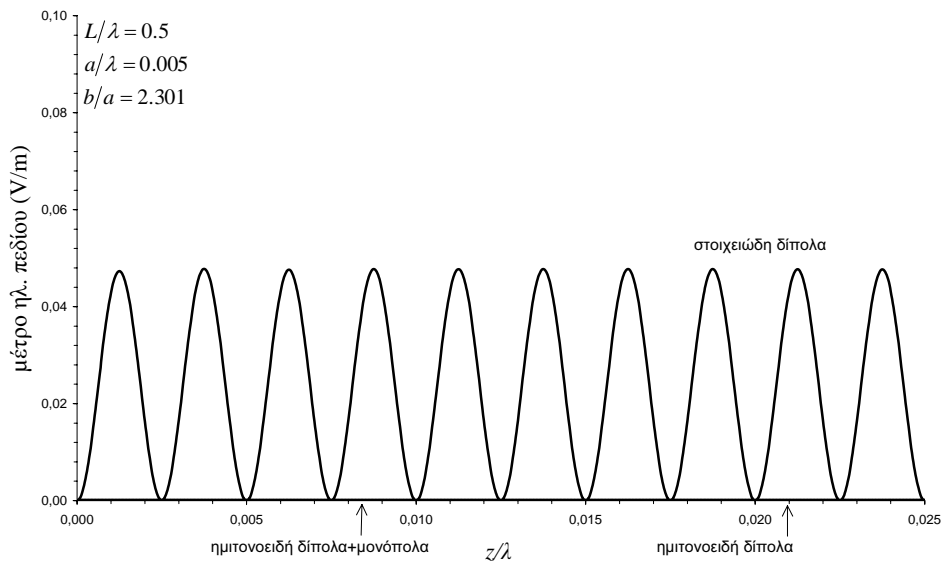
Σχήμα 4. 14. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).



Σχήμα 4. 15. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα και μονόπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).



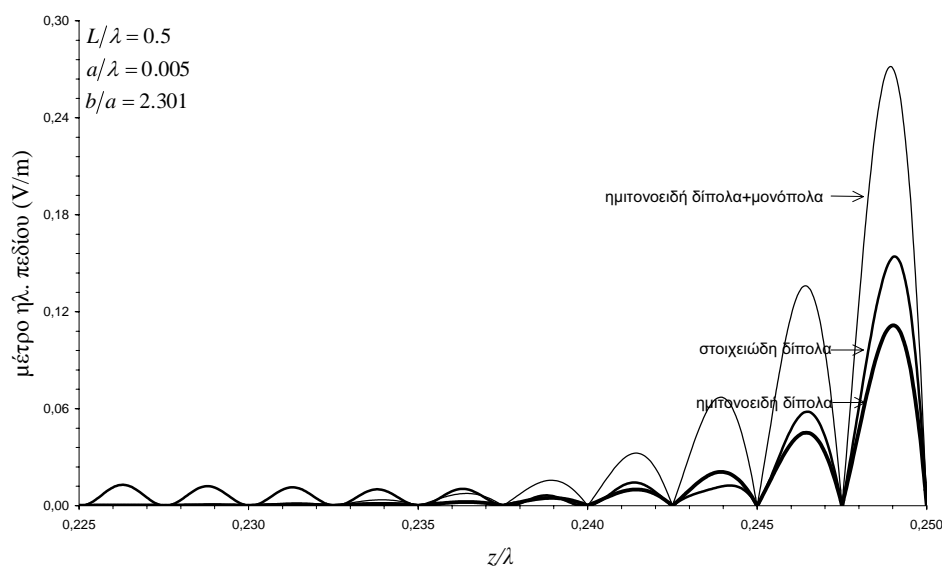
Σχήμα 4. 16. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου, για διαφορετικές επιλογές του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).



Σχήμα 4. 17. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον του σημείου τροφοδότησης), για διαφορετικές επιλογές του πλήθους των βοηθητικών πηγών.

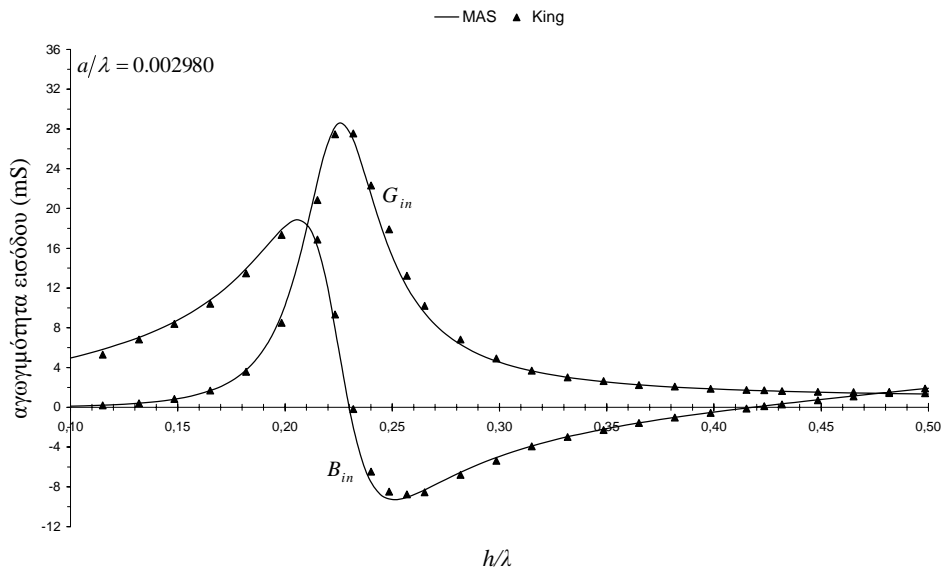
Ακολούθως, στα Σχήματα 4.19 και 4.20, παρουσιάζονται αποτελέσματα για τη σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου h/λ , για μονόπολα διαφορετικής ακτίνας, τα οποία τροφοδοτούνται από ομοαξονική γραμμή με $b/a = 2.301$. Τα αποτελέσματα των Σχημάτων 4.19 και 4.20 αντιστοιχούν σε $a/\lambda = 0.002980$ και $a/\lambda = 0.009260$. Σε όλες τις περιπτώσεις, πραγματοποιήθηκαν εκτενείς δοκιμές σε μεγάλο εύρος μεταβολής του N , για τον έλεγχο της αριθμητικής ευστάθειας των λύσεων. Τα

αποτελέσματα του Σχήματος 4.19 προσδιορίστηκαν με $N = \lceil h/a \rceil$, όπου $\lceil A \rceil$ ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του A , ενώ αυτά του Σχήματος 4.20 προσδιορίστηκαν με $N = \lceil 2h/a \rceil$, σε συμφωνία και με όσα προέκυψαν από τη μελέτη του ρυθμού αριθμητικής σταθεροποίησης των λύσεων του Πίνακα 4.2. Τα αποτελέσματα των Σχημάτων 4.19 και 4.20 είναι σε εξαιρετική συμφωνία με διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα ([2], Παράγραφος 2.38) που αφορούν μονόπολα ίδιας ακτίνας με ημισφαιρικά διαμορφωμένο άκρο, τα οποία τροφοδοτούνται από ομοαξονικές γραμμές με ελαφρώς διαφορετικά χαρακτηριστικά ($b/a = 2.210$ και $b/a = 2.280$, αντίστοιχα). Λόγω του ημισφαιρικά διαμορφωμένου άκρου, η σύγκριση γίνεται ως προς το διορθωμένο μήκος του μονοπόλου $h - a/2$ [30].

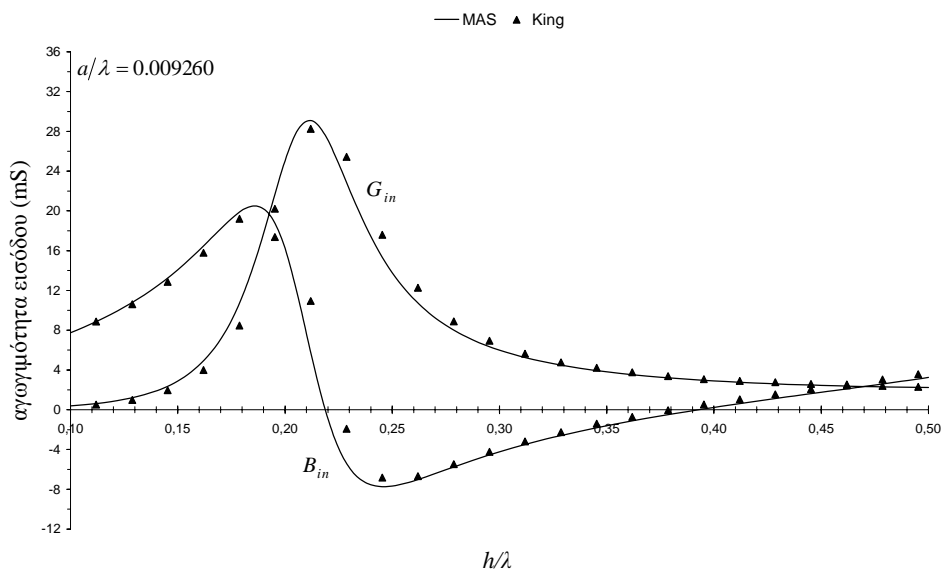


Σχήμα 4. 18. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του δίπολου (πλησίον των άκρων), για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.

Είναι άξιο αναφοράς ότι οι ομοαξονικές γραμμές μεταφοράς που χρησιμοποιούνται στην πράξη έχουν τυποποιημένες χαρακτηριστικές διαστάσεις. Ως εκ τούτου, στην πλειονότητα των πρακτικών περιπτώσεων, η ακτίνα του σύρματος που σχηματίζει το μονόπολο a δεν είναι ίση με την ακτίνα του εσωτερικού αγωγού της ομοαξονικής γραμμής a' , όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.21. Στην περίπτωση αυτή, απαιτείται η τροποποίηση του πεδίου διέγερσης της σχέσης (4.18) με την αντικατάσταση $a \rightarrow a'$. Στο Σχήμα 4.22 παρουσιάζονται αποτελέσματα για τη σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου h/λ , για ένα μονόπολο με $a/\lambda = 0.003970$, το οποίο τροφοδοτείται από ομοαξονική γραμμή με $a' = a/1.33$ και $b/a' = 2.301$. Τα αποτελέσματα του Σχήματος 4.22 προσδιορίστηκαν με $N = \lceil 2h/a \rceil$ και, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, είναι σε πολύ καλή συμφωνία με διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα ([2], Παράγραφος 2.38) που αφορούν ένα μονόπολο ίδιας ακτίνας με ημισφαιρικά διαμορφωμένο άκρο, το οποίο τροφοδοτείται από ομοαξονική γραμμή με $a' = a/1.33$ και $b/a = 1.67$. Βεβαίως, και σε αυτήν την περίπτωση, η σύγκριση γίνεται ως προς το διορθωμένο μήκος του μονοπόλου $h - a/2$ [30]. Αντίστοιχα αποτελέσματα για μονόπολα με $a/\lambda = 0.001588$ είναι διαθέσιμα στη σχετική αναφορά [31] και δεν παρατίθενται εδώ.

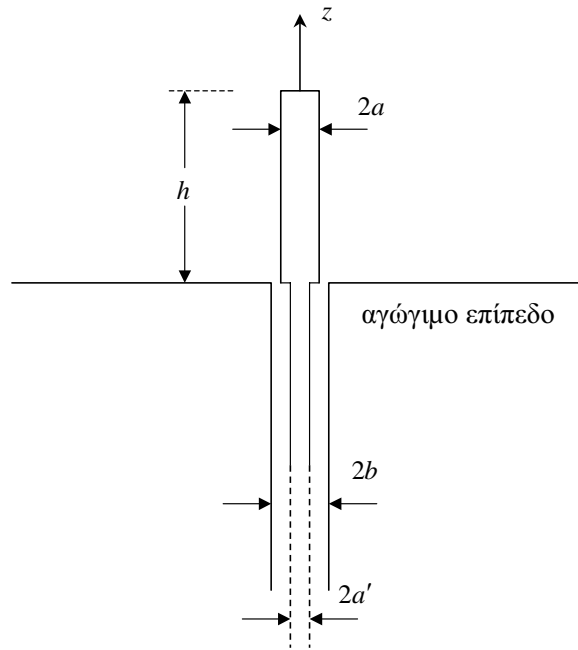


Σχήμα 4. 19. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του μονοπόλου.

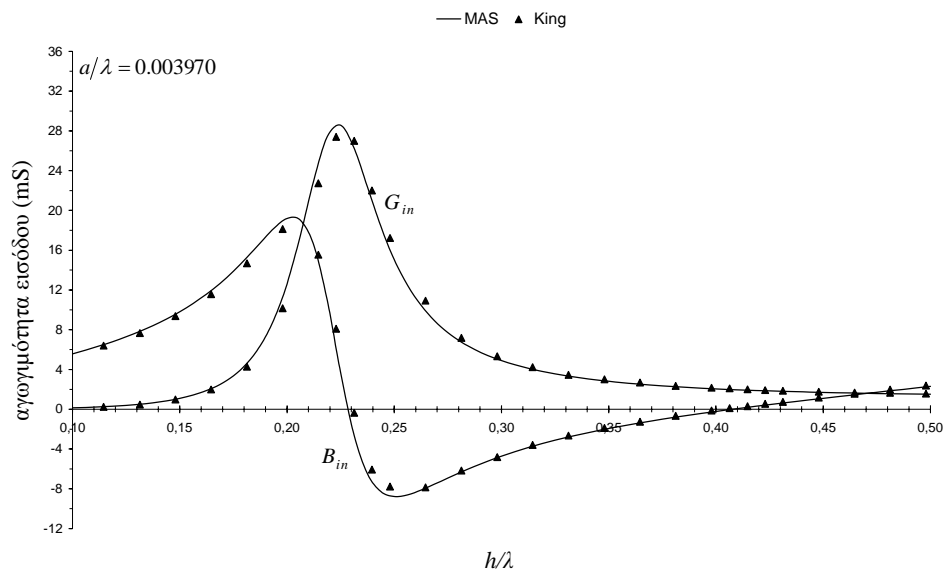


Σχήμα 4. 20. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του μονοπόλου.

Όπως και στην περίπτωση του διπόλου που εξετάστηκε στην Παράγραφο 4.2, οι πραγματοποιηθείσες δοκιμές έδειξαν ότι οι λύσεις παρουσιάζουν αριθμητική αστάθεια για $a/\lambda > 0.01$, όπως άλλωστε αναμένεται, για τους λόγους που αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 4.2.3.



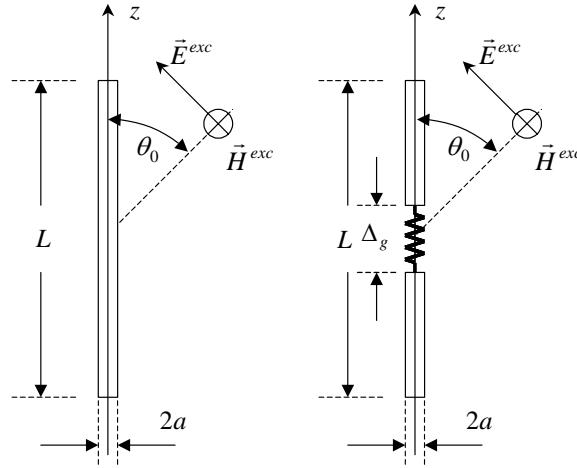
Σχήμα 4. 21. Γεωμετρία μονοπόλου που τροφοδοτείται από ομοαξονική γραμμή μεταφοράς.



Σχήμα 4. 22. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του μονοπόλου.

4.4 Δίπολο Λεπτού Σύρματος που Διεγείρεται από Εξωτερικό Πεδίο

4.4.1 Περιγραφή του Προβλήματος



Σχήμα 4. 23. Γεωμετρία διπόλου που διεγείρεται από εξωτερικό ΗΜ πεδίο.

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος συνίσταται σε ένα ηλεκτρικά λεπτό δίπολο μήκους L και ακτίνας a (με $a \ll L$ και $a \ll \lambda$) στον ελεύθερο χώρο, το οποίο διεγείρεται από ένα εξωτερικό ΗΜ πεδίο κυκλικής συχνότητας $\omega = 2\pi f$, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.23. Το κέντρο του διπόλου βρίσκεται στο κέντρο του συστήματος συντεταγμένων, ενώ ο άξονας του ταυτίζεται με τον άξονα z . Συνήθως, το ΗΜ πεδίο διέγερσης αποδίδεται σε κάποια κεραία που βρίσκεται σε αρκούντως μεγάλη απόσταση από το δίπολο, οπότε προσομοιώνεται ως σφαιρικό ή επίπεδο κύμα, αν και είναι δυνατή η θεώρηση ενός οποιουδήποτε ΗΜ πεδίου διέγερσης, για τη μελέτη πιο πολύπλοκων αλληλεπιδράσεων. Η προσέγγιση επίπεδου κύματος συνδέεται στενά τόσο με τη μελέτη του διπόλου ως σκεδαστή όσο και τη μελέτη του διπόλου ως στοιχείου λήψης. Στην πρώτη περίπτωση, το δίπολο υποτίθεται βραχυκυκλωμένο, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.23. Στη δεύτερη περίπτωση, η θεώρηση αυτή είναι ανεπαρκής, καθώς οι ακροδέκτες του διπόλου είναι συνδεδεμένοι με τη γραμμή μεταφοράς οδήγησης του σήματος λήψης στην είσοδο του δέκτη. Αν και η μοντελοποίηση της γραμμής μεταφοράς είναι δυνατή σε κάποιες περιπτώσεις, εισάγει μεγάλη πολυπλοκότητα στην ανάλυση, οπότε, συνήθως, αποφεύγεται και αντικαθίσταται από ένα ισοδύναμο συγκεντρωμένο φορτίο, όπως επίσης απεικονίζεται στο Σχήμα 4.23. Επίσης, σημειώνεται ότι η σύνδεση συγκεντρωμένων φορτίων κατά μήκος του διπόλου μεταβάλλει σημαντικά και τη συμπεριφορά του ως σκεδαστή [11]. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, η μελέτη του διπόλου ως σκεδαστή και ως στοιχείου λήψης γίνεται κατά έναν ενοποιημένο τρόπο στη συνέχεια, θεωρώντας τόσο βραχυκυκλωμένα δίπολα όσο και φορτωμένα δίπολα με συγκεντρωμένα φορτία. Γενικά, το δίπολο μπορεί να υποθεθεί φορτωμένο, κεντρικά ή έκκεντρα, με ένα συγκεντρωμένο φορτίο σύνθετης αντίστασης Z_L , το οποίο συνδέεται στους ακροδέκτες του διπόλου, στις δύο πλευρές ενός διακένου με κέντρο στο σημείο z_g και εύρος Δ_g . Όταν το εύρος του διακένου είναι αρκούντως μικρό, το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να θεωρηθεί σταθερό κατά μήκος του διακένου και ίσο με αυτό που αντιστοιχεί στην πώση τάσης στο φορτίο, η οποία δίνεται από τη σχέση $V_L = -I_L Z_L$, συνεπώς

$$E_z^g(z) = \begin{cases} \frac{I_L Z_L}{\Delta_g}, & |z - z_g| < \frac{\Delta_g}{2} \\ 0, & \frac{\Delta_g}{2} < |z - z_g| \leq \frac{L}{2} \end{cases} \quad (4.22)$$

4.4.2 Εφαρμογή της MAS

Για τις δύο περιπτώσεις του Σχήματος 4.23, ένα σύνολο βοηθητικών πηγών εντός του διπόλου αρκεί για την περιγραφή του σκεδαζόμενου ή επανακτινοβολούμενου ΗΜ πεδίου, αφού το ΗΜ πεδίο εντός του διπόλου είναι μηδενικό. Οι βοηθητικές πηγές μπορεί να είναι οποιουδήποτε τύπου, αρκεί τα παραγόμενα ΗΜ πεδία να αποτελούν λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στο κενό. Στη συνέχεια, η ανάλυση μπορεί να γίνει ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε στην Παράγραφο 4.2.2. Και στις δύο περιπτώσεις που εξετάζονται, οι βοηθητικές πηγές θεωρούνται ομοιόμορφα κατανομημένες κατά μήκος του άξονα z , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2. Ο αριθμός των βοηθητικών πηγών θεωρείται ίσος με $2N + 1$, ενώ για την επιλογή του τύπου τους ισχύουν όσα αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 4.2.2. Το συνολικό ΗΜ πεδίο περιγράφεται ως άθροισμα του ΗΜ πεδίου διέγερσης και του γραμμικού συνδυασμού των ΗΜ πεδίων των βοηθητικών πηγών της σχέσης (4.4). Τα ΗΜ πεδία των βοηθητικών πηγών προσδιορίζονται, ανάλογα με τον τύπο τους, από τις σχέσεις (4.5)-(4.8).

Οι άγνωστοι συντελεστές w_n του αναπτύγματος της σχέσης (4.4) προσδιορίζονται επιβάλλοντας την οριακή συνθήκη της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου σε διακριτά σημεία επί της παράπλευρης επιφάνειας του διπόλου. Πιο συγκεκριμένα, η εφαπτομενική συνιστώσα του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου, το οποίο προκύπτει ως άθροισμα του ηλεκτρικού πεδίου διέγερσης και του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το σύνολο των βοηθητικών πηγών, πρέπει να μηδενίζεται στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου, εξαιρουμένης της περιοχής του διακένου στην περίπτωση του φορτωμένου διπόλου, όπου θα πρέπει να είναι ίση με το ηλεκτρικό πεδίο που αντιστοιχεί στην πτώση τάσης επί του φορτίου, συνεπώς

$$E_z^{exc}(a, \phi, z) + E_z(a, \phi, z) = \begin{cases} \frac{I_L Z_L}{\Delta_g}, & |z - z_g| < \frac{\Delta_g}{2} \\ 0, & \frac{\Delta_g}{2} < |z - z_g| \leq \frac{L}{2} \end{cases}, \quad (4.23)$$

όπου E_z^{exc} η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου διέγερσης. Στην περίπτωση απουσίας φορτίου, το δεξιό μέλος της σχέσης (4.23) είναι μηδενικό. Η επιβολή της οριακής συνθήκης της σχέσης (4.23) μπορεί να γίνει ακριβώς στις προβολές των θέσεων των βοηθητικών πηγών επί της παράπλευρης επιφάνειας του διπόλου. Λόγω της ασύμμετρης φύσης του ΗΜ πεδίου διέγερσης, η κυλινδρική συμμετρία του διπόλου δεν συνεπάγεται και την κυλινδρική συμμετρία του προβλήματος. Ωστόσο, όταν το δίπολο είναι αρκούντως λεπτό, το ΗΜ πεδίο διέγερσης χαρακτηρίζεται από εξαιρετικά ασθενή εξάρτηση από τη γωνία ϕ . Ως εκ τούτου, ο όρος του πεδίου διέγερσης στη σχέση (4.23) μπορεί να αντικατασταθεί από τη μέση τιμή του κατά μήκος της περιφέρειας του διπόλου ή, απλούστερα, από την τιμή του επί του άξονα του διπόλου. Στην περίπτωση αυτή, τα σημεία επιβολής της οριακής συνθήκης μπορεί να τοποθετηθούν κατά μήκος μιας γραμμής σε οποιαδήποτε γωνία ϕ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, επιλέγεται $\phi = 0$, οπότε η οριακή συνθήκη της σχέσης (4.23) επιβάλλεται στα σημεία $(a, 0, z_m)$, όπου $z_m = m\delta$, $m = 0, \pm 1, \dots, \pm N$. Για την επίλυση του προβλήματος, απαιτείται ο υπολογισμός της έντασης του ρεύματος στο φορτίο I_L , η οποία προσδιορίζεται ως εξής

$$I_L = I\left(z_g \pm \frac{\Delta_g}{2}\right), \quad (4.24)$$

ή από τη μέση τιμή των ρευμάτων στα άκρα του διακένου, σε περίπτωση ασύμμετρης τοποθέτησης του φορτίου. Μετά από αντικατάσταση της έντασης του ρεύματος I_L από τη σχέση (4.14) στη σχέση (4.23), προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\sum_{n=-N}^N A_{n,m} w_n = -b_m, m = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \quad (4.25)$$

όπου

$$A_{n,m} = A_{n,m}^e + A_{n,m}^h, \quad (4.26\alpha)$$

$$A_{n,m}^e = \tilde{z} \cdot \vec{E}_n(a, 0, z_m), \quad (4.26\beta)$$

$$A_{n,m}^h = \begin{cases} -\frac{2\pi a Z_L}{\Delta_g} \left[\hat{\phi} \cdot \vec{H}_n\left(a, 0, z_g \pm \frac{\Delta_g}{2}\right) \right], & |z_m - z_g| < \frac{\Delta_g}{2}, \\ 0, & |z_m - z_g| > \frac{\Delta_g}{2} \end{cases}, \quad (4.26\gamma)$$

$$b_m = E_z^{exc}(0, 0, z_m). \quad (4.26\delta)$$

Στην περίπτωση του βραχυκυκλωμένου διπόλου, οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν θέτοντας $Z_L = 0$, οπότε $A_{n,m}^h = 0$.

Όταν όλες οι βοηθητικές πηγές είναι του ίδιου τύπου, οι συντελεστές $A_{n,m}^e$ αποτελούν στοιχεία ενός πίνακα τύπου Toeplitz, οπότε ο υπολογισμός τους μπορεί να γίνει από τους συντελεστές της πρώτης ή της τελευταίας γραμμής του ($m = \pm N$), σύμφωνα με τη σχέση

$$A_{n,m}^e = A_{\pm N \mp |m-n|, \pm N}^e. \quad (4.27)$$

Στην περίπτωση που οι ακραίες βοηθητικές πηγές είναι διαφορετικού τύπου, η σχέση (4.27) ισχύει για $|n| < N$ θέτοντας $\pm N \rightarrow \pm(N-1)$, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε αυτήν την περίπτωση για τη μείωση του υπολογιστικού κόστους. Σε κάθε περίπτωση, μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος $(2N+1) \times (2N+1)$ των εξισώσεων (4.25), το ΗΜ πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου προσδιορίζεται άμεσα από τις σχέσεις (4.4)-(4.8). Στη συνέχεια, η εφαρμογή της οριακής συνθήκης του μαγνητικού πεδίου της σχέσης (4.13) οδηγεί στη ρευματική κατανομή κατά μήκος του διπόλου της σχέσης (4.14). Όταν το ΗΜ πεδίο διέγερσης είναι επίπεδο κύμα, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διατομή σκέδασης, η οποία προσδιορίζεται ως εξής

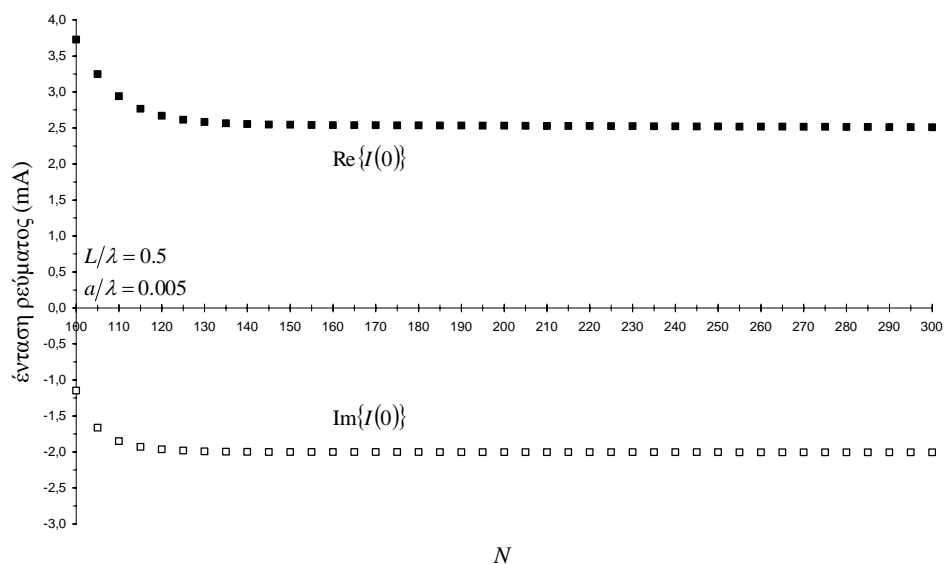
$$\sigma(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(4\pi r^2 \frac{|\vec{F}|^2}{|F_0|^2} \right), \quad (4.28)$$

όπου \vec{F} η ένταση του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου σκέδασης και F_0 το μιγαδικό πλάτος του αντίστοιχου πεδίου διέγερσης.

Όπως και στην περίπτωση του διπόλου που τροφοδοτείται από πηγή τάσης διακένου, το εύρος του διακένου και ο ακριβής τρόπος μοντελοποίησης του είναι ιδιαίτερα μεγάλης σημασίας για την αριθμητική ευστάθεια των λύσεων. Λόγω της επιβολής της οριακής συνθήκης της σχέσης (4.23) σε διακριτά σημεία, το πραγματικό εύρος του διακένου εξαρτάται από την τιμή του N . Για το λόγο αυτό, το πεδίο που αντιστοιχεί στην πτώση τάσης στο φορτίο κατανέμεται σε ένα περιττό πλήθος σημείων επιβολής της οριακής συνθήκης, το οποίο εξαρτάται από την απόσταση δ και, τελικά, από την επιλογή του N . Για δεδομένες τιμές των L και Δ_g , κατάλληλες τιμές για το N προκύπτουν από τη σχέση (4.16). Στην περίπτωση του φορτωμένου διπόλου, το κέντρο του διακένου καθορίζεται από τη θέση του κεντρικού σημείου επιβολής του πεδίου που αντιστοιχεί στην πτώση τάσης στο φορτίο, οπότε η ακριβής θέση του ολισθαίνει ελαφρώς γύρω από το σημείο z_g με μέγιστη απόκλιση $\delta/2$, η οποία μειώνεται με την αύξηση του N . Βεβαίως, στην περίπτωση του βραχυκυκλωμένου διπόλου, η επιλογή του N μπορεί να γίνει αυθαίρετα.

Για την αποτίμηση της ποιότητας των λύσεων, εξετάζεται η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου. Στην περίπτωση του βραχυκυκλωμένου διπόλου, ως σχετικό σφάλμα της οριακής συνθήκης της σχέσης (4.23) ορίζεται ο λόγος του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου προς τη μέγιστη τιμή του πεδίου διέγερσης. Στην περίπτωση του φορτωμένου διπόλου, είναι σημαντικός και ο έλεγχος του ηλεκτρικού πεδίου εντός του διακένου, όπως άλλωστε και στην περίπτωση του διπόλου που τροφοδοτείται από πηγή τάσης.

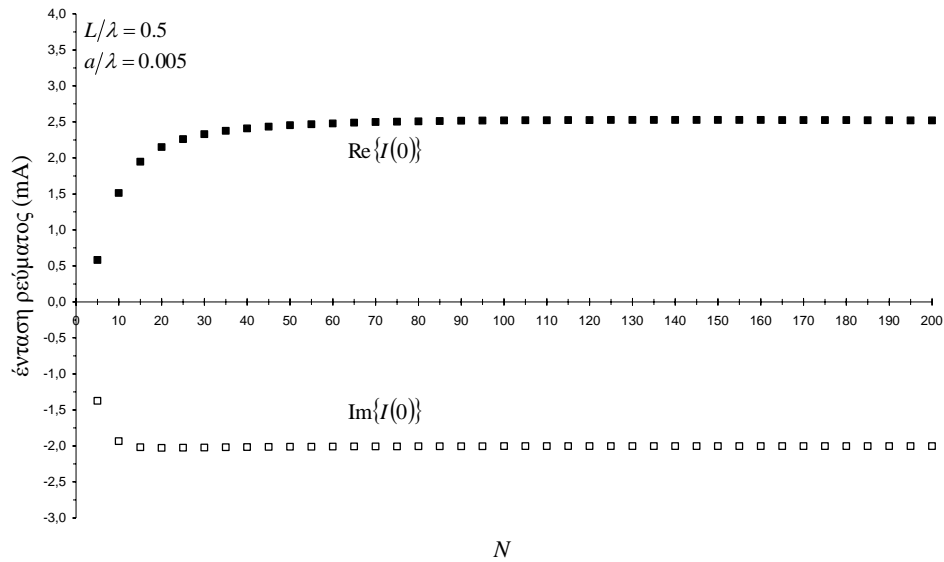
4.4.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα



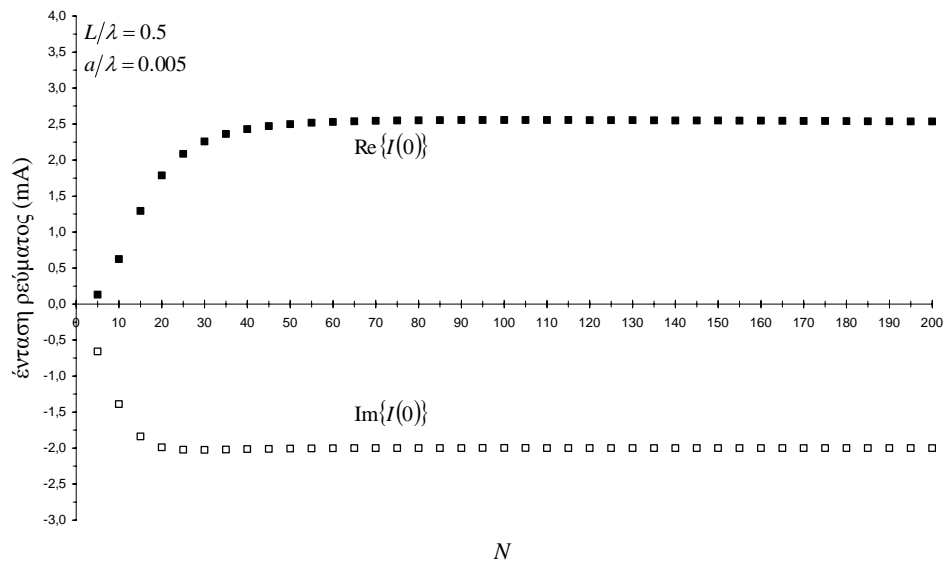
Σχήμα 4. 24. Τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (στοιχειώδη δίπολα).

Ακολουθώντας, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των λύσεων σε σχέση με την παράμετρο καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών N . Αρχικά, εξετάζονται οι τρεις διαφορετικές επιλογές που αφορούν τον

τύπο των βοηθητικών πηγών και αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 4.2.2. Στην περίπτωση του βραχυκυκλωμένου διπόλου, η συμπεριφορά των λύσεων εξετάζεται αυξανόμενου του N . Στην περίπτωση του φορτωμένου διπόλου, η συμπεριφορά των λύσεων εξετάζεται αυξανόμενων των N_g και N , όπως καθορίζεται από τη σχέση (4.16). Ως παράμετρος ελέγχου της αριθμητικής ευστάθειας των λύσεων χρησιμοποιείται η ένταση του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου ή στα άκρα του διακένου.



Σχήμα 4. 25. Τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).



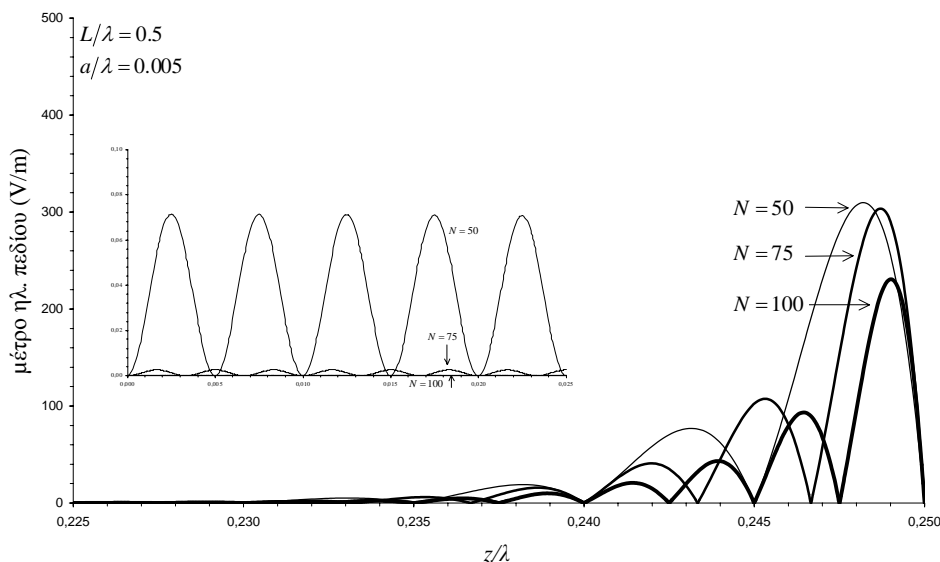
Σχήμα 4. 26. Τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα και μονόπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).

Αρχικά, παρουσιάζονται αποτελέσματα που αφορούν ένα βραχυκυκλωμένο δίπολο με $L/\lambda = 0.5$ και $a/\lambda = 0.005$, το οποίο διεγείρεται από κάθετα προσπίπτον επίπεδο κύμα με ένταση ηλεκτρικού πεδίου που δίνεται από τη σχέση

$$E_z^{exc}(z) = E_0 \exp(jk_0 z), \quad (4.29)$$

όπου E_0 το μιγαδικό πλάτος. Οι τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου, οι οποίες προκύπτουν υποθέτοντας προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο μοναδιαίου πλάτους, απεικονίζονται συναρτήσει του N στα Σχήματα 4.24-4.26, για τις τρεις προαναφερθείσες επιλογές που αφορούν τον τύπο των βοηθητικών πηγών. Είναι προφανές ότι οι λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας πηγές ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος πλεονεκτούν σε σχέση με τις λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πηγές, αφού η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου σταθεροποιείται αριθμητικά για μικρότερο N . Πάντως, ανεξάρτητα από την επιλογή του τύπου των βοηθητικών πηγών, η MAS τείνει πρακτικά στην ίδια λύση, καθώς οι διαφορές στις τελικές τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος είναι αμελητέες (τυπικά $<1\%$). Από τα Σχήματα 4.25 και 4.26 προκύπτει ότι η αντικατάσταση των βοηθητικών διπόλων στα άκρα του διπόλου με μονόπολα έχει ως αποτέλεσμα μια μικρή επιβράδυνση του ρυθμού αριθμητικής σταθεροποίησης των λύσεων.

Ακολούθως, στον Πίνακα 4.3, παρουσιάζονται αποτελέσματα για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς των λύσεων αυξανόμενου του N . Σε κάθε περίπτωση, το ΗΜ πεδίο διέγερσης είναι κάθετα προσπίπτον επίπεδο κύμα με ένταση ηλεκτρικού πεδίου μοναδιαίου πλάτους. Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.3 συνάγεται ότι οι λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας στοιχειώδη δίπολα ως βοηθητικές πηγές σταθεροποιούνται αριθμητικά για πολύ μεγαλύτερες τιμές του N σε σχέση με αυτές που απαιτούνται για τις δύο άλλες επιλογές βοηθητικών πηγών, οι οποίες οδηγούν σε αριθμητικά ευσταθή αποτελέσματα για $N \sim L/a$, ή ακόμη και $N \sim L/(2a)$, για σχετικά μικρές τιμές της παραμέτρου a/λ . Εκτενείς δοκιμές κατέδειξαν ότι αυτή η συμπεριφορά εμφανίζεται σε πολύ μεγάλο εύρος μεταβολής της παραμέτρου L/λ .



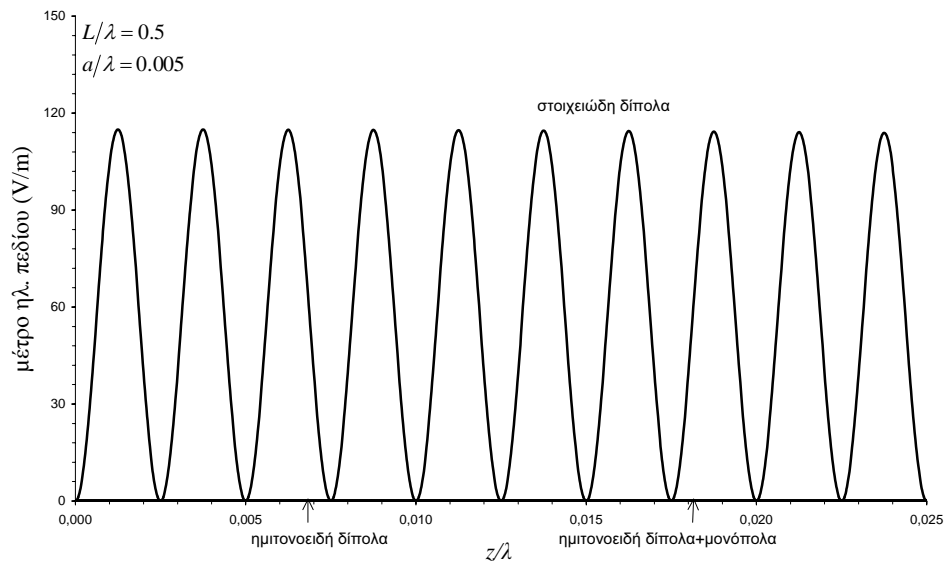
Σχήμα 4. 27. Απεικόνιση του μέτρου της επαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου, για διαφορετικές επιλογές του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).

Πίνακας 4. 3. Τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου αυξανόμενης της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών, για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.

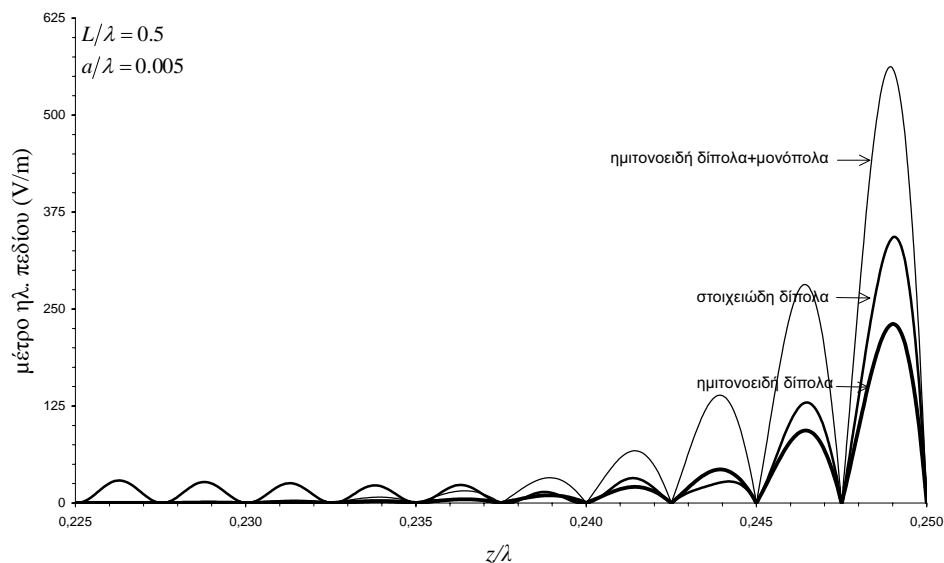
L/λ	a/λ	N	$I(0)$ (mA)		
			Στοιχειώδη Δίπολα	Ημιτονοειδή Δίπολα	Ημιτονοειδή Δίπολα+ Μονόπολα
0.50	0.001	250	0.00+j0.00	2.78-j2.00	2.79-j2.00
		500	0.03+j0.34	2.80-j1.99	2.82-j1.99
		750	2.92-j1.95	2.80-j1.99	2.81-j1.99
		1000	2.81-j1.99	2.80-j1.99	2.81-j1.99
	0.005	50	0.00+j0.04	2.45-j2.01	2.50-j2.01
		100	3.73-j1.15	2.52-j2.00	2.56-j2.00
		150	2.54-j2.00	2.53-j2.00	2.55-j2.00
		200	2.53-j2.00	2.52-j2.00	2.54-j2.00
	0.010	25	0.01+j0.16	2.32-j1.98	2.38-j1.98
		50	2.73-j1.88	2.41-j1.98	2.46-j1.97
		75	2.44-j1.98	2.42-j1.98	2.45-j1.98
		100	2.43-j1.98	2.42-j1.98	2.44-j1.98
1.00	0.001	500	0.00+j0.00	0.25-j0.94	0.25-j0.94
		1000	0.12+j0.50	0.25-j0.94	0.25-j0.94
		1500	0.25-j0.94	0.25-j0.94	0.25-j0.94
		2000	0.25-j0.94	0.25-j0.94	0.25-j0.94
	0.005	100	0.00+j0.04	0.46-j1.26	0.46-j1.26
		200	0.59-j1.33	0.46-j1.26	0.46-j1.26
		300	0.46-j1.26	0.46-j1.26	0.46-j1.26
		400	0.46-j1.26	0.46-j1.26	0.46-j1.26
	0.010	50	0.02+j0.17	0.64-j1.48	0.64-j1.48
		100	0.69-j1.49	0.64-j1.48	0.64-j1.47
		150	0.64-j1.47	0.64-j1.47	0.64-j1.47
		200	0.64-j1.47	0.64-j1.48	0.64-j1.47

Στη συνέχεια, στο Σχήμα 4.27, απεικονίζεται το μέτρο της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια ενός διπόλου με $L/\lambda = 0.5$ και $a/\lambda = 0.005$, όταν ως βοηθητικές πηγές χρησιμοποιούνται δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος. Η απεικόνιση αντιστοιχεί σε κάθετα προσπίπτον επίπεδο κύμα με ένταση ηλεκτρικού πεδίου μοναδιαίου πλάτους. Λόγω συμμετρίας, η απεικόνιση περιορίζεται στο θετικό ημιάξονα του διπόλου. Από το Σχήμα 4.27 συνάγεται ότι η αύξηση του N έχει ως συνέπεια τη μείωση του σφάλματος, τόσο στην περιοχή κοντά στο κέντρο του διπόλου όσο και πλησίον των άκρων. Είναι αξιοσημείωτο ότι οι μέγιστες τιμές του σφάλματος εμφανίζονται πλησίον των άκρων του διπόλου σε όλες τις περιπτώσεις, ενώ οι τιμές του σφάλματος μειώνονται δραματικά μακριά από τα άκρα, όπως φαίνεται στο ένθετο γράφημα. Ανάλογη είναι η συμπεριφορά του σφάλματος για τις δύο άλλες επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών. Ωστόσο, για δεδομένη τιμή του N , τα αντίστοιχα σφάλματα είναι μεγαλύτερα αυτών που απεικονίζονται στο Σχήμα 4.27, όπως φαίνεται στα Σχήματα 4.28 και 4.29 για $N = 100$. Είναι ακόμη άξιο παρατήρησης το γεγονός ότι το σφάλμα που προκύπτει όταν ως βοηθητικές πηγές χρησιμοποιούνται στοιχειώδη δίπολα παρουσιάζει ταλαντωτική συμπεριφορά με σχεδόν σταθερό πλάτος κοντά στο κέντρο του διπόλου και τιμές που είναι πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες τιμές των σφαλμάτων που αντιστοιχούν στις άλλες επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει το μειονέκτημα της χρήσης στοιχειωδών διπόλων ως βοηθητικών πηγών και

εξηγεί, τουλάχιστον εν μέρει, τις προαναφερθείσες διαφορές στο ρυθμό αριθμητικής σταθεροποίησης των λύσεων.



Σχήμα 4. 28. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον του κέντρου), για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.

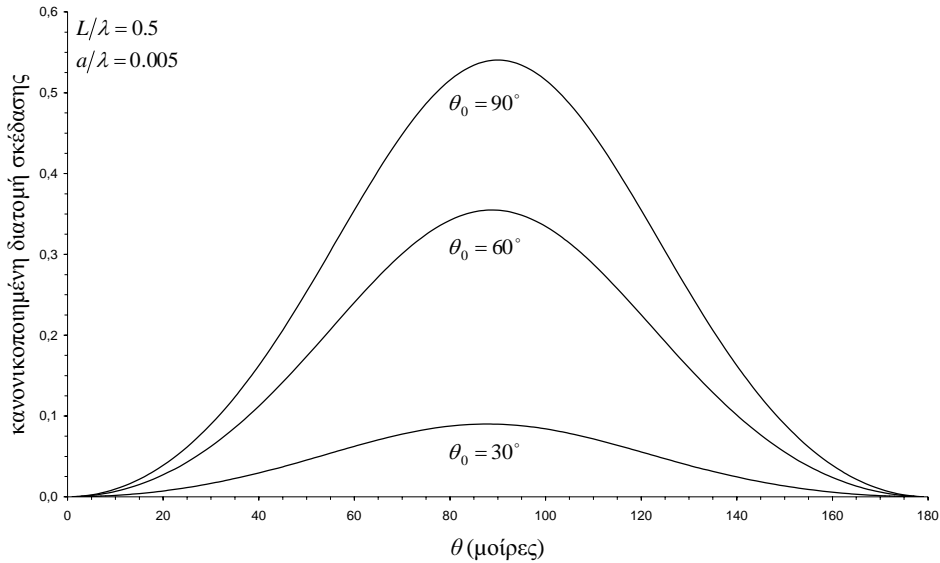


Σχήμα 4. 29. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον των άκρων), για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.

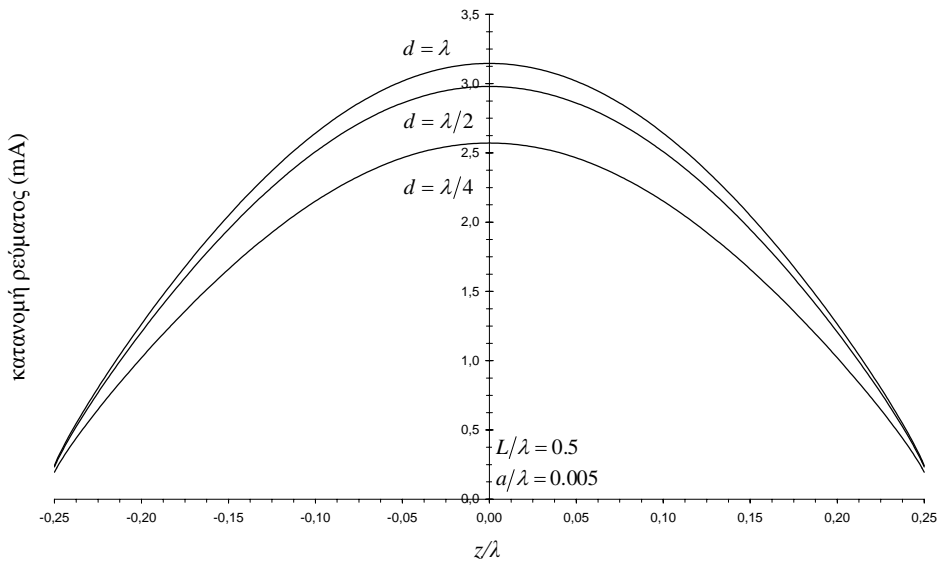
Ακολούθως, στο Σχήμα 4.30, παρουσιάζονται επιλεγμένα αποτελέσματα για την κανονικοποιημένη διατομή σκέδασης $\sigma(\theta)/\lambda^2$ συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης θ , για ένα δίπολο με $L/\lambda = 0.5$ και $a/\lambda = 0.005$, όταν το ΗΜ πεδίο διέγερσης είναι πλάγια προσπίπτον επίπεδο κύμα με ένταση ηλεκτρικού πεδίου που δίνεται από τη σχέση

$$E_z^{exc}(z) = E_0 \sin \theta_0 \exp(jk_0 z \cos \theta_0), \quad (4.30)$$

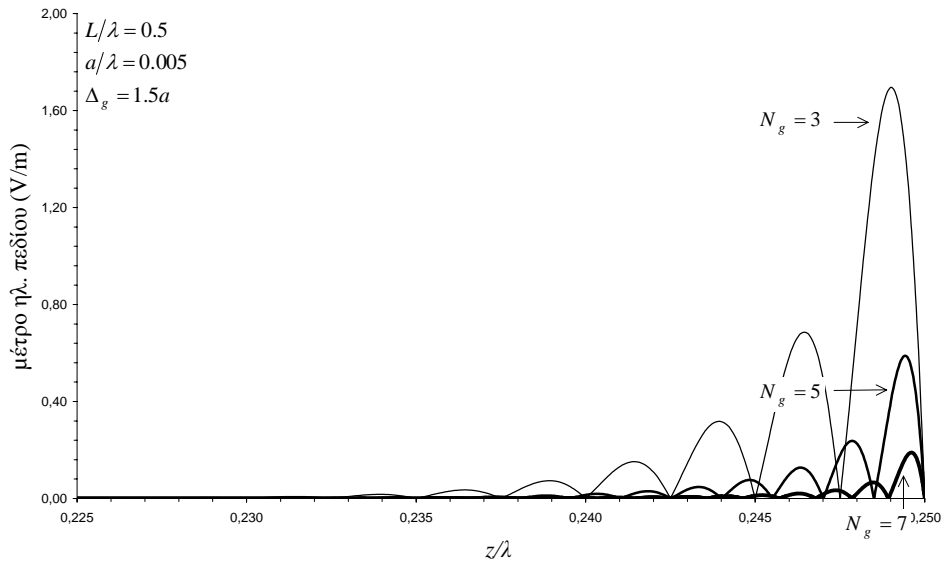
όπου θ_0 η γωνία πρόσπτωσης. Τα αποτελέσματα του Σχήματος 4.30 αντιστοιχούν σε γωνίες πρόσπτωσης 30, 60 και 90 μοιρών. Οι τιμές που απεικονίζονται στο Σχήμα 4.30 προσδιορίστηκαν με $N = 100$, ενώ η αύξηση του N οδηγεί σε ασήμαντες μεταβολές στα αποτελέσματα. Σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα για τη διατομή σκέδασης έχουν βρεθεί σε εξαιρετική συμφωνία με αποτελέσματα άλλων μεθόδων [32].



Σχήμα 4. 30. Απεικόνιση της κανονικοποιημένης διατομής σκέδασης συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης, για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης.



Σχήμα 4. 31. Κατανομή του μέτρου του επαγόμενου ρεύματος στην περίπτωση διέγερσης από στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο, για διάφορες αποστάσεις από το κέντρο του διπόλου.



Σχήμα 4. 32. Απεικόνιση του μέτρου της επαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον των άκρων), για διαφορετικές επιλογές του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).

Επιπρόσθετα, στο Σχήμα 4.31, απεικονίζονται οι κατανομές του μέτρου του επαγόμενου ρεύματος σε ένα δίπολο με $L/\lambda = 0.5$ και $a/\lambda = 0.005$, όταν το ΗΜ πεδίο διέγερσης προέρχεται από ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο διπολικής ροπής p , το οποίο βρίσκεται σε διάφορες αποστάσεις d από το κέντρο του διπόλου. Στην περίπτωση αυτή, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου διέγερσης δίνεται από τη σχέση

$$E_z^{exc}(z) = -j \frac{30}{k_0} p \left[(1 + jk_0 R)(2z^2 - d^2) + k_0^2 R^2 d^2 \right] \frac{\exp(-jk_0 R)}{R^5}, \quad (4.31)$$

όπου $R = \sqrt{z^2 + d^2}$. Η τιμή της διπολικής ροπής p είναι τέτοια ώστε το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου διέγερσης να είναι μοναδιαίο στο κέντρο του διπόλου. Σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα των Σχημάτων 4.30 και 4.31 βρίσκονται σε συμφωνία με αποτελέσματα άλλων μεθόδων [9].

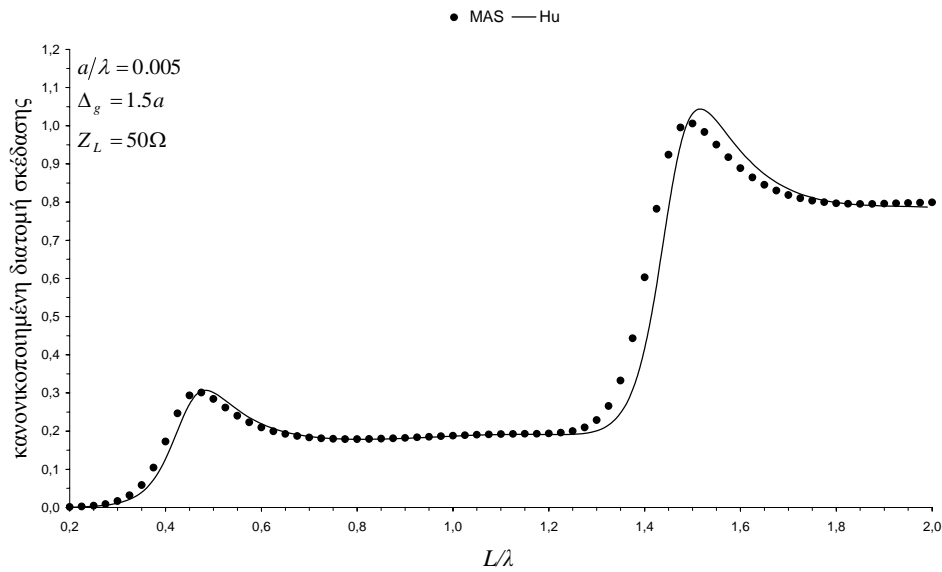
Ακολούθως, παρουσιάζονται αποτελέσματα που αφορούν φορτωμένα δίπολα με διάφορα τυπικά φορτία. Επιλεγμένα αποτελέσματα για την ένταση του επαγόμενου ρεύματος σε φορτίο 50Ω περιέχονται στον Πίνακα 4.4, για κεντρικά φορτωμένα δίπολα με $a/\lambda = 0.005$ και $\Delta_g = 1.5a$. Τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.4 αντιστοιχούν σε μοναδιαία ένταση προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου και κάθετη πρόπτωση. Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.4 συνάγεται ότι οι λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας στοιχειώδη δίπολα ως βοηθητικές πηγές σταθεροποιούνται αριθμητικά για $N_g \geq 5$, σε αντίθεση με τις λύσεις που αντιστοιχούν στις δύο άλλες επιλογές βοηθητικών πηγών, οι οποίες οδηγούν σε ικανοποιητικά αποτελέσματα ακόμη και για $N_g = 3$. Επιπρόσθετα, φαίνεται ότι η αντικατάσταση των βοηθητικών διπόλων στα άκρα του διπόλου με μονόπολα δεν οδηγεί σε κάποια σημαντική διαφοροποίηση των λύσεων. Πάντως, ανεξάρτητα από την επιλογή του N_g , οι λύσεις αναμένεται να είναι αριθμητικά ευσταθείς για κάποιες τιμές του N που υπερβαίνουν μια κρίσιμη στάθμη, η οποία σχετίζεται άμεσα με το λόγο $L/(2a)$. Συνεπώς, η

επιλογή του N από τη σχέση (4.16) για $N_g = 3$ δεν είναι ασφαλής επιλογή σε κάθε περίπτωση. Για το λόγο αυτό, είναι απαραίτητος ο έλεγχος της αριθμητικής ευστάθειας των λύσεων για $N_g > 3$.

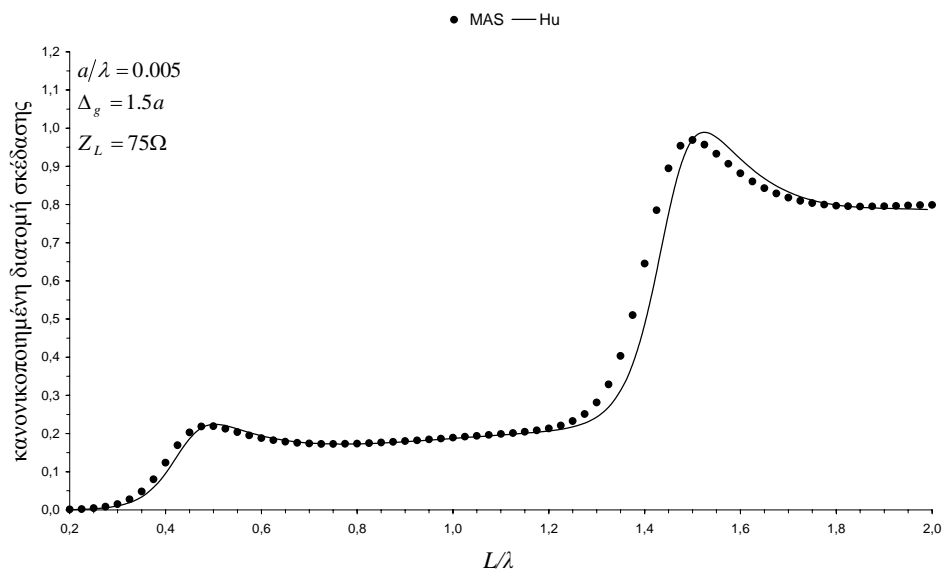
Στη συνέχεια, στο Σχήμα 4.32, απεικονίζεται το μέτρο της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια ενός διπόλου με $L/\lambda = 0.5$, $a/\lambda = 0.005$, $\Delta_g = 1.5a$ και φορτίο 50Ω , όταν ως βοηθητικές πηγές χρησιμοποιούνται δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος. Η απεικόνιση αντιστοιχεί σε κάθετα προσπίπτον επίπεδο κύμα με ένταση ηλεκτρικού πεδίου μοναδιαίου πλάτους. Λόγω συμμετρίας, η απεικόνιση περιορίζεται στο θετικό ημιάξονα του διπόλου. Από το Σχήμα 4.32 συνάγεται ότι η αύξηση του N , όπως καθορίζεται από τη σχέση (4.16), έχει ως συνέπεια το ηλεκτρικό πεδίο να λαμβάνει όλο και μικρότερες τιμές στην περιοχή εκτός του διακένου, ιδιαίτερα πλησίον των άκρων. Ανάλογη είναι η συμπεριφορά του σφάλματος για τις δύο άλλες επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών. Όσον αφορά την περιοχή εντός του διακένου, το ηλεκτρικό πεδίο παρουσιάζει αντίστοιχη συμπεριφορά με αυτή του τροφοδοτούμενου διπόλου που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 4.2.2.

Πίνακας 4. 4. Τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στα άκρα του διακένου αυξανόμενης της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών, για διαφορετικές επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών.

L/λ	N_g	N	I_L (mA)		
			Στοιχειώδη Δίπολα	Ημιτονοειδή Δίπολα	Ημιτονοειδή Δίπολα+ Μονόπολα
0.25	1	17	0.00+j0.01	0.16+j0.54	0.16+j0.55
	3	50	0.13+j0.49	0.15+j0.53	0.15+j0.52
	5	83	0.15+j0.52	0.15+j0.52	0.15+j0.52
	7	117	0.15+j0.52	0.15+j0.53	0.15+j0.52
	9	150	0.15+j0.53	0.15+j0.53	0.15+j0.53
0.50	1	33	0.00+j0.01	1.95-j1.20	1.93-j1.21
	3	100	2.45-j0.61	2.02-j1.16	2.03-j1.15
	5	167	2.03-j1.15	2.02-j1.15	2.03-j1.15
	7	233	2.02-j1.16	2.02-j1.16	2.02-j1.15
	9	300	2.01-j1.16	2.01-j1.16	2.02-j1.16
0.75	1	50	0.00+j0.01	0.59-j1.23	0.58-j1.23
	3	150	0.80-j1.31	0.60-j1.23	0.60-j1.23
	5	250	0.60-j1.23	0.60-j1.23	0.60-j1.23
	7	350	0.60-j1.23	0.60-j1.23	0.60-j1.23
	9	450	0.60-j1.23	0.60-j1.23	0.60-j1.23
1.00	1	67	0.00+j0.01	0.36-j1.23	0.36-j1.23
	3	200	0.49-j1.29	0.36-j1.23	0.37-j1.23
	5	333	0.37-j1.23	0.36-j1.23	0.37-j1.23
	7	467	0.36-j1.23	0.36-j1.23	0.36-j1.23
	9	600	0.36-j1.23	0.36-j1.23	0.36-j1.23



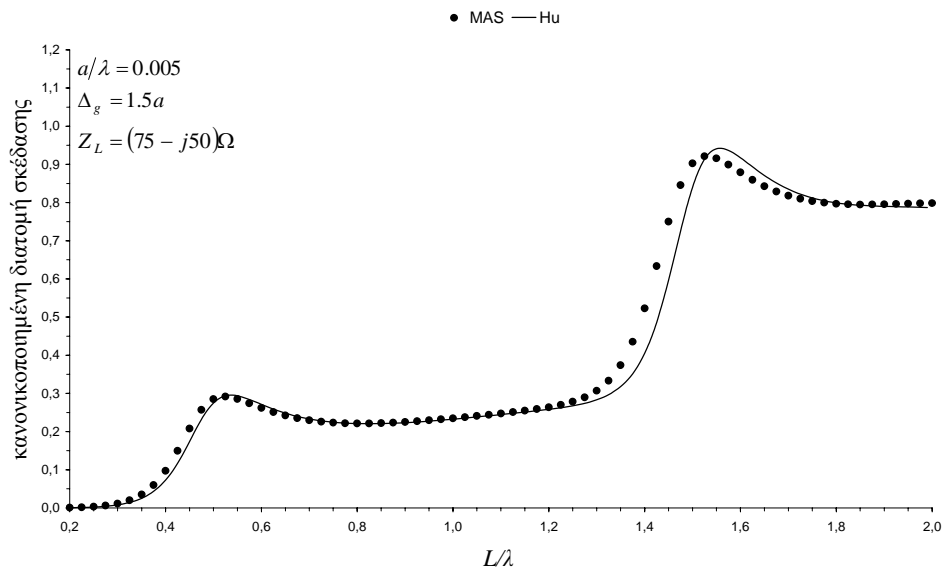
Σχήμα 4. 33. Απεικόνιση της κανονικοποιημένης διατομής σκέδασης συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης.



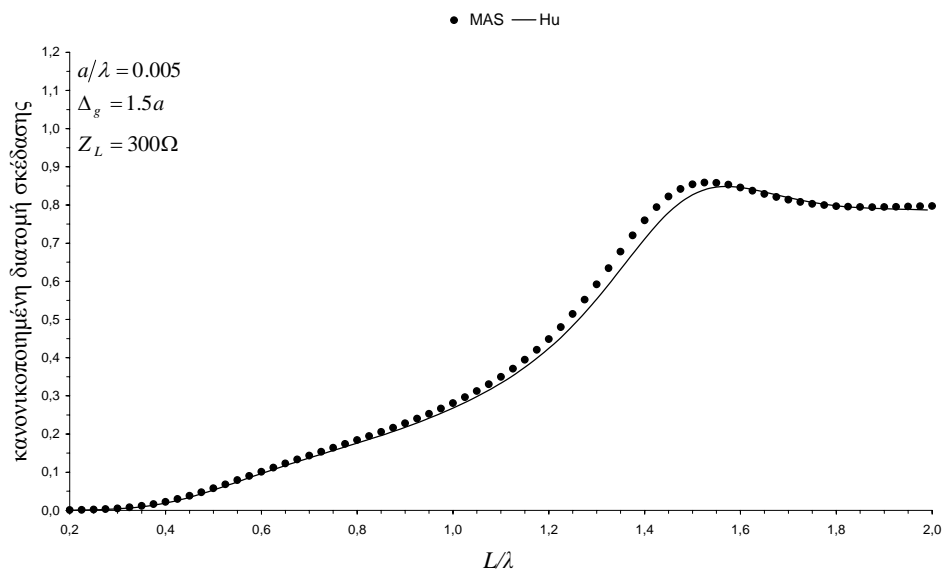
Σχήμα 4. 34. Απεικόνιση της κανονικοποιημένης διατομής σκέδασης συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης.

Τέλος, στα Σχήματα 4.33-4.36, απεικονίζεται, ως συνάρτηση της παραμέτρου L/λ , η κανονικοποιημένη διατομή σκέδασης $\sigma(\theta = 90^\circ)/\lambda^2$ ενός διπόλου με $a/\lambda = 0.005$ και $\Delta_g = 1.5a$. Οι τιμές των φορτίων αντιστοιχούν σε τυπικές γραμμές μεταφοράς και τυπικά κυκλώματα δεκτών. Τα αποτελέσματα των Σχημάτων 4.33-4.36 προέκυψαν με $N_g = 3$, χρησιμοποιώντας δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος ως βοηθητικές πηγές. Τα αποτελέσματα της MAS βρίσκονται σε ικανοποιητική συμφωνία με τα αποτελέσματα μιας διαθέσιμης μεταβολικής τεχνικής [33], η οποία βασίζεται σε μια απλή τριγωνομετρική

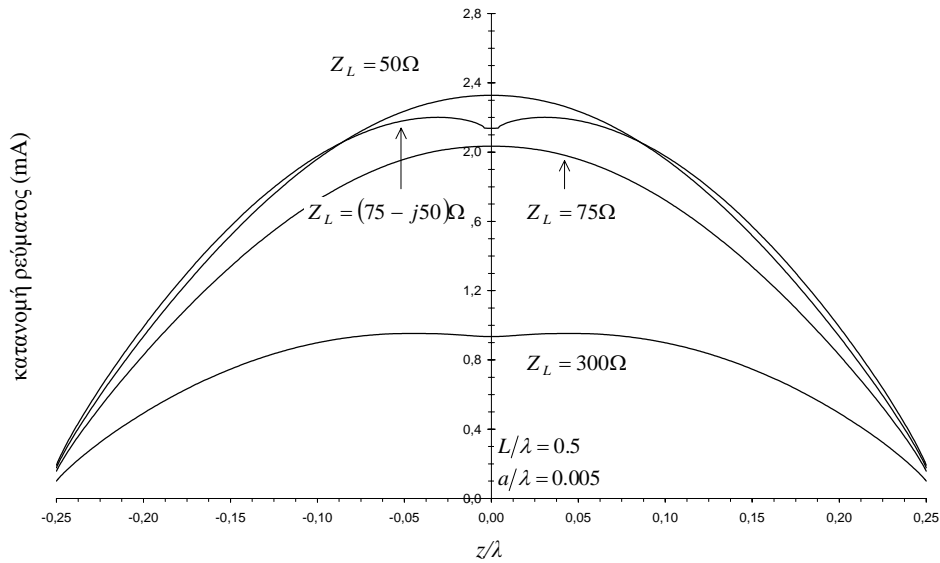
συνάρτηση για την κατανομή ρεύματος, που είναι σχετικά ακριβής για $L/\lambda < 1.3$. Οι σημαντικές αποκλίσεις που εμφανίζονται για $L/\lambda > 1.3$ οφείλονται στην ανεπάρκεια της μορφής της κατανομής ρεύματος που υποτίθεται κατά την εφαρμογή της προαναφερθείσας τεχνικής. Οι μικρές διαφορές που εμφανίζονται για $L/\lambda < 1.3$ οφείλονται, τουλάχιστον εν μέρει, σε διαφορές στη μοντελοποίηση του διακένου. Οι σημαντικές διαφορές στα διαγράμματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικά φορτία οφείλονται στην ισχυρή εξάρτηση της κατανομής ρεύματος από την τιμή της σύνθετης αντίστασης του φορτίου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.37 για $L/\lambda = 0.5$ και κάθετα προσπίπτον επίπεδο κύμα με ένταση ηλεκτρικού πεδίου μοναδιαίου πλάτους



Σχήμα 4. 35. Απεικόνιση της κανονικοποιημένης διατομής σκέδασης συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης.



Σχήμα 4. 36. Απεικόνιση της κανονικοποιημένης διατομής σκέδασης συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης.



Σχήμα 4. 37. Κατανομή του μέτρου του επαγόμενου ρεύματος σε φορτωμένο δίπολο, για διάφορα τυπικά φορτία.

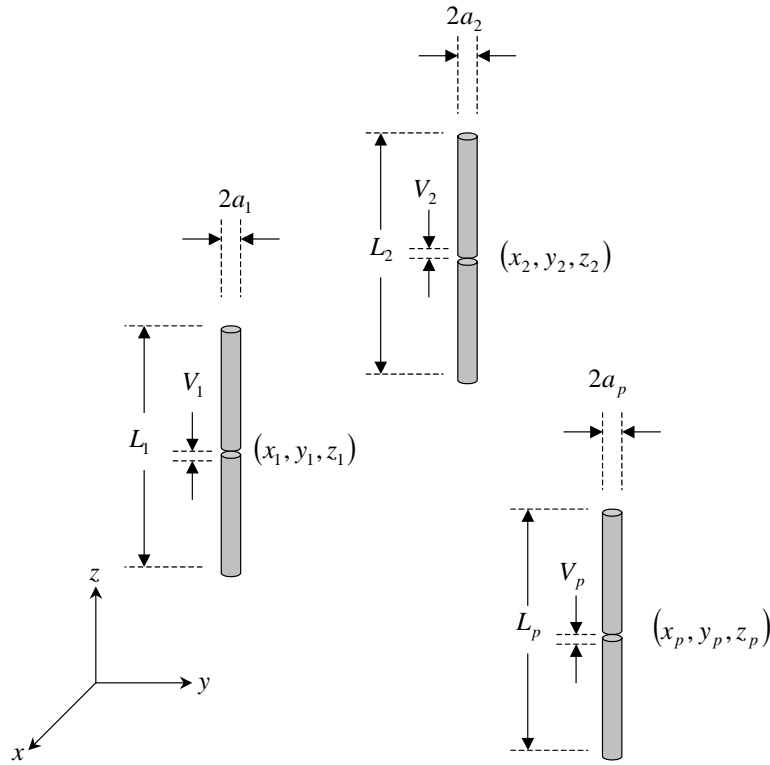
4.5 Στοιχειοκεραίες Παράλληλων Διπόλων

4.5.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος συνίσταται σε N_d ηλεκτρικά λεπτά δίπολα, οι άξονες των οποίων είναι παράλληλοι μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.38. Οι θέσεις των κέντρων των διπόλων μπορεί να είναι οπουδήποτε στο χώρο, αρκεί η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διπόλων να είναι αρκετά μεγαλύτερη από τις ακτίνες τους. Το μήκος και η ακτίνα κάθε διπόλου συμβολίζονται με L_p και a_p (με $a_p \ll L_p$ και $a_p \ll \lambda$), αντίστοιχα, όπου $p = 1, \dots, N_d$. Κάθε δίπολο τροφοδοτείται από μια πηγή τάσης V_p , η οποία επιβάλλει ένα σταθερό πεδίο διέγερσης κατά μήκος ενός διακένου με κέντρο στο κέντρο του αντίστοιχου διπόλου (x_p, y_p, z_p) και εύρος Δ_p , κατά αντιστοιχία με την περίπτωση του μεμονωμένου διπόλου του Σχήματος 4.1. Αν και όλα τα δίπολα θεωρούνται συμμετρικά τροφοδοτούμενα, η γενίκευση της ανάλυσης που ακολουθεί σε περιπτώσεις ασύμμετρα τροφοδοτούμενων διπόλων είναι άμεση, χωρίς σημαντικές τροποποιήσεις. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, οι άξονες των διπόλων ταυτίζονται με τον άξονα z του συστήματος συντεταγμένων του Σχήματος 4.38. Το πεδίο διέγερσης κάθε διπόλου εκφράζεται ως εξής

$$E_p^s(z) = \begin{cases} -\frac{V_p}{\Delta_p}, & |z - z_p| < \frac{\Delta_p}{2} \\ 0, & \frac{\Delta_p}{2} < |z - z_p| \leq \frac{L_p}{2} \end{cases} \quad (4.32)$$

Σημειώνεται ότι κάθε δίπολο μπορεί να δρα ως ενεργό ή παρασιτικό στοιχείο της στοιχειοκεραίας. Στη δεύτερη περίπτωση, η αντίστοιχη πηγή τάσης βραχυκυκλώνεται και, ως εκ τούτου, το πεδίο διέγερσης είναι μηδενικό.



Σχήμα 4. 38. Γεωμετρία παράλληλων διπόλων σε τυχαίες θέσεις.

4.5.2 Εφαρμογή της MAS

Σύμφωνα με τις βασικές αρχές της MAS, το άγνωστο HM πεδίο σε κάθε περιοχή του προβλήματος εκφράζεται ως υπέρθεση των HM πεδίων που παράγονται από ένα σύνολο βοηθητικών πηγών, που είναι τοποθετημένες εκτός των ορίων της αντίστοιχης περιοχής. Λόγω του γεγονότος ότι τα δίπολα θεωρούνται ηλεκτρικά λεπτά, οι βοηθητικές πηγές κατανέμονται επί των αξόνων των διπόλων, σύμφωνα με το Σχήμα 4.2. Ο αριθμός των βοηθητικών πηγών ανά δίπολο υποτίθεται ίσος με $2N_p + 1$. Οι βοηθητικές πηγές μπορεί να είναι οποιουδήποτε τύπου, αρκεί τα παραγόμενα HM πεδία να αποτελούν λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στο κενό. Ωστόσο, από τη μελέτη της αριθμητικής ευστάθειας των λύσεων στην περίπτωση του μεμονωμένου διπόλου προέκυψε ότι πλεονεκτεί η χρήση διπόλων ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος ως βοηθητικών πηγών. Ως εκ τούτου, άλλες επιλογές του τύπου των βοηθητικών πηγών δεν πρόκειται να εξεταστούν στη συνέχεια.

Το ακτινοβολούμενο HM πεδίο περιγράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των HM πεδίων των βοηθητικών πηγών, συνεπώς

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{p=1}^{N_d} \sum_{n=-N_p}^{N_p} w_{(p,n)} \vec{F}_{(p,n)}(\vec{r}), \quad (4.33)$$

όπου \vec{F} είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου στον κενό χώρο, ενώ $\vec{F}_{(p,n)}$ είναι το αντίστοιχο πεδίο της βοηθητικής πηγής που καθορίζει το ζεύγος δεικτών

(p, n) και είναι τοποθετημένη στο σημείο $(x_p, y_p, z_p + n\delta_p)$ με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(p,n)}$, όπου $\delta_p = L_p / (2N_p)$ η απόσταση μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών.

Τα πεδία $\vec{F}_{(p,n)}$ προσδιορίζονται με απλή μεταφορά του πεδίου μιας βοηθητικής πηγής, που είναι τοποθετημένη στο κέντρο ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτινοβολεί σε άπειρο κενό χώρο, κατά αντιστοιχία με τη σχέση (4.5). Όταν ως βοηθητικές πηγές χρησιμοποιούνται ηλεκτρικά δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος, τα πεδία $\vec{F}_{(p,n)}$ εκφράζονται, με τη βοήθεια των σχέσεων (B.12) του Παραρτήματος Β, ως εξής

$$\vec{F}_{(p,n)}(\vec{r}) = \vec{F}_D(\vec{r}; \vec{r}_{(p,n)}), \quad (4.34)$$

όπου $\vec{F}_D(\vec{r}; \vec{r}_{(p,n)})$ είναι το πεδίο ενός ηλεκτρικού διπόλου ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος μοναδιαίου πλάτους με προσανατολισμό κατά την κατεύθυνση του άξονα z και κέντρο στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(p,n)}$. Το μήκος των βοηθητικών διπόλων υποτίθεται ίσο με $2\delta_p$, ούτως ώστε κάθε βοηθητική πηγή να εκτείνεται μεταξύ των κέντρων των αμέσως γειτονικών της.

Οι άγνωστοι συντελεστές $w_{(p,n)}$ του αναπτύγματος της σχέσης (4.33) προσδιορίζονται επιβάλλοντας την οριακή συνθήκη της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου σε διακριτά σημεία επί της παράπλευρης επιφάνειας κάθε διπόλου. Πιο συγκεκριμένα, η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να μηδενίζεται στην παράπλευρη επιφάνεια κάθε διπόλου, εξαιρουμένης της περιοχής του διακένου, όπου θα πρέπει να είναι ίση με το αντίστοιχο πεδίο διέγερσης, συνεπώς

$$E_z(x_q + a_q \cos \gamma_q, y_q + a_q \sin \gamma_q, z) = \begin{cases} -\frac{V_q}{\Delta_q}, & |z - z_q| < \frac{\Delta_q}{2} \\ 0, & \frac{\Delta_q}{2} < |z - z_q| \leq \frac{L_q}{2} \end{cases}, \quad (4.35)$$

όπου γ_q η αζιμουθιακή γωνία που ορίζεται σε σχέση με τον άξονα του διπόλου που καθορίζει ο δείκτης $q = 1, 2, \dots, N_d$. Λόγω της ασύμμετρης φύσης του προβλήματος, η κατανομή ρεύματος στην παράπλευρη επιφάνεια κάθε διπόλου δεν είναι ακριβώς σταθερή κατά μήκος της περιφέρειας του. Ωστόσο, όταν τα δίπολα είναι αρκούντως λεπτά σε σχέση με το μήκος κύματος και η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των διπόλων είναι πολύ μεγαλύτερη από τις ακτίνες τους, η αζιμουθιακή εξάρτηση καθίσταται αμελητέα [34, 35]. Συνεπώς, η οριακή συνθήκη της σχέσης (4.35) μπορεί να επιβληθεί σε οποιαδήποτε γωνιακή θέση γ_q , χωρίς σημαντική διαφοροποίηση στα αποτελέσματα. Για να ληφθεί υπόψη η αζιμουθιακή εξάρτηση κατά την έννοια του μέσου όρου, είναι δυνατός ο υπολογισμός της μέσης τιμής του ηλεκτρικού πεδίου που παράγουν όλες οι βοηθητικές πηγές κατά μήκος της περιφέρειας κάθε διπόλου, με σημαντική, όμως, επιβάρυνση του υπολογιστικού κόστους. Εναλλακτικά, είναι δυνατός ο υπολογισμός της συνεισφοράς των απομακρυσμένων βοηθητικών πηγών επί του άξονα κάθε διπόλου, ενώ η συνεισφορά των βοηθητικών πηγών που βρίσκονται στον άξονα του διπόλου υπολογίζεται κατά μήκος μιας γραμμής σε οποιαδήποτε γωνία γ_q . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, επιλέγεται $\gamma_q = 0$, οπότε, από την επιβολή της οριακής συνθήκης της σχέσης (4.35) σε $2N_q + 1$ εγκάρσιες τομές κατά μήκος κάθε διπόλου στις θέσεις $z_q + m\delta_q$, $m = 0, \pm 1, \dots, \pm N_q$, προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\sum_{p=1}^{N_d} \sum_{n=-N_p}^{N_p} A_{(p,n),(q,m)} w_{(p,n)} = -b_{(q,m)}, \begin{cases} q = 1, 2, \dots, N_d \\ m = 0, \pm 1, \dots, \pm N_q \end{cases}, \quad (4.36)$$

όπου

$$A_{(p,n),(q,m)} = \hat{z} \cdot \vec{E}_{(p,n)}(x_q + \delta_K(q-p)a_q, y_q, z_q + m\delta_q), \quad (4.37\alpha)$$

$$b_{(q,m)} = \begin{cases} \frac{V_q}{\Delta_q}, |m\delta_q| < \frac{\Delta_q}{2} \\ 0, |m\delta_q| > \frac{\Delta_q}{2} \end{cases}. \quad (4.37\beta)$$

Ο όρος $\delta_K(q-p)a_q$, όπου $\delta_K(\bullet)$ το δέλτα του Kronecker, εξασφαλίζει ότι η συνεισφορά των απομακρυσμένων βοηθητικών πηγών υπολογίζεται επί του άξονα του διπόλου που καθορίζει ο δείκτης q , όπως εξηγήθηκε παραπάνω. Ο συνολικός αριθμός των αγνώστων του γραμμικού συστήματος των εξισώσεων (4.36) δίνεται από τη σχέση

$$N_T = \sum_{p=1}^{N_d} (2N_p + 1). \quad (4.38)$$

Μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος $N_T \times N_T$ των εξισώσεων (4.36), το ΗΜ πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου προσδιορίζεται άμεσα από τις σχέσεις (4.33) και (4.34). Στη συνέχεια, η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος στην παράπλευρη επιφάνεια κάθε διπόλου προκύπτει με εφαρμογή της οριακής συνθήκης του μαγνητικού πεδίου. Η εφαπτομενική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια κάθε διπόλου προκύπτει ως άθροισμα των συνεισφορών των βοηθητικών πηγών που βρίσκονται εντός του διπόλου και των συνεισφορών των απομακρυσμένων βοηθητικών πηγών. Ωστόσο, το μαγνητικό πεδίο των απομακρυσμένων βοηθητικών πηγών είναι πολλές τάξεις μεγέθους ασθενέστερο σε σχέση με αυτό των βοηθητικών πηγών που βρίσκονται εντός του διπόλου και, ως εκ τούτου, μπορεί να αμεληθεί. Άλλωστε, η συνεισφορά των πρώτων στη μέση τιμή της κατανομής ρεύματος μειώνεται περαιτέρω, λόγω αλλαγής φοράς του διανύσματος του εφαπτομενικού μαγνητικού πεδίου κατά μήκος της περιφέρειας του διπόλου. Συνεπώς, η κατανομή ρεύματος κάθε διπόλου προκύπτει από την προσεγγιστική σχέση

$$I_p(z) \approx 2\pi a_p \left\{ \hat{z} \cdot \left[\hat{n}_p \times \sum_{n=-N_p}^{N_p} w_{(p,n)} \vec{H}_{(p,n)}(x_p + a_p, y_p, z) \right] \right\}, \quad (4.39)$$

όπου \hat{n}_p το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην παράπλευρη επιφάνεια του αντίστοιχου διπόλου. Κατόπιν τούτου, είναι δυνατός ο υπολογισμός των ιδίων και αμοιβαίων σύνθετων αγωγιμοτήτων και αντιστάσεων, οι οποίες ορίζονται ως εξής

$$Y_{p,q} = \frac{I_p}{V_q} \Big|_{V_i=0, i \neq q}, \quad (4.40\alpha)$$

$$Z_{p,q} = \frac{V_p}{I_q} \Big|_{I_i=0, i \neq q}, \quad (4.40\beta)$$

όπου I_p η ένταση του ρεύματος εισόδου του διπόλου που καθορίζει ο δείκτης p . Τα ρεύματα εισόδου συνδέονται με τις τάσεις τροφοδοσίας μέσω του πίνακα σύνθετων αγωγιμοτήτων, σύμφωνα με τη σχέση

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_{N_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} & \dots & Y_{1,N_d} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} & \dots & Y_{2,N_d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N_d,1} & Y_{N_d,2} & \dots & Y_{N_d,N_d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_{N_d} \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Εναλλακτικά, είναι δυνατός ο συσχετισμός των τάσεων τροφοδοσίας με τα ρεύματα εισόδου μέσω του πίνακα σύνθετων αντιστάσεων, σύμφωνα με τη σχέση

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_{N_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,2} & \dots & Z_{1,N_d} \\ Z_{2,1} & Z_{2,2} & \dots & Z_{2,N_d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N_d,1} & Z_{N_d,2} & \dots & Z_{N_d,N_d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_{N_d} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

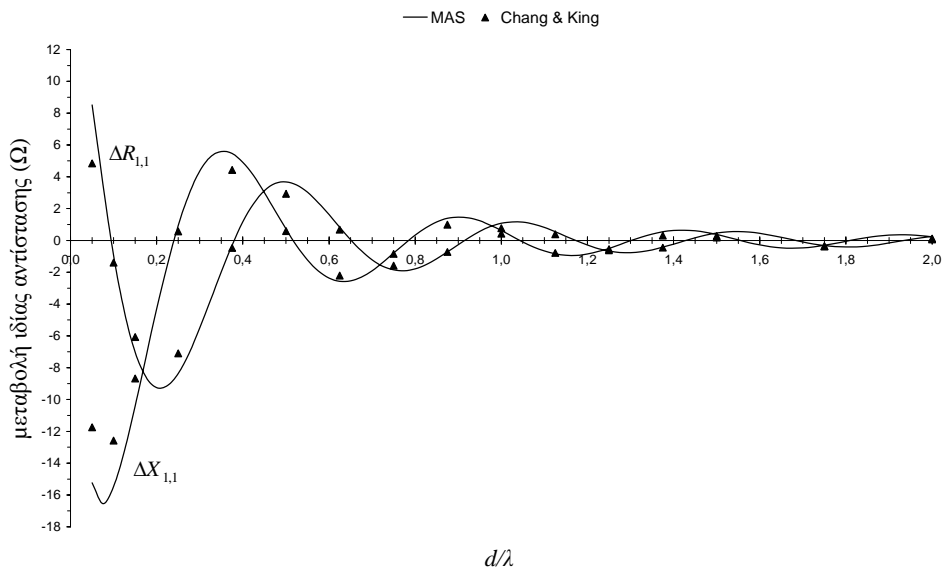
Λόγω του θεωρήματος αμοιβαιότητας, για τις σύνθετες αγωγιμότητες και αντιστάσεις ισχύει η ιδιότητα αντιμετάθεσης, η οποία εκφράζεται ως $Y_{p,q} = Y_{q,p}$ και $Z_{p,q} = Z_{q,p}$.

Όπως και στην περίπτωση του μεμονωμένου διπόλου, το διάκενο σταθερού εύρους μπορεί να μοντελοποιηθεί θεωρώντας ότι το πεδίο διέγερσης εφαρμόζεται σε ένα περιττό πλήθος σημείων επιβολής της οριακής συνθήκης της σχέσης (4.35), το οποίο εξαρτάται από την τιμή του N_p . Για κάθε δίπολο, κατάλληλες τιμές για το N_p προκύπτουν μέσω της σχέσης (4.16).

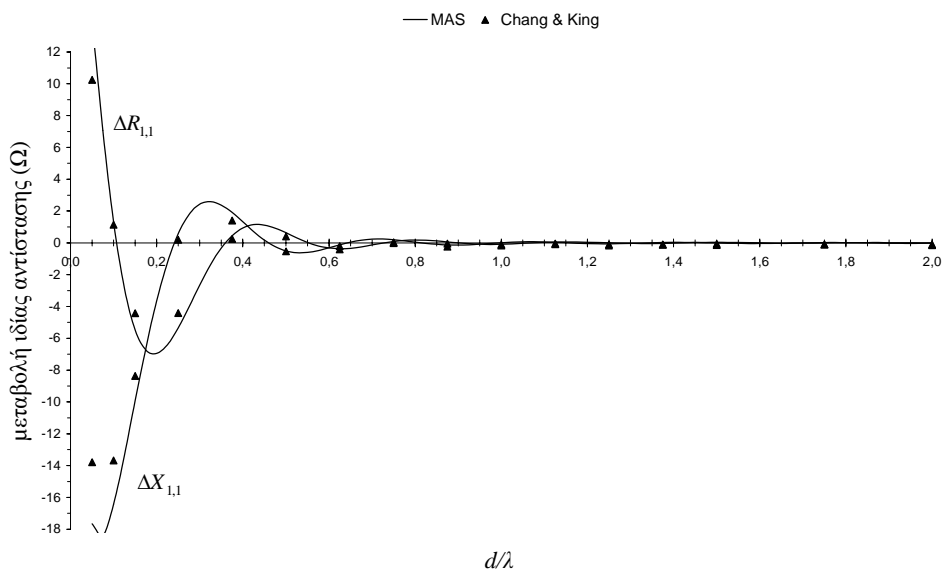
4.5.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Ακολούθως, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των λύσεων σε σχέση με τις παραμέτρους καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών N_p . Μεγάλο πλήθος δοκιμών κατέδειξε ότι οι λύσεις που προκύπτουν αυξανόμενων των N_p , όπως καθορίζεται από τη σχέση (4.16), χαρακτηρίζονται από ικανοποιητική αριθμητική ευστάθεια, όπως άλλωστε αναμένεται, κατά πλήρη αντιστοιχία με τη συμπεριφορά των λύσεων που αφορούν ένα μεμονωμένο δίπολο. Επιλεγμένα αποτελέσματα για τη μεταβολή της ίδιας σύνθετης αγωγιμότητας $\Delta Y_{1,1}$, σε σχέση με τη σύνθετη αγωγιμότητα του μεμονωμένου διπόλου, καθώς και την αμοιβαία σύνθετη αγωγιμότητα $Y_{1,2}$, περιέχονται στον Πίνακα 4.5, για την περίπτωση δύο ταυτόσημων παράλληλων διπόλων με $a/\lambda = 0.007022$ και $\Delta/\lambda = 0.01$. Τα κέντρα των διπόλων απέχουν οριζόντια απόσταση d τέτοια ώστε $d/\lambda = 0.25$. Λόγω του γεγονότος ότι τα δύο δίπολα είναι ταυτόσημα, επιλέγεται $N_1 = N_2 = N$. Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.5 συνάγεται ότι οι λύσεις σταθεροποιούνται αριθμητικά ακόμη και για $N_g = 3$. Ο έλεγχος του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια κάθε διπόλου έδειξε ότι η αύξηση του N , όπως καθορίζεται από τη σχέση (4.16), έχει ως συνέπεια τη μείωση των σφαλμάτων εκτός του διακένου. Πλησίον της ασυνέχειας του διακένου τροφοδότησης κάθε διπόλου, το μέτρο του εφαπτομενικού ηλεκτρικού πεδίου εμφανίζει ταλαντώσεις, το πλάτος των οποίων παραμένει σχεδόν σταθερό με την αύξηση του N .

Ωστόσο, όπως και στην περίπτωση του μεμονωμένου διπόλου, οι μέγιστες τιμές εκατέρωθεν των σημείων ασυνέχειας μετατοπίζονται πλησιέστερα προς αυτά, μειώνοντας έτσι τη συνολική «ενέργεια» του σφάλματος.



Σχήμα 4. 39. Απεικόνιση της μεταβολής της ίδιας σύνθετης αντίστασης (σε σχέση με την τιμή της στον ελεύθερο χώρο) συναρτήσει της απόστασης.



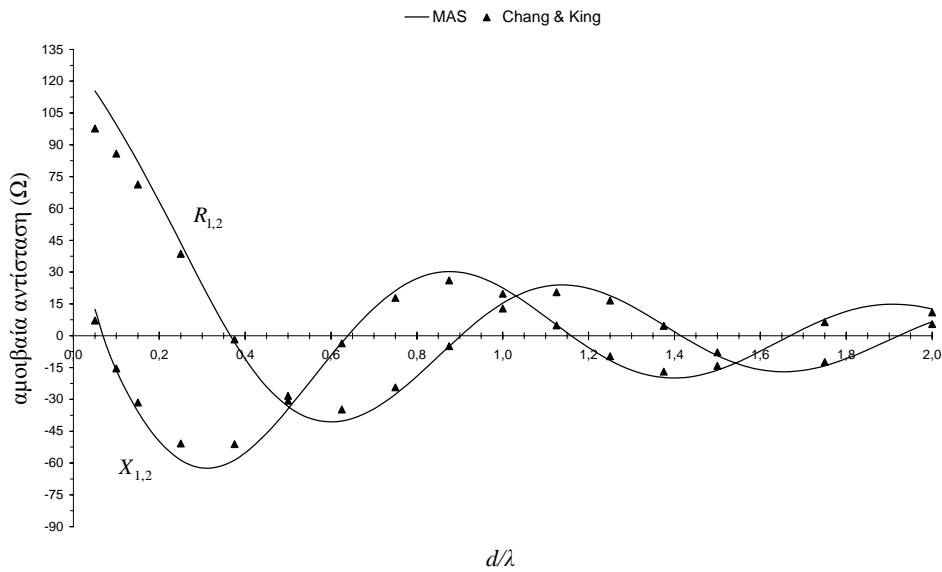
Σχήμα 4. 40. Απεικόνιση της μεταβολής της ίδιας σύνθετης αντίστασης (σε σχέση με την τιμή της στον ελεύθερο χώρο) συναρτήσει της απόστασης.

Ακολουθώς, παρουσιάζονται αποτελέσματα για διάφορες τοποθετήσεις δύο ταυτόσημων διπόλων. Η ίδια σύνθετη αγωγιμότητα, όπως άλλωστε και η ίδια σύνθετη αντίσταση, τείνει στην τιμή που αντιστοιχεί στο μεμονωμένο δίπολο, καθώς αυξάνεται η απόσταση μεταξύ των διπόλων. Το γεγονός αυτό καταδεικνύεται στο Σχήμα 4.39, στο οποίο απεικονίζεται, ως συνάρτηση της παραμέτρου d/λ , η μεταβολή της ίδιας σύνθετης

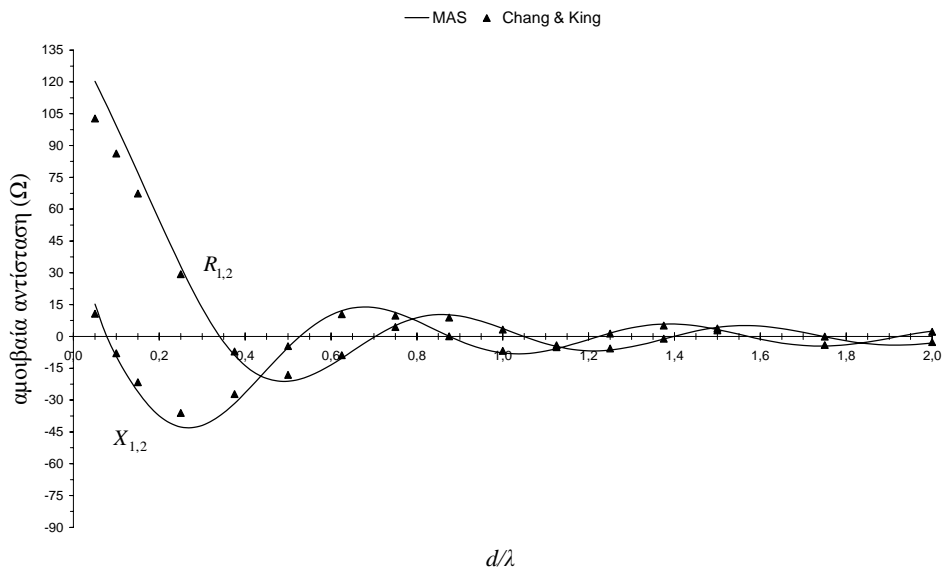
αντίστασης $\Delta Z_{1,1}$, σε σχέση με τη σύνθετη αντίσταση του μεμονωμένου διπόλου, για την περίπτωση δύο ταυτόσημων διπόλων με $L/\lambda = 0.5$, $a/\lambda = 0.007022$ και $\Delta/\lambda = 0.01$. Τα αποτελέσματα του Σχήματος 4.39 προέκυψαν με $N_g = 3$ και $N = 75$. Παρόμοια συμπεριφορά εμφανίζεται όταν τα κέντρα των διπόλων απέχουν κατακόρυφα απόσταση h ίση με την απόσταση οριζόντιου διαχωρισμού d , όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.40. Οι αντίστοιχες τιμές της σύνθετης αμοιβαίας αντίστασης $Z_{1,2}$ απεικονίζονται στα Σχήματα 4.41 και 4.42. Στα Σχήματα 4.43 και 4.44 παρουσιάζονται αντίστοιχα αποτελέσματα, τα οποία προσδιορίστηκαν με $N_g = 3$ και $N = 150$, για την περίπτωση δύο διπόλων με $h = 0$ και $L/\lambda = 1$. Σε όλες τις περιπτώσεις, τα αποτελέσματα της MAS βρίσκονται σε ικανοποιητική συμφωνία με ανεξάρτητα αποτελέσματα [36]. Αντίστοιχα αποτελέσματα για παράλληλα δίπολα με $L/\lambda = 0.5$ και $a/\lambda = 0.003369$ είναι διαθέσιμα στη σχετική αναφορά [37] και δεν παρατίθενται εδώ.

Πίνακας 4. 5. Τιμές της ίδιας και της αμοιβαίας σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου αυξανόμενης της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών.

L/λ	N_g	N	$\Delta Y_{1,1}$ (mS)	$Y_{1,2}$ (mS)
0.25	1	13	-0.02+j0.00	0.18-j0.24
	3	38	-0.02+j0.00	0.17-j0.21
	5	63	-0.02+j0.00	0.17-j0.21
	7	88	-0.02+j0.00	0.17-j0.21
	9	113	-0.02+j0.00	0.17-j0.21
0.50	1	25	-1.74+j0.52	1.87+j3.05
	3	75	-1.99+j0.40	1.84+j3.40
	5	125	-1.99+j0.40	1.84+j3.40
	7	175	-1.97+j0.41	1.84+j3.37
	9	225	-1.95+j0.42	1.84+j3.34
0.75	1	38	-0.08+j0.24	0.77+j0.31
	3	113	-0.09+j0.25	0.79+j0.32
	5	188	-0.09+j0.25	0.79+j0.32
	7	263	-0.09+j0.25	0.79+j0.32
	9	338	-0.08+j0.25	0.79+j0.32
1.00	1	50	-0.02+j0.15	0.53+j0.03
	3	150	-0.03+j0.15	0.53+j0.04
	5	250	-0.03+j0.15	0.53+j0.04
	7	350	-0.03+j0.15	0.53+j0.04
	9	450	-0.03+j0.15	0.53+j0.04

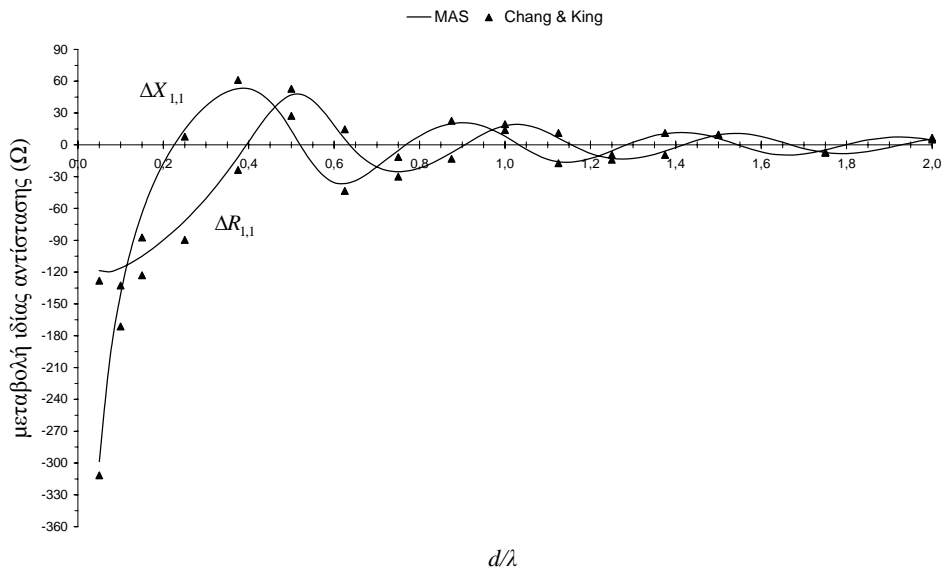


Σχήμα 4. 41. Απεικόνιση της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης συναρτήσει της απόστασης.

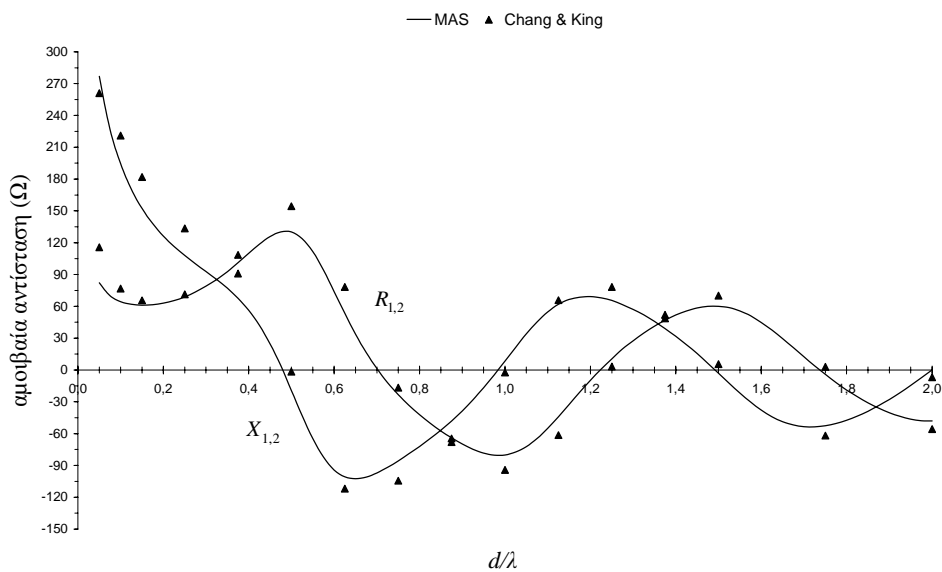


Σχήμα 4. 42. Απεικόνιση της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης συναρτήσει της απόστασης.

Στη συνέχεια, στο Σχήμα 4.45, παρουσιάζονται τα διαγράμματα ακτινοβολίας πλάτους επί του οριζόντιου επιπέδου που αντιστοιχούν σε ένα ενεργό στοιχείο με $L_1/\lambda = 1$ και ένα παρασιτικό στοιχείο μεταβλητού μήκους σε οριζόντια απόσταση τέτοια ώστε $d/\lambda = 0.2$. Οι υπόλοιπες παράμετροι των διπόλων είναι ίδιες με αυτές που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Τα διαγράμματα προσδιορίστηκαν με $N_1 = 150$ και $N_2 = N_1 L_2 / L_1$, ενώ απεικονίζονται σε dB σχετικά προς την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην κατεύθυνση $\phi = 90^\circ$. Σημειώνεται ότι τα διαγράμματα του Σχήματος 4.45 βρίσκονται σε εξαιρετική συμφωνία με ανεξάρτητα αποτελέσματα για την ίδια διάταξη ([7], Σχήμα 6.15).



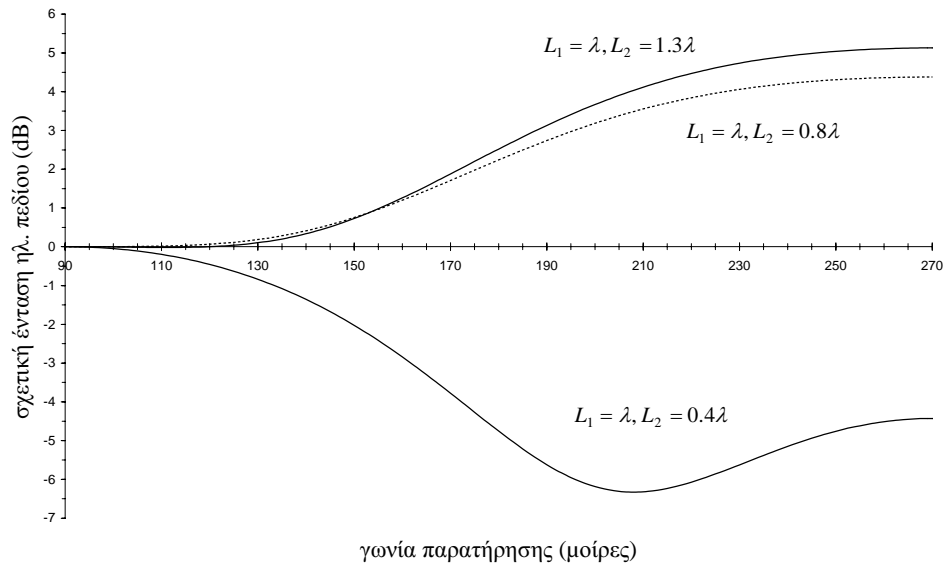
Σχήμα 4. 43. Απεικόνιση της μεταβολής της ίδιας σύνθετης αντίστασης (σε σχέση με την τιμή της στον ελεύθερο χώρο) συναρτήσει της απόστασης.



Σχήμα 4. 44. Απεικόνιση της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης συναρτήσει της απόστασης.

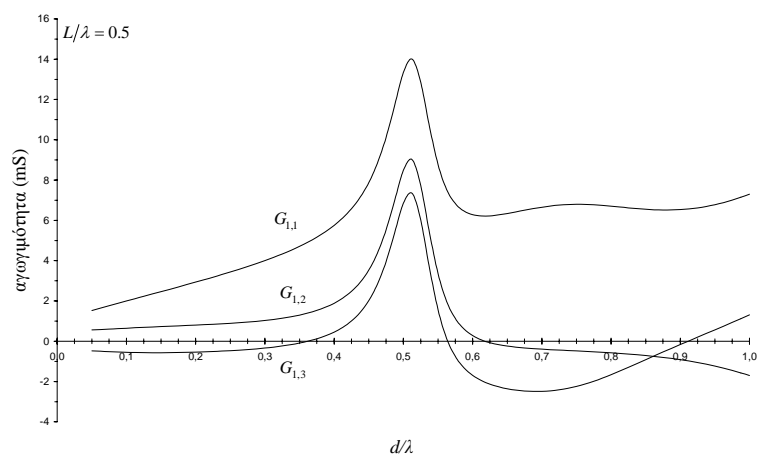
Τέλος, παρουσιάζονται αποτελέσματα για κυκλικές στοιχειοκεραίες ταυτόσημων διπόλων. Στην προκειμένη περίπτωση, με d συμβολίζεται η απόσταση μεταξύ γειτονικών διπόλων. Αρχικά, εξετάζεται μια κυκλική στοιχειοκεραία τεσσάρων στοιχείων με $a/\lambda = 0.007022$ και $\Delta/\lambda = 0.01$. Στα Σχήματα 4.46 και 4.47 απεικονίζονται οι τιμές της ίδιας και των αμοιβαίων σύνθετων αγωγιμοτήτων συναρτήσει της παραμέτρου d/λ , για $L/\lambda = 0.5$ και $L/\lambda = 0.75$, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται προσδιορίστηκαν με $N_g = 3$. Αύξηση του N , όπως καθορίζεται από τη σχέση (4.16), οδηγεί σε αποτελέσματα που διαφοροποιούνται κατά λιγότερο από 1%. Τα αποτελέσματα των

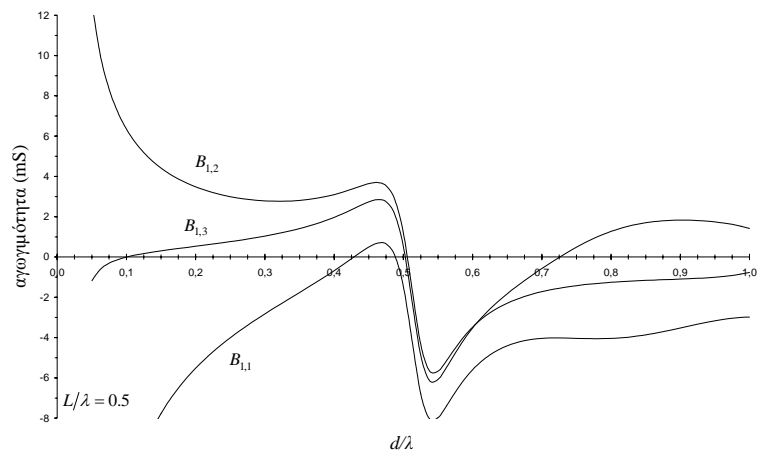
Σχημάτων 4.46 και 4.47 βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα ([7], Σχήματα 4.2 και 4.3).



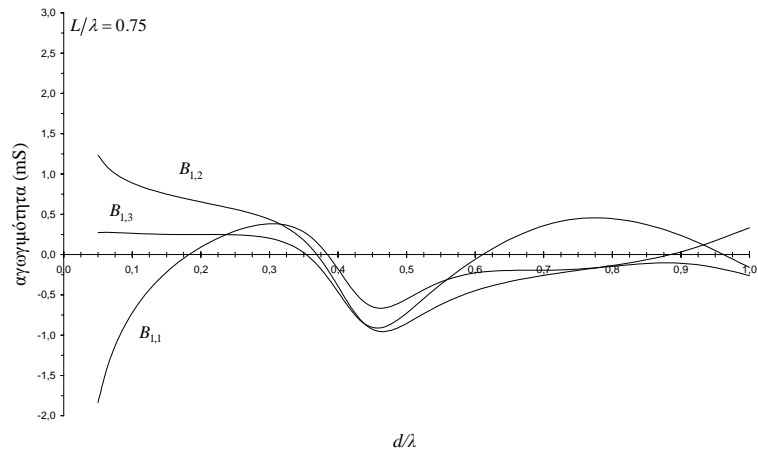
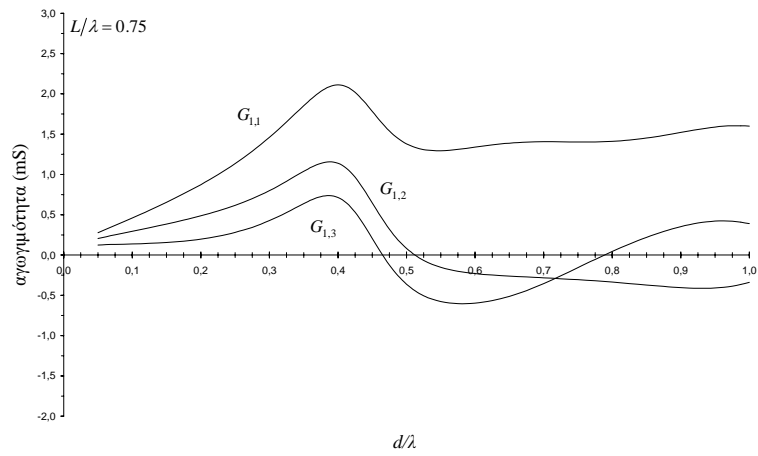
Σχήμα 4. 45. Διαγράμματα ακτινοβολίας πλάτους συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης στο οριζόντιο επίπεδο.

Επιπρόσθετα, στο Σχήμα 4.48, παρουσιάζονται τα διαγράμματα ακτινοβολίας πλάτους επί του οριζόντιου επιπέδου που αντιστοιχούν σε μια κυκλική στοιχειοκεραία πέντε στοιχείων με $d/\lambda = 0.25$ και ένα ενεργό στοιχείο τοποθετημένο επί του άξονα x . Τα διαγράμματα που παρουσιάζονται αντιστοιχούν σε $L/\lambda = 0.5$ και $L/\lambda = 0.75$, ενώ απεικονίζονται σε dB σχετικά προς την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην κατεύθυνση $\phi = 0^\circ$. Σημειώνεται ότι τα διαγράμματα του Σχήματος 4.48 βρίσκονται σε εξαιρετική συμφωνία με ανεξάρτητα αποτελέσματα για την ίδια διάταξη ([7], Σχήμα 4.8).

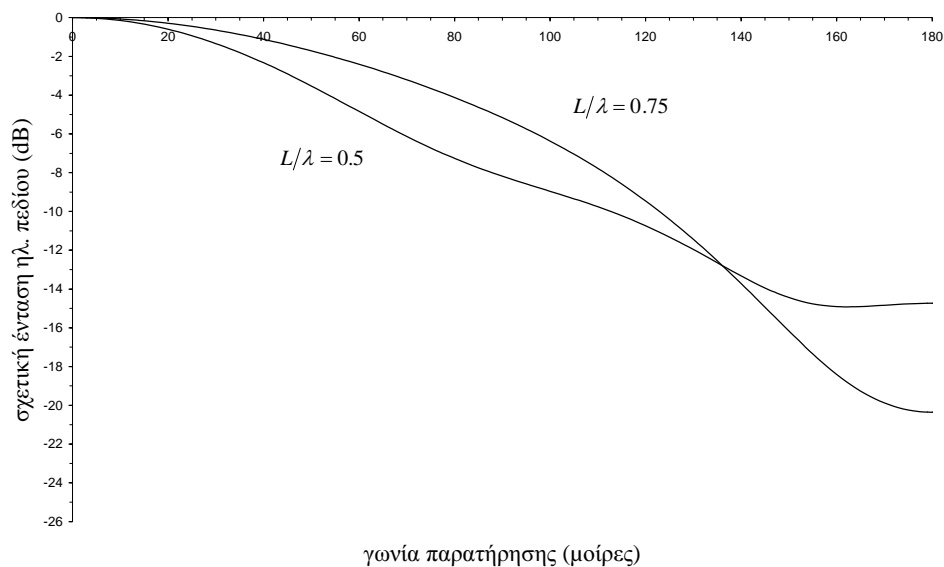




Σχήμα 4. 46. Απεικόνιση της ίδιας και των αμοιβαίων σύνθετων αγωγιμοτήτων συναρτήσεως της απόστασης.



Σχήμα 4. 47. Απεικόνιση της ίδιας και των αμοιβαίων σύνθετων αγωγιμοτήτων συναρτήσεως της απόστασης.



Σχήμα 4. 48. Διαγράμματα ακτινοβολίας πλάτους συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης στο οριζόντιο επίπεδο.

4.6 Μελέτη Σύζευξης Διπολικών Πομποδεκτών

4.6.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Στην πράξη, είναι σύνηθες να τοποθετούνται πολλοί πομποδέκτες, οι οποίοι λειτουργούν στην ίδια ή σε διαφορετικές περιοχές συχνοτήτων, σε κοινούς ιστούς ή σε ιστούς που απέχουν σχετικά μικρή απόσταση μεταξύ τους. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι εγκαταστάσεις κεραιών στις υπερκατασκευές πλοίων, όπου σε μικρό χώρο συγκεντρώνεται πληθώρα κεραιών MF/HF/VHF/UHF, καθώς και οι εγκαταστάσεις κεραιών για εφαρμογές broadcasting, οι οποίες, σε πολλές περιπτώσεις, ελέγχονται εξ αποστάσεως μέσω άλλων κεραιών που είναι τοποθετημένες στον ίδιο ιστό ή σε γειτονική θέση. Για τη μελέτη της σύζευξης και τη διερεύνηση των χαρακτηριστικών των εμπλεκόμενων κεραιών, είναι δυνατή η ανάλυση της διάταξης ακολουθώντας τη διαδικασία της Παραγράφου 4.5.2. Ωστόσο, υπάρχει μια σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο περιπτώσεων, η οποία οδηγεί, όπως θα αποδειχθεί παρακάτω, σε σημαντική διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων. Στην περίπτωση μελέτης σύζευξης πομποδεκτών, κάθε πομποδέκτης που λειτουργεί σε διαφορετική συχνότητα σε σχέση με τη συχνότητα ενδιαφέροντος συμπεριφέρεται ως κεραία που είναι φορτωμένη με κάποιο φορτίο στους ακροδέκτες τροφοδότησης της. Το γεγονός αυτό διαφοροποιεί σημαντικά την ανάλυση και πρέπει να συμπεριλαμβάνεται στη μελέτη σύζευξης.

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος είναι παρόμοια με αυτή του Σχήματος 4.38. Σε δεδομένη συχνότητα ενδιαφέροντος, κάθε ενεργό δίπολο (ένα ή περισσότερα του ενός) τροφοδοτείται από την αντίστοιχη πηγή τάσης, ενώ κάθε μη ενεργό δίπολο θεωρείται φορτωμένο με ένα φορτίο σύνθετης αντίστασης ίσης με την χαρακτηριστική αντίσταση της αντίστοιχης γραμμής μεταφοράς τροφοδότησης του. Ως εκ τούτου, το ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος του διακένου κάθε μη ενεργού διπόλου καθορίζεται από την πώση τάσης επί του αντίστοιχου φορτίου, όπως στην περίπτωση του φορτωμένου διπόλου που περιγράφηκε στην Παράγραφο 4.4.1, οπότε

$$E_p^g(z) = \begin{cases} \begin{cases} -\frac{V_p}{\Delta_p}, V_p \neq 0 \\ \frac{I_p Z_p}{\Delta_p}, V_p = 0 \end{cases}, & |z - z_p| < \frac{\Delta_p}{2}, \\ 0, & \frac{\Delta_p}{2} < |z - z_p| \leq \frac{L_p}{2} \end{cases}, \quad (4.43)$$

όπου I_p η ένταση του ρεύματος στους ακροδέκτες του διπόλου που καθορίζει ο δείκτης p και Z_p η σύνθετη αντίσταση του αντίστοιχου φορτίου.

4.6.2 Εφαρμογή της MAS

Η επίλυση του προβλήματος με εφαρμογή της MAS μπορεί να γίνει άμεσα, τροποποιώντας κατάλληλα τη διαδικασία της Παραγράφου 4.5.2. Πιο συγκεκριμένα, η οριακή συνθήκη για τη συνέχεια της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια κάθε διπόλου εκφράζεται και πάλι από τη σχέση (4.35), τροποποιώντας κατάλληλα το δεξιό μέλος από τη σχέση (4.43). Στη συνέχεια, από τη διαδικασία επιβολής της οριακής συνθήκης της σχέσης (4.35) σε διακριτά σημεία προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα, το οποίο εκφράζεται μέσω των εξισώσεων (4.36), όπου

$$A_{(p,n),(q,m)} = \begin{cases} A_{(p,n),(q,m)}^e, V_q \neq 0 \\ A_{(p,n),(q,m)}^e + A_{(p,n),(q,m)}^h, V_q = 0 \end{cases}, \quad (4.44\alpha)$$

$$A_{(p,n),(q,m)}^e = \hat{z} \cdot \vec{E}_{(p,n)}(x_q + \delta_K(q-p)a_q, y_q, z_q + m\delta_q), \quad (4.44\beta)$$

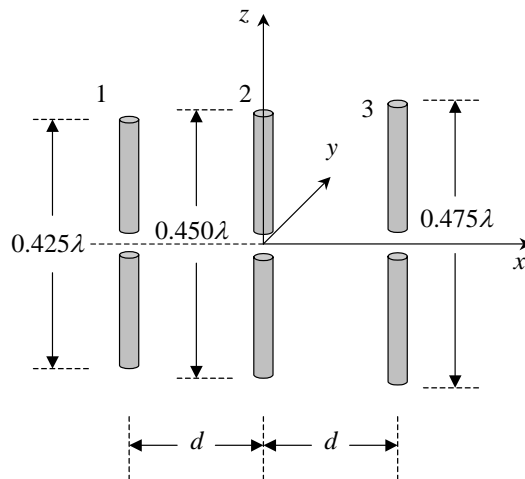
$$A_{(p,n),(q,m)}^h = \begin{cases} -\delta_K(q-p) \frac{2\pi a_q Z_q}{\Delta_q} \\ \times \left\{ \hat{z} \cdot \left[\hat{n}_p \times \vec{H}_{(p,n)} \left(x_q + a_q, y_q, z_q \pm \frac{\Delta_q}{2} \right) \right] \right\}, & |m\delta_q| < \frac{\Delta_q}{2} \\ 0, & |m\delta_q| > \frac{\Delta_q}{2} \end{cases}. \quad (4.44\gamma)$$

Μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος $N_T \times N_T$ των εξισώσεων (4.36), το ΗΜ πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου προσδιορίζεται άμεσα από τις σχέσεις (4.33) και (4.34), ενώ η κατανομή ρεύματος κάθε διπόλου υπολογίζεται από τη σχέση (4.39). Κατόπιν τούτου, είναι δυνατός ο υπολογισμός της σύνθετης αντίστασης και του διαγράμματος ακτινοβολίας εκπομπής κάθε ενεργού στοιχείου, για τη διερεύνηση της επίδρασης της σύζευξης.

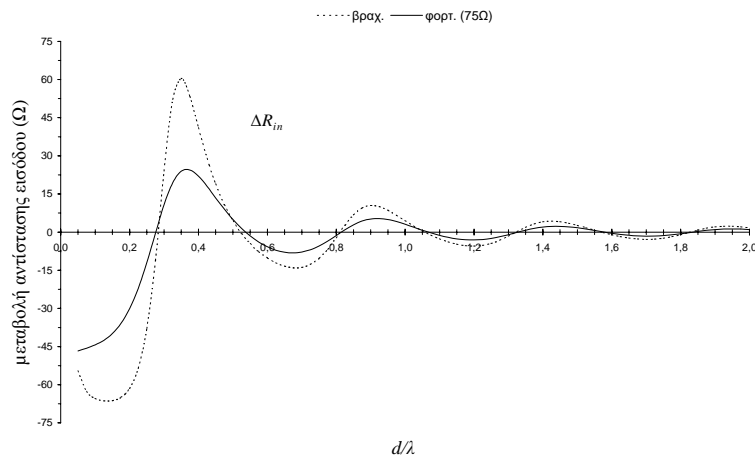
4.6.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

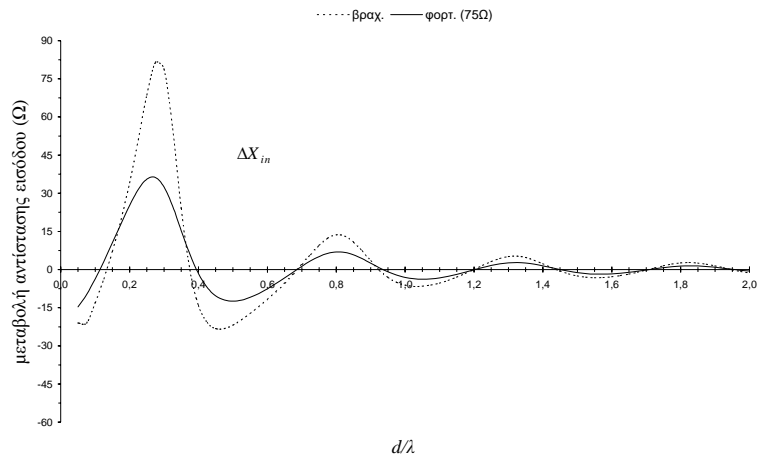
Αρχικά, παρουσιάζονται αποτελέσματα για την τυπική περίπτωση τριών παράλληλων διπόλων, τα κέντρα των οποίων βρίσκονται επί μιας ευθείας γραμμής (άξονας x) σε σταθερή απόσταση d μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.49. Υποτίθεται ότι οι τρεις πομποδέκτες λειτουργούν σε κοντινές συχρότητες εντός της ίδιας περιοχής συχνοτήτων.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη της ενδιάμεσης κεραίας, καθώς αυτή επηρεάζεται περισσότερο από τα φαινόμενα σύζευξης [38]. Ως εκ τούτου, το εν λόγω δίπολο θεωρείται ενεργό, ενώ τα άλλα δύο δίπολα θεωρούνται φορτωμένα με τη χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής τροφοδότησης τους, η οποία υποτίθεται ίση με 75Ω . Για λόγους σύγκρισης, παρακάτω παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα που εξάγονται θεωρώντας τα ανενεργά δίπολα ως βραχυκυκλωμένα. Δοθέντος ότι οι κεραίες λειτουργούν στην ίδια περιοχή συχνοτήτων, τα μήκη τους δεν διαφοροποιούνται σημαντικά. Στη συχνότητα ενδιαφέροντος υποτίθεται $L_2/\lambda = 0.45$ και $\Delta_2/\lambda = 0.01$, ούτως ώστε το μήκος του ενεργού διπόλου να είναι περίπου ίσο με το μήκος συντονισμού στον ελεύθερο χώρο. Τα μήκη των άλλων διπόλων επιλέγονται έτσι ώστε $L_1/\lambda = 0.425$ και $L_3/\lambda = 0.475$, ενώ το εύρος του διακένου κάθε διπόλου θεωρείται ότι καταλαμβάνει το ίδιο ποσοστό του μήκους του σε σχέση με το ενεργό, συνεπώς $\Delta_p = \Delta_2 L_p / L_2$. Όλα τα δίπολα θεωρούνται ίδιας ακτίνας με $a/\lambda = 0.007022$. Στο Σχήμα 4.50 απεικονίζεται, ως συνάρτηση της παραμέτρου d/λ , η μεταβολή της σύνθετης αντίστασης εισόδου του ενδιάμεσου διπόλου σε σχέση με τη σύνθετη αντίσταση εισόδου του μεμονωμένου διπόλου. Σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα προέκυψαν με $N_g = 3$. Είναι άξιο παρατήρησης πως η θεώρηση φορτωμένων διπόλων μεταβάλλει σε σημαντικό βαθμό τα αποτελέσματα, αν και τα φαινόμενα σύζευξης αμβλύνονται, εξαιτίας της απορρόφησης μεγαλύτερης ισχύος από τα φορτωμένα δίπολα σε σχέση με τα βραχυκυκλωμένα.

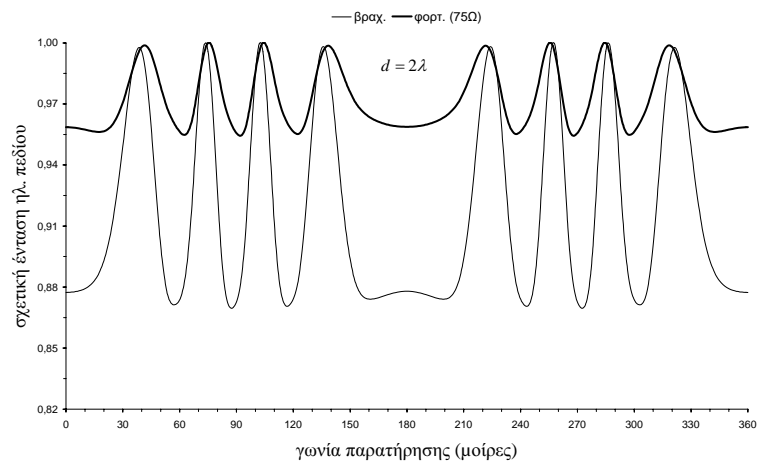
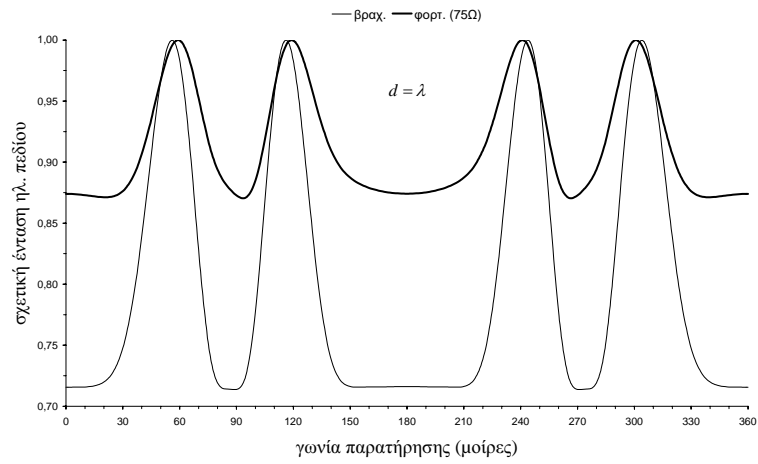


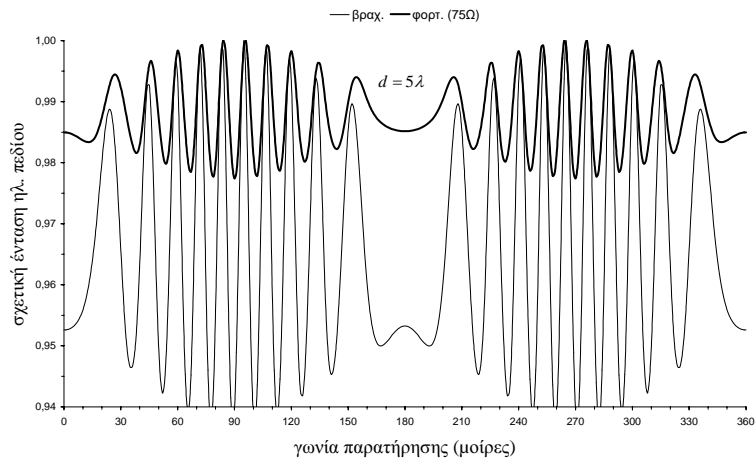
Σχήμα 4. 49. Γεωμετρία της πρώτης περίπτωσης για τη μελέτη φαινομένων σύζευξης.





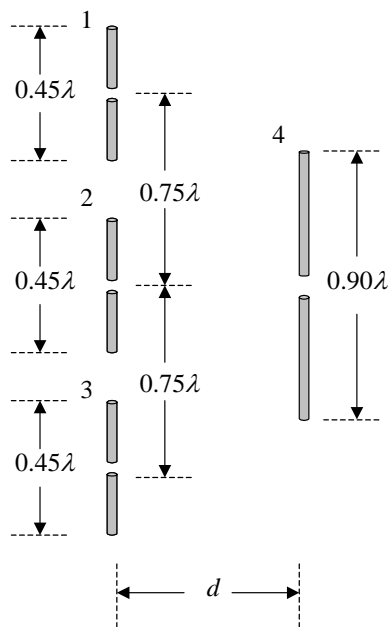
Σχήμα 4. 50. Απεικόνιση της μεταβολής της σύνθετης αντίστασης εισόδου (σε σχέση με την τιμή της στον ελεύθερο χώρο) συναρτήσει της απόστασης.





Σχήμα 4. 51. Διαγράμματα ακτινοβολίας πλάτους συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης στο οριζόντιο επίπεδο.

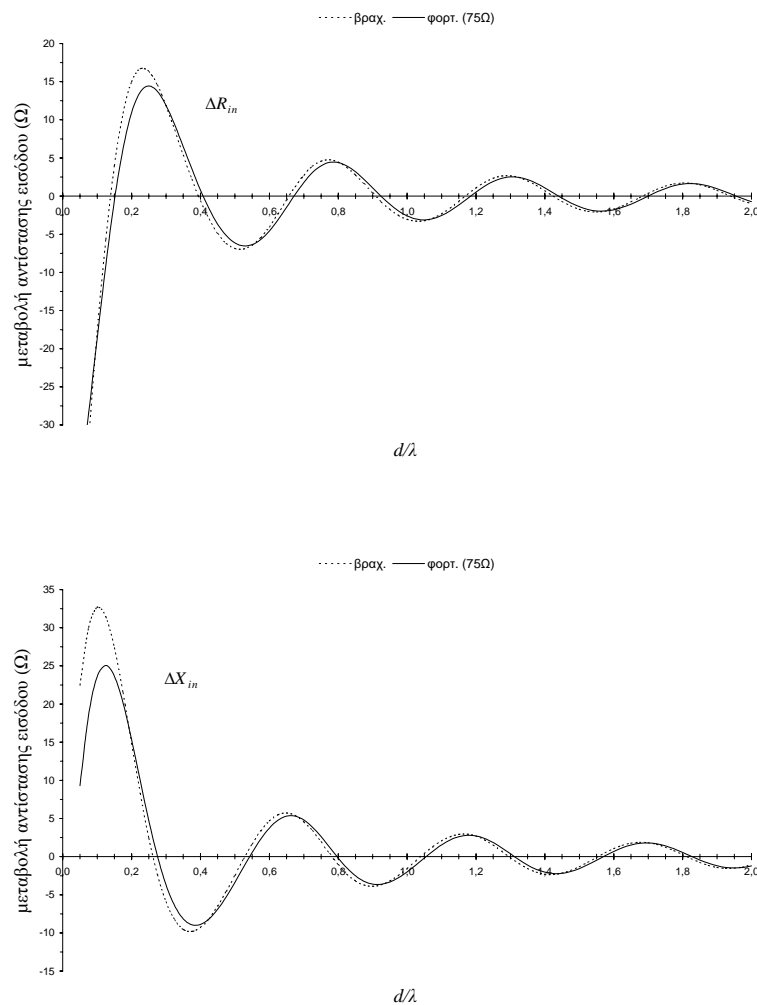
Στο Σχήμα 4.51 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα ακτινοβολίας πλάτους επί του οριζόντιου επιπέδου, για διάφορες τιμές της παραμέτρου d/λ . Τα διαγράμματα του Σχήματος 4.51 απεικονίζονται κανονικοποιημένα ως προς τη μέγιστη ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Είναι προφανές ότι η επίδραση των γειτονικών πομποδεκτών καθίσταται αμελητέα για $d > \lambda$, αφού η προκύπτουσα μεταβολή του διαγράμματος ακτινοβολίας είναι μικρότερη από 1dB, ενώ η μεταβολή της σύνθετης αντίστασης εισόδου είναι μικρότερη από 10Ω.



Σχήμα 4. 52. Γεωμετρία της δεύτερης περίπτωσης για τη μελέτη φαινομένων σύζευξης.

Στη συνέχεια, εξετάζεται μια ακόμη περίπτωση σύζευξης, η οποία συνίσταται σε μια συγγραμμική στοιχειοκεραία τριών διπόλων με $L_i/\lambda = 0.45$ ($i = 1,2,3$) και ένα δίπολο με $L_4/\lambda = 0.90$ σε απόσταση d από το κέντρο της στοιχειοκεραίας, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.52. Τέτοιες τοποθετήσεις είναι συνήθεις σε περιπτώσεις απομακρυσμένων πομπών,

οι οποίοι ελέγχονται εξ αποστάσεως με ασύρματο τρόπο. Η κεραία λήψης των σημάτων ελέγχου μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εκπομπή σημάτων τηλεμετρίας που αφορούν τις παραμέτρους λειτουργίας της κεραίας εκπομπής. Στην προκειμένη περίπτωση, η συχνότητα εκπομπής υποτίθεται διπλάσια της συχνότητας των σημάτων ελέγχου και τηλεμετρίας. Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι ίδιες με αυτές της προηγούμενης περίπτωσης. Τα δίπολα της στοιχειοκεραίας εκπομπής τροφοδοτούνται από γεννήτριες ίδιου πλάτους και φάσης. Στο Σχήμα 4.53 απεικονίζεται, ως συνάρτηση της παραμέτρου d/λ , η μεταβολή της σύνθετης αντίστασης εισόδου του ενδιαμέσου διπόλου της στοιχειοκεραίας σε σχέση με την τιμή της απουσία του διπόλου ελέγχου. Σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα προέκυψαν με $N_g = 3$. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η θεώρηση του φορτωμένου διπόλου μεταβάλλει σε σημαντικό βαθμό τα αποτελέσματα. Τα αντίστοιχα διαγράμματα ακτινοβολίας πλάτους επί του οριζόντιου επιπέδου, για διάφορες τιμές της παραμέτρου d/λ , είναι διαθέσιμα στη σχετική αναφορά [38] και δεν παρατίθενται εδώ. Και στην περίπτωση αυτή, η επίδραση της σύζευξης καθίσταται πρακτικά αμελητέα για $d > \lambda$.



Σχήμα 4. 53. Απεικόνιση της μεταβολής της σύνθετης αντίστασης εισόδου (σε σχέση με την τιμή της στον ελεύθερο χώρο) συναρτήσει της απόστασης.

4.7 Δίπολο Παχέος Σύρματος με Τροφοδοσία Πηγής Τάσης Διακένου (Gap Voltage Source)

4.7.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος συνίσταται σε ένα δίπολο μήκους L και ακτίνας a στον ελεύθερο χώρο, η ακτίνα του οποίου δεν είναι τόσο μικρή ώστε το δίπολο να θεωρείται λεπτό. Αν και δεν υπάρχει αυστηρώς καθορισμένο όριο, παχιά δίπολα θεωρούνται, συνήθως, αυτά με $a/\lambda > 0.01$ ή $k_0 a > 0.1$ [39-46]. Το δίπολο τροφοδοτείται από μια πηγή τάσης διακένου, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1. Το πεδίο διέγερσης υποτίθεται σταθερό κατά μήκος του διακένου και δίνεται από τη σχέση (4.2).

Τα παχιά δίπολα είναι ιδιαίτερα σημαντικά σε ένα μεγάλο εύρος πρακτικών εφαρμογών, οι οποίες σχετίζονται με κεραιές ευρείας ζώνης και μικροκυματικές κεραιές, καθώς και με την πρόβλεψη της συμπεριφοράς μεταλλικών κυλινδρικών δομών που χρησιμοποιούνται ως στοιχεία εκπομπής και λήψης (π. χ. βλήματα που κατευθύνονται από ακτινοβολίες RF). Αξίζει να σημειωθεί ότι, σε αντίθεση με ένα λεπτό δίπολο, η συμπεριφορά ενός παχέος διπόλου επηρεάζεται καθοριστικά από τη γεωμετρική διαμόρφωση των άκρων και του συστήματος τροφοδότησης του. Λόγω αυτού του γεγονότος, για την ακριβή μοντελοποίηση ενός παχέος διπόλου, είναι μεγάλης σημασίας να συμπεριληφθεί και η ακτινοβολία από τα άκρα. Βεβαίως, στην περίπτωση σωληνοειδούς διπόλου, το ακτινοβολούμενο ΗΜ πεδίο αποδίδεται μόνο στα επιφανειακά ρεύματα που αναπτύσσονται τόσο στην εσωτερική όσο και στην εξωτερική πλευρά της παράπλευρης επιφάνειας του διπόλου. Όμως, σε περιπτώσεις συμπαγών διπόλων ή διπόλων με κλειστά άκρα, δεν υφίστανται ρεύματα εσωτερικά. Όταν η ακτίνα των διπόλων είναι σχετική μικρή, αλλά όχι τόσο ώστε το δίπολο να θεωρηθεί λεπτό, η συνεισφορά των άκρων μπορεί να αμεληθεί. Συνήθως, σχετικά παχιά δίπολα θεωρούνται αυτά με $0.01 < a/\lambda < 0.10$.

4.7.2 Εφαρμογή της MAS

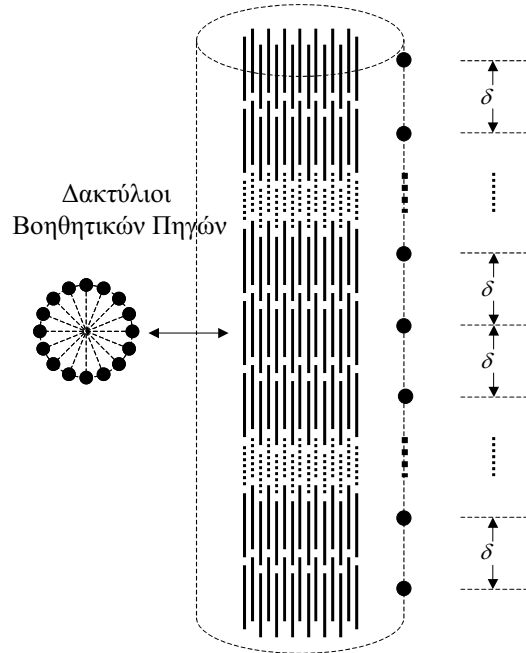
Για την εφαρμογή της MAS στην περίπτωση του παχέος διπόλου, ακολουθείται η διαδικασία που περιγράφηκε στην Παράγραφο 4.2.2. Ωστόσο, η αξονική τοποθέτηση των βοηθητικών πηγών δεν ενδείκνυται, καθόσον η αύξηση του N , όπως καθορίζεται από τη σχέση (4.16), έχει ως συνέπεια την εμφάνιση αριθμητικής αστάθειας, εξαιτίας της υπερβολικής γειτνίασης των βοηθητικών πηγών μεταξύ τους σε σχέση με την απόστασή τους από την παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου, επί της οποίας επιβάλλεται η οριακή συνθήκη της σχέσης (4.9). Για το λόγο αυτό, οι βοηθητικές πηγές κατανέμονται επί δακτυλίων ακτίνας b (με $b < a$) με κέντρα επί του άξονα z , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.54. Ο αριθμός των δακτυλίων βοηθητικών πηγών θεωρείται περιττός και ίσος με $2N+1$, ενώ ο αριθμός των βοηθητικών πηγών ανά δακτύλιο θεωρείται σταθερός και ίσος με S . Για την επιλογή του τύπου των βοηθητικών πηγών, ισχύουν όσα αναφέρθηκαν στην περίπτωση του λεπτού διπόλου.

Το ακτινοβολούμενο ΗΜ πεδίο περιγράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των ΗΜ πεδίων των βοηθητικών πηγών, συνεπώς

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{n=-N}^N \sum_{s=1}^S w_{(n,s)} \vec{F}_{(n,s)}(\vec{r}), \quad (4.45)$$

όπου \vec{F} είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου στον κενό χώρο, ενώ $\vec{F}_{(n,s)}$ είναι το αντίστοιχο πεδίο της βοηθητικής πηγής που καθορίζει το ζεύγος δεικτών (n,s) και είναι τοποθετημένη στο σημείο (b, ϕ_s, z_n) με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(n,s)}$, όπου ϕ_s η γωνιακή

θέση της βοηθητικής πηγής που καθορίζει ο δείκτης s . Οι δακτύλιοι βοηθητικών πηγών θεωρούνται ομοιόμορφα κατανομημένοι στις θέσεις $z_n = n\delta$, όπου $\delta = L/(2N)$ η απόσταση μεταξύ διαδοχικών δακτυλίων βοηθητικών πηγών. Επιπρόσθετα, οι βοηθητικές πηγές θεωρούνται ομοιόμορφα κατανομημένες επί των δακτυλίων, συνεπώς οι γωνιακές θέσεις τους εκφράζονται ως $\phi_s = 2\pi(s-1)/S$. Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας του προβλήματος, οι συντελεστές βαρύτητας των βοηθητικών πηγών του ίδιου δακτυλίου θεωρούνται εκ των προτέρων ίσοι μεταξύ τους, δηλαδή $w_{(n,s)} = w_n$.



Σχήμα 4. 54. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του άγνωστου ΗΜ πεδίου.

Τα πεδία $\vec{F}_{(n,s)}$ προσδιορίζονται με απλή μεταφορά του πεδίου μιας βοηθητικής πηγής, που είναι τοποθετημένη στο κέντρο ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτινοβολεί σε άπειρο κενό χώρο, όπως καθορίζεται από τη σχέση (4.5). Όσον αφορά τον τύπο των βοηθητικών πηγών, ισχύουν όσα αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 4.2.2. Όταν ως βοηθητικές πηγές επιλέγονται στοιχειώδη ηλεκτρικά δίπολα, τα πεδία $\vec{F}_{(n,s)}$ εκφράζονται, με τη βοήθεια των σχέσεων (B.7) του Παραρτήματος Β, ως εξής

$$\vec{F}_{(n,s)}(\vec{r}) = \vec{F}_E(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)}), \quad (4.46)$$

όπου $\vec{F}_E(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)})$ είναι το πεδίο ενός στοιχειώδους ηλεκτρικού διπόλου μοναδιαίας ροπής με προσανατολισμό κατά την κατεύθυνση του άξονα z και κέντρο στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(n,s)}$. Όταν ως βοηθητικές πηγές επιλέγονται ηλεκτρικά δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος, τα πεδία $\vec{F}_{(n,s)}$ εκφράζονται, με τη βοήθεια των σχέσεων (B.14) του Παραρτήματος Β, ως εξής

$$\vec{F}_{(n,s)}(\vec{r}) = \vec{F}_D(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)}), \quad (4.47)$$

όπου $\vec{F}_D(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)})$ είναι το πεδίο ενός ηλεκτρικού διπόλου ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος μοναδιαίου πλάτους με προσανατολισμό κατά την κατεύθυνση του άξονα z και κέντρο στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(n,s)}$. Το μήκος των βοηθητικών διπόλων υποτίθεται ίσο με 2δ , ούτως ώστε κάθε βοηθητική πηγή να εκτείνεται μεταξύ των κέντρων των αμέσως γειτονικών της. Στην περίπτωση κατά την οποία οι βοηθητικές πηγές στα άκρα αντικατασταθούν με ηλεκτρικά μονόπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος, τα πεδία $\vec{F}_{(n,s)}$ εκφράζονται, με τη βοήθεια των σχέσεων (B.14) και (B.20) του Παραρτήματος Β, ως εξής

$$\vec{F}_{(n,s)}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{F}_D(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)}), & |n| < N \\ \vec{F}_M^\mp(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)}), & n = \pm N \end{cases}, \quad (4.48)$$

όπου $\vec{F}_M^+(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)})$ είναι το πεδίο ενός θετικού ηλεκτρικού μονοπόλου ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος μοναδιαίου πλάτους με προσανατολισμό κατά την κατεύθυνση του άξονα z και κέντρο στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(n,s)}$, ενώ $\vec{F}_M^-(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)})$ είναι το πεδίο του αντίστοιχου αρνητικού μονοπόλου.

Οι άγνωστοι συντελεστές w_n του αναπτύγματος της σχέσης (4.45) προσδιορίζονται επιβάλλοντας την οριακή συνθήκη της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου σε διακριτά σημεία επί της παράπλευρης επιφάνειας του διπόλου, όπως περιγράφηκε στην Παράγραφο 4.2.2, οπότε προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\sum_{n=-N}^N \sum_{s=1}^S A_{(n,s),m} w_n = -b_m, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \quad (4.49)$$

όπου

$$A_{(n,s),m} = \hat{z} \cdot \vec{E}_{(n,s)}(a, \phi_t, z_m), \quad (4.50\alpha)$$

$$b_m = \begin{cases} \frac{V_g}{\Delta_g}, & |z_m - z_g| < \frac{\Delta_g}{2} \\ 0, & |z_m - z_g| > \frac{\Delta_g}{2} \end{cases}. \quad (4.50\beta)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι εξισώσεις (4.49) μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\sum_{n=-N}^N A_{n,m} w_n = -b_m, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \quad (4.51)$$

όπου

$$A_{n,m} = \sum_{s=1}^S A_{(n,s),m}. \quad (4.52)$$

Όταν όλες οι βοηθητικές πηγές είναι του ίδιου τύπου, ο πίνακας των συντελεστών των εξισώσεων (4.51) είναι τύπου Toeplitz και ο υπολογισμός του μπορεί να γίνει αξιοποιώντας τη σχέση (4.12). Στην περίπτωση που οι ακραίες βοηθητικές πηγές είναι διαφορετικού τύπου, η σχέση (4.12) ισχύει για $|n| < N$ θέτοντας $\pm N \rightarrow \pm(N-1)$, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε αυτήν την περίπτωση για τη μείωση του υπολογιστικού

κόστους. Σε κάθε περίπτωση, μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος $(2N+1) \times (2N+1)$ των εξισώσεων (4.51), το ΗΜ πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου προσδιορίζεται άμεσα από τις σχέσεις (4.45)-(4.48). Στη συνέχεια, η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου προκύπτει με εφαρμογή της οριακής συνθήκης του μαγνητικού πεδίου της σχέσης (4.13), οπότε η ρευματική κατανομή κατά μήκος του διπόλου δίνεται από τη σχέση

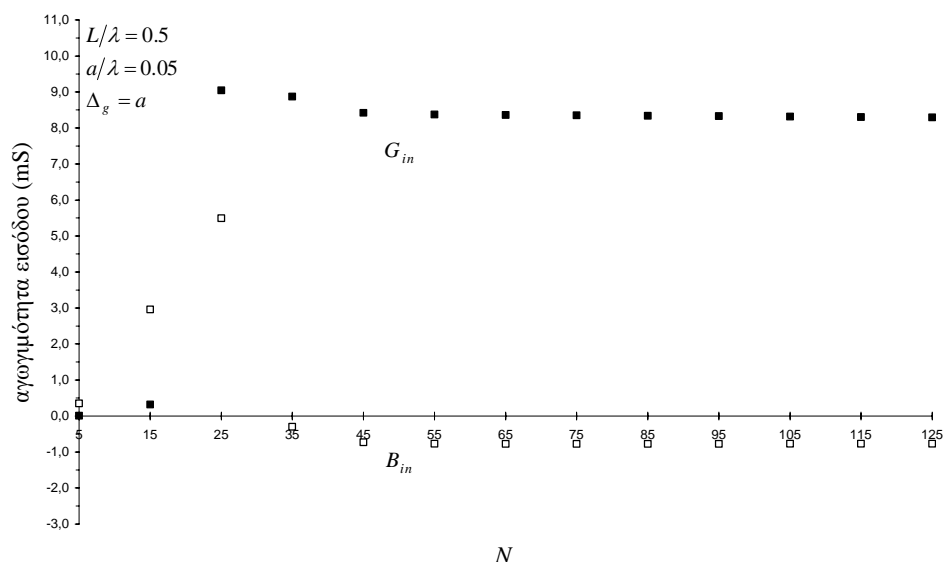
$$I(z) = 2\pi a \sum_{n=-N}^N \sum_{s=1}^S w_n [\hat{\phi} \cdot \vec{H}_{(n,s)}(a, \phi_t, z)]. \quad (4.53)$$

Για τον υπολογισμό της σύνθετης αγωγιμότητας ή αντίστασης εισόδου, ως ρεύμα εισόδου λαμβάνεται το ρεύμα στα άκρα του διακένου, το οποίο προσδιορίζεται από τη σχέση (4.15). Σε περιπτώσεις ασύμμετρης τροφοδότησης, η ένταση του ρεύματος εισόδου προσδιορίζεται από τη μέση τιμή των ρευμάτων στα άκρα του διακένου.

Σημειώνεται ότι η γωνιακή θέση των σημείων επιβολής της οριακής συνθήκης έχει επίδραση στη λύση, αφού το πεδίο που παράγει κάθε δακτύλιος βοηθητικών πηγών είναι μόνο κατά προσέγγιση σταθερό κατά μήκος της περιφέρειας του διπόλου. Λόγω της ομοιομορφίας στην κατανομή των βοηθητικών πηγών στους δακτυλίους, το πεδίο χαρακτηρίζεται από περιοδικότητα με περίοδο $2\pi/S$. Ως εκ τούτου, οι ακραίες τιμές του πεδίου παρουσιάζονται στα σημεία με $\phi_t = 0, \pi/S, 2\pi/S, \dots$. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, επιλέγεται $\phi_t = \pi/(2S)$, ούτως ώστε η τιμή του πεδίου να είναι κοντά στη μέση τιμή του κατά μήκος της περιφέρειας του διπόλου.

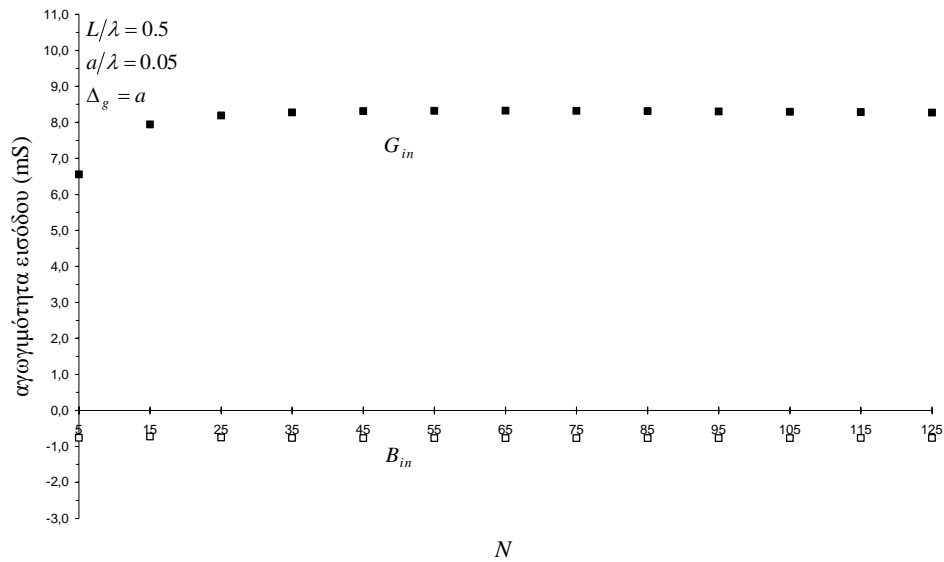
Για την αποτίμηση της ποιότητας των λύσεων, εξετάζεται η επαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου, όπως περιγράφηκε στην Παράγραφο 4.2.2.

4.7.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

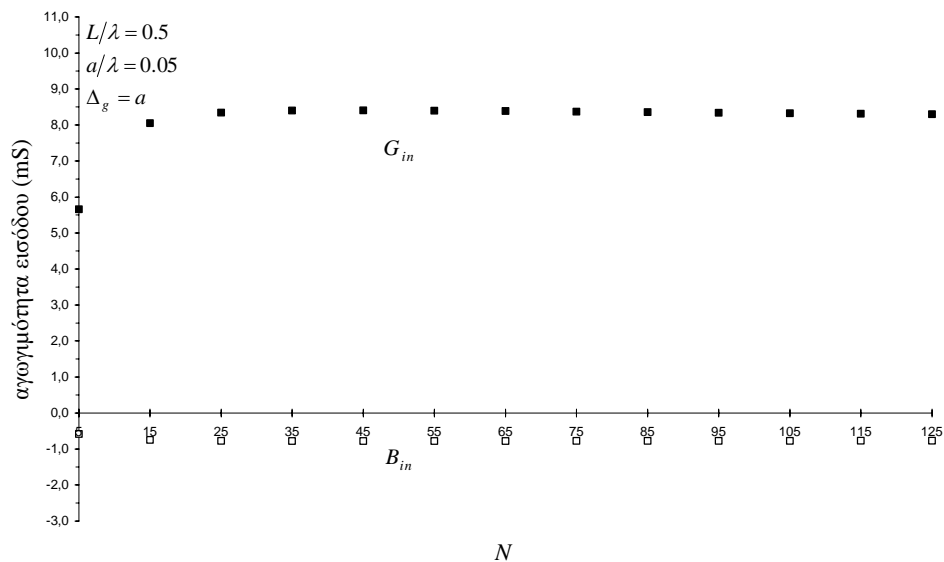


Σχήμα 4. 55. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (στοιχειώδη δίπολα).

Ακολούθως, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των λύσεων σε σχέση με τις παραμέτρους καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών S και N . Αρχικά, εξετάζονται οι τρεις διαφορετικές επιλογές που αφορούν τον τύπο των βοηθητικών πηγών και αναφέρθηκαν παραπάνω. Η συμπεριφορά των λύσεων εξετάζεται αυξανόμενων των N_g και N , όπως καθορίζεται από τη σχέση (4.16). Ως παράμετρος ελέγχου της αριθμητικής ευστάθειας των λύσεων χρησιμοποιείται η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου.



Σχήμα 4. 56. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).

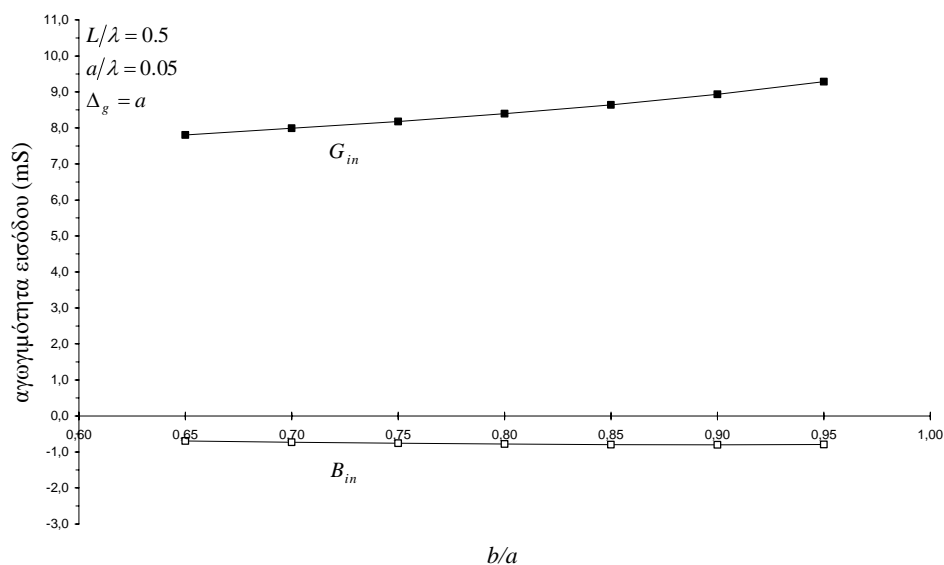


Σχήμα 4. 57. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δίπολα και μονόπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος).

Αρχικά, εξετάζεται η συμπεριφορά των λύσεων διατηρώντας σταθερή την τιμή του λόγου b/a , για την περίπτωση ενός διπόλου με $L/\lambda = 0.5$, $a/\lambda = 0.05$ και $\Delta_g = a$. Ο αριθμός των βοηθητικών πηγών ανά δακτύλιο S επιλέγεται έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ διαδοχικών πηγών στον ίδιο δακτύλιο να είναι συγκρίσιμη με την απόσταση τους από την επιφάνεια του διπόλου, άρα $2\pi b/S \approx a - b$. Συνεπώς, ανάλογα με την επιλογή του λόγου b/a , επιλέγεται $S = \lceil 2\pi b/(a - b) \rceil$. Οι τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου για $b/a = 0.8$ και $S = 26$ απεικονίζονται στα Σχήματα 4.55-4.57, ως συνάρτηση του N , για τις τρεις προαναφερθείσες επιλογές που αφορούν τον τύπο των βοηθητικών πηγών. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αντιστοιχούν σε $N_g = 1, 3, \dots, 25$. Είναι προφανές ότι οι λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας πηγές ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος πλεονεκτούν σε σχέση με τις λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πηγές, αφού η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου σταθεροποιείται αριθμητικά για μικρότερο N . Πάντως, ανεξάρτητα από την επιλογή του τύπου των βοηθητικών πηγών, η MAS τείνει πρακτικά στην ίδια λύση, καθώς οι διαφορές στις τελικές τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου είναι αμελητέες (τυπικά $< 1\%$). Ωστόσο, στην περίπτωση κατά την οποία χρησιμοποιούνται δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος ως βοηθητικές πηγές, τα ακραία βοηθητικά δίπολα εκτείνονται εκτός του διπόλου, αφού το τμήμα του άξονα z που καταλαμβάνεται από τις βοηθητικές πηγές εκτείνεται σε μήκος $L + 2\delta$, το οποίο εξαρτάται από το N . Αν και το γεγονός αυτό δεν έχει κάποια συνέπεια στη συμπεριφορά των λύσεων συγκριτικά προς τις λύσεις που αντιστοιχούν στις δύο άλλες επιλογές βοηθητικών πηγών, όπως άλλωστε καταδεικνύεται και από τα Σχήματα 4.55-4.57, αντικατάσταση των βοηθητικών διπόλων στα άκρα του διπόλου με μονόπολα είναι ιδιαίτερης σημασίας στην προκειμένη περίπτωση, κυρίως λόγω της δυνατότητας ευκολότερης τροποποίησης της μεθόδου για να συμπεριληφθούν τα φαινόμενα άκρων. Από το Σχήμα 4.57 συνάγεται ότι οι λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας συνδυασμό διπόλων και μονοπόλων ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος ως βοηθητικές πηγές εμφανίζουν αριθμητική σταθερότητα ακόμη και για $N_g = 5$ και $N = 25$. Στις περιπτώσεις λεπτών διπόλων, η αριθμητική σταθεροποίηση των λύσεων επιτυγχάνεται όταν η απόσταση μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών είναι περίπου ίση με την απόσταση τους από την επιφάνεια του διπόλου, οπότε $N \sim L/(2a)$. Είναι αξιο παρατήρησης ότι, στην περίπτωση που εξετάζεται εδώ, οι λύσεις παρουσιάζουν αντίστοιχη συμπεριφορά, καθόσον $L/[2(a - b)] = 25$. Εκτενείς δοκιμές κατέδειξαν ότι η αριθμητική ευστάθεια επιτυγχάνεται, τυπικά, για $N \sim L/[2(a - b)]$. Όσον αφορά τη συμπεριφορά της επαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου, εμφανίζεται παρόμοια με αυτή των Σχημάτων 4.7 και 4.8.

Αξίζει να αναφερθεί ότι η αύξηση του αριθμού των βοηθητικών πηγών ανά δακτύλιο έχει αμελητέα επίδραση στις λύσεις, ειδικά όταν η γωνιακή θέση των σημείων επιβολής της οριακής συνθήκης της σχέσης (4.9) επιλεγεί $\phi_i = \pi/(2S)$. Όπως άλλωστε προαναφέρθηκε, η επιλογή αυτή οδηγεί σε υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα ενδιάμεσο σημείο μεταξύ μεγίστου και ελαχίστου, η θέση του οποίου εξαρτάται από το S . Ως εκ τούτου, η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι αναισθητή σε μεταβολές του S . Συνεπώς, η επιλογή $S = \lceil 2\pi b/(a - b) \rceil$ οδηγεί σε αριθμητικά ευσταθή αποτελέσματα, τουλάχιστον για σχετικά μεγάλες τιμές του λόγου b/a ($b/a > 0.5$). Για μικρές τιμές του λόγου b/a , η αριθμητική ευστάθεια είναι δυσκολότερα επιτεύξιμη, καθόσον οι βοηθητικές πηγές απομακρύνονται από την επιφάνεια του διπόλου. Πάντως, για δεδομένη τιμή του λόγου b/a , οι λύσεις παρουσιάζονται λιγότερο ευαίσθητες σε μεταβολές του S από ότι σε μεταβολές των N_g και N . Ωστόσο, η εξάρτηση των λύσεων από την τιμή του λόγου b/a παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Αποτελέσματα για την εξάρτηση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου από την τιμή του λόγου b/a παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.58, για την περίπτωση ενός διπόλου με τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν παραπάνω. Τα αποτελέσματα του Σχήματος 4.58

αντιστοιχούν σε $S = \lceil 2pb/(a-b) \rceil$ και την κατά περίπτωση πλησιέστερη επιτρεπτή τιμή του N , όπως καθορίζεται από τη σχέση (4.16), που υπερβαίνει το διπλάσιο του λόγου $L/[2(a-b)]$. Από το Σχήμα 4.58 προκύπτει ότι η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου παρουσιάζει κάποια εξάρτηση με την τιμή του λόγου b/a . Το γεγονός αυτό αποδίδεται, τουλάχιστον εν μέρει, στην επίδραση των φαινομένων άκρων. Άρση αυτής της αδυναμίας της μεθόδου είναι ενδεχομένως εφικτή, ίσως και χωρίς την ακριβή μοντελοποίηση των άκρων, με ενσωμάτωση κατάλληλης οριακής συνθήκης για την κλίση της ρευματικής κατανομής του διπόλου πλησίον των άκρων και αναζήτηση κατάλληλων τιμών της ακτίνας κάθε δακτυλίου βοηθητικών πηγών μέσω αλγορίθμων βελτιστοποίησης (π.χ. γενετικών αλγορίθμων).



Σχήμα 4. 58. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του λόγου της ακτίνας των δακτυλίων βοηθητικών πηγών προς την ακτίνα του διπόλου.

4.8 Αναφορές

- [1] J. D. Kraus, *Antennas*, McGraw Hill, 1950 (2nd edition 1988).
- [2] R. W. P. King, *Theory of Linear Antennas*, Harvard University Press, 1956.
- [3] R. W. P. King, “The linear antenna-Eighty years of progress”, *IEEE Proceedings*, Vol. 55, No. 1, pp. 2-16, 1967.
- [4] R. S. Elliott, *Antenna Theory and Design*, Prentice-Hall, 1981.
- [5] R. W. P. King, R. B. Mack and S. S. Sandler, *Arrays of Cylindrical Dipoles*, Cambridge University Press, 1968.
- [6] R. W. P. King, “Cylindrical antennas and arrays”, *Antenna Theory*, Edited by R. E. Collin and F. J. Zucker, McGraw-Hill, 1969.
- [7] R. W. P. King, G. J. Fikioris and R. B. Mack, *Cylindrical Antennas and Arrays*, Cambridge University Press, 2002.
- [8] K. K. Mei, “On the integral equations of thin wire antennas”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 13, No. 3, pp. 374-378, 1965.

- [9] J. H. Richmond, "Digital computer solutions of the rigorous equations for scattering problems", IEEE Proceedings, Vol. 53, No. 8, pp. 796-804, 1965.
- [10] R. F. Harrington, "Matrix methods for field problems", IEEE Proceedings, Vol. 55, No. 2, pp. 136-149, 1967.
- [11] R. F. Harrington and J. R. Mautz, "Straight wires with arbitrary excitation and loading", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 15, No. 4, pp. 502-515, 1967.
- [12] G. J. Burke, A. J. Poggio, J. C. Logan and J. W. Rockway, "NEC-Numerical Electromagnetics Code for antennas and scattering", Proceedings of the IEEE AP-S International Symposium 1979, pp. 147-150.
- [13] E. K. Miller and G. J. Burke, "Low-frequency computational electromagnetics for antenna analysis", IEEE Proceedings, Vol. 80, No. 1, pp. 24-43, 1992.
- [14] G. J. Burke, *Numerical Electromagnetics Code-NEC4: Method of Moments*, Lawrence Livermore National Laboratory, 1992.
- [15] A. Fourie and D. Nitch, *SuperNEC Manuals*, Poynting Software, Oct. 2002.
- [16] K. S. Nikita, G. S. Stamatakos, N. K. Uzunoglu and A. Karafotias, "Analysis of the interaction between a layered spherical human head model and a finite-length dipole", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 48, No. 11, pp. 2003-2013, 2000.
- [17] D. P. Economou, A. Marsh and D. I. Kaklamani, "P(MoM/MAS): An interactive environment, coupling WWW technology and parallel processing, to solve large-size electromagnetic problems", IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 41, No. 1, pp. 130-137, 1999.
- [18] R. A. Hurd and J. Jacobsen, "Admittance of an infinite cylindrical antenna with realistic gap field", Electronics Letters, Vol. 4, No. 19, pp. 420-421, 1968.
- [19] A. G. Williamson, "On the aperture field of a solid cylindrical antenna", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 23, No. 6, pp. 862-864, 1975.
- [20] T. Do-Nhat and R. H. MacPhie, "The static electric field distribution between two semi-infinite circular cylinders: A model for the feed gap field of a dipole antenna", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 35, No. 11, pp. 1273-1280, 1987.
- [21] G. P. Junker, A. A. Kishk and A. W. Glisson, "A novel delta gap source model for center fed cylindrical dipoles", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 43, No. 5, pp. 537-540, 1995.
- [22] D. I. Kaklamani and H. T. Anastassiou, "Aspects of the method of auxiliary sources (MAS) in computational electromagnetics", IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 44, No. 3, pp. 48-64, 2002.
- [23] P. Leuchtman, "Optimal location for matching points for wire modeling with MMP", Applied Computational Electromagnetics Society Journal, Vol. 6, No. 2, pp. 21-37, 1991.
- [24] R. Y. S. Tay and N. Kuster, "Performance of the generalized multipole technique (GMT/MMP) in antenna design and optimization", Applied Computational Electromagnetics Society Journal, Vol. 9, No. 3, pp. 79-89, 1994.
- [25] F. M. Tesche, "The effect of the thin-wire approximation and the source gap model on the high-frequency integral equation solution of radiating antennas", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 20, No. 2, pp. 210-211, 1972.

- [26] P. J. Papakanellos and C. N. Capsalis, "Numerical analysis of cylindrical dipole antennas using an auxiliary sources model", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 17, No. 3, pp. 389-407, 2003.
- [27] L. L. Tsai, "A numerical solution for the near and far fields of an annular ring of magnetic current", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 20, No. 5, pp. 569-576, 1972.
- [28] C. M. Butler and L. L. Tsai, "An alternate frill field formulation", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 21, No. 1, pp. 115-116, 1973.
- [29] A. Sakitani and S. Egashira, "Simplified expressions for the near fields of a magnetic frill current", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 34, No. 8, pp. 1059-1062, 1986.
- [30] R. W. P. King, *Tables of Antennas Characteristics*, IFI/Plenum, 1971.
- [31] P. J. Papakanellos and C. N. Capsalis, "Analysis of coaxially fed monopole antennas using an auxiliary sources technique", *Radio Science*, Vol. 37, 12.1-12.11, 2002.
- [32] P. J. Papakanellos and C. N. Capsalis, "Study of scattering and receiving dipole antennas on the basis of the method of auxiliary sources", *Electromagnetics*, Vol. 23, No. 6, pp. 525-537, 2003.
- [33] Y. Y. Hu, "Back-scattering cross section of a center-loaded cylindrical antenna", *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 6, No. 1, pp. 140-148, 1958.
- [34] P. Tulyathan and E. H. Newman, "The circumferential variation of the axial component of current in closely spaced thin-wire antennas", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 27, No. 1, pp. 46-50, 1979.
- [35] E. H. Newman, M. R. Schrote, A. R. Djordjević, B. D. Popović and M. B. Dragović, "Some effects of the circumferential polarization of current on thin-wire antennas", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 29, No. 5, pp. 815-817, 1981.
- [36] V. W. H. Chang and R. W. P. King, "On two arbitrarily located identical parallel antennas", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 16, No. 3, pp. 309-317, 1968.
- [37] P. J. Papakanellos and C. N. Capsalis, "Study of two arbitrarily located parallel cylindrical dipoles based on an auxiliary sources technique", *Electromagnetics*, Vol. 23, No. 5, pp. 399-416, 2003.
- [38] P. J. Papakanellos and C. N. Capsalis, "Estimation of the coupling between closely spaced transmitters using the method of auxiliary sources", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 17, No. 5, pp. 785-805, 2003.
- [39] D. C. Chang, "On the electrically thick cylindrical antenna", *Radio Science*, Vol. 2, No. 9, pp. 1043-1060, 1967.
- [40] R. W. P. King and T. T. Wu, "The thick tubular transmitting antenna", *Radio Science*, Vol. 2, No. 9, pp. 1061-1065, 1967.
- [41] W. A. Imbriale and P. G. Ingerson, "On numerical convergence of moment solutions of moderately thick wire antennas using sinusoidal basis functions", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 21, No. 3, pp. 363-366, 1973.
- [42] P. Glynn Rogers and M. W. Gunn, "An entire-domain Galerkin analysis of the moderately thick dipole", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 28, No. 1, pp. 117-121, 1980.
- [43] D. H. Werner, "A method of moments approach for the efficient and accurate modeling of moderately thick cylindrical wire antennas", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 46, No. 3, pp. 373-382, 1998.

- [44] D. Wu, N. Inagaki and N. Kikuma, "Hallén type integral equation for cylindrical antennas with finite gap excitation", *IEICE Transactions on Communications*, Vol. E82-B, No. 12, pp. 2145-2152, 1999.
- [45] Q. Chen, Q. Yuan and K. Sawaya, "Fixed gap source model for MoM analysis of linear antennas using sinusoidal reaction matching", *Proceedings of the IEEE AP-S International Symposium 2000*, pp. 38-41.
- [46] Q. Chen, Q. Yuan and K. Sawaya, "Accurate source model for MoM analysis of linear antennas by using sinusoidal reaction matching technique", *IEICE Transactions on Communications*, Vol. E86-B, No. 2, pp. 870-872, 2003.

Κεφάλαιο 5

Υβριδοποίηση της MAS με την Τεχνική Συνταιριάσματος Αντιδράσεων (Reaction Matching)-Εφαρμογή στην Ανάλυση Κεραιών Σύρματος και Στοιχειοκεραιών

5.1 Εισαγωγή

Αν και το ηλεκτρικό δίπολο θεωρείται ότι αποτελεί την απλούστερη κεραία εκπομπής και λήψης, η μελέτη του παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες. Η ακριβής κατανομή ρεύματος στην επιφάνεια ενός σωληνοειδούς διπόλου, για την οποία ικανοποιείται ακριβώς η οριακή συνθήκη συνέχειας του ηλεκτρικού πεδίου, διέπεται από την ολοκληρωτική εξίσωση Hallén ή την ισοδύναμη εξίσωση Rocklington (βλ. Κεφάλαια 1 και 2 στη σχετική αναφορά [1]). Ωστόσο, για τις εξισώσεις αυτές δεν έχουν προσδιοριστεί αναλυτικές λύσεις, εξαιρουμένης της περίπτωσης του διπόλου άπειρου μήκους [2]. Αν και οι αναλυτικές λύσεις που αφορούν το δίπολο άπειρου μήκους παρέχουν πολύ χρήσιμες πληροφορίες για τη συμπεριφορά της κατανομής ρεύματος στο δίπολο πεπερασμένου μήκους, δεν μπορούν να αξιοποιηθούν για την εκτίμηση των χαρακτηριστικών εκπομπής και λήψης των πρακτικών διπολικών κεραιών. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, από τις πρώτες δεκαετίες μελέτης των κεραιών, οι επιστήμονες στράφηκαν σε προσεγγιστικές αναλυτικές και αριθμητικές μεθόδους, με σκοπό τη μελέτη του διπόλου. Αξίζει προσοχής το γεγονός ότι, πριν από αρκετές δεκαετίες, αναπτύχθηκαν προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις για την κατανομή ρεύματος και το κοντινό ΗΜ πεδίο διπόλων σχετικά λεπτού σύρματος και μήκους που μεταβάλλεται σε ένα μεγάλο εύρος [3-5], ενώ επεκτάθηκαν για τη μελέτη παχύτερων διπόλων και διπόλων μεγάλου μήκους τα τελευταία χρόνια. Οι λύσεις αυτές είναι εκπεφρασμένες σε μορφή αθροίσματος τριών και δύο τριγωνομετρικών όρων (three-term και two-term theory, αντίστοιχα) για την περίπτωση ενός μεμονωμένου διπόλου εκπομπής ή λήψης, καθώς και για τα στοιχεία κάποιων στοιχειοκεραιών με συμμετρία ή άλλη κανονικότητα, ή περισσότερων όρων για τα στοιχεία στοιχειοκεραιών χωρίς συμμετρίες. Οι λύσεις αυτές χαρακτηρίζονται από το πλεονέκτημα ότι είναι διατυπωμένες σε κλειστή μορφή, οπότε είναι εύκολο να υπολογιστούν από ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Ωστόσο, η χρήση τους δεν έχει γενικευτεί, κυρίως λόγω της εξάρτησής τους από πεδία διέγερσης συγκεκριμένης μορφής και της πολύ μεγάλης δυσκολίας, αν όχι αδυναμίας, επέκτασής τους σε περιπτώσεις κεραιών σύρματος πιο πολύπλοκης γεωμετρίας. Οι λόγοι αυτοί, σε συνδυασμό και με τη γενίκευση της χρήσης ηλεκτρονικών υπολογιστών από το τέλος της δεκαετίας του 1960 και μετά, οδήγησαν τους επιστήμονες στην ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων εκτίμησης των χαρακτηριστικών εκπομπής και λήψης των διπόλων, αλλά και τη γενίκευσή τους για την ανάλυση τμηματικά ευθύγραμμων και καμπυλόγραμμων κεραιών λεπτού σύρματος. Χωρίς αμφιβολία, η δημοφιλέστερη και πλέον διαδεδομένη αριθμητική μέθοδος είναι η MoM, γενικά στοιχεία για την οποία έχουν αναφερθεί στην Παράγραφο 1.4.1. Η εφαρμογή της MoM βασίζεται στην προσέγγιση της άγνωστης κατανομής ρεύματος από ένα γραμμικό συνδυασμό πεπερασμένου αριθμού συναρτήσεων βάσης με άγνωστους συντελεστές βαρύτητας, οι οποίοι προσδιορίζονται επιβάλλοντας την οριακή συνθήκη συνέχειας της

εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος του σύρματος, χρησιμοποιώντας κάποια από τις τεχνικές που αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 1.3.2. Πάντως, σημειώνεται ότι η εφαρμογή της MoM μπορεί να γίνει κατά πολλούς διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με την επιλογή της προς επίλυση εξίσωσης, την ακριβή μορφή των συναρτήσεων βάσης, την τεχνική επιβολής της οριακής συνθήκης, καθώς και τον τρόπο μοντελοποίησης της διέγερσης.

Αξίζει να αναφερθεί ότι, συνήθως, από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων που εξάγονται από διαφορετικές μεθόδους για την ίδια διάταξη, αλλά ακόμη και από διαφορετικές εκδοχές της MoM, διαπιστώνονται σημαντικές διαφορές [6-16]. Επιπρόσθετα, οι αριθμητικές μέθοδοι χαρακτηρίζονται από δυσκολίες στην αριθμητική σταθεροποίηση των λύσεων [6-16]. Τα φαινόμενα αυτά οφείλονται σε πολλούς και διαφορετικούς λόγους, οι οποίοι μπορεί να σχετίζονται με ελλιπή, ανακριβή, καθώς και μη φυσικά αποδεκτή μοντελοποίηση της γεωμετρίας του προβλήματος και της διέγερσης, είτε να άπτονται της επιλογής των συναρτήσεων βάσης και της τεχνικής επιβολής της οριακής συνθήκης. Για παράδειγμα, η θεώρηση κρουστικού πεδίου διέγερσης, το οποίο επιβάλλεται σε ένα διάκενο απειροστά μικρού εύρους, πρέπει να οδηγεί σε κατανομή ρεύματος με φανταστικό μέρος που τείνει στο άπειρο στο σημείο διέγερσης του διπόλου, λόγω της άπειρης χωρητικότητας που αναπτύσσεται στο διάκενο (knife-edge capacitance). Ως εκ τούτου, η συμπεριφορά της λύσης μιας οποιασδήποτε αριθμητικής μεθόδου που εφαρμόζεται θεωρώντας κρουστικό πεδίο διέγερσης αναμένεται να εξαρτάται ισχυρά από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της και τον ακριβή τρόπο μοντελοποίησης του προβλήματος, αφού η ακριβής λύση του προβλήματος απειρίζεται. Ένας άλλος παράγοντας που επηρεάζει σημαντικά τη συμπεριφορά των αριθμητικών λύσεων αφορά τη μοντελοποίηση των άκρων. Στην περίπτωση του σωληνοειδούς διπόλου, η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος μηδενίζεται στα άκρα, όπως επιβάλλει η συνθήκη συνέχειας ρεύματος. Στην περίπτωση του συμπαγούς διπόλου, το ρεύμα στα άκρα είναι μικρό, αλλά όχι ακριβώς μηδενικό. Συνήθως, η επιλογή των συναρτήσεων βάσης είναι τέτοια ώστε το ρεύμα στα άκρα να είναι μηδενικό, θεώρηση η οποία δεν είναι απόλυτα ακριβής σε περιπτώσεις συμπαγών αγωγών. Ωστόσο, άλλες επιλογές είναι επιτρεπτές, όπως θα συζητηθεί και παρακάτω. Πάντως, ανεξάρτητα από τα παραπάνω, ο σημαντικότερος λόγος εμφάνισης των δυσκολιών σύγκλισης των αριθμητικών μεθόδων είναι η αδυναμία επίλυσης των εξισώσεων Hallén και Rocklington όταν ο ακριβής πυρήνας τους αντικατασταθεί από τον προσεγγιστικό πυρήνα. Το γεγονός αυτό, αν και είναι γνωστό εδώ και πολλές δεκαετίες, σπανίως αναφέρεται ρητώς στη σχετική βιβλιογραφία, ενώ μόλις πρόσφατα εξετάστηκαν οι συνέπειες του σε σχέση με τη συμπεριφορά των αριθμητικών μεθόδων και των δυσκολιών αριθμητικής σταθεροποίησης των λύσεων [17-19]. Μάλιστα, έχει αποδειχθεί ότι η χρησιμοποίηση του προσεγγιστικού πυρήνα καθιστά τις εξισώσεις Hallén και Rocklington μη επιλύσιμες από αυστηρή μαθηματική σκοπιά. Συνεπώς, σε τέτοιες περιπτώσεις, τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από την εφαρμογή οποιασδήποτε αριθμητικής μεθόδου εξαρτώνται ισχυρά από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της, αφού πραγματική λύση δεν υφίσταται.

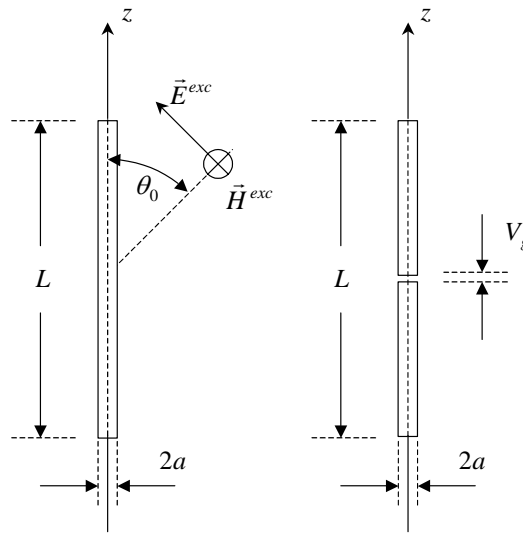
Στο παρόν κεφάλαιο, παρουσιάζεται μια παραλλαγή της MAS, η οποία συνδυάζεται με την τεχνική συνταιριάσματος των αντιδράσεων (Reaction Matching-RM), αντί της συνήθως χρησιμοποιούμενης σημειακής επιβολής. Η υβριδική μέθοδος που προκύπτει εφεξής καλείται MAS-RM, ενώ η κλασική μέθοδος θα αναφέρεται ως MAS-PM. Πάντως, στο παρόν κεφάλαιο, δεν παρουσιάζεται η MAS-RM κατά γενικό τρόπο, παρά μόνο όσον αφορά την ανάλυση ευθύγραμμων κεραιών σύρματος και στοιχειοκεραιών. Το γεγονός αυτό καθιστά δυνατή την άμεση υβριδοποίηση, χωρίς την ανάγκη διερεύνησης των πιθανών τρόπων εφαρμογής της τεχνικής RM σε επιφάνειες. Είναι ακόμη σημαντικό να αναφερθεί ότι η MAS-RM παρουσιάζει σημαντικές ομοιότητες με παραλλαγές της MoM, οι οποίες εφαρμόζονται στη βάση της εξίσωσης Rocklington και χρησιμοποιούν την τεχνική RM. Ωστόσο, υπάρχουν και κάποιες σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο μεθόδων, οι οποίες θα συζητηθούν με λεπτομέρεια παρακάτω. Όπως θα δειχθεί ακολούθως, η MAS-RM πλεονεκτεί ως προς τη MoM όσον αφορά την αριθμητική ευστάθεια των λύσεων και τη συμπεριφορά της προκύπτουσας κατανομής ρεύματος. Εκτός αυτού, η MAS-RM μπορεί να εφαρμοστεί και

στην περίπτωση κεραιών παχύτερου σύρματος, ενώ η MoM απαιτεί σημαντικές τροποποιήσεις [20, 21].

Ακολούθως, εξετάζεται η εφαρμογή της MAS-RM στην περίπτωση ενός μεμονωμένου διπόλου λεπτού σύρματος στον ελεύθερο χώρο, ενώ παρουσιάζεται και η γενίκευση της μεθόδου για την ανάλυση στοιχειοκεραιών παράλληλων διπόλων λεπτού σύρματος, τα οποία είναι τοποθετημένα σε τυχαίες θέσεις του χώρου. Σε κάθε περίπτωση, μελετάται η συμπεριφορά των λύσεων σε σχέση με τις παραμέτρους μοντελοποίησης και εξετάζεται η αριθμητική ευστάθεια κάποιων μεγεθών ενδιαφέροντος. Τέλος, παρουσιάζονται αποτελέσματα για κάποιες ειδικές περιπτώσεις, όπως το δίπολο που τροφοδοτείται από παλμικό πεδίο διέγερσης, το δίπολο μεγάλου ηλεκτρικού μήκους, καθώς και το παχύ δίπολο.

5.2 Δίπολο Λεπτού Σύρματος

5.2.1 Περιγραφή του Προβλήματος



Σχήμα 5. 1. Γεωμετρία διπόλου που διεγείρεται από εξωτερικό ΗΜ πεδίο ή τροφοδοτείται από πηγή τάσης διακένου.

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος συνίσταται σε ένα ηλεκτρικά λεπτό δίπολο μήκους L και ακτίνας a (με $a \ll L$ και $a \ll \lambda$) στον ελεύθερο χώρο. Το κέντρο του διπόλου βρίσκεται στο κέντρο ενός συστήματος συντεταγμένων, ενώ ο άξονας του ταυτίζεται με τον άξονα z . Το δίπολο είτε διεγείρεται από ένα εξωτερικό ΗΜ πεδίο, το οποίο υποτίθεται επίπεδο κύμα, για τη μελέτη του διπόλου ως σκεδαστή ή στοιχείου λήψης, είτε τροφοδοτείται από μια ιδανική γεννήτρια, η οποία επιβάλλει ένα κρουστικό πεδίο διέγερσης κατά μήκος ενός διακένου απειροστά μικρού εύρους με κέντρο στο σημείο z_g , για τη μελέτη του διπόλου ως ακτινοβολητή. Οι δύο υπό εξέταση περιπτώσεις απεικονίζονται στο Σχήμα 5.1. Στην πρώτη περίπτωση, το πεδίο διέγερσης μεταβάλλεται κατά μήκος της περιφέρειας του διπόλου. Ωστόσο, όταν το δίπολο είναι αρκούντως λεπτό, η αξιωματική εξάρτηση του επίπεδου κύματος επί της παράπλευρης επιφάνειας του διπόλου μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα, οπότε η εφαπτομενική συνιστώσα του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου εκφράζεται ως εξής

$$E_z^{exc}(z) = E_0 \sin \theta_0 \exp(jk_0 z \cos \theta_0), \quad (5.1)$$

όπου E_0 το μιγαδικό πλάτος, θ_0 η γωνία πρόσπτωσης και k_0 ο κυματικός αριθμός στο κενό. Στη δεύτερη περίπτωση, το πεδίο διέγερσης συνδέεται με την επιβαλλόμενη τάση V_g στο διάκενο μέσω της σχέσης

$$E_z^g(z) = -V_g \delta(z - z_g), \quad (5.2)$$

όπου $\delta(\bullet)$ η κρουστική συνάρτηση.

5.2.2 Εφαρμογή της MAS-RM

Σύμφωνα με τις βασικές αρχές της MAS, το άγνωστο HM πεδίο σε κάθε περιοχή του προβλήματος εκφράζεται ως υπέρθεση των HM πεδίων που παράγονται από ένα σύνολο βοηθητικών πηγών, που είναι τοποθετημένες εκτός των ορίων της αντίστοιχης περιοχής. Για τις δύο περιπτώσεις του Σχήματος 5.1, ένα σύνολο βοηθητικών πηγών εντός του διπόλου αρκεί για την περιγραφή του σκεδαζόμενου ή ακτινοβολούμενου HM πεδίου στον κενό χώρο, αφού το HM πεδίο εντός του διπόλου είναι μηδενικό. Όπως αναφέρθηκε στις Παραγράφους 4.2.2 και 4.4.2, οι βοηθητικές πηγές μπορεί να είναι οποιουδήποτε τύπου, αρκεί τα παραγόμενα HM πεδία να αποτελούν λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στο κενό. Συνήθως, ως βοηθητικές πηγές χρησιμοποιούνται στοιχειώδη ηλεκτρικά δίπολα, τα οποία κατανομούνται ομοιόμορφα και σύμμορφα προς το σχήμα της υπό εξέταση δομής [22]. Ωστόσο, διαφορετικοί τύποι βοηθητικών πηγών και ανομοιόμορφες κατανομές των θέσεων τους είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν, ανάλογα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του εκάστοτε προβλήματος, προκειμένου να επιταχυνθεί η σύγκλιση των λύσεων και να βελτιωθεί η ακρίβεια τους. Για τα προβλήματα που εξετάζονται εδώ, ως βοηθητικές πηγές χρησιμοποιούνται ηλεκτρικά δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος, τα οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα κατά μήκος του άξονα z . Τα βοηθητικά δίπολα επικαλύπτονται έτσι ώστε κάθε ένα από αυτά να εκτείνεται μεταξύ των κέντρων των αμέσως γειτονικών του, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2. Επιπρόσθετα, στα άκρα του διπόλου εισάγονται ηλεκτρικά μονόπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος με κατάλληλο προσανατολισμό, όπως επίσης απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2. Τα εξωτερικά άκρα των βοηθητικών μονοπόλων είναι τοποθετημένα ακριβώς στα άκρα του διπόλου, ενώ οι θέσεις των εσωτερικών άκρων τους ταυτίζονται με αυτές των κέντρων των αμέσως γειτονικών βοηθητικών διπόλων.

Ακολούθως, η ανάλυση εστιάζεται στη σύγκριση των λύσεων που εξάγονται παρουσία και απουσία των βοηθητικών μονοπόλων. Και στις δύο περιπτώσεις, ο αριθμός των βοηθητικών διπόλων θεωρείται περιττός και ίσος με $2N+1$, οπότε οι θέσεις των κέντρων τους εκφράζονται ως $z_n = n\delta$, $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, όπου $\delta = L/[2(N+1)]$ η απόσταση μεταξύ των κέντρων διαδοχικών βοηθητικών διπόλων μήκους 2δ . Τα βοηθητικά μονόπολα έχουν το μισό μήκος και τοποθετούνται στα σημεία $z_{\pm(N+1)} = \pm L/2$. Το μονόπολο στο άνω άκρο εκτείνεται στο διάστημα $L/2 - \delta \leq z \leq L/2$, ενώ το μονόπολο στο κάτω άκρο εκτείνεται στο διάστημα $-L/2 \leq z \leq -L/2 + \delta$, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2. Τα βοηθητικά δίπολα φέρουν ημιτονοειδή ρεύματα $w_n f_n(z)$ με άγνωστους συντελεστές βαρύτητας w_n , όπου $f_n(z)$ οι συναρτήσεις

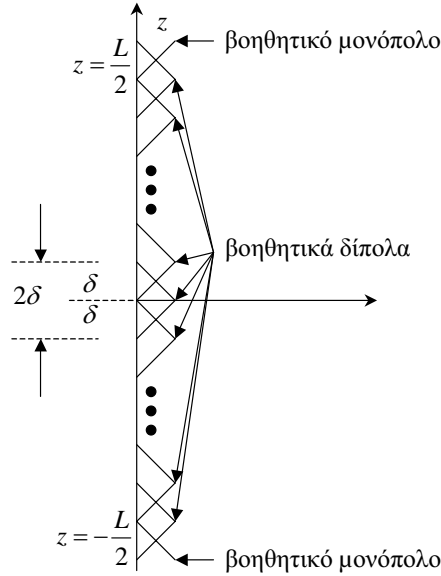
$$f_n(z) = \begin{cases} \sin[k_0(\delta - |z - z_n|)] & |z - z_n| \leq \delta \\ 0 & |z - z_n| > \delta \end{cases}. \quad (5.3)$$

Τα ημιτονοειδή ρεύματα των βοηθητικών μονοπόλων εκφράζονται, με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης $u(\bullet)$, ως $w_{\pm(N+1)} f_{\pm(N+1)}(z) u(L/2 \mp z)$, όπου

$$u(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Η κατανομή ρεύματος οποιασδήποτε βοηθητικής πηγής μπορεί να εκφραστεί ως $f_n(z)s_n(z)$, όπου

$$s_n(z) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N \\ u(L/2 \mp z), & n = \pm(N+1) \end{cases} \quad (5.5)$$



Σχήμα 5. 2. Βοηθητικές πηγές για την περιγραφή του άγνωστου HM πεδίου.

Το άγνωστο HM πεδίο, το οποίο αντιστοιχεί στο σκεδαζόμενο πεδίο στην πρώτη περίπτωση και στο ακτινοβολούμενο πεδίο στη δεύτερη περίπτωση, περιγράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των HM πεδίων των βοηθητικών πηγών, συνεπώς

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{n=-(N+1)}^{N+1} w_n \vec{F}_n(\vec{r}), \quad (5.6)$$

όπου \vec{F} είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου στον κενό χώρο, ενώ \vec{F}_n είναι το αντίστοιχο πεδίο της βοηθητικής πηγής που καθορίζει ο δείκτης n και είναι τοποθετημένη στο σημείο $(0,0,z_n)$ με διάνυσμα θέσης \vec{r}_n .

Τα πεδία \vec{F}_n προσδιορίζονται με απλή μεταφορά του πεδίου \vec{F}_S μιας βοηθητικής πηγής, που είναι τοποθετημένη στο κέντρο ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτινοβολεί σε άπειρο κενό χώρο, ως εξής

$$\vec{F}_n(\vec{r}) = \vec{F}_S(\vec{r} - \vec{r}_n). \quad (5.7)$$

Αξιοποιώντας τις σχέσεις (B.14) και (B.20) του Παραρτήματος Β, τα πεδία των βοηθητικών πηγών εκφράζονται ως εξής

$$\vec{F}_n(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{F}_D(\vec{r}; \vec{r}_n), |n| \leq N \\ \vec{F}_M^\pm(\vec{r}; \vec{r}_n), n = \pm(N+1) \end{cases} \quad (5.8)$$

όπου $\vec{F}_D(\vec{r}; \vec{r}_n)$ είναι το πεδίο ενός ηλεκτρικού διπόλου ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος μοναδιαίου πλάτους με προσανατολισμό κατά την κατεύθυνση του άξονα z και κέντρο στο σημείο με διάνυσμα θέσης \vec{r}_n , $\vec{F}_M^+(\vec{r}; \vec{r}_n)$ είναι το πεδίο ενός θετικού ηλεκτρικού μονοπόλου ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος μοναδιαίου πλάτους με προσανατολισμό κατά την κατεύθυνση του άξονα z και κέντρο στο σημείο με διάνυσμα θέσης \vec{r}_n , ενώ $\vec{F}_M^-(\vec{r}; \vec{r}_n)$ είναι το πεδίο του αντίστοιχου αρνητικού μονοπόλου.

Σε κάθε περίπτωση, η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να είναι συνεχής στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου. Στην περίπτωση του εξωτερικά διεγχειρόμενου διπόλου, η οριακή συνθήκη για την εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου εκφράζεται ως εξής

$$E_z^{exc}(z) + E_z(a, z) = 0, |z| \leq \frac{L}{2}. \quad (5.9)$$

Στην περίπτωση του τροφοδοτούμενου διπόλου, η αντίστοιχη οριακή συνθήκη εκφράζεται ως εξής

$$E_z(a, z) = E_z^g(z), |z| \leq \frac{L}{2}. \quad (5.10)$$

Σύμφωνα με τη MAS-PM, οι άγνωστοι συντελεστές w_n του αναπτύγματος της σχέσης (5.6) προσδιορίζονται επιβάλλοντας την οριακή συνθήκη της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου σε διακριτά σημεία επί της παράπλευρης επιφάνειας του διπόλου, όπως περιγράφηκε στις Παραγράφους 4.2.2 και 4.4.2. Εναλλακτικά προς τη σημειακή επιβολή, είναι δυνατή η επιβολή της οριακής συνθήκης μέσω της τεχνικής συνταιριάσματος των αντιδράσεων [23, 24]. Η σχετική διαδικασία συνίσταται στον πολλαπλασιασμό των δύο μελών των σχέσεων (5.9) και (5.10) με την προβολή της ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος κάθε βοηθητικής πηγής επί της παράπλευρης επιφάνειας του διπόλου και, στη συνέχεια, ολοκλήρωση του γινομένου, όπως περιγράφεται στη σχετική αναφορά [25]. Επανάληψη της διαδικασίας για όλες τις βοηθητικές πηγές οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\sum_{n=-(N+1)}^{N+1} Z_{n,m} w_n = -V_m, m = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \pm(N+1). \quad (5.11)$$

Όταν τα βοηθητικά μονόπολα δεν χρησιμοποιούνται, το γραμμικό σύστημα που προκύπτει εκφράζεται ως εξής

$$\sum_{n=-N}^N Z_{n,m} w_n = -V_m, m = 0, \pm 1, \dots, \pm N. \quad (5.12)$$

Σε κάθε περίπτωση, οι συντελεστές $Z_{n,m}$ εκφράζονται μέσω του ολοκληρώματος

$$Z_{n,m} = - \int_{z_m - \delta}^{z_m + \delta} \hat{z} \cdot \vec{E}_n(a, z)] f_m(z) s_m(z) dz, \quad (5.13)$$

το οποίο αντιστοιχεί στην αμοιβαία σύνθετη αντίσταση μεταξύ δύο παράλληλων πηγών ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος σε οριζόντια απόσταση a και κατακόρυφη απόσταση $|z_m - z_n|$. Αξιοποιώντας την αρχή της αμοιβαιότητας, ο υπολογισμός των συντελεστών $Z_{n,m}$ γίνεται με τη βοήθεια των αμοιβαίων σύνθετων αντιστάσεων μεταξύ δύο διπόλων, ενός μονοπόλου και ενός διπόλου, καθώς και δύο μονοπόλων, σύμφωνα με τη σχέση

$$Z_{n,m} = \begin{cases} Z_{DD}, |n| \leq N, |m| \leq N \\ Z_{MD}, |n| = N+1, |m| \leq N \\ Z_{MD}, |n| \leq N, |m| = N+1 \\ Z_{MM}^{++}, n = m = \pm(N+1) \\ Z_{MM}^{+-}, n = -m = \pm(N+1) \end{cases} \quad (5.14)$$

Σημειώνεται ότι οι δείκτες “D” και “M” χρησιμοποιούνται για το διαχωρισμό μεταξύ διπολικών και μονοπολικών πηγών, ενώ οι εκθέτες “++” και “+-” υποδηλώνουν το σχετικό προσανατολισμό των μονοπολικών πηγών, σε συμφωνία και με όσα αναφέρθηκαν στο Παράρτημα Β. Οι αμοιβαίες σύνθετες αντιστάσεις των σχέσεων (5.13) και (5.14) μπορούν να υπολογιστούν είτε μέσω αλγορίθμων αριθμητικής ολοκλήρωσης είτε αξιοποιώντας διαθέσιμες αναλυτικές σχέσεις, οι οποίες εμπλέκουν τις συναρτήσεις ολοκληρωτικού ημίτονου και συνημίτονου (sine/cosine integral), καθώς και την εκθετική ολοκληρωτική συνάρτηση (exponential integral) [26-32]. Οι σταθεροί όροι V_m του δεύτερου μέλους των εξισώσεων (5.11) και (5.12) αντιστοιχούν στα ολοκληρώματα του πεδίου διέγερσης, τα οποία, για την περίπτωση εξωτερικής διέγερσης, εκφράζονται ως εξής

$$V_m = - \int_{z_m - \delta}^{z_m + \delta} E_z^{exc}(z) f_m(z) s_m(z) dz. \quad (5.15)$$

Για $m = \pm(N+1)$, τα κατάλληλα όρια ολοκλήρωσης καθορίζονται από τις συναρτήσεις $s_m(z)$. Το ολοκλήρωμα της σχέσης (5.15) μπορεί να προσδιοριστεί αναλυτικά μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών, οι οποίοι οδηγούν στο εξής αποτέλεσμα

$$V_m = \begin{cases} 2E_0 \frac{\exp(jk_0 z_m \cos \theta_0)}{k_0 \sin \theta_0} \\ \times [\cos(k_0 \delta) - \cos(k_0 \delta \cos \theta_0)], |m| \leq N \\ E_0 \frac{\exp(jk_0 z_m \cos \theta_0)}{k_0 \sin \theta_0} \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \cos(k_0 \delta) - \cos(k_0 \delta \cos \theta_0) \\ \pm j [\sin(k_0 \delta \cos \theta_0) - \sin(k_0 \delta) \cos \theta_0] \end{array} \right\}, m = \pm(N+1) \end{cases} \quad (5.16)$$

Στην περίπτωση κρουστικής διέγερσης, οι σταθεροί όροι V_m του δεύτερου μέλους των εξισώσεων (5.11) και (5.12) εκφράζονται ως εξής

$$V_m = \int_{z_m - \delta}^{z_m + \delta} E_z^g(z) f_m(z) s_m(z) dz. \quad (5.17)$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της σχέσης (5.17) είναι άμεσος και οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα

$$V_m = \begin{cases} -V_g \sin[k_0(\delta - |z_g - z_m|)] & |z_g - z_m| \leq \delta \\ 0 & |z_g - z_m| > \delta \end{cases}. \quad (5.18)$$

Όταν τα βοηθητικά μονόπολα δεν χρησιμοποιούνται, οι συντελεστές του γραμμικού συστήματος των εξισώσεων (5.12) επαναλαμβάνονται από γραμμή σε γραμμή κατά κυκλικό τρόπο. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, ο πίνακας των συντελεστών είναι τύπου Toeplitz και ο υπολογισμός του μπορεί να γίνει από τους συντελεστές της πρώτης ή της τελευταίας γραμμής του ($m = \pm N$), σύμφωνα με τη σχέση

$$Z_{n,m} = Z_{\pm N \mp |m-n|, \pm N}. \quad (5.19)$$

Στην αντίθετη περίπτωση, η σχέση (5.19) ισχύει για $|n| \leq N$ και $|m| \leq N$, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε αυτήν την περίπτωση για τη μείωση του υπολογιστικού κόστους. Σε κάθε περίπτωση, μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος $(2N+3) \times (2N+3)$ των εξισώσεων (5.11) ή του γραμμικού συστήματος $(2N+1) \times (2N+1)$ των εξισώσεων (5.12), το ΗΜ πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου προσδιορίζεται άμεσα από τις σχέσεις (5.6)-(5.8). Στη συνέχεια, η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου προκύπτει με εφαρμογή της οριακής συνθήκης του μαγνητικού πεδίου, η οποία διατυπώνεται ως εξής

$$\vec{J}_s = \hat{\rho} \times \vec{H} \Big|_{\rho=a}. \quad (5.20)$$

Η ρευματική κατανομή κατά μήκος του διπόλου προκύπτει ολοκληρώνοντας την επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος κατά μήκος της περιφέρειας του διπόλου, οπότε, λόγω συμμετρίας, προκύπτει

$$I(z) = 2\pi a \sum_{n=-(N+1)}^{N+1} w_n [\hat{\phi} \cdot \vec{H}_n(a, z)]. \quad (5.21)$$

Κατόπιν τούτου, ο υπολογισμός της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου $Y_{in} = G_{in} + jB_{in}$, η οποία ορίζεται ως ο λόγος της έντασης του ρεύματος εισόδου $I(z_g)$ προς την τάση τροφοδότησης V_g , είναι άμεσος, όπως και ο υπολογισμός της σύνθετης αντίστασης εισόδου $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$, η οποία ορίζεται ως ο αντίστροφος λόγος.

Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι το γραμμικό σύστημα των εξισώσεων (5.12) ταυτίζεται με αυτό που προκύπτει με εφαρμογή της MoM χρησιμοποιώντας ως συναρτήσεις βάσης και δοκιμής τις συναρτήσεις $f_n(z)$ της σχέσης (5.3), όπως περιγράφεται στη σχετική αναφορά [25]. Μάλιστα, η σύγκριση μπορεί να γίνει τροποποιώντας τη MoM με την προσθήκη ημίσεων συναρτήσεων βάσης πλησίον των άκρων, οι οποίες εκφράζονται ως $f_n(z)s_n(z)$. Ως εκ τούτου, τα αποτελέσματα της MAS-RM μπορούν να συγκριθούν άμεσα με αυτά της MoM, υπολογίζοντας την κατανομή ρεύματος ως υπέρθεση των συναρτήσεων βάσης μέσω της σχέσης

$$I(z) = \sum_{n=-(N+1)}^{N+1} w_n f_n(z) s_n(z). \quad (5.22)$$

Μια σημαντική διαφορά μεταξύ της MAS-RM και της MoM έγκειται στη διαφορετική συμπεριφορά της κατανομής ρεύματος πλησίον των άκρων ($z = \pm L/2$). Στην περίπτωση του

σωληνοειδούς διπόλου, η κατανομή ρεύματος μηδενίζεται ακριβώς στα άκρα. Όμως, στην περίπτωση του συμπαγούς ή κλειστού διπόλου, η κατανομή ρεύματος στην πραγματικότητα λαμβάνει μικρές, αλλά όχι ακριβώς μηδενικές, τιμές στα άκρα. Όταν η MoM εφαρμόζεται χωρίς την προσθήκη των ημίσεων συναρτήσεων βάσης, οι τιμές της κατανομής ρεύματος μηδενίζονται στα άκρα, ενώ η αντίστοιχη κλίση καθορίζεται αποκλειστικά από την πρώτη παράγωγο της αντίστοιχης συνάρτησης βάσης $f_{\pm N}(z)$. Η προσθήκη των ημίσεων συναρτήσεων βάσης έχει ως συνέπεια τη χαλάρωση των περιορισμών που αφορούν τις τιμές και τις κλίσεις της κατανομής ρεύματος της σχέσης (5.22) κοντά στα άκρα του διπόλου. Αντίθετα, η κατανομή ρεύματος της σχέσης (5.21) δεν χαρακτηρίζεται από περιορισμούς σχετικά με την τιμή ή την κλίση της, αφού προκύπτει ως άθροισμα των τιμών της έντασης του μαγνητικού πεδίου των βοηθητικών πηγών. Για το λόγο αυτό, πιστεύεται ότι η κατανομή ρεύματος της σχέσης (5.21) αναπαριστά καλύτερα την πραγματική κατανομή ρεύματος συγκριτικά προς αυτή της σχέσης (5.22), δεδομένων των παραδοχών που σχετίζονται με την προσέγγιση λεπτού σύρματος και την επίδραση των άκρων στη συμπεριφορά του διπόλου.

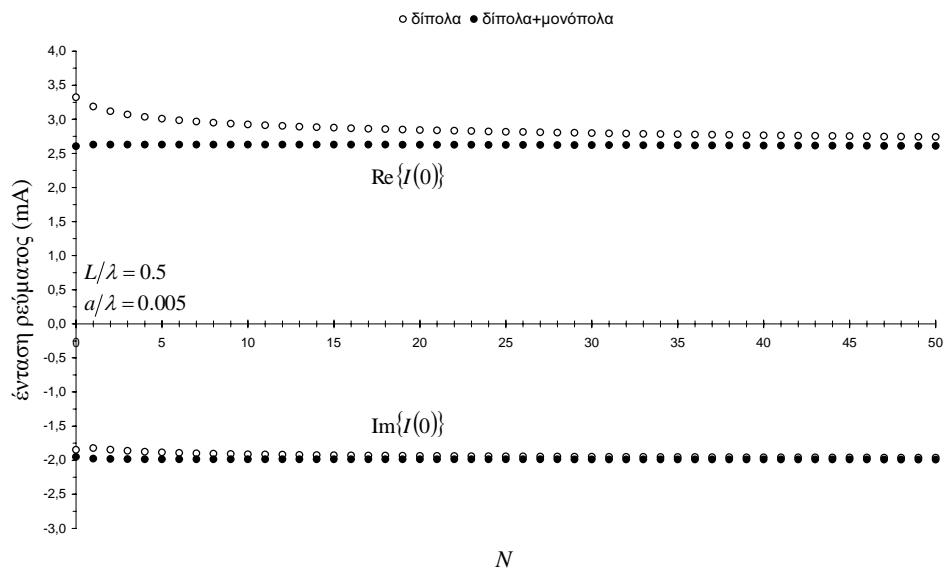
Για την αποτίμηση της ποιότητας των λύσεων, εξετάζεται η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου. Λόγω του γεγονότος ότι η οριακή συνθήκη της σχέσης (5.9) ή (5.10) επιβάλλεται κατά κάποια ολοκληρωτική έννοια, η συνέχεια της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι εξασφαλισμένη σε κανένα σημείο επί της παράπλευρης επιφάνειας του διπόλου. Για το λόγο αυτό, η συμπεριφορά του αντίστοιχου σφάλματος παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και θα εξεταστεί διεξοδικά στη συνέχεια.

5.2.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

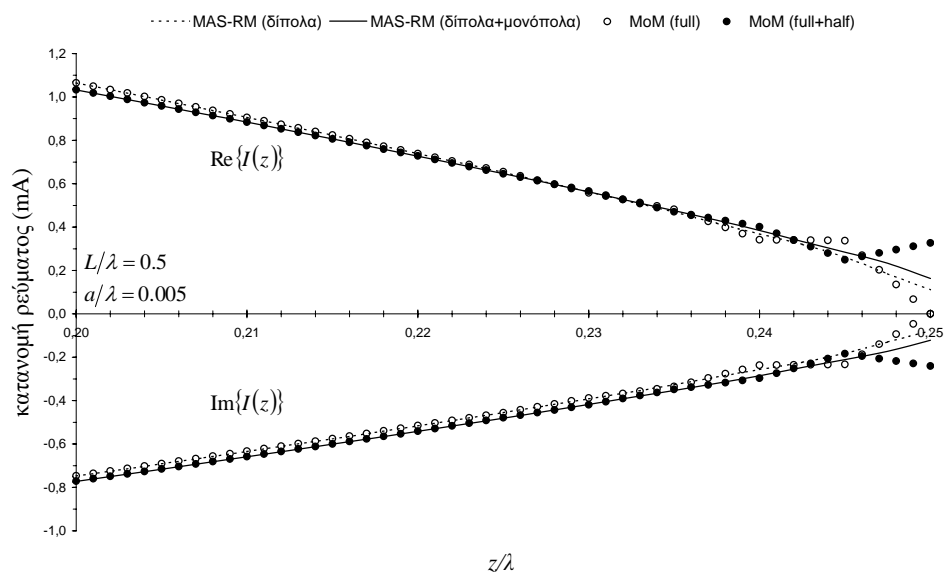
Ακολούθως, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των λύσεων σε σχέση με την παράμετρο καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών N . Ιδιαίτερη προσοχή δίνεται στην επίδραση της προσθήκης των βοηθητικών μονοπόλων στα χαρακτηριστικά των λύσεων, κυρίως σε σχέση με τις λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας μόνο τα βοηθητικά δίπολα. Σε κάθε περίπτωση, οι λύσεις εξετάζονται αυξανόμενου του N , ελέγχοντας κάποιο μέγεθος ενδιαφέροντος και τη συμπεριφορά του σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (5.9) ή (5.10). Η λύση θεωρείται ικανοποιητική, αν και όχι απαραίτητα συγκλίνουσα από αυστηρά μαθηματική σκοπιά, όταν είναι αριθμητικά ευσταθής.

Αρχικά, εξετάζεται η περίπτωση ενός διπόλου με $L/\lambda = 0.5$ και $\alpha/\lambda = 0.005$, το οποίο διεγείρεται από ένα κάθετα προσπίπτον επίπεδο κύμα με ένταση ηλεκτρικού πεδίου μοναδιαίου πλάτους. Οι τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου απεικονίζονται συναρτήσει του N στο Σχήμα 5.3. Είναι προφανές ότι η προσθήκη των βοηθητικών μονοπόλων συνεπάγεται την ταχύτατη αριθμητική σταθεροποίηση των λύσεων, καθώς πρακτικά αμετάβλητα αποτελέσματα παρατηρούνται από πολύ μικρά N , τα οποία προσεγγίζονται από τις λύσεις που προκύπτουν χωρίς τη χρήση των βοηθητικών μονοπόλων για πολύ μεγαλύτερα N . Σημειώνεται ότι αντίστοιχη συμπεριφορά χαρακτηρίζει και τις λύσεις της MoM, καθώς η κατανομή ρεύματος που προκύπτει από τη σχέση (5.22) πρακτικά ταυτίζεται με αυτή της σχέσης (5.21) για $N < L/(2a)$. Ωστόσο, καθώς η παράμετρος N πλησιάζει και ξεπερνά την τιμή του λόγου $L/(2a)$, εμφανίζονται ταλαντώσεις στα μέτρα των συντελεστών w_n , οι οποίες είναι υπεύθυνες για την εμφάνιση αντίστοιχων ταλαντώσεων στην κατανομή ρεύματος της σχέσης (5.22) κοντά στα άκρα του διπόλου. Αν και το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό εδώ και πολλά χρόνια, δεν είχε αναλυθεί σε βάθος μέχρι πρόσφατα [17, 19]. Μάλιστα, εκτενείς δοκιμές κατέδειξαν ότι η προσθήκη των βοηθητικών μονοπόλων δεν αποτρέπει την εμφάνιση των ταλαντώσεων. Αντίθετα, η κατανομή ρεύματος της σχέσης (5.21) πάντοτε φθίνει πλησίον των άκρων του διπόλου, παρά την ύπαρξη

ταλαντώσεων στα μέτρα των συντελεστών w_n . Η συμπεριφορά αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 5.4 για $N + 1 = 50$.



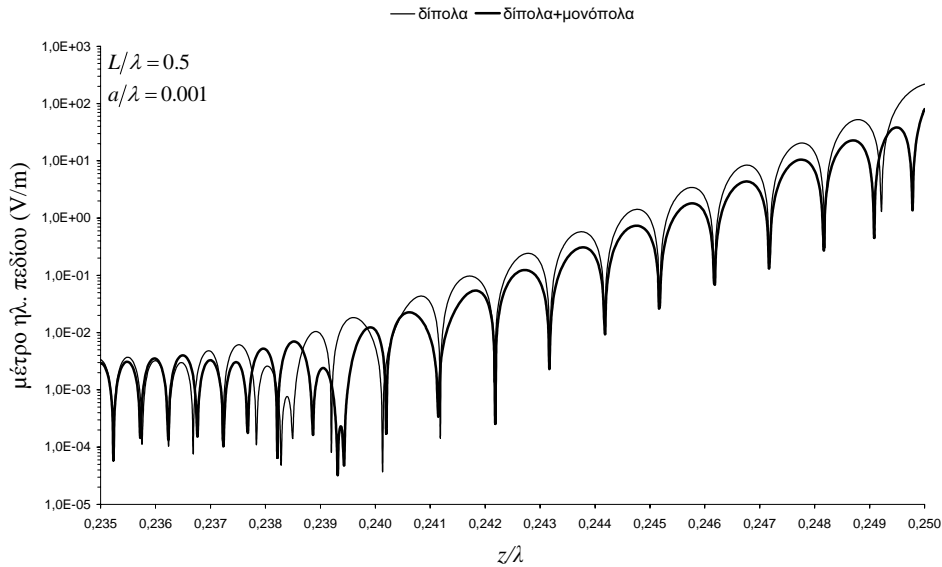
Σχήμα 5. 3. Τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών.



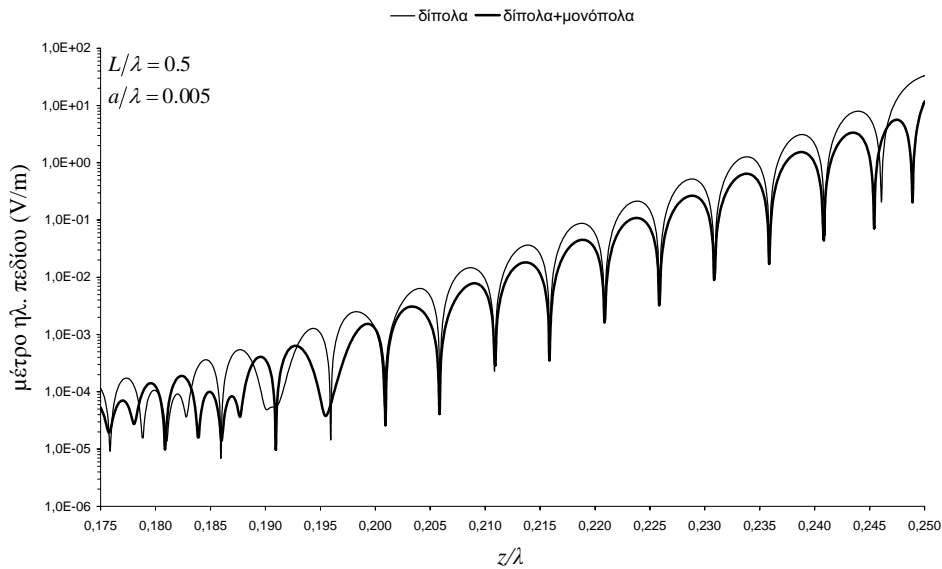
Σχήμα 5. 4. Κατανομή του επαγόμενου ρεύματος.

Πρόσθετα αποτελέσματα για την ένταση του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1, για $L/\lambda = 0.5$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου a/λ . Σε κάθε περίπτωση, το πεδίο διέγερσης είναι κάθετα προσπίπτον επίπεδο κύμα με ένταση ηλεκτρικού πεδίου μοναδιαίου πλάτους. Τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.1 καταδεικνύουν ότι η προσθήκη των βοηθητικών μονοπόλων οδηγεί στην αριθμητική σταθεροποίηση των λύσεων ακόμη και για $N \ll L/(2a)$, ενώ οι λύσεις που προκύπτουν

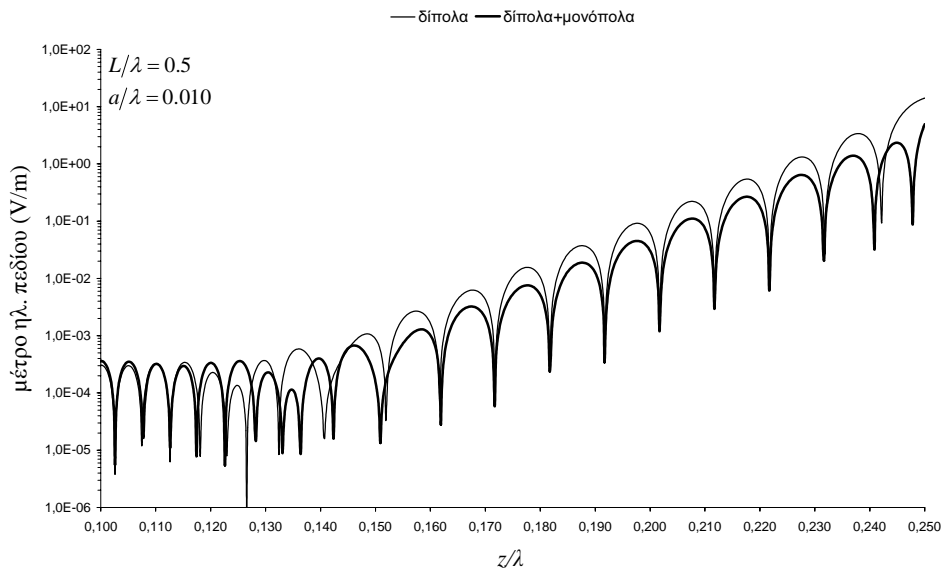
χωρίς τα βοηθητικά μονόπολα τις προσεγγίζουν για $N \sim L/(2a)$. Για σχετικά μεγάλες τιμές του N , τα αποτελέσματα των λύσεων διαφοροποιούνται ελάχιστα μεταξύ τους, όπως άλλωστε αναμένεται, λόγω της μειούμενης συνεισφοράς των βοηθητικών μονοπόλων στη διαμόρφωση της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου. Όμως, για ακόμη μεγαλύτερες τιμές του N , οι λύσεις παρουσιάζουν ακανόνιστη συμπεριφορά, λόγω της δραματικής αύξησης του δείκτη κατάστασης του συστήματος. Αξίζει να αναφερθεί ότι η εξέταση της συμπεριφοράς των λύσεων είναι δυνατή στο προαναφερθέν εύρος μεταβολής του N χρησιμοποιώντας αριθμητική διπλής ακρίβειας, αφού, σε διαφορετική περίπτωση, εμφανίζεται αριθμητική αστάθεια ακόμη και για $N < L/(2a)$.



Σχήμα 5. 5. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου.



Σχήμα 5. 6. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου.

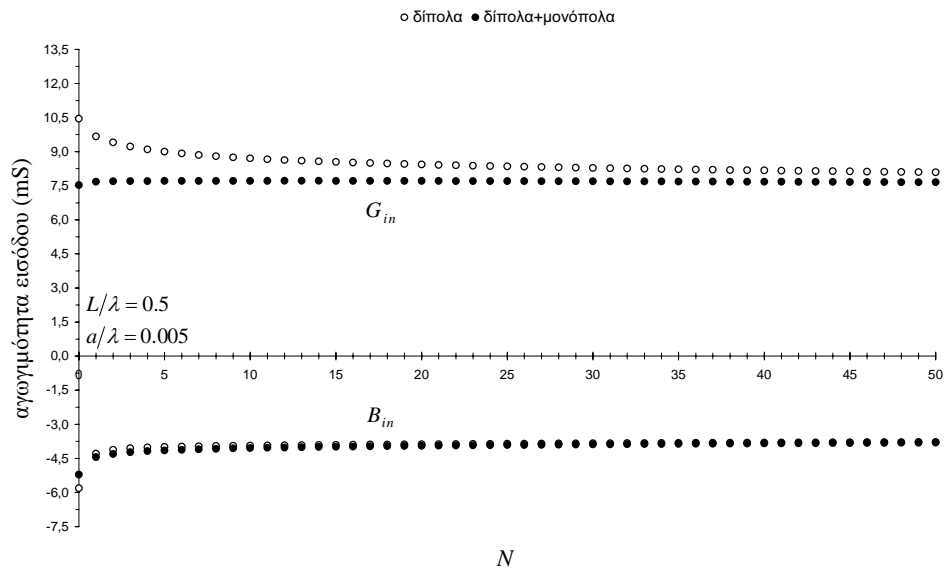


Σχήμα 5. 7. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου.

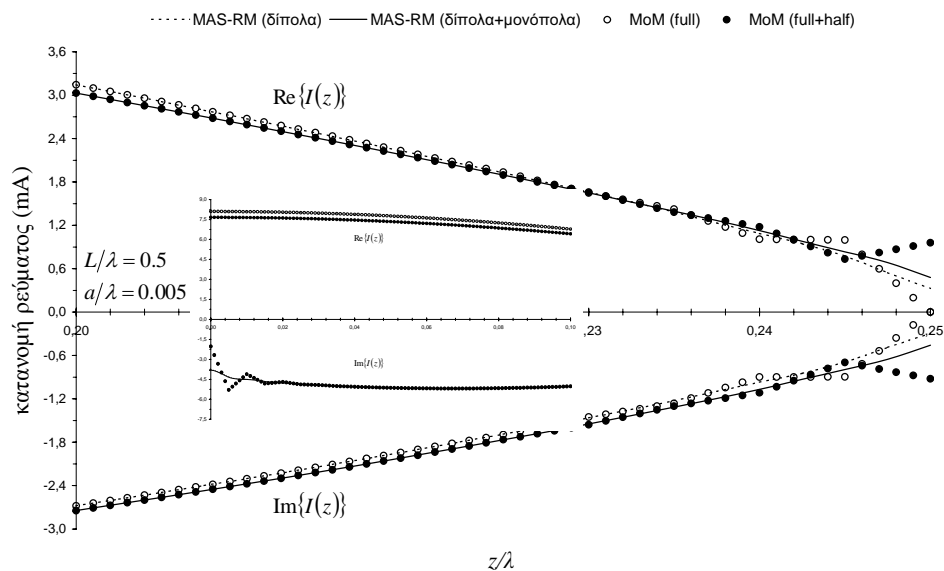
Στη συνέχεια, στα Σχήματα 5.5-5.7, απεικονίζεται το μέτρο της εφαπτομενικής συνιστώσας του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια ενός διπόλου με $L/\lambda = 0.5$, για τις τιμές της παραμέτρου a/λ του Πίνακα 5.1 και $N + 1 = \lceil L/(2a) \rceil$, όπου $\lceil A \rceil$ ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του A . Η απεικόνιση αντιστοιχεί σε κάθετα προσπίπτον επίπεδο κύμα με ένταση ηλεκτρικού πεδίου μοναδιαίου πλάτους. Λόγω συμμετρίας, η απεικόνιση περιορίζεται στο θετικό ημιάξονα του διπόλου. Σημειώνεται ότι, αν και στην προκειμένη περίπτωση ισχύει $\lceil L/(2a) \rceil = L/(2a)$, ο λόγος $L/(2a)$ δεν είναι πάντοτε ακέραιος αριθμός. Για το λόγο αυτό, ο συμβολισμός $\lceil \bullet \rceil$ εισάγεται εξ αρχής, προκειμένου να αποφευχθεί οποιαδήποτε σχετική παρανόηση. Από τα Σχήματα 5.5-5.7 συνάγεται ότι η προσθήκη των βοηθητικών μονοπόλων έχει ως συνέπεια τη σημαντική μείωση του σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (5.9), αφού η εφαπτομενική συνιστώσα του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου μειώνεται κατά τα 2/3 περίπου ως προς τη μέγιστη και τη μέση τιμή, γεγονός το οποίο πιστοποιεί τόσο τη μείωση του μέγιστου σφάλματος όσο και της «ενέργειας» του σφάλματος, ενώ εξηγεί, τουλάχιστον εν μέρει, τις διαφορές των αποτελεσμάτων για μικρά N .

Ακολουθώς, εξετάζεται η περίπτωση ενός διπόλου με $L/\lambda = 0.5$ και $a/\lambda = 0.005$, το οποίο τροφοδοτείται συμμετρικά από κρουστική πηγή μοναδιαίας τάσης. Οι τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου απεικονίζονται συναρτήσει του N στο Σχήμα 5.8. Όπως και στην περίπτωση του διπόλου που διεγείρεται εξωτερικά, η προσθήκη των βοηθητικών μονοπόλων συνεπάγεται την αύξηση του ρυθμού αριθμητικής σταθεροποίησης των λύσεων έναντι των λύσεων που προκύπτουν χωρίς τη χρήση των βοηθητικών μονοπόλων. Πάντως, στην προκειμένη περίπτωση, ο ρυθμός αριθμητικής σταθεροποίησης των λύσεων είναι ελαφρώς πιο αργός έναντι αυτού που χαρακτηρίζει τις λύσεις για το εξωτερικά διεγερόμενο δίπολο, γεγονός το οποίο αποδίδεται στη συμπεριφορά του πεδίου διέγερσης της σχέσης (5.2), η οποία επιβάλλει ένα κρουστικό πεδίο κατά μήκος ενός διακένου απειροστά μικρού εύρους, που δεν μπορεί να περιγραφεί από κανένα σύνολο βοηθητικών πηγών με φυσική σημασία. Σημειώνεται ότι αντίστοιχη συμπεριφορά χαρακτηρίζει και τις λύσεις της MoM, καθώς η κατανομή ρεύματος που προκύπτει από τη σχέση (5.22) πρακτικά ταυτίζεται με αυτή της σχέσης (5.21) για $N < L/(2a)$. Ωστόσο, καθώς η παράμετρος N πλησιάζει και

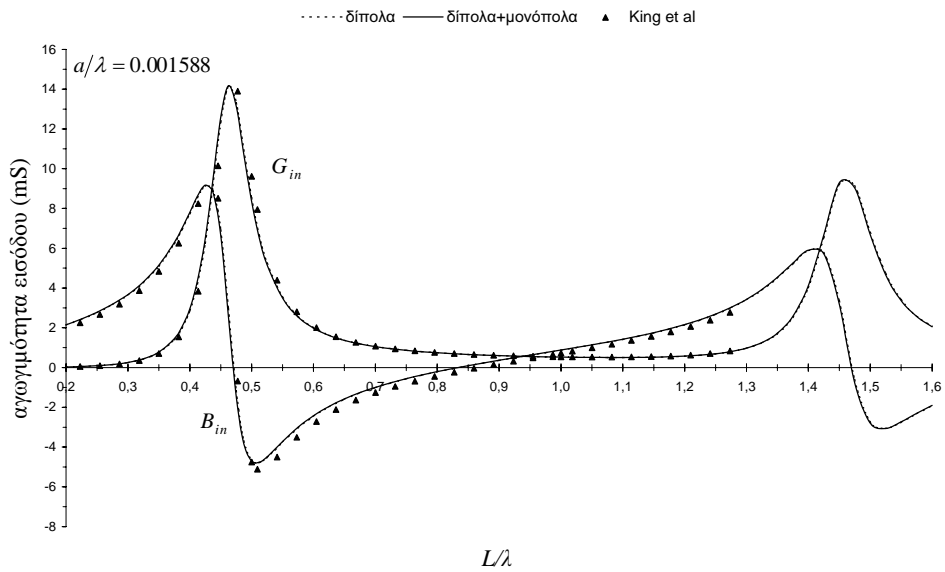
ξεπερνά την τιμή του λόγου $L/(2a)$, εμφανίζονται ταλαντώσεις στα μέτρα των συντελεστών w_n , οι οποίες είναι υπεύθυνες για την εμφάνιση αντίστοιχων ταλαντώσεων στην κατανομή ρεύματος της σχέσης (5.22) κοντά στο σημείο τροφοδότησης και τα άκρα του διπόλου. Αντίθετα, η κατανομή ρεύματος της σχέσης (5.21) είναι πάντοτε ομαλή, παρά την ύπαρξη ταλαντώσεων στα μέτρα των συντελεστών w_n . Η συμπεριφορά αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 5.9 για $N+1=50$. Σημειώνεται ότι παρόμοια συμπεριφορά εμφανίζεται και στην περίπτωση ασύμμετρα τροφοδοτούμενων διπόλων.



Σχήμα 5. 8. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών.



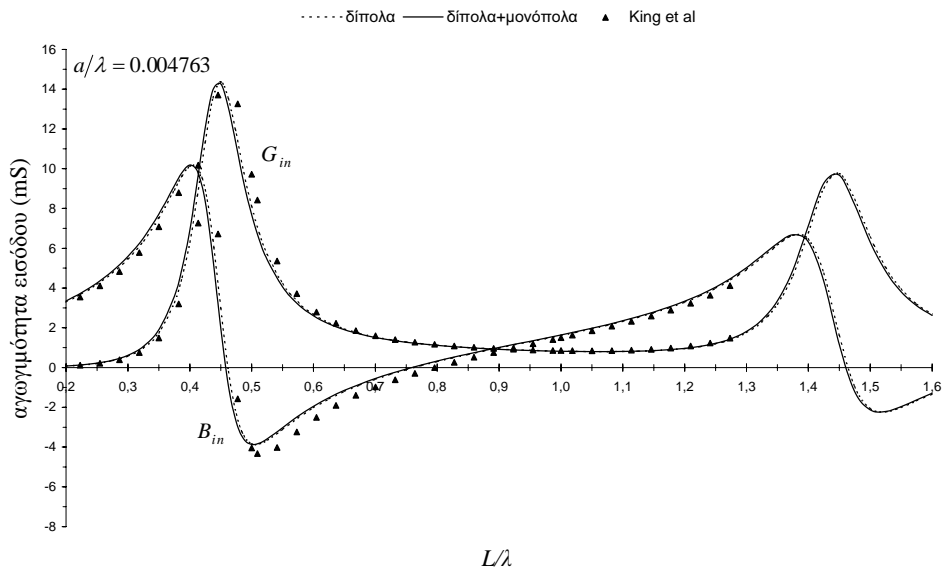
Σχήμα 5. 9. Κατανομή του αναπτυσσόμενου ρεύματος.



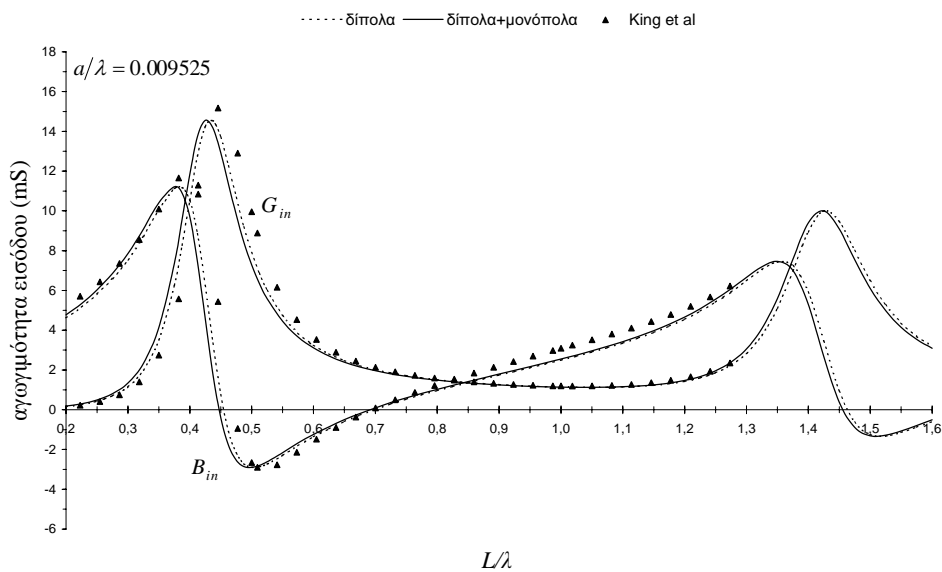
Σχήμα 5. 10. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του διπόλου.

Πίνακας 5. 1. Τιμές της έντασης του επαγόμενου ρεύματος στο κέντρο του διπόλου αυξανόμενης της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών.

a/λ	$N + 1$	Ημιτονοειδή Δίπολα		Ημιτονοειδή Δίπολα+ Μονόπολα	
		Μέτρο (mA)	Φάση (μοίρες)	Μέτρο (mA)	Φάση (μοίρες)
0.001	50	3.530	-33.52	3.464	-34.91
	100	3.512	-33.91	3.464	-34.92
	150	3.502	-34.13	3.463	-34.94
	200	3.495	-34.27	3.462	-34.97
	250	3.489	-34.38	3.460	-35.00
0.005	10	3.502	-33.04	3.295	-37.09
	20	3.444	-34.20	3.294	-37.11
	30	3.412	-34.84	3.291	-37.17
	40	3.390	-35.27	3.287	-37.25
	50	3.373	-35.60	3.283	-37.33
0.010	5	3.546	-31.42	3.229	-37.38
	10	3.456	-33.17	3.229	-37.42
	15	3.407	-34.11	3.225	-37.50
	20	3.373	-34.76	3.219	-37.62
	25	3.347	-35.25	3.212	-37.73



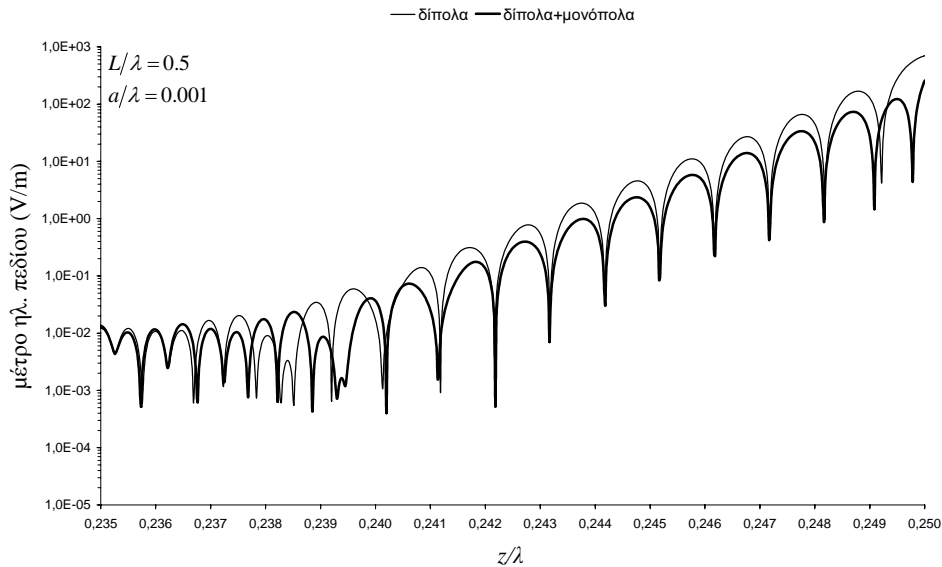
Σχήμα 5. 11. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του διπόλου.



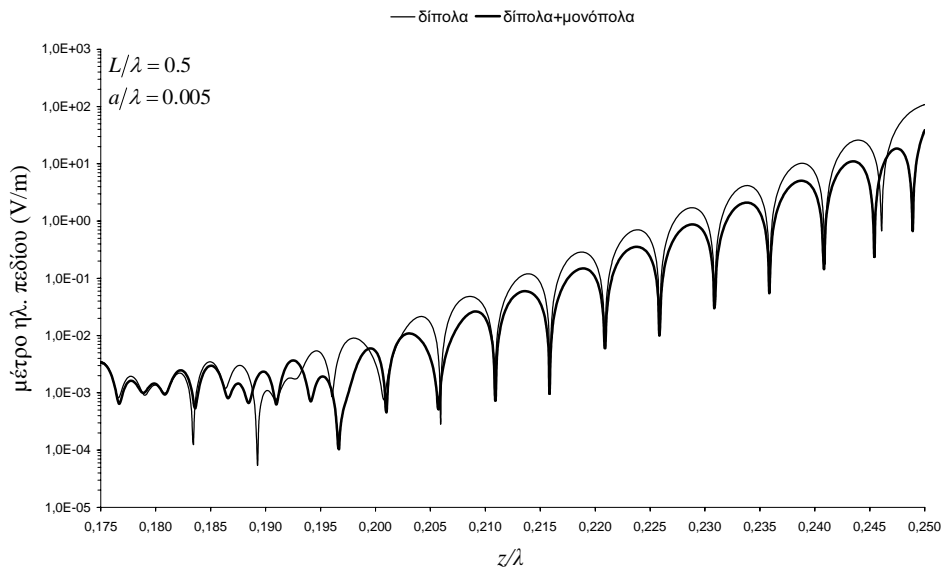
Σχήμα 5. 12. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του διπόλου.

Πρόσθετα αποτελέσματα για τη σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου διπόλων διαφορετικής ακτίνας απεικονίζονται στα Σχήματα 5.10-5.12, ως συνάρτηση της παραμέτρου L/λ . Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές της παραμέτρου a/λ (0.001588, 0.004763, 0.009525) και προσδιορίστηκαν με $N+1 = \lceil L/(2a) \rceil$. Σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, διαπιστώθηκε ότι οι λύσεις που προκύπτουν χωρίς και με την προσθήκη των βοηθητικών μονοπόλων έχουν υπολογίσιμες διαφορές για μικρά N , οι οποίες φθίνουν με την αύξηση του N . Τα αποτελέσματα των Σχημάτων 5.10-5.12 είναι σε πολύ καλή συμφωνία με διαθέσιμα αποτελέσματα δευτέρας τάξεως της επαναληπτικής τεχνικής

King-Middleton, τα οποία έχουν προκύψει εξάγοντας από το φανταστικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας τη συνιστώσα της χωρητικότητας του διακένου [33]. Αν και, λόγω του απειροστά μικρού εύρους του διακένου, το φανταστικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου αναμένεται να είναι αποκλίνον, αυτό δεν παρατηρείται στις λύσεις της MAS-RM, εξαιτίας της εξομάλυνσης που επιτελεί η διαδικασία ολοκλήρωσης του πεδίου διέγερσης της σχέσης (5.17).



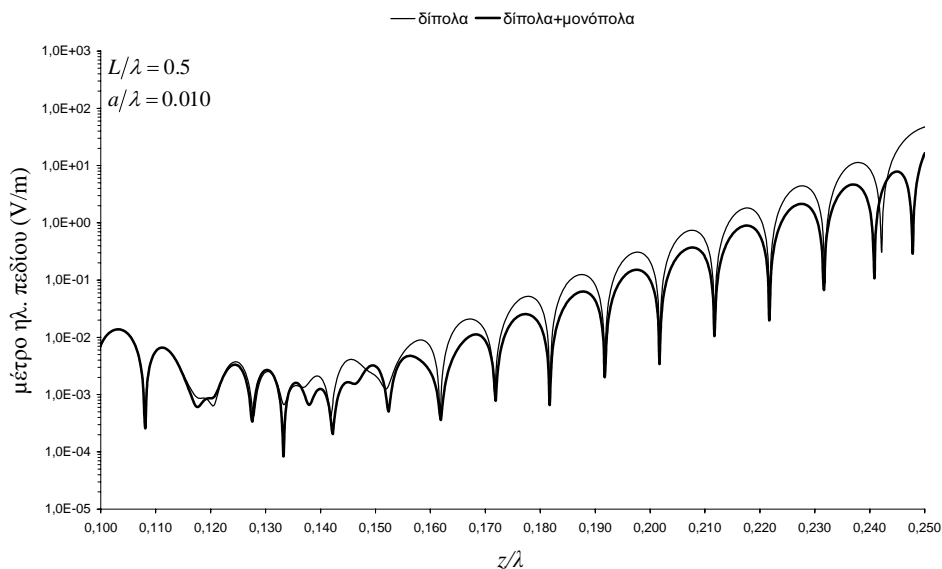
Σχήμα 5. 13. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράλληλη επιφάνεια του διπόλου.



Σχήμα 5. 14. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράλληλη επιφάνεια του διπόλου.

Στα Σχήματα 5.13-5.15 απεικονίζεται το μέτρο της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράλληλη επιφάνεια ενός διπόλου με $L/\lambda = 0.5$, για τις τιμές της

παραμέτρου a/λ του Πίνακα 5.1 και $N+1 = \lceil L/(2a) \rceil$. Η απεικόνιση αντιστοιχεί σε συμμετρική τροφοδότηση μοναδιαίας τάσης. Λόγω συμμετρίας, η απεικόνιση περιορίζεται στο θετικό ημιάξονα του διπόλου. Σε όλες τις περιπτώσεις, το μέτρο της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου εμφανίζει την ίδια συμπεριφορά με αυτή των Σχημάτων 5.5-5.7 που συζητήθηκε παραπάνω.



Σχήμα 5. 15. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου.

Όπως προαναφέρθηκε, στην περίπτωση ασύμμετρης τροφοδότησης, η συμπεριφορά των λύσεων δεν διαφοροποιείται σημαντικά από αυτή των Σχημάτων 5.8 και 5.9. Στον Πίνακα 5.2 παρατίθενται τιμές για τη σύνθετη αγωγιμότητα ασύμμετρα τροφοδοτούμενων διπόλων με $L/(2a) \approx 75$. Τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.2 μπορούν να συγκριθούν με διαθέσιμα αποτελέσματα άλλων μεθόδων [34-38]. Είναι άξιο παρατήρησης ότι τα αποτελέσματα διαφορετικών μεθόδων παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές μεταξύ τους, οι οποίες είναι πολύ μεγάλες σε κάποιες περιπτώσεις (ακόμη και μεγαλύτερες του 50%). Τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.2, τα οποία έχουν προκύψει με $N+1=75$, βρίσκονται σε ικανοποιητική συμφωνία μεταξύ τους, λόγω της σχετικά μεγάλης τιμής του N , καθώς και με τα αποτελέσματα της τρίτης, τέταρτης και πέμπτης στήλης του πίνακα της σχετικής αναφοράς [38], τα οποία έχουν προσδιοριστεί με εφαρμογή της MoM για διαφορετικές συναρτήσεις βάσης. Οι σημαντικές διαφορές από τα αποτελέσματα της δεύτερης στήλης του πίνακα της σχετικής αναφοράς [38] οφείλονται στο γεγονός ότι η αντίστοιχη απλή έκφραση για την κατανομή ρεύματος, από την οποία έχουν προκύψει τα σχετικά αποτελέσματα, είναι σχετικά ακριβής μόνο μακριά από το σημείο τροφοδότησης, οπότε η χρησιμοποίησή της για τον υπολογισμό της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου δεν ενδείκνυται. Τέλος, η συμφωνία με τα αποτελέσματα της πρώτης στήλης του πίνακα της σχετικής αναφοράς [38] είναι αρκετά ικανοποιητική, κυρίως όσον αφορά το πραγματικό μέρος της σύνθετης αντίστασης εισόδου.

Πίνακας 5. 2. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου ασύμμετρα τροφοδοτούμενων διπόλων.

L/λ	a/λ	z_g/λ	$Z_{in} (\Omega)$	
			Ημιτονοειδή Δίπολα	Ημιτονοειδή Δίπολα+ Μονόπολα
0.29	0.00193	0.035	17.54-j290.51	17.77-j287.89
		0.065	18.61-j346.35	18.87-j342.82
0.35	0.00236	0.075	32.24-j215.57	32.76-j212.17
		0.115	37.38-j321.38	38.10-j315.55
		0.145	38.74-j536.55	39.79-j523.60
0.48	0.00322	0.020	82.94+j20.89	84.55+j24.39
		0.030	84.57+j21.11	86.21+j24.66
		0.080	107.56+j18.93	110.07+j23.09
		0.100	126.09+j17.43	129.21+j22.07
		0.130	174.79+j5.22	179.83+j10.63
		0.140	199.43-j6.11	205.58-j0.64
		0.160	263.93-j55.27	273.03-j50.83
		0.180	353.54-j157.20	365.10-j155.20
		0.210	400.95-j563.41	406.65-j561.54
0.50	0.00337	0.000	96.68+j48.83	98.71+j52.50
		0.050	108.50+j50.81	110.94+j54.76
		0.070	121.62+j52.31	124.54+j56.51
		0.100	156.62+j52.89	160.92+j57.56
		0.120	196.63+j47.70	202.60+j52.48
		0.150	298.60+j4.32	308.66+j7.20
		0.170	391.89-j94.41	403.70-j96.53
		0.200	417.63-j422.40	419.78-j428.91
0.80	0.00537	0.080	312.60-j365.92	302.18-j361.88
		0.170	76.86-j204.49	76.11-j199.52
		0.240	43.18-j168.48	43.53-j164.42
		0.290	38.58-j190.87	39.23-j185.88
		0.320	33.61-j216.29	34.48-j210.44
0.96	0.00645	0.020	307.94-j422.93	300.59-j423.70
		0.030	361.80-j381.28	357.50-j386.41
		0.060	354.97-j175.21	366.16-j179.19
		0.100	228.83-j34.55	239.14-j28.46
		0.130	164.59-j7.72	171.31-j0.78
		0.160	127.72-j2.68	132.73+j3.48
0.98	0.00660	0.080	341.29-j89.12	355.42-j93.81
		0.240	107.59+j22.81	111.42+j28.16
1.00	0.00674	0.000	195.13-j405.46	189.13-j401.37
		0.050	384.99-j323.55	378.94-j334.76
		0.100	328.38-j40.47	343.21-j45.84
		0.200	139.98+j45.17	145.86+j50.76
1.11	0.00751	0.015	104.00-j299.71	101.08-j295.21
		0.035	135.94-j325.14	131.27-j320.28
		0.045	138.13-j319.11	133.16-j314.66
		0.065	198.35-j341.80	189.90-j338.46
		0.075	224.13-j340.62	214.27-j338.65

5.3 Στοιχειοκεραίες Παράλληλων Διπόλων

5.3.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος συνίσταται σε μια στοιχειοκεραία από N_d παράλληλα δίπολα, όπως αυτή του Σχήματος 4.38. Οι θέσεις των κέντρων των διπόλων μπορεί να είναι οπουδήποτε στο χώρο, αρκεί η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διπόλων να είναι αρκετά μεγαλύτερη από τις ακτίνες τους. Το μήκος και η ακτίνα κάθε διπόλου συμβολίζονται με L_p και a_p (με $a_p \ll L_p$ και $a_p \ll \lambda$), αντίστοιχα, όπου $p = 1, \dots, N_d$, ενώ το κέντρο του βρίσκεται στο σημείο (x_p, y_p, z_p) . Κάθε δίπολο τροφοδοτείται από μια πηγή τάσης V_p , η οποία επιβάλλει ένα κρουστικό πεδίο διέγερσης κατά μήκος ενός διακένου απειροστά μικρού εύρους με κέντρο στο σημείο z_p^g , κατά αντιστοιχία με την περίπτωση του μεμονωμένου διπόλου του Σχήματος 5.1. Το πεδίο διέγερσης κάθε διπόλου συνδέεται με την αντίστοιχη τάση τροφοδότησης μέσω της σχέσης

$$E_p^g(z) = -V_p \delta(z - z_p^g). \quad (5.23)$$

Σημειώνεται ότι κάθε δίπολο μπορεί να δρα ως ενεργό ή παρασιτικό στοιχείο της στοιχειοκεραίας. Στη δεύτερη περίπτωση, η αντίστοιχη πηγή τάσης βραχυκυκλώνεται και, ως εκ τούτου, το πεδίο διέγερσης είναι μηδενικό.

5.3.2 Εφαρμογή της MAS-RM

Για την ανάλυση της διάταξης στοιχειοκεραιών που περιγράφηκε παραπάνω, ακολουθείται η διαδικασία που αφορά το μεμονωμένο δίπολο. Σε κάθε ένα από τα δίπολα της στοιχειοκεραίας εισάγεται ένα σύνολο αξονικά τοποθετημένων βοηθητικών πηγών, για την περιγραφή του ακτινοβολούμενου ΗΜ πεδίου. Ως βοηθητικές πηγές χρησιμοποιούνται ηλεκτρικά δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος, τα οποία είναι ομοιόμορφα κατανομημένα κατά μήκος του άξονα κάθε διπόλου. Τα βοηθητικά δίπολα επικαλύπτονται έτσι ώστε κάθε ένα από αυτά να εκτείνεται μεταξύ των κέντρων των αμέσως γειτονικών του, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2. Επιπρόσθετα, στα άκρα κάθε διπόλου εισάγονται ηλεκτρικά μονόπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος με κατάλληλο προσανατολισμό, όπως επίσης απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2. Τα εξωτερικά άκρα των βοηθητικών μονοπόλων είναι τοποθετημένα ακριβώς στα άκρα του αντίστοιχου διπόλου, ενώ οι θέσεις των εσωτερικών άκρων τους ταυτίζονται με αυτές των κέντρων των αμέσως γειτονικών βοηθητικών διπόλων.

Ακολούθως, η ανάλυση εστιάζεται στη σύγκριση των λύσεων που εξάγονται παρουσία και απουσία των βοηθητικών μονοπόλων. Και στις δύο περιπτώσεις, ο αριθμός των βοηθητικών διπόλων ανά δίπολο θεωρείται περιττός και ίσος με $2N_p + 1$, οπότε οι θέσεις των κέντρων τους εκφράζονται ως $z_p + n\delta_p$, $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N_p$, όπου $\delta_p = L_p / \lfloor 2(N_p + 1) \rfloor$ η απόσταση μεταξύ των κέντρων διαδοχικών βοηθητικών διπόλων μήκους $2\delta_p$. Τα βοηθητικά μονόπολα έχουν το μισό μήκος των αντίστοιχων βοηθητικών διπόλων και τοποθετούνται στα σημεία $z_p \pm L_p/2$. Το μονόπολο στο άνω άκρο κάθε διπόλου εκτείνεται στο διάστημα $z_p + L_p/2 - \delta_p \leq z \leq z_p + L_p/2$, ενώ το μονόπολο στο αντίστοιχο κάτω άκρο εκτείνεται στο διάστημα $z_p - L_p/2 \leq z \leq z_p - L_p/2 + \delta_p$, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2. Τα ημιτονοειδή ρεύματα των βοηθητικών πηγών μπορούν να εκφραστούν στη μορφή

$w_{(p,n)}f_{(p,n)}(z)s_{(p,n)}(z)$ με άγνωστους συντελεστές βαρύτητας $w_{(p,n)}$, όπου $f_{(p,n)}(z)$ και $s_{(p,n)}(z)$ οι συναρτήσεις

$$f_{(p,n)}(z) = \begin{cases} \sin\left[k_0\left(\delta_p - |z - z_p - n\delta_p|\right)\right], & |z - z_p - n\delta_p| \leq \delta_p, \\ 0, & |z - z_p - n\delta_p| > \delta_p, \end{cases} \quad (5.24)$$

$$s_{(p,n)}(z) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_p \\ u(L_p/2 \mp z \pm z_p), & n = \pm(N_p + 1) \end{cases} \quad (5.25)$$

και $u(\bullet)$ η βηματική συνάρτηση της σχέσης (5.4).

Το ακτινοβολούμενο ΗΜ πεδίο περιγράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των ΗΜ πεδίων των βοηθητικών πηγών, συνεπώς

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{p=1}^{N_d} \sum_{n=-(N_p+1)}^{N_p+1} w_{(p,n)} \vec{F}_{(p,n)}(\vec{r}), \quad (5.26)$$

όπου \vec{F} είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου στον κενό χώρο, ενώ $\vec{F}_{(p,n)}$ είναι το αντίστοιχο πεδίο της βοηθητικής πηγής που καθορίζει το ζεύγος δεικτών (p, n) και είναι τοποθετημένη στο σημείο $(x_p, y_p, z_p + n\delta_p)$ με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(p,n)}$.

Τα πεδία $\vec{F}_{(p,n)}$ προσδιορίζονται με απλή μεταφορά του πεδίου \vec{F}_S μιας βοηθητικής πηγής, που είναι τοποθετημένη στο κέντρο ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτινοβολεί σε άπειρο κενό χώρο, ως εξής

$$\vec{F}_{(p,n)}(\vec{r}) = \vec{F}_S(\vec{r} - \vec{r}_{(p,n)}). \quad (5.27)$$

Αξιοποιώντας τις σχέσεις (B.12) και (B.18) του Παραρτήματος Β, τα πεδία των βοηθητικών πηγών εκφράζονται ως εξής

$$\vec{F}_{(p,n)}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{F}_D(\vec{r}; \vec{r}_{(p,n)}), & |n| \leq N_p \\ \vec{F}_M^\mp(\vec{r}; \vec{r}_{(p,n)}), & n = \pm(N_p + 1) \end{cases} \quad (5.28)$$

όπου $\vec{F}_D(\vec{r}; \vec{r}_{(p,n)})$ είναι το πεδίο ενός ηλεκτρικού διπόλου ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος μοναδιαίου πλάτους με προσανατολισμό κατά την κατεύθυνση του άξονα z και κέντρο στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(p,n)}$, $\vec{F}_M^+(\vec{r}; \vec{r}_{(p,n)})$ είναι το πεδίο ενός θετικού ηλεκτρικού μονοπόλου ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος μοναδιαίου πλάτους με προσανατολισμό κατά την κατεύθυνση του άξονα z και κέντρο στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(p,n)}$, ενώ $\vec{F}_M^-(\vec{r}; \vec{r}_{(p,n)})$ είναι το πεδίο του αντίστοιχου αρνητικού μονοπόλου.

Σύμφωνα με τη MAS-PM, οι άγνωστοι συντελεστές $w_{(p,n)}$ του αναπτύγματος της σχέσης (5.26) προσδιορίζονται επιβάλλοντας την οριακή συνθήκη της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου σε διακριτά σημεία επί της παράπλευρης επιφάνειας κάθε διπόλου, όπως περιγράφηκε στην Παράγραφο 4.5.2. Πιο συγκεκριμένα, η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να μηδενίζεται στην παράπλευρη επιφάνεια κάθε διπόλου, εξαιρουμένης της περιοχής του διακένου, όπου θα πρέπει να είναι ίση με το αντίστοιχο πεδίο διέγερσης, συνεπώς

$$E_z(x_q + a_q \cos \gamma_q, y_q + a_q \sin \gamma_q, z) = E_q^s(z), |z - z_q| \leq \frac{L_q}{2}, \quad (5.29)$$

όπου γ_q η αζιμουθιακή γωνία που ορίζεται σε σχέση με τον άξονα του διπόλου που καθορίζει ο δείκτης $q = 1, 2, \dots, N_d$. Όπως εξηγήθηκε στην Παράγραφο 4.5.2, όταν τα δίπολα είναι αρκούντως λεπτά σε σχέση με το μήκος κύματος και η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των διπόλων είναι πολύ μεγαλύτερη από τις ακτίνες τους, η οριακή συνθήκη της σχέσης (5.29) μπορεί να επιβληθεί σε οποιαδήποτε γωνιακή θέση γ_q , χωρίς σημαντική διαφοροποίηση στα αποτελέσματα. Εναλλακτικά προς τη σημειακή επιβολή, είναι δυνατή η επιβολή της οριακής συνθήκης μέσω της τεχνικής συνταιριάσματος των αντιδράσεων [23, 24]. Η σχετική διαδικασία συνίσταται στον πολλαπλασιασμό των δύο μελών της σχέσης (5.29) με την προβολή της ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος κάθε βοηθητικής πηγής επί της παράπλευρης επιφάνειας κάθε διπόλου και, στη συνέχεια, ολοκλήρωση του γινομένου, όπως εφαρμόστηκε στην Παράγραφο 5.2.2 και περιγράφεται στη σχετική αναφορά [39]. Επανάληψη της διαδικασίας για όλες τις βοηθητικές πηγές οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\sum_{p=1}^{N_d} \sum_{n=-(N_p+1)}^{N_p+1} Z_{(p,n),(q,m)} W_{(p,n)} = -V_{(q,m)}, \begin{cases} q = 1, 2, \dots, N_d \\ m = 0, \pm 1, \dots, \pm N_q, \pm(N_q + 1) \end{cases} \quad (5.30)$$

Όταν τα βοηθητικά μονόπολα δεν χρησιμοποιούνται, το γραμμικό σύστημα που προκύπτει εκφράζεται ως εξής

$$\sum_{p=1}^{N_d} \sum_{n=-N_p}^{N_p} Z_{(p,n),(q,m)} W_{(p,n)} = -V_{(q,m)}, \begin{cases} q = 1, 2, \dots, N_d \\ m = 0, \pm 1, \dots, \pm N_q \end{cases} \quad (5.31)$$

Σε κάθε περίπτωση, οι συντελεστές $Z_{(p,n),(q,m)}$ εκφράζονται μέσω της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης $Z(s, h)$ μεταξύ δύο παράλληλων πηγών ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος σε οριζόντια απόσταση s και κατακόρυφη απόσταση h , σύμφωνα με τη σχέση

$$Z_{(p,n),(q,m)} = \begin{cases} Z\left(\sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}, |z_q - z_p + m\delta_q - n\delta_p|\right), q \neq p \\ Z(a_q, |m - n|\delta_q), q = p \end{cases} \quad (5.32)$$

Αξιοποιώντας την αρχή της αμοιβαιότητας, ο υπολογισμός των συντελεστών $Z_{(p,n),(q,m)}$ γίνεται με τη βοήθεια των αμοιβαίων σύνθετων αντιστάσεων μεταξύ δύο διπόλων, ενός μονοπόλου και ενός διπόλου, καθώς και δύο μονοπόλων, σύμφωνα με τη σχέση

$$Z_{(p,n),(q,m)} = \begin{cases} Z_{DD}, |n| \leq N_p, |m| \leq N_q \\ Z_{MD}, |n| = N_p + 1, |m| \leq N_q \\ Z_{MD}, |n| \leq N_p, |m| = N_q + 1 \\ Z_{MM}^{++}, |n| = N_p + 1, |m| = N_q + 1, nm > 0 \\ Z_{MM}^{+-}, |n| = N_p + 1, |m| = N_q + 1, nm < 0 \end{cases} \quad (5.33)$$

Σημειώνεται ότι οι δείκτες “D” και “M” χρησιμοποιούνται για το διαχωρισμό μεταξύ διπολικών και μονοπολικών πηγών, ενώ οι εκθέτες “++” και “+-” υποδηλώνουν το σχετικό

προσανατολισμό των μονοπολικών πηγών, σε συμφωνία και με όσα αναφέρθηκαν στο Παράρτημα Β. Οι αμοιβαίες σύνθετες αντιστάσεις των σχέσεων (5.32) και (5.33) μπορούν να υπολογιστούν είτε μέσω αλγορίθμων αριθμητικής ολοκλήρωσης είτε αξιοποιώντας διαθέσιμες αναλυτικές σχέσεις, οι οποίες εμπλέκουν τις συναρτήσεις ολοκληρωτικού ημίτονου και συνημίτονου (sine/cosine integral), καθώς και την εκθετική ολοκληρωτική συνάρτηση (exponential integral) [26-32]. Οι σταθεροί όροι $V_{(q,m)}$ του δεύτερου μέλους των εξισώσεων (5.30) και (5.31) αντιστοιχούν στα ολοκληρώματα των πεδίων διέγερσης, τα οποία εκφράζονται ως εξής

$$V_{(q,m)} = \begin{cases} -V_q \sin \left[k_0 \left(\delta_q - \left| z_q^g - z_q - m\delta_q \right| \right) \right] & \left| z_q^g - z_q - m\delta_q \right| \leq \delta_q \\ 0 & \left| z_q^g - z_q - m\delta_q \right| > \delta_q \end{cases}. \quad (5.34)$$

Ο συνολικός αριθμός των αγνώστων του γραμμικού συστήματος των εξισώσεων (5.30) δίνεται από τη σχέση

$$N_T = \sum_{p=1}^{N_d} (2N_p + 3), \quad (5.35)$$

ενώ ο συνολικός αριθμός των αγνώστων του γραμμικού συστήματος των εξισώσεων (5.31) δίνεται από τη σχέση

$$N_T = \sum_{p=1}^{N_d} (2N_p + 1). \quad (5.36)$$

Σε κάθε περίπτωση, μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος $N_T \times N_T$ των εξισώσεων (5.30) ή (5.31), το ΗΜ πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου προσδιορίζεται άμεσα από τις σχέσεις (5.26)-(5.28). Στη συνέχεια, η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος στην παράπλευρη επιφάνεια κάθε διπόλου προκύπτει με εφαρμογή της οριακής συνθήκης του μαγνητικού πεδίου. Όπως εξηγήθηκε στην Παράγραφο 4.5.2, το μαγνητικό πεδίο των απομακρυσμένων βοηθητικών πηγών είναι πολλές τάξεις μεγέθους ασθενέστερο σε σχέση με αυτό των βοηθητικών πηγών που βρίσκονται εντός του διπόλου και, ως εκ τούτου, μπορεί να αμεληθεί. Συνεπώς, η κατανομή ρεύματος κάθε διπόλου προκύπτει από την προσεγγιστική σχέση

$$I_p(\vec{z}) \approx 2\pi a_p \left\{ \vec{z} \cdot \left[\hat{n}_p \times \sum_{n=-(N_p+1)}^{N_p+1} w_{(p,n)} \vec{H}_{(p,n)}(x_p + a_p, y_p, z) \right] \right\}, \quad (5.37)$$

όπου \hat{n}_p το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην παράπλευρη επιφάνεια του αντίστοιχου διπόλου. Κατόπιν τούτου, είναι δυνατός ο υπολογισμός των ιδίων και αμοιβαίων σύνθετων αγωγιμοτήτων και αντιστάσεων, οι οποίες ορίζονται ως εξής

$$Y_{p,q} = \left. \frac{I_p}{V_q} \right|_{V_i=0, i \neq q}, \quad (5.38\alpha)$$

$$Z_{p,q} = \left. \frac{V_p}{I_q} \right|_{I_i=0, i \neq q}, \quad (5.38\beta)$$

όπου $I_p = I_p(z_p^g)$ η ένταση του ρεύματος εισόδου του διπόλου που καθορίζει ο δείκτης p . Τα ρεύματα εισόδου συνδέονται με τις τάσεις τροφοδοσίας μέσω του πίνακα σύνθετων αγωγιμοτήτων, όπως καθορίζεται από τη σχέση (4.41), ενώ είναι δυνατός και ο συσχετισμός των τάσεων τροφοδοσίας με τα ρεύματα εισόδου μέσω του πίνακα σύνθετων αντιστάσεων, όπως καθορίζεται από τη σχέση (4.42). Λόγω του θεωρήματος αμοιβαιότητας, για τις σύνθετες αγωγιμότητες και αντιστάσεις ισχύει η ιδιότητα αντιμετάθεσης, η οποία εκφράζεται ως $Y_{p,q} = Y_{q,p}$ και $Z_{p,q} = Z_{q,p}$.

Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι το γραμμικό σύστημα των εξισώσεων (5.31) ταυτίζεται με αυτό που προκύπτει με εφαρμογή της MoM χρησιμοποιώντας ως συναρτήσεις βάσης και δοκιμής τις συναρτήσεις $f_{(p,n)}(z)$ της σχέσης (5.24), όπως περιγράφεται στη σχετική αναφορά [39]. Μάλιστα, η σύγκριση μπορεί να γίνει τροποποιώντας τη MoM με την προσθήκη ημίσεων συναρτήσεων βάσης πλησίον των άκρων των διπόλων, οι οποίες εκφράζονται ως $f_{(p,n)}(z)s_{(p,n)}(z)$. Ως εκ τούτου, τα αποτελέσματα της MAS-RM μπορούν να συγκριθούν άμεσα με αυτά της MoM, υπολογίζοντας την κατανομή ρεύματος κάθε διπόλου ως υπέρθεση των αντίστοιχων συναρτήσεων βάσης μέσω της σχέσης

$$I_p(z) = \sum_{n=-(N_d+1)}^{N_d+1} w_{(p,n)} f_{(p,n)}(z) s_{(p,n)}(z). \quad (5.39)$$

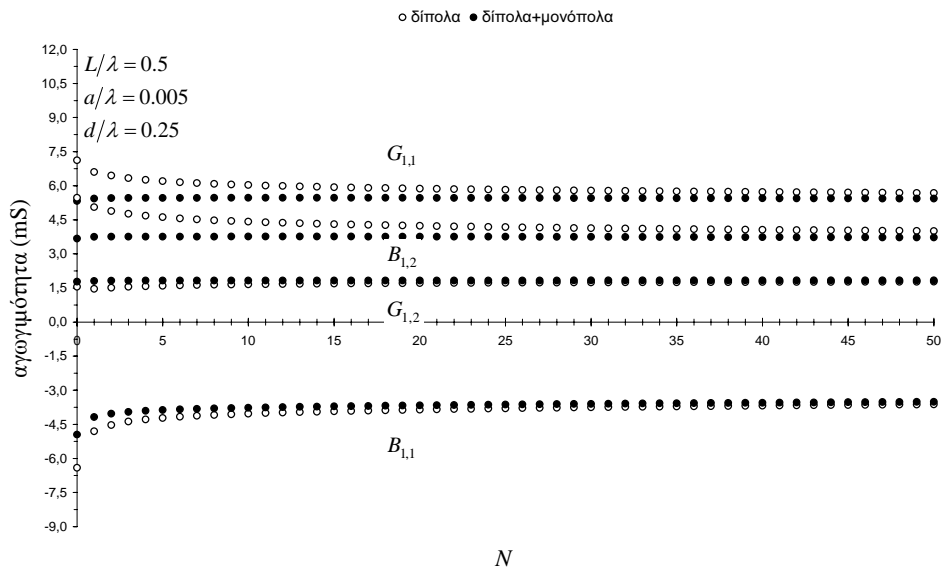
Όσον αφορά τη διαφοροποίηση στη συμπεριφορά της κατανομής ρεύματος που προκύπτει από τη σχέση (5.39) ως προς αυτή που προκύπτει από τη σχέση (5.37), ισχύουν όσα αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 5.2.2.

Για την αποτίμηση της ποιότητας των λύσεων, εξετάζεται η επαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια κάθε διπόλου, όπως περιγράφηκε στην Παράγραφο 5.2.2.

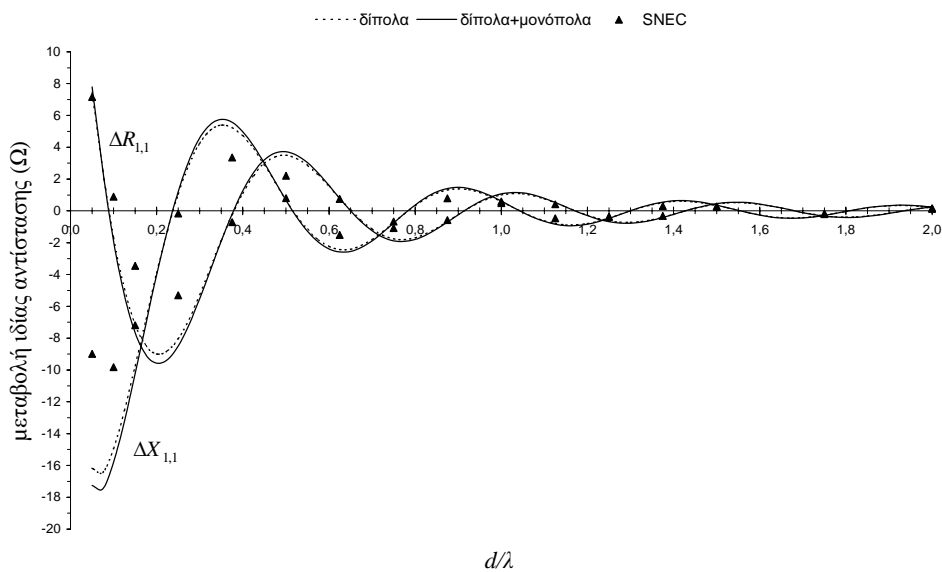
5.3.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Ακολούθως, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των λύσεων σε σχέση με τις παραμέτρους καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών N_p . Ιδιαίτερη προσοχή δίνεται στην επίδραση της προσθήκης των βοηθητικών μονοπόλων στα χαρακτηριστικά των λύσεων, κυρίως σε σχέση με τις λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας μόνο τα βοηθητικά δίπολα. Σε κάθε περίπτωση, οι λύσεις εξετάζονται αυξανόμενων των N_p , ελέγχοντας κάποιο μέγεθος ενδιαφέροντος και τη συμπεριφορά του σφάλματος της οριακής συνθήκης της σχέσης (5.29). Σε κάθε περίπτωση, η λύση θεωρείται ικανοποιητική, αν και όχι απαραίτητα συγκλίνουσα από αυστηρά μαθηματική σκοπιά, όταν είναι αριθμητικά ευσταθής.

Αρχικά, εξετάζεται η περίπτωση δύο ταυτόσημων παράλληλων διπόλων με $L/\lambda = 0.5$ και $a/\lambda = 0.005$. Κάθε ένα από τα δίπολα θεωρείται συμμετρικά τροφοδοτούμενο. Τα κέντρα των διπόλων απέχουν οριζόντια απόσταση d τέτοια ώστε $d/\lambda = 0.25$. Λόγω του γεγονότος ότι τα δύο δίπολα είναι ταυτόσημα, επιλέγεται $N_1 = N_2 = N$. Οι τιμές της ίδιας σύνθετης αγωγιμότητας $Y_{1,1}$ και της αμοιβαίας σύνθετης αγωγιμότητας $Y_{1,2}$ απεικονίζονται συναρτήσει του N στο Σχήμα 5.16. Είναι προφανές ότι οι λύσεις εμφανίζουν παρόμοια συμπεριφορά με αυτές που αντιστοιχούν στο μεμονωμένο δίπολο, το οποίο εξετάστηκε στην Παράγραφο 5.2.2.



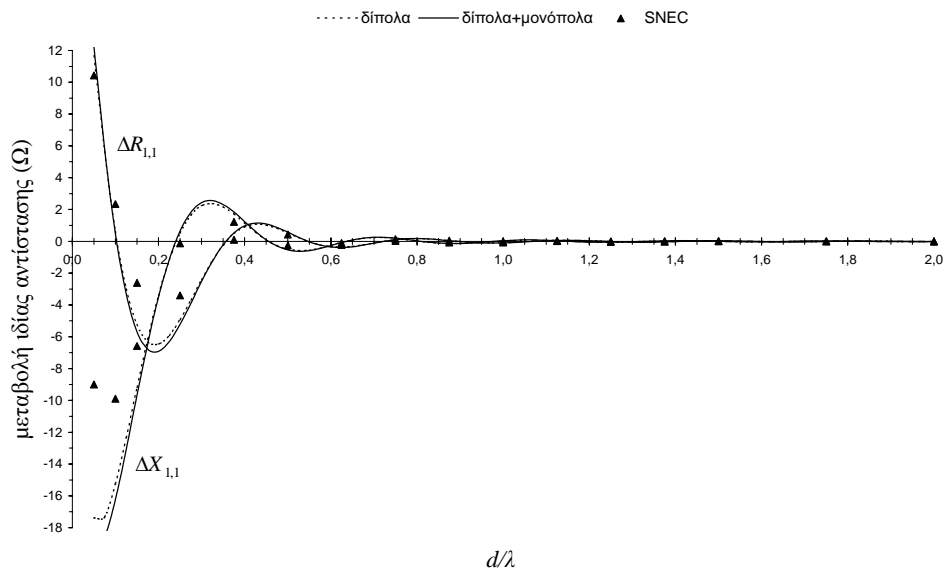
Σχήμα 5. 16. Τιμές της ίδιας και της αμοιβαίας σύνθετης αγωγιμότητας συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών.



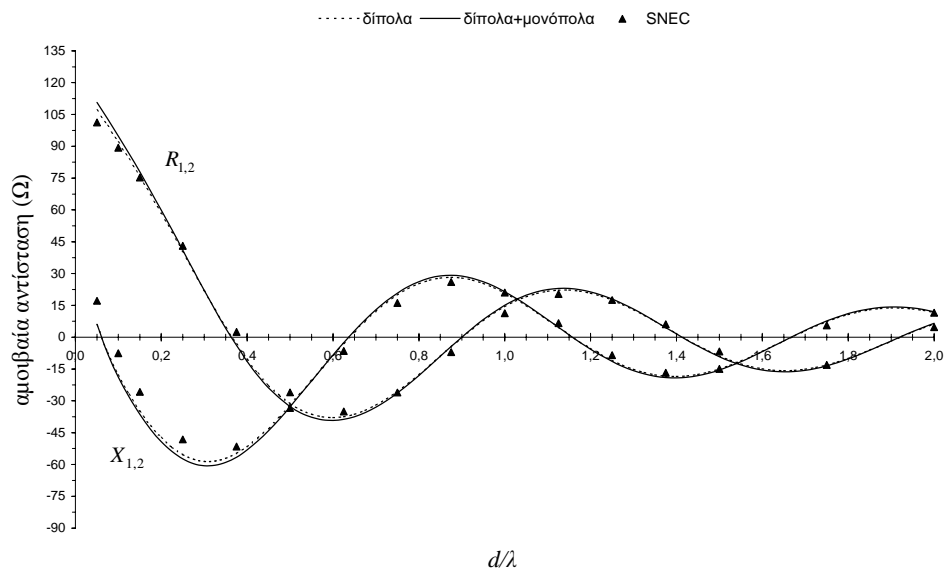
Σχήμα 5. 17. Απεικόνιση της μεταβολής της ίδιας σύνθετης αντίστασης (σε σχέση με την τιμή της στον ελεύθερο χώρο) συναρτήσει της απόστασης.

Ακολούθως, παρουσιάζονται αποτελέσματα για τη μεταβολή της ίδιας σύνθετης αντίστασης $\Delta Z_{1,1}$, σε σχέση με τη σύνθετη αντίσταση του μεμονωμένου διπόλου, καθώς και την αμοιβαία σύνθετη αντίσταση $Z_{1,2}$, για την περίπτωση δύο ταυτόσημων διπόλων με $L/\lambda = 0.5$ και $a/\lambda = 0.005$. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται προσδιορίστηκαν με $N + 1 = 50$. Οι δύο περιπτώσεις που εξετάζονται αντιστοιχούν σε δίπολα χωρίς κατακόρυφο διαχωρισμό, καθώς και σε δίπολα με απόσταση κατακόρυφου διαχωρισμού h ίση με την απόσταση οριζώντιου διαχωρισμού d . Τα σχετικά διαγράμματα απεικονίζονται, ως

συνάρτηση της παραμέτρου d/λ , στα Σχήματα 5.17-5.20. Σημειώνεται ότι οι μικρές διαφορές μεταξύ των λύσεων που αντιστοιχούν στις δύο επιλογές βοηθητικών πηγών οφείλονται στη σχετικά μεγάλη τιμή του N . Για μικρότερες τιμές του N , οι διαφορές μεταξύ των λύσεων είναι πιο σημαντικές. Σε όλες τις περιπτώσεις, τα αποτελέσματα της MAS βρίσκονται σε ικανοποιητική συμφωνία με αποτελέσματα του προγράμματος SuperNEC 2.55. Αναλυτικές πληροφορίες για το πρόγραμμα είναι διαθέσιμες στη σχετική αναφορά [40].



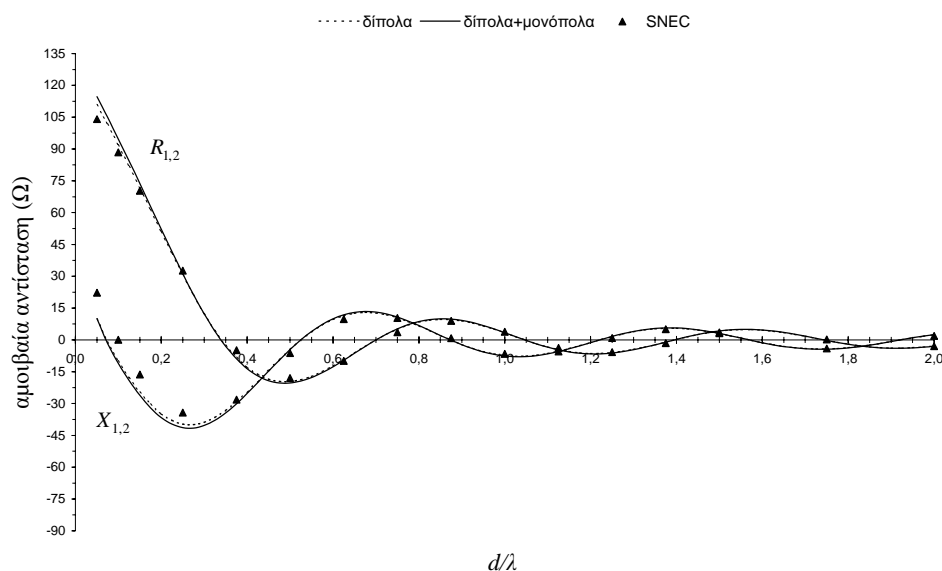
Σχήμα 5. 18. Απεικόνιση της μεταβολής της ίδιας σύνθετης αντίστασης (σε σχέση με την τιμή της στον ελεύθερο χώρο) συναρτήσει της απόστασης.



Σχήμα 5. 19. Απεικόνιση της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης συναρτήσει της απόστασης.

Στη συνέχεια, στα Σχήματα 5.21 και 5.22, απεικονίζεται το μέτρο της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια κάθε ενός διπόλου, τόσο για

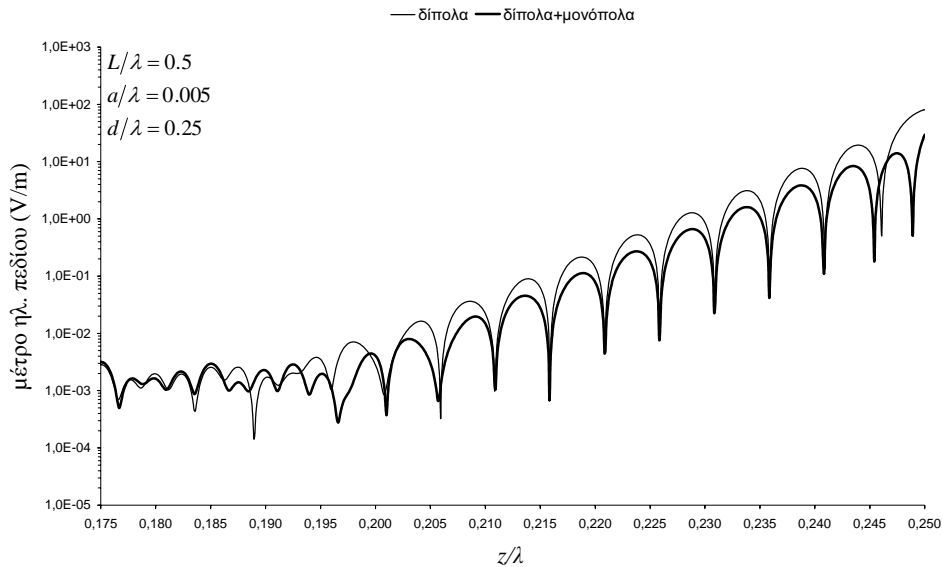
συμμετρική ($V_1 = V_2$) όσο και αντισυμμετρική ($V_1 = -V_2$) μοναδιαία τροφοδότηση, για την περίπτωση του Σχήματος 5.16. Λόγω συμμετρίας, η απεικόνιση περιορίζεται στο θετικό ημιάξονα του διπόλου. Όπως και στην περίπτωση του μεμονωμένου διπόλου, η προσθήκη των βοηθητικών μονοπόλων έχει ως συνέπεια τη σημαντική μείωση του σφάλματος της αντίστοιχης οριακής συνθήκης, αφού η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου μειώνεται κατά τα $2/3$ περίπου ως προς τη μέγιστη και τη μέση τιμή, γεγονός το οποίο πιστοποιεί τόσο τη μείωση του μέγιστου σφάλματος όσο και της «ενέργειας» του σφάλματος, ενώ εξηγεί, τουλάχιστον εν μέρει, τις διαφορές των αποτελεσμάτων για μικρά N .



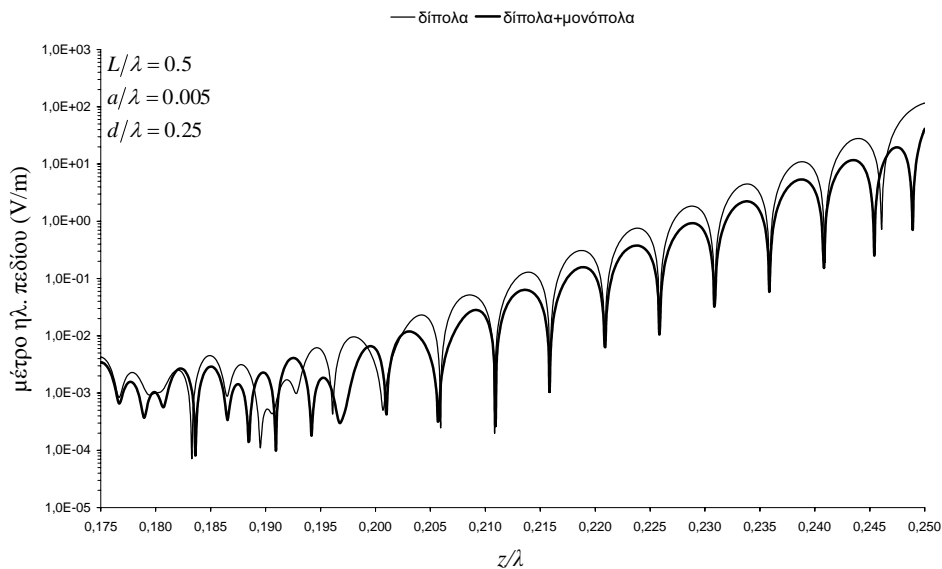
Σχήμα 5. 20. Απεικόνιση της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης συναρτήσει της απόστασης.

Όπως συνάγεται από τα παραπάνω, η προσθήκη των βοηθητικών μονοπόλων οδηγεί στην ταχύτερη αριθμητική σταθεροποίηση των λύσεων. Το γεγονός αυτό παρέχει τη δυνατότητα ανάλυσης στοιχειοκεραίων σχετικά μεγάλης κλίμακας σε πολύ μικρό χρόνο, χωρίς καμία τροποποίηση της μεθόδου που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 5.3.2. Σημειώνεται ότι οι τυπικοί αλγόριθμοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων χαρακτηρίζονται από πολυπλοκότητα τάξης N_T^3 , γεγονός το οποίο καθιστά μη αποδοτική την εφαρμογή τους σε περιπτώσεις προβλημάτων σχετικά μεγάλης κλίμακας (π.χ ανάλυση στοιχειοκεραίων σχετικά μεγάλου πλήθους στοιχείων). Συνήθως, τέτοιες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια ειδικών τεχνικών κατάστροφης των προς επίλυση εξισώσεων που προκύπτουν με εφαρμογή της MoM [41-44] και επαναληπτικών αλγορίθμων επίλυσης τους, οι οποίοι χαρακτηρίζονται από πολυπλοκότητα τάξης N_T^2 ή μικρότερη. Ωστόσο, η εφαρμογή αυτών των τεχνικών δεν είναι πάντοτε άμεση, καθώς απαιτείται κατάλληλη διαμόρφωση των εξισώσεων του προς επίλυση γραμμικού συστήματος, ενώ και η σύγκλιση τους δεν είναι εγγυημένη σε κάθε περίπτωση. Αντίθετα, η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα με μικρούς αριθμούς βοηθητικών πηγών ανά στοιχείο, χωρίς υποβάθμιση της ακρίβειας της λύσης. Η δυνατότητα αυτή εξετάστηκε στην περίπτωση μιας στοιχειοκεραίας Yagi-Uda 27 στοιχείων με τα χαρακτηριστικά που παρατίθενται στον Πίνακα 5.3 [45]. Τα αποτελέσματα που ελήφθησαν για τις δύο επιλογές του πλήθους των βοηθητικών πηγών (δοκμές H και L) του Πίνακα 5.3, τόσο όσον αφορά τον αριθμό των αγνώστων όσο και τον αντίστοιχο χρόνο εκτέλεσης, περιέχονται στον Πίνακα 5.4. Τα αποτελέσματα για τα μέτρα των ρευμάτων των στοιχείων της υπό εξέταση στοιχειοκεραίας απεικονίζονται στα Σχήματα 5.23 και 5.24, για τους τέσσερις συνδυασμούς που αφορούν τον τύπο και το πλήθος των

βοηθητικών πηγών των Πινάκων 5.3 και 5.4. Η απεικόνιση αντιστοιχεί σε τροφοδότηση μοναδιαίας τάσης. Από τα Σχήματα 5.23 και 5.24, καθώς και τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.4, συνάγεται ότι η προσθήκη των βοηθητικών μονοπόλων παρέχει τη δυνατότητα ανάλυσης της στοιχειοκεραίας σε χρόνο μικρότερο από το 1% αυτού που απαιτείται για την εξαγωγή συγκρίσιμων αποτελεσμάτων συμβατικά.



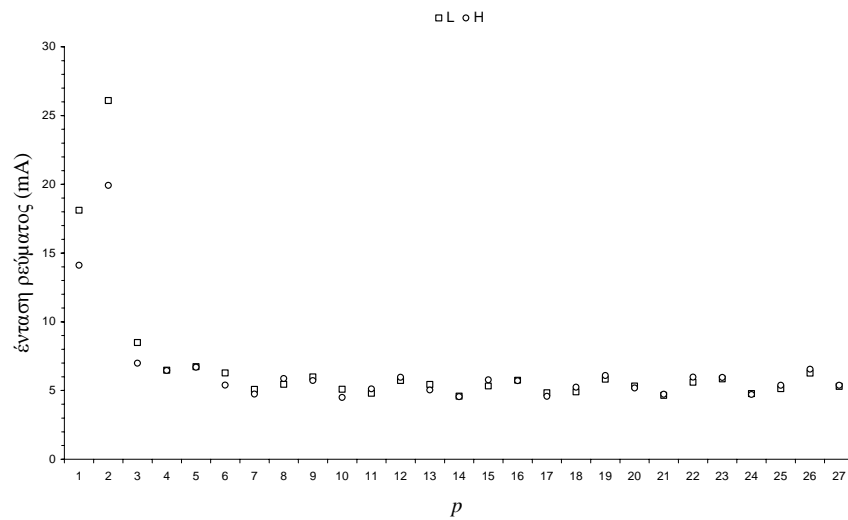
Σχήμα 5. 21. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην περίπτωση συμμετρικής τροφοδότησης.



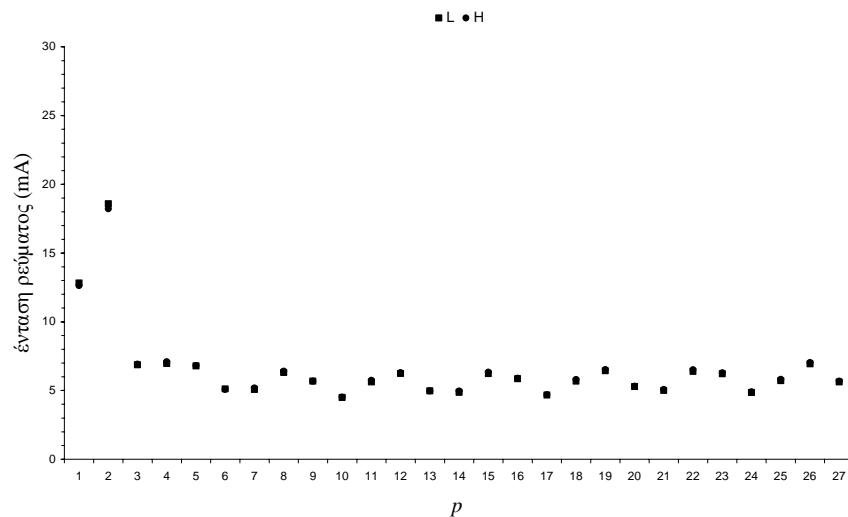
Σχήμα 5. 22. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην περίπτωση αντισυμμετρικής τροφοδότησης.

Πίνακας 5. 3. Γεωμετρικά χαρακτηριστικά στοιχειοκεραίας Yagi-Uda και τιμές των παραμέτρων καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών.

p	L_p/λ	x_p/λ	Δοκιμή Η $N_p + 1 = \left\lceil \frac{L_p}{2a_p} \right\rceil$	Δοκιμή L $N_p + 1 = \left\lceil \frac{L_p}{20a_p} \right\rceil$
1	0.500	-0.125	84	9
2	0.470	0	79	8
3-27	0.406	$(p-2)0.34$	68	7
Στοιχεία με $a_p/\lambda = a/\lambda = 0.003$ και κέντρα στα σημεία $(x_p, 0, 0)$				



Σχήμα 5. 23. Τιμές των μέτρων των ρευμάτων στα κέντρα των στοιχείων (ημιτονοειδή δίπολα).



Σχήμα 5. 24. Τιμές των μέτρων των ρευμάτων στα κέντρα των στοιχείων (ημιτονοειδή δίπολα και μονόπολα).

Πίνακας 5. 4. Αριθμοί αγνώστων και χρόνοι εκτέλεσης δοκιμών.

Δοκιμή	N_T , Χρόνος Εκτέλεσης (sec) (*)	
	Ημιτονοειδή Δίπολα	Ημιτονοειδή Δίπολα+ Μονόπολα
H	3699, 28043	3753, 28869
L	357, 104	411, 134
(*) Χρόνοι εκτέλεσης σε PC Intel P4-2.6GHz/HT με 512MB RAM (single channel)		

5.4 Άλλες Εφαρμογές

5.4.1 Μελέτη της Επίδρασης του Εύρους του Διακένου Τροφοδότησης στη Σύνθετη Αγωγιμότητα Εισόδου Διπόλου

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος συνίσταται στην περίπτωση του τροφοδοτούμενου διπόλου που απεικονίζονται στο Σχήμα 5.1. Ωστόσο, αντί του πεδίου διέγερσης κρουστικής μορφής, υποτίθεται πεδίο διέγερσης παλμικής μορφής, το οποίο αναπτύσσεται σε ένα διάκενο πεπερασμένου εύρους Δ_g με κέντρο στο σημείο z_g . Η ένταση του πεδίου διέγερσης κατά μήκος του διακένου E_z^g σχετίζεται με την τάση τροφοδότησης ως εξής

$$E_z^g(z) = \begin{cases} -\frac{V_g}{\Delta_g}, & |z - z_g| < \frac{\Delta_g}{2} \\ 0, & \frac{\Delta_g}{2} < |z - z_g| \leq \frac{L}{2} \end{cases} \quad (5.40)$$

Ακολουθώς, εξετάζεται η επίδραση του εύρους του διακένου στη σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου του διπόλου. Στο σημείο αυτό, σημειώνεται ότι το πρόβλημα αυτό άρχισε να απασχολεί τους επιστήμονες εδώ και πολλές δεκαετίες [46], κυρίως λόγω του γεγονότος ότι οι πρώτες μεταβολικές μέθοδοι που εφαρμόστηκαν στην περίπτωση του κρουστικού πεδίου διέγερσης οδηγούσαν σε αποκλίνουσες λύσεις για το φανταστικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου, εξαιτίας της άπειρης χωρητικότητας του διακένου απειροστά μικρού εύρους (knife-edge capacitance). Το φαινόμενο αυτό δεν παρατηρείται στην περίπτωση του παλμικού πεδίου διέγερσης, ενώ τα αποτελέσματα που λαμβάνονται παρουσιάζουν εξάρτηση από το εύρος του διακένου [47, 48].

Όπως εξηγήθηκε στην Παράγραφο 5.2.2, η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να είναι συνεχής στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου, όπως εκφράζεται από την οριακή συνθήκη της σχέσης (5.10). Η εφαρμογή της MAS-RM, ακολουθώντας τη διαδικασία της Παραγράφου 5.2.2, οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα όπως αυτό των εξισώσεων (5.11) ή (5.12), το οποίο διαφοροποιείται μόνο ως προς τους σταθερούς όρους του δεύτερου μέλους. Στην περίπτωση αυτή, ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της σχέσης (5.17) οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα

$$V_m = -\frac{V_g}{k\Delta_g} \left[I_m^-(z_m^-, z_m^-) + I_m^+(z_m^+, z_m^+) \right], \quad (5.41)$$

όπου

$$I_m^\pm(z^-, z^+) = \begin{cases} \cos[k(\delta \mp z^\pm \pm z_m)] - \cos[k(\delta \mp z^\mp \pm z_m)] & z^+ \geq z^- \\ 0 & z^+ < z^- \end{cases}, \quad (5.42\alpha)$$

$$z_m^{--} = \max(z_m - \delta, z_g - \Delta_g/2), \quad (5.42\beta)$$

$$z_m^{-+} = \min(z_m, z_g + \Delta_g/2), \quad (5.42\gamma)$$

$$z_m^{+-} = \max(z_m, z_g - \Delta_g/2), \quad (5.42\delta)$$

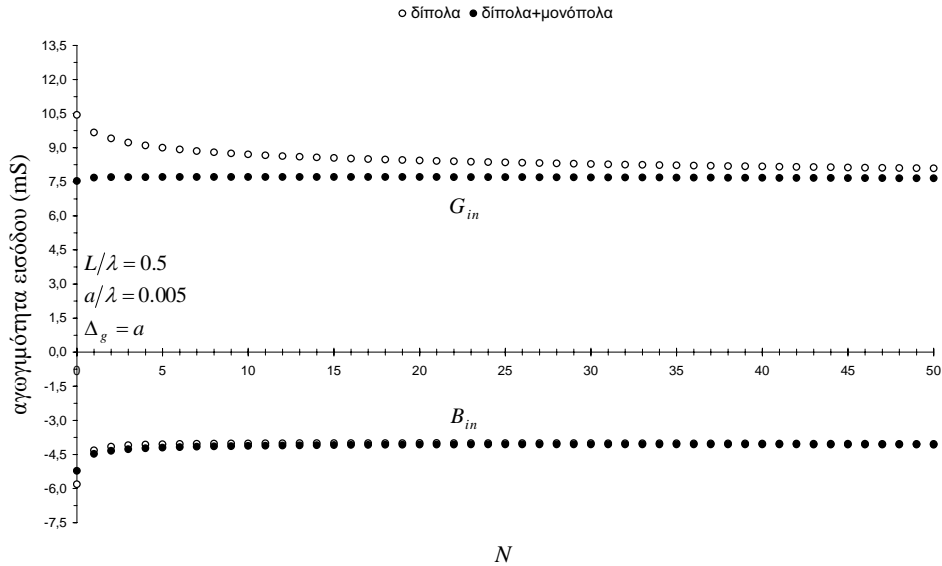
$$z_m^{++} = \min(z_m + \delta, z_g + \Delta_g/2). \quad (5.42\epsilon)$$

Μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος των εξισώσεων (5.11) ή (5.12), ο υπολογισμός της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου $Y_{in} = G_{in} + jB_{in}$ είναι άμεσος, λαμβάνοντας ως ρεύμα εισόδου το ρεύμα στα άκρα του διακένου, το οποίο προσδιορίζεται ως εξής

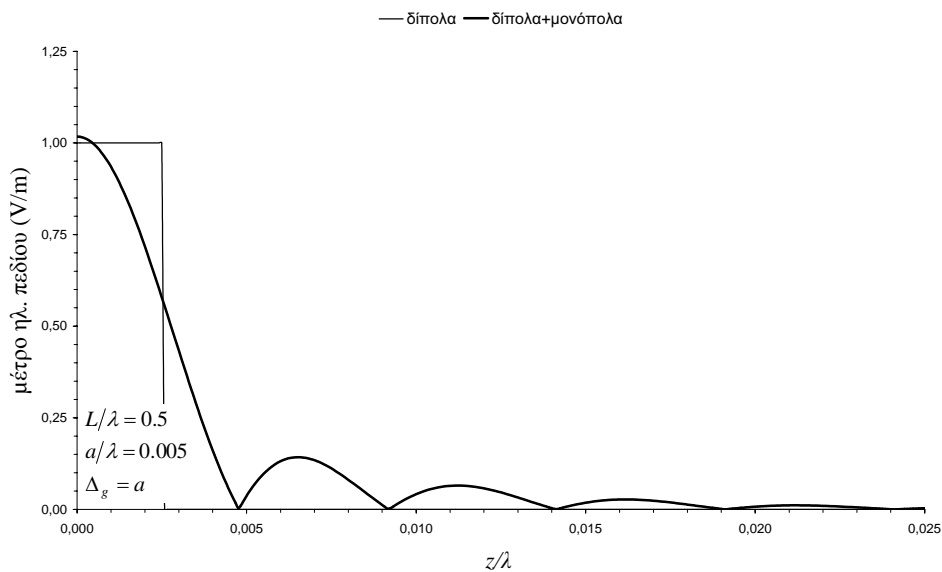
$$I_{in} = I \left(z_g \pm \frac{\Delta_g}{2} \right). \quad (5.43)$$

Σε περιπτώσεις ασύμμετρης τροφοδότησης, η ένταση του ρεύματος εισόδου προσδιορίζεται, συνήθως, από τη μέση τιμή των ρευμάτων στα άκρα του διακένου.

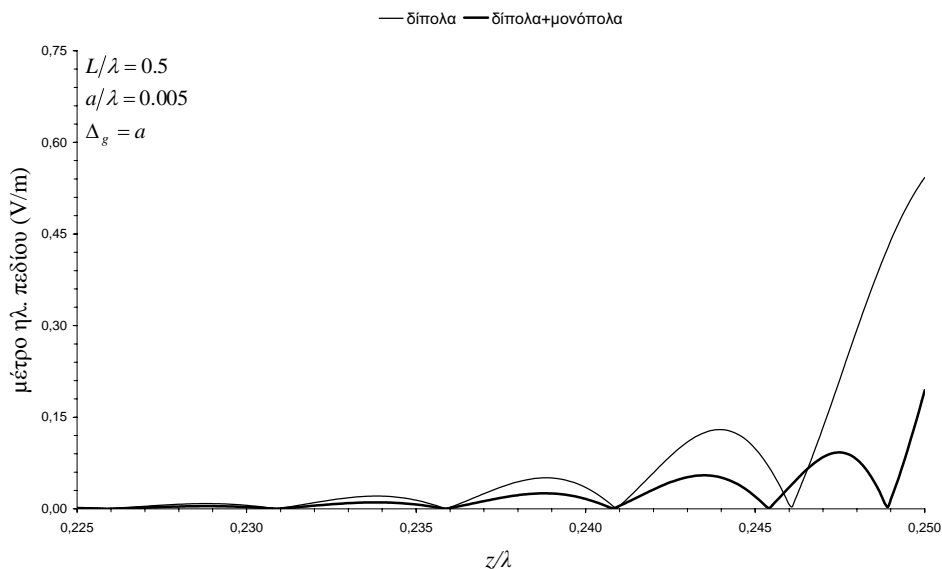
Ακολουθώντας, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για τη συμπεριφορά των λύσεων με την αύξηση του N , τον έλεγχο της συμφωνίας των αποτελεσμάτων με αποτελέσματα άλλων μεθόδων, καθώς και τη μελέτη της επίδρασης του εύρους του διακένου στη σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου του διπόλου.



Σχήμα 5. 25. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών.



Σχήμα 5. 26. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον του σημείου τροφοδότησης).



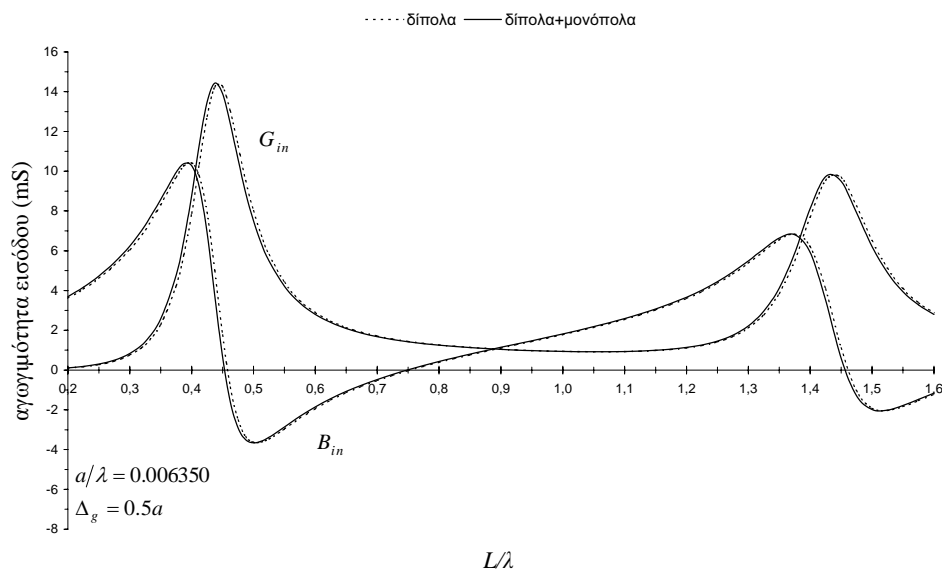
Σχήμα 5. 27. Απεικόνιση του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου (πλησίον των άκρων).

Αρχικά, εξετάζεται η περίπτωση ενός διπόλου με $L/\lambda = 0.5$ και $\alpha/\lambda = 0.005$, το οποίο τροφοδοτείται συμμετρικά από πηγή τάσης που επιβάλλεται σε διάκενο με $\Delta_g = a$. Οι τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου απεικονίζονται συναρτήσει του N στο Σχήμα 5.25. Σημειώνεται ότι η συμπεριφορά των λύσεων είναι αντίστοιχη με αυτή των Σχημάτων 5.3 και 5.8. Αν και στην περίπτωση κρουστικής διέγερσης αναμένεται αποκλίνον φανταστικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου, αυτό δεν παρατηρείται στο Σχήμα 5.8, λόγω της

εξομάλυνσης που επιτελεί η διαδικασία ολοκλήρωσης του πεδίου διέγερσης της σχέσης (5.17).

Στη συνέχεια, στα Σχήματα 5.26 και 5.27, απεικονίζεται το μέτρο της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια ενός διπόλου με τις παραμέτρους που αναφέρθηκαν προηγουμένως και $N + 1 = 50$. Η απεικόνιση αντιστοιχεί σε πεδίο διέγερσης μοναδιαίας έντασης. Από μια απόσταση της τάξης του εύρους του διακένου από το σημείο τροφοδότησης μέχρι τα άκρα του διπόλου, το μέτρο της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου εμφανίζει την ίδια συμπεριφορά με αυτή των Σχημάτων 5.5-5.7 και 5.13-5.15. Στην περιοχή του διακένου, το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου εμφανίζεται σημαντικά διαφοροποιημένο σε σχέση με το παλμικό πεδίο διέγερσης, το οποίο προσεγγίζεται κατά κάποια ολοκληρωτική έννοια. Μάλιστα, η μορφή του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή του διακένου παρουσιάζεται αναίσθητη στην παρουσία των βοηθητικών μονοπόλων στα άκρα του διπόλου. Και στις δύο περιπτώσεις, η αύξηση του N έχει ως συνέπεια το ηλεκτρικό πεδίο να προσεγγίζει όλο και περισσότερο το πεδίο διέγερσης στην περιοχή του διακένου και να τείνει στο μηδέν στην περιοχή εκτός του διακένου, χωρίς την εμφάνιση ταλαντώσεων γύρω από τα σημεία ασυνέχειας του πεδίου διέγερσης, όπως στην περίπτωση σημειακής επιβολής της οριακής συνθήκης που εξετάστηκε στην Παράγραφο 4.2.2.

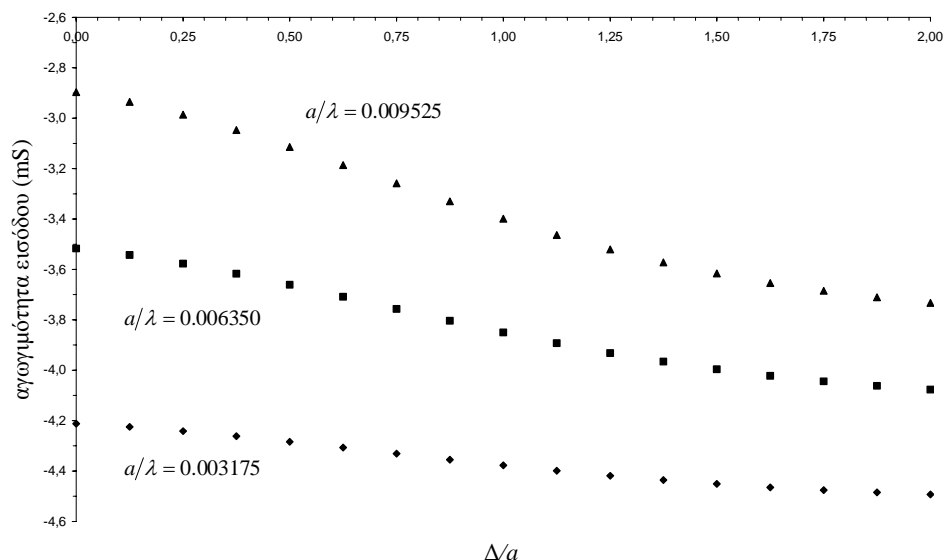
Πρόσθετα αποτελέσματα για τη σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου ενός διπόλου με $a/\lambda = 0.006350$ και $\Delta_g = 0.5a$ απεικονίζονται στο Σχήμα 5.28, ως συνάρτηση της παραμέτρου L/λ . Τα αποτελέσματα του Σχήματος 5.28 προσδιορίστηκαν με $N + 1 = \lceil L/(2a) \rceil$. Όπως και στις περιπτώσεις που εξετάστηκαν στην Παράγραφο 5.2.2, διαπιστώθηκε ότι οι λύσεις που προκύπτουν χωρίς και με την προσθήκη των βοηθητικών μονοπόλων έχουν υπολογίσιμες διαφορές για μικρά N , οι οποίες φθίνουν με την αύξηση του N . Τα αποτελέσματα του Σχήματος 5.28 είναι σε πολύ καλή συμφωνία με αποτελέσματα άλλων μεθόδων [47, 48].



Σχήμα 5. 28. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του διπόλου.

Τέλος, εξετάζεται η επίδραση του εύρους του διακένου στη σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου. Πληθώρα δοκιμών έδειξε αμελητέα εξάρτηση του πραγματικού μέρους G_{in} με τη μεταβολή του εύρους του διακένου. Αντίθετα, το φανταστικό μέρος B_{in} εξαρτάται ισχυρά

από το εύρος του διακένου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.29, για $L/\lambda = 0.5$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου a/λ (0.003175, 0.006350, 0.009525). Και στην περίπτωση αυτή, τα αποτελέσματα αντιστοιχούν σε $N + 1 = \lceil L/(2a) \rceil$. Τα αποτελέσματα του Σχήματος 5.29 βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με αποτελέσματα άλλων μεθόδων [47, 48].



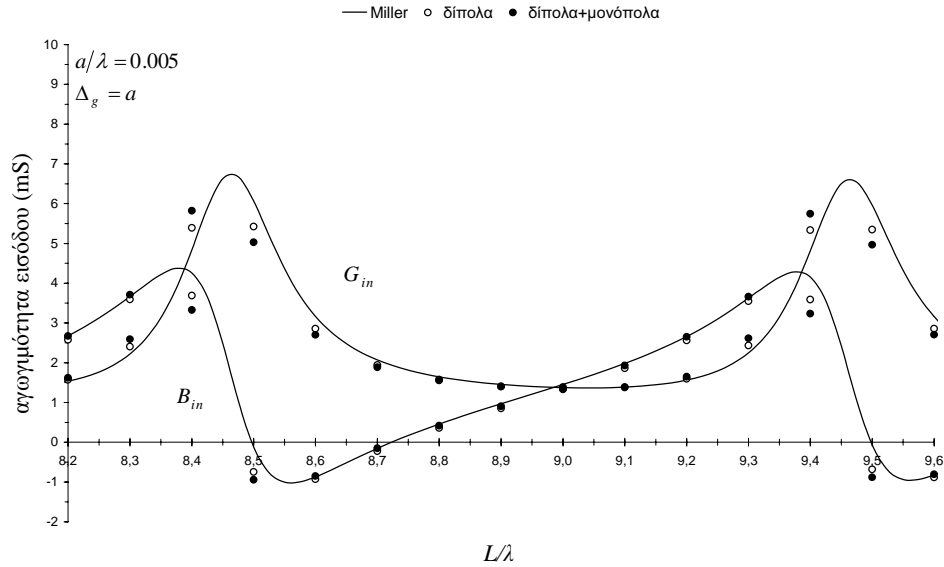
Σχήμα 5. 29. Απεικόνιση του φανταστικού μέρους της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του εύρους του διακένου.

5.4.2 Ανάλυση Διπόλου Μεγάλου Μήκους

Η μελέτη διπόλων μεγάλου μήκους παρουσιάζει σημαντικό θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον. Για το λόγο αυτό, οι διπολικές κεραίες ηλεκτρικά μεγάλου μήκους έχουν μελετηθεί εκτενώς στο παρελθόν. Ωστόσο, οι διαθέσιμες προσεγγιστικές λύσεις είναι είτε δύσκολο να εφαρμοστούν στην πράξη [49] είτε δεν είναι ιδιαίτερα ακριβείς [50]. Από την άλλη πλευρά, οι αριθμητικές μέθοδοι που οδηγούν σε γραμμικά συστήματα, όπως η MoM, πάσχουν από σημαντικούς περιορισμούς στο συνολικό αριθμό των αγνώστων, καθώς η πολυπλοκότητα των συνήθων υλοποιήσεων είναι τάξης N_T^3 . Χαλάρωση των περιορισμών αυτών είναι επιτεύξιμη είτε μέσω ειδικών τεχνικών κατάστρωσης των εξισώσεων του προβλήματος [41-44] είτε με χρήση κατάλληλων επαναληπτικών αλγορίθμων επίλυσης, όπως είναι αυτοί που βασίζονται στη μέθοδο συζυγούς κλίσης (Conjugate Gradient Method-CGM) [51-54]. Είναι άξιο παρατήρησης ότι οι τεχνικές που βασίζονται στη CGM παρέχουν τη δυνατότητα ανάλυσης διπόλων με μήκη κάποιων χιλιάδων μήκων κύματος σε προσωπικούς υπολογιστές. Όμως, σε περιπτώσεις κεραιών σχετικά μεγάλου μήκους, αντί των εξεζητημένων μεθόδων που αναφέρθηκαν προηγουμένως, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η MAS-RM για μικρές τιμές του N . Βεβαίως, σε περιπτώσεις πολύ μεγάλων τιμών του λόγου $L/(2a)$, η εφαρμογή της MAS-RM καθίσταται μη αποδοτική, οπότε είναι απαραίτητη η αξιοποίηση κάποιας αποδοτικής επαναληπτικής τεχνικής.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για σχετικά μεγάλες τιμές του λόγου $L/(2a)$. Αρχικά, εξετάζεται η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου ενός διπόλου με $a/\lambda = 0.005$ και μήκος που μεταβάλλεται στο διάστημα $1 < L/\lambda < 100$. Το πεδίο διέγερσης θεωρείται παλμικό με $\Delta_g = a$. Στο άνω άκρο του διαστήματος μεταβολής του μήκους ισχύει

$L/(2a)=10000$, οπότε η μείωση του N κατά ένα παράγοντα 10 σε σχέση με την τιμή του λόγου $L/(2a)$ οδηγεί σε γραμμικά συστήματα που μπορούν να επιλυθούν σε προσωπικό υπολογιστή. Επιλεγμένα αποτελέσματα για τη σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου στο διάστημα $8.2 \leq L/\lambda \leq 9.6$, τα οποία αντιστοιχούν σε $N+1 = \lceil L/(20a) \rceil$, παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.30. Στο ίδιο γράφημα απεικονίζονται τα αποτελέσματα που εξάγονται από τη διαθέσιμη προσεγγιστική σχέση [50]



Σχήμα 5. 30. Απεικόνιση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του μήκους του διπόλου.

$$\frac{Y_{in}}{Y_0} = -\frac{\pi}{L'_0} + j2k_0a \left[\frac{0.45}{k_0aL'_0} + \ln\left(\frac{k_0\Delta_g}{2}\right) \right] + \frac{4\pi L_2}{L_1^2} \left[\frac{1}{1 - \frac{2L_2}{\pi L_0} \exp(jk_0L)} \right], \quad (5.44\alpha)$$

όπου

$$L'_0 = \ln\left(\frac{\Gamma k_0 a}{\sqrt{2}}\right), \quad (5.44\beta)$$

$$L_0 = \ln\left(\frac{j\Gamma k_0 a}{2}\right), \quad (5.44\gamma)$$

$$L_1 = \ln\left(-\frac{jL}{\Gamma k_0 a^2}\right), \quad (5.44\delta)$$

$$L_2 = \ln\left(-\frac{j2L}{\Gamma k_0 a^2}\right), \quad (5.44\epsilon)$$

καθώς και $\Gamma = 1.78107$. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με τα θεωρητικά αναμενόμενα, με εξαίρεση τις περιοχές πλησίον των συντονισμών. Στις περιοχές αυτές, οι αποκλίσεις είναι σημαντικές και οφείλονται σε ανακρίβεια της προσεγγιστικής σχέσης (5.44), η οποία έχει ως συνέπεια την ολίσθηση των αποτελεσμάτων προς τα δεξιά [50]. Ως εκ τούτου, τα αποτελέσματα της MAS-RM αναμένεται να βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με ακριβέστερες μεθόδους.

Τέλος, παρουσιάζονται αποτελέσματα που αφορούν τυπικούς χρόνους εκτέλεσης για την ανάλυση διπόλων σχετικά μεγάλου μήκους. Οι περιπτώσεις που εξετάζονται αφορούν διέγερση από κάθετα προσπίπτον επίπεδο κύμα με ένταση ηλεκτρικού πεδίου μοναδιαίου πλάτους. Επιλεγμένα αποτελέσματα για τον αριθμό των αγνώστων και το χρόνο εκτέλεσης περιέχονται στον Πίνακα 5.5, για την περίπτωση ενός διπόλου με $L/\lambda = 25$ και $a/\lambda = 0.005$.

Πίνακας 5. 5. Αριθμοί αγνώστων και χρόνοι εκτέλεσης δοκιμών.

Δοκιμή	N_T , Χρόνος Εκτέλεσης (sec) (*)	
	Ημιτονοειδή Δίπολα	Ημιτονοειδή Δίπολα+ Μονόπολα
H	4999, 44259	5001, 47414
L	499, 41	501, 45
(*) Χρόνοι εκτέλεσης σε PC Intel P4-2.6GHz/HT με 512MB RAM (single channel)		

5.5 Δίπολο Παχέος Σύρματος με Τροφοδοσία Πηγής Τάσης Διακένου (Gap Voltage Source)

5.5.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Η γεωμετρία του υπό εξέταση προβλήματος συνίσταται σε ένα δίπολο μήκους L και ακτίνας a στον ελεύθερο χώρο, η ακτίνα του οποίου δεν είναι τόσο μικρή ώστε το δίπολο να θεωρείται λεπτό. Όπως αναφέρθηκε στην Παράγραφο 4.7.1, παχιά δίπολα θεωρούνται, συνήθως, αυτά με $a/\lambda > 0.01$. Το δίπολο τροφοδοτείται από μια πηγή τάσης διακένου, ενώ το πεδίο διέγερσης υποτίθεται σταθερό κατά μήκος του διακένου και δίνεται από τη σχέση (5.40).

5.5.2 Εφαρμογή της MAS-RM

Για την εφαρμογή της MAS-RM στην περίπτωση του παχέος διπόλου, ακολουθείται η διαδικασία που περιγράφηκε στις Παραγράφους 5.2.2 και 5.4.1. Για λόγους που εξηγήθηκαν στην Παράγραφο 4.7.2, η αξονική τοποθέτηση των βοηθητικών πηγών δεν ενδείκνυται στην περίπτωση του παχέος διπόλου. Αντίθετα, οι βοηθητικές πηγές κατανέμονται επί δακτυλίων ακτίνας b (με $b < a$) με κέντρα επί του άξονα z , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.56. Ο αριθμός των βοηθητικών πηγών ανά δακτύλιο θεωρείται σταθερός και ίσος με S . Για την επιλογή του τύπου των βοηθητικών πηγών, ισχύουν όσα αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 5.2.2. Συνεπώς, για την ανάλυση του παχέος διπόλου, εισάγονται δακτύλιοι ηλεκτρικών διπόλων ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος, οι οποίοι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι κατά μήκος του άξονα z , όπως και στην περίπτωση της Παραγράφου 4.7.2. Τα βοηθητικά δίπολα επικαλύπτονται έτσι ώστε κάθε ένα από αυτά να εκτείνεται μεταξύ των κέντρων των αμέσως γειτονικών του, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 5.2. Επιπρόσθετα, σε κάθε ένα από τα άκρα του διπόλου εισάγεται ένας δακτύλιος ηλεκτρικών μονοπόλων

ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος με κατάλληλο προσανατολισμό, κατά πλήρη αντιστοιχία με το Σχήμα 5.2. Τα εξωτερικά άκρα των βοηθητικών μονοπόλων είναι τοποθετημένα ακριβώς στα άκρα του διπόλου, ενώ οι θέσεις των εσωτερικών άκρων τους ταυτίζονται με αυτές των κέντρων των αμέσως γειτονικών βοηθητικών διπόλων.

Ακολούθως, η ανάλυση εστιάζεται στη σύγκριση των λύσεων που εξάγονται παρουσία και απουσία των δακτυλίων βοηθητικών μονοπόλων. Και στις δύο περιπτώσεις, ο αριθμός των δακτυλίων βοηθητικών διπόλων θεωρείται περιττός και ίσος με $2N+1$, οπότε οι θέσεις των κέντρων τους εκφράζονται ως $z_n = n\delta$, $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, όπου $\delta = L/[2(N+1)]$ η απόσταση μεταξύ διαδοχικών δακτυλίων βοηθητικών διπόλων μήκους 2δ . Τα βοηθητικά μονόπολα έχουν το μισό μήκος και τοποθετούνται στα σημεία $z_{\pm(N+1)} = \pm L/2$. Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας του προβλήματος, οι βοηθητικές πηγές κάθε δακτυλίου φέρουν ημιτονοειδή ρεύματα με ταυτόσημους συντελεστές βαρύτητας w_n . Η κατανομή ρεύματος κάθε βοηθητικής πηγής μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια του γινομένου συναρτήσεων $f_n(z)s_n(z)$ των σχέσεων (5.3)-(5.5).

Το ακτινοβολούμενο HM πεδίο περιγράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των HM πεδίων των βοηθητικών πηγών, συνεπώς

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{n=-(N+1)}^{N+1} \sum_{s=1}^S w_n \vec{F}_{(n,s)}(\vec{r}), \quad (5.45)$$

όπου \vec{F} είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου στον κενό χώρο, ενώ $\vec{F}_{(n,s)}$ είναι το αντίστοιχο πεδίο της βοηθητικής πηγής που καθορίζει το ζεύγος δεικτών (n,s) και είναι τοποθετημένη στο σημείο (b, ϕ_s, z_n) με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(n,s)}$, όπου ϕ_s η γωνιακή θέση της βοηθητικής πηγής που καθορίζει ο δείκτης s .

Τα πεδία $\vec{F}_{(n,s)}$ προσδιορίζονται με απλή μεταφορά του πεδίου μιας βοηθητικής πηγής, που είναι τοποθετημένη στο κέντρο ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτινοβολεί σε άπειρο κενό χώρο, όπως καθορίζεται από τη σχέση (5.7). Αξιοποιώντας τις σχέσεις (B.14) και (B.20) του Παραρτήματος B, τα πεδία των βοηθητικών πηγών εκφράζονται ως εξής

$$\vec{F}_{(n,s)}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{F}_D^-(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)}), & |n| \leq N \\ \vec{F}_M^\mp(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)}), & n = \pm(N+1) \end{cases}, \quad (5.46)$$

όπου $\vec{F}_D^-(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)})$ είναι το πεδίο ενός ηλεκτρικού διπόλου ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος μοναδιαίου πλάτους με προσανατολισμό κατά την κατεύθυνση του άξονα z και κέντρο στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(n,s)}$, $\vec{F}_M^+(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)})$ είναι το πεδίο ενός θετικού ηλεκτρικού μονοπόλου ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος μοναδιαίου πλάτους με προσανατολισμό κατά την κατεύθυνση του άξονα z και κέντρο στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{(n,s)}$, ενώ $\vec{F}_M^-(\vec{r}; \vec{r}_{(n,s)})$ είναι το πεδίο του αντίστοιχου αρνητικού μονοπόλου.

Όπως και στην περίπτωση του λεπτού διπόλου που εξετάστηκε στις Παραγράφους 5.2 και 5.4, η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να είναι συνεχής στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου, όπως εκφράζεται από την οριακή συνθήκη της σχέσης (5.10). Σύμφωνα με τη MAS-RM, οι άγνωστοι συντελεστές w_n του αναπτύγματος της σχέσης (5.45) προσδιορίζονται επιβάλλοντας την οριακή συνθήκη της σχέσης (5.10) μέσω της τεχνικής συνταιριάσματος των αντιδράσεων, όπως περιγράφηκε στην Παράγραφο 5.2.2. Όπως εξηγήθηκε στην Παράγραφο 4.7.2, η γωνιακή θέση της γραμμής επιβολής της οριακής συνθήκης στην επιφάνεια του διπόλου έχει επίδραση στη λύση, αφού το πεδίο που παράγει κάθε δακτύλιος βοηθητικών πηγών είναι μόνο κατά προσέγγιση σταθερό κατά μήκος της

περιφέρειας του διπόλου. Όπως και στην Παράγραφο 4.7.2, επιλέγεται $\phi_t = \pi/(2S)$, ούτως ώστε η τιμή του πεδίου να είναι κοντά στη μέση τιμή του κατά μήκος της περιφέρειας του διπόλου. Κατόπιν τούτου, η επιβολή της οριακής συνθήκης μέσω της τεχνικής συνταιριάσματος των αντιδράσεων καταλήγει σε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\sum_{n=-(N+1)}^{N+1} \sum_{s=1}^S Z_{(n,s),m} w_n = -V_m, m = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \pm(N+1). \quad (5.47)$$

Όταν οι δακτύλιοι βοηθητικών μονοπόλων δεν χρησιμοποιούνται, το γραμμικό σύστημα που προκύπτει εκφράζεται ως εξής

$$\sum_{n=-N}^N \sum_{s=1}^S Z_{(n,s),m} w_n = -V_m, m = 0, \pm 1, \dots, \pm N. \quad (5.48)$$

Σε κάθε περίπτωση, οι συντελεστές $Z_{(n,s),m}$ εκφράζονται μέσω του ολοκληρώματος

$$Z_{(n,s),m} = - \int_{z_m - \delta}^{z_m + \delta} [\vec{z} \cdot \vec{E}_{(n,s)}(a, \phi_t, z)] f_m(z) s_m(z) dz, \quad (5.49)$$

το οποίο εκφράζεται μέσω της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης $Z(s, h)$ μεταξύ δύο παράλληλων πηγών ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος σε οριζόντια απόσταση s και κατακόρυφη απόσταση h , σύμφωνα με τη σχέση

$$Z_{(n,s),m} = Z\left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\phi_t - \phi_s)}, |z_m - z_n|\right). \quad (5.50)$$

Αξιοποιώντας την αρχή της αμοιβαιότητας, ο υπολογισμός των συντελεστών $Z_{(n,s),m}$ γίνεται με τη βοήθεια των αμοιβαίων σύνθετων αντιστάσεων μεταξύ δύο διπόλων, ενός μονοπόλου και ενός διπόλου, καθώς και δύο μονοπόλων, σε αντιστοιχία με τη σχέση (5.14). Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι εξισώσεις (5.47) και (5.48) μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\sum_{n=-(N+1)}^{N+1} Z_{n,m} w_n = -V_m, m = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \pm(N+1), \quad (5.51)$$

$$\sum_{n=-N}^N Z_{n,m} w_n = -V_m, m = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \quad (5.52)$$

όπου

$$Z_{n,m} = \sum_{s=1}^S Z_{(n,s),m}. \quad (5.53)$$

Οι σταθεροί όροι V_m του δεύτερου μέλους των εξισώσεων (5.51) και (5.52) αντιστοιχούν στα ολοκληρώματα του πεδίου διέγερσης, τα οποία δίνονται από τις σχέσεις (5.41) και (5.42).

Όταν οι δακτύλιοι βοηθητικών μονοπόλων δεν χρησιμοποιούνται, ο πίνακας των συντελεστών είναι τύπου Toeplitz και ο υπολογισμός του μπορεί να γίνει αξιοποιώντας τη σχέση (5.19). Στην αντίθετη περίπτωση, η σχέση (5.19) ισχύει για $|n| \leq N$ και $|m| \leq N$, οπότε

μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε αυτήν την περίπτωση για τη μείωση του υπολογιστικού κόστους. Σε κάθε περίπτωση, μετά την επίλυση του γραμμικού συστήματος $(2N+3) \times (2N+3)$ των εξισώσεων (5.51) ή του γραμμικού συστήματος $(2N+1) \times (2N+1)$ των εξισώσεων (5.52), το ΗΜ πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου προσδιορίζεται άμεσα από τις σχέσεις (5.45) και (5.46). Στη συνέχεια, η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου προκύπτει με εφαρμογή της οριακής συνθήκης του μαγνητικού πεδίου της σχέσης (5.20), οπότε η ρευματική κατανομή κατά μήκος του διπόλου δίνεται από τη σχέση

$$I(z) = 2\pi a \sum_{n=-(N+1)}^{N+1} \sum_{s=1}^S w_n [\hat{\phi} \cdot \vec{H}_{(n,s)}(a, \phi_t, z)]. \quad (5.54)$$

Για τον υπολογισμό της σύνθετης αγωγιμότητας ή αντίστασης εισόδου, ως ρεύμα εισόδου λαμβάνεται το ρεύμα στα άκρα του διακένου, το οποίο προσδιορίζεται από τη σχέση (5.43). Σε περιπτώσεις ασύμμετρης τροφοδότησης, η ένταση του ρεύματος εισόδου προσδιορίζεται από τη μέση τιμή των ρευμάτων στα άκρα του διακένου.

Όπως και στην περίπτωση του λεπτού διπόλου, τα αποτελέσματα της MAS-RM μπορούν να συγκριθούν άμεσα με αυτά της MoM, υπολογίζοντας την κατανομή ρεύματος ως υπέρθεση των συναρτήσεων βάσης μέσω της σχέσης (5.22). Αξίζει να σημειωθεί ότι, όπως αναφέρθηκε στην Παράγραφο 5.2.2, η προσθήκη των ημίσεων συναρτήσεων βάσης έχει ως συνέπεια τη χαλάρωση των περιορισμών που αφορούν τις τιμές και τις κλίσεις της κατανομής ρεύματος της σχέσης (5.22) κοντά στα άκρα του διπόλου. Αντίθετα, η κατανομή ρεύματος της σχέσης (5.54) δεν χαρακτηρίζεται από περιορισμούς σχετικά με την τιμή ή την κλίση της και, ως εκ τούτου, πιστεύεται ότι αναπαριστά καλύτερα την πραγματική κατανομή ρεύματος σε σχέση με τη σχέση (5.22).

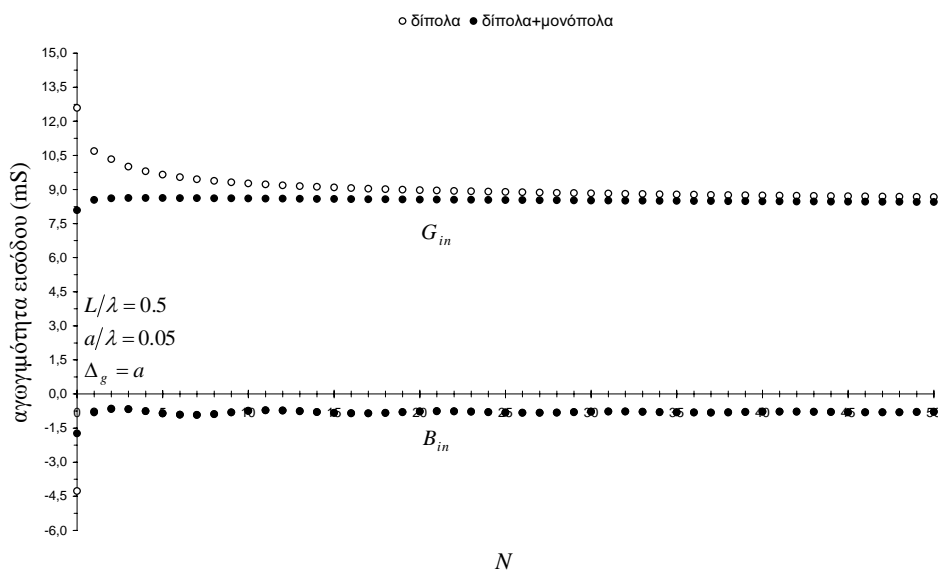
Για την αποτίμηση της ποιότητας των λύσεων, εξετάζεται η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου, όπως περιγράφηκε στην Παράγραφο 5.2.2.

5.5.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Ακολούθως, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν τη συμπεριφορά των λύσεων σε σχέση με τις παραμέτρους καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών S και N . Ιδιαίτερη προσοχή δίνεται στην επίδραση της προσθήκης των δακτυλίων βοηθητικών μονοπόλων στα χαρακτηριστικά των λύσεων, κυρίως σε σχέση με τις λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας μόνο τους δακτυλίους βοηθητικών διπόλων. Ως παράμετρος ελέγχου της αριθμητικής ευστάθειας των λύσεων χρησιμοποιείται η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου.

Αρχικά, εξετάζεται η συμπεριφορά των λύσεων διατηρώντας σταθερή την τιμή του λόγου b/a , για την περίπτωση ενός διπόλου με $L/\lambda = 0.5$, $a/\lambda = 0.05$ και $\Delta_g = a$. Ο αριθμός των βοηθητικών πηγών ανά δακτύλιο S επιλέγεται έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ διαδοχικών πηγών στον ίδιο δακτύλιο να είναι συγκρίσιμη με την απόστασή τους από την επιφάνεια του διπόλου, άρα $2\pi b/S \approx a - b$. Συνεπώς, ανάλογα με την επιλογή του λόγου b/a , επιλέγεται $S = \lceil 2\pi b/(a - b) \rceil$. Οι τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου για $b/a = 0.8$ και $S = 26$ απεικονίζονται στο Σχήμα 5.31, ως συνάρτηση του N . Σε αντίθεση με την περίπτωση του λεπτού διπόλου, το φανταστικό μέρος B_{in} παρουσιάζει αισθητές ταλαντώσεις για μικρά N , οι οποίες χαρακτηρίζονται από μειούμενο πλάτος με την αύξηση του N , ανεξάρτητα από το αν οι δακτύλιοι βοηθητικών μονοπόλων χρησιμοποιούνται ή όχι. Αντίθετα, η συμπεριφορά του πραγματικού μέρους G_{in} εμφανίζεται παρόμοια με αυτή που χαρακτηρίζει το λεπτό δίπολο, όπως προκύπτει με απευθείας σύγκριση του Σχήματος 5.31 με

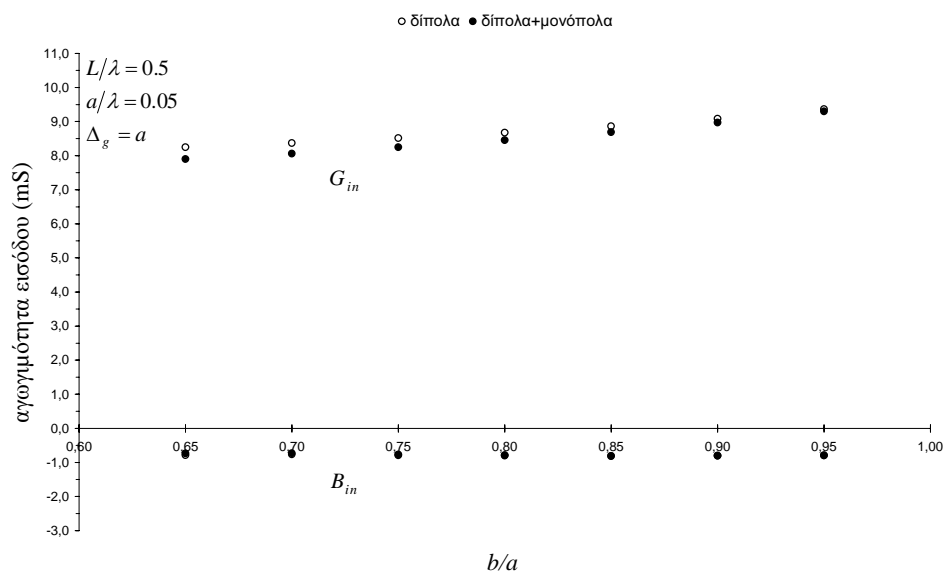
τα Σχήματα 5.8 και 5.25. Όπως και στην περίπτωση του λεπτού διπόλου, η προσθήκη των δακτυλίων βοηθητικών μονοπόλων συνεπάγεται την ταχύτατη αριθμητική σταθεροποίηση των λύσεων, τουλάχιστον όσον αφορά το πραγματικό μέρος G_{in} , καθώς πρακτικά αμετάβλητα αποτελέσματα παρατηρούνται από πολύ μικρά N , τα οποία προσεγγίζονται από τις λύσεις που προκύπτουν χωρίς τη χρήση των δακτυλίων βοηθητικών μονοπόλων για πολύ μεγαλύτερα N . Στις περιπτώσεις λεπτών διπόλων, η αριθμητική σταθεροποίηση των λύσεων επιτυγχάνεται όταν η απόσταση μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών είναι περίπου ίση με την απόσταση τους από την επιφάνεια του διπόλου, οπότε $N \sim L/(2a)$. Είναι άξιο παρατήρησης ότι, στην περίπτωση που εξετάζεται εδώ, οι λύσεις παρουσιάζουν αντίστοιχη συμπεριφορά, καθόσον $L/[2(a-b)] = 25$. Άλλωστε, εκτενείς δοκιμές κατέδειξαν ότι η αριθμητική ευστάθεια των λύσεων επιτυγχάνεται, τυπικά, για $N \sim L/[2(a-b)]$. Όσον αφορά τη συμπεριφορά της εφαπτομενικής συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του διπόλου, εμφανίζεται παρόμοια με αυτή των Σχημάτων 5.26 και 5.27.



Σχήμα 5. 31. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει της παραμέτρου καθορισμού του πλήθους των βοηθητικών πηγών.

Αξίζει να αναφερθεί ότι η αύξηση του αριθμού των βοηθητικών πηγών ανά δακτύλιο έχει αμελητέα επίδραση στις λύσεις, ειδικά όταν η γωνιακή θέση της γραμμής επιβολής της οριακής συνθήκης της σχέσης (5.10) επιλεγεί $\phi_i = \pi/(2S)$. Όπως έχει επισημανθεί στην Παράγραφο 4.7.2, η επιλογή αυτή οδηγεί σε υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα ενδιάμεσο σημείο μεταξύ μεγίστου και ελαχίστου, η θέση του οποίου εξαρτάται από το S . Ως εκ τούτου, η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι αναισθητή σε μεταβολές του S . Συνεπώς, η επιλογή $S = \lceil 2\pi b/(a-b) \rceil$ οδηγεί σε αριθμητικά ευσταθή αποτελέσματα, τουλάχιστον για σχετικά μεγάλες τιμές του λόγου b/a ($b/a > 0.5$). Για μικρές τιμές του λόγου b/a , η αριθμητική ευστάθεια είναι δυσκολότερα επιτεύξιμη, καθόσον οι βοηθητικές πηγές απομακρύνονται από την επιφάνεια του διπόλου. Πάντως, για δεδομένη τιμή του λόγου b/a , οι λύσεις παρουσιάζονται πολύ λιγότερο ευαίσθητες σε μεταβολές του S παρά σε μεταβολές του N . Ωστόσο, η εξάρτηση των λύσεων από την τιμή του λόγου b/a παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Αποτελέσματα για την εξάρτηση της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου από την τιμή του λόγου b/a παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.32, για την περίπτωση ενός διπόλου με τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν παραπάνω. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται

αντιστοιχούν σε $S = \lceil 2\pi b / (a - b) \rceil$ και $N + 1 = \lceil L / (a - b) \rceil$. Από το Σχήμα 5.32 προκύπτει ότι η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου παρουσιάζει κάποια εξάρτηση με την τιμή του λόγου b/a , αντίστοιχη με αυτή που διαπιστώθηκε στην Παράγραφο 4.7.3., ανεξάρτητα από το αν οι δακτύλιοι βοηθητικών μονοπόλων χρησιμοποιούνται ή όχι. Το γεγονός αυτό αποδίδεται στην επίδραση των φαινομένων άκρων. Ωστόσο, τα εξαγόμενα αποτελέσματα είναι αξιοποιήσιμα, τουλάχιστον από πρακτική σκοπιά, αφού ανάλογα προβλήματα αριθμητικής ευστάθειας, αν όχι εντονότερα, παρουσιάζουν και οι λύσεις της MoM [20, 21, 55-58].



Σχήμα 5. 32. Τιμές της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου συναρτήσει του λόγου της ακτίνας των δακτυλίων βοηθητικών πηγών προς την ακτίνα του διπόλου.

5.6 Αναφορές

- [1] R. W. P. King, *Theory of Linear Antennas*, Harvard University Press, 1956.
- [2] T. T. Wu, "Introduction to linear antennas", *Antenna Theory*, Edited by R. E. Collin and F. J. Zucker, McGraw-Hill, 1969.
- [3] R. W. P. King, "The linear antenna-Eighty years of progress", *IEEE Proceedings*, Vol. 55, No. 1, pp. 2-16, 1967.
- [4] R. W. P. King, R. B. Mack and S. S. Sandler, *Arrays of Cylindrical Dipoles*, Cambridge University Press, 1968.
- [5] R. W. P. King, G. J. Fikioris and R. B. Mack, *Cylindrical Antennas and Arrays*, Cambridge University Press, 2002.
- [6] F. M. Tesche, "The effect of the thin-wire approximation and the source gap model on the high-frequency integral equation solution of radiating antennas", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 20, No. 2, pp. 210-211, 1972.
- [7] E. K. Miller and F. J. Deadrick, "Some computational aspects of thin-wire modeling", *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*, Edited by R. Mittra, Springer-Verlag, 1975.

- [8] R. Mittra and C. A. Klein, "Stability and convergence of moment method solutions", *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*, Edited by R. Mittra, Springer-Verlag, 1975.
- [9] L. W. Pearson and C. M. Butler, "Inadequacies of collocation solutions to Pocklington-type models of thin-wire structures", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 23, No. 2, pp. 295-298, 1975.
- [10] C. M. Butler and D. R. Wilton, "Analysis of various numerical techniques applied to thin-wire scatterers", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 23, No. 4, pp. 534-540, 1975.
- [11] A. F. Peterson, "Difficulties encountered when attempting to validate thin-wire formulations for linear dipole antennas", *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, Vol. 4, No. 3, pp. 25-40, 1989.
- [12] R. J. Bauerle and J. K. Breakall, "Comparison of the input impedance of monopole antennas obtained by NEC, MININEC, and measurements", *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, Vol. 10, No. 2, pp. 75-85, 1995.
- [13] A. A. Efanov, H. Schöpf and B. Schnizer, "Mutual validation of three programs for numeric antenna computations", *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, Vol. 10, No. 2, pp. 96-101, 1995.
- [14] M. M. Bibby, "A comparative study of expansion functions using the boundary residual method on a linear dipole-Part 1: entire-domain functions", *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, Vol. 17, No. 1, pp. 42-53, 2002.
- [15] M. M. Bibby, "A comparative study of expansion functions using the boundary residual method on a linear dipole-Part 2: sub-domain functions", *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, Vol. 17, No. 1, pp. 54-62, 2002.
- [16] M. M. Bibby, "Impact of some discontinuities on the convergence of numerical methods in electromagnetics", *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, Vol. 18, No. 3, pp. 151-161, 2003.
- [17] G. Fikioris and T. T. Wu, "On the application of numerical methods to Hallén's equation", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 49, No. 3, pp. 383-392, 2001.
- [18] G. Fikioris, "The approximate integral equation for a cylindrical scatterer has no solution", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 15, No. 9, pp. 1153-1159, 2001.
- [19] G. Fikioris, J. Lionas and C. G. Lioutas, "The use of the frill generator in thin-wire integral equations", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 51, No. 8, pp. 1847-1854, 2003.
- [20] W. A. Imbriale and P. G. Ingerson, "On numerical convergence of moment solutions of moderately thick wire antennas using sinusoidal basis functions", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 21, No. 3, pp. 363-366, 1973.
- [21] D. H. Werner, "A method of moments approach for the efficient and accurate modeling of moderately thick cylindrical wire antennas", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 46, No. 3, pp. 373-382, 1998.
- [22] D. I. Kaklamani and H. T. Anastassiou, "Aspects of the method of auxiliary sources (MAS) in computational electromagnetics", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 44, No. 3, pp. 48-64, 2002.
- [23] J. H. Richmond, "A reaction theorem and its application to antenna impedance calculations", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 9, No. 6, pp. 515-520, 1961.

- [24] J. H. Richmond, "Radiation and scattering by thin wire structures in a homogeneous conducting medium", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 22, No. 2, pp. 365, 1974.
- [25] P. J. Papakanellos and C. N. Capsalis, "On the combination of the method of auxiliary sources with reaction matching for the analysis of thin cylindrical antennas", *International Journal of Numerical Modeling*, to be published.
- [26] H. E. King, "Mutual impedance of unequal length antennas in echelon", *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 5, No. 3, pp. 306-313, 1957.
- [27] J. H. Richmond and N. H. Geary, "Mutual impedance between coplanar-skew dipoles", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 18, No. 3, pp. 414-416, 1970.
- [28] R. C. Hansen, "Formulation of echelon dipole mutual impedance for computer", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 20, No. 6, pp. 780-781, 1972.
- [29] J. H. Richmond and N. H. Geary, "Mutual impedance of nonplanar-skew sinusoidal dipoles", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 23, No. 3, pp. 412-414, 1975.
- [30] C. W. Chuang, J. H. Richmond, N. Wang and P. H. Pathak, "New expressions for mutual impedance of nonplanar-skew sinusoidal monopoles", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 38, No. 2, pp. 275-276, 1990.
- [31] K. E. Schmidt, "Simplified mutual impedance of nonplanar skew dipoles", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 44, No. 9, pp. 1298-1299, 1996.
- [32] K. W. Leung, "Efficient calculation of self/mutual impedances in MoM analysis of a monopole in free space", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 50, No. 1, pp. 77-79, 2002.
- [33] R. W. P. King, E. A. Aronson and C. W. Harrison, "Determination of the admittance and effective length of cylindrical antennas", *Radio Science*, Vol. 1, No. 7, pp. 835-850, 1966.
- [34] C. W. Harrison, C. D. Taylor and E. A. Aronson, "On the driving point impedance of an asymmetrical dipole", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 14, No. 6, pp. 794-795, 1966.
- [35] L. -C. Shen, T. T. Wu and R. W. P. King, "A simple formula of current in dipole antennas", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 16, No. 5, pp. 542-547, 1968.
- [36] B. D. Popović and J. V. Surutka, "A variational solution to the problem of an asymmetrical cylindrical dipole", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 19, No. 1, pp. 17-22, 1971.
- [37] B. D. Popović, "On polynomial approximation of current along thin asymmetrical cylindrical dipoles", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 19, No. 1, pp. 117-120, 1971.
- [38] J. H. Pierluissi, "Impedance comparisons for the asymmetrically driven thin cylindrical antenna", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 21, No. 2, pp. 208-211, 1973.
- [39] P. J. Papakanellos, I. I. Heretakis, P. K. Varlamos and C. N. Capsalis, "A combined method of auxiliary sources-reaction matching approach for analyzing large-scale arrays of cylindrical dipoles", *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, under review.
- [40] A. Fourie and D. Nitch, *SuperNEC Manuals*, Poynting Software, Oct. 2002.

- [41] T. R. Ferguson, T. H. Lehman and R. J. Balestri, "Efficient solution of large moments problems: theory and small problem results", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 24, No. 2, pp. 230-235, 1976.
- [42] A. P. C. Fourie, D. C. Nitch and A. R. Clark, "A sparse iterative method (SIM) for method of moments calculations", *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, Vol. 14, No. 1, pp. 9-16, 1999.
- [43] A. R. Clark, A. P. C. Fourie and D. C. Nitch, "Stationary, nonstationary, and hybrid iterative method of moments solution schemes", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 49, No. 10, pp. 1462-1469, 2001.
- [44] Q. Chen, Q. Yuan and K. Sawaya, "Fast algorithm for solving matrix equation in MoM analysis of large-scale array antennas", *IEICE Transactions on Communications*, Vol. E85-B, No. 11, pp. 2482-2488, 2002.
- [45] G. A. Thiele, "Analysis of Yagi-Uda type antennas", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 17, No. 1, pp. 24-31, 1969.
- [46] L. Infeld, "The influence of the width of the gap upon the theory of antennas", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 5, No. 2, pp. 113-132, 1947.
- [47] T. Do-Nhat and R. H. MacPhie, "On the effect of the gap width on the admittance of solid circular cylindrical dipoles", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 37, No. 12, pp. 1545-1553, 1989.
- [48] Z. Shen and R. H. MacPhie, "Rigorous modal-expansion analysis of asymmetrical dipole antennas", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 49, No. 11, pp. 1525-1531, 2001.
- [49] C. -L. Chen and T. T. Wu, "Theory of the long dipole antenna", *Antenna Theory*, Edited by R. E. Collin and F. J. Zucker, McGraw-Hill, 1969.
- [50] E. K. Miller, "An approximate formula for the admittance of a long, thin antenna", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 16, No. 1, pp. 127-128, 1968.
- [51] T. K. Sarkar and S. M. Rao, "The application of the conjugate gradient method for the solution of electromagnetic scattering from arbitrarily oriented wire antennas", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 32, No. 4, pp. 398-403, 1984.
- [52] T. K. Sarkar, "The application of the conjugate gradient method for the solution of operator equations arising in electromagnetic scattering from wire antennas", *Radio Science*, Vol. 19, No. 5, pp. 1156-1172, 1984.
- [53] T. K. Sarkar, E. Arvas and S. M. Rao, "Application of FFT and the conjugate gradient method for the solution of electromagnetic radiation from electrically large and small conducting bodies", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 34, No. 5, pp. 635-640, 1986.
- [54] T. K. Sarkar, "On the application of the generalized biconjugate gradient method", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 1, No. 3, pp. 223-242, 1987.
- [55] P. Glynn Rogers and M. W. Gunn, "An entire-domain Galerkin analysis of the moderately thick dipole", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 28, No. 1, pp. 117-121, 1980.
- [56] D. Wu, N. Inagaki and N. Kikuma, "Hallén type integral equation for cylindrical antennas with finite gap excitation", *IEICE Transactions on Communications*, Vol. E82-B, No. 12, pp. 2145-2152, 1999.
- [57] Q. Chen, Q. Yuan and K. Sawaya, "Fixed gap source model for MoM analysis of linear antennas using sinusoidal reaction matching", *Proceedings of the IEEE AP-S International Symposium 2000*, pp. 38-41.

- [58] Q. Chen, Q. Yuan and K. Sawaya, "Accurate source model for MoM analysis of linear antennas by using sinusoidal reaction matching technique", *IEICE Transactions on Communications*, Vol. E86-B, No. 2, pp. 870-872, 2003.

Παράρτημα Α

Βοηθητικές Πηγές για Προβλήματα Δύο Διαστάσεων

A.1 Νηματοειδείς Ηλεκτρικές Πηγές

Το ΗΜ πεδίο που παράγεται από μία κατανομή ηλεκτρικού ρεύματος $\vec{J}(\vec{r})$, η οποία βρίσκεται εντός ομοιογενούς και ιστροπικού χώρου διηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ και μαγνητικής διαπερατότητας μ , προσδιορίζεται με τη βοήθεια του διανυσματικού μαγνητικού δυναμικού \vec{A} , το οποίο εκφράζεται, εν γένει, ως το χωρικό ολοκλήρωμα

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dV', \quad (\text{A.1})$$

όπου $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ ο κυματικός αριθμός και $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ η απόσταση από το σημείο της πηγής \vec{r}' στο σημείο παρατήρησης \vec{r} . Μετά τον υπολογισμό του διανυσματικού μαγνητικού δυναμικού \vec{A} , προσδιορίζονται οι εκφράσεις του ΗΜ πεδίου με εφαρμογή των σχέσεων

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}), \quad (\text{A.2a})$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}. \quad (\text{A.2b})$$

Η κατανομή ηλεκτρικού ρεύματος $\vec{J}(\vec{\rho})$ μιας νηματοειδούς πηγής άπειρου μήκους με προσανατολισμό κατά την κατεύθυνση του άξονα z , η οποία είναι τοποθετημένη στο σημείο (x_0, y_0) με διάνυσμα θέσης $\vec{\rho}_0$, εκφράζεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως εξής

$$\vec{J}(\vec{\rho}) = I_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \vec{z}, \quad (\text{A.3})$$

όπου I_0 η ένταση του ρεύματος και $\delta(\bullet)$ η κρουστική συνάρτηση. Από τις σχέσεις (A.1)-(A.3) προκύπτουν οι εκφράσεις για τις συνιστώσες του ΗΜ πεδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$E_z(\vec{\rho}; \vec{\rho}_0) = -I_0 \frac{k\zeta}{4} H_0^{(2)}(kR), \quad (\text{A.4a})$$

$$H_x(\vec{\rho}; \vec{\rho}_0) = I_0 \frac{jk(y - y_0)}{4R} H_1^{(2)}(kR), \quad (\text{A.4b})$$

$$H_y(\vec{\rho}; \vec{\rho}_0) = -I_0 \frac{jk(x-x_0)}{4R} H_1^{(2)}(kR), \quad (\text{A.4}\gamma)$$

όπου $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ η κυματική αντίσταση, $H_n^{(2)}(\bullet)$ η συνάρτηση Hankel δεύτερου είδους και τάξης n , και R η απόσταση

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}. \quad (\text{A.5})$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εκφράσεις των συνιστωσών του HM πεδίου σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Για μια νηματοειδή ηλεκτρική πηγή με προσανατολισμό κατά την κατεύθυνση του άξονα z , η οποία είναι τοποθετημένη στο σημείο (ρ_0, ϕ_0) με διάνυσμα θέσης $\vec{\rho}_0$, οι εν λόγω συνιστώσες εκφράζονται ως εξής

$$E_z(\vec{\rho}; \vec{\rho}_0) = -I_0 \frac{k\zeta}{4} H_0^{(2)}(kR), \quad (\text{A.6}\alpha)$$

$$H_\rho(\vec{\rho}; \vec{\rho}_0) = I_0 \frac{jk\rho_0 \sin(\phi - \phi_0)}{4R} H_1^{(2)}(kR), \quad (\text{A.6}\beta)$$

$$H_\phi(\vec{\rho}; \vec{\rho}_0) = -I_0 \frac{jk[\rho - \rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]}{4R} H_1^{(2)}(kR), \quad (\text{A.6}\gamma)$$

όπου R η απόσταση

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)}. \quad (\text{A.7})$$

A.2 Νηματοειδείς Μαγνητικές Πηγές

Το HM πεδίο που παράγεται από μία κατανομή μαγνητικού ρεύματος $\vec{M}(\vec{r}')$, η οποία βρίσκεται εντός ομοιογενούς και ισοτροπικού χώρου διηλεκτρικής επιτρεπτότητας ε και μαγνητικής διαπερατότητας μ , προσδιορίζεται με τη βοήθεια του διανυσματικού ηλεκτρικού δυναμικού \vec{F} , το οποίο εκφράζεται, εν γένει, ως το χωρικό ολοκλήρωμα

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iiint_V \vec{M}(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dV', \quad (\text{A.8})$$

όπου $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ ο κυματικός αριθμός και $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ η απόσταση από το σημείο της πηγής \vec{r}' στο σημείο παρατήρησης \vec{r} . Μετά τον υπολογισμό του διανυσματικού ηλεκτρικού δυναμικού \vec{F} , προσδιορίζονται οι εκφράσεις του HM πεδίου με εφαρμογή των σχέσεων

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{F}, \quad (\text{A.9}\alpha)$$

$$\vec{H} = -j\omega\vec{F} - \frac{j}{\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{F}). \quad (\text{A.9}\beta)$$

Οι εκφράσεις για τις συνιστώσες του ΗΜ πεδίου μιας νηματοειδούς μαγνητικής πηγής μπορούν να προκύψουν άμεσα από τις αντίστοιχες εκφράσεις της νηματοειδούς ηλεκτρικής πηγής (Α.4)-(Α.7) με εφαρμογή της αρχής της δυαδικότητας, όπως καθορίζει η αντιστοίχιση του Πίνακα Α.1 [1].

Πίνακας Α. 1. Αντιστοίχιση δυαδικών ποσοτήτων ηλεκτρικών και μαγνητικών πηγών ρεύματος.

$\vec{J}(\vec{r})$	$\vec{M}(\vec{r})$
\vec{A}	\vec{F}
\vec{J}	\vec{M}
\vec{E}	\vec{H}
\vec{H}	$-\vec{E}$
ϵ	μ
μ	ϵ
k	k
ζ	$1/\zeta$

A.3 Βιβλιογραφία

- [1] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley and Sons, 1989.

Παράρτημα Β

Βοηθητικές Πηγές για Προβλήματα Τριών Διαστάσεων

Β.1 Στοιχειώδη Ηλεκτρικά Δίπολα

Το ΗΜ πεδίο που παράγεται από ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο, το οποίο βρίσκεται εντός ομοιογενούς και ιστροπικού χώρου διηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ και μαγνητικής διαπερατότητας μ , προσδιορίζεται με τη βοήθεια του διανυσματικού μαγνητικού δυναμικού \vec{A} , το οποίο εκφράζεται, εν γένει, ως το χωρικό ολοκλήρωμα

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dV', \quad (\text{B.1})$$

όπου $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ ο κυματικός αριθμός και $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ η απόσταση από το σημείο του διπόλου \vec{r}' στο σημείο παρατήρησης \vec{r} . Μετά τον υπολογισμό του διανυσματικού μαγνητικού δυναμικού \vec{A} , προσδιορίζονται οι εκφράσεις του ΗΜ πεδίου με εφαρμογή των σχέσεων

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \frac{j}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}), \quad (\text{B.2}\alpha)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}. \quad (\text{B.2}\beta)$$

Οι συνιστώσες του παραγόμενου ΗΜ πεδίου από ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο με διπολική ροπή $p = I_0 l$ κατά την κατεύθυνση του άξονα x , το οποίο είναι τοποθετημένο στο σημείο (x_0, y_0, z_0) με διάνυσμα θέσης \vec{r}_0 , δίνονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες από τις σχέσεις

$$E_x(\vec{r}; \vec{r}_0) = -j \frac{p\zeta}{4\pi k} \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{1 + jkR}{R^3} \\ + \frac{k^2 R^2 - 3(1 + jkR)}{R^5} [R^2 - (x - x_0)^2] \end{array} \right\} e^{-jkR}, \quad (\text{B.3}\alpha)$$

$$E_y(\vec{r}; \vec{r}_0) = j \frac{p\zeta}{4\pi k} (x - x_0)(y - y_0) \left[\frac{k^2 R^2 - 3(1 + jkR)}{R^5} \right] e^{-jkR}, \quad (\text{B.3}\beta)$$

$$E_z(\vec{r}; \vec{r}_0) = j \frac{p\zeta}{4\pi k} (x - x_0)(z - z_0) \left[\frac{k^2 R^2 - 3(1 + jkR)}{R^5} \right] e^{-jkR}, \quad (\text{B.3}\gamma)$$

$$H_y(\vec{r}; \vec{r}_0) = -\frac{p}{4\pi} (z - z_0) \frac{1 + jkR}{R^3} e^{-jkR}, \quad (\text{B.3}\delta)$$

$$H_z(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{p}{4\pi} (y - y_0) \frac{1 + jkR}{R^3} e^{-jkR}, \quad (\text{B.3}\epsilon)$$

όπου $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ η κυματική αντίσταση και R η απόσταση

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \quad (\text{B.4})$$

Οι συνιστώσες του παραγόμενου ΗΜ πεδίου από ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο με διπολική ροπή $p = I_0 l$ κατά την κατεύθυνση του άξονα y , το οποίο είναι τοποθετημένο στο σημείο (x_0, y_0, z_0) με διάνυσμα θέσης \vec{r}_0 , δίνονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες από τις σχέσεις

$$E_x(\vec{r}; \vec{r}_0) = j \frac{p\zeta}{4\pi k} (y - y_0)(x - x_0) \left[\frac{k^2 R^2 - 3(1 + jkR)}{R^5} \right] e^{-jkR}, \quad (\text{B.5}\alpha)$$

$$E_y(\vec{r}; \vec{r}_0) = -j \frac{p\zeta}{4\pi k} \left\{ \begin{array}{c} 2 \frac{1 + jkR}{R^3} \\ + \frac{k^2 R^2 - 3(1 + jkR)}{R^5} [R^2 - (y - y_0)^2] \end{array} \right\} e^{-jkR}, \quad (\text{B.5}\beta)$$

$$E_z(\vec{r}; \vec{r}_0) = j \frac{p\zeta}{4\pi k} (y - y_0)(z - z_0) \left[\frac{k^2 R^2 - 3(1 + jkR)}{R^5} \right] e^{-jkR}, \quad (\text{B.5}\gamma)$$

$$H_x(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{p}{4\pi} (z - z_0) \frac{1 + jkR}{R^3} e^{-jkR}, \quad (\text{B.5}\delta)$$

$$H_z(\vec{r}; \vec{r}_0) = -\frac{p}{4\pi} (x - x_0) \frac{1 + jkR}{R^3} e^{-jkR}, \quad (\text{B.5}\epsilon)$$

Οι συνιστώσες του παραγόμενου ΗΜ πεδίου από ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο με διπολική ροπή $p = I_0 l$ κατά την κατεύθυνση του άξονα z , το οποίο είναι τοποθετημένο στο σημείο (x_0, y_0, z_0) με διάνυσμα θέσης \vec{r}_0 , δίνονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες από τις ακόλουθες σχέσεις

$$E_x(\vec{r}; \vec{r}_0) = j \frac{p\zeta}{4\pi k} (z - z_0)(x - x_0) \left[\frac{k^2 R^2 - 3(1 + jkR)}{R^5} \right] e^{-jkR}, \quad (\text{B.6}\alpha)$$

$$E_y(\vec{r}; \vec{r}_0) = j \frac{p\zeta}{4\pi k} (z - z_0)(y - y_0) \left[\frac{k^2 R^2 - 3(1 + jkR)}{R^5} \right] e^{-jkR}, \quad (\text{B.6}\beta)$$

$$E_z(\vec{r}; \vec{r}_0) = -j \frac{P\zeta}{4\pi k} \left\{ \begin{array}{c} 2 \frac{1+jkR}{R^3} \\ + \frac{k^2 R^2 - 3(1+jkR)}{R^5} [R^2 - (z-z_0)^2] \end{array} \right\} e^{-jkR}, \quad (\text{B.6}\gamma)$$

$$H_x(\vec{r}; \vec{r}_0) = -\frac{P}{4\pi} (y-y_0) \frac{1+jkR}{R^3} e^{-jkR}, \quad (\text{B.6}\delta)$$

$$H_y(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{P}{4\pi} (x-x_0) \frac{1+jkR}{R^3} e^{-jkR}, \quad (\text{B.6}\epsilon)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εκφράσεις των συνιστωσών του ΗΜ πεδίου σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Για ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο με διπολική ροπή $p = I_0 l$ κατά την κατεύθυνση του άξονα z , το οποίο είναι τοποθετημένο στο σημείο (ρ_0, ϕ_0, z_0) με διάνυσμα θέσης \vec{r}_0 , οι εν λόγω συνιστώσες εκφράζονται ως εξής

$$E_\rho(\vec{r}; \vec{r}_0) = j \frac{P\zeta}{4\pi k} (z-z_0) [\rho - \rho_0 \cos(\phi - \phi_0)] \left[\frac{k^2 R^2 - 3(1+jkR)}{R^5} \right] e^{-jkR}, \quad (\text{B.7}\alpha)$$

$$E_\phi(\vec{r}; \vec{r}_0) = j \frac{P\zeta}{4\pi k} (z-z_0) \rho_0 \sin(\phi - \phi_0) \left[\frac{k^2 R^2 - 3(1+jkR)}{R^5} \right] e^{-jkR}, \quad (\text{B.7}\beta)$$

$$E_z(\vec{r}; \vec{r}_0) = -j \frac{P\zeta}{4\pi k} \left\{ \begin{array}{c} 2 \frac{1+jkR}{R^3} \\ + \frac{k^2 R^2 - 3(1+jkR)}{R^5} [R^2 - (z-z_0)^2] \end{array} \right\} e^{-jkR}, \quad (\text{B.7}\gamma)$$

$$H_\rho(\vec{r}; \vec{r}_0) = -\frac{P}{4\pi} \rho_0 \sin(\phi - \phi_0) \frac{1+jkR}{R^3} e^{-jkR}, \quad (\text{B.7}\delta)$$

$$H_\phi(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{P}{4\pi} [\rho - \rho_0 \cos(\phi - \phi_0)] \frac{1+jkR}{R^3} e^{-jkR}, \quad (\text{B.7}\epsilon)$$

όπου R η απόσταση

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z - z_0)^2}. \quad (\text{B.8})$$

B.2 Στοιχειώδη Μαγνητικά Δίπολα

Το ΗΜ πεδίο που παράγεται από ένα στοιχειώδες μαγνητικό δίπολο, το οποίο βρίσκεται εντός ομοιογενούς και ιστροπικού χώρου διηλεκτρικής επιτρεπτότητας ϵ και μαγνητικής διαπερατότητας μ , προσδιορίζεται με τη βοήθεια του διανυσματικού ηλεκτρικού δυναμικού \vec{F} , το οποίο εκφράζεται, εν γένει, ως το χωρικό ολοκλήρωμα

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iiint_V \vec{M}(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dV', \quad (\text{B.9})$$

όπου $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ ο κυματικός αριθμός και $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ η απόσταση από το σημείο του διπόλου \vec{r}' στο σημείο παρατήρησης \vec{r} . Μετά τον υπολογισμό του διανυσματικού ηλεκτρικού δυναμικού \vec{F} , προσδιορίζονται οι εκφράσεις του ΗΜ πεδίου με εφαρμογή των σχέσεων

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{F}, \quad (\text{B.10a})$$

$$\vec{H} = -j\omega\vec{F} - \frac{j}{\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{F}). \quad (\text{B.10b})$$

Οι εκφράσεις για τις συνιστώσες του ΗΜ πεδίου ενός στοιχειώδους μαγνητικού διπόλου μπορούν να προκύψουν άμεσα από τις αντίστοιχες εκφράσεις του στοιχειώδους ηλεκτρικού διπόλου (B.3)-(B.8) με εφαρμογή της αρχής της δυαδικότητας, όπως καθορίζει η αντιστοίχιση του Πίνακα Α.1.

B.3 Ηλεκτρικά Δίπολα Ημιτονοειδούς Κατανομής Ρεύματος

Εκτός από στοιχειώδη ηλεκτρικά ή μαγνητικά δίπολα, ως βοηθητικές πηγές μπορούν να χρησιμοποιηθούν οποιεσδήποτε πηγές, τα ΗΜ πεδία των οποίων ικανοποιούν την εξίσωση Helmholtz. Όσον αφορά τα ηλεκτρικά δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος, σημειώνεται ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως βοηθητικές πηγές, καθώς τα ΗΜ πεδία τους είναι γνωστά σε αναλυτική μορφή και δεν παρουσιάζουν δυσκολίες στον υπολογισμό τους.

Το ΗΜ πεδίο που παράγεται από ένα ηλεκτρικό δίπολο μήκους $2l$ και ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος, το οποίο είναι τοποθετημένο στο σημείο (x_0, y_0, z_0) ή (ρ_0, ϕ_0, z_0) με διάνυσμα θέσης \vec{r}_0 , προσδιορίζεται με εφαρμογή των σχέσεων (B.1) και (B.2) για τη ρευματική κατανομή

$$I(z) = I_0 \sin[k(l - |z - z_0|)] \Big|_{|z - z_0| \leq l}, \quad (\text{B.11})$$

όπου I_0 η μέγιστη τιμή του ρεύματος.

Οι συνιστώσες του ΗΜ πεδίου δίνονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες από τις σχέσεις

$$E_x(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{jI_0 \zeta}{4\pi} \left[\begin{array}{c} (z - z_0 - l) \frac{e^{-jkR^+}}{R^+} \\ + (z - z_0 + l) \frac{e^{-jkR^-}}{R^-} \\ - 2(z - z_0) \cos(kl) \frac{e^{-jkR}}{R} \end{array} \right] \frac{x - x_0}{R^2 - (z - z_0)^2}, \quad (\text{B.12a})$$

$$E_y(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{jI_0 \zeta}{4\pi} \left[\begin{array}{c} (z - z_0 - l) \frac{e^{-jkR^+}}{R^+} \\ + (z - z_0 + l) \frac{e^{-jkR^-}}{R^-} \\ - 2(z - z_0) \cos(kl) \frac{e^{-jkR}}{R} \end{array} \right] \frac{y - y_0}{R^2 - (z - z_0)^2}, \quad (\text{B.12}\beta)$$

$$E_z(\vec{r}; \vec{r}_0) = -\frac{jI_0 \zeta}{4\pi} \left[\frac{e^{-jkR^+}}{R^+} + \frac{e^{-jkR^-}}{R^-} - 2 \cos(kl) \frac{e^{-jkR}}{R} \right], \quad (\text{B.12}\gamma)$$

$$H_x(\vec{r}; \vec{r}_0) = -\frac{jI_0}{4\pi} \left[e^{-jkR^+} + e^{-jkR^-} - 2 \cos(kl) e^{-jkR} \right] \frac{y - y_0}{R^2 - (z - z_0)^2}, \quad (\text{B.12}\delta)$$

$$H_y(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{jI_0}{4\pi} \left[e^{-jkR^+} + e^{-jkR^-} - 2 \cos(kl) e^{-jkR} \right] \frac{x - x_0}{R^2 - (z - z_0)^2}, \quad (\text{B.12}\epsilon)$$

όπου R^\pm και R οι αποστάσεις

$$R^\pm = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0 \mp l)^2}, \quad (\text{B.13}\alpha)$$

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \quad (\text{B.13}\beta)$$

Οι συνιστώσες του ΗΜ πεδίου δίνονται σε κυλινδρικές συντεταγμένες από τις σχέσεις

$$E_\rho(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{jI_0 \zeta}{4\pi} \left[\begin{array}{c} (z - z_0 - l) \frac{e^{-jkR^+}}{R^+} \\ + (z - z_0 + l) \frac{e^{-jkR^-}}{R^-} \\ - 2(z - z_0) \cos(kl) \frac{e^{-jkR}}{R} \end{array} \right] \frac{\rho - \rho_0 \cos(\phi - \phi_0)}{R^2 - (z - z_0)^2}, \quad (\text{B.14}\alpha)$$

$$E_\phi(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{jI_0 \zeta}{4\pi} \left[\begin{array}{c} (z - z_0 - l) \frac{e^{-jkR^+}}{R^+} \\ + (z - z_0 + l) \frac{e^{-jkR^-}}{R^-} \\ - 2(z - z_0) \cos(kl) \frac{e^{-jkR}}{R} \end{array} \right] \frac{\rho_0 \sin(\phi - \phi_0)}{R^2 - (z - z_0)^2}, \quad (\text{B.14}\beta)$$

$$E_z(\vec{r}; \vec{r}_0) = -\frac{jI_0 \zeta}{4\pi} \left[\frac{e^{-jkR^+}}{R^+} + \frac{e^{-jkR^-}}{R^-} - 2 \cos(kl) \frac{e^{-jkR}}{R} \right], \quad (\text{B.14}\gamma)$$

$$H_{\rho}(\vec{r}; \vec{r}_0) = -\frac{jI_0}{4\pi} \left[e^{-jkR^+} + e^{-jkR^-} - 2\cos(kl)e^{-jkR} \right] \frac{\rho_0 \sin(\phi - \phi_0)}{R^2 - (z - z_0)^2}, \quad (\text{B.14}\delta)$$

$$H_{\phi}(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{jI_0}{4\pi} \left[e^{-jkR^+} + e^{-jkR^-} - 2\cos(kl)e^{-jkR} \right] \frac{\rho - \rho_0 \cos(\phi - \phi_0)}{R^2 - (z - z_0)^2}, \quad (\text{B.14}\epsilon)$$

όπου R^{\pm} και R οι αποστάσεις

$$R^{\pm} = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z - z_0 \mp l)^2}, \quad (\text{B.15}\alpha)$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + (z - z_0)^2}. \quad (\text{B.15}\beta)$$

B.4 Ηλεκτρικά Μονόπολα Ημιτονοειδούς Κατανομής Ρεύματος

Εναλλακτικά, αλλά και συμπληρωματικά προς τα ηλεκτρικά δίπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος που αναφέρθηκαν προηγουμένως, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν ηλεκτρικά μονόπολα ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος, τα οποία αντιστοιχούν στο άνω ή κάτω μισό ενός διπόλου. Για το διαχωρισμό των μονοπόλων, εισάγονται οι όροι «θετικό» και «αρνητικό» μονόπολο, αναφορικά με το άνω και κάτω μισό του αντίστοιχου διπόλου, όπως και οι αντίστοιχοι εκθέτες «+» και «-».

Τα ΗΜ πεδία που παράγονται από τα ηλεκτρικά μονόπολα μήκους l και ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος, τα οποία αντιστοιχούν στο άνω και κάτω μισό της κατανομής ρεύματος του αντίστοιχου διπόλου, προσδιορίζονται με εφαρμογή των σχέσεων (B.1) και (B.2). Σημειώνεται ότι ως κέντρο ενός μονοπόλου θεωρείται το κέντρο του αντίστοιχου διπόλου και όχι το γεωμετρικό κέντρο του ίδιου. Οι ρευματικές κατανομές επί των συνιστωσών μονοπόλων ενός διπόλου εκφράζονται ως εξής

$$I^{\pm}(z) = I_0 \sin[k(l - |z - z_0|)] u(\pm(z - z_0)), |z - z_0| \leq l, \quad (\text{B.16})$$

όπου $u(\bullet)$ η βηματική συνάρτηση, η οποία ορίζεται ως εξής

$$u(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}. \quad (\text{B.17})$$

Οι συνιστώσες του ΗΜ πεδίου δίνονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες από τις σχέσεις

$$E_x^{\pm}(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{jI_0 \zeta}{4\pi} \left[\begin{array}{c} (z - z_0 \mp l) \frac{e^{-jkR^{\pm}}}{R^{\pm}} \\ -(z - z_0) \cos(kl) \frac{e^{-jkR}}{R} \\ \pm D \sin(kl) \frac{e^{-jkR}}{R} \end{array} \right] \frac{x - x_0}{R^2 - (z - z_0)^2}, \quad (\text{B.18}\alpha)$$

$$E_y^\pm(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{jI_0\zeta}{4\pi} \left[\begin{array}{c} (z - z_0 \mp l) \frac{e^{-jkR^\pm}}{R^\pm} \\ -(z - z_0) \cos(kl) \frac{e^{-jkR}}{R} \\ \pm D \sin(kl) \frac{e^{-jkR}}{R} \end{array} \right] \frac{y - y_0}{R^2 - (z - z_0)^2}, \quad (\text{B.18}\beta)$$

$$E_z^\pm(\vec{r}; \vec{r}_0) = -\frac{jI_0\zeta}{4\pi} \left[\begin{array}{c} \frac{e^{-jkR^\pm}}{R^\pm} - \cos(kl) \frac{e^{-jkR}}{R} \\ \mp \sin(kl) \frac{(z - z_0)(1 + jkR) \exp(-jkR)}{kR^2 R} \end{array} \right], \quad (\text{B.18}\gamma)$$

$$H_x^\pm(\vec{r}; \vec{r}_0) = -\frac{j}{4\pi} \left[\begin{array}{c} e^{-jkR^\pm} - \cos(kl) e^{-jkR} \\ \mp j \sin(kl) \frac{z - z_0}{R} e^{-jkR} \end{array} \right] \frac{y - y_0}{R^2 - (z - z_0)^2}, \quad (\text{B.18}\delta)$$

$$H_y^\pm(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{j}{4\pi} \left[\begin{array}{c} e^{-jkR^\pm} - \cos(kl) e^{-jkR} \\ \mp j \sin(kl) \frac{z - z_0}{R} e^{-jkR} \end{array} \right] \frac{x - x_0}{R^2 - (z - z_0)^2}, \quad (\text{B.18}\epsilon)$$

όπου R^\pm , R οι αποστάσεις των σχέσεων (B.13) και D η εξής ποσότητα

$$D = \frac{R^2 - (1 + jkR)(z - z_0)^2}{kR^2}. \quad (\text{B.19})$$

Οι συνιστώσες του ΗΜ πεδίου δίνονται σε κυλινδρικές συντεταγμένες από τις σχέσεις

$$E_\rho^\pm(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{jI_0\zeta}{4\pi} \left[\begin{array}{c} (z - z_0 \mp l) \frac{e^{-jkR^\pm}}{R^\pm} \\ -(z - z_0) \cos(kl) \frac{e^{-jkR}}{R} \\ \pm D \sin(kl) \frac{e^{-jkR}}{R} \end{array} \right] \frac{\rho - \rho_0 \cos(\phi - \phi_0)}{R^2 - (z - z_0)^2}, \quad (\text{B.20}\alpha)$$

$$E_\phi^\pm(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{jI_0\zeta}{4\pi} \left[\begin{array}{c} (z - z_0 \mp l) \frac{\exp(-jkR^\pm)}{R^\pm} \\ -(z - z_0) \cos(kl) \frac{\exp(-jkR)}{R} \\ \pm D \sin(kl) \frac{\exp(-jkR)}{R} \end{array} \right] \frac{\rho_0 \sin(\phi - \phi_0)}{R^2 - (z - z_0)^2}, \quad (\text{B.20}\beta)$$

$$E_z^\pm(\vec{r}; \vec{r}_0) = -\frac{jI_0 \zeta}{4\pi} \left[\frac{e^{-jkR^\pm} - \cos(kl) \frac{e^{-jkR}}{R}}{R^\pm} - \mp \sin(kl) \frac{(z-z_0)(1+jkR) e^{-jkR}}{kR^2 R} \right], \quad (\text{B.20}\gamma)$$

$$H_\rho^\pm(\vec{r}; \vec{r}_0) = -\frac{j}{4\pi} \left[\frac{e^{-jkR^\pm} - \cos(kl) e^{-jkR}}{R^\pm} - \mp j \sin(kl) \frac{z-z_0}{R} e^{-jkR} \right] \frac{\rho_0 \sin(\phi - \phi_0)}{R^2 - (z-z_0)^2}, \quad (\text{B.20}\delta)$$

$$H_\phi^\pm(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{j}{4\pi} \left[\frac{e^{-jkR^\pm} - \cos(kl) e^{-jkR}}{R^\pm} - \mp j \sin(kl) \frac{z-z_0}{R} e^{-jkR} \right] \frac{\rho - \rho_0 \cos(\phi - \phi_0)}{R^2 - (z-z_0)^2}, \quad (\text{B.20}\epsilon)$$

όπου R^\pm , R οι αποστάσεις των σχέσεων (B.15) και D η ποσότητα της σχέσης (B.19).

Επίλογος

Γενικά

Η παρούσα διατριβή εντάσσεται στη θεματική περιοχή του υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού, η οποία έχει συγκεντρώσει το έντονο ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας τις τελευταίες δεκαετίες, κυρίως εξαιτίας της ραγδαίας αύξησης της διαθέσιμης υπολογιστικής ισχύος, η οποία καθιστά εφικτή την επίλυση ολοένα και πιο πολύπλοκων προβλημάτων με εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων. Ειδικότερα, αντικείμενο της παρούσας διατριβής αποτελεί η διερεύνηση των δυνατοτήτων εφαρμογής της MAS, λεπτομέρειες για την εδραίωση και ανάπτυξη της οποίας αναφέρθηκαν στα Κεφάλαια 1 και 2, σε προβλήματα ακτινοβολίας. Σημειώνεται στο σημείο αυτό ότι, όπως έχει εξάλλου προαναφερθεί, η MAS έχει χρησιμοποιηθεί ευρύτατα για την επίλυση προβλημάτων σκέδασης από κλειστά σώματα και περιοδικές επιφάνειες. Αντίθετα, η MAS δεν έχει τύχει ευρείας εφαρμογής σε προβλήματα ακτινοβολίας, παρά το γεγονός ότι δεν υπάρχει κάποιος εγγενής περιορισμός που να το αποκλείει. Επιπρόσθετα, έχουν γίνει αναφορές στη σχετική βιβλιογραφία για δυσκολίες εφαρμογής της MAS σε προβλήματα που εμπλέκουν ανοικτά χωρία, χωρίς, όμως, αυτές να συνοδεύονται από σχετικές λεπτομέρειες για τη φύση αυτών των δυσκολιών και τις επιπτώσεις τους.

Λόγω του γεγονότος ότι η πλειονότητα των δημοσιευμένων μελετών που σχετίζονται με την εφαρμογή της MAS σε προβλήματα ακτινοβολίας δεν είναι εκτενείς και συστηματικές, αποφασίστηκε εξ αρχής η ενδελεχής μελέτη κάποιων απλών προβλημάτων, από την οποία ενδεχομένως να είναι δυνατόν να εξαχθούν γενικά συμπεράσματα για τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά σύγκλισης των λύσεων, όπως και τη σύνδεση τους με τις παραμέτρους καθορισμού του πλήθους και της κατανομής των βοηθητικών πηγών, καθώς και των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών. Η επιλογή της μελέτης απλών προβλημάτων υπαγορεύθηκε και από την ανάγκη αποτίμησης της ακρίβειας των λύσεων με απευθείας σύγκριση με ακριβείς ή προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις, ή και με διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα. Σε όλες δε τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στη διερεύνηση της εξάρτησης του ρυθμού αριθμητικής σταθεροποίησης και της ακρίβειας των λύσεων από τις παραμέτρους μορφοποίησης των λύσεων, όπως και στην εξαγωγή πρακτικών κανόνων για τη συσχέτιση τους με τα γεωμετρικά και φυσικά χαρακτηριστικά του υπό εξέταση προβλήματος.

Ανακεφαλαίωση

Η ερευνητική εργασία που ολοκληρώθηκε στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής συνοψίζεται ως εξής:

- Μελετήθηκε διεξοδικά η υπάρχουσα βιβλιογραφία που αφορά τις ευρύτερα διαδεδομένες αριθμητικές μεθόδους υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού. Πιο συγκεκριμένα, εξετάστηκαν οι βασικές αρχές των τεχνικών διακριτοποίησης, ενώ ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στις φυσικές και μαθηματικές αρχές των αριθμητικών μεθόδων συναρτησιακών προσεγγίσεων, όπως και στις τεχνικές επίλυσης.
- Μελετήθηκε εκτενώς η MAS, αλλά και οι συγγενείς αριθμητικές μέθοδοι, δίνοντας έμφαση στη διερεύνηση των δυνατοτήτων αλλά και των εγγενών αδυναμιών τους. Ειδικότερα, εξετάστηκε η MAS σε σχέση με τα ακόλουθα θέματα:

- Τύποι προβλημάτων που είναι δυνατόν να επιλυθούν.
 - Τύποι βοηθητικών πηγών. Συναρτησιακές προσεγγίσεις για την περιγραφή των άγνωστων ΗΜ πεδίων.
 - Οριακές συνθήκες.
 - Δείκτης κατάστασης των γραμμικών συστημάτων.
 - Σύγκλιση των αριθμητικών λύσεων.
 - Εκτίμηση των σφαλμάτων ικανοποίησης των οριακών συνθηκών.
- Μελετήθηκαν οι υπάρχοντες κανόνες επιλογής των παραμέτρων που υπεισέρχονται στη διαδικασία μορφοποίησης των αριθμητικών λύσεων. Οι εν λόγω παράμετροι σχετίζονται με την επιλογή του πλήθους και της κατανομής των βοηθητικών πηγών, καθώς και των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών. Επιπρόσθετα, εξετάστηκαν οι δυνατότητες βελτιστοποίησης της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών, με σκοπό την ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων ικανοποίησης των οριακών συνθηκών, για δεδομένο αριθμό βοηθητικών πηγών.
- Μελετήθηκαν προβλήματα ακτινοβολίας στοιχειωδών ακτινοβολητών που βρίσκονται πλησίον της συνοριακής επιφάνειας ημιάπειρου διηλεκτρικού χώρου με απώλειες. Η σχετική ερευνητική δραστηριότητα συνοψίζεται ως εξής:
- Εφαρμογή της MAS σε περιπτώσεις στοιχειωδών ακτινοβολητών που βρίσκονται υπεράνω της επιφάνειας του εδάφους.
 - Μελέτη των χαρακτηριστικών σύγκλισης των λύσεων, μέσω του υπολογισμού των σφαλμάτων ικανοποίησης των οριακών συνθηκών και του ελέγχου της αριθμητικής ευστάθειας των λύσεων.
 - Έλεγχος της ακρίβειας των λύσεων με άμεση σύγκριση με ακριβείς ή προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις.
 - Εξαγωγή απλών κανόνων συσχέτισης των χαρακτηριστικών σύγκλισης των λύσεων και της συμπεριφοράς των σφαλμάτων ικανοποίησης των οριακών συνθηκών με τις παραμέτρους καθορισμού του πλήθους και της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών.
 - Μελέτη των χαρακτηριστικών σύγκλισης των λύσεων σε περιπτώσεις στοιχειωδών ακτινοβολητών που βρίσκονται υπό της επιφάνειας του εδάφους.
 - Διερεύνηση των δυνατοτήτων βελτιστοποίησης της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών με αξιοποίηση προσεγγιστικών μιγαδικών ειδώλων ή καυστικών επιφανειών.
 - Εξέταση της ακρίβειας των λύσεων στην περιοχή του μακρινού πεδίου, και ιδιαίτερα σε σημεία των οποίων η προβολή επί της συνοριακής επιφάνειας βρίσκεται εκτός της περιοχής που καταλαμβάνουν τα σημεία επιβολής των οριακών συνθηκών.
- Εξετάστηκαν οι δυνατότητες της MAS για την ανάλυση κεραιών σύρματος και στοιχειοκεραιών. Η σχετική ερευνητική δραστηριότητα συνοψίζεται ως εξής:
- Εφαρμογή της MAS σε μεμονωμένες κεραιές λεπτού σύρματος, για διάφορα πεδία διέγερσης.
 - Εξέταση της αριθμητικής ευστάθειας των λύσεων και αποτίμηση των σφαλμάτων ικανοποίησης των οριακών συνθηκών.
 - Σύγκριση των λύσεων που προκύπτουν για διαφορετικούς τύπους βοηθητικών πηγών.
 - Εξέταση της ακρίβειας των λύσεων με σύγκριση με αποτελέσματα άλλων μεθόδων ή διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα.
 - Εξαγωγή απλών κανόνων για την επιλογή του πλήθους των βοηθητικών πηγών.
 - Γενίκευση για την ανάλυση στοιχειοκεραιών παράλληλων στοιχείων σε τυχαίες θέσεις του χώρου.

- Αποτίμηση της επίδρασης των φαινομένων σύζευξης σε διατάξεις πομποδεκτών.
 - Γενίκευση για την ανάλυση κεραιών παχέος σύρματος.
- Εξετάστηκε η δυνατότητα υβριδοποίησης της MAS με την τεχνική συνταιριάσματος των αντιδράσεων (Reaction Matching-RM). Η προκύπτουσα υβριδική μέθοδος (MAS-RM) εφαρμόστηκε για την ανάλυση κεραιών σύρματος και στοιχειοκεραιών. Η σχετική ερευνητική δραστηριότητα συνοψίζεται ως εξής:
- Διατύπωση και μορφοποίηση της MAS-RM. Εφαρμογή σε μεμονωμένες κεραιές λεπτού σύρματος, για διάφορα πεδία διέγερσης.
 - Εξέταση της αριθμητικής ευστάθειας των λύσεων και αποτίμηση των σφαλμάτων ικανοποίησης των οριακών συνθηκών.
 - Διεξοδική αξιολόγηση των λύσεων που προκύπτουν εισάγοντας βοηθητικές μονοπολικές πηγές στα άκρα, αλλά και σύγκριση αυτών με τις λύσεις που προκύπτουν συμβατικά.
 - Εξέταση της ακρίβειας των λύσεων με σύγκριση με αποτελέσματα άλλων μεθόδων ή διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα.
 - Εξαγωγή απλών κανόνων για την επιλογή του πλήθους των βοηθητικών πηγών.
 - Γενίκευση για την ανάλυση στοιχειοκεραιών παράλληλων στοιχείων σε τυχαίες θέσεις του χώρου.
 - Εφαρμογή σε προβλήματα σχετικά μεγάλης κλίμακας (στοιχειοκεραίες μεγάλου αριθμού στοιχείων, κεραιές μεγάλου μήκους).
 - Γενίκευση για την ανάλυση κεραιών παχέος σύρματος.

Συμπεράσματα-Σημεία που Προάγεται η Επιστήμη

Από την εκτελεσθείσα έρευνα και τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην παρούσα διατριβή, είναι δυνατόν να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα, τα οποία αφορούν τις δυνατότητες εφαρμογής της MAS σε προβλήματα ακτινοβολίας.

Όσον αφορά τη μελέτη των στοιχειωδών ακτινοβολητών πλησίον της συνοριακής επιφάνειας ημίαιρου διηλεκτρικού χώρου με απώλειες, αξίζει να σημειωθούν τα εξής:

- ❖ Οι κατανομές των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών παρουσιάζουν ισχυρή εξάρτηση από την απόσταση μεταξύ διαδοχικών βοηθητικών πηγών. Όταν αυτή είναι μικρή, τα σφάλματα μεταξύ των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών είναι πολύ μικρά, σε αντίθεση με τα σφάλματα πέραν των ορίων της περιοχής που καταλαμβάνουν τα σημεία επιβολής των οριακών συνθηκών. Καθώς η απόσταση αυξάνει, τα πρώτα προοδευτικά αυξάνονται και τα δεύτερα μειώνονται. Για μεγάλες τιμές της απόστασης, τα σφάλματα εκτός της περιοχής που καταλαμβάνουν τα σημεία επιβολής των οριακών συνθηκών είναι πολύ μικρά, ενώ τα σφάλματα εντός της περιοχής αυτής είναι πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερα.
- ❖ Από τη διερεύνηση της εξάρτησης των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών από τις παραμέτρους καθορισμού του πλήθους και της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών, καθώς και των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών, συνάγεται το συμπέρασμα ότι, τουλάχιστον για όχι πολύ μικρούς αριθμούς βοηθητικών πηγών, οι λύσεις χαρακτηρίζονται από σχετικά σταθμισμένα σφάλματα επί ενός σημαντικού εύρους μεταβολής της απόστασης μεταξύ τους. Μάλιστα, οι λύσεις είναι ικανοποιητικής ακρίβειας, τουλάχιστον όσον αφορά την περιοχή του κοντινού πεδίου, όταν η απόσταση μεταβάλλεται σε ένα ακόμη μεγαλύτερο διάστημα, παρά το γεγονός ότι οι μέγιστες τιμές των σφαλμάτων μπορεί να είναι αρκετά μεγάλες συγκριτικά προς τα ελάχιστα σφάλματα που είναι επιτεύξιμα διατηρώντας σταθερό το πλήθος των βοηθητικών πηγών.
- ❖ Η εξάρτηση των μέγιστων τιμών των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών διαφοροποιείται ανάλογα με το μέσο εντός του οποίου ακτινοβολεί ο υπό εξέταση

ακτινοβολητής. Όταν ο ακτινοβολητής βρίσκεται στο κενό υπεράνω του εδάφους, η συμπεριφορά των μέγιστων τιμών των σφαλμάτων παρουσιάζει εμφανείς κανονικότητες. Αντίθετα, στην περίπτωση κατά την οποία ο ακτινοβολητής βρίσκεται εντός του εδάφους, η συμπεριφορά των σφαλμάτων είναι ανώμαλη, καθόσον παρουσιάζει ακανόνιστες ταλαντώσεις με τη μεταβολή της απόστασης μεταξύ διαδοχικών πηγών. Το γεγονός αυτό οφείλεται στη μεγάλη ανομοιογένεια του πεδίου διέγερσης στην περίπτωση αυτή, σε αντίθεση με την περίπτωση κατά την οποία ο υπό εξέταση ακτινοβολητής βρίσκεται στο κενό υπεράνω του εδάφους. Σημειώνεται ότι η ακανόνιστη συμπεριφορά των σφαλμάτων αναμένεται να εμφανίζεται εντονότερη όσο μεγαλύτερο είναι το μέτρο της μιγαδικής διηλεκτρικής σταθεράς του εδάφους. Μάλιστα, σε περιπτώσεις πυκνών διηλεκτρικών ή διηλεκτρικών με μεγάλες απώλειες (π.χ. υγρό έδαφος, θάλασσα), αναμένεται αύξηση του πλήθους των βοηθητικών πηγών που απαιτείται για τον προσδιορισμό αριθμητικά ευσταθών λύσεων με σφάλματα που είναι συγκρίσιμα με αυτά που παρουσιάστηκαν για τυπικά εδάφη στην παρούσα διατριβή.

- ❖ Σε κάθε περίπτωση, ανεξάρτητα από το αν ο υπό εξέταση ακτινοβολητής βρίσκεται στο κενό ή εντός του εδάφους, είναι δυνατόν να προσδιοριστούν ικανοποιητικές λύσεις διενεργώντας μικρό σχετικά πλήθος δοκιμών.
- ❖ Από τη διερεύνηση των δυνατοτήτων βελτιστοποίησης με αξιοποίηση των θέσεων μιγαδικών ειδώλων προέκυψε ότι η βελτίωση των σφαλμάτων των οριακών συνθηκών είναι οριακή, τουλάχιστον όταν το πλήθος των βοηθητικών πηγών δεν είναι πολύ μικρό. Για μικρό πλήθος βοηθητικών πηγών, η αξιοποίηση των μιγαδικών ειδώλων μπορεί να οδηγήσει σε λύσεις με σημαντικά μικρότερα σφάλματα στη συνοριακή επιφάνεια, αν και αυτό δεν εξασφαλίζει ότι οι λύσεις χαρακτηρίζονται και από μικρότερα σφάλματα παντού στο χώρο. Εξάλλου, σε τέτοιες περιπτώσεις, τα σφάλματα των οριακών συνθηκών είναι ούτως ή άλλως αρκετά μεγάλα, οπότε η εξέταση της ακρίβειας των λύσεων πρέπει να γίνει και με άλλα κριτήρια. Αντίστοιχα συμπεράσματα προέκυψαν και στην περίπτωση αξιοποίησης των καυστικών επιφανειών, η οποία έχει προταθεί από άλλους ερευνητές στο παρελθόν. Ως εκ τούτου, είναι μάλλον προτιμότερη η διενέργεια αριθμού δοκιμών αυξανόμενου του πλήθους των βοηθητικών πηγών έως την επίτευξη κάποιας επιθυμητής στάθμης σφαλμάτων, παρά η εκ των προτέρων αναζήτηση βέλτιστων κατανομών των θέσεων των βοηθητικών πηγών.
- ❖ Πέραν των προαναφερθέντων, είναι δυνατή η θεώρηση των θέσεων των βοηθητικών πηγών ως ανεξάρτητων διανυσμάτων και η εφαρμογή αλγορίθμων βελτιστοποίησης, όπως είναι οι γενετικοί αλγόριθμοι, για τον προσδιορισμό κατανομών που ελαχιστοποιούν κάποια κατάλληλα επιλεγμένη συνάρτηση κόστους, η οποία συναρτάται με τα σφάλματα των οριακών συνθηκών. Πάντως, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι η εφαρμογή τέτοιων τεχνικών συνεπάγεται σημαντικό πρόσθετο υπολογιστικό κόστος, το οποίο μπορεί να αυξάνει δραματικά τον απαιτούμενο χρόνο για τον προσδιορισμό βέλτιστων λύσεων. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, η εφαρμογή τεχνικών βελτιστοποίησης μάλλον αντενδείκνυται, ιδιαίτερα όταν το πλήθος των βοηθητικών πηγών είναι σχετικά μεγάλο.
- ❖ Από την εξέταση των λύσεων στην περιοχή του μακρινού πεδίου προέκυψε ότι οι λύσεις είναι ακριβείς μέχρι κάποια κρίσιμη απόσταση, πέραν της οποίας αποτυγχάνουν να προβλέψουν την απλή συμπεριφορά εξασθένησης. Πιο συγκεκριμένα, απευθείας σύγκριση με προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις κατέδειξε ότι οι λύσεις είναι ακριβείς σε σημεία των οποίων οι προβολές επί της συνοριακής επιφάνειας βρίσκονται εντός της περιοχής που καταλαμβάνουν τα σημεία επιβολής των οριακών συνθηκών. Αντίθετα, οι λύσεις παρουσιάζουν σημαντική απόκλιση ως προς την αναμενόμενη συμπεριφορά εξασθένησης εκτός αυτής της περιοχής. Συμπερασματικά, δοθέντος ότι η MAS βασίζεται στη χρήση διακριτών βοηθητικών πηγών, ο εν λόγω περιορισμός συνιστά εγγενή αδυναμία της MAS.
- ❖ Σε περιπτώσεις στις οποίες η κλίση εξασθένησης στην περιοχή του μακρινού πεδίου είναι εκ των προτέρων γνωστή, είναι δυνατή η άρση του προαναφερθέντος περιορισμού επιλέγοντας κατάλληλες κατανομές των θέσεων των βοηθητικών πηγών, καθώς και των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών, ούτως ώστε οι προκύπτουσες λύσεις να είναι

ακριβείς μέχρι κάποια αρκούντως μεγάλη απόσταση στην περιοχή του μακρινού πεδίου. Στην περίπτωση αυτή, για τον υπολογισμό των πεδιακών εντάσεων σε μεγαλύτερες αποστάσεις, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν απλές προβλεπτικές τεχνικές.

Στη συνέχεια, σχετικά με τη διερεύνηση των δυνατοτήτων της MAS για την ανάλυση κεραίων σύρματος και στοιχειοκεραίων, σημειώνονται τα ακόλουθα:

- ❖ Στην περίπτωση κρουστικής διέγερσης, οι λύσεις σταθεροποιούνται αριθμητικά αυξανόμενου του πλήθους των βοηθητικών πηγών, παρά το γεγονός ότι το φανταστικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου θεωρητικά τείνει στο άπειρο. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην αδυναμία αναπαραγωγής κρουστικού πεδίου από οποιοδήποτε σύνολο βοηθητικών πηγών με φυσική σημασία, για την ικανοποίηση της οριακής συνθήκης του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια του διπόλου.
- ❖ Στην περίπτωση παλμικής διέγερσης, είναι δυνατή η αριθμητική σταθεροποίηση των λύσεων επιλέγοντας κατάλληλα το πλήθος των βοηθητικών πηγών, σύμφωνα με έναν απλό γεωμετρικό κανόνα.
- ❖ Σε περιπτώσεις κατανεμημένης διέγερσης (π.χ. πηγή μαγνητικού δακτυλίου, επίπεδο κύμα), η αριθμητική σταθεροποίηση των λύσεων επιτυγχάνεται όταν το πλήθος των βοηθητικών πηγών υπερβεί μια κρίσιμη στάθμη, η οποία σχετίζεται με το λόγο του μήκους προς τη διάμετρο του διπόλου.
- ❖ Στην περίπτωση του φορτωμένου διπόλου που λειτουργεί ως δέκτης, έγινε η θεώρηση σύνδεσης του φορτίου στους ακροδέκτες ενός διακένου πεπερασμένου εύρους, το οποίο μπορεί να μοντελοποιηθεί ακολουθώντας το γεωμετρικό κανόνα του τροφοδοτούμενου διπόλου.
- ❖ Σε όλες τις περιπτώσεις, όσον αφορά το ρυθμό αριθμητικής σταθεροποίησης των λύσεων, πλεονεκτεί η χρήση ηλεκτρικών διπόλων ημιτονοειδούς κατανομής ρεύματος ως βοηθητικών πηγών έναντι της χρήσης στοιχειωδών ηλεκτρικών διπόλων, τα οποία χρησιμοποιούνται τυπικά.
- ❖ Στην περίπτωση στοιχειοκεραίων, η συμπεριφορά των λύσεων είναι αντίστοιχη με αυτή του μεμονωμένου διπόλου.
- ❖ Στην περίπτωση του διπόλου παχέος σύρματος, οι λύσεις παρουσιάζουν κάποια εξάρτηση από τα χαρακτηριστικά της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών, αλλά όχι από το πλήθος τους.

Τέλος, σχετικά με την εφαρμογή της υβριδικής μεθόδου MAS-RM για την ανάλυση κεραίων σύρματος και στοιχειοκεραίων, επισημαίνονται τα ακόλουθα:

- ❖ Για τους λόγους που προαναφέρθηκαν, στην περίπτωση κρουστικής διέγερσης, οι λύσεις σταθεροποιούνται αριθμητικά αυξανόμενου του πλήθους των βοηθητικών πηγών, παρά το γεγονός ότι το φανταστικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου θεωρητικά τείνει στο άπειρο.
- ❖ Σε κάθε περίπτωση, η προσθήκη κατάλληλα προσανατολισμένων μονοπολικών βοηθητικών πηγών στα άκρα της κεραίας έχει ως αποτέλεσμα την ταχύτερη αριθμητική σταθεροποίηση των λύσεων σε σχέση με τις λύσεις που προκύπτουν χρησιμοποιώντας μόνο διπολικές βοηθητικές πηγές, όπως και τη σημαντική μείωση του σφάλματος της οριακής συνθήκης του ηλεκτρικού πεδίου.
- ❖ Σε κάθε περίπτωση, η προκύπτουσα κατανομή ρεύματος είναι ομαλή, ανεξάρτητα από την επιλογή του πλήθους των βοηθητικών πηγών, σε αντίθεση με τις λύσεις της MoM, οι οποίες, τυπικά, πάσχουν από την εμφάνιση ταλαντώσεων αυξανόμενου του πλήθους των συναρτήσεων βάσης.
- ❖ Στην περίπτωση στοιχειοκεραίων, η συμπεριφορά των λύσεων είναι αντίστοιχη με αυτή του μεμονωμένου διπόλου.
- ❖ Η εφαρμογή της MAS-RM παρέχει δυνατότητες επίλυσης προβλημάτων σχετικά μεγάλης κλίμακας (στοιχειοκεραίες μεγάλου αριθμού στοιχείων, κεραίες μεγάλου μήκους), καθόσον είναι δυνατόν να προσδιοριστούν αριθμητικά ευσταθείς λύσεις για μικρούς

αριθμούς βοηθητικών πηγών σε μικρούς χρόνους, χωρίς να απαιτείται η χρήση εξεζητημένων επαναληπτικών τεχνικών επίλυσης.

- ❖ Στην περίπτωση του διπόλου παχέος σύρματος, οι λύσεις παρουσιάζουν κάποια εξάρτηση από τα χαρακτηριστικά της κατανομής των θέσεων των βοηθητικών πηγών, αλλά όχι από το πλήθος τους.