



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Ανάλυση Συζευκτών Γραμμοσειρών
με Μεθόδους Ολοκληρωτικών Εξισώσεων**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Νικόλαος Α. Τσίτσας

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2006



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Ανάλυση Συζευκτών Γραμμοσειρών με Μεθόδους Ολοκληρωτικών Εξισώσεων

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Νικόλαος Α. Τσίτσας

Συμβουλευτική Επιτροπή : Δήμητρα Ι. Κακλαμάνη
Νικόλαος Κ. Ουζούνογλου
Ιάκωβος Σ. Βενιέρης

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 28^η Σεπτεμβρίου 2006.

.....
Δήμητρα Κακλαμάνη
Αναπ. Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

.....
Νικόλαος Ουζούνογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ιάκωβος Βενιέρης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ηλίας Γλύτσης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Γεώργιος Φικιώρης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

.....
Δημήτριος Φραντζεσκάκης
Αναπ. Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

.....
Ηρακλής Αβραμόπουλος
Αναπ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2006

.....
Νικόλαος Λ. Τσίτσας

Διδάκτωρ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Νικόλαος Λ. Τσίτσας, 2006.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Οι συζεύκτες γραμμοσειρών αποτελούν βασικά δομικά στοιχεία σημαντικών οπτικών διατάξεων, οι οποίες χρησιμοποιούνται ευρέως στα σύγχρονα οπτικά δίκτυα. Μεταξύ των οπτικών διατάξεων συγκαταλέγονται τα οπτικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων, οι πολυπλέκτες και αποπολυπλέκτες, τα συντονιζόμενα lasers και τα lasers κατανεμημένης ανάδρασης καθώς επίσης και οι οπτικοί διακόπτες.

Τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα, που εμφανίζονται στις διατάξεις των συζευκτών γραμμοσειρών, έχουν ήδη μελετηθεί με προσεγγιστικές μεθόδους, όπως οι μέθοδοι διαταραχών, η θεωρία των συζευγμένων ρυθμών και η θεωρία Floquet-Bloch. Σε αυτές τις μεθόδους η ακρίβεια των λύσεων προϋποθέτει αρκετούς περιορισμούς, όπως μικρό πάχος γραμμοσειρών, μεγάλη απόσταση διαχωρισμού των δύο κυματοδηγών και μικρές διαφορές των δεικτών διάθλασης των εμπλεκόμενων μέσων.

Αντικείμενο της Διδακτορικής Διατριβής αποτελεί η μελέτη των φαινομένων σύζευξης σε κυματοδηγούς γραμμοσειρών με μεθοδολογία ολοκληρωτικών εξισώσεων. Η αναπτυσσόμενη μεθοδολογία, η οποία συνδυάζει ημιαναλυτικές τεχνικές ολοκληρωτικών εξισώσεων, βασίζεται ουσιαστικά στη Μέθοδο των Ροπών με συναρτήσεις βάσης συνολικού χώρου. Ειδικότερα, με εφαρμογή της μεθόδου Sommerfeld επιτυγχάνεται Fourier ολοκληρωτική αναπαράσταση της συνάρτησης Green του ομογενούς (χωρίς γραμμοσειρές) προβλήματος. Περαιτέρω, διατυπώνεται ολοκληρωτική εξίσωση ως προς το ηλεκτρικό πεδίο κυμάτων, τα οποία διαδίδονται κατά μήκος του άξονα του συζεύκτη. Για τη λύση της εν λόγω ολοκληρωτικής εξίσωσης εφαρμόζονται τεχνικές Galerkin συνολικού χώρου, οι οποίες οδηγούν σε συγκεκριμένο ομογενές γραμμικό σύστημα. Οι σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων ρυθμών είναι οι τιμές εκείνες, για τις οποίες το εν λόγω σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση.

Η κύρια πρωτοτυπία της Διδακτορικής Διατριβής συνίσταται στην εισαγωγή μεθοδολογίας ολοκληρωτικών εξισώσεων, η οποία αναπτύσσεται και εφαρμόζεται για τη μελέτη των φαινομένων κυματοδήγησης σε συζεύκτες γραμμοσειρών. Εξάλλου, η αριθμητική υλοποίηση της αναπτυχθείσας μεθοδολογίας παράγει αρκετά πρωτότυπα και ενδιαφέροντα αριθμητικά αποτελέσματα, αναφερόμενα στη βέλτιστη σχεδίαση των χαρακτηριστικών των γραμμοσειρών, τα οποία προσφέρουν το ελάχιστο δυνατό μήκος σύζευξης και τη μέγιστη δυνατή αποδοτικότητα σύζευξης.

Τα συγκριτικά πλεονεκτήματα της αναπτυσσόμενης μεθοδολογίας έναντι των μεθόδων: διαταραχών, θεωρίας των συζευγμένων ρυθμών και θεωρίας Floquet-Bloch εντοπίζονται στην ακρίβεια, την απλότητα καθώς επίσης και την αριθμητική αποδοτικότητα. Εξάλλου, η

χρησιμοποιούμενη μεθοδολογία δίνει ακριβή αποτελέσματα για γραμμοσειρές μεγάλου πάχους και για ισχυρά συζευγμένους κυματοδηγούς σε αντίθεση με τις προαναφερόμενες μεθόδους. Ιδιαίτερω, εκφράζεται αναλυτικά η συνάρτηση Green και υπολογίζονται αναλυτικά όλα τα εμφανιζόμενα ολοκληρώματα με συνέπειες τη σημαντική μείωση του υπολογιστικού κόστους, την αύξηση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων και την επίτευξη λύσεως χωρίς άλλες προσεγγίσεις εκτός εκείνης της τελικής κολόβωσης του γραμμικού συστήματος.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα της Διατριβής υπερτερούν σημαντικά σε αξιοπιστία και ακρίβεια των αντιστοίχων αποτελεσμάτων, τα οποία επιτυγχάνονται με τις προγενέστερες μεθόδους. Η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων αυτών διαμορφώνει συγκεκριμένες τεχνικές-σχεδιαστικές προδιαγραφές της υπό μελέτη διάταξης, οι οποίες μπορεί να αξιοποιηθούν κατάλληλα σε πολλές εφαρμογές της ολοκληρωμένης οπτικοηλεκτρονικής.

Λέξεις Κλειδιά

Κατευθυντικοί συζεύκτες, γραμμοσειρές, οπτικοί κυματοδηγοί, κυματοδηγοί διηλεκτρικών πλακών, κυματοδηγούμενα κύματα, ολοκληρωμένη οπτική, οπτικά φίλτρα, ολοκληρωτικές εξισώσεις, μέθοδος των ροπών, τεχνικές Galerkin.

Abstract

Grating-assisted couplers constitute fundamental guided-wave components of important optical devices, used widely in synchronous optical networks. Among these optical devices are included optical wavelength filters, multiplexers and demultiplexers, tunable lasers and distributed feedback lasers as well as optical switches.

The electromagnetic phenomena, associated with the operation of grating couplers, have already been investigated by means of approximate methods, such as perturbation methods, coupled-mode theory and Floquet-Bloch theory. In these methods the accuracy of the solutions is subject to various limitations and constraints, such as small grating width, large separation distance between the slab waveguides and small differences of the refractive indices of the media involved.

The subject of this Doctoral Thesis is the investigation of the coupling phenomena in grating waveguides by applying an integral equation methodology. The developed methodology, which combines semianalytical integral equation techniques, is essentially based on the Method of Moments with entire domain basis functions. In particular, by applying Sommerfeld's method, a Fourier integral representation of the Green's function of the homogeneous (non-grating) problem is derived. Furthermore, an integral equation is established with respect to the electric field of waves guided along the coupler's axis. This integral equation is solved by applying entire domain Galerkin techniques, leading to a homogeneous linear system. The propagation constants of the wave guided modes correspond to the non-trivial solution of this linear system.

The main originality of the Doctoral Thesis lies in the introduction of an integral equation methodology, which is developed and applied for the investigation of the wave guiding phenomena in grating-assisted couplers. Besides, the numerical implementation of the developed methodology derives several original and interesting numerical results, referring to the optimal design of the grating characteristics, combining the minimal coupling length with the maximal coupling efficiency.

The relative benefits of the developed methodology with respect to the perturbation methods, the coupled-mode theory and the Floquet-Bloch theory lie on its accuracy, simplicity as well as its numerical efficiency. On the other hand, the developed methodology provides accurate results for gratings with large widths and strongly coupled waveguides, in contrast to the aforementioned methods. In addition, the Green's function is analytically expressed and all the integrals involved are analytically computed resulting to the significant reduction of the

computational cost, the high increase of the results accuracy and a solution with no other approximation than that of the final truncation of the linear system.

The numerical results obtained exhibit superior validity and accuracy with respect to those derived by applying the methods mentioned above. These results serve certain design specifications of the structure under investigation, which may be exploited appropriately in various applications of integrated optoelectronics.

KeyWords

Directional couplers, grating, optical waveguides, slab waveguides, guided waves, integrated optics, optical filters, integral equations, method of moments, Galerkin techniques.

*Στους γονείς μου
που μου χάραξαν τους δρόμους
της γνώσης*

Θεωρώ καθήκον μου να εκφράσω τις θερμές και ειλικρινείς ευχαριστίες μου προς την επιβλέπουσα καθηγήτρια κ. Δήμητρα Κακλαμάνη και τον καθηγητή κ. Νικόλαο Ουζούνογλου για την υπόδειξη του θέματος, την πολύτιμη επιστημονική καθοδήγηση και βοήθειά τους, καθώς επίσης και την εν γένει ηθική ενίσχυση και συμπαράσταση κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας Διδακτορικής Διατριβής.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	15
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ.....	19
1.1. Εξισώσεις Maxwell.....	20
1.1.1. Διαφορική μορφή εξισώσεων Maxwell.....	20
1.1.2. Ολοκληρωτική μορφή εξισώσεων Maxwell.....	22
1.2. Καταστατικές σχέσεις-Συνοριακές συνθήκες.....	23
1.3. Εξισώσεις Maxwell σε ανομοιογενή ιστροπικό χώρο	25
1.3.1. Διανυσματικές κυματικές εξισώσεις.....	25
1.3.2. Τμηματικά σταθερή κατανομή του δείκτη διάθλασης.....	26
1.4. Αποσύζευξη εξισώσεων Maxwell	28
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΚΑΤΕΥΘΥΝΤΙΚΟΙ ΣΥΖΕΥΚΤΕΣ ΣΕ ΟΠΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ	30
2.1. Αρχή λειτουργίας κατευθυντικών συζευκτών	31
2.1.1. Κυματοδότηση σε ασυμμετρικούς κατευθυντικούς συζεύκτες.....	32
2.1.2. Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα κατευθυντικών συζευκτών.....	34
2.2. Εισαγωγή γραμμοσειρών σε κατευθυντικούς συζεύκτες.....	40
2.3. Μέθοδοι ανάλυσης της κυματοδότησης σε συζεύκτες γραμμοσειρών	41
2.3.1. Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών	42
2.3.2. Θεωρία Floquet-Bloch	45
2.3.3. Μέθοδοι Ολοκληρωτικών Εξισώσεων	47
2.3.4. Άλλες μέθοδοι ανάλυσης της κυματοδότησης	49
2.4. Εφαρμογές των κυματοδηγών γραμμοσειρών στις οπτικές επικοινωνίες... 51	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ	
ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΜΕ ΓΡΑΜΜΟΣΕΙΡΕΣ.....	62
3.1. Συμμετρικός Συζεύκτης Γραμμοσειρών	63
3.2. Θεώρημα Floquet και χωρικές αρμονικές περιοδικών δομών.....	65
3.3. Αναλυτική έκφραση της συνάρτησης Green	68
3.4. Ολοκληρωτική αναπαράσταση ηλεκτρικού πεδίου.....	79
3.5. Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τη μέθοδο Galerkin	84
3.6. Ειδικές περιπτώσεις συζευκτών γραμμοσειρών	103
3.6.1. Κυματοδότηση σε έναν απομονωμένο κυματοδηγό παρουσία	
γραμμοσειρών	104
3.6.2. Κυματοδότηση σε συζεύκτη δύο παραλλήλων πλακών παρουσία	
γραμμοσειρών στην κάτω πλάκα.....	105
3.6.3. Κυματοδότηση σε συζεύκτη δύο παραλλήλων πλακών παρουσία	
γραμμοσειρών στην άνω πλάκα.....	106
3.7. Αριθμητική υλοποίηση της μεθόδου	108
3.8. Έλεγχος σύγκλισης, αποδοτικότητα και εγκυρότητα της μεθόδου	109
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΜΕ	
ΓΡΑΜΜΟΣΕΙΡΕΣ.....	112
4.1. Ασυμμετρικός συζεύκτης γραμμοσειρών	113
4.2. Συνάρτηση Green της ομογενούς διάταξης	115
4.3. Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τη μέθοδο Galerkin	122
4.4. Έλεγχος σύγκλισης, αποδοτικότητα και εγκυρότητα της μεθόδου	130
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΧΕΔΙΑΣΤΙΚΕΣ	
ΠΡΟΔΙΑΓΡΑΦΕΣ.....	133
5.1. Συμμετρικοί Συζεύκτες	134
5.1.1. Συζεύκτης με γραμμοσειρές στον κυματοδηγό 1	135

5.1.2.	Συζεύκτης με γραμμοσειρές και στους δύο κυματοδηγούς	145
5.2.	Ασυμμετρικοί Συζεύκτες	148
5.2.1.	Μήκος κύματος συντονισμού	151
5.2.2.	Επίδραση του πάχους των γραμμοσειρών	153
5.2.3.	Επίδραση του δείκτη διάθλασης των γραμμοσειρών	155
5.2.4.	Φυσική σύζευξη μεταξύ των κυματοδηγών.....	157
5.2.5.	Βέλτιστη περίοδος και duty cycle γραμμοσειρών	159
5.2.6.	Συζεύκτης με δύο γραμμοσειρές.....	161
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6.	ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ, ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ	163
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.....		167
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.....		172
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ.....		175
ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ		185
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ		186

Πίνακας σχημάτων

Σχήμα 1.1	Γεωμετρία εφαρμογής συνοριακών συνθηκών	24
Σχήμα 2.1	Γεωμετρία ασυμμετρικού κατευθυντικού συζεύκτη	31
Σχήμα 2.2	Πεδιακές κατανομές των TE^z ρυθμών συμμετρικού συζεύκτη.....	34
Σχήμα 2.3	Σήμα διέγερσης στο $z=0$	35
Σχήμα 2.4	Πεδιακή κατανομή στην απόσταση σύζευξης ισχύος $z=L$	35
Σχήμα 2.5	Πεδιακές κατανομές των TE^z ρυθμών σύγχρονου ασυμμετρικού συζεύκτη	36
Σχήμα 2.6	Σήμα διέγερσης στο $z=0$	37
Σχήμα 2.7	Πεδιακή κατανομή στην απόσταση σύζευξης ισχύος $z=L$	37
Σχήμα 2.8	Πεδιακές κατανομές των TE^z ρυθμών ασύγχρονου ασυμμετρικού συζεύκτη	38
Σχήμα 2.9	Σήμα διέγερσης στο $z=0$	39
Σχήμα 2.10	Πεδιακή κατανομή στην απόσταση σύζευξης ισχύος $z=L$	39
Σχήμα 2.11	Γεωμετρία ασυμμετρικού κατευθυντικού συζεύκτη γραμμοσειρών.....	40
Σχήμα 2.12	Βέλτιστες περίοδοι γραμμοσειρών συναρτήσει της απόστασης των κυματοδηγών.....	44
Σχήμα 2.13	Γεωμετρία του πολυστρωματικού κατευθυντικού συζεύκτη γραμμοσειρών	45
Σχήμα 2.14	Γεωμετρία του κατευθυντικού συζεύκτη γραμμοσειρών	48
Σχήμα 2.15	Κατάτμηση της γεωμετρίας σε συνοριακά στοιχεία	48
Σχήμα 2.16	Σχηματικό διάγραμμα οπτικού φίλτρου συχνοτήτων, σχηματισμένου σε GaAs.	51
Σχήμα 2.17	Καμπύλες διασποράς του άρτιου και περιττού ρυθμού στο συζεύκτη γραμμοσειρών. Οι (a) και (b) αντιστοιχούν σε $K+\Delta K$ και $K-\Delta K$, όπου ΔK μία μικρή μεταβολή, οφειλόμενη στη μεταβολή ΔL της περιόδου.	52
Σχήμα 2.18	Σχηματικό διάγραμμα του πολυπλέκτη παρεμβολής δύο ρυθμών με χρήση κυματοδηγού γραμμοσειρών.	53
Σχήμα 2.19	(a) Διάταξη συζεύκτη γραμμοσειρών με ενεργούς κυματοδηγούς InP (b) Σχηματικό διάγραμμα του ευρυζωνικού πολυπλέκτη πρόσθεσης.....	53
Σχήμα 2.20	Σχηματικό διάγραμμα αποπολυπλέκτη με φίλτρα συζευκτών γραμμοσειρών. Λ_1 , Λ_2 και Λ_3 είναι διαφορετικές περίοδοι των γραμμοσειρών.	54

Σχήμα 2.21 Σχηματικό διάγραμμα ασυμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών, χρησιμοποιούμενου σε αποπολυπλέκτες.....	55
Σχήμα 2.22 Φάσμα του 2-2-2 παλμού.....	55
Σχήμα 2.23 Διατάξεις ορθογωνικών γραμμοσειρών, που χρησιμοποιούνται για μετατροπή ρυθμών.....	56
Σχήμα 2.24 Φάσματα των εξαγομένων ρυθμών: (α) 1 και (β) 5.....	57
Σχήμα 2.25 Σχηματικό διάγραμμα του συντονιζομένου laser ημιαγωγών με ενσωματωμένο φίλτρο κατευθυντικού συζεύκτη γραμμοσειρών.....	58
Σχήμα 2.26 Σχηματικό διάγραμμα τετράθυρου συζεύκτη γραμμοσειρών.....	58
Σχήμα 2.27 Σχηματικό διάγραμμα διδιάστατου δαχτυλιδιού συντονισμού γραμμοσειρών.....	60
Σχήμα 2.28 Ανακλαστήρας-ταλαντωτής Bragg.....	60
Σχήμα 2.29 Σχηματικό διάγραμμα συζεύκτη γραμμοσειρών γραμμικής εστίασης....	61
Σχήμα 2.30 Διάταξη κεραίας γραμμοσειρών χιλιοστομετρικών κυμάτων.....	61
Σχήμα 3.1 Γεωμετρία του συμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών.....	64
Σχήμα 3.2 Γεωμετρία του χωρίς γραμμοσειρές προβλήματος.....	69
Σχήμα 3.3 Διαχωρισμός της διάταξης του συζεύκτη γραμμοσειρών από ορθογώνια	81
Σχήμα 3.4 Απομονωμένος κυματοδηγός παρουσία γραμμοσειρών.....	104
Σχήμα 3.5 Συζεύκτης δύο παραλλήλων πλακών παρουσία γραμμοσειρών στην κάτω πλάκα.....	105
Σχήμα 3.6 Συζεύκτης δύο παραλλήλων πλακών παρουσία γραμμοσειρών στην άνω πλάκα.....	107
Σχήμα 3.7 Τυπική καμπύλη του μέτρου της ορίζουσας ως προς το κανονικοποιημένο φανταστικό μέρος β/k_0	109
Σχήμα 4.1 Γεωμετρία του ασυμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών.....	114
Σχήμα 4.2 Γεωμετρία του ομογενούς (χωρίς γραμμοσειρές) προβλήματος.....	115
Σχήμα 4.3 Γεωμετρία του χωρίς γραμμοσειρές προβλήματος της απομονωμένης διηλεκτρικής πλάκας.....	120
Σχήμα 4.4 (α) Φανταστικά μέρη $\beta_1/k_0, \beta_2/k_0$ και (β) πραγματικά μέρη $\alpha_1/k_0, \alpha_2/k_0$ των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών συναρτήσει του Λ/λ	132
Σχήμα 5.1 (α) Φανταστικά μέρη $\beta_e/k_0, \beta_o/k_0$ και (β) πραγματικά μέρη $\alpha_e/k_0, \alpha_o/k_0$ των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών συναρτήσει του πάχους w των γραμμοσειρών, για $n_2=3.2, h=2\mu\text{m}, \lambda=1.5\mu\text{m}$ και $d_1=l_1=\Lambda/2$	136
Σχήμα 5.2 (α) $\beta_e/k_0, \beta_o/k_0$ (συνεχείς γραμμές) και $N_e/k_0, N_o/k_0$ (διακεκομμένες γραμμές) και (β) $\alpha_e/k_0, \alpha_o/k_0$ συναρτήσει του κανονικοποιημένου μήκους κύματος Λ/λ για $n_2=3.2, h=2\mu\text{m}, w=0.2\mu\text{m}$ και $d_1=l_1=\Lambda/2$	138
Σχήμα 5.3 Καμπύλες διασποράς $\beta_e/k_0, \beta_o/k_0$ (συνεχείς γραμμές) του περιοδικού συζεύκτη με $d_1=l_1=\Lambda/2$ και $\kappa_e/k_0, \kappa_o/k_0$ (διακεκομμένες γραμμές) του μη περιοδικού συζεύκτη με $d_1=0$ και $l_1=\Lambda$ συναρτήσει του μήκους κύματος Λ/λ , για $n_2=3.2, h=2\mu\text{m}, w=0.2\mu\text{m}$	139
Σχήμα 5.4 (α) $\beta_e/k_0, \beta_o/k_0$ και (β) $\alpha_e/k_0, \alpha_o/k_0$ συναρτήσει του κανονικοποιημένου δείκτη διάθλασης n_2/n_1 των γραμμοσειρών για $w=0.2\mu\text{m}, h=2\mu\text{m}, \lambda=1.5\mu\text{m}$ and $d_1=l_1=\Lambda/2$	141
Σχήμα 5.5 (α) $\beta_e^s/k_0, \beta_o^s/k_0$ (συνεχείς) και $\beta_e^w/k_0, \beta_o^w/k_0$ (διακεκομμένες) και (β) $\alpha_e^s/k_0, \alpha_o^s/k_0$ (συνεχείς) και $\alpha_e^w/k_0, \alpha_o^w/k_0$ (διακεκομμένες) συναρτήσει του Λ/λ , για $n_2=3.2$ (w : ασθενής διαταραχή) και $n_2=3.4$ (s : ισχυρή διαταραχή), $h=2\mu\text{m}, w=0.2\mu\text{m}$ και $d_1=l_1=\Lambda/2$	142
Σχήμα 5.6 (α) $\beta_e/k_0, \beta_o/k_0$ (συνεχείς γραμμές) και $N_e/k_0, N_o/k_0$ (διακεκομμένες γραμμές) και (β) $\alpha_e/k_0, \alpha_o/k_0$ συναρτήσει της απόστασης διαχωρισμού h για $w=0.2\mu\text{m}, n_2=3.2, \lambda=1.5\mu\text{m}$ και $d_1=l_1=\Lambda/2$	144

Σχήμα 5.7 (α) β_e/k_0 , β_o/k_0 και (β) α_e/k_0 , α_o/k_0 συναρτήσει του n_2/n_1 για τον συζεύκτη με γραμμοσειρές και στους δύο κυματοδηγούς με $q=1$, $d_1=l_1=\Lambda/2$ και $\lambda=1.5\mu\text{m}$	146
Σχήμα 5.8 (α) Φανταστικά μέρη β_1/k_0 , β_2/k_0 (συνεχείς γραμμές) και $N_1/k_0+\lambda/\Lambda$, N_2/k_0 (διακεκομμένες γραμμές) των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών και των σύνθετων ρυθμών και (β) πραγματικά μέρη α_1/k_0 , α_2/k_0 των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών συναρτήσει (και στις δύο περιπτώσεις (α) και (β)) του Λ/λ , για $2d_3=0.55\mu\text{m}$, $w_2=0.05\mu\text{m}$, $n_6=3$, $n_{h,2}=3.1$	152
Σχήμα 5.9 (α) β_1/k_0 , β_2/k_0 και (β) α_1/k_0 , α_2/k_0 συναρτήσει του πάχους w_2 των γραμμοσειρών, για $\lambda=1.47\mu\text{m}$ (διακεκομμένες) και $\lambda=1.53\mu\text{m}$ (συνεχείς γραμμές) με $2d_3=0.55\mu\text{m}$, $n_6=3$	154
Σχήμα 5.10 (α) β_1/k_0 , β_2/k_0 και (β) α_1/k_0 , α_2/k_0 συναρτήσει του δείκτη διάθλασης n_6 των γραμμοσειρών, για $\lambda=1.5\mu\text{m}$ (διακεκομμένες) και $\lambda=1.53\mu\text{m}$ (συνεχείς γραμμές) με $2d_3=0.55\mu\text{m}$, $w_2=0.05\mu\text{m}$	156
Σχήμα 5.11 (α) β_1/k_0 , β_2/k_0 (συνεχείς) και N_1^{ng}/k_0 , N_2^{ng}/k_0 (διακεκομμένες γραμμές) και (β) α_1/k_0 , α_2/k_0 συναρτήσει της απόστασης διαχωρισμού $2d_3$, για $w_2=0.05\mu\text{m}$, $\lambda=1.5\mu\text{m}$, $n_6=3$	158
Σχήμα 5.12 β_1/k_0 , β_2/k_0 (συνεχείς) και $N_1/k_0-\lambda/\Lambda$, N_2/k_0 (διακεκομμένες γραμμές) συναρτήσει της περιόδου Λ των γραμμοσειρών, για $\lambda=1.5\mu\text{m}$, $t=1$, $b_1=l_1=\Lambda/2$, $n_{h,2}=3.25$	159
Σχήμα 5.13 Απόσταση $\Delta\beta/k_0= \beta_1-\beta_2 /k_0$ συναρτήσει της περιόδου Λ των γραμμοσειρών, για μεταβλητά duty cycles dc και πλήθη t των ορθογωνίων.....	161
Σχήμα 5.14 β_1/k_0 και β_2/k_0 συναρτήσει της περιόδου Λ των γραμμοσειρών, για τον ασυμμετρικό συζεύκτη με γραμμοσειρές και στους δύο κυματοδηγούς του εδαφίου 5.2.6.....	162
Σχήμα 6.1 Διαχωρισμός κατάλληλου τμήματος της διάταξης δύο απείρων συμμετρικών διηλεκτρικών πλακών από ένα ορθογώνιο.....	168

Πίνακας πινάκων

Πίνακας 3.1 Πρότυπο σύγκλισης της κανονικοποιημένης σταθεράς διάδοσης του απομονωμένου κυματοδηγού γραμμοσειρών.....	111
Πίνακας 4.1 Πρότυπο σύγκλισης των κανονικοποιημένων φανταστικών μερών των σταθερών διάδοσης του συζεύκτη γραμμοσειρών του Σχήματος 4.1 με $n_1=1$, $n_2=3.2$, $n_3=n_5=n_6=n_7=3$, $n_4=3.5$, $d_2=0.5\mu\text{m}$, $2d_3=0.55\mu\text{m}$, $d_4=0.22\mu\text{m}$, $w_1=0.1\mu\text{m}$, $w_2=0.05\mu\text{m}$, $\Lambda=10.748\mu\text{m}$, $\lambda=1.5\mu\text{m}$, $t=1$, $a_1=s_1=b_1=l_1=\Lambda/2$	130
Πίνακας 5.1 Απόσταση των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών.....	145
Πίνακας 5.2 β_e/k_0 ως προς λ για τις περιπτώσεις ($n_2=3.2$): (i) $q=0$ (συζεύκτης χωρίς γραμμοσειρές), (ii) $q=1$, $d_1=\Lambda/4$, $l_1=\Lambda/4$, (iii) $q=2$, $d_1=\Lambda/10$, $l_1=\Lambda/10$, $d_2=\Lambda/2$, $l_2=3\Lambda/10$, (iv) $q=8$, $d_i=i\cdot\Lambda/10$, $l_i=\Lambda/20$, $i=1, \dots, 8$, (v) $q=1$, $d_1=0$, $l_1=\Lambda$ (μη περιοδικός συζεύκτης).....	147
Πίνακας 5.3 β_o/k_0 ως προς λ για τις πέντε περιπτώσεις του Πίνακα 5.2.....	147
Πίνακας 5.4 Βέλτιστες περίοδοι και βέλτιστα μήκη σύζευξης για μεταβλητό duty cycle και πλήθος ορθογωνίων ανά επανάληψη των γραμμοσειρών, όπως δείχνει το Σχήμα 5.13.....	160

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Διατάξεις κυματοδηγησης οπτικών σημάτων, οι οποίες περιέχουν περιοδικά μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης και επιφανειακά χαραγμένες γραμμοσειρές (surface grating), αποτελούν βασικά δομικά στοιχεία των ολοκληρωμένων οπτικοηλεκτρονικών συστημάτων. Ειδικότερα, διατάξεις κυματοδηγών επιπέδων διηλεκτρικών πλακών (slab waveguides) με περιοδικά χαραγμένες γραμμοσειρές εξυπηρετούν στη μεταφορά ενέργειας από μία διηλεκτρική πλάκα σε άλλη και χρησιμοποιούνται αποτελεσματικά σε κατευθυντικούς συζεύκτες, οπτικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων, lasers κατανεμημένης ανάδρασης, οπτικούς διακόπτες, πολυπλέκτες, αποπολυπλέκτες και αρκετές άλλες διατάξεις ολοκληρωμένης οπτικής (βλ. π.χ. [1] και [2]).

Προγενέστερες μεθοδολογίες-Συνοπτική επισκόπηση της Βιβλιογραφίας

Η ηλεκτρομαγνητική ανάλυση των προαναφερομένων διατάξεων σύζευξης και κυματοδηγησης έχει ήδη αναπτυχθεί με αρκετές μεθόδους. Οι αρχικές μέθοδοι συνδυάζουν τα αναπτύγματα διαταραχών των ρυθμών του συζεύκτη με τεχνικές συζευγμένων κυμάτων για τη μελέτη της επίδρασης των γραμμοσειρών στην όλη διάταξη (βλ. π.χ. [3]-[6]). Οι εν λόγω τεχνικές αποσαφηνίζουν οπωσδήποτε την εικόνα της φυσικής διαδικασίας της σύζευξης, αλλά οδηγούν μόνο σε προσεγγιστικά αποτελέσματα. Εξάλλου, την κύρια μεθοδολογία ανάλυσης των φαινομένων κυματοδηγησης σε διατάξεις συζευκτών γραμμοσειρών συνιστά η θεωρία των συζευγμένων ρυθμών (βλ. ενδεικτικά [7]-[21]). Όμως, η ακρίβεια των λύσεων, οι οποίες επιτυγχάνονται με εφαρμογή της μεθοδολογίας αυτής, προϋποθέτει αρκετούς περιορισμούς, όπως μικρό πάχος γραμμοσειρών, μεγάλη απόσταση διαχωρισμού των δύο κυματοδηγών και μικρές διαφορές των δεικτών διάθλασης των εμπλεκόμενων μέσων. Επίσης, έχουν προταθεί μέθοδοι πινάκων μεταφοράς, οι οποίες χρησιμοποιούν τεχνικές προσαρμογής ρυθμών, αλλά τα αποτελέσματά τους υπόκεινται στους περιορισμούς της θεωρίας συζευγμένων ρυθμών. Σε συγκεκριμένες πρακτικές εφαρμογές απαιτούνται υπολογιστικές τεχνικές ακριβέστερες της θεωρίας των συζευγμένων ρυθμών για τον υπολογισμό σημαντικών μεγεθών, όπως οι σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων ρυθμών, ο διαχωρισμός της ενέργειας ανάμεσα στους κυματοδηγούς και οι απώλειες ακτινοβολίας. Για το σκοπό αυτό έχουν αναπτυχθεί αρκετά ακριβείς τεχνικές, οι οποίες στηρίζονται στη θεωρία Floquet-Bloch (βλ. ενδεικτικά [22]-[29]). Οι εν λόγω τεχνικές χρησιμοποιούν αυστηρές (ακριβείς) εκφράσεις των ρυθμών των κυματοδηγών, οι οποίες οδηγούν σε ακριβή αποτελέσματα, αναφερόμενα στην επίδοση των συζευκτών γραμμοσειρών. Όμως, η ακρίβεια των αποτελεσμάτων εξαρτάται από τον αριθμητικό

υπολογισμό των ολοκληρωμάτων ή την αριθμητική επίλυση συστημάτων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Εξάλλου, σημειώνουμε ότι η διάδοση στους συζεύκτες γραμμοσειρών έχει επίσης διερευνηθεί με εφαρμογή της θεωρίας γραμμών μεταφοράς [30]-[31] και τεχνικών στο πεδίο του χρόνου [32]-[34].

Αντικείμενο και μεθοδολογία της Διδακτορικής Διατριβής

Στην ανά χειράς διατριβή μελετώνται τα φαινόμενα κυματοδήγησης σε άπειρο περιοδικό οπτικό συζεύκτη γραμμοσειρών με τη βοήθεια ημιαναλυτικών τεχνικών ολοκληρωτικών εξισώσεων, εφαρμόζοντας τη Μέθοδο των Ροπών με συναρτήσεις βάσης συνολικού χώρου (entire domain basis functions). Ειδικότερα, τα στρώματα των γραμμοσειρών μοντελοποιούνται ως άπειρα στρώματα με περιοδικά χαραγμένες ορθογώνιες ασυνέχειες. Ως εφαρμογή της μεθόδου Sommerfeld επιτυγχάνεται αναλυτική έκφραση της συνάρτησης Green του ομογενούς (χωρίς γραμμοσειρές) προβλήματος μέσω ολοκληρώματος Fourier. Περαιτέρω, διατυπώνεται ολοκληρωτική αναπαράσταση του ηλεκτρικού πεδίου των TE πολωμένων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, τα οποία διαδίδονται κατά μήκος του άξονα του συζεύκτη. Εξάλλου, περιορίζοντας το διάλυμα παρατήρησης στις ορθογώνιες ασυνέχειες, διαπιστώνουμε ότι η εν λόγω ολοκληρωτική αναπαράσταση μετατρέπεται σε ολοκληρωτική εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου στις ασυνέχειες. Για τη λύση της εν λόγω ολοκληρωτικής εξίσωσης εφαρμόζονται τεχνικές Galerkin συνολικού χώρου (entire domain Galerkin techniques), οι οποίες οδηγούν σε συγκεκριμένο ομογενές γραμμικό σύστημα. Οι σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων ρυθμών είναι οι τιμές εκείνες, για τις οποίες το εν λόγω σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση, και υπολογίζονται ως ρίζες της ορίζουσας του πίνακα του συστήματος. Η ανάλυση αφορά διάδοση εγκάρσια ηλεκτρικών (TE) κυμάτων. Όμως, η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί για τη μελέτη της διάδοσης εγκάρσια μαγνητικών (TM) κυμάτων, θεωρώντας ως άγνωστη συνάρτηση το μαγνητικό πεδίο στο χωρίο των γραμμοσειρών.

Η προτεινόμενη μεθοδολογία αναφέρεται αρχικά στη μελέτη των φαινομένων κυματοδήγησης στη διάταξη του συμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών, αποτελούμενου από όμοιους κυματοδηγούς ευρισκόμενους εντός του ελευθέρου χώρου, και αναλύεται διεξοδικά στο Κεφάλαιο 3. Η συμμετρία της διάταξης διευκολύνει την αποσαφήνιση των βασικών ιδεών και των τεχνικών χαρακτηριστικών της μεθόδου. Η διεύρυνση της μεθοδολογίας για τις περιπτώσεις ασυμμετρικών συζευκτών γραμμοσειρών προϋποθέτει ορισμένες επεκτάσεις, προσαρμογές, και βελτιώσεις της αρχικής μεθόδου, οι οποίες συνοψίζονται στο Κεφάλαιο 4. Στην προκειμένη περίπτωση η ασυμμετρία του συζεύκτη επιβάλλει σημαντική πολυπλοκότητα στην ανάλυση και

τους υπολογισμούς των αναλυτικών εκφράσεων της συνάρτησης Green και των blocks του πίνακα του γραμμικού συστήματος καθώς επίσης και σε αρκετά σημεία της αριθμητικής υλοποίησης.

Κύρια πλεονεκτήματα της αναπτυσσόμενης μεθοδολογίας είναι η ακρίβεια και η απλότητα καθώς επίσης και η αριθμητική αποδοτικότητα, η οποία συνίσταται στη μεγάλη ακρίβεια των αποτελεσμάτων με χρήση μικρού αριθμού όρων των αναπτυγμάτων (βλ. [35] και [36]). Επιπλέον, εκφράζεται αναλυτικά η συνάρτηση Green και υπολογίζονται αναλυτικά όλα τα εμφανιζόμενα ολοκληρώματα. Έτσι, μειώνεται σημαντικά το υπολογιστικό κόστος, αυξάνεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων και επιτυγχάνεται μία λύση χωρίς άλλες προσεγγίσεις εκτός εκείνης της τελικής κολόβωσης (truncation) των συνόλων των συναρτήσεων ανάπτυξης και δοκιμής. Εξάλλου, αξίζει να σημειώσουμε ότι η χρησιμοποιούμενη μέθοδος δίνει ακριβή αποτελέσματα για γραμμοσειρές μεγάλου πάχους και για ισχυρά συζευγμένους κυματοδηγούς, ενώ οι προγενέστερες μέθοδοι προϋποθέτουν σημαντικούς περιορισμούς των φυσικών και γεωμετρικών παραμέτρων των γραμμοσειρών (για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στη σχετική συζήτηση στο [18]).

Τα φαινόμενα διάδοσης σε συζεύκτες γραμμοσειρών έχουν επίσης μελετηθεί με εφαρμογή τεχνικών ολοκληρωτικών εξισώσεων [37]-[39], οι οποίες είναι διαφορετικές από τις χρησιμοποιούμενες στην παρούσα διατριβή. Ειδικότερα, στις Εργασίες [37]-[39] χρησιμοποιείται η συνάρτηση Green ελευθέρου χώρου και εφαρμόζεται η μέθοδος συνοριακών στοιχείων για την επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης στο επίπεδο χωρίο των γραμμοσειρών. Επίσης, ο ακριβής υπολογισμός των σταθερών διάδοσης εξαρτάται από τη διακριτοποίηση σε συνοριακά στοιχεία, η οποία σε ορισμένες περιπτώσεις συμβάλλει σε μεγάλη αύξηση του υπολογιστικού κόστους. Εξάλλου, η μεθοδολογία της παρούσας διατριβής επιτρέπει την αναλυτική εκτέλεση όλων των υπολογισμών και δεν απαιτεί διακριτοποίηση της εμφανιζομένης ολοκληρωτικής εξίσωσης, σε αντίθεση με την περίπτωση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων. Επιπροσθέτως, η συνάρτηση Green της διάταξης των συζευγμένων κυματοδηγών, η οποία χρησιμοποιείται εδώ, παρέχει μία πλέον συμπαγή διατύπωση, η οποία ικανοποιεί συμφυώς τις συνοριακές συνθήκες.

Η αριθμητική υλοποίηση της αναπτυχθείσας μεθόδου παράγει αρκετά ενδιαφέροντα αριθμητικά αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα αναφερόμενα στη βέλτιστη σχεδίαση των χαρακτηριστικών των γραμμοσειρών, τα οποία προσφέρουν το ελάχιστο δυνατό μήκος σύζευξης και τη μέγιστη δυνατή αποδοτικότητα σύζευξης (διατηρώντας μικρή απόσταση μεταξύ των σταθερών διάδοσης). Επίσης, ερμηνεύεται ο τρόπος επίδρασης του πάχους, του δείκτη διάθλασης και του κύκλου καθήκοντος των

γραμμοσειρών ως επιπρόσθετων μηχανισμών ελέγχου της βέλτιστης συμπεριφοράς του συζεύκτη αναφορικά με τα επιθυμητά λειτουργικά χαρακτηριστικά. Αναλύονται εκτενώς τα βέλτιστα χαρακτηριστικά του ασυμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών για την αποδοτική λειτουργία του ως ζωνοπερατού φίλτρου οπτικών συχνοτήτων. Η αξιολόγηση αυτών των αποτελεσμάτων διαμορφώνει συγκεκριμένες τεχνικές-σχεδιαστικές προδιαγραφές της υπό μελέτη διάταξης.

Δομή της Διδακτορικής Διατριβής

Η δομή της ανά χείρας διατριβής συνοψίζεται ως εξής: Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται συνοπτικά οι αρχές και η μεθοδολογία του Ηλεκτρομαγνητισμού, που απαιτούνται για τη μελέτη προβλημάτων οπτικών συζευκτών. Στο Κεφάλαιο 2 αναλύεται εκτενώς η αρχή λειτουργίας των κατευθυντικών συζευκτών και περιγράφονται συστηματικά οι γνωστές μέθοδοι ανάλυσης της κυματοδότησης σε κατευθυντικούς συζεύκτες γραμμοσειρών. Στο Κεφάλαιο 3 καταχωρείται αναλυτική μελέτη των φαινομένων κυματοδότησης σε συζευγμένους δισδιάστατους συμμετρικούς κυματοδηγούς με περιοδικά χαραγμένες γραμμοσειρές με χρήση των τεχνικών της Μεθόδου των Ροπών. Η εν λόγω μελέτη αφορά κυρίως στον ακριβή προσδιορισμό των μιγαδικών σταθερών διάδοσης των κυματοδηγούμενων κυμάτων. Στο Κεφάλαιο 4 εντοπίζονται και συνοψίζονται οι προαπαιτούμενες επεκτάσεις, προσαρμογές, και βελτιώσεις της αρχικής μεθόδου για τη διερεύνηση της κυματοδότησης σε ασυμμετρικούς συζεύκτες γραμμοσειρών. Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται αρκετά αριθμητικά αποτελέσματα, αναφερόμενα στην εξέλιξη των μιγαδικών σταθερών διάδοσης συναρτήσει των γεωμετρικών και φυσικών χαρακτηριστικών των γραμμοσειρών, τα οποία αξιοποιούνται αποτελεσματικά στη σχεδίαση συζευκτών γραμμοσειρών. Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 καταγράφονται τα συμπεράσματα της διατριβής και προτείνονται κατευθύνσεις για μελλοντική εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται συνοπτικά με τις απαραίτητες προσαρμογές και βελτιώσεις (επεκτάσεις) οι αρχές και η μεθοδολογία του Ηλεκτρομαγνητισμού που απαιτούνται για τη μελέτη προβλημάτων οπτικών συζευκτών.

Ακριβέστερα, στην παράγραφο 1.1 καταγράφονται και αναλύονται η διαφορική και ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων Maxwell στο πεδίο του χρόνου. Επιπλέον, διατυπώνονται οι χρονοανεξάρτητες εξισώσεις Maxwell στην περίπτωση αρμονικής χρονικής εξάρτησης των πεδιακών μεγεθών. Οι εξισώσεις Maxwell συμπληρώνονται από κατάλληλες συντακτικές σχέσεις και συνοριακές συνθήκες, οι οποίες καταχωρούνται στην παράγραφο 1.2.

Εξάλλου, στην παράγραφο 1.3 εξάγονται οι χρονοανεξάρτητες εξισώσεις Maxwell σε ανομοιογενή ιστροπικό χώρο και μελετώνται οι αντίστοιχες διανυσματικές κυματικές εξισώσεις για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. Στην ειδική περίπτωση τμηματικά σταθερής κατανομής του δείκτη διάθλασης οι προαναφερόμενες διανυσματικές κυματικές εξισώσεις ανάγονται στις γνωστές μη ομογενείς διανυσματικές εξισώσεις Helmholtz.

Η αποσύζευξη των εξισώσεων Maxwell στην περίπτωση ανεξαρτησίας των πεδιακών μεγεθών από την εγκάρσια μεταβλητή περιγράφεται στην παράγραφο 1.4. Η εν λόγω αποσύζευξη οδηγεί στη μελέτη των δύο ξεχωριστών ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων, του εγκάρσια ηλεκτρικού (TE-transverse electric) και του εγκάρσια μαγνητικού (TM-transverse magnetic).

1.1. Εξισώσεις Maxwell

Οι εξισώσεις Maxwell διατυπώθηκαν από τον James Clerk Maxwell το 1873. Μέχρι τότε, ορισμένες ατελείς μορφές αυτών των εξισώσεων προϋπήρχαν σε εργασίες των Faraday, Ampere, Gauss και Poisson. Η βασική συνεισφορά του Maxwell συνίσταται στη θεώρηση ως προσθετού του όρου του *ρεύματος μετατόπισης* (*displacement current*) στις προαναφερθείσες εξισώσεις [40]-[42]. Αυτό συνέβαλε σημαντικά και στην απόδειξη της αρχής ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μπορεί να υπάρξει ως κύματα. Πειραματικά, η κυματική φύση των εξισώσεων Maxwell επιβεβαιώθηκε από τον Heinrich Hertz το 1888. Εξάλλου, αν και η επιφάνεια της γης είναι καμπύλη, ο Guglielmo Marconi επέτυχε το 1901 μέσω της ανάκλασης των ραδιοκυμάτων στην ιονόσφαιρα, τη μετάδοση ραδιοκυμάτων κατά μήκος του Ατλαντικού Ωκεανού. Έκτοτε η σημασία των εξισώσεων Maxwell έχει αναδειχθεί σε πολυάριθμες φυσικές και τεχνολογικές εφαρμογές της θεωρίας μικροκυμάτων και κεραιών, των ασυρμάτων και οπτικών τηλεπικοινωνιών, radar καθώς επίσης και σε πολλές εφαρμογές ευθέων και αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης.

Οι εξισώσεις (νόμοι) Maxwell διατυπώνονται σε διαφορική και σε ολοκληρωτική μορφή, οι οποίες αναλύονται στα ακόλουθα δύο εδάφια.

1.1.1. Διαφορική μορφή εξισώσεων Maxwell

Οι εξισώσεις Maxwell σε διαφορική μορφή είναι οι εξής

$$\nabla \times E(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} B(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

$$\nabla \times H(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} D(\mathbf{r}, t) + J(\mathbf{r}, t) \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot D(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot B(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.4)$$

Οι χωροχρονικές διανυσματικές συναρτήσεις

$$E, H, D, B, J: \Omega \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

και η χωροχρονική μιγαδική συνάρτηση

$$\rho: \Omega \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

εκφράζουν

$E(\mathbf{r},t)$: ένταση ηλεκτρικού πεδίου	(Volts/m)
$H(\mathbf{r},t)$: ένταση μαγνητικού πεδίου	(Amperes/m)
$D(\mathbf{r},t)$: ηλεκτρική μετατόπιση (ροή)	(Coulombs/m ²)
$B(\mathbf{r},t)$: πυκνότητα μαγνητικής ροής	(Webers/m ²)
$J(\mathbf{r},t)$: πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος	(Amperes/m ²)
$\rho(\mathbf{r},t)$: πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου	(Coulombs/m ³)

Η εξίσωση (1.1) είναι γνωστή ως *νόμος Faraday*. Η εξίσωση (1.2) χωρίς τον όρο $\frac{\partial D}{\partial t}$ του ρεύματος μετατόπισης είναι γνωστή ως *νόμος Ampere*. Ο όρος του ρεύματος μετατόπισης εισήχθη ως προσθετός στο νόμο του Ampere από τον Maxwell. Ο εν λόγω όρος συζευγνύει το μαγνητικό πεδίο με τη χρονικά μεταβαλλόμενη ηλεκτρική ροή και επιτρέπει τη δυνατότητα ύπαρξης των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων ως κυμάτων, τα οποία, ως αποδείχτηκε κατόπιν, ταυτίζονται με τα οπτικά κύματα (για λεπτομέρειες βλ. [40] και [42]). Εξάλλου, οι εξισώσεις (1.3) και (1.4) είναι συνέπειες του νόμου Gauss, ο οποίος εκφράζει τη διατήρηση της ροής, και είναι γνωστές ως *νόμοι Gauss για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο* αντιστοίχως.

Οι εξισώσεις Maxwell συμπληρώνονται από την εξίσωση συνεχείας

$$\nabla \cdot J(\mathbf{r},t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r},t) = 0 \quad (1.5)$$

η οποία εκφράζει την ιδιότητα ότι η απόκλιση της πυκνότητας ρεύματος J από έναν απειροστό όγκο, ο οποίος περιβάλλει το σημείο \mathbf{r} , είναι ίση με το ρυθμό μείωσης της πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου ρ ως προς το χρόνο t .

Εξάλλου, αξίζει να σημειώσουμε ότι οι εξισώσεις (1.1)-(1.5) δεν είναι ανεξάρτητες, αφού οι (1.4) και (1.3) προκύπτουν από τις (1.1) και (1.2). Ακριβέστερα, η απόκλιση της (1.1) οδηγεί στην (1.4), ενώ η απόκλιση της (1.2) μέσω της εξίσωσης συνεχείας (1.5) οδηγεί στην (1.3).

Στα επόμενα υποθέτουμε ότι οι προαναφερθείσες πεδιακές και ρευματικές χωροχρονικές συναρτήσεις μεταβάλλονται αρμονικά ως προς χρόνο με βάση τον παράγοντα $\exp(j\omega t)$ (ω είναι η κυκλική συχνότητα), δηλαδή ισχύει

$$A(\mathbf{r},t) = \text{Re}[\mathbf{A}(\mathbf{r})\exp(j\omega t)] \quad (1.6)$$

Η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{A}(\mathbf{r})$: $V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ αναφέρεται ως *παραστατικός μιγάς* ή *φάσοντας* (*phasor*). Υπό την προϋπόθεση (1.6) οι (1.1)-(1.4) ανάγονται στις *χρονοανεξάρτητες εξισώσεις Maxwell*

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.10)$$

Εναλλακτικά οι (1.7)-(1.10) προκύπτουν επίσης και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier ως προς το χρόνο των (1.1)-(1.4) και συνεπώς οι φάσορες είναι ουσιαστικά οι μετασχηματισμοί Fourier των χωροχρονικών πεδιακών συναρτήσεων. Για αυτό το λόγο, οι φάσορες, που επαληθεύουν τις (1.7)-(1.10), αναφέρονται επίσης και ως *λύσεις στο πεδίο συχνοτήτων (frequency domain solutions)* των εξισώσεων Maxwell, ενώ οι χωροχρονικές συναρτήσεις που επαληθεύουν τις (1.1)-(1.4) αναφέρονται ως *λύσεις στο πεδίο του χρόνου (time domain solutions)* των εξισώσεων Maxwell. Τα πλεονεκτήματα της χρήσης των (1.7)-(1.10) εντοπίζονται ουσιαστικά στην απουσία χρονικής εξάρτησης και χρονικών παραγώγων.

1.1.2. Ολοκληρωτική μορφή εξισώσεων Maxwell

Οι εξισώσεις Maxwell (1.1)-(1.4) αναδιατυπώνονται επίσης σε ολοκληρωτική μορφή, η οποία αναδεικνύει μία διαφορετική ενόραση των προβλημάτων (βλ. [43] και [44]).

Η ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων Maxwell είναι η εξής

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.11)$$

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.12)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad (1.13)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.14)$$

όπου S είναι μία απλή, λεία και C^2 παραμετρική επιφάνεια του \mathbb{R}^3 με γεωμετρικό σύνορο C θετικά προσανατολισμένο ως προς ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο μοναδιαίων καθέτων διανυσμάτων της S και V ένα κανονικό υποσύνολο του \mathbb{R}^3 με τμηματικά C^1 σύνορο ∂V .

Οι εξισώσεις (1.11) και (1.12) προκύπτουν αντιστοίχως μετά από ολοκλήρωση των μελών των (1.1) και (1.2) στην επιφάνεια S και εφαρμογή του θεωρήματος Stokes. Οι εξισώσεις (1.13) και (1.14) προκύπτουν μετά από ολοκλήρωση των μελών των (1.3) και (1.4) στο σύνολο V και εφαρμογή του θεωρήματος Gauss.

Σύμφωνα με την (1.11) η ηλεκτρεγερτική δύναμη κατά μήκος του γεωμετρικού συνόρου C της επιφάνειας S ισούται με το ρυθμό μείωσης της μαγνητικής ροής, η οποία διαπερνά την επιφάνεια αυτή. Εξάλλου, η εξίσωση (1.12) συνεπάγεται ότι η μαγνητεγερτική δύναμη κατά μήκος του συνόρου C ισούται με το άθροισμα του ρυθμού αύξησης της ηλεκτρικής ροής δια μέσου της επιφάνειας S και του ρεύματος που διαπερνά την S . Δηλαδή, μία χρονικά μεταβαλλόμενη ηλεκτρική ροή (ρεύμα μετατόπισης) ή ένα ηλεκτρικό ρεύμα παράγουν μία μαγνητεγερτική δύναμη, ή απλούστερα ένα μαγνητικό πεδίο, το οποίο περιβάλλει τα ρεύματα. Επιπροσθέτως, η εξίσωση (1.13) εκφράζει την ιδιότητα ότι η ηλεκτρική ροή η οποία εξέρχεται από υποσύνολο V του \mathbb{R}^3 δια μέσου της επιφάνειας ∂V ισούται με το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που εμπερικλείεται στο V . Η εξίσωση (1.14) εκφράζει την ιδιότητα ότι η μαγνητική ροή η οποία εξέρχεται από το V δια μέσου του ∂V ισούται με μηδέν. Οι εξισώσεις (1.13) και (1.14) αποτελούν ουσιαστικά διατυπώσεις της διατήρησης της ηλεκτρικής και μαγνητικής ροής αντιστοίχως.

Τα θέματα της παρούσας διατριβής μελετώνται με χρήση των χρονοανεξάρτητων εξισώσεων Maxwell στη διαφορική μορφή (1.7)-(1.10).

1.2. Καταστατικές σχέσεις-Συνοριακές συνθήκες

Επειδή από τις τέσσερις εξισώσεις Maxwell μόνο οι δύο είναι ανεξάρτητες, στην πράξη εργαζόμαστε με τις (1.7) και (1.8). Όμως, στις δύο αυτές διανυσματικές εξισώσεις υπάρχουν τέσσερις διανυσματικοί άγνωστοι \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} . Έτσι, για να έχουμε επαρκή αριθμό εξισώσεων, χρειαζόμαστε άλλες δύο εξισώσεις που να συνδέουν τα \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} . Αυτές είναι οι *καταστατικές σχέσεις* (*constitutive relations*), οι οποίες εξαρτώνται από και χαρακτηρίζουν το φυσικό μέσο στο οποίο διατυπώνονται οι εξισώσεις Maxwell.

Οι καταστατικές σχέσεις στη γενική περίπτωση ενός *ανισοτροπικού μέσου*

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.15)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \bar{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.16)$$

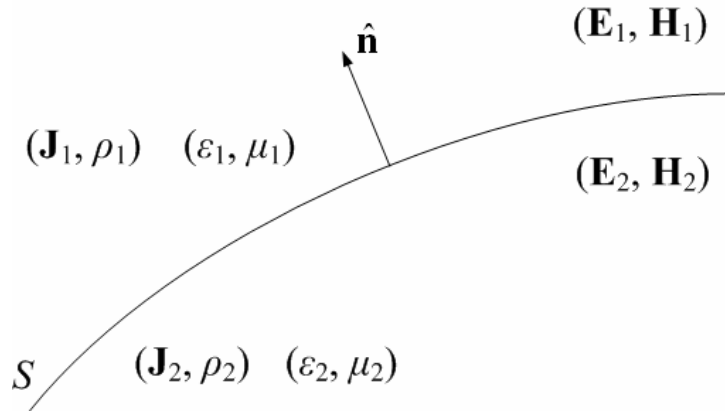
συνδέουν τα \mathbf{E} και \mathbf{D} και τα \mathbf{H} και \mathbf{B} μέσω των 3×3 τανυστών $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ και $\bar{\boldsymbol{\mu}}$. Επειδή οι $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ και $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ είναι χωρικές συναρτήσεις, το μέσο αναφέρεται ως *ανομοιογενές*. Στις ειδικές περιπτώσεις των *ισοτροπικών μέσων* οι σχέσεις (1.15) και (1.16) είναι ανεξάρτητες από την πόλωση των πεδίων και ανάγονται στις

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.17)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.18)$$

όπου ε και μ μιγαδικές χωρικές βαθμωτές συναρτήσεις.

Οι εξισώσεις Maxwell και οι καταστατικές σχέσεις συμπληρώνονται από κατάλληλες *συνοριακές συνθήκες* (*boundary conditions*), τις οποίες πρέπει να πληρούν το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στις διαχωριστικές επιφάνειες μεταβολής των φυσικών παραμέτρων του μέσου. Συγκεκριμένα, στη διαχωριστική επιφάνεια S δύο μέσων με αντίστοιχες φυσικές παραμέτρους (ε_1, μ_1) και (ε_2, μ_2) , η οποία δεν περιέχει επιφανειακές κατανομές φορτίων ή ρευμάτων



Σχήμα 1.1 Γεωμετρία εφαρμογής συνοριακών συνθηκών

ισχύουν για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο οι *συνοριακές συνθήκες μετάδοσης* (*transmission boundary conditions*) [45]

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \quad (1.19)$$

$$\varepsilon_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \varepsilon_2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \quad (1.20)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) \quad (1.21)$$

$$\mu_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \mu_2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) \quad (1.22)$$

Οι (1.19) και (1.21) εκφράζουν ότι οι εφαπτομενικές συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι συνεχείς στην S . Επιπλέον, οι (1.20) και (1.22) εκφράζουν ότι οι κάθετες συνιστώσες της ηλεκτρικής μετατόπισης και της μαγνητικής επαγωγής είναι συνεχείς στην S .

1.3. Εξισώσεις Maxwell σε ανομοιογενή ιστροπικό χώρο

1.3.1. Διανυσματικές κυματικές εξισώσεις

Οι χρονοανεξάρτητες εξισώσεις Maxwell (1.7)-(1.10) σε ιστροπικό ανομοιογενές μέσο με μαγνητική διαπερατότητα $\mu(\mathbf{r})$ και ηλεκτρική επιτρεπτότητα $\varepsilon(\mathbf{r})$ ανάγονται στις

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j\omega\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.24)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})) = \rho(\mathbf{r}) \quad (1.25)$$

$$\nabla \cdot (\mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r})) = 0 \quad (1.26)$$

Λαμβάνοντας το στροβιλισμό της $\mu^{-1} \cdot (1.23)$ μέσω της (1.24) ευρίσκουμε

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) - \omega^2 \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.27)$$

Με παρόμοιο τρόπο, λαμβάνοντας το στροβιλισμό της $\varepsilon^{-1} \cdot (1.24)$ μέσω της (1.23) ευρίσκουμε

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) - \omega^2 \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \right) \quad (1.28)$$

Οι εξισώσεις (1.27) και (1.28), οι οποίες εμπλέκουν μόνον το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο αντιστοίχως, αναφέρονται ως *διανυσματικές κυματικές εξισώσεις* [40].

Περαιτέρω, σε μέσο με σταθερή μαγνητική διαπερατότητα $\mu = \mu_0$ και ηλεκτρική επιτρεπτότητα $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 n^2(\mathbf{r})$, όπου $n(\mathbf{r})$ ο δείκτης διάθλασης, οι εξισώσεις (1.23)-(1.26) εξειδικεύονται ως εξής

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.29)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j\omega\varepsilon_0 n^2(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.30)$$

$$\nabla \cdot (n^2(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})) = \rho(\mathbf{r}) / \varepsilon_0 \quad (1.31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.32)$$

Υπολογίζοντας το στροβιλισμό των πεδίων της (1.29) και λαμβάνοντας υπόψη την (1.30), ευρίσκουμε

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k_0^2 n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.33)$$

όπου $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ο κυματικός αριθμός του ελευθέρου χώρου. Εφαρμόζοντας τώρα τη γνωστή διανυσματική ταυτότητα ([46], (14.26)) για το πεδίο $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$, από την (1.33) λαμβάνουμε

$$\left(\nabla^2 + k_0^2 n^2(\mathbf{r})\right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) + j\omega\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.34)$$

Τώρα εφαρμόζοντας στην (1.31) τον κανόνα υπολογισμού της απόκλισης γινομένου βαθμωτής επί διανυσματική συνάρτηση ([46], (14.15)) και χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\nabla n^2(\mathbf{r}) = 2n(\mathbf{r})\nabla n(\mathbf{r}) \quad (1.35)$$

λαμβάνουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{2}{n(\mathbf{r})}(\nabla n(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 n^2(\mathbf{r})} \quad (1.36)$$

Ο συνδυασμός των (1.34) και (1.36) οδηγεί στην εξίσωση

$$\left(\nabla^2 + k_0^2 n^2(\mathbf{r})\right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + 2\nabla \left[\frac{(\nabla n(\mathbf{r}))}{n(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right] = \nabla \left[\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 n^2(\mathbf{r})} \right] + j\omega\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.37)$$

Περαιτέρω υπολογίζοντας το στροβιλισμό των πεδίων της (1.30) και χρησιμοποιώντας τον κανόνα υπολογισμού του στροβιλισμού γινομένου βαθμωτής επί διανυσματική συνάρτηση ([46], (14.17)) ευρίσκουμε

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j\omega\varepsilon_0 \left[n^2(\mathbf{r})\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\nabla n^2(\mathbf{r})) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right] + \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.38)$$

Συνδυάζοντας τις (1.29), (1.30), (1.32), (1.35), (1.38) και λαμβάνοντας υπόψη τη γνωστή διανυσματική ταυτότητα ([46], (14.26)), έχουμε

$$\left(\nabla^2 + k_0^2 n^2(\mathbf{r})\right) \mathbf{H}(\mathbf{r}) + 2 \frac{\nabla n(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} \times (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})) = 2 \frac{\nabla n(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.39)$$

Οι (1.37) και (1.39) αποτελούν ουσιαστικά τις εξειδικεύσεις των διανυσματικών κυματικών εξισώσεων (1.27) και (1.28) σε μέσα με $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 n^2(\mathbf{r})$ και $\mu = \mu_0$.

1.3.2. Τμηματικά σταθερή κατανομή του δείκτη διάθλασης

Θεωρούμε τις ειδικές περιπτώσεις μέσων M , στα οποία ο δείκτης διάθλασης $n(\mathbf{r})$ είναι τμηματικά σταθερός, δηλαδή το M εκφράζεται ως ένωση $M = \bigcup_{i=1}^N M_i$ υποσυνόλων του M_i με $Int M_i \cap Int M_j = \emptyset \mid i \neq j$, όπου $n(\mathbf{r}) = n_i$ (σταθερό) για κάθε $\mathbf{r} \in Int M_i$. Υπενθυμίζουμε ότι

$Int M_i = M_i \setminus \partial M_i$. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις και επειδή ισχύει $\nabla n(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ για $\mathbf{r} \in \bigcup_{i=1}^N Int M_i$, οι

διανυσματικές κυματικές εξισώσεις (1.27) και (1.28) ανάγονται στις

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k_0^2 n_i^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \bigcup_{i=1}^N Int M_i \quad (1.40)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - k_0^2 n_i^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \bigcup_{i=1}^N Int M_i \quad (1.41)$$

Επιπλέον, με τη βοήθεια της εξίσωσης συνέχειας (1.5) διαπιστώνουμε ότι οι (1.37) και (1.39) ανάγονται στις γνωστές μη ομογενείς διανυσματικές εξισώσεις Helmholtz

$$\left(\nabla^2 + k_0^2 n_i^2(\mathbf{r})\right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = j\omega\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}))}{j\omega\epsilon_0 n_i^2}, \quad \mathbf{r} \in \bigcup_{i=1}^N Int M_i \quad (1.42)$$

$$\left(\nabla^2 + k_0^2 n_i^2(\mathbf{r})\right) \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \bigcup_{i=1}^N Int M_i \quad (1.43)$$

Στις συνοριακές επιφάνειες ∂M_i (μεταβολής του δείκτη διάθλασης) απαιτούνται οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες συνέχειας (1.19) και (1.21) των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, οι οποίες υπαγορεύονται από τις εξισώσεις Maxwell.

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ με $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ και $\hat{\mathbf{z}}$ συμβολίζουμε τα μοναδιαία διανύσματα (κατευθύνσεις) των αξόνων του συστήματος. Έτσι, το τυχόν διάνυσμα \mathbf{v} του \mathbb{R}^3 εκφράζεται ως εξής

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}$$

όπου

$$v_x = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{x}} \rangle, \quad v_y = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{y}} \rangle, \quad v_z = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{z}} \rangle$$

οι συνιστώσες του \mathbf{v} ως προς το $Oxyz$.

Ειδικότερα οι καρτεσιανές συνιστώσες των (1.42) και (1.43) εκφράζονται ως εξής (για $u=x, y, z$)

$$\left(\nabla^2 + k_0^2 n_i^2(\mathbf{r})\right) E_u(\mathbf{r}) = j\omega\mu_0 J_u(\mathbf{r}) - \frac{\left(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}))\right)_u}{j\omega\epsilon_0 n_i^2} \quad (1.44)$$

$$\left(\nabla^2 + k_0^2 n_i^2(\mathbf{r})\right) H_u(\mathbf{r}) = -\left(\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r})\right)_u \quad (1.45)$$

Στην περίπτωση του συζεύκτη γραμμοσειρών που θα μελετήσουμε το θεωρούμενο μέσο M είναι ο χώρος \mathbb{R}^2 εκφρασμένος ως πεπερασμένη ένωση λωρίδων, με πλευρές παράλληλες προς τον ίδιο άξονα. Στο εσωτερικό κάθε λωρίδας ο δείκτης διάθλασης προϋποτίθεται σταθερός.

1.4. Αποσύζευξη εξισώσεων Maxwell

Οι εξισώσεις Maxwell (1.29) και (1.30) στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων εκφράζονται ως εξής

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_x \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_z \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega \varepsilon_0 n^2(x, y, z) E_x + J_x \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega \varepsilon_0 n^2(x, y, z) E_y + J_y \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega \varepsilon_0 n^2(x, y, z) E_z + J_z \quad (1.51)$$

Οι (1.46)-(1.51) αποτελούν ένα 6×6 σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Υποθέτοντας ότι τα πεδιακά μεγέθη και οι ρευματικές κατανομές του προβλήματος είναι ανεξάρτητα της μεταβλητής y (οπότε $\frac{\partial}{\partial y} = 0$), παρατηρούμε ότι οι (1.46)-(1.51) απλουστεύονται

ως εξής

$$\frac{\partial E_y(x, z)}{\partial z} = j\omega\mu_0 H_x(x, z) \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial E_x(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(x, z)}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y(x, z) \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial E_y(x, z)}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_z(x, z) \quad (1.54)$$

$$\frac{\partial H_y(x, z)}{\partial z} = -j\omega \varepsilon_0 n^2(x, z) E_x(x, z) + J_x(x, z) \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial H_x(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(x, z)}{\partial x} = j\omega \varepsilon_0 n^2(x, z) E_y(x, z) + J_y(x, z) \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial H_y(x, z)}{\partial x} = j\omega \varepsilon_0 n^2(x, z) E_z(x, z) + J_z(x, z) \quad (1.57)$$

Οι (1.52), (1.54) και (1.56) αποτελούν ένα ανεξάρτητο σύστημα εξισώσεων ως προς τις συνιστώσες E_y , H_x , H_z , ενώ οι (1.53), (1.55) και (1.57) ως προς τις συνιστώσες E_x , E_z , H_y και επομένως το πρόβλημα αποσμπλέκεται σε δύο 3×3 συστήματα. Από τις (1.52), (1.54) και (1.56) συνάγεται ότι το πεδίο που κυματοδηγείται παράλληλα στον άξονα z είναι *εγκάρσια ηλεκτρικό* (TE^z -*transverse electric*), ενώ από τις (1.53), (1.55) και (1.57) το πεδίο είναι *εγκάρσια μαγνητικό* (TM^z -*transverse magnetic*). Στην περίπτωση TE^z κατανομής πεδίου η λύση του προβλήματος ανάγεται στον προσδιορισμό της βαθμωτής συνάρτησης E_y , η οποία ικανοποιεί την (1.44) σε κάθε περιοχή σταθερού δείκτη διάθλασης, καθώς επίσης και τις συνθήκες συνέχειας (1.19) στις συνοριακές επιφάνειες. Οι συναρτήσεις H_x και H_z προσδιορίζονται στη συνέχεια από τις (1.52) και (1.54). Αντιστοίχως, στην περίπτωση TM^z κατανομής πεδίου η λύση του προβλήματος ανάγεται στον προσδιορισμό της H_y , η οποία ικανοποιεί την (1.45) σε κάθε περιοχή σταθερού δείκτη διάθλασης και τις συνοριακές συνθήκες συνέχειας (1.21). Οι E_x και E_z προσδιορίζονται από τις (1.55) και (1.57).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΑΤΕΥΘΥΝΤΙΚΟΙ ΣΥΖΕΥΚΤΕΣ ΣΕ ΟΠΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

Στο Κεφάλαιο αυτό αναλύεται η αρχή λειτουργίας των κατευθυντικών συζευκτών και δικαιολογείται η σκοπιμότητα εισαγωγής γραμμοσειρών σε κατευθυντικούς συζεύκτες. Επίσης, καταχωρείται συστηματική περιγραφή των γνωστών μεθόδων ανάλυσης της κυματοδήγησης σε κατευθυντικούς συζεύκτες γραμμοσειρών. Περαιτέρω, καταγράφονται λεπτομερώς οι εφαρμογές των συζευκτών γραμμοσειρών στους διάφορους κλάδους των οπτικών επικοινωνιών.

Ακριβέστερα, στην παράγραφο 2.1 διατυπώνεται και αναλύεται η αρχή λειτουργίας των κατευθυντικών συζευκτών. Ειδικότερα, τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία εκφράζονται σε κάθε περιοχή σταθερού δείκτη διάθλασης ως γραμμικοί συνδυασμοί των λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης Helmholtz. Η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών οδηγεί σε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα με άγνωστους τους συντελεστές των γραμμικών συνδυασμών. Τα ιδιάζοντα σημεία του εν λόγω συστήματος αποτελούν τις σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων κυμάτων. Η αρχή λειτουργίας των κατευθυντικών συζευκτών αποσαφηνίζεται με τη μελέτη του συμμετρικού συζεύκτη, του σύγχρονου ασύμμετρου συζεύκτη και του ασύγχρονου ασύμμετρου συζεύκτη.

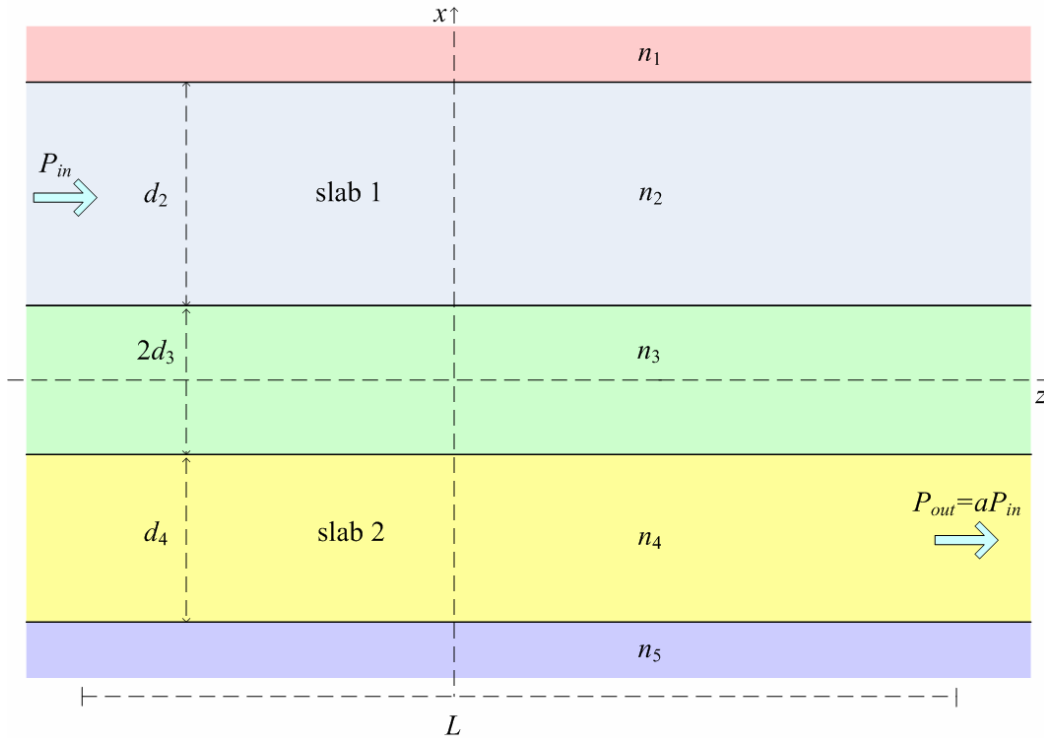
Η γεωμετρία του κατευθυντικού συζεύκτη γραμμοσειρών περιγράφεται στην παράγραφο 2.2, όπου αποσαφηνίζεται επίσης και η σκοπιμότητα εισαγωγής γραμμοσειρών σε κατευθυντικούς συζεύκτες. Πιο συγκεκριμένα, η εισαγωγή γραμμοσειρών με κατάλληλα χαρακτηριστικά στη διάταξη οδηγεί στη σύζευξη των δύο (αρχικά ασύζευκτων) ρυθμών της ομογενούς διάταξης και στην αποδοτική ανταλλαγή του φωτός μεταξύ των δύο κυματοδηγών.

Στην παράγραφο 2.3 αναλύονται εκτενώς διάφορες γνωστές μέθοδοι αναφερόμενες στη μελέτη των φαινομένων κυματοδήγησης σε συζεύκτες γραμμοσειρών. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην περιγραφή της Μεθόδου των Συζευγμένων Ρυθμών, η οποία είναι η κλασικότερη τεχνική ανάλυσης συζευκτών γραμμοσειρών.

Αντιπροσωπευτικές εφαρμογές των συζευκτών γραμμοσειρών στις οπτικές επικοινωνίες καταχωρούνται στην παράγραφο 2.4. Μεταξύ αυτών συγκαταλέγονται εκείνες σε οπτικά φίλτρα, συντονιζόμενα lasers, διατάξεις πολυπλεξίας και αποπολυπλεξίας, μετατροπείς ρυθμών οπτικών παλμών πολύ μεγάλου εύρους ζώνης, οπτικούς διακόπτες και lasers κατανεμημένης ανάδρασης.

2.1. Αρχή λειτουργίας κατευθυντικών συζευκτών

Οι κατευθυντικοί συζεύκτες χρησιμοποιούνται αποτελεσματικά σε πολλές περιοχές της ολοκληρωμένης οπτικής, συνήθως ως διαχωριστές δέσμης (beam splitters), οπτικά φίλτρα (optical filters) και οπτικοί διακόπτες (optical switches) (βλ. [1], [2], [47] και [48]). Στο Σχήμα 2.1 φαίνεται η γεωμετρία ενός ασύμμετρου κατευθυντικού συζεύκτη, ο οποίος αποτελείται από δύο μη συμμετρικές παράλληλες διηλεκτρικές πλάκες (slabs), τοποθετημένες σε κατάλληλα μικρή απόσταση, ώστε να θεωρούνται συζευγμένες.



Σχήμα 2.1 Γεωμετρία ασύμμετρου κατευθυντικού συζεύκτη

Οι δύο κυματοδηγοί έχουν πάχη d_2 και d_4 και δείκτες διάθλασης n_2 και n_4 . Ο χώρος μεταξύ των δύο κυματοδηγών έχει πάχος $2d_3$ και δείκτη διάθλασης n_3 . Οι «ημιάπειροι χώροι» πάνω από τον κυματοδηγό 1 και κάτω από τον κυματοδηγό 2 έχουν δείκτες διάθλασης n_1 και n_5 αντίστοιχα. Η διάταξη θεωρείται ομοιόμορφη κατά μήκος του y -άξονα. Σημειώνουμε ότι η κυματοδηγήση στην εν λόγω διάταξη γίνεται κατά μήκος του z -άξονα.

Η γενική αρχή λειτουργίας του κατευθυντικού συζεύκτη είναι η εξής: Ένας από τους δύο κυματοδηγούς ορίζεται ως θύρα εισόδου (στην περίπτωσή μας ο 1) και ο άλλος (ο 2) ως θύρα εξόδου του οπτικού σήματος. Θεωρούμε ότι ισχύς εισόδου P_{in} εισέρχεται από τη θύρα εισόδου και μετά από ένα ορισμένο μήκος L , το οποίο καλείται *μήκος σύζευξης (coupling length)*, ένα

πολύ μεγάλο ποσοστό α της P_{in} εξέρχεται ως ισχύς εξόδου P_{out} από τη θύρα εξόδου. Σχετικά αναζητούμε τις βέλτιστες τιμές των φυσικών και γεωμετρικών παραμέτρων της διάταξης, έτσι ώστε το ποσοστό α να προσεγγίζει το 100%, δηλαδή όλη η ισχύς εισόδου να μεταβιβάζεται στη θύρα εξόδου.

2.1.1. Κυματοδήγηση σε ασύμμετρικούς κατευθυντικούς συζεύκτες

Τα φαινόμενα κυματοδήγησης σε ασύμμετρους κατευθυντικούς συζεύκτες έχουν διερευνηθεί συστηματικά στη βιβλιογραφία (βλ. ενδεικτικά [7]). Όπως εξηγήθηκε στην παράγραφο 1.4, οι κυματοδηγούμενοι TE^z και TM^z ρυθμοί στην κατεύθυνση \hat{z} προσδιορίζονται από το ηλεκτρικό πεδίο $E_y(x,z)$ και το μαγνητικό πεδίο $H_y(x,z)$. Αναζητούμε λύσεις των εξισώσεων (1.44) και (1.45) της μορφής

$$\mathbf{E} = E_y(x,z)\hat{y} = e(x)\exp[j(\omega t - \beta z)]\hat{y}$$

$$\mathbf{H} = H_y(x,z)\hat{y} = h(x)\exp[j(\omega t - \beta z)]\hat{y}$$

όπου β η σταθερά διάδοσης. Για την ενιαία αντιμετώπιση των TE^z και TM^z ρυθμών, εισάγουμε κατάλληλη συνάρτηση $\Psi(x)$, η οποία αντιπροσωπεύει την $e(x)$ για τους TE^z ρυθμούς και την $h(x)$ για τους TM^z ρυθμούς. Επειδή οι συναρτήσεις $E_y(x,z)$ και $H_y(x,z)$ αποτελούν λύσεις της ομογενούς βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz (1.44) σε κάθε επίπεδο χωρίο σταθερού δείκτη διάθλασης και στους ημίπλευρους χώρους $x > d_3 + d_2$ και $x < -d_3 - d_4$ πρέπει να πληρούν τη συνθήκη ακτινοβολίας, η $\Psi(x)$ εκφράζεται ως εξής

$$\Psi(x) = \begin{cases} A_1 \exp[-g_1(x - d_3 - d_2)], & x \geq d_3 + d_2 \\ A_2 \cosh\left[g_2\left(x - d_3 - \frac{d_2}{2}\right)\right] + A_3 \sinh\left[g_2\left(x - d_3 - \frac{d_2}{2}\right)\right], & d_3 \leq x \leq d_3 + d_2 \\ A_4 \exp(-g_3 x) + A_5 \exp(g_3 x), & -d_3 \leq x \leq d_3 \\ A_6 \cosh\left[g_4\left(x + d_3 + \frac{d_4}{2}\right)\right] + A_7 \sinh\left[g_4\left(x + d_3 + \frac{d_4}{2}\right)\right], & -d_3 - d_4 \leq x \leq -d_3 \\ A_8 \exp[g_5(x + d_3 + d_4)], & x \leq -d_3 - d_4 \end{cases}$$

όπου

$$g_i(\beta) = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_i^2} \quad (i=1, \dots, 5)$$

με

$$\operatorname{Re}\{g_1(\beta)\} \geq 0, \operatorname{Re}\{g_5(\beta)\} \geq 0, \operatorname{Im}\{g_1(\beta)\} \geq 0, \operatorname{Im}\{g_5(\beta)\} \geq 0$$

Οι άγνωστοι συντελεστές A_1 - A_8 προσδιορίζονται με εφαρμογή των οριακών συνθηκών των εφαπτομενικών πεδιακών συνιστωσών στα διαχωριστικά επίπεδα αλλαγής του δείκτη

διάθλασης. Συγκεκριμένα για τους TE^z ρυθμούς απαιτείται η συνέχεια των E_y και H_z ενώ για τους TM^z ρυθμούς η συνέχεια των H_y και E_z . Συνδυάζοντας τώρα τις (1.29) και (1.30), συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις Ψ και $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ πρέπει να είναι συνεχείς για τους TE^z ρυθμούς και

οι Ψ και $\frac{1}{n^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ συνεχείς για τους TM^z ρυθμούς στα επίπεδα $x=d_3+d_2$, $x=d_3$, $x=-d_3$ και $x=-d_3-d_4$.

Η εφαρμογή των εν λόγω οριακών συνθηκών οδηγεί σε ένα 8×8 ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\mathbf{CA}=\mathbf{0} \quad (2.1)$$

όπου το διάνυσμα \mathbf{A} του \mathbb{C}^8 περιέχει τους άγνωστους συντελεστές A_1-A_8 και ο 8×8 πίνακας \mathbf{C} , του οποίου τα στοιχεία είναι συναρτήσεις της παραμέτρου β , είναι ο εξής

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -\cosh(g_2 \frac{d_2}{2}) & -\sinh(g_2 \frac{d_2}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{g_1}{m_1} & -\frac{g_2}{m_2} \sinh(g_2 \frac{d_2}{2}) & -\frac{g_2}{m_2} \cosh(g_2 \frac{d_2}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(g_2 \frac{d_2}{2}) & -\sinh(g_2 \frac{d_2}{2}) & -\exp(-g_3 d_3) & -\exp(g_3 d_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g_2}{m_2} \sinh(g_2 \frac{d_2}{2}) & \frac{g_2}{m_2} \cosh(g_2 \frac{d_2}{2}) & \frac{g_3}{m_3} \exp(-g_3 d_3) & -\frac{g_3}{m_3} \exp(g_3 d_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(g_3 d_3) & \exp(-g_3 d_3) & -\cosh(g_4 \frac{d_4}{2}) & -\sinh(g_4 \frac{d_4}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{g_3}{m_3} \exp(g_3 d_3) & \frac{g_3}{m_3} \exp(-g_3 d_3) & -\frac{g_4}{m_4} \sinh(g_4 \frac{d_4}{2}) & -\frac{g_4}{m_4} \cosh(g_4 \frac{d_4}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh(g_4 \frac{d_4}{2}) & -\sinh(g_4 \frac{d_4}{2}) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g_4}{m_4} \sinh(g_4 \frac{d_4}{2}) & \frac{g_4}{m_4} \cosh(g_4 \frac{d_4}{2}) & -\frac{g_5}{m_5} \end{bmatrix}$$

όπου

$$m_i = \begin{cases} 1, & TE^z \text{ modes} \\ n_i^2, & TM^z \text{ modes} \end{cases} \quad (i=1, \dots, 5)$$

Το ομογενές σύστημα (2.1) έχει μη τετριμμένες λύσεις μόνο όταν η ορίζουσά του είναι ίση με το μηδέν. Η διάταξη του ασύμμετρου κατευθυντικού συζεύκτη υποστηρίζει κυματοδηγούμενα κύματα για τις τιμές της παραμέτρου β , οι οποίες αποτελούν λύσεις της εξίσωσης

$$\det(\mathbf{C})=0$$

Μετά τον προσδιορισμό των εν λόγω τιμών της παραμέτρου β , θέτοντας κάποιον από τους συντελεστές A_i ίσο με τη μονάδα και παραλείποντας μία από τις 8 εξισώσεις του (2.1) αναγόμαστε σε ένα 7×7 μη ομογενές σύστημα, το οποίο επιλύεται με αριθμητικές μεθόδους.

2.1.2. Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα κατευθυντικών συζευκτών

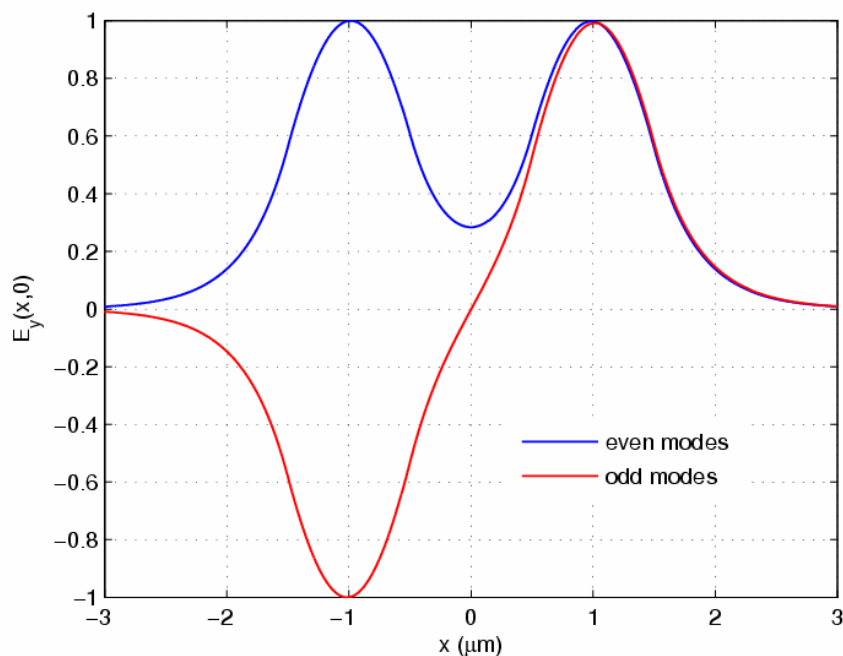
Για την αποσαφήνιση και την κατανόηση της αρχής λειτουργίας των κατευθυντικών συζευκτών περιγράφονται ορισμένα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα συζευκτών και οπτικοποιούνται οι πεδιακές κατανομές των συζευγμένων ρυθμών τους.

1) Συμμετρικός συζεύκτης με $n_1=n_3=n_5=3.2$, $n_2=n_4=3.3$, $d_2=d_4=1\mu\text{m}$, $d_3=0.5\mu\text{m}$ και $\lambda=1.5\mu\text{m}$.

Το πεδίο στη διάταξη του συμμετρικού συζεύκτη θεωρείται ως υπέρθεση των πεδίων των άρτιων (even) και των περιττών (odd) ρυθμών, δηλαδή ισχύει η ανάλυση

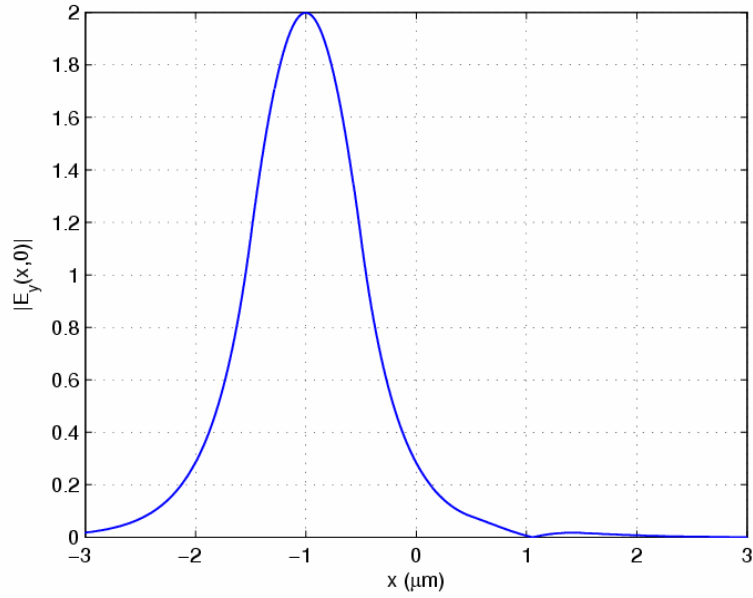
$$\Psi(x, z) = A_e \Psi_e(x) \exp(-j\beta_e z) + A_o \Psi_o(x) \exp(-j\beta_o z)$$

Οι κανονικοποιημένες σταθερές διάδοσης των άρτιων και περιττών TE^z ρυθμών υπολογίζονται $\beta_e/k_0=3.2689$ και $\beta_o/k_0=3.2666$. Οι αντίστοιχες πεδιακές κατανομές $E_y(x, z)$ στο επίπεδο $z=0$ απεικονίζονται στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2 Πεδιακές κατανομές των TE^z ρυθμών συμμετρικού συζεύκτη

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2, μπορούμε να υπερθέσουμε τους δύο ρυθμούς κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να συμβάλλουν στον κυματοδηγό 2 και να αναιρούνται στον κυματοδηγό 1. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 2.3 απεικονίζονται οι πεδιακές κατανομές στο επίπεδο $z=0$ για την επιλογή $A_e=1$ και $A_o=-1$.



Σχήμα 2.3 Σήμα διέγερσης στο $z=0$

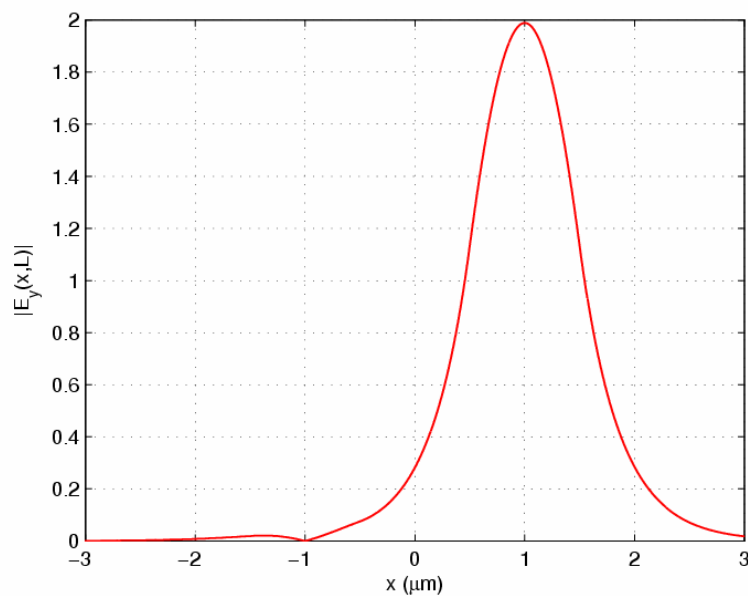
Για την εν λόγω επιλογή η αρχική διέγερση στο επίπεδο $z=0$ εφαρμόζεται στον κυματοδηγό 2, ενώ στον κυματοδηγό 1 εμφανίζεται μόνον ένα ελάχιστο ποσοστό υπολειπόμενης ενέργειας. Το μέτρο της πεδιακής κατανομής $E_y(x,z)$ μετά από απόσταση

$$L = \pi / (\beta_e - \beta_o) \quad (2.2)$$

είναι ίσο με

$$|\Psi(x,L)| = |\Psi_e(x) + \Psi_o(x)|$$

και απεικονίζεται στο Σχήμα 2.4.

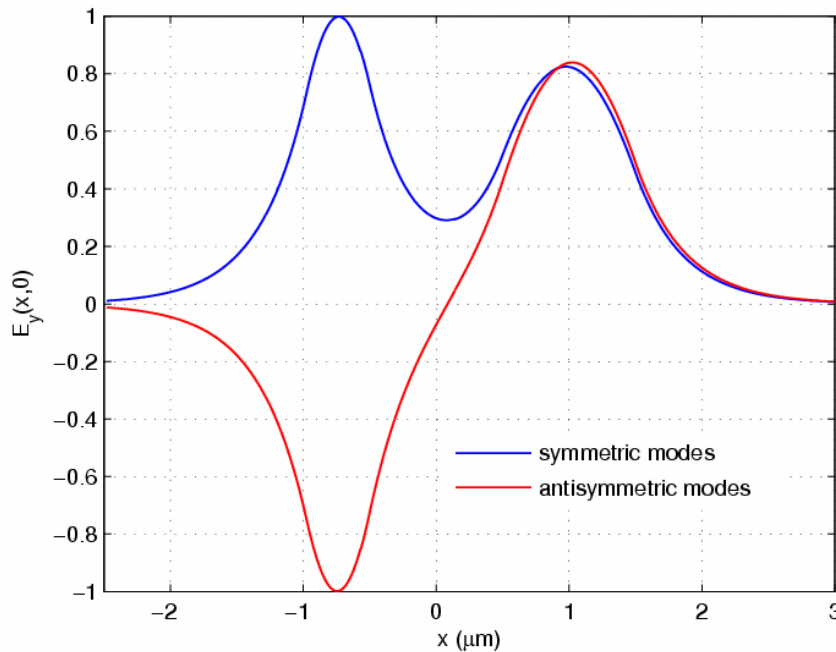


Σχήμα 2.4 Πεδιακή κατανομή στην απόσταση σύζευξης ισχύος $z=L$

Συγκρίνοντας τα Σχήματα 2.3 και 2.4, συμπεραίνουμε ότι μετά από απόσταση L έχει επιτευχθεί σχεδόν πλήρης ανταλλαγή ισχύος, δηλαδή το μεγαλύτερο ποσοστό της αρχικής ισχύος στην τομή του επιπέδου $z=0$ με τον κυματοδηγό 2 οδηγήθηκε στην τομή του επιπέδου $z=L$ με τον κυματοδηγό 1. Για το λόγο αυτό το μήκος L ονομάζεται *μήκος σύζευξης (coupling length)* [7].

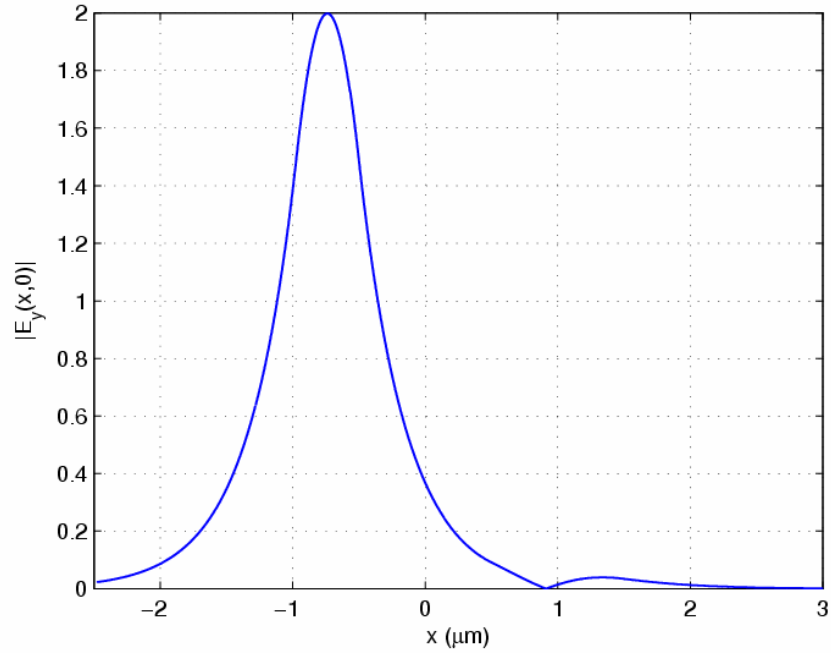
2) Σύγχρονος ασύμμετρος συζεύκτης με $n_1=n_3=n_5=3.2$, $n_2=3.3$, $n_4=3.35$, $d_2=1 \mu\text{m}$, $d_3=0.5 \mu\text{m}$, $d_4=0.4734 \mu\text{m}$ και $\lambda=1.5 \mu\text{m}$.

Με τις αναφερόμενες τιμές των παραμέτρων οι κανονικοποιημένες σταθερές διάδοσης των TE^z ρυθμών $\beta_1/k_0=3.2695$ και $\beta_2/k_0=3.2659$ έχουν αρκετά μικρή διαφορά και συνεπώς ο συζεύκτης θεωρείται σύγχρονος. Οι αντίστοιχες πεδιακές κατανομές στο επίπεδο $z=0$ απεικονίζονται στο Σχήμα 2.5.



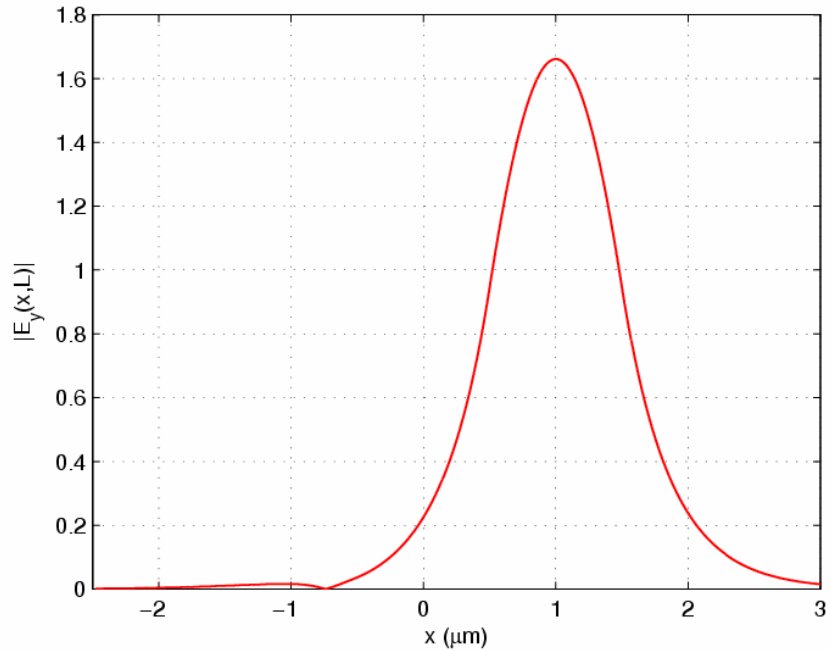
Σχήμα 2.5 Πεδιακές κατανομές των TE^z ρυθμών σύγχρονου ασυμμετρικού συζεύκτη

Όπως παρατηρούμε στο Σχήμα 2.5, δεν εμφανίζεται πλέον η συμμετρία των πεδιακών κατανομών του συμμετρικού συζεύκτη του Σχήματος 2.2. Όμως οι δύο ρυθμοί μπορούν να θεωρηθούν ως *συμμετρικοί (symmetric)* και *αντισυμμετρικοί (antisymmetric)* ως προς το επίπεδο $x=0$. Εξάλλου, με κατάλληλη υπέρθεση των συμμετρικών και αντισυμμετρικών ρυθμών μπορούμε να πετύχουμε σήμα εισόδου στο επίπεδο $z=0$, στο οποίο σήμα το μεγαλύτερο ποσοστό της ενέργειας ευρίσκεται στον κυματοδηγό 2 (βλ. Σχήμα 2.6).



Σχήμα 2.6 Σήμα διέγερσης στο $z=0$

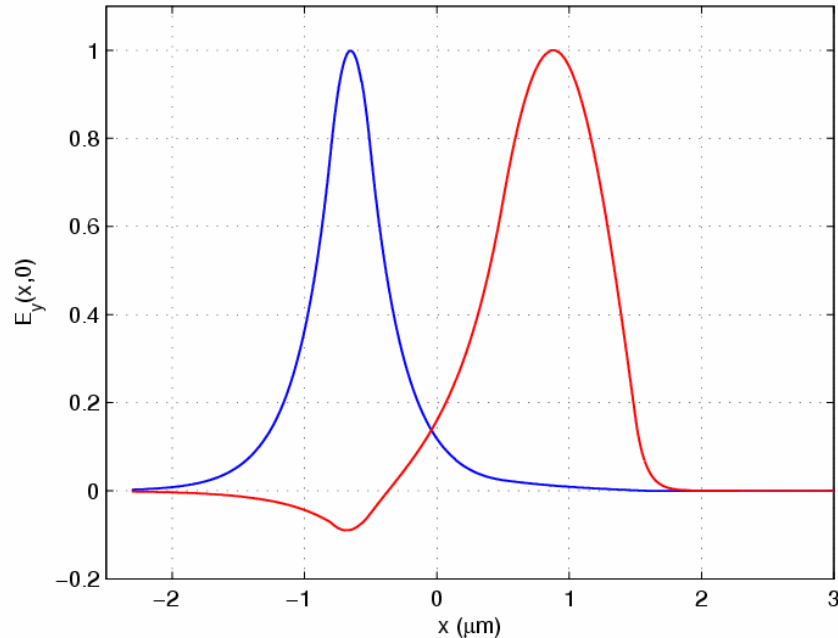
Από τη σύγκριση των Σχημάτων 2.3 και 2.6 προκύπτει ότι το ποσοστό της υπολειπόμενης ενέργειας στον κυματοδηγό 1 είναι μεγαλύτερο στην περίπτωση του ασύμμετρου συζεύκτη. Εν τούτοις και στην περίπτωση αυτή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.7, μετά από απόσταση ίση με το μήκος σύζευξης L , που δίνεται από την (2.2), επιτυγχάνεται σχεδόν πλήρης ανταλλαγή ισχύος.



Σχήμα 2.7 Πεδιακή κατανομή στην απόσταση σύζευξης ισχύος $z=L$

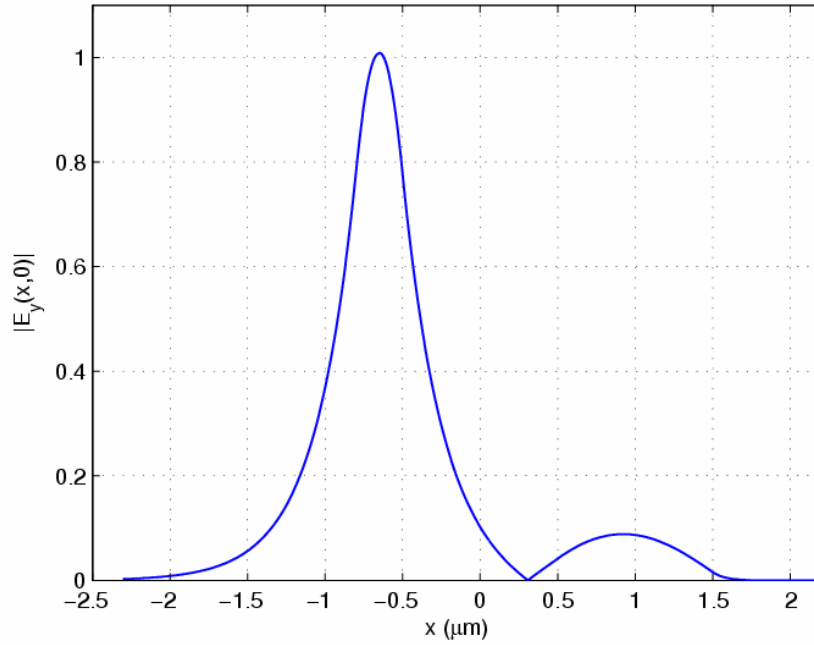
3) Ασύγχρονος ασύμμετρος συζεύκτης με $n_1=1$, $n_2=3.3$, $n_3=n_5=3.2$, $n_4=3.5$, $d_2= 1 \mu\text{m}$, $d_3=0.5 \mu\text{m}$, $d_4= 0.3 \mu\text{m}$ και $\lambda=1.5 \mu\text{m}$.

Στην προκειμένη περίπτωση ο συζεύκτης θεωρείται ασύγχρονος, διότι οι κανονικοποιημένες τιμές των σταθερών διάδοσης $\beta_1/k_0=3.3243$ και $\beta_2/k_0=3.2559$ των TE^z ρυθμών, απέχουν σημαντικά μεταξύ τους. Στο Σχήμα 2.8 απεικονίζονται οι πεδιακές κατανομές στο επίπεδο $z=0$.



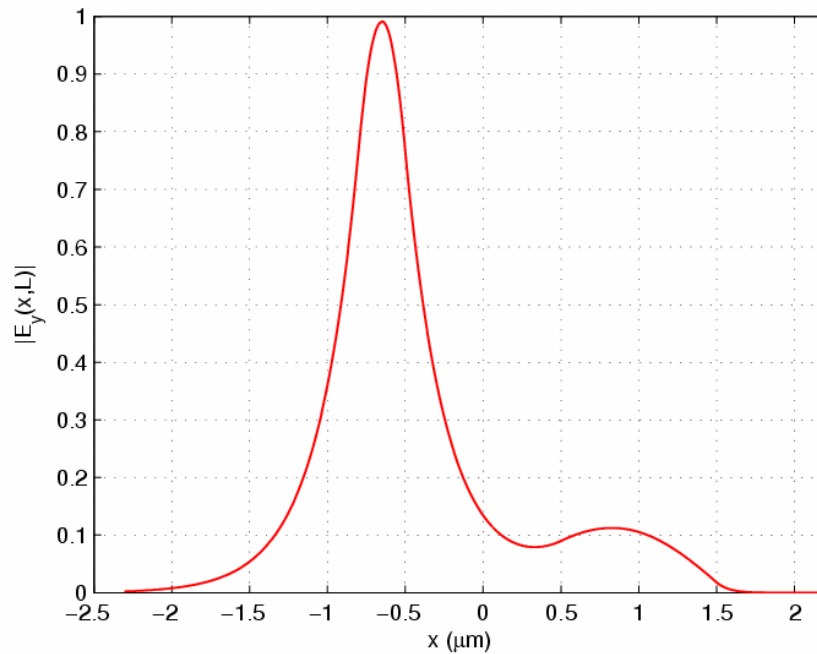
Σχήμα 2.8 Πεδιακές κατανομές των TE^z ρυθμών ασύγχρονου ασυμμετρικού συζεύκτη

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.8, το μεγαλύτερο μέρος της ισχύος καθενός από τους δύο ρυθμούς ευρίσκεται εντός διαφορετικών κυματοδηγών. Οι εν λόγω ρυθμοί έχουν μεγάλη ομοιότητα με τους ρυθμούς του καθενός κυματοδηγού, όταν αυτός θεωρείται απομονωμένος. Επιπλέον ένα μικρό μέρος της ισχύος του ρυθμού, ο οποίος παρίσταται από τη διακεκομμένη γραμμή, υπάρχει στον κυματοδηγό 2, ενώ αντιθέτως η ισχύς του ρυθμού, ο οποίος παρίσταται από τη συνεχή γραμμή, στον κυματοδηγό 1 είναι σχεδόν μηδενική. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στην ανισότητα $\beta_1^2 - k_0^2 n_2^2 > 0$, η οποία οδηγεί σε πραγματικό g_2 , με συνέπεια ο αντίστοιχος ρυθμός να είναι αποσβεννύμενος (evanescent) εντός του κυματοδηγού 1. Όμως, και στην περίπτωση αυτή, επιλέγοντας κατάλληλη υπέρθεση των ρυθμών επιτυγχάνουμε στο επίπεδο $z=0$ το σήμα εισόδου του Σχήματος 2.9, στο οποίο σήμα η αρχική ενεργειακή διέγερση βρίσκεται στον κυματοδηγό 2.



Σχήμα 2.9 Σήμα διέγερσης στο $z=0$

Περαιτέρω, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10, σε απόσταση ίση με το μήκος σύζευξης L , που δίνεται από την (2.2), το μεγαλύτερο ποσοστό της ενέργειας παραμένει στον κυματοδηγό 2.



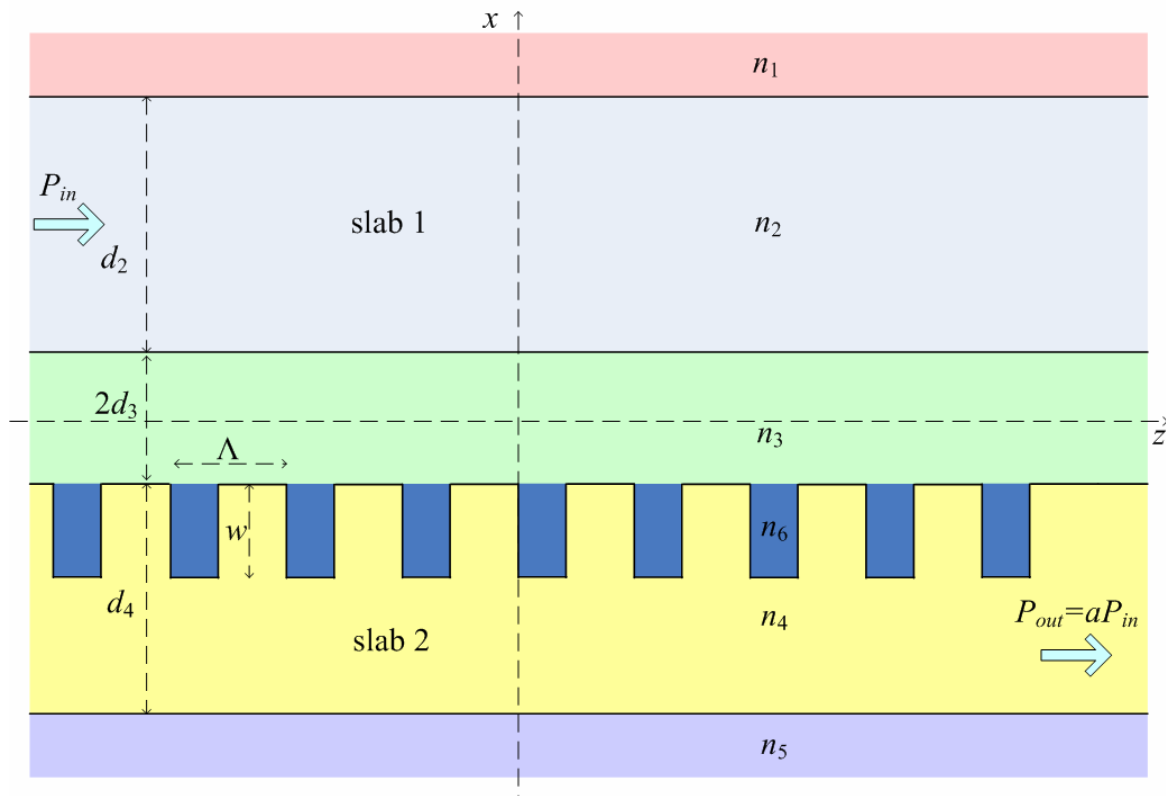
Σχήμα 2.10 Πεδιακή κατανομή στην απόσταση σύζευξης ισχύος $z=L$

Εξάλλου όπως προκύπτει από τα Σχήματα 2.9 και 2.10, στην περίπτωση ασύγχρονου συζεύκτη, δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί ανταλλαγή της ενέργειας του φωτός από τον κυματοδηγό εισόδου στον κυματοδηγό εξόδου.

Συνοψίζοντας τις περιπτώσεις 1, 2 και 3, συμπεραίνουμε ότι στους ασύμμετρικούς συζεύκτες είναι δυνατή η ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ των κυματοδηγών, μόνο σε εκείνα τα μήκη κύματος, όπου οι τιμές των σταθερών διάδοσης των δύο ρυθμών διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους. Το συμπέρασμα αυτό υπαγορεύει τη χρήση των ασύμμετρων κατευθυντικών συζευκτών ως ζωνοπερατά φίλτρα (bandpass filters).

2.2. Εισαγωγή γραμμοσειρών σε κατευθυντικούς συζεύκτες

Η σύζευξη της φωτεινής ισχύος σε ασύγχρονους ασύμμετρους συζεύκτες, η οποία οδηγεί σε ανταλλαγή της ενέργειας μεταξύ των δύο κυματοδηγών, επιτυγχάνεται με τη χρήση γραμμοσειρών περίθλασης (*diffraction grating*). Πιο συγκεκριμένα, στον ένα από τους δύο κυματοδηγούς της διάταξης του κατευθυντικού συζεύκτη του Σχήματος 2.1 χαράσσονται περιοδικά γραμμοσειρές. Η προκύπτουσα διάταξη αναφέρεται συνήθως ως *ασύμμετρικός κατευθυντικός συζεύκτης γραμμοσειρών* (*asymmetric grating assisted directional optical coupler*). Στο Σχήμα 2.11 οπτικοποιείται η γεωμετρία ενός ασύμμετρικού κατευθυντικού συζεύκτη γραμμοσειρών.



Σχήμα 2.11 Γεωμετρία ασύμμετρικού κατευθυντικού συζεύκτη γραμμοσειρών

Οι γραμμοσειρές με περίοδο Λ , πάχος w και δείκτη διάθλασης n_6 ευρίσκονται στο άνω μέρος του κυματοδηγού 2, αλλά η διάταξη λειτουργεί εξίσου ή περισσότερο αποδοτικά, όταν οι γραμμοσειρές τοποθετηθούν στο κάτω μέρος του κυματοδηγού 1 ή και ακόμα όταν ο συζεύκτης φέρει δύο γραμμοσειρές μία στον κυματοδηγό 1 και μία στον κυματοδηγό 2. Σε κάθε περίπτωση η διάταξη αποτελεί μία περιοδική δομή, διότι οι γραμμοσειρές δημιουργούν ένα άπειρο στρώμα, του οποίου η διηλεκτρική σταθερά είναι Λ -περιοδική συνάρτηση ως προς z .

Οι περιοδικές γραμμοσειρές συνταιριάζουν τα διαφορετικά γεωμετρικά και φυσικά χαρακτηριστικά των δύο κυματοδηγών και έτσι συμβάλλουν ουσιαστικά στην ενίσχυση της διαδικασίας σύζευξης. Ακριβέστερα, σύμφωνα με τα αναφερόμενα στην παράγραφο 2.1, η σύζευξη της φωτεινής ενέργειας στους κατευθυντικούς συζεύκτες επιτυγχάνεται μόνο όταν οι ρυθμοί των δύο κυματοδηγών έχουν την ίδια ή σχεδόν την ίδια σταθερά διάδοσης. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι οι δύο κυματοδηγοί πρέπει να έχουν παρόμοια, αν όχι τα ίδια, χαρακτηριστικά [7]. Επιπλέον, οι ασύζευκτοι ρυθμοί της ομογενούς διάταξης των δύο ασύγχρονων κυματοδηγών προσομοιάζουν τους ρυθμούς των δύο κυματοδηγών, όταν αυτοί θεωρούνται σε απομόνωση, ενώ συγχρόνως οι σταθερές διάδοσης των δύο ρυθμών απέχουν σημαντικά μεταξύ τους. Έτσι, η εισαγωγή γραμμοσειρών με κατάλληλα χαρακτηριστικά στη διάταξη οδηγεί στη σύζευξη των δύο (αρχικά ασύζευκτων) ρυθμών της ομογενούς διάταξης και στην αποδοτική ανταλλαγή του φωτός μεταξύ των δύο κυματοδηγών.

2.3. Μέθοδοι ανάλυσης της κυματοδότησης σε συζεύκτες γραμμοσειρών

Εκτενείς μελέτες των κατευθυντικών συζευκτών γραμμοσειρών έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία. Αντικείμενο των μελετών αυτών αποτελεί ο καθορισμός των μεταβολών, που επιφέρει στις σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων η παρουσία των γραμμοσειρών, και ο προσδιορισμός των τιμών των χαρακτηριστικών των γραμμοσειρών (πάχος w , περίοδος Λ , δείκτης διάθλασης n_6) για τις οποίες επιτυγχάνεται η βέλτιστη ανταλλαγή φωτεινής ισχύος μεταξύ των δύο κυματοδηγών.

Οι κυριότερες μέθοδοι ανάλυσης των φαινομένων κυματοδότησης σε συζεύκτες γραμμοσειρών είναι οι εξής:

2.3.1. Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών

Η Θεωρία των Συζευγμένων Ρυθμών (ΘΣΡ) (Coupled Mode Theory-CMT) αποτελεί την κύρια μεθοδολογία ανάλυσης των φαινομένων κυματοδότησης σε διατάξεις συζευκτών γραμμοσειρών (βλ. ενδεικτικά [7]-[21]). Η αρχική μορφή της θεωρίας αναφέρεται ως Συμβατική Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών (Conventional Coupled Mode Theory) και η μετέπειτα αυστηρότερη θεμελίωσή της ως Μη-Ορθογωνική Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών (Non-Orthogonal Coupled Mode Theory). Λεπτομερής επισκόπηση των δύο αυτών μεθόδων περιέχεται στην Εργασία [18].

α) Συμβατική Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών

Η σύζευξη της ηλεκτρομαγνητικής ισχύος στη διάταξη του συζεύκτη γραμμοσειρών υπαγορεύεται ουσιαστικά από τη φυσική σύζευξη μεταξύ των δύο κυματοδηγών, όπως στην περίπτωση του συζεύκτη χωρίς γραμμοσειρές, και την περιοδική σύζευξη, η οποία οφείλεται στις γραμμοσειρές. Η Συμβατική ΘΣΡ μελετά μόνο τη σύζευξη, η οποία οφείλεται στις γραμμοσειρές, και έτσι ερευνά ορθογώνιους ρυθμούς των κυματοδηγών.

Υπό την προϋπόθεση απουσίας των γραμμοσειρών, τα πλάτη a_1 και a_2 των ρυθμών των δύο κυματοδηγών (βλ. Σχήμα 2.1), τα οποία ευρίσκονται σε αρκετά μεγάλη απόσταση μεταξύ τους (ασύζευκτα) αποτελούν λύσεις των διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{da_1}{dz} = -j\beta_1 a_1 \quad , \quad \frac{da_2}{dz} = -j\beta_2 a_2$$

όπου β_1 και β_2 είναι οι σταθερές διάδοσης των ρυθμών. Όταν η απόσταση των κυματοδηγών είναι μικρή, οι ρυθμοί του ενός συζευγνύονται με τους ρυθμούς του άλλου, ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των αποσβεννόμενων (evanescent) πεδίων. Ειδικότερα στην τελευταία περίπτωση, υπό συνθήκες ασθενούς σύζευξης (η απόσταση d_3 δεν είναι πολύ μικρή), τα κανονικοποιημένα πλάτη \hat{a}_1 και \hat{a}_2 των ρυθμών αποτελούν λύση του 2×2 συστήματος συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

$$\frac{d\hat{a}_1}{dz} = -j\delta \hat{a}_1 - j\kappa \hat{a}_2 \quad , \quad \frac{d\hat{a}_2}{dz} = j\delta \hat{a}_2 - j\kappa \hat{a}_1 \quad (2.3)$$

όπου

$$\delta = \frac{\beta_1 + K_{11} - \beta_2 - K_{22}}{2}$$

είναι ο παράγοντας ασυμφωνίας φάσης (phase mismatch factor) και K_{11} , K_{22} και κ είναι οι σταθεροί συντελεστές (ανεξάρτητοι της μεταβλητής z) ίδιας και αμοιβαίας σύζευξης.

Στην περίπτωση του συζεύκτη γραμμοσειρών (βλ. Σχήμα 2.11) υπό συνθήκες ασθενούς σύζευξης τα κανονικοποιημένα πλάτη \hat{a}_1 και \hat{a}_2 των ρυθμών αποτελούν λύση του συστήματος (2.3), όπου όμως ο παράγοντας ασυμφωνίας φάσης δ και ο συντελεστής αμοιβαίας σύζευξης κ δίδονται από τους τύπους

$$\delta = \frac{\beta_1 + C_{11}^0 - \beta_2 - C_{22}^0}{2} - \frac{m\pi}{\Lambda}, \quad \kappa = C_{12}^{+m} = C_{21}^{-m} \quad (2.4)$$

Οι C_{ij}^m είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier των συντελεστών σύζευξης K_{ij}

$$K_{ij} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{ij}^m \exp\left(-j \frac{2m\pi}{\Lambda} z\right)$$

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση συζευκτών γραμμοσειρών οι συντελεστές σύζευξης K_{ij} δεν είναι πλέον ανεξάρτητοι της μεταβλητής z , αλλά είναι περιοδικές συναρτήσεις του z .

Η πλήρης μεταφορά ισχύος στη διάταξη του Σχήματος 2.11 επιτυγχάνεται για την τιμή της περιόδου Λ η οποία αντιστοιχεί μέσω της (2.4) στον παράγοντα ασυμφωνίας φάσης $\delta=0$ (βλ. [18]). Στην περίπτωση κυματοδηγών με πολύ διαφορετικά χαρακτηριστικά, οπότε η φυσική σύζευξη μεταξύ τους μπορεί να αγνοηθεί, η βέλτιστη περίοδος υπολογίζεται

$$\Lambda_A = \frac{\pi}{\beta_1 - \beta_2} \quad (2.5)$$

Η Συμβατική ΘΣΡ δεν δίνει ακριβή αποτελέσματα, όταν οι δύο κυματοδηγοί ευρίσκονται σε πολύ μικρή απόσταση (ισχυρά συζευγμένοι) και κοντά στον συγχρονισμό, γεγονός που αποτελεί σημαντικό περιορισμό της θεωρίας.

β) Μη Ορθογωνική Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών

Η Συμβατική ΘΣΡ αγνοεί τη φυσική σύζευξη μεταξύ των κυματοδηγών, επειδή ερευνά ορθογώνιους ρυθμούς των κυματοδηγών. Σύμφωνα με τη Μη Ορθογωνική ΘΣΡ το πεδίο (\mathbf{E} , \mathbf{H}) που αναπτύσσεται στο συζεύκτη γραμμοσειρών εκφράζεται ως εξής

$$\mathbf{E} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{H} = c_1 \mathbf{h}_1 + c_2 \mathbf{h}_2 \quad (2.6)$$

όπου \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 και \mathbf{h}_1 , \mathbf{h}_2 είναι τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία των κυρίαρχων ρυθμών στους κυματοδηγούς 1 και 2. Υπό τις προϋποθέσεις ότι οι ρυθμοί δεν έχουν ισχυρή σύζευξη και οι γραμμοσειρές δεν προκαλούν μεγάλες ανακλάσεις, η (2.6) αποτελεί ικανοποιητική προσέγγιση του πραγματικού πεδίου του συζεύκτη. Στην προκειμένη περίπτωση, υπό την προϋπόθεση ότι οι

γραμμοσειρές έχουν μικρό πάχος h , το σύστημα των εξισώσεων των συζευγμένων ρυθμών έχει τη μορφή

$$\frac{d\mathbf{W}}{dz} = -j\mathbf{B}\mathbf{W} - j\mathbf{L}\mathbf{W} \quad (2.7)$$

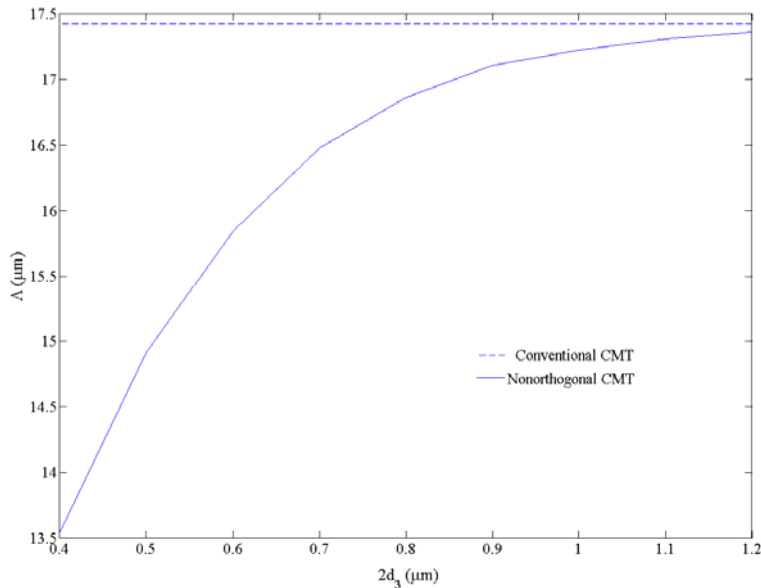
όπου ο πίνακας \mathbf{B} έχει στοιχεία τις σταθερές διάδοσης και ο \mathbf{W} τα πλάτη των ρυθμών, ενώ ο \mathbf{L} είναι ο πίνακας σύζευξης των ρυθμών εξαιτίας των γραμμοσειρών. Η λύση του συστήματος (2.7) οδηγεί στον παράγοντα ασυμφωνίας φάσης

$$\delta_w = \frac{\beta_s - \beta_a}{2} - \frac{\pi}{\Lambda}$$

όπου β_s και β_a είναι οι σταθερές διάδοσης των συμμετρικών και αντισυμμετρικών ρυθμών. Εφαρμόζοντας τη συνθήκη προσαρμογής της φάσης $\delta_w=0$, ευρίσκουμε τη βέλτιστη περίοδο των γραμμοσειρών

$$\Lambda_w = \frac{\pi}{\beta_s - \beta_a} \quad (2.8)$$

Για τη σύγκριση των βέλτιστων περιόδων Λ_A και Λ_W , που καθορίζονται στις δύο θεωρίες, θεωρούμε συζεύκτη γραμμοσειρών με $n_1=1$, $n_2=3.3$, $n_3=3.2$, $n_4=3.5$, $n_5=3$, $d_2=1 \mu\text{m}$, $d_4=0.3 \mu\text{m}$ και $\lambda=1.5 \mu\text{m}$. Στο Σχήμα 2.12 απεικονίζονται οι βέλτιστες περίοδοι Λ_A και Λ_W συναρτήσει της απόστασης $2d_3$ των δύο κυματοδηγών.



Σχήμα 2.12 Βέλτιστες περίοδοι γραμμοσειρών συναρτήσει της απόστασης των κυματοδηγών

Η περίοδος Λ_A είναι ανεξάρτητη της απόστασης d_3 , ενώ η περίοδος Λ_W αυξάνεται με τη d_3 . Η απόσταση των γραφημάτων των Λ_A και Λ_W μεγαλώνει αρκετά καθώς μικραίνει η d_3 . Για

μικρές αποστάσεις d_3 η Λ_W αποτελεί καλύτερη προσέγγιση της ακριβούς τιμής της βέλτιστης περιόδου Λ από την Λ_A .

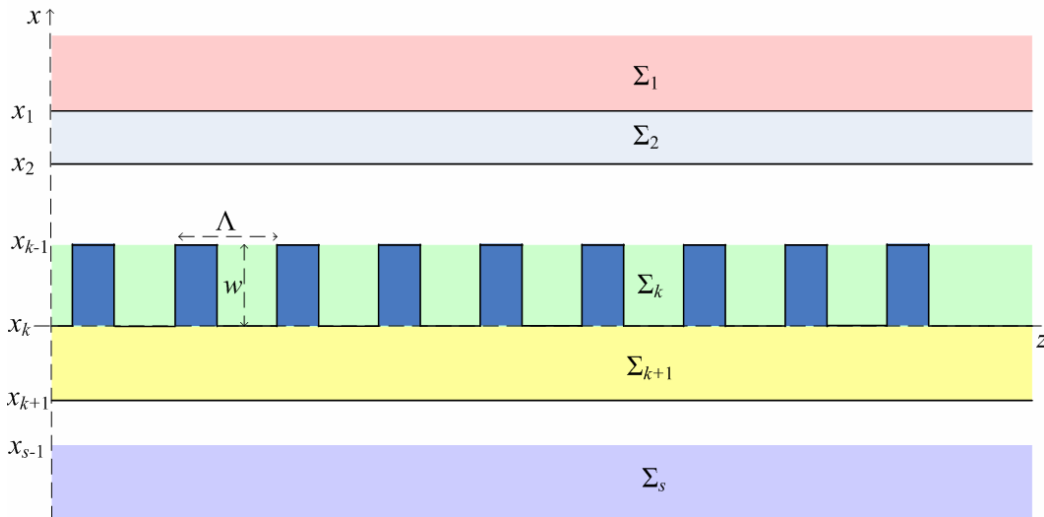
Η ακρίβεια των λύσεων, οι οποίες επιτυγχάνονται με τη ΘΣΡ, προϋποθέτει τους εξής περιορισμούς

- 1) Η απόσταση d_3 των δύο κυματοδηγών δεν είναι πολύ μικρή.
- 2) Το πάχος w των γραμμοσειρών, συγκρινόμενο με το πάχος του κυματοδηγού, είναι μικρό.
- 3) Οι διαφορές των δεικτών διάθλασης των διαφορετικών μέσων δεν είναι πολύ μεγάλες.
- 4) Τα φαινόμενα ακτινοβολίας από τις γραμμοσειρές θεωρούνται αμελητέα.

Ορισμένες βελτιωμένες παραλλαγές της ΘΣΡ, οι οποίες λαμβάνουν υπόψη τις απώλειες λόγω ακτινοβολίας και προσεγγίζουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τους ρυθμούς για περιπτώσεις ισχυρής σύζευξης, έχουν επίσης εμφανιστεί στην πρόσφατη βιβλιογραφία (βλ. π.χ. [19] και [20]).

2.3.2. Θεωρία Floquet-Bloch

Η Θεωρία Floquet-Bloch συνιστά μία αυστηρή μεθοδολογία μελέτης των φαινομένων κυματοδότησης σε διατάξεις συζευκτών γραμμοσειρών (βλ. ενδεικτικά [22]-[29]). Με βάση τη Θεωρία Floquet-Bloch αναλύονται τα φαινόμενα κυματοδότησης στον πολυστρωματικό συζεύκτη γραμμοσειρών του Σχήματος 2.13.



Σχήμα 2.13 Γεωμετρία του πολυστρωματικού κατευθυντικού συζεύκτη γραμμοσειρών

Το βαθμωτό πεδίο F_i ($F_i=E_{yi}$ για TE^z ρυθμούς και $F_i=H_{yi}$ για TM^z ρυθμούς) ενός ρυθμού με σταθερά διάδοσης β και σταθερά εξασθένησης a στο i -οστό στρώμα του συζεύκτη γραμμοσειρών αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως εξής (βλ. π.χ. [26])

$$F_i(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^{(i)}(x) \exp(-jk_{zn}z)$$

όπου $f_n^{(i)}(x)$ είναι κατάλληλες χωρικές αρμονικές συναρτήσεις και

$$k_{zn} = \beta + ja + n \frac{2\pi}{\Lambda}$$

Στα ομοιόμορφα στρώματα $\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \Sigma_i$ άνω και κάτω από το στρώμα των γραμμοσειρών, οι

συναρτήσεις $f_n^{(i)}(x)$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$$\frac{d^2 f_n^{(i)}(x)}{dx^2} + (\epsilon_i k_0^2 - k_{zn}^2) f_n^{(i)}(x) = 0, \quad i \neq k \quad (2.9)$$

Κάθε προσδιορίσιμη συνάρτηση $f_n^{(i)}(x)$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των γνωστών γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της (2.9), οι δε άγνωστοι συντελεστές των γραμμικών συνδυασμών προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες στις διαχωριστικές επιφάνειες x_i ($i=1, \dots, s-1$). Έτσι διαμορφώνεται το 2×2 γραμμικό σύστημα

$$\mathbf{T}_n^{(i)} \mathbf{C}_n^{(i)} = \mathbf{M}_n^{(i+1)} \mathbf{C}_n^{(i+1)} \quad (2.10)$$

όπου $\mathbf{C}_n^{(i)}$ είναι το διάνυσμα των άγνωστων συντελεστών στο στρώμα i και $\mathbf{T}_n^{(i)}$, $\mathbf{M}_n^{(i+1)}$ είναι οι πίνακες μετάβασης από το στρώμα i στο στρώμα $i+1$.

Στο στρώμα k των γραμμοσειρών οι συνιστώσες των χωρικών αρμονικών συναρτήσεων $f_n^{(k)}(x)$ και $g_n^{(k)}(x)$ των πεδίων F και G ($F=E_y$, $G=H_z$ για TE^z ρυθμούς και $F=H_y$, $G=E_z$ για TM^z ρυθμούς) αποτελούν λύσεις του συστήματος των συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(x) \\ \mathbf{g}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Q}(k_{z0}) \\ \mathbf{P}(k_{z0}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(x) \\ \mathbf{g}(x) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

όπου \mathbf{P} και \mathbf{Q} είναι κατάλληλοι πίνακες, οι οποίοι προσδιορίζονται από τις εξισώσεις Maxwell.

Το εν λόγω σύστημα επιλύεται αριθμητικά (βλ. [22] και [26]) και οι λύσεις του είναι οι τιμές του πεδίου στο στρώμα των γραμμοσειρών ως συναρτήσεις των αντιστοίχων τιμών στα σύνορα του στρώματος. Το γραμμικό σύστημα της μεθόδου είναι

$$\mathbf{D}(k_{z0}) \cdot \mathbf{f}(x_{k-1}) = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

και προκύπτει με συνδυασμό των (2.10) και (2.11) και χρήση των συνοριακών συνθηκών στα επίπεδα $x=x_{k-1}$ και $x=x_k$. Συνεπώς οι σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων στη διάταξη ρυθμών είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\det[\mathbf{D}(k_{z_0})] = 0$$

και οι πεδιακές κατανομές σε κάθε στρώμα εκφράζονται με τη βοήθεια των λύσεων του ομογενούς συστήματος (2.12).

Τέλος, το μήκος σύζευξης L , το οποίο προκύπτει από τη Θεωρία Floquet-Bloch είναι

$$L = \frac{\pi}{\beta_s - \beta_a - \frac{2\pi}{\Lambda}} \quad (2.13)$$

όπου β_s και β_a οι σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων ρυθμών.

Οι μέθοδοι της Θεωρίας Floquet-Bloch υπολογίζουν τις σταθερές διάδοσης με μεγαλύτερη ακρίβεια από εκείνες της Θεωρίας των Συζευγμένων Ρυθμών, διότι δεν λαμβάνουν υπόψη προσεγγίσεις για τη σύζευξη των ρυθμών και τα φυσικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμοσειρών. Όμως, η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της Θεωρίας Floquet-Bloch εξαρτάται από την αριθμητική επίλυση συστημάτων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως και από την τάξη κολόβωσης των γραμμικών συστημάτων.

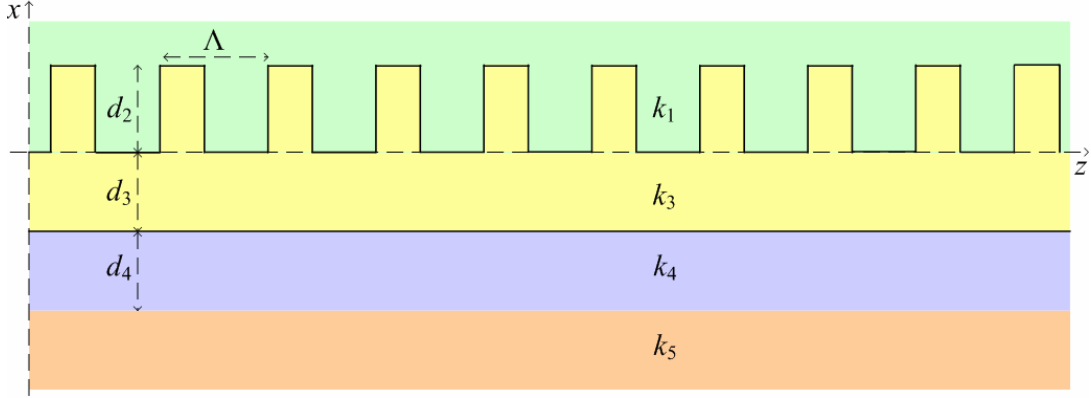
2.3.3. Μέθοδοι Ολοκληρωτικών Εξισώσεων

Για τη μελέτη των φαινομένων κυματοδήγησης σε συζεύκτες γραμμοσειρών χρησιμοποιούνται επίσης και διάφορες Μέθοδοι Ολοκληρωτικών Εξισώσεων, οι οποίες βασίζονται στο μετασχηματισμό του προβλήματος συνοριακών τιμών σε μία ολοκληρωτική εξίσωση, η οποία επιλύεται με χρήση αριθμητικών ή ημιαναλυτικών τεχνικών (βλ. π.χ. [37]-[39]).

Το βαθμωτό πεδίο Ψ σε κάθε στρώμα της διάταξης του συζεύκτη γραμμοσειρών του Σχήματος 2.14 ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi(x, z) + k_0^2 k \Psi(x, z) = 0 \quad (2.14)$$

όπου k η σχετική διηλεκτρική σταθερά του στρώματος.



Σχήμα 2.14 Γεωμετρία του κατευθυντικού συζεύκτη γραμμοσειρών

Η συνάρτηση Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k)$ του ελεύθερου χώρου με σχετική διηλεκτρική σταθερά k είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\nabla_i^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) + k_0^2 k G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) = -\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (2.15)$$

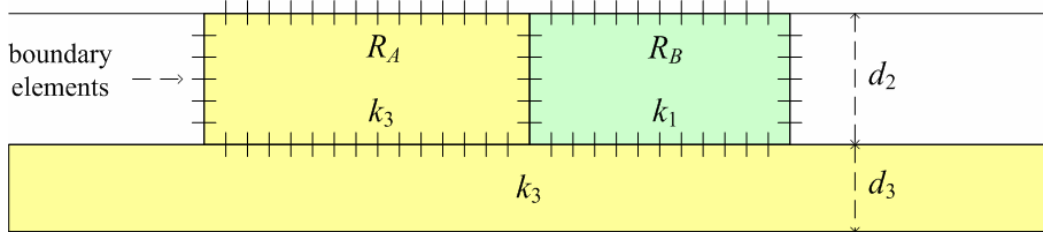
Συνδυάζοντας τις διαφορικές εξισώσεις (2.14) και (2.15) με τη δεύτερη ταυτότητα του Green (βλ. [50], (5.39)) για τις συναρτήσεις G και Ψ

$$\iint_{R_k} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) \nabla_i^2 \Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r}) \nabla_i^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) \right] ds = \oint_{C_k} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) \frac{\partial \Psi(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k)}{\partial n} \right] dl$$

ευρίσκουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση της $\Psi(\mathbf{r})$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \oint_{C_k} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k)}{\partial n} \right] dl, \quad \mathbf{r} \in R_k \quad (2.16)$$

Το χωρίο R_k παριστά την εγκάρσια διατομή του στρώματος με σχετική διηλεκτρική σταθερά k και η καμπύλη C_k είναι το σύνορο του R_k (βλ. Σχήμα 2.15).



Σχήμα 2.15 Κατάτμηση της γεωμετρίας σε συνοριακά στοιχεία

Περιορίζοντας το διάνυσμα παρατήρησης \mathbf{r} στο σύνορο C_k , από την (2.16) λαμβάνουμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\frac{1}{2} \Psi(\mathbf{r}) = \int_{C_k} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k) \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k)}{\partial n} \right] dl, \quad \mathbf{r} \in C_k \quad (2.17)$$

όπου το ολοκλήρωμα θεωρείται υπό την έννοια της principal value.

Η ολοκληρωτική εξίσωση (2.17) λύνεται με τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων (Boundary Element Method). Συγκεκριμένα η (2.17) διακριτοποιείται και μετατρέπεται στην εξίσωση πινάκων (ως προς τις άγνωστες μεταβλητές u_i και q_i)

$$\frac{1}{2}u_i = \sum_{j=1}^N q_j G_{ij} - \sum_{j=1}^N u_j D_{ij} \quad (2.18)$$

όπου

$$G_{ij} = \int_{c_j} G(r_i, r_j, k) dl, \quad D_{ij} = \int_{c_j} \frac{\partial G(r_i, r_j, k)}{\partial n} dl \quad (2.19)$$

Τα u_i και q_i εκφράζουν το πεδίο και την κάθετη παράγωγο του πεδίου στο i -οστό συνοριακό στοιχείο, και υποτίθενται σταθερά. Τα ολοκληρώματα τα οποία εμφανίζονται στους τύπους (2.19) υπολογίζονται με αριθμητικές μεθόδους (βλ. π.χ. [38] και [39]) και η εξίσωση (2.18) μετατρέπεται στο ομογενές σύστημα

$$\mathbf{F}(\gamma_0) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

όπου $\gamma_0 = \alpha + j\beta$ η μιγαδική σταθερά διάδοσης των κυματοδηγούμενων κυμάτων, η οποία είναι λύση της εξίσωσης

$$\det[\mathbf{F}(\gamma_0)] = 0$$

Οι τεχνικές των ολοκληρωτικών εξισώσεων με χρήση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων πλεονεκτούν έναντι της Θεωρίας Συζευγμένων Ρυθμών, επειδή δεν προϋποθέτουν προσεγγίσεις για τα φυσικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμοσειρών. Όμως, ο ακριβής υπολογισμός των σταθερών διάδοσης εξαρτάται από τη διακριτοποίηση σε συνοριακά στοιχεία, γεγονός που μπορεί σε ορισμένες περιπτώσεις να οδηγήσει σε μεγάλη αύξηση του απαιτούμενου υπολογιστικού κόστους.

2.3.4. Άλλες μέθοδοι ανάλυσης της κυματοδηγησης

Εκτός των ευρέως χρησιμοποιούμενων μεθόδων, τις οποίες αναλύσαμε προηγουμένως, εμφανίζονται επίσης στη βιβλιογραφία και οι ακόλουθες ειδικές μέθοδοι, τις οποίες περιγράφουμε συνοπτικά.

α) *Θεωρία Γραμμών Μεταφοράς (Transmission Line Theory)*

Η μέθοδος αναφέρεται στη μελέτη του πολυστρωματικού συζεύκτη γραμμοσειρών του Σχήματος 2.13 και παρουσιάζεται στις [30]-[31]. Τα κυματοδηγούμενα πεδία προκύπτουν ως λύσεις ισοδυνάμων προβλημάτων ηλεκτρικών δικτύων. Εξάγονται σχέσεις, ανάλογες εκείνων οι οποίες προκύπτουν σε προβλήματα διάδοσης σε γραμμές μεταφοράς, οι οποίες εξυπηρετούν την ενοποιημένη μελέτη φαινομένων σκέδασης και κυματοδήγησης σε συζεύκτες γραμμοσειρών.

β) *Τεχνικές Αντίστροφης Σκέδασης (Inverse Scattering Algorithms)*

Οι μέθοδοι αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των συντελεστών σύζευξης των κυματοδηγούμενων ρυθμών με εφαρμογή αλγορίθμων αντίστροφης σκέδασης (βλ. [51]-[54]). Εξυπηρετούν κυρίως σχεδιαστικές εφαρμογές, όπου η διάταξη του συζεύκτη γραμμοσειρών απαιτείται να εμφανίζει συγκεκριμένα λειτουργικά χαρακτηριστικά, όπως παραδείγματος χάριν να λειτουργεί ως ζωνοπερατό φίλτρο συγκεκριμένης τάξης.

γ) *Μέθοδοι Διαταραχών (Perturbation Methods)*

Οι μέθοδοι των διαταραχών μοντελοποιούν την επίδραση των γραμμοσειρών χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα διαταραχών των ρυθμών του συζεύκτη (βλ. [3]-[6]). Οι τεχνικές αυτές δίνουν μία σαφή εικόνα της φυσικής διαδικασίας της σύζευξης, αλλά δεν δίνουν ακριβή αποτελέσματα για περιπτώσεις γραμμοσειρών με σχετικά μεγάλες γεωμετρικές διαστάσεις ή με δείκτη διάθλασης πολύ διαφορετικό από τους δείκτες των υπολοίπων περιοχών.

δ) *Μέθοδοι στο Πεδίο του Χρόνου (Time-Domain Methods)*

Οι μέθοδοι αυτές χρησιμοποιούν κυρίως τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (finite-difference time-domain method) [32]-[34] για την αριθμητική επίλυση των χρονοεξαρτώμενων εξισώσεων του Maxwell (1.1)-(1.4) στα διάφορα στρώματα ενός κυματοδηγού γραμμοσειρών. Τα μειονεκτήματά τους εστιάζονται στο ότι δεν παρέχουν φυσική διαίσθηση της διαδικασίας σύζευξης του φωτός καθώς και ότι οι λύσεις υπόκεινται σε περιορισμούς εξαιτίας της αριθμητικής επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων και της ενδεχόμενης μεγάλης αύξησης του απαιτούμενου υπολογιστικού κόστους.

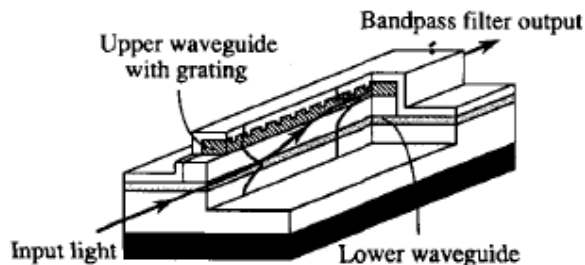
2.4. Εφαρμογές των κυματοδηγών γραμμοσειρών στις οπτικές επικοινωνίες

Οι κυματοδηγοί, που εμφανίζουν περιοδική μεταβολή του δείκτη διάθλασης κατά μήκος της διεύθυνσης κυματοδηγησης, συνιστούν μία σημαντική κατηγορία διατάξεων, οι οποίες αποτελούν βασικά δομικά στοιχεία των οπτικών δικτύων.

Στη συνέχεια συνοψίζουμε τις βασικές εφαρμογές συζευκτών γραμμοσειρών στις οπτικές επικοινωνίες.

Οπτικά φίλτρα συχνοτήτων (optical wavelength filters)

Μία χαρακτηριστική διάταξη φίλτρου επιλογής συχνοτήτων, η οποία αναλύεται στις [47] και [48], φαίνεται στο Σχήμα 2.16. Αποτελείται από δύο στρωματικούς κυματοδηγούς, σχηματισμένους επάνω σε υπόστρωμα AlGaAs/GaAs. Οι γραμμοσειρές χαράσσονται στον άνω κυματοδηγό με περίοδο $\Lambda (=2\pi/K)$, η οποία εκλέγεται κατάλληλα ως προς ένα κεντρικό μήκος κύματος λειτουργίας λ_c (operating center wavelength).



Σχήμα 2.16 Σχηματικό διάγραμμα οπτικού φίλτρου συχνοτήτων, σχηματισμένου σε GaAs.

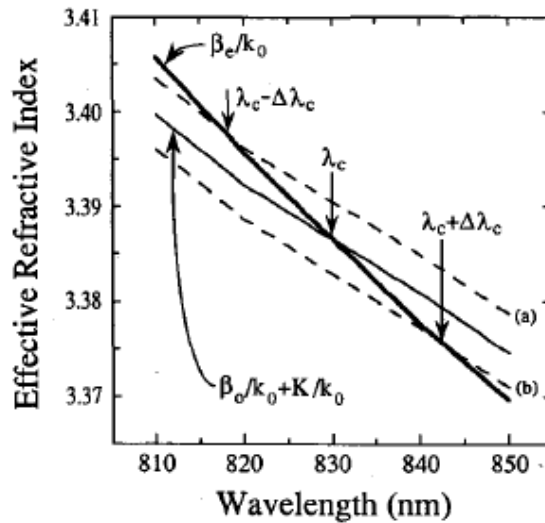
Οι δύο κυματοδηγοί υποστηρίζουν διαδιδόμενους ρυθμούς με διαφορετική συμμετρία, οπότε η κατευθυντική σύζευξη μεταξύ των δύο ρυθμών λαμβάνει χώρα όταν ικανοποιείται η συνθήκη Bragg πρώτης τάξης [9]:

$$\beta_e(\lambda_c) - \beta_o(\lambda_c) = K,$$

όπου β_e και β_o είναι οι σταθερές διάδοσης των αρτίων και περιττών ρυθμών. Φωτεινό σήμα εισόδου εισάγεται στον κάτω κυματοδηγό και διαδίδεται ως ο περιττός ρυθμός του κυματοδηγού. Το σήμα αυτό συζευγνύεται αποδοτικά στον άνω κυματοδηγό ως άρτιος ρυθμός,

μόνον όταν $\lambda = \lambda_c$. Αντιθέτως, φωτεινά σήματα με μήκη κύματος διαφορετικά του λ_c παραμένουν ασύζευκτα και συνεχίζουν να διαδίδονται ως περιττοί ρυθμοί στον κάτω κυματοδηγό.

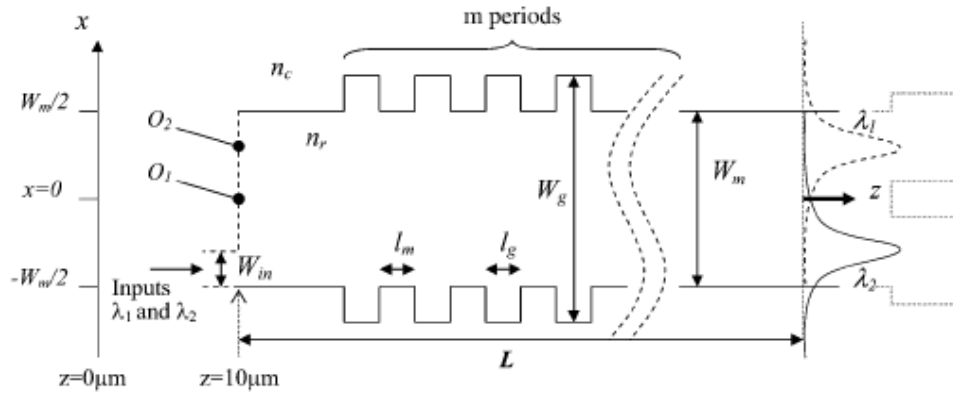
Στο Σχήμα 2.17 απεικονίζονται οι ενεργοί δείκτες διάθλασης των δύο κυματοδηγούμενων ρυθμών συναρτήσει του μήκους κύματος. Το κεντρικό μήκος κύματος λ_c του φίλτρου εμφανίζεται στο σημείο τομής της καμπύλης διασποράς του περιττού ρυθμού με εκείνη του άρτιου ως αποτέλεσμα της περίθλασης των γραμμοσειρών. Μία μεταβολή $\Delta\lambda$ της περιόδου γραμμοσειρών οδηγεί σε μία μετατόπιση του σημείου τομής, σύμφωνα με την προαναφερόμενη συνθήκη Bragg, και σε μία μεταβολή $\Delta\lambda_c$ του κεντρικού μήκους κύματος.



Σχήμα 2.17 Καμπύλες διασποράς του άρτιου και περιττού ρυθμού στο συζεύκτη γραμμοσειρών. Οι (a) και (b) αντιστοιχούν σε $K + \Delta K$ και $K - \Delta K$, όπου ΔK μία μικρή μεταβολή, οφειλόμενη στη μεταβολή $\Delta\lambda$ της περιόδου.

Πολυπλέκτες-αποπολυπλέκτες (multiplexers- demultiplexers)

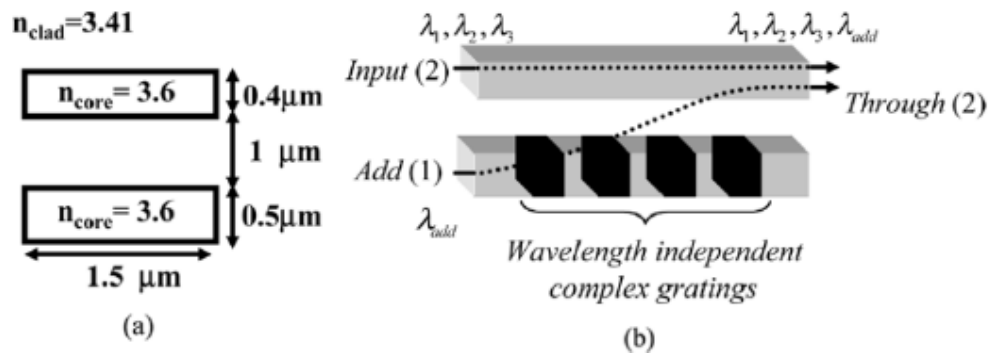
Το Σχήμα 2.18 απεικονίζει έναν πολυπλέκτη μηκών κύματος, ο οποίος βασίζεται σε παρεμβολή δύο ρυθμών με χρήση κυματοδηγών γραμμοσειρών (wavelength division multiplexer with grating-assisted two-mode interference) [57]. Χρησιμοποιείται ένας περιοδικός κυματοδηγός γραμμοσειρών με ισχυρή διασπορά, ο οποίος υποστηρίζει δύο κυματοδηγούμενους ρυθμούς. Δύο μήκη κύματος λ_1 και λ_2 , τα οποία εισέρχονται στη διάταξη, πολυπλέκονται και διαχωρίζονται στην έξοδο από μία πολύ μικρή (ultrashort) φασματική απόσταση.



Σχήμα 2.18 Σχηματικό διάγραμμα του πολυπλέκτη παρεμβολής δύο ρυθμών με χρήση κυματοδηγού γραμμοσειρών.

Η διάταξη αποτελείται από έναν κυματοδηγό με δείκτη διάθλασης n_r , ο οποίος ευρίσκεται εντός υλικού με δείκτη διάθλασης n_c . Στον κυματοδηγό χαράσσονται m επαναλήψεις γραμμοσειρών με πάχος W_g , ενώ το πάχος σύζευξης είναι W_m . Οι παράμετροι αυτές πρέπει να επιλέγονται προσεκτικά, προκειμένου ο κυματοδηγός να υποστηρίξει μόνο δύο διαδιδόμενους ρυθμούς σε ένα φασματικό εύρος, στο οποίο να περιέχονται τα μήκη κύματος λ_1 και λ_2 , που πρόκειται να πολυπλεχθούν.

Εξάλλου, το σχηματικό διάγραμμα ενός πολυπλέκτη πρόσθεσης (*add multiplexer*) με χρήση συζεύκτη γραμμοσειρών απεικονίζεται στο Σχήμα 2.19 (βλ. [58]).

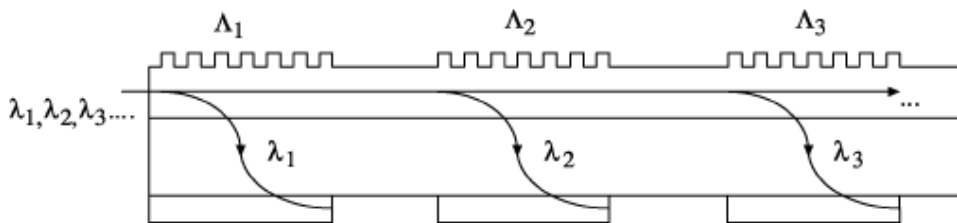


Σχήμα 2.19 (a) Διάταξη συζεύκτη γραμμοσειρών με ενεργούς κυματοδηγούς InP (b) Σχηματικό διάγραμμα του ευρυζωνικού πολυπλέκτη πρόσθεσης.

Η κλασική υλοποίηση ενός πολυπλέκτη πρόσθεσης βασίζεται στο γεγονός ότι η μεταφορά ισχύος στο συζεύκτη γραμμοσειρών εξαρτάται από το μήκος κύματος, εξαιτίας του απαιτούμενου ταιριάσματος μεταξύ της περιόδου των γραμμοσειρών και της διαφοράς των

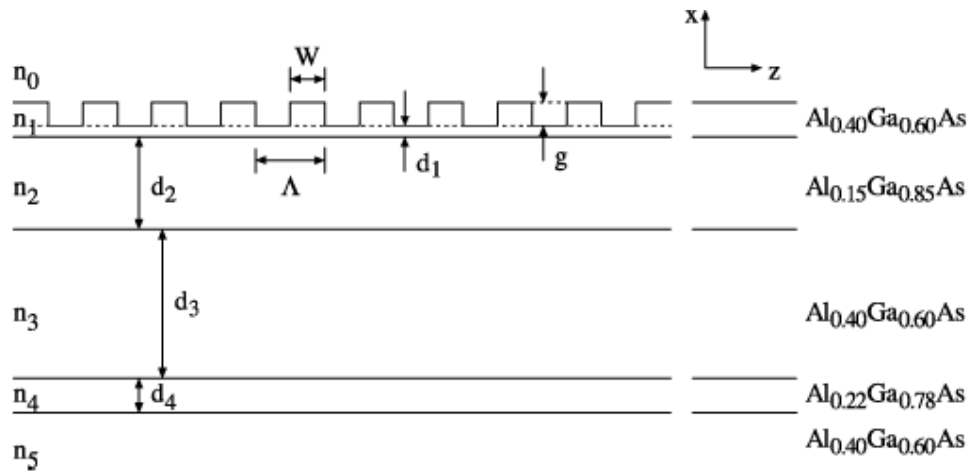
σταθερών διάδοσης των ρυθμών. Σήματα άλλων συχνοτήτων θα διέλθουν εκ του κυματοδηγού χωρίς να επηρεαστούν από τις γραμμοσειρές, ενώ το επιθυμητό μήκος κύματος λ_{add} στην είσοδο πρόσθεσης θα συζευχθεί με τα μήκη κύματος $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ στον άλλο κυματοδηγό. Ο εν λόγω πολυπλέκτης αποτελείται από δύο παράλληλους κυματοδηγούς καναλιού InGaAs με δείκτη διάθλασης 3.6, μήκος 1.5μm και πάχη 0.4 μm και 0.5μm, ευρισκομένους σε υλικό InP με δείκτη διάθλασης 3.41. Η περιοδική διάταξη γραμμοσειρών εισάγεται στον κυματοδηγό πρόσθεσης πάχους 0.5μm.

Περαιτέρω, στο Σχήμα 2.20 απεικονίζεται μία χαρακτηριστική διάταξη αποπολυπλέκτη, η οποία υλοποιείται με χρήση ασυμμετρικού κατευθυντικού συζεύκτη γραμμοσειρών [59].



Σχήμα 2.20 Σχηματικό διάγραμμα αποπολυπλέκτη με φίλτρα συζευκτών γραμμοσειρών. Λ_1, Λ_2 και Λ_3 είναι διαφορετικές περιόδους των γραμμοσειρών.

Ο αποπολυπλέκτης αποτελείται από μία σειρά φίλτρων επιλογής συχνοτήτων ασυμμετρικών συζευκτών γραμμοσειρών. Δύο οπτικοί κυματοδηγοί τοποθετούνται παράλληλα μεταξύ τους. Οπτικά σήματα διαφορετικών μηκών κύματος διαδιδόμενα στον κυματοδηγό συζευγνύονται σε διαφορετικά τμήματα με τη χρήση διαφορετικών γραμμοσειρών. Οι χρησιμοποιούμενοι συζεύκτες γραμμοσειρών αποτελούνται από δύο μονορυθμικούς κυματοδηγούς, οι οποίοι έχουν σταθερές διάδοσης αρκετά διαφορετικές και τοποθετούνται σε πολύ κοντινή απόσταση. Εξαιτίας της ισχυρής ασυμμετρίας, η φυσική σύζευξη μεταξύ των δύο κυματοδηγών είναι τόσο ασθενής, ώστε το φωτεινό σήμα, το οποίο διαδίδεται στον ένα κυματοδηγό, να παραμένει σε αυτόν. Για αυτό το λόγο εισάγεται περιοδική διαταραχή στο σύστημα των δύο κυματοδηγών, προκειμένου να ενισχυθεί η σύζευξη του φωτός μεταξύ των κυματοδηγών. Ένα σχηματικό διάγραμμα ασυμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών, ο οποίος χρησιμοποιείται σε αποπολυπλέκτες, απεικονίζεται στο Σχήμα 2.21. Οι παράμετροι του συζεύκτη δείκτες διάθλασης των υλικών, πάχη των κυματοδηγών, πάχος και περίοδος των γραμμοσειρών, επιλέγονται κατάλληλα για να ικανοποιούνται τα απαιτούμενα κριτήρια σύζευξης.

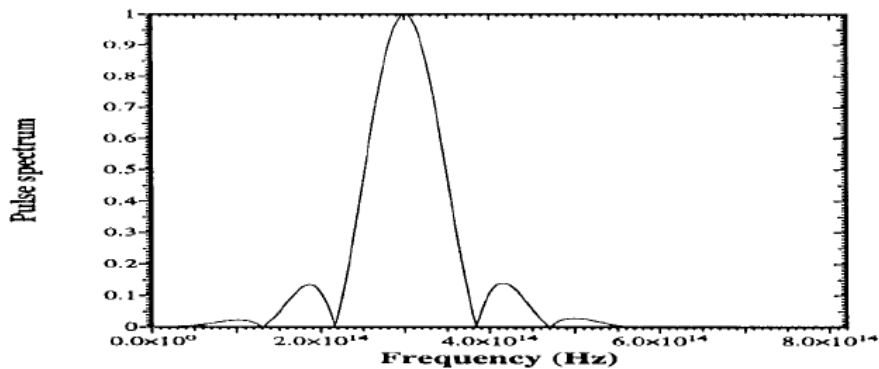


Σχήμα 2.21 Σχηματικό διάγραμμα ασυμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών, χρησιμοποιούμενου σε αποπολυπλέκτες.

Επισκόπηση της αρχής λειτουργίας πολυπλεκτών και αποπολυπλεκτών με χρήση συζευκτών γραμμοσειρών περιέχεται στην [60].

Μετατροπείς ρυθμών (*mode converters*) οπτικών παλμών πολύ μεγάλου εύρους ζώνης (*ultrawide-band pulses*)

Χρησιμοποιείται ένας βασικός τριστρωματικός κυματοδηγός, ο οποίος για συχνότητα φέροντος 3×10^{14} Hz μπορεί να υποστηρίξει επτά διαδιδόμενους ρυθμούς [61]. Στην είσοδο του κυματοδηγού εισέρχεται ένας παλμός έξι κύκλων, αναφερόμενος ως 2-2-2 παλμός. Το φάσμα αυτού του παλμού απεικονίζεται στο Σχήμα 2.22 και έχει το μεγαλύτερο μέρος του συχνοτικού του περιεχομένου επάνω από τα κατώφλια των επτά διαδιδόμενων ρυθμών.



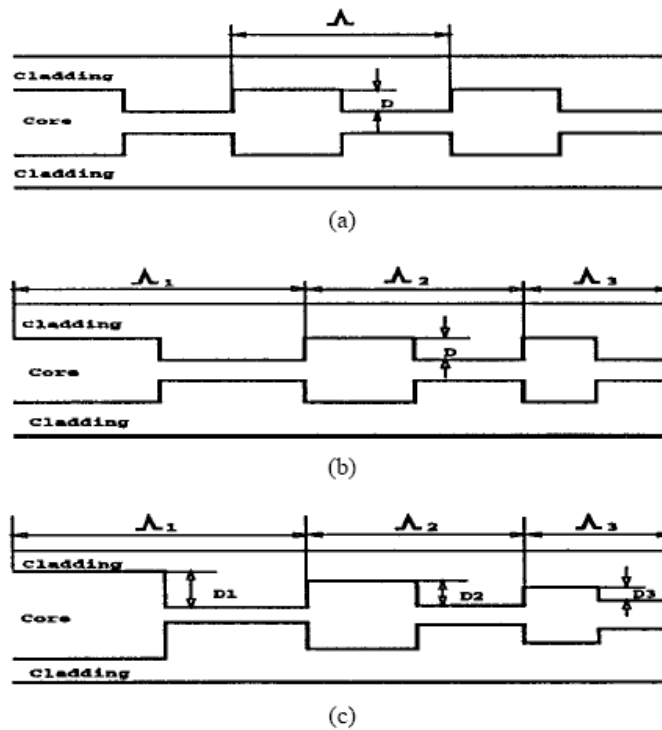
Σχήμα 2.22 Φάσμα του 2-2-2 παλμού.

Η μετατροπή ρυθμών υλοποιείται με τη βοήθεια μιας διάταξης γραμμοσειρών, η οποία κατασκευάζεται, παραμορφώνοντας (*deforming*) τα σύνορα μεταξύ των στρωμάτων του βασικού

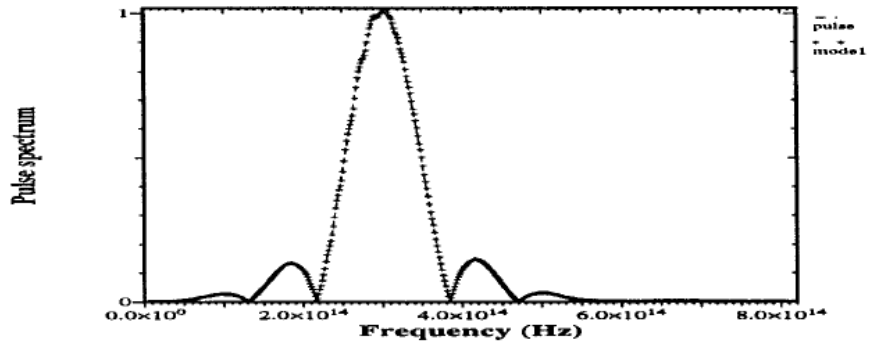
κυματοδηγού, ώστε να δημιουργηθεί ένα ορθογωνικό ή ημιτονοειδές προφίλ γραμμοσειρών (βλ. Σχήμα 2.23). Η μετατροπή από τον i -οστό ρυθμό κυματοδηγού με σταθερά διάδοσης β_i στον j -οστό ρυθμό με σταθερά διάδοσης β_j προϋποθέτει η περίοδος Λ να ικανοποιεί τη συνθήκη προσαρμογής φάσης

$$\Lambda = 2\pi / |\beta_i - \beta_j| \quad .$$

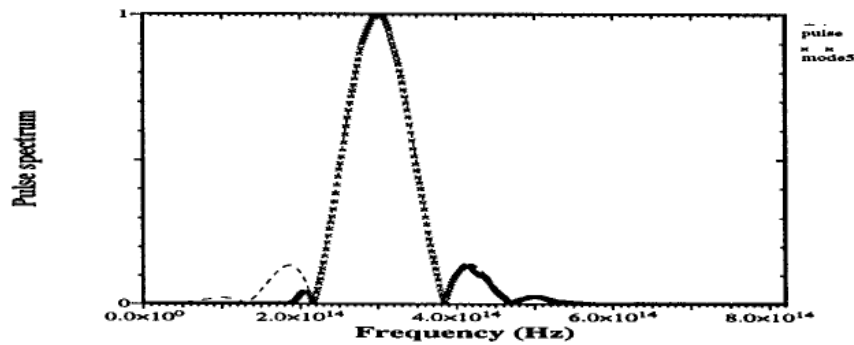
Θεωρούμε ως σήμα εισόδου κατάλληλο συνδυασμό των ρυθμών 1 και 5 με περιβάλλουσα εκείνη του 2-2-2 παλμού του (βλ. Σχήμα 2.22). Σε κάποια αρκετά μεγάλη απόσταση από το σημείο εισόδου του παλμού εξάγονται με κατάλληλες τεχνικές τα φασματικά περιεχόμενα των δύο ρυθμών [61] (βλ. Σχήμα 2.24). Το φάσμα του κάθε ενός εξαγόμενου ρυθμού ευρίσκεται σε πολύ καλή συμφωνία με εκείνο του αρχικού 2-2-2 διεγερόμενου σήματος.



Σχήμα 2.23 Διατάξεις ορθογωνικών γραμμοσειρών, που χρησιμοποιούνται για μετατροπή ρυθμών.



(α)

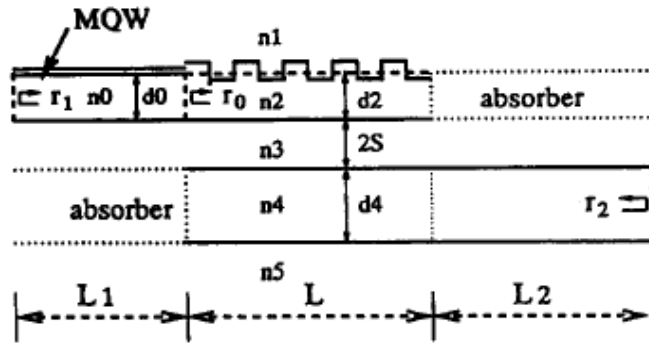


(β)

Σχήμα 2.24 Φάσματα των εξαγομένων ρυθμών: (α) 1 και (β) 5.

Συντονιζόμενα (*tunable*) lasers

Σχηματικό διάγραμμα ενός συντονιζόμενου laser με ενσωματωμένο κατευθυντικό φίλτρο συζεύκτη γραμμοσειρών απεικονίζεται στο Σχήμα 2.25 (βλ. [55]). Η διάταξη αποτελείται από τρία τμήματα. Ένας απλός κυματοδηγός μήκους L_1 στο άνω κυματοδηγικό στρώμα παρέχει κέρδος ή ενίσχυση στον κυματοδηγούμενο ρυθμό, ο οποίος διέρχεται μέσω αυτού. Ο αριστερός τερματισμός του κυματοδηγού αυτού χαρακτηρίζεται από συντελεστή ανάκλασης r_1 . Ένας άλλος απλός κυματοδηγός μήκους L_2 στο κάτω κυματοδηγικό στρώμα εξυπηρετεί ως «παραθύρο» στο αριστερό τμήμα με συντελεστή ανάκλασης r_2 . Τέλος, ένας κατευθυντικός συζεύκτης γραμμοσειρών μήκους L εισάγεται μεταξύ των τμημάτων κέρδους και παραθύρου. Ο συζεύκτης χρησιμοποιείται ως φίλτρο συχνοτήτων για να συνταιριάσει τα φασματικά χαρακτηριστικά της διάταξης ως προς την επιλεκτικότητα των διαμήκων ρυθμών (*longitudinal mode selectivity*).

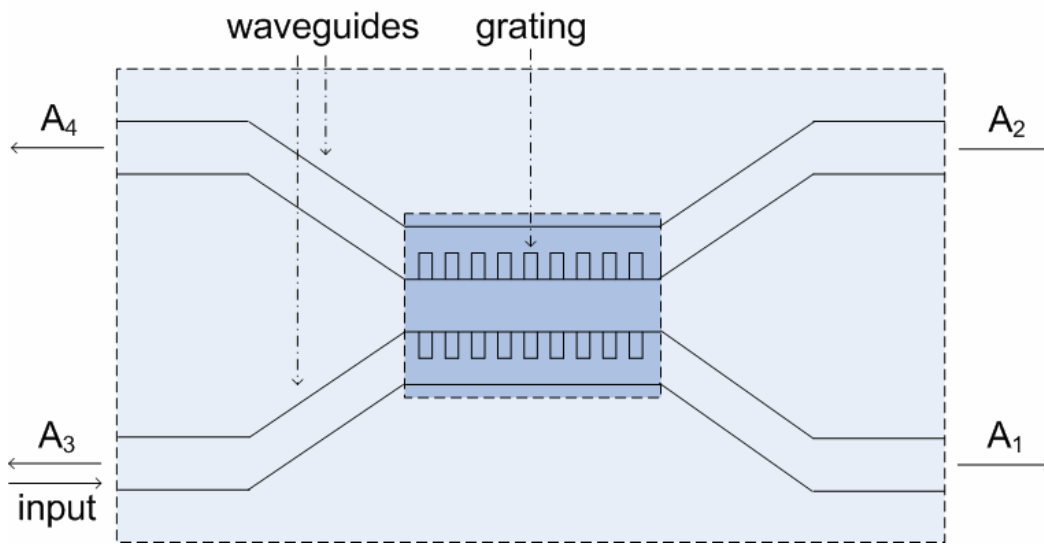


Σχήμα 2.25 Σχηματικό διάγραμμα του συντονιζόμενου laser ημιαγωγών με ενσωματωμένο φίλτρο κατευθυντικού συζεύκτη γραμμοσειρών.

Επίσης, αξίζει να σημειώσουμε ότι οι συζεύκτες γραμμοσειρών χρησιμοποιούνται ακόμη σε laser κατανομής ανάδρασης (distributed feedback lasers) [56] και οπτικές πηγές ακτινοβολίας [64].

Οπτικός διακόπτης (optical switch)

Για την υλοποίηση ενός οπτικού διακόπτη χρησιμοποιείται ο τετράθυρος συζεύκτης γραμμοσειρών, ο οποίος απεικονίζεται στο Σχήμα 2.26 (βλ. [62]).



Σχήμα 2.26 Σχηματικό διάγραμμα τετράθυρου συζεύκτη γραμμοσειρών.

Ο συζεύκτης αποτελείται από δύο όμοιους κυματοδηγούς με σταθερά διάδοσης β_0 . Κάθε κυματοδηγός υποστηρίζει ένα μοναδικό ρυθμό, ο οποίος οδεύει και προς τις δύο κατευθύνσεις. Οι κυματοδηγοί ευρίσκονται σε αρκετά μεγάλη απόσταση στις εισόδους και τις εξόδους και σε

αρκετά μικρή απόσταση κοντά στην περιοχή σύζευξης, προκειμένου οι ρυθμοί τους να αλληλεπιδρούν και να λαμβάνει χώρα ανταλλαγή ενέργειας. Οι γραμμοσειρές τοποθετούνται και στους δύο κυματοδηγούς στην περιοχή σύζευξης. Η περίοδος $\Lambda = \pi / \beta_0$ των γραμμοσειρών εκλέγεται ώστε να ταιριάζει τις φάσεις των κυμάτων, που διαδίδονται προς τις ίδιες και προς αντίθετες κατευθύνσεις. Επίσης, λαμβάνουν χώρα δύο επιπρόσθετοι μηχανισμοί ανταλλαγής ενέργειας:

1) Ευθεία σύζευξη Bragg: Ένας ρυθμός, π.χ. ο A_1 , ανακλάται προς τον ίδιο κυματοδηγό και ανταλλάσσει ενέργεια με το ρυθμό A_3 , ο οποίος οδεύει στην αντίθετη κατεύθυνση.

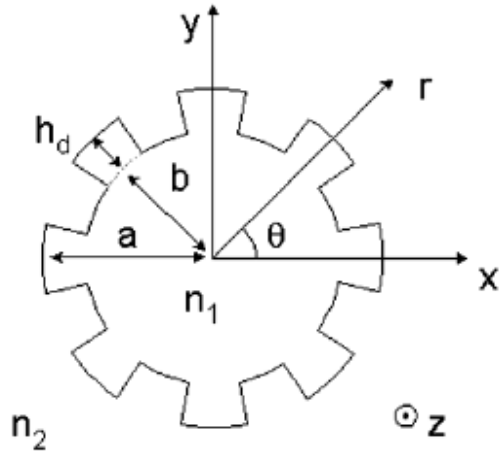
2) Σύζευξη Bragg ανταλλαγής: Ένας ρυθμός, π.χ. ο A_1 , ανακλάται προς τον απέναντι κυματοδηγό και ανταλλάσσει ενέργεια με το ρυθμό A_4 , ο οποίος οδεύει στην αντίθετη κατεύθυνση στον απέναντι κυματοδηγό.

Τα προαναφερόμενα φυσικά φαινόμενα αναλύονται με τη Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών [62] και προσδιορίζονται οι τιμές των παραμέτρων των γραμμοσειρών για την επίτευξη της επιθυμητής λειτουργίας του τετράθυρου συζεύκτη ως οπτικού διακόπτη, δηλαδή για την εξαγωγή του οπτικού σήματος σε μία επιλεγμένη πόρτα, όταν η είσοδος τοποθετείται σε μία συγκεκριμένη πόρτα.

Εξάλλου, οι διατάξεις των γραμμοσειρών χρησιμοποιούνται επίσης και σε

Δαχτυλίδια συντονισμού (ring resonators)

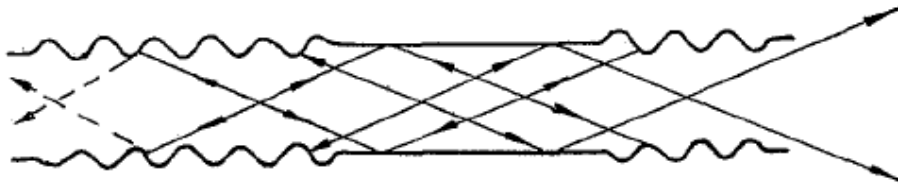
Τα δαχτυλίδια συντονισμού γραμμοσειρών (βλ. Σχήμα 2.27) λειτουργούν σύμφωνα με το φαινόμενο γαλαρίας (whispering gallery) [65]. Η επισύναψη γραμμοσειρών στην εξωτερική επιφάνεια των δαχτυλιδιών εξασφαλίζει στη διάταξη συνθήκες μονορυθμικής λειτουργίας.



Σχήμα 2.27 Σχηματικό διάγραμμα διδιάστατου δαχτυλιδιού συντονισμού γραμμοσειρών.

Ανακλαστήρες μιας συχνότητας (single frequency reflecting mirrors)

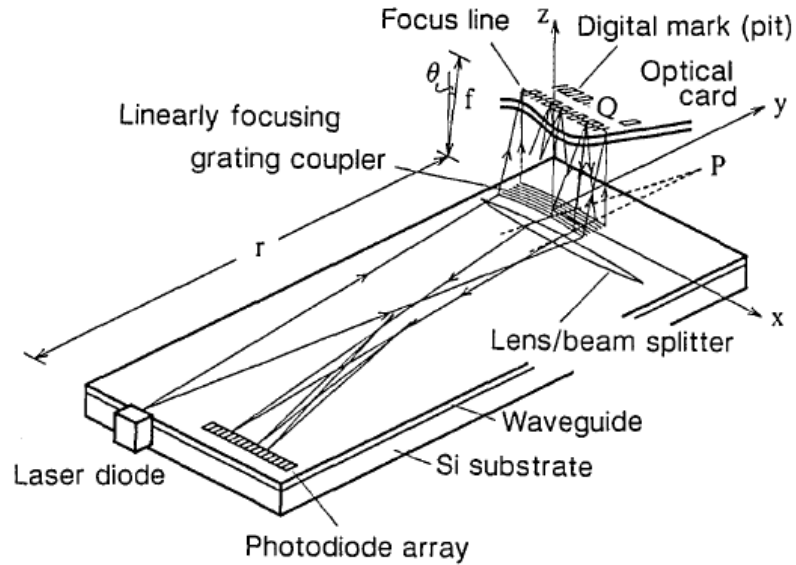
Οι ανακλαστήρες κατασκευάζονται με συντονιστές Bragg (μεταλλικοί σωλήνες με αυλακωμένα τοιχώματα, βλ. Σχήμα 2.28) και χρησιμοποιούνται σε ενισχυτές υψηλής ισχύος και σε ταλαντωτές χιλιοστομετρικών και υποχιλιοστομετρικών κυμάτων [66].



Σχήμα 2.28 Ανακλαστήρας-ταλαντωτής Bragg.

Παράλληλη εξαγωγή δεδομένων σε συστήματα οπτικών καρτών

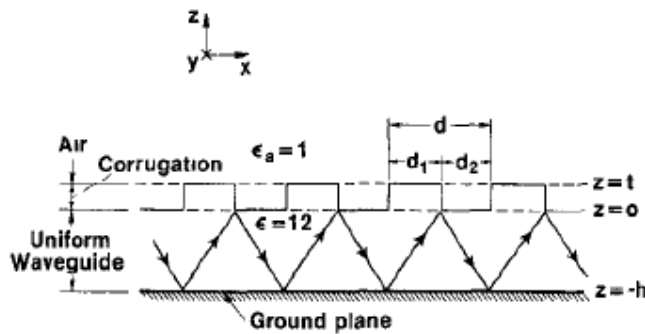
Η παράλληλη εξαγωγή δεδομένων επιτυγχάνεται με το συζεύκτη γραμμοσειρών γραμμικής εστίασης (linearly focusing grating coupler), ο οποίος απεικονίζεται στο Σχήμα 2.29. Ο συζεύκτης χρησιμοποιείται για το σχηματισμό μιας γραμμής εστίασης, η οποία είναι απαραίτητη για παράλληλη παραλαβή (parallel pickup) των οπτικών δεδομένων [67].



Σχήμα 2.29 Σχηματικό διάγραμμα συζεύκτη γραμμοσειρών γραμμικής εστίασης.

Κεραίες χιλιοστομετρικών κυμάτων

Διάταξη μίας κεραίας γραμμοσειρών χιλιοστομετρικών κυμάτων απεικονίζεται στο Σχήμα 2.30. Η ακτινοβολία από τις διηλεκτρικές κεραίες γραμμοσειρών επηρεάζεται από την περιοδική διαταραχή των κυμάτων, που οδηγούνται στο ομοιόμορφο τμήμα της διάταξης του (μη περιοδικού) κυματοδηγού. Αυτή η ακτινοβολία εμφανίζεται μόνο σε συγκεκριμένες κατευθύνσεις του χώρου, οι οποίες καθορίζονται κυρίως από τη σταθερά φάσης της αδιατάρακτης διάταξης και την περίοδο των διαταραχών [63].



Σχήμα 2.30 Διάταξη κεραίας γραμμοσειρών χιλιοστομετρικών κυμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΜΕ ΓΡΑΜΜΟΣΕΙΡΕΣ

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται εκτενής μελέτη των φαινομένων κυματοδήγησης σε συζευγμένους δισδιάστατους συμμετρικούς κυματοδηγούς με περιοδικά χαραγμένες γραμμοσειρές ως εφαρμογή των τεχνικών της Μεθόδου των Ροπών (Method of Moments). Η μελέτη αφορά κυρίως στον ακριβή προσδιορισμό των μιγαδικών σταθερών διάδοσης των κυματοδηγούμενων κυμάτων. Για την επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων, οι οποίες εμφανίζονται, χρησιμοποιούνται τεχνικές Galerkin συνολικού χώρου (entire domain Galerkin techniques).

Ακριβέστερα, στην παράγραφο 3.1 περιγράφεται η γεωμετρία της διάταξης των συζευγμένων δισδιάστατων συμμετρικών κυματοδηγών με περιοδικά χαραγμένες γραμμοσειρές. Στην παράγραφο 3.2 διατυπώνεται το θεώρημα του Floquet και αναλύεται ο ρόλος των χωρικών αρμονικών, που υπαγορεύουν την κυματική διάδοση σε περιοδικές δομές.

Ως εφαρμογή της μεθόδου Sommerfeld επιτυγχάνεται στην παράγραφο 3.3 αναλυτική έκφραση μέσω ολοκληρώματος Fourier της συνάρτησης Green του ομογενούς (χωρίς γραμμοσειρές) προβλήματος. Στην παράγραφο 3.4 ευρίσκεται ολοκληρωτική αναπαράσταση του ηλεκτρικού πεδίου των TE^z πολωμένων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, που διαδίδονται παράλληλα προς τον z -άξονα στη διάταξη του συζεύκτη. Εφαρμόζοντας την τεχνική Galerkin συνολικού χώρου (entire domain Galerkin technique), περιγράφουμε στην παράγραφο 3.5 μία αυστηρή μέθοδο για τον ακριβή προσδιορισμό των μιγαδικών σταθερών διάδοσης των κυματοδηγούμενων στη διάταξη κυμάτων.

Στην παράγραφο 3.6 μελετώνται ενοποιημένα ως ειδικές περιπτώσεις της γενικής μεθόδου, η οποία αναπτύσσεται στις παραγράφους 3.3-3.5, οι διατάξεις του ενός απομονωμένου κυματοδηγού παρουσία γραμμοσειρών, συζεύκτη παρουσία γραμμοσειρών στον άνω κυματοδηγό και συζεύκτη παρουσία γραμμοσειρών στον κάτω κυματοδηγό.

Ορισμένα στοιχεία αριθμητικής υλοποίησης της προτεινομένης μεθόδου παρουσιάζονται στην παράγραφο 3.7. Εξάλλου, στην παράγραφο 3.8 γίνεται έλεγχος σύγκλισης της μεθόδου, διαπιστώνεται η υψηλή αποδοτικότητά της και επιβεβαιώνεται η εγκυρότητά της.

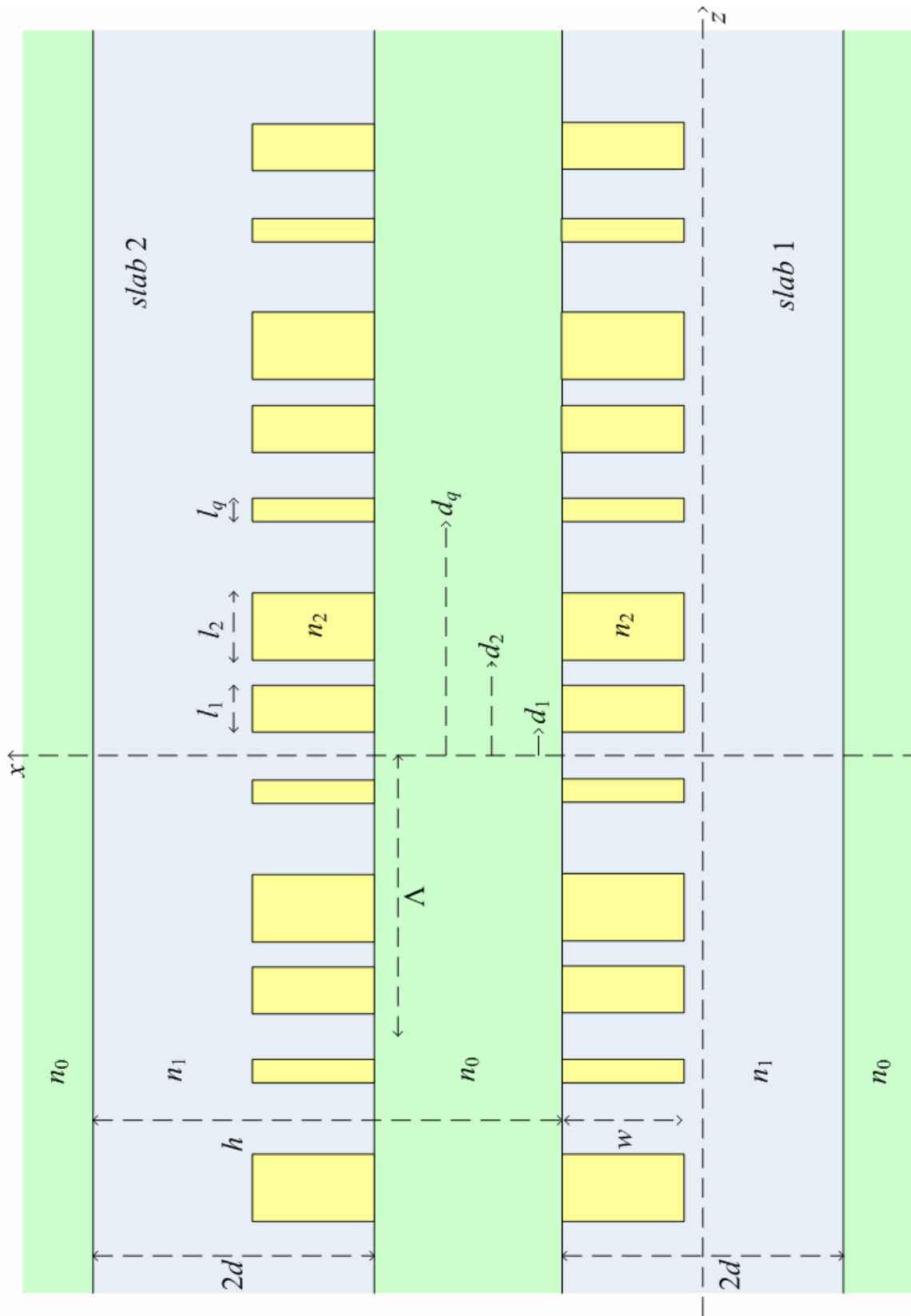
3.1. Συμμετρικός Συζεύκτης Γραμμοσειρών

Η διάταξη του συμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών (symmetric grating assisted optical coupler), η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 3.1, αποτελείται από δύο άπειρες επίπεδες και παράλληλες διηλεκτρικές πλάκες (slab waveguides) με δείκτη διάθλασης n_1 , πάχος $2d$, και απόσταση μεταξύ τους h . Ο χώρος θεωρείται μαγνητικά ομοιόμορφος με σταθερή μαγνητική διαπερατότητα $\mu=\mu_0$ και εκτός των πλακών θεωρείται ομογενής με δείκτη διάθλασης n_0 και κυματικό αριθμό k_0 . Κατά μήκος των πλακών έχουν χαραχθεί περιοδικά ορθογώνιες γραμμοσειρές με δείκτη διάθλασης n_2 και πάχος w . Οι γραμμοσειρές διαμορφώνουν δύο στρώματα με Λ -περιοδική κατανομή του δείκτη διάθλασης στον άξονα κυματοδότησης z , ένα ευρισκόμενο στο άνω μέρος της πλάκας 1 και το άλλο στο κάτω μέρος της πλάκας 2. Η κάθε επανάληψη των γραμμοσειρών αποτελείται από q ορθογώνια (rectangles) με διαμήκη χαρακτηριστικά d_i και l_i ($i=1, \dots, q$). Αξίζει να σημειώσουμε ότι στην παρούσα διατύπωση ο αριθμός και οι διαμήκεις διαστάσεις των ορθογώνιων των γραμμοσειρών μπορούν να μεταβάλλονται εντός κάθε επανάληψης σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά μεγέθη d_i, l_i, q . Όμως, στις εργασίες [7]-[21] που βασίζονται στη Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών και στις [22]-[29] στη Θεωρία Floquet-Bloch, εξετάζονται μόνο δυαδικές (binary) γραμμοσειρές, οι οποίες περιέχουν ένα ορθογώνιο ανά επανάληψη. Η όλη διάταξη υποτίθεται ομοιόμορφη κατά μήκος του άξονα y .

Έτσι, η περιοδική επέκταση ως προς $z \in [0, \Lambda]$ της τμηματικά σταθερής συνάρτησης

$$n(x, z) = \begin{cases} n_0, & x > h + d, & 0 \leq z \leq \Lambda \\ n_1, & h - d < x < h + d, & z \notin (d_i, d_i + l_i) \quad i = 1, \dots, q \\ n_2, & h - d < x < h - d + w, & z \in (d_i, d_i + l_i) \quad i = 1, \dots, q \\ n_0, & d < x < h - d, & 0 \leq z \leq \Lambda \\ n_2, & d - w < x < d, & z \in (d_i, d_i + l_i) \quad i = 1, \dots, q \\ n_1, & -d < x < d, & z \notin (d_i, d_i + l_i) \quad i = 1, \dots, q \\ n_0, & x < -d, & 0 \leq z \leq \Lambda \end{cases} \quad (3.1)$$

καθορίζει την κατανομή του δείκτη διάθλασης της διάταξης του Σχήματος 3.1.



Σχήμα 3.1 Γεωμετρία του συμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών

3.2. Θεώρημα Floquet και χωρικές αρμονικές περιοδικών δομών

Η θεμελιώδης αρχή της Φυσικής, η οποία διέπει την κυματική διάδοση σε περιοδικές δομές, εκφράζεται από το θεώρημα του Floquet ([43], Ch. 9).

Θεώρημα Floquet

Το κυματοδηγούμενο πεδίο $\Psi(x,y,z)$ κατά τις κατευθύνσεις $\pm \hat{z}$ σε μία Λ -περιοδική κατά μήκος του άξονα z δομή εκφράζεται ως εξής

$$\Psi(x, y, z) = e^{\mp \gamma z} u(x, y, z) \quad (3.2)$$

όπου γ η μιγαδική σταθερά διάδοσης του κυματοδηγούμενου πεδίου και $u(x,y,z)$ κατάλληλη Λ -περιοδική ως προς z συνάρτηση, δηλαδή ισχύει

$$u(x, y, z + r\Lambda) = u(x, y, z), \quad r \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

Απόδειξη Το κυματοδηγούμενο πεδίο $\Psi(x,y,z)$ κατά τις κατευθύνσεις $\pm \hat{z}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\Psi(x, y, z + r\Lambda) = e^{\mp \gamma r\Lambda} \Psi(x, y, z), \quad r \in \mathbb{Z}$$

Εξάλλου, για τη συνάρτηση

$$u(x, y, z) = e^{\pm \gamma z} \Psi(x, y, z),$$

παρατηρούμε ότι ισχύει

$$u(x, y, z + r\Lambda) = e^{\pm \gamma(z+r\Lambda)} \Psi(x, y, z + r\Lambda)$$

Τώρα από τις τρεις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει άμεσα η (3.3).

□

Θεωρούμε μία περιοδική δομή κατά μήκος του άξονα z , της οποίας η σχετική διηλεκτρική σταθερά ε_r είναι Λ -περιοδική συνάρτηση ως προς z , δηλαδή ισχύει

$$\varepsilon_r(z + \Lambda) = \varepsilon_r(z) \quad (3.4)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Floquet για το βαθμωτό παράγοντα $\Psi(x,z)$ του ηλεκτρικού πεδίου

$$\mathbf{E}(x, z) = \Psi(x, z) \hat{\mathbf{y}},$$

ενός κυματοδηγούμενου κατά την κατεύθυνση $+\hat{z}$ TE^z ρυθμού με μιγαδική σταθερά διάδοσης γ , λαμβάνουμε

$$\Psi(x, z) = e^{-\gamma z} u(x, z), \quad (3.5)$$

όπου $u(x,z)$ είναι μία Λ -περιοδική συνάρτηση ως προς z .

Σύμφωνα με τα αναφερόμενα στο εδάφιο 1.3.2, για μία τμηματικά σταθερή κατανομή του δείκτη διάθλασης, ο παράγοντας Ψ του ηλεκτρικού πεδίου ικανοποιεί τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon_r(z) \right) \Psi(x, z) = 0, \quad (3.6)$$

και οι συνιστώσες H_x και H_z υπολογίζονται από την E_y μέσω των σχέσεων (1.52) και (1.54). Υπό την προϋπόθεση ότι ο παράγοντας $\Psi(x,z)$ εκφράζεται ως

$$\Psi(x, z) = \varphi(x)v(z),$$

προκύπτει η συνήθης διαφορική εξίσωση

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon_r(z) + \lambda^2 \right) v(z) = 0, \quad (3.7)$$

όπου

$$\lambda^2 = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$$

Έστω $v_1(z)$ και $v_2(z)$ οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης δευτέρου βαθμού (3.7). Επειδή μία διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει μόνο δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, η γενική λύση $V(z)$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$V(z) = Av_1(z) + Bv_2(z) \quad (3.8)$$

με μιγαδικούς συντελεστές A και B .

Εξάλλου, αν $v(z)$ είναι λύση της (3.7), τότε από την (3.4) έπεται ότι και η $v(z+\Lambda)$ είναι επίσης λύση της (3.7). Έτσι εφαρμόζοντας την (3.8), έχουμε

$$v_1(z + \Lambda) = a_{11}v_1(z) + a_{12}v_2(z) \quad , \quad v_2(z + \Lambda) = a_{21}v_1(z) + a_{22}v_2(z) \quad (3.9)$$

όπου a_{ij} κατάλληλοι μιγαδικοί συντελεστές, για τους οποίους ισχύει η συνθήκη ([43], (9) Ch. 9)

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \quad (3.10)$$

Τώρα συνδυάζοντας τις (3.8) και (3.9), ευρίσκουμε

$$V(z + \Lambda) = (Aa_{11} + Ba_{21})v_1(z) + (Aa_{12} + Ba_{22})v_2(z) \quad (3.11)$$

Η $V(z)$ παριστάνει κύμα που οδεύει παράλληλα προς το θετικό άξονα z υπό την προϋπόθεση

$$V(z + \Lambda) = e^{-\gamma \Lambda} V(z) \quad (3.12)$$

Συνδυασμός των (3.8), (3.11) και (3.12) οδηγεί στη διαμόρφωση ενός 2×2 ομογενούς γραμμικού συστήματος με αγνώστους τα A και B . Το εν λόγω σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση όταν ισχύει η συνθήκη

$$e^{-2\gamma\Lambda} - e^{-\gamma\Lambda}(a_{11} + a_{22}) + 1 = 0, \quad (3.13)$$

η οποία προκύπτει μηδενίζοντας την ορίζουσα του συστήματος και χρησιμοποιώντας την (3.10). Η εξίσωση (3.13) έχει τις λύσεις

$$e^{-\gamma\Lambda} = e^{\pm\theta},$$

όπου

$$\theta = \cosh^{-1}\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)$$

Παρατηρούμε ότι αν γ επαληθεύει την εξίσωση (3.13), τότε την επαληθεύουν επίσης και τα $-\gamma$, και τα $\gamma + j\frac{2\pi n}{\Lambda}$ ($n \in \mathbb{Z}$), που σημαίνει ότι οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί στην περιοδική δομή έχουν μιγαδικές σταθερές διάδοσης

$$\gamma_n = \gamma + j\frac{2\pi n}{\Lambda}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.14)$$

Τώρα, υπό τις προϋποθέσεις, οι οποίες αναλύονται στο Παράρτημα Β, η συνάρτηση $u(x,z)$ αναπτύσσεται ως προς z στη σειρά Fourier

$$u(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) e^{-j\frac{2\pi n}{\Lambda}z} \quad (3.15)$$

Συνδυάζοντας τις (3.5) και (3.15) λαμβάνουμε

$$\Psi(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) e^{-\left(\gamma + j\frac{2\pi n}{\Lambda}\right)z} \quad (3.16)$$

Επομένως το πεδίο ενός ρυθμού εκφράζεται ως άθροισμα σειράς συναρτήσεων με σταθερές διάδοσης γ_n ($n \in \mathbb{Z}$), οι οποίες δίνονται από τη σχέση (3.14). Ο γενικός όρος $\varphi_n(x)e^{-\gamma_n z}$ της σειράς (3.16), ο οποίος συνυπάρχει στο πεδίο του ρυθμού, ονομάζεται *χωρική (Floquet) αρμονική* του θεμελιώδους ρυθμού με σταθερά διάδοσης $\gamma_0 = \gamma$.

Επειδή ο παράγοντας $\Psi(x,z)$ του ηλεκτρικού πεδίου, ο οποίος εκφράζεται από την (3.16), πρέπει να αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.6) σε κάθε περιοχή σταθερού δείκτη διάθλασης n_i , θα έχουμε

$$\varphi_n''(x) - g_{i,n}^2 \varphi_n(x) = 0 \quad (3.17)$$

όπου

$$g_{i,n} = \sqrt{-\left(\gamma + j \frac{2\pi n}{\Lambda}\right)^2 - k_0^2 n_i^2}, \quad i = 0,1,2 \quad (3.18)$$

Οι συναρτήσεις $\varphi_n(x)$ εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των θεμελιωδών λύσεων της διαφορικής εξίσωσης (3.17). Οι συντελεστές των εν λόγω γραμμικών συνδυασμών συνιστούν το διάνυσμα των αγνώστων του γραμμικού συστήματος της μεθόδου επίλυσης. Εξάλλου, όταν στη διάταξη υπάρχει και προσπίπτον πεδίο, τότε το γραμμικό σύστημα είναι ένα μη ομογενές επιλύσιμο σύστημα και η λύση του δίνει τους συντελεστές των γραμμικών συνδυασμών. Όταν στη διάταξη δεν υπάρχει προσπίπτον πεδίο, τότε το γραμμικό σύστημα είναι ομογενές και οι σταθερές διάδοσης των ρυθμών κυματοδότησης είναι οι ρίζες της ορίζουσας του συστήματος.

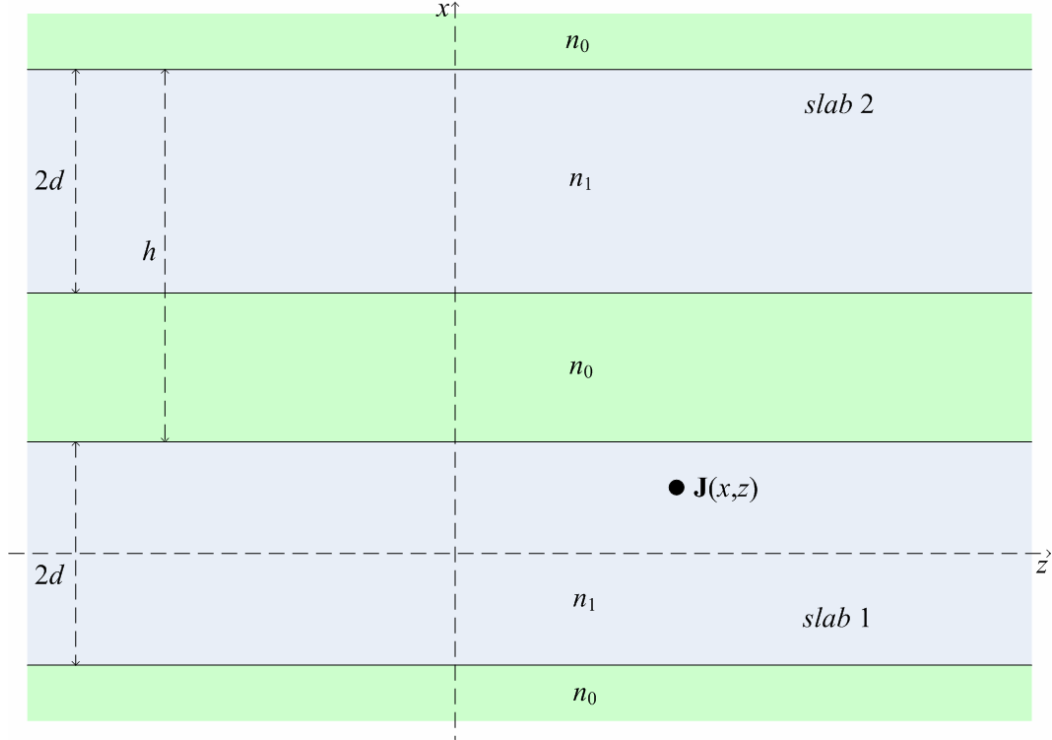
3.3. Αναλυτική έκφραση της συνάρτησης Green

Για την μελέτη της κυματοδότησης στη διάταξη του συζεύκτη του Σχήματος 3.1 με τη Μέθοδο των Ροπών προαπαιτείται κατάλληλη αναλυτική έκφραση της συνάρτησης Green του ομογενούς (χωρίς γραμμοσειρές) προβλήματος.

Αρχικά μελετάμε την περίπτωση TE^z πολωμένων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Συγκεκριμένα θεωρούμε ότι η διάταξη των δύο κυματοδηγών του Σχήματος 3.2 διεγείρεται από μία διδιάστατη, άπειρη κατά μήκος του άξονα y γραμμική ηλεκτρική ρευματική πηγή με κανονικοποιημένη πυκνότητα ρεύματος

$$\mathbf{J}(x, z) = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \delta(x-x')\delta(z-z')\hat{\mathbf{y}}, \quad -d \leq x' \leq d, \quad z' \in \mathbb{R} \quad (3.19)$$

όπου $\delta(\cdot)$ η συνάρτηση Dirac και (x', z') η θέση, στην οποία εφαρμόζεται η διέγερση, και η οποία στην προκειμένη περίπτωση ευρίσκεται εντός του κυματοδηγού 1.



Σχήμα 3.2 Γεωμετρία του χωρίς γραμμοσειρές προβλήματος

Ως *συνάρτηση Green* $G_1(x,z;x',z')$ ορίζεται το ηλεκτρικό πεδίο $E_y(x,z)$ (απόκριση), το οποίο παράγεται στη διάταξη από τη ρευματική πηγή $\mathbf{J}(x,z)$ (διέγερση) της (3.19). Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο $E_y(x,z)$ πληρεί την εξίσωση (1.42), με τη βοήθεια της (3.19) προκύπτει ότι η συνάρτηση Green του προβλήματος των δύο συμμετρικών απείρων διηλεκτρικών πλακών είναι λύση της εξίσωσης

$$\left(\nabla^2 + k_0^2 n^2(x)\right)G_1(\mathbf{r};\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (3.20)$$

όπου

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

εφόσον τα πεδιακά μεγέθη είναι ανεξάρτητα από τη μεταβλητή y , και

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + z \hat{\mathbf{z}} \quad , \quad \mathbf{r}' = x' \hat{\mathbf{x}} + z' \hat{\mathbf{z}}$$

είναι τα διανύσματα παρατήρησης και της πηγής αντίστοιχα. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, η τμηματικά σταθερή συνάρτηση

$$n(x) = \begin{cases} n_0, & x > h+d \\ n_1, & h-d < x < h+d \\ n_0, & d < x < h-d \\ n_1, & -d < x < d \\ n_0, & x < -d \end{cases}$$

εκφράζει την κατανομή του δείκτη διάθλασης. Επιπλέον οι $G_1(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ και $\frac{\partial G_1(\mathbf{r}; \mathbf{r}')}{\partial x}$, ως εφαπτομενικές συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου πρέπει να ικανοποιούν τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες συνέχειας στις διαχωριστικές επιφάνειες $x=\pm d$ και $x=h\pm d$ μεταβολής του δείκτη διάθλασης.

Ως εφαρμογή του θεωρήματος Green αποδεικνύεται στο Παράρτημα Α ότι η συνάρτηση Green είναι συμμετρική ως προς τη διέγερση και την απόκριση. Ο υπολογισμός της συνάρτησης Green επιτυγχάνεται με χρήση της μεθόδου Sommerfeld, η οποία συνοψίζεται ως εξής (για λεπτομερή περιγραφή της μεθόδου βλ. π.χ. [68] Section 6.32 και [69] Section 9.28):

1) Το ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο προκαλεί η ρευματική κατανομή $\mathbf{J}(x,z)$ της (3.19), θεωρούμενη στον ελεύθερο χώρο \mathbb{R}^2 με δείκτη διάθλασης n_1 , εκφράζεται ως ολοκλήρωμα Fourier κατάλληλης γνωστής συναρτήσεως. Το εν λόγω πεδίο αναφέρεται ως *πρωτογενές (primary)* ή ως *συνάρτηση Green ελευθέρου χώρου* και αποτελεί το ανώμαλο μέρος της προσδιοριστέας συνάρτησης Green.

2) Οι διαχωριστικές επιφάνειες $x=\pm d$, $x=h\pm d$ δημιουργούν ανακλώμενα και διαθλώμενα πεδία εντός και εκτός των κυματοδηγών. Τα πεδία αυτά αναφέρονται ως *δευτερογενή (secondary)*. Επειδή τα εν λόγω πεδία ικανοποιούν τις αντίστοιχες κυματικές εξισώσεις και τη συνθήκη ακτινοβολίας, αυτά εκφράζονται ως κατάλληλοι γραμμικοί συνδυασμοί ολοκληρωμάτων Fourier.

3) Οι άγνωστοι συντελεστές των δευτερογενών πεδίων προσδιορίζονται με τη βοήθεια των οριακών συνθηκών για τα επίπεδα $x=\pm d$, $x=h\pm d$.

4) Το ζητούμενο ηλεκτρικό πεδίο για το χώρο εντός του κυματοδηγού 1 θα είναι η υπέρθεση πρωτογενούς και δευτερογενούς πεδίου ενώ για τους χώρους εκτός του κυματοδηγού 1 μόνο το δευτερογενές.

Το πρωτογενές πεδίο G_{pr} εκφράζεται ως ολοκλήρωμα Fourier (βλ. [70], (2.60))

$$G_{pr}(x, z; x', z') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-j\lambda(z-z')} \frac{e^{-g_1|x-x'|}}{g_1}, \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.21)$$

όπου

$$g_1(\lambda) = (\lambda^2 - k_0^2 n_1^2)^{1/2}$$

Η συνάρτηση $g_1(\lambda)$ είναι πλειότιμη μιγαδική συνάρτηση. Επιλέγουμε το πρόσημο της ρίζας έτσι ώστε $\text{Re}\{g_1(\lambda)\} > 0$, ώστε το πεδίο G_{pr} να παριστά κύμα, το οποίο οδεύει αποσβεννύμενο καθώς $|x| \rightarrow +\infty$, και $\text{Im}\{g_1(\lambda)\} > 0$ για να παριστάνει η (3.21), με βάση τη χρονική αρμονική εξάρτηση $\exp(j\omega t)$, κύματα που απομακρύνονται από το επίπεδο $x=x'$ και οδεύουν προς το $\pm\infty$. Η έκφραση (3.21) χρησιμοποιείται παρακάτω στην εφαρμογή των οριακών συνθηκών στα επίπεδα $x=\pm d$.

Εξάλλου, αξίζει να σημειώσουμε ότι το πρωτογενές πεδίο προκύπτει επίσης και ως η θεμελιώδης λύση του διδιάστατου τελεστή Helmholtz στον ελεύθερο χώρο. Συγκεκριμένα το πρωτογενές πεδίο $G_{pr}(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ ικανοποιεί, ως γνωστόν, τη διαφορική εξίσωση

$$(\nabla^2 + k_0^2 n_1^2) G_{pr}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \quad (3.22)$$

Η (3.22) έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $\psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ και $\psi_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ με

$$\psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_0 n_1 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad , \quad \psi_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(k_0 n_1 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$$

(βλ. [72], (5.132), (5.250)), όπου $H_0^{(i)}(z)$ ($i=1,2$) η κυλινδρική συνάρτηση Hankel πρώτου και δευτέρου είδους και μηδενικής τάξης. Οι συναρτήσεις $\psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ και $\psi_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ με βάση και τη χρονική εξάρτηση $\exp(j\omega t)$ παριστάνουν κύματα τα οποία απομακρύνονται από την πηγή και πλησιάζουν προς την πηγή αντιστοίχως. Συνεπώς η φυσικά αποδεκτή λύση της (3.22) είναι η $\psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, οπότε έχουμε

$$G_{pr}(x, z; x', z') = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}\left(k_0 n_1 \sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}\right) \quad (3.23)$$

Βάσει του τύπου

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-j\lambda(z-z')} \frac{e^{-g_1|x-x'|}}{g_1} = -j\pi H_0^{(2)}\left(k_0 n_1 \sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}\right)$$

(βλ. [73]), οι εκφράσεις (3.21) και (3.23) ταυτίζονται.

Το δευτερογενές πεδίο $G_{sec}(x, z; x', z')$, το οποίο οφείλεται στην ασυνέχεια της κατανομής του δείκτη διάθλασης στα επίπεδα $x=\pm d$, $x=h\pm d$, εκφράζεται στις πέντε περιοχές του επιπέδου ως ολοκλήρωμα Fourier

$$G_{sec}(x, z; x', z') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-j\lambda(z-z')} \gamma_1(\lambda, x, x'), \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.24)$$

Εξάλλου, η προσδιοριστέα φασματική συνάρτηση γ_1 , η οποία αποτελεί λύση σε κάθε περιοχή σταθερού δείκτη διάθλασης της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\partial^2 \gamma_1(\lambda, x, x')}{\partial x^2} - (\lambda^2 - k_0^2 n^2(x)) \gamma_1(\lambda, x, x') = 0 \quad (3.25)$$

εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$\gamma_1(\lambda, x, x') = \begin{cases} A_8(\lambda) \exp[-g_0(\lambda)(x-h-d)], & x > h+d \\ A_6(\lambda) \cosh[g_1(\lambda)(x-h)] - A_7(\lambda) \sinh[g_1(\lambda)(x-h)], & h-d < x < h+d \\ A_4(\lambda) \cosh[g_0(\lambda)(x-\frac{h}{2})] + A_5(\lambda) \sinh[g_0(\lambda)(x-\frac{h}{2})], & d < x < h-d \\ A_2(\lambda) \cosh(g_1(\lambda)x) - A_3(\lambda) \sinh(g_1(\lambda)x), & -d < x < d \\ A_1(\lambda) \exp[g_0(\lambda)(x+d)], & x < -d \end{cases} \quad (3.26)$$

των θεμελιωδών λύσεων της εν λόγω εξίσωσης, όπου

$$g_0(\lambda) = (\lambda^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2}$$

Το πρόσημο αυτής της τετραγωνικής ρίζας επιλέγεται έτσι ώστε $\text{Re}\{g_0(\lambda)\} > 0$ και $\text{Im}\{g_0(\lambda)\} > 0$, για να έχουμε φυσικά αποδεκτή λύση και στα δύο μη φραγμένα χωρία $(-\infty, -d)$ και $(h+d, +\infty)$. Οι άγνωστοι φασματικοί συντελεστές $A_1(\lambda)$ - $A_8(\lambda)$ προσδιορίζονται παρακάτω με εφαρμογή των οριακών συνθηκών στις διαχωριστικές επιφάνειες $x=\pm d$, $x=h\pm d$.

Τώρα εφαρμόζοντας τη μέθοδο Sommerfeld, συμπεραίνουμε ότι το συνολικό πεδίο εντός του κυματοδηγού 1 είναι η υπέρθεση του πρωτογενούς και του δευτερογενούς πεδίου, και επιπλέον το συνολικό πεδίο εκτός του κυματοδηγού 1 είναι το δευτερογενές πεδίο. Δηλαδή το συνολικό πεδίο $G_1(x, z; x', z')$, το οποίο επάγεται στη διάταξη από τη διέγερση $\mathbf{J}(x, z)$ της (3.19), δίνεται από

$$G_1(x, z; x', z') = \begin{cases} G_{sec}(x, z; x', z') + G_{pr}(x, z; x', z'), & x \in [-d, d] \\ G_{sec}(x, z; x', z'), & x \notin [-d, d] \end{cases} \quad (3.27)$$

Οι εφαπτομενικές συνιστώσες E_y και H_z του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στα επίπεδα $x=\pm d$, $x=h\pm d$ πρέπει να είναι συνεχείς. Βάσει της σχέσης (1.54) για να είναι συνεχής η H_z αρκεί να είναι συνεχής η $\frac{\partial E_y}{\partial x}$, οπότε στην προκειμένη περίπτωση οι οριακές συνθήκες εκφράζονται ως εξής

$$\begin{aligned}
G_{sec}(x, z; x', z') \Big|_{x \rightarrow \mp d^{\mp}} &= G_{sec}(x, z; x', z') \Big|_{x \rightarrow \mp d^{\pm}} + G_{pr}(\mp d, z; x', z') \\
\frac{\partial G_{sec}(x, z; x', z')}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \mp d^{\mp}} &= \frac{\partial G_{sec}(x, z; x', z')}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \mp d^{\pm}} + \frac{\partial G_{pr}(\mp d, z; x', z')}{\partial x} \\
G_{sec}(x, z; x', z') \Big|_{x \rightarrow h \mp d^{\mp}} &= G_{sec}(x, z; x', z') \Big|_{x \rightarrow h \mp d^{\pm}} \\
\frac{\partial G_{sec}(x, z; x', z')}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow h \mp d^{\mp}} &= \frac{\partial G_{sec}(x, z; x', z')}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow h \mp d^{\pm}}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (3.21), (3.24) και (3.26) στις οριακές συνθήκες (3.28), λαμβάνουμε ένα 8×8 γραμμικό σύστημα ως προς τους αγνώστους συντελεστές $A_1(\lambda)$ - $A_8(\lambda)$. Για τη λύση του εν λόγω συστήματος θεωρούμε τις βοηθητικές συναρτήσεις

$$P_e = P_e(g_0, g_1, d) = g_0 \cosh(g_1 d) + g_1 \sinh(g_1 d)$$

$$P_o = P_o(g_0, g_1, d) = g_0 \sinh(g_1 d) + g_1 \cosh(g_1 d)$$

$$Q_e = Q_e(g_0, g_1, d) = g_0 \cosh(g_1 d) - g_1 \sinh(g_1 d)$$

$$Q_o = Q_o(g_0, g_1, d) = g_1 \cosh(g_1 d) - g_0 \sinh(g_1 d)$$

$$K = (Q_e P_o - Q_o P_e) / 2 \quad , \quad \varepsilon = \exp[-g_0(h - 2d)]$$

όπου οι συναρτήσεις με δείκτες e και o είναι άρτιες (even) και περιττές (odd) συναρτήσεις του g_1 . Παρατηρούμε ότι ισχύει $\varepsilon \rightarrow 0$, καθώς $h \rightarrow \infty$ (με g_0 και d σταθεροποιημένα), αφού $\text{Re}\{g_0\} > 0$. Οι συντελεστές A_1 - A_8 προκύπτουν ως λύσεις του γραμμικού συστήματος (3.28) και είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}
A_1(\lambda) &= \frac{1}{P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2} \left[P_o^2 P_e^2 \left(\frac{\cosh(g_1 x')}{P_e} - \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right) \right. \\
&\quad \left. + K Q_o Q_e \varepsilon^2 \left(\frac{\cosh(g_1 x')}{Q_e} + \frac{\sinh(g_1 x')}{Q_o} \right) \right] \\
A_2(\lambda) &= \frac{1}{g_1 (P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2)} \left[P_o^2 P_e^2 (P_o - P_e) \frac{\cosh(g_1 x')}{P_e} \right. \\
&\quad \left. + K \varepsilon^2 \left(Q_e (Q_o P_o + K) \frac{\cosh(g_1 x')}{Q_e} + g_0 g_1 \sinh(g_1 x') \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3(\lambda) &= -\frac{1}{g_1(P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2)} \left[P_o^2 P_e^2 (P_o - P_e) \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right. \\
&\quad \left. + K \varepsilon^2 \left(Q_o (Q_e P_e - K) \frac{\sinh(g_1 x')}{Q_o} + g_0 g_1 \cosh(g_1 x') \right) \right] \\
A_4(\lambda) &= \frac{P_o P_e}{P_o P_e - K \varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\cosh(g_1 x')}{P_e} + \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right) \\
A_5(\lambda) &= -\frac{P_o P_e}{P_o P_e + K \varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{\cosh(g_1 x')}{P_e} + \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right) \\
A_6(\lambda) &= \frac{P_o^2 P_e g_0}{P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2} \varepsilon \left(\frac{\cosh(g_1 x')}{P_e} + \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right) \\
A_7(\lambda) &= \frac{P_o P_e^2 g_0}{P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2} \varepsilon \left(\frac{\cosh(g_1 x')}{P_e} + \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right) \\
A_8(\lambda) &= \frac{P_o P_e g_0 g_1}{P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2} \varepsilon \left(\frac{\cosh(g_1 x')}{P_e} + \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Αντικαθιστώντας τους υπολογισθέντες συντελεστές (3.29) στην έκφραση (3.26) του δευτερογενούς πεδίου και χρησιμοποιώντας τις (3.21) και (3.27), ευρίσκουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε όλες τις περιοχές του χώρου

$$G_1(x, z; x', z') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-j\lambda(z-z')} \delta_1(\lambda, x, x') \tag{3.30}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\delta_1(\lambda, x, x') &= \frac{1}{P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2} \\
&\left\{ \begin{array}{ll}
P_o P_e g_0 g_1 \varepsilon \left[\frac{\cosh(g_1 x')}{P_e} + \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right] \exp[-g_0(x-h-d)], & x \geq h+d \\
P_o^2 P_e^2 g_0 \varepsilon \left[\frac{\cosh(g_1 x')}{P_e} + \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right] \left[\frac{\cosh[g_1(x-h)]}{P_e} - \frac{\sinh[g_1(x-h)]}{P_o} \right], & h-d \leq x \leq h+d \\
P_o P_e \left[\frac{\cosh(g_1 x')}{P_e} + \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right] [P_o P_e \exp[-g_0(x-d)] + K \varepsilon \exp[g_0(x-h+d)]], & d \leq x \leq h-d \\
\left[\frac{\cosh(g_1 x')}{P_e} + \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right] \left\{ \frac{P_o^3 P_e^3}{g_1} \left[\frac{\cosh(g_1 x)}{P_e} - \frac{\sinh(g_1 x)}{P_o} \right] \right. \\
\left. + \frac{K Q_o Q_e P_o P_e}{g_1} \varepsilon^2 \left[\frac{\cosh(g_1 x)}{Q_e} + \frac{\sinh(g_1 x)}{Q_o} \right] \right\}, & -d \leq x' \leq x \leq d \\
\left\{ \frac{P_o^3 P_e^3}{g_1} \left[\frac{\cosh(g_1 x')}{P_e} - \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right] \right. \\
\left. + \frac{K Q_o Q_e P_o P_e}{g_1} \varepsilon^2 \left[\frac{\cosh(g_1 x')}{Q_e} + \frac{\sinh(g_1 x')}{Q_o} \right] \right\} \left[\frac{\cosh(g_1 x)}{P_e} + \frac{\sinh(g_1 x)}{P_o} \right], & -d \leq x \leq x' \leq d \\
\left\{ P_o^2 P_e^2 \left[\frac{\cosh(g_1 x')}{P_e} - \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right] \right. \\
\left. + K Q_o Q_e \varepsilon^2 \left[\frac{\cosh(g_1 x')}{Q_e} + \frac{\sinh(g_1 x')}{Q_o} \right] \right\} \exp[g_0(x+d)], & x \leq -d
\end{array} \right. \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

1) Η έκφραση (3.30) σε συνδυασμό με την (3.31) αναδεικνύει τη συμμετρία της συνάρτησης Green και εξυπηρετεί τη διατύπωση αναλυτικών εκφράσεων των στοιχείων του πίνακα της Μεθόδου των Ροπών, όπως αναλύεται στις επόμενες παραγράφους. Οι όροι $\cosh(g_1 x)$ και $\cosh(g_1 x')$ αντιπροσωπεύουν άρτια κύματα και οι όροι $\sinh(g_1 x)$ και $\sinh(g_1 x')$ περιττά κύματα ως προς τις μεταβλητές x και x' . Εξάλλου, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι πόλοι $\lambda = \beta_i$ της ολοκληρωτέας συνάρτησης στην (3.30), οι οποίοι είναι λύσεις της αλγεβρικής εξίσωσης

$$(P_o P_e - K \varepsilon)(P_o P_e + K \varepsilon) = 0 \quad (3.32)$$

Οι πόλοι $\lambda = \beta_i$ αντιστοιχούν στις σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων στη διάταξη των συζευγμένων κυματοδηγών επιφανειακών κυμάτων (*surface waves*) και αποτελούν ένα πεπερασμένο σύνολο πραγματικών αριθμών με

$$n_0 \leq \beta_i / k_0 \leq n_1$$

Πιο συγκεκριμένα οι πόλοι $\lambda=\beta_e$ για τους οποίους ισχύει $P_o P_e - K\varepsilon=0$ είναι οι σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων TE^z άρτιων κυμάτων, ενώ οι πόλοι $\lambda=\beta_o$ για τους οποίους ισχύει $P_o P_e + K\varepsilon=0$ είναι οι σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων TE^z περιττών κυμάτων.

2) Στην (3.31) δεν εμφανίζεται αυτοτελώς ο ανώμαλος όρος της συνάρτησης Green, ο οποίος αντιστοιχεί στο πρωτογενές πεδίο, που δίνεται από την (3.21) (ή ισοδύναμα από την (3.23)). Η έκφραση της συνάρτησης Green

$$G_1(x, z; x', z') = -\frac{j}{4} H_0^{(2)} \left(k_0 n_1 \sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2} \right) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-j\lambda(z-z')} \delta_1'(\lambda, x, x'), \quad |x| \leq d$$

για το χώρο εντός του κυματοδηγού 1, όπου

$$\delta_1'(\lambda, x, x') = \frac{1}{P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2} \left\{ \left[\frac{P_o^2 P_e^2}{g_1} (P_o - P_e) \left(\frac{\cosh(g_1 x) \cosh(g_1 x')}{P_e} - \frac{\sinh(g_1 x) \sinh(g_1 x')}{P_o} \right) \right] + \frac{K \varepsilon^2}{g_1} \left[\begin{aligned} & (Q_o P_o + K) \cosh(g_1 x) \cosh(g_1 x') - (Q_e P_e - K) \sinh(g_1 x) \sinh(g_1 x') \\ & + g_o g_1 \cosh(g_1 x) \sinh(g_1 x') - g_o g_1 \sinh(g_1 x) \cosh(g_1 x') \end{aligned} \right] \right\} \quad (3.33)$$

αποσαφηνίζει την επίδραση του πρωτογενούς πεδίου. Για το χώρο εκτός του κυματοδηγού 1 (με $|x|>d$), όπου δεν υπάρχει πρωτογενές πεδίο, η συνάρτηση Green εξακολουθεί να δίνεται από τις (3.30) και (3.31).

3) Όπως αποδεικνύεται στο Παράρτημα Α, η συνάρτηση Green είναι συμμετρική ως προς τη διέγερση και την απόκριση. Η εν λόγω ιδιότητα προκύπτει και ως συνέπεια της (3.31), αφού εναλλάσσοντας το διάνυσμα παρατήρησης (x, z) με το διάνυσμα διέγερσης (x', z') στο χώρο εντός του κυματοδηγού 1, από την (3.31) έπεται

$$G_1(x, z; x', z') = G_1(x', z'; x, z), \quad -d \leq x, x' \leq d, \quad z, z' \in \mathbb{R}$$

4) Η (3.31) για $h \rightarrow \infty$, οπότε $\varepsilon \rightarrow 0$, ανάγεται στην

$$\delta_1(\lambda, x, x') = \begin{cases} \left[\frac{\cosh(g_1 x') + \sinh(g_1 x')}{P_e} + \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right] \exp[-g_0(x-d)], & x \geq d \\ \frac{P_o P_e}{g_1} \left[\frac{\cosh(g_1 x') + \sinh(g_1 x')}{P_e} + \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right] \left[\frac{\cosh(g_1 x)}{P_e} - \frac{\sinh(g_1 x)}{P_o} \right], & -d \leq x' \leq x \leq d \\ \frac{P_o P_e}{g_1} \left[\frac{\cosh(g_1 x') - \sinh(g_1 x')}{P_e} - \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right] \left[\frac{\cosh(g_1 x)}{P_e} + \frac{\sinh(g_1 x)}{P_o} \right], & -d \leq x \leq x' \leq d \\ \left[\frac{\cosh(g_1 x') - \sinh(g_1 x')}{P_e} - \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o} \right] \exp[g_0(x+d)], & x \leq -d \end{cases} \quad (3.34)$$

Οι (3.30) και (3.34) εκφράζουν τη συνάρτηση Green του προβλήματος της μίας απομονωμένης διηλεκτρικής πλάκας (βλ. [70], (2.65) και (2.66)).

5) Το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο διέγερσης με πυκνότητα ρεύματος

$$\mathbf{J}(x, z) = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \delta(x-x') \delta(z-z') \hat{\mathbf{y}}, \quad h-d \leq x' \leq h+d, \quad z' \in \mathbb{R}$$

η οποία ευρίσκεται εντός του κυματοδηγού 2, υπολογίζεται από το αντίστοιχο πεδίο όπου η πηγή ευρίσκεται εντός του κυματοδηγού 1, αξιοποιώντας τη συμμετρία της διάταξης. Στην προκειμένη περίπτωση το πρωτογενές πεδίο εκφράζεται από τον τύπο (3.21), ενώ το δευτερογενές πεδίο εκφράζεται ως ολοκλήρωμα Fourier

$$G_2(x, z; x', z') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-j\lambda(z-z')} \gamma_2(\lambda, x, x')$$

όπου

$$\gamma_2(\lambda, x, x') = \begin{cases} A'_8(\lambda) \exp[-g_0(\lambda)(x-h-d)], & x > h+d \\ A'_6(\lambda) \cosh[g_1(\lambda)(x-h)] - A'_7(\lambda) \sinh[g_1(\lambda)(x-h)], & h-d < x < h+d \\ A'_4(\lambda) \cosh[g_0(\lambda)(x-\frac{h}{2})] + A'_5(\lambda) \sinh[g_0(\lambda)(x-\frac{h}{2})], & d < x < h-d \\ A'_2(\lambda) \cosh(g_1(\lambda)x) - A'_3(\lambda) \sinh(g_1(\lambda)x), & -d < x < d \\ A'_1(\lambda) \exp[g_0(\lambda)(x+d)], & x < -d \end{cases} \quad (3.35)$$

Οι άγνωστοι φασματικοί συντελεστές $A'_1 - A'_8$ στην (3.35) προσδιορίζονται από τους υπολογισθέντες συντελεστές $A_1 - A_8$ του αρχικού προβλήματος μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} A'_1(x') &= A_8(h-x'), & A'_2(x') &= A_6(h-x'), & A'_3(x') &= -A_7(h-x'), & A'_4(x') &= A_4(h-x') \\ A'_5(x') &= -A_5(h-x'), & A'_6(x') &= A_2(h-x'), & A'_7(x') &= -A_3(h-x'), & A'_8(x') &= A_1(h-x') \end{aligned} \quad (3.36)$$

Έτσι συνδυάζοντας τις (3.29) και (3.36) ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}
A_1'(\lambda) &= \frac{P_o P_e g_0 g_1}{P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2} \varepsilon \left[\frac{\cosh(g_1(h-x'))}{P_e} + \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{P_o} \right] \\
A_2'(\lambda) &= \frac{P_o^2 P_e g_0}{P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2} \varepsilon \left[\frac{\cosh(g_1(h-x'))}{P_e} + \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{P_o} \right] \\
A_3'(\lambda) &= -\frac{P_o P_e^2 g_0}{P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2} \varepsilon \left[\frac{\cosh(g_1(h-x'))}{P_e} + \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{P_o} \right] \\
A_4'(\lambda) &= \frac{P_o P_e}{P_o P_e - K \varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \left[\frac{\cosh(g_1(h-x'))}{P_e} + \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{P_o} \right] \\
A_5'(\lambda) &= \frac{P_o P_e}{P_o P_e + K \varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \left[\frac{\cosh(g_1(h-x'))}{P_e} + \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{P_o} \right] \\
A_6'(\lambda) &= \frac{1}{g_1(P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2)} \left[P_o^2 P_e^2 (P_o - P_e) \frac{\cosh(g_1(h-x'))}{P_e} \right. \\
&\quad \left. + K \varepsilon^2 \left(Q_e (Q_o P_o + K) \frac{\cosh(g_1(h-x'))}{Q_e} + g_0 g_1 \sinh(g_1(h-x')) \right) \right] \\
A_7'(\lambda) &= \frac{1}{g_1(P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2)} \left[P_o^2 P_e^2 (P_o - P_e) \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{P_o} \right. \\
&\quad \left. + K \varepsilon^2 \left(Q_o (Q_e P_e - K) \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{Q_o} + g_0 g_1 \cosh(g_1(h-x')) \right) \right] \\
A_8'(\lambda) &= \frac{1}{P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2} \left[P_o^2 P_e^2 \left(\frac{\cosh(g_1(h-x'))}{P_e} - \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{P_o} \right) \right. \\
&\quad \left. + K Q_o Q_e \varepsilon^2 \left(\frac{\cosh(g_1(h-x'))}{Q_e} + \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{Q_o} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Αντικαθιστώντας τους υπολογισθέντες συντελεστές (3.37) στην έκφραση (3.35) του δευτερογενούς πεδίου και λαμβάνοντας υπόψη την έκφραση (3.21) του πρωτογενούς πεδίου στο χώρο εντός του κυματοδηγού 2, ευρίσκουμε το ηλεκτρικό πεδίο

$$G_2(x, z; x', z') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-j\lambda(z-z')} \delta_2(\lambda, x, x') \tag{3.38}$$

σε όλες τις περιοχές του επιπέδου, όπου

$$\delta_2(\lambda, x, x') = \frac{1}{P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2} \left\{ \begin{array}{l}
\left\{ P_o^2 P_e^2 \left[\frac{\cosh(g_1(h-x'))}{P_e} - \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{P_o} \right] + \right. \\
\left. K Q_o Q_e \varepsilon^2 \left[\frac{\cosh(g_1(h-x'))}{Q_e} + \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{Q_o} \right] \right\} \exp[-g_0(x-h-d)], \quad x \geq h+d \\
\left\{ \frac{P_o^3 P_e^3}{g_1} \left[\frac{\cosh(g_1(h-x'))}{P_e} - \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{P_o} \right] \right. \\
\left. + \frac{K P_o P_e Q_o Q_e}{g_1} \varepsilon^2 \left[\frac{\cosh(g_1(h-x'))}{Q_e} + \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{Q_o} \right] \right\} \left[\frac{\cosh(g_1(x-h))}{P_e} - \frac{\sinh(g_1(x-h))}{P_o} \right], \quad h-d \leq x' \leq x \leq h+d \\
\left\{ \left[\frac{\cosh(g_1(h-x'))}{P_e} + \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{P_o} \right] \left[\frac{P_o^3 P_e^3}{g_1} \left[\frac{\cosh(g_1(x-h))}{P_e} + \frac{\sinh(g_1(x-h))}{P_o} \right] \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{K P_o P_e Q_o Q_e}{g_1} \varepsilon^2 \left[\frac{\cosh(g_1(x-h))}{Q_e} - \frac{\sinh(g_1(x-h))}{Q_o} \right] \right\}, \quad h-d \leq x \leq x' \leq h+d \\
P_o P_e \left[\frac{\cosh(g_1(h-x'))}{P_e} + \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{P_o} \right] \left[P_o P_e \exp(g_0(x-h+d)) + K \varepsilon \exp(-g_0(x-d)) \right], \quad d \leq x \leq h-d \\
P_o^2 P_e^2 g_0 \varepsilon \left[\frac{\cosh(g_1(h-x'))}{P_e} + \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{P_o} \right] \left[\frac{\cosh(g_1 x)}{P_e} + \frac{\sinh(g_1 x)}{P_o} \right], \quad -d \leq x \leq d \\
P_o P_e g_0 g_1 \varepsilon \left[\frac{\cosh(g_1(h-x'))}{P_e} + \frac{\sinh(g_1(h-x'))}{P_o} \right] \exp[g_0(x+d)], \quad x \leq -d
\end{array} \right. \quad (3.39)$$

3.4. Ολοκληρωτική αναπαράσταση ηλεκτρικού πεδίου

Θεωρούμε TE^z πολωμένα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, τα οποία διαδίδονται παράλληλα προς τον άξονα z στη διάταξη του Σχήματος 3.1 υπό την παρουσία του γνωστού προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου

$$\mathbf{E}_0 = \Psi_0(x, z) \hat{\mathbf{y}}$$

Αφού, όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 1.4, το άγνωστο κυματοδηγούμενο ηλεκτρικό πεδίο

$$\mathbf{E} = \Psi(x, z) \hat{\mathbf{y}}$$

έχει μόνο y συνιστώσα, η λύση του προβλήματος ανάγεται στον προσδιορισμό του άγνωστου βαθμωτού παράγοντα ηλεκτρικού πεδίου $\Psi(x, z)$.

Ο άγνωστος βαθμωτός παράγοντας Ψ του ηλεκτρικού πεδίου προσδιορίζεται υπό τις ακόλουθες προϋποθέσεις, οι οποίες υπαγορεύονται από τη φυσική και τη γεωμετρία του προβλήματος

- Ψ είναι τμηματικά C^2 συνάρτηση:

C^2 στα επίπεδα χωρία σταθερού δείκτη διάθλασης και C^1 στα σύνορα των χωρίων αυτών.

(και άρα η Ψ είναι τοπικά Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση)

- $\Psi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$

(απόλυτα και τετραγωνικά Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση του \mathbb{R}^2 , βλ. Παράρτημα Β).

- Η Ψ αποτελεί λύση της εξίσωσης Helmholtz (B.10) στα χωρία σταθερού δείκτη διάθλασης.

Σε όλα τα επόμενα υποθέτουμε (χωρίς ιδιαίτερη αναφορά) ότι η συνάρτηση Ψ ικανοποιεί τις προαναφερόμενες συνθήκες.

Θεώρημα

Ο βαθμωτός παράγοντας $\Psi(x,z)$ του ηλεκτρικού πεδίου έχει την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$\Psi(x,z) = \Psi_0(x,z) + k_0^2(n_2^2 - n_1^2) \iint_{S_d} \Psi(x',z') G(x,z;x',z') ds', \quad (x,z) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.40)$$

όπου G είναι η συνάρτηση Green του ομογενούς (χωρίς γραμμοσειρές) προβλήματος και S_d είναι η συνολική επιφάνεια των γραμμοσειρών.

Απόδειξη Σύμφωνα με τα αναφερόμενα στο εδάφιο 1.3.2 η συνάρτηση $\Psi(x,z)$ ικανοποιεί τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz

$$\left(\nabla^2 + k_0^2 n^2(x,z)\right) \Psi(x,z) = 0, \quad (x,z) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.41)$$

όπου $n(x,z)$ η κατανομή του δείκτη διάθλασης, η οποία εκφράζεται από τον τύπο (3.1). Επίσης η $\Psi(x,z)$ και η $\frac{\partial \Psi(x,z)}{\partial x}$ πληρούν τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες συνέχειας στις

διαχωριστικές επιφάνειες μεταβολής του δείκτη διάθλασης.

Εξάλλου ο παράγοντας $\Psi_0(x,z)$ του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου είναι λύση της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz

$$\left(\nabla^2 + k_0^2 n_h^2(x)\right) \Psi_0(x,z) = 0, \quad (3.42)$$

όπου

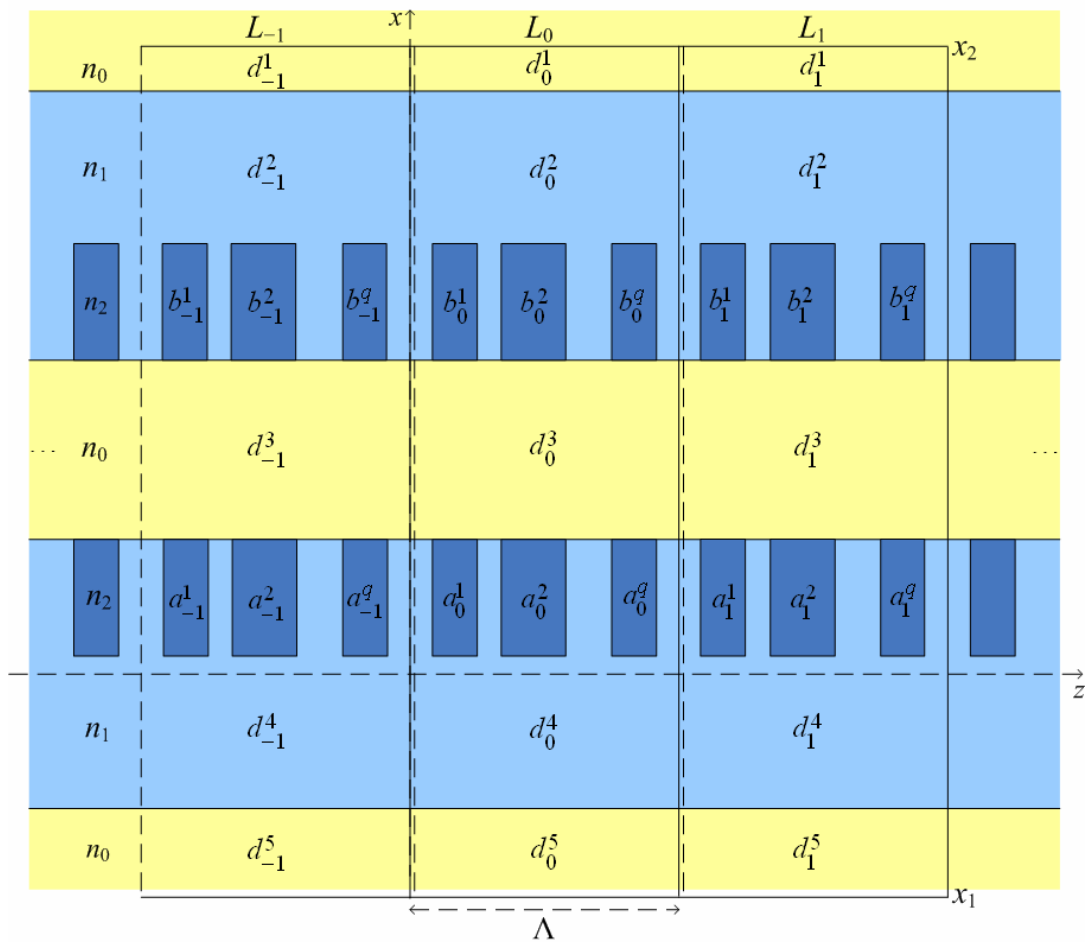
$$n_h(x) = \begin{cases} n_0, & x > h+d \\ n_1, & h-d < x < h+d \\ n_0, & d < x < h-d \\ n_1, & -d < x < d \\ n_0, & x < -d \end{cases}$$

η κατανομή του δείκτη διάθλασης της ομογενούς (χωρίς γραμμοσειρές) διάταξης. Επίσης, η συνάρτηση Green G της διάταξης των δύο κυματοδηγών αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.20).

Στο Σχήμα 3.3 εμφανίζεται κατάλληλος διαχωρισμός της διάταξης του συζεύκτη γραμμοσειρών του Σχήματος 3.1, ο οποίος εξυπηρετεί την εφαρμογή των τύπων του Green. Ακριβέστερα θεωρούμε την ορθογώνια διαμέριση

$$L_i = [x_1, x_2] \times (i\Lambda, (i+1)\Lambda], \quad i \in \mathbb{Z}$$

του επιπέδου \mathbb{R}^2 , η οποία περιέχει την i -οστή επανάληψη των γραμμοσειρών στον άξονα κυματοδηγής z της διάταξης. Επιπλέον d_i^k ($k=1, \dots, 5$) και a_i^j, b_i^j ($j=1, \dots, q$) είναι τα επίπεδα χωρία της τομής του ορθογωνίου L_i με την υπό μελέτη διάταξη του συζεύκτη. Ειδικότερα a_i^j και b_i^j , ($j=1, \dots, q$) είναι οι επιφάνειες των q ορθογωνίων της i -οστής επανάληψης των γραμμοσειρών στους κυματοδηγούς 1 και 2 αντίστοιχα.



Σχήμα 3.3 Διαχωρισμός της διάταξης του συζεύκτη γραμμοσειρών από ορθογώνια

Εφαρμόζοντας τώρα το δεύτερο τύπο του Green (βλ. [50], (5.39)) για τις συναρτήσεις $\Psi - \Psi_0$ και G επάνω σε κάθε ένα από τα χωρία σταθερού δείκτη διάθλασης d_0^k και a_0^j, b_0^j , τα οποία περιέχονται στο εσωτερικό του ορθογωνίου L_0 , λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & \iint_{M_0} \left[(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \nabla_{\mathbf{r}'}^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'}^2 (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \right] ds' = \\ & \oint_{\partial M_0} \left[(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}_i' dl' \end{aligned} \quad (3.43)$$

όπου $M = d_0^k$ ή a_0^j ή b_0^j . Αθροίζοντας τις (3.43) και λαμβάνοντας υπόψη ότι τα επικαμπύλια ολοκληρώματα αλληλοεξουδετερώνονται στα κοινά σύνορα των χωρίων, σύμφωνα με τα αναφερόμενα στο Παράρτημα Α, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} & \iint_{d_0 \cup s_0} \left[(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \nabla_{\mathbf{r}'}^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'}^2 (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \right] ds' = \\ & \oint_{\partial L_0} \left[(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}_i' dl' \equiv I_{L_0} \end{aligned} \quad (3.44)$$

όπου $s_0 = \left(\bigcup_{j=1}^q a_0^j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^q b_0^j \right)$ είναι η συνολική επιφάνεια της βασικής επανάληψης των

γραμμοσειρών των δύο κυματοδηγών και $d_0 = \bigcup_{j=1}^5 d_0^j$. Όμως οι συναρτήσεις G, Ψ και Ψ_0 είναι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων Helmholtz (3.20), (3.41) και (3.42) αντιστοίχως, οπότε από την (3.44) έχουμε

$$\begin{aligned} & \iint_{d_0^1 \cup d_0^3 \cup d_0^5} \left[(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) (-k_0^2 n_0^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') (-k_0^2 n_0^2 \Psi(\mathbf{r}') + k_0^2 n_0^2 \Psi_0(\mathbf{r}')) \right] ds' + \\ & \iint_{d_0^2 \cup d_0^4} \left[(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) (-k_0^2 n_1^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') (-k_0^2 n_1^2 \Psi(\mathbf{r}') + k_0^2 n_1^2 \Psi_0(\mathbf{r}')) \right] ds' + \\ & \iint_{s_0} \left[(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) (-k_0^2 n_1^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') (-k_0^2 n_2^2 \Psi(\mathbf{r}') + k_0^2 n_1^2 \Psi_0(\mathbf{r}')) \right] ds' = I_{L_0} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Μετά την εκτέλεση των πράξεων στις προς ολοκλήρωση συναρτήσεις παρατηρούμε ότι η (3.45) γράφεται

$$k_0^2 (n_2^2 - n_1^2) \iint_{s_0} \Psi(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') ds' - \iint_{d_0 \cup s_0} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') ds' = I_{L_0} \quad (3.46)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία στα ορθογώνια L_i , ($i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) ευρίσκουμε

$$k_0^2 (n_2^2 - n_1^2) \iint_{s_i} \Psi(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') ds' - \iint_{d_i \cup s_i} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') ds' = I_{L_i} \quad (3.47)$$

όπου $s_i = \left(\bigcup_{j=1}^q a_i^j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^q b_i^j \right)$ η συνολική επιφάνεια της i -οστής επανάληψης των γραμμοσειρών

και $d_i = \bigcup_{j=1}^5 d_i^j$. Τώρα από τις (3.46) και (3.47), λαμβάνουμε

$$k_0^2(n_2^2 - n_1^2) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \iint_{s_i} \Psi(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') ds' - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \iint_{d_i \cup s_i} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') ds' = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} I_{L_i} \quad (3.48)$$

Για τον υπολογισμό των διπλών ολοκληρωμάτων επάνω στα εσωτερικά $d_i \cup s_i$ των L_i σκεφτόμαστε ως εξής. Το διάνυσμα παρατήρησης \mathbf{r} θα ανήκει σε κάποιο ορθογώνιο L_k , οπότε με βάση την ιδιότητα-ορισμό της συνάρτησης δέλτα, το διπλό ολοκλήρωμα πάνω σε αυτό θα είναι ίσο με $\Psi(\mathbf{r}) - \Psi_0(\mathbf{r})$, ενώ για κάθε άλλο ορθογώνιο L_i , $i \neq k$ θα είναι ίσο με μηδέν. Επομένως η (3.48) ανάγεται στην

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{r}) + k_0^2(n_2^2 - n_1^2) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \iint_{s_i} \Psi(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') ds' - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} I_{L_i} \quad (3.49)$$

Τέλος, επειδή τα επικαμπύλια ολοκληρώματα I_{L_i} αθροιζόμενα, αλληλοεξουδετερώνονται επάνω στην κοινή πλευρά των διαδοχικών ορθογωνίων L_i , θα έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} I_{L_i} &= \int_{x=x_1}^{+\infty} [(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \nabla_{r'} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla_{r'} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}'))] \cdot \hat{\mathbf{n}}_i' dl' + \\ &\quad \int_{x=x_2}^{+\infty} [(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \nabla_{r'} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla_{r'} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}'))] \cdot \hat{\mathbf{n}}_i' dl' \\ &\equiv I(x_1) + I(x_2) \end{aligned}$$

Όμως επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία απόδειξης της συμμετρίας της συνάρτησης Green, η οποία περιγράφεται στο Παράρτημα Α, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} I(x_1) = 0 \quad , \quad \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} I(x_2) = 0 \quad (3.50)$$

Έτσι από τις (3.49) και (3.50) προκύπτει η ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{r}) + k_0^2(n_2^2 - n_1^2) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \iint_{s_i} \Psi(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') ds', \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$$

της λύσης $\Psi(\mathbf{r})$ του προβλήματος, η οποία οδηγεί στην (3.40) με βάση το ότι $S_d = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} s_i$ είναι η συνολική επιφάνεια των άπειρων γραμμοσειρών.

□

Σύμφωνα με την (3.40) ο παράγοντας $\Psi(\mathbf{r})$ του ηλεκτρικού πεδίου στο τυχόν σημείο παρατήρησης \mathbf{r} εκφράζεται ως άθροισμα του παράγοντα $\Psi_0(\mathbf{r})$ του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου και του παράγοντα

$$\Psi_\varepsilon(\mathbf{r}) = k_0^2(n_2^2 - n_1^2) \iint_{S_d} \Psi(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') ds'$$

του επαγόμενου πεδίου λόγω της παρουσίας των γραμμοσειρών. Η φυσική ερμηνεία του παράγοντα $\Psi_\varepsilon(\mathbf{r})$ περιγράφεται ως εξής: Σύμφωνα με την ([70], (2.121)) η διαφορά του δείκτη διάθλασης $n_2 - n_1$ στην περιοχή των γραμμοσειρών προκαλεί ένα ρεύμα μετατόπισης

$$\mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} j\omega\varepsilon_0(n_2^2 - n_1^2)\Psi(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}}, & \mathbf{r} \in S_d \\ \mathbf{0}, & \mathbf{r} \notin S_d \end{cases}$$

Όμως, επειδή η κρουστική ρευματική διέγερση (3.19) προκαλεί ηλεκτρικό πεδίο ίσο με $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$, το ρεύμα μετατόπισης $\mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{r})$, σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, προκαλεί τον παράγοντα ηλεκτρικού πεδίου $\Psi_\varepsilon(\mathbf{r})$.

3.5. Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τη μέθοδο Galerkin

Για τη μελέτη των φαινομένων κυματοδότησης στη διάταξη του συζεύκτη γραμμοσειρών υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει προσπίπτον πεδίο ή οποιαδήποτε άλλη επιβαλλόμενη εξωτερικά διέγερση και αναζητούμε χρονικά αρμονικές λύσεις των εξισώσεων Maxwell, θεωρώντας τα ηλεκτρικά πεδία στην επιφάνεια των γραμμοσειρών σαν ισοδύναμα ρεύματα πόλωσης [74].

Θεωρώντας τη διαμέριση $S_d = S_d^1 \cup S_d^2$, όπου S_d^1 και S_d^2 είναι οι συνολικές εγκάρσιες διατομές των γραμμοσειρών των κυματοδηγών 1 και 2 αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτική αναπαράσταση (3.40) ισοδύναμα γράφεται

$$\Psi(x, z) = k_0^2(n_2^2 - n_1^2) \left[\iint_{S_d^1} G_1(x, z; x', z') \Psi_1(x', z') dx' dz' + \iint_{S_d^2} G_2(x, z; x', z') \Psi_2(x', z') dx' dz' \right], \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.51)$$

όπου G_1 και G_2 είναι οι συναρτήσεις Green, οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις (3.30) και (3.38), και αντιστοιχούν σε διεγέρσεις που ευρίσκονται εντός των κυματοδηγών 1 και 2 και Ψ_1 και Ψ_2 είναι οι παράγοντες του ηλεκτρικού πεδίου στους κυματοδηγούς 1 και 2.

Σύμφωνα με τα αναφερόμενα στην παράγραφο 3.2, το ηλεκτρικό πεδίο ενός ρυθμού κυματοδότησης με μιγαδική σταθερά διάδοσης γ καθορίζεται από τους τύπους (3.2) και (3.3) του θεωρήματος Floquet και επομένως η ολοκληρωτική αναπαράσταση (3.51) αναδιατυπώνεται ως εξής

$$u(x, z) = k_0^2 (n_2^2 - n_1^2) \left[\iint_{S_d^1} G_1(x, z; x', z') u_1(x', z') \exp(\gamma(z - z')) dx' dz' + \iint_{S_d^2} G_2(x, z; x', z') u_2(x', z') \exp(\gamma(z - z')) dx' dz' \right] \quad (3.52)$$

όπου $u(x, z)$, $u_1(x, z)$ και $u_2(x, z)$ είναι Λ -περιοδικές συναρτήσεις ως προς z .

Σε όλα τα επόμενα για τη συνάρτηση u υποθέτουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις της Ψ (βλ. σελ. 79) και επιπλέον οι (B.8) και (B.9).

Περιορίζοντας το διάνυσμα παρατήρησης (x, z) στην (3.52) σε κάθε ένα από τα επίπεδα χωρία ολοκλήρωσης, η ολοκληρωτική αναπαράσταση (3.52) οδηγεί σε δύο ολοκληρωτικές εξισώσεις για τους άγνωστους παράγοντες $u_1(x, z)$ και $u_2(x, z)$ στην επιφάνεια των γραμμοσειρών. Η τεχνική Galerkin συνολικού χώρου θα εφαρμοστεί στα επόμενα για τη λύση της (3.52).

Η συνολική εγκάρσια διατομή S_d των γραμμοσειρών εκφράζεται ως αριθμήσιμη ένωση $S_d = \bigcup_{r=-\infty}^{+\infty} (S_r^1 \cup S_r^2)$ των διατομών

$$S_r^1 = \bigcup_{i=1}^q [d - w, d] \times [d_i + r\Lambda, d_i + l_i + r\Lambda] \quad (3.53)$$

$$S_r^2 = \bigcup_{i=1}^q [h - d, h - d + w] \times [d_i + r\Lambda, d_i + l_i + r\Lambda]$$

της r -οστής επανάληψης των γραμμοσειρών των κυματοδηγών 1 και 2. Τώρα εκφράζοντας τις προαναφερόμενες συναρτήσεις Green G_1 και G_2 ως ολοκληρώματα Fourier μέσω των τύπων (3.30) και (3.38), διαπιστώνουμε ότι η ολοκληρωτική αναπαράσταση (3.52) εκφράζεται και ως εξής

$$u(x, z) = \frac{k_0^2 (n_2^2 - n_1^2)}{4\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left\{ \iint_{S_r^1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp[-j\lambda(z - z')] \delta_1(\lambda, x, x') \right] u_1(x', z') \exp[-\gamma(z' - z)] dx' dz' + \iint_{S_r^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp[-j\lambda(z - z')] \delta_2(\lambda, x, x') \right] u_2(x', z') \exp[-\gamma(z' - z)] dx' dz' \right\} \quad (3.54)$$

Εφαρμόζοντας τώρα το μετασχηματισμό $\zeta' = z' - r\Lambda$, διαπιστώνουμε ότι τα διπλά ολοκληρώματα επάνω στις S_r^1 και S_r^2 , τα οποία εμφανίζονται στον τύπο (3.54), ανάγονται σε ολοκληρώματα επάνω στις πρότυπες επαναλήψεις S_0^1 και S_0^2 , οι οποίες παριστούν την εγκάρσια

διατομή των γραμμοσειρών του κάθε κυματοδηγού στο διάστημα από $z=0$ έως $z=\Lambda$ και επομένως ο τύπος (3.54) ισοδύναμα γράφεται

$$u(x, z) = \frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{4\pi} \exp(\gamma z) \left\{ \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left\{ \iint_{S_0^1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp(-j\lambda(z - \zeta' - r\Lambda)) \delta_1(\lambda, x, x') \right] u_1(x', \zeta' + r\Lambda) \exp(-\gamma(\zeta' + r\Lambda)) dx' d\zeta' \right. \right. \\ \left. \left. + \iint_{S_0^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp(-j\lambda(z - \zeta' - r\Lambda)) \delta_2(\lambda, x, x') \right] u_2(x', \zeta' + r\Lambda) \exp(-\gamma(\zeta' + r\Lambda)) dx' d\zeta' \right\} \right\}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την περιοδικότητα των συναρτήσεων $u_1(x, z)$ και $u_2(x, z)$ ως προς τη μεταβλητή z και εφαρμόζοντας τον κανόνα ολοκλήρωσης σειράς κατά όρους, διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$u(x, z) = \frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{4\pi} \exp(\gamma z) \left\{ \iint_{S_0^1} u_1(x', \zeta') \exp(-\gamma\zeta') \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j\lambda(z - \zeta')) \delta_1(\lambda, x, x') \left[\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \exp(jr\Lambda(\lambda + j\gamma)) \right] d\lambda dx' d\zeta' \right. \\ \left. + \iint_{S_0^2} u_2(x', \zeta') \exp(-\gamma\zeta') \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j\lambda(z - \zeta')) \delta_2(\lambda, x, x') \left[\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \exp(jr\Lambda(\lambda + j\gamma)) \right] d\lambda dx' d\zeta' \right\} \quad (3.55)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον τύπο του Poisson

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(t - pT) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{r}{T}\right) e^{j\frac{2\pi r t}{T}}$$

όπου οι συναρτήσεις f και F αποτελούν ζεύγος μετασχηματισμού Fourier (βλ. [73], (4.8.28)), επιλέγοντας $f(t) = \delta(t)$ (οπότε $F(t) = 1$), $t = \lambda + j\gamma$ και $T = \frac{2\pi}{\Lambda}$. Έτσι ευρίσκουμε

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{jr\Lambda(j\gamma + \lambda)} = \frac{2\pi}{\Lambda} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\lambda + j\gamma - \frac{2\pi p}{\Lambda}\right) \quad (3.56)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (3.55) και (3.56), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
u(x, z) &= \frac{k_0^2 (n_2^2 - n_1^2)}{2\Lambda} \exp(\gamma z) \\
&\left\{ \iint_{S_0^1} u_1(x', \zeta') \exp(-\gamma \zeta') \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j\lambda(z - \zeta')) \delta_1(\lambda, x, x') \delta(\lambda + j\gamma - \frac{2\pi p}{\Lambda}) d\lambda \right] dx' d\zeta' \right. \\
&\left. + \iint_{S_0^2} u_2(x', \zeta') \exp(-\gamma \zeta') \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j\lambda(z - \zeta')) \delta_2(\lambda, x, x') \delta(\lambda + j\gamma - \frac{2\pi p}{\Lambda}) d\lambda \right] dx' d\zeta' \right\} \quad (3.57)
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη βασική ιδιότητα-ορισμό της γενικευμένης συνάρτησης Dirac δ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \delta(\lambda - \lambda_0) d\lambda = g(\lambda_0)$$

παρατηρούμε ότι η (3.57) ανάγεται

$$\begin{aligned}
u(x, z) &= \frac{k_0^2 (n_2^2 - n_1^2)}{2\Lambda} \exp(\gamma z) \\
&\left[\iint_{S_0^1} u_1(x', \zeta') \exp(-\gamma \zeta') \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp[-(\gamma + j\frac{2\pi p}{\Lambda})(z - \zeta')] \delta_1(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' d\zeta' \quad (3.58) \right. \\
&\left. + \iint_{S_0^2} u_2(x', \zeta') \exp(-\gamma \zeta') \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp[-(\gamma + j\frac{2\pi p}{\Lambda})(z - \zeta')] \delta_2(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' d\zeta' \right]
\end{aligned}$$

Η τελευταία μετά την εκτέλεση των πράξεων στις προς ολοκλήρωση συναρτήσεις, αναδιατυπώνεται ως εξής

$$\begin{aligned}
u(x, z) &= \frac{k_0^2 (n_2^2 - n_1^2)}{2\Lambda} \\
&\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp(-j\frac{2\pi p}{\Lambda} z) \left[\iint_{S_0^1} u_1(x', \zeta') \exp(j\frac{2\pi p}{\Lambda} \zeta') \delta_1(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' d\zeta' \quad (3.59) \right. \\
&\left. + \iint_{S_0^2} u_2(x', \zeta') \exp(j\frac{2\pi p}{\Lambda} \zeta') \delta_2(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' d\zeta' \right]
\end{aligned}$$

Περαιτέρω, οι συναρτήσεις $u_1(x, \zeta)$ και $u_2(x, \zeta)$, οι οποίες ορίζονται στις πρότυπες επαναλήψεις S_0^1 και S_0^2 , υπό τις προϋποθέσεις της (B.6), αναπτύσσονται ως προς ζ στις σειρές Fourier

$$u_1(x, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{1,n}(x) \exp(-j\frac{2\pi n}{\Lambda} \zeta) \quad , \quad u_2(x, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{2,n}(x) \exp(-j\frac{2\pi n}{\Lambda} \zeta) \quad (3.60)$$

όπου οι συντελεστές $\varphi_{1,n}(x)$ και $\varphi_{2,n}(x)$ είναι οι εγκάρσιες συνιστώσες των χωρικών αρμονικών. Υπό την ορολογία της Μεθόδου των Ροπών οι συναρτήσεις

$\varphi_{1,n}(x)\exp[-j(2\pi n/\Lambda)\zeta]$ και $\varphi_{2,n}(x)\exp[-j(2\pi n/\Lambda)\zeta]$ αναφέρονται ως συναρτήσεις ανάπτυξης (expansion functions).

Εξάλλου, υπό τις φυσικές προϋποθέσεις (B.9)-(B.11), λαμβάνοντας υπόψη την (3.17) οδηγούμαστε στις διαφορικές εξισώσεις

$$\varphi_{1,n}''(x) - g_{2,n}^2 \varphi_{1,n}(x) = 0, \quad d - w \leq x \leq d \quad (3.61)$$

$$\varphi_{2,n}''(x) - g_{2,n}^2 \varphi_{2,n}(x) = 0, \quad h - d \leq x \leq h - d + w$$

όπου

$$g_{i,n} = g_i \left(-j\gamma + \frac{2\pi n}{\Lambda} \right) = \left[\left(-j\gamma + \frac{2\pi n}{\Lambda} \right)^2 - k_0^2 n_i^2 \right]^{1/2} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (3.62)$$

Ο προσδιορισμός των συναρτήσεων $\varphi_{1,n}$ και $\varphi_{2,n}$ επιτυγχάνεται με την ακόλουθη διαδικασία. Οι συναρτήσεις $\varphi_{1,n}$ και $\varphi_{2,n}$ εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των θεμελιωδών λύσεων των διαφορικών εξισώσεων (3.61)

$$\varphi_{1,n}(x) = c_n^{1+} \exp \left[g_{2,n} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] + c_n^{1-} \exp \left[-g_{2,n} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] \quad (3.63)$$

$$\varphi_{2,n}(x) = c_n^{2+} \exp \left[g_{2,n} \left(x - h + d - \frac{w}{2} \right) \right] + c_n^{2-} \exp \left[-g_{2,n} \left(x - h + d - \frac{w}{2} \right) \right]$$

όπου $c_n^{1\pm}, c_n^{2\pm}$ είναι προσδιοριστέοι συντελεστές.

Στους γραμμικούς συνδυασμούς (3.63) οι θεμελιώδεις λύσεις εκφράζονται ως προς τους άξονες συμμετρίας των γραμμοσειρών $x = d - (w/2)$ του κυματοδηγού 1 και $x = h - d + (w/2)$ του κυματοδηγού 2, διότι οι εκφράσεις αυτές οδηγούν σε μικρότερα ορίσματα των εκθετικών συναρτήσεων, και έτσι εξασφαλίζεται μεγαλύτερη ευστάθεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων. Τώρα από τις (3.60) και (3.63) προκύπτει αμέσως ότι

$$u_1(x, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[c_n^{1+} \exp(g_{2,n}(x - d + \frac{w}{2})) + c_n^{1-} \exp(-g_{2,n}(x - d + \frac{w}{2})) \right] \exp(-j \frac{2\pi n}{\Lambda} \zeta) \right\} \quad (3.64)$$

$$u_2(x, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[c_n^{2+} \exp(g_{2,n}(x - h + d - \frac{w}{2})) + c_n^{2-} \exp(-g_{2,n}(x - h + d - \frac{w}{2})) \right] \exp(-j \frac{2\pi n}{\Lambda} \zeta) \right\}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (3.59) και (3.64), εκφράζοντας τα διπλά ολοκληρώματα επάνω στις πρότυπες επαναλήψεις S_0^1 και S_0^2 ως αθροίσματα διπλών ολοκληρωμάτων επάνω στα ορθογώνια, τα οποία καθορίζονται από τις (3.53), και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση σειράς κατά όρους, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}
u(x, z) &= \frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{2\Lambda} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z) \\
&\left\{ \sum_{i=1}^q \int_{d_i}^{d_i+l_i} d\zeta' \int_{d-w}^d dx' \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[c_n^{1+} \exp(g_{2,n}(x' - d + \frac{w}{2})) + c_n^{1-} \exp(-g_{2,n}(x' - d + \frac{w}{2})) \right] \right. \\
&\quad \left. \exp(j \frac{2\pi(p-n)}{\Lambda} \zeta') \delta_1(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') \right. \\
&+ \sum_{i=1}^q \int_{d_i}^{d_i+l_i} d\zeta' \int_{h-d}^{h-d+w} dx' \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[c_n^{2+} \exp(g_{2,n}(x' - h + d - \frac{w}{2})) + c_n^{2-} \exp(-g_{2,n}(x' - h + d - \frac{w}{2})) \right] \\
&\quad \left. \exp(j \frac{2\pi(p-n)}{\Lambda} \zeta') \delta_2(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') \right\} \\
&= \frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{2\Lambda} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z) \\
&\left\{ \sum_{i=1}^q \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{d_i}^{d_i+l_i} d\zeta' \int_{d-w}^d dx' \left[c_n^{1+} \exp(g_{2,n}(x' - d + \frac{w}{2})) + c_n^{1-} \exp(-g_{2,n}(x' - d + \frac{w}{2})) \right] \right. \\
&\quad \left. \exp(j \frac{2\pi(p-n)}{\Lambda} \zeta') \delta_1(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') \right. \\
&+ \sum_{i=1}^q \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{d_i}^{d_i+l_i} d\zeta' \int_{h-d}^{h-d+w} dx' \left[c_n^{2+} \exp(g_{2,n}(x' - h + d - \frac{w}{2})) + c_n^{2-} \exp(-g_{2,n}(x' - h + d - \frac{w}{2})) \right] \\
&\quad \left. \exp(j \frac{2\pi(p-n)}{\Lambda} \zeta') \delta_2(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') \right\}
\end{aligned}$$

Περαιτέρω, παρατηρούμε ότι τα διπλά ολοκληρώματα, τα οποία εμφανίζονται στο δεύτερο μέλος της τελευταίας ισότητας, εκφράζονται ως γινόμενα απλών ολοκληρωμάτων (συναρτήσεων μιας μεταβλητής), και έτσι λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
u(x, z) &= \frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z) \\
&\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^q \int_{d_i}^{d_i+l_i} \exp(j \frac{2\pi(p-n)}{\Lambda} \zeta') d\zeta' \right] \right. \\
&\left[c_n^{1+} \int_{d-w}^d \exp(g_{2,n}(x' - d + \frac{w}{2})) \delta_1(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' \right. \\
&+ c_n^{1-} \int_{d-w}^d \exp(-g_{2,n}(x' - d + \frac{w}{2})) \delta_1(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' \\
&+ c_n^{2+} \int_{h-d}^{h-d+w} \exp(g_{2,n}(x' - h + d - \frac{w}{2})) \delta_2(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' \\
&\left. \left. + c_n^{2-} \int_{h-d}^{h-d+w} \exp(-g_{2,n}(x' - h + d - \frac{w}{2})) \delta_2(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Όπως προκύπτει από τη μορφή του τελευταίου τύπου, ο παράγοντας $u(x, z)$ σε κάθε περιοχή του επιπέδου εκφράζεται ως άθροισμα διπλής σειράς γινομένων δύο συναρτήσεων των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των γραμμοσειρών.

Περαιτέρω θεωρούμε την αδιάστατη συνάρτηση $J: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$J_\ell = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^q \int_{d_i}^{d_i+l_i} \exp[j(2\pi\ell/\Lambda)\zeta'] d\zeta' \quad (\ell \in \mathbb{Z}) \tag{3.66}$$

η οποία εμπεριέχει τις πληροφορίες για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμοσειρών στο διαμήκη άξονα z . Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα, ευρίσκουμε

$$J_\ell = \begin{cases} \frac{1}{j2\pi\ell} \sum_{i=1}^q \{ \exp[j2\pi\ell(d_i/\Lambda)] (\exp[j2\pi\ell(l_i/\Lambda)] - 1) \}, & \ell \neq 0 \\ \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^q l_i, & \ell = 0 \end{cases} \tag{3.67}$$

Όπως φαίνεται από την (3.67), οι τιμές J_ℓ της συνάρτησης J εξαρτώνται μόνο από τις ανηγμένες (κανονικοποιημένες) τιμές d_i/Λ και l_i/Λ των d_i και l_i ως προς την περίοδο Λ της διάταξης.

Επίσης, θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$Q_{np}^{1\pm}(x) = \int_{d-w}^d \exp\left[\pm g_{2,n}(x' - d + \frac{w}{2})\right] \delta_1(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx', \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.68}$$

$$Q_{np}^{2\pm}(x) = \int_{h-d}^{h-d+w} \exp\left[\pm g_{2,n}(x' - h + d - \frac{w}{2})\right] \delta_2(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx', \quad x \in \mathbb{R}$$

οι οποίες εμπεριέχουν τις πληροφορίες για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμοσειρών στον εγκάρσιο άξονα x . Ο αναλυτικός υπολογισμός των $Q_{np}^{1\pm}(x)$ και $Q_{np}^{2\pm}(x)$ επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των συναρτήσεων

$$\varepsilon_1(g_2, x) = \int_{d-w}^d \exp[g_2(x' - d + \frac{w}{2})] \delta_1(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx', \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.69)$$

$$\varepsilon_2(g_2, x) = \int_{h-d}^{h-d+w} \exp[g_2(x' - h + d - \frac{w}{2})] \delta_2(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx', \quad x \in \mathbb{R}$$

μέσω των οποίων οι συναρτήσεις $Q_{np}^{1\pm}$ και $Q_{np}^{2\pm}$ εκφράζονται ως εξής

$$Q_{np}^{1\pm}(x) = \varepsilon_1(\pm g_{2,n}, x) \quad , \quad Q_{np}^{2\pm}(x) = \varepsilon_2(\pm g_{2,n}, x) \quad (3.70)$$

Επειδή οι δ_1 και δ_2 εξαρτώνται από τη σχετική θέση διέγερσης και απόκρισης, τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων που εμφανίζονται στα δεύτερα μέλη των (3.69) διασπώνται ως αθροίσματα

$$\int_{d-w}^d dx' = \int_{d-w}^x dx' + \int_x^d dx' \quad , \quad \int_{h-d}^{h-d+w} dx' = \int_{h-d}^x dx' + \int_x^{h-d+w} dx'$$

όπου σε καθένα προσθετέο χρησιμοποιούνται οι κατάλληλοι κλάδοι των δ_1 και δ_2 . Από τους δύο αυτούς τύπους με τη βοήθεια των εκφράσεων (3.31) και (3.39) των δ_1 και δ_2 υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα της (3.69) και ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(g_2, x) = & -\frac{1}{(g_2^2 - g_{1,p}^2)} \frac{1}{(P_e^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2)} \\
& \left. \begin{aligned}
& P_e P_e g_{0,p} g_{1,p} \varepsilon \left\{ \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right. \\
& \quad \left. - \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right\} \exp[-g_{0,p}(x-h-d)], & x \geq h+d \\
& P_e^2 P_e^2 g_{0,p} \varepsilon \left\{ \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right. \\
& \quad \left. - \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right\} \left[\frac{\cosh[g_{1,p}(x-h)]}{P_e} + \frac{\sinh[g_{1,p}(x-h)]}{P_o} \right], & h-d \leq x \leq h+d \\
& P_e P_e \left\{ \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right. \\
& \quad \left. - \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right\} \\
& \quad \left\{ P_e P_e \exp[-g_{0,p}(x-d)] + K \varepsilon \exp[g_{0,p}(x-h+d)] \right\}, & d \leq x \leq h-d \\
& 2(P_e^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2) \exp[g_2(x-d + \frac{w}{2})] + \\
& \frac{P_e^3 P_e^3}{g_{1,p}} \left\{ \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} - \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \left[\frac{\cosh(g_{1,p}x)}{P_e} + \frac{\sinh(g_{1,p}x)}{P_o} \right] \right. \\
& \quad \left. - \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \left[\frac{\cosh(g_{1,p}x)}{P_e} - \frac{\sinh(g_{1,p}x)}{P_o} \right] \right\} \\
& \quad + \frac{K P_e P_e Q_e Q_e}{g_{1,p}} \varepsilon^2 \left\{ \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d)}{Q_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d)}{Q_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \left[\frac{\cosh(g_{1,p}x)}{P_e} + \frac{\sinh(g_{1,p}x)}{P_o} \right] \right. \\
& \quad \left. - \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \left[\frac{\cosh(g_{1,p}x)}{Q_e} + \frac{\sinh(g_{1,p}x)}{Q_o} \right] \right\}, & d-w \leq x \leq d \\
& \left\{ \frac{P_e^3 P_e^3}{g_{1,p}} \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} - \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{P_e^3 P_e^3}{g_{1,p}} \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} - \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{K P_e P_e Q_e Q_e}{g_{1,p}} \varepsilon^2 \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d)}{Q_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d)}{Q_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{K P_e P_e Q_e Q_e}{g_{1,p}} \varepsilon^2 \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{Q_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{Q_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right\} \left[\frac{\cosh(g_{1,p}x)}{P_e} + \frac{\sinh(g_{1,p}x)}{P_o} \right], & -d \leq x \leq d-w \\
& \left\{ P_e^2 P_e^2 \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} - \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right. \\
& \quad \left. - P_e^2 P_e^2 \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} - \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right. \\
& \quad \left. + K Q_e Q_e \varepsilon^2 \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d)}{Q_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d)}{Q_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right. \\
& \quad \left. - K Q_e Q_e \varepsilon^2 \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{Q_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(-g_2, g_{1,p}, d-w)}{Q_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right\} \exp[g_{0,p}(x+d)], & x \leq -d
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2(g_2, x) = & -\frac{1}{(g_2^2 - g_{1,p}^2)} \frac{1}{(P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2)} \\
& \left\{ P_o^2 P_e^2 \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} - \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right. \\
& - P_o^2 P_e^2 \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} - \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \\
& + K Q_o Q_e \varepsilon^2 \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d)}{Q_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d)}{Q_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \\
& \left. - K Q_o Q_e \varepsilon^2 \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d-w)}{Q_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d-w)}{Q_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right\} \exp[-g_{0,p}(x-h-d)], & x \geq h+d \\
& \left\{ \frac{P_o^3 P_e^3}{g_{1,p}} \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} - \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right. \\
& - \frac{P_o^3 P_e^3}{g_{1,p}} \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} - \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \\
& + \frac{K P_o P_e Q_o Q_e}{g_{1,p}} \varepsilon^2 \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d)}{Q_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d)}{Q_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \\
& \left. - \frac{K P_o P_e Q_o Q_e}{g_{1,p}} \varepsilon^2 \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d-w)}{Q_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d-w)}{Q_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right\} \left[\frac{\cosh(g_{1,p}(x-h))}{P_e} - \frac{\sinh(g_{1,p}(x-h))}{P_o} \right], & h-d+w \leq x \leq h+d \\
& 2(P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2) \exp[-g_2(h-x-d + \frac{w}{2})] \\
& + \frac{P_o^3 P_e^3}{g_{1,p}} \left\{ \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} - \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \left[\frac{\cosh(g_{1,p}(x-h))}{P_e} - \frac{\sinh(g_{1,p}(x-h))}{P_o} \right] \right. \\
& \left. - \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \left[\frac{\cosh(g_{1,p}(x-h))}{P_e} + \frac{\sinh(g_{1,p}(x-h))}{P_o} \right] \right\} & h-d \leq x \leq h-d+w \\
& + \frac{K P_o P_e Q_o Q_e}{g_{1,p}} \varepsilon^2 \left\{ \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d)}{Q_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d)}{Q_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \left[\frac{\cosh(g_{1,p}(x-h))}{P_e} - \frac{\sinh(g_{1,p}(x-h))}{P_o} \right] \right. \\
& \left. - \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d-w)}{Q_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d-w)}{Q_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \left[\frac{\cosh(g_{1,p}(x-h))}{Q_e} - \frac{\sinh(g_{1,p}(x-h))}{Q_o} \right] \right\}, \\
& P_o P_e \left\{ \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right. \\
& \left. - \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right\} & d \leq x \leq h-d \\
& \{ P_o P_e \exp[g_{0,p}(x-h+d)] + K \varepsilon \exp[-g_{0,p}(x-d)] \}, \\
& P_o^2 P_e^2 g_{0,p} \varepsilon \left\{ \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right. \\
& \left. - \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right\} \left[\frac{\cosh(g_{1,p}x)}{P_e} + \frac{\sinh(g_{1,p}x)}{P_o} \right], & -d \leq x \leq d \\
& P_o P_e g_{0,p} g_{1,p} \varepsilon \left\{ \exp(-g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right. \\
& \left. - \exp(g_2 \frac{w}{2}) \left[\frac{P_e(g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(g_2, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right\} \exp[g_{0,p}(x+d)], & x \leq -d
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τους ορισμούς (3.66) και (3.70) των συναρτήσεων J_ℓ και $Q_{np}^{1\pm}, Q_{np}^{2\pm}$, παρατηρούμε ότι η (3.65) γράφεται ως εξής

$$u(x, z) = \frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ J_{p-n} \exp\left(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z\right) \left[c_n^{1+} Q_{np}^{1+}(x) + c_n^{1-} Q_{np}^{1-}(x) + c_n^{2+} Q_{np}^{2+}(x) + c_n^{2-} Q_{np}^{2-}(x) \right] \right\}, \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.71)$$

Το διάνυσμα παρατήρησης (x, z) στην (3.71) ανήκει στον χώρο \mathbb{R}^2 . Όμως για τον προσδιορισμό των αγνώστων συντελεστών $c_n^{1\pm}, c_n^{2\pm}$ της (3.71) με τη μέθοδο Galerkin απαιτείται το διάνυσμα παρατήρησης να ευρίσκεται στην επιφάνεια των γραμμοσειρών. Υπό αυτή την προϋπόθεση διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις

Περίπτωση 1. Το διάνυσμα παρατήρησης (x, z) ανήκει στην επιφάνεια των γραμμοσειρών του κυματοδηγού 1, δηλαδή $(x, z) \in S_d^1$. Στην περίπτωση αυτή σύμφωνα με την (3.60) η συνάρτηση $u(x, z)$ αναπτύσσεται στη σειρά Fourier

$$u(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{1,n}(x) \exp\left(-j \frac{2\pi n}{\Lambda} z\right), \quad (x, z) \in S_d^1$$

όπου οι χωρικές αρμονικές συναρτήσεις $\varphi_{1,n}(x)$ προσδιορίζονται από την (3.63). Συνδυάζοντας τώρα το προηγούμενο ανάπτυγμα με την (3.71), λαμβάνουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{1,n}(x) \exp\left(-j \frac{2\pi n}{\Lambda} z\right) = \frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ J_{p-n} \exp\left(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z\right) \left[c_n^{1+} Q_{np}^{1+}(x) + c_n^{1-} Q_{np}^{1-}(x) + c_n^{2+} Q_{np}^{2+}(x) + c_n^{2-} Q_{np}^{2-}(x) \right] \right\} \quad (3.72)$$

Στη συνέχεια λαμβάνοντας τα εσωτερικά γινόμενα των δύο μελών της (3.72) με τις δοκιμαστικές συναρτήσεις (*test functions*)

$$\exp\left[\pm g_{2,m}\left(x - d + \frac{w}{2}\right)\right] \exp\left(+j \frac{2\pi m}{\Lambda} z\right), \quad (x, z) \in S_d^1, \quad m \in \mathbb{Z}$$

ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} & \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^q \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{d-w}^d \int_{r\Lambda+d_i}^{r\Lambda+d_i+l_i} \varphi_{1,n}(x) \exp(-j \frac{2\pi n}{\Lambda} z) \exp\left[\pm g_{2,m}(x-d+\frac{w}{2})\right] \exp(j \frac{2\pi m}{\Lambda} z) dz dx = \\ & \frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^q \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_{d-w}^d \int_{r\Lambda+d_i}^{r\Lambda+d_i+l_i} J_{p-n} \left[c_n^{1+} Q_{np}^{1+}(x) + c_n^{1-} Q_{np}^{1-}(x) + c_n^{2+} Q_{np}^{2+}(x) + c_n^{2-} Q_{np}^{2-}(x) \right] \\ & \exp(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z) \exp\left[\pm g_{2,m}(x-d+\frac{w}{2})\right] \exp(j \frac{2\pi m}{\Lambda} z) dz dx \end{aligned}$$

Επειδή οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις δύο μεταβλητών εκφράζονται ως γινόμενα συναρτήσεων μιας μεταβλητής, τα εμφανιζόμενα διπλά ολοκληρώματα εκφράζονται ως γινόμενα δύο απλών ολοκληρωμάτων και έτσι η τελευταία ισοδύναμη γράφεται

$$\begin{aligned} & \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^q \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{r\Lambda+d_i}^{r\Lambda+d_i+l_i} \exp\left[j \frac{2\pi(m-n)}{\Lambda} z\right] dz \right\} \left\{ \int_{d-w}^d \varphi_{1,n}(x) \exp\left[\pm g_{2,m}(x-d+\frac{w}{2})\right] dx \right\} = \\ & \frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^q \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{p-n} \left\{ \int_{r\Lambda+d_i}^{r\Lambda+d_i+l_i} \exp\left[j \frac{2\pi(m-p)}{\Lambda} z\right] dz \right\} \\ & \left\{ \int_{d-w}^d \left[c_n^{1+} Q_{np}^{1+}(x) + c_n^{1-} Q_{np}^{1-}(x) + c_n^{2+} Q_{np}^{2+}(x) + c_n^{2-} Q_{np}^{2-}(x) \right] \exp\left[\pm g_{2,m}(x-d+\frac{w}{2})\right] dx \right\} \end{aligned}$$

Για την μετατροπή των προηγούμενων διπλών ολοκληρωμάτων σε διπλά ολοκληρώματα επάνω στην πρότυπη επανάληψη S_0^1 , εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $\zeta = z - r\Lambda$ και ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} & \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp[j2\pi r(m-n)] \left\{ \sum_{i=1}^q \int_{d_i}^{d_i+l_i} \exp\left[j \frac{2\pi(m-n)}{\Lambda} \zeta\right] d\zeta \right\} \left\{ \int_{d-w}^d \varphi_{1,n}(x) \exp\left[\pm g_{2,m}(x-d+\frac{w}{2})\right] dx \right\} = \\ & \frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{p-n} \exp[j2\pi r(m-p)] \left\{ \sum_{i=1}^q \int_{d_i}^{d_i+l_i} \exp\left[j \frac{2\pi(m-p)}{\Lambda} \zeta\right] d\zeta \right\} \\ & \left\{ \int_{d-w}^d \left[c_n^{1+} Q_{np}^{1+}(x) + c_n^{1-} Q_{np}^{1-}(x) + c_n^{2+} Q_{np}^{2+}(x) + c_n^{2-} Q_{np}^{2-}(x) \right] \exp\left[\pm g_{2,m}(x-d+\frac{w}{2})\right] dx \right\} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό (3.66) της συνάρτησης J_ℓ και ότι $\exp[j2\pi r(m-n)] = 1$, παρατηρούμε ότι η (3.73) αναδιατυπώνεται ως εξής

$$\begin{aligned} & \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-n} \left\{ \int_{d-w}^d \varphi_{1,n}(x) \exp\left[\pm g_{2,m}(x-d+\frac{w}{2})\right] dx \right\} = \\ & \frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-p} J_{p-n} \\ & \left\{ \int_{d-w}^d \left[c_n^{1+} Q_{np}^{1+}(x) + c_n^{1-} Q_{np}^{1-}(x) + c_n^{2+} Q_{np}^{2+}(x) + c_n^{2-} Q_{np}^{2-}(x) \right] \exp\left[\pm g_{2,m}(x-d+\frac{w}{2})\right] dx \right\} \end{aligned}$$

η δε τελευταία ισοδύναμη γράφεται

$$\begin{aligned} & \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-n} \left\{ \int_{d-w}^d \varphi_{1,n}(x) \exp \left[\pm g_{2,m} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] dx \right\} \right. \\ & \left. - \frac{k_0^2 (n_2^2 - n_1^2)}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-p} J_{p-n} \right. \\ & \left. \left(\int_{d-w}^d \left[c_n^{1+} Q_{np}^{1+}(x) + c_n^{1-} Q_{np}^{1-}(x) + c_n^{2+} Q_{np}^{2+}(x) + c_n^{2-} Q_{np}^{2-}(x) \right] \exp \left[\pm g_{2,m} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] dx \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Επειδή η ποσότητα εντός της αγκύλης είναι ανεξάρτητη του r , αυτή θα πρέπει να ισούται με το μηδέν, και άρα ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-n} \left\{ \int_{d-w}^d \varphi_{1,n}(x) \exp \left[\pm g_{2,m} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] dx \right\} &= \frac{k_0^2 (n_2^2 - n_1^2)}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-p} J_{p-n} \\ & \left\{ \int_{d-w}^d \left[c_n^{1+} Q_{np}^{1+}(x) + c_n^{1-} Q_{np}^{1-}(x) + c_n^{2+} Q_{np}^{2+}(x) + c_n^{2-} Q_{np}^{2-}(x) \right] \exp \left[\pm g_{2,m} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] dx \right\} \end{aligned}$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-n} \left\{ c_n^{1+} \int_{d-w}^d \exp \left[g_{2,n} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] \exp \left[\pm g_{2,m} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] dx \right. \\ & \left. + c_n^{1-} \int_{d-w}^d \exp \left[-g_{2,n} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] \exp \left[\pm g_{2,m} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] dx \right\} = \\ & \frac{k_0^2 (n_2^2 - n_1^2)}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-p} J_{p-n} \left\{ c_n^{1+} \int_{d-w}^d Q_{np}^{1+}(x) \exp \left[\pm g_{2,m} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] dx \right. \\ & + c_n^{1-} \int_{d-w}^d Q_{np}^{1-}(x) \exp \left[\pm g_{2,m} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] dx + c_n^{2+} \int_{d-w}^d Q_{np}^{2+}(x) \exp \left[\pm g_{2,m} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] dx \\ & \left. + c_n^{2-} \int_{d-w}^d Q_{np}^{2-}(x) \exp \left[\pm g_{2,m} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] dx \right\} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Περαιτέρω για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, τα οποία εμφανίζονται στην προηγούμενη σχέση, θεωρούμε τις μιγαδικές συναρτήσεις $K^{\pm\pm}$, $Q^{1\pm\pm}$ και $Q^{2\pm\pm}$, οι οποίες ορίζονται από τους τύπους

$$K_{mn}^{\pm\pm} = \int_{d-w}^d \exp \left[\pm g_{2,m} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] \exp \left[\pm g_{2,n} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] dx \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \quad (3.75)$$

$$Q_{mnp}^{li\pm\pm} = \frac{1}{2} \int_{d-w}^d \exp \left[\pm g_{2,m} \left(x - d + \frac{w}{2} \right) \right] Q_{np}^{i\pm}(x) dx \quad (i=1,2) \quad (m, n, p \in \mathbb{Z}) \quad (3.76)$$

Ο πρώτος εκθέτης \pm στα στοιχεία $K_{mn}^{\pm\pm}$ και $Q_{mnp}^{l\pm\pm}$ αντιστοιχεί στους όρους $\exp[\pm g_{2,m}(x-d+\frac{w}{2})]$

και ο δεύτερος εκθέτης στους όρους $\exp[\pm g_{2,n}(x-d+\frac{w}{2})]$ και $Q_{np}^{i\pm}$. Τώρα συνδυάζοντας τις

(3.68) με τις (3.75) και (3.76) λαμβάνουμε

$$K_{mn}^{\pm\pm} = w \begin{cases} \frac{\sinh\left[(\pm g_{2,m} \pm g_{2,n})\frac{w}{2}\right]}{(\pm g_{2,m} \pm g_{2,n})\frac{w}{2}}, & \pm g_{2,m} \pm g_{2,n} \neq 0 \\ 1, & \pm g_{2,m} \pm g_{2,n} = 0 \end{cases} \quad (3.77)$$

$$Q_{mnp}^{11\pm\pm} = -\frac{1}{(g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2)} K_{mn}^{\pm\pm} + \frac{1}{(g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2)} (R_{mnp}^{1\pm\pm} + H_{mnp}^{11\pm\pm}) \quad (3.78)$$

$$Q_{mnp}^{12\pm\pm} = -\frac{1}{(g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2)} H_{mnp}^{12\pm\pm} \quad (3.79)$$

όπου

$$R_{mnp}^{l\pm\pm} = \frac{P_o^3(g_{0p}, g_{1p}, d) P_e^3(g_{0p}, g_{1p}, d)}{2g_{1p} [P_o^2(g_{0p}, g_{1p}, d) P_e^2(g_{0p}, g_{1p}, d) - K^2(g_{0p}, g_{1p}, d) \varepsilon^2] (g_{2m}^2 - g_{1p}^2)} \cdot \left\{ e^{(\pm g_{2m} \pm g_{2n})\frac{w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp g_{2m}, g_{1p}, d)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp g_{2m}, g_{1p}, d)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp g_{2n}, g_{1p}, d)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} - \frac{P_o(\mp g_{2n}, g_{1p}, d)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \right. \\ - e^{(\pm g_{2m} \mp g_{2n})\frac{w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp g_{2m}, g_{1p}, d)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} - \frac{P_o(\mp g_{2m}, g_{1p}, d)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \\ - e^{(\mp g_{2m} \pm g_{2n})\frac{w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp g_{2n}, g_{1p}, d)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} - \frac{P_o(\mp g_{2n}, g_{1p}, d)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \\ \left. + e^{(\mp g_{2m} \mp g_{2n})\frac{w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} - \frac{P_o(\mp g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \right\} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned}
H_{mnp}^{11\pm\pm} &= \frac{K(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d) P_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d) P_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d) Q_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d) Q_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{2g_{1p} \left[P_o^2(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d) P_e^2(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d) - K^2(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d) \varepsilon^2 \right]} (g_{2m}^2 - g_{1p}^2) \varepsilon^2. \\
&\left\{ e^{\frac{(\pm g_{2m} \pm g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{P_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{P_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{Q_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{Q_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \right. \\
&- e^{\frac{(\pm g_{2m} \mp \mathbf{g}_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{Q_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{Q_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{P_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{P_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \\
&- e^{\frac{(\mp \mathbf{g}_{2m} \pm g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{P_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{P_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{Q_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{Q_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \\
&\left. + e^{\frac{(\mp \mathbf{g}_{2m} \mp \mathbf{g}_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{Q_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{Q_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{P_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{P_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
H_{mnp}^{12\pm\pm} &= \frac{g_{0p} P_o^2(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d) P_e^2(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{2 \left[P_o^2(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d) P_e^2(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d) - K^2(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d) \varepsilon^2 \right]} (g_{2m}^2 - g_{1p}^2) \varepsilon. \\
&\left\{ e^{\frac{(\pm g_{2m} \pm g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{P_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{P_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\pm \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{P_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{P_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \right. \\
&- e^{\frac{(\pm g_{2m} \mp \mathbf{g}_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{P_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{P_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\pm \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{P_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{P_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \\
&- e^{\frac{(\mp \mathbf{g}_{2m} \pm g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{P_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{P_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\pm \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{P_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{P_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \\
&\left. + e^{\frac{(\mp \mathbf{g}_{2m} \mp \mathbf{g}_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{P_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp \mathbf{g}_{2m}, \mathbf{g}_{1p}, d-w)}{P_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\pm \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{P_e(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm \mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{1p}, d)}{P_o(\mathbf{g}_{0p}, \mathbf{g}_{1p}, d)} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Τέλος, συνδυάζοντας την (3.74) με τους ορισμούς (3.75) και (3.76), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-n} \left(K_{mn}^{\pm\pm} c_n^{1+} + K_{mn}^{\pm\mp} c_n^{1-} \right) = k_0^2 (n_2^2 - n_1^2) \\
&\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-p} J_{p-n} \left(c_n^{1+} Q_{mnp}^{11\pm\pm} + c_n^{1-} Q_{mnp}^{11\pm\mp} + c_n^{2+} Q_{mnp}^{12\pm\pm} + c_n^{2-} Q_{mnp}^{12\pm\mp} \right) \quad (m \in \mathbb{Z})
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Περίπτωση 2. Το διάλυμα παρατήρησης (x, z) ανήκει στην επιφάνεια των γραμμοσειρών του κυματοδηγού 2, δηλαδή $(x, z) \in S_d^2$. Στην προκειμένη περίπτωση, σύμφωνα με την (3.60), η συνάρτηση $u(x, z)$ αναπτύσσεται ως προς z στη σειρά Fourier

$$u(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{2,n}(x) \exp(-j \frac{2\pi n}{\Lambda} z), \quad (x, z) \in S_d^2$$

όπου οι χωρικές αρμονικές συναρτήσεις $\varphi_{2,n}(x)$ προσδιορίζονται μέσω της (3.63).

Συνδυάζοντας τώρα το εν λόγω ανάπτυγμα Fourier της $u(x, z)$ με την (3.71), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{2,n}(x) \exp(-j \frac{2\pi n}{\Lambda} z) &= \frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{2} \\ &\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ J_{p-n} \exp(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z) \left[c_n^{1+} Q_{np}^{1+}(x) + c_n^{1-} Q_{np}^{1-}(x) + c_n^{2+} Q_{np}^{2+}(x) + c_n^{2-} Q_{np}^{2-}(x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Περαιτέρω, θεωρώντας τα εσωτερικά γινόμενα των δύο μελών της (3.84) με τις δοκιμαστικές συναρτήσεις

$$\exp\left[\pm g_{2,m}(x-h+d-\frac{w}{2})\right] \exp\left(+j \frac{2\pi m}{\Lambda} z\right), \quad (x,z) \in S_d^2, \quad m \in \mathbb{Z}$$

ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^q \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{h-d}^{h-d+w} \int_{r\Lambda+d_i}^{r\Lambda+d_i+l_i} \varphi_{2,n}(x) \exp(-j \frac{2\pi n}{\Lambda} z) \exp\left[\pm g_{2,m}(x-h+d-\frac{w}{2})\right] \exp(j \frac{2\pi m}{\Lambda} z) dz dx = \\ \frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^q \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_{h-d}^{h-d+w} \int_{r\Lambda+d_i}^{r\Lambda+d_i+l_i} J_{p-n} \left[c_n^{1+} Q_{np}^{1+}(x) + c_n^{1-} Q_{np}^{1-}(x) + c_n^{2+} Q_{np}^{2+}(x) + c_n^{2-} Q_{np}^{2-}(x) \right] \\ \exp(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z) \exp\left[\pm g_{2,m}(x-h+d-\frac{w}{2})\right] \exp(j \frac{2\pi m}{\Lambda} z) dz dx \end{aligned}$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία, την οποία περιγράψαμε για τη μελέτη της περίπτωσης 1, για τη μετατροπή των διπλών ολοκληρωμάτων σε ολοκληρώματα επάνω στην πρότυπη επανάλυση S_0^2 , και εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $\zeta = z - r\Lambda$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-n} \left\{ c_n^{2+} \int_{h-d}^{h-d+w} \exp\left[g_{2,n}(x-h+d-\frac{w}{2})\right] \exp\left[\pm g_{2,m}(x-h+d-\frac{w}{2})\right] dx \right. \\ \left. + c_n^{2-} \int_{h-d}^{h-d+w} \exp\left[-g_{2,n}(x-h+d-\frac{w}{2})\right] \exp\left[\pm g_{2,m}(x-h+d-\frac{w}{2})\right] dx \right\} = \\ \frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-p} J_{p-n} \left\{ c_n^{1+} \int_{h-d}^{h-d+w} Q_{np}^{1+}(x) \exp\left[\pm g_{2,m}(x-h+d-\frac{w}{2})\right] dx \right. \\ \left. + c_n^{1-} \int_{h-d}^{h-d+w} Q_{np}^{1-}(x) \exp\left[\pm g_{2,m}(x-h+d-\frac{w}{2})\right] dx + c_n^{2+} \int_{h-d}^{h-d+w} Q_{np}^{2+}(x) \exp\left[\pm g_{2,m}(x-h+d-\frac{w}{2})\right] dx \right. \\ \left. + c_n^{2-} \int_{h-d}^{h-d+w} Q_{np}^{2-}(x) \exp\left[\pm g_{2,m}(x-h+d-\frac{w}{2})\right] dx \right\} \end{aligned} \quad (3.85)$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, τα οποία εμφανίζονται στην (3.85), θεωρούμε τις μιγαδικές συναρτήσεις $K_1^{\pm\pm}$, $Q^{21\pm\pm}$ και $Q^{22\pm\pm}$, οι οποίες ορίζονται από τους τύπους

$$K_{1mn}^{\pm\pm} = \int_{h-d}^{h-d+w} \exp\left[\pm g_{2,m}(x-h+d-\frac{w}{2})\right] \exp\left[\pm g_{2,n}(x-h+d-\frac{w}{2})\right] dx \quad (m,n \in \mathbb{Z}) \quad (3.86)$$

$$Q_{mnp}^{2i\pm\pm} = \frac{1}{2} \int_{h-d}^{h-d+w} \exp\left[\pm g_{2,m}(x-h+d-\frac{w}{2})\right] Q_{np}^{i\pm}(x) dx \quad (i=1,2) \quad (m,n,p \in \mathbb{Z}) \quad (3.87)$$

όπου ο πρώτος εκθέτης \pm στα στοιχεία $K_{lmn}^{\pm\pm}$ και $Q_{mnp}^{2i\pm\pm}$ αντιστοιχεί στους όρους $\exp[\pm g_{2,m}(x-h+d-\frac{w}{2})]$ και ο δεύτερος εκθέτης στους όρους $\exp[\pm g_{2,n}(x-h+d-\frac{w}{2})]$ και $Q_{np}^{i\pm}$. Με τη βοήθεια των (3.77) και (3.86) επαληθεύεται εύκολα ότι ισχύει

$$K_{lmn}^{\pm\pm} = K_{mn}^{\pm\pm}$$

Εξάλλου, συνδυάζοντας τις (3.68) με τις (3.87), ευρίσκουμε

$$Q_{mnp}^{21\pm\pm} = -\frac{1}{(g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2)} H_{mnp}^{21\pm\pm} \quad (3.88)$$

$$Q_{mnp}^{22\pm\pm} = -\frac{1}{(g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2)} K_{mn}^{\pm\pm} + \frac{1}{(g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2)} (R_{mnp}^{2\pm\pm} + H_{mnp}^{22\pm\pm}) \quad (3.89)$$

όπου

$$R_{mnp}^{2\pm\pm} = \frac{P_o^3(g_{0,p}, g_{1,p}, d) P_e^3(g_{0,p}, g_{1,p}, d)}{2g_{1,p} [P_o^2(g_{0,p}, g_{1,p}, d) P_e^2(g_{0,p}, g_{1,p}, d) - K^2(g_{0,p}, g_{1,p}, d) \varepsilon^2] (g_{2m}^2 - g_{1p}^2)} \cdot$$

$$\left\{ e^{\frac{(\pm g_{2m} \pm g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\pm g_{2m}, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} - \frac{P_o(\pm g_{2m}, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{2n}, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2n}, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right.$$

$$- e^{\frac{(\pm g_{2m} \mp g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\pm g_{2m}, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2m}, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{2n}, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} - \frac{P_o(\pm g_{2n}, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right]$$

$$- e^{\frac{(\mp g_{2m} \pm g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\pm g_{2m}, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} - \frac{P_o(\pm g_{2m}, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{2n}, g_{1,p}, d-w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2n}, g_{1,p}, d-w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right]$$

$$\left. + e^{\frac{(\mp g_{2m} \mp g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\pm g_{2m}, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2m}, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{2n}, g_{1,p}, d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} - \frac{P_o(\pm g_{2n}, g_{1,p}, d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, d)} \right] \right\} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned}
H_{mnp}^{21\pm\pm} &= \frac{g_{0p}P_o^2(g_{0p}, g_{1p}, d)P_e^2(g_{0p}, g_{1p}, d)}{2\left[P_o^2(g_{0p}, g_{1p}, d)P_e^2(g_{0p}, g_{1p}, d) - K^2(g_{0p}, g_{1p}, d)\varepsilon^2\right]}(g_{2m}^2 - g_{1p}^2)\varepsilon \cdot \\
&\left\{ e^{\frac{(\pm g_{2m} \pm g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\pm g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp g_{2n}, g_{1p}, d)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp g_{2n}, g_{1p}, d)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \right. \\
&- e^{\frac{(\pm g_{2m} \mp g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\pm g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \\
&- e^{\frac{(\mp g_{2m} \pm g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\pm g_{2m}, g_{1p}, d)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2m}, g_{1p}, d)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp g_{2n}, g_{1p}, d)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp g_{2n}, g_{1p}, d)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \\
&\left. + e^{\frac{(\mp g_{2m} \mp g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\pm g_{2m}, g_{1p}, d)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2m}, g_{1p}, d)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \right\} \quad (3.91)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{mnp}^{22\pm\pm} &= \frac{K(g_{0p}, g_{1p}, d)P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)Q_o(g_{0p}, g_{1p}, d)Q_e(g_{0p}, g_{1p}, d)}{2g_{1p}\left[P_o^2(g_{0p}, g_{1p}, d)P_e^2(g_{0p}, g_{1p}, d) - K^2(g_{0p}, g_{1p}, d)\varepsilon^2\right]}(g_{2m}^2 - g_{1p}^2)\varepsilon^2 \cdot \\
&\left\{ e^{\frac{(\pm g_{2m} \pm g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\pm g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{Q_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{Q_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \right. \\
&- e^{\frac{(\pm g_{2m} \mp g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\pm g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{2n}, g_{1p}, d)}{Q_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2n}, g_{1p}, d)}{Q_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \\
&- e^{\frac{(\mp g_{2m} \pm g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\pm g_{2m}, g_{1p}, d)}{Q_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2m}, g_{1p}, d)}{Q_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \\
&\left. + e^{\frac{(\mp g_{2m} \mp g_{2n})w}{2}} \left[\frac{P_e(\pm g_{2m}, g_{1p}, d)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2m}, g_{1p}, d)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{2n}, g_{1p}, d)}{Q_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\pm g_{2n}, g_{1p}, d)}{Q_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \right\} \quad (3.92)
\end{aligned}$$

Τέλος, συνδυάζοντας την (3.85) με τους ορισμούς (3.86) και (3.87), ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-n} \left(K_{mn}^{\pm\pm} c_n^{2+} + K_{mn}^{\pm\mp} c_n^{2-} \right) = k_0^2 (n_2^2 - n_1^2) \\
&\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-p} J_{p-n} \left(c_n^{1+} Q_{mnp}^{21\pm+} + c_n^{1-} Q_{mnp}^{21\pm-} + c_n^{2+} Q_{mnp}^{22\pm+} + c_n^{2-} Q_{mnp}^{22\pm-} \right), \quad m \in \mathbb{Z}
\end{aligned} \quad (3.93)$$

Διαμόρφωση και επίλυση του γραμμικού συστήματος της μεθόδου

Οι (3.83) και (3.93) αποτελούν ένα άπειρο τετραγωνικό ομογενές σύστημα συζευγμένων αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τους αγνώστους συντελεστές $c_n^{1\pm}, c_n^{2\pm}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Για την αριθμητική επίλυση του απείρου συστήματος θεωρούμε το truncated ομογενές γραμμικό σύστημα $8N + 4$ εξισώσεων ως προς τους $8N + 4$ αγνώστους $c_n^{1\pm}, c_n^{2\pm}$ ($n = -N, \dots, N$), το οποίο προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη τις χωρικές αρμονικές συναρτήσεις στα αναπτύγματα (3.60) και

τις δοκιμαστικές συναρτήσεις στα εσωτερικά γινόμενα με μέγιστη απόλυτη τάξη N . Το εν λόγω truncated σύστημα γράφεται υπό μορφή block πινάκων ως εξής

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{++} & \mathbf{A}_{11}^{+-} & \mathbf{A}_{12}^{++} & \mathbf{A}_{12}^{+-} \\ \mathbf{A}_{11}^{-+} & \mathbf{A}_{11}^{--} & \mathbf{A}_{12}^{-+} & \mathbf{A}_{12}^{--} \\ \mathbf{A}_{21}^{++} & \mathbf{A}_{21}^{+-} & \mathbf{A}_{22}^{++} & \mathbf{A}_{22}^{+-} \\ \mathbf{A}_{21}^{-+} & \mathbf{A}_{21}^{--} & \mathbf{A}_{22}^{-+} & \mathbf{A}_{22}^{--} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{1+} \\ \mathbf{c}^{1-} \\ \mathbf{c}^{2+} \\ \mathbf{c}^{2-} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.94)$$

όπου $\mathbf{A}_{ij}^{\pm\pm}$ ($i, j = 1, 2$) είναι τετραγωνικοί $(2N+1) \times (2N+1)$ πίνακες με στοιχεία

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{11}^{\pm\pm})_{mn} &= - \left\{ J_{m-n} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2} J_{m-p} J_{p-n} \right] \right\} K_{mn}^{\pm\pm} \\ &\quad + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2} J_{m-p} J_{p-n} (R_{mnp}^{1\pm\pm} + H_{mnp}^{11\pm\pm}) \right] \\ (\mathbf{A}_{12}^{\pm\pm})_{mn} &= - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2} J_{m-p} J_{p-n} H_{mnp}^{12\pm\pm} \right] \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{21}^{\pm\pm})_{mn} &= - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2} J_{m-p} J_{p-n} H_{mnp}^{21\pm\pm} \right] \\ (\mathbf{A}_{22}^{\pm\pm})_{mn} &= - \left\{ J_{m-n} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2} J_{m-p} J_{p-n} \right] \right\} K_{mn}^{\pm\pm} \\ &\quad + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2} J_{m-p} J_{p-n} (R_{mnp}^{2\pm\pm} + H_{mnp}^{22\pm\pm}) \right] \end{aligned}$$

και $\mathbf{c}^{1\pm}, \mathbf{c}^{2\pm}$ είναι τα $(2N+1) \times 1$ διανύσματα των συντελεστών $c_n^{1\pm}, c_n^{2\pm}$. Σημειώνουμε ότι τα στοιχεία $H_{mnp}^{ij\pm\pm}$ αντιπροσωπεύουν τη σύζευξη μεταξύ των δύο κυματοδηγών και προσεγγίζουν το 0 καθώς $h \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \rightarrow 0$), οδηγώντας σε αποσύζευξη (decoupling) του γραμμικού συστήματος (3.94).

Όπως διαπιστώνεται εύκολα με τη βοήθεια των τύπων (3.80)-(3.82) και (3.90)-(3.92), υφίστανται οι εξής συμμετρίες

$$K_{mn}^{\pm\pm} = K_{mn}^{\mp\mp}, \quad R_{mnp}^{1\pm\pm} = R_{mnp}^{2\mp\mp}, \quad H_{mnp}^{11\pm\pm} = H_{mnp}^{22\mp\mp}, \quad H_{mnp}^{12\pm\pm} = H_{mnp}^{21\mp\mp} \quad (3.96)$$

Εξάλλου, συνδυάζοντας τις (3.95) και (3.96), προκύπτουν επίσης οι συμμετρίες

$$\mathbf{A}_{11}^{\pm\pm} = \mathbf{A}_{22}^{\mp\mp}, \quad \mathbf{A}_{12}^{\pm\pm} = \mathbf{A}_{21}^{\mp\mp} \quad (3.97)$$

βάσει των οποίων το γραμμικό σύστημα (3.94) ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{++} & \mathbf{A}_{11}^{+-} & \mathbf{A}_{12}^{++} & \mathbf{A}_{12}^{+-} \\ \mathbf{A}_{11}^{-+} & \mathbf{A}_{11}^{--} & \mathbf{A}_{12}^{-+} & \mathbf{A}_{12}^{--} \\ \mathbf{A}_{12}^{--} & \mathbf{A}_{12}^{-+} & \mathbf{A}_{11}^{--} & \mathbf{A}_{11}^{-+} \\ \mathbf{A}_{12}^{+-} & \mathbf{A}_{12}^{++} & \mathbf{A}_{11}^{+-} & \mathbf{A}_{11}^{++} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{1+} \\ \mathbf{c}^{1-} \\ \mathbf{c}^{2+} \\ \mathbf{c}^{2-} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.98)$$

Οι συμμετρίες (3.97) απλουστεύουν ουσιαστικά την υπολογιστική πολυπλοκότητα του προβλήματος, καθώς απαιτείται πλέον μόνον ο υπολογισμός των 8 από τους 16 υποπίνακες, οι οποίοι απαρτίζουν τον πίνακα του γραμμικού συστήματος (3.94). Η απλούστευση αυτή είναι πολύ σημαντική, αφού το τυχόν στοιχείο του κάθε υποπίνακα εκφράζεται ως άθροισμα σειράς ως προς τη μεταβλητή p , και άρα ο αριθμός των αθροισμάτων των σειρών, που χρειάζεται να υπολογίσουμε αριθμητικά, είναι $8 \cdot (2N+1)$ αντί $16 \cdot (2N+1)$.

Οι ρυθμοί, που είναι δυνατόν να κυματοδηγηθούν, αντιστοιχούν στις μη τετριμμένες λύσεις της (3.98), δηλαδή στις τιμές της παραμέτρου γ για τις οποίες ο αντίστοιχος πίνακας του γραμμικού συστήματος είναι ιδιάζων. Οι μη τετριμμένες λύσεις της (3.98) μπορούν στη συνέχεια να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της κατανομής του ηλεκτρικού πεδίου των κυματοδηγούμενων ρυθμών μέσω της βασικής ολοκληρωτικής αναπαράστασης (3.52).

3.6. Ειδικές περιπτώσεις συζευκτών γραμμοσειρών

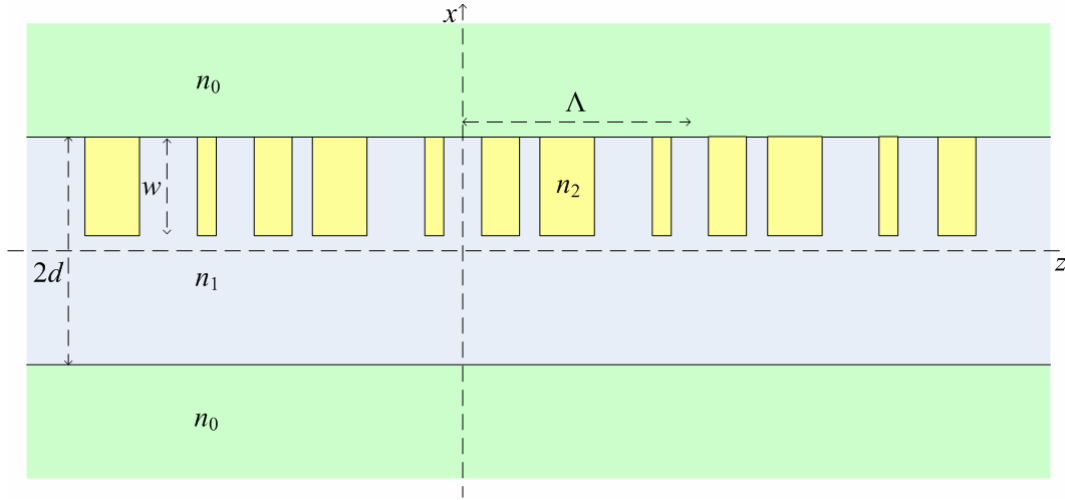
Μελέτες της κυματοδήγησης στις περιπτώσεις

- 1) ενός απομονωμένου κυματοδηγού παρουσία γραμμοσειρών
- 2) συζεύκτη παρουσία γραμμοσειρών στον άνω κυματοδηγό
- 3) συζεύκτη παρουσία γραμμοσειρών στον κάτω κυματοδηγό

εμφανίζονται αυτοτελώς στη βιβλιογραφία σε κάθε περίπτωση (βλ. [75] και [76]). Στην εργασία αυτή οι τρεις παραπάνω περιπτώσεις μελετώνται ενοποιημένα ως ειδικές περιπτώσεις της γενικής μεθόδου, η οποία αναπτύσσεται στις παραγράφους 3.3-3.5.

3.6.1. Κυματοδήγηση σε έναν απομονωμένο κυματοδηγό παρουσία γραμμοσειρών

Η διάταξη της περιπτώσεως αυτής απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 3.4 Απομονωμένος κυματοδηγός παρουσία γραμμοσειρών

Από τη γενική ολοκληρωτική αναπαράσταση (3.51) προκύπτει στην προκειμένη περίπτωση η ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$\Psi(x, z) = k_0^2 (n_2^2 - n_1^2) \iint_{S_d} G(x, z; x', z') \Psi(x', z') dx' dz', \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2$$

του παράγοντα ηλεκτρικού πεδίου Ψ , όπου G είναι η συνάρτηση Green της μίας απομονωμένης διηλεκτρικής πλάκας, η οποία δίνεται από την (3.34), και S_d είναι η συνολική επιφάνεια των γραμμοσειρών.

Εξάλλου, το αντίστοιχο truncated γραμμικό σύστημα είναι το $(4N+2) \times (4N+2)$ ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{++} & \mathbf{A}^{+-} \\ \mathbf{A}^{-+} & \mathbf{A}^{--} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.99)$$

όπου \mathbf{c}^\pm είναι τα $(2N+1) \times 1$ διανύσματα με συνιστώσες τους αγνώστους c_n^\pm ($n = -N, \dots, N$), οι οποίοι εμφανίζονται στα αναπτύγματα Fourier (3.60), και $\mathbf{A}^{\pm\pm}$ οι $(2N+1) \times (2N+1)$ πίνακες με στοιχεία

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^{\pm\pm})_{mn} = & - \left\{ J_{m-n} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_0^2 (n_2^2 - n_1^2)}{(g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2)} J_{m-p} J_{p-n} \right] \right\} K_{mn}^{\pm\pm} \\ & + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_0^2 (n_2^2 - n_1^2)}{(g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2)} J_{m-p} J_{p-n} R_{mp}^{\pm\pm} \right] \end{aligned}$$

όπου

$$R_{mnp}^{\pm\pm} = \frac{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d) P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)}{2g_{1p} (g_{2m}^2 - g_{1p}^2)}$$

$$\left\{ e^{(\pm g_{2m} \pm g_{2n}) \frac{w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp g_{2m}, g_{1p}, d)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp g_{2m}, g_{1p}, d)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp g_{2n}, g_{1p}, d)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} - \frac{P_o(\mp g_{2n}, g_{1p}, d)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \right.$$

$$- e^{(\pm g_{2m} \mp g_{2n}) \frac{w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp g_{2m}, g_{1p}, d)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} - \frac{P_o(\mp g_{2m}, g_{1p}, d)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right]$$

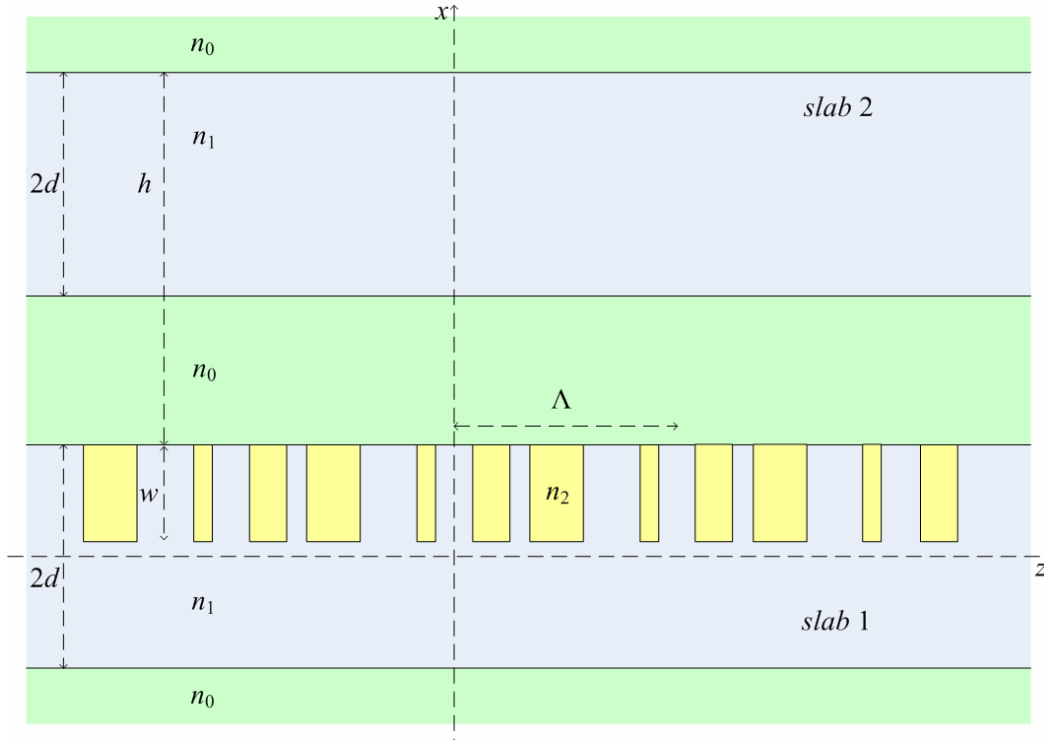
$$- e^{(\mp g_{2m} \pm g_{2n}) \frac{w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp g_{2n}, g_{1p}, d)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} - \frac{P_o(\mp g_{2n}, g_{1p}, d)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right]$$

$$\left. + e^{(\mp g_{2m} \mp g_{2n}) \frac{w}{2}} \left[\frac{P_e(\mp g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} - \frac{P_o(\mp g_{2m}, g_{1p}, d-w)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \left[\frac{P_e(\mp g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_e(g_{0p}, g_{1p}, d)} + \frac{P_o(\mp g_{2n}, g_{1p}, d-w)}{P_o(g_{0p}, g_{1p}, d)} \right] \right\}$$

Δηλαδή, τα blocks $A^{\pm\pm}$ του πίνακα του γραμμικού συστήματος (3.99) προκύπτουν από τα blocks $A_{11}^{\pm\pm}$ του πίνακα του γραμμικού συστήματος (3.98) για $\varepsilon=0$.

3.6.2. Κυματοδήγηση σε συζεύκτη δύο παραλλήλων πλακών παρουσία γραμμοσειρών στην κάτω πλάκα

Η διάταξη του εν λόγω συζεύκτη απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 3.5 Συζεύκτης δύο παραλλήλων πλακών παρουσία γραμμοσειρών στην κάτω πλάκα

Στην προκειμένη περίπτωση η γενική ολοκληρωτική αναπαράσταση (3.51) εξειδικεύεται στην ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$\Psi(x, z) = k_0^2 (n_2^2 - n_1^2) \iint_{S_d^1} G_1(x, z; x', z') \Psi(x', z') dx' dz', \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2$$

του παράγοντα ηλεκτρικού πεδίου Ψ , όπου G_1 είναι η συνάρτηση Green των δύο συζευγμένων πλακών, η οποία δίνεται από την (3.30) και αντιστοιχεί σε διέγερση εντός της πλάκας 1, και S_d^1 είναι η συνολική επιφάνεια των γραμμοσειρών.

Εξάλλου, το αντίστοιχο truncated γραμμικό σύστημα είναι το $(4N+2) \times (4N+2)$ ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{++} & \mathbf{A}^{+-} \\ \mathbf{A}^{-+} & \mathbf{A}^{--} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.100)$$

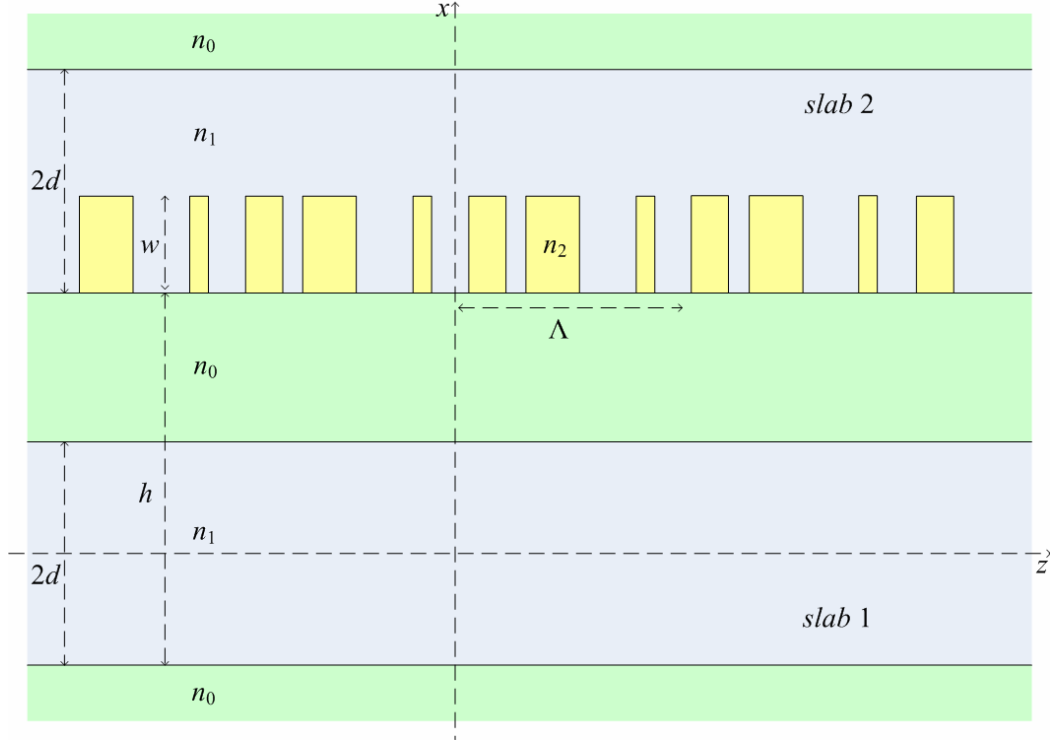
όπου \mathbf{c}^\pm είναι τα $(2N+1) \times 1$ διανύσματα με συνιστώσες τους αγνώστους c_n^\pm ($n = -N, \dots, N$), οι οποίοι εμφανίζονται στα αναπτύγματα Fourier (3.60), και $\mathbf{A}^{\pm\pm}$ οι $(2N+1) \times (2N+1)$ πίνακες με στοιχεία

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^{\pm\pm})_{mn} = & - \left\{ J_{m-n} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_0^2 (n_2^2 - n_1^2)}{(g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2)} J_{m-p} J_{p-n} \right] \right\} K_{mn}^{\pm\pm} \\ & + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_0^2 (n_2^2 - n_1^2)}{(g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2)} J_{m-p} J_{p-n} (R_{mnp}^{1\pm\pm} + H_{mnp}^{11\pm\pm}) \right] \end{aligned}$$

Δηλαδή, τα blocks $\mathbf{A}^{\pm\pm}$ του πίνακα του γραμμικού συστήματος (3.100) είναι τα blocks $\mathbf{A}_{11}^{\pm\pm}$ του πίνακα του γραμμικού συστήματος (3.95).

3.6.3. Κυματοδότηση σε συζεύκτη δύο παραλλήλων πλακών παρουσία γραμμοσειρών στην άνω πλάκα

Η διάταξη του εν λόγω συζεύκτη απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 3.6 Συζεύκτης δύο παραλλήλων πλακών παρουσία γραμμοσειρών στην άνω πλάκα

Στην προκειμένη περίπτωση η γενική ολοκληρωτική αναπαράσταση (3.51) ανάγεται στην ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$\Psi(x, z) = k_0^2 (n_2^2 - n_1^2) \iint_{S_d^2} G_2(x, z; x', z') \Psi(x', z') dx' dz', \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2$$

όπου G_2 είναι η συνάρτηση Green των δύο συζευγμένων πλακών, η οποία αντιστοιχεί σε διέγερση εντός της πλάκας 2 και δίνεται από την (3.38).

Εξάλλου, το αντίστοιχο truncated γραμμικό σύστημα είναι το

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{++} & \mathbf{A}^{+-} \\ \mathbf{A}^{-+} & \mathbf{A}^{--} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.101)$$

όπου

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^{\pm\pm})_{mn} = & - \left\{ J_{m-n} + \left[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{k_0^2 (n_2^2 - n_1^2)}{(g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2)} J_{m-p} J_{p-n} \right] \right\} K_{mn}^{\pm\pm} \\ & + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_0^2 (n_2^2 - n_1^2)}{(g_{2,n}^2 - g_{1,p}^2)} J_{m-p} J_{p-n} (R_{mnp}^{2\pm\pm} + H_{mnp}^{22\pm\pm}) \right] \end{aligned}$$

Δηλαδή, τα blocks $\mathbf{A}^{\pm\pm}$ του πίνακα του γραμμικού συστήματος (3.101) είναι τα blocks $\mathbf{A}_{22}^{\pm\pm}$ του πίνακα του γραμμικού συστήματος (3.98).

3.7. Αριθμητική υλοποίηση της μεθόδου

Το ουσιαστικό τμήμα της αριθμητικής υλοποίησης μιας μεθόδου Galerkin συνολικού χώρου συνίσταται στον ακριβή και αποδοτικό προσδιορισμό των ριζών της ορίζουσας του πίνακα (3.98) μέσω μίας ρουτίνας εύρεσης ριζών μη γραμμικών εξισώσεων. Στην προτεινόμενη μέθοδο εφαρμόζεται η επαναληπτική μιγαδική μέθοδος Müller. Ο προσδιορισμός κατάλληλων αρχικών σημείων αυτής της μεθόδου επιτυγχάνεται με τη γραφική διαδικασία, η οποία αναλύεται παρακάτω.

Όπως εξηγήσαμε στο εδάφιο 2.1.2, οι κυματοδηγούμενοι βασικοί ρυθμοί του συμμετρικού συζεύκτη χωρίς γραμμοσειρές, ο οποίος απεικονίζεται στο Σχήμα 3.2, έχουν σχεδόν ίσες καθαρά φανταστικές σταθερές διάδοσης jN_e και jN_o . Υπό την παρουσία των γραμμοσειρών οι δύο βασικοί ρυθμοί εξελίσσονται σε δύο διαφορετικούς ρυθμούς γραμμοσειρών με μιγαδικές σταθερές διάδοσης

$$\gamma_e = \alpha_e + j\beta_e \quad , \quad \gamma_o = \alpha_o + j\beta_o$$

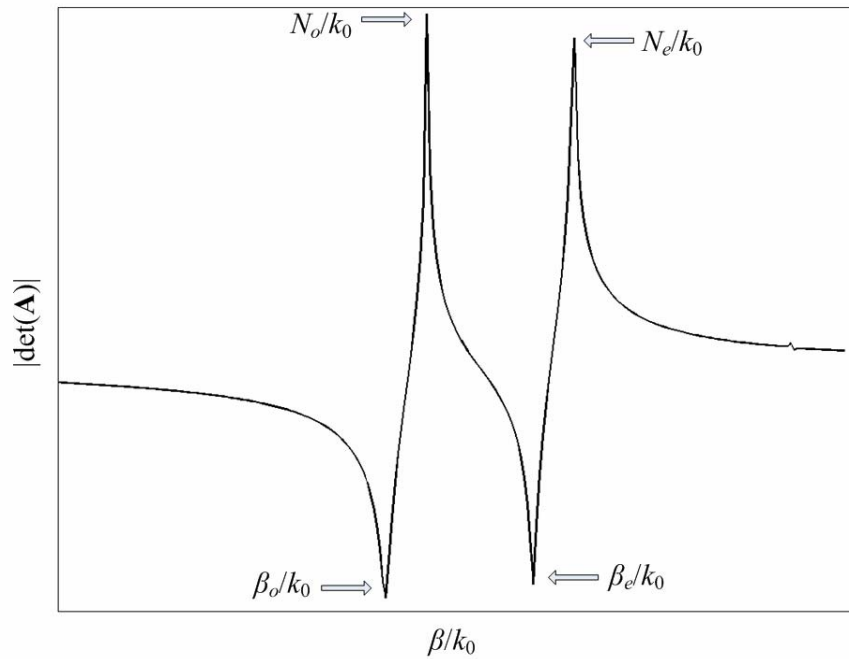
Εξάλλου, στην πράξη χρησιμοποιούνται συνήθως γραμμοσειρές, των οποίων οι σταθερές β_e και β_o προσεγγίζουν τις N_e και N_o , ενώ οι τιμές των $|\alpha_e/k_0|$ και $|\alpha_o/k_0|$ είναι της τάξης του 10^{-3} [25].

Οι κανονικοποιημένες σταθερές διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών του συμμετρικού συζεύκτη είναι οι ρίζες της ορίζουσας του γραμμικού συστήματος (3.98) και υπολογίζονται εδώ με εφαρμογή της επαναληπτικής μιγαδικής μεθόδου Müller.

Ο προσδιορισμός κατάλληλων αρχικών σημείων (initial points) επιτυγχάνεται με την ακόλουθη γραφική διαδικασία: Αρχικά, θεωρούμε καθαρά φανταστικές σταθερές διάδοσης $\gamma=j\beta$ με

$$n_0 \leq \beta / k_0 \leq n_1$$

και σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση του μέτρου της ορίζουσας ως προς το κανονικοποιημένο φανταστικό μέρος β/k_0 . Ένα τυπικό (ποιοτικό) διάγραμμα για μία ποικιλία δεικτών διάθλασης και γεωμετρικών χαρακτηριστικών των γραμμοσειρών δίνεται στο Σχήμα 3.7.



Σχήμα 3.7 Τυπική καμπύλη του μέτρου της ορίζουσας ως προς το κανονικοποιημένο φανταστικό μέρος β/k_0

Το διάγραμμα έχει δύο τοπικά μέγιστα (συντονισμούς) στα φανταστικά μέρη N_e/k_0 και N_o/k_0 των σταθερών διάδοσης των ρυθμών στην ομογενή διάταξη των συζευγμένων κυματοδηγών και δύο τοπικά ελάχιστα στα φανταστικά μέρη β_e/k_0 και β_o/k_0 των σταθερών διάδοσης των κυματοδηγούμενων ρυθμών γραμμοσειρών. Οι δύο θέσεις συντονισμού jN_e/k_0 και jN_o/k_0 είναι οι ρίζες της συνάρτησης $P_o^2 P_e^2 - K^2 \varepsilon^2$, που εμφανίζεται ως παρανομαστής στην (3.31). Στη συνέχεια, ως αρχικά σημεία της μιγαδικής μεθόδου Müller μπορούμε να θεωρήσουμε τις ήδη γραφικά προσδιορισμένες τιμές των β_e/k_0 και β_o/k_0 . Έτσι, εφαρμόζοντας τη μέθοδο Müller προσδιορίζουμε με ακρίβεια τις μιγαδικές σταθερές διάδοσης γ_e/k_0 και γ_o/k_0 των ρυθμών γραμμοσειρών. Στην περίπτωση που ο συζεύκτης γραμμοσειρών δεν διαφέρει σημαντικά από την ομογενή διάταξη των συζευγμένων κυματοδηγών, οι αποστάσεις $(\beta_e - N_e)/k_0$ και $(\beta_o - N_o)/k_0$ είναι πολύ μικρές. Συνεπώς, για να προσδιορίσουμε σωστά τα αρχικά σημεία β_e/k_0 και β_o/k_0 , πρέπει να θεωρήσουμε μία πυκνή διαμέριση κοντά στις γνωστές τιμές N_e/k_0 και N_o/k_0 .

3.8. Έλεγχος σύγκλισης, αποδοτικότητα και εγκυρότητα της μεθόδου

Ο έλεγχος σύγκλισης συνίσταται στην καταγραφή των σχετικών διαφορών μεταξύ των διαδοχικών προσεγγίσεων των σταθερών διάδοσης, οι οποίες προκύπτουν από την εφαρμογή της

προτεινομένης μεθόδου, η οποία αναπτύχθηκε στις παραγράφους 3.3-3.6. Υψηλή αποδοτικότητα της μεθόδου προκύπτει από την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων του ελέγχου σύγκλισης, της επιτυγχανομένης ακρίβειας και του απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου και τη συσχέτισή τους με αντίστοιχα που έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία. Εξάλλου, η εγκυρότητα της μεθόδου επιβεβαιώνεται μετά από σύγκριση ορισμένων αριθμητικών αποτελεσμάτων της με αντίστοιχα γνωστά αποτελέσματα άλλων ερευνητών.

Ακριβέστερα, θεωρούμε έναν απομονωμένο κυματοδηγό γραμμοσειρών (isolated grating slab) (βλ. Σχήμα 3.1 υπό την απουσία του κυματοδηγού 2) με τις σταθερές τιμές του [75]: $n_0=1$, $n_1=2.236$, $k_0d=2$, $k_0w=2$, $k_0\Lambda=4$, $q=1$, $d_1=l_1=\Lambda/2$. Εφαρμόζοντας τις τεχνικές των παραγράφων 3.3-3.6, παρατηρούμε ότι η κανονικοποιημένη σταθερά διάδοσης του απομονωμένου κυματοδηγού γραμμοσειρών είναι η ρίζα της ορίζουσας του πίνακα του γραμμικού συστήματος (3.99). Σύμφωνα με τα αναφερόμενα στην παράγραφο 3.7 ο ακριβής υπολογισμός των ριζών της ορίζουσας επιτυγχάνεται με εφαρμογή της μιγαδικής μεθόδου Müller. Τα πρότυπα σύγκλισης της σταθεράς διάδοσης, τα οποία προκύπτουν με εφαρμογή της παρούσας μεθόδου και εκείνης της εργασίας [75] (χρησιμοποιώντας ανάλυση γραμμών μεταφοράς) παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1. Η σχετική διαφορά ανάμεσα στα τελικά πρότυπα, η οποία επιτυγχάνεται με τις δύο μεθόδους είναι μικρότερη από 2% και συνεπώς η συμφωνία μεταξύ των μεθόδων θεωρείται ικανοποιητική.

Επιπροσθέτως, υψηλή ακρίβεια (της τάξης 10^{-6}) της παρούσας μεθόδου επιτυγχάνεται θεωρώντας μόνο $N=13$ συντελεστές ανάπτυξης στην (3.60). Εξάλλου, οι μέθοδοι που βασίζονται στη θεωρία Floquet-Bloch [25] απαιτούν για επαρκή σύγκλιση 12 χωρικές αρμονικές. Όμως, ο αριθμός όρων $N=13$ είναι πολύ μικρότερος από τον αντίστοιχο που απαιτείται στις τεχνικές ολοκληρωτικών εξισώσεων (βλ. [38] και [39]), οι οποίες χρησιμοποιούν συναρτήσεις βάσεις μερικού χώρου (sub domain basis functions) και την μέθοδο συνοριακών στοιχείων (boundary element method), όπου 500 συνοριακά στοιχεία απαιτούνται για σύγκλιση της σταθεράς διάδοσης σε τάξη 10^{-4} . Αυτή η αποδοτικότητα της παρούσας τεχνικής οφείλεται στο ότι ο άγνωστος παράγοντας ηλεκτρικού πεδίου και οι όροι ανάπτυξης συνολικού χώρου πληρούν τους ίδιους φυσικούς νόμους. Επίσης, αφού η παρούσα μέθοδος επιτρέπει όλοι οι υπολογισμοί να γίνουν αναλυτικά, είναι πολύ αποδοτική σε όρους υπολογιστικού χρόνου (CPU time). Ακριβέστερα, 0.5 seconds (Pentium IV, 2.80 GHz με 1 GByte RAM) επαρκούν για τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα του γραμμικού συστήματος.

N	Εργασία [75]		Παρούσα μέθοδος	
	β/k_0	$(\beta_N - \beta_{N-1})/\beta_{N-1}^a$	β/k_0	$(\beta_N - \beta_{N-1})/\beta_{N-1}^a$
1	2.185		2.0091	
2			2.0177	4.28×10^{-3}
3	2.151		2.0862	3.39×10^{-2}
4	2.169	8.40×10^{-3}	2.0859	-1.44×10^{-4}
5			2.0858	-4.79×10^{-5}
6	2.151		2.0857	-4.8×10^{-5}
7	2.129	-1.02×10^{-2}	2.0857	1.15×10^{-5}
8	2.134	2.30×10^{-3}	2.0857	9×10^{-6}

^a Σχετική διαφορά μεταξύ των λύσεων για διαδοχικές τιμές του N .

Πίνακας 3.1 Πρότυπο σύγκλισης της κανονικοποιημένης σταθεράς διάδοσης του απομονωμένου κυματοδηγού γραμμοσειρών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΜΕ ΓΡΑΜΜΟΣΕΙΡΕΣ

Στο Κεφάλαιο 3 η διάταξη του συζεύκτη γραμμοσειρών αποτελείται από δύο παράλληλες διηλεκτρικές πλάκες (slab waveguides) με τα ίδια φυσικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά και ο χώρος εκτός των πλακών έχει σταθερό δείκτη διάθλασης (συμμετρικός συζεύκτης). Στο παρόν Κεφάλαιο μελετώνται τα φαινόμενα κυματοδήγησης σε ασυμμετρικό συζεύκτη γραμμοσειρών, ο οποίος αποτελείται από δύο κυματοδηγούς με διαφορετικά φυσικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά, ενώ τα στρώματα εκτός των κυματοδηγών έχουν διαφορετικούς δείκτες διάθλασης. Η χρησιμοποιούμενη γενική μεθοδολογία συνίσταται στη εφαρμογή της Μεθόδου των Ροπών, η οποία οδηγεί σε ολοκληρωτική εξίσωση που επιλύεται με τη βοήθεια τεχνικών Galerkin συνολικού χώρου.

Ακριβέστερα, στην παράγραφο 4.1 περιγράφεται η γεωμετρία της διάταξης δύο συζευγμένων δισδιάστατων ασυμμετρικών πλακών με περιοδικά χαραγμένες γραμμοσειρές. Στην παράγραφο 4.2 επιτυγχάνεται αναλυτική έκφραση μέσω ολοκληρώματος Fourier της συνάρτησης Green του ομογενούς (χωρίς γραμμοσειρές) προβλήματος. Στην παράγραφο 4.3 αναπτύσσεται η γενική μεθοδολογία και στην παράγραφο 4.4 διερευνώνται ο έλεγχος σύγκλισης, η υψηλή αποδοτικότητα και η εγκυρότητα της μεθόδου.

4.1. Ασυμμετρικός συζεύκτης γραμμοσειρών

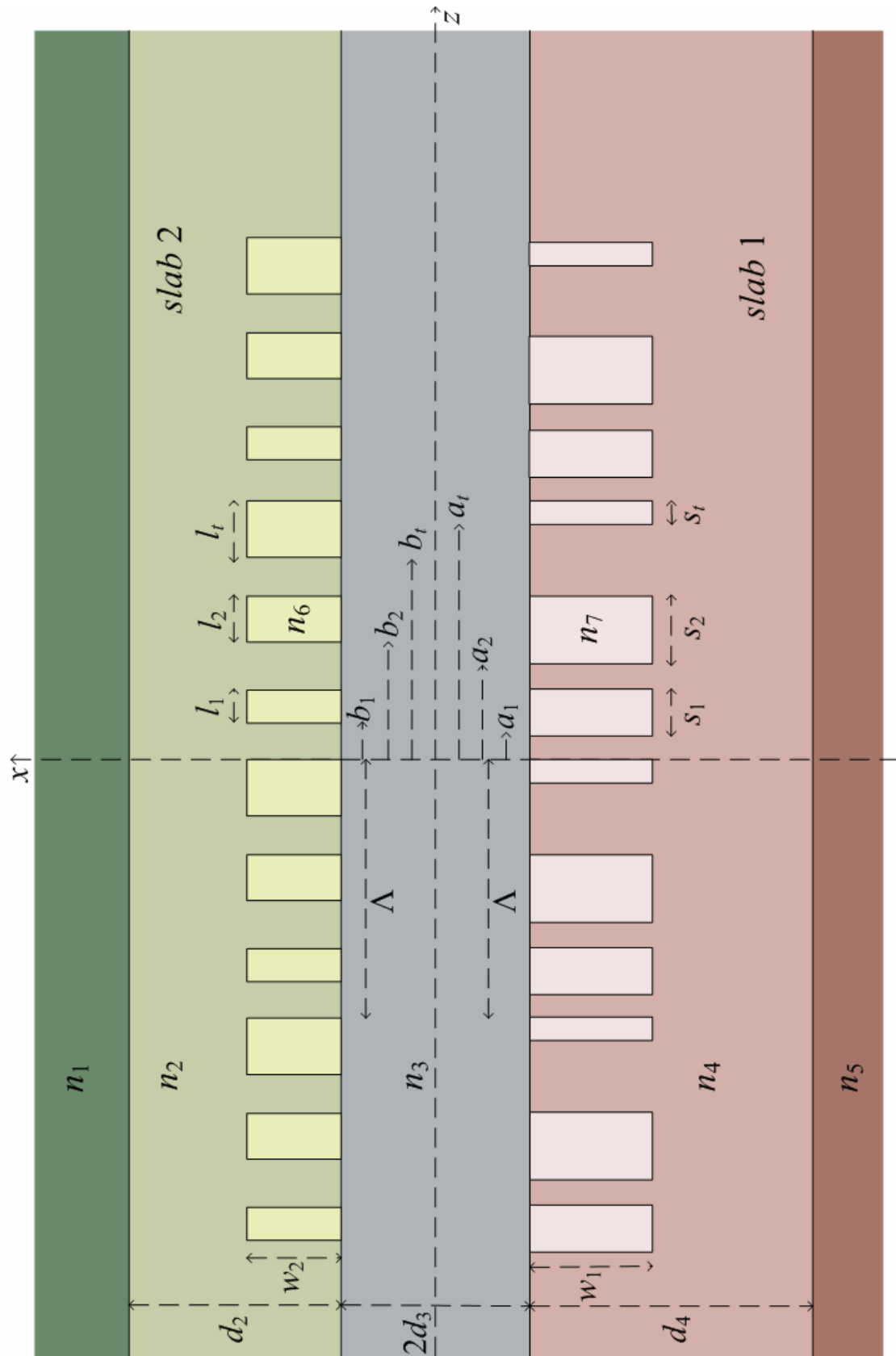
Η γεωμετρική διάταξη του ασυμμετρικού κατευθυντικού συζεύκτη γραμμοσειρών, η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1, αποτελείται από δύο ανόμοιες άπειρες επίπεδες και παράλληλες διηλεκτρικές πλάκες με δείκτες διάθλασης n_2 και n_4 , πάχη d_2 και d_4 και απόσταση μεταξύ τους $2d_3$. Εξάλλου, τα επίπεδα χωρία υπεράνω, μεταξύ και κάτω από τις πλάκες υποτίθενται ομογενή με δείκτες διάθλασης n_1 , n_3 και n_5 αντιστοίχως. Επιπλέον, κατά μήκος των πλακών έχουν χαραχθεί περιοδικά ορθογώνιες γραμμοσειρές με δείκτες διάθλασης n_6 και n_7 , πάχη w_2 και w_1 , μήκη l_i και s_i και αποστάσεις από τον x -άξονα b_i και a_i ($i=1, \dots, t$), οι οποίες αποτελούν μία Λ -περιοδική δομή κατά μήκος του άξονα κυματοδότησης z . Η όλη διάταξη έχει σταθερή μαγνητική διαπερατότητα $\mu=\mu_0$ και υποτίθεται ομοιόμορφη κατά μήκος του y -άξονα.

Έτσι, η κατανομή του δείκτη διάθλασης της διάταξης του Σχήματος 4.1 προσδιορίζεται από την περιοδική επέκταση ως προς το z της κλιμακωτής συνάρτησης $n(x,z)$, η οποία ορίζεται στο $(-\infty, +\infty) \times [0, \Lambda]$ ως εξής

$$n(x, z) = \begin{cases} n_1, & x > d_3 + d_2, & z \in [0, \Lambda] \\ n_2, & d_3 < x < d_3 + d_2, & z \notin [b_i, b_i + l_i] \\ n_6, & d_3 < x < d_3 + w_2, & z \in [b_i, b_i + l_i] \\ n_3, & -d_3 < x < d_3, & z \in [0, \Lambda] \\ n_7, & -d_3 - w_1 < x < -d_3, & z \in [a_i, a_i + s_i] \\ n_4, & -d_3 - d_4 < x < -d_3, & z \notin [a_i, a_i + s_i] \\ n_5, & x < -d_3 - d_4, & z \in [0, \Lambda] \end{cases} \quad (4.1)$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι στη βιβλιογραφία έχουν θεωρηθεί έως τώρα μόνο δυαδικές γραμμοσειρές (με ένα ορθογώνιο ανά επανάληψη) [8]-[29]. Στην παρούσα διατριβή το πλήθος t και οι γεωμετρικές διαστάσεις l_i , s_i των ορθογώνιων εντός κάθε επανάληψης των γραμμοσειρών μπορούν να επιλεγθούν αυθαίρετα.

Σε όλα τα επόμενα προϋποτίθεται και καταπιέζεται η χρονική αρμονική εξάρτηση $\exp(j\omega t)$ των πεδιακών μεγεθών.



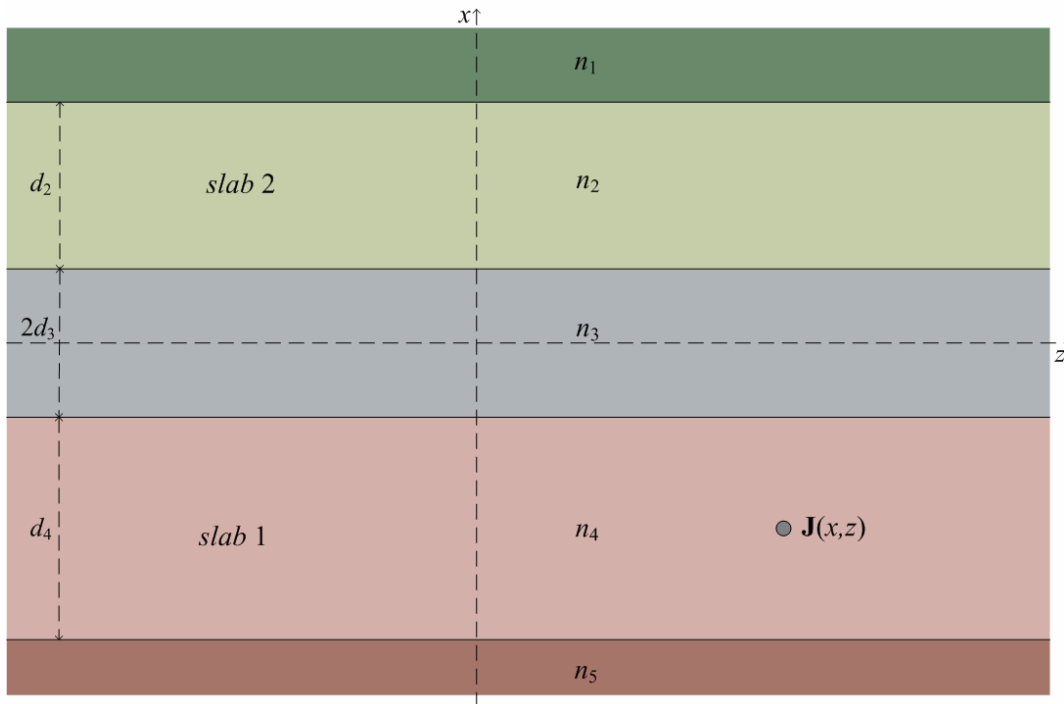
Σχήμα 4.1 Γεωμετρία του ασυμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών

4.2. Συνάρτηση Green της ομογενούς διάταξης

Η διερεύνηση των φαινομένων κυματοδηγησης TE^z πολωμένων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στη διάταξη του συζεύκτη του Σχήματος 4.1 με εφαρμογή της Μεθόδου των Ροπών προϋποθέτει κατάλληλη αναλυτική έκφραση της συνάρτησης Green του ομογενούς (χωρίς γραμμοσειρές) προβλήματος. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε την περίπτωση όπου η ομογενής διάταξη των δύο συζευγμένων κυματοδηγών του Σχήματος 4.2 διεγείρεται από μία διδιάστατη, άπειρη κατά μήκος του y -άξονα, γραμμική ηλεκτρική ρευματική πηγή με κανονικοποιημένη πυκνότητα ρεύματος

$$\mathbf{J}(x, z) = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \delta(x-x')\delta(z-z')\hat{\mathbf{y}}, \quad -d_3 - d_4 \leq x' \leq -d_3, \quad z' \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

όπου (x', z') η θέση, στην οποία εφαρμόζεται η διέγερση, και η οποία ευρίσκεται εντός του κυματοδηγού 1.



Σχήμα 4.2 Γεωμετρία του ομογενούς (χωρίς γραμμοσειρές) προβλήματος

Σύμφωνα με τα αναφερόμενα στην παράγραφο 3.3, ως *συνάρτηση Green* $G_1(x, z; x', z')$ ορίζεται το ηλεκτρικό πεδίο $E_y(x, z)$, το οποίο παράγεται στη διάταξη από τη ρευματική πηγή $\mathbf{J}(x, z)$ της (4.2) και αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης Helmholtz

$$(\nabla^2 + k_0^2 n_h^2(x))G_1(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

όπου η τμηματικά σταθερή συνάρτηση

$$n_h(x) = \begin{cases} n_1, & x > d_3 + d_2 \\ n_2, & d_3 < x < d_3 + d_2 \\ n_3, & -d_3 < x < d_3 \\ n_4, & -d_3 - d_4 < x < -d_3 \\ n_5, & x < -d_3 - d_4 \end{cases}$$

εκφράζει την κατανομή του δείκτη διάθλασης της διάταξης των συζευγμένων κυματοδηγών.

Επιπλέον, οι συναρτήσεις $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ και $\frac{\partial G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')}{\partial x}$ απαιτείται να ικανοποιούν τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες συνέχειας (1.19) και (1.21) στις διαχωριστικές επιφάνειες $x=d_3+d_2$, $x=\pm d_3$ και $x=-d_3-d_4$ μεταβολής του δείκτη διάθλασης.

Η συνάρτηση Green εκφράζεται αναλυτικά ως κατάλληλο Fourier ολοκλήρωμα με εφαρμογή της μεθόδου Sommerfeld, την οποία συνοψίσαμε στην παράγραφο 3.3. Το πρωτογενές πεδίο G_{pr} , το οποίο παράγεται από τη ρευματική πηγή (4.2) υπό την απουσία των δύο κυματοδηγών και την προϋπόθεση ότι ο \mathbb{R}^2 είναι γεμάτος με το υλικό του κυματοδηγού 1, εκφράζεται ως το ολοκλήρωμα Fourier (βλ. [70], (2.60))

$$G_{pr}(x, z; x', z') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-j\lambda(z-z')} \frac{e^{-g_4(\lambda)|x-x'|}}{g_4(\lambda)}, \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.3)$$

όπου

$$g_i(\lambda) = (\lambda^2 - k_0^2 n_i^2)^{1/2} \quad (i=1, \dots, 5) \quad (4.4)$$

το δε πρόσημο της συνάρτησης $g_4(\lambda)$ επιλέγεται έτσι, ώστε $\text{Re}\{g_4(\lambda)\} > 0$ και $\text{Im}\{g_4(\lambda)\} > 0$ (βλ. και παράγραφο 3.3).

Το δευτερογενές πεδίο G_{sec} , το επαγόμενο στην διάταξη των συζευγμένων κυματοδηγών, το οποίο οφείλεται στις ασυνέχειες της κατανομής του δείκτη διάθλασης στα επίπεδα $x=d_3+d_2$, $x=\pm d_3$ και $x=-d_3-d_4$, εκφράζεται σε κάθε μία από τις πέντε περιοχές του επιπέδου ως ολοκλήρωμα Fourier

$$G_{sec}(x, z; x', z') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-j\lambda(z-z')} \gamma_1(\lambda, x, x') \quad (4.5)$$

Η προσδιοριστέα φασματική συνάρτηση γ_1 , η οποία αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\partial^2 \gamma_1(\lambda, x, x')}{\partial x^2} - [\lambda^2 - k_0^2 n_h^2(x)] \gamma_1(\lambda, x, x') = 0 \quad (4.6)$$

εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των θεμελιωδών λύσεων αυτής

$$\gamma_1(\lambda, x, x') = \begin{cases} A_1(\lambda) \exp[-g_1(x - d_3 - d_2)], & x \geq d_3 + d_2 \\ A_2(\lambda) \cosh\left[g_2(x - d_3 - \frac{d_2}{2})\right] + A_3(\lambda) \sinh\left[g_2(x - d_3 - \frac{d_2}{2})\right], & d_3 \leq x \leq d_3 + d_2 \\ A_4(\lambda) \exp(-g_3 x) + A_5(\lambda) \exp(g_3 x), & -d_3 \leq x \leq d_3 \\ A_6(\lambda) \cosh\left[g_4(x + d_3 + \frac{d_4}{2})\right] + A_7(\lambda) \sinh\left[g_4(x + d_3 + \frac{d_4}{2})\right], & -d_3 - d_4 \leq x \leq -d_3 \\ A_8(\lambda) \exp[g_5(x + d_3 + d_4)], & x \leq -d_3 - d_4 \end{cases} \quad (4.7)$$

Για να προκύπτει φυσικά αποδεκτή λύση στα μη φραγμένα χωρία $(-\infty, -d_3 - d_4)$ και $(d_3 + d_2, +\infty)$, επιλέγεται το πρόσημο των συναρτήσεων g_1 και g_5 έτσι ώστε

$$\operatorname{Re}\{g_1(\lambda)\} > 0, \operatorname{Im}\{g_1(\lambda)\} > 0, \operatorname{Re}\{g_5(\lambda)\} > 0 \text{ και } \operatorname{Im}\{g_5(\lambda)\} > 0$$

Οι άγνωστοι φασματικοί συντελεστές $A_1(\lambda)$ - $A_8(\lambda)$ προσδιορίζονται παρακάτω με εφαρμογή των οριακών συνθηκών στις διαχωριστικές επιφάνειες.

Εφαρμόζοντας τώρα τη μέθοδο Sommerfeld, ευρίσκουμε το συνολικό πεδίο

$$G_1(x, z, x', z') = \begin{cases} G_{sec}(x, z, x', z'), & x \geq -d_3 \\ G_{pr}(x, z, x', z') + G_{sec}(x, z, x', z'), & -d_3 - d_4 \leq x \leq -d_3 \\ G_{sec}(x, z, x', z'), & x \leq -d_4 \end{cases} \quad (4.8)$$

το επαγόμενο στη διάταξη από τη διέγερση \mathbf{J} της (4.2).

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες συνέχειας στα επίπεδα $x = d_3 + d_2$, $x = \pm d_3$ και $x = -d_3 - d_4$, λαμβάνουμε ένα 8×8 γραμμικό σύστημα με αγνώστους τους συντελεστές A_1 - A_8 .

Για τη λύση του εν λόγω συστήματος θεωρούμε τις βοηθητικές συναρτήσεις

$$P_e(f, g, d) = f \cosh\left(g \frac{d}{2}\right) + g \sinh\left(g \frac{d}{2}\right), \quad P_o(f, g, d) = g \cosh\left(g \frac{d}{2}\right) + f \sinh\left(g \frac{d}{2}\right),$$

$$Q_e(f, g, d) = f \cosh\left(g \frac{d}{2}\right) - g \sinh\left(g \frac{d}{2}\right), \quad Q_o(f, g, d) = g \cosh\left(g \frac{d}{2}\right) - f \sinh\left(g \frac{d}{2}\right),$$

$$K(e, f, g, d) = \frac{Q_e(e, g, d)P_o(f, g, d) - Q_o(e, g, d)P_e(f, g, d)}{2},$$

$$\Lambda(e, f, g, d) = \frac{P_e(e, g, d)P_o(f, g, d) + P_o(e, g, d)P_e(f, g, d)}{2},$$

$$\varepsilon = \exp(-2g_3 d_3)$$

όπου οι δείκτες e και o δηλώνουν άρτιες (even) και περιττές (odd) συναρτήσεις του g . Εξάλλου, επιλέγοντας $\operatorname{Re}\{g_3\} > 0$, παρατηρούμε ότι ισχύει $\lim_{d_3 \rightarrow \infty} \varepsilon = 0$. Περαιτέρω, υπολογίζοντας

αναλυτικά τις λύσεις A_1 - A_8 του γραμμικού συστήματος και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις τους στην ολοκληρωτική παράσταση (4.5) του δευτερογενούς πεδίου, με τη βοήθεια των (4.3) και (4.8) ευρίσκουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε όλες τις περιοχές του χώρου

$$G_1(x, z; x', z') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-j\lambda(z-z')} \delta_1(\lambda, x, x') \quad (4.9)$$

όπου

$$\begin{aligned} \delta_1(\lambda, x, x') &= [\Lambda(g_3, g_5, g_4, d_4) \Lambda(g_1, g_3, g_2, d_2) - K(g_3, g_5, g_4, d_4) K(g_3, g_1, g_2, d_2) \varepsilon^2]^{-1} \\ &\left. \begin{aligned} &\varepsilon g_3 g_2 P_o(g_5, g_4, d_4) P_e(g_5, g_4, d_4) \left\{ \frac{\cosh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_e(g_5, g_4, d_4)} + \frac{\sinh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_o(g_5, g_4, d_4)} \right\} \exp[-g_1(x - d_3 - d_2)], & x \geq d_3 + d_2 \\ &P_o(g_1, g_2, d_2) P_e(g_1, g_2, d_2) P_o(g_5, g_4, d_4) P_e(g_5, g_4, d_4) g_3 \varepsilon \\ &\left\{ \frac{\cosh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_e(g_5, g_4, d_4)} + \frac{\sinh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_o(g_5, g_4, d_4)} \right\} \left\{ \frac{\cosh \left[g_2 \left(x - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_e(g_1, g_2, d_2)} - \frac{\sinh \left[g_2 \left(x - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_o(g_1, g_2, d_2)} \right\}, & d_3 \leq x \leq d_3 + d_2 \\ &\left\{ \frac{\cosh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_e(g_5, g_4, d_4)} + \frac{\sinh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_o(g_5, g_4, d_4)} \right\}, & -d_3 \leq x \leq d_3 \\ &(g_4)^{-1} K(g_3, g_1, g_2, d_2) Q_e(g_3, g_4, d_4) P_e(g_5, g_4, d_4) Q_o(g_3, g_4, d_4) P_o(g_5, g_4, d_4) \varepsilon^2 \\ &\left\{ \frac{\cosh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_e(g_5, g_4, d_4)} + \frac{\sinh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_o(g_5, g_4, d_4)} \right\} \left\{ \frac{\cosh \left[g_4 \left(x + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{Q_e(g_3, g_4, d_4)} + \frac{\sinh \left[g_4 \left(x + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{Q_o(g_3, g_4, d_4)} \right\} \\ &+(g_4)^{-1} \Lambda(g_1, g_3, g_2, d_2) P_e(g_3, g_4, d_4) P_e(g_5, g_4, d_4) P_o(g_5, g_4, d_4) P_o(g_3, g_4, d_4) \\ &\left\{ \frac{\cosh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_e(g_5, g_4, d_4)} + \frac{\sinh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_o(g_5, g_4, d_4)} \right\} \left\{ \frac{\cosh \left[g_4 \left(x + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_e(g_3, g_4, d_4)} - \frac{\sinh \left[g_4 \left(x + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_o(g_3, g_4, d_4)} \right\}, & -d_3 - d_4 \leq x' \leq x \leq -d_3 \\ &(g_4)^{-1} K(g_3, g_1, g_2, d_2) Q_e(g_3, g_4, d_4) P_e(g_5, g_4, d_4) Q_o(g_3, g_4, d_4) P_o(g_5, g_4, d_4) \varepsilon^2 \\ &\left\{ \frac{\cosh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{Q_e(g_3, g_4, d_4)} + \frac{\sinh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{Q_o(g_3, g_4, d_4)} \right\} \left\{ \frac{\cosh \left[g_4 \left(x + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_e(g_5, g_4, d_4)} + \frac{\sinh \left[g_4 \left(x + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_o(g_5, g_4, d_4)} \right\} \\ &+(g_4)^{-1} \Lambda(g_1, g_3, g_2, d_2) P_e(g_3, g_4, d_4) P_e(g_5, g_4, d_4) P_o(g_5, g_4, d_4) P_o(g_3, g_4, d_4) \\ &\left\{ \frac{\cosh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_e(g_3, g_4, d_4)} - \frac{\sinh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_o(g_3, g_4, d_4)} \right\} \left\{ \frac{\cosh \left[g_4 \left(x + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_e(g_5, g_4, d_4)} + \frac{\sinh \left[g_4 \left(x + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_o(g_5, g_4, d_4)} \right\}, & -d_3 - d_4 \leq x \leq x' \leq -d_3 \\ &K(g_3, g_1, g_2, d_2) Q_o(g_3, g_4, d_4) Q_e(g_3, g_4, d_4) \varepsilon^2 \left\{ \frac{\cosh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{Q_e(g_3, g_4, d_4)} + \frac{\sinh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{Q_o(g_3, g_4, d_4)} \right\} \exp[g_5(x + d_3 + d_4)] \\ & & x \leq -d_3 - d_4 \\ &+\Lambda(g_1, g_3, g_2, d_2) P_o(g_3, g_4, d_4) P_e(g_3, g_4, d_4) \left\{ \frac{\cosh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_e(g_3, g_4, d_4)} - \frac{\sinh \left[g_4 \left(x' + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_o(g_3, g_4, d_4)} \right\} \exp[g_5(x + d_3 + d_4)], \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Παρατηρήσεις

1) Η έκφραση (4.9) της συνάρτησης Green σε συνδυασμό με την (4.10) εξυπηρετεί τις διατυπώσεις αναλυτικών εκφράσεων των στοιχείων του πίνακα της Μεθόδου των Ροπών. Εξάλλου, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι πόλοι $\lambda = \pm\beta_i$ της ολοκληρωτέας συνάρτησης στην (4.9), οι οποίοι είναι λύσεις της αλγεβρικής εξίσωσης

$$\Lambda(g_3, g_5, g_4, d_4)\Lambda(g_1, g_3, g_2, d_2) - K(g_3, g_5, g_4, d_4)K(g_3, g_1, g_2, d_2)\varepsilon^2 = 0 \quad (4.11)$$

Οι πόλοι $\lambda = \pm\beta_i$ αντιστοιχούν στις σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων στην διάταξη επιφανειακών κυμάτων και αποτελούν ένα πεπερασμένο σύνολο πραγματικών αριθμών όπου

$$\min_{1 \leq j \leq 5} \{n_j\} \leq |\beta_i| / k_0 \leq \max_{1 \leq j \leq 5} \{n_j\}$$

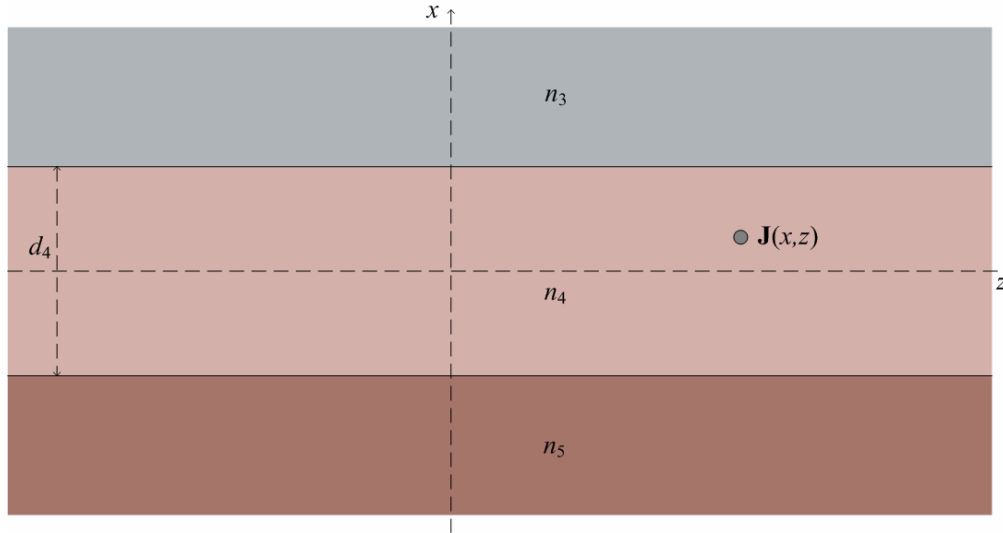
2) Η διάταξη του ασυμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών του Σχήματος 4.1, μέσω των επιλογών $n_1 = n_3 = n_5 = n_0$, $n_2 = n_4 = n_1$, $d_2 = d_4 = 2d$, $2d_3 = h - 2d$, συμπίπτει με τη διάταξη του συμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών του Σχήματος 3.1. Για τις εν λόγω επιλογές των φυσικών και γεωμετρικών χαρακτηριστικών της διάταξης παρατηρούμε ότι η έκφραση (4.9) της συνάρτησης Green του ασύμμετρου ομογενούς προβλήματος ανάγεται στην έκφραση (3.30) της συνάρτησης Green του αντιστοίχου συμμετρικού ομογενούς προβλήματος, το οποίο μελετήθηκε στο Κεφάλαιο 3.

3) Οι (4.9) και (4.10) για $d_3 \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) ανάγονται αντιστοίχως στις

$$G(x, z; x', z') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-j\lambda(z-z')} \frac{\delta(\lambda, x, x')}{\Lambda(g_3, g_5, g_4, d_4)} \quad (4.12)$$

$$\delta(\lambda, x, x') = \begin{cases} P_o(g_5, g_4, d_4)P_e(g_5, g_4, d_4) \left(\frac{\cosh(g_4 x')}{P_e(g_5, g_4, d_4)} + \frac{\sinh(g_4 x')}{P_o(g_5, g_4, d_4)} \right) \exp\left(-g_3 \left(x - \frac{d_4}{2}\right)\right), & x \geq \frac{d_4}{2} \\ \\ \frac{P_e(g_3, g_4, d_4)P_e(g_5, g_4, d_4)P_o(g_5, g_4, d_4)P_o(g_3, g_4, d_4)}{g_4} \\ \left(\frac{\cosh(g_4 x')}{P_e(g_5, g_4, d_4)} + \frac{\sinh(g_4 x')}{P_o(g_5, g_4, d_4)} \right) \left(\frac{\cosh(g_4 x)}{P_e(g_3, g_4, d_4)} - \frac{\sinh(g_4 x)}{P_o(g_3, g_4, d_4)} \right), & -\frac{d_4}{2} \leq x' \leq x \leq \frac{d_4}{2} \\ \\ \frac{P_e(g_3, g_4, d_4)P_e(g_5, g_4, d_4)P_o(g_5, g_4, d_4)P_o(g_3, g_4, d_4)}{g_4} \\ \left(\frac{\cosh(g_4 x')}{P_e(g_3, g_4, d_4)} - \frac{\sinh(g_4 x')}{P_o(g_3, g_4, d_4)} \right) \left(\frac{\cosh(g_4 x)}{P_e(g_5, g_4, d_4)} + \frac{\sinh(g_4 x)}{P_o(g_5, g_4, d_4)} \right), & -\frac{d_4}{2} \leq x \leq x' \leq \frac{d_4}{2} \\ \\ P_o(g_3, g_4, d_4)P_e(g_3, g_4, d_4) \left(\frac{\cosh(g_4 x')}{P_e(g_3, g_4, d_4)} - \frac{\sinh(g_4 x')}{P_o(g_3, g_4, d_4)} \right) \exp\left(g_5 \left(x + \frac{d_4}{2}\right)\right), & x \leq -\frac{d_4}{2} \end{cases}$$

Η G είναι η συνάρτηση Green του προβλήματος της απομονωμένης διηλεκτρικής πλάκας του Σχήματος 4.3.



Σχήμα 4.3 Γεωμετρία του χωρίς γραμμοσειρές προβλήματος της απομονωμένης διηλεκτρικής πλάκας

Εξάλλου οι πόλοι $\lambda = \pm a_i$ της ολοκληρωτέας συνάρτησης της (4.12) είναι λύσεις της αλγεβρικής εξίσωσης

$$\Lambda(g_3, g_5, g_4, d_4) = 0$$

και αντιστοιχούν στις σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων επιφανειακών κυμάτων στη διηλεκτρική πλάκα.

4) Στην περίπτωση όπου η ρευματική πηγή ευρίσκεται εντός του κυματοδηγού 2, κατά παρόμοιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι το ολικό πεδίο G_2 εκφράζεται ως ολοκλήρωμα Fourier

$$G_2(x, z; x', z') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-j\lambda(z-z')} \delta_2(\lambda, x, x') \quad (4.13)$$

όπου

$$\begin{aligned} \delta_2(\lambda, x, x') &= [\Lambda(g_3, g_1, g_2, d_2)\Lambda(g_5, g_3, g_4, d_4) - K(g_3, g_1, g_2, d_2)K(g_5, g_3, g_4, d_4)\varepsilon^2]^{-1} \\ &\left\{ \begin{aligned} &K(g_3, g_5, g_4, d_4)\varepsilon^2 \left\{ Q_0(g_3, g_2, d_2) \cosh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right] - Q_e(g_3, g_2, d_2) \sinh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right] \right\} \exp[-g_1(x - d_3 - d_2)] \\ &+ \Lambda(g_5, g_3, g_4, d_4) \left\{ P_0(g_3, g_2, d_2) \cosh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right] + P_e(g_3, g_2, d_2) \sinh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right] \right\} \exp[-g_1(x - d_3 - d_2)], \end{aligned} \right. \quad x \geq d_3 + d_2 \\ &\left\{ \begin{aligned} &(g_2)^{-1} K(g_3, g_5, g_4, d_4) P_e(g_1, g_2, d_2) P_0(g_1, g_2, d_2) Q_e(g_3, g_2, d_2) Q_0(g_3, g_2, d_2) \varepsilon^2 \\ &\left\{ \frac{\cosh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{Q_e(g_3, g_2, d_2)} - \frac{\sinh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{Q_0(g_3, g_2, d_2)} \right\} \left\{ \frac{\cosh \left[g_2 \left(x - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_e(g_1, g_2, d_2)} - \frac{\sinh \left[g_2 \left(x - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_0(g_1, g_2, d_2)} \right\} \\ &+ (g_2)^{-1} \Lambda(g_5, g_3, g_4, d_4) P_e(g_1, g_2, d_2) P_0(g_1, g_2, d_2) P_e(g_3, g_2, d_2) P_0(g_3, g_2, d_2) \\ &\left\{ \frac{\cosh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_e(g_3, g_2, d_2)} + \frac{\sinh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_0(g_3, g_2, d_2)} \right\} \left\{ \frac{\cosh \left[g_2 \left(x - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_e(g_1, g_2, d_2)} - \frac{\sinh \left[g_2 \left(x - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_0(g_1, g_2, d_2)} \right\}, \end{aligned} \right. \quad d_3 \leq x' \leq x \leq d_3 + d_2 \\ &\left\{ \begin{aligned} &(g_2)^{-1} K(g_3, g_5, g_4, d_4) P_e(g_1, g_2, d_2) P_0(g_1, g_2, d_2) Q_e(g_3, g_2, d_2) Q_0(g_3, g_2, d_2) \varepsilon^2 \\ &\left\{ \frac{\cosh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_e(g_1, g_2, d_2)} - \frac{\sinh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_0(g_1, g_2, d_2)} \right\} \left\{ \frac{\cosh \left[g_2 \left(x - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{Q_e(g_3, g_2, d_2)} - \frac{\sinh \left[g_2 \left(x - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{Q_0(g_3, g_2, d_2)} \right\} \\ &+ (g_2)^{-1} \Lambda(g_5, g_3, g_4, d_4) P_e(g_1, g_2, d_2) P_0(g_1, g_2, d_2) P_e(g_3, g_2, d_2) P_0(g_3, g_2, d_2) \\ &\left\{ \frac{\cosh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_e(g_1, g_2, d_2)} - \frac{\sinh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_0(g_1, g_2, d_2)} \right\} \left\{ \frac{\cosh \left[g_2 \left(x - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_e(g_3, g_2, d_2)} + \frac{\sinh \left[g_2 \left(x - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_0(g_3, g_2, d_2)} \right\}, \end{aligned} \right. \quad d_3 \leq x \leq x' \leq d_3 + d_2 \\ &\left\{ \begin{aligned} &\{ \Lambda(g_3, g_5, g_4, d_4) \exp[g_3(x - d_3)] + \varepsilon K(g_3, g_5, g_4, d_4) \exp[-g_3(x + d_3)] \} P_0(g_1, g_2, d_2) P_e(g_1, g_2, d_2) \\ &\left\{ \frac{\cosh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_e(g_1, g_2, d_2)} - \frac{\sinh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_0(g_1, g_2, d_2)} \right\}, \end{aligned} \right. \quad -d_3 \leq x \leq d_3 \\ &\left\{ \begin{aligned} &\varepsilon g_3 P_e(g_1, g_2, d_2) P_0(g_1, g_2, d_2) P_e(g_5, g_4, d_4) P_0(g_5, g_4, d_4) \\ &\left\{ \frac{\cosh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_e(g_1, g_2, d_2)} - \frac{\sinh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_0(g_1, g_2, d_2)} \right\} \left\{ \frac{\cosh \left[g_4 \left(x + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_e(g_5, g_4, d_4)} + \frac{\sinh \left[g_4 \left(x + d_3 + \frac{d_4}{2} \right) \right]}{P_0(g_5, g_4, d_4)} \right\}, \end{aligned} \right. \quad -d_3 - d_4 \leq x \leq -d_3 \\ &\varepsilon g_3 g_4 P_e(g_1, g_2, d_2) P_0(g_1, g_2, d_2) \left\{ \frac{\cosh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_e(g_1, g_2, d_2)} - \frac{\sinh \left[g_2 \left(x' - d_3 - \frac{d_2}{2} \right) \right]}{P_0(g_1, g_2, d_2)} \right\} \exp[g_5(x + d_3 + d_4)], \quad x \leq -d_3 - d_4 \end{aligned}$$

4.3. Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τη μέθοδο Galerkin

Θεωρούμε TE^z πολωμένα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, τα οποία διαδίδονται παράλληλα προς τον άξονα z στη διάταξη του Σχήματος 4.1. Το άγνωστο κυματοδηγούμενο ηλεκτρικό πεδίο

$$\mathbf{E} = \Psi(x, z)\hat{y} \quad (4.14)$$

έχει μόνο y συνιστώσα και επομένως η λύση του προβλήματος ανάγεται στον προσδιορισμό του άγνωστου βαθμωτού παράγοντα ηλεκτρικού πεδίου $\Psi(x, z)$. Απουσία εξωτερικής διέγερσης, ο ασυμμετρικός συζεύκτης γραμμοσειρών υποστηρίζει κυματοδηγούμενους ρυθμούς υπό την προϋπόθεση ότι ο παράγοντας Ψ του ηλεκτρικού πεδίου της διάταξης έχει την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$\begin{aligned} \Psi(x, z) = & k_0^2(n_7^2 - n_4^2) \iint_{S_d^1} G_1(x, z; x', z') \Psi_1(x', z') dx' dz' \\ & + k_0^2(n_6^2 - n_2^2) \iint_{S_d^2} G_2(x, z; x', z') \Psi_2(x', z') dx' dz', \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

όπου G_1 και G_2 είναι οι συναρτήσεις Green, οι οποίες αντιστοιχούν σε διεγέρσεις εντός των κυματοδηγών 1 και 2, S_d^1 και S_d^2 οι ολικές εγκάρσιες διατομές των γραμμοσειρών των κυματοδηγών 1 και 2 και Ψ_1 και Ψ_2 είναι οι παράγοντες ηλεκτρικού πεδίου στις ορθογώνιες γραμμοσειρές των κυματοδηγών 1 και 2 (δηλαδή οι περιορισμοί του Ψ στα S_d^1 και S_d^2 αντιστοίχως). Η (4.15) ουσιαστικά αποτελεί μία ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δευτέρου είδους. Η ολοκληρωτική αναπαράσταση (4.15) δικαιολογείται (αποδεικνύεται) επεκτείνοντας τις τεχνικές που οδηγούν στην αντίστοιχη αναπαράσταση (3.40).

Σύμφωνα με τα αναφερόμενα στην παράγραφο 3.2, ο παράγοντας Ψ του ηλεκτρικού πεδίου ενός ρυθμού κυματοδότησης, διαδιδόμενου παράλληλα με την κατεύθυνση \hat{z} , καθορίζεται από το θεώρημα Floquet

$$\Psi(x, z) = u(x, z) \exp(-\gamma z) \quad (4.16)$$

όπου γ η προσδιοριστέα μιγαδική σταθερά διάδοσης του ρυθμού και $u(x, z)$ μία Λ -περιοδική συνάρτηση του z . Επομένως, θεωρώντας τους περιορισμούς u_1 και u_2 της u στα S_d^1 και S_d^2 και συνδυάζοντας τις (4.15) και (4.16), διαπιστώνουμε ότι η ολοκληρωτική αναπαράσταση (4.15) αναδιατυπώνεται ως εξής

$$\begin{aligned} u(x, z) = & k_0^2(n_7^2 - n_4^2) \iint_{S_d^1} G_1(x, z; x', z') u_1(x', z') \exp[\gamma(z - z')] dx' dz' \\ & + k_0^2(n_6^2 - n_2^2) \iint_{S_d^2} G_2(x, z; x', z') u_2(x', z') \exp[\gamma(z - z')] dx' dz', \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Περαιτέρω, εκφράζοντας με τη βοήθεια των τύπων (4.9) και (4.13) τις προαναφερόμενες συναρτήσεις Green G_1 και G_2 ως ολοκληρώματα Fourier, λαμβάνουμε

$$u(x, z) = \frac{k_0^2(n_7^2 - n_4^2)}{4\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \iint_{S_r^1} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp[-j\lambda(z-z')] \delta_1(\lambda, x, x') \right\} u_1(x', z') \exp[-\gamma(z'-z)] dx' dz' \\ + \frac{k_0^2(n_6^2 - n_2^2)}{4\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \iint_{S_r^2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp[-j\lambda(z-z')] \delta_2(\lambda, x, x') \right\} u_2(x', z') \exp[-\gamma(z'-z)] dx' dz' \quad (4.18)$$

όπου οι εγκάρσιες διατομές S_r^1 και S_r^2 της r -οστής επανάληψης των γραμμοσειρών στους κυματοδηγούς 1 και 2 ορίζονται από

$$S_r^1 = \bigcup_{i=1}^t [-d_3 - w_1, -d_3] \times [a_i + r\Lambda, a_i + s_i + r\Lambda] \quad (4.19)$$

$$S_r^2 = \bigcup_{i=1}^t [d_3, d_3 + w_2] \times [b_i + r\Lambda, b_i + l_i + r\Lambda]$$

Ο μετασχηματισμός $\zeta' = z' - r\Lambda$ ανάγει τα διπλά ολοκληρώματα επάνω στις S_d^1 και S_d^2 , τα οποία εμφανίζονται στον τύπο (4.18), σε ολοκληρώματα επάνω στις βασικές επαναλήψεις S_0^1 και S_0^2 , οι οποίες παριστούν την εγκάρσια διατομή των γραμμοσειρών του κάθε κυματοδηγού στο διάστημα από $z=0$ έως $z=\Lambda$. Έτσι, με τη βοήθεια του αθροιστικού τύπου του Poisson για τη συνάρτηση Dirac (3.56) και ακολουθώντας τη διαδικασία της παραγράφου 3.5, η (4.18) ανάγεται στην

$$u(x, z) = \frac{k_0^2(n_7^2 - n_4^2)}{2\Lambda} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z) \left[\iint_{S_0^1} u_1(x', \zeta') \exp(j \frac{2\pi p}{\Lambda} \zeta') \delta_1(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' d\zeta' \right] \\ + \frac{k_0^2(n_6^2 - n_2^2)}{2\Lambda} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z) \left[\iint_{S_0^2} u_2(x', \zeta') \exp(j \frac{2\pi p}{\Lambda} \zeta') \delta_2(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' d\zeta' \right] \quad (4.20)$$

Η λύση της εξίσωσης (4.20) επιτυγχάνεται με εφαρμογή μίας τεχνικής Galerkin συνολικού χώρου, η οποία συνοψίζεται στα επόμενα βήματα.

1. Οι παράγοντες ηλεκτρικού πεδίου $u_1=u_1(x,z)$ και $u_2=u_2(x,z)$, οι οποίοι εμφανίζονται στα αντίστοιχα ολοκληρώματα επάνω στις βασικές επαναλήψεις S_0^1 και S_0^2 των γραμμοσειρών, αναπτύσσονται στις σειρές Fourier ως προς z

$$u_1(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{1,n}(x) \exp(-j \frac{2\pi n}{\Lambda} z) \quad (x,z) \in S_0^1 \quad (4.21)$$

$$u_2(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{2,n}(x) \exp(-j \frac{2\pi n}{\Lambda} z) \quad (x,z) \in S_0^2 \quad (4.22)$$

Εξάλλου, επειδή οι u_1 και u_2 αποτελούν λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης Helmholtz στον επίπεδο χωρίο των γραμμοσειρών, οι εγκάρσιες συνιστώσες $\varphi_{1,n}$ και $\varphi_{2,n}$ των χωρικών αρμονικών (συντελεστές Fourier) ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις

$$\varphi_{1,n}''(x) - g_{7,n}^2 \varphi_{1,n}(x) = 0, \quad -d_3 - w_1 \leq x \leq -d_3 \quad (4.23)$$

$$\varphi_{2,n}''(x) - g_{6,n}^2 \varphi_{2,n}(x) = 0, \quad d_3 \leq x \leq d_3 + w_2$$

Συνεπώς, οι συναρτήσεις $\varphi_{1,n}$ και $\varphi_{2,n}$ εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί

$$\varphi_{1,n}(x) = c_n^{1+} \exp\left[g_{7,n}\left(x + d_3 + \frac{w_1}{2}\right)\right] + c_n^{1-} \exp\left[-g_{7,n}\left(x + d_3 + \frac{w_1}{2}\right)\right] \quad (4.24)$$

$$\varphi_{2,n}(x) = c_n^{2+} \exp\left[g_{6,n}\left(x - d_3 - \frac{w_2}{2}\right)\right] + c_n^{2-} \exp\left[-g_{6,n}\left(x - d_3 - \frac{w_2}{2}\right)\right]$$

των θεμελιωδών λύσεων των διαφορικών εξισώσεων (4.23), όπου $c_n^{1\pm}$, $c_n^{2\pm}$ είναι προσδιοριστέοι συντελεστές και

$$g_{i,n} = g_i \left(-j\gamma + \frac{2\pi n}{\Lambda}\right) = \left[(-j\gamma + \frac{2\pi n}{\Lambda})^2 - k_0^2 n_i^2\right]^{1/2} \quad (i=1, \dots, 7) \quad (4.25)$$

Τώρα, ακολουθώντας τη διαδικασία της παραγράφου 3.5, συνδυάζουμε τις (4.20) έως (4.25) και ευρίσκουμε

$$u(x,z) = \frac{k_0^2(n_7^2 - n_4^2)}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ J_{p-n}^1 \exp(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z) [c_n^{1+} Q_{np}^{1+}(x) + c_n^{1-} Q_{np}^{1-}(x)] \right\} \\ + \frac{k_0^2(n_6^2 - n_2^2)}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ J_{p-n}^2 \exp(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z) [c_n^{2+} Q_{np}^{2+}(x) + c_n^{2-} Q_{np}^{2-}(x)] \right\}, \quad (x,z) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.26)$$

όπου οι συναρτήσεις J_{p-n} και Q_{np}^\pm ορίζονται ως εξής

$$J_q^1 = \frac{1}{\Lambda} \sum_{l=1}^t \int_{a_l}^{a_l+s_l} \exp\left(j \frac{2\pi q}{\Lambda} \zeta'\right) d\zeta' \quad , \quad J_q^2 = \frac{1}{\Lambda} \sum_{l=1}^t \int_{b_l}^{b_l+l_l} \exp\left(j \frac{2\pi q}{\Lambda} \zeta'\right) d\zeta'$$

$$Q_{np}^{1\pm}(x) = \int_{-d_3-w_1}^{-d_3} \exp\left[\pm g_{7,n}(x'+d_3+\frac{w_1}{2})\right] \delta_1(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx'$$

$$Q_{np}^{2\pm}(x) = \int_{d_3}^{d_3+w_2} \exp\left[\pm g_{6,n}(x'-d_3-\frac{w_2}{2})\right] \delta_2(-j\gamma + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx'$$

Η εξίσωση (4.26) δηλώνει ότι ο παράγοντας ηλεκτρικού πεδίου u εκφράζεται ως διπλή σειρά γινομένων δύο συναρτήσεων μιας μεταβλητής, όπου η πρώτη J_{p-n} εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμοσειρών κατά μήκος του z -άξονα και η δεύτερη Q_{np}^{\pm} από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμοσειρών κατά μήκος του x -άξονα.

2. Για τον προσδιορισμό των αγνώστων συντελεστών $c_n^{1\pm}, c_n^{2\pm}$ της (4.26) με τη μέθοδο Galerkin, θεωρούμε ότι το διάλυμα παρατήρησης (x,z) στην (4.26) περιορίζεται στο επίπεδο χωρίο των γραμμοσειρών, διακρίνοντας τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις

Περίπτωση 1. Το διάλυμα παρατήρησης (x,z) ανήκει στην επιφάνεια S_d^1 των γραμμοσειρών του κυματοδηγού 1. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $u=u_1(x,z)$ στην (4.26) αρχικά αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως προς z της μορφής (4.21). Στη συνέχεια θεωρώντας τα εσωτερικά γινόμενα των δύο μελών της (4.26) με τις δοκιμαστικές συναρτήσεις

$$\exp\left[\pm g_{7,m}(x+d_3+\frac{w_1}{2})\right] \exp\left(+j \frac{2\pi m}{\Lambda} z\right), \quad (x,z) \in S_d^1 \quad (m \in \mathbb{Z})$$

εκτελώντας τις ολοκληρώσεις που προκύπτουν και ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία εκείνης της παραγράφου 3.5, ευρίσκουμε την αλγεβρική εξίσωση

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-n}^1 \left(K_{mn}^{1\pm+} c_n^{1+} + K_{mn}^{1\pm-} c_n^{1-} \right) &= k_0^2 (n_7^2 - n_4^2) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{p-n}^1 J_{m-p}^1 \left(c_n^{1+} Q_{mnp}^{11\pm+} + c_n^{1-} Q_{mnp}^{11\pm-} \right) \\ &+ k_0^2 (n_6^2 - n_2^2) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{p-n}^2 J_{m-p}^1 \left(c_n^{2+} Q_{mnp}^{12\pm+} + c_n^{2-} Q_{mnp}^{12\pm-} \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

όπου οι άπειροι πίνακες $[K_{mn}^{1\pm\pm}]$ και $[Q_{mnp}^{1i\pm\pm}]$ ($i=1,2$) ορίζονται ως εξής

$$K_{mn}^{1\pm\pm} = \int_{-d_3-w_1}^{-d_3} \exp\left[\pm g_{7,m}(x+d_3+\frac{w_1}{2})\right] \exp\left[\pm g_{7,n}(x+d_3+\frac{w_1}{2})\right] dx \quad (4.28)$$

$$Q_{mnp}^{1i\pm\pm} = \frac{1}{2} \int_{-d_3-w_1}^{-d_3} \exp\left[\pm g_{7,m}(x+d_3+\frac{w_1}{2})\right] Q_{np}^{i\pm}(x) dx \quad (i=1,2) \quad (4.29)$$

Περίπτωση 2. Το διάνυσμα παρατήρησης (x,z) ανήκει στην επιφάνεια S_d^2 των γραμμοσειρών του κυματοδηγού 2. Στην προκειμένη περίπτωση η συνάρτηση $u=u_2(x,z)$ στην (4.26) αρχικά αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως προς z της μορφής (4.22). Στη συνέχεια θεωρώντας τα εσωτερικά γινόμενα των δύο μελών της (4.26) με τις δοκιμαστικές συναρτήσεις

$$\exp\left[\pm g_{6,m}\left(x-d_3-\frac{w_2}{2}\right)\right]\exp\left(+j\frac{2\pi m}{\Lambda}z\right), \quad (x,z) \in S_d^2 \quad (m \in \mathbb{Z})$$

ευρίσκουμε την αλγεβρική εξίσωση

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-n}^2 \left(K_{mn}^{2\pm+} c_n^{2+} + K_{mn}^{2\pm-} c_n^{2-} \right) &= k_0^2 (n_7^2 - n_4^2) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{p-n}^1 J_{m-p}^2 \left(c_n^{1+} Q_{mnp}^{21\pm+} + c_n^{1-} Q_{mnp}^{21\pm-} \right) \\ &+ k_0^2 (n_6^2 - n_2^2) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{p-n}^2 J_{m-p}^2 \left(c_n^{2+} Q_{mnp}^{22\pm+} + c_n^{2-} Q_{mnp}^{22\pm-} \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

όπου οι άπειροι πίνακες $[K_{mn}^{2\pm\pm}]$ και $[Q_{mnp}^{2i\pm\pm}]$ ($i=1,2$) ορίζονται ως εξής

$$K_{mn}^{2\pm\pm} = \int_{d_3}^{d_3+w_2} \exp\left[\pm g_{6,m}\left(x-d_3-\frac{w_2}{2}\right)\right]\exp\left[\pm g_{6,n}\left(x-d_3-\frac{w_2}{2}\right)\right] dx \quad (4.31)$$

$$Q_{mnp}^{2i\pm\pm} = \frac{1}{2} \int_{d_3}^{d_3+w_2} \exp\left[\pm g_{6,m}\left(x-d_3-\frac{w_2}{2}\right)\right] Q_{np}^{i\pm}(x) dx \quad (i=1,2) \quad (4.32)$$

3. Οι εξισώσεις (4.27) και (4.30) των περιπτώσεων 1 και 2 αποτελούν ένα άπειρο τετραγωνικό ομογενές γραμμικό σύστημα συζευγμένων αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τους αγνώστους συντελεστές $c_n^{1\pm}, c_n^{2\pm}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Για την αριθμητική επίλυση αυτού του απείρου συστήματος θεωρούμε το αντίστοιχο truncated ομογενές γραμμικό σύστημα $8N+4$ εξισώσεων ως προς τους $8N+4$ αγνώστους $c_n^{1\pm}, c_n^{2\pm}$ ($n = -N, \dots, N$), το οποίο προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη τις χωρικές αρμονικές συναρτήσεις στα αναπτύγματα (4.21), (4.22) και τις δοκιμαστικές συναρτήσεις στα εσωτερικά γινόμενα με μέγιστη απόλυτη τάξη N . Το εν λόγω truncated σύστημα γράφεται υπό μορφή block πινάκων ως εξής

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{++} & \mathbf{A}_{11}^{+-} & \mathbf{A}_{12}^{++} & \mathbf{A}_{12}^{+-} \\ \mathbf{A}_{11}^{-+} & \mathbf{A}_{11}^{--} & \mathbf{A}_{12}^{-+} & \mathbf{A}_{12}^{--} \\ \mathbf{A}_{21}^{++} & \mathbf{A}_{21}^{+-} & \mathbf{A}_{22}^{++} & \mathbf{A}_{22}^{+-} \\ \mathbf{A}_{21}^{-+} & \mathbf{A}_{21}^{--} & \mathbf{A}_{22}^{-+} & \mathbf{A}_{22}^{--} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{1+} \\ \mathbf{c}^{1-} \\ \mathbf{c}^{2+} \\ \mathbf{c}^{2-} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.33)$$

Τα στοιχεία $(\mathbf{A}_{ij}^{\pm\pm})_{mn}$ των $(2N+1) \times (2N+1)$ πινάκων $\mathbf{A}_{ij}^{\pm\pm}$ ($i,j=1,2$) δίνονται από

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{11}^{\pm\pm})_{mn} &= - \left\{ J_{m-n}^1 + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{k_0^2(n_7^2 - n_4^2)}{\mathfrak{g}_{7,n}^2 - \mathfrak{g}_{4,p}^2} J_{p-n}^1 J_{m-p}^1 \right\} K_{mn}^{1\pm\pm} \\
&\quad + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{k_0^2(n_7^2 - n_4^2)}{\mathfrak{g}_{7,n}^2 - \mathfrak{g}_{4,p}^2} J_{p-n}^1 J_{m-p}^1 (R_{mnp}^{1\pm\pm} + H_{mnp}^{1\pm\pm}) \\
(\mathbf{A}_{12}^{\pm\pm})_{mn} &= - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{k_0^2(n_6^2 - n_2^2)}{\mathfrak{g}_{6,n}^2 - \mathfrak{g}_{2,p}^2} J_{p-n}^2 J_{m-p}^1 H_{mnp}^{12\pm\pm} \\
(\mathbf{A}_{21}^{\pm\pm})_{mn} &= - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{k_0^2(n_7^2 - n_4^2)}{\mathfrak{g}_{7,n}^2 - \mathfrak{g}_{4,p}^2} J_{p-n}^1 J_{m-p}^2 H_{mnp}^{21\pm\pm} \\
(\mathbf{A}_{22}^{\pm\pm})_{mn} &= - \left\{ J_{m-n}^2 + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{k_0^2(n_6^2 - n_2^2)}{\mathfrak{g}_{6,n}^2 - \mathfrak{g}_{2,p}^2} J_{p-n}^2 J_{m-p}^2 \right\} K_{mn}^{2\pm\pm} \\
&\quad + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{k_0^2(n_6^2 - n_2^2)}{\mathfrak{g}_{6,n}^2 - \mathfrak{g}_{2,p}^2} J_{p-n}^2 J_{m-p}^2 (R_{mnp}^{2\pm\pm} + H_{mnp}^{22\pm\pm})
\end{aligned} \tag{4.34}$$

και $\mathbf{c}^{1\pm}$, $\mathbf{c}^{2\pm}$ είναι τα $(2N+1) \times 1$ διανύσματα των συντελεστών $c_n^{1\pm}$, $c_n^{2\pm}$. Τα στοιχεία $R_{mnp}^{i\pm\pm}$ και

$H_{mnp}^{ij\pm\pm}$ ορίζονται από

$$\begin{aligned}
R_{mnp}^{1\pm\pm} &= \frac{1}{2(\mathfrak{g}_{7,m}^2 - \mathfrak{g}_{4,p}^2) \mathfrak{g}_{4,p}} \frac{\Lambda(\mathfrak{g}_{1,p}, \mathfrak{g}_{3,p}, \mathfrak{g}_{2,p}, d_2) P_\epsilon(\mathfrak{g}_{3,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4) P_\epsilon(\mathfrak{g}_{5,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4) P_o(\mathfrak{g}_{5,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4) P_o(\mathfrak{g}_{3,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)}{\Lambda(\mathfrak{g}_{3,p}, \mathfrak{g}_{5,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4) \Lambda(\mathfrak{g}_{1,p}, \mathfrak{g}_{3,p}, \mathfrak{g}_{2,p}, d_2) - K(\mathfrak{g}_{3,p}, \mathfrak{g}_{5,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4) K(\mathfrak{g}_{3,p}, \mathfrak{g}_{1,p}, \mathfrak{g}_{2,p}, d_2) \epsilon^2} \\
&\quad \left\{ \exp \left[(\pm \mathfrak{g}_{7,m} \pm \mathfrak{g}_{7,n}) \frac{w_1}{2} \right] \left[\frac{P_\epsilon(\mp \mathfrak{g}_{7,m}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4) + P_o(\mp \mathfrak{g}_{7,m}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)}{P_\epsilon(\mathfrak{g}_{5,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} + \frac{P_o(\mp \mathfrak{g}_{7,m}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)}{P_o(\mathfrak{g}_{5,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} \right] \left[\frac{P_\epsilon(\mp \mathfrak{g}_{7,n}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)}{P_\epsilon(\mathfrak{g}_{3,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} - \frac{P_o(\mp \mathfrak{g}_{7,n}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)}{P_o(\mathfrak{g}_{3,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} \right] \right. \\
&\quad - \exp \left[(\pm \mathfrak{g}_{7,m} \mp \mathfrak{g}_{7,n}) \frac{w_1}{2} \right] \left[\frac{P_\epsilon(\mp \mathfrak{g}_{7,m}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)}{P_\epsilon(\mathfrak{g}_{3,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} - \frac{P_o(\mp \mathfrak{g}_{7,m}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)}{P_o(\mathfrak{g}_{3,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} \right] \left[\frac{P_\epsilon(\mp \mathfrak{g}_{7,n}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4 - 2w_1)}{P_\epsilon(\mathfrak{g}_{5,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} + \frac{P_o(\mp \mathfrak{g}_{7,n}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4 - 2w_1)}{P_o(\mathfrak{g}_{5,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} \right] \\
&\quad - \exp \left[(\mp \mathfrak{g}_{7,m} \pm \mathfrak{g}_{7,n}) \frac{w_1}{2} \right] \left[\frac{P_\epsilon(\mp \mathfrak{g}_{7,m}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4 - 2w_1)}{P_\epsilon(\mathfrak{g}_{5,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} + \frac{P_o(\mp \mathfrak{g}_{7,m}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4 - 2w_1)}{P_o(\mathfrak{g}_{5,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} \right] \left[\frac{P_\epsilon(\mp \mathfrak{g}_{7,n}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)}{P_\epsilon(\mathfrak{g}_{3,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} - \frac{P_o(\mp \mathfrak{g}_{7,n}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)}{P_o(\mathfrak{g}_{3,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} \right] \\
&\quad \left. + \exp \left[(\mp \mathfrak{g}_{7,m} \mp \mathfrak{g}_{7,n}) \frac{w_1}{2} \right] \left[\frac{P_\epsilon(\mp \mathfrak{g}_{7,m}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4 - 2w_1)}{P_\epsilon(\mathfrak{g}_{3,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} - \frac{P_o(\mp \mathfrak{g}_{7,m}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4 - 2w_1)}{P_o(\mathfrak{g}_{3,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} \right] \left[\frac{P_\epsilon(\mp \mathfrak{g}_{7,n}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4 - 2w_1)}{P_\epsilon(\mathfrak{g}_{5,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} + \frac{P_o(\mp \mathfrak{g}_{7,n}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4 - 2w_1)}{P_o(\mathfrak{g}_{5,p}, \mathfrak{g}_{4,p}, d_4)} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
H_{mnp}^{22\pm\pm} = & \frac{1}{2(g_{6,m}^2 - g_{2,p}^2)} \frac{K(g_{3,p}, g_{5,p}, g_{4,p}, d_4) P_e(g_{1,p}, g_{2,p}, d_2) P_o(g_{1,p}, g_{2,p}, d_2) Q_e(g_{3,p}, g_{2,p}, d_2) Q_o(g_{3,p}, g_{2,p}, d_2) \varepsilon^2}{g_{2,p} \left[\Lambda(g_{3,p}, g_{5,p}, g_{4,p}, d_4) \Lambda(g_{1,p}, g_{3,p}, g_{2,p}, d_2) - K(g_{3,p}, g_{5,p}, g_{4,p}, d_4) K(g_{3,p}, g_{1,p}, g_{2,p}, d_2) \varepsilon^2 \right]} \\
& \left\{ \exp \left[(\pm g_{6,m} \pm g_{6,n}) \frac{w_2}{2} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{6,m}, g_{2,p}, d_2 - 2w_2)}{Q_e(g_{3,p}, g_{2,p}, d_2)} + \frac{P_o(\pm g_{6,m}, g_{2,p}, d_2 - 2w_2)}{Q_o(g_{3,p}, g_{2,p}, d_2)} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{6,n}, g_{2,p}, d_2 - 2w_2)}{P_e(g_{1,p}, g_{2,p}, d_2)} + \frac{P_o(\pm g_{6,n}, g_{2,p}, d_2 - 2w_2)}{P_o(g_{1,p}, g_{2,p}, d_2)} \right] \right. \\
& - \exp \left[(\pm g_{6,m} \mp g_{6,n}) \frac{w_2}{2} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{6,m}, g_{2,p}, d_2 - 2w_2)}{P_e(g_{1,p}, g_{2,p}, d_2)} + \frac{P_o(\pm g_{6,m}, g_{2,p}, d_2 - 2w_2)}{P_o(g_{1,p}, g_{2,p}, d_2)} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{6,n}, g_{2,p}, d_2)}{Q_e(g_{3,p}, g_{2,p}, d_2)} + \frac{P_o(\pm g_{6,n}, g_{2,p}, d_2)}{Q_o(g_{3,p}, g_{2,p}, d_2)} \right] \\
& - \exp \left[(\mp g_{6,m} \pm g_{6,n}) \frac{w_2}{2} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{6,m}, g_{2,p}, d_2)}{Q_e(g_{3,p}, g_{2,p}, d_2)} + \frac{P_o(\pm g_{6,m}, g_{2,p}, d_2)}{Q_o(g_{3,p}, g_{2,p}, d_2)} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{6,n}, g_{2,p}, d_2 - 2w_2)}{P_e(g_{1,p}, g_{2,p}, d_2)} + \frac{P_o(\pm g_{6,n}, g_{2,p}, d_2 - 2w_2)}{P_o(g_{1,p}, g_{2,p}, d_2)} \right] \\
& \left. + \exp \left[(\mp g_{6,m} \mp g_{6,n}) \frac{w_2}{2} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{6,m}, g_{2,p}, d_2)}{P_e(g_{1,p}, g_{2,p}, d_2)} + \frac{P_o(\pm g_{6,m}, g_{2,p}, d_2)}{P_o(g_{1,p}, g_{2,p}, d_2)} \right] \left[\frac{P_e(\pm g_{6,n}, g_{2,p}, d_2)}{Q_e(g_{3,p}, g_{2,p}, d_2)} + \frac{P_o(\pm g_{6,n}, g_{2,p}, d_2)}{Q_o(g_{3,p}, g_{2,p}, d_2)} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Οι μιγαδικές σταθερές διάδοσης των ρυθμών, που είναι δυνατόν να κυματοδηγούμενων στη διάταξη, είναι εκείνες οι τιμές της παραμέτρου γ για τις οποίες το truncated σύστημα (4.33) έχει μη τετριμμένη λύση ή ισοδύναμα ο αντίστοιχος πίνακας του truncated συστήματος είναι ιδιάζων. Στη συνέχεια, οι μη τετριμμένες λύσεις της (4.33) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της κατανομής του ηλεκτρικού πεδίου των κυματοδηγούμενων ρυθμών μέσω της βασικής ολοκληρωτικής αναπαράστασης (4.17).

Τέλος, αναφερόμενοι στο truncated γραμμικό σύστημα (4.33) σημειώνουμε ότι

(i) Στις λύσεις πρέπει να εφαρμοστεί ένας έλεγχος σύγκλισης (convergence control) για αυξανόμενο αριθμό N των συναρτήσεων ανάπτυξης. Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα της μεθόδου μας είναι ότι μικρές τιμές του N ($N \leq 5$) παρέχουν ικανοποιητική σύγκλιση ανεξάρτητα από τις τιμές των φυσικών και γεωμετρικών παραμέτρων της διάταξης του συζεύκτη (για λεπτομέρειες βλ. [35]).

(ii) Οι πίνακες $[H_{mnp}^{ij\pm\pm}]$, οι οποίοι αντιπροσωπεύουν τη σύζευξη μεταξύ των δύο κυματοδηγών, προσεγγίζουν τον πίνακα $\mathbf{0}$ καθώς $d_3 \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \rightarrow 0$), οδηγώντας σε αποσύζευξη (decoupling) του γραμμικού συστήματος (4.33).

(iii) Στην ειδική περίπτωση ενός συμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών (όπου $n_1 = n_3 = n_5$, $n_2 = n_4$ και $d_2 = d_4$) το γραμμικό σύστημα (4.33) ανάγεται στο σύστημα (3.98) της παραγράφου 3.5.

(iv) Οι ειδικές περιπτώσεις: (α) ενός απομονωμένου κυματοδηγού γραμμοσειρών (βλ. Σχήμα 4.1 υπό την απουσία του κυματοδηγού 2) και (β) ενός συζεύκτη με γραμμοσειρές στον ένα κυματοδηγό (βλ. Σχήμα 4.1 υπό την απουσία των γραμμοσειρών του κυματοδηγού 2), οι οποίες έχουν αναλυθεί αυτοτελώς στη βιβλιογραφία (βλ. [75] και [76] για (α) και [9], [25] και [38] για (β)), ενοποιούνται εδώ ως ειδικές περιπτώσεις της μεθόδου μας. Ακριβέστερα,

εφαρμογές τεχνικών Galerkin συνολικού χώρου οδηγούν και στις δύο περιπτώσεις στο truncated $(4N+2) \times (4N+2)$ ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{++} & \mathbf{A}^{+-} \\ \mathbf{A}^{-+} & \mathbf{A}^{--} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.41)$$

Στην περίπτωση (α) $\mathbf{A}^{\pm\pm}$ είναι τα blocks $\mathbf{A}_{11}^{\pm\pm}$ του συστήματος (4.33) για $\varepsilon=0$ και στην (β) $\mathbf{A}^{\pm\pm}$ είναι τα blocks $\mathbf{A}_{11}^{\pm\pm}$ του συστήματος (4.33).

4.4. Έλεγχος σύγκλισης, αποδοτικότητα και εγκυρότητα της μεθόδου

Σύμφωνα με τα αναφερόμενα στις παραγράφους 4.2-4.4, οι πραγματικοί δείκτες των ρυθμών του ασυμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών είναι οι ρίζες της ορίζουσας του γραμμικού συστήματος (4.33), οι οποίες υπολογίζονται με ακρίβεια, εφαρμόζοντας την επαναληπτική μιγαδική μέθοδο Müller. Το ουσιαστικό τμήμα αυτής της μεθόδου αφορά τον προσδιορισμό καταλλήλων αρχικών σημείων, ο οποίος επιτυγχάνεται με τη γραφική διαδικασία της παραγράφου 3.7.

Για κάθε σύνολο παραμέτρων του συζεύκτη γραμμοσειρών ο απαιτούμενος αριθμός χωρικών αρμονικών συναρτήσεων στα αναπτύγματα Fourier (4.21) και (4.22) καθορίζεται με εφαρμογή ελέγχου σύγκλισης στις υπολογισθείσες σταθερές διάδοσης. Ένα αντιπροσωπευτικό πρότυπο σύγκλισης απεικονίζεται στον Πίνακα 4.1.

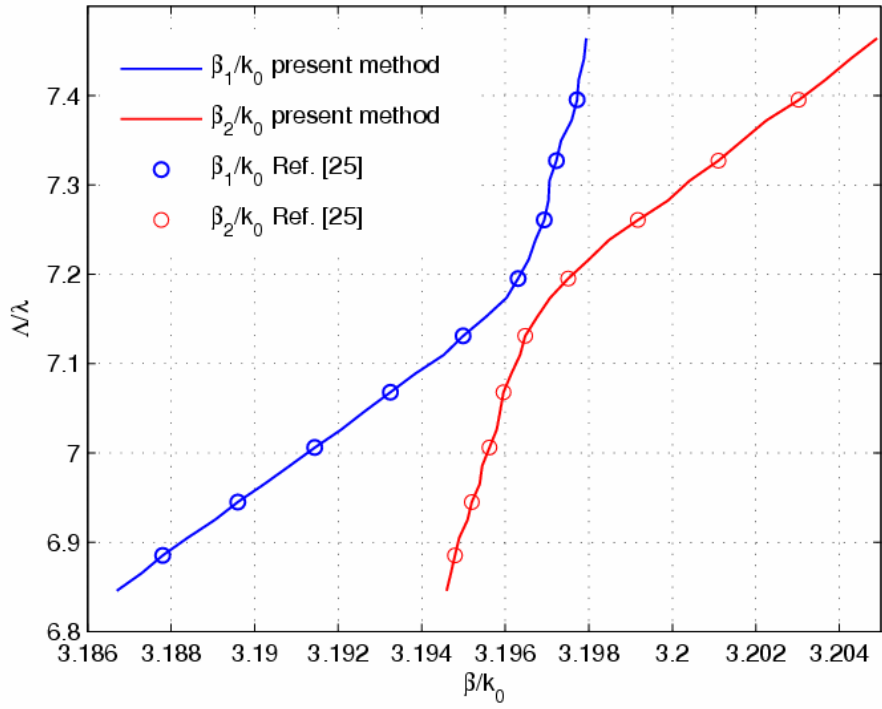
N	β_1/k_0	$(\beta_{1,N}-\beta_{1,N-1})/\beta_{1,N-1}^a$	β_2/k_0	$(\beta_{2,N}-\beta_{2,N-1})/\beta_{2,N-1}^a$
1	3.2245		3.2301	
2	3.2175	-2.17×10^{-3}	3.2235	-2.04×10^{-3}
3	3.2158	-5.28×10^{-4}	3.2238	9.30×10^{-5}
4	3.2159	3.10×10^{-5}	3.2241	9.80×10^{-5}
5	3.2159	-5.10×10^{-7}	3.2241	3.34×10^{-7}

^a Σχετική διαφορά των λύσεων για τις διαδοχικές τιμές του N .

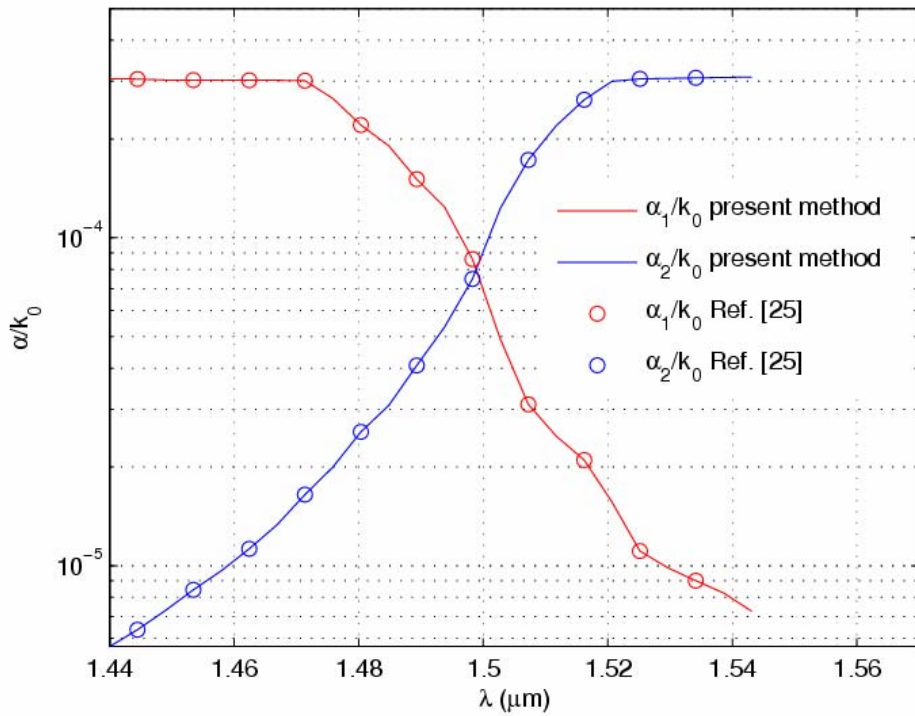
Πίνακας 4.1 Πρότυπο σύγκλισης των κανονικοποιημένων φανταστικών μερών των σταθερών διάδοσης του συζεύκτη γραμμοσειρών του Σχήματος 4.1 με $n_1=1$, $n_2=3.2$, $n_3=n_5=n_6=n_7=3$, $n_4=3.5$, $d_2=0.5 \mu\text{m}$, $2d_3=0.55 \mu\text{m}$, $d_4=0.22 \mu\text{m}$, $w_1=0.1 \mu\text{m}$, $w_2=0.05 \mu\text{m}$, $\Lambda=10.748 \mu\text{m}$, $\lambda=1.5 \mu\text{m}$, $t=1$, $a_1=s_1=b_1=l_1=\Lambda/2$.

Όπως παρατηρούμε στον Πίνακα 4.1, με την παρούσα μέθοδο επιτυγχάνεται υψηλή ακρίβεια (της τάξης 10^{-7}) θεωρώντας μόνο $2N+1=11$ συντελεστές ανάπτυξης στις (4.21) και (4.22). Η τάξη $8N+4=8\cdot 5+4=44$ είναι πάρα πολύ μικρότερη από εκείνη του αντιστοίχου συστήματος των τεχνικών ολοκληρωτικών εξισώσεων συνδυασμένων με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων (βλ. [38] και [39]), οι οποίες απαιτούν 500 συνοριακά στοιχεία για σύγκλιση τάξεως 10^{-4} των σταθερών διάδοσης. Αυτή η αποδοτικότητα της παρούσας μεθόδου οφείλεται στο ότι ο άγνωστος παράγοντας ηλεκτρικού πεδίου και οι όροι ανάπτυξης συνολικού χώρου (entire domain expansion terms) ικανοποιούν τους ίδιους φυσικούς νόμους. Επίσης, επειδή η παρούσα μέθοδος εμφανίζει ολοκληρώματα, τα οποία υπολογίζονται αναλυτικά, είναι πολύ αποδοτική σε όρους υπολογιστικού χρόνου (CPU time). Για τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα του γραμμικού συστήματος 0.5 δευτερόλεπτα (Pentium IV, 2.80 GHz with 1 GByte of RAM) είναι επαρκή.

Για τον έλεγχο της εγκυρότητας της μεθόδου θεωρούμε συζεύκτη με σταθερές παραμέτρους $n_1=1$, $n_2=3.2$, $n_3=n_5=3$, $n_4=3.5$, $n_6=3$, $d_2=0.5 \mu\text{m}$, $2d_3=0.55 \mu\text{m}$, $d_4=0.22 \mu\text{m}$, $w_2=0.05 \mu\text{m}$, $\Lambda=10.748 \mu\text{m}$, $t=1$, $b_1=l_1=\Lambda/2$ και τις γραμμοσειρές ευρισκόμενες στον κυματοδηγό 2 (βλ. Σχήμα 4.1 υπό την απουσία των γραμμοσειρών του κυματοδηγού 1). Οι καμπύλες διασποράς β_1/k_0 και β_2/k_0 των ρυθμών γραμμοσειρών ως προς το κανονικοποιημένο μήκος κύματος Λ/λ απεικονίζονται στο Σχήμα 4.4(α) και οι καμπύλες εξασθένισης α_1/k_0 και α_2/k_0 των ρυθμών γραμμοσειρών στο Σχήμα 4.4(β). Οι καμπύλες των Σχημάτων 4.4(α) και 4.4(β) είναι σε πλήρη συμφωνία με εκείνες των Σχημάτων 4a και 4b της [25], οι οποίες έχουν σχεδιαστεί για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων, και έτσι επιβεβαιώνεται η εγκυρότητα της προτεινομένης μεθόδου.



(α)



(β)

Σχήμα 4.4 (α) Φανταστικά μέρη β_1/k_0 , β_2/k_0 και (β) πραγματικά μέρη α_1/k_0 , α_2/k_0 των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών συναρτήσει του Λ/λ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΧΕΔΙΑΣΤΙΚΕΣ ΠΡΟΔΙΑΓΡΑΦΕΣ

Στο Κεφάλαιο αυτό καταγράφονται διάφορα σημαντικά αριθμητικά αποτελέσματα, αναφερόμενα κυρίως στη μεταβολή των σταθερών διάδοσης ως προς τις διάφορες παραμέτρους του συζεύκτη γραμμοσειρών, και σχολιάζεται διεξοδικά ο ρόλος των γραμμοσειρών στην κυματοδότηση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Τα συμπεράσματα, τα οποία εξάγονται από την επεξεργασία των εν λόγω αριθμητικών αποτελεσμάτων, αξιοποιούνται για τον εντοπισμό τεχνικών χαρακτηριστικών και σχεδιαστικών προδιαγραφών κατάλληλων διατάξεων συζευκτών γραμμοσειρών, οι οποίες εξυπηρετούν συγκεκριμένες τεχνολογικές εφαρμογές.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία παρουσιάζονται στην παράγραφο 5.1, αναφέρονται σε συμμετρικούς συζεύκτες γραμμοσειρών και επιτυγχάνονται με αριθμητική υλοποίηση της ημιαναλυτικής μεθόδου Galerkin, που αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 3. Ειδικότερα, καταγράφονται οι μεταβολές των σταθερών διάδοσης ως συναρτήσεις του πάχους w , των γεωμετρικών χαρακτηριστικών d_i , l_i , Λ , του δείκτη διάθλασης n_2 και του πλήθους q των ορθογωνίων των γραμμοσειρών. Επίσης, σχεδιάζονται διαγράμματα μεταβολών των σταθερών διάδοσης συναρτήσει της απόστασης διαχωρισμού h των δύο κυματοδηγών, τα οποία ερμηνεύουν τη φυσική σύζευξη των κυματοδηγών του συζεύκτη γραμμοσειρών.

Στην παράγραφο 5.2 παρουσιάζονται αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα, αναφερόμενα σε ασυμμετρικούς συζεύκτες γραμμοσειρών, τα οποία προκύπτουν με εφαρμογή της ημιαναλυτικής μεθόδου που αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 4. Επιπροσθέτως, εντοπίζονται και καταγράφονται τα φυσικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμοσειρών, τα οποία οδηγούν στο ελάχιστο δυνατό μήκος σύζευξης και στη μέγιστη δυνατή αποδοτικότητα σύζευξης. Παράλληλα, αναλύεται διεξοδικά η αποδοτική λειτουργία του συζεύκτη γραμμοσειρών ως ζωνοπερατό φίλτρο οπτικών συχνοτήτων. Επίσης, μελετάται ο συζεύκτης με γραμμοσειρές και στους δύο κυματοδηγούς και διαπιστώνεται ότι η παρουσία των δύο γραμμοσειρών παρέχει ευελιξία στη σχεδίαση των συζευκτών γραμμοσειρών και επιφέρει σημαντική βελτίωση της αποδοτικότητας του μηχανισμού μεταφοράς ενέργειας. Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα της παραγράφου αυτής βελτιώνουν εκείνα των μεθόδων συζευγμένων ρυθμών για τις περιπτώσεις γραμμοσειρών, οι οποίες επιφέρουν μεγάλες διαταραχές στην ομογενή διάταξη, και πολύ διαφορετικών κυματοδηγών.

5.1. Συμμετρικοί Συζεύκτες

Σύμφωνα με τα αναφερόμενα στο εδάφιο 2.1.2, οι κυματοδηγούμενοι *βασικοί ρυθμοί* (*basic modes*) του συμμετρικού συζεύκτη χωρίς γραμμοσειρές, ο οποίος απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1, εμφανίζονται κατά ζεύγη και έχουν σχεδόν ίσες κανονικοποιημένες μιγαδικές σταθερές διάδοσης. Εξάλλου, όταν οι δείκτες διάθλασης όλων των περιοχών είναι πραγματικοί αριθμοί (μέσα χωρίς απώλειες), τότε οι κανονικοποιημένες σταθερές διάδοσης (*effective indices*) N_e/k_0 και N_o/k_0 των δύο κυματοδηγούμενων ρυθμών είναι φανταστικοί αριθμοί και τα αντίστοιχα ηλεκτρικά πεδία E_y^e και E_y^o εμφανίζουν άρτια και περιττή συμμετρία ως προς τον άξονα συμμετρίας ($x=h/2$) της διάταξης (βλ. Σχήμα 2.2).

Περαιτέρω, οι δύο βασικοί ρυθμοί συμμετρικού συζεύκτη υπό την παρουσία γραμμοσειρών μετατρέπονται (εξελισσονται) σε δύο διαφορετικούς *ρυθμούς γραμμοσειρών* (*grating modes*) με μιγαδικές σταθερές διάδοσης

$$\gamma_e = \alpha_e + j\beta_e \quad , \quad \gamma_o = \alpha_o + j\beta_o \quad (5.1)$$

Για αρκετά μεγάλες τιμές του λόγου Λ/λ , τα πραγματικά μέρη α_e και α_o των γ_e και γ_o είναι εν γένει διάφορα του μηδενός, ακόμα και για μέσα χωρίς απώλειες. Αυτό οφείλεται στις απώλειες ακτινοβολίας της διάταξης λόγω της παρουσίας των γραμμοσειρών, και για αυτό οι ρυθμοί αυτοί χαρακτηρίζονται ως *ρυθμοί διαρροής* (*leaky modes*) [2]. Εξάλλου, για τις συνήθεις γραμμοσειρές, οι οποίες χρησιμοποιούνται στην πράξη, οι τιμές των β_e/k_0 και β_o/k_0 προσεγγίζουν τις τιμές των N_e/k_0 και N_o/k_0 των βασικών ρυθμών, ενώ οι τιμές των $|\alpha_e/k_0|$ και $|\alpha_o/k_0|$ είναι της τάξης του 10^{-3} [25].

Σύμφωνα με τη σχετική ανάλυση της παραγράφου 3.5, οι μιγαδικές σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων ρυθμών στη διάταξη του συμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών είναι εκείνες οι τιμές του γ , για τις οποίες το σύστημα (3.98) έχει μη τετριμμένη λύση, δηλαδή ο πίνακας του συστήματος είναι ιδιάζων. Επομένως, οι κανονικοποιημένες σταθερές διάδοσης είναι οι ρίζες γ/k_0 της ορίζουσας του πίνακα του συστήματος (3.98).

Η μέθοδος που αναλύθηκε στις παραγράφους 3.3-3.7 έχει εφαρμοστεί σε δύο διαφορετικές διατάξεις, οι οποίες αποτελούνται από κυματοδηγούς γραμμοσειρών: (i) ένα συζεύκτη γραμμοσειρών με τις γραμμοσειρές στην κάτω πλάκα, και (ii) ένα συζεύκτη γραμμοσειρών με γραμμοσειρές και στις δύο πλάκες. Τα συμπεράσματα, τα οποία εξάγονται παρακάτω από την επεξεργασία των αριθμητικών αποτελεσμάτων, μπορεί να αξιοποιηθούν για εντοπισμό τεχνικών χαρακτηριστικών και προδιαγραφών κατάλληλων διατάξεων συζευκτών γραμμοσειρών, οι οποίες εξυπηρετούν συγκεκριμένες τεχνολογικές εφαρμογές.

5.1.1. Συζεύκτης με γραμμοσειρές στον κυματοδηγό 1

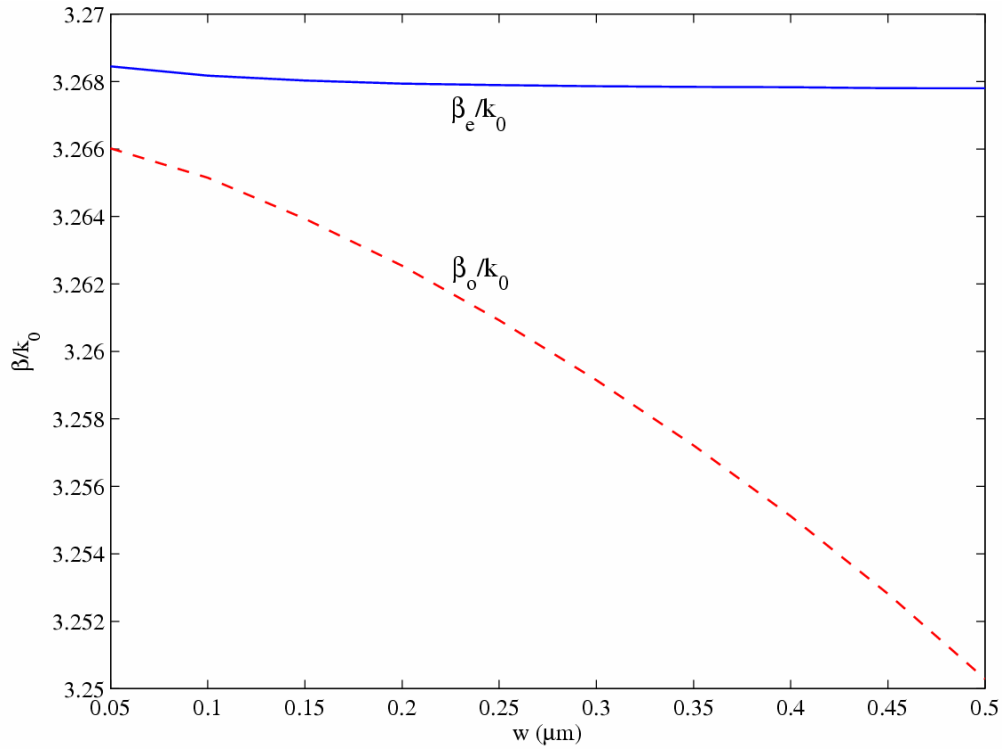
Τα επόμενα αριθμητικά αποτελέσματα αναφέρονται στη διάταξη συμμετρικού συζεύκτη δύο παραλλήλων πλακών παρουσία γραμμοσειρών στην κάτω πλάκα (βλ. Σχήμα 3.1 υπό την απουσία των γραμμοσειρών του κυματοδηγού 2) με τις σταθερές τιμές $n_0=3.2$, $n_1=3.3$, $d=0.5\mu\text{m}$, $\Lambda=10.75\mu\text{m}$ και $q=1$ των παραμέτρων. Οι ρυθμοί αυτού του συζεύκτη δεν είναι πλέον άρτιοι και περιττοί (όπως του αντιστοίχου χωρίς γραμμοσειρές). Παρόλα αυτά, συνεχίζουμε να συμβολίζουμε με $\alpha_e+j\beta_e$ and $\alpha_o+j\beta_o$ τις σταθερές διάδοσης των ρυθμών του συζεύκτη για να δηλώσουμε την εξέλιξη των αντιστοίχων ρυθμών του χωρίς γραμμοσειρές συζεύκτη.

Οι μεταβολές των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών εξαρτώνται κατά ουσιαστικό τρόπο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμοσειρών w , d_i , l_i , Λ , το δείκτη διάθλασής της n_2 και την απόσταση διαχωρισμού h των δύο συζευγμένων κυματοδηγών. Έτσι, διακρίνουμε τις περιπτώσεις.

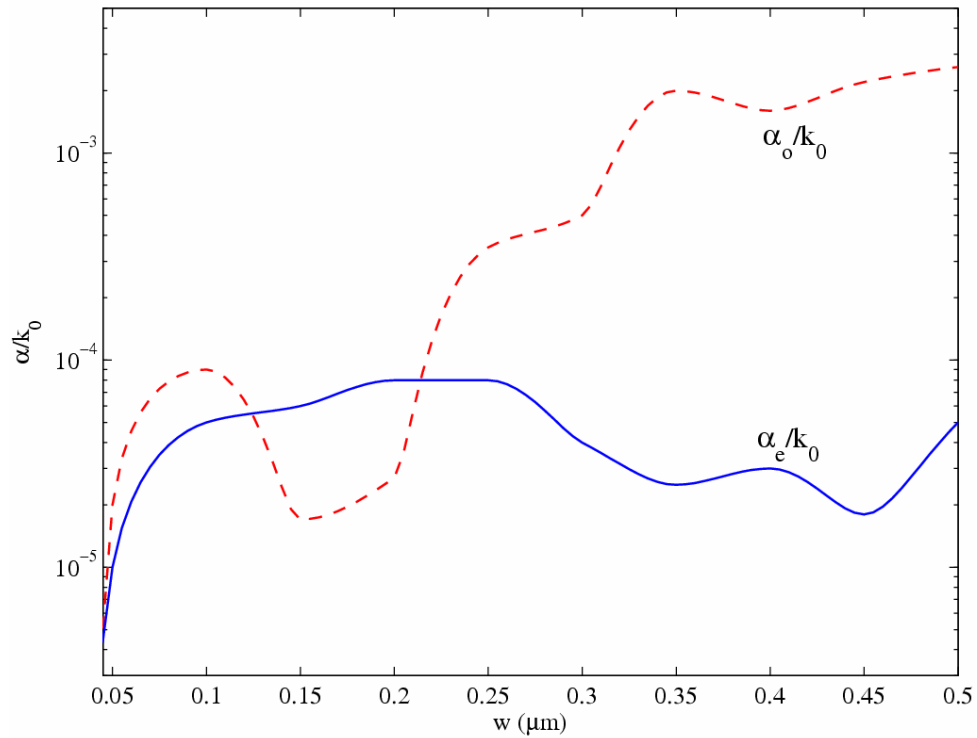
Μεταβολή των σταθερών διάδοσης ως προς το πάχος w των γραμμοσειρών

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε συζεύκτη γραμμοσειρών με τις σταθερές τιμές $n_2=3.2$, $h=2\mu\text{m}$, $\lambda=1.5\mu\text{m}$ και $d_1=l_1=\Lambda/2$ των παραμέτρων. Το Σχήμα 5.1(α) απεικονίζει τα φανταστικά μέρη β_e/k_0 και β_o/k_0 των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών και το Σχήμα 5.1(β) τα αντίστοιχα πραγματικά μέρη α_e/k_0 και α_o/k_0 σαν συνάρτηση του πάχους w των γραμμοσειρών.

Τα φανταστικά μέρη β_e/k_0 και β_o/k_0 προσεγγίζουν τις τιμές $N_e/k_0=3.2689$ και $N_o/k_0=3.2666$ των άρτιων και περιττών βασικών ρυθμών (του αντίστοιχου χωρίς γραμμοσειρές συζεύκτη) καθώς το w προσεγγίζει το 0. Περαιτέρω, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1(α), οι αποστάσεις $|\beta_e-N_e|/k_0$ και $|\beta_o-N_o|/k_0$ μεταξύ των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών από τις σταθερές διάδοσης των βασικών ρυθμών αυξάνονται με το w , δηλαδή η επίδραση των γραμμοσειρών γίνεται ισχυρότερη καθώς αυξάνεται το w . Επίσης, η απόσταση $\Delta\beta=|\beta_e-\beta_o|/k_0$ των κανονικοποιημένων φανταστικών μερών των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών αυξάνεται με το w (ενώ η ελάχιστη απόσταση $|\beta_e-\beta_o|/k_0=0.0023$ αντιστοιχεί σε πάχος $w=0$, δηλαδή στη διάταξη του συμμετρικού συζεύκτη χωρίς γραμμοσειρές).



(α)



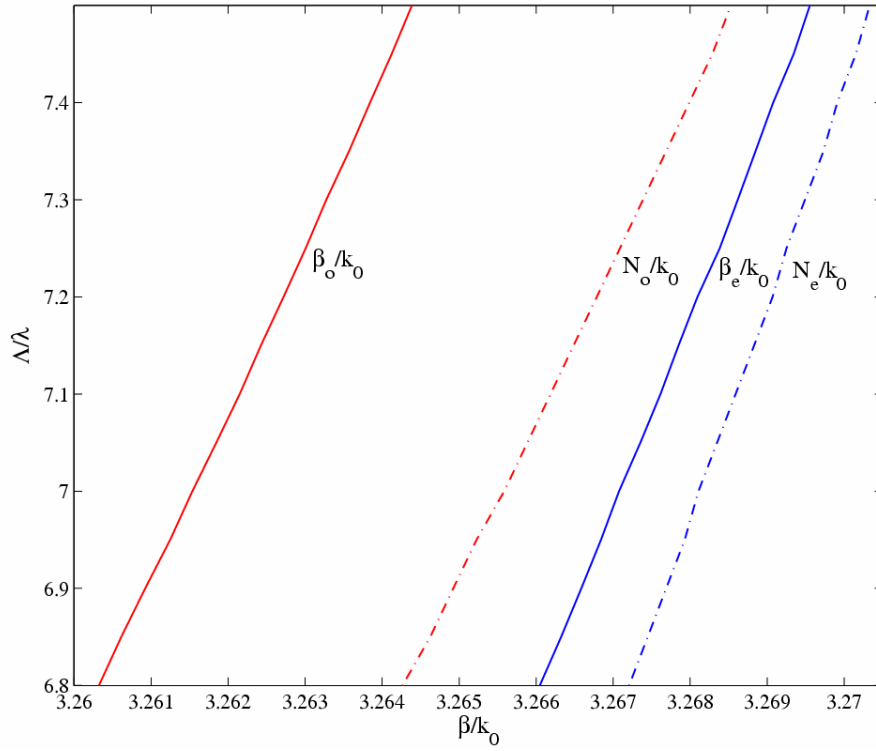
(β)

Σχήμα 5.1 (α) Φανταστικά μέρη β_e/k_0 , β_o/k_0 και (β) πραγματικά μέρη α_e/k_0 , α_o/k_0 των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμωσειρών συναρτήσει του πάχους w των γραμμωσειρών, για $n_2=3.2$, $h=2\mu\text{m}$, $\lambda=1.5\mu\text{m}$ και $d_1=l_1=\Lambda/2$.

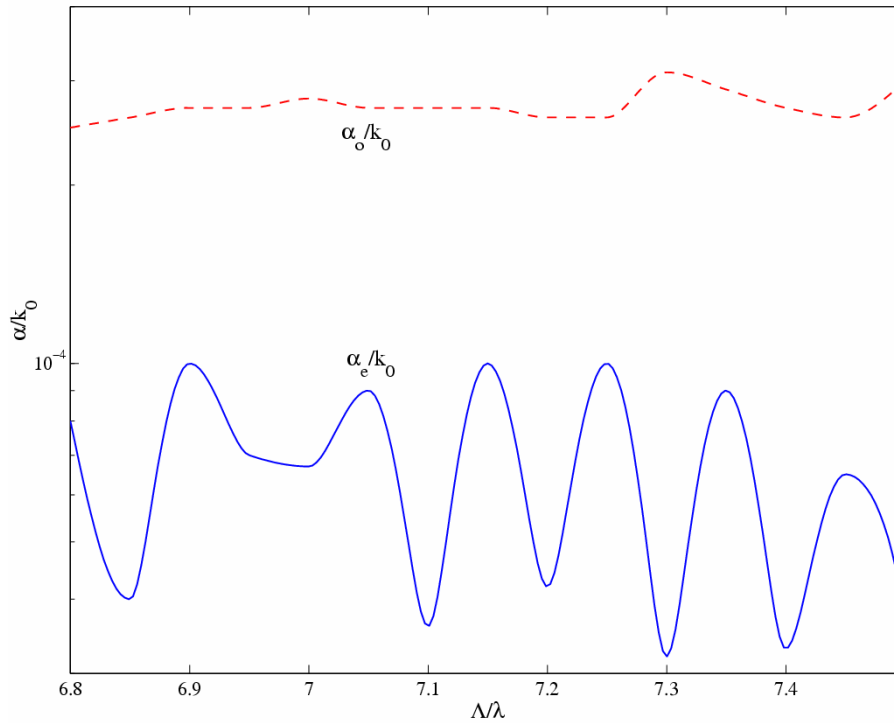
Επιπροσθέτως, αναφορικά με τις καμπύλες του Σχήματος 5.1(β), ο παράγοντας εξασθένησης α_e/k_0 έχει δύο τοπικά ελάχιστα στα πάχη γραμμοσειρών 0.04 και 0.175 μm , ενώ ο α_o/k_0 είναι σχετικά αμετάβλητος (insensitive) με το πάχος των γραμμοσειρών. Είναι γνωστό ότι [27], τα πάχη των γραμμοσειρών, που δίνουν την πιο αποδοτική σύζευξη (*best coupling efficiency*), βρίσκονται σε εκείνα τα διαστήματα του w , όπου η διαφορά $\Delta\alpha=|\alpha_e-\alpha_o|/k_0$ έχει ελάχιστη τιμή. Εξάλλου, σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα η εξασθένιση λαμβάνει τις μικρότερες τιμές της. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, αυτά τα καλύτερα διαστήματα εμφανίζονται κοντά στα $w=0.04$ και $w=0.175$ μm ($\Delta\alpha=0$ για $w=0.04, 0.125, 0.225$ μm). Όμως, το $\Delta\beta$ ελαχιστοποιείται κοντά στο $w=0$, οδηγώντας σε μικρή αποδοτικότητα σύζευξης, εξαιτίας των σχετικά μεγάλων μηκών σύζευξης. Έτσι, η καλύτερη αποδοτικότητα σύζευξης αναμένεται να λάβει χώρα κοντά στο $w=0.175$ μm . Τελικά, για $w>0.225$ μm , η απόσταση $\Delta\alpha$ αυξάνεται και η αποδοτικότητα σύζευξης μειώνεται με το w .

Μεταβολή των σταθερών διάδοσης ως προς τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά d_i, l_i, Λ

Στην προκειμένη περίπτωση, θεωρούμε συζεύκτη γραμμοσειρών με τις σταθερές τιμές $h=2\mu\text{m}$ και $w=0.2\mu\text{m}$ των παραμέτρων. Οι καμπύλες διασποράς β_e/k_0 και β_o/k_0 των ρυθμών γραμμοσειρών και N_e/k_0 και N_o/k_0 των βασικών ρυθμών ως προς το κανονικοποιημένο μήκος κύματος Λ/λ για $d_1=l_1=\Lambda/2$ και $n_2=3.2$ απεικονίζονται στο Σχήμα 5.2(α). Οι αντίστοιχες καμπύλες εξασθένησης α_e/k_0 και α_o/k_0 των ρυθμών γραμμοσειρών απεικονίζονται στο Σχήμα 5.2(β). Οι καμπύλες διασποράς N_e/k_0 και N_o/k_0 υπό την παρουσία των γραμμοσειρών μετατοπίζονται αριστερά (εξελιίσσονται) στις καμπύλες β_e/k_0 και β_o/k_0 . Επίσης, για κάθε τιμή του Λ/λ , η απόσταση $|\beta_e-\beta_o|/k_0$ είναι αρκετά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη απόσταση $|N_e-N_o|/k_0$. Επιπρόσθετα, οι τιμές των σταθερών εξασθένησης είναι της τάξης 10^{-4} , ενώ οι καμπύλες των α_e/k_0 και α_o/k_0 δεν τέμνονται.



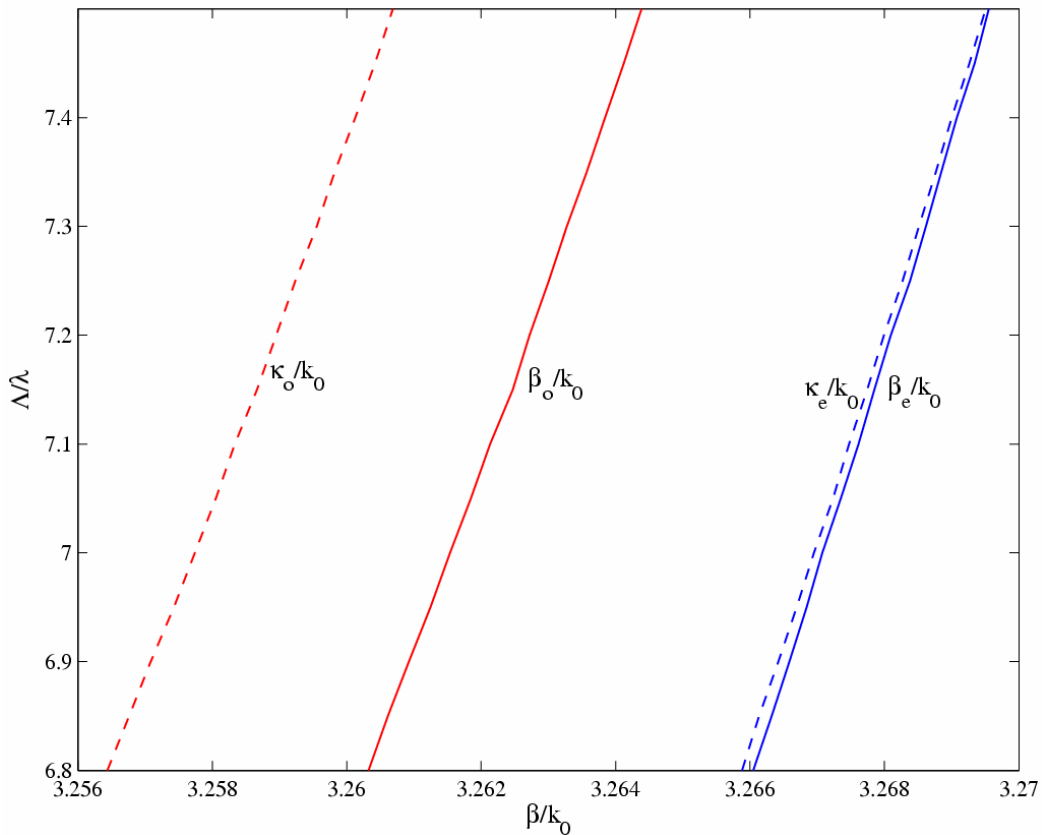
(α)



(β)

Σχήμα 5.2 (α) β_e/k_0 , β_o/k_0 (συνεχείς γραμμές) και N_e/k_0 , N_o/k_0 (διακεκομμένες γραμμές) και (β) α_e/k_0 , α_o/k_0 συναρτήσεις του κανονικοποιημένου μήκους κύματος Λ/λ για $n_2=3.2$, $h=2\mu\text{m}$, $w=0.2\mu\text{m}$ και $d_1=l_1=\Lambda/2$.

Το Σχήμα 5.3 απεικονίζει τις καμπύλες διασποράς κ_e/k_0 και κ_o/k_0 ενός μη περιοδικού συζεύκτη με $d_1=0$ και $l_1=\Lambda$ (δηλαδή, όπου το στρώμα των γραμμοσειρών είναι ομογενές με δείκτη διάθλασης n_2), καθώς επίσης και τις καμπύλες διασποράς β_e/k_0 και β_o/k_0 ενός περιοδικού συζεύκτη γραμμοσειρών με $d_1=l_1=\Lambda/2$ συναρτήσεως του κανονικοποιημένου μήκους κύματος Λ/λ για $n_2=3.2$. Οι καμπύλες διασποράς κ_e/k_0 και κ_o/k_0 του μη περιοδικού συζεύκτη χωρίς γραμμοσειρές, υπό την παρουσία των γραμμοσειρών, μετατοπίζονται δεξιά στις καμπύλες β_e/k_0 και β_o/k_0 του περιοδικού συζεύκτη. Επίσης, για κάθε σταθεροποιημένο μήκος κύματος Λ/λ , οι αρχικές αποστάσεις $|\kappa_e-\kappa_o|/k_0$ των ρυθμών του μη περιοδικού συζεύκτη είναι αρκετά μεγαλύτερες από τις αποστάσεις $|\beta_e-\beta_o|/k_0$ των ρυθμών γραμμοσειρών του περιοδικού συζεύκτη (μετά την εισαγωγή περιοδικότητας στη διάταξη).



Σχήμα 5.3 Καμπύλες διασποράς β_e/k_0 , β_o/k_0 (συνεχείς γραμμές) του περιοδικού συζεύκτη με $d_1=l_1=\Lambda/2$ και κ_e/k_0 , κ_o/k_0 (διακεκομμένες γραμμές) του μη περιοδικού συζεύκτη με $d_1=0$ και $l_1=\Lambda$ συναρτήσεως του μήκους κύματος Λ/λ , για $n_2=3.2$, $h=2\mu\text{m}$, $w=0.2\mu\text{m}$.

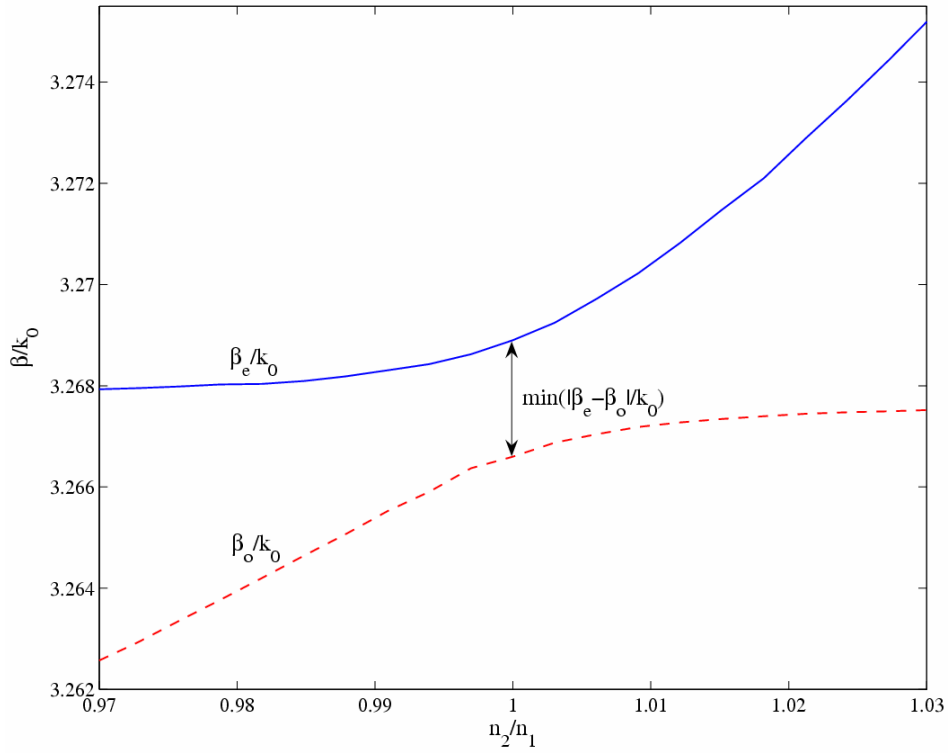
Μεταβολή των σταθερών διάδοσης ως προς το δείκτη διάθλασης n_2 των γραμμοσειρών

Στο εδάφιο αυτό εξετάζεται η επίδραση του δείκτη διάθλασης n_2 των γραμμοσειρών στις μεταβολές των σταθερών διάδοσης των κυματοδηγούμενων ρυθμών συζεύκτη γραμμοσειρών με $h=2\mu\text{m}$, $\lambda=1.5\mu\text{m}$, $w=0.2\mu\text{m}$ και $d_1=l_1=\Lambda/2$. Στο Σχήμα 5.4(α) απεικονίζονται τα φανταστικά μέρη β_e/k_0 και β_o/k_0 των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών και στο Σχήμα 5.4(β) τα αντίστοιχα πραγματικά μέρη α_e/k_0 και α_o/k_0 συναρτήσει του κανονικοποιημένου δείκτη διάθλασης n_2/n_1 των γραμμοσειρών.

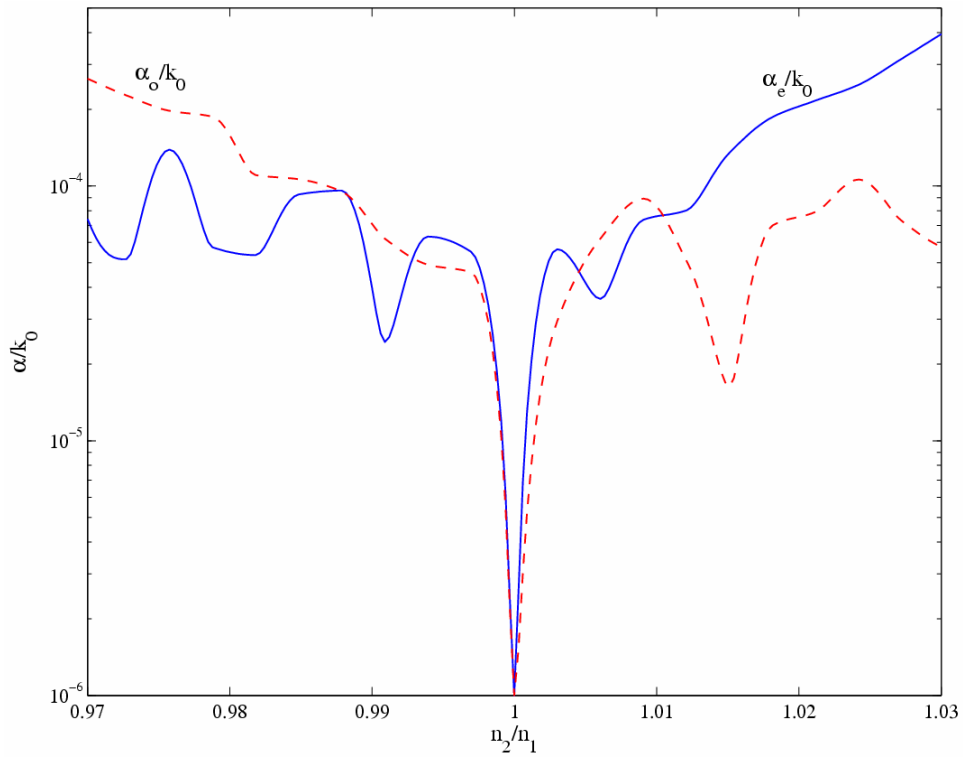
Η ελαχιστοποίηση της απόστασης $\Delta\beta$ των δύο ρυθμών, η οποία καθορίζει τον πλήρη συγχρονισμό του συζεύκτη, επιτυγχάνεται για $n_2/n_1=1$, οπότε η διάταξη εκφυλίζεται σε συζεύκτη χωρίς γραμμοσειρές. Εξάλλου, η απόσταση $\Delta\beta$ των δύο ρυθμών αυξάνει με το λόγο $|n_2-n_1|/n_1$, δηλαδή ο συζεύκτης γίνεται όλο και περισσότερο ασύγχρονος. Επίσης, το Σχήμα 5.4(β) δείχνει ότι για $n_2/n_1<1$, η εξασθένηση α_o/k_0 λαμβάνει μεγάλες τιμές και η α_e/k_0 δεν παρουσιάζει μεγάλες μεταβολές, ενώ για $n_2/n_1>1$ ισχύουν οι αντίστροφοι ισχυρισμοί. Αφού το $n_2/n_1=1$ αντιστοιχεί στον χωρίς γραμμοσειρές συζεύκτη, αποτελούμενο από μέσα χωρίς απώλειες, στην περιοχή του $n_2/n_1=1$, οι α_e/k_0 και α_o/k_0 προσεγγίζουν το μηδέν.

Στη συνέχεια, στο Σχήμα 5.5(α) απεικονίζονται οι καμπύλες διασποράς β_e/k_0 and β_o/k_0 των ρυθμών γραμμοσειρών συναρτήσει του κανονικοποιημένου μήκους κύματος Λ/λ για ισχυρή (strong) διαταραχή ($n_2=3.4$) και ασθενή (weak) διαταραχή ($n_2=3.2$) με $d_1=l_1=\Lambda/2$. Επίσης, στο Σχήμα 5.5(β) απεικονίζονται οι αντίστοιχες καμπύλες εξασθένησης α_e/k_0 και α_o/k_0 .

Οι καμπύλες διασποράς β_e/k_0 and β_o/k_0 μετατοπίζονται προς τα δεξιά καθώς αυξάνεται ο δείκτης διάθλασης n_2 (δηλαδή όσο οι γραμμοσειρές επιφέρουν ισχυρότερη διαταραχή στο ομογενές πρόβλημα). Επιπλέον, οι αποστάσεις $|\beta_e-\beta_o|/k_0$ των ρυθμών γραμμοσειρών αυξάνονται αισθητά με το δείκτη διάθλασης n_2 των γραμμοσειρών. Οι σταθερές εξασθένησης α_o^s/k_0 και α_o^w/k_0 είναι πολύ κοντά σε τιμή, ενώ η α_e^s/k_0 είναι πολύ μεγαλύτερη από την α_e^w/k_0 , εξαιτίας του ότι οι απώλειες ακτινοβολίας που προκαλούνται από την περίθλαση των γραμμοσειρών αυξάνονται με το n_2 .

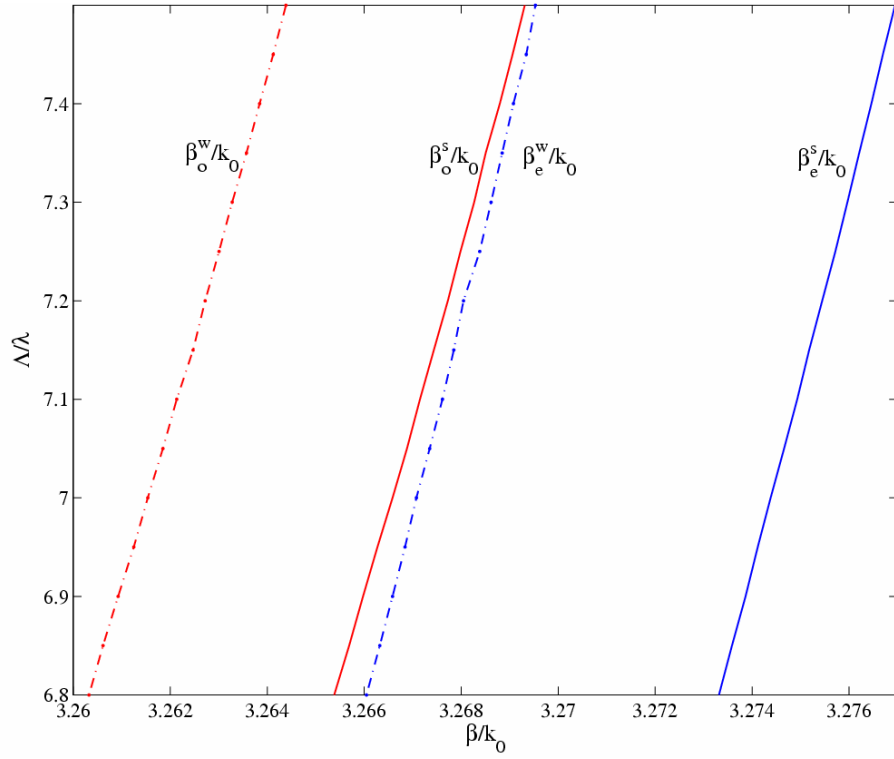


(α)

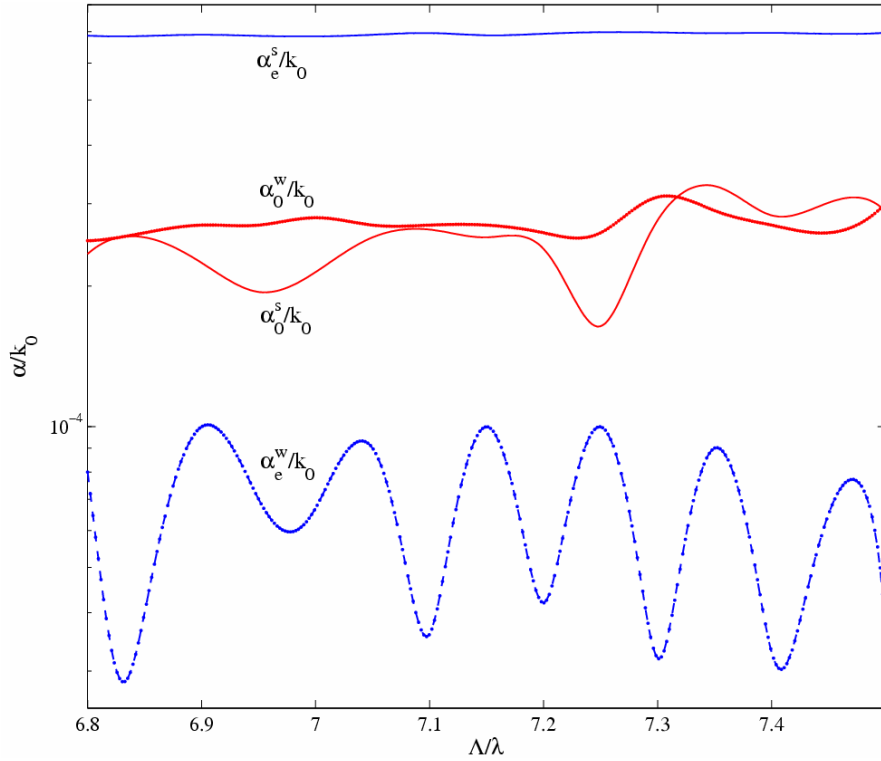


(β)

Σχήμα 5.4 (α) β_e/k_0 , β_o/k_0 και (β) α_e/k_0 , α_o/k_0 συναρτήσεις του κανονικοποιημένου δείκτη διάθλασης n_2/n_1 των γραμμοσειρών για $w=0.2\mu\text{m}$, $h=2\mu\text{m}$, $\lambda=1.5\mu\text{m}$ and $d_1=l_1=\Lambda/2$.



(α)



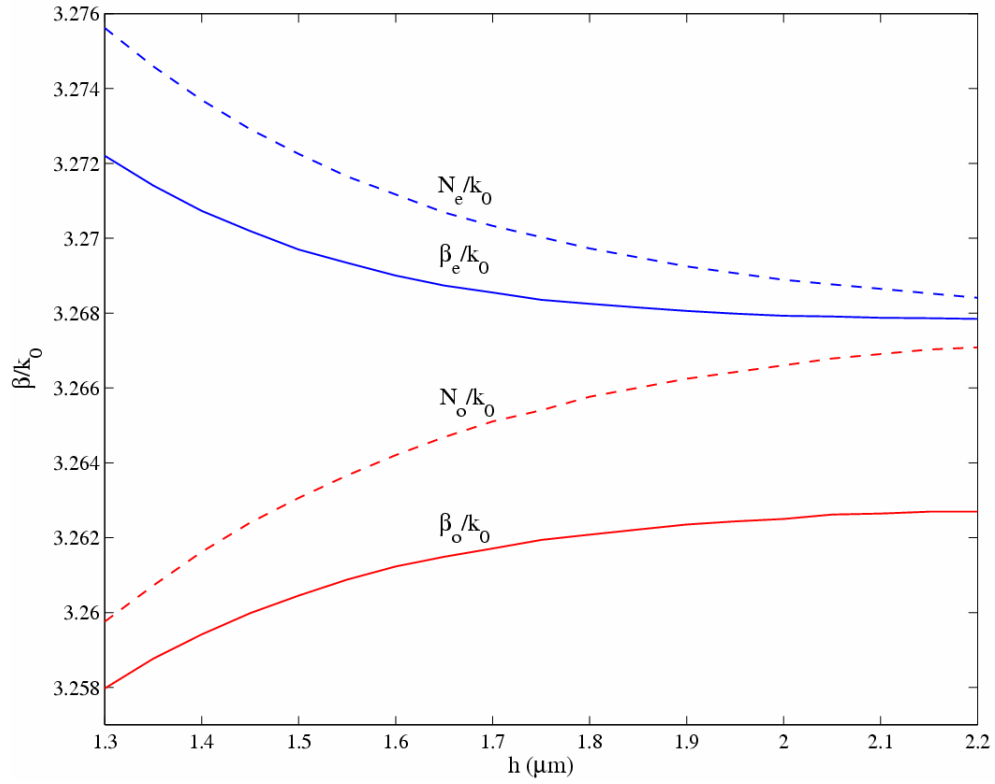
(β)

Σχήμα 5.5 (α) $\beta_e^s/k_0, \beta_o^s/k_0$ (συνεχείς) και $\beta_e^w/k_0, \beta_o^w/k_0$ (διακεκομμένες) και (β) $\alpha_e^s/k_0, \alpha_o^s/k_0$ (συνεχείς) και $\alpha_e^w/k_0, \alpha_o^w/k_0$ (διακεκομμένες) συναρτήσεις του Δ/λ , για $n_2=3.2$ (w : ασθενής διαταραχή) και $n_2=3.4$ (s : ισχυρή διαταραχή), $h=2\mu\text{m}$, $w=0.2\mu\text{m}$ και $d_1=l_1=\Lambda/2$.

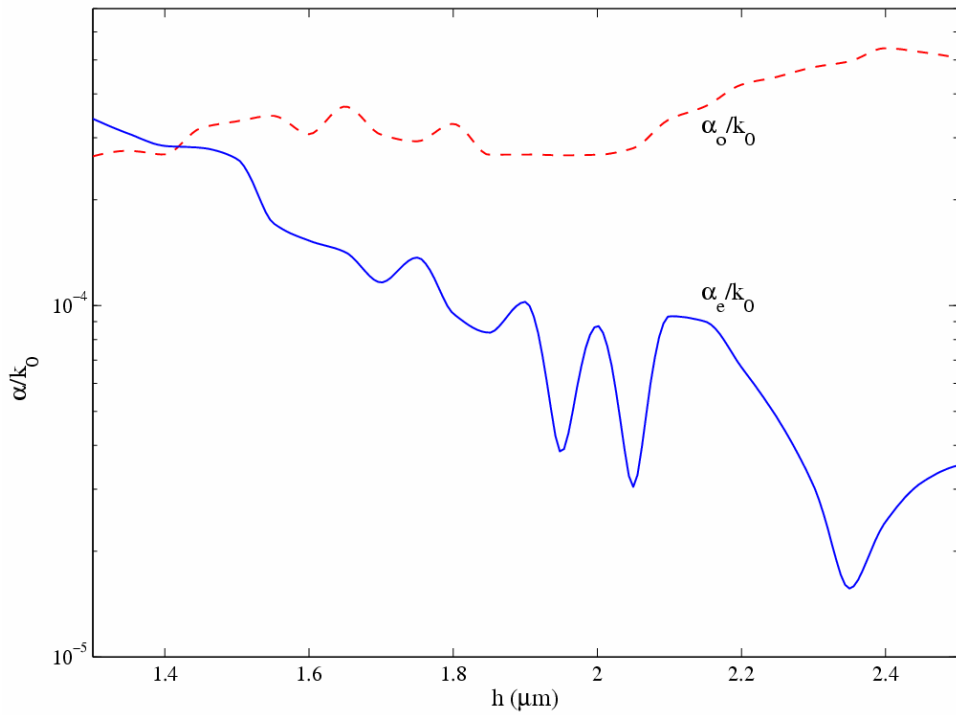
Σύμφωνα με τα αναφερόμενα στην παράγραφο 2.3, η σύζευξη της ηλεκτρομαγνητικής ισχύος στη διάταξη του συζεύκτη γραμμοσειρών υπαγορεύεται ουσιαστικά από δύο διακριτές φυσικές διαδικασίες: (i) τη φυσική σύζευξη μεταξύ των δύο κυματοδηγών (όπως και στην περίπτωση του συζεύκτη χωρίς γραμμοσειρές) και (ii) την περιοδική σύζευξη, η οποία οφείλεται στις διαταραχές που επιφέρουν οι γραμμοσειρές και απεικονίζεται στα Σχήματα 5.1 έως 5.5. Για τη μελέτη της φυσικής σύζευξης θεωρούμε συζεύκτη γραμμοσειρών με $n_2=3.2$, $\lambda=1.5\mu\text{m}$, $w=0.2\mu\text{m}$, και $d_1=l_1=\lambda/2$, του οποίου οι καμπύλες διασποράς β_e/k_0 και β_o/k_0 των ρυθμών γραμμοσειρών και N_e/k_0 και N_o/k_0 των βασικών ρυθμών ως προς την απόσταση διαχωρισμού h των δύο κυματοδηγών απεικονίζονται στο Σχήμα 5.6(α). Επίσης στο Σχήμα 5.6(β) απεικονίζονται οι αντίστοιχοι παράγοντες εξασθένησης α_e/k_0 και α_o/k_0 .

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.6(α), οι αποστάσεις $|\beta_e-\beta_o|/k_0$ και $|N_e-N_o|/k_0$ των ρυθμών γραμμοσειρών και των βασικών ρυθμών είναι περίπου ίσες για αρκετά μικρές τιμές της απόστασης h . Επιπλέον, η απόσταση $|N_e-N_o|/k_0$ είναι περίπου μηδέν για αρκετά μεγάλες τιμές της απόστασης h , διότι καθώς η απόσταση h αυξάνεται, οι σταθερές διάδοσης των δύο ρυθμών προσεγγίζουν την κοινή σταθερά διάδοσης των δύο κυματοδηγών, όταν αυτά βρίσκονται σε απομόνωση. Εξάλλου, για αρκετά μεγάλες τιμές της h η απόσταση $|\beta_e-\beta_o|/k_0$ σταθεροποιείται κοντά στην απόλυτη τιμή 5×10^{-3} της διαφοράς των σταθερών διάδοσης των δύο κυματοδηγών, όταν αυτοί βρεθούν σε απομόνωση. Αυτή η απόλυτη τιμή αναμένεται να είναι διάφορη του μηδενός διότι ο κυματοδηγός 1 περιέχει τις γραμμοσειρές ενώ ο κυματοδηγός 2 όχι. Ειδικότερα, για μεγάλες τιμές της h η σταθερά διάδοσης β_e/k_0 προσεγγίζει τη άρτια σταθερά διάδοσης 3.26773 του απομονωμένου κυματοδηγού, ενώ η σταθερά διάδοσης β_o/k_0 προσεγγίζει τη σταθερά διάδοσης 3.26269 του απομονωμένου κυματοδηγού με περιοδικά χαραγμένες γραμμοσειρές του (βλ. Σχήμα 3.4).

Περαιτέρω, το Σχήμα 5.6(β) δείχνει ότι η απόσταση $\Delta\alpha$ είναι πολύ μικρή για h κοντά στα $1.42\mu\text{m}$. Εξάλλου, για $h > 1.42\mu\text{m}$, η $\Delta\alpha$ αυξάνεται με την απόσταση h . Επίσης, η σταθερά α_o/k_0 προσεγγίζει την κανονικοποιημένη σταθερά εξασθένησης 0.005 του απομονωμένου κυματοδηγού γραμμοσειρών για αρκετά μεγάλα h , ενώ η α_e/k_0 προσεγγίζει το μηδέν, δηλαδή τη σταθερά εξασθένησης του απομονωμένου (χωρίς γραμμοσειρές) κυματοδηγού.



(α)



(β)

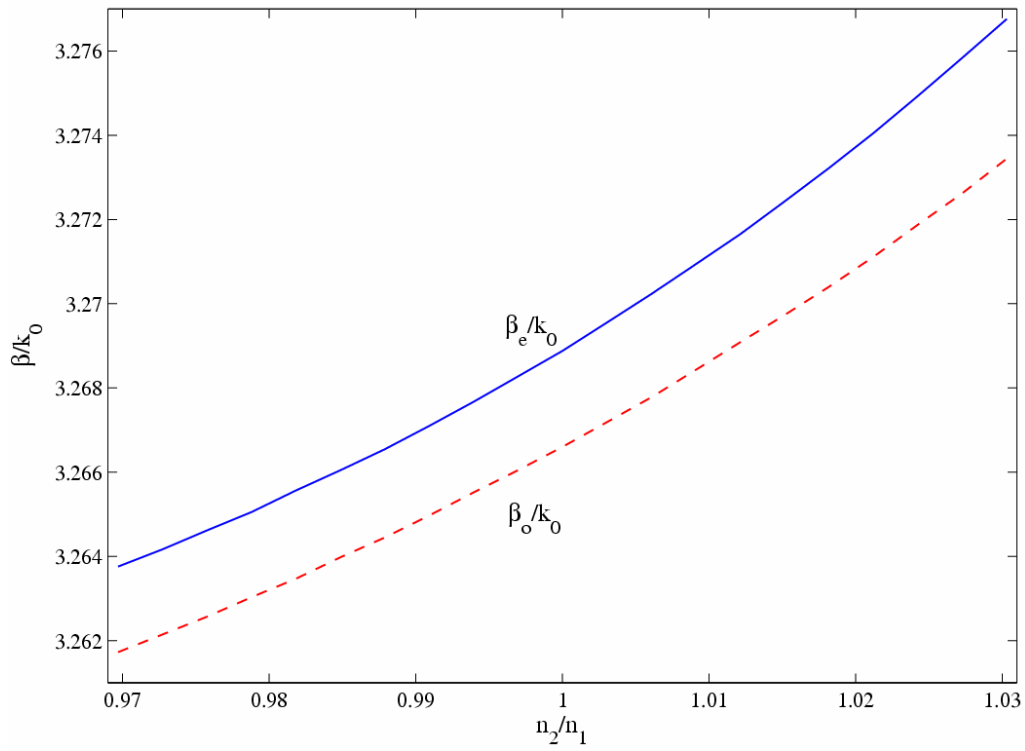
Σχήμα 5.6 (α) $\beta_e/k_0, \beta_o/k_0$ (συνεχείς γραμμές) και $N_e/k_0, N_o/k_0$ (διακεκομμένες γραμμές) και (β) $\alpha_e/k_0, \alpha_o/k_0$ συναρτήσει της απόστασης διαχωρισμού h για $w=0.2\mu\text{m}$, $n_2=3.2$, $\lambda=1.5\mu\text{m}$ και $d_1=l_1=\Lambda/2$.

5.1.2. Συζεύκτης με γραμμοσειρές και στους δύο κυματοδηγούς

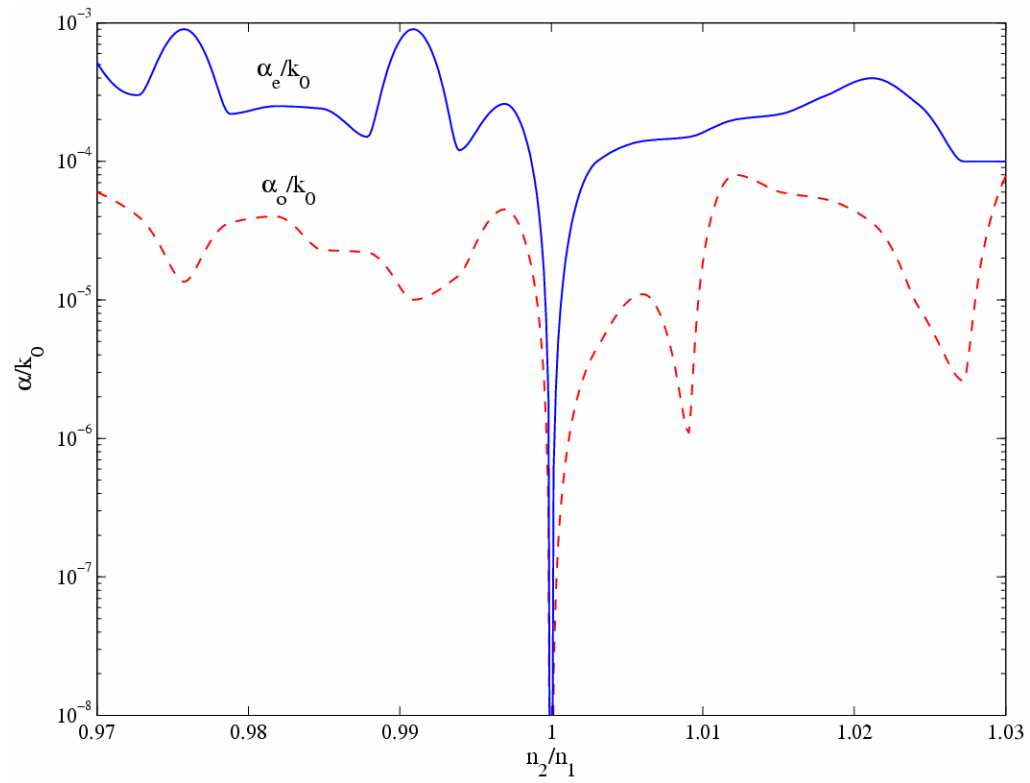
Θεωρούμε συμμετρικό συζεύκτη γραμμοσειρών με γραμμοσειρές χαραγμένες και στους δύο κυματοδηγούς (βλ. Σχήμα 3.1) και $n_0=3.2$, $n_1=3.3$, $d=0.5\mu\text{m}$, $\Lambda=10.75\mu\text{m}$, $h=2\mu\text{m}$, $w=0.2\mu\text{m}$. Οι κανονικοποιημένες σταθερές διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών είναι οι ρίζες της ορίζουσας του γραμμικού συστήματος (3.98). Τα φανταστικά μέρη β_e/k_0 , β_o/k_0 και τα πραγματικά μέρη α_e/k_0 , α_o/k_0 των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών συναρτήσει του κανονικοποιημένου δείκτη διάθλασης των γραμμοσειρών n_2/n_1 απεικονίζονται στα Σχήματα 5.7(α) και 5.7(β). Ο Πίνακας 5.1 απεικονίζει την αντίστοιχη μεταβολή της απόστασης $\Delta\beta=|\beta_e-\beta_o|/k_0$. Μία συγκριτική εξέταση των Σχημάτων 5.4(α) και 5.7(α) δείχνει ότι η απόσταση $\Delta\beta$ για το συζεύκτη του εδαφίου 5.1.1 αυξάνεται με την $|n_2-n_1|/n_1$, ενώ η $\Delta\beta$ για το συζεύκτη του εδαφίου 5.1.2 δεν παρουσιάζει μεγάλες μεταβολές με την $|n_2-n_1|/n_1$. Επίσης, ο Πίνακας 5.1 δείχνει ότι η απόσταση $\Delta\beta$ των ρυθμών γραμμοσειρών είναι μικρότερη από την $|N_e-N_o|/k_0$ των βασικών ρυθμών για $n_2 < n_1$ και μεγαλύτερη από την $|N_e-N_o|/k_0$ για $n_2 > n_1$. Αυτό σημαίνει ότι ο δείκτης διάθλασης των γραμμοσειρών μπορεί να δράσει σαν ένας μηχανισμός ελέγχου, κάνοντας τον συζεύκτη περισσότερο ή λιγότερο σύγχρονο από εκείνον που αντιστοιχεί στην αδιατάρακτη (χωρίς γραμμοσειρές) διάταξη. Επιπλέον, οι α_e/k_0 και α_o/k_0 προσεγγίζουν το μηδέν κοντά στο $n_2/n_1=1$ (το ίδιο φαινόμενο είχε παρατηρηθεί στο Σχήμα 5.4(β)) και η απόσταση $\Delta\alpha$ δεν παρουσιάζει μεγάλες μεταβολές με το λόγο n_2/n_1 .

n_2/n_1	$ \beta_e-\beta_o /k_0$
0.97	2.04×10^{-3}
0.982	2.1×10^{-3}
0.994	2.16×10^{-3}
1	2.28×10^{-3}
1.006	2.46×10^{-3}
1.018	2.82×10^{-3}
1.03	3.31×10^{-3}

Πίνακας 5.1 Απόσταση των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών συναρτήσει του n_2/n_1 για $\lambda=1.5\mu\text{m}$.



(α)



(β)

Σχήμα 5.7 (α) β_e/k_0 , β_o/k_0 και (β) α_e/k_0 , α_o/k_0 συναρτήσεσι του n_2/n_1 για τον συζεύκτη με γραμμοσειρές και στους δύο κυματοδηγούς με $q=1$, $d_1=l_1=\Lambda/2$ και $\lambda=1.5\mu\text{m}$.

Οι Πίνακες 5.2 και 5.3 δείχνουν την εξάρτηση των σταθερών διάδοσης από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά ($d_i, l_i, i=1, \dots, q$) των γραμμοσειρών κατά μήκος του z -άξονα. Η συνολική επιφάνεια της εγκάρσιας διατομής των γραμμοσειρών, που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, \Lambda]$, αποτελεί το βασικό παράγοντα, ο οποίος καθορίζει τις τιμές των σταθερών διάδοσης. Εξάλλου, οι σταθερές διάδοσης είναι πρακτικά ανεξάρτητες από το συνολικό αριθμό q των ορθογωνίων, που αποτελούν την βασική επανάληψη των γραμμοσειρών.

λ (μm)	β_e/k_0				
	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
1.43	3.27033	3.26766	3.26611	3.26597	3.26125
1.47	3.26949	3.26676	3.26518	3.26506	3.26019
1.53	3.26835	3.26557	3.26399	3.26385	3.25884
1.58	3.26721	3.26447	3.26274	3.26265	3.25746

Πίνακας 5.2 β_e/k_0 ως προς λ για τις περιπτώσεις ($n_2=3.2$): (i) $q=0$ (συζεύκτης χωρίς γραμμοσειρές), (ii) $q=1, d_1=\Lambda/4, l_1=\Lambda/4$, (iii) $q=2, d_1=\Lambda/10, d_2=\Lambda/10, l_1=\Lambda/10, l_2=3\Lambda/10$, (iv) $q=8, d_i=i \cdot \Lambda/10, l_i=\Lambda/20, i=1, \dots, 8$, (v) $q=1, d_1=0, l_1=\Lambda$ (μη περιοδικός συζεύκτης).

λ (μm)	β_o/k_0				
	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
1.43	3.26853	3.26588	3.26457	3.26462	3.26024
1.47	3.26739	3.26477	3.26338	3.26346	3.25903
1.53	3.26589	3.26324	3.26188	3.26192	3.25743
1.58	3.26426	3.26162	3.26030	3.26027	3.25571

Πίνακας 5.3 β_o/k_0 ως προς λ για τις πέντε περιπτώσεις του Πίνακα 5.2.

5.2. Ασυμμετρικοί Συζεύκτες

Η ανάλυση των φαινομένων διάδοσης και σύζευξης στη διάταξη του ασυμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών και η σύγκριση της αναπτυχθείσας μεθόδου με εκείνη της Θεωρίας Συζευγμένων Ρυθμών προϋποθέτουν αρχικά την εισαγωγή των ασύζευκτων (uncoupled) ρυθμών, οι οποίοι διαδίδονται στον αντίστοιχο χωρίς γραμμοσειρές συζεύκτη και στη συνέχεια τη θεώρηση της παρουσίας των γραμμοσειρών με σκοπό τη μελέτη της εξέλιξης των ασύζευκτων ρυθμών στους συζευγμένους. Οι τεχνικές που βασίζονται στη Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών παρέχουν προσεγγιστικές εκφράσεις των σταθερών διάδοσης του συζεύκτη γραμμοσειρών μέσω των σταθερών του συζεύκτη χωρίς γραμμοσειρές. Αυτές οι εκφράσεις ισχύουν υπό ορισμένους περιορισμούς ως προς τη γεωμετρία και τα υλικά του συζεύκτη (βλ. επίσης τη σχετική συζήτηση της [18], Section 4). Εξάλλου, η παρούσα ημιανλυτική μέθοδος εφαρμόζεται για τον υπολογισμό των συζευγμένων ρυθμών στο συζεύκτη γραμμοσειρών χωρίς να εμπλέκει τους ασύζευκτους ρυθμούς του συζεύκτη χωρίς γραμμοσειρές. Έτσι, αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται χωρίς τους προαναφερόμενους περιορισμούς και είναι πολύ πιο ακριβής από τη Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών.

Προς αυτή την κατεύθυνση, αρχικά θεωρούμε τους ρυθμούς του μη περιοδικού συζεύκτη, ο οποίος προκύπτει από το συζεύκτη γραμμοσειρών του Σχήματος 4.1 με αντικατάσταση των στρωμάτων των γραμμοσειρών από δύο ομογενή στρώματα με πάχη w_1 , w_2 και μέσους δείκτες διάθλασης

$$n_{h,1} = \frac{n_7 \sum_{i=1}^l s_i + n_4 \sum_{i=1}^l a_i}{\Lambda}, \quad n_{h,2} = \frac{n_6 \sum_{i=1}^l l_i + n_2 \sum_{i=1}^l b_i}{\Lambda}$$

Οι ρυθμοί της διάταξης του μη περιοδικού συζεύκτη υπολογίζονται με ακρίβεια λύνοντας το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα συνοριακών τιμών και οι υπολογισμοί δηλώνουν ότι εμφανίζονται σε ζεύγη ονομαζόμενα *σύνθετοι ρυθμοί (compound modes)* [9]. Στην περίπτωση ενός συζεύκτη, αποτελούμενου από στρώματα χωρίς απώλειες, οι αντίστοιχοι πραγματικοί δείκτες (effective indices) των δύο σύνθετων ρυθμών γίνονται καθαρά φανταστικοί με τιμές jN_1/k_0 και jN_2/k_0 . Αξιοσημείωτη ανταλλαγή φωτεινής ενέργειας λαμβάνει χώρα μόνο όταν οι δύο κυματοδηγοί είναι σε *συγχρονισμό* (δηλαδή τα N_1/k_0 και N_2/k_0 είναι σχεδόν ίσα). Όμως, οι ρυθμοί ενός συζεύκτη αποτελούμενου από μη σύγχρονους κυματοδηγούς προσομοιάζουν με εκείνους των απομονωμένων κυματοδηγών, όπου το μεγαλύτερο ποσό ισχύος συγκεντρώνεται σε κάθε κυματοδηγό. Έτσι, δεν λαμβάνει χώρα ουσιαστική ανταλλαγή φωτός, όταν στους δύο κυματοδηγούς δεν υπάρχει συμφωνία φάσης (βλ. [7] και [9]).

Περαιτέρω, η παρουσία των γραμμοσειρών συνεπάγεται ότι οι σύνθετοι ρυθμοί εξελίσσονται προοδευτικά σε ένα ζεύγος ρυθμών γραμμοσειρών (*grating modes*) με μιγαδικές σταθερές διάδοσης

$$\gamma_i = \alpha_i + j\beta_i \quad (i=1,2) \quad (5.2)$$

Οι παράγοντες εξασθένησης α_i είναι μη μηδενικοί για μεγάλες τιμές του λόγου Λ/λ , ακόμα και όταν όλα τα στρώματα είναι χωρίς απώλειες. Αυτό οφείλεται στις απώλειες ακτινοβολίας οι οποίες προκαλούνται από την περίθλαση στις γραμμοσειρές, έτσι ώστε οι ρυθμοί να χαρακτηρίζονται ως ρυθμοί διαρροής (*leaky modes*) [2]. Για τους χρησιμοποιούμενους στην πράξη συζεύκτες γραμμοσειρών οι πραγματικοί δείκτες β_1/k_0 και β_2/k_0 είναι κοντά σε τιμή με τους N_1/k_0 και N_2/k_0 , ενώ οι $|\alpha_1/k_0|$ και $|\alpha_2/k_0|$ είναι το πολύ της τάξης του 10^{-3} (βλ. επίσης [25]).

Τώρα, σύμφωνα με τις (4.16), (4.21) και (4.22) κάθε γ_i αντιστοιχεί σε έναν παράγοντα ηλεκτρικού πεδίου $\Psi(x,z)$ ο οποίος συμπεριφέρεται με βάση τον όρο $\exp\{-[\gamma_i + j(2\pi n/\Lambda)]z\}$ κατά μήκος της διαμήκου κατεύθυνσης z των γραμμοσειρών. Οι διακριτές τιμές

$$\gamma_{i,n} = \alpha_i + j[\beta_i + (2\pi n/\Lambda)] \quad (i=1,2) \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (5.3)$$

είναι οι σταθερές διάδοσης των απείρου αριθμησίμου πλήθους διαφορετικών Floquet αρμονικών, τις οποίες επιβάλλει σε μία άπειρη περιοδική διάταξη το θεώρημα Floquet. Στα επόμενα αριθμητικά αποτελέσματα, θεωρούμε μόνο τις πρώτης τάξης ($n=\pm 1$) Floquet αρμονικές για σύγκριση με τα αποτελέσματα της Θεωρίας Συζευγμένων Ρυθμών και της Θεωρίας Floquet-Bloch.

Η Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών προβλέπει τη συνθήκη προσαρμογής φάσης (*phase-matching condition*)

$$\Lambda/\lambda = k_0/(N_1 - N_2) \quad (5.4)$$

Η φυσική σημασία αυτής της συνθήκης είναι ότι οι καμπύλες N_1/k_0 και N_2/k_0 ως προς Λ/λ τέμνουν τις $N_2/k_0 + \lambda/\Lambda$ και $N_1/k_0 - \lambda/\Lambda$ αντιστοίχως [25]. Έτσι, οι πρώτης τάξης Floquet αρμονικές «συνταιριάζονται» υπό την έννοια ότι οι $+1$ (-1) Floquet αρμονική του N_2/k_0 (N_1/k_0) έχει την ίδια φάση με την N_1/k_0 (N_2/k_0). Σημειώνουμε ότι οι πρώτης τάξης Floquet αρμονικές του μη περιοδικού συζεύκτη θεωρούνται στις οριακές καταστάσεις όπου η περιοδική διάταξη συμπίπτει με τη μη περιοδική [25]. Η συνθήκη (5.4) μπορεί να ερμηνευθεί με τους ακόλουθους δύο τρόπους:

(i) Για ένα σταθεροποιημένο μήκος κύματος λειτουργίας λ η λύση $\Lambda = \Lambda_w$ της εξίσωσης (5.4) προσδιορίζει τη βέλτιστη περίοδο των γραμμοσειρών (*optimal grating period*), η οποία αντιστοιχεί στο συνταίριασμα των πρώτης τάξης Floquet αρμονικής.

(ii) Για μία σταθεροποιημένη περίοδο γραμμοσειρών Λ η λύση $\lambda=\lambda_w$ της εξίσωσης (5.4) προσδιορίζει το αντίστοιχο βέλτιστο μήκος κύματος λειτουργίας (*optimal operating wavelength*). Τα ακόλουθα αριθμητικά αποτελέσματα δηλώνουν ότι το βέλτιστο μήκος κύματος λειτουργίας και η βέλτιστη περίοδος των γραμμοσειρών είναι αρκετά διαφορετικά από εκείνα που προβλέπει η Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών και επιπλέον είναι πολύ κοντά σε τιμή σε εκείνα που προβλέπει η Θεωρία Floquet-Bloch.

Περαιτέρω, το μήκος σύζευξης (*coupling length*) L_c , δηλαδή το απαιτούμενο μήκος για πλήρη ανταλλαγή του φωτός μεταξύ των δύο κυματοδηγών, μπορεί να εκτιμηθεί από [26], [27]

$$L_c = \frac{\pi}{\min |\beta_1 - \beta_2|} \quad (5.5)$$

Το μήκος σύζευξης συνιστά μία επιπρόσθετη σημαντική παράμετρο, η οποία πρέπει να ληφθεί υπόψη στη διαδικασία σχεδίασης ενός ασυμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών. Αυτό οφείλεται στο ότι, παρόλο που οι σταθερές εξασθένησης a/k_0 είναι επαρκώς μικρές, οι συνολικές απώλειες ακτινοβολίας (εκφραζόμενες από το aL_c) μπορεί να γίνουν τόσο μεγάλες ώστε να καταστούν απαγορευτικές για την αποδοτική λειτουργία του συζεύκτη.

Εφαρμόζοντας τις τεχνικές των παραγράφων 4.2 και 4.3, συμπεραίνουμε ότι οι πραγματικοί δείκτες των ρυθμών του ασυμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών είναι οι ρίζες της ορίζουσας του γραμμικού συστήματος (4.33) (για συζεύκτη με τις γραμμοσειρές ευρισκόμενες σε ένα μόνο κυματοδηγό αντί για το (4.33) θεωρούμε το σύστημα (4.41)).

Τα ακόλουθα αριθμητικά αποτελέσματα αναδεικνύουν την επίδραση των γραμμοσειρών στη διαδικασία σύζευξης μέσω της σχεδίασης των σταθερών διάδοσης ως προς τα φυσικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμοσειρών. Για κάθε σύνολο παραμέτρων του συζεύκτη ο απαιτούμενος αριθμός χωρικών αρμονικών συναρτήσεων στα αναπτύγματα Fourier (4.21) και (4.22) προσδιορίζεται με εφαρμογή ελέγχου σύγκλισης στις υπολογισθείσες σταθερές διάδοσης (ο οποίος καθορίζεται στην παράγραφο 4.4).

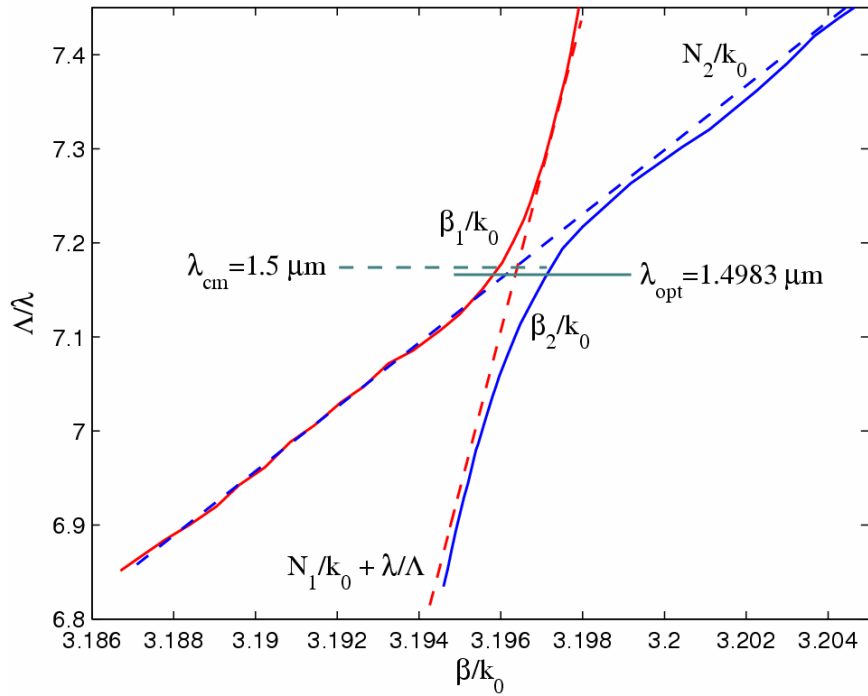
Στα επόμενα εδάφια 5.2.1-5.2.4 θεωρούμε συζεύκτη με σταθερές παραμέτρους $n_1=1$, $n_2=3.2$, $n_3=n_5=3$, $n_4=3.5$, $d_2=0.5 \mu\text{m}$, $d_4=0.22 \mu\text{m}$, $\Lambda=10.748 \mu\text{m}$, $t=1$, $b_1=l_1=\Lambda/2$ και τις γραμμοσειρές ευρισκόμενες στον κυματοδηγό 2 (βλ. Σχήμα 4.1 υπό την απουσία των γραμμοσειρών του κυματοδηγού 1).

5.2.1. Μήκος κύματος συντονισμού

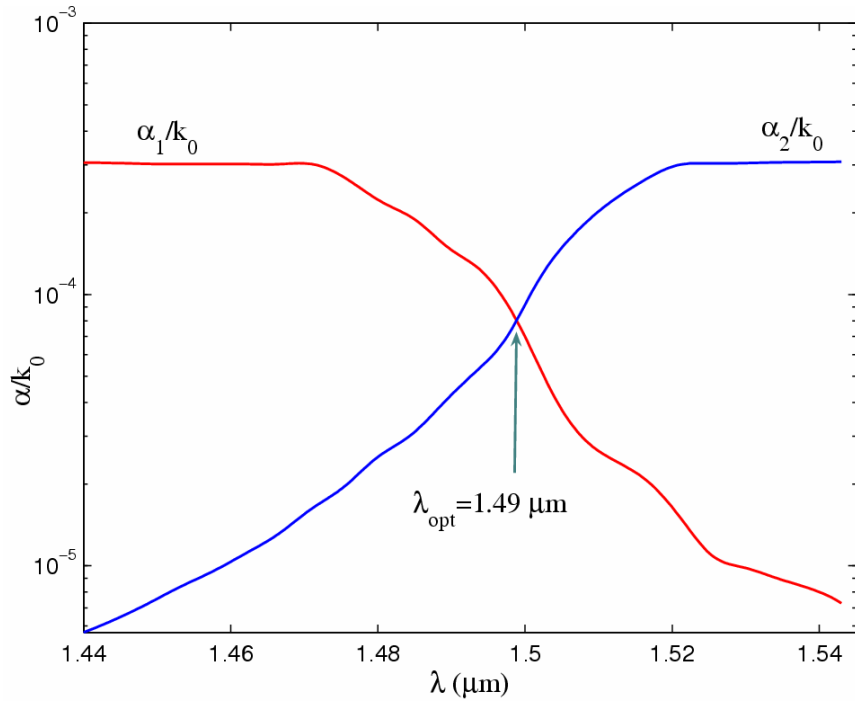
Οι καμπύλες διασποράς των ρυθμών γραμμοσειρών και των συνθέτων ρυθμών ως προς το κανονικοποιημένο μήκος κύματος Λ/λ απεικονίζονται στο Σχήμα 5.8(α) και οι καμπύλες εξασθένησης των ρυθμών γραμμοσειρών στο Σχήμα 5.8(β). Οι καμπύλες των Σχημάτων 5.8(α) και 5.8(β) είναι σε πλήρη συμφωνία με εκείνες των Σχημάτων 4a και 4b της [25]. Το μήκος κύματος συντονισμού (*resonant wavelength*), το οποίο αντιστοιχεί στην ελαχιστοποίηση της απόστασης $\Delta\beta=|\beta_1-\beta_2|$, λαμβάνει χώρα στη θέση $\lambda_{opt}=1.4983$ μm . Αυτή η τιμή του λ_{opt} είναι πολύ κοντά στην 1.4978 μm , που έχει υπολογισθεί στην [25] με εφαρμογή της Θεωρίας Floquet-Bloch. Το αντίστοιχο του μήκους κύματος συντονισμού, όπως προβλέπεται από τη Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών, (δηλαδή το σημείο τομής των καμπυλών $N_1/k_0+\lambda/\Lambda$ και N_2/k_0) είναι $\lambda_{cm}=1.5$ μm . Αυτή η μικρή διαφορά οφείλεται στο ότι η Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών παρέχει προσεγγιστικές εκφράσεις των σταθερών διάδοσης του συζεύκτη γραμμοσειρών με όρους των σταθερών του συζεύκτη χωρίς γραμμοσειρές, ενώ η παρούσα μέθοδος ουσιαστικά δίνει ακριβή αποτελέσματα για την πραγματική περιοδική διάταξη. Όμως, υπάρχουν συγκεκριμένες περιπτώσεις, όπως παραδείγματος χάριν όταν οι γραμμοσειρές ευρίσκονται στο άνω μέρος του κυματοδηγού 2, όπου η διαφορά μεταξύ της ακριβούς τιμής λ_{opt} και της προσεγγιστικής τιμής λ_{cm} μπορεί να γίνει πολύ μεγάλη (βλ. επίσης τη συζήτηση στην [25]). Το Σχήμα 5.8(α) δείχνει την ασυμπτωτική συμπεριφορά των καμπυλών διασποράς β_1/k_0 , β_2/k_0 ως προς τις ευθείες $N_1/k_0+\lambda/\Lambda$, N_2/k_0 . Ακριβέστερα, η καμπύλη β_1/k_0 (β_2/k_0) έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες $N_1/k_0+\lambda/\Lambda$ (N_2/k_0) για μεγάλα Λ/λ και τις N_2/k_0 ($N_1/k_0+\lambda/\Lambda$) για μικρά Λ/λ .

Εξάλλου, η συγκριτική εξέταση των καμπυλών διασποράς ενός συμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών (Σχήματα 5.2(α) και 5.3) με εκείνες ενός ασυμμετρικού συζεύκτη (Σχήμα 5.8(α)) αναδεικνύει ότι παρόλο που οι καμπύλες διασποράς β_e , β_o του συμμετρικού συζεύκτη είναι σχεδόν παράλληλες μεταξύ τους (με μεγάλες αποστάσεις $|\beta_e-\beta_o|$), οι καμπύλες β_1 , β_2 του ασυμμετρικού συζεύκτη προσεγγίζουν η μία την άλλη κοντά στο μήκος κύματος συντονισμού λ_{opt} (με ελάχιστη απόσταση $|\beta_1-\beta_2|$ στη θέση λ_{opt}) και αποκλίνουν μακριά από το λ_{opt} (οσφυϊκή (*waist*) συμπεριφορά). Έτσι, αφού αποδοτική ανταλλαγή του φωτός λαμβάνει χώρα μόνο σε εκείνα τα μήκη κύματος πολύ κοντά στο λ_{opt} , όπου οι σταθερές διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών γίνονται σχεδόν ίσες (βλ. [9] και [25]), ο ασυμμετρικός συζεύκτης γραμμοσειρών μπορεί να λειτουργήσει αποδοτικά σαν *οπτικό ζωνοπερατό φίλτρο συχνοτήτων*.

Επιπλέον, οι σταθερές εξασθένησης α_1 , α_2 , που εμφανίζονται στο Σχήμα 5.8(β), είναι αρκετά μικρής τάξης για κάθε λ και τέμνονται στη θέση $\lambda=1.49$ μm . Αντιθέτως, οι σταθερές εξασθένησης ενός συμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών δεν τέμνονται (βλ. Σχήμα 5.2(α)).



(α)



(β)

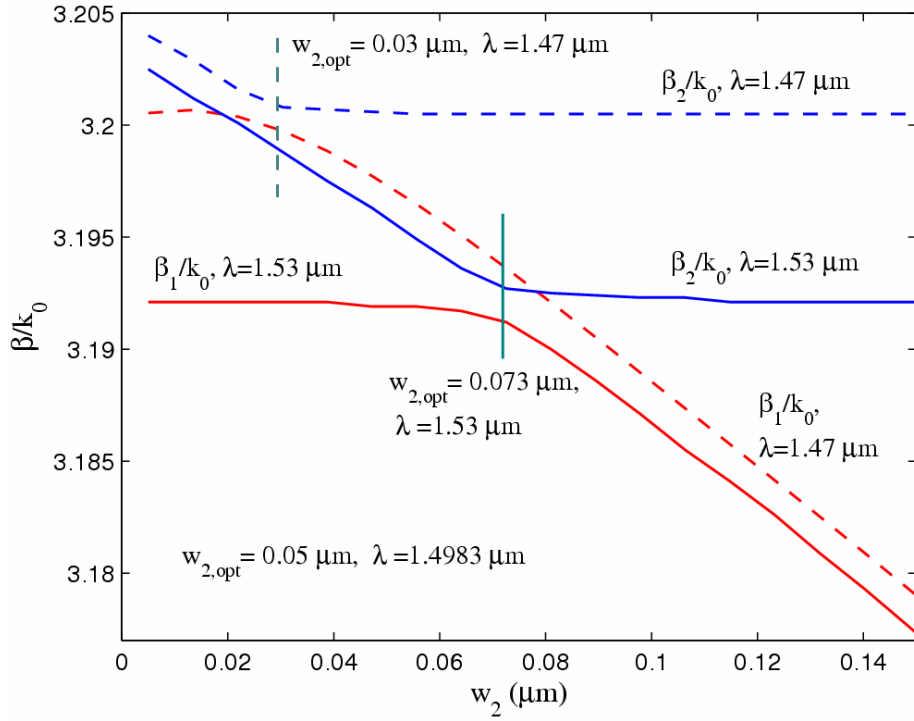
Σχήμα 5.8 (α) Φανταστικά μέρη β_1/k_0 , β_2/k_0 (συνεχείς γραμμές) και $N_1/k_0 + \lambda/\Lambda$, N_2/k_0 (διακεκομμένες γραμμές) των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών και των σύνθετων ρυθμών και (β) πραγματικά μέρη α_1/k_0 , α_2/k_0 των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών συναρτήσει (και στις δύο περιπτώσεις (α) και (β)) του Λ/λ , για $2d_3=0.55 \mu\text{m}$, $w_2=0.05 \mu\text{m}$, $n_6=3$, $n_{h,2}=3.1$.

5.2.2. Επίδραση του πάχους των γραμμοσειρών

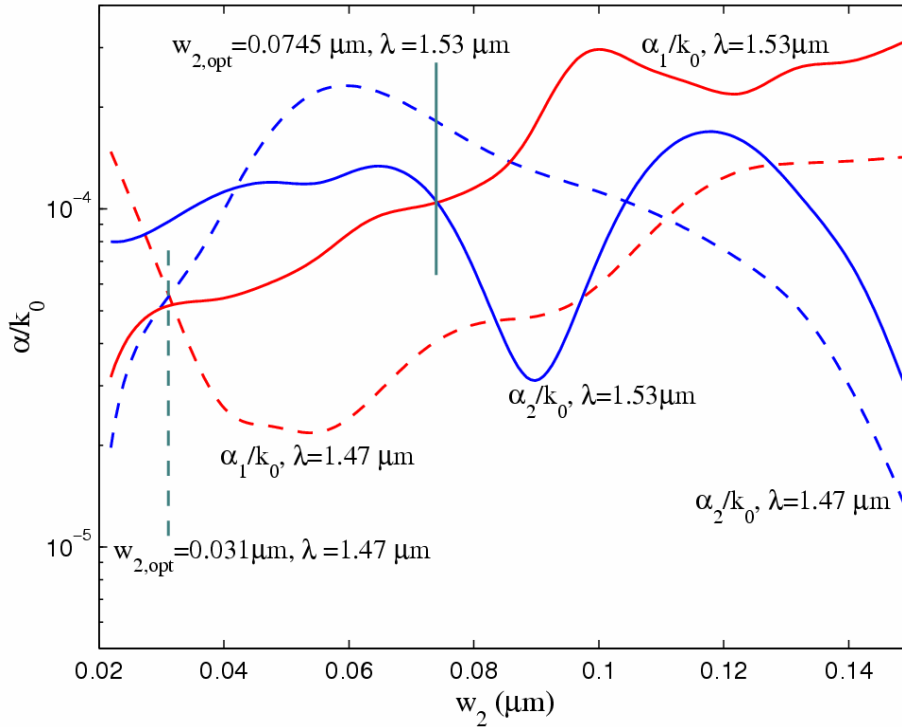
Τα Σχήματα 5.9(α) και 5.9(β) δείχνουν τα φανταστικά μέρη β_1/k_0 , β_2/k_0 και τα πραγματικά μέρη α_1/k_0 , α_2/k_0 των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών συναρτήσει του πάχους w_2 των γραμμοσειρών για μήκη κύματος $\lambda=1.47 \mu\text{m}$ και $\lambda=1.53 \mu\text{m}$.

Η απόσταση $\Delta\beta/k_0$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της στη θέση $w_{2,opt}=0.03 \mu\text{m}$ για $\lambda=1.47 \mu\text{m}$ και στη θέση $w_{2,opt}=0.073 \mu\text{m}$ για $\lambda=1.53 \mu\text{m}$ (σύμφωνα με το εδάφιο 5.2.1, $w_{2,opt}=0.05 \mu\text{m}$ για $\lambda=1.4983 \mu\text{m}$). Έτσι το πάχος των γραμμοσειρών μπορεί να δράσει σαν ένας επιπρόσθετος μηχανισμός ελέγχου (*additional control mechanism*) της συνθήκης συντονισμού του συζεύκτη. Ακριβέστερα, η βέλτιστη τιμή $w_{2,opt}$ αυξάνεται με το μήκος κύματος λειτουργίας λ . Επίσης, η απόσταση $\Delta\beta/k_0$ αυξάνεται και η αποδοτικότητα σύζευξης μειώνεται καθώς το $w_2 > w_{2,opt}$ αυξάνεται. Η τελευταία ιδιότητα έχει επίσης αναφερθεί στις [27] και [29], χωρίς όμως να έχει γίνει μία περαιτέρω έρευνα για την εξάρτηση του $w_{2,opt}$ από το λ . Εξάλλου, για αρκετά μικρά $w_2 < w_{2,opt}$ και αρκετά μεγάλα $w_2 > w_{2,opt}$ τα αντίστοιχα τμήματα των καμπυλών για $\lambda=1.47 \mu\text{m}$ και $\lambda=1.53 \mu\text{m}$ είναι παράλληλες ευθείες. Στη συμμετρική περίπτωση, παρατηρήθηκε ότι $w_{opt}=0 \mu\text{m}$ (δηλαδή πρόκειται για συζεύκτη χωρίς γραμμοσειρές) για όλα τα μήκη κύματος λ .

Περαιτέρω, ως γνωστόν [27] τα πάχη των γραμμοσειρών, τα οποία παράγουν τις βέλτιστες αποδοτικότητες σύζευξης, αντιστοιχούν σε εύρη του w_2 , όπου το $\Delta\alpha/k_0=|\alpha_1-\alpha_2|/k_0$ έχει ένα ελάχιστο. Σε κάθε ένα από αυτά τα εύρη η εξασθένηση λαμβάνει τις μικρότερες τιμές της. Οι καμπύλες του Σχήματος 5.9(β) δείχνουν ότι οι σταθερές εξασθένησης α_1/k_0 και α_2/k_0 τέμνονται στο $w_{2,opt}=0.031 \mu\text{m}$ για $\lambda=1.47 \mu\text{m}$ και στο $w_{2,opt}=0.0745 \mu\text{m}$ για $\lambda=1.53 \mu\text{m}$. Οι τιμές αυτές του $w_{2,opt}$ είναι πολύ κοντά σε εκείνες, οι οποίες αντιστοιχούν στην ελαχιστοποίηση της $\Delta\beta/k_0$ και εμφανίζονται στο Σχήμα 5.9(α). Παρόλο ότι οι καμπύλες α_1/k_0 και α_2/k_0 για $\lambda=1.47 \mu\text{m}$ τέμνονται επίσης στο $w_2=0.1105 \mu\text{m}$, ο συζεύκτης δεν πρέπει να σχεδιαστεί με αυτό το πάχος των γραμμοσειρών, αφού για $w_2=0.1105 \mu\text{m}$ η απόσταση $\Delta\beta/k_0$ είναι πολύ μεγάλη και συνεπώς η αποδοτικότητα της σύζευξης πολύ μικρή. Επιπλέον, η α_1/k_0 λαμβάνει ελάχιστο και η α_2/k_0 μέγιστο κοντά στο $w_{2,opt}=0.031 \mu\text{m}$, ενώ η αντίστροφη κατάσταση εμφανίζεται κοντά $w_{2,opt}=0.0745 \mu\text{m}$. Αυτή η συμπεριφορά είναι τυπική για ένα συντονιζόμενο σύστημα (*resonant system*) και ερμηνεύει το γεγονός ότι κοντά στο πάχος συντονισμού $w_{2,opt}$ εμφανίζεται μία ζώνη αποκοπής (*stop band*) για τον ένα διαδιδόμενο ρυθμό και μία ζώνη διέλευσης (*pass band*) για τον άλλον [27].



(α)



(β)

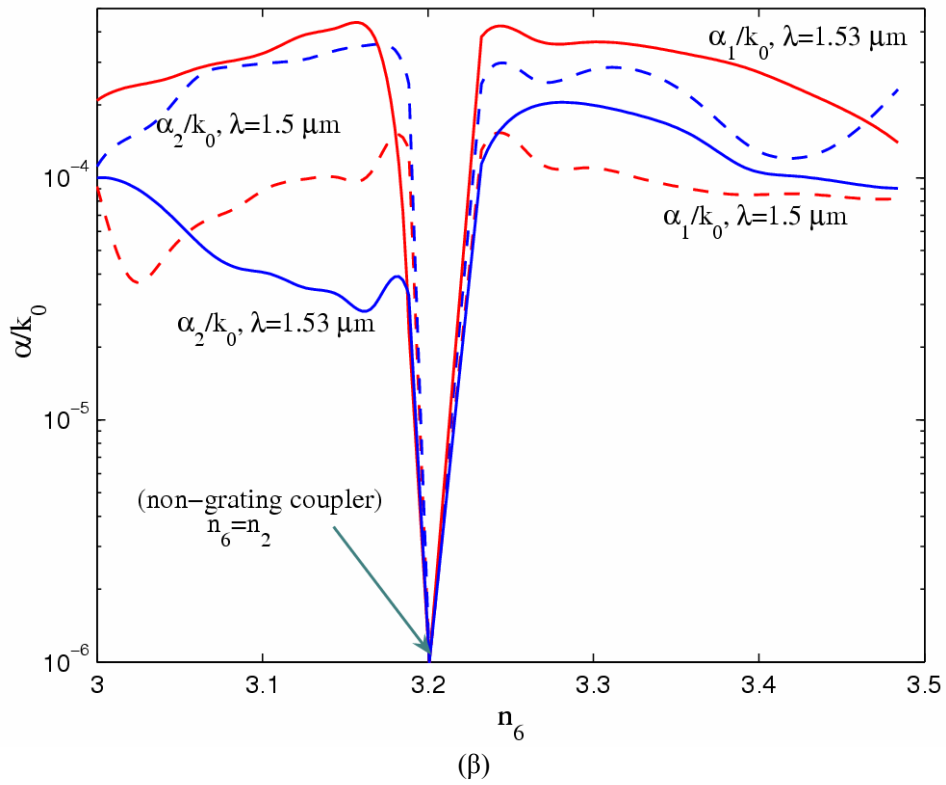
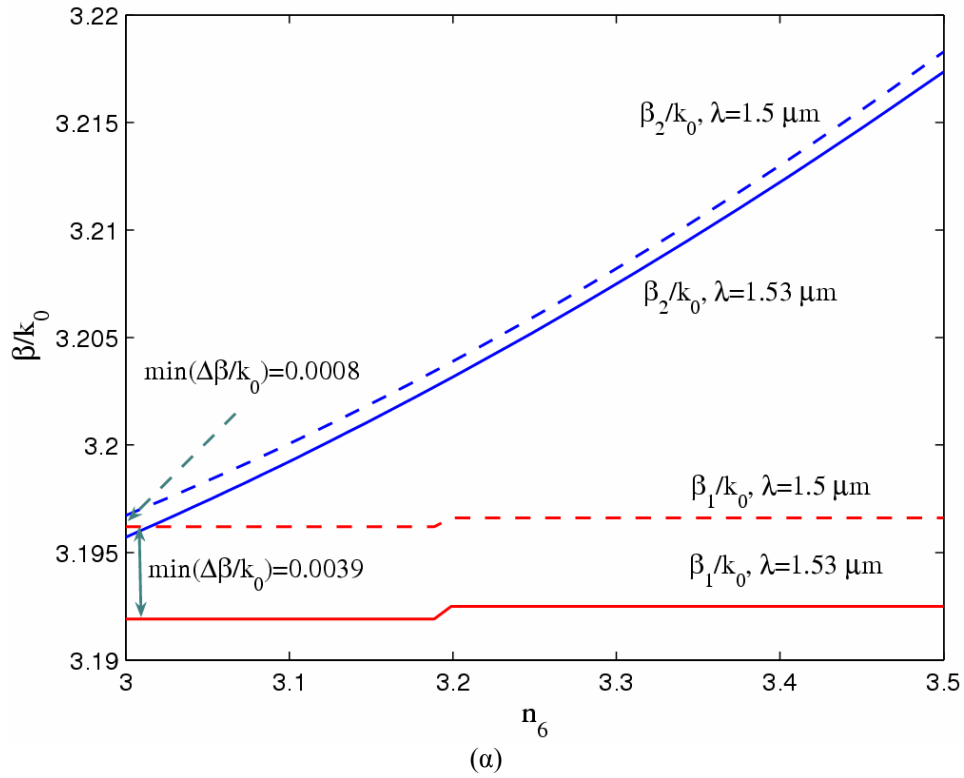
Σχήμα 5.9 (α) $\beta_1/k_0, \beta_2/k_0$ και (β) $\alpha_1/k_0, \alpha_2/k_0$ συναρτήσεσι του πάχους w_2 των γραμμοσειρών, για $\lambda=1.47 \mu\text{m}$ (διακεκομμένες) και $\lambda=1.53 \mu\text{m}$ (συνεχείς γραμμές) με $2d_3=0.55 \mu\text{m}$, $n_6=3$.

5.2.3. Επίδραση του δείκτη διάθλασης των γραμμοσειρών

Στα Σχήματα 5.10(α) και 5.10(β) απεικονίζονται οι μεταβολές των φανταστικών και των πραγματικών μερών των σταθερών διάδοσης συναρτήσει του δείκτη διάθλασης n_6 των γραμμοσειρών για $\lambda=1.5 \mu\text{m}$ και $\lambda=1.53 \mu\text{m}$.

Και για τα δύο μήκη κύματος η απόσταση $\Delta\beta/k_0$ λαμβάνει ελάχιστο στη θέση $n_6=3$ ($=n_3$). Η ελάχιστη απόσταση 0.0008 για $\lambda=1.5 \mu\text{m}$ είναι μίας τάξης μεγέθους μικρότερη από την 0.0039 για $\lambda=1.53 \mu\text{m}$. Έτσι, οι γραμμοσειρές παρέχουν πιο αποδοτική σύζευξη για $\lambda=1.5 \mu\text{m}$. Εξάλλου, η β_1/k_0 παραμένει σχεδόν σταθερή ως προς το n_6 , ενώ η β_2/k_0 αυξάνεται γνησίως με το n_6 . Συνεπώς, ο συζεύκτης γίνεται περισσότερο ασύγχρονος καθώς το n_6 αυξάνεται. Στην περίπτωση του συμμετρικού συζεύκτη ο δείκτης διάθλασης συντονισμού των γραμμοσειρών συμπίπτει με εκείνον του συζεύκτη χωρίς γραμμοσειρές.

Επιπλέον, το Σχήμα 5.10(β) δείχνει ότι η απόσταση $\Delta\alpha/k_0$ λαμβάνει κοντά στο $n_6=3$ τοπικά ελάχιστα με τιμές 2×10^{-5} και 10^{-4} για $\lambda=1.5 \mu\text{m}$ και $\lambda=1.53 \mu\text{m}$ αντιστοίχως. Επίσης, αφού για $n_6=n_2$ ο συζεύκτης γραμμοσειρών συμπίπτει με το συζεύκτη χωρίς γραμμοσειρές αποτελούμενο από μέσα χωρίς απώλειες, στην περιοχή του $n_6=n_2$, οι α_1/k_0 και α_2/k_0 προσεγγίζουν το μηδέν.



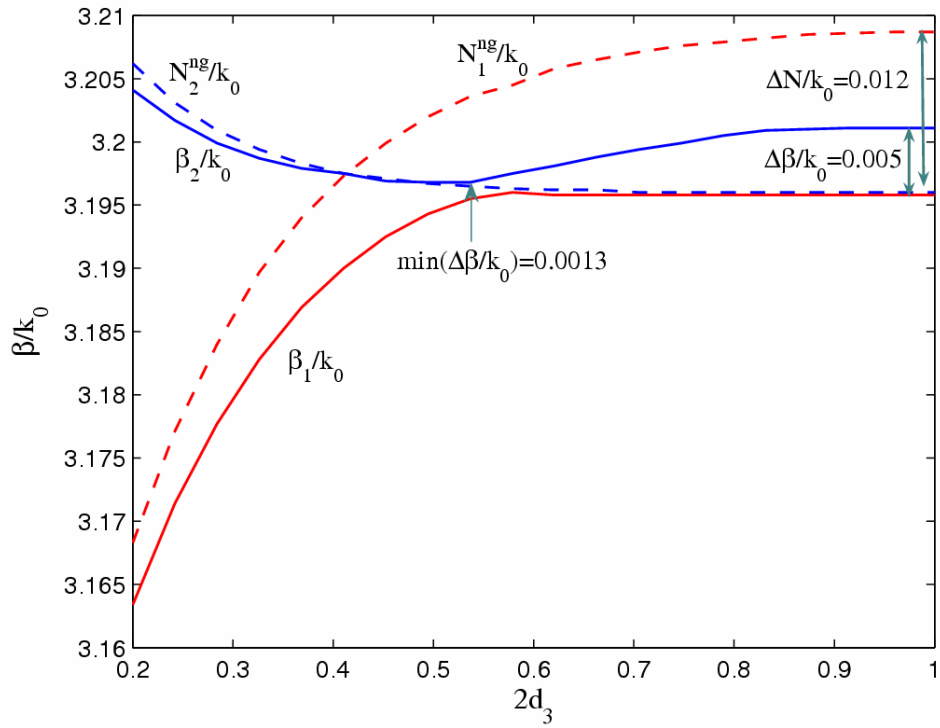
Σχήμα 5.10 (α) β_1/k_0 , β_2/k_0 και (β) α_1/k_0 , α_2/k_0 συναρτήσεσι του δείκτη διάθλασης n_6 των γραμμοσειρών, για $\lambda=1.5 \mu\text{m}$ (διακεκομμένες) και $\lambda=1.53 \mu\text{m}$ (συνεχείς γραμμές) με $2d_3=0.55 \mu\text{m}$, $w_2=0.05 \mu\text{m}$.

5.2.4. Φυσική σύζευξη μεταξύ των κυματοδηγών

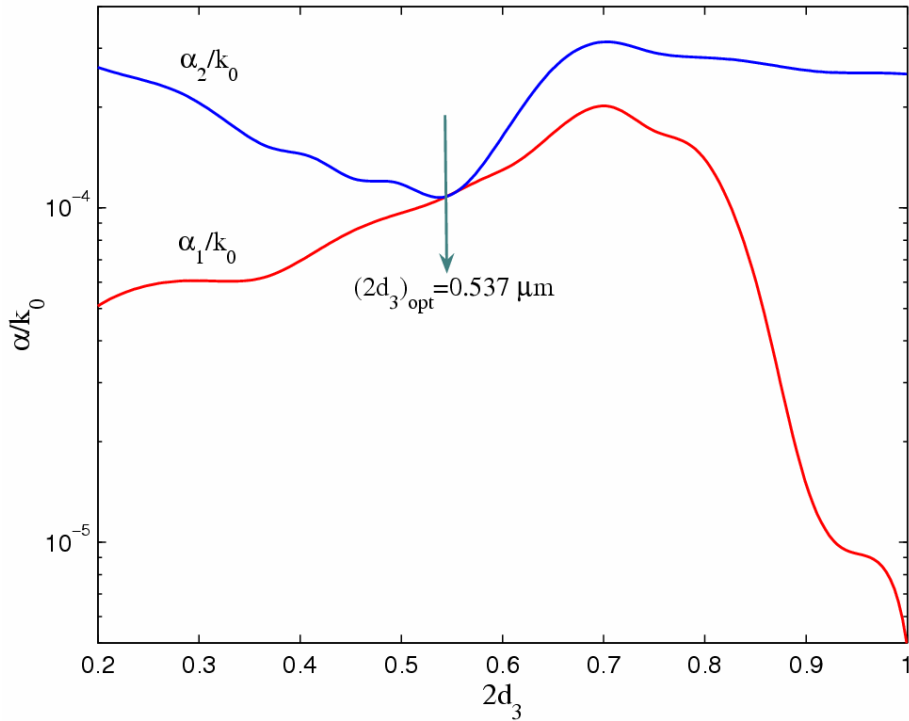
Οι δύο διαφορετικές διαδικασίες: (i) η φυσική σύζευξη μεταξύ των δύο κυματοδηγών (όπως και στην περίπτωση του μη περιοδικού ή του χωρίς γραμμοσειρές συζεύκτη) και (ii) η περιοδική σύζευξη εξαιτίας των διαταραχών που επιφέρουν οι γραμμοσειρές (και η οποία απεικονίζεται στα Σχήματα 5.8-5.10), υπαγορεύουν τη σύζευξη της ηλεκτρομαγνητικής ισχύος στο συζεύκτη γραμμοσειρών [18]. Για τη μελέτη της φυσικής σύζευξης σχεδιάζουμε στο Σχήμα 5.11(α) τις μεταβολές των φανταστικών μερών β_1/k_0 , β_2/k_0 και N_1^{ng}/k_0 , N_2^{ng}/k_0 των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών και των βασικών ρυθμών ($b_1=0$, $l_1=\Lambda$, $n_6=n_2$) συναρτήσει της απόστασης διαχωρισμού $2d_3$. Επίσης, το Σχήμα 5.11(β) δείχνει τα αντίστοιχα πραγματικά μέρη α_1/k_0 , α_2/k_0 των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών.

Οι αποστάσεις $|\beta_1-\beta_2|/k_0$ και $|\alpha_1-\alpha_2|/k_0$ λαμβάνουν την ελάχιστη τιμή τους στη βέλτιστη απόσταση διαχωρισμού (*optimal separation distance*) $(2d_3)_{opt}=0.537 \mu\text{m}$. Εξάλλου, στους συμμετρικούς συζεύκτες η απόσταση $|\beta_1-\beta_2|/k_0$ δεν ελαχιστοποιείται για καμία απόσταση διαχωρισμού $2d_3$ (βλ. Σχήμα 5.6(α)).

Αναφερόμενοι τώρα στο Σχήμα 5.11(α), παρατηρούμε ότι για αρκετά μικρό $2d_3$, οι $|\beta_1-\beta_2|/k_0$ και $|N_1^{ng}-N_2^{ng}|/k_0$ είναι πολύ κοντά (όπως και στη συμμετρική περίπτωση). Για αρκετά μεγάλο $2d_3$, η $|N_1^{ng}-N_2^{ng}|/k_0$ σταθεροποιείται κοντά στην απόλυτη τιμή 0.013 της διαφοράς των σταθερών διάδοσης των δύο (χωρίς γραμμοσειρές) κυματοδηγών, όταν αυτά θεωρούνται σε απομόνωση. Όμως, η $|\beta_1-\beta_2|/k_0$ σταθεροποιείται κοντά στην απόλυτη τιμή 0.005 της διαφοράς των σταθερών διάδοσης του απομονωμένου κυματοδηγού (με χαρακτηριστικά n_4 , d_4) και του απομονωμένου κυματοδηγού γραμμοσειρών (με χαρακτηριστικά n_2 , d_2 , βλ. Σχήμα 4.1 υπό την απουσία του κυματοδηγού 2). Ακριβέστερα, οι β_1/k_0 και N_2^{ng}/k_0 προσεγγίζουν τη σταθερά διάδοσης 3.196 του απομονωμένου κυματοδηγού (με n_4 , d_4), ενώ οι β_2/k_0 και N_1^{ng}/k_0 προσεγγίζουν αντιστοίχως τις σταθερές διάδοσης 3.201 του απομονωμένου κυματοδηγού γραμμοσειρών και 3.209 του απομονωμένου κυματοδηγού (με n_2 , d_2). Επιπλέον, το Σχήμα 5.11(β) δείχνει ότι οι α_1/k_0 και α_2/k_0 προσεγγίζουν για αρκετά μεγάλο $2d_3$ τις σταθερές εξασθένησης 0 του απομονωμένου κυματοδηγού, αποτελούμενο από υλικά χωρίς απώλειες, και 3×10^{-4} του απομονωμένου κυματοδηγού γραμμοσειρών αντιστοίχως.



(α)

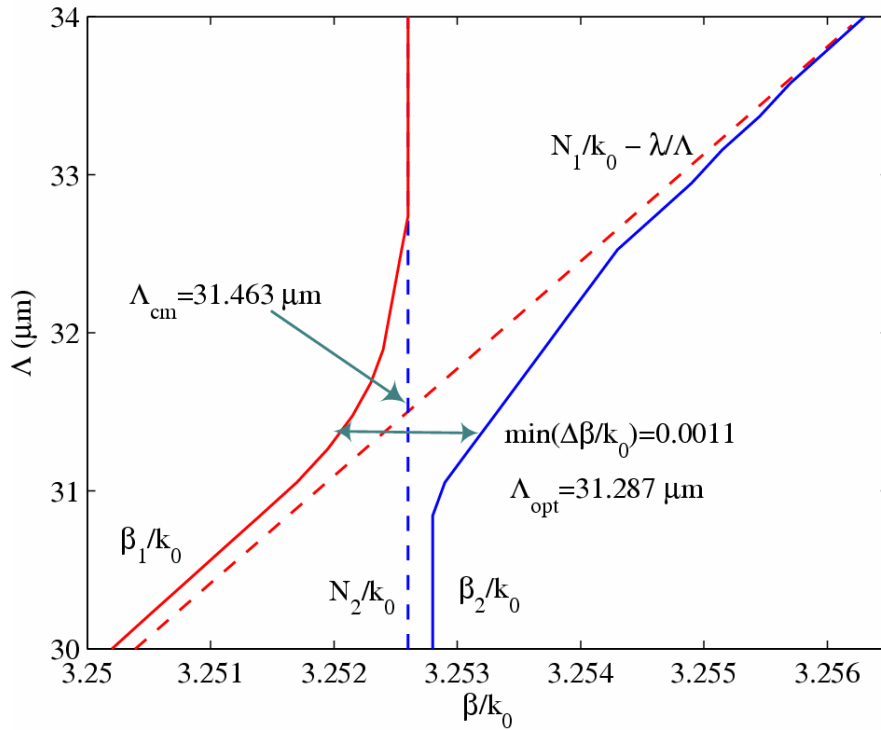


(β)

Σχήμα 5.11 (α) $\beta_1/k_0, \beta_2/k_0$ (συνεχείς) και $N_1^{ng}/k_0, N_2^{ng}/k_0$ (διακεκομμένες γραμμές) και (β) $\alpha_1/k_0, \alpha_2/k_0$ συναρτήσεως της απόστασης διαχωρισμού $2d_3$, για $w_2=0.05 \mu\text{m}$, $\lambda=1.5 \mu\text{m}$, $n_6=3$.

5.2.5. Βέλτιστη περίοδος και duty cycle γραμμοσειρών

Στο εδάφιο αυτό θεωρούμε τον ασυμμετρικό συζεύκτη γραμμοσειρών με $n_1=1$, $n_2=3.3$, $n_3=n_6=3.2$, $n_4=3.5$, $n_5=3$, $d_2=1.05 \mu\text{m}$, $2d_3=0.55 \mu\text{m}$, $d_4=0.3 \mu\text{m}$, $w_2=0.1 \mu\text{m}$, $\lambda=1.5 \mu\text{m}$. Στο Σχήμα 5.12 εμφανίζονται οι μεταβολές των φανταστικών μερών β_1/k_0 , β_2/k_0 και $N_1/k_0-\lambda/\Lambda$, N_2/k_0 των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών και των συνθέτων ρυθμών συναρτήσει της περιόδου Λ των γραμμοσειρών.



Σχήμα 5.12 β_1/k_0 , β_2/k_0 (συνεχείς) και $N_1/k_0-\lambda/\Lambda$, N_2/k_0 (διακεκομμένες γραμμές) συναρτήσει της περιόδου Λ των γραμμοσειρών, για $\lambda=1.5\mu\text{m}$, $t=1$, $b_1=l_1=\Lambda/2$, $n_{h,2}=3.25$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι καμπύλες του Σχήματος 5.12 συμφωνούν πλήρως με εκείνες του Σχήματος 2 της [24]. Η απόσταση $\Delta\beta/k_0=|\beta_1-\beta_2|/k_0$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της 0.0011 στη θέση $\Lambda_{opt}=31.287 \mu\text{m}$ (πολύ κοντά στο $31.268 \mu\text{m}$, το οποίο έχει υπολογιστεί στην [24] με εφαρμογή της Θεωρίας Floquet-Bloch). Εξάλλου, η βέλτιστη περίοδος των γραμμοσειρών, η προβλεπόμενη από τη Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών, εμφανίζεται στο σημείο τομής $\Lambda_{cm}=31.463 \mu\text{m}$ των ευθειών N_2/k_0 και $N_1/k_0-\lambda/\Lambda$. Όπως εξηγήσαμε στο εδάφιο 5.2.1, η μικρή διαφορά μεταξύ των Λ_{opt} και Λ_{cm} οφείλεται στις προσεγγίσεις, που επιβάλλονται από τη Θεωρία Συζευγμένων Ρυθμών.

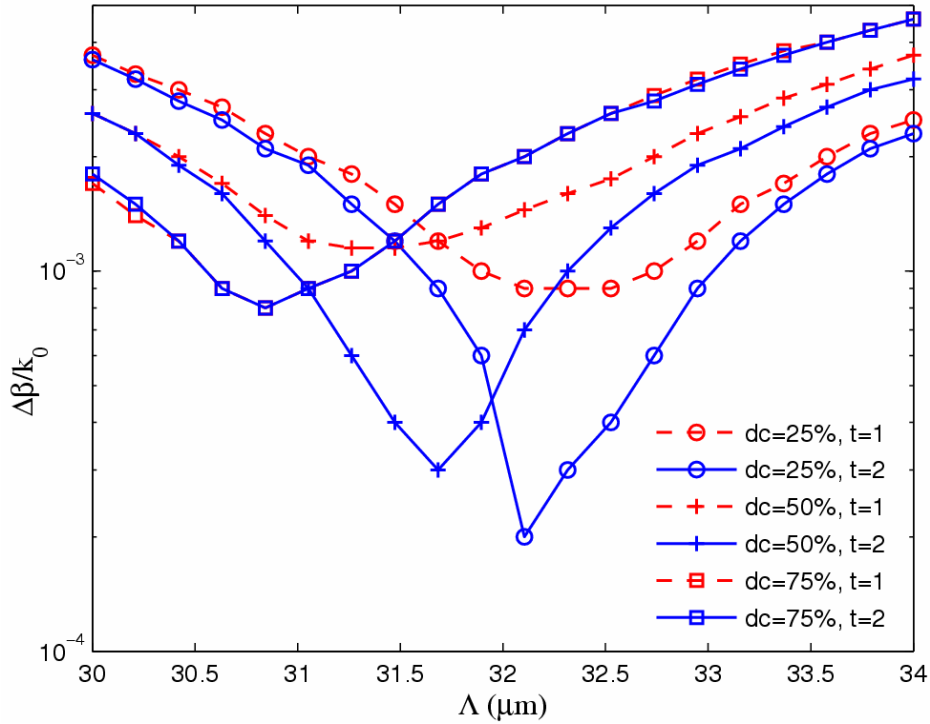
Περαιτέρω, για να μελετήσουμε την εξάρτηση των σταθερών διάδοσης από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (b_i, l_i, t) των γραμμοσειρών κατά μήκος του z -άξονα, εισάγουμε το duty cycle των γραμμοσειρών

$$dc = \frac{\sum_{i=1}^t l_i}{\Lambda} 100\%$$

Το Σχήμα 5.13 εμφανίζει την απόσταση $\Delta\beta/k_0 = |\beta_1 - \beta_2|/k_0$ συναρτήσει της περιόδου Λ των γραμμοσειρών για μεταβλητό duty cycles dc και πλήθος t των ορθογωνίων. Εξάλλου, ο Πίνακας 5.4 παριστάνει τις βέλτιστες περιόδους Λ_{opt} και τα βέλτιστα μήκη σύζευξης L_c , που προσδιορίζονται από την ελάχιστη τιμή του $\Delta\beta/k_0$, όπως δείχνει το Σχήμα 5.13. Η ελάχιστη τιμή 2×10^{-4} του $\min(\Delta\beta/k_0)$ αντιστοιχεί σε $dc=25\%$, $t=2$ και το ελάχιστο μήκος σύζευξης 0.682 mm σε $dc=50\%$, $t=1$ (δυσιαδικές γραμμοσειρές). Επειδή αποδοτική μεταφορά της φωτεινής ισχύος εξασφαλίζεται μόνο όταν οι δύο ρυθμοί έχουν σχεδόν ίδιες σταθερές διάδοσης, είναι λογικό να επιλέξουμε $dc=25\%$ και $t=2$. Όμως, το μεγάλο μήκος σύζευξης $L_c=3.75$ mm, το οποίο αντιστοιχεί σε $dc=25\%$ και $t=2$, θα μπορούσε να καταστεί απαγορευτικό (εξαιτίας των περιορισμών οι οποίοι επιβάλλονται από την εξασθένηση των ρυθμών) για τη σύζευξη μιας επαρκούς ποσότητας οπτικής ισχύος μεταξύ των κυματοδηγών. Για αυτό, οι επιλογές $dc=75\%$ και $t=1$ ή 2 φαίνεται σε ορισμένες περιπτώσεις να είναι καταλληλότερες, επειδή συνδυάζουν μία σχετικά μικρή απόσταση $\Delta\beta/k_0=8 \times 10^{-4}$ με ένα όχι υπερβολικά μεγάλο μήκος σύζευξης $L_c=0.938$ mm.

$dc \%$	t	$\min(\Delta\beta /k_0)$	Λ_{opt} (μm)	L_c (mm)
25	1	9×10^{-4}	32.316	0.833 ($\approx 26 \Lambda_{opt}$)
	2	2×10^{-4}	32.105	3.75 ($\approx 117 \Lambda_{opt}$)
50	1	1.1×10^{-3}	31.263	0.682 ($\approx 22 \Lambda_{opt}$)
	2	3×10^{-4}	31.684	2.5 ($\approx 79 \Lambda_{opt}$)
75	1	8×10^{-4}	30.842	0.938 ($\approx 31 \Lambda_{opt}$)
	2	8×10^{-4}	30.842	0.938 ($\approx 31 \Lambda_{opt}$)

Πίνακας 5.4 Βέλτιστες περίοδοι και βέλτιστα μήκη σύζευξης για μεταβλητό duty cycle και πλήθος ορθογωνίων ανά επανάληψη των γραμμοσειρών, όπως δείχνει το Σχήμα 5.13.



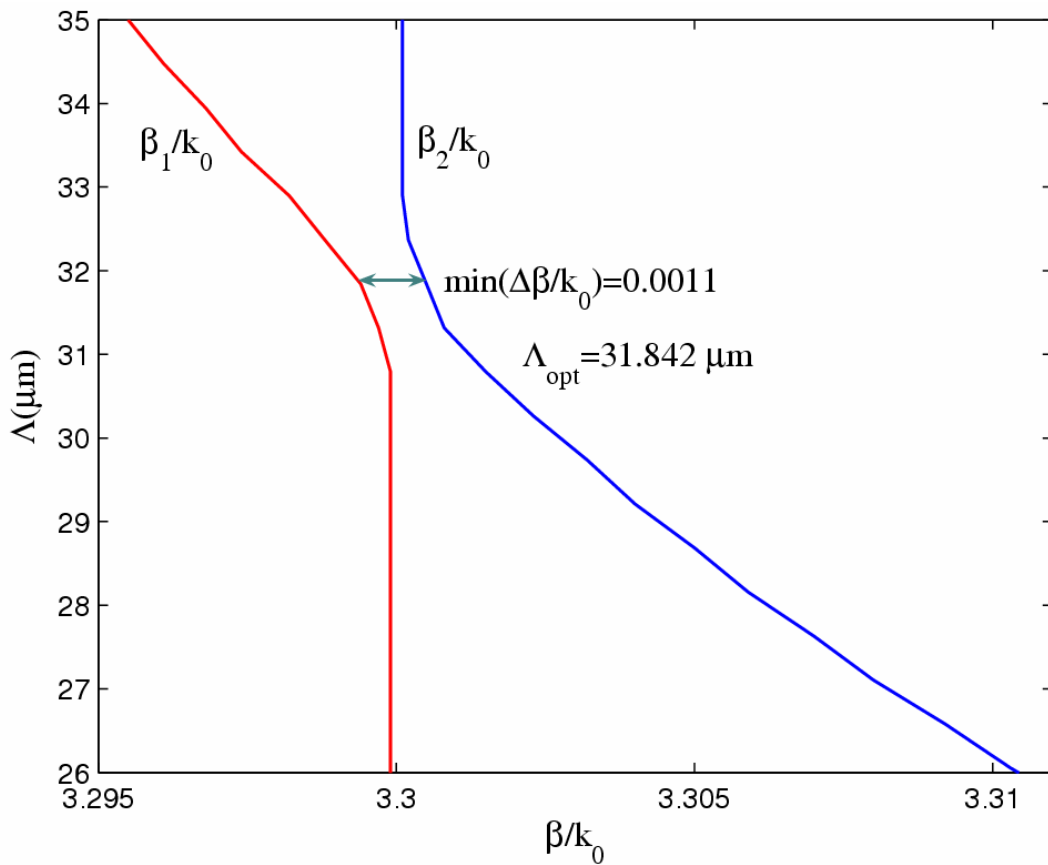
Σχήμα 5.13 Απόσταση $\Delta\beta/k_0=|\beta_1-\beta_2|/k_0$ συναρτήσει της περιόδου Λ των γραμμοσειρών, για μεταβλητά duty cycles dc και πλήθη t των ορθογωνίων.

5.2.6. Συζεύκτης με δύο γραμμοσειρές

Στο εδάφιο αυτό, διερευνούμε συζεύκτη με γραμμοσειρές και στους δύο κυματοδηγούς με παραμέτρους $n_1=1$, $n_2=3.3$, $n_3=n_5=3.2$, $n_4=3.5$, $n_6=n_7=3.2$, $d_2=1\mu\text{m}$, $2d_3=1\mu\text{m}$, $d_4=0.3\mu\text{m}$, $w_1=w_2=0.1\mu\text{m}$, $t=1$, $b_1=l_1=a_1=s_1=\Lambda/2$, $\lambda=1.5\mu\text{m}$. Ο Marcuse [7] έχει ήδη μελετήσει τον αντίστοιχο συζεύκτη χωρίς γραμμοσειρές και σημειώνει ότι οι θεμελιώδεις ρυθμοί των δύο απομονωμένων κυματοδηγών χωρίς γραμμοσειρές έχουν σημαντικά διαφορετικές σταθερές διάδοσης ($N_1^{ng}/k_0=3.2559$, $N_2^{ng}/k_0=3.3243$), και συνεπώς αρκετά λίγη ισχύς μπορεί να ανταλλαγεί μεταξύ των δύο κυματοδηγών.

Στο Σχήμα 5.14 εμφανίζονται οι μεταβολές των φανταστικών μερών β_1/k_0 και β_2/k_0 των σταθερών διάδοσης των ρυθμών γραμμοσειρών συναρτήσει της περιόδου Λ των γραμμοσειρών. Η απόσταση $\Delta\beta/k_0$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της 0.0011 στη θέση $\Lambda_{opt}=31.842\mu\text{m}$, όπου το αντίστοιχο μήκος σύζευξης είναι $L_c=0.683\text{mm}$. Εξάλλου, αξίζει να σημειώσουμε ότι ο ασυμμετρικός συζεύκτης γραμμοσειρών, που έχει προταθεί από τον Marcuse [9], παρουσιάζει κατά προσέγγιση μήκος σύζευξης $L_c=5\text{mm}$ (βλ. Σχήμα 3α της [9]). Οπωσδήποτε, φαίνεται ότι αυτό το μεγάλο μήκος σύζευξης δεν θα οδηγούσε σε αποδοτική σύζευξη της οπτικής ισχύος μεταξύ των δύο κυματοδηγών, ακόμα και στις περιπτώσεις συζευκτών με μέτριες σταθερές

εξασθένησης. Όμως, οι απώλειες εξασθένησης του συζεύκτη γραμμοσειρών με $L_c=0.683\text{mm}$, ο οποίος προτείνεται εδώ, δεν επηρεάζουν σημαντικά την ποσότητα της μεταφερόμενης ενέργειας. Συνεπώς, η παρουσία των δύο γραμμοσειρών παρέχει ευελιξία στη σχεδίαση των συζευκτών γραμμοσειρών, επιφέροντας σημαντική βελτίωση της αποδοτικότητας του μηχανισμού μεταφοράς ενέργειας.



Σχήμα 5.14 β_1/k_0 και β_2/k_0 συναρτήσει της περιόδου Λ των γραμμοσειρών, για τον ασυμμετρικό συζεύκτη με γραμμοσειρές και στους δύο κυματοδηγούς του εδαφίου 5.2.6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ, ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ

Στο Κεφάλαιο αυτό συνοψίζονται η χρησιμότητα και η σημασία των συζευκτών γραμμοσειρών και επισκοπούνται οι προγενέστερες μέθοδοι μελέτης των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων, τα οποία εμφανίζονται στις διατάξεις αυτές. Επίσης, επισημαίνονται η πρωτοτυπία της μεθοδολογίας και των αριθμητικών αποτελεσμάτων και αξιολογούνται συγκριτικά με αντίστοιχα προυπάρχοντα αποτελέσματα. Τέλος, ενδεικνύονται οι γενικές κατευθύνσεις της μελλοντικής εργασίας.

Χρηστικότητα και αρχή λειτουργίας των συζευκτών γραμμοσειρών

Οι συζεύκτες γραμμοσειρών αποτελούν βασικά δομικά στοιχεία σημαντικών οπτικών διατάξεων, οι οποίες χρησιμοποιούνται ευρέως στα σύγχρονα οπτικά δίκτυα. Μεταξύ των οπτικών διατάξεων συγκαταλέγονται τα οπτικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων, οι πολυπλέκτες και αποπολυπλέκτες, τα συντονιζόμενα lasers και τα lasers κατανεμημένης ανάδρασης καθώς επίσης και οι οπτικοί διακόπτες.

Η γενική αρχή λειτουργίας ενός κατευθυντικού συζεύκτη συνοψίζεται ως εξής: Ένας από τους δύο κυματοδηγούς ορίζεται ως θύρα εισόδου και ο άλλος ως θύρα εξόδου του οπτικού σήματος. Ισχύς εισόδου εισέρχεται στη θύρα εισόδου και μετά από ένα ορισμένο μήκος ένα ποσοστό της ισχύος εισόδου συζευγνύεται στον άλλο κυματοδηγό και εξέρχεται ως ισχύς εξόδου από τη θύρα εξόδου. Αναζητούμε τις βέλτιστες τιμές των φυσικών και γεωμετρικών παραμέτρων της διάταξης, οι οποίες μεγιστοποιούν το ποσοστό της ισχύος εισόδου που μεταβιβάζεται στη θύρα εξόδου. Η κύρια συνεισφορά των γραμμοσειρών συνίσταται στην ουσιαστική ενίσχυση της διαδικασίας σύζευξης του φωτός από τον ένα κυματοδηγό στον άλλο, *συνταιριάζοντας τα διαφορετικά γεωμετρικά και φυσικά χαρακτηριστικά των δύο κυματοδηγών.*

Προγενέστερες μεθοδολογίες

Τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα, που εμφανίζονται στις διατάξεις των συζευκτών γραμμοσειρών, έχουν ήδη μελετηθεί με αρκετές μεθόδους. Αντικείμενα των μελετών αυτών αποτελούν ο καθορισμός των μεταβολών, που επιφέρει στις σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων η παρουσία των γραμμοσειρών, και ο

προσδιορισμός των τιμών των φυσικών και γεωμετρικών χαρακτηριστικών των γραμμοσειρών (πάχος, περίοδος, δείκτης διάθλασης) για τις οποίες επιτυγχάνεται η βέλτιστη ανταλλαγή φωτεινής ισχύος μεταξύ των δύο κυματοδηγών.

Οι κύριες μέθοδοι μελέτης του προβλήματος, που έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία, είναι οι *μέθοδοι διαταραχών*, η *θεωρία των συζευγμένων ρυθμών* και η *θεωρία Floquet-Bloch*. Οι μέθοδοι διαταραχών αποσαφηνίζουν οπωσδήποτε την εικόνα της φυσικής διαδικασίας της σύζευξης, αλλά οδηγούν μόνο σε προσεγγιστικά αποτελέσματα. Η ακρίβεια των λύσεων, οι οποίες επιτυγχάνονται με εφαρμογή της θεωρίας των συζευγμένων ρυθμών, προϋποθέτει αρκετούς περιορισμούς, όπως μικρό πάχος γραμμοσειρών, μεγάλη απόσταση διαχωρισμού των δύο κυματοδηγών και μικρές διαφορές των δεικτών διάθλασης των εμπλεκόμενων μέσων. Οι τεχνικές, οι οποίες στηρίζονται στη θεωρία Floquet-Bloch, οδηγούν σε ακριβή αποτελέσματα, αναφερόμενα στην επίδοση των συζευκτών γραμμοσειρών, των οποίων όμως η ακρίβεια εξαρτάται από την αριθμητική επίλυση συστημάτων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως.

Μεθοδολογία της διατριβής

Για τη μελέτη των φαινομένων κυματοδότησης σε συζεύκτες γραμμοσειρών αναπτύσσεται και εφαρμόζεται μεθοδολογία ολοκληρωτικών εξισώσεων, η οποία συνδυάζει *ημιαναλυτικές τεχνικές ολοκληρωτικών εξισώσεων*, που επιλύονται με εφαρμογή της *Μεθόδου των Ροπών με συναρτήσεις βάσης συνολικού χώρου*. Ειδικότερα, με εφαρμογή της μεθόδου Sommerfeld επιτυγχάνεται Fourier ολοκληρωτική αναπαράσταση της συνάρτησης Green του ομογενούς (χωρίς γραμμοσειρές) προβλήματος. Περαιτέρω, διατυπώνεται ολοκληρωτική εξίσωση ως προς το ηλεκτρικό πεδίο κυμάτων, τα οποία διαδίδονται κατά μήκος του άξονα του συζεύκτη. Για τη λύση της εν λόγω ολοκληρωτικής εξίσωσης εφαρμόζονται τεχνικές Galerkin συνολικού χώρου, οι οποίες οδηγούν σε συγκεκριμένο ομογενές γραμμικό σύστημα. Οι σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων ρυθμών είναι οι τιμές εκείνες για τις οποίες το εν λόγω σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση.

Πρωτοτυπία της μεθοδολογίας και των αποτελεσμάτων

Η κύρια πρωτοτυπία της Διδακτορικής Διατριβής συνίσταται στην εισαγωγή μεθοδολογίας ολοκληρωτικών εξισώσεων, η οποία αναπτύσσεται και εφαρμόζεται στη μελέτη των φαινομένων κυματοδότησης σε συζεύκτες γραμμοσειρών. Εξάλλου, η αριθμητική υλοποίηση της

μεθοδολογίας παράγει αρκετά πρωτότυπα και ενδιαφέροντα αριθμητικά κυρίως αποτελέσματα, αναφερόμενα στη βέλτιστη σχεδίαση των χαρακτηριστικών των γραμμοσειρών, τα οποία προσφέρουν το ελάχιστο δυνατό μήκος σύζευξης και τη μέγιστη δυνατή αποδοτικότητα σύζευξης.

Συγκριτική αξιολόγηση της μεθοδολογίας και των αποτελεσμάτων

Τα *συγκριτικά πλεονεκτήματα* της αναπτυσσόμενης μεθοδολογίας έναντι των μεθόδων διαταραχών, θεωρίας των συζευγμένων ρυθμών και θεωρίας Floquet-Bloch εντοπίζονται στην *ακρίβεια*, την *απλότητα* καθώς επίσης και την *αριθμητική αποδοτικότητα* (μεγάλη ακρίβεια των αποτελεσμάτων με χρήση μικρού αριθμού όρων των αναπτυγμάτων). Εξάλλου, η χρησιμοποιούμενη μεθοδολογία δίνει ακριβή αποτελέσματα για γραμμοσειρές μεγάλου πάχους και για ισχυρά συζευγμένους κυματοδηγούς, ενώ οι προγενέστερες μέθοδοι προϋποθέτουν σημαντικούς περιορισμούς των φυσικών και γεωμετρικών παραμέτρων των γραμμοσειρών. Ιδιαίτέρως, αξίζει να σημειώσουμε ότι εκφράζεται αναλυτικά η συνάρτηση Green και υπολογίζονται αναλυτικά όλα τα εμφανιζόμενα ολοκληρώματα με συνέπειες τη *σημαντική μείωση του υπολογιστικού κόστους*, την *αύξηση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων* και την επίτευξη λύσεως χωρίς άλλες προσεγγίσεις εκτός εκείνης της τελικής κολόβωσης του γραμμικού συστήματος.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα της Διατριβής υπερτερούν σημαντικά σε *αξιοπιστία* και *ακρίβεια* των αντιστοίχων αποτελεσμάτων, τα οποία επιτυγχάνονται με τις προγενέστερες μεθόδους. Επίσης, ερμηνεύονται και αξιολογούνται για πρώτη φορά οι επιδράσεις του πάχους, του δείκτη διάθλασης και του κύκλου καθήκοντος των γραμμοσειρών ως *επιπροσθέτων μηχανισμών ελέγχου* της βέλτιστης συμπεριφοράς του συζεύκτη. Η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων αυτών διαμορφώνει συγκεκριμένες τεχνικές-σχεδιαστικές προδιαγραφές της υπό μελέτη διάταξης, οι οποίες μπορεί να αξιοποιηθούν κατάλληλα σε πολλές εφαρμογές της ολοκληρωμένης οπτικοηλεκτρονικής.

Μελλοντική εργασία

Η αναπτυχθείσα μεθοδολογία εφαρμόζεται για τη μελέτη των φαινομένων σύζευξης και κυματοδηγησης σε συζεύκτη γραμμοσειρών με περιοδικές γραμμοσειρές απείρου πλήθους. Σε αρκετές εφαρμογές η συνθήκη της άπειρης περιοδικότητας μπορεί να είναι αποδεκτή. Όμως, σε ορισμένες περιπτώσεις είναι επίσης χρήσιμο να μοντελοποιηθούν *γραμμοσειρές με πεπερασμένο*

μήκος. Οι πεπερασμένες γραμμοσειρές έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά περίθλασης από τις άπειρες εξαιτίας των φαινομένων άκρων, τα οποία προκαλούνται από τους τερματισμούς των πεπερασμένων γραμμοσειρών. Η παρούσα μελέτη των φαινομένων κυματοδήγησης σε συζεύκτη με άπειρες περιοδικές γραμμοσειρές χρησιμοποιεί κατά ουσιαστικό τρόπο το Θεώρημα Floquet, το οποίο ισχύει όμως μόνο για μέσα με περιοδική μεταβολή του δείκτη διάθλασης. Προκειμένου να μελετήσουμε συζεύκτες με πεπερασμένες γραμμοσειρές απαιτούνται κατάλληλες προσαρμογές και βελτιώσεις της αναπτυχθείσας μεθοδολογίας, τις οποίες θα προσπαθήσουμε να διατυπώσουμε και να αξιοποιήσουμε στη μελλοντική εργασία. Το εν λόγω πρόβλημα δεν αντιμετωπίζεται πλέον ως πρόβλημα αναζήτησης των μη τετριμμένων λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος, αλλά πρέπει να αντιμετωπιστεί ως ένα πρόβλημα σκέδασης-περίθλασης, το οποίο οδηγεί σε ένα μη ομογενές γραμμικό σύστημα.

Στη Διδακτορική Διατριβή εξετάζεται το πρόβλημα κυματοδήγησης σε συζεύκτη γραμμοσειρών. Όμως, παρουσιάζει επίσης ιδιαίτερο ενδιαφέρον και η μελέτη του προβλήματος *σκέδασης επιπέδου κύματος από διάταξη κυματοδηγού γραμμοσειρών*. Η αναπτυχθείσα μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί με ορισμένες απαραίτητες τροποποιήσεις και επεκτάσεις και για τη μελέτη του εν λόγω προβλήματος σκέδασης. Συγκεκριμένα, με εφαρμογή της Μεθόδου των Ροπών με τεχνικές Galerkin συνολικού χώρου διαμορφώνεται ένα επιλύσιμο μη ομογενές γραμμικό αλγεβρικό σύστημα, του οποίου οι λύσεις χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του σκεδαζόμενου σε όλες τις περιοχές του χώρου και μεταδιδόμενου στον κυματοδηγό ηλεκτρικού πεδίου.

Η σχεδίαση ενός συζεύκτη γραμμοσειρών συνίσταται στην κατάλληλη επιλογή των βέλτιστων φυσικών και γεωμετρικών χαρακτηριστικών των κυματοδηγών και των γραμμοσειρών, τα οποία προσφέρουν το ελάχιστο δυνατό μήκος σύζευξης και τη μέγιστη δυνατή αποδοτικότητα σύζευξης. Η εν λόγω βελτιστοποίηση στη Διδακτορική Διατριβή επιτυγχάνεται χωριστά για κάθε χαρακτηριστικό μέγεθος της διάταξης (θεωρώντας τα υπόλοιπα μεγέθη σταθεροποιημένα). Όμως, η *εφαρμογή προχωρημένων τεχνικών βελτιστοποίησης*, όπως είναι π.χ. οι *Γενετικοί Αλγόριθμοι*, οι οποίοι εκτελούν μία τυχαία αναζήτηση για το ολικό βέλτιστο στον πολυδιάστατο χώρο των παραμέτρων βελτιστοποίησης, θα μπορούσε να προσδιορίσει μία πιο αποδοτική βελτιστοποίηση χωρίς τους προηγούμενους περιορισμούς (δηλαδή με την ταυτόχρονη μεταβολή όλων των χαρακτηριστικών μεγεθών της διάταξης).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ GREEN

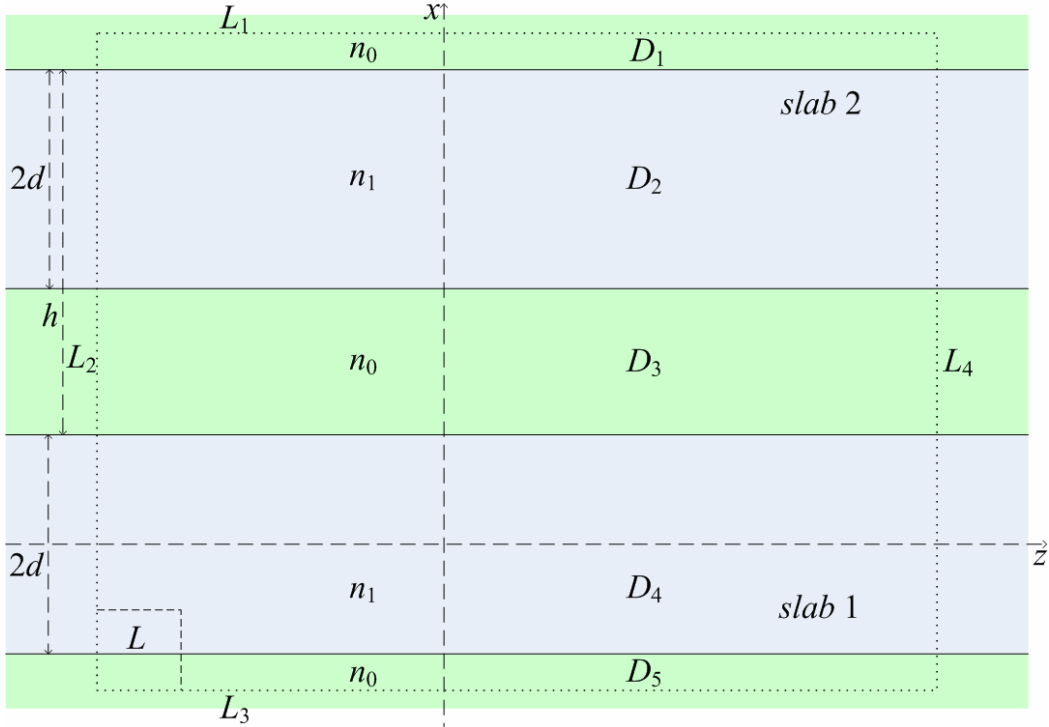
Στο Παράρτημα αυτό επιβεβαιώνεται η αρχή ότι η εναλλαγή των θέσεων παρατήρησης και διέγερσης στη διάταξη δύο απείρων συμμετρικών διηλεκτρικών πλακών διατηρεί το ηλεκτρικό πεδίο. Για το σκοπό αυτό υπενθυμίζουμε καταρχήν από την παράγραφο 3.3 ότι ως συνάρτηση Green $G(\mathbf{r};\mathbf{r}')$ στη συγκεκριμένη διάταξη ορίζεται το ηλεκτρικό πεδίο $E_y(x,z)$ (απόκριση), το οποίο παράγεται στη διάταξη από τη ρευματική πηγή (διέγερση) της (3.19). Η ισχύς της προαναφερομένης αρχής εξασφαλίζεται από το ακόλουθο θεώρημα. Η εν λόγω αρχή, εκτός από τη θεωρητική της σημασία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ουσιαστικά και για την απλούστευση (συντόμευση) των υπολογισμών προς εύρεση της συνάρτησης Green σε πολυστρωματικά μέσα (layered media).

Θεώρημα

Η συνάρτηση Green $G(\mathbf{r};\mathbf{r}')$, $\mathbf{r},\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^2$ της διάταξης δύο απείρων συμμετρικών διηλεκτρικών πλακών είναι συμμετρική, δηλαδή ισχύει

$$G(\mathbf{r};\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}';\mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r},\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^2$$

Απόδειξη Στο παρακάτω Σχήμα σχεδιάζεται κατάλληλος διαχωρισμός σε ορθογώνια D_i ($i=1,\dots,5$) του τμήματος της διάταξης δύο απείρων συμμετρικών διηλεκτρικών πλακών, το οποίο ευρίσκεται εντός ορθογωνίου L , και ο οποίος διαχωρισμός εξυπηρετεί την εφαρμογή των τύπων του Green. Τα ορθογώνια D_i ($i=1,\dots,5$) προκύπτουν ως τομές του ορθογωνίου L με τη διάταξη των δύο πλακών.



Σχήμα 6.1 Διαχωρισμός κατάλληλου τμήματος της διάταξης δύο απείρων συμμετρικών διηλεκτρικών πλακών από ένα ορθογώνιο.

Εφαρμόζοντας το δεύτερο τύπο του Green για τις συναρτήσεις Green $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1)$ και $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2)$, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}^2$ σε κάθε ορθογώνιο D_i , λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & \iint_{D_i} [G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1)] dx dz \\ & = \oint_{\partial D_i} [G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1)] \cdot \hat{\mathbf{n}}_i dl \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}_i$ είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του ∂D_i . Αθροίζοντας κατά μέλη τις

(A.1) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\hat{\mathbf{n}}_i \cdot \nabla G = \frac{\partial G}{\partial n_i}$, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} & \iint_D [G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1)] dx dz \\ & = \oint_{\sum_{i=1}^5 \partial D_i} \left[G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial n_i} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) \frac{\partial}{\partial n_i} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \right] dl \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

όπου $D = \bigcup_{i=1}^5 D_i$. Επειδή, όπως αναφέραμε στην παράγραφο 3.3, οι συναρτήσεις $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1)$, $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2)$

$\frac{\partial G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1)}{\partial x}$ και $\frac{\partial G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2)}{\partial x}$ προϋποτίθενται συνεχείς στο ορθογώνιο D και τα μοναδιαία

διανύσματα κατά μήκος των κοινών πλευρών των διαδοχικών ορθογωνίων D_1 - D_5 είναι αντίθετα, τα αντίστοιχα επικαμπύλια ολοκληρώματα αλληλοεξουδετερώνονται. Έτσι το άθροισμα των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων στο δεύτερο μέλος της (A.2) εκφράζεται ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος του συνόρου ∂D του D και επομένως η (A.2) γράφεται

$$\begin{aligned} & \iint_D \left[G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \right] dx dz \\ &= \oint_{\partial D} \left[G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial n_i} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) \frac{\partial}{\partial n_i} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \right] dl \end{aligned}$$

Περαιτέρω επειδή οι συναρτήσεις $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1)$ και $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2)$ είναι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz (3.20), παρατηρούμε ότι η τελευταία εκφράζεται ως εξής

$$\begin{aligned} & \iint_{D_1 \cup D_3 \cup D_5} \left[G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) (-k_0^2 n_0^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) (-k_0^2 n_0^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)) \right] dx dz \\ &+ \iint_{D_2 \cup D_4} \left[G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) (-k_0^2 n_1^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) (-k_0^2 n_1^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)) \right] dx dz = \\ & \oint_{\partial D} \left[G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial n_i} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) \frac{\partial}{\partial n_i} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \right] dl \equiv I_L \end{aligned}$$

η οποία, όπως διαπιστώνεται εύκολα, ισοδύναμα γράφεται

$$\iint_D \left[-G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) + G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \right] dx dz = I_L$$

Όταν οι πλευρές του ορθογωνίου L τείνουν στο άπειρο, οπότε το D τείνει στο \mathbb{R}^2 , θα έχουμε

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \left[-G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) + G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \right] dx dz \\ &= \lim_{D \rightarrow \mathbb{R}^2} \iint_D \left[-G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) + G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \right] dx dz \quad (\text{A.3}) \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} I_L \end{aligned}$$

Εξάλλου λαμβάνοντας υπόψη το γνωστό ορισμό της γενικευμένης συνάρτησης $\delta(\mathbf{r})$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \left[-G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) + G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \right] dx dz = -G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) + G(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) \quad (\text{A.4})$$

Για τον υπολογισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος I_L παρατηρούμε τα εξής:

α) Σύμφωνα με την [77] η συνάρτηση Green κατά μήκος των πλευρών L_1 και L_3 του ορθογωνίου L έχει την ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \sim f(\varphi) \frac{e^{-jk_0 n_0 r}}{\sqrt{r}} \quad \frac{\partial G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')}{\partial r} \sim f(\varphi) e^{-jk_0 n_0 r} \frac{-2jk_0 n_0 r - 1}{2r^{3/2}}, \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{A.5})$$

ενός σκεδαζόμενου κυλινδρικού κύματος, όπου $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ και $\varphi = \arctan\left(\frac{x}{z}\right)$. Καθώς οι πλευρές L_1 και L_3 τείνουν στο άπειρο, τότε $r \rightarrow \infty$, όπως διαπιστώνεται εύκολα τα αντίστοιχα επικαμπύλια ολοκληρώματα τείνουν στο μηδέν, δηλαδή $\lim_{L_1 \rightarrow \infty} I_{L_1} = \lim_{L_3 \rightarrow \infty} I_{L_3} = 0$.

β) Κατά μήκος της πλευράς L_4 του ορθογωνίου L δεν είναι δυνατόν να θεωρήσουμε την ασυμπτωτική έκφραση (A.5), διότι η πλευρά L_4 τέμνει τις δύο πλάκες. Όμως σύμφωνα με την ([70], παρ. 2.5) η διέγερση από μία ρευματική πηγή παράγει βαθμωτό πεδίο, το οποίο εκφράζεται ως υπέρθεση ενός πεδίου με διακριτό και ενός πεδίου με συνεχές φάσμα. Κατά συνέπεια η συνάρτηση Green κατά μήκος της L_4 εκφράζεται ως εξής

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = \sum_{m=1}^N A_m^i U_m(x) e^{-j\beta_m z} + \int_0^{+\infty} \varphi(x, \rho) A_i(\rho) e^{-j\beta(\rho)z} d\rho, \quad i=1,2 \quad (\text{A.6})$$

όπου β_m ($m=1, \dots, N$) οι σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων άρτιων και περιττών επιφανειακών ρυθμών, $A_m^i, A_i(\rho), i=1,2$ οι συντελεστές ανάπτυξης και $\beta(\rho) = \sqrt{k_0^2 n_0^2 - \rho^2}$ με $\text{Im}(\beta(\rho)) \leq 0$ οπότε το ολοκλήρωμα, το οποίο εμφανίζεται στην (A.6) πληρεί τη συνθήκη ακτινοβολίας. Εξάλλου, σύμφωνα με την ([70], παρ. 2.5), οι συναρτήσεις ανάπτυξης $U_m(x)$ και $\varphi(x, \rho)$ είναι κατάλληλες λύσεις της κυματικής εξίσωσης και ικανοποιούν τις σχέσεις ορθογωνιότητας

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} U_{m'}(x) U_m(x) dx &= \delta_{mm'} := \begin{cases} 1, & m = m' \\ 0, & m \neq m' \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, \rho) \varphi(x, \rho') dx &= \delta(\rho - \rho') \\ \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) \varphi(x, \rho) dx &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (A.6) των $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1)$ και $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2)$ στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I_{L_4} = \int_{L_4} \left[G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial n_i} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_2) \frac{\partial}{\partial n_i} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1) \right] dl$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{\partial}{\partial n_i} G = \frac{\partial}{\partial z} G$, ευρίσκουμε

$$\begin{aligned}
I_{L_4} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \left[\sum_{n=1}^N A_n^1 U_n(x) e^{-j\beta_n z} + \int_0^{+\infty} \varphi(x, \rho_1) A_1(\rho_1) e^{-j\beta(\rho_1)z} d\rho_1 \right] \right. \\
\left[-\sum_{m=1}^N j\beta_m A_m^2 U_m(x) e^{-j\beta_m z} - \int_0^{+\infty} j\beta(\rho_2) \varphi(x, \rho_2) A_2(\rho_2) e^{-j\beta(\rho_2)z} d\rho_2 \right] \\
- \left[\sum_{m=1}^N A_m^2 U_m(x) e^{-j\beta_m z} + \int_0^{+\infty} \varphi(x, \rho_2) A_2(\rho_2) e^{-j\beta(\rho_2)z} d\rho_2 \right] \\
\left. \left[-\sum_{n=1}^N j\beta_n A_n^1 U_n(x) e^{-j\beta_n z} - \int_0^{+\infty} j\beta(\rho_1) \varphi(x, \rho_1) A_1(\rho_1) e^{-j\beta(\rho_1)z} d\rho_1 \right] \right\} \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

Τώρα εναλλάσσοντας στην (A.8) την τάξη ολοκλήρωσης και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας (A.7), διαπιστώνουμε χωρίς δυσκολία ότι ισχύει

$$\begin{aligned}
I_{L_4} = \sum_{m,n=1}^N A_n^1 A_m^2 j(\beta_n - \beta_m) e^{-j(\beta_n + \beta_m)z} \delta_{nm} \\
+ \int_0^{+\infty} A_1(\rho_1) e^{-j\beta(\rho_1)z} d\rho_1 \int_0^{+\infty} j[\beta(\rho_1) - \beta(\rho_2)] \delta(\rho_1 - \rho_2) A_2(\rho_2) e^{-j\beta(\rho_2)z} d\rho_2
\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει αμέσως ότι $\lim_{L_4 \rightarrow \infty} I_{L_4} = 0$.

γ) Θεωρώντας το αντίστοιχο του αναπτύγματος (A.6) κατά μήκος της πλευράς L_2 με οδεύοντα κύματα προς το $z = -\infty$ και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία της περίπτωσης β), συμπεραίνουμε επίσης ότι $\lim_{L_2 \rightarrow \infty} I_{L_2} = 0$.

Συνοψίζοντας τις περιπτώσεις α), β) και γ), συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{L \rightarrow \infty} I_L = \lim_{L_1 \rightarrow \infty} I_{L_1} + \lim_{L_2 \rightarrow \infty} I_{L_2} + \lim_{L_3 \rightarrow \infty} I_{L_3} + \lim_{L_4 \rightarrow \infty} I_{L_4} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Τέλος συνδυάζοντας τις (A.3), (A.4) και (A.9), ευρίσκουμε $-G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) + G(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) = 0$, δηλαδή ισχύει

$$G(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) = G(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) \quad \forall \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}^2$$

και το θεώρημα αποδείχτηκε.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ

Ένα φραγμένο $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ονομάζεται *Jordan μετρήσιμο* όταν η σταθερή συνάρτηση $1: S \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ονομάζεται *τοπικά Riemann ολοκληρώσιμη*, όταν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε Jordan μετρήσιμο $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Όταν η f είναι συνεχής, τότε είναι και τοπικά Riemann ολοκληρώσιμη ([49], σελ. 375, Satz 16).

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ τοπικά Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ως *γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα* της f ορίζεται το όριο

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{M_n} f(x,y) dx dy \quad (\text{B.1})$$

όπου M_n είναι ακολουθία Jordan μετρήσιμων υποσυνόλων του \mathbb{R}^2 με τις ιδιότητες

- a) $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M_n)$
- b) $cl(M_n) \subseteq Int(M_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$

(βλ. [49], σελ. 422, Definition 2).

Εξάλλου, υπενθυμίζουμε του ορισμούς:

- Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ονομάζεται *μετρήσιμη* όταν υπάρχει ακολουθία (s_n) κλιμακωτών συναρτήσεων $s_n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$s_n \rightarrow f \quad \mu - a.e.$$

(μ το μέτρο Lebesgue του \mathbb{R}^2)

- Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ονομάζεται *Lebesgue ολοκληρώσιμη* όταν η f είναι μετρήσιμη και ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f| d\mu < +\infty.$$

- Ο χώρος των *Lebesgue απολύτως ολοκληρωσίμων* συναρτήσεων του \mathbb{R}^2

$$L^1(\mathbb{R}^2) = \left\{ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ μετρήσιμη και } \int_{\mathbb{R}^2} |f| d\mu < +\infty \right\}.$$

- Ο χώρος των *Lebesgue τετραγωνικά ολοκληρώσιμων* συναρτήσεων του \mathbb{R}^2

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \left\{ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ μετρήσιμη και } \int_{\mathbb{R}^2} |f|^2 d\mu < +\infty \right\}.$$

Έστω μία συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, η οποία είναι τοπικά Riemann ολοκληρώσιμη. Τότε, εφαρμόζοντας το κλασικό θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} f d\mu \quad (\text{B.2})$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τη σ -προσθετικότητα του ολοκληρώματος Lebesgue και την (B.2), διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \iint_{S_n} f(x,y) dx dy \quad (\text{B.3})$$

για κάθε μετρήσιμη αριθμήσιμη διαμέριση (S_n) του \mathbb{R}^2 (S_n Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R}^2 , $S_n \cap S_m = \emptyset \mid n \neq m$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \mathbb{R}^2$).

Μία συνάρτηση $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ονομάζεται *τμηματικά λεία*, όταν υπάρχει μία διαμέριση $P = \{a < t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ του $[a, b]$, έτσι ώστε να ισχύουν

- Hf είναι C^1 σε κάθε ανοικτό διάστημα (t_{i-1}, t_i) , $i=1, \dots, N$.
- Υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f(t_i^+)$, $f(t_i^-)$, $f'(t_i^+)$ και $f'(t_i^-)$ στα διαμεριστικά σημεία t_i της διαμέρισης P .

Εξάλλου, μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ονομάζεται *τμηματικά λεία*, όταν είναι τμηματικά λεία σε κάθε κλειστό υποδιάστημα $[a, b]$ του \mathbb{R} .

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ μία Λ -περιοδική Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{\Lambda} t}, t \in \mathbb{R}, \text{ όπου}$$

$$c_n = \frac{1}{\Lambda} \int_a^{a+\Lambda} f(\psi) e^{-j \frac{2\pi n}{\Lambda} \psi} d\psi$$

για τυχόν $a \in \mathbb{R}$ ονομάζεται σειρά Fourier της συναρτήσεως f και οι μιγαδικοί αριθμοί c_n συντελεστές Fourier της συνάρτησης f . Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι Λ -περιοδική και τμηματικά λεία συνάρτηση, τότε ισχύει

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{\Lambda} t} = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)), t \in \mathbb{R} \quad (\text{B.4})$$

(βλ. π.χ. [50], Theorem 8.16).

Εξάλλου, όταν η συνάρτηση f είναι Λ -περιοδική, συνεχής και τμηματικά λεία, τότε η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση f , δηλαδή ισχύει

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{\Lambda}t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{B.5})$$

απόλυτα και ομοιόμορφα (βλ. π.χ. [50], Theorem 8.29).

Έτσι, όταν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μία Λ -περιοδική C^1 συνάρτηση και η παράγωγος $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι τμηματικά λεία, τότε ισχύει

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (e^{j\frac{2\pi n}{\Lambda}t})' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j\frac{2\pi n}{\Lambda} c_n e^{j\frac{2\pi n}{\Lambda}t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{B.6})$$

και η σύγκλιση είναι απόλυτη και ομοιόμορφη.

Τώρα, έστω $u = u(x, z): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ μία C^2 συνάρτηση, η οποία είναι Λ -περιοδική ως προς τη μεταβλητή z . Η συνάρτηση u σύμφωνα με την (B.5) αναπτύσσεται ως προς τη μεταβλητή z στη σειρά Fourier

$$u(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) e^{-j\frac{2\pi n}{\Lambda}z} \quad (\text{B.7})$$

Περαιτέρω, υπό την προϋπόθεση ότι η δευτέρα μερική παράγωγος $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ είναι τμηματικά λεία, εφαρμόζοντας την (B.6) ευρίσκουμε

$$\frac{\partial^2 u(x, z)}{\partial z^2} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\pi n}{\Lambda} \right)^2 \varphi_n(x) e^{-j\frac{2\pi n}{\Lambda}z} \quad (\text{B.8})$$

Εξάλλου, επειδή η συνάρτηση u εκφράζει στη Διατριβή παράγοντα ηλεκτρικού πεδίου, ο προσδιορισμός της εδώ επιτυγχάνεται υπό τις προϋποθέσεις:

$$\frac{\partial^2 u(x, z)}{\partial x^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\varphi_n(x) e^{-j\frac{2\pi n}{\Lambda}z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n''(x) e^{-j\frac{2\pi n}{\Lambda}z} \quad (\text{B.9})$$

και η συνάρτηση u αποτελεί λύση της εξίσωσης Helmholtz

$$\frac{\partial^2 u(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, z)}{\partial z^2} + k_0^2 n^2(x) u(x, z) = 0 \quad (\text{B.10})$$

οι οποίες υπαγορεύονται από τη φυσική του προβλήματος.

Έτσι, συνδυάζοντας τις (B.8) έως (B.10) οδηγούμαστε στη διαφορική εξίσωση

$$\varphi_n''(x) + \left[k_0^2 n^2(x) - (2\pi n / \Lambda)^2 \right] \varphi_n(x) = 0 \quad (\text{B.11})$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ MATLAB ΓΙΑ ΤΟΝ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΣΥΖΕΥΚΤΗ ΓΡΑΜΜΟΣΕΙΡΩΝ

Ο πίνακας της Μεθόδου των Ροπών με τεχνικές Galerkin συνολικού χώρου για τη διάταξη του ασυμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών, ο οποίος αναλύεται στο Κεφάλαιο 4, παράγεται από το ακόλουθο MATLAB script. Ως παράμετροι εισόδου θεωρούνται το μήκος κύματος λειτουργίας λ , η τάξη N του truncated συστήματος, η μιγαδική τιμή γ της σταθεράς διάδοσης, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά Λ , d_2 , d_3 , d_4 , w_1 , w_2 , a_i , b_i , s_i , l_i και τα φυσικά χαρακτηριστικά n_1 - n_7 του ασυμμετρικού συζεύκτη. Επίσης σημειώνουμε ότι ο πίνακας της Μεθόδου των Ροπών για τη διάταξη του συμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών, ο οποίος αναλύεται στο Κεφάλαιο 3, προκύπτει από το εν λόγω MATLAB script για τις επιλογές $n_1=n_3=n_5$, $n_2=n_4$ και $d_2=d_4$.

```
function [logdetA,detA,matA]=A(lam,b,N,n,w,L,d,ai,bi,si,li)
```

```
% This function generates the (8N+4)*(8N+4) matrix of the homogeneous linear system
```

```
% Input parameters:
```

```
% lam is the wavelength in micrometers
```

```
% b assumed to be the complex propagation constant,
```

```
% corresponding to gamma in the analysis
```

```
% N number of test and expansion functions
```

```
% n vector of the diffraction index with n=[n1,n2,n3,n4,n5,n6,n7]
```

```
% w vector of the grating's width with w=[w1,w2]
```

```
% L grating's period
```

```
% d vector of the slabs thicknesses d=[0,d2,2d3,d4,0]
```

```
% ai,si,bi,li vectors of the discontinuities geometry versus x
```

```
% ai=[a_1,a_2,...,a_t] si=[s_1,s_2,...,s_t] bi=[b_1,b_2,...,b_t] li=[l_1,l_2,...,l_t]
```

```
% ai,si,bi,li are scaled with respect to L, e.g. ai=ai/L
```

```
% Obviously  $a(i)+s(i)<a(i+1)$ ,  $a(t)+s(t)<1$ 
```

```
% t number of rectangles per iteration
```

```
matA=[Aij(lam,b,N,n,w,L,d,ai,si,bi,li,11),Aij(lam,b,N,n,w,L,d,ai,si,bi,li,12);...
```

```
        Aij(lam,b,N,n,w,L,d,ai,si,bi,li,21),Aij(lam,b,N,n,w,L,d,ai,si,bi,li,22)];
```

```
detA=abs(det(matA));
```

```
logdetA=log10(detA);
```

```
function out=Aij(lam,b,N,n,w,L,d,ai,si,bi,li,ind)
```

```
w=2*pi./lam.*w; L=2*pi./lam.*L; d=2*pi./lam.*d; t=length(ai); P=50;
```

```
%Propagation constants versus x
```

```
g1=sqrt(((j*b)+2.*pi/L.*(-P:P)).^2-(n(1))^2); g2=sqrt(((j*b)+2.*pi/L.*(-P:P)).^2-(n(2))^2);
```

```
g3=sqrt(((j*b)+2.*pi/L.*(-P:P)).^2-(n(3))^2); g4=sqrt(((j*b)+2.*pi/L.*(-P:P)).^2-(n(4))^2);
```

```
g5=sqrt(((j*b)+2.*pi/L.*(-P:P)).^2-(n(5))^2); g6=sqrt(((j*b)+2.*pi/L.*(-N:N)).^2-(n(6))^2);
```

```
g7=sqrt(((j*b)+2.*pi/L.*(-N:N)).^2-(n(7))^2);
```

```
% Definition of the auxiliary functions
```

```
Po344=(g4.*cosh(g4.*d(4)./2))+(g3.*sinh(g4.*d(4)./2));
```

```
Pe344=(g3.*cosh(g4.*d(4)./2))+(g4.*sinh(g4.*d(4)./2));
```

```
Po544=(g4.*cosh(g4.*d(4)./2))+(g5.*sinh(g4.*d(4)./2));
```

```
Pe544=(g5.*cosh(g4.*d(4)./2))+(g4.*sinh(g4.*d(4)./2));
```

```
Po122=(g2.*cosh(g2.*d(2)./2))+(g1.*sinh(g2.*d(2)./2));
```

```
Pe122=(g1.*cosh(g2.*d(2)./2))+(g2.*sinh(g2.*d(2)./2));
```

```
Po322=(g2.*cosh(g2.*d(2)./2))+(g3.*sinh(g2.*d(2)./2));
```

```
Pe322=(g3.*cosh(g2.*d(2)./2))+(g2.*sinh(g2.*d(2)./2));
```

```
Qo322=(g2.*cosh(g2.*d(2)./2))-(g3.*sinh(g2.*d(2)./2));
```

```
Qe322=(g3.*cosh(g2.*d(2)./2))-(g2.*sinh(g2.*d(2)./2));
```

```
Qo344=(g4.*cosh(g4.*d(4)./2))-(g3.*sinh(g4.*d(4)./2));
```

```
Qe344=(g3.*cosh(g4.*d(4)./2))-(g4.*sinh(g4.*d(4)./2));
```

```
K3544=0.5*((Qe344.*Po544)-(Qo344.*Pe544)); K3122=0.5*((Qe322.*Po122)-(Qo322.*Pe122));
```

```
L3544=0.5*((Pe344.*Po544)+(Po344.*Pe544)); L3122=0.5*((Pe322.*Po122)+(Po322.*Pe122));
```

```
e=exp(-g3.*d(3));
```

```
% Matrix J contains dependency from discontinuities versus z
```

```
Jmax=max(2*N,N+P); J=-Jmax:Jmax; J(Jmax+1)=1;
```

```
if t == 1
```

```
    J1=1./(j*2*pi.*J).*exp(j*2*pi.*J.*ai).*(exp(j*2*pi.*J.*si)-1);
```

```
else
```

```
    J1=1./(j*2*pi.*J).*sum(exp(j*2*pi.*ai.*J).*(exp(j*2*pi.*(si.*J))-1));
```

```
end
```

```
J1(Jmax+1)=sum(si);
```

```
if t == 1
```

```
    J2=1./(j*2*pi.*J).*exp(j*2*pi.*J.*bi).*(exp(j*2*pi.*J.*li)-1);
```

```
else
```



```

J2=1./(j*2*pi.*J).*sum(exp(j*2*pi.*bi'*J).*(exp(j*2*pi.*(li'*J))-1));
end
J2(Jmax+1)=sum(li);
% Submatrix A11
if ind == 11
% Matrix J1mn is matrix J1_m-n of the analysis
J1mn=-N:N;
J1mn=J1mn(ones(2*N+1,1),:); J1mn=J1mn.'-J1mn;
J1mn=J1(J1mn+Jmax+1); R1=J1mn;
J1mn=[J1mn J1mn;J1mn J1mn];
% Matrix K1 containing dependence from discontinuities versus x
% Structure: K1=[K1++,K1+-;K1-+,K1--]
K1=g7(ones(2*N+1,1),:);
K1=[K1.'+K1 K1.'-K1; -K1.'+K1 -K1.'-K1];
K11=logical(diag(ones(2*N+1,1),2*N+1)+diag(ones(2*N+1,1),-2*N-1));
K1(~K11)=2.*sinh(K1(~K11)).*w(1)./2)/K1(~K11); K1(K11)=w(1);
% Initialization and constants definition
J11=zeros(4*N+2,4*N+2);
J3T=zeros(4*N+2,4*N+2);
kn=n(7)^2-n(4)^2;
E=[exp(g7.*w(1)./2) exp(-g7.*w(1)./2)];
for p=-P:0
for pp=1:2
g1p=g1(p+P+1);g2p=g2(p+P+1); g3p=g3(p+P+1);g4p=g4(p+P+1);
g5p=g5(p+P+1);
L3544p=L3544(p+P+1);L3122p=L3122(p+P+1);
K3544p=K3544(p+P+1);K3122p=K3122(p+P+1);
ep=e(p+P+1);
% Matrix J11p defined as k0^2(n7^2-n4^2)/(g7n^2-g4p^2)*J1p-n*J1m-p
J1mp=-N-p:N-p; J1mp=J1(J1mp+Jmax+1).';
J1pn=p+N:-1:p-N; J1pn=J1(J1pn+Jmax+1);
C11pn=kn./(g7.^2-g4p.^2);
J11p=J1mp*(J1pn.*C11pn); J11p=[J11p J11p;J11p J11p];
% Matrix R1 containing dependence from discontinuities versus x
ga=[-g7+g4p g7+g4p];gs=[-g7-g4p g7-g4p];
g54=(g5p-g4p)/(g5p+g4p);g34=(g3p-g4p)/(g3p+g4p);
Rm1=1./gs-(g54.*exp(-2.*g4p.*d(4))./ga); Rm2=1./ga-(g34./gs);

```

```

Rm3=1./gs-(g54.*exp(-2.*g4p.*d(4)).*exp(2.*g4p.*w(1))./ga);
Rm4=1./ga-(g34.*exp(-2.*g4p.*w(1))./gs);
Rn1=gs-(g34.*ga);
Rn4=ga-(g54.*gs.*exp(-2.*g4p.*d(4)).*exp(2.*g4p.*w(1)));
Rn3=Rn1.*exp(-g4p.*w(1)); Rn2=Rn4.*exp(-g4p.*w(1));
R1=(E.*Rm1).*(E.*Rn1)-(E.*Rm2).*((1./E).*Rn2)-...
((1./E).*Rm3).*(E.*Rn3)+((1./E).*Rm4).*((1./E).*Rn4);
R1=R1.*(L3544p.*L3122p)/((L3544p.*L3122p)-(K3544p.*K3122p.*ep.^2))...
./(2.*g4p.*(1-(g54.*g34.*exp(-2.*g4p.*d(4)))));

% Matrix H11 containing dependence from discontinuities versus x
Hm1=1./gs-(g54.*exp(-2.*g4p.*d(4))./ga); Hm2=1./gs-(g34./ga);
Hm3=1./gs-(g54.*exp(-2.*g4p.*d(4)).*exp(2.*g4p.*w(1))./ga);
Hm4=(1./gs.*exp(-2.*g4p.*w(1)))-(g34./ga);
Hn1=ga-(g34.*gs);
Hn4=ga-(g54.*gs.*exp(-2.*g4p.*d(4)).*exp(2.*g4p.*w(1)));
Hn3=Hn1.*exp(-g4p.*w(1)); Hn2=Hn4.*exp(-g4p.*w(1));
H11=(E.*Hm1).*(E.*Hn1)-(E.*Hm2).*((1./E).*Hn2)-...
((1./E).*Hm3).*(E.*Hn3)+((1./E).*Hm4).*((1./E).*Hn4);
H11=H11.*(K3544p.*K3122p.*ep.^2)/((L3544p.*L3122p)-(K3544p.*K3122p.*ep.^2))...
./(2.*g4p.*(g34-(g54.*exp(-2.*g4p.*d(4)))));

% Matrices J11 and J3T
J11=J11+J11p;
J3T=J3T+(J11p.*(R1+H11));

%Control for counting every p from -P to P
if p~=0, p=-p; else break; end
end
end
out=-((J1mn+J11).*K1)+J3T;
end

% Submatrix A12
if ind == 12
% Initialization and constants definition
J12=zeros(4*N+2,4*N+2);
J3T=zeros(4*N+2,4*N+2);
kn=n(6)^2-n(2)^2;
Em=[exp(g7.*w(1)/2) exp(-g7.*w(1)/2)];
En=[exp(g6.*w(2)/2) exp(-g6.*w(2)/2)];

```

```

for p=-P:0
    for pp=1:2
        g1p=g1(p+P+1);g2p=g2(p+P+1); g3p=g3(p+P+1);g4p=g4(p+P+1);
        g5p=g5(p+P+1);
        L3544p=L3544(p+P+1);L3122p=L3122(p+P+1);
        K3544p=K3544(p+P+1);K3122p=K3122(p+P+1);
        ep=e(p+P+1);
% Matrix J12p defined as  $k_0^2(n_6^2-n_2^2)/(g_6n^2-g_2p^2)*J_{2p-n}*J_{1m-p}$ .
        J1mp=-N-p:N-p; J1mp=J1(J1mp+Jmax+1).';
        J2pn=p+N:-1:p-N; J2pn=J2(J2pn+Jmax+1);
        C12pn=kn./(g6.^2-g2p.^2);
        J12p=J1mp*(J2pn.*C12pn); J12p=[J12p J12p;J12p J12p];
% Matrix H12 containing dependence from discontinuities versus x
        gam=[-g7+g4p g7+g4p]; gsm=[-g7-g4p g7-g4p];
        gan=[g6+g2p -g6+g2p]; gsn=[g6-g2p -g6-g2p];
        g54=(g5p-g4p)/(g5p+g4p); g34=(g3p-g4p)/(g3p+g4p);
        g12=(g1p-g2p)/(g1p+g2p); g32=(g3p-g2p)/(g3p+g2p);
        Hm1=1./gsm-(g54.*exp(-2.*g4p.*d(4))./gam); Hm2=Hm1;
        Hm3=1./gsm-(g54.*exp(-2.*g4p.*d(4)).*exp(2.*g4p.*w(1))./gam); Hm4=Hm3;
        Hn1=exp(-g2p.*w(2)).*...
        (gan-(g12.*exp(-2.*g2p.*d(2)).*exp(2.*g2p.*w(2)).*gsn));
        Hn2=gan-(g12.*gsn.*exp(-2.*g2p.*d(2))); Hn3=Hn1.*exp(-g4p.*w(1));
        Hn4=Hn2.*exp(-g4p.*w(1));
        H12=(Em.*Hm1).*(En.*Hn1)-(Em.*Hm2).*((1./En).*Hn2)-...
        ((1./Em).*Hm3).*(En.*Hn3)+((1./Em).*Hm4).*((1./En).*Hn4);
        H12=H12.*(L3544p.*L3122p.*ep)/((L3544p.*L3122p)-(K3544p.*K3122p.*ep.^2))...
        .*2*g3p/(g3p+g4p)/(g3p+g2p)/(1-(g54.*g34.*exp(-2.*g4p.*d(4))))...
        ./((1-(g12.*g32.*exp(-2.*g2p.*d(2)))));
% Matrix J3T
        J3T=J3T+J12p.*H12;
%Control for counting every p from -P to P
        if p~=0, p=-p; else break; end
    end
end
out=-J3T;
end
% Submatrix A21

```

```

if ind == 21
% Initialization and constants definition
J21=zeros(4*N+2,4*N+2);
J3T=zeros(4*N+2,4*N+2);
kn=n(7)^2-n(4)^2;
Em=[exp(g6.*w(2)./2) exp(-g6.*w(2)./2)];
En=[exp(g7.*w(1)./2) exp(-g7.*w(1)./2)];
for p=-P:0
    for pp=1:2
        g1p=g1(p+P+1);g2p=g2(p+P+1); g3p=g3(p+P+1);g4p=g4(p+P+1);
        g5p=g5(p+P+1);
        L3544p=L3544(p+P+1);L3122p=L3122(p+P+1);
        K3544p=K3544(p+P+1);K3122p=K3122(p+P+1);
        ep=e(p+P+1);
% Matrix J21p defined as k0^2(n7^2-n4^2)/(g7n^2-g4p^2)*J1p-n*J2m-p.
J2mp=-N-p:N-p; J2mp=J2(J2mp+Jmax+1).';
J1pn=p+N:-1:p-N; J1pn=J1(J1pn+Jmax+1);
C21pn=kn./(g7.^2-g4p.^2);
J21p=J2mp*(J1pn.*C21pn); J21p=[J21p J21p;J21p J21p];
% Matrix H21 containing dependence from discontinuities versus x
gam=[g6+g2p -g6+g2p]; gsm=[g6-g2p -g6-g2p];
gan=[-g7+g4p g7+g4p]; gsn=[-g7-g4p g7-g4p];
g54=(g5p-g4p)/(g5p+g4p); g34=(g3p-g4p)/(g3p+g4p);
g12=(g1p-g2p)/(g1p+g2p); g32=(g3p-g2p)/(g3p+g2p);
Hm1=1./gsm-(g12.*exp(-2.*g2p.*d(2)).*exp(2.*g2p.*w(2))./gam); Hm2=Hm1;
Hm3=1./gsm-(g12.*exp(-2.*g2p.*d(2))./gam); Hm4=Hm3;
Hn1=exp(-g2p.*w(2)).*...
(gan-(g54.*exp(-2.*g4p.*d(4)).*gsn));
Hn2=exp(-g2p.*w(2)).*exp(-g4p.*w(1)).*...
(gan-(g54.*gsn.*exp(-2.*g4p.*d(4)).*exp(2.*g4p.*w(1))));
Hn3=Hn1.*exp(g2p.*w(2)); Hn4=Hn2.*exp(g2p.*w(2));
H21=(Em.*Hm1).*(En.*Hn1)-(Em.*Hm2).*((1./En).*Hn2)-...
((1./Em).*Hm3).*(En.*Hn3)+((1./Em).*Hm4).*((1./En).*Hn4);
H21=H21.*(L3544p.*L3122p.*ep)/((L3544p.*L3122p)-(K3544p.*K3122p.*ep.^2))...
.*g3p/(g3p+g4p)/(g3p+g2p)/(1-(g54.*g34.*exp(-2.*g4p.*d(4))))...
./(1-(g12.*g32.*exp(-2.*g2p.*d(2))));
% Matrix J3T

```

```

J3T=J3T+J21p.*H21;
%Control for counting every p from -P to P
    if p~=0, p=-p; else break; end
    end
end
out=-J3T;
end
% Submatrix A22
if ind == 22
% Matrix J2mn is matrix J2_m-n of the analysis
    J2mn=-N:N; J2mn=J2mn(ones(2*N+1,1),:);
    J2mn=J2mn.'-J2mn; J2mn=J2(J2mn+Jmax+1);
    R2=J2mn; J2mn=[J2mn J2mn;J2mn J2mn];
% Matrix K2 containing dependence from discontinuities versus x
% Structure of K2=[K2++,K2+-,K2-+,K2--]
    K2=g6(ones(2*N+1,1),:);
    K2=[K2.'+K2 K2.'-K2; -K2.'+K2 -K2.'-K2];
    K22=logical(diag(ones(2*N+1,1),2*N+1)+diag(ones(2*N+1,1),-2*N-1));
    K2(~K22)=2.*sinh(K2(~K22)).*w(2)./2./K2(~K22);
    K2(K22)=w(2);
% Initialization and constants definition
    J22=zeros(4*N+2,4*N+2);
    J3T=zeros(4*N+2,4*N+2);
    kn=n(6)^2-n(2)^2;
    E=[exp(g6.*w(2)./2) exp(-g6.*w(2)./2)];
    for p=-P:0
        for pp=1:2
            g1p=g1(p+P+1);g2p=g2(p+P+1); g3p=g3(p+P+1);g4p=g4(p+P+1);
            g5p=g5(p+P+1);
            L3544p=L3544(p+P+1);L3122p=L3122(p+P+1);
            K3544p=K3544(p+P+1);K3122p=K3122(p+P+1);
            ep=e(p+P+1);
% Matrix J22p defined as  $k_0^2(n_6^2-n_2^2)/(g_6^2-g_2^2)*J_{2p-n}*J_{2m-p}$ 
            J2mp=-N-p:N-p; J2mp=J2(J2mp+Jmax+1).';
            J2pn=p+N:-1:p-N; J2pn=J2(J2pn+Jmax+1);
            C22pn=kn./(g6.^2-g2p.^2);
            J22p=J2mp*(J2pn.*C22pn); J22p=[J22p J22p;J22p J22p];

```

% Matrix R2 containing dependence from discontinuities versus x

```

ga=[g6+g2p -g6+g2p]; gs=[g6-g2p -g6-g2p];
g12=(g1p-g2p)/(g1p+g2p); g32=(g3p-g2p)/(g3p+g2p);
Rm1=1./ga-(g32.*exp(-2.*g2p.*w(2))./gs);
Rm2=1./gs-(g12.*exp(-2.*g2p.*d(2)).*exp(2.*g2p.*w(2))./ga);
Rm3=1./ga-(g32./gs); Rm4=1./gs-(g12.*exp(-2.*g2p.*d(2))./ga);
Rn1=ga-(g12.*gs.*exp(-2.*g2p.*d(2)).*exp(2.*g2p.*w(2)));
Rn4=gs-(g32.*ga); Rn3=Rn1.*exp(-g2p.*w(2));
Rn2=Rn4.*exp(-g2p.*w(2));
R2=(E.*Rm1).*(E.*Rn1)-(E.*Rm2).*((1./E).*Rn2)-...
((1./E).*Rm3).*(E.*Rn3)+((1./E).*Rm4).*((1./E).*Rn4);
R2=R2.*(L3544p.*L3122p)/((L3544p.*L3122p)-(K3544p.*K3122p.*ep.^2))...
./(2.*g2p.*(1-(g32.*g12.*exp(-2.*g2p.*d(2)))));

```

% Matrix H22 containing dependence from discontinuities versus x

```

Hm1=(1./gs.*exp(-2.*g2p.*w(2)))-(g32./ga);
Hm2=1./gs-(g12.*exp(-2.*g2p.*d(2)).*exp(2.*g2p.*w(2))./ga);
Hm3=1./gs-(g32./ga); Hm4=1./gs-(g12.*exp(-2.*g2p.*d(2))./ga);
Hn1=ga-(g12.*gs.*exp(-2.*g2p.*d(2)).*exp(2.*g2p.*w(2)));
Hn4=ga-(g32.*gs); Hn3=Hn1.*exp(-g2p.*w(2));
Hn2=Hn4.*exp(-g2p.*w(2));
H22=(E.*Hm1).*(E.*Hn1)-(E.*Hm2).*((1./E).*Hn2)-...
((1./E).*Hm3).*(E.*Hn3)+((1./E).*Hm4).*((1./E).*Hn4);
H22=H22.*(K3544p.*K3122p.*ep.^2)/((L3544p.*L3122p)-(K3544p.*K3122p.*ep.^2))...
./(2.*g2p.*(g32-(g12.*exp(-2.*g2p.*d(2)))));

```

% Matrices J11 and J3T

```

J22=J22+J22p;
J3T=J3T+(J22p.*(R2+H22));

```

%Control for counting every p from -P to P

```

    if p~=0, p=-p; else break; end
end
end
out=-((J2mn+J22).*K2)+J3T;
end

```

Σύμφωνα με τα αναφερόμενα στην Παράγραφο 4.3, οι μιγαδικές σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων κυμάτων στη διάταξη του ασυμμετρικού συζεύκτη γραμμοσειρών προσδιορίζονται ως οι ρίζες της ορίζουσας του πίνακα του γραμμικού συστήματος (4.33). Οι εν λόγω ρίζες υπολογίζονται με εφαρμογή της επαναληπτικής μιγαδικής μεθόδου Müller, η οποία είναι επέκταση του αλγορίθμου Newton-Raphson. Η μέθοδος Müller χρησιμοποιεί τρία σημεία παραβολής, η πλησιέστερη ρίζα της οποίας είναι κάθε φορά η νέα προσέγγιση της ρίζας της μη γραμμικής εξίσωσης. Το επόμενο MATLAB script υλοποιεί τη μέθοδο Müller. Ως παράμετροι εισόδου θεωρούνται η συνάρτηση f , της οποίας αναζητούμε τις ρίζες, οι δύο αρχικές εκτιμήσεις x_0 και x_2 της ρίζας και $x_1 = (x_0 + x_2)/2$.

```
function result = cmuller (f, x0, x1, x2)
% cmuller carries out Muller's method for seeking a (possibly complex) root of a nonlinear function.
FATOL = 10^-6; XRTOL = 10^-5; ITMAX = 50;
y0 = feval ( f, x0); y1 = feval ( f, x1); y2 = feval ( f, x2);
it = 0;
format long
while ( it <= ITMAX )
    it = it + 1;
% Determine the coefficients A, B, C
% of the polynomial Y(X) = A * (X-X2)**2 + B * (X-X2) + C
% which goes through the data: (X1,Y1), (X2,Y2), (X3,Y3).
    a = ((y0 - y2) * (x1 - x2) - (y1 - y2) * (x0 - x2)) / ((x0 - x2) * (x1 - x2) * (x0 - x1));
    b = ((y1 - y2) * (x0 - x2)^2 - (y0 - y2) * (x1 - x2)^2) / ((x0 - x2) * (x1 - x2) * (x0 - x1));
    c = y2;
% Get the roots of the polynomial.
    if (a ~= 0)
        disc = b * b - 4.0 * a * c;
        q1 = ( b + sqrt ( disc ) );
        q2 = ( b - sqrt ( disc ) );
        if ( abs ( q1 ) < abs ( q2 ) )
            dx = - 2.0 * c / q2;
        else
            dx = - 2.0 * c / q1
        end
    elseif ( b ~= 0 )
        dx = - c / b;
```

```

else
    '(Muller algorithm broke down, results unreliable.)'
    result = x2;
    return
end
x3 = x2 + dx;
x0 = x1; x1 = x2; x2 = x3;
y0 = y1; y1 = y2; y2 = feval ( f, x2);
[ x2, y2 ]
res_y2(it)=y2; res_x2(it)=x2;
% Declare victory if the most recent change in X is small, and the size of the function is small.
if ( abs ( dx ) < XRTOL * ( abs ( x2 ) + 1.0 ) & abs ( y2 ) < FATOL )
    result = x2; res=min(res_y2); ind=find(res_y2==res); min_x2=res_x2(ind);
    return
end
end
result = x2;
'(Maximum number of iterations taken, results unreliable.)'

```


ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ

Λίστα ερευνητικών εργασιών, οι οποίες προέκυψαν από τη Διδακτορική Διατριβή.

Δημοσιευμένες σε Περιοδικά

N. L. Tsitsas, D. I. Kaklamani, and N. K. Uzunoglu, "Integral equation analysis of coupling in symmetric grating-assisted optical waveguides," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 23, pp. 1488-1502 (2006).

N. L. Tsitsas, D. I. Kaklamani, and N. K. Uzunoglu, "Rigorous integral equation analysis of non-symmetric coupled grating slab waveguides," *J. Opt. Soc. Am. A*, to appear in vol. 23, no. 11 (November 2006).

Δημοσιευμένες σε Πρακτικά Συνεδρίων

N. L. Tsitsas, D. I. Kaklamani, N. K. Uzunoglu, "Integral equation computation of coupled propagation modes in grating assisted planar integrated optics waveguides," in *Proceedings of 2005 IEEE AP-S International Symposium and USNC/URSI National Radio Science Meeting*, 3-8 July 2005, Washington DC, USA.

N. L. Tsitsas, D. I. Kaklamani, N. K. Uzunoglu, "An integral equation method for the analysis of propagation in symmetric grating assisted optical couplers," in *Proceedings of Mediterranean Microwave Symposium 2005*, 6-8 September 2005, Athens, Greece, pp. 288-294.

N. L. Tsitsas, D. I. Kaklamani, N. K. Uzunoglu, "Integral equation computation of coupled propagation modes in non-symmetric grating waveguides," in *Proceedings of 8th International Conference on Laser and Fiber-Optical Networks Modeling 2006*, 29 June-1 July 2006, Kharkiv, Ukraine, pp. 25-28.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] D. Marcuse, *Integrated Optics*. New York: IEEE Press, 1973.
- [2] T. Tamir, *Integrated Optics*. New York: Springer-Verlag, 1975.
- [3] K. Ogawa, W. Chang, B. Sopori and F. Rosenbaum, "A Theoretical Analysis of Edged Grating Couplers for Integrated Optics," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. QE-9, no. 1, pp. 29-42, 1973.
- [4] N. Imoto, "An Analysis for Contradirectional-Coupler-Type Optical Grating Filters," *J. Lightwave Technology*, vol. LT-3, no. 4, pp. 895-900, 1985.
- [5] S. Zhang and T. Tamir, "Analysis and design of broadband grating couplers," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 29, pp. 2813-2824, 1993.
- [6] G. W. Chern and L. A. Wang, "Transfer-matrix method based on perturbation expansion for periodic and quasi-periodic binary long-period gratings," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 16, no. 11, pp. 2675-2689, 1999.
- [7] D. Marcuse, "Directional Couplers Made of Nonidentical Asymmetric Slabs, Part I: Synchronous Couplers," *J. Lightwave Technology*, vol. LT-5, no. 1, pp. 113-118, 1987.
- [8] H. A. Haus, W. P. Huang, S. Kawakami and N. A. Whitaker, "Coupled-Mode Theory of Optical Waveguides," *J. Lightwave Technology*, vol. LT-5, no. 1, pp. 16-23, 1987.
- [9] D. Marcuse, "Directional Couplers Made of Nonidentical Asymmetric Slabs, Part II: Grating Assisted Couplers," *J. Lightwave Technology*, vol. LT-5, no. 2, pp. 268-273, 1987.
- [10] W. P. Huang and H. A. Haus, "Power Exchange in Grating-Assisted Couplers," *J. Lightwave Technology*, vol. 7, no. 6, pp. 920-924, 1989.
- [11] D. Marcuse, "Radiation Loss of Grating Assisted Directional Coupler," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. 26, no. 4, pp. 675-684, 1990.
- [12] W. P. Huang, B. E. Little and S. K. Chaudhuri, "A New Approach to Grating-Assisted Couplers," *J. Lightwave Technology*, vol. 9, no. 6, pp. 721-727, 1991.
- [13] W. P. Huang and J. W. Y. Lit, "Nonorthogonal Coupled-Mode Theory of Grating-Assisted Codirectional Couplers," *J. Lightwave Technology*, vol. 9, no. 7, pp. 845-852, 1991.
- [14] B. E. Little, W. P. Huang and S. K. Chaudhuri, "A Multiple-Scale Analysis of Grating-Assisted Couplers," *J. Lightwave Technology*, vol. 9, no. 10, pp. 1254-1263, 1991.

- [15] G. Griffel, M. Itzkovich and A. A. Hardy, "Coupled Mode Formulation for Directional Couplers with Longitudinal Perturbation," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. 27, no. 4, pp. 985-994, 1991.
- [16] W. P. Huang and J. Hong, "A Transfer Matrix Approach Based on Local Normal Modes for Coupled Waveguides with Periodic Perturbations," *J. Lightwave Technology*, vol. 10, no. 10, pp. 1367-1375, 1992.
- [17] W. P. Huang, J. Hong and Z. M. Mao, "Improved Coupled Mode Formulation Based on Composite Modes for Parallel Grating-Assisted Co-Directional Couplers," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. 29, no. 11, pp. 2805-2812, 1993.
- [18] W. P. Huang, "Coupled-mode theory for optical waveguides: an overview," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 11, no. 3, pp. 963-983, 1994.
- [19] B. E. Little, "A Variational Coupled-Mode Theory for Periodic Waveguides," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. 31, no. 12, pp. 2258-2264, 1995.
- [20] B. E. Little, "A Variational Coupled-Mode Theory Including Radiation Loss for Grating-Assisted Couplers," *J. Lightwave Technology*, vol. 14, no. 2, pp. 188-195, 1996.
- [21] K. Watanabe, K. Yasumoto, "Coupled-mode analysis of wavelength filtering in a grating-assisted asymmetric three-waveguide directional coupler," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 14, no 11, pp. 2994-3000, 1997.
- [22] K. C. Chang, V. Shah and T. Tamir, "Scattering and guiding of waves by dielectric gratings with arbitrary profiles," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 70, no. 7, pp. 804-813, 1980.
- [23] V. Passaro and M. Armenise, "Analysis of Radiation Loss in Grating-Assisted Codirectional Couplers," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. 31, no. 9, pp. 1691-1697, 1995.
- [24] S. Zhang and T. Tamir "Rigorous analysis of power transfer in grating-assisted couplers," *Optics Letters*, vol. 20, pp. 803-805, 1995.
- [25] S. Zhang and T. Tamir "Rigorous theory of grating-assisted couplers," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 13, no. 12, pp. 2403-2413, 1996.
- [26] N. Sun, J. Butler, G. Evans, L. Pang and P. Congdon, "Analysis of Grating-Assisted Directional Couplers Using the Floquet-Bloch Theory," *J. Lightwave Technology*, vol. 15, no. 12, pp. 2301-2315, 1997.
- [27] J. Butler, N. Sun, G. Evans, L. Pang and P. Congdon, "Grating-Assisted Coupling of Light between Semiconductor and Glass Waveguides," *J. Lightwave Technology*, vol. 16, no. 6, pp. 1038-1048, 1998.

- [28] N. Finger and E. Gornik, "Analysis of Metalized-Grating Coupled Twin- Waveguide Structures," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. 35, no. 5, pp. 832-843, 1999.
- [29] V. Passaro, "Optimal Design of Grating-Assisted Directional Couplers," *J. Lightwave Technology*, vol. 18, no. 7, pp. 973-984, 2000.
- [30] S. T. Peng, "Rigorous formulation of scattering and guidance by dielectric grating waveguides: general case of oblique incidence," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 6, no. 12, pp. 1869-1883, 1989.
- [31] T. Tamir and S. Zhang, "Modal Transmission Line Theory of Multilayered Grating Structures," *J. Lightwave Technology*, vol. 14, no. 5, pp. 914-927, 1996.
- [32] P. G. Dinesen, J. S. Hesthaven, J. P. Lynov, and L. Lading, "Pseudospectral method for the analysis of diffractive optical elements," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 16, pp. 1124-1130, 1999.
- [33] U. Levy, M. Nezhad, H-C. Kim, C-H. Tsai, L. Pang and Y. Fainman, "Implementation of a graded-index medium by use of subwavelength structures with graded fill factor," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 22, pp. 724-733, 2005.
- [34] H. Ichikawa and H. Kikuta, "Dynamic guided-mode resonant grating filter with quadratic electro-optic effect," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 22, pp. 1311-1318, 2005.
- [35] D. S. Jones, *Theory of Electromagnetism*. Oxford, UK: Pergamon Press, 1964.
- [36] E. G. Alivizatos, I. D. Chremmos, N. L. Tsitsas and N. K. Uzunoglu, "Green's-function method for the analysis of propagation in holey fibers," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 21, pp. 847-857, 2004.
- [37] M. Matsumoto, M. Tsutsumi and N. Kumagai, "Radiation of millimeter waves from a leaky dielectric waveguide with a light induced grating layer," *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-35, pp. 1033-1042, 1987.
- [38] G. Hadjicostas, J. Butler, G. Evans, N. Carlson and R. Amantea, "A Numerical Investigation of Wave Interactions in Dielectric Waveguides with Periodic Surface Corrugations," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. 26, no. 5, pp. 893-902, 1990.
- [39] J. Butler, W. Ferguson, G. Evans, P. Stabile and A. Rosen, "A Boundary Element Technique Applied to the Analysis of Waveguides with Periodic Surface Corrugations," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. 28, no. 7, pp. 1701-1709, 1992.
- [40] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. New York: IEEE Press, 1995.
- [41] J. A. Kong, *Electromagnetic Wave Theory*. Cambridge, USA: EMW Publishing, 2005.

- [42] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. New York: Wiley, 1999.
- [43] R. Collin, *Field Theory of Guided Waves*. New York: IEEE Press, 1991.
- [44] Ι. Α. Τσαλαμέγκα και Ι. Α. Ρουμेलιώτη, *Σημειώσεις Ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, Τόμος Ι*. Αθήνα: Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1998.
- [45] G. Dassios and R. Kleinman, *Low Frequency Scattering*. Oxford: Clarendon Press, 2000.
- [46] Α. Ν. Τσίτσα, *Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία, 2003.
- [47] R. C. Alferness, T. L. Kock, L. L. Buhl, F. Storz, F. Heismann and M. J. R. Martyak, "Grating assisted InGaAsP/InP vertical co-directional coupler filter," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 55, pp. 2011-2013, 1989.
- [48] H. Sakata, S. Takeuchi, "Grating-Assisted Codirectional Coupler Filters Using AlGaAs/GaAs MQW Waveguides," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 3, no. 10, pp. 899-901, 1991.
- [49] S. Hildebrandt, *Analysis 2*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- [50] G. B. Folland, *Advanced Calculus*. New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- [51] K. A. Winick, "Design of Grating-Assisted Waveguide Couplers with Weighted Coupling," *J. Lightwave Technology*, vol. 9, no. 11, pp. 1481-1492, 1991.
- [52] E. Peral, J. Capmany and J. Marti, "Synthesis of all-pass filters by codirectional grating couplers," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 14, no. 9, pp. 2173-2179, 1997.
- [53] R. Feced and M. Zervas, "Efficient inverse scattering algorithm for the design of grating-assisted codirectional mode couplers," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 17, no. 9, pp. 1573-, 2000.
- [54] J. K. Brenne and J. Skaar, "Design of Grating-Assisted Codirectional Couplers With Discrete Inverse Scattering Algorithms," *J. Lightwave Technology*, vol. 21, no. 1, pp. 254-263, 2003.
- [55] J. Hong, W. P. Huang, "A Rigorous Analysis of Tunable Semiconductor Lasers with Built-in Grating-Assisted Vertical Coupler Filter," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. 29, no. 12, pp. 2878-2885, 1993.
- [56] C. C. Ghizoni, J. M. Ballantyne, and C. L. Tang, "Theory of Optical Waveguides Distributed Feedback Lasers: A Green's Function Approach," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. QE-13, no. 10, pp. 843-848, 1977.

- [57] T.-Y. Tsai, Z.-C. Lee, C.-S. Gau, F.-S. Chen, J.-R. Chen, and C.-C. Chen, "A Novel Wavelength-Division Multiplexer Using Grating-Assisted Two-Mode Interference," *IEEE Photon. Tech. Letters*, vol. 16, no. 10, pp. 2251-2253, 2004.
- [58] M. Greenberg, and M. Orenstein, "Filterless "Add" Multiplexer Based on Novel Complex Gratings Assisted Coupler," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 17, no. 7, pp. 1450-1452, 2005.
- [59] F. Liu, H. Hier and T. Worchesky, "Dual-Side Processed Demultiplexer Using Grating-Assisted Codirectional Coupler," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 17, no. 3, pp. 600-602, 2005.
- [60] J. M. Senior and S. D. Cusworth, "Devices for wavelength multiplexing and demultiplexing," *Inst. Elec. Eng. Proc.*, vol. 136, Pt. J., no. 3, pp. 183-202, 1989.
- [61] T. Liang and R. Ziolkowski, "Mode Conversion of Ultrafast Pulses by Grating Structures in Layered Dielectric Waveguides," *J. Lightwave Technology*, vol. 15, no. 10, pp. 1966-1973, 1997.
- [62] R. R. Syms, "Optical directional coupler with a grating overlay," *Applied Optics*, vol. 24, no. 5, pp. 717-726, 1985.
- [63] F. K. Schwing and S. T. Peng, "Design of dielectric grating antenna for millimeter-wave applications," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-31, pp. 199-209, 1983.
- [64] G. A. Evans et. al., "Coherent, monolithic two dimensional (10×10) grating surface emitting laser arrays," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 53, pp. 2123-2125, 1988.
- [65] K. P. Huy, A. Morand and P. Benech, "Modelization of the Whispering Gallery Mode in Microgear Resonators Using the Floquet-Bloch Formalism," *IEEE J. Quantum Electronics*, vol. 41, no. 3, pp. 357-365, 2005.
- [66] V. L. Bratman, G. G. Denisov, N. S. Ginzburg, and M.I. Petelin, "FEL's with Bragg reflection resonators; Cyclotron autoresonance masers versus ubitrons," *IEEE J Quantum Electronics*, vol. QE-19, pp. 282-296, 1983.
- [67] S. Ura, Y. Furukawa, T. Suhara and H. Nishihara, "Linearly focusing grating coupler for integrated-optic parallel pickup," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 7, no. 9, pp. 1759-1763, 1990.
- [68] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*. New York: Academic Press, 1949.
- [69] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill, 1941.
- [70] Ν. Κ. Ουζούνoglou, *Τηλεπικοινωνίες Οπτικών Ινών*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμείων, 1990.

- [71] D. Colton and R. Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. New York: John Wiley & Sons, 1983.
- [72] Γ. Δάσιος, Κ. Κυριάκη, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*. Αθήνα: 1994.
- [73] P. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [74] J. S. Bagby, D. P. Nyquist and B. C. Drachman, "Integral formulation for analysis of integrated dielectric waveguides," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-33, pp. 906-915, 1985.
- [75] T. E. Rozzi and G. H. In't Veld, "Field and Network Analysis of Interacting Step Discontinuities in Planar Dielectric Waveguides," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-27, pp. 303-309, 1979.
- [76] Α. Δ. Καραλής, *Μελέτη κυματοδήγησης και εύρεση συναρτήσεως Green σε επίπεδο διηλεκτρικό κυματοδηγό με περιοδικά χαραγμένες γραμμοσειρές*. Διπλωματική Εργασία Σ.Η.Μ.Μ.Υ. Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2001.
- [77] N. K. Uzunoglu and J. G. Fikioris, "Scattering from an inhomogeneity inside a dielectric slab waveguide," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 72, pp. 628-637, 1982.

