

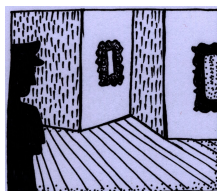


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΣΧΕΔΟΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ-ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ
ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΛΥΨΗΣ ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΧΩΝ



ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΟΥ

Χριστόδουλου Γ. Φραγκουδάκη

Πτυχιούχου Γεωλογικού Πανεπιστημίου Αθηνών (1994)

Αθήνα, Ιούνιος 2007



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΣΧΕΔΟΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΗ-ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ
ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΛΥΨΗΣ ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΧΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΟΥ

Χριστόδουλου Γ. Φραγκουδάκη

Συμβουλευτική Επιτροπή: Ευστάθιος Ζάχος
Φώτω Αφράτη
Ανδρέας Σταφυλοπάτης

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την ____ 2007:

.....
Ευστάθιος Ζάχος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Φώτω Αφράτη
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

.....
Ανδρέας Σταφυλοπάτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ιωάννης Εμίρης
Αν. Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

.....
Αλέξανδρος Παπαϊωάννου
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Νικόλαος Παπασπύρου
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Αριστείδης Παγουριζής
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, _____ 2007

.....
Χριστόδουλος Γ. Φραγκουδάκης
Διδάκτωρ Ε.Μ.Π.

© 2007 Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights reserved.

Στους γονείς μου

Περίληψη

Οι ταχύτατα αναπτυσσόμενες τεχνολογίες τηλεπικοινωνιών δημιουργούν συνεχώς νέα πεδία έρευνας με πρακτικό αλλά και θεωρητικό ενδιαφέρον. Η αξιοπιστία και η ανεξαρτησία των ασυρμάτων δικτύων επικοινωνιών οδηγούν τους παρόχους υπηρεσιών δικτύωσης στην πλήρη αντικατάσταση των ενσυρμάτων υποδομών. Το κόστος όμως της επένδυσης που απαιτείται για τη δημιουργία και τη διατήρηση σε λειτουργία ενός ασυρμάτου δικτύου τηλεπικοινωνιών είναι τεράστιο.

Σε ένα αφηρημένο μοντέλο, αν δύο σημεία επικοινωνούν μέσω ενός σταθμού επικοινωνίας (δηλαδή μιας κεραίας), τότε λέμε ότι τα σημεία καλύπτονται από το σταθμό. Για να καλύφθει κάθε σημείο μιας γεωγραφικής περιοχής χρειάζεται να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός σταθμών που είναι απαραίτητοι για να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις της κάλυψης. Αυτό είναι το κλασικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης που είναι καλά μελετημένο και από τη συνδυαστική και από την αλγοριθμική του σκοπιά. Μια ρεαλιστική παραλλαγή είναι η προσπάθεια κάλυψης όσο το δυνατό περισσότερων σημείων με χρήση ενός δεδομένου αριθμού σταθμών. Η παραλλαγή αυτή λαμβάνει υπόψη ότι ένα περιορισμένος προϋπολογισμός μπορεί να μην είναι αρκετός για την αγορά των σταθμών που χρειάζονται για την πλήρη κάλυψη της γεωγραφικής περιοχής. Η άμεση επικοινωνία μεταξύ δύο σημείων μπορεί να μην είναι εφικτή και αυτό εξαρτάται από την τοπολογία της περιοχής. Τα πολύγωνα με τρύπες, ή χωρίς τρύπες, έχουν χρησιμοποιηθεί σαν μοντέλα των γεωγραφικών περιοχών.

Παρουσιάζουμε εδώ μια γενική άπληστη μέθοδο με σκοπό να αντιμετωπίσουμε τις παραλλαγές μεγιστοποίησης του κλασσικού προβλήματος κάλυψης: υπάρχει ένας αριθμός διαφορετικών θέσεων φύλαξης (κορυφές, ακμές) και k φύλακες του κατάλληλου τύπου (φύλακες-κορυφές, φύλακες-ακμές). Το πρόβλημα είναι να βρεθούν «καλές θέσεις» για τους φύλακες έτσι ώστε να υλοποιείται η απαίτηση της κάλυψης (πλήρης ή μερική κάλυψη) και να μεγιστοποιείται μια συνάρτηση (μήκος, εμβαδόν, αξία, κτλ) που επιδρά στα καλυπτόμενα σύνολα σημείων. Διευρενούμε επίσης και τις περιπτώσεις όπου ο υπολογισμός και μόνο της τιμής της συνάρτησης είναι NP-hard και τις περιπτώσεις που υπάρχουν δεδομένα κόστη για την τοποθέτηση των φυλάκων και το συνολικό κόστος δεν μπορεί να υπερβεί ένα δεδομένο προϋπολογισμό. Αποδεικνύουμε ότι όλες αυτές οι παραλλαγές είναι NP-hard προβλήματα και με την εφαρμογή της άπληστης μεθόδου που προτείνουμε, κατασκευάζουμε πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικούς αλγόριθμους που πετυχαίνουν **σταθερούς** προσεγγιστικούς λόγους.

Παρουσιάζουμε επίσης και μια αναγωγή διατήρησης χάσματος από ένα γνωστό APX-hard πρόβλημα στο πρόβλημα μεγιστοποίησης του καλυπτόμενου μήκους στη περίμετρο

με τη χρήση k φυλάκων-κορυφών. Η αναγωγή ισχύει με λιγότερες η περισσότερες τροποποιήσεις για όλα τα προβλήματα μεγιστοποίησης που εξετάσαμε. Αποδεικνύουμε ότι, εκτός αν $P=NP$, **δεν αποδέχεται κανένα πρόβλημα μεγιστοποίησης πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα**: υπάρχουν σταθερές που δεν μπορεί να είναι προσεγγιστικοί λόγοι οποιουδήποτε πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικού αλγορίθμου που υπολογογίζει λύσεις για οποιοδήποτε πρόβλημα μεγιστοποίησης.

Abstract

The rapidly evolving telecommunication technologies are continuously creating new research fields of so much practical as well as theoretical interest. The always increasing reliability and independence of wireless communication networks are driving the communication service providers towards the complete replacement of the wired infrastructure. However, there is an enormous cost of investment in order to create and keep operational any wireless telecommunication network.

In an abstract model, if two points can communicate using a communication station (i.e. an antenna), we say that the points are covered by the station. In order to cover every point of a geographical region we need to find the minimum number of stations that are necessary for the covering requirement. This is the classical minimization problem that is well known and studied, regarding its combinatorial and algorithmic aspects. A reasonable variation is to try to cover as many points as possible using a given number of stations. This variation takes into account that a given budget might not suffice for the total covering of the geographical region. Communication between two points might be possible or blocked and that depends on the area topology. Polygons with, or without holes, have been used as models.

We present here a general greedy approach in order to deal with the maximization variations of the classical covering problem: there is a number of different guarding positions (vertices, edges) and k given guards of the appropriate type (vertex-guards, edge-guards). The problem is to find good positions for the guards in order to fulfill a covering requirement (complete or partial coverage) that maximizes a function (length, area, value, etc) of the covered point sets. We also investigate the cases where the calculation of the function value is NP-hard and the cases where there are fixed costs in order to place guards and the total cost has to be within a given budget. For all these variations we prove that we have NP-hard problems and by applying the proposed greedy approach, we construct polynomial time approximation algorithms that achieve **constant** approximation ratios.

We present also a gap preserving reduction from a well known APX-hard problem to the problem of maximizing the covered length of the polygon's boundary, using k vertex guards. The reduction holds, with more or less minor modifications, for all of the investigated maximization problems. We prove that, unless $P=NP$, **no maximization problem admits a polynomial time approximation scheme**: there exist constants that cannot occur as approximation ratios of any polynomial time approximation algorithm that solves any of the maximization problems.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή Στάθη Ζάχο για τις καταπληκτικές του παραδόσεις στα μεταπτυχιακά και προπτυχιακά μαθήματα Θεωρητικής Πληροφορικής της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ. Η αγάπη του Στάθη για τη διδασκαλία και η ιδιαίτερη ματιά του στο αντικείμενο της Θεωρητικής Πληροφορικής, αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης για την ερευνητική δραστηριότητα και την οριοθέτηση των στόχων μου. Ευχαριστίες επίσης ανήκουν στον επίκουρο καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ Αλέξη Παπαϊωάννου και στον αναπληρωτή καθηγητή της ΣΗΜΜΥ Γιώργο Κολέτσο για τη συμβολή τους στη διαμόρφωση της θεωρητικής μου κουλτούρας. Σημαντική επίσης επίδραση στα πρώτα μου βήματα είχαν ο Λέκτορας του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων Χρήστος Νομικός και ο Λέκτορας της ΣΗΜΜΥ Άρης Παγουρτζής.

Στα τελευταία στάδια της διατριβής ιδιαίτερα σημαντική ηθική υποστήριξη έλαβα από τους καθηγητές της ΣΗΜΜΥ Ανδρέα Σταφυλοπάτη και Φώτω Αφράτη.

Ευχαριστώ τον καθηγητή του ΕΚΠΑ Γιάννη Εμίρη για τις εύστοχες παρατηρήσεις του πάνω στο κείμενο και τις προτάσεις του για καλύτερη συνολική παρουσίαση της διατριβής. Η συνεργασία με το Γιάννη με εξυψώνει επιστημονικά και αποτελεί κινητήριο δύναμη για την συνέχεια της ερευνητικής μου δραστηριότητας.

Είναι σίγουρο ότι η διατριβή δεν θα είχε αρχίσει ούτε θα είχε τελειώσει ποτέ αν δεν υπήρχε συνεχής συνεργασία με τον διδάκτορα του ΕΜΠ Ευριπίδη Μάρκου, τώρα μεταδιδακτορικό ερευνητή του Πανεπιστημίου McMaster στον Καναδά. Μαζί με τον Ευριπίδη ξεκινήσαμε την περιπέτεια των μεταπτυχιακών σπουδών, μοιραστήκαμε τις δυσκολίες και τα άγχη και τελικά ευτυχίσαμε βλέποντας τους κόπους των απίστευτα δύσκολων προσπαθειών μας να ανταμείβονται. Ο δρόμος ήταν δύσκολος και με πολλά εμπόδια, όμως η ωριμότητα του Ευριπίδη, η καλή διάθεση, η αισιοδοξία και η προσήλωση στους στόχους του ήταν ο καταλύτης που βοήθησε να ευοδοθούν οι προσπάθειές μας. Η μελλοντική συνεργασία με τον Ευριπίδη είναι μια ακόμη κινητήριο δύναμη για την συνέχεια της ερευνητικής μου δραστηριότητας.

Στο στάδιο ολοκλήρωσης της διατριβής είχα σημαντική ηθική υποστήριξη από τον αναπληρωτή καθηγητή της ΣΗΜΜΥ Κυριάκο Σπυρόπουλο και το διδάκτορα ΕΜΠ Λουδοβίκο Τουρατζίδη, επιστημονικό υπεύθυνο και διευθυντή αντίστοιχα, του Κέντρου Ηλεκτρονικών Υπολογιστών του ΕΜΠ. Τους ευχαριστώ θερμά για τη διευκόλυνση που μου παρείχαν απαλάσσοντάς με από διάφορα καθήκοντα της εργασίας μου. Στη προσπάθεια αυτή, πολύτιμοι αρωγοί ήταν και οι συνάδελφοι του Κέντρου Υπολογιστών, Στέφανος Φουκαρίδης, Νίκος Μπογιατζόγλου, Μάρκος Καραμπάτσης και Άννα Μοσχά.

Ευχαριστώ τον πατέρα μου γιατί από πολύ νωρίς με δίδαξε μαθηματικά, δίνοντάς μου στέρεες βάσεις για την επιστημονική πορεία μου. Η μαθηματική μου αντίληψη οφείλεται στην προσπάθειά του να γίνεται πάντα εμφανής η ομορφιά που κρύβει η ακρίβεια και η αυστηρότητα της μαθηματικής απόδειξης. Η ακεραιότητα του χαρακτήρα του και η σταθερή του πίστη σε αξίες και ιδανικά, λειτούργησαν σαν φάρος που φωτίζει το δρόμο της ζωής μου και επέδρασαν σε μέγιστο βαθμό στην ψυχοσύνθεσή μου. Ευχαριστώ την μητέρα μου για το οργανωτικό της πνεύμα, την αποτελεσματικότητά της και την επιμονή της στη λεπτομέρεια. Η ανεξάντλητη ενεργητικότητά της και η συνεχής φροντίδα της λειτουργούν πάντα ευεργετικά και με βοηθούν στα δύσκολα. Το παράδειγμά της διαμόρφωσε το χαρακτήρα και τις δεξιότητές μου. Τους ευχαριστώ για την αγάπη τους και εύχομαι να είναι πάντα μαζί κι ευτυχισμένοι.

Τέλος το μεγαλύτερο ευχαριστώ πηγαίνει στην Ελένη μου, τη σύντροφό μου και μητέρα του παιδιού μου. Την ευχαριστώ για την αγάπη, την εκτίμηση και την επιστοσύνη της. Της οφείλω την οντότητά μου και το νόημα της ζωής μου.

Αθήνα, Ιούνιος 2007

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων	xi
Κατάλογος Αλγορίθμων	xiii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Κίνητρο για την έρευνα	1
1.2 Εφαρμογές	2
1.3 Σύντομη Εισαγωγή στη Θεωρία Πολυπλοκότητας	3
1.3.1 Το πρόβλημα «P vs NP»	3
1.3.2 Προβλήματα Απόφασης	4
1.3.3 Τυπικές Γλώσσες	4
1.3.4 Υπολογιστικές Μηχανές	5
1.3.5 Η κλάση πολυπλοκότητας NP	6
1.3.6 Αναγωγές και NP πληρότητα	6
1.4 NP προβλήματα βελτιστοποίησης	7
1.5 Θεωρία Προσεγγισιμότητας	7
1.5.1 Προσεγγίσεις NP προβλημάτων βελτιστοποίησης	7
1.5.2 Ιεραρχία κλάσεων προσέγγισης	8
1.6 Θεωρία μη προσεγγισιμότητας	10
1.6.1 Πιθανοτικώς ελέγξιμα συστήματα αποδείξεων	10
1.6.2 Προβλήματα απόφασης με εγγυημένες παραμέτρους	10
1.6.3 Αναγωγές διατήρησης χάσματος	12
1.7 Σχετική έρευνα και γνωστά αποτελέσματα	13
1.8 Αποτελέσματα της Διατριβής	14
2 Γεωμετρία της ορατότητας	19
2.1 Γεωμετρικές Έννοιες	20
2.2 Κατηγορήματα Ορατότητας	21

2.3	Συνδυαστική αναπαράσταση και πολύγωνο ορατότητας	22
2.4	Υποδιαίρεσεις ορατότητας	23
2.4.1	Υποδιαίρεση της περιμέτρου	25
	Κάλυψη της υποδιαίρεσης της περιμέτρου	26
2.4.2	Υποδιαίρεση του εσωτερικού	27
	Κάλυψη της υποδιαίρεσης του εσωτερικού	29
3	Φύλαξη πολυγώνων	31
3.1	Ιδιαιτερότητες της φύλαξης	32
3.2	Ορισμοί προβλημάτων φύλαξης	33
3.2.1	Προβλήματα ελαχιστοποίησης	33
3.2.2	Προβλήματα μεγιστοποίησης	34
	Φύλαξη μέγιστου μήκους στην περίμετρο	34
	Φύλαξη μέγιστου εμβαδού στο εσωτερικό	34
	Φύλαξη μέγιστης αξίας στην περίμετρο	35
	Φύλαξη με όριο κόστους	36
3.3	Ένας άπληστος (greedy) αλγόριθμος φύλαξης	37
3.3.1	Φύλαξη μέγιστου μήκους	39
3.3.2	Φύλαξη μέγιστου εμβαδού	41
3.3.3	Φύλαξη μέγιστης αξίας	42
3.4	Όταν πρέπει να γίνουν δύσκολες επιλογές	45
3.4.1	Φύλαξη μέγιστης αξίας μαζί με τοποθέτηση	47
3.5	Φύλαξη με όριο κόστους	49
3.5.1	Φύλαξη μέγιστου μήκους με προϋπολογισμό	54
3.5.2	Φύλαξη μέγιστης αξίας με προϋπολογισμό	54
3.6	Φύλαξη με όριο κόστους και δύσκολες επιλογές	56
3.6.1	Φύλαξη μέγιστης αξίας με όριο κόστους μαζί με τοποθέτηση	59
4	Μη Προσεγγισιμότητα	61
4.1	Πρώτο αποτέλεσμα μη προσέγγισης	61
4.2	Μια αναγωγή διατήρησης χάσματος	62
4.2.1	Κατασκευή του πολυγώνου	62
4.2.2	Μετασχηματισμός μιας εφικτής λύσης	65
	Από την λογική έκφραση στο πολύγωνο	66
	Από το πολύγωνο στην λογική έκφραση	70
4.2.3	Η αναγωγή διατηρεί το χάσμα	73
4.3	Περισσότερα αποτελέσματα μη προσέγγισης	74
4.3.1	Φύλαξη μέγιστου εμβαδού	74
4.3.2	Φύλαξη μέγιστης αξίας	74

Φύλαξη μέγιστης αξίας με επίβλεψη	74
4.3.3 Φύλαξη μέγιστης αξίας με ταυτόχροχρονη τοποθέτηση	75
4.3.4 Φύλακες πλευρές	75
4.3.5 Φύλαξη με προυπολογισμό	76
4.3.6 Πολύγωνα με τρύπες	76
5 Επίλογος	77
5.1 Φύλαξη από το εσωτερικό του πολυγώνου	77
5.2 Υλοποιήσεις	80
5.3 Συμπεράσματα	81
Ευρετήριο	85
Βιβλιογραφία	87

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Ιεραρχία κλάσεων προσέγγισης	9
1.2	Ένταξη των γνωστών αποτελεσμάτων στην ιεραρχία των κλάσεων προσέγγισης. Σχετικός είναι ο πίνακας 1.1.	15
2.1	Πολυγωνικές αλυσίδες, απλό πολύγωνο και πολύγωνο με τρύπες	20
2.2	Παραδείγματα ορατότητας.	21
2.3	Πολύγωνα ορατότητας από σημείο και από ακμή	22
2.4	Διαμέριση ορατότητας και κρίσιμοι περιορισμοί	23
2.5	Οποιαδήποτε κορυφή ή ακμή, καλύπτει ένα τμήμα της $\mathcal{V}(\partial P)$ αν και μόνο αν το επιτηρεί	25
2.6	Η ακμή e καλύπτει το $\overline{v_1 v_2} \in \mathcal{V}(\partial P)$ γιατί $\overline{p'p} \subset P$	26
2.7	Οποιαδήποτε κορυφή ή ακμή, καλύπτει ένα χωρίο της $\mathcal{V}(P)$ αν και μόνο αν το επιτηρεί	27
2.8	Η ακμή e καλύπτει το χωρίο $C \in \mathcal{V}(P)$ γιατί $\overline{p'p} \subset P$	28
3.1	Διαφορές στην ικανότητα φύλαξης	33
3.2	Ένα πολύγωνο με βάρη	43
3.3	Η κορυφή u καλύπτει «άπειρα» μεγαλύτερο μήκος από οποιαδήποτε άλλη κορυφή	55
3.4	Ένα πολύγωνο με βάρη στις ακμές και κόστη στις κορυφές.	55
4.1	Ένα περίγραμμα για το κάθε λέκτημα.	63
4.2	Ένα περίγραμμα για την κάθε πρόταση.	63
4.3	Ένα περίγραμμα πρότασης με τρία περιγράμματα λεκτημάτων.	63
4.4	Ένα περίγραμμα για την κάθε μεταβλητή.	64
4.5	Κατασκευή περιγραμμάτων ακίδων για ένα αρνητικό λέκτημα.	65
4.6	Κατασκευή περιγραμμάτων ακίδων για ένα θετικό λέκτημα.	66
4.7	Ένα πολύγωνο που μπορεί να προκύψει από την κατασκευή.	67

4.8	Μια απονομή αλήθειας που ικανοποιεί την Φ ανάγεται σε ένα σύνολο φυλάκων που καλύπτει πλήρως το πολύγωνο.	68
4.9	Αν η απονομή αλήθειας δεν ικανοποιεί κάποιες προτάσεις της Φ , τότε τα περιγράμματα των προτάσεων που δεν ικανοποιούνται μένουν ακάλυπτα από το σύνολο των φυλάκων, μετά την αναγωγή.	69
4.10	Διάφορες περιπτώσεις μετακίνησης φυλάκων.	71
4.11	Για την περίπτωση των φυλάκων πλευρών: a) Περίγραμμα λεκτήματος. b) Περίγραμμα μεταβλητής.	75
5.1	Τα σημεία v_1, v_2 έχουν συνδυαστικά ισοδύναμα πολύγωνα ορατότητας.	78
5.2	Το δυϊκό γράφημα της υποδιαίρεσης ορατότητας του εσωτερικού του πολυγώνου.	78
5.3	Ένα μονότονο πολύγωνο με $\Theta(n)$ sinks.	79
5.4	Ένα ορθογώνιο πολύγωνο με $\Theta(n)$ sinks.	79
5.5	Ένα τρέξιμο του <code>vispack</code> που με δύο φύλακες δίνει κάλυψη 87% του βέλτιστου.	80
5.6	Το σχήμα 1.2 συμπληρωμένο με τα αποτελέσματα της διατριβής. Σχετικός είναι ο πίνακας 5.1.	82

Κατάλογος Αλγορίθμων

2.1	Κατασκευή του συνόλου $\mathcal{V}(\partial P)(v)$	29
2.2	Κατασκευή του συνόλου $\mathcal{V}(\partial P)(e)$	29
2.3	Κατασκευή του συνόλου $\mathcal{V}(P)(v)$	30
2.4	Κατασκευή του συνόλου $\mathcal{V}(P)(e)$	30
3.1	Ένας γενικός αλγόριθμος k βημάτων	37
3.2	Κάλυψη μέγιστου μήκους με k φύλακες κορυφές.	40
3.3	Κάλυψη μέγιστου μήκους με k φύλακες πλευρές.	41
3.4	Κάλυψη μέγιστου εμβαδού με k φύλακες κορυφές.	41
3.5	Κάλυψη μέγιστου εμβαδού με k φύλακες πλευρές.	42
3.6	Κάλυψη μέγιστου βάρους με k φύλακες κορυφές.	43
3.7	Κάλυψη μέγιστου βάρους με k φύλακες κορυφές.	44
3.8	Κάλυψη μέγιστης αξίας με φύλακες κορυφές και τοποθέτηση πινάκων.	48
3.9	Κάλυψη μέγιστης αξίας με φύλακες πλευρές και τοποθέτηση πινάκων.	48
3.10	Ένας γενικός αλγόριθμος k βημάτων με όριο κόστους B .	49
3.11	Κάλυψη μέγιστου μήκους με όριο κόστους B .	52
3.12	Κάλυψη μέγιστης αξίας με όριο κόστους B .	53
3.13	Κάλυψη μέγιστης αξίας (φύλακες κορυφές, όριο κόστους και τοποθέτηση).	58
3.14	Κάλυψη μέγιστης αξίας (φύλακες πλευρές, όριο κόστους και τοποθέτηση).	60

Εισαγωγή

1.1 Κίνητρο για την έρευνα

Οι πολυγωνικές περιοχές στο επίπεδο, είναι ένας από τους βασικότερους δομικούς λίθους της γεωμετρικής μοντελοποίησης. Χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση μιας μεγάλης ποικιλίας μορφών και σχημάτων, στα γραφικά των υπολογιστών, στη μηχανική όραση, στην αναγνώριση προτύπων, στη ρομποτική και σε διάφορους άλλους τομείς της επιστήμης των υπολογισμών. Με τον όρο πολυγωνική περιοχή, εννοούμε μια περιοχή του επιπέδου που περικλείεται από ένα απλό κύκλο ευθυγράμμων τμημάτων: μή γειτονικά τμήματα δεν τέμνονται και δύο γειτονικά τμήματα τέμνονται μόνο στο κοινό τους άκρο.

Λέμε γενικά ότι δύο αντικείμενα στο επίπεδο, είναι ορατά το ένα στο άλλο, αν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει και αποφεύγει τα πιθανά μεταξύ τους εμπόδια. Αν τα αντικείμενα βρίσκονται μέσα σε μια πολυγωνική περιοχή τότε τα εμπόδια είναι οι πλευρές του πολυγώνου, συνεπώς τα αντικείμενα είναι ορατά το ένα στο άλλο αν το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει βρίσκεται ολόκληρο μέσα στο πολύγωνο. Τις τελευταίες δεκαετίες, η έρευνα σχετικά με την ορατότητα αντικειμένων πάνω στο επίπεδο ή και σε μεγαλύτερες διαστάσεις, έχει γίνει αφορμή για εκατοντάδες δημοσιεύσεις που εστιάζουν είτε σε συνδυαστικά θέματα είτε σε αλγόριθμους. Οι συνδυαστικές δημοσιεύσεις αφορούν είτε στην έρευνα για «θεωρήματα φύλαξης της αίθουσας τέχνης» (art gallery theorems) είτε στην έρευνα για τους γράφους ορατότητας (visibility graphs) ενώ οι αλγόριθμοι πέρα από τα πολύγωνα εξετάζουν γενικότερες επίπεδες διατάξεις και μονοπάτια ορατότητας (visibility paths).

Στα προβλήματα φύλαξης της αίθουσας τέχνης, το ζητούμενο είναι να τοποθετηθεί σε προκαθορισμένες θέσεις μέσα στο πολύγωνο, ο ελάχιστος αριθμός φυλάκων, έτσι ώστε όλα τα σημεία του πολυγώνου να είναι ορατά από κάποιο φύλακα. Διάφορες παραλλαγές προκύπτουν στις ακόλουθες περιπτώσεις: α) όταν οι θέσεις των φυλάκων δεν είναι προκαθορισμένες, επιτρέπεται δηλαδή να τοποθετηθούν φυλάκες οπουδήποτε μέσα στο πολύγωνο, β) όταν χρησιμοποιούνται φυλάκες «σύνολα σημείων», π.χ. φυλάκες πλευρές ή γενικά ευθύγραμμα τμήματα, ή κινούμενοι φυλάκες, αντί τους στατικούς σημειακούς φυλάκες, γ) όταν η απαίτηση κάλυψης δεν αφορά σε όλο το εσωτερικό του πολυγώνου αλλά μόνο στην περίμετρό του και δ) όταν το πολύγωνο που πρέπει να καλυφθεί έχει ιδιαίτερο σχήμα, π.χ. είναι ορθογώνιο, μονότονο κτλ. Οι περισσότερες δημοσιεύσεις ασχολούνται με τα πάνω και κάτω όρια του απαραίτητου αριθμού φυλάκων για τις διά-

φορες περιπτώσεις φύλαξης, ενώ σχετικά λίγες δημοσιεύσεις μελετούν την υπολογιστική πολυπλοκότητα της εύρεσης καλών θέσεων για τους φύλακες στην περίπτωση που είναι δεδομένο ένα πολύγωνο.

Τα περισσότερα προβλήματα ελαχιστοποίησης των φυλάκων είναι NP-hard, και στην εργασία του Eidenbenz [24] αποδεικνύεται ότι είναι APX-hard. Χαρακτηριστικό είναι το μεγάλο χάσμα μεταξύ του καλύτερου γνωστού προσεγγιστικού παράγοντα που πετυχαίνει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου και των αποτελεσμάτων μή προσέγγισης του Eidenbenz: ο καλύτερος γνωστός παράγοντας προσέγγισης για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης των γενικών φυλάκων σε απλά πολύγωνα χωρίς τρύπες είναι $O(n)$ και ο Eidenbenz αποδεικνύει ότι υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε κανένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος δεν μπορεί να πετύχει παράγοντα προσέγγισης $1 + \epsilon$. Με άλλα λόγια, η εργασία του Eidenbenz χαρακτηρίζει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης των γενικών φυλάκων APX-hard, όμως παραμένει ανοικτό πρόβλημα αν τελικά το πρόβλημα ανήκει στην κλάση APX.

Με την εξαίρεση της περίπτωσης του ενός φυλάκα, λίγες δημοσιεύσεις ασχολούνται με τη βελτιστοποίηση της φυλασσόμενης περιοχής από ένα δεδομένο αριθμό φυλάκων. Είναι τόσο θεωρητικά, όσο και πρακτικά ενδιαφέρον να εξετασθεί η τοποθέτηση δεδομένου αριθμού φυλάκων σε ένα πολύγωνο, έτσι ώστε να καλύπτεται ένα μέγιστο μήκος της περιμέτρου του, ένα μέγιστο εμβαδόν από το εσωτερικό του και, στην περίπτωση που η περίμετρος του πολυγώνου έχει αξίες, μια μέγιστη αξία από την περίμετρό του. Η εισαγωγή εννοιών, όπως της επίβλεψης αντί της πλήρους κάλυψης, του κόστους της τοποθέτησης των φυλάκων στις επιτρεπτές θέσεις και του προϋπολογισμού που πρέπει να τηρηθεί κατά την τοποθέτηση των φυλάκων, κάνει τις διατυπώσεις των προβλημάτων ρεαλιστικότερες με άμεσες εφαρμογές σε τομείς όπως η έξυπνη δημιουργία ασυρμάτων δικτύων επικοινωνίας (δίκτυα δεδομένων, κινητά τηλέφωνα) και η βέλτιστη τοποθέτηση αισθητήρων κίνησης και καμερών ασφαλείας.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αναλύουμε περισσότερο τις πρακτικές εφαρμογές των προβλημάτων κάλυψης πολυγωνικών περιοχών στις τεχνολογίες τηλεπικοινωνιών. Στη συνέχεια κάνουμε για γρήγορη εισαγωγή στη θεωρία πολυπλοκότητας και στη θεωρία προσεγγισσιμότητας, ορίζοντας κυρίως τις έννοιες που είναι απαραίτητες για την κατανόηση των αποτελεσμάτων της διατριβής. Ακολουθεί μια περιγραφή των γνωστών αποτελεσμάτων σχετικά με την ελαχιστοποίηση του αριθμού των φυλάκων και τέλος γίνεται μια περίληψη των αποτελεσμάτων της διατριβής που αφορά στη μεγιστοποίηση της φύλαξης από ένα δεδομένο αριθμό φυλάκων.

1.2 Εφαρμογές

Οι ταχύτατα αναπτυσσόμενες τεχνολογίες τηλεπικοινωνιών, δημιουργούν συνεχώς νέα πεδία έρευνας τόσο πρακτικά όσο και θεωρητικά. Η ανεξαρτησία και η αξιοπιστία των ασυρμάτων δικτύων επικοινωνίας, συνεχώς αυξάνεται, με αποτέλεσμα, η πλήρης αντικατάσταση της ενσύρματης επικοινωνίας να είναι ένας από τους μελλοντικούς στόχους για τους παρόχους όλων των τύπων δικτύωσης. Οι σχετικές εταιρείες που δραστηριοποιούνται στον τομέα, προσπαθούν να ισοσταθμίσουν το τεράστιο κόστος της επένδυσης για τη δημιουργία και τη διατήρηση σε λειτουργία ενός ασύρματου τηλεπικοινωνιακού δικτύου με τις εξίσου τεράστιες αποδόσεις εσόδων που διαγράφονται στον ορίζοντα για τέτοιου είδους υπηρεσίες. Ιδιαίτερα στην αγορά των τηλεπικοινωνιών, ίσως αντίθετα με άλλες αγορές, η

μείωση του κόστους των επενδύσεων είναι ένας τρόπος για την επιχειρηματική επιβίωση στο βάθος του χρόνου.

Στα διάφορα κόστη για τη δημιουργία ενός ασύρματου δικτύου επικοινωνίας πρέπει να συνυπολογιστούν εκτός από το κόστος των πομποδεκτών, το κόστος της ενοικίασης της περιοχής τοποθέτησης, οι γεωγραφικές ιδιαιτερότητες που πιθανά να επηρεάζουν το πλήθος των απαιτούμενων για την κάλυψη πομποδεκτών, αλλά και τα παράπονα των κατοίκων για έκθεση στην ακτινοβολία. Με δεδομένη μια γεωγραφική περιοχή, όταν ο στόχος είναι η πλήρης κάλυψη το ζητούμενο είναι η εύρεση των κατάλληλων θέσεων για την τοποθέτηση ενός ελάχιστου αριθμού σταθμών-πομποδεκτών. Πιο ρεαλιστικό είναι το σενάριο όπου τα χρηματικά διαθέσιμα μπορούν να καλύψουν ένα δεδομένο αριθμό σταθμών συνεπώς το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση της καλυπτόμενης περιοχής.

Στην προσπάθεια μεγιστοποίησης της καλυπτόμενης περιοχής είναι φυσικό να υπάρχουν προτεραιότητες για την κάλυψη, όπως η αυξημένη ζήτηση για ασύρματες υπηρεσίες ή η μεγάλη προσδοκία για χρηματικές αποδόσεις από την εξυπηρέτηση συγκεκριμένων πελατών. Ένα άλλο κριτήριο μπορεί να είναι η όσο το δυνατόν μεγαλύτερη πληθυσμιακή κάλυψη με στόχο την επικοινωνία όσο το δυνατόν περισσότερων πελατών με το δεδομένο δίκτυο. Στην τελευταία περίπτωση, περιοχές αραιοκατοικημένες, π.χ. έρημοι, λίμνες κτλ, έρχονται τελευταίες στην προτεραιότητα της κάλυψης. Φυσικά, όταν παράλληλα σχεδιάζεται και το ίδιο το ασύρματο δίκτυο, λαμβάνεται υπόψη το ανώτατο όριο του συνολικού κόστους των σταθμών και η δυνατότητα προσθήκης μόνο νέων σταθμών και όχι κατάργησης παλαιών, στην περίπτωση διεύρυνσης της προς κάλυψη περιοχής.

Στην περίπτωση των δικτύων κινητής τηλεφωνίας, η επικοινωνία δύο σημείων γίνεται διαμέσου των σταθμών του δικτύου (point to station communication). Συνεπώς, για να έχουμε επικοινωνία, κάθε σημείο της προς κάλυψη περιοχής πρέπει να είναι ορατό σε κάποιο σταθμό. Σε άλλες περιπτώσεις δεν είναι απαραίτητη η ύπαρξη σταθμών γιατί η επικοινωνία γίνεται απ' ευθείας (point to point communication). Και στις δύο περιπτώσεις, η τεχνολογία αναμετάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων χρησιμοποιεί συχνότητες των 900 και 1800 MHz και τα φαινόμενα απώλειας ενέργειας από διαθλάσεις και ανακλάσεις είναι υπολογίσιμα αν ο σταθμός και το σημείο, ή τα δύο σημεία, δεν είναι άμεσα ορατά. Συνεπώς το μοντέλο αναπαράστασης της πραγματικότητας πρέπει να υιοθετεί το μοντέλο της απ' ευθείας επικοινωνίας των σημείων ή του σημείου με το σταθμό.

Τέλος σαν γεωγραφικό μοντέλο της γεωγραφικής περιοχής μπορεί να θεωρηθεί το απλό πολύγωνο, με ή χωρίς τρύπες. Η προς κάλυψη περιοχή μπορεί να βρίσκεται είτε στην περίμετρο είτε στο εσωτερικό του πολυγώνου, ενώ οι τρύπες στο εσωτερικό χρησιμεύουν για την αναπαράσταση φυσικών εμποδίων που δυσκολεύουν την επικοινωνία. Στις περιπτώσεις αυτές, η περίμετρος της καλυπτόμενης περιοχής επεκτείνεται στην περίμετρο των εμποδίων (τρυπών) και είναι ιδιαίτερα πιθανό να χρειάζεται η τοποθέτηση σταθμών περιμετρικά των εμποδίων.

1.3 Σύντομη Εισαγωγή στη Θεωρία Πολυπλοκότητας

1.3.1 Το πρόβλημα «P vs NP»

Ας υποθέσουμε ότι από τους τετρακόσιους φοιτητές μιας σχολής, εκατό θα πρέπει να στεγαστούν σε ζευγάρια στα δωμάτια της φοιτητικής εστίας. Επίσης υπάρχει και μια λίστα με ζευγάρια φοιτητών που δεν πρέπει να υπάρχουν στη τελική επιλογή για την τοποθέτηση

στα δωμάτια. Το πρόβλημά μας είναι να επιλέξουμε πενήντα ζευγάρια φοιτητών με τέτοιο τρόπο ώστε κανένα επιλεγμένο ζευγάρι να μην υπάρχει στη λίστα. Το πρόβλημα αυτό είναι ένα παράδειγμα NP-προβλήματος γιατί είναι εύκολο να ελέγξουμε αν μια επιλογή ατόμων που έκανε κάποιος είναι ικανοποιητική, δεν περιέχει δηλαδή ζευγάρια από την λίστα, είναι όμως πρακτικά αδύνατο να φτιάξουμε πραγματικά μια τέτοια λίστα.

Αν υπολογίσουμε τους διαφορετικούς τρόπους επιλογής εκατό ατόμων από τετρακόσια άτομα καταλήγουμε σε ένα τεράστιο νούμερο που είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό των ατόμων που περιέχονται στο γνωστό σύμπαν. Είναι δηλαδή αδύνατο, ακόμη και στο πιο μακρινό μέλλον, να υπάρξει ένας υπερ-υπολογιστής που να λύνει το πρόβλημα ελέγχοντας όλους τους πιθανούς συνδυασμούς από εκατό άτομα. Όμως η αδυναμία αυτή του μελλοντικού υπερ-υπολογιστή είναι πραγματική ή αντικατοπτρίζει την έλλειψη «έξυπνου» προγραμματισμού του; Αυτό ακριβώς είναι και το μεγαλύτερο ανοικτό πρόβλημα στην επιστήμη των υπολογιστών, αν δηλαδή υπάρχουν ερωτήματα που η απάντησή τους ελέγχεται πολύ γρήγορα για την ορθότητά της, αλλά η προσπάθεια για άμεση παραγωγή της απάντησης απαιτεί τόσο πολύ χρόνο ώστε να είναι πρακτικά αδύνατη.

Προβλήματα όπως το παραπάνω φαίνεται να είναι πολύ δύσκολα, όμως μέχρι στιγμής κανείς δεν έχει αποδείξει ότι είναι πράγματι τόσο δύσκολα όσο φαίνονται, ότι δηλαδή δεν υπάρχει εφικτός τρόπος να απαντηθούν με τη βοήθεια ενός υπολογιστή. Ο Stephen Cook και ο Leonid Levin [17], [42] το 1971 διατύπωσαν ανεξάρτητα το πρόβλημα «P vs NP»:

Αν για κάποιο πρόβλημα μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε μια δοσμένη λύση, τότε μια λύση του προβλήματος υπολογίζεται επίσης εύκολα;

1.3.2 Προβλήματα Απόφασης

Κάθε υπολογιστικό πρόβλημα είναι ουσιαστικά ένα σύνολο από στιγμιότυπα του προβλήματος. Για παράδειγμα για το πρόβλημα που πρέπει να αποφασίσουμε αν όλα τα στοιχεία ενός συνόλου είναι ζυγοί αριθμοί, τα σύνολα $\{1, 2, 3, 7\}$ και $\{2, 16, 646, 20, 0\}$ είναι δύο στιγμιότυπα του προβλήματος. Η θεωρία της NP-πληρότητας («NP-completeness») ασχολείται με *προβλήματα απόφασης* (decision problems) όπως το προηγούμενο. Τέτοια προβλήματα έχουν μόνο δύο δυνατές λύσεις: είτε την απάντηση *ναι* είτε την απάντηση *όχι*. Πιο τυπικά ένα πρόβλημα απόφασης είναι μια δυάδα (D_{Π}, Y_{Π}) από *στιγμιότυπα* (instances) και *ναι-στιγμιότυπα* (yes-instances), $Y_{\Pi} \subseteq D_{\Pi}$. Στο παράδειγμά μας, το δεύτερο σύνολο είναι ένα ναι-στιγμιότυπο του προβλήματος. Ο λόγος που μας απασχολούν κυρίως τα προβλήματα απόφασης είναι ότι μπορούμε με φυσικό τρόπο να τα αντιστοιχίσουμε σε ισοδύναμα αντικείμενα, τις *τυπικές γλώσσες* (formal languages).

1.3.3 Τυπικές Γλώσσες

Για κάθε πεπερασμένο σύνολο συμβόλων Σ , συμβολίζουμε με Σ^* το σύνολο όλων των πεπερασμένων συμβολοσειρών που τα σύμβολά τους προέρχονται από το σύνολο Σ . Για παράδειγμα αν $\Sigma = \{0, 1\}$ τότε το Σ^* περιέχει την κενή συμβολοσειρά, τις συμβολοσειρές 0, 1, 00, 01, 11, 000, 001 και γενικά όλες τις πεπερασμένες συμβολοσειρές που αποτελούνται από 0 και 1.

Αν $L \subseteq \Sigma^*$ λέμε ότι το σύνολο L είναι μια *γλώσσα* (language) πάνω στο *αλφάβητο* Σ . Συνεπώς το σύνολο $\{0, 01, 001001, 100\}$ είναι μια γλώσσα πάνω στο αλφάβητο $\{0, 1\}$

όπως επίσης μια γλώσσα πάνω στο ίδιο αλφάβητο είναι το σύνολο όλων των δυαδικών αναπαραστάσεων όλων των ακεραίων που είναι ζυγοί αριθμοί.

Ένα *σχήμα κωδικοποίησης* (*encoding scheme*) e για ένα πρόβλημα Π μας δίνει ένα τρόπο να περιγράψουμε κάθε στιγμιότυπο του Π με μια κατάλληλη συμβολοσειρά πάνω σε κάποιο σταθερό αλφάβητο Σ . Έτσι το πρόβλημα Π και το σχήμα κωδικοποίησης e για το Π διαμερίζουν το Σ^* σε τρεις κλάσεις συμβολοσειρών, εκείνες που κωδικοποιούν όχι-στιγμιότυπα του Π , εκείνες που δεν κωδικοποιούν στιγμιότυπα του Π και τέλος τις συμβολοσειρές εκείνες που κωδικοποιούν ναι-στιγμιότυπα του Π . Αυτή η τελευταία κλάση συμβολοσειρών είναι η γλώσσα που αντιστοιχίζουμε με το Π και το e :

$$L[\Pi, e] = \left\{ x \in \Sigma^* \mid \begin{array}{l} \Sigma \text{ είναι το αλφάβητο που χρησιμοποιεί το } e \text{ και } x \text{ είναι η} \\ \text{κωδικοποίηση μέσω του } e \text{ ενός στιγμιότυπου } I \in Y_{\Pi} \end{array} \right\}$$

Είναι φανερό ότι αν ένα αποτέλεσμα ισχύει για τη γλώσσα $L[\Pi, e]$ τότε ισχύει και για το πρόβλημα Π κάτω από το σήμα κωδικοποίησης e .

Στη συνέχεια θα μας απασχολήσουν μόνο «λογικά» (όχι παράλογα reasonable) σχήματα κωδικοποίησης με την έννοια ότι αν e και e' είναι δύο «λογικά» σχήματα κωδικοποίησης για το πρόβλημα Π , τότε μια ιδιότητα ισχύει είτε και για τις δύο γλώσσες $L[\Pi, e]$, $L[\Pi, e']$ είτε για καμία. Έτσι θα μπορούμε άτυπα να λέμε ότι η ιδιότητα ισχύει (ή δεν ισχύει) για το πρόβλημα Π , χωρίς να προσδιορίζουμε κάποιο σύστημα κωδικοποίησης.

1.3.4 Υπολογιστικές Μηχανές

Άτυπα, μια ιδεατή υπολογιστική μηχανή M λειτουργεί με ένα αλφάβητο εισόδου Σ και εκτελεί προκαθορισμένους υπολογισμούς που τα αποτελέσματά τους αναγκάζουν τη μηχανή να μεταπίπτει σε διακριτές καταστάσεις. Από αυτές τις καταστάσεις μια ονομάζεται *κατάσταση αρχής* (*start state*) και δύο ονομάζονται *καταστάσεις τέλους* (*end states*): η κατάσταση τέλος-ναι και η κατάσταση τέλος-όχι. Η μηχανή αρχίζει τη λειτουργία της στην κατάσταση αρχής και στη συνέχεια εκτελεί βήμα-βήμα προκαθορισμένους υπολογισμούς μεταπηδώντας σε διακριτές καταστάσεις μέχρι να φτάσει σε κάποια από τις καταστάσεις τέλους, οπότε και η λειτουργία της μηχανής σταματά.

Λέμε ότι η μηχανή M με αλφάβητο εισόδου Σ *αποδέχεται* (*accepts*) την είσοδο $x \in \Sigma^*$ αν και μόνο αν η M σταματά τη λειτουργία της στην κατάσταση τέλος-ναι. Η γλώσσα L_M που *αναγνωρίζεται* (*recognized*) από τη μηχανή M είναι η

$$L_M = \{x \in \Sigma^* \mid M \text{ αποδέχεται την είσοδο } x\}$$

Αν $x \in \Sigma^* \setminus L_M$ τότε οι υπολογισμοί της M σταματούν στην κατάσταση τέλος-όχι και λέμε ότι η μηχανή *απορρίπτει* (*rejects*) την είσοδο x .

Η αντιστοιχία μεταξύ «αναγνώρισης» γλωσσών και «επίλυσης» προβλημάτων απόφασης είναι άμεση: Λέμε ότι η μηχανή M *λύνει* το πρόβλημα απόφασης Π κάτω από το σχήμα κωδικοποίησης e αν η M σταματά τους υπολογισμούς της για όλες τις συμβολοσειρές εισόδου από το αλφάβητο εισόδου της και η γλώσσα L_M είναι ακριβώς η γλώσσα $L[\Pi, e]$. Ο χρόνος T_M που χρειάζεται η μηχανή M για τους υπολογισμούς της είναι:

$$T_M(n) = \max \left\{ m \mid \begin{array}{l} \text{Υπάρχει } x \in \Sigma^* \text{ με } |x| = n \text{ τέτοιο ώστε οι υπολογισμοί} \\ \text{της } M \text{ με είσοδο } x \text{ απαιτούν χρόνο } m \end{array} \right\}$$

Μια μηχανή M ονομάζεται *πολυωνυμικού χρόνου* (*polynomial time*) αν υπάρχει πολώνυμο p που να φράσσει το T_M :

$$T_M(n) \leq p(n)$$

1.3.5 Η κλάση πολυπλοκότητας NP

Ορισμός 1.3.1 Μια γλώσσα L ανήκει στην κλάση NP αν υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου μηχανή M τέτοια ώστε για κάθε είσοδο $x \in \{0, 1\}^*$:

- Αν $x \in L$ τότε η $M(x, y)$ αποδέχεται για κάποιο $y \in \{0, 1\}^*$ με $|y|$ να είναι φραγμένο από ένα πολώνυμο του $|x|$.
- Αν $x \notin L$ τότε η $M(x, y)$ δεν αποδέχεται για όλα τα $y \in \{0, 1\}^*$.

Άτυπα NP είναι η κλάση των γλωσσών που αναγνωρίζονται από μια μηχανή σε μη ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο. Ο άτυπος ορισμός είναι ισοδύναμος με τον παραπάνω: Πρέπει να υπάρχει κάποια μικρή συμβολοσειρά y που αναγκάζει την μηχανή M να αποδεχθεί την είσοδο x . Η συμβολοσειρά y είναι μια «σύντομη απόδειξη» για το ότι $x \in L$ και το $M(x, y)$ είναι ο υπολογισμός που απαιτείται για να επαληθευτεί η σύντομη απόδειξη. Σημειώνουμε ότι αν $L \in NP$ τότε αν $x \in L$ υπάρχει σύντομη απόδειξη για το ότι $x \in L$. Αν $x \notin L$ μπορεί να μην υπάρχει σύντομη απόδειξη για ότι $x \notin L$.

Ένα παράδειγμα μιας γλώσσας που ανήκει στην κλάση NP είναι η γλώσσα 3SAT. Ένα στιγμιότυπο του 3SAT είναι μια συλλογή από m clauses C_1, \dots, C_m όπου κάθε clause C_i είναι της μορφής $x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \neg x_{i_3}$ για κάποια $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3} \in \{1, \dots, n\}$.

Μια συλλογή $\phi = C_1, \dots, C_m$ ανήκει στη γλώσσα 3SAT αν υπάρχει τρόπος να αναθέσουμε τις τιμές TRUE και FALSE στις μεταβλητές x_1, \dots, x_n έτσι ώστε να ικανοποιούνται κάθε μια από τις clauses C_1, \dots, C_m . Εύκολα φαίνεται ότι $3SAT \in NP$: η μηχανή M παίρνει δύο εισόδους, την ϕ (την αναπαράσταση του 3SAT formula) και την y (την αναπαράσταση της απονομής αλήθειας στις μεταβλητές x_1, \dots, x_n). Η μηχανή απλά επαληθεύει ότι με τη χρήση της y κάθε clause ικανοποιείται. Η επαλήθευση προφανώς κοστίζει πολυωνυμικό χρόνο.

1.3.6 Αναγωγές και NP πληρότητα

Ορισμός 1.3.2 Έστω L_1, L_2 δύο γλώσσες. Λέμε ότι η γλώσσα L_1 ανάγεται στη γλώσσα L_2 και συμβολίζουμε $L_1 \leq L_2$ αν υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος f τέτοιος ώστε $\forall x \in \{0, 1\}^*$ έχουμε $x \in L_1 \leftrightarrow f(x) \in L_2$.

Αν $L_1 \leq L_2$, τότε η ύπαρξη πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμου που αποφασίζει αν $x \in L_2$, υποδηλώνει την ύπαρξη πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμου που αποφασίζει αν $x \in L_1$: «Τρέξε τον αλγόριθμο που αποφασίζει αν $x \in L_2$ με είσοδο τη συμβολοσειρά $f(x)$ ».

Ορισμός 1.3.3 Μια γλώσσα L είναι (NP-hard) αν για κάθε γλώσσα $L' \in NP$ έχουμε $L' \leq L$. Μια γλώσσα L είναι (NP-complete) αν $L \in NP$ και η L είναι NP-hard.

Μια NP-complete γλώσσα είναι τουλάχιστο τόσο δύσκολη όσο οποιαδήποτε άλλη γλώσσα που ανήκει στην κλάση NP.

1.4 NP προβλήματα βελτιστοποίησης

Για να περιγραφεί ένα NP πρόβλημα βελτιστοποίησης χρειάζονται δύο συναρτήσεις FEASIBLE και OBJECTIVE και ένα bit με τιμή είτε MAX είτε MIN. Και οι δύο συναρτήσεις πρέπει να είναι υπολογίσιμες σε πολυωνυμικό χρόνο. Η συνάρτηση FEASIBLE(X, Y) έχει την τιμή TRUE αν και μόνο αν το Y αναπαριστά μια εφικτή λύση του στιγμιότυπου X του NP-complete προβλήματος. Η συνάρτηση OBJECTIVE(X, Y) μετρά την ποιότητα της λύσης Y .

Για παράδειγμα έστω το NP πρόβλημα βελτιστοποίησης TRAVELING SALESPERSON PROBLEM: FEASIBLE(X, Y) = TRUE αν το X αναπαριστά ένα γράφο με βάρη και Y αναπαριστά μια διαδρομή που αρχίζει και τελειώνει στον ίδιο κόμβο του γράφου και περνά από κάθε άλλο κόμβο τουλάχιστο μια φορά. Η τιμή OBJECTIVE(X, Y) είναι το άθροισμα όλων των βαρών των ακμών που συμμετέχουν στη διαδρομή Y . Η τιμή του bit για το πρόβλημα είναι MIN.

Υπάρχουν τρεις εκδοχές για κάθε NP πρόβλημα βελτιστοποίησης, με δεδομένο ένα στιγμιότυπο X του προβλήματος:

- Εκδοχή *αναζήτησης*: αναζητά μια εφικτή λύση που *βελτιστοποιεί* (μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί) την OBJECTIVE(X, Y) σε σχέση με την τιμή MAX ή MIN του bit.
- Εκδοχή *υπολογισμού*: αναζητά τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της OBJECTIVE(X, Y) από όλες τις λύσεις Y για τις οποίες FEASIBLE(X, Y) = TRUE.
- Εκδοχή *απόφασης*: παράλληλα με τα δεδομένα έχουμε κι ένα αριθμό B και αν η τιμή του bit είναι MAX (MIN) ρωτά για την ύπαρξη εφικτής λύσης Y τέτοιας ώστε OBJECTIVE(X, Y) $\geq B$ (OBJECTIVE(X, Y) $\leq B$).

1.5 Θεωρία Προσεγγισιμότητας

1.5.1 Προσεγγίσεις NP προβλημάτων βελτιστοποίησης

Ένας βασικός διαχωρισμός για τα NP προβλήματα προκύπτει από την ερώτηση «η γλώσσα της εκδοχής απόφασης (decision version) είναι αναγνώρισιμη σε πολυωνυμικό χρόνο ή είναι NP-complete;» Είναι χαρακτηριστικό ότι ελάχιστες αλλαγές στη διατύπωση ενός προβλήματος που ανήκει στην κλάση P το κάνουν NP-complete: π.χ. τα EDGE COVER, MINIMUM CUT, SHORTEST PATH ανήκουν στην κλάση P ενώ τα VERTEX COVER, MAXIMUM CUT, LONGEST PATH ανήκουν στην κλάση NP.

Ορισμός 1.5.1 Λέμε ότι Y είναι μια βέλτιστη λύση στο στιγμιότυπο προβλήματος X αν η Y μεγιστοποιεί την OBJECTIVE(X, Y') για όλα τα Y' που FEASIBLE(X, Y') = TRUE.

Ορισμός 1.5.2 Για $R \geq 1$ λέμε ότι η λύση Y' έχει λόγο απόδοσης R αν

- Στην περίπτωση που το bit είναι MAX:

$$\text{OBJECTIVE}(X, Y') \geq \frac{1}{R} \text{OBJECTIVE}(X, Y) \leftrightarrow \text{SOL} \geq \frac{1}{R} \text{OPT}$$

- Στην περίπτωση που το bit είναι MIN:

$$\text{OBJECTIVE}(X, Y') \leq R \cdot \text{OBJECTIVE}(X, Y) \leftrightarrow \text{SOL} \leq R \cdot \text{OPT}$$

Y είναι μια βέλτιστη λύση ενώ Y' μια R -προσεγγίσιμη λύση. Οι συμβολισμοί SOL και OPT χρησιμοποιούνται για άτυπους ορισμούς και για συντομία.

Ορισμός 1.5.3 Λέμε ότι ο αλγόριθμος A είναι R -προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα Π , αν με δεδομένο ένα στιγμιότυπο X του Π , ο αλγόριθμος A εξάγει μια λύση $A(X)$ με λόγο απόδοσης τουλάχιστον R αν το bit είναι MAX ή το πολύ R αν το bit είναι MIN:

- Στην περίπτωση προβλήματος μεγιστοποίησης:

$$\frac{\text{OBJECTIVE}(X, Y)}{\text{OBJECTIVE}(X, Y')} \leq R \leftrightarrow \frac{\text{OPT}}{\text{SOL}} \leq R$$

- Στην περίπτωση προβλήματος ελαχιστοποίησης:

$$\frac{\text{OBJECTIVE}(X, Y')}{\text{OBJECTIVE}(X, Y)} \leq R \leftrightarrow \frac{\text{SOL}}{\text{OPT}} \leq R$$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση $R \geq 1$ και ότι ένας 1-προσεγγιστικός αλγόριθμος δίνει μια βέλτιστη λύση.

Ορισμός 1.5.4 Λέμε ότι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης Π δεν προσεγγίζεται με ένα $R(I)$ -προσεγγιστικό αλγόριθμο, αν για κάθε προσεγγιστικό αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου A για το Π , υπάρχει στιγμιότυπο I του Π τέτοιο ώστε:

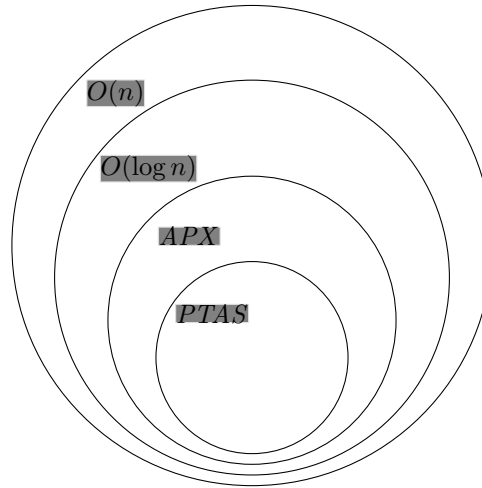
$$R(I) < R_A(I)$$

Αποτελέσματα μη προσεγγισιμότητας αποδεικνύονται συνήθως με την παραδοχή ότι $P \neq NP$ ενώ άλλα αποτελέσματα χρειάζονται κάπως δυνατώτερες παραδοχές, όπως την παραδοχή $NP \neq \text{TIME}(n^{O(\log \log n)})$ (quasi NP-hardness) που γενικά πιστεύουμε ότι είναι αλήθεια.

1.5.2 Ιεραρχία κλάσεων προσέγγισης

Τα NP-hard προβλήματα βελτιστοποίησης ταξινομούνται μέσα σε μια ιεραρχία κλάσεων, ανάλογα με τους λόγους απόδοσης που επιτυγχάνονται από τους πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικούς αλγόριθμους που τα επιλύουν. Η ταξινόμηση αυτή αντανακλά περισσότερο τους περιορισμούς που έχουν οι μέχρι τώρα γνωστές αποδεικτικές μέθοδοι και λιγότερο την πραγματικότητα. Όπως και να έχει, μια γενικά παραδεκτή ιεραρχία κλάσεων προσέγγισης απεικονίζεται στο Σχήμα 1.1.

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης ανήκει στην κλάση $O(n)$ αν υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε ένας πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος βρίσκει μια λύση για το πρόβλημα με λόγο απόδοσης $O(n^\epsilon)$, όπου n το μέγεθος του στιγμιότυπου του προβλήματος. Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι n -hard, αν υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε δεν υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος που βρίσκει λύση για το πρόβλημα με λόγο απόδοσης $R(I) \in \Theta(n)$. Λέμε ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι n -complete



Σχήμα 1.1: Ιεραρχία κλάσεων προσέγγισης

αν ανήκει στην κλάση $O(n)$ και είναι n -hard. Παράδειγμα τέτοιου προβλήματος είναι το MAXIMUM CLIQUE.

Η κλάση $O(\log n)$ είναι υποκλάση της $O(n)$. Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης ανήκει στην κλάση $O(\log n)$ αν υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος που βρίσκει μια λύση για το πρόβλημα με λόγο απόδοσης $O(\log n)$. Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι $\log n$ -hard, αν δεν υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος που βρίσκει λύση για το πρόβλημα με λόγο απόδοσης $R(I) \in \Theta(\log n)$. Λέμε ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι $\log n$ -complete αν ανήκει στην κλάση $O(\log n)$ και είναι $\log n$ -hard. Παράδειγμα τέτοιου προβλήματος είναι το MINIMUM SET COVER.

Η κλάση APX είναι υποκλάση της $O(\log n)$. Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης ανήκει στην κλάση APX αν υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος που βρίσκει μια λύση για το πρόβλημα με λόγο απόδοσης $1 + \epsilon$ για κάποιο $\epsilon > 0$. Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι APX-hard, αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε δεν υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος που βρίσκει λύση για το πρόβλημα με λόγο απόδοσης $1 + \delta$. Λέμε ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι APX-complete αν ανήκει στην κλάση APX και είναι APX-hard. Παράδειγμα τέτοιου προβλήματος είναι το MAX-3SAT.

Η κλάση PTAS είναι υποκλάση της APX και περιέχει όλα εκείνα τα προβλήματα βελτιστοποίησης που επιδέχονται *πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα* (*polynomial time approximation scheme*). Για τα προβλήματα αυτά, για κάθε επιλογή $\epsilon > 0$ υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που βρίσκει λύση για το πρόβλημα με παράγοντα προσέγγισης $1 + \epsilon$. Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου μπορεί να εξαρτάται εκθετικά από το $\frac{1}{\epsilon}$. Αν ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου εξαρτάται πολυωνυμικά από το $\frac{1}{\epsilon}$, τότε το πρόβλημα επιδέχεται *πλήρες πολυωνυμικό προσεγγιστικό σχήμα* (*fully polynomial time approximation scheme*) (FPTAS). Χαρακτηριστικό είναι ότι το πρόβλημα MULTIPLE KNAPSACK επιδέχεται πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα και όχι πλήρες πολυωνυμικό προσεγγιστικό σχήμα. Όμως το πρόβλημα KNAPSACK επιδέχεται πλήρες πολυωνυμικό προσεγγιστικό σχήμα.

Μια σημαντική υποκλάση της APX είναι η κλάση MAXSNP που προτάθηκε στο [52].

Η κλάση περιλαμβάνει όλα τα προβλήματα βελτιστοποίησης που μπορούν να αναχθούν με L -αναγωγές στο πρόβλημα MAXIMUM SATISFIABILITY (οι L -αναγωγές περιγράφονται στο [52]). Ένα πρόβλημα είναι MAXSNP-complete, αν όλα τα προβλήματα της κλάσης MAXSNP μπορούν να αναχθούν σε αυτό με L -αναγωγές. Οι περισσότερες παραλλαγές του προβλήματος ικανοποιησιμότητας, όπως το πρόβλημα MAX-5-OCCURENCE-3SAT και το MAX-5-OCCURENCE-2SAT, είναι MAXSNP-complete [52]. Η θεωρία για την κλάση MAXSNP έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ανακάλυψη του PCP θεωρήματος [3] και έκανε δυνατή την εξαγωγή συμπερασμάτων για τη δυσκολία των προσεγγίσεων (hardness of approximations) που οδηγεί σε αποτελέσματα όπως αυτά που θα παρουσιάσουμε στο Κεφάλαιο 4.

1.6 Θεωρία μη προσεγγισιμότητας

1.6.1 Πιθανοτικώς ελέγξιμα συστήματα αποδείξεων

Στη θεωρία πολυπλοκότητας ένα πιθανοτικώς ελέγξιμο σύστημα απόδειξης (probabilistically checkable proof system, PCP) είναι ένα διαλογικό σύστημα απόδειξης (interactive proof system) όπου ο αυτός που κάνει την απόδειξη (prover) είναι ένα μαντείο (oracle) χωρίς μνήμη και αυτός που ελέγχει την απόδειξη (verifier), είναι ένας πολυωνυμικού χρόνου τυχαιοποιημένος (randomized) αλγόριθμος. Για μια είσοδο που ανήκει σε κάποια γλώσσα (ένα *ναι*-στιγμιότυπο) υπάρχει ένα μαντείο (ή μια απόδειξη) για το οποίο αυτός που ελέγχει αποδέχεται με βεβαιότητα, ενώ για ένα *όχι*-στιγμιότυπο αυτός που ελέγχει απορρίπτει με πιθανότητα τουλάχιστο $\frac{1}{2}$ ανεξάρτητα από τη δύναμη του μαντείου. Ένας άλλος χαρακτηρισμός του PCP είναι ότι αποτελεί μια πιο δυνατή έκδοση της κλάσης NP. Για τις γλώσσες που ανήκουν στην κλάση NP ο χρόνος που πρέπει να διαθέσουμε για τον έλεγχο της απόδειξης είναι τόσο μακρύς όσο και η ίδια η απόδειξη, ενώ αυτό δεν ισχύει για τις γλώσσες που ανήκουν στην PCP. Μια άλλη παράμετρος που επηρεάζει τη δύναμη ενός PCP συστήματος είναι ο αριθμός των τυχαίων επιλογών (στριψίματα νομισμάτων) που μπορεί να κάνει αυτός που ελέγχει: όσο περισσότερη τυχειότητα είναι διαθέσιμη τόσο μεγαλύτερη επιλεκτικότητα μπορεί να υπάρχει κατά τη διάρκεια ελέγχου της απόδειξης. Για το ιδιαίτερα πολύπλοκο θέμα των PCP συστημάτων ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [3] και στο [4]. Τα αποτελέσματα αυτών των εργασιών έκαναν δυνατές τις αποδείξεις των θεωρημάτων της επόμενης παραγράφου.

1.6.2 Προβλήματα απόφασης με εγγυημένες παραμέτρους

Έστω ότι I είναι ένα στιγμιότυπο ενός προβλήματος μεγιστοποίησης Π και κάποιο μαντείο μας εγγυάται ότι το μέγεθος $OPT(I)$ της βέλτιστης λύσης του I είναι ή τουλάχιστο $U(I)$ ή αυστηρά μικρότερο από το $L(I)$ και δεν παίρνει καμία τιμή μεταξύ των $L(I)$ και $U(I)$. Τα δύο όρια, $U(I)$ και $L(I)$ εξαρτώνται από το στιγμιότυπο I και προφανώς ισχύει ότι $L(I) < U(I)$. Ένα πρόβλημα με εγγυημένες παραμέτρους είναι ένα πρόβλημα απόφασης Π με ένα στιγμιότυπο I και μια δυάδα συναρτήσεων $(L(I), U(I))$. Στόχος είναι να αποφασίσουμε ποια από τις δύο περιπτώσεις ισχύει για τη βέλτιστη λύση.

Για παράδειγμα έστω ότι το Π είναι το πρόβλημα MAXIMUM CLIQUE και I ένα στιγμιότυπο όπου έχουμε ένα γράφο $G = (V, E)$ με $n = |V|$. Έστω k ένας ακέραιος με $k \leq n$ και $\epsilon > 0$ μια μικρή σταθερά. Το μαντείο μας πληροφορεί ότι $U(I) = k$ και $L(I) = \frac{k}{n^{\frac{1}{2}-\epsilon}}$,

συνεπώς έχουμε ότι είτε $OPT(I) \geq k$ είτε $OPT(I) < \frac{k}{n^{\frac{1}{2}-\epsilon}}$. Το χάσμα (*gap*) μεταξύ των τιμών $L(I)$ και $U(I)$ προκύπτει με την κατασκευή ενός ειδικού PCP συστήματος και την απαρίθμηση των μονοπατιών του υπολογισμού που οδηγούν σε θετική απάντηση για το πρόβλημα απόφασης. Για το πρόβλημα MAXIMUM CLIQUE έχουμε [4]:

Θεώρημα 1.6.1 Το πρόβλημα απόφασης MAXIMUM CLIQUE με εγγυημένες παραμέτρους τις $U(I) = k$ και $L(I) = \frac{k}{n^{\frac{1}{2}-\epsilon}}$ είναι NP-hard.

Τώρα είναι εμφανής η σύνδεση των προβλημάτων με εγγυημένες παραμέτρους με τα αποτελέσματα μη προσέγγισης. Αφού δεν υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος που να αποφασίζει το πρόβλημα με εγγυημένες παραμέτρους τις $U(I)$ και $L(I)$, δεν υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος που να εγγυάται λύσεις με λόγο απόδοσης:

$$R(I) = \frac{U(I)}{L(I)}$$

γιατί ένας τέτοιος αλγόριθμος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να αποφασίζει το NP-hard πρόβλημα με τις εγγυημένες παραμέτρους: π.χ. αν Π είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης και A ένας τέτοιος προσεγγιστικός αλγόριθμος με λόγο απόδοσης $R_A(I)$ θα έχουμε:

$$\frac{OPT(I)}{SOL(A(I))} \leq R_A(I) \rightarrow OPT(I) \leq \frac{U(I)}{L(I)} SOL$$

Ισχύει επίσης ότι $OPT(I) \geq U(I)$ ή ότι $OPT(I) < L(I)$, οπότε αν χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο A και έχουμε ότι $SOL(A(I)) < L(I)$ τότε $OPT(I) < L(I)$. Αν $SOL(A(I)) \geq L(I)$ τότε $OPT(I) \geq U(I)$. Τελικά, αν υπήρχε ένας τέτοιος αλγόριθμος σαν τον A θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να αποφασίζει το NP-hard πρόβλημα με τις εγγυημένες παραμέτρους. Οπότε, εκτός αν $P = NP$ δεν μπορεί να υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος που να εγγυάται λύσεις με τον παραπάνω λόγο απόδοσης.

Διάφορα θεωρήματα για αποτελέσματα μη προσέγγισης είναι τα παρακάτω:

Θεώρημα 1.6.2 ([36]) Δεν υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος που να υπολογίζει λύσεις για το πρόβλημα MAXIMUM CLIQUE με λόγο απόδοσης $n^{\frac{1}{2}-\epsilon}$ για κάθε $\epsilon > 0$

Θεώρημα 1.6.3 ([27]) Δεν υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος που να υπολογίζει λύσεις για το πρόβλημα MINIMUM SET COVER (εγγυημένες παράμετροι είναι οι $L(I) = k$ και $U(I) = k(1-\epsilon) \ln n$ με λόγο απόδοσης $(1-\epsilon) \ln n$ για κάθε $\epsilon > 0$).

Θεώρημα 1.6.4 ([4]) Δεν υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος που να υπολογίζει λύσεις για το πρόβλημα MAXIMUM SATISFIABILITY (εγγυημένες παράμετροι είναι οι $L(I) = m$ και $U(I) = (1-\epsilon)m$, m είναι ο αριθμός των clauses του στιγμιότυπου I) με λόγο απόδοσης $\frac{1}{1-\epsilon}$ για κάθε $\epsilon > 0$

1.6.3 Αναγωγές διατήρησης χάσματος

Οι αναγωγή διατήρησης χάσματος (*gap preserving reduction*), προτάθηκε στο [4] και χρησιμοποιείται για την απόδειξη αποτελεσμάτων μη προσέγγισης. Είναι ένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος που μετασχηματίζει ένα στιγμιότυπο I ενός NP-hard προβλήματος απόφασης με εγγυημένες παραμέτρους Π σε ένα στιγμιότυπο I' ενός άλλου NP-hard προβλήματος απόφασης Π' με εγγυημένες παραμέτρους Π' . Μετά την αναγωγή θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$OPT(I) \geq U(I) \rightarrow OPT(I') \geq U'(I') \quad (1.6.1)$$

$$OPT(I) < L(I) \rightarrow OPT(I') < L'(I') \quad (1.6.2)$$

Το πρόβλημα απόφασης με εγγυημένες παραμέτρους Π' είναι NP-hard: έστω ότι υπήρχε ένας αλγόριθμος που αποφασίζει το Π' και έστω ότι

$$OPT(I') \geq U'(I')$$

δηλαδή

$$OPT(I') \not\leq L'(I')$$

άρα

$$OPT \not\leq L(I)$$

συνεπώς

$$OPT \geq U(I)$$

Τελικά αποφασίζουμε το Π όμως αυτό ισχύει αν $P = NP$. Συνέπεια λοιπόν της αναγωγής διατήρησης χάσματος είναι ότι, εκτός αν $P = NP$, δεν υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα Π' που να υπολογίζει λύσεις με λόγο απόδοσης:

$$R'(I') = \frac{U'(I')}{L'(I')}$$

Όπως και στις περισσότερες αναγωγές, έτσι και στην αναγωγή διατήρησης χάσματος, μια λύση του I' μεγέθους τουλάχιστον c' μετασχηματίζεται σε μια λύση του I μεγέθους τουλάχιστον c . Τα προβλήματα Π και Π' μπορούν να είναι ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης χωρίς να έχει σημασία ο συνδυασμός του είδους τους. Οι ιδιότητες 1.6.1 και 1.6.2 ισχύουν για ένα υποσύνολο των δυνατών στιγμιότυπων του προβλήματος Π . Δεν γνωρίζουμε τον τρόπο συμπεριφοράς της αναγωγής για τα στιγμιότυπα του Π για τα οποία ισχύει $L(I) \leq OPT(I) < U(I)$ άρα ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Π' και μια αναγωγή διατήρησης χάσματος από το Π δεν υποδηλώνουν την ύπαρξη προσεγγιστικού αλγορίθμου για το Π . Η συμπεριφορά αυτή είναι διαφορετική από αυτή της L-αναγωγής [52] που εξασφαλίζει ένα προσεγγιστικό αλγόριθμο για το Π . Γενικά οι L-αναγωγές είναι δυσκολότερες από τις αναγωγές διατήρησης χάσματος γιατί διατηρούν την προσεγγισσιμότητα. Από την άλλη μεριά, οι αναγωγές διατήρησης χάσματος χρησιμοποιούνται κυρίως για την απόδειξη αρνητικών αποτελεσμάτων προσεγγισσιμότητας. Η αναγωγή διατήρησης χάσματος, διατηρεί το χάσμα των $L(I)$ και $U(I)$, όχι όμως απαραίτητα και το μέγεθός του.

1.7 Σχετική έρευνα και γνωστά αποτελέσματα

The research of many commentators has already thrown much darkness on this subject, and it is probable that, if they continue, we shall soon know nothing at all about it.

Mark Twain

Πιθανώς το διασημότερο πρόβλημα φύλαξης πολυγώνου είναι το *πρόβλημα (φύλαξης) της αίθουσας τέχνης (art gallery problem)* [49]: Δίνεται ένα πολύγωνο P (που αναπαριστά μια αίθουσα τέχνης) και το ζητούμενο είναι να βρεθεί ένα σύνολο σημείων (φυλάκων) G μέσα στο P έτσι ώστε κάθε σημείο του πολυγώνου να είναι ορατό από ένα τουλάχιστο φύλακα. Το πρόβλημα αυτό έχει μελετηθεί αρκετά τα τελευταία χρόνια και ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε μια πληθώρα από δημοσιεύσεις: [55, 37, 7, 35, 32, 49, 1, 51].

Το πιο γνωστό αποτέλεσμα για το πρόβλημα φύλαξης της αίθουσας τέχνης είναι ότι $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ φύλακες αρκούν πάντα και κάποιες φορές ακριβώς τόσοι είναι απαραίτητοι, για την φύλαξη ενός πολυγώνου με n κορυφές [28, 15]. Στην εργασία του Shermer [53], καταγράφονται διάφορα αποτελέσματα για το προβλήματα φύλαξης της αίθουσας τέχνης και τις παραλλαγές του. Το *πολύγωνο ορατότητας (visibility polygon)*, το υποπολύγωνο δηλαδή ενός πολυγώνου που κάθε σημείο του είναι ορατό από ένα σημείο στο εσωτερικό, έχει μελετηθεί στα [33], [40] και [38], ενώ το βιβλίο του J. O'Rourke [49] καταγράφει πολλά προβλήματα ορατότητας που έχουν διερευνηθεί

Οι περισσότερες δημοσιεύσεις σχετικά με το πρόβλημα φύλαξης της αίθουσας τέχνης, ασχολούνται με τον υπολογισμό της θέσης των φυλάκων κάτω από περιορισμούς του σχήματος του πολυγώνου (ορθογώνια, με τρύπες, κτλ) ή κάτω από περιορισμούς των επιτρεπτών θέσεων των φυλάκων (κορυφές, πλευρές, κτλ). Εκτός της περίπτωσης του ενός φύλακα, λίγες δημοσιεύσεις ασχολούνται με τον υπολογισμό της φυλασσόμενης περιοχής, με ένα *δεδομένο αριθμό* φυλάκων: [14], [31]. Στο [16] εισάγουν την έννοια του witness set W ενός απλού πολυγώνου P : αν ένα σύνολο φυλάκων G , φυλάσσει το W , τότε εγγυημένα το G φυλάσσει το P . Αποδεικνύουν ότι δεν επιδέχονται όλα τα πολύγωνα πεπερασμένα witness sets.

Οι διαμερίσεις ορατότητας εμφανίζονται για πρώτη φορά στις εργασίες των Bose et al. και Guibas et al. [8], [34]. Κάτω από μια παρόμοια θεώρηση, αναφέρονται και στα [43], [29] και [26]. Στα [29] και [26] αποδεικνύονται ενδιαφέρουσες ιδιότητες για τις διαμερίσεις ορατότητας, τόσο της περιμέτρου, όσο και του εσωτερικού του πολυγώνου.

Στο [20] εξετάζουν πολύγωνα που περιέχουν σημειακούς θησαυρούς και αναζητούν τον ελάχιστο αριθμό φυλάκων έτσι ώστε όλοι οι θησαυροί να φυλάσσονται. Αποδεικνύουν ότι το πρόβλημα είναι NP-hard και προτείνουν ευριστικούς αλγορίθμους. Στο [10] αναθέτουν βάρη στους θησαυρούς και μελετούν την περίπτωση της τοποθέτησης ενός φύλακα έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το φυλασσόμενο βάρος των θησαυρών. Στο [39] εξετάζουν την κάλυψη των πλευρών της αίθουσας τέχνης.

Η υπολογιστική πολυπλοκότητα του προβλήματος φύλαξης με ελάχιστο αριθμό φυλάκων οριοθετήθηκε με τις εργασίες των Aggarwall και Lee and Lin [1], [41] που ανεξάρτητα έδειξαν ότι το πρόβλημα είναι NP-hard τόσο για φύλακες κορυφές, όσο και για γενικούς

φύλακες. Το πρόβλημα παραμένει NP-hard και για πολύ περιορισμένες υποκλάσεις πολυγώνων, όπως για παράδειγμα τα 2-link και 3-link πολύγωνα [46, 9]. Στο [12] υποστηρίζουν ότι η φύλαξη ενός μονότονου πολυγώνου με φύλακες κορυφές είναι NP-hard, χωρίς όμως να δίνουν λεπτομέρειες της απόδειξής τους.

Η πολυπλοκότητα των προσεγγίσεων για τα προβλήματα φύλαξης πολυγώνων έχει μελετηθεί από τους Eidenbenz et. al. Στο [24] αποδεικνύεται ότι τα πολύγωνα με τρύπες δεν μπορούν να φυλαχθούν αποτελεσματικά με λιγότερους από $\Omega(\log n)$ φορές τον βέλτιστο αριθμό γενικούς φύλακες ή φύλακες κορυφές, εκτός αν $P = NP$. Οι Broden et. al και Eidenbenz στα [9] και [23] αποδεικνύουν ότι η φύλαξη των πολυγώνων χωρίς τρύπες με γενικούς φύλακες είναι APX-hard πρόβλημα, δηλαδή ότι εκτός αν $P = NP$ δεν είναι δυνατό κάποιο πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα.

Κάθε πολύγωνο, με ή χωρίς τρύπες, μπορεί να φυλαχτεί αποτελεσματικά με ένα λογαριθμικό λόγο απόδοσης στον αριθμό των κορυφών του πολυγώνου. Ο αλγόριθμος είναι μια απλή αναγωγή στο πρόβλημα SET COVER, οπότε ο άπληστος αλγόριθμος για το SET COVER τοποθετεί ένα αριθμό φυλάκων, με λογαριθμικό λόγο απόδοσης [32]. Ένα καλύτερο αποτέλεσμα επιτυγχάνεται με τη χρήση τυχαιοποίησης (randomization) όπου έχουμε ένα αλγόριθμο με αναμενόμενο (expected) χρόνο εκτέλεσης $O(nOPT^2 \log^4 n)$ που δίνει ένα αριθμό φυλάκων κορυφών με λόγο απόδοσης $O(\log OPT)$ με μεγάλη πιθανότητα [21], n είναι ο αριθμός των κορυφών του πολυγώνου και OPT ο μικρότερος αριθμός φυλάκων που καλύπτουν το πολύγωνο).

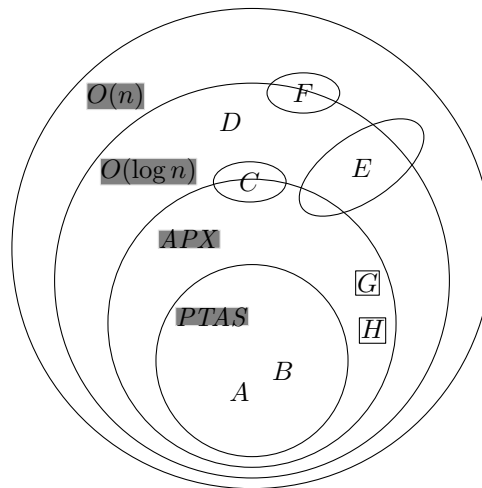
Στο [48] εξετάζουν την περίπτωση της τοποθέτησης ενός φύλακα στο εσωτερικό του πολυγώνου με τέτοιο τρόπο ώστε να καλύπτεται ένα μέγιστο εμβαδόν από το πολύγωνο. Δίνουν ένα αλγόριθμο που επιτυγχάνει μια προσέγγιση του μέγιστου εμβαδού, με λόγο απόδοσης $1 - \delta$ για κάθε $\delta > 0$ (PTAS). Η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου τους είναι $O(\frac{n^5}{\delta^2})$, δίνουν δηλαδή ένα πλήρες πολυωνυμικό προσεγγιστικό σχήμα για το πρόβλημα. Το πρόβλημα της τοποθέτησης k γενικών φυλάκων στο πολύγωνο με τέτοιο τρόπο ώστε να φυλάσσεται το μέγιστο εμβαδόν εξετάζεται στο [13]. Δίνουν ένα αλγόριθμο που με μεγάλη πιθανότητα επιτυγχάνει μια προσέγγιση του μέγιστου εμβαδού με λόγο απόδοσης $1 - e^{\delta-1}$ για κάθε $\delta > 0$ (δηλαδή άπειρα κοντά στο $1 - \frac{1}{e}$) σε χρόνο $O(\frac{k^3 n^2}{\delta^4} \log^3 \frac{n}{\delta})$.

Στο Σχήμα 1.2 φαίνεται η ένταξη των γνωστών αποτελεσμάτων, σχετικά με την πολυπλοκότητα των προσεγγίσεων για τις διάφορες παραλλαγές του προβλήματος φύλαξης της αίθουσας τέχνης, στην ιεραρχία των κλάσεων προσέγγισης. Οι κύκλοι είναι τα όρια των κλάσεων, ενώ αν ένα πρόβλημα δεν είναι σαφώς τοποθετημένο σε κάποια κλάση, τότε το εύρος του χάσματος μεταξύ του καλύτερου προσεγγιστικού αποτελέσματος με το χειρότερο αποτέλεσμα μη προσέγγισης, συμβολίζεται με μια έλλειψη. Τα προβλήματα που είναι σε ορθογώνιο πλαίσιο αφορούν πιθανοτικά αποτελέσματα.

1.8 Αποτελέσματα της Διατριβής

Το θέμα της Διατριβής είναι η Θεωρητική Πληροφορική και ειδικότερα η περιοχή των προσεγγιστικών αλγορίθμων για προβλήματα υπολογιστικής γεωμετρίας.

Αντικείμενο της διατριβής είναι η κατασκευή και μελέτη προσεγγιστικών αλγορίθμων για παραλλαγές του κλασσικού προβλήματος «φύλαξης της αίθουσας τέχνης» (Art Gallery problem, V. Klee 1973). Στο πρόβλημα φύλαξης της αίθουσας τέχνης το ζητούμενο είναι να τοποθετηθεί ο ελάχιστος αριθμός φυλάκων μέσα σε ένα πολύγωνο έτσι ώστε όλα



Σχήμα 1.2: Ένταξη των γνωστών αποτελεσμάτων στην ιεραρχία των κλάσεων προσέγγισης. Σχετικός είναι ο πίνακας 1.1.

A	ONE POINT GUARD WITHOUT HOLES	[48]
B	ONE POINT GUARD WITH HOLES	[48]
C	MINIMUM VERTEX/EDGE GUARD WITHOUT HOLES	[32, 25, 24]
D	MINIMUM VERTEX/EDGE GUARD WITH HOLES	[32, 25, 24]
E	MINIMUM POINT GUARD WITHOUT HOLES	[25, 24]
F	MINIMUM POINT GUARD WITH HOLES	[25, 24]
G	MAXIMUM LENGTH/AREA POINT GUARD WITHOUT HOLES	[13]
H	MAXIMUM LENGTH/AREA POINT GUARD WITH HOLES	[13]

Πίνακας 1.1: Τα προβλήματα του σχήματος 1.2 και οι σχετικές αναφορές

τα σημεία του πολυγώνου να είναι ορατά σε κάποιο φύλακα. Στις παραλλαγές που εξετάζονται στη διατριβή, είναι δεδομένος ένας αριθμός φυλάκων και το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση της κάλυψης με την τοποθέτηση των δεδομένων φυλάκων στις κορυφές ή τις πλευρές του πολυγώνου.

Χαρακτηριστικό είναι ότι, για όλες τις παραλλαγές του κλασσικού προβλήματος ελαχιστοποίησης, υπάρχει ένα μεγάλο χάσμα μεταξύ του καλύτερου γνωστού προσεγγιστικού παράγοντα, που πετυχαίνει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου και του αποτελέσματος μη-προσεγγισιμότητας: για παράδειγμα, για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης των γενικών φυλάκων σε απλά πολύγωνα χωρίς τρύπες, ο καλύτερος γνωστός παράγοντας προσέγγισης είναι $O(n)$ και συγχρόνως υπάρχει αποτέλεσμα μη-προσεγγισιμότητας, που λέει ότι υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε κανένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος δεν μπορεί να πετύχει παράγοντα προσέγγισης $1 + \epsilon$.

Στη διατριβή προτείνεται μια γενική μέθοδος αντιμετώπισης των προβλημάτων, όπου υπάρχουν διάφορες πιθανές θέσεις για την τοποθέτηση ενός δεδομένου αριθμού από k φυλάκες, και μια απαίτηση για μεγιστοποίηση της κάλυψης μιας συνάρτησης (μήκος, εμβαδόν, αξία κτλ) που επιδρά σε κάποια σύνολα σημείων μέσα στο πολύγωνο. Εξετάζονται επίσης και οι περιπτώσεις όπου α) ο υπολογισμός και μόνο της τιμής της συνάρτησης είναι πολύ δύσκολος (NP-hard), και β) υπάρχει κόστος που πρέπει να πληρωθεί όταν

τοποθετείται φύλακας σε κάποια από τις πιθανές θέσεις και υπάρχει ένας προϋπολογισμός που δεν μπορούμε να υπερβούμε. Για όλες αυτές τις παραλλαγές του κλασσικού προβλήματος φύλαξης της αίθουσας τέχνης, αποδεικνύεται ότι είναι NP-hard και με την εφαρμογή της γενικής μεθόδου που προτείνεται, κατασκευάζονται πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικοί αλγόριθμοι που πετυχαίνουν **σταθερούς** παράγοντες προσέγγισης. Οι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι που κατασκευάζονται, τοποθετούν τα προβλήματα μεγιστοποίησης στην κλάση πολυπλοκότητας APX.

Στην προσπάθεια διερεύνησης της βελτιστότητας κάποιου αλγορίθμου ως προς την προσεγγισσιμότητα, κάποιος αναζητά μια σταθερά $\epsilon > 0$, έτσι ώστε ο αλγόριθμος να πετυχαίνει παράγοντα προσέγγισης $1 + \epsilon$ και συγχρόνως μια απόδειξη δεν μπορεί να υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος που να πετυχαίνει παράγοντα προσέγγισης $1 + \epsilon - \delta$, $\forall \delta > 0$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ένα αποτέλεσμα ισχυρής βελτιστότητας.

Στη διατριβή παρουσιάζεται μια αναγωγή διατήρησης χάσματος, από γνωστό APX-hard πρόβλημα, στο πρόβλημα μεγιστοποίησης του καλυπτόμενου μήκους στην περίμετρο, από ένα σύνολο k φυλάκων, τοποθετημένων στις κορυφές του πολυγώνου. Παρουσιάζονται επίσης και οι απαραίτητες αλλαγές της αναγωγής, για όλα τα προβλήματα μεγιστοποίησης, της οποιαδήποτε απαίτησης κάλυψης, από ένα σύνολο k φυλάκων, τοποθετημένων είτε στις κορυφές, είτε στις πλευρές του πολυγώνου. Το αποτέλεσμα είναι, ότι όλα τα προβλήματα μεγιστοποίησης αποδεικνύονται APX-hard και με δεδομένους τους αλγορίθμους που πετυχαίνουν τους σταθερούς παράγοντες προσέγγισης, έχουμε ότι όλα τα προβλήματα μεγιστοποίησης, είναι APX-complete.

Στο πρώτο κεφάλαιο, μετά από μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία πολυπλοκότητας και στη θεωρία προσεγγισσιμότητας, παρουσιάζονται επίσης η γενική μέθοδος απόδειξης αρνητικών αποτελεσμάτων σχετικά με την προσεγγισσιμότητα: περιγράφονται στη γενική τους μορφή οι αναγωγές διατήρησης χάσματος και οι εφαρμογές τους σε διάφορες περιπτώσεις προβλημάτων όπου λαμβάνονται αποτελέσματα μη-προσέγγισης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι υποδιαιρέσεις ορατότητας της περιμέτρου και του εσωτερικού του πολυγώνου. Οι υποδιαιρέσεις αυτές, διακριτοποιούν ως προς την ορατότητα την περίμετρο και το εσωτερικό του πολυγώνου και αποδεικνύονται χρησιμότητα εργαλείο για την απόδειξη των αποτελεσμάτων NP-hardness των προβλημάτων μεγιστοποίησης που εξετάζονται στο επόμενο κεφάλαιο. Παρουσιάζονται και αναλύονται όλες οι ενδιαφέρουσες γεωμετρικές ιδιότητες αυτών των διαμερίσεων και εξετάζεται η χρήση τους για την περίπτωση της τοποθέτησης γενικών φυλάκων. Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού έχουν δημοσιευθεί στο [29] και χρησιμοποιούνται στα [43], [44] και [26].

Στο τρίτο κεφάλαιο, αφού εντοπιστούν οι ιδιαιτερότητες της έννοιας της φύλαξης, όπως αυτή διαμορφώνεται από τις διαφορετικές θέσεις των φυλάκων και τις διαφορετικές απαιτήσεις για την κάλυψη των τμημάτων του πολυγώνου, δίνονται οι ορισμοί όλων των προβλημάτων μεγιστοποίησης που πρόκειται να εξετασθούν. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια γενική μέθοδος αντιμετώπισης των προβλημάτων, όπου υπάρχουν διάφορες πιθανές θέσεις για την τοποθέτηση ενός δεδομένου αριθμού από k φυλάκες, και μια απαίτηση για μεγιστοποίηση της κάλυψης μιας συνάρτησης (μήκος, εμβαδόν, αξία κτλ) που επιδρά σε κάποια σύνολα σημείων μέσα στο πολύγωνο. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται στο πρόβλημα φύλαξης μέγιστου μήκους από την περίμετρο, μέγιστου εμβαδού από το εσωτερικό και μέγιστης αξίας από την περίμετρο ενός πολυγώνου. Εξετάζεται επίσης και η περίπτωση όπου η απαίτηση της κάλυψης είναι η επίβλεψη (μερική κάλυψη) αντί της πλήρους κάλυψης.

Στη συνέχεια εξετάζεται η περίπτωση όπου η γενική μέθοδος έχει να κάνει δύσκολες επιλογές, ο υπολογισμός δηλαδή της συνάρτησης που επιδρά στα σύνολα σημείων του πολυγώνου είναι από μόνο του ένα NP-hard πρόβλημα. Στην περίπτωση αυτή, ο μόνος τρόπος διατήρησης του πολυωνυμικού χρόνου εκτέλεσης, είναι η ύπαρξη πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικού αλγόριθμου για τον υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης. Η μέθοδος διαμορφώνεται κατάλληλα και εφαρμόζεται στο πρόβλημα κάλυψης μέγιστης αξίας με παράμετρο την τοποθέτηση των τμημάτων με αξία στην περίμετρο του πολυγώνου. Η ύπαρξη πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικού σχήματος για το πρόβλημα MULTIPLE KNAPSACK σε συνδυασμό με τη διαμορφωμένη γενική μέθοδο μας δίνουν πάλι ένα αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου που πετυχαίνει σταθερό παράγοντα προσέγγισης.

Τέλος εξετάζονται οι γενικεύσεις των προβλημάτων φύλαξης, όπου υπάρχει κόστος που πρέπει να πληρωθεί όταν τοποθετείται φύλακας σε κάποια από τις πιθανές θέσεις και υπάρχει ένας προϋπολογισμός που δεν μπορούμε να υπερβούμε. Μετά την κατάλληλη διαμόρφωση της γενικής μεθόδου έχουμε την εφαρμογή της στις περιπτώσεις κάλυψης μέγιστου μήκους, μέγιστης αξίας και μέγιστης αξίας με παράμετρο την τοποθέτηση των τμημάτων με αξία στην περίμετρο του πολυγώνου. Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού έχουν δημοσιευθεί στα [43], [44], [29] και [26].

Στο τέταρτο κεφάλαιο μετά από ένα πρώτο αποτέλεσμα μη ύπαρξης πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικού σχήματος για τα προβλήματα κάλυψης μέγιστης αξίας παρουσιάζεται μια αναγωγή διατήρησης χάσματος από το πρόβλημα MAX-5-OCCURENCE-3SAT στο πρόβλημα μεγιστοποίησης του καλυπτόμενου μήκους στην περίμετρο από ένα σύνολο k φυλάκων τοποθετημένων στις κορυφές του πολυγώνου. Η αναγωγή παρουσιάζεται διεξοδικά παρουσιάζοντας ένα τρόπο κατασκευής πολυγώνου και της συνέχεια αναλύεται ο μετασχηματισμός των εφικτών λύσεων μεταξύ των δύο προβλημάτων. Τελικά δείχνεται ότι η αναγωγή διατηρεί το χάσμα, συνεπώς το πρόβλημα μεγιστοποίησης του μήκους αποδεικνύεται APX-hard. Η αναγωγή αυτή, με τις κατάλληλες τροποποιήσεις, εφαρμόζεται σε όλα τα προβλήματα μεγιστοποίησης του τρίτου κεφαλαίου με αποτέλεσμα όλα αυτά τα προβλήματα να χαρακτηρίζονται APX-hard. Αυτά τα αποτελέσματα, σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα του τρίτου κεφαλαίου, δείχνουν ότι όλα τα προβλήματα μεγιστοποίησης είναι APX-complete. Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού, έχουν δημοσιευθεί στα [45] και [30].

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται μια σύνοψη των αποτελεσμάτων και παρουσιάζονται διάφορα ενδιαφέροντα προβλήματα για μελλοντική έρευνα.

Γεωμετρία της ορατότητας

Αεί ο Θεός ο Μέγας Γεωμετρεί

Μηδείς αγεωμέτητος εισείτω

 Επιγραφές στην είσοδο της
 Ακαδημίας του Πλάτωνα (4ος
 π.Χ. αιώνας)

Στο κεφάλαιο αυτό, αρχικά ορίζουμε τις απαραίτητες γεωμετρικές έννοιες και τα κατηγορήματα ορατότητας, που χρειάζονται για τη διατύπωση και τις αποδείξεις των ιδιοτήτων των υποδιαίρέσεων ορατότητας ενός απλού πολυγώνου. Τις υποδιαίρεσεις ορατότητας τις ορίσαμε στο [43] σαν εργαλείο για τους προσεγγιστικούς αλγορίθμους που προτείνουμε. Στο [29] αποδεικνύουμε το θεώρημα 2.4.1 ενώ στο [26] αποδεικνύουμε το θεώρημα 2.4.2. Τα δύο αυτά θεωρήματα είναι καθοριστικά για τη διατύπωση των θεωρημάτων και των αλγορίθμων του Κεφαλαίου 3, καθώς χρησιμοποιούνται τόσο στις αποδείξεις για το NP-hardness όσο και στα βήματα προεπεξεργασίας (preprocessing) των αλγορίθμων. Με λίγα λόγια, τα δύο αυτά θεωρήματα διακριτοποιούν την ορατότητα από τις κορυφές και τις ακμές, προς την περίμετρο ή το εσωτερικό του πολυγώνου.

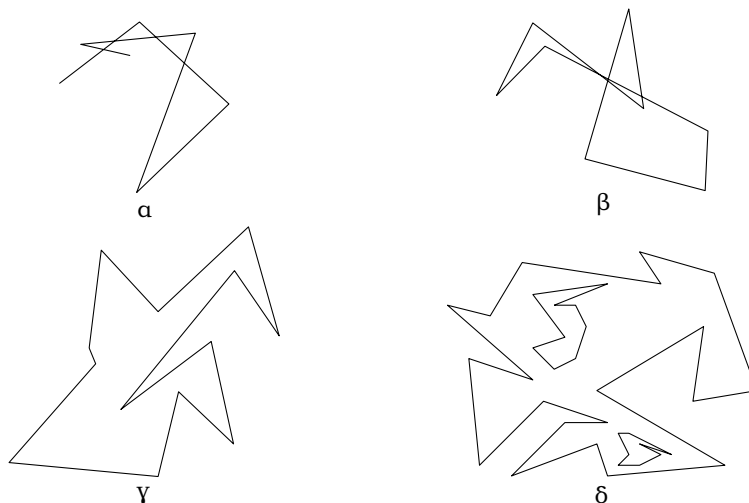
Οι όροι που χρησιμοποιούνται στα [43], [29] και [26] είναι «λεπτότερος κατακερματισμός ορατότητας» (finest visibility segmentation) και «λεπτότερη υποδιαίρεση ορατότητας» (finest visibility subdivision), αντίστοιχα για τη διακριτοποίηση της περιμέτρου και του εσωτερικού του πολυγώνου. Στο κεφάλαιο αυτό προτιμήσαμε τον όρο «υποδιαίρεση ορατότητας» και το συμβολισμό \mathcal{V} . Το είδος της υποδιαίρεσης συμβολίζεται σαν παράμετρος στο \mathcal{V} , οπότε $\mathcal{V}(\partial P)$ συμβολίζει την υποδιαίρεση ορατότητας της περιμέτρου του πολυγώνου P , ενώ $\mathcal{V}(P)$ συμβολίζει την υποδιαίρεση του εσωτερικού του πολυγώνου P .

Ανεξάρτητα από τα [43], [29] και [26], οι Bose et al στο [8] χρησιμοποιούν τις υποδιαίρεσεις ορατότητας και τις ιδιότητές τους σαν εργαλείο για αποτελεσματικές αναζητήσεις ορατότητας (efficient visibility queries) σε απλά πολύγωνα. Το λήμμα 2.4.1, που αποδεικνύουν στο [8], καθορίζει ότι στη χειρότερη περίπτωση η πολυπλοκότητα της $\mathcal{V}(P)$ είναι $O(n^3)$.

Σημαντικό για τους περισσότερους αλγορίθμους του Κεφαλαίου 3 είναι η εύρεση των κομματιών της αντίστοιχης με το πρόβλημα υποδιαίρεσης (περιμέτρου ή εσωτερικού) που φυλάσσονται (καλύπτονται ή επιτηρούνται) από κάποια θέση φύλαξης p . Οι αλγόριθμοι

2.1, 2.2, 2.3 και 2.4 υπολογίζουν αντίστοιχα τα σύνολα $\mathcal{V}(\partial P)(v)$, $\mathcal{V}(\partial P)(e)$, $\mathcal{V}(P)(v)$ και $\mathcal{V}(P)(e)$:

$\mathcal{V}(\partial P)(v)$	τμήματα της $\mathcal{V}(\partial P)$ που φυλάσσονται από την κορυφή v
$\mathcal{V}(\partial P)(e)$	τμήματα της $\mathcal{V}(\partial P)$ που φυλάσσονται από την ακμή e
$\mathcal{V}(P)(v)$	χωρία της $\mathcal{V}(\partial P)$ που φυλάσσονται από την κορυφή v
$\mathcal{V}(P)(e)$	χωρία της $\mathcal{V}(\partial P)$ που φυλάσσονται από την ακμή e



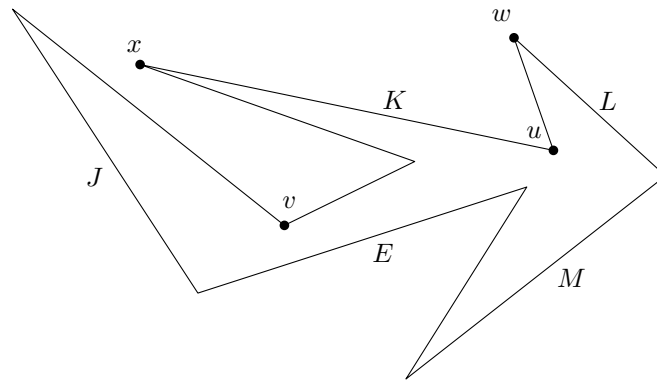
Σχήμα 2.1: Πολυγωνικές αλυσίδες, απλό πολύγωνο και πολύγωνο με τρύπες

2.1 Γεωμετρικές Έννοιες

Μια διατεταγμένη ακολουθία σημείων του επιπέδου, μαζί με τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα γειτονικά στη διάταξη σημεία, ονομάζεται *πολυγωνική αλυσίδα* (*polygonal chain*). Τα σημεία p_0, \dots, p_{n-1} ($n \geq 2$) ονομάζονται *κορυφές*, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα $\overline{p_i p_{i+1}}$ ονομάζονται *ακμές* της αλυσίδας. Μια πολυγωνική αλυσίδα ονομάζεται *κλειστή* αν $p_n = p_0$ (σχήμα 2.1.β) αλλιώς ονομάζεται *ανοικτή* (σχήμα 2.1.α). Μια πολυγωνική αλυσίδα ονομάζεται *απλή* αν δεν τέμνει τον εαυτό της (κάθε ακμή $e_j = \overline{p_k p_{k+1}}$ έχει κοινά σημεία μόνο το p_k με την ακμή $\overline{p_{k-1} p_k}$ και το p_{k+1} με την ακμή $\overline{p_{k+1} p_{k+2}}$). Μια απλή κλειστή πολυγωνική αλυσίδα χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές, την *εσωτερική* και την *εξωτερική*. Η εξωτερική περιοχή είναι μη φραγμένη ενώ η εσωτερική είναι φραγμένη (δεν μπορεί να περιέχει οποιαδήποτε ευθεία ή ημιευθεία του επιπέδου).

Μια απλή κλειστή πολυγωνική αλυσίδα, μαζί με το εσωτερικό της, ονομάζεται *απλό πολύγωνο χωρίς τρύπες* (*simple polygon without holes*). Η πολυγωνική αλυσίδα που ορίζει ένα απλό πολύγωνο χωρίς τρύπες P , ονομάζεται *περίμετρος* (*boundary*) του P και συμβολίζεται με ∂P . Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τον όρο *πολύγωνο* αντί του «απλό πολύγωνο χωρίς τρύπες» (σχήμα 2.1.γ).

Ένα *απλό πολύγωνο με τρύπες* (*simple polygon with holes*) (στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τον όρο *πολύγωνο με τρύπες*) P μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα πεπεραμένο



Σχήμα 2.2: Παραδείγματα ορατότητας.

αριθμό απλών κλειστών πολυγωνικών αλυσίδων P_1, \dots, P_k . Οι αλυσίδες αυτές αναπαριστούν την περίμετρο του P , όπου η P_1 είναι η *εξωτερική* περίμετρος του P ενώ τα P_i , $i = 2, \dots, k$ είναι οι περίμετροι από τις τρύπες. Η αναπαράσταση αυτή λειτουργεί μόνο αν $P_i \subseteq P_1$ για $i = 2, \dots, k$ και $P_i \cap P_j = \emptyset$ για $i, j = 2, \dots, k$. Το εσωτερικό του P είναι η συνολοθεωρητική διαφορά μεταξύ του P_1 και όλων των εσωτερικών των απλών πολυγώνων χωρίς τρύπες P_2, \dots, P_k (σχήμα 2.1.d).

2.2 Κατηγορήματα Ορατότητας

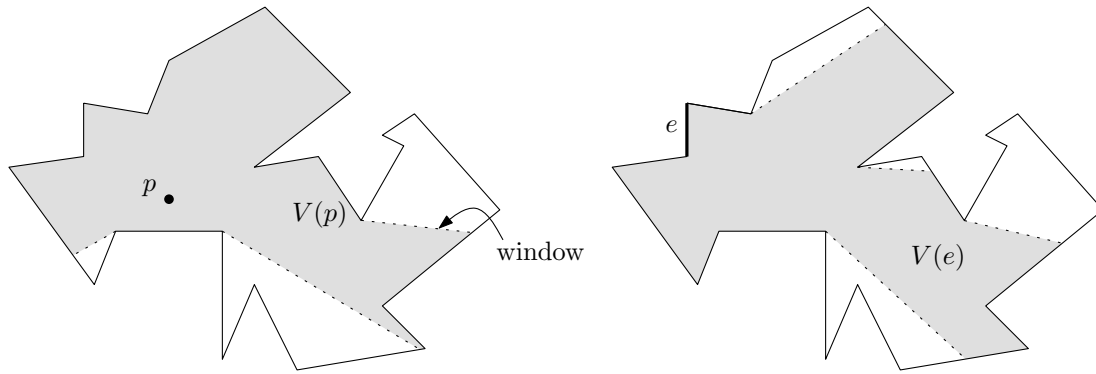
Αν a και b είναι δύο σημεία που ανήκουν σε ένα πολύγωνο P με ή χωρίς τρύπες, λέμε ότι το σημείο a *βλέπει* (sees) το σημείο b (ή ότι τα σημεία a και b είναι *ορατά μεταξύ τους* ή ότι είναι *αμοιβαία ορατά* (mutually visible) ή ότι το σημείο b *φαίνεται* από το σημείο a) αν το ευθύγραμμο τμήμα \overline{ab} που ενώνει τα δύο σημεία ανήκει στο P . Στο σχήμα 2.2 το σημείο v βλέπει το σημείο u , αλλά δεν βλέπει τα σημεία x και w . Αν A και B είναι δύο σύνολα σημείων που ανήκουν σε ένα πολύγωνο P , λέμε ότι το σύνολο A *καλύπτει* (oversees) το σύνολο B αν για κάθε σημείο $b \in B$ υπάρχει ένα σημείο $a \in A$ τέτοιο ώστε το a να βλέπει το b . Στο σχήμα 2.2 η ακμή J καλύπτει την ακμή E αλλά δεν καλύπτει την ακμή K . Επίσης, το σημείο v καλύπτει την ακμή E αλλά το σημείο v δεν καλύπτει την ακμή K .

Λέμε ότι το σύνολο σημείων $A \in P$ *βλέπει ασθενώς* (weakly sees) ή ότι *επιτηρεί* (watches) το σύνολο σημείων $B \in P$ αν υπάρχει σημείο $b \in B$ τέτοιο ώστε να υπάρχει ένα σημείο $a \in A$ ώστε το σημείο a να βλέπει το σημείο b . Στο σχήμα 2.2 το σημείο e επιτηρεί την ακμή J και το σημείο b επιτηρεί την ακμή K . Στη συνέχεια δίνουμε ένα τυπικό ορισμό:

Ορισμός 2.2.1 (Κατηγορήματα Ορατότητας) Έστω P ένα πολύγωνο με ή χωρίς τρύπες, $a, b \in P$ σημεία και $A, B \in P$ σύνολα σημείων. Ορίζουμε τα παρακάτω κατηγορήματα ορατότητας (visibility predicates):

βλέπει: $sees(a, b)$: το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα a και b βρίσκεται σε όλο του το μήκος εντός του πολυγώνου P (ή αλλιώς το ευθύγραμμο τμήμα δεν τέμνει το εξωτερικό του πολυγώνου).

καλύπτει: $oversees(A, B)$: $\forall b \in B \exists a \in A : sees(a, b)$.



Σχήμα 2.3: Πολύγωνα ορατότητας από σημείο και από ακμή

επιτηρεί: $watches(A, B) : \exists b \in B \exists a \in A : sees(a, b)$.

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις $sees$ και $watches$ είναι συμμετρικές ενώ η σχέση $oversees$ δεν είναι συμμετρική. Στο σχήμα 2.2 ισχύει ότι $oversees(L, M)$ αλλά δεν ισχύει ότι $oversees(M, L)$. Ισχύει όμως ότι $sees(v, u) \leftrightarrow sees(u, v)$ και ότι $watches(E, K) \leftrightarrow watches(K, E)$.

2.3 Συνδυαστική αναπαράσταση και πολύγωνο ορατότητας

Αν P είναι ένα απλό πολύγωνο και δύο σημεία a, b της περιμέτρου του είναι αμοιβαία ορατά τότε το ευθύγραμμο τμήμα \overline{ab} ονομάζεται *χορδή (chord)* του P . Αν μια χορδή ενώνει δύο κορυφές του P τότε ονομάζεται *διαγώνιος (diagonal)*. Μια χορδή s χωρίζει ένα απλό πολύγωνο σε δύο συνδεδεμένα τμήματα. Δύο σημεία που ανήκουν στο ίδιο συνδεδεμένο τμήμα λέμε ότι βρίσκονται στην ίδια μεριά σε σχέση με τη χορδή. Το *πολύγωνο ορατότητας (visibility polygon) $V(p)$ ($V(e)$)* ενός σημείου $p \in P$ (μιας ακμής $e \in P$) είναι όλα εκείνα τα σημεία του πολυγώνου που φαίνονται από το σημείο p (ακμή e). Το πολύγωνο ορατότητας έχει σχήμα αστεριού (*star-shaped*) (δηλαδή υπάρχει σημείο στο εσωτερικό του, π.χ. το σημείο p , από το οποίο φαίνονται όλα τα άλλα σημεία του) και η περίμετρός του αποτελείται από ακμές και χορδές του πολυγώνου. Οι χορδές του P που ανήκουν στην περίμετρο του $V(p)$ ονομάζονται *παράθυρα (windows)* του σημείου p . Τα παράθυρα ενός σημείου $p \in P$ είναι το σύνολο των περιοχών του P που δεν φαίνονται από το p , δηλαδή όλα τα σημεία του P που δεν φαίνονται από το p διαχωρίζονται από το $V(p)$ από κάποιο παράθυρο (σχήμα 2.3).

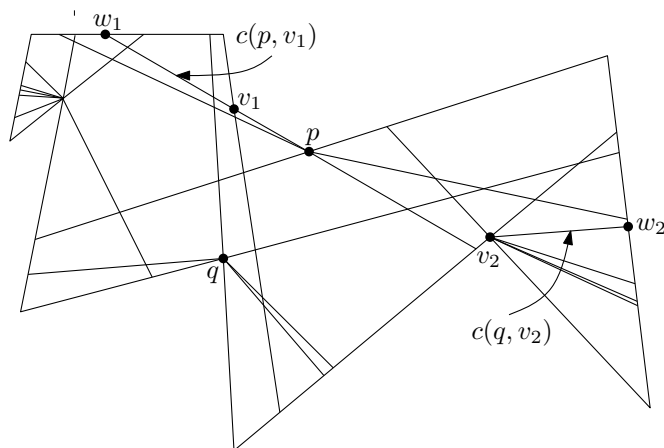
Η *συνδυαστική αναπαράσταση (combinatorial representation)* ενός πολυγώνου ορατότητας είναι η κυκλική λίστα των κορυφών και των ακμών του, όπως αυτές απαντώνται στην περίμετρο του πολυγώνου που ανήκει. Αν γνωρίζουμε την συνδυαστική αναπαράσταση ενός πολυγώνου ορατότητας τότε σε σταθερό χρόνο μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες κάθε κορυφής του. Δύο πολύγωνα ορατότητας ονομάζονται *συνδυαστικά ισοδύναμα (combinatorially equivalent)* αν οι συνδυαστικές τους αναπαραστάσεις είναι ακριβώς οι ίδιες ή μπορεί να γίνουν ίδιες με μια κυκλική μετάθεση.

Στο [2] αποδεικνύουν την παρακάτω:

Πρόταση 2.3.1 *Αν γνωρίζουμε τις κορυφές και τις ακμές που φαίνονται από ένα σημείο στο εσωτερικό ενός απλού πολυγώνου P , τότε η διάταξη με την οποία οι κορυφές και οι ακμές εμφανίζονται στην περίμετρο του πολυγώνου ορατότητας $V(p)$ προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο αφού η διάταξη αυτή οφείλει να ακολουθεί τη διάταξη της περιμέτρου του P*

Αυτή η ιδιότητα υποδηλώνει ότι αν δύο σημεία στο εσωτερικό ενός πολυγώνου βλέπουν ακριβώς τις ίδιες κορυφές και ακμές, τότε τα πολύγωνα ορατότητας των σημείων είναι συνδυαστικά ισοδύναμα. Σημειώνουμε ότι η προηγούμενη πρόταση δεν ισχύει για μη απλά πολύγωνα.

Μια ευθεία l είναι *εφαπτόμενη (tangent)* σε ένα πολύγωνο P στην κορυφή v αν η l περνάει από τη v και τέμνει τη γειτονιά της v εντός του P . Από τον ορισμό λοιπόν, μια ευθεία μπορεί να είναι εφαπτόμενη σε ένα πολύγωνο μόνο σε μη κυρτές κορυφές του. Για ένα σημείο $p \in P$ και μια κορυφή v , θεωρούμε την ακτίνα που ξεκινά από το p , στοχεύει την κορυφή v και τέμνει το ∂P στο σημείο w μετά το v ($w \neq p$). Αν το ευθύγραμμο τμήμα \overline{pw} βρίσκεται εντός του P και η ευθεία που περιέχει το \overline{pw} είναι εφαπτόμενη του P στην κορυφή v , τότε η χορδή \overline{vw} λέγεται ο *περιορισμός (constraint)* που παράγεται από τα p και v και συμβολίζεται $c(p, v)$. Θα λέμε ότι ο περιορισμός παράγεται από το p μόνο αν η κορυφή v είναι χωρίς σημασία ή εννοείται από τα συμφραζόμενα. Παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε σημείο p εντός του P οι περιορισμοί που παράγονται από το p είναι ακριβώς τα παράθυρα του $V(p)$. Αν p και v είναι κορυφές του πολυγώνου, τότε ο περιορισμός $c(v, p)$ ονομάζεται *κρίσιμος περιορισμός (critical constraint)*.



Σχήμα 2.4: Διαμέριση ορατότητας και κρίσιμοι περιορισμοί

2.4 Υποδιαίρεσεις ορατότητας

Όλοι οι κρίσιμοι περιορισμοί διαμερίζουν το εσωτερικό του πολυγώνου (αντίστοιχα την περίμετρο του πολυγώνου) σε κυρτές περιοχές (ευθύγραμμα τμήματα) και η διαμέριση ονομάζεται *διαμέριση ορατότητας (visibility decomposition)* του εσωτερικού του P (της περιμέτρου του P) και συμβολίζεται με $\mathcal{V}(P)$ ($\mathcal{V}(\partial P)$).

Μπορούμε να κατασκευάσουμε το σύνολο όλων των κρίσιμων περιορισμών που παράγονται από μια κορυφή του πολυγώνου σε χρόνο $O(n)$ με τη χρήση των γνωστών τεχνικών

κατασκευής του πολυγώνου ορατότητας από τους El Gindy και Avis [33], Lee [40] και τους Joe και Simpson [38]. Η ίδια διαδικασία πρέπει να επαναληφθεί για κάθε κορυφή, συνεπώς έχουμε ένα συνολικό κόστος χρόνου $O(n^2)$ για την κατασκευή του συνόλου των $O(n^2)$ κρίσιμων περιορισμών. Το επόμενο βήμα είναι η εύρεση όλων των σημείων τομής των κρίσιμων περιορισμών με την περίμετρο του P .

Ορισμός 2.4.1 Το σύνολο των διακριτών σημείων του πολυγώνου που συμμετέχουν στην υποδιαίρεση της περιμέτρου του, είναι τα σημεία τομής των κρίσιμων περιορισμών με την περίμετρο, μαζί με τις κορυφές του πολυγώνου.

Ορισμός 2.4.2 Ονομάζουμε υποδιαίρεση της περιμέτρου ενός πολυγώνου P , ως προς την ορατότητα από τις κορυφές και τις ακμές του, και συμβολίζουμε με $\mathcal{V}(\partial P)$, την κυκλική λίστα των ανοικτών ευθύγραμμων τμημάτων, που ορίζονται από συνεχόμενα σημεία του συνόλου διακριτών σημείων της υποδιαίρεσης της περιμέτρου του. Η υποδιαίρεση της περιμέτρου αποτελείται από $O(n^2)$ τμήματα.

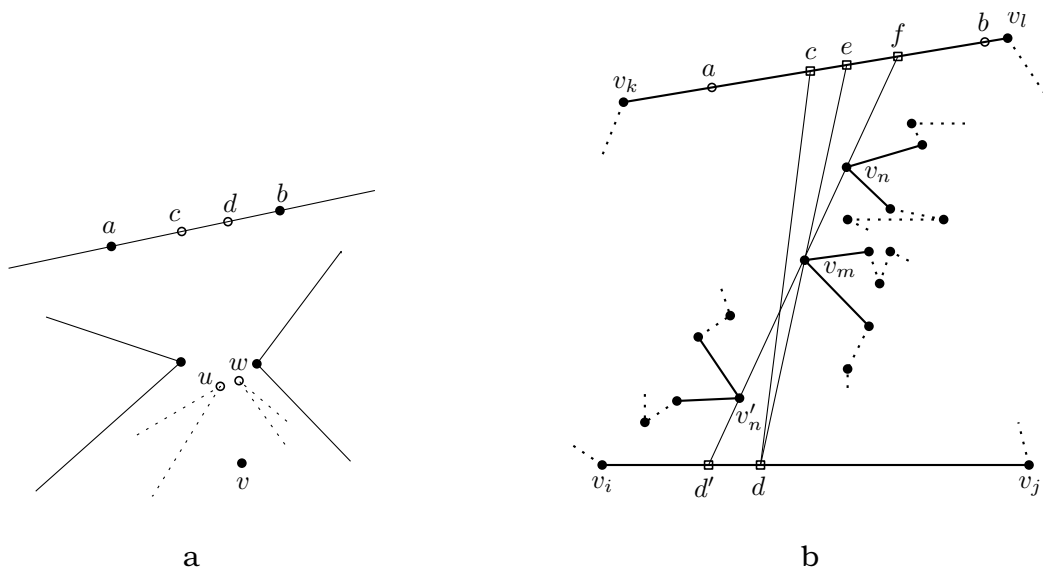
Στη συνέχεια με μια παραλλαγή του αλγορίθμου των Bentley και Ottmann [6] μπορούμε να κατασκευάσουμε την *επίπεδη υποδιαίρεση* (*planar subdivision*) που παράγουν όλοι οι κρίσιμοι περιορισμοί σε χρόνο $O(n^3 \log n)$. Μια αναλυτική περιγραφή του τρόπου κατασκευής της επίπεδης υποδιαίρεσης βρίσκεται στο [5]. Ιδιαίτερα χρήσιμο είναι το επόμενο λήμμα που αναλύεται στα [8] και [34]:

Λήμμα 2.4.1 Οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα s μέσα σε ένα απλό πολύγωνο P μπορεί να τέμνει το πολύ $O(n)$ κρίσιμους περιορισμούς του P .

Αφού λοιπόν υπάρχουν $O(n^2)$ κρίσιμοι περιορισμοί, από το παραπάνω λήμμα έχουμε ότι η πολυπλοκότητα της επίπεδης υποδιαίρεσης που ορίζουν οι κρίσιμοι περιορισμοί είναι $O(n^3)$ και το όριο αυτό είναι «σφιχτό» γιατί υπάρχουν πολύγωνα που έχουν ακριβώς τόσο πολύπλοκη υποδιαίρεση [8]. Μια επίπεδη υποδιαίρεση μπορεί να φυλαχθεί σε μια δομή διπλά συνδεδεμένης λίστας ακμών (*doubly connected edge list*) για τον αποτελεσματικότερο χειρισμό της [19].

Ορισμός 2.4.3 Το σύνολο των διακριτών σημείων του πολυγώνου που συμμετέχουν στην υποδιαίρεση του εσωτερικού του, είναι τα σημεία τομής μεταξύ των κρίσιμων περιορισμών, μαζί με τα διακριτά σημεία της υποδιαίρεσης της περιμέτρου του.

Ορισμός 2.4.4 Ονομάζουμε υποδιαίρεση του εσωτερικού ενός πολυγώνου P , ως προς την ορατότητα από τις κορυφές και τις ακμές του, και συμβολίζουμε με $\mathcal{V}(P)$, την επίπεδη υποδιαίρεση που ορίζεται από τα διακριτά σημεία της υποδιαίρεσης του εσωτερικού του μαζί με τους κρίσιμους περιορισμούς και την υποδιαίρεση της περιμέτρου του. Η υποδιαίρεση του εσωτερικού αποτελείται από $O(n^3)$ χωρία.



Σχήμα 2.5: Οποιαδήποτε κορυφή ή ακμή, καλύπτει ένα τμήμα της $\mathcal{V}(\partial P)$ αν και μόνο αν το επιτηρεί

2.4.1 Υποδιαίρεση της περιμέτρου

Λήμμα 2.4.2 Ένα ανοικτό διάστημα (a, b) που ορίζεται από συνεχόμενα σημεία της διαμέρισης ορατότητας της περιμέτρου $\mathcal{V}(\partial P)$ ενός πολυγώνου P , καλύπτεται από μια κορυφή v του P , αν και μόνο αν επιτηρείται από την v .

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι αν το (a, b) καλύπτεται από τη v τότε και επιτηρείται από τη v . Ας υποθέσουμε τώρα ότι το (a, b) επιτηρείται από τη v αλλά δεν καλύπτεται από τη v . Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι η v βλέπει μόνο το (c, d) και δεν μπορεί να δει κανένα σημείο μεταξύ των a, c , όπως επίσης κανένα σημείο μεταξύ των d, b (σχήμα 2.5.a). Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχουν δύο ακμές του P , με άκρα u και w που εμποδίζουν την ορατότητα της v , αριστερά του c και δεξιά του d αντίστοιχα. Όμως τότε τα c και d είναι άκρα των κρίσιμων περιορισμών $c(v, u)$ και $c(v, w)$, συνεπώς τα a, b δεν μπορούν να είναι συνεχόμενα σημεία της $\mathcal{V}(\partial P)$. □

Λήμμα 2.4.3 Ένα ανοικτό διάστημα (a, b) που ορίζεται από γειτονικά σημεία της διαμέρισης ορατότητας της περιμέτρου $\mathcal{V}(\partial P)$ ενός πολυγώνου P , καλύπτεται από μια ακμή $v_i v_j$ του P , αν και μόνο αν επιτηρείται από την $v_i v_j$.

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι αν το (a, b) καλύπτεται από την $v_i v_j$ τότε και επιτηρείται από την $v_i v_j$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το (a, b) επιτηρείται από την $v_i v_j$ αλλά δεν καλύπτεται από την $v_i v_j$. Το γεγονός ότι η $v_i v_j$ επιτηρεί το (a, b) σημαίνει ότι υπάρχει ένα σημείο $c \in (a, b)$ και ένα σημείο $d \in v_i v_j$ τέτοια ώστε το ευθύγραμμο τμήμα \overline{cd} να βρίσκεται ολόκληρο εντός του πολυγώνου P (σχήμα 2.5.b). Ξεκινάμε τώρα μια γωνιακή σάρωση (angular sweep) γύρω από το d , με την ευθεία που περνά από τα c και d . Αν η ευθεία ακουμπήσει το b , τότε καλύφθηκε όλο το τμήμα \overline{cb} , αλλιώς η σάρωση σταματά στην κορυφή που ανήκει στην πρώτη ακμή που εμποδίζει την ορατότητα του d στο (a, b) , την κορυφή v_m στο σχήμα 2.5.b. Συνεπώς το σημείο d καλύπτει το τμήμα \overline{ce} και για να

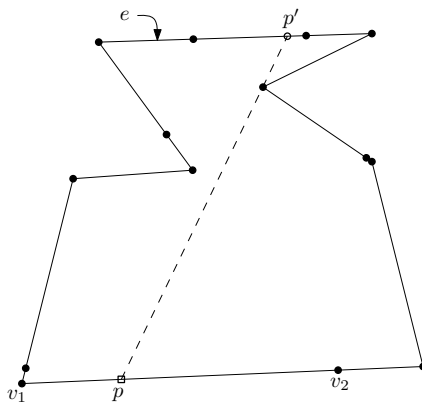
καλυφθούν τα σημεία μετά το e , προς το b , πρέπει να μετακινηθούμε σε σημεία αριστερά του d . Ξεκινάμε λοιπόν μια νέα γωνιακή σάρωση γύρω από το v_m , με την ευθεία που περνά από τα e και d , οπότε η ευθεία περνά από διαφορετικές θέσεις d' αριστερά του d . Υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

- Η ευθεία ακουμπά το b συνεπώς καλύψαμε όλο το τμήμα \overline{cd} .
- Η ευθεία σταματά στην κορυφή που ανήκει στην πρώτη ακμή που εμποδίζει την ορατότητα του d' στο (a, b) , την κορυφή v_n (ή την v'_n) στο σχήμα 2.5.b. Έχουμε δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα εντός του P , που ξεκινά από το d' , περνά από τις v_m και v_n (ή v'_n) και τέμνει την ∂P στο f . Όμως τότε, το f είναι άκρο του κρίσιμου περιορισμού $c(v_m, v_n)$ (ή $c(v'_n, v_m)$), συνεπώς τα a, b , δεν μπορούν να είναι συνεχόμενα σημεία της $\mathcal{V}(\partial P)$.
- Η ευθεία ακουμπά το v_i αλλά όχι το b . Τότε όμως το f είναι άκρο του κρίσιμου περιορισμού $c(v_i, v_m)$, συνεπώς το f είναι ένα σημείο της $\mathcal{V}(\partial P)$ αριστερά του b . Άρα τα a, b δεν μπορούν να είναι συνεχόμενα σημεία της $\mathcal{V}(\partial P)$.

Με χρήση ακριβώς της ίδιας τεχνικής, μπορούμε να δείξουμε ότι η ακμή $v_i v_j$ καλύπτει και το τμήμα \overline{ac} . □

Τα δύο προηγούμενα λήμματα είναι η απόδειξη για το επόμενο:

Θεώρημα 2.4.1 *Η περίμετρος κάθε πολυγώνου P μπορεί να διακριτοποιηθεί αποτελεσματικά, σχετικά με την ορατότητα, σε $O(n^2)$ τμήματα. Κάθε κορυφή ή ακμή του P καλύπτει ένα τέτοιο τμήμα αν και μόνο αν το επιτηρεί.*



Σχήμα 2.6: Η ακμή e καλύπτει το $\overline{v_1 v_2} \in \mathcal{V}(\partial P)$ γιατί $\overline{p'p} \subset P$

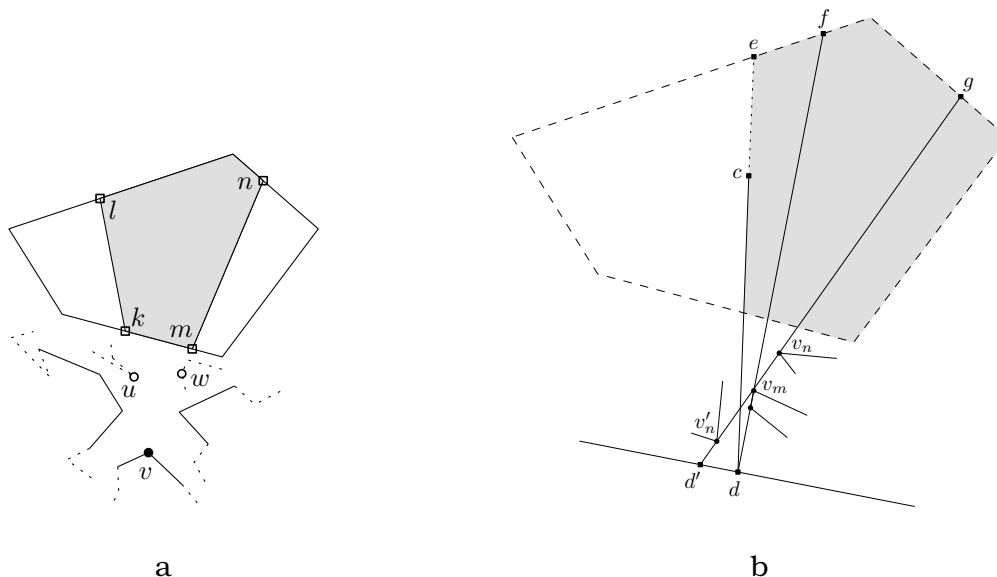
Κάλυψη της υποδιαίρεσης της περιμέτρου

Για να βρούμε ποιά τμήματα της $\mathcal{V}(\partial P)$ καλύπτονται από μια κορυφή v του P , δηλαδή το σύνολο $\mathcal{V}(\partial P)(v)$, αρκεί να επιλέξουμε ένα τυχαίο σημείο p μέσα σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα s της $\mathcal{V}(\partial P)$. Στη συνέχεια για κάθε επιλεγμένο σημείο p πρέπει να ελεγχθεί αν το

τμήμα \overline{vp} βρίσκεται ολόκληρο εντός του P . Αν αυτό ισχύει τότε η κορυφή v επιτηρεί το s , συνεπώς, σύμφωνα με το λήμμα 2.4.2, καλύπτει το s , οπότε το s εντάσσεται στο σύνολο $\mathcal{V}(\partial P)(v)$. Σημειώνουμε εδώ ότι ο έλεγχος για το αν ένα ευθύγραμμο τμήμα βρίσκεται μέσα σε ένα πολύγωνο μπορεί να γίνει με τη χρήση απλών τέστ προσανατολισμού [50] συνεπώς η κατασκευή του συνόλου $\mathcal{V}(\partial P)(v)$ χρειάζεται συνολικό χρόνο $O(n^3)$ (αλγόριθμος 2.1).

Για την περίπτωση του συνόλου $\mathcal{V}(\partial P)(e)$ δηλαδή του συνόλου των τμημάτων της $\mathcal{V}(\partial P)$ που καλύπτονται από μια ακμή e του P , αρκεί να επιλέξουμε ένα τυχαίο σημείο μέσα σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα s της $\mathcal{V}(\partial P)$ και στη συνέχεια να ελέγξουμε αν υπάρχει σημείο $p' \in e$ τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{p'p}$ βρίσκεται ολόκληρο εντός του P .

Ο έλεγχος γίνεται κάνοντας μια γωνιακή σάρωση με μια ευθεία που περνά από το p και σταματά στις κορυφές του πολυγώνου (σχήμα 2.6). Αν υπάρχει κορυφή v του P (πιθανώς ένα άκρο της e) τέτοιο ώστε η ευθεία που περνά από τα p και v να τέμνει την e στο p' , τότε η ακμή e επιτηρεί το s , οπότε, σύμφωνα με το λήμμα 2.4.3 καλύπτει το s , που εντάσσεται στο σύνολο $\mathcal{V}(\partial P)(e)$. Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος 2.2 σε συνολικό χρόνο $O(n^4)$ κατασκευάζει το σύνολο $\mathcal{V}(\partial P)(e)$ για κάθε κορυφή του πολυγώνου.



Σχήμα 2.7: Οποιαδήποτε κορυφή ή ακμή, καλύπτει ένα χωρίο της $\mathcal{V}(P)$ αν και μόνο αν το επιτηρεί

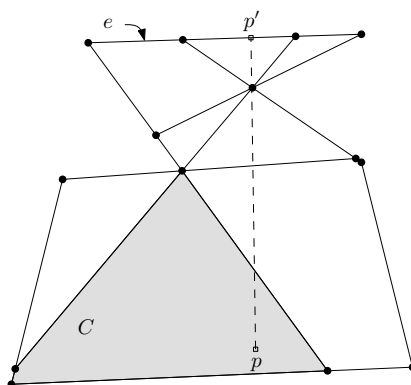
2.4.2 Υποδιαίρεση του εσωτερικού

Παρόμοια με την προηγούμενη παράγραφο έχουμε τα ακόλουθα λήμματα:

Λήμμα 2.4.4 Ένα ανοικτό χωρίο C (δεν περιέχει το σύνορό του) της επίπεδης υποδιαίρεσης που ορίζεται από την υποδιαίρεση του εσωτερικού $\mathcal{V}(P)$ ενός πολυγώνου P , καλύπτεται από μια κορυφή v του P , αν και μόνο αν επιτηρείται από την v .

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι αν το C καλύπτεται από τη v τότε και επιτηρείται από τη v . Αν υποθέσουμε ότι το C επιτηρείται από τη v , αλλά δεν καλύπτεται, τότε πρέπει

να υπάρχει ένα σημείο c , εντός του C , που φαίνεται από τη v (Σχήμα 2.7a). Αν το C καλυπτόταν από τη v , μια γωνιακή σάρωση της ευθείας που περνά από τα c και v , γύρω από τη v θα έπρεπε να καλύπτει όλο το C , όμως τώρα σταματά σε κάποια κορυφή u ή w που εμποδίζει την παραπέρα κάλυψη του C . Αυτό όμως σημαίνει ότι το τμήμα \overline{kl} ή το τμήμα \overline{mn} είναι κομμάτια των κρίσιμων περιορισμών $c(v, u)$ ή $c(v, w)$, πράγμα άτοπο γιατί το χωρίο C , από τον ορισμό του, δεν μπορεί να περιέχει κομμάτια κρίσιμων περιορισμών. Τελικά η v πρέπει να καλύπτει το C . \square



Σχήμα 2.8: Η ακμή e καλύπτει το χωρίο $C \in \mathcal{V}(P)$ γιατί $\overline{p'p} \subset P$

Λήμμα 2.4.5 Ένα ανοικτό χωρίο C της επίπεδης υποδιαίρεσης που ορίζεται από την υποδιαίρεση του εσωτερικού $\mathcal{V}(P)$ ενός πολυγώνου P , καλύπτεται από μια ακμή e του P , αν και μόνο αν επιτηρείται από την e .

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι αν το C καλύπτεται από την $e = (v_i, v_j)$ τότε και επιτηρείται από την e . Αν υποθέσουμε ότι το C επιτηρείται από την e , αλλά δεν καλύπτεται, τότε πρέπει να υπάρχει ένα σημείο c , εντός του C , που φαίνεται από ένα σημείο d της e (Σχήμα 2.7b). Αν το C καλυπτόταν από την e , μια γωνιακή σάρωση της ευθείας που περνά c και d , γύρω από το d , θα έπρεπε να καλύπτει όλο το C , όμως τώρα σταματά σε κάποια κορυφή v_m που εμποδίζει την παραπέρα κάλυψη του C . Μια κανούρια γωνιακή σάρωση της ευθείας που περνά από τα v_m και d , γύρω από το v_m , θα έπρεπε να καλύπτει όλο το C , όμως τώρα σταματά σε μια κορυφή v_n ή v'_n που εμποδίζει την παραπέρα κάλυψη του C . Αυτό όμως σημαίνει ότι το τμήμα \overline{hg} είναι κομμάτι του κρίσιμου περιορισμού $c(v_m, v_n)$ (ή $c(v'_n, v_m)$), πράγμα άτοπο γιατί το χωρίο C , από τον ορισμό του, δεν μπορεί να περιέχει κομμάτια κρίσιμων περιορισμών. Παρατηρούμε ότι αν η σάρωση γύρω από το v_m φτάσει στο άκρο v_i της e και η σάρωση δεν έχει καλύψει όλο το C , τότε και πάλι θα έχουμε το χωρίο C να περιέχει ένα κομμάτι του κρίσιμου περιορισμού $c(v_i, v_m)$, πράγμα άτοπο. Τελικά η e πρέπει να καλύπτει το C . \square

Τα δύο προηγούμενα λήμματα είναι η απόδειξη για το επόμενο:

Θεώρημα 2.4.2 Το εσωτερικό κάθε πολυγώνου P μπορεί να διακριτοποιηθεί αποτελεσματικά, σχετικά με την ορατότητα, σε $O(n^3)$ χωρία. Κάθε κορυφή ή ακμή του P καλύπτει ένα τέτοιο τμήμα αν και μόνο αν το επιτηρεί.

Κάλυψη της υποδιαίρεσης του εσωτερικού

Για να βρούμε τα χωρία της $\mathcal{V}(P)$ που καλύπτονται από μια κορυφή v του P , δηλαδή το σύνολο $\mathcal{V}(P)(v)$, αρκεί να επιλέξουμε ένα τυχαίο σημείο p μέσα σε κάθε χωρίο C της $\mathcal{V}(P)$ και σύμφωνα με το λήμμα 2.4.4 να ελέγξουμε αν $\overline{vp} \subset P$. Ο αλγόριθμος 2.3 διαφέρει από τον 2.1 μόνο στη χρήση της $\mathcal{V}(P)$.

Για να βρούμε τα χωρία της $\mathcal{V}(P)$ που καλύπτονται από μια ακμή e του P , δηλαδή το σύνολο $\mathcal{V}(P)(e)$, αρκεί να επιλέξουμε ένα τυχαίο σημείο p μέσα σε κάθε χωρίο C της $\mathcal{V}(P)$ και σύμφωνα με το λήμμα 2.4.5 να ελέγξουμε αν υπάρχει σημείο $p' \in e$ τέτοιο ώστε $\overline{pp'} \subset P$ (Σχήμα 2.8). Ο αλγόριθμος 2.4 διαφέρει από τον 2.2 μόνο στη χρήση της $\mathcal{V}(P)$.

```

 $\mathcal{V}(\partial P)(v) \leftarrow \emptyset$ 
foreach  $s \in \mathcal{V}(\partial P)$  do
  pick  $p \in s$ 
  if  $\overline{vp} \subset P$  then  $\mathcal{V}(\partial P)(v) \leftarrow s$ 
endfch
return  $\mathcal{V}(\partial P)(v)$ 

```

Αλγόριθμος 2.1: Κατασκευή του συνόλου $\mathcal{V}(\partial P)(v)$

```

foreach edge  $e$  of the polygon  $P$  do
   $\mathcal{V}(\partial P)(e) \leftarrow \emptyset$ 
endfch
foreach  $s \in \mathcal{V}(\partial P)$  do
  pick  $p \in S$ 
  start an angular sweep around  $p$  stopping at  $P$ 's vertices  $v_i$ 
  if  $\overline{pv_i} \subset P$  then
     $\mathcal{V}(\partial P)(e) \leftarrow \mathcal{V}(\partial P)(e) \cup \{s\}$ 
  else
    extend  $\overline{pv_{i-1}}$  up to  $\partial P$ 
    let  $e' = \overline{v_k v_l}$  be the edge on  $\partial P$  that  $\overline{pv_{i-1}}$  intersects
     $\mathcal{V}(\partial P)(e') \leftarrow \mathcal{V}(\partial P)(e') \cup \{s\}$ 
    let  $v_l$  be the next event of the sweep
  endif
endfch
return  $\mathcal{V}(\partial P)(e)$  for all edges of  $P$ 

```

Αλγόριθμος 2.2: Κατασκευή του συνόλου $\mathcal{V}(\partial P)(e)$

```

 $\mathcal{V}(P)(v) \leftarrow \emptyset$ 
foreach  $s \in \mathcal{V}(P)$  do
  pick  $p \in s$ 
  if  $\overline{vp} \subset P$  then  $\mathcal{V}(P)(v) \leftarrow s$ 
endfch
return  $\mathcal{V}(P)(v)$ 

```

Αλγόριθμος 2.3: Κατασκευή του συνόλου $\mathcal{V}(P)(v)$

```

foreach edge  $e$  of the polygon  $P$  do
   $\mathcal{V}(P)(e) \leftarrow \emptyset$ 
endfch
foreach  $s \in \mathcal{V}(P)$  do
  pick  $p \in S$ 
  start an angular sweep around  $p$  stopping at  $P$ 's vertices  $v_i$ 
  if  $\overline{pv_i} \subset P$  then
     $\mathcal{V}(P)(e) \leftarrow \mathcal{V}(P)(e) \cup \{s\}$ 
  else
    extend  $\overline{pv_{i-1}}$  up to  $\partial P$ 
    let  $e' = \overline{v_k v_l}$  be the edge on  $\partial P$  that  $\overline{pv_{i-1}}$  intersects
     $\mathcal{V}(P)(e') \leftarrow \mathcal{V}(P)(e') \cup \{s\}$ 
    let  $v_l$  be the next event of the sweep
  endif
endfch
return  $\mathcal{V}(P)(e)$  for all edges of  $P$ 

```

Αλγόριθμος 2.4: Κατασκευή του συνόλου $\mathcal{V}(P)(e)$

Κεφάλαιο 3

Φύλαξη πολυγώνων

Ποιος φυλάσσει τους φύλακες;

Πλάτωνας, Πολιτεία

Quis custodiet ipsos custodes?

Decimus Junius Juvenalis

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάσαμε διεξοδικά τα γεωμετρικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε σ' αυτό το κεφάλαιο για να αντιμετωπίσουμε τα διάφορα προβλήματα μεγιστοποίησης της φύλαξης. Είναι αξιοσημείωτο ότι ελάχιστα αποτελέσματα στη βιβλιογραφία αφορούν στην εύρεση «καλών θέσεων» για τους φύλακες, με δεδομένο ένα πολύγωνο και ένα αριθμό φυλάκων. Το πρόβλημα μεγιστοποίησης της φύλαξης από ένα γενικό φύλακα έχει μελετηθεί από τους S. Ntafos et al στο [48] όπου παρουσιάζουν ένα πλήρες πολυωνυμικό σχήμα (Fully Polynomial Time Approximation Scheme, FPTAS)*. Οι O. Cheong et al στο [13], δίνουν ένα αλγόριθμο που με μεγάλη πιθανότητα επιτυγχάνει μια προσέγγιση του μέγιστου εμβαδού με λόγο απόδοσης $1 - e^{\delta-1}$ για κάθε $\delta > 0$ (δηλαδή άπειρα κοντά στο $1 - \frac{1}{e}$).

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε πλήρως το θέμα της μεγιστοποίησης της κάλυψης από τις κορυφές ή τις ακμές του πολυγώνου. Η περιοχή που πρέπει να καλυφθεί είναι η περίμετρος ή το εσωτερικό του πολυγώνου. Αρχικά δεινουμε παραδείγματα που κάνουν φανερές τις ιδιαιτερότητες της φύλαξης ανάλογα με τις παραμέτρους της: α) πιθανές θέσεις φύλαξης (κορυφές ή οπουδήποτε μέσα στο πολύγωνο, β) είδος φυλάκων (σημειακοί φύλακες ή φύλακες ακμές) και γ) απαίτηση κάλυψης (περίμετρος ή εσωτερικό του πολυγώνου). Η μεγιστοποίηση επιτυγχάνεται με μια **άπληστη (greedy) προσέγγιση**: από κάθε πιθανή θέση φύλαξης προσπαθούμε να κάνουμε το καλύτερο δυνατό για το ζητούμενο του προβλήματος και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για κάθε διαθέσιμο φύλακα. Το απαραίτητο βήμα προεπεξεργασίας (preprocessing) όλων των περιπτώσεων είναι οι εφαρμογές των τεχνικών του Κεφαλαίου 2 για τη διακριτοποίηση της όρασης από κάθε πιθανή θέση φύλαξης (κορυφές ή ακμές). Με τη διακριτοποίηση αυτή, σε κάθε βήμα των αλγορίθμων είναι καλά ορισμένη η περιοχή κάλυψης από την τρέχουσα θέση φύλαξης.

* Δίνουν ένα αλγόριθμο που επιτυγχάνει μια προσέγγιση του μέγιστου εμβαδού, με λόγο απόδοσης $1 - \delta$ για κάθε $\delta > 0$ (PTAS). Η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου τους είναι $O(\frac{n^5}{\delta^2})$, πολυωνυμική δηλαδή ως προς το n και δ , άρα το προσεγγιστικό σχήμα είναι πλήρως πολυωνυμικό.

Σημειώνουμε εδώ ότι η άπληστη αντιμετώπιση των προβλημάτων ελαχιστοποίησης των φυλάκων για την πλήρη κάλυψη του πολυγώνου, οδηγεί σε προσεγγιστικούς αλγορίθμους με λογαριθμικούς παράγοντες προσέγγισης. Στα προβλήματα μεγιστοποίησης της κάλυψης, όπως θα αναλύσουμε, η άπληστη αντιμετώπιση έχει σαν αποτέλεσμα πολυωνυμικούς προσεγγιστικούς αλγορίθμους με **σταθερούς** παράγοντες προσέγγισης. Αξιοσημείωτο είναι ότι οι υλοποιήσεις των αλγορίθμων αυτών στο [18] συμπεριφέρονται σχεδόν πάντα κοντά στο βέλτιστο.

3.1 Ιδιαιτερότητες της φύλαξης

Σε ένα πρόβλημα φύλαξης πολυγώνου οι πιθανές θέσεις ενός φύλακα μπορεί να περιορίζονται στις κορυφές ή τις ακμές του πολυγώνου ή να μην υπάρχει περιορισμός και ο φύλακας να μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε μέσα στο πολύγωνο. Επίσης υπάρχει η απαίτηση για την προς φύλαξη περιοχή να περιορίζεται στην περίμετρο του πολυγώνου ή να υπάρχει η απαίτηση να φυλάσσεται τόσο η περίμετρος όσο και όλο το εσωτερικό του πολυγώνου. Συνεπώς προκύπτουν οι ακόλουθες οικογένειες προβλημάτων:

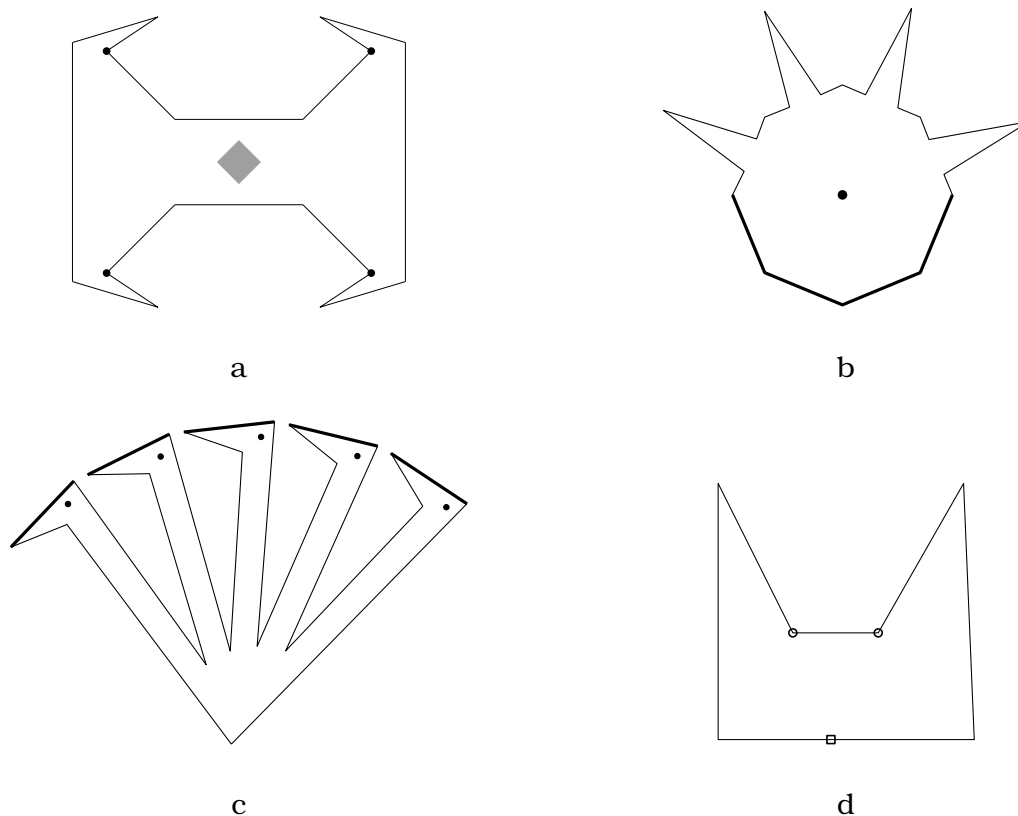
- Να τοποθετηθούν φύλακες στις κορυφές του πολυγώνου έτσι ώστε να καλύπτουν:
 - α) όλη την περίμετρο του πολυγώνου ή β) Όλο το πολύγωνο (περίμετρος και εσωτερικό). Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1a, ένα σύνολο φυλάκων μπορεί να καλύπτει την περίμετρο του πολυγώνου αλλά όχι όλο το εσωτερικό.
- Να τοποθετηθούν φύλακες στις ακμές του πολυγώνου (φύλακες ακμές) έτσι ώστε να καλύπτουν:
 - α) όλη την περίμετρο του πολυγώνου ή β) όλο το πολύγωνο (περίμετρος και εσωτερικό).
- Να τοποθετηθούν φύλακες οπουδήποτε μέσα στο πολύγωνο έτσι ώστε να καλύπτουν:
 - α) όλη την περίμετρο του πολυγώνου ή β) όλο το πολύγωνο (περίμετρος και εσωτερικό).

Ένας τυπικός ορισμός των διαφόρων τύπων φυλάκων είναι:

Ορισμός 3.1.1 *Φύλακας ονομάζεται ένα σημείο εντός του πολυγώνου με την ιδιότητα να βλέπει 360° γύρω από τον εαυτό του και οσοδήποτε μακριά. Ένας φύλακας που βρίσκεται πάνω σε μια κορυφή του πολυγώνου ονομάζεται φύλακας κορυφή (vertex guard). Αν κάθε σημείο μιας ακμής ενός πολυγώνου θεωρηθεί ένα φύλακας, τότε η ακμή αυτή ονομάζεται φύλακας ακμή (edge guard). Ένας φύλακας που είναι τοποθετημένος οπουδήποτε εντός του πολυγώνου (είτε οπουδήποτε στην περίμετρο, είτε οπουδήποτε στο εσωτερικό) ονομάζεται γενικός φύλακας (general guard).*

Είναι φανερό ότι, για οποιαδήποτε απαίτηση φύλαξης, υπάρχει περίπτωση όπου οι γενικοί φύλακες μπορούν να φυλάξουν μεγαλύτερη περιοχή από τους φύλακες κορυφές και από τους φύλακες ακμές. Για παράδειγμα στο Σχήμα 3.1b, ο φύλακας στο εσωτερικό αρκεί για να καλύψει όλο το πολύγωνο, ενώ χρειάζονται είτε 4 φύλακες κορυφές, είτε 4 φύλακες ακμές για την ίδια απαίτηση κάλυψης. Επίσης στο Σχήμα 3.1d, ο γενικός φύλακας που συμβολίζεται με το τετράγωνο καλύπτει όλο το πολύγωνο ενώ χρειάζονται 2 φύλακες κορυφές για να καλύψουν όλο το πολύγωνο. Στο Σχήμα 3.1c χρειάζονται τόσοι

γενικοί φύλακες όσοι ακριβώς και φύλακες ακμές. Τέλος, στο Σχήμα 3.1a, η απαίτηση κάλυψης είναι η φύλαξη της περιμέτρου του πολυγώνου. Παρατηρούμε ότι ο ελάχιστος αριθμός των 4 φυλάκων κορυφών καλύπτει μεν όλη την περίμετρο, αφήνει όμως ακάλυπτο το κομμάτι του εσωτερικού που φαίνεται σκιασμένο.



Σχήμα 3.1: Διαφορές στην ικανότητα φύλαξης

3.2 Ορισμοί προβλημάτων φύλαξης

Στη συνέχεια θα δώσουμε τους ορισμούς των προβλημάτων φύλαξης πολυγώνων που θα μας απασχολήσουν:

3.2.1 Προβλήματα ελαχιστοποίησης

Ορισμός 3.2.1 Έστω P ένα απλό πολύγωνο. Το πρόβλημα **MINIMUM VERTEX GUARD** ζητά την εύρεση ενός ελάχιστου υποσυνόλου G_V του συνόλου κορυφών του P , έτσι ώστε όλα τα σημεία της περιμέτρου και του εσωτερικού του P , να καλύπτονται από τουλάχιστο ένα στοιχείο του G_V .

Ορισμός 3.2.2 Έστω P ένα απλό πολύγωνο. Το πρόβλημα **MINIMUM EDGE GUARD** ζητά την εύρεση ενός ελάχιστου υποσυνόλου G_E του συνόλου ακμών του P , έτσι ώστε όλα τα σημεία της περιμέτρου και του εσωτερικού του P , να καλύπτονται από τουλάχιστο ένα στοιχείο του G_E .

Ορισμός 3.2.3 Έστω P ένα απλό πολύγωνο. Το πρόβλημα **MINIMUM GENERAL GUARD** ζητά την εύρεση ενός ελάχιστου υποσυνόλου G , του συνόλου των σημείων της περιμέτρου και του εσωτερικού του P , έτσι ώστε όλα τα σημεία της περιμέτρου και του εσωτερικού του P , να καλύπτονται από τουλάχιστο ένα στοιχείο του G .

Στην περίπτωση που η απαίτηση για φύλαξη, περιορίζεται μόνο στην περίμετρο του πολυγώνου, έχουμε αντίστοιχα τα προβλήματα **MINIMUM VERTEX GUARD FOR BOUNDARY**, **MINIMUM EDGE GUARD FOR BOUNDARY** και **MINIMUM GENERAL GUARD FOR BOUNDARY**.

3.2.2 Προβλήματα μεγιστοποίησης

Φύλαξη μέγιστου μήκους στην περίμετρο

Παραλλαγές των παραπάνω προβλημάτων ελαχιστοποίησης είναι τα παρακάτω προβλήματα μεγιστοποίησης, που έχουν στόχο την φύλαξη της περιμέτρου του πολυγώνου:

Ορισμός 3.2.4 Έστω P ένα απλό πολύγωνο και k ένας μη αρνητικός ακέραιος. Το πρόβλημα **MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD** ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων κορυφών έτσι ώστε το ευκλείδειο μήκος της περιμέτρου του P που καλύπτουν οι φύλακες να είναι μέγιστο.

Ορισμός 3.2.5 Έστω P ένα απλό πολύγωνο και k ένας μη αρνητικός ακέραιος. Το πρόβλημα **MAXIMUM LENGTH EDGE GUARD** ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων ακμών έτσι ώστε το ευκλείδειο μήκος της περιμέτρου του P που καλύπτουν οι φύλακες να είναι μέγιστο.

Ορισμός 3.2.6 Έστω P ένα απλό πολύγωνο και k ένας μη αρνητικός ακέραιος. Το πρόβλημα **MAXIMUM LENGTH GENERAL GUARD** ζητά την τοποθέτηση k γενικών φυλάκων έτσι ώστε το ευκλείδειο μήκος της περιμέτρου του P που καλύπτουν οι φύλακες να είναι μέγιστο.

Φύλαξη μέγιστου εμβαδού στο εσωτερικό

Στην περίπτωση που στόχος είναι η φύλαξη του εσωτερικού του πολυγώνου:

Ορισμός 3.2.7 Έστω P ένα απλό πολύγωνο και k ένας μη αρνητικός ακέραιος. Το πρόβλημα **MAXIMUM AREA VERTEX GUARD** ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων κορυφών έτσι ώστε το εμβαδόν του εσωτερικού του P που καλύπτουν οι φύλακες να είναι μέγιστο.

Ορισμός 3.2.8 Έστω P ένα απλό πολύγωνο και k ένας μη αρνητικός ακέραιος. Το πρόβλημα **MAXIMUM AREA EDGE GUARD** ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων ακμών έτσι ώστε το εμβαδόν του εσωτερικού του P που καλύπτουν οι φύλακες να είναι μέγιστο.

Ορισμός 3.2.9 Έστω P ένα απλό πολύγωνο και k ένας μη αρνητικός ακέραιος. Το πρόβλημα **MAXIMUM AREA GENERAL GUARD** ζητά την τοποθέτηση k γενικών φυλάκων έτσι ώστε το εμβαδόν του εσωτερικού του P που καλύπτουν οι φύλακες να είναι μέγιστο.

Φύλαξη μέγιστης αξίας στην περίμετρο

Μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή του προβλήματος φύλαξης της αίθουσας τέχνης, είναι να δίνεται μαζί με το πολύγωνο και ένα σύνολο ευθυγράμμων τμημάτων που ανήκουν στην περίμετρό του. Τα ευθύγραμμα τμήματα αναπαριστούν πίνακες ζωγραφικής και κάθε πίνακας έχει μια δεδομένη χρηματική αξία. Με δεδομένο ένα αριθμό φυλάκων, θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την αξία που καλύπτουν οι φύλακες:

Ορισμός 3.2.10 Έστω P ένα απλό πολύγωνο, Q ένα σύνολο ξένων μεταξύ τους ευθυγράμμων τμημάτων της περιμέτρου του P και k ένας μη αρνητικός ακέραιος. Για κάθε $s \in Q$ είναι ορισμένο και ένα $W(s)$ που δίνει το βάρος (ή την αξία) του τμήματος s . Το πρόβλημα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων κορυφών έτσι ώστε το συνολικό βάρος των τμημάτων του συνόλου Q που καλύπτουν να είναι μέγιστο.

Ορισμός 3.2.11 Αντίστοιχα με τον ορισμό 3.2.10, το πρόβλημα MAXIMUM VALUE EDGE GUARD ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων ακμών έτσι ώστε το συνολικό βάρος των τμημάτων του συνόλου Q που καλύπτουν να είναι μέγιστο.

Ορισμός 3.2.12 Αντίστοιχα με τον ορισμό 3.2.10, το πρόβλημα MAXIMUM VALUE GENERAL GUARD ζητά την τοποθέτηση k γενικών φυλάκων έτσι ώστε το συνολικό βάρος των τμημάτων του συνόλου Q που καλύπτουν να είναι μέγιστο.

Μια περισσότερο ρεαλιστική παραλλαγή προκύπτει όταν η απαίτηση είναι απλά οι πίνακες να επιβλέπονται και όχι να καλύπτονται εξ ολοκλήρου:

Ορισμός 3.2.13 Αντίστοιχα με τον ορισμό 3.2.10, το πρόβλημα MAXIMUM VALUE WATCHING VERTEX GUARD (MAXIMUM VALUE WATCHING EDGE GUARD, MAXIMUM VALUE WATCHING GENERAL GUARD) ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων κορυφών (φυλάκων ακμών, γενικών φυλάκων) έτσι ώστε το συνολικό βάρος των τμημάτων του συνόλου Q που επιβλέπουν να είναι μέγιστο.

Μια εξίσου ενδιαφέρουσα και ρεαλιστική παραλλαγή προκύπτει όταν οι πίνακες ζωγραφικής δεν είναι ήδη τοποθετημένοι πάνω στην περίμετρο του πολυγώνου και πρέπει να τοποθετηθούν παράλληλα με τους φύλακες έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η καλυπτόμενη αξία:

Ορισμός 3.2.14 Έστω P ένα απλό πολύγωνο, $Q = \{(l_i, w_i)\}$ ένα σύνολο από ζευγάρια μηκών ευθυγράμμων τμημάτων μαζί με τις αξίες τους, και δύο μη αρνητικοί ακέραιοι k και B . Το πρόβλημα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD WITH PAINTING PLACEMENT ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων κορυφών, μαζί με την τοποθέτηση τμημάτων από το σύνολο Q στην περίμετρο του P , έτσι ώστε το συνολικό βάρος των καλυπτόμενων τμημάτων να είναι μέγιστο.

Ορισμός 3.2.15 Αντίστοιχα με τον ορισμό 3.2.14, το πρόβλημα MAXIMUM VALUE EDGE GUARD WITH PAINTING PLACEMENT ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων ακμών μαζί με την τοποθέτηση των τμημάτων στην περίμετρο του πολυγώνου, έτσι ώστε το συνολικό βάρος των καλυπτόμενων τμημάτων να είναι μέγιστο.

Φύλαξη με όριο κόστους

Στις περιπτώσεις αυτές έχουμε γενικεύσεις των προβλημάτων που προηγήθηκαν, όπου παράλληλα με τη μεγιστοποίηση της απαίτησης της κάλυψης, κάθε πιθανή θέση φύλαξης έχει ένα κόστος. Το συνολικό κόστος των φυλάκων που θα τοποθετηθούν, δεν θα πρέπει να ξεπερνά ένα δεδομένο προϋπολογισμό:

Ορισμός 3.2.16 Το πρόβλημα BUDGETED MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD είναι γενίκευση του MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD όπου κάθε τοποθέτηση φύλακα κορυφής έχει ένα κόστος και είναι δεδομένος ένας προϋπολογισμός $BUDGET$. Το πρόβλημα ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων κορυφών που το συνολικό κόστος τους δεν ξεπερνά το $BUDGET$, έτσι ώστε το Ευκλείδιο μήκος της περιμέτρου του P που καλύπτουν οι φύλακες να είναι μέγιστο.

Ορισμός 3.2.17 Αντίστοιχα με τον ορισμό 3.2.16, το πρόβλημα BUDGETED MAXIMUM LENGTH EDGE GUARD ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων ακμών που το συνολικό κόστος τους δεν ξεπερνά το $BUDGET$, έτσι ώστε το Ευκλείδιο μήκος της περιμέτρου του P που καλύπτουν οι φύλακες να είναι μέγιστο.

Ορισμός 3.2.18 Το πρόβλημα BUDGETED MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD είναι γενίκευση του MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD όπου κάθε τοποθέτηση φύλακα κορυφής έχει ένα κόστος και είναι δεδομένος ένας προϋπολογισμός $BUDGET$. Το πρόβλημα ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων κορυφών που το συνολικό κόστος τους δεν ξεπερνά το $BUDGET$, έτσι ώστε το συνολικό βάρος των τμημάτων του συνόλου Q (ορισμός 3.2.10) που καλύπτουν να είναι μέγιστο.

Ορισμός 3.2.19 Αντίστοιχα με τον ορισμό 3.2.18, το πρόβλημα BUDGETED MAXIMUM VALUE EDGE GUARD ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων ακμών που το συνολικό κόστος τους δεν ξεπερνά το $BUDGET$, έτσι ώστε το συνολικό βάρος των τμημάτων του συνόλου Q (ορισμός 3.2.10) που καλύπτουν να είναι μέγιστο.

Και πάλι έχουμε μια πιο ρεαλιστική παραλλαγή όταν η απαίτηση είναι απλά οι πίνακες να επιβλέπονται και όχι να καλύπτονται εξ' ολοκλήρου:

Ορισμός 3.2.20 Αντίστοιχα με τους ορισμούς 3.2.18 και 3.2.19, το πρόβλημα BUDGETED MAXIMUM VALUE WATCHING VERTEX GUARD (BUDGETED MAXIMUM VALUE WATCHING EDGE GUARD) ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων ακμών που το συνολικό κόστος τους δεν ξεπερνά το $BUDGET$, έτσι ώστε το συνολικό βάρος των τμημάτων του συνόλου Q (ορισμός 3.2.10) που επιβλέπουν να είναι μέγιστο.

Ορισμός 3.2.21 Το πρόβλημα BUDGETED MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD WITH PAINTING PLACEMENT είναι γενίκευση του προβλήματος MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD WITH PAINTING PLACEMENT όπου κάθε τοποθέτηση φύλακα κορυφής έχει ένα κόστος και είναι δεδομένος ένας προϋπολογισμός $BUDGET$. Το πρόβλημα ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων κορυφών που το συνολικό κόστος τους δεν ξεπερνά το $BUDGET$, μαζί με την τοποθέτηση τμημάτων από το σύνολο Q (ορισμός 3.2.14) στην περίμετρο του P , έτσι ώστε το συνολικό βάρος των καλυπτόμενων τμημάτων να είναι μέγιστο.

Ορισμός 3.2.22 Αντίστοιχα με τον ορισμό 3.2.21, το πρόβλημα BUDGETED MAXIMUM VALUE EDGE GUARD WITH PAINTING PLACEMENT ζητά την τοποθέτηση k φυλάκων ακμών που το συνολικό κόστος τους δεν ξεπερνά το BUDGET, μαζί με την τοποθέτηση τμημάτων από το σύνολο Q (ορισμός 3.2.14) στην περίμετρο του P , έτσι ώστε το συνολικό βάρος των καλυπτόμενων τμημάτων να είναι μέγιστο.

3.3 Ένας άπληστος (greedy) αλγόριθμος φύλαξης

Σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης της φύλαξης πολυγώνου έχουμε κάποιες πιθανές θέσεις για να τοποθετηθεί ένα δεδομένος αριθμός από k φυλάκες και μια απαίτηση για μεγιστοποίηση, της κάλυψης ή της επίβλεψης, μιας συνάρτησης F (μήκος, εμβαδόν, αξία ή βάρος, κτλ) που επιδρά σε κάποια σύνολα σημείων μέσα στο πολύγωνο. Πρόκειται να περιγράψουμε ένα άπληστο («greedy») αλγόριθμο φύλαξης που στις περιπτώσεις των φυλάκων κορυφών και φυλάκων ακμών υπολογίζει, σε πολυωνυμικό χρόνο, προσεγγιστικές λύσεις με σταθερό λόγο απόδοσης.

```

construct  $\mathcal{V}$ 
foreach possible guard placement  $p$  do
    calculate  $\mathcal{V}(p)$ 
endfch
 $SOL \leftarrow \emptyset$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
    place a guard at  $p$  where  $F(SOL \cup \mathcal{V}(p))$  is maximized
     $SOL \leftarrow SOL \cup \mathcal{V}(p)$ 
endfor
return  $F(SOL)$ 

```

Αλγόριθμος 3.1: Ένας γενικός αλγόριθμος k βημάτων

Το πρώτο βήμα του αλγορίθμου 3.1 είναι να χρησιμοποιήσει τις μεθόδους του κεφαλαίου 2 για να δημιουργήσει μια υποδιαίρεση ορατότητας \mathcal{V} της περιοχής που πρέπει να φυλαχτεί. Θυμίζουμε ότι κάθε κομμάτι της υποδιαίρεσης ορατότητας, έχει την ιδιότητα ότι δεν μπορεί να καλύπτεται μόνο μερικώς από την θέση φύλαξης. Μετά, για κάθε υποψήφια θέση p που μπορεί να τοποθετηθεί φύλακας, ο αλγόριθμος υπολογίζει τα κομμάτια της υποδιαίρεσης ορατότητας $\mathcal{V}(p)$ που ικανοποιούν την απαίτηση φύλαξης και έτσι τελειώνει το βήμα προ-επεξεργασίας (preprocessing) του αλγορίθμου.

Στη συνέχεια ο αλγόριθμος προχωρά σε k βήματα. Συμβολίζουμε με S_i το σύνολο των κομματιών της υποδιαίρεσης ορατότητας που επιλέγει ο αλγόριθμος στο βήμα i , και με SOL το σύνολο των κομματιών της \mathcal{V} που θα τελικά θα έχει επιλέξει, συνεπώς αρχικά $SOL = \emptyset$ ενώ στο τέλος: $SOL = \cup_{i=1}^k S_i$. Σε κάθε βήμα, ο αλγόριθμος, τοποθετεί ένα φύλακα στη θέση p που μεγιστοποιεί την τιμή $F(SOL \cup \mathcal{V}(p))$ και μετά εμπλουτίζει τη λύση: $SOL \leftarrow SOL \cup \mathcal{V}(p)$. Δηλαδή σε κάθε βήμα λαμβάνονται υπόψη μόνο τα κομμάτια της \mathcal{V} που δεν καλύφθηκαν σε προηγούμενα βήματα. Τέλος, ο αλγόριθμος επιστρέφει την τιμή $F(\cup_{i=1}^k S_i) = F(SOL)$.

Αν θεωρήσουμε μια εκτέλεση του βέλτιστου αλγορίθμου, τότε μετά από k επιλογές συνόλων S'_i έχουμε για τη βέλτιστη λύση ότι $F(OPT) = F(S'_1) + \dots + F(S'_k)$.

Ο αλγόριθμος 3.1 επιλέγει σύνολα με τέτοιο τρόπο ώστε :

$$F(S_{i-1}) \geq F(S_i), \quad i = 2, \dots, k \quad (3.3.1)$$

Έστω ότι στο βήμα l ($1 < l \leq k$) ο αλγόριθμος επιλέγει ένα σύνολο S_l που δεν υπάρχει στις επιλογές συνόλων της βέλτιστης λύσης, δηλαδή στο βήμα αυτό ο βέλτιστος αλγόριθμος επιλέγει ένα σύνολο S'_l για το οποίο προφανώς ισχύει ότι $F(S_l) \geq F(S'_l)$ (αλλιώς ο αλγόριθμος θα επέλεγε το σύνολο S'_l). Το ίδιο ισχύει και για κάθε επόμενο βήμα, ότι δηλαδή $F(S_i) \geq F(S'_i)$, $i = l + 1, \dots, k$. Από τη σχέση 3.3.1 έχουμε :

$$F(S_l) \geq F(S'_i), \quad i = l, l + 1, \dots, k \quad (3.3.2)$$

Συνεπώς έχουμε :

$$\begin{aligned} F(OPT) &= F(S_1) + F(S_2) + \dots + F(S'_l) + F(S'_{l+1}) + \dots + F(S'_k) \\ &\leq F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) + kF(S_l) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Όμως ο αλγόριθμος σε κάθε βήμα επιλέγει κομμάτια της υποδιαίρεσης που δεν έχουν καλυφθεί σε προηγούμενα βήματα :

$$F(S_l) = F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) - F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) \quad (3.3.4)$$

Από τις σχέσεις 3.3.3 και 3.3.4 έχουμε ότι :

$$F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) - F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) \geq \frac{1}{k} (F(OPT) - F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right)) \quad (3.3.5)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το ακόλουθο :

Λήμμα 3.3.1 Μετά από l βήματα του αλγορίθμου ισχύει ότι :

$$F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^l\right) F(OPT), \quad l = 1, 2, \dots, k$$

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο βήμα l . Είναι φανερό ότι από τα σύνολα S'_i που επιλέγει ο βέλτιστος αλγόριθμος, υπάρχει τουλάχιστο ένα για το οποίο ισχύει ότι $F(S'_j) \geq \frac{1}{k} F(OPT)$, γιατί αλλιώς οι επιλογές του βέλτιστου αλγορίθμου δεν θα άθροιζαν στο $F(OPT)$ (αρχή του περιστερώνα). Η μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης είναι η $F(S_1)$, συνεπώς :

$$F(S_1) \geq \frac{1}{k} F(OPT)$$

Η επαγωγική υπόθεση λοιπόν είναι :

$$F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) \geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{l-1}\right) F(OPT) \quad (3.3.6)$$

Για το επαγωγικό βήμα:

$$\begin{aligned} F(\bigcup_{i=1}^l S_i) &= F(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i) + F(\bigcup_{i=1}^l S_i) - F(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i) && \xrightarrow{3.3.5} \\ &\geq \frac{1}{k}F(OPT) + (1 - \frac{1}{k})F(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i) && \xrightarrow{3.3.6} \\ &\geq (1 - (1 - \frac{1}{k})^l)F(OPT) \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.3.1 *Ο αλγόριθμος 3.1 υπολογίζει σε πολυωνυμικό χρόνο μια προσεγγιστική λύση του προβλήματος κάλυψης, με λόγο απόδοσης 0.632.*

Απόδειξη: Από το λήμμα 3.3.1 για $l = k$ έχουμε:

$$F(\bigcup_{i=1}^k S_i) \geq (1 - (1 - \frac{1}{k})^k)F(OPT)$$

Όσο το k μεγαλώνει τόσο ο όρος $1 - (1 - \frac{1}{k})^k$ φθίνει και τελικά:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - (1 - \frac{1}{k})^k) = 1 - \frac{1}{e} \cong 0.632$$

Άρα:

$$F(\bigcup_{i=1}^k S_i) \geq (1 - \frac{1}{e})F(OPT) \iff F(SOL) \geq 0.632 F(OPT)$$

□

Επισημαίνουμε στο τέλος ότι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου 3.1 εξαρτάται άμεσα από την πολυπλοκότητα του υπολογισμού της τιμής της συνάρτησης F . Ο υπολογισμός της τιμής της F μπορεί να είναι ένα απλό πρόβλημα, όπως π. χ. ο υπολογισμός του μήκους κάποιων ευθυγράμμων τμημάτων, αλλά υπάρχουν περιπτώσεις, όπως θα δούμε στην παράγραφο 3.4.1 και θα αναλύσουμε στην παράγραφο 3.4, που ο υπολογισμός της τιμής της F είναι από μόνο του ένα NP-hard πρόβλημα. Με την παραδοχή λοιπόν ότι η πολυπλοκότητα του υπολογισμού της τιμής της F είναι πολυωνυμική έχουμε τη χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου 3.1 να εξαρτάται μόνο από την πολυπλοκότητα της διαμέρισης ορατότητας, να είναι δηλαδή $O(n^4)$ στη χειρότερη περίπτωση για οποιοδήποτε είδος φυλάκων (κορυφές ή ακμές).

3.3.1 Φύλαξη μέγιστου μήκους

Στο πρόβλημα MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD το ζητούμενο είναι να καλυφθεί όσο το δυνατόν περισσότερο μήκος από την περίμετρο ενός πολυγώνου P με τη χρήση το πολύ k φυλάκων. Θα αποδείξουμε ότι το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης είναι NP-hard και στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις διάφορες περιπτώσεις ανάλογα με τις επιτρεπτές θέσεις των φυλάκων. Σε ότι ακολουθεί με $L(x)$ συμβολίζουμε το Ευκλείδειο μήκος του x .

Ορισμός 3.3.1 *Δίνεται ένα πολύγωνο P και ένας μη αρνητικός ακέραιος k . Το πρόβλημα απόφασης MINIMUM VERTEX GUARD FOR BOUNDARY ρωτάει: μπορούν να τοποθετηθούν k φύλακες κορυφές στο P , έτσι ώστε το μήκος της περιμέτρου που καλύπτεται από τους φύλακες να είναι $L(\partial P)$;*

Είναι γνωστό ([41]) ότι το πρόβλημα απόφασης MINIMUM VERTEX GUARD FOR BOUNDARY είναι NP-hard.

Ορισμός 3.3.2 Δίνεται ένα πολύγωνο P και δύο μη αρνητικοί ακέραιοι k και B . Το πρόβλημα απόφασης MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD ρωτάει: μπορούν να τοποθετηθούν k φύλακες κορυφές στο P έτσι ώστε αν $L(\partial P)(k)$ είναι το Ευκλείδειο μήκος της περιμέτρου που καλύπτεται από τους φύλακες, να ισχύει $L(\partial P)(k) \geq B$;

```

construct  $\mathcal{V}(\partial P)$ 
foreach vertex  $v$  of  $P$  do
    calculate  $\mathcal{V}(\partial P)(v)$                                 /* use algorithm 2.1 */
endfch
 $SOL \leftarrow \emptyset$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
    place a guard at  $v$  where  $L(SOL \cup \mathcal{V}(\partial P)(v))$  is maximized
     $SOL \leftarrow SOL \cup \mathcal{V}(\partial P)(v)$ 
endfor
return  $L(SOL)$ 

```

Αλγόριθμος 3.2: Κάλυψη μέγιστου μήκους με k φύλακες κορυφές.

Σε ένα στιγμιότυπο του MINIMUM VERTEX GUARD FOR BOUNDARY έχουμε ένα πολύγωνο P και ένα ακέραιο $k > 0$. Το πρόβλημα είναι να αποφασιστεί αν το πολύ k φύλακες κορυφές καλύπτουν όλη την περίμετρο του P . Η κατασκευή ενός στιγμιότυπου του προβλήματος απόφασης MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD γίνεται εύκολα αν ορίσουμε $B = L(\partial P)$ και λάβουμε το ίδιο πολύγωνο και τον ίδιο k : Μπορούν να τοποθετηθούν k φύλακες κορυφές στο P έτσι ώστε $L(\partial P)(k) \geq B$; Αν η απάντηση στο δεύτερο πρόβλημα είναι *ναι* (όχι), τότε και η απάντηση στο πρώτο πρόβλημα είναι *ναι* (όχι). Συνεπώς ισχύει η επόμενη:

Πρόταση 3.3.1 Το πρόβλημα MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD είναι NP-hard.

Ο αλγόριθμος 3.1 με τις κατάλληλες τροποποιήσεις διαμορφώνεται όπως ο αλγόριθμος 3.2. Σκοπός του προβλήματος είναι η κάλυψη της περιμέτρου, συνεπώς αρχικά υπολογίζεται η διαμέριση ορατότητας $\mathcal{V}(\partial P)$ της περιμέτρου και στη συνέχεια, με τη χρήση των μεθόδων του κεφαλαίου 2 και ιδιαίτερα του αλγορίθμου 2.1, υπολογίζεται το σύνολο των τμημάτων $\mathcal{V}(\partial P)$ που καλύπτονται την εκάστοτε κορυφή του πολυγώνου. Σε κάθε ένα από τα k βήματα, τοποθετείται ένας φύλακας στην κορυφή που καλύπτει τα τμήματα της $\mathcal{V}(\partial P)(v)$ που δεν έχουν καλυφθεί σε προηγούμενα βήματα και έχουν συνολικά το μεγαλύτερο μήκος.

Η ανάλυση της παραγράφου 3.3 ισχύει αυτούσια αν θέσουμε όπου F τη συνάρτηση του Ευκλείδειου μήκους L . Συνεπώς ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.3.2 Ο αλγόριθμος 3.2 υπολογίζει μια προσεγγιστική λύση για το πρόβλημα MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD με λόγο απόδοσης 0.632.

Στην περίπτωση των φυλάκων ακμών, ανάγουμε το πρόβλημα απόφασης MINIMUM EDGE GUARD FOR BOUNDARY στο πρόβλημα απόφασης MAXIMUM LENGTH EDGE GUARD αντίστοιχα με την πρόταση 3.3.1. Ο αλγόριθμος 3.1 με τις κατάλληλες τροποποιήσεις διαμορφώνεται όπως ο αλγόριθμος 3.3. Όμοια με την περίπτωση των φυλάκων κορυφών έχουμε την ίδια ανάλυση με την παράγραφο 3.3 συνεπώς ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.3.3 Ο αλγόριθμος 3.3 υπολογίζει μια προσεγγιστική λύση για το πρόβλημα MAXIMUM LENGTH EDGE GUARD με λόγο απόδοσης 0.632.

```

construct  $\mathcal{V}(\partial P)$ 
foreach edge  $e$  of  $P$  do
    calculate  $\mathcal{V}(\partial P)(e)$  /* use algorithm 2.2 */
endfch
 $SOL \leftarrow \emptyset$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
    place a guard at  $e$  where  $L(SOL \cup \mathcal{V}(\partial P)(e))$  is maximized
     $SOL \leftarrow SOL \cup \mathcal{V}(\partial P)(e)$ 
endfor
return  $L(SOL)$ 

```

Αλγόριθμος 3.3: Κάλυψη μέγιστου μήκους με k φύλακες πλευρές.

3.3.2 Φύλαξη μέγιστου εμβαδού

Στο πρόβλημα MAXIMUM AREA VERTEX GUARD το ζητούμενο είναι να καλυφθεί όσο το δυνατόν περισσότερο εμβαδόν από το εσωτερικό ενός πολυγώνου P με τη χρήση το πολύ k φυλάκων κορυφών. Θα αποδείξουμε ότι το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης είναι NP-hard και στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις διάφορες περιπτώσεις, ανάλογα με τις επιτρεπές θέσεις των φυλάκων. Σε ότι ακολουθεί με $A(x)$ συμβολίζουμε το εμβαδόν του πολυγώνου x .

```

construct  $\mathcal{V}(P)$ 
foreach vertex  $v$  of  $P$  do
    calculate  $\mathcal{V}(P)(v)$  /* use algorithm 2.3 */
endfch
 $SOL \leftarrow \emptyset$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
    place a guard at  $v$  where  $A(SOL \cup \mathcal{V}(P)(v))$  is maximized
     $SOL \leftarrow SOL \cup \mathcal{V}(P)(v)$ 
endfor
return  $A(SOL)$ 

```

Αλγόριθμος 3.4: Κάλυψη μέγιστου εμβαδού με k φύλακες κορυφές.

Ορισμός 3.3.3 Δίνεται ένα πολύγωνο P και ένας μη αρνητικός ακέραιος k . Το πρόβλημα απόφασης MINIMUM VERTEX GUARD ρωτάει: μπορούν να τοποθετηθούν k φύλακες κορυφές στο P , έτσι ώστε το εμβαδόν, του εσωτερικού του P , που καλύπτεται από τους φύλακες να είναι $A(P)$;

Είναι γνωστό ([41]) ότι το πρόβλημα απόφασης MINIMUM VERTEX GUARD είναι NP-hard.

Ορισμός 3.3.4 Δίνεται ένα πολύγωνο και δύο μη αρνητικοί ακέραιοι k και B . Το πρόβλημα απόφασης MAXIMUM AREA VERTEX GUARD ρωτάει: μπορούν να τοποθετηθούν k φύλακες κορυφές στο P έτσι ώστε αν $A(P)(k)$ είναι το εμβαδόν του εσωτερικού του P που καλύπτεται από τους φύλακες, να ισχύει $A(P)(k) \geq B$;

Όμοια με την πρόταση 3.3.1 αρκεί να θέσουμε $B = A(P)$ και συμπεραίνουμε ότι ισχύει η επόμενη:

Πρόταση 3.3.2 Το πρόβλημα MAXIMUM AREA VERTEX GUARD είναι NP-hard.

```

construct  $\mathcal{V}(P)$ 
foreach edge  $e$  of  $P$  do
    calculate  $\mathcal{V}(P)(e)$                                 /* use algorithm 2.4 */
endfch
 $SOL \leftarrow \emptyset$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
    place a guard at  $e$  where  $A(SOL \cup \mathcal{V}(P)(e))$  is maximized
     $SOL \leftarrow SOL \cup \mathcal{V}(P)(e)$ 
endfor
return  $A(SOL)$ 

```

Αλγόριθμος 3.5: Κάλυψη μέγιστου εμβαδού με k φύλακες πλευρές.

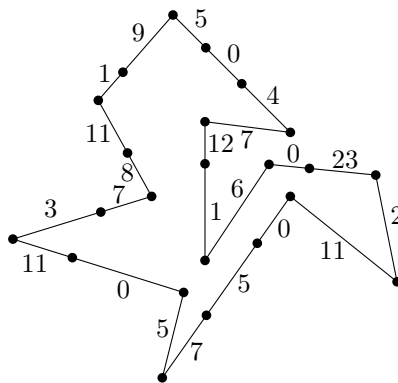
Μπορούμε να τροποποιήσουμε εύκολα τον αλγόριθμο 3.1, όπως κάναμε στην περίπτωση του αλγορίθμου 3.2. Οι αλλαγές που χρειάζονται στον αλγόριθμο 3.2 είναι οι ακόλουθες: υπολογίζεται η διαμέριση ορατότητας $\mathcal{V}(P)$ του εσωτερικού του P , στη συνέχεια υπολογίζεται το σύνολο των περιοχών της $\mathcal{V}(P)$ που καλύπτονται από την εκάστοτε κορυφή και τέλος, τοποθετείται φύλακας στην κορυφή που καλύπτει τις περιοχές της $\mathcal{V}(P)(v)$ που δεν έχουν καλυφθεί σε προηγούμενα βήματα και έχουν συνολικά το μεγαλύτερο εμβαδόν. Για την περίπτωση των φυλάκων ακμών, χρησιμοποιούμε το πρόβλημα απόφασης MINIMUM EDGE GUARD για την αναγωγή και με την ίδια ακριβώς ανάλυση της παραγράφου 3.3, θέτοντας όπου F τη συνάρτηση που υπολογίζει το εμβαδόν A , καταλήγουμε στο ακόλουθο:

Θεώρημα 3.3.4 Οι αλγόριθμοι 3.4 και 3.5 υπολογίζουν σε πολυωνυμικό χρόνο μια προσεγγιστική λύση για τα προβλήματα MAXIMUM AREA VERTEX GUARD και MAXIMUM AREA EDGE GUARD με λόγο απόδοσης 0.632.

3.3.3 Φύλαξη μέγιστης αξίας

Μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή του προβλήματος φύλαξης της αίθουσας τέχνης είναι να δίνεται μαζί με το πολύγωνο και ένα σύνολο ευθυγράμμων τμημάτων που ανήκουν στην περίμετρό του (σχήμα 3.2). Τα ευθύγραμμα τμήματα αναπαριστούν πίνακες ζωγραφικής και κάθε πίνακας έχει μια δεδομένη χρηματική αξία. Με δεδομένο ένα αριθμό φυλάκων, θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την αξία που καλύπτουν οι φύλακες.

Πιο τυπικά, έχουμε ένα απλό πολύγωνο P , ένα σύνολο Q ξένων μεταξύ τους ευθυγράμμων τμημάτων πάνω στην περίμετρο του P και ένα μη αρνητικό ακέραιο k . Για κάθε



Σχήμα 3.2: Ένα πολύγωνο με βάρη

$s \in Q$ είναι ορισμένο και ένα $W(s)$ που δίνει το βάρος (ή την αξία) του τμήματος s . Στο πρόβλημα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD το ζητούμενο είναι να καλυφθεί όσο το δυνατόν βάρος από τα τμήματα της περιμέτρου, με τη χρήση το πολύ k φυλάκων. Θα αποδείξουμε ότι το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης είναι NP-hard και στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις διάφορες περιπτώσεις ανάλογα με τις επιτρεπτές θέσεις των φυλάκων. Σε ότι ακολουθεί με $W(x)$ συμβολίζουμε το βάρος του τμήματος x . Υπενθυμίζουμε ότι το πρόβλημα απόφασης MINIMUM VERTEX GUARD FOR BOUNDARY (ορισμός 3.2.1) είναι NP-hard ([41]).

```

foreach vertex  $v$  of  $P$  do
    calculate  $Q(v)$ 
endfch
 $SOL \leftarrow \emptyset$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
    place a guard at  $v$  where  $W(SOL \cup Q(v))$  is maximized
     $SOL \leftarrow SOL \cup Q(v)$ 
endfor
return  $W(SOL)$ 

```

Αλγόριθμος 3.6: Κάλυψη μέγιστου βάρους με k φύλακες κορυφές.

Ορισμός 3.3.5 Δίνεται ένα πολύγωνο P , ένα σύνολο Q ξένων μεταξύ τους τμημάτων πάνω στην ∂P , μια συνάρτηση βάρους W ορισμένη για κάθε $s \in Q$ και δύο μη αρνητικοί ακέραιοι k και B . Το πρόβλημα απόφασης MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD ρωτάει: μπορούν να τοποθετηθούν k φύλακες κορυφές στο P έτσι ώστε αν $W(S)$ είναι το συνολικό βάρος των τμημάτων του συνόλου Q που καλύπτεται από τους φύλακες, να ισχύει $W(S) \geq B$;

Σε ένα στιγμιότυπο του MINIMUM VERTEX GUARD FOR BOUNDARY έχουμε ένα πολύγωνο P και ένα ακέραιο $k > 0$. Το πρόβλημα είναι να αποφασιστεί αν το πολύ k φύλακες κορυφές καλύπτουν όλη την περίμετρο του P . Για την αναγωγή στο πρόβλημα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD θα χρησιμοποιήσουμε τη διαμέριση ορατότητας $\mathcal{V}(\partial P)$: η περίμετρος χωρίζεται σε ξένα μεταξύ τους τμήματα, στο καθένα από τα οποία θέτουμε βάρος 1. Λαμβάνουμε λοιπόν το ίδιο πολύγωνο P , τον ίδιο k , σαν σύνολο τμημάτων στην περίμετρο

το $Q = \{s : s \in \mathcal{V}(\partial P)\}$ (ισχύει ότι $\forall s \in Q : W(s) = 1$), ορίζουμε $B = \sum_{s \in Q} W(s)$ και ρωτάμε: Μπορούν να τοποθετηθούν k φύλακες κορυφές στο P έτσι ώστε $W(S) \geq B$; Λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε τμήμα της $\mathcal{V}(\partial P)$ καλύπτεται από κάποια κορυφή του P , καταλήγουμε ότι αν η απάντηση στο δεύτερο πρόβλημα είναι *ναι (όχι)*, τότε και η απάντηση στο πρώτο πρόβλημα είναι *ναι (όχι)*. Συνεπώς ισχύει η επόμενη:

Πρόταση 3.3.3 *Το πρόβλημα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD είναι NP-hard.*

```

foreach edge  $e$  of  $P$  do
    calculate  $Q(e)$ 
endfch
 $SOL \leftarrow \emptyset$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
    place a guard at  $e$  where  $W(SOL \cup Q(e))$  is maximized
     $SOL \leftarrow SOL \cup Q(e)$ 
endfor
return  $W(SOL)$ 

```

Αλγόριθμος 3.7: Κάλυψη μέγιστου βάρους με k φύλακες κορυφές.

Ο αλγόριθμος 3.1 με τις κατάλληλες τροποποιήσεις διαμορφώνεται όπως ο αλγόριθμος 3.6. Στο βήμα προ-επεξεργασίας του αλγορίθμου, αντί της διαμέρισης ορατότητας κατασκευάζεται για κάθε κορυφή v , το σύνολο $Q(v)$ που περιέχει εκείνα τα στοιχεία του X που καλύπτονται από την κορυφή v . Παρατηρούμε ότι για να καλύπτεται ένα $s = \overline{ab} \in Q$ από τη v , αρκεί να ισχύει $\overline{va} \subset P$ και $\overline{vb} \subset P$. Για την περίπτωση των φυλάκων ακμών, χρησιμοποιούμε το πρόβλημα απόφασης MINIMUM EDGE GUARD FOR BOUNDARY για την αναγωγή και με την ίδια ακριβώς ανάλυση της παραγράφου 3.3, θέτοντας όπου F τη συνάρτηση του βάρους W , καταλήγουμε στο ακόλουθο:

Θεώρημα 3.3.5 *Οι αλγόριθμοι 3.6 και 3.7 υπολογίζουν σε πολυωνυμικό χρόνο μια προσεγγιστική λύση για τα προβλήματα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD και MAXIMUM VALUE EDGE GUARD με λόγο απόδοσης 0.632.*

Τα προβλήματα MAXIMUM VALUE WATCHING VERTEX GUARD και MAXIMUM VALUE WATCHING EDGE GUARD είναι ρεαλιστικότερες παραλλαγές των προβλημάτων μεγιστοποίησης της καλυπτόμενης αξίας, γιατί η απαίτηση είναι απλά τα τμήματα του συνόλου Q (οι πίνακες) να επιβλέπονται αντί να καλύπτονται εξ ολοκλήρου. Είναι φανερό ότι κάθε $s \in Q$ έχει κοινά σημεία με τουλάχιστο ένα διάστημα της $\mathcal{V}(\partial P)$, συνεπώς στο βήμα της εύρεσης των πινάκων που επιτηρούνται από μια κορυφή ή ακμή, αρκεί να εξετάσουμε αν κάποιο από τα διαστήματα της $\mathcal{V}(\partial P)$ που έχει κοινά σημεία με τον εκάστοτε πίνακα, επιτηρείται από την τρέχουσα κορυφή ή ακμή. Όμοια με προηγούμενα ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.3.6 *Για τα προβλήματα MAXIMUM VALUE WATCHING VERTEX GUARD και MAXIMUM VALUE WATCHING EDGE GUARD, μπορούν να υπολογιστούν σε πολυωνυμικό χρόνο προσεγγιστικές λύσεις με λόγο απόδοσης 0.632.*

3.4 Όταν πρέπει να γίνουν δύσκολες επιλογές

Ο αλγόριθμος 3.1 σε κάθε ένα από τα k βήματά του πρέπει να επιλέξει από τις υποψήφια θέσεις φύλαξης αυτή που μεγιστοποιεί την τιμή της συνάρτησης F . Η συνάρτηση επιδρά στα σύνολα σημείων που ικανοποιούν την απαίτηση της κάλυψης από την υποψήφια θέση φύλαξης. Όπως επισημάναμε και στην ανάλυση της παραγράφου 3.3, απαραίτητη προϋπόθεση για να έχουμε πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης, είναι σε κάθε βήμα να μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την τιμή της F . Αν αυτός ο υπολογισμός είναι από μόνο του ένα NP-hard πρόβλημα, τότε ο μόνος τρόπος για να διατηρήσουμε τον πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης είναι η ύπαρξη πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικού αλγόριθμου για τον υπολογισμό της τιμής της F .

Έστω λοιπόν ότι το πρόβλημα υπολογισμού της τιμής της F είναι NP-hard και ότι υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος με λόγο απόδοσης α . Θα αναλύσουμε αυτή την περίπτωση ανάλογα με την παράγραφο 3.3 λαμβάνοντας υπόψη ότι σε κάθε βήμα του αλγορίθμου δεν βρίσκουμε ακριβώς την μέγιστη τιμή της F αλλά μια προσέγγισή της με ένα παράγοντα α . Ο βέλτιστος αλγόριθμος φυσικά, σε κάθε βήμα, υπολογίζει το πραγματικό μέγιστο της F .

Μετά από την εκτέλεση του αλγορίθμου 3.1, για κάθε βήμα l που ο αλγόριθμος δεν επέλεξε κάποια σύνολα που ανήκουν στη βέλτιστη λύση, έχουμε ότι η διαφορά $F(OPT) - F(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i)$ καλύπτεται από τις k επιλογές συνόλων της βέλτιστης λύσης. Συνεπώς, για τουλάχιστο μια επιλογή συνόλων της βέλτιστης λύσης έχουμε ότι (αρχή του περιστερώνα):

$$F(S'_m) \geq \frac{F(OPT) - F(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i)}{k}, \quad m \geq l \quad (3.4.1)$$

Ο αλγόριθμος 3.1 επιλέγει με τέτοιο τρόπο σύνολα ώστε για κάθε βήμα i έχουμε ότι $F(S_{i-1}) \geq F(S_i)$, άρα $F(S_l) \geq F(S_m)$. Όμως η τιμή $F(S_m)$ είναι μια προσέγγιση του πραγματικού μέγιστου της συνάρτησης, αφού η F είναι NP-hard και α -προσεγγίσιμη:

$$F(S_l) \geq F(S_m) \geq \alpha F(S'_m) \quad (3.4.2)$$

Από τις σχέσεις 3.4.1 και 3.4.2 έχουμε:

$$F(S_l) \geq \frac{\alpha}{k} (F(OPT) - F(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i)) \quad (3.4.3)$$

Όμως ο αλγόριθμος σε κάθε βήμα επιλέγει κομμάτια της υποδιαίρεσης που δεν έχει καλύψει σε προηγούμενα βήματα:

$$F(S_l) = F(\bigcup_{i=1}^l S_i) - F(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i) \quad (3.4.4)$$

Από τις σχέσεις 3.4.3 και 3.4.4 έχουμε:

$$F(\bigcup_{i=1}^l S_i) - F(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i) \geq \frac{\alpha}{k} (F(OPT) - F(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i)) \quad (3.4.5)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το ακόλουθο:

Λήμμα 3.4.1 Μετά από l βήματα του αλγορίθμου ισχύει ότι:

$$F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) \geq \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)^l\right)F(OPT), \quad l = 1, 2, \dots, k$$

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο βήμα l . Στο πρώτο βήμα ο αλγόριθμος επιλέγει με τέτοιο τρόπο ώστε $F(S_1) \geq \alpha F(S'_1)$. Ο βέλτιστος αλγόριθμος καλύπτει ένα σύνολο για το οποίο $F(S'_1) \geq \frac{1}{k}F(OPT)$, συνεπώς:

$$F(S_1) \geq \frac{\alpha}{k}F(OPT)$$

Η επαγωγική υπόθεση λοιπόν είναι:

$$F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) \geq \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)^{l-1}\right)F(OPT) \quad (3.4.6)$$

Για το επαγωγικό βήμα:

$$\begin{aligned} F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) &= F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) + F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) - F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) && \xrightarrow{3.4.5} \\ &\geq \frac{\alpha}{k}F(OPT) + \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) && \xrightarrow{3.4.6} \\ &\geq \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)^l\right)F(OPT) \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.4.1 Ο αλγόριθμος 3.1, στην περίπτωση που η F είναι NP-hard και α -προσεγγίσιμη, υπολογίζει σε πολυωνυμικό χρόνο μια προσεγγιστική λύση του προβλήματος κάλυψης, με λόγο απόδοσης $1 - \frac{1}{e^\alpha}$.

Απόδειξη: Από το λήμμα 3.4.1 για $l = k$ έχουμε:

$$F\left(\bigcup_{i=1}^k S_i\right) \geq \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)^k\right)F(OPT)$$

Όσο το k μεγαλώνει τόσο ο όρος $1 - \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)^k$ φθίνει και τελικά:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)^k\right) = 1 - \frac{1}{e^\alpha}$$

Άρα:

$$F\left(\bigcup_{i=1}^k S_i\right) \geq \left(1 - \frac{1}{e^\alpha}\right)F(OPT) \iff F(SOL) \geq \left(1 - \frac{1}{e^\alpha}\right)F(OPT)$$

□

3.4.1 Φύλαξη μέγιστης αξίας μαζί με τοποθέτηση

Θα εξετάσουμε μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή του προβλήματος φύλαξης μέγιστης αξίας όπου τα ευθύγραμμα τμήματα που αναπαριστούν πίνακες ζωγραφικής με δεδομένη χρηματική αξία, δεν είναι τοποθετημένα πάνω στην περίμετρο του πολυγώνου. Με δεδομένο ένα αριθμό φυλάκων, θέλουμε να τοποθετήσουμε παράλληλα με τους φύλακες και τους πίνακες ζωγραφικής, έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η αξία των πινάκων που καλύπτονται. Οι διαθέσιμοι φύλακες είναι φύλακες κορυφές ή φύλακες ακμές και η τοποθέτηση των πινάκων γίνεται πάνω στην περίμετρο του πολυγώνου.

Πιο τυπικά, έχουμε ένα απλό πολύγωνο P , ένα σύνολο Q από ζευγάρια l_i, w_i που αναπαριστούν μήκη ευθυγράμμων τμημάτων μαζί με την αξία τους και ένα μη αρνητικό ακέραιο k . Στο πρόβλημα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD WITH PAINTING PLACEMENT το ζητούμενο είναι να τοποθετηθούν τα ευθύγραμμα τμήματα στην περίμετρο του P και ταυτόχρονα να καλυφθεί όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αξία από τα τοποθετημένα τμήματα, με χρήση το πολύ k φυλάκων. Θα αποδείξουμε ότι το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης είναι NP-hard και στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις διάφορες περιπτώσεις ανάλογα με τις επιτρεπτές θέσεις των φυλάκων. Σε ότι ακολουθεί με $W(x)$ συμβολίζουμε την αξία του τμήματος x . Υπενθυμίζουμε ότι το πρόβλημα απόφασης MINIMUM VERTEX GUARD FOR BOUNDARY (ορισμός 3.2.1 είναι NP-hard ([41])).

Ορισμός 3.4.1 Δίνεται ένα πολύγωνο P , ένα σύνολο $Q = \{(l_i, w_i)\}$ από ζευγάρια μηκών ευθυγράμμων τμημάτων μαζί με τις αξίες τους, και δύο μη αρνητικοί ακέραιοι k και B . Το πρόβλημα απόφασης MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD WITH PAINTING PLACEMENT ρωτάει: μπορούν να τοποθετηθούν k φύλακες κορυφές στο P και τμήματα από το σύνολο Q πάνω στο ∂P έτσι ώστε αν $W(S)$ είναι η συνολική αξία των τμημάτων που τοποθετήθηκαν στην περίμετρο και καλύπτονται από τους φύλακες, να ισχύει $W(S) \geq B$;

Σε ένα στιγμιότυπο του MINIMUM VERTEX GUARD FOR BOUNDARY έχουμε ένα πολύγωνο P και ένα ακέραιο $k > 0$. Το πρόβλημα είναι να αποφασιστεί αν το πολύ k φύλακες κορυφές καλύπτουν όλη την περίμετρο του P . Για την αναγωγή στο πρόβλημα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD WITH PAINTING PLACEMENT θα χρησιμοποιήσουμε τη διαμέριση ορατότητας $\mathcal{V}(\partial P)$: η περίμετρος χωρίζεται σε ξένα μεταξύ τους τμήματα στα οποία θέτουμε σαν αξία το Ευκλείδειο μήκος τους. Λαμβάνουμε λοιπόν το ίδιο πολύγωνο P , τον ίδιο k , σαν σύνολο ζευγών (l_i, w_i) το $Q = \{(L(s), L(s)), s \in \mathcal{V}(\partial P)\}$, θέτουμε $B = \sum_{s \in Q} W(s)$ και ρωτάμε: Μπορούν να τοποθετηθούν k φύλακες κορυφές στο P έτσι ώστε $W(S) \geq B$; . Λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε τμήμα της $\mathcal{V}(\partial P)$ καλύπτεται από κάποια κορυφή του P , καταλήγουμε ότι αν η απάντηση στο δεύτερο πρόβλημα είναι ναι (όχι), τότε και η απάντηση στο πρώτο πρόβλημα είναι ναι (όχι). Συνεπώς ισχύει η επόμενη:

Πρόταση 3.4.1 Το πρόβλημα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD WITH PAINTING PLACEMENT είναι NP-hard.

Ο αλγόριθμος 3.8 ανήκει στην οικογένεια των άπληστων αλγορίθμων με δύσκολες επιλογές: σε κάθε βήμα για να επιλέξει την κατάλληλη θέση για τον φύλακα πρέπει να υπολογίσει τη λύση του προβλήματος MULTIPLE KNAPSACK. Το πρόβλημα αυτό είναι μια γενίκευση των προβλημάτων KNAPSACK και BIN PACKING και είναι NP-hard: δίνεται ένα σύνολο n αντικειμένων και m σάκοι έτσι ώστε κάθε αντικείμενο έχει μια δεδομένη

```

construct  $\mathcal{V}(\partial P)$ 
foreach vertex  $v$  of  $P$  do
    calculate  $\mathcal{V}(\partial P)(v)$ 
endfch
 $SOL \leftarrow \emptyset$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
    maximize  $W(\text{MULTKNAP}(\mathcal{V}(\partial P)(v) \setminus SOL \cap \mathcal{V}(\partial P)(v), Q))$ 
    place a guard at  $v$ 
    update  $SOL$ 
endfor
return  $W(SOL)$ 

```

Αλγόριθμος 3.8: Κάλυψη μέγιστης αξίας με φύλακες κορυφές και τοποθέτηση πινάκων.

αξία και μέγεθος ενώ κάθε σάκος έχει μια δεδομένη χωρητικότητα. Ο στόχος είναι να βρεθεί ένα υποσύνολο των αντικειμένων τέτοιο ώστε να έχει τη μέγιστη δυνατή αξία και ταυτόχρονα να χωρά και στους σάκους. Ο αλγόριθμος 3.8 χρησιμοποιεί σαν σάκους τα κομμάτια της υποδιαίρεσης της περιμέτρου, που καλύπτονται από την εκάστοτε κορυφή και σαν αντικείμενα τα στοιχεία του συνόλου Q . Η λύση του προβλήματος MULTIPLE KNAPSACK έχει σαν αποτέλεσμα μια τοποθέτηση των στοιχείων του Q με τη μέγιστη δυνατή αξία μέσα στα τμήματα της $\mathcal{V}(\partial P)(v)$ (τους σάκους) που καλύπτονται από την εκάστοτε κορυφή. Ο αλγόριθμος τοποθετεί φύλακα στην κορυφή που μεγιστοποιείται η συνολική αξία της τοποθέτησης.

```

construct  $\mathcal{V}(\partial P)$ 
foreach edge  $e$  of  $P$  do
    calculate  $\mathcal{V}(\partial P)(e)$ 
endfch
 $SOL \leftarrow \emptyset$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
    maximize  $W(\text{MULTKNAP}(\mathcal{V}(\partial P)(e) \setminus SOL \cap \mathcal{V}(\partial P)(e), Q))$ 
    place a guard at  $v$ 
    update  $SOL$ 
endfor
return  $W(SOL)$ 

```

Αλγόριθμος 3.9: Κάλυψη μέγιστης αξίας με φύλακες πλευρές και τοποθέτηση πινάκων.

Ευτυχώς (!), το πρόβλημα MULTIPLE KNAPSACK προσεγγίζεται με πολυωνυμικό αλγόριθμο με λόγο απόδοσης $\frac{1}{2}$ ([54]) και ακόμη καλύτερα, επιδέχεται ένα πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα (PTAS, [11]). Συνεπώς ο λόγος απόδοσης της προσέγγισης του προβλήματος MULTIPLE KNAPSACK τείνει συνεχώς προς το 1. Για την περίπτωση των φυλάκων ακμών χρησιμοποιούμε το πρόβλημα MINIMUM EDGE GUARD FOR BOUNDARY για την αναγωγή και με την ίδια ακριβώς ανάλυση της παραγράφου 3.4, θέτοντας όπου F τη συνάρτηση του βάρους W και λαμβάνοντας υπόψη ότι επειδή $\alpha \rightarrow 1$ (ύπαρξη PTAS), έχουμε ότι $1 - \frac{1}{e^\alpha} \rightarrow 0.632$, καταλήγουμε στο ακόλουθο:

Θεώρημα 3.4.2 Οι αλγόριθμοι 3.8 και 3.9 υπολογίζουν σε πολυωνυμικό χρόνο μια προ-

σεγγιστική λύση για τα προβλήματα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD WITH PAINTING PLACEMENT και MAXIMUM VALUE EDGE GUARD WITH PAINTING PLACEMENT με λόγο απόδοσης 0.632.

3.5 Φύλαξη με όριο κόστους

Θα εξετάσουμε το πως διαμορφώνεται η περίπτωση της παραγράφου 3.3 όταν υπάρχει κόστος που πρέπει να πληρωθεί όταν τοποθετείται φύλακας σε κάποια από τις πιθανές θέσεις και υπάρχει ένας προϋπολογισμός που δεν μπορούμε να υπερβούμε. Έχουμε λοιπόν πάλι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης της φύλαξης ενός πολυγώνου, πιθανές θέσεις που για να τοποθετηθεί φύλακας πρέπει να πληρωθεί συγκεκριμένο κόστος, μια απαίτηση για μεγιστοποίηση της κάλυψης ή της επίβλεψης μιας συνάρτησης F (μήκος, αξία, κτλ) που επιδρά σε κάποια σύνολα σημείων μέσα στο πολύγωνο και ένα προϋπολογισμό B για την πληρωμή του κόστους της τοποθέτησης των φυλάκων. Πρόκειται να περιγράψουμε ένα άπληστο αλγόριθμο φύλαξης που στις περιπτώσεις των φυλάκων κορυφών και φυλάκων ακμών, υπολογίζει σε πολυωνυμικό χρόνο, προσεγγιστικές λύσεις με σταθερό λόγο απόδοσης.

```

construct  $\mathcal{V}$ 
foreach possible guard placement  $p$  do
    calculate  $\mathcal{V}(p)$ 
endfch
 $SOL \leftarrow \emptyset$ 
 $G \leftarrow \emptyset$ 
 $C_{tot} \leftarrow \emptyset$ 
 $M \leftarrow$  all possible guard places
repeat
    select  $p$  where  $\frac{F(G \cup \mathcal{V}(p))}{c_p}$  is maximized
    if  $C_{tot} + c_p \leq B$  then
         $G \leftarrow G \cup \mathcal{V}(p)$ 
         $C_{tot} \leftarrow C_{tot} + c_p$ 
    endif
     $M \leftarrow M \setminus \{p\}$ 
until  $M = \emptyset$ 
select  $p'$  that maximizes  $F(\mathcal{V}(p'))$ 
if  $F(G) \geq F(\mathcal{V}(p'))$  then
     $SOL \leftarrow G$ 
else
     $SOL \leftarrow \mathcal{V}(p')$ 
endif
return  $F(SOL)$ 

```

Αλγόριθμος 3.10: Ένας γενικός αλγόριθμος k βημάτων με όριο κόστους B .

Το πρώτο βήμα του αλγορίθμου 3.10 είναι να χρησιμοποιήσει τις μεθόδους του κεφαλαίου 2 για να δημιουργήσει μια υποδιαίρεση ορατότητας \mathcal{V} της περιοχής που πρέπει να φυλαχτεί. Θυμίζουμε ότι κάθε κομμάτι της υποδιαίρεσης ορατότητας, έχει την ιδιότητα ότι

δεν μπορεί να καλύπτεται μόνο μερικώς από την θέση φύλαξης. Μετά, για κάθε υποψήφια θέση p που μπορεί να τοποθετηθεί φύλακας, ο αλγόριθμος υπολογίζει τα κομμάτια της υποδιαίρεσης ορατότητας $\mathcal{V}(p)$ που ικανοποιούν την απαίτηση φύλαξης.

Στη συνέχεια ο αλγόριθμος προχωρά σε k βήματα. Συμβολίζουμε με S_i το σύνολο των κομματιών της υποδιαίρεσης ορατότητας που επιλέγει ο αλγόριθμος στο βήμα i , και με SOL το σύνολο των κομματιών της \mathcal{V} που θα τελικά θα έχει επιλέξει, συνεπώς αρχικά $SOL = \emptyset$ ενώ στο τέλος: $SOL = \cup_{i=1}^k S_i$. Σε κάθε βήμα, ο αλγόριθμος, ψάχνει να βρει τη θέση φύλαξης p που μεγιστοποιεί την τιμή $\frac{F(G \cup \mathcal{V}(p))}{c_p}$, το λόγο δηλαδή της τιμής της συνάρτησης προς το κόστος της θέσης. Στη θέση αυτή θα τοποθετήσει ένα φύλακα μόνο αν το κόστος της θέσης καλύπτεται από το δεδομένο προϋπολογισμό αλλιώς η θέση απορρίπτεται και συνεχίζει με την επόμενη. Στο τέλος, ο αλγόριθμος ελέγχει αν υπάρχει κάποια θέση φύλαξης, με κόστος εντός του προϋπολογισμού, που πετυχαίνει μεγαλύτερη τιμή για τη συνάρτηση F από την τιμή που πέτυχε με όλη την προηγούμενη διαδικασία. Ο αλγόριθμος επιστρέφει τελικά τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή για την F .

Το τελευταίο βήμα του αλγορίθμου είναι ιδιαίτερα κρίσιμο γιατί στην περίπτωση που δεν εφαρμοστεί, όπως θα δούμε στη συνέχεια, υπάρχει περίπτωση να μην μας οδηγήσει σε προσέγγιση. Πράγματι, υπάρχουν περιπτώσεις, που η τιμή για τη συνάρτηση F από κάποια θέση φύλαξης, στην οποία δεν τοποθετήθηκε φύλακας κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου, να είναι απείρως μεγαλύτερη από την τιμή που πετυχαίνει ο αλγόριθμος με τη μέθοδο που εφαρμόζει, να λαμβάνει δηλαδή υπόψη το λόγο της τιμής της F προς το κόστος της θέσης φύλαξης. Περισσότερα γι' αυτή την περίπτωση υπάρχουν σε επόμενο κεφάλαιο.

Μετά από την εκτέλεση του αλγορίθμου 3.10, για κάθε βήμα l που ο αλγόριθμος δεν επέλεξε κάποια σύνολα που ανήκουν στη βέλτιστη λύση, έχουμε ότι η διαφορά $F(OPT) - F(\cup_{i=1}^{l-1} S_i)$ καλύπτεται από τις k επιλογές συνόλων της βέλτιστης λύσης. Συνεπώς, για τουλάχιστο μια επιλογή συνόλων της βέλτιστης λύσης έχουμε ότι (αρχή του περιστερώνα):

$$F(S'_m) \geq \frac{F(OPT) - F(\cup_{i=1}^{l-1} S_i)}{k}, \quad m \geq l \quad (3.5.1)$$

Ο αλγόριθμος 3.10, επιλέγει με τέτοιο τρόπο σύνολα ώστε για κάθε βήμα i έχουμε ότι $\frac{F(S_{i-1})}{c_{i-1}} \geq \frac{F(S_i)}{c_i}$, άρα $\frac{F(S_l)}{c_l} \geq \frac{F(S_m)}{c_m} \geq \frac{F(S'_m)}{c_m}$, συνεπώς $\frac{c_m}{c_l} F(S_l) \geq F(S'_m)$. Ο προϋπολογισμός B είναι λογικό να υποθέσουμε ότι είναι μεγαλύτερος από κάθε κόστος θέσης φύλακα (αλλιώς αγνοούμε την «υπερβολικά ακριβή» θέση), οπότε έχουμε:

$$\frac{B}{c_l} F(S_l) \geq F(S'_m) \quad (3.5.2)$$

Η σχέση 3.5.1 και η σχέση 3.5.2 μας δίνουν:

$$\frac{B}{c_l} F(S_l) \geq \frac{F(OPT) - F(\cup_{i=1}^{l-1} S_i)}{k} \quad (3.5.3)$$

Όμως ο αλγόριθμος σε κάθε βήμα επιλέγει κομμάτια της υποδιαίρεσης που δεν έχει καλύψει σε προηγούμενα βήματα:

$$F(S_l) = F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) - F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) \quad (3.5.4)$$

Από τις σχέσεις 3.5.3 και 3.5.4 έχουμε:

$$F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) - F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) \geq \frac{c_l}{B} (F(OPT) - F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right)) \quad (3.5.5)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το ακόλουθο:

Λήμμα 3.5.1 Μετά από l βήματα του αλγορίθμου 3.10 ισχύει ότι:

$$F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) \geq \left(1 - \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{c_i}{B}\right)\right) F(OPT), \quad l = 1, 2, \dots, k$$

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο βήμα l . Είναι φανερό ότι από τα σύνολα S'_i που επιλέγει ο βέλτιστος αλγόριθμος, υπάρχει τουλάχιστο ένα για το οποίο ισχύει ότι $F(S'_j) \geq \frac{1}{B} F(OPT)$, γιατί αλλιώς οι επιλογές του βέλτιστου αλγορίθμου δεν θα άθροιζαν στο $F(OPT)$. Η μεγαλύτερη τιμή είναι η $\frac{F(S_1)}{c_1}$, συνεπώς:

$$F(S_1) \geq \frac{c_1}{B} F(OPT)$$

Η επαγωγική υπόθεση είναι:

$$F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) \geq \left(1 - \prod_{i=1}^{l-1} \left(1 - \frac{c_i}{B}\right)\right) F(OPT) \quad (3.5.6)$$

Για το επαγωγικό βήμα:

$$\begin{aligned} F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) &= F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) + F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) - F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) && \xrightarrow{3.5.5} \\ &\geq \frac{c_l}{B} F(OPT) + \left(1 - \frac{c_l}{B}\right) F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) && \xrightarrow{3.5.6} \\ &\geq \frac{c_l}{B} F(OPT) + \left(1 - \frac{c_l}{B}\right) \left(1 - \prod_{i=1}^{l-1} \left(1 - \frac{c_i}{B}\right)\right) F(OPT) \\ &= \left(1 - \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{c_i}{B}\right)\right) F(OPT) \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.5.1 Ο αλγόριθμος 3.10 υπολογίζει σε πολυωνυμικό χρόνο μια προσεγγιστική λύση του προβλήματος κάλυψης, με λόγος απόδοσης 0.316.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας το λήμμα 3.5.1 για το βήμα $l + 1$ του αλγορίθμου έχουμε:

$$\begin{aligned} F\left(\bigcup_{i=1}^{l+1} S_i\right) &\geq \left(1 - \prod_{i=1}^{l+1} \left(1 - \frac{c_i}{B}\right)\right) F(OPT) \\ &\geq \left(1 - \prod_{i=1}^{l+1} \left(1 - \frac{c_i}{\sum_{i=1}^{l+1} c_i}\right)\right) F(OPT) \end{aligned}$$

Η ανισότητα προκύπτει γιατί το κόστος της προσθήκης ενός φύλακα στο $l + 1$ βήμα υπερβαίνει τον προϋπολογισμό: $\sum_{i=1}^{l+1} c_i > B$. Η συνάρτηση $1 - \prod_{i=1}^{l+1} \left(1 - \frac{c_i}{\sum_{i=1}^{l+1} c_i}\right)$ έχει ελάχιστο όταν $c_1 = c_2 = \dots = c_n = \frac{\sum_{i=1}^{l+1} c_i}{n}$, συνεπώς:

$$\begin{aligned} F\left(\bigcup_{i=1}^{l+1} S_i\right) &\geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{l+1}\right)^{l+1}\right) F(OPT) \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) F(OPT) \end{aligned}$$

```

construct  $\mathcal{V}(\partial P)$ 
foreach vertex  $v$  of  $P$  do
    calculate  $\mathcal{V}(\partial P)(v)$ 
endfch
 $SOL \leftarrow \emptyset$ 
 $G \leftarrow \emptyset$ 
 $C_{tot} \leftarrow \emptyset$ 
 $M \leftarrow$  all vertices of  $P$ 
repeat
    select  $v$  where  $\frac{L(G \cup \mathcal{V}(\partial P)(v))}{c_v}$  is maximized
    if  $C_{tot} + c_p \leq B$  then
         $G \leftarrow G \cup \mathcal{V}(\partial P)(v)$ 
         $C_{tot} \leftarrow C_{tot} + c_v$ 
    endif
     $M \leftarrow M \setminus \{v\}$ 
until  $M = \emptyset$ 
select  $v'$  that maximizes  $L(\mathcal{V}(\partial P)(v'))$ 
if  $L(G) \geq L(\mathcal{V}(\partial P)(v'))$  then
     $SOL \leftarrow G$ 
else
     $SOL \leftarrow \mathcal{V}(\partial P)(v')$ 
endif
return  $L(SOL)$ 

```

Αλγόριθμος 3.11: Κάλυψη μέγιστου μήκους με όριο κόστους B .


```

construct  $\mathcal{V}(\partial P)$ 
foreach vertex  $v$  of  $P$  do
    calculate  $\mathcal{V}(\partial P)(v)$ 
endfch
 $SOL \leftarrow \emptyset$ 
 $G \leftarrow \emptyset$ 
 $C_{tot} \leftarrow \emptyset$ 
 $M \leftarrow$  all vertices of  $P$ 
repeat
    select  $v$  where  $\frac{W(G \cup \mathcal{V}(\partial P)(v))}{c_v}$  is maximized
    if  $C_{tot} + c_p \leq B$  then
         $G \leftarrow G \cup \mathcal{V}(\partial P)(v)$ 
         $C_{tot} \leftarrow C_{tot} + c_v$ 
    endif
     $M \leftarrow M \setminus \{v\}$ 
until  $M = \emptyset$ 
select  $v'$  that maximizes  $W(\mathcal{V}(\partial P)(v'))$ 
if  $W(G) \geq W(\mathcal{V}(\partial P)(v'))$  then
     $SOL \leftarrow G$ 
else
     $SOL \leftarrow \mathcal{V}(\partial P)(v')$ 
endif
return  $W(SOL)$ 

```

Αλγόριθμος 3.12: Κάλυψη μέγιστης αξίας με όριο κόστους B .

Όμως $F(\bigcup_{i=1}^{l+1} S_i) = F(\bigcup_{i=1}^l S_i) + F(S_{l+1})$ και το $F(S_{l+1})$ είναι το πολύ $F(\mathcal{V}(p')$ (αλγόριθμος 3.10) άρα:

$$F(\bigcup_{i=1}^l S_i) + F(\mathcal{V}(p')) \geq (1 - \frac{1}{e})F(OPT)$$

Τελικά, μια από τις δύο ποσότητες του παραπάνω αθροίσματος είναι μεγαλύτερη ή ίση από $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e})F(OPT)$, δηλαδή:

$$F(SOL) \geq 0.316 F(OPT)$$

□

3.5.1 Φύλαξη μέγιστου μήκους με προϋπολογισμό

Στο πρόβλημα BUDGETED MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD το ζητούμενο είναι να καλυφθεί όσο το δυνατόν περισσότερο μήκος από την περίμετρο ενός πολυγώνου P με τη χρήση το πολύ k φυλάκων που η τοποθέτησή τους έχει συγκεκριμένο κόστος. Το συνολικό κόστος των φυλάκων δεν πρέπει να υπερβαίνει ένα συγκεκριμένο προϋπολογισμό. Το πρόβλημα αυτό είναι NP-hard σαν γενίκευση του προβλήματος MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD (παράγραφος 3.3.1) όπου όλες οι πιθανές θέσεις φυλάκων έχουν το ίδιο κόστος.

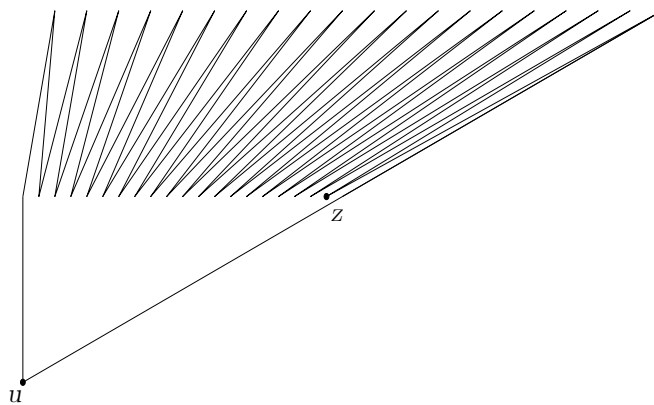
Ο αλγόριθμος 3.10 με τις κατάλληλες τροποποιήσεις διαμορφώνεται όπως ο αλγόριθμος 3.11 και η ανάλυση της παραγράφου 3.5 ισχύει αυτούσια αν χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση του Ευκλείδειου μήκους L . Στην περίπτωση των φυλάκων ακμών, χρησιμοποιώντας τα σύνολα $\mathcal{V}(\partial P)(e)$ για την εκάστοτε ακμή e , έχουμε και πάλι το ίδιο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.5.2 *Τα προβλήματα BUDGETED MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD και BUDGETED MAXIMUM LENGTH EDGE GUARD επιδέχονται προσεγγιστικούς αλγορίθμους πολυωνυμικού χρόνου με λόγος απόδοσης 0.316.*

Το Σχήμα 3.3 κάνει ιδιαίτερα φανερή τη σπουδαιότητα της τελευταίας επιλογής του αλγορίθμου 3.11, δηλαδή της επιλογής της κορυφής v' αν αυτή η κορυφή καλύπτει μεγαλύτερο μήκος από τα μέχρι στιγμής επιλεγμένα σύνολα τμημάτων της διαμέρισης ορατότητας. Το πολύγωνο του σχήματος είναι με τέτοιο τρόπο σχεδιασμένο ώστε όλο το μήκος της περιμέτρου του να καλύπτεται από την κορυφή u . Είναι φανερό από το σχήμα, ότι με τις κατάλληλες κλίσεις των υπολοίπων ακμών μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα στιγμιότυπο για το οποίο $L(\mathcal{V}(\partial P)(u)) \rightarrow \infty$ αλλά τα κόστη των κορυφών να είναι τέτοια ώστε να μην επιλεγεί η κορυφή u για την τοποθέτηση του φύλακα από τον κύριο βρόγχο του αλγορίθμου. Θεωρείστε για παράδειγμα, ότι $k = 1$, έχουμε δηλαδή μόνο ένα φύλακα διαθέσιμο και ότι το κόστος της κορυφής z είναι τέτοιο που ο λόγος $\frac{L(\mathcal{V}(\partial P)(z))}{c_z}$ είναι μεγαλύτερος από το λόγο ότι $\frac{L(\mathcal{V}(\partial P)(u))}{c_u}$. Στην περίπτωση αυτή, αν ο αλγόριθμος δεν έκανε την τελευταία του επιλογή, θα επέστρεφε ένα μήκος, «άπειρα» μακριά από το πραγματικό μέγιστο, δεν θα είχαμε δηλαδή καμία προσέγγιση.

3.5.2 Φύλαξη μέγιστης αξίας με προϋπολογισμό

Στο πρόβλημα BUDGETED MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD το ζητούμενο είναι να καλυφθεί όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αξία από ένα σύνολο ευθυγράμμων τμημάτων με βάρη που

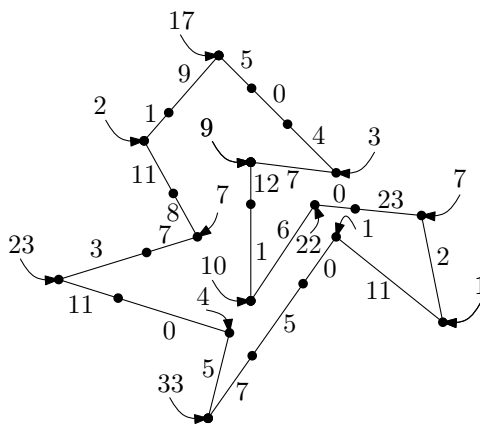


Σχήμα 3.3: Η κορυφή u καλύπτει «άπειρα» μεγαλύτερο μήκος από οποιαδήποτε άλλη κορυφή

βρίσκονται τοποθετημένα στην περίμετρο του πολυγώνου με χρήση το πολύ k φυλάκων που η τοποθέτησή τους έχει συγκεκριμένο κόστος. Το συνολικό κόστος των φυλάκων δεν πρέπει να υπερβαίνει ένα συγκεκριμένο προϋπολογισμό. Το πρόβλημα αυτό είναι NP-hard σαν γενίκευση του προβλήματος MAXIMUM AREA VERTEX GUARD (παράγραφος 3.3.3) όπου όλες οι πιθανές θέσεις φυλάκων έχουν το ίδιο κόστος. Ένα στιγμιότυπο του προβλήματος φαίνεται στο Σχήμα 3.4.

Ο αλγόριθμος 3.10 με τις κατάλληλες τροποποιήσεις διαμορφώνεται όπως ο αλγόριθμος 3.12 και η ανάλυση της παραγράφου 3.5 ισχύει αυτούσια αν χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση του βάρους W . Στην περίπτωση των φυλάκων ακμών, χρησιμοποιώντας τα σύνολα $\mathcal{V}(\partial P)(e)$ για την εκάστοτε ακμή e , έχουμε και πάλι το ίδιο αποτέλεσμα :

Θεώρημα 3.5.3 Τα προβλήματα BUDGETED MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD και BUDGETED MAXIMUM VALUE EDGE GUARD επιδέχονται προσεγγιστικούς αλγορίθμους πολυωνυμικού χρόνου με λόγο απόδοσης 0.316.



Σχήμα 3.4: Ένα πολύγωνο με βάρη στις ακμές και κόσμη στις κορυφές.

3.6 Φύλαξη με όριο κόστους και δύσκολες επιλογές

Ο αλγόριθμος 3.12 σε κάθε ένα από τα k βήματά του πρέπει να επιλέξει από τις υποψήφιας θέσεις φύλαξης αυτή που μεγιστοποιεί το λόγο $\frac{F(G \cup V(p))}{c_p}$. Η συνάρτηση επιδρά στα σύνολα σημείων που ικανοποιούν την απαίτηση κάλυψης από την υποψήφια θέση φύλαξης. Όπως έχουμε επισημάνει στην ανάλυση των παραγράφων 3.3 και 3.4 απαραίτητη προϋπόθεση για να έχουμε πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης, είναι σε κάθε βήμα να μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την τιμή της F . Αν αυτός ο υπολογισμός είναι από μόνο του ένα NP-hard πρόβλημα, τότε ο μόνος τρόπος να διατηρήσουμε τον πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης είναι η ύπαρξη πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικού αλγόριθμου για τον υπολογισμό της τιμής της F .

Έστω λοιπόν ότι το πρόβλημα υπολογισμού της τιμής της F είναι NP-hard και ότι υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος με λόγο απόδοσης α . Θα αναλύσουμε την περίπτωση της παραγράφου 3.5 λαμβάνοντας υπόψη ότι σε κάθε βήμα του αλγορίθμου δεν υπολογίζουμε ακριβώς τη μέγιστη τιμή της F αλλά μια προσέγγισή της με ένα παράγοντα α . Ο βέλτιστος αλγόριθμος φυσικά, σε κάθε βήμα, υπολογίζει το πραγματικό μέγιστο της F .

Προχωράμε παρόμοια με την παράγραφο 3.5 και έχουμε ότι για τουλάχιστο μια επιλογή συνόλων της βέλτιστης λύσης ότι (αρχή του περιστερώνα):

$$F(S'_m) \geq \frac{F(OPT) - F(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i)}{k}, \quad m \geq l \quad (3.6.1)$$

Ο αλγόριθμος 3.10, επιλέγει με τέτοιο τρόπο σύνολα ώστε για κάθε βήμα i έχουμε ότι $\frac{F(S_{i-1})}{c_{i-1}} \geq \frac{F(S_i)}{c_i}$, άρα $\frac{F(S_l)}{c_l} \geq \frac{F(S_m)}{c_m}$. Όμως η τιμή $F(S_m)$ είναι μια προσέγγιση του πραγματικού μέγιστου της συνάρτησης, αφού η F είναι NP-hard και α -προσεγγίσιμη, οπότε έχουμε: $\frac{F(S_l)}{c_l} \geq \frac{\alpha}{c_m} F(S'_m)$, άρα τελικά ισχύει $\frac{c_m}{\alpha c_l} F(S_l) \geq F(S'_m)$. Ο προυπολογισμός B είναι λογικό να υποθέσουμε ότι είναι μεγαλύτερος από κάθε κόστος θέσης φύλακα (αλλιώς αγνοούμε την «υπερβολικά ακριβή» θέση), οπότε έχουμε:

$$\frac{B}{\alpha c_l} F(S_l) \geq F(S'_m) \quad (3.6.2)$$

Η σχέση 3.6.1 και η σχέση 3.6.2 μας δίνουν:

$$\frac{B}{\alpha c_l} F(S_l) \geq \frac{F(OPT) - F(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i)}{k} \quad (3.6.3)$$

Όμως ο αλγόριθμος σε κάθε βήμα επιλέγει κομμάτια της υποδιαίρεσης που δεν έχει καλύψει σε προηγούμενα βήματα:

$$F(S_l) = F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) - F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) \quad (3.6.4)$$

Από τις σχέσεις 3.6.3 και 3.6.4 έχουμε:

$$F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) - F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) \geq \frac{\alpha c_l}{B} \left(F(OPT) - F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right)\right) \quad (3.6.5)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το ακόλουθο:

Λήμμα 3.6.1 Μετά από l βήματα του αλγορίθμου 3.10 ισχύει ότι:

$$F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) \geq \left(1 - \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{\alpha c_i}{B}\right)\right) F(OPT), \quad l = 1, 2, \dots, k$$

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο βήμα l , παρόμοια με τις παραγράφους 3.4 και 3.5. Ισχύει ότι:

$$F(S_1) \geq \frac{\alpha c_1}{B} F(OPT)$$

Η επαγωγική υπόθεση είναι:

$$F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) \geq \left(1 - \prod_{i=1}^{l-1} \left(1 - \frac{\alpha c_i}{B}\right)\right) F(OPT) \quad (3.6.6)$$

Για το επαγωγικό βήμα:

$$\begin{aligned} F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) &= F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) + F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) - F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) && \xrightarrow{3.6.5} \\ &\geq \frac{\alpha c_l}{B} F(OPT) + \left(1 - \frac{\alpha c_l}{B}\right) F\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i\right) && \xrightarrow{3.6.6} \\ &\geq \frac{\alpha c_l}{B} F(OPT) + \left(1 - \frac{\alpha c_l}{B}\right) \left(1 - \prod_{i=1}^{l-1} \left(1 - \frac{\alpha c_i}{B}\right)\right) F(OPT) \\ &= \left(1 - \prod_{i=1}^l \left(1 - \frac{\alpha c_i}{B}\right)\right) F(OPT) \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 3.6.1 Ο αλγόριθμος 3.10 στην περίπτωση που η F είναι NP-hard και α -προσεγγίσιμη, υπολογίζει σε πολυωνυμικό χρόνο μια προσεγγιστική λύση του προβλήματος κάλυψης, με λόγο απόδοσης $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^\alpha}\right)$.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας το λήμμα 3.6.1 για το βήμα $l + 1$ του αλγορίθμου έχουμε:

$$\begin{aligned} F\left(\bigcup_{i=1}^{l+1} S_i\right) &\geq \left(1 - \prod_{i=1}^{l+1} \left(1 - \frac{\alpha c_i}{B}\right)\right) F(OPT) \\ &\geq \left(1 - \prod_{i=1}^{l+1} \left(1 - \frac{\alpha c_i}{\sum_{i=1}^{l+1} c_i}\right)\right) F(OPT) \end{aligned}$$

Η ανισότητα προκύπτει γιατί το κόστος της προσθήκης ενός φύλακα στο $l + 1$ βήμα υπερβαίνει τον προϋπολογισμό: $\sum_{i=1}^{l+1} c_i > B$. Η συνάρτηση $1 - \prod_{i=1}^{l+1} \left(1 - \frac{\alpha c_i}{\sum_{i=1}^{l+1} c_i}\right)$ έχει ελάχιστο όταν $c_1 = c_2 = \dots = c_n = \frac{\sum_{i=1}^{l+1} c_i}{n}$, συνεπώς:

$$\begin{aligned} F\left(\bigcup_{i=1}^{l+1} S_i\right) &\geq \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{l+1}\right)^{l+1}\right) F(OPT) \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{e^\alpha}\right) F(OPT) \end{aligned}$$

Όμως $F\left(\bigcup_{i=1}^{l+1} S_i\right) = F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) + F(S_{l+1})$ και το $F(S_{l+1})$ είναι το πολύ $F(\mathcal{V}(p'))$ (αλγόριθμος 3.10) άρα:

$$F\left(\bigcup_{i=1}^l S_i\right) + F(\mathcal{V}(p')) \geq \left(1 - \frac{1}{e^\alpha}\right) F(OPT)$$

Τελικά, μια από τις δύο ποσότητες του παραπάνω αθροίσματος είναι μεγαλύτερη ή ίση από $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^\alpha}\right) F(OPT)$, δηλαδή:

$$F(SOL) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^\alpha}\right) F(OPT)$$

□

```

construct  $\mathcal{V}(\partial P)$ 
foreach vertex  $v$  of  $P$  do
    calculate  $\mathcal{V}(\partial P)(v)$ 
endfch
 $SOL \leftarrow \emptyset$ 
 $G \leftarrow \emptyset$ 
 $C_{tot} \leftarrow \emptyset$ 
 $M \leftarrow$  all vertices of  $P$ 
repeat
    maximize  $\frac{W(\text{MULTKNAP}(\mathcal{V}(\partial P)(v) \setminus G \cap \mathcal{V}(\partial P)(v), Q))}{c_v}$ 
    place a guard at  $v$ 
    if  $C_{tot} + c_v \leq B$  then
         $G \leftarrow G \cup \mathcal{V}(\partial P)(v)$ 
         $C_{tot} \leftarrow C_{tot} + c_v$ 
    endif
     $M \leftarrow M \setminus \{v\}$ 
until  $M = \emptyset$ 
select  $v'$  that maximizes  $W(\text{MULTKNAP}(\mathcal{V}(\partial P)(v'), Q))$ 
if  $W(G) \geq W(\text{MULTKNAP}(\mathcal{V}(\partial P)(v'), Q))$  then
     $SOL \leftarrow G$ 
else
     $SOL \leftarrow \text{MULTKNAP}(\mathcal{V}(\partial P)(v'), Q)$ 
endif
return  $W(SOL)$ 

```

Αλγόριθμος 3.13: Κάλυψη μέγιστης αξίας (φύλακες κορυφές, όριο κόστους και τοποθέτηση).

3.6.1 Φύλαξη μέγιστης αξίας με όριο κόστους μαζί με τοποθέτηση

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε τη γενίκευση του προβλήματος της παραγράφου 3.4.1. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει κόστος που πρέπει να πληρωθεί όταν τοποθετείται φύλακας σε κάποια από τις πιθανές θέσεις και υπάρχει ένας προϋπολογισμός που δεν μπορούμε να υπερβούμε. Παρόμοια με την παράγραφο 3.4 έχουμε:

Ορισμός 3.6.1 Δίνεται ένα πολύγωνο P με κόστη στις κορυφές του, ένα σύνολο $Q = \{(l_i, w_i)\}$ από ζευγάρια μηκών ευθυγράμμων τμημάτων μαζί με τις αξίες τους, και τρεις μη αρνητικοί ακέραιοι k , $BUDGET$ και B . Το πρόβλημα απόφασης BUDGETED MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD WITH PAINTING PLACEMENT ρωτάει: μπορούν να τοποθετηθούν k φύλακες κορυφές στο P και τμήματα από το σύνολο Q πάνω στο ∂P έτσι ώστε αν C_{tot} είναι το συνολικό κόστος των κορυφών με τοποθετημένους φύλακες και $W(S)$ είναι η συνολική αξία των τμημάτων που τοποθετήθηκαν στην περίμετρο και καλύπτονται από τους φύλακες, να ισχύει $C_{tot} \geq BUDGET$ και $W(S) \geq B$;

Έχουμε τη γενική περίπτωση του NP-hard προβλήματος της παραγράφου 3.4.1, συνεπώς άμεσα:

Πρόταση 3.6.1 Το πρόβλημα BUDGETED MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD WITH PAINTING PLACEMENT είναι NP-hard.

Όπως και στην παράγραφο 3.4.1, σε κάθε βήμα, για να επιλεγεί η κατάλληλη θέση για τον φύλακα πρέπει να υπολογισθεί η λύση του προβλήματος MULTIPLE KNAPSACK. Παρόμοια με την παράγραφο 3.4.1 και με την ανάλυση της παραγράφου 3.6 έχουμε ότι $\alpha \rightarrow 1$ και $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e^\alpha}) \rightarrow 0.316$, δηλαδή ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.6.2 Τα προβλήματα BUDGETED MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD WITH PAINTING PLACEMENT και BUDGETED MAXIMUM VALUE EDGE GUARD WITH PAINTING PLACEMENT επιδέχονται προσεγγιστικούς αλγορίθμους πολυωνυμικού χρόνου με λόγο απόδοσης 0.316

```

construct  $\mathcal{V}(\partial P)$ 
foreach edge  $e$  of  $P$  do
    calculate  $\mathcal{V}(\partial P)(e)$ 
endfch
 $SOL \leftarrow \emptyset$ 
 $G \leftarrow \emptyset$ 
 $C_{tot} \leftarrow \emptyset$ 
 $M \leftarrow$  all edges of  $P$ 
repeat
    maximize  $\frac{W(\text{MULTKNAP}(\mathcal{V}(\partial P)(e) \setminus G \cap \mathcal{V}(\partial P)(e), Q))}{c_e}$ 
    place a guard at  $e$ 
    if  $C_{tot} + c_e \leq B$  then
         $G \leftarrow G \cup \mathcal{V}(\partial P)(e)$ 
         $C_{tot} \leftarrow C_{tot} + c_e$ 
    endif
     $M \leftarrow M \setminus \{e\}$ 
until  $M = \emptyset$ 
select  $e'$  that maximizes  $W(\text{MULTKNAP}(\mathcal{V}(\partial P)(e'), Q))$ 
if  $W(G) \geq W(\text{MULTKNAP}(\mathcal{V}(\partial P)(e'), Q))$  then
     $SOL \leftarrow G$ 
else
     $SOL \leftarrow \text{MULTKNAP}(\mathcal{V}(\partial P)(e'), Q)$ 
endif
return  $W(SOL)$ 

```

Αλγόριθμος 3.14: Κάλυψη μέγιστης αξίας (φύλακες πλευρές, όριο κόστους και τοποθέτηση).

Κεφάλαιο 4

Μη Προσεγγισιμότητα

Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 μας κάνουν αισιόδοξους και θέλοντας να πετύχουμε το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα θα προσπαθήσουμε αρχικά στ ο κεφάλαιο αυτό να δούμε αν γίνεται να υπάρχει ένα πλήρες πολυωνυμικό προσεγγιστικό σχήμα* για το πρόβλημα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD. Δυστυχώς, όπως θα δούμε, εκτός αν $P = NP$, ένα τέτοιο προσεγγιστικό σχήμα, δεν μπορεί να υπάρχει. Στη συνέχεια του κεφαλαίου, δείχνουμε ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα για την παραλλαγή MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD, ότι δηλαδή υπάρχει μια σταθερά $\epsilon > 0$ που δεν μπορεί να είναι λόγος απόδοσης οποιουδήποτε πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικού αλγόριθμου για το πρόβλημα MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD. Το αποτέλεσμα αυτό είναι άμεση συνέπεια μιας αναγωγής διατήρησης χάσματος† από το πρόβλημα MAX-5-OCCURENCE-3SAT στο πρόβλημα MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD. Η αναγωγή λειτουργεί για όλες τις περιπτώσεις των προβλημάτων του Κεφαλαίου 3.

4.1 Πρώτο αποτέλεσμα μη προσέγγισης

Υποθέτουμε λοιπόν ότι υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος ως προς την είσοδό του και το $\frac{1}{\epsilon}$ με λόγο απόδοσης $1 - \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$. Αν δηλαδή SOL είναι η λύση που επιστρέφει αυτός ο υποθετικός αλγόριθμος έχουμε ότι $SOL > (1 - \epsilon)OPT$, $\forall \epsilon > 0$. Θυμίζουμε ότι σε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος MINIMUM VERTEX GUARD FOR BOUNDARY έχουμε ένα πολύγωνο P και ένα ακέραιο $k > 0$. Το πρόβλημα είναι να αποφασιστεί αν το πολύ k φύλακες κορυφές καλύπτουν όλη την περίμετρο του P .

Για την αναγωγή στο πρόβλημα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD θα χρησιμοποιήσουμε τη διαμέριση ορατότητας $\mathcal{V}(\partial P)$: η περίμετρος χωρίζεται σε ξένα μεταξύ τους τμήματα, στο καθένα από τα οποία θέτουμε βάρος 1. Λαμβάνουμε λοιπόν το ίδιο πολύγωνο P , τον ίδιο αριθμό k , σαν σύνολο τμημάτων στην περίμετρο το $Q = \mathcal{V}(\partial P)$, έχουμε ότι $\forall s \in Q : W(s) = 1$ και ορίζουμε $B = \sum_{s_i \in Q} W(s_i)$ και ρωτάμε: Μπορούν να τοποθετηθούν k φύλακες κορυφές στο P , έτσι ώστε $W(S) \geq B$;

Ο υποθετικός μας αλγόριθμος έρχεται σε αυτό το σημείο να μας δώσει μια λύση που προσεγγίζει τη βέλτιστη με λόγο απόδοσης $1 - \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$. Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε ένα ϵ και διαλέγουμε να θέσουμε $\epsilon = \frac{1}{B}$. Συνεπώς, αν η λύση που επιστεφει ο υποθετικός

*Παράγραφος 1.5.2

†Παράγραφος 1.6.3

αλγόριθμος είναι SOL και ισχύει ότι $SOL = B$ τότε ξέρουμε ότι και $OPT = B$ (k φύλακες κορυφές καλύπτουν όλη την περίμετρο του P) δηλαδή ότι η απάντηση στο πρόβλημα απόφασης MINIMUM VERTEX GUARD είναι *ναι*.

Αν για τη λύση SOL , του υποθετικού αλγορίθμου, ισχύει ότι $SOL \leq B - 1$ τότε έχουμε ότι $(1 - \frac{1}{B}) OPT < B - 1$ ή αλλιώς $OPT < B$. Δηλαδή στην περίπτωση αυτή ξέρουμε ότι k φύλακες κορυφές δεν καλύπτουν όλη την περίμετρο του P , συνεπώς η απάντηση στο πρόβλημα απόφασης MINIMUM VERTEX GUARD είναι *όχι*.

Τελικά, η υπόθεση για την ύπαρξη ενός πλήρως πολυωνυμικού προσεγγιστικού σχήματος για το πρόβλημα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD μας οδηγεί στην ύπαρξη ενός αλγορίθμου πολυωνυμικού χρόνου που αποφασίζει το πρόβλημα MINIMUM VERTEX GUARD FOR BOUNDARY. Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει εκτός αν $P = NP$. Αποδείξαμε λοιπόν το επόμενο:

Θεώρημα 4.1.1 Το πρόβλημα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD δεν επιδέχεται πλήρες πολυωνυμικό προσεγγιστικό σχήμα εκτός αν ισχύει ότι $P = NP$.

4.2 Μια αναγωγή διατήρησης χάσματος

Στη συνέχεια, δίνουμε τον τυπικό ορισμό της παραλλαγής του προβλήματος ικανοποιησιμότητας που πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε στην αναγωγή μας:

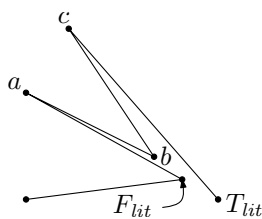
Ορισμός 4.2.1 Σε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος MAX-5-OCCURENCE-3SAT έχουμε ένα μη αρνητικό ακέραιο k και μια λογική έκφραση Φ σε κανονική συζευκτική μορφή (conjunctive normal form) όπου κάθε πρόταση (clause) αποτελείται από 3 το πολύ λεκτήματα (literals) και η κάθε μεταβλητή (variable) εμφανίζεται σε 5 το πολύ προτάσεις. Το πρόβλημα ρωτάει: υπάρχει απονομή αλήθειας στις μεταβλητές της Φ έτσι ώστε αν C_{SAT} είναι ο αριθμός των προτάσεων που ικανοποιούνται να ισχύει $C_{SAT} > k$;

4.2.1 Κατασκευή του πολυγώνου

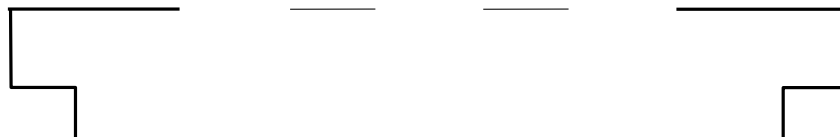
Θα περιγράψουμε μια κατασκευή που θα αντιστοιχίζει ένα οποιαδήποτε στιγμιότυπο του προβλήματος MAX-5-OCCURENCE-3SAT σε ένα πολύγωνο. Ξεκινάμε με τα λεκτήματα της έκφρασης Φ και για κάθε ένα από αυτά κατασκευάζουμε το περίγραμμα που φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Η κατασκευή έχει γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε οι μόνες θέσεις από τις οποίες μπορεί να καλυθεί όλο το περίγραμμα, είναι οι σημειωμένες κορυφές με F_{lit} και T_{lit} . Αν δηλαδή δεν υπάρχει φύλακας σε κάποια από τις δύο προηγούμενες κορυφές, τότε οι πλευρές \overline{ab} και \overline{bc} δεν καλύπτονται. Ονομάζουμε αυτό το περίγραμμα *περίγραμμα λεκτήματος*.

Στη συνέχεια για κάθε πρόταση της Φ κατασκευάζουμε το περίγραμμα που φαίνεται στο Σχήμα 4.2. Όπως φαίνεται στο σχήμα, για να καλυφθεί όλο το περίγραμμα αρκεί να τοποθετηθεί ένας φύλακας κάπου στο εσωτερικό ή πάνω στην περίμετρό του. Ονομάζουμε αυτό το περίγραμμα, *περίγραμμα πρότασης*. Ένα περίγραμμα πρότασης με τρία περιγράμματα λεκτημάτων, όπως προκύπτει από μια πρόταση της λογικής έκφρασης με τρία λεκτήματα, φαίνεται στο Σχήμα 4.3.

Για κάθε μεταβλητή της Φ κατασκευάζουμε το περίγραμμα που φαίνεται στο Σχήμα 4.4. Ονομάζουμε αυτό το περίγραμμα, *περίγραμμα μεταβλητής*, την αριστερή εσοχή *ουρά*



Σχήμα 4.1: Ένα περίγραμμα για το κάθε λέκτημα.



Σχήμα 4.2: Ένα περίγραμμα για την κάθε πρόταση.

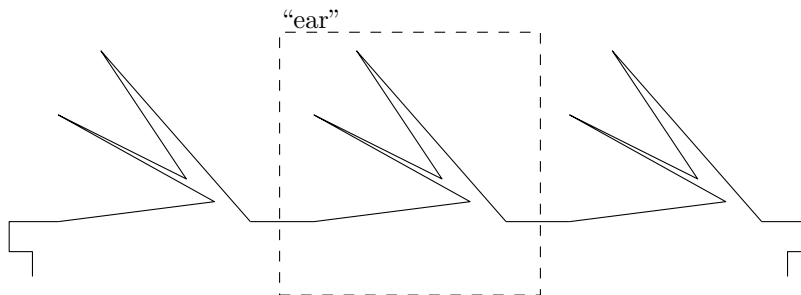
(tail) και τα δύο κάτω μέρη πόδια (legs). Ο προσανατολισμός των ποδιών πρέπει να είναι τέτοιος ώστε το εσωτερικό και των δύο ποδιών, εκτός από την ουρά να είναι ορατό από ένα σημείο που θα περιγράψουμε αργότερα. Οι δύο πλευρές της ουράς, δηλαδή τα τμήματα \overline{eg} και \overline{ef} , καλύπτονται εξ' ολοκλήρου μόνο από κάποιο φύλακα κορυφή, που είναι τοποθετημένος, είτε στην κορυφή F_{var} , είτε στην κορυφή T_{var} .

Προσθέτουμε επίσης στο περίγραμμα μεταβλητής δύο ακίδες (spikes), λαμβάνοντας υπόψη αν το αντίστοιχο λέκτημα είναι θετικό[‡] ή όχι (Σχήμα 4.5 και Σχήμα 4.6). Στην περίπτωση ενός θετικού λεκτήματος, η ακίδα που φαίνεται από την κορυφή F_{lit} είναι αυτή που τοποθετούμε στο δεξί πόδι ενώ αυτή που φαίνεται από την κορυφή T_{lit} είναι αυτή που τοποθετούμε στο αριστερό πόδι. Ονομάζουμε FALSE-ακίδα, την ακίδα που φαίνεται από την κορυφή F_{lit} και TRUE-ακίδα, την ακίδα που φαίνεται από την κορυφή T_{lit} .

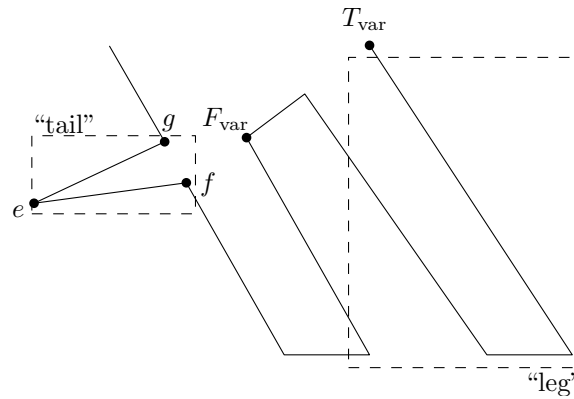
Στην περίπτωση ενός αρνητικού λεκτήματος η FALSE-ακίδα τοποθετείται στο αριστερό πόδι ενώ η TRUE-ακίδα στο δεξί πόδι. Η κατασκευή των ακίδων στα σχήματα 4.5 και 4.6 γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχει κορυφή στο περίγραμμα πρότασης που να βλέπει παραπάνω από μια ακίδες (Σχήμα 4.7): η βάση του κώνου της FALSE-ακίδας είναι το τμήμα $\overline{aF_{lit}}$ ενώ η βάση του κώνου της TRUE-ακίδας είναι το τμήμα $\overline{T_{lit}b}$ (και όχι το $\overline{T_{lit}c}$).

Η κατασκευή του πολυγώνου ολοκληρώνεται με την προσθήκη ενός επιπλέον περι-

[‡]Ένα λέκτημα είναι μια μεταβλητή ή η άρνηση μιας μεταβλητής. Ένα αρνητικό λέκτημα είναι άρνηση μιας μεταβλητής.



Σχήμα 4.3: Ένα περίγραμμα πρότασης με τρία περιγράμματα λεκτημάτων.



Σχήμα 4.4: Ένα περίγραμμα για την κάθε μεταβλητή.

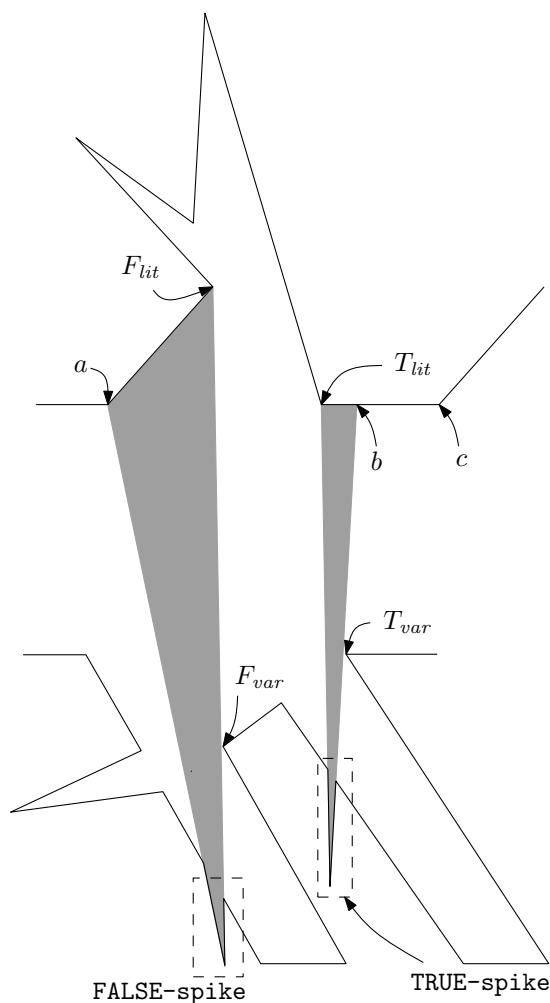
γράμματος λεκτήματος στην πάνω αριστερή γωνία και το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 4.7. Παρατηρήστε ότι το εσωτερικό όλων των ποδιών του σχήματος είναι προσανατολισμένο με τέτοιο τρόπο ώστε ολόκληρο, εκτός από τις ουρές, να φαίνεται από την κορυφή w του τελευταίου περιγράμματος λεκτήματος.

Απο τον τρόπο κατασκευής του πολυγώνου είναι φανερό ότι τρεις φύλακες κορυφές είναι αναγκαίοι και αρκούν για να φυλάξουν ένα περίγραμμα λεκτήματος και το αντίστοιχο περίγραμμα μεταβλητής: ένας φύλακας πρέπει να τοποθετηθεί στην κορυφή w για να καλύψει το εσωτερικό και την περίμετρο των ποδιών, ένας στην κορυφή F_{var} ή T_{var} για να καλύψει το εσωτερικό και την περίμετρο της ουράς και της μιας ακίδας και άλλος ένας στην κορυφή F_{lit} ή T_{lit} για να καλύψει το εσωτερικό και την περίμετρο του αυτιού και της άλλης ακίδας.

Στην περίπτωση ενός θετικού λεκτήματος χρειάζεται ένας φύλακας στην κορυφή F_{var} και ένας στην κορυφή F_{lit} (ή ένας στην κορυφή T_{var} και ένας στην κορυφή T_{lit}). Στην περίπτωση ενός αρνητικού λεκτήματος χρειάζεται ένας φύλακας στην κορυφή F_{var} και ένας στην κορυφή T_{lit} (ή ένας στην κορυφή T_{var} και ένας στην κορυφή F_{lit}).

Έστω η λογική έκφραση $\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$. Η κατασκευή του πολυγώνου που αντιστοιχεί στη Φ , μπορεί να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε περίγραμμα πρότασης, οι πλευρές του περιγράμματος που φαίνονται τονισμένες στο Σχήμα 4.2, να έχουν πολύ μικρό Ευκλείδιο μήκος σε σχέση με οποιαδήποτε άλλη πλευρά του πολυγώνου. Ένα παράδειγμα μια τέτοιας κατασκευής είναι και το πολύγωνο που φαίνεται στο Σχήμα 4.7 όπου φαίνονται σε μεγέθυνση τα κομμάτια του πολυγώνου που ενώνουν μεταξύ τους τα διάφορα περιγράμματα προτάσεων, όπως και αυτά τα κομμάτια που ενώνουν όλα τα περιγράμματα προτάσεων με το υπόλοιπο πολύγωνο. Αν στην λογική έκφραση Φ έχουμε l εμφανίσεις λεκτημάτων και n μεταβλητές τότε αν λάβουμε $k = l + n + 1$ φύλακες, έχουμε ολοκληρώσει την κατασκευή ενός στιγμιότυπου του προβλήματος MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD από ένα στιγμιότυπο του προβλήματος MAX-5-OCCURENCE-3SAT.

Είναι φανερό ότι μεγαλύτερες λογικές εκφράσεις θα ανάγονται σε ιδιαίτερα πολύπλοκα πολύγωνα. Η κατασκευή γίνεται ευκολότερα αν αρχικά σταθεροποιήσουμε τα περιγράμματα των προτάσεων και το επιπλέον περίγραμμα αυτιού έτσι ώστε να είναι καλά ορισμένη η κορυφή w . Στη συνέχεια, για κάθε μεταβλητή, σταθεροποιούμε τον προσανατολισμό των ποδιών, έτσι ώστε όλο το εσωτερικό τους να φαίνεται από την κορυφή w και ανάλογα με την εμφάνιση της μεταβλητής στα διάφορα λεκτήματα των προτάσεων κατασκευάζουμε τις

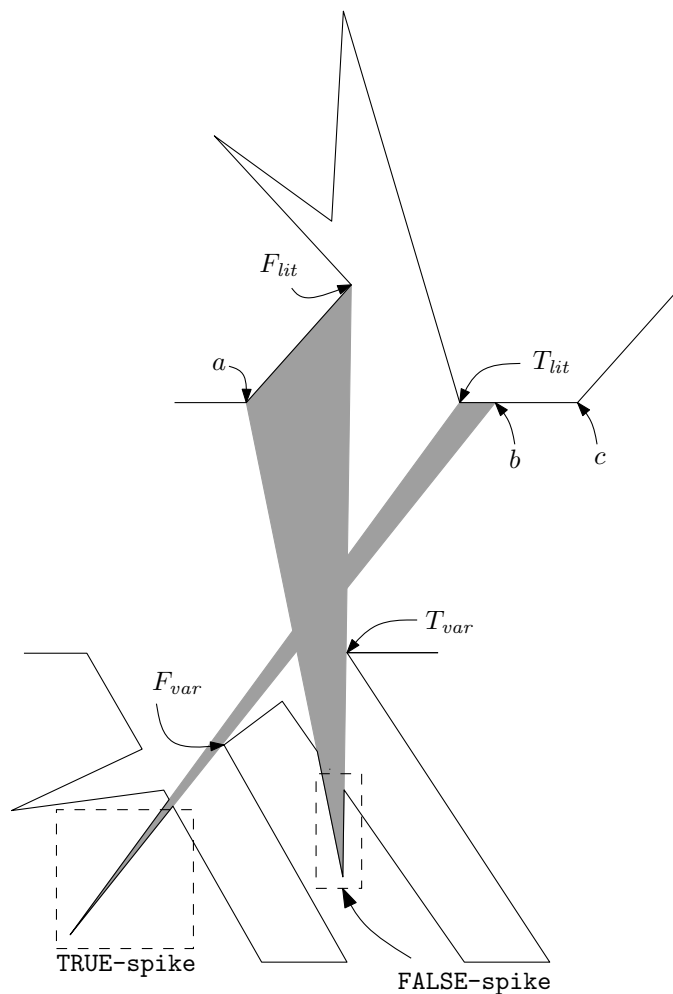


Σχήμα 4.5: Κατασκευή περιγραμμάτων ακίδων για ένα αρνητικό λέκτημα.

αντίστοιχες ακίδες. Προχωράμε στην επόμενη μεταβλητή όταν σχηματιστούν όλες οι ακίδες της προηγούμενης μεταβλητής. Η κατασκευή του κώνου των ακίδων γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε ο κάθε κώνος να ακουμπά στην κατάλληλη κορυφή F_{var} ή T_{var} ανάλογα με το είδος της εμφάνιση (θετικό ή αρνητικό) του λεκτήματος που αντιστοιχεί στην μεταβλητή. Στο τέλος, κατασκευάζουμε όλες τις υπόλοιπες πλευρές του πολυγώνου. Παρατηρούμε ότι οι πλευρές που ενώνουν δύο περιγράμματα προτάσεων μπορεί να χρειάζεται να γίνουν ιδιαίτερα μικρές, όμως σε κάθε περίπτωση οι πλευρές αυτές μπορούν να σχεδιαστούν στον, πιθανώς ιδιαίτερο μικρό, χώρο μεταξύ των κώνων των ακίδων, ενός τελευταίου λεκτήματος σε μια πρόταση και του πρώτου λεκτήματος στην επόμενη πρόταση.

4.2.2 Μετασχηματισμός μιας εφικτής λύσης

Έστω ένα στιγμιότυπο I του προβλήματος MAX-5-OCCURENCE-3SAT με n μεταβλητές, l λεκτήματα και m προτάσεις ($l \leq 3m$). Μετασχηματίζουμε το I σε ένα στιγμιότυπο I' του προβλήματος MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD που αποτελείται από ένα πολύγωνο P , κατασκευασμένο με τον τρόπο της παραγράφου 4.2.1 και $k = l + n + 1$ φύλακες κορυφές που καλύπτουν Ευκλείδιο μήκος B στην περίμετρο του P .



Σχήμα 4.6: Κατασκευή περιγραμμάτων ακίδων για ένα θετικό λέκτημα.

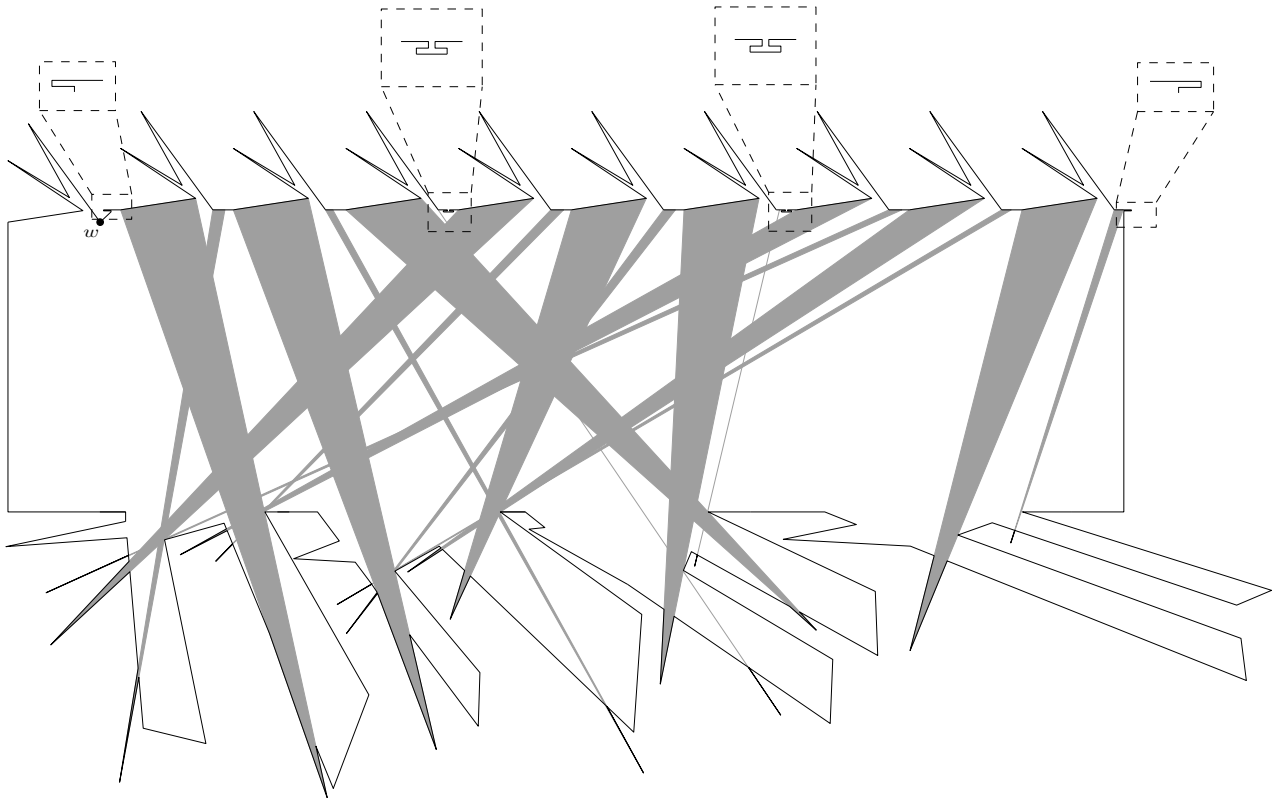
Από την λογική έκφραση στο πολύγωνο

Αν υπάρχει μια απονομή αλήθειας για το στιγμιότυπο I που ικανοποιεί και τις m προτάσεις τότε τοποθετούμε $k = l + n + 1$ φύλακες κορυφές στο πολύγωνο του στιγμιότυπου I' με τον τρόπο που περιγράφουμε στη συνέχεια. Ένας φύλακας στην κορυφή w καλύπτει το εσωτερικό και την περίμετρο όλων των ποδιών του πολυγώνου εκτός από τις ουρές και τις ακίδες.

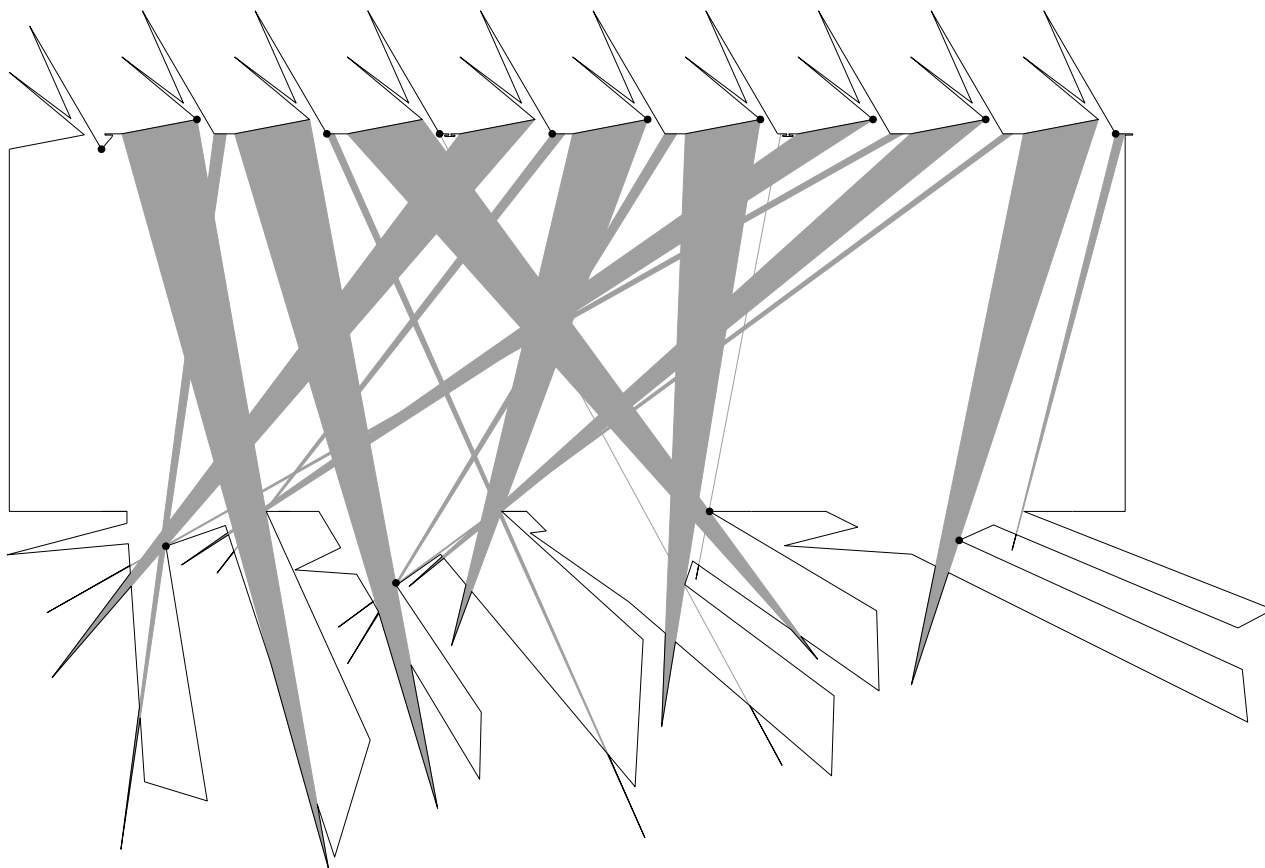
Για κάθε μεταβλητή που έχει την τιμή FALSE, ένας φύλακας στην κορυφή F_{var} του αντίστοιχου περιγράμματος μεταβλητής, καλύπτει την ουρά και την TRUE ακίδα αν είναι θετικό το αντίστοιχο της μεταβλητής λέκτημα, αλλιώς καλύπτει την ουρά και τη FALSE ακίδα. Για κάθε λέκτημα που αποτιμάται FALSE, ένας φύλακας στην κορυφή F_{lit} καλύπτει όλο το περίγραμμα του λεκτήματος και τη FALSE ακίδα, ενώ για κάθε λέκτημα που αποτιμάται TRUE ένας φύλακας στην κορυφή T_{lit} καλύπτει όλο το περίγραμμα του λεκτήματος και τη TRUE ακίδα.

Τελικά όλο το μήκος της περιμέτρου $L(\partial P)$ του πολυγώνου καλύπτεται από τους $k = l + n + 1$ φύλακες αφού ο φύλακας στην κορυφή w καλύπτει όλη την υπόλοιπη

$$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$$



Σχήμα 4.7: Ένα πολύγωνο που μπορεί να προκύψει από την κατασκευή.



Σχήμα 4.8: Μια απονομή αλήθειας που ικανοποιεί την Φ ανάγεται σε ένα σύνολο φυλάκων που καλύπτει πλήρως το πολύγωνο.

περίμετρο που δεν είναι ορατή στους μέχρι στιγμής τοποθετημένους φυλάκες[§].

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την λογική έκφραση:

$$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$$

και την ακόλουθη απονομή αλήθειας στις μεταβλητές της Φ :

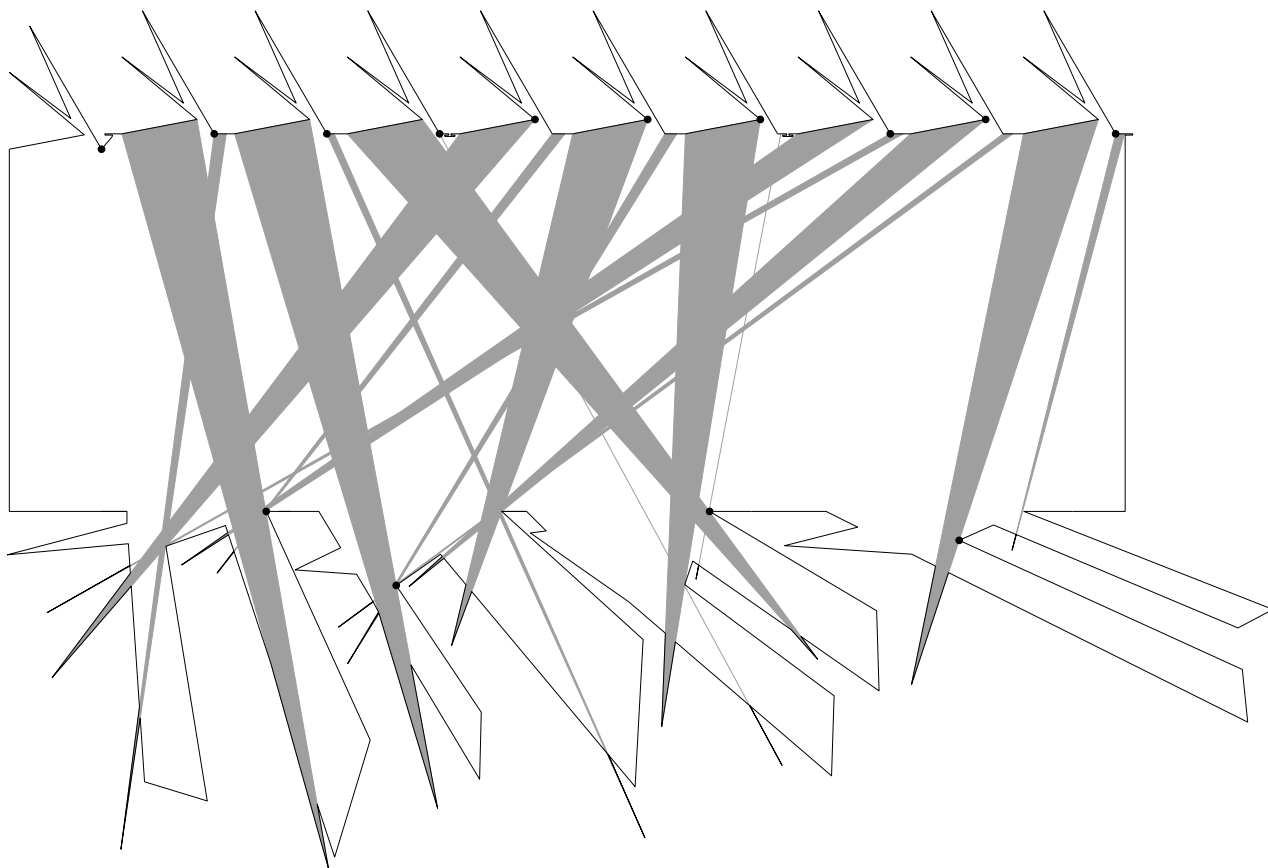
x_1	x_2	x_3	x_4
FALSE	FALSE	TRUE	FALSE

η οποία ικανοποιεί όλες τις προτάσεις της:

x_1	$\neg x_2$	x_3	$\neg x_1$	x_2	$\neg x_3$	x_1	x_2	$\neg x_4$
FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE
TRUE			TRUE			TRUE		

Προχωράμε στην τοποθέτηση των φυλάκων στο Σχήμα 4.8 ως εξής: Τοποθετούμε ένα φύλακα στην κορυφή w και στη συνέχεια ένα φύλακα στην κορυφή F_{var} στο περίγραμμα της μεταβλητής x_1 , ένα φύλακα στην κορυφή F_{var} στο περίγραμμα της μεταβλητής x_2 , ένα φύλακα στην κορυφή T_{var} στο περίγραμμα της μεταβλητής x_3 και ένα φύλακα στην

[§]Φυσικά, ο φύλακας στην κορυφή w , από την πρώτη στιγμή που τοποθετήθηκε κάλυπτε όλη την υπόλοιπη περίμετρο!



Σχήμα 4.9: Αν η απονομή αλήθειας δεν ικανοποιεί κάποιες προτάσεις της Φ , τότε τα περιγράμματα των προτάσεων που δεν ικανοποιούνται μένουν ακάλυπτα από το σύνολο των φυλάκων, μετά την αναγωγή.

κορυφή F_{var} στο περίγραμμα της μεταβλητής x_4 . Στη συνέχεια τοποθετούμε φύλακες στις κατάλληλες κορυφές των περιγραμμάτων των λεκτημάτων των προτάσεων: για την πρώτη πρόταση τοποθετούμε ένα φύλακα στην κορυφή F_{lit} του λεκτήματος x_1 , ένα φύλακα στην κορυφή T_{lit} του λεκτήματος $\neg x_2$ και ένα φύλακα στην κορυφή T_{lit} του λεκτήματος x_3 . Για τη δεύτερη πρόταση τοποθετούμε ένα φύλακα στην κορυφή T_{lit} του λεκτήματος $\neg x_1$, ένα φύλακα στην κορυφή F_{lit} του λεκτήματος x_2 και ένα φύλακα στην κορυφή F_{lit} του λεκτήματος $\neg x_3$. Τέλος, για την τρίτη πρόταση τοποθετούμε ένα φύλακα στην κορυφή F_{lit} του λεκτήματος x_1 , ένα φύλακα στην κορυφή F_{lit} του λεκτήματος x_2 και ένα φύλακα στην κορυφή T_{lit} του λεκτήματος x_4 . Παρατηρούμε ότι αυτό το σύνολο των 14 φυλάκων καλύπτει όλο το μήκος της περιμέτρου του πολυγώνου (καλύπτει επίσης και όλο το εσωτερικό).

Αποδείξαμε λοιπόν ότι ισχύει το ακόλουθο:

Λήμμα 4.2.1 Αν $OPT(I) = m$ τότε $OPT(I') = L(\partial P)$.

Στην περίπτωση που με την απονομή αλήθειας δεν ικανοποιούνται κάποιες προτάσεις του στιγμιότυπου I , τότε μετά την παραπάνω τοποθέτηση φυλάκων δεν καλύπτονται τα αντίστοιχα περιγράμματα προτάσεων. Αυτό συμβαίνει γιατί όταν όλα τα λεκτήματα μιας πρότασης αποτιμούνται FALSE τότε θα τοποθετηθούν φύλακες μόνο στις κορυφές F_{lit}

των περιγραμμάτων των λεκτημάτων. Για να καλυφθεί όμως ένα περίγραμμα πρότασης χρειάζεται τουλάχιστο ένας φύλακας σε κάποια κορυφή T_{lit} . Το στιγμιότυπο I' είναι λοιπόν συνεπές και σ' αυτή την περίπτωση με το I .

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την ίδια λογική έκφραση και την ακόλουθη απονομή αλήθειας στις μεταβλητές της Φ :

x_1	x_2	x_3	x_4
TRUE	FALSE	TRUE	FALSE

η οποία δεν ικανοποιεί τη δεύτερη πρόταση της Φ :

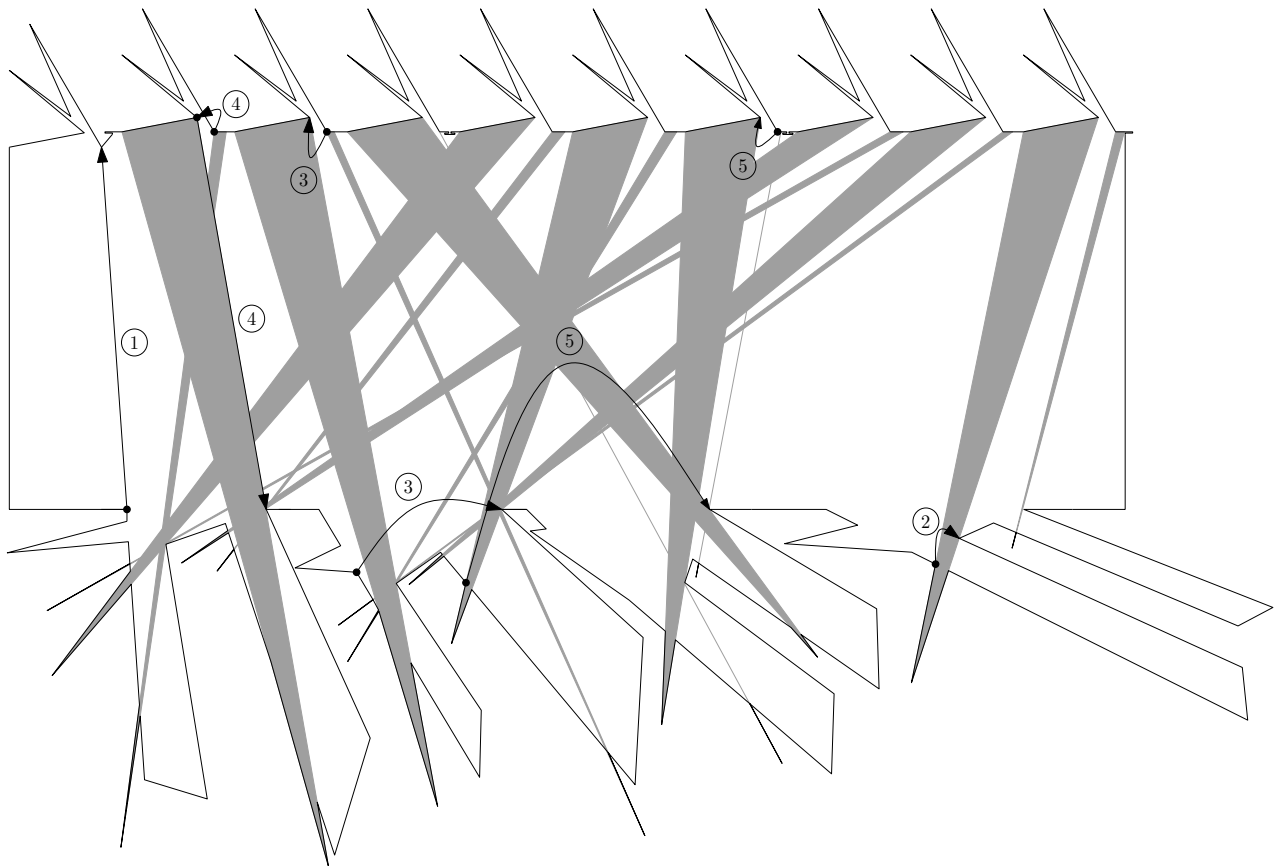
x_1	$\neg x_2$	x_3	$\neg x_1$	x_2	$\neg x_3$	x_1	x_2	$\neg x_4$
TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE
	TRUE			FALSE			TRUE	

Προχωράμε στην τοποθέτηση των φυλάκων στο Σχήμα 4.9 ως εξής: Τοποθετούμε ένα φύλακα στην κορυφή w και στη συνέχεια ένα φύλακα στην κορυφή T_{var} στο περίγραμμα της μεταβλητής x_1 , ένα φύλακα στην κορυφή F_{var} στο περίγραμμα της μεταβλητής x_2 , ένα φύλακα στην κορυφή T_{var} στο περίγραμμα της μεταβλητής x_3 και ένα φύλακα στην κορυφή F_{var} στο περίγραμμα της μεταβλητής x_4 . Στη συνέχεια τοποθετούμε φυλάκες στις κατάλληλες κορυφές των περιγραμμάτων των λεκτημάτων των προτάσεων: για την πρώτη πρόταση τοποθετούμε ένα φύλακα στην κορυφή T_{lit} του λεκτήματος x_1 , ένα φύλακα στην κορυφή T_{lit} του λεκτήματος $\neg x_2$ και ένα φύλακα στην κορυφή T_{lit} του λεκτήματος x_3 . Για τη δεύτερη πρόταση τοποθετούμε ένα φύλακα στην κορυφή F_{lit} του λεκτήματος $\neg x_1$, ένα φύλακα στην κορυφή F_{lit} του λεκτήματος x_2 και ένα φύλακα στην κορυφή F_{lit} του λεκτήματος $\neg x_3$. Τέλος, για την τρίτη πρόταση τοποθετούμε ένα φύλακα στην κορυφή F_{lit} του λεκτήματος x_1 , ένα φύλακα στην κορυφή F_{lit} του λεκτήματος x_2 και ένα φύλακα στην κορυφή T_{lit} του λεκτήματος x_4 . Παρατηρούμε ότι αυτό το σύνολο των 14 φυλάκων καλύπτει όλο το μήκος της περιμέτρου του πολυγώνου εκτός από τις πλευρές του περιγράμματος της δεύτερης πρότασης.

Από το πολύγωνο στην λογική έκφραση

Έστω λοιπόν ένα στιγμιότυπο I' του προβλήματος MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD με $k = l + n + 1$ φύλακες κορυφές, κατασκευασμένο με τον τρόπο της παραγράφου 4.2.1. Προχωράμε σε μια μετακίνηση των θέσεων των τοποθετημένων φυλάκων, με στόχο να τοποθετηθούν φύλακες σε κάποιες ιδιαίτερες κορυφές, αν βέβαια σ' αυτές τις κορυφές δεν υπάρχει ήδη φύλακας.

Αρχίζουμε με την μετακίνηση ενός φύλακα στην κορυφή w του πρόσθετου περιγράμματος στην πάνω αριστερή γωνία του πολυγώνου (περίπτωση 1 στο Σχήμα 4.10). Στη συνέχεια εξετάζουμε τα περιγράμματα των μεταβλητών και στην περίπτωση που ένας μόνο φύλακας βρίσκεται πάνω στο περίγραμμα και βλέπει κάποια ακίδα, τον μετακινούμε στην κορυφή F_{var} ή T_{var} , ανάλογα με το που φαίνεται η ίδια ακίδα (περίπτωση 2 στο Σχήμα 4.10). Σε κάθε άλλη περίπτωση μετακινούμε ένα φύλακα στην κορυφή F_{var} , αν απο αυτή τη θέση, ο φύλακας καλύπτει τις περισσότερες FALSE ακίδες από ότι στην κορυφή T_{var} , αλλιώς μετακινούμε ένα φύλακα στην κορυφή T_{var} , αν απο αυτή τη θέση, ο φύλακας καλύπτει τις περισσότερες FALSE ακίδες από ότι στην κορυφή F_{var} . Μετακινήσεις σαν τις τελευταίες γίνονται όταν δεν υπάρχουν φύλακες πάνω στο περίγραμμα variable, ή όταν



Σχήμα 4.10: Διάφορες περιπτώσεις μετακίνησης φυλάκων.

υπάρχει ένας φύλακας που δεν καλύπτει ακίδες ή όταν υπάρχουν περισσότεροι φύλακες (περιπτώσεις 3,4 και 5 στο Σχήμα 4.10).

Στη συνέχεια σε κάθε περίγραμμα λεκτήματος θα πρέπει να μετακινηθεί ένας φύλακας στην κορυφή F_{lit} αν η αντίστοιχη FALSE ακίδα δεν φαίνεται από τον φύλακα που τοποθετήθηκε στο αντίστοιχο περίγραμμα μεταβλητής. Αν στο αντίστοιχο περίγραμμα μεταβλητής δεν φαίνεται η TRUE ακίδα, ο φύλακας πρέπει να τοποθετηθεί στην κορυφή T_{lit} (περιπτώσεις 3,4 και 5 στο Σχήμα 4.10).

Μετά από τις παραπάνω μετακινήσεις, μπορούμε να δώσουμε μια απονομή αλήθειας στο στιγμιότυπο I του προβλήματος MAX-5-OCCURENCE-3SAT αν αναθέσουμε την τιμή TRUE σε μια μεταβλητή του I αν το αντίστοιχο περίγραμμα μεταβλητής έχει φύλακα τοποθετημένο στην κορυφή T_{var} . Αν ο φύλακας είναι τοποθετημένος στην κορυφή F_{var} τότε αναθέτουμε στη μεταβλητή του I την τιμή FALSE.

Παρατηρούμε ότι η μετακίνηση ενός φύλακα στην κορυφή F_{lit} ή T_{lit} ενός περιγράμματος λεκτήματος αυξάνει τον αριθμό των καλυπτόμενων πλευρών κατά τουλάχιστο 2 (είναι οι πλευρές \overline{ab} και \overline{bc} στο Σχήμα 4.1), αφού τόσες ακριβώς πλευρές του περιγράμματος δεν μπορεί να καλύπτονται από οποιοδήποτε άλλες κορυφές. Επίσης, η μετακίνηση ενός φύλακα στην κορυφή F_{var} ή T_{var} ενός περιγράμματος μεταβλητής, αυξάνει τον αριθμό των καλυπτόμενων πλευρών κατά τουλάχιστο 2 (είναι οι πλευρές \overline{eg} και \overline{ef} της ουράς στο Σχήμα 4.4), αφού τόσες ακριβώς πλευρές του περιγράμματος δεν μπορεί να καλύπτονται πλήρως από οποιοδήποτε άλλες κορυφές.

Κατά τη μετακίνηση των φυλάκων στα περιγράμματα λεκτημάτων, υπάρχει περίπτωση ενώ υπήρχαν δύο φύλακες στις κορυφές F_{lit} και T_{lit} , μετά τη μετακίνηση να έμεινε μόνο ένας φύλακας στην κορυφή F_{lit} . Τότε, μπορεί να μην καλύπτονται πια οι «κοντές» πλευρές του περιγράμματος πρότασης (Σχήμα 4.2), καλύπτονται όμως οι 2 πλευρές του ιδιαίτερου μέρους του περιγράμματος λεκτήματος που δεν μπορούν να καλυφθούν από οποιαδήποτε άλλη κορυφή.

Αν στο περίγραμμα λεκτήματος, μετακινήθηκε ένας φύλακας στην κορυφή F_{lit} από την κορυφή T_{lit} τότε, αν δεν υπάρχει φύλακας στην κορυφή T_{lit} σε άλλο περίγραμμα λεκτήματος της πρότασης, δεν καλύπτονται πια οι 8 «κοντές» πλευρές του περιγράμματος πρότασης, καλύπτονται όμως οι δύο πλευρές της FALSE ακίδας. Αν πριν τη μετακίνηση, η FALSE ακίδα καλύπτονταν από φύλακα στο περίγραμμα μεταβλητής, τότε, σύμφωνα με την μετακίνηση που περιγράψαμε, θα έπρεπε να μετακινηθεί φύλακας στην κορυφή T_{lit} και όχι στην F_{lit} . Άρα ο φύλακας που κάλυπτε τη FALSE ακίδα και ήταν τοποθετημένος στο περίγραμμα μεταβλητής V_1 , μετακινήθηκε σε άλλο περίγραμμα μεταβλητής V_2 , γιατί κάποιος άλλος φύλακας, στο V_1 , έβλεπε τις περισσότερες FALSE ακίδες.

Σε κάθε περίγραμμα μεταβλητής υπάρχουν το πολύ 5 FALSE ακίδες (μια μεταβλητή στο στιγμιότυπο του προβλήματος MAX-5-OCCURENCE-3SAT μπορεί να εμφανίζεται το πολύ σε 5 λεκτήματα), συνεπώς ο φύλακας που μετακινήθηκε σε άλλο περίγραμμα μεταβλητής, κάλυπτε στην προηγούμενη θέση του, το πολύ 2 FALSE ακίδες. Οι μετακινήσεις λοιπόν των φυλάκων μεταξύ των περιγραμμάτων μεταβλητών προκαλούν μετακινήσεις από την κορυφή T_{lit} στην κορυφή F_{lit} , σε δύο το πολύ περιγράμματα λεκτημάτων. Μετά λοιπόν την μετακίνηση μπορεί να μην φαίνονται το πολύ 16 «κοντές» ακμές από δύο περιγράμματα προτάσεων, φαίνονται όμως τουλάχιστο δύο ακμές από την κορυφή F_{lit} που δεν μπορούν να καλυφθούν από οποιαδήποτε άλλη κορυφή.

Τελικά, μετά από όλες τις παραπάνω μετακινήσεις, μόνο «κοντές» ακμές του πολυγώνου μπορεί να μην καλύπτονται από τις νέες θέσεις των φυλάκων. Καλύπτεται δηλαδή όλη η περίμετρος του πολυγώνου, εκτός ίσως από κάποια περιγράμματα προτάσεων. Αναθέτουμε την τιμή TRUE, σε μια variable του στιγμιότυπου I του προβλήματος MAX-5-OCCURENCE-3SAT, αν υπάρχει φύλακας στην κορυφή T_{var} του αντίστοιχου variable περιγράμματος, και την τιμή FALSE αν υπάρχει φύλακας στην κορυφή F_{var} . Αυτή η απονομή αλήθειας, στο στιγμιότυπο I , αφήνει μη-ικανοποιήσιμες τόσες ακριβώς προτάσεις, όσα ακριβώς περιγράμματα προτάσεων δεν καλύπτονται στο στιγμιότυπο I' . Αν συμβολίσουμε με $L(e_{short})$ το μεγαλύτερο μήκος από τις «κοντές» πλευρές του πολυγώνου και με L_c το μήκος του περιγράμματος πρότασης, έχουμε ότι αν στο στιγμιότυπο I' , από τις νέες θέσεις των φυλάκων, καλύπτεται μήκος

$$L(\partial P) - \epsilon m L_c \geq L(\partial P) - \epsilon m 8 L(e_{short}) = (1 - 8\epsilon \frac{L(e_{short})}{L(\partial P)} m) L(\partial P)$$

στην περίμετρο του P (δηλαδή δεν καλύπτονται ϵm περιγράμματα προτάσεων), τότε στο στιγμιότυπο I ικανοποιούνται $(1 - \epsilon)m$ προτάσεις (δηλαδή δεν ικανοποιούνται ϵm προτάσεις). Θέτουμε:

$$\epsilon' = 8\epsilon \frac{L(e_{short})}{L(\partial P)} \quad (4.2.1)$$

Οπότε ισχύει το ακόλουθο:

Λήμμα 4.2.2 Αν $OPT(I') \geq (1 - \epsilon' m) L(\partial P)$ τότε $OPT(I) \geq (1 - \epsilon) m$.

4.2.3 Η αναγωγή διατηρεί το χάσμα

Θεώρημα 4.2.1 Η αναγωγή ενός στιγμιότυπου του προβλήματος MAX-5-OCCURENCE-3SAT σε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD, όπως περιγράφεται στην παράγραφο 4.2, είναι αναγωγή διατήρησης χάσματος.

Απόδειξη: Από το λήμμα 4.2.1 και το αντιθετοαντίστροφο του λήμματος 4.2.2 έχουμε:

$$\begin{aligned} OPT(I) &= m && \rightarrow && OPT(I') &= L(\partial P) \\ OPT(I) &\leq (1 - \epsilon)m && \rightarrow && OPT(I') &\leq (1 - \epsilon'm)L(\partial P) \end{aligned}$$

Συνεπώς, η αναγωγή της παραγράφου 4.2 είναι αναγωγή διατήρησης χάσματος. \square

Στα [3] και [4] έχει αποδειχθεί το παρακάτω:

Θεώρημα 4.2.2 Το πρόβλημα απόφασης MAX-5-OCCURENCE-3SAT με εγγυημένες παραμέτρους τις $U(I) = m$ και $L(I) = (1 - \epsilon)m$ είναι NP-hard.

Από τα θεωρήματα 4.2.2 και 4.2.1 έχουμε ότι, εκτός αν $P = NP$, δεν μπορεί να υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD με λόγο απόδοσης:

$$R = \frac{(1 - \epsilon'm)L(\partial P)}{L(\partial P)} \quad (4.2.2)$$

Αν συμβολίσουμε με L_v το μεγαλύτερο μήκος από τα περιγράμματα μεταβλητών, με L_l το μήκος του περιγράμματος λεκτήματος, με L_s το μεγαλύτερο μήκος από τα περιγράμματα των ακίδων, με L_c το μήκος του περιγράμματος πρότασης και με L_r το μήκος των υπολοίπων πλευρών του πολυγώνου (επιπλέον περίγραμμα λεκτήματος και οι πλευρές του ορθογωνίου που ενώνουν τη μεριά των περιγραμμάτων προτάσεων με τη μεριά των περιγραμμάτων μεταβλητών, έχουμε:

$$L(\partial P) \leq 3mL_v + 3mL_l + 6mL_s + mL_c + L_r \leq m(3L_v + 3L_l + 6L_s + L_c + L_r) \quad (4.2.3)$$

Η σχέση 4.2.2 με χρήση της 4.2.3 και 4.2.1 γίνεται:

$$\begin{aligned} R &= 1 - 8\epsilon m \frac{L(e_{short})}{L(\partial P)} \\ &\leq 1 - 8\epsilon m \frac{L(e_{short})}{m(3L_v + 3L_l + 6L_s + L_c + L_r)} \\ &= 1 - 8\epsilon \frac{L(e_{short})}{3L_v + 3L_l + 6L_s + L_c + L_r} \\ &= 1 - \epsilon'' \end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι η αναγωγή της παραγράφου 4.2 είναι αναγωγή διατήρησης χάσματος και ότι το πρόβλημα απόφασης MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD με εγγυημένες παραμέτρους τις $U(I) = L(\partial P)$ και $L(I) = (1 - \epsilon'm)L(\partial P)$ είναι NP-hard να αποφασιστεί, η αλλιώς, εκτός αν $P = NP$ δεν μπορεί να υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD με λόγο απόδοσης $1 - \epsilon'' + \delta$. Ισχύει δηλαδή το ακόλουθο ([4]):

Θεώρημα 4.2.3 Το πρόβλημα MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD για πολύγωνα χωρίς τρύπες είναι APX-hard.

Στο Κεφάλαιο 3 ο αλγόριθμος 2.1 προσεγγίζει, σε πολυωνυμικό χρόνο, με σταθερό λόγο απόδοσης 0.632, τη βέλτιστη λύση για το πρόβλημα MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD. Συνεπώς το πρόβλημα MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD ανήκει στην κλάση APX και από το θεώρημα 4.2.3 έχουμε:

Θεώρημα 4.2.4 Το πρόβλημα MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD για πολύγωνα χωρίς τρύπες είναι APX-complete.

4.3 Περισσότερα αποτελέσματα μη προσέγγισης

Η αναγωγή διατήρησης χάσματος της παραγράφου 4.2 μπορεί να εφαρμοστεί, με τις κατάλληλες τροποποιήσεις, για όλα τα προβλήματα μεγιστοποίησης που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3.

4.3.1 Φύλαξη μέγιστου εμβαδού

Χρησιμοποιούμε αυτούσια την αναγωγή της παραγράφου 4.2. Παρατηρούμε στα διάφορα σχήματα (4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.7) ότι οι φύλακες κορυφές, με τον τρόπο που τοποθετούνται στις κορυφές του πολυγώνου (και σύμφωνα με τον τρόπο κατασκευής του πολυγώνου όπως περιγράφεται στην παράγραφο 4.2.1) καλύπτουν, παράλληλα με την περίμετρο, και όλο το εσωτερικό του πολυγώνου. Οι μόνες περιοχές που μπορεί να μένουν ακάλυπτες είναι κάποιες περιοχές μικρού εμβαδού, αυτές που στην περιμέτρό τους έχουν μια από τις «κοντές» πλευρές των περιγραμμάτων των προτάσεων. Η ανάλυση ισχύει αυτούσια συνεπώς:

Πρόταση 4.3.1 Το πρόβλημα MAXIMUM AREA VERTEX GUARD είναι APX-complete.

4.3.2 Φύλαξη μέγιστης αξίας

Η αλλαγή που χρειάζεται στην αναγωγή της παραγράφου 4.2 είναι ότι στην κατασκευή του πολυγώνου χρειάζεται να αναθέσουμε βάρη στις πλευρές του πολυγώνου. Αυτό γίνεται πολύ εύκολα, αναθέτοντας σε όλες τις πλευρές εκτός από τις «κοντές», βάρος 8. Στις «κοντές» πλευρές αναθέτουμε βάρος 1. Η ανάλυση ισχύει αυτούσια αν αντικαταστήσουμε την έννοια «μήκος» με την έννοια «βάρος», συνεπώς:

Πρόταση 4.3.2 Το πρόβλημα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD είναι APX-complete.

Φύλαξη μέγιστης αξίας με επίβλεψη

Στην παράγραφο 3.3.3, επισημάναμε ότι η παραλλαγή MAXIMUM VALUE WATCHING VERTEX GUARD του προβλήματος μεγιστοποίησης της καλυπτόμενης αξίας, είναι ρεαλιστικότερη, γιατί η απαίτηση είναι οι πίνακες να επιβλέπονται αντί να καλύπτονται εξ ολοκλήρου. Μια επιπλέον κατασκευή που χρειάζεται στην αναγωγή της παραγράφου 4.2 είναι αυτή της διαμέρισης ορατότητας της περιμέτρου του πολυγώνου ($\mathcal{V}(\partial P)$). Κάθε πλευρά σε ένα

περίγραμμα πρότασης χωρίζεται σε $O(n)$ τμήματα που μπορούν να επιβλέπονται μόνο από κορυφές των περιγραμμάτων μεταβλητών. Αν δ είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, τέτοιος ώστε ο αριθμός των τμημάτων της διαμέρισης ορατότητας στις «κοντές» πλευρές είναι το πολύ δn , θέτουμε βάρος 1 στις «κοντές» πλευρές και βάρος δn σε όλες τις άλλες. Η ανάλυση ισχύει τότε αυτούσια αν αντικαταστήσουμε την έννοια «μήκος» με την έννοια «βάρος», συνεπώς:

Πρόταση 4.3.3 Το πρόβλημα MAXIMUM VALUE WATCHING VERTEX GUARD είναι APX-complete.

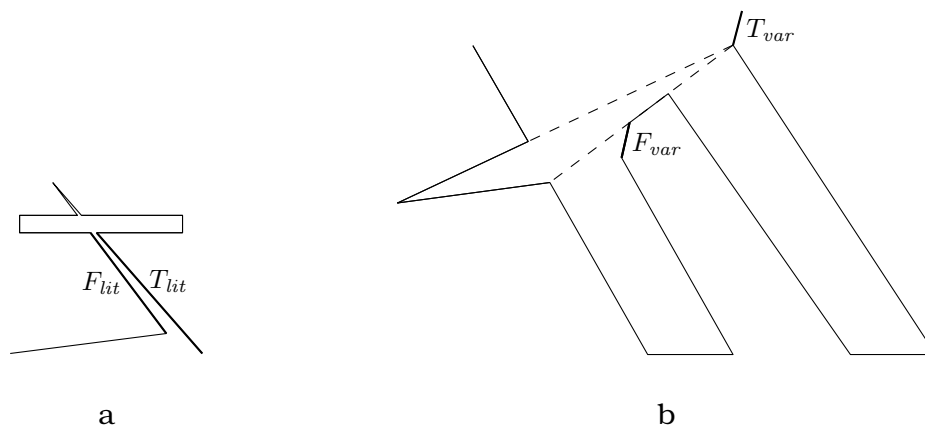
4.3.3 Φύλαξη μέγιστης αξίας με ταυτόχρονη τοποθέτηση

Έχουμε και πάλι την ίδια κατασκευή και τοποθετούμε σε κάθε πλευρά ένα «πίνακα» με μήκος όσο το μήκος της πλευράς του πολυγώνου. Οι «κοντές» πλευρές θα έχουν «μικρούς» και «φθηνούς» πίνακες: αναθέτουμε βάρος 1 στους «μικρούς» πίνακες και βάρος 8 σε κάθε άλλο πίνακα. Έχουμε:

Πρόταση 4.3.4 Το πρόβλημα MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD WITH PAINTING PLACEMENT είναι APX-complete.

4.3.4 Φύλακες πλευρές

Στην περίπτωση των φυλάκων πλευρών πρέπει να τροποποιήσουμε τα περιγράμματα λεκτημάτων και τα περιγράμματα μεταβλητών όπως φαίνονται στα Σχήματα 4.11.α και 4.11.β. Για να καλυφθεί πλήρως ένα περίγραμμα λεκτήματος πρέπει να τοποθετηθεί ένας φύλακας πλευρά, είτε στην πλευρά F_{lit} είτε στην πλευρά T_{lit} . Στο περίγραμμα μεταβλητής, ένας φύλακας πλευρά στην πλευρά F_{var} ή στην πλευρά T_{var} καλύπτει το περίγραμμα της ουράς μαζί με το αντίστοιχο πόδι.



Σχήμα 4.11: Για την περίπτωση των φυλάκων πλευρών: α) Περίγραμμα λεκτήματος. β) Περίγραμμα μεταβλητής.

Θεώρημα 4.3.1 Όλα τα προβλήματα μεγιστοποίησης του Κεφαλαίου 3 με φύλακες πλευρές είναι APX-complete

4.3.5 Φύλαξη με προυπολογισμό

Όλα τα προηγούμενα προβλήματα είναι ειδικές περιπτώσεις των προβλημάτων, όπου κάθε υποψήφια θέση φύλακα έχει κόστος 1, συνεπώς

Θεώρημα 4.3.2 *Όλα τα προβλήματα μεγιστοποίησης του Κεφαλαίου 3 με κόστος στις θέσεις των φυλάκων και με δεδομένο προϋπολογισμό είναι APX-complete*

4.3.6 Πολύγωνα με τρύπες

Όλα τα παραπάνω προβλήματα δεν είναι ευκολότερα όταν εξετάζονται πολύγωνα με τρύπες. Ένα πολύγωνο με τρύπες είναι μια χρήσιμη αναπαράσταση της πραγματικότητας, όπου οι τρύπες αναπαριστούν εμπόδια. Οι πιθανές θέσεις των φυλάκων επεκτείνονται βέβαια και στις περιμέτρους από τις τρύπες. Υπενθυμίζουμε ότι για τα προβλήματα MINIMUM VERTEX/EDGE GUARD WITHOUT HOLES για πολύγωνα με τρύπες, δεν μπορεί να υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικός αλγόριθμος με λόγο απόδοσης $\frac{1-\epsilon}{12} \ln n$ για κάθε $\epsilon > 0$, εκτός αν $NP \subseteq TIME(n^{O(\log \log n)})$ ([24, 25]).

Κεφάλαιο 5

Επίλογος

5.1 Φύλαξη από το εσωτερικό του πολυγώνου

Στα προηγούμενα κεφάλαια περιγράψαμε τρόπους φύλαξης των πολυγώνων από τις κορυφές και τις πλευρές τους. Γενικά στη βιβλιογραφία είναι ελάχιστα τα αποτελέσματα για την τοποθέτηση των φυλάκων στο εσωτερικό του πολυγώνου και μόνο πρόσφατα δημοσιεύθηκαν σχετικά άρθρα ([13], [47], [22]). Εκτός από το [47] στα υπόλοιπα θεωρούν τις πιθανές θέσεις των φυλάκων να βρίσκονται σε ένα οσοδήποτε πυκνό πλέγμα (grid) και τα αποτελέσματά τους είναι πιθανοτικά. Στην παράγραφο αυτή θα διερευνήσουμε παραπάνω τη διαμέριση του εσωτερικού του πολυγώνου $\mathcal{V}(P)$ και θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τις θέσεις των φυλάκων με περισσότερο φυσικό τρόπο.

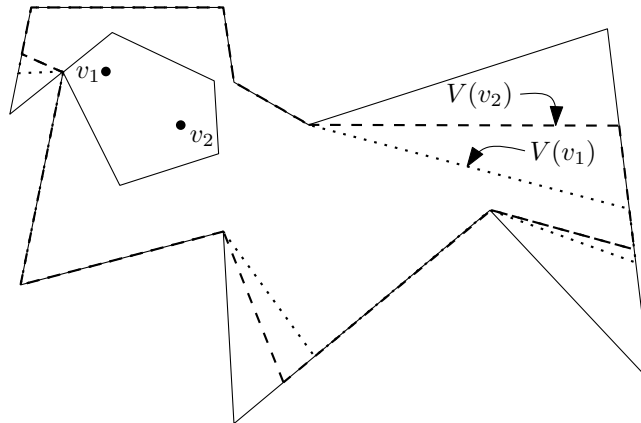
Στο [8] και στο [2] αποδεικνύουν το ακόλουθο:

Λήμμα 5.1.1 *Έστω p και q δύο σημεία μέσα σε ένα απλό πολύγωνο P που δεν ανήκουν σε κάποιο κρίσιμο περιορισμό του P . Τα σημεία έχουν πολύγωνα ορατότητας με διαφορετικές συνδυαστικές αναπαραστάσεις αν και μόνο αν βρίσκονται εκατέρωθεν κάποιου κρίσιμου περιορισμού.*

Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία που ανήκουν στο ίδιο χωρίο της $\mathcal{V}(P)$ έχουν πολύγωνα ορατότητας με την ίδια συνδυαστική αναπαράσταση (Σχήμα 5.1). Έχουμε λοιπόν ότι η διαμέριση ορατότητας του εσωτερικού ενός πολυγώνου δημιουργεί μια ενδιαφέρουσα τοπικότητα (locality) στα σημεία που ανήκουν στα διάφορα χωρία που ορίζει η διαμέριση: όλα τα σημεία ενός χωρίου* της $\mathcal{V}(P)$ έχουν «περίπου το ίδιο» πολύγωνο ορατότητας. Στην προσπάθεια ορισμού ενός φυσικού τρόπου τοποθέτησης φυλάκων στο εσωτερικό του πολυγώνου, το να επιλέξουμε ένα τυχαίο σημείο από κάθε χωρίο σαν μια καλώς ορισμένη θέση φύλακα στο εσωτερικό του πολυγώνου, μοιάζει να είναι μια λογική επιλογή. Εξάλλου η επιλογή αυτή ενισχύεται και από τις παρατηρήσεις που ακολουθούν.

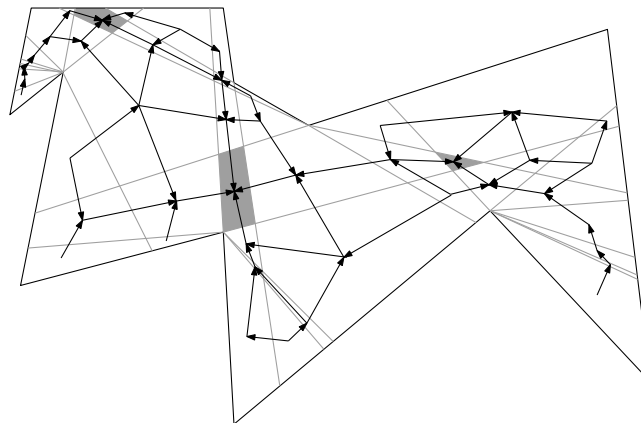
Το δυϊκό γράφημα της υποδιαίρεσης $\mathcal{V}(P)$ έχει κορυφές τα χωρία της υποδιαίρεσης και δύο κορυφές ενώνονται με μια ακμή αν τα αντίστοιχα χωρία είναι γειτονικά στην υποδιαίρεση. Η κατασκευή αυτή του δυϊκού γραφήματος γίνεται και στο [8] σε ένα άλλο πλαίσιο προβλημάτων. Στο [8] αποδεικνύουν ότι οι συνδυαστικές αναπαραστάσεις των πολυγώνων ορατότητας, σημείων που ανήκουν σε γειτονικά χωρία της υποδιαίρεσης,

*Το χωρίο δεν περιέχει την περίμετρό του.



Σχήμα 5.1: Τα σημεία v_1, v_2 έχουν συνδυαστικά ισοδύναμα πολύγωνα ορατότητας.

διαφέρουν μόνο κατά μια κορυφή. Αυτό σημαίνει ότι είναι καλώς ορισμένη η κατεύθυνση κατά την οποία αν διασχίσουμε στο εσωτερικό του πολυγώνου ένα κρίσιμο περιορισμό, κερδίζουμε ή χάνουμε την ορατότητα προς μια κορυφή. Στο [8] κατευθύνουν τις ακμές του δυϊκού γραφήματος προς το χωρίο όπου η ορατότητα μειώνεται με σκοπό να καταλήξουν στα χωρία με τη μικρότερη ορατότητα. Στο Σχήμα 5.2 έχουμε δώσει στις ακμές την ακριβώς αντίθετη κατεύθυνση, αυτή δηλαδή προς τα χωρία με τη μεγαλύτερη ορατότητα.

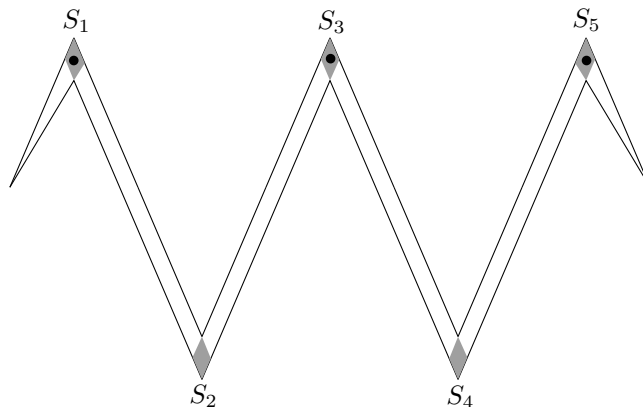


Σχήμα 5.2: Το δυϊκό γράφημα της υποδιαίρεσης ορατότητας του εσωτερικού του πολυγώνου.

Παρατηρούμε ότι κάποια χωρία της $\mathcal{V}(P)$ (φαίνονται σκιασμένα στο Σχήμα 5.2) είναι «καταβόθρες» (sinks) για το κατευθυνόμενο γράφημα. Αν τοποθετήσουμε ένα φύλακα στο εσωτερικό κάθε μιας από αυτές τις τρεις περιοχές τότε το πολύγωνο του σχήματος φυλάσσεται ολόκληρο από φύλακες που έχουν τοποθετηθεί στο εσωτερικό του πολυγώνου με ένα καλά ορισμένο τρόπο. Στην περίπτωση του σχήματος 5.2 όπου έχουμε ένα μονότονο πολύγωνο, μπορούμε να κάνουμε ακόμα καλύτερα και να τοποθετήσουμε ακριβώς το βέλτιστο αριθμό φυλάκων.

Αν κατά την κατεύθυνση μονοτονίας ονομάσουμε τα χωρία «καταβόθρες» C_1, C_2, C_3 και τα σημεία εντός των χωρίων όπου τοποθετούμε φύλακες p_1, p_2 και p_3 , έχουμε για τα πολύγωνα ορατότητας: $V(p_2) \subset V(p_1) \cup V(p_3)$. Είναι σύνηθες για τα μονότονα πολύγωνα

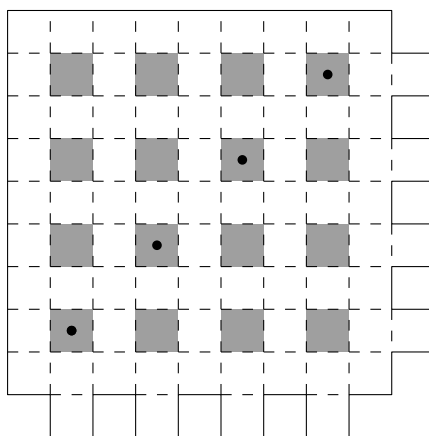
να εξετάζονται κατά την κατεύθυνση μονοτονίας από τα αριστερά προς τα δεξιά. Είναι φανερό ότι δεν χρειάζεται να τοποθετηθεί φύλακας στο σημείο p_2 αφού οι φύλακες στα σημεία p_1 και p_3 καλύπτουν εκτός των άλλων και όλα τα σημεία που καλύπτει ο φύλακας στο σημείο p_2 .



Σχήμα 5.3: Ένα μονότονο πολύγωνο με $\Theta(n)$ sinks.

Η χειρότερη περίπτωση για τον αριθμό των sinks σε ένα μονότονο πολύγωνο φαίνεται στο Σχήμα 5.3. Με τη συλλογιστική της προηγούμενης παραγράφου αρκούν φύλακες μόνο στα S_1 , S_3 και S_5 αφού τα πολύγωνα ορατότητας των φυλάκων που θα τοποθετηθούν στα S_2 και S_4 είναι υποσύνολα των πολυγώνων ορατότητας των φυλάκων στα S_1 , S_3 και S_5 . Στο [8] αποδεικνύουν το επόμενο:

Θεώρημα 5.1.1 Η υποδιαίρεση ορατότητας $\mathcal{V}(P)$ ενός απλού πολυγώνου χωρίς τρύπες έχει $O(n^2)$ χωρία **ελάχιστης ορατότητας**[†] και υπάρχουν πολυγώνια με n κορυφές που έχουν $\Theta(n^2)$ χωρία ελάχιστης ορατότητας.



Σχήμα 5.4: Ένα ορθογώνιο πολύγωνο με $\Theta(n)$ sinks.

Αν παρατηρήσουμε το Σχήμα 5.4 βλέπουμε ένα παράδειγμα για τη χειρότερη περίπτωση του θεωρήματος 5.1.1. Από κάθε περιοχή που είναι γραμμοσκιασμένη αν μετακινηθούμε προς μια γειτονική περιοχή, είναι εμφανές ότι μετακινούμαστε προς μια περιοχή

[†]Τα sinks στο [8] έχουν την έννοια των περιοχών του πολυγώνου με την ελάχιστη ορατότητα.



Σχήμα 5.5: Ένα τρέξιμο του vispack που με δύο φύλακες δίνει κάλυψη 87% του βέλτιστου.

που τα σημεία της έχουν λιγότερη ορατότητα. Αν όμως κάνουμε την αντίθετη μετακίνηση τότε στις γραμμοσκιασμένες περιοχές έχουμε σημεία με τη μέγιστη δυνατή ορατότητα. Συνεπώς ισχύει το ακόλουθο :

Πόρισμα 5.1.1 Η υποδιαίρεση ορατότητας $\mathcal{V}(P)$ ενός απλού πολυγώνου χωρίς τρύπες έχει $O(n)$ χωρία **μέγιστης ορατότητας**[‡] και υπάρχουν πολύγωνα με n κορυφές που έχουν $\Theta(n)$ χωρία μέγιστης ορατότητας.

Ενδιαφέρον πρόβλημα είναι η ανάπτυξη μιας συλλογιστικής που θα μας οδηγήσει στην τοποθέτηση των 4 φυλάκων, ή μια προσέγγιση του αριθμού αυτού των φυλάκων, μέσα στα sinks του πολυγώνου του σχήματος 5.4

5.2 Υλοποιήσεις

Στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας [18] στο τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Αθηνών, αναπτύχθηκε η βιβλιοθήκη vispack που χρησιμοποιεί και επεκτείνει τη βιβλιοθήκη CGAL (<http://www.cgal.org>). Στη βιβλιοθήκη vispack έγινε προσπάθεια να υλοποιηθούν οι δομές των υποδιαιρέσεων ορατότητας του κεφαλαίου 2 και μέχρι στιγμής υπάρχει η υλοποίηση της διαμέρισης της περιμέτρου.

Σαν εφαρμογή της δομής της διαμέρισης της περιμέτρου υλοποιήθηκε ο αλγόριθμος 3.2, που υπολογίζει μια προσεγγιστική λύση με σταθερό παράγοντα προσέγγισης 0.632, του προβλήματος τοποθέτησης k φυλάκων κορυφών έτσι ώστε να καλύπτουν ένα μέγιστο μήκος στην περίμετρο. Παράλληλα υλοποιήθηκε και ένας brute force αλγόριθμος που υπολογίζει τη βέλτιστη τοποθέτηση των k φυλάκων.

Το ενδιαφέρον αποτέλεσμα αυτής της υλοποίησης είναι ότι με δυσκολία κατασκευάσαμε πολύγωνα που ο αλγόριθμος 3.2 κάλυπτε κάτι χειρότερο από το 90% του μέρους της περιμέτρου που καλύπτουν οι φύλακες στη βέλτιστη τοποθέτηση. Στο Σχήμα 5.5 φαίνεται μια περίπτωση όπου οι κόκκινοι φύλακες, τοποθετημένοι από τον αλγόριθμο

[‡]Τα χωρία αυτά που προηγουμένως ονομάσαμε «καταβόθρες» ορατότητας (visibility sinks).

3.2 καλύπτουν το 87% της περιμέτρου που καλύπτουν οι κίτρινοι φύλακες που είναι τοποθετημένοι στις βέλτιστες θέσεις. Πρακτικά λοιπόν, ο αλγόριθμος 3.2 συμπεριφέρεται κοντά στο βέλτιστο και η εικασία μας είναι ότι το ίδιο θα συμβαίνει και με τους άλλους αλγορίθμους του Κεφαλαίου 3. Η βιβλιοθήκη `vispack` μαζί με την βιβλιοθήκη `CGAL` είναι πολύτιμα εργαλεία τόσο για την εξαγωγή πρακτικών συμπερασμάτων, όσο και για την απόκτηση ενόρασης για τα προβλήματα που είναι πολύ δύσκολο να σχεδιάσουμε τα στιγμιότυπά τους με το χέρι.

5.3 Συμπεράσματα

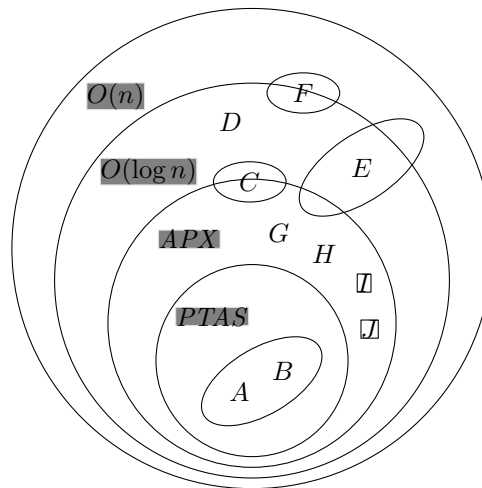
Στη διατριβή αυτή παρουσιάσαμε τις υποδιαιρέσεις ορατότητας της περιμέτρου και του εσωτερικού του πολυγώνου. Οι υποδιαιρέσεις αυτές, διακριτοποιούν ως προς την ορατότητα την περίμετρο και το εσωτερικό του πολυγώνου και τις χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη των αποτελεσμάτων NP-hardness των προβλημάτων μεγιστοποίησης που εξετάσαμε στη συνέχεια. Παρουσιάσαμε και αναλύσαμε όλες τις ενδιαφέρουσες γεωμετρικές ιδιότητες αυτών των διαμερίσεων και εξετάσαμε στην παράγραφο 5.1 την πιθανή χρήση τους για την τοποθέτηση γενικών φυλάκων στο εσωτερικό του πολυγώνου.

Αφού εντοπίσαμε τις ιδιαιτερότητες της έννοιας της φύλαξης, παρουσιάσαμε μια γενική μέθοδο αντιμετώπισης των προβλημάτων, όπου υπάρχουν διάφορες πιθανές θέσεις για την τοποθέτηση ενός δεδομένου αριθμού από k φύλακες, και μια απαίτηση για μεγιστοποίηση της κάλυψης μιας συνάρτησης (μήκος, εμβαδόν, αξία κτλ) που επιδρά σε κάποια σύνολα σημείων μέσα στο πολύγωνο. Εφαρμόσαμε τη μέθοδο στο πρόβλημα φύλαξης μέγιστου μήκους από την περίμετρο, μέγιστου εμβαδού από το εσωτερικό και μέγιστης αξίας από την περίμετρο ενός πολυγώνου. Εξετάσαμε επίσης και τη περίπτωση όπου η απαίτηση της κάλυψης είναι η επίβλεψη (μερική κάλυψη) αντί της πλήρους κάλυψης. Για όλες τις περιπτώσεις πήραμε πολυωνυμικού χρόνου αλγορίθμους που πετυχαίνουν σταθερούς παράγοντες προσέγγισης.

Στη συνέχεια εξετάσαμε την περίπτωση που η γενική μέθοδος έχει να κάνει δύσκολες επιλογές, ο υπολογισμός δηλαδή της συνάρτησης που επιδρά στα σύνολα σημείων του πολυγώνου είναι από μόνο του ένα NP-hard πρόβλημα. Διαμορφώσαμε κατάλληλα τη μέθοδο και την εφαρμόσαμε στο πρόβλημα κάλυψης μέγιστης αξίας με παράμετρο την τοποθέτηση των τμημάτων με αξία στην περίμετρο του πολυγώνου. Η ύπαρξη πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικού σχήματος για το πρόβλημα `MULTIPLE KNAPSACK` σε συνδυασμό με τη διαμορφωμένη γενική μέθοδο μας έδωσαν πάλι ένα αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου που πετυχαίνει σταθερό παράγοντα προσέγγισης.

Εξετάσαμε τις γενικεύσεις των προβλημάτων φύλαξης, όπου υπάρχει κόστος που πρέπει να πληρωθεί όταν τοποθετείται φύλακας σε κάποια από τις πιθανές θέσεις και υπάρχει ένας προϋπολογισμός που δεν μπορούμε να υπερβούμε. Διαμορφώσαμε κατάλληλα τη γενική μέθοδο και την εφαρμόσαμε στις περιπτώσεις κάλυψης μέγιστου μήκους, μέγιστης αξίας και μέγιστης αξίας με παράμετρο την τοποθέτηση των τμημάτων με αξία στην περίμετρο του πολυγώνου.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μετά από ένα πρώτο αποτέλεσμα μη ύπαρξης πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικού σχήματος για τα προβλήματα κάλυψης μέγιστης αξίας παρουσιάσαμε μια αναγωγή διατήρησης χάσματος από το πρόβλημα `MAX-5-OCCURENCE-3SAT` στο πρόβλημα μεγιστοποίησης του καλυπτόμενου μήκους στην περίμετρο από ένα σύνολο



Σχήμα 5.6: Το σχήμα 1.2 συμπληρωμένο με τα αποτελέσματα της διατριβής. Σχετικός είναι ο πίνακας 5.1.

A	ONE POINT GUARD WITHOUT HOLES	[48]
B	ONE POINT GUARD WITH HOLES	[48]
C	MINIMUM VERTEX/EDGE GUARD WITHOUT HOLES	[32, 25, 24]
D	MINIMUM VERTEX/EDGE GUARD WITH HOLES	[32, 25, 24]
E	MINIMUM POINT GUARD WITHOUT HOLES	[25, 24]
F	MINIMUM POINT GUARD WITH HOLES	[25, 24]
G	MAXIMUM LENGTH/AREA VERTEX/EDGE GUARD WITHOUT HOLES	[30], [26]
H	MAXIMUM LENGTH/AREA VERTEX/EDGE GUARD WITH HOLES	[30], [26]
I	MAXIMUM LENGTH/AREA POINT GUARD WITHOUT HOLES	[13]
J	MAXIMUM LENGTH/AREA POINT GUARD WITH HOLES	[13]

Πίνακας 5.1: Ο Πίνακας 1.1 συμπληρωμένος με τα αποτελέσματα της διατριβής. Σχετικό είναι το πλήρες σχήμα 5.6.

λο k φυλάκων τοποθετημένων στις κορυφές του πολυγώνου. Η αναγωγή παρουσιάστηκε διεξοδικά, δίνοντας ένα τρόπο κατασκευής πολυγώνου και στη συνέχεια αναλύσαμε το μετασχηματισμός των εφικτών λύσεων μεταξύ των δύο προβλημάτων. Τελικά δείξαμε ότι η αναγωγή διατηρεί το χάσμα, δηλαδή ότι το πρόβλημα μεγιστοποίησης του μήκους είναι APX-hard. Η αναγωγή αυτή, με τις κατάλληλες τροποποιήσεις, εφαρμόστηκε σε όλα τα προβλήματα μεγιστοποίησης του τρίτου κεφαλαίου με αποτέλεσμα όλα αυτά τα προβλήματα να χαρακτηριστούν APX-hard. Αυτά τα αποτελέσματα, σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα του τρίτου κεφαλαίου, έδειξαν ότι όλα τα προβλήματα μεγιστοποίησης είναι APX-complete.

Η συνεισφορά της διατριβής φαίνεται χαρακτηριστικά στο Σχήμα 5.6 όπου τα προβλήματα G και H (και των παρεμφερών προς αυτά) του πίνακα 5.1 τοποθετήθηκαν οριστικά στην κλάση APX σαν complete προβλήματα της κλάσης αυτής.

Διάφορα ανοικτά προβλήματα για μελλοντική έρευνα είναι τα παρακάτω:

- Μελέτη και αξιοποίηση των υποδιαίρέσεων ορατότητας, στην κατεύθυνση της διατύπωσης των πρώτων αποτελεσμάτων για τη φύλαξη πολυγώνων με φύλακες τοποθε-

τημένους, με ντετερμινιστικό τρόπο, στο εσωτερικό του πολυγώνου.

- Διερεύνηση της προσεγγισιμότητας των προβλημάτων του Κεφαλαίου 3 με χρήση γενικών φυλάκων, τοποθετημένων στο εσωτερικό του πολυγώνου.
- Εξακρίβωση των πρακτικών αποτελεσμάτων για την χαλαρότητα των σταθερών παραγόντων προσέγγισης των αλγορίθμων του Κεφαλαίου 3. Αλλιώς, εύρεση «σφιχτών παραδειγμάτων» για τους αλγόριθμους που προτάθηκαν.
- Διατύπωση αποτελεσμάτων ισχυρής βελτιστότητας με κάποια άλλη προσέγγιση (αξιοποίηση της υποδιαίρεσης ορατότητας του εσωτερικού).
- Βέλτιστη κάλυψη αντικειμένων (απλά πολύγωνα χωρίς τρύπες) με αξία στο εσωτερικό του πολυγώνου, ταυτόχρονα με την τοποθέτησή τους.
- Διατύπωση προσεγγιστικών αλγορίθμων για τις παραλλαγές του προβλήματος ελαχιστοποίησης των γενικών φυλάκων (αξιοποίηση της υποδιαίρεσης ορατότητας του εσωτερικού).

Ευρετήριο

- ακίδες, 63
- αλφάβητο, 5
- αμοιβαία ορατά, 21
- αναγνωρίζεται, 5
- αναγωγή διατήρησης χάσματος, 12
- απλό πολύγωνο χωρίς τρύπες, 20
- απλό πολύγωνο με τρύπες, 21
- αποδέχεται, 5
- απορρίπτει, 5
- βλέπει, 21
- βλέπει ασθενώς, 21
- χάσμα, 11
- χορδή, 22
- διαγώνιος, 22
- διαμέριση ορατότητας, 24
- εφαπτόμενη, 23
- επίπεδη υποδιαίρεση, 24
- επιτηρεί, 21
- γενικός φύλακας, 32
- γλώσσα, 5
- καλύπτει, 21
- κανονική συζευκτική μορφή, 62
- κατάσταση αρχής, 5
- καταστάσεις τέλους, 5
- κατηγορήματα ορατότητας, 21
- κρίσιμος περιορισμός, 23
- λεκτήματα, 62
- μεταβλητή, 62
- ναι-στιγμιότυπα, 4
- ουρά, 62
- φύλακας ακμή, 32
- φύλακας κορυφή, 32
- πόδια, 63
- παράθυρα, 22
- περίγραμμα λεκτήματος, 62
- περίγραμμα μεταβλητής, 62
- περίγραμμα πρότασης, 62
- περίμετρος, 20
- περιορισμός, 23
- πλήρες πολυωνυμικό προσεγγιστικό σχήμα, 10
- πολύγωνο ορατότητας, 13, 22
- πολυγωνική αλυσίδα, 20
- πολυωνυμικού χρόνου, 6
- πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα, 10
- πρόταση, 62
- προβλήματα απόφασης, 4
- σχήμα κωδικοποίησης, 5
- στιγμιότυπα, 4
- συνδυαστικά ισοδύναμα, 23
- συνδυαστική αναπαράσταση, 22
- σύνολο $\mathcal{V}(\partial P)(v)$, 26
- τυπικές γλώσσες, 4
- BUDGETED MAXIMUM LENGTH EDGE GUARD, 36
- BUDGETED MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD, 36
- BUDGETED MAXIMUM VALUE EDGE GUARD, 36
- BUDGETED MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD, 36
- BUDGETED MAXIMUM VALUE WATCHING EDGE GUARD, 36
- BUDGETED MAXIMUM VALUE WATCHING VERTEX GUARD, 36
- MAXIMUM AREA EDGE GUARD, 34
- MAXIMUM AREA GENERAL GUARD, 34
- MAXIMUM AREA VERTEX GUARD, 34

- MINIMUM EDGE GUARD, 33
- MINIMUM EDGE GUARD FOR BOUNDARY, 34
- MAX-5-OCCURENCE-3SAT, 62
- MINIMUM GENERAL GUARD, 34
- MINIMUM GENERAL GUARD FOR BOUNDARY, 34
- MAXIMUM LENGTH EDGE GUARD, 34
- MAXIMUM LENGTH GENERAL GUARD, 34
- MAXIMUM LENGTH VERTEX GUARD, 34
- MAXIMUM VALUE EDGE GUARD, 35
- MAXIMUM VALUE EDGE GUARD WITH PAINTING PLACEMENT, 35
- MINIMUM VERTEX GUARD, 33
- MINIMUM VERTEX GUARD FOR BOUNDARY, 34
- MAXIMUM VALUE GENERAL GUARD, 35
- MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD, 35
- MAXIMUM VALUE VERTEX GUARD WITH PAINTING PLACEMENT, 35
- MAXIMUM VALUE WATCHING EDGE GUARD, 35
- MAXIMUM VALUE WATCHING GENERAL GUARD, 35
- MAXIMUM VALUE WATCHING VERTEX GUARD, 35
- NP-completeness, 4
- NP-πληρότητα, 4
- NP-complete, 7
- NP-hard, 7
- accepts, 5
- art gallery problem, 13
- boundary, 20
- chord, 22
- clause, 62
- combinatorial representation, 22
- combinatorially equivalent, 23
- conjunctive normal form, 62
- constraint, 23
- critical constraint, 23
- decision problems, 4
- diagonal, 22
- edge guard, 32
- encoding scheme, 5
- end states, 5
- formal languages, 4
- fully polynomial time approximation scheme, 10
- gap preserving reduction, 12
- gap, 11
- general guard, 32
- greedy, 37
- instances, 4
- language, 5
- legs, 63
- literals, 62
- mutually visible, 21
- oversees, 21
- planar subdivision, 24
- polygonal chain, 20
- polynomial time approximation scheme, 10
- polynomial time, 6
- recognized, 5
- rejects, 5
- sees, 21
- simple polygon with holes, 21
- simple polygon without holes, 20
- spikes, 63
- star-shaped, 22
- start state, 5
- tail, 63
- tangent, 23
- variable, 62
- vertex guard, 32
- visibility decomposition, 24
- visibility polygon, 13, 22
- visibility predicates, 21
- watches, 21
- weakly sees, 21
- windows, 22
- yes-instances, 4

Βιβλιογραφία

- [1] A. Aggarwall. *The art gallery problem: Its variations, applications, and algorithmic aspects*. PhD thesis, Dept. of Comput. Sci., Johns Hopkins University, 1984.
- [2] B. Aronov, L. J. Guibas, M. Teichmann, and L. Zhang. Visibility queries and maintenance in simple polygons. *Discrete & Computational Geometry*, 27(4):461–483, 2002.
- [3] S. Arora. *Probabilistic Checking of Proofs and Hardness of Approximation Problems*. PhD thesis, Princeton University, 1994.
- [4] S. Arora and C. Lund. Hardness of approximations. In *Approximation Algorithms for NP-hard Problems*, PWS Publishing Company, 1997. 1997.
- [5] P. Belleville. Computing two-covers of simple polygons. Master’s thesis, McGill University, 1991.
- [6] J. L. Bentley and T. Ottmann. Algorithms for reporting and counting geometric intersections. *IEEE Trans. on Computers*, C-28(9):643–647, September 1979.
- [7] I. Bjorling-Sachs. *Variations on the Art Gallery Theorem*. PhD thesis, Rutgers University, 1993.
- [8] P. Bose, A. Lubiw, and J. I. Munro. Efficient visibility queries in simple polygons. *Comput. Geom.*, 23(3):313–335, 2002.
- [9] B. Brodén, M. Hammar, and B. Nilsson. Guarding lines and 2-link polygons is apx-hard. In *CCCG*, pages 45–48, 2001.
- [10] S. Carlsson and H. Jonsson. Guarding a treasury. In *CCCG*, pages 85–90, 1993.
- [11] C. Chekuri and S. Khanna. A polynomial time approximation scheme for the multiple knapsack problem. *SICOMP: SIAM Journal on Computing*, 35, 2006.
- [12] D. Z. Chen, V. Estivill-Castro, and J. Urrutia. Optimal guarding of polygons and monotone chains (extended abstract).
- [13] O. Cheong, A. Efrat, and S. Har-Peled. On finding a guard that sees most and a shop that sells most. In J. Ian Munro, editor, *SODA*, pages 1098–1107. SIAM, 2004.

- [14] O. Cheong and R. van Oostrum. The visibility region of points in a simple polygon. In *Proceedings of the Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG-99)*, pages 87–90, August 15–18 1999.
- [15] V. Chvátal. A combinatorial theorem in plane geometry. *J. Comb. Theory Series B*, 18:39–41, 1975.
- [16] K-Y. Chwa, B-C. Jo, C. Knauer, E. Moet, R. van Oostrum, and C-S. Shin. Guarding art galleries by guarding witnesses. *Int. J. Comput. Geometry Appl*, 16(2-3):205–226, 2006.
- [17] S. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. In *Conference Record of Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 151–158, New York, 1971. ACM.
- [18] T. Daskalakis. Vispack: Efficient visibility computations in cgal. Technical report, University of Athens, Department of Informatics and Telecommunications, 2007.
- [19] M. de Berg, M. van Krefeld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer, 2002.
- [20] L. L. Deneen and S. Joshi. Treasures in an art gallery. In *Proc. 4th Canad. Conf. Comput. Geom.*, pages 17–22, 1992.
- [21] A. Efrat and S. Har-Peled. Locating guards in art galleries. In *2nd IFIP International Conference on Theoretical Computer Science*, 2002.
- [22] A. Efrat and S. Har-Peled. Guarding galleries and terrains. *IPL: Information Processing Letters*, 100, 2006.
- [23] S. Eidenbenz. Inapproximability results for guarding polygons without holes. *Lecture Notes in Computer Science*, 1533:427–??, 1998.
- [24] S. Eidenbenz. *(In-)Approximability of Visibility Problems on Polygons and Terrains*. PhD thesis, ETH Zurich, 2000.
- [25] S. Eidenbenz, C. Stamm, and P. Widmayer. Inapproximability of some art gallery problems. In *CCCG*, 1998.
- [26] I. Emiris, C. Fragoudakis, and E. Markou. Maximizing the guarded interior of an art gallery. In *22nd European Workshop on Computational Geometry*, pages 165–168, 2006.
- [27] U. Feige. A threshold of $\ln n$ for approximating set cover. *J. ACM*, 45(4):634–652, 1998.
- [28] S. Fisk. Short proof of chvatal’s watchman theorem. *Journal of Combinatorial Theory*, 24:374, 1978.

- [29] C. Fragoudakis, E. Markou, and S. Zachos. How to place efficiently guards and paintings in an art gallery. In Panayiotis Bozanis and Elias N. Houstis, editors, *Panhellenic Conference on Informatics*, volume 3746 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 145–154. Springer, 2005.
- [30] C. Fragoudakis, E. Markou, and S. Zachos. Maximizing the guarded boundary of an art gallery is apx-complete. *Computational Geometry*, In Press:Accepted Manuscript, 2007. Available online 19 December 2006, (<http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TYS-4MM1P2R-1/2/722906129b146b8aa7400b1f0bcacda6>).
- [31] L. Gewali, A. Meng, J. Mitchell, and S. Ntafos. Path planning in 0/1/infinity weighted regions with applications. In *Symposium on Computational Geometry*, pages 266–278, 1988.
- [32] S. K. Ghosh. Approximation algorithms for art gallery problems. In *Proc. Canadian Inform. Process. Soc. Congress*, pages 429–434, 1987.
- [33] H. El Gindy and D. Avis. A linear algorithm for computing the visibility polygon from a point. *Journal of Algorithms*, 2(2):186–197, June 1981.
- [34] L. Guibas, R. Motwani, and P. Raghavan. The robot localization problem. *SICOMP: SIAM Journal on Computing*, 26, 1997.
- [35] F. Hoffman, M. Kaufmann, and K. Kriegel. The art gallery theorem for polygons with holes. In *32nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 39–48, San Juan, Puerto Rico, 1–4 October 1991. IEEE.
- [36] J. Håstad. Clique is hard to approximate within $n^{1-\epsilon}$. In *FOCS: IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, 1996.
- [37] G. F. Jennings and W. J. Lenhart. An art gallery theorem for line segments in the plane. *Pattern Recognition Letters*, 14(9):727–732, 1993.
- [38] B. Joe and R. B. Simpson. Corrections to lee’s visibility polygon algorithm. *BIT*, 27(4):458–473, 1987.
- [39] A. Laurentini. Guarding the walls of an art gallery. *The Visual Computer*, 15(6):265–278, 1999.
- [40] D. T. Lee. Visibility of a simple polygon. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 22(2):207–221, 1983.
- [41] D. T. Lee and A. K. Lin. Computational complexity of art gallery problems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 32(2):276–282, 1986.
- [42] L. Levin. Universal search problems (in Russian), *Problemy Peredachi Informatsii* 9 (1973), 265–266. English translation in B.A. Trakhtenbrot, A survey of Russian approaches to Perebor (brute-force search) algorithms, *Annals of the History of Computing* 6 (1984), 384–400.

- [43] E. Markou, C. Fragoudakis, and S. Zachos. Approximating visibility problems within a constant. In *3rd Workshop on Approximation and Randomization Algorithms in Communication NEtworks*, pages 91–103, 2002.
- [44] E. Markou, S. Zachos, and C. Fragoudakis. Budgeted coverage of a maximum part of a polygonal area. In *1st Balkan Conference in Informatics*, pages 174–182, 2003.
- [45] E. Markou, S. Zachos, and C. Fragoudakis. Maximizing the guarded boundary of an art gallery is apx-complete. In Rossella Petreschi, Giuseppe Persiano, and Riccardo Silvestri, editors, *CIAC*, volume 2653 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 24–35. Springer, 2003.
- [46] B.J. Nilsson. *Guarding Art Galleries - Methods for Mobile Guards*. PhD thesis, Lund University, 1995.
- [47] B.J. Nilsson. Approximate guarding of monotone and rectilinear polygons. In *ICALP: Annual International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, 2005.
- [48] S. C. Ntafos and M. Z. Tsoukalas. Optimum placement of guards. *Inf. Sci.*, 76(1-2):141–150, 1994.
- [49] J. O'Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. Oxford University Press, 1987.
- [50] J. O'Rourke. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, 1993.
- [51] J. O'Rourke and K. J. Supowit. Some *NP*-hard polygon decomposition problems. *IEEE Trans. Inform. Theory*, (IT-30):181–190, 1983.
- [52] C. Papadimitriou and M. Yannakakis. Optimization, approximation, and complexity classes. *JCSS: Journal of Computer and System Sciences*, 43, 1991.
- [53] T. Shermer. Recent results in art galleries. Technical Report 90-10, School of Computing Science, Simon Fraser University, October 1990.
- [54] D. B. Shmoys and É. Tardos. An approximation algorithm for the generalized assignment problem. *Math. Program.*, 62:461–474, 1993.
- [55] J. Urrutia. Art gallery and illumination problems. In Handbook of Computational Geometry, J.-R. Sack, and J. Urrutia, editors, *Elsevier*, 2000. 2000.