



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΥΛΙΚΩΝ

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 1^{ης}
ΤΑΞΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ
ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΜΕ ΕΜΦΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΛΟΓΩ
ΒΡΟΧΗΣ ΠΟΥ ΕΠΙΒΑΡΥΝΕΙ ΤΙΣ ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΕΣ
ΖΕΥΞΕΙΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΣΩΤΗΡΙΟΥ Α. ΚΑΝΕΛΛΟΠΟΥΛΟΥ
Διπλ. Ηλ/γου Μηχ/κού και Μηχ/κού Η/Υ ΕΜΠ

Αθήνα
Μάρτιος 2007

Περιεχόμενα

Προλογικό Σημείωμα	1
Εισαγωγή	5
Κεφάλαιο 1. Γενικά	
1.1 Εισαγωγή	6
1.2 Διαλείψεις Η/Μ Κυμάτων κατα τη Διάδοση στην Τροπόσφαιρα	8
1.3 Περιγραφή του Μέσου Βροχής	10
1.4 Ειδική Απόσβεση	12
1.5 Μοντελοποίηση της απόσβεσης κατά μήκος κεκλιμένου ραδιοδιαδρόμου	13
1.6 Τεχνικές Άμβλυνσης Διαλείψεων	16
1.7 Αντίμετρα στα Πλαίσια της Εφαρμογής Τεχνικών Άμβλυνσης Διαλείψεων	
1.7.1. Τεχνικές Ελέγχου του EIRP	19
1.7.2. Τεχνικές Προσαρμοσίμης Εκπομπής	19
1.7.3. Τεχνικές Διαφορικής Προστασίας	21
1.8 Προδιαγραφές για την προσομοίωση της Τυχαίας Διαδικασίας που αντιστοιχεί στην Απόσβεση από Βροχή. Υπάρχοντα Μοντέλα Προσομοίωσης.	24
1.9 Το Μοντέλο Maseng-Bakken	29
1.10 Περιεχόμενα της Διατριβής	32
Κεφάλαιο 2. Θέματα Θεωρίας Τυχαίων Διαδικασιών	
2.1 Εισαγωγή	35
2.2 Μονοδιάστατη Τυχαία Μεταβλητή	
2.2.1 Ορισμός	35
2.3 Κατανομή Αθροιστικής Πιθανότητας	
2.3.1 Ορισμός	36
2.4 Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις -Ροπογεννήτρια Συνάρτηση	38
2.5 Τυχαία Διαδικασία	
2.5.1 Μέση τιμή	40
2.5.2 Αυτοσυσχέτιση	40
2.6 Στάσιμες Διαδικασίες	

2.6.1	<i>Αυστηρά Στάσιμη</i>	41
2.6.2	<i>Στάσιμη με την Ευρεία Έννοια</i>	41
2.7	Εργοδικότητα	
2.7.1	<i>Μη-δεσμευμένη Εκτιμήτρια της Μέσης Τιμής (Χρονικός Μέσος) μιας Τυχαίας Διαδικασίας</i>	42
2.7.2	<i>Διακόμανση της Εκτιμήτριας του Χρονικού Μέσου</i>	43
2.7.3	<i>Εργοδικότητα στην περίπτωση ύπαρξης δειγμάτων πέραν του ενός</i>	45
Κεφάλαιο 3. Τεχνική Συνθετικής Καταιγίδας – Εφαρμογή		
3.1	Εισαγωγή	46
3.2	Τεχνική Συνθετικής Καταιγίδας	
3.2.1	<i>Σύντομη Περιγραφή</i>	47
3.2.2	<i>Αναλυτική Περιγραφή</i>	48
3.3	Βροχόμετρο (Disdrometer RD-69)	52
3.4	Διαθεσιμότητα Βροχόμετρου-Αξιοπιστία Μετρήσεων	55
3.5	Αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος βροχόπτωσης	58
3.6	Στατιστικά 1 ^{ης} τάξης για το ρυθμό βροχόπτωσης	61
3.7	Εφαρμογή της Τεχνικής της Συνθετικής Καταιγίδας	63
3.8	Χαρακτηριστικά 1 ^{ης} τάξης των Προσομοιούμενων Χρονοσειρών Απόσβεσης	64
3.9	Στατιστικά Χαρακτηριστικά 2 ^{ης} τάξης των Προσομοιούμενων Χρονοσειρών Απόσβεσης	68
3.10	Ημερήσια Στατιστικά Χαρακτηριστικά (Diurnal Statistics) των Προσομοιούμενων Χρονοσειρών Απόσβεσης	71
Κεφάλαιο 4. Τροποποιημένη Διαδικασία Σύνθεσης 1^{ης} Τάξης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων		
4.1	Εισαγωγή	76
4.2	Διαδικασίες Markov	79
4.3	Πρώτης τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση	80
4.4	Επίλυση της Εξίσωσης Fokker-Planck	82

4.5	Στοχαστικό Ολοκλήρωμα	88
4.6	Υπολογισμός της Συνάρτησης Αυτοσυσχέτισης και της Συνάρτησης Πυκνότητας Φάσματος για μια Στάσιμη Διαδικασία Markov	
	4.6.1. Αναλυτική Προσέγγιση	90
	4.6.2. Γρήγορη Υπολογιστική Μέθοδος	92
4.7	Χρόνοι διακοπής (Hitting Times) και Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις 1 ^{ης} Τάξης	92
4.8	Διαδικασία Σύνθεσης της κατάλληλης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης 1 ^{ης} τάξης για την προσομοίωση μιας Στάσιμης Τυχαίας Διαδικασίας- Αλγόριθμος	96

Κεφάλαιο 5. Τρία Δυναμικά Μοντέλα για την Προσομοίωση της Απόσβεσης λόγω Βροχής για Διαλείψεις Lognormal, Weibull και Gamma

5.1	Εισαγωγή	106
5.2	Σύνθεση της Κατάλληλης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης 1 ^{ης} Τάξης για τη Μοντελοποίηση Δορυφορικού Καναλιού (Μέρος-A)	107
5.3	Αναλυτικοί τύποι για την Συνάρτηση Πυκνότητας Φάσματος και τις Μέσες Τιμές των Χρόνων Διακοπής στην περίπτωση και των τριών Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων 1 ^{ης} τάξης.	111
	5.3.1 <i>Lognormal</i> διαδικασία	
	5.3.1.1 Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας (<i>Spectral Density Function</i>)	112
	5.3.1.2 Μέση Τιμή του Χρόνου Διακοπής T_{fd} με παραμέτρους (x_o, x_{th})	112
	5.3.2 <i>Weibull</i> διαδικασία	
	5.3.2.1 Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας (<i>Spectral Density Function</i>)	113
	5.3.2.2 Μέση Τιμή του Χρόνου Διακοπής T_{fd} με παραμέτρους (x_o, x_{th})	113
	5.3.3 <i>Gamma</i> διαδικασία	
	5.3.3.1 Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας (<i>Spectral Density Function</i>)	114
	5.3.3.2 Μέση Τιμή του Χρόνου Διακοπής T_{fd} με παραμέτρους (x_o, x_{th})	114
5.4	Σύνθεση της Κατάλληλης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης 1 ^{ης} Τάξης για τη Μοντελοποίηση Δορυφορικού Καναλιού (Μέρος-B).	115
5.5	Αποτελέσματα Προσομοίωσης	119

5.6	Θέματα συζήτησης	123
5.7	Παραγωγή Χρονοσειρών Απόσβεσης λόγω βροχής	125

Κεφάλαιο 6. Συμπεράσματα, Πρωτοτυπία της Διατριβής και Προοπτικές για Μελλοντική Έρευνα

6.1	Συμβολή της Διατριβής στην Επιστήμη	132
6.2	Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	135

Παράρτημα Α

	Απόδειξη της ιδιότητας συμμετρίας του τελεστή L	137
--	---	-----

Παράρτημα Β

	Επίλυση των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων για την Λογαριθμοκανονική, Gamma και Weibull διαδικασία	140
--	--	-----

Παράρτημα Γ

	Στατιστικά Χαρακτηριστικά 1 ^{ης} Τάξης των Χρόνων Διακοπής για την περίπτωση της Λογαριθμοκανονικής Διαδικασίας	149
--	--	-----

Παράρτημα Δ

	Επίλυση του Προβλήματος Αρχικών/Συνοριακών Τιμών με Πυρήνα τη Μερική Διαφορική Εξίσωση Fokker-Planck για τις διαδικασίες Gamma και Weibull. Υπολογισμός των Συναρτήσεων Αυτοσυσχέτισης και Φασματικής Πυκνότητας	153
--	--	-----

Παράρτημα Ε

	Στατιστικά Χαρακτηριστικά 1 ^{ης} Τάξης των Χρόνων Διακοπής για την περίπτωση της Gamma και Weibull Διαδικασίας	177
--	---	-----

Παράρτημα ΣΤ

	Απόδειξη της γρήγορης υπολογιστικής μεθόδου για τον υπολογισμό της Συνάρτησης Φασματικής Πυκνότητας που ανήκει σε μια 1 ^{ης} τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση	193
--	--	-----

	Βιβλιογραφία	195
--	---------------------	-----

	Περίληψη της Διατριβής	202
--	-------------------------------	-----

	Abstract	205
--	-----------------	-----

στη μνήμη της Μητέρας μου,
στον Πατέρα μου,
που ήταν πάντα εδώ...

“Πάμε λοιπόν τώρα σκέφτηκα, σηκώνοντας
ασυναίσθητα τα μανίκια από τη φανέλα μου,
για μια ήρεμη και ψύχραιμη βουτιά
στο θάνατο και την καταστροφή και
όποιος γλιτώσει...”

Herman Melville, Moby Dick

Προλογικό Σημείωμα

Η εκπόνηση μιας Διδακτορικής Διατριβής για έναν εφαρμοσμένο επιστήμονα όπως ο ηλεκτρολόγος μηχανικός –και αυτό μου είναι ξεκάθαρο πλέον– συνίσταται από μια σειρά διαδοχικών νοητικών βημάτων, με χαρακτήρα αρχικά συνδυαστικό αλλά στην συνέχεια, κυρίως αφαιρετικό, με τελικό προορισμό την συνοπτική μα και συνάμα περιεκτική διατύπωση μιας ιδέας που ήδη προϋπάρχει. Η εμπειρία του καθηγητή ως επιβλέποντα της Διατριβής είναι αυτή που εντοπίζει, έστω και διαισθητικά την ύπαρξη της ιδέας που βρίσκεται ακατέργαστη εντός του εδάφους μιας επιστημονικής περιοχής. Αρχικοποιείται έτσι η πορεία της έρευνας σε σχέση με τη θέση και τον προσανατολισμό της εκκίνησης. Στο αρχικό τμήμα της ερευνητικής διαδρομής, μελετάται διεξοδικά το θεωρητικό υπόβαθρο της επιστημονικής περιοχής δηλαδή η βιβλιογραφία, οι σχετικές δημοσιεύσεις έτσι ώστε να αναδειχθεί όχι η ιδέα –είναι εξαιρετικά πρόωρο κάτι τέτοιο– αλλά το πρόβλημα στο οποίο η εν λόγω ιδέα θα προσφέρει είτε λύση ριζοσπαστική, εάν πρόκειται τελικά για μια επιστημονική σύλληψη πραγματικά θεμελιώδη, είτε λύση βελτιωτική εν σχέση με προηγούμενες θεωρήσεις. Για τον τελικό σχηματισμό της ιδέας, είναι εξαιρετικά πιθανό να χρησιμοποιήσουμε συνδυαστικά, γνώσεις που προέρχονται από διάφορες επιστημονικές περιοχές όπως οι διάφοροι κλάδοι των μαθηματικών. Οι γνώσεις αυτές αξιοποιούνται προβαλλόμενες στο επιστημονικό πεδίο που μας αφορά. Πλέον, όλη η γνώση που χρειαζόμαστε είναι διαθέσιμη. Τελευταίο και σημαντικότερο ίσως, είναι η χρήση αφαιρετικής λογικής για την αναδιάταξη της καινοτόμου ιδέας σε απλές δομές συνδεδεμένες με όρους κατανοητούς, ώστε να απλοποιείται η εν λόγω ιδέα όσο το δυνατόν περισσότερο, χωρίς ωστόσο να γίνεται κατ' ανάγκη απλή.

Σε αυτή την τετραετή πορεία, από το Φεβρουάριο του 2003 μέχρι και σήμερα, μπορώ να πω ότι είχα δίπλα μου εξαιρετικούς συνεργάτες τους οποίους αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω. Και πρώτον από όλους, τον κύριο επιβλέποντα της Διατριβής ανά χείρας, τον καθηγητή κ. Ιωάννη Δ. Κανελλόπουλο με τον οποίο είχαμε άριστη συνεργασία. Θέλω να τον ευχαριστήσω κατ' αρχάς, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε σε όλα τα επίπεδα στα τέσσερα αυτά χρόνια της συνεργασίας μας. Οι επιστημονικές συζητήσεις μας ήταν πάντα ιδιαίτερα παραγωγικές, με συμπεράσματα που συντέλεσαν κομβικά στην εξέλιξη της έρευνας. Όμως και σε προσωπικό επίπεδο, οι σχέσεις μας ήταν

άριστες και το καλό κλίμα ήταν σύμμαχος της προσπάθειάς μου. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα δυο μέλη της τριμελούς επιτροπής, επιβλέποντες την Διατριβή μου, τους καθηγητές κ. Παναγιώτη Κωττή και κ. Χρήστο Καψάλη οι οποίοι πρόσφεραν τη βοήθειά τους όποτε τους ζητήθηκε. Επίσης, αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή της Σχολής μας κ. Γιώργο Φικιώρη, για την αμέριστη συμπαράσταση του και την επιστημονική βοήθεια που μου πρόσφερε σε θέματα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Και γενικότερα όμως, οι συζητήσεις μας γύρω από επιστημονικά θέματα και μη, ήταν πάντα πηγή έμπνευσης για μένα και για αυτό του είμαι ευγνώμων. Τις ευχαριστίες μου θέλω να δώσω και στον Επίκουρο καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, κ. Ιωάννη Σπηλιώτη. Ο κ. Σπηλιώτης μου μετέδωσε τόσο διαμέσου του μετα-πτυχιακού μαθήματός του με τίτλο «Κίνηση Brown και Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις» όσο και διαμέσου της επικοινωνίας μας κατ' ιδίαν, το μεράκι και τις γνώσεις για να ασχοληθώ εμπειριστατωμένα με τη θεωρία του Στοχαστικού Λογισμού, την οποία χρησιμοποίησα κατά κόρον στην Διατριβή. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές της Σχολής μας, κ. Ιωάννη Ρουμελιώτη και κ. Ιωάννη Τσαλαμέγκα. Τα μετα-πτυχιακά και προ-πτυχιακά μαθήματα που διδάσκουν και τα οποία παρακολούθησα στην πλειοψηφία τους, με ώθησαν να ασχοληθώ ακόμα περισσότερο με την επιστήμη του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού.

Φυσικά, εξαιρετικοί συνεργάτες ήταν για μένα και όλοι οι ερευνητές της ομάδας του Satellite and Communications group. Θα αναφερθώ σε κάθε έναν από αυτούς ιδιαίτερω μιας και εκτός από συνάδελφοι, θεωρώ ότι είμαστε και φίλοι. Πρώτο από όλους, θα ήθελα να ευχαριστήσω για τη βοήθεια που μου παρείχε, τον Διδάκτορα της Σχολής κ. Αθανάσιο Παναγόπουλο. Ο κ. Παναγόπουλος ήταν ο πρώτος ερευνητής του Ε.Μ.Π. που προσομοίωσε τα δυναμικά χαρακτηριστικά της απόσβεσης λόγω βροχής που επιβαρύνει μια μικροκυματική ζεύξη, κάνοντας χρήση των $1^{ης}$ τάξης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων. Η εργασία του, αποτέλεσε την «ερεθιστική άκανθα» για να ασχοληθώ με τα δυναμικά χαρακτηριστικά της απόσβεσης και στη συνέχεια με τις Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις. Ωστόσο, του είμαι κυρίως ευγνώμων διότι η αίσθηση δικαιοσύνης και αλτρουισμού που τον διακρίνει, τον καθιστά εξαιρετικό συνεργάτη και φίλο. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω το συνάδελφο κ. Παντελή Αράπογλου. Η παρέα

του, εντός αλλά και εκτός Σχολής ήταν για μένα σημαντική. Το ίδιο ισχύει και για το συνάδελφο κ. Δημήτρη Σκραπαρλή αλλά και τους συναδέλφους Κέλλυ Γεωργιάδου, Βασίλη Σακαρέλλο, Δημήτρη Στρατογιάννη, Μάρκο Αναστασόπουλο, Θανάση Δρούγκα και Θανάση Λαζαρόπουλο.

Τέλος, είναι ιδιαίτερα σημαντικό για μένα, να αναφερθώ σε κάποιους ανθρώπους που στάθηκαν δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια και με βοήθησαν με τον ένα ή τον άλλο τρόπο να εξελιχθώ προσωπικά: η εξέλιξη αυτή αντανακλάται –άγνωστο με ποιόν τρόπο ακριβώς– στην ανά χειράς Διατριβή. Πρώτα από όλους στον Πατέρα μου, Αναστάσιο Κανελλόπουλο ο οποίος με στήριξε με την αγάπη του και με πολλές θυσίες οικονομικές. Επίσης, στη Βούλα Λίβα για την φροντίδα που μου δείχνει. Στους συγγενείς μου Ναυσικά Κανελλοπούλου, Σοφία Μπουγά και Δήμητρα Τζανετάκη. Στον αδερφό μου Παναγιώτη Κανελλόπουλο. Στον αδερφικό μου φίλο Κωνσταντίνο Πουλόπουλο, στους φίλους μου Παναγιώτη Σαρέλλα, Κωνσταντίνο Χαμπίδη και Κασσιανή Μπένου: η παρέα μαζί τους με κάνει να αισθάνομαι ότι εκτός από το «μπροστά» υπάρχει και το «ψηλότερα». Στο Μάκη, στο Σάββα, στη Μαρικήτη, στην Πίτσα, στη Σοφία, στον Απόστολο, στην Αλεξία για την «ελευθερία» που αισθάνθηκα μαζί τους. Στην Ελιάνα Χριστοφιλοπούλου για την αγάπη της και την ενθάρρυνσή της να επιδιώξω ερευνητική καριέρα. Η Διατριβή αυτή κουβαλά όλη τη νοσταλγία που αισθάνομαι για όσα έκανα μαζί τους τα τέσσερα τελευταία χρόνια της ζωής μου, αλλά και παλιότερα.

«... –Καλό ‘ταν το ταξίδι, είπα και άγγιξα συγκινημένος το γόνατο του συντρόφου. Τώρα φτάσαμε.

-Φτάσαμε; Έκαμε αυτός ξαφνιασμένος. Τι θα πει φτάσαμε;

-Ξέρω, θα πει: τώρα ξεκινούμε...»

Νίκος Καζαντζάκης. Αναφορά στον Γκρέκο

Εισαγωγικά

Οι νέες Υπηρεσίες που προσφέρονται στους χρήστες από τους παρόχους Τηλεπικοινωνιών είναι ιδιαίτερα απαιτητικές ως προς την ποιότητα της ζεύξης που λειτουργεί ως φέρουσα των Υπηρεσιών αυτών. Στην περίπτωση ασυρμάτων ζεύξεων μεγάλων αποστάσεων που λειτουργούν στις μικροκυματικές συχνότητες, η κύρια αιτία διαλείψεων είναι οι ατμοσφαιρικές κατακρημνίσεις όπως η βροχή, το χιόνι, το χαλάζι κλπ και ειδικότερα για τις δορυφορικές ζεύξεις επιπλέον είναι όλα τα τροποσφαιρικά φαινόμενα όπως τα σύννεφα, οι παγοκρύσταλλοι και η μη-γραμμικότητα του δείκτη διάθλασης. Για να εξασφαλιστεί ότι μια ζεύξη λειτουργεί εντός ενός προδιαγεγραμμένου πλαισίου ποιότητας, είναι αναγκαίο να παρακολουθείται συνεχώς η ζεύξη ώστε εάν κρίνεται σκόπιμο, να εφαρμόζονται ειδικά αντίμετρα που αντισταθμίζουν σε πραγματικό χρόνο την απόσβεση που επιβαρύνει τη ζεύξη. Έχει ιδιαίτερη σημασία τα εν λόγω αντίμετρα να εφαρμόζονται *εγκαίρως*, να προλαβαίνουν δηλαδή το φαινόμενο, χωρίς ωστόσο να εξαντλείται η εφαρμογή τους άσκοπα. Κάτι τέτοιο προϋποθέτει τη δυνατότητα πρόβλεψης της *δυναμικής* συμπεριφοράς του φαινομένου της απόσβεσης.

Το φαινόμενο της απόσβεσης που επιβαρύνει μια μικροκυματική ζεύξη είναι ιδιαίτερα σύνθετο δεδομένου ότι έχει διάφορες συνιστώσες. Στην παρούσα Διατριβή, θα μελετήσουμε την απόσβεση λόγω βροχής η οποία άλλωστε είναι η κύρια συνιστώσα ειδικά για συχνότητες άνω των 10GHz.

Γίνεται κατανοητό ότι τα στατικά μοντέλα που αντανakλούν την πιθανότητα υπέρβασης ενός κατωφλίου απόσβεσης σε ετήσια βάση, δεν επαρκούν για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς της απόσβεσης σε βάθος χρόνου λίγων δευτερολέπτων (10 έως 60). Είναι αναγκαίο συνεπώς, να αναπτυχθούν αξιόπιστα δυναμικά μοντέλα πρόβλεψης τα οποία να αναπαράγουν όσο το δυνατόν καλύτερα τον πραγματικό μηχανισμό γέννησης του φαινομένου. Στην παρούσα διατριβή, αναπτύσσεται ένα ευέλικτο δυναμικό μοντέλο που βασίζεται στη χρήση μιας 1^{ης} τάξης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης. Πρώτοι χρησιμοποίησαν μια ανάλογη εξίσωση για τον ίδιο σκοπό οι Maseng και Bakken [1981] και ακολούθησαν άλλοι. Εδώ, η σύνθεση της εν λόγω εξίσωσης αντιμετωπίζεται για πρώτη φορά σε στέρεο μαθηματικό υπόβαθρο, με μια καινοτόμο προσέγγιση όχι μόνο για την περίπτωση της απόσβεσης λόγω βροχής, αλλά και για το ευρύτερο σύνολο των πραγματικών, στάσιμων Τυχαίων Διαδικασιών Βασικής Ζώνης.

Κεφάλαιο 1

Γενικά

1.1 Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια στα πλαίσια του νέου περιβάλλοντος που διαμορφώνουν οι σύγχρονες υπηρεσίες των πολυμέσων και του διαδικτύου [Celandroni *et.al.*, 2003], έχει παρατηρηθεί η ολοένα αυξανόμενη ζήτηση για τηλεπικοινωνιακό φάσμα στις δορυφορικές επικοινωνίες. Το προφίλ των νέων χρηστών είναι πολύ πιο απαιτητικό σε σύγκριση με παλαιότερα και οι προβλέψεις που μπορούν να γίνουν συνιστούν ότι η τάση αυτή θα συνεχιστεί.

Σε ερευνητικό επίπεδο γίνεται μια έντονη προσπάθεια προς την ανάπτυξη και τη λειτουργία πολυχρηστικών, ευρυζωνικών δορυφορικών καναλιών σε ζώνες συχνοτήτων όπως η Ka (20-30 GHz), με τελικό σκοπό τη δημιουργία δορυφορικών δικτύων για εμπορική χρήση. Τα δορυφορικά ευρυζωνικά δίκτυα απευθύνονται προς το παρόν σε ιδιαίτερες ομάδες χρηστών όπως ερευνητικές ομάδες Πανεπιστημίων, μεγάλους πολυεθνικούς οργανισμούς κ.λ.π. ωστόσο είναι πιθανόν στο μέλλον να διευρυνθεί το σύνολο των ενδιαφερόμενων χρηστών εφόσον οι δορυφορικές ζεύξεις μπορούν και προσφέρουν εύκολη και ευέλικτη προσβασιμότητα.

Συγκεκριμένα, στα διεθνή επιστημονικά περιοδικά αλλά και στη διεθνή βιβλιογραφία που αφορούν στις δορυφορικές επικοινωνίες και δίκτυα, ήδη έχουν δημοσιευτεί ιδέες και μελέτες για την ανάπτυξη και την ευσταθή λειτουργία δορυφορικών δικτύων που καλύπτουν διάφορα προφίλ χρηστών. Επιπλέον, μεγάλοι οργανισμοί όπως η N.A.S.A. έχουν υλοποιήσει τέτοια δίκτυα, έχουν μελετήσει στην πράξη τη συμπεριφορά τους και έχουν εξάγει χρήσιμα συμπεράσματα.

Τα δορυφορικά δίκτυα στα οποία αναφερόμαστε συνήθως αφορούν σε χρήστες που είναι διάσπαρτοι σε μεγάλες γεωγραφικές περιοχές. Κάθε χρήστης είναι εφοδιασμένος με μια κεραία δορυφορικής λήψης η οποία στοχεύει τον δορυφόρο. Είναι προφανές ότι τα πρωτόκολλα λειτουργίας αυτών των δικτύων μπορούν να ποικίλουν ανάλογα με τις παρεχόμενες υπηρεσίες. Πιο αναλυτικά, υπάρχει η απλή περίπτωση της μονόδρομης

μετάδοσης, κοινών δεδομένων ταυτόχρονα προς όλους τους χρήστες από το δορυφόρο, χωρίς να είναι αναγκαία η επαλήθευση της λήψης ή όχι των δεδομένων. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει η περίπτωση της πλήρους διασύνδεσης όλων των χρηστών μέσω του δορυφορικού αναμεταδότη με ανάγκη επαλήθευσης των λαμβανομένων δεδομένων. Φυσικά, μπορεί κανείς να σκεφτεί πλήθος σεναρίων ανάμεσα στις δυο προηγούμενες καταστάσεις.

Η ιδιομορφία των δορυφορικών δικτύων σε σχέση με τα αντίστοιχα επίγεια συνίσταται στην έντονη στοχαστικότητα που παρουσιάζει το φυσικό στρώμα, δηλαδή ο δορυφορικός δίαυλος, εξαιτίας των μεταβολών που συμβαίνουν στα διάφορα στρώματα της ατμόσφαιρας [Crane, 1996]. Για το λόγο αυτό, κατά την κατασκευή δορυφορικών δικτύων, η έρευνα κινείται προς δυο κατευθύνσεις, από τη μια προς τη δημιουργία κατάλληλων πρωτοκόλλων για τη βέλτιστη χρήση του τηλεπικοινωνιακού φάσματος και από την άλλη, προς τη βέλτιστη μοντελοποίηση του δορυφορικού διαύλου. Η πρώτη κατεύθυνση είναι προφανές ότι θα μας οδηγήσει σε νέα πρωτόκολλα προσαρμοσμένα στο ιδιότυπο περιβάλλον των δορυφορικών επικοινωνιών ενώ η δεύτερη, θα μας επιτρέψει να σχεδιάσουμε κατάλληλες Τεχνικές Άμβλυνσης Διαλείψεων [Panagoroulos *et.al*, 2004] ώστε να εξασφαλίζεται η ομαλή λειτουργία του καναλιού ενάντια στις ατμοσφαιρικές διαταραχές. Τέλος, πρέπει να τονιστεί ότι η έρευνα προς κάθε μια από τις δυο κατευθύνσεις δεν γίνεται ανεξάρτητα από την άλλη αντίθετα, υπάρχει μια αμφίδρομη σχέση ανταλλαγής ιδεών ώστε να μπορεί να πει κανείς ότι υφίσταται μια παράλληλη πρόοδος.

Σε αυτό το κεφάλαιο αρχικά θα αναφερθούμε γενικά στα μετεωρολογικά φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στην Τροπόσφαιρα και επηρεάζουν την επίδοση των δορυφορικών ζεύξεων. Στη συνέχεια όμως, θα εστιάσουμε αποκλειστικά στη βροχή και στην απόσβεση που αυτή δημιουργεί στις μικροκυματικές δορυφορικές ζεύξεις. Συγκεκριμένα, πρώτα θα αναφερθούμε στη δομή της βροχής σε μικροσκοπική κλίμακα, δηλαδή στις σταγόνες, το σχήμα τους, την ταχύτητα πτώσης τους στο έδαφος και τη γωνία κλίσης τους ως προς το οριζόντιο επίπεδο εξαιτίας του ανέμου. Κατόπιν, σε μακροσκοπική κλίμακα, θα περιγράψουμε τη χωρική δομή της βροχής όπως αυτή προκύπτει από το μοντέλο των συνεκτικών βροχοπυρήνων (convective rain cell model) [Crane, 1996]. Περαιτέρω, θα εισάγουμε την έννοια της Ειδικής Απόσβεσης (Specific

Attenuation) η οποία συνδέεται με τη σημειακή ένταση Ρυθμού Βροχόπτωσης (Rain Rate). Η συνολική απόσβεση λόγω βροχής σε μια δορυφορική ζεύξη, προκύπτει αθροίζοντας την Ειδική Απόσβεση κατά μήκος λεπτών διαμερίσεων του κεκλιμένου ραδιοδιαδρόμου (radio slant-path), στις οποίες η ένταση βροχόπτωσης και άρα η ειδική απόσβεση είναι κατά προσέγγιση σταθερή. Τέλος, θα περιγράψουμε τις Τεχνικές Άμβλυνσης Διαλείψεων οι οποίες αποσκοπούν στην προστασία της ποιότητας της ζεύξης υπο συνθήκες βροχής, διαμέσου της εξουδετέρωσης σε πραγματικό χρόνο της απόσβεσης που επιβαρύνει τη ζεύξη. Η περιγραφή θα γίνει υπο το πρίσμα της Θεωρίας Αυτομάτου Ελέγχου εφόσον οι Τεχνικές Άμβλυνσης Διαλείψεων είναι κατ' ουσίαν βρόχοι ελέγχου (control loops). Όπως θα αναφερθεί με λεπτομέρεια παρακάτω, η σκοπιμότητα της παρούσας διατριβής εντοπίζεται στην δημιουργία ενός αξιόπιστου μοντέλου πρόβλεψης της δυναμικής συμπεριφοράς της απόσβεσης λόγω βροχής σε μια ζεύξη ώστε να βελτιστοποιείται η απόδοση των Τεχνικών Άμβλυνσης Διαλείψεων.

1.2 Διαλείψεις H/M Κυμάτων κατά τη Διάδοση στην Τροπόσφαιρα

Η τροπόσφαιρα είναι το κατώτερο τμήμα της ατμόσφαιρας και εκτείνεται από την επιφάνεια του εδάφους μέχρι κάποιο ύψος το οποίο ποικίλει από περιοχή σε περιοχή και ξεκινάει από 6 km στους πόλους και φτάνει τα 17 km στον ισημερινό.

Είναι γνωστό ότι η κυριότερη αιτία εμφάνισης διαλείψεων στα δορυφορικά κανάλια που λειτουργούν σε συχνότητες άνω των 10 GHz, είναι τα φαινόμενα που εμφανίζονται στην τροπόσφαιρα [Crane, 1996] και μπορούν να χωριστούν σε δυο κατηγορίες. Από τη μια είναι οι ατμοσφαιρικές κατακρημνίσεις όπως η βροχή, το χιόνι, το χαλάζι, ο πάγος και από την άλλη, η ανομοιογένεια που παρουσιάζουν τα ατμοσφαιρικά στρώματα που έχει σαν αποτέλεσμα τις χωροχρονικές μεταβολές του δείκτη διάθλασης. Σε κάθε μια από τις δυο περιπτώσεις, ο μηχανισμός δημιουργίας διαλείψεων στο δορυφορικό κανάλι είναι διαφορετικός. Συγκεκριμένα, στην πρώτη περίπτωση, εάν εξετάσουμε το φαινόμενο της ατμοσφαιρικής κατακρήμνισης μικροσκοπικά, για παράδειγμα στην περίπτωση της βροχής, τότε γίνεται αντιληπτό ότι κάθε σταγόνα είναι ένας στοιχειώδης αγωγίμος σκεδαστής ο οποίος εκτελεί παράλληλα δυο μηχανισμούς απόσβεσης: από τη μια, σκεδάζει το προσπίπτον H/M κύμα προς κατευθύνσεις διάφορες από αυτή που αντιστοιχεί στη διάδοση, δημιουργώντας με αυτό τον τρόπο πλάνη της απόσβεσης και

τηλεπικοινωνιακό θόρυβο ενώ από την άλλη, ως ατελές αγωγίμο μέσο, απορροφά ενέργεια από το προσπίπτον κύμα την οποία αποδίδει στο περιβάλλον ως θερμότητα. Στην περίπτωση της ανομοιογένειας των ατμοσφαιρικών στρωμάτων, η χωροχρονική μεταβολή του δείκτη διάθλασης έχει προφανή επίδραση στις συνθήκες διάδοσης με αποτέλεσμα την χρονική μεταβολή της απόσβεσης και τη δημιουργία διαλείψεων. Πρέπει να τονίσουμε ότι στην τελευταία περίπτωση, επειδή οι διαλείψεις στο δορυφορικό σήμα παρουσιάζουν ταχείες μεταβολές, τις ονομάζουμε γρήγορες διαλείψεις (fast fading) ή σπινθιρισμό (scintillation), ενώ στην πρώτη περίπτωση της απόσβεσης από ατμοσφαιρικές κατακρημνίσεις, οι μεταβολές είναι αργές και συνεπώς ονομάζονται αργές διαλείψεις (slow fading). Συνήθως τα δυο αυτά διαφορετικά είδη διαλείψεων μελετώνται ξεχωριστά αν και πρόσφατες μελέτες δείχνουν να υπάρχει έντονη συσχέτιση μεταξύ τους [Gremont *et.al*, 1999].

Για να μπορούμε όμως να μιλάμε για διαλείψεις, πρέπει να εισάγουμε μια στάθμη αναφοράς ως προς την οποία η περαιτέρω αύξηση της στάθμης απόσβεσης θα θεωρείται διάλειψη. Αυτή η στάθμη αναφέρεται ως απόσβεση ελευθέρου χώρου (*free space loss*) και στις δορυφορικές επικοινωνίες αντιστοιχεί σε συνθήκες καθαρού ουρανού, δηλαδή σε ιδανικές συνθήκες χωρίς κατακρημνίσεις υδρομετεωριτών αλλά και χωρίς ανομοιογένειες και μη-γραμμικότητες του δείκτη διάθλασης, πράγμα το οποίο σε γενικές γραμμές είναι ανέφικτο στην πράξη.

Για να γίνει κατανοητό πόσο σύνθετο είναι στην πράξη το φαινόμενο της απόσβεσης εξαιτίας των μετεωρολογικών φαινομένων που λαμβάνουν χώρα στην τροπόσφαιρα, θα μπορούσαμε να αναφέρουμε ενδεικτικά τα ακόλουθα. Στο παράθυρο του φάσματος 10-30 GHz, συμβολή στην απόσβεση –εκτός από τη βροχή που είναι η κύρια αιτία– έχουν τα σύννεφα, η πυκνή ομίχλη, οι παγοκρύσταλοι στα ανώτερα στρώματα της τροπόσφαιρας, το χαλάζι και το χιόνι. Επίσης οι παγοκρύσταλοι, από κοινού με τη βροχή, συμβάλλουν στην αποπόλωση του σήματος η οποία μάλιστα αυξάνεται με την ένταση της διάλειψης που υφίσταται το σήμα διερχόμενο μέσα από τη βροχή. Τέλος, σε συχνότητες μεγαλύτερες από 30 GHz όπου η βροχή εξακολουθεί να είναι σοβαρός παράγοντας διάλειψης, παρατηρούνται οι λεγόμενες *συχνότητες απορρόφησης εξαιτίας των ατμοσφαιρικών αερίων*. Οι συχνότητες αυτές αναφέρονται σε λεπτά παράθυρα στην περιοχή του φάσματος όπου εξαιτίας της απορρόφησης ενέργειας

από τα μόρια των ατμοσφαιρικών αερίων όπως το οξυγόνο και οι υδρατμοί, παρατηρείται μια αύξηση στην διάλειαση του σήματος, μεγαλύτερη ακόμα και από αυτή που εισάγει η βροχή.

Στην παρούσα διατριβή θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την μοντελοποίηση της απόσβεσης λόγω βροχής που υφίσταται ένα δορυφορικό κανάλι. Για το λόγο αυτό, παρουσιάζουμε στην επόμενη παράγραφο μια σύντομη στατιστική περιγραφή του μέσου βροχής.

1.3 Περιγραφή του Μέσου Βροχής

Η βροχόπτωση συνιστά μια τυχαία χωροχρονική διαδικασία που μπορεί να μελετηθεί μόνο με εφαρμογή στατιστικής ανάλυσης. Το μέσο βροχής αποτελείται από σταγόνες με πεπλατυσμένο σφαιροειδές σχήμα. Η θέση τους, το μέγεθός τους και ο προσανατολισμός τους είναι τυχαίες μεταβλητές. Οι αποστάσεις μεταξύ των σταγόνων είναι αρκετά μεγάλες συγκρινόμενες με τις διαστάσεις τους.

Οι Pruppacher και Pitter [1971] προσδιόρισαν το *σχήμα* των σταγόνων της βροχής με βάση τις δυνάμεις που δέχονται καθώς πέφτουν με την οριακή ταχύτητα. Οι θεωρητικές αυτές προσεγγίσεις έρχονται σε ικανοποιητική συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα [Pruppacher and Beard, 1970]. Η οριακή ταχύτητα της σταγόνας –ταχύτητα κοντά στο έδαφος– έχει υπολογιστεί από τους Gun και Ginzer [1949] και έχει αποδειχθεί ότι εξαρτάται από το μέγεθός της πίπτουσας σταγόνας καθώς και από την πυκνότητα του αέρα.

Μια άλλη ιδιότητα των σταγόνων που παίζει σημαίνοντα ρόλο στον υπολογισμό της απόσβεσης είναι η κατανομή του μεγέθους τους ανά μονάδα όγκου. Σε πιο αυστηρή μαθηματική γλώσσα θα λέγαμε ότι η κατανομή μεγέθους σταγόνας (Rain Drop-Size Distribution) εκφράζει το ποσοστό των σταγόνων με ισόογκη ακτίνα στο διάστημα $[\bar{a}, \bar{a} + d\bar{a}]$, ανά μονάδα όγκου ατμόσφαιρας. Ισόογκη ακτίνα καλούμε την ακτίνα σφαίρας ίσου όγκου με αυτόν της σταγόνας. Η κατανομή αυτή έχει μελετηθεί από πολλούς ερευνητές, και αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα έχουν προταθεί από τους Laws και Parsons [1943], τους Marshall και Palmer [1948], Ulbrich [1983] και Ajayi και Olsen [1985]. Η κατανομή Laws και Parsons είναι αρκετά διαδεδομένη και προτείνεται από την ITU-R ως σύσταση για τον υπολογισμό των παραμέτρων της ειδικής απόσβεσης.

Η θερμοκρασία των σταγόνων της βροχής είναι και αυτή μια σημαντική παράμετρος στον υπολογισμό της απόσβεσης. Έχει αποδειχθεί ότι για συχνότητες πάνω από 15 GHz η θερμοκρασία έχει μικρή επίδραση στην εξασθένηση, ενώ στην περιοχή συχνοτήτων 11-14 GHz η απόσβεση είναι πολύ ευαίσθητη σε μεταβολές της θερμοκρασίας [Olsen *et al*, 1978; Upton *et al*, 1980; Thompson *et al*, 1980].

Η διεύθυνση κατακρήμνισης της σταγόνας λίγο πριν το έδαφος επηρεάζεται από δυο παράγοντες: την ένταση και την κατεύθυνση του πνέοντος ανέμου. Η επίδραση του ανέμου έχει σαν αποτέλεσμα να δημιουργείται μια γωνία κλίσης μικρότερη των 90° μεταξύ του κατακόρυφου άξονα της σταγόνας και της οριζοντίου. Η κατανομή αυτής της γωνίας αποτελεί μια καίρια παράμετρο για την επίδραση της βροχής στην αποπόλωση που εισάγεται στο διαδιδόμενο σήμα.

Η παραπάνω περιγραφή αφορά την μικροσκοπική δομή του μέσου βροχής. Το πιο δύσκολο όμως πρόβλημα που σχετίζεται με τον υπολογισμό της απόσβεσης είναι η αναλυτική περιγραφή της χωρικής κατανομής της βροχής. Μετρήσεις με ραντάρ έδειξαν ότι η βροχή αποτελείται από μεγάλες περιοχές με χαμηλό και ομοιογενώς κατανομημένο ρυθμό βροχόπτωσης και από περιοχές, με έντονο και χωρικά ανομοιογενή ρυθμό βροχόπτωσης. Αυτές οι περιοχές με τον έντονο ρυθμό βροχόπτωσης, οι λεγόμενοι βροχοπυρήνες (rain cells), δημιουργούν και τα περισσότερα προβλήματα στον υπολογισμό της απόσβεσης. Η έκταση των βροχοπυρήνων προσδιορίζεται από ένα κλειστό περίγραμμα (contour) εσωτερικά του οποίου ο ρυθμός βροχόπτωσης υπερβαίνει παντού ένα κατώφλι, συνήθως τα 5mm/h. Το σχήμα και οι διαστάσεις του περιγράμματος ποικίλει ανάλογα με τη γεωγραφική περιοχή και την εποχή. Τα σύγχρονα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση των βροχοπυρήνων θεωρούν ότι το περίγραμμά τους είναι κυκλικό ή ελλειπτικό.

Από την άλλη μεριά, μετρήσεις με ραντάρ στο κατακόρυφο επίπεδο έδειξαν ότι η βροχή είναι προσεγγιστικά ομοιόμορφη ανεξάρτητα από τον ρυθμό βροχόπτωσης [Stutzman and Dishman, 1982].

1.4 Ειδική Απόσβεση

Η ειδική απόσβεση A_o (dB/km) ορίζεται ως η εξασθένηση ανά μονάδα μήκους που υφίσταται το ηλεκτρομαγνητικό κύμα όταν διαδίδεται μέσα από ένα χωρικά ομογενές μέσο βροχής. Αν A (dB) είναι η συνολική απόσβεση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που οφείλεται στην βροχόπτωση, τότε ισχύει η εξής σχέση:

$$A = \int_0^L A_o dl \quad (1.1)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος ενός απλού ραδιοβήματος μήκους L . Η ολοκλήρωση κατά μήκος της ζεύξης επιβάλλεται από τη χωρική ανομοιογένεια του μέσου βροχής.

Η ειδική απόσβεση συνδέεται με την ένταση βροχόπτωσης μέσω της σχέσης [Olsen *et al*, 1978]

$$A_o = aR^b \quad (1.2)$$

Στη σχέση αυτή τα a και b εξαρτώνται από τη συχνότητα f , το είδος της πόλωσης καθώς και από τους παράγοντες που περιγράφουν τη μικροσκοπική δομή του μέσου βροχής όπως η κατανομή του μεγέθους σταγόνας (Raindrop Size Distribution), η απόκλιση της διεύθυνσης κατακρήμνισης της σταγόνας εν σχέση με τον κατακόρυφο άξονα κλπ. Για χωρικά ομογενείς βροχοπτώσεις, η απόσβεση A_h που εισάγεται σε μήκος ζεύξης L είναι ανάλογη του L

$$A_h = aR^b \cdot L \quad (1.3)$$

Για γραμμική και κυκλική πόλωση οι συντελεστές a και b μπορούν να υπολογισθούν από τις παρακάτω σχέσεις [Nowland *et al*, 1977]

$$a = \frac{[a_H + a_V + (a_H - a_V) \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos 2\tau]}{2} \quad (1.4)$$

$$b = \frac{a_H b_H + a_V b_V + (a_H b_H - a_V b_V) \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos(2\tau)}{2a} \quad (1.5)$$

όπου a_H , b_H , και a_V , b_V είναι οι αντίστοιχες τιμές των συντελεστών a , b για οριζόντια και κατακόρυφη πόλωση, φ η γωνία ανύψωσης του ραδιοβήματος (δηλ. η γωνία με τον ορίζοντα) και τ η γωνία πόλωσης ως προς τον ορίζοντα ($\tau = 45^\circ$ για κυκλική πόλωση). Οι συντελεστές a_H , b_H , και a_V , b_V μπορούν να υπολογιστούν, κάνοντας κατάλληλες υποθέσεις για την κατανομή του μεγέθους της σταγόνας. Παρακάτω δίνονται τύποι

υπολογισμού για σφαιροειδείς σταγόνες τόσο για την κατανομή των Laws και Parsons [1943] όσο και για αυτή των Ayazi και Olsen [1985]. Η πρώτη κατανομή είναι αρκετά διαδεδομένη και έχει εφαρμογή σε περιοχές ευκράτων κλιμάτων και η δεύτερη ισχύει σε τροπικές περιοχές. Για την πρώτη περίπτωση των Laws και Parsons [1943], για συχνότητες από 10 GHz έως 30 GHz, έχουμε τους τύπους :

$$\left. \begin{aligned} a_H &= 2.1114 \cdot 10^{-5} \cdot f^{2.71896} \\ a_V &= 1.6953 \cdot 10^{-5} \cdot f^{2.76183} \\ b_H &= 1.7694 - 0.23202 \cdot \ln f \\ b_V &= 1.8376 - 0.25536 \cdot \ln f \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Ενώ οι αντίστοιχες τιμές για την κατανομή Ayazi και Olsen [1985] προσεγγίζονται μέσω γραμμικής παλινδρόμησης από τους Zhang et al [1994], για συχνότητες 10 GHz έως 30 GHz, από τους τύπους:

$$\left. \begin{aligned} a_H &= 1.93082 \cdot 10^{-4} \cdot f^{2.04115} \\ a_V &= 1.4435 \cdot 10^{-4} \cdot f^{2.08455} \\ b_H &= 1.7071 - 0.20769 \cdot \ln f \\ b_V &= 1.6248 - 0.05898 \cdot \ln f \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

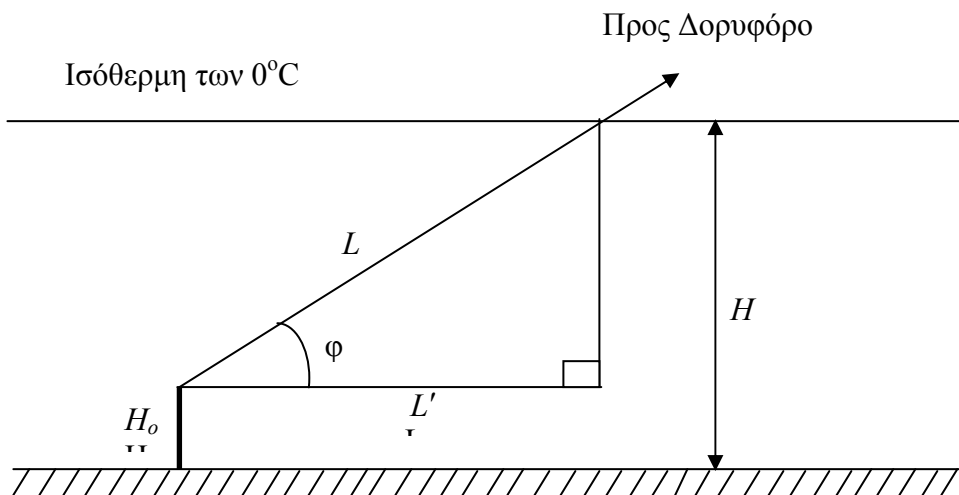
Η απλοποιημένη παραδοχή για την σφαιρικότητα των σταγόνων μαζί με την παράβλεψη της γωνίας κατακρήμνισης, οδηγούν σε σφάλματα στον υπολογισμό των a και b εν σχέση με τις πραγματικές τιμές τους. Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει σημαντικές προσπάθειες για περισσότερη αξιοπιστία στις τιμές των a και b , με τον υπολογισμό της H/M σκέδασης από ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο σταγόνας από το σφαιρικό, συγκεκριμένα το μοντέλο Pruppacher-Pitter. Η ακρίβεια στη λύση του προαναφερθέντος προβλήματος σκέδασης οδηγεί σε καλύτερη ακρίβεια για τις παραμέτρους a και b .

1.5 Μοντελοποίηση της απόσβεσης κατά μήκος κεκλιμένου ραδιο-διαδρόμου

Η δορυφορική ζεύξη έχει το ένα άκρο της στον επίγειο σταθμό και το άλλο στον γεωστατικό δορυφόρο. Κατά συνέπεια, το ίχνος της διαδρομής που ακολουθεί το διαδιδόμενο σήμα σχηματίζει αυτό που λέμε κεκλιμένο ραδιο-διάδρομο (radio slant path) και προφανώς ένα μόνο τμήμα του είναι εκτεθειμένο στα τροποσφαιρικά φαινόμενα. Για

την απόσβεση λόγω βροχής κατά μήκος του εν λόγω τμήματος, μελετάμε στη συνέχεια την κατακόρυφη δομή του μέσου βροχής μέσα στην τροπόσφαιρα.

Η κατακόρυφη δομή του μέσου βροχής χαρακτηρίζεται από δύο περιοχές. Η άνω περιοχή αποτελείται από ένα μίγμα παγοκρυστάλλων και χιονιού και δεν συνεισφέρει σημαντικά στην απόσβεση του σήματος σε συχνότητες μικρότερες των 60 GHz αλλά επιδρά σε συστήματα διπλής πόλωσης, αφού προκαλεί αποπόλωση του σήματος. Στην κάτω περιοχή, εμφανίζεται κυρίως η βροχόπτωση που είναι η κυριότερη αιτία απόσβεσης του δορυφορικού σήματος. Το φυσικό όριο μεταξύ των δύο περιοχών αντιστοιχεί κατά προσέγγιση στο υψόμετρο της ισόθερμης των 0°C και καλείται ενεργό ύψος βροχής [ITU-R, P. 839-3]. Στο Σχήμα 1.1 παριστάνεται σχηματικά μια δορυφορική ζεύξη, στην οποία φαίνονται οι δύο περιοχές.



Σχήμα 1.1 Ενεργό ύψος βροχής και ενεργό μήκος δορυφορικής ζεύξης

Η μέση εποχιακή τιμή του υψομέτρου H της ισόθερμης 0°C εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος της υπό μελέτη τοποθεσίας και προσδιορίζεται προσεγγιστικά σε km από την εξής σχέση [Crane, 2003]:

$$H = \begin{cases} 4.8 & , |A| \leq 30^\circ \\ 7.8 - 0.1 \cdot |A| & , |A| > 30^\circ \end{cases} \quad (1.8)$$

όπου A είναι το γεωγραφικό πλάτος σε μοίρες.

Το μήκος του υπό κλίση τμήματος της διαδρομής, που βρίσκεται στην κάτω περιοχή, ονομάζεται *ενεργό μήκος* και ισούται με:

$$L = \frac{H - H_o}{\sin \varphi} \quad \varphi \geq 10^\circ \quad (1.9)$$

$$L = \left[(E + H)^2 - (E + H_o)^2 \cos^2 \varphi \right]^{1/2} - (E + H_o) \sin \varphi \quad \varphi < 10^\circ$$

όπου E είναι η μέση ακτίνα της γης (6378 km), φ η γωνία ανύψωσης του δορυφόρου και H_o το υψόμετρο του επιγείου σταθμού ως προς την επιφάνεια της θάλασσας.

Ο Crane [2003] πρότεινε μια μέθοδο σύμφωνα με την οποία ο υπολογισμός της απόσβεσης λόγω βροχής κατά μήκος μιας δορυφορικής ζεύξης, ανάγεται σε πρόβλημα υπολογισμού της απόσβεσης κατά μήκος μιας επίγειας ζεύξης. Σύμφωνα με αυτή, η ένταση βροχόπτωσης είναι ομοιόμορφη ως προς την κατακόρυφη, μέχρι το όριο του ενεργού ύψους βροχής. Η απόσβεση που προκαλείται κατά μήκος στοιχειώδους τμήματος dl του κεκλιμένου ραδιοδιαδρόμου της δορυφορικής ζεύξης, είναι ανάλογη προς την απόσβεση κατά μήκος της προβολής του τμήματος αυτού επί του οριζοντίου επιπέδου. Από την σχέση (1.1), για μια δορυφορική ζεύξη μήκους dl έχουμε:

$$dA = A_o \cdot dl \quad (1.10)$$

όπου A_o είναι η ειδική απόσβεση. Περαιτέρω υποθέτουμε την ομοιομορφία στην βροχή ως προς τον κατακόρυφο άξονα. Αυτό σημαίνει ότι η ειδική απόσβεση σε ένα σημείο του εδάφους θα είναι ίση με την ειδική απόσβεση σε οποιοδήποτε σημείο βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από αυτό. Η απόσβεση dA' η οποία προκαλείται κατά μήκος της προβολής στο έδαφος του κεκλιμένου τμήματος γωνίας ανύψωσης φ ισούται με

$$dA' = A_o \cdot dl \cdot \cos \varphi \quad (1.11)$$

Από τις σχέσεις (1.10) και (1.11) παίρνουμε:

$$dA' = dA \cdot \cos \varphi \quad (1.12)$$

και με μια ολοκλήρωση παίρνουμε :

$$A' = A \cdot \cos \varphi \quad (1.13)$$

όπου A η απόσβεση κατά μήκος του κεκλιμένου ραδιοδρόμου και A' η απόσβεση κατά μήκος της προβολής του. Άρα η απόσβεση λόγω βροχής ενός κεκλιμένου ραδιοδιαδρόμου μιας δορυφορικής ζεύξης μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση (1.1)

χρησιμοποιώντας ως μήκος της αντίστοιχης επίγειας ζεύξης το $L \cos \varphi$, όπου το L δίνεται από την σχέση (1.9).

Αναφέραμε μέχρι τώρα περιληπτικά τα τροποσφαιρικά φαινόμενα που προκαλούν απόσβεση στις μικροκυματικές επίγειες ή δορυφορικές ζεύξεις. Εστιάσαμε τελικά στις παραμέτρους του μηχανισμού απόσβεσης που προκαλεί αποκλειστικά η βροχή. Τέλος, αναφέραμε τον ενδεδειγμένο τρόπο υπολογισμού της εν λόγω απόσβεσης στην περίπτωση μιας δορυφορικής ή επίγειας ζεύξης.

Στη συνέχεια, θα αναλύσουμε τις Τεχνικές Αμβλυνσης Διαλείψεων οι οποίες αποσκοπούν στο να εξουδετερώσουν σε πραγματικό χρόνο, τις διαλείψεις που προκαλούνται από τα τροποσφαιρικά φαινόμενα [Gremont *et. al.*, 1999], [Sweeney *et. al.*, 1999]. Η αρχή λειτουργίας τους συμπίπτει με αυτή των βρόχων ελέγχου (control loops). Η συνολική προσέγγιση θα γίνει υπό το πρίσμα της προβληματικής που προκαλεί στις ζεύξεις η απόσβεση λόγω βροχής ωστόσο, οι ιδέες που θα αναφερθούν βρίσκουν εφαρμογή στην προστασία της ζεύξης από οποιαδήποτε αιτία διάλειψης.

1.6 Τεχνικές Αμβλυνσης Διαλείψεων

Για να αντιληφθούμε το μηχανισμό λειτουργίας των Τεχνικών Αμβλυνσης Διαλείψεων, ας θεωρήσουμε το απλούστερο παράδειγμα μιας δορυφορικής ζεύξης στην οποία έχουμε σύνδεση ενός επίγειου σταθμού με ένα (γεωστατικό) δορυφόρο. Η απόσβεση παρακολουθείται σε πραγματικό χρόνο στον δέκτη –ας υποθέσουμε ότι ο δέκτης βρίσκεται στο δορυφόρο– με μεγάλη συχνότητα δειγματοληψίας f_s . Οι μετρήσεις επανεκπέμπονται στον εκπομπό –επίγειο σταθμό στο παράδειγμά μας– και εκεί υπάρχει ένα *σύστημα διαχείρισης αντιμέτρων* (countermeasures) το οποίο αποφασίζει ανάλογα με τη μετρούμενη τιμή, για το εάν πρέπει να διατεθούν *επιπλέον* πόροι του συστήματος ώστε η ζεύξη να προφυλαχθεί από την κλιμάκωση της απόσβεσης και να διατηρήσει την επίδοσή της στα επιθυμητά επίπεδα. Για το είδος και τη φύση των αντιμέτρων θα μιλήσουμε σε επόμενη παράγραφο.

Αυτό που πρέπει να γίνει κατανοητό εδώ είναι ότι η αποτελεσματική λειτουργία των Τεχνικών Αμβλυνσης Διαλείψεων προϋποθέτει την αξιόπιστη πρόβλεψη της συμπεριφοράς της απόσβεσης, σε χρονική κλίμακα εξαιρετικά βραχυπρόθεσμη (short-

term prediction). Η τάξη μεγέθους της εν λόγω κλίμακας, για το απλοποιημένο παράδειγμα μιας ζεύξης με ένα πομπό-δέκτη που εξετάζουμε εδώ, δίνεται από το άθροισμα των χρόνων που χρειάζεται το σήμα να διανύσει από τον δέκτη στον πομπό και πάλι πίσω, συν την *καθυστέρηση* (delay) απόκρισης του συστήματος διαχείρισης αντιμέτρων στον επίγειο πομπό. Η *καθυστέρηση* που εισάγει το σύστημα διαχείρισης αντιμέτρων οφείλεται κυρίως στην αναπόφευκτη ‘αδράνεια’ κατά την αλλαγή ‘κατάστασης’, δηλαδή την δέσμευση ή την απελευθέρωση πόρων. Ας εξετάσουμε όλα αυτά πιο αναλυτικά.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_o δειγματοληπτούμε στον δέκτη απόσβεση με τιμή A_o . Η τιμή αυτή εκπέμπεται πίσω στον πομπό σχεδόν ακαριαία και φτάνει σε αυτόν ύστερα από χρόνο T_t το οποίο για την περίπτωση γεωστατικού δορυφόρου είναι περίπου 300msec –χρόνος διάδοσης από το δορυφόρο στον επίγειο εκπομπό. Εκεί, το σύστημα διαχείρισης ‘προβλέπει’ την τιμή της απόσβεσης στο δέκτη ύστερα από χρόνο $2T_t + T_r$, όπου ο πρώτος όρος του αθροίσματος αντιστοιχεί στο χρόνο διάδοσης από τον δέκτη στον εκπομπό και πάλι πίσω και ο δεύτερος, στο χρόνο που σπαταλάτε για τη δέσμευση ή την αποδέσμευση πόρων από το σύστημα διαχείρισης αντιμέτρων. Η τάξη μεγέθους του αθροίσματος είναι 1sec. Γι’ αυτό το *μικρό* χρονικό διαστημα –που αντιστοιχεί σε μεγάλη συχνότητα για την τυχαία διαδικασία της διάλειψης: 1Hz– αποδεικνύεται ότι μόνο οι ταχείες διαλείψεις (fast-fading) εξαιτίας της ανομοιογένειας του δείκτη διάθλασης χρήζουν προσοχής δεδομένου ότι οι άλλες (δηλ. τα slow fading) προκαλούμενες από τις ατμοσφαιρικές κατακρημνίσεις έχουν φασματικό περιεχόμενο στη βασική ζώνη κάτω από 0.01 Hz. Σημειωτέον ότι στο απλοποιημένο μας παράδειγμα, η συχνότητα δειγματοληψίας f_s έχει μόνο κάτω όριο εφόσον φράσσεται από την ποσότητα $f_s \geq \frac{1}{2T_t + T_r}$. Εάν επιτρέψουμε μικρότερο ρυθμό δειγματοληψίας τότε επιμηκύνουμε άσκοπα το διάστημα μεταξύ *μετρούμενης* και *προβλεπόμενης* τιμής με αποτέλεσμα να αυξάνεται η τυχαιότητα στο σύστημα και να επιβαρύνεται το ποσοστό επιτυχίας της πρόβλεψης.

Σε ένα πιο σύνθετο παράδειγμα δορυφορικού δικτύου με πολλούς χρήστες στο οποίο όλοι συνδέονται με όλους διαμέσου του δορυφορικού αναμεταδότη, το σενάριο

λειτουργίας των Τεχνικών Άμβλυσης Διαλείψεων είναι πιο σύνθετο. Εκεί, δεδομένου ότι ο χρόνος παρακολούθησης της απόσβεσης χωρίζεται σε χρονικές σχισμές που ανατίθενται σε μεγάλο αριθμό καναλιών, η συχνότητα δειγματοληψίας ελαττώνεται αναγκαστικά τόσο, ώστε πολλές φορές να χρειάζεται να γίνουν προβλέψεις για την απόσβεση σε βάθος 10sec μέχρι 1 min. Για να γίνει αυτό κατανοητό, ας θεωρήσουμε ένα πλήθος επίγειων χρηστών που εξυπηρετούνται δια μέσου ενός δορυφορικού αναμεταδότη. Εάν η συχνότητα δειγματοληψίας της απόσβεσης είναι 10Hz τότε για 100 χρήστες, ο κύκλος επιτήρησης για όλους κλείνει σε 10 sec. Είναι προφανές ότι το πλήθος των χρηστών και η τιμή της μέγιστης δυνατής συχνότητας δειγματοληψίας ρυθμίζει το βάθος χρόνου για την πρόβλεψη.

Τέλος, τα σφάλματα στην επανεκπομπή της μέτρησης από τον δέκτη στον πομπό είναι λογικό να επιμηκύνουν ακόμα περισσότερο το χρόνο μεταξύ της *μετρούμενης* και της *προβλεπόμενης* τιμής.

Είναι συνεπώς σαφές, ότι για τον σχεδιασμό λειτουργικών και αποτελεσματικών Τεχνικών Άμβλυσης Διαλείψεων πρέπει να αναπτύξουμε ένα μοντέλο προσομοίωσης για την απόσβεση λόγω βροχής που επηρεάζει μια ζεύξη, το οποίο θα μας επιτρέψει να κάνουμε προβλέψεις επί του προσομοιούμενου μεγέθους σε ένα βάθος χρόνου μεγαλύτερο των 10 sec. Σε δεύτερη φάση ωστόσο, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και την διακύμανση της απόσβεσης εξαιτίας του σπινθηρισμού, ώστε να έχουμε περισσότερο ρεαλισμό στη μοντελοποίηση και άρα ακρίβεια στην πρόβλεψη. Το δεύτερο αυτό βήμα, αποτελεί τη φυσική συνέχεια της παρούσας διατριβής η οποία περιορίζεται, θέτοντας όμως θεμέλια γερά, στη μοντελοποίηση της απόσβεσης λόγω βροχής. Εκ προοιμίου αναφέρουμε –περισσότερα στο Κεφ. 6– ότι η διακύμανση λόγω σπινθηρισμού μπορεί να ‘προσαρτηθεί’ στο μοντέλο της απόσβεσης λόγω βροχής με διάφορους τρόπους κλιμακούμενου ρεαλισμού αλλά και κλιμακούμενης δυσκολίας μαζί.

Αμέσως μετά, ακολουθεί μια σύντομη παράγραφος που αναφέρεται στον τρόπο εφαρμογής των Τεχνικών Άμβλυσης των Διαλείψεων υπό το πρίσμα όχι πλέον του μηχανισμού λειτουργίας, αλλά σε σχέση με την Τεχνική, δηλαδή με ποιους πόρους και με πιο τρόπο δύναται να εξουδετερωθεί σε πραγματικό χρόνο η *προβλεπόμενη* διάλειαση.

1.7 Αντίμετρα στα Πλαίσια της Εφαρμογής Τεχνικών Άμβλυσης Διαλείψεων

Βασιζόμενοι στις διαφορετικές σχεδιαστικές προσεγγίσεις που αφορούν στις Τεχνικές Άμβλυσης Διαλείψεων, μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις πιο κάτω κατηγορίες [Panagopoulos *et. al.*, 2004] :

- Τεχνικές που βασίζονται στον έλεγχο του EIRP (effective isotropic radiated power)
- Τεχνικές προσαρμόσιμης εκπομπής (adaptive transmission techniques)
- Τεχνικές Διαφορικής Προστασίας (diversity protection schemes)

1.7.1 Τεχνικές Ελέγχου του EIRP

Όπως είναι γνωστό το EIRP είναι το γινόμενο της εκπεμπόμενης ισχύος επί το κέρδος της κεραίας, συνήθως εκφρασμένο σε dBw. Η τεχνική ελέγχου του EIRP βασίζεται στην μεταβολή είτε της εκπεμπόμενης ισχύος είτε του κέρδους της κεραίας ώστε να εξουδετερώσουμε τις απώλειες ισχύος εξαιτίας των φαινομένων διάδοσης. Συγκεκριμένα, στην πρώτη περίπτωση, η προσαρμογή της εκπεμπόμενης ισχύος μπορεί να γίνει είτε στο σταθμό βάσης (uplink power control - ULPC) είτε στον δορυφόρο (downlink power control – DLPC). Από την άλλη πλευρά η τεχνική προσαρμογής του κέρδους της κεραίας μπορεί να γίνει αποκλειστικά στο δορυφόρο και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον διότι ενώ είναι δύσκολη η υλοποίησή της με τις συμβατικές κεραίες και χρειάζεται η χρησιμοποίηση ευφρών κεραιών ωστόσο, έχει το πλεονέκτημα να μην απαιτεί την εκτίμηση της απόσβεσης αλλά μια μικρής διάρκειας πρόβλεψη καιρού η οποία επιτυγχάνεται διαμέσου δορυφορικών εικόνων [Hartigan *et. al.*, 1993].

1.7.2 Τεχνικές Προσαρμόσιμης Εκπομπής

Οι τεχνικές που ανήκουν σε αυτή την κατηγορία έχουν ως κύριο χαρακτηριστικό ότι τροποποιούν τη μέθοδο με την οποία τα τηλεπικοινωνιακά σήματα διαμορφώνονται ή επεξεργάζονται ώστε να εξουδετερώνουν την επιβάρυνση που έχουν στην επίδοση του καναλιού οι ατμοσφαιρικές κατακρημνίσεις και τα διάφορα μετεωρολογικά φαινόμενα. Μπορούν να διαιρεθούν εκ νέου σε τρεις κατηγορίες: hierarchical coding (HC), hierarchical modulation (HM), data rate reduction (DRR).

Hierarchical Coding- Στην περίπτωση του HC είναι προφανές ότι κωδικοποίηση εισάγεται στα δορυφορικά συστήματα για τον εντοπισμό και τη διόρθωση λαθών σε bits,

τα οποία οφείλονται στην μείωση της επίδοσης του καναλιού εξαιτίας των φαινομένων διάδοσης. Για το σκοπό αυτό στέλνονται διαμέσου του διαύλου υπεράρθρο bits ώστε να είναι δυνατή η διατήρηση της ποιότητας υπηρεσίας (*Quality of Service-QoS*) στα επιθυμητά επίπεδα. Ας παρατηρήσουμε ωστόσο ότι η αύξηση του όγκου της πληροφορίας που αποστέλεται, δηλαδή η αύξηση του ρυθμού μετάδοσης δεδομένων απαιτεί και μια αύξηση στο διαθέσιμο φάσμα. Συνεπώς η τεχνική αυτή θα μπορούσαμε να πούμε ότι αντισταθμίζει την ανάγκη για αύξηση της εκπεμπόμενης ισχύος ώστε να μην αυξηθεί το BER, με την αύξηση στο χρησιμοποιούμενο φάσμα. Σε ότι αφορά την κωδικοποίηση που χρησιμοποιείται, συνήθως προτιμάται η φιλοσοφία του FEC (forward error correction) όπου η αποκωδικοποίηση συντελείται στον δέκτη χωρίς να υπάρχει καμία ανάδραση πληροφορίας από τον πομπό. Αντίθετα στην ARQ (automatic repeat request) τα λανθασμένα bit διορθώνονται διαμέσου της επαναμετάδοσης από τον πομπό των πακέτων που τα περιέχουν, ύστερα από αίτημα του δέκτη.

Hierarchical Modulation-Στη δεύτερη περίπτωση του HM, επιλέγουμε κατάλληλο σχήμα διαμόρφωσης της πληροφορίας ώστε κατά τη διάρκεια ενός γεγονότος διάλειψης να επιτυγχάνουμε το επιθυμητό BER. Ας εξετάσουμε όμως μέσα από ένα παράδειγμα την διαδικασία της εφαρμογής αυτής της τεχνικής. Το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο σχήμα διαμόρφωσης για δορυφορικά συστήματα είναι η διαμόρφωση PSK (Phase Shift Keying). Ωστόσο για να επιτυγχάνουμε μέγιστη φασματική απόδοση, δηλαδή να μεταδίδουμε περισσότερα bit ανα sec χωρίς να απαιτούμε περισσότερο φάσμα, επιλέγουμε μεγαλύτερης τάξης PSK σχήματα όπως το QPSK, 8-PSK, 16-PSK and 64-PSK, τα οποία περιλαμβάνουν 4, 8, 16 και 64 καταστάσεις φάσης αντίστοιχα. Επίσης είναι γνωστό ότι εκτός από τη φάση μπορούμε να έχουμε και καταστάσεις πλάτους οπότε προκύπτει το σχήμα διαμόρφωσης QAM (Quadrature Amplitude Modulation). Συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι όσο η τάξη του M-PSK ή M-QAM αυξάνει, τόσο μεγαλύτερη αποδοτικότητα του διαθέσιμου φάσματος εξασφαλίζουμε. Από την άλλη πλευρά όμως, επειδή η απόσταση των διαδοχικών καταστάσεων φάσης ή πλάτους μειώνεται όσο αυξάνεται η τάξη M, τα σχήματα γίνονται περισσότερο επιρρεπή στα σφάλματα με αποτέλεσμα ένα σύστημα να χρησιμοποιεί σχήματα όπως 16-PSK ,64-PSK ή 256-QAM σε συνθήκες καθαρού ουρανού (clear sky conditions) και πιο ασφαλή σχήματα όπως BPSK ή QPSK κατά τη διάρκεια γεγονότων έντονων διαλείψεων.

Data Rate Reduction- Τέλος, στην περίπτωση της τεχνικής DRR, μειώνουμε το ρυθμό μετάδοσης των δεδομένων ώστε να επιτύχουμε κάποιο κέρδος στο σηματοθορυβικό λόγο στην είσοδο του δέκτη και να διατηρήσουμε την επιθυμητή ποιότητα υπηρεσίας της ζεύξης (QoS) κατά τη διάρκεια έντονων φαινομένων διάλειψης. Από τις τρεις τεχνικές που αναφέρθηκαν μπορούμε τώρα να τονίσουμε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους βασιζόμενοι στις μεταξύ τους διαφορές. Με αναφορά στις πρώτες δυο μεθόδους (HC, HM), σε ένα σύστημα πολλαπλής πρόσβασης (multiple access system), δεδομένου ότι ο χρήστης που υφίσταται διαλείψεις θέλουμε να διατηρήσει το ρυθμό μετάδοσης δεδομένων που έχει υπο συνθήκες καθαρού ουρανού, είναι επιτακτική ανάγκη να τον προμηθεύσουμε με επιπλέον πόρους είτε αυτό είναι χρονικές σχισμές (TDMA) είτε φάσμα. Αυτό βέβαια συνεπάγεται και την προνομιακή τροφοδότηση κάποιων με επιπλέον πόρους του συστήματος. Αντίθετα στην τεχνική DRR, ο χρήστης του οποίου το κανάλι υποφέρει από διαλείψεις είναι αναγκασμένος να υποστεί τη μείωση του ρυθμού μετάδοσης το οποίο σε κάποιες εφαρμογές μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα στην ποιότητα της υπηρεσίας.

1.7.3 Τεχνικές Διαφορικής Προστασίας

Οι τεχνικές διαφορικής προστασίας διαφέρουν σε σχέση με όλες τις προηγούμενες μεθόδους στο γεγονός ότι αποσκοπούν στο να εξουδετερώσουν την ίδια την απόσβεση που εισάγεται στη ζεύξη εξαιτίας των ατμοσφαιρικών κατακρημνίσεων και αυτό θα γίνει πιο κατανοητό από τα παρακάτω. Συνεπώς, θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει ότι αποτελούν την πιο αξιόπιστη και αποτελεσματική λύση για τη βελτίωση της επίδοσης των δορυφορικών ζεύξεων που υποφέρουν από βαθιές διαλείψεις, εξαιτίας της απόσβεσης που εισάγουν οι ατμοσφαιρικές κατακρημνίσεις για συχνότητες λειτουργίας ανω των 10 GHz. Οι τεχνικές διαφορικής λήψης χωρίζονται σε τέσσερις μεγάλες κατηγορίες: στη διαφορική λήψη θέσης (site diversity), στη διαφορική λήψη τροχιάς (orbital diversity), στη διαφορική λήψη συχνότητας (frequency diversity) και στη διαφορική λήψη χρόνου (time diversity).

Διαφορική λήψη θέσης- Ανάλογα με την εποχή και τη γεωγραφική θέση, η βροχή παρουσιάζει χωρική ομοιομορφία ως προς την ένταση βροχόπτωσης σε περιοχές μεγάλης έκτασης, οπότε καλείται στρωσιγενής (stratiform rain) και συνοδεύεται από φαινόμενα

ήπιας έντασης, είτε παρουσιάζει πυρήνες έντονης βροχόπτωσης και μεγάλη ανομοιογένεια από περιοχή σε περιοχή οπότε ονομάζεται βροχόπτωση συνεκτικού τύπου (convective rain) και οι πυρήνες συνεκτικοί βροχοπυρήνες (convective raincells). Οι πυρήνες αυτοί έχουν συνήθως μέγιστη διάμετρο 5 km στο εσωτερικό των οποίων παρατηρούνται μεγάλες τιμές βροχόπτωσης. Εξωτερικά των πυρήνων υπάρχουν εκτενείς περιοχές με στρωσιγενή βροχή. Η ανομοιογένεια της βροχής στο εσωτερικό των βροχοπυρήνων όπου συμβαίνουν τα έντονα φαινόμενα διάλειψης, οδηγεί στην χαμηλή συσχέτιση μεταξύ των αποσβέσεων των σημάτων που ακολουθούν διαφορετικούς ραδιοδιαδρόμους. Ως εκ τούτου εάν το σήμα λαμβάνεται στο δέκτη ακολουθώντας διαφορετικές διαδρομές, είναι πολύ πιθανό ότι μια έντονη διάλειψη θα επηρεάσει μόνο μια διαδρομή αφήνοντας τις άλλες χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα.

Συνεπώς η τεχνική της διαφορικής λήψης θέσης εκμεταλλεύεται τα πιο πάνω χαρακτηριστικά της βροχής συνεκτικού τύπου και χρησιμοποιεί δυο (double site diversity) ή τρεις (triple site diversity) επίγειους σταθμούς (earth stations) ώστε να εξασφαλίσει ότι η πιθανότητα να εμφανιστεί έντονη διάλειψη ταυτόχρονα σε όλους τους εναλλάκτικους ραδιοδρόμους είναι επαρκώς μικρότερη από την αντίστοιχη πιθανότητα να συμβεί η ίδια διάλειψη σε ένα μόνο ραδιοδρόμο. Το σήμα λαμβάνεται σε κάθε επίγειο σταθμό και στέλνεται στον επικεφαλής επίγειο σταθμό (master station) όπου και υποβάλλεται σε περαιτέρω επεξεργασία ώστε να προκύψει ο βέλτιστος σηματοθορυβικός λόγος στην είσοδο του αποδιαμορφωτή. Η διαδικασία επεξεργασίας συνίσταται στην επιλογή του σήματος που προέρχεται από το σταθμό με τη μικρότερη επιβάρυνση σε διαλείψεις ή χρησιμοποιώντας το γραμμικό συνδιασμό όλων των εισερχόμενων σημάτων, πολλαπλασιασμένων με τους κατάλληλους συντελεστές βάρους ανάλογα με την απόσβεση που έχουν υποστεί.

Εκτενής πειραματική δουλειά επάνω στην τεχνική της διαφορικής λήψης θέσεως έχει γίνει τις τελευταίες τρεις δεκαετίες, πράγμα που αποδεικνύει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου. Υπάρχουν αρκετά μοντέλα προβλέψεων που έχουν προταθεί και αφορούν στην επίδοση μιας διαφορικής λήψης θέσης, τα οποία διαιρούνται σε δυο κατηγορίες: τα εμπειρικά και τα φυσικά. Η πρώτη κατηγορία στηρίζεται στην εξαγωγή απλών μαθηματικών τύπων που προκύπτουν από τη στατιστική επεξεργασία

μεγάλου αριθμού διαθέσιμων δεδομένων από πειραματικές μετρήσεις ενώ η δεύτερη βασίζεται κύρια στην κατανόηση του μηχανισμού που προκαλεί τις διαλείψεις.

Διαφορική λήψη τροχιάς- Αν και η τεχνική της διαφορικής λήψεως θέσης είναι η πιο αποτελεσματική, πολλές φορές το κόστος της εφαρμογής της, την καθιστά απαγορευτική. Η απαίτηση να υπάρχουν τουλάχιστον δυο διαφορετικοί επίγειοι σταθμοί βάσης, οι οποίοι να συνδέονται μεταξύ τους με επίγεια, συνήθως ενσύρματα δίκτυα, οδηγεί το κόστος της εφαρμογής στα ύψη. Το γεγονός αυτό οδήγησε στην ιδέα της διαφορικής λήψης τροχιάς η οποία επιτρέπει στους επίγειους σταθμούς να επιλέξουν μεταξύ δυο ή περισσότερων διαφορετικών δορυφόρων, σύμφωνα με τη φιλοσοφία και τις αρχές που διέπουν και τη διαφορική λήψη θέσης.

Η νέα τεχνική είναι σαφώς πιο οικονομική διότι η αλλαγή ραδιοδρόμου μπορεί να γίνει πλέον σε ένα μόνο επίγειο σταθμό, ενώ οι απαιτούμενοι εναλλακτικοί δορυφόροι θεωρούνται ήδη σε τροχιά. Από την άλλη, η αποτελεσματικότητα της μεθόδου είναι μικρότερη από την αντίστοιχη της διαφορικής λήψης θέσης, διότι η απόσταση των εναλλακτικών ραδιοδρόμων στην περίπτωση της διαφορικής λήψης τροχιάς είναι σαφώς μικρότερη και άρα η συσχέτιση μεταξύ των διαλείψεων μπορεί να είναι μεγάλη. Εξάλλου στην περίπτωση της διαφορικής λήψης τροχιάς η παράμετρος που επηρεάζει την επίδοση της μεθόδου είναι η γωνιακή απόσταση θ μεταξύ των δορυφόρων, η οποία εξαιτίας του κορεσμού των δορυφορικών τροχιών, δε μπορεί να έχει μεγάλη τιμή. Αντίθετα, στην περίπτωση της διαφορικής λήψης θέσης, η επίδοση εξαρτάται από την απόσταση D των επίγειων δορυφορικών σταθμών όπου βέβαια δεν υπάρχουν κάποιοι φυσικοί περιορισμοί.

Διαφορική λήψη συχνότητας- Είναι γνωστό ότι όσο αυξάνει η συχνότητα λειτουργίας, τόσο το δορυφορικό κανάλι υποφέρει περισσότερο από διαλείψεις εξαιτίας των ατμοσφαιρικών κατακρημνίσεων και άλλων διαταραχών. Για το λόγο αυτό, εφόσον οι δορυφορικοί δέκτες διαθέτουν αναμεταδότες που λειτουργούν σε διάφορες ζώνες συχνοτήτων, είναι δυνατόν οι χαμηλότερες συχνότητες να χρησιμοποιούνται σε χρονικές περιόδους έντονης διάλειψης. Αντίθετα σε συνθήκες καθαρού ουρανού χρησιμοποιούνται οι υψηλότερες συχνότητες.

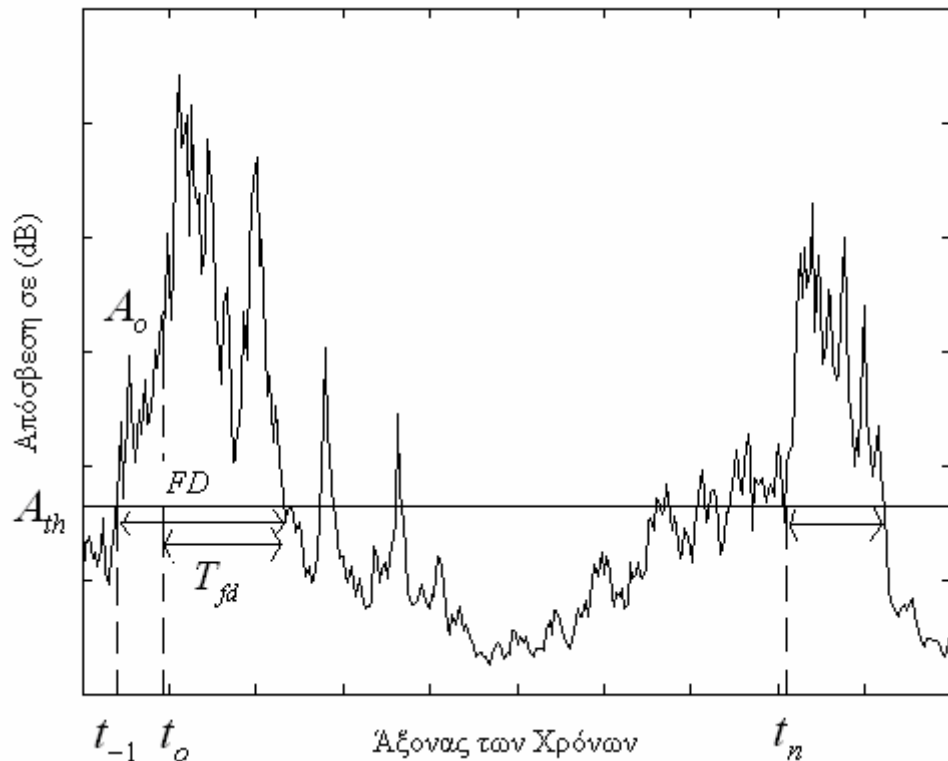
Αν και η εφαρμογή αυτής της μεθόδου για το διαστημικό κομμάτι του δορυφορικού συστήματος δεν απαιτεί κάποιο επιπλέον εξοπλισμό, ωστόσο συγκεκριμένο τηλεπικοινωνιακό υλικό πρέπει να τοποθετηθεί στον επίγειο σταθμό.

Διαφορική λήψη χρόνου- Αυτή η νέα τεχνική είναι εφαρμόσιμη μόνο σε υπηρεσίες ανεκτικές σε χρονικές καθυστερήσεις διότι περιλαμβάνει την επαναλαμβανόμενη μετάδοση δεδομένων σε περιπτώσεις έντονης διάλειψης και κακής ποιότητας σηματοθορυβικού λόγου. Η επαναμετάδοση συνδέεται με τα φαινόμενα διάδοσης και εξαρτάται από τη διάρκεια των φαινομένων διάλειψης.

1.8 *Προδιαγραφές για την προσομοίωση της Τυχαίας Διαδικασίας που αντιστοιχεί στην Απόσβεση από Βροχή. Υπάρχοντα Μοντέλα Προσομοίωσης*

Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε τις προδιαγραφές βάσει των οποίων μπορούμε να κατασκευάσουμε αξιόπιστα μοντέλα προσομοίωσης για την *απόσβεση από βροχή*. Σε γενικές γραμμές τονίζουμε ότι *το ζητούμενο μοντέλο προσομοίωσης καλείται να αποδώσει μια αξιόπιστη πρόβλεψη επί της συμπεριφοράς της απόσβεσης, σε μικρό βάθος χρόνου της τάξης από 10 sec μέχρι 1min ύστερα από μια αρχική/ μετρούμενη τιμή*. Θα παρουσιάσουμε επίσης υπάρχοντα μοντέλα προσομοίωσης της απόσβεσης και θα τα σχολιάσουμε υπό το πρίσμα των προδιαγραφών που ευθύς αμέσως θα αναπτύξουμε. Τέλος, θα αναδείξουμε τα πλεονεκτήματα της καινούριας μεθοδολογίας που είναι ένα από τα κύρια αντικείμενα της παρούσας διατριβής.

Ας δούμε λοιπόν το θέμα των ζητούμενων προδιαγραφών πιο αναλυτικά και ας θεωρήσουμε για παράδειγμα, ένα υποθετικό γεγονός απόσβεσης από βροχή, όπως αυτό εμφανίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 1.2: Ένα υποθετικό αλλά αντιπροσωπευτικό γεγονός απόσβεσης

Όταν η απόσβεση διασχίσει προς τα κάτω το κατώφλι A_{th} –εκφρασμένο σε dB– το σύστημα διαχείρισης αντιμέτρων επαναδεσμεύει πόρους, τους οποίους είχε αποδεσμεύσει όταν η απόσβεση διέσχισε το ίδιο κατώφλι A_{th} προς τα επάνω. Για να λειτουργήσει αποτελεσματικά το σχήμα δέσμευσης-αποδέσμευσης πόρων χωρίς δηλαδή να εκपुरσοκροτούνται αναίτιες μεταβολές, είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε τα στατιστικά χαρακτηριστικά της διάρκειας T_{fd} , δηλαδή της διάρκειας του χρονικού διαστήματος –με αριστερό άκρο το t_0 στο Σχήμα 1.2– κατά τη διάρκεια του οποίου η απόσβεση μένει συνεχώς επάνω από ένα κατώφλι A_{th} , δεδομένου ότι η τιμή της απόσβεσης την στιγμή t_0 είναι $A_o > A_{th}$. Αντίστοιχο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η διάρκεια T_{ifd} η οποία ορίζεται ανάλογα με την T_{fd} με τη διαφορά ότι η απόσβεση στην περίπτωση αυτή βρίσκεται κάτω από το κατώφλι A_{th} και άρα ισχύει $A_o < A_{th}$. Σε πρώτη φάση θα ήταν συνεπώς λογικό να απαιτήσουμε από το μοντέλο προσομοίωσης να αναπαράγει τα στατιστικά χαρακτηριστικά των τυχαίων μεταβλητών T_{fd} και T_{ifd} αλλά και όχι μόνο.

Συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρει μια γενικότερη προσομοίωση των στατιστικών χαρακτηριστικών της Τυχαίας Διαδικασίας που αντιστοιχεί στην απόσβεση και όχι απλώς η μοντελοποίηση μόνο μιας Τυχαίας Μεταβλητής, όσο σημαντική και αν είναι η τελευταία για το σχεδιασμό και τη λειτουργία των Τεχνικών Άμβλυνσης Διαλείψεων. Ο λόγος είναι ότι όσες περισσότερες ‘αρχικές συνθήκες’ καλείται να ικανοποιήσει το προτεινόμενο μοντέλο, τόση περισσότερη ευστάθεια, ευελιξία και κατ’επέκταση προσαρμοστικότητα θα επιδεικνύει, στο εξαιρετικά δυναμικό στατιστικό περιεχόμενο της Τυχαίας Διαδικασίας που αντιστοιχεί στην πραγματική απόσβεση. Επιπλέον ένα μοντέλο που αναπαράγει ικανοποιητικά τα βασικά δυναμικά χαρακτηριστικά της Τυχαίας Διαδικασίας, θα μπορεί να εφαρμοστεί και σε περιπτώσεις πέραν του σχεδιασμού των Τεχνικών Άμβλυνσης Διαλείψεων, όπως είναι οι προσομοιώσεις ζεύξεων point-to-point ή point-to-multipoint με τις τελευταίες να παραπέμπουν σε ασύρματα επίγεια ή δορυφορικά δίκτυα. Με άλλα λόγια, η επικέντρωση της έρευνας στην προσομοίωση μιας Τυχαία Μεταβλητής και όχι στην αναπαραγωγή εν συνόλω των σημαντικότερων στατιστικών χαρακτηριστικών, δυναμικών ή μη, της Τυχαίας Διαδικασίας, θα οδηγήσει σε μια μονόπλευρη προσομοίωση του φαινομένου, αυστηρά περιορισμένης χρήσης –δηλ. στις Τεχνικές Άμβλυνσης Διαλείψεων.

Συμπερασματικά, ένα αξιόπιστο μοντέλο προσομοίωσης πρέπει να αντανακλά ταυτοχρόνως τα στατιστικά χαρακτηριστικά $1^{ης}$, $2^{ης}$ τάξης καθώς και τα στατιστικά των Τυχαίων Μεταβλητών T_{jd} και T_{jfd} της Τυχαίας Διαδικασίας που αντιστοιχεί στην απόσβεση από βροχή. Τα χαρακτηριστικά $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης αναφέρονται αντίστοιχα στην Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας και τη Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης ή ισοδύναμα τη Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας της Τυχαίας Διαδικασίας. Βασικός σκοπός της διατριβής είναι η ανάπτυξη ενός τέτοιου μοντέλου.

Από τα υπάρχοντα μοντέλα προσομοίωσης, πρώτα αναφέρουμε το εμπειρικό μοντέλο του [Max van de Kamp] το οποίο ‘προβλέπει’ την Κατανομή Πιθανότητας της απόσβεσης λόγω βροχής, σε βραχύ χρονικό διάστημα ύστερα από μια μετρούμενη τιμή. Το μοντέλο αυτό προκύπτει από την χρήση τεχνικών στατιστικής προσαρμογής (fitting) επί των μετρήσεων απόσβεσης για αυτό και ονομάζεται εμπειρικό. Μια πρώτη αδυναμία του μοντέλου είναι ότι δεν εγκιβωτίζει καμία στατιστική πληροφορία για τις Τυχαίες Μεταβλητές T_{jd} και T_{jfd} . Συγκεκριμένα, η Μεταβατική Συνάρτηση Κατανομής

Πιθανότητας $P(A(t+t_o) > A_{th} | A(t_o) = A_o)$ η οποία υπολογίζεται από το Μοντέλο Max van de Kamp, αποτελεί μόνο το *άνω φράγμα* της κατανομής της T_{fd} δηλαδή της $P(T_{fd} > t | A(t_o) = A_o)$. Η διαπίστωση αυτή προκύπτει εύκολα εάν σκεφτεί κανείς ότι *κάποια* μέλη της οικογένειας των καμπυλών απόσβεσης που έχουν την ιδιότητα να ξεκινούν τη χρονική στιγμή t_o από τη θέση $A_o > A_{th}$ και τη χρονική στιγμή $t+t_o$ να εξακολουθούν να βρίσκονται επάνω από το κατώφλι A_{th} –όπως δηλαδή συμβαίνει στο Σχήμα 1.2–, κάποιες λοιπόν από αυτές τις καμπύλες έχουν εν τω μεταξύ διασχίσει δυο φορές το κατώφλι A_{th} , προς τα κάτω και προς τα πάνω διαδοχικά, ώστε να ξαναβρεθούν υπεράνω του κατωφλίου. Αυτές λοιπόν οι καμπύλες ενώ *ανήκουν* στα ενδεχόμενα $\{A(t+t_o) > A_{th} | A(t_o) = A_o\}$ την ίδια στιγμή ωστόσο *δεν ανήκουν* στα ενδεχόμενα $\{T_{fd} > t | A(t_o) = A_o\}$. Άρα η πιθανότητα $P(A(t+t_o) > A_{th} | A(t_o) = A_o)$ είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση της $P(T_{fd} > t | A(t_o) = A_o)$. Μάλιστα, όσο μεγαλώνει η τιμή του t , τόσο αποκλίνουν οι δύο κατανομές με την πρώτη να είναι πάντα το *άνω φράγμα* της δεύτερης για κάθε t .

Εν γένει, η χρήση εμπειρικών μοντέλων είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη στην επιστημονική περιοχή της H/M διάδοσης. Η σκοπιμότητά τους συνοψίζεται στην προσομοίωση κάποιων παρατηρούμενων στατιστικών χαρακτηριστικών της απόσβεσης. Η προσομοίωση συνήθως επιτυγχάνεται με ευρηστικούς (heuristic) τρόπους που σημαίνει ότι οι παράμετροι γνωστών Κατανομών Πιθανότητας υπολογίζονται έτσι ώστε οι Κατανομές να αντανakλούν τα παρατηρούμενα στατιστικά χαρακτηριστικά. Στη συνέχεια εξετάζεται εάν το μοντέλο αναπαράγει και άλλα στατιστικά χαρακτηριστικά του φαινομένου πέρα από αυτά που επιβλήθηκαν κατά μια έννοια ως ‘αρχικές συνθήκες’. Εάν κάτι τέτοιο συμβαίνει τότε το μοντέλο αποκτά ακόμα μεγαλύτερη αξιοπιστία. Η προβληματική των ευρηστικών μοντέλων μπορεί να γίνει κατανοητή εύκολα. Δεν έχουν κανένα έρεισμα φυσικό και μαθηματικό με την έννοια ότι επιλέγονται εμπειρικά και άρα δεν είναι βέβαιο ότι η εφαρμογή τους μπορεί να επεκταθεί και σε προβλήματα πέραν αυτού που αρχικά κλήθηκαν να λύσουν. Για παράδειγμα, το γεγονός ότι η τάδε ή η δείνα κατανομή μοντελοποιεί τη δυναμική συμπεριφορά μιας ζεύξης δε συνεπάγεται

αναγκαστικά ότι η ίδια κατανομή μοντελοποιεί το ίδιο ικανοποιητικά τις δυναμικές ιδιότητες αποσβέσεων άλλων ζεύξεων.

Περαιτέρω, υπάρχουν μοντέλα στηριζόμενα σε περισσότερο μαθηματικές βάσεις όπως αυτά που αφορούν στην παραγωγή χρονοσειρών με στατιστικές ιδιότητες αντιπροσωπευτικές του πραγματικού φαινομένου. Οι χρονοσειρές παράγονται βάσει των τεχνικών ARMA (Auto Regressive Moving Average) [Papoulis 1991] οι οποίες δέχονται σαν είσοδο ένα διάνυσμα που περιέχει τις πιο πρόσφατες τιμές της προσομοιούμενης Τυχαίας Διαδικασίας και δίνουν ως έξοδο, την τιμή που προβλέπεται για την επόμενη κατάσταση της χρονοσειράς. Αν και η τεχνική ARMA έχει πιο σαφείς μαθηματικούς προσανατολισμούς σε σχέση με ένα εμπειρικό μοντέλο ωστόσο παρουσιάζει αισθητές αδυναμίες: το μοντέλο ARMA δεν δύναται να προσομοιώσει *ταυτόχρονα* τα στατιστικά 1^{ης} και 2^{ης} τάξης της απόσβεσης από βροχή ούτε βέβαια τα Στατιστικά Χαρακτηριστικά των Τυχαίων Μεταβλητών T_{fd} και T_{ifa} .

Σε ένα επίπεδο πιο πάνω από τα προηγούμενα, βρίσκονται τα φυσικο-μαθηματικά μοντέλα (physical-mathematical models) με κυρίαρχο να είναι αυτό που προτάθηκε από τον E. Matricciani [1996], που είναι γνωστό ως η Τεχνική της Συνθετικής Καταιγίδας (Synthetic Storm Technique). Η εν λόγω τεχνική μετατρέπει χρονοσειρές ρυθμού βροχόπτωσης μετρούμενες σημειακά, σε χρονοσειρές απόσβεσης που επιβαρύνουν την επίδοση μιας μικροκυματικής επίγειας ή δορυφορικής ζεύξης. Η μετατροπή είναι διαδικασία δυο βημάτων: πρώτα οι *χρονοσειρές* ρυθμού βροχόπτωσης μετατρέπονται σε *χωροσειρές* ρυθμού βροχόπτωσης διαμέσου της ταχύτητας κίνησης του βροχοπυρήνα πάνω από το βροχόμετρο και στη συνέχεια, οι *χωροσειρές* ρυθμού βροχόπτωσης σε χρονοσειρές απόσβεσης διαμέσου του γνωστού ολοκληρώματος που δίνει την απόσβεση κατά μήκος μιας ζεύξης. Περισσότερα για αυτό το μοντέλο στο Κεφάλαιο 3 όπου και παρουσιάζεται αναλυτικά το σχετικό θεωρητικό υπόβαθρο.

Η προβληματική με την Τεχνική της Συνθετικής Καταιγίδας είναι ότι ενώ προσομοιώνει ικανοποιητικά τα δυναμικά χαρακτηριστικά 1^{ης} και 2^{ης} τάξης της απόσβεσης αναπαράγοντας, έστω και κατά προσέγγιση, το φυσικό μηχανισμό γέννησης του φαινομένου, την ίδια στιγμή, αδυνατεί να αντιμετωπίσει το φαινόμενο πιθανοθεωρητικά –όπως άλλωστε και το μοντέλο ARMA το οποίο βέβαια παρουσιάζει επιπλέον αδυναμίες–. Με άλλα λόγια η απόκριση της Τεχνικής της Συνθετικής

Καταιγίδας περιορίζεται μόνο στην γέννηση χρονοσειρών απόσβεσης, αντιπροσωπευτικών του φαινομένου, οι οποίες ωστόσο δε συνοδεύονται από Χρονοεξαρτημένες (Δυναμικές) Κατανομές Πιθανότητας, χρήσιμες για το σχεδιασμό και τη λειτουργία των Τεχνικών Άμβλυσης Διαλείψεων.

Λύση στις αδυναμίες των προαναφερθέντων μοντέλων φαίνεται να δίνει η προσομοίωση της απόσβεσης λόγω βροχής με τη βοήθεια των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων 1^{ης} τάξης. Η ιδέα δεν είναι καινούρια δεδομένου ότι έχει χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν για τον ίδιο σκοπό από τους Maseng και Bakken [1981], Manning [1990], Gremont και Filip [2004], Panagopoulos και Kanellopoulos [2003] και τέλος, τους Lacoste *et. al.* [2005]. Ωστόσο, στην παρούσα διατριβή το πρόβλημα της προσομοίωσης της απόσβεσης λόγω βροχής με τη χρήση των 1^{ης} τάξης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων τίθεται για πρώτη φορά σε ένα πιο συστηματικό μαθηματικό υπόβαθρο. Συγκεκριμένα, αναλύονται οι παρατηρούμενες αδυναμίες των παρελθόντων προσπαθειών οι οποίες –αδυναμίες– αναδεικνύομενες, εγγράφουν σε ένα σαφές πλαίσιο, κανόνες και αλγορίθμους που οδηγούν με τη σειρά τους σε καλύτερα αποτελέσματα προσομοίωσης εν σχέση με προηγουμένως. Περισσότερα για όλα αυτά θα αναφερθούν στις επόμενες παραγράφους. Στην επόμενη ενότητα περιγράψουμε το δυναμικό μοντέλο Maseng-Bakken [1981] το οποίο αποτελεί τη βάση για την περαιτέρω ανάλυση.

1.9 Το Μοντέλο Maseng-Bakken

Οι πρώτοι που χρησιμοποίησαν μια 1^{ης} τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση για την προσομοίωση της απόσβεσης λόγω βροχής ήταν οι Maseng-Bakken (M-B)[1981]. Αν και το δυναμικό μοντέλο που χρησιμοποίησαν για την προσομοίωση είναι μια Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση 1^{ης} Τάξης εντούτοις, πουθενά στην πρωτότυπη δημοσίευση δεν αναφέρθηκε ο συγκεκριμένος όρος, γεγονός που είναι ενδεικτικό της αμηχανίας που ένοιωθαν οι μηχανικοί έναντι αυτής της καινούριας έννοιας που μετρούσε μόλις δυο δεκαετίες ζωής. Η βασική ιδέα ήταν να βρεθεί ένα απλό μοντέλο προσομοίωσης το οποίο πρωτίστως να αντανάκλα τα μακροπρόθεσμα (long-term) στατιστικά χαρακτηριστικά της απόσβεσης λόγω βροχής. Πεποίθηση της πλειοψηφίας των ερευνητών ήταν –και εξακολουθεί να είναι– ότι τα εν λόγω χαρακτηριστικά μιας

ζεύξης περιγράφονται για την πλειονότητα των γεωκλιματικών περιοχών από την Λογαριθμοκανονική Κατανομή Πιθανότητας

$$p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot S_A \cdot A} \exp\left(-\frac{\ln(A) - m_A}{2 \cdot S_A^2}\right) \quad (1.14)$$

όπου A –παραλείπουμε την εξάρτηση από το χρόνο δηλ. δεν γράφουμε $A(t)$ – η Πραγματική Τυχαία Διαδικασία που αντιστοιχεί στην απόσβεση λόγω βροχής και m_A, S_A είναι αντιστοίχως η μέση τιμή (*mean value*) και η τυπική απόκλιση (*standard deviation*) της Μετασχηματισμένης Τυχαίας Διαδικασίας $\ln(A(t))$. Σε δεύτερη φάση, το μοντέλο των M-B πρέπει να αντανακλά κάποια στοιχεία του *μηχανισμού γέννησης* της Πραγματικής Διαδικασίας, δηλαδή της απόσβεσης λόγω βροχής. Μια 1^{ης} Τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση ορίζεται κατά Ito ως εξής

$$\dot{A}_s = K_1(A_s) + \sqrt{K_2(A_s)} \cdot \xi(t) \quad (1.15)$$

όπου A_s είναι η Τυχαία Διαδικασία που προκύπτει ως λύση της Εξ. (1.15) και $K_1(A_s), K_2(A_s)$ οι συντελεστές κατεύθυνσης (*drift*) και διάχυσης (*diffusion*) αντίστοιχα. Επιλέγοντας κατάλληλη συναρτησιακή μορφή για τους συντελεστές $K_1(A_s), K_2(A_s)$ μπορούμε να επηρεάσουμε το μηχανισμό γέννησης της A_s ώστε να μοιάζει με αυτόν της Πραγματικής Τυχαίας Διαδικασίας $A(t)$. Πράγματι, οι M-B εφάρμοσαν τον τύπο ορισμού του συντελεστή διάχυσης $K_2(A_s)$ [Stratonovich, 1963] σε μετρήσεις της απόσβεσης από βροχή

$$K_2(A) = E \left[\frac{(A(t+dt) - A(t))^2}{dt} \mid A(t) \right] \quad (1.16)$$

και υπολόγισαν κατά προσέγγιση την ακόλουθη συναρτησιακή μορφή για τον $K_2(A_s)$

$$K_2(A_s) \propto A_s^2 \quad (1.17)$$

Ας δούμε σε περισσότερη λεπτομέρεια τη διαδικασία όπως την εφάρμοσαν οι M-B. Ο τύπος της (1.16) εφαρμόζεται στις μετρούμενες χρονοσειρές απόσβεσης διακριτού χρόνου, με το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δυο διαδοχικών μετρήσεων να είναι σταθερό και να ισούται με dt . Μια πολυωνυμική παρεμβολή στο αποτέλεσμα που προκύπτει από την Εξ. (1.16) δίνει τη συναρτησιακή μορφή της Εξ. (1.17) για τον

συντελεστή διάχυσης. Το αποτέλεσμα της (1.17) έχει επίσης επαληθευθεί στην παρούσα διατριβή με τη βοήθεια χρονοσειρών που προκύπτουν από την εφαρμογή της Τεχνικής της Συνθετικής Καταιγίδας στην περιοχή της Αττικής. Οι M-B θεώρησαν λογικό να εισάγουν στην Εξ. (1.17) ένα γινόμενο δυο παραγόντων εκ των οποίων ο ένας να εξαρτάται από τα μακροπρόθεσμα και ο άλλος από τα βραχυπρόθεσμα στατιστικά χαρακτηριστικά της A , ώστε τελικά να προκύψει η έκφραση

$$K_2(A_s) = 2 \cdot S_A^2 \cdot d_A \cdot A_s^2 \quad (1.18)$$

Ο παράγοντας S_A είναι η γνωστή παράμετρος της Λογαριθμοκανονικής κατανομής ενώ ο παράγοντας d_A ονομάζεται δυναμική παράμετρος και η τιμή της επιλέγεται έτσι ώστε η προσομοιωτική διαδικασία A_s να αντανακλά κατά βέλτιστο τρόπο ορισμένα *δυναμικά χαρακτηριστικά* της Πραγματικής Τυχαίας Διαδικασίας $A(t)$.

Η συναρτησιακή μορφή του συντελεστή διεύθυνσης $K_1(A_s)$ επιλέγεται έτσι ώστε η Τυχαία Μεταβλητή $A_s(t)$ να έχει Κατανομή Πυκνότητας Πιθανότητας την Λογαριθμοκανονική (βλέπε Εξ. (1.14)). Η μακροπρόθεσμη ή καλύτερα η χρονοανεξάρτητη Κατανομή Πυκνότητας Πιθανότητας της $A_s(t)$ στη γενική περίπτωση της Εξ. (1.15) μπορεί να αποδειχθεί –αναφέρεται η απόδειξη σε επόμενο κεφάλαιο– ότι δίνεται από τη σχέση

$$p_{st}(A_s) = \frac{C}{K_2(A_s)} \exp \left\{ 2 \int^{A_s} \frac{K_1(y)}{K_2(y)} dy \right\} \quad (1.19)$$

Συνεπώς με γνωστό το $K_2(A_s)$ –σχέση (1.18)– και το $p_{st}(A_s)$ –σχέση (1.14)– από την Εξ. (1.19) βρίσκουμε το $K_1(A_s)$

$$K_1(A_s) = A_s \cdot d_A \left[S_A^2 - \ln \left(\frac{A_s}{A_m} \right) \right] \quad (1.20)$$

Αυτό που απομένει είναι ο υπολογισμός της δυναμικής παραμέτρου d_A . Οι M-B θεώρησαν ότι βάσει κάποιας φυσικής παραδοχής, η τιμή της εν λόγω παραμέτρου είναι παγκόσμια (global) δηλαδή έχει την ίδια τιμή για όλες τις ζεύξεις και για όλες τις γεωκλιματικές περιοχές. Το ίδιο θεώρησε και ο Manning [1990] σχεδόν δέκα χρόνια αργότερα, βρίσκοντας βέβαια μια διαφορετική τιμή δεδομένου ότι υιοθέτησε μια

διαφορετική φυσική παραδοχή. Με το ίδιο θέμα ασχολήθηκαν και άλλοι όπως οι Lacoste *et. al* [2005] χωρίς να προσφέρει επί της ουσίας στον τρόπο υπολογισμού της παραμέτρου. Συγκεκριμένα, έδωσε μια αυθαίρετη τιμή, πάλι διαφορετική σε σχέση με τους προηγούμενους, μόνο που αυτή τη φορά η τάξη μεγέθους της εν λόγω τιμής ήταν 10^{-4} , αρκετά κοντά στις τιμές που υπολογίζουμε για την ίδια παράμετρο στην παρούσα διατριβή. Ένα πρώτο βήμα προόδου έγινε από τους Panagopoulos *et. al.* [2002] και Gremont *et. al.* [2004] οι οποίοι συνέλαβαν την ιδέα ότι η παράμετρος d_A πρέπει να υπολογίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε η A_s να αντανakλά κατά το βέλτιστο δυνατό τρόπο, τα στατιστικά 2^{n_s} τάξης της απόσβεσης και συγκεκριμένα τη Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας της $A(t)$. Οι δυο τρόποι για τον υπολογισμό του d_A που πρότειναν είναι μεν διαφορετικοί ωστόσο στηρίζονται επί του ίδιου υποβάθρου.

Μελετώντας τις δυο τελευταίες προσεγγίσεις των Παναγόπουλου και Gremont, ως πιο αξιόπιστες από τις προηγούμενες τόσο σε φυσικό όσο και μαθηματικό περιεχόμενο, καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα το οποίο αναλύουμε διεξοδικά στο Κεφάλαιο 4: το γεγονός ότι η προσομοιωτική διαδικασία A_s αντανakλά ταυτόχρονα τα χαρακτηριστικά 1^{n_s} και 2^{n_s} τάξης της πραγματικής Τυχαίας Διαδικασίας δεν συνεπάγεται αναγκαστικά ότι αναπαράγει επίσης πλήρως το μηχανισμό γέννησης της $A(t)$. Στην πραγματικότητα ενδέχεται τα προσομοιούμενα στατιστικά χαρακτηριστικά των Τυχαίων Μεταβλητών όπως τα T_{jd} και T_{ijd} να αποκλίνουν σημαντικά από τα πραγματικά. Για το λόγο αυτό αναπτύχθηκε η μεθοδολογία της διατριβής.

1.10 Περιεχόμενα της Διατριβής

Στο 2^ο Κεφάλαιο που ακολουθεί, επιχειρούμε μια γρήγορη ανασκόπηση κάποιων θεμάτων της θεωρίας Πιθανοτήτων και των Στοχαστικών Διαδικασιών τα οποία είναι χρήσιμα για την ανάπτυξη της Διδακτορικής Διατριβής. Θα αναφερθούμε στην έννοια της Τυχαίας Μεταβλητής (*Random Variable*) και στους τρόπους που περιγράφονται τα στατιστικά χαρακτηριστικά της δηλαδή, στη Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας ή ισοδύναμα, στη Ροπογεννήτρια Συνάρτηση (*moment generation function*). Θα συνεχίσουμε με την έννοια της Τυχαίας Διαδικασίας (*Random Process*) και θα εστιάσουμε σε μια ιδιαίτερη οικογένεια διαδικασιών που ονομάζονται στάσιμες

(stationary). Επιπλέον θα μας απασχολήσει και η έννοια της εργοδικότητας (ergodicity) η οποία αφορά όλες τις Τυχαίες Διαδικασίες, τόσο τις στάσιμες όσο και τις μη-στάσιμες.

Στο 3^ο Κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε την εφαρμογή της Τεχνικής της Συνθετικής Καταιγίδας στην περίπτωση μιας υποθετικής δορυφορικής ζεύξης ανάμεσα σε έναν επίγειο σταθμό στην περιοχή της Αθήνας και στο δορυφόρο Hellas-sat. Η Τεχνική της Συνθετικής Καταιγίδας δέχεται σαν είσοδο χρονοσειρές ρυθμού βροχόπτωσης μετρούμενες σημειακά από ένα βροχόμετρο τοποθετημένο στην περιοχή κοντά στον επίγειο σταθμό και αποδίδει ως έξοδο, χρονοσειρές απόσβεσης που επιβαρύνουν τη ζεύξη, εξαιτίας των γεγονότων βροχόπτωσης που καταγράφονται. Η δική μας βάση μετρήσεων περιέχει γεγονότα που έχουν καταγραφεί κατά τη διάρκεια 29 μηνών, συγκεκριμένα από την 1/1/2000 μέχρι την 31/5/2002. Η στατιστική επεξεργασία των παραγόμενων χρονοσειρών απόσβεσης θα δώσει χρήσιμα συμπεράσματα για την ποιότητα της ζεύξης σε ετήσια, εποχική και ημερήσια βάση.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται μια καινοτόμος μεθοδολογία για τη Σύνθεση 1^{ης} τάξης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων η οποία εξασφαλίζει την καλύτερη προσομοίωση του πραγματικού μηχανισμού γέννησης της προσομοιούμενης Τυχαίας Διαδικασίας. Συγκεκριμένα η νέα μεθοδολογία εξασφαλίζει την ταυτόχρονη προσομοίωση των στατιστικών χαρακτηριστικών 1^{ης}, 2^{ης} τάξης και των στατιστικών χαρακτηριστικών των Χρόνων Διακοπής της προσομοιούμενης Τυχαίας Διαδικασίας. Για την υλοποίηση της μεθοδολογίας αυτής, απαραίτητος είναι ο αναλυτικός υπολογισμός των στατιστικών χαρακτηριστικών 2^{ης} τάξης και των Χρόνων Διακοπής στην περίπτωση μιας 1^{ης} τάξης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης. Αναλυτική περιγραφή των εν λόγω υπολογισμών περιέχεται στο Κεφάλαιο 4.

Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 5, παρουσιάζεται η εφαρμογή της ιδέας που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 4 με σκοπό τη Σύνθεση 1^{ης} τάξης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων που προσομοιώνουν το φαινόμενο της απόσβεσης λόγω βροχής σε μια δορυφορική μικροκυματική ζεύξη για τρεις περιπτώσεις γεωκλιματικών περιοχών. Συγκεκριμένα, πρόκειται για τις περιοχές όπου τα μακροπρόθεσμα στατιστικά χαρακτηριστικά της απόσβεσης λόγω βροχής περιγράφονται από τις κατανομές Λογαριθμοκανονική, Gamma και Weibull. Η περίπτωση της Λογαριθμοκανονικής κατανομής αναφέρεται στο γνωστό μοντέλο M-B μόνο που τώρα ο υπολογισμός των

παραμέτρων του μοντέλου γίνεται με πιο αυστηρή μεθοδολογία που έχει σαφείς φυσικούς και μαθηματικούς προσανατολισμούς. Συνολικά, θα έλεγε κανείς ότι το Κεφάλαιο 5 μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως τυπολόγιο στο οποίο περιέχονται όλα τα αναλυτικά αποτελέσματα που αφορούν στα στατιστικά χαρακτηριστικά 2^{ης} τάξης και στα στατιστικά χαρακτηριστικά των Χρόνων Διακοπής που ανήκουν σε μια 1^{ης} τάξης Στοχαστική Διαφορική εξίσωση κατάλληλα επιλεγμένης ώστε να προσομοιώνει την απόσβεση λόγω βροχής σε μια μικροκυματική ζεύξη για τρεις περιπτώσεις μακροπρόθεσμων κατανομών: τη Λογαριθμοκανονική, τη Gamma και τη Weibull. Τέλος, στο ίδιο Κεφάλαιο, παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα προσομοίωσης των χρονοσειρών απόσβεσης που έχουν εξαχθεί ήδη στο 3^ο Κεφάλαιο, προσομοίωση που επιτυγχάνεται με τη βοήθεια μιας εκ των τριών Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων, αυτής που ανήκει στο μοντέλο Maseng-Bakken (Λογαριθμοκανονική περίπτωση).

Στο 6^ο και τελευταίο Κεφάλαιο, διασαφηνίζεται η πρωτοτυπία της Διδακτορικής Διατριβής και επιπλέον, προτείνονται ιδέες και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Κεφάλαιο 2

Θέματα Θεωρίας Τυχαίων Διαδικασιών

2.1 Εισαγωγή

Το παρόν κεφάλαιο παρουσιάζει ορισμένα στοιχεία της θεωρίας Πιθανοτήτων που μπορεί κανείς να βρει στα περισσότερα σχετικά βιβλία της διεθνούς βιβλιογραφίας (βλέπε [Paroulis, 1981]). Η ουσία αυτού του κεφαλαίου έγκειται στο να ενημερώσει τον αναγνώστη για μαθηματικές έννοιες της θεωρίας Πιθανοτήτων οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν σε μεγάλο βαθμό στη συνέχεια της διατριβής.

Θα ξεκινήσουμε λοιπόν, με την έννοια της Τυχαίας Μεταβλητής (*Random Variable*) και με τους τρόπους που περιγράφονται τα στατιστικά χαρακτηριστικά της δηλαδή, με τη Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας ή ισοδύναμα, με τη Ροπογεννήτρια Συνάρτηση (*moment generation function*). Θα συνεχίσουμε με την έννοια της Τυχαίας Διαδικασίας (*Random Process*) και θα εστιάσουμε σε μια ιδιαίτερη οικογένεια διαδικασιών που ονομάζονται στάσιμες (*stationary*). Επιπλέον θα μας απασχολήσει και η έννοια της εργοδικότητας (*ergodicity*) η οποία αφορά όλες τις τυχαίες διαδικασίες, τόσο τις στάσιμες όσο και τις μη-στάσιμες.

2.2 Μονοδιάστατη Τυχαία Μεταβλητή

Η Τυχαία Μεταβλητή είναι μία συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο S όλων των εκβάσεων ενός πειράματος. Πεδίο τιμών της συνάρτησης αυτής είναι κάποιο υποσύνολο του άξονα των πραγματικών αριθμών R .

2.2.1 Ορισμός

Δίνεται ένα πείραμα που ορίζεται από το χώρο S (ή Ω), τα υποσύνολα του S που καλούνται ενδεχόμενα και τέλος οι πιθανότητες που έχουν ανατεθεί στα ενδεχόμενα αυτά. Σε κάθε έκβαση ζ του πειράματος, αναθέτουμε έναν αριθμό $x(\zeta)$. Έχουμε, με τον τρόπο αυτό, δημιουργήσει μία συνάρτηση x με πεδίο ορισμού το σύνολο S και πεδίο

τιμών ένα σύνολο αριθμών. Η συνάρτηση αυτή καλείται Τυχαία Μεταβλητή όταν ικανοποιεί ορισμένες ήπιες συνθήκες [Paroulis, 1981].

2.3 Κατανομή Αθροιστικής Πιθανότητας

Τα στοιχεία του συνόλου S (ή Ω) που περιλαμβάνονται στο ενδεχόμενο $\{ \mathbf{x} \geq x \}$ μεταβάλλονται καθώς ο αριθμός x λαμβάνει διαφορετικές τιμές. Η πιθανότητα $P\{ \mathbf{x} \geq x \}$ του ενδεχομένου $\{ \mathbf{x} \geq x \}$ είναι, επομένως, ένας αριθμός που εξαρτάται από το x . Ο αριθμός αυτός δηλώνεται με $F_x(x)$ και καλείται (αθροιστική) συνάρτηση κατανομής της Τυχαίας Μεταβλητής \mathbf{x} .

2.3.1 Ορισμός

Η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας της Τυχαίας Μεταβλητής \mathbf{x} είναι η συνάρτηση

$$F_x(x) = P(\mathbf{x} \geq x) \quad (2.1)$$

που ορίζεται για κάθε x στο R . Σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιούμε την εναλλακτική της ονομασία δηλαδή την Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας ή Πιθανότητα Υπέρβασης.

Η πρώτη παράγωγος της $F_x(x)$, εάν υπάρχει, δίνει την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας και συμβολίζεται συνήθως με το αντίστοιχο ‘μικρό’ γράμμα από αυτό που συμβολίζεται η αρχική της, δηλαδή η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας.

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x) \quad (2.2a)$$

Το πεδίο τιμών της αντανακλά την πιθανότητα του ενδεχομένου $\{ x + dx \geq \mathbf{x} \geq x \}$ όπου η \mathbf{x} είναι η Τυχαία Μεταβλητή. Για πραγματικές Τυχαίες Μεταβλητές ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1 \quad (2.2b)$$

2.4 Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις -Ροπογεννήτρια Συνάρτηση

Η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας Τυχαίας Μεταβλητής είναι εξ’ ορισμού το ολοκλήρωμα

$$\Phi_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) e^{-j\omega x} dx \quad (2.3)$$

Η συνάρτηση αυτή μεγιστοποιείται στην αρχή των αξόνων λόγω του ότι $f_x(x) \geq 0$:

$$|\Phi_x(\omega)| \leq \Phi_x(0) = 1 \quad (2.4)$$

Τα όρια ολοκλήρωσης $(-\infty, \infty)$ μπορεί να αποβούν παραπλανητικά για τον αναγνώστη. Ωστόσο, με μια προσεκτική ανάγνωση της (2.3) διαπιστώνει κανείς ότι τα όρια ολοκλήρωσης ουσιαστικά επιβάλλονται από το πεδίο ορισμού της $f_x(x)$, το οποίο με τη σειρά του ταυτίζεται κατ' ουσίαν με το σύνολο τιμών της Τυχαίας Μεταβλητής x .

Εάν το $j\omega$ αντικατασταθεί με s στην Εξ. (2.3), το ολοκλήρωμα που προκύπτει

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) e^{-sx} dx \quad \Phi(j\omega) = \Phi_x(\omega) \quad (2.5)$$

είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της x . Προφανώς ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\Phi_x(\omega) = E\{e^{-j\omega x}\} \quad \Phi(s) = E\{e^{-sx}\} \quad (2.6)$$

όπου $E\{\}$ ο τελεστής της μέσης τιμής μιας Τυχαίας Μεταβλητής.

Σχέση αντιστροφής Όπως παρατηρούμε από την (2.3), η $\Phi_x(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $f_x(x)$. Σημειώνουμε, ειδικότερα, ότι η $f_x(x)$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της $\Phi(\omega)$

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\omega) e^{j\omega x} d\omega \quad (2.7)$$

Θεώρημα ροπής. Διαφορίζοντας την πρώτη από τις δυο σχέσεις στην (2.5) κατά n φορές προκύπτει

$$\Phi^{(n)}(s) = E\{(-1)^n x^n e^{-sx}\} \quad (2.8)$$

Συνεπώς

$$\Phi^{(n)}(0) = E\{(-1)^n x^n\} = (-1)^n m_n \quad (2.9)$$

Οπότε, οι παράγωγοι της $\Phi(s)$ στη θέση $s=0$ συνδέονται με τις ροπές της x . Αυτό δικαιολογεί την ονομασία 'ροπογεννήτρια συνάρτηση' που έχει δοθεί στην $\Phi(s)$.

Συγκεκριμένα,

$$\Phi'(0) = -m_1 = -\eta \quad \Phi''(0) = m_2 = \eta^2 + \sigma^2 \quad (2.10)$$

Σχόλια

A. Αναπτύσσοντας την $\Phi(s)$ σε σειρά Taylor κοντά στην αρχή των αξόνων προκύπτει

$$\Phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m_n}{n!} s^n \quad (2.11)$$

Η παραπάνω σχέση ισότητας ισχύει μόνο όταν όλες οι ροπές είναι πεπερασμένες και η σειρά συγκλίνει απόλυτα κοντά στο $s = 0$. Υπό αυτές τις συνθήκες και δεδομένου ότι η $f_x(x)$ μπορεί να προσδιοριστεί συναρτήσει της $\Phi(s)$, τότε η (2.11) δείχνει ότι η πυκνότητα μιας Τυχαίας Μεταβλητής καθορίζεται μοναδικά όταν είναι γνωστές όλες οι ροπές της.

B. Εάν το πεδίο τιμών της Τυχαίας Μεταβλητής x είναι το $[0, \infty)$ τότε η ροπογεννήτρια συνάρτηση ταυτίζεται με τον Μ/Σ Laplace της $f_x(x)$ -βλέπε Εξ.(2.5).

Γ. Θα δείξουμε ότι από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση μπορούμε να υπολογίσουμε τη Συνάρτηση Αθροιστικής Πιθανότητας. Για παράδειγμα στη γενική περίπτωση όπου το σύνολο τιμών της Τυχαίας Μεταβλητής είναι το $(-\infty, \infty)$, έστω F η αρχική συνάρτηση της $f_x(x)$ -προσοχή στην απουσία του δείκτη x από την F ώστε να διαφοροποιείται από την $F_x(x)$. Τότε ο Μ/Σ Fourier [Carrier *et. al.*, 1963] της F δίνεται από τη σχέση

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot e^{-i\omega x} dx = \frac{\Phi_x(\omega)}{i\omega} \quad (\text{γνωστή ιδιότητα Μ/Σ Fourier}) \quad (2.12)$$

Από την αντίστροφο Μ/Σ Fourier της ποσότητας στο δεξιό μέλος της Εξ. (2.12) υπολογίζουμε την F και κατόπιν το όριο

$$F_x(x) = F(\infty) - F(x) \quad (2.13)$$

δίνει τη Συνάρτηση Αθροιστικής Πιθανότητας.

2.5 Τυχαία Διαδικασία

Ας θεωρήσουμε ένα πείραμα που ορίζεται από το χώρο S (ή Ω), τα υποσύνολα του οποίου καλούνται ενδεχόμενα και συμβολίζονται με το γράμμα ζ . Τα ενδεχόμενα ζ αντιστοιχούν σε συναρτήσεις. Συγκεκριμένα, η στοχαστική διαδικασία $\mathbf{x}(t)$ είναι ένας κανόνας αντιστοίχισης μιας *συνάρτησης* $\mathbf{x}(t, \zeta)$ σε κάθε ζ . Έτσι, μία στοχαστική

διαδικασία είναι μία οικογένεια από συναρτήσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο, το χώρο ή κάποιο άλλο φυσικό μέγεθος και παράμετρο το ζ ή, σε μια λιγότερο αυστηρή προσέγγιση, μία συνάρτηση των t –χώρος ή χρόνο ή κάτι άλλο– και ζ . Το πεδίο τιμών για το ζ είναι το σύνολο όλων των πειραματικών εκβάσεων και το πεδίο τιμών για το t είναι ένα υπό-σύνολο D του άξονα των πραγματικών αριθμών R .

Εάν το D είναι ο πραγματικός άξονας ή κάποιο συνεκτικό υποσύνολό του δηλαδή με μη-αριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία, τότε η $\mathbf{x}(t)$ είναι μία διαδικασία *συνεχούς χρόνου*. Εάν το D είναι ένα σύνολο από αριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία, τότε η $\mathbf{x}(t)$ είναι μία διαδικασία *διακριτού χρόνου*. Μία διαδικασία διακριτού χρόνου είναι, επομένως, μία ακολουθία από συσχετισμένες –στις περισσότερες περιπτώσεις– Τυχαίες Μεταβλητές.

Θα λέμε ότι η $\mathbf{x}(t)$ είναι μία διαδικασία *διακριτής κατάστασης* όταν οι τιμές της είναι αριθμήσιμες. Διαφορετικά, είναι μία διαδικασία *συνεχούς κατάστασης*.

Στη διατριβή, θα χρησιμοποιούμε συμβολισμούς της μορφής $\mathbf{x}(t)$ για να αναπαραστήσουμε μία στοχαστική διαδικασία παραλείποντας, όπως κάναμε και στην περίπτωση των Τυχαίων Μεταβλητών, την εξάρτησή της από το ζ . Έτσι, η $\mathbf{x}(t)$ έχει τις ακόλουθες ερμηνείες:

1. Αποτελεί μία οικογένεια (ή ένα *σύνολο*) συναρτήσεων $\mathbf{x}(t, \zeta)$. Σύμφωνα με την ερμηνεία αυτή, τα t και ζ είναι μεταβλητές.
2. Είναι μοναδική χρονική συνάρτηση (ή ένα *δείγμα* μιας γνωστής διαδικασίας). Στην περίπτωση αυτή, το t είναι μεταβλητή και το ζ είναι σταθερό.
3. **Εάν το t είναι σταθερό και το ζ είναι μεταβλητό, τότε η $\mathbf{x}(t)$ είναι Τυχαία Μεταβλητή**
4. Εάν τα t και ζ είναι σταθερά, τότε η $\mathbf{x}(t)$ είναι *αριθμός*.

Ισότητα: Θεωρούμε ότι δύο στοχαστικές διαδικασίες $\mathbf{x}(t)$ και $\mathbf{y}(t)$ είναι ίσες (παντού), όταν τα αντίστοιχα δείγματά τους $\mathbf{x}(t, \zeta)$ και $\mathbf{y}(t, \zeta)$ είναι πανομοιότυπα για κάθε ζ . Παράγωγοι, ολοκληρώματα, ή κάθε άλλη πράξη που εμπλέκει στοχαστικές διαδικασίες ορίζεται συναρτήσει και κατ' αναλογία με τις αντίστοιχες πράξεις που αφορούν την κλάση των συναρτήσεων που προκύπτει από τις $\mathbf{x}(t, \zeta)$, για ζ σταθερό.

Μία *συνεχής* στοχαστική διαδικασία είναι ένα μη-αριθμήσιμο πλήθος Τυχαίων Μεταβλητών, μία για κάθε t . Άρα, για συγκεκριμένο t , η $\mathbf{x}(t)$ περιγράφεται από μια Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας

$$F(x, t) = P\{\mathbf{x}(t) \geq x\} \quad (2.14)$$

Η συνάρτηση αυτή εξαρτάται από το t και ισούται με την πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\mathbf{x}(t) \geq x\}$ δηλαδή το ποσοστό επί του συνόλου των ενδεχομένων ζ για το οποίο η Τυχαία Μεταβλητή $\mathbf{x}(t, \zeta)$ δεν υπολείπεται του αριθμού x , τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή t . Η συνάρτηση $F(x, t)$ καλείται *κατανομή πρώτης τάξης* της διαδικασίας $\mathbf{x}(t)$. Η παράγωγός της ως προς το x :

$$f(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \quad (2.15)$$

είναι η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας *πρώτης τάξης* της $\mathbf{x}(t)$.

Για τον πλήρη προσδιορισμό των στατιστικών ιδιοτήτων μιας στοχαστικής διαδικασίας απαιτείται η γνώση της συνάρτησης $F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ για κάθε x_i , t_i και n . Ωστόσο, σε πολλές εφαρμογές, χρησιμοποιούνται μόνο ορισμένοι μέσοι όροι και, συγκεκριμένα, η αναμενόμενη τιμή της $\mathbf{x}(t)$ και της $\mathbf{x}^2(t)$. Οι ποσότητες αυτές μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των ιδιοτήτων πρώτης και δεύτερης τάξης της $\mathbf{x}(t)$ που ορίζονται ως εξής:

2.5.1 Μέση τιμή

Η μέση τιμή $\eta(t)$ της $\mathbf{x}(t)$ είναι η μέση τιμή της Τυχαίας Μεταβλητής $\mathbf{x}(t)$ -για σταθερό t :

$$\eta(t) = E\{\mathbf{x}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx \quad (2.16)$$

2.5.2 Αυτοσυσχέτιση

Η *αυτοσυσχέτιση* (*correlation*) $R(t_1, t_2)$ της $\mathbf{x}(t)$ είναι η μέση τιμή του γινομένου $\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)$:

$$R(t_1, t_2) = E\{\mathbf{x}(t_1) \mathbf{x}(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.17)$$

Η τιμή της $R(t_1, t_2)$ για $t_1 = t_2 = t$ είναι η διασπορά της $\mathbf{x}(t)$:

$$E\{\mathbf{x}^2(t)\} = R(t, t) \quad (2.18)$$

Η (αυτό)συνδιακύμανση $C(t_1, t_2)$ της $\mathbf{x}(t)$ αφορά τις Τυχαίες Μεταβλητές $\mathbf{x}(t_1)$ και $\mathbf{x}(t_2)$ και δίνεται από τη διαφορά

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \eta(t_1)\eta(t_2) \quad (2.19)$$

και η τιμή της $C(t, t)$ για $t_1 = t_2 = t$ ισούται με τη διακύμανση της $\mathbf{x}(t)$

2.6 Στάσιμες Διαδικασίες

2.6.1 Αυστηρά Στάσιμη

Μία στοχαστική διαδικασία $\mathbf{x}(t)$ ονομάζεται *αυστηρά στάσιμη* (strict sense stationary) όταν οι στατιστικές της ιδιότητες παραμένουν αμετάβλητες σε μία μετατόπιση της αρχής των αξόνων. Αυτό σημαίνει ότι οι διαδικασίες $\mathbf{x}(t)$ και $\mathbf{x}(t+c)$ έχουν την ίδια στατιστική για κάθε c .

Από τον ορισμό συνεπάγεται ότι η συνάρτηση πυκνότητας n -οστής τάξης μιας Αυστηρά Στάσιμης διαδικασίας πρέπει να είναι τέτοια ώστε

$$f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n; t_1 + c, \dots, t_n + c) \quad (2.20)$$

για κάθε c . Από αυτό συνεπάγεται ότι $f(x; t) = f(x; t+c)$ για κάθε c . Συνεπώς, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας πρώτης τάξης της $\mathbf{x}(t)$ είναι ανεξάρτητη του t :

$$f(x; t) = f(x) \quad (2.21)$$

Παρόμοια, η $f(x_1, x_2; t_1 + c, t_2 + c)$ είναι ανεξάρτητη του c για κάθε c , και συγκεκριμένα για $c = -t_2$. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$f(x_1, x_2, t_1, t_2) = f(x_1, x_2; \tau) \quad \tau = t_1 - t_2 \quad (2.22)$$

Άρα, η από κοινού πυκνότητα των ΤΜ $\mathbf{x}(t+\tau)$ και $\mathbf{x}(t)$ είναι ανεξάρτητη του t και ισούται με $f(x_1, x_2; \tau)$.

2.6.2 Στάσιμη με την Ευρεία Έννοια

Μία στοχαστική διαδικασία $\mathbf{x}(t)$ ονομάζεται *στάσιμη με την ευρεία έννοια* (wide sense stationary) όταν η μέση τιμή της είναι σταθερή

$$E\{\mathbf{x}(t)\} = \eta \quad (2.23)$$

και η αυτοσυσχέτισή της εξαρτάται μόνο από το $\tau = t_1 - t_2$:

$$E\{\mathbf{x}(t+\tau)\mathbf{x}(t)\} = R(\tau) \quad (2.24)$$

Αφού το τ είναι η απόσταση από το t έως το $t + \tau$, η συνάρτηση $R(\tau)$ μπορεί να γραφεί στη συμμετρική μορφή

$$R(\tau) = E\left\{\mathbf{x}\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\mathbf{x}\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right\} \quad (2.25)$$

Σημειώνεται συγκεκριμένα ότι

$$E\{|\mathbf{x}(t)|^2\} = R(0) \quad (2.26)$$

Έτσι, η (διασπορά) μέση ισχύς μιας στάσιμης διαδικασίας είναι ανεξάρτητη του t και ισούται με $R(0)$.

2.7 Εργοδικότητα

Συνήθως στην πράξη ύστερα από τη διεξαγωγή ενός πειράματος, έχουμε ένα μοναδικό δείγμα της τυχαίας διαδικασίας που μελετάμε –ας το ονομάσουμε $\mathbf{x}(t, \zeta_i)$ – και επιθυμούμε να γνωρίζουμε εάν τα στατιστικά χαρακτηριστικά αυτού του δείγματος είναι επίσης αντιπροσωπευτικά και όλων των υπόλοιπων δειγμάτων που δυνητικά θα μπορούσαμε να δειγματοληπτήσουμε. Στην περίπτωση που το ένα δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό όλων των δυνατών δειγμάτων τότε λέμε ότι η Τυχαία Διαδικασία που μελετάμε είναι εργοδική (ergodic). Μια απλοποιημένη εκδοχή του προβλήματος είναι να εξετάσουμε την εργοδικότητα μιας *στάσιμης* τυχαίας διαδικασίας ως προς τη μέση τιμή της δηλαδή, να προσδιορίσουμε τις συνθήκες υπό τις οποίες από το μοναδικό μας δείγμα υπολογίζουμε στατιστικά μια αντιπροσωπευτική μέση τιμή για κάθε πιθανό δείγμα και κατόπιν, σε μια πιο ενδεδεγμένη προσέγγιση του προβλήματος, να μελετήσουμε την

αξιοπιστία της υπολογιζόμενης μέσης τιμής, συχνά εκφραζόμενης ως διάστημα εμπιστοσύνης.

2.7.1 Μη-δεσμευμένη Εκτιμήτρια της Μέσης Τιμής (Χρονικός Μέσος) μιας Τυχαίας Διαδικασίας

Δίνεται μία πραγματική στάσιμη διαδικασία $\mathbf{x}(t)$ και επιθυμούμε να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή της $\eta(t) = E\{\mathbf{x}(t)\}$. Για το σκοπό αυτό, σχηματίζουμε το χρονικό μέσο

$$\eta_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mathbf{x}(t) dt \quad (2.27)$$

Προφανώς, το η_T είναι μία Τυχαία Μεταβλητή με μέση τιμή

$$E\{\eta_T\} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E\{\mathbf{x}(t)\} dt = \eta \quad (2.28)$$

Έτσι, η η_T είναι η μη-δεσμευμένη εκτιμήτρια (*unconditional estimator*) του η . Εάν η διακύμανσή της η_T τείνει στο μηδέν $\sigma_T^2 \rightarrow 0$ για $T \rightarrow \infty$, τότε $\eta_T \rightarrow \eta$ κατά την έννοια της σύγκλισης κατά μέση τιμή. Στην περίπτωση αυτή, ο χρονικός μέσος $\eta_T(\zeta)$ που υπολογίζεται από ένα μοναδικό στιγμιότυπο της $\mathbf{x}(t)$ τείνει στο η με πιθανότητα που πλησιάζει την μονάδα. Τότε λέμε ότι η διαδικασία $\mathbf{x}(t)$ είναι *εργοδική ως προς τη μέση τιμή*.

Για να αποδείξουμε την εργοδικότητα μιας διαδικασίας, αρκεί να υπολογίσουμε το σ_T και να εξετάσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες $\sigma_T \rightarrow 0$ καθώς $T \rightarrow \infty$.

2.7.2 Διακύμανση της Εκτιμήτριας του Χρονικού Μέσου

Για να προσδιορίσουμε τη διακύμανση σ_T^2 του χρονικού μέσου η_T της $\mathbf{x}(t)$ αρχίζουμε με την παρατήρηση ότι

$$\eta_T = \mathbf{w}(0) \quad \text{όπου} \quad \mathbf{w}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \mathbf{x}(a) da \quad (2.29)$$

όπου $\mathbf{w}(t)$ είναι ο κινούμενος μέσος όρος της $\mathbf{x}(t)$ δηλαδή η *συνέλιξη* του δείγματος με ένα ορθογωνικό παλμό εύρους $2T$ και πλάτους $\frac{1}{2T}$. Γίνεται κατανοητό ότι η $\mathbf{w}(t)$ είναι η έξοδος ενός γραμμικού συστήματος με είσοδο $\mathbf{x}(t)$ και με κρουστική απόκριση έναν

παλμό με κέντρο το $t=0$. Συνεπώς, η $\mathbf{w}(t)$ είναι *στάσιμη* και η (αυτο)συνδιακύμανσή της ισούται με [Papoulis, 1991]

$$C_{\mathbf{w}\mathbf{w}}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} C(\tau - a) \left(1 - \frac{|a|}{2T}\right) da \quad (2.30)$$

όπου $C(\tau)$ είναι η αυτο-συνδιακύμανση της $\mathbf{x}(t)$. Εφόσον $\sigma_T^2 = \text{Var}\mathbf{w}(0) = C_{\mathbf{w}\mathbf{w}}(0)$ και $C(-a) = C(a)$, αυτό δίνει

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} C(a) \left(1 - \frac{|a|}{2T}\right) da = \frac{1}{T} \int_0^{2T} C(a) \left(1 - \frac{|a|}{2T}\right) da \quad (2.31)$$

Αυτό το θεμελιώδες αποτέλεσμα οδηγεί στο επόμενο συμπέρασμα: μια διαδικασία $\mathbf{x}(t)$ με (αυτο) συνδιακύμανση $C(\tau)$ είναι εργοδική ως προς τη μέση τιμή αν και μόνο εάν

$$\frac{1}{T} \int_0^{2T} C(a) \left(1 - \frac{|a|}{2T}\right) da \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad (2.32)$$

Ο προσδιορισμός της διακύμανσης της $\boldsymbol{\eta}_T$ είναι χρήσιμος, όχι μόνο για την απόδειξη της εργοδικότητας της $\mathbf{x}(t)$, καθώς επίσης και για τον καθορισμό του διαστήματος εμπιστοσύνης στην εκτίμηση της η . Πράγματι, από την ανισότητα Tchebycheff συνεπάγεται ότι η πιθανότητα η άγνωστη η να βρίσκεται στο διάστημα $\boldsymbol{\eta}_T \pm 10\sigma_T$ είναι μεγαλύτερη από 0.99. Άρα, η $\boldsymbol{\eta}_T$ είναι μία ικανοποιητική εκτίμηση της η αν το T είναι τέτοιο ώστε $\sigma_T \ll \eta$.

Γίνεται τέλος φανερό από την (2.32) ότι η εργοδικότητα μιας διαδικασίας εξαρτάται από τη συμπεριφορά της $C(\tau)$ για μεγάλα τ . Εάν η $C(\tau) = 0$ για $\tau > a$ και $T \gg a$, τότε

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{T} \int_0^a C(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) d\tau \cong \frac{1}{T} \int_0^a C(\tau) d\tau < \frac{a}{T} C(0) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad (2.33)$$

καθώς $|C(\tau)| < C(0)$ και συνεπώς, η $\mathbf{x}(t)$ είναι εργοδική ως προς τη μέση τιμή.

Σε πολλές εφαρμογές, οι ΤΜ $\mathbf{x}(t + \tau)$ και $\mathbf{x}(t)$ είναι σχεδόν ασυσχέτιστες για μεγάλα τ , δηλαδή, $C(\tau) \rightarrow 0$ καθώς το $\tau \rightarrow \infty$. Το τελευταίο υποδηλώνει ότι η $\mathbf{x}(t)$ είναι εργοδική ως προς τη μέση τιμή και ότι για μεγάλα T η διακύμανση της $\boldsymbol{\eta}_T$ προσεγγίζεται από την

$$\sigma_r^2 \cong \frac{1}{T} \int_0^a C(\tau) d\tau \cong \frac{1}{T} \int_0^\infty C(\tau) d\tau = \frac{\tau_c}{T} C(0) \quad (2.34)$$

όπου τ_c είναι ο χρόνος συσχέτισης της $\mathbf{x}(t)$.

2.7.3 Εργοδικότητα στην περίπτωση ύπαρξης δειγμάτων πέραν του ενός

Σε πολλές περιπτώσεις, τα συλλεγόμενα δείγματα δύναται να ταξινομηθούν σε διαφορετικούς πυρήνες στοχαστικότητας, η καλύτερα, σε διαφορετικά στατιστικά προφίλ. Τα κριτήρια ταξινόμησης μπορεί να είναι κάποιες φυσικές ή μαθηματικές παραδοχές. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του ρυθμού βροχόπτωσης, χωρίζουμε τα δείγματα σε κλάσεις, ανάλογα με την μέγιστη παρατηρούμενη τιμή ανά δείγμα, ή ανάλογα με τη διάρκεια, δηλαδή ανάλογα με κριτήρια που στηρίζονται σε φυσικές παραδοχές. Εναλλακτικά, ταξινομούμε τα γεγονότα σε κλάσεις ανάλογα με την τιμή της Φασματικής τους Πυκνότητας στη θέση μηδενικής συχνότητας – κριτήρια που βασίζονται σε μαθηματικές παραδοχές. Όποια και να επιλέξουμε, σε ένα δεύτερο στάδιο επεξεργασίας των δεδομένων, εξερευνούμε την εργοδικότητα επί αυτών των στοχαστικών πυρήνων /προφίλ. Περισσότερα για το θέμα της εργοδικότητας στην περίπτωση ύπαρξης δειγμάτων πέρα του ενός, θα αναφερθούν στα Κεφ. 4 και 5.

Κεφάλαιο 3

Τεχνική Συνθετικής Καταιγίδας – Εφαρμογή

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο, θα αναφερθούμε στη χρήση της Τεχνικής Συνθετικής Καταιγίδας (Synthetic Storm Technique) [Matricciani, 1996] για την παραγωγή χρονοσειρών απόσβεσης λόγω βροχής, στην περίπτωση μιας μικροκυματικής ζεύξης. Η τεχνική για την οποία γίνεται λόγος μετατρέπει χρονοσειρές ρυθμού βροχόπτωσης που μετρούνται σημειακά από ένα βροχόμετρο, σε χρονοσειρές απόσβεσης η οποία με τη σειρά της, προκαλείται από τη βροχόπτωση κατά μήκος της ζεύξης. Η βασική αρχή της τεχνικής αυτής περιγράφεται σε επόμενη παράγραφο.

Η αξία της Τεχνικής της Συνθετικής Καταιγίδας είναι μεγάλη. Αφενός, τα πειράματα σε δορυφορικά ή επίγεια κανάλια κοστίζουν ακριβά και συνεπώς δεν είναι προσιτά παρά μόνο στη μειοψηφία της ερευνητικής κοινότητας και αφετέρου, παρουσιάζει ένα μεγάλο προσόν: η όλη εφαρμογή έγκειται στη φυσική μοντελοποίηση του φαινομένου της απόσβεσης κατά μήκος μιας *συγκεκριμένης* ζεύξης με αποτέλεσμα, η προσομοίωση να αντανakλά τα ιδιαίτερα κλιματικά χαρακτηριστικά της περιοχής όπου λειτουργεί η ζεύξη. Πράγματι, έχει δειχθεί επανειλημμένα ότι οι προσομοιούμενες χρονοσειρές που παράγει η Συνθετική Καταιγίδα είναι σε μεγάλο βαθμό αντιπροσωπευτικές τόσο των στατιστικών χαρακτηριστικών 1^{ης}, 2^{ης} τάξης [Matricciani 1996, 1997b] όσο και των στατιστικών διάρκειας της διάλειψης σε μια μικροκυματική ζεύξη [Matricciani 1997a] ωστόσο, με κάποιους περιορισμούς. Συγκεκριμένα, οι παραγόμενες χρονοσειρές, δεδομένου ότι προσομοιώνουν την απόσβεση λόγω βροχής, αδυνατούν να συμπεριλάβουν πληροφορία που αφορά σε γεγονότα γρήγορων διαλείψεων λόγω σπινθηρισμού (scintillation) ή, σε γεγονότα διαλείψεων λόγω βροχής με μικρή διάρκεια π.χ. λιγότερη από λεπτό.

Στη μελέτη που παρουσιάζουμε εδώ [Kanellopoulos *et. al.*, 2006] χρησιμοποιήσαμε χρονοσειρές ρυθμού βροχόπτωσης οι οποίες συλλέχθηκαν στην περιοχή της Αττικής – ΕΜΠ Ζωγράφου– κατά τη διάρκεια 29 μηνών, από 1/1/2000-31/5/2002. Η Τεχνική της

Συνθετικής Καταιγίδας εφαρμόστηκε για την προσομοίωση της απόσβεσης που επιβαρύνει μια υποθετική ζεύξη ανάμεσα σε έναν επίγειο σταθμό στην περιοχή του Ζωγράφου και το δορυφόρο Hellas-Sat2 [Hellas-Sat2 Handbook]. Στις παραγράφους που ακολουθούν τίγονται τα ακόλουθα ζητήματα: η Τεχνική Συνθετικής Καταιγίδας ως φυσικό μοντέλο προσομοίωσης της απόσβεσης λόγω βροχής σε μια ζεύξη, η επίδοση του βροχόμετρου, η αξιοπιστία και η αντιπροσωπευτικότητα των μετρούμενων χρονοσειρών που περιγράφουν το ρυθμό βροχόπτωσης και τέλος τα στατιστικά χαρακτηριστικά 1^{ης} και 2^{ης} τάξης των προσομοιούμενων χρονοσειρών απόσβεσης.

3.2 Τεχνική Συνθετικής Καταιγίδας

Στην παράγραφο αυτή, παρουσιάζουμε το φυσικό-μαθηματικό υπόβαθρο της Τεχνικής Συνθετικής Καταιγίδας

3.2.1 Σύντομη Περιγραφή

Σύμφωνα με τον Matricciani [1996], καθώς το σύστημα της βροχής κινείται επάνω από ένα βροχόμετρο, η μετρούμενη τιμή του ρυθμού βροχόπτωσης μεταβάλλεται εξαιτίας δυο παράλληλων φαινομένων: της χωρικής μετατόπισης του συστήματος και της παράλληλης μεταβολής της μορφής του με την πάροδο του χρόνου. Και τα δυο αυτά φαινόμενα αποτυπώνονται στις μετρήσεις της βροχής, αλλά είναι δύσκολο να διαχωριστούν. Στην Τεχνική της Συνθετικής Καταιγίδας, οι χρονοσειρές βροχής που προκύπτουν από ένα βροχόμετρο, μετατρέπονται διαμέσου της ταχύτητας του βροχικού συστήματος σε χωροσειρές βροχής, δηλαδή σε σειρές που αντικατοπτρίζουν τη χωρική μεταβολή του φαινομένου. Με άλλα λόγια, ανάγουμε τη χρονική μεταβολή σε χωρική μεταβολή. Φυσικά σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι μόνο η χωρική μετατόπιση του συστήματος βροχής υφίσταται και όχι η μεταβολή της μορφής του, το οποίο για σχετικά μεγάλες ταχύτητες είναι ακριβές. Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε τις προκύπτουσες χωροσειρές ρυθμού βροχόπτωσης κατα μήκος του ραδιοδιαδρόμου σύμφωνα με τη γνωστή ολοκληρωτική σχέση,
$$A(x) = k \int_0^L R^a(x) dx$$
 είτε πρόκειται για επίγεια είτε για δορυφορική ζεύξη. Περιγράφουμε παρακάτω τη μέθοδο πιο αναλυτικά.

3.2.2 Αναλυτική Περιγραφή

Η βροχή προσομοιώνεται σε δυο επίπεδα κατακρήμισης [Matricciani 1991], με διαφορετικά χαρακτηριστικά το κάθε ένα. Ξεκινώντας από το έδαφος, πρώτα συναντάμε το επίπεδο A, όπου κυριαρχούν οι υδρομετεωρίτες στη μορφή της σταγόνας [Pruppacher and Piter 1981] και στη συνέχεια το επίπεδο B, όπου οι σταγόνες δίνουν τη θέση τους σε υδρομετεωρίτες αποτελούμενους αμιγώς από πάγο ή από παγο και νερό. Ο κατακόρυφος ρυθμός βροχόπτωσης (σε mm/h) θεωρείται χωρικά ομοιόμορφος στο επίπεδο A και δίνεται από την τιμή που μετράται στο έδαφος από το βροχόμετρο. Σε ό,τι αφορά το επίπεδο B, θεωρούμε τις ακόλουθες, απλές φυσικές υποθέσεις: (1) η μάζα του υδρομετεωρίτη είναι σταθερή κατά την τήξη (2) υπάρχει μια μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σταγόνων στο επίπεδο A και των υδρομετεωριτών σε τήξη στο επίπεδο B (3) η ροή υδρομετεωριτών είναι κοινή και στα δυο επίπεδα (4) η ειδική απόσβεση (specific attenuation) στο επίπεδο B υπολογίζεται ως σαν να παράγεται από σταγόνες με ίσο όγκο με αυτόν των μετεωριτών σε τήξη. Έχοντας υπόψη αυτές τις υποθέσεις, οι υπολογισμοί δείχνουν ότι ο κατακόρυφος ρυθμός κατακρήμισης στο επίπεδο B, γνωστός ως φαινόμενος ρυθμός βροχόπτωσης (apparent rain rate), μπορεί να θεωρηθεί χωρικά ομοιόμορφος και δίνεται από τη σχέση $R_B = 3.134R_A$ [Matricciani, 1996].

Το ύψος του στρώματος A πάνω από το επίπεδο της θάλασσας, σε μια περιοχή με γεωγραφικό πλάτος φ° δίνεται από τη σύσταση [ITU-R P. 839-3] για την ισόθερμη επιφάνεια των $0^\circ C$:

$$\begin{aligned} H &= 5 & \varphi < 23^\circ \\ H &= 5 - 0.075(\varphi - 23^\circ) & \varphi \geq 23^\circ \end{aligned} \quad (3.1)$$

σε χιλιόμετρα (km). Το ύψος του δεύτερου στρώματος h κυμαίνεται κοντά στα 400m ανεξάρτητα από το γεωγραφικό πλάτος της περιοχής αναφοράς.

Στην ανάλυσή μας θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη θα περιγράψουμε την Τεχνική της Συνθετικής Καταιγίδας για μια επίγεια ζεύξη και στη δεύτερη για μια δορυφορική. Για την πρώτη περίπτωση, ορίζουμε έναν άξονα x κατα μήκος του οριζόντιου ραδιοδιαδρόμου και στη συνέχεια θεωρούμε ένα σημείο κατά μήκος του ίδιου άξονα, στο οποίο ο ρυθμός βροχόπτωσης R και η ειδική απόσβεση Y συνδέονται με τη γνωστή σχέση:

$$Y(x) = k \cdot R^a(x) \quad (3.2)$$

Υποθέτουμε περαιτέρω, ότι οι συντελεστές k , a δε μεταβάλλονται με το χρόνο ή με την απόσταση. Για την αποφυγή παρερμηνειών πρέπει να τονιστεί ότι ο πιο πάνω εκθετικός νόμος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της ειδικής απόσβεσης τόσο στο στρώμα Α [Maggiore, 1981] όσο και στο στρώμα Β (με τους υδρομετεωρίτες σε τήξη), ωστόσο στη δεύτερη περίπτωση, οι συντελεστές k, a είναι διαφορετικοί [Zhang *et.al.* 1994]. Για τις περιπτώσεις που αντιστοιχούν σε κάθε στρώμα ακολουθεί το παράδειγμα του Πίνακα 3.1

f (GHz)	k_A (20°C)	a_A (20°C)	k_B (0°C)	a_B (0°C)
12	0.0173	1.2044	0.018	1.154
20	0.0705	1.0736	0.0626	1.093

Πίνακας 3.1: Τιμές των παραμέτρων για τον υπολογισμό της Ειδικής Απόσβεσης για τις δυο περιπτώσεις των στρωμάτων Α, Β

Η απόσβεση σε μια επίγεια ζεύξη με μήκος L (km) κατά μήκος του άξονα x , δίνεται από τη σχέση

$$A(x_o) = k_A \int_{x_o-L/2}^{x_o+L/2} R^{a_A}(x) dx \quad (3.3)$$

ή ισοδύναμα από την συνέλιξη

$$A(x_o) = k_A \int_{-\infty}^{\infty} R^{a_A}(x) \text{rect}[(x_o - x)/L] dx \quad (3.4)$$

όπου $\text{rect}(x/L)$ ένας μοναδιαίος τετραγωνικός παλμός με εύρος L και άξονα συμμετρίας, τον κατακόρυφο άξονα y . Εάν θεωρήσουμε το μέσο της βροχής ισοτροπικό προς όλες τις κατευθύνσεις τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε την διακύμανση της απόσβεσης ως προς το χρόνο, μεταβάλλοντας απλώς το σημείο αναφοράς x_o , ανάλογα με την ταχύτητα v της κίνησης του συστήματος της βροχής.

$$x_o = v \cdot t \quad (3.5)$$

Με απλά λόγια ο τετραγωνικός παλμός στην Εξ. (3.4) αναπαριστά τον οριζόντιο ραδιοδιάδρομο της ζεύξης μήκους L ο οποίος κινείται με μια *σχετική ταχύτητα* v ως προς το σύστημα βροχής. Είναι προφανές ότι εξαιτίας της προαναφερθείσας σχετικής κίνησης,

το στιγμιότυπο της *χωροσειράς* του ρυθμού βροχόπτωσης κατά μήκος της ζεύξης μεταβάλλεται δυναμικά. Κατ' επέκταση, η συνέλιξη υπολογίζει την απόσβεση λόγω βροχής στο δέκτη για κάθε στιγμιότυπο ξεχωριστά.

Ας επιστρέψουμε στην Εξ. (3.4). Ο Μ/Σ Fourier της απόσβεσης κατά μήκος της ζεύξης στο πεδίο της χωρικής συχνότητας $f_s = 1/x_o$ (km^{-1}) δίνεται από το γινόμενο που ακολουθεί –πρόκειται για τη γνωστή ιδιότητα του Μ/Σ Fourier όπου η συνέλιξη στο χρόνο αντιστοιχεί σε γινόμενο στο πεδίο της συχνότητας

$$S_A(f_s) = S_Y(f_s)L \sin c(f_s L) \quad (3.6)$$

όπου

$$\begin{aligned} S_A(f_s) &= \mathfrak{F}\{A(x_o)\} \\ S_Y(f_s) &= \mathfrak{F}\{aR^b(x_o)\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

είναι οι Μ/Σ Fourier των $A(x_o)$ και $Y(x_o)$ αντίστοιχα και

$$\sin c(f_s L) = \sin(\pi f_s L) / (\pi f_s L) \quad (3.8)$$

Χρησιμοποιώντας ορολογία γραμμικών συστημάτων, μπορούμε να αναφέρουμε ότι το $S_Y(f_s)$ είναι το φάσμα εισόδου ενώ το $L \sin c(f_s L)$ η συνάρτηση μεταφοράς. Στη συνέχεια μετατρέποντας την απόσταση σε χρόνο, από το χωρικό φάσμα προκύπτει το χρονικό φάσμα:

$$f = v \cdot f_s \quad (3.9)$$

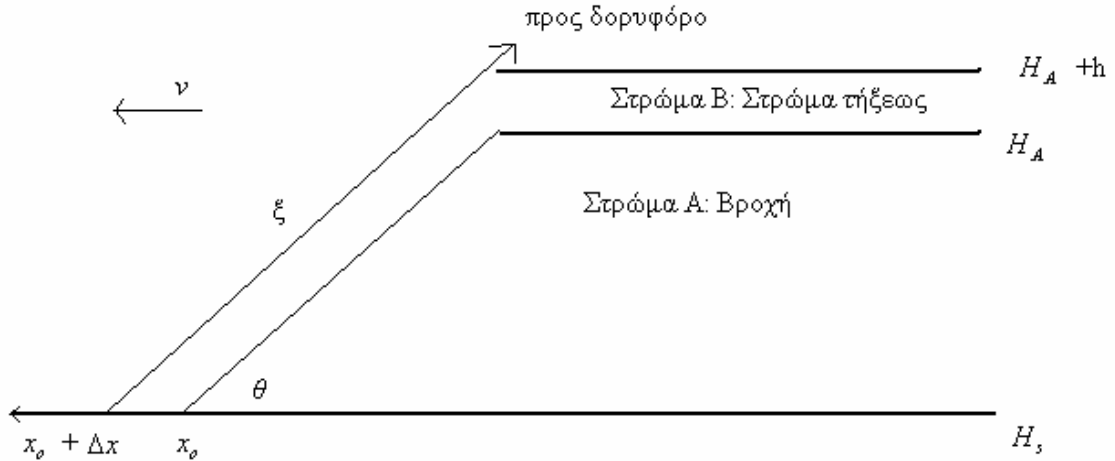
$$\tilde{S}_A(f) = \tilde{S}_Y(f)L \sin c(fL/v) \quad (3.10)$$

$$\tilde{S}_Y(f) = \mathfrak{F}\{Y(t)\} = \mathfrak{F}\{Y(x_o/v)\} = vS_Y(vf_s)$$

Με την εφαρμογή του αντίστροφου Μ/Σ Fourier παίρνουμε

$$A(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{\tilde{S}_A(f)\} \quad (3.11)$$

Οι προηγούμενες εξισώσεις αποτελούν μια σύντομη αλλά περιεκτική μαθηματική περιγραφή της μεθόδου. Η επέκτασή της στην περίπτωση του κεκλιμένου διαδρόμου για μια δορυφορική ζεύξη δεν είναι μια απλή διαδικασία, αλλά απαιτεί να ληφθούν υπόψη οι επιπλέον παράμετροι του προβλήματος, όπως η γωνία ανύψωσης και φυσικά η απόσβεση εξαιτίας του στρώματος Β. Ακολουθεί η ανάλυση.



Σχήμα 3.1: Κατακόρυφη δομή της κατακρήμνισης (βροχή) και γεωμετρικοί παράμετροι της μοντελοποίησης για την περίπτωση δορυφορικής ζεύξης.

Έστω θ η γωνία ανύψωσης της ζεύξης και ξ η συντεταγμένη κατά μήκος του κεκλιμένου ραδιοδιαδρόμου. Σύμφωνα με την μοντελοποίηση δυο στρωμάτων (βλέπε Σχήμα 3.1) η συνολική απόσβεση κατά μήκος της ζεύξης δίνεται από τη σχέση

$$A(x_o) = k_A \int_0^{L_A} R^{a_A}(x_o + \Delta x_o, \xi) d\xi + k_B \cdot r^{a_B} \cdot \int_{L_A}^{L_B} R^{a_B}(x_o, \xi) d\xi \quad (3.12)$$

όπου $r = 3.134$ και

$$L_A = \frac{H_A - H_s}{\sin(\theta)} \quad L_B = \frac{H_B - H_s}{\sin(\theta)} \quad \text{και} \quad \Delta L = L_B - L_A = \frac{h}{\sin(\theta)} \quad (3.13)$$

Ας εξετάσουμε λίγο τη “μετατόπιση” Δx_o . Η τιμή της δίνεται από τη σχέση

$$\Delta x_o = \Delta L \cdot \cos(\theta) = \frac{h}{\tan(\theta)} \quad (3.14)$$

και η φυσική της σημασία προκύπτει από το γεγονός ότι ο κεκλιμένος ραδιοδιάδρομος “εισέρχεται” στο στρώμα Β με χωρική καθυστέρηση. Συνεπώς, υπο το πρίσμα των συνελκτικών ολοκληρωμάτων της Εξ. (3.12), η χωροσειρά ρυθμού βροχόπτωσης που αναφέρεται στο τμήμα του ραδιοδιαδρόμου στο στρώμα Α $-L_A-$, “προηγείται” της αντίστοιχης χωροσειράς στο τμήμα ΔL , κατά Δx_o .

Σύμφωνα με τη λογική της Εξ. (3.6), υπολογίζουμε εδώ το χωρικό φάσμα της συνολικής απόσβεσης στη ζεύξη

$$S_A(f_s) = S_{Y,A}(f_s) \cdot L_A \cdot \sin c(f_s \cdot L_A) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot f_s \cdot \Delta x_o) + r^{a_B} \cdot S_{Y,B}(f_s) \cdot \Delta L \cdot \sin c(f_s \cdot \Delta L) \quad (3.15)$$

όπου

$$\begin{aligned} S_{Y,A}(f_s) &= \mathfrak{F}\{k^A R^{a_A}(x_o)\} \\ S_{Y,B}(f_s) &= \mathfrak{F}\{k^B R^{a_B}(x_o)\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Η σχετική ταχύτητα μετατοπίσης του συστήματος βροχής ως προς τον κεκλιμένο ραδιοδιάδρομο δίνεται από την προβολή της οριζόντιας ταχύτητας v επάνω στον άξονα ζ

$$v(\theta) = \frac{v}{\cos(\theta)} \quad (3.17)$$

και συνεπώς, η χρονική συχνότητα συνδέεται με την αντίστοιχη χωρική

$$f = v(\theta) \cdot f_s = \frac{v \cdot f_s}{\cos(\theta)} \quad (3.18)$$

Τελικά το χρονικό φάσμα προκύπτει από την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} \tilde{S}_A(f) &= \tilde{S}_{Y,A}(f) \cdot L_A \cdot \sin c(f \cdot L_A / v(\theta)) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot f \cdot \Delta x_o / v(\theta)) + \\ &+ r^{a_B} \cdot \tilde{S}_{Y,B}(f) \cdot \Delta L \cdot \sin c(f \cdot \Delta L / v(\theta)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Με την εφαρμογή του Αντίστροφου Μ/Σ Fourier παίρνουμε τις χρονοσειρές απόσβεσης λόγω βροχής.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι για $\theta \neq 90^\circ$ και $v \rightarrow \infty$, η απόσβεση κατά μήκος της ζεύξης δίνεται από

$$A(t) = k_A R^{a_A}(t) L_A + r^{a_B} k_B R^{a_B}(t) (L_B - L_A) \quad (3.20)$$

3.3 Βροχόμετρο (Disdrometer RD-69)

Ένα βροχόμετρο τύπου Joss-Waldvogel (RD-69) [Disdrometer LTD, 1997] εγκαταστάθηκε στο χώρο του ΕΜΠ στην Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, ώστε να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση ρυθμού βροχόπτωσης κατά τη διάρκεια των γεγονότων βροχής. Το συγκεκριμένο βροχόμετρο είναι ένα όργανο που μετράει αρχικά, την κατανομή της διαμέτρου των βροχοσταγόνων, την οποία στη συνέχεια μετατρέπει σε ρυθμό βροχόπτωσης, με συχνότητα δειγματοληψίας 1 δείγμα το λεπτό. Η συγκεκριμένη διαδικασία περιλαμβάνει το μετασχηματισμό της ορμής κάθε σταγόνας που προσπίπτει επάνω σε μια επιφάνεια εκτεθειμένη στους υδρομετεωρίτες, σε ηλεκτρικό παλμό με το

πλάτος του παλμού να είναι συνάρτηση της διαμέτρου της σταγόνας. Στη συνέχεια αναλύονται στατιστικά τα πλάτη όλων των διεγερόμενων παλμών ώστε να κατανεμηθούν οι προσπίπτουσες σταγόνες σε κλάσεις ως προς το μέγεθός τους. Ο συνολικός αριθμός των κλάσεων που δύνανται να διακριθούν είναι 127. Ωστόσο, μειώνουμε το πλήθος των κλάσεων σε μόλις 20 –βλ. Πίνακα 3.2– έτσι ώστε να έχουμε ένα δείγμα πιο εύκολα αξιοποιήσιμο υπό το πρίσμα μιας στατιστικής επεξεργασίας. Ο ρυθμός βροχόπτωσης σε mm/h υπολογίζεται διαμέσου του τύπου

$$R = \frac{10\pi \sum_{i=1}^{20} N_i D_i^3}{AT} \quad (\text{mm/h}) \quad (3.21)$$

όπου $A = 50 \times 10^2 \text{ mm}$ είναι μια επιφάνεια που συμπεριλαμβάνεται στον εξοπλισμό του βροχόμετρου και βρίσκεται εκτεθειμένη στη βροχή, $T = 1 \text{ min}$ είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών μετρήσεων ρυθμού βροχόπτωσης, $D_i \text{ (mm)}$ η ενδιάμεση τιμή των ορίων κάθε κλάσης που αφορά στη διάμετρο των σταγόνων και τέλος N_i είναι ο αριθμός των μετρούμενων σταγόνων ανά κλάση, φυσικά σε χρόνο T . Η διάμετρος D κάθε σταγόνας μετράται με ένα πιθανό σφάλμα της τάξης $\rho = \pm 5\%$. Το σφάλμα αυτό διαδίδεται αυξανόμενο διαμέσου του τύπου (3.21) και τελικά προβάλλεται στη μέτρηση του ρυθμού βροχόπτωσης στην ποσοστιαία τιμή του $\pm 15\%$. Η απόδειξη είναι εύκολη και ακολουθεί.

Κλάσεις	Διάμετρος σταγόνας σε (mm)
1	0.313-0.405
2	0.405-0.506
3	0.506-0.597
4	0.597-0.715
5	0.715-0.827
6	0.827-1.000
7	1.000-1.232
8	1.232-1.430
9	1.430-1.582
10	1.582-1.747

11	1.747-2.077
12	2.077-2.441
13	2.441-2.727
14	2.727-3.011
15	3.011-3.385
16	3.385-3.705
17	3.705-4.127
18	4.127-4.573
19	4.573-5.101
20	>5.101

Πίνακας 3.2: Οι 20 κλάσεις που αφορούν στη διάμετρο των βροχοσταγόνων και χρησιμοποιούνται από το βροχόμετρο RD-69 για τον υπολογισμό του ρυθμού βροχόπτωσης

Όπως ήδη αναφέραμε προηγουμένως, η αβεβαιότητα ή καλύτερα το σφάλμα στη μέτρηση της διαμέτρου της σταγόνας είναι $\rho = \frac{\Delta D_i}{D_i} = \pm 5\%$ και συνεπώς ισχύει $\rho \ll 1$.

Άρα το προαναφερθέν σφάλμα διαδίδεται στη μέτρηση του ρυθμού βροχόπτωσης ως ακολούθως

$$R = \frac{10\pi \sum_{i=1}^{20} N_i (D_i \pm \Delta D_i)^3}{AT} = \frac{10\pi \sum_{i=1}^{20} N_i D_i^3}{AT} (1 \pm 3\rho + 3\rho^2 \pm \rho^3) = R_o \pm \Delta R \cong R_o (1 \pm 3\rho) \quad (3.22)$$

όπου το R_o αντιστοιχεί στη σωστή τιμή του ρυθμού βροχόπτωσης και συνεπώς το νέο ποσοστιαίο λάθος δίνεται κατά προσέγγιση από

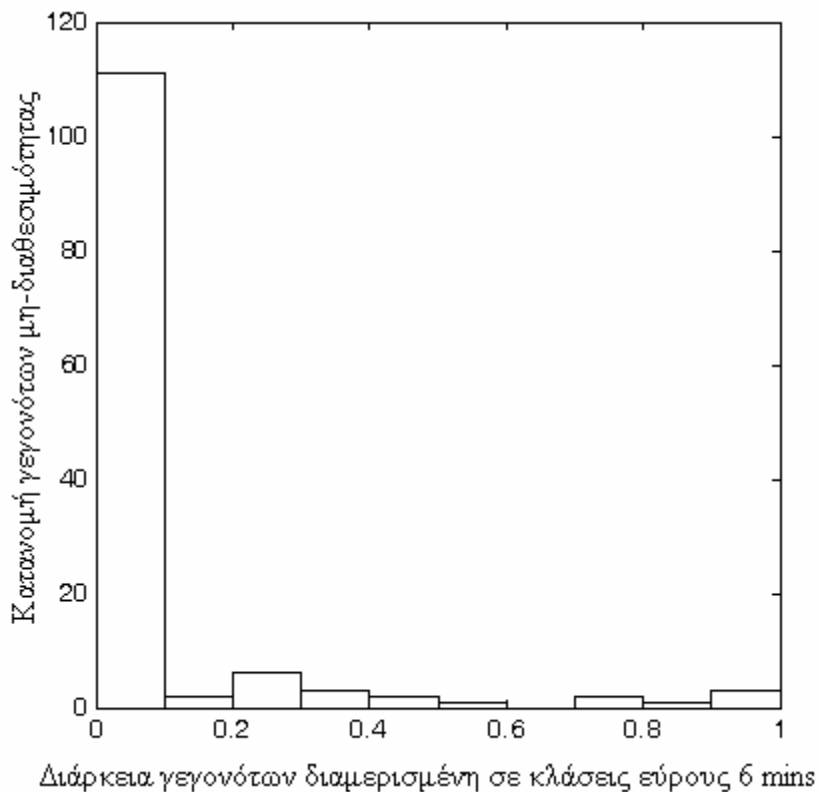
$$\frac{\Delta R}{R_o} = \pm 3\rho = \pm 15\% \quad (3.23)$$

Ας παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό ότι τα ποσοστιαία σφάλματα στη μέτρηση του ρυθμού βροχόπτωσης δια μέσου της χρήσης του βροχομέτρου RD-69, αναζητήθηκαν στην αναφορά [Joss *et. al.* 1969] και αποτιμήθηκαν αρκετά υψηλότερα από το 15% που προτείνουμε εδώ, ειδικά για χαμηλές τιμές του ρυθμού βροχόπτωσης. Στην πραγματικότητα, η καλύτερη προσέγγιση στη μέτρηση του ρυθμού βροχόπτωσης με τη χρήση του εξοπλισμού RD-69, θα ήταν να χρησιμοποιούμε παράλληλα με αυτόν, ένα συμβατικό βροχόμετρο, δηλαδή έναν εξοπλισμό που μετράει μόνο ύψος βροχής ανά ώρα

και όχι μεγέθη σταγόνων, με τρόπο ώστε να εκτελούμε ταυτόχρονες μετρήσεις. Το πλεονέκτημα της διαδικασίας αυτής είναι ουσιαστικά η διαφορική παρατήρηση του φαινομένου με την έννοια της παράλληλης μέτρησης και υπό το πρίσμα της διόρθωσης πιθανών λαθών.

3.4 Διαθεσιμότητα Βροχομέτρου-Αξιοπιστία Μετρήσεων

Το βροχόμετρο RD-69 λειτούργησε για το 99.4% του συνολικού χρόνου παρατήρησης, από την 1/1/2000 έως και την 31/5/2002. Το 0.6% επί του συνολικού χρόνου που αντιστοιχεί σε κατάσταση μη-διαθεσιμότητας του εξοπλισμού –περίπου 125 ώρες σε μια περίοδο 29 μηνών– συνίσταται συνολικά από 140 γεγονότα δυσλειτουργίας του εξοπλισμού –τα περισσότερα από τα οποία έχουν άλλωστε διάρκεια μικρότερη από μια ώρα– και οφείλονται κατά πάσα πιθανότητα σε πτώση τάσης του παρεχόμενου ηλεκτρικού ρεύματος. Στο σχήμα που ακολουθεί (Σχήμα 3.2) περιγράφεται η κατανομή της διάρκειας εκείνων των γεγονότων μη διαθεσιμότητας, των οποίων η διάρκεια δεν υπερβαίνει τη μια ώρα.



Σχήμα 3.2: Κατανομή γεγονότων μη-διαθεσιμότητας

Ωστόσο, 9 από τα 140 γεγονότα για τα οποία γίνεται λόγος, αντιστοιχούν σε χρονικά διαστήματα μη-διαθεσιμότητας με διάρκεια μεγαλύτερη της μιας ώρας. Στον πίνακα που ακολουθεί διακρίνεται μάλιστα ένα γεγονός το οποίο διήρκησε σχεδόν 40 ώρες.

Διάρκεια (hr)	Μήνας	Μέρα	Έτος	Ωρα
16.7	6	7	2000	20:25
1.2	9	5	2000	11:58
39.3	2	17	2001	18:36
3.4	2	27	2001	17:19
3.4	2	28	2001	17:19
24	3	1	2001	00:00
2.7	9	10	2001	11:28
5.3	9	10	2001	14:12
6.9	3	11	2002	10:17

Πίνακας 3.3

Θα ήταν λογικό να ισχυριστούμε ότι στην περίπτωση γεγονότων –αναφερόμαστε πάντα σε γεγονότα μη-διαθεσιμότητας σε αυτή την παράγραφο– που διαρκούν λιγότερο από μια ώρα, είναι εξαιρετικά πιθανό να μην έχουμε χάσει καθόλου πληροφορία που αφορά στη βροχή, υπό τη συνθήκη ότι δεν αναφέρεται ένδειξη βροχόπτωσης σε γειτονικά χρονικά διαστήματα. Αντίθετα, για γεγονότα δυσλειτουργίας του εξοπλισμού μεγάλης διάρκειας, περισσότερο από 1 ώρα, ο προαναφερθείς ισχυρισμός δεν ευσταθεί.

Για παράδειγμα, στις μετρήσεις μας, από τα 140 γεγονότα, μόνο σε 6 από αυτά παρενεβλήθησαν κάποιες βροχοπτώσεις. Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τη σχετική πληροφορία

Διάρκεια (min)	Μήνας	Ημέρα	Έτος	Ωρα
3	12	1	2000	14:55
2	1	23	2001	11:30
415	3	11	2002	10:17
14	3	11	2002	17:13
3	3	11	2002	17:40
6	4	24	2002	16:35

Πίνακας 3.4

Φαίνεται καθαρά στον Πίνακα 3.4 ότι τα γεγονότα δυσλειτουργίας στα οποία παρανεβλήθησαν βροχοπτώσεις έχουν διάρκεια της τάξης μερικών λεπτών εκτός από ένα, το οποίο διήρκεσε σχεδόν 7 ώρες. Εξάλλου, το ίδιο γεγονός ανήκει και στην οικογένεια του Πίνακα 3.3. Κατά τη διάρκεια των υπόλοιπων γεγονότων του Πίνακα 3.3, η Εθνική Μετεωρολογική Υπηρεσία (Ε.Μ.Υ.) δεν αναφέρει βροχή στην περιοχή της Αττικής. Συμπερασματικά, κατά τη διάρκεια του χρόνου μη διαθεσιμότητας που άγγιξε τις 125 ώρες, από τις μετρήσεις μας απωλέστηκαν το πολύ 7 ώρες χρήσιμης πληροφορίας επάνω στη βροχόπτωση για την περιοχή του Ζωγράφου.

Η επίπτωση της απώλειας ενός γεγονότος βροχής για την αξιοπιστία της βάσης των μετρήσεών μας δε μπορεί να εκτιμηθεί με ευθύ τρόπο. Εάν θέσουμε το ίδιο πρόβλημα, υπό το πρίσμα όμως του υπολογισμού της Πιθανότητας Υπέρβασης που αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή του ρυθμού βροχόπτωσης τότε, υπάρχουν τρεις παράγοντες που πρέπει να εξετάσουμε ώστε να αποφανθούμε για το κόστος αυτής της απώλειας. Συγκεκριμένα αυτοί είναι (α) η διάρκεια του απολεσθέντος γεγονότος βροχής την οποία είναι αδύνατο να εκτιμήσουμε –για παράδειγμα, στην περίπτωση του προαναφερθέντος γεγονότος του Πίνακα 3.4, 7 ώρες είναι η μέγιστη δυνατή απώλεια και όχι αναγκαστικά η πραγματική (β) το εύρος τιμών του απολεσθέντος γεγονότος βροχόπτωσης και τέλος (γ) ο συνολικός πληθυσμός της βάσης από μετρήσεις που συλλέξαμε. Ακολουθεί μια πιο ενδελεχής ανάλυση του προβλήματος.

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την Πιθανότητα Υπέρβασης για μια τυχαία διαδικασία όπως είναι ο ρυθμός βροχόπτωσης R (mm/hr), σχηματίζουμε την ακόλουθη τυχαία μεταβλητή με όνομα $y(R_o)$:

$$y_i(R_o) = \begin{cases} 1 & R_i \geq R_o \\ 0 & R_i < R_o \end{cases} \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.24)$$

όπου n είναι το πλήθος των μετρήσεων που έχουμε για την R . Συνεπώς, η Πιθανότητα Υπέρβασης που συμβολίζεται ως εξής $p(R_o) = P(R > R_o)$ εκτιμάται από τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $y(R_o)$, δηλαδή από το κλάσμα

$$\hat{F}(R_o) = \frac{n_{R_o}}{n} \quad (3.25)$$

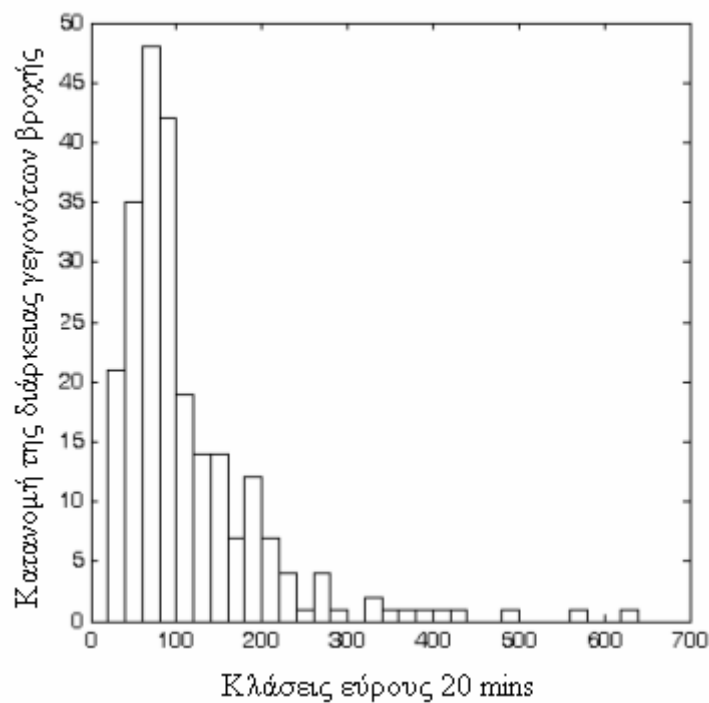
όπου το n_{R_o} να αντιστοιχεί στο πλήθος των ‘επιτυχιών’ –τιμή 1– της ακολουθίας $y_i(R_o)$. Είναι συνεπώς φανερό ότι εάν αποσύρουμε ή απολέσουμε ένα γεγονός βροχόπτωσης τότε ο λόγος στην Εξ. (3.25) θα μειωθεί ή στην καλύτερη περίπτωση θα μείνει σχεδόν αμετάβλητος. Η μορφή του λόγου στην Εξ. (3.25) επιβεβαιώνει τη βαρύτητα που έχουν τόσο η διάρκεια όσο και το εύρος τιμών του απολεσθέντος γεγονότος στην τελική αποτίμηση της Πιθανότητας Υπέρβασης.

Ας παρατηρήσουμε τέλος ότι η διακύμανση (deviation) της τυχαίας μεταβλητής $\hat{F}(R_o)$ αντανακλά την αβεβαιότητα στον υπολογισμό της Πιθανότητας Υπέρβασης που περιγράφει την τυχαία διαδικασία. Επιπλέον, μπορεί να δειχθεί ότι η εν λόγω διακύμανση δύναται να μειωθεί εφόσον το δείγμα αυξηθεί ή η συσχέτιση μεταξύ τιμών της τυχαίας διαδικασίας μειωθεί. Συνεπώς όταν ένα μικρό δείγμα από μετρήσεις είναι διαθέσιμο, τότε μπορούμε σκόπιμα να αποκλείσουμε, εν συνόλω ή μερικώς, κάποια γεγονότα που αποδεικνύεται πως έχουν εξαιρετική σπανιότητα. Για παράδειγμα, τιμές βροχόπτωσης που εμφανίζονται ανά δεκαετία μπορούν να φιλτράρονται για την περίπτωση μικρών δειγμάτων που έχουν συλλεχθεί κατά τη διάρκεια δυο ή τριών ετών. Ο σκοπός είναι να γίνει το δείγμα πιο αντιπροσωπευτικό του πραγματικού φαινομένου. Σε αυτό ακριβώς το ζήτημα θα αναφερθούμε αμέσως μετά.

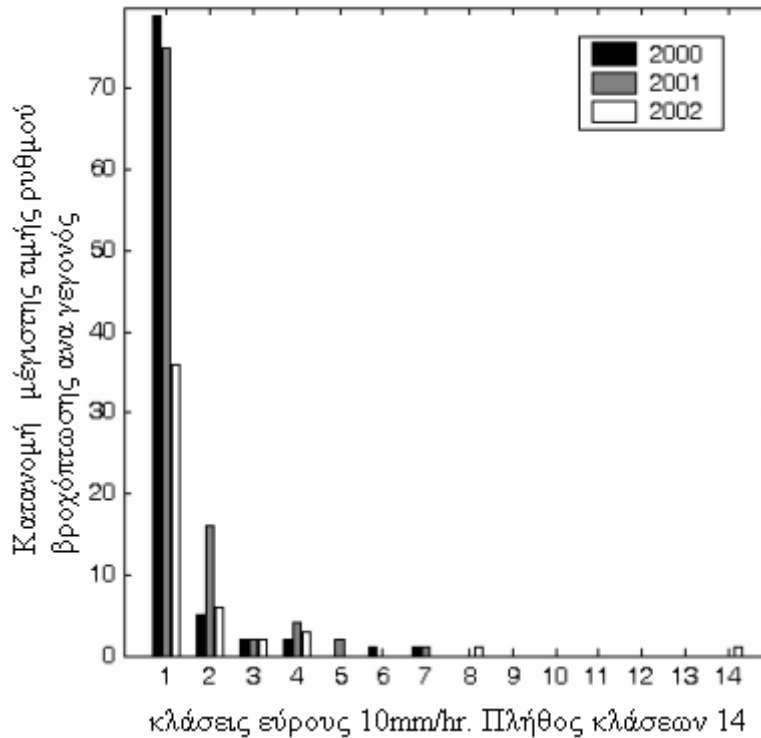
3.5 Αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος βροχόπτωσης

Οι μετρήσεις βροχόπτωσης διεξήχθησαν από την 1/1/2000 έως και την 31/5/2002. Πρόκειται δηλαδή για μια περίοδο 29 μηνών κατά τη διάρκεια της οποίας παρατηρήθηκαν 239 γεγονότα βροχής με συνολική διάρκεια περίπου, 345 ώρες. Ας διευκρινίσουμε στο σημείο αυτό ότι η ελάχιστη ανιχνεύσιμη τιμή ρυθμού βροχόπτωσης από το βροχόμετρο RD-69 είναι 0.2 mm/h και ότι εάν το διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών μη-μηδενικών μετρήσεων βροχόπτωσης είναι μεγαλύτερο από μια ώρα, τότε θεωρούμε ότι αυτές ανήκουν σε δυο ξεχωριστά γεγονότα βροχής. Το ιστόγραμμα του Σχήματος 3.3, παριστάνει την κατανομή της διάρκειας ανά γεγονός βροχόπτωσης ενώ το ιστόγραμμα του Σχήματος 3.4 που ακολουθεί, αποτυπώνει για κάθε χρονιά ξεχωριστά - 2000/2001/2002- την κατανομή της μέγιστης τιμής ρυθμού βροχόπτωσης που παρουσιάζεται ανά γεγονός βροχής με τα δυο μεγέθη –που προφανώς αντιστοιχούν σε τυχαίες μεταβλητές– να προκύπτουν επί του συνόλου των καταγραφόμενων γεγονότων

βροχής. Είναι άξιο να σημειωθεί ότι στο Σχήμα 3.3 οι κλάσεις του οριζόντιου άξονα που αναφέρεται στη διάρκεια των γεγονότων βροχόπτωσης, έχουν εύρος 20 minutes ενώ στο Σχήμα 3.4 οι κλάσεις στον οριζόντιο άξονα που αυτή τη φορά αναφέρεται στη μέγιστη τιμή του ρυθμού βροχόπτωσης ανά γεγονός, έχουν εύρος 10 mm/h και συνολικά αποτυπώνονται 14 περιπτώσεις.



Σχήμα 3.3: Κατανομή της διάρκειας γεγονότων βροχής



Σχήμα 3.4: Κατανομή μέγιστης τιμής ρυθμού βροχόπτωσης

Είναι λογικό να ισχυριστούμε ότι τα δυο σχήματα 3.3 και 3.4 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αποτίμηση της αξιοπιστίας ή καλύτερα, της αντιπροσωπευτικότητας του μετρούμενου δείγματος ως προς την εν γένει συμπεριφορά του ρυθμού βροχόπτωσης σε κλίμακα τοπική δηλαδή, στην περιοχή της Αττικής. Συγκεκριμένα, τα στατιστικά χαρακτηριστικά του δείγματος, σε αντιδιαστολή με τα αντίστοιχα στατιστικά χαρακτηριστικά προερχόμενα από μεγάλες μετεωρολογικές βάσεις, με το περιεχόμενό τους να αναφέρεται σε πολυετείς μετρήσεις (Εθνική Μετεωρολογική Υπηρεσία) επιτρέπουν σε κάποιον να αποφανθεί για την αντιπροσωπευτικότητα του μετρούμενου δείγματος. Για παράδειγμα, ας παρατηρήσουμε το Σχήμα 3.4 στο οποίο φαίνεται ξεκάθαρα ότι η μεγάλη πλειοψηφία των γεγονότων βροχής κατανέμεται ομοιόμορφα κατά μήκος των κλάσεων εκτός από μια περίπτωση, συγκεκριμένα αυτή του γεγονότος που έλαβε χώρα στην 21/5/2002 από τη μέγιστη τιμή του οποίου -135.8 mm/h- συνάγεται ότι ήταν ένα γεγονός εξαιρετικής έντασης. Έχει σημασία λοιπόν να επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας σε αυτή την ασυνήθιστα μεγάλη τιμή επισημαίνοντας τα εξής: αρχικά, είναι ενδεικτικό ότι η μέγιστη τιμή του ρυθμού

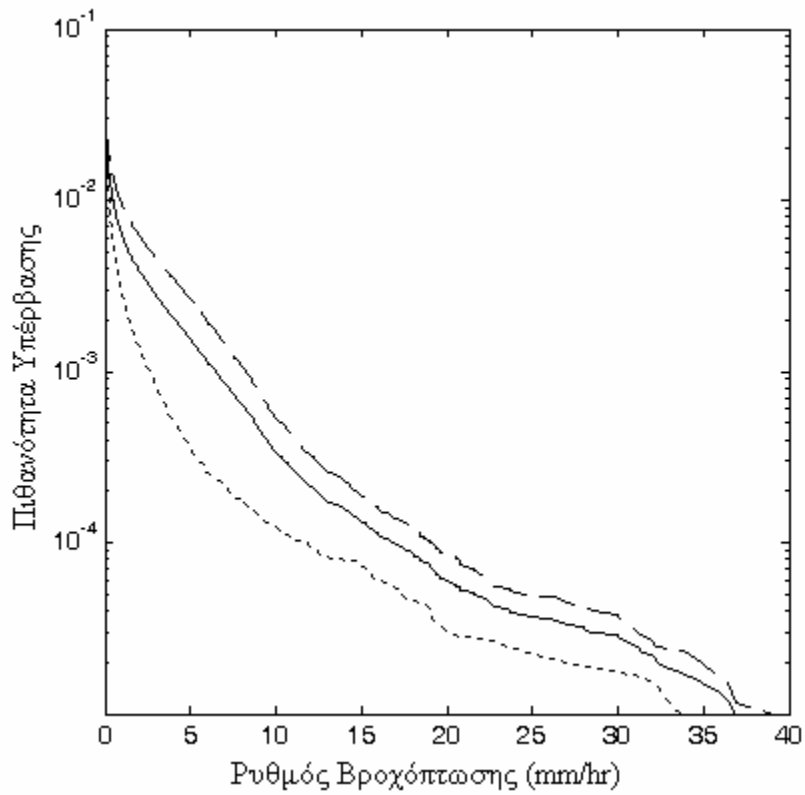
βροχόπτωσης για τα πρώτα δύο χρόνια (2000, 2001) είναι 69.2 mm/h και έλαβε χώρα στην 17/6/2000. Επιπλέον, οι πρώτοι 5 μήνες του 2002 πρέπει να υπήρξαν ιδιαίτερα βροχεροί υπό το πρίσμα βέβαια των παρατηρούμενων ρυθμών βροχόπτωσης δεδομένου ότι το κατώφλι των 69.2 mm/h υπερπηδήθηκε για περισσότερο από 10 λεπτά κατά τη διάρκεια του γεγονότος την 21/5/2002, χρόνος που αντιστοιχεί σε πιθανότητα υπέρβασης 1.9×10^{-5} κατά τη διάρκεια ενός έτους. Σύμφωνα με μεγάλες μετεωρολογικές βάσεις, αποδεικνύεται ότι τέτοια γεγονότα έχουν έναν δεκαετή κύκλο επανεμφάνισης και κατά συνέπεια εάν συμπεριληφθούν εξολοκλήρου στο δείγμα, μπορούν να οδηγήσουν σε υπερεκτίμηση της Πιθανότητας Υπέρβασης που περιγράφει το ρυθμό βροχόπτωσης. Για το λόγο αυτό κρίνεται σκόπιμο το φιλτράρισμα των εξαιρετικά μεγάλων τιμών αυτών των γεγονότων ώστε το δείγμα να είναι όσο το δυνατόν πιο αντιπροσωπευτικό του πραγματικού φαινομένου.

3.6 Στατιστικά I^{ns} τάξης για το ρυθμό βροχόπτωσης

Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (3.25) ώστε να υπολογίσουμε την Πιθανότητα Υπέρβασης για το ρυθμό βροχόπτωσης, τόσο σε ετήσια όσο και σε εποχική βάση. Η διαφορά των δυο περιπτώσεων έγκειται προφανώς στη χρονική περίοδο από την οποία αντλούμε το δείγμα μας: στην πρώτη, τα δείγματα συλλέγονται σε ετήσια βάση ενώ στη δεύτερη σε εποχική, με κάθε εποχή να συνιστά διαφορετική περίπτωση. Γίνεται κατανοητό ότι αναζητούμε μια *περιοδικότητα* στο φαινόμενο του ρυθμού βροχόπτωσης. Είναι λογικό να υπάρχει περιοδικότητα τόσο σε ετήσια όσο και σε εποχική βάση όπως π.χ. κατά τη διάρκεια του καλοκαιριού. Δε θα μπορούσαμε ποτέ να χρησιμοποιήσουμε ένα δείγμα π.χ. 29 μηνών όπως εδώ για την εκτίμηση της ετήσιας πιθανότητας υπέρβασης διότι, εάν συμπεριλάβουμε από τη μια τους βροχερούς μήνες του χειμώνα και της άνοιξης, αλλά από την άλλη αποκλείσουμε τους ξηρούς μήνες του καλοκαιριού, τότε είναι πιθανό να οδηγηθούμε σε μια υπερεκτίμηση της πιθανότητας υπέρβασης σε ετήσια βάση.

Τα αποτελέσματα ακολουθούν. Είναι άξιο να παρατηρηθεί ότι επιλέξαμε να κάνουμε 3 καμπύλες σε ετήσια βάση, μια για κάθε χρονιά 2000 και 2001 και μια συνολική (2000-2001) καθώς και 5 καμπύλες σε εποχική βάση, με τη μια επιπλέον καμπύλη να είναι μια

επανεκτίμηση για την περίπτωση της άνοιξης όπου δεν έχει συμπεριληφθεί το έντονο γεγονός στο οποίο αναφερθήκαμε νωρίτερα και το οποίο έλαβε χώρα την 21/5/2002.

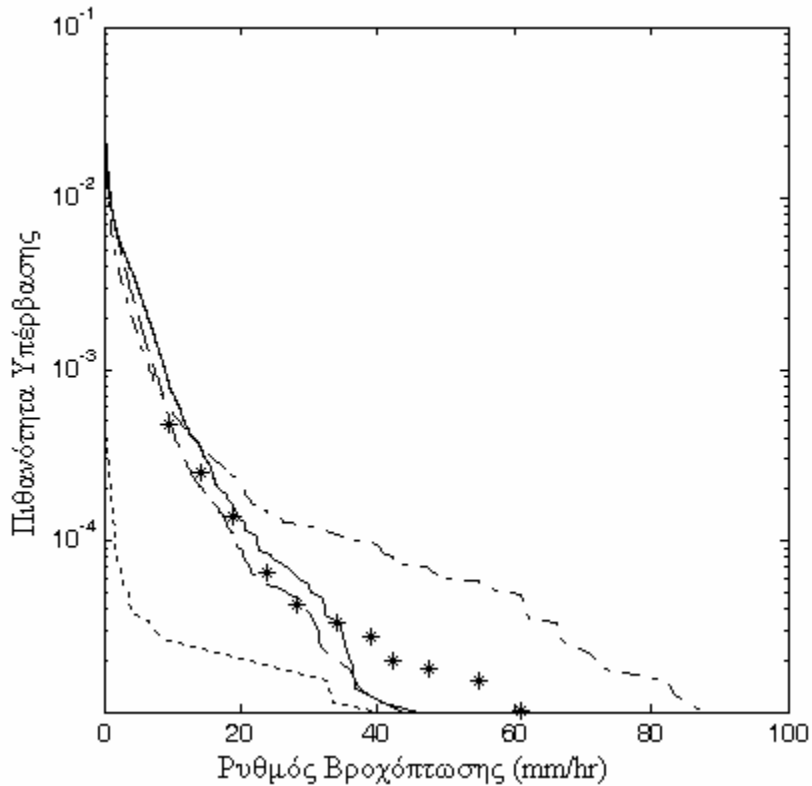


Σχήμα 3.5: Ετήσια Πιθανότητα Υπέρβασης για το ρυθμό βροχόπτωσης

----- 2000

-.-.-.-.- 2001

———— Δεδομένα 2 ετών (2000-2001)



Σχήμα 3.6: Εποχική Πιθανότητα Υπέρβασης για το ρυθμό βροχόπτωσης

- Καλοκαίρι
- Φθινόπωρο
- · - · - Άνοιξη
- * * * * * Άνοιξη χωρίς το έντονο γεγονός της 21/5/2002
- Χειμώνας

3.7 Εφαρμογή της Τεχνικής της Συνθετικής Καταιγίδας

Η Τεχνική της Συνθετικής Καταιγίδας δέχεται σαν είσοδο το γεωγραφικό πλάτος που αντιστοιχεί στο στίγμα του επίγειου σταθμού, τη γωνία ανύψωσης και την ταχύτητα κίνησης του συστήματος βροχής. Προφανώς η τελευταία παράμετρος είναι μια τυχαία μεταβλητή και σε μια δεύτερη ‘ανάγνωση’ του φαινομένου της μετακίνησης συστημάτων βροχής, μαζί με αυτή προκύπτουν και άλλες όπως η διεύθυνση μετακίνησης. Στην πλειοψηφία των προσομοιώσεων, χρησιμοποιούμε τη μέση τιμή της ταχύτητας του συστήματος βροχής ενώ αγνοούμε τη διεύθυνση διάδοσης, θεωρώντας ότι το μέσο βροχής παρουσιάζει ισοτροπική συμπεριφορά.

Για την περιοχή του Ζωγράφου βρήκαμε από Μετεωρολογικά δεδομένα [Kotroni *et. al.*, 1997], [Lagouvardos *et. al.*, 1996] ότι η μέση τιμή, σε ετήσια βάση, της ταχύτητας της καταιγίδας (*storm speed*) είναι 14.25m/sec ενώ πιο συγκεκριμένα, για την εποχή της Άνοιξης και του Καλοκαιριού η ίδια τυχαία μεταβλητή κυμαίνεται από 15 μέχρι 18m/sec ενώ για το Φθινόπωρο και τον Χειμώνα η μέση τιμή της είναι αρκετά χαμηλότερα, στα 12m/sec. Πάντως πρέπει να τονίσουμε εφόσον έχει αποδειχθεί επανειλημμένα, ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά 1^{ης} τάξης των χρονοσειρών απόσβεσης από βροχή όπως αυτές προκύπτουν από την Τεχνική της Συνθετικής Καταιγίδας, παρουσιάζουν χαμηλή ευαισθησία ως προς την τιμή της ταχύτητας κίνησης του συστήματος βροχής [Matricciani, 1996]. Αντίθετα, σημαντική ευαισθησία ως προς την συγκεκριμένη ταχύτητα παρουσιάζουν τα δυναμικά χαρακτηριστικά 2^{ης} τάξης [Matricciani, 1997] Περισσότερα για αυτό σε επόμενη παράγραφο. Ακολουθεί η παρουσίαση των χαρακτηριστικών 1^{ης} τάξης των προσομοιούμενων χρονοσειρών απόσβεσης.

3.8 Χαρακτηριστικά 1^{ης} τάξης προσομοιούμενων χρονοσειρών απόσβεσης

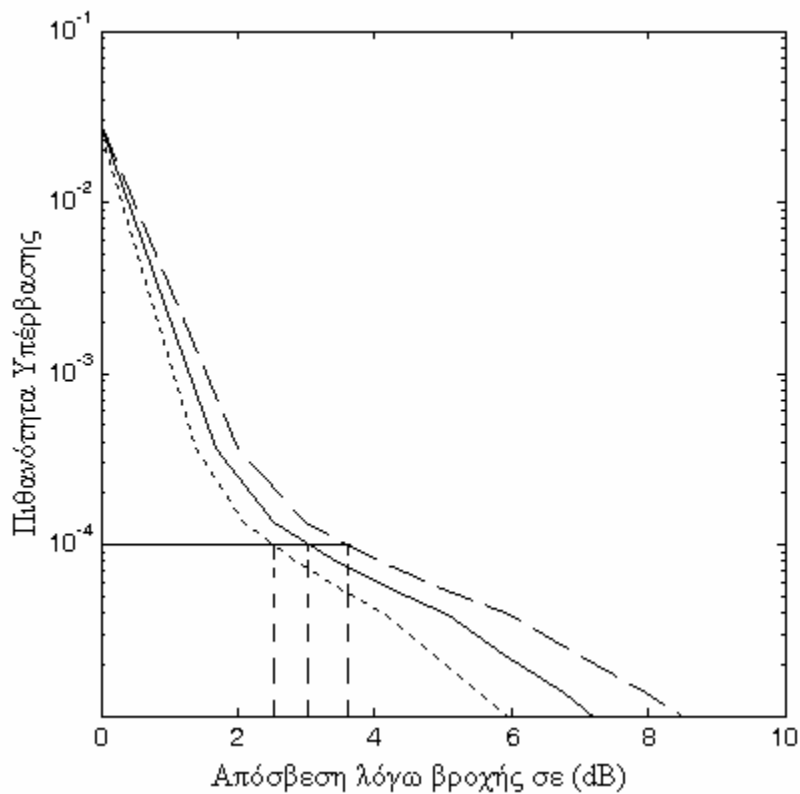
Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε τα μακροπρόθεσμα (1^{ης} τάξης) στατιστικά χαρακτηριστικά των προσομοιούμενων χρονοσειρών απόσβεσης για τη ζεύξη που μελετάμε –δηλαδή έναν επίγειο σταθμό στην περιοχή του Ζωγράφου σε σύνδεση με τον Hellas-sat2 και συχνότητα λειτουργίας τα 12GHz– όπως αυτές προκύπτουν από την εφαρμογή της Τεχνικής της Συνθετικής Καταιγίδας. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 3.7 παριστάνεται η ετήσια Πιθανότητα Υπέρβασης ενός κατωφλίου απόσβεσης σε (dB). Σημειώνεται ότι έχουμε περιλάβει στο Σχήμα 3.7 καμπύλες που αντιστοιχούν στις χρονιές 2000, 2001 καθώς και τρεις ακόμα που αφορούν από κοινού τη διετία 2000-2001. Για τις πρώτες δυο χρησιμοποιήθηκε ως μέση ετήσια ταχύτητα καταιγίδας η τιμή 14.25 m/s ενώ για τις τρεις επόμενες αφενός η ίδια μέση τιμή 14.25m/sec και αφετέρου δύο άλλες ακρότατες τιμές, 12 και 16.5 m/s αντίστοιχα. Επιπλέον, στο ίδιο σχήμα, περιέχεται η Πιθανότητα Υπέρβασης σε ετήσια βάση πάντα για την υπό μελέτη ζεύξη, όπως αυτή –η Πιθανότητα Υπέρβασης– προκύπτει από το φυσικό μοντέλο του Συνεκτικού Βροχοπυρήνα (Convective Rain Cell model):

$$P[A \geq A_{thr}] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\ln(A_{thr} \cdot \cos \varphi) - \ln(A_m)}{\sqrt{2} \cdot S_a} \right) \quad (3.26)$$

όπου A_m (dB) και S_a είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα, της Λογαριθμοκανονικής κατανομής που προσομοιώνει την μακροπρόθεσμη Πιθανότητα Υπέρβασης. Οι τιμές των προαναφερθέντων παραμέτρων εξαρτώνται από ένα ισοδύναμο μήκος κεκλιμένου ραδιοδιαδρόμου (effective slant path length) καθώς επίσης και από τη μέση τιμή R_m (mm/h) και την τυπική απόκλιση S_r της αντίστοιχης Λογαριθμοκανονικής κατανομής που προσομοιώνει την Πιθανότητα Υπέρβασης του *ρυθμού βροχόπτωσης* για την περιοχή της ζεύξης. Τα R_m και S_r με τη σειρά τους, δύναται να υπολογιστούν από στατιστική επεξεργασία διαθέσιμων μετρήσεων ρυθμού βροχόπτωσης ή εναλλακτικά, εάν δεν υπάρχουν τέτοιες, από τους χάρτες ρυθμού βροχόπτωσης που έχει εκδώσει η ITU-R. Συγκεκριμένα, από τους τελευταίους και για την περιοχή της Αττικής, υπολογίσαμε τις τιμές $R_m=0.0513$ (mm/h), $S_r=1.69$. Τέλος, στην καμπύλη συμπεριλαμβάνεται και η Πιθανότητα Υπέρβασης για την απόσβεση λόγω βροχής στην υπό μελέτη ζεύξη, όπως αυτή προκύπτει από το μοντέλο της ITU-R.

Εξετάζοντας το Σχήμα 3.7 προκύπτουν τα ακόλουθα δυο συμπεράσματα. Αφενός επιβεβαιώνεται ο ισχυρισμός ότι τα 1^{ης} τάξης στατιστικά χαρακτηριστικά της προσομοιούμενης απόσβεσης –όπως η Πιθανότητα Υπέρβασης– παρουσιάζουν μικρή ευαισθησία ως προς τις μεταβολές της ταχύτητας καταιγίδας (storm speed) και αφετέρου, το μοντέλο του συνθετικού βροχοπυρήνα εμφανίζει καλύτερη συμπεριφορά σε σχέση με αυτό της ITU-R όταν και τα δυο συγκριθούν με την πειραματική Πιθανότητα Υπέρβασης.

Πιθανότητα Υπέρβασης είναι 2.5 dB και 3.5dB αντίστοιχα, για τις περιπτώσεις σφάλματος -15% και +15% στη μέτρηση του ρυθμού βροχόπτωσης.

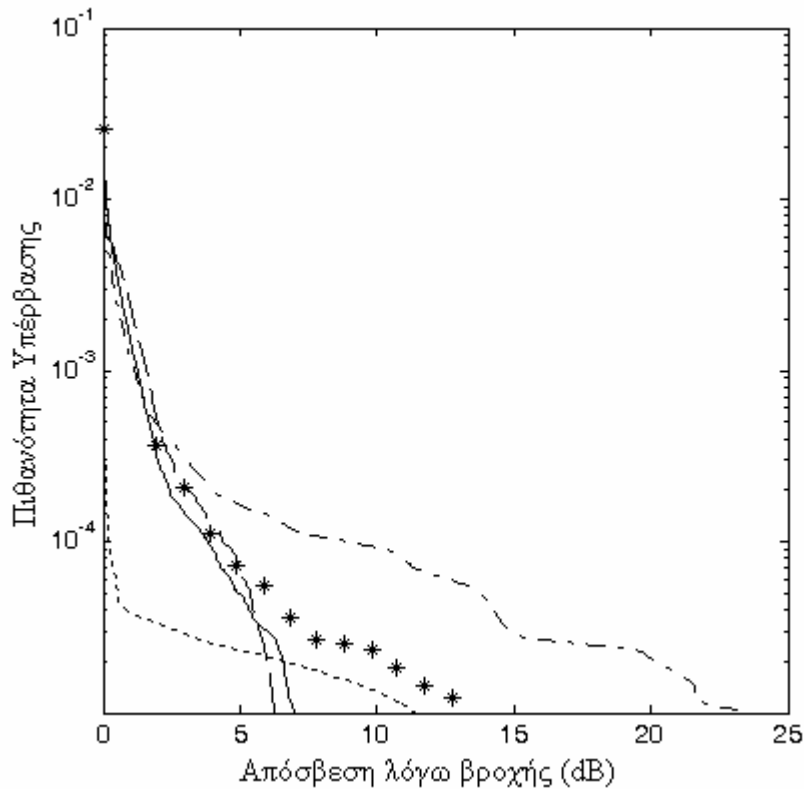


Σχήμα 3.8: Πιθανότητα Υπέρβασης για την απόσβεση σε ετήσια βάση

- για -15% στο σφάλμα μέτρησης του ρυθμού βροχόπτωσης
- .-.-.-.- για +15% στο σφάλμα μέτρησης του ρυθμού βροχόπτωσης
- Ετήσια Πιθανότητα Υπέρβασης για 2000-2001(14.25m/sec)

Τέλος στο Σχήμα 3.9, παρουσιάζεται η Πιθανότητα Υπέρβασης της απόσβεσης σε εποχική βάση (seasonal exceedance probability). Μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι όπως και στο αντίστοιχο Σχήμα 3.6 για την εποχική Πιθανότητα Υπέρβασης του ρυθμού βροχόπτωσης παρουσιάζουμε και εδώ, 2 συναρτήσεις για την άνοιξη: μια που συμπεριλαμβάνει το έντονο γεγονός της 21/5/2002 και μια που το εξαιρεί. Γενικά, όπως ήταν αναμενόμενο, η στατιστική συμπεριφορά της απόσβεσης λόγω βροχής ποικίλει από εποχή σε εποχή. Επιπλέον, σε μια δεύτερη, πιο προσεκτική ανάγνωση του ίδιου σχήματος, προκύπτει ότι πολύ έντονα γεγονότα ρυθμού βροχόπτωσης, με μεγάλη

περίοδο επανεμφάνισης, μπορούν να οδηγήσουν σε μια σημαντική υπερεκτίμηση της πιθανότητας υπέρβασης



Σχήμα 3.9: Εποχικά στατιστικά για την απόσβεση

- Καλοκαίρι
- Φθινόπωρο
- · - · - Άνοιξη
- * * * * * Άνοιξη χωρίς το έντονο γεγονός της 21/5/2002
- Χειμώνας

3.9 Στατιστικά Χαρακτηριστικά 2^{ης} τάξης των Προσομοιούμενων Χρονοσειρών Απόσβεσης

Όταν αναφερόμαστε στα στατιστικά χαρακτηριστικά 2^{ης} τάξης μιας τυχαίας διαδικασίας, εννοούμε την συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης και τη συνάρτηση Πυκνότητας Φάσματος οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους διαμέσου του Μ/Σ Fourier. Στην

παράγραφο αυτή, θα εστιάσουμε στον υπολογισμό της συνάρτησης Πυκνότητας Φάσματος.

Στη διάθεσή μας έχουμε ένα πλήθος προσομοιούμενων χρονοσειρών απόσβεσης εξαιτίας κάθε γεγονότος βροχής. Για κάθε γεγονός υπολογίζουμε ξεχωριστά τη συνάρτηση Πυκνότητας Φάσματος με τη βοήθεια του Περιοδογράμματος, δηλαδή της κατάλληλης εκτιμήτριας συνάρτησης που έχει προταθεί από τον Α. Παππούλη στο βιβλίο [Papoulis, 1981].

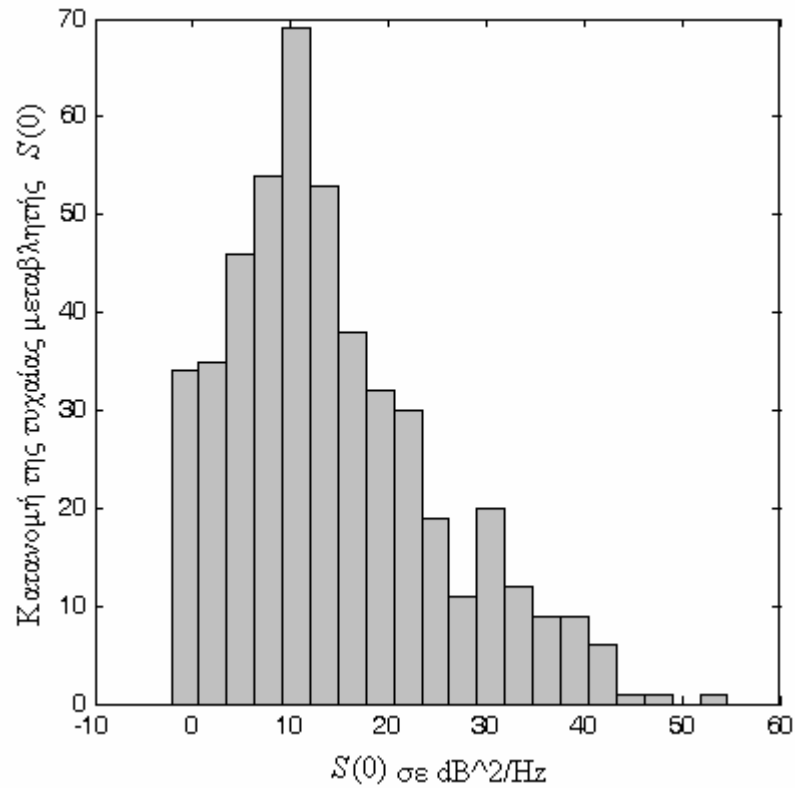
$$S(f) = \int_{-T}^T x(t)\bar{x}(t)e^{-i2\pi f \cdot t} dt \quad (3.27)$$

όπου $2T$ η χρονική διάρκεια του δείγματος. Η αναγωγή του ολοκληρώματος σε άθροισμα, για την εφαρμογή της εκτιμήτριας (3.27) στις χρονοσειρές μιας διακριτής διαδικασίας είναι απλή. Ο γεωμετρικός μέσος των φασμάτων όλων των δειγμάτων θα ισούται με το συνολικό φάσμα,

$$S_{act}(f) = 10^{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^M \log[S_i(f)]} \quad (3.28)$$

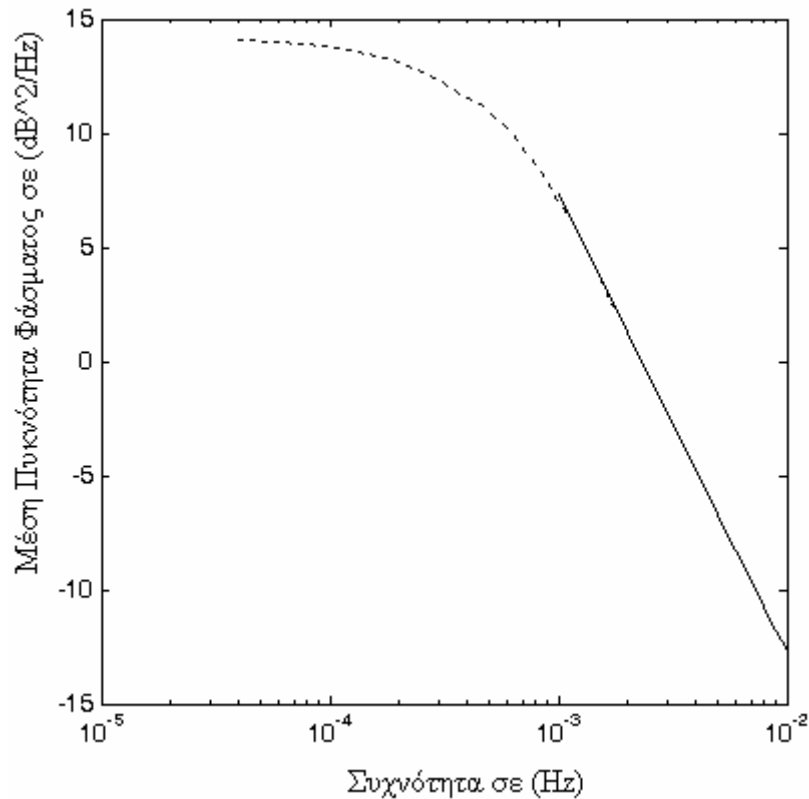
όπου M το πλήθος των δειγμάτων. Αυτό που χρήζει προσοχής είναι ότι οι τυχαίες διαδικασίες όπως η απόσβεση λόγω βροχής, μπορεί μεν να είναι κατά προσέγγιση στάσιμες (*stationary*), αλλά την ίδια στιγμή είναι ισχυρά μη-εργοδικές (*non-ergodic*) δηλαδή, τα γεγονότα φέρουν σημαντικές στατιστικές διαφορές οι οποίες αντανακλώνται έντονα στα στατιστικά χαρακτηριστικά 2^{ης} τάξης. Κατά συνέπεια το $S_{act}(f)$ που υπολογίζουμε είναι αντιπροσωπευτικό της πραγματικής διαδικασίας με την έννοια όμως της προσέγγιση μέσης τιμής (*mean value approximation*).

Οι παρατηρήσεις της προηγούμενης παραγράφου αποτυπώνονται στα σχήματα που ακολουθούν. Αρχικά, στο Σχήμα 3.10, ένα ιστόγραμμα αποτυπώνει την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $S(0)$ για όλα τα γεγονότα απόσβεσης. Άξια παρατήρησης είναι η μεγάλη διασπορά της εν λόγω τυχαίας μεταβλητής η οποία επιβεβαιώνει την μη-εργοδικότητα της απόσβεσης ως τυχαίας διαδικασίας



Σχήμα 3.10: Κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $S(0)$ για όλα τα γεγονότα απόσβεσης

Το μέσο Φάσμα ως συνάρτηση της συχνότητας για όλα τα γεγονότα απόσβεσης αποτυπώνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Είναι άξια παρατήρησης εδώ η κλίση των -20dB για μεγάλες συχνότητες [Burgueno *et. al.*, 1990].



Σχήμα 3.11: Φασματική Πυκνότητα

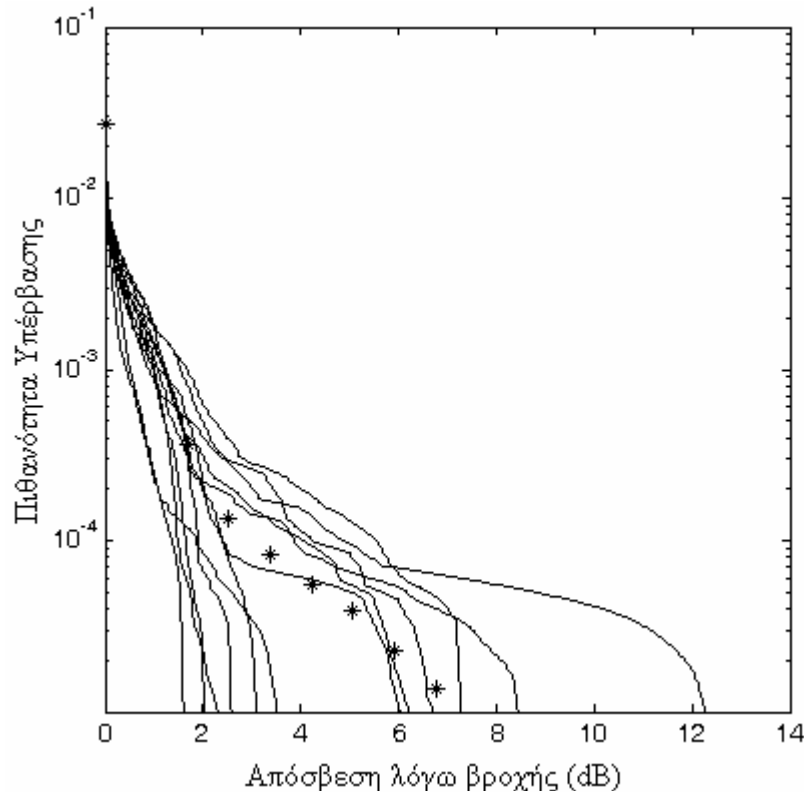
Κλείνοντας αυτή την παράγραφο, είναι καλό να αναφέρουμε ότι στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε μόνο για τα στατιστικά χαρακτηριστικά 2^{15} τάξης των προσομοιούμενων χρονοσειρών απόσβεσης και όχι για άλλες στατιστικές συνιστώσες όπως η Διάρκεια Διαλείψεων τότε, δε χρειάζεται να εφαρμόσουμε την Τεχνική της Συνθετικής Καταιγίδας. Υπολογίζουμε τη Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας για τις χρονοσειρές του ρυθμού βροχόπτωσης με τη μεθοδολογία που μόλις περιγράψαμε και στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε το φάσμα με το τετράγωνο της συνάρτησης μεταφοράς της Τεχνικής Συνθετικής Καταιγίδας (βλ. Εξ. 3.8). Πρόκειται για μια κλασσική εφαρμογή της Θεωρίας των Γραμμικών Συστημάτων.

3.10 Ημερήσια Στατιστικά Χαρακτηριστικά (Diurnal Statistics) των Προσομοιούμενων Χρονοσειρών Απόσβεσης

Τα ημερήσια στατιστικά χαρακτηριστικά της απόσβεσης (*diurnal statistics*) αναφέρονται στην Πιθανότητα Υπέρβασης ενός κατωφλίου κατά τη διάρκεια συγκεκριμένων χρονικών διαστημάτων της ημέρας, τα οποία έχουν συνήθως διάρκεια

τουλάχιστον μιας ώρας [Matricciani, 1998, 2004]. Για παράδειγμα στην παρούσα μελέτη, χωρίζουμε την ημέρα σε 12 γειτονικά διαστήματα 2 ωρών, ξεκινώντας από το 00:00-02:00 και συνεχίζοντας ανάλογα. Το συνολικό δείγμα της απόσβεσης που λαμβάνει χώρα κατά τη διάρκεια κάθε τέτοιου δώρου, συλλέγεται υποχρεωτικά σε ετήσια βάση. Εάν για κάθε ημέρα, εκφυλίσουμε τον συνολικό αριθμό αυτών των διαστημάτων σε μόλις 1 24ωρης διάρκειας, τότε τα ημερήσια στατιστικά ανάγονται στη γνωστή Πιθανότητα Υπέρβασης σε ετήσια βάση αναφοράς.

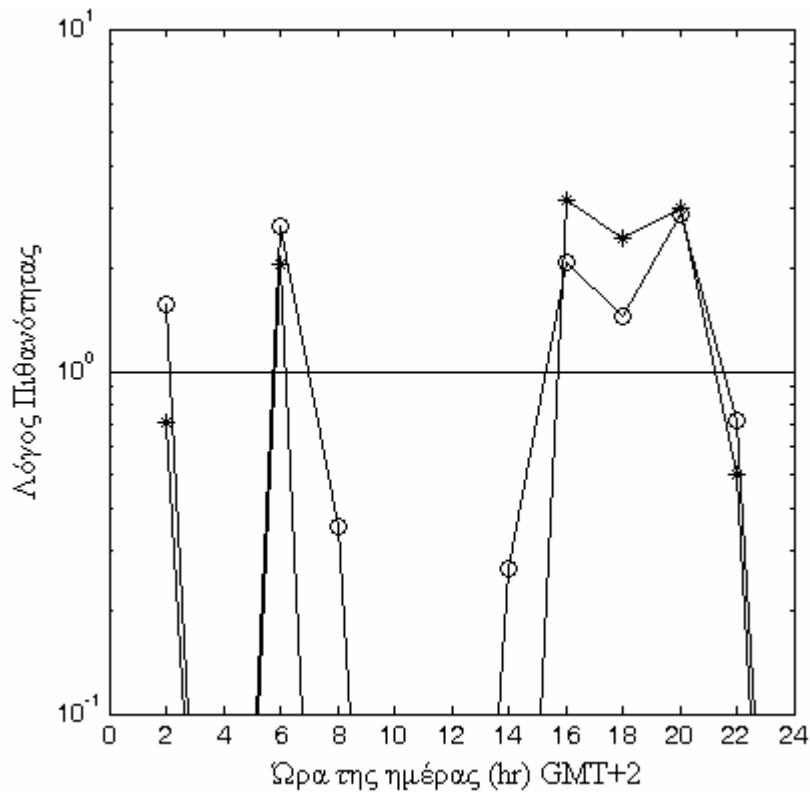
Στο Σχήμα που ακολουθεί (Σχ. 3.12) σχεδιάζονται 13 Συνάρτησης Πιθανότητας Υπέρβασης. Οι 12, σχεδιασμένες με συνεχή γραμμή, αφορούν στα 12 γειτονικά διαστήματα στα οποία χωρίσαμε το 24ωρο, ενώ η 13^η, αυτή που αποτυπώνεται με αστερίσκους, αντανακλά την ετήσια ή ισοδύναμα, την 24ωρη Πιθανότητα Υπέρβασης. Η δυσμενέστερη χρονική περίοδος κατά τη διάρκεια της ημέρας για τη ζεύξη που μελετάμε, εμφανίζεται να είναι το δώρο 14:00-16:00 –τοπική ώρα.



Σχήμα 3.12: Ημερήσια στατιστικά στην περίπτωση διαμέρισης του 24ώρου σε 12 δώρα.

- * * * * *
 -
- 24-h Πιθανότητα Υπέρβασης
2-h Πιθανότητα Υπέρβασης

Αν και είναι σαφές τι παριστάνει το προηγούμενο σχήμα, είναι ωστόσο δυσανάγνωστο, ιδιαίτερα δε, εάν επιλέξουμε να επανασχεδιάσουμε το σχήμα για μια λεπτότερη διαμέριση του 24ώρου. Εξαιτίας αυτού, εισάγουμε τον όρο ‘λόγος πιθανότητας’ (*probability ratio*) που ορίζεται ως εξής: ο λόγος της Πιθανότητας Υπέρβασης ενός κατώφλιu απόσβεσης κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος της ημέρας, προς την αντίστοιχη Πιθανότητα Υπέρβασης του ίδιου κατώφλιu σε ετήσια, ή ισοδύναμα 24ωρη βάση. Για τη μελέτη μας, το ανάλογο σχήμα ακολουθεί



Σχήμα 3.13: Λόγος Πιθανότητας

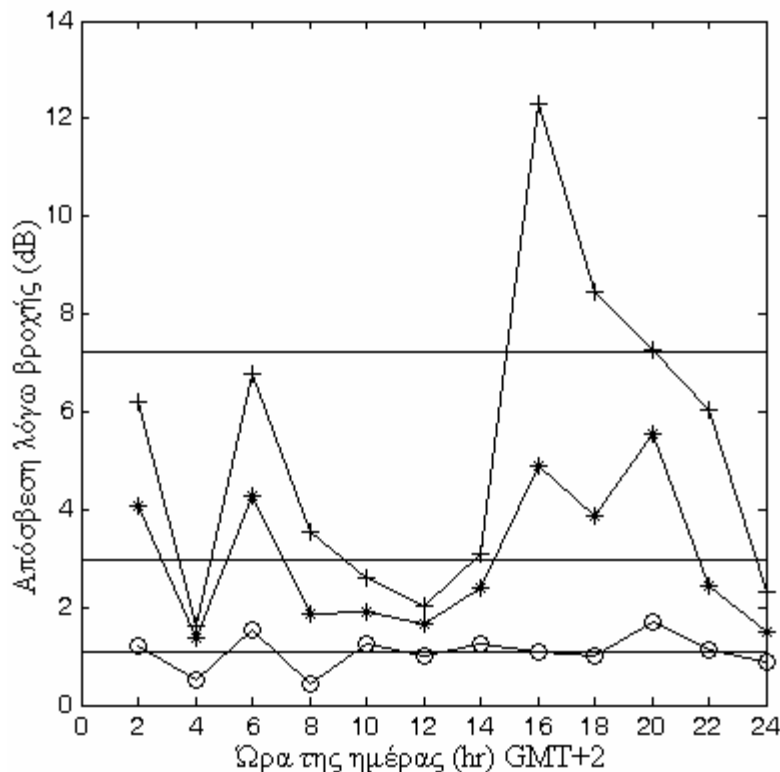
○-○-○-○-○ κατώφλι απόσβεσης 3 dB

--*-*-*-* κατώφλι απόσβεσης 6 dB

Σημειώνεται ότι στο προηγούμενο σχήμα έχουμε εξετάσει δυο περιπτώσεις για το κατώφλι απόσβεσης του λόγου πιθανότητας, συγκεκριμένα τα 3 και 6 dB. Επίσης, για τη σωστή ανάγνωση του σχήματος, δίνουμε τον παρανομαστή του λόγου πιθανότητας και

για τα δυο κατώφλια, δηλαδή την Πιθανότητα Υπέρβασης σε ετήσια βάση: στα 3 dB είναι 9.85×10^{-5} και στα 6 dB 2.16×10^{-5} .

Προς την ίδια κατεύθυνση –της καλύτερης αναπαράστασης των ημερήσιων στατιστικών– κινείται και η σκοπιμότητα του επόμενου σχήματος. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε το κατώφλι απόσβεσης που αντιστοιχεί τρεις περιπτώσεις Πιθανότητας Υπέρβασης, τις 10^{-3} , 10^{-4} και 10^{-5} , σε συνάρτηση με τα διαφορετικά χρονικά διαστήματα που χωρίζουν το 24ωρο. Οι τρεις οριζόντιες γραμμές αντιστοιχούν στο κατώφλι απόσβεσης για κάθε μια από τις τρεις προαναφερθείσες Πιθανότητες Υπέρβασης, στη βάση όμως μιας ημερήσιας παρατήρησης.



Σχήμα 3.14: Κατώφλι απόσβεσης λόγω βροχής για τις Πιθανότητες Υπέρβασης που ακολουθούν, σε συνάρτηση των διαστημάτων που διαμερίζουν το 24ωρο.

- 10^{-3} , 24-h κατώφλι απόσβεσης 1.11 dB
- *-*-*-*-* 10^{-4} , 24-h κατώφλι απόσβεσης 2.97 dB
- +*+*+*+ 10^{-5} , 24-h κατώφλι απόσβεσης 7.21 dB

Η χρησιμότητα του τελευταίου σχήματος είναι σημαντική. Με μια γρήγορη ματιά, μπορεί ο μηχανικός να διαπιστώσει τις ώρες ‘υψηλού κινδύνου’ για τη ζεύξη, δηλαδή τις

ώρες τις ημέρας κατά τη διάρκεια των οποίων είναι πιο πιθανό να επιδεινωθεί η Ποιότητα της ζεύξης. Για παράδειγμα, επιβεβαιώνεται ότι το δίωρο 14:00-16:00 παρουσιάζει μεγάλη επικινδυνότητα για Πιθανότητα Υπέρβασης 10^{-5} .

Συμπερασματικά, τα ημερήσια στατιστικά ενδεχομένως να μην είναι σε μεγάλο βαθμό αξιόπιστα σε ακρίβεια αριθμητικής σύγκλισης δεδομένης της μεγάλης τυχαιότητας του φαινομένου ωστόσο, προσφέρουν πολύτιμη πληροφορία δεδομένου ότι χαρακτηρίζουν ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα της ημέρας σε σχέση με την επικινδυνότητα που αυτό επιφυλάσσει για την ποιότητα της ζεύξης, εξαιτίας της βροχόπτωσης, συντελεσμένης εντός των χρονικών ορίων του.

Κεφάλαιο 4

Τροποποιημένη Διαδικασία Σύνθεσης 1^{ης} Τάξης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων

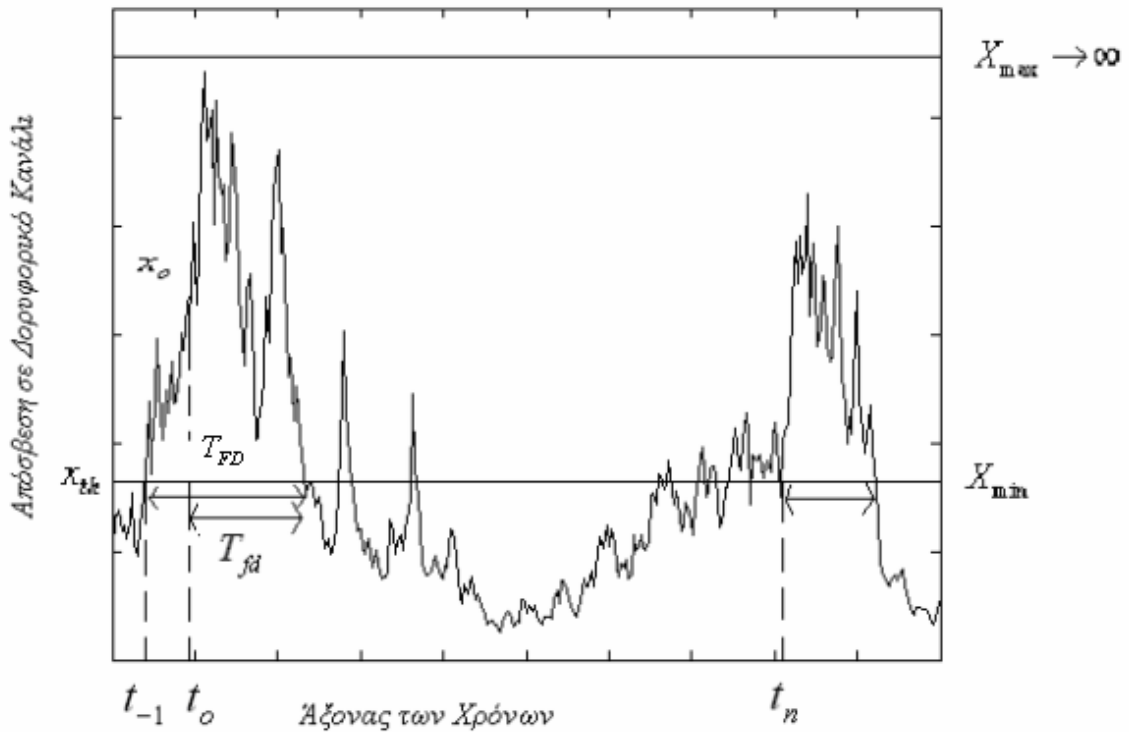
4.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναδείξουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τις Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις 1^{ης} τάξης για να προσομοιώσει Τυχαίες Διαδικασίες οι οποίες είναι τόσο στάσιμες (stationary) όσο και βασικής ζώνης (baseband). Μια συνεχής και στάσιμη πραγματική Τυχαία Διαδικασία καλείται βασικής ζώνης όταν η Συνάρτηση Πυκνότητας Φάσματος που την περιγράφει, λαμβάνει μη μηδενικές τιμές μόνο στην περιοχή βασικής ζώνης του πεδίου της συχνότητας δηλαδή περί τη συχνότητα μηδέν.

Στη σχετική βιβλιογραφία [Kontorovich *et. al.*, 1995], [Primak *et.al.*, 1998], [Primak, 2000], [Primak *et. al.*, 2001] και [Primak *et. al.*, 2004] βρίσκει κανείς τον εξής ορισμό: μια 1^{ης} τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση θεωρείται αντιπροσωπευτική μιας συνεχούς, στάσιμης Τυχαίας Διαδικασίας βασικής ζώνης όταν η πρώτη αναπαράγει ικανοποιητικά τα στατιστικά χαρακτηριστικά 1^{ης} και 2^{ης} τάξης της δεύτερης δηλαδή, τη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας και τη Συνάρτηση Πυκνότητας Φάσματος –ή τη Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης. Ωστόσο εν γένει, ο ορισμός αυτός δεν εξασφαλίζει ότι η 1^{ης} τάξης Στοχαστική Διαφορική προσομοιώνει εξ' ολοκλήρου το μηχανισμό γέννησης της πραγματικής Τυχαίας Διαδικασίας. Για το λόγο αυτό θεωρούμε ότι ο προαναφερθείς ορισμός πρέπει να εμπλουτιστεί με νέες συνθήκες. Η μορφή των νέων συνθηκών προκύπτει από τους σκοπούς της προσομοίωσης.

Για παράδειγμα στις Τηλεπικοινωνίες, συγκεκριμένα στη σχεδίαση και στη μοντελοποίηση Ραδιοσυχνοτικών καναλιών (Radio Frequency Channels) που λειτουργούν σε συχνότητες άνω των 10GHz και κατά μεγάλο ποσοστό δεν επηρεάζονται από πολλαπλή διάδοση (multi-path propagation) –ενδεικτική περίπτωση είναι τα δορυφορικά κανάλια–, μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η προσομοίωση της απόσβεσης που επιβαρύνει την διαθεσιμότητα αλλά και την ποιότητα της ζεύξης. Η εν λόγω απόσβεση προκύπτει εξαιτίας των ατμοσφαιρικών κατακρημνίσεων με κυρίαρχη τη βροχή. Ο σκοπός της προσομοίωσης είναι να βοηθήσει στην αποτελεσματική λειτουργία των

Τεχνικών Αμβλυνσης Διαλείψεων όπως αυτές αναφέρθηκαν στο 1^ο Κεφάλαιο της διατριβής. Είναι άξιο να αναφερθεί πάλι ότι για την αποτελεσματική λειτουργία των προαναφερθέντων τεχνικών, αναγκαίο είναι να δύναται να προβλεφθούν με σχετική ακρίβεια τα στατιστικά χαρακτηριστικά της Τυχαίας Διαδικασίας του Χρόνου Διακοπής (Hitting Time). Ο Χρόνος Διακοπής όπως φαίνεται από τον περιγραφικό ορισμό που ακολουθεί, μοιάζει με τη γνωστή Τυχαία Μεταβλητή της Διάρκειας Διάλειψης. Με αναφορά στο σχήμα 4.1 που ακολουθεί, στο οποίο απεικονίζεται ένα στιγμιότυπο ενός τυπικού γεγονότος διάλειψης σε μια ζεύξη, ο Χρόνος Διακοπής T_{fd} ορίζεται ως το συνεχές χρονικό διάστημα κατά το οποίο η Τυχαία Διαδικασία, συγκεκριμένα η απόσβεση, παραμένει επάνω από ένα κατώφλι x_{th} , δεδομένου ότι την αρχική στιγμή t_0 η τιμή της ήταν $x_0 > x_{th}$. Μπορεί να φανεί επίσης η διαφορά του Χρόνου Διακοπής από την περισσότερο γνωστή Τυχαία Μεταβλητή της διάρκειας διάλειψης [Rice, 1958], κάνοντας την αντιπαράθεση των T_{fd} και T_{FD} .



Σχήμα 4.1: Ένα υποθετικό αλλά αντιπροσωπευτικό γεγονός διάλειψης σε μια δορυφορική ζεύξη. Περιγραφικός ορισμός του T_{fd}

Στην περίπτωση που τη χρονική στιγμή $t_o + T_{fd}$ η Τυχαία Διαδικασία διασχίζει το x_{th} προς τα επάνω, τότε ο Χρόνος Διακοπής ονομάζεται T_{ifd} και ο ορισμός του τροποποιείται κατάλληλα εν σχέση με αυτόν του T_{fd} .

Γίνεται κατανοητό ότι υπό το πρίσμα του σχεδιασμού και της λειτουργίας των Τεχνικών Άμβλυσης Διαλείψεων, μια 1^{ης} τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση θα προσομοιώνει καλύτερα μια στάσιμη, Τυχαία Διαδικασία Βασικής Ζώνης όπως η απόσβεση λόγω βροχής, εάν μαζί με τα στατιστικά χαρακτηριστικά 1^{ης} και 2^{ης} τάξης της Τυχαίας Διαδικασίας, αναπαράγει και τα στατιστικά χαρακτηριστικά των Χρόνων Διακοπής της τελευταίας. Ο νέος βελτιωμένος ορισμός σε αντιπαράθεση με τον προηγούμενο, οδηγεί στη Σύνθεση 1^{ης} τάξης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων οι οποίες εν γένει αντανakλούν καλύτερα το μηχανισμό γέννησης της Τυχαίας Διαδικασίας που προσομοιώνουν. Καθίσταται συνεπώς ένα μαθηματικό εργαλείο προσομοίωσης ακόμα πιο αξιόπιστο, με εφαρμογές και σε άλλες επιστημονικές περιοχές όπως Επεξεργασίας Σήματος, Αυτομάτου Ελέγχου κ.λ.π.

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται πρώτα μια σύντομη παρουσίαση των Στοχαστικών Διαφορικών 1^{ης} τάξεως. Στη συνέχεια ακολουθεί η περιγραφή μεθοδολογιών για τον αναλυτικό ή ημι-αναλυτικό υπολογισμό αφενός των χαρακτηριστικών 2^{ης} τάξης και αφετέρου της Συνάρτησης Κατανομής Πιθανότητας των Χρόνων Διακοπής, για την περίπτωση μιας 1^{ης} τάξης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης. Είναι αξιοσημείωτο ότι ο υπολογισμός των χαρακτηριστικών 2^{ης} τάξης μιας 1^{ης} τάξης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης είναι ένα πρόβλημα που αρκετές φορές φέρνει σε αμηχανία τους Μηχανικούς Επεξεργασίας Σήματος και αυτό είναι φανερό στη βιβλιογραφία [Primak *et. al.* 1998], [Stratonovich, 1963]. Εδώ παρουσιάζουμε δυο μεθόδους για τον υπολογισμό τους. Η πρώτη, παρουσιάζεται για πρώτη φορά με συστηματικότητα και λεπτομέρεια και αυτό κατά πάσα πιθανότητα, πρόκειται να είναι εξαιρετικά χρήσιμο στις εφαρμογές. Η δεύτερη είναι εντελώς πρωτότυπη, είναι ημι-αναλυτική και αφορά μόνο την Συνάρτηση Πυκνότητας Φάσματος ωστόσο, διευκολύνει εξαιρετικά στην ταχύτητα των υπολογισμών. Από την άλλη, εισάγουμε ένα πιο αυστηρό ορισμό των Χρόνων Διακοπής σε σχέση με τον περιγραφικό που αναφέραμε νωρίτερα. Επιπλέον, δείχνουμε έναν αναλυτικό τρόπο εύρεσης της Συνάρτησης Κατανομής Πιθανότητας των Χρόνων

Διακοπής για την περίπτωση μιας 1^{ης} τάξης Στοχαστικής Διαφορικής και τέλος, αναδεικνύουμε τη χρησιμότητά τους στη νέα τροποποιημένη διαδικασία Σύνθεσης.

Ακολουθούν διάφορες ενότητες που αναφέρονται στον αυστηρό ορισμό των διαδικασιών Markov, στις 1^{ης} τάξεως Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις και στο στοχαστικό ολοκλήρωμα.

4.2 Διαδικασίες Markov

Ας θεωρήσουμε μια τυχαία διαδικασία $x(t)$ για την οποία ορίζεται η υπό συνθήκη Πυκνότητα Πιθανότητας (Conditional Probability Density Function) ως εξής

$$w[x(t_1) | x(t_2), \dots, x(t_n)] = \frac{w_n[x(t_1), \dots, x(t_n)]}{w_{n-1}[x(t_2), \dots, x(t_n)]} \quad (4.1)$$

όπου $t_i \quad i=1,2,\dots,n$ διατεταγμένες χρονικές στιγμές $t_1 > t_2 > \dots > t_n$. Η διαδικασία $x(t)$ έχει την ιδιότητα Markov στην περίπτωση όπου η w εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την τελευταία τιμή $x(t_2)$ και όχι από τις προηγούμενες $x(t_3), \dots, x(t_n)$. Τότε μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη σχέση για ένα ζεύγος τυχαίων μεταβλητών της τυχαίας διαδικασίας $x(t)$ τις διαδοχικές χρονικές στιγμές $t_1 > t_2$

$$w[x_1 | x_2] = p_{t_1 t_2}(x_1, x_2) \quad (4.2)$$

όπου $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$ και με την $p_{t_1 t_2}$ να ονομάζεται Μεταβατική Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (Transition Probability Density Function): η τελευταία συνάρτηση αποδίδει μέτρο πιθανότητας στις τιμές της τυχαίας μεταβλητής $x(t_1)$ και συνεπώς περιγράφει πιθανοθεωρητικά την εξέλιξη της τυχαίας διαδικασίας $x(t)$ την τυχαία χρονική στιγμή t_1 , γνωρίζοντας εκ των προτέρων ότι την πρότερη στιγμή t_2 , η $x(t)$ κατείχε τιμή $x(t_2)$. Είναι φανερό ότι στην περίπτωση μιας τυχαίας διαδικασίας που κατέχει την Markovιανή ιδιότητα μπορούμε εύκολα να μελετήσουμε την πολυδιάστατη κατανομή της που περιγράφει τις τυχαίες μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n σε σχέση με τη γενική περίπτωση διότι τώρα ισχύει

$$w(x_1, \dots, x_n) = w(x_1 | x_2, \dots, x_n) w(x_2 | x_3, \dots, x_n) \dots w(x_{n-1} | x_n) w(x_n) \quad (4.3)$$

Εάν λάβουμε υπόψη μας την ιδιότητα Markov καθώς και τη σχέση (4.2) τότε βλέπουμε ότι η πολυδιάστατη κατανομή παραγοντοποιείται σε γινόμενα με όρους τις Μεταβατικές Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας ως εξής [Stratonovich, 1963]

$$w(x_1, \dots, x_n) = p_{t_1 t_2}(x_1, x_2) \cdot p_{t_2 t_3}(x_2, x_3) \dots p_{t_{n-1} t_n}(x_{n-1}, x_n) \cdot w(x_n) \quad (4.4)$$

Γίνεται κατανοητό ότι η ιδιότητα Markov προκύπτει αφαιρετικά από τη λογική πρόταση ότι “μια τυχαία διαδικασία που εξελίσσεται για παράδειγμα στο χρόνο, σε κάθε στιγμή, η τιμή της συσχετίζεται σε κάποιο βαθμό με το παρελθόν της”. Εάν υποθέσουμε ότι η συσχέτιση αυτή είναι έντονη κυρίως με τις πρόσφατες τιμές της διαδικασίας, πράγμα το οποίο από την εμπειρία μας φαίνεται λογικό να συμβαίνει, τότε ιδανικά όλη η πληροφορία θα μπορούσε να είναι συγκεντρωμένη στην πιο πρόσφατη τιμή. Βέβαια στη φύση, διαδικασίες Markov με την αυστηρή έννοια του όρου δεν συναντώνται. Ωστόσο, υπό ορισμένες συνθήκες, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μπορούν να “προσεγγιστούν” ικανοποιητικά από τις εξιδανικευμένες οντότητες που αντιστοιχούν σε Markovιανές Διαδικασίες.

Στην ιδανική περίπτωση όπου η συνεχής διαδικασία που μελετάμε έχει παράλληλα δυο σημαντικές ιδιότητες, δηλαδή είναι και Markovιανή αλλά και στάσιμη (stationary) τότε ονομάζεται διαδικασία διάχυσης (diffusion process) και οι ιδιότητές της περιγράφονται είτε από την εξίσωση Fokker-Planck (Fokker-Planck Equation FPE) είτε από μια αντίστοιχη Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση πρώτης τάξης (first order Stochastic Differential Equation - SDE). Όλα αυτά παρουσιάζονται στην επόμενη παράγραφο.

4.3 Πρώτης τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση

Μια *συνεχής, στάσιμη* τυχαία διαδικασία Markov $x(t)$, ονομάζεται διαδικασία *διάχυσης* και περιγράφεται από μια 1^{ης} τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση της μορφής [Stratonovich, 1963]

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t) \quad (4.5)$$

όπου $\dot{x} = \frac{d}{dt}x(t)$ η χρονική παράγωγος που δρα επί της διαδικασίας, $\xi(t)$ ο λευκός

θόρυβος μοναδιαίου πλάτους και $W(t)$ η διαδικασία Wiener [Papoulis, 1991]

$$dW(t) = \xi(t)dt \quad (4.6)$$

Η πιθανοθεωρητική εξέλιξη της τυχαίας διαδικασίας $x(t)$ περιγράφεται από την εξίσωση Fokker-Planck (FP) [Stratonovich, 1963]

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x)p(t, x)] - \frac{\partial}{\partial x} [K_1(x)p(t, x)] \quad (4.7a)$$

ή

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \quad (4.7b)$$

όπου

$$Z(t, x) = [K_1(x)p(t, x)] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [K_2(x)p(t, x)] \quad (4.7c)$$

$$Z(t, x_{\min}) = Z(t, x_{\max}) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (4.7d)$$

$$p(0, x) = p_o(x) \quad (4.7e)$$

Η $p(t, x)$ είναι η *χρονικά εξηρητημένη* (time dependent) Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (Probability Density Function) η οποία αποδίδει μέτρα πιθανότητας στην τυχαία μεταβλητή $x(t)$ –ας θυμηθούμε ότι για κάθε χρονική στιγμή η τυχαία διαδικασία είναι μια τυχαία μεταβλητή. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε περαιτέρω ότι $(x_{\min}, x_{\max}) = (0, \infty)$. Οι συναρτήσεις $K_1(x), K_2(x)$ ονομάζονται *συντελεστές κατεύθυνσης* και *διάχυσης* αντίστοιχα (*drift and diffusion coefficients*) και ορίζονται από τα πιο κάτω όρια [Stratonovich, 1963]

$$K_1(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{E[(x_\tau - x) | x]}{\tau} \quad (4.8a)$$

$$K_2(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{E[(x_\tau - x)^2 | x]}{\tau} \quad (4.8b)$$

Η δεσμευμένη μέση τιμή $E[]$ δρα στην τυχαία μεταβλητή η οποία ορίζεται από το

κλάσμα $\frac{(x_\tau - x)^{1,2}}{\tau}$ όπου x η τυχαία διαδικασία που μελετάμε. Ο δείκτης τ αναφέρεται σε

μια χρονική μετατόπιση της τυχαίας διαδικασίας ώστε η x_τ να έπεται της x κατά τ . Ας παρατηρήσουμε τα εξής: (i) θεωρούμε ότι οι συντελεστές είναι *ανεξάρτητοι* του χρόνου και για το λόγο αυτό η διαδικασία Markov στην οποία αναφέρονται είναι *στάσιμη* (*stationary*). Στη γενική θεωρία Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων 1^{ης} τάξης-

Μαρκοβιανών Τυχαίων Διαδικασιών, οι συντελεστές αυτοί είναι χρονοεξηγημένοι και τότε η διαδικασία δεν είναι στάσιμη (*non-stationary*). Επίσης η εξίσωση FP αποκτά πιο πολύπλοκη μορφή. (ii) Τα όρια στις εξ. (4.8) συγκλίνουν υποχρεωτικά μόνο για Μαρκοβιανές, στάσιμες διαδικασίες. Αντίθετα στη γενική περίπτωση πραγματικών, μη Μαρκοβιανών συνεπώς διαδικασιών τα όρια αυτά, ειδικά το πρώτο ενδέχεται να μη συγκλίνουν. Τέλος οι συντελεστές $K_1(x), K_2(x)$ συνδέονται με τις συναρτήσεις f, g της Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης στην Εξ. (4.5) ανάλογα με τον ορισμό του Στοχαστικού Ολοκληρώματος που περιγράφεται σε επόμενη παράγραφο. Εκ προοιμίου αναφέρουμε ότι στην περίπτωση του ορισμού κατά Ito [Ito, 1944]

$$K_1(x) = f(x) \quad (4.10a)$$

$$K_2(x) = g^2(x) \quad (4.10b)$$

ενώ στον ορισμό κατά Stratonovich [Spiliotis, 2004]

$$K_1(x) = f(x) + \frac{1}{2} g(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x) \quad (4.10c)$$

$$K_2(x) = g^2(x) \quad (4.10d)$$

4.4 Επίλυση της Εξίσωσης Fokker-Planck

Θα θεωρήσουμε την περίπτωση όπου

$$p(0, x) = \delta(x - x_0) \quad (4.11)$$

δηλαδή, η διαδικασία διάχυσης $x(t)$ που μελετάμε ξεκινά τη στιγμή $t=0$ από την τιμή x_0 . Η χρονικά εξηγημένη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $p(t, x)$ ονομάζεται τότε Μεταβατική Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (Transition Probability Density Function) για προφανείς λόγους και συμβολίζεται με $p_T(x, x_0, t)$, όπου t είναι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται η $x(t)$ για να βρεθεί από το x_0 στο x . Στη συνάρτηση p_T συνήθως η x_0 συνιστά παράμετρο, ενώ οι x και t ανεξάρτητες μεταβλητές. Είναι πιο χρήσιμο να υπολογίζουμε αυτή τη συνάρτηση που είναι λύση μιας ειδικής περίπτωσης της εξίσωσης FP για δυο λόγους. Αφενός, από αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τα στατιστικά χαρακτηριστικά 2^{ης} τάξης της διαδικασίας διάχυσης, δηλαδή την Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης (Autocorrelation Function) και την Φασματική Πυκνότητα

(Spectral Density Function) . Αφετέρου, η $p_T(x, x_o, t)$ είναι το σκαλοπάτι προς τη λύση της FP για τη γενική περίπτωση όπου η $p_o(x)$ είναι μια συνάρτηση που ανήκει στον $L_1[0, \infty]$.

Για τη λύση της Εξίσωσης FP (4.7), (4.11), εφαρμόζουμε τον *χρονικά εξηρημένο Μετασχηματισμό (M/Σ) Laplace* [Carrier *et. al.* 1966] στην (4.7a) και έχουμε τις ισότητες

$$\int_0^{\infty} p(t, x) e^{-st} dt = p(s, x), \operatorname{Re}\{s\} \geq 0 \quad (4.12a)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} e^{-st} dt = s \cdot p(s, x) - p_o(x) \quad (4.12b)$$

ενώ εάν λάβουμε υπόψη μας την (4.11) τελικά η Εξίσωση FP μετασχηματίζεται στο ακόλουθο πρόβλημα

$$-\delta(x - x_o) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x) p(s, x)] - \frac{\partial}{\partial x} [K_1(x) p(s, x)] - s p(s, x) \quad (4.13a)$$

$$Z(s, 0) = Z(s, \infty) = 0 \quad (4.13b)$$

όπου είναι φανερό πως πλέον αναζητούμε τη Συνάρτηση Green ενός προβλήματος συνοριακών τιμών (boundary value problem). Ξεκινάμε με τον υπολογισμό δυο γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων $p_1(x), p_2(x)$ για την ομογενή εξίσωση της (4.13a). Στο βιβλίο [Polyanin *et. al.*, 1995] περιέχονται τέτοιες λύσεις για ένα μεγάλο αριθμό περιπτώσεων. Στη συνέχεια σχηματίζουμε δυο λύσεις y_r, y_l της μορφής $y = c_1 p_1 + c_2 p_2$ εκ των οποίων η πρώτη ικανοποιεί την οριακή συνθήκη στο ∞ ενώ η δεύτερη στο 0 -βλ. (4.7d)-. Και οι δυο λύσεις ικανοποιούν την αντίστοιχη οριακή συνθήκη για κάθε s του μιγαδικού επιπέδου. Οι συναρτήσεις αυτές $-y_r, y_l$ είναι αναλυτικές σε ολόκληρο το επίπεδο s διότι ικανοποιούν οριακές συνθήκες ανεξάρτητες του s και επιπλέον ικανοποιούν μια συνήθη Διαφορική Εξίσωση δεύτερης τάξης στην οποία το s εμφανίζεται αναλυτικά [Stakgold, 1979]. Η συνάρτηση Green δίνεται τελικά από τον τύπο [Karlin and Taylor, 1981]

$$G(x, x_o, s) = -2 \frac{y_l(x)y_r(x_o)}{W(x_o)K_2(x_o)} \quad 0 \leq x \leq x_o < \infty \quad (4.14)$$

$$G(x, x_o, s) = -2 \frac{y_l(x_o)y_r(x)}{W(x_o)K_2(x_o)} \quad 0 < x_o < x < \infty$$

όπου $W(x_o)$ είναι η Ορίζουσα Wronskian των δυο συναρτήσεων y_l, y_r . Εφαρμόζοντας των Αντίστροφο Μ/Σ Laplace οδηγούμαστε στον υπολογισμό της Μεταβατικής Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας p_T της διαδικασίας διάχυσης που μελετάμε

$$p_T(x, x_o, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} G(x, x_o, s) e^{st} ds \quad (4.15)$$

με το γ να επιλέγεται έτσι ώστε όλοι οι πόλοι (singularities) της συνάρτησης G να είναι αριστερά του κατακόρυφου δρόμου ολοκλήρωσης που εμφανίζεται στην (4.15).

Σε μια διαφορετική προσέγγιση, μπορεί ναδειχθεί [Primak *et. al* 1998] ότι η Μεταβατική Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας γράφεται και ως ανάπτυγμα των ακόλουθων ιδιοσυναρτήσεων

$$p_T(x, x_o, t) = p_{st}(x) + \sum_{n=1}^k \frac{\Phi_n(x_o)\Phi_n(x)}{p_{st}(x_o)} e^{-\lambda_n t} + \int_0^\infty \frac{\Phi(x_o, \lambda)\Phi(x, \lambda)}{p_{st}(x_o)} e^{-(\lambda+\lambda_s)t} \quad (4.16)$$

όπου η $p_{st}(x) \in L_1[0, \infty]$ είναι η Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας Μόνιμης ή Στάσιμης Κατάστασης (Stationary PDF) στην οποία συγκλίνει η p_T για την περίπτωση $t \rightarrow \infty$. Στην περίπτωση που το σύνολο των ιδιοτιμών είναι άπειρο αλλά αριθμήσιμο δηλαδή το $k \rightarrow \infty$ τότε, το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέρος της (4.16) απαλείφεται. Οι ιδιοσυναρτήσεις στο ανάπτυγμα της (4.16) ανήκουν στον τελεστή

$$L \cdot \Phi(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} [K_2(x)\Phi(x)] - \frac{d}{dx} [K_1(x)\Phi(x)] \quad (4.17)$$

όταν αυτός συνοδεύεται από τις γνωστές οριακές συνθήκες (4.7d) που επαναλαμβάνονται εδώ για λόγους πληρότητας

$$B_0 \cdot \Phi(x) = \left[K_1(x)\Phi(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [K_2(x)\Phi(x)] \right]_{x=0} = 0 \quad (4.18a)$$

$$B_0 \cdot \Phi(x) = \left[K_1(x)\Phi(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [K_2(x)\Phi(x)] \right]_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (4.18b)$$

Τότε, τα ζεύγη $\{\lambda_n, \Phi_n(x)\}$ αποτελούν τις ιδιοτιμές-ιδιοσυναρτήσεις του L –διακριτό φάσμα– και οι $\Phi(x, \lambda)$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του συνεχούς φάσματος το οποίο έστω ότι ορίζεται από το διάστημα $\lambda \in [\lambda_s, \infty)$ [όπως θα αποδειχθεί σε λίγο το συνεχές φάσμα, εφόσον υφίσταται, είναι πραγματικό και μάλιστα είναι κλειστό υπό-διάστημα του $(0, \infty)$ με το λ_s να είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Επίσης, θυμίζουμε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις συνεχούς/διακριτού φάσματος ικανοποιούν την $L \cdot \Phi + \lambda \Phi = 0$ και ταυτόχρονα τις οριακές συνθήκες (4.18a-b).] Περαιτέρω, εάν ορίσουμε ένα χώρο *Hilbert* [Stakgold, 1979] με την ονομασία H_p , εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle u, v \rangle_p = \int_0^\infty \frac{u(x) \cdot \bar{v}(x)}{p_{st}(x)} dx \quad (4.19)$$

τότε αποδεικνύεται ότι ο τελεστής L είναι συμμετρικός (*symmetric*) –Παράρτημα Α– δηλαδή ισχύει

$$\langle Lu, v \rangle_p = \langle u, Lv \rangle_p \quad (4.20)$$

με τις u, v να ανήκουν στο πεδίο ορισμού (*Domain*) D_L του τελεστή. Το πεδίο ορισμού ενός διαφορικού τελεστή σαν τον L που συνοδεύεται από οριακές συνθήκες, αποτελείται από την κλάση των συναρτήσεων που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες και ταυτόχρονα επαληθεύουν κάποιες απαιτήσεις ως προς τη λειότητά τους (π.χ. έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο). Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συναρτήσεις που ανήκουν στην κλάση αυτή δεν ανήκουν αναγκαστικά στον χώρο H_p , δηλαδή η νόρμα

$$\|u\|_p = \left[\int_0^\infty \frac{|u(x)|^2}{p_{st}(x)} dx \right]^{1/p} \quad (4.21)$$

δεν συγκλίνει αναγκαστικά. Εξαιτίας της συμμετρικότητας του τελεστή μπορεί να αποδειχθεί [Stakgold, 1979] ότι: (i) τόσο το διακριτό όσο και το συνεχές φάσμα μπορεί να πάρει μόνο πραγματικές τιμές. Επίσης (ii) οι ιδιοτιμές είναι διατεταγμένες ως εξής

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k < \lambda_s \quad (4.22)$$

και δεδομένου ότι $\lambda_0 = 0$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\lambda_n > 0 \quad n = 1, 2, \dots, k$. (iii) Τέλος οι ιδιοσυναρτήσεις ικανοποιούν μια συνθήκη ορθογωνιότητας μεταξύ τους με μια διαφορά ωστόσο: οι ιδιοσυναρτήσεις του διακριτού φάσματος ανήκουν στον H_p και άρα η συνθήκη ορθογωνιότητας “προβάλλεται” ως εξής

$$\int_0^\infty \frac{\Phi_m(x)\Phi_n(x)}{p_{st}(x)} dx = \delta_{mn} \quad (4.23a)$$

ενώ αντίστοιχα οι ιδιοσυναρτήσεις του συνεχούς φάσματος δεν ανήκουν στον H_p και συνεπώς η συνθήκη ορθογωνιότητας γίνεται

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(x, \lambda)\Phi(x, \lambda')}{p_{st}(x)} dx = \delta(\lambda - \lambda') \quad (4.23b)$$

Ας σημειώσουμε ότι η ύπαρξη της ιδιοτιμής $\lambda_0 = 0$ εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι η ομογενής διαφορική εξίσωση

$$L \cdot \Phi(x) = 0 \quad (4.24)$$

έχει δυο λύσεις: την τετριμμένη, δηλαδή τη μηδενική και μια ακόμα της μορφής

$$p_{st}(x) = \frac{C}{K_2(x)} \exp \left\{ 2 \int_{x_1}^x \frac{K_1(y)}{K_2(y)} dy \right\} \quad (4.25)$$

όπου C μια σταθερά που χρησιμεύει για κανονικοποίηση της p_{st} στον $L_1[0, \infty]$. Μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι η p_{st} ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες (4.18a-b) και άρα οι δυο λύσεις y_r, y_l που αναζητούμε ταυτίζονται με την p_{st} για $\lambda=0$, με αποτέλεσμα η Ορίζουσα Wronskian να μηδενίζεται. Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο $s = 0$ κατά τον Αντίστροφο Μ/Σ Laplace της (4.15) θα δώσει την κανονικοποιημένη p_{st} ¹.

¹ Ας αναφερθούμε σε μια πιο γενική περίπτωση για λόγους πληρότητας, στην οποία το ρεύμα πιθανότητας Z δεν μηδενίζεται στα άκρα του διαστήματος που μας ενδιαφέρει – εν προκειμένου $(0, \infty)$ – αλλά απλώς διατηρεί μια σταθερή ροή Z_{st} . Αυτό προϋποθέτει την ύπαρξη “πηγής” πιθανότητας στο εσωτερικό του

Ας δούμε στη συνέχεια πως μπορούμε να συνδέσουμε τις δυο λύσεις των τύπων (4.15), (4.16) και γιατί επιλέγουμε αυτόν τον *υβριδικό* τρόπο υπολογισμού της p_T ο οποίος περιλαμβάνει από τη μια Μ/Σ Laplace, αλλά και Θεωρία Τελεστών από την άλλη.

Αναμένουμε τα *ολοκληρωτικά υπόλοιπα* (residues) εξαιτίας των πόλων της Συνάρτησης Green G να μας δώσουν το άθροισμα ενώ, το ολοκλήρωμα διαδρομής (path integral) γύρω από τη βροχοτομή (branch cut) της G θα συνεισφέρει το ολοκλήρωμα, όπως αυτά (άθροισμα-ολοκλήρωμα) εμφανίζονται στο δεξιό μέρος της εξίσωσης (4.16) [Stakgold, 1979]. Τονίζουμε με έμφαση πως οι πόλοι της G θα οφείλονται αποκλειστικά στους μηδενισμούς που παρουσιάζει η Ορίζουσα Wronskian $W(x_0)$ δεδομένου ότι όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι συναρτήσεις y_r, y_l είναι αναλυτικές σε ολόκληρο το επίπεδο s . Τόσο οι πόλοι, όσο και η βροχοτομή της G αναμένονται στο αρνητικό πραγματικό ημιάξονα του s -επιπέδου, ώστε το διακριτό και το συνεχές φάσμα του τελεστή L να προκύψει πραγματικό και θετικό –η διαπίστωση αυτή προκύπτει εξαιτίας της σχέσης $s = -\lambda$ (σύγκρινε 4.13a με $L \cdot \Phi + \lambda \Phi = 0$). Είναι αξιοσημείωτο ότι οι διακριτές ιδιοτιμές λ_n και το κάτω όριο του συνεχούς φάσματος λ_s δίνονται αντιστοίχως από τους πόλους και το κλαδικό σημείο της βροχοτομής της συνάρτησης G , πολλαπλασιασμένα με αρνητικό πρόσημο. Επίσης πρέπει να υπογραμμιστεί ότι για να προκύψει το ολοκλήρωμα όπως αυτό εμφανίζεται στη δεξιά πλευρά της (4.16) πρέπει κανείς να ολοκληρώσει το άλμα $[G]$ (jump) της συνάρτησης Green κατά μήκος της βροχοτομής, δηλαδή

$$[G] = G^+ - G^- \quad (4.26)$$

όπου G^+ είναι η τιμή της G ακριβώς επάνω από τη βροχοτομή ενώ G^- η τιμή της G ακριβώς κάτω από τη βροχοτομή. Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα του Αντίστροφου Laplace με τον τρόπο που περιγράψαμε, με το αναμενόμενο αποτέλεσμα της (4.16), εξάγουμε εύκολα τις κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις *συνεχούς/ διακριτού* φάσματος.

Επιλέγοντας αυτή την *υβριδική* μέθοδο για τον υπολογισμό της p_T , διευκολύνουμε υπολογισμούς και συμπεράσματα που υπό άλλες συνθήκες θα ήταν εξαιρετικά δύσκολο να επιτευχθούν. Συγκεκριμένα, εάν επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε Μ/Σ Laplace

(0, ∞). Στην περίπτωση αυτή που δεν θα μας απασχολήσει εδώ, η p_{st} αποκτά μια πιο πολύπλοκη μορφή από αυτή στην (4.25) και η λύση γίνεται πιο σύνθετη.

αποκλειστικά, τότε υπάρχει κίνδυνος να αγνοήσουμε τις χρήσιμες σχέσεις ορθογωνιότητας μεταξύ των ιδιοσυναρτήσεων και τελικά, να μην εξάγουμε την p_T στη βέλτιστη μορφή που παρουσιάζεται στην εξ. (4.16) με συνέπεια όχι κάποιο λάθος, αλλά περαιτέρω δυσκολία στους ιδιαίτερα σημαντικούς υπολογισμούς των στατιστικών χαρακτηριστικών δεύτερης τάξης (Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης και Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας) –βλ. επόμενη παράγραφο. Επιπροσθέτως, με αυτή τη μέθοδο διευθετούμε το ζήτημα της θέσης της βροχοτομής στο Μιγαδικό Επίπεδο η οποία τοποθετείται στον πραγματικό αρνητικό ημιάξονα του επιπέδου s . Από την άλλη πλευρά, εάν χρησιμοποιούσαμε Χωρισμό Μεταβλητών και στη συνέχεια Θεωρία Τελεστών, θα είχαμε ιδιαίτερη δυσκολία στην κανονικοποίηση των ιδιοσυναρτήσεων συνεχούς φάσματος, όπως παρουσιάζονται στην (4.23b).

Στην επόμενη παράγραφο αναφέρουμε τον αυστηρό ορισμό του Στοχαστικού ολοκληρώματος (Stochastic Integral).

4.5 Στοχαστικό Ολοκλήρωμα

Κάθε συνεχής, Μαρκοβιανή Τυχαία διαδικασία, μπορεί να περιγραφεί διάμεσου μιας αντιστοιχίας “1-1” από μια πρώτης τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση της μορφής

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)\xi(t) \quad (4.27)$$

Η εξίσωση FP στην περίπτωση αυτή έχει μορφή πιο πολύπλοκη από αυτή που περιγράφεται από τις Εξ. (4.7) αλλά εδώ δε θα ασχοληθούμε περαιτέρω. Αντίθετα, όταν οι συναρτήσεις f, g είναι ανεξάρτητες από το χρόνο – όπως συμβαίνει στην περίπτωση που μελετάμε στη διατριβή– τότε έχουμε τη Στοχαστική Διαφορική που δίνεται από τη σχέση (4.5) και περιγράφει μια Τυχαία Διαδικασία που είναι Στάσιμη.

Ας επιμείνουμε όμως λίγο ακόμα στη γενική περίπτωση των μη-στάσιμων Τυχαίων Διαδικασιών. Εάν ολοκληρώσουμε ως προς το χρόνο την (4.27) τότε παίρνουμε –βλ. [Spiliotis, 2004], [Karatzas *et. al.* 1991], [Friedman, 1975]:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), s) ds + \int_0^t g(x(s), s) dW(t) \quad (4.28)$$

και όπως έχουμε ήδη αναφέρει ισχύει $dW(t) = \xi(t)dt$ η οποία είναι η διαδικασία *Wiener*. Το δεύτερο ολοκλήρωμα στην πιο πάνω σχέση θυμίζει έντονα τον ορισμό του

συμβατικού (*conventional*) ορισμένου ολοκληρώματος κατά *Riemann-Stieljes* το οποίο όμως ορίζεται για συναρτήσεις *Φραγμένης Κύμανσης* στις οποίες δεν ανήκει η $W(t)$ [Spiliotis, 2004].

Για να ορίσουμε το “περίεργο” ολοκλήρωμα της σχέσης (4.28), ακολουθούμε τα βήματα που αντιστοιχούν στην περίπτωση του γνωστού ορισμένου ολοκληρώματος κατά Riemann. Συγκεκριμένα, για το χρονικό διάστημα $[0, t]$ επιλέγουμε μια διαμέριση όσο “λεπτή” θέλουμε $Prtn: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = t$ και τα ολοκληρώματα στην (4.28) μετατρέπονται σε αθροίσματα

$$x(t) = x_0 + \sum_{i=1}^n f(x(t_i^s), t_i^s) \cdot (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n g(x(t_i^s), t_i^s) \cdot (W(t_i) - W(t_{i-1})) \quad (4.29)$$

όπου το $t_i^s = q \cdot t_i + (1-q) \cdot t_{i-1}$ με $q \in [0, 1]$, δηλαδή το t_i^s δειγματοληπτείται (*sampling*) από το διάστημα $(t_i - t_{i-1})$ που ανήκει, ανάλογα με την τιμή του q . Το πρώτο από τα δυο αθροίσματα συγκλίνει στο γνωστό ορισμένο ολοκλήρωμα κατά Riemman για κάθε τιμή του q . Το δεύτερο άθροισμα αποδεικνύεται υπό προϋποθέσεις ότι συγκλίνει στο Στοχαστικό Ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^t g(x(s), s) dW(t) \quad (4.30)$$

Ωστόσο, το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου q . Συγκεκριμένα, για $q = 1$ έχουμε το Στοχαστικό Ολοκλήρωμα ορισμένο κατά Ito ενώ για $q = 0.5$ έχουμε τον ορισμό κατά Stratonovich. Για να γίνει κατανοητό πως το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης διαφέρει όταν χρησιμοποιούμε διαφορετικές τιμές για το q –συγκεκριμένα 1 και 0.5 στην περίπτωση μας- αναφέρουμε πως στην περίπτωση του Στοχαστικού Ολοκληρώματος κατά Ito, οι συντελεστές κατεύθυνσης και διάχυσης της εξίσωσης FP συνδέονται με τις f, g διαμέσου των απλών σχέσεων που αναφέραμε νωρίτερα για τη στάσιμη περίπτωση αλλά για έμφαση παραθέτουμε ξανά [Spiliotis, 2004]

$$K_1(x, t) = f(x, t) \quad (4.31a)$$

$$K_2(x, t) = g^2(x, t) \quad (4.31b)$$

ενώ στην περίπτωση Stratonovich

$$K_1(x, t) = f(x, t) + \frac{1}{2} g(x, t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \quad (4.32a)$$

$$K_2(x, t) = g^2(x, t) \quad (4.32b)$$

Γίνεται κατανοητό πλέον ότι η επιλογή του g στο Στοχαστικό Ολοκλήρωμα, καθορίζει τα πιθανοθεωρητικά χαρακτηριστικά της διαδικασίας που περιγράφεται από τη Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση της μορφής (4.28).

Συμπερασματικά, η μελέτη μιας Στάσιμης Τυχαίας Διαδικασίας μπορεί να γίνει είτε διαμέσου της εξίσωσης FP που δίνεται από τις (4.7a-e) είτε, από τη Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση (4.5) στην οποία περιέχεται η έννοια του στοχαστικού ολοκληρώματος που μόλις περιγράψαμε. Η διαφορά είναι ότι στην πρώτη περίπτωση μελετάμε αναλυτικά τις πιθανοθεωρητικές ιδιότητες της διαδικασίας (π.χ. την Μεταβατική Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, την Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης κ.λ.π.) ενώ στη δεύτερη, λύνοντας τη Στοχαστική Διαφορική, παράγουμε χρονοσειρές αντιπροσωπευτικές της Διαδικασίας που μελετάμε.

Η λύση μιας Στοχαστικής Διαφορικής της μορφής (4.5) μπορεί να επιτευχθεί με δυο τρόπους: (i) διαμέσου αριθμητικών μεθόδων αντίστοιχων αυτών που χρησιμοποιούνται στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις πρώτης τάξης (ii) διαμέσου Στοχαστικού λογισμού. Περισσότερα για τα δυο αυτά θέματα και γενικότερα για τα Στοχαστικά Ολοκληρώματα και τις Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις μπορεί κανείς να βρει στις δημοσιεύσεις [Ikeda *et. al.*, 1981], [Karatzas *et. al.*, 1991], [Kloeden *et. al.*, 1992], [Higham, 2001] και [Spiliotis, 2004]

4.6 Υπολογισμός της Συνάρτησης Αυτοσυσχέτισης και της Συνάρτησης Πυκνότητας Φάσματος για μια Στάσιμη Διαδικασία Markov

4.6.1. Αναλυτική Προσέγγιση

Ας θεωρήσουμε μια στάσιμη διαδικασία Markov $x(t)$, η οποία περιγράφεται από μια πρώτης τάξης Στοχαστική Διαφορική (4.5) ορισμένη κατά Ito. Επίσης τη χρονική στιγμή $t = 0$ η $x(t)$ που μελετάμε, βρίσκεται στη θέση x_0 . Μετά από αρκετό χρόνο $t > M$ όπου M αρκετά μεγάλο ώστε να ξεπερνά τη χρονική διάρκεια της Μεταβατικής κατάστασης της $x(t)$ [Stratonovich, 1963], η διαδικασία αποκτά τις στάσιμες ιδιότητές της (*stationary properties*), δηλαδή η $x(t)$ είναι για κάθε στιγμή μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί

μια στάσιμη κατανομή που δίνεται από τη p_{st} , σχέση (4.25). Κατ' επέκταση η από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών x_1, x_2 που αντιστοιχούν στις τιμές της $x(t)$ για τις χρονικές στιγμές $t_1 > t_2 > M$, δίνεται από την πιο κάτω σχέση σύμφωνα με τις ιδιότητες των Διαδικασιών Markov (βλ. (4.3))

$$p(x_1, x_2) = p_{st}(x_2) \cdot p_T(x_1, x_2, \tau) \quad (4.33)$$

Δεδομένου ότι η Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται εξ' ορισμού [Papoulis, 1981] από τη σχέση

$$K_{xx}(\tau) = E[x_2 \cdot x_1] - m^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty x_2 \cdot x_1 \cdot p(x_2, x_1) dx_2 dx_1 - m^2 \quad (4.34)$$

με αντικατάσταση της (4.33) και στη συνέχεια της (4.16) στην τελευταία σχέση έχουμε

$$K_{xx}(\tau) = \sum_{n=1}^k h_n^2 \exp(-\lambda_n \cdot \tau) + \int_0^\infty h^2(\lambda) \exp[-(\lambda + \lambda_s) \cdot \tau] d\lambda \quad \tau \geq 0 \quad (4.35)$$

όπου τα $h_n, h(\lambda)$ δίνονται από τους ακόλουθους τύπους

$$h_n = \int_0^\infty x \Phi_n(x) dx \quad h(\lambda) = \int_0^\infty x \Phi(x, \lambda) dx \quad (4.36)$$

Για τον υπολογισμό της Συνάρτησης Πυκνότητας Φάσματος (*Spectral Density Function*) απλά επεκτείνουμε την συνάρτηση της Αυτοσυσχέτισης $K_{xx}(\tau)$ στο διάστημα $(-\infty, 0)$ ώστε να είναι άρτια και στη συνέχεια εφαρμόζουμε το Μ/Σ *Fourier* ως εξής

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.37)$$

ώστε τελικά να πάρουμε το αποτέλεσμα

$$S_{xx}(\omega) = \sum_{n=1}^k h_n^2 \frac{2\lambda_n}{\lambda_n^2 + \omega^2} + \int_0^\infty h^2(\lambda) \frac{2(\lambda + \lambda_s)}{(\lambda + \lambda_s)^2 + \omega^2} d\lambda \quad (4.38)$$

Ας παρατηρήσουμε ότι η συμπεριφορά της $S_{xx}(\omega)$ για μικρά και μεγάλα ω περιγράφεται από

$$\text{για } \omega = 0 \quad S_{st}(0) = \left[\sum_{n=1}^k \frac{2h_n^2}{\lambda_n} + \int_0^\infty \frac{2h^2(\lambda)}{\lambda + \lambda_s} d\lambda \right] = S_{low} \quad (4.39a)$$

$$\text{για } \omega \rightarrow \infty \quad S_{st}(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \left[\sum_{n=1}^k 2h_n^2 \lambda_n + \int_0^\infty 2h^2(\lambda)(\lambda + \lambda_s) d\lambda \right] = \frac{1}{\omega^2} S_{high} \quad (4.39b)$$

Το αποτέλεσμα της (4.39.b) επιβεβαιώνει πως η ασυμπτωτική συμπεριφορά της Συνάρτησης Πυκνότητας Φάσματος μιας διαδικασίας διάχυσης, περιγράφεται από τη συνάρτηση $1/\omega^2$ ή εναλλακτικά από μια κλίση -20dB σε log-log κλίμακα. Συμπερασματικά, μια πραγματική διαδικασία εκτός από στάσιμη – ή τουλάχιστον τοπικά στάσιμη (*locally stationary*) – και βασικής ζώνης πρέπει να διαθέτει και μια Συνάρτηση Πυκνότητας Φάσματος με την πιο πάνω ασυμπτωτική συμπεριφορά ώστε να δύναται να προσομοιωθεί από μια I^{ns} τάξεως Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση.

4.6.2. Γρήγορη Υπολογιστική Μέθοδος

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια μια καινούρια μέθοδο για τον υπολογισμό της Συνάρτησης Πυκνότητας Φάσματος μιας διαδικασίας διάχυσης, απευθείας από τη συνάρτηση Green (4.14). Η μέθοδος αυτή είναι ημι-αναλυτική με την έννοια ότι καταλήγει σε ένα διπλό ορισμένο ολοκλήρωμα το οποίο με τη σειρά του συνήθως υπολογίζεται αριθμητικά. Ο τελικός τύπος της μεθόδου ακολουθεί ενώ η απόδειξή του βρίσκεται στο Παράρτημα ΣΤ

$$S_{xx}(\omega) = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty x_2 x_1 p_{st}(x_1) \operatorname{Re}[G(x_2, x_1, i\omega)] dx_1 dx_2 - 2\pi m^2 \delta(\omega) \quad (4.40)$$

Με $\operatorname{Re}[\]$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση που δίνει το πραγματικό μέρος του ορίσμάτος της. Συγκρίνοντας τη νέα μέθοδο με την αντίστοιχη αναλυτική που περιγράψαμε μόλις προηγουμένως στην 4.6.1 συμπεραίνουμε αμέσως την απλοποίηση της διαδικασίας υπολογισμού της Συνάρτησης Πυκνότητας Φάσματος. Συγκεκριμένα, αποφεύγουμε τους χρονοβόρους και επίπονους υπολογισμούς του αντίστροφου Laplace της εξ. (4.15) δηλαδή, την εύρεση των ανωμαλιών (*singularities*) της συνάρτησης Green G μαζί με τον υπολογισμό των αντίστοιχων ολοκληρωτικών υπολοίπων, το ολοκλήρωμα διαδρομής κατά μήκος της βροχοτομής με ολοκληρωτέα ποσότητα το άλμα της G –βλ. (4.26)– και τέλος τον υπολογισμό των $h_n, h(\lambda)$ από την (4.36).

4.7 Χρόνοι διακοπής (*Hitting Times*) και Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις I^{ns} Τάξης

Ο Χρόνος Διακοπής (*Hitting Time*) είναι μια τυχαία μεταβλητή που συνδέεται με τις Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις άρα και με τις Διαδικασίες Διάχυσης οι οποίες όπως

έχουμε αναφέρει επανειλημμένα, περιγράφονται από μια 1^{ης} τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση.

Ορισμός του Χρόνου Διακοπής

Ας θεωρήσουμε μια Διαδικασία Διάχυσης, έστω τη $x(t)$ η οποία περιγράφεται από μια 1^{ης} τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t) \quad (4.41)$$

Επιπλέον, ας εισάγουμε την Τυχαία Μεταβλητή του Χρόνου Διακοπής τ_h που ορίζεται ως εξής: έστω το ανοιχτό διάστημα $D = (X_{\min}, X_{\max})$ το οποίο είναι υποσύνολο του R_+^* δηλαδή $D \subseteq (0, \infty)$. Τότε, ο Χρόνος Διακοπής δίνεται από τον ακόλουθο ορισμό [Spiliotis, 2004]

$$\tau_h = \inf\{t - t_o \geq 0 : x(t) \in D^c \mid x(t_o) = x_o\} \text{ όπου } x_o \in D. \quad (4.42)$$

όπου D^c το συμπλήρωμα (complement) του D . Με άλλα λόγια, το τ_h αντιστοιχεί στον ελάχιστο χρόνο που χρειάζεται η Διαδικασία Διάχυσης $x(t)$ ώστε να εξέλθει του ανοιχτού διαστήματος D , όταν γνωρίζουμε *a priori* ότι ξεκινά από τη θέση $x(t_o) = x_o \in D$ —βλ. σχ (4.1). Ας παρατηρήσουμε ότι όταν μελετάμε το Χρόνο Διακοπής τ_h μιας συγκεκριμένης Διαδικασίας Διάχυσης, είμαστε υποχρεωμένοι να ορίσουμε τις ακόλουθες τρεις παραμέτρους $(X_{\min}, X_{\max}, x_o)$ οι οποίες συμβολίζουν αντίστοιχα, τα άκρα του διαστήματος D και την αρχική τιμή της τυχαίας διαδικασίας $x(t)$ τη χρονική στιγμή $t = t_o$ —αξίζει να σημειωθεί ότι η χρονική στιγμή t_o αναφέρεται κάποιες φορές ως στιγμή εκκίνησης (*triggering time*)—. Είναι φανερό πως εάν θέσουμε την τριάδα των παραμέτρων $(X_{\min}, X_{\max}, x_o)$ ίση με (x_{th}, ∞, x_o) ή εναλλακτικά ίση με $(0, x_{th}, x_o)$ τότε, το τ_h ταυτίζεται με τα T_{fd} και T_{fd} αντίστοιχα που έχουμε ήδη ορίσει στην Παράγραφο 4.1

Ας σταθούμε λίγο στο Σχήμα 4.1 της ίδιας παραγράφου, που αναπαριστά ένα γεγονός απόσβεσης σε ένα δορυφορικό κανάλι. Στον οριζόντιο άξονα των χρόνων έχουμε σημειώσει κάποιες σημαντικές χρονικές στιγμές. Συγκεκριμένα, τη στιγμή t_{-1} η απόσβεση υπερβαίνει ένα κατώφλι x_{th} , ενώ τη στιγμή t_o βρίσκεται στη θέση x_o . Στο σχήμα φαίνεται καθαρά η φυσική σημασία της Διάρκειας Διάλειψης που συμβολίζεται με T_{FD} και η διαφορά της από το Χρόνο Διακοπής για την περίπτωση της ακόλουθης

τριάδας παραμέτρων $(X_{\min}, X_{\max}, x_o)$. Στο παράδειγμά μας επειδή το $X_{\max} \rightarrow \infty$, το τ_h με τη σειρά του εμπίπτει στην ειδική περίπτωση του χρόνου διακοπής που συμβολίζεται με T_{fd} και συνοδεύεται από την τριάδα παραμέτρων (x_{th}, ∞, x_o) –είναι φανερό ότι στην περίπτωση των T_{fd} και T_{ifd} είναι αναγκαίο να προσδιορίζουμε μόνο δυο παραμέτρους, τις (x_{th}, x_o) και αυτό θα ισχύει εφεξής.

Από το σχήμα 4.1 γίνεται φανερό ότι οι Τυχαίες Μεταβλητές T_{fd} και T_{ifd} παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον στο πλαίσιο της μοντελοποίησης τυχαίων καναλιών που υποφέρουν από απόσβεση για τους ίδιους λόγους για τους οποίους ανάλογη σημασία έχει και η Διάρκεια Διάλειψης (*Fade Duration*) ή η Διάρκεια μεταξύ δυο γεγονότων Διάλειψης (*Inter-Fade Duration*).

Τα στατιστικά χαρακτηριστικά 1^{ης} τάξης του τ_h και κατ'επέκταση των T_{fd} και T_{ifd} ως υπό-περιπτώσεων του πρώτου, μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά στην περίπτωση μιας Διαδικασίας Διάχυσης με συγκεκριμένους συντελεστές κατεύθυνσης και διάχυσης. Συγκεκριμένα, σε αυτή την παράγραφο δείχνουμε πως υπολογίζονται η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Συνάρτηση Αθροιστικής Πιθανότητας και η μέση τιμή του τ_h .

Συγκεκριμένα, για κάθε Διαδικασία Διάχυσης $x(t)$ σαν αυτή που ορίσαμε προηγουμένως με συντελεστές $K_2(x)$ και $K_1(x)$, υπάρχει ένας τελεστής T που ονομάζεται απειροστικός γεννήτορας (*infinitesimal generator*) [Karlin and Taylor, 1981] και ορίζεται ως ακολούθως

$$T \cdot u(x) = \frac{1}{2} K_2(x) \frac{d^2}{dx^2} u(x) + K_1(x) \frac{d}{dx} u(x) \quad (4.43)$$

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα οριακών τιμών κατά Dirichlet (συνοριακών τιμών): έστω ξανά $D \equiv (X_{\min}, X_{\max})$ ένα υποσύνολο του $[0, \infty]$, $K_1(x), K_2(x)$ δυο διαφορίσιμες συναρτήσεις και τέλος, έστω $\lambda \geq 0$, τότε αναζητούμε την άγνωστη συνάρτηση u που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\begin{aligned} T \cdot u - \lambda u &= 0 \quad \text{στο } D \\ u &= 1 \quad \text{στα } x = X_{\min}, x = X_{\max} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Μπορεί να αποδειχθεί [Karlin and Taylor, 1981], [Friedman, 1975] ότι η λύση $u(X_{\min}, X_{\max}, x, \lambda)$ της (4.44) ισούται με τη Ροπογεννήτρια Συνάρτηση (*Moment Generation Function*) του τ_h –δηλαδή τον M/Σ Laplace της συνάρτησης $f(X_{\min}, X_{\max}, x_o, \tau_h)$ η οποία με τη σειρά της είναι η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας του τ_h – για την ακόλουθη τριάδα παραμέτρων $(X_{\min}, X_{\max}, x_o)$

$$u(X_{\min}, X_{\max}, x_o, \lambda) = E[e^{-\lambda\tau_h}] = \int_0^{\infty} f(X_{\min}, X_{\max}, x_o, \tau_h) e^{-\lambda\tau_h} d\tau_h \quad (4.45)$$

Εάν f είναι η πρώτη παράγωγος της F ως προς τη μεταβλητή τ_h , δηλαδή

$$\frac{d}{d\tau_h} F(X_{\min}, X_{\max}, x_o, \tau_h) = f(X_{\min}, X_{\max}, x_o, \tau_h) \quad (4.46)$$

και επιπλέον U είναι ο M/Σ Laplace της F ,

$$U(X_{\min}, X_{\max}, x_o, \lambda) = \int_0^{\infty} F(X_{\min}, X_{\max}, x_o, \tau_h) \cdot e^{-\lambda\tau_h} d\tau_h \quad (4.47)$$

τότε, από τις ιδιότητες του M/Σ Laplace [Carrier, 1966] έχουμε

$$U(X_{\min}, X_{\max}, x_o, \lambda) = \frac{u(X_{\min}, X_{\max}, x_o, \lambda)}{\lambda} + \frac{F(X_{\min}, X_{\max}, x_o, 0)}{\lambda} \quad (4.48)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον Αντίστροφο M/Σ Laplace στο 2^ο μέλος της Εξ. (4.48) ώστε να υπολογίσουμε την F σε κλειστή μορφή και κατόπιν, από τη σχέση

$$P[\tau_h \geq \tau | x(t_o) = x_o] = F(X_{\min}, X_{\max}, x_o, \infty) - F(X_{\min}, X_{\max}, x_o, \tau) \quad (4.49)$$

παίρνουμε την Συνάρτηση Αθροιστικής Πυκνότητας Πιθανότητας του τ_h για την ακόλουθη τριάδα παραμέτρων $(X_{\min}, X_{\max}, x_o)$. Είναι αξιοσημείωτο ότι ο Αντίστροφος M/Σ Laplace του δεύτερου όρου στο δεξιό μέλος της Εξ. (4.48) είναι απλά ο όρος $F(X_{\min}, X_{\max}, x_o, 0)$ ο οποίος απαλείφεται στο τελικό αποτέλεσμα εξαιτίας της αφαίρεσης στην Εξ. (4.49) και συνεπώς χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να τον παραλείψουμε.

Τέλος, η μέση τιμή του τ_h για την τριάδα των παραμέτρων $(X_{\min}, X_{\max}, x_o)$ δίνεται από τη λύση του μη-ομογενούς προβλήματος συνοριακών τιμών [Karlin and Taylor, 1981]

$$\begin{aligned} Tu_{mn} &= 1 \quad \text{στο } D \\ u_{mn} &= 0 \quad \text{σε } x = X_{\min}, x = X_{\max} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Για πλήθος περιπτώσεων συμπεριλαμβανομένου και των Διαδικασιών Διάχυσης που μελετάμε σε αυτή τη Διατριβή, η λύση του προβλήματος στην Εξ. (4.50) δίνεται σε κλειστή μορφή στο βιβλίο [Karlin and Taylor 1981, pp. 197]. Τη λύση επαναλαμβάνουμε εδώ για λόγους πληρότητας

$$\begin{aligned} u_{mn} &= 2 \left\{ \frac{S(X_o) - S(X_{\min})}{S(X_{\max}) - S(X_{\min})} \int_{X_o}^{X_{\max}} [S(X_{\max}) - S(\xi)] \cdot m(\xi) d\xi + \right. \\ &+ \left. \frac{S(X_{\max}) - S(X_o)}{S(X_{\max}) - S(X_{\min})} \int_{X_{\min}}^{X_o} [S(\xi) - S(X_{\min})] \cdot m(\xi) d\xi \right\} \end{aligned} \quad (4.51)$$

όπου στον πιο πάνω τύπο τα $s(x)$, $S(x)$, $m(x)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$s(x) = \exp \left\{ - \int \left[\frac{2 \cdot \mu(\xi)}{\sigma^2(\xi)} \right] d\xi \right\}, \quad S(x) = \int s(n) dn, \quad m(x) = \frac{1}{\sigma^2(x) \cdot s(x)} \quad (4.52)$$

και τα μ , σ^2 είναι ο συντελεστής κατεύθυνσης $K_1(x)$ και ο συντελεστής διάχυσης $K_2(x)$ αντίστοιχα.

4.8 Διαδικασία Σύνθεσης της κατάλληλης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης 1^{ης} τάξης για την προσομοίωση μιας Στάσιμης Τυχαίας Διαδικασίας- Αλγόριθμος

Στην παράγραφο αυτή μελετούμε την διαδικασία σύνθεσης της κατάλληλης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης 1^{ης} τάξης με σκοπό την προσομοίωση μιας πραγματικής, στάσιμης τυχαίας διαδικασίας. Οι προϋποθέσεις που πρέπει να εκπληρώνει μια πραγματική διαδικασία για να μπορεί να προσομοιωθεί από μια τέτοια εξίσωση είναι: (i) η διαδικασία πρέπει να είναι βασικής ζώνης (*baseband*), δηλαδή η Συνάρτηση Κατανομής Φάσματος πρέπει να ορίζεται για συχνότητες περί το $\omega_c = 0$, στο οποίο και να λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της. (ii) η ίδια Συνάρτηση Κατανομής Φάσματος επιβάλλεται να έχει ασυμπτωτική συμπεριφορά για μεγάλες συχνότητες ανάλογη της συνάρτησης $1/\omega^2$ ή γραμμική κλίση -20dB στην περίπτωση log-log κλίμακας.

Αρχικά, θα αναφέρουμε τη σύνθεση των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων 1^{ης} τάξης όπως εφαρμοζόταν μέχρι τώρα και στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τα μειονεκτήματα της: συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι η Διαδικασία Διάχυσης όπως προσδιοριζόταν μέχρι τώρα, ενδέχεται σε πολλές περιπτώσεις να μην προσομοιώνει ικανοποιητικά μερικά *σημαντικά στατιστικά χαρακτηριστικά* της Πραγματικής Τυχαίας Διαδικασίας όπως τη Διάρκεια Διάλειψης ή τους παρεμφερείς με αυτή Χρόνους Διακοπής – (παράγραφος 4.7). Για το λόγο αυτό, προτείνουμε περαιτέρω μια πιο ολοκληρωμένη προσέγγιση στη σύνθεση Στοχαστικών Διαφορικών 1^{ης} τάξης η οποία εξασφαλίζει καλύτερη προσομοίωση των δυναμικών χαρακτηριστικών της Πραγματικής Διαδικασίας.

Στις εφαρμογές που έχουν απασχολήσει μέχρι τώρα τους ερευνητές της συγκεκριμένης περιοχής [Kontorovich *et. al.*, 1995], [Primak *et.al.*, 1998], [Primak, 2000], [Primak *et. al.*, 2001] και [Primak *et. al.*, 2004], μια Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση 1^{ης} τάξης θεωρείται ότι είναι αντιπροσωπευτική μιας πραγματικής, στάσιμης τυχαίας διαδικασίας βασικής ζώνης όταν η πρώτη αναπαράγει τα στατιστικά χαρακτηριστικά 1^{ης} και 2^{ης} τάξης της τελευταίας, δηλαδή τη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας και ταυτόχρονα την Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης ή, τη Συνάρτηση Πυκνότητας Φάσματος. Ο ορισμός αυτός δε συνεπάγεται ότι η Στοχαστική Διαφορική αναπαράγει πιστά το *μηχανισμό* γέννησης της πραγματικής Διαδικασίας. Αντίθετα, μπορεί να αποδειχθεί [Primak *et. al.*, 1998] από τη γενική θεωρία των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων ότι κάτι τέτοιο ισχύει μόνο στην περίπτωση που η πραγματική διαδικασία είναι –έστω κατά προσέγγιση– Μαρκοβιανή και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι εκθετικά φθίνουσα, δηλαδή της μορφής

$$K(\tau) = e^{-\lambda \cdot \tau} \quad \text{–Διαδικασία } \lambda \text{ (} \lambda \text{ process)–} \quad (4.53)$$

Αξίζει να τονιστεί ότι η συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης της τελευταίας σχέσης είναι η πιο απλή περίπτωση της οικογένειας των συναρτήσεων που εμφανίζεται στην (4.35). Ικανή συνθήκη για να απομονώσουμε από την (4.35) μια τέτοια συνάρτηση είναι να διαλέξουμε τέτοια $K_1(x)$ και $K_2(x)$ ώστε να έχουμε άπειρο πλήθος διακριτών ιδιοτιμών αλλά να ισχύει $h_1 \neq 0$, $h_n = 0 \forall n > 1$ –για λεπτομέρειες βλ. [Primak *et. al.*, 1998]. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις των –κατά προσέγγιση– Μαρκοβιανών πραγματικών Διαδικασιών, υπάρχει δυσκολία στο να υπολογίσουμε τη μορφή της αντιπροσωπευτικής Στοχαστικής

Διαφορικής, δηλαδή τους κατάλληλους συντελεστές κατεύθυνσης και διάχυσης $K_1(x)$ και $K_2(x)$ αντίστοιχα ώστε ο μηχανισμός γέννησης της πραγματικής Τυχαίας διαδικασίας να αναπαράγεται πιστά. Συμπερασματικά, με εξαίρεση τις λ διαδικασίες, σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις Μαρκοβιανών ή μη Μαρκοβιανών στάσιμων διαδικασιών βασικής ζώνης, δε μπορούμε να βρούμε μια Στοχαστική Διαφορική 1^{ης} τάξης που να αναπαριστά πιστά το μηχανισμό γέννησης της Τυχαίας Διαδικασίας. Κατ' επέκταση στην πράξη, η βέλτιστη προσομοίωση των χαρακτηριστικών 1^{ης} και 2^{ης} τάξης μιας πραγματικής διαδικασίας δε συνεπάγεται σε καμία περίπτωση την βέλτιστη προσομοίωση της Διάρκειας Διαλείψεων ή των Χρόνων Διακοπής. Μόνη λύση στην αδυναμία που επισημάναμε είναι να εμπλουτιστεί η διαδικασία Σύνθεσης με νέες συνθήκες. Όλα αυτά θα εξετασθούν αναλυτικά παρακάτω.

Εάν χρησιμοποιήσουμε το δείκτη “act” για να προσδιορίσουμε τα μεγέθη που ανήκουν στην πραγματική τυχαία διαδικασία και τον δείκτη “st” για να αναφερθούμε στα μεγέθη της διαδικασίας διάχυσης που χρησιμοποιούμε για προσομοίωση, τότε η επιδίωξη της σύνθεσης μέχρι τώρα ήταν να ελαχιστοποιήσει ταυτόχρονα τις ακόλουθες νόρμες

$$\|p_{st}(x) - p_{act}(x)\| \quad (4.54a)$$

και μια εκ των

$$\|K_{st}(\tau) - K_{act}(\tau)\| \quad (4.54b)$$

ή

$$\|S_{st}[x; \omega] - S_{act}[x; \omega]\| \quad (4.54c)$$

όπου οι νόρμες συνήθως ανήκουν στο γνωστό χώρο συναρτήσεων $L_1[0, \infty]$. Συνήθως, η ικανοποίηση των Εξ. (4.54b-c) γίνεται με *ευρηστικούς* τρόπους (*heuristic ways*) στους οποίους θα αναφερθούμε αμέσως μετά και κατά την κρίση μας, αναδεικνύουν την αδυναμία των ερευνητών να εφαρμόσουν μια αυστηρή μέθοδο για τη σύνθεση Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων 1^{ης} τάξης. Στην παρούσα μελέτη και με στόχο να λύσουμε τις προαναφερθείσες αδυναμίες της σύνθεσης, προσθέτουμε στις συνθήκες (4.54a) και (4.54b) ή (4.54c) την ακόλουθη

$$\sum_{i=1} \left| \frac{E_{st}[T_{fd}^{(i)}] - E_{act}[T_{fd}^{(i)}]}{E_{act}[T_{fd}^{(i)}]} \right| \quad (4.54d)$$

Τα $E_{st}[T_{fd}^{(i)}]$ και $E_{act}[T_{fd}^{(i)}]$ είναι αντίστοιχα οι προσομοιούμενες και οι πραγματικές μέσες τιμές των Χρόνων Διακοπής T_{fd} ή T_{ijd} , για κάποια ζευγάρια (x_m^i, x_o^i) που ανήκουν στο είδος των παραμέτρων που ορίσαμε στην παράγραφο 4.7. Συμπερασματικά, η Εξ. (4.54d) είναι το κανονικοποιημένο σφάλμα ανάμεσα στις πραγματικές και τις προσομοιούμενες μέσες τιμές των Χρόνων Διακοπής, για ένα πλήθος περιπτώσεων για τα ζευγάρια (x_m^i, x_o^i) $i=1,2,\dots$. Η νέα συνθήκη είναι προφανές ότι εξασφαλίζει καλύτερη προσομοίωση του μηχανισμού δημιουργίας της πραγματικής τυχαίας διαδικασίας. Συγκεκριμένα, από τη σκοπιά της μοντελοποίησης τηλεπικοινωνιακών καναλιών που υποφέρουν από απόσβεση λόγω βροχής –και όχι από πολύοδη διάδοση (multipath propagation) διότι εκεί το πρόβλημα γίνεται πιο σύνθετο εφόσον μας ενδιαφέρει εκτός από το πλάτος και η φάση του σήματος οπότε και χρησιμοποιούμε 2^{ης} τάξης Στοχαστικές Διαφορικές– είναι εξαιρετικά σημαντικό να προσομοιώνουμε επιτυχώς τη διάρκεια διαλείψεων ή τους παρεμφερείς σε αυτή Χρόνους Διακοπής μαζί βέβαια με τα στατιστικά χαρακτηριστικά πρώτης και δεύτερης τάξης.

Πλέον έχουμε μια γενική ιδέα γύρω από τη διαδικασία σύνθεσης, για το τι ίσχυε μέχρι τώρα και τι προτείνεται σε αυτή τη μελέτη. Ας δούμε συνεπώς τη διαδικασία αναλυτικά, θεωρώντας πως οι προτεινόμενες αλλαγές αφορούν ένα μικρό αλλά σημαντικό μέρος της διαδικασίας. Τελική επιδίωξή μας είναι να μοντελοποιήσουμε την πραγματική τυχαία διαδικασία $x_{act}(t)$ με τη βοήθεια της διαδικασίας διάχυσης $x(t)$ που περιγράφεται από μια Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση 1^{ης} τάξης –βλ. Εξ. (4.5). Για το σκοπό αυτό αρχικά, επεξεργαζόμαστε τις χρονοσειρές της $x_{act}(t)$ ώστε να υπολογίσουμε σε εμπειρική μορφή τη Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας και τη Συνάρτηση Πυκνότητας Φάσματος. Θυμίζουμε ότι η Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας δίνει την πιθανότητα υπέρβασης ενός κατωφλίου x_{th} , δηλαδή $P(x_{act} > x_{th})$. Για τον υπολογισμό της, σχηματίζουμε την ακόλουθη Τυχαία Μεταβλητή $y(x_{th})$ [Papoulis, 1981]:

$$y_i(x_{th}) = \begin{cases} 1 & x_{act}[i] \geq x_{th} \\ 0 & x_{act}[i] < x_{th} \end{cases} \text{ for } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.55)$$

όπου n είναι το πλήθος των μετρήσεων που έχουμε για την $x_{act}(t)$. Συνεπώς για την εκτίμηση της Πιθανότητας Υπέρβασης $P(x_{act} > x_{th})$, υπολογίζουμε τη μέση τιμή της $y(x_{th})$, δηλαδή το λόγο

$$\hat{F}(x_{th}) = \frac{n_{x_{th}}}{n} \quad (4.56)$$

όπου $n_{x_{th}}$ είναι το πλήθος των “επιτυχιών” στον “έλεγχο” που περιγράφεται από την (4.55). Μπορεί κανείς να βρει έτοιμες συναρτήσεις στο πακέτο της *Matlab* που υλοποιούν τη διαδικασία που μόλις περιγράψαμε (π.χ οι συναρτήσεις *cdf-ecdf*). Από την άλλη, για τον υπολογισμό της Φασματικής Πυκνότητας θα χρησιμοποιηθεί η εκτιμήτρια συνάρτηση (*estimator*) με την ονομασία Περιοδόγραμμα (*Periodogram*) [Paroulis, 1981]

$$S(f) = \int_{-T}^T x(t)\bar{x}(t)e^{-i2\pi f \cdot t} dt \quad (4.57)$$

όπου $2T$ η χρονική διάρκεια του δείγματος. Η αναγωγή του ολοκληρώματος σε άθροισμα, για την εφαρμογή της εκτιμήτριας (4.57) στις χρονοσειρές μιας διακριτής διαδικασίας είναι απλή. Αυτό που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι για μη-εργοδικές διαδικασίες (*non-ergodic processes*) που περιστασιακά συναντάμε στην πράξη, έχουμε στη διάθεσή μας μια συλλογή από δείγματα (κάθε δείγμα αντιστοιχεί σε μια χρονοσειρά) κάθε ένα από τα οποία έχει παρεμφερείς ίσως, αλλά πάντως διαφορετικές στατιστικές ιδιότητες. Για τον υπολογισμό του συνολικού Φάσματος της $x_{act}(t)$, εφαρμόζουμε την (4.57) σε κάθε ένα από τα δείγματα και στη συνέχεια, βρίσκουμε το γεωμετρικό τους μέσο από τον τύπο:

$$S_{act}(f) = 10^{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \log[S_i(f)]} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (4.58)$$

όπου M το πλήθος των δειγμάτων. Συνεπώς, το $S_{act}(f)$ που υπολογίζουμε είναι αντιπροσωπευτικό της πραγματικής διαδικασίας με την έννοια της προσέγγισης μέσης τιμής (*mean value approximation*). Το πρώτο μέρος της σύνθεσης τελειώνει με τον

υπολογισμό του πιθανώς καταλληλότερου συντελεστή διάχυσης της Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης, από τον βασικό τύπο ορισμού [Stratonovich, 1963]

$$K_2(x_q) = \frac{E_q \left[(x_{act}(t_{i+1}) - x_{act}(t_i))^2 \right]}{\tau} \quad (4.59)$$

όπου x_q , $q = 1, 2, 3, \dots$ είναι μια διαμέριση (*partition*) του πεδίου τιμών της πραγματικής τυχαίας διαδικασίας που είναι ενιαία για όλα τα δείγματα και σχηματίζει ισομήκη διαστήματα μήκους δx , $x_{act}(t_i)$ είναι η τιμή κάθε δείγματος της τυχαίας διαδικασίας τη χρονική στιγμή t_i , τ το σταθερό χρονικό διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών τιμών της x_{act} στην περίπτωση ομοιόμορφης δειγματοληψίας δηλαδή ισχύει $\tau = t_{i+1} - t_i$ και τέλος η $E_q[\]$, δίνει τη δεσμευμένη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $(x_{act}(t_{i+1}) - x_{act}(t_i))^2$ για την περίπτωση που ισχύει $x_{act}(t_i) \in (x_q, x_q + \delta x)$. Στο συνολικό $K_2(x_q)$, εφαρμόζουμε μια τεχνική πολυωνυμικής παρεμβολής (*polynomial interpolation*) ώστε να προκύψει η συναρτησιακή μορφή του καταλληλότερου $K_2(x)$ και το αποτέλεσμα, το πολλαπλασιάζουμε με μια σταθερά d_x ώστε τελικά να έχουμε

$$K_2(x) \propto d_x \cdot (a_0 + a_1 x + \dots) \quad (4.60)$$

Το **πρώτο** μέρος της διαδικασίας σύνθεσης ολοκληρώνεται εδώ και πλέον έχουμε σαν δεδομένα την Συνάρτηση Αθροιστικής Πιθανότητας P_{act}^2 , τη Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας S_{act} –και τις δυο σε εμπειρική μορφή– καθώς και την πιθανώς καταλληλότερη συναρτησιακή μορφή του συντελεστή διάχυσης $K_2(x)$ που ανήκει στην 1^{ης} τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για τη μοντελοποίηση της πραγματικής τυχαίας διαδικασίας.

Στο **δεύτερο** μέρος της σύνθεσης αρχικά βρίσκουμε μια Συνάρτηση Αθροιστικής Κατανομής Πιθανότητας P_{cl} σε αναλυτική μορφή –π.χ. για θετικές πραγματικές διαδικασίες που μελετάμε εδώ *Lognormal*, *Gamma*, *Weibull* κ.λ.π. – η οποία να ελαχιστοποιεί την $L_1[0, \infty]$ νόρμα

² Με κεφαλαίο P_{act} συμβολίζουμε την $P(x > x_{th})$ Συνάρτηση Αθροιστικής Πιθανότητας και με p_{act} την $P(x = x_{th})$ Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας.

$$\|P_{cl}(x) - P_{act}(x)\| \quad (4.61)$$

Η ελαχιστοποίηση της πιο πάνω νόρμας είναι διαδικασία δυο βημάτων : (i) βρίσκουμε την κατάλληλη Συνάρτηση Αθροιστικής Κατανομής Πιθανότητας –προφανώς αυτό γίνεται με κάποια στατιστικά τεστ (*statistical tests*) όπως τα tsi-test ή άλλα που ποικίλουν από κατανομή σε κατανομή– (ii) υπολογίζουμε τη βέλτιστη τιμή των παραμέτρων της κατανομής ώστε να επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση της νόρμας στην (4.61). Στο εξής, δεν κάνουμε καμία περαιτέρω διάκριση ανάμεσα στις P_{cl} και P_{act} θεωρώντας ότι τα μακροπρόθεσμα στατιστικά χαρακτηριστικά της πραγματικής διαδικασίας που μοντελοποιούμε περιγράφονται με μεγάλη ακρίβεια προσέγγισης από την P_{cl} .

Η προσομοίωση των χαρακτηριστικών 1^{ης} τάξης της πραγματικής διαδικασίας επιβάλλει τη συνθήκη

$$P_{st} = P_{cl} \quad \text{και αντίστοιχα} \quad p_{st} = p_{cl} \quad (4.62)$$

Πλέον από την (4.25) και την (4.62) υπολογίζουμε τον συντελεστή κατεύθυνσης $K_1(x)$

$$K_1(x) = \frac{K_2(x)}{2} \frac{d}{dx} \ln[p_{st}(x)K_2(x)] \quad (4.63)$$

ο οποίος επίσης έχει ως πολλαπλασιαστικό παράγοντα την παράμετρο d_x . Γνωρίζοντας τους συντελεστές K_1, K_2 μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση FP με τον τρόπο που παρουσιάσαμε στην παράγραφο (4.4) για την απλή περίπτωση του $d_x = 1$, εφόσον χρειάζεται απλή άλγεβρα για να το εμφανίσουμε στα τελικά αποτελέσματα για την περίπτωση όπου $d_x \neq 1$. Η Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας μπορεί να υπολογιστεί με τους δυο τρόπους που αναφέρονται στην παράγραφο (4.6). Οι τελικοί τύποι που παρουσιάζονται εκεί επαναλαμβάνονται εδώ με το $d_x \neq 1$ για λόγους πληρότητας

$$S_{st}(\omega) = \sum_{n=1}^k h_n^2 \frac{2\lambda_n \cdot d_x}{d_x^2 \cdot \lambda_n^2 + \omega^2} + \int_0^\infty h^2(\lambda) \frac{2(\lambda + \lambda_s) \cdot d_x}{d_x^2 \cdot (\lambda + \lambda_s)^2 + \omega^2} d\lambda \quad (4.64a)$$

$$\text{για } \omega = 0 \quad S_{st}(0) = \frac{1}{d_x} \left[\sum_{n=1}^k \frac{2h_n^2}{\lambda_n} + \int_0^\infty \frac{2h^2(\lambda)}{\lambda + \lambda_s} d\lambda \right] = \frac{S_{low}}{d_x} \quad (4.64b)$$

$$\text{για } \omega \rightarrow \infty \quad S_{st}(\omega) = \frac{d_x}{\omega^2} \left[\sum_{n=1}^k 2h_n^2 \lambda_n + \int_0^\infty 2h^2(\lambda)(\lambda + \lambda_s) d\lambda \right] = \frac{d_x}{\omega^2} S_{high} \quad (4.64c)$$

$$S_{st}(\omega) = \frac{2}{d_x} \int_0^\infty \int_0^\infty x_2 x_1 p_{st}(x_1) \operatorname{Re}[G(x_2, x_1, \frac{i\omega}{d_x})] dx_1 dx_2 - 2\pi m^2 \delta(\omega) \quad (4.64d)$$

Απομένει ο καθορισμός της παραμέτρου d_x .

Σύμφωνα με την υπάρχουσα προσέγγιση, η παράμετρος d_x υπολογίζεται από την ελαχιστοποίηση της γνωστής νόρμας που περιέχει τη διαφορά των δυο φασμάτων, αυτού που ανήκει στην πραγματική διαδικασία και αυτού που ανήκει στην διαδικασία διάχυσης –βλ. Εξ. (4.54c). Η ελαχιστοποίηση αυτή επιτυγχάνεται συνήθως στη βιβλιογραφία με ευρηστικούς τρόπους ή με κάποιες φυσικές παραδοχές. Συγκεκριμένα, συνήθως δυο προσεγγίσεις χρησιμοποιούνται

(i) Με τη βοήθεια του χρόνου συσχέτισης (*correlation time*) ο οποίος μας δίνει μια εικόνα για το μήκος του χρονικού διαστήματος στη διάρκεια του οποίου εκτείνεται η συσχέτιση δυο τιμών μιας τυχαίας διαδικασίας $r(t)$

$$\tau_r^{cor} = \frac{1}{K_{rr}(0)} \int_0^\infty K_{rr}(\tau) d\tau = \frac{1}{\sigma_r^2} \int_0^\infty K_{rr}(\tau) d\tau \quad (4.65)$$

όπου K_{rr} είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας r . Θεωρούμε λοιπόν, ότι μια πιο «χαλαρή» εκδοχή της (4.54b) είναι η ακόλουθη [Kontorovich *et. al.*, 1995]

$$\tau_{act}^{cor} = \tau_{st}^{cor} \quad (4.66)$$

Ο χρόνος συσχέτισης συνδέεται με την Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας ως εξής δεδομένου ότι η τελευταία είναι ο Μ/Σ *Fourier* της Συνάρτησης Αυτοσυσχέτισης (πάλι για την διαδικασία $r(t)$):

$$S_{rr}(0) = \sigma_r^2 \tau_r^{cor} \quad (4.67)$$

και συνεπώς η (4.66) προβάλλεται στο πεδίο της συχνότητας ως ακολούθως

$$\frac{S_{act}(0)}{\sigma_{act}^2} = \frac{S_{st}(0)}{\sigma_{st}^2} \quad (4.68)$$

Ας προσέξουμε ότι συνήθως ισχύει $\sigma_{act} \square \sigma_{st}$ επειδή η p_{st} είναι μια καλή προσέγγιση της πραγματικής Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας p_{act} . Τελικά το d_x δίνεται από την ακόλουθη σχέση σύμφωνα με την (4.64b)

$$d_x = \left(\frac{\sigma_{act}}{\sigma_{st}} \right)^2 \frac{S_{low}}{S_{act}(0)} \square \frac{S_{low}}{S_{act}(0)} \quad (4.69)$$

Ουσιαστικά στην (4.69) εξισώνουμε το πραγματικό με το προσομοιούμενο φάσμα, στην θέση της μηδενικής συχνότητας. Για διαδικασίες που έχουν ταχέως φθίνον φάσμα καθώς απομακρυνόμαστε από τη μηδενική συχνότητα, η (4.69) φαίνεται να δίνει μια καλή προσέγγιση για τη βέλτιστη τιμή του d_x που μηδενίζει τη γνωστή νόρμα της Εξ. (4.54b).

(ii) Μια δεύτερη προσέγγιση είναι να εξισώσουμε το πραγματικό με το προσομοιούμενο φάσμα στη θέση της συχνότητας όπου το πρώτο -πραγματικό φάσμα- παρουσιάζει ένα γόνατο (*knee*), όταν σχεδιάζεται σε log-log κλίμακα. Συγκεκριμένα, αφού εντοπίσουμε τη θέση της συχνότητας όπου παρουσιάζεται το γόνατο την οποία συμβολίζουμε με ω_c , τότε από τον ακόλουθο τύπο μπορούμε να υπολογίσουμε την δυναμική παράμετρο [Gremont *et.al.*, 2004]

$$d_x = \omega_c \sqrt{\frac{S_{low}}{S_{high}}} \quad (4.70)$$

Στη νέα, τροποποιημένη διαδικασία σύνθεσης που προτείνουμε, η τιμή της παραμέτρου d_x υπολογίζεται έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση των ακόλουθων ποσοτήτων που επαναλαμβάνονται εδώ από τις Εξ. (4.54c-d)

$$\|S_{st}[x; \omega] - S_{act}[x; \omega]\| \quad (4.71)$$

$$\sum_{n=1} \left| \frac{E_{st}[T_{fd}^{(i)}] - E_{act}[T_{fd}^{(i)}]}{E_{act}[T_{fd}^{(i)}]} \right| \quad (4.72)$$

Είναι αρκετά πιθανόν, οι δυο ποσότητες να μην ελαχιστοποιούνται ταυτόχρονα, δηλαδή για την ίδια τιμή του d_x –άλλωστε, κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι η 1^{ης} τάξης στοχαστική διαφορική είναι πλήρως αντιπροσωπευτική του μηχανισμού γέννησης της πραγματικής διαδικασίας πράγμα που συμβαίνει σπάνια όπως αναφέραμε. Συνεπώς, είμαστε αναγκασμένοι να κάνουμε ένα συμβιβασμό. Περισσότερα για αυτό όμως στο επόμενο κεφάλαιο όπου παρουσιάζεται η εφαρμογή της σύνθεσης για τη μοντελοποίηση ενός δορυφορικού καναλιού.

Αυτό που θα είχε σημασία να συζητηθεί εδώ και να διευκρινιστεί περαιτέρω στο επόμενο κεφάλαιο της εφαρμογής, είναι το πρότυπο (pattern) που επιλέγουμε για τα

ζευγάρια (x_{ih}^i, x_o^i) που προσδιορίζουν τους Χρόνους Διακοπής T_{fd} ή T_{ifd} της Εξ. (4.72).

Σε γενικές γραμμές, υπάρχουν δυο προσεγγίσεις:

- (i) επιλέγουμε μεγάλο αριθμό ζευγαριών, με μεγάλο εύρος τιμών, ώστε να επιτύχουμε μια ευρείας κλίμακας προσομοίωση των Χρόνων Διακοπής.
- (ii) επιλέγουμε το x_{ih}^i να είναι σταθερό για όλα τα i και στη συνέχεια αναθέτουμε στα x_o^i τιμές που ξεκινούν χαμηλότερα από το x_{ih} και συνεχίζουν ψηλότερα από αυτό. Η δεύτερη περίπτωση, εστιάζει περισσότερο γύρω από ένα κρίσιμο κατώφλι της πραγματικής διαδικασίας το οποίο παρουσιάζει σημαντικό ενδιαφέρον. Μια τέτοια προσέγγιση φαίνεται κατάλληλη για την προσομοίωση της Απόσβεσης ως τυχαίας διαδικασίας, στο πλαίσιο της λειτουργίας των Τεχνικών Αμβλυνσης Διαλείψεων.

Κεφάλαιο 5

Τρία Δυναμικά Μοντέλα για την Προσομοίωση της Απόσβεσης λόγω Βροχής για Διαλείψεις Lognormal, Weibull και Gamma

5.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο εφαρμόζουμε όλες τις νέες ιδέες που αφορούν στη σύνθεση και γενικότερα στην αξιοποίηση 1^{ης} τάξης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων με σκοπό, τη μοντελοποίηση μιας πραγματικής τυχαίας διαδικασίας. Η τελευταία αντιστοιχεί στην απόσβεση λόγω βροχής που επιβαρύνει ένα δορυφορικό κανάλι το οποίο με τη σειρά του λειτουργεί στα 20GHz και συζευγνύει ένα επίγειο σταθμό εβρισκόμενο στην περιοχή της Αττικής, με έναν γεωστατικό δορυφόρο (συγκεκριμένα τον Hellas-sat2).

Στη γενική περίπτωση, τα τηλεπικοινωνιακά κανάλια που υποφέρουν από απόσβεση ονοματοδοτούνται σύμφωνα με τη μαθηματική μορφή που ακολουθεί η μακροπρόθεσμη κατανομή πιθανότητας της απόσβεσης. Στην περίπτωση των δορυφορικών και επίγειων μικροκυματικών καναλιών που λειτουργούν σε συχνότητες άνω των 10 GHz, έχει αποδειχθεί ότι τέτοιες κατανομές είναι κυρίως οι Lognormal [Matricciani *et. al.*, 2005] και Weibull [Livieratos *et. al.*, 2000] που είναι συμβατές με τα στατιστικά χαρακτηριστικά του φαινομένου της απόσβεσης για την πλειονότητα των γεωκλιματικών περιοχών και τέλος η Gamma, η οποία βρίσκει εφαρμογή κυρίως σε ζεύξεις που λειτουργούν σε τροπικές και υπο-τροπικές περιοχές [Panagoroulos *et. al.*, 2003]. Για το λόγο αυτό, στην παρούσα μελέτη, θα ασχοληθούμε με τη σύνθεση και την αξιοποίηση 1^{ης} τάξης Στοχαστικών Διαφορικών οι οποίες αντανakλούν τα προαναφερθέντα μακροπρόθεσμα στατιστικά χαρακτηριστικά. Η πορεία της σύνθεσης που θα ακολουθήσουμε, περιγράφεται αναλυτικά σε συγκεκριμένη παράγραφο του προηγούμενου κεφαλαίου. Αυτό που πρέπει πάντως να τονίσουμε ιδιαίτερα είναι το εξής: συνήθως, οι τυχαίες διαδικασίες που συναντώνται στην πράξη είναι προσεγγιστικά Μαρκοβιανές –πρόβλημα που εξερευνήσαμε διεξοδικά στο προηγούμενο κεφάλαιο και το οποίο αποτέλεσε την σπερματογόνο ιδέα για την σύλληψη της νέας διαδικασίας σύνθεσης 1^{ης} τάξης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων– αλλά επιπλέον και μη-Εργοδικές. Το τελευταίο ωστόσο, αντιτίθεται στην ιδιότητα των 1^{ης} τάξης Στοχαστικών Διαφορικών

Εξισώσεων ως Εργοδικών τυχαίων διαδικασιών. Στο σημείο όμως αυτό, ο Μηχανικός Τηλεπικοινωνιών ως εφαρμοσμένος επιστήμων προσπαθεί να αναπαραστήσει φυσικά φαινόμενα διαμέσου αφηρημένων Μαθηματικών Εννοιών με τέτοιο τρόπο ώστε οι τελευταίες, να αντανακλούν με τη μέγιστη δυνατή ευκρίνεια το περιεχόμενο των πρώτων.

5.2 Σύνθεση της Κατάλληλης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης 1^{ης} Τάξης για τη Μοντελοποίηση Δορυφορικού Καναλιού (Μέρος-Α)

Η διαδικασία σύνθεσης μιας Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης 1^{ης} τάξης περιγράφεται αναλυτικά στην παράγραφο 4.8 του προηγούμενου Κεφαλαίου. Τα πρώτα τρία βήματα είναι: (i) ο προσδιορισμός, αρχικά σε εμπειρική μορφή και με βάση τα υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα, της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας που αντανακλά τα μακροπρόθεσμα χαρακτηριστικά που ανήκουν στην πραγματική τυχαία διαδικασία που θέλουμε να μοντελοποιήσουμε (βλ. Εξ. (4.55), (4.56)). Στην περίπτωση μας η τυχαία διαδικασία αναφέρεται στην απόσβεση λόγω βροχής και από εδώ και στο εξής οι δυο όροι –απόσβεση λόγω βροχής και τυχαία διαδικασία δηλαδή– θα χρησιμοποιούνται χωρίς διάκριση και θα συμβολίζονται με $X_{act}(t)$. Αμέσως μετά γίνεται η επιλογή της κατάλληλης κατανομής σε αναλυτική μορφή η οποία προσεγγίζει βέλτιστα την εμπειρική μορφή. Ήδη έχουμε αποφανθεί ότι τέτοιες κατανομές είναι οι Lognormal, Weibull και Gamma

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot S_x \cdot x} \exp\left(-\frac{\ln(x) - m_x}{2 \cdot S_x^2}\right) \quad (5.1a)$$

$$p(x) = \frac{v}{w} x^{v-1} e^{-x^v/w} \quad (5.1b)$$

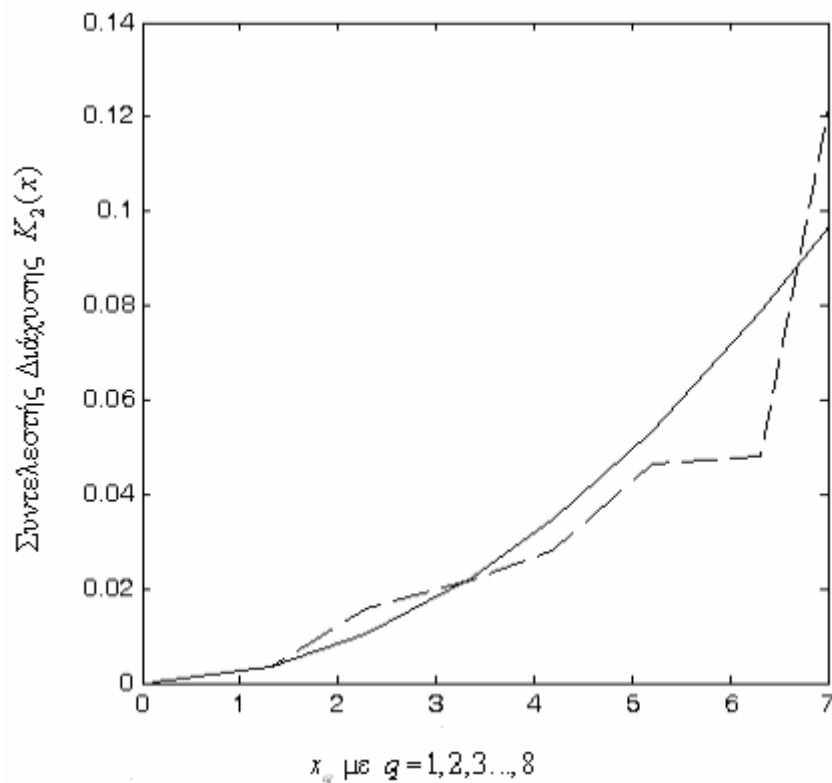
$$p(x) = \frac{w^v}{\Gamma(v)} x^{v-1} e^{-w \cdot x} \quad (5.1c)$$

με τα m_x, S_x να είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της τυχαίας διαδικασίας $\ln(X_{act}(t))$ ενώ οι παράμετροι $(v, w)_{weibull}$ και $(v, w)_{gamma}$ υπολογίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε οι κατανομές στις οποίες ανήκουν να προσεγγίζουν βέλτιστα τα μακροπρόθεσμα στατιστικά χαρακτηριστικά της $X_{act}(t)$. (ii) Ο προσδιορισμός της Φασματικής πυκνότητας με βάση πάλι τα υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα χρησιμοποιώντας το Περιοδόγραμμα (βλ. σχέσεις (4.57)-(4.58)). (iii) Έπεται τέλος, η εύρεση της πιο κατάλληλης συναρτησιακής μορφής για τον συντελεστή διάχυσης

$K_2(x)$. Για το βήμα αυτό, μπορούμε να βασιστούμε σε πορίσματα προηγούμενων ερευνών στις οποίες ο $K_2(x)$ παρουσιάζεται να είναι ανάλογος του τετραγώνου της τυχαίας διαδικασίας δηλαδή να έχει τη συναρτησιακή μορφή [Maseng *et. al.*, 1981]

$$K_2(x) \propto x^2 \quad (5.2)$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιεί την απαίτηση ο συντελεστής διάχυσης να είναι θετικός παντού, πράγμα που προκύπτει εξάλλου από τον τύπο ορισμού του –βλ. σχ. (4.59). Στην παρούσα μελέτη, επαληθεύουμε την Εξ. (5.2) με τη βοήθεια του ορισμού (4.59) και των χρονοσειρών απόσβεσης που προέκυψαν από την εφαρμογή της Τεχνικής Συνθετικής Καταιγίδας στο Κεφάλαιο 3 [Kanelloroulos *et. al.* 2006b]. Πράγματι, έχουμε το σχήμα 5.1



Σχήμα 5.1: Πολυωνυμική παρεμβολή της μορφής $a \cdot x^2$ (συνεχής καμπύλη) στον πειραματικά (βλ. σχ. 4.59) υπολογισμένο συντελεστή διάχυσης (διακεκομμένη καμπύλη). Η x_q με $q = 1, 2, 3, \dots, 8$ είναι μια διαμέριση του πεδίου τιμών της πραγματικής διαδικασίας –απόσβεση σε (dB)– με $\delta x = 1 \text{ dB}$.

Είναι λογικό να απαιτήσουμε η σταθερά αναλογίας του συντελεστή διάχυσης να συνίσταται από ένα γινόμενο δύο σταθερών οι οποίες με τη σειρά τους να εξαρτώνται

αντίστοιχα, από τα μακροπρόθεσμα και τα βραχυπρόθεσμα χαρακτηριστικά της πραγματικής διαδικασίας. Αυτό προτάθηκε από τους Maseng και Bakken [1981] για την περίπτωση μιας Lognormal διαδικασίας όπου η μορφή του συντελεστή διάχυσης θεωρήθηκε ότι δίνεται από τη σχέση

$$K_2(x) = 2 \cdot S_x^2 \cdot d_x \cdot x^2 \quad (5.3)$$

Προφανώς, το γινόμενο $S_x^2 \cdot d_x$ ικανοποιεί την προαναφερθείσα απαίτηση με το d_x να ονομάζεται δυναμική παράμετρος. Αντίστοιχα, ορίζουμε ένα κοινό συντελεστή διάχυσης για τις δυο περιπτώσεις Weibull και Gamma

$$K_2(x) = d_x \cdot \gamma^2 \cdot x^2 \quad (5.4)$$

με το γ να εξαρτάται από τις παραμέτρους της εκάστοτε κατανομής πιθανότητας (βλ. σχ. 5.1b και 5.1c) και το d_x να είναι πάλι η δυναμική παράμετρος. Ορίζουμε κοινό συντελεστή διάχυσης για τις περιπτώσεις Gamma και Weibull διότι όπως αποδεικνύεται, η μια κατανομή μπορεί να προκύψει από την άλλη με κατάλληλους μετασχηματισμούς των παραμέτρων τους. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση που ακολουθεί

$$p_{st}(x) = \frac{C}{\gamma^2} x^{\frac{2\alpha}{\gamma^2}-1} e^{-\frac{x^\beta}{\left(\frac{\beta \cdot \gamma^2}{2}\right)}} \quad (5.5)$$

για κατάλληλα επιλεγμένες τιμές της κανονικοποιητικής σταθεράς C , οδηγεί σε Weibull ή Gamma διαδικασίες όταν ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

- σε Weibull

$$\frac{2\alpha}{\gamma^2} = v, \quad \beta = v, \quad \frac{\beta \cdot \gamma^2}{2} = w \quad (5.6a)$$

- σε Gamma

$$\frac{2\alpha}{\gamma^2} = v, \quad \beta = 1, \quad \frac{\beta \cdot \gamma^2}{2} = \frac{1}{w} \quad (5.6b)$$

από τις οποίες προκύπτει τελικά ο πίνακας

	α	β	γ
Gamma	$\frac{v}{w}$	1	$\sqrt{\frac{2}{w}}$

Weibull	w	v	$\sqrt{\frac{2w}{v}}$
---------	-----	-----	-----------------------

Πίνακας 5.1. Τιμές των συντελεστών α , β , γ για τις Gamma και Weibull στοχαστικές διαδικασίες

Σε αυτή την περίπτωση, με αντικατάσταση των (5.4) και (5.5) στην (4.63), έχουμε το αποτέλεσμα

$$K_1(x) = d_x \cdot x \left(\alpha + \frac{\gamma^2}{2} - x^\beta \right) \quad (5.6c)$$

Παρομοίως με την περίπτωση των Gamma/Weibull, συνάγουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για το συντελεστή κατεύθυνσης στην περίπτωση της Lognormal διαδικασίας

$$K_1(x) = d_x \cdot x \left[S_x^2 - \ln \left(\frac{x}{x_m} \right) \right] \quad (5.7)$$

όπου $\ln x_m = m_x$.

Η Στοχαστική Διαφορική 1^{ης} τάξης που αφορά στη Lognormal διαδικασία και περιγράφεται πλήρως από τους συντελεστές των εξ. (5.3) και (5.7), μπορεί να απλοποιηθεί. Η παρούσα της μορφή, σύμφωνα με τον ορισμό του Στοχαστικού Ολοκληρώματος κατά Ito –βλ. παράγραφο 4.5– είναι η ακόλουθη

$$\dot{x}(t) = d_x \cdot x \left[S_x^2 - \ln \left(\frac{x}{x_m} \right) \right] + \sqrt{2 \cdot d_x} \cdot S_x \cdot x \cdot \xi(t) \quad (5.8)$$

Όμως, με τον M/Σ –τον οποίο ονομάζουμε M – που ακολουθεί

$$y(t) = M[x(t)] = \frac{\ln \left(\frac{x(t)}{x_m} \right)}{S_x} \quad (5.9)$$

οδηγούμαστε σε μια νέα διαδικασία $y(t)$ η οποία σύμφωνα με τη φόρμουλα του Ito – βλ. Παράρτημα Β– πλέον γράφεται ως εξής

$$\dot{y}(t) = -d_x \cdot y(t) + \sqrt{2 \cdot d_x} \cdot \xi(t) \quad (5.10)$$

Η διαδικασία αυτή συναντάται συχνά στη βιβλιογραφία και ονομάζεται Langevin. Είναι προφανές ότι για να επιστρέψουμε στην $x(t)$ πρέπει να εφαρμόσουμε στην $y(t)$ τον αντίστροφο μετασχηματισμό M ο οποίος δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = M^{-1}[y(t)] = x_m \cdot e^{S_x \cdot y(t)} \quad (5.11)$$

Για να συνοψίσουμε, οι Στοχαστικές Διαφορικές 1^{ης} τάξης που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο για να προσομοιώσουμε την πραγματική τυχαία διαδικασία που αντιστοιχεί στην απόσβεση λόγω βροχής είναι της μορφής

$$\dot{x}(t) = K_1(x(t)) + \sqrt{K_2(x(t))} \cdot \xi(t) \quad (5.12)$$

και οι συντελεστές κατεύθυνσης και διάχυσης δίνονται από τις σχέσεις

- Lognormal διαδικασία

$$K_2(x) = 2 \cdot S_x^2 \cdot d_x \cdot x^2 \quad \text{και} \quad K_1(x) = d_x \cdot x \left[S_x^2 - \ln \left(\frac{x}{x_m} \right) \right]$$

με τη βοήθεια όμως του $M/\Sigma M$ απλοποιούνται στους

$$K_1(y) = -d_x \cdot y \quad \text{και} \quad K_2(y) = 2 \cdot d_x$$

- Gamma/Weibull διαδικασία

$$K_1(x) = d_x \cdot x \left(\alpha + \frac{\gamma^2}{2} - x^\beta \right) \quad \text{και} \quad K_2(x) = d_x \cdot \gamma^2 \cdot x^2$$

με τον πίνακα 5.1 να δίνει τις κατάλληλες τιμές για τις παραμέτρους (α, β, γ) σε κάθε μια από τις δυο περιπτώσεις.

5.3 Αναλυτικοί τύποι για την Συνάρτηση Πυκνότητας Φάσματος και τις Μέσες Τιμές των Χρόνων Διακοπής στην περίπτωση και των τριών Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων 1^{ης} τάξης.

Έχει καταστεί σαφές στην παράγραφο 4.8, ότι τόσο η Συνάρτηση Πυκνότητας Φάσματος όσο και οι Μέσες τιμές των χρόνων διακοπής T_{jd} και T_{ija} που αφορούν στη διαδικασία διάχυσης –τη διαδικασία δηλαδή που περιγράφεται από μια 1^{ης} τάξης Στοχαστική Διαφορική και καλείται να προσομοιώσει μια πραγματική διαδικασία συγκεκριμένων χαρακτηριστικών– είναι ιδιαίτερης σημασίας για την υλοποίηση του αλγορίθμου σύνθεσης. Σε αυτή την παράγραφο, παραθέτουμε τα τελικά αποτελέσματα υπολογισμών που αφορούν στις προαναφερθείσες ποσότητες και για τις τρεις περιπτώσεις που εξετάζουμε. Οι αναλυτικοί υπολογισμοί βρίσκονται στα αντίστοιχα Παραρτήματα.

5.3.1 Lognormal διαδικασία

5.3.1.1 Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας (Spectral Density Function)

Ο Συγκεκριμένος τύπος έχει εξαχθεί αλλού [Panagopoulos *et. al.*, 2002] όπου και αναφέρεται ο αναλυτικός τρόπος υπολογισμού του

$$S_{st}(\omega) = \frac{x_m^2 \cdot \exp(S_x^2)}{\pi \cdot d_x} \cdot \exp\left(-\pi \cdot \frac{\omega}{d_x}\right) \cdot \operatorname{Re} \left\{ |S_x^2|^{j\frac{\omega}{d_x}} \cdot \left(\Gamma\left(-\frac{j\omega}{d_x}\right) - \Gamma\left(-\frac{j\omega}{d_x}, S_x^2\right) \right) \right\} \quad (5.13a)$$

με τις ακόλουθες ασυμπτωτικές προσεγγίσεις για μικρές και μεγάλες συχνότητες αντίστοιχα

$$\text{για } \omega = 0 \quad S_{st}(0) = \frac{1}{d_x} \cdot \frac{x_m^2 \cdot \exp(S_x^2)}{\pi} \{E_i(S_x^2) - \ln(S_x^2) - \gamma\} = \frac{S_{low}}{d_x} \quad (5.13b)$$

$$\text{για } \omega \rightarrow \infty \quad S_{st}(\omega) = \frac{d_x}{\omega^2} \cdot \frac{x_m^2 \cdot S_x^2 \cdot \exp(2 \cdot S_x^2)}{\pi} = \frac{d_x}{\omega^2} S_{high} \quad (5.13c)$$

5.3.1.2 Μέση Τιμή του Χρόνου Διακοπής T_{fd} με παραμέτρους (x_o, x_{th})

Έχουμε ήδη τονίσει ότι για να υπολογίσουμε τα στατιστικά χαρακτηριστικά 1^{ης} τάξης των Χρόνων Διακοπής που ανήκουν στη Lognormal διαδικασία, καταφεύγουμε για ευκολία στη μετασχηματισμένη διαδικασία τύπου Langevin, της Εξ. (5.10). Μπορεί ο μηχανισμός γένεσης της διαδικασίας να αλλάζει ωστόσο, δεδομένου ότι ο Μ/Σ M είναι χρονικά ανεξάρτητος, οι χρόνοι μετάβασης δε μεταβάλλονται. Με άλλα λόγια, τα στατιστικά χαρακτηριστικά του χρόνου μετάβασης T_{fd} από το x_o στο x_{th} για την αρχική διαδικασία, είναι ίδια με τα στατιστικά χαρακτηριστικά του T_{fd} από το y_o στο y_{th} για τη διαδικασία Langevin, όπου

$$(y_o, y_{th}) = M[(x_o, x_{th})] \quad (5.14)$$

Η μέση τιμή του Χρόνου Διακοπής T_{fd} για τη διαδικασία τύπου Langevin, έχει υπολογιστεί στο Παράρτημα Γ, και επαναλαμβάνεται εδώ

$$\begin{aligned} u_{mn}(y_{th}, y_o) &= \frac{1}{d_x} \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\operatorname{Erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{Erfi}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right]_{y_{th}}^{y_o} + \left[\frac{z^2}{2} \cdot {}_pF_q \left[\{1, 1\}, \left\{\frac{3}{2}, 2\right\}, -\frac{z^2}{2} \right] \right]_{y_{th}}^{y_o} \right\} = \\ &= \frac{1}{d_x} E_{mean}(y_{th}, y_o) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Αντίστοιχη μορφή έχει και η μέση τιμή του T_{ifd} -βλ. Παράρτημα Γ.

Για τις Συναρτήσεις Πυκνότητας Φάσματος των δυο διαδικασιών που ακολουθούν, παραθέτουμε αποτελέσματα που βρίσκουν εφαρμογή στους αναλυτικούς τύπους των Εξ. (4.38- 4.39)

5.3.2 Weibull διαδικασία

5.3.2.1 Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας (Spectral Density Function)

$$k = 0 \quad (5.16a)$$

$$\lambda_s = \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} = \frac{w \cdot v}{4} \quad (5.16b)$$

$$h^2(\lambda) = -\frac{1}{2 \cdot i} \frac{(w)^{1-\frac{2}{v}}}{v} \frac{1}{\Gamma(b_1^+ - a_1^+) \cdot \Gamma(1 - a_1^+)} \cdot \frac{(\Pi^+)^2}{\sin(\pi b_1^+)} \quad (5.16c)$$

$$a_1^+ = \frac{3}{2} + i \sqrt{\frac{\lambda}{v \cdot w}} \quad (5.16d)$$

$$b_1^+ = 1 + 2 \cdot i \sqrt{\frac{\lambda}{v \cdot w}}$$

$$\Pi^+ = \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \left[\frac{\Gamma(a_1^+ + \frac{1}{\beta} - 1) \cdot \Gamma(b_1^+ - a_1^+)}{\Gamma(a_1^+) \cdot \Gamma(b_1^+ - a_1^+ + 1 - \frac{1}{\beta})} - \frac{\Gamma(1 - a_1^+) \Gamma(a_1^+ - b_1^+ + \frac{1}{\beta})}{\Gamma(2 - a_1^+ - \frac{1}{\beta}) \cdot \Gamma(a_1^+ - b_1^+ + 1)} \right] \quad (5.16e)$$

Για αποδείξεις βλέπε Παράρτημα Δ.

5.3.2.2 Μέση Τιμή του Χρόνου Διακοπής T_{fd} με παραμέτρους (x_o, x_{th})

$$u_{mn} = 2[S(x) \cdot I(x)]_{x=x_o}^{x=x_{th}} + 2 \int_{x_{th}}^{x_o} S(\xi) \cdot m(\xi) d\xi \quad (5.17)$$

με το συμβολισμό $[f(x)]_{x=a}^{x=b}$ να ισοδυναμεί με τη διαφορά $f(b) - f(a)$ και

$$S(x) = \frac{1}{v \cdot w} \cdot \Gamma\left(-1, -\frac{x^v}{w}\right) \quad (5.18a)$$

$$I(x) = -\frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(1, \frac{x^v}{w}\right) \quad (5.18b)$$

$$\int_{x_{th}}^{x_o} S(\xi) \cdot m(\xi) d\xi = \int_{x_{th}}^{x_o} \frac{1}{2} \frac{1}{w^2} \cdot \Gamma(-1, -\frac{x^v}{w}) \cdot e^{-\frac{x^v}{w}} \cdot x^{v-1} dx \quad (5.18c)$$

Αντίστοιχη μορφή έχει και η μέση τιμή του T_{fd} -βλ. Παράρτημα Ε.

5.3.3 Gamma διαδικασία

5.3.3.1 Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας (Spectral Density Function)

$$k = M \text{ με } M = \max(n \in N : n \leq \frac{v}{2}) \quad (5.19a)$$

$$\lambda_s = \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} = \frac{v^2}{4w} \quad (5.19b)$$

$$h_n^2 = \frac{n!}{(-1)^n} \cdot \frac{\Gamma(2n-v) \cdot \Gamma^2(v+1-2n)}{\Gamma(v-2n) \cdot \Gamma(n-v) \cdot \Gamma(v)} \cdot \frac{1}{w^2} \quad n=1,2,\dots,M \quad (5.19c)$$

$$\lambda_n = -s_n = -n \cdot (n-v) \cdot \frac{1}{w} \quad (5.19d)$$

και επίσης

$$h^2(\lambda) = -\frac{1}{2 \cdot i} (w)^{-1} \frac{1}{\Gamma(v)} \frac{1}{\Gamma(b_1^+ - a_1^+) \cdot \Gamma(1-a_1^+)} \cdot \frac{(\Pi^+)^2}{\sin(\pi b_1^+)} \quad (5.19e)$$

$$a_1^+ = 1 + \frac{v}{2} + i\sqrt{w \cdot \lambda} \quad (5.19f)$$

$$b_1^+ = 1 + 2 \cdot i\sqrt{w \cdot \lambda}$$

$$\Pi^+ = \pi \cdot \cot(\pi \cdot a_1^+) + \pi \cot(\pi \cdot (b_1^+ - a_1^+)) \quad (5.19g)$$

Για αποδείξεις βλέπε Παράρτημα Δ.

5.3.3.2 Μέση Τιμή του Χρόνου Διακοπής T_{fd} με παραμέτρους (x_o, x_{th})

$$u_{mn} = 2[S(x) \cdot I(x)]_{x=x_o}^{x=x_{th}} + 2 \int_{x_{th}}^{x_o} S(\xi) \cdot m(\xi) d\xi \quad (5.20)$$

με το συμβολισμό $[f(x)]_{x=a}^{x=b}$ να ισοδυναμεί με τη διαφορά $f(b) - f(a)$ και

$$S(x) = -(-w)^v \cdot \Gamma(-v, -w \cdot x) \quad (5.21a)$$

$$I(x) = -\frac{(w)^{-v}}{2} \cdot w \cdot \Gamma(v, w \cdot x) \quad (5.21b)$$

$$\int_{x_{th}}^{x_o} S(\xi) \cdot m(\xi) d\xi = \int_{w \cdot x_{th}}^{w \cdot x_o} (-1)^{v+1} \cdot \frac{w}{2} \cdot \Gamma(-v, -y) \cdot e^{-y} \cdot y^{v-1} dy \quad (5.21c)$$

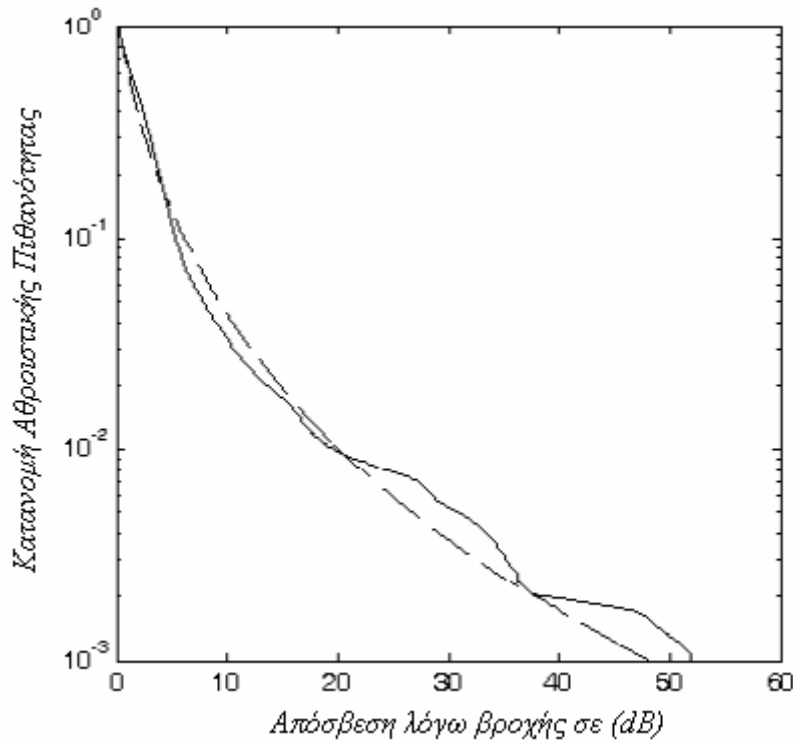
Αντίστοιχη μορφή έχει και η μέση τιμή του T_{ifd} -βλ Παράρτημα Ε.

5.4 Σύνθεση της Κατάλληλης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης 1^{ης} Τάξης για τη Μοντελοποίηση Δορυφορικού Καναλιού (Μέρος-Β).

Πριν αναφερθούμε σε οτιδήποτε έχει να κάνει με σύνθεση, ας περιγράψουμε εν συντομία το διαθέσιμο δείγμα των χρονοσειρών απόσβεσης που θέλουμε να μοντελοποιήσουμε. Σημειωτέον ότι το δείγμα αυτό έχει προκύψει από την εφαρμογή της Τεχνικής της Συνθετικής Καταιγίδας σε υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα ρυθμού βροχόπτωσης [Kanelloroulos *et. al.* 2006a]. Το προκύπτον δείγμα μπορεί να θεωρηθεί εφάμιλλο ενός πειραματικού. Το πλήθος των δειγμάτων –γεγονότων απόσβεσης– που έχουμε κρατήσει ανέρχεται στα 57. Αποκλείσαμε από το αρχικό δείγμα του Κεφαλαίου 3 όλα εκείνα τα γεγονότα των οποίων η μέγιστη τιμή ήταν κάτω από τα 4 dB διότι η ‘στατιστική πληροφορία’ που μας ενδιαφέρει και επιθυμούμε να προσομοιώσουμε, βρίσκεται στις υψηλές τιμές απόσβεσης και τούτο διότι οι χαμηλές τιμές απόσβεσης έχουν ελάχιστη επίδραση στην επίδοση του καναλιού.

Επανερχόμαστε στο κυρίως θέμα και επιλέγουμε κατ’ αρχήν εκείνη την κατανομή πιθανότητας που περιγράφει καλύτερα τα μακροπρόθεσμα στατιστικά χαρακτηριστικά του δείγματος της απόσβεσης. Για το συγκεκριμένο δείγμα, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η βέλτιστη κατανομή –και με διαφορά αποτελεσματικότητας σημαντική από τις υπόλοιπες– είναι η Lognormal και με αυτή θα ασχοληθούμε στο εξής. Τα υπόλοιπα αποτελέσματα που αφορούν τις διαδικασίες Gamma/Weibull μπορεί να μην χρησιμοποιούνται στην παρούσα μελέτη με σκοπό την προσομοίωση μολαταύτα, η σημασία τους δεν αναιρείται. Είναι βέβαιο ότι σε άλλες περιπτώσεις ζεύξεων όπως για παράδειγμα αυτές που λειτουργούν σε τροπικές ή υπο-τροπικές περιοχές, οι κατανομές για τις οποίες γίνεται λόγος, θα αποδειχθούν πιο αντιπροσωπευτικές έναντι της Lognormal οπότε και οι έτοιμοι τύποι της προηγούμενης παραγράφου θα αποβούν εξαιρετικής χρησιμότητας.

Για την περίπτωση της Lognormal κατανομής (5.1a) βρίσκουμε με τη βοήθεια παλινδρόμησης ότι ο βέλτιστες παράμετροι (m_x, S_x^2) έχουν τιμές (0.3524, 1.1401). Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η αντιπροσωπευτικότητα της Lognormal κατανομής ως προς την εμπειρική κατανομή της απόσβεσης.



Σχήμα 5.2: Κατανομή Αθροιστικής Πιθανότητας της Απόσβεσης λόγω βροχής.

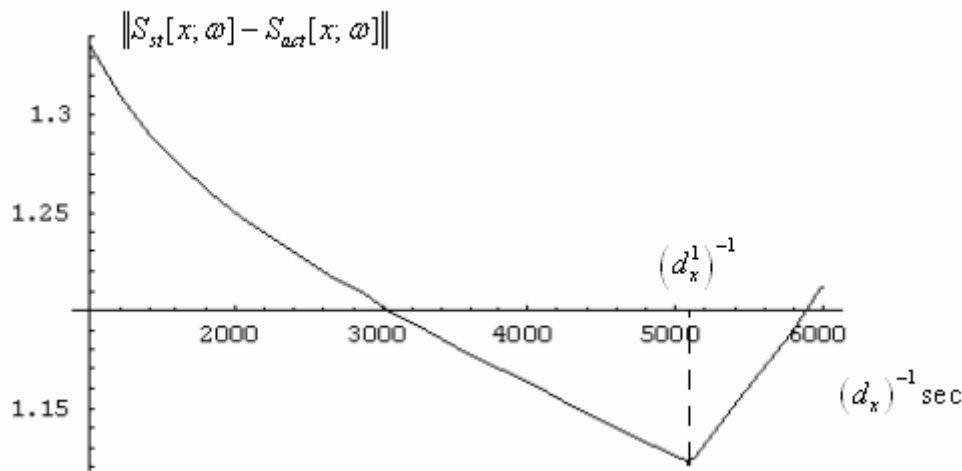
Συνεχής γραμμή: Η Εμπειρική Μορφή της Αθροιστικής Κατανομής

Διακεκομμένη γραμμή: Η προσαρμοσμένη Lognormal Αθροιστική Κατανομή

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό της δυναμικής παραμέτρου d_x . [Θυμίζουμε εν συντομία αυτό που αναλυτικά αναφέρεται στην παράγραφο 4.8 ότι δηλαδή η βέλτιστη τιμή για την δυναμική παράμετρο είναι αυτή που ελαχιστοποιεί τις ποσότητες στις Εξ. (4.71)-(4.72). Οι ποσότητες $S_{st}[x; \omega]$ και $E_{st}[T_{fd}^{(i)}]$ που συναντώνται στις προαναφερθείσες εξισώσεις, υπολογίζονται αντιστοίχως από τις σχέσεις (5.13a) και (5.14-5.15). Η επιλογή των ζευγαριών (x_{th}, x_o) στον υπολογισμό των μέσων τιμών των Χρόνων Διακοπής $E_{st}[T_{fd}^{(i)}]$ γίνεται όπως έχει ήδη συζητηθεί στην τελευταία παράγραφο της ενότητας 4.8.] Προκοινομώντας, αναφέραμε στην παράγραφο 4.8 ότι οι ποσότητες στις εξισώσεις (4.71) και (4.72) δεν είναι δυνατόν να ελαχιστοποιηθούν για την ίδια τιμή της d_x . Είμαστε συνεπώς αναγκασμένοι, να κάνουμε ένα συμβιβασμό. Συγκεκριμένα, βρίσκουμε πρώτα τις δυο τιμές (d_x^1, d_x^2) που ελαχιστοποιούν τις (4.71) και (4.72) αντίστοιχα. Σημειώστε ότι τα (d_x^1, d_x^2) είναι

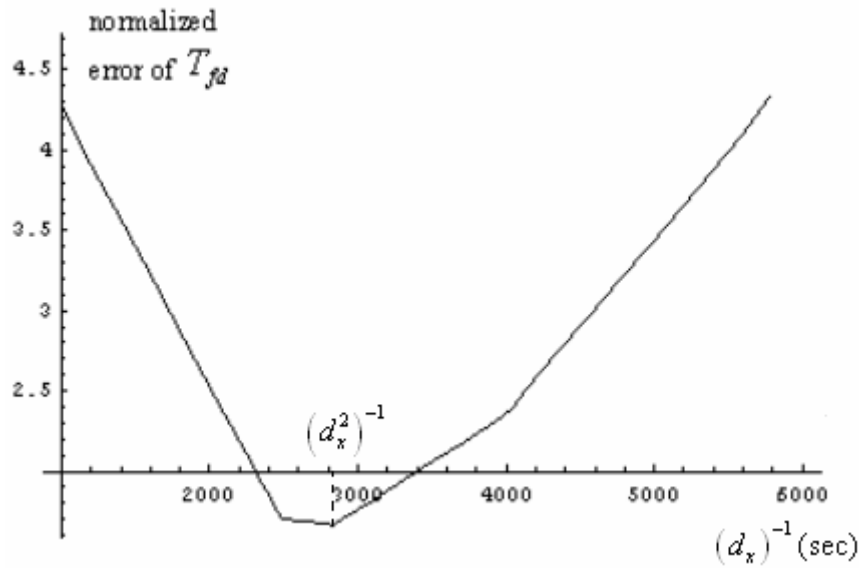
ολικά ελάχιστα εφόσον δεν υπάρχει καμία ένδειξη για την ύπαρξη πολλών τοπικών ελαχίστων. Η απόσταση μεταξύ των (d_x^1, d_x^2) αποτυπώνει μια *πρώτη* εικόνα για την αποδοτικότητα της προσομοίωσης: όσο μικρότερη είναι η εν λόγω απόσταση, τόσο καλύτερα η Στοχαστική Διαφορική αντανακλά το μηχανισμό δημιουργίας της πραγματικής διαδικασίας υπό το πρίσμα βέβαια της επιλογής, του συγκεκριμένου συνόλου παραμέτρων (x_{in}^i, x_o^i) που καθορίζουν την Εξ. (4.72). Είναι λογικό να αναζητήσουμε τη βέλτιστη τιμή για την d_x στο εσωτερικό του διαστήματος που ορίζουν τα (d_x^1, d_x^2) επιλέγοντας τελικά εκείνη την τιμή που αντιστοιχεί σε *κοινό επί τις εκατό (%) ποσοστό απόκλισης των ποσοτήτων στις Εξ. (4.71) και (4.72), από την ελάχιστη τιμή τους*. Ας δούμε την εφαρμογή για το κανάλι που μας αφορά σαν παράδειγμα όλων αυτών των θεωρήσεων.

Στο σχήμα που ακολουθεί αποτυπώνεται η νόρμα της Εξ. (4.71) ως συνάρτηση της αντίστροφης τιμής της δυναμικής παραμέτρου d_x .



Σχήμα 5.3: L_1 νόρμα της Εξ. (4.71)

Η νόρμα παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $(d_x^1)^{-1} = 5093.94 \text{ sec}$ ή σε ευθεία μορφή στο $d_x^1 = 1.96 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$. Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται η ποσότητα της Εξ. (4.72) πάλι ως συνάρτηση του $(d_x)^{-1}$, για τα ζευγάρια παραμέτρων που εμφανίζονται στον Πίνακα 5.2 που ακολουθεί ακριβώς μετά.



Σχήμα 5.4: Το κανονικοποιημένο σφάλμα των χρόνων διακοπής -Εξ. (4.72)

Το ελάχιστο εμφανίζεται στη θέση $(d_x^2)^{-1} = 2832.74 \text{ sec}$ ή σε ευθεία μορφή, στο $d_x^2 = 3.53 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$.

i	1	2	3	4	5	6	7
$x_o^i (dB)$	2	4	6	8	10	12	14
$x_{th}^i (dB)$	1	2	4	6	8	10	12
πλήθος εμφάνισης γεγονότων Χρόνων Διακοπής T_{fd} με παραμέτρους (x_o^i, x_{th}^i)	96	82	57	34	23	18	16
$E_{act} [T_{fd}^{(i)}]$ (secs)	1.9408×10^3	1.2403×10^3	633.7	546	544.7	502	425
διακύμανση	2.6557×10^3	1.4236×10^3	545.9	455	506	556	453

Πίνακας 5.2 Μέσες Τιμές των Χρόνων Διακοπής T_{fd} για διάφορα ζευγάρια (x_o, x_{th})

Ο πίνακας 5.2 χρειάζεται κάποια επεξηγηματικά σχόλια. Η ανάγνωση του πίνακα γίνεται κατά στήλη. Στη 2^η και 3^η γραμμή, βρίσκονται ζευγάρια των παραμέτρων (x_{th}^i, x_o^i) , ενώ στην 4^η γραμμή, περιέχεται το πλήθος του δείγματος που αφορά στην τυχαία μεταβλητή T_{fd} για τις αντίστοιχες παραμέτρους (x_{th}^i, x_o^i) . Τα εν λόγω δείγματα προέκυψαν από τη στατιστική επεξεργασία των χρονοσειρών απόσβεσης. Στην 5^η και

6^η γραμμή περιέχονται η μέση τιμή του T_{fd} και η αντίστοιχη διακύμανση του κάθε δείγματος, για το συγκεκριμένο ζευγάρι (x_o^i, x_{th}^i) .

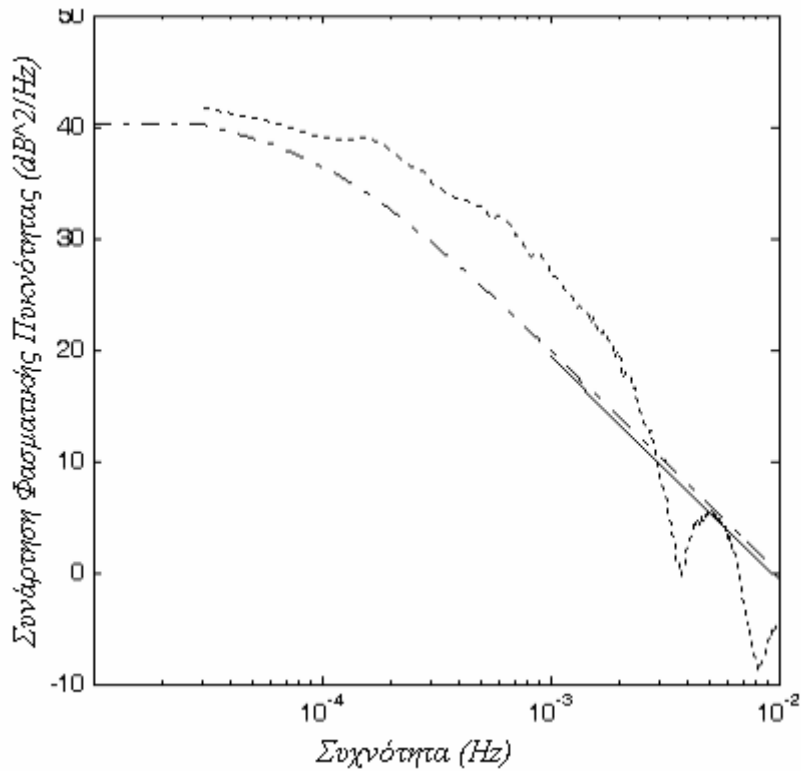
Στο Σχήμα 5.3, παρατηρούμε ότι η μεταβολή της νόρμας είναι ήπια καθώς απομακρυνόμαστε από τη θέση ελαχίστου $(d_x^1)^{-1}$. Αντίθετα, από το Σχήμα 5.4 συνάγεται ότι η μεταβολή του κανονικοποιημένου σφάλματος των χρόνων διακοπής είναι ιδιαίτερα σημαντική, ακόμα και για κοντινές περιοχές γύρω από το $(d_x^2)^{-1}$. Ενδεικτικό είναι ότι η νόρμα της Εξ. (4.71) παρουσιάζει μια μεταβολή της τάξης του 5% από την ελάχιστη τιμή της, στην περιοχή του $(d_x^2)^{-1}$ ενώ αντίστροφα, το κανονικοποιημένο σφάλμα παρουσιάζει αντίστοιχη μεταβολή 80% στην περιοχή του $(d_x^1)^{-1}$. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η βέλτιστη τιμή της δυναμικής παραμέτρου είναι κατά προσέγγιση η d_x^2 .

Η διαδικασία σύνθεσης με τον υπολογισμό της δυναμικής παραμέτρου d_x , έχει ολοκληρωθεί. Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα των παραμέτρων

$$(m_x, S_x, d_x) = (0.3524, 1.1401, 3.53 \times 10^{-4} \text{ Hz}) \quad (5.22)$$

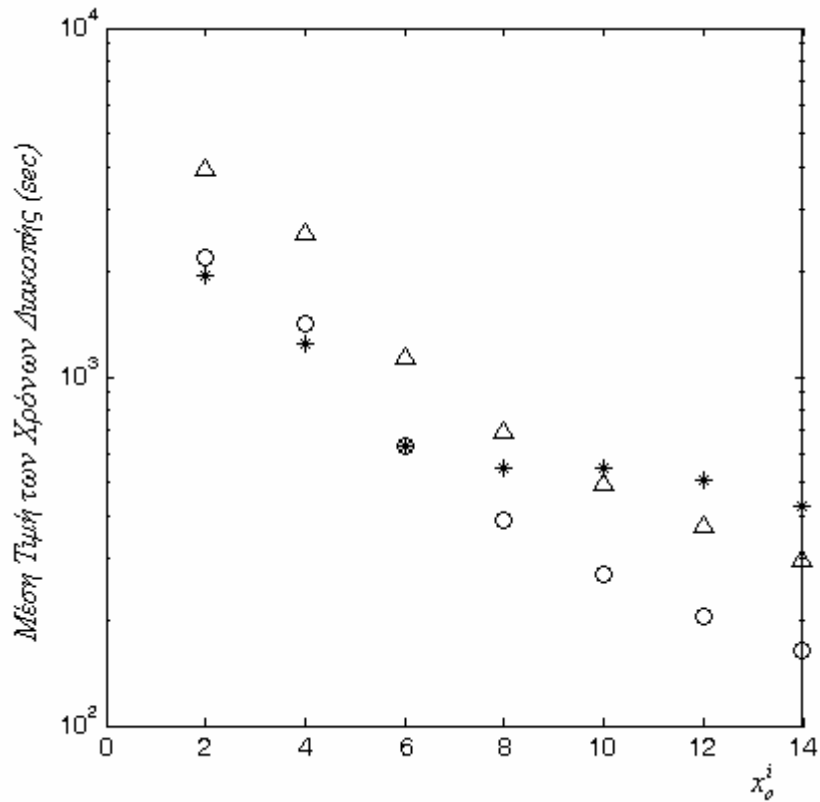
5.5 Αποτελέσματα Προσομοίωσης

Ας εξετάσουμε την αποδοτικότητα της προσομοίωσης της Συνάρτησης Πυκνότητας Φάσματος. Στο σχήμα που ακολουθεί συγκρίνουμε το πειραματικό και το προσομοιούμενο φάσμα.



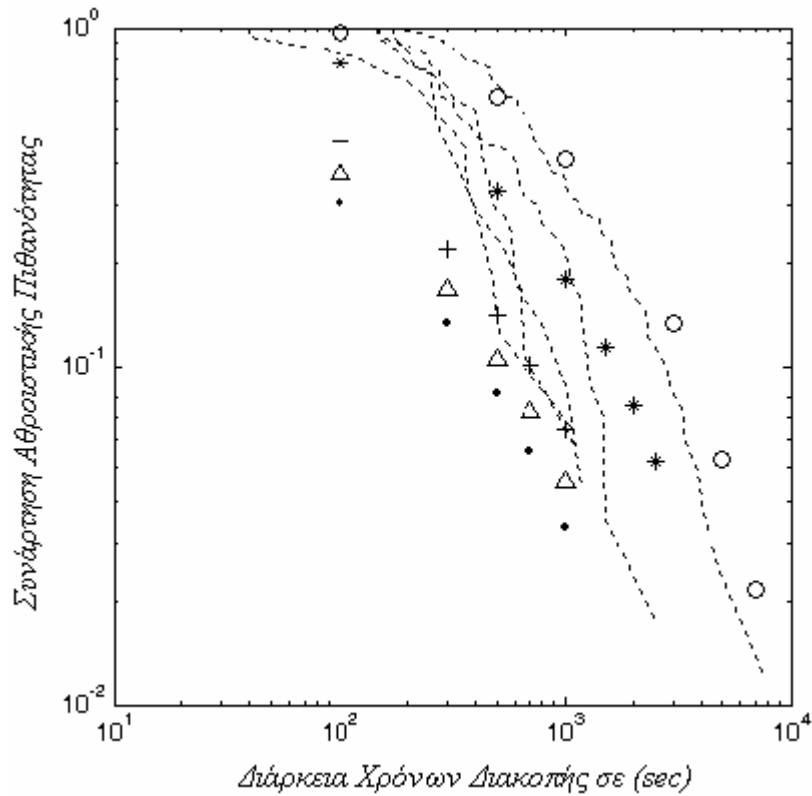
Σχήμα 5.5: πειραματικό (γραμμή με τελείες) και προσομοιούμενο φάσμα (γραμμή με τελείες και παύλες). Η κλίμακα του γραφήματος είναι γραμμική (σε dB) προς λογαριθμική σε (Hz).

Ακολουθεί το γράφημα που συγκρίνει τους πειραματικούς με τους προσομοιούμενους μέσους χρόνους διακοπής για τις περιπτώσεις παραμέτρων (x_{in}^i, x_o^i) που περιέχονται στον Πίνακα 5.2 και για δυο τιμές της δυναμικής παραμέτρου τις d_x^1 και d_x^2 .



Σχήμα 5.6: (αστερίσκοι): πειραματικά δεδομένα
 (κύκλοι) : προσομοίωση για d_x^2
 (τρίγωνα) : προσομοίωση για d_x^1

Τέλος, παραθέτουμε το γράφημα με τις Συναρτήσεις Αθροιστικής Πιθανότητας που αναφέρονται στους χρόνους διακοπής T_{jd} για μερικές περιπτώσεις των παραμέτρων (x_{th}^i, x_o^i) του Πίνακα 5.2 –βλ. σχ (4.44)-(4.49).



Σχήμα 5.7: Οι πειραματικές ή καλύτερα οι Συναρτήσεις Αθροιστικής Πιθανότητας σε εμπειρική μορφή των T_{fd} για κάποια από τα ζευγάρια (x_{th}^i, x_o^i) του Πίνακα 5.2 (διακεκομμένες καμπύλες). Διαβάζοντας από δεξιά προς τα αριστερά έχουμε τις καμπύλες για τα ζευγάρια (2,4), (4,6), (8,10), (10,12), (12,14). Επίσης, οι προσομοιωμένες Συναρτήσεις Αθροιστικής Πιθανότητας των T_{fd} για τα ίδια ζευγάρια (x_{th}^i, x_o^i) του Πίνακα 1 με προηγουμένως. Οι παράμετροι της Στοχαστικής Διαφορικής είναι οι βέλτιστοι $(m_A, S_A, d_A) = (0.3524, 1.1401, 3.53 \times 10^{-4} Hz)$.

- (2,4) : (κύκλοι)
- (4,6) : (αστερίσκοι)
- (8,10) : (συν)
- (10,12) : (τρίγωνα)
- (12,14) : (τελείες)

Οι αναλυτικές εκφράσεις που δίνουν τις προσομοιούμενες Συναρτήσεις Αθροιστικής Πιθανότητας των χρόνων διακοπής βρίσκονται στο Παράρτημα Γ για την Λογαροθμοκανονική διαδικασία που μας αφορά στη συγκεκριμένη προσομοίωση.

Για τις δυο περιπτώσεις των Gamma- Weibull διαδικασιών, αντίστοιχα αποτελέσματα βρίσκονται στο Παράρτημα Ε.

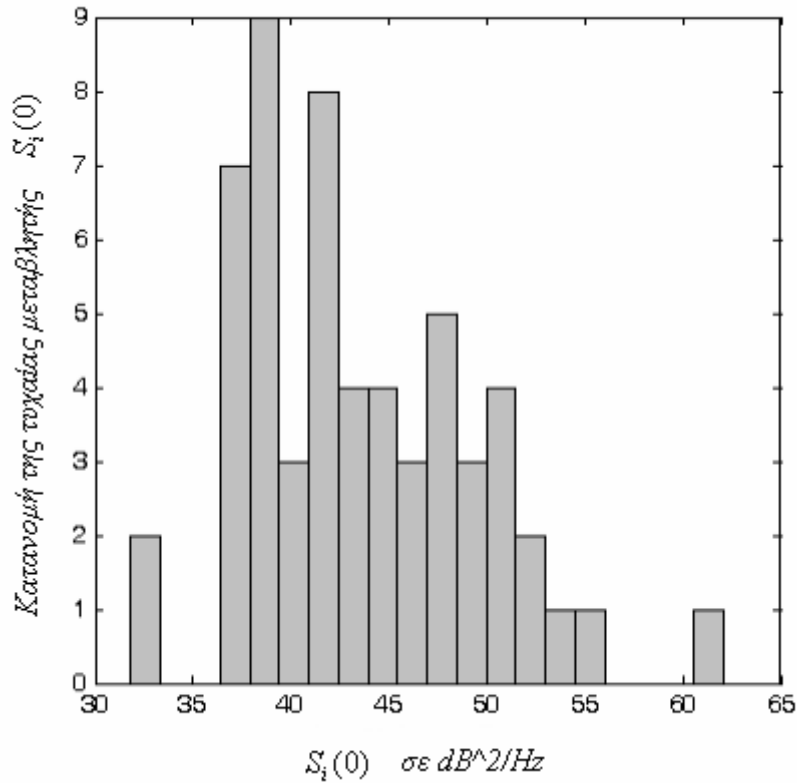
Αξίζει να παρατηρήσουμε το εξής: η αποδοτικότητα της προσομοίωσης ενός χρόνου διακοπής T_{fd} για ένα ζεύγος παραμέτρων (x_{th}, x_o) αντανακλάται ομοιόμορφα τόσο στην προσομοίωση της μέσης τιμής όσο και στην προσομοίωση της αντίστοιχης Συνάρτησης Αθροιστικής Πιθανότητας. Αρκεί κανείς να συγκρίνει τα Σχήματα 5.6 και 5.7. Συγκεκριμένα, για τα ζευγάρια παραμέτρων με μικρές τιμές, η προσομοίωση των μέσων τιμών είναι καλή και αυτό αντανακλάται και στις Συναρτήσεις Αθροιστικής Πιθανότητας. Όσο κινούμαστε προς ‘μεγαλύτερα’ ζεύγη τιμών x_{th} και x_o η προσομοίωση χειροτερεύει τόσο στις μέσες τιμές όσο και στις Συναρτήσεις Αθροιστικής Πιθανότητας.

5.6 Θέματα συζήτησης

Από την μέχρι τώρα ανάλυση, έχουν προκύψει αναπόφευκτα κάποια σημαίνοντα θέματα προς συζήτηση.

- (i) Ένα σημείο το οποίο μένει αδιευκρίνιστο στην διαδικασία σύνθεσης είναι το ακριβές πρότυπο (pattern) παραμέτρων (x_{th}^i, x_o^i) που επιλέγουμε, ώστε να εξασφαλίσουμε την βέλτιστη προσομοίωση των χρόνων διακοπής συνολικά. Στην διαδικασία που εφαρμόσαμε προηγουμένως, επιχειρήσαμε μια προσομοίωση των χρόνων διακοπής σε εκτεταμένη κλίμακα με την επιλογή ζευγαριών παραμέτρων σε γειτονικά διαστήματα εύρους 2 dB τα οποία καλύπτουν συνολικά ένα μεγάλο πεδίο τιμών, από 1 μέχρι τα 14dB. Σύμφωνα με το Σχήμα 5.2 αυτό το σύνολο τιμών εμφανίζεται με πιθανότητα 99% επί του συνολικού πεδίου τιμών. Μια τέτοια αντιμετώπιση ωστόσο μπορεί να είναι ιδιαίτερα φιλόδοξη. Εξάλλου, στις Τεχνικές Άμβλυνης Διαλείψεων ενδιαφερόμαστε για τους χρόνους διακοπής γύρω από ένα συγκεκριμένο κατώφλι απόσβεσης και κατ’ επέκταση, ένα αρκετά δόκιμο σχήμα θα ήταν να κρατούσαμε το x_{th} σταθερό για όλα τα i και στη συνέχεια, να μεταβάλλαμε το x_o από κάποιες τιμές μικρότερες του x_{th} μέχρι κάποιες τιμές μεγαλύτερες του x_{th} .

- (ii) Από το συγκεκριμένο παράδειγμα προσομοίωσης συν-άγεται ότι η βέλτιστη τιμή για τη δυναμική παράμετρος d_x είναι περισσότερο ευαίσθητη στα στατιστικά χαρακτηριστικά των χρόνων διακοπής παρά στη Συνάρτηση Πυκνότητας Φάσματος. Φυσικά για να γενικευτεί το συμπέρασμα αυτό χρειάζεται να γίνουν και άλλα τεστ. Αυτό που μπορεί αβίαστα να ειπωθεί είναι ότι με τη μεθοδολογία σύνθεσης που παρουσιάσαμε, είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε με αρκετά μεγάλη ακρίβεια την επίδοση της προσομοίωσης εν σχέσει με τον πραγματικό μηχανισμό γέννησης της πραγματικής διαδικασίας. Τη δυνατότητα αυτή δεν την είχαμε στις προηγούμενες μεθόδους σύνθεσης
- (iii) Από την άλλη πλευρά, η αποδοτικότητα της προσομοίωσης περιορίζεται από τη μη-εργοδικότητα της πραγματικής τυχαίας διαδικασίας. Η μη-εργοδικότητα αποδεικνύεται από το Σχήμα που ακολουθεί (Σχ. 5.8). Εκεί, παριστάνεται η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής που αντιστοιχεί στην τιμή της Πυκνότητας Φάσματος στη συχνότητα μηδέν και δειγματοληπτείται από κάθε γεγονός απόσβεσης. Με άλλα λόγια εάν συμβολίσουμε με $S_i(f)$ για $i = 1, 2, \dots, 57$ την Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας για κάθε γεγονός, τότε το ακόλουθο σχήμα δίνει την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $S_i(0)$
- (iv) Σε κάποιες περιπτώσεις λειτουργίας ζεύξεων, δε θα υπάρχουν διαθέσιμες μετρήσεις από το κανάλι που θέλουμε να μοντελοποιήσουμε. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Τεχνική της Συνθετικής Καταιγίδας – όπως έγινε στην παρούσα διατριβή– ώστε να πάρουμε κάποιες χρονοσειρές απόσβεσης λόγω βροχής οι οποίες να είναι αντιπροσωπευτικές του πραγματικού φαινομένου. Από αυτές, θα υπολογίσουμε τις πρώτες ενδεικτικές τιμές για τις παραμέτρους της 1^{ης} τάξης στοχαστικής διαφορικής και στη συνέχεια, θα εμπλουτίσουμε το δείγμα μας με μετρήσεις που θα προκύψουν κατά τη λειτουργία της ζεύξης. Από το εμπλουτισμένο δείγμα με την πάροδο του χρόνου, θα προκύψουν πιο αξιόπιστες παράμετροι εισόδου.



Σχήμα 5.8: Κατανομή πιθανότητας για την $S_i(0)$

5.7 Παραγωγή Χρονοσειρών απόσβεσης λόγω βροχής

Η 1^η τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση που έχουμε μπορεί τώρα να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή χρονοσειρών απόσβεσης, αντιπροσωπευτικών του πραγματικού φαινομένου που επιβαρύνει την επίδοση της υπό μελέτης ζεύξης. Για το σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιηθεί η λύση της 1^{ης} τάξης Στοχαστικής Διαφορικής για τη Lognormal διαδικασία –βλ. Παράρτημα Β.

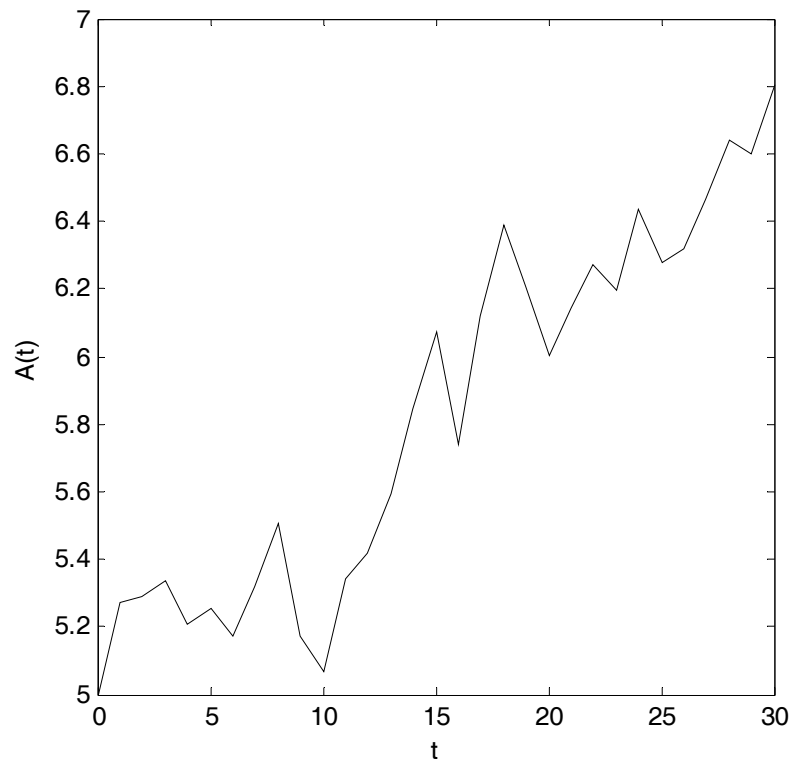
$$Y(t) = \exp(-d_x \cdot t) \cdot \left(y_o + \sqrt{2 \cdot d_x} \int_0^t \exp(d_x \cdot s) \cdot dB_s \right) \quad (5.22)$$

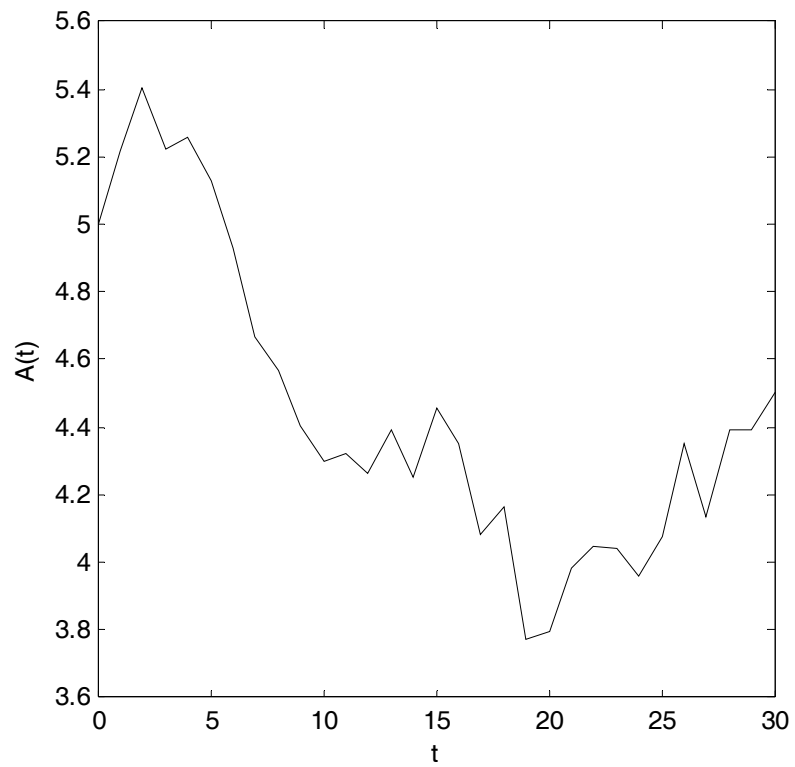
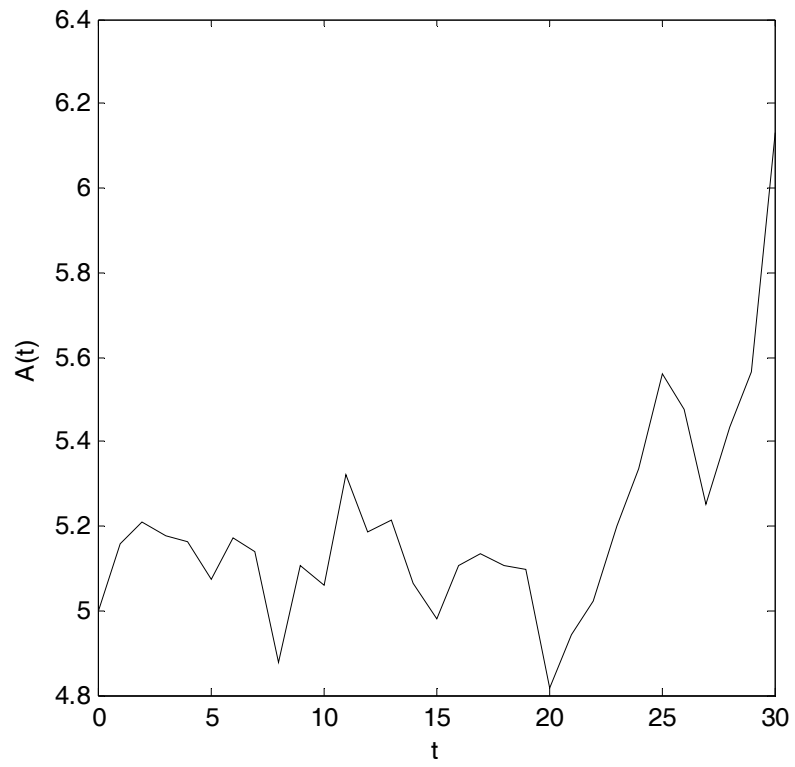
$$y_o = M[x_o] \quad (5.23)$$

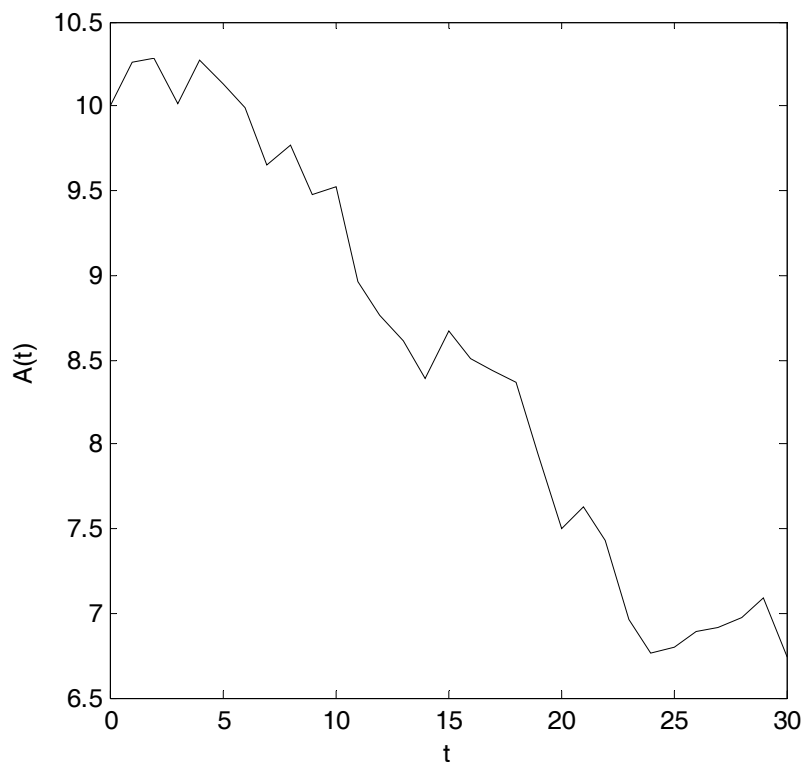
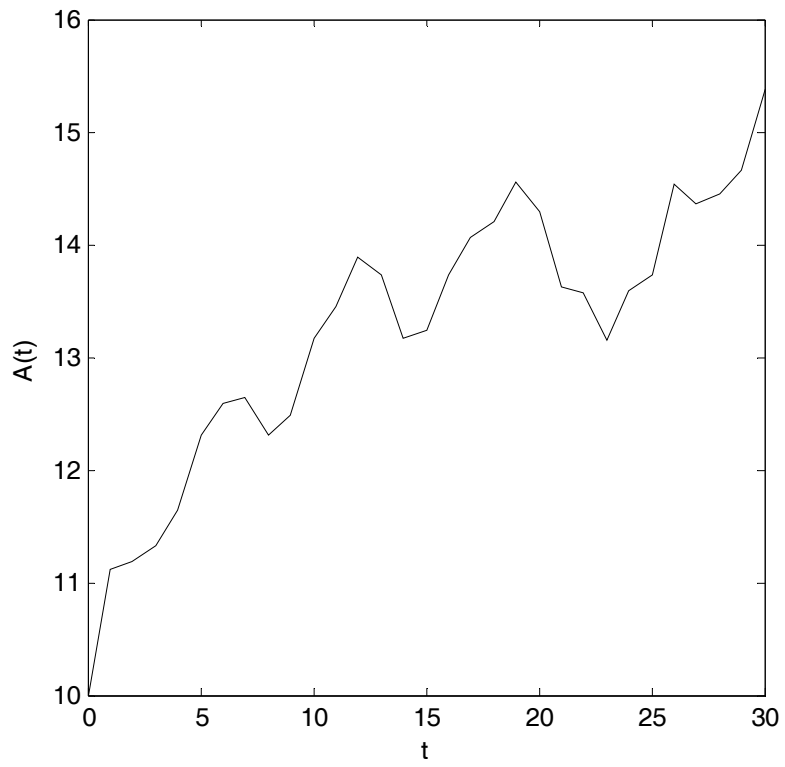
όπου x_o η τιμή που επιβάλλουμε ως αρχική για τις χρονοσειρές απόσβεσης που συνθέτουμε. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον αντίστροφο Μ/Σ

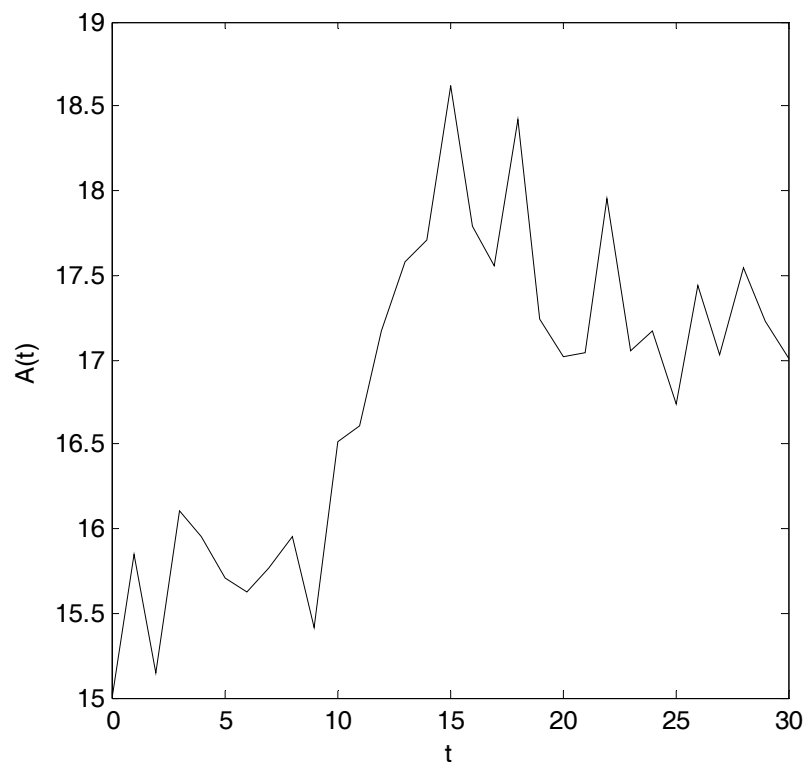
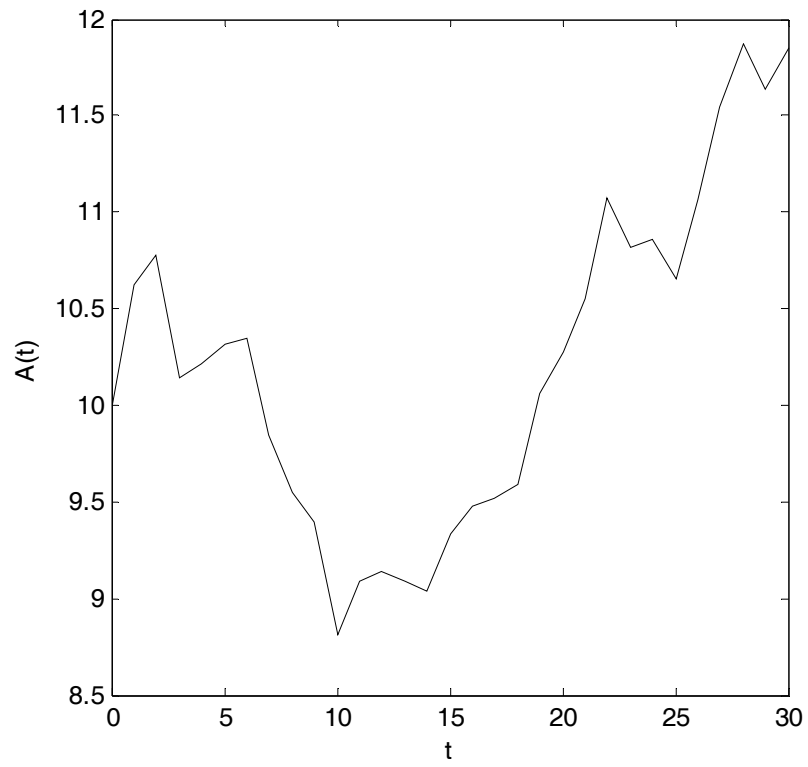
$$X(t) = M^{-1}[Y(t)] = x_m \cdot \exp(Y(t) \cdot S_x) \quad (5.24)$$

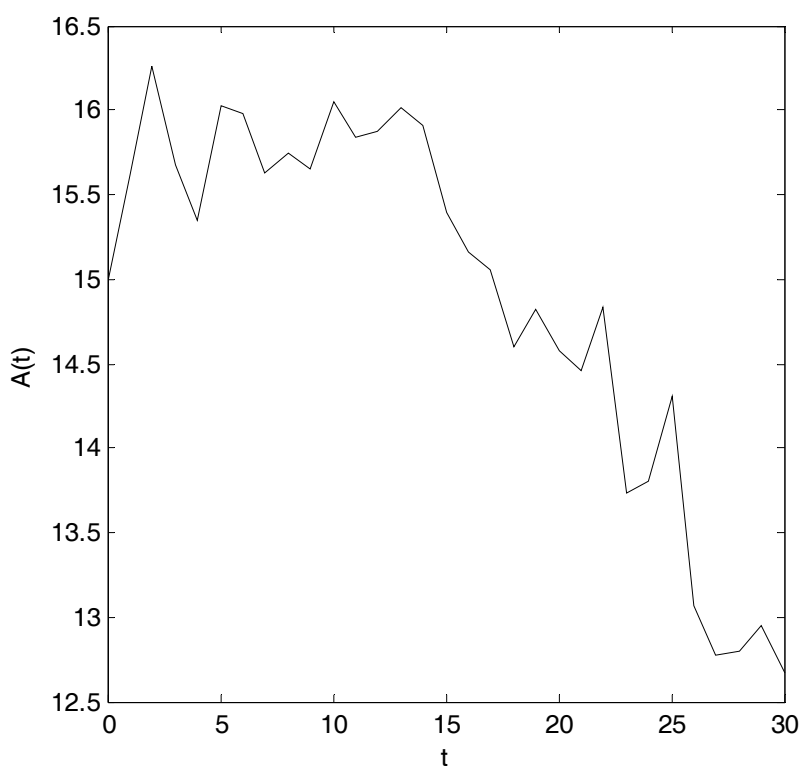
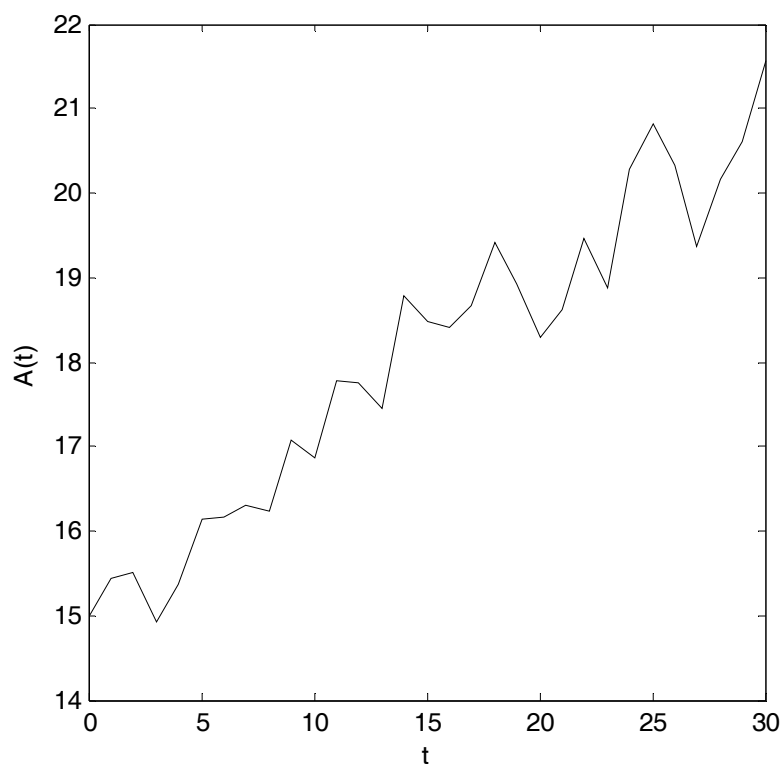
Ακολουθούν εννιά συνολικά παραδείγματα προσομοίωσης της απόσβεσης. Αφορούν τη ζεύξη που μοντελοποιήσαμε στο παρόν κεφάλαιο, έχουν διάρκεια 30 seconds, αρχική τιμή x_0 5, 10, 15 dB και τα διαδοχικά δείγματα των χρονοσειρών απέχουν 1 second.











Σχήμα 5.9: Εννιά δείγματα προσομοιωμένων γεγονότων απόσβεσης διάρκειας 30 seconds με αρχική τιμή –τη χρονική στιγμή 0– 5, 10, 15dB.

Η οικογένεια των σχημάτων που περιέχονται στο Σχ. 5.9, δίνουν το ερέθισμα να συζητήσουμε για τη διπλή υπόσταση των διαδικασιών διάχυσης. Συγκεκριμένα από τη μια, οι διαδικασίες διάχυσης δύναται να μελετηθούν πιθανοθεωρητικά διαμέσου της Εξίσωσης διάχυσης Fokker-Planck, ώστε τελικά να υπολογιστούν σε αναλυτική μορφή συναρτήσεις οι οποίες περιγράφουν τα στατιστικά χαρακτηριστικά 1^{ης} και 2^{ης} τάξης και τα στατιστικά των Χρόνων Διακοπής των εν λόγω διαδικασιών διάχυσης. Από την άλλη, μια διαδικασία διάχυσης δύναται να μελετηθεί δια μέσου της ισχυρής λύσης της 1^{ης} τάξης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης που την περιγράφει. Η λύση αυτή παράγει χρονοσειρές αντιπροσωπευτικές των στατιστικών χαρακτηριστικών της διαδικασίας διάχυσης. Κάθε μια από αυτές τις χρονοσειρές είναι ένα δείγμα, με δειγματικό χώρο που περιέχει άπειρο το πλήθος ανάλογων χρονοσειρών.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα, Πρωτοτυπία της Διατριβής και Προοπτικές για Μελλοντική Έρευνα

6.1 Συμβολή της Διατριβής στην Επιστήμη

Η βασική πρωτότυπη ιδέα της Διατριβής είναι η προσθήκη μιας ακόμα συνθήκης στη διαδικασία Σύνθεσης των 1^{ης} τάξης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων ώστε αυτές να προσομοιώνουν αποτελεσματικά όχι μόνο τα στατιστικά χαρακτηριστικά 1^{ης} και 2^{ης} τάξης μιας πραγματικής στάσιμης Τυχαίας Διαδικασίας βασικής ζώνης όπως γινόταν μέχρι τώρα, αλλά επιπλέον και τα στατιστικά χαρακτηριστικά των Χρόνων Διακοπής. Οι Χρόνοι Διακοπής είναι Τυχαίες μεταβλητές που μοιάζουν με την περισσότερο γνωστή στις Τηλεπικοινωνιακές εφαρμογές Τυχαία Μεταβλητή της Διάρκειας Διάλειψης. Με την τροποποιημένη διαδικασία Σύνθεσης, η 1^{ης} τάξης Στοχαστική Διαφορική εξίσωση αντανακλά καλύτερα σε σχέση με προηγουμένως το μηχανισμό γέννησης της πραγματικής Τυχαίας Διαδικασίας.

Για την υλοποίηση όμως της τροποποιημένης διαδικασίας Σύνθεσης, είναι αναγκαίο προηγουμένως να υπολογίσουμε τα στατιστικά χαρακτηριστικά 2^{ης} τάξης και τα στατιστικά χαρακτηριστικά των Χρόνων Διακοπής που ανήκουν σε μια 1^{ης} τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση.

Για να υπολογίσουμε τα στατιστικά χαρακτηριστικά 2^{ης} τάξης μιας 1^{ης} τάξης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης χρειάζεται πρωτίστως ο υπολογισμός της Μεταβατικής Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας που περιγράφει πιθανοθεωρητικά την εξέλιξη της Διαδικασίας όταν ξεκινά από ένα συγκεκριμένο σημείο. Για το σκοπό αυτό είναι ανάγκη να επιλύσουμε ένα πρόβλημα οριακών/ αρχικών τιμών με πυρήνα μια γραμμική, 2^{ης} τάξης Μερική Διαφορική Εξίσωση η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση Fokker-Planck και συγκαταλέγεται στις Εξισώσεις Διάχυσης. Στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάστηκε ένας αναλυτικός τρόπος επίλυσης του εν λόγω προβλήματος ο οποίος είναι καινοφανής υπό την έννοια ότι έχει μεν παρουσιασθεί στο παρελθόν για την επίλυση προβλημάτων με συνοριακές/αρχικές συνθήκες επί γραμμικών, Μερικών

Διαφορικών Εξισώσεων 2^{ης} τάξης ωστόσο, δεν έχει ποτέ παρουσιαστεί συγκεκριμένα για το πρόβλημα Διάχυσης της Εξίσωσης Fokker-Planck που μας απασχολεί εδώ. Ο εν λόγω τρόπος επίλυσης είναι μια υβριδική μέθοδος που συνδυάζει Μετασχηματισμό Laplace μαζί με θεωρία Τελεστών και τα αποτελέσματα προκύπτουν σε κλειστή μορφή.

Περαιτέρω για την εύρεση της συνάρτησης Φασματικής Πυκνότητας που ανήκει σε μια 1^{ης} Τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση, παράλληλα με την γνωστή αναλυτική μέθοδο επίλυσης, αναπτύχθηκε και μια *γρήγορη υπολογιστική* μέθοδος που παρακάμπτει πολλούς από τους μαθηματικούς σκοπέλους της αναλυτικής μεθόδου. Η μέθοδος αυτή παρουσιάζεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία και θα είναι αρκετά χρήσιμη στους μηχανικούς που δεν είναι ιδιαίτερα εξοικειωμένοι με τη Μιγαδική και τη Συναρτησιακή Ανάλυση αλλά απλώς ζητούν ένα γρήγορο αλγόριθμο για τους υπολογισμούς, ο οποίος θα κάνει τη Σύνθεση των 1^{ης} τάξης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων αρκετά πιο προσιτή.

Τελειώνοντας σε ό,τι αφορά τη Σύνθεση, αναδείξαμε τους Χρόνους Διακοπής οι οποίοι σαν έννοια, αν και ήταν δημοφιλείς στους μαθηματικούς, παρέμεναν ωστόσο άγνωστοι στην κοινότητα των μηχανικών με αποτέλεσμα οι τελευταίοι να αγνοούν τη χρησιμότητά τους στη Σύνθεση των 1^{ης} τάξης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων. Στην παρούσα Διατριβή αναδείξαμε τη χρησιμότητα αυτή και παρουσιάσαμε τον τρόπο υπολογισμού των στατιστικών των Χρόνων Διακοπής για την περίπτωση μιας 1^{ης} τάξης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης.

Στη συνέχεια, παρουσιάστηκαν *τρεις* Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις 1^{ης} τάξης υποψήφια να χρησιμοποιηθούν για τη μοντελοποίηση της απόσβεσης λόγω βροχής που επιβαρύνει δορυφορικά και επίγεια κανάλια που λειτουργούν σε μικροκυματικές συχνότητες. Η επιλογή της μορφής των εν λόγω εξισώσεων στηρίχθηκε σε δυο παραδοχές. Πρώτον, ο συντελεστής διάχυσης και στις τρεις Στοχαστικές Διαφορικές είναι ανάλογος του τετραγώνου της απόσβεσης και δεύτερον, οι μακροπρόθεσμες ή αλλιώς στάσιμες κατανομές που προκύπτουν από κάθε μια από τις τρεις Στοχαστικές Διαφορικές αντιστοιχούν σε ισάριθμες περιπτώσεις κατανομών, οι οποίες έχει πειραματικά επιβεβαιωθεί ότι μοντελοποιούν την απόσβεση σε διάφορες γεωκλιματικές περιοχές: πρόκειται για την Λογαριθμοκανονική, την Gamma και τη Weibull κατανομή. Είναι αξιοσημείωτο ότι η μορφή της Στοχαστικής Διαφορικής για την περίπτωση της

Λογαριθμοκανονικής κατανομής συμπίπτει με αυτή που πρότειναν οι Maseng-Bakken. Ωστόσο, στην παρούσα Διατριβή ο υπολογισμός των παραμέτρων για κάθε Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση γίνεται βάσει του νέου τρόπου Σύνθεσης με αποτέλεσμα να προσομοιώνεται καλύτερα ο μηχανισμός γέννησης της πραγματικής Τυχαίας Διαδικασίας.

Στα πλαίσια της εφαρμογής του νέου τρόπου Σύνθεσης, υπολογίσαμε τα στατιστικά χαρακτηριστικά 2^{ης} τάξης καθώς και τη μέση τιμή μαζί με την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των Χρόνων Διακοπής και για τις τρεις περιπτώσεις των προτεινόμενων Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων. Τα αποτελέσματα δημοσιεύονται για πρώτη φορά στην παρούσα Διατριβή και συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 5, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν τυπολόγιο κατά την διαδικασία της Σύνθεσης.

Τέλος, επιχειρήσαμε να προσομοιώσουμε με τη βοήθεια των προτεινόμενων Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων, την Τυχαία Διαδικασία της απόσβεσης εξαιτίας της βροχής που επιβαρύνει μια πραγματική ζεύξη. Ελλείπει μετρήσεων απόσβεσης προερχόμενες από μια πραγματική ζεύξη, χρησιμοποιήσαμε την Τεχνική της Συνθετικής Καταιγίδας για να προσομοιώσουμε χρονοσειρές απόσβεσης που επιβαρύνουν μια υποθετική δορυφορική ζεύξη μεταξύ ενός επίγειου σταθμού στην Αθήνα με τον δορυφόρο Hellas-sat. Συγκεκριμένα, εισάγαμε σαν είσοδο στην Τεχνική της Συνθετικής Καταιγίδας χρονοσειρές ρυθμού βροχόπτωσης μετρούμενες σημειακά από ένα βροχόμετρο κατά τη χρονική περίοδο από 1/1/2000 μέχρι 31/5/2002 και σαν έξοδο πήραμε τις αντίστοιχες χρονοσειρές απόσβεσης που επιβάρυναν τη ζεύξη. Οι χρονοσειρές αυτές θεωρούνται αντιπροσωπευτικές του πραγματικού φαινομένου και άρα λαμβάνονται κατά προσέγγιση ως πειραματικές.

Με τη βοήθεια αυτών των χρονοσειρών πραγματοποιήθηκαν ταυτόχρονα δυο στόχοι. Από τη μια, στηριχθήκαμε σε αυτές για να υπολογίσουμε τα στατιστικά χαρακτηριστικά 1^{ης} και 2^{ης} τάξης καθώς και τα στατιστικά χαρακτηριστικά των Χρόνων Διακοπής της Τυχαίας Διαδικασίας της απόσβεσης ώστε στην συνέχεια να υπολογίσουμε τις παραμέτρους για την καταλληλότερη από τις τρεις προτεινόμενες Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις 1^{ης} τάξης. Πιο κατάλληλη προέκυψε αυτή που πρότειναν οι Maseng-Bakken που βασίζεται στην Λογαριθμοκανονική κατανομή. Από την άλλη, επεξεργαστήκαμε τις ίδιες χρονοσειρές σε ετήσια, εποχική και ημερήσια βάση, ώστε να

βγάλουμε συμπεράσματα για τον κίνδυνο που διατρέχει η Ποιότητα μιας δορυφορικής ζεύξης που λειτουργεί στην περιοχή της Αττικής, κατά τη διάρκεια των αντίστοιχων χρονικών περιόδων, δηλαδή κατά τη διάρκεια ενός έτους, μιας συγκεκριμένης εποχής (4 περιπτώσεις) και μιας ημέρας. Τα στατιστικά αποτελέσματα που προέκυψαν έχουν ιδιαίτερη σημασία εφόσον είναι η πρώτη φορά που δημοσιεύονται τέτοια στη διεθνή βιβλιογραφία για τον Ελληνικό χώρο.

6.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Ολοκληρώνοντας την Διατριβή ανά χείρας, είναι βέβαιο ότι οδηγείται κανείς αναπόφευκτα σε κάποια νέα ερωτήματα. Τα ερωτήματα αυτά μπορούν να γίνουν ερεθίσματα για μελλοντική έρευνα. Σε αυτή την παράγραφο ταξινομούμε τα νέα ερεθίσματα και τα παρουσιάζουμε.

1. Σε αυτή τη Διατριβή, μεταξύ άλλων, επιχειρήσαμε να βελτιώσουμε τη διαδικασία Σύνθεσης των 1^{ns} τάξης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων ώστε, να αναπαράγεται καλύτερα σε σχέση με προηγουμένως ο μηχανισμός γέννησης της προσομοιούμενης πραγματικής στάσιμης Τυχαίας Διαδικασίας βασικής ζώνης. Ωστόσο, οι Τυχαίες Διαδικασίες που προκύπτουν ως λύσεις μιας 1^{ns} τάξης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης κατέχουν την ισχυρή ιδιότητα Markov, ιδιότητα την οποία οι πραγματικές Τυχαίες Διαδικασίες που επιδιώκουμε να προσομοιώσουμε κατέχουν μόνο κατά προσέγγιση. Προκύπτει συνεπώς ότι διαμέσου της Σύνθεσης προσπαθούμε μάλλον να ‘προβάλλουμε’ όσες περισσότερες ιδιότητες της πραγματικής Τυχαίας Διαδικασίας μπορούμε, επάνω στην Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση και όχι να αναπαραστήσουμε με ακρίβεια τον πραγματικό μηχανισμό γέννησης. Αυτό που μένει να απαντηθεί είναι τα ακόλουθα ερωτήματα. Πρώτον, είναι το σύνολο των Τυχαίων Διαδικασιών που περιγράφονται από μια 1^{ns} τάξης Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση πυκνό (*dense*) στο χώρο των στάσιμων Μαρκοβιανών Τυχαίων Διαδικασιών βασικής ζώνης; Εάν ναι, με πιο τρόπο μπορούμε να βρούμε τη Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση που προσομοιώνει πλήρως μια Τυχαία Διαδικασία Markov; Τα δυο ερωτήματα αυτά είναι καθαρά μαθηματικής φύσεως. Σημειώνεται ότι η έννοια της πυκνότητας ενός συνόλου σε κάποιο άλλο σύνολο, αφορά στην ύπαρξη ή μη για κάθε στοιχείο του δεύτερου, μιας ακολουθίας στοιχείων του πρώτου που να συγκλίνει στο εν λόγω στοιχείο.

2. Επίσης οι πραγματικές Τυχαίες Διαδικασίες που καλούμαστε να προσομοιώσουμε είναι συνήθως μη-εργοδικές. Με απλά λόγια, αυτό σημαίνει ότι σε ένα πλήθος δειγμάτων της πραγματικής Τυχαίας Διαδικασίας, βρίσκονται δείγματα με διαφορετικές στατιστικές ιδιότητες. Στην περίπτωση που έχουμε έναν επαρκή αριθμό δειγμάτων, τότε οι στατιστικές τους ιδιότητες συγκλίνουν κατά την έννοια της μέσης τιμής. Είναι αξιοσημείωτο ότι η έννοια της σύγκλισης κατά μέση τιμή μπορεί να αφορά μια βαθμωτή μεταβλητή όπως η αναμενόμενη τιμή ή μια βαθμωτή συνάρτηση, όπως η Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας.

Από την άλλη, οι Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις 1^{ης} τάξης αντιπροσωπεύουν εργοδικές διαδικασίες. Συνεπώς, εάν αναπαράγουν τα στατιστικά χαρακτηριστικά της πραγματικής Τυχαίας Διαδικασίας όπως αυτά προκύπτουν συγκλίνοντας κατά την έννοια της μέσης τιμής, τότε ενδεχομένως η προσομοίωση να χάνει σε αξιοπιστία, δεδομένου ότι υπάρχουν δείγματα με στατιστικές ιδιότητες αρκετά διαφορετικές από αυτές που προκύπτουν κατά μέση τιμή. Για να αντιμετωπίσουμε τέτοια φαινόμενα, μπορούμε να χωρίσουμε τα δείγματα σε διαφορετικά προφίλ στοχαστικότητας, ώστε να προκύπτουν Τυχαίες Διαδικασίες ως επί μέρους της αρχικής, οι οποίες θα είναι κατά προσέγγιση εργοδικές. Τα κριτήρια διαχωρισμού των δειγμάτων σε προφίλ μπορούν να είναι μαθηματικά είτε φυσικά. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της απόσβεσης λόγω βροχής μαθηματικά κριτήρια είναι ο *χρόνος αυτοσυσχέτισης* –βλ. Εξ. (4.65)–, η τιμή της Συνάρτησης Φασματικής Πυκνότητας στο μηδέν ή η μέση τιμή όπου και τα τρία αναφέρονται σε κάθε δείγμα ξεχωριστά ενώ φυσικά κριτήρια μπορεί να είναι η μέγιστη παρατηρούμενη τιμή ρυθμού βροχόπτωσης ανά δείγμα. Κάθε προφίλ δύναται τότε να μοντελοποιηθεί ξεχωριστά από μια Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση 1^{ης} τάξης.

Θα είχε ενδιαφέρον να υλοποιήσει κανείς την πιο πάνω ιδέα, στην περίπτωση μιας βάσης με μεγάλο πλήθος δειγμάτων (χρονοσειρών) και να εξετάσει εάν η προσομοίωση παρουσιάζει βελτίωση εν σχέσει με το συμβατικό τρόπο όπου η σύνθεση της Στοχαστικής Διαφορικής γίνεται επί του ενιαίου δείγματος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Θα δείξουμε ότι στον χώρο *Hilbert* H_p εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle u, v \rangle_p = \int_0^\infty \frac{u(x) \cdot \bar{v}(x)}{p_{st}(x)} dx \quad (\text{A.1})$$

ο τελεστής L που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 4 –βλ. Εξ. (4.17)– είναι συμμετρικός (*symmetric*) [Stakgold, 1979], δηλαδή

$$\langle Lf, g \rangle_p = \langle f, Lg \rangle_p \quad (\text{A.2})$$

με τις συναρτήσεις f, g να ανήκουν στο πεδίο ορισμού (*Domain*) του τελεστή ο οποίος συμβολίζεται με D_L . Υπενθυμίζουμε ότι το D_L αποτελείται από συναρτήσεις που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες (4.18a-b) και επίσης εκπληρώνουν κάποιες συνθήκες ως προς τη λειότητα τους (για παράδειγμα η δεύτερη παράγωγος είναι συνεχής).

Συνεπώς, ξεκινάμε με το πρώτο μέρος της (A.2) και προχωρούμε ώστε να καταλήξουμε στο δεύτερο. Ας θυμηθούμε εν τω μεταξύ ότι ο τελεστής L μπορεί να γραφεί πιο συνοπτικά ως εξής $L = \frac{\partial}{\partial x} Z$ –βλ. Εξ. (4.7c), (4.17). Έχουμε συνεπώς από το αριστερό

μέρος της (A.2)

$$I = \int_0^\infty \bar{g} \frac{\partial}{\partial x} Z[p_{st}f] dx = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \bar{g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2 p_{st}f] dx + \int_0^\infty \bar{g} \frac{\partial}{\partial x} [K_1 p_{st}f] \quad (\text{A.3})$$

το οποίο μπορεί να γραφτεί

$$\begin{aligned} I = & -\frac{1}{2} \int_0^\infty \bar{g} K_2 p_{st} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f dx - \int_0^\infty \bar{g} \frac{\partial}{\partial x} [K_2 p_{st}] \frac{\partial}{\partial x} f dx - \frac{1}{2} \int_0^\infty \bar{g} f \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2 p_{st}] dx + \\ & + \int_0^\infty \bar{g} K_1 p_{st} \frac{\partial}{\partial x} f dx + \int_0^\infty \bar{g} f \frac{\partial}{\partial x} [K_1 p_{st}] dx \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ο τρίτος και ο πέμπτος όρος απλοποιούνται αφού η p_{st} ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial Z[p_{st}]}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Εάν ολοκληρώσουμε την (A.5) με το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_{x_{\min}}^x$ όπου το x_{\min} είναι το

“κάτω” σύνορο στο οποίο επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες, έστω $x_{\min} = 0$ χωρίς βλάβη

της γενικότητας –βλ. 4.7d– και συνεπώς εκεί ισχύει $Z[p_{st}]_{x=x_{\min}} = 0$ αφού η p_{st} είναι ιδιοσυνάρτηση και άρα ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες στο x_{\min} , τότε λοιπόν, είναι προφανές ότι θα πάρουμε

$$Z[p_{st}] = C_{st} \quad (\text{A.6})$$

όμως δεδομένου και πάλι ότι η p_{st} ως ιδιοσυνάρτηση ικανοποιεί την οριακή συνθήκη στα άκρα όπου επιβάλλουμε μηδενισμό του ρεύματος πιθανότητας (probability flux), έχουμε

$$Z[p_{st}] = 0 \quad \forall x \in (0, \infty) \quad (\text{A.7})$$

και συνεπώς ο δεύτερος όρος ισούται με

$$-2 \int_0^{\infty} \bar{g} K_1 p_{st} \frac{\partial}{\partial x} f dx \quad (\text{A.8})$$

και μπορεί να συνδυαστεί με τον τέταρτο όρο και τελικά να έχουμε

$$I = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \bar{g} K_2 p_{st} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f dx - \int_0^{\infty} \bar{g} K_1 p_{st} \frac{\partial}{\partial x} f dx \quad (\text{A.9})$$

Εάν ολοκληρώσουμε κατά μέλη έχουμε

$$I = -\frac{1}{2} \left[\bar{g} K_2 p_{st} \frac{\partial}{\partial x} f \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{g} K_2 p_{st}) f \right]_0^{\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{g} K_2 p_{st}) f dx - \left[\bar{g} K_1 p_{st} f \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{g} K_1 p_{st}) f dx \quad (\text{A.10})$$

Διαχωρίζουμε τον τρίτο όρο σε δυο μέρη και τελικά παίρνουμε

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} Z[p_{st} \bar{g}] f dx \quad (\text{A.11})$$

στην περίπτωση όπου

$$\left(\bar{g} \frac{\partial}{\partial x} f - \frac{\partial}{\partial x} \bar{g} f \right) \cdot K_2 \cdot p_{st} = 0 \quad (\text{A.12})$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{g} Z[p_{st} f] - Z[p_{st} \bar{g}] f = 0$$

στα άκρα $(0, \infty)$. Εάν θέσουμε $g = \frac{g}{p_{st}}$ $f = \frac{f}{p_{st}}$ παίρνουμε το ζητούμενο ενώ η συνθήκη

που πρέπει να εξασφαλίζεται πλέον είναι η

$$\frac{\bar{g}}{p_{st}} Z[f] - Z[\bar{g}] \frac{f}{p_{st}} = 0 \quad (\text{A.13})$$

επίσης στα άκρα του $(0, \infty)$.

Συμπερασματικά, οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος αρχικών-οριακών συνθηκών με πυρήνα την Fokker-Planck πρέπει να ικανοποιούν την (A.13) ώστε τελικά ο τελεστής L να είναι όντως συμμετρικός.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Στο Παράρτημα αυτό παρουσιάζουμε τις λύσεις για τις Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις που αντιστοιχούν στις τρεις περιπτώσεις που εξετάζουμε στην Διατριβή. Αυτές είναι με τη σειρά που εμφανίζονται στο παρόν Παράρτημα η Gamma, η Weibull και η Λογαριθμοκανονική.

Αρχικά, παρουσιάζουμε τις λύσεις των Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων με τους ακόλουθους συντελεστές κατεύθυνσης και διάχυσης (περίπτωση Gamma, Weibull),

$$K_1(x) = d_x \cdot x \left(\alpha + \frac{\gamma^2}{2} - x^\beta \right) \quad (\text{B.1})$$

$$K_2(x) = d_x \cdot \gamma^2 \cdot x^2 \quad (\text{B.2})$$

Στην περίπτωση του Στοχαστικού Ολοκληρώματος ορισμένου κατά Ito –βλ. Κεφ. 4 για λεπτομέρειες– οι προαναφερθέντες συντελεστές οδηγούν στην ακόλουθη Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση 1^{ης} Τάξης

$$X_t = x_0 + d_x \cdot \int_0^t \left(X_s \cdot \left(\alpha + \frac{\gamma^2}{2} \right) - X_s^{\beta+1} \right) \cdot ds + \sqrt{d_x} \int_0^t \gamma \cdot X_s dB_s \quad (\text{B.3})$$

την οποία μπορούμε να γράψουμε στην πιο απλή μορφή που ακολουθεί

$$X_t = x_0 + \int_0^t (\lambda X_s - d_x \cdot X_s^{\beta+1}) ds + \int_0^t \sigma X_s dB_s \quad (\text{B.4})$$

δεδομένου ότι ισχύουν οι ακόλουθοι Μ/Σ

$$\lambda = d_x \left(\alpha + \frac{\gamma^2}{2} \right) \text{ και } \sigma = \sqrt{d_x} \cdot \gamma \quad (\text{B.5})$$

όπου x_0 είναι η τιμή της X_t στην στιγμή $t=0$. Για να λύσουμε την Στοχαστική Διαφορική 1^{ης} τάξης της Εξ. (B.4) θα ακολουθήσουμε τον αλγόριθμο που περιγράφεται στο [Spiliotis, 2004] τον οποίο αναπαράγουμε εδώ για λόγους πληρότητας.

Έστω η συνεχής τυχαία διαδικασία

$$Y_t = \frac{\sigma^2}{2} t - \sigma \cdot B_t \quad (\text{B.6})$$

στην οποία εμφανίζονται ο χρόνος t , η τυχαία διαδικασία B_t που αντιστοιχεί στην Κίνηση Brown (για την οποία ισχύει $B_0 = 0$) και η παράμετρος σ η οποία έχει ήδη

οριστεί στην Εξ. (B.5). Η νέα διαδικασία που θα προκύψει εάν κάνουμε το M/Σ $f(Y_t)$ όπου f η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$, είναι η

$$F_t = e^{\frac{\sigma^2}{2}t - \sigma \cdot B_t} \quad (\text{B.7})$$

και δίνεται από τη μονοδιάστατη φόρμουλα του Ito [Spiliotis, 2004] η οποία στη γενική περίπτωση ορίζεται ως εξής:

έστω $A_t = \xi + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dB_s, t > 0$ η αρχική τυχαία διαδικασία που θέλουμε να μετασχηματίσουμε εισάγοντάς την ως όρισμα στη συνάρτηση $f(t, x) \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\begin{aligned} f(t, A_t) - f(0, \xi) &= \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, A_s) + a(s) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(s, A_s) + \frac{1}{2} b^2(s) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, A_s) \right] ds + \\ &+ \int_0^t b(s) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(s, A_s) dB_s \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Στην περίπτωση που εξετάζουμε η συνάρτηση f είναι ανεξάρτητη του χρόνου t και επιπλέον $a(s) = \frac{\sigma^2}{2}$, $\xi = 1$ και $b(s) = -\sigma$ οπότε εάν κάνουμε τις αντικαταστάσεις στην (B.8), παίρνουμε την ακόλουθη Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση

$$F_t = 1 + \int_0^t \sigma^2 \cdot F_s ds + \int_0^t -\sigma \cdot F_s \cdot dB_s \quad (\text{B.9})$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε ένα πιο σύνθετο M/Σ για τις δυο διαδικασίες X_t, F_t , ο οποίος προκύπτει πάλι από τη φόρμουλα του Ito που αναφέραμε νωρίτερα μόνο που τώρα, αυτή αφορά ένα χώρο *δυο διαστάσεων*. Συγκεκριμένα, στη γενική περίπτωση δυο διαδικασιών διάχυσης της μορφής

$$A_t^1 = \xi_1 + \int_0^t a_1(s)ds + \int_0^t b_1(s)dB_s, t > 0 \quad (\text{B.10a})$$

$$A_t^2 = \xi_2 + \int_0^t a_2(s)ds + \int_0^t b_2(s)dB_s, t > 0 \quad (\text{B.10b})$$

εάν εφαρμόσουμε τον ακόλουθο M/Σ

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \quad (\text{B.11})$$

τότε παίρνουμε

$$A_t^1 \cdot A_t^2 = \xi_1 \cdot \xi_2 + \int_0^t [a_1(s) \cdot A_s^2 + a_2(s) \cdot A_s^1 + b_1(s) \cdot b_2(s)] ds + \int_0^t [b_1(s) \cdot A_s^2 + b_2(s) \cdot A_s^1] dB_s \quad (\text{B.12})$$

Η εφαρμογή της τελευταίας σχέσης στις δυο Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις F_t και X_t θα μας δώσει ύστερα από κάποια άλγεβρα, το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$F_t \cdot X_t = x_o + \int_0^t (\lambda \cdot X_s - d_x \cdot X_s^{\beta+1}) \cdot F_s \cdot ds \quad (\text{B.13})$$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει Στοχαστικό Ολοκλήρωμα στην τελευταία εξίσωση παρά μόνο ένα ορισμένο ολοκλήρωμα του οποίου η τυχαιότητα έγκειται αποκλειστικά στην ολοκληρωτέα του ποσότητα. Πράγματι, η τυχαία διαδικασία στην (B.6) και η συνάρτηση f επιλέχθηκαν από κοινού έτσι ώστε όταν εφαρμοστεί η δισδιάστατη φόρμουλα του Ίτο (B.12) για τις διαδικασίες των (B.4) και (B.7), ο τελευταίος όρος της (B.12) που αντιστοιχεί σε στοχαστικό ολοκλήρωμα, να μηδενιστεί.

Εάν εκτελέσουμε την ακόλουθη αντικατάσταση $Z_t = X_t \cdot F_t$ τότε παίρνουμε την εξίσωση

$$Z_t = x_o + \int_0^t (\lambda \cdot Z_s - d_x \cdot Z_s^{\beta+1} F_s^{-\beta}) ds \quad (\text{B.14})$$

Παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο και έχουμε

$$Z_t' = \lambda \cdot Z_t - d_x \cdot Z_t^{\beta+1} F_t^{-\beta} \quad (\text{B.15})$$

Η τελευταία σχέση, μπορεί να γραφεί ισοδύναμα

$$e^{-\lambda t} \cdot Z_t' - \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot Z_t = -d_x \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda \cdot \beta t} Z_t^{\beta+1} \cdot e^{\lambda \cdot \beta t} \cdot F_t^{-\beta} \quad (\text{B.16})$$

και στη συνέχεια

$$\frac{(e^{-\lambda t} \cdot Z_t)'}{(e^{-\lambda t} \cdot Z_t)^{\beta+1}} = -d_x \cdot (e^{\lambda t} \cdot F_t^{-1})^\beta \quad (\text{B.17})$$

οπότε από τους κανόνες παραγωγίσης παίρνουμε την ακόλουθη συνήθη διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης

$$\left[(e^{-\lambda t} \cdot Z_t)^{-\beta} \right]' = \beta \cdot d_x \cdot (e^{\lambda t} \cdot F_t^{-1})^\beta \quad (\text{B.18})$$

Η λύση της διαφορικής δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{(e^{-\lambda t} \cdot Z_t)^\beta} = \frac{1}{x_o^\beta} + \beta \cdot d_x \cdot \int_0^t e^{\lambda \cdot \beta \cdot s} \cdot F_s^{-\beta} ds \quad (\text{B.19})$$

Ύστερα από πράξεις παίρνουμε

$$Z_t^\beta = \frac{x_o^\beta \cdot e^{\lambda \cdot \beta \cdot t}}{1 + \beta \cdot d_x \cdot x_o^\beta \int_0^t (e^{\lambda \cdot \beta \cdot s} F_s^{-\beta}) ds} \quad (\text{B.20})$$

και στη συνέχεια με αντικατάσταση της $Z_t = X_t \cdot F_t$ και της $F_t = e^{\frac{\sigma^2}{2}t - \sigma \cdot B_t}$ -βλ. Εξ.

(B.7)- έχουμε διαδοχικά

$$X_t^\beta = \frac{x_o^\beta \cdot e^{\lambda \cdot \beta \cdot t} F_t^{-\beta}}{1 + \beta \cdot d_x \cdot x_o^\beta \int_0^t (e^{\lambda \cdot \beta \cdot s} F_s^{-\beta}) ds} \quad (\text{B.21})$$

$$X_t = \frac{x_o \cdot e^{\sigma \cdot B_t + (\lambda - \frac{\sigma^2}{2})t}}{\left(1 + \beta \cdot d_x \cdot x_o^\beta \int_0^t e^{\beta \cdot \sigma \cdot B_s + \beta \cdot (\lambda - \frac{\sigma^2}{2})s} ds\right)^{1/\beta}} \quad (\text{B.22})$$

Τέλος, απομένει να αντικαταστήσουμε τα λ και σ από την σχέση (B.5) από την οποία προκύπτει εξάλλου

$$\lambda - \frac{\sigma^2}{2} = d_x \cdot \left(\alpha + \frac{\gamma^2}{2}\right) - d_x \frac{\gamma^2}{2} = d_x \cdot \alpha \quad (\text{B.23})$$

και άρα καταλήγουμε στην τελική λύση

$$X_t = \frac{x_o \cdot e^{\sqrt{d_x} \cdot \gamma \cdot B_t + d_x \cdot \alpha t}}{\left(1 + \beta \cdot d_x \cdot x_o^\beta \int_0^t e^{\beta \cdot \sqrt{d_x} \cdot \gamma \cdot B_s + \beta \cdot d_x \cdot \alpha s} ds\right)^{1/\beta}} \quad (\text{B.24})$$

Από τους Μ/Σ για τις παραμέτρους (α, β, γ) του Πίνακα 5.1 εξειδικεύουμε τις λύσεις για κάθε μια από τις περιπτώσεις Gamma και Weibull.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη λύση για την Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση 1^{ης} τάξης, τύπου Langevin με συντελεστές Κατεύθυνσης και Διάχυσης (περίπτωση Λογαριθμοκανονικής Κατανομής)

$$K_1(x) = -d_x \cdot x \quad (\text{B.25})$$

και

$$K_2(x) = 2 \cdot d_x \quad (\text{B.26})$$

Η μορφή της συνεπώς δίνεται από τη σχέση

$$X_t = x_o - d_x \cdot \int_0^t X_s ds + \int_0^t \sqrt{2 \cdot d_x} dB_s \quad (\text{B.27})$$

Εάν θέσουμε $\sigma = \sqrt{2 \cdot d_x}$ τότε έχουμε την ακόμα πιο απλή περίπτωση

$$X_t = x_o - d_x \cdot \int_0^t X_s ds + \int_0^t \sigma \cdot dB_s \quad (\text{B.28})$$

Μια τέτοια Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση 1^{ης} τάξης είναι γραμμική αφού ανήκει στην εξής ‘οικογένεια’

$$X_t = x_o + \int_0^t [b_1(s) \cdot X_s + b_2(s)] \cdot ds + \int_0^t [\sigma_1(s) X_s + \sigma_2(s)] \cdot dB_s \quad (\text{B.29})$$

Δεδομένου ότι ισχύουν κάποιες προϋποθέσεις και υπάρχει λύση για την προαναφερθείσα Στοχαστική Διαφορική –βλ. [Spiliotis, 2004]– τότε αυτή μπορεί να υπολογιστεί με τον ακόλουθο τρόπο.

Έστω η τυχαία διαδικασία διάχυσης που περιγράφεται από την εξίσωση

$$Y_t = \int_0^t \left[b_1(s) - \frac{1}{2} \cdot \sigma_1^2(s) \right] \cdot ds + \int_0^t \sigma_1(s) \cdot dB_s \quad (\text{B.30})$$

Εάν εφαρμόσουμε τη φόρμουλα Ito στην Y_t , για τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$ –βλ. Εξ. (B.8)– τότε έχουμε για την $F_t = e^{-Y_t}$

$$F_t = 1 + \int_0^t [-b_1(s) + \sigma_1^2(s)] \cdot F_s \cdot ds + \int_0^t (-\sigma_1(s) \cdot F_s) \cdot dB_s \quad (\text{B.31})$$

Και στη συνέχεια πάλι από τη φόρμουλα του Ito για το γινόμενο δυο τυχαίων διαδικασιών –βλ. Εξ. (B.12)– έχουμε

$$F_t \cdot X_t = x_o + \int_0^t [b_2(s) - \sigma_1(s) \cdot \sigma_2(s)] \cdot F_s \cdot ds + \int_0^t \sigma_2(s) \cdot F_s \cdot dB_s \quad (\text{B.32})$$

οπότε η τελική λύση ύστερα από αντικατάσταση της $F_t = e^{-Y_t}$ είναι

$$X_t = e^{Y_t} \left(x_o + \int_0^t [b_2(s) - \sigma_1(s) \cdot \sigma_2(s)] \cdot e^{-Y_s} \cdot ds + \int_0^t \sigma_2(s) \cdot e^{-Y_s} \cdot dB_s \right) \quad (\text{B.33})$$

με την Y_t να δίνεται από την Εξ. (B.30)

Η Στοχαστική Διαφορική της Εξ. (B.27) που ζητούμε να λύσουμε προκύπτει ως υποπερίπτωση της διαδικασίας στην (B.29) όταν ισχύει

$$\begin{aligned}
b_2(s) &= \sigma_1(s) = 0 \\
b_1(s) &= -d_x \text{ και} \\
\sigma_2(s) &= \sigma = \sqrt{2 \cdot d_x}
\end{aligned}
\tag{B.34}$$

Τότε η τελική λύση γράφεται

$$X_t = \exp(-d_x \cdot t) \cdot \left(x_o + \sqrt{2 \cdot d_x} \int_0^t \exp(d_x \cdot s) \cdot dB_s \right)
\tag{B.35}$$

Να θυμίσουμε σε αυτό το σημείο ότι για να συνθέσουμε χρονοσειρές απόσβεσης από τη διαδικασία Langevin είναι αναγκαίο να εφαρμόσουμε στη λύση X_t της (B.35), τον αντίστροφο Μ/Σ Μ-βλ. Εξ. (5.11) του κυρίως κειμένου.

Τέλος, παρουσιάζουμε δυο Συναρτήσεις Matlab οι οποίες παράγουν χρονοσειρές απόσβεσης. Η πρώτη αφορά στις περιπτώσεις Gamma και Weibull ενώ η δεύτερη στην περίπτωση Lognormal κατανομής.

Gamma/Weibull

%this is a function for the generation of rain attenuation time series
%input: a,b,c the three paramaters depending on the longterm properties of
%attenuation
%input: d the dynamic parameter in sec^{-1}
%input: T the duration of the attenuation event and dt the time distance between two
successive samples
%input: J a random variable to initiate the state of the generator of gaussian r.v.s with
zero mean value and $\text{std}=1$
%input: x the initial value of the process

```
function Process_GW(a,b,c,d,T,dt,J,x)
```

```
randn('state',J);           % set the state of randn  
N=floor(T/dt);  
%if (floor(N)~=0) error('please put T, dt sao that are devided exactly');  
t = [0,dt:dt:T];           % time vector  
  
dW = [0,sqrt(dt)*randn(1,N)]; % vector with Brownian Increments  $B_{i+1}-B_i$   
B=cumsum(dW);              %Brownian Motion  
xpn=sqrt(d)*c.*B+d*a.*t;   %the exponents  
InTgrand=exp(b.*xpn);      % integrand  
I=dt*cumsum(InTgrand);     % integral  
  
res=x*exp(xpn)./(1+d*b*(x^b)*I).^(1/b);  
plot(t,res,'k--')  
xlabel('t');  
ylabel('X(t)');
```

Οι παράμετροι a, b, c αντιστοιχούν στις (α, β, γ) οι οποίες με τη σειρά τους συνδέονται με τις παραμέτρους των Gamma και Weibull σύμφωνα με τον Πίνακα 5.1.

Ανάλογα με την κατανομή που επιλέγουμε, εκτελούμε τους μετασχηματισμούς του Πίνακα 5.1 και τις προκύπτουσες τιμές των (α, β, γ) τις εισάγουμε στη συνάρτηση Process_GW.

Lognormal

%this is a function for the generation of rain attenuation time series
 %input: m,s the mean and std of $\text{Ln}[a(t)]$
 %input: d the dynamic parameter in sec^{-1}
 %input: T the duration of the attenuation event and dt the time distance between two successive samples
 %input: J a random variable to initiate the state of the generator of gaussian r.v.s with zero mean value and std=1
 %input: Ao the initial value of the process

```
function Process(m,sr,d,T,dt,J,Ao)
```

```

randn('state',J);           % set the state of randn
am=exp(m);
x=1/s*log(Ao/am);           % transform to gaussian process (Langevin case)
N=floor(T/dt);
%if (floor(N)~=0) error('please put T, dt sao that are devided exactly');
t = [0,dt:dt:T];           % time vector
dW = [0,sqrt(dt)*randn(1,N)]; % vector with Brownian Increments  $B_{i+1}-B_i$ 
InTgrand=exp(d*t).*dW;     % integrand
I=cumsum(InTgrand);        % integral
intrm_res=(x+sqrt(2*d)*I).*exp(-d*t);
res=am*exp(s*intrm_res);
plot(t,res,'k-');
xlabel('t');
ylabel('A(t)');
```


Παρατηρούμε απλώς ότι τα m, s αναφέρονται στις παραμέτρους (m_x, S_x) του Κεφαλαίου 5

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Στο παρόν Παράρτημα υπολογίζονται τα χαρακτηριστικά πρώτης τάξης των Χρόνων διακοπής για τη διαδικασία Langevin με συντελεστές κατεύθυνσης και διάχυσης τους

$$K_1(x) = -d_x \cdot x \text{ και } K_2(x) = 2 \cdot d_x \quad (E.1)$$

Αρχικά, για τον υπολογισμό της ροπογεννήτριας συνάρτησης της τυχαίας μεταβλητής τ_h που προσδιορίζεται από την ακόλουθη τριάδα παραμέτρων $(X_{\min}, X_{\max}, x_0)$, καλούμαστε να λύσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών το οποίο περιγράφεται στη γενική περίπτωση από την Εξ. (4.44) του κυρίως κειμένου. Για τους συντελεστές K_1, K_2 της (E.1) έχουμε την ομογενή διαφορική

$$d_x \frac{d^2}{dx^2} u(x) - d_x \cdot x \cdot \frac{d}{dx} u(x) - \lambda \cdot u(x) = 0 \quad (E.2)$$

που συνοδεύεται από τις οριακές συνθήκες

$$u = 1 \text{ στα } x = X_{\min}, x = X_{\max} \quad (E.3)$$

Στο βιβλίο [Polyanin *et. al.*, 1995] και στην περίπτωση 2.1.2.103, βρίσκουμε δυο ανεξάρτητες λύσεις για την ομογενή διαφορική 2^{ης} τάξης που παρουσιάζεται στην (E.2). Συγκεκριμένα έχουμε τις

$$u_1(x) = \Phi(a, b; \frac{x^2}{2}) \quad u_2(x) = \Psi(a, b; \frac{x^2}{2}) \quad (E.4)$$

με τα a και b να δίνονται από τις σχέσεις $a = \frac{\lambda}{2 \cdot d_x}$ και $b = \frac{1}{2}$ και τις Φ, Ψ να είναι οι

συναρτήσεις Kummer 1^{ου} και 2^{ου} είδους [Magnus *et. al.*, 1966] αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \Phi(a, b; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{x^n}{n!} \\ \Psi(a, b; x) &= \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} \Phi(a, b; x) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} x^{1-b} \Phi(a-b+1, 2-b; x) \end{aligned} \quad (E.5)$$

Σημειώνεται ότι, έχουμε δει την συνάρτηση Kummer 1^{ου} είδους να αναπαρίσταται με το σύμβολο $F_{11}(a, b; x)$. Οι δυο συμβολισμοί είναι ισοδύναμοι. Η γενική λύση της (E.2) γράφεται στη μορφή $u(x) = C_1 \cdot u_1(x) + C_2 \cdot u_2(x)$ και οι σταθερές C_1, C_2 υπολογίζονται διαμέσου της λύσης του γραμμικού συστήματος το οποίο προκύπτει από την επιβολή των οριακών συνθηκών της Εξ. (E.3) στην $u(x)$. Ύστερα από απλή Άλγεβρα καταλήγουμε στις σχέσεις

$$C_1 = \frac{u_2(X_{\max}) - u_2(X_{\min})}{u_1(X_{\min}) \cdot u_2(X_{\max}) - u_2(X_{\min}) \cdot u_1(X_{\max})}$$

$$C_2 = \frac{u_1(X_{\min}) - u_1(X_{\max})}{u_1(X_{\min}) \cdot u_2(X_{\max}) - u_2(X_{\min}) \cdot u_1(X_{\max})}$$
(E.6)

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη μορφή που έχει η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής T_{fd} με την τελευταία να προκύπτει ως υποπερίπτωση της τ_h , υπό τη συνθήκη $X_{\max} \rightarrow \infty$. Στην περίπτωση αυτή επίσης θέτουμε $x_{th} = X_{\min}$. Από την ασυμπτωτική προσέγγιση των $\Phi(a, b; x)$ και $\Psi(a, b; x)$ για μεγάλα ορίσματα (x) έχουμε [Magnus *et. al.*, 1966]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-b} \quad (\text{αποκλίνει})$$
(E.7)

και

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi \rightarrow 0 \quad (\text{ταυτοτικά})$$
(E.8)

και τελικά έχουμε το αποτέλεσμα

$$C_1 = 0 \quad \text{and} \quad C_2 = \frac{1}{u_2(x_{th})}$$
(E.9)

Οπότε η ροπογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τον τύπο

$$u(x_{th}, x_o, \lambda) = \frac{u_2(x_o)}{u_2(x_{th})}$$
(E.10)

με την $u_2(x)$ να γράφεται αναλυτικά ως εξής, ύστερα από τις αντικαταστάσεις των παραμέτρων a και b σύμφωνα με τις προαναφερθείσες σχέσεις $a = \frac{\lambda}{2 \cdot d_x}$ και $b = \frac{1}{2}$

$$u_2(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{\lambda}{2 \cdot d_x} + \frac{1}{2})} \Phi(\frac{\lambda}{2 \cdot d_x}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{2}) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{\lambda}{2 \cdot d_x})} \cdot x \cdot \Phi(\frac{\lambda}{2 \cdot d_x} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{2})$$
(E.11)

Σημειώνεται εδώ ότι ο αντίστροφος M/Σ Laplace με όρισμα την ροπογεννήτρια $u(x_{th}, x_o, \lambda)$ -(E.10)- μπορεί να υπολογιστεί μόνο *αριθμητικά*.

Στο 2^ο μέρος του Παραρτήματος αυτού, υπολογίζουμε την μέση τιμή Χρόνου διακοπής τ_h που προσδιορίζεται πάλι από την ακόλουθη τριάδα παραμέτρων $(X_{\min}, X_{\max}, x_o)$. Θυμίζουμε ότι η λύση δίνεται από τη σχέση

$$u_{mn} = 2 \left\{ \frac{S(x_o) - S(X_{\min})}{S(X_{\max}) - S(X_{\min})} \int_{x_o}^{X_{\max}} [S(X_{\max}) - S(\xi)] \cdot m(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{S(X_{\max}) - S(x_o)}{S(X_{\max}) - S(X_{\min})} \int_{X_{\min}}^{x_o} [S(\xi) - S(X_{\min})] \cdot m(\xi) d\xi \right\} \quad (\text{E.12})$$

όπου τα $s(x), S(x), m(x)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$s(x) = \exp \left\{ - \int^x \left[\frac{2 \cdot \mu(\xi)}{\sigma^2(\xi)} \right] d\xi \right\}, \quad S(x) = \int^x s(n) dn, \quad m(x) = \frac{1}{\sigma^2(x) \cdot s(x)} \quad (\text{E.13})$$

και τα μ, σ^2 είναι οι συντελεστές κατεύθυνσης και διάχυσης αντίστοιχα στην περίπτωση που εξετάζουμε –δηλαδή την διαδικασία διάχυσης Langevin ή αλλιώς Ornstein-Uhlenbeck [1930]– τα οποία σύμφωνα με την (E.1) δίνονται από τις σχέσεις $\mu(x) = -d_x \cdot x, \quad \sigma^2(x) = 2 \cdot d_x$. Συνεπώς έχουμε τα αποτελέσματα

$$s(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right), \quad S(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad m(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{2 \cdot d_x} \quad (\text{E.14})$$

Επιπλέον στην (E.12) εμφανίζονται δυο ακόμα ορισμένα ολοκληρώματα τα οποία μπορεί να υπολογιστούν αναλυτικά και τα αποτελέσματα ακολουθούν

$$\int^x m(\xi) d\xi = \frac{1}{2 \cdot d_x} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{E.15})$$

$$\int^x S(\xi) m(\xi) d\xi = \frac{1}{2 \cdot d_x} \frac{x^2}{2} {}_pF_q \left[\{1, 1\}, \left\{ \frac{3}{2}, 2 \right\}, -\frac{x^2}{2} \right] \quad (\text{E.16})$$

Η συνάρτηση ${}_pF_q [a, b, c, d, x]$ είναι γνωστή Υπεργεωμετρική. Στην υποπερίπτωση της τυχαίας μεταβλητής T_{fd} για την οποία ισχύει $X_{\max} \rightarrow \infty$ και $x_{th} = X_{\min}$, η λύση (E.12) μπορεί να απλοποιηθεί εφόσον λάβουμε υπόψη τις ασυμπτωτικές συμπεριφορές για μεγάλα ορίσματα αφενός της συνάρτησης $S(x)$ και

αφετέρου του λόγου $\frac{\int^x S(\xi) m(\xi) d\xi}{S(x)}$. Συγκεκριμένα είναι εύκολο να δείξουμε ότι η

πρώτη αποκλίνει για μεγάλα x αφού ισχύει

$$S(x) \square \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x} \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{E.17})$$

και επίσης ο προαναφερθείς λόγος συγκλίνει στο μηδέν διότι, το ολοκλήρωμα $\int^x S(\xi)m(\xi)d\xi$ με τη σειρά του συγκλίνει για μεγάλα x . Αυτό αποδεικνύεται αυτό από

το αποτέλεσμα της (E.16). Με εύκολη άλγεβρα καταλήγουμε στη λύση

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d_A} \left\{ \frac{\pi}{2} \operatorname{Erfc}\left(\frac{x_o}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left[\operatorname{Erfi}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right]_{x_{th}}^{x_o} + \left[\frac{z^2}{2} \cdot {}_pF_q \left[\{1, 1\}, \left\{ \frac{3}{2}, 2 \right\}, -\frac{z^2}{2} \right] \right]_{x_{th}}^{x_o} \right. \\ & \left. - \frac{\pi}{2} \operatorname{Erfi}\left(\frac{x_{th}}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left[\operatorname{Erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right]_{x_{th}}^{x_o} \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

Ο συμβολισμός $[f(z)]_a^b$ δηλώνει τη διαφορά $f(b) - f(a)$. Εάν χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή σχέση $\operatorname{Erfc}(x) = 1 - \operatorname{Erf}(x)$ τότε από την (E.18) καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} u_{mn}(x_{th}, x_o) &= \frac{1}{d_x} \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\operatorname{Erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{Erfi}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right]_{x_{th}}^{x_o} + \left[\frac{z^2}{2} \cdot {}_pF_q \left[\{1, 1\}, \left\{ \frac{3}{2}, 2 \right\}, -\frac{z^2}{2} \right] \right]_{x_{th}}^{x_o} \right\} = \\ &= \frac{1}{d_x} E_{mean}(x_{th}, x_o) \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Ανάλογα, αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της ροπογεννήτριας συνάρτησης και της μέσης τιμής για την T_{ifd} ωστόσο στην παρούσα μελέτη, δεν θα ασχοληθούμε με αυτό το πρόβλημα αναλυτικά. Απλά θα αναφέρουμε ότι η T_{ifd} αντιμετωπίζεται ως υπό περίπτωση της τ_h όταν $(X_{\min}, X_{\max}, x_o) = (0, x_{th}, x_o)$. Τότε η (E.12) απλοποιείται ύστερα από την αντικατάσταση των (E.14)-(E.16) διότι $S(0) = 0$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Στο Παράρτημα αυτό, παρουσιάζουμε τη λύση του προβλήματος αρχικών-οριακών συνθηκών με πυρήνα τη γραμμική Μερική Διαφορική Εξίσωση της μορφής Fokker-Planck που παρουσιάζεται στις Εξ. (4.7) και (4.11). Η λύση δίνεται για δυο περιπτώσεις: οι συντελεστές κατεύθυνσης και διάχυσης $K_1(x), K_2(x)$ επιλέγονται έτσι ώστε μεταξύ άλλων, η διαδικασία Διάχυσης να παρουσιάζει μακροπρόθεσμες στατιστικές ιδιότητες που να περιγράφονται από τη Gamma ή τη Weibull κατανομή. Η λύση ισοδυναμεί με τη Μεταβατική Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας της Διαδικασίας Διάχυσης που μελετάμε, από την οποία στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη σχετική Συνάρτηση Συσχέτισης και τη Συνάρτηση Πυκνότητας Φάσματος.

Συγκεκριμένα, έχουμε μια διαδικασία διάχυσης με συντελεστή κατεύθυνσης

$$K_1(x) = d_x \cdot x \left(\alpha + \frac{\gamma^2}{2} - x^\beta \right) \quad (\Delta.1)$$

και συντελεστή διάχυσης (*diffusion coefficient*)

$$K_2(x) = d_x \cdot \gamma^2 \cdot x^2 \quad (\Delta.2)$$

Η παράμετρος d_x , η οποία αναφέρεται ως δυναμική παράμετρος στο κυρίως κείμενο της διατριβής, τιμοδοτείται κατάλληλα κατά τη σύνθεση μιας 1^{ης} τάξης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης έτσι ώστε να προσομοιώνονται βέλτιστα τα δυναμικά χαρακτηριστικά μιας πραγματικής στάσιμης, τυχαίας διαδικασίας βασικής ζώνης. Στους υπολογισμούς που ακολουθούν, θα θεωρήσουμε ότι έχει την τιμή ένα (1) χωρίς βλάβη της γενικότητας. Ωστόσο στους τελικούς τύπους θα επιβάλουμε να επανεμφανιστεί η δυναμική παράμετρος με τη βοήθεια απλών βημάτων άλγεβρας.

Οι παράμετροι (α, β, γ) στις (Δ.1-Δ.2) εξαρτώνται από τα μακροπρόθεσμα στατιστικά χαρακτηριστικά της πραγματικής τυχαίας διαδικασίας που θέλουμε να προσομοιώσουμε. Στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε, η πραγματική διαδικασία περιγράφεται μακροπρόθεσμα από μια εκ των Συναρτήσεων Αθροιστικής Πιθανότητας που ακολουθούν :

$$P_{cl}(x) = \frac{\Gamma(v, w \cdot x)}{\Gamma(v)} \quad v, w > 0 : \quad \text{Gamma CDF} \quad (\Delta.3)$$

$$P_{cl}(x) = e^{-x^v/w} \quad v, w > 0 : \quad \text{Weibull CDF} \quad (\Delta.4)$$

Σημειώνεται ότι οι συναρτήσεις $\Gamma(\nu)$ και $\Gamma(\alpha, \gamma)$ είναι οι γνωστές Gamma και incomplete Gamma αντίστοιχα [Abramowitz and Stegun]. Ο πίνακας 5.1 περιέχει τους μετασχηματισμούς των παραμέτρων (α, β, γ) ώστε οι συντελεστές κατεύθυνσης και διάχυσης να οδηγούν σε μια Gamma ή Weibull διαδικασία αντίστοιχα.

Όπως περιγράφεται στο κυρίως κείμενο, εάν εφαρμόσουμε M/Σ Laplace ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή του χρόνου, τότε το πρόβλημα αρχικών/οριακών συνθηκών με μια γραμμική ΜΔΕ 2^{ης} τάξης μετασχηματίζεται σε μια γραμμική, μη-ομογενή, διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης συνοδευόμενη από οριακές συνθήκες (βλ. Εξ. 4.13)

$$-\delta(x - x_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x)p(s, x)] - \frac{\partial}{\partial x} [K_1(x)p(s, x)] - sp(s, x) \quad (\Delta.5)$$

$$Z(s, 0) = Z(s, \infty) = 0 \quad (\Delta.6)$$

όπου Z

$$Z(t, x) = [K_1(x)p(t, x)] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [K_2(x)p(t, x)] \quad (\Delta.7)$$

Ουσιαστικά ζητούμε τη συνάρτηση Green του πιο πάνω προβλήματος συνοριακών τιμών για την περίπτωση των K_1, K_2 που αναφέρθηκαν νωρίτερα. Για το σκοπό αυτό βρίσκουμε πρώτα δυο ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς διαφορικής που αντιστοιχεί στην (Δ.5) και με αντικατάσταση των K_1, K_2 από τις (Δ.1, Δ.2), έχουμε.

$$x^2 p'' + x \left(\frac{2}{\gamma^2} \cdot x^\beta + 3 - \frac{2 \cdot \alpha}{\gamma^2} \right) p' + \left(\frac{2(\beta + 1)}{\gamma^2} \cdot x^\beta + 1 - \frac{2 \cdot (\alpha + s)}{\gamma^2} \right) p = 0 \quad (\Delta.8)$$

Στο βιβλίο [Polyanin *et. al.*, 1995] μπορεί κανείς να βρει τέτοιες λύσεις για πολλές περιπτώσεις γραμμικών διαφορικών 2^{ης} τάξης. Για τη συγκεκριμένη εξίσωση που έχουμε εδώ, οι περιπτώσεις 2.1.141 και 2.1.103 του προαναφερθέντος βιβλίου θα δώσουν δυο ανεξάρτητες λύσεις της μορφής

$$p_{1,2}(x) = x^{\beta \cdot \kappa_{1,2}} F_{11}(a_{1,2}, b_{1,2}; -\frac{2x^\beta}{\beta \gamma^2}) \quad (\Delta.9)$$

όπου η συνάρτηση F_{11} ορίζεται ως εξής $F_{11}(a, b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} x^n$ και είναι γνωστή ως

Confluent Hypergeometric function or Kummer's function of the 1st Kind [Magnus *et.*

al., 1966]. Το σύμβολο $(a)_n$ είναι γνωστό ως σύμβολο Pochhammer και δίνεται από τη σχέση $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$. Οι παράμετροι της συνάρτησης $p_{1,2}$ δίνονται αμέσως μετά

$$\kappa_{1,2} = \frac{-1 + \frac{\alpha}{\gamma^2} \pm \frac{\alpha}{\gamma^2} \sqrt{1 + \frac{2\gamma^2}{\alpha^2} s}}{\beta} \quad a_{1,2} = \kappa_{1,2} + \frac{\beta+1}{\beta} \quad b_{1,2} = 2\kappa_{1,2} + \frac{\beta+2 - \frac{2\alpha}{\gamma^2}}{\beta} \quad (\Delta.10)$$

Επιπλέον, ας δούμε κάποιες χρήσιμες σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων $a_{1,2}$, $b_{1,2}$

$$a_{2,1} = a_{1,2} - b_{1,2} + 1 \quad b_{2,1} = 2 - b_{1,2} \quad (\Delta.11)$$

Εάν εξετάσουμε τις δυο συναρτήσεις $p_{1,2}(x)$ θα διαπιστώσουμε πως συνιστούν τους δυο κλάδους μιας *δίτιμης* συνάρτησης (*double-valued function*), με κλαδικό σημείο (*branching point*) το $s_0 = -\frac{\alpha^2}{2\gamma^2} < 0$. Η κλαδική τομή (*branch-cut*) ξεκινά από το

κλαδικό σημείο και συνεχίζει μέχρι το άπειρο του μιγαδικού επιπέδου χωρίς γενικά να είναι γνωστή η γεωμετρία της στο επίπεδο. Ωστόσο, για πολύ συγκεκριμένους λόγους που αναφέρονται στο κυρίως κείμενο (βλ. Παρ. 4.4), επιλέγουμε εδώ για κλαδική τομή την ημιευθεία των πραγματικών αριθμών που ορίζεται από το ανοιχτό διάστημα. $(-\infty, s_0)$.

Ακολουθως, αναζητούμε δυο συναρτήσεις της μορφής $y = c_1 p_1 + c_2 p_2$ οι οποίες θα αναφέρονται εφεξής ως y_r, y_l και ικανοποιούν την δεξιά και αριστερή συνοριακή συνθήκη (Δ.6) αντίστοιχα, για όλα τα s του μιγαδικού επιπέδου. Σημειώνεται εδώ ότι εάν αντικαταστήσουμε τα K_1, K_2 και διαδοχικά τις λύσεις $p_1(x), p_2(x)$ στην (Δ.7), τότε ύστερα από λίγη Άλγεβρα παίρνουμε το ακόλουθο συγκεντρωτικό αποτέλεσμα και για τις δυο λύσεις

$$Z[p_{1,2}] = x^{\beta \cdot \kappa_{1,2} + 1} \cdot \left(\alpha - \frac{\gamma^2}{2} \cdot (1 + \beta \cdot \kappa_{1,2}) - x^\beta \right) \cdot F_{11}(a_{1,2}, b_{1,2}; -\frac{2x^\beta}{\beta\gamma^2}) + x^{\beta \cdot \kappa_{1,2} + \beta + 1} \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{b_{1,2}} \cdot F_{11}(a_{1,2} + 1, b_{1,2} + 1; -\frac{2x^\beta}{\beta\gamma^2}) \quad (\Delta.12)$$

Ας δούμε την συμπεριφορά του Z για κάθε σύνορο ξεχωριστά.

- $x \rightarrow 0$

$$Z[p_{1,2}] = x^{\beta \cdot \kappa_{1,2} + 1} \cdot \left(\alpha - \frac{\gamma^2}{2} \cdot (1 + \beta \cdot \kappa_{1,2}) - x^\beta + x^\beta \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{b_{1,2}} \right) \quad (\Delta.13)$$

Είναι προφανές ότι οι όροι μέσα στην παρένθεση που περιέχουν το x^β μηδενίζονται και συνεπώς, για να μηδενίζεται όλη η παράσταση όταν $x \rightarrow 0$ πρέπει να ισχύει η ακόλουθη συνθήκη

$$\operatorname{Re}\{\beta \cdot \kappa_{1,2} + 1\} > 0 \quad (\Delta.14)$$

Με αντικατάσταση από τη (Δ.10) έχουμε

$$\beta \cdot \kappa_{1,2} + 1 = \frac{\alpha}{\gamma^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\gamma^2}{\alpha^2} s} \right) \quad (\Delta.15)$$

Το πραγματικό μέρος της πιο πάνω τετραγωνικής ρίζας γράφεται σε πολική μορφή ως εξής

$$\operatorname{Re} \left[\sqrt{1 + \frac{2\gamma^2}{\alpha^2} s} \right] = d^{1/2} \cdot \cos \frac{\phi}{2} \quad (\Delta.16)$$

με το ϕ να ανήκει στο $[-\pi, \pi]$ σύμφωνα με τη βροχοτομή που διαλέξαμε. Συνεπώς, ισχύει και $\frac{\phi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ το οποίο με τη σειρά του συνεπάγεται $\cos \frac{\phi}{2} \geq 0$ και άρα

$$\text{τελικά } \operatorname{Re} \left[\sqrt{1 + \frac{2\gamma^2}{\alpha^2} s} \right] \geq 0 \quad (\Delta.17)$$

Βάσει του τελευταίου είναι προφανές ότι για την περίπτωση της $p_1(x)$ η προαναφερθείσα συνθήκη της Εξ. (Δ.14) ισχύει για όλα τα s . Εξετάζουμε τι συμβαίνει για την $p_2(x)$, δηλαδή ερευνούμε για ποιες περιοχές του μιγαδικού επιπέδου s ισχύει η (Δ.14). Έχουμε

$$1 > \operatorname{Re} \left[\sqrt{1 + \frac{2\gamma^2}{\alpha^2} s} \right] \rightarrow 1 > d \cdot \cos^2 \frac{\phi}{2} \rightarrow 1 > d \cdot \frac{\cos \phi + 1}{2} \quad (\Delta.18)$$

Όμως

$$\cos \phi = \frac{1 + s_r \cdot \frac{2 \cdot \gamma^2}{\alpha^2}}{d} \quad (\Delta.19)$$

όπου $s_r = \operatorname{Re}[s]$ ενώ το αντίστοιχο φανταστικό είναι $s_{im} = \operatorname{Im}[s]$. Με αντικατάσταση της (Δ.19) στην (Δ.18) έχουμε

$$1 > \frac{1 + s_r \cdot \frac{2\gamma^2}{\alpha^2} + d}{2} \rightarrow 1 > s_r \cdot \frac{2\gamma^2}{\alpha^2} + d \rightarrow 1 - s_r \cdot \frac{2\gamma^2}{\alpha^2} > d \quad (\Delta.20)$$

Υπό τη συνθήκη ότι το αριστερό μέλος στην τελευταία εξίσωση είναι θετικό, δηλαδή

$$s_r \leq \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} \quad (\Delta.21)$$

μπορούμε να υψώσουμε τα δυο μέλη στο τετράγωνο

$$\left(1 - s_r \cdot \frac{2\gamma^2}{\alpha^2}\right)^2 > \left(1 + s_r \cdot \frac{2\gamma^2}{\alpha^2}\right)^2 + \left(s_{im} \cdot \frac{2\gamma^2}{\alpha^2}\right)^2 \rightarrow$$

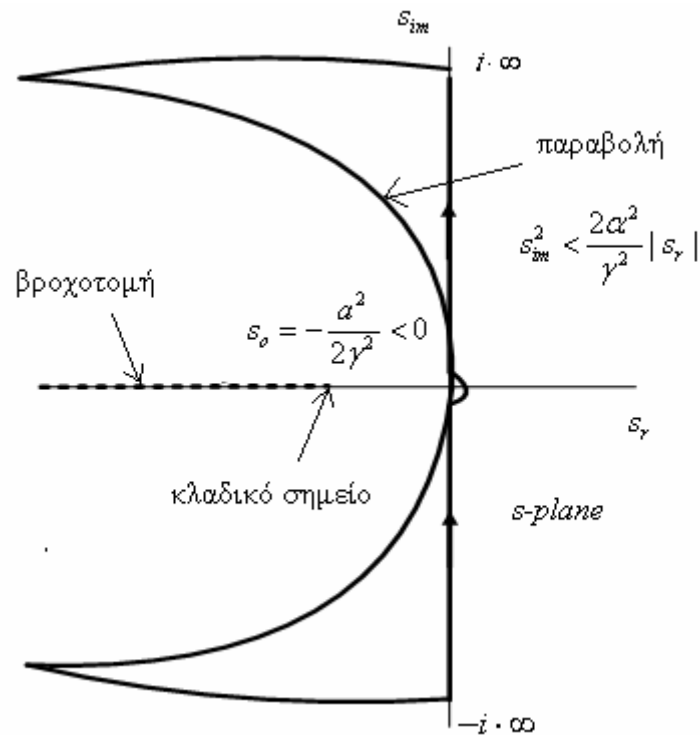
$$-4 \cdot s_r \cdot \frac{2\gamma^2}{\alpha^2} > \left(\frac{2\gamma^2}{\alpha^2}\right)^2 \cdot s_{im}^2 \quad (\Delta.22)$$

και τελικά για $s_r < 0 < \frac{\alpha^2}{2\gamma^2}$ έχουμε την τελική ανίσωση

$$|s_r| > \frac{\gamma^2}{2\alpha^2} s_{im}^2 \text{ ή καλύτερα } s_{im}^2 < \frac{2\alpha^2}{\gamma^2} |s_r| \quad (\Delta.23)$$

Συμπερασματικά η αρχική ανίσωση επαληθεύεται μόνο στο χωρίο του μιγαδικού επιπέδου s που περικλείεται από την πιο πάνω παραβολή στο αριστερό ημιεπίπεδο και για το λόγο αυτό απορρίπτουμε την λύση $p_2(x)$ -βλ. Σχήμα Δ.1. Άρα

$$y_l(x) = p_1(x) \quad (\Delta.24)$$



Σχήμα Δ.1

- $x \rightarrow \infty$

Σε αυτή την περίπτωση χρειαζόμαστε την ασυμπτωτική έκφραση της συνάρτησης Kummer 1^{ου} είδους, για μεγάλα αρνητικά ορίσματα διότι το όρισμα της F_{11} είναι $-\frac{2x^\beta}{\beta\gamma^2}$. Στο βιβλίο [Magnus *et. al.*, 1966] μπορεί κανείς να βρει την ασυμπτωτική προσέγγιση που ζητάμε, καθώς και ένα ολόκληρο κεφάλαιο (pp. 262-295) αφιερωμένο στις ιδιότητες των συναρτήσεων Kummer. Για λόγους πληρότητας παραθέτουμε εδώ ξανά την ασυμπτωτική προσέγγιση

$$F_{11}(a, b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \cdot (-x)^{-a} \quad \text{για } x \rightarrow -\infty \quad (\Delta.25)$$

Με προσεκτική αντικατάσταση της προηγούμενης σχέσης στην (Δ.12) έχουμε

$$\begin{aligned} Z[p_{1,2}] = & \frac{\Gamma(b_{1,2})}{\Gamma(b_{1,2} - a_{1,2})} \cdot \left(\frac{2x^\beta}{\beta\gamma^2}\right)^{-a_{1,2}} \cdot x^{\beta \cdot \kappa_{1,2} + 1} \cdot \left(a - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2} \cdot \beta \cdot \kappa_{1,2} - x^\beta\right) + \\ & + \frac{a_{1,2}}{b_{1,2}} \frac{\Gamma(b_{1,2} + 1)}{\Gamma(b_{1,2} - a_{1,2})} \cdot \left(\frac{2x^\beta}{\beta\gamma^2}\right)^{-a_{1,2} - 1} \cdot x^{\beta \cdot \kappa_{1,2} + \beta + 1} \end{aligned} \quad (\Delta.26)$$

Εάν λάβουμε υπόψη μας την ιδιότητα της συνάρτησης

$$\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s) \quad s \neq 0, 1, 2, \dots, -n \quad (\Delta.27)$$

τότε μετά από Άλγεβρα καταλήγουμε

$$Z[p_{1,2}] = \frac{\Gamma(b_{1,2})}{\Gamma(b_{1,2} - a_{1,2})} \cdot \left(\frac{2}{\beta\gamma^2}\right)^{-a_{1,2}} \cdot x^{-a_{1,2} \cdot \beta + \beta \cdot \kappa_{1,2} + 1} \cdot \left(a - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2} \cdot \beta \cdot \kappa_{1,2} + a_{1,2} \cdot \frac{\beta\gamma^2}{2} - x^\beta\right) \quad (\Delta.28)$$

Παράλληλα, από την Εξ. (Δ.10) έχουμε ότι

$$-a_{1,2} \cdot \beta + \beta \cdot \kappa_{1,2} + 1 = -\beta$$

και άρα τελικά

$$Z[p_{1,2}] \square - \left(\frac{2}{\beta\gamma^2}\right)^{-a_{1,2}} \cdot \frac{\Gamma(b_{1,2})}{\Gamma(b_{1,2} - a_{1,2})} \quad \text{δηλαδή μια σταθερά} \quad (\Delta.29)$$

Συνεπώς η λύση y_r είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των δυο λύσεων $p_1(x), p_2(x)$ της μορφής

$$y_r = p_1(x) + C \cdot p_2(x) \quad (\Delta.30)$$

όπου η σταθερά C δίνεται από την ακόλουθη σχέση ώστε να ικανοποιείται η οριακή συνθήκη στο άπειρο για όλα τα s του μιγαδικού επιπέδου.

$$C = -\left(\frac{2}{\beta\gamma^2}\right)^{1-b_1} \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(1-a_1)}{\Gamma(b_1-a_1)\Gamma(2-b_1)} \quad (\Delta.31)$$

Για λόγους ευκρίνειας επαναλαμβάνουμε την τελική μορφή των λύσεων

$$\begin{aligned} y_l(x) &= p_1(x) = x^{\beta \cdot \kappa_1} F_{11}\left(a_1, b_1; -\frac{2x^\beta}{\beta\gamma^2}\right) \\ y_r(x) &= p_1(x) + C \cdot p_2(x) = x^{\beta \cdot \kappa_1} F_{11}\left(a_1, b_1; -\frac{2x^\beta}{\beta\gamma^2}\right) + C \cdot x^{\beta \cdot \kappa_2} F_{11}\left(a_1 - b_1 + 1, 2 - b_1; -\frac{2x^\beta}{\beta\gamma^2}\right) \end{aligned} \quad (\Delta.32)$$

Θυμίζουμε ότι η συνάρτηση Green που αναζητούμε δίνεται από τον τύπο (4.14) τον οποίο επαναλαμβάνουμε εδώ

$$\begin{aligned} G(x, x_o, s) &= -2 \frac{y_l(x)y_r(x_o)}{W(x_o)K_2(x_o)} \quad 0 \leq x \leq x_o < \infty \\ G(x, x_o, s) &= -2 \frac{y_l(x_o)y_r(x)}{W(x_o)K_2(x_o)} \quad 0 < x_o < x < \infty \end{aligned} \quad (\Delta.33)$$

Απομένει να υπολογίσουμε την ορίζουσα Wronskian $W(x)$ μεταξύ των συναρτήσεων y_l, y_r . Η διαδικασία αυτή απαιτεί πολύ προσοχή στην εκτέλεση των πράξεων. Χρήσιμες είναι οι σελίδες 270 και 263 του [Magnus *et. al.*, 1966] όπου και υπολογίζονται οι ορίζουσες Wronskian για διάφορες συναρτήσεις που περιλαμβάνουν τη συνάρτηση Kummer. Το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$W(x) = -\beta \cdot C \cdot (b_1 - 1) \cdot x^{\frac{2\alpha}{\gamma^2} - 3} e^{-\frac{2x^\beta}{\beta\gamma^2}} \quad (\Delta.34)$$

Ας συνοψίσουμε: έχουμε υπολογίσει τη συνάρτηση Green του προβλήματος που παρουσιάζεται από τις Εξ. (Δ.1- Δ.2, Δ.5- Δ.6). Από αυτή –τη συνάρτηση Green– μπορούμε να υπολογίσουμε για τον τελεστή L –Εξ. (4.17)– που συνοδεύεται από τις οριακές συνθήκες των Εξ. (4.18), τόσο τα ζευγάρια ιδιοτιμών-ιδιοσυναρτήσεων του διακριτού φάσματος όσο και το εύρος τιμών του συνεχούς φάσματος και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις. Ο ακριβής τρόπος που γίνονται αυτοί οι υπολογισμοί περιγράφεται αναλυτικά στο κυρίως κείμενο (βλ. Παρ. 4.4). Εδώ παρουσιάζουμε την εφαρμογή στην περίπτωση μιας Gamma ή Weibull τυχαίας διαδικασίας.

Στο Σχήμα Δ.2 που ακολουθεί, παρουσιάζεται η βροχοτομή και ο δρόμος ολοκλήρωσης του αντίστροφου Μ/Σ Laplace που εφαρμόζουμε στη συνάρτηση Green για να υπολογίσουμε την τελική λύση (Μεταβατική Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας). Θυμίζουμε ότι τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα θα συνεισφέρουν το

άθροισμα ενώ ο δρόμος ολοκλήρωσης γύρω από τη βροχοτομή το ολοκλήρωμα, στην αναμενόμενη τελική λύση της Εξ. (4.16). Συγκεκριμένα

$$p_T(x, x_o, t) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_{-i\infty}^{i\infty} G \cdot e^{s \cdot t} ds = \frac{1}{2\pi \cdot i} \sum_{n=1}^M \operatorname{Res} G \cdot e^{s_n \cdot t} + \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_{s=-\frac{\alpha^2}{2\gamma^2}}^{-\infty} [G] \cdot e^{s \cdot t} ds \quad (\Delta.35)$$

Το ολοκλήρωμα στο τελευταίο μέλος μπορεί να απλοποιηθεί με την αλλαγή μεταβλητής $s = -\frac{\alpha^2}{2\gamma^2} - \lambda$ ώστε τελικά να ισούται με

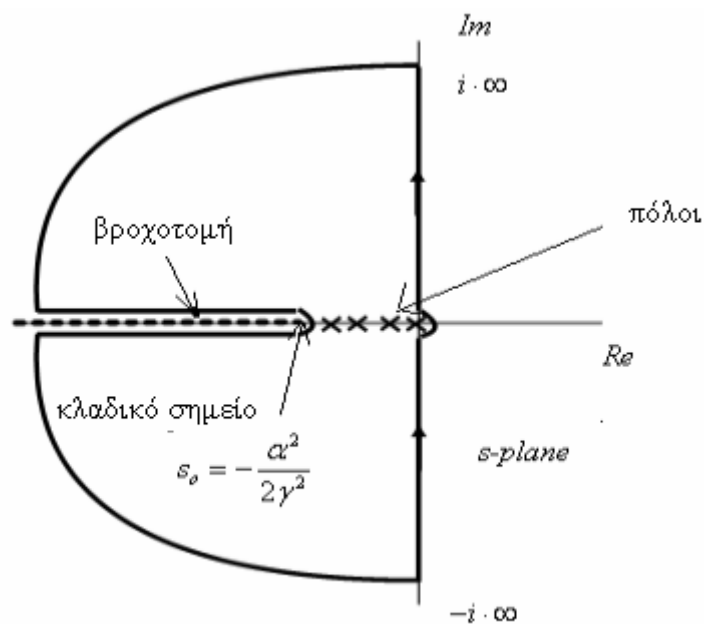
$$\frac{1}{2\pi \cdot i} \int_0^{\infty} -[G(\lambda)] \cdot e^{-\lambda \cdot t} e^{-\frac{\alpha^2}{2\gamma^2} t} d\lambda \quad (\Delta.36)$$

όπου $[G(\lambda)]$ το άλμα της συνάρτησης Green κατά μήκος της βροχοτομής. Συνεπώς ο όρος $-\frac{[G(\lambda)]}{2\pi \cdot i}$, συγκρινόμενος με την ολοκληρωτέα ποσότητα της Εξ. (4.16)

$\frac{\Phi(x_o, \lambda)\Phi(x, \lambda)}{p_{st}(x_o)}$ θα μας δώσει τις ιδιοσυναρτήσεις συνεχούς φάσματος. Αντίστοιχα

τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα $\frac{1}{2\pi \cdot i} \operatorname{Res} G$, συγκρινόμενα με τους όρους $\frac{\Phi_n(x_o)\Phi_n(x)}{p_{st}(x_o)}$

του αθροίσματος, θα μας δώσουν τις ιδιοσυναρτήσεις του διακριτού φάσματος. Ας τα εξετάσουμε όμως με τη σειρά



Δρόμος Ολοκλήρωσης για τον Αντίστροφο Μ/Σ Laplace

Σχήμα Δ.2

Ο δρόμος ολοκλήρωσης *επάνω* από τη βροχοτομή έχει παραμετρική εξίσωση

$$s = s_o + \lambda \cdot e^{i\pi} = -\frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \lambda \cdot e^{i\pi} \quad \lambda \in [0, \infty) \quad (\Delta.37)$$

ενώ το αντίστοιχο τμήμα *κάτω* από τη βροχοτομή παριστάνεται με

$$s = -\frac{\alpha^2}{2\gamma^2} + \lambda \cdot e^{-i\pi} \quad \lambda \in [0, \infty) \quad (\Delta.38)$$

Αντικαθιστούμε τις πιο πάνω παραμετρικές εκφράσεις, στις παραμέτρους που εξαρτώνται από το s και ανήκουν στη συνάρτηση Green, δηλαδή στα $(a_{1,2}, b_{1,2}, \kappa_{1,2})$.

Οι εκφράσεις που ακολουθούν δεικτοδοτούνται με $+/-$ όταν αναφέρονται στη διαδρομή *επάνω/κάτω* από τη βροχοτομή

$$a_1^\pm = 1 + \frac{a}{\beta\gamma^2} \pm j \frac{\sqrt{2\lambda}}{\beta\gamma} \quad b_1^\pm = 1 \pm j \frac{2\sqrt{2\lambda}}{\beta\gamma} \quad \kappa_1^\pm = -\frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta\gamma^2} \pm j \frac{\sqrt{2\lambda}}{\beta\gamma} \quad (\Delta.39)$$

Επίσης ισχύει

$$a_2^\pm = a_1^\mp, \quad b_2^\pm = b_1^\mp, \quad \kappa_2^\pm = \kappa_1^\mp \quad (\Delta.40)$$

Εάν λάβουμε υπόψη ότι ύστερα από την κατά σειρά αντικατάσταση της Wronskian, του $K_2(x)$ και των δύο λύσεων y_1, y_2 στη συνάρτηση Green, έχουμε το εξής αποτέλεσμα (π.χ. για τον πρώτο κλάδο της G)

$$G = \frac{2}{\beta\gamma^2 \cdot x_o^{\frac{2\alpha}{\gamma^2}-1} e^{-\frac{2x_o^\beta}{\beta\gamma^2}}} \cdot \frac{p_1(x)[p_1(x_o) + C \cdot p_2(x_o)]}{C \cdot (b_1 - 1)} \quad (\Delta.41)$$

τότε μπορούμε να συνδέσουμε την τιμή της G *κάτω* από τη βροχοτομή (G^-) με την αντίστοιχη *επάνω* από τη βροχοτομή (G^+), αφού πρώτα δείξουμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς

$$1 - b_1^- = 1 - b_2^+ = 1 - (2 - b_1^+) = -(1 - b_1^+) \quad (\Delta.42a)$$

$$\frac{\Gamma(b_1^-) \cdot \Gamma(b_2^- - a_2^-)}{\Gamma(b_1^- - a_1^-) \cdot \Gamma(b_2^-)} = \frac{\Gamma(b_2^+) \cdot \Gamma(b_1^+ - a_1^+)}{\Gamma(b_2^+ - a_2^+) \cdot \Gamma(b_1^+)} \quad (\Delta.42b)$$

Άρα από τις πιο πάνω εξισώσεις και την Εξ. (Δ.31) που μας δίνει τη σταθερά C έχουμε

$$C^- = \frac{1}{C^+} \quad (\Delta.43)$$

Τελικά, από την (Δ.40) και την τελευταία εξίσωση έχουμε τις ακόλουθες ισοδυναμίες

$$p_1^-(x) = p_2^+(x), \quad p_2^-(x) = p_1^+(x) \quad \text{και} \quad y_r^-(x) = p_1^-(x) + C^- \cdot p_2^-(x) = p_2^+(x) + \frac{1}{C^+} \cdot p_1^+(x) \quad (\Delta.44)$$

Συμπερασματικά το άλμα της συνάρτησης Green επάνω στη βροχοτομή δίνεται από

$$[G] = G^+ - G^- = \frac{2}{\beta\gamma^2 \cdot x_o^{\frac{2\alpha}{\gamma^2}-1} e^{-\frac{2x_o^\beta}{\beta\gamma^2}}} \cdot \left[\frac{p_1^+(x) \left[p_1^+(x_o) + C^+ \cdot p_2^+(x_o) \right]}{C^+ \cdot (b_1^+ - 1)} - \frac{p_2^+(x) \left[p_2^+(x_o) + \frac{1}{C^+} \cdot p_1^+(x_o) \right]}{\frac{(1-b_1^+)}{C^+}} \right] \quad (\Delta.45)$$

Εάν εκτελέσουμε την επιμεριστική ιδιότητα μέσα στην αγκύλη τότε παίρνουμε τελικά

$$[G] = \frac{2}{\beta\gamma^2 \cdot x_o^{\frac{2\alpha}{\gamma^2}-1} e^{-\frac{2x_o^\beta}{\beta\gamma^2}}} \cdot \left[\frac{y_r^+(x_o) \cdot y_r^+(x)}{C^+ \cdot (b_1^+ - 1)} \right] \quad (\Delta.45)$$

Από την σχέση (4.25) μπορούμε να υπολογίσουμε τη στάσιμη κατανομή $p_{st}(x_o)$, συγκεκριμένα έχουμε

$$p_{st}(x_o) = \frac{\beta \left(\frac{2}{\beta\gamma^2} \right)^{\frac{2\alpha}{\beta\gamma^2}}}{\Gamma \left(\frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} \right)} \cdot x_o^{\frac{2\alpha}{\gamma^2}-1} e^{-\frac{2x_o^\beta}{\beta\gamma^2}} \quad (\Delta.46)$$

και τελικά διαιρώντας και πολλαπλασιάζοντας τον παρανομαστή της (Δ.45) με τον κατάλληλο συντελεστή, το 'άλμα' της Green δίνεται από την σχέση

$$[G(\lambda)] = - \left(\frac{2}{\beta\gamma^2} \right)^{b_1^+} \frac{1}{b_1^+ - 1} \frac{\Gamma(b_1^+ - a_1^+) \Gamma(2 - b_1^+)}{\Gamma(b_1^+) \Gamma(1 - a_1^+)} \cdot \frac{\beta \cdot \left(\frac{2}{\beta\gamma^2} \right)^{\frac{2\alpha}{\beta\gamma^2}}}{\Gamma \left(\frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} \right)} \frac{y_r^+(x_o) \cdot y_r^+(x)}{p_{st}(x_o)} \quad (\Delta.47)$$

Η σύγκριση του $-\frac{[G(\lambda)]}{2\pi \cdot i}$ με την $\frac{\Phi(x_o, \lambda) \Phi(x, \lambda)}{p_{st}(x_o)}$, δίνει τις ιδιοσυναρτήσεις

συνεχούς φάσματος. Συγκεκριμένα έχουμε

$$\Phi(x, \lambda) = \sqrt{A} \cdot y_r^+(x_o) \quad \text{όπου}$$

$$A = \frac{1}{2\pi \cdot i} \left(\frac{2}{\beta\gamma^2} \right)^{b_1^+} \frac{1}{b_1^+ - 1} \frac{\Gamma(b_1^+ - a_1^+) \Gamma(2 - b_1^+)}{\Gamma(b_1^+) \Gamma(1 - a_1^+)} \cdot \frac{\beta \cdot \left(\frac{2}{\beta\gamma^2} \right)^{\frac{2\alpha}{\beta\gamma^2}}}{\Gamma\left(\frac{2\alpha}{\beta\gamma^2}\right)} \quad (\Delta.48)$$

Ας δούμε τέλος τι συμβαίνει με τις ιδιοσυναρτήσεις διακριτού φάσματος. Εξετάζουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της συνάρτησης Green τα οποία θα προκύψουν από τους μηδενισμούς της Wronskian, αφού οι συναρτήσεις y_l, y_r είναι αναλυτικές σε όλο το s επίπεδο. Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο μόνος παράγοντας που μηδενίζει τη Wronskian είναι ο $\Gamma(b_1 - a_1)$ στα σημεία που η συνάρτηση Γ απειρίζεται δηλαδή στα

$$b_1 - a_1 = \frac{\alpha}{\beta\gamma^2} \sqrt{1 + \frac{2\gamma^2}{\alpha^2} s} - \frac{\alpha}{\beta\gamma^2} = -n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\Delta.49)$$

Τότε, η εξίσωση (Δ.49) έχει τις ακόλουθες λύσεις

$$s_n = n \cdot \left(n - \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} \right) \cdot \frac{\beta^2 \gamma^2}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\Delta.50)$$

$$\text{μόνο όταν } n \leq \frac{\alpha}{\beta\gamma^2} \quad (\Delta.51)$$

Παρατηρούμε ότι για την περίπτωση της **Weibull** η συνθήκη (Δ.51) γράφεται ως εξής σύμφωνα με τον Πίνακα 5.1

$$n \leq \frac{\nu}{2\beta} = \frac{1}{2} \quad (\Delta.52)$$

και συνεπώς έχουμε μόνο μια ιδιοτιμή: τη μηδενική. Αντίθετα στην περίπτωση της **Gamma** από Πίνακα 5.1 έχουμε

$$n \leq \frac{\nu}{2} \quad (\Delta.53)$$

που σημαίνει ότι έχουμε ένα πεπερασμένο διακριτό φάσμα ιδιοτιμών. Το πλήθος του διακριτού φάσματος αυξάνει γραμμικά με το ν .

Η συνάρτηση Green μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο όρων ύστερα από την αντικατάσταση του C από τη (Δ.31) στην (Δ.41) και χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας

$$G = -\left(\frac{2}{\beta\gamma^2}\right)^{b_1} \frac{p_1(x)p_1(x_o)}{x_o^{\frac{2\alpha}{\gamma^2}-1} \exp\left(-\frac{2x_o^\beta}{\beta\gamma^2}\right)} \frac{\Gamma(b_1-a_1)\Gamma(2-b_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(1-a_1)(b_1-1)} + \frac{2}{\beta\gamma^2} \frac{p_1(x)p_2(x_o)}{(b_1-1)x_o^{\frac{2\alpha}{\gamma^2}-1} \exp\left(-\frac{2x_o^\beta}{\beta\gamma^2}\right)} \quad (\Delta.54)$$

Αντίστοιχος τύπος προκύπτει και για τον 2^o κλάδο τον οποίο παραλείπουμε εδώ, χωρίς βλάβη της γενικότητας. Επιπλέον οι παράμετροι (a_1, b_1, κ_1) έχουν τις ακόλουθες τιμές στα σημεία s_n $n=0,1,2,\dots,M$ με $M = \max(n \in N : n \leq \frac{\alpha}{\beta\gamma^2})$

όπου έχουμε τους πόλους της G .

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - n \\ b_1 &= 1 + \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - 2n \\ \kappa_1 &= -\frac{1}{\beta} + \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - n \end{aligned} \quad (\Delta.55)$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος της συνάρτησης G παρουσιάζει πόλους στα σημεία s_n $n=0,1,2,\dots,M$ εξαιτίας του όρου $\Gamma(b_1-a_1)$, ενώ ο δεύτερος όρος δεν παρουσιάζει κανενός είδους ανωμαλία στα σημεία αυτά. Συνεπώς, τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα υπολογίζονται από τον πρώτο όρο της G ο οποίος είναι κοινός και για τους δυο κλάδους της. Με αντικατάσταση στο γινόμενο $G \cdot e^{s \cdot t}$ των (a_1, b_1, κ_1) όπως αυτά υπολογίστηκαν στα s_n $n=0,1,2,\dots,M$ έχουμε

$$\begin{aligned} G \cdot e^{s \cdot t} \Big|_{s=s_n} &= -\left(\frac{2}{\beta\gamma^2}\right)^{1+\frac{2\alpha}{\beta\gamma^2}-2n} \frac{x^\beta \left(-\frac{1}{\beta} + \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - n\right) x_o^\beta \left(-\frac{1}{\beta} + \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - n\right)}{x_o^{\frac{2\alpha}{\gamma^2}-1} \exp\left(-\frac{2x_o^\beta}{\beta\gamma^2}\right)} \cdot \\ &F_{11}\left(1 + \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - n, 1 + \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - 2n, -\frac{2x_o^\beta}{\beta\gamma^2}\right) \cdot F_{11}\left(1 + \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - n, 1 + \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - 2n, -\frac{2x_o^\beta}{\beta\gamma^2}\right) \\ &\frac{\Gamma\left(2n - \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} + 1\right) \cdot e^{s_n \cdot t}}{\Gamma\left(1 + \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - 2n\right) \Gamma\left(n - \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2}\right) \left(\frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - 2n\right)} \Gamma(b_1 - a_1) \end{aligned} \quad (\Delta.56)$$

Συνεπώς για να υπολογίσουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα πρέπει να βρούμε το όριο

$$\lim_{s \rightarrow s_n} \Gamma(b_1 - a_1) \cdot (s - s_n) \quad (\Delta.57)$$

Όμως κοντά στα σημεία όπου η συνάρτηση Γάμα παρουσιάζει ανώμαλο σημείο (δηλαδή το όρισμά της παίρνει την τιμή $-n$ $n=0,1,2,\dots$) ισχύει η ιδιότητα [Abramowitz and Stegun]

$$\Gamma(z) \square \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n} \quad (\Delta.58)$$

και συνεπώς το όριο έχει την μορφή

$$\lim_{s \rightarrow s_n} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{s - s_n}{b_1 - a_1 + n} \quad (\Delta.59)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τα b_1, a_1 από την (Δ.55) και έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{s - s_n}{\frac{\alpha}{\beta\gamma^2} \sqrt{1 + \frac{2\gamma^2}{\alpha^2} s - \frac{\alpha}{\beta\gamma^2}} + n} \stackrel{0}{=} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{\beta\gamma^2}{\alpha} 2\sqrt{1 + \frac{2\gamma^2}{\alpha^2} s} \left(\frac{2\gamma^2}{\alpha^2} \right)^{-1} = \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{s \rightarrow s_n} \alpha \cdot \beta \cdot \sqrt{1 + \frac{2\gamma^2}{\alpha^2} s} \end{aligned} \quad (\Delta.60)$$

Πλέον, το όριο αφορά μια συνεχή συνάρτηση. Συγκεκριμένα, εάν αντικαταστήσουμε τα s_n τότε ύστερα από πράξεις θα πάρουμε

$$\frac{(-1)^n}{n!} \frac{\beta^2\gamma^2}{2} \left(\frac{2\alpha}{\beta \cdot \gamma^2} - 2n \right) \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (\Delta.61)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το πιο πάνω αποτέλεσμα στην (Δ.56) ώστε να υπολογίσουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα. Το αποτέλεσμα θέλουμε να έχει τελική μορφή συγκρίσιμη με το άθροισμα που εμφανίζεται στην Εξ. (4.16) δηλαδή, θέλουμε

να εμφανίζεται ο παράγοντας $\frac{1}{p_{st}(x_o)}$. Πράγματι, ύστερα από πράξεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n}{n!} \beta^2 \left(\frac{2}{\beta\gamma^2} \right)^{\frac{4\alpha}{\beta\gamma^2} - 2n} x^{-1 + \frac{2\alpha}{\gamma^2} - \beta \cdot n} x_o^{-1 + \frac{2\alpha}{\gamma^2} - \beta \cdot n} \times \\ & \times F_{11} \left(1 + \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - n, 1 + \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - 2n; -\frac{2x^\beta}{\beta\gamma^2} \right) \cdot F_{11} \left(1 + \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - n, 1 + \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - 2n; -\frac{2x_o^\beta}{\beta\gamma^2} \right) \times \\ & \times \frac{\Gamma \left(2n - \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} \right) \cdot e^{s_n \cdot t}}{\Gamma \left(\frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} - 2n \right) \cdot \Gamma \left(n - \frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} \right) \cdot \Gamma \left(\frac{2\alpha}{\beta\gamma^2} \right)} \frac{1}{p_{st}(x_o)} \end{aligned}$$

όπου πάλι $n = 0, 1, \dots, M$ (Δ.62)

Στην περίπτωση της Τυχαίας Διαδικασίας **Gamma**, έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n}{n!} w^{2v-2n} x^{v-1-n} x_o^{v-1-n} \times \\ & \times F_{11}(v+1-n, v+1-2n; -w \cdot x) \cdot F_{11}(v+1-n, v+1-2n; -w \cdot x_o) \times \\ & \times \frac{\Gamma(2n-v) \cdot e^{s_n t}}{\Gamma(v-2n) \cdot \Gamma(n-v) \cdot \Gamma(v)} \frac{1}{p_{st}(x_o)} \end{aligned} \quad (\Delta.63)$$

$$\text{με } s_n = n \cdot (n-v) \cdot \frac{1}{w} \quad n = 0, 1, 2, \dots, M \quad M = \max(n \in N : n \leq \frac{v}{2})$$

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με το $\frac{\Phi_n(x_o)\Phi_n(x)}{p_{st}(x_o)} e^{s_n t}$ βρίσκουμε πως οι

ιδιοσυναρτήσεις έχουν τη μορφή

$$\Phi_n(x) = \sqrt{B} \cdot x^{v-1-n} \cdot F_{11}(v+1-n, v+1-n; -w \cdot x) \quad (\Delta.64)$$

όπου

$$B = \frac{(-1)^n}{n!} w^{2v-2n} \cdot \frac{\Gamma(2n-v)}{\Gamma(v-2n) \cdot \Gamma(n-v) \cdot \Gamma(v)} \quad (\Delta.65)$$

Στην περίπτωση της Τυχαίας Διαδικασίας **Weibull**, έχουμε $M=0$ και συνεπώς μόνο ένα ολοκληρωτικό υπόλοιπο που ταυτίζεται με το $p_{st}(x_o)$.

Τώρα που έχουμε υπολογίσει τις ιδιοσυναρτήσεις τόσο του διακριτού όσο και του συνεχούς φάσματος, ας δούμε για επαλήθευση εάν αυτές ικανοποιούν την εξής βασική ιδιότητα

$$\int_0^{\infty} \Phi_n(x) dx = 0 \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (\Delta.66)$$

$$\int_0^{\infty} \Phi(x, \lambda) dx = 0 \quad \forall \lambda \in [\lambda_s, \infty] \quad (\Delta.67)$$

Σύντομη απόδειξη των (Δ.66) και (Δ.67) ακολουθεί

Οι ιδιοσυναρτήσεις τόσο του διακριτού όσο και του συνεχούς φάσματος ικανοποιούν την $L \cdot \Phi + \lambda \Phi = 0$ και τις οριακές συνθήκες $Z(s, 0) = Z(s, \infty) = 0$ όπου οι τελεστές L και Z έχουν παρουσιαστεί στις (4.17) και (4.7c) αντίστοιχα και συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση $L = \frac{\partial}{\partial x} Z$. Άρα ολοκληρώνοντας την $L \cdot \Phi + \lambda \Phi = 0$ έχουμε

$[Z \cdot \Phi]_0^\infty + \lambda \int_0^\infty \Phi dx = 0$. Αν η Φ είναι ιδιοσυνάρτηση τότε ικανοποιεί τις οριακές

συνθήκες στο σύνορο άρα ο πρώτος όρος κάνει μηδέν και συνεπώς προκύπτουν οι (Δ.66) και (Δ.67)

Στην περίπτωση του διακριτού φάσματος πρέπει λοιπόν να ισχύει

$$\int_0^\infty x^{v-1-n} \cdot F_{11}(v+1-n, v+1-2n; -w \cdot x) dx = 0 \quad (\Delta.68)$$

Εάν θέσουμε $v-n+1 = a$ και $v+1-2n = b$ τότε έχουμε

$$\int_0^\infty x^{a-2} \cdot F_{11}(a, b; -w \cdot x) dx \stackrel{-w \cdot x = z}{=} \left(-\frac{1}{w}\right)^{a-2} \int_0^\infty z^{a-2} F_{11}(a, b; z) dz \quad (\Delta.69)$$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα του τελευταίου μέλους υπάρχει και είναι υπολογισμένο αναλυτικά στο βιβλίο [Magnus *et. al.*, 1966, pp. 266] για $a \neq 1$. Στην περίπτωση μας ισχύει η συνθήκη $a \neq 1$ αφού $a \neq 1 \rightarrow v \neq n$ το οποίο με τη σειρά του ισχύει διότι

ξέρουμε ότι $n \leq \frac{v}{2} \neq v$. Άρα έχουμε το αποτέλεσμα

$$\left(-\frac{1}{w}\right)^{a-2} \left[\frac{z^{a-1}}{a-1} F_{11}(a-1, b; z) \right]_0^{-\infty} \quad (\Delta.70)$$

Για το όριο $z \rightarrow 0$ η ποσότητα στην αγκύλη τείνει στο μηδέν διότι

$$F_{11} \rightarrow 1 \text{ και } z^{a-1} \rightarrow 0 \text{ αφού } a-1 = v-n > 0$$

Για το όριο $z \rightarrow -\infty$ ομοίως η ποσότητα στην αγκύλη μηδενίζεται διότι από την ασυμπτωτική προσέγγιση της F_{11} για μεγάλα αρνητικά ορίσματα -βλ. Εξ. (Δ.25)- έχουμε

$$\frac{z^{a-1}}{a-1} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a+1)} z^{-a+1} \quad (\Delta.71)$$

όμως παράλληλα οι παράμετροι a, b έχουν τις ακόλουθες τιμές σύμφωνα με την Εξ. (Δ.55) και τον Πίνακα 5.1

$$b-a+1 = v+1-2n-(v+1-n)+1 = -n+1 \text{ για } n=1, 2, \dots, M$$

και συνεπώς η συνάρτηση Γ απειρίζεται γεγονός που επιβεβαιώνει την αρχική δήλωση περί μηδενισμού.

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί και η αντίστοιχη ιδιότητα για τις ιδιοσυναρτήσεις συνεχούς φάσματος. Η απόδειξη παραλείπεται.

Μέχρι τώρα, έχουμε υπολογίσει την Μεταβατική Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας για την Τυχαία Διαδικασία Διάχυσης που μελετάμε. Για να συνεχίσουμε με την Συνάρτηση Συσχέτισης και τη Συνάρτηση Πυκνότητας Φάσματος –βλ. Εξ. (4.35) και (4.38)– είναι ανάγκη να υπολογίσουμε τα ακόλουθα ολοκληρώματα –βλ. Εξ. (4.36)– τα οποία σχετίζονται με τις ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Fokker-Planck που υπολογίσαμε νωρίτερα.

Στην περίπτωση του διακριτού φάσματος θέλουμε να υπολογίσουμε το:

$$h_n = \int_0^{\infty} x \cdot \Phi_n(x) dx \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (\Delta.77)$$

όπου Φ_n οι διακριτές ιδιοτιμές του τελεστή Fokker-Planck. Ας παρατηρήσουμε ότι για την περίπτωση της Weibull δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε κανένα τέτοιο ολοκλήρωμα δεδομένου ότι έχουμε μόνο μια διακριτή ιδιοσυνάρτηση με αύξοντα αριθμό μηδέν. Αποκλειστικά για την περίπτωση της **Gamma** συνεπώς, πρέπει να υπολογίσουμε το ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} x \cdot x^{v-1-n} \cdot F_{11}(v+1-n, v+1-2n; -w \cdot x) dx \quad (\Delta.78)$$

Παρατηρούμε ξανά ότι σε σχέση με την ιδιοσυνάρτηση που προκύπτει από την Εξ. (Δ.64), στο πιο πάνω ολοκλήρωμα λείπει χωρίς βλάβη της γενικότητας ο όρος \sqrt{B} ο οποίος είναι ανεξάρτητος του x .

Στο βιβλίο [Prudnikov *et.al.*, 1990] βρίσκουμε την ακόλουθη αναλυτική λύση για ένα ορισμένο ολοκλήρωμα ανάλογης μορφής με αυτό στην Εξ. (Δ.78)

$$\int_{x_1}^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot F_{11}(a, b; -\lambda \cdot x) dx = -\frac{x_1^{\alpha}}{\alpha} F_{22}(\alpha, a; \alpha+1, b; -\lambda \cdot x_1) + \lambda^{-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(a-\alpha) \Gamma(b)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b-\alpha)} \quad (\Delta.79)$$

Η συνάρτηση F_{22} είναι Υπερ-γεωμετρική και δίνεται από τον τύπο

$$F_{22}(a_1, a_2; b_1, b_2; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdot (a_2)_k}{(b_1)_k \cdot (b_2)_k} \frac{x^k}{k!}. \text{ Η λύση της } (\Delta.79) \text{ ισχύει με την προϋπόθεση}$$

ότι

$$\text{Re}[\lambda], \text{Re}[a-\alpha] > 0 \quad (\Delta.80)$$

Στο προηγούμενο ολοκλήρωμα, σημειώνεται η διαφορά ανάμεσα στο ελληνικό α και στο λατινικό a . Επίσης σημειώνεται ότι τα σύμβολα a, b, α, λ έχουν

ξαναχρησιμοποιηθεί σε διάφορα σημεία αυτού του κειμένου αλλά στο σημείο αυτό ορίζουν νέες ποσότητες και η ταύτιση είναι τυχαία.

Επιστρέφουμε στον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Στην περίπτωσή μας, το κάτω άκρο της ολοκλήρωσης είναι μηδέν και τότε αποδεικνύεται ότι ο πρώτος όρος του αποτελέσματος τείνει στο μηδέν διότι αφενός η $F_{22} \rightarrow 1$ [Magnus *et. al.*, 1966] και αφετέρου το $x_1^\alpha \rightarrow 0$ δεδομένου ότι $\text{Re}[\alpha] = \nu + 1 - n > 0$.

Ένα άλλο σημείο που χρειάζεται προσοχή είναι η διαπίστωση πως δεν επαληθεύονται πλήρως οι συνθήκες ύπαρξης λύσης του ολοκληρώματος διότι μπορεί να επαληθεύεται η πρώτη

$$\lambda = w \rightarrow \text{Re}[\lambda] > 0 \quad (\Delta.81)$$

αλλά δεν ισχύει η δεύτερη της (Δ.80)

$$\alpha = \nu - n + 1 = a \quad (\Delta.82)$$

αφού είναι προφανές ότι $\text{Re}[a - \alpha] = 0$. Ωστόσο, εάν θέσουμε $a = \alpha + \varepsilon$ με το ε θετικό και οσοδήποτε μικρό ώστε να τείνει στο μηδέν, τότε η συνθήκη ύπαρξης λύσης επαληθεύεται και εάν το όριο της λύσης υπάρχει τότε είναι και η λύση που ζητάμε. Συγκεκριμένα με αντικατάσταση του $a = \alpha + \varepsilon$ στον δεύτερο όρο της (Δ.79) έχουμε

$$\lambda^{-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\varepsilon) \Gamma(b)}{\Gamma(\alpha + \varepsilon) \cdot \Gamma(b - \alpha)} = \lambda^{-\alpha} \Gamma(b) \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(b - \alpha)} \quad (\Delta.83)$$

Κατά αντιπαράσταση των Εξ.(Δ.78) και (Δ.79) έχουμε ότι

$$b = \nu + 1 - 2n \quad (\Delta.84)$$

ενώ ξέρουμε ήδη ότι

$$\alpha = a - \varepsilon = \nu - n + 1 - \varepsilon \quad (\Delta.85)$$

Συνεπώς από την Εξ. (Δ.83) έχουμε

$$\lambda^{-(\nu - n + 1 - \varepsilon)} \Gamma(\nu + 1 - 2n) \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(-n + \varepsilon)}$$

Από τη γνωστή ιδιότητα των συναρτήσεων Γ γύρω από τους πόλους έχουμε το όριο

$$\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(-n + \varepsilon)} = \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{-n + \varepsilon + n}} = \frac{n!}{(-1)^n} \quad (\Delta.86)$$

και καταληκτικά το συνολικό όριο υπάρχει και είναι

$$w^{-(\nu - n + 1)} \Gamma(\nu + 1 - 2n) \frac{n!}{(-1)^n} \quad (\Delta.87)$$

Άρα το ολοκλήρωμα υπάρχει ως το όριο ακολουθίας ολοκληρωμάτων. Με διαδοχικές αντικαταστάσεις χωρίς να ξεχάσουμε τον όρο \sqrt{B} , παίρνουμε τελικά

$$h_n^2 = \frac{n!}{(-1)^n} \cdot \frac{\Gamma(2n-v) \cdot \Gamma^2(v+1-2n)}{\Gamma(v-2n) \cdot \Gamma(n-v) \cdot \Gamma(v)} \cdot \frac{1}{w^2} \quad n=1,2,\dots,M \quad (\Delta.88)$$

Στη δεύτερη περίπτωση του συνεχούς φάσματος έχουμε

$$h(\lambda) = \int_0^{\infty} x \Phi(x, \lambda) dx \quad (\Delta.89)$$

με την $\Phi(x, \lambda)$ να είναι ιδιοσυνάρτηση συνεχούς φάσματος. Με αντικατάσταση της $\Phi(x, \lambda)$ από τη (Δ.48) παίρνουμε το ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$\sqrt{A} \int_0^{\infty} x \cdot y_r^+(x) \cdot dx \quad (\Delta.90)$$

Προς διευκόλυνση των πράξεων, παραλείπουμε τον όρο \sqrt{A} και επίσης αντικαθιστούμε τους δυο όρους της $y_r^+(x)$ όπως αυτοί φαίνονται στην Εξ. (Δ.32) και τελικά έχουμε να υπολογίσουμε δυο ολοκληρώματα της μορφής

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \int_0^{\infty} x^{\beta \cdot \kappa_{1,2}^+ + 1} F_{11}(a_{1,2}^+, b_{1,2}^+; -\frac{2x^\beta}{\beta\gamma^2}) dx \stackrel{x^\beta=y}{=} \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} y^{(\kappa_{1,2}^+ + \frac{2}{\beta} - 1)} F_{11}(a_{1,2}^+, b_{1,2}^+; -\frac{2y}{\beta\gamma^2}) dy \end{aligned} \quad (\Delta.91)$$

Το ολοκλήρωμα $I_{1,2}$ όπως παρουσιάζεται στο τελευταίο μέλος της πιο πάνω εξίσωσης χωρίς τον όρο $\frac{1}{\beta}$, ταυτίζεται με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα που δώσαμε στην Εξ. (Δ.79) για την περίπτωση που $x_1 \rightarrow 0$. Συγκεκριμένα, η αντιστοιχία μεταξύ των παραμέτρων εκείνου του ολοκληρώματος και των παραμέτρων του $I_{1,2}$ είναι

$$\lambda = \frac{2}{\beta\gamma^2}, \quad \alpha = \kappa_{1,2}^+ + \frac{2}{\beta} = a_{1,2}^+ + \frac{1}{\beta} - 1, \quad a = a_{1,2}^+, \quad b = b_{1,2}^+ \quad (\Delta.92)$$

Ας παρατηρήσουμε πως ο πρώτος όρος του αναλυτικού αποτελέσματος στην Εξ. (Δ.79) τείνει στο μηδέν όταν $x_1 \rightarrow 0$ διότι ο εκθέτης του x_1^α έχει την εξής ιδιότητα

$$\text{Re}[\alpha] = \text{Re}\left[\frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta\gamma^2} \pm i \frac{\sqrt{2\lambda}}{\beta\gamma}\right] > 0 \quad (\Delta.93)$$

Τελικά το ολοκλήρωμα $I_{1,2}$ υπολογίζεται από τον εναπομείναντα δεύτερο όρο της Εξ. (Δ.79) με τις παραμέτρους λ, α, a, b να δίνονται από την (Δ.92). Το αποτέλεσμα είναι

$$I_{1,2} = \lambda^{-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(a-\alpha) \Gamma(b)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b-\alpha)} \quad (\Delta.94)$$

Το αποτέλεσμα στην (Δ.94) ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι οι ακόλουθες συνθήκες ισχύουν

$\text{Re}[\lambda] > 0$ (αληθής) και

$$\text{Re}[a-\alpha] = \text{Re}\left[1 + \frac{\alpha}{\beta\gamma^2} \pm i \frac{\sqrt{2\lambda}}{\beta\gamma} - \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta\gamma^2} \pm i \frac{\sqrt{2\lambda}}{\beta\gamma}\right)\right] = 1 - \frac{1}{\beta} > 0 \quad (\Delta.95)$$

Άρα η δεύτερη συνθήκη ύπαρξης λύσης για το ολοκλήρωμα επιβάλλει

$$\beta > 1 \quad (\Delta.96)$$

Από μια πρώτη ανάγνωση των αναγκαίων συνθηκών ύπαρξης του ολοκληρώματος $I_{1,2}$, συμπεραίνουμε πως έχουμε πρόβλημα για την περίπτωση της **Gamma** διαδικασίας όπου $\beta = 1$ και για ένα μεγάλο εύρος τιμών για την παράμετρο ν της **Weibull** συγκεκριμένα $\nu = \beta > 1$ -δες Πίνακα 5.1. Ωστόσο, η μη ικανοποίηση της συνθήκης δεν συνεπάγεται και μη ύπαρξη λύσης για το ολοκλήρωμα $I_{1,2}$ μιας και είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία και αυτό θα γίνει κατανοητό στη συνέχεια

Επιστρέφουμε στο ζητούμενο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} x \cdot y_r^+(x) \cdot dx$. Έχουμε

$$\int_0^{\infty} x \cdot y_r^+(x) \cdot dx = I_1 + C^+ \cdot I_2 \quad (\Delta.99)$$

και με αντικαταστάσεις από τις Εξ. (Δ.91), (Δ.94), (Δ.31) και (Δ.92) έχουμε

$$\frac{1}{\beta} \left(\frac{2}{\beta\gamma^2}\right)^{-a_1^+ - \frac{1}{\beta} + 1} \frac{\Gamma(a_1^+ + \frac{1}{\beta} - 1) \cdot \Gamma(1 - \frac{1}{\beta}) \Gamma(b_1^+)}{\Gamma(a_1^+) \cdot \Gamma(b_1^+ - a_1^+ + 1 - \frac{1}{\beta})} - \frac{1}{\beta} \left(\frac{2}{\beta\gamma^2}\right)^{1-b_1^+} \frac{\Gamma(b_2^+ - a_2^+) \cdot \Gamma(b_1^+)}{\Gamma(b_2^+) \cdot \Gamma(b_1^+ - a_1^+)} \left(\frac{2}{\beta\gamma^2}\right)^{-a_2^+ - \frac{1}{\beta} + 1} \frac{\Gamma(a_2^+ + \frac{1}{\beta} - 1) \cdot \Gamma(1 - \frac{1}{\beta}) \Gamma(b_2^+)}{\Gamma(a_2^+) \cdot \Gamma(b_2^+ - a_2^+ + 1 - \frac{1}{\beta})} \quad (\Delta.100)$$

Σημειώνεται ότι ο τύπος για το C^+ που αντικαταστήσαμε στην προηγούμενη σχέση, προέρχεται από την Εξ. (Δ.31), με τη διαφορά ότι τον παράγοντα $\Gamma(1 - a_1^+)$ που εμφανίζεται εκεί τον αντικαταστήσαμε με τον όρο $\Gamma(b_2^+ - a_2^+)$ εφόσον από τις χρήσιμες σχέσεις της Εξ. (Δ.11) προκύπτει ότι οι δυο όροι είναι ισοδύναμοι. Από τις

ίδιες χρήσιμες σχέσεις της Εξ. (Δ.11) προκύπτει επίσης το ακόλουθο αποτέλεσμα που αφορά τον *συνολικό* εκθέτη του $\frac{2}{\beta\gamma^2}$ στον δεύτερο όρο της τελευταίας σχέσης

$$1 - b_1 - a_2 = 2 - b_1 - a_2 - 1 = b_2 - a_2 - 1 = -(a_2 - b_2 + 1) = -a_1 \quad (\Delta.101)$$

Φυσικά οι τελευταίες ισότητες ισχύουν παντού στο s -επίπεδο και συνεπώς και στα σημεία που μας αφορούν εδώ δηλαδή επάνω/ κάτω από τη βροχοτομή που δεικτοδοτούνται με +/- . Με διαδοχικές πράξεις –κυρίως επιμεριστική ιδιότητα–

έχουμε το τελικό αποτέλεσμα για το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} x \cdot y_r^+(x) \cdot dx$

$$\frac{1}{\beta} \left(\frac{2}{\beta\gamma^2} \right)^{-a_1^+ - \frac{1}{\beta} + 1} \frac{\Gamma(b_1^+)}{\Gamma(b_1^+ - a_1^+)} \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \left[\frac{\Gamma(a_1^+ + \frac{1}{\beta} - 1) \cdot \Gamma(b_1^+ - a_1^+)}{\Gamma(a_1^+) \cdot \Gamma(b_1^+ - a_1^+ + 1 - \frac{1}{\beta})} - \frac{\Gamma(b_2^+ - a_2^+) \Gamma(a_2^+ + \frac{1}{\beta} - 1)}{\Gamma(b_2^+ - a_2^+ + 1 - \frac{1}{\beta}) \cdot \Gamma(a_2^+)} \right] \quad (\Delta.102)$$

Για λόγους ευαναγνωσιμότητας, συμβολίζουμε με Π^+ την ακόλουθη ποσότητα

$$\Pi^+ = \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \left[\frac{\Gamma(a_1^+ + \frac{1}{\beta} - 1) \cdot \Gamma(b_1^+ - a_1^+)}{\Gamma(a_1^+) \cdot \Gamma(b_1^+ - a_1^+ + 1 - \frac{1}{\beta})} - \frac{\Gamma(b_2^+ - a_2^+) \Gamma(a_2^+ + \frac{1}{\beta} - 1)}{\Gamma(b_2^+ - a_2^+ + 1 - \frac{1}{\beta}) \cdot \Gamma(a_2^+)} \right] \quad (\Delta.103)$$

η οποία μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω με αντικατάσταση των (a_2^+, b_2^+) από τις χρήσιμες σχέσεις (Δ.11) ώστε τελικά, να περιέχει μόνο τις παραμέτρους (a_1^+, b_1^+)

$$\Pi^+ = \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \left[\frac{\Gamma(a_1^+ + \frac{1}{\beta} - 1) \cdot \Gamma(b_1^+ - a_1^+)}{\Gamma(a_1^+) \cdot \Gamma(b_1^+ - a_1^+ + 1 - \frac{1}{\beta})} - \frac{\Gamma(1 - a_1^+) \Gamma(a_1^+ - b_1^+ + \frac{1}{\beta})}{\Gamma(2 - a_1^+ - \frac{1}{\beta}) \cdot \Gamma(a_1^+ - b_1^+ + 1)} \right] \quad (\Delta.104)$$

και συνεπώς το ζητούμενο ολοκλήρωμα αποκτά μια πιο συνεκτική τελική μορφή

$$\int_0^{\infty} x \cdot y_r^+(x) \cdot dx = \frac{1}{\beta} \left(\frac{2}{\beta\gamma^2} \right)^{-a_1^+ - \frac{1}{\beta} + 1} \frac{\Gamma(b_1^+)}{\Gamma(b_1^+ - a_1^+)} \cdot \Pi^+ \quad (\Delta.105)$$

Τελικά το $h^2(\lambda)$ που χρησιμοποιείται στις τελικές λύσεις των Συναρτήσεων Αυτοσυσχέτισης και Πυκνότητας Φάσματος, προκύπτει από το τετράγωνο του αποτελέσματος για το πιο πάνω ολοκλήρωμα επί τον όρο A (βλ. Δ.48). Ύστερα από πράξεις έχουμε

$$h^2(\lambda) = -\frac{1}{2\pi \cdot i} \frac{1}{\beta} \left(\frac{2}{\beta\gamma^2} \right)^{1-\frac{2}{\beta}} \frac{1}{(1-b_1^+) \cdot \Gamma\left(\frac{2\alpha}{\beta\gamma^2}\right)} \frac{\Gamma(b_1^+) \cdot \Gamma(2-b_1^+)}{\Gamma(b_1^+ - a_1^+) \cdot \Gamma(1-a_1^+)} \cdot (\Pi^+)^2 \quad (\Delta.106)$$

Από τη γνωστή ιδιότητα των συναρτήσεων Gamma $\frac{\Gamma(b_1^+) \cdot \Gamma(2-b_1^+)}{1-b_1^+} = \frac{\pi}{\sin(\pi \cdot b_1^+)}$

έχουμε τελικά

$$h^2(\lambda) = -\frac{1}{2 \cdot i} \frac{1}{\beta} \left(\frac{2}{\beta\gamma^2} \right)^{1-\frac{2}{\beta}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2\alpha}{\beta\gamma^2}\right)} \frac{1}{\Gamma(b_1^+ - a_1^+) \cdot \Gamma(1-a_1^+)} \cdot \frac{(\Pi^+)^2}{\sin(\pi b_1^+)} \quad (\Delta.107)$$

Πριν προχωρήσουμε στους αναλυτικούς τύπους των $h^2(\lambda)$ και h_n^2 για τις δυο περιπτώσεις που εξετάζουμε δηλαδή της **Gamma** και της **Weibull**, ας δούμε πρώτα ότι ο όρος Π^+ παρουσιάζει απροσδιόριστες μορφές για $\beta = \beta_n = \frac{1}{n+1}$ $n = 0, 1, 2, \dots$ δηλαδή για ένα άπειρο αλλά αριθμήσιμο πλήθος τιμών του β που ανήκουν στο υποσύνολο $(0, 1]$ του πεδίου τιμών του β . Με άλλα λόγια η β_n είναι μια ακολουθία Cauchy που συγκλίνει στο μηδέν. Ακολουθεί απόδειξη της ύπαρξης απροσδιοριστίας για το Π^+ στα β_n

Απόδειξη

Εάν αντικαταστήσουμε στο Π^+ τον ακόλουθο τύπο $\beta = \frac{1}{n+1}$, τότε έχουμε

$$\Pi^+ \Big|_{\beta=\frac{1}{n+1}} = \Gamma(-n) \cdot \left[\frac{\Gamma(a_1^+ + n) \cdot \Gamma(b_1^+ - a_1^+)}{\Gamma(a_1^+) \cdot \Gamma(b_1^+ - a_1^+ - n)} - \frac{\Gamma(b_2^+ - a_2^+) \Gamma(a_2^+ + n)}{\Gamma(b_2^+ - a_2^+ - n) \cdot \Gamma(a_2^+)} \right]$$

Εφαρμόζοντας (i) αναδρομικά τη γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης Γάμα

$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ και (ii) τις ισότητες $b_2 - a_2 = 1 - a_1$ και $a_2 = a_1 - b_1 + 1$ (δες Εξ.

(Δ.11)) που ισχύουν για όλο το μιγαδικό s -επίπεδο, παίρνουμε τελικά

$$\Pi^+ \Big|_{\beta=\frac{1}{n+1}} = \Gamma(-n) \cdot \left[\frac{(a_1^+ + n - 1) \cdot \dots \cdot (a_1^+) \cdot (b_1^+ - a_1^+ - 1) \cdot \dots \cdot (b_1^+ - a_1^+ - n) - (-a_1^+) \cdot \dots \cdot (-a_1^+ - n + 1) \cdot (a_1^+ - b_1^+ + n) \cdot \dots \cdot (a_1^+ - b_1^+ + 1)}{\dots} \right] = \infty \times 0$$

Στην περίπτωση της τυχαίας διαδικασίας **Gamma** ($\beta = 1$) αποδεικνύεται ότι

$$\Pi^+ = \pi \cdot \cot(\pi \cdot a_1^+) + \pi \cot(\pi \cdot (b_1^+ - a_1^+)) \quad (\Delta.108)$$

και επίσης

$$a_1^+ = 1 + \frac{\nu}{2} + i\sqrt{w \cdot \lambda}$$

$$b_1^+ = 1 + 2 \cdot i\sqrt{w \cdot \lambda}$$

$$h^2(\lambda) = -\frac{1}{2 \cdot i} (w)^{-1} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{\Gamma(b_1^+ - a_1^+) \cdot \Gamma(1 - a_1^+)} \cdot \frac{(\Pi^+)^2}{\sin(\pi b_1^+)} \quad (\Delta.109)$$

$$\lambda_s = \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} = \frac{\nu^2}{4w}$$

και τέλος

$$h_n^2 = \frac{n!}{(-1)^n} \cdot \frac{\Gamma(2n - \nu) \cdot \Gamma^2(\nu + 1 - 2n)}{\Gamma(\nu - 2n) \cdot \Gamma(n - \nu) \cdot \Gamma(\nu)} \cdot \frac{1}{w^2} \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (\Delta.110)$$

$$\lambda_n = -s_n = -n \cdot (n - \nu) \cdot \frac{1}{w} \quad \mu\epsilon \quad M = \max(n \in \mathbb{N} : n \leq \frac{\nu}{2}) \quad (\Delta.111)$$

Στην περίπτωση της **Weibull** το Π^+ υπολογίζεται αριθμητικά στη θέση όπου παρουσιάζει απροσδιόριστη μορφή ενώ ισχύουν οι τύποι

$$a_1^+ = \frac{3}{2} + i\sqrt{\frac{\lambda}{\nu \cdot w}} \quad (\Delta.112)$$

$$b_1^+ = 1 + 2 \cdot i\sqrt{\frac{\lambda}{\nu \cdot w}}$$

$$h^2(\lambda) = -\frac{1}{2 \cdot i} \frac{(w)^{1-\frac{2}{\nu}}}{\nu} \frac{1}{\Gamma(b_1^+ - a_1^+) \cdot \Gamma(1 - a_1^+)} \cdot \frac{(\Pi^+)^2}{\sin(\pi b_1^+)} \quad (\Delta.113)$$

$$\lambda_s = \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} = \frac{w \cdot \nu}{4} \quad (\Delta.114)$$

Σαν σχόλιο για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I_{1,2}$ της Εξ. (Δ.94) αναφέρουμε ότι μπορεί να μην επαληθεύονται οι συνθήκες ύπαρξης του ολοκληρώματος για κάθε β (Δ.96) ωστόσο, από αναλυτική επέκταση (analytic continuation [Carrier *et. al.*, 1966]) του αποτελέσματος (Δ.105) στην κατακόρυφη λωρίδα $0 < \beta \leq 1$ του μιγαδικού επιπέδου β , παίρνουμε ένα γενικό αποτέλεσμα για το ολοκλήρωμα που ψάχνουμε

χωρίς περιορισμούς. Είναι αξιοσημείωτο ότι η αναλυτική επέκταση μπορεί να γίνει διότι αποδείξαμε ότι η συνάρτηση στην (Δ.105) είναι αναλυτική στη λωρίδα $0 < \beta \leq 1$.

Τέλος, δείχνουμε πως μπορούμε να επανεμφανίσουμε την δυναμική παράμετρο d_x στα τελικά αποτελέσματα. Εάν τα K_1, K_2 περιέχουν τη σταθερά d_x τότε δεν έχουμε παρά να διαιρέσουμε με αυτή τη σταθερά την Εξ. (Δ.5) και τελικά να πάρουμε

$$-\frac{1}{d_x} \delta(x-x_o) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x)p(s,x)] - \frac{\partial}{\partial x} [K_1(x)p(s,x)] - \frac{s}{d_x} p(s,x) \quad (\Delta.115)$$

Είναι προφανές ότι εάν θέσουμε $s' = \frac{s}{d_x}$ τότε θα πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα για τη

συνάρτηση Green με προηγουμένως με τη διαφορά ότι τώρα, θα έχουμε έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα $\frac{1}{d_x}$ να δρα τόσο στη συνάρτηση Green όσο και στη

μεταβλητή Laplace s . Συνεπώς, όταν εφαρμόζουμε τον αντίστροφο M/Σ Laplace στη συνάρτηση Green για να υπολογίσουμε τη Μεταβατική Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα έχουμε το ακόλουθο ολοκλήρωμα επάνω στη βροχοτομή (άλμα της Green)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-d_x \frac{\alpha^2}{2\gamma^2}}^{-\infty} \frac{1}{d_x} [G(s')] \cdot e^{st} ds \quad (\Delta.116)$$

Προσέξτε το απλό s στον εκθέτη του πυρήνα του Αντίστροφου Laplace, σε αντίθεση με το s' που έχει για παράμετρο η συνάρτηση Green. Επίσης, το κλαδικό σημείο είναι το ίδιο με προηγουμένως για το s' και συνεπώς για το s είναι τώρα

$$s_o = d_x \cdot \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} \quad (\Delta.117)$$

Εάν κάνουμε την ‘αναμενόμενη’ αλλαγή μεταβλητής

$$s = s' \cdot d_x \quad (\Delta.118)$$

έχουμε το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\alpha^2}{2\gamma^2}}^{-\infty} [G(s')] \cdot e^{s' \cdot t \cdot d_x} ds' \quad (\Delta.119)$$

Συνεπώς, το μόνο που χρειάζεται για να επανεμφανιστεί η παράμετρος d_x στην τελική λύση όταν για λόγους ευκολίας έχουμε θεωρήσει πως έχει αρχική τιμή

μονάδα, είναι να αντικαταστήσουμε το χρόνο t με το γινόμενο $t \cdot d_x$. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για την περίπτωση του διακριτού φάσματος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

Στο παράρτημα αυτό υπολογίζουμε τα στατιστικά χαρακτηριστικά των Χρόνων Διακοπής για δυο διαδικασίες Διάχυσης οι οποίες οδηγούν σε μια Gamma και Weibull διαδικασία αντίστοιχα. Με αυτές τις διαδικασίες έχουμε ασχοληθεί στο κυρίως κείμενο καθώς και στο προηγούμενο Παράρτημα Δ αλλά εδώ επαναλαμβάνουμε κάποια βασικά τους χαρακτηριστικά ώστε να είναι το Παράρτημα αυτόνομο. Συγκεκριμένα, έχουμε μια διαδικασία διάχυσης με συντελεστή κατεύθυνσης

$$K_1(x) = d_x \cdot x \left(\alpha + \frac{\gamma^2}{2} - x^\beta \right) \quad (\text{E.1})$$

και συντελεστή διάχυσης

$$K_2(x) = d_x \cdot \gamma^2 \cdot x^2 \quad (\text{E.2})$$

Η παράμετρος d_x , η οποία αναφέρεται ως δυναμική παράμετρος στο κυρίως κείμενο, χρησιμοποιείται στη σύνθεση μιας 1^{ης} τάξης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης με σκοπό την προσομοίωση συγκεκριμένων δυναμικών χαρακτηριστικών μιας πραγματικής στάσιμης, τυχαίας διαδικασίας βασικής ζώνης. Στους υπολογισμούς που ακολουθούν, θα θεωρήσουμε ότι έχει την τιμή ένα (1) χωρίς βλάβη της γενικότητας. Ωστόσο στους τελικούς τύπους θα επιβάλουμε να επανεμφανιστεί η δυναμική παράμετρος με τη βοήθεια απλών βημάτων άλγεβρας.

Οι παράμετροι (α, β, γ) εξαρτώνται από τα μακροπρόθεσμα στατιστικά χαρακτηριστικά της πραγματικής τυχαίας διαδικασίας που θέλουμε να προσομοιώσουμε. Στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε, η πραγματική διαδικασία περιγράφεται μακροπρόθεσμα από μια εκ των Συναρτήσεων Αθροιστικής Πιθανότητας που ακολουθούν :

$$P_{cl}(x) = \frac{\Gamma(v, w \cdot x)}{\Gamma(v)} \quad v, w > 0 : \quad \text{Gamma CDF} \quad (\text{E.3})$$

$$P_{cl}(x) = e^{-x^v/w} \quad v, w > 0 : \quad \text{Weibull CDF} \quad (\text{E.4})$$

Σημειώνεται ότι οι συναρτήσεις $\Gamma(v)$ και $\Gamma(\alpha, y)$ είναι οι γνωστές Gamma και incomplete Gamma [Abramowitz and Stegun] ενώ οι μετασχηματισμοί των παραμέτρων (α, β, γ) ώστε οι συντελεστές $K_1(x)$ και $K_2(x)$ να οδηγούν σε μια Gamma ή Weibull διαδικασία δίνονται στον Πίνακα 5.1.

Στο κυρίως κείμενο και συγκεκριμένα στην παράγραφο 4.7 έχουμε δείξει πως ορίζονται οι Χρόνοι Διακοπής στην περίπτωση μιας διαδικασίας διάχυσης και επίσης πως μπορούμε να υπολογίσουμε σε κλειστή μορφή τα 1^{ης} τάξης χαρακτηριστικά τους. Συγκεκριμένα, μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση των Χρόνων Διακοπής λύνοντας το πρόβλημα συνοριακών τιμών που περιγράφεται στις Εξ. (4.43-4.44) του Κεφ. 4. Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο M/T Laplace στη λύση, παίρνουμε την Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας και με κάποια επιπλέον άλγεβρα, τη Συνάρτηση Αθροιστικής Πιθανότητας.

Για την περίπτωση των διαδικασιών διάχυσης που επεξεργαζόμαστε σε αυτή τη μελέτη (Gamma και Weibull), εάν αντικαταστήσουμε τους συντελεστές κατεύθυνσης και διάχυσης των Εξ. (E.1-E.2) στο πρόβλημα των συνοριακών τιμών που αναφέραμε νωρίτερα (Εξ. 4.43-4.44), τότε παίρνουμε

$$x^2 y'' + x \cdot \left(-\frac{2}{\gamma^2} x^\beta + 1 + \frac{2 \cdot \alpha}{\gamma^2} \right) \cdot y' - \frac{2}{\gamma^2} \cdot \lambda \cdot y = 0 \quad (\text{E.6})$$

με οριακές συνθήκες

$$y = 1 \text{ στο } x = X_{\min} = x_{ih} \text{ και στο } x = X_{\max} = x_n \rightarrow \infty \text{ για την περίπτωση του } T_{fd} \quad (\text{E.7a})$$

και

$$y = 1 \text{ στο } x = X_{\min} = x_n \rightarrow 0 \text{ και στο } x = X_{\max} = x_{ih} \text{ για την περίπτωση του } T_{ifd} \quad (\text{E.7b})$$

Όπως και με το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών στο Παράρτημα Δ έτσι και εδώ, από τις περιπτώσεις 2.1.2.134 και 2.1.2.103 2^{ης} τάξης διαφορικών εξισώσεων που παρουσιάζονται στο βιβλίο [Polyanin *et. al.*, 1995], μπορεί κανείς να βρει δυο ανεξάρτητες λύσεις για την (E.6). Πιο αναλυτικά έχουμε τις δυο λύσεις:

$$y_{1,2} = e^{\frac{2}{\beta\gamma^2}x^\beta} x^{\beta\kappa_{1,2}} F_{11}(a_{1,2}, b_{1,2}; -\frac{2x^\beta}{\beta\gamma^2}) = e^{\frac{2}{\beta\gamma^2}x^\beta} p_{1,2}(x) \quad (\text{E.8})$$

Η συνάρτηση F_{11} ορίζεται ως εξής $F_{11}(a, b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{x^n}{n!}$ και είναι γνωστή ως

Confluent Hypergeometric function or Kummer's function of the 1st (first) Kind [Magnus *et. al.*, 1966]. Οι παράμετροι της συνάρτησης δίνονται αμέσως μετά

$$\kappa_{1,2} = \frac{-\frac{a}{\gamma^2} \pm \frac{a}{\gamma^2} \sqrt{1 + \frac{2\gamma^2}{a^2} \lambda}}{\beta} \quad a_{1,2} = \kappa_{1,2} + 1 + \frac{2a}{\beta\gamma^2} \quad b_{1,2} = 2\kappa_{1,2} + 1 + \frac{2a}{\beta\gamma^2} \quad (\text{E.9})$$

Εάν εκτελέσουμε τις πράξεις, θα διαπιστώσουμε ότι οι παράμετροι $a_{1,2}$ και $b_{1,2}$ ταυτίζονται με τις ομώνυμες παραμέτρους του Παραρτήματος Δ –βλ. (Δ.10). Συνεπώς ισχύουν και εδώ οι χρήσιμες σχέσεις που αναφέρονται εκεί στη σχέση (Δ.11) και επαναλαμβάνονται για λόγους πληρότητας:

$$a_{2,1} = a_{1,2} - b_{1,2} + 1 \quad b_{2,1} = 2 - b_{1,2} \quad (\text{E.10})$$

Δεν ισχύει το ίδιο για τις $\kappa_{1,2}$ αφού εδώ είναι διαφορετικές σε σχέση με το Παράρτημα Δ. Παρατηρούμε τέλος ότι οι $p_{1,2}(x)$ είναι ξανά –όπως δηλαδή στο Παράρτημα Δ– οι δυο κλάδοι της ίδιας δίτιμης συνάρτησης, με κλαδικό σημείο το

$$\lambda_o = -\frac{a^2}{2\gamma^2} < 0. \text{ Η κλαδική τομή ξεκινά από το } \lambda_o \text{ και εκτείνεται μέχρι το άπειρο του}$$

μιαδικού λ -επιπέδου. Δεν υπάρχει κάποια συνθήκη που να μας επιβάλλει να θεωρήσουμε ότι η κλαδική τομή έχει τη μια ή την άλλη μορφή ωστόσο, δεδομένου ότι έχουμε μελετήσει παρεμφερείς συναρτήσεις με τις $p_{1,2}$ για την περίπτωση που η κλαδική τομή εκτείνεται κατά μήκος του διαστήματος $[-\infty, \lambda_o]$, είναι μάλλον συμφέρον να θεωρήσουμε το ίδιο και τώρα.

Συνεχίζουμε με την επιβολή των οριακών συνθηκών στις δυο λύσεις ώστε τελικά να πάρουμε το σύστημα και για τις δυο περιπτώσεις (E.7a) και (E.7b)

$$1 = C_1 \cdot e^{\frac{2}{\beta\gamma^2} x_{th}^\beta} x_{th}^{\beta\kappa_1} F_{11}(a_1, b_1; -\frac{2x_{th}^\beta}{\beta\gamma^2}) + C_2 \cdot e^{\frac{2}{\beta\gamma^2} x_{th}^\beta} x_{th}^{\beta\kappa_2} F_{11}(a_2, b_2; -\frac{2x_{th}^\beta}{\beta\gamma^2}) \quad (\text{E.11})$$

$$1 = C_1 \cdot e^{\frac{2}{\beta\gamma^2} x_n^\beta} x_n^{\beta\kappa_1} F_{11}(a_1, b_1; -\frac{2x_n^\beta}{\beta\gamma^2}) + C_2 \cdot e^{\frac{2}{\beta\gamma^2} x_n^\beta} x_n^{\beta\kappa_2} F_{11}(a_2, b_2; -\frac{2x_n^\beta}{\beta\gamma^2})$$

Η ορίζουσα του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$\det = \left[x_n^{\beta\kappa_2} x_{th}^{\beta\kappa_1} F_{11}(a_1, b_1; -\frac{2x_{th}^\beta}{\beta\gamma^2}) F_{11}(a_2, b_2; -\frac{2x_n^\beta}{\beta\gamma^2}) - x_n^{\beta\kappa_1} x_{th}^{\beta\kappa_2} F_{11}(a_1, b_1; -\frac{2x_n^\beta}{\beta\gamma^2}) F_{11}(a_2, b_2; -\frac{2x_{th}^\beta}{\beta\gamma^2}) \right] e^{\frac{2}{\beta\gamma^2} (x_n^\beta + x_{th}^\beta)} \quad (\text{E.12})$$

και μηδενίζεται μόνο στο κλαδικό σημείο λ_o . Οι τελικές λύσεις για τα C_1, C_2 δίνονται από

$$C_1 = \frac{x_n^{\beta\kappa_2} e^{\frac{2}{\beta\gamma^2}x_n^\beta} F_{11}(a_2, b_2; -\frac{2x_n^\beta}{\beta\gamma^2}) - x_{th}^{\beta\kappa_2} e^{\frac{2}{\beta\gamma^2}x_{th}^\beta} F_{11}(a_2, b_2; -\frac{2x_{th}^\beta}{\beta\gamma^2})}{\det} \quad (\text{E.13a})$$

$$C_2 = \frac{x_{th}^{\beta\kappa_1} e^{\frac{2}{\beta\gamma^2}x_{th}^\beta} F_{11}(a_1, b_1; -\frac{2x_{th}^\beta}{\beta\gamma^2}) - x_n^{\beta\kappa_1} e^{\frac{2}{\beta\gamma^2}x_n^\beta} F_{11}(a_1, b_1; -\frac{2x_n^\beta}{\beta\gamma^2})}{\det} \quad (\text{E.13b})$$

Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά των C_1, C_2 για τις ακραίες τιμές του x_n – δηλαδή 0 ή ∞ – και για το λόγο αυτό θα μελετήσουμε το πρόσημο του εκθέτη του όρου $x_n^{\beta\cdot\kappa_{1,2}}$ που εμφανίζεται στις Εξ. (E.13). Από την Εξ. (E.9) έχουμε το αποτέλεσμα

$$\beta \cdot \kappa_{1,2} = -\frac{a}{\gamma^2} \pm \frac{a}{\gamma^2} \sqrt{1 + \frac{2\gamma^2}{a^2} \lambda} \quad (\text{E.14})$$

Εάν ανατρέξουμε στο Παράρτημα Δ και στα αποτελέσματα που περιέχονται στις (Δ.14-Δ.23) θα δούμε πως για τη συγκεκριμένη ποσότητα της Εξ. (E.14) έχουμε ήδη αποφανθεί ότι

$$\text{Re}\{\beta \cdot \kappa_2\} < 0 \text{ σε όλο το } \lambda \text{ επίπεδο} \quad (\text{E.15a})$$

ενώ,

$$\text{Re}\{\beta \cdot \kappa_1\} > 0 \text{ παντού στο } \lambda \text{ επίπεδο} \quad (\text{E.15b})$$

εκτός της περιοχής που περικλείει η γνωστή παραβολή

$$\lambda_{im}^2 < \frac{2\alpha^2}{\gamma^2} |\lambda_r| \quad (\text{E.16})$$

$$\text{όπου } \lambda_r = \text{Re}\{\lambda\}, \lambda_{im} = \text{Im}\{\lambda\} \quad (\text{E.17})$$

Εάν θέσουμε $\Lambda_{1,2}(x) = e^{\frac{2}{\beta\gamma^2}x^\beta} \cdot p_{1,2}(x)$ με τις $p_{1,2}(x)$ να ορίζονται στην Εξ. (E.8), τότε τα C_1, C_2 μπορούν να γραφούν και πιο απλά

$$C_1 = \frac{\Lambda_2(x_n) - \Lambda_2(x_{th})}{\Lambda_2(x_n) \cdot \Lambda_1(x_{th}) - \Lambda_1(x_n) \cdot \Lambda_2(x_{th})} \quad (\text{E.18a})$$

$$C_2 = \frac{\Lambda_1(x_{th}) - \Lambda_1(x_n)}{\Lambda_2(x_n) \cdot \Lambda_1(x_{th}) - \Lambda_1(x_n) \cdot \Lambda_2(x_{th})} \quad (\text{E.18b})$$

Στο εξής πρέπει να διακρίνουμε δυο περιπτώσεις για το x_n . Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $x_n \rightarrow \infty$ που αντιστοιχεί στο Χρόνο Διακοπής T_{fd} . Μπορεί λοιπόν να αποδειχθεί [Magnus *et. al.*, 1966] εύκολα ότι για μεγάλα x , ισχύει η ακόλουθη ασυμπτωτική προσέγγιση για τη $\Lambda_{1,2}$ –βλ. σχ. (Δ.25)–

$$\Lambda_{1,2}(x) \square \frac{\Gamma(b_{1,2})}{\Gamma(b_{1,2} - a_{1,2})} \cdot \left(\frac{2}{\beta\gamma^2} \right)^{-a_{1,2}} \cdot x^{-\beta - \frac{2\alpha}{\gamma^2}} \cdot e^{\frac{2}{\beta\gamma^2}x^\beta} \quad (\text{E.19})$$

Από το αποτέλεσμα είναι προφανές ότι η $\Lambda_{1,2}$ αποκλίνει για μεγάλα x και συνεπώς τα C_1, C_2 μπορούν να γραφούν ως εξής για το όριο $x_n \rightarrow \infty$

$$C_1 = \frac{\Lambda_2(x_n)}{\Lambda_2(x_n) \cdot \Lambda_1(x_{th}) - \Lambda_1(x_n) \cdot \Lambda_2(x_{th})} \quad (\text{E.20a})$$

$$C_2 = -\frac{\Lambda_1(x_n)}{\Lambda_2(x_n) \cdot \Lambda_1(x_{th}) - \Lambda_1(x_n) \cdot \Lambda_2(x_{th})} \quad (\text{E.20b})$$

με το $\Lambda_{1,2}(x_n)$ να δίνεται από την ασυμπτωτική προσέγγιση στο (E.19). Ύστερα από απλές πράξεις παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα που αντιστοιχεί στη ροπογεννήτρια συνάρτηση του T_{fd} για τις παραμέτρους (x_{th}, x_o)

$$u_{fd}(x_{th}, x_o, \lambda) = e^{\frac{2}{\beta\gamma^2}(x_o^\beta - x_{th}^\beta)} \frac{p_1(x_o) \frac{\Gamma(b_2)}{\Gamma(b_2 - a_2)} \left(\frac{2}{\beta\gamma^2} \right)^{-a_2} - p_2(x_o) \frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(b_1 - a_1)} \left(\frac{2}{\beta\gamma^2} \right)^{-a_1}}{p_1(x_{th}) \frac{\Gamma(b_2)}{\Gamma(b_2 - a_2)} \left(\frac{2}{\beta\gamma^2} \right)^{-a_2} - p_2(x_{th}) \frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(b_1 - a_1)} \left(\frac{2}{\beta\gamma^2} \right)^{-a_1}} \quad (\text{E.21})$$

Η $u_{fd}(x_{th}, x_o, \lambda)$ είναι μονότιμη στο λ επίπεδο και αναλυτική –ορίζεται ακόμα και στο κλαδικό σημείο λ_o όπου ισούται με τη μονάδα.

Στη δεύτερη περίπτωση μελετάμε την T_{fd} όπου έχουμε $x_n \rightarrow 0$. Τότε ισχύει,

$$\Lambda_{1,2}(x) \square x^{\beta \cdot \kappa_{1,2}} \quad (\text{E.22})$$

διότι τόσο το εκθετικό μέρος όσο και η Kummer function of 1st Kind συνεισφέρουν τη μονάδα στο $x_n \rightarrow 0$. Από τις εξισώσεις (E.15-E.16) προκύπτει ότι

$\Lambda_2(x_n) \rightarrow \infty$ για $x_n \rightarrow 0$ σε όλο το λ επίπεδο ενώ,

$\Lambda_1(x_n) \rightarrow 0$ για $x_n \rightarrow 0$ σε όλο το λ επίπεδο εκτός από την περιοχή που περικλείεται από τη γνωστή παραβολή της Εξ. (E.16). Συμπερασματικά, για την τομή των δυο προαναφερθέντων περιοχών ισχύει

$$C_1 = \frac{1}{\Lambda_1(x_{th})} \quad (\text{E.23a})$$

$$C_2 = 0 \quad (\text{E.23b})$$

Τελικά η λύση γράφεται αναλυτικά ως εξής

$$u_{ifd}(x_{th}, x_o, \lambda) = e^{\frac{2}{\beta\gamma^2}(x_o^\beta - x_{th}^\beta)} \frac{p_1(x_o)}{p_1(x_{th})} = e^{\frac{2}{\beta\gamma^2}(x_o^\beta - x_{th}^\beta)} \frac{x_o^{\beta\kappa_1} F_{11}(a_1, b_1; -\frac{2x_o^\beta}{\beta\gamma^2})}{x_{th}^{\beta\kappa_1} F_{11}(a_1, b_1; -\frac{2x_{th}^\beta}{\beta\gamma^2})} \quad (E.24)$$

Πλέον, είναι εύκολο να υπολογίσει κανείς την Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας ή τη Συνάρτηση Αθροιστικής Πιθανότητας για τα T_{fd} και T_{ifd} με το να εφαρμόσει τον αντίστροφο Μ/Σ Laplace στα u_{fd} και $\frac{u_{fd}}{\lambda}$ ή u_{ifd} και $\frac{u_{ifd}}{\lambda}$ αντίστοιχα –περισσότερα στο κυρίως κείμενο παράγραφο 4.7.

Αυτό που έχει ενδιαφέρον από εδώ και στο εξής, είναι ο τρόπος υπολογισμού του αντίστροφου Μ/Σ Laplace σε κάθε μια από τις προαναφερθείσες περιπτώσεις. Ένας ευθύς τρόπος θα ήταν ο αριθμητικός υπολογισμός με τη βοήθεια του Mathematica. Κάτι τέτοιο όμως δε συνίσταται, ειδικά στην περίπτωση που η συνάρτηση στην οποία εφαρμόζουμε τον αντίστροφο Μ/Σ δεν είναι απλή. Αιτία είναι πολλές φορές, η αδυναμία του Mathematica να ορίσει σωστά σύνθετες συναρτήσεις για μεγάλα ορίσματα, ιδιαίτερα *μιαδικά*. Κατά συνέπεια, εάν το ολοκλήρωμα του αντίστροφου Μ/Σ δεν συγκλίνει γρήγορα, τότε ενδέχεται να οδηγηθούμε σε σοβαρά υπολογιστικά σφάλματα. Για παράδειγμα στην περίπτωση που εξετάζουμε, οι συναρτήσεις Kummer of the 1st Kind έχουν σαν παραμέτρους τους μιαδικούς αριθμούς $(a_{1,2}, b_{1,2})$ οι οποίοι αποκλίνουν στο μιαδικό λ επίπεδο όταν κινούμαστε προς τα όρια του κατακόρυφου δρόμου ολοκλήρωσης $(-i \cdot \infty, i \cdot \infty)$. Για αποκλίνουσες τιμές αυτών των μιαδικών παραμέτρων, το Mathematica αδυνατεί να δώσει ικανοποιητική ασυμπτωτική προσέγγιση για την συνάρτηση που γίνεται λόγος.

Εναλλακτικά, προτείνεται ο αναλυτικός τρόπος υπολογισμού του αντίστροφου Μ/Σ με το *κλείσιμο* του δρόμου ολοκλήρωσης. Για το λόγο αυτό εξετάζουμε για ποιο τμήμα του άπειρου ημικυκλίου $\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ επαληθεύεται το *λήμμα* Jordan (*Jordan's lemma*). Ξεκινάμε από την πιο απλή συνάρτηση που αντιστοιχεί στην περίπτωση του T_{ifd} –βλ. Εξ. (E.24). Θέτουμε

$$\lambda = \rho \cdot e^{i\theta} \quad \text{με } \theta \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi) \text{ και φυσικά με το } \rho \rightarrow \infty \quad (E.25)$$

Τότε σύμφωνα με την Εξ. (E.14), τα $\kappa_{1,2}$ μπορούν να γραφούν προσεγγιστικά ως ακολούθως

$$\kappa_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\beta \cdot \gamma} \sqrt{\rho} \cdot e^{i \frac{\theta}{2}} \quad (\text{E.26})$$

Εάν ανακαλέσουμε τις δυο τελευταίες σχέσεις της Εξ. (E.9), τότε ο λόγος των $a_{1,2}, b_{1,2}$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{a_{1,2}}{b_{1,2}} = \frac{\kappa_{1,2} + 1 + \frac{2\alpha}{\beta \cdot \gamma^2}}{2\kappa_{1,2} + 1 + \frac{2\alpha}{\beta \cdot \gamma^2}} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \quad (\text{E.27})$$

Συνεπώς η συνάρτηση Kummer of the 1st Kind γράφεται για ένα τυχαίο όρισμα z

$$F_{11}(a_{1,2}, b_{1,2}; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_{1,2})_n}{(b_{1,2})_n} \frac{z^n}{n!} \square \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{z^n}{n!} \square e^{\frac{z}{2}} \quad (\text{E.28})$$

και τελικά με αντικατάσταση έχουμε την ασυμπτωτική προσέγγιση για την

$$u_{ifd}(x_{ih}, x_o, \lambda) = \left(\frac{x_o}{x_{ih}}\right)^{\beta \kappa_1} e^{\frac{1}{\beta \gamma^2}(x_o^\beta - x_{ih}^\beta)} \quad (\text{E.29})$$

με διαδοχικές απλές πράξεις παίρνουμε την ακόλουθη μορφή

$$u_{ifd}(x_{ih}, x_o, \lambda) = e^{\frac{1}{\beta \gamma^2}(x_o^\beta - x_{ih}^\beta)} e^{-\ln\left(\frac{x_{ih}}{x_o}\right) \beta \kappa_1} \quad (\text{E.30})$$

Παρατηρούμε ότι $\ln\left(\frac{x_{ih}}{x_o}\right) > 0$ αφού $x_{ih} > x_o$. Συνεπώς η συνάρτηση u_{ifd} συγκλίνει στο

μηδέν μόνο σε εκείνο το τμήμα του άπειρου ημικυκλίου

$\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot e^{i\theta} \theta \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ το οποίο βρίσκεται ‘έξω’ από τη γνωστή παραβολή

της Εξ. (E.17). Αυτό συμβαίνει διότι η ποσότητα $\text{Re}\{\beta \cdot \kappa\}_1$ είναι θετική παντού

στο λ επίπεδο εκτός της περιοχής που περικλείει η γνωστή παραβολή της (E.16) –βλ.

(E.15b). Άρα, δεδομένου ότι η εν λόγω ποσότητα αποκλίνει για μεγάλα λ –βλ. (E.9)–

ισχύει τότε $\text{Re}\{\beta \cdot \kappa_1\} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \infty$ σε όλο το λ επίπεδο εκτός της περιοχής που περικλείει η

παραβολή. Στο τμήμα του άπειρου ημισφαιρίου εντός της παραβολής προκύπτει με

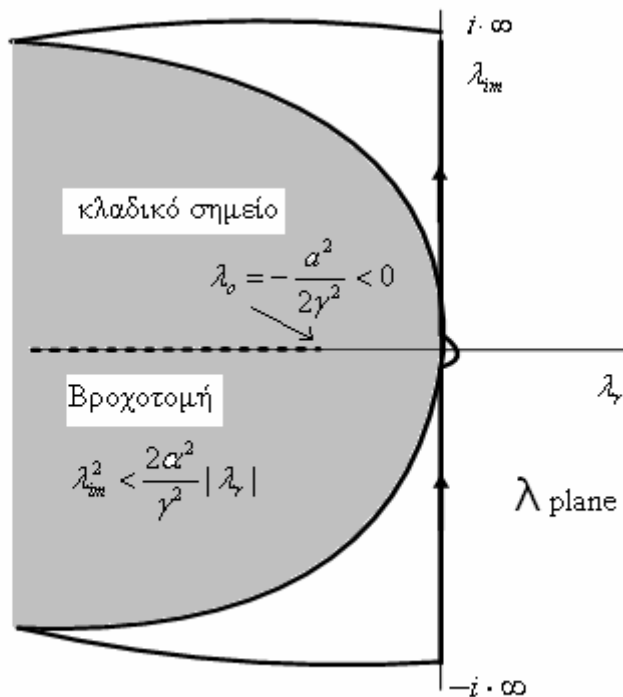
την ίδια συλλογιστική ότι $\text{Re}\{\beta \cdot \kappa_1\} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} -\infty$.

Για την u_{fd} αποδεικνύεται κατά τον ίδιο τρόπο ότι το λήμμα Jordan ισχύει στο ίδιο

τμήμα του άπειρου ημικυκλίου με προηγουμένως, ωστόσο οι πράξεις είναι αρκετά

χρονοβόρες και ίσως συμφέρει να ελέγχεται η συνθήκη αριθμητικά.

Τελικά ο δρόμος ολοκλήρωσης κλείνει όπως φαίνεται στο Σχήμα



Δρόμος Ολοκλήρωσης για τον αντίστροφο M/S Laplace

Σχήμα E.1

Εάν διαχωρίσουμε το δρόμο ολοκλήρωσης κατά μήκος της παραβολής σε δυο μέρη, με το πρώτο να είναι αυτό επάνω από τον πραγματικό άξονα $-\text{Im}\{\lambda\} > 0$ και το δεύτερο κάτω από αυτόν $-\text{Im}\{\lambda\} < 0$, τότε η παραμετρική εξίσωση της παραβολής δίνεται για τα δυο μέρη

1^ο μέρος

$$\lambda = -\mu + i\sqrt{\frac{2\alpha^2}{\gamma^2}}\mu \quad \text{με } \mu \in [0, +\infty) \quad (\text{E.31a})$$

2^ο μέρος

$$\lambda = -\mu - i\sqrt{\frac{2\alpha^2}{\gamma^2}}\mu \quad \text{με } \mu \in (+\infty, 0] \quad (\text{E.31b})$$

Θα κάνουμε κάποιες πράξεις για το 1^ο μέρος για να καταλήξουμε σε απλά ολοκληρώματα. Την ίδια διαδικασία εφαρμόζουμε και για το 2^ο μέρος άλλα την παραλείπουμε από το κείμενο. Πιο αναλυτικά έχουμε κατ' αρχήν την αλλαγή μεταβλητής

$$\lambda = -\mu + i\sqrt{\frac{2\alpha^2}{\gamma^2}}\mu \text{ και άρα } d\lambda = -1 + i\sqrt{\frac{\alpha^2}{2\cdot\gamma^2\cdot\mu}}d\mu \quad \text{με } \mu \in [0, +\infty) \quad (\text{E.32})$$

Με αντικατάσταση στην Εξ. (E.9) παίρνουμε

$$\kappa_1 = i\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2\mu}{\gamma^2}} \text{ και } \kappa_2 = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{2\alpha}{\gamma^2} + i\sqrt{\frac{2\mu}{\gamma^2}}\right) \quad (\text{E.33})$$

Τα $(a_{1,2}, b_{1,2})$ προκύπτουν εύκολα από την αντικατάσταση της (E.33) στις δυο τελευταίες εξισώσεις της (E.9). Συνεχίζουμε τις αλλαγές μεταβλητών με την ακόλουθη φόρμουλα

$$\sqrt{\mu} = y \text{ και συνεπώς } d\mu = 2y \cdot dy \quad \text{με } y \in [0, \infty) \quad (\text{E.34})$$

οπότε

$$\kappa_1 = i\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2}{\gamma^2}} \cdot y \text{ και } \kappa_2 = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{2\alpha}{\gamma^2} + i\sqrt{\frac{2}{\gamma^2}} \cdot y\right) \quad (\text{E.35})$$

Συνοπτικά και για τις δυο αντικαταστάσεις έχουμε

$$\lambda = -y^2 + i\sqrt{\frac{2\alpha^2}{\gamma^2}}y \text{ και } d\lambda = \left(-2y + i\sqrt{\frac{2\alpha^2}{\gamma^2}}\right)dy \text{ με } y \in [0, \infty) \quad (\text{E.36})$$

Αυτά για το 1^ο μέρος. Για το 2^ο καταλήγουμε ακριβώς στις ίδιες σχέσεις με τη διαφορά ότι τώρα ισχύει $y \in (-\infty, 0]$ διότι η δεύτερη αντικατάσταση μεταβλητών που κάνουμε είναι η $-\sqrt{\mu} = y$. Τελικά, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον αντίστροφο Μ/Σ Laplace ολοκληρώνοντας κατά μήκος της παραβολής που φαίνεται στο σχήμα. Αυτά που απομένουν είναι (i) να διαλέξουμε διαδικασία (Gamma/Weibull) και να κάνουμε τις αντικαταστάσεις των παραμέτρων (α, β, γ) όπου χρειάζεται σύμφωνα με τον Πίνακα 5.1 και (ii) να αντικαταστήσουμε τις παραμέτρους $(a_{1,2}, b_{1,2}, \kappa_{1,2})$ και να κάνουμε την τελική αλλαγή μεταβλητής της Εξ. (E.36). Τα τελικά αποτελέσματα για τις Gamma/Weibull, για τις δυο περιπτώσεις T_{fd}, T_{ifd} αλλά μόνο για τη γενικότερη περίπτωση της $\frac{u_{fd}}{\lambda}$, ακολουθούν.

Gamma

$$\kappa_1 = i\sqrt{w} \cdot y \quad (\text{E.37})$$

$$\kappa_2 = -v - i\sqrt{w} \cdot y \quad (\text{E.38})$$

τα $(a_{1,2}, b_{1,2})$ υπολογίζονται από τις

$$a_{1,2} = \kappa_{1,2} + 1 + \nu \quad b_{1,2} = 2\kappa_{1,2} + 1 + \nu \quad (\text{E.39})$$

και επιπλέον

$$\lambda = -y^2 + i \frac{\nu}{\sqrt{w}} y \quad (\text{E.40})$$

$$d\lambda = \left(-2y + i \frac{\nu}{\sqrt{w}} \right) dy \quad (\text{E.41})$$

Τελικά με αντικαταστάσεις παίρνουμε για την u_{fd}

$$u_{fd}(x_{th}, x_o, y) = e^{w(x_o - x_{th})} \times$$

$$\begin{aligned} & \frac{F_{11}(i\sqrt{w}\cdot y + \nu + 1, 2i\sqrt{w}\cdot y + \nu + 1; -w\cdot x_o) \frac{\Gamma(1-\nu-2i\sqrt{w}\cdot y)}{\Gamma(-\nu-i\sqrt{w}\cdot y)} e^{i\sqrt{w}\cdot y \cdot \ln(w x_o)} - F_{11}(1-i\sqrt{w}\cdot y, 1-\nu-2i\sqrt{w}\cdot y; -w\cdot x_o) \frac{\Gamma(1+\nu+2i\sqrt{w}\cdot y)}{\Gamma(\sqrt{w}\cdot y)} e^{(-\nu-i\sqrt{w}\cdot y) \cdot \ln(w x_o)}}{F_{11}(i\sqrt{w}\cdot y + \nu + 1, 2i\sqrt{w}\cdot y + \nu + 1; -w\cdot x_{th}) \frac{\Gamma(1-\nu-2i\sqrt{w}\cdot y)}{\Gamma(-\nu-i\sqrt{w}\cdot y)} e^{i\sqrt{w}\cdot y \cdot \ln(w x_{th})} - F_{11}(1-i\sqrt{w}\cdot y, 1-\nu-2i\sqrt{w}\cdot y; -w\cdot x_{th}) \frac{\Gamma(1+\nu+2i\sqrt{w}\cdot y)}{\Gamma(\sqrt{w}\cdot y)} e^{(-\nu-i\sqrt{w}\cdot y) \cdot \ln(w x_{th})}} \\ & \quad (\text{E.42}) \end{aligned}$$

Και τελικά το ολοκλήρωμα του αντίστροφου Laplace επάνω στον κατακόρυφο δρόμο ολοκλήρωσης $(-i\cdot\infty, i\cdot\infty)$ ισούται με

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{u_{fd}(x_{th}, x_o, \lambda)}{\lambda} e^{\lambda \cdot \tau_h} \cdot d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{fd}(x_{th}, x_o, y)}{-y^2 + i \frac{\nu}{\sqrt{w}} y} \left(-2y + i \frac{\nu}{\sqrt{w}} \right) e^{\left(-y^2 + i \frac{\nu}{\sqrt{w}} y \right) \tau_h} dy \quad (\text{E.43})$$

Εντελώς αντίστοιχα αποτελέσματα για τον αντίστροφο M/Σ Laplace έχουμε για την T_{ifd} και κατ'επέκταση την ροπογεννήτριά της u_{ifd} . Συγκεκριμένα

$$u_{ifd}(x_{th}, x_o, y) = e^{w(x_o - x_{th})} \frac{F_{11}(i\sqrt{w}\cdot y + \nu + 1, 2i\sqrt{w}\cdot y + \nu + 1; -w\cdot x_o)}{F_{11}(i\sqrt{w}\cdot y + \nu + 1, 2i\sqrt{w}\cdot y + \nu + 1; -w\cdot x_{th})} e^{i\sqrt{w}\cdot y \cdot \ln\left(\frac{x_o}{x_{th}}\right)} \quad (\text{E.44})$$

Τέλος

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{u_{ifd}(x_{th}, x_o, \lambda)}{\lambda} e^{\lambda \cdot \tau_h} \cdot d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{ifd}(x_{th}, x_o, y)}{-y^2 + i \frac{\nu}{\sqrt{w}} y} \left(-2y + i \frac{\nu}{\sqrt{w}} \right) e^{\left(-y^2 + i \frac{\nu}{\sqrt{w}} y \right) \tau_h} dy \quad (\text{E.45})$$

Weibull

$$\kappa_1 = i \frac{y}{\sqrt{\nu \cdot w}} \quad (\text{E.46})$$

$$\kappa_2 = -1 - i \frac{y}{\sqrt{v \cdot w}} \quad (\text{E.47})$$

$$a_{1,2} = \kappa_{1,2} + 2 \quad b_{1,2} = 2\kappa_{1,2} + 2 \quad (\text{E.48})$$

και επιπλέον

$$\lambda = -y^2 + i\sqrt{w \cdot v} \cdot y \quad (\text{E.49})$$

$$d\lambda = (-2y + i\sqrt{v \cdot w}) dy \quad (\text{E.50})$$

Τελικά με αντικαταστάσεις παίρνουμε για την u_{fd}

$$u_{fd}(x_{th}, x_o, y) = e^{\frac{(x_o^v - x_{th}^v)}{w}} \times$$

$$\frac{F_{11}\left(2+i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}, 2+2i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}; \frac{x_o^v}{w}\right) \frac{\Gamma(-2i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}})}{\Gamma(-1-i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}})} \left(\frac{1}{w}\right)^{-1+i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}} x_o^{i y \sqrt{\frac{v}{w}}}}{F_{11}\left(2+i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}, 2+2i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}; \frac{x_{th}^v}{w}\right) \frac{\Gamma(-2i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}})}{\Gamma(-1-i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}})} \left(\frac{1}{w}\right)^{-1+i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}} x_{th}^{i y \sqrt{\frac{v}{w}}}} \times$$

$$-F_{11}\left(1-i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}, -2i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}; \frac{x_o^v}{w}\right) \frac{\Gamma(2+2i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}})}{\Gamma(i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}})} \left(\frac{1}{w}\right)^{-2+i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}} x_o^{-v-i y \sqrt{\frac{v}{w}}}}{F_{11}\left(1-i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}, -2i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}; \frac{x_{th}^v}{w}\right) \frac{\Gamma(2+2i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}})}{\Gamma(i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}})} \left(\frac{1}{w}\right)^{-2+i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}} x_{th}^{-v-i y \sqrt{\frac{v}{w}}}} \quad (\text{E.51})$$

Και τελικά το ολοκλήρωμα του αντίστροφου Laplace επάνω στον κατακόρυφο δρόμο ολοκλήρωσης $(-i \cdot \infty, i \cdot \infty)$ ισούται με

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{u_{fd}(x_{th}, x_o, \lambda)}{\lambda} e^{\lambda \cdot \tau_h} \cdot d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{fd}(x_{th}, x_o, y)}{-y^2 + i\sqrt{w \cdot v} \cdot y} (-2y + i\sqrt{v \cdot w}) e^{(-y^2 + i\sqrt{w \cdot v} \cdot y) \cdot \tau_h} dy \quad (\text{E.52})$$

Εντελώς αντίστοιχα αποτελέσματα για τον αντίστροφο Μ/Σ Laplace έχουμε για την T_{fd} και κατ'επέκταση την ροπογεννήτριά της u_{ifd} . Συγκεκριμένα

$$u_{ifd}(x_{th}, x_o, y) = e^{\frac{x_o^v - x_{th}^v}{w}} \frac{F_{11}\left(2+i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}, 2+2i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}; -\frac{x_o^v}{w}\right) e^{i \cdot y \cdot \sqrt{\frac{v}{w}} \cdot \ln\left(\frac{x_o}{x_{th}}\right)}}{F_{11}\left(2+i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}, 2+2i\frac{y}{\sqrt{v \cdot w}}; -\frac{x_{th}^v}{w}\right)} \quad (\text{E.53})$$

Τέλος

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{u_{ifd}(x_{th}, x_o, \lambda)}{\lambda} e^{\lambda \cdot \tau_h} \cdot d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{ifd}(x_{th}, x_o, y)}{-y^2 + i\sqrt{w \cdot v} \cdot y} (-2y + i\sqrt{v \cdot w}) e^{(-y^2 + i\sqrt{w \cdot v} \cdot y) \cdot \tau_h} dy \quad (\text{E.54})$$

Ας δούμε τέλος, με πιο τρόπο μπορούμε να εμφανίσουμε ξανά στα πιο πάνω αποτελέσματα τη δυναμική παράμετρο d_x δεδομένου ότι μέχρι τώρα για ευκολία θεωρήσαμε ότι $d_x = 1$. Η διαδικασία που ακολουθεί θυμίζει αυτή που ακολουθήσαμε για τον ίδιο σκοπό στο Παράρτημα Δ. Εάν λοιπόν οι συντελεστές κατεύθυνσης και διάχυσης έχουν μια πολλαπλασιαστική σταθερά d_x όπως φαίνεται στις Εξ. (E.1-E.2), τότε δεν έχουμε παρά να διαιρέσουμε με αυτή τη σταθερά τις αρχικές εξισώσεις του προβλήματος οριακών συνθηκών οι οποίες εμφανίζονται στις Εξ. (4.43)-(4.44) του κυρίως κειμένου και στη συνέχεια να θέσουμε $\lambda' = \frac{\lambda}{d_x}$. Συνεπώς η Συνάρτηση

Πυκνότητας Πιθανότητας θα δίνεται από το ακόλουθο ολοκλήρωμα –αντίστροφος Μ/Σ Laplace της ροπογεννήτριας π.χ. της u_{fd} αλλά το ίδιο ισχύει και για την u_{ifd} –

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} u_{fd}(x_{ih}, x_o, \lambda') e^{\lambda' \tau_h} \cdot d\lambda' \quad (E.55)$$

Με την προφανή αλλαγή μεταβλητής $\lambda = \lambda' \cdot d_x$ παίρνουμε

$$\frac{d_x}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} u_{fd}(x_{ih}, x_o, \lambda') e^{\lambda' d_x \tau_h} \cdot d\lambda' \quad (E.56)$$

Άρα το αποτέλεσμα που παίρνουμε για $d_x = 1$ και αφορά στην Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας θα πρέπει να το πολλαπλασιάσουμε με d_x και να αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή τ_h -που ταυτίζεται με τις T_{fd} ή T_{ifd} – με $d_x \cdot \tau_h$ στο τελικό ολοκλήρωμα. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση της Συνάρτησης Αθροιστικής Πιθανότητας δε χρειάζεται να πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με d_x . Πράγματι,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{u_{fd}(x_{ih}, x_o, \lambda')}{\lambda} e^{\lambda \tau_h} \cdot d\lambda \stackrel{\lambda = \lambda' d_x}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{u_{fd}(x_{ih}, x_o, \lambda')}{\lambda'} e^{\lambda' d_x \tau_h} \cdot d\lambda' \quad (E.57)$$

Θα κλείσουμε αυτό το παράρτημα με τον υπολογισμό της μέσης τιμής της τυχαίας μεταβλητής T_{fd} –για τη μέση τιμή της T_{ifd} η διαδικασία είναι ίδια με αυτή που περιγράψαμε εδώ– για την περίπτωση των διαδικασιών Gamma και Weibull. Εύλογα θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί πως είναι εύκολο να υπολογίσει τη μέση τιμή της T_{fd} από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση u_{fd} χρησιμοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα

$$E[T_{fd}] = \left[\frac{d}{d\lambda} u_{fd}(x_{th}, x_o, \lambda) \right]_{\lambda=0} \quad (E.58)$$

ωστόσο η αναλυτική παραγωγή ως προς λ στην περίπτωση μας είναι ιδιαίτερα δύσκολη –θα μπορούσε βέβαια κανείς να υπολογίσει την παράγωγο αριθμητικά– και ως εκ τούτου προτιμάμε τη λύση του προβλήματος που περιγράφεται από τις Εξ. (4.51)-(4.52).

Συγκεκριμένα, στο βιβλίο των [Karlin and Taylor, 1981] αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής τ_h με παραμέτρους την τριάδα $(X_{\min}, X_{\max}, x_o)$ δίνεται από τον τύπο της Εξ. (4.51) που επαναλαμβάνεται εδώ

$$u_{mn} = 2 \left\{ \frac{S(x_o) - S(X_{\min})}{S(X_{\max}) - S(X_{\min})} \int_{x_o}^{X_{\max}} [S(X_{\max}) - S(\xi)] \cdot m(\xi) d\xi + \frac{S(X_{\max}) - S(x_o)}{S(X_{\max}) - S(X_{\min})} \int_{X_{\min}}^{x_o} [S(\xi) - S(X_{\min})] \cdot m(\xi) d\xi \right\} \quad (E.59)$$

όπου τα $s(x)$, $S(x)$, $m(x)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$s(x) = \exp \left\{ - \int^x \left[\frac{2 \cdot \mu(\xi)}{\sigma^2(\xi)} \right] d\xi \right\}, \quad S(x) = \int^x s(n) dn, \quad m(x) = \frac{1}{\sigma^2(x) \cdot s(x)} \quad (E.60)$$

και τα μ , σ^2 είναι ο συντελεστής κατεύθυνσης $K_1(x)$ και ο συντελεστής διάχυσης $K_2(x)$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση των συντελεστών που εξετάζουμε –δες Εξ. (E.1), (E.2)– όταν $d_x = 1$, οι ποσότητες της (E.60) μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά

$$s(x) = e^{\frac{2}{\beta \cdot \gamma^2} x^\beta} x^{-\left(\frac{2\alpha}{\gamma^2} + 1\right)} \quad (E.61a)$$

$$S(x) = - \frac{\left(-\frac{2}{\beta \cdot \gamma^2} \right)^{\frac{2\alpha}{\beta \cdot \gamma^2}}}{\beta} \Gamma \left(-\frac{2\alpha}{\beta \cdot \gamma^2}, -\frac{2x^\beta}{\beta \cdot \gamma^2} \right) \quad (E.61b)$$

$$m(x) = \frac{e^{-\frac{2}{\beta \cdot \gamma^2} x^\beta}}{\gamma^2 \cdot x^{\frac{1-2\alpha}{\gamma^2}}} \quad (E.61c)$$

Στην (E.59) υπάρχουν δυο όροι: ας εξετάσουμε πως συμπεριφέρεται ο καθένας από αυτούς για την περίπτωση που το τ_h ταυτίζεται με το T_{fd} , δηλαδή ισχύει $X_{\max} \rightarrow \infty$

Για τον πρώτο όρο κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι το $S(X_{\max})$ αποκλίνει για την περίπτωση $X_{\max} \rightarrow \infty$ διότι η συνάρτηση $\Gamma(a, z)$ έχει την ακόλουθη ασυμπτωτική προσέγγιση για μεγάλα ορίσματα $|z| \rightarrow \infty$ [Abramowitz and Stegun]

$$\Gamma(a, z) = e^{-z} \cdot z^{a-1} \quad (\text{E.61d})$$

Συνεπώς από τον 1^ο όρο μένει μόνο το γινόμενο

$$2[S(x_o) - S(X_{\min})] \int_{x_o}^{X_{\max}} m(\xi) d\xi \quad (\text{E.62})$$

διότι το ολοκλήρωμα $\int_{x_o}^{X_{\max}} S(\xi) \cdot m(\xi) d\xi$ συγκλίνει ακόμα και για $X_{\max} \rightarrow \infty$ διότι η ολοκληρωτέα ποσότητα έχει την ακόλουθη ασυμπτωτική προσέγγιση για μεγάλα ορίσματα

$$S(x) \cdot m(x) \approx e^{\frac{2x^\beta}{\beta \cdot \gamma^2}} \left(-\frac{2x^\beta}{\beta \cdot \gamma^2} \right)^{\frac{2\alpha}{\beta \cdot \gamma^2} - 1} \frac{x^{\frac{2\alpha}{\gamma^2}}}{\gamma^2} x^{-1} e^{-\frac{2x^\beta}{\beta \cdot \gamma^2}} = x^{-1} x^{-\beta} \quad (\text{E.63})$$

και άρα ο λόγος $\frac{S(x_o) - S(X_{\min})}{S(X_{\max}) - S(X_{\min})} \int_{x_o}^{X_{\max}} [-S(\xi)] \cdot m(\xi) d\xi$ τείνει στο μηδέν.

Στο δεύτερο όρο της Εξ. (E.59), ο λόγος $\frac{S(X_{\max}) - S(x_o)}{S(X_{\max}) - S(X_{\min})}$ τείνει στη μονάδα για

$X_{\max} \rightarrow \infty$ και τελικά απομένουν οι εξής ποσότητες

$$2 \int_{X_{\min}}^{x_o} S(\xi) \cdot m(\xi) d\xi \quad \text{και} \quad -2 \cdot S(X_{\min}) \int_{X_{\min}}^{x_o} m(\xi) d\xi \quad (\text{E.64})$$

και άρα συνολικά από (E.64) και (E.62) έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για τη μέση τιμή που ψάχνουμε

$$2[S(x_o) - S(X_{\min})] \cdot [I(X_{\max}) - I(x_o)] + 2 \int_{X_{\min}}^{x_o} S(\xi) \cdot m(\xi) d\xi - 2 \cdot S(X_{\min}) \cdot [I(x_o) - I(X_{\min})] \quad (\text{E.65})$$

όπου

$$I(x) = \int m(\xi) d\xi \quad (\text{E.66})$$

Το τελευταίο αόριστο ολοκλήρωμα υπολογίζεται αναλυτικά [Prudnikov *et.al.*, 1990]

$$I(x) = -\frac{\left(\frac{2}{\beta \cdot \gamma^2}\right)^{\frac{2\alpha}{\beta \cdot \gamma^2}}}{\beta \cdot \gamma^2} \Gamma\left(\frac{2\alpha}{\beta \cdot \gamma^2}, \frac{2x^\beta}{\beta \cdot \gamma^2}\right)$$

και συγκλίνει στο μηδέν για μεγάλα x σύμφωνα με την ασυμπτωτική προσέγγιση της $\Gamma(a, z)$ –βλ. (E.61d). Τελικά έχουμε το αποτέλεσμα για τη μέση τιμή (εάν πρώτα θέτουμε $X_{\min} = x_{th}$).

$$u_{mn} = 2[S(x) \cdot I(x)]_{x=x_o}^{x=x_{th}} + 2 \int_{x_{th}}^{x_o} S(\xi) \cdot m(\xi) d\xi \quad (E.67)$$

με το συμβολισμό $[f(x)]_{x=a}^{x=b}$ να ισοδυναμεί με τη διαφορά $f(b) - f(a)$. Το ολοκλήρωμα στην (E.67) υπολογίζεται αριθμητικά. Ας δούμε τις τελικές σχέσεις για τις δυο περιπτώσεις διαδικασιών που εξετάζουμε

Gamma

$$S(x) = -(-w)^v \cdot \Gamma(-v, -w \cdot x) \quad (E.68a)$$

$$I(x) = -\frac{(w)^{-v}}{2} \cdot w \cdot \Gamma(v, w \cdot x) \quad (E.68b)$$

$$\int_{X_{\min}}^{x_o} S(\xi) \cdot m(\xi) d\xi = \int_{w \cdot X_{\min}}^{w \cdot x_o} (-1)^{v+1} \cdot \frac{w}{2} \cdot \Gamma(-v, -y) \cdot e^{-y} \cdot y^{v-1} dy \quad (E.68c)$$

Weibull

$$S(x) = \frac{1}{v \cdot w} \cdot \Gamma\left(-1, -\frac{x^v}{w}\right) \quad (E.69a)$$

$$I(x) = -\frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(1, \frac{x^v}{w}\right) \quad (E.69b)$$

$$\int_{X_{\min}}^{x_o} S(\xi) \cdot m(\xi) d\xi = \int_{X_{\min}}^{x_o} \frac{1}{2} \frac{1}{w^2} \cdot \Gamma\left(-1, -\frac{x^v}{w}\right) \cdot e^{-\frac{x^v}{w}} \cdot x^{v-1} dx \quad (E.69c)$$

Τέλος, απομένει να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της T_{ifd} ως υπο-περίπτωση της τ_h όταν ισχύει $(X_{\min}, X_{\max}, x_o) = (0, x_{th}, x_o)$. Για το σκοπό αυτό, θα αντικαταστήσουμε στο αποτέλεσμα της Εξ. (E.59) τις εμπλεκόμενες σε αυτό συναρτήσεις των Εξ. (E.68-

E.69). Αυτό που έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε στο αποτέλεσμα είναι ότι στην περίπτωση της Weibull και στην ειδική περίπτωση της Gamma κατά την οποία $\nu = 1$, ο όρος $S(X_{\min})$ αποκλίνει διότι η $S(x)$ ταυτίζεται με τη συνάρτηση $\Gamma()$ με όρισμα -1 όπου η συνάρτηση παρουσιάζει πόλο $1^{\text{ης}}$ τάξης. Κατά συνέπεια, το τελικό αποτέλεσμα μπορεί να γραφτεί σε απλούστερη μορφή.

$$u_{mn} = 2 \int_{x_o}^{x_{th}} [S(x_{th}) - S(\xi)] \cdot m(\xi) d\xi + \left[2 \frac{S(x_{th}) - S(x_o)}{S(x_{th}) - S(X_{\min})} \int_{X_{\min}}^{x_o} S(\xi) \cdot m(\xi) d\xi \right]_{X_{\min} \rightarrow 0} + 2[S(x_{th}) - S(x_o)] \cdot \int_0^{x_o} m(\xi) d\xi \quad (\text{E.70})$$

Το όριο στον 2° όρο αποδεικνύεται ότι κάνει μηδέν. Ο τρόπος να το αποδείξουμε είναι απλός: ‘χωρίζουμε’ το ολοκλήρωμα σε δυο επί μέρους με το 1° να έχει όρια ολοκλήρωσης $[0, \varepsilon]$ και το 2° $[\varepsilon, x_o]$ – με το ε οσοδήποτε μικρό. Το 2° ολοκλήρωμα συγκλίνει άρα διαιρεμένο με $S(X_{\min})$ που αποκλίνει παίρνουμε μηδέν. Το πρώτο αποκλίνει, αλλά εάν το ε είναι πολύ μικρό τότε έχουμε

$$\frac{1}{S(X_{\min})} \int_{X_{\min}}^{\varepsilon} S(\xi) \cdot m(\xi) d\xi = \frac{S(X_{\min}) \cdot m(X_{\min})}{S(X_{\min})} \cdot \varepsilon = m(X_{\min}) \cdot \varepsilon \square X_{\min}^{\nu-1} \cdot \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\text{E.71})$$

Το τελικό αποτέλεσμα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο ύστερα από πράξεις

$$u_{mn} = 2[S(x) \cdot I(x)]_{x=x_o}^{x=x_{th}} + 2 \int_{x_{th}}^{x_o} S(\xi) \cdot m(\xi) d\xi - 2 \cdot I(0) \cdot [S(x)]_{x=x_o}^{x=x_{th}} \quad (\text{E.72})$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ

Στο παρόν Παράρτημα, παρουσιάζεται η απόδειξη της γρήγορης υπολογιστικής μεθόδου που συνοψίζεται στον τύπο της εξ. (4.40) και αφορά στον υπολογισμό της Συνάρτησης Φασματικής Πυκνότητας μιας 1^{ης} τάξης Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης –βλ. παράγραφο (4.6.2).

Έστω μια διαδικασία διάχυσης $X_t > 0$. Επίσης έστω δυο χρονικές στιγμές t_1, t_2 με $t_2 > t_1$, οι οποίες βρίσκονται στη *μόνιμη* κατάσταση της X_t , δηλαδή ισχύει $t_{1,2} \gg t_0$ όπου t_0 είναι η χρονική στιγμή της εκκίνησης της συγκεκριμένης διαδικασίας. Τότε η Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της X_t με στιγμές αναφοράς τις t_1, t_2 δίνεται από τη σχέση

$$K_{st}(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x_2 x_1 p(x_2, x_1, d_x \cdot \tau) p_{st}(x_1) dx_2 dx_1 - m^2 = \quad (\Sigma\text{T.1})$$

$$= E[x_1 x_2] - m^2 = E[xx_{\tau}] - m^2$$

όπου $p(x_2, x_1, d_x \cdot \tau)$ είναι η Συνάρτηση Μεταβατικής Κατάστασης που ανήκει στη εν λόγω διαδικασία διάχυσης, επίσης τ είναι η χρονική μετατόπιση $\tau = t_2 - t_1$, d_x η γνωστή δυναμική παράμετρος, x_1, x_2 οι Τυχαίες Μεταβλητές που αντιστοιχούν στην τιμή της X_t κατά της χρονικές στιγμές t_1, t_2 και τέλος m είναι η μέση τιμή της X_t σε κάθε χρονική στιγμή της μόνιμης κατάστασης που υπολογίζεται από τη γνωστή σχέση

$$m = \int_0^{\infty} x p_{st}(x) dx \quad (\Sigma\text{T.2})$$

Η Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας δίνεται από τον Μ/Σ Fourier της Συνάρτησης Αυτοσυσχέτισης. Είναι αξιοσημείωτο ότι για τον υπολογισμό του συγκεκριμένου Μ/Σ επεκτείνουμε την Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης και στον αρνητικό πραγματικό ημι-άξονα ώστε να προκύπτει μια άρτια συνάρτηση. Συγκεκριμένα έχουμε

$$S_{st}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_{st}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} E[xx_{\tau}] d\tau - 2\pi m^2 \delta(\omega) \quad (\Sigma\text{T.3})$$

αλλά λόγω αρτιότητας δηλαδή ($E[xx_{-\tau}] = E[xx_{\tau}]$), τελικά το ολοκλήρωμα στο τελευταίο μέρος της εξ. (ΣΤ.3) μπορεί να γραφτεί

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} E[xx_\tau] d\tau = \int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} E[xx_\tau] d\tau + \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} E[xx_\tau] d\tau \quad (\Sigma\Gamma.4)$$

Με αντικατάσταση της συνδιακύμανσης $E[xx_\tau]$ από την (ΣΤ.1) στην (ΣΤ.4) και στη συνέχεια με αλλαγή της σειρά ολοκλήρωσης, παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x_2 x_1 p_{st}(x_1) \left[\int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau} p(x_2, x_1, d_x \cdot \tau) d\tau + \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau} p(x_2, x_1, d_x \cdot \tau) d\tau \right] dx_2 dx_1 \quad (\Sigma\Gamma.5)$$

Όπως όμως είναι ήδη υπονοείται από την εξ. (4.15), η συνάρτηση $G(x_2, x_1, s)$ είναι ο Μ/Σ Laplace της $p(x_2, x_1, \tau)$ ώστε τελικά η (ΣΤ.5) να μπορεί να γραφτεί

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x_2 x_1 p_{st}(x_1) \frac{1}{d_x} \left[G(x_2, x_1, \frac{i\omega}{d_x}) + G(x_2, x_1, -\frac{i\omega}{d_x}) \right] dx_2 dx_1 \quad (\Sigma\Gamma.6)$$

Είναι προφανές από την (ΣΤ.5) ότι το άθροισμα στο εσωτερικό των ολοκληρωμάτων της (ΣΤ.6) ισούται με

$$G(x_2, x_1, \frac{i\omega}{d_x}) + G(x_2, x_1, -\frac{i\omega}{d_x}) = 2 \operatorname{Re} \left\{ G(x_2, x_1, \frac{i\omega}{d_x}) \right\} \quad (\Sigma\Gamma.7)$$

Τελικά από τις εξ. (ΣΤ.7), (ΣΤ.6), (ΣΤ.4) και (ΣΤ.3) παίρνουμε την (4.40).

Βιβλιογραφία

ABRAMOWITZ and STEGUN Handbook of Mathematical Functions.

AJAYI G.O. and OLSEN R.L., [1985], “Modelling of raindrop size distribution for microwave and millimetre wave applications”, *Radio Sci.*, Vol. 20, Mar./Apr., p. 193-202.

BURGUENO A., VILAR E. and PUIGSERVER M. [1990] “Spectral Analysis of 49 years of Rainfall Rate and Relation to Fade Dynamics,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 38, pp.1359-1365.

CARRIER G. F., KROOK M. and PEARSON C. E. [1966] *Functions of a Complex Variable*, New York: McGraw-Hill.

CELADRONI N., DAVOLI F., and FERRO E. [2003] “Static and Dynamic Allocation in a Multiservice Satellite Network with Fading,” *Int. J. Satell. Commun. Network.*, vol. 21, pp. 469-487.

CRANE R. K. [1996] *Electromagnetic Wave Propagation through Rain*, New York: John Wiley & Sons, Inc.

CRANE R. K., [2003] *Propagation Handbook for Wireless Communication System Design*, CRC Press LLC.

DISDROMETER LTD [1997] Disdrometer RD-69. Instruction manual.

FRIEDMAN A. [1975], *Stochastic Differential Equations and Applications*, Volume 1,2, Academic Press.

GOLDHIRSH J. [1995] “Rain-Rate Duration Statistics over a Five Year Period: A Tool for assessing slant path fade duration,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 43, no. 5, pp. 435-439.

GREMONT B., FILIP M., GALOIS P. and BATE S., [1999] “Comparative Analysis and Performance of two Predictive Fade Detection Schemes for *Ka*-Band Countermeasures,” *IEEE J. Select. Areas. Commun.* vol.17, no 2, February.

GREMONT B. C. and FILIP M. [2004], “Spatio-temporal rain attenuation model for application to fade mitigation techniques,” *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. 52, no. 5, pp. 1245–1256, May.

- GUNN R., and G. D. KINZER, [1949]**, “ The terminal velocity of fall water droplets in stagnant air”, *Jour. Meteor.*, Vol. 6, No. 4, p. 243-248.
- HARTIGAN P.F., GALLOIS A.P. [1993]** “The use of satellite imagery for forecasting rain attenuation,” *8th ICAP*, Edinburgh, UK, March-April.
- Hellas-Sat 2 Handbook** p.87 March 2004
- HELSTROM C.W. [1968]**, *Markov Processes and Application in Communication Theory* (McGraw-Hill, New York,1968), pp.26-86.
- HIGHAM D.J. [2001]** “An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of S.D.E.”, *SIAM Journal of Applied Mathematics Review* 43, pp525-546.
- IKEDA N. and WATANABE S., [1981]** *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland-Kodansha.
- ITO K., [1944]** “Stochastic Integrals,” in *Proc. Imp. Acad., Tokyo, Japan*, vol, pp. 519-524.
- ITU-R, P. 618-8** “Propagation data and prediction methods required for the design of Earth-space telecommunication systems”
- ITU-R, PROPAGATION - SERIES, P. 839-3 RECOMMENDATION [2001]**, “Rain height model for prediction methods”.
- ITU-R [2003]**, “Rain height model for prediction methods,” *Propagation in Non-Ionized Media*, Rec. P.839-4, Geneva.
- ITU-R [2003]**, “Characteristics of precipitation for propagation for propagation modeling,” *Propagation in Non-Ionized Media*, Rec. P.837-4, Geneva.
- JOSS J. and WALDVOFEL A. [1969]** “Raindrop size distribution and sampling size errors”, *J. Atmos. Sci.*, **26**, 566–569.
- KANELLOPOULOS J .D., PANAGOPOULOS A. D. and LIVIERATOS S. N. [2000]** “A Comparison of Co-polar and Co-channel Satellite Interference Prediction Models With Experimental Results at 11.6 GHz and 20GHz”, *International Journal of Satellite Communications*, No 18, pp. 107-120.
- KANELLOPOULOS S. A., PANAGOPOULOS A. D., MATRICCIANI E. and KANELLOPOULOS J. D. [2006a]** “Annual and Diurnal Slant Path Rain Attenuation Statistics in Athens Obtained with the Synthetic Storm Techique”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 54, no 8, Aug.

- KANELLOPOULOS S. A., PANAGOPOULOS A. D., CHATZARAKIS G. E. and KANELLOPOULOS J. D., [2006b]** “Stochastic Differential Equations Applied in Fade Mitigation Techniques for Millimeter Wave Radio Channels,” in *Proc. 3rd CNES Workshop on Earth Space Propagation*, Toulouse-France, September 25-27.
- KARATZAS I. and SHREVE S. E., [1991]** *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag.
- KARLIN S. and TAYLOR H., [1981]** *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press.
- KLOEDEN P.E., PLATEN E. [1992]** *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Berlin: Springer-Verlag.
- KONTOROVICH V. Y., LYANDRES V. Z., [1995]** “Stochastic Differential Equations: An approach to the Generation of Continuous Non-Gaussian Processes,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, Oct, pp. 2372-2385.
- KOTRONI V., KALLOS G., and LAGOUVARDOS K. [1997]** “Convergence zones over the Greek Peninsula and associated thunderstorm activity” *Q. J. of R. Met. Society*, vol.123, pp.1961-1984.
- LACOSTE F., BOUSQUET M., CASTANET L., CORNET F. and LEMORTON J. [2005]** “Improvement of the ONERA-CNES Rain Attenuation Time-series Synthesizer and Validation of the Dynamic Characteristics of the generated Fade Events,” *Space Communications* vol. 20(1-2), pp. 45-59.
- LAGOUVARDOS K., KOTRONI V., DOBRICIC S., NICKOVIC S. and KALLOS G. [1996]** “The storm of October 21-22 1994 over Greece: Observations and model results”. *Journ. of Geoph. Res.*, vol.101, D21, pp.26217-26226.
- LAWS J.O. and D.A. PARSONS, [1943]**, “The relation of raindrop-size intensity”, *Trans. Amer. Geophys. Union*, Vol.24, p. 452-460.
- LIVIERATOS S., KATSAMBAS V. and KANELLOPOULOS J. D. [2000]** “A Global Method for the Prediction of Slant Path Rain Attenuation Statistics”, *Journal of Electrom. Waves and Appl.*, Volume 14, No 5, pp. 713-724.
- MAGGIORI D. [1981]**, “Computed transmission through rain in the 1-400GHz frequency range for spherical and elliptical drops and any polarization”, *Alta Freq.*, 50, 262-273.

- MANNING R. M. [1990]** “A unified statistical rain-attenuation model for communication link fade predictions and optimal stochastic fade control design using a location dependent rain-statistics database,” *Int. J. Satellite Communicat.*, vol. 8, pp.11-30.
- MARSHAL J.S. and W.McK. PALMER [1948]**, “The distribution of raindrops with size”, *Jour. Meteorol.*, Vol.5, p. 165-166.
- MASENG T. and BAKKEN P. M. [1981]** “A stochastic dynamic model of rain attenuation,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-29, no. 5, p. 660-669.
- MATRICCIANI E. [1991]** “Rain attenuation predicted with a two-layer rain model,” *Europ. Trans. on Telecom. & Rel. Techn.*, vol. 2, pp. 715-727.
- MATRICCIANI E. [1996]** “Physical-mathematical model of the dynamics of rain attenuation based on rain rate time series and two-layer vertical structure of precipitation,” *Radio Sci.*, vol. 31, no. 2, pp. 281-295.
- MATRICCIANI E. [1997a]** “Prediction of fade durations due to rain in satellite communication systems,” *Radio Sci.*, vol. 32, no. 3, pp. 935-941.
- MATRICCIANI E. [1997b]** “Physical-mathematical model of dynamics of rain attenuation with application to power spectrum,” *Electronics letters*, vol. 30, no 6, pp. 522-524, Mar.
- MATRICCIANI E. [1998]** “Diurnal distribution of rain attenuation in communication and broadcasting satellite systems at 11.6 GHz in Italy,” *IEEE Trans. Broadcasting*, vol. 44, issue 2, pp. 250-258, June.
- MATRICCIANI E. [2004]** “Service Oriented Statistics of Interruption Time Due to Rainfall In earth-Space Communication Systems”, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 52, pp. 2083-2090.
- MATRICCIANI E. and RIVA C. [2005]** “The Search for the most Reliable Long-term Rain Attenuation CDF of a Slant Path and the Impact on Prediction Models,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 53, no. 9, pp. 3075-3079, Sep.
- MAGGIORI D. [1981]**, “Computed transmission through rain in the 1-400GHz frequency range for spherical and elliptical drops and any polarization”, *Alta Freq.*, 50, 262-273.

MAGNUS W., OBERHETTINGER F. and SONI R. P. [1966] *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, 3rd Edition New York, Springer-Verlag.

MAX VAN DE KAMP [2004], “Rain Attenuation as a Markov Process: How to make an Event”, ONERA-DEMR, *Toulouse, France*.

NOWLAND W.L. R.L. OLSEN, and I. P. SHKAROFSKY, [1977], “Theoretical Relationship between rain depolarization and attenuation”, *Electron. Letters*, 13, p. 676.

OLSEN R.L., D.V. ROGERS and D.B. HODGE, [1978], “*The aR^b relation in the calculation of rain attenuation*”, *IEEE Trans. on Ant. and Prop.*, AP-26 (2), p.318- 329.

PANAGOPOULOS A. D. and KANELLOPOULOS J. D. [2002] “Adjacent Satellite Interference Effects as applied to the Outage Performance of an Earth-Space System located in a Heavy Rain Climatic Region”, *Annals of Telecommunications*, No 9-10, pp.925-942.

PANAGOPOULOS A. D. and KANELLOPOULOS J. D. [2003] “On the Rain Attenuation Dynamics: Spatial-Temporal Analysis of Rainfall-rate and Fade Duration Statistics,” *Int. J. Satellite Communicat. Networking*, vol. 21, no. 6, pp. 595-611, Nov.-Dec.

PANAGOPOULOS A. D., ARAPOGLOU P. M. and COTTIS P. G. [2004] “Satellite Communications at Ku, Ka and V bands, Propagation Impairments and Mitigation Techniques,” *IEEE Communication Surveys and Tutorials*, 3rd Quarter, October.

PAPOULIS A., [1991] *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*: McGraw-Hill.

PARABONI A., and RIVA C. [1994] “A new method for the prediction of fade duration statistics in satellite links above 10 GHz,” *Int. J. Satellite Communicat.*, vol. 12, pp. 387-394.

PAULSON K. S., and GIBBINS C. J. [2000] “Rain models for the prediction of fade durations at millimeter wavelengths,” *IEE Microwaves, Antennas and Propagation*, vol. 147, no. 6, pp. 431-436.

POLYANIN A. D. and ZAITSEV V. F., [1995] *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, CRC PRESS.

- PRIMAK S. L. and LYANDRES V. Z., [1998]**, “On the generation of the baseband and narrowband non-Gaussian processes,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, May, pp. 1229-1237.
- PRIMAK S. L., KONTOROVICH V. and LYANDRES V. Z., [2004]** *Stochastic Methods and their Applications on Communications. Stochastic Differential Equation Approach*. Wiley.
- PRIMAK S. L., [2000]** “Generation of compound non-Gaussian processes with a given correlation function,” *Physical Review E*, vol. 61, no1, Jan.
- PRIMAK S. L., LYANDRES V. and KONTOROVICH.V., [2001]** “Markov models of non-Gaussian exponentially correlated processes and their applications” *Physical Review E*, vol. 63, 061103.
- PRUDNIKOV A. P., BRYCHKOV Yu. A. and MARICHEV O. I. [1990]** *Integrals and Series*, 3rd Edition, CRC, January.
- PRUPPACHER H. R. and K. BEARD, [1970]**, “A wind tunnel investigation of the internal circulation and shape of water drops semi-empirical determination of the shape of cloud and raindrops”, *Journ. Atmos. Sci.*, Vol . 28, p. 86-94.
- PRUPPACHER H. R. and R. L. PITTER, [1971]**, “A semi-empirical determination of the shape of cloud and raindrops”, *Journ. Atmos. Sci.*, Vol . 28, p. 86-94.
- RACCA E. and PORPORATO A., [2005]** “Langevin equations from time series,” *Physical Review E*, vol. 71, 027101.
- RICE S. O. [1958]** “Distribution of the Duration of Fades in Radio Transmission,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, pp.581-635, May.
- SOONG T.T. [1973]**, *Random Differential Equations in Science and Engineering*, New York : Academic.
- SPILIOTIS J., [2004]** *Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*. Εκδόσεις Σημεών.
- STAKGOLD I., [1979]** *Green's Functions and Boundary Value Problem*. New York: John Wiley & Sons.
- STRATONOVICH R. L., [1963]** *Topics in the Theory of Random Noise*, Volume 1,2, Gordon and Breach.

STUTZMAN W.L. and W.K. DISHMAN, [1982], “A simple model for the estimation of rain-induced attenuation along earth-space paths at millimeter wavelengths”, *Radio Sci.*, 17(6), 1465-1476.

SWEENEY D. G. and BOSTIAN, C. W. [1999] “Implementing adaptive power control as a 30/20-GHz fade countermeasure,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 47, no. 1, pp. 40-46.

<http://mathworld.wolfram.com/>

THOMPSON P. T., A. W. DISSANAYAKE and P. A. WATSON, [1980], “The frequency dependence of microwave propagation through rainfall”, *AGARD Conf. Proc.*, 284, p. 5.1-5.9.

UHLENBECK, G. E. and L. S. ORNSTEIN, [1930], “ On the theory of Brownian motion”, *Phys. Rev.*, Vol. 36, p. 823-841.

ULBRICH C.W., [1983], “Natural variations in the analytical form of the raindrop size distribution”, *Jour. Climate Appl. Meteor.*, Vol. 22, p.1764-1775.

UPTON S.A.J., B. G EVANS and A. R. HOLT, [1980], “Variations with model parameters of earth/space attenuation derived from radiometer and radar measurements”, paper presented at URSI Commission F Open Symposium on Effects of the Lower Atmosphere on Radio Frequencies above 10 GHz, Lennoxville, Que.

ZHANG W., KARHU S., SALONEN I. [1994] “ Predictions of radiowave attenuations due to a melting layer of precipitation,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 42, Issue 4, pp.492 – 500, April.

**ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 1^{ης} ΤΑΞΗΣ ΓΙΑ ΤΗ
ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΜΕ ΕΜΦΑΣΗ
ΣΤΗΝ ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΛΟΓΩ ΒΡΟΧΗΣ ΠΟΥ ΕΠΙΒΑΡΥΝΕΙ ΤΙΣ
ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΕΣ ΖΕΥΞΕΙΣ**

Περίληψη

Η Διατριβή εστιάζει στη Σύνθεση Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων 1^{ης} Τάξεως με σκοπό την προσομοίωση Πραγματικών, Στάσιμων Τυχαίων Διαδικασιών Βασικής Ζώνης όπως η απόσβεση λόγω βροχής που επιβαρύνει μια μικροκυματική ζεύξη που λειτουργεί σε συχνότητες άνω των 10GHz. Από εδώ και στο εξής ο όρος «πραγματική Τυχαία Διαδικασία» θα αναφέρεται αποκλειστικά σε Τυχαίες Διαδικασίες που ανήκουν στην προαναφερθείσα οικογένεια. Ο όρος «Βασικής Ζώνης» προσδιορίζει ότι η Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας της εν λόγω Στάσιμης Τυχαίας Διαδικασίας ορίζεται σε ένα συμμετρικό «παράθυρο» συχνοτήτων περί τη μηδενική συχνότητα, στην οποία λαμβάνει και τη μέγιστη τιμή.

Η κύρια συνεισφορά της Διατριβής είναι η τροποποίηση της διαδικασίας Σύνθεσης των 1^{ης} Τάξης Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων ώστε οι τελευταίες να προσομοιώνουν ικανοποιητικά όχι μόνο τα στατιστικά χαρακτηριστικά 1^{ης} και 2^{ης} τάξης αλλά και τα στατιστικά χαρακτηριστικά των Χρόνων Διακοπής, μιας πραγματικής Τυχαίας Διαδικασίας. Τα στατιστικά χαρακτηριστικά 1^{ης} και 2^{ης} τάξης αναφέρονται αντιστοίχως στην Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας και τη Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης ή ισοδύναμα, τη Συνάρτηση Φασματικής Πυκνότητας ενώ οι Χρόνοι Διακοπής είναι Τυχαίες Μεταβλητές που φέρουν ομοιότητες με την πιο γνωστή –από Τηλεπικοινωνιακές Εφαρμογές– Διάρκεια Διάλειψης. Με τον τρόπο αυτό η Στοχαστική Διαφορική δύναται να αναπαράγει επαρκέστερα σε σχέση με προηγουμένως το μηχανισμό γέννησης της Πραγματικής Τυχαίας Διαδικασίας.

Με τη νέα συνθήκη που προστίθεται γίνεται πιο ευκρινής ο τρόπος με τον οποίο ο μηχανισμός γέννησης της πραγματικής Τυχαίας Διαδικασίας «διαθλάται» διαμέσου της Στοχαστικής Διαφορικής, ώστε οι παράμετροι του μοντέλου να επιλέγονται έτσι ώστε, η «παραμόρφωση» να είναι η ελάχιστη δυνατή. Όσο πιο λεπτομερής είναι η αποτύπωση της επίδοσης της προσομοίωσης, τόσο περισσότερο γίνεται εφικτό να εστιάσουμε στην

προσομοίωση κάποιων συγκεκριμένων χαρακτηριστικών όπως των Χρόνων Διακοπής γύρω από ένα κρίσιμο κατώφλι (απόσβεσης) εις βάρος κάποιων άλλων, λιγότερο σημαντικών όπως των Χρόνων Διακοπής σε αδιάφορο κατώφλι ή της Συνάρτησης Φασματικής Πυκνότητας σε υψηλές συχνότητες.

Όλες οι νέες θεωρήσεις αναπτύσσονται στην πράξη. Συγκεκριμένα, κατασκευάζονται τρία δυναμικά μοντέλα με βάση τρεις Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις 1^{ης} Τάξης και με σκοπό την προσομοίωση των διαλείψεων οι οποίες σε μακροπρόθεσμη κλίμακα περιγράφονται πιθανοθεωρητικά από τις κατανομές Λογαριθμοκανονική, Gamma και Weibull. Η ανάπτυξη των τριών μοντέλων είναι πλήρης και ο οποιοσδήποτε θελήσει να τα χρησιμοποιήσει δεν έχει παρά να ανατρέξει σε εύχρηστους Πίνακες και Παραρτήματα που περιέχονται στη Διατριβή έναντι τυπολογίου, χωρίς να χρειάζεται να εντυπώσει σε βαθύτερες μαθηματικές έννοιες.

Τα προαναφερθέντα μοντέλα, χρησιμοποιούνται στη Διατριβή για την προσομοίωση διαλείψεων που επηρεάζουν μια πραγματική ζεύξη. Οι χρονοσειρές απόσβεσης που αναφέρονται στην εν λόγω ζεύξη, είναι εφάμιλλες πειραματικών δεδομένου ότι έχουν εξαχθεί με τη βοήθεια της Συνθετικής Καταιγίδας, η οποία εφαρμόζεται για πρώτη φορά στον Ελλαδικό χώρο. Η εν λόγω τεχνική είναι δημοφιλής στους επιστήμονες που αναμειγνύονται με την έρευνα σε θέματα Η/Μ διάδοσης. Δέχεται σαν «είσοδο» χρονοσειρές ρυθμού βροχόπτωσης μετρούμενου σημειακά από κατάλληλο εξοπλισμό τοποθετημένο κοντά στον επίγειο σταθμό ή σε θέση κατά μήκος του ίχνους του ραδιοδιαδρόμου στην επιφάνεια της γης και δίνει σαν έξοδο, τις προσομοιούμενες χρονοσειρές απόσβεσης λόγω της μετρούμενης βροχόπτωσης. Στο πείραμα που διεξήχθη στα πλαίσια της διατριβής, χρονοσειρές ρυθμού βροχόπτωσης συλλέχθηκαν κατά την περίοδο από 1/1/2000 μέχρι την 31/5/2002. Εξετάστηκε ποιοτικά η αξιοπιστία και η αντιπροσωπευτικότητα των μετρήσεων υπό το πρίσμα της ιδιότητας του φαινομένου της βροχόπτωσης να παρουσιάζει περιοδικότητα σε ετήσια βάση (cyclo-stationarity). Αφού επαληθεύτηκε η ποιότητα των μετρήσεων, χρησιμοποιήθηκαν στη συνέχεια ως είσοδοι στη ρουτίνα της Τεχνικής της Συνθετικής Καταιγίδας και οι προσομοιούμενες χρονοσειρές απόσβεσης που προέκυψαν, έγιναν αντικείμενο στατιστικής επεξεργασίας για την εξαγωγή των χαρακτηριστικών 1^{ης} και 2^{ης} τάξης και των στατιστικών των Χρόνων Διακοπής της απόσβεσης λόγω βροχής που επιβαρύνει την υποθετική ζεύξη.

Από τα τρία δυναμικά μοντέλα, αυτό που αντιστοιχεί στη Λογαριθμοκανονική κατανομή αποδείχθηκε το πιο αξιόπιστο για να προσομοιώσει τις εν λόγω χρονοσειρές.

**ON THE SYNTHESIS OF 1st ORDER STOCHASTIC DIFFERENTIAL
EQUATIONS FOR THE SIMULATION OF STATIONARY BASEBAND
RANDOM PROCESSES WITH EMPHASIS ON ATTENUATION DUE TO RAIN
WHICH AFFECTS MICROWAVE LINKS**

Abstract

This thesis focuses on the Synthesis of 1st Order Stochastic Differential Equations for the simulation of Actual, Stationary Baseband Random Processes such as Rain Attenuation which affects microwave links operating at frequencies over 10GHz. Hereafter, the term “Actual Random Process” will denote Random Processes of the aforementioned kind. The term “Baseband” implies that the Spectral Density Function of the particular Stationary Random Process gets its maximum value at zero frequency and it is defined within a frequency window which is symmetrical around the origin.

The established Synthesis procedure is modified so that 1st Order Stochastic Differential Equations simulate efficiently not only the 1st and 2nd order statistics but the statistical characteristics of Hitting Times as well, all three belonging to an Actual Random Process. Note that the 1st and 2nd Order Statistics imply respectively the Probability Density Function and the Autocorrelation Function or equivalently, the Spectral Density Function while Hitting Times are Random Variables which are similar to Fade Duration. As a consequence of the modified procedure, the Stochastic Differential Equation reproduces better than previously the generation mechanism of the Actual Process.

The new condition added, clarifies in more detail how the generation mechanism of the particular Actual Random Process is “diffracted” through the simulating Stochastic Differential Equation and this in turn allows one to choose more realistically the values for the input parameters so that the “deformation” on the generation mechanism is minimized. In other words, the more the performance of the simulation is printed in detail, the more it becomes feasible to focus on the simulation of particular statistical characteristics such as the Hitting Times around a critical (attenuation) threshold. This is highly beneficial since the simulation becomes more selective and accurate.

All these ideas are used in practice to construct three dynamical models which in turn are based on three separate Stochastic Differential Equations of 1st order. These models aim at simulating attenuation due to rain which in the long-term is statistically described by one of the following three Probability Density Functions: the Lognormal, the Weibull or the Gamma. All three models are fully developed in the sense that all necessary quantities are calculated within the thesis and are provided in user-friendly Tables and Appendices so that one can use them without necessarily having to work on cumbersome calculations and mathematical notions.

The aforementioned three models are employed within the thesis, for the simulation of rain attenuation which affects an actual microwave link. Rain attenuation time series concerning that particular link are derived by the Synthetic Storm Technique and thus they are considered to be nearly experimental. The aforementioned Technique is quite popular among engineers working in the E/M propagation area. It accepts as “input” rain rate time series measured by an appropriate piece of equipment planted near the receiver antenna (earth-station in case of satellite links) or somewhere else along the trace of the radio path on the ground and it returns as “output” the simulated rain attenuation time series due to the measured rainfall. Rain rate time series were collected by a disdrometer during the period 1st of January 2000 until 31st of May 2002. The collected time series were shown to be representative of the actual phenomenon on an annual time period. Further, they were inserted as “input” in the Synthetic Storm Technique and then the simulated rain attenuation time series extracted, were statistically elaborated in order to obtain the 1st, 2nd and Hitting Time statistics, all three belonging to rain attenuation affecting the particular link. Out of the three dynamic models, the one corresponding to the Lognormal Distribution was shown to be more reliable for the simulation of the rain attenuation affecting the link.