



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΗΛΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ**

Διδακτορική Διατριβή

**ΝΕΑ ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ**  
**ΚΑΙ ΝΕΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**  
**ΝΕΥΡΩΝΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ**

Μαρία Π. Μπαρμπαρόσου

Διπλωματούχος του Φυσικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών

Επιβλέπων: Νικόλαος Γ. Μαράτος, Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ 2005





**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΗΛ/ΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ**

Διδακτορική Διατριβή

**ΝΕΑ ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ**  
**ΚΑΙ ΝΕΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**  
**ΝΕΥΡΩΝΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ**

Μαρία Π. Μπαρμπαρόσου

Διπλωματούχος του Φυσικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών

**Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή:**

Νικόλαος Γ. Μαράτος, Καθηγητής ΕΜΠ, Επιβλέπων της διατριβής  
Ιωάννης Η. Διάμεσης, Ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ  
Τρύφων Γ. Κουσιουρής, Καθηγητής ΕΜΠ

**Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή:**

Νικόλαος Γ. Μαράτος, Καθηγητής ΕΜΠ  
Τρύφων Γ. Κουσιουρής, Καθηγητής ΕΜΠ  
Γεώργιος Μπιτσώρης, Καθηγητής Πανεπ. Πατρών  
Σπυρίδων Τζαφέστας, Καθηγητής ΕΜΠ  
Πέτρος Μαραγκός, Καθηγητής ΕΜΠ  
Ανδρέας Σταφυλοπάτης, Καθηγητής ΕΜΠ  
Κων/νος Βουρνάς, Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ 2005



Η παρούσα διδακτορική διατριβή αποτελεί υποέργο του προγράμματος: «Ηράκλειτος: Υποτροφίες έρευνας με προτεραιότητα στη βασική έρευνα». Το Πρόγραμμα «ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ» συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο (75%) και από Εθνικούς Πόρους (25%). This thesis was supported financially by the Project “ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ”. The Project “ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ” is co-funded by the European Social Fund (75%) and National Resources (25%).



## Πρόλογος

Η διατριβή ασχολείται με δυο διαφορετικά θέματα του γνωστικού πεδίου των Νευρωνικών Δικτύων: την εφαρμογή τους σε προβλήματα ελαχίστου με περιορισμούς και την εκπαίδευση τους. Το κυρίως περιεχόμενο της διατριβής περιλαμβάνει δύο μέρη. Στο Α'Μέρος προτείνονται τρία νέα Νευρωνικά Δίκτυα συνεχούς χρόνου, για την επίλυση προβλημάτων ελαχίστου με ισοτικούς περιορισμούς. Στο Β'Μέρος διατυπώνεται ένας νέος αλγόριθμος εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων τύπου Perceptron. Στην αρχή της διατριβής παρουσιάζεται ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας και στο τέλος της διατριβής διατυπώνονται συγκεντρωτικά συμπεράσματα.

Στο Α'Μέρος της διατριβής παρουσιάζονται τρία νέα Νευρωνικά Δίκτυα συνεχούς χρόνου (τύπου Hopfield), για την επίλυση του προβλήματος ελαχίστου με ισοτικούς περιορισμούς:

$$\min_{x \in \Omega} \{f(x) : h_1(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0\}, \quad \Pi$$

όπου  $f(x), h_1(x), \dots, h_m(x)$  βαθμωτές και συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις, σε ανοικτό σύνολο  $\Omega \subset R^n$ , με  $m < n$ . Η συνήθης μέθοδος κατασκευής Νευρωνικών Δικτύων που λύνουν προβλήματα ελαχίστου με περιορισμούς, περιλαμβάνει τα εξής δύο στάδια: πρώτα μετατρέπεται το αρχικό πρόβλημα σε πρόβλημα χωρίς περιορισμούς, κάνοντας χρήση μιας συνάρτησης ποινής (ή φράγματος) ακριβούς ή διαφορίσιμης και στη συνέχεια κατασκευάζεται ένα δυναμικό σύστημα που συνήθως βασίζεται στη μέθοδο ελαχιστοποίησης της ταχύτερης καθόδου, στην κατεύθυνση του οποίου μειώνεται η συνάρτηση

ποινής. Τα Νευρωνικά Δίκτυα της διατριβής δεν προκύπτουν ακολουθώντας τη συνήθη μέθοδο. Η ιδέα κατασκευής τους είναι ένας συνδυασμός γνωστών μεθόδων ελαχιστοποίησης προβλημάτων με περιορισμούς, με ομοιοτικές μεθόδους λύσης των ισοτικών περιορισμών.

Συγκεκριμένα, το Α' Μέρος της διατριβής περιλαμβάνει τα πρώτα έξι Κεφάλαια.

Το 1ο Κεφάλαιο είναι μια γενική εισαγωγή. Για να εξασφαλιστεί η πληρότητα η εγκυρότητα και η δυνατότητα αυτόνομης μελέτης της διατριβής, δίνονται συμπληρωματικές γνώσεις από τη θεωρία των δυναμικών συστημάτων και τη θεωρία βελτίστου, που αποτελούν τα βασικά εργαλεία της.

Στο 2ο και 3ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται τα νέα Νευρωνικά Δίκτυα: Νευρωνικό Δίκτυο Προβολής της Κλίσης με Επιτρεπτές Λύσεις, σύντομα ΝΔΠΚΕΛ και Νευρωνικό Δίκτυο Προβολής της Κλίσης με Μη Επιτρεπτές Λύσεις, σύντομα ΝΔΠΚΜΕΛ, αντίστοιχα. Στις Παραγράφους 2.1 και 3.1 ορίζονται τα ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ και διατυπώνονται οι υποθέσεις που τα συνοδεύουν. Το ΝΔΠΚΕΛ είναι ένα  $n$ -διάστατο δυναμικό σύστημα, που βασίζεται στη μη γραμμική εκδοχή της γνωστής μεθόδου ελαχιστοποίησης, “προβολής της κλίσης”, με αρχικό σημείο που ικανοποιεί τους ισοτικούς περιορισμούς του προβλήματος  $\Pi$ . Οι λύσεις του ικανοποιούν τους ισοτικούς περιορισμούς για όσο χρόνο εξελίσσονται. Το ΝΔΠΚΜΕΛ είναι ένα  $n$ -διάστατο δυναμικό σύστημα, με οποιοδήποτε αρχικό σημείο μέσα στο σύνολο  $\Omega$  και διανυσματικό πεδίο το άθροισμα του διανυσματικού πεδίου του ΝΔΠΚΕΛ και ενός διανυσματικού πεδίου, στην κατεύθυνση του οποίου οι ισοτικοί περιορισμοί του προβλήματος  $\Pi$  μειώνονται. Για να ορίζονται τα δύο Νευρωνικά Δίκτυα, πρέπει οι κλίσεις των ισοτικών περιορισμών του προβλήματος  $\Pi$  να είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τουλάχιστον πάνω στην τροχιά τους. Στις Παραγράφους 2.2 και 3.2 αποδεικνύονται συμπεράσματα σύγκλισης των ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ, αντίστοιχα. Αποδεικνύεται και για τα δύο Νευρωνικά Δίκτυα ότι οι φραγμένες λύσεις τους με οριακά σύνολα που είναι



υποσύνολα του  $\Omega$ , συγκλίνουν στο σύνολο των σημείων του  $R^n$  που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου α'τάξης του προβλήματος Π, καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Οι Παράγραφοι 2.3 και 3.3 αναφέρονται στην εφαρμογή των ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ, αντίστοιχα, στο κυρτό πρόβλημα ελαχιστοποίησης με ισοτικούς περιορισμούς:

$$\min_{x \in \Omega_K} \{f(x) : A^T x - b = 0\} \quad \text{ΠΚ}$$

όπου  $f$  πραγματική κυρτή και συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση στο  $R^n$ ,  $A: n \times m$  πίνακας, με  $m < n$  και  $b: m \times 1$  διάνυσμα. Αποδεικνύεται λοιπόν ότι, αν το σύνολο των ελαχίστων του προβλήματος ΠΚ είναι μη κενό και φραγμένο, τότε και τα δύο Νευρωνικά Δίκτυα όταν αναφέρονται στο πρόβλημα ΠΚ έχουν φραγμένες λύσεις, οι οποίες συγκλίνουν στο σύνολο των ολικών ελαχίστων του προβλήματος, καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Στις Παραγράφους 2.4 και 3.4 μελετάται η ταχύτητα σύγκλισης των δυο Νευρωνικών Δικτύων. Ενισχύονται οι υποθέσεις ορισμού τους, θεωρώντας τις συναρτήσεις  $f(x), h_1(x), \dots, h_m(x)$  δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες και αποδεικνύεται ότι, η ταχύτητα σύγκλισης των λύσεων τους σε σημεία του  $R^n$  που ικανοποιούν τις ικανές συνθήκες ελαχίστου β'τάξης του προβλήματος Π (στα σημεία αυτά το Π έχει αυστηρά τοπικά ελάχιστα), είναι εκθετική. Ειδικότερα, στην περίπτωση του κυρτού προβλήματος ΠΚ με αυστηρό ολικό ελάχιστο, αποδεικνύεται ότι, οι λύσεις των ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ συγκλίνουν εκθετικά στο αυστηρό ολικό ελάχιστο του προβλήματος ΠΚ. Στις Παραγράφους 2.5 και 3.5 διατυπώνονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη των ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ, αντίστοιχα.

Στο 4ο Κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα ακόμα Νευρωνικό Δίκτυο συνεχούς χρόνου, που ονομάστηκε Νευρωνικό Δίκτυο Τετραγωνικής Προσέγγισης, σύντομα ΝΔΤΠ. Στην Παράγραφο 4.1, ορίζεται το νέο Νευρωνικό Δίκτυο και διατυπώνονται οι υποθέσεις που το συνοδεύουν. Το ΝΔΤΠ είναι ένα  $n+m$  διάστασης (η λύση του περιλαμβάνει και τους πολλαπλασιαστές Lagrange)

σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων α' τάξης, και βασίζεται στην επαναληπτική μέθοδο των τετραγωνικών προσεγγίσεων (recursive quadratic programming). Πιο συγκεκριμένα, το ΝΔΤΠ ξεκινά από τυχαίο σημείο του  $\Omega \times R^m$  και κατά μήκος της λύσης του το μέτρο των ισοτικών περιορισμών  $\|h(x(t))\|$  και το μέτρο της κλίση της συνάρτησης Lagrange του προβλήματος  $\|\nabla L(x(t), \lambda(t))\|$  μειώνονται και τείνουν στο μηδέν, καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Για να ορίζεται το ΝΔΤΠ, υιοθετούνται οι εξής υποθέσεις: οι συναρτήσεις  $f(x), h_1(x), \dots, h_m(x)$  είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες στο  $\Omega$ , οι κλίσεις των ισοτικών περιορισμών του προβλήματος  $\Pi$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο  $\Omega$  και επιπλέον ο πίνακας  $Q_2(x)^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x)$  είναι αντιστρέψιμος  $\forall (x, \lambda) \in \Omega \times R^m$ , όπου  $\frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2}$  η μήτρα δευτέρων παραγώγων της συνάρτησης Lagrange του προβλήματος  $\Pi$  και  $Q_2(x) : n \times (n-m)$  πίνακας, οι στήλες του οποίου είναι βάση του κάθετου χώρου στον υπόχωρο των κλίσεων στο σημείο  $x$ , των ισοτικών περιορισμών. Στην Παράγραφο 4.2 αποδεικνύονται συμπεράσματα σύγκλισης του ΝΔΤΠ. Αποδεικνύεται συγκεκριμένα ότι, οι φραγμένες λύσεις του ΝΔΤΠ με οριακά σύνολα που είναι υποσύνολα του  $\Omega \times R^m$ , συγκλίνουν στο σύνολο των σημείων του  $R^{n+m}$ , που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου α' τάξης του προβλήματος  $\Pi$ . Στην Παράγραφο 4.3 αποδεικνύονται συμπεράσματα που αφορούν τη συμπεριφορά του ΝΔΤΠ, στην περίπτωση που οι ισοτικοί περιορισμοί του προβλήματος  $\Pi$  είναι γραμμικοί και η μήτρα  $Q_2^T \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} Q_2$  είναι ομοιόμορφα θετικά ορισμένη,  $\forall x \in R^n$ . Τότε αποδεικνύεται ότι, το ΝΔΤΠ συγκλίνει στο μοναδικό ολικό ελάχιστο του προβλήματος  $\Pi$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Στην Παράγραφο 4.4 μελετάται η ταχύτητα σύγκλισης του ΝΔΤΠ και αποδεικνύεται ότι, όποια λύση του ΝΔΤΠ

ξεκινά αρκετά κοντά σε σημείο του  $R^{n+m}$  που ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου α'τάξης του προβλήματος Π, συγκλίνει στο σημείο αυτό εκθετικά (δηλαδή τα σημεία που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου α'τάξης, είναι εκθετικά ευσταθή σημεία ισορροπίας του ΝΔΤΠ). Στην Παράγραφο 4.5 διατυπώνονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη του ΝΔΤΠ.

Στο 5ο Κεφάλαιο περιλαμβάνονται εφαρμογές των τριών νέων Νευρωνικών Δικτύων σε παραδείγματα προβλημάτων ελαχιστοποίησης. Σε κάθε παράδειγμα δίνονται γραφήματα που αποσαφηνίζουν την εικόνα και την ποιοτική συμπεριφορά των λύσεων και υποβοηθούν στη διατύπωση συμπερασμάτων. Σε κάποια παραδείγματα γίνονται συγκρίσεις με άλλα Νευρωνικά Δίκτυα της βιβλιογραφίας. Για την επίλυση των συστημάτων των διαφορικών εξισώσεων των Νευρωνικών Δικτύων, χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό πακέτο Matlab.

Στο 6ο Κεφάλαιο δίνονται ενδεικτικές κυκλωματικές υλοποιήσεις των τριών προτεινόμενων Νευρωνικών Δικτύων. Τα κυκλώματα περιλαμβάνουν εξαρτημένες πηγές τάσης από τάση, με τάσεις εισόδου τα  $x_i(t)$ ,  $i=1,\dots,n$  και τάσεις εξόδου τα  $h_j(x)$ ,  $j=1,\dots,m$  και τις πρώτες παραγώγους της συνάρτησης Lagrange του προβλήματος Π. Περιλαμβάνονται επιπλέον, τελεστικοί ενισχυτές ως ολοκληρωτές, καθώς και πηγές συνεχούς τάσης και διακόπτες για την εισαγωγή στο κύκλωμα των αρχικών συνθηκών.

Το Β'Μέρος της διατριβής περιλαμβάνει το 7ο Κεφάλαιο. Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνεται ένας πρωτότυπος αλγόριθμος εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων τύπου Perceptron. Οι αλγόριθμοι εκπαίδευσης που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία, αφορούν Νευρωνικά Δίκτυα με διαφορίσιμες συναρτήσεις ενεργοποίησης νευρώνων. Στην Παράγραφο 7.1 της διατριβής διατυπώνεται το πρόβλημα εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων σαν ένα μη διαφορίσιμο πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων, θεωρώντας μη διαφορίσιμες, τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις ενεργοποίησης των νευρώνων. Στην

Παράγραφο 7.2 διατυπώνεται σχετικός αλγόριθμος. Στην Παράγραφο 7.3 ο νέος αλγόριθμος υλοποιείται αριθμητικά σε προβλήματα εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων της βιβλιογραφίας. Γίνονται συγκρίσεις με αλγόριθμους της βιβλιογραφίας και παρουσιάζονται τα σχετικά αποτελέσματα. Ο προγραμματισμός του αλγορίθμου έγινε με το λογισμικό πακέτο Matlab. Στο Παράρτημα της διατριβής δίνεται το σχετικό πρόγραμμα.

Στη συνέχεια επισημαίνονται τα κυριότερα στοιχεία πρωτοτυπίας της διατριβής.

(α) Για την κατασκευή των προτεινόμενων Νευρωνικών Δικτύων συνεχούς χρόνου δεν γίνεται χρήση συναρτήσεων ποινης ή φράγματος, όπως συμβαίνει συνήθως στη βιβλιογραφία. Η κατασκευή τους βασίζεται στην πρωτότυπη ιδέα του συνδυασμού της μεθόδου προβολής της κλίσης (ΝΔΠΚΕΛ, ΝΔΠΚΜΕΛ) και της μεθόδου των επαναληπτικών τετραγωνικών προσεγγίσεων (ΝΔΤΠ) με ομοιοπικές μεθόδους λύσης των ισοτικών περιορισμών. Ως εκ τούτου, τα ΝΔΠΚΕΛ, ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ είναι πρωτότυπα Νευρωνικά Δίκτυα. Προφανώς και τα επιμέρους αποτελέσματα που τα αφορούν είναι πρωτότυπα.

(β) Στη διατριβή, για τη μελέτη της ευστάθειας των προτεινόμενων Νευρωνικών Δικτύων συνεχούς χρόνου, ακολουθείται μια γενικότερη προσέγγιση από αυτή που συναντάται στη βιβλιογραφία των αναλογικών Νευρωνικών Δικτύων (ενδεικτικά βλ. άρθρα [LLH], [BoP], [XW1], [Per], [JiW] και [XLW]). Στη βιβλιογραφία για την απόδειξη σύγκλισης των Νευρωνικών Δικτύων υποτίθεται κυρτότητα του προβλήματος Π, προκειμένου να κατασκευαστεί η απαραίτητη συνάρτηση Lyapunov. Στη διατριβή δίνεται ένα γενικό θεώρημα σύγκλισης των τριών νέων Νευρωνικών Δικτύων, χωρίς να υποτίθεται κυρτότητα του προβλήματος Π. Για τα μη κυρτά προβλήματα αποδεικνύεται ότι, οι φραγμένες λύσεις των νέων Νευρωνικών Δικτύων συγκλίνουν στο σύνολο των σημείων που ικανοποιούν αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου του προβλήματος Π. Στη συνέχεια ειδικεύοντας στην περίπτωση

κυρτού προβλήματος, αποδεικνύεται το φραγμένο των λύσεων και η σύγκλιση στο σύνολο των ολικών ελαχίστων του προβλήματος προκύπτει ως πόρισμα του γενικού θεωρήματος. Βασικό εργαλείο των αποδείξεων σύγκλισης που διατυπώνονται στη διατριβή είναι το Θεώρημα LaSalle, αντί των θεωρημάτων ασυμπτωτικής ευστάθειας Lyapunov, όπως συνηθίζεται στη βιβλιογραφία των Νευρωνικών Δικτύων συνεχούς χρόνου. Το Θεώρημα LaSalle έχει το πλεονέκτημα ότι δεν απαιτεί οι λύσεις των Νευρωνικών Δικτύων να είναι μοναδικές, ούτε τα σημεία ισορροπίας να είναι απομονωμένα. Σε αντιστάθμισμα, τα συμπεράσματά του αφορούν σύγκλιση σε σύνολο και όχι σε σημείο. Αυτή η γενικότερη μελέτη της ευστάθειας, δηλαδή η απόδειξη σύγκλισης στην περίπτωση μη κυρτού προβλήματος, είναι πρωτότυπη και μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλα Νευρωνικά Δίκτυα εκτός των προτεινόμενων στη διατριβή.

(γ) Για την εκπαίδευση των Νευρωνικών Δικτύων τύπου Perceptron συνήθως χρησιμοποιούνται οι γνωστές από τη βιβλιογραφία διαφορίσιμες συναρτήσεις ενεργοποίησης νευρώνων (ενδεικτικά βλ. άρθρα [Bab] [Bat], [KoA], [Mol], [BFF] και [HuD]). Στη διατριβή χρησιμοποιούνται μη διαφορίσιμες, τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις ενεργοποίησης νευρώνων. Η διατύπωση του προβλήματος εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων σαν μη διαφορίσιμου προβλήματος γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων είναι πρωτότυπη, καθώς πρωτότυπος είναι και ο αλγόριθμος που προτείνεται για την επίλυσή του.



## Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό είναι ευχαρίστησή μου να αναφερθώ σε όσους με βοήθησαν στην ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας.

Πρώτα από όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον έχοντα την εποπτεία όλης της προσπάθειας, Καθηγητή Νικόλαο Γ. Μαράτο, για την ευγενική εκ του σύνεγγυς παρακολούθηση όλων των σταδίων της διατριβής, για τις εκτεταμένες συζητήσεις που με βοήθησαν να κατανοήσω λεπτά σημεία της θεωρίας βελτιστοποίησης και των δυναμικών συστημάτων, για τη συμβολή του στην προετοιμασία των δημοσιεύσεων και για τη πολύπλευρη συμπαράστασή του όλα αυτά τα χρόνια.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Επιτροπής, τον Καθ. Τρύφωνα Γ. Κουσιουρή και τον Ομ. Καθ. Ιωάννη Η. Διάμεση, για τις χρήσιμες υποδείξεις και επισημάνσεις τους.

Έχω την καλή τύχη, από την αρχή αυτής της προσπάθειας να εργάζομαι στο Τμήμα Ηλεκτρονικής του ΤΕΙ Πειραιά. Ευχαριστώ θερμά τους Καθηγητές του Τμήματος για την υποστήριξή τους και ιδιαίτερα τους Καθηγητές που με στήριξαν στο ξεκίνημα και συνεχίζουν να με βοηθούν με την πολυετή εμπειρία τους.

Τελειώνοντας, επιθυμώ να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Παναγιώτη και Αμαλία, για την υποστήριξη, την υπομονή, τη διακριτικότητά τους και κυρίως για τις προσδοκίες τους, που είναι το βασικό κίνητρο όλων των προσπαθειών μου. Στους γονείς μου είναι αφιερωμένο ότι έχω καταφέρει και θα καταφέρω στη ζωή μου. Ευχαριστώ και τον αδερφό μου, Σολωμό, που με ανέχεται και με ενθαρρύνει.

*Μαρία Π. Μπαρμπαρόσου  
Αθήνα, Νοέμβριος 2005.*







## Περιεχόμενα

	Σελ.
<b>ΣΥΜΒΟΛΑ.....</b>	<b>1</b>
<b>ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ.....</b>	<b>3</b>
 <b>Α΄ ΜΕΡΟΣ</b>	
<b>ΝΕΑ ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ</b>	
<b>ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ</b>	
<b>ΜΕ ΙΣΟΤΙΚΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ</b>	
 <b>1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ</b>	
<b>ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ</b>	
1.1 Θέματα από τη θεωρία των Δυναμικών Συστημάτων	
1.1.1 Γενικές ιδιότητες των Δυναμικών Συστημάτων: Υπαρξη, Μοναδικότητα και Μέγιστο Διάστημα Υπαρξης της λύσης.....	9
1.1.2 Στοιχεία από τη θεωρία Ευστάθειας των Αυτόνομων Συστημάτων.....	14
1.1.3 Στοιχεία από τη θεωρία Ευστάθειας των Μη Αυτόνομων Συστημάτων.....	20

1.2	Θέματα από τη θεωρία Βελτιστοποίησης	
1.2.1	Ακρότατα συνάρτησης.....	25
1.2.2	Ελάχιστα συνάρτησης χωρίς περιορισμούς.....	26
1.2.3	Ελάχιστα συνάρτησης στο σύνολο που περιγράφεται από ισοτικούς περιορισμούς.....	27
1.2.4	Ακρότατα κυρτής συνάρτησης.....	29

## **2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**

### **ΤΟ ΝΕΥΡΩΝΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ ΠΡΟΒΟΛΗΣ**

#### **ΤΗΣ ΚΛΙΣΗΣ ΜΕ ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

2.1	Ορισμός του νέου Νευρωνικού Δικτύου.....	35
2.2	Μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων του ΝΔΠΚΕΛ.....	41
2.3	Εφαρμογή του ΝΔΠΚΕΛ στο κυρτό πρόβλημα με ισοτικούς περιορισμούς.....	45
2.4	Ταχύτητα σύγκλισης των λύσεων του ΝΔΠΚΕΛ.....	47
2.5	Συμπεράσματα.....	51

## **3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**

### **ΤΟ ΝΕΥΡΩΝΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ ΠΡΟΒΟΛΗΣ**

#### **ΤΗΣ ΚΛΙΣΗΣ ΜΕ ΜΗ ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

3.1	Ορισμός του νέου Νευρωνικού Δικτύου.....	53
3.2	Μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων του ΝΔΠΚΜΕΛ.....	61
3.3	Εφαρμογή του ΝΔΠΚΜΕΛ, στο κυρτό πρόβλημα με ισοτικούς περιορισμούς.....	66
3.4	Ταχύτητα σύγκλισης των λύσεων του ΝΔΠΚΜΕΛ.....	74
3.5	Συμπεράσματα.....	79

**4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**  
**ΤΟ ΝΕΥΡΩΝΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ**  
**ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ**

4.1 Ορισμός του νέου Νευρωνικού Δικτύου.....	81
4.2 Μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων του ΝΔΤΠ.....	87
4.3 Εφαρμογή του ΝΔΤΠ, σε προβλήματα ελαχίστου με γραμμικούς ιστοικούς περιορισμούς.....	92
4.4 Ταχύτητα σύγκλισης των λύσεων του ΝΔΤΠ.....	99
4.5 Συμπεράσματα.....	104

**5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**  
**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΝΕΩΝ ΝΕΥΡΩΝΙΚΩΝ**  
**ΔΙΚΤΥΩΝ ΣΕ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

5.1 Εισαγωγή.....	107
5.2 Παραδείγματα.....	110

**6ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**  
**ΚΥΚΛΩΜΑΤΙΚΕΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΕΙΣ**  
**ΤΩΝ ΝΕΩΝ ΝΕΥΡΩΝΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ**

6.1 Εισαγωγή.....	167
6.2 Ενδεικτικό κύκλωμα υλοποίησης του ΝΔΠΚΕΛ.....	168
6.3 Ενδεικτικό κύκλωμα υλοποίησης του ΝΔΠΚΜΕΛ.....	171
6.4 Ενδεικτικό κύκλωμα υλοποίησης του ΝΔΤΠ.....	174
6.5 Συμπεράσματα.....	177

**Β΄ ΜΕΡΟΣ**  
**ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΝΕΥΡΩΝΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ**  
**ΤΥΠΟΥ PERCEPTRON**  
**ΜΕ ΤΜΗΜΑΤΙΚΑ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**  
**ΕΝΕΡΓΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΝΕΥΡΩΝΩΝ**

**7ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**

**ΝΕΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΝΕΥΡΩΝΙΚΩΝ**  
**ΔΙΚΤΥΩΝ ΤΥΠΟΥ PERCEPTRON**

7.1 Διατύπωση του προβλήματος εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων τύπου Perceptron σαν πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων.....	181
7.2 Ο νέος αλγόριθμος εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων.....	190
7.3 Παραδείγματα εφαρμογής του νέου αλγόριθμου εκπαίδευσης.....	194
7.4 Συμπεράσματα.....	207
<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....</b>	<b>209</b>
<b>ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....</b>	<b>211</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....</b>	<b>219</b>

## ΣΥΜΒΟΛΑ

$\overset{\text{op}}{=}$	ορίζεται ίσο
$\forall$	για κάθε
$\in$	ανήκει
$\exists$	υπάρχει
$\subset$	υποσύνολο
$\rightarrow$	τείνει
$\Rightarrow$	συνεπάγεται
$\Leftrightarrow$	ισοδυναμεί
$\sum$	άθροισμα
$\ x\ $	$\ x\  = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
$\ x\ _1$	$\ x\ _1 = \sum_{i=1}^m  x_i $
max	μέγιστο
min	ελάχιστο
inf	μέγιστο κάτω φράγμα
sup	ελάχιστο άνω φράγμα
$R^n$	$n$ -διάστατος Ευκλείδειος χώρος
$B_r(a)$	$B_r(a) = \{x \in R^n : \ x - a\  < r\}$

$dist(x, M)$	$dist(x, M) = \min\{\ x - y\ , y \in M\}$
$\bar{M}$	το κλείσιμο του συνόλου $M$
$\partial M$	το σύνορο του συνόλου $M$
$f: M \rightarrow N$	συνάρτηση $f$ , απεικονίζει το σύνολο $M$ στο σύνολο $N$
$\dot{x}$	η παράγωγος του διανύσματος του $R^n$ $x(t)$ , ως προς το χρόνο $t$ , δηλαδή $\dot{x} = [\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}]^T$
$\nabla f(x, \lambda)$	το ανάδελτα χωρίς δείκτη, δηλώνει την Ιακωβιανή μήτρα της $f$ ως προς το διάνυσμα $x$ , δηλαδή
	$\nabla f(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, \lambda)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p(x, \lambda)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1(x, \lambda)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_p(x, \lambda)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$
$\nabla f(x) _{x=x^*}$	η κλίση της συνάρτησης $f$ στο σημείο $x^*$
$D^+V(x) _{\dot{x}=f(x,t)}$	η άνω δεξιά Dini παράγωγος της $V(x)$ στην κατεύθυνση $f(x,t)$
$A^T$	ο ανάστροφος πίνακας του πίνακα $A$
$A^{-1}$	ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα $A$
$rank(A)$	ο βαθμός του πίνακα $A$
$sgn(x)$	η συνάρτηση προσήμου, $sgn: R \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ , $sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \\ -1 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$
$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow 0$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε $\ f(x)\  \leq \varepsilon \ g(x)\ $ , καθώς $x \rightarrow 0$
□	δηλώνει το τέλος κάθε Απόδειξης ή Σημείωσης.

## ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Πολλοί ερευνητές προσπαθούν να αποσαφηνίσουν τα φυσιολογικά και ψυχολογικά φαινόμενα που διέπουν τον ανθρώπινο εγκέφαλο. Η κατανόηση της λειτουργίας ενός οργανομένου συστήματος, δίνει τη δυνατότητα αντιγραφής του. Άλλωστε, ένα παλιό όνειρό του ανθρώπου είναι *η κατασκευή μηχανών κατ'εικόνα και ομοίωσή του*.

Οι σύγχρονες προσπάθειες μίμησις με τεχνικά μέσα των δομών και των λειτουργιών του εγκεφάλου ξεκίνησαν πριν εξήντα περίπου χρόνια από τις εργασίες των McCulloch και Pitts [McP] και τις θεωρίες ψυχολογίας του Hebb [Heb] και λίγο αργότερα τις εργασίες του Rosenblatt [Ros] (Perceptron) και του Widrow [WiH] (Adaline). Στα χρόνια που ακολούθησαν η γνώση κωδικοποιήθηκε σε ένα ξεχωριστό γνωστικό πεδίο, αυτό των Τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων. Η αρχική αισιοδοξία μετατράπηκε σε απαισιοδοξία μετά την έκδοση του βιβλίου *Perceptrons* των Minsky και Papert [MiP]. Στην δεκαετία του '70 το ενδιαφέρον για τα Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα ατόνισε. Ορισμένοι ερευνητές που συνέχισαν να εργάζονται με Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα στην δεκαετία του '70 είναι οι Grossberg και Kohonen. Η αναθέρμανση του γνωστικού πεδίου πραγματοποιήθηκε στις αρχές της δεκαετίας του '80, έχοντας σημείο αναφοράς τις εργασίες του Hopfield [Hop]. Σήμερα αναφερόμαστε σε μια πραγματική έκρηξη, που πυροδοτείται από την προσέγγιση των Τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων σε συγγενείς τεχνολογίες



(Γενετική Αλγόριθμοι, Ασαφής Λογική) και την εφαρμογή τους σε διάφορα προβλήματα: οικονομικές αναλύσεις και προβλέψεις, επεξεργασία εικόνας, επεξεργασία σήματος, αυτόματο έλεγχο, βελτιστοποίηση κλπ., που πιστεύεται ότι θα δώσει εξαιρετικά εργαλεία. Για εκτεταμένη βιβλιογραφία και περισσότερες πληροφορίες που αφορούν την ευρύτερη περιοχή των Νευρωνικών Δικτύων βλ. [Hay], [HDB], [Tay], [Gol].

(α) *Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα τύπου Hopfield και Βελτιστοποίηση*

Η συνήθης μέθοδος επίλυσης προβλημάτων ελαχιστοποίησης με Νευρωνικά Δίκτυα συνεχούς χρόνου (τύπου Hopfield), περιλαμβάνει αρχικά τον εντοπισμό της κατάλληλης συνάρτησης ποινής (ή φράγματος) ακριβούς ή διαφορίσιμης. Έτσι το αρχικό πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης χωρίς περιορισμούς. Στη συνέχεια, υιοθετώντας συνήθως τη μέθοδο της κλίσης, κατασκευάζεται ένα δυναμικό σύστημα, στην κατεύθυνση του οποίου μειώνεται η συνάρτηση ποινής. Το δίκτυο των Tank και Hopfield [TaH] χρησιμοποιείται για τη λύση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Αποδεικνύεται [LLH] ότι, το σύστημα εξισώσεων του κυκλώματος αυτού είναι ένα δυναμικό σύστημα βασισμένο στη μέθοδο της κλίσης, που ελαχιστοποιεί την  $L_2$  συνάρτηση ποινής. Το ίδιο συμπέρασμα αποδεικνύεται στην ίδια αναφορά, για το κύκλωμα μη γραμμικού προγραμματισμού των Chua και Lin [KeC], [ChL]. Το Νευρωνικό Δίκτυο μη γραμμικού προγραμματισμού, που περιλαμβάνει διακοπτόμενους πυκνωτές και προτείνεται στο άρθρο [RDR], βασίζεται και αυτό στη μέθοδο της κλίσης της συνάρτησης ποινής. Επίσης το Νευρωνικό Δίκτυο μη γραμμικού προγραμματισμού που προτείνεται στο άρθρο [LHZ] είναι μια εφαρμογή της μεθόδου της κλίσης της  $L_1$  ακριβούς συνάρτησης ποινής. Στο βιβλίο [CiU] παρουσιάζονται αχριτεκτονικές Νευρωνικών Δικτύων για τη λύση προβλημάτων με περιορισμούς. Στο άρθρο [ZUH] δίνονται τρεις τάξεις Νευρωνικών Δικτύων γραμμικού προγραμματισμού, που προκύπτουν από

συνδιασμούς των  $L_1$ ,  $L_2$  και  $L_\infty$  συναρτήσεων ποινής. Μελέτη αυτών των Νευρωνικών Δικτύων γίνεται στο άρθρο [CHZ]. Στο άρθρο [XW1] παρουσιάζεται μια μεθοδολογία σχεδιασμού Νευρωνικών Δικτύων συνεχούς χρόνου για γενικά προβλήματα ελαχιστοποίησης. Η μεθοδολογία αυτή κάνει χρήση της συνάρτησης ποινής και βασίζεται σε συνδιασμό της μεθόδου της κλίσης με μεθόδους που δεν χρησιμοποιούν κλίση (gradient and nongradient methods). Στο άρθρο [JiW] δίνεται ένα αναλογικό Νευρωνικό δίκτυο που βασίζεται στη μέθοδο της κλίσης και κάνει χρήση της λογαριθμικής συνάρτησης φράγματος. Στο άρθρο [Per] παρουσιάζεται ένα Νευρωνικό Δίκτυο διακριτού χρόνου, επιτρεπτής τροχιάς για προβλήματα τετραγωνικού προγραμματισμού με περιορισμούς απλά φράγματα. Στο άρθρο [MaK] παρουσιάζεται ένα αναλογικό Νευρωνικό δίκτυο επιτρεπτού αρχικού σημείου που βασίζεται στη μέθοδο Newton και κάνει χρήση της λογαριθμικής συνάρτησης φράγματος.

Πολλά Νευρωνικά Δίκτυα συνεχούς χρόνου της βιβλιογραφίας, για τη λύση προβλημάτων ελαχίστου με περιορισμούς, δεν χρησιμοποιούν συνάρτηση ποινής ή φράγματος. Τα Νευρωνικά Δίκτυα που προτείνονται στα άρθρα [SuS] και [BoP] και αφορούν τετραγωνικά, θετικά ορισμένα προβλήματα με απλά φράγματα στις μεταβλητές τους, καθώς και η κατηγορία Νευρωνικών Δικτύων που προτείνεται στο άρθρο [ZhC] που αφορά μη γραμμικά προβλήματα, κάνουν άμεση χρήση των συνθηκών Kuhn-Tucker. Ακολουθούν πιο πρόσφατες προτάσεις Νευρωνικών Δικτύων που δεν κάνουν χρήση συναρτήσεων ποινής. Στο άρθρο [LCJ] προτείνεται ένα Νευρωνικό Δίκτυο βασισμένο στη μέθοδο της κλίσης, για γραμμικό ή τετραγωνικό προγραμματισμό. Νευρωνικά Δίκτυα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με μη συνεχές δεξιό μέλος προτείνονται στο άρθρο [LiW], για προβλήματα ελαχίστου με περιορισμούς απλά φράγματα στις μεταβλητές και στα άρθρα [TCX], [XW4] για την λύση κυρτών προβλημάτων ελαχιστοποίησης, με γραμμικούς ανισοτικούς περιορισμούς. Άλλη σημαντική κατηγορία Νευρωνικών Δικτύων (ενδεικτικά

άρθρα [XLW], [XFW], [XW2], [XW3], [GLX]), κάνουν χρήση τελεστών προβολής για να λύσουν κυρτά προβλήματα ελαχίστου.

(β) *Αλγόριθμοι εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων τύπου Perceptron*

Για την εκπαίδευση Νευρωνικών Δικτύων τύπου Perceptron υπάρχει εκτενέστατη βιβλιογραφία. Ενδεικτικά αναφέρονται εδώ ορισμένα στοιχεία της βιβλιογραφίας αυτής.

Οι περισσότεροι αλγόριθμοι εκπαίδευσης αναφέρονται σε Νευρωνικά Δίκτυα που χρησιμοποιούν συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις ενεργοποίησης νευρώνων. Τα άρθρα [BaW], [WiD], [Wat] μελετούν την εκπαίδευση των Νευρωνικών Δικτύων με λογιστική συνάρτηση ενεργοποίησης νευρώνων και συνάρτηση σφάλματος την συνάρτηση εντροπίας. Στο άρθρο [Bab] παρουσιάζονται αλγόριθμοι εκπαίδευσης, που βασίζονται σε μεθόδους τυχαίας ελαχιστοποίησης (random optimization methods) του τετραγωνικού σφάλματος. Στα άρθρα [Bat], [KoA], [Mol], [BFF] παρουσιάζονται βελτιωμένες μέθοδοι εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων τύπου πολυστρωματικού perceptron, βασισμένες σε τροποποιήσεις της μεθόδου Newton ([KoA]), σε ψευδονευτώνιες μεθόδους ([Bat], [BFF]) και στη μέθοδο των συζυγών κατευθύνσεων ([Mol]). Στο άρθρο [SBC] διαπιστώνεται ότι, η αργή σύγκλιση των αλγόριθμων εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων προσωτροφοδότησης, που βασίζονται στην μέθοδο της κλίσης, οφείλεται στον κακό αριθμό κατάστασης της μήτρας δευτέρων παραγώγων της συνάρτησης σφάλματος. Στο άρθρο [CU2] παρουσιάζεται ένα Νευρωνικό Δίκτυο διακριτού χρόνου για τη λύση γραμμικών συστημάτων και προτείνεται σχετικός αλγόριθμος εκπαίδευσης. Στο άρθρο [HuD] διατυπώνεται αλγόριθμος εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων προσωτροφοδότησης που βασίζεται στη γραμμικοποίηση της συνάρτησης δικτύου, εφαρμόζοντας πρώτης τάξης προσέγγιση Taylor.

**Α΄ ΜΕΡΟΣ**

**ΝΕΑ ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ  
ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΥΡΕΣΗΣ  
ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΜΕ ΙΣΟΤΙΚΟΥΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ**



## 1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ

#### 1.1 Θέματα από τη θεωρία των Δυναμικών Συστημάτων

##### 1.1.1 Γενικές ιδιότητες των Δυναμικών Συστημάτων: Ύπαρξη, Μοναδικότητα και Μέγιστο Διάστημα Ύπαρξης της λύσης

Θεωρείται το δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από  $n$  α'τάξης συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

όπου  $f_1(x, t), \dots, f_n(x, t): \Omega \times I \rightarrow R$  συναρτήσεις,  $\Omega \subset R^n$  και  $I \subset R$  ανοικτά και συνεκτικά (connected) σύνολα. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές  $t$  και  $x_1, \dots, x_n$  αναφέρονται ως χρόνος και μεταβλητές του διανύσματος κατάστασης αντίστοιχα. Οι εξισώσεις (1.1) καλούνται εξισώσεις κατάστασης. Συνήθως είναι η περιγραφή του δυναμικού συστήματος (1.1) σε μητρική γραφή. Έτσι, ορίζονται τα διανύσματα  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$  και  $f(x, t) = [f_1(x, t), \dots, f_n(x, t)]^T$

και το δυναμικό σύστημα (1.1) ξαναγράφεται ως μια  $n$ -διάστατη διανυσματική διαφορική εξίσωση:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1.2)$$

Στην ειδική περίπτωση που η συνάρτηση  $f$  δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο, δηλαδή  $f: \Omega \rightarrow R^n$ , τότε

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.3)$$

και το σύστημα καλείται αυτόνομο. Αν το σύστημα δεν είναι αυτόνομο, τότε λέγεται μη αυτόνομο σύστημα.

Μια διαφορίσιμη συνάρτηση του χρόνου  $x: (\alpha, \omega) \subset R \rightarrow R^n$ , είναι λύση του συστήματος (1.2) στο διάστημα  $(\alpha, \omega)$  αν  $(x(t), t) \in \Omega \times I$ ,  $\forall t \in (\alpha, \omega)$  και  $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ ,  $\forall t \in (\alpha, \omega)$  ([MiW], Par. 2.3, p. 34). Όταν ενδιαφέρει μια συγκεκριμένη λύση του συστήματος (1.2), η οποία κάποια αρχική χρονική στιγμή  $t_0 \in (\alpha, \omega)$  έχει τιμή (αρχικό σημείο)  $x_0 \in R^n$ , δηλαδή  $x(t_0) = x_0$ , λύνεται το ακόλουθο σύστημα

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \in \Omega \quad (1.4)$$

Το σύστημα (1.4) καλείται πρόβλημα αρχικών τιμών ([MiW], Par. 2.3, p. 34) και κάθε λύση του αναφέρεται ως λύση που ξεκινά από το σημείο  $x_0$  την αρχική χρονική στιγμή  $t_0$ , ή λύση με αρχικό σημείο το  $x_0$ . Στην περίπτωση του αυτόνομου δυναμικού συστήματος το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.4) γράφεται ως εξής:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \in \Omega \quad (1.5)$$

Ενα σημείο  $\bar{x}$  καλείται σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.2) αν  $f(\bar{x}, t) = 0$ ,  $\forall t \in I$  ([MiW], Ex. 3.1.10, p. 103). Η σημασία των σημείων ισορροπίας έγκειται, όχι τόσο στο γεγονός ότι αποτελούν λύσεις του συστήματος (1.2) σταθερές στο χρόνο, αλλά κυρίως στο ότι η γεωμετρική συμπεριφορά των συνιστωσών των λύσεων του συστήματος (1.2) στο χώρο των φάσεων, καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τις ιδιότητες των σημείων αυτών.

Τα βασικά ζητήματα με τα οποία ασχολείται η ποιοτική θεωρία των διαφορικών εξισώσεων είναι τα ακόλουθα:

- (α) προϋποθέσεις ύπαρξης της λύσης της διαφορικής εξίσωσης,
- (β) προϋποθέσεις μοναδικότητας της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών,
- (γ) ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης και συνεχής εξάρτησης αυτής από τις αρχικές συνθήκες.

Το τελευταίο ερώτημα αποτελεί αντικείμενο της θεωρίας ευστάθειας.

Σε ορισμένες περιπτώσεις η ύπαρξη μιας λύσης για το πρόβλημα αρχικών τιμών μπορεί να θεμελιωθεί κατευθείαν με την επίλυση του προβλήματος και την παρουσίαση του τύπου της λύσης. Έτσι αναλυτικά η λύση

του συστήματος (1.4) είναι  $\left[ \int_{t_0}^t f_1(x(s), s) ds, \dots, \int_{t_0}^t f_n(x(s), s) ds \right]^T$ . Ωστόσο εν

γένει, αυτή η προσέγγιση δεν είναι εφικτή σε όλες τις περιπτώσεις. Ακολουθεί το θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων του α'τάξης προβλήματος αρχικών τιμών ([MiW] Th. 2.3.5, p. 36 και Th. 2.3.6, p. 36).

**Θεώρημα 1.1** (Υπαρξη και Μοναδικότητα της λύσης)

α) Αν  $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  συνεχής συνάρτηση, τότε  $\forall (x_0, t_0) \in \Omega \times I$  το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.4) έχει λύση, ορισμένη στο διάστημα  $I_{x_0, t_0} = [t_0, t_0 + c(x_0))$ , για κάποιο  $c(x_0) > 0$ .

β) Αν επιπλέον σε κάθε συμπαγές σύνολο  $K \subset \Omega \times I$  η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz (μια τέτοια συνάρτηση λέγεται ότι είναι τοπικά Lipschitz), δηλαδή υπάρχει  $L_K > 0$  ώστε

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq L_K \|x - y\|, \quad \forall (x, t), (y, t) \in K,$$

τότε  $\forall (x_0, t_0) \in \Omega \times I$  το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.4), έχει μοναδική λύση στο διάστημα  $I_{x_0, t_0}$ .

Το Θεώρημα 1.1, αναφερόμενο στην γενική περίπτωση του συστήματος (1.4), εξασφαλίζει λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών σε μια



περιοχή του αρχικού σημείου. Το επόμενο ζήτημα λοιπόν που ενδιαφέρει μετά την απάντηση στα θέματα ύπαρξης και μοναδικότητας, είναι το πρόβλημα εντοπισμού του μέγιστου διαστήματος ύπαρξης της λύσης. Για το σκοπό αυτό εισάγονται οι ακόλουθες έννοιες ([MiW], Παρ. 2.3, p. 36). Μια συνάρτηση του χρόνου  $\bar{x}: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  καλείται επέκταση ή συνέχιση (extention ή continuation) της λύσης  $x(t)$  του προβλήματος αρχικών τιμών (1.4), αν: (α)  $(\alpha, \omega) \subseteq J$ , όπου  $(\alpha, \omega)$  το διάστημα ορισμού της λύσης  $x(t)$ , (β) είναι λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.4) και (γ)  $\bar{x}(t_0) = x_0$ . Αν η λύση  $x(t)$  δεν έχει επέκταση, τότε καλείται μη επεκτάσιμη (noncontinuable) λύση και το διάστημα  $(\alpha, \omega)$  στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως μέγιστο διάστημα ύπαρξής της.

Στα επόμενα κεφάλαια που θα ακολουθήσουν, πρακτικό ενδιαφέρον έχουν οι φραγμένες λύσεις των δυναμικών συστημάτων. Σχετικός είναι ο ορισμός που ακολουθεί ([MiW], Def. 2.3.11, p. 37).

**Ορισμός 1.2** Μια λύση  $x(t)$  του συστήματος (1.4) ορισμένη στο διάστημα  $(a, \omega)$  καλείται φραγμένη, αν υπάρχει  $b \in \mathbb{R}$ , με  $b > 0$ , τέτοιο ώστε  $\|x(t)\| \leq b$ ,  $\forall t \in (a, \omega)$ .

Στα τρία δυναμικά συστήματα που κατασκευάζονται στα επόμενα κεφάλαια της διατριβής, η συνάρτηση  $f$  (δηλαδή το δεξί μέλος του δυναμικού συστήματος (1.4)) είτε είναι ανεξάρτητη του χρόνου (πρόκειται δηλαδή για αυτόνομα δυναμικά συστήματα), είτε είναι συνεχής ως προς το χρόνο στο διάστημα  $[0, \infty)$ . Επιπλέον το αρχικό σημείο των δυναμικών συστημάτων ορίζεται τη χρονική μηδέν. Δηλαδή οι λύσεις τους ορίζονται στο διάστημα  $[0, \omega)$ . Ως εκ τούτου, οι ορισμοί και οι προτάσεις που ακολουθούν διατυπώνονται ελαφρώς απλοποιημένα σε σχέση με τα αντίστοιχα των αναφορών, ώστε να αφορούν την ειδική περίπτωση της λύσης  $x(t)$  του δυναμικού συστήματος (1.4), με μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης το  $[0, \omega)$ .

Ο ορισμός που ακολουθεί ([RHL], App. III.1, p. 363) εισάγει την έννοια του οριακού συνόλου της λύσης ενός δυναμικού συστήματος.

**Ορισμός 1.3** Έστω  $f : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow R^n$  συνεχής συνάρτηση και έστω  $x(t)$  λύση του συστήματος (1.4) με μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης το  $[0, \omega)$ . Ένα σημείο  $y$  ονομάζεται οριακό σημείο της λύσης  $x(t)$  αν υπάρχει αύξουσα ακολουθία του χρόνου  $\{t_j, j=1,2,\dots\} \subset [0, \omega)$ , τέτοια ώστε  $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = \omega$  και  $\lim_{j \rightarrow \infty} x(t_j) = y$ . Το σύνολο  $L_x$  των οριακών σημείων της λύσης  $x(t)$ , ονομάζεται οριακό σύνολο της λύσης.

Οι βασικές ιδιότητες των οριακών συνόλων περιγράφονται στην ακόλουθη πρόταση ([RHL], Th. 2, p. 363, Th. 3, p. 364 και Th. 4, p. 364, Th. 5, p. 365).

**Πρόταση 1.4** Έστω  $f : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow R^n$  συνεχής συνάρτηση και έστω  $x(t)$  λύση του συστήματος (1.4) με μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης το  $[0, \omega)$  και οριακό σύνολο το  $L_x$ . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα: (α) το  $L_x$  είναι κλειστό σύνολο, (β) έστω το σύνολο  $X = \{y \in R^n : y = x(t), t \in [0, \omega)\}$ , τότε  $\bar{X} = X \cup L_x$  (όπου  $\bar{X}$  το κλείσιμο του  $X$ , δηλαδή το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιλαμβάνει το  $X$ ) και (γ) αν επιπλέον η λύση  $x(t)$  είναι φραγμένη, τότε το  $L_x$  είναι μη κενό, συμπαγές, συνεκτικό και επιπλέον  $x(t) \rightarrow L_x$ , καθώς  $t \rightarrow \omega$ .

Η πρόταση που ακολουθεί δίνει ικανές συνθήκες, για την επέκταση της λύσης του Θεωρήματος 1.1 στο μεγαλύτερο δυνατό χρονικό διάστημα ([RHL], Ex. 6, p. 365).

**Πρόταση 1.5** Έστω  $f : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow R^n$  συνεχής συνάρτηση και έστω  $x(t)$  λύση του συστήματος (1.4) με οριακό σύνολο  $L_x$ . Αν  $L_x \cap \Omega \neq \emptyset$ , τότε  $\omega = \infty$ . Δηλαδή, αν η λύση  $x(t)$  έχει τουλάχιστον ένα οριακό σημείο στο  $\Omega$ , τότε εκτείνεται για άπειρο χρόνο.

Η παρακάτω πρόταση προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1.4γ και την

Πρόταση 1.5.

**Πρόταση 1.6** Έστω  $f: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  συνεχής συνάρτηση και έστω  $x(t)$  φραγμένη λύση του συστήματος (1.4), τότε  $\omega = \infty$  και  $x(t) \rightarrow L_x$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Για τη συνέχεια της παραγράφου βλ. [RHL], App. III.9-11, pp. 366-367. Η συνάρτηση  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  του αυτόνομου συστήματος (1.5) θεωρείται συνεχής.

**Ορισμός 1.7** Ένα σύνολο  $H \subset \Omega$  καλείται ημιαναλλοίωτο από το αυτόνομο σύστημα (1.5), όταν για κάθε αρχικό σημείο  $x_0 \in H$ , υπάρχει τουλάχιστον μία λύση του συστήματος (1.5), που παραμένει στο σύνολο  $H$  για όσο χρόνο εξελίσσεται.

**Ορισμός 1.8** Ένα σύνολο  $H \subset \Omega$  καλείται αναλλοίωτο από το αυτόνομο σύστημα (1.5), όταν για κάθε αρχικό σημείο  $x_0 \in H$ , όλες οι λύσεις του συστήματος (1.4) παραμένουν στο σύνολο  $H$  για όσο χρόνο εξελίσσονται.

Προφανώς όταν εξασφαλίζεται το μονοσήμαντο των λύσεων, οι χαρακτηρισμοί αναλλοίωτο και ημιαναλλοίωτο σύνολο από το σύστημα (1.5), ταυτίζονται.

**Πρόταση 1.9** Έστω  $x(t)$  λύση του αυτόνομου συστήματος (1.5) με οριακό σύνολο το  $L_x$ . Τότε το σύνολο  $L_x \cap \Omega$  είναι ημιαναλλοίωτο από το σύστημα (1.5).

### 1.1.2 Στοιχεία από τη θεωρία Ευστάθειας των Αυτόνομων Συστημάτων

Θεωρείται το αυτόνομο σύστημα (1.5) και έστω  $x(t)$  μια λύση του, με μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης το  $[0, \omega)$  και  $x(0) = x_0$ . Εφαρμόζοντας στο διάνυσμα κατάστασης  $x$  την αλλαγή συντεταγμένων  $z = x - x(t)$ , το σύστημα

(1.5) γίνεται:  $\dot{z} = f(z + x(t)) - f(x(t)) \stackrel{\text{op}}{=} g(z)$ . Προφανώς η αρχή των αξόνων του  $R^n$  είναι ένα σημείο ισορροπίας του νέου συστήματος. Χωρίς βλάβη της γενικότητας λοιπόν, η ευστάθεια της λύσης  $x(t)$  του συστήματος (1.5) και η ευστάθεια οποιουδήποτε μη μηδενικού σημείου ισορροπίας του, προκύπτει από την ευστάθεια της αρχής των αξόνων του  $R^n$ , σημείο ισορροπίας του νέου συστήματος. Για το αυτόνομο δυναμικό σύστημα (1.5) υιοθετούνται οι εξής υποθέσεις:  $f: \Omega \rightarrow R^n$  τοπικά Lipschitz συνάρτηση, ώστε να εξασφαλίζεται το μονοσήμαντο της λύσης του (βλ. Θεώρημα 1.1),  $f(0) = 0$  και  $\Omega \subset R^n$  ανοικτό συνεκτικό σύνολο που περιλαμβάνει την αρχή. Για τους ορισμούς που ακολουθούν βλ. [Kha], Def. 3.1, p. 98.

**Ορισμός 1.10** Η αρχή είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.5), αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$ , που πιθανώς εξαρτάται από το  $\varepsilon$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $x_0 \in B_\delta(0)$  ισχύει ότι  $x(t) \in B_\varepsilon(0)$ ,  $\forall t \in [0, \omega)$ , όπου  $B_\delta(0) = \{y \in R^n : \|y\| < \delta\}$ .

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι, για δεδομένο  $\varepsilon$  υπάρχει κάποιο  $\delta$ , ώστε όλες οι λύσεις που ξεκινούν στην  $\delta$  γειτονία της αρχής, παραμένουν στην  $\varepsilon$  γειτονία της αρχής, για όσο χρόνο εξελίσσονται.

**Ορισμός 1.11** Η αρχή είναι ασταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.5) αν δεν είναι ευσταθές.

**Ορισμός 1.12** Η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.5), αν είναι ευσταθές και υπάρχει κάποιο  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε, για κάθε  $x_0 \in B_\delta(0)$  ισχύει  $\lim_{t \rightarrow \omega} x(t) = 0$ .

Προφανώς η ασυμπτωτική ευστάθεια είναι ισχυρότερη ιδιότητα από αυτή της ευστάθειας. Από την άλλη, η συνθήκη του ορίου δεν συνεπάγεται από μόνη της τη συνήθη ευστάθεια.

Για τον προσδιορισμό της ευστάθειας η άμεση ή δεύτερη μέθοδος Lyapunov βασίζεται στην κατασκευή μιας συνάρτησης, η οποία στην περίπτωση που το δυναμικό σύστημα αποτελεί τη μαθηματική περιγραφή κάποιου φυσικού συστήματος, σχετίζεται με την ολική ενέργεια αυτού. Έτσι σε ένα συντηρητικό σύστημα, αναμένεται ευσταθής ισορροπία σε ένα τοπικό ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας και ασταθής σε τοπικά μέγιστα αυτής. Ακολουθεί το σχετικό θεώρημα ευστάθειας της αρχής ως σημείου ισορροπίας του συστήματος (1.5) ([Kha], Th. 3.1, pp. 100-103).

**Θεώρημα 1.13** Έστω  $V$  θετικά ορισμένη και συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση σε μια γειτονιά  $U$  της αρχής. (α) Αν η παράγωγος  $\left. \frac{dV(x)}{dt} \right|_{(1.5)}$  είναι αρνητικά ημιορισμένη στο  $U$ , τότε η αρχή είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.5). (β) Αν η παράγωγος  $\left. \frac{dV(x)}{dt} \right|_{(1.5)}$  αρνητικά ορισμένη στο  $U$ , τότε η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.5), όπου  $\left. \frac{dV(x)}{dt} \right|_{(1.5)} = \nabla V(x)^T f(x)$ , με  $\nabla V(x) = \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right]^T$ , δηλαδή πρόκειται για την παράγωγο της συνάρτησης  $V$  στην κατεύθυνση του δυναμικού συστήματος (1.5).

*Σημείωση 1.1:* Οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.13α και 1.13β εξασφαλίζουν επιπλέον ότι, οι λύσεις εξελίσσονται για άπειρο χρόνο, σχετικά βλ. [Kha], Proof of Th. 3.1, pp. 101-102).  $\square$

Μια βαθμωτή συνάρτηση  $\varphi$  με  $\varphi(0) = 0$  λέγεται θετικά ορισμένη στο σύνολο  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , όταν  $\varphi(x) > 0$ ,  $\forall x \in \Omega \setminus \{0\}$ . Αν η συνάρτηση  $\varphi$  ικανοποιεί την ασθενέστερη συνθήκη  $\varphi(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ , τότε λέγεται θετικά ημιορισμένη. Μια συνάρτηση  $\varphi$  είναι αρνητικά ορισμένη ή αρνητικά

ημιορισμένη στο σύνολο  $\Omega$ , όταν η συνάρτηση  $-φ$  είναι θετικά ορισμένη ή ημιορισμένη, αντίστοιχα.

Οι συναρτήσεις που πληρούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.13α και 1.13β στη βιβλιογραφία καλούνται ασθενείς συναρτήσεις Lyapunov και συναρτήσεις Lyapunov αντίστοιχα.

Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι μπορεί να προσδιορίσει γειτονιά της αρχής τέτοια ώστε, όλες οι λύσεις που ξεκινούν μέσα σε αυτή να είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς. Μια τέτοια γειτονιά ονομάζεται πεδίο έλξης της αρχής στο σύστημα (1.5). Πεδίο έλξης λοιπόν, είναι μια γειτονιά της αρχής όπου η συνάρτηση  $V$  πληρεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1.13β. Το πεδίο έλξης που προκύπτει, εξαρτάται από τη συνάρτηση Lyapunov που επιλέγεται και ίσως να μην είναι το μέγιστο δυνατό. Όταν το πεδίο έλξης είναι όλος ο χώρος  $R^n$ , η αρχή ονομάζεται ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.5). Σχετικά με τα ανωτέρω βλ. [Kha], Παρ. 3.1, p. 109. Για ολική ασυμπτωτική ευστάθεια η συνάρτηση του Θεωρήματος 1.13β πρέπει επιπλέον να είναι ακτινικά μη φραγμένη, δηλαδή  $V(x) \rightarrow \infty$ , καθώς  $\|x\| \rightarrow \infty$  (βλ. [Kha], Th. 3.2, p. 110).

Τα προηγούμενα θεωρήματα δίνουν ικανές συνθήκες ευστάθειας και ασυμπτωτικής ευστάθειας της αρχής. Δεν απαιτούν την αναλυτική λύση του δυναμικού συστήματος. Αντί αυτού, η ευστάθεια ή η ασυμπτωτική ευστάθεια εξασφαλίζεται από την ύπαρξη μιας συναρτήσης Lyapunov που ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες. Ωστόσο η κατασκευή της δεν είναι κάθε φορά απλή υπόθεση. Επιπλέον η αδυναμία εντοπισμού της δεν δηλώνει αστάθεια της αρχής.

Στο θεώρημα που ακολουθεί ([RHL], Th. 5.8, p. 22 και [Kha], Th. 3.7, p. 127) διατυπώνονται συμπεράσματα για την ευστάθεια του μη γραμμικού δυναμικού συστήματος, χρησιμοποιώντας την α'τάξης προσέγγιση του.

**Θεώρημα 1.14** Έστω το μη γραμμικό σύστημα  $\dot{x} = Ax + g(x)$ , όπου  $A: n \times n$ , πραγματικός πίνακας και  $g(x) = o(\|x\|)$ , καθώς  $\|x\| \rightarrow 0$ . Έστω ότι το δεξίό μέλος του συστήματος είναι τόσο λείο, ώστε να έχει μοναδική λύση και έστω ότι η αρχή είναι σημείο ισορροπίας του. (α) Αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  έχουν αυστηρά αρνητικό πραγματικό μέρος, τότε η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος. (β) Αν μια ή περισσότερες ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  έχουν αυστηρά θετικό πραγματικό μέρος τότε η αρχή είναι ασταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος.

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι το βασικό εργαλείο, για τις αποδείξεις σύγκλισης των λύσεων των αυτόνομων δυναμικών συστημάτων, που περιγράφονται στα επόμενα κεφάλαια. Πρόκειται για μια ελαφρά απλοποιημένη διατύπωση του [RHL], Th. 3.2, p.243 (γνωστού ως Θεωρήματος LaSalle), ώστε να αφορά την ειδική περίπτωση των δυναμικών συστημάτων της διατριβής. Αναφέρεται στο αυτόνομο δυναμικό σύστημα (1.5), υιοθετώντας ασθενέστερες υποθέσεις από αυτές της θεωρίας ευστάθειας Lyapunov.

**Θεώρημα 1.15** Έστω  $f: \Omega \rightarrow R^n$  συνεχής συνάρτηση με  $\Omega \subset R^n$  ανοικτό συνεκτικό σύνολο και έστω  $x(t)$  λύση του αυτόνομου δυναμικού συστήματος  $\dot{x}(t) = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$ , με μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης το  $[0, \omega)$  και οριακό σύνολο το  $L_x$ . Ας είναι  $V: \Omega \rightarrow R$  μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση τέτοια ώστε  $D^+V(x)|_{\dot{x}=f(x)} \leq 0, \forall x \in \{x(t), t \in [0, \omega)\}$ . Τότε

$$L_x \cap \Omega \subset M,$$

όπου  $M$  το ευρύτερο αναλλοίωτο, από το σύστημα (1.5), υποσύνολο του συνόλου  $E = \left\{ y \in \Omega : D^+V(x)|_{\dot{x}=f(x)} = 0 \right\}$ .

Σημειώνεται ότι όπου  $D^+V(x)|_{\dot{x}=f(x)}$  είναι η άνω δεξιά Dini παράγωγος της συνάρτησης  $V(x)$ , στην κατεύθυνση του δυναμικού συστήματος (σχετικά

βλ. [RHL], App. I, pp.345-354). Στην απόδειξη της σύγκλισης του νέου αυτόνομου Νευρωνικού Δικτύου της διατριβής (βλ. Κεφ. 2, Θεώρ. 2.4), η συνάρτηση  $V(x)$  είναι συνεχώς διαφορίσιμη, οπότε  $D^+V(x)|_{\dot{x}=f(x)} = \dot{V}(x) = \nabla V(x)^T f(x)$ .

*Σημείωση 1.2:* α) Προφανώς οι υποθέσεις του Θεωρήματος LaSalle είναι πιο χαλαρές από αυτές του Θεωρήματος ευστάθειας Lyapunov (Θεώρημα 1.13). Συγκεκριμένα στο Θεώρημα LaSalle:

- (i) η συνάρτηση  $f$  που περιγράφει το δυναμικό σύστημα (1.5) είναι απλά συνεχής, οπότε δεν απαιτείται το μονοσήμαντο των λύσεων του,
- (ii) η αρχή δεν απαιτείται να είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος και να περιλαμβάνεται στο σύνολο  $\Omega$ ,
- (iii) η συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση  $V$  που πρέπει να κατασκευαστεί, δεν απαιτείται να είναι θετικά ορισμένη, αρκεί να φθίνει κατά μήκος της λύσης  $x(t)$  του συστήματος (1.5),
- (iv) το σύνολο των οριακών σημείων των λύσεων του συστήματος (1.5) δεν περιλαμβάνει αποκλειστικά απομονωμένα σημεία και δεν απαιτείται να είναι μη κενό.

β) Υπό ορισμένες προϋποθέσεις το Θεώρημα LaSalle, επιβεβαιώνει την ύπαρξη σημείων ισορροπίας του δυναμικού συστήματος (1.5) ([LaS], Col.6.5, p.31) ή διαπιστώνει αστάθειες λύσεων ([LaS], Col.6.6, p.31).  $\square$

Αν η λύση είναι φραγμένη, τότε από την Πρόταση 1.4(γ) είναι  $L_x \neq \emptyset$  και  $x \rightarrow L_x$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Αν επιπλέον  $L_x \subset \Omega$  τότε από την Πρόταση 1.5  $\omega = \infty$ . Έτσι, προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα του Θεωρήματος 1.15.

**Πόρισμα 1.16** Έστω  $f: \Omega \rightarrow R^n$  συνεχής συνάρτηση με  $\Omega \subset R^n$  ανοικτό συνεκτικό σύνολο και έστω  $x(t)$  φραγμένη λύση του αυτόνομου συστήματος  $\dot{x}(t) = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$ , με μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης το  $[0, \omega)$  και οριακό σύνολο το  $L_x$  τέτοιο ώστε  $L_x \subset \Omega$ . Ας είναι  $V: \Omega \rightarrow R$  μια



τοπικά Lipschitz συνάρτηση τέτοια ώστε  $D^+V(x)|_{\dot{x}=f(x)} \leq 0, \forall x \in \{x(t), t \in [0, \omega)\}$ .

Τότε

(α)  $L_x \subset M,$

όπου  $M$  όπως ορίζεται στο Θεώρημα 1.15 και

(β)  $x(t) \rightarrow M,$  καθώς  $t \rightarrow \infty,$

δηλαδή  $\forall \varepsilon > 0 \exists T(\varepsilon, x_0),$  τέτοιο ώστε  $dist(x(t), M) < \varepsilon, \forall t \geq T(\varepsilon, x_0),$  όπου

$$dist(x(t), M) = \min_{y \in M} \{ \|x(t) - y\| \}.$$

*Σημείωση 1.3:* Η σύγκλιση της λύσης δεν είναι τοπική, όπως στο συμπέρασμα του Θεωρήματος 1.13. Το πεδίο έλξης του συνόλου  $M$  που προκύπτει από το Πρόσχημα 1.16, περιλαμβάνει σημεία του  $\Omega$  τα οποία ως αρχικά σημεία εξασφαλίζουν φραγμένες λύσεις, με  $L_x \subset \Omega$ . Από το Πρόσχημα 1.16 δεν προκύπτει γενικά εξάρτηση του συνόλου αυτού από την συνάρτηση  $V$ . Σε ορισμένες εφαρμογές όμως η κατασκευή της συνάρτησης  $V$  εγγυάται την ύπαρξη του πεδίου έλξης του συνόλου  $M$ . Μια τέτοια περίπτωση είναι η κυρτή συνάρτηση  $V$  με φραγμένο σύνολο ελαχίστων στο  $\Omega$ . Τότε εξασφαλίζεται ότι το πεδίο έλξης του  $M$  είναι το σύνολο  $\Omega$ .  $\square$

### 1.1.3 Στοιχεία από τη θεωρία Ευστάθειας των Μη Αυτόνομων Συστημάτων

Η θεωρία της ευστάθειας των λύσεων μη αυτόνομων συστημάτων, δεν διαφέρει στις βασικές ιδέες από την θεωρία ευστάθειας των αυτόνομων συστημάτων. Η πολυπλοκότητα των μη αυτόνομων συστημάτων οφείλεται στην βασική διαφορά, ότι ενώ οι λύσεις των αυτόνομων συστημάτων εξαρτώνται από τα  $x_0$  και  $t - t_0$ , οι λύσεις των μη αυτόνομων συστημάτων εξαρτώνται από τα  $x_0, t$  και  $t_0$ .

Στην παράγραφο αυτή μελετάται η ευστάθεια της λύσης  $x(t)$  του μη αυτόνομου συστήματος (1.4), με μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης το  $[t_0, \omega)$  και  $x(t_0) = x_0$ . Όπως και στην περίπτωση των αυτόνομων συστημάτων, το διάλυμα κατάστασης  $x$  αντικαθίσταται από τη νέα μεταβλητή  $z = x - x(t)$  και το σύστημα (1.5) γίνεται:  $\dot{z} = f(z + x(t), t) - f(x(t), t) \stackrel{\text{op}}{=} g(z, t)$ . Προφανώς η αρχή των αξόνων του  $R^n$  είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος στις νέες μεταβλητές  $(z, t)$ , αφού  $g(0, t) = 0, \forall t \in [0, \infty)$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας λοιπόν, η ευστάθεια της λύσης  $x(t)$  του συστήματος (1.4) και η ευστάθεια οποιουδήποτε μη μηδενικού σημείου ισορροπίας του, προκύπτει από την ευστάθεια της αρχής στο νέο σύστημα.

Για το μη αυτόνομο δυναμικό σύστημα (1.4) γίνονται οι εξής υποθέσεις:  $f: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow R^n$  συνεχής ως προς  $t$  και τοπικά Lipschitz ως προς  $x$ , ώστε για κάθε  $(x_0, t_0) \in \Omega \times [0, \infty)$  να εξασφαλίζεται το μονοσήμαντο της λύσής του (βλ. Θεώρημα 1.1),  $f(0, t) = 0, \forall t \in [0, \infty)$  και  $\Omega \subset R^n$  ανοικτό συνεκτικό σύνολο που περιλαμβάνει την αρχή των αξόνων του  $R^n$ . Για τους ορισμούς που ακολουθούν βλ. [Kha], Def. 3.2, p. 134-135.

**Ορισμός 1.17** Η αρχή είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.4), αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $x_0 \in B_\delta(0)$  ισχύει  $x(t) \in B_\varepsilon(0), \forall t \in [t_0, \omega)$ .

**Ορισμός 1.18** Η αρχή είναι ομοιόμορφα ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.4), αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta(\varepsilon) > 0$ , ανεξάρτητο του  $t_0$ , τέτοιο ώστε για κάθε  $x_0 \in B_\delta(0)$  ισχύει  $x(t) \in B_\varepsilon(0), \forall t \in [t_0, \omega)$ .

**Ορισμός 1.19** Η αρχή είναι ασταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.4) αν δεν είναι ευσταθές.

**Ορισμός 1.20** Η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.4), αν είναι ευσταθές και υπάρχει  $\delta(t_0) > 0$  τέτοιο ώστε για

όλα τα αρχικά σημεία  $x_0 \in B_{\delta(t_0)}(0)$  είναι  $x(t) \rightarrow 0$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ , δηλαδή όλες οι λύσεις που ξεκινούν από την περιοχή  $B_{\delta(t_0)}(0)$  τείνουν στην αρχή, καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

**Ορισμός 1.21** Η αρχή είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.4), αν είναι ομοιόμορφα ευσταθής και υπάρχει  $\delta > 0$  ανεξάρτητο του  $t_0$  τέτοιο ώστε, για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $T(\varepsilon) > 0$ , τέτοιο ώστε  $x(t) \in B_\varepsilon(0)$ ,  $\forall t \in [t_0 + T(\varepsilon), \omega)$ ,  $\forall x_0 \in B_\delta(0)$ .

**Ορισμός 1.22** Η αρχή είναι εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.4), αν υπάρχουν πραγματικά  $c, k$  και  $\gamma > 0$  τέτοια ώστε  $\|x(t)\| \leq k\|x(t_0)\| \exp(-\gamma(t-t_0))$ ,  $\forall t \in [t_0, \omega)$  και  $\forall \|x(t_0)\| \leq c$ . Αν η προηγούμενη ανισότητα ισχύει για κάθε αρχικό σημείο, τότε η αρχή είναι ολικά εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Προφανώς η ευστάθεια και η ασυμπτωτική ευστάθεια της αρχής, σημείο ισορροπίας αυτόνομου συστήματος, είναι ομοιόμορφες. Για το θεώρημα που ακολουθεί βλ. [Kha], Th. 3.8, p. 138.

**Θεώρημα 1.23** Έστω συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση  $V : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $W_1(x) \leq V(x, t) \leq W_2(x)$  και  $\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \nabla V(x, t)^T f(x, t) \leq -W_3(x)$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$ ,  $\forall x \in \Omega$ , όπου  $W_1, W_2$  και  $W_3$  συνεχείς και θετικά ορισμένες συναρτήσεις στο  $\Omega$  και  $\nabla V(x, t) = \left[ \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_n} \right]^T$ . Τότε η αρχή είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.4).

Για περισσότερα σχετικά με την ευστάθεια, την αστάθεια, την ασυμπτωτική ευστάθεια και την εκθετική ευστάθεια της αρχής, σημείο ισορροπίας του μη αυτόνομου συστήματος (1.4), βλ. [RHL] Chap. 1, Par. 4-6, pp. 13-44 και [Kha], Par. 3.4, pp. 132-142.

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι το βασικό εργαλείο που χρησιμοποιείται στις αποδείξεις σύγκλισης των λύσεων των μη αυτόνομων δυναμικών συστημάτων, που περιγράφονται στα επόμενα κεφάλαια. Πρόκειται για ελαφρά απλοποιημένη διατύπωση του [RHL], Col. 4.15, p. 292 (γνωστό ως γενικευμένο Θεώρημα LaSalle), ώστε να αφορά την ειδική περίπτωση των δυναμικών συστημάτων της διατριβής. Αναφέρεται στο δυναμικό σύστημα (1.4) αναθεωρώντας όμως τις υποθέσεις που το συνοδεύουν.

**Θεώρημα 1.24** Έστω  $f : \Omega \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \geq 0$  συνεχής συνάρτηση με  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ανοικτό συνεκτικό σύνολο και έστω  $x(t)$  λύση του συστήματος  $\dot{x}(t) = f(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , με μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης το  $[t_0, \omega)$  και οριακό σύνολο το  $L_x$ . Έστω  $x(t) \in S$ ,  $\forall t \in [t_0, \omega)$ , όπου  $S \subset \Omega$  κλειστό σύνολο. Ας είναι  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση και  $V : \Omega \times [t_0, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  τοπικά Lipschitz ως προς  $x$  και συνεχής. Αν για κάθε συμπαγές σύνολο  $C \subset S$  υπάρχουν θετικές σταθερές  $A$  και  $B$  τέτοιες ώστε:

- (i)  $\|f(x, t)\| \leq A, \forall (x, t) \in C \times [t_0, \omega)$
- (ii)  $V(x, t) \geq -B, \forall (x, t) \in C \times [t_0, \omega)$
- (iii)  $D^+V(x, t) \Big|_{\dot{x}=f(x, t)} \leq \varphi(x) \leq 0, \forall (x, t) \in C \times [t_0, \omega)$

τότε  $L_x \cap \Omega \subset \hat{E}$ , όπου  $\hat{E} = \{y \in S : \varphi(y) = 0\}$ .

Σημειώνεται ότι όπου  $D^+V(x, t) \Big|_{\dot{x}=f(x, t)}$  είναι η άνω δεξιά Dini παράγωγος της συνάρτησης  $V(x, t)$ , στην κατεύθυνση του δυν. συστ. (σχετικά βλ. [RHL], App. I, pp.345-354). Στην απόδειξη της σύγκλισης του Νευρωνικού Δικτύου του Κεφ. 3 της διατριβής (Θεώρ. 3.7), η  $V$  που χρησιμοποιείται δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο, δηλαδή είναι  $V(x, t) = V(x)$ , επιπλέον δεν είναι διαφορίσιμη έχει όμως κατά κατεύθυνση παράγωγο σε κάθε κατεύθυνση του  $\mathbb{R}^n$ . Επιπλέον η  $V(x)$  του Κεφ. 3, ορισμένη κατά μήκος της λύσης  $x(t)$

του Νευρωνικού Δικτύου που προτείνεται στο Κεφ. αυτό, δηλαδή η συνάρτηση του χρόνου  $V(x(t))$ , είναι παραγωγίσιμη. Έτσι για την άνω δεξιά Dini παράγωγος της  $V(x)$ , κατά μήκος της λύσης,  $D^+V(x(t),t)$ , αφού η  $V$  είναι τοπικά Lipschitz, ισχύει  $D^+V(x(t),t) = \frac{dV(x(t))}{dt}$  (βλ. [RHL], Th. 4.3, p. 353).

*Σημείωση 1.4:* α) Σχετικά με τις υποθέσεις που διατυπώνονται στο Θεώρημα 1.24 αναφέρονται τα εξής:

- (i) η συνάρτηση  $f$  που περιγράφει το δυναμικό σύστημα (1.4) είναι απλά συνεχής, οπότε δεν απαιτείται το μονοσήμαντο των λύσεων του,
- (ii) η αρχή δεν απαιτείται να είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος και να περιλαμβάνεται στο σύνολο  $\Omega$ ,
- (iii) το σύνολο των οριακών σημείων των λύσεων του συστήματος (1.4) δεν περιλαμβάνει αποκλειστικά απομονωμένα σημεία και δεν απαιτείται να είναι μη κενό,
- (iv) απαιτείται όμως το φραγμένο της συνάρτησης  $f(t,x)$  του δυναμικού συστήματος (1.4) για κάθε  $t$  και  $x$  φραγμένο. Αποδεικνύεται ότι το θεώρημα ισχύει χαλαρώνοντας την υπόθεση αυτή ([LaS], Th. 8.1, p. 66).
- (v) Η συνθήκη (iii) σημαίνει ότι, ο ρυθμός μείωσης της συνάρτησης  $V$  πάνω στη λύση  $x(t)$ , περιορίζεται από μια αυτόνομη αρνητική συνάρτηση.

β) Στα μη αυτόνομα συστήματα το συμπέρασμα του Θεωρήματος 1.24 είναι λιγότερο ισχυρό από αυτό του Θεωρήματος 1.15, που δηλώνει ότι η λύση στα αυτόνομα συστήματα συγκλίνει στο ευρύτερο αναλοίοτο υποσύνολο του συνόλου  $E$ . Το ισχυρότερο συμπέρασμα στην περίπτωση των αυτόνομων συστημάτων προκύπτει από την ιδιότητα των λύσεων τους, να έχουν ημιαναλλοίοτο οριακό σύνολο.

Αν η λύση είναι φραγμένη, τότε από την Πρόταση 1.4γ είναι  $L_x \neq \emptyset$  και  $x \rightarrow L_x$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Αν επιπλέον  $L_x \subset \Omega$  τότε από την Πρόταση 1.5 είναι  $\omega = \infty$ . Έτσι, προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα του Θεωρήματος 1.24.

**Πόρισμα 1.25** Έστω ότι ισχύουν οι Υποθέσεις του Θεωρήματος 1.23 και έστω  $x(t)$  φραγμένη λύση του συστήματος  $\dot{x}(t) = f(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  με οριακό σύνολο το  $L_x$  τέτοιο ώστε  $L_x \subset \Omega$ . Τότε

$$(α) \quad L_x \subset \hat{E},$$

όπου  $\hat{E}$  όπως ορίζεται στο Θεώρημα 1.24 και

$$(β) \quad x(t) \rightarrow \hat{E}, \text{ καθώς } t \rightarrow \infty,$$

δηλαδή  $\forall \varepsilon > 0 \exists T(\varepsilon, x_0)$ , τέτοιο ώστε  $dist(x(t), M) < \varepsilon$ ,  $\forall t \geq T(\varepsilon, x_0)$ , όπου

$$dist(x(t), \hat{E}) = \min_{y \in \hat{E}} \|x(t) - y\|.$$

Αντίστοιχα σχόλια με αυτά της Σημείωσης 1.3, που αφορούν το Πόρισμα 1.6 για τη σύγκλιση των αυτόνομων συστημάτων, συνοδεύουν και το Πόρισμα 1.25 που αφορά την σύγκλιση των μη αυτόνομων συστημάτων.

## 1.2 Θέματα από τη θεωρία Βελτιστοποίησης

### 1.2.1 Ακρότατα συνάρτησης

Έστω το σύνολο  $\Omega \subset R^n$  και η συνάρτηση  $f$  που απεικονίζει το  $\Omega$  στο  $R$ . Για τους ορισμούς που ακολουθούν βλ. [Lue], Παρ. 6.1, p. 168.

**Ορισμός 1.26** Η συνάρτηση  $f$  λέγεται ότι έχει τοπικό ελάχιστο (αυστηρό τοπικό ελάχιστο), στο σύνολο  $\Omega$ , στο σημείο  $x^* \in \Omega$ , αν υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε,  $f(x) \geq f(x^*)$  ( $f(x) > f(x^*)$ ),  $\forall x \in \Omega \cap B_\delta(x^*)$ ,  $x \neq x^*$ , όπου  $B_\delta(x^*) = \{y \in R^n : \|y - x^*\| < \delta\}$ . Η τιμή  $f(x^*)$  λέγεται τοπικό ελάχιστο (αυστηρό τοπικό ελάχιστο) της συνάρτησης  $f$  στο σύνολο  $\Omega$ .

**Ορισμός 1.27** Η συνάρτηση  $f$  λέγεται ότι έχει ολικό (ή γενικό) ελάχιστο (αυστηρό ολικό ελάχιστο), στο σύνολο  $\Omega$ , στο σημείο  $x^* \in \Omega$ , αν  $f(x) \geq f(x^*)$  ( $f(x) > f(x^*)$ ),  $\forall x \in \Omega$ ,  $x \neq x^*$ . Η τιμή  $f(x^*)$

λεγεται ολικό ελάχιστο (αυστηρό ολικό ελάχιστο) της συνάρτησης  $f$  στο σύνολο  $\Omega$ .

Η συνάρτηση  $f$  έχει τοπικό (ολικό) μέγιστο στο σημείο  $x^*$ , στο σύνολο  $\Omega$ , αν η συνάρτηση  $-f$  έχει τοπικό (ολικό) ελάχιστο στο σημείο  $x^*$ , στο σύνολο  $\Omega$ .

Ακρότατο της συνάρτησης καλείται ένα μέγιστο ή ελάχιστο της.

Ακολουθεί το θεώρημα Weierstrass ([Lue], App. A.6, p. 460).

**Θεώρημα 1.28** Αν  $f$  συνεχής συνάρτηση και ορισμένη στο συμπαγές σύνολο  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , τότε υπάρχει  $x^* \in \Omega$  τέτοιο ώστε  $f(x) \geq f(x^*)$ ,  $\forall x \in \Omega$ .

### 1.2.2 Ελάχιστα συνάρτησης χωρίς περιορισμούς

Στα θεωρήματα που ακολουθούν διατυπώνονται οι αναγκαίες συνθήκες ([Mar], Παρ. II.3, σελ. 21-24) και οι ικανές συνθήκες ([Mar], Παρ. II.4, σελ. 24-25) για τοπικό ακρότατο της συνάρτησης  $f$  στο  $\mathbb{R}^n$ .

**Θεώρημα 1.29** (αναγκαίες συνθήκες α' τάξης) Έστω  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν στο σημείο  $x^* \in \mathbb{R}^n$  η  $f$  έχει τοπικό ακρότατο, τότε  $\nabla f(x^*) = 0$ .

**Θεώρημα 1.30** (αναγκαίες συνθήκες β' τάξης) Έστω  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν στο σημείο  $x^* \in \Omega$  η  $f$  έχει τοπικό ελάχιστο, τότε  $\nabla f(x^*) = 0$  και ο πίνακας  $\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2}$  είναι θετικά ημιορισμένος ή θετικά ορισμένος στο  $\mathbb{R}^n$ .

Ένας πίνακας  $A: n \times n$  λέγεται θετικά ημιορισμένος στο σύνολο  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  όταν  $y^T A y \geq 0$ ,  $\forall y \in \Omega$  και  $\exists \bar{y} \in \Omega \setminus \{0\}$  τέτοιο ώστε  $\bar{y}^T A \bar{y} = 0$ . Ο πίνακας  $A$  λέγεται θετικά ορισμένος στο σύνολο  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  όταν  $y^T A y > 0$ ,  $\forall y \in \Omega \setminus \{0\}$ .

**Θεώρημα 1.31** (ικανές συνθήκες) Έστω  $f : R^n \rightarrow R$  δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν στο σημείο  $x^* \in R^n$  ισχύουν  $\nabla f(x^*) = 0$  και ο πίνακας  $\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2}$  είναι θετικά ορισμένος στο  $R^n$ , τότε η συνάρτηση  $f$  έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο στο σημείο  $x^*$ .

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το θετικά ή αρνητικά ορισμένο του πίνακα  $\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2}$  προσδιορίζει το είδος του ακρότατου. Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι, τα ελάχιστα και τα μέγιστα μιας συνάρτησης προσδιορίζονται από ιδιότητες του σχήματος της συνάρτησης και πιο συγκεκριμένα την κυρτή ή κοίλη συμπεριφορά της συνάρτησης κοντά στο υποψήφιο για ακρότατο σημείο.

### 1.2.3 Ελάχιστα συνάρτησης στο σύνολο που περιγράφεται από ισοτικούς περιορισμούς

Η παράγραφος αυτή περιλαμβάνει συμπεράσματα, από τη βιβλιογραφία, που αφορούν το πρόβλημα της εύρεσης ακρότατου της συνάρτησης  $f$  στο επιτρεπτό σύνολο  $F$  που ορίζεται από τους περιορισμούς:

$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{με} \quad m < n \quad (1.6)$$

ή σε μητρική γραφή  $h(x) = 0$ , με  $h(x) = [h_1(x), \dots, h_m(x)]^T$ , δηλαδή  $F = \{x \in R^n : h(x) = 0\}$ .

Η μέθοδος Lagrange μετατρέπει το πρόβλημα εύρεσης ακρότατου, στο σύνολο που περιγράφεται από ισοτικούς περιορισμούς, σε πρόβλημα εύρεσης στάσιμου (σαγματικού) σημείου χωρίς περιορισμούς. Συμπεράσματα της μεθόδου είναι τα θεωρήματα που ακολουθούν και δίνουν αναγκαίες συνθήκες και ικανές συνθήκες για ακρότατο της συνάρτησης  $f$ , στο επιτρεπτό σύνολο  $F$  ([Μαρ], Παρ.Π5, σελ.29-35).



**Ορισμός 1.32** Ένα σημείο  $x^* \in \Omega$  καλείται κανονικό σημείο των περιορισμών (1.6), όταν  $h(x^*) = 0$  (δηλαδή  $x^* \in F$ ) και τα διανύσματα  $\nabla h_i(x^*)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

**Θεώρημα 1.33** (αναγκαίες συνθήκες α' τάξης) Έστω ότι, οι συναρτήσεις  $f(x), h_1(x), \dots, h_m(x) : R^n \rightarrow R$  είναι συνεχώς διαφορίσιμες και έστω  $x^* \in F$  κανονικό σημείο των περιορισμών (1.6). Αν η συνάρτηση  $f$  έχει στο  $x^*$  τοπικό ακρότατο στο σύνολο  $F$ , τότε υπάρχει  $\lambda^* \in R^m$ , τέτοιο ώστε

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) = 0. \quad (1.7)$$

Από το Θεώρημα 1.33 προκύπτει ότι στο σημείο  $x^*$ , τοπικό ακρότατο της  $f$  στο  $F$ , το διάνυσμα  $\nabla f(x^*)$  είναι γραμμικός συνδιασμός των διανυσμάτων  $\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_m(x^*)$ . Η συνάρτηση Lagrange ορίζεται ως εξής:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) \quad (1.8)$$

όπου τα  $\lambda_i$  καλούνται πολλαπλασιαστές Lagrange. Οπότε η σχέση (1.7) ξαναγράφεται  $\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$ , όπου  $\nabla L(x, \lambda)$  η κλίση της  $L(x, \lambda)$  ως προς  $x$ .

Στο επόμενο θεώρημα δίνονται οι αναγκαίες συνθήκες β' τάξης για ακρότατο της συνάρτησης  $f$ , στο σύνολο  $F$ .

**Θεώρημα 1.34** (αναγκαίες συνθήκες β' τάξης) Έστω ότι, οι συναρτήσεις  $f(x), h_1(x), \dots, h_m(x) : R^n \rightarrow R$  είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις και έστω  $x^* \in F$  κανονικό σημείο των περιορισμών (1.6). Αν η  $f$  έχει στο  $x^*$  τοπικό ελάχιστο στο επιτρεπτό σύνολο  $F$ , τότε υπάρχει διάνυσμα  $\lambda^* \in R^m$ , τέτοιο ώστε  $\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$  και η μήτρα  $\frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2}$  είναι θετικά

ημιορισμένη ή θετικά ορισμένη στο σύνολο  $M = \{y \in R^n : \nabla h(x^*)^T y = 0\}$ , όπου

$\frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2}$  η μήτρα δευτέρων παραγώγων της  $L(x, \lambda)$  ως προς  $x$  στο σημείο  $(x^*, \lambda^*)$ .

Επισημαίνεται ότι, το σύνολο  $M$  του προηγούμενου θεωρήματος είναι το εφαπτόμενο επίπεδο των ισοτικών περιορισμών (1.6) στο  $x^*$ .

Ακολουθούν οι ικανές συνθήκες ακροτάτου της  $f$  στο σύνολο  $F$ .

**Θεώρημα 1.35** (ικανές συνθήκες ελαχίστου) Έστω ότι, οι συναρτήσεις  $f(x), h_1(x), \dots, h_m(x): R^n \rightarrow R$  είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις και έστω  $x^* \in F$  κανονικό σημείο των περιορισμών, για το οποίο υπάρχει  $\lambda^* \in R^m$  τέτοιο ώστε  $\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$  και η μήτρα  $\frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2}$ , είναι θετικά ορισμένη στο σύνολο  $M$ , όπου  $M$  όπως ορίζεται στο Θεώρημα 1.34. Τότε η συνάρτηση  $f$  έχει στο σημείο  $x^*$  αυστηρό τοπικό ελάχιστο, στο επιτρεπτό σύνολο  $F$ .

#### 1.2.4 Ακρότατα κυρτής συνάρτησης

Οι συνθήκες ύπαρξης ακροτάτου β' τάξης, όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη παράγραφο, προσδιορίζουν το σχήμα της συνάρτησης (κυρτή ή κοίλη) στην γειτονιά του υποψήφιου ακροτάτου. Ακολουθούν οι ορισμοί του κυρτού συνόλου ([Ber], Def. B.1, p. 557), της κυρτής και κοίλης συνάρτησης ([Ber], Def. B.2, p.558) και της ομοιόμορφα κυρτής συνάρτησης ([OrR], Def. 3.1, pp. 82-83).

**Ορισμός 1.36** Ένα σύνολο  $C \subset R^n$  είναι κυρτό όταν και μόνο όταν,  $ax_1 + (1-a)x_2 \in C$ ,  $\forall x_1, x_2 \in C$ , και  $\forall a \in [0, 1)$ .

**Ορισμός 1.37** Μια συνάρτηση  $f: C \rightarrow R$  με  $C \subset R^n$  κυρτό σύνολο, είναι: (α) κυρτή, όταν και μόνο όταν  $f(ax_1 + (1-a)x_2) \leq af(x_1) + (1-a)f(x_2)$ ,

$\forall x_1, x_2 \in C, \forall a \in [0,1)$ , (β) *αυστηρά κυρτή* όταν και μόνο όταν  $f(ax_1 + (1-a)x_2) < af(x_1) + (1-a)f(x_2), \forall x_1, x_2 \in C, x_1 \neq x_2, \forall a \in (0,1)$ ,  
(γ) *ομοιόμορφα κυρτή* όταν και μόνο όταν υπάρχει σταθερά  $c \in R, c > 0$  τέτοια ώστε  $f(ax_1 + (1-a)x_2) - af(x_1) - (1-a)f(x_2) \leq ca(1-a)\|x_1 - x_2\|^2$ ,  
 $\forall x_1, x_2 \in C, \forall a \in (0,1)$  και (δ) *κοίλη (αυστηρά κοίλη)*, όταν και μόνο όταν η συναρτηση  $-f$  είναι κυρτή (αυστηρά κυρτή).

Σχετικά με τις ιδιότητες ενός κυρτού συνόλου αναφέρονται τα εξής ([Ber], Prop. B.1, p. 558-559): (α) από τον ορισμό του προκύπτει ότι η ευθεία γραμμή μεταξύ δυο οποιωνδήποτε σημείων ενός κυρτού συνόλου, ανήκει στο σύνολο, άρα ένα κυρτό σύνολο δεν περιλαμβάνει κοιλότητες και οπές και (β) η τομή κυρτών συνόλων, το διανυσματικό άθροισμα  $\{x_1 + x_2, x_1 \in C, x_2 \in D\}$  δύο κυρτών συνόλων C και D και το σύνολο που προκύπτει από γραμμικό συνδιασμό των στοιχείων ενός κυρτού συνόλου είναι κυρτά σύνολα.

Βασικές ιδιότητες των κυρτών συναρτήσεων περιλαμβάνονται στην πρόταση που ακολουθεί ([Ber], Prop. B.2, p. 560, Prop. B.1, p. 558 και Prop. B.9(α), p. 569).

### **Πρόταση 1.38**

- (α) *Κάθε γραμμική συνάρτηση είναι κυρτή.*
- (β) *Οποιοδήποτε μέτρο διανύσματος είναι κυρτή συνάρτηση.*
- (γ) *Το άθροισμα θετικών πολλαπλασίων κυρτών συναρτήσεων είναι κυρτή συνάρτηση.*
- (δ) *Έστω I σύνολο δεικτών και έστω  $\{f_i\}, i \in I$ , συλλογή κυρτών συναρτήσεων ορισμένων στο κυρτό σύνολο  $C \subset R^n$ . Τότε η συνάρτηση  $s: C \rightarrow R^n$ ,  $s(x) = \max_{i \in I} \{f_i(x)\}$  είναι κυρτή συνάρτηση.*
- (ε) *Έστω  $f: C \rightarrow R^n$  κυρτή συνάρτηση, με  $C \subset R^n$  κυρτό σύνολο, τότε τα σύνολα  $\{x \in C: f(x) \leq a\}$  και  $\{x \in C: f(x) < a\}$  είναι κυρτά σύνολα, για κάθε  $a \in R$ .*

(στ) Κάθε συνάρτηση ορισμένη και κυρτή στο  $R^n$  είναι συνεχής.

Από την προηγούμενη πρόταση είναι προφανές ότι, τα σύνολα που ορίζονται από γραμμικές ισότητες και γραμμικές ανισότητες είναι κυρτά.

Η πρόταση που ακολουθεί ([Ber], Prop. B.9(b), p. 569) είναι βασικό εργαλείο για τις αποδείξεις του φραγμένου των λύσεων των δυναμικών συστημάτων, που περιγράφονται στα επόμενα κεφάλαια, στην περίπτωση που αφορούν το κυρτό πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

**Πρόταση 1.39** Έστω  $f: C \rightarrow R$  κυρτή συνάρτηση, με  $C \subset R^n$  κυρτό σύνολο και έστω ότι, το σύνολο που περιλαμβάνει τα σημεία που την ελαχιστοποιούν είναι κλειστό και φραγμένο. Τότε το σύνολο  $\{x \in C: f(x) \leq a\}$  είναι συμπαγές, για κάθε  $a \in R$ .

Για την πρόταση που ακολουθεί βλ. [Ber], Prop. B.10, p. 571.

**Πρόταση 1.40** Έστω η συνάρτηση  $f: C \rightarrow R$ , με  $C \subset R^n$  κυρτό σύνολο.  
(α) Αν η  $f$  είναι κυρτή, τότε κάθε τοπικό ελάχιστο της είναι και ολικό ελάχιστο και (β) αν η  $f$  είναι αυστηρά κυρτή συνάρτηση και αν έχει ολικό ελάχιστο, τότε το ολικό ελάχιστο είναι μοναδικό.

Η παρακάτω πρόταση ([OrR], Par. 4.3.7, p. 106) αφορά το ελάχιστο ομοιόμορφα κυρτής συνάρτησης.

**Πρόταση 1.41** Έστω  $f: R^n \rightarrow R$  ομοιόμορφα κυρτή συνάρτηση. Τότε η  $f$  έχει μοναδικό τοπικό και ολικό ελάχιστο.

Η πρόταση που ακολουθεί ([Ber], Prop. B.3, p. 561) αφορά διαφορίσιμη κυρτή συνάρτηση. Η γεωμετρική ερμηνεία της πρότασης είναι άμεση. Κανένα σημείο κυρτής συνάρτησης δεν είναι κάτω από τα εφαπτόμενα επίπεδα της. Όλα τα σημεία αυστηρά κυρτής συνάρτησης είναι πάνω από τα εφαπτόμενα επίπεδα της.

**Πρόταση 1.42** Έστω η συνάρτηση  $f: C \rightarrow R$ , με  $C \subset R^n$  κυρτό σύνολο.  
(α) Η  $f$  είναι κυρτή όταν και μόνο όταν  $f(x_1) \geq f(x_2) + (x_1 - x_2)^T \nabla f(x_2)$ ,

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{C}$  και  $(\beta)$  η  $f$  είναι αυστηρά κυρτή όταν και μόνο όταν  $f(x_1) > f(x_2) + (x_1 - x_2)^T \nabla f(x_2)$ ,  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{C}, x_1 \neq x_2$ .

Η πρόταση που ακολουθεί αφορά τις δυο φορές συνεχώς διαφορίσιμες κυρτές συναρτήσεις ([OrR], Παρ. 3.4.5-3.4.6, p. 87).

**Πρόταση 1.43** Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη, στο κυρτό σύνολο  $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^n$ . Τότε (α) η  $f$  είναι κυρτή όταν και μόνο όταν η μήτρα  $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$  είναι θετικά ημιορισμένη ή θετικά ορισμένη, για κάθε  $x \in \mathbb{C}$ , (β) αν η μήτρα  $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$  είναι θετικά ορισμένη, για κάθε  $x \in \mathbb{C}$ , τότε η  $f$  είναι αυστηρά κυρτή και (γ) η  $f$  είναι ομοιόμορφα κυρτή όταν και μόνο όταν η μήτρα  $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$  είναι ομοιόμορφα θετικά ορισμένη, για κάθε  $x \in \mathbb{C}$ .

Μία μήτρα  $A: n \times n$  καλείται ομοιόμορφα θετικά ορισμένη στο σύνολο  $M \subset \mathbb{R}^n$ , όταν υπάρχει  $c \in \mathbb{R}, c > 0$  τέτοιο ώστε  $x^T A x \geq c \|x\|^2$ ,  $\forall x \in M$ .

Διαπιστώνεται ότι υπάρχουν παραδείγματα αυστηρά κυρτών συναρτήσεων, των οποίων η μήτρα δευτέρων παραγώγων δεν είναι θετικά ορισμένη.

Για την πρόταση που ακολουθεί βλ. [Ber], Prop. B.5, p. 563.

**Πρόταση 1.44** Έστω  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και έστω  $a \in \mathbb{R}, a > 0$ . Αν ισχύει η ανισότητα  $(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (x - y) \geq a \|x - y\|^2$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  τότε η  $f$  είναι αυστηρά κυρτή. Επιπλέον αν η  $f$  είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη, τότε η προηγούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την εξής συνθήκη: ο πίνακας  $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x} - aI$  είναι θετικά ορισμένος για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ , όπου  $I$  ο μοναδιαίος  $n \times n$  πίνακας.

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την ανισότητα της προηγούμενης

πρότασης ονομάζονται ισχυρά κυρτές συναρτήσεις.

Στη συνέχεια ορίζεται το κυρτό πρόβλημα ελαχιστοποίησης με ισοτικούς περιορισμούς ([Avr], Παρ. 4.5, p. 95):

$$\min_{x \in R^n} \{f(x) : A^T x - b = 0\} \quad \text{ΠΚ}$$

όπου:  $f : R^n \rightarrow R$  κυρτή συνάρτηση,  $A : n \times m$  πίνακας και  $b : m \times 1$  διάνυσμα.

Το παρακάτω θεώρημα είναι μια απλουστευμένη διατύπωση του [Avr], Th.4.38, p.96, ώστε να αναφέρεται στην περίπτωση του κυρτού προβλήματος με ισοτικούς μόνο περιορισμούς. Συγκεκριμένα αναφέρεται στο εξής συμπέρασμα: αν η  $f$  είναι διαφορίσιμη τότε οι αναγκαίες συνθήκες α'τάξης (Θεώρημα 1.33) για το πρόβλημα ΠΚ, είναι και ικανές συνθήκες ολικού ελαχίστου του ΠΚ.

**Θεώρημα 1.45** Έστω  $f : R^n \rightarrow R$  συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και κυρτή. Αν υπάρχουν διανύσματα  $x^* \in R^n$ ,  $\lambda^* \in R^m$  τέτοια ώστε  $A^T x^* - b = 0$  και  $\nabla f(x^*) + A\lambda^* = 0$ , τότε το  $x^*$  είναι ολικό ελάχιστο του κυρτού προβλήματος ΠΚ.

Για περισσότερα σχετικά με το κυρτό πρόβλημα ελαχίστου, ενδεικτικά βλ. [Avr], [BaS], [Lue], [Ber].



## 2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΤΟ ΝΕΥΡΩΝΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ ΠΡΟΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΚΛΙΣΗΣ ΜΕ ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

#### 2.1 Ορισμός του νέου Νευρωνικού Δικτύου

Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης με ισοτικούς περιορισμούς γράφεται:

$$\min_{x \in \Omega} \{f(x) : h_1(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0\} \quad \Pi$$

ή σε σύντομη γραφή  $\min_{x \in \Omega} \{f(x) : h(x) = 0\}$ , όπου  $h(x) = [h_1(x), \dots, h_m(x)]^T$ , με  $f(x), h_1(x), \dots, h_m(x)$  βαθμωτές και συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σε ανοικτό σύνολο  $\Omega \subset R^n$ . Για το πρόβλημα  $\Pi$  ορίζονται τα ακόλουθα σύνολα.

$$F = \{y \in \Omega : h(y) = 0\}$$

είναι το επιτρεπτό σύνολο του προβλήματος  $\Pi$ , δηλαδή το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τους περιορισμούς.

$$D = \{y \in \Omega : h(y) = 0, \exists \lambda \in R^m \text{ ώστε } \nabla f(y) + \nabla h(y)\lambda = 0\}$$

όπου  $\nabla f(x) = \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]^T$  και  $\nabla h(x) = [\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_m(x)]$ , είναι το

επιθυμητό σύνολο του προβλήματος  $\Pi$ , δηλαδή το σύνολο των σημείων του  $R^n$  που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες α' τάξης του προβλήματος  $\Pi$ .



Στο κεφάλαιο αυτό, ορίζεται ένα νέο δυναμικό σύστημα τέτοιο ώστε, η λύση του να ξεκινά από τυχαίο σημείο του επιτρεπτού συνόλου  $F$  του προβλήματος  $\Pi$ , παραμένει στο σύνολο  $F$  για όσο χρόνο εξελίσσεται, και επιπλέον τα σημεία ισορροπίας του να ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες α'τάξης του Προβλήματος  $\Pi$ . Σε αυτή την ιδέα βασίζεται το νέο Νευρωνικό Δίκτυο που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό και αντιμετωπίζει το πρόβλημα ελαχίστου με ισοτικούς περιορισμούς.

Το προκύπτον δυναμικό σύστημα περιγράφεται αρχικά από  $n+m$  (στην συνέχεια περιορίζεται σε  $n$ ), α'τάξης διαφορικές εξισώσεις και ένα δεδομένο αρχικό σημείο  $(x_0, \lambda_0) \in F \times R^m$ . Η τροχιά του αποτελείται από δύο συνιστώσες: τη βασική συνιστώσα  $x(t)$   $n$  διάστασης, που αφορά τη μεταβλητή ως προς την οποία ελαχιστοποιείται η συνάρτηση  $f$  του προβλήματος  $\Pi$  και τη συνιστώσα Lagrange  $\lambda(t)$   $m$  διάστασης, που αφορά τους πολλαπλασιαστές Lagrange και η οποία, όπως θα διαπιστωθεί στη συνέχεια, απλοποιείται από την μαθηματική περιγραφή του δυναμικού συστήματος. Οι εξισώσεις κατάστασης του δυναμικού συστήματος προκύπτουν εύκολα από την ιδέα κατασκευής του. Συγκεκριμένα,

α) αν η παράγωγος των ισοτικών περιορισμών στην κατεύθυνση του νέου δυναμικού συστήματος είναι μηδέν, δηλαδή

$$\frac{dh(x(t))}{dt} = 0, \quad \forall t \in [0, \omega), \quad \forall x_0 \in \Omega \quad (2.1\alpha)$$

όπου  $[0, \omega)$  το μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης της λύσης  $x(t)$ , τότε οι περιορισμοί κατά μήκος της λύσης του νέου συστήματος, παραμένουν ίσοι με την αρχική τιμή τους, δηλαδή  $h(x(t)) = h(x_0)$ ,  $\forall t \in [0, \omega)$ . Έτσι,

$$\text{αν } x_0 \in F \text{ είναι } h(x(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, \omega). \quad (2.1\beta)$$

Η απαίτηση  $x_0 \in F$  συνήθως -εξαρτάται από την πολυπλοκότητα των περιορισμών- είναι μια απαιτητική αρχική συνθήκη. Το Νευρωνικό Δίκτυο που

ορίζεται στο επόμενο κεφάλαιο είναι απαλλαγμένο αυτής της συνθήκης, δηλαδή ορίζεται  $\forall x_0 \in \Omega$ .

β) Για να ικανοποιούν τα σημεία ισορροπίας του νέου Νευρωνικού Δικτύου τις αναγκαίες συνθήκες α'τάξης του προβλήματος Π, επιλέγεται η ακόλουθη περιγραφή:

$$\dot{x} = -\mu \nabla L(x, \lambda), \text{ με } \mu > 0 \quad (2.2)$$

όπου:  $L(x, \lambda) = f(x) + h(x)^T \lambda$  η συνάρτηση Lagrange του προβλήματος Π και  $\nabla L(x, \lambda)$  η κλίση της ως προς  $x$ , δηλαδή  $\nabla L(x, \lambda) = \nabla f(x) + \nabla h(x) \lambda$ . Η παρουσία του αρνητικού πολλαπλασιαστή στο δεξί μέλος της εξίσωσης (2.2) δικαιολογείται στην Παράγραφο 2.2.

Τελικά το Νευρωνικό Δίκτυο που προκύπτει περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.1α) και (2.2), δηλαδή

$$\dot{x} = -\mu \nabla L(x, \lambda), \text{ με } \mu > 0 \text{ και } x(0) = x_0 \in F \quad (2.3\alpha)$$

$$\left. \frac{dh(x)}{dt} \right|_{(2.3\alpha)} = 0 \quad (2.3\beta)$$

όπου  $\left. \frac{dh(x)}{dt} \right|_{(2.3\alpha)} = -\mu \nabla h(x)^T \nabla L(x, \lambda)$ , πρόκειται δηλαδή για την παράγωγο

των ισοτικών περιορισμών στην κατεύθυνση του δυναμικού συστήματος (2.3α).

Προφανώς για να ορίζεται καλώς το νέο Νευρωνικό Δίκτυο, απαιτείται η διαφορισιμότητα των συναρτήσεων που περιγράφουν το Πρόβλημα Π. Επιπλέον υιοθετούνται δύο ακόμα υποθέσεις, που εξυπηρετούν την απλοποίηση της πεπλεγμένης περιγραφής (2.3).

**Υπόθεση 1:** α) Οι συναρτήσεις  $f$  και  $h_1, \dots, h_m$  είναι πραγματικές και συνεχώς διαφορίσιμες στο  $\Omega \subset R^n$ ,

$$(\beta) \text{ rank}(\nabla h(x)) = m, \forall x \in F \text{ και}$$

$$(\gamma) m < n.$$

Το θεώρημα που ακολουθεί απλοποιεί την πεπλεγμένη περιγραφή (2.3).

**Θεώρημα 2.1** Έστω ότι η Υπόθεση 1 ισχύει. Τότε, για κάθε  $x_0 \in F$  το δυναμικό σύστημα των εξισώσεων (2.3) απλοποιείται στο ακόλουθο σύστημα

$$\dot{x}(t) = -\mu P(x) \nabla f(x), \text{ με } \mu > 0 \text{ και } x(0) = x_0 \in F \quad (2.4)$$

$$\lambda(t) = -(\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} \nabla h(x)^T \nabla f(x) \quad (2.5)$$

όπου:  $P(x) = I - \nabla h(x) (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} \nabla h(x)^T$  πίνακας προβολής (βλ. παρακάτω).

Απόδειξη

Από την Υπόθεση 1, για κάθε  $x \in \Omega$  είναι  $\text{rank}(\nabla h(x)) = m$ , άρα υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας  $(\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1}$ . Από τις εξισώσεις (2.3β)

$$\text{προκύπτουν } \left. \frac{dh(x)}{dt} \right|_{(2.3a)} = 0 \Leftrightarrow -\mu \nabla h(x) \nabla L(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \nabla h(x)^T (f(x) + \nabla h(x) \lambda) = 0.$$

Λύνοντας ως προς τη συνιστώσα  $\lambda$  προκύπτει το σύστημα εξισώσεων (2.5). Αντικαθιστώντας τη συνιστώσα  $\lambda$  στο σύστημα (2.3α) προκύπτει τελικά το δυναμικό σύστημα (2.4). Αντίστροφα, το σύστημα εξισώσεων (2.5) ορίζει τις συνιστώσες Lagrange  $\lambda$  και εισάγοντας αυτές στο δυναμικό σύστημα (2.4) προκύπτει το σύστημα (2.3α). Επιπλέον η λύση του συστήματος (2.4)

$$\text{ικανοποιεί το σύστημα (2.3β). Πράγματι, } \left. \frac{dh(x)}{dt} \right|_{(2.4)} = -\mu \nabla h(x)^T P(x) \nabla f(x) = 0,$$

αφού εύκολα διαπιστώνεται ότι  $\nabla h(x)^T P(x) = 0$ . □

**Σημείωση 2.1 (α)** Η Υπόθεση 1 ουσιαστικά είναι περισσότερο απαιτητική, από όσο πραγματικά χρειάζεται, αφού είναι αρκετό οι συνθήκες της να ισχύουν στο σύνολο των σημείων της λύσης. Υιοθετώντας αυτή την πιο χαλαρή διατύπωση της Υπόθεσης 1, τα συμπεράσματα που ακολουθούν δεν αλλάζουν, αλλά θα αφορούν κάποιες λύσεις του δυναμικού συστήματος (2.4) και όχι γενικά το δυναμικό σύστημα (όλες τις λύσεις του).

(β) Η Υπόθεση 1 δεν εξασφαλίζει την μοναδικότητα της λύσης του συστήματος (2.4), ούτε την ύπαρξη της λύσης για άπειρο χρόνο. Σχετικά αναφέρονται στην Παράγραφο 2.2.  $\square$

Στη συνέχεια το Νευρωνικό Δίκτυο που περιγράφεται από το αυτόνομο δυναμικό σύστημα (2.4) θα ονομάζεται Νευρωνικό Δίκτυο Προβολής της Κλίσης με Επιτρεπτές Λύσεις (σύντομα ΝΔΠΚΕΛ). Ο χαρακτηρισμός των λύσεων του ΝΔΠΚΕΛ ως επιτρεπτών δηλώνει ότι, κάθε λύση του εξελίσσεται στο επιτρεπτό σύνολο  $F$  του προβλήματος  $\Pi$ . Πράγματι, κάθε λύση του ΝΔΠΚΕΛ έχει  $x_0 \in F$ , δηλαδή  $h(x_0) = 0$  και ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων (2.3β), άρα  $h(x(t)) = 0, \forall t \in [0, \omega)$ .

Το ΝΔΠΚΕΛ αποτελεί τη συνεχή έκδοση του επαναληπτικού αλγορίθμου προβολής της κλίσης. Σχετικά με τον διακριτό αλγόριθμο προβολής της κλίσης βλ. ενδεικτικά [BaS], [Lue], [Ber]. Από την εξίσωση (2.3β) προκύπτει ότι η κατεύθυνση  $\dot{x}$  του ΝΔΠΚΕΛ, ανήκει στο ορθογώνιο συμπλήρωμα  $O(S)$  του υπόχωρου  $S$  που παράγεται από τις κλίσεις των περιορισμών (από Υπόθεση 1 είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο  $\Omega$ ). Λόγω της προηγούμενης ιδιότητας και του δυναμικού συστήματος (2.3α), από το διάνυσμα  $\nabla L(x, \lambda)$  η κατεύθυνση  $\dot{x}$  χρησιμοποιεί μόνο τη συνιστώσα που ανήκει στον υπόχωρο  $O(S)$ . Όμως  $\nabla L(x, \lambda) = \nabla f(x) + \nabla h(x)\lambda$  και  $\nabla h(x)\lambda \in S$ , άρα η συνιστώσα του διανύσματος  $\nabla L(x, \lambda)$  που ανήκει στον υπόχωρο  $O(S)$  είναι η συνιστώσα του διανύσματος  $\nabla f(x)$  που ανήκει στον υπόχωρο  $O(S)$ , δηλαδή η προβολή του  $\nabla f(x)$  στον υπόχωρο  $O(S)$ .

Όπως και στην περίπτωση του επαναληπτικού αλγορίθμου οι πίνακες:

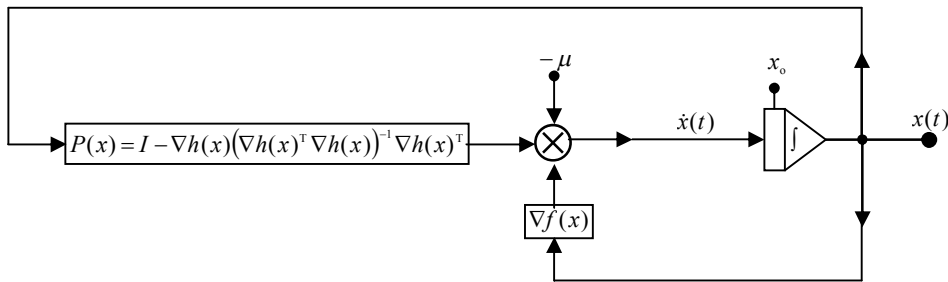
$$P(x) = I - \nabla h(x) (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} \nabla h(x)^T \quad (2.6\alpha)$$

$$\Pi(x) = \nabla h(x) (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} \nabla h(x)^T \quad (2.6\beta)$$

είναι πίνακες προβολής: προβάλλουν την κατεύθυνση στη οποία ενεργούν με πολλαπλασιασμό από αριστερά, στους υπόχωρους  $O(S)$  και  $S$  αντίστοιχα. Έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες ([BSS], Παρ. 10.5, p. 448-449):

- (α) είναι τετραγωνικοί και συμμετρικοί,
- (β) είναι αδύναμοι, δηλαδή  $P(x)^K = P(x)$  και  $\Pi(x)^K = \Pi(x)$ ,  $\forall K \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,
- (γ) είναι θετικά ορισμένοι,
- (δ) οι ιδιοτιμές του πίνακα  $P(x)$  είναι το 0 και το 1 με πολλαπλότητες  $m$  (ίση με τον αριθμό των στηλών του  $\nabla h(x)$ ) και  $n-m$  αντίστοιχα. Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\Pi(x)$  είναι το 0 και το 1 με πολλαπλότητες  $n-m$  και  $m$  αντίστοιχα.
- ε)  $\nabla h(x)^T P(x) = 0$  και  $\nabla h(x)^T \Pi(x) = \nabla h(x)^T$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,
- στ)  $\nabla h(x)^T z = 0 \Leftrightarrow P(x)z = z$  και  $\Pi(x)z = 0$ .

Στο Σχήμα 2.1 που ακολουθεί δίνεται το συνοπτικό block διάγραμμα του δυναμικού συστήματος ΝΔΠΚΕΛ (2.4).



Σχ. 2.1 Block διάγραμμα του ΝΔΠΚΕΛ (2.4).

## 2.2 Μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων του ΝΔΠΚΕΛ

Στην παράγραφο αυτή διατυπώνονται οι ικανές συνθήκες σύγκλισης των λύσεων του ΝΔΠΚΕΛ στο επιθυμητό σύνολο  $D$  του προβλήματος  $\Pi$ . Για τη μελέτη της σύγκλισης των Νευρωνικών Δικτύων της βιβλιογραφίας συνήθως υποτίθεται η κυρτότητα του προβλήματος  $\Pi$ . Εδώ, διατυπώνεται ένα γενικό θεώρημα σύγκλισης, χωρίς να υποτίθεται η κυρτότητα του προβλήματος. Για το μη κυρτό πρόβλημα αποδεικνύεται ότι οι φραγμένες λύσεις του ΝΔΠΚΕΛ με οριακά σύνολα που ανήκουν στο σύνολο  $\Omega$ , συγκλίνουν στο σύνολο  $D$ .

Έστω  $E_1$  το σύνολο των σημείων ισοροπίας του ΝΔΠΚΕΛ (2.4), δηλαδή  $E_1 = \{x \in \Omega : h(x) = 0 \text{ και } P(x)\nabla f(x) = 0\}$ .

Στην πρόταση που ακολουθεί διατυπώνεται το συμπέρασμα, ότι τα σημεία ισοροπίας του ΝΔΠΚΕΛ είναι σημεία που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες α' τάξης του προβλήματος  $\Pi$ .

**Πρόταση 2.2** Έστω ότι η Υπόθεση 1 ισχύει. Τότε το σύνολο  $E_1$  των σημείων ισοροπίας του ΝΔΠΚΕΛ (2.4) είναι ίσο με το σύνολο  $D$ , των σημείων που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες α' τάξης του προβλήματος  $\Pi$ , δηλαδή  $E_1 = D$ .

Απόδειξη

Έστω  $x^*$  σημείο ισοροπίας του ΝΔΠΚΕΛ, τότε λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.6α) προκύπτουν:

$$\begin{aligned} x^* \in E_1 &\Leftrightarrow P(x^*)\nabla f(x^*) = 0 \text{ και } h(x^*) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \nabla f(x^*) - \nabla h(x^*) (\nabla h(x^*)^T \nabla h(x^*))^{-1} \nabla h(x^*)^T \nabla f(x^*) = 0 \text{ και } h(x^*) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda^* = -(\nabla h(x^*)^T \nabla h(x^*))^{-1} \nabla h(x^*)^T \nabla f(x^*) \text{ ώστε } \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*) \lambda^* = 0 \\ &\text{και } h(x^*) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda^* \text{ ώστε } \nabla L(x^*, \lambda^*) = 0 \text{ και } h(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* \in D. \quad \square \end{aligned}$$

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί βασικό εργαλείο για την απόδειξη της σύγκλισης των λύσεων του ΝΔΠΚΕΛ, που θα ακολουθήσει. Επιπλέον

δικαιολογεί την παρουσία του αρνητικού πολλαπλασιαστή  $-\mu$  στο δεξί μέρος της εξίσωσης του ΝΔΠΚΕΛ.

**Πρόταση 2.3** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 1. Τότε η παράγωγος της συνάρτησης  $f$  στην κατεύθυνση του ΝΔΠΚΕΛ (2.4) είναι αρνητική ή μηδέν,

$$\text{δηλαδή } \left. \frac{df(x)}{dt} \right|_{(2.4)} \leq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Απόδειξη

Υπολογίζεται η παράγωγος της  $f$  στην κατεύθυνση του ΝΔΠΚΕΛ (2.4):

$$\begin{aligned} \left. \frac{df(x)}{dt} \right|_{(2.4)} &= \nabla f(x)^T \dot{x} \Big|_{(2.4)} = -\mu \nabla f(x)^T P(x) \nabla f(x) = \\ &= -\mu \|P(x) \nabla f(x)\|_2^2 \leq 0, \quad \forall x \in \Omega, \end{aligned} \quad (2.7)$$

έγινε χρήση της ιδιότητας  $P(x) = P(x)^T P(x)$  (βλ. Παράγραφο 2.1).

□

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι το θεώρημα ολικής σύγκλισης του ΝΔΠΚΕΛ και αποτελεί μια εφαρμογή του θεωρήματος LaSalle για αυτόνομα συστήματα (βλ. Θεώρημα 1.15).

**Θεώρημα 2.4** (Θεώρημα Ολικής Σύγκλισης του ΝΔΠΚΕΛ) Έστω ότι η Υπόθεση 1 ισχύει και έστω  $x(t)$  φραγμένη λύση του ΝΔΠΚΕΛ (2.4) που ξεκινά από σημείο  $x_0 \in F \cap \Omega$  και έχει οριακό σύνολο το  $L_x$ . Αν  $L_x \subset \Omega$  τότε

$$(α) \quad L_x \subset D$$

όπου  $D$  το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες α' τάξης του προβλήματος Π,

$$(β) \quad D \neq \emptyset \text{ και}$$

$$(γ) \quad x(t) \rightarrow D, \text{ καθώς } t \rightarrow \infty,$$

δηλαδή  $\forall \varepsilon > 0 \exists T(\varepsilon, x_0)$ , τέτοιο ώστε  $dist(x(t), D) < \varepsilon$ ,  $\forall t \geq T(\varepsilon, x_0)$ , όπου

$$dist(x(t), D) = \min_{y \in D} \|x(t) - y\|.$$

Απόδειξη

Η λύση του ΝΔΠΚΕΛ ικανοποιεί τους ισοτικούς περιορισμούς του προβλήματος  $\Pi$ , για όσο χρόνο ορίζεται (βλ. Αποδ. Θεώρημα 2.1), άρα

$$L_x \subset F \quad (2.8)$$

Εφόσον η λύση  $x(t)$  είναι φραγμένη, από την Πρόταση 1.4γ ισχύει  $L_x \neq \emptyset$ . Επιπλέον από υπόθεση  $L_x \subset \Omega$ , δηλαδή είναι  $L_x \cap \Omega \neq \emptyset$ , άρα από την Πρόταση 1.5 η λύση  $x(t)$  ορίζεται για άπειρο χρόνο. Από την Πρόταση 2.3 η συνάρτηση  $f$  του προβλήματος  $\Pi$  φθίνει κατά μήκος της λύσης  $x(t)$  με ρυθμό που δίνεται από την εξίσωση (2.7). Έστω το σύνολο  $S$  των μηδενικών της παραγώγου της συνάρτησης  $f$  στην κατεύθυνση του ΝΔΠΚΕΛ, δηλαδή

$$S = \left\{ x \in \Omega : \left. \frac{df(x)}{dt} \right|_{(2.4)} = 0 \right\}. \quad (2.9)$$

Από την σχέση (2.7) το σύνολο  $S$  της σχέσης (2.9) γίνεται  $S = \{x \in \Omega : P(x)\nabla f(x) = 0\}$ . Εύκολα διαπιστώνεται ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του το Θεωρήματος 1.15 με  $V(x) = f(x)$ , άρα

$$L_x \subset S. \quad (2.10)$$

Από τις σχέσεις (2.8), (2.10) και την Πρόταση 2.2 προκύπτει το (α) συμπέρασμα του θεωρήματος. Το (β) συμπέρασμα του θεωρήματος προκύπτει από το (α) και το συμπέρασμα  $L_x \neq \emptyset$ . Το (γ) συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το (α) και την Πρόταση 1.4γ.  $\square$

*Σημείωση 2.2*

- Το Θεώρημα 2.4 δεν απαιτεί το πρόβλημα  $\Pi$  να είναι κυρτό.
- Το Θεώρημα 2.4 δεν απαιτεί το μονοσήμαντο της λύσης του ΝΔΠΚΕΛ, ούτε τα σημεία ισορροπίας του να είναι απομονωμένα.
- Από τη διατύπωση του Θεωρήματος 2.4 φαίνεται ότι είναι αρκετή η ασθενέστερη Υπόθεση 1 (Σημείωση 2.1α).



- Στο Θεώρημα 2.4 η σύγκλιση χαρακτηρίζεται «ολική» γιατί αναφέρεται στις λύσεις του ΝΔΠΚΕΛ για κάθε  $x_0 \in F$ .
- Το Θεώρημα 2.4 δεν εξασφαλίζει ότι τα οριακά σημεία της λύσης του ΝΔΠΚΕΛ είναι τοπικά ελάχιστα του προβλήματος Π, θεωρητικά μπορεί να είναι τοπικά μέγιστα ή σαγματικά σημεία. Στην πράξη διαπιστώνεται ότι, στην περίπτωση φραγμένου προβλήματος Π, το ΝΔΠΚΕΛ συγκλίνει σε τοπικά ελάχιστα.
- Το Θεώρημα 2.4 είναι παρόμοιο με τα θεωρήματα σύγκλισης του μη γραμμικού προγραμματισμού και μπορεί να θεωρηθεί ως η συνεχούς χρόνου εκδοχή αυτών των αποτελεσμάτων (βλ. [Pol]).  $\square$

Το παρακάτω πόρισμα του Θεωρήματος 2.4 αναφέρεται ειδικότερα στην περίπτωση που ισχύει  $\Omega = R^n$ .

**Πόρισμα 2.5** Έστω ότι η Υπόθεση 1 ισχύει και έστω ότι  $\Omega = R^n$ . Τότε κάθε φραγμένη λύση  $x(t)$  του ΝΔΠΚΕΛ (2.4) που ξεκινά από σημείο  $x_0 \in F$  συγκλίνει στο σύνολο  $D$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ , δηλαδή  $x(t) \rightarrow D$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Στο συμπέρασμα του Πορίσματος 2.5 οι φραγμένες λύσεις του ΝΔΠΚΕΛ γενικά συγκλίνουν στο σύνολο  $D$ . Όταν τα σημεία του συνόλου  $D$  είναι απομονωμένα σημεία, η σύγκλιση των φραγμένων λύσεων του είναι σύγκλιση σε σημείο του συνόλου  $D$ .

### 2.3 Εφαρμογή του ΝΔΠΚΕΛ στο κυρτό πρόβλημα με ισοτικούς περιορισμούς

Στην παράγραφο αυτή μελετάται η ειδική περίπτωση εφαρμογής του ΝΔΠΚΕΛ (2.4) στο κυρτό πρόβλημα με ισοτικούς περιορισμούς:

$$\min_{x \in \Omega_K} \{f(x) : A^T x - b = 0\} \quad \text{ΠΚ}$$

με  $f$  πραγματική κυρτή και συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση στο κυρτό σύνολο  $\Omega_K \subset R^n$ ,  $A: n \times m$  πίνακας και  $b: m \times 1$  διάνυσμα. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν στην περίπτωση του κυρτού προβλήματος, με φραγμένο και μη κενό σύνολο ελαχίστων, είναι ισχυρότερα από αυτά του Θεωρήματος 2.4, που αφορά τη γενική περίπτωση. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι όλες οι λύσεις του ΝΔΠΚΕΛ είναι φραγμένες (δεν ισχύει γενικά για το ΝΔΠΚΕΛ (2.4) που αφορά το πρόβλημα Π) και συγκλίνουν στο σύνολο των ολικών ελαχίστων του ΠΚ. Τα αποτελέσματα αυτά είναι τα συνήθη αποτελέσματα των Νευρωνικών Δικτύων της βιβλιογραφίας. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι αυστηρά κυρτή και το πρόβλημα ΠΚ έχει λύση, το ΝΔΠΚΕΛ συγκλίνει στο σημείο του ολικού ελαχίστου.

Η Υπόθεση 1 προσαρμοσμένη στην περίπτωση του προβλήματος ΠΚ αναδιατυπώνεται ως εξής:

**Υπόθεση 1Κ:** α) Η συνάρτηση  $f$  είναι πραγματική, κυρτή και συνεχώς διαφορίσιμη στο κυρτό σύνολο  $\Omega_K \subset R^n$ ,

(β)  $\text{rank}(A) = m$  και

(γ)  $m < n$ .

Το ΝΔΠΚΕΛ (2.4) που αναφέρεται στο κυρτό πρόβλημα ΠΚ γράφεται.

$$\dot{x} = -\mu P \nabla f(x), \text{ με } \mu > 0 \text{ και } x_0 \in F \quad (2.11)$$

όπου:  $P = I - A(A^T A)^{-1} A^T$  ο πίνακας προβολής που περιγράφεται στην Παράγραφο 2.1. Παρατηρείται ότι, στην περίπτωση γραμμικών ισοτικών

περιορισμών ο πίνακας προβολής είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος της λύσης του ΝΔΠΚΕΛ.

Ο πολλαπλασιαστής Lagrange στην περίπτωση αυτή είναι :

$$\lambda = -(A^T A)^{-1} A^T \nabla f(x) \quad (2.12)$$

Έστω  $G$  το σύνολο των ολικών ελαχίστων του προβλήματος ΠΚ.

**Πρόταση 2.6** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 1Κ. Τότε το σύνολο  $E_1$  των σημείων ισορροπίας του ΝΔΠΚΕΛ (2.11) είναι ίσο με το σύνολο  $G$  των ολικών ελαχίστων του προβλήματος ΠΚ, δηλαδή  $E_1 = G$ .

Απόδειξη

Λόγω κυρτότητας του προβλήματος, από το Θεώρημα 1.45 προκύπτει ότι, το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες α'τάξης του προβλήματος ΠΚ είναι το σύνολο  $G$  των ολικών ελαχίστων του, δηλαδή  $D = G$ . Έτσι από την Πρόταση 2.2, το σύνολο των σημείων ισορροπίας ΝΔΠΚΕΛ (2.11) είναι ίσο με το σύνολο  $G$ .  $\square$

Στην περίπτωση φραγμένου προβλήματος ΠΚ το ΝΔΠΚΕΛ αποδεικνύεται ότι έχει φραγμένες λύσεις. Σχετική είναι η ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 2.7** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 1Κ και έστω ότι το σύνολο  $G$  των ολικών ελαχίστων του προβλήματος ΠΚ είναι μη κενό και φραγμένο. Τότε κάθε λύση του ΝΔΠΚΕΛ (2.11) είναι φραγμένη, έχει οριακό σύνολο μη κενό και υποσύνολο του  $\Omega_K$ , και εκτείνεται για άπειρο χρόνο.

Απόδειξη

Έστω  $x(t)$  λύση του ΝΔΠΚΕΛ (2.11) που ξεκινά από σημείο  $x_0 \in F$ , με  $[0, \omega)$  μέγιστο χρονικό διάστημα υπαρξής και  $L_x$  οριακό σύνολο. Από την Πρόταση 2.3 η συνάρτηση  $f$  φθίνει κατά μήκος της  $x(t)$ , έτσι η λύση  $x(t)$  ανήκει στο  $f(x_0)$  υσοϋμές σύνολο (level set) της συνάρτησης  $f$ , δηλαδή  $x(t) \in C_{x_0}^{\text{op}} = \{x \in F : f(x) \leq f(x_0)\}$ ,  $\forall t \in [0, \omega)$ . Από την Πρόταση 1.39 το σύνολο  $C_{x_0}$  είναι συμπαγές,  $\forall x_0 \in F$ , άρα η λύση  $x(t)$  είναι φραγμένη. Από

την Πρόταση 1.4γ είναι  $L_x \neq \emptyset$ . Επιπλέον αφού το σύνολο  $C_{x_0}$  είναι κλειστό, τα οριακά σημεία κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας σημείων του  $C_{x_0}$  ανήκουν στο  $C_{x_0}$  ([Be], App. A, Def. A.3, p. 538), έτσι  $L_x \subset C_{x_0} \subset \Omega_K$ ,  $\forall x_0 \in F$ . Επιπλέον λόγω της Πρότασης 1.5 είναι  $\omega = \infty$ .  $\square$

*Σημείωση 2.3* Η γραμμικότητα των περιορισμών δεν χρειάστηκε στην απόδειξη, ως εκ τούτου μπορεί να παραληφθεί από τις υποθέσεις.  $\square$

Το ακόλουθο πόρισμα του Θεωρήματος 2.4, αφορά τη σύγκλιση του ΝΔΠΚΕΛ (2.11) που αναφέρεται στο πρόβλημα ΠΚ. Προκύπτει άμεσα λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση 2.7 και το συμπέρασμα  $D = G$ .

**Πόρισμα 2.8** *Εστω ότι ισχύει η Υπόθεση 1Κ και έστω ότι το σύνολο των ολικών ελαχίστων του προβλήματος ΠΚ είναι μη κενό και φραγμένο. Τότε όλες οι λύσεις του ΝΔΠΚΕΛ (2.11) συγκλίνουν στο σύνολο  $G$  των ολικών ελαχίστων του προβλήματος ΠΚ, καθώς  $t \rightarrow \infty$ , δηλαδή  $\forall x_0 \in F$ ,  $x(t) \rightarrow G$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ .*

Στην περίπτωση αυστηρής κυρτότητας της  $f$ , το πρόβλημα ΠΚ έχει το πολύ ένα ολικό ελάχιστο, οπότε το προηγούμενο συμπέρασμα διατυπώνεται ως ακολούθως.

**Πόρισμα 2.9** *Εστω ότι ισχύει η Υπόθεση 1Κ, ενισχυμένη με αυστηρή κυρτότητα της  $f$  στο  $\Omega_K$  και έστω ότι το πρόβλημα ΠΚ έχει ολικό ελάχιστο το  $x^*$ . Τότε κάθε λύση του ΝΔΠΚΕΛ (2.11) τείνει στο  $x^*$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ , δηλαδή  $\forall x_0 \in F$ ,  $x(t) \rightarrow x^*$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ .*

## 2.4 Ταχύτητα σύγκλισης των λύσεων του ΝΔΠΚΕΛ

Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύεται ότι, οι λύσεις του ΝΔΠΚΕΛ (2.4) που συγκλίνουν σε σημείο που ικανοποιεί τις ικανές συνθήκες ελαχίστου β'τάξης του προβλήματος Π, έχουν εκθετική ταχύτητα σύγκλισης. Στην περίπτωση του κυρτού προβλήματος ΠΚ με αυστηρό ελάχιστο, το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ισχυρότερο. Αποδεικνύεται ότι όλες οι λύσεις του

ΝΔΠΚΕΛ (2.11) συγκλίνουν εκθετικά στο σημείο στο οποίο το ΠΚ έχει αυστηρό ελάχιστο. Το Θεώρημα 2.10 που αφορά την ταχύτητα σύγκλισης του ΝΔΠΚΕΛ (2.4), διατυπώνεται ώστε να μοιάζει με τα αντίστοιχα θεωρήματα της ταχύτητας σύγκλισης για τους διακριτούς αλγόριθμους (βλ. [Po], [Lue]). Για τα συμπεράσματα αυτά απαιτείται ενίσχυση της Υπόθεσης 1, θεωρώντας τις συναρτήσεις του προβλήματος  $\Pi$  διπλά συνεχώς διαφορίσιμες.

**Υπόθεση 1ΤΣ:** (α) Οι συναρτήσεις  $f$  και  $h_1, \dots, h_m$  είναι πραγματικές και δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες στο  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,

(β)  $\text{rank}(\nabla h(x)) = m$ ,  $\forall x \in \Omega$  και

(γ)  $m < n$ .

**Θεώρημα 2.10** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 1ΤΣ ισχύει και έστω  $x^*$  αυστηρό τοπικό ελάχιστο του προβλήματος  $\Pi$  που ικανοποιεί τις ικανές συνθήκες ελαχίστου β' τάξης. Ας είναι  $x(t)$  μια λύση του ΝΔΠΚΕΛ (2.4) που συγκλίνει στο  $x^*$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Τότε η ταχύτητα σύγκλισης της λύσης  $x(t)$  είναι εκθετική, δηλαδή υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\Psi > 0$  και  $\xi > 0$  τέτοιοι ώστε

$$\|x(t) - x^*\| \leq \Psi \exp(-\xi t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.12)$$

Απόδειξη

Οι πολλαπλασιαστές Lagrange που αντιστοιχούν στο  $x^*$  είναι  $\lambda^* = -[\nabla h(x^*)^\top \nabla h(x^*)]^{-1} \nabla h(x^*)^\top \nabla f(x^*)$ . Τότε αφού  $P(x) \nabla h(x) = 0$  (βλ. Παράγραφο 2.1), ισχύει  $P(x) \nabla f(x) = P(x) (\nabla f(x) + \nabla h(x) \lambda^*)$ . Θεωρώντας το ανάπτυγμα Taylor της παράστασης  $\nabla f(x) + \nabla h(x) \lambda^*$  γύρω από το  $x^*$  και λαμβάνοντας υπόψη ότι,  $\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*) \lambda^* = 0$ , τα προηγούμενα γράφονται

$$\begin{aligned} P(x) \nabla f(x) &= P(x) \left( \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*) \lambda^* + \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} (x - x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \frac{\partial^2 h_i(x^*)}{\partial x^2} (x - x^*) + o(\|x - x^*\|) \right) = \\ &= P(x) \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} (x - x^*) + o(\|x - x^*\|) \end{aligned} \quad (2.13)$$

όπου  $L(x, \lambda) = f(x) + h(x)\lambda$  η συνάρτηση Lagrange του προβλήματος Π. Για δεδομένο  $x \in F$  έστω  $F(x)$  ένας  $n \times (n-m)$  πλήρους βαθμού πίνακας, συνεχής ως προς  $x$  τέτοιος ώστε

$$\nabla h(x)^T F(x) = 0 \quad \text{και} \quad F(x)^T F(x) = I_{n-m} . \quad (2.14)$$

Ένας τέτοιος πίνακας προκύπτει από μια QR παραγοντοποίηση του πίνακα

$$\begin{bmatrix} \nabla h(x)^T \\ F(x)^T \end{bmatrix} (P(x) - F(x)F(x)^T) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και ο πίνακας  $\begin{bmatrix} \nabla h(x)^T \\ F(x)^T \end{bmatrix}$  είναι πλήρους βαθμού. Έτσι εύκολα προκύπτει:

$$P(x) = F(x)F(x)^T \quad (2.15)$$

Επιπλέον από την σχέση (2.6α) και την ισότητα (2.15) προκύπτει

$$I_n = F(x)F(x)^T + \nabla h(x)(\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} \nabla h(x)^T \quad (2.16)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (2.13) και (2.15) στο ΝΔΠΚΕΛ (2.4) προκύπτει

$$\frac{d(x-x^*)}{dt} = -\mu F(x)F(x)^T \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} (x-x^*) + o(\|x-x^*\|) \quad (2.17)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (2.17) από αριστερά με  $(x-x^*)^T$  και αντικαθιστώντας τον πίνακα  $I_n$  από τη σχέση (2.16) προκύπτει

$$\begin{aligned} (x-x^*)^T \frac{d(x-x^*)}{dt} &= -\mu (x-x^*)^T F(x)F(x)^T \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} F(x)F(x)^T (x-x^*) - \\ &- \mu (x-x^*)^T F(x)F(x)^T \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} \nabla h(x)(\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} \nabla h(x)^T (x-x^*) + o(\|x-x^*\|) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Για οποιοδήποτε  $x \in F$ , έστω  $a_{\min}(x)$  η ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα

$$F(x)^T \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} F(x).$$

Υπενθυμίζεται ότι ο πίνακας  $F(x)$  έχει κατασκευαστεί

συνεχής ως προς  $x \in F$ , οπότε η ιδιοτιμή  $a_{\min}(x)$  είναι συνεχής ως προς  $x \in F$ .

Το σημείο  $x^*$  ικανοποιεί τις συνθήκες β' τάξης, άρα είναι  $a_{\min}(x^*) > 0$ .

Έτσι υπάρχει  $\tilde{\delta} > 0$  τέτοιο ώστε  $a_{\min}(x) > 0, \forall x \in F \cap N(x^*, \tilde{\delta})$ . Έστω

$a_{\min}^* = \min_{x \in F}^{\text{op}} \{a_{\min}(x) : \|x - x^*\| \leq \tilde{\delta}\}$ . Τότε προφανώς

$$a_{\min}(x) \geq a_{\min}^* > 0, \forall x \in F \cap N(x^*, \tilde{\delta}) \quad (2.19)$$

Τότε  $\forall x \in F \cap N(x^*, \tilde{\delta})$  είναι

$$\begin{aligned} & -\mu(x-x^*)^T F(x)F(x)^T \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} F(x)F(x)^T (x-x^*) \leq -\mu a_{\min}^* \|F(x)^T (x-x^*)\|^2 = \\ & = -\mu a_{\min}^* (x-x^*)^T F(x)F(x)^T (x-x^*) = \\ & = -\mu a_{\min}^* (x-x^*)^T \left( I - \nabla h(x) (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} \nabla h(x)^T \right) (x-x^*) = \\ & = -\mu a_{\min}^* \|x-x^*\|^2 + \mu a_{\min}^* (x-x^*)^T \nabla h(x) (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} \nabla h(x)^T (x-x^*) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Εφόσον  $\forall x \in F, h(x) = h(x^*) = 0$ , το ανάπτυγμα Taylor του  $h(x)$  δίνει :

$$h(x^*) = h(x) + \nabla h(x)^T (x^* - x) + o(\|x - x^*\|) \Rightarrow \nabla h(x)^T (x - x^*) = o(\|x - x^*\|) \quad (2.21)$$

Από τις σχέσεις (2.20) και (2.21) και εφαρμόζοντας την ισότητα

$$\|x - x^*\| \frac{d\|x - x^*\|}{dt} = (x - x^*)^T \frac{d(x - x^*)}{dt}, \text{ η ισότητα (2.17) δίνει:}$$

$$\frac{d\|x - x^*\|}{dt} \leq -\mu a_{\min}^* \|(x - x^*)\| + o(\|x - x^*\|), \quad x \in F \cap N(x^*, \tilde{\delta}) \quad (2.22)$$

Από τον ορισμό του  $o(\cdot)$  και την υπόθεση  $\lim_{t \rightarrow \infty} \{x(t)\} = x^*$  προκύπτει ότι για

κάθε  $\delta > 0$ , υπάρχει  $T \geq 0$  τέτοιο ώστε

$$x(t) \in F \cap N(x^*, \tilde{\delta}) \text{ και } o(\|x(t) - x^*\|) \leq \delta \|x(t) - x^*\|, \quad \forall t \geq T. \quad (2.23)$$

Επιλέγοντας  $\delta \in (0, \mu a_{\min}^*)$ , είναι  $\mu a_{\min}^* - \delta > 0$  και η ανισότητες (2.22) και (2.23) δίνουν:

$$\frac{d\|x(t) - x^*\|}{dt} \leq -\xi \|x(t) - x^*\|, \quad \forall t \geq T \quad (2.24)$$

όπου  $\xi = \mu a_{\min}^{\text{op}} * -\delta > 0$ . Η ανισότητα (2.24) μετά από ολοκλήρωση δίνει:

$$\|x(t) - x^*\| \leq \|x(T) - x^*\| \exp(-\xi t), \quad \forall t \geq T \quad (2.25)$$

Για το πεπερασμένο διάστημα  $[0, T]$ , από το Θεώρημα Weierstrass (Θεώρημα 1.28) η ποσότητα:  $\max_{t \in R} \{\|x(t) - x^*\| \exp(\xi t) : t \in [0, T]\} = \Psi_1 > 0$  υπάρχει και είναι πεπερασμένη, έτσι

$$\|x(t) - x^*\| \leq \Psi_1 \exp(-\xi t), \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.26)$$

Από τις σχέσεις (2.25) και (2.26) επιλέγοντας  $\Psi = \max\{\Psi_1, \|x(T) - x^*\|\}$  προκύπτει η σχέση (2.12).  $\square$

Το Θεώρημα 2.10 στην περίπτωση κυρτής συνάρτησης  $f$ , δίνει ισχυρότερα συμπεράσματα. Αν το πρόβλημα ΠΚ έχει αυστηρό ελάχιστο το  $x^*$ , τότε το σύνολο ελαχίστων του ΠΚ, αφού είναι κυρτό σύνολο, θα περιλαμβάνει αποκλειστικά το  $x^*$ , οπότε από το Πόρισμα 2.8, κάθε λύση του ΝΔΠΚΕΛ (2.11) συγκλίνει στο  $x^*$ . Έτσι από το Θεώρημα 2.10 προκύπτει το ακόλουθο Πόρισμα.

**Πόρισμα 2.11** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 1ΤΣ ενισχυμένη με την κυρτότητα της  $f$  και έστω  $x^* \in \Omega_K$  αυστηρό τοπικό ελάχιστο του προβλήματος ΠΚ που ικανοποιεί τις ικανές συνθήκες ελαχίστου β' τάξης. Ας είναι  $x(t)$  μια λύση του ΝΔΠΚΕΛ (2.11). Τότε η λύση  $x(t)$  συγκλίνει στο  $x^*$  με εκθετική ταχύτητα σύγκλισης, δηλαδή υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\Psi > 0$  και  $\xi > 0$  τέτοιοι ώστε

$$\|x(t) - x^*\| \leq \Psi \exp(-\xi t), \quad \forall t \geq 0.$$

## 2.4 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό προτείνεται ένα νέο Νευρωνικό Δίκτυο συνεχούς χρόνου (ΝΔΠΚΕΛ) για την επίλυση του προβλήματος ελαχίστου με ισοτικούς



περιορισμούς, που βασίζεται στη γνωστή μέθοδο ελαχιστοποίησης, προβολής της κλίσης. Το αρχικό σημείο του, καθώς και ολόκληρη η τροχιά του ικανοποιούν τους περιορισμούς. Στην κατεύθυνση του ΝΔΠΚΕΛ, η συνάρτηση κόστους του προβλήματος ελαχιστοποίησης μειώνεται. Οι υποθέσεις που γίνονται για τον ορισμό του ΝΔΠΚΕΛ είναι οι συνήθεις υποθέσεις που υιοθετεί η σχετική μέθοδος.

Η προσέγγιση της ποιοτικής συμπεριφοράς του ΝΔΠΚΕΛ δεν είναι η συνήθης της βιβλιογραφίας των Νευρωνικών Δικτύων. Συγκεκριμένα, διατυπώνεται ένα γενικό θεώρημα σύγκλισης, χωρίς να υποτίθεται η κυρτότητα του προβλήματος ελαχιστοποίησης, που είναι συνήθης υπόθεση για τη μελέτη της ευστάθειας των Νευρωνικών Δικτύων. Για μη κυρτά προβλήματα λοιπόν, αποδεικνύεται ότι οι φραγμένες λύσεις του ΝΔΠΚΕΛ συγκλίνουν στο σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου άταξης. Το συμπέρασμα αυτό είναι παρόμοιο με τα θεωρήματα σύγκλισης του μη γραμμικού προγραμματισμού και μπορεί να θεωρηθεί ως η συνεχούς χρόνου εκδοχή αυτών των αποτελεσμάτων. Στην περίπτωση φραγμένου κυρτού προβλήματος ελαχιστοποίησης, αποδεικνύεται ότι όλες οι λύσεις του ΝΔΠΚΕΛ είναι φραγμένες και συγκλίνουν στο σύνολο των ολικών ελαχίστων του. Στην ειδική περίπτωση, που η συνάρτηση κόστους του προβλήματος με γραμμικούς ισοτικούς περιορισμούς είναι αυστηρά κυρτή, το ΝΔΠΚΕΛ συγκλίνει στο σημείο ολικού ελαχίστου του προβλήματος. Σχετικά με την ταχύτητα σύγκλισης του ΝΔΠΚΕΛ, αποδεικνύεται ότι οι λύσεις που συγκλίνουν σε σημεία στα οποία το πρόβλημα έχει αυστηρά τοπικά ελάχιστα έχουν εκθετική ταχύτητα σύγκλισης. Ενώ για την περίπτωση του κυρτού προβλήματος με αυστηρό ελάχιστο αποδεικνύεται ότι, όλες οι λύσεις του ΝΔΠΚΕΛ συγκλίνουν εκθετικά στο σημείο στο οποίο το πρόβλημα έχει αυστηρό ελάχιστο.

Αριθμητικά αποτελέσματα εφαρμογής του ΝΔΠΚΕΛ και ενδεικτικές κυκλωματικές υλοποιήσεις του δίνονται στα Κεφάλαια 5 και 6 αντίστοιχα.

### 3<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ

#### ΤΟ ΝΕΥΡΩΝΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ ΠΡΟΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΚΛΙΣΗΣ ΜΕ ΜΗ ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

##### 3.1 Ορισμός του νέου Νευρωνικού Δικτύου

Στο κεφάλαιο αυτό προτείνεται ένα δεύτερο Νευρωνικό Δίκτυο συνεχούς χρόνου, τύπου Hopfield, για την επίλυση του ακόλουθου προβλήματος ελαχίστου με ισοτικούς περιορισμούς:

$$\min_{x \in \Omega} \{f(x) : h_1(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0\} \quad \Pi$$

ή σε σύντομη γραφή  $\min_{x \in \Omega} \{f(x) : h(x) = 0\}$ , όπου  $h(x) = [h_1(x), \dots, h_m(x)]^T$ , με  $f(x), h_1(x), \dots, h_m(x)$  βαθμωτές και συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σε ανοικτό σύνολο  $\Omega \subset R^n$ . Ορίζονται τα ακόλουθα σύνολα.

$$F = \{y \in \Omega : h(y) = 0\}$$

είναι το επιτρεπτό σύνολο του προβλήματος  $\Pi$ , δηλαδή το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τους περιορισμούς και

$$D = \{y \in F : \exists \lambda \in R^m \text{ ώστε } \nabla f(y) + \nabla h(y)\lambda = 0\}$$

όπου  $\nabla f(x) = \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]^T$  και  $\nabla h(x) = [\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_m(x)]$ , το

επιθυμητό σύνολο του προβλήματος  $\Pi$ , δηλαδή το σύνολο των σημείων του

$\Omega$  που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου α'τάξης του προβλήματος  $\Pi$ .

Το νέο αυτό Νευρωνικό Δίκτυο, είναι γενίκευση του Νευρωνικού Δικτύου του προηγούμενου κεφαλαίου. Το δυναμικό σύστημα που το περιγράφει βασίζεται, όπως και το ΝΔΠΚΕΛ, στην επαναληπτική μέθοδο *προβολής της κλίσης*. Τα αρχικά σημεία του όμως, δεν απαιτείται να ικανοποιούν τους ισοτικούς περιορισμούς του προβλήματος  $\Pi$ , δηλαδή έχει  $x_0 \in \Omega$ . Αυτό είναι το βασικό πλεονέκτημα του έναντι του ΝΔΠΚΕΛ, που ορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και απαιτεί  $x_0 \in F$ . Συγκεκριμένα στο κεφάλαιο αυτό **ορίζεται ένα νέο δυναμικό σύστημα τέτοιο ώστε κατά μήκος της λύσης του  $x(t)$ , που ξεκινά από τυχαίο σημείο του  $\Omega$ , μειώνεται το μέτρο των ισοτικών περιορισμών  $\|h(x(t))\|$  του προβλήματος  $\Pi$  και τείνει στο μηδέν, καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Επιπλέον τα σημεία ισοροπίας του ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες α'τάξης του Προβλήματος  $\Pi$** . Το προκύπτον δυναμικό σύστημα είναι ένα σύστημα  $n+m$  (στην συνέχεια περιορίζεται σε  $n$ ) διαφορικών εξισώσεων α'τάξης. Η τροχιά του αποτελείται από τη βασική συνιστώσα  $x(t)$   $n$  διάστασης, που αφορά τη μεταβλητή ως προς την οποία ελαχιστοποιείται η συνάρτηση  $f$  του προβλήματος  $\Pi$  και τη συνιστώσα Lagrange  $\lambda(t)$   $m$  διάστασης, που σχετίζεται με τους πολλαπλασιαστές Lagrange και όπως διαπιστώνεται στη συνέχεια, απλοποιείται από την περιγραφή του Νευρωνικού Δικτύου. Από την αρχική περιγραφή λοιπόν του νέου δυναμικού συστήματος προκύπτει ότι, οι λύσεις του ξεκινούν από τυχαίο σημείο  $(x_0, \lambda_0) \in \Omega \times R^m$  και οδηγούνται (τείνουν) στο  $F$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ , αναγκάζοντας τους ισοτικούς περιορισμούς να τείνουν στο μηδέν, καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Πως όμως η τροχιά του νέου δυναμικού συστήματος αποκτά τη συγκεκριμένη ιδιότητα; Η ιδέα που εφαρμόζεται προέρχεται από τις Ομοτοπικές Μεθόδους ([OrR], Παρ. 7.5, pp. 230-235). Συγκεκριμένα

κατασκευάζεται συνεχής απεικόνιση (homotopy)  $H: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $H = H(x, t)$  τέτοια ώστε το σύστημα εξισώσεων  $H(x, 0) = 0$ , να έχει λύση το  $x_0$  και επιπλέον  $\lim_{t \rightarrow \infty} H(x, t) = h(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$ . Έτσι, αν το πρόβλημα  $H(x, t) = 0$ ,  $t \geq 0$  έχει μια συνεχή λύση  $x: [0, \infty) \rightarrow \Omega$ ,  $x = x(t)$ ,  $\forall t \geq 0$ , θα ισχύουν τα εξής  $x(0) = x_0$  και  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(x(t)) = 0$ . Για την κατασκευή της  $H(x, t)$  χρησιμοποιείται η συνάρτηση οδηγός η οποία ορίζεται ως εξής.

**Ορισμός 3.1** Ως συνάρτηση οδηγός ορίζεται η πραγματική και συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση του χρόνου  $k: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i)  $k(0) = 1$ ,
- (ii)  $k(t) \rightarrow 0$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ ,
- (iii)  $\dot{k}(t) < 0$ ,  $\forall t \geq 0$  και
- (iv) υπάρχει  $b \in \mathbb{R}$  με  $b > 0$  τέτοιο ώστε  $\dot{k}(t) \geq -b$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι οι ακόλουθες:  $\exp(-at)$  με

$$\alpha > 0, \frac{1}{(at+1)^v} \text{ με } \alpha > 0 \text{ και } v \in \mathbb{N}^*, \frac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(t)}{\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(t)} \text{ κ.λ.π.}$$

**Λήμμα 3.2** Για κάθε συνάρτηση οδηγό  $k$  ισχύει  $0 < k(t) \leq 1$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Απόδειξη

Η ανισότητα  $k(t) \leq 1$ ,  $\forall t \geq 0$  είναι προφανής, αφού η συνάρτηση  $k$  είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου και  $k(0) = 1$ . Έστω  $i$  το μέγιστο κάτω φράγμα της συνάρτησης  $k$ , δηλαδή  $i = \inf \{k(t), t \geq 0\}$ , οπότε  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists t_\varepsilon \geq 0$  τέτοιο ώστε,  $i \leq k(t_\varepsilon) \leq i + \varepsilon$ . Όμως επειδή η  $k$  είναι γνήσια φθίνουσα ισχύει  $i - \varepsilon \leq k(t) < k(t_\varepsilon) \leq i + \varepsilon$ , δηλαδή  $|k(t) - i| < \varepsilon$ ,  $\forall t > t_\varepsilon$ . Επομένως  $k(t) \rightarrow i$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$  και από το (ii) του Ορισμού 3.1 είναι  $i = 0$ . Έστω ότι υπάρχει πεπερασμένο  $\hat{t} \geq 0$  τέτοιο ώστε  $k(\hat{t}) = 0$ , επειδή η  $k$  είναι γνήσια φθίνουσα

πρέπει  $k(t) < 0, \forall t \geq \hat{t}$ , άτοπο αφού από τα προηγούμενα  $\inf \{k(t), t \geq 0\} = 0$ .

□

Έστω ότι, για κάποια συνάρτηση οδηγό  $k$ , η βασική συνιστώσα  $x(t)$  της λύσης του νέου δυναμικού συστήματος ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων:

$$h(x) = k(t)h(x_0), \text{ με } x(0) = x_0 \in \Omega, \quad (3.1\alpha)$$

ή (παρωγίζοντας στην κατεύθυνση του νέου δυναμικού συστήματος) το σύστημα εξισώσεων

$$\frac{dh(x)}{dt} = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)}h(x), \text{ } x(0) = x_0 \in \Omega, \quad (3.1\beta)$$

με  $x = x(t), \forall t \geq 0$ . Η ισοδυναμία των συστημάτων (3.1α) και (3.1β) προκύπτει εύκολα. Ολοκληρώνοντας το σύστημα (3.1β) στο διάστημα  $[0, t]$  προκύπτει το σύστημα (3.1α).

Το σύστημα εξισώσεων (3.1α), ορίζει τη συνεχή απεικόνιση (homotopy)  $H: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow R^n$ ,  $H(x, t) = h(x) - k(t)h(x_0)$ . Προφανώς  $H(x_0, 0) = h(x_0) - h(x_0) = 0$  και  $\lim_{t \rightarrow \infty} H(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (h(x) - k(t)h(x_0)) = h(x)$ .

Εύκολα από το σύστημα (3.1α) προκύπτει  $\|h(x(t))\|_2 = k(t)\|h(x_0)\|_2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{d\|h(x(t))\|_2}{dt} = \dot{k}(t)\|h(x_0)\|_2, \forall t \geq 0$ . Έτσι από τα (ii) και (iii) του Ορισμού 3.1 προκύπτει ότι, το μέτρο  $\|h(x(t))\|$  μειώνεται και τείνει στο μηδέν, καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

**Πρόταση 3.3** Έστω  $x(t)$  λύση δυναμικού συστήματος, με μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης  $[0, \infty)$ , που ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων (3.1), τότε

$$x(t) \in H_{x_0}^{op} = \{x \in \Omega : \min\{h_i(x_0), 0\} \leq h_i(x) \leq \max\{h_i(x_0), 0\}, \forall i = 1, 2, \dots, m\}, \forall t \geq 0.$$

Απόδειξη

Λόγω των εξισώσεων (3.1α) και του Λήμματος 3.2 εύκολα προκύπτουν τα εξής:  $0 \leq k(t)h_\theta(x_0) \leq h_\theta(x_0) \Leftrightarrow 0 \leq h_\theta(x(t)) \leq h_\theta(x_0), \forall t \geq 0$  και  $\forall \theta \in \{1, \dots, m\}$

τέτοιο ώστε  $h_b(x_0) \geq 0$  και επιπλέον  $h_a(x_0) \leq k(t)h_a(x_0) \leq 0 \Leftrightarrow h_a(x_0) \leq h_a(x(t)) \leq 0$ ,  
 $\forall t \geq 0$  και  $\forall a \in \{1, \dots, m\}$  τέτοιο ώστε  $h_a(x_0) \leq 0$ , δηλαδή  $x(t) \in H_{x_0}$ ,  $\forall t \geq 0$ .

□

Προκειμένου τα σημεία ισορροπίας του νέου δυναμικού συστήματος να ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες α' τάξης του προβλήματος Π, δηλαδή να ανήκουν στο σύνολο D, επιλέγεται όπως και για το ΝΔΠΚΕΛ, η περιγραφή:  $\dot{x} = -\mu \nabla L(x, \lambda)$ , με  $\mu > 0$ . Το δυναμικό αυτό σύστημα και οι εξισώσεις (3.1) συνθέτουν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\dot{x} = -\mu \nabla L(x, \lambda), \text{ με } \mu > 0 \text{ και } (x(0), \lambda(0)) = (x_0, \lambda_0) \in \Omega \times R^m \quad (3.2\alpha)$$

$$\frac{dh(x)}{dt} = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} h(x) \quad (3.2\beta)$$

όπου:  $L(x, \lambda) = f(x) + h(x)^T \lambda$  η συνάρτηση Lagrange του προβλήματος Π και  $\nabla L(x, \lambda)$  η κλίση της ως προς  $x$ , δηλαδή  $\nabla L(x, \lambda) = \nabla f(x) + \nabla h(x) \lambda$ . Η παρουσία του αρνητικού πολλαπλασιαστή στο δεξί μέλος της εξίσωσης (3.2α) δικαιολογείται στην επόμενη παράγραφο. Το σύστημα (3.2) διαθέτει τις επιθυμητές ιδιότητες, που περιγράφονται στην ιδέα κατασκευής του νέου Νευρωνικού Δικτύου στην αρχή της παραγράφου.

Προφανώς για να ορίζεται καλώς το δυναμικό σύστημα (3.2) απαιτείται η διαφορισιμότητα των συναρτήσεων του προβλήματος Π. Η παρακάτω υπόθεση γίνεται για την απλοποίηση της πεπλεγμένη περιγραφής (3.2).

**Υπόθεση 2:** α) Οι συναρτήσεις  $f$  και  $h_1, \dots, h_m$  είναι πραγματικές και συνεχώς διαφορίσιμες στο  $\Omega \subset R^n$ ,

β)  $\text{rank}(\nabla h(x)) = m$ ,  $\forall x \in \Omega$  και

γ)  $m < n$ .

**Θεώρημα 3.4** Έστω ότι η Υπόθεση 2 ισχύει και έστω μια δεδομένη συνάρτηση οδηγός  $k$ . Τότε το σύστημα εξισώσεων (3.2) απλοποιείται στο ακόλουθο σύστημα

$$\dot{x} = -\mu P(x)\nabla f(x) - \rho(t)\nabla h(x)\left(\nabla h(x)^\top \nabla h(x)\right)^{-1} h(x), \text{ με } x(0)=x_0 \in \Omega \quad (3.3)$$

$$\lambda = -\left(\nabla h(x)^\top \nabla h(x)\right)^{-1} \left( \nabla h(x)^\top \nabla f(x) - \frac{\rho(t)}{\mu} h(x) \right) \quad (3.4)$$

όπου:  $P(x) = I - \nabla h(x)\left(\nabla h(x)^\top \nabla h(x)\right)^{-1} \nabla h(x)^\top$  ο πίνακας προβολής όπως ορίστηκε στην Παράγραφο 2.1 και  $\rho(t) = -\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$ .

Απόδειξη

Οι εξισώσεις (3.2β) λόγω των (3.2α) γράφονται  $\left. \frac{dh(x)}{dt} \right|_{(3.2a)} = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} h(x(t)) \Leftrightarrow -\mu \nabla h(x)^\top \nabla L(x, \lambda) = -\rho(t) h(x)$ , όπου  $\rho(t) = -\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$ . Είναι

$\rho(t) > 0$ ,  $\forall t \geq 0$  λόγω του (iii) του Ορισμού 3.1 και του Λήμματος 3.2. Από τα προηγούμενα, λόγω της σχέσης  $\nabla L(x, \lambda) = \nabla f(x) + \nabla h(x)\lambda$  προκύπτει:

$$\mu \nabla h(x)^\top (\nabla f(x) + \nabla h(x)\lambda) = \rho(t) h(x). \text{ Από την Υπόθεση 2, για κάθε } x \in \Omega$$

είναι  $\text{rank}(\nabla h(x)) = m$ , άρα υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας  $\left(\nabla h(x)^\top \nabla h(x)\right)^{-1}$ .

Έτσι, από την προηγούμενη ισότητα λύνοντας ως προς τη συνιστώσα  $\lambda$ , προκύπτει το σύστημα εξισώσεων (3.4) και αντικαθιστώντας στο σύστημα (3.2α) προκύπτει τελικά το δυναμικό σύστημα (3.3). Επιπλέον η τροχιά του συστήματος (3.3) ικανοποιεί την εξίσωση (3.2β). Πράγματι, παραγωγίζοντας τις εξισώσεις (3.2β) στην κατεύθυνση του δυναμικού συστήματος (3.3) προκύπτουν

$$\left. \frac{dh(x)}{dt} \right|_{(3.3)} = -\nabla h(x)^\top \left( \mu P(x)\nabla f(x) + \rho(t)\nabla h(x)\left(\nabla h(x)^\top \nabla h(x)\right)^{-1} h(x) \right) =$$

$$= -\left( \mu \nabla h(x)^\top P(x)\nabla f(x) + \rho(t)h(x) \right) = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} h(x), \text{ όπου χρησιμοποιήθηκαν οι}$$

σχέσεις  $P(x)\nabla h(x) = 0$  και  $\rho(t) = -\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$ . □

*Σημείωση 3.1 (α)* Η Υπόθεση 2 ουσιαστικά είναι περισσότερο απαιτητική, από όσο πραγματικά χρειάζεται, αφού είναι αρκετό οι συνθήκες της να ισχύουν στο σύνολο των σημείων της λύσης. Υιοθετώντας αυτή την πιο χαλαρή διατύπωση της Υπόθεσης 2, τα συμπεράσματα που ακολουθούν δεν αλλάζουν, αλλά θα αφορούν κάποιες λύσεις του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3) (αυτές που ικανοποιούν την Υπόθεση 2) και όχι γενικά το ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3) (δηλαδή όλες τις λύσεις του, από κάθε αρχικό σημείο). Η ασθενέστερη διατύπωση της Υπόθεσης 2 είναι ίδια με την αντίστοιχη διατύπωση της Υπόθεσης 1, που αφορά το ΝΔΠΛΕΛ.

(β) Η Υπόθεση 2 δεν εξασφαλίζει την μοναδικότητα της λύσης του συστήματος (3.3), ούτε την ύπαρξη της λύσης του για άπειρο χρόνο. Σχετικά αναφέρονται στην επόμενη παράγραφο που αφορά την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης του συστήματος.  $\square$

Στη συνέχεια το δυναμικό σύστημα (3.3) θα ονομάζεται Νευρωνικό Δίκτυο Προβολής της Κλίσης με Μη Επιτρεπτές Λύσεις (σύντομα ΝΔΠΚΜΕΛ). Από το σύστημα εξισώσεων (3.2β) και το Λήμμα 3.2 προκύπτει ότι, αν  $x_0 \notin F$  οι λύσεις του ΝΔΠΚΜΕΛ δεν βρίσκονται ποτέ μέσα στο επιτρεπτό σύνολο του προβλήματος  $\Pi$ , τείνουν όμως σε αυτό καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Για το λόγο αυτό χαρακτηρίζονται ως μη επιτρεπτές.

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι, το σύστημα (3.2) γράφεται

$$\frac{1}{\mu} \dot{x} + \nabla f(x) + \nabla h(x)\lambda = 0 \text{ με } \mu > 0 \text{ και } \nabla h(x)^T \dot{x}(t) = \dot{k}(t)h(x_0). \text{ Οι σχέσεις}$$

αυτές, είναι οι αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου α' τάξης του προβλήματος :

$$\min_{\dot{x} \in \Omega} \left\{ \frac{1}{2\mu} \dot{x}^T \dot{x} + \dot{x}^T \nabla f(x) : \nabla h(x)^T \dot{x} = \dot{k}(t)h(x_0) \right\} \text{ το οποίο, για αρκετά μεγάλο}$$

$\mu$ , βρίσκει για κάθε χρονική στιγμή την κατεύθυνση ταχύτερης καθόδου για τη συνάρτηση  $f$ , η οποία συγχρόνως εξασφαλίζει μείωση των ισοτικών περιορισμών με ρυθμό  $\dot{k}(t)h(x_0)$ .

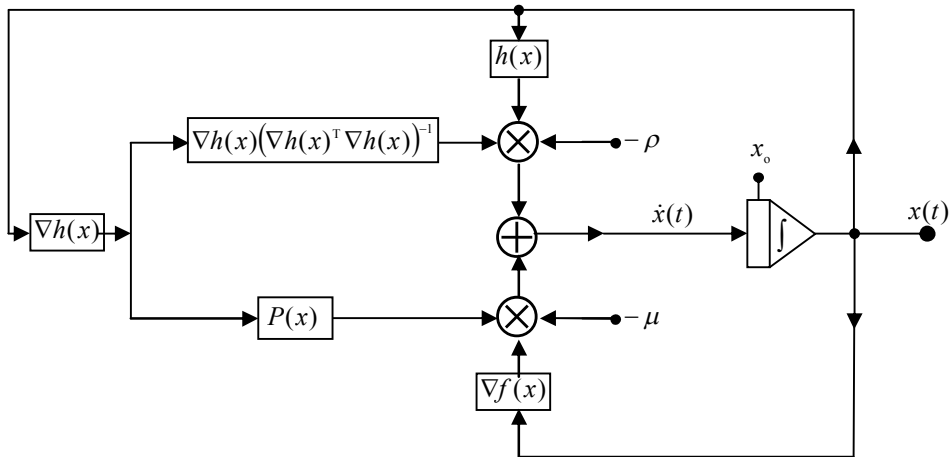


Από το δυναμικό σύστημα (3.3) φαίνεται ότι, η κατεύθυνση του ΝΔΠΚΜΕΛ περιλαμβάνει δύο συνιστώσες, το διάνυσμα  $P(x)\nabla f(x)$  που είναι η προβολή του διανύσματος  $\nabla f(x)$  στο χώρο  $O(S)$  (βλ. Παράγραφο 2.1), δηλαδή την κατεύθυνση του ΝΔΠΚΕΛ και την κατεύθυνση που οδηγεί τους ισοτικούς περιορισμούς στο μηδέν, δηλαδή το διάνυσμα  $-\nabla h(x)(\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} h(x)$ . Είναι προφανές ότι το ΝΔΠΚΕΛ αποτελεί την ειδική περίπτωση του ΝΔΠΚΜΕΛ για  $x_0 \in F$ .

**Πρόταση 3.5** *Εστω ότι ισχύει η Υπόθεση 1. Τότε για κάθε αρχικό σημείο  $x_0 \in F$  τα ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ ταυτίζονται.*

Από την επιλογή της συνάρτησης οδηγού εξαρτάται η αυτόνομη ή μη αυτόνομη περιγραφή του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3). Στην περίπτωση αυτόνομου ΝΔΠΚΜΕΛ η παράσταση  $\rho(t) = -\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$  είναι σταθερή, δηλαδή  $\rho(t) = \rho$ . Η περίπτωση αυτή αφορά την εκθετική συνάρτηση οδηγό  $k$ , δηλαδή  $k(t) = \exp(-\rho t)$ , τότε  $\rho(t) = \rho$  σταθερό. Επισημαίνεται ότι το σύνολο των σημείων ισορροπίας του ΝΔΠΚΜΕΛ δεν εξαρτάται από την αυτόνομη ή μη αυτόνομη συμπεριφορά του.

Στο Σχήμα 3.1 που ακολουθεί δίνεται το συνοπτικό block διάγραμμα του δυναμικού συστήματος ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3).



Σχ. 3.1 Block διάγραμμα του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3).

### 3.2 Μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων του ΝΔΠΚΜΕΛ

Για τη μελέτη της σύγκλισης των Νευρωνικών Δικτύων της βιβλιογραφίας συνήθως υποτίθεται η κυρτότητα του προβλήματος Π. Στην παράγραφο αυτή, διατυπώνεται ένα γενικό θεώρημα σύγκλισης, στο οποίο χωρίς να υποτίθεται η κυρτότητα του προβλήματος, αποδεικνύεται ότι οι φραγμένες λύσεις του ΝΔΠΚΕΛ, των οποίων τα οριακά σύνολα ανήκουν στο  $\Omega$ , συγκλίνουν στο σύνολο D.

Τα σημεία ισορροπίας του ΝΔΠΚΜΕΛ είναι υποψήφια οριακά σημεία της λύσης του. Για το λόγο αυτό απαραίτητη ιδιότητα του ΝΔΠΚΜΕΛ, ώστε να αποτελεί ένα αποτελεσματικό εργαλείο λύσης του προβλήματος Π, είναι το σύνολο των σημείων ισορροπίας του να ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες α'τάξης του προβλήματος Π.

Έστω  $E_2$  το σύνολο των σημείων ισορροπίας του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3). Στην πρόταση που ακολουθεί αποδεικνύεται εύκολα ότι τα ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ έχουν τα ίδια σημεία ισορροπίας, άρα από την Πρόταση 2.2, τα

σημεία ισορροπίας του ΝΔΠΚΜΕΛ ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες α'τάξης του προβλήματος Π. Σχετική είναι η πρόταση που ακολουθεί.

**Πρόταση 3.6** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 2. Τότε το σύνολο  $E_2$  των σημείων ισορροπίας του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3) είναι ίσο με το σύνολο  $D$  των σημείων που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου α'τάξης του προβλήματος Π, δηλαδή  $E_2 = D$ .

Απόδειξη

Για το ΝΔΠΚΜΕΛ ισχύουν:

$$\begin{aligned} \|\dot{x}\|_2^2 = \dot{x}^T \dot{x} = \mu^2 \|P(x)\nabla f(x)\|_2^2 + 2\mu\rho(t)\nabla f(x)^T P(x)\nabla h(x) (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} h(x) + \\ + \rho(t)^2 h(x) (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} h(x) \end{aligned}$$

και από τη σχέση  $P(x)\nabla h(x) = 0$  τα προηγούμενα γράφονται:

$$\|\dot{x}\|_2^2 = \mu^2 \|P(x)\nabla f(x)\|_2^2 + \rho(t)^2 h(x) (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} h(x) \quad (3.5)$$

Αφού ο πίνακας  $(\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1}$  είναι θετικά ορισμένος  $\forall x \in \Omega$ , η σχέση (3.5) δίνει

$$E_2 = \{x \in \Omega: h(x) = 0 \text{ και } P(x)\nabla f(x) = 0\} = E_1 \quad (3.6)$$

(βλ. Παράγραφο 2.2), οπότε από την Πρόταση 2.2 προκύπτει το συμπέρασμα της πρότασης.  $\square$

Για την ολική σύγκλιση των λύσεων του ΝΔΠΚΜΕΛ απαιτείται η ύπαρξη μιας συνάρτησης που φθίνει κατά μήκος της λύσης του. Στο θεώρημα που ακολουθεί και αφορά την σύγκλιση του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3) κατασκευάζεται αυτή η συνάρτηση, στην περίπτωση που η λύση του είναι φραγμένη. Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση κόστους  $f$  του προβλήματος Π φθίνει κατά μήκος της λύσης του ΝΔΠΚΕΛ. Γενικά αυτό δεν συμβαίνει στο ΝΔΠΚΜΕΛ.

**Θεώρημα 3.7** (Θεώρημα Ολικής Σύγκλισης του ΝΔΠΚΜΕΛ) Έστω ότι η Υπόθεση 2 ισχύει και έστω  $x(t)$  φραγμένη λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, που ξεκινά από σημείο  $x_0 \in \Omega$  και έχει οριακό σύνολο  $L_x$ . Αν  $L_x \subset \Omega$ , τότε

$$(α) \quad L_x \subset D$$

όπου  $D$  το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες α' τάξης του προβλήματος  $\Pi$  και

$$(β) \quad x(t) \rightarrow D, \text{ καθώς } t \rightarrow \infty,$$

δηλαδή  $\forall \varepsilon > 0, \exists T(\varepsilon, x_0)$ , τέτοιο ώστε  $dist(x(t), D) < \varepsilon, \forall t \geq T(\varepsilon, x_0)$ , όπου  $dist(x(t), D) = \min_{y \in D} \|x(t) - y\|$ .

Απόδειξη

(α) Από την Πρόταση 1.4γ, αφού η λύση  $x(t)$  είναι φραγμένη ισχύει  $L_x \neq \emptyset$ , οπότε από την Πρόταση 1.5 και λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση  $L_x \subset \Omega$ , προκύπτει ότι η λύση  $x(t)$  εκτείνεται για άπειρο χρόνο. Από το Θεώρημα 3.4, κάθε λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3) ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων (3.1β), άρα και το σύστημα (3.1α) επομένως  $\lim_{t \rightarrow \infty} \{h(x(t))\} = 0$ , άρα ισχύει

$$L_x \subset F. \quad (3.7)$$

Έστω η συνάρτηση  $V: \Omega \rightarrow R$ , με  $V(x) = f(x) + c\|h(x)\|_1$ , όπου  $\|h(x)\|_1 = \sum_{i=1}^m |h_i(x)|$ ,

και η ποσότητα  $c$  θα οριστεί στη συνέχεια. Από το σύστημα εξισώσεων (3.1α) προκύπτει  $V(x(t)) = f(x(t)) + c\|h(x(t))\|_1 = f(x(t)) + ck(t)\|h(x_0)\|_1$ . Η  $V$  είναι μη διαφορίσιμη συνάρτηση, έχει όμως κατά κατεύθυνση παράγωγο σε κάθε κατεύθυνση στο  $R^n$ . Έτσι για την άνω δεξιά Dini παράγωγο της  $V$  στην κατεύθυνση του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3),  $D^+V(x, t)|_{(3.3)}$ , (βλ. Κεφ. 1, Θεώρ. 1.24) ισχύει:

$$D^+V(x,t)\Big|_{(3.3)} = \nabla f(x)^T \dot{x}\Big|_{(3.3)} - c\rho(t)\sum_{i=1}^m |h_i(x)|. \quad (3.8)$$

Από το σύστημα (3.3) η ισότητα (3.8), γράφεται

$$\begin{aligned} D^+V(x,t)\Big|_{(3.3)} &= \\ &= \nabla f(x)^T \left( -\mu P(x)\nabla f(x) - \rho(t)\nabla h(x)(\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} h(x) \right) - c\rho(t)\sum_{i=1}^m |h_i(x)| = \\ &= -\mu \|P(x)\nabla f(x)\|^2 - \rho(t)\nabla f(x)^T (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} h(x) - c\rho(t)\sum_{i=1}^m |h_i(x)| = \\ &= -\mu \|P(x)\nabla f(x)\|^2 - \rho(t)\sum_{i=1}^m |h_i(x)|(c + \operatorname{sgn}(h_i(x))\psi_i(x)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\text{όπου } \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x > 0 \\ -1 & \text{αν } x < 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases} \text{ και } \psi: \Omega \rightarrow R \text{ συνάρτηση που ορίζεται ως εξής}$$

$$\psi(x) = (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} \nabla h(x)^T \nabla f(x).$$

Έστω το σύνολο  $X = \{x(t) : t \in [0, \infty)\} \subset \Omega$ . Η λύση  $x(t)$  από υπόθεση είναι φραγμένη, έτσι από την Πρόταση 1.4 είναι  $\bar{X} = X \cup L_x$  και  $\bar{X}$  συμπαγές. Από υπόθεση είναι  $L_x \subset \Omega$ , άρα ισχύει  $\bar{X} \subset \Omega$ . Επιπλέον από την Υπόθεση 2 η συνάρτηση  $\psi$  είναι συνεχής. Έτσι από το θεώρημα Weierstrass (Θεώρημα 1.28) προκύπτει ότι η ποσότητα  $\bar{c}_i = \max_y^{\text{op}} \{|\psi_i(y)| : y \in \bar{X}\}$  υπάρχει και είναι

πεπερασμένη. Επιλέγοντας  $c > \max_{i=1, \dots, m} \{\bar{c}_i\} = \hat{c}$  ισχύει  $c + \operatorname{sgn}(h_i(x))\psi_i(x) > 0$ ,

$\forall x \in \bar{X}$ . Έτσι η σχέση (3.9) δίνει  $D^+V(x,t)\Big|_{(3.3)} \leq -\mu \|P(x)\nabla f(x)\|_2^2 = \varphi(x) \leq 0$ ,

$\forall x \in \bar{X}$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$ , όπου  $\varphi: \bar{X} \rightarrow R$ , συνεχής συνάρτηση από υπόθεση.

Τελικά λοιπόν ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 1.24 με  $S = \bar{X}$  και

$\hat{E} = \{x \in \bar{X} \subset \Omega : \|P(x)\nabla f(x)\|_2 = 0\}$ , έτσι προκύπτει ότι,

$$L_x \subset \{x \in \bar{X} \subset \Omega : \|P(x)\nabla f(x)\|_2 = 0\} \quad (3.10)$$

Από τις σχέσεις (3.6), (3.7) και (3.10) προκύπτει το (α) συμπέρασμα του θεωρήματος. Το (β) συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το (α) και την Πρόταση 1.4γ.  $\square$

### Σημείωση 3.2

- Το Θεώρημα 3.7 δεν απαιτεί το πρόβλημα  $\Pi$  να είναι κυρτό.
- Το Θεώρημα 3.7 δεν απαιτεί το μονοσήμαντο της τροχιάς του ΝΔΠΚΜΕΛ, ούτε τα σημεία ισορροπίας του να είναι απομονωμένα.
- Από τη διατύπωση του Θεωρήματος 3.7 φαίνεται ότι είναι αρκετή η ασθενέστερη Υπόθεση 2 (Σημείωση 3.1α).
- Στο Θεώρημα 3.7 η σύγκλιση χαρακτηρίζεται ολική διότι αναφέρεται στις λύσεις του ΝΔΠΚΜΕΛ που ξεκινούν από οποιοδήποτε  $x_0 \in \Omega$ .
- Το Θεώρημα 3.7 δεν εξασφαλίζει ότι τα οριακά σημεία της λύσης του ΝΔΠΚΜΕΛ είναι τοπικά ελάχιστα του προβλήματος  $\Pi$ , θεωρητικά μπορεί να είναι τοπικά μέγιστα ή σαγματικά σημεία. Στην πράξη διαπιστώνεται ότι, στην περίπτωση φραγμένου προβλήματος  $\Pi$  το ΝΔΠΚΜΕΛ συγκλίνει σε τοπικά ελάχιστα.
- Το Θεώρημα 3.7 είναι παρόμοιο με τα θεωρήματα σύγκλισης του μη γραμμικού προγραμματισμού και μπορεί να θεωρηθεί ως η συνεχούς χρόνου έκδοση αυτών των αποτελεσμάτων (βλ. [Poi]).  $\square$

Ειδικότερα στην περίπτωση που ισχύει  $\Omega = R^n$ , ή  $H_{x_0} \subset \Omega$ , όπου  $H_{x_0}$  το σύνολο της Πρότασης 3.3, τότε προφανώς για κάθε λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3) ισχύει  $L_x \subset \Omega$ . Σχετικό είναι το ακόλουθο πόρισμα του Θεωρήματος 3.7.

**Πόρισμα 3.8** *Εστω ότι η Υπόθεση 2 ισχύει με  $\Omega = R^n$  (ή  $H_{x_0} \subset \Omega$ ). Τότε κάθε φραγμένη λύση  $x(t)$  του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3) που ξεκινά από σημείο  $x_0 \in \Omega$  συγκλίνει στο σύνολο  $D$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ .*

Στο συμπέρασμα του Πορίσματος 3.8 οι φραγμένες λύσεις του ΝΔΠΚΜΕΛ γενικά συγκλίνουν στο σύνολο  $D$ . Αν τα σημεία του συνόλου  $D$

είναι απομονωμένα σημεία, η σύγκλιση των φραγμένων λύσεων του είναι σύγκλιση σε σημείο του συνόλου  $D$ . Στο Κεφάλαιο 5, Παραδείγματα 5.1-5.5, οι φραγμένες λύσεις του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3) συγκλίνουν σε σημείο, ακόμα και όταν το σύνολο των σημείων ισορροπίας του είναι συνεχές σημείων (βλ. Παράδειγμα 5.2). Στο Κεφάλαιο 5, Παράδειγμα 5.6, η σύγκλιση φαίνεται να είναι σύγκλιση σε σύνολο αφού η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ τείνει σε κάθε σημείο του μοναδιαίου κύκλου, καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

### 3.3 Εφαρμογή του ΝΔΠΚΜΕΛ, στο κυρτό πρόβλημα με ισοτικούς περιορισμούς

Στην παράγραφο αυτή μελετάται η συμπεριφορά του ΝΔΠΚΜΕΛ όταν εφαρμόζεται στο κυρτό πρόβλημα ελαχιστοποίησης με ισοτικούς περιορισμούς:

$$\min_{x \in \Omega_K} \{f(x) : A^T x - b = 0\} \quad \text{ΠΚ}$$

με  $f$  πραγματική συνεχώς διαφορίσιμη και κυρτή συνάρτηση στο  $R^n$ ,  $A: n \times m$  πίνακας και  $b: m \times 1$  διάνυσμα. Στην περίπτωση φραγμένου προβλήματος ΠΚ προκύπτουν συμπεράσματα ισχυρότερα από αυτά του Θεωρήματος 3.7, που αφορούν τη γενική περίπτωση του προβλήματος ελαχιστοποίησης. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι όλες οι λύσεις του ΝΔΠΚΜΕΛ είναι φραγμένες, (δεν ισχύει γενικά για το ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3) που αφορά το πρόβλημα Π) και συγκλίνουν στο σύνολο των ολικών ελαχίστων του προβλήματος ΠΚ. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι αυστηρά κυρτή και το πρόβλημα ΠΚ έχει λύση, το ΝΔΠΚΜΕΛ συγκλίνει στο ολικό ελάχιστο του προβλήματος. Τα αποτελέσματα αυτά είναι τα συνήθη στη βιβλιογραφία των Νευρωνικών Δικτύων.

Η Υπόθεση 2 προσαρμοσμένη στην περίπτωση του κυρτού προβλήματος ΠΚ αναδιατυπώνεται ως εξής:

**Υπόθεση 2K:** α) Η συνάρτηση  $f$  είναι πραγματική, κυρτή και συνεχώς διαφορίσιμη στο  $R^n$

β)  $\text{rank}(A) = m$  και

(γ)  $m < n$ .

Επισημαίνεται ότι, η Υπόθεση 2K είναι αυστηρότερη της Υπόθεσης 1K που υιοθετήθηκε για την σύγκλιση του ΝΔΠΚΕΛ (2.11). Συγκεκριμένα η συνάρτηση  $f$  στην προκειμένη περίπτωση θεωρείται κυρτή στο  $R^n$ . Για τη σύγκλιση του ΝΔΠΚΕΛ (2.11) αρκούσε η κυρτότητα της  $f$  σε κάποιο ανοικτό, κυρτό υποσύνολό του  $R^n$ .

Το ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3) στην περίπτωση του κυρτού προβλήματος ΠΚ γράφεται:

$$\dot{x}(t) = -\mu P \nabla f(x(t)) - \rho(t) A (A^T A)^{-1} (A^T x(t) - b), \text{ με } \mu > 0 \text{ και } x_0 \in R^n \quad (3.11)$$

όπου  $\rho(t) = -\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$  και  $P = I - A(A^T A)^{-1} A^T$  ο πίνακας προβολής (βλ.

Παράγραφο 2.1), ο οποίος λόγω των γραμμικών περιορισμών είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος της λύσης του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11).

Ο πολλαπλασιαστής Lagrange στην περίπτωση αυτή είναι :

$$\lambda(t) = -\left(A^T A\right)^{-1} \left( A^T \nabla f(x(t)) + \frac{\rho(t)}{\mu} h(x(t)) \right) \quad (3.12)$$

Έστω  $G$  το σύνολο των σημείων του  $R^n$  που είναι ελάχιστα του προβλήματος ΠΚ. Λόγω κυρτότητας τα τοπικά ελάχιστα του προβλήματος είναι και ολικά (βλ. Κεφ.1, Προτ. 1.40α). Στην πρόταση που ακολουθεί διατυπώνεται το συμπέρασμα ότι, τα σημεία ισορροπίας του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11) είναι ολικά ελάχιστα του προβλήματος ΠΚ.

**Πρόταση 3.9** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 2K. Τότε το σύνολο  $E_2$  των σημείων ισορροπίας του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11) είναι το σύνολο  $G$  των ολικών ελαχίστων του προβλήματος ΠΚ, δηλαδή  $E_2 = G$ .



Απόδειξη

Λόγω κυρτότητας του προβλήματος, από το Θεώρημα 1.45 προκύπτει ότι, το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες α' τάξης του προβλήματος ΠΚ είναι το σύνολο  $G$  των ολικών ελαχίστων του, δηλαδή  $G = D$ . Από την Πρόταση 3.6, είναι  $E_2 = D$ . Τελικά λοιπόν το σύνολο των σημείων ισορροπίας ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11) είναι ίσο με το σύνολο  $G$ .  $\square$

Η κυρτότητα της συνάρτησης  $f$  εξασφαλίζει το φραγμένο των λύσεων του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11). Την ιδιότητα αυτή δεν διαθέτει γενικά το ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3), που αναφέρεται στη γενικότερη περίπτωση του προβλήματος Π. Οι επόμενες προτάσεις διατυπώνουν συμπεράσματα απαραίτητα, για την απόδειξη αυτής της ιδιότητας.

**Πρόταση 3.10** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 2Κ. Τότε η παράγωγος της συνάρτησης  $f$  στην κατεύθυνση του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11) είναι άνω φραγμένη,

δηλαδή υπάρχει  $b \in R$ , τέτοιο ώστε  $\left. \frac{df(x)}{dt} \right|_{(3.11)} \leq b, \forall x \in \Omega$ .

Απόδειξη

Η παράγωγος της συνάρτησης στην  $f$  κατεύθυνση του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11) είναι

$$\begin{aligned} \left. \frac{df(x)}{dt} \right|_{(3.3)} &= \nabla f(x)^T \dot{x}(t) = \\ &= -\mu \nabla f(x)^T P \nabla f(x) - \rho(t) \nabla f(x)^T A (A^T A)^{-1} (A^T x - b) = \\ &= -\mu \|P \nabla f(x)\|_2^2 + \dot{k}(t) \nabla f(x)^T A (A^T A)^{-1} (A^T x_0 - b), \quad \forall t \in [0, \omega]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Έστω η συνάρτηση  $\phi: R^n \times R^+ \rightarrow R$  με  $\phi(y, t) = -\mu \|Py\|_2^2 + \dot{k}(t) y^T q$  όπου  $q = A(AA)^{-1} (A^T x_0 - b)$ . Έστω  $y^*(t)$  λύση του προβλήματος:  $\max_{y \in \Omega_K} \{\phi(y, t)\}$ .

Τότε  $\nabla\phi(y^*(t), t) = 0 \Leftrightarrow Py^*(t) = \frac{\dot{k}(t)}{2\mu}q$ , άρα  $\dot{k}(t)y^*(t)^T q = 2\mu\|Py^*(t)\|_2^2$

και  $\|Py^*(t)\|_2^2 = \frac{(\dot{k}(t))^2}{4\mu^2}\|q\|_2^2$ , οπότε ισχύει

$$\max_{y \in R^n} \{\phi(y, t)\} = \phi(y^*(t), t) = \frac{(\dot{k}(t))^2}{4\mu}\|q\|_2^2, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.14)$$

Από (3.13) και (3.14) προκύπτει:

$$\frac{df(x)}{dt} \leq \frac{(\dot{k}(t))^2}{4\mu} \left\| A(A^T A)^{-1} (A^T x_0 - b) \right\|_2^2, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.15)$$

□

Για την απόδειξη της σύγκλισης της λύσης του ΝΔΠΚΜΕΛ εφαρμόζοντας το Θεώρημα LaSalle, απαιτείται η εύρεση μιας συνάρτησης που φθίνει κατά μήκος της λύσης του. Για το λόγο αυτό στην περίπτωση του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3) (βλ. Θεώρημα 3.7), που αφορά τη γενικότερη περίπτωση του προβλήματος Π, υιοθετείται η υπόθεση της φραγμένης λύσης, ώστε να γίνει δυνατή η κατασκευή μιας τέτοιας συνάρτησης. Στην περίπτωση όμως του κυρτού προβλήματος ΠΚ, η φθίνουσα κατά μήκος της λύσης του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11) συνάρτηση, όχι μόνο δεν απαιτεί το φραγμένο της λύσης, αλλά αντίστροφα είναι βασικό εργαλείο απόδειξής του. Σχετικές είναι οι δύο προτάσεις που ακολουθούν.

**Πρόταση 3.11** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 2K και έστω η συνάρτηση  $V: R^n \rightarrow R$  με  $V(x) = f(x) + c\|A^T x - b\|_1$ . Ας είναι  $x(t)$  λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11) που ξεκινά από σημείο  $x_0 \in R^n$  και έχει  $[0, \omega)$  μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης. Τότε υπάρχει  $\tilde{c} \in R$ ,  $\tilde{c} > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $c \geq \tilde{c}$ ,  $D^+V(x(t), t) \leq 0$ ,  $\forall t \in [0, \omega)$ , όπου  $D^+V(x(t), t)$  η άνω δεξιά παράγωγος της  $V$ , κατά μήκος της λύσης  $x(t)$ .

Απόδειξη

Από το σύστημα εξισώσεων (3.1α) προκύπτουν  $V(x(t)) = f(x(t)) + c\|A^T x(t) - b\|_1 = f(x(t)) + ck(t)\|A^T x_0 - b\|_1$ . Αφού η συνάρτηση  $V$  είναι τοπικά Lipschitz ισχύει ότι η άνω δεξιά παράγωγος της  $V$ , κατά μήκος της λύσης  $x(t)$ ,  $D^+V(x(t), t)$ , ισούται με την παράγωγο της συνάρτησης  $V(x(t))$ . Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη και την ανισότητα (3.15) ισχύουν τα εξής

$$D^+V(x(t), t) = \frac{dV(x(t))}{dt} = \frac{df(x(t))}{dt} + ck(t)\|A^T x_0 - b\|_1 \Rightarrow$$

$$D^+V(x(t), t) \leq \frac{(\dot{k}(t))^2}{4\mu} \|A(A^T A)^{-1}(A^T x_0 - b)\|_2^2 + ck(t)\|A^T x_0 - b\|_1, \forall t \in [0, \omega). \quad (3.16)$$

Η ανισότητα (3.16) λόγω του (iv) του Ορισμού 3.1 γίνεται

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leq -\frac{bk(t)}{4\mu} \|A(A^T A)^{-1}(A^T x_0 - b)\|_2^2 + ck(t)\|A^T x_0 - b\|_1 =$$

$$= \dot{k}(t)\|A^T x_0 - b\|_1 \left( c - \frac{b}{4\mu} \frac{\|A(A^T A)^{-1}(A^T x_0 - b)\|_2^2}{\|A^T x_0 - b\|_1} \right), \forall t \in [0, \omega). \quad (3.17)$$

Το συμπέρασμα της πρότασης προκύπτει, από την ανισότητα (3.17) αν

$$A^T x_0 - b \neq 0 \text{ επιλέγοντας } c \geq \beta \frac{\|A(A^T A)^{-1}(A^T x_0 - b)\|_2^2}{4\mu\|A^T x_0 - b\|_1} \stackrel{op}{=} \tilde{c} \text{ και από την}$$

ανισότητα (3.16) αν  $A^T x_0 - b = 0$  επιλέγοντας  $c \geq 0 \stackrel{op}{=} \tilde{c}$ .  $\square$

Για την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης, δεν χρειάστηκε η κυρτότητα της συνάρτησης  $f$  μόνο η γραμμικότητα των ισοτικών περιορισμών. Στη συνέχεια από την κυρτότητα της  $f$  και την προηγούμενη πρόταση, θα προκύψει το φραγμένο των λύσεων του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11).

**Πρόταση 3.12** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 2Κ και έστω ότι το σύνολο  $G$  των ολικών ελαχίστων του προβλήματος ΠΚ είναι μη κενό και φραγμένο. Τότε

κάθε λύση  $x(t)$  του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11) είναι φραγμένη και εκτείνεται για άπειρο χρόνο.

Απόδειξη

Έστω  $[0, \omega)$  το μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης της λύσης  $x(t)$  του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11). Εύκολα από το δυναμικό σύστημα (3.11) και τις ισότητες (3.1α) προκύπτει  $A^T x(t) - b = k(t)(A^T x_0 - b)$ ,  $\forall t \in [0, \omega)$ . Λόγω της σχέσης  $k(t) \leq 1$  (Λήμμα 3.2) προκύπτει

$$\|A^T x(t) - b\|_2 \leq \|A^T x_0 - b\|_2, \quad \forall t \in [0, \omega) \quad (3.18)$$

Έστω  $y: R^n \rightarrow R^n$  με

$$y(x) = A(A^T A)^{-1}(2b - A^T x) \quad (3.19)$$

Για οποιοδήποτε  $x \in R^n$  θεωρείται το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ του  $x$  και  $y$ , δηλαδή  $ax + (1-a)y(x)$ ,  $a \in [0, 1]$  και συγκεκριμένα το σημείο  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y(x)$  που αντιστοιχεί σε  $a = \frac{1}{2}$ . Από την κυρτότητα της συνάρτησης  $f$  προκύπτει:

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y(x)\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y(x)), \quad \forall x \in R^n \quad (3.20)$$

Από την Πρόταση 3.11 η συνάρτηση  $V(x)$ , για κατάλληλη τιμή της παραμέτρου  $c$ , έχει  $D^+V(x(t), t) \leq 0$ ,  $\forall t \in [0, \omega)$ , που σημαίνει ότι η συνάρτηση  $V(x)$  μειώνεται κατά μήκος της λύσης  $x(t)$ , οπότε

$$f(x(t)) + c\|A^T x(t) - b\|_1 = V(x(t)) \leq V(x_0), \quad \forall t \in [0, \omega). \quad (3.21)$$

Η ανισότητα (3.20), λόγω της ισότητας (3.21) γίνεται

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(x(t))\right) &\leq \frac{1}{2}f(x(t)) + \frac{1}{2}f(y(x(t))) \leq \\ &\leq \frac{1}{2}V(x_0) + \frac{1}{2}f(y(x(t))), \quad \forall t \in [0, \omega). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Από τον ορισμό (3.19) λόγω της ανισότητας (3.18), είναι

$$\begin{aligned} \|y(x(t))\|_2 &= \left\| A(A^T A)^{-1} b + A(A^T A)^{-1} (b - A^T x(t)) \right\|_2 \leq \\ &\left\| A(A^T A)^{-1} b \right\|_2 + |k(t)| \left\| A(A^T A)^{-1} (b - A^T x_0) \right\|_2, \quad \forall t \in [0, \omega) \text{ και λόγω της σχέσης} \\ &k(t) \leq 1, \end{aligned}$$

$$\|y(x(t))\|_2 \leq \hat{M}, \quad \forall t \in [0, \omega) \quad (3.23)$$

όπου  $\hat{M} = \left\| A(A^T A)^{-1} b \right\|_2 + \left\| A(A^T A)^{-1} (A^T x_0 - b) \right\|_2$ . Έτσι από το Θεώρημα

Weierstrass (Θεώρημα 1.28) υπάρχει πεπερασμένο  $M$ , τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \sup_t \{f(y(t)) : t \in [0, \omega)\} &= \sup_{t, \psi} \{f(y) : \psi = y(x(t)), t \in [0, \omega)\} \\ &\leq \max_{\psi} \{f(\psi) : \|\psi\| \leq \hat{M}\} = M \end{aligned} \quad (3.24)$$

Από τις σχέσεις (3.22) και (3.24) λαμβάνεται

$$f\left(\frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(x(t))\right) \leq \frac{1}{2}(V(x_0) + M) \stackrel{op}{=} K, \quad \forall t \in [0, \omega) \quad (3.25)$$

που σημαίνει ότι το σημείο  $\frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(x(t))$  ανήκει στο  $K$  υσοΰψες σύνολο

(level set) της κυρτής συνάρτησης  $f$ . Επιπλέον το σημείο  $\frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(x(t))$

ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος ΠΚ, αφού λόγω της (3.19) είναι

$$A^T \left( \frac{x(t)}{2} + \frac{y(x(t))}{2} \right) = \frac{1}{2} A^T x(t) + \frac{1}{2} A^T A (A^T A)^{-1} (2b - A^T x(t)) = b, \quad \forall t \in [0, \omega) \quad (3.26)$$

Από τις σχέσεις (3.25) και (3.26) προκύπτει

$$\frac{1}{2}(x(t) + y(x(t))) \in Z \stackrel{op}{=} \{z \in R^n : A^T z - b = 0 \text{ και } f(z) \leq K\}, \quad \forall t \in [0, \omega) \quad (3.27)$$

Από την Πρόταση 1.39, αφού από υπόθεση το σύνολο  $G$  των ολικών ελαχίστων του προβλήματος ΠΚ είναι φραγμένο και το σύνολο  $Z$  της σχέσης (3.27) είναι υποσύνολο του  $K$  υσοΰψους συνόλου της κυρτής συνάρτησης  $f$ , προκύπτει

ότι το σύνολο  $Z$  είναι συμπαγές, για κάθε  $K \in \mathbb{R}$ . Έτσι  $\|x(t) + y(x(t))\|_2 \leq \tilde{M}$ ,  $\forall t \in [0, \omega)$ . Οπότε από τα προηγούμενα και την ανισότητα (3.23) προκύπτει  $\|x(t)\|_2 \leq \|x(t) + y(x(t))\|_2 + \|y(x(t))\|_2 \leq \tilde{M} + \hat{M}$ ,  $\forall t \in [0, \omega)$ , που σημαίνει ότι η λύση  $x(t)$  του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11) είναι φραγμένη,  $\forall t \in [0, \omega)$ . Από την Πρόταση 1.6 προκύπτει η ύπαρξη της λύσης για άπειρο χρόνο, δηλαδή  $\omega = \infty$ .  $\square$

Ακολουθεί το πόρισμα του Θεωρήματος 3.7, που αφορά τη σύγκλιση του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11) του προβλήματος ΠΚ. Προκύπτει εύκολα από την προηγούμενη πρόταση, λαμβάνοντας υπόψη ότι το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες α'τάξης του προβλήματος ΠΚ είναι το σύνολο  $G$  των ολικών ελαχίστων του.

**Πόρισμα 3.13** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 2Κ και έστω ότι το σύνολο των ολικών ελαχίστων του προβλήματος ΠΚ είναι μη κενό και φραγμένο. Τότε όλες οι λύσεις του ΝΔΠΚΕΛ (3.11) συγκλίνουν στο σύνολο  $G$  των ολικών ελαχίστων του προβλήματος ΠΚ, καθώς  $t \rightarrow \infty$ , δηλαδή  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$  ισχύει  $x(t) \rightarrow G$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Στην περίπτωση αυστηρής κυρτότητας της  $f$ , το πρόβλημα ΠΚ έχει το πολύ ένα ολικό ελάχιστο, οπότε από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 3.14** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 2Κ, έστω ότι η συνάρτηση  $f$  είναι αυστηρά κυρτή στο  $\mathbb{R}^n$  και έστω ότι το πρόβλημα ΠΚ έχει ολικό ελάχιστο το  $x^*$ . Τότε κάθε λύση του ΝΔΠΚΕΛ (3.11) τείνει στο  $x^*$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ , δηλαδή  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$  ισχύει  $x(t) \rightarrow x^*$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

### 3.4 Ταχύτητα σύγκλισης των λύσεων του ΝΔΠΚΜΕΛ

Στην παράγραφο αυτή, διατυπώνονται συμπεράσματα, για την ταχύτητα σύγκλισης των λύσεων του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3) του προβλήματος Π. Συγκεκριμένα για τις λύσεις που συγκλίνουν σε σημείο που ικανοποιεί τις ικανές συνθήκες ελαχίστου β' τάξης αποδεικνύεται εκθετική ταχύτητα σύγκλισης. Το συμπέρασμα είναι ισχυρότερο στην περίπτωση κυρτού προβλήματος με αυστηρό ολικό ελάχιστο. Αποδεικνύεται τότε ότι όλες οι λύσεις του ΝΔΠΚΜΕΛ συγκλίνουν εκθετικά στο σημείο αυστηρού ολικού ελαχίστου. Απαιτείται ενίσχυση της Υπόθεσης 2, θεωρώντας τις συναρτήσεις του προβλήματος Π δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες.

**Υπόθεση 2ΤΣ:** (α) Οι συναρτήσεις  $f$  και  $h_1, \dots, h_m$  είναι πραγματικές και δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες στο  $\Omega \subset R^n$ ,

(β)  $\text{rank}(\nabla h(x)) = m, \forall x \in \Omega$  και

(γ)  $m < n$ .

**Θεώρημα 3.15** Έστω ότι η Υπόθεση 2ΤΣ ισχύει και έστω ότι, στο σημείο  $x^*$  το πρόβλημα Π έχει τοπικό ελάχιστο που ικανοποιεί τις ικανές συνθήκες ελαχίστου β' τάξης. Ας είναι  $x(t)$  μια λύση του αυτόνομου ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3) δηλαδή με  $k(t) = \exp(-\rho t)$ ,  $\rho > 0$ ,  $t \geq 0$ , που συγκλίνει στο  $x^*$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Τότε η ταχύτητα σύγκλισης της λύσης  $x(t)$  είναι εκθετική, δηλαδή υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\Psi > 0$  και  $\xi > 0$  τέτοιοι ώστε

$$\|x(t) - x^*\| \leq \Psi \exp(-\xi t), \forall t \geq 0. \quad (3.28)$$

Απόδειξη

Οι πολλαπλασιαστές Lagrange που αντιστοιχούν στο  $x^*$  είναι  $\lambda^* = -[\nabla h(x^*)^T \nabla h(x^*)]^{-1} \nabla h(x^*)^T \nabla f(x^*)$ . Τότε αφού  $P(x) \nabla h(x) = 0$  (βλ. Παράγραφο 2.1), ισχύει  $P(x) \nabla f(x) = P(x) (\nabla f(x) + \nabla h(x) \lambda^*)$ . Θεωρώντας το

ανάπτυγμα Taylor της παράστασης  $\nabla f(x) + \nabla h(x)\lambda^*$  γύρω από το  $x^*$  και λαμβάνοντας υπόψη ότι,  $\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda^* = 0$ , τα προηγούμενα γράφονται:

$$\begin{aligned} P(x)\nabla f(x) &= P(x)\left(\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda^* + \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2}(x-x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \frac{\partial^2 h_i(x^*)}{\partial x^2}(x-x^*) + o(\|x-x^*\|)\right) = \\ &= P(x)\frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2}(x-x^*) + o(\|x-x^*\|) \end{aligned} \quad (3.29)$$

όπου  $L(x, \lambda) = f(x) + h(x)\lambda$  η συνάρτηση Lagrange του προβλήματος Π.

Για δεδομένο  $x \in \Omega$  έστω  $F(x)$  ένας  $n \times (n-m)$  πλήρους βαθμού πίνακας, συνεχής ως προς  $x$ , τέτοιος ώστε

$$\nabla h(x)^T F(x) = 0 \quad \text{και} \quad F(x)^T F(x) = I_{n-m} \quad (3.30)$$

Ένας τέτοιος πίνακας προκύπτει από μια QR παραγοντοποίηση του πίνακα

$$\begin{bmatrix} \nabla h(x)^T \\ F(x)^T \end{bmatrix} (P(x) - F(x)F(x)^T) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και ο πίνακας  $\begin{bmatrix} \nabla h(x)^T \\ F(x)^T \end{bmatrix}$  είναι πλήρους βαθμού. Έτσι, εύκολα προκύπτει ότι,

$$P(x) = F(x)F(x)^T \quad (3.31)$$

Επιπλέον από την σχέση (2.6α) και την ισότητα (3.31) προκύπτει

$$I_n = F(x)F(x)^T + \nabla h(x)(\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} \nabla h(x)^T \quad (3.32)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (3.29) και (3.31) στο ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3) προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{d(x-x^*)}{dt} &= -\mu F(x)F(x)^T \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2}(x-x^*) - \\ &\quad - \rho \nabla h(x)(\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} h(x) + o(\|x-x^*\|) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (3.33) από αριστερά με  $(x-x^*)^T$  και αντικαθιστώντας τον πίνακα  $I_n$  από τη σχέση (3.32) προκύπτει



$$\begin{aligned}
(x-x^*)^T \frac{d(x-x^*)}{dt} &= -\mu(x-x^*)^T F(x)F(x)^T \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} F(x)F(x)^T (x-x^*) - \\
&\quad -\mu(x-x^*)^T F(x)F(x)^T \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} \nabla h(x) (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} \nabla h(x)^T (x-x^*) - \\
&\quad -\rho(x-x^*)^T \nabla h(x) (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} h(x) + o(\|x-x^*\|^2) \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Για οποιοδήποτε  $x \in \Omega$  έστω  $a_{\min}(x)$  η ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα  $F(x)^T \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} F(x)$ . Υπενθυμίζεται ότι ο πίνακας  $F(x)$  έχει κατασκευαστεί

να είναι συνεχής ως προς  $x \in \Omega$ , οπότε η ιδιοτιμή  $a_{\min}(x)$  είναι συνεχής ως προς  $x \in \Omega$ . Το σημείο  $x^*$  ικανοποιεί τις συνθήκες β' τάξης, άρα είναι  $a_{\min}(x^*) > 0$ . Έτσι υπάρχει  $\tilde{\delta} > 0$  τέτοιο ώστε  $a_{\min}(x) > 0, \forall x \in \Omega \cap N(x^*, \tilde{\delta})$ .

Έστω  $a_{\min}^* \stackrel{op}{=} \min_{x \in \Omega} \{a_{\min}(x) : \|x-x^*\| \leq \tilde{\delta}\}$ . Τότε προφανώς

$$a_{\min}(x) \geq a_{\min}^* > 0, \forall x \in \Omega \cap N(x^*, \tilde{\delta}) \quad (3.35)$$

Τότε  $\forall x \in \Omega \cap N(x^*, \tilde{\delta})$  είναι

$$\begin{aligned}
&-\mu(x-x^*)^T F(x)F(x)^T \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} F(x)F(x)^T (x-x^*) \leq -\mu a_{\min}^* \|F(x)^T (x-x^*)\|^2 = \\
&= -\mu a_{\min}^* (x-x^*)^T F(x)F(x)^T (x-x^*) = \\
&= -\mu a_{\min}^* (x-x^*)^T \left( I - \nabla h(x) (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} \nabla h(x)^T \right) (x-x^*) = \\
&= -\mu a_{\min}^* \|x-x^*\|^2 + \mu a_{\min}^* (x-x^*)^T \nabla h(x) (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} \nabla h(x)^T (x-x^*) \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Εφόσον  $h(x^*) = 0$ , το ανάπτυγμα Taylor του  $h(x^*)$ , στο σημείο  $x \in R^n$  δίνει :

$$\begin{aligned}
h(x^*) &= h(x) + \nabla h(x)^T (x^*-x) + o(\|x-x^*\|) \Rightarrow \\
&\Rightarrow h(x) = \nabla h(x)^T (x-x^*) + o(\|x-x^*\|) \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (3.36) και (3.37) και εφαρμόζοντας την ισότητα

$$\|x-x^*\| \frac{d\|x-x^*\|}{dt} = (x-x^*)^T \frac{d(x-x^*)}{dt}, \text{ η ισότητα (3.34) δίνει:}$$

$$\begin{aligned} \|x-x^*\| \frac{d\|x-x^*\|}{dt} &\leq -\mu a_{\min}^* \|x-x^*\|^2 + (\mu a_{\min}^* - \rho)(x-x^*)^T \nabla h(x) (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} h(x) - \\ &- \mu (x-x^*)^T F(x) F(x)^T \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x^2} \nabla h(x) (\nabla h(x)^T \nabla h(x))^{-1} h(x) + o(\|x-x^*\|^2), \\ &\quad \forall x \in \Omega \cap N(x^*, \tilde{\delta}) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Εφόσον  $\lim_{t \rightarrow \infty} \{x(t)\} = x^*$ , υπάρχει  $\tilde{T} \geq 0$  τέτοιο ώστε  $x(t) \in \Omega \cap N(x^*, \tilde{\delta})$ ,

$\forall t \geq \tilde{T}$ . Αφού το δυναμικό σύστημα ικανοποιεί τις ισότητες (3.1α) ισχύει

$$h(x(t)) = \exp(-\rho t) h(x_0), \quad \forall t \geq 0 \quad (3.39)$$

Έστω  $\Psi_1 = \max_{y \in R^n} \left\{ \left\| \nabla h(y) (\nabla h(y)^T \nabla h(y))^{-1} h(x_0) \right\| : \|y - x^*\| \leq \tilde{\delta} \right\}$  και έστω

$$\Psi_2 = \max_{y \in R^n} \left\{ \left\| F(y)^T F(y)^T \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda(x^*))}{\partial x^2} \nabla h(y) (\nabla h(y)^T \nabla h(y))^{-1} h(x_0) \right\| : \|y - x^*\| \leq \tilde{\delta} \right\}.$$

Τότε από το Θεώρημα Weierstrass τα  $\Psi_1$  και  $\Psi_2$  υπάρχουν και είναι πεπερασμένα. Έτσι εφαρμόζοντας τις ισότητες (3.39) στην ανισότητα (3.38) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \|x(t) - x^*\| \frac{d\|x(t) - x^*\|}{dt} &\leq -\mu a_{\min}^* \|x(t) - x^*\|^2 + |\mu a_{\min}^* - \rho| \Psi_1 \exp(-\rho t) \|x(t) - x^*\| + \\ &+ \mu \Psi_2 \exp(-\rho t) \|x(t) - x^*\| + o(\|x(t) - x^*\|^2), \quad \forall t \geq \tilde{T}, \text{ δηλαδή} \\ \frac{d\|x(t) - x^*\|}{dt} &\leq -\mu a_{\min}^* \|x(t) - x^*\| + \Psi_3 \exp(-\rho t) + o(\|x - x^*\|), \quad \forall t \geq \tilde{T} \end{aligned} \quad (3.40)$$

όπου  $\Psi_3 = |\mu a_{\min}^* - \rho| \Psi_1 + \mu \Psi_2 > 0$ . Από τον ορισμό του  $o(\cdot)$  και την υπόθεση

$\lim_{t \rightarrow \infty} \{x(t)\} = x^*$  προκύπτει ότι για κάθε  $\delta > 0$ , υπάρχει  $T \geq \tilde{T}$  τέτοιο ώστε η

ανισότητα (3.40) γίνεται

$$\frac{d\|x(t) - x^*\|}{dt} \leq -(\mu a_{\min}^* - \delta) \|x(t) - x^*\| + \Psi_3 \exp(-\rho t), \quad \forall t \geq T \quad (3.41)$$

Επιλέγοντας  $\delta \in (0, \mu a_{\min}^*)$ , είναι  $\mu a_{\min}^* - \delta > 0$  και η ανισότητα (3.41) δίνει:

$$\frac{d\|x(t) - x^*\|}{dt} \leq -(\mu a_{\min}^* - \delta)\|x(t) - x^*\| + \Psi_3 \exp(-\rho t), \quad \forall t \geq T \quad (3.42)$$

Πολλαπλασιάζοντας την ανισότητα (3.42) με την παράσταση  $\exp((\mu a_{\min}^* - \delta)t)$

$$\text{προκύπτει: } \frac{d}{dt} \left( \exp((\mu a_{\min}^* - \delta)t) \|x(t) - x^*\| \right) \leq \Psi_3 \exp((\mu a_{\min}^* - \delta - \rho)t), \quad \forall t \geq T$$

η οποία ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $[0, t)$  δίνει:

$$\begin{aligned} & \exp((\mu a_{\min}^* - \delta)t) \|x(t) - x^*\| - \exp((\mu a_{\min}^* - \delta)T) \|x(T) - x^*\| \leq \\ & \leq \frac{\Psi_3}{\mu a_{\min}^* - \delta - \rho} \left[ \exp((\mu a_{\min}^* - \delta - \rho)t) - \exp((\mu a_{\min}^* - \delta - \rho)T) \right], \quad \forall t \geq T. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Μετά από απλές πράξεις η ανισότητα (3.43) δίνει:

$$\|x(t) - x^*\| \leq \Psi_4 \exp(-\rho t) + \Psi_5 \exp(-(\mu a_{\min}^* - \delta)t), \quad \forall t \geq T \quad (3.44)$$

$$\text{όπου } \Psi_4 = \left| \frac{\Psi_3}{\mu a_{\min}^* - \delta - \rho} \right| > 0 \text{ και}$$

$$\Psi_5 = \left| \|x(T) - x^*\| \exp((\mu a_{\min}^* - \delta)T) - \frac{\Psi_3}{\mu a_{\min}^* - \delta - \rho} \exp((\mu a_{\min}^* - \delta - \rho)T) \right| > 0.$$

Ορίζοντας  $\Psi_6 = \max\{\Psi_4, \Psi_5\}$  και  $\xi = \min\{\rho, \mu a_{\min}^* - \delta\} > 0$ , η ανισότητα (3.44) γίνεται:

$$\|x(t) - x^*\| \leq \Psi_6 \exp(-\xi t), \quad \forall t \geq T \quad (3.45)$$

Για το πεπερασμένο διάστημα  $[0, T]$ , από το Θεώρημα Weierstrass, η ποσότητα:  $\max_{t \in R} \{ \|x(t) - x^*\| \exp(\xi t) : t \in [0, T] \} = \Psi_7 > 0$  υπάρχει και είναι πεπερασμένη, έτσι

$$\|x(t) - x^*\| \leq \Psi_7 \exp(-\xi t), \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.46)$$

Από τις σχέσεις (3.45) και (3.46) επιλέγοντας  $\Psi = \max\{\Psi_6, \Psi_7\}$  προκύπτει η σχέση (3.28).  $\square$

Ισχυρότερα αποτελέσματα προκύπτουν στην περίπτωση του ΝΔΠΚΜΕΛ που αφορά το κυρτό πρόβλημα ΠΚ. Στην περίπτωση αυτή η λύση του

ΝΔΠΚΜΕΛ συγκλίνει στο  $x^*$ . Πράγματι αν το  $x^*$  είναι λύση του προβλήματος ΠΚ, τότε ικανοποιεί τις συνθήκες ελαχίστου του ΠΚ και άρα το  $x^*$  είναι ένα απομονωμένο σημείο. Έτσι το σύνολο  $G$ , ως κυρτό περιλαμβάνει μόνο αυτό το σημείο, δηλαδή,  $G = \{x^*\}$ , οπότε από το Πρόρισμα 3.13 προκύπτει ότι η λύση  $x(t)$  συγκλίνει στο  $x^*$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Από τα ανωτέρω προκύπτει το ακόλουθο πρόρισμα του Θεωρήματος 3.15.

**Πόρισμα 3.16** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 2Κ ενισχυμένη ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη στο  $R^n$  και έστω ότι, στο σημείο  $x^* \in R^n$  το πρόβλημα ΠΚ έχει ελάχιστο που ικανοποιεί τις ικανές συνθήκες ελαχίστου του ΠΚ. Ας είναι  $x(t)$  λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11), με  $\rho(t) = \rho > 0$ . Τότε η λύση  $x(t)$  συγκλίνει στο  $x^*$  εκθετικά, δηλαδή υπάρχουν υπάρχον πραγματικοί αριθμοί  $\Psi > 0$  και  $\xi > 0$  τέτοιοι ώστε:

$$\|x(t) - x^*\| \leq \Psi \exp(-\xi t), \quad \forall t \geq 0. \quad \square$$

### 3.4 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό προτείνεται ένα δεύτερο Νευρωνικό Δίκτυο συνεχούς χρόνου (ΝΔΠΚΜΕΛ) για την επίλυση του προβλήματος ελαχίστου με ισοτικούς περιορισμούς. Το ΝΔΠΚΜΕΛ βασίζεται σε ένα συνδυασμό της μεθόδου προβολής της κλίσης με ομοτοπικές μεθόδους επίλυσης των ισοτικών περιορισμών. Το αρχικό σημείο του ΝΔΠΚΜΕΛ δεν απαιτείται να ικανοποιεί τους περιορισμούς. Όταν το αρχικό σημείο δεν είναι επιτρεπτό σημείο, η τροχιά του ΝΔΠΚΜΕΛ δεν είναι επιτρεπτή, κατα μήκος της όμως μειώνεται το μέτρο των περιορισμών. Ουσιαστικά πρόκειται για τη γενίκευση του ΝΔΠΚΕΛ, αφού για επιτρεπτά αρχικά σημεία τα ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ ταυτίζονται. Στην κατεύθυνση του ΝΔΠΚΜΕΛ, γενικά, η συνάρτηση κόστους του προβλήματος δεν μειώνεται. Για τις ανάγκες της απόδειξης της σύγκλισης των λύσεών του, κατασκευάζεται μια μη διαφορίσιμη ακριβής συνάρτηση ποινής που μειώνεται

στην κατεύθυνσή του. Οι υποθέσεις που γίνονται για τον ορισμό του ΝΔΠΚΜΕΛ είναι οι συνήθεις υποθέσεις που υιοθετεί η μέθοδος προβολής της κλίσης.

Η προσέγγιση της ποιοτικής συμπεριφοράς του ΝΔΠΚΜΕΛ, δεν είναι η συνήθης της βιβλιογραφίας των Νευρωνικών Δικτύων. Συγκεκριμένα, διατυπώνεται ένα γενικό θεώρημα σύγκλισης, στο οποίο χωρίς να υποτίθεται η κυρτότητα του προβλήματος ελαχιστοποίησης, που είναι συνήθης υπόθεση για τη μελέτη της ευστάθειας των Νευρωνικών Δικτύων, αποδεικνύεται ότι οι φραγμένες λύσεις του ΝΔΠΚΜΕΛ συγκλίνουν στο σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου άτάξης. Το συμπέρασμα αυτό είναι παρόμοιο με τα θεωρήματα σύγκλισης του μη γραμμικού προγραμματισμού και μπορεί να θεωρηθεί ως η συνεχούς χρόνου εκδοχή αυτών των αποτελεσμάτων. Στην περίπτωση φραγμένου κυρτού προβλήματος αποδεικνύεται ότι όλες οι λύσεις του ΝΔΠΚΜΕΛ είναι φραγμένες λύσεις και συγκλίνουν στο σύνολο των ολικών ελαχίστων του. Στην ειδική περίπτωση, που η συνάρτηση κόστους του προβλήματος με γραμμικούς ιστοικούς περιορισμούς είναι αυστηρά κυρτή, το ΝΔΠΚΜΕΛ συγκλίνει στο ολικό ελάχιστο του προβλήματος. Σχετικά με την ταχύτητα σύγκλισης των λύσεων του ΝΔΠΚΜΕΛ που συγκλίνουν σε σημεία όπου το πρόβλημα ελαχιστοποίησης έχει αυστηρά τοπικά ελάχιστα αποδεικνύεται ότι είναι εκθετική. Ειδικότερα για το κυρτό πρόβλημα αποδεικνύεται ότι όλες οι λύσεις του ΝΔΠΚΜΕΛ συγκλίνουν με εκθετική ταχύτητα, στο σημείο στο οποίο το πρόβλημα έχει αυστηρό ελάχιστο.

Αριθμητικά αποτελέσματα εφαρμογής του ΝΔΠΚΜΕΛ και ενδεικτικές κυκλωματικές υλοποιήσεις του δίνονται στα Κεφάλαια 5 και 6 αντίστοιχα.

## 4<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΤΟ ΝΕΥΡΩΝΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ

### ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

#### 4.1 Ορισμός του νέου Νευρωνικού Δικτύου

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα ακόμα νέο Νευρωνικό Δίκτυο συνεχούς χρόνου τύπου Hopfield, για την επίλυση του ακόλουθου προβλήματος ελαχιστοποίησης με ισοτικούς περιορισμούς:

$$\min_{x \in \Omega} \{f(x) : h_1(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0\} \quad \Pi$$

ή σε σύντομη γραφή  $\min_{x \in \Omega} \{f(x) : h(x) = 0\}$ , όπου  $h(x) = [h_1(x), \dots, h_m(x)]^T$  και  $f(x), h_1(x), \dots, h_m(x)$  βαθμωτές και συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις στο ανοικτό σύνολο  $\Omega \subset R^n$ . Για το πρόβλημα  $\Pi$  ορίζονται τα σύνολα:

$$F = \{y \in \Omega : h(y) = 0\}$$

που είναι το επιτρεπτό σύνολο του προβλήματος  $\Pi$ , δηλαδή το σύνολο των σημείων του συνόλου  $\Omega$  που ικανοποιούν τους περιορισμούς, καθώς και το σύνολο

$$D = \{(y, \lambda) \in F \times R^m : \nabla f(y) + \nabla h(y)\lambda = 0\}$$

όπου  $\nabla f(x) = \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]^T$  και  $\nabla h(x) = [\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_m(x)]$ , το οποίο

περιλαμβάνει τα ζεύγη  $(x, \lambda) \in \Omega \times R^m$  των σημείων  $x$  που ικανοποιούν τις

αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου α'τάξης του προβλήματος  $\Pi$ , με τους αντίστοιχους πολλαπλασιαστές Lagrange  $\lambda$ .

Υπενθυμίζεται ότι,  $L(x, \lambda) = f(x) + h(x)^T \lambda$  είναι η συνάρτηση Lagrange του προβλήματος  $\Pi$ ,  $\nabla L(x, \lambda)$  είναι η κλίση της ως προς  $x$  και  $\frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2}$  είναι η μήτρα δευτέρων παραγώγων της, ως προς  $x$ .

Το νέο Νευρωνικό Δίκτυο βασίζεται στην εξής ιδέα: **ορίζεται ένα νέο δυναμικό σύστημα του οποίου η λύση  $(x(t), \lambda(t))$  ξεκινά από τυχαίο σημείο του  $\Omega \times R^m$  και κατά μήκος της το μέτρο των ισοτικών περιορισμών  $\|h(x(t))\|$  και το μέτρο της κλίση της συνάρτησης Lagrange του προβλήματος  $\Pi \|\nabla L(x(t), \lambda(t))\|$  μειώνονται και τείνουν στο μηδέν, καθώς  $t \rightarrow \infty$ .** Το προκύπτον δυναμικό σύστημα είναι ένα σύστημα  $n+m$  α'τάξης διαφορικών εξισώσεων, με συνοριακή τιμή λύσης ένα τυχαίο αρχικό σημείο  $(x_0, \lambda_0) \in \Omega \times R^m$ . Ορίζονται οι δύο συνιστώσες της τροχιάς του, η βασική συνιστώσα  $x(t)$   $n$  διάστασης που αφορά τη μεταβλητή ως προς την οποία ελαχιστοποιείται η συνάρτηση  $f$  του προβλήματος  $\Pi$  και η συνιστώσα Lagrange  $\lambda(t)$   $m$  διάστασης, που σχετίζεται με τους πολλαπλασιαστές Lagrange.

Οι εξισώσεις κατάστασης του νέου δυναμικού συστήματος προκύπτουν εφαρμόζοντας την ιδέα της συνάρτησης οδηγού, που διατυπώθηκε στο προηγούμενο κεφαλαίο. Έστω ότι, για κάποια συνάρτηση οδηγό  $k$  (βλ. Ορισμό 3.1), η λύση  $(x(t), \lambda(t))$  του νέου δυναμικού συστήματος ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων:

$$\nabla L(x, \lambda) = k(t) \nabla L(x_0, \lambda_0), \text{ με } (x(0), \lambda(0)) = (x_0, \lambda_0) \in \Omega \times R^m, \forall t \geq 0 \quad (4.1\alpha)$$

$$h(x) = k(t) h(x_0), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.1\beta)$$

Τότε εύκολα για τη λύση  $(x(t), \lambda(t))$ , από το σύστημα (4.1), προκύπτουν τα

$$\text{εξής: } \|\nabla L(x(t), \lambda(t))\|_2 = k(t) \|\nabla L(x_0, \lambda_0)\|_2 \Leftrightarrow \frac{d\|\nabla L(x(t), \lambda(t))\|_2}{dt} = \dot{k}(t) \|\nabla L(x_0, \lambda_0)\|_2 \quad \text{και}$$

$$\|h(x(t))\|_2 = k(t) \|h(x_0)\|_2 \Leftrightarrow \frac{d\|h(x(t))\|_2}{dt} = \dot{k}(t) \|h(x_0)\|_2, \quad \forall t \geq 0. \quad \text{Έτσι από τα}$$

(ii) και (iii) του Ορισμού 1 προκύπτει ότι, τα μέτρα  $\|\nabla L(x(t), \lambda(t))\|_2$  και  $\|h(x(t))\|_2$  μειώνονται και τείνουν στο μηδέν, καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Η απόδειξη της πρότασης που ακολουθεί είναι παρόμοια με αυτή της Πρότασης 3.3 και για το λόγο αυτό παραλείπεται.

**Πρόταση 4.1** Αν  $(x(t), \lambda(t))$  λύση του συστήματος εξισώσεων (4.1), τότε

$$(x(t), \lambda(t)) \in H_0 = \{(x, \lambda) \in \Omega \times R^m : \min \left\{ \frac{\partial L(x_0, \lambda_0)}{\partial x_i}, 0 \right\} \leq \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_i} \leq \max \left\{ \frac{\partial L(x_0, \lambda_0)}{\partial x_i}, 0 \right\}\}$$

$$\text{και } \min \{h_j(x_0), 0\} \leq h_j(x) \leq \max \{h_j(x_0), 0\}, \quad \forall i=1, \dots, n \quad \text{και} \quad \forall j=1, \dots, m, \quad \forall t \geq 0.$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο, το σύστημα εξισώσεων (4.1) δίνει:

$$\frac{d\nabla L(x, \lambda)}{dt} = \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} \dot{x}(t) + \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial \lambda \partial x} \dot{\lambda} = \dot{k}(t) \nabla L(x_0, \lambda_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} \dot{x}(t) + \nabla h(x) \dot{\lambda}(t) = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \nabla L(x, \lambda) \quad \text{και} \quad (4.2\alpha)$$

$$\frac{dh(x)}{dt} = \nabla h(x)^T \dot{x} = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} h(x) \quad (4.2\beta)$$

Το σύστημα εξισώσεων (4.2) σε μητρική μορφή γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} & \nabla h(x) \\ \nabla h(x)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = -\rho(t) \begin{bmatrix} \nabla L(x, \lambda) \\ h(x) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Υπενθυμίζεται ότι,  $\rho(t) = -\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$  και λόγω του Ορισμού 3.1  $\rho(t) \geq 0$ ,

$\forall t \geq 0$ . Για τη λύση του γραμμικού, ως προς το διάνυσμα  $[\dot{x}^T \quad \dot{\lambda}^T]^T$ ,



συστήματος (4.3) ακολουθείται η μέθοδος της QR παραγοντοποίησης του  $n \times m$  πίνακα  $\nabla h(x)$ . Συγκεκριμένα, για οποιοδήποτε  $x \in \Omega$  υπάρχουν  $R(x)$ ,  $Q_1(x)$  και  $Q_2(x)$ ,  $m \times m$ ,  $n \times m$  και  $n \times (n-m)$  πίνακες αντίστοιχα, παράγοντες μιας QR παραγοντοποίησης του διανύσματος  $\nabla h(x)$ , ώστε  $\nabla h(x) = Q_1(x)R(x)$ ,  $Q_2(x)^T \nabla h(x) = 0$  και  $Q(x) = [Q_1(x) \ Q_2(x)]$  ορθογώνιος, δηλαδή  $Q(x)^T Q(x) = Q(x)Q(x)^T = I$ . Για την απλοποίηση λοιπόν της πεπλεγμένης μορφής (4.3) διατυπώνεται η παρακάτω υπόθεση, η οποία είναι πιο ισχυρή των Υποθέσεων 1 και 2 που υιοθετούνται για τον ορισμό των ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ αντίστοιχα.

**Υπόθεση 3** (α) Οι συναρτήσεις  $f$  και  $h_1, \dots, h_m$  είναι πραγματικές και διπλά συνεχώς διαφορίσιμες στο σύνολο  $\Omega$ ,

$$(\beta) \text{rank}(\nabla h(x)) = m, \forall x \in \Omega,$$

$$(\gamma) m < n \text{ και}$$

$$(\delta) \text{ο πίνακας } Q_2(x)^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x) \text{ είναι αντιστρέψιμος, } \forall (x, \lambda) \in \Omega \times R^m.$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος που ακολουθεί βλ. [Μαρ], Παρ. V.2. (iii), σελ.123.

**Θεώρημα 4.2** Έστω μια δεδομένη συνάρτηση οδηγός  $k$  και έστω ότι η Υπόθεση 3 ισχύει. Τότε το σύστημα των εξισώσεων (4.1) απλοποιείται στο ακόλουθο δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = -\rho(t)[M(x, \lambda)\nabla L(x, \lambda) + N(x, \lambda)h(x)], (x(0), \lambda(0)) = (x_0, \lambda_0) \in \Omega \times R^m, \forall t \geq 0 \quad (4.4\alpha)$$

$$\dot{\lambda} = -\rho(t)[N(x, \lambda)^T \nabla L(x, \lambda) + O(x, \lambda)h(x)] \quad (4.4\beta)$$

$$\text{όπου: } \rho(t) = -\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}, \quad M(x, \lambda) = Q_2(x) \left( Q_2(x)^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x) \right)^{-1} Q_2(x)^T,$$

$$N(x, \lambda) = \left( I_n - M(x, \lambda) \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} \right) Q_1(x) (R(x)^T)^{-1}, \quad O(x, \lambda) = -(R(x))^{-1} Q_1(x)^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} N(x, \lambda)$$

*Σημείωση 4.1* (α) Η Υπόθεση 3 ουσιαστικά είναι περισσότερο απαιτητική, από όσο πραγματικά χρειάζεται, αφού είναι αρκετό οι συνθήκες της να ισχύουν μόνο στο σύνολο των σημείων της λύσης. Υιοθετώντας αυτήν την πιο χαλαρή διατύπωση της Υπόθεσης 3, τα συμπεράσματα που ακολουθούν δεν αλλάζουν, αλλά θα αφορούν τις λύσεις του δυναμικού συστήματος (4.4) που ικανοποιούν την Υπόθεση 3 και όχι γενικά το δυναμικό σύστημα (δηλαδή όλες τις λύσεις του, από κάθε αρχικό σημείο).

(β) Η Υπόθεση 3 δεν εξασφαλίζει την εξέλιξη της λύσης του δυναμικού συστήματος (4.4) για άπειρο χρόνο. Σχετικά αναφέρονται στην επόμενη παράγραφο που αφορά την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης του.

(γ) Οι λύσεις του δυναμικού συστήματος (4.4), λόγω του Θεωρήματος 4.2 ικανοποιούν το σύστημα εξισώσεων (4.3). Όμως το σύστημα εξισώσεων (4.1) προκύπτει ολοκληρώνοντας το σύστημα (4.3), ως προς το χρόνο. Έτσι, οι λύσεις του συστήματος (4.4), ικανοποιούν και το σύστημα εξισώσεων (4.1).

(δ) Το δυναμικό σύστημα (4.4), ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων (4.1), έτσι λόγω του Λήμματος 3.2 προκύπτει ότι, κάθε λύση  $(x(t), \lambda(t))$  του δυναμικού συστήματος (4.4) με  $(x_0, \lambda_0) \notin D$  δεν βρίσκεται σε καμία πεπερασμένη χρονική στιγμή μέσα στο σύνολο  $D$  του προβλήματος  $\Pi$ , τείνει όμως σε αυτό, καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Για την περίπτωση της λύσης  $(x(t), \lambda(t))$ , με  $(x_0, \lambda_0) \in D$ , αποδεικνύεται στην επόμενη παράγραφο ότι,  $(x(t), \lambda(t)) = (x_0, \lambda_0) \in D, \forall t \geq 0$ , συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι, το σύνολο  $D$  είναι το σύνολο των σημείων ισορροπίας του συστήματος (4.4).  $\square$

Στη συνέχεια το δυναμικό σύστημα (4.4) θα ονομάζεται Νευρωνικό Δίκτυο Τετραγωνικής Προσέγγισης (σύντομα ΝΔΤΠ). Από τη μητρική γραφή (4.3) γίνεται εμφανές ότι το ΝΔΤΠ είναι εφαρμογή της Μεθόδου Newton για τη λύση μη γραμμικών εξισώσεων, στο σύστημα των συνθηκών ελαχίστου α' τάξης του προβλήματος  $\Pi$  ([Lue], Par.14.2, p.431). Υπενθυμίζεται ότι, η Μέθοδος Newton είναι μια επαναληπτική μέθοδος που επιχειρεί να

επιλύσει το σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων λύνοντας σε κάθε επανάληψη τη γραμμικοποίηση του στο τρέχον σημείο. Έτσι, το σύστημα εξισώσεων (4.2)

είναι η γραμμικοποίηση των εξισώσεων  $\nabla L\left(x + \frac{1}{\rho(t)}\dot{x}, \lambda + \frac{1}{\rho(t)}\dot{\lambda}\right) = 0$  και

$h\left(x + \frac{1}{\rho(t)}\dot{x}\right) = 0$ , στο σημείο  $(x, \lambda)$ . Η προσέγγιση της μεθόδου Newton που

βασίζεται στον τετραγωνικό προγραμματισμό ([Lue], Παρ.14.3, p.433) δίνει μια διαφορετική ερμηνεία του συστήματος (4.2). Συγκεκριμένα το σύστημα (4.2), γράφεται ως εξής:

$$\frac{1}{\rho(t)} \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} \dot{x}(t) + \frac{1}{\rho(t)} \nabla h(x) \dot{\lambda}(t) + \nabla f(x) + \nabla h(x) \lambda = 0$$

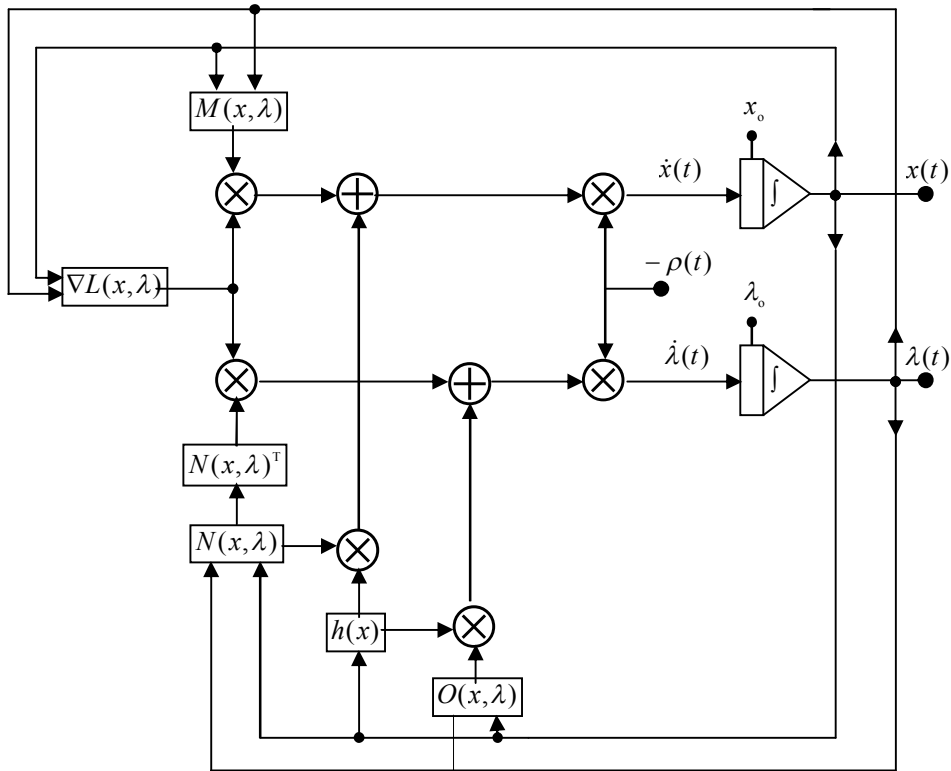
$$\nabla h(x) \dot{x} = k(t) h(x_0).$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι οι αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου α' τάξης του τετραγωνικού προβλήματος:

$$\min_{\dot{x}} \left\{ \frac{1}{2\rho(t)} \dot{x}^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} \dot{x} + \dot{x}^T \nabla f(x) : \nabla h(x) \dot{x} - k(t) h(x_0) = 0 \right\}.$$

με πολλαπλασιαστές Lagrange  $\bar{\lambda} = \lambda + \frac{1}{\rho(t)} \dot{\lambda}$ .

Στο Σχήμα 4.1 που ακολουθεί δίνεται το συνοπτικό block διάγραμμα του ΝΔΤΠ (4.4).



Σχ. 4.1 Block διάγραμμα του ΝΑΤΠ (4.4).

## 4.2 Μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων του ΝΑΤΠ

Στην παράγραφο αυτή μελετώνται οι συνθήκες σύγκλισης των λύσεων του ΝΑΤΠ στο σύνολο  $D$ , δηλαδή στο σύνολο των σημείων του  $\Omega \times R^m$  που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου του προβλήματος  $\Pi$ . Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια διατυπώνεται ένα θεώρημα που αφορά το γενικό πρόβλημα ελαχίστου  $\Pi$ . Υιοθετείται η Υπόθεση 3 ώστε να ορίζεται το ΝΑΤΠ και δεν υποτίθεται κυρτότητα, όπως συνηθίζεται στη βιβλιογραφία των Νευρωνικών Δικτύων. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται πολύ εύκολα από την

κατασκευή του ΝΔΤΠ ότι οι φραγμένες λύσεις του ΝΔΤΠ συγκλίνουν στο σύνολο D.

Έστω  $E_3$  το σύνολο των σημείων ισοροπίας του ΝΔΤΠ (4.4). Επισημαίνεται ότι το σύνολο  $E_3$  περιλαμβάνει  $n+m$  διάστασης στοιχεία, δηλαδή τη βασική και τη Lagrange συνιστώσα των σημείων ισοροπίας.

**Πρόταση 4.3** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 3. Τότε το σύνολο  $E_3$  των σημείων ισοροπίας του ΝΔΤΠ είναι ίσο με το σύνολο D, δηλαδή  $E_3 = D$ , όπου D το σύνολο των σημείων του  $\Omega \times R^m$  που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου α' τάξης του προβλήματος Π.

Απόδειξη

Τα σημεία ισοροπίας του ΝΔΤΠ (4.4) ικανοποιούν το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} M(x, \lambda) & N(x, \lambda) \\ N(x, \lambda)^T & O(x, \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla L(x, \lambda) \\ h(x) \end{bmatrix} = 0, \quad (x, \lambda) \in \Omega \times R^m. \quad (4.5)$$

Οι πίνακες  $\begin{bmatrix} M(x, \lambda) & N(x, \lambda) \\ N(x, \lambda)^T & O(x, \lambda) \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} & \nabla h(x) \\ \nabla h(x)^T & 0 \end{bmatrix}$ , από το Θεώρημα 4.2

είναι αντίστροφοι. Έτσι το ομογενές γραμμικό, ως προς το διάνυσμα  $\begin{bmatrix} \nabla L(x, \lambda)^T & h(x)^T \end{bmatrix}$ , σύστημα (4.5) έχει μοναδική λύση το μηδενικό διάνυσμα, δηλαδή  $\nabla L(x, \lambda) = 0$ ,  $h(x) = 0$  με  $(x, \lambda) \in \Omega \times R^m$ . Άρα από τα προηγούμενα προκύπτει ότι,  $E_3 = D$ .  $\square$

Η απόδειξη σύγκλισης των φραγμένων λύσεων του ΝΔΤΠ (4.4) είναι άμεση. Ουσιαστικά προκύπτει αμέσως από την ιδέα κατασκευής του, που διατυπώνεται στην Παράγραφο 4.1 και περιγράφεται μαθηματικά από το σύστημα εξισώσεων (4.1). Δεν γίνεται χρήση του θεωρήματος LaSalle. Ακολουθεί το θεώρημα σύγκλισης των λύσεων του ΝΔΤΠ (4.4).

**Θεώρημα 4.4** (Θεώρημα Ολικής Σύγκλισης του ΝΔΤΠ) Έστω ότι η Υπόθεση 3 ισχύει και έστω  $(x(t), \lambda(t))$  φραγμένη λύση του ΝΔΤΠ (4.4) με οριακό σύνολο  $L_{x,\lambda}$ . Αν  $L_{x,\lambda} \subset \Omega \times R^m$ , τότε

(α)  $L_{x,\lambda} \subset D$ ,

όπου  $D$  το σύνολο των σημείων του  $\Omega \times R^m$  που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου α' τάξης του προβλήματος  $\Pi$ .

(β)  $(x(t), \lambda(t)) \rightarrow D$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ ,

(γ)  $D \neq \emptyset$ .

Απόδειξη

Από υπόθεση η λύση  $(x(t), \lambda(t))$  του ΝΔΤΠ (4.4) είναι φραγμένη, έτσι λόγω της Πρότασης 1.4γ είναι

$$L_{x,\lambda} \neq \emptyset. \quad (4.6)$$

Από τις σχέσεις (4.6) και  $L_{x,\lambda} \subset \Omega \times R^m$  που ισχύει από την υπόθεση, προκύπτει  $L_{x,\lambda} \cap \Omega \times R^m \neq \emptyset$ . Έτσι από την Πρόταση 1.5 προκύπτει ότι, η λύση  $(x(t), \lambda(t))$  εκτείνεται για άπειρο χρόνο, δηλαδή έχει μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης το  $[0, \infty)$ . Από τη Σημείωση 4.1δ, κάθε λύση του ΝΔΤΠ (4.4) ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων (4.1). Έτσι από το (ii) του ορισμού της συνάρτησης οδηγού (Ορισμός 3.1) ισχύουν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\nabla L(x(t), \lambda(t))\} = 0 \text{ και } \lim_{t \rightarrow \infty} \{h(x(t))\} = 0. \quad (4.7)$$

Από τις σχέσεις (4.7) προκύπτει άμεσα το (α) συμπέρασμα του θεωρήματος. Από το (α) του θεωρήματος και την υπόθεση περί φραγμένης λύσης, η Πρόταση 1.4γ οδηγεί στο (β) συμπέρασμα. Από το (α) συμπέρασμα, λόγω της σχέσης (4.6) προκύπτει το (γ) συμπέρασμα του θεωρήματος.  $\square$

Σημείωση 4.2

- Το Θεώρημα 4.4 δεν απαιτεί το πρόβλημα  $\Pi$  να είναι κυρτό.
- Το Θεώρημα 4.4 δεν απαιτεί το μονοσήμαντο της λύσης του ΝΔΤΠ (4.4).

- Από τη διατύπωση του Θεωρήματος 4.4 φαίνεται ότι είναι αρκετή η ασθενέστερη Υπόθεση 3 (Σημείωση 4.1α).
- Στο Θεώρημα 4.4 η σύγκλιση χαρακτηρίζεται «ολική» γιατί αναφέρεται στις λύσεις του ΝΔΤΠ που ξεκινούν από οποιοδήποτε  $(x_0, \lambda_0) \in \Omega \times R^m$ .
- Από το (β) συμπέρασμα του Θεωρήματος 4.4 εύκολα προκύπτει ότι, αν επιπλέον τα σημεία του συνόλου  $D$  είναι απομονωμένα, τότε η λύση  $(x(t), \lambda(t))$  συγκλίνει σε σημείο του  $D$ , δηλαδή  $(x(t), \lambda(t)) \rightarrow (x^*, \lambda^*) \in D$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ .
- Το Θεώρημα 4.4 είναι παρόμοιο με τα θεωρήματα σύγκλισης του μη γραμμικού προγραμματισμού και μπορεί να θεωρηθεί ως η συνεχούς χρόνου εκδοχή αυτών των αποτελεσμάτων (βλ. [Pol]).
- Το Θεώρημα 4.4 δεν εξασφαλίζει ότι τα οριακά σημεία της λύσης του ΝΔΤΠ είναι τοπικά ελάχιστα του προβλήματος  $\Pi$ , θεωρητικά μπορεί να είναι τοπικά μέγιστα ή σαγματικά σημεία. Στο Κεφ.1, Παραδ. 5.5 παρατηρείται σύγκλιση του ΝΔΤΠ σε τοπικά μέγιστα. Η συμπεριφορά αυτή είναι βεβαίως ανεπιθύμητη και ελαττωματική.
- Το (γ) συμπέρασμα του Θεωρήματος 4.4 αφορά το σύνολο λύσεων του προβλήματος  $\Pi$  και όχι τη λύση του ΝΔΤΠ (4.4). Συγκεκριμένα αν κάποια λύση του ΝΔΤΠ (4.4) συγκλίνει, τότε προφανώς το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου α'τάξης του προβλήματος  $\Pi$  είναι μη κενό.
- Αν η λύση  $(x(t), \lambda(t))$  δεν είναι φραγμένη, τότε  $L_{x,\lambda} = \emptyset$  και το συμπέρασμα (α) του Θεωρήματος 4.4 ικανοποιείται τετριμένα.  $\square$

Ειδικότερα στην περίπτωση που ισχύει  $\Omega = R^n$ , ή  $H_0 \subset \Omega \times R^m$ , τότε προφανώς για κάθε λύση του ΝΔΤΠ (4.4) ισχύει  $L_{x,\lambda} \subset \Omega \times R^m$ . Σχετικό είναι το ακόλουθο πόρισμα του Θεωρήματος 4.4.

**Πόρισμα 4.5** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 3 με  $\Omega = R^n$  (ή  $H_0 \subset \Omega \times R^m$ ). Τότε κάθε φραγμένη λύση  $x(t)$  του ΝΔΤΠ (4.4), που ξεκινά από σημείο  $(x_0, \lambda_0) \in R^{n+m}$  (ή  $(x_0, \lambda_0) \in \Omega \times R^m$ ), συγκλίνει στο σύνολο  $D$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ , δηλαδή  $\forall (x_0, \lambda_0)$  ισχύει  $(x(t), \lambda(t)) \rightarrow D$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Στην πρόταση που ακολουθεί διατυπώνεται το αναμενόμενο, από την ιδέα κατασκευής του ΝΔΤΠ, συμπέρασμα ότι, το μέτρο των περιορισμών  $\|h(x(t))\|$  και το μέτρο της κλίσης της συνάρτησης Lagrange του προβλήματος  $\Pi$ ,  $\|\nabla L(x(t), \lambda(t))\|$ , ορισμένα πάνω στη λύση (φραγμένη ή όχι)  $(x(t), \lambda(t))$  του ΝΔΤΠ (4.4), μειώνονται.

**Πρόταση 4.6** Έστω ότι ισχύει η Υπόθεση 3 και έστω η συνάρτηση  $W : \Omega \times R^m \rightarrow R$ , με τύπο  $W(x, \lambda) = \frac{1}{2} (\|\nabla L(x, \lambda)\|^2 + \|h(x)\|^2)$ . Τότε η παράγωγος της συνάρτησης  $W$  στην κατεύθυνση του ΝΔΤΠ (4.4) είναι αρνητική ή μηδέν, δηλαδή  $\left. \frac{dW(x, \lambda)}{dt} \right|_{(4.4)} \leq 0, \forall (x, \lambda) \in \Omega \times R^m$ .

Απόδειξη

Για την παράγωγο της συνάρτησης  $W$  στην κατεύθυνση που ορίζει το ΝΔΤΠ (4.4),  $\forall (x, \lambda) \in \Omega \times R^m$  ισχύουν:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dW(x, \lambda)}{dt} \right|_{(4.4)} &= \nabla_x W(x, \lambda)^T \dot{x} \Big|_{(4.4)} + \nabla_\lambda W(x, \lambda)^T \dot{\lambda} \Big|_{(4.4)} = \\ &= \nabla L(x, \lambda)^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} \dot{x} \Big|_{(4.4)} + \nabla L(x, \lambda)^T \nabla h(x) \dot{\lambda} \Big|_{(4.4)} + h(x)^T \nabla h(x)^T \dot{x} \Big|_{(4.4)} = \\ &= \nabla L(x, \lambda)^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} & \nabla h(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \Big|_{(4.4)} \\ \dot{\lambda} \Big|_{(4.4)} \end{bmatrix} + h(x)^T \nabla h(x)^T \dot{x} \Big|_{(4.4)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Από το Θεώρημα 4.2 το ΝΔΤΠ (4.4) ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων (4.3), οπότε η ισότητα (4.8) δίνει



$$\left. \frac{dW(x, \lambda)}{dt} \right|_{(4.4)} = -\rho(t) \left( \|\nabla L(x, \lambda)\|^2 + \|h(x, \lambda)\|^2 \right), \quad \forall (x, \lambda) \in \Omega \times R^m \text{ και } \forall t \geq 0. \quad (4.9)$$

Λόγω της σχέσης  $\rho(t) > 0$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$  (βλ. πιο πάνω) και της ισότητας (4.9) το συμπέρασμα της πρότασης είναι προφανές.  $\square$

### 4.3 Εφαρμογή του ΝΔΤΠ σε προβλήματα ελαχίστου με γραμμικούς ισοτικούς περιορισμούς

Στην περίπτωση του κυρτού προβλήματος ελαχιστοποίησης με ισοτικούς περιορισμούς, δεν αποδεικνύεται, όπως συμβαίνει για το ΝΔΠΚΜΕΛ (βλ. Πρόταση 3.11), ότι υπάρχει ακριβής κυρτή συνάρτηση ποινής  $V: R^n \rightarrow R$ ,  $V(x) = f(x) + c \|A^T x - b\|$ , με αρνητική παράγωγο στην κατεύθυνση του σχετικού με το κυρτό πρόβλημα ΝΔΤΠ. Έτσι το φραγμένο των λύσεων του ΝΔΤΠ, θα προκύψει ακολουθώντας διαφορετική μεθοδολογία από αυτή της απόδειξης της Πρότασης 3.12, που αναφέρεται στο ΝΔΠΚΜΕΛ.

Για να ορίζεται το ΝΔΤΠ για κάποιο  $(x_0, \lambda_0) \in \Omega \times R^m$  (βλ. Σημείωση 4.1), απαιτείται μεταξύ άλλων ο πίνακας  $Q_2(x)^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x)$  να είναι αντιστρέψιμος, τουλάχιστον στα σημεία της λύσης του ΝΔΤΠ. Στην πράξη όμως φαίνεται ότι, τα αποτελέσματα σύγκλισης του ΝΔΤΠ είναι πολύ καλύτερα όταν ο πίνακας αυτός είναι θετικά ορισμένος, τουλάχιστον στα σημεία της λύσης. Καλύτερα αποτελέσματα σύγκλισης, σημαίνει ότι προκύπτουν συχνότερα (για περισσότερα αρχικά σημεία) φραγμένες λύσεις. Αυτή η συμπεριφορά του ΝΔΤΠ μελετάται στη συνέχεια, για την ειδική περίπτωση του προβλήματος με γραμμικούς ισοτικούς περιορισμούς. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύεται το φραγμένο των λύσεων του ΝΔΤΠ, όταν ο συγκεκριμένος πίνακας είναι θετικά ορισμένος. Η υπόθεση όμως αυτή γενικά, είναι πολύ περιοριστική, αφού σε σημεία που βρίσκονται μακριά από τοπικά

ελάχιστα ο πίνακας αυτός ενδέχεται να μην είναι θετικά ορισμένος. Η κατάσταση αυτή αντιμετωπίζεται εφαρμόζοντας τη μέθοδο Marquardt-Levenberg (βλ. [Μα], Παρ.IV.2, σελ.71), γνωστή από την εφαρμογή της στη μέθοδο Newton. Περισσότερα σχετικά με την τροποποίηση αυτή του ΝΔΤΠ αναγράφονται στην Παράγραφο 5.1.

Θεωρείται το ακόλουθο πρόβλημα ελαχίστου με γραμμικούς ισοτικούς περιορισμούς:

$$\min_{x \in R^n} \{f(x) : A^T x - b = 0\} \quad \text{ΠΓ}$$

όπου  $f: R^n \rightarrow R$  δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη,  $A: n \times m$  πίνακας και  $b: m \times 1$  διάνυσμα.

Η Υπόθεση 3 προσαρμόζεται στα δεδομένα του προβλήματος ΠΓ και ενισχύεται:

**Υπόθεση 3Γ** (α)  $H$   $f$  είναι πραγματική και δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση στο  $R^n$ ,

(β)  $\text{rank}(A) = m$ ,

(γ)  $m < n$  και

(δ) υπάρχει  $a \in R$ ,  $a > 0$  τέτοιο ώστε  $z^T \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} z \geq a \|z\|_2^2$ ,  $\forall x \in R^n$ ,

$\forall z \in M = \{z \in R^n : A^T z = 0\}$ , (ο  $M$  είναι ο μηδενικός χώρος του πίνακα  $A$ ), ή

ισοδύναμα υπάρχει  $a \in R$ ,  $a > 0$  τέτοιο ώστε  $y^T Q_2^T \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} Q_2 y \geq a \|y\|^2$ ,

$\forall y \in R^{n-m}$ ,  $\forall x \in R^n$  (δηλαδή η μήτρα  $Q_2^T \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} Q_2$  είναι ομοιόμορφα θετικά

ορισμένη στο  $R^n$ ,  $\forall x \in R^n$ ), όπου  $Q_2$  είναι η μήτρα της Παραγράφου 4.1.

Αφού  $\nabla h(x)^T = A^T$  οι πίνακες  $Q$  και  $R$  (βλ. Παράγραφο 4.1) είναι σταθεροί, δηλαδή ανεξάρτητοι της λύσης του ΝΔΤΠ του προβλήματος ΠΓ.

Για το πρόβλημα ΠΓ ισχύουν:

$$\nabla L(x, \lambda) = \nabla f(x) + A\lambda \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}. \quad (4.10)$$

Το ΝΔΤΠ στην περίπτωση του προβλήματος ΠΓ προκύπτει από το δυναμικό σύστημα (4.4), λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (4.10). Έτσι, το ΝΔΤΠ του προβλήματος ΠΓ, μετά από απλές αλγεβρικές πράξεις, είναι το εξής:

$$\dot{x} = -\rho(t) \left[ M(x) \nabla f(x) + N(x) (A^T x - b) \right], \quad (x_0, \lambda_0) \in R^{n+m}, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.11\alpha)$$

$$\dot{\lambda} = -\rho(t) \left[ \lambda + N(x)^T \nabla f(x) + O(x) (A^T x - b) \right] \quad (4.11\beta)$$

$$\text{όπου: } \rho(t) = -\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}, \quad M(x) = Q_2 \left( Q_2^T \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} Q_2 \right)^{-1} Q_2^T,$$

$$N(x) = \left( I_n - M(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right) Q_1 (R^T)^{-1}, \quad O(x) = -R^{-1} Q_1^T \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} N(x).$$

Επισημαίνεται ότι, το δεξί μέλος του συστήματος (4.11α) δεν εξαρτάται από τη συνιστώσα Lagrange  $\lambda$  της λύσης του δυναμικού συστήματος (4.11). Δηλαδή το δυναμικό σύστημα (4.11α), που αφορά τη συνιστώσα  $x$  της λύσης του ΝΔΤΠ (4.11) (τη μεταβλητή ως προς την οποία ελαχιστοποιείται η συνάρτηση κόστους  $f$  του προβλήματος ΠΓ) είναι ανεξάρτητο της συνιστώσας Lagrange της λύσης του ΝΔΤΠ. Ουσιαστικά λοιπόν στην περίπτωση αυτή, μπορεί να θεωρηθεί ότι το ΝΔΤΠ περιγράφεται μόνο από το  $n$  διάστατο δυναμικό σύστημα (4.11α).

Η πρόταση που ακολουθεί αφορά το πρόβλημα ΠΓ, όταν οι συναρτήσεις που το περιγράφουν ικανοποιούν την Υπόθεση 3Γ. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι, το σύνολο  $\Gamma$  των αυστηρών τοπικών ελαχίστων περιέχει ακριβώς ένα σημείο, το ολικό ελάχιστο του ΠΓ.

**Πρόταση 4.7** *Αν ισχύει η Υπόθεση 3Γ, τότε το πρόβλημα ΠΓ έχει μοναδικό τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο.*

Απόδειξη

Για κάθε  $x \in R^n$ , υπάρχουν  $y \in R^m$  και  $z \in R^{n-m}$  τέτοια ώστε

$$x = Ay + Q_2 z \quad (4.12)$$

Οπότε για τα  $x \in R^n$  που ικανοποιούν τους γραμμικούς ισοτικούς περιορισμούς του προβλήματος ΠΓ ισχύουν τα εξής:  $A^T x - b = 0 \Leftrightarrow A^T (Ay + Q_2 z) - b = 0 \Leftrightarrow A^T Ay = b \Leftrightarrow y = (A^T A)^{-1} b$ , άρα

$$A^T x - b = 0 \Leftrightarrow x = (A^T A)^{-1} b + Q_2 z, \quad (4.13)$$

όπου έγινε χρήση της ιδιότητας  $A^T Q_2 = 0$ . Λόγω της σχέσης (4.13) το πρόβλημα ΠΓ είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο πρόβλημα ελαχίστου χωρίς περιορισμούς:

$$\min_{z \in R^{n-m}} \{g(z)\}, \quad \text{ΠΓ}'$$

όπου  $g: R^{n-m} \rightarrow R$  συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, που ορίζεται ως εξής  $g(z) = f((A^T A)^{-1} b + Q_2 z)$ . Η κλίση της συνάρτησης  $g$  και η μήτρα δευτέρων παραγώγων της είναι :

$$\begin{aligned} \nabla g(z) &= \nabla_z f((A^T A)^{-1} b + Q_2 z) = \nabla_z ((A^T A)^{-1} b + Q_2 z) \nabla f((A^T A)^{-1} b + Q_2 z) \\ &= Q_2^T \nabla f((A^T A)^{-1} b + Q_2 z), \\ \frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2} &= \nabla_z (Q_2^T \nabla f((A^T A)^{-1} b + Q_2 z)) = \nabla_z (\nabla f((A^T A)^{-1} b + Q_2 z)) Q_2 = \\ &= Q_2^T \frac{\partial^2 f((A^T A)^{-1} b + Q_2 z)}{\partial x^2} Q_2 = Q_2^T \frac{\partial^2 f((A^T A)^{-1} b + Q_2 z)}{\partial x^2} Q_2, \end{aligned}$$

οπότε λόγω της Υπόθεσης 3Γ, η μήτρα  $\frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2}$  είναι ομοιόμορφα θετικά

ορισμένη στο  $R^{n-m}$ , για κάθε  $z \in R^{n-m}$ . Άρα, από την Πρόταση 1.43, η συνάρτηση  $g$  είναι ομοιόμορφα κυρτή συνάρτηση και λόγω της Πρότασης 1.41 το πρόβλημα ΠΓ' έχει μοναδικό τοπικό και ολικό ελάχιστο το  $z^*$ . Άρα και

το πρόβλημα ΠΓ έχει μοναδικό τοπικό και ολικό ελάχιστο το σημείο  $x^* = (A^T A)^{-1} b + Q_2 z^*$ .  $\square$

Στην παρακάτω πρόταση αποδεικνύεται το φραγμένο των λύσεων του ΝΔΤΠ (4.11)

**Πρόταση 4.8** *Εστω ότι ισχύει η Υπόθεση 3Γ. Τότε κάθε λύση  $(x(t), \lambda(t))$  του ΝΔΤΠ (4.11), είναι φραγμένη.*

Απόδειξη

Εστω  $[0, \omega)$  το μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης της λύσης  $(x(t), \lambda(t))$  του ΝΔΤΠ. Η λύση αυτή ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων 4.1β (βλ. Σημείωση 4.1δ) και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (4.12), προκύπτουν:  
 $A^T x(t) - b = k(t)(A^T x_0 - b) \Leftrightarrow A^T (Ay(t) + Q_2 z(t)) - b = k(t)(A^T x_0 - b) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow y(t) = (A^T A)^{-1} (k(t)(A^T x_0 - b) + b) \leq \lambda_{\max} \left( (A^T A)^{-1} \right) \|k(t)(A^T x_0 - b) + b\|, \forall t \in [0, \omega),$   
 όπου  $\lambda_{\max} \left( (A^T A)^{-1} \right)$  η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα  $(A^T A)^{-1}$ . Λόγω της ιδιότητας  $0 \leq k(t) \leq 1$  (βλ. Λήμμα 3.1) τα προηγούμενα δίνουν:

$$\|y(t)\| \leq M, \forall t \in [0, \omega), \quad (4.14)$$

όπου  $M = \lambda_{\max}^{\text{op}} \left( (A^T A)^{-1} \right) (\|A^T x_0 - b\| + \|b\|)$ .

Η λύση  $(x(t), \lambda(t))$  ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων 4.1α, οπότε  $\nabla L(x(t), \lambda(t)) = k(t) \nabla L(x_0, \lambda_0), \forall t \in [0, \omega)$ . Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με τον πίνακα  $Q_2^T$  και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση  $Q_2^T A = 0$  προκύπτουν:  $Q_2^T \nabla L(x(t), \lambda(t)) = k(t) Q_2^T \nabla L(x_0, \lambda_0) \Leftrightarrow Q_2^T (\nabla f(x(t)) + A \lambda(t)) =$   
 $= k(t) Q_2^T (\nabla f(x_0) + A \lambda_0)$ . Λόγω της σχέσης  $0 \leq k(t) \leq 1$  τα προηγούμενα δίνουν:

$$\|Q_2^T f(x(t))\| \leq \|Q_2^T \nabla f(x_0)\|, \forall t \in [0, \omega) \quad (4.15)$$

Ορίζεται το σύνολο  $X = \{x \in R^n : x = x(t), t \in [0, \omega)\}$ . Για όσα θα ακολουθήσουν στη συνέχεια, τα διανύσματα  $x \in X$ ,  $y \in R^m$ ,  $z \in R^{n-m}$  επιλέγονται τέτοια ώστε να ικανοποιούν την σχέση (4.12). Από το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης της τιμής  $\nabla f(x)$ , γύρω από το σημείο  $Ay$ , προκύπτει ότι υπάρχει κάποιος  $\tau \in [0, 1]$  ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= \nabla f(Ay) + \frac{\partial^2 f(Ay + \tau(x - Ay))}{\partial x^2} (x - Ay) = \\ &= \nabla f(Ay) + \frac{\partial^2 f(Ay + \tau Q_2 z)}{\partial x^2} Q_2 z \end{aligned} \quad (4.16)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (4.16), από αριστερά, με την παράσταση  $z^T Q_2^T$  προκύπτουν

$$\begin{aligned} z^T Q_2^T \nabla f(x) &= z^T Q_2^T \nabla f(Ay) + z^T Q_2^T \frac{\partial^2 f(Ay + \tau Q_2 z)}{\partial x^2} Q_2 z \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|z\| \|Q_2^T \nabla f(x)\| \geq -\|z\| \|Q_2^T \nabla f(Ay)\| + a \|z\|^2, \end{aligned} \quad (4.17)$$

όπου  $a > 0$ , αυτό της Υπόθεσης 3Γ. Λόγω της ανισότητας (4.15) η ανισότητα (4.17) δίνει

$$\begin{aligned} \|z(t)\| \|Q_2^T \nabla f(x_o)\| &\geq -\|z(t)\| \|Q_2^T \nabla f(Ay(t))\| + a \|z(t)\|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \|z(t)\| \leq \frac{\|Q_2^T \nabla f(x_o)\| + \|Q_2^T \nabla f(Ay(t))\|}{a}, \quad \forall t \in [0, \omega) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Έστω το σύνολο  $Y = \{y \in R^m : \|y\| \leq M\}$ , όπου  $M$  αυτό της σχέσης (4.14). Τό σύνολο  $Y$  είναι συμπαγές, και το μέτρο  $\|\nabla f(x(t))^T Q_2\|$ , από υπόθεση, είναι συνεχής συνάρτηση στο  $R^n$ , άρα από το Θεώρημα Weierstrass υπάρχει η ποσότητα  $N = \max_{y \in Y}^{\text{op}} \|\nabla f(Ay)^T Q_2\|$ . Οπότε λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω η ανισότητα (4.18) δίνει

$$\|z(t)\| \leq K, \quad \forall t \in [0, \omega) \quad (4.19)$$

Από τις σχέσεις (4.12), (4.14) και (4.19) προκύπτει ότι, η βασική συνιστώσα  $x(t)$  της λύσης  $(x(t), \lambda(t))$  του ΝΔΤΠ είναι φραγμένη και έτσι, από την Πρόταση 1.6 προκύπτει επιπλέον ότι  $\omega = \infty$ .

Στη συνέχεια αποδυνκνείται ότι, η συνιστώσα Lagrange  $\lambda(t)$  είναι φραγμένη. Έστω  $[0, \omega)$  το μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης της συνιστώσας  $\lambda(t)$  της λύσης  $(x(t), \lambda(t))$  του ΝΔΤΠ (4.11). Από την Πρόταση 1.4, είναι  $\bar{X} = X \cup L_x$  και επιπλέον, αφού η λύση  $x(t)$  είναι φραγμένη, το  $\bar{X}$  είναι συμπαγές σύνολο. Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά το σύστημα εξισώσεων (4.11β) με το διάνυσμα  $\lambda^T$  προκύπτει:

$$\begin{aligned} \lambda^T \dot{\lambda} &= -\rho(t) \left[ \|\lambda\|_2^2 + \lambda^T \left( N(x)^T \nabla f(x) + O(x)(A^T x - b) \right) \right] \leq \\ &\leq -\rho(t) \|\lambda\|_2^2 + \rho(t) \|\lambda\|_2 \varphi(x) \end{aligned} \quad (4.20)$$

όπου  $\varphi: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(\omega) = \|N(\omega)^T \nabla f(\omega) + O(\omega)(A^T \omega - b)\|$ . Από υπόθεση, η συνάρτηση  $\varphi$  είναι συνεχής, επιπλέον το σύνολο  $\bar{X}$  είναι συμπαγές. Έτσι από το Θεώρημα Weierstrass υπάρχει το  $\max_{\omega \in \bar{X}} \{\varphi(\omega)\}^{\text{op}} = P$ . Οπότε η ανισότητα (4.20) γίνεται:

$$\lambda^T \dot{\lambda} \leq -\rho(t) \|\lambda\|_2 (\|\lambda\|_2 - P), \quad \forall t \in [0, \omega). \quad (4.21)$$

Λόγω των σχέσεων  $\lambda^T \dot{\lambda} = \|\lambda\|_2 \frac{d\|\lambda\|_2}{dt}$  και  $\rho(t) = -\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$  η ανισότητα (4.21)

$$\text{δίνει: } \|\lambda\|_2 \frac{d\|\lambda\|_2}{dt} \leq -\rho(t) \|\lambda\|_2 (\|\lambda\|_2 - P) \Leftrightarrow \frac{d\|\lambda\|_2}{dt} \leq \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} (\|\lambda\|_2 - P) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\|\lambda\|_2 - P)} \frac{d(\|\lambda\|_2 - P)}{dt} \leq \frac{\dot{k}(t)}{k(t)}, \quad \forall t \in [0, \omega). \text{ Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη}$$

ανισότητα στο διάστημα  $\forall t \in [0, \omega)$  και λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα 3.2

προκύπτουν:  $\|\lambda(t)\|_2 - P \leq k(t)(\|\lambda_0\|_2^2 - P) \leq \|\lambda_0\|_2^2 \Rightarrow \|\lambda(t)\|_2 \leq \|\lambda_0\|_2^2 + P, \forall t \in [0, \omega)$ , όπου  $\lambda_0 = \lambda(0)$ . Επομένως και η συνιστώσα Lagrange  $\lambda(t)$  της λύσης  $(x(t), \lambda(t))$  του ΝΔΤΠ (4.11) είναι φραγμένη και έτσι, από την Πρόταση 1.6 προκύπτει επιπλέον ότι  $\omega = \infty$ .  $\square$

Από τις δύο προηγούμενες προτάσεις προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα του Θεωρήματος 4.4 Αφορά τη σύγκλιση των λύσεων του ΝΔΤΠ (4.11), στο μοναδικό ολικό ελάχιστο του προβλήματος ΠΓ.

**Πόρισμα 4.9** *Εστω ότι η Υπόθεση 3Γ ισχύει. Τότε κάθε λύση  $(x(t), \lambda(t))$  του ΝΔΤΠ (4.11) συγκλίνει στο μοναδικό ολικό ελάχιστο του προβλήματος ΠΓ  $(x^*, \lambda^*)$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ , δηλαδή  $\forall (x_0, \lambda_0) \in R^{n+m}$  ισχύει  $(x(t), \lambda(t)) \rightarrow (x^*, \lambda^*)$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ .*

Προφανώς τα προηγούμενα ισχύουν και στην ειδική περίπτωση κυρτής συνάρτησης  $f$ .

#### 4.4 Ταχύτητα σύγκλισης των λύσεων του ΝΔΤΠ

Στην παράγραφο αυτή διατυπώνονται συμπεράσματα, για την ταχύτητα σύγκλισης των λύσεων του ΝΔΤΠ (4.4) του προβλήματος Π. Αποδεικνύεται συγκεκριμένα ότι, όταν το ΝΔΤΠ (4.4) έχει μονοσήμαντη λύση, τότε τα απομονωμένα σημεία του  $R^{n+m}$  που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες α'τάξης του προβλήματος Π, είναι εκθετικά ευσταθή σημεία ισορροπίας του ΝΔΤΠ (4.4) (βλ. Κεφ. 1, Ορ. 1.22). Στην περίπτωση που ισχύει η Υπόθεση 3Γ, αποδεικνύεται ότι το μοναδικό τοπικό και ολικό ελάχιστο του προβλήματος ΠΓ είναι ολικά εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του ΝΔΤΠ (4.11).

**Θεώρημα 4.10** *Εστω ότι η Υπόθεση 3 ισχύει και έστω ότι το δεξί μέλος του αυτόνομου ΝΔΤΠ (4.4) δηλαδή με  $k(t) = \exp(-\rho t), \rho > 0, \forall t \geq 0$ , είναι τόσο λείο, όσο χρειάζεται ώστε να εξασφαλίζεται το μονοσήμαντο της λύσης του,*



$\forall (x_0, \lambda_0) \in \Omega \times R^m$ . Τότε κάθε απομονωμένο σημείο του συνόλου  $D$  είναι εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του ΝΔΤΠ (4.4), δηλαδή υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί  $a > 0$  και  $\delta > 0$  τέτοιοι ώστε

$$\left\| \begin{bmatrix} x(t) - x^* \\ \lambda(t) - \lambda^* \end{bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} x(0) - x^* \\ \lambda(0) - \lambda^* \end{bmatrix} \right\| \exp(-at), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall (x_0, \lambda_0) \in B_\delta(x^*, \lambda^*) \quad (4.22)$$

Απόδειξη

Από το ανάπτυγμα Taylor των διανυσμάτων  $\nabla L(x^*, \lambda^*)$  και  $h(x^*)$ , στο σημείο  $(x, \lambda)$ , λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$  και  $h(x^*) = 0$ , είναι

$$\begin{aligned} \nabla L(x^*, \lambda^*) &= \nabla L(x, \lambda) + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} & \nabla h(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* - x \\ \lambda^* - \lambda \end{bmatrix} + o\left(\left\| \begin{bmatrix} x - x^* \\ \lambda - \lambda^* \end{bmatrix} \right\|\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nabla L(x, \lambda) &= \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} (x - x^*) + \nabla h(x)(\lambda - \lambda^*) + o\left(\left\| \begin{bmatrix} x - x^* \\ \lambda - \lambda^* \end{bmatrix} \right\|\right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$h(x^*) = h(x) + \nabla h(x)^T (x^* - x) + o(\|x - x^*\|) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \nabla h(x)^T (x - x^*) + o(\|x - x^*\|) \quad (4.24)$$

Για το ΝΔΤΠ λόγω των σχέσεων (4.23), (4.24) και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις  $Q_1(x)Q_1(x)^T + Q_2(x)Q_2(x)^T = I_n$ ,  $Q_2^T(x)Q_1(x) = 0$  και  $\nabla h(x) = Q_1(x)R(x)$  ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\rho M(x, \lambda) \left( \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} (x - x^*) + \nabla h(x)(\lambda - \lambda^*) \right) - \\ &- \rho \left( I - M(x, \lambda) \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} \right) Q_1(x)R(x)^{-T} \nabla h(x)^T (x - x^*) + o\left(\left\| \begin{bmatrix} x - x^* \\ \lambda - \lambda^* \end{bmatrix} \right\|\right) = \\ &= -\rho M(x, \lambda) \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} (x - x^*) - \rho Q_1(x)Q_1(x)^T (x - x^*) + \\ &+ \rho M(x, \lambda) \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_1(x)Q_1(x)^T (x - x^*) + o\left(\left\| \begin{bmatrix} x - x^* \\ \lambda - \lambda^* \end{bmatrix} \right\|\right) = \\ &= -\rho Q_1(x)Q_1(x)^T (x - x^*) - \rho(t)M(x, \lambda) \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} (I - Q_1(x)Q_1(x)^T) (x - x^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + o\left(\left\|\begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix}\right\|\right) = \\
 & = -\rho Q_1(x)Q_1(x)^T(x-x^*) - \rho(t)M(x,\lambda)\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x^2}Q_2(x)Q_2(x)^T(x-x^*) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + o\left(\left\|\begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix}\right\|\right) \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda} & = -\rho N(x,\lambda)^T\left(\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x^2}(x-x^*) + \nabla h(x)(\lambda-\lambda^*)\right) - \rho(t)O(x,\lambda)\nabla h(x)^T(x-x^*) + \\
 & + o\left(\left\|\begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix}\right\|\right) = \\
 & = -\rho R(x)^{-1}Q_1(x)^T\left(I - \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x^2}M(x,\lambda)\right)\left(\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x^2}(x-x^*) + \nabla h(x)(\lambda-\lambda^*)\right) - \\
 & + \rho R(x)^{-1}Q_1(x)^T\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x^2}\left(I - M(x,\lambda)\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x^2}\right)Q_1(x)R(x)^{-T}\nabla h(x)^T(x-x^*) + \\
 & + o\left(\left\|\begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix}\right\|\right) = \\
 & = -\rho R(x)^{-1}Q_1^T(x)Q_1(x)R(x)(\lambda-\lambda^*) - \\
 & - \rho R(x)^{-1}Q_1(x)^T\left(I - \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x^2}M(x,\lambda)\right)\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x^2}(x-x^*) + \\
 & + \rho R(x)^{-1}Q_1(x)^T\left(I - \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x^2}M(x,\lambda)\right)\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x^2}Q_1(x)Q_1(x)^T(x-x^*) + o\left(\left\|\begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix}\right\|\right) = \\
 & = -\rho(\lambda-\lambda^*) - \\
 & - \rho R(x)^{-1}Q_1(x)^T\left(I - \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x^2}M(x,\lambda)\right)\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x^2}(I - Q_1(x)^TQ_1(x))(x-x^*) + \\
 & + o\left(\left\|\begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix}\right\|\right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\rho(\lambda - \lambda^*) - \\
 &-\rho R(x)^{-1} Q_1(x)^T \left( I - \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} M(x, \lambda) \right) \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x)^T Q_2(x)(x - x^*) + \\
 &+ o\left( \left\| \begin{bmatrix} x - x^* \\ \lambda - \lambda^* \end{bmatrix} \right\| \right) \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Είναι } &M(x, \lambda) \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x) Q_2(x)^T = \\
 &= Q_2(x) \left( Q_2(x)^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x) \right)^{-1} Q_2(x)^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x) Q_2(x)^T = Q_2(x) Q_2(x)^T,
 \end{aligned}$$

οπότε οι σχέσεις (4.25), (4.26) γίνονται

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -\rho Q_1(x) Q_1(x)^T (x - x^*) - \rho(t) Q_2(x) Q_2(x)^T (x - x^*) + o\left( \left\| \begin{bmatrix} x - x^* \\ \lambda - \lambda^* \end{bmatrix} \right\| \right) \\
 &= -\rho \left( (x - x^*) + o\left( \left\| \begin{bmatrix} x - x^* \\ \lambda - \lambda^* \end{bmatrix} \right\| \right) \right) \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda} &= -\rho(\lambda - \lambda^*) - \rho(t) R(x)^{-1} Q_1(x)^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x)^T Q_2(x)(x - x^*) + \\
 &+ \rho R(x)^{-1} Q_1(x)^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} M(x, \lambda) \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x)^T Q_2(x)(x - x^*) + \\
 &+ o\left( \left\| \begin{bmatrix} x - x^* \\ \lambda - \lambda^* \end{bmatrix} \right\| \right) = \\
 &= -\rho(\lambda - \lambda^*) - \rho R(x)^{-1} Q_1(x)^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x)^T Q_2(x)(x - x^*) + \\
 &+ \rho R(x)^{-1} \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x)^T Q_2(x)(x - x^*) + o\left( \left\| \begin{bmatrix} x - x^* \\ \lambda - \lambda^* \end{bmatrix} \right\| \right) = \\
 &= -\rho \left( (\lambda - \lambda^*) + o\left( \left\| \begin{bmatrix} x - x^* \\ \lambda - \lambda^* \end{bmatrix} \right\| \right) \right) \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

Η μητρική γραφή των ισοτήτων (4.27) και (2.28) είναι:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix} + o\left(\left\| \begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix} \right\|\right). \quad (4.29)$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά το σύστημα (4.28), με το διάνυσμα

$\begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix}^T$  προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = -\rho \left( \left\| \begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix} \right\|^2 + o\left(\left\| \begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix} \right\|^2\right) \right). \quad (4.30)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ισότητα  $\begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \left\| \begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix} \right\| \frac{d\left\| \begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix} \right\|}{dt}$ , η σχέση

(4.30) γίνεται

$$\frac{d\left\| \begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix} \right\|}{dt} \leq -\rho \left( \left\| \begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix} \right\| + o\left(\left\| \begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix} \right\|\right) \right). \quad (4.31)$$

Από τον ορισμό του  $o(\cdot)$ , επιλέγοντας  $M < 1$ , υπάρχει  $\hat{\delta} > 0$  τέτοιο ώστε η ανισότητα (4.31) γίνεται,

$$\frac{d\left\| \begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix} \right\|}{dt} \leq -\alpha \left\| \begin{bmatrix} x-x^* \\ \lambda-\lambda^* \end{bmatrix} \right\|, \quad \forall (x, \lambda) \in B_{\hat{\delta}}(x^*, \lambda^*), \quad (4.32)$$

όπου  $\alpha = \rho(1-M) > 0$ . Από το Θεώρημα 1.14 προκύπτει ότι το  $(x^*, \lambda^*)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισοροπίας του συστήματος (4.30), οπότε υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε  $\forall (x_0, \lambda_0) \in B_{\delta}(x^*, \lambda^*) \Rightarrow \forall (x(t), \lambda(t)) \in B_{\hat{\delta}}(x^*, \lambda^*)$ ,

$\forall t > 0$ . Έτσι η ανισότητα (4.32) γράφεται:

$$\frac{d\left\| \begin{bmatrix} x(t)-x^* \\ \lambda(t)-\lambda^* \end{bmatrix} \right\|}{dt} \leq -\alpha \left\| \begin{bmatrix} x(t)-x^* \\ \lambda(t)-\lambda^* \end{bmatrix} \right\|, \quad \forall t > 0, \quad \forall (x_0, \lambda_0) \in B_{\delta}(x^*, \lambda^*). \quad (4.33)$$

Ολοκληρώνοντας την ανισότητα (4.33), στο διάστημα  $[T, t)$  προκύπτει η ανισότητα (4.22), που δηλώνει την εκθετική σύγκλιση της λύσης στο σημείο  $(x^*, \lambda^*)$ .  $\square$

Όταν ισχύει η Υπόθεση 3Γ, από το Πόρισμα 4.9 προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα του Θεωρήματος 4.10.

**Πόρισμα 4.11** Έστω ότι η Υπόθεση 3Γ ισχύει και έστω ότι το δεξί μέλος του αυτόνομου ΝΔΤΠ (4.11) δηλαδή με  $k(t) = \exp(-\rho t)$ ,  $\rho > 0$ ,  $\forall t \geq 0$ , είναι τόσο λείο, όσο χρειάζεται ώστε να εξασφαλίζεται το μονοσήμαντο της λύσης του. Τότε το μοναδικό τοπικό και ολικό ελάχιστο του προβλήματος ΠΓ είναι ολικά εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του ΝΔΤΠ (4.11), δηλαδή  $\forall (x_0, \lambda_0) \in R^{n+m}$  υπάρχει θετικοί πραγματικοί αριθμοί  $a > 0$ ,  $\beta > 0$  τέτοιοι ώστε

$$\left\| \begin{bmatrix} x(t) - x^* \\ \lambda(t) - \lambda^* \end{bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} x_0 - x^* \\ \lambda_0 - \lambda^* \end{bmatrix} \right\| \exp(-at), \quad \forall t \geq 0.$$

#### 4.4 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό προτείνεται ένα ακόμα Νευρωνικό Δίκτυο συνεχούς χρόνου (ΝΔΤΠ) για την επίλυση του προβλήματος ελαχίστου με ισοτικούς περιορισμούς. Το ΝΔΤΠ βασίζεται σε ένα συνδυασμό της επαναληπτικής μεθόδου των τετραγωνικών προσεγγίσεων (recursive quadratic programming), με ομοιοτικές μεθόδους επίλυσης των ισοτικών περιορισμών. Βασική ιδιότητα του ΝΔΤΠ είναι ότι στην κατεύθυνσή του, μειώνεται το μέτρο της συνάρτησης Lagrange και το μέτρο των ισοτικών περιορισμών. Οι υποθέσεις που γίνονται για τον ορισμό του ΝΔΤΠ είναι οι συνήθεις υποθέσεις που υιοθετεί η επαναληπτική μέθοδος των τετραγωνικών προσεγγίσεων.

Η προσέγγιση της ποιοτικής συμπεριφοράς του ΝΔΤΠ, όπως έγινε και στα ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ, δεν είναι η συνήθης της βιβλιογραφίας των Νευρωνικών Δικτύων. Διατυπώνεται ένα γενικό θεώρημα σύγκλισης, στο οποίο

χωρίς να υποτίθεται η κυρτότητα του προβλήματος ελαχιστοποίησης, που είναι συνήθης υπόθεση για τη μελέτη της ευστάθειας των Νευρωνικών Δικτύων, αποδεικνύεται ότι οι φραγμένες λύσεις του ΝΔΤΠ συγκλίνουν στο σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου α'τάξης. Το συμπέρασμα αυτό είναι παρόμοιο με τα θεωρήματα σύγκλισης του μη γραμμικού προγραμματισμού και μπορεί να θεωρηθεί ως η συνεχούς χρόνου εκδοχή αυτών των αποτελεσμάτων. Σχετικά με την ταχύτητα σύγκλισης του ΝΔΠΚΜΕΛ αποδεικνύεται ότι τα σημεία που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου α'τάξης είναι εκθετικά ευσταθή σημεία ισορροπίας του ΝΔΤΠ. Στην περίπτωση γραμμικών ισοτικών περιορισμών και ομοιόμορφα κυρτής συνάρτησης κόστους, αποδεικνύεται ότι όλες οι λύσεις του ΝΔΤΠ είναι φραγμένες και το σημείο στο οποίο το πρόβλημα έχει ολικό ελάχιστο είναι ολικά εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του ΝΔΤΠ.

Αριθμητικά αποτελέσματα εφαρμογής του ΝΔΤΠ και ενδεικτικές κυκλωματικές υλοποιήσεις του δίνονται στα Κεφάλαια 5 και 6 αντίστοιχα.



## 5<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΝΕΩΝ ΝΕΥΡΩΝΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ ΣΕ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

#### 5.1 Εισαγωγή

Η παράγραφος αυτή περιλαμβάνει εφαρμογές των τριών νέων Νευρωνικών Δικτύων, που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους σε έξι συγκεκριμένα κυρτά και μη κυρτά προβλήματα ελαχιστοποίησης με ισοτικούς περιορισμούς. Από τη θεωρητική ανάλυση που προηγήθηκε αναμένεται ότι, οι λύσεις των τριών Νευρωνικών Δικτύων: (α) στην περίπτωση των κυρτών προβλημάτων με φραγμένο σύνολο λύσεων, συγκλίνουν για κάθε αρχικό σημείο, στο σύνολο των ολικών ελαχίστων του προβλήματος και (β) στην περίπτωση των μη κυρτών προβλημάτων, όταν συγκλίνουν, τα σημεία σύγκλισης ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου α'τάξης του προβλήματος.

Για την επίλυση των συστημάτων των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τα Νευρωνικά Δίκτυα, χρησιμοποιήθηκε το αρχείο ode23s.m του λογισμικού πακέτου Matlab, που λύνει συστήματα διαφορικών εξισώσεων.

Σε κάθε παράδειγμα εξετάζεται η συμπεριφορά των ΝΔΠΚΕΛ, ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ για τυχαία αρχικά σημεία και δίνονται τα σχετικά διαγράμματα των λύσεων, της ταχύτητας σύγκλισης και της συνάρτησης κόστους του προβλήματος, ως προς το χρόνο. Στην περίπτωση σύγκλισης της



λύσης  $x(t)$  σε σημείο  $x^*$ , για την εκτίμηση της ταχύτητας σύγκλισης των Νευρωνικών Δικτύων παρακολουθείται η χρονική εξέλιξη της παράστασης  $\ln(\|x(t) - x^*\|)$ . Στην περίπτωση σύγκλισης της λύσης σε σύνολο  $X^*$  (βλ. Παράδειγμα 5.4), για την ταχύτητα σύγκλισης παρακολουθείται η χρονική εξέλιξη της παράστασης  $\ln \min_{y \in X^*} \{dist(x(t) - y)\} = \ln(\min_{y \in X^*} \|x(t) - y\|)$ . Ως σφάλμα σύγκλισης στο  $x^*$ , ορίζεται το μέτρο  $\|x(T) - x^*\|_2$ , όπου  $T$  ο χρόνος τερματισμού της προσομοίωσης. Στην περίπτωση μη κυρτού προβλήματος, εκτιμάται το ποσοστό επιτυχίας σύγκλισης των Νευρωνικών Δικτύων σε ολικό ελάχιστο, βρίσκοντας τα σημεία σύγκλισης των λύσεων που ξεκινούν από πολλά τυχαία αρχικά σημεία (βλ. Παραδείγματα 5.1-5.5).

Ειδικότερα για το ΝΔΤΠ, η Υπόθεση 3.δ (βλ. Παράγραφο 4.1) είναι περιοριστική και συχνά δεν ικανοποιείται. Για το λόγο αυτό δοκιμάστηκε η τροποποίηση που συνηθίζεται σε παρόμοιες περιπτώσεις στους διακριτούς αλγόριθμους. Συγκεκριμένα, ο πίνακας  $M$  του Θεωρήματος 4.1 που συμμετέχει στην περιγραφή του ΝΔΤΠ (4.4) αντικαθίσταται από τον παρακάτω πίνακα:

$$\hat{M}(x, \lambda) = Q_2(x) \left( Q_2(x)^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x) + sI_{n-m-1} \right)^{-1} Q_2(x)^T,$$

όπου:  $s = 0$ , όταν ο πίνακας  $Q_2(x)^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x)$  είναι αντιστρέψιμος και  $s > 0$  πολύ μικρό, όταν ο πίνακας αυτός δεν είναι αντιστρέψιμος. Όμως με αυτή τη τροποποίηση του ΝΔΤΠ, προκύπτουν συχνά μη φραγμένες λύσεις (βλ. Παράδειγμα 5.1, σχ. 5.6.2α). Πολύ καλύτερη συμπεριφορά παρατηρείται, τροποποιώντας το ΝΔΤΠ σύμφωνα με τη μέθοδο Marquardt-Levenberg, γνωστή από την εφαρμογή της στη μέθοδο Newton ([Μαρ], Παρ.IV.2, σελ.71). Σύμφωνα με τη τροποποίηση αυτή, ο πίνακας  $M$  που συμμετέχει στην περιγραφή του ΝΔΤΠ (4.4) αντικαθίσταται από τον πίνακα  $\hat{M}$  που δίνεται πιο πάνω, όμως η παράμετρος  $s$  στην περίπτωση αυτή ορίζεται ως εξής:  $s = 0$ , όταν

ο πίνακας  $Q_2(x)^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x)$  είναι θετικά ορισμένος και  $s = -a + \delta$ ,

όπου  $\delta > 0$  πολύ μικρό, όταν ο πίνακας  $Q_2(x)^T \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x^2} Q_2(x)$  δεν είναι θετικά ορισμένος με  $a$  την ελάχιστη αρνητική ιδιοτιμή του. Προφανώς η παράμετρος  $s$  εξαρτάται από το χρόνο. Τις χρονικές στιγμές που  $s \neq 0$ , η λύση του ΝΔΤΠ παρουσιάζει ασυνέχεια. *Επισημαίνεται ότι, στα παραδείγματα που ακολουθούν, το ΝΔΤΠ που μελετάται είναι τροποποιημένο με αυτή τη μέθοδο* Σχετικά θεωρητικά αποτελέσματα, δίνονται στην Παράγραφο 4.3.

Τα δύο πρώτα παραδείγματα 5.1 και 5.2 είναι, ουσιαστικά, προβλήματα ελαχιστοποίησης με ανισοτικούς περιορισμούς. Εισάγοντας βοηθητικές μεταβλητές τροποποιούνται σε προβλήματα με ισοτικούς περιορισμούς. Για λόγους σύγκρισης δίνονται αποτελέσματα επίλυσης των προβλημάτων αυτών με το Νευρωνικό Δίκτυο που προτείνεται στην αναφορά [XLW], (στη συνέχεια θα αναφέρεται ως ΝΔ των XLW). Διευκρινίζεται ότι, το ΝΔ των XLW είναι ένα δυναμικό σύστημα με μη διαφορίσιμο δεξί μέλος, που αντιμετωπίζει μη γραμμικά προβλήματα ελαχίστου πάνω σε σφαίρα ή με περιορισμούς φράγματα στις συνιστώσες της μεταβλητής  $x$  (δηλαδή πάνω σε υπερπαραλληλεπίπεδο).

## 5.2 Παραδείγματα

*Παράδειγμα 5.1* Πρόκειται για το μη κυρτό πρόβλημα

$$\min_{x \in R^3} \{x_1^3 + (x_1 - 2x_2)^3 + \exp(x_1 + x_2) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

που είναι η τροποποίηση σε πρόβλημα ισοτικών περιορισμών του δισδιάστατου προβλήματος :  $\min_{x \in R^2} \{x_1^3 + (x_1 - 2x_2)^3 + \exp(x_1 + x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  ([XLW], Ex. 3, pp.447-458). Η συνάρτηση  $f(x)$  δεν είναι κυρτή. Το αρχικό δισδιάστατο πρόβλημα έχει μοναδικό σημείο ολικού ελαχίστου το  $[-0.51596862 \ 0.85660748]^T$ . Το τρισδιάστατο πρόβλημα έχει μοναδικό σημείο ολικού ελαχίστου το  $x_{op} = [-0.51596862 \ 0.85660748 \ 0]^T$ . Η τιμή της συνάρτησης κόστους στα σημεία αυτά είναι -9.80890926. Το τρισδιάστατο πρόβλημα έχει επιπλέον στο σημείο  $x_{loc} = [0.97552945 \ 0.21986881 \ 0]^T$  ένα τοπικό ελάχιστο,  $f(x_{loc}) = 4.38705513$ . Επισημαίνεται ότι, το  $f(x_{loc})$  δεν είναι τοπικό ελάχιστο του αρχικού προβλήματος με τον ανισοτικό περιορισμό. Στο Σχ.5.1 δίνονται υσούψεις της συνάρτησης  $f$ , καθώς και ο μοναδιαίος κύκλος στο  $(x_1, x_2)$  επίπεδο (διακεκομένη γραμμή).

Προφανώς η Υπόθεση 2 ισχύει στο  $R^3 \setminus \{0\}$ . Έτσι το ΝΔΠΚΜΕΛ (3.3) του παραδείγματος, ορίζεται καλώς στο  $R^3 \setminus \{0\}$ , και περιγράφεται από το εξής δυναμικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = -\mu \left( I_3 - \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_1 x_2 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 3x_1^2 + 3(x_1 - 2x_2)^2 + \exp(x_1 + x_2) \\ -6(x_1 - 2x_2)^2 + \exp(x_1 + x_2) \\ 0 \end{bmatrix} - \rho(t) \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1}{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

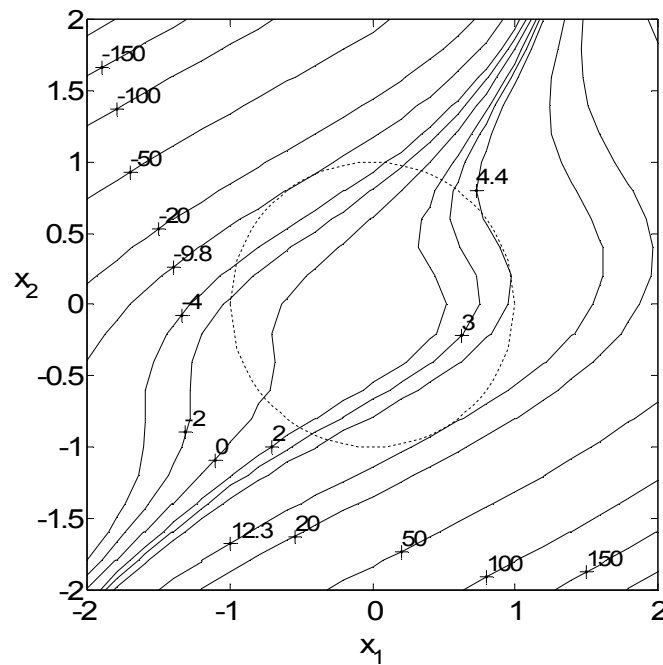
Το σύστημα αυτό, χωρίς τον δεύτερο προσθεταίο στο δεξί μέλος, (που μειώνει το μέτρο του περιορισμού), είναι το ΝΔΠΚΕΛ. Το ΝΔΤΠ (4.4) περιλαμβάνει

$$\text{τη μήτρα } \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} 12(x_1 - x_2) + \exp(x_1 + x_2) + 2\lambda & -12(x_1 - 2x_2) + \exp(x_1 + x_2) & 0 \\ -12(x_1 - 2x_2) + \exp(x_1 + x_2) & 24(x_1 - 2x_2) + \exp(x_1 + x_2) + 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}.$$

Επιπλέον λύνεται το ΝΔ των XLW που αναφέρεται στο Example 3 της αναφοράς [XLW]. Για τα ΝΔΠΚΕΛ, ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ επιλέγονται  $\mu=2$

και  $k(t) = \exp(-2t)$ , άρα  $\rho = -\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = 2$  και για το Νευρωνικό Δίκτυο των XLW

επιλέγεται σταθερά χρόνου -2.



Σχ.5.1 Ισοψείς της συνάρτησης κόστους του παραδ.5.1.

Δίνονται τα αποτελέσματα σύγκλισης των λύσεων των ΝΔΠΚΕΛ, ΝΔΠΚΜΕΛ, ΝΔΤΠ και του ΝΔ των XLW, για επτά αρχικά σημεία, εκ των οποίων τρία ικανοποιούν τον ισοτικό περιορισμό του προβλήματος. Η συνιστώσα  $\lambda_0$  αφορά το ΝΔΤΠ και είναι η αρχική συνθήκη του πολλαπλασιαστή Lagrange. Ο ανισοτικός περιορισμός του Example 3, στο ολικό ελάχιστο και στο τοπικό ελάχιστο, είναι ενεργός. Προκειμένου λοιπόν να είναι δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων, επιλέγονται για τα ΝΔΠΚΕΛ, ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ αρχικά σημεία με  $x_{0,3} = 0$ , ώστε  $\dot{x}_3 = 0$ . Έτσι τα ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ γίνονται διδιάστατα δυναμικά συστήματα και το ΝΔΤΠ τριδιάστατο. Το ΝΔ των XLW είναι διδιάστατο.

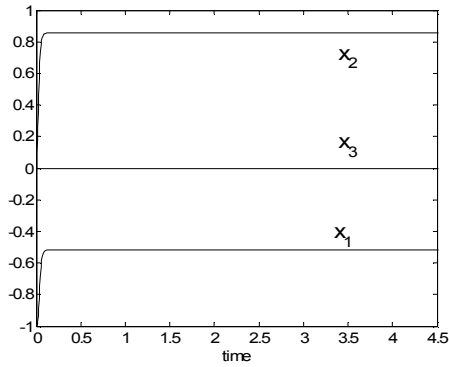
Αρχικά δίνονται τα αποτελέσματα των ΝΔΠΚΕΛ, ΝΔΠΚΜΕΛ, ΝΔΤΠ και ΝΔ των XLW για τρία επιτρεπτά αρχικά σημεία. Σχετικά με τον παρακάτω πίνακα επισημαίνεται ότι, τα ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ συγκλίνουν πιο γρήγορα, σε χρόνο  $T = 4.5$ , από τα ΝΔΤΠ και ΝΔ των XLW, τα οποία για να συγκλίνουν με σφάλμα μικρότερο από  $10^{-8}$ , χρειάζονται χρόνο περίπου  $T = 9$ . Για τα δύο λιγότερο γρήγορα ΝΔ επιλέγεται χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης  $[0 \ 6]$ .

Από τα σημεία σύγκλισης που δίνονται στον παρακάτω πίνακα, που αφορά τα επιτρεπτά αρχικά σημεία, παρατηρείται μικρή διαφορά μεταξύ των σημείων σύγκλισης των λύσεων των ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ. Από τη θεωρία των δύο Νευρωνικών Δικτύων που αναπτύχθηκε στις προηγούμενες παραγράφους αναμένεται ότι, αφού τα αρχικά σημεία είναι επιτρεπτά, ολόκληρη η τροχιά είναι επιτρεπτή. Όμως από υπολογιστικά σφάλματα ολοκλήρωσης ενδέχεται να παραβιάζεται ο περιορισμός. Πράγματι τα σημεία σύγκλισης του ΝΔΠΚΕΛ ικανοποιούν τον περιορισμό με ακρίβεια  $10^{-4}$ . Το ΝΔΠΚΜΕΛ διαθέτει το διορθωτικό προσθεταίο που μειώνει εκθετικά το μέτρο του περιορισμού. Έτσι τα σημεία σύγκλισης του ΝΔΠΚΜΕΛ ικανοποιούν τον περιορισμό με σφάλμα μικρότερο του  $10^{-8}$ .

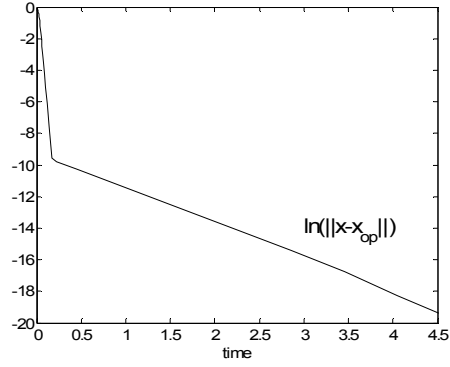
## Επιτρεπτά αρχικά σημεία

$\begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}$	$x(4.5)$ του ΝΔΠΚΕΛ	$x(4.5)$ του ΝΔΠΚΜΕΛ	$\begin{bmatrix} x(6) \\ \lambda(6) \end{bmatrix}$ του ΝΔΤΠ	$x(6)$ του ΝΔ των XLW
$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51590119 \\ 0.85646637 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51596862 \\ 0.85660748 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51597507 \\ 0.85660364 \\ 0 \\ 16.58274017 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51597531 \\ 0.85660132 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51603275 \\ 0.85674168 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51596862 \\ 0.85660748 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51605387 \\ 0.85655706 \\ 0 \\ 16.58001539 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51604727 \\ 0.85652329 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.97550817 \\ 0.21985936 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.97552944 \\ 0.21986881 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.97553152 \\ 0.21985965 \\ 0 \\ -3.59842455 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51610407 \\ 0.85645909 \end{bmatrix}$

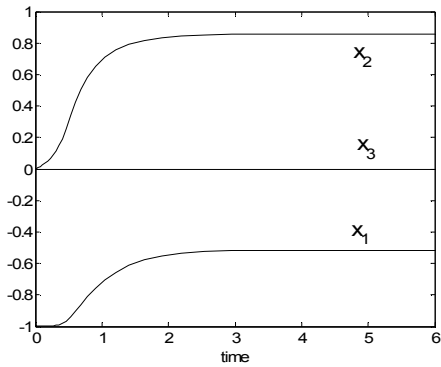
Στα σχήματα που ακολουθούν δεν περιλαμβάνονται αυτά που αφορούν τα αποτελέσματα του ΝΔΠΚΕΛ. Τα ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ έχουν παρόμοια συμπεριφορά για τα ίδια επιτρεπτά αρχικά σημεία.



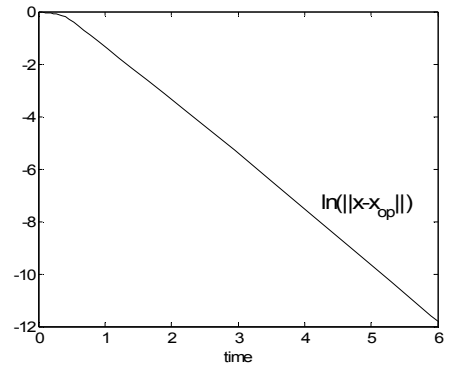
Σχ.5.2α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [-1 \ 0 \ 0]$ .



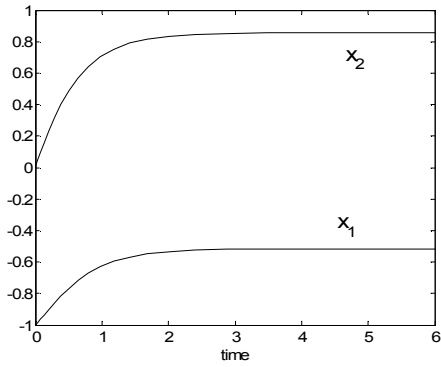
Σχ.5.2β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.2α.



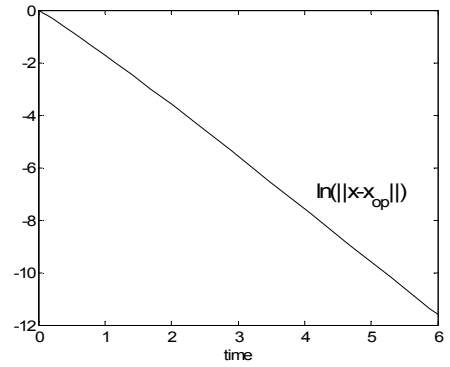
Σχ.5.3α Η λύση του ΝΔΠΠ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [-1 \ 0 \ 0 \ 40]$ .



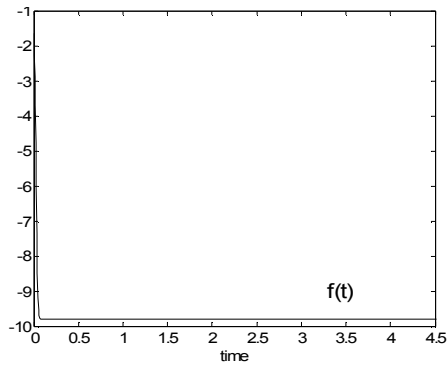
Σχ.5.3β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.3α.



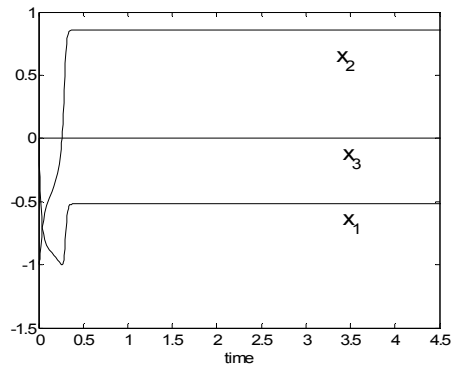
Σχ.5.4α Η λύση του ΝΔ των XLW, όταν  $x_0^T = [-1 \ 0]$ .



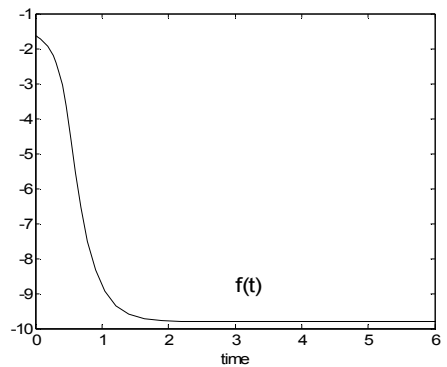
Σχ.5.4β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.4α.



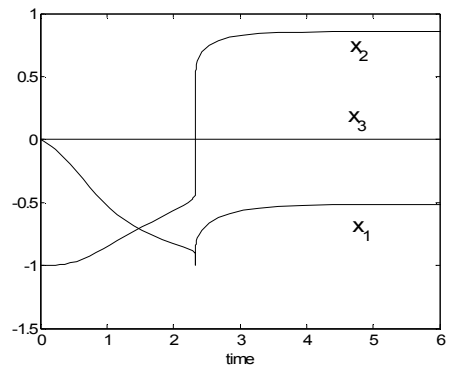
Σχ.5.2γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.2α.



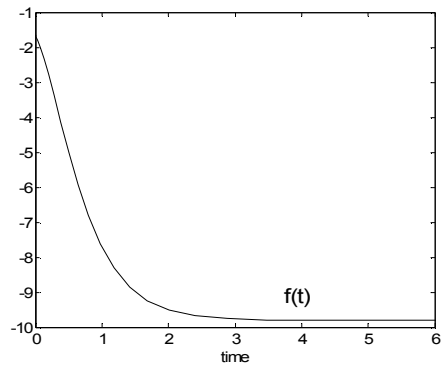
Σχ.5.5α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [0 \ -1 \ 0]$ .



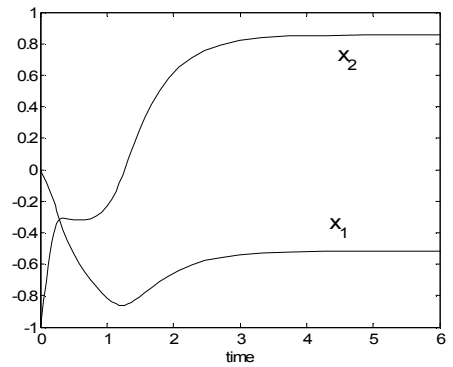
Σχ.5.3γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.3α.



Σχ.5.6.1α Η λύση του ΝΔΠΠ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [0 \ -1 \ 0 \ 40]$ .

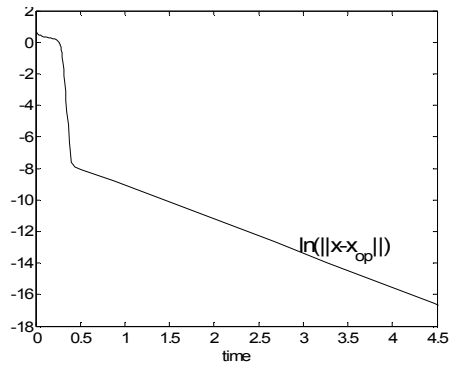


Σχ.5.4γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.4α.

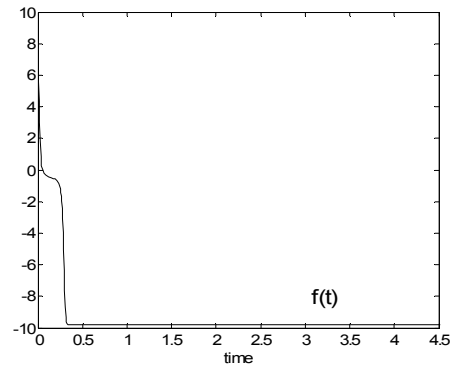


Σχ.5.7α Η λύση του ΝΔ των XLW, όταν  $x_0^T = [0 \ -1]$ .

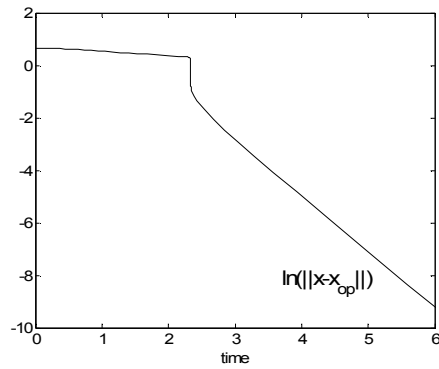




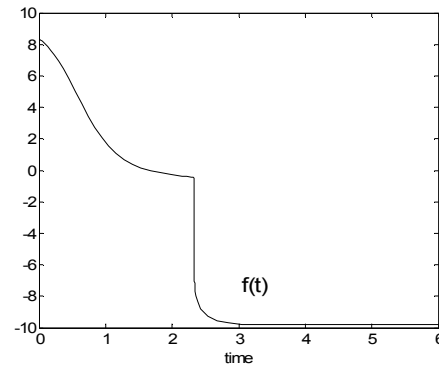
Σχ.5.5β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.5α.



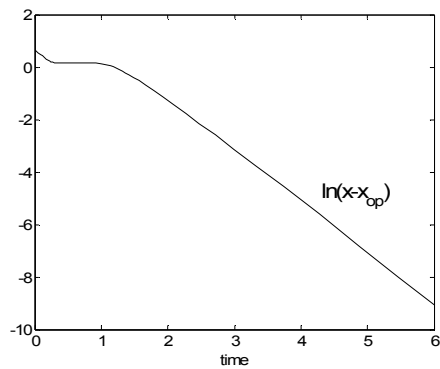
Σχ.5.5γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.5α.



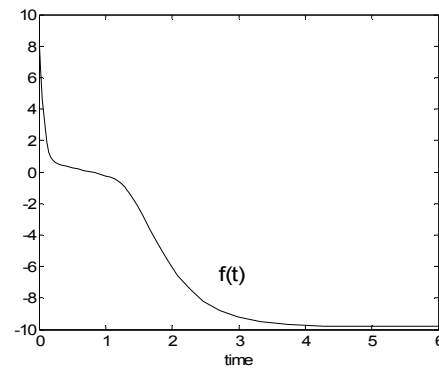
Σχ.5.6β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.6α.



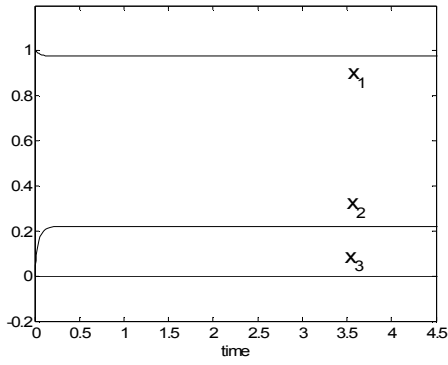
Σχ.5.6γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.6α.



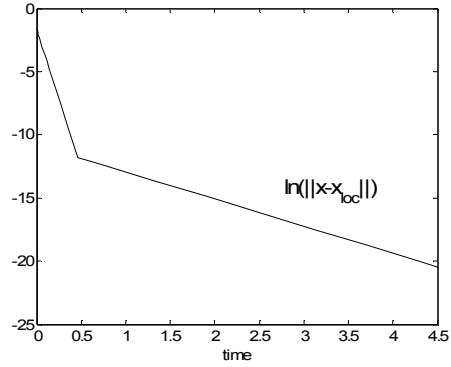
Σχ.5.7β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.7α.



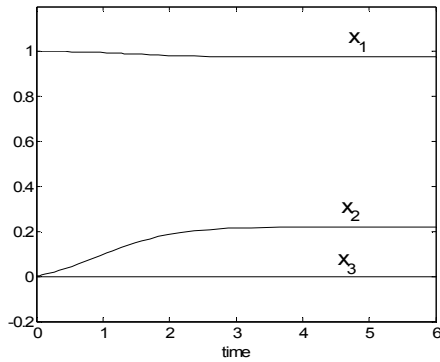
Σχ.5.7γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.7α.



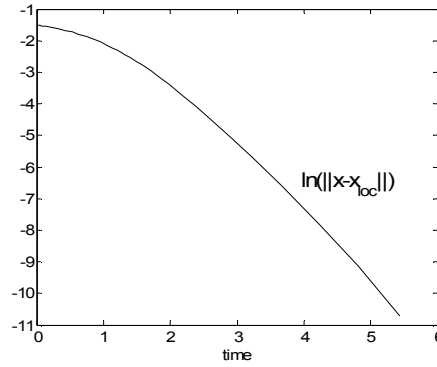
Σχ.5.8α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [1 \ 0 \ 0]$ .



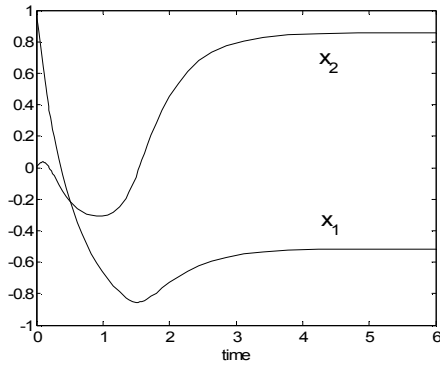
Σχ.5.8β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.8α.



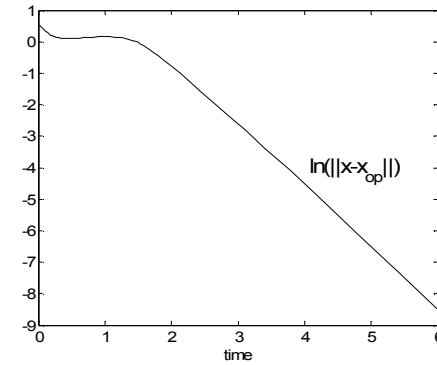
Σχ.5.9α Η λύση του ΝΔΠΠ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [1 \ 0 \ 0 \ 40]$ .



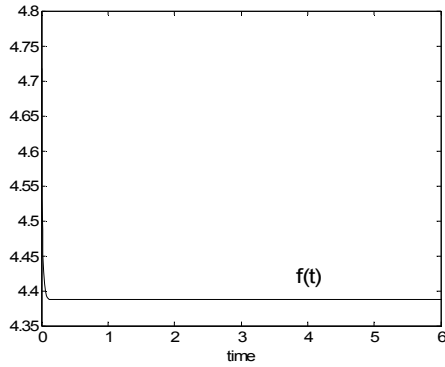
Σχ.5.9β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.9α.



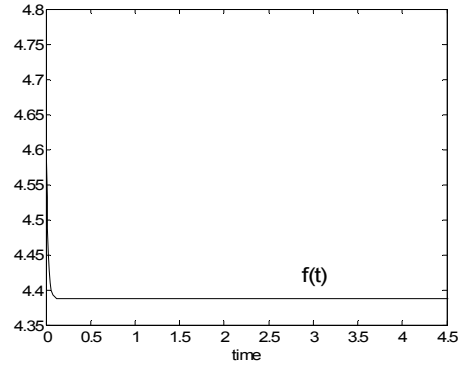
Σχ.5.10α Η λύση του ΝΔ των XLW, όταν  $x_0^T = [1 \ 0]$ .



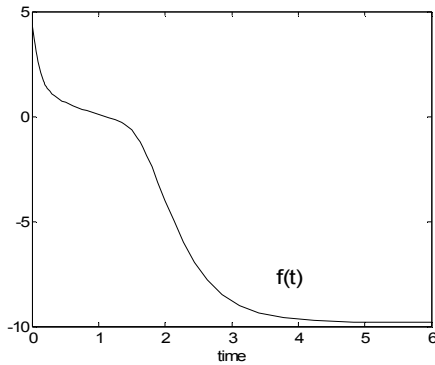
Σχ.5.10β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.10α.



Σχ.5.8γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.8α.



Σχ.5.9γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.9α.

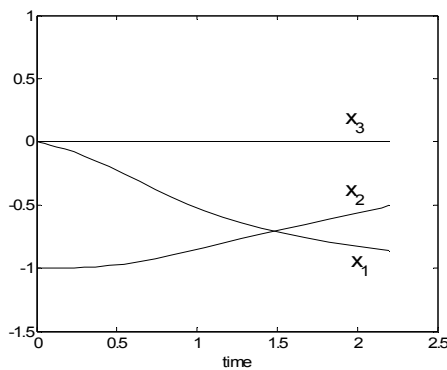


Σχ.5.10γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.10α.

Σχετικά με τα σχήματα που αφορούν την ταχύτητα σύγκλισης των λύσεων διευκρινίζεται ότι, για τα ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ είναι  $x_{op} = [-0.51596862 \ 0.85660748 \ 0]^T$ , ενώ για το ΝΔ των XLW είναι  $x_{op} = [-0.51596862 \ 0.85660748]^T$ . Από τα σχήματα λοιπόν 5.2β, 5.3β, 5.4β, 5.5β, 5.6β, και 5.7β φαίνεται ότι, οι λύσεις των ΝΔΠΚΜΕΛ, ΝΔΤΠ και ΝΔ των XLW, συγκλίνουν εκθετικά στο  $x_{op}$ , με εκθετική σταθερά περίπου -4, -2, -2 αντίστοιχα. Το σφάλμα σύγκλισης του ΝΔΠΚΜΕΛ είναι της τάξης του  $10^{-8}$ , όταν  $T = 4.5$ . Ενώ το σφάλμα σύγκλισης των ΝΔΤΠ και ΝΔ των XLW είναι

της τάξης του  $10^{-5}$ , όταν  $T=6$  και γίνεται μικρότερο του  $10^{-8}$  για χρόνους μεγαλύτερους από  $T=9$ . Για το τρίτο αρχικό σημείο τα ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ συγκλίνουν στο τοπικό ελάχιστο  $x_{loc}$ . Γενικά το ΝΔΠΚΜΕΛ συγκλίνει πιο γρήγορα από τα υπόλοιπα εξεταζόμενα ΝΔ, όταν ξεκινά από αρχικά σημεία που ικανοποιούν τον περιορισμό.

Υπενθυμίζεται ότι, το ΝΔΤΠ είναι τροποποιημένο, ώστε ο πίνακας που αντιστρέφεται να είναι θετικά ορισμένος (βλ. Εισαγωγή 5.1). Στα σχήματα 5.6α 5.6β και 5.6γ, που αφορούν τη λύση του ΝΔΤΠ από το αρχικό σημείο  $[1 \ 0 \ 0 \ 40]^T$ , παρατηρείται ασυνέχεια της λύσης του (δηλαδή  $s \neq 0$ ), όταν



Σχ.5.6.2α Η λύση του ΝΔΤΠ, με αντιστρέψιμο πίνακα.

$t = 2.3$ , περίπου. Αλλάζοντας το  $\lambda_0$  φαίνεται να αλλάζει μόνο η χρονική στιγμή που προκύπτει η ασυνέχεια. Δοκιμάζοντας την τροποποίηση του ΝΔΤΠ, που εξασφαλίζει απλά αντιστρέψιμο πίνακα (βλ. Εισαγωγή 5.1), προκύπτει μη φραγμένη λύση και το Matlab διακόπτει τη διαδικασία λύσης του τροποποιημένου ΝΔΤΠ (βλ. σχ.

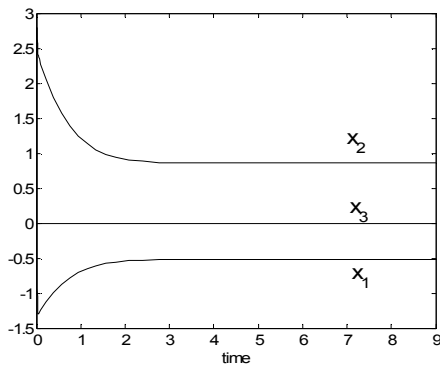
5.6.2α), παρουσιάζοντας σχετικό μήνυμα.

Στη συνέχεια δίνονται τα αποτελέσματα σύγκλισης των εξεταζόμενων ΝΔ, για τέσσερα αρχικά σημεία που δεν ικανοποιούν τον ισοτικό περιορισμό. Το ΝΔΠΚΕΛ δεν περιλαμβάνεται, αφού προϋποθέτει αρχικά σημεία που ικανοποιούν τον περιορισμό. Το χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης είναι  $[0 \ 9]$ .

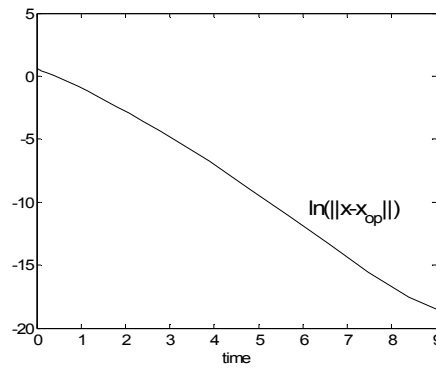
## Μη Επιτρεπτά αρχικά σημεία

$\begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}$	x(9) του ΝΔΠΚΜΕΛ	$\begin{bmatrix} x(9) \\ \lambda(9) \end{bmatrix}$ του ΝΔΠΠ	x(9) του ΝΔ των XLW
$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51596862 \\ 0.85660748 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51596861 \\ 0.85660749 \\ 0 \\ 16.5826892 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51596861 \\ 0.85660748 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51596862 \\ 0.85660748 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51596862 \\ 0.85660748 \\ 0 \\ 16.5826892 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51596861 \\ 0.85660748 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51596862 \\ 0.85660748 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51596868 \\ 0.85660745 \\ 0 \\ 16.58268788 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51596868 \\ 0.85660743 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.97552944 \\ 0.21986881 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.97552946 \\ 0.21986876 \\ 0 \\ -3.59859220 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.51596878 \\ 0.85660734 \end{bmatrix}$

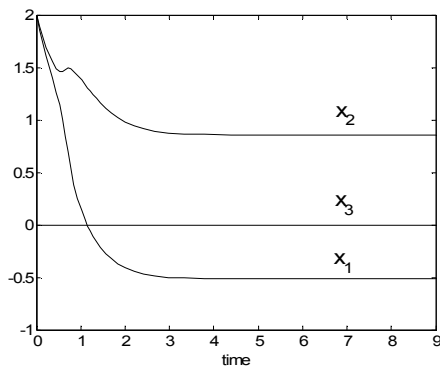
Ακολουθούν τα σχετικά σχήματα που αφορούν την χρονική εξέλιξη των λύσεων, της ταχύτητας σύγκλισης τους και της συνάρτησης κόστους του προβλήματος, για τα τρία εξεταζόμενα Νευρωνικά Δίκτυα.



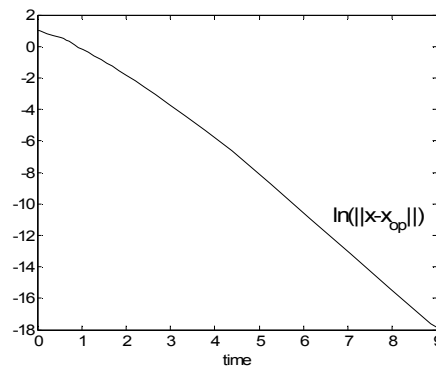
Σχ.5.11α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [2 \ 2 \ 0]$ .



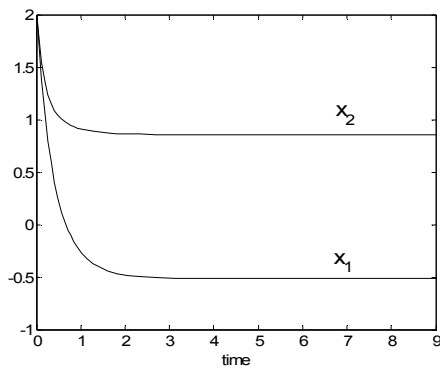
Σχ.5.11β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.11α.



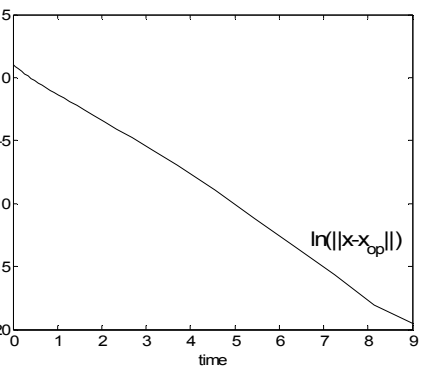
Σχ.5.12α Η λύση του ΝΔΠΠ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [2 \ 2 \ 0 \ 40]$ .



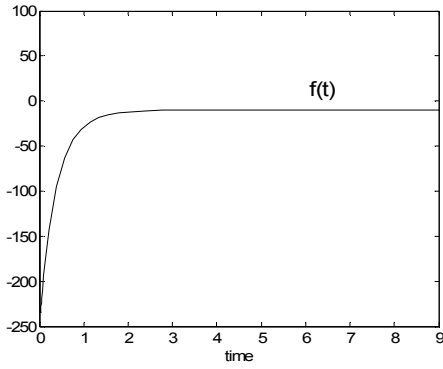
Σχ.5.12β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.12α.



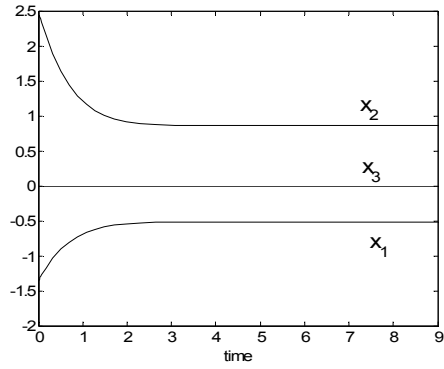
Σχ.5.13α Η λύση του ΝΔ των XLW, όταν  $x_0^T = [2 \ 2]$ .



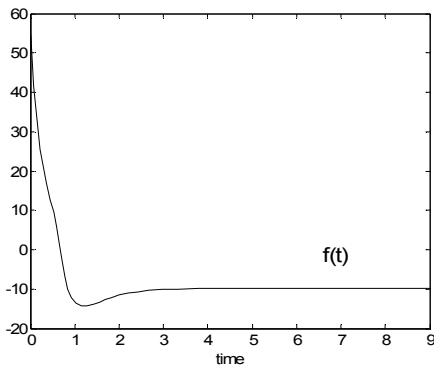
Σχ.5.13β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.13α.



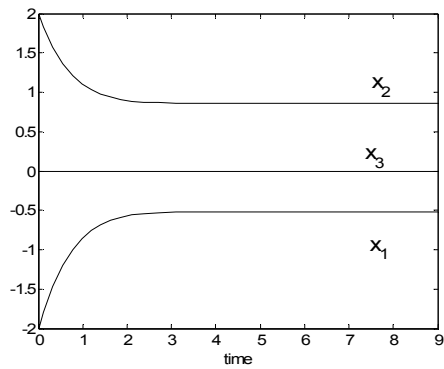
Σχ.5.11γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.11α.



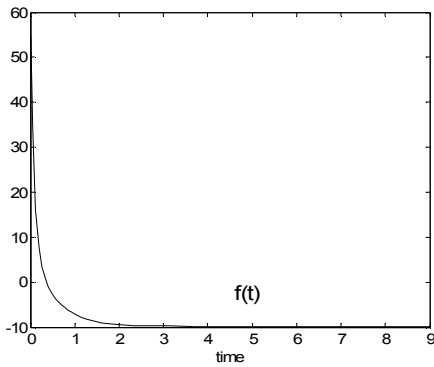
Σχ.5.14α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [-2 \ 2 \ 0]$ .



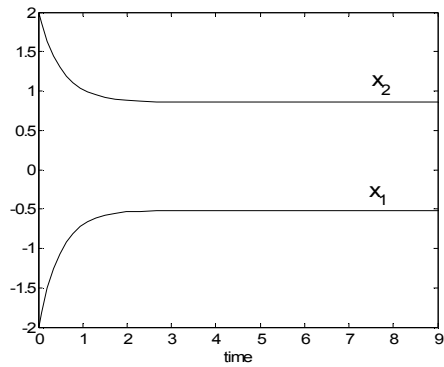
Σχ.5.12γ Η συνάρτηση κόστους, ορισμένη στη λύση του Σχ.5.12α.



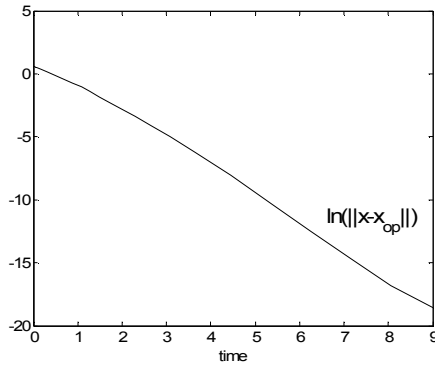
Σχ.5.15α Η λύση του ΝΔΠΠ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [-2 \ 2 \ 0 \ 40]$ .



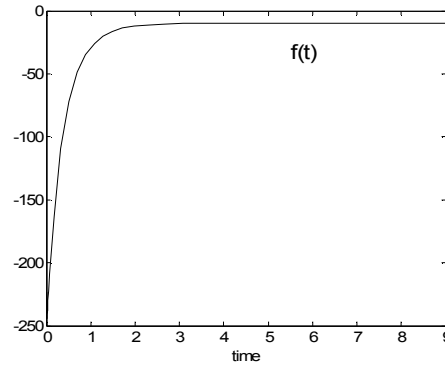
Σχ.5.13γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.13α.



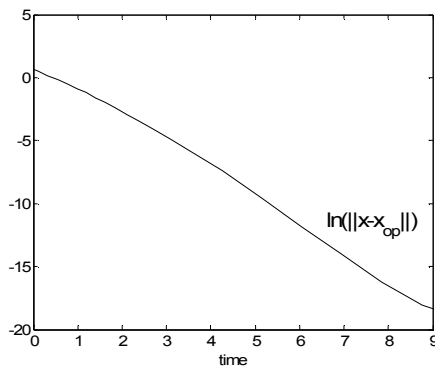
Σχ.5.16α Η λύση του ΝΔ των XLW, όταν  $x_0^T = [-2 \ 2]$ .



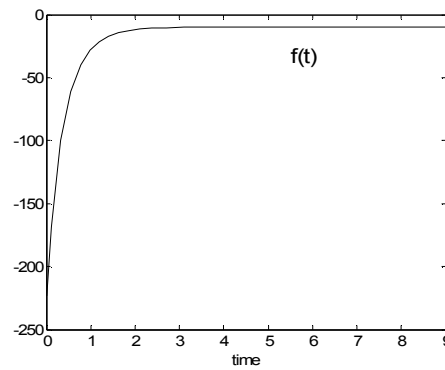
Σχ.5.14β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.14α.



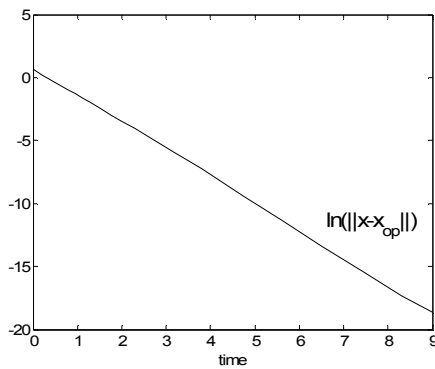
Σχ.5.14γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.14α.



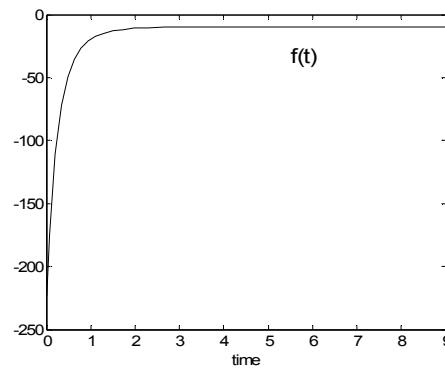
Σχ.5.15β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.15α.



Σχ.5.15γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.15α.

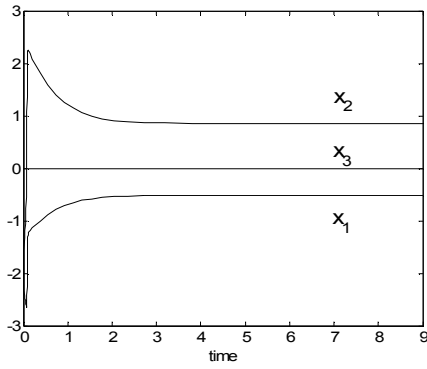


Σχ.5.16β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.16α.

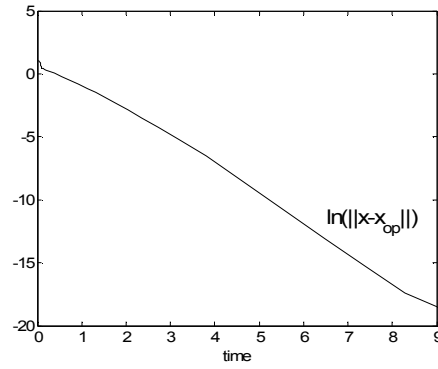


Σχ.5.16γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.16α.

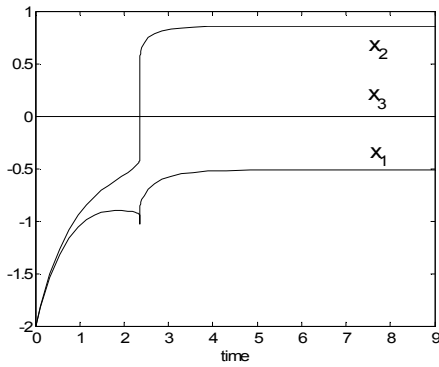




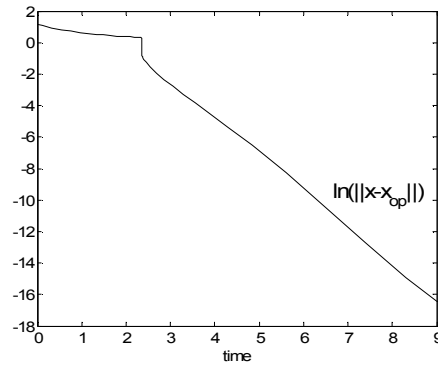
Σχ.5.17α Η λύση του ΝΑΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [-2 \ -2 \ 0]$ .



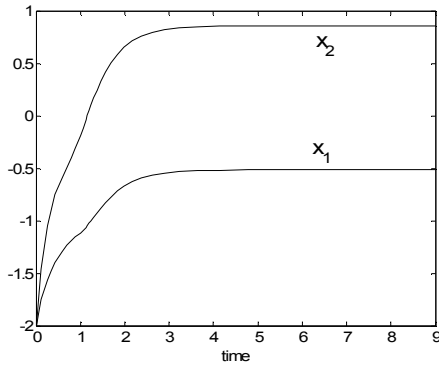
Σχ.5.17β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ. 5.7α.



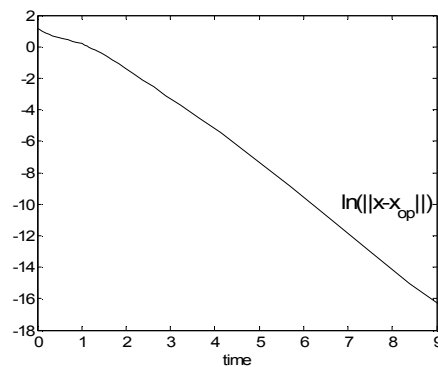
Σχ.5.18α Η λύση του ΝΑΤΠ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [-2 \ -2 \ 0 \ 40]$ .



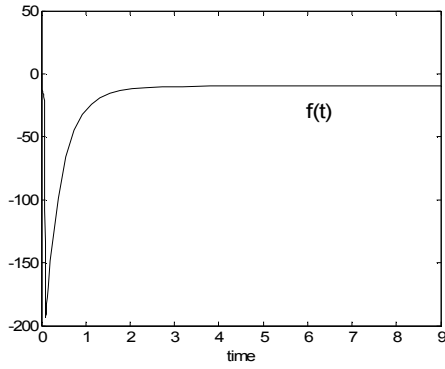
Σχ.5.18β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ. 5.18α.



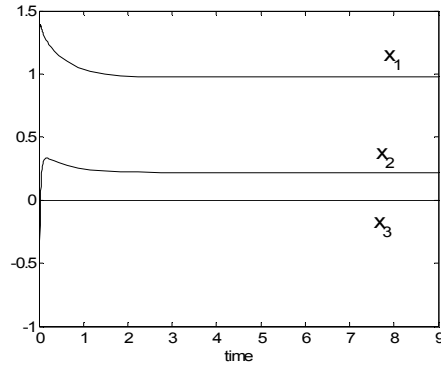
Σχ.5.19α Η λύση του Ν.Δ. των XLW, όταν  $x_0^T = [-2 \ -2]$ .



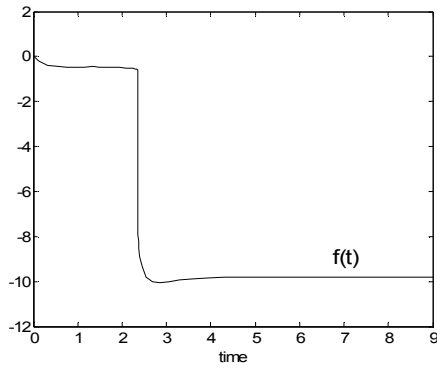
Σχ.5.19β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.19α.



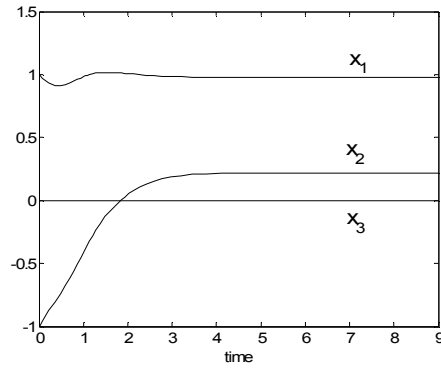
Σχ.5.17γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.17α.



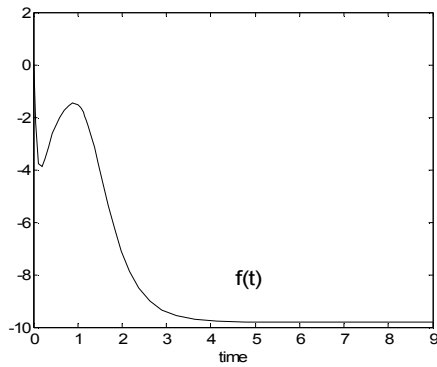
Σχ.5.20α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [1 \ -1 \ 0]$ .



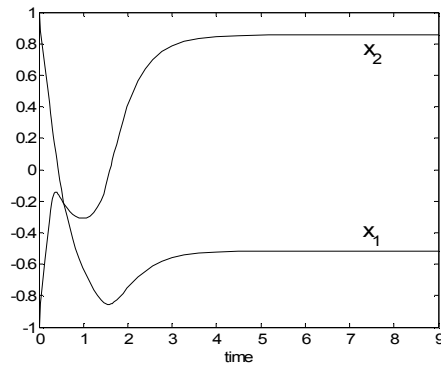
Σχ.5.18γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.18α.



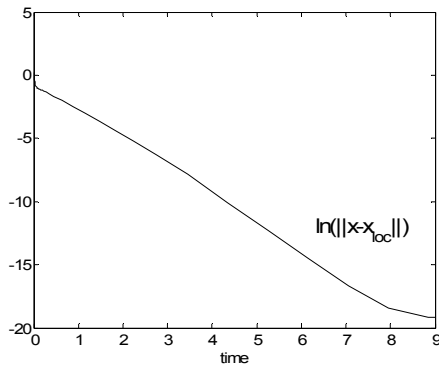
Σχ.5.21α Η λύση του ΝΔΤΠ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [1 \ -1 \ 0 \ 40]$ .



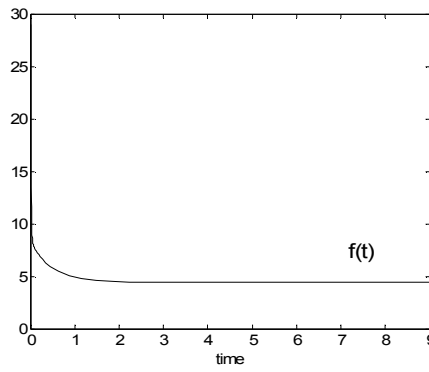
Σχ.5.19γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.19α.



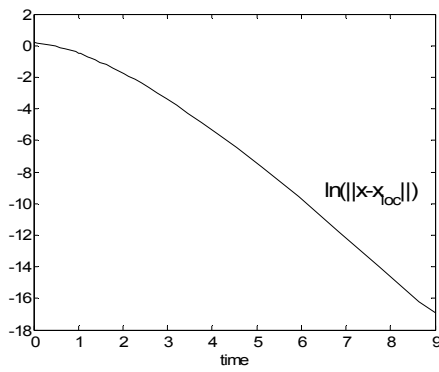
Σχ.5.22α Η λύση του ΝΔ των XLW, όταν  $x_0^T = [1 \ -1]$ .



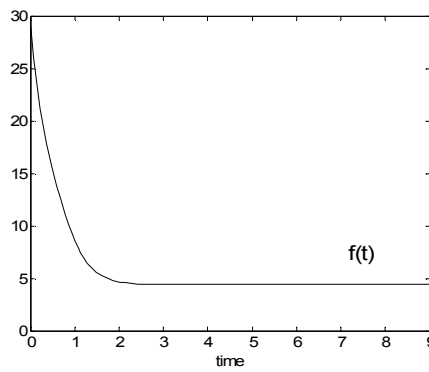
Σχ.5.20β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.20α.



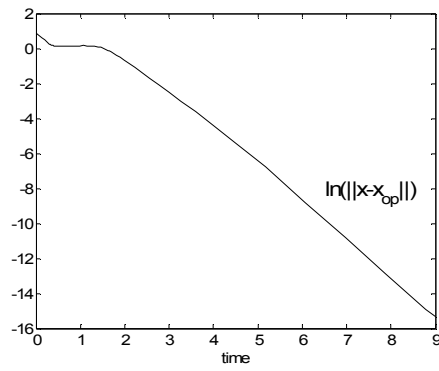
Σχ.5.20γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.20α.



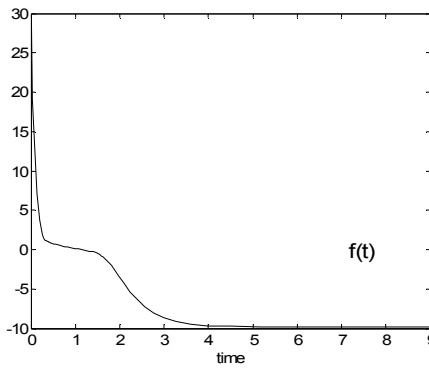
Σχ.5.21β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.21α.



Σχ.5.21γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.21α.



Σχ.5.22β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.22α.

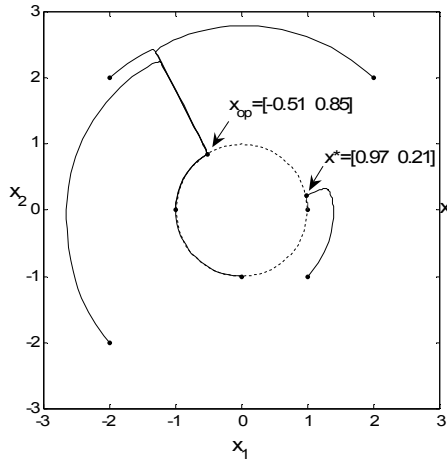


Σχ.5.22γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.22α.

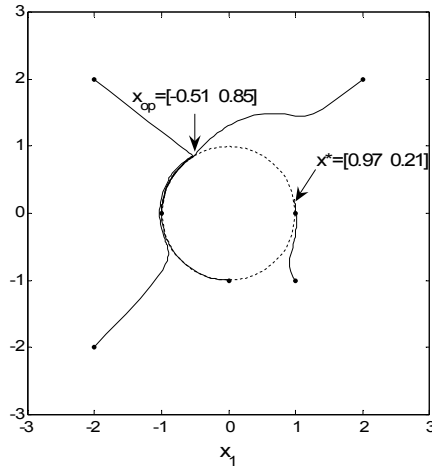
Οι λύσεις των ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ, που ξεκινούν από το τέταρτο αρχικό σημείο συγκλίνουν στο  $x_{loc}$ , σημείο τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης κόστους του προβλήματος με τον ισοτικό περιορισμό. Από τα σχήματα 5.20β και 5.21β προκύπτει ότι η σύγκλιση τους είναι εκθετική με εκθετική σταθερά περίπου -2. Το σφάλμα σύγκλισης των λύσεων και των δύο ΝΔ στο  $x_{loc}$ , είναι της τάξης του  $10^{-8}$  όταν  $T = 9$ .

Για τα υπόλοιπα αρχικά σημεία τα ΝΔΠΚΜΕΛ, ΝΔΤΠ και ΝΔ των XLW έχουν παρόμοια συμπεριφορά. Από τα σχήματα 5.11β-5.19β φαίνεται η εκθετική ταχύτητα σύγκλισης των λύσεων των τριών Νευρωνικών Δικτύων στο μοναδικό ολικό ελάχιστο του προβλήματος, με εκθετική σταθερά περίπου ίση με τη σταθερά χρόνου τους, δηλαδή -2. Το σφάλμα σύγκλισης στο  $x_{op}$  όταν  $T = 9$ , είναι της τάξης του  $10^{-8}$ . Επιπλέον στα σχήματα 5.18α, 5.18β και 5.18γ παρατηρείται ασυνέχεια της λύσης του ΝΔΤΠ, όταν  $t = 2.3$  περίπου, που σημαίνει  $s \neq 0$  όταν  $t = 2.3$  (βλ. Εισ.5.1).

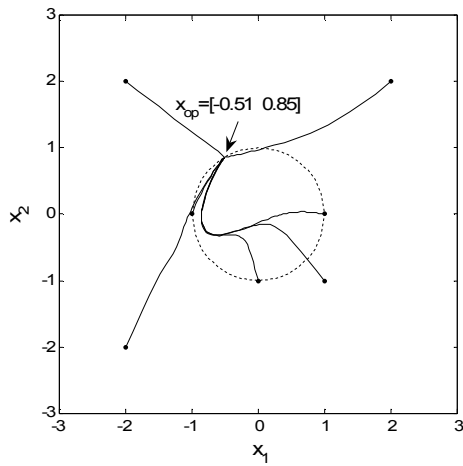
Στα σχήματα 5.23, 5.24 και 5.25 δίνονται τα διαγράμματα φάσης  $(x_1, x_2)$  (των συνιστωσών που διαμορφώνουν τη συνάρτηση κόστους του προβλήματος) των λύσεων των τριών Νευρωνικών Δικτύων, για τα επτά εξεταζόμενα αρχικά σημεία. Σχετικά με το ΝΔΠΚΜΕΛ ενδιαφέρον παρουσιάζει η παρατήρηση ότι, τα μη γραμμικά κομμάτια του διαγράμματος φάσης Σχ.5.23, αντιστοιχούν σε χρόνους στους οποίους το μέτρο  $\|P(x)\nabla f(x)\|$  (η κατεύθυνση αυτή μειώνει τη συνάρτηση κόστους  $f$  του προβλήματος) είναι μεγαλύτερο από το μέτρο  $\|\nabla h(x)(\nabla h(x)^T \nabla h(x))h(x)\|$  (η κατεύθυνση αυτή μειώνει το μέτρο των περιορισμών). Στα γραμμικά κομμάτια του διαγράμματος φάσης Σχ.5.23 το μέτρο  $\|P(x)\nabla f(x)\|$  είναι μεγαλύτερο από το μέτρο  $\|\nabla h(x)(\nabla h(x)^T \nabla h(x))h(x)\|$ .



Σχ.5.23 Το διάγραμμα φάσης  $(x_1, x_2)$  του ΝΔΠΚΜΕΛ, για επτά αρχικά σημεία.



Σχ.5.24 Το διάγραμμα φάσης  $(x_1, x_2)$  του ΝΔΤΠ, για επτά αρχικά σημεία.



Σχ.5.25 Το διάγραμμα φάσης  $(x_1, x_2)$  του ΝΔ των XLW, για επτά αρχικά σημεία.

Τέλος εξετάζεται η επιτυχία σύγκλισης των λύσεων των Νευρωνικών Δικτύων στο  $x_{op}$ . Επιλέγονται χίλια τυχαία, , αρχικά σημεία με  $x_{o1}, x_{o2} \in [-2 \ 2]$ ,  $x_{o3} = 0$  και  $\lambda_o \in [-2 \ 2]$ . Προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα: 769 λύσεις του ΝΔΠΚΜΕΛ συγκλίνουν στο  $x_{op}$  και οι υπόλοιπες 231 συγκλίνουν στο  $x_{loc}$ ,

755 λύσεις του ΝΔΤΠ συγκλίνουν στο  $x_{op}$  και οι υπόλοιπες 245 συγκλίνουν στο  $x_{loc}$ , ενώ όλες οι λύσεις (1000) του ΝΔ των XLW συγκλίνουν στο  $x_{op}$ . Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό ότι, το ΝΔ των XLW λύνει το αρχικό πρόβλημα με τον ανισοτικό περιορισμό, το οποίο δεν έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο  $x_{loc}$ . Το σφάλμα σύγκλισης των λύσεων και των τριών ΝΔ στο  $x_{op}$ , είναι μικρότερο του  $10^{-8}$ , όταν  $T \geq 9$ .

*Παράδειγμα 5.2* Πρόκειται για το εξής πρόβλημα

$$\min_{x \in R^4} \left\{ (x_1 \cos x_2 - x_2 \sin x_1)^2 : x_1^2 + x_3^2 = 1, x_2^2 + x_4^2 = 1 \right\},$$

που είναι η τροποποίηση σε πρόβλημα ισοτικών περιορισμών του διδιάστατου προβλήματος:  $\min_{x \in R^2} \left\{ (x_1 \cos x_2 - x_2 \sin x_1)^2 : -1 \leq x_1, x_2 \leq 1 \right\}$  ([LiW], Ex. 3, pp.1251-1262). Η συνάρτηση κόστους του προβλήματος δεν είναι κυρτή. Το πρόβλημα αυτό, έχει ολικό ελάχιστο τιμής μηδέν σε άπειρο πλήθος σημείων του  $R^4$ . Το σύνολο  $X^* = \{x \in R^4 : x_1 = 0, x_3^2 = 1, x_2^2 + x_4^2 = 1\}$  περιλαμβάνει σημεία στα οποία το πρόβλημα έχει ολικό ελάχιστο.

Η Ιακωβιανή μήτρα των ισοτικών περιορισμών είναι  $\nabla h(x) = 2 \begin{bmatrix} x_1 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & x_4 \end{bmatrix}^T$ . Εύκολα προκύπτει ότι,  $rank(\nabla h(x)) = 2 \Leftrightarrow x \in \Omega = \{x \in R^4 : (x_1 x_3)^2 + (x_2 x_4)^2 \neq 0\}$ . Έτσι το ΝΔΠΚΜΕΛ (3.4), που αναφέρεται στο παράδειγμα, ορίζεται στο σύνολο  $\Omega$  και περιγράφεται από το παρακάτω δυναμικό σύστημα:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\mu\left(1 - \frac{x_1^2}{(x_1^2 + x_3^2)}\right)(\cos x_2 + x_2 \sin x_1) - \rho(t) \frac{x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)}{2(x_1^2 + x_3^2)} \\ \dot{x}_2 &= -\mu\left(1 - \frac{x_2^2}{(x_2^2 + x_4^2)}\right)(-x_1 \sin x_2 - \cos x_1) - \rho(t) \frac{x_2(x_2^2 + x_4^2 - 1)}{2(x_2^2 + x_4^2)} \\ \dot{x}_3 &= -\mu\left(1 - \frac{x_1 x_3}{(x_1^2 + x_3^2)}\right)(\cos x_2 + x_2 \sin x_1) - \rho(t) \frac{x_3(x_1^2 + x_2^2 - 1)}{2(x_1^2 + x_3^2)} \\ \dot{x}_4 &= -\mu\left(1 - \frac{x_2 x_4}{(x_2^2 + x_4^2)}\right)(-x_1 \sin x_2 - \cos x_1) - \rho(t) \frac{x_4(x_2^2 + x_4^2 - 1)}{2(x_2^2 + x_4^2)}.\end{aligned}$$

Επιπλέον λύνεται και το δυναμικό σύστημα που περιγράφει το ΝΔ των XLW που αναφέρεται στο πρόβλημα του Example 3 της αναφοράς [LiW].

Ακολουθούν τα αποτελέσματα σύγκλισης των λύσεων των ΝΔΠΚΕΛ, ΝΔΠΚΜΕΛ, ΝΔΤΠ και του ΝΔ των XLW για τέσσερα αρχικά σημεία, εκ των οποίων δύο ικανοποιούν τον ισοτικό περιορισμό του προβλήματος. Οι συνιστώσες  $x_3$  και  $x_4$  αφορούν τα ΝΔΠΚΕΛ, ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ. Η διδιάστατη συνιστώσα  $\lambda_0$  αφορά το ΝΔΤΠ και είναι η αρχική συνθήκη του πολλαπλασιαστική Lagrange.

Για τα ΝΔΠΚΕΛ, ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ επιλέγονται  $\mu=10$  και

$$k(t) = \exp(-10t), \text{ άρα } \rho = -\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = 10 \text{ και για το Νευρωνικό Δίκτυο των XLW}$$

επιλέγεται σταθερά χρόνου -10. Το διάστημα ολοκλήρωσης είναι [0 1] για τα επιτρεπτά αρχικά σημεία και [0 2] για τα μη επιτρεπτά σημεία.

## Επιτρεπτά αρχικά σημεία

$\begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}$	x(1) του ΝΔΠΚΕΛ	x(1) του ΝΔΠΚΜΕΛ	$\begin{bmatrix} x(1) \\ \lambda(1) \end{bmatrix}$ του ΝΔΤΠ	x(1) του ΝΔ των XLW
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.81504430 \\ 0 \\ 0.57938512 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.81504430 \\ 0 \\ 0.57939863 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.81500347 \\ 0 \\ 0.57945607 \\ 0.00007373 \\ 0.00007720 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.32077883 \\ 0.74545297 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.8 \\ 0.6 \\ 0.6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.80141538 \\ 0.78734452 \\ 0.59810816 \\ 0.61651310 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.80141539 \\ 0.78734452 \\ 0.59810815 \\ 0.61651325 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.80159610 \\ 0.78736818 \\ 0.59786593 \\ 0.61648304 \\ 0.00004465 \\ 0.00004330 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.80145949 \\ 0.78734992 \end{bmatrix}$

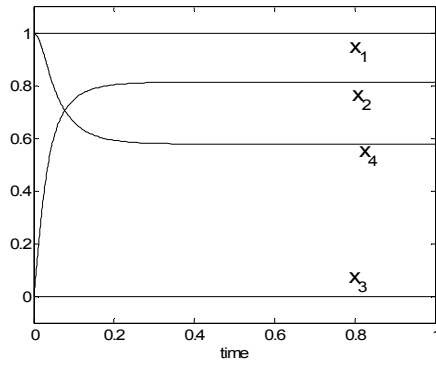
Παρατηρείται όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα μικρή απόκλιση μεταξύ των σημείων σύγκλισης των ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ (βλ. Παράδ.5.1). Έτσι για το πρώτο επιτρεπτό αρχικό σημείο τα σημεία σύγκλισης των λύσεων του ΝΔΠΚΕΛ και του ΝΔΠΚΜΕΛ ικανοποιούν τους δύο περιορισμούς, με σφάλμα της τάξης του  $10^{-7}$  και μικρότερο του  $10^{-10}$ , αντίστοιχα.



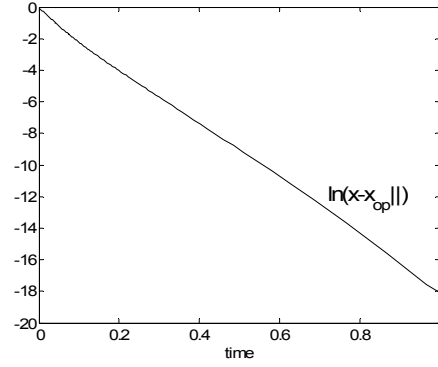
Μη επιτρεπτά αρχικά σημεία

$\begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}$	$x(2)$ του ΝΔΠΚΜΕΛ	$\begin{bmatrix} x(2) \\ \lambda(2) \end{bmatrix}$ του ΝΔΤΠ	$x(2)$ του ΝΔ των XLW
$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.99657219 \\ 1 \\ 0.08272767 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.88595407 \\ 1 \\ 0.463772970 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.70307614 \\ 0.77605605 \\ 0.71111457 \\ 0.63066394 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.69219035 \\ 0.77490290 \\ 0.72171498 \\ 0.63208028 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.81504431 \end{bmatrix}$

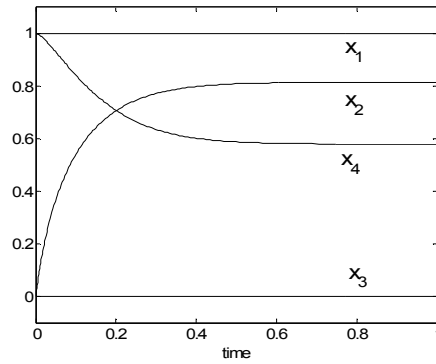
Τα σημεία σύγκλισης των λύσεων που ξεκινούν από τα συγκεκριμένα αρχικά σημεία, είναι σημεία που μηδενίζουν τη συνάρτηση κόστους, δηλαδή είναι σημεία ολικού ελαχίστου του προβλήματος και εξαρτώνται από το ΝΔ και από το αρχικό σημείο. Τα σημεία σύγκλισης λοιπόν των λύσεων των τριων ΝΔ, που ξεκινούν από το ίδιο αρχικό σημείο ενδέχεται να είναι διαφορετικά. Επιπλέον διαφορετικά μπορεί να είναι τα σημεία σύγκλισης κάθε ΝΔ, για διάφορα αρχικά σημεία. Για τον εντοπισμό του σημείου σύγκλισης  $x_{op}$  κάθε λύσης, λύνεται το δυναμικό σύστημα επιλέγοντας μεγάλο χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης. Στα σχήματα που ακολουθούν, η ταχύτητα σύγκλισης κάθε λύσης ορίζεται ως προς αυτό το σημείο.



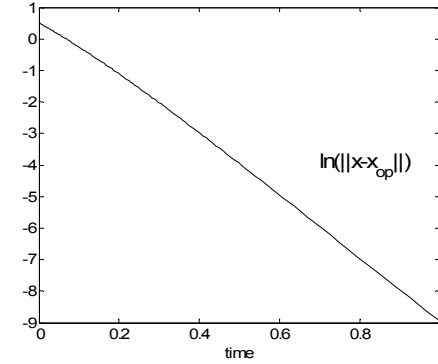
Σχ.5.26α Η λύση του ΝΑΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [1 \ 0 \ 0 \ 1]$ .



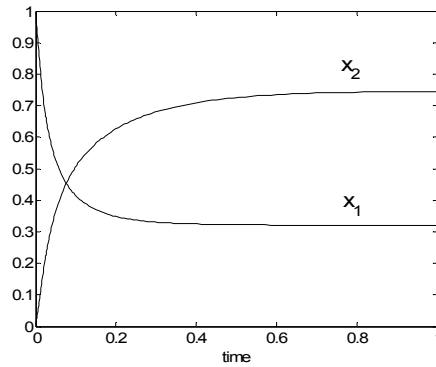
Σχ.5.26β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ. 5.26α.



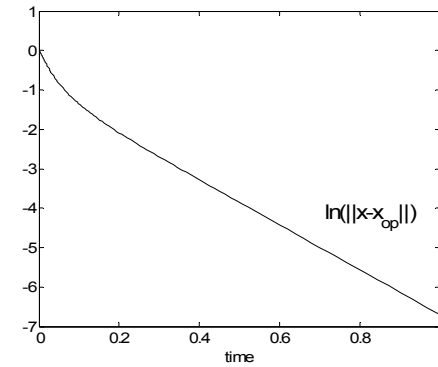
Σχ.5.27α Η λύση του ΝΑΤΠ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$ .



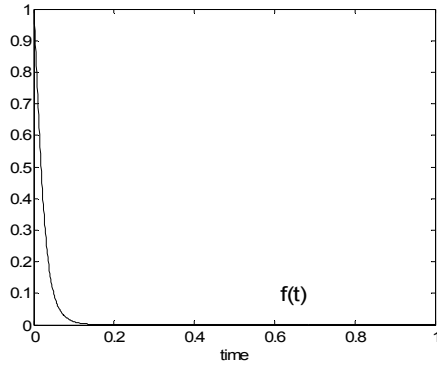
Σχ.5.27β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ. 5.27α.



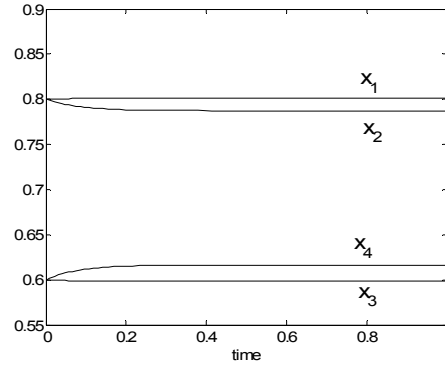
Σχ.5.28α Η λύση του ΝΔ των XLW όταν  $x_0^T = [1 \ 0]$ .



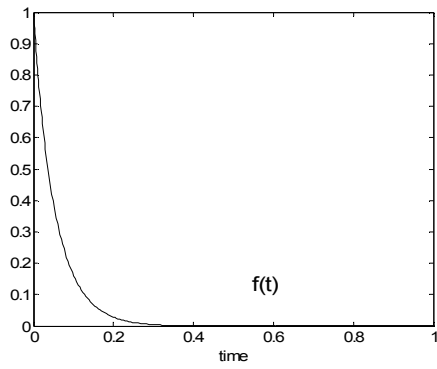
Σχ.5.28β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ. 5.28α.



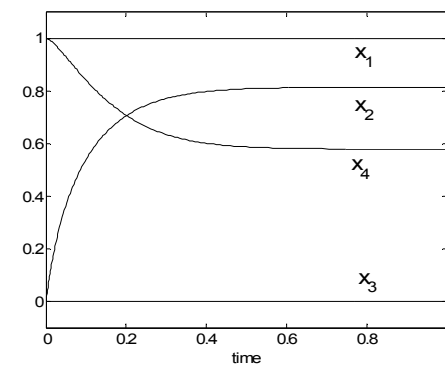
Σχ.5.26γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.26α.



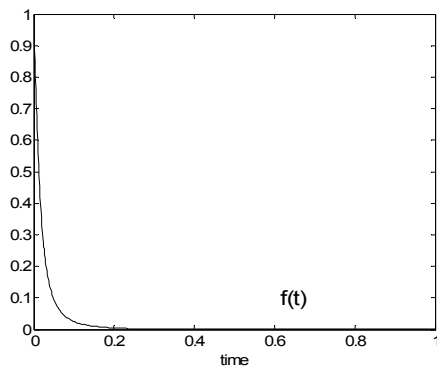
Σχ.5.29α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [0.8 \ 0.8 \ 0.6 \ 0.6]$ .



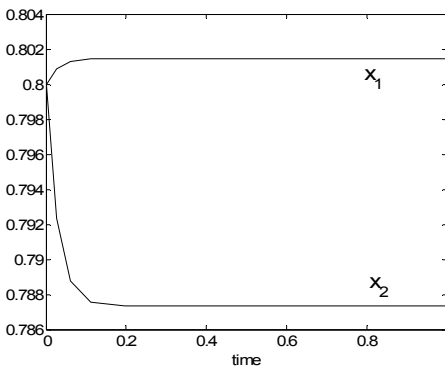
Σχ.5.27γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.27α.



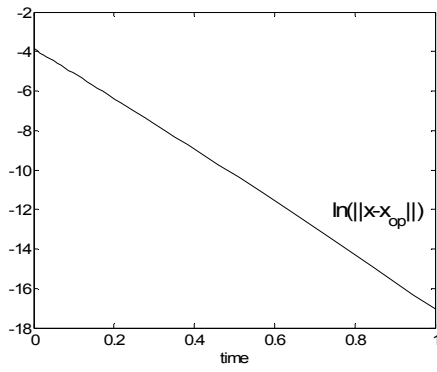
Σχ.5.30α Η λύση του ΝΔΠΠ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [0.8 \ 0.8 \ 0.6 \ 0.6 \ 1 \ 1]$ .



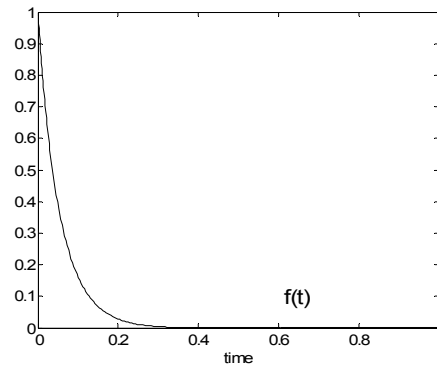
Σχ.5.28γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.28α.



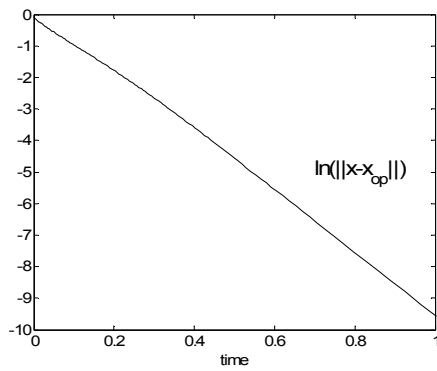
Σχ.5.31α Η λύση του ΝΔ των XLW, όταν  $x_0^T = [0.8 \ 0.8]$ .



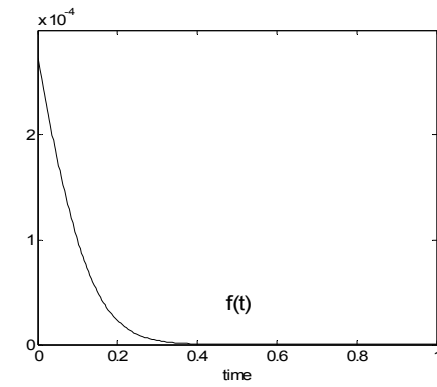
Σχ.5.29β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.29α.



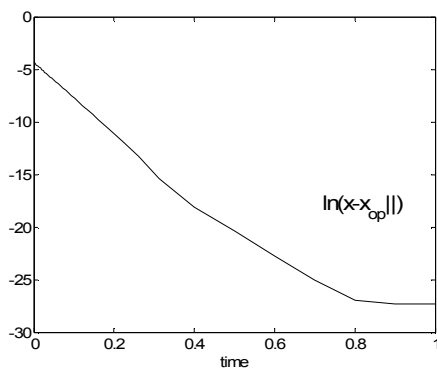
Σχ.5.29γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.29α.



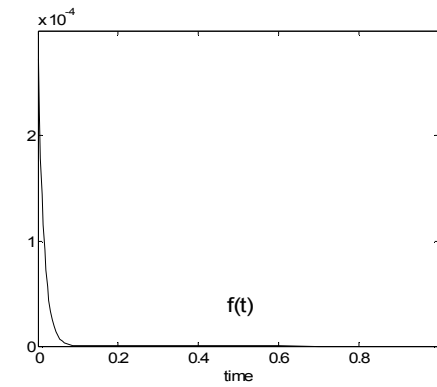
Σχ.5.30β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.30α.



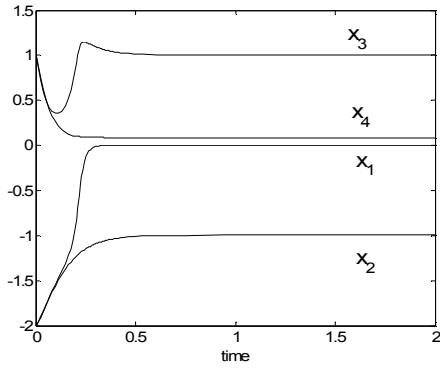
Σχ.5.30γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.30α.



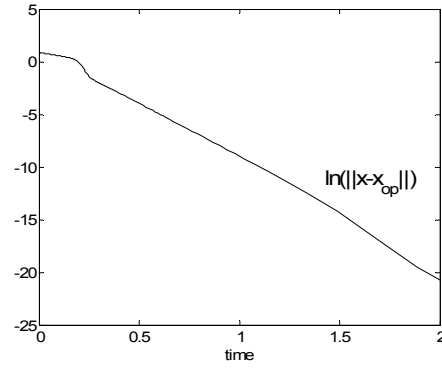
Σχ.5.31β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.31α.



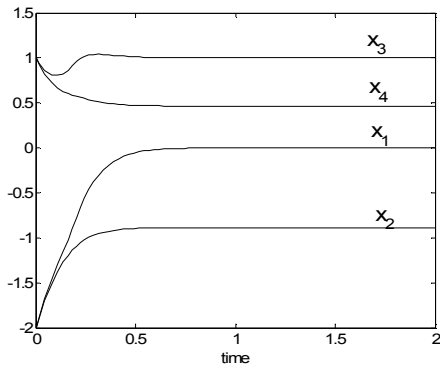
Σχ.5.31γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.31α.



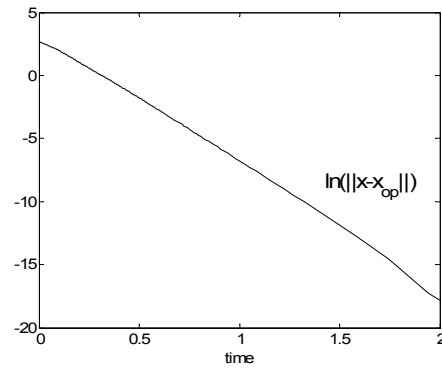
Σχ.5.32α Η λύση του ΝΑΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [-2 \ -2 \ 1 \ 1]$ .



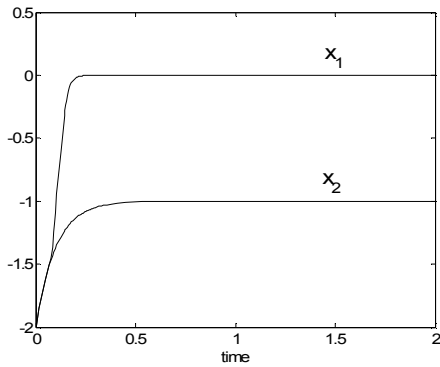
Σχ.5.32β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.32α.



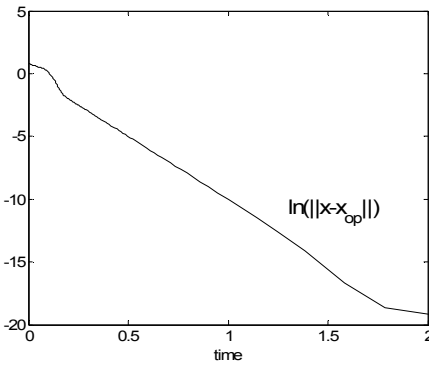
Σχ.5.33α Η λύση του ΝΑΔΠΙ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [-2 \ -2 \ 1 \ 1 \ 10 \ 10]$ .



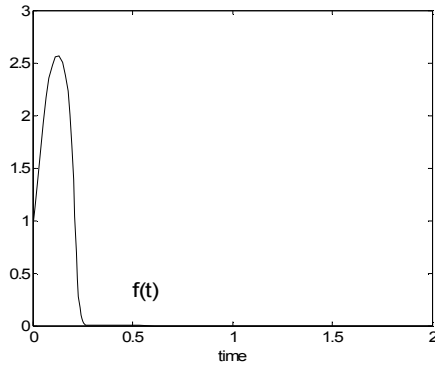
Σχ.5.33β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.33α.



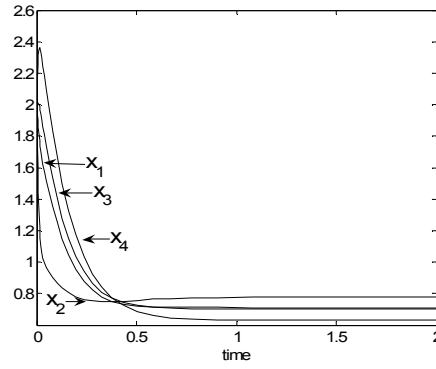
Σχ.5.34α Η λύση του ΝΔ των XLW, όταν  $x_0^T = [-2 \ -2]$ .



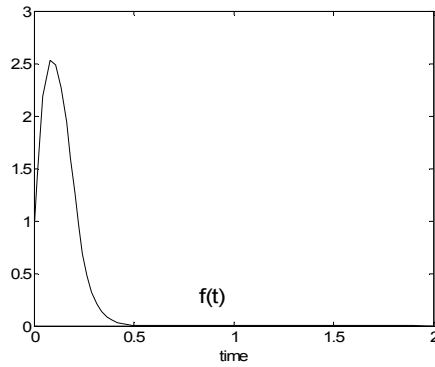
Σχ.5.34β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.34α.



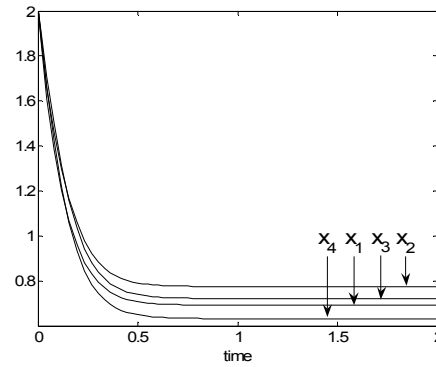
Σχ.5.32γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.32α.



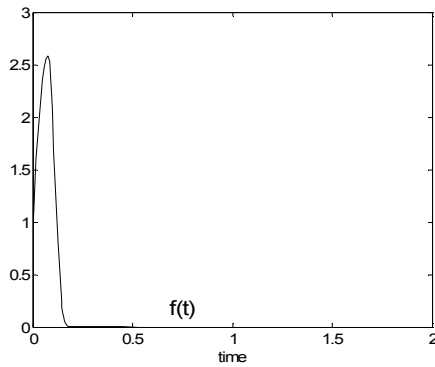
Σχ.5.35α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [2 \ 2 \ 2 \ 2]$ .



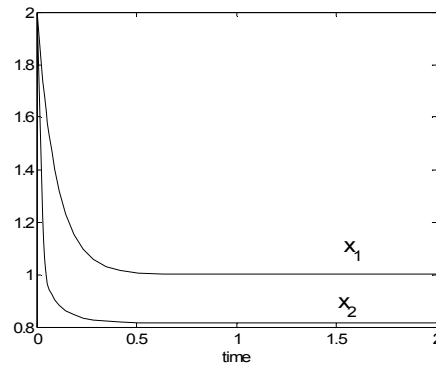
Σχ.5.33γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.33α.



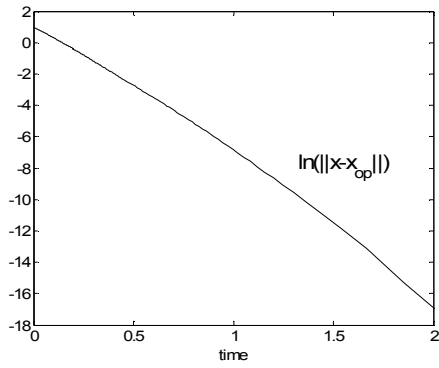
Σχ.5.36α Η λύση του ΝΔΤΠ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 10 \ 10]$ .



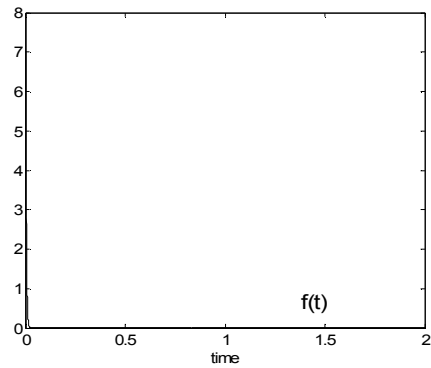
Σχ.5.34γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.34α.



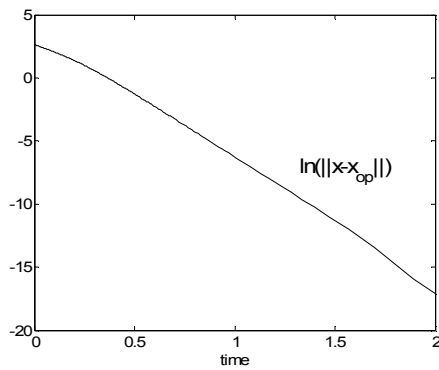
Σχ.5.37α Η λύση του ΝΔΤΠ, όταν  $x_0^T = [2 \ 2]$ .



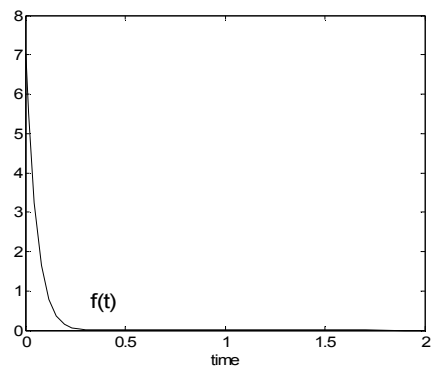
Σχ.5.35β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.35α.



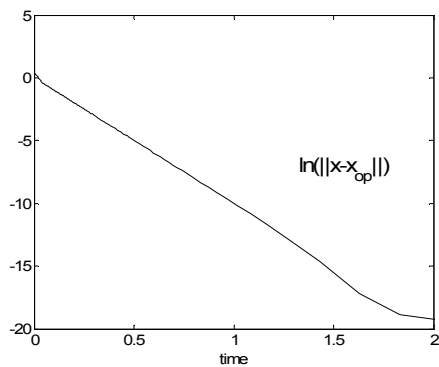
Σχ.5.35β Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.35α.



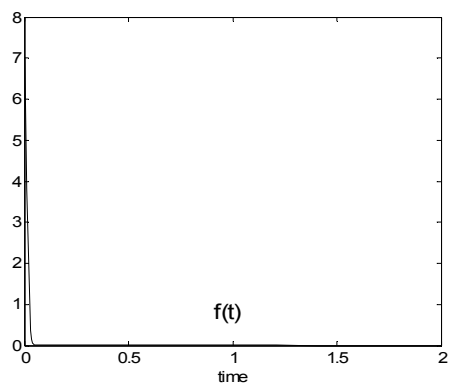
Σχ.5.36β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.36α.



Σχ.5.36β Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.36α.



Σχ.5.37β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.37α.



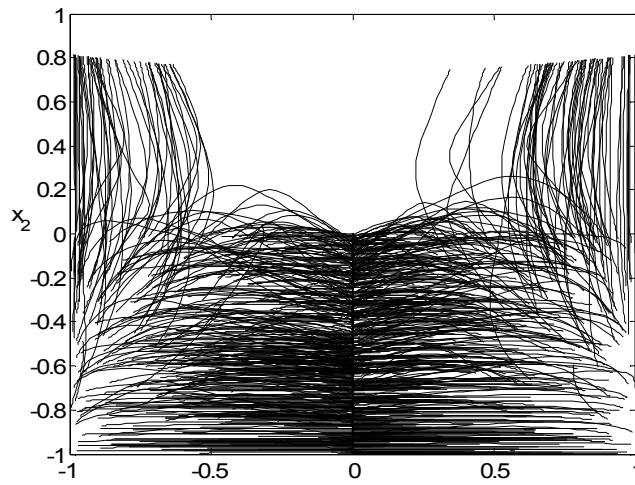
Σχ.5.37β Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.37α.

Η εκθετική ταχύτητα σύγκλισης των λύσεων και των τριών εξεταζόμενων ΝΔ και για τα τέσσερα αρχικά σημεία είναι προφανής. Συγκεκριμένα, από τα σχήματα 5.26β, 5.29β, 5.32β και 5.35β φαίνεται η εκθετική σύγκλιση του ΝΔΠΚΜΕΛ, σε ολικό ελάχιστο του προβλήματος. Η εκθετική σταθερά είναι περίπου, -20 για τα δύο επιτρεπτά αρχικά σημεία και -10 για τα δύο μη επιτρεπτά αρχικά σημεία. Δηλαδή όπως συμβαίνει και στο προηγούμενο παράδειγμα το ΝΔΠΚΜΕΛ συγκλίνει ταχύτερα όταν επιλέγονται επιτρεπτά αρχικά σημεία. Από τα σχήματα 5.33β, 5.34β, 5.36β και 5.37β φαίνεται η εκθετική ταχύτητα σύγκλισης των ΝΔΤΠ και ΝΔ των XLW, για τα δύο μη επιτρεπτά αρχικά σημεία, με εκθετική σταθερά περίπου ίση με τη σταθερά χρόνου τους, δηλαδή -10. Το ΝΔ των XLW για το δεύτερο επιτρεπτό αρχικό σημείο παρουσιάζει πολύ μεγάλη ταχύτητα σύγκλισης. Γενικά στο παράδειγμα αυτό φαίνεται ότι, η ταχύτητα σύγκλισης του ΝΔ των XLW εξαρτάται από το σημείο σύγκλισης.

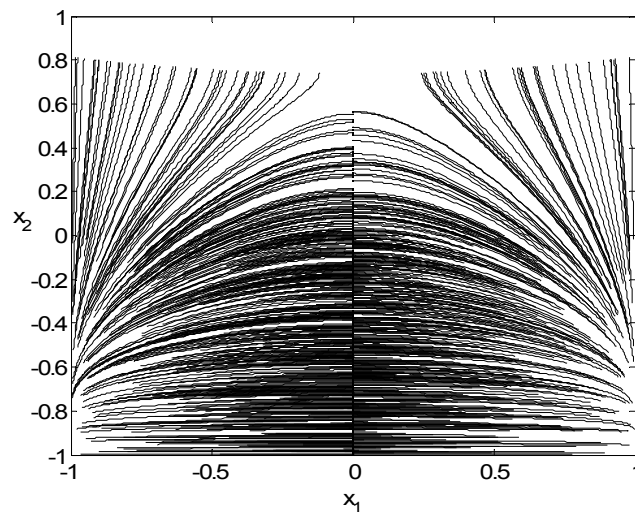
Στη συνέχεια επιλέγονται τυχαία, χίλια αρχικά σημεία που ικανοποιούν τους δύο ισοτικούς περιορισμούς του προβλήματος, με  $x_{o1} \in [-1 \ 1]$ ,  $x_{o2} \in [-1 \ 0]$  και  $\lambda_{o1}, \lambda_{o2} \in [5 \ 10]$ . Εξετάζεται η επιτυχία σύγκλισης των λύσεων των ΝΔΠΚΜΕΛ, ΝΔΤΠ, και ΝΔ των XLW σε ολικό ελάχιστο του προβλήματος. Προκύπτει ότι, όλες (1000) οι λύσεις και των τριών Νευρωνικών Δικτύων συγκλίνουν σε σημεία που είναι ολικά ελάχιστα του προβλήματος, με τιμή της συνάρτησης κόστους μικρότερη από  $10^{-10}$ , όταν  $T = 6$ . Αν και το σύνολο των σημείων των ολικών ελαχίστων του προβλήματος δεν αποτελείται από απομονωμένα σημεία, η σύγκλιση των λύσεων των ΝΔ είναι σύγκλιση σε σημείο του συνόλου αυτού. Παρακάτω (βλ. Παράδειγμα 5.4) παρουσιάζεται μια εφαρμογή των ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ με λύσεις που φαίνονται να συγκλίνουν όχι σε σημείο αλλά σε υποσύνολο του συνόλου των ολικών ελαχίστων του προβλήματος. Επιπλέον όπως παρατηρείται και από τους πίνακες που προηγήθηκαν, τα ΝΔ παρόλο που ξεκινούν από το ίδιο αρχικό σημείο, συχνά έχουν διαφορετικό σημείο σύγκλισης μεταξύ τους. Στα σχήματα



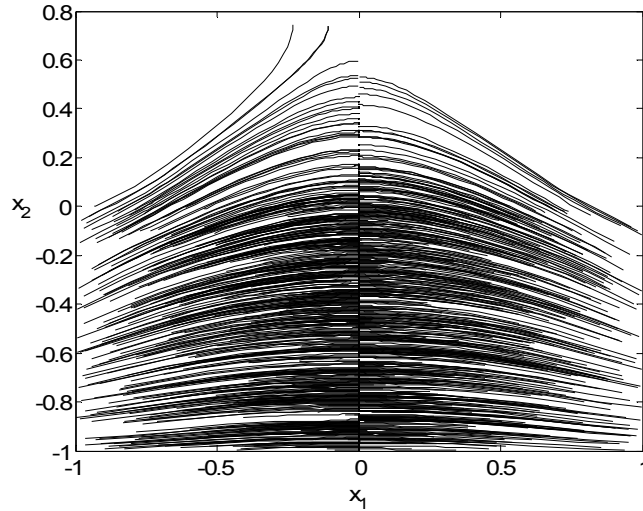
5.38, 5.39 και 5.40 δίνονται τα διάγραμμα φάσης στο  $(x_1, x_2)$  επίπεδο (είναι οι συνιστώσες της λύσης που διαμορφώνουν τη τιμή της συνάρτησης κόστους), που αφορούν τα χίλια αρχικά σημεία.



Σχ.5.38 Τα διαγράμματα φάσης των λύσεων του ΝΔΠΚΜΕΛ, στο  $(x_1, x_2)$  επίπεδο, για χίλια αρχικά σημεία.



Σχ.5.39 Τα διαγράμματα φάσης  $(x_1, x_2)$  των λύσεων του ΝΔΤΠ, στο  $(x_1, x_2)$  επίπεδο, για χίλια αρχικά σημεία.



Σχ.5.40 Τα διαγράμματα φάσης  $(x_1, x_2)$  των λύσεων του ΝΔ των XLW, στο  $(x_1, x_2)$  επίπεδο, για χίλια αρχικά σημεία.

Παράδειγμα 5.3 ([Ops], pp.93-98)

$$\min_{x \in R^5} \left\{ (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^4 + (x_4 - x_5)^2 : A^T x - b = 0 \right\},$$

$$\text{με } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}. \text{ Το πρόβλημα είναι κυρτό και έχει}$$

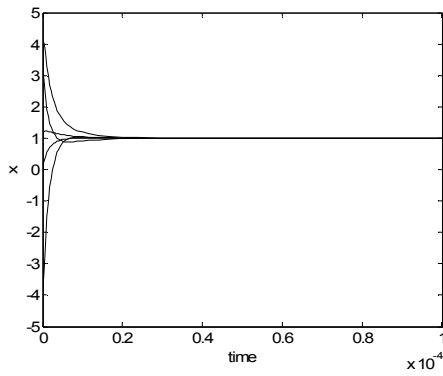
μοναδικό σημείο ολικού ελαχίστου το  $x_{\text{op}} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ .

Εύκολα προκύπτει ότι ισχύει η Υπόθεση 2 στο  $R^5$ . Έτσι το ΝΔΠΚΜΕΛ (3.4) ορίζεται καλώς στο  $R^5$  και περιγράφεται από το ακόλουθο σύστημα:

$$\dot{x} = -\mu(I_5 - A(A^T A)^{-1} A) \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ -2(x_1 - x_2) + 2(x_2 - x_3) \\ -2(x_2 - x_3) + 4(x_3 - x_4)^3 \\ -4(x_3 - x_4)^3 + 2(x_4 - x_5) \\ -2(x_4 - x_5) \end{bmatrix} - \rho(t) A(A^T A)^{-1} (A^T x - b).$$

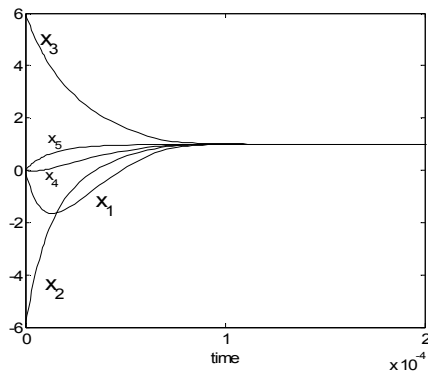
$$\text{Το ΝΔΤΠ περιλαμβάνει τη μήτρα } \frac{\partial L^2}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2+12(x_3-x_4)^2 & -12(x_3-x_4)^2 & 0 \\ 0 & 0 & -12(x_3-x_4)^2 & 12(x_3-x_4)^2 + 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ακολουθούν τα αποτελέσματα σύγκλισης των λύσεων των ΝΔΠΚΕΛ, ΝΔΠΚΜΕΛ, ΝΔΤΠ και του ΝΔ των XLW, για τέσσερα αρχικά σημεία  $[x_0^T \lambda_0^T]^T$ , τα επιτρεπτά  $[0 \ -6 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ ,  $[4 \ -5 \ 4 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  και τα μη επιτρεπτά  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  και  $[1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ . Η τρισδιάστατη συνιστώσα  $\lambda_0$  αφορά το ΝΔΤΠ και είναι η αρχική τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange. Είναι  $\mu=10^5$  και  $k(t)=\exp(-10^5 t)$ , άρα  $\rho = -\dot{k}(t)/k(t) = 10^5$ . Οι χρόνοι ολοκλήρωσης επιλέγονται ώστε οι λύσεις να συγκλίνουν στο ολικό ελάχιστο με ακρίβεια τουλάχιστον όγδοου δεκαδικού ψηφίου. Έτσι για το ΝΔΠΚΜΕΛ με επιτρεπτά αρχικά σημεία επιλέγεται χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης  $[0 \ 10^{-4}]$ . Για το ΝΔΠΚΜΕΛ με μη επιτρεπτά σημεία και για το ΝΔΤΠ επιλέγεται χρονικό διάστημα ολοκλήρωσης  $[0 \ 2 \cdot 10^{-4}]$ .



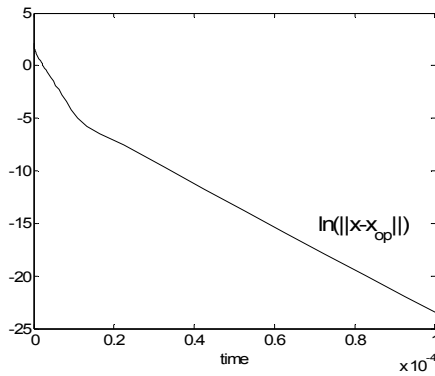
Σχ.5.41α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν

$$x_0^T = [0 \ -6 \ 6 \ 0 \ 0].$$

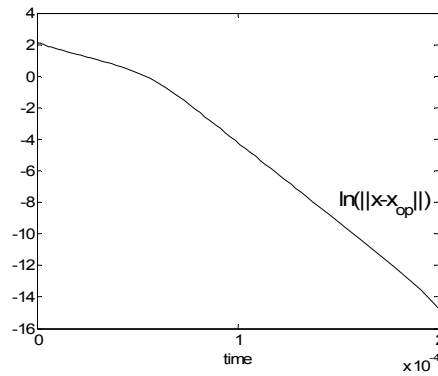


Σχ.5.42α Η λύση του ΝΔΤΠ, όταν

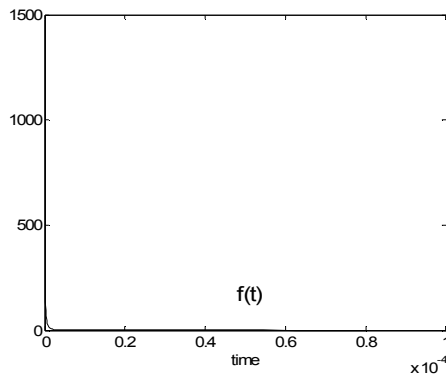
$$[x_0^T \ \lambda_0^T] = [0 \ -6 \ 6 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1].$$



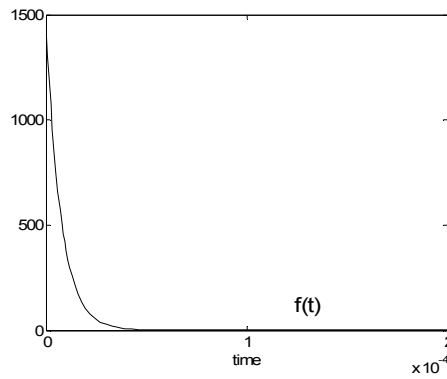
Σχ.5.41β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.41α.



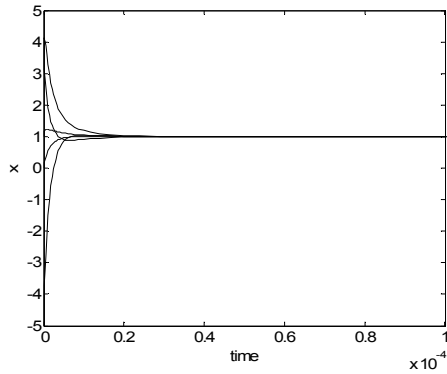
Σχ.5.42β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.42α.



Σχ.5.41γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.41α.

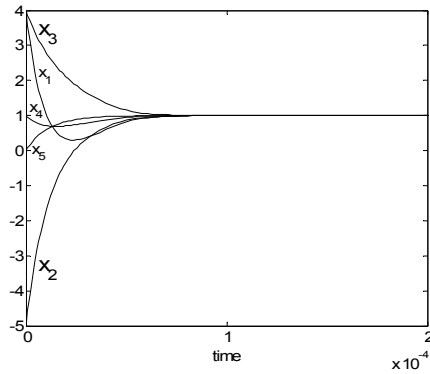


Σχ.5.42γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.42α.



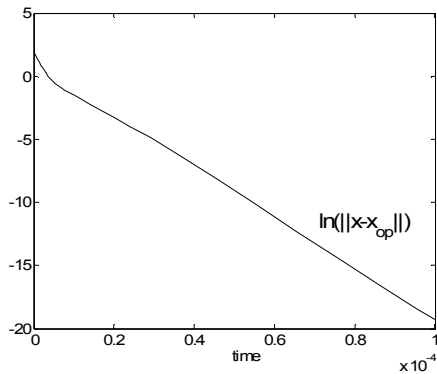
Σχ.5.43α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν

$$x_0^T = [4 \ -5 \ 4 \ 1 \ 0].$$

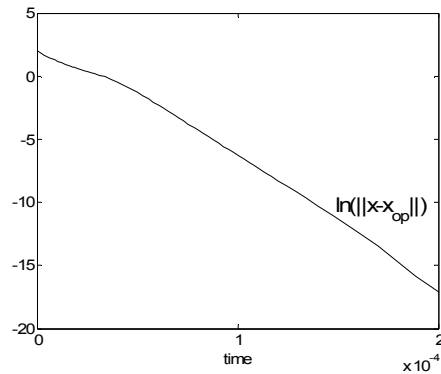


Σχ.5.44α Η λύση του ΝΔΠΠ, όταν

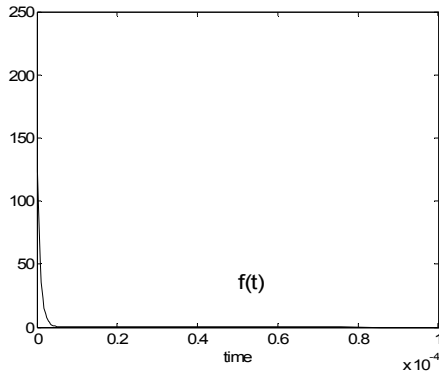
$$[x_0^T \ \lambda_0^T] = [4 \ -5 \ 4 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1].$$



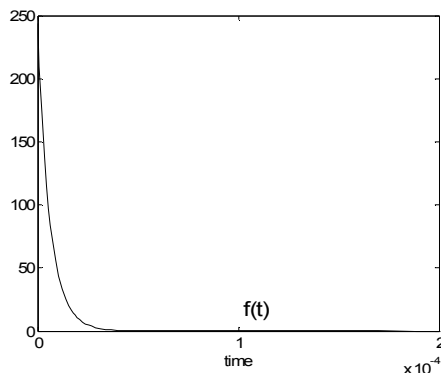
Σχ.5.43β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.43α.



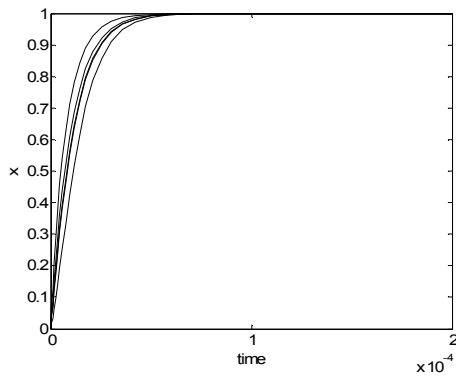
Σχ.5.44β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.44α.



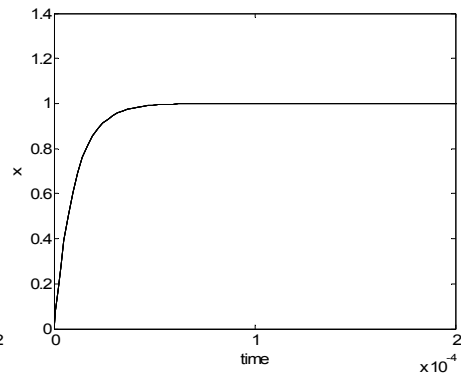
Σχ.5.43γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.43α.



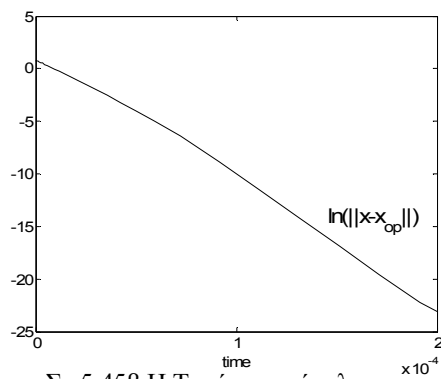
Σχ.5.44γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.44α.



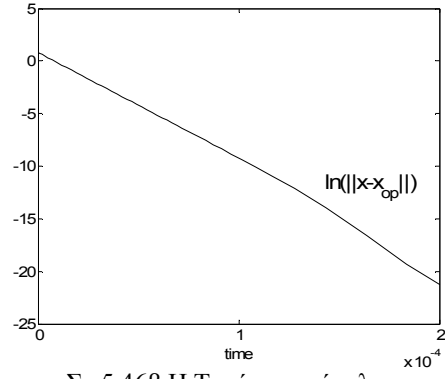
Σχ.5.45α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ .



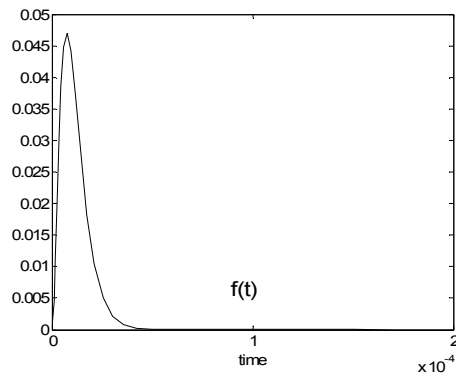
Σχ.5.46α Η λύση του ΝΔΠΠ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$ .



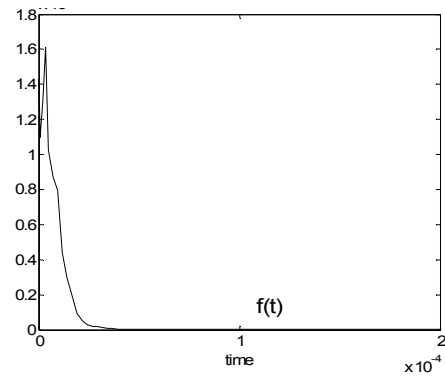
Σχ.5.45β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.45α.



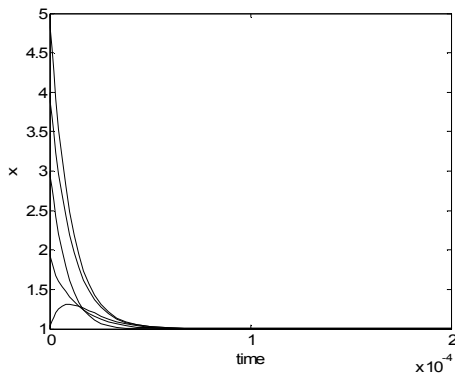
Σχ.5.46β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.46α.



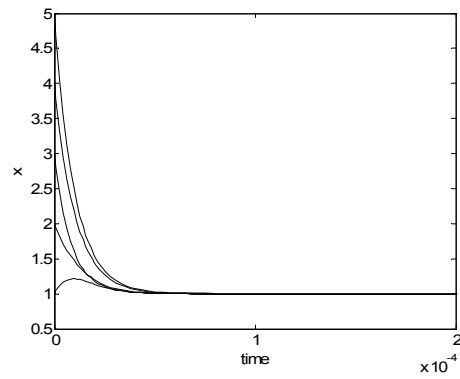
Σχ.5.45γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.45α.



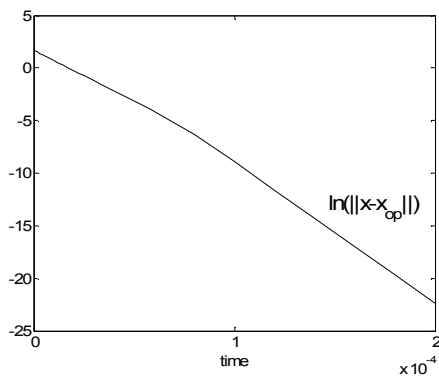
Σχ.5.46γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.46α.



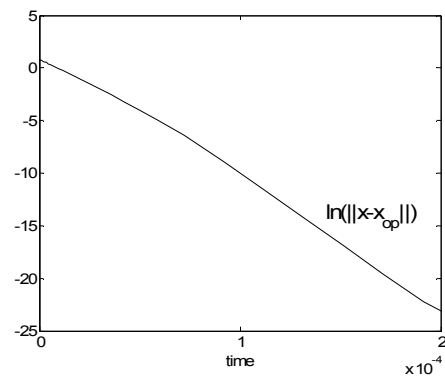
Σχ.5.47α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]$ .



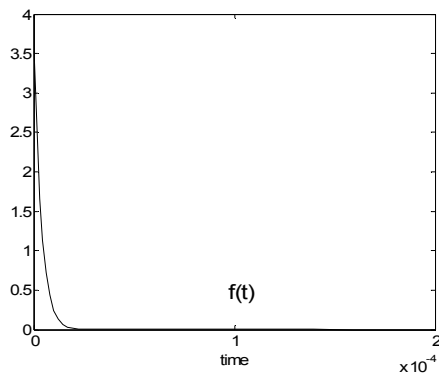
Σχ.5.48α Η λύση του ΝΔΤΠ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 1 \ 1]$ .



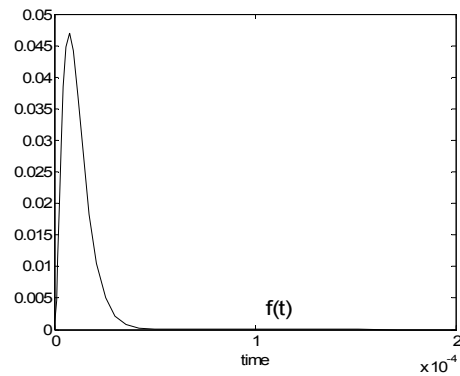
Σχ.5.47β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.47α.



Σχ.5.48β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.48α.



Σχ.5.47γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.47α.



Σχ.5.48γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.48α.

Από τα σχήματα 5.41β και 5.43β, 5.45β και 5.47β φαίνεται ότι, οι λύσεις του ΝΔΠΚΜΕΛ συγκλίνουν στο  $x_{op}$  σχεδόν εκθετικά. Συγκεκριμένα, για τα επιτρεπτά αρχικά σημεία η εκθετική σταθερά σύγκλισης είναι περίπου  $-2 \cdot 10^5$  και το σφάλμα σύγκλισης είναι της τάξης του  $10^{-9}$ , όταν  $T = 10^{-4}$ . Για τα μη επιτρεπτά αρχικά σημεία η εκθετική σταθερά σύγκλισης είναι περίπου  $-10^5$ , δηλαδή ίση με τη σταθερά χρόνου των δύο Νευρωνικών Δικτύων και το σφάλμα σύγκλισης είναι  $10^{-9}$ , όταν  $T = 2 \cdot 10^{-4}$ . Από τα σχήματα 5.42β, 5.44β, 5.46β και 5.48β φαίνεται ότι και το ΝΔΤΠ συγκλίνει σχεδόν εκθετικά στο  $x_{op}$ , με εκθετική σταθερά περίπου  $-10^5$ . Το σφάλμα σύγκλισης των λύσεων του είναι της τάξης του  $10^{-9}$ , όταν  $T = 2 \cdot 10^{-4}$ . Η ταχύτητα σύγκλισης του ΝΔΤΠ δεν φαίνεται να εξαρτάται από το αν τα αρχικά σημεία είναι επιτρεπτα ή μη επιτρεπτά.

Τέλος επιλέγονται τυχαία, χίλια αρχικά σημεία  $[x_o^T \lambda_o^T]$  που ικανοποιούν τους δύο ισοτικούς περιορισμούς του προβλήματος, με συνιστώσες στο διάστημα  $[-10 \ 10]$ . Εξετάζεται η επιτυχία σύγκλισης των λύσεων των ΝΔΠΚΜΕΛ, και ΝΔΤΠ στο ολικό ελάχιστο του προβλήματος. Προκύπτει ότι, όλες (1000) οι λύσεις και των δύο Νευρωνικών Δικτύων συγκλίνουν στο ολικό ελάχιστο του προβλήματος, με τιμή της συνάρτησης κόστους μικρότερη από  $10^{-9}$ , όταν  $T = 2 \cdot 10^{-4}$ .

*Παράδειγμα 5.4* Πρόκειται για το εξής πρόβλημα:

$$\min_{y \in R^3} \{f(x) : x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0\},$$

με

$$f(x) = \begin{cases} (\sqrt{x_3} - 1)^4 \left( 1 - \frac{x_2}{2\sqrt{x_3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x_3} - 1}\right) - \frac{x_1}{2\sqrt{x_3}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x_3} - 1}\right) \right), & \text{αν } x_3 \neq 1 \text{ και } x_3 > 0 \\ 0, & \text{αν } x_3 = 1 \end{cases}$$



Προφανώς  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$  και η  $f$  είναι συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση στο  $\Omega$ . Το πρόβλημα αυτό είναι η τροποποίηση του προβλήματος χωρίς περιορισμό [Ber], Ex. 2.18, pp. 53, σε πρόβλημα με ισотικό περιορισμό, εισάγοντας τη μεταβλητή  $x_3$ . Αφού  $f(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$ , εύκολα προκύπτει ότι, το σύνολο των σημείων στα οποία το πρόβλημα έχει ολικό ελάχιστο περιλαμβάνει το σύνολο  $X^* = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ .

Εύκολα διαπιστώνεται ότι, το πρόβλημα αυτό ικανοποιεί την Υπόθεση 2 (βλ. Παράγραφο 3.1), στο σύνολο  $\Omega$ . Έτσι, το ΝΔΠΚΜΕΛ (3.4) του παραδείγματος ορίζεται καλώς και περιγράφεται από το εξής δυναμικό σύστημα:

$$\dot{x} = -\mu \left( I_3 - \frac{1}{4x_1^2 + 4x_2^2 + 1} \begin{bmatrix} 4x_1^2 & 4x_1x_2 & -2x_1 \\ 4x_1x_2 & 4x_2^2 & -2x_2 \\ -2x_1 & -2x_2 & 1 \end{bmatrix} \right) \nabla f(x) - \rho \frac{1}{4x_1^2 + 4x_2^2 + 1} \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ -1 \end{bmatrix} (x_1^2 + x_2^2 - x_3)$$

όπου

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{-(\sqrt{x_3}-1)^4}{2\sqrt{x_3}} \sin \frac{1}{\sqrt{x_3}-1} \\ \frac{-(\sqrt{x_3}-1)^4}{2\sqrt{x_3}} \cos \frac{1}{\sqrt{x_3}-1} \\ \frac{(\sqrt{x_3}-1)^3}{x_3} \left( \left( -x_2 + \frac{x_2(\sqrt{x_3}-1)}{4\sqrt{x_3}} + \frac{x_1}{4(\sqrt{x_3}-1)} \right) \cos \frac{1}{\sqrt{x_3}-1} + \left( -x_1 + \frac{x_1(\sqrt{x_3}-1)}{4\sqrt{x_3}} - \frac{x_2}{4(\sqrt{x_3}-1)} \right) \sin \frac{1}{\sqrt{x_3}-1} + 2\sqrt{x_3} \right) \end{bmatrix}$$

Για τα αποτελέσματα που ακολουθούν είναι  $\mu = 10^5$  και

$k(t) = \exp(-10^5 t)$ , άρα  $\rho = -\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = 10^5$ . Επιλέγονται τρία αρχικά σημεία, από τα

οποία δύο ικανοποιούν τον περιορισμό. Η συνιστώσα  $\lambda_0$  αφορά το ΝΔΤΠ και είναι η αρχική τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι, οι λύσεις των ΝΔΠΚΕΜ, ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ φαίνεται να συγκλίνουν όχι σε σημείο, αλλά στο σύνολο  $X^*$ . Στην περίπτωση αυτή η ταχύτητα σύγκλισης εκτιμάται θεωρώντας την χρονική εξέλιξη της απόστασης της λύσης από το σύνολο  $X^*$ , δηλαδή

$$\ln(\text{dist}(x(t), X^*)) = \ln \left( \min_y \|x(t) - y\| : y \in X^* \right) =$$

$$= \ln \left[ \left( \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2} - 1 \right)^2 + (x_3(t) - 1)^2 \right]^{1/2}.$$

Το ΝΔΤΠ του παραδείγματος όπως φαίνεται από όσα ακολουθούν, συγκλίνει πολύ πιο γρήγορα από τα άλλα δυο ΝΔ. Το διάστημα ολοκλήρωσης είναι  $[0 \ 50]$  για τα ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ και  $[0 \ 0.1]$  για το ΝΔΤΠ.

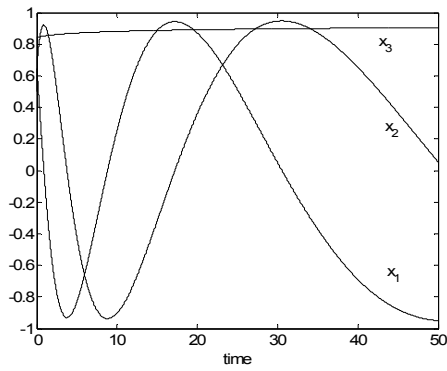
#### Επιτρεπτά αρχικά σημεία

$\begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}$	$x(50)$ του ΝΔΠΚΕΛ	$x(50)$ του ΝΔΠΚΜΕΛ	$\begin{bmatrix} x(0.1) \\ \lambda(0.1) \end{bmatrix}$ του ΝΔΤΠ
$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.94328448 \\ 0.04301509 \\ 0.90521850 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.94979339 \\ 0.05513442 \\ 0.90514780 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.67409751 \\ -0.67851391 \\ 0.91478828 \\ 0.00000096 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.7 \\ 0.65 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.93321723 \\ 0.14000231 \\ 0.90475829 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.93632721 \\ 0.16706069 \\ 0.90461781 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.71630636 \\ -0.63397481 \\ 0.91501843 \\ 0.00000095 \end{bmatrix}$

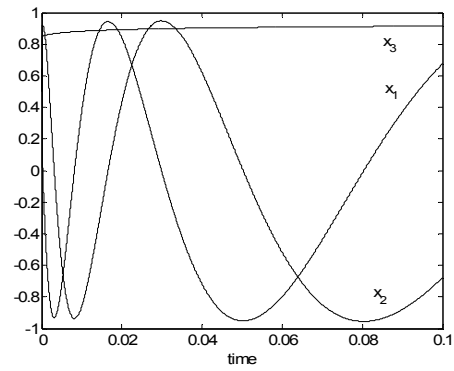
Παρατηρείται μικρή απόκλιση των σημείων σύγκλισης του ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ (βλ. Παράδ.5.1). Τα σημεία σύγκλισης των ΝΔΠΚΕΛ, ΝΔΠΚΜΕΛ ικανοποιούν τον περιορισμό με σφάλμα της τάξης του  $10^{-2}$  και  $10^{-7}$ , αντίστοιχα.

#### Μη Επιτρεπτό αρχικό σημείο

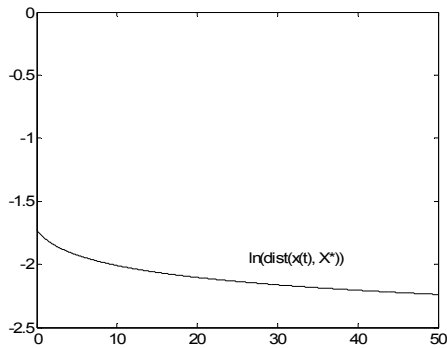
$\begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}$	$x(50)$ του ΝΔΠΚΜΕΛ	$\begin{bmatrix} x(0.1) \\ \lambda(0.1) \end{bmatrix}$ του ΝΔΤΠ
$\begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.7 \\ 0.65 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.20626001 \\ 1.03152862 \\ 1.10659425 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.51921228 \\ -0.90825120 \\ 1.09450146 \\ 0.00000102 \end{bmatrix}$



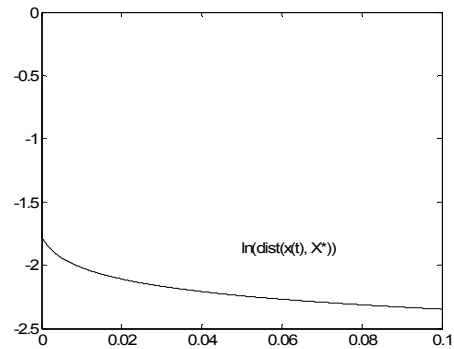
Σχ.5.49α Η λύση του ΝΑΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]$ .



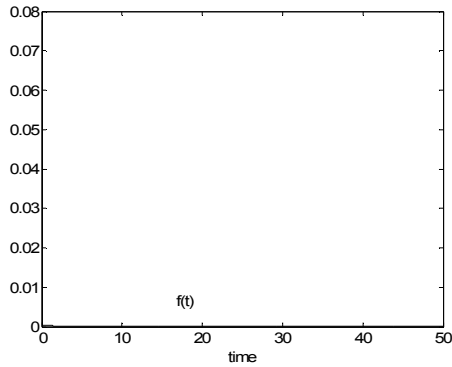
Σχ.5.50α Η λύση του ΝΑΠΠΙ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 1]$ .



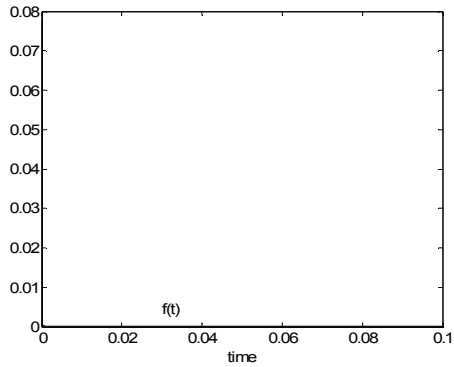
Σχ.5.49β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.49α.



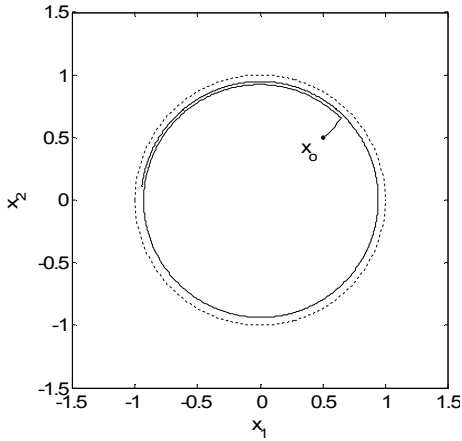
Σχ.5.50β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.50α.



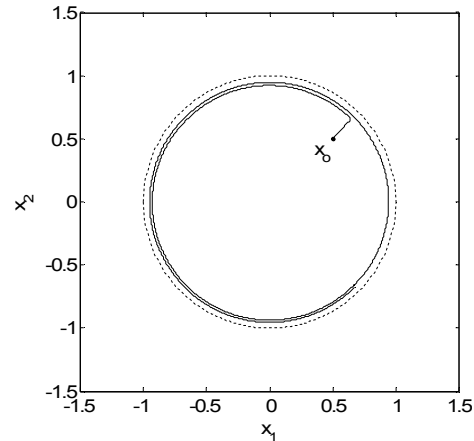
Σχ.5.49γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.49α.



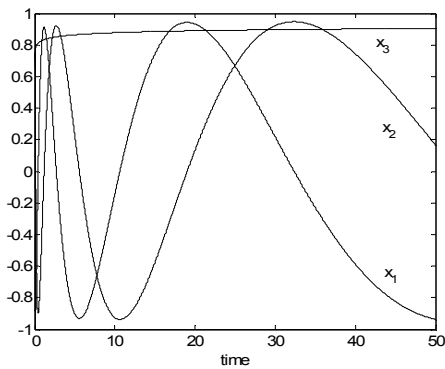
Σχ.5.50γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.50α.



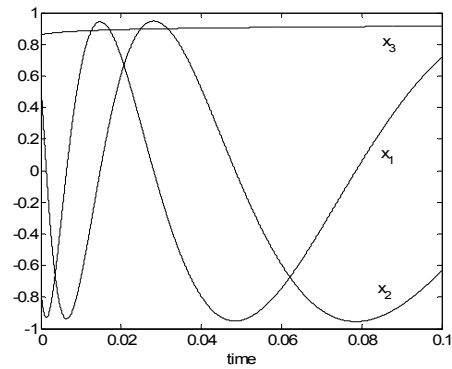
Σχ.5.49δ. Η τροχιά της λύσης, του Σχ.5.49α στο  $(x_1, x_2)$  επίπεδο.



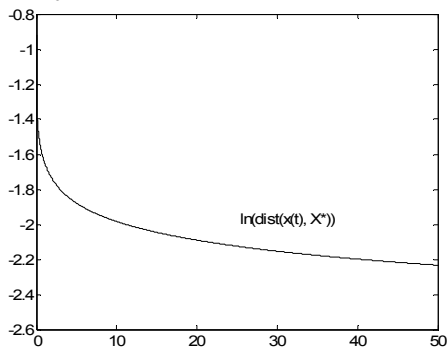
Σχ.5.50δ. Η τροχια της λύσης, του Σχ.5.50α στο  $(x_1, x_2)$  επίπεδο.



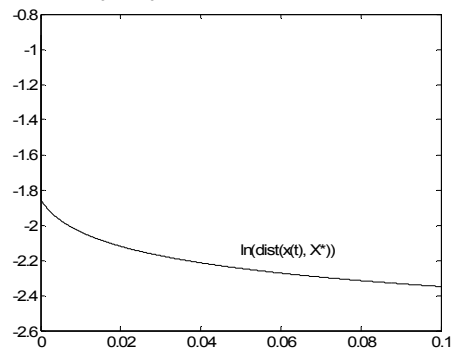
Σχ.5.51α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [-0.4 \ 0.7 \ 0.65]$ .



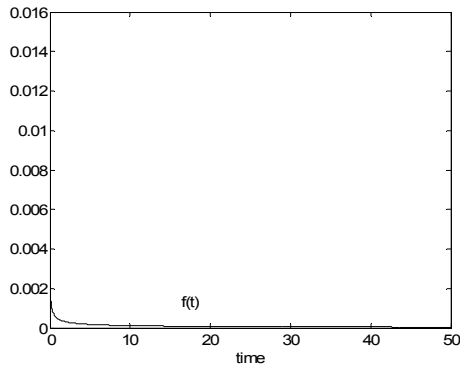
Σχ.5.52α Η λύση του ΝΔΤΠ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [-0.4 \ 0.7 \ 0.65 \ 1]$ .



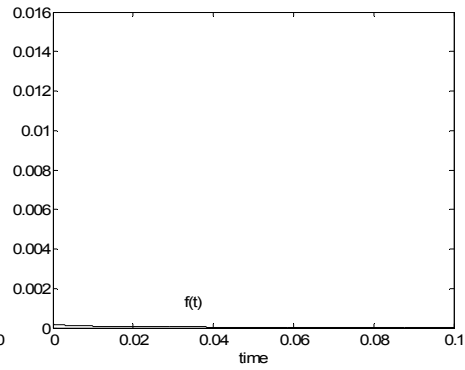
Σχ.5.51β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.49α.



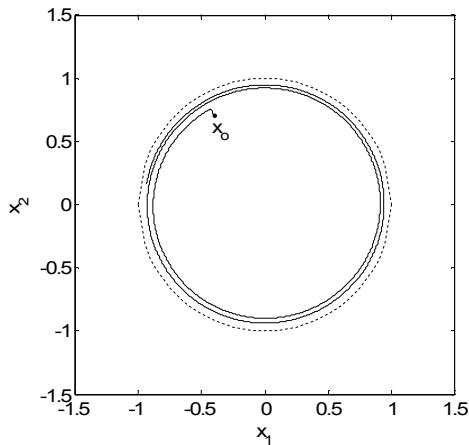
Σχ.5.52β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.50α.



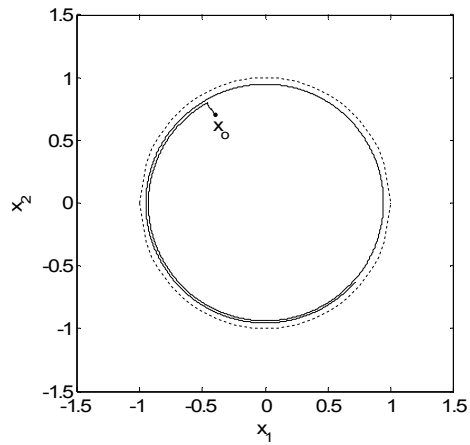
Σχ.5.51γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.51α.



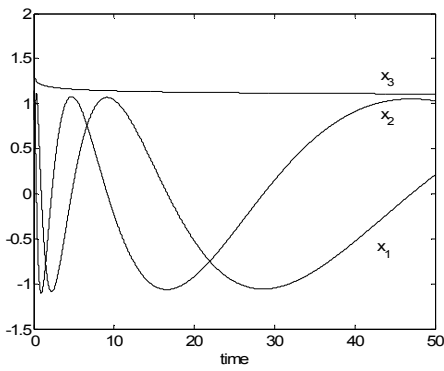
Σχ.5.52γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.52α.



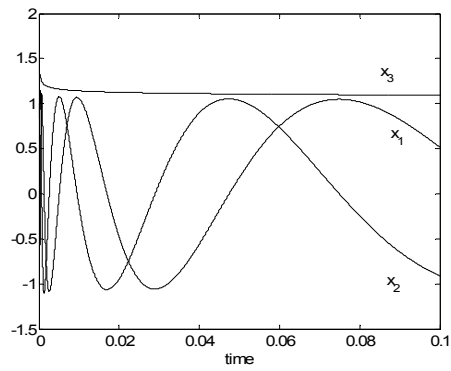
Σχ.5.51δ Η τροχιά της λύσης, του Σχ.5.51α στο  $(x_1, x_2)$  επίπεδο.



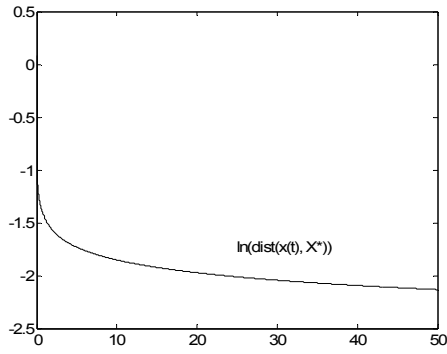
Σχ.5.52δ Η τροχιά της λύσης, του Σχ.5.52α στο  $(x_1, x_2)$  επίπεδο.



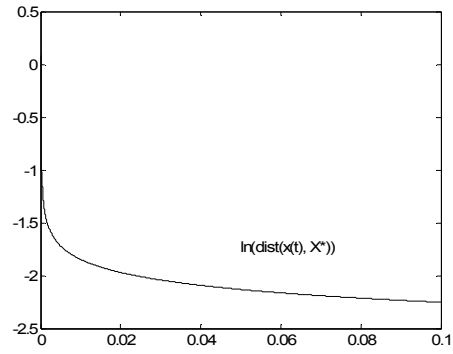
Σχ.5.53α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [-1 \ 1 \ 2]$ .



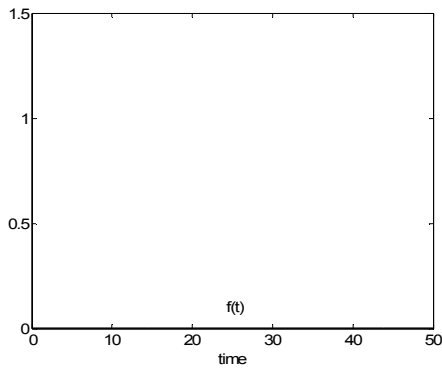
Σχ.5.54α Η λύση του ΝΔΤΠΙ, όταν  $[x_0^T \ \lambda_0^T] = [-1 \ 1 \ 2 \ 1]$ .



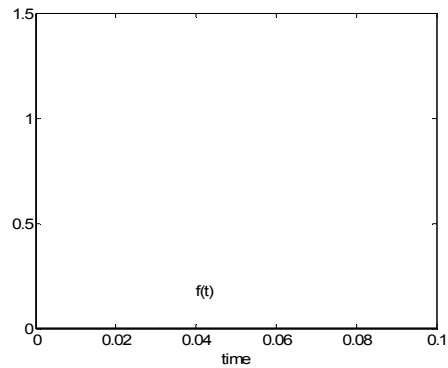
Σχ.5.53β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.53α.



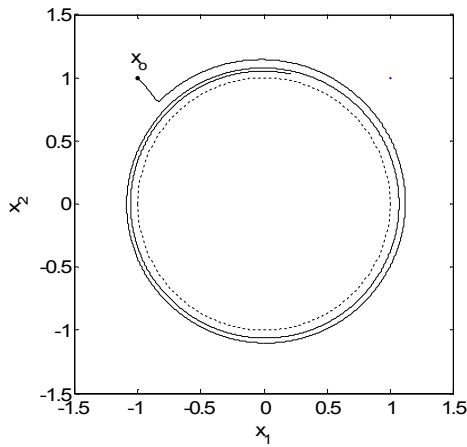
Σχ.5.54β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.54α.



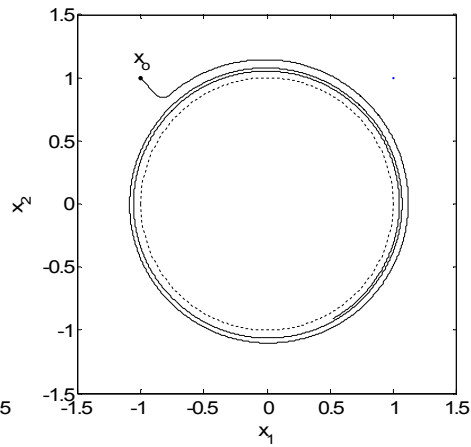
Σχ.5.53γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.53α.



Σχ.5.54γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.54α.



Σχ.5.53δ Η τροχιά της λύσης του Σχ.5.53α, στο  $(x_1, x_2)$  επίπεδο.



Σχ.5.54δ Η τροχια της λύσης, του Σχ.5.54α, στο  $(x_1, x_2)$  επίπεδο.

Από τα σχήματα 5.49δ, έως 5.54δ φαίνεται ότι οι  $x_1$  και  $x_2$  συνιστώσες των λύσεων των ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ, συγκλίνουν στο μοναδιαίο κύκλο ακολουθώντας σπирάλ τροχιά. Η σύγκλιση φαίνεται να γίνεται σε δύο φάσεις. Η πρώτη φάση έχει μικρή διάρκεια, περίπου  $10^4$  φορές μικρότερη του χρόνου ολοκλήρωσης. Λόγω της τόσο μικρής διάρκειάς της, αυτή η φασή σύγκλισης δεν διακρίνεται στα σχήματα που αφορούν την χρονική εξέλιξη σε όλο το διάστημα ολοκλήρωσης, τόσο της λύσης, όσο και της ταχύτητας σύγκλισης, καθώς και της συνάρτησης κόστους του προβλήματος. Η πρώτη φάση διακρίνεται στα σχήματα που δίνουν την τροχιά των λύσεων στο  $(x_1, x_2)$  επίπεδο. Συγκεκριμένα αντιστοιχεί στο γραμμικό τμήμα των τροχιών των σχημάτων 5.49δ, έως 5.54δ. Η δεύτερη φάση σύγκλισης διαρκεί το υπόλοιπο του χρόνου ολοκλήρωσης, δηλαδή πολύ περισσότερο από όσο διαρκεί η πρώτη φάση. Για το λόγο αυτό τα σχήματα που αφορούν την χρονική εξέλιξη σε όλο το διάστημα ολοκλήρωσης, της λύσης, της ταχύτητας σύγκλισης, και της συνάρτησης κόστους του προβλήματος, ουσιαστικά αφορούν τη δεύτερη φάση σύγκλισης. Η δεύτερη φάση αντιστοιχεί στο σπирάλ τμήμα των τροχιών των σχημάτων 5.49δ, έως 5.54δ.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η σύγκλιση του ΝΔΤΠ είναι πολύ γρήγορη συγκρινόμενη με αυτή του ΝΔΠΚΜΕΛ. Συγκεκριμένα η τιμή της συνάρτησης κόστους του προβλήματος είναι της τάξης του  $10^{-5}$ , όταν  $T = 50$  για το ΝΔΠΚΜΕΛ και όταν  $T = 0.1$  για το ΝΔΤΠ.

Από τα σχήματα 5.49β, έως 5.54β φαίνεται ότι η σύγκλιση δεν είναι εκθετική. Η συμπεριφορά αυτή είναι αναμενόμενη, αφού προφανώς στο συγκεκριμένο παράδειγμα, δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις των Θεωρημάτων 3.15 και 4.10.

Σχετικά με τη επιτυχία σύγκλισης των λύσεων στο σύνολο των ολικών ελαχίστων του προβλήματος, εξετάστηκαν 300 τυχαία αρχικά σημεία  $[x_0^T, \lambda_0^T]$  με συνιστώσες στο διάστημα  $[-2 \ 2]$ . Η επιτυχία είναι 100%, δηλαδή όλες οι λύσεις των ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ συγκλίνουν στο σύνολο

$X^*$ . Η τιμή της συνάρτησης κόστους σε κάθε περίπτωση είναι της τάξης του  $10^{-5}$ , όταν  $T = 50$  για το ΝΔΠΚΜΕΛ και όταν  $T = 0.1$  για το ΝΔΤΠ.

Παράδειγμα 5.5 ([Μαρ], Παρ.Π6, Ασκ.2, σελ.44)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} \{ -x_1 x_2 x_3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \}$$

Το πρόβλημα λύνεται αναλυτικά. Έτσι, τα σημεία:  $[\pm 1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $[0 \ \pm 1 \ 0]^T$ ,  $[0 \ 0 \ \pm 1]^T$ , ικανοποιούν τις συνθήκες ελαχίστου α'τάξης του προβλήματος. Στα εξής σημεία:  $[\sqrt{1/3} \ \sqrt{1/3} \ -\sqrt{1/3}]^T$ ,  $[-\sqrt{1/3} \ -\sqrt{1/3} \ -\sqrt{1/3}]^T$ ,  $[\sqrt{1/3} \ -\sqrt{1/3} \ \sqrt{1/3}]^T$ ,  $[-\sqrt{1/3} \ \sqrt{1/3} \ \sqrt{1/3}]^T$ , το πρόβλημα έχει αυστηρό τοπικό μέγιστο και στα σημεία  $[\sqrt{1/3} \ \sqrt{1/3} \ \sqrt{1/3}]^T$ ,  $[-\sqrt{1/3} \ -\sqrt{1/3} \ \sqrt{1/3}]^T$ ,  $[\sqrt{1/3} \ -\sqrt{1/3} \ -\sqrt{1/3}]^T$ ,  $[-\sqrt{1/3} \ \sqrt{1/3} \ -\sqrt{1/3}]^T$  το πρόβλημα έχει ολικό ελάχιστο, το -0.19245008.

Εύκολα διαπιστώνεται ότι, ικανοποιείται η Υπόθεση 2 (βλ. Παρ. 3.1) στο  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Έτσι, το ΝΔΠΚΜΕΛ (3.4) που αναφέρεται στο παράδειγμα ορίζεται καλώς και περιγράφεται από το παρακάτω δυναμικό σύστημα:

$$\dot{x} = -\mu \left( I_3 - \frac{1}{\|x\|^2} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_1 x_2 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_1 x_3 & x_2 x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 \\ -x_1 x_2 \end{bmatrix} - \rho(t) \frac{1}{2\|x\|^2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$$

Για τα αποτελέσματα που ακολουθούν είναι  $\mu = 10$  και  $\rho = -\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = 10$ .

Επιλέγονται τρία αρχικά σημεία, το ένα ικανοποιεί τον περιορισμό. Οι χρόνοι ολοκλήρωσης αναγράφονται στους πίνακες που ακολουθούν.



## Επιτρεπτό αρχικό σημείο

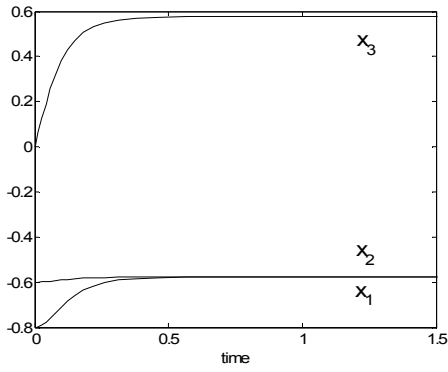
$\begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}$	$x(1.5)$ του ΝΔΠΚΕΛ	$x(1.5)$ του ΝΔΠΚΜΕΛ	$\begin{bmatrix} x(1.5) \\ \lambda(1.5) \end{bmatrix}$ του ΝΔΤΠ
$\begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.57734682 \\ -0.57734681 \\ 0.57734680 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.57735027 \\ -0.57735026 \\ 0.57735026 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.57735033 \\ -0.57735030 \\ 0.57735016 \end{bmatrix}$

Παρατηρείται μικρή διαφορά μεταξύ των σημείων σύγκλισης των ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ (βλ. Παράδ.5.1). Το σημείο σύγκλισης του, το ΝΔΠΚΕΛ ικανοποιεί τον περιορισμό με σφάλμα της τάξης του  $10^{-5}$ . Το σημείο σύγκλισης του ΝΔΠΚΜΕΛ ικανοποιεί τον περιορισμό με σφάλμα μικρότερο του  $10^{-11}$ .

## Μη Επιτρεπτά αρχικά σημεία

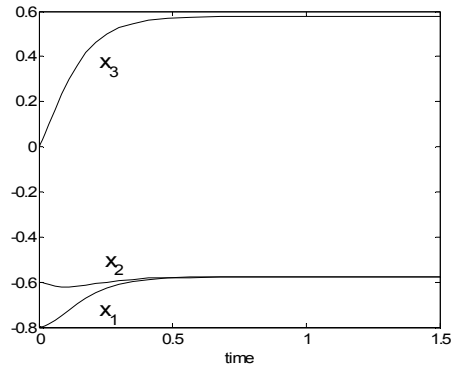
$\begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}$	$x(1.5)$ του ΝΔΠΚΜΕΛ	$\begin{bmatrix} x(1.5) \\ \lambda(1.5) \end{bmatrix}$ του ΝΔΤΠ
$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.57735106 \\ 0.57735106 \\ -0.57735106 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.57735060 \\ 0.57735060 \\ -0.57735060 \\ 0.28867530 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}$	$x(4)$ του ΝΔΠΚΜΕΛ	$\begin{bmatrix} x(1.5) \\ \lambda(1.5) \end{bmatrix}$ του ΝΔΤΠ
$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.57735028 \\ -0.57735026 \\ 0.57735025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.57735026 \\ -0.57735026 \\ -0.57735026 \\ -0.28867513 \end{bmatrix}$



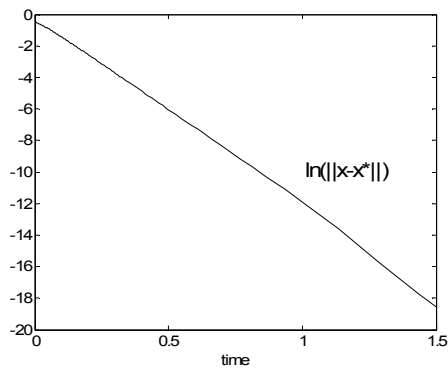
Σχ.5.55α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν

$$x_0^T = [-0.8 \ -0.6 \ 0].$$

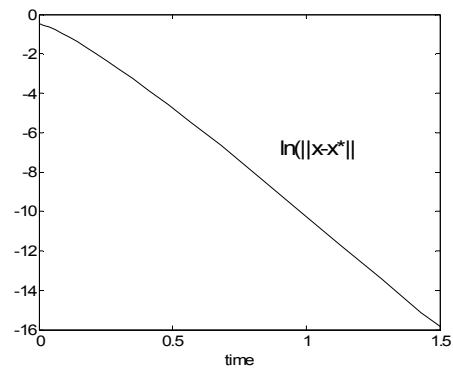


Σχ.5.56α Η λύση του ΝΔΤΠ, όταν

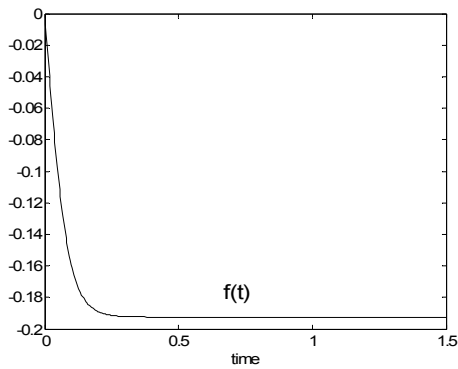
$$[x_0 \ \lambda_0]^T = [-0.8 \ -0.6 \ 0 \ 1].$$



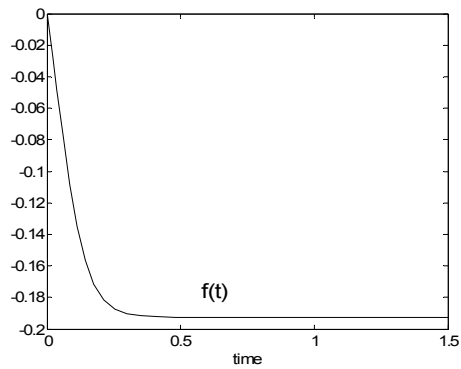
Σχ.5.55β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.55α.



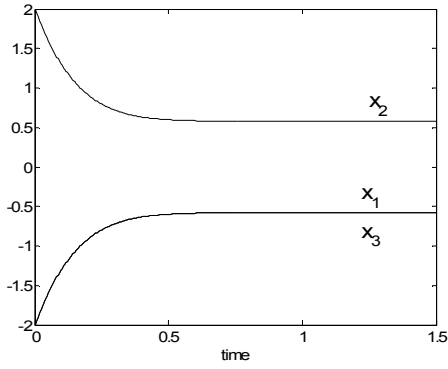
Σχ.5.56β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.56α.



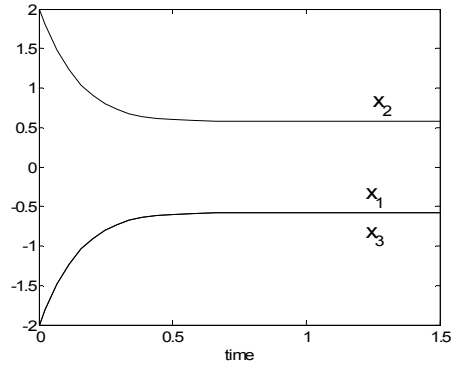
Σχ.5.55γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.55α.



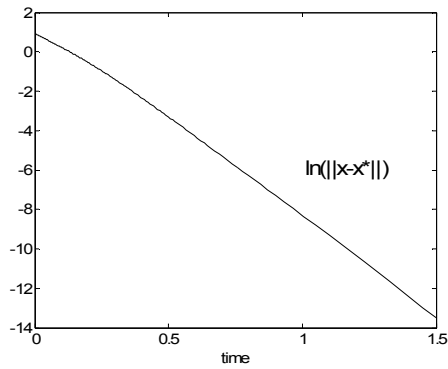
Σχ.5.56γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.56α.



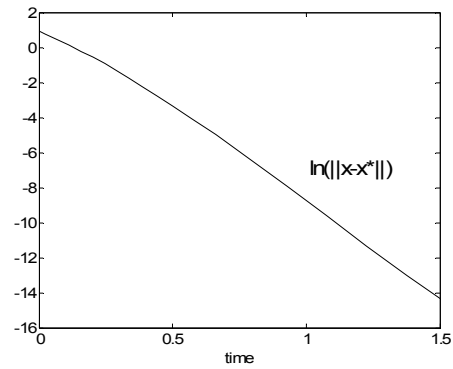
Σχ.5.57α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [-2 \ 2 \ -2]$ .



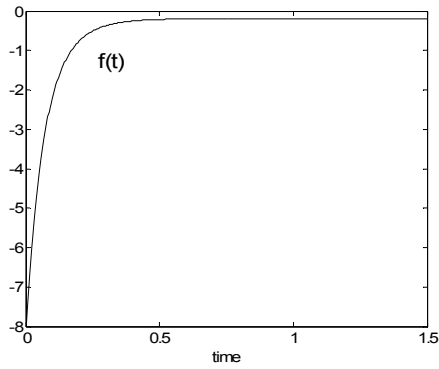
Σχ.5.58α Η λύση του ΝΔΤΠΠ, όταν  $[x_0 \ \lambda_0]^T = [-2 \ 2 \ -2 \ 1]$ .



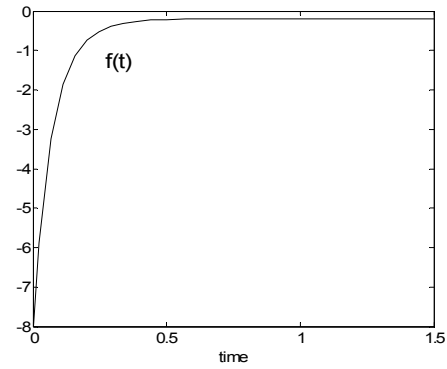
Σχ.5.57β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.57α.



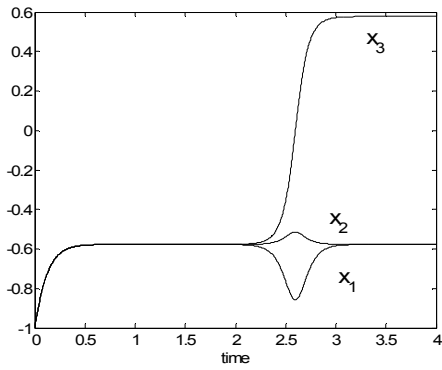
Σχ.5.58β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.58α.



Σχ.5.57γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.57α.

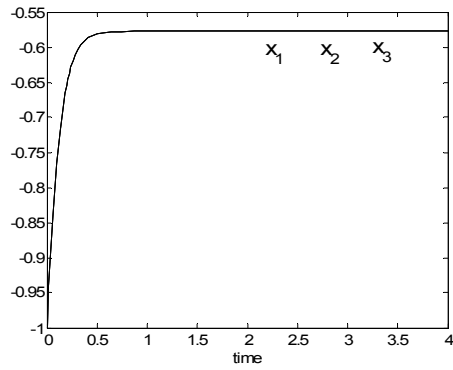


Σχ.5.58γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.58α.



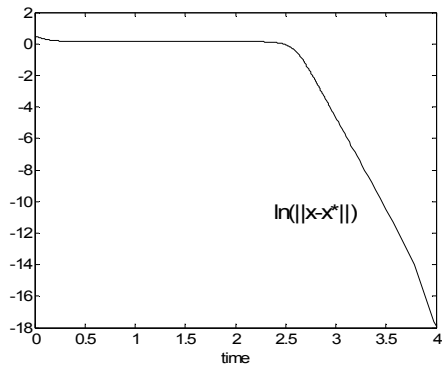
Σχ.5.59α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν

$$x_0^T = [-1 \ -1 \ -1].$$

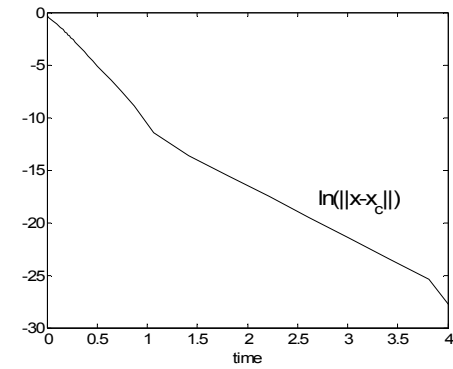


Σχ.5.60α Η λύση του ΝΔΤΠ, όταν

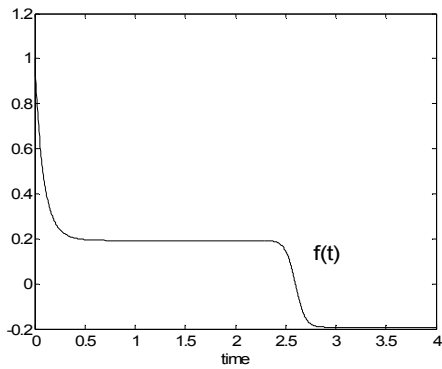
$$[x_0 \ \lambda_0]^T = [-1 \ -1 \ -1 \ 1].$$



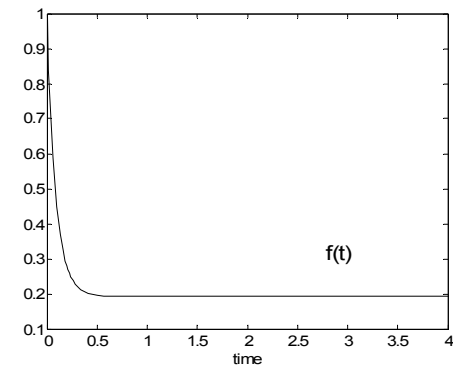
Σχ.5.59β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.59α.



Σχ.5.60β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.60α



Σχ.5.59γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.59α.



Σχ.5.60γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.60α.

Οι λύσεις των ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ συγκλίνουν, στο σημείο  $[-\sqrt{1/3} \ -\sqrt{1/3} \ \sqrt{1/3}]^T$  όταν ξεκινούν από το πρώτο αρχικό σημείο και στο σημείο  $[-\sqrt{1/3} \ \sqrt{1/3} \ -\sqrt{1/3}]^T$  όταν ξεκινούν από το δεύτερο αρχικό σημείο. Σε αυτά τα σημεία σύγκλισης το πρόβλημα έχει ολικό ελάχιστο. Από τα σχήματα 5.55β, έως 5.58β φαίνεται ότι, σύγκλιση τους είναι εκθετική από την αρχή και όχι μόνο για μεγάλους χρόνους, με εκθετική σταθερά περίπου -10. Το σφάλμα σύγκλισης είναι της τάξης του  $10^{-7}$ , όταν  $T=1.5$ .

Σχετικά με το τρίτο αρχικό σημείο, το ΝΔΠΚΜΕΛ συγκλίνει στο  $[-\sqrt{1/3} \ -\sqrt{1/3} \ \sqrt{1/3}]^T$ , που είναι σημείο ολικού ελαχίστου του προβλήματος. Στα σχετικά σχήματα 5.59α, 5.59β και 5.59γ παρατηρείται καθυστέρηση της σύγκλισης του, το χρονικό διάστημα  $0.4 \leq t \leq 2.4$ . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, περνά κοντά από το  $x_c = [-\sqrt{1/3} \ -\sqrt{1/3} \ -\sqrt{1/3}]^T$ , που είναι τοπικό μέγιστο σημείο του προβλήματος. Το σφάλμα σύγκλισης είναι της τάξης του  $10^{-8}$ , όταν  $T=4$ . Το ΝΔΤΠ δεν είναι το ίδιο αποτελεσματικό. Δηλαδή όταν η λύση του ξεκινά από το τρίτο αρχικό σημείο, περνά από γειτονιά του  $x_c$ , παγιδεύεται και τελικά συγκλίνει στο  $x_c$ .

Επιλέγονται τυχαία, χίλια αρχικά σημεία  $[x_o^T \ \lambda_o^T]$ , με συνιστώσες στο διάστημα  $[-10 \ 10]$ . Εξετάζεται η επιτυχία σύγκλισης των λύσεων των ΝΔΠΚΜΕΛ, και ΝΔΤΠ σε σημεία ολικού ελαχίστου του προβλήματος. Για το ΝΔΠΚΜΕΛ προκύπτει ότι, όλες (1000) οι λύσεις του συγκλίνουν σε σημείο ολικού ελαχίστου, με σφάλμα μικρότερο του  $10^{-8}$ , όταν  $T=4$ . Ενώ για το ΝΔΤΠ προκύπτει ότι, 472 λύσεις του συγκλίνουν σε σημείο ολικού ελαχίστου, με σφάλμα μικρότερο του  $10^{-8}$ , όταν  $T=4$  και οι υπόλοιπες 528 λύσεις συγκλίνουν σε σημείο στο οποίο το πρόβλημα έχει τοπικό μέγιστο.

Από τα θεωρητικά αποτελέσματα (Θεωρ. 2.4, Θεώρ. 3.7 και Θεώρ. 4.4), στην περίπτωση του μη κυρτού προβλήματος ελαχίστου, δεν εξασφαλίζεται ότι

στα σημεία σύγκλισης των λύσεων των προτεινόμενων Νευρωνικών Δικτύων το πρόβλημα έχει τοπικό ελάχιστο. Μπορεί να είναι σαγματικά σημεία ή σημεία στα οποία το πρόβλημα έχει τοπικό μέγιστο, όπως συμβαίνει στην προκειμένη περίπτωση. Η συμπεριφορά αυτή, της σύγκλισης του ΝΔΤΠ σε σημεία τοπικού μεγίστου του προβλήματος είναι ελαττωματική.

*Παράδειγμα 5.6* ([LHZ], pp. 385-399) Πρόκειται για το ακόλουθο αυστηρά

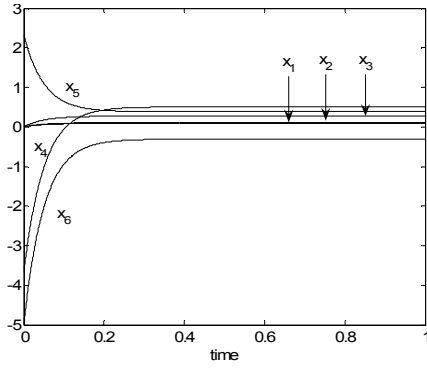
$$\text{κυρτό πρόβλημα: } \min_{x \in R^6} \left\{ \|x\|^2 : \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -5 & -1 & 4 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

Το πρόβλημα αυτό έχει μοναδικό σημείο ολικού ελαχίστου το  $x^* = [0.08824674 \ 0.10828343 \ 0.27326648 \ 0.50466163 \ 0.38281032 \ -0.309706958]^T$ . Το ολικό ελάχιστο του προβλήματος είναι  $f(x^*) = 0.76898171$ .

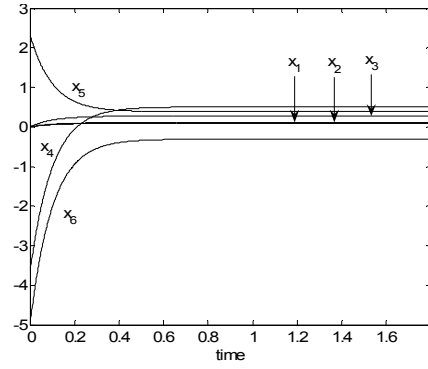
Προφανώς οι συναρτήσεις αυτού του προβλήματος, ικανοποιούν τις Υπόθεση 2 και Υπόθεση 3 στο  $R^6$ . Έτσι τα ΝΔΠΚΜΕΛ (3.4) και ΝΔΤΠ (4.4) (χωρίς την τροποποίηση που περιγράφεται στην εισαγωγή του κεφαλαίου) που αναφέρονται στο πρόβλημα ορίζονται καλώς, στο  $R^6$  και  $R^9$ .

Τα αποτελέσματα που ακολουθούν αναφέρονται στα αρχικά σημεία:  $[0 \ 0 \ 0 \ -11/3 \ 7/3 \ -5]^T$ , που ικανοποιεί τους ισοτικούς περιορισμούς του προβλήματος,  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  και  $[100 \ 100 \ 100 \ 100 \ 100 \ 100]^T$ . Για το ΝΔΤΠ, οι αρχικές τιμές των πολλαπλασιαστών Lagrange είναι 1. Είναι  $\mu = 10$  και  $\rho = -\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = 10$ . Οι χρόνοι ολοκλήρωσης φαίνονται στα σχήματα που ακολουθούν και έχουν επιλεγεί ώστε τα ΝΔ να συγκλίνουν με σφάλμα της τάξης του  $10^{-8}$ .

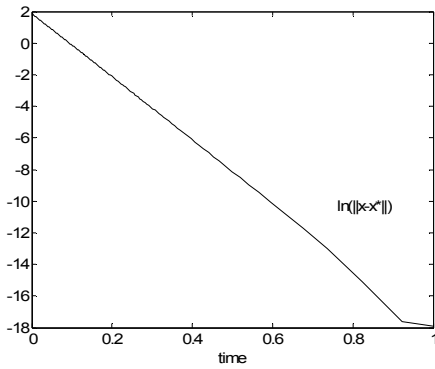
Η συμπεριφορά των ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ για το επιτρεπτό αρχικό σημείο είναι αρκিবώς ίδια. Έτσι, τα αποτελέσματα του ΝΔΠΚΜΕΛ αφορούν το ΝΔΠΚΕΛ.



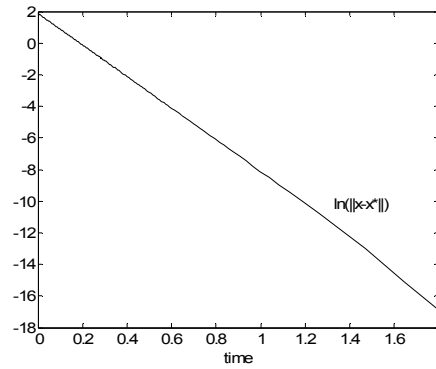
Σχ.5.61α Η λύση του ΝΑΔΠΚΜΕΛ, όταν  $x_0^T = [0 \ 0 \ 0 \ -11/3 \ 7/3 \ -5]^T$ .



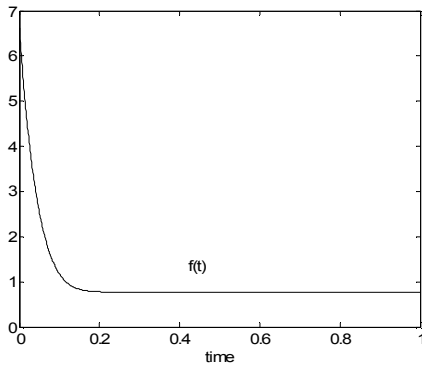
Σχ.5.62α Η λύση του ΝΑΔΤΠ, όταν  $[x_0 \ \lambda_0]^T = [0 \ 0 \ 0 \ -11/3 \ 7/3 \ -5 \ 1 \ 1]$ .



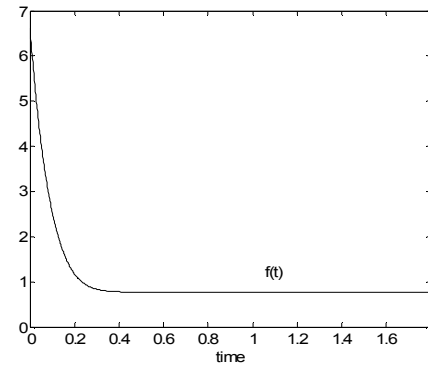
Σχ.5.61β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.61α.



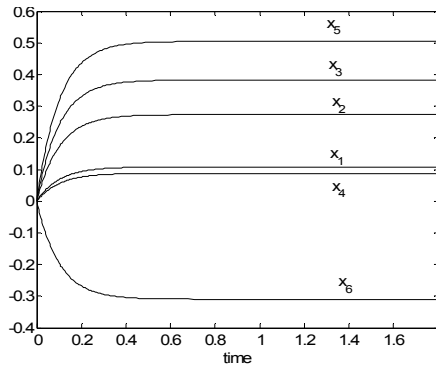
Σχ.5.62β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.62α.



Σχ.5.61γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.61α.

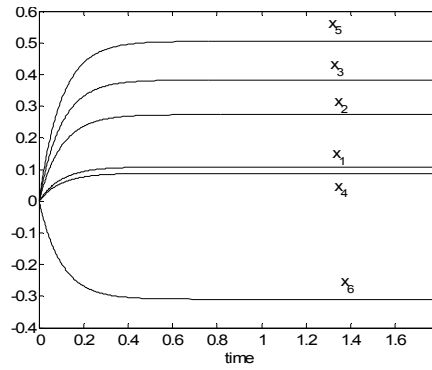


Σχ.5.62γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.62α.



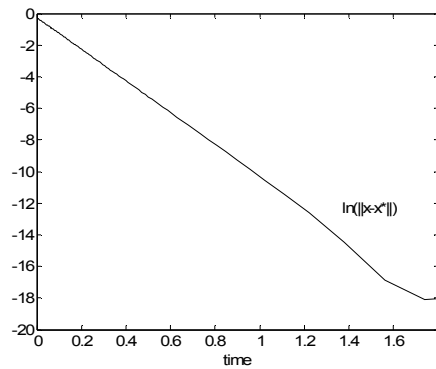
Σχ.5.63α Η λύση του ΝΔΠΚΜΕΛ, όταν

$$x_0^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] .$$

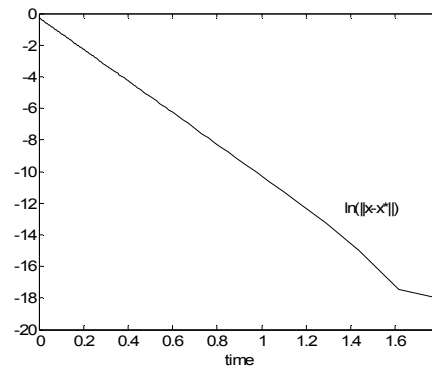


Σχ.5.64α Η λύση του ΝΔΤΠ, όταν

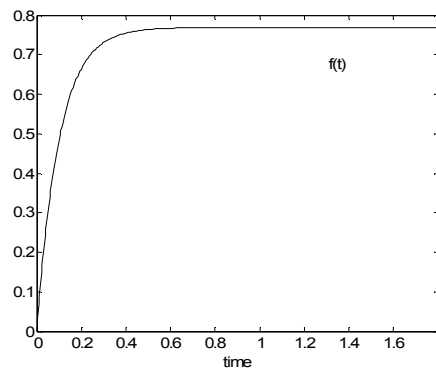
$$[x_0^T \ \lambda_0^T] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1] .$$



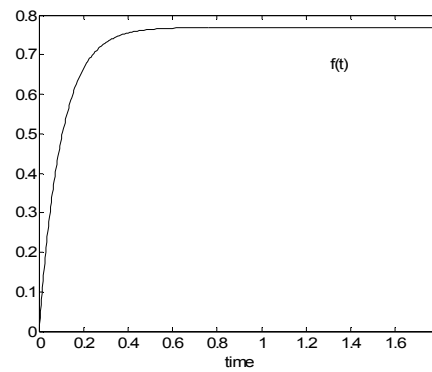
Σχ.5.63β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.63α.



Σχ.5.64β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.64α.

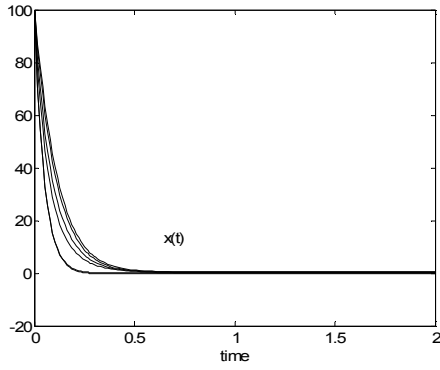


Σχ.5.63γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.63α.



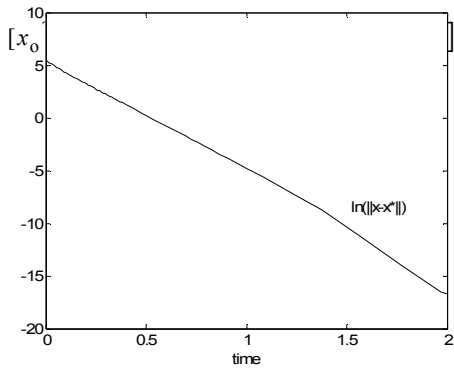
Σχ.5.64γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.64α.



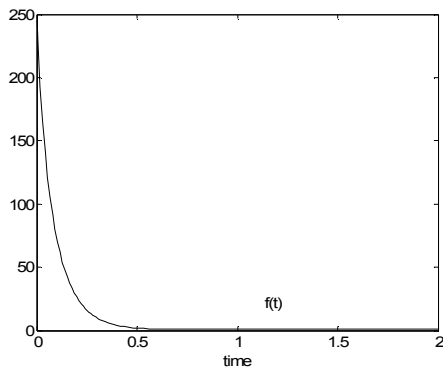


Σχ.5.65α Η λύση του ΝΑΠΚΜΕΛ, όταν

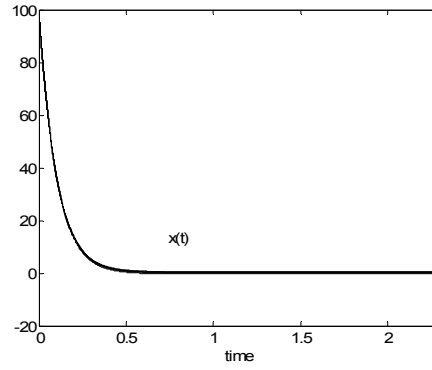
$$x_0^T = [100 \ 100 \ 100 \ 100 \ 100 \ 100]$$



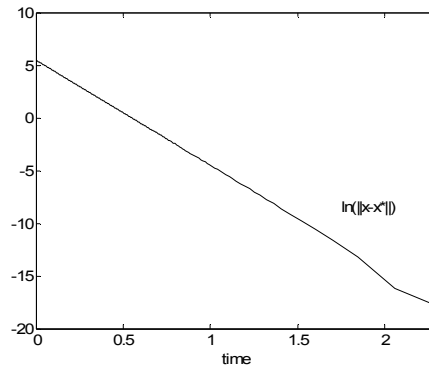
Σχ.5.65β Η Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.65α.



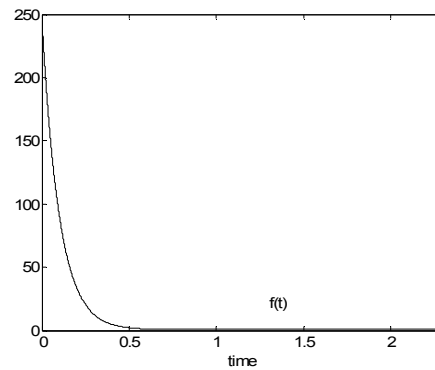
Σχ.5.65γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.65α.



Σχ.5.66α Η λύση του ΝΑΤΠΙ, όταν



Σχ.5.66β Ταχύτητα σύγκλισης της λύσης του Σχ.5.66β.



Σχ.5.66γ Η συνάρτηση κόστους, με όρισμα τη λύση του Σχ.5.66α.

Τα ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ συγκλίνουν στο μοναδικό σημείο ολικού ελαχίστου του προβλήματος. Τα ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ όταν ξεκινούν από το επιτρεπτό σημείο συγκλίνουν σε χρόνους  $T=1$  και  $T=1.8$  αντίστοιχα, με σφάλμα σύγκλισης της τάξης του  $10^{-8}$ . Όταν ξεκινούν από την αρχή των αξόνων του  $R^6$ , μη επιτρεπτό σημείο, συγκλίνουν σε χρόνο  $T=1.8$ , με σφάλμα σύγκλισης της τάξης του  $10^{-8}$ . Ενώ τα ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ, όταν ξεκινούν από το τρίτο αρχικό σημείο που βρίσκεται αρκετά μακριά από το σημείο ολικού ελαχίστου, συγκλίνουν σε χρόνους  $T=2$  και  $T=2.3$ , αντίστοιχα, με σφάλμα σύγκλισης της τάξης του  $10^{-8}$ .

Εύκολα διαπιστώνεται ότι ισχύουν οι υποθέσεις των Πορισμάτων 3.16 και 4.11, που εξασφαλίζουν την εκθετική ευστάθεια του ολικού ελαχίστου του προβλήματος, σημείου ισορροπίας των ΝΔΠΚΜΕΛ και ΝΔΤΠ. Έτσι, από τα σχήματα 5.61β, 5.63β και 5.65β φαίνεται η εκθετική σύγκλιση της λύσης του ΝΔΠΚΜΕΛ. Η εκθετική σταθερά είναι περίπου  $-20$ , όταν η λύση του ξεκινά από το επιτρεπτό αρχικό σημείο και  $-10$  για τα άλλα δύο αρχικά σημεία. Από τα σχήματα 5.62β, 5.64β και 5.66β φαίνεται ότι και οι λύσεις του ΝΔΤΠ συγκλίνουν εκθετικά, με εκθετική σταθερά  $-10$ .



## 6ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΚΥΚΛΩΜΑΤΙΚΕΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΕΙΣ

### ΤΩΝ ΝΕΩΝ ΝΕΥΡΩΝΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

#### 6.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο αυτό δίνονται ενδεικτικές κυκλωματικές υλοποιήσεις των τριών προτεινόμενων Νευρωνικών Δικτύων. Επισημαίνεται ότι, ο σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να δείξει τη δυνατότητα κυκλωματικής υλοποίησης των τριών Νευρωνικών Δικτύων. Ως εκ τούτου, πρόκειται απλά για κυκλώματα που δίνουν μια εικόνα υλοποίησης των συστημάτων εξισώσεων, που περιγράφουν τα προτεινόμενα Νευρωνικά Δίκτυα. Προφανώς ενδέχεται να υπάρχουν καλύτερες κυκλωματικές υλοποιήσεις των τριών Νευρωνικών Δικτύων, από αυτές που δίνονται σε αυτό το κεφάλαιο.

Στα κυκλώματα που ακολουθούν οι τελεστικοί ενισχυτές θεωρούνται ιδανικοί, δηλαδή με άπειρη αντίσταση εισόδου, μηδενική αντίσταση εξόδου, ενίσχυση  $\infty$ , εύρος συχνοτήτων  $\infty$  και μηδενική ολίσθηση. Χρησιμοποιούνται επίσης μη γραμμικές εξαρτημένες πηγές τάσης από τάσης για την παραγωγή, κάθε χρονική στιγμή, σημάτων τιμής ίσης με την τιμή του δεξιού μέλους των ισοτικών περιορισμών και των πρώτων παραγώγων της συνάρτησης Lagrange.

## 6.2 Ενδεικτικό κύκλωμα υλοποίησης του ΝΔΠΚΕΛ

Στην παράγραφο αυτή δίνεται κύκλωμα (σχ. 6.1) που υλοποιεί το σύστημα εξισώσεων (2.1α) και (2.2), δηλαδή  $h(x) = 0$  και  $\dot{x} = -\mu \nabla L(x, \lambda)$ , με  $\mu > 0$  και  $x_0 \in F$ . Το σύστημα αυτό αντιστοιχεί στην αρχική πεπλεγμένη γραφή του ΝΔΠΚΕΛ. Εκτιμάται ότι σε ότι αφορά την κυκλωματική υλοποίηση, η γραφή αυτή είναι απλούστερη από αυτή του δυναμικού συστήματος (2.4).

Το κύκλωμα του σχήματος 6.1, ουσιαστικά αποτελείται από δύο βαθμίδες. Στην πρώτη βαθμίδα υλοποιείται το σύστημα εξισώσεων (2.1α) και παράγονται οι πολλαπλασιαστές Lagrange. Στη δεύτερη βαθμίδα υλοποιείται το σύστημα εξισώσεων (2.2) και παράγεται η λύση  $x(t)$  του ΝΔΠΚΕΛ. Πιο συγκεκριμένα, το αριστερό μέλος των ισοτικών περιορισμών  $h_j(x(t))$ ,  $j = 1, \dots, m$  του προβλήματος  $\Pi$  (βλ. Παράγραφο 2.1) προκύπτει από μια διάταξη με  $n$  τάσεις εισόδου και  $m$  τάσεις εξόδου, αποτελούμενη από μη γραμμικές εξαρτημένες πηγές τάσης. Όταν τροφοδοτείται με τις τάσεις  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  δίνει εξόδους τις τάσεις  $h_j(x(t))$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Κάθε έξοδος από αυτές μηδενίζεται, οδηγούμενη απ'ευθείας στην αναστρέφουσα είσοδο ενός τελεστικού. Οι συντελεστές Lagrange  $\lambda_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, m$  προκύπτουν ως έξοδοι των τελεστικών. Επιπλέον οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης Lagrange του προβλήματος  $\Pi$  προκύπτουν από μια διάταξη με  $n + m$  τάσεις εισόδου και  $2n$  τάσεις εξόδου, αποτελούμενη από μη γραμμικές εξαρτημένες πηγές τάσης. Όταν αυτή τροφοδοτείται με τις τάσεις  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  και  $\lambda_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,

δίνει εξόδους τις τάσεις  $\frac{\partial f(x(t))}{\partial x_i}$  και  $\sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j(x(t))}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Στη συνέχεια,

οι έξοδοι οδηγούνται σε κυκλώματα τελεστικών που δρουν ως ολοκληρωτές. Οι εξισώσεις των ρευμάτων στους  $n$  κόμβους εισόδου των τελεστικών είναι

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -\mu \left( \frac{\partial f(x(t))}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j(x(t))}{\partial x_i} \right), \quad \forall i = 1, \dots, n, \text{ δηλαδή είναι το σύστημα}$$

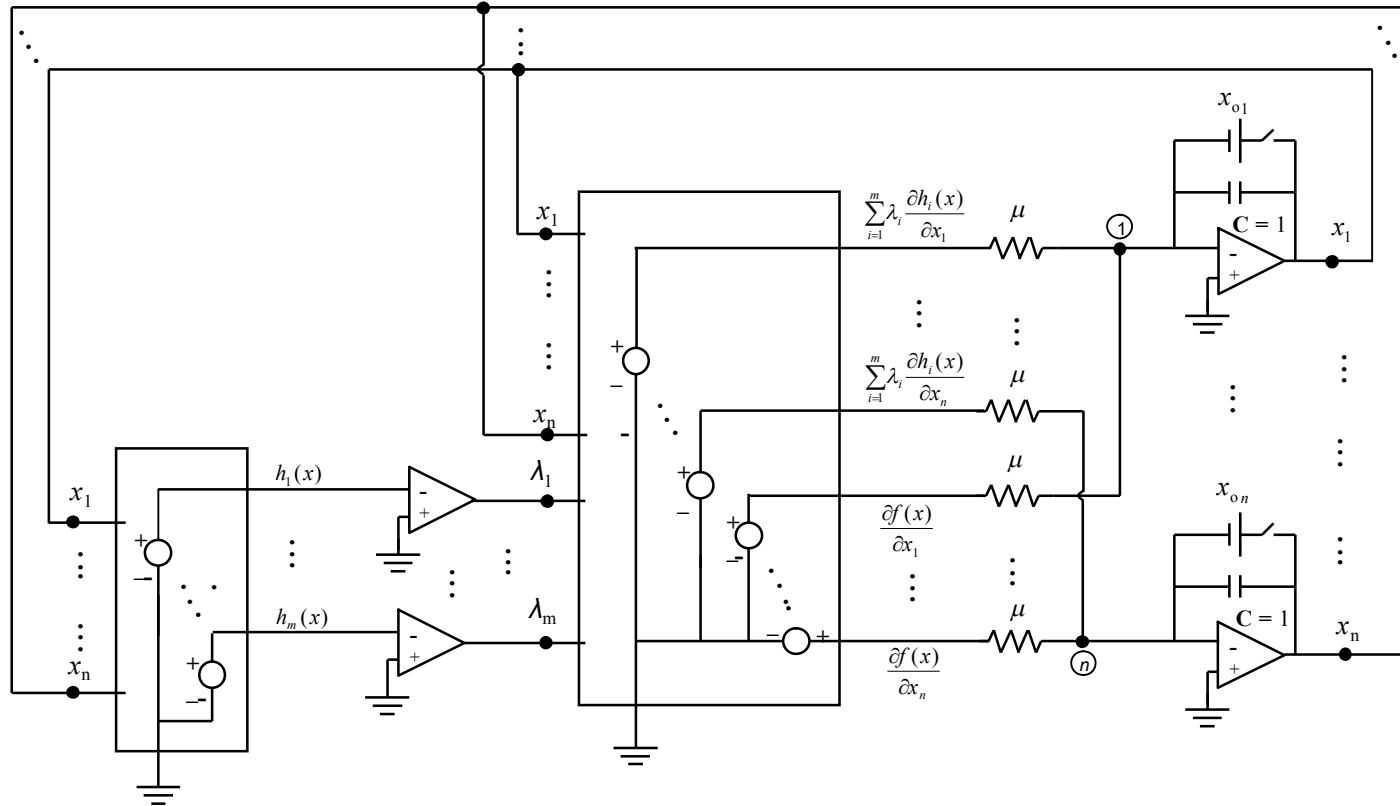
εξισώσεων (2.2). Οι τάσεις στις εξόδους των τελεστικών είναι

$$x_i(t) = -\mu \int_0^{x_{0i}} \left( \frac{\partial f(x(t))}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j(x(t))}{\partial x_i} \right), \quad \forall i=1, \dots, n.$$

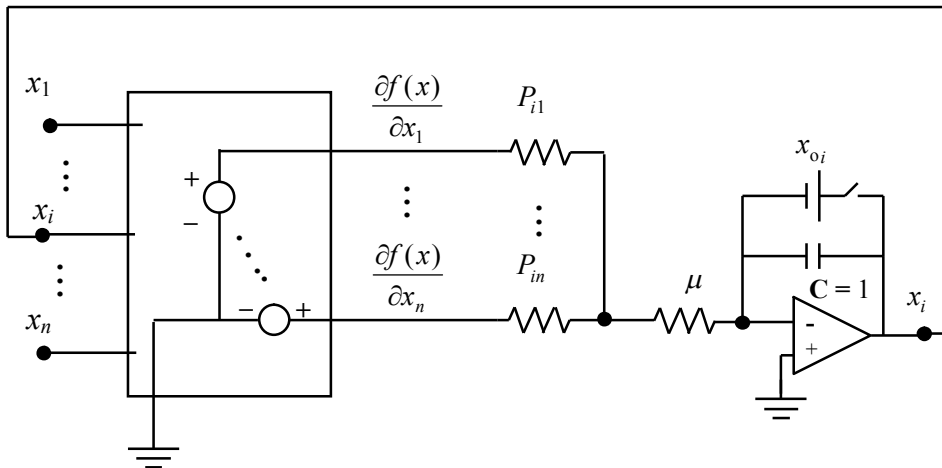
Το αρχικό σημείο  $x_0$

εισάγεται στην ολοκλήρωση αν οι πυκνωτές φορτιστούν με πηγή τάσης  $x_0$ , πριν την εκτέλεση της πράξης και οι διακόπτες ανοίξουν μόλις αρχίσει η λειτουργία του κυκλώματος. Αν το σημείο  $x_0$  ικανοποιεί τους περιορισμούς, το κύκλωμα 6.1 είναι μια υλοποίηση των εξισώσεων (2.1α), (2.2), του ΝΔΠΚΕΛ.

Η υλοποίηση του ΝΔΠΚΕΛ όταν εφαρμόζεται σε κυρτό πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι πολύ απλούστερη. Το κύκλωμα του σχ. 6.2 δίνει μια υλοποίηση του δυναμικού συστήματος (2.11) που περιγράφει το ΝΔΠΚΕΛ του κυρτού προβλήματος ΠΚ (βλ. Παράγραφος 2.3). Πιο συγκεκριμένα στο σχ. 6.2 δίνεται η υλοποίηση της  $i$  εξίσωσης του δυναμικού συστήματος (2.11). Οι τιμές των αγωγιμοτήτων  $P_{ik}$ ,  $k=1, \dots, n$ , είναι οι αντίστοιχες τιμές των στοιχείων της  $i$  γραμμής του πίνακα προβολής  $P$  (βλ. Παράγραφο 2.3).



Σχ. 6.1 Κυκλωματική υλοποίηση του ΝΑΠΚΕΛ (2.1α), (2.2).



Σχ. 6.2 Κυκλωματική υλοποίηση του ΝΔΠΚΕΛ (2.11) του κυρτού προβλήματος ΠΚ.

### 6.3 Ενδεικτικό κύκλωμα υλοποίησης του ΝΔΠΚΜΕΛ

Στην παράγραφο αυτή δίνεται ένα κύκλωμα (σχ. 6.3) που υλοποιεί το σύστημα εξισώσεων

$$\dot{x} = -\mu \nabla L(x, \lambda), \text{ με } \mu > 0 \text{ και } (x_0, \lambda_0) \in \Omega \times R^m \quad (6.1\alpha)$$

$$\frac{dh(x)}{dt} = -\rho h(x) \quad (6.1\beta)$$

(βλ. Παράγραφο 3.1). Το σύστημα αυτό αντιστοιχεί στην αρχική πεπλεγμένη γραφή του αυτόνομου ΝΔΠΚΜΕΛ, αφού εκτιμάται ότι σε ότι αφορά την κυκλωματική υλοποίηση, η πεπλεγμένη γραφή είναι απλούστερη από αυτή του δυναμικού συστήματος (3.3).

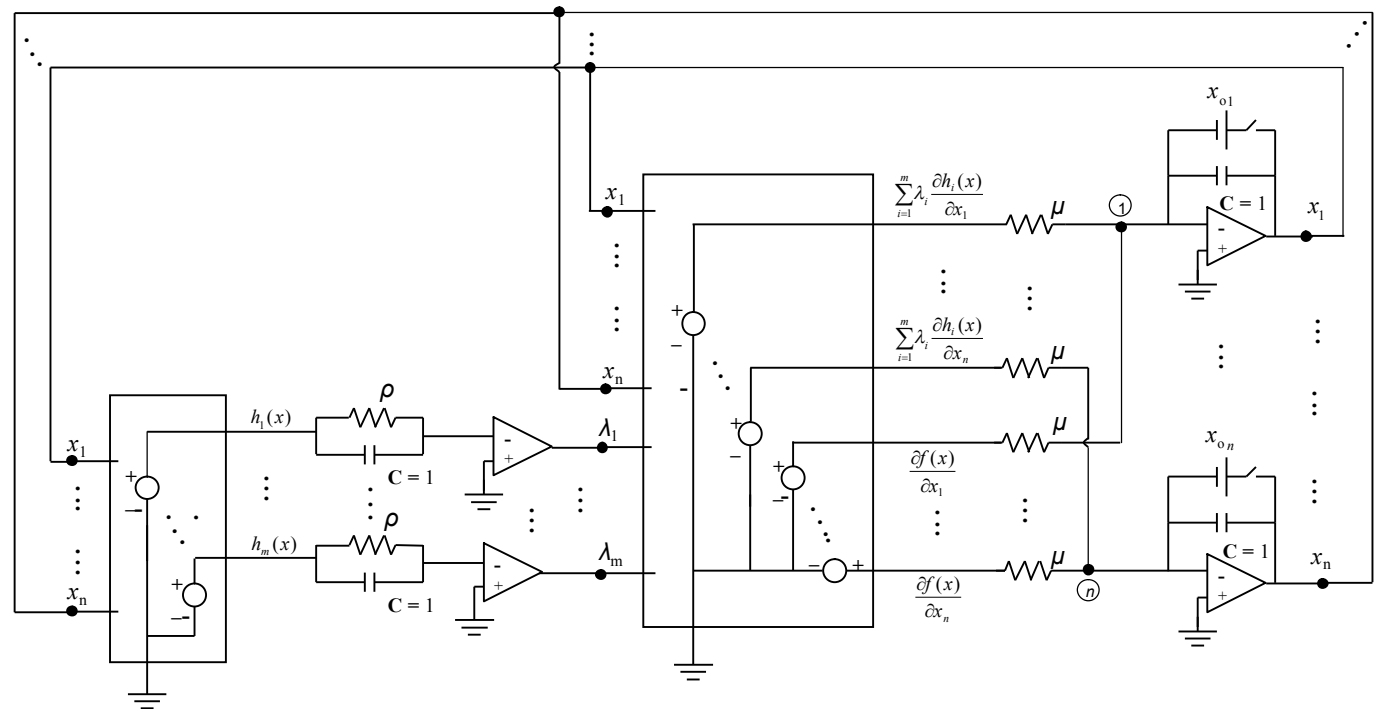
Το κύκλωμα του σχήματος 6.3, αποτελείται από δύο βαθμίδες. Στην πρώτη βαθμίδα υλοποιείται το σύστημα εξισώσεων (6.1β) και παράγονται οι πολλαπλασιαστές Lagrange. Στην δεύτερη βαθμίδα υλοποιείται το σύστημα εξισώσεων (6.1α) και παράγεται η λύση  $x(t)$  του ΝΔΠΚΜΕΛ. Πιο



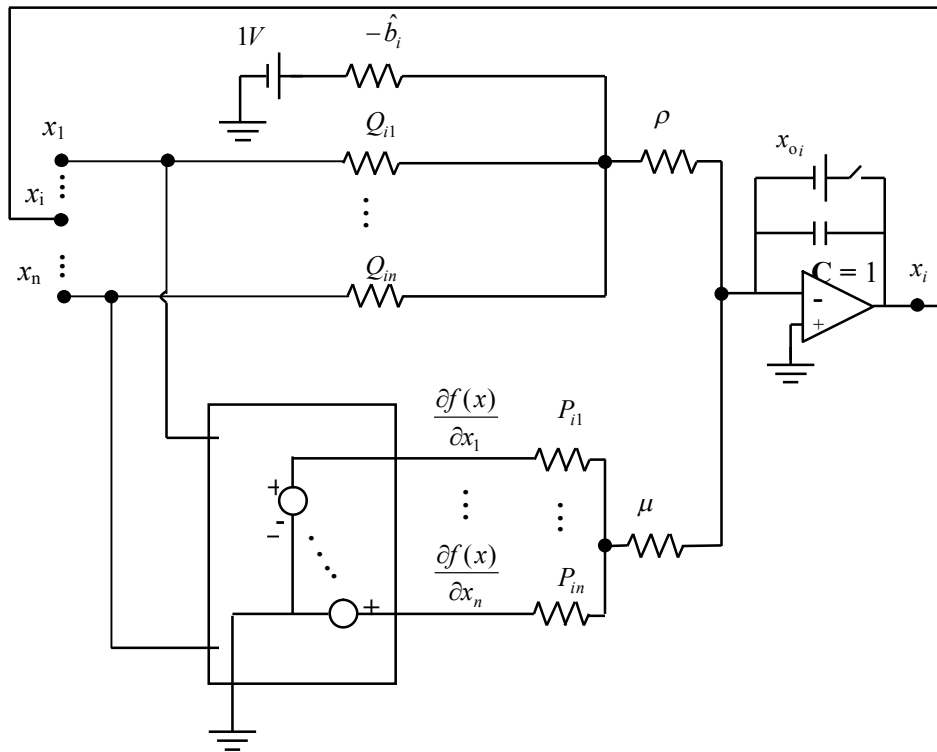
## Κυκλωματικές Υλοποιήσεις των νέων Νευρωνικών Δικτύων

συγκεκριμένα, το αριστερό μέλος των ισοτικών περιορισμών  $h_j(x)$ ,  $j=1, \dots, m$  του προβλήματος Π (βλ. Παράγραφο 2.1) προκύπτει από μια διάταξη με  $n$  τάσεις εισόδου και  $m$  τάσεις εξόδου, αποτελούμενη από μη γραμμικές εξαρτημένες πηγές τάσης. Όταν τροφοδοτείται με τις τάσεις  $x_i(t)$ ,  $i=1, \dots, n$  δίνει εξόδους τις τάσεις  $h_j(x(t))$ ,  $j=1, \dots, m$ . Κάθε έξοδος από αυτές οδηγείται στην αναστρέφουσα είσοδο ενός τελεστικού μέσω ενός παράλληλου  $R//C$  δικτύωματος. Οι εξισώσεις των ρευμάτων στους κόμβους στις εισόδους των τελεστικών είναι  $\frac{dh_j(x)}{dt} = -\rho h_j(x)$ ,  $j=1, \dots, m$ , δηλαδή οι εξισώσεις (6.1β). Οι συντελεστές Lagrange  $\lambda_j(t)$ ,  $j=1, \dots, m$  προκύπτουν ως έξοδοι των τελεστικών. Η δεύτερη βαθμίδα είναι ακριβώς ίδια με την αντίστοιχη του κυκλώματος του σχ. 6.1, που υλοποιεί το ΝΔΠΚΕΛ. Η περιγραφή της δίνεται στην παράγραφο 6.2.

Η υλοποίηση του ΝΔΠΚΜΕΛ όταν εφαρμόζεται σε κυρτό πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι πολύ απλούστερη. Το κύκλωμα του σχ. 6.4 δίνει μια υλοποίηση του δυναμικού συστήματος (3.11) που περιγράφει το ΝΔΠΚΜΕΛ του κυρτού προβλήματος ΠΚ (βλ. Παράγραφος 3.3). Πιο συγκεκριμένα στο σχ. 6.4 δίνεται η υλοποίηση της  $i$  εξίσωσης του δυναμικού συστήματος (3.11). Οι τιμές των αγωγιμοτήτων  $P_{ik}$ ,  $k=1, \dots, n$ , είναι οι αντίστοιχες τιμές των στοιχείων της  $i$  γραμμής του πίνακα προβολής  $P$  (βλ. Παράγραφος 3.3). Οι τιμές  $Q_{ik}$ ,  $k=1, \dots, n$ , είναι οι αντίστοιχες τιμές των στοιχείων της  $i$  γραμμής του πίνακα  $Q = A(A^T A)^{-1} A^T$ . Η τιμή της τάσης  $\hat{b}_i$  είναι ίση με το  $i$  στοιχείο του διανύσματος  $\hat{b} = A(A^T A)^{-1} b$ .



Σχ. 6.3 Κυκλωματική υλοποίηση του ΝΑΠΚΜΕΛ (6.1).



Σχ. 6.4 Κυκλωματική υλοποίηση του ΝΔΠΚΜΕΛ (3.11) για το κυρτό πρόβλημα ΠΚ.

#### 6.4 Ενδεικτικό κύκλωμα υλοποίησης του ΝΔΤΠ

Στην παράγραφο αυτή δίνεται ένα κύκλωμα (σχ. 6.5) που υλοποιεί το σύστημα εξισώσεων:

$$\frac{d}{dt} \nabla L(x, \lambda) = -\rho \nabla L(x, \lambda) \quad \text{με } \mu > 0 \text{ και } (x_0, \lambda_0) \in \Omega \times R^m \quad (6.2\alpha)$$

$$\frac{dh(x)}{dt} = -\rho h(x) \quad (6.2\beta)$$

που προκύπτει παραγωγίζοντας το σύστημα εξισώσεων (4.1) (βλ. Παράγραφο 4.1). Όπως έγινε και στις δύο προηγούμενες παραγράφους, που αφορούν τις κυκλωματικές υλοποιήσεις των ΝΔΠΚΕΛ και ΝΔΠΚΜΕΛ, προτιμάται η

πεπλεγμένη γραφή του αυτόνομου ΝΔΤΠ αφού εκτιμάται ότι υλοποιείται πιο εύκολα από το δυναμικό σύστημα (4.4).

Το κύκλωμα του σχήματος 6.5, αποτελείται από δύο βαθμίδες. Στην πρώτη βαθμίδα υλοποιείται το σύστημα εξισώσεων (6.2β) και παράγονται οι πολλαπλασιαστές Lagrange. Η βαθμίδα αυτή είναι ίδια με την πρώτη βαθμίδα του κυκλώματος του σχ. 6.3, αφού υλοποιούν το ίδιο σύστημα εξισώσεων. Στη δεύτερη βαθμίδα υλοποιείται το σύστημα εξισώσεων (6.2α) και παράγεται η λύση  $x(t)$  του ΝΔΠΚΕΛ. Για την παραγωγή των μερικών παραγώγων, χρησιμοποιείται μια διάταξη από μη γραμμικές εξαρτημένες πηγές τάσης, με  $n+m$  τάσεις εισόδου και  $2n$  τάσεις εξόδου. Όταν η διάταξη αυτή τροφοδοτείται με τις τάσεις  $x_i(t)$ ,  $i=1,\dots,n$  και  $\lambda_j(t)$ ,  $j=1,\dots,m$ , δίνει

εξόδους τις τάσεις  $\frac{\partial f(x(t))}{\partial x_i}$  και  $\sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j(x(t))}{\partial x_i}$ ,  $i=1,\dots,n$ . Στη συνέχεια, οι

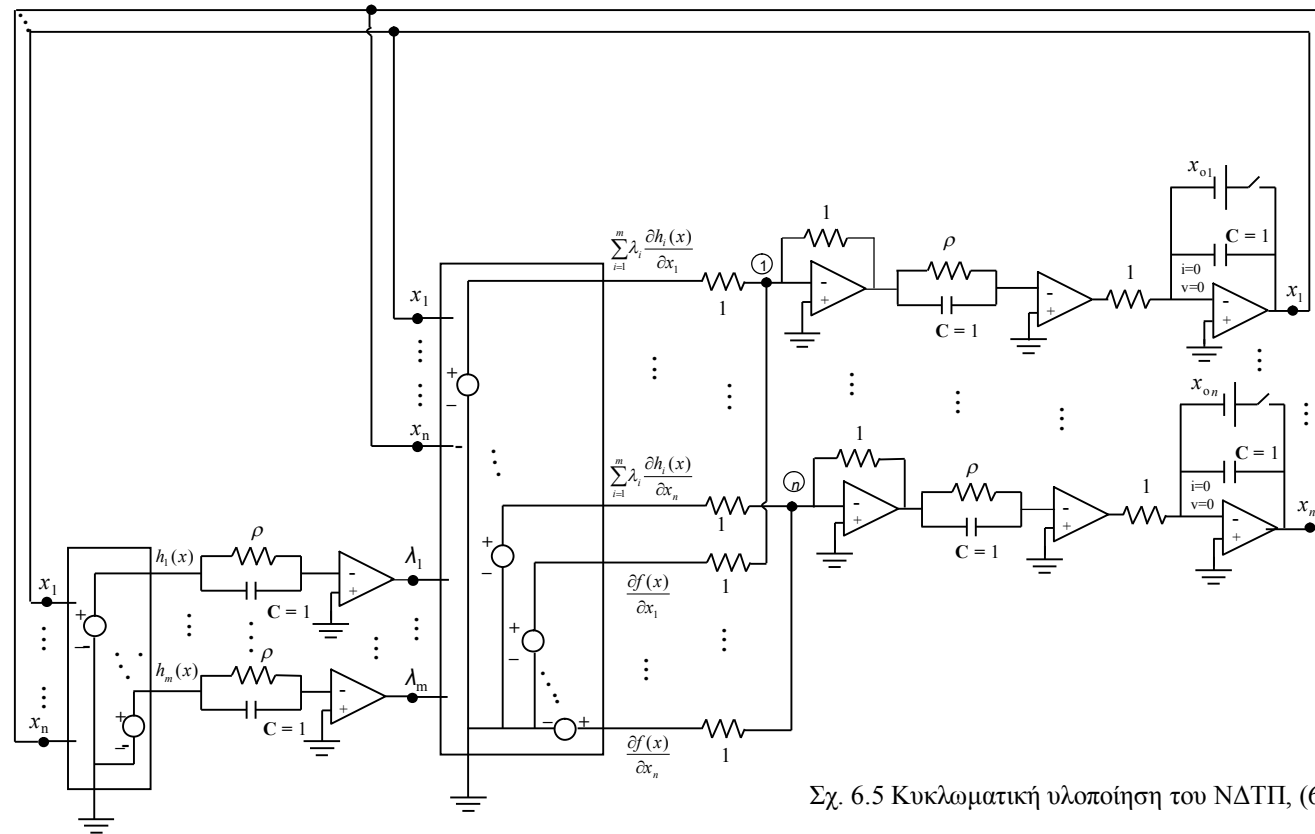
έξοδοι οδηγούνται σε κυκλώματα τελεστικών που δρουν ως αθροιστές. Οι εξισώσεις των ρευμάτων στους κόμβους εισόδου των  $n$  πρώτων τελεστικών

είναι  $V_i(t) = \frac{\partial f(x(t))}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j(x(t))}{\partial x_i} = \frac{\partial L(x(t), \lambda(t))}{\partial x_i}$ ,  $i=1,\dots,n$ , όπου  $V_i(t)$

είναι οι τάσεις στις εξόδους των τελεστικών. Κάθε έξοδος από αυτές οδηγείται στην αναστρέφουσα είσοδο ενός τελεστικού μέσω ενός παράλληλου  $R//C$  δικτύωματος. Οι εξισώσεις των ρευμάτων στις εισόδους των τελεστικών είναι

$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(x(t), \lambda(t))}{\partial x_i} \right) = -\rho \frac{\partial L(x(t), \lambda(t))}{\partial x_i}$ ,  $i=1,\dots,n$  δηλαδή οι εξισώσεις (6.1β). Οι

συνιστώσες  $x_i(t)$ ,  $i=1,\dots,n$  της λύσης του ΝΔΤΠ προκύπτουν από τα κυκλώματα τελεστικών που δρουν ως ολοκληρωτές. Το αρχικό σημείο  $x_0$ , εισάγεται στην ολοκλήρωση αν οι πυκνωτές φορτιστούν με πηγή τάσης  $x_0$ , πριν την εκτέλεση της πράξης και οι διακόπτες ανοίξουν μόλις αρχίσει η λειτουργία του κυκλώματος.



Σχ. 6.5 Κυκλωματική υλοποίηση του ΝΑΤΠ, (6.2).

Στη συνέχεια δίνεται μια κυκλωματική υλοποίηση του συστήματος εξισώσεων (6.2), όταν εφαρμόζεται σε κυρτό πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Η υλοποίηση του δυναμικού συστήματος (4.11), που περιγράφει το ΝΔΤΠ του κυρτού προβλήματος ΠΚ (βλ. Παράγραφο 4.3), είναι πολυπλοκότερη από την υλοποίηση της πεπλεγμένης γραφής του (6.2), αφού χρειάζεται επιπλέον κυκλωματικές διατάξεις που υλοποιούν εκτός από την κλίση της κυρτής συνάρτησης κόστους και την αντίστροφη της Hessian μήτρας της.

Το σύστημα εξισώσεων (6.2) για το πρόβλημα ΠΚ γράφεται:

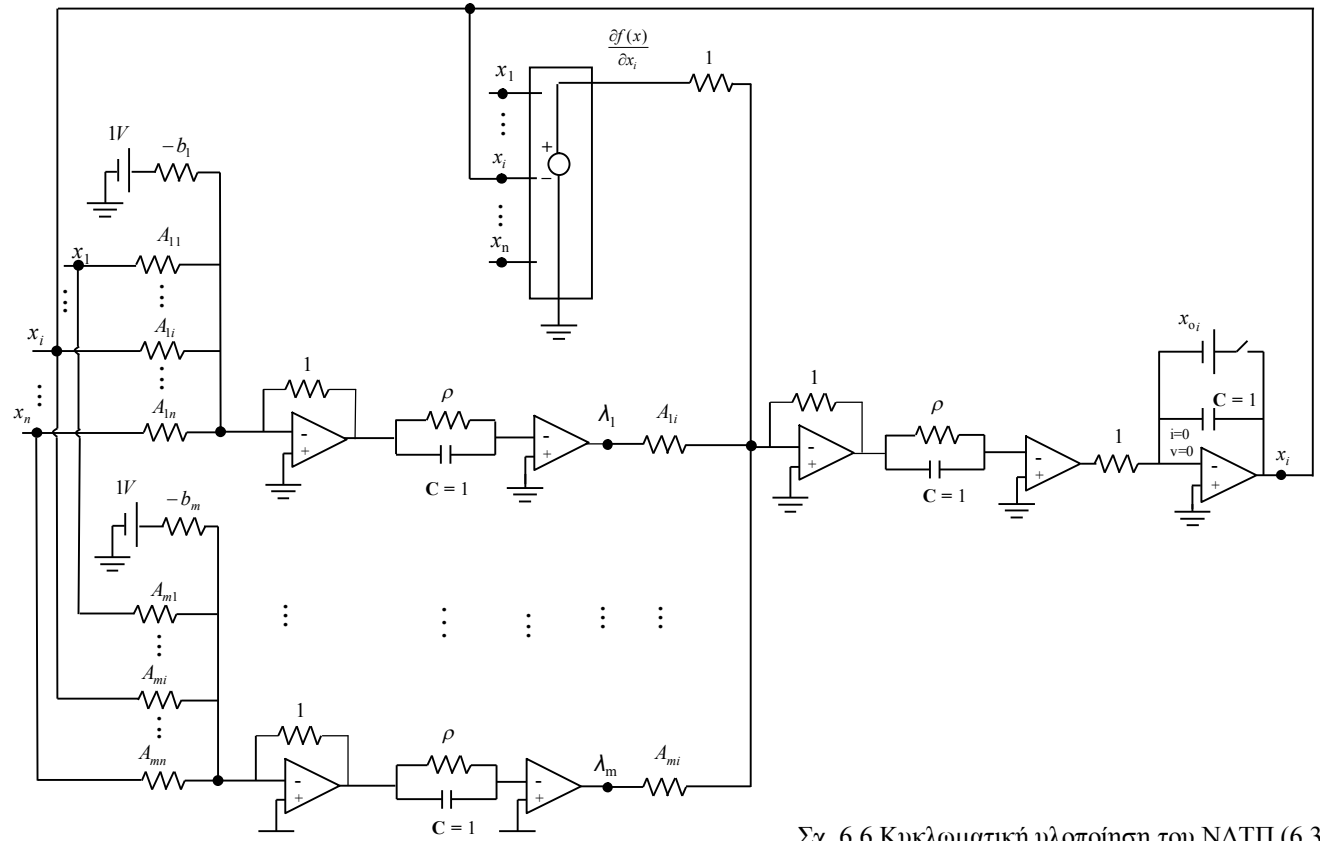
$$\frac{d}{dt}(\nabla f(x) + A\lambda) = -\rho(\nabla f(x) + A\lambda) \quad \text{με } \rho > 0 \text{ και } (x_0, \lambda_0) \in \Omega \times R^m \quad (6.3\alpha)$$

$$\frac{d}{dt}(A^T x - b) = -\rho(A^T x - b) \quad (6.3\beta)$$

Το κύκλωμα του σχ. 6.6 είναι μια εφαρμογή του κυκλώματος του σχ. 6.5 στο κυρτό πρόβλημα ΠΚ. Η πρώτη βαθμίδα του κυκλώματος (6.6), που υλοποιεί τις εξισώσεις (6.3β), δεν περιλαμβάνει μη γραμμικές εξαρτημένες πηγές τάσεις. Οι  $m$  τάσεις με τιμές ίσες με το δεξί μέλος των γραμμικών περιορισμών προκύπτουν εύκολα από κυκλώματα τελεστικών που δρουν ως αθροιστές. Στην δεύτερη βαθμίδα, για λόγους οικονομίας χώρου, υλοποιείται μια εξίσωση του συστήματος (6.3α). Για την υλοποίηση του συστήματος (6.3α) χρειάζονται  $n$  παρόμοιες βαθμίδες, με τις κατάλληλες τιμές στοιχείων.

## 6.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό προτείνονται διάφορες ιδανικές κυκλωματικές διατάξεις πραγματοποίησης των προτεινόμενων Νευρωνικών Δικτύων. Ο σκοπός των διατάξεων αυτών είναι απλώς να υποδείξουν τη δυνατότητα κυκλωματικής υλοποίησης των νέων Νευρωνικών Δικτύων. Πιθανή εργαστηριακή υλοποίηση των διατάξεων αυτών θα απαιτούσε ενδελεχή μελέτη του κάθε κυκλώματος με χρήση λιγότερο εξιδανικευμένων στοιχείων.



Σχ. 6.6 Κυκλωματική υλοποίηση του ΝΑΤΠ (6.3).

## **Β' ΜΕΡΟΣ**

**ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΝΕΥΡΩΝΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ**

**ΤΥΠΟΥ PERCEPTRON**

**ΜΕ ΤΜΗΜΑΤΙΚΑ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

**ΕΝΕΡΓΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΩΝ ΝΕΥΡΩΝΩΝ**



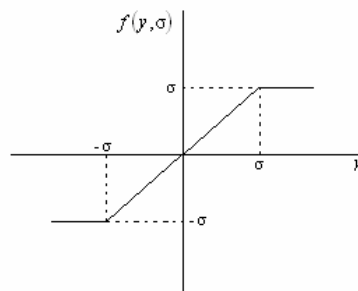


**7<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ****ΝΕΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ****ΝΕΥΡΩΝΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ ΤΥΠΟΥ PERCEPTRON**

7.1 Διατύπωση του προβλήματος εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων τύπου Perceptron σαν πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων

Σε αυτή την παράγραφο περιγράφεται αναλυτικά η μετατροπή του προβλήματος εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων τύπου Perceptron, σε ένα μη διαφορίσιμο πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων. Για το σκοπό αυτό, ως συνάρτηση ενεργοποίησης νευρώνων χρησιμοποιείται η γνωστή μη διαφορίσιμη, τμηματικά γραμμική συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [-\sigma, \sigma], f(y, \sigma) = \begin{cases} \sigma, & \text{όταν } y \geq \sigma \\ y, & \text{όταν } |y| \leq \sigma, \text{ με } \sigma > 0 \\ -\sigma, & \text{όταν } y \leq -\sigma \end{cases} \quad (7.1)$$



Σχ.7.1 Η τμηματικά γραμμική συνάρτηση 7.1

**Λήμμα 7.1** Για τη συνάρτηση  $f$  της περιγραφής (7.1) ισχύει  $af(y, \sigma) = f(ay, |a|\sigma)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Απόδειξη

$$\text{Από τον ορισμό της συνάρτησης } f \text{ είναι } f(ay, |a|\sigma) = \begin{cases} |a|\sigma, & \text{όταν } ay \geq |a|\sigma \\ ay, & \text{όταν } |ay| \leq |a|\sigma \\ -|a|\sigma, & \text{όταν } ay \leq -|a|\sigma \end{cases} .$$

Αν  $a > 0$ , τότε

$$f(ay, |a|\sigma) = \begin{cases} a\sigma, & \text{όταν } ay \geq a\sigma \\ ay, & \text{όταν } |ay| \leq a\sigma \\ -a\sigma, & \text{όταν } ay \leq -a\sigma \end{cases} = \begin{cases} a\sigma, & \text{όταν } y \geq \sigma \\ ay, & \text{όταν } |y| \leq \sigma \\ -a\sigma, & \text{όταν } y \leq -\sigma \end{cases} = a \begin{cases} \sigma, & \text{όταν } y \geq \sigma \\ y, & \text{όταν } |y| \leq \sigma \\ -\sigma, & \text{όταν } y \leq -\sigma \end{cases} = af(y, \sigma) .$$

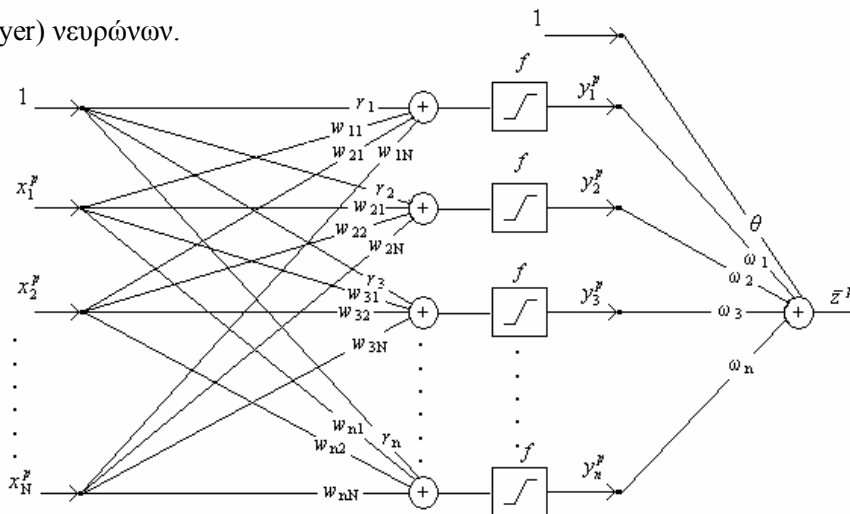
Αν  $a < 0$ , τότε

$$f(ay, |a|\sigma) = \begin{cases} -a\sigma, & \text{όταν } ay \geq -a\sigma \\ ay, & \text{όταν } |ay| \leq |a|\sigma \\ a\sigma, & \text{όταν } ay \leq a\sigma \end{cases} = \begin{cases} -a\sigma, & \text{όταν } y \leq -\sigma \\ ay, & \text{όταν } |y| \leq \sigma \\ a\sigma, & \text{όταν } y \geq \sigma \end{cases} = a \begin{cases} -\sigma, & \text{όταν } y \leq -\sigma \\ y, & \text{όταν } |y| \leq \sigma \\ \sigma, & \text{όταν } y \geq \sigma \end{cases} = af(y, \sigma) .$$

Αν  $a = 0$ , τότε προφανώς  $f(ay, |a|\sigma) = af(y, \sigma) = 0$ .

□

Στο σχήμα 7.2 φαίνεται η διάταξη ενός Τεχνητού Νευρωνικού Δικτύου, πλήρως διασυνδεδεμένου, που αποτελείται από ένα κρυφό επίπεδο (hidden layer) νευρώνων.



Σχ.7.2 Σχηματική αναπαράσταση Νευρωνικού Δικτύου, με ένα επίπεδο νευρώνων.

Ως συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων χρησιμοποιείται η μη διαφορίσιμη τμηματικά γραμμική συνάρτηση (7.1), με  $\sigma = 1$ , δηλαδή

$$f(y,1) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } y \geq 1 \\ y, & \text{όταν } |y| \leq 1 \\ -1, & \text{όταν } y \leq -1 \end{cases}$$

Τα μεγέθη που αφορούν το Νευρωνικό Δίκτυο του σχήματος 7.2, έχουν ως εξής:

- $N$  το πλήθος των εισόδων του Νευρωνικού Δικτύων.
- $x^p \in R^N$ , με  $p = 1, 2, \dots, m$ : το  $p$  εκπαιδευτικό διάνυσμα εισόδου και  $x_j^p \in R$ , με  $j = 1, 2, \dots, N$  η  $j$  συνιστώσα του.
- $t^p \in R$ , με  $p = 1, 2, \dots, m$ : η  $p$  εκπαιδευτική έξοδος (επιθυμητή έξοδος), όταν η είσοδος του Νευρωνικού Δικτύου είναι το διάνυσμα  $x^p$ .
- $n$ : το πλήθος των νευρώνων.
- $r_i$ , με  $i = 1, 2, \dots, n$ : το κατώφλι του  $i$  νευρώνα. Παρακάτω χρησιμοποιείται το διάνυσμα  $r = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n]^T$ .
- $y_i^p \in R$ , με  $i = 1, 2, \dots, n$  και  $p = 1, 2, \dots, m$ : η έξοδος του  $i$  νευρώνα, όταν η είσοδος του Νευρωνικού Δικτύου είναι το διάνυσμα  $x^p$ .
- $\theta$ : ένα κατώφλι στην έξοδο.
- $w_{ij}$ , με  $i = 1, 2, \dots, n$  και  $j = 1, 2, \dots, N$ : το βάρος εισόδου που σταθμίζει την  $j$  είσοδο του  $i$  τεχνητού νευρώνα. Ακολούθως χρησιμοποιούνται, το διάνυσμα  $w_i = [w_{i1} \ w_{i2} \ \dots \ w_{iN}]^T$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  που δηλώνει το διάνυσμα των βαρών εισόδου του  $i$  νευρώνα και ο συγκεντρωτικός πίνακας των βαρών  $W = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]$ .
- $\omega_i$ , με  $i = 1, 2, \dots, n$ : το βάρος εξόδου που σταθμίζει την έξοδο του  $i$  τεχνητού νευρώνα. Παρακάτω χρησιμοποιείται το διάνυσμα  $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_n]^T$ .

- $\bar{z}^p \in R$ , με  $p=1,2,\dots,m$ : η έξοδος του Νευρωνικού Δικτύου όταν η είσοδος του Νευρωνικού Δικτύου είναι το διάνυσμα  $x^p$ .

Η εκπαίδευση του Νευρωνικού Δικτύου του σχήματος 7.2 στοχεύει στον προσδιορισμό των ελεύθερων παραμέτρων του  $\omega$ ,  $\theta$ ,  $W$  και  $r$  για τις οποίες, το Νευρωνικό Δίκτυο υλοποιεί την επιθυμητή απεικόνιση των διανυσμάτων εισόδου στα διανύσματα εξόδου. Η μεθοδολογία εκπαίδευσης των Νευρωνικών Δικτύων βασίζεται στην ελαχιστοποίηση κάποιας συνάρτησης κόστους, που αναφέρεται στο σφάλμα με το οποίο κάθε έξοδος του προσεγγίζει την επιθυμητή έξοδο. Ο αλγόριθμος που παρουσιάζεται στη διατριβή χρησιμοποιεί ως συνάρτηση κόστους το τετραγωνικό σφάλμα, δηλαδή  $\frac{1}{2} \sum_{p=1}^m (t^p - \bar{z}^p)^2$ .

Η έξοδος κάθε νευρώνα του Νευρωνικού Δικτύου του σχήματος 7.2 όταν είσοδος είναι το διάνυσμα  $x^p$  είναι  $y_i^p = f(w_i^T x^p + r_i, 1)$ ,  $i=1,2,\dots,n$ . Έτσι η έξοδος του Νευρωνικού Δικτύου όταν είσοδος είναι το  $x^p$  είναι  $\bar{z}^p = \sum_{i=1}^n \omega_i y_i^p + \theta = \sum_{i=1}^n \omega_i f(w_i^T x^p + r_i, 1) + \theta$  και η συνάρτηση σφάλματος γίνεται :

$$F(\theta, r, W, \omega) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m (t^p - \bar{z}^p)^2 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left( t^p - \theta - \sum_{i=1}^n \omega_i f(w_i^T x^p + r_i, 1) \right)^2. \text{ Λαμβάνοντας}$$

υπόψη το Λήμμα 7.1 η συνάρτηση σφάλματος γράφεται

$$F(\theta, r, W, \omega) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left( t^p - \theta - \sum_{i=1}^n f(\omega_i w_i^T x^p + \omega_i r_i, |\omega_i|) \right)^2 \quad (7.2)$$

Στα πλαίσια λοιπόν της εκπαίδευσης του Νευρωνικού Δικτύου λύνεται το πρόβλημα

$$\min_{\theta, r, W, \omega} \{F(\theta, r, W, \omega)\} \quad \text{E}$$

Για την απλοποίηση της περιγραφής (7.2) του τετραγωνικού σφάλματος, θεωρείται ο ακόλουθος μετασχηματισμός:

$$\zeta_i = |\omega_i|, \quad i=1,2,\dots,n \quad (7.3\alpha)$$

$$z_i^T = \omega_i w_i^T, \quad i=1,2,\dots,n \quad (7.3\beta)$$

$$q_i = \omega_i r_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (7.3\gamma)$$

Αν  $\zeta_i > 0$ , ο αντίστροφος του μετασχηματισμού (7.3) είναι ο εξής:

$$\omega_i = \pm \zeta_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (7.4\alpha)$$

$$w_i^T = \pm \frac{1}{\zeta_i} z_i^T, \quad i=1,2,\dots,n \quad (7.4\beta)$$

$$r_i = \pm \frac{1}{\zeta_i} q_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (7.4\gamma)$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό (7.3), η έξοδος του Νευρωνικού Δικτύου όταν είσοδος είναι το διάνυσμα  $x^p$  γίνεται:

$$z^p = \theta - \sum_{i=1}^n f(z_i^T x^p + q_i, \zeta_i). \quad (7.5)$$

Η συνάρτηση σφάλματος (7.2), μετά το μετασχηματισμό γράφεται:

$$\hat{F}(\theta, q, Z, \zeta) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left( t^p - \theta - \sum_{i=1}^n f(z_i^T x^p + q_i, \zeta_i) \right)^2 \quad (7.6)$$

όπου:  $\zeta = [\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n]^T$   $n \times 1$  διάνυσμα,  $Z = [z_1 z_2 \dots z_n]$   $N \times n$  πίνακας και  $q = [q_1 q_2 \dots q_n]^T$   $n \times 1$  διάνυσμα.

Έτσι, αντί του προβλήματος Ε λύνεται το ακόλουθο πρόβλημα  $\min_{\theta, q, Z, \zeta} \{ \hat{F}(\theta, q, Z, \zeta) : \zeta_i \geq 0, i=1,2,\dots,n \}$ , δηλαδή

$$\min_{\theta, q, Z, \zeta} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left( t^p - \theta - \sum_{i=1}^n f(z_i^T x^p + q_i, \zeta_i) \right)^2 : \zeta_i \geq 0, i=1,2,\dots,n \right\} \quad \hat{E}$$

Σε κάθε επανάληψη του η συνάρτηση ενεργοποίησης νευρώνων  $f$  προσεγγίζεται από τη γραμμικοποίησή της στο τρέχον σημείο. Αντικαθιστώντας σε κάθε επανάληψη, στο πρόβλημα  $\hat{E}$ , τη γραμμική προσέγγιση της  $f$  προκύπτει ένα πρόβλημα γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων, το οποίο λύνεται με τη μέθοδο του ενεργού συνόλου.

Έστω  $(\theta^*, q^*, Z^*, \zeta^*)$  η λύση του προβλήματος  $\hat{E}$ , αν είναι  $\zeta_i^* > 0$ ,  $\forall i=1,2,\dots,n$ , τότε από τον αντίστροφο μετασχηματισμό (7.4), λαμβάνεται η λύση του προβλήματος  $E$ , ενώ αν  $\zeta_i^* = 0$  για κάποιο  $i \in \{1,2,\dots,n\}$ , ο  $j$  νευρώνας μπορεί να καταργηθεί.

Στη συνέχεια περιγράφεται η διαδικασία εύρεσης της γραμμικής προσέγγισης της συνάρτησης  $f$  γύρω από τυχαίο σημείο  $(\bar{y}, \bar{\sigma})$ .

Για κάθε  $y \in R^n$  και για κάθε  $\sigma \in R$  υπάρχουν  $\delta$  και  $\varepsilon$  τέτοια ώστε  $y = \bar{y} + \delta$  και  $\sigma = \bar{\sigma} + \varepsilon$ .

(α) Αν είναι  $\bar{y} > \bar{\sigma}$ , τότε  $f(\bar{y}, \bar{\sigma}) = \bar{\sigma}$ . Από τον ορισμό της συνάρτησης  $f$  (7.1) πρέπει  $\sigma > 0$ , δηλαδή

$$\varepsilon \geq -\bar{\sigma} \quad (7.7\alpha)$$

Επιπλέον για κάθε  $(\delta, \varepsilon)$  κοντά στο μηδέν είναι  $y > \sigma$ , δηλαδή  $\bar{y} + \delta \geq \bar{\sigma} + \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\varepsilon - \delta \leq \bar{y} - \bar{\sigma} \quad (7.7\beta)$$

Για  $(\delta, \varepsilon)$  που ικανοποιούν τις ανισότητες (7.7α) και (7.7β) προφανώς ισχύουν

$$f(y, \sigma) = f(\bar{y} + \delta, \bar{\sigma} + \varepsilon) \Leftrightarrow f(y, \sigma) = \bar{\sigma} + \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$f(y, \sigma) = f(\bar{y}, \bar{\sigma}) + \varepsilon \quad (7.8)$$

(β) Αν είναι  $\bar{y} < -\bar{\sigma}$ , τότε  $f(\bar{y}, \bar{\sigma}) = -\bar{\sigma}$ . Από τον ορισμό της συνάρτησης  $f$  (7.1) πρέπει να ισχύει η ανισότητα (7.7α). Επιπλέον για κάθε  $(\delta, \varepsilon)$  κοντά στο μηδέν, είναι  $y < -\sigma$ , δηλαδή  $\bar{y} + \delta \leq -\bar{\sigma} - \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\varepsilon + \delta \leq -\bar{y} - \bar{\sigma} \quad (7.9)$$

Για  $(\delta, \varepsilon)$  που ικανοποιούν τις ανισότητες (7.7α) και (7.9) προφανώς ισχύουν

$$f(y, \sigma) = f(\bar{y} + \delta, \bar{\sigma} + \varepsilon) \Leftrightarrow f(y, \sigma) = -\bar{\sigma} - \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$f(y, \sigma) = f(\bar{y}, \bar{\sigma}) - \varepsilon \quad (7.10)$$

(γ) Αν είναι  $|\bar{y}| < \bar{\sigma}$ , τότε  $f(\bar{y}, \bar{\sigma}) = \bar{y}$ . Από τον ορισμό της συνάρτησης  $f$  (7.1) πρέπει να ισχύει η ανισότητα (7.7α). Επιπλέον για κάθε  $(\delta, \varepsilon)$  κοντά στο μηδέν, είναι  $|y| < \sigma$ , δηλαδή  $|\bar{y} + \delta| < \bar{\sigma} + \varepsilon \Leftrightarrow -\bar{\sigma} - \varepsilon < \bar{y} + \delta < \bar{\sigma} + \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\delta - \varepsilon \leq -\bar{y} + \bar{\sigma} \quad (7.11\alpha)$$

$$-\delta - \varepsilon \leq \bar{y} + \bar{\sigma} \quad (7.11\beta)$$

Για  $(\delta, \varepsilon)$  που ικανοποιούν τις ανισότητες (7.7α), (7.11α) και (7.11β) προφανώς ισχύουν  $f(y, \sigma) = f(\bar{y} + \delta, \bar{\sigma} + \varepsilon) \Leftrightarrow f(y, \sigma) = \bar{y} + \delta \Leftrightarrow$

$$f(y, \sigma) = f(\bar{y}, \bar{\sigma}) + \delta \quad (7.12)$$

(δ) Αν  $\bar{y} = \bar{\sigma}$ , τότε  $f(\bar{y}, \bar{\sigma}) = \bar{\sigma} = \bar{y}$ . Από τον ορισμό της συνάρτησης  $f$  (7.1) πρέπει να ισχύει η ανισότητα (7.7α). Η περίπτωση αυτή, αφορά το άνω γόνατο της συνάρτησης που απεικονίζεται στο σχήμα 7.1. Οπότε για κάθε  $(\delta, \varepsilon)$  κοντά στο μηδέν, η τιμή της συνάρτησης  $f(y, \sigma)$  θα ανήκει στο άνω οριζόντιο ή στο επικλινές γραμμικό τμήμα της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, για  $(\delta, \varepsilon)$  τέτοιο ώστε  $y \geq \sigma$ , δηλαδή  $\bar{y} + \delta \geq \bar{\sigma} + \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon - \delta \leq \bar{y} - \bar{\sigma}$ , ισχύουν  $f(y, \sigma) = f(\bar{y} + \delta, \bar{\sigma} + \varepsilon) = \bar{\sigma} + \varepsilon = f(\bar{y}, \bar{\sigma}) + \varepsilon$ . Ένω για  $(\delta, \varepsilon)$  τέτοιο ώστε  $|y| \leq \sigma$ , δηλαδή  $\varepsilon - \delta \geq \bar{y} - \bar{\sigma}$  και  $\varepsilon + \delta \geq -\bar{y} - \bar{\sigma}$ , ισχύουν  $f(y, \sigma) = f(\bar{y} + \delta, \bar{\sigma} + \varepsilon) = \bar{y} + \delta = f(\bar{y}, \bar{\sigma}) + \delta$ .

(ε) Αν  $\bar{y} = -\bar{\sigma}$ , τότε  $f(\bar{y}, \bar{\sigma}) = -\bar{\sigma} = \bar{y}$ . Από τον ορισμό της συνάρτησης  $f$  (7.1) πρέπει να ισχύει η ανισότητα (7.7α). Η περίπτωση αυτή, αφορά το κάτω γόνατο της συνάρτησης που απεικονίζεται στο σχήμα 7.1. Οπότε για κάθε  $(\delta, \varepsilon)$  κοντά στο μηδέν, η τιμή της συνάρτησης  $f(y, \sigma)$  θα ανήκει στο κάτω οριζόντιο ή στο επικλινές γραμμικό τμήμα της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, για  $(\delta, \varepsilon)$  τέτοιο ώστε  $y \leq -\sigma$ , δηλαδή  $\bar{y} + \delta \leq -\bar{\sigma} - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon + \delta \leq -\bar{y} - \bar{\sigma}$ , ισχύουν  $f(y, \sigma) = f(\bar{y} + \delta, \bar{\sigma} + \varepsilon) = -\bar{\sigma} - \varepsilon = f(\bar{y}, \bar{\sigma}) - \varepsilon$ . Ένω για  $(\delta, \varepsilon)$  τέτοιο ώστε  $|y| \leq \sigma$ ,



δηλαδή  $\varepsilon - \delta \geq \bar{y} - \bar{\sigma}$  και  $\varepsilon + \delta \geq -\bar{y} - \bar{\sigma}$ , ισχύουν  $f(y, \sigma) = f(\bar{y} + \delta, \bar{\sigma} + \varepsilon) = \bar{y} + \delta = f(\bar{y}, \bar{\sigma}) + \delta$ .

Παρατηρείται ότι τα δεξιά μέλη των ανισοτήτων (7.7α), (7.9), (7.11α) και (7.11β) είναι θετικά.  $\square$

Έστω  $(\theta^k, q^k, Z^k, \zeta^k)$  το τρέχον σημείο στην  $k$  επανάληψη του υπό κατασκευή αλγόριθμου. Ορίζονται τα ακόλουθα σύνολα:

$$I_+^k = \left\{ (i, p) : i \in \{1, 2, \dots, n\}, p \in \{1, 2, \dots, m\}, z_i^{kT} x^p + q_i^k > \zeta_i^k \right\}$$

$$I_0^k = \left\{ (i, p) : i \in \{1, 2, \dots, n\}, p \in \{1, 2, \dots, m\}, \left| z_i^{kT} x^p + q_i^k \right| < \zeta_i^k \right\}$$

$$I_-^k = \left\{ (i, p) : i \in \{1, 2, \dots, n\}, p \in \{1, 2, \dots, m\}, z_i^{kT} x^p + q_i^k < -\zeta_i^k \right\}$$

$$I_0^{k+} = \left\{ (i, p) : i \in \{1, 2, \dots, n\}, p \in \{1, 2, \dots, m\}, z_i^{kT} x^p + q_i^k = \zeta_i^k \right\}$$

$$I_0^{k-} = \left\{ (i, p) : i \in \{1, 2, \dots, n\}, p \in \{1, 2, \dots, m\}, z_i^{kT} x^p + q_i^k = -\zeta_i^k \right\}$$

Θεωρείται η μεταπόση  $(\tau, \varepsilon, \Delta, \eta)$  από το τρέχον σημείο  $(\theta^k, q^k, Z^k, \zeta^k)$  στο τυχαίο σημείο  $(\theta, q, Z, \zeta)$ , δηλαδή:

$$\theta = \theta^k + \tau$$

$$q = q^k + \varepsilon$$

$$Z = Z^k + \Delta$$

$$\zeta = \zeta^k + \eta$$

Για τη λύση του προβλήματος  $\hat{E}$ , η τιμή της συνάρτησης  $f(z_i^T x^p + q_i, \zeta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  προσεγγίζεται από τη γραμμικοποίηση της γύρω από το τρέχον σημείο  $(\theta^k, q^k, Z^k, \zeta^k)$ . Έτσι λαμβάνοντας υπόψη τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν προηγούμενα ισχύουν τα ακόλουθα :

(α) Αν  $(i, p) \in I_+^k$ , τότε

$$f(z_i^T x^p + q_i, \zeta_i) = f(z_i^{kT} x^p + q_i^k, \zeta_i^k) + \eta_i, \quad (7.13\alpha)$$

όταν

$$\eta_i - \delta_i^T x^p - \varepsilon_i - \leq z_i^{kT} x^p + q_i^k - \zeta_i^k \quad (7.13\beta)$$

$$\eta_i \geq -\zeta_i^k \quad (7.13\gamma)$$

(β) Αν  $(i, p) \in I_-^k$ , τότε

$$f(z_i^T x^p + q_i, \zeta_i) = f(z_i^{kT} x^p + q_i^k, \zeta_i^k) - \eta_i, \quad (7.14\alpha)$$

όταν ικανοποιείται η ανισότητα (7.13γ) και επιπλέον

$$\eta_i + \delta_i^T x^p + \varepsilon_i \leq -z_i^{kT} x^p - q_i^k - \zeta_i^k \quad (7.14\beta)$$

(γ) Αν  $(i, p) \in I_0^k$ , τότε

$$f(z_i^T x^p + q_i, \zeta_i) = f(z_i^{kT} x^p + q_i^k, \zeta_i^k) + \delta_i^T x^p + \varepsilon_i, \quad (7.15\alpha)$$

όταν ικανοποιείται η ανισότητα (7.13γ) και επιπλέον

$$-\eta_i + \delta_i^T x^p + \varepsilon_i \leq -z_i^{kT} x^p - q_i^k + \zeta_i^k \quad (7.15\beta)$$

$$-\eta_i + \delta_i^T x^p - \varepsilon_i \leq z_i^{kT} x^p + q_i^k + \zeta_i^k \quad (7.15\gamma)$$

(δ) Αν  $(i, p) \in I_0^{k+}$  και  $(i, p) \in I_0^{k-1}$  ή αν  $(i, p) \in I_0^{k+}$  και  $(i, p) \in I_0^{k-1+}$  και  $(i, p) \in I_0^{k-2}$  κ.ο.κ, τότε όταν ικανοποιούνται οι ανισότητες (7.13γ) και (7.13β), ισχύει η ισότητα (7.13α).

(ε) Αν  $(i, p) \in I_0^{k+}$  και  $(i, p) \in I_+^{k-1}$  ή αν  $(i, p) \in I_0^{k+}$ ,  $(i, p) \in I_0^{k-1+}$  και  $(i, p) \in I_+^{k-2}$  κ.ο.κ, τότε όταν ικανοποιούνται οι ανισότητες (7.13γ), (7.15β) και (7.15γ), ισχύει η ισότητα (7.15α).

(ζ) Αν  $(i, p) \in I_0^{k-}$  και  $(i, p) \in I_0^{k-1}$  ή αν  $(i, p) \in I_0^{k-}$  και  $(i, p) \in I_0^{k-1-}$  και  $(i, p) \in I_0^{k-2}$  κ.ο.κ, τότε όταν ικανοποιούνται οι ανισότητες (7.13γ) και (7.14β), ισχύει η ισότητα (7.14α).

(η) Αν  $(i, p) \in I_0^{k-}$  και  $(i, p) \in I_-^{k-1}$  ή αν  $(i, p) \in I_0^{k-}$  και  $(i, p) \in I_0^{k-1-}$  και  $(i, p) \in I_-^{k-2}$  κ.ο.κ, τότε όταν ικανοποιούνται οι ανισότητες (7.13γ), (7.15β) και (7.15γ), ισχύει η ισότητα (7.15α).

### Βασική Ιδέα του αλγόριθμου

*k* επανάληψη

**Βήμα 1:** τρέχον σημείο:  $(\theta^k, q^k, Z^k, \zeta^k)$

Έστω  $I_0^{k+} = \emptyset$  και  $I_0^{k-} = \emptyset$ .

**Βήμα 2:** Υπολογίζονται τα  $f(z_i^{kT} x^p + q_i^k, \zeta_i^k)$ ,  $\forall (i, p)$ .

**Βήμα 3:** Έστω μετατόπιση  $(\tau, \varepsilon, \Delta, \eta)$  τ.ω.

$$\theta = \theta^k + \tau, \quad q = q^k + \varepsilon, \quad Z = Z^k + \Delta, \quad \zeta = \zeta^k + \eta.$$

(α)  $\forall (i, p)$  τα  $f(z_i^T x^p + q_i, \zeta_i)$  αντικαθίσταται από τη γραμμικοποίησή τους στο τρέχον σημείο, οπότε το πρόβλημα  $\hat{E}$  μετατρέπεται σε ένα πρόβλημα γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων  $\tilde{E}$  με επιπλέον ανισοτικούς περιορισμούς.

(β) Εντοπίζεται κατεύθυνση έρευνας  $(\tau^*, \varepsilon^*, \Delta^*, \eta^*)$  που μειώνει το κόστος του  $\tilde{E}$ .

**Βήμα 4:** Επιλέγεται το μεγαλύτερο δυνατό μήκος βήματος  $\sigma$  τ.ω. το νέο σημείο:

$$\theta^{k+1} = \theta^k + \sigma \tau^*, \quad q^{k+1} = q^k + \sigma \varepsilon^*, \quad Z^{k+1} = Z^k + \sigma \Delta^*, \quad \zeta^{k+1} = \zeta^k + \sigma \eta^*$$

να είναι επιτρεπτό (να ισχύει η προηγούμενη γραμμικοποίηση), οπότε κάποια νέα ανισότητα ικανοποιείται ως ισότητα, δηλαδή για κάποιο  $(\hat{i}, \hat{p})$  η τιμή  $f(z_{\hat{i}}^{k+1T} x^{\hat{p}} + q_{\hat{i}}^{k+1}, \zeta_{\hat{i}}^{k+1})$  φτάνει στο ένα από τα δύο γόνατα.

**Βήμα 5:** Το  $(\hat{i}, \hat{p})$  μεταφέρεται στο επόμενο σύνολο γραμμικής συμπεριφοράς της  $f$ . Αντικαθίσταται  $k = k + 1$  και επιστροφή στο Βήμα 2.

## 7.2 Ο νέος αλγόριθμος εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων

Στην παράγραφο αυτή διατυπώνεται πρωτότυπος αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος  $\tilde{E}$ . Από τον αλγόριθμο αυτό εντοπίζονται οι παράμετροι  $\theta, q, Z, \zeta$ , που προκύπτουν από το μετασχηματισμό (7.3). Τα βάρη και τα κατώφλια του Νευρωνικού Δικτύου προκύπτουν από τον αντίστροφο μετασχηματισμό (7.4).

Βήμα 0:

Δίνεται αρχικό σημείο  $(\theta^0, q^0, Z^0, \zeta^0)$ , τέτοιο ώστε  $z_i^{0T} x^p + q_i^0 \neq \pm \zeta_i^0$ ,

δηλαδή  $I_0^{0+} = \emptyset$  και  $I_0^{0-} = \emptyset$ . Τίθεται  $k=0$ .

Η  $k$  επανάληψη του νέου αλγόριθμου είναι η ακόλουθη:

Βήμα 1:

Υπολογίζονται οι τιμές  $f_i^{pk} = f(z_i^{kT} x^p + q_i^k, \zeta_i^k)$  και ορίζονται τα εξής:

• Αν  $(i, p) \in I_+^k$ , τότε

$$\bar{g}_i^{pk} = 1, \bar{a}_i^{pk} = 1, \hat{a}_i^{pk} = -x^p, \tilde{a}_i^{pk} = -1 \text{ και } \beta_i^p = z_i^{kT} x^p + q_i^k - \zeta_i^k$$

• Αν  $(i, p) \in I_-^k$ , τότε

$$\bar{g}_i^{pk} = -1, \bar{a}_i^{pk} = 1, \hat{a}_i^{pk} = x^p, \tilde{a}_i^{pk} = 1 \text{ και } \beta_i^p = -z_i^{kT} x^p - q_i^k - \zeta_i^k$$

• Αν  $(i, p) \in I_0^k$ , τότε

$$\hat{g}_i^{pk} = x^p, \tilde{g}_i^{pk} = 1, \bar{a}_i^{pk} = -1, \hat{a}_i^{pk} = x^p, \tilde{a}_i^{pk} = 1, \beta_i^p = -z_i^{kT} x^p - q_i^k + \zeta_i^k,$$

$$\bar{a}_i^{pk} = -1, \hat{a}_i^{pk} = -x^p, \tilde{a}_i^{pk} = -1 \text{ και } b_i^p = z_i^{kT} x^p + q_i^k + \zeta_i^k.$$

Τα παραπάνω εκτελούνται  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  και  $\forall p = 1, 2, \dots, m$ .

Βήμα 2:

Λύνεται το ακόλουθο τετραγωνικό πρόβλημα

$$\min_{\tau, \varepsilon, \Delta, \eta} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \left( t^p - \theta^k - \tau - \sum_{i=1}^n f_i^{pk} + \bar{g}_i^{pk} \eta_i + \hat{g}_i^{pk \top} \delta_i + \tilde{g}_i^{pk} \varepsilon_i \right)^2 + \mu \|\tau \ \varepsilon \ \Delta \ \eta\|^2 : \right. \\ \left. -\eta_i \leq \zeta_i^k, i=1,2,\dots,n \right\}$$

και έστω  $(\tau^*, \varepsilon^*, \Delta^*, \eta^*)$  η λύση του.

Αν  $\|(\tau^*, \varepsilon^*, \Delta^*, \eta^*)\| < \varepsilon$ , τότε ο αλγόριθμος τερματίζει.

Βήμα 3:

Βήμα 3.1:

Υπολογίζονται οι παραστάσεις

$$l_i^{pk*} = \sum_{i=1}^n \left( \bar{a}_i^{pk} \eta_i^* + \hat{a}_i^{pk \top} \delta_i^* + \tilde{a}_i^{pk} \varepsilon_i^* \right), \forall (i, p)$$

και

$$l_i^{pk*} = \sum_{i=1}^n \left( \bar{a}_i^{pk} \eta_i^* + \hat{a}_i^{pk \top} \delta_i^* + \tilde{a}_i^{pk} \varepsilon_i^* \right), \forall (i, p) \in I_0^k.$$

Βήμα 3.2:

Εντοπίζονται τα σύνολα

$$M_1^k = \{(i, p) : \beta_i^{pk} = 0 \text{ και } l_i^{pk*} > 0\}$$

και

$$M_2^k = \{(i, p) : b_i^{pk} = 0 \text{ και } l_i^{pk*} > 0\}.$$

Βήμα 3.3:

Αν  $M_1^k \neq \emptyset$  και  $M_2^k \neq \emptyset$ ,

τότε συνέχεια στο Βήμα 3.4

αλλιώς

λύνεται το τετραγωνικό πρόβλημα

$$\min_{\tau, \varepsilon, \Delta, \eta} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m \left( t^p - \theta^k - \tau - \sum_{i=1}^n f_i^{pk} + \bar{g}_i^{pk} \eta_i + \hat{g}_i^{pkT} \delta_i + \tilde{g}_i^{pk} \varepsilon_i \right)^2 + \mu \left\| \tau \varepsilon^T \Delta^T \eta^T \right\|^2 \\ -\eta_i \leq \zeta_i^k, i=1,2,\dots,n \\ \sum_{i=1}^n \left( \bar{a}_i^{pk} \eta_i^* + \hat{a}_i^{pkT} \delta_i^* + \tilde{a}_i^{pk} \varepsilon_i^* \right) \leq \beta_i^{pk}, \forall (i,p) \in M_1^k \\ \sum_{i=1}^n \left( \bar{a}_i^{pk} \eta_i^* + \hat{a}_i^{pkT} \delta_i^* + \tilde{a}_i^{pk} \varepsilon_i^* \right) \leq b_i^{pk}, \forall (i,p) \in M_2^k \end{array} \right\},$$

αποθηκεύεται η λύση του στο διάνυσμα  $(\tau^*, \varepsilon^*, \Delta^*, \eta^*)$  και επιστροφή στο Βήμα 3.1.

Βήμα 3.4.

$$\text{Ας είναι } \bar{\lambda}^k = \min_{(i,p)} \left\{ \frac{\beta_i^{pk}}{l_i^{pk} *} : l_i^{pk} * > 0 \right\},$$

$$\bar{\lambda} \bar{\lambda}^k = \min_{(i,p)} \left\{ \frac{\beta_i^{pk}}{ll_i^{pk} *} : ll_i^{pk} * > 0 \right\} \text{ και } (\bar{i}, \bar{p}), (\bar{ii}, \bar{pp}) \text{ οι αντίστοιχοι}$$

δείκτες που συμβαίνουν τα παραπάνω ελάχιστα.

$$\text{Ας είναι } \lambda^k * = \min_{(i,p)} \left\{ 1, \bar{\lambda}^k, \bar{\lambda} \bar{\lambda}^k \right\}.$$

Αν  $\lambda^k * \neq 1$  ορίζεται

$$(i^*, p^*) = \begin{cases} (\bar{i}, \bar{p}), \text{ αν } \bar{\lambda}^k \leq \bar{\lambda} \bar{\lambda}^k \\ (\bar{ii}, \bar{pp}), \text{ αν } \bar{\lambda}^k > \bar{\lambda} \bar{\lambda}^k \end{cases}.$$

Βήμα 4:

Οι συνιστώσες του νέου  $k+1$  σημείου είναι

$$\theta^{k+1} = \theta^k + \lambda^k * \tau^*, \quad q^{k+1} = q^k + \lambda^k * \varepsilon^*, \quad Z^{k+1} = Z^k + \lambda^k * \Delta^* \text{ και}$$

$$\zeta^{k+1} = \zeta^k + \lambda^k * \eta^*.$$

Αν  $\lambda^k * \neq 1$ , τότε

$$\bullet \text{ Αν } (i^*, p^*) \in I_+^k, \text{ τότε } I_+^{k+1} = I_+^k - \{(i^*, p^*)\}, \quad I_0^{k+1} = I_0^k \cup \{(i^*, p^*)\}$$

$$\text{και } I_-^{k+1} = I_-^k.$$

- Αν  $(i^*, p^*) \in I_-^k$ , τότε  $I_+^{k+1} = I_+^k$ ,  $I_0^{k+1} = I_0^k \cup \{(i^*, p^*)\}$  και  $I_-^{k+1} = I_-^k - \{(i^*, p^*)\}$ .
- Αν  $(i^*, p^*) \in I_0^k$  και  $(i^*, p^*) = (\bar{i}, \bar{p})$  τότε  $I_+^{k+1} = I_+^k \cup \{(i^*, p^*)\}$ ,  $I_0^{k+1} = I_0^k - \{(i^*, p^*)\}$ , και  $I_-^{k+1} = I_-^k$ .
- Αν  $(i^*, p^*) \in I_0^k$  και  $(i^*, p^*) = (\bar{ii}, \bar{pp})$ , τότε  $I_+^{k+1} = I_+^k$ ,  $I_0^{k+1} = I_0^k - \{(i^*, p^*)\}$  και  $I_-^{k+1} = I_-^k \cup \{(i^*, p^*)\}$ .

Επιστροφή στο Βήμα 1 αλλάζοντας το  $k$  σε  $k+1$ .

### 7.3 Παραδείγματα εφαρμογής του νέου αλγόριθμου εκπαίδευσης

Στην παράγραφο αυτή δίνονται τέσσερα παραδείγματα εκπαίδευσης του Νευρωνικού Δικτύου (ΝΔ) του Σχ. 7.2, με τον νέο αλγόριθμο που διατυπώνεται στην προηγούμενη παράγραφο.

Ο αλγόριθμος επιλύει το ενδιαμέσο τετραγωνικό πρόβλημα, (Βήμα 2, Βήμα 3.3) με  $\mu = 0.0001$ . Από τις παραμέτρους  $\zeta, \theta, Z, q$  που υπολογίζονται και τον αντίστροφο μετασχηματισμό (7.4), μπορούν να προκύψουν τα βάρη και τα κατώφλια του ΝΔ. Το τετραγωνικό πρόβλημα που προκύπτει όταν εκτελείται το Βήμα 2 του αλγόριθμου, λύνεται χρησιμοποιώντας το αρχείο `quadprog.m` του Matlab. Το κριτήριο τερματισμού του αλγόριθμου είναι  $\|\eta^*, \tau^*, \Delta^*, \varepsilon^*\| < 10^{-9}$ , όπου  $(\eta^*, \tau^*, \Delta^*, \varepsilon^*)$  η λύση του τετραγωνικού προβλήματος.

*Παράδειγμα 7.1* Το παράδειγμα αυτό αναφέρεται στην εκπαίδευση του ΝΔ του Σχήματος 7.2, με τον νέο αλγόριθμο, ώστε η έξοδος του να προσεγγίζει την συνάρτηση  $f : R \rightarrow [-1 \ 1]$ , με τύπο

$$f(x) = \sin(x).$$

Χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα 13 εκπαιδευτικά ζευγάρια εισόδου-εξόδου  $(x^p, f(x^p))$ ,  $p=1,2,\dots,13$  : (0, 0), (0.5, 0.4794), (1, 0.8415), (1.5, 0.9975), (2, 0.9093), (2.5, 0.5985), (3, 0.1411), (3.5, -0.3508), (4, -0.7568), (4.5, -0.9775), (5, -0.9589), (5.5, -0.7055), (6, -0.2794), η είσοδος μετράται σε ακτίνια.

Ακολουθούν τα αποτελέσματα της εκπαίδευσης με τον προτεινόμενο αλγόριθμο, του ΝΔ, για διάφορα πλήθη νευρώνων. Καταγράφονται οι αρχικές τιμές των παραμέτρων  $\theta, q, Z, \zeta$  του μετασχηματισμού 7.3, και οι τελικές τιμές τους, που προκύπτουν εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο. Επιπλέον από τις τιμές αυτές υπολογίζονται η αρχική και η τελική τιμή του τετραγωνικού σφάλματος  $QE(\theta, q, Z, \zeta) = \sum_{p=1}^m (f(x^p) - z^p)^2$ , όπου  $z^p$  η έξοδος του ΝΔ, που δίνεται από

την ισότητα (7.5), όταν η είσοδος του ΝΔ είναι  $x^p$ .

(α) με 1 νευρώνα (δηλαδή 2 βάρη, 2 κατώφλια), μετά από 12 επαναλήψεις του αλγόριθμου προκύπτουν:

	$\theta$	$q$	$Z$	$\zeta$	$QE(\theta, q, Z, \zeta)$
Αρχικά	1	1	1	10	404.4
Τελικά	-0.0393	2.6569	-0.8358	0.6868	1.0022

(β) με 2 νευρώνες (δηλαδή 4 βάρη, 3 κατώφλια), μετά από 13 επαναλήψεις του αλγόριθμου προκύπτουν:



	$\theta$	$q$	$Z$	$\zeta$	$QE(\theta, q, Z, \zeta)$
Αρχικά	0	-2 2	-3 3	10 15	163.2948
Τελικά	-0.2361	1.3262 -0.9981	-0.6419 1.2957	1.5623 0.9981	0.5024

(γ) με 3 νευρώνες (δηλαδή 6 βάρη 5 κατώφλια), μετά από 16 επαναλήψεις του αλγόριθμου προκύπτουν:

	$\theta$	$q$	$Z$	$\zeta$	$QE(\theta, q, Z, \zeta)$
Αρχικά	1	1 1 1	2 -2 2	10 10 10	1236.26
Τελικά	-0.1272	-1.4025 2.8794 -1.2992	0.4675 -1.3231 1.5263	1.4025 2.9804 1.2992	0.0773

(δ) με 12 νευρώνες (δηλαδή 24 βάρη 13 κατώφλια), μετά από 34 επαναλήψεις του αλγόριθμου προκύπτουν:

	$\theta$	$q$	$Z$	$\zeta$	$QE(\theta, q, Z, \zeta)$
Αρχικά	0	-4	-5	10	21531.4
		-3	-4	11	
		-2	-3	12	
		-1	-2	13	
		0	-1	14	
		1	0	15	
		2	1	16	
		3	2	17	
		4	3	18	
		5	4	19	
		6	5	20	
		7	6	21	
Τελικά	-0.0586	1.0018	-0.4808	1.0605	0.0230
		-0.0293	0	0.0293	
		1.0018	-4.8081	1.0605	
		1.0147	-0.4231	1.0733	
		-0.3103	0.1034	0.3103	
		-0.3103	0.1034	0.3103	
		-0.3103	0.1034	0.3103	
		-0.3103	0.1034	0.3103	
		-0.3103	0.1034	0.3103	
		-0.3947	0.3787	0.3947	
		-0.3947	0.3787	0.3947	
		-0.5556	0.9270	0.5556	

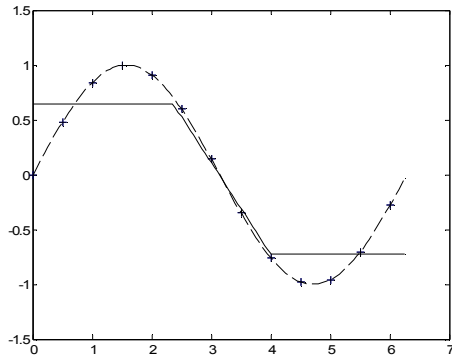
Από τα προηγούμενα αποτελέσματα φαίνεται ότι αυξάνοντας το πλήθος των νευρώνων, μειώνεται τετραγωνικό σφάλμα που αφορά τα 13 δείγματα, δηλαδή βελτιώνεται η προσέγγιση της συνάρτησης  $\sin(x)$  από την έξοδο του ΝΔ.

Στη συνέχεια, θεωρώντας τις τιμές των παραμέτρων  $\zeta, \theta, Z, q$  των προηγούμενων πινάκων, που προέκυψαν από την εκπαίδευση του ΝΔ με τον νέο αλγόριθμο και τα 13 εκπαιδευτικά δείγματα, υπολογίστηκαν οι εξόδοι του ΝΔ με 1, 2, 3 και 12 νευρώνες για 126 τυχαίες εισόδους  $y_i \in [0, 2\pi]$ ,  $i = 1, \dots, 126$ . Έστω  $\bar{z}_i$  η έξοδος του ΝΔ όταν η είσοδος είναι  $y_i$ . Από τις τιμές αυτές υπολογίστηκε το νέο σφάλμα σε κάθε περίπτωση. Έτσι, για τις 126

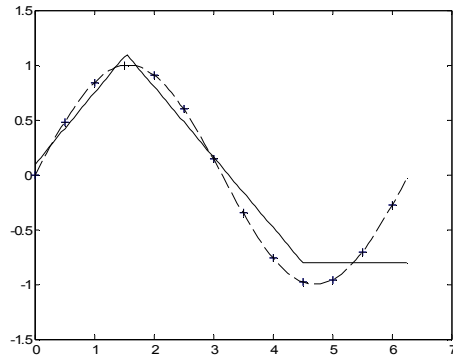
εισόδους τα σχετικά σφάλματα  $\frac{\sum_{p=1}^{126} (f(y_i) - \bar{z}_i)^2}{\sum_{i=1}^{126} f(y_i)} \cdot 100\%$  είναι 12.95%, 8.96%,

2.29%, 0.87% για το ΝΔ με 1 νευρώνα, 2, 3 και 12 νευρώνες αντίστοιχα. Στα σχήματα 7.1 φαίνεται η γραφική παράσταση των εξόδων του ΝΔ σε κάθε περίπτωση για τις 126 αυτές εισόδους και συγκρίνεται με τη συνάρτηση  $\sin(x)$ . Η βελτίωση της εξόδου του ΝΔ αυξάνοντας το πλήθος των νευρώνων είναι προφανής.

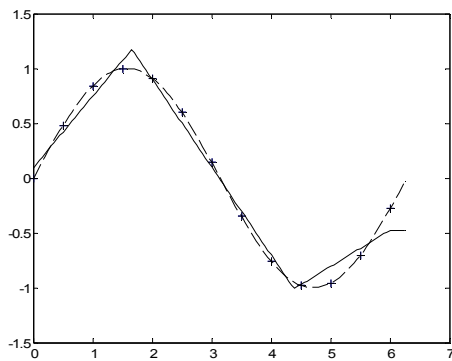
Τέλος, χρησιμοποιήθηκε μεγαλύτερο εκπαιδευτικό δείγμα 32 ζευγών εισόδου και εξόδου. Ως είσοδοι χρησιμοποιήθηκαν τα 32 σημεία ίσης διαμέρισης του διαστήματος  $[0, 2\pi]$ . Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο εκπαίδευσης στο ΝΔ με 1, 2, 3 και 12 νευρώνες, υπολογίστηκαν οι καινούργιες τιμές των παραμέτρων  $\theta, q, Z, \zeta$ . Όπως αναμενόταν, η εκπαίδευση του ΝΔ με μεγαλύτερο δείγμα, βελτίωσε τη προσέγγιση της συνάρτησης  $\sin(x)$  από το ΝΔ. Πράγματι, για τις προηγούμενες 126 τυχαίες εισόδους το ΝΔ συμπεριφέρεται καλύτερα, αφού τα καινούργια σχετικά σφάλματα είναι 12.54%, 1.18%, 0.88%, 0.27% για το ΝΔ με 1 νευρώνα, 2, 3 και 12 νευρώνες, αντίστοιχα.



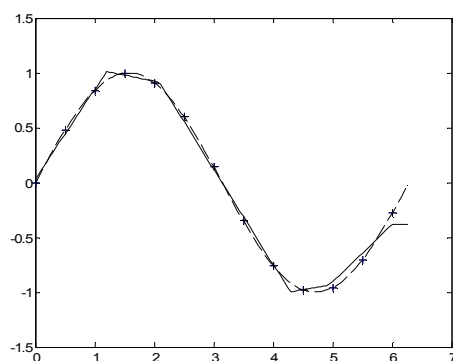
Σχ. 7.1α



Σχ. 7.1β



Σχ. 7.1γ



Σχ. 7.1δ

7.1 Η συνάρτηση  $\sin(x)$  παριστάνεται με τη διακεκομμένη γραμμή και τα 13 δείγματα είναι σημειωμένα με (+). Στα Σχ.7.1.α, Σχ.7.1.β, Σχ.7.1.γ και Σχ.7.1.δ η ενιαία γραμμή παριστάνει την έξοδο του ΝΔ 7.2 με 1 νευρώνα, 2 νευρώνες, 3 νευρώνες και 12 νευρώνες, αντίστοιχα, μετά την εκπαίδευσή του με τον νέο αλγόριθμο εκπαίδευσης και τα 13 δείγματα.

Παράδειγμα 7.2 Το παράδειγμα αυτό είναι το *XOR* πρόβλημα δύο εισόδων:

Είσοδοι $x^p, p=1, \dots, 4$	Έξοδος $t^p$
0 0	0
1 1	0
1 0	1
0 1	1

Στα αποτελέσματα της εκπαίδευσης του ΝΔ με τον νέο αλγόριθμο που ακολουθούν, περιλαμβάνεται και το τετραγωνικό σφάλμα  $QE(\theta, q, Z, \zeta) = \sum_{p=1}^4 (t^p - \bar{z}^p)^2$ , όπου  $\bar{z}^p$  η έξοδος του ΝΔ που δίνεται από την ισότητα (7.5),

όταν η είσοδος του ΝΔ είναι  $x^p$ .

(α) με 1 νευρώνα (δηλαδή 3 βάρη, 2 κατώφλια), μετά από 4 επαναλήψεις του νέου αλγόριθμου προκύπτουν:

	$\theta$	$q$	$Z$	$\zeta$	$QE(\theta, q, Z, \zeta)$
Αρχικά	0	1	1 1	10	12
Τελικά	0.2222	-0.2220	0.6665 0.6665	0.4444	0.6667

Στην περίπτωση αυτή, δηλαδή ΝΔ ενός νευρώνα, ο αλγόριθμος δοκιμάστηκε για 100 διαφορετικά αρχικά σημεία, τυχαία επιλεγμένα στο διάστημα [0 1] για τις παραμέτρους  $\theta, q, Z$  και μεγαλύτερα από 3 για την παράμετρο  $\zeta$ . Η τελική τιμή του τετραγωνικού σφάλματος σε κάθε περίπτωση ήταν 0.6667.

(β) με 2 νευρώνες (δηλαδή 6 βάρη, 3 κατώφλια), μετά από 6 επαναλήψεις του νέου αλγόριθμου προκύπτουν:

	$\theta$	$q$	$Z$	$\zeta$	$QE(\theta, q, Z, \zeta)$
Αρχικά	0	1 1	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	10 10	58
Τελικά	0.0002	-0.4996 1.4988	$\begin{bmatrix} 0.9994 & 0.9994 \\ -0.9992 & -0.9992 \end{bmatrix}$	1.5623 0.9981	$5 \cdot 10^{-7}$

Ο πίνακας που ακολουθεί δίνει την τιμή του τετραγωνικού σφάλματος στην περίπτωση αυτή, για κάθε επανάληψη του νέου αλγόριθμου.

Αριθμός επαναλήψεων	$QE$
0	58
1	1.03082784
2	0.99160139
3	0.77383804
4	0.53287398
5	0.44827697
6	$5 \cdot 10^{-7}$

Στην περίπτωση αυτή, δηλαδή ΝΔ δύο νευρώνων, ο αλγόριθμος δοκιμάστηκε για 100 διαφορετικά αρχικά σημεία, επιλεγμένα όπως στην (α) περίπτωση. Για τα 92 από αυτά ο αλγόριθμος χρειάστηκε λιγότερες από 15 επαναλήψεις για δώσει τετραγωνικό σφάλμα μικρότερο από  $10^{-6}$ .

Για το πρόβλημα αυτό, στην αναφορά [BFF] εντοπίζονται αποτελέσματα που αφορούν την εκπαίδευση Νευρωνικών Δικτύων δύο νευρώνων, με πέντε γνωστούς αλγόριθμους της βιβλιογραφίας, που χρησιμοποιούν ψευδονευτώνιες μεθόδους ελαχιστοποίησης του τετραγωνικού σφάλματος. Οι συναρτήσεις

ενεργοποίησης των νευρώνων είναι της μορφής  $f(z) = \frac{1}{1 + \exp(-z)}$ . Οι

αλγόριθμοι αυτοί είναι γνωστοί με τις συντομογραφίες  $OSS_V$ ,  $SHQN_V$ ,  $OSS_{AG}$ ,  $SHQN_{AG}$  και  $SHQN_{V1}$  ([Bat], [Bun]). Στον πίνακα που ακολουθεί δίνεται ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτεί καθένας από τους πέντε αλγόριθμους, ώστε το προκύπτον κάθε φορά τετραγωνικό σφάλμα  $QE = \sum_{p=1}^4 (t^p - z^p)^2$ , όπου

$z^p$  είναι η έξοδος του ΝΔ, να είναι μικρότερο των  $10^{-1}$ ,  $10^{-3}$  και  $10^{-6}$ .

$QE$	$10^{-1}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$
$OSS_V$	62	79	98
$SHQN_V$	43	51	56
$OSS_{AG}$	23	29	44
$SHQN_{AG}$	13	17	24
$SHQN_{V1}$	43	51	58

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα όπως φαίνεται από τον προηγούμενο πίνακα, από τους πέντε εξεταζόμενους αλγόριθμους της βιβλιογραφίας, ο αλγόριθμος  $SHQN_{AG}$  είναι ο αποτελεσματικότερος. Ο νέος αλγόριθμος που διατυπώνεται στη διατριβή, είναι αποτελεσματικότερος του  $SHQN_{AG}$ , στο συγκεκριμένο πρόβλημα, αφού μειώνει το τετραγωνικό σφάλμα πολύ πιο γρήγορα. Ο νέος αλγόριθμος δίνει μικρότερο τελικό τετραγωνικό σφάλμα από τον  $SHQN_{AG}$  απαιτώντας το 1/4 του αριθμού των επαναλήψεων του  $SHQN_{AG}$ .

*Παράδειγμα 7.3* Το παράδειγμα αυτό είναι το πρόβλημα προσέγγισης από την έξοδο του ΝΔ, της συνάρτησης  $f: R \rightarrow R$  με τύπο:

$$f(x) = 0.5 \sin \frac{2\pi x}{10} + 0.5 \left( \sin \frac{2\pi x}{10} \right)^2.$$

Οι εκπαιδευτικές είσοδοι  $x^p$ ,  $p=1,\dots,20$ , επιλέγονται τυχαία στο διάστημα  $(0,1)$ . Στα αποτελέσματα της εκπαίδευσης του ΝΔ με τον νέο αλγόριθμο που ακολουθούν, περιλαμβάνεται και το τετραγωνικό σφάλμα  $QE(\theta, q, Z, \zeta) = \sum_{p=1}^{20} (f(x^p) - \bar{z}^p)^2$ , όπου  $z^p$  η έξοδος του ΝΔ που δίνεται από τη σχέση (7.5), όταν η είσοδος του είναι  $x^p$ .

Με 2 νευρώνες (δηλαδή 4 βάρη, 3 κατώφλια), μετά από 12 επαναλήψεις του νέου αλγόριθμου προκύπτουν:

	$\theta$	$q$	$Z$	$\zeta$	$QE(\theta, q, Z, \zeta)$
Αρχικά	0	1 1	-1 -1	1 1	22.7190
Τελικά	0.1444	-0.1038 -0.1076	0.3722 0.1591	0.2483 0.0429	$3 \cdot 10^{-5}$

Ο πίνακας που ακολουθεί δίνει την τιμή του τετραγωνικού σφάλματος, για κάθε επανάληψη του νέου αλγόριθμου.

Αριθμός επαναλήψεων	$QE$
0	1.3851
1	0.3451
2	0.0609
3	0.0537
4	0.0327
5	0.0013
6	0.0009
7	0.0005
8	0.00037
9	0.00036
10	0.00033



11	0.00021
12	0.00003

Σχετικά με το πρόβλημα αυτό, όπως και για το πρόβλημα του Παραδείγματος 7.2, στην αναφορά [BFF] εντοπίζονται αποτελέσματα που αφορούν την εκπαίδευση Νευρωνικών Δικτύων δύο νευρώνων, με πέντε γνωστούς αλγόριθμους της βιβλιογραφίας. Οι συναρτήσεις ενεργοποίησης των νευρώνων είναι της μορφής  $f(z) = \frac{1}{1 + \exp(-z)}$ . Τα αποτελέσματα αυτά

περιλαμβάνονται στον πίνακα που ακολουθεί. Συγκεκριμένα, στον πίνακα αναγράφεται ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτεί καθένας από τους πέντε αλγόριθμους, ώστε το προκύπτον κάθε φορά τετραγωνικό σφάλμα  $QE = \sum_{p=1}^{20} (f(x^p) - z^p)^2$ , όπου  $z^p$  είναι η έξοδος του ΝΔ, να είναι μικρότερο των  $10^{-1}$ ,  $10^{-3}$  και  $10^{-6}$ .

$QE$	$10^{-1}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$
$OSS_V$	13	26	328
$SHQN_V$	33	49	176
$OSS_{AG}$	3	7	176
$SHQN_{AG}$	3	6	81
$SHQN_{V1}$	33	45	82

Από τον προηγούμενο πίνακα φαίνεται ότι για το συγκεκριμένο πρόβλημα (όπως και για το Παράδειγμα 7.2), ο αλγόριθμος  $SHQN_{AG}$  είναι ο αποτελεσματικότερος, από τους πέντε εξεταζόμενους αλγορίθμους της βιβλιογραφίας. Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων του  $SHQN_{AG}$ , με τα αποτελέσματα του νέου αλγορίθμου, φαίνεται ότι, για τετραγωνικά σφάλματα της τάξης του  $10^{-1}$  και  $10^{-3}$ , οι αλγόριθμοι είναι εξίσου αποτελεσματικοί. Για

πραιτέρω μείωση του τετραγωνικού σφάλματος, ο νέος αλγόριθμος φαίνεται πολύ πιο γρήγορος.

*Παράδειγμα 7.4 (Parity Problem)* Το παράδειγμα αυτό αναφέρεται στην εκπαίδευση του ΝΔ, ώστε να συμπεριφέρεται ως εξής: εφαρμόζοντας στην είσοδο του ακολουθίες από μηδενικά και μονάδες, να δίνει έξοδο τη μονάδα, όταν το πλήθος των μονάδων στην είσοδο είναι μηδέν ή άρτιο, ενώ διαφορετικά να δίνει έξοδο μηδέν. Πρόκειται για ένα κλασικό πρόβλημα εκπαίδευσης ΝΔ, που συναντάται συχνά στη βιβλιογραφία. Εδώ, θα χρησιμοποιηθεί το ίδιο εκπαιδευτικό δείγμα με το Example 1 του άρθρου [Bab], ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση των αποτελεσμάτων του νέου αλγόριθμου με τα αποτελέσματα των αλγορίθμων του συγκεκριμένου άρθρου. Το εκπαιδευτικό δείγμα αποτελείται από τα εξής δέκα ζευγάρια :

Είσοδοι $x^p, p = 1, \dots, 10$	Έξοδος $t^p$
0 0 0 0 0 0 0	1
0 1 0 0 0 0 0	0
0 0 0 0 0 1 0	0
1 0 1 0 0 0 0	1
0 0 0 0 1 0 1	1
0 1 0 1 0 0 0	1
0 0 0 1 0 1 0	1
1 0 1 0 1 0 0	0
0 0 1 0 1 0 1	0
1 1 1 1 1 1 1	0

Στο άρθρο [Bab] δεν δίνονται αρχικά σημεία. Ο νέος αλγόριθμος εκπαίδευσης εφαρμόστηκε στο ΝΔ ενός νευρώνα (8 βάρη, 2 κατώφλια), για 100 αρχικά σημεία μέσα στο διάστημα (0 1) για τις παραμέτρους  $\theta, q, Z$  και μεγαλύτερα

από 3 για την παράμετρο  $\zeta$ . Τα αποτελέσματα ήταν πολύ καλά. Συγκεκριμένα για 96 αρχικά σημεία και με λιγότερες από 25 επαναλήψεις ο αλγόριθμος έδωσε τετραγωνικό σφάλμα  $QE$  μικρότερο του  $10^{-6}$ . Ενδεικτικά, τα αποτελέσματα εκπαίδευσης του ΝΔ ενός νευρώνα με τον νέο αλγόριθμο για ένα από τα 100 αρχικά σημεία έχουν ως εξής:

	$\theta$	$q$	$Z$	$\zeta$	$QE(\theta, q, Z, \zeta)$
Αρχικά	0	0.2714	0.2523 0.8757 0.7373 0.1365 0.0117 0.8938 0.1991	2	10.82
Τελικά	0.5	0.5	0.9995 -1 -1 1 -1 -1 1	0.5	$3 \cdot 10^{-9}$

Η εξέλιξη του τετραγωνικού σφάλματος του προηγούμενου πίνακα είναι η ακόλουθη:

Αριθμός επαναλήψεων	$QE$
0	10.8
1	3.8
2	3.6
3	3.4
4	1.8
5	0.1
6	$4 \cdot 10^{-6}$
7	$7 \cdot 10^{-9}$
8	$5 \cdot 10^{-9}$
9	$3 \cdot 10^{-9}$

Τα αποτελέσματα που δίνονται στο άρθρο [Bab] για το συγκεκριμένο πρόβλημα εκπαίδευσης, αφορούν ΝΔ με δύο κρυφά επίπεδα (hidden layers) που διαθέτουν  $7 \times 7 + 7 \times 7 + 7 = 105$  βάρη και  $7 + 7 + 1 = 15$  κατώφλια. Συγκεκριμένα, αναφέρεται ότι για τη μείωση του τετραγωνικού σφάλματος ώστε  $QE < 10^{-4}$ , οι μέθοδοι Back Propagation, Random Optimization Method of Matyas και Modified Random Optimization Method of Solis and Wets χρειάστηκαν 11856, 1630 και 447 επαναλήψεις, αντίστοιχα. Η αποτελεσματικότητα του νέου αλγόριθμου εκπαίδευσης έναντι των προηγούμενων είναι εντυπωσιακή.

Το Example 2 του ίδιου άρθρου, αναφέρεται στο παρόμοιο πρόβλημα εκπαίδευσης ΝΔ, με έξι εισόδους αντί εφτά και εκπαιδευτικό δείγμα που περιλαμβάνει όλους του δυνατούς συνδυασμούς των 0 και 1, δηλαδή 64 ζευγάρια. Και σε αυτό το πρόβλημα τα αποτελέσματα του νέου αλγόριθμου είναι εντυπωσιακά, αφού δοκιμάζοντας 100 αρχικά σημεία (επιλεγμένα όπως στο προηγούμενο πρόβλημα) ο αλγόριθμος έδωσε τετραγωνικό σφάλμα μικρότερο του  $10^{-6}$ .

#### 7.4 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνεται ένας πρωτότυπος αλγόριθμος εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων τύπου *Perceptron*. Οι αλγόριθμοι εκπαίδευσης που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία, αφορούν Νευρωνικά Δίκτυα με διαφορίσιμες συναρτήσεις ενεργοποίησης νευρώνων. Εδώ, χρησιμοποιούνται μη διαφορίσιμες τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις ενεργοποίησης των νευρώνων και το πρόβλημα εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων διατυπώνεται ως μη διαφορίσιμο πρόβλημα γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων. Προτείνεται σχετικός αλγόριθμος ο οποίος υλοποιείται αριθμητικά σε προβλήματα εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων της βιβλιογραφίας, με πολύ καλά αποτελέσματα.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη διατριβή αυτή προτείνονται τρία νέα Νευρωνικά Δίκτυα τύπου Hopfield, για την επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων ελαχίστου με ισοτικούς περιορισμούς και διατυπώνεται ένας νέος αλγόριθμος για την εκπαίδευση Νευρωνικών Δικτύων, τύπου Perceptron.

Τα προτεινόμενα Νευρωνικά Δίκτυα τύπου Hopfield, είναι μη αυτόνομα δυναμικά συστήματα με τυχαία (επιτρεπτά ή μη) αρχικά σημεία και βασίζονται σε συνδυασμό της μεθόδου προβολής της κλίσης (ΝΔΠΚΕΛ, ΝΔΠΚΜΕΛ) και της μεθόδου των επαναληπτικών τετραγωνικών προσεγγίσεων (ΝΔΤΠ) με ομοιοτικές μεθόδους λύσης των ισοτικών περιορισμών. Για τους ορισμούς των νέων Νευρωνικών Δικτύων υιοθετούνται οι συνήθεις υποθέσεις της θεωρίας των διακριτών αλγορίθμων. Για καθένα από τα τρία νέα Νευρωνικά Δίκτυα διατυπώνεται ένα γενικό θεώρημα σύγκλισης, όπου χωρίς να υποτίθεται κυρτότητα του προβλήματος Π, αποδεικνύεται ότι οι φραγμένες λύσεις τους συγκλίνουν στο σύνολο των σημείων που ικανοποιούν αναγκαίες συνθήκες ελαχίστου του προβλήματος Π. Τα θεωρήματα αυτά μπορούν να θεωρηθούν σαν η συνεχούς χρόνου εκδοχή των θεωρημάτων σύγκλισης που συνήθως αποδεικνύονται για διακριτούς αλγορίθμους ελαχιστοποίησης. Για κυρτά προβλήματα ελαχιστοποίησης με φραγμένο σύνολο λύσεων, αποδεικνύεται ότι όλες οι λύσεις των προτεινόμενων Νευρωνικών Δικτύων συγκλίνουν στο σύνολο των ολικών ελαχίστων του προβλήματος. Αν και από τα θεωρητικά

αποτελέσματα, στην περίπτωση των μη κυρτών προβλημάτων, δεν εξασφαλίζεται ούτε η μοναδικότητα ούτε η σύγκλιση των λύσεων σε ένα από τα τοπικά ελάχιστα του προβλήματος (το μόνο που εξασφαλίζεται είναι, για φραγμένες λύσεις, η ύπαρξη οριακών σημείων που ικανοποιούν τις συνθήκες πρώτης τάξης του προβλήματος ελαχίστου), στην πράξη όμως, οι αριθμητικές εφαρμογές των Νευρωνικών Δικτύων σε κυρτά και μη κυρτά προβλήματα δίνουν μοναδικές φραγμένες λύσεις, που συνήθως συγκλίνουν σε ένα τοπικό ή ολικό ελάχιστο. Στην περίπτωση του ΝΔΤΠ, η τροποποίηση του σύμφωνα με τη μέθοδο Marquardt-Levenberg, χαλαρώνει τις υποθέσεις ορισμού του και επιπλέον βελτιώνει σημαντικά τη συμπεριφορά του. Επιπλέον αποδεικνύεται θεωρητικά και διαπιστώνεται στις αριθμητικές εφαρμογές των νέων Νευρωνικών Δικτύων εκθετική ταχύτητα σύγκλισης, τόσο για κυρτά όσο και για μη κυρτά προβλήματα ελαχίστου. Σαν μια δυνατότητα κυκλωματικής υλοποίησης των Νευρωνικών Δικτύων δίνονται κυκλώματα που τα πραγματοποιούν.

Για την εκπαίδευση των Νευρωνικών Δικτύων τύπου Perceptron, συνήθως χρησιμοποιούνται οι γνωστές από τη βιβλιογραφία διαφορίσιμες συναρτήσεις ενεργοποίησης των νευρώνων. Στη διατριβή αυτή, χρησιμοποιούνται μη διαφορίσιμες, τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις ενεργοποίησης των νευρώνων και ως συνάρτηση σφάλματος το τετραγωνικό σφάλμα. Η βασική ιδέα του αλγόριθμου επίλυσης του προβλήματος εκπαίδευσης που προκύπτει, είναι ότι σε κάθε επανάληψή του η συνάρτηση ενεργοποίησης νευρώνων προσεγγίζεται από τη γραμμικοποίησή της στο τρέχον σημείο. Έτσι η συνάρτηση σφάλματος γίνεται τετραγωνική και το πρόβλημα που λύνεται σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου είναι πρόβλημα γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων. Διατυπώνεται ο σχετικός αλγόριθμος, ο οποίος υλοποιείται αριθμητικά και συγκρίνεται με υπάρχουσες μεθόδους, με ενθαρρυντικά αποτελέσματα.

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [Avr] M. Avriel, *Nonlinear Programming Analysis and Methods*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [Bab] N. Baba, “A new approach finding the global minimum of error function of neural networks”, *Neural Networks*, vol. 2, pp. 367-373, 1989.
- [BaS] M. S. Bazaraa και C. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, Wiley, New York, 1979.
- [Bat] R. Battiti, “First- and second-order methods for learning: Between steepest descent and Newton’s method”, *Neural Comput.*, vol. 4, pp. 141-166, 1992.
- [BaW] E. Baum και F. Wilczek, “Supervised learning of probability distributions by neural networks”, *Neural Information Processing Systems*, pp. 52-61, 1988.
- [Ber] D. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, Athena Scientific, 1995.
- [BFF] A. Bortoletti, C. Di Fiore, S. Fanelli και P. Zellini, “A new class of quasi-Newtonian methods for optimal learning in MLP-networks”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 14, pp. 263-273, 2003.
- [BoP] A. Bouzerdoum και T. Pattison, “Neural network for quadratic optimization with bound constraints”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 4, pp. 293-304, 1993.



- [Bun] O. Buneman, “Conversion of FFT’s to fast Hartley transforms”, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, vol. 7, pp. 624-638, 1986.
- [ChL] L.O. Chua και G.-N. Lin, “Nonlinear programming without computation”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 31, pp. 182-188, 1984.
- [CHZ] E. Chong, S. Hui και S.H. Zak, “An analysis of a class of neural networks for solving linear programming problems”, *IEEE Trans. Automatic Contr.*, vol. 44, pp. 1995-2006, 1999.
- [GLX] X. Gao, L. Z. Liao και W. Xue, “A neural network for a class of convex quadratic minimax problems with constraints”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 15, no. 3, pp. 622-628, 2004.
- [Gol] R. M. Golden, *Mathematical Methods for Neural Network Analysis and Design*, Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- [GoL] G. H. Golub και C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins Press, 1996.
- [Gro] S. Grossberg, “Adaptive pattern classification and universal recording: I. parallel development and coding of neural feature detectors”, *Biol. Cybernetics*, vol. 23, pp. 175-185, 1977.
- [CU1] A. Cichocki και R. Unbehauen, *Neural Networks for Optimization and Signal Processing*, John Wiley & Sons, 1993.
- [CU2] A. Cichocki και R. Unbehauen, “Simplified neural network for solving linear least squares and total least squares problems in real time”, *IEEE Trans. Neural Network*, vol. 5, pp. 910-923, 1994.
- [Hay] S. Haykin, *Neural Network: A Comprehensive Foundation*, Macmillian College Publishing Company, 1994.
- [HDB] T. M. Hagan, H. B. Demuth and M. Beale, *Neural Network Design*, PWS Publishing Company, 1996.
- [Heb] D. O. Hebb, *The Organization of Behaviour*, Wiley, New, York, 1949.

- [Hop] J. J. Hopfield, “Neural network and physical systems with emergent collective computational abilities”, in *Proc. of the National Academy of Sciences*, vol. 79, pp. 2554-2558, 1982.
- [HuD] S. D. Hunt και J. R. Deller, “Selective Training of Feedforward Artificial neural networks using matrix perturbation theory”, *Neural Networks*, vol. 8, no. 6, pp. 931-944, 1995.
- [JiW] D. Jiang και J. Wang, “A recurrent neural network for real-time semidefinite programming”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. pp.81-93, 1999.
- [KeC] M.P. Kennedy και L.O. Chua, “Unifying the Tank and Hopfield linear programming circuit and the canonical nonlinear programming circuit of Chua and Lin”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 34, pp. 210-214, 1986.
- [Kha] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [KoA] S. Kollias και D. Anastassiou, “An adaptive least squares algorithm for the efficient training of artificial neural networks”, *IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-36*, pp. 1092-1101, 1989.
- [Koh] T. Kohonen, “Self-organized formation of topologically correct feature maps”, *Biol. Cybernetics*, vol. 43, pp. 59-69, 1982.
- [LaS] J. P. LaSalle, *The Stability of Dynamical Systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, England, 1976.
- [LCJ] Y. Leung, K.-Z. Chen, Y.-C. Jiao, X.-B. Gao και K. S. Leung, “A new gradient-based neural network for solving linear and quadratic programming problems”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 12, pp. 1074-1083, 2001.
- [LHZ] W.E. Lillo, S. Hui και S.H. Zak, “Neural networks for constrained optimization problems”, *Int. J. of Circuit Th. and Appl.*, vol. 21, pp. 385-399, 1993.

- [LiW] X.-B. Liang και J. Wang, “A recurrent neural network for nonlinear optimization with a continuously differentiable objective function and bound constraints”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 11, pp. 1251-1262, 2000.
- [LLH] W.E. Lillo, M.H. Loh, S. Hui, και S.H. Zak, “On solving constrained optimization problems with neural networks: a penalty method approach”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 4, pp. 931-940, 1993.
- [Lue] D.G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [MaK] N.G. Maratos και P.T. Krasopoulos, “An interior point recurrent neural network for convex optimization problem”, submitted for publication to *Neural Networks*.
- [Μαρ] Ν. Γ. Μαράτος, *Τεχνικές Βελτιστοποίησης (Σημειώσεις)*, ΕΜΠ, 1990.
- [McP] W. H. McCulloch and W. Pitts, “A logical calculus of the Ideas immanent in nervous activity”, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, vol. 5, pp. 115-133, 1943.
- [MiP] M. L. Minsky and S. Papert, *Perceptrons*, MIT Press, Cambridge MA, 1969.
- [MiW] A.N. Michel and K. Wang, *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, Marcel Dekker Inc., New York, 1995.
- [Mol] M. Moller, “A scaled conjugate gradient algorithm for fast supervised learning”, *Neural Network*, vol. 6, no. 4, pp. 525-533, 1993.
- [OrR] J. M. Ortega και W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in several variables*, Academic Press, 1970, New York.
- [Oso] S. Osowski, “Neural network for non-linear programming with linear equality Constraints,” *Int. J. of Circuit Th. and Appl.*, vol. 20, pp. 93-98, 1992.
- [Per] M. J. Perez-Ilzarbe, “Convergence analysis of a discrete-time recurrent neural network to perform quadratic real optimization with bound

- constraints”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 9, pp.1344-1351, 1998.
- [Pol] E. Polak, *Computational Methods in Optimization: A Unified Approach*, Academic Press, New York, 1971.
- [RDR] A. Rodriguez-Vazquez, R. Dominguez-Castro, A. Rueda, J.L. Huertas και E. Sanchez-Sinencio, “Nonlinear switched-capacitor neural networks for optimization problems”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 37, pp. 384-398, 1990.
- [RHL] N. Rouche, P. Hebets, and M. Laloy, *Stability Theory by Liapunov’s Direct Method*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Ros] F. Rosenblatt, “The Perceptron: a probabilistic model for information storage and organization”, *Psychological Review*, vol. 65, pp. 386-408, 1958.
- [SBC] S. Saarinen, R. Bramley, G. Cybenko, ‘Ill-conditioning in neural network training problems”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 14, pp. 693-714, 1993.
- [SuS] S. Sudharsanan και M. Sundareshan, “Exponential stability and a systematic synthesis of a neural network for quadratic minimization”, *Neural Networks*, 4, pp.599-613, 1991.
- [TaH] D.W. Tank και J.J. Hopfield, “Simple neural optimization networks: an A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 33, pp. 533-541, 1986.
- [Tay] J. G. Taylor, *Mathematical Approaches to Neural Networks*, Elsevier Science Publishers B. V., 1993.
- [TCX] Q. Tao, J. D. Cao, M. S. Xue και H. Qiao, “A high performance neural network for solving nonlinear programming problems with hybrid constraints”, *Phys. Lett. A*, vol. 288, no. 2, pp. 88-94, 2001.

- [Wat] R. L. Watrous, “A comparison between squared error and relative entropy metrics using several optimization algorithms”, *Complex Systems*, pp. 495-505, 1992.
- [WiD] B. S. Wittner και J.s. Denker, “Strategies for teaching layered networks classification tasks”, *Neural Information Processing Systems*, pp. 850-859, New York, 1988.
- [WiH] B. Widrow and M. E. Hoff, “Adaptive switching circuits”, IRE WESCON Convention Record part 4, pp. 96-104, New York, 1960.
- [XFW] Y. Xia, G. Feng και J. Wang, “A recurrent neural network with exponential convergence for solving convex quadratic program and related linear piecewise equations”, *Neural Networks*, vol.17, pp. 1003-1015, 2004.
- [XLW] Y. Xia, H. Leung και J. Wang, “A projection neural network and its application to constrained optimization problems”, *IEEE Trans. Circuits and Systems-I*, vol. 49, pp. 447-458, 2002.
- [XW1] Y. Xia και J. Wang, “A general methodology for designing globally convergent optimization neural networks”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 9, no. 6, pp. 1331-1343, 1998.
- [XW2] Y. Xia και J. Wang, “A recurrent neural network for solving linear projection equation,” *Neural Networks*, vol. 13, pp. 337-350, .
- [XW3] Y.S. Xia και J. Wang, “A general projection neural network for solving monotone variational inequality and related optimization problems”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 15, no. 2, pp. 318-328, 2004.
- [XW4] Y. Xia και J. Wang, “A recurrent neural network for solving nonlinear convex programs subject to linear constraints”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 16, no. 2, pp. 379-386, 2005.
- [ZhC] S. Zhang και g. Constantinides, “Lagrange programming neural networks”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 39, no. 7, pp. 441-452, 1992.

- [ZUH] S.H. Zak, V. Upatising και S. Hui, “Solving linear programming problems with neural networks: a comparative study”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 6, pp. 94-103, 1995.



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Για τον προγραμματισμό του νέου αλγόριθμου εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων που διατυπώνεται στην παράγραφο 7.2, χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό πακέτο Matlab. Για την επίλυση του τετραγωνικού προβλήματος, που προκύπτει στο Βήμα 2 του αλγόριθμου χρησιμοποιήθηκε το αρχείο quadprog.m του Matlab. Ακολουθεί το σχετικό πρόγραμμα.

```
function results=training82(t,X,b0,q0,Z0,j0,s)
options=optimset('Largescale','off');
[N,m]=size(X);n=size(q0,1);e=0.000000001;
%Step 1
Splus=[0 0];Sminus=[0 0];Szero=[];
lin=0;z=[];
q=q0;b=b0;Z=Z0;j=j0;
for i=1:n
z=[z Z(1:N,i)'];
end
for i=1:n
is=(i-1)*N+1;ifi=i*N;
for p=1:m
```



```

[f(i,p) l]=fun(z(is:ifi)',X(:,p),q(i),j(i));
if f(i,p)==j(i)
    Splus=[Splus;[i,p]];
elseif f(i,p)==-j(i)
    Sminus=[Sminus;[i,p]];
elseif abs(f(i,p))<j(i)
    lin=lin+1;Szero=[Szero;[i,p]];
elseif l==1||l==-1
    sprintf('unsuitable initial point')
    return
elseif j(i)<=0
    sprintf('unsuitable initial point')
    return
end
end
end
eqA=[];eqb=[];eqAA=[];eqbb=[];m1=[0 0];m2=[0 0];t1=0;
dir=ones(1+(2+N)*n,1);rep=1;
sf=sum(f,1);oo=t-b*ones(m,1)-sf';
cost(rep)=oo'*oo;
results(1,:)=[b q' z j cost(1)];
while norm(dir,'fro')>e
Gdj=zeros(n,m);Gdz=zeros(n*N,m);Gdq=zeros(n,m);
Adj=zeros(n,m);Adz=zeros(n*N,m);Adq=zeros(n,m);
AAAdj=zeros(n,m);AAdz=zeros(n*N,m);AAdq=zeros(n,m);
B=zeros(n,m);BB=zeros(n,m);
rep=rep+1;
for i=1:n
    is=(i-1)*N+1;ifi=i*N;

```

```

for p=1:m
    if ismember([i,p],Splus,'rows')
        [Gdj(i,p) Gdz(is:ifi,p) Gdq(i,p) Adj(i,p) Adz(is:ifi,p) Adq(i,p)
B(i,p)]=case1(z(is:ifi)',X(:,p),q(i),j(i),N);
    elseif ismember([i,p],Sminus,'rows')
        [Gdj(i,p) Gdz(is:ifi,p) Gdq(i,p) Adj(i,p) Adz(is:ifi,p) Adq(i,p)
B(i,p)]=case2(z(is:ifi)',X(:,p),q(i),j(i),N);
    elseif ismember([i,p],Szero,'rows')
        [Gdj(i,p) Gdz(is:ifi,p) Gdq(i,p) Adj(i,p) Adz(is:ifi,p) Adq(i,p)
AAAdj(i,p) AAAdz(is:ifi,p) AAAdq(i,p) B(i,p)
BB(i,p)]=case3(z(is:ifi)',X(:,p),q(i),j(i),N);
    end
end
end
end
%Step 2
G=[ones(1,m);Gdj;Gdz;Gdq];o=[0;2*j';zeros(n*N+n,1)];
c=s*[b;j';z';q]-G*oo;
D=-[zeros(n,1),eye(n,n),zeros(n,N*n+n)];
dir=quadprog((G*G'+s*eye((2+N)*n+1)),c,D,j,[],[],[],[],options);
db=dir(1);dj=dir(2:1+n);dz=dir(2+n:1+n+n*N);dq=dir(2+n+n*N:1+(2+N)*n);
%Step 3
pos=[];eqA=[];m1=[0 0];m2=[0 0];pp=1;eqb=[];
while pp==1
    u=0;
    for i=1:n
        is=(i-1)*N+1;ifi=i*N;
        for p=1:m
            l(i,p)=Adj(i,p)*dj(i)+Adz(is:ifi,p)*dz(is:ifi)+Adq(i,p)*dq(i);
            % [l(i,p) B(i,p)]

```

```

    if ll(i,p)>B(i,p)&abs(B(i,p))<e&~ismember([i p],m1,'rows')
        u=1;
    eqA1=zeros((2+N)*n+1,1);eqA1(i+1,1)=Adj(i,p);
    eqA1(n+1+is:n+1+ifi,1)=Adz(is:ifi,p);eqA1(n+1+n*N+i,1)=Adq(i,p);
        eqA=[eqA;eqA1'];
        eqb=[eqb; B(i,p)];
        m1=[m1;[i p]];
    end
ll(i,p)=AAAdj(i,p)*dj(i)+AAdz(is:ifi,p)*dz(is:ifi)+AAAdq(i,p)*dq(i);
    if ll(i,p)>BB(i,p)&abs(BB(i,p))<e&~ismember([i,p],m2,'rows')
        u=1;
    eqAA1=zeros((2+N)*n+1,1);eqAA1(i+1,1)=AAAdj(i,p);
    eqAA1(n+1+is:n+1+ifi,1)=AAAdz(is:ifi,p);
    eqAA1(n+1+n*N+i,1)=AAAdq(i,p);
        eqA=[eqA;eqAA1'];
        eqb=[eqb; BB(i,p)];
        m2=[m2;[i p]];
    end
end
end
end
% eqA
    if u==1
dir=quadprog((G*G'+s*eye(n*(2+N)+1)),c,[D;eqA],[j';eqb],[[],[],[],[],[],options)
db=dir(1);dj=dir(2:1+n);dz=dir(2+n:1+n+n*N);dq=dir(2+n+n*N:1+(2+N)*n);
        else
            pp=0;
        end
    end
end
d=1;t2=1;t1=1;

```

```

for p=1:m
  for i=1:n
    if l(i,p)>0&~ismember([i p],m1,'rows')
      a1=B(i,p)/l(i,p);
      if ll(i,p)>0&~ismember([i p],m2,'rows')
        a2=BB(i,p)/ll(i,p);
        [d t2]=min([d,a1,a2]);
        if t2~=1
          t1=t2;
        end
      else
        [d t2]=min([d,a1]);
        if t2~=1
          t1=t2;
        end
      end
    else
      if ll(i,p)>0&~ismember([i p],m2,'rows')
        a2=BB(i,p)/ll(i,p);
        [d t2]=min([d,a2+1,a2]);
        if t2~=1
          t1=t2;
        end
      else
        t2=1;
      end
    end
  end
  if t2~=1
    pos=[i,p];
  end
end

```

```

        end
    end
end
% Step 4
if t1==2|t1==3
    ii=pos(:,1);pp=pos(:,2);
    if ismember([ii,pp],Splus,'rows')
        Szero=[Szero;[ii,pp]];Splus=setdiff(Splus,[ii,pp],'rows');
    elseif ismember([ii,pp],Sminus,'rows')
        Szero=[Szero;[ii,pp]];Sminus=setdiff(Sminus,[ii,pp],'rows');
    elseif ismember([ii,pp],Szero)&t1==2
        Splus=[Splus;[ii,pp]];Szero=setdiff(Szero,[ii,pp],'rows');
    elseif ismember([ii,pp],Szero,'rows')&t1==3
        Sminus=[Sminus;[ii,pp]];Szero=setdiff(Szero,[ii,pp],'rows');
    end
end
end
j=j+d*dj';b=b+d*db;z=z+d*dz';q=q+d*dq;
lin=0;
for i=1:n
    is=(i-1)*N+1;ifi=i*N;
    for p=1:m
        f(i,p)=fun(z(is:ifi)',X(:,p),q(i),j(i));
    end
end
end
sf=sum(f,1);oo=t-b*ones(m,1)-sf';
cost(rep)=oo*oo;
results(rep,:)= [b q' z j cost(rep)];
end
%
```

```

function [out,l]=fun(u,y,o,r);
ff=u*y+o;
if ff>r
    l=0;out=r;
elseif ff<-r
    l=0;out=-r;
elseif abs(ff)<r
    l=0;out=ff;
elseif ff==r
    out=r;l=1;
elseif ff==-r
    out=-r;l=-1;
end
function [gdj,gdz,gdq,adj,adz,adq,b]=case1(u,y,o,r,N);
gdj=1;gdz=zeros(N,1);gdq=0;adj=1;adz=-y;adq=-1;b=u*y+o-r;
function [gdj,gdz,gdq,adj,adz,adq,b]=case2(u,y,o,r,N);
gdj=-1;gdz=zeros(N,1);gdq=0;adj=1;adz=y;adq=1;b=-u*y-o-r;
function [gdj,gdz,gdq,adj,adz,adq,aadj,aadz,aadq,b,bb]=case3(u,y,o,r,N);
gdj=0;gdz=y;gdq=1;adj=-1;adz=y;adq=1;
b=-u*y-o+r;aadj=-1;aadz=-y;aadq=-1;bb=u*y+o+r;

```



ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ  
ΠΟΥ ΠΡΟΕΚΥΨΑΝ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

M. Barbarosou and N.G. Maratos, “A non-feasible gradient projection recurrent neural network for equality constrained optimization,” in *Proc. IEEE 2004 International Joint Conference on Neural Network (IJCNN 2004)*, pp.2251-2256, Budapest, 2004.

M. Barbarosou and N.G. Maratos, “A non-feasible gradient projection recurrent neural network for equality constrained optimization problems,” έχει γίνει δεκτό προς δημοσίευση στο περιοδικό *IEEE Trans. on Neural Network*, Dec. 2007.





