Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων
Και Μηχανικων Υπολογιστων

Τομεας Τεχνολογιας Πληροφορικης & Υπολογιστων

Αβεβαιότητα και Σημασιολογικός Ιστός: Εκφραστικές Ασαφείς Περιγραφικές Λογικές

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Χ. ΣΤΟΪΛΟΥ

Πτυχιούχου Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών Ε.Κ.Π.Α (2003)

Αθήνα, Φεβρουάριος 2008

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων & Μηχανικων Υπολογιστων
Τομεας Τεχνολογιας Πληροφορικης & Υπολογιστων

Αβεβαιότητα και Σημασιολογικός Ιστός: Εκφραστικές Ασαφείς Περιγραφικές Λογικές

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Χ. ΣΤΟΪΛΟΥ

Πτυχιούχου Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών Ε.Κ.Π.Α (2003)

Συμβουλευτική Επιτροπή: Στέφανος Κόλλιας
Ανδρέας Σταφυλοπάτης
Τιμολέων Σελλής

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 04η Φεβρουαρίου 2008.

...	...	...
Σ. Κόλλιας	Α. Σταφυλοπάτης	Τ. Σελλής
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.
...	...	...
Μ. Κουμπαράκης	Ι. Βασιλείου	Κ. Κοντογιάννης
Αν. Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
	...	
	Γ. Κολέτσος	
	Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	

Αθήνα, Φεβρουάριος 2008

. . .

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Χ. ΣΤΟΪΛΟΣ
Διδάκτωρ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ολοκληρώνοντας τη διδακτορική μου διατριβή και προσπαθώντας να κάνω έναν απολογισμό της πορείας μου αυτής δε θα μπορούσε να έρθει στο μυαλό μου τίποτα άλλο από το ταξίδι του Οδυσσέα στην Ιθάκη. Ένα ταξίδι γεμάτο από δυσκολίες και εμπόδια τα οποία πρέπει να υπερπηδήσεις για να μπορέσεις να φτάσεις στον τελικό σου στόχο. Για να το επιτύχεις όμως αυτό χρειάζεται να διαθέτεις τα αρχικά εφόδια αλλά και να συναντήσεις ανθρώπους οι οποίοι θα σε βοηθήσουν να περάσεις πολλά από τα εμπόδια αυτά δείχνοντάς σου τον τρόπο ή δίνοντάς σου ιδέες για να καταστρώσεις το δικό σου σχέδιο.

Πάνω από όλα όμως μετράει το ταξίδι, οι εμπειρίες που αποκτάς και τα "τεχνάσματα" που μαθαίνεις στην πορεία προκειμένου να φτάσεις στον τελικό σου στόχο. Δε θα είχα λοιπόν αποκτήσει καμία από αυτές τις νέες εμπειρίες και εφόδια αν δε υπήρχε ο κόσμος πάνω στον οποίο να πραγματοποιηθεί το ταξίδι αυτό και αν δεν είχε θέσει κάποιος ως αρχικό στόχο τη συγκεκριμένη Ιθάκη. Για το λόγω αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντά μου Λέκτορα ΕΜΠ Γιώργο Στάμου ο οποίος έθεσε το θέμα της διατριβής μου, προσέφερε αστείρευτη έμπνευση και ήταν πάντα πρόθυμος να μου δείξει με ποιο τρόπο θα μπορέσω να υπερπηδήσω τα εμπόδια που ορθωνόντουσαν. Επιπρόσθετα, ευχαριστώ ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου Στέφανο Κόλλια διότι μου προσέφερε τον κόσμο πάνω στον οποίο μπόρεσα να κάνω ένα τόσο όμορφο ταξίδι βοηθώντας με σε κάθε μου ανάγκη.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους αυτούς με τους οποίους συνεργάστηκα στο πλαίσιο της εργασίας μου και συνέβαλαν στην έμπνευση, τον προβληματισμό και τη μελέτη πτυχών που δεν είχα θεωρήσει προηγουμένως. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω των Jeff Z. Pan για τη γόνιμη συνεργασία μας αλλά και τους Νίκο Σίμου, Θεόφιλο Μαΐλη, Τάσο Βενέτη, Βασίλη Τζουβάρα και Umberto Straccia.

Οφείλω, επιπρόσθετα, να ευχαριστήσω θερμά τη φίλη μου Θεοδώρα Καρακώστα για την αμέριστη συμπαράσταση, εμψύχωση και ενθάρρυνση που μου έδειχνε όταν απογοητευόμουν, αλλά και να εξυμνήσω την υπομονή που επέδειξε καθ' όλη τη διάρκεια της διατριβής μου.

Τέλος, δε θα μπορούσα παρά να αφιερώσω την εργασία μου αυτή στην οικογένειά μου, η οποία όλα αυτά τα χρόνια μου έδωσε τα αρχικά, και όχι μόνο, εφόδια, την παιδεία και διαμόρφωσε το χαρακτήρα μου με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορέσω να αντεπεξέλθω μόνος μου σε πολλές δυσκολίες και να διεκπεραιώσω μια τέτοια εργασία σε έναν ικανοποιητικό βαθμό.

Στοΐλος Γεώργιος
Αθήνα, Φεβρουάριος 2008

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη σημερινή εποχή αρκετές εφαρμογές της επιστήμης των υπολογιστών έχουν αρχίσει να χρησιμοποιούν κάποιο είδος γλωσσών αναπαράστασης γνώσης και μηχανισμών συλλογιστικής με σκοπό τη βελτίωση της αποδοτικότητάς τους και την προσομοίωση της ευφυούς συμπεριφοράς των νοημόνων όντων. Ένα πολύ ενδιαφέρον και σημαντικό παράδειγμα τέτοιας εφαρμογής είναι ο Παγκόσμιος Ιστός, όπου αποσκοπείτε η διαλειτουργικότητα (interoperability) ανάμεσα σε ετερογενή συστήματα, ο διαμοιρασμός γνώσης (knowledge interchange), αυτοματοποίηση των εφαρμογών και η ευφυής πλοήγηση και αναζήτηση σε αυτόν, δημιουργώντας ένα Σημασιολογικό Ιστό. Μέχρι στιγμής η γλώσσα αναπαράστασης γνώσης που έχει προταθεί για τον Σημασιολογικό Ιστό είναι η OWL η οποία βασίζεται σε πολύ εκφραστικές Περιγραφικές Λογικές (ΠΛ). Παρόλο που οι ΠΛ είναι αρκετά εκφραστικές εμφανίζουν ελλείψεις και πιο συγκεκριμένα δεν έχουν τη δυνατότητα να αναπαραστήσουν και να διαχειριστούν αβέβαιη και ασαφή γνώση και πληροφορία η οποία εμφανίζεται σε πολλές εφαρμογές.

Στόχος της διατριβής αυτής είναι να ασχοληθούμε με ασαφείς επεκτάσεις των γλωσσών που έχουν προταθεί για την αναπαράσταση γνώσης στο Σημασιολογικό Ιστό. Πιο συγκεκριμένα αποσκοπούμε να αναπτύξουμε πρωτότυπους αλγορίθμους για την εξαγωγή συμπερασμάτων σε πολύ εκφραστικές ΠΛ όπως είναι οι γλώσσες, $\mathcal{SI}$ και $\mathcal{SHOIN}$ οι οποίες αποτελούν το θεωρητικό υπόβαθρο της γλώσσας OWL καθώς και να μελετήσουμε μια ασαφή επέκταση της OWL. Για την επίτευξη των στόχων μας μελετάμε τη σημασιολογία των πολύ εκφραστικών κατασκευαστών των ΠΛ, στην περίπτωση που εισάγεται ασάφεια, τους αλγορίθμους συλλογιστικής που έχουν προταθεί για πολύ εκφραστικές κλασσικές ΠΛ αλλά και τους αλγορίθμους που έχουν προταθεί για ασθενείς ασαφείς ΠΛ, όπως είναι η γλώσσα f-$\mathcal{ALC}$.

Από τη μελέτη αυτή προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα. Αρχικά καταφέραμε να αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο συλλογιστικής για τις πολύ εκφραστικές ασαφείς ΠΛ f-$\mathcal{SI}$ και f-$\mathcal{SHOIN}$ επεκτείνοντας έτσι σημαντικά τον αλγόριθμο που είχε προταθεί για την f-$\mathcal{ALC}$. Στη συνέχεια προτείναμε έναν αλγόριθμο ο οποίος λύνει το πρόβλημα συλλογιστικής σε ασαφείς ΠΛ που επιτρέπουν γενικευμένα και κυκλικά αξιώματα. Ακολούθως, παρουσιάζουμε μια ασαφή επέκταση της γλώσσας OWL, δημιουργώντας την f-OWL, και δείχνουμε πώς το πρόβλημα συλλογιστικής για αυτή μπορεί να αναχθεί σε προβλήματα συλλογιστικής της γλώσσας f-$\mathcal{SHOIN}$. Προχωρώντας, επεκτείνουμε τους αλγορίθμους συλλογιστικής που έχουμε προτείνει παρουσιάζοντας αλγορίθμους για τις πιο εκφραστικές γλώσσες f-$\mathcal{SHOIQ}$ και f-$\mathcal{SHO}_f\mathcal{IQ}$. Ολοκληρώνοντας, τη διατριβής μας ασχολούμαστε με το επερχόμενο πρότυπο OWL1.1 το οποίο θα επεκτείνει τη γλώσσα OWL. Παρουσιάζουμε μια ασαφή επέκταση της γλώσσας OWL1.1 καθώς και της ΠΛ στην οποία βασίζεται, της f-$\mathcal{SROIQ}$, και παρουσιάζουμε ένα σύνολο εκφραστικών ασαφών συζευγμένων επερωτήσεων για τη γλώσσα f-DL-Lite η οποία έχει προταθεί στη βιβλιογραφία και αποτελεί μέρος του νέου προτύπου OWL2.

ABSTRACT

Nowadays, many applications and domains use some form of knowledge representation language together with inference mechanisms in order to improve their capabilities and simulate intelligent human behavior. Perhaps, the most important and interesting example of such applications is the World Wide Web where we aim for interoperability between heterogeneous systems, knowledge interchange, automation of applications and intelligent search and browsing of its content, creating a *Semantic* Web. Until now the knowledge representation language that has been proposed for the Web is OWL which is mainly based on very expressive Description Logics (DLs) for the creation of ontologies. Although DLs are quite expressive they also have limitation especially with what can be said about uncertain and imprecise (fuzzy) knowledge, which is apparent in many applications of the Semantic Web and to a wealth of applications that have adopted the OWL standard.

In this thesis we aim at investigating on fuzzy extensions of languages that have been proposed for representing knowledge in the Semantic Web. More precisely we aim at proposing novel reasoning algorithms for very expressive fuzzy DL like the languages f-$\mathcal{SI}$ and f-$\mathcal{SHOIN}$, which form the logical foundations of OWL, as well as proposing and studying a fuzzy extension of the OWL language. To succeed our goals we investigate the semantics of expressive constructors and axioms like transitive and inverse roles, role hierarchies and number restrictions in the context of fuzzy DLs, the reasoning algorithm for expressive (classical) DLs as well as the reasoning algorithms that have been proposed for less expressive fuzzy DLs, like the language f-$\mathcal{ALC}$.

From our investigations the following results have been achieved. Firstly, we develop a reasoning algorithm for the very expressive fuzzy Description Logics, f-$\mathcal{SI}$ and f-$\mathcal{SHOIN}$, significantly extending the algorithm that has been proposed in the literature for the language f-$\mathcal{ALC}$. Subsequently, we develop and propose an algorithm which solves the problem of reasoning with fuzzy DLs that allow for general and cyclic concept axioms. Then, we present a fuzzy extension of the OWL language, creating f-OWL, and we show how reasoning over f-OWL can be reduced to reasoning over f-$\mathcal{SHOIN}$, for which a reasoning algorithm has been proposed. Moving forward, we extend the reasoning algorithms that we have proposed presenting algorithms for the more expressive languages f-$\mathcal{SHOIQ}$ και f-$\mathcal{SHO}_f\mathcal{IQ}$. Concluding our dissertation, we work with the forthcoming standard of OWL1.1 which will extend the language OWL. We present a fuzzy extension of OWL1.1 as well as the of the language f-$\mathcal{SROIQ}$, and finally we design a set of very expressive fuzzy conjunctive queries for the language f-DL-Lite, which has been proposed in the literature and consists of a fuzzy extension of the DL-Lite language, which in turn is part of the OWL1.1 proposal.

Κατάλογος Συντμήσεων

ΠΠΠ	:	Προσοντούχοι Περιορισμοί Πληθυκότητας
ΠΛ	:	Περιγραφικές Λογικές
ΠΑΥΡ	:	Πολύπλοκα Αξιώματα Υπαγωγής Ρόλων
ΚΜΘΑ	:	Κανονική Μορφή Θετικής Ανισότητας
ΚΜΑ	:	Κανονική Μορφή Άρνησης
$\mathcal{FL}_0$	:	Η ΠΛ γλώσσα που προσφέρει τους κατασκευαστές: $\top \mid \bot \mid A \mid C \sqcap D \mid \forall R.C$
$\mathcal{ALC}$	:	$\mathcal{A}$ttributive $\mathcal{L}$anguage with $\mathcal{C}$omplement: $\top \mid \bot \mid A \mid \neg C \mid \exists R.C \mid \forall R.C$
$\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$	:	$\mathcal{ALC}$ με στέρεους χώρους $(\mathcal{D})$
$\mathcal{S}$	:	$\mathcal{ALC}$ με αξιώματα μεταβατικών ρόλων $(\mathcal{ALC}_{R^+})$: $\mathsf{Trans}(R)$
$\mathcal{SI}$	:	$\mathcal{S}$ με αντίστροφους ρόλους $\mathcal{I}$: $\mathsf{Inv}(R)$ ή R^-
$\mathcal{SHI}$	:	$\mathcal{SI}$ με αξιώματα υπαγωγής ρόλων $\mathcal{H}$: $R \sqsubseteq S$
$\mathcal{SHI}f$	:	$\mathcal{SHI}$ με συναρτησιακούς ρόλους (f): $\mathsf{Func}(R)$ $(R^{\mathcal{I}}(a,b) \wedge R^{\mathcal{I}}(a,c) \rightarrow b = c)$
$\mathcal{SHIF}$	:	$\mathcal{SHI}$ με συναρτησιακούς περιορισμούς πληθυκότητας $(\mathcal{F})$: $\leq 1R, \geq 2R$
$\mathcal{SHIN}$	:	$\mathcal{SHI}$ με περιορισμούς πληθυκότητας $(\mathcal{N})$: $\leq nR, \geq nR$
$\mathcal{SHIQ}$	:	$\mathcal{SHI}$ με προσοντούχους περιορισμούς πληθυκότητας $(\mathcal{Q})$: $\leq nR.C, \geq nR.C$
$\mathcal{SHOIN}$	:	$\mathcal{SHIN}$ με ονοματικές έννοιες $(\mathcal{O})$: $\{o\}$
$\mathcal{SHOIQ}$	:	$\mathcal{SHIQ}$ με ονοματικές έννοιες $(\mathcal{O})$: $\{o\}$
$\mathcal{RIQ}$	:	$\mathcal{SHIQ}$ με πολύπλοκα αξιώματα υπαγωγής ρόλων $(\mathcal{R})$: $R_1 \dots R_n \sqsubseteq S$
$\mathcal{SRIQ}$	:	$\mathcal{RIQ}$ με αξιώματα ανακλαστικών ($\mathsf{Ref}(R)$), μη-ανακλαστικών ($\mathsf{Irr}(R)$), συμμετρικών ($\mathsf{Sym}(R)$), αντι-συμμετρικών ($\mathsf{ASym}(R)$), ξένων ($\mathsf{Dis}(R,S)$) ρόλων, απλής άρνησης ρόλων $(a,b) : \neg R$ και αυτοπαθών ενοιών $\exists R.\mathsf{Self}$.
$\mathcal{SROIQ}$	:	$\mathcal{SRIQ}$ με ονοματικές έννοιες $(\mathcal{O})$
$\mathcal{EL}$	:	Η ΠΛ γλώσσα που προσφέρει έννοιες της μορφής: $\top \mid A \mid C \sqcap D \mid \exists R.C$
$\mathcal{EL}{+}{+}$	:	$\mathcal{EL}$ με ονοματικές έννοιες $(\mathcal{O})$, ΠΑΥΡ $(\mathcal{R})$, $\bot$ και στέρεους χώρους $(\mathcal{D})$
f-ΠΛ	:	Μια ασαφής Περιγραφική Λογική
f$_{KD}$-ΠΛ	:	Η οικογένεια των ασαφών ΠΛ γλωσσών που χρησιμοποιούν την ασαφή συνεπαγωγής του Kleene-Dienes την τομή και την ένωση του Gödel και την άρνηση του Lukasiewicz
f$_{L}$-ΠΛ	:	Η οικογένεια των ασαφών ΠΛ γλωσσών που χρησιμοποιούν τους ασαφείς τελεστές της λογικής του Lukasiewicz
f$_{P}$-ΠΛ	:	Η οικογένεια των ασαφών ΠΛ γλωσσών που χρησιμοποιούν τους ασαφείς τελεστές της λογικής του γινομένου
OWL	:	Web Ontology Language
DL	:	Description Logics
f-DL	:	fuzzy-DL
W3C	:	World Wide Web Consortium
PINF	:	Positive Inequality Normal Form
NNF	:	Negation Normal Form
GCIs	:	General Concept Inclusions
QCRs	:	Qualified Cardinality Restrictions
RIAs	:	Role Inclusion Axioms
TBox	:	Terminological Box
ABox	:	Assertional Box
RBox	:	Role Box

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ένα από τα προβλήματα με το οποίο ασχολείται η Επιστήμη των Υπολογιστών και ιδιαίτερα ο τομέας της Τεχνητή Νοημοσύνης είναι το πώς μπορεί να αναπαρασταθεί η ανθρώπινη γνώση σε ένα Υπολογιστικό Σύστημα ή αλγόριθμο. Η γνώση αυτή, αφού εισαχθεί στο σύστημα ή τον αλγόριθμο από τον άνθρωπο, θα μπορεί να αξιοποιηθεί για την εξαγωγή ευφυών αποτελεσμάτων και τη διενέργεια σύνθετων και πολύπλοκων ενεργειών οι οποίες θα πλησιάζουν σε ποιότητα αυτά της ανθρώπινης συλλογιστικής και σκέψης. Στην πραγματικότητα το πρόβλημα αυτό απασχόλησε πρώτους του μαθηματικούς, καθώς από την εποχή του Αριστοτέλη προσπαθούν να βρουν έναν *τυπικό* (*formal*) (μαθηματικό) τρόπο για να καταγράφουν την ανθρώπινη γνώση. Με τον όρο τυπικό εννοούμε ότι η μέθοδος που χρησιμοποιείται περιλαμβάνει μαθηματικά ορισμένη *σύνταξη* (*syntax*) και *σημασιολογία* (*semantics*) το οποίο έχει ως αποτέλεσμα τα δομικά της στοιχεία, και κατά συνέπεια η γνώση που περιγράφεται με τη χρήση της, να έχει μονοσήμαντη και πλήρως καθορισμένη ερμηνεία (σημασία). Οι εργασίες στο χώρο των μαθηματικών αλλά και της φιλοσοφίας ανά τους αιώνες οδήγησαν στην ανάπτυξη αυτών που στις μέρες μας αποκαλούμε ως *γλώσσες αναπαράστασης γνώσης* (*knowledge representation languages*) [20].

Στη σημερινή εποχή αρκετά Υπολογιστικά Συστήματα αλλά και εφαρμογές έχουν αρχίσει να χρησιμοποιούν κάποιο είδος γλωσσών αναπαράστασης γνώσης με σκοπό να βελτιώσουν τις δυνατότητες και τα αποτελέσματά τους. Παραδείγματα τέτοιων εφαρμογών είναι η ανάκτηση δεδομένων (information retrieval), όπου γνώση χρησιμοποιείται για τη βελτίωση της ανάκλησης (recall) και της ακρίβειας (precision) [42], η επεξεργασία και ανάλυση πολυμεσικών κειμένων [1, 12] στην οποία η γνώση χρησιμοποιείται με σκοπό να αμβλυνθεί το "κενό" (*gap*) ανάμεσα στην ανθρώπινη αντίληψη του περιεχομένου μιας εικόνας ή ενός βίντεο και την αντίληψη ενός υπολογιστή ο οποίος αντιλαμβάνεται μόνο αριθμητικές τιμές εικονοστοιχείων (pixels), οι βάσεις δεδομένων [28] όπου γνώση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ευφυή συνένωση (merging) των σχημάτων (schemas) δυο διαφορετικών βάσεων δεδομένων, οι οποίες όμως απευθύνονται στο ίδιο αντικείμενο, ή για την αναζήτηση του περιεχομένου της. Ίσως όμως το πιο δημοφιλές παράδειγμα χρήσης γλωσσών αναπαράστασης γνώσης τα τελευταία χρόνια είναι ο Παγκόσμιος Ιστός (World-Wide Web) [13, 8], όπου γνώση χρησιμοποιείται για τη βελτίωση των δυνατοτήτων των πρακτόρων (agents) και τη διαλειτουργικότητα (interoperability) ανάμεσα σε ετερογενή συστήματα. Από το συνδυασμό αυτό προκύπτει αυτό που έχει οριστεί ως *Σημασιολογικός Ιστός* (*Semantic Web*) [13].

Για να μπορέσουμε να επιτύχουμε υψηλά επίπεδα διαλειτουργικότητας και επαναχρησιμοποίησης γνώσης, οι σύγχρονες εφαρμογές χρησιμοποιούν την έννοια της *οντολογίας* (*ontology*) [13] για να αποθηκεύσουν και να αναπαραστήσουν τη γνώση [50]. Ο όρος οντολογία προέρχεται από τη φιλοσοφία και σημαίνει μια θεωρία για το ον (την ύπαρξη). Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι μια οντολογία είναι όλες εκείνες οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά τα οποία καθορίζουν αυστηρά μια οντότητα. Οι ορισμοί αυτοί δεν μπορούν να καταγραφούν με τίποτα άλλο παρά μόνο μια γλώσσα αναπαράστασης γνώσης, η οποία και θα προσφέρει τα απαραίτητα επίπεδα τυπικότητας αλλά και τη δυνατότητα διενέργειας εργασιών (*reasoning*) στην εκάστοτε εφαρμογή. Για το λόγω αυτό ο οργανισμός προτυποποίησης του Παγκοσμίου Ιστού έχει προτυποποιήσει μια γλώσσα οντολογιών για το Σημασιολογικό Ιστό. Η γλώσσα αυτή είναι η OWL (Web Ontology Language) [11, 108]. Το λογικό υπόβαθρο της OWL βασίζεται στις γλώσσες αναπαράστασης γνώσης των *Περιγραφικών Λογικών* (*Description Logics*) και πιο συγκεκριμένα σε πολύ εκφραστικές Περιγραφικές Λογικές [66]. Οι Περιγραφικές Λογικές (ΠΛ) [6] αποτελούν μια οικογένεια γλωσσών οι οποίες είναι επικεντρωμένες στις *έννοιες* (μοναδιαία κατηγορήματα) και τους *ρόλους* (δυαδικά κατηγορήματα), σε αντίθεση με άλλες λογικές, όπως η Λογική-Πρώτης Τάξης (First-Order Logic) [94] (για μια σύντομη και κατανοητή εισαγωγή ο αναγνώστης παραπέμπεται και στο [147]) και ο Λογικός Προγραμματισμός (Logic Programming) [89, 82] οι οποίες χρησιμοποιούν γενικευμένα *κατηγορήματα* (*predicates*) ν-οστού βαθμού. Αυτό το οποίο είναι αρκετά ενδιαφέρον για τις ΠΛ, και είναι μάλιστα και ο λόγος για τον οποίο έχουν γίνει αρκετά δημοφιλείς, είναι ότι αποτελούν ένα *εκφραστικό* (*expressive*) και ταυτόχρονα *αποφασίσιμο* (*decidable*) υποσύνολο της Λογικής-Πρώτης Τάξης [19], αλλά και το γεγονός ότι είναι εύχρηστες λόγω της ομοιότητάς τους με το αντικειμενοστραφές μοντέλο χωρίς να απαιτούν εξειδικευμένες γνώσεις αναπαράστασης γνώσης και μαθηματικής λογικής. Επιπρόσθετα, όπως έχει φανεί από την πράξη, τα υλοποιημένα συστήματα συλλογιστικής σε ΠΛ συμπεριφέρονται πολύ καλά σε πρακτικές εφαρμογές και είναι σε θέση να διαχειριστούν μεγάλο όγκο πληροφορίας και γνώσης [41, 123, 51]. Έτσι λοιπόν, εκτός από το Σημασιολογικό Ιστό, έχουν εφαρμοστεί και σε άλλες εφαρμογές, όπως είναι η επεξεργασία πολυμεσικών κειμένων [93, 10], η ανάλυση εικόνων [103, 96], οι ιατρικές εφαρμογές [112], οι βάσεις δεδομένων [28] και πολλές άλλες.

1.1 Περιγραφικές Λογικές και Επεξεργασία Πολυμέσων

Τα τελευταία χρόνια έχει παρατηρηθεί μια μεγάλη προσπάθεια εισαγωγής πολυμεσικής πληροφορίας στο Σημασιολογικό Ιστό η οποία έχει ως σκοπό να καταστεί δυνατό οι πολυμεσικές εφαρμογές να αξιοποιήσουν όλα τα πλεονεκτήματα και οφέλη που υπόσχεται η νέα αυτή τεχνολογία. Πιο συγκεκριμένα, είναι απολύτως επιθυμητό πληροφορία όπως εικόνες και βίντεο να καταστούν σημασιολογικά προσβάσιμες μέσω του Παγκοσμίου Ιστού. Όπως γίνεται όμως αντιληπτό το εγχείρημα αυτό είναι ιδιαίτερα δύσκολο καθώς οι εικόνες και το βίντεο περιέχουν πληροφορία περιεχομένου η οποία πρέπει να είναι δυνατόν να αναζητηθεί. Για παράδειγμα μια εικόνα από ένα τοπίο μπορεί να περιέχει ως περιεχόμενο, βουνά, σπίτια, ένα ποτάμι, χιόνια και άλλα ή ένας πίνακας ζωγραφικής μπορεί να περιέχει πρόσωπα, πράγματα και άλλα. Έτσι λοιπόν χρειάζεται αρχικά να *χαρακτηρίσουμε* (annotate) το περιεχόμενο των πολυμεσικών κειμένων. Το εγχείρημα αυτό είναι εξαιρετικά δύσκολο να πραγματοποιηθεί χειρονακτικά, έτσι λοιπόν, συνήθως, εργαζόμαστε με (ημι)αυτόματους τρόπους. Αρχικά εφαρμόζουμε αλγορίθμους κατάτμησης (segmentation) πάνω σε μια εικόνα ή βίντεο. Οι αλγόριθμοι αυτοί βασίζονται πάνω σε κριτήρια χρώματος, υφής ή σχήματος μια εικόνας, με απώτερο στόχο την ομαδοποίηση των εικονοστοιχείων της και τη δημιουργία τμημάτων (segments) τα οποία αναπαριστούν μια περιοχή ή αντικείμενο μιας εικόνας [115]. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε ένα σύστημα αναγνώρισης (recognition) το οποίο θα μπορέσει να αποφασίσει για το τι αντιπροσωπεύει το κάθε τμήμα της εικόνας το οποίο έχει προκύψει από το σύστημα κατάτμησης [2]. Για παράδειγμα, να αποφασίσει αν κάποιο τμήμα αποτελεί ένα τραπέζι, μια μπάλα, έναν άνθρωπο ή ένα αυτοκίνητο. Όπως όμως είναι προφανές κάτι τέτοιο είναι ιδιαίτερα δύσκολο διότι ο υπολογιστής δε διαθέτει την απαραίτητη γνώση για να αποφασίσει για το αν ένα συγκεκριμένο τμήμα μιας εικόνας ανήκει ή όχι σε μια έννοια του κόσμου μας. Για να βοηθηθεί η διαδικασία της αναγνώρισης έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία μέθοδοι οι οποίοι χρησιμοποιούν συστήματα αναπαράστασης γνώσης. Ουσιαστικά αυτό το οποίο επιχειρούμε είναι η εισαγωγή γνώσης στους αλγορίθμους αναγνώρισης.

Η ιδέα αυτή δεν είναι καινούργια. Πρώτοι οι Meghini et. al. [92, 93] παρουσιάζουν ένα μοντέλο το οποίο χρησιμοποιεί τις Περιγραφικές Λογικές με σκοπό την αναπαράσταση και αναζήτηση του περιεχομένου της πολυμεσικής πληροφορίας. Η μέθοδος τους επικεντρώνεται στην αναζήτηση ενώ ο χαρακτηρισμός της πολυμεσικής πληροφορίας γίνεται χειρονακτικά. Παρόμοια προσέγγιση για την ανάκτηση εικόνων με βάση το σχήμα των αντικειμένων γίνεται και από τους Sciascio et. al. [122]. Προσεγγίσεις για τη χρήση γλωσσών αναπαράστασης γνώσης με σκοπό την αναγνώριση ή ερμηνεία (interpretation) μιας σκηνής γίνεται από τους Moeller et. al. στα [96] και [103]. Στις προσεγγίσεις αυτές οι συγγραφείς χρησιμοποιούν τις Περιγραφικές Λογικές για την αναγνώριση και ερμηνεία αεροφωτογραφιών. Για το σκοπό αυτό αναπτύσσουν μια γνώση η οποία συλλαμβάνει χωρικές σχέσεις, όπως για παράδειγμα ότι μια πόλη δε μπορεί να βρίσκεται μέσα σε μια λίμνη, και άλλες.

Θα μπορούσαμε λοιπόν για ένα σύνολο εικόνων που επιθυμούμε να χαρακτηρίσουμε να χρησιμοποιήσουμε τις Περιγραφικές Λογικές για να δημιουργήσουμε ορισμούς για τα πιθανά αντικείμενα και τις οντότητες που μπορεί να εμφανίζονται μέσα σε αυτές. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να δώσουμε τους παρακάτω ορισμούς:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Arm} \sqsubseteq \exists \mathsf{isDirectPartOf}.\mathsf{Body}\\
&\mathsf{Body} \sqsubseteq \exists \mathsf{isPartOf}.\mathsf{Human}\\
&\mathsf{Body} \sqcap \exists \mathsf{hasPart}.\mathsf{Tail} \sqsubseteq \mathsf{Animal}
\end{aligned}$$

όπου $\sqsubseteq$ είναι μια σχέση υπαγωγής, isDirectPartOf και hasPart είναι ρόλοι (δυαδικές σχέσεις) και $\exists$ ο υπαρξιακός ποσοδείκτης (για τη σημασιολογία των κατασκευαστών, των εννοιών και των ρόλων δείτε την υπο-ενότητα 2.1). Η Περιγραφική Λογική που χρειαζόμαστε για να περιγράψουμε τα παραπάνω αξιώματα είναι η $\mathcal{ALC}$ [121].

Δυστυχώς, όμως η γλώσσα $\mathcal{ALC}$ έχει σχετικά μικρή εκφραστική δυνατότητα. Έτσι λοιπόν δεν είμαστε σε θέση να δηλώσουμε ότι ο ρόλος isDirectPartOf είναι *υπο-ρόλος* (*sub-role*) του πιο γενικού ρόλου isPartOf, *αντίστροφος* (*inverse*) του ρόλου hasDirectPart, αλλά και *συναρτησιακός* (*functional*) (δε μπορεί δηλαδή να συνδέει ένα άτομο με δυο άλλα, διαφορετικά άτομα). Τέλος δεν μπορούμε να δηλώσουμε ότι ο ρόλος isPartOf είναι *μεταβατικός* (*transitive*) και αντίστροφος του hasPart. Οι δηλώσεις αυτές είναι πολύ σημαντικές καθώς μπορούμε χρησιμοποιώντας τους αλγορίθμους συλλογιστικής των ΠΛ [7, 67, 70] να καταλήξουμε σε ενδιαφέροντα συμπέρασμα, όπως για παράδειγμα ότι η έννοια $\mathsf{Arm} \sqcap \mathsf{Tail}$ είναι υπό-έννοια της έννοιας

$\exists$isPartOf.Animal το οποίο δηλώνει ότι αν κάποιο αντικείμενο έχει χέρι και ουρά τότε είναι μέρος ενός ζώου. Για το σκοπό αυτό έχουν αναπτυχθεί και μελετηθεί περισσότερο εκφραστικές ΠΛ γλώσσες όπως είναι η γλώσσα $\mathcal{SHOIN}$ [70] (δηλαδή η OWL) η οποία χρειάζεται προκειμένου να αναπαραστήσουμε την παραπάνω γνώση. Ακόμα όμως και η $\mathcal{SHOIN}$, όπως παρατηρείται στο [46] παρουσιάζει πολλές φορές αδυναμίες για το λόγω αυτό έχουν δημιουργηθεί επεκτάσεις τις όπως είναι η $\mathcal{SHOIQ}$ [68] και η $\mathcal{SROIQ}$ [71]. Με τις γλώσσες αυτές μπορούμε να περιγράψουμε γνώση όπως η ακόλουθη:

$$\begin{aligned}&\mathsf{Human} \sqsubseteq = 2\mathsf{hasPart.Arm} \sqcap = 2\mathsf{hasPart.Leg}\\&\mathsf{hasSegment} \circ \mathsf{hasPart} \sqsubseteq \mathsf{hasSegment}\end{aligned}$$

η οποία μας λέει ότι ένας άνθρωπος αποτελείται από ακριβώς δυο χέρια και πόδια, ή ότι η σύνθεση των σχέσεων hasSegment hasPart δίνουν τη σχέση hasSegment.

1.2 Ατελής Πληροφορία

Αυτό που έχει μεγάλο ενδιαφέρον με τις προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν τις ΠΛ για το πρόβλημα της επεξεργασίας πολυμεσικών κειμένων είναι ότι στη συντριπτική τους πλειοψηφία οι συγγραφείς αναγνωρίζουν την ανάγκη για επέκταση των γλωσσών αυτών έτσι ώστε να μπορέσουν να εφαρμοστούν σε εφαρμογές πολυμέσων. Πιο συγκεκριμένα ο Moeller προτείνει την επέκταση των ΠΛ με χωρικές σχέσεις έτσι ώστε να μπορέσει να αναπαραστήσει τέτοιες σχέσεις σε μια εικόνα. Ο Sciascio προτείνει κάποιες πολύ ειδικές επεκτάσεις των ΠΛ με στόχο να μπορέσει να αναπαραστήσει πληροφορία μορφής (shape) όπως είναι το περίγραμμα (contour) ενός τμήματος μιας εικόνας, και άλλα. Τέλος, από τις πιο σημαντικές επεκτάσεις που προτείνονται είναι αυτές που γίνονται από τους Meghini et. al. Οι συγγραφείς αναγνωρίζουν ότι η επεξεργασία πολυμεσικών κειμένων είναι μια διαδικασία η οποία περιέχει εγγενή αβέβαιη (uncertain) και ασαφή (fuzzy) πληροφορία. Πιο συγκεκριμένα ένας αλγόριθμος αναγνώρισης δε θα μπορέσει ποτέ να αποφασίσει με απόλυτη βεβαιότητα για το αν ένα αντικείμενο (τμήμα) ανήκει στο σύνολο των κίτρινων ή κόκκινων ή στρογγυλών αντικειμένων. Αυτό συμβαίνει γιατί είναι πρακτικά αδύνατο να περιμένουμε το τμήμα που αντιπροσωπεύει μια μπάλα σε μια εικόνα να έχει απολύτως στρογγυλό σχήμα. Αυτό το οποίο πρόκειται να συμβεί είναι το τμήμα αυτό να είναι στρογγυλό σε κάποιο βαθμό, δηλαδή να έχει μεγάλη *κυκλικότητά* (*circularity*) [76]. Έτσι λοιπόν προτείνουν την επέκταση της Περιγραφικής Λογικής $\mathcal{ALC}$ [121] με ασαφή σύνολα, δημιουργώντας έτσι την ασαφή Περιγραφική Λογική, fuzzy-$\mathcal{ALC}$ [138]. Η *ασαφής συνολοθεωρία* (*fuzzy set theory*) [151, 81] και η *ασαφής λογική* (*fuzzy logic*) [53] είναι δυο δημοφιλείς μαθηματικές θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί για τη διαχείριση και επεξεργασία ασαφούς και ανακριβούς γνώσης και πληροφορίας. Αντίθετα από την κλασσική συνολοθεωρία στην οποία ένα αντικείμενο είτε ανήκει είτε δεν ανήκει σε ένα σύνολο, στην ασαφή συνολοθεωρία ένα αντικείμενο μπορεί να ανήκει σε ένα ασαφές σύνολο σε οποιοδήποτε βαθμό ανάμεσα στις τιμές 0 και 1.

Αξίζει στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι η ασάφεια είναι ένα από τα πάρα πολλά είδη ατελούς πληροφορίας (imperfect information) τα οποία μπορούν να εμφανιστούν σε μια εφαρμογή. Πιο συγκεκριμένα θα μπορούσαμε να διακρίνουμε τα παρακάτω ήδη ατελούς πληροφορίας ή γνώσης:

- Λανθασμένη/Εσφαλμένη (Error/Erroneous)

- Ασυνεπής (Inconsistent)
- Αβέβαιη (Uncertain)
- Ανακριβής (Imprecise)
- Ασαφής (Fuzzy)

Πολλά από τα παραπάνω είδη έχουν μελετηθεί αρκετά στη βιβλιογραφία και έχουν αναπτυχθεί αρκετές μαθηματικές θεωρίες για τη διαχείρισή τους, όπως για παράδειγμα το paraconsistent reasoning, για την ασυνεπή πληροφορία, η θεωρία πιθανοτήτων (probabilistic theory) για την αβέβαιη πληροφορία που προκύπτει από πιθανοκρατικά και τυχαία ενδεχόμενα, η θεωρία δυνατοτήτων (possibilistic theory) για αβέβαιη πληροφορία που προκύπτει από ελλιπή στοιχεία, η ασαφής συνολοθεωρία (fuzzy set theory) για την ασαφή και ανακριβή πληροφορία. Στην παρούσα διατριβή θα ασχοληθούμε περισσότερο με την ασαφή συνολοθεωρία και πιο συγκεκριμένα στη χρήση της για την επέκταση πολύ εκφραστικών Περιγραφικών Λογικών. Για περισσότερες πληροφορίες για τις υπόλοιπες θεωρίες, τις ιδιότητές τους και τις συσχετίσεις τους ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [81, 38, 37, 80].

1.3 Ασαφείς Περιγραφικές Λογικές

Για να μπορέσει μια γλώσσα αναπαράστασης γνώσης, όπως είναι οι Περιγραφικές Λογικές, να αναπαραστήσουν ανακριβή και ασαφή πληροφορία και γνώση χρειάζεται αυτές να επεκταθούν χρησιμοποιώντας τη θεωρία των ασαφών συνόλων, δημιουργώντας τις *ασαφείς Περιγραφικές Λογικές* (*fuzzy Description Logics* - fuzzy-DLs) [150, 135]. Τα τελευταία χρόνια οι επεκτάσεις αυτές έχουν αποκτήσει μεγάλη προσοχή καθώς οι γλώσσες που προκύπτουν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση γνώσης σε εφαρμογές που αντιμετωπίζουν τέτοιου είδους πληροφορία και η χρήση των κλασικών γλωσσών παρουσιάζει αδυναμίες. Στο παράδειγμα ανάλυσης που παρουσιάσαμε ένας αλγόριθμος αναγνώρισης θα μπορούσε να χρησιμοποιήσεις στις ασαφείς ΠΛ και να κάνει δηλώσεις όπως οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned} ((\mathsf{o}_1,\mathsf{o}_2) : \mathsf{isDirectPartOf}) = 0.8, &\quad (\mathsf{o}_1 : \mathsf{Arm}) = 0.75 \\ ((\mathsf{o}_2,\mathsf{o}_3) : \mathsf{isPartOf}) = 0.9, &\quad (\mathsf{o}_2 : \mathsf{Body}) = 0.85 \end{aligned}$$

τα οποία δηλώνουν ότι το τμήμα o_1 είναι άμεσο τμήμα του τμήματος o_2 σε βαθμό 0.8, ότι το o_2 είναι μέρος του τμήματος o_3 σε βαθμό 0.9, ότι το o_1 ανήκει στην έννοια Arm σε βαθμό 0.75 και ότι το τμήμα o_2 ανήκει στην έννοια Body σε βαθμό 0.85.

Οι ασαφείς ΠΛ προτάθηκαν για πρώτη φορά από τον Yen στο [150]. Θα μπορούσαμε να πούμε όμως ότι η πρώτη ολοκληρωμένη εργασία παρουσιάστηκε από το Straccia στο [135] όπου παρουσιάζεται η σύνταξη, η σημασιολογία και ένας αλγόριθμος εξαγωγής συμπερασμάτων για την ασαφή ΠΛ f$_{KD}$-$\mathcal{ALC}$. Από τότε αρκετές εργασίες έχουν παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία. Πιο συγκεκριμένα, ο Straccia παρουσιάζει στο [137] τη σύνταξη και τη σημασιολογία της ασαφούς ΠΛ fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$, οι Sanchez και Tettamanzi προτείνουν στο [117] την ασαφοποίηση των ποσοδεικτών χρησιμοποιώντας την ΠΛ $\mathcal{ALCQ}$, οι Bobillo et. al. παρουσιάζουν στο [14] τον κατασκευαστή των ασαφών ονοματικών εννοιών, δηλαδή την ασαφή γλώσσα fuzzy-$\mathcal{SHO}_f\mathcal{IN}$, ο Hajek μελετά στο [54] την αποφασισιμότητα των γλωσσών f$_L$-$\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$,

f_P-$\mathcal{ALC}$ και f_G-$\mathcal{ALC}$, ο Straccia στο [136] παρουσιάζουν αλγορίθμους συλλογιστικής για τις ασαφείς ΠΛ f_{KD}-$\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$, f_L-$\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$, ενώ στο [15] οι Bobillo et. al. παρουσιάζει έναν αλγόριθμο για τη γλώσσα f_P-$\mathcal{ALC}f$.

Όπως παρατηρούμε ενώ η βιβλιογραφία είναι πλούσια σε δουλειές πάνω στις ιδιότητες των ασαφών ΠΛ, είναι σχετικά φτωχή όσον αφορά την παρουσίαση αλγορίθμων εξαγωγής συμπερασμάτων σε πολύ εκφραστικές ασαφείς Περιγραφικές Λογικές. Πιο συγκεκριμένα οι αλγόριθμοι που έχουν παρουσιαστεί επικεντρώνονται κυρίως γύρω από τη γλώσσα $\mathcal{ALC}$ χωρίς να έχει προταθεί κάποιος αλγόριθμος για την ασαφής γλώσσα fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$ ή τις περισσότερο εκφραστικές fuzzy-$\mathcal{SHOIQ}$ και fuzzy-$\mathcal{SHO}_f\mathcal{IQ}$. Όπως είδαμε στο παράδειγμα ανάλυσης οι γλώσσες αυτές είναι απολύτως απαραίτητες για την πιστότερη αναπαράσταση της περιοχής ενδιαφέροντος μας. Αν κατέχαμε αλγορίθμους για τις γλώσσες αυτές θα μπορούσαμε από την παραπάνω ασαφή μας γνώση να συμπεράνουμε ότι το τμήμα o_3 ανήκει στην έννοια $\exists\mathsf{hasPart.Body}\sqcap\exists\mathsf{hasPart.Arm}$ σε βαθμό 0.75. Αυτό σε συνδυασμό με ένα αξίωμα της μορφής $\mathsf{Human}\equiv\exists\mathsf{hasPart.Body}\sqcap\exists\mathsf{hasPart.Arm}$, όπου $\equiv$ αναπαριστά μια ισοδυναμία, σημαίνει ότι το τμήμα o_3 μάλλον παριστάνει έναν άνθρωπο. Από την άλλη η ασαφής επέκταση της γλώσσας $\mathcal{SROIQ}$ δεν έχει μελετηθεί μέχρι στιγμής στη βιβλιογραφία.

1.4 Συνεισφορά και Δομή της Διατριβής

Η διατριβή αυτή ασχολείται με θέματα πολύ εκφραστικών ασαφών Περιγραφικών Λογικών. Πιο συγκεκριμένα το μεγαλύτερο κομμάτι της αφιερώνεται στην ανάπτυξη αλγορίθμων συλλογιστικής για πολύ εκφραστικές ασαφείς Περιγραφικές Λογικές, παρουσιάζοντας όλες τις τεχνικές τους λεπτομέρειες και αποδεικνύοντας την ορθότητα, την πληρότητα και τον τερματισμό τους. Για να μπορέσουμε να αναπτύξουμε τους αλγορίθμους αυτούς ένα σημαντικό μέρος της μελέτης και της συνεισφοράς μας επικεντρώνεται στη διερεύνηση της σημασιολογίας που έχουν οι κατασκευαστές των εκφραστικών γλωσσών Περιγραφικής Λογικής όταν εισάγουμε ασάφεια. Μέσω αυτής της μελέτης προσπαθούμε να αποδώσουμε αποδοτικούς, πρακτικούς και υλοποιήσιμους κανόνες χρησιμοποιώντας και επεκτείνοντας τις τεχνικές που έχουν χρησιμοποιηθεί στις κλασικές ΠΛ. Επιπρόσθετα, σε πολλές περιπτώσεις συνεισφέρουμε σε γενικότερα θέματα σημασιολογίας και ιδιοτήτων των ασαφών ΠΛ παρέχοντας και αποδεικνύοντας πολλά χρήσιμα αποτελέσματα. Στόχος μας είναι να δώσουμε πρακτικούς αλγορίθμους συλλογιστικής για πολύ εκφραστικές ασαφείς Περιγραφικές Λογικές οι οποίες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σε πρακτικές εφαρμογές που αντιμετωπίζουν ανακριβή και ασαφή γνώση και πληροφορία.

Η διατριβή αυτή οργανώνεται ως εξής:

- Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε το μαθηματικό υπόβαθρό που είναι απαραίτητο για την κατανόηση του υπόλοιπου της διατριβής. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάζουμε μια σύντομη εισαγωγή στην πολύ εκφραστική Περιγραφική Λογική $\mathcal{SHOIN}$, αλλά και τη γλώσσα αναπαράστασης γνώσης του Σημασιολογικού Ιστού OWL, η οποία βασίζεται στην $\mathcal{SHOIN}$. Τέλος, κάνουμε μια πολύ σύντομη εισαγωγή στη θεωρία των ασαφών συνόλων και της ασαφούς λογικής.

- Στη συνέχεια, και προτού προχωρήσουμε στην ανάπτυξη των αλγορίθμων μας, παρουσιάζουμε στο κεφάλαιο 3 την ασαφή Περιγραφική Λογική fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$. Η συνεισφορά μας στη γλώσσα fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$ επικεντρώνεται στο να μελετήσουμε τη σημασιολογία τους και να αποδείξουμε ότι οι ασαφείς ΠΛ είναι ορθές επεκτάσεις των κλασικών ΠΛ, δηλαδή ότι στις οριακές συνθήκες ταυτίζονται με τις κλασικές ΠΛ. Τέλος, παρουσιάζουμε έναν πρωτότυπο τρόπο επίλυσης του προβλήματος των γενικευμένων και κυκλικών ορολογιών στις ασαφείς ΠΛ, το οποίο αποτελούσε ανοικτό πρόβλημα για πολλά χρόνια. Το εξίσου ενδιαφέρον είναι ότι η μέθοδος μας για την επίλυση του προβλήματος αυτού βασίζεται σε έναν επίσης πρωτότυπο τρόπο αντιμετώπισης των κλασικών κανόνων της λογικής του Boole στις ασαφείς ΠΛ, οι οποίοι προφανώς δεν ικανοποιούνται στην ασαφή συνολοθεωρία.

- Στη συνέχεια στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε τους αλγορίθμους μας, οι οποίοι αποφασίζουν τις υπηρεσίες συλλογιστικής της γλώσσας f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ και άρα και της γλώσσας f$_{KD}$-OWL. Τα αποτελέσματα αυτά επιτυγχάνονται σταδιακά. Αρχικά ξεκινάμε παρουσιάζοντας έναν αλγόριθμο συλλογιστικής για τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$, που αποτελεί μια εκφραστική υπο-γλώσσα της γλώσσας fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$. Για να μπορέσουμε να αναπτύξουμε έναν τέτοιο αλγόριθμο μελετάμε αρχικά τη σημασιολογία των μεταβατικών ρόλων ($\mathcal{S}$) αποδεικνύοντας χρήσιμες ιδιότητες για αυτούς. Στη συνέχεια μελετάμε τους αντίστροφους ρόλους ($\mathcal{I}$) και δείχνουμε πώς μπορούμε να επεκτείνουμε τις κλασικές τεχνικές διαχείρισής τους επεκτείνοντας την έννοια των R-γειτόνων σε αυτή των $R_{\bowtie n}$-γειτόνων. Τέλος μελετάμε την αλληλεπίδραση των μεταβατικών ρόλων και των αντίστροφων ρόλων η οποία είναι γνωστό από τις κλασικές ΠΛ ότι προκαλεί προβλήματα μη-τερματισμού, και τα επιλύουμε επεκτείνοντας και εφαρμόζοντας την τεχνική του δυναμικού μπλοκαρίσματος στις ασαφείς ΠΛ.

  Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου επεκτείνουμε τα αποτελέσματα που επιτύχαμε για τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ παρουσιάζοντας έναν αλγόριθμο συλλογιστικής για τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$. Πρώτιστα επεκτείνουμε τα αποτελέσματα για τους μεταβατικούς ρόλους εισάγοντας και μελετώντας το συνδυασμό των μεταβατικών ρόλων και των ιεραρχιών ρόλων ($\mathcal{H}$). Στη συνέχεια μελετάμε για πρώτη φορά τη σημασιολογία των περιορισμών πληθυκότητας ($\mathcal{N}$). Η σημασιολογία των κατασκευαστών αυτών παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στο [137] παρόλα αυτά χωρίς να αναλύεται η σημασιολογία τους. Στη συνεισφορά μας αυτή δείχνουμε ότι το πρόβλημα συλλογιστικής με τους κατασκευαστές αυτούς μπορεί να αναχθεί σε ένα απλό πρόβλημα μετρήματος ακριβώς όπως και στην κλασική ΠΛ $\mathcal{SHOIN}$ αλλά και αποδεικνύουμε ενδιαφέρουσες ιδιότητες για αυτούς. Τέλος μελετάμε τις δυσκολίες που προκύπτουν και από την εισαγωγής των ονοματικών εννοιών ($\mathcal{O}$) και δείχνουμε ότι οι κλασικές τεχνικές, και πιο συγκεκριμένα το μπλοκάρισμα ζευγαρώματος και ο μη-ντετερμινιστικός κανόνας NN, μπορούν να γενικευτούν και στις ασαφείς ΠΛ.

  Στο τρίτο και τελευταίο μέρος του κεφαλαίου παρουσιάζουμε την τεχνική συλλογιστικής με γενικευμένα και κυκλικά αξιώματα. Η μέθοδος μας αυτή στηρίζεται στην ανάλυση που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 3. Πιο συγκεκριμένα, δείχνουμε πώς μπορούν τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 3 να μεταφραστούν σε πρακτικούς αλγορίθμους.

  Συνολικά, λοιπόν, συνεισφέρουμε στην παρούσα βιβλιογραφία επεκτείνοντας τον αλγόριθμο που παρουσιάστηκε από τον Straccia [135] για την f$_{KD}$-$\mathcal{ALC}$ ώστε να διαχειριστούμε μεταβατικούς ρόλους, αντίστροφους ρόλους, περιορισμούς πληθυκότητας, ονοματικές έννοιες, να επιλύσουμε προβλήματα μη τερματισμού στις ασαφείς ΠΛ χρησιμοποιώντας τις τεχνικές του δυναμικού μπλοκαρίσματος και του μπλοκαρίσματος ζευγαρώματος αλλά και να επιλύσουμε το πρόβλημα της συλλογιστικής με γενικευμένα και κυκλικά αξιώματα.

- Έχοντας έναν αλγόριθμο εξαγωγής συμπερασμάτων για την f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ προχωράμε στο κεφάλαιο 5 στον ορισμό μιας ασαφούς επέκτασης για τη γλώσσα OWL ορίζοντας τη γλώσσα fuzzy-OWL. Παρόλο που η γλώσσα OWL βασίζεται στην $\mathcal{SHOIN}$, όπως έχει τονιστεί στη βιβλιογραφία, παρουσιάζουν και κάποιες σημαντικές διαφορές [65]. Έτσι λοιπόν ακολουθώντας την εργασία στο [65], αφού ορίσουμε τη σημασιολογία της ασαφούς OWL, δείχνουμε επιπρόσθετα πώς μπορούμε να ανάγουμε μια OWL βάση γνώσης σε μια fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$ βάση γνώσης. Επίσης δείχνουμε πώς μπορούμε να ανάγουμε τα προβλήματα συλλογιστικής που συναντάμε στην ασαφή OWL στα κλασικά προβλήματα των ασαφών ΠΛ για τα οποία κατέχουμε αλγορίθμους συλλογιστικής.

- Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε επεκτάσεις στον αλγόριθμο συλλογιστικής της γλώσσας f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$. Πιο συγκεκριμένα μελετάμε τους προσοντούχους περιορισμούς πληθυκότητας ($\mathcal{Q}$) οι οποίοι αποτελούν πολύ σημαντικούς κατασκευαστές απαραίτητους σε πολλές εφαρμογές. Όπως είναι γνωστό από τη βιβλιογραφία [143] η συλλογιστική με τους κατασκευαστές αυτούς χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή καθώς μπορούμε εύκολα να οδηγηθούμε σε λανθασμένα αποτελέσματα. Έτσι λοιπόν μελετάμε τη σημασιολογία των κατασκευαστών αυτών στις ασαφείς ΠΛ και επεκτείνουμε ορθά τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται στις κλασικές ΠΛ, αποδίδοντας έναν αλγόριθμο για τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIQ}$. Τελειώνοντας την παρουσίασή μας στους αλγορίθμους συλλογιστικής μελετάμε τους κατασκευαστές των ασαφών ονοματικών εννοιών ($\mathcal{O}_f$). Οι κατασκευαστές αυτοί προτάθηκαν στο [14] χωρίς όμως να αποδίδεται και μια διαδικασία συλλογιστικής αλλά και η σημασιολογία τους εμφανίζει κάποια μικρά προβλήματα. Η συνεισφορά μας έγκειται αρχικά στο να διορθώσουμε τη σημασιολογία που προτάθηκε για τους κατασκευαστές αυτούς και στη συνέχεια να παρουσιάσουμε τις επεκτάσεις που απαιτούνται στον αλγόριθμο της γλώσσας f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIQ}$ έτσι ώστε να αποδώσουμε έναν αλγόριθμο για τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SHO}_f\mathcal{IQ}$.

- Τελειώνοντας τη συνεισφορά μας στις ασαφείς ΠΛ μελετάμε στο κεφάλαιο 7 τη σημασιολογία ασαφών επεκτάσεων της πρότασης OWL 1.1. Η OWL 1.1 αποτελεί μια πρόταση για επέκταση της γλώσσας OWL αυξάνοντας την εκφραστικότητά της από αυτή της $\mathcal{SHOIN}$ σε αυτή της $\mathcal{SROIQ}$. Επιπρόσθετα η πρόταση OWL 1.1 προτείνει κάποιες γλώσσες ΠΛ οι οποίες έχουν πολύ αποδοτικούς (πολυωνυμικούς) αλγόριθμους συλλογιστικής, όπως είναι οι γλώσσες $\mathcal{EL}++$ και η DL-Lite. Η DL-Lite, μάλιστα, προσφέρει επιπλέον αποδοτικούς αλγορίθμους για την απάντηση συζευγμένων επερωτήσεων (conjunctive queries), πέρα από τα κλασικά προβλήματα συλλογιστικής των ΠΛ. Η συνεισφορά μας στο κεφάλαιο αυτό είναι να αποδώσουμε πρώτα μια ασαφή επέκταση για τις γλώσσες $\mathcal{SROIQ}$ αλλά και OWL 1.1, δημιουργώντας έτσι τις γλώσσες fuzzy-$\mathcal{SROIQ}$, και fuzzy-OWL 1.1, αντίστοιχα. Τέλος, βασισμένοι στην υπάρχουσα ασαφή επέκταση της γλώσσας DL-Lite, που προτάθηκε από το Straccia [140], επεκτείνουμε την κλασική γλώσσα επερωτήσεων της f-DL-Lite, που χρησιμοποιήθηκε στο [140], προτείνοντας πολύ εκφραστικές ασαφείς γλώσσες επερωτήσεων. Οι γλώσσες αυτές βασίζονται, αλλά επιπρόσθετα επεκτείνουν, τις ιδέες για συζευγμένες επερωτήσεις με βάρη (weighted conjunctive queries) που έχουν μελετηθεί στο χώρο της ανάκτηση δεδομένων και των ασαφών βάσεων δεδομένων [148, 111, 149, 17, 18]. Όπως αποδείχθηκε οι γλώσσες αυτές αποφασίζονται στην f-DL-Lite τόσο αποδοτικά όσο η κλασική γλώσσα επερωτήσεων της fuzzy-DL-Lite [140].

- Στο κεφάλαιο 8 παρουσιάζουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια σχετική βιβλιογραφία και συγκρίνουμε τις μεθόδους μας με άλλες που απαντώνται σε αυτή, ενώ το κεφάλαιο 9 κλείνει τη διατριβή συζητώντας πάλι τη συνεισφορά μας και παρουσιάζοντας θέματα για μελλοντική έρευνα.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικό Υπόβαθρο

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή σε θεωρίες οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση του υπολοίπου της διατριβής. Πιο συγκεκριμένα στην ενότητα 2.1 θα παρουσιάσουμε μια περισσότερο λεπτομερή και τυπική εισαγωγή στις Περιγραφικές Λογικές δείχνοντας τη σύνταξη, τη σημασιολογία και τις υπηρεσίες συλλογιστικής της γλώσσας $\mathcal{SHOIN}$. Στη συνέχεια στην ενότητα 2.2 θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά και εισαγωγή στη γλώσσα OWL χρησιμοποιώντας ως βάση τη γλώσσας $\mathcal{SHOIN}$. Μετά, στην ενότητα 2.3, προχωράμε σε μια εισαγωγή στην ασαφή συνολοθεωρία παρουσιάζοντας την έννοια του ασαφούς συνόλου και τους ασαφείς τελεστές, ενώ τέλος στην ενότητα 2.4 κάνουμε και μια σύντομη εισαγωγή σε κάποιες τελευταίες εξελίξεις που έχουν πραγματοποιηθεί στο χώρο της ασαφούς λογικής.

2.1 Η Περιγραφική Λογική $\mathcal{SHOIN}$

Οι Περιγραφικές Λογικές (ΠΛ) (Description Logics - DLs) [6] αποτελούν μια οικογένεια γλωσσών αναπαράστασης γνώσης, βασισμένων στη λογική (logic-based), που έχουν σχεδιαστεί για την καταγραφή γνώσης αλλά και τη διενέργεια εργασιών συλλογιστικής πάνω σε αυτή, με ένα δομημένο και κατανοητό τρόπο. Βασίζονται σε μια ευρύτερη οικογένεια γλωσσών αναπαράστασης γνώσης οι οποίες ονομάζονται *γλώσσες περιγραφής* (*description languages*) και ουσιαστικά προέκυψαν από τη συστηματική και μακροχρόνια προσπάθεια ορισμού αυστηρής σημασιολογίας για τη γλώσσα των Σημασιολογικών Δικτύων (Semantic Networks) [110] αλλά και της γλώσσας των Πλαισίων (Frames) [95], για τις οποίες μέχρι τότε δεν υπήρχε κάποια μαθηματική θεωρία για την απόδοση τυπικής σημασιολογίας. Όπως είναι γνωστό οι γλώσσες αυτές είναι πολύ απλές στη χρήση τους ακόμα και από μη ειδικούς του χώρου, καθώς βασίζονται σε ένα γραφικό μοντέλο το οποίο μοιάζει στο αντικειμενοστραφές μοντέλο των κλάσεων και ιδιοτήτων. Οι ΠΛ προσφέρουν ένα σύνολο από *κατασκευαστές* (*constructors*) για τη δημιουργία *εννοιών* (*concepts*) και *ρόλων* (*roles*). Οι έννοιες αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αξιώματα (axioms) και ισχυρισμούς (assertions) με σκοπό τη δημιουργία βάσεων γνώσης. Στη συνέχεια μπορούμε να εφαρμόσουμε εργασίες συλλογιστικής πάνω στις βάσεις γνώσης για να εξάγουμε νέα γνώση από την περιγραφείσα. Ένα από τα σημαντικά χαρακτηριστικά των ΠΛ, το οποίο και τις έχει κάνει αρκετά γνωστές, είναι ότι στην πλειοψηφία τους είναι αποφασίσιμές (decidable). Στην παρούσα ενότητα θα κάνουμε μια σύντομη παρουσίαση της ΠΛ $\mathcal{SHOIN}$, η οποία στο επόμενο κεφάλαιο θα επεκταθεί στην ασαφή ΠΛ fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$ ή f-$\mathcal{SHOIN}$.

Οι ΠΛ αποτελούνται από ένα αλφάβητο (alphabet), ένα συντακτικό (syntax) και μια σημασιολογία (semantics). Πιο τυπικά, μια ΠΛ αποτελείται από ένα *αλφάβητο* (*alphabet*) διακεκριμένων *ατομικών εννοιών* (*atomic concepts*) (**C**), *ατομικών ρόλων* (*atomic roles*) (**R**) και *ατόμων* (*individuals*) (**I**). Οι ατομικές έννοιες και ρόλοι αποτελούν τα στοιχειώδη στοιχεία της γλώσσας μας. Εν συνεχεία μας προσφέρεται και ένα σύνολο από κατασκευαστές οι οποίοι επενεργούν πάνω στις ατομικές έννοιες και ρόλους και συντελούν στην κατασκευή περισσότερο πολύπλοκων εννοιών και εκφράσεων που ονομάζονται *περιγραφές εννοιών* ή *σύνθετες έννοιες* (). Ανάλογα με το υποσύνολο των κατασκευαστών που χρησιμοποιούνται ορίζεται και μια διαφορετική ΠΛ. Για παράδειγμα το σύνολο των κατασκευαστών $\{\neg, \sqcap, \sqcup, \exists, \forall\}$ ορίζει την ΠΛ $\mathcal{ALC}$ [121], ενώ το σύνολο των κατασκευαστών $\{\neg, \sqcap, \sqcup, \exists, \forall, \geq, \leq, \{\}\}$, μαζί με τα αξιώματα ρόλων, $\mathsf{Trans}()$, $\sqsubseteq$ και $\cdot^{-}$, τα οποία θα δούμε στη συνέχεια, ορίζουν τη γλώσσα $\mathcal{SHOIN}$ [6]. Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό των πολύπλοκων εννοιών της γλώσσας $\mathcal{SHOIN}$.

Ορισμός 2.1.1 *Έστω $RN \in \mathbf{R}$ ένας ατομικός ρόλος και R ένας $\mathcal{SHOIN}$-ρόλος. Οι* $\mathcal{SHOIN}$-ρόλοι *ορίζονται από την παρακάτω* αφηρημένη σύνταξη *(*abstract syntax*): $S ::= RN \mid S^{-}$, όπου S^{-} συμβολίζει τον* αντίστροφο *(*inverse*) ρόλο του S. Η σχέση αντίστροφων ρόλων είναι συμμετρική και για την αποφυγή περιπτώσεων όπως η S^{--}, ορίζουμε τη συνάρτηση* Inv *η οποία επιστρέφει τον αντίστροφο ενός ρόλου. Πιο συγκεκριμένα,*

$$\mathsf{Inv}(S) := \begin{cases} RN^{-} & \text{αν } S = RN, \\ RN & \text{αν } S = RN^{-}. \end{cases}$$

Το σύνολο των $\mathcal{SHOIN}$-εννοιών *είναι το μικρότερο σύνολο τέτοιο ώστε,*

1. *κάθε ατομική έννοια* $\mathsf{CN} \in \mathbf{C}$ *είναι μια $\mathcal{SHOIN}$-έννοια,*

2. *οι ειδικές έννοιες $\bot$ και $\top$ είναι $\mathcal{SHOIN}$-έννοιες,*

3. *αν οι C και D είναι $\mathcal{SHOIN}$-έννοιες και R είναι ένας $\mathcal{SHOIN}$-ρόλος, τότε οι $(\neg C)$, $(C \sqcup D)$, $(C \sqcap D)$, $(\forall R.C)$, $(\exists R.C)$ είναι επίσης $\mathcal{SHOIN}$-έννοιες,*

4. *αν $o \in \mathbf{I}$ είναι ένα άτομο, τότε η $\{o\}$ είναι μια $\mathcal{SHOIN}$-έννοια και*

5. *αν R είναι ένας* απλός[1] *(*simple*) $\mathcal{SHOIN}$-ρόλος και $p \in \mathbb{N}$, τότε $(\geq pR)$ και $(\leq pR)$ είναι επίσης $\mathcal{SHOIN}$-έννοιες.*

$\diamondsuit$

Διαισθητικά μια έννοια C αναπαριστά ένα σύνολο αντικειμένων με κοινές ιδιότητες ακριβώς όπως συμβαίνει και με τις κλάσεις στο αντικειμενοστραφές μοντέλο δεδομένων. Αντίθετα, ένας ρόλος αναπαριστά μια δυαδική σχέση ανάμεσα σε δυο αντικείμενα. Επίσης σημειώνουμε ότι είναι πολύ σημαντικό που περιορίζουμε τους ρόλους που συμμετέχουν σε περιορισμούς πληθυκότητας σε απλούς αλλιώς η προκύπτουσα γλώσσα θα ήταν μη-αποφασίσιμη [69].

Οι έννοιες $\bot$ και $\top$ ονομάζονται *κενή* (*bottom*) και *καθολική* (*top*) έννοια , αντίστοιχα. Οι έννοιες $\forall R.C$ και $\exists R.C$ ονομάζονται *περιορισμός τιμής* (*value restriction*) και *υπαρξιακός περιορισμός* (*existential restriction*), αντίστοιχα, ενώ έννοιες

[1] Ένας ρόλος ονομάζεται απλός αν δεν είναι μεταβατικός ή δεν έχει μεταβατικούς υπο-ρόλους.

της μορφής $\{o\}$ ονομάζονται *ονοματικές έννοιες* (*nominal concepts*), ενώ οι έννοιες της μορφής $\geq pR$ και $\leq pR$ ονομάζονται *περιορισμοί πληθυκότητας* (*number restrictions*) από τους οποίους ο $\geq pR$ αναφέρεται ως περιορισμός *το-λιγότερο* (*at-least*) ενώ ο $\leq pR$ αναφέρεται ως περιορισμός *το-πολύ* (*at-most*). Στην περίπτωση που επιτρέπουμε στη μεταβλητή p να πάρει μόνο τις τιμές 0 και 1, δηλαδή να έχουμε μόνο έννοιες της μορφής $\leq 1R$, $\geq 1R$ και $\leq 0R$ προκύπτουν οι *συναρτησιακοί περιορισμοί πληθυκότητας* (*functional number restrictions*).

Στο σημείο αυτό εισάγουμε κάποιο συμβολισμό (notation) σχετικό με τις ΠΛ. Η Περιγραφική Λογική η οποία προκύπτει από τις προτάσεις 1 και 2 του ορισμού 2.1.1 ονομάζεται $\mathcal{ALC}$. Δηλαδή, η ΠΛ $\mathcal{ALC}$ περιέχει μόνο έννοιες της μορφής, $\bot$, $\top$, $\neg C$, $C \sqcap D$, $C \sqcup D$, $\forall R.C$ και $\exists R.C$. Εν συνεχεία, η δυνατότητα ορισμού ονοματικών εννοιών δηλώνεται με το γράμμα $\mathcal{O}$, οι περιορισμοί πληθυκότητας με το γράμμα $\mathcal{N}$, ενώ οι συναρτησιακοί περιορισμοί με το γράμμα $\mathcal{F}$, και τέλος οι αντίστροφοι ρόλοι με το γράμμα $\mathcal{I}$. Έτσι λοιπόν μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει τη γλώσσα $\mathcal{ALCOIN}$.

Χρησιμοποιώντας αυτήν την εκφραστική δυνατότητα μπορούμε να περιγράψουμε έννοιες του κόσμου μας, όπως είναι η έννοια (το σύνολο) των ανθρώπων που έχουν ακριβώς 3 παιδιά, γράφοντας

$$\mathsf{Human} \sqcap \geq 3\mathsf{hasChild} \sqcap \leq 3\mathsf{hasChild},$$

την έννοια των ελαττωματικών μηχανών, γράφοντας

$$\mathsf{Machine} \sqcap \exists \mathsf{hasPart.MachinePart} \sqcap \forall \mathsf{hasPart.FaultyPart},$$

την έννοια των ημερών της εβδομάδας, γράφοντας

$$\{\mathtt{Sunday}\} \sqcup \{\mathtt{Monday}\} \sqcup \ldots \sqcup \{\mathtt{Saturday}\}$$

ή τον ιδιότητα hasParent, γράφοντας $\mathsf{hasChild}^-$.

Ένα από τα χαρακτηριστικά που κάνει τις γλώσσες αναπαράστασης γνώσης να ξεχωρίζουν από τις φυσικές γλώσσες είναι η τυπικότητα η οποία τις διακρίνει. Πιο συγκεκριμένα τα δομικά στοιχεία τους ερμηνεύονται με ένα τυπικό, μαθηματικό τρόπο, έτσι ώστε το νόημα μιας έννοιας (δήλωσης) να επιδέχεται μοναδικής ερμηνείας, πράγμα το οποίο δε συμβαίνει με τις φυσικές γλώσσες, στις οποίες οι προτάσεις μπορεί να εμπεριέχουν αμφισημία. Οι ΠΛ έχουν αυτό το οποίο λέγεται *μοντελοθεωρητική σημασιολογία* (*model-theoretic semantics*), η οποία ορίζεται με τη χρήση ερμηνειών. Μια *ερμηνεία* (*interpretation*) $\mathcal{I}$ αποτελείται από έναν *χώρο ερμηνείας* (*domain of interpretation*) $\Delta^{\mathcal{I}}$ και από μια *συνάρτηση ερμηνείας* $\cdot^{\mathcal{I}}$ *interpretation function*, όπου ο χώρος ερμηνείας αποτελεί ένα σύνολο *αντικειμένων* (*objects*) και η συνάρτηση ερμηνείας απεικονίζει,

- κάθε άτομο $\mathsf{a} \in \mathbf{I}$ σε ένα αντικείμενο $\mathsf{a}^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$,
- κάθε ατομική έννοια $\mathsf{CN} \in \mathbf{C}$ σε ένα υποσύνολο $\mathsf{CN}^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$, και
- κάθε ατομικό ρόλο $RN \in \mathbf{R}$ σε μια δυαδική σχέση $RN^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$.

Η συνάρτηση ερμηνείας μπορεί να επεκταθεί έτσι ώστε να ερμηνευτούν και οι πολύπλοκες $\mathcal{SHOIN}$-έννοιες και ρόλοι. Οι ερμηνείες αυτές φαίνονται στον Πίνακα 2.1, όπου $\sharp$ συμβολίζει την πληθυκότητα ενός συνόλου.

Πίνακας 2.1: *Σημασιολογία $\mathcal{SHOIN}$-εννοιών και ρόλων*

Κατασκευαστής	Σύνταξη	Σημασιολογία
καθολική έννοια	$\top$	$\Delta^{\mathcal{I}}$
κενή έννοια	$\bot$	$\emptyset$
γενικευμένη άρνηση	$\neg C$	$\Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$
ονοματική έννοια	$\{o\}$	$\{o\}^{\mathcal{I}} = \{o^{\mathcal{I}}\}$
τομή (σύζευξη)	$C \sqcap D$	$C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$
ένωση (διάζευξη)	$C \sqcup D$	$C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$
υπαρξιακός περιορισμός	$\exists R.C$	$\{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y.\langle x,y\rangle \in R^{\mathcal{I}} \land y \in C^{\mathcal{I}}\}$
περιορισμός τιμής	$\forall R.C$	$\{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall y.\langle x,y\rangle \in R^{\mathcal{I}} \to y \in C^{\mathcal{I}}\}$
περιορισμός το-πολύ	$\leq nR$	$\{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \sharp\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid R^{\mathcal{I}}(x,y)\} \leq n\}$
περιορισμός το-λιγότερο	$\geq nR$	$\{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \sharp\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid R^{\mathcal{I}}(x,y)\} \geq n\}$
αντίστροφοι ρόλοι	R^-	$x,y \in \Delta^{\mathcal{I}}, \langle x,y\rangle \in R^{\mathcal{I}}$ ανν $\langle y,x\rangle \in (R^-)^{\mathcal{I}}$

Όπως γίνεται αντιληπτό κάθε $\mathcal{SHOIN}$-έννοια ερμηνεύεται ως ένα υποσύνολο του $\Delta^{\mathcal{I}}$. Για παράδειγμα η έννοια $\top$ ερμηνεύεται ως το σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα αντικείμενα του χώρου ερμηνείας, ενώ η έννοια $\bot$ ερμηνεύεται ως το κενό σύνολο, το οποίο και δικαιολογεί την ονομασία που τους έχουμε προσδώσει. Εν συνεχεία η έννοια $C \sqcap D$ ερμηνεύεται ως το σύνολο το οποίο προκύπτει από την τομή των ερμηνειών των εννοιών C και D. Επιπρόσθετα, η ερμηνεία της έννοιας $\forall R.C$ περιέχει το σύνολο των αντικειμένων του $\Delta^{\mathcal{I}}$ τα οποία αν συμμετέχουν στο ρόλο $R^{\mathcal{I}}$ με κάποιο άλλο αντικείμενο, τότε το αντικείμενο αυτό ανήκει στην ερμηνεία της έννοιας C δηλαδή στο σύνολο $C^{\mathcal{I}}$. Με λίγα λόγια η έννοια αυτή ερμηνεύεται ως μια συνεπαγωγή (implication). Τέλος παρατηρούμε ότι ο κατασκευαστής ονοματικών εννοιών ουσιαστικά αποτελεί κατασκευαστή *μονοσυνόλων* (*singleton*) εφόσον η έννοια $\{o\}$ ερμηνεύεται ως το σύνολο με μοναδικό στοιχείο το $o^{\mathcal{I}}$.

Μέχρι στιγμής έχουμε δει πως μπορούμε να δημιουργήσουμε περίπλοκες έννοιες και ρόλους, αλλά δεν έχουμε δει πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις έννοιες αυτές για να ορίσουμε άλλες. Στα προηγούμενα παραδείγματα ορίσαμε διαισθητικά τις ημέρες της εβδομάδος δεν αναθέσαμε όμως τον ορισμό αυτό σε μια έννοια, δηλαδή την έννοια DaysOfWeek. Αυτό επιτυγχάνεται με τα *αξιώματα ορολογίας* (*terminological axioms*) τα οποία και συλλέγονται στο σώμα ορολογίας. Ένα *$\mathcal{SHOIN}$ σώμα ορολογίας* (*terminological box -TBox*), που συμβολίζεται με $\mathcal{T}$, είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από *αξιώματα υπαγωγής εννοιών* (*concept inclusion axioms*) της μορφής $C \sqsubseteq D$, και *αξιώματα ισοδυναμίας εννοιών* (*concept equivalence axioms*) της μορφής $C \equiv D$ όπου C, D είναι $\mathcal{SHOIN}$-έννοιες. Τα αξιώματα υπαγωγής εννοιών στα οποία η έννοια του αριστερού μέλους είναι μια πολύπλοκη έννοια ονομάζονται *αξιώματα υπαγωγής γενικευμένων εννοιών* (*general concept inclusions* - GCIs) ή απλά *γενικευμένα αξιώματα* (*general axioms*) [67]. Στην περίπτωση όπου ένα TBox περιέχει αξιώματα στα οποία μια έννοια του αριστερού μέλους ορίζεται είτε άμεσα είτε έμμεσα από τον εαυτό της, περιέχεται δηλαδή κάποιος κύκλος, λέμε ότι το TBox είναι *κυκλικό* (*cyclic*). Για παράδειγμα τα TBox:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \{\mathsf{BinaryTree} \equiv \mathsf{Tree} \sqcap \exists \mathsf{hasBranch}.\mathsf{BinaryTree}\} \text{ και} \\ \mathcal{T}_2 &= \{C \sqcap D \equiv E \sqcup F, E \equiv C \sqcup G\} \end{aligned}$$

είναι και τα δυο κυκλικά. Ένα σώμα ορολογία το οποίο δεν είναι ούτε κυκλικό αλλά ούτε περιέχει γενικευμένα αξιώματα, περιέχει δηλαδή μόνο αξιώματα της μορφής

$A \sqsubseteq D$ ή $A \equiv D$, όπου A είναι μια ατομική έννοια ονομάζεται *απλό* (*simple*). Λέμε ότι μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ *ικανοποιεί* (*satisfies*) ένα αξίωμα $C \sqsubseteq D$ αν $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$, ενώ ικανοποιεί ένα αξίωμα $C \equiv D$ αν $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$. Μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί ένα σώμα ορολογίας $\mathcal{T}$ αν ικανοποιεί όλα τα αξιώματα στο $\mathcal{T}$. Τότε λέμε ότι η $\mathcal{I}$ είναι *μοντέλο* (*model*) του $\mathcal{T}$.

Αντίστοιχα, οι ΠΛ προσφέρουν μηχανισμούς για την περιγραφή αξιωμάτων ρόλων, τα οποία οργανώνονται στα σώματα ρόλων. Ένα $\mathcal{SHOIN}$ *σώμα ρόλων* (*role box -RBox*), που συμβολίζεται με $\mathcal{R}$, είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από *αξιώματα μεταβατικών ρόλων* (*transitive role axioms*) της μορφής $\mathsf{Trans}(R)$, και *αξιώματα υπαγωγής ρόλων* (*role inclusion axioms*) της μορφής $R \sqsubseteq S$. Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα αυτά μπορούμε να δηλώσουμε ότι οι ρόλοι $\mathsf{hasPart}$ και $\mathsf{ancestor}$ είναι μεταβατικοί γράφοντας, $\mathsf{Trans}(\mathsf{hasPart})$ και $\mathsf{Trans}(\mathsf{ancestor})$, αντίστοιχα, ότι ο ρόλος $\mathsf{hasChild}$ είναι υπο-ρόλος του ρόλου $\mathsf{hasOffspring}$, γράφοντας $\mathsf{hasChild} \sqsubseteq \mathsf{hasOffspring}$, ή ότι ο ρόλος $\mathsf{hasParent}$ είναι ο αντίστροφος του ρόλου $\mathsf{hasChild}$, γράφοντας $\mathsf{hasParent} \sqsubseteq \mathsf{hasChild}^-$ και $\mathsf{hasChild}^- \sqsubseteq \mathsf{hasParent}$.

Μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί ένα αξίωμα $\mathsf{Trans}(R)$ αν, για κάθε $x, y, z \in \Delta^{\mathcal{I}}$, $\{\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle\} \subseteq R^{\mathcal{I}} \to \langle x, z\rangle \in R^{\mathcal{I}}$, και ικανοποιεί ένα αξίωμα $R \sqsubseteq S$ αν $R^{\mathcal{I}} \subseteq S^{\mathcal{I}}$. Ένα σύνολο από αξιώματα υπαγωγής ρόλων ορίζει μια *ιεραρχία ρόλων* (*role hierarchy*). Για μια τέτοια ιεραρχία χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\sqsubseteq^*$ ως το μεταβατικό (transitive) και ανακλαστικό (reflexive) κλείσιμο της σχέσης $\sqsubseteq$. Επίσης παρατηρήστε ότι αν $R \sqsubseteq S$, τότε η σημασιολογία των αντίστροφων ρόλων συνεπάγεται ότι $\mathsf{Inv}(R)^{\mathcal{I}} \subseteq \mathsf{Inv}(S)^{\mathcal{I}}$. Μια ερμηνεία ικανοποιεί ένα $\mathcal{SHOIN}$ RBox $\mathcal{R}$ αν ικανοποιεί κάθε αξίωμα στο $\mathcal{R}$. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η $\mathcal{I}$ είναι *μοντέλο* του $\mathcal{R}$.

Στην ονοματολογία των ΠΛ τα αξιώματα μεταβατικών ρόλων συμβολίζονται με το γράμμα R^+, ως στοιχείο κάτω από τη γραμμή (subscript) ή το γράμμα $\mathcal{S}$. Παρατηρήστε, όμως ότι για την αποφυγή δημιουργίας μεγάλων ονομάτων έχει επικρατήσει όταν εισάγουμε αξιώματα μεταβατικών ρόλων στη γλώσσα $\mathcal{ALC}$ η νέα γλώσσα να συμβολίζεται ως $\mathcal{S}$ και όχι ως $\mathcal{ALC}_{R^+}$ [67]. Τέλος, τα αξιώματα υπαγωγής ρόλων συμβολίζονται με το γράμμα $\mathcal{H}$. Συνεπώς, συνολικά η γλώσσα $\mathcal{ALCOIN}$ μαζί με τα αξιώματα του σώματος ρόλων μας δίνει τη γλώσσα $\mathcal{SHOIN}$.

Τέλος, μπορούμε να δημιουργήσουμε και αξιώματα ατόμων, δηλαδή σχέσεις στιγμιοτύπου ανάμεσα σε άτομα (ζεύγη ατόμων) και έννοιες (ρόλους) τα οποία συλλέγονται στα σώματα ισχυρισμών. Ένα $\mathcal{SHOIN}$ *σώμα ισχυρισμών* (*assertional box - ABox*), που συμβολίζεται με $\mathcal{A}$, είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από *ισχυρισμούς* (*assertions*) της μορφής $a : C$, που ονομάζονται *ισχυρισμοί εννοιών* (*concept assertions*), της μορφής $(a, b) : R$, που ονομάζονται *ισχυρισμοί ρόλων* (*role assertions*), ή της μορφής $a \doteq b$ και $a \not\doteq b$, που δηλώνουν αν δυο άτομα είναι ταυτόσημα ή όχι. Μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί τον ισχυρισμό $a : C$ αν $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$, τον ισχυρισμό $(a, b) : R$ αν $(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}$ και τη σχέση $a \doteq b$ ($a \not\doteq b$), αν $a^{\mathcal{I}} \doteq b^{\mathcal{I}}$ ($a^{\mathcal{I}} \not\doteq b^{\mathcal{I}}$). Μια ερμηνεία ικανοποιεί ένα $\mathcal{SHOIN}$ ABox $\mathcal{A}$ αν ικανοποιεί κάθε αξίωμα στο $\mathcal{A}$. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο του $\mathcal{A}$.

Μια $\mathcal{SHOIN}$ *βάση γνώσης* (ΒΓ) (*knowledge base*) $\Sigma = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A}\rangle$ αποτελείται από ένα TBox, ένα RBox και ένα ABox. Μια ερμηνεία ικανοποιεί μια $\mathcal{SHOIN}$ βάση γνώσης Σ αν ικανοποιεί κάθε αξίωμα της Σ. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο της Σ.

Εκτός όμως από την τυπικότητά τους οι γλώσσες αναπαράστασης γνώσης έχουν και ένα επιπλέον χαρακτηριστικό που τις κάνει προσιτές. Το στοιχείο αυτό είναι οι υπηρεσίες συλλογιστικής (inference services) που μας προσφέρουν, δηλαδή ένα σύνολο από λογικές ερωτήσεις που μπορούμε να επιβάλλουμε σε μια γνώση που έχουμε δημιουργήσει χρησιμοποιώντας την εκφραστικότητα της γλώσσας αυτής. Σκοπός των ερωτήσεων αυτών είναι να εξάγουμε νέα γνώση και νέα συμπεράσματα από τα αρχικά γεγονότα τα οποία έχουμε καταγράψει. Κάθε γλώσσα αναπαράστασης γνώσης μας προσφέρει ένα διαφορετικό σύνολο υπηρεσιών συλλογιστικής. Οι Περιγραφικές Λογικές μας προσφέρουν τις παρακάτω υπηρεσίες:

- **Ικανοποιησιμότητα μιας ΒΓ:** Μια ΒΓ Σ είναι *ικανοποιήσιμη* (*satisfiable*) αν και μόνο αν υπάρχει μοντέλο $\mathcal{I}$ για την Σ. Αντίστοιχα ορίζεται η έννοια της μη-ικανοποιησιμότητας (unsatisfiability).

- **Ικανοποιησιμότητα μιας έννοιας:** Η έννοια C είναι ικανοποιήσιμη με βάση την (μ.β.τ.) Σ ανν υπάρχει μοντέλο $\mathcal{I}$ της Σ τέτοιο ώστε (τ.ω.) $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$.

- **Υπαγωγή εννοιών:** Η C *υπάγεται* (*subsumed*) στην D μ.β.τ. Σ ανν για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της Σ έχουμε $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$.

- **Συνέπεια ενός σώματος ισχυρισμών:** Ένα σώμα ισχυρισμών $\mathcal{A}$ είναι *συνεπές* (*consistent*) αν υπάρχει κάποιο μοντέλο για το $\mathcal{A}$.

- **Λογική Συνεπαγωγή:** Δοθέντος ενός αξιώματος εννοιών, ρόλων ή ενός ισχυρισμού, φ, η Σ *συνεπάγεται λογικά* (*entails*) το φ, γράφοντας $\Sigma \models \varphi$, ανν για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της Σ έχουμε ότι η $\mathcal{I}$ ικανοποιεί το φ.

Όπως είναι λογικό αυτό το οποίο επιθυμούμε είναι να αναπτύξουμε μια αυτοματοποιημένη διαδικασία, έναν αλγόριθμο δηλαδή, ο οποίος να αποφασίζει (decides) τα παραπάνω προβλήματα. Εφόσον μιλάμε για λογικές γλώσσες η ανάπτυξη τέτοιων αλγορίθμων είναι συνήθως αρκετά δύσκολη και δυσκολεύει όσο εκφραστικότερη είναι η γλώσσα αναπαράστασης γνώσης που εξετάζουμε. Οι αλγόριθμοι αυτοί ονομάζονται *αλγόριθμος συλλογιστική* (*reasoning reasoning*).

Όπως βλέπουμε από τα παραπάνω προβλήματα συλλογιστικής για τις ΠΛ σε πολλές περιπτώσεις για να αποφασίσουμε κάποια από αυτά απαιτείται να ελέγξουμε όλα τα μοντέλα μιας βάσης γνώσης. Προφανώς κάτι τέτοιο είναι αδύνατο. Για το λόγω αυτό λοιπόν τις περισσότερες φορές τα προβλήματα αυτά ανάγονται σε απλούστερα. Όπως έχει αποδειχθεί ισχύουν τα ακόλουθα [102, 35].

- Η έννοια C είναι ικανοποιήσιμη μ.β.τ. Σ ανν το σώμα ισχυρισμών $\{a : C\}$ είναι συνεπές μ.β.τ. Σ για κάποιο τυχαίο a.

- Η C υπάγεται στην D μ.β.τ. Σ ανν το σώμα ισχυρισμών $\{a : C \sqcap \neg D\}$ είναι μη-συνεπές μ.β.τ. Σ.

- Μια $\Sigma = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \rangle$ συνεπάγεται λογικά έναν ισχυρισμό $a : C$ ανν η $\Sigma = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \cup \{a : \neg C\} \rangle$ είναι μη-ικανοποιήσιμη.

2.2 Η γλώσσα OWL

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 1 ο Σημασιολογικός Ιστός αποτελεί μια επέκταση του σημερινού Ιστού στην οποία η πληροφορία θα είναι δομημένη με έναν τυπικό τρόπο ο οποίος θα της προσδίδει αυστηρή σημασιολογία. Προκειμένου να επιτευχθεί ο στόχος αυτός απαιτείται η εισαγωγή γνώσης και η δομή της πληροφορίας με τη χρήση γλωσσών αναπαράστασης γνώσης. Για να χρησιμοποιήσουμε όμως τέτοιες τεχνολογίες στο διαδίκτυο θα πρέπει να αναθεωρήσουμε και να τροποποιήσουμε κάποια από τα συστατικά τους. Πιο συγκεκριμένα, όπως είναι γνωστό, στο σημερινό Ιστό κατά ένα πολύ μεγάλο ποσοστό η πληροφορία δομείται με τη χρήση της γλώσσας XML [21]. Έτσι λοιπόν αφενός πρέπει να περιγράψουμε γνώση με τη χρήση κάποιας γλώσσας αναπαράστασης γνώσης αλλά αφετέρου η σύνταξη της γλώσσας που θα χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει να βασίζεται στη γλώσσα XML. Για το λόγο αυτό η W3C, η οποία είναι ο οργανισμός που ασχολείται με την ανάπτυξη και προτυποποίηση τεχνολογιών για τον Παγκόσμιο Ιστό, έχει αναπτύξει αρκετές γλώσσες αναπαράστασης γνώσης. Η πιο εκφραστική από αυτές είναι η γλώσσα OWL [11].

Η OWL είναι μια γλώσσα οντολογιών για το Σημασιολογικό Ιστό [11], η οποία αυτή τη στιγμή αποτελεί πρότυπο της W3C. Η OWL έχει αρκετά κοινά στοιχεία με τις ΠΛ αλλά επίσης υπάρχουν και κάποιες σημαντικές διαφορές. Το πρότυπο της OWL καθορίζει ουσιαστικά τρεις υπογλώσσες αυξανόμενης εκφραστικής δυνατότητας. Οι γλώσσες αυτές είναι οι ακόλουθες:

- **OWL Lite:** Η γλώσσα αυτή απευθύνεται σε χρήστες οι οποίοι επιθυμούν να χρησιμοποιήσουν την OWL για την περιγραφή γνώσης σε εφαρμογές που δεν έχουν μεγάλες απαιτήσεις σε εκφραστικές δυνατότητες. Έτσι δίνεται η δυνατότητα ανάπτυξης εξειδικευμένων εργαλείων και μηχανισμών εξαγωγής συμπερασμάτων τα οποία αναμένεται να λειτουργούν ταχύτερα από εργαλεία τα οποία υλοποιούν περισσότερο εκφραστικές γλώσσες. Μιλώντας με όρους Περιγραφικών Λογικών θα λέγαμε ότι η γλώσσα παρέχει την ίδια εκφραστική δυνατότητα με τη γλώσσα $\mathcal{SHIF}$.[2]

- **OWL DL:** Η γλώσσα αυτή δίνει τη μέγιστη εκφραστική δυνατότητα που προσφέρεται από τη γλώσσα OWL χωρίς όμως να χάνονται οι καλές υπολογιστικές ιδιότητές της. Αυτό σημαίνει ότι η γλώσσα αυτή, σε αντίθεση με την τελευταία υπογλώσσα της OWL, είναι αποφασίσιμη (decidable). Συγκριτικά με τις ΠΛ, η OWL DL παρέχει την ίδια εκφραστική δυνατότητα με τη γλώσσα $\mathcal{SHOIN}$.[3]

- **OWL Full**: Η γλώσσα αυτή προσφέρει το ίδιο λεξιλόγιο με τη γλώσσα OWL DL. Επιπρόσθετα όμως παρέχει τη συντακτική ελευθερία και τα χαρακτηριστικά της γλώσσας RDF [83, 22], μιας άλλης πολύ απλής γλώσσας οντολογιών, και πιο συγκεκριμένα τη δυνατότητα μετα-μοντελοποίησης. Η γλώσσα αυτή είναι εμφανώς μη-αποφασίσιμη (undecidable) [98] και αυτή τη στιγμή δεν υποστηρίζεται από κανένα σύστημα.

Όπως και οι ΠΛ έτσι και η OWL DL ορίζεται από ένα αλφάβητο το οποίο αποτελείται από ένα σύνολο *ατομικών κλάσεων* (*atomic classes*), *ατομικών ιδιοτήτων* (*atomic properties*) και *ατόμων* (*individuals*), μαζί με ένα πλήθος από κατασκευαστές κλάσεων για τη δημιουργία περίπλοκων κλάσεων αλλά και το χαρακτηρισμό ιδιοτήτων. Αυτοί οι κατασκευαστές έχουν στενή σχέση με τους κατασκευαστές των ΠΛ που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα. Παρατηρήστε ότι οι κλάσεις και οι ιδιότητες είναι τα ανάλογα των εννοιών και των ρόλων στις ΠΛ. Συντακτικά η OWL

[2] Στην πραγματικότητα είναι ισοδύναμη με τη γλώσσα $\mathcal{SHIF}(\mathbf{D}^+)$ η οποία επεκτείνει τη γλώσσα $\mathcal{SHIF}$ με τύπους δεδομένων (datatypes). Σημειώνουμε ότι στη διατριβή αυτή δε θα ασχοληθούμε με συλλογιστική σε τύπους δεδομένων για αυτό το λόγο δεν περιπλέκουμε την παρουσίασή μας με αυτούς.

[3] Παρομοίως, στην πραγματικότητα η OWL DL είναι ισοδύναμη με την $\mathcal{SHOIN}(\mathbf{D}^+)$.

Πίνακας 2.2: *Περιγραφές OWL Κλάσεων και Ιδιοτήτων*

Αφηρημένη Σύνταξη	Σύνταξη ΠΛ	Σημασιολογία
Class(A)	A	$\mathsf{A}^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$
Class(owl:Thing)	$\top$	$\top^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$
Class(owl:Nothing)	$\bot$	$\bot^{\mathcal{I}} = \emptyset$
intersectionOf($C_1, C_2, \dots$)	$C_1 \sqcap C_2$	$(C_1 \sqcap C_2)^{\mathcal{I}} = C_1^{\mathcal{I}} \cap C_2^{\mathcal{I}}$
unionOf($C_1, C_2, \dots$)	$C_1 \sqcup C_2$	$(C_1 \sqcup C_2)^{\mathcal{I}} = C_1^{\mathcal{I}} \cup C_2^{\mathcal{I}}$
complementOf(C)	$\neg C$	$(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$
oneOf($o_1, o_2, \dots$)	$\{o_1\} \sqcup \{o_2\}$	$(\{o_1\} \sqcup \{o_2\})^{\mathcal{I}} = \{{o_1}^{\mathcal{I}}, {o_2}^{\mathcal{I}}\}$
restriction(R someValuesFrom(C))	$\exists R.C$	$(\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \mid \exists y.\langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}} \wedge y \in C^{\mathcal{I}}\}$
restriction(R allValuesFrom(C))	$\forall R.C$	$(\forall R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \mid \forall y.\langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}} \rightarrow y \in C^{\mathcal{I}}\}$
restriction(R hasValue(o))	$\exists R.\{o\}$	$(\exists R.\{o\})^{\mathcal{I}} = \{x \mid \langle x, o^{\mathcal{I}}\rangle \in R^{\mathcal{I}}\}$
restriction(R minCardinality(m))	$\geqslant mR$	$(\geqslant mR)^{\mathcal{I}} = \{x \mid \sharp\{y.\langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}}\} \geq m\}$
restriction(R maxCardinality(m))	$\leqslant mR$	$(\leqslant mR)^{\mathcal{I}} = \{x \mid \sharp\{y.\langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}}\} \leq m\}$
ObjectProperty(S)	S	$S^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$

κληρονομεί την RDF/XML σύνταξη της RDF. Παρόλα αυτά το πρότυπο της OWL ορίζει και εναλλακτικούς τρόπους σύνταξης για την πιο συμπαγή και τυπική γραφή των αξιωμάτων. Πιο συγκεκριμένα ορίζεται η *αφηρημένη σύνταξη* (*abstract syntax*) [108]. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την αφηρημένη σύνταξη της OWL για να περιγράφουμε τα αξιώματα που προσφέρει.

Όπως οι ΠΛ έτσι και η OWL DL έχει μοντελοθεωρητική σημασιολογία η οποία είναι ουσιαστικά ανάλογη με αυτή των ΠΛ. Έτσι λοιπόν μια ερμηνεία ορίζεται από ένα ζευγάρι $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ όπου $\Delta^{\mathcal{I}}$ είναι ένα σύνολο αντικειμένων που αποτελεί το χώρο ερμηνείας και $\cdot^{\mathcal{I}}$ είναι μια συνάρτηση ερμηνείας που αντιστοιχεί τα άτομα σε αντικείμενα του $\Delta^{\mathcal{I}}$, τις ατομικές κλάσεις σε υποσύνολα του $\Delta^{\mathcal{I}}$ και τις ατομικές ιδιότητες σε υποσύνολα του $\Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας πράξεις συνόλων μπορούμε να επεκτείνουμε τη συνάρτηση ερμηνείας έτσι ώστε να ερμηνεύσουμε περίπλοκες κλάσεις. Στον Πίνακα 2.2 παρουσιάζουμε την αφηρημένη σύνταξη, την αντίστοιχη σύνταξη σε ΠΛ και τη σημασιολογία των κατασκευαστών της OWL που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία πολύπλοκων κλάσεων αλλά και τον ορισμό ιδιοτήτων. Στον πίνακα αυτό A είναι μια ατομική κλάση, C_1, C_2 OWL κλάσεις, o ένα άτομο, R μια ιδιότητα αντικειμένων (object property) και m ένας φυσικός αριθμός. Παρατηρούμε ότι οι περιγραφές κλάσεων είναι ακριβώς αντίστοιχες με τις περίπλοκες έννοιες στις Περιγραφικές Λογικές, καθώς προσφέρουν, σύζευξη και διάζευξη κλάσεων, άρνηση, ονοματικές έννοιες, περιορισμούς τιμής και υπαρξιακούς περιορισμούς καθώς και περιορισμούς πληθυκότητας.

Επιπρόσθετα η OWL προσφέρει ένα σύνολο από αξιώματα. Αυτά μπορούν να συνδυαστούν με περιγραφές κλάσεων για να δημιουργήσουμε αρκετά περίπλοκες περιγραφές εννοιών και οντοτήτων του κόσμου μας. Τα αξιώματα αυτά χωρίζονται σε αξιώματα κλάσεων, ιδιοτήτων και ατόμων τα οποία επίσης ονομάζονται και *γεγονότα* (*facts*) και είναι ανάλογα των ισχυρισμών των ΠΛ. Τα αξιώματα αυτά ομαδοποιούνται σε αυτό το οποίο αποκαλούμε οντολογίες, και αποτελούν ανάλογο των βάσεων γνώσης των ΠΛ. Στον Πίνακα 2.3 παρουσιάζουμε τη αφηρημένη σύνταξη των αξιωμάτων αυτών, την αντίστοιχη δήλωση σε ΠΛ και τη σημασιολογία του αξιώματος αυτού.

Βλέπουμε ότι, αντίθετα από τις ΠΛ, η OWL παρέχει αξιώματα ορισμού ξένων κλάσεων αλλά και αξιώματα ορισμού του πεδίου τιμών (range) και του πεδίου ορισμού (domain) μιας ιδιότητας R. Ταυτόχρονα μπορούμε να ορίσουμε ότι μια ιδιότητα είναι

Πίνακας 2.3: *Αξιώματα κλάσεων και ιδιοτήτων OWL*

Αφηρημένη Σύνταξη	**Σύνταξη ΠΛ**	**Σημασιολογία**
Class(A partial $C_1 \ \ldots \ C_n$)	$A \sqsubseteq C_1 \sqcap \cdots \sqcap C_n$	$A^{\mathcal{I}} \subseteq C_1^{\mathcal{I}} \cap \cdots \cap C_n^{\mathcal{I}}$
Class(A complete $C_1 \ \ldots \ C_n$)	$A \equiv C_1 \sqcap \cdots \sqcap C_n$	$A^{\mathcal{I}} = C_1^{\mathcal{I}} \cap \cdots \cap C_n^{\mathcal{I}}$
EnumeratedClass($A \ o_1 \ \ldots \ o_n$)	$A \equiv \{o_1\} \sqcup \ldots \sqcup \{o_n\}$	$A^{\mathcal{I}} = \{o_1^{\mathcal{I}}, \ldots, o_n^{\mathcal{I}}\}$
SubClassOf(C_1, C_2)	$C_1 \sqsubseteq C_2$	$C_1^{\mathcal{I}} \subseteq C_2^{\mathcal{I}}$
EquivalentClasses($C_1 \ \ldots \ C_n$)	$C_1 \equiv \cdots \equiv C_n$	$C_1^{\mathcal{I}} = \cdots = C_n^{\mathcal{I}}$
DisjointClasses($C_1 \ \ldots \ C_n$)	$C_i \sqsubseteq \neg C_j$	$C_i^{\mathcal{I}} \subseteq (\neg C_j)^{\mathcal{I}}, 1 \leq i < j \leq n$
SubPropertyOf(R_1, R_2)	$R_1 \sqsubseteq R_2$	$R_1^{\mathcal{I}} \subseteq R_2^{\mathcal{I}}$
EquivalentProperties($R_1 \ \ldots \ R_n$)	$R_1 \equiv \cdots \equiv R_n$	$R_1^{\mathcal{I}} = \cdots = R_n^{\mathcal{I}}$
ObjectProperty(R super(R_1) ... super(R_n)	$R \sqsubseteq R_i$	$R^{\mathcal{I}} \subseteq R_i^{\mathcal{I}}$
domain(C_1) ... domain(C_k)	$\exists R.\top \sqsubseteq C_i$	$R^{\mathcal{I}} \subseteq C_i^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$
range(C_1) ... range(C_h)	$\top \sqsubseteq \forall R.C_i$	$R^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times C_i^{\mathcal{I}}$
[InverseOf(S)]	$R \equiv S^-$	$R^{\mathcal{I}} = (S^-)^{\mathcal{I}}$
[Symmetric]	$R \equiv R^-$	$R^{\mathcal{I}} = (R^-)^{\mathcal{I}}$
[Functional]	$\top \sqsubseteq \leqslant 1R$	$\{\langle x, y\rangle \mid \sharp\{y.\langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}}\} \leq 1\}$
[InverseFunctional]	$\top \sqsubseteq \leqslant 1R^-$	$\{\langle x, y\rangle \mid \sharp\{y.\langle x, y\rangle \in (R^-)^{\mathcal{I}}\} \leq 1\}$
[Transitive])	$\mathsf{Trans}(R)$	$\{\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle\} \subseteq R^{\mathcal{I}} \rightarrow \langle x, z\rangle \in R^{\mathcal{I}}$
Individual(o type(C_1) ...type(C_n)	$o : C_i$	$o^{\mathcal{I}} \in C_i^{\mathcal{I}}, 1 \leq i \leq n$
value(R_1, o_1) ...value(R_n, o_n))	$(o, o_i) : R_i$	$\langle o^{\mathcal{I}}, o_i^{\mathcal{I}}\rangle \in R_i^{\mathcal{I}}, 1 \leq i \leq n$
Sameindividual($o_1 \ \ldots \ o_n$)	$o_1 = \cdots = o_n$	$o_1^{\mathcal{I}} = \cdots = o_n^{\mathcal{I}}$
DifferentIndividuals($o_1 \ \ldots \ o_n$)	$o_i \neq o_j$	$o_i^{\mathcal{I}} \neq o_j^{\mathcal{I}}, 1 \leq i < j \leq n$

συμμετρική, συναρτησιακή (αν $R(a, b)$ και $R(a, c)$ τότε $b = c$) ή αντίστροφη συναρτησιακή. Εκ πρώτης όψης φαίνεται τα αξιώματα αυτά να αποδίδουν στην OWL DL μεγαλύτερη εκφραστική δυνατότητα από αυτή που προφέρουν οι Περιγραφικές Λογικές. Παρατηρούμε όμως, από τη δεύτερη στήλη του Πίνακα 2.3, ότι τα αξιώματα αυτά δεν είναι τίποτα άλλο από *συντακτική ζάχαρη* (*syntactic sugar*) αξιωμάτων ΠΛ. Αποτελούν δηλαδή μια συντομογραφία για τη δήλωση κάποιων αξιωμάτων υπαγωγής, χωρίς να προσθέτουν κάτι στην εκφραστικότητα της γλώσσας. Ενώ όμως μια δήλωση της μορφής ObjectProperty(hasChild domain(Parent) range(Human)) είναι εύκολο να πραγματοποιηθεί από έναν χρήστη μη ειδικό στις Περιγραφικές Λογικές, οι αντίστοιχες δηλώσεις $\top \sqsubseteq \forall \mathsf{hasChild}.\mathsf{Human}$ και $\exists \mathsf{hasChild}.\top \sqsubseteq \mathsf{Parent}$ είναι αρκετά δύσκολο.

Λέμε ότι μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί μια οντολογία $\mathcal{O}$ αν ικανοποιεί κάθε αξίωμα A της $\mathcal{O}$. Τότε λέμε ότι η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο της $\mathcal{O}$. Επίσης μια οντολογία $\mathcal{O}_1$ συνεπάγεται λογικά μια οντολογία $\mathcal{O}_2$ ανν κάθε μοντέλο της $\mathcal{O}_1$ είναι και μοντέλο της $\mathcal{O}_2$.

Από τους παραπάνω πίνακες μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το λογικό υπόβαθρο της γλώσσας OWL DL είναι ουσιαστικά η γλώσσα $\mathcal{SHOIN}$. Όπως όμως αναφέραμε στην εισαγωγή, το πρότυπο της OWL ορίζει όμως ακόμα μια γλώσσα, την OWL Lite. Αντίθετα από την OWL DL η OWL Lite δεν παρέχει τους κατασκευαστές, intersectionOf, unionOf, complementOf, oneOf, hasValue, EnumeratedClasses και DisjointClasses. Τέλος περιορίζει τους περιορισμούς πληθυκότητας σε συναρτησιακούς, δηλαδή ο φυσικός αριθμός m, στον Πίνακα 2.2 μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 0 και 1. Εκ πρώτης όψης φαίνεται η γλώσσα OWL Lite να μην έχει μεγάλες εκφραστικές δυνατότητες. Έχει αποδειχθεί όμως ότι πολλοί από τους κατασκευαστές που απαγορεύει μπορούν να εκφραστούν από άλλους και τελικά η γλώσσα OWL Lite είναι ισοδύναμη της γλώσσας $\mathcal{SHIF}$, η οποία είναι μια αρκετά εκφραστική γλώσσα.

2.3 Ασαφής Συνολοθεωρία

Στην ενότητα αυτή θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία των *ασαφών συνόλων* (*fuzzy set theory*). Η ασαφής συνολοθεωρία είναι ευρέως διαδεδομένη μαθηματική

θεωρία η οποία αποβλέπει στη μοντελοποίηση και διαχείριση ασαφούς (vague) πληροφορίας και γνώσης [81]. Ενώ στην κλασική συνολοθεωρία ένα αντικείμενο είτε ανήκει είτε δεν ανήκει σε ένα σύνολο, στην ασαφή συνολοθεωρία ένα αντικείμενο μπορεί να ανήκει σε κάποιο βαθμό ο οποίος παίρνει τιμές από το διάστημα [0,1]. Έτσι λοιπόν ένα αντικείμενο μπορεί να ανήκει σε μεγάλο ή μικρό βαθμό σε ένα ασαφές σύνολο. Πιο συγκεκριμένα, έστω X μια συλλογή από αντικείμενα, $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Ένα υποσύνολο S του X αποτελείται από μια οποιαδήποτε συλλογή αντικειμένων του X, η οποία μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια της *χαρακτηριστικής συνάρτησης* (*characteristic function*) αυτού, $\chi_S(x)$. Η συνάρτηση αυτή αναθέτει σε κάθε αντικείμενο $x \in X$ την τιμή 1 ή την τιμή 0 αν αυτό το αντικείμενο ανήκει ή δεν ανήκει στο X, αντίστοιχα. Είναι δηλαδή της μορφής: $\chi_S : X \to \{0, 1\}$.
Από την άλλη μεριά, ένα ασαφές υποσύνολο A του X, ορίζεται από τη *συνάρτηση συμμετοχής* (*membership function*) $\mu_A(x)$, η απλώς $A(x)$, $x \in X$. Αυτή η συνάρτηση αντιστοιχεί σε κάθε αντικείμενο $x \in X$ μια τιμή ανάμεσα από τις τιμές 0 και 1 και αντιπροσωπεύει το βαθμό με τον οποίο το αντικείμενο ανήκει στο ασαφές υποσύνολο A. Η συνάρτηση αυτή, δηλαδή, έχει τη μορφή

$$A : X \to [0, 1].$$

Όπως παρατηρούμε αυτό το οποίο κάναμε είναι μια απλή επέκταση του συνόλου τιμών της χαρακτηριστικής συνάρτησης, πράγμα το οποίο είναι μαθηματικώς δυνατό και απλό. Αυτό όμως το οποίο έχουμε πετύχει εννοιολογικά, δηλαδή το νόημα και η σημασία των στοιχείων τα οποία ορίζονται από τις νέες συναρτήσεις, είναι να εισάγουμε μαθηματικά την έννοια της ασάφειας (fuzziness) και της ανακρίβειας (imprecision). Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να εργαστούμε και για τις σχέσεις, ορίζοντας τις ασαφείς σχέσεις. Πιο συγκεκριμένα, μια ασαφής σχέση βαθμού n, ορίζεται από μια συνάρτηση της μορφής:

$$R : \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n-\varphi o\rho \acute{\varepsilon}\varsigma} \to [0, 1],$$

η οποία αντιστοιχεί μια πλειάδα $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in X \times \ldots \times X$ στο βαθμό συμμετοχής της πλειάδας στην ασαφή σχέση R.

2.3.1 Τελεστές Ασαφούς Συνολοθεωρίας

Στην τρέχουσα ενότητα θα κάνουμε μια σύντομη παρουσίαση των τελεστών της ασαφούς συνολοθεωρίας οι οποίοι χρησιμοποιούνται για την τέλεση των συνολοθεωρητικών πράξεων του συμπληρώματος, της ένωσης και της τομής. Εφόσον καλούμαστε να διαχειριστούμε βαθμούς συμμετοχής είναι λογικό οι πράξεις αυτές να τελούνται με τη χρήση μαθηματικών συναρτήσεων μιας η περισσοτέρων μεταβλητών. Οι τελεστές αυτοί ονομάζονται *νόρμες* (*norm*) [78] και ανάλογα με την πράξη την οποία αντιπροσωπεύουν έχουν και διαφορετικές ιδιότητες.

Ένα *ασαφές συμπλήρωμα* ή *ασαφής άρνηση* c (*fuzzy complement* ή *fuzzy negation*) πραγματοποιείται από μια συνάρτηση μιας μεταβλητής της μορφής $c : [0, 1] \to [0, 1]$. Προκειμένου να δημιουργήσουμε διαισθητικά ορθά ασαφή συμπληρώματα οι συναρτήσεις αυτές πρέπει να ικανοποιούν κάποιες συνθήκες. Πιο συγκεκριμένα πρέπει να ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες,

- *οριακές συνθήκες* (*boundary conditions*): $c(0) = 1$ και $c(1) = 0$,

- *γνησίως φθίνουσες* (*monotonic decreasing*): για κάθε $a \leq b$, $c(a) \geq c(b)$.

Πολλές φορές επιβάλλονται κάποιες επιπλέον συνθήκες. Πιο συγκεκριμένα ένα ασαφές συμπλήρωμα μπορεί να είναι *συνεχές* (*continuous*) και *ενειλικτικό* (*involutive*), για κάθε $a \in [0,1]$ $c(c(a)) = a$. Τα περισσότερα από τα ασαφή συμπληρώματα που χρησιμοποιούνται σήμερα σε εφαρμογές ικανοποιούν τις συνθήκες αυτές, όπως είναι για παράδειγμα το συμπλήρωμα Lukasiewicz, $c_L(a) = 1-a$, η οικογένεια συμπληρωμάτων Sugeno, $c_S(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a}$, $\lambda \in (-1,\infty)$ και η οικογένεια Yager, $c_Y(a) = (1-a^w)^{1/w}$, $w \in (0,\infty)$. Ένα μη-ενειλικτικό και ασυνεχές συμπλήρωμα το οποίο έχει μελετηθεί στη βιβλιογραφία είναι το συμπλήρωμα Gödel το οποίο ορίζεται ως, $c_G(a) = 0$ αν $a > 0$, αλλιώς $c_G(0) = 1$.

Ο τελεστής της *ασαφούς τομής* (*fuzzy intersection*) πραγματοποιείται από μια δυαδική συνάρτηση της μορφής $t : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, η οποία ονομάζεται τριγωνική νόρμα ή απλά *τ-νόρμα* (*t-norm*) [78]. Παρόμοια με τα ασαφή συμπληρώματα οι τελεστές αυτοί πρέπει να έχουν κάποιες ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα οι συναρτήσεις αυτές πρέπει να ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες,

- *οριακή συνθήκη* (*boundary condition*): $t(a,1) = a$,
- *γνησίως αύξουσες* (*monotonic increasing*): για $b \leq d$ τότε $t(a,b) \leq t(a,d)$,
- *αντιμεταθετική ιδιότητα* (*commutative*): $t(a,b) = t(b,a)$ και
- *προσεταιριστική ιδιότητα* (*associative*): $t(a,t(b,c)) = t(t(a,b),c)$.

Συνήθως, οι τ-νόρμες είναι επίσης συνεχείς και *υπο-ταυτοδύναμες* (*subidempotent*), δηλαδή $t(a,a) < a$, για $a \in (0,1)$. Οι τ-νόρμες που έχουν τις ιδιότητες αυτές ονομάζονται *Αρχιμήδειες* (*Archimedean*) τ-νόρμες. Η μοναδική *ταυτοδύναμη* (*idempotent*) τ-νόρμα είναι η τ-νόρμα του Gödel που ορίζεται από την εξίσωση, $t_G(a,b) = \min(a,b)$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι για κάθε τ-νόρμα t ισχύει ότι, $a, b \geq t(a,b)$, και $t(a,0) = 0$. Συνήθεις Αρχιμήδειες τ-νόρμες είναι η νόρμα Lukasiewicz $t_L(a,b) = \max(0, a+b-1)$, και η νόρμα του γινομένου (product) $t_P(a,b) = a \cdot b$.

Ο τελεστής της *ασαφούς ένωσης* (*fuzzy union*) πραγματοποιείται από μια δυαδική συνάρτηση της μορφής $u : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, η οποία ονομάζεται τριγωνική κονόρμα ή *σ-νόρμα* (t-conorm ή *s-norm*) [78]. Παρόμοια με τους προηγούμενους τελεστές οι σ-νόρμες πρέπει να ικανοποιούν την οριακή συνθήκη, $u(a,0) = a$, να είναι γνησίως αύξουσες, αντιμεταθετικές, και προσεταιριστικές. Συνήθως, οι σ-νόρμες είναι επίσης συνεχείς και *υπερ-ταυτοδύναμες* (*superidempotent*), δηλαδή $u(a,a) > a$, για $a \in (0,1)$. Οι σ-νόρμες που έχουν τις ιδιότητες αυτές ονομάζονται *Αρχιμήδειες* (*Archimedean*) σ-νόρμες. Η μοναδική ταυτοδύναμη σ-νόρμα είναι η σ-νόρμα του Gödel που ορίζεται από τη σχέση, $u_G(a,b) = \max(a,b)$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι για κάθε σ-νόρμα u ισχύει ότι, $u(a,b) \geq a, b$, και $u(a,1) = 1$. Συνήθεις Αρχιμήδειες σ-νόρμες είναι η νόρμα Lukasiewicz $u_L(a,b) = \min(1, a+b)$, και η νόρμα του *πιθανοκρατικού αθροίσματος* (*probabilistic sum*) $u_P(a,b) = a + b - a \cdot b$. Τέλος, υπενθυμίζουμε την παρακάτω ιδιότητα του τελεστή max την οποία και θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια της αναφοράς.

Λήμμα 2.3.1 *[81, 53] Έστω $a, b, c \in [0,1]$, όπου το j παίρνει τιμές από το σύνολο δεικτών J, τότε ο τελεστής* max *ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα:*

- $\inf_{j \in J} \max(a, b_j) = \max(a, \inf_{j \in J} b_j)$.

Για μια πολύ καλή εισαγωγή στις τ- και σ-νόρμες ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [81] και [78]. Επίσης στο [79] μπορούν να βρεθούν αλγεβρικοί τρόποι κατασκευής τ- και σ-νορμών.

2.3.2 Ιδιότητες Ασαφών Σχέσεων

Τέλος, ας μελετήσουμε ιδιότητες των ασαφών σχέσεων. Μια ασαφής σχέση R ορισμένη στο σύνολο $X \times X$ ονομάζεται $\sup - t$ *μεταβατική*, η απλά *μεταβατική* αν $\forall a, b \in X, R(a,c) \geq \sup_{b \in X}\{t(R(a,b), R(b,c))\}$. Επίσης, η R ονομάζεται *συμμετρική* (*symmetric*) αν $\forall a, b \in X, R(a,b) = R(b,a)$, ενώ ονομάζεται *αντί-συμμετρική* (*anti-symmetric*) αν $\forall a, b \in X, R(a,b) \neq R(b,a)$.[4] Επιπρόσθετα, η R ονομάζεται *ανακλαστική* (*reflexive*) αν $\forall a \in X, R(a,a) = 1$, ενώ ονομάζεται *μη-ανακλαστικός* (*irreflexive*) αν $\forall a \in X, R(a,a) = 0$.[5] Στην ασαφή συνολοθεωρία μπορούμε να δηλώσουμε μια πιο ασθενή έννοια της ανακλαστικότητας, η οποία ονομάζεται ε-ανακλαστικότητα. Η, R ονομάζεται *ε-ανακλαστική* (*ε-irreflexive*) αν $\forall a \in X, R(a,a) \geq \epsilon$. Η αντίστροφη μιας ασαφής σχέσης $R : X \times Y \to [0,1]$ είναι η ασαφής σχέση $R^- : Y \times X \to [0,1]$ η οποία ορίζεται ως $R^-(b,a) = R(a,b), \forall a, b \in X$. Τέλος, δοθέντων δυο ασαφών σχέσεων $R_1 : X \times Y \to [0,1]$ και $R_2 : Y \times Z \to [0,1]$ ορίζουμε την $\sup - t$ *σύνθεση* ($\sup - t$ *composition*) των σχέσεων ως, $[R_1 \circ^t R_2](a,c) = \sup_{b \in Y}\{t(R(a,b), R(b,c))\}$. Ο τελεστής της $\sup - t$ σύνθεσης ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$
\begin{aligned}
(R_1 \circ^t R_2) \circ^t R_3 &= R_1 \circ^t (R_2 \circ^t R_3), \\
(R_1 \circ^t R_2)^- &= (R_2^- \circ^t R_1^-)
\end{aligned}
$$

Λόγω της ιδιότητας της προσεταιριστικότητας μπορούμε να επεκτείνουμε τον τελεστή της $\sup - t$ σύνθεσης σε οποιοδήποτε αριθμό από ασαφείς σχέσεις. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε πιο απλά $[R_1 \circ^t R_2 \circ^t \ldots \circ^t R_n](a,b)$.

2.4 Ασαφής Λογική

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε μια πολύ σύντομη εισαγωγή στην *ασαφή λογική* (*fuzzy logic*). Τα τελευταία χρόνια και ιδιαίτερα μετά από τις εργασίες του Petr Hajek στο [53] έχει παρατηρηθεί μια ραγδαία ανάπτυξη της (μαθηματικής) ασαφούς λογικής. Αντίθετα με τα παλαιότερα χρόνια όπου η ασαφής λογική ήταν συνυφασμένη με μη τυπικές και περισσότερο αλγοριθμικές μεθόδους οι οποίες χρησιμοποιούντο σε εφαρμογές ελέγχου (control), στις μέρες μας έχουν αναπτυχθεί τυπικά συστήματα των οποίων οι μετα-μαθηματικές ιδιότητες έχουν μελετηθεί. Προτού προχωρήσουμε στον τυπικό ορισμό των ασαφών λογικών θα πρέπει να ορίσουμε και τον τελεστή που έχει εξέχοντα ρόλο στη λογική και κατά συνέπεια και στην ασαφή λογική. Ο τελεστής αυτός δεν είναι άλλος από τον τελεστή της ασαφούς συνεπαγωγής.

Η πράξη της *ασαφούς συνεπαγωγής* (*fuzzy implication*) πραγματοποιείται από μια δυαδική πράξη της μορφής, $\mathcal{J} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$. Στην περίπτωση των ασαφών συνεπαγωγών μπορούμε να διακρείνουμε δυο κατηγορίες τελεστών οι οποίες

[4] Παρακαλώ παρατηρήσετε ότι κανονικά η σωστή ονομασία της ιδιότητας αυτής είναι ασυμμετρικότητα, αλλά για να είμαστε ευθυγραμμισμένοι με το πρότυπο OWL 1.1 που θα δούμε στο κεφάλαιο 7 την ονομάζουμε αντί-συμμετρικότητα

[5] Για ακόμα μια φορά στα περισσότερα βιβλία ασαφούς συνολοθεωρίας η ιδιότητα αυτή ονομάζεται αντι-ανακλαστικότητα. Και πάλι όμως λόγω του προτύπου OWL 1.1 την ονομάζουμε μη-ανακλαστικότητα.

διαφέρουν σε σημαντικά σημεία. Η πρώτη κατηγορία τελεστών προκύπτει από την ασαφοποίηση της λογικής πρότασης $\neg a \vee b$ η οποία στη λογική Boole ορίζει την πράξη της συνεπαγωγής. Συνεπώς, αν χρησιμοποιήσουμε μια ασαφή ένωση και ένα ασαφές συμπλήρωμα στη θέση των τελεστών της ένωσης ($\vee$) και του συμπληρώματος ($\neg$) παίρνουμε την κατηγορία των *S-συνεπαγωγών*, η οποία ορίζεται από την εξίσωση, $\mathcal{J}_S(a,b) = u(c(a),b)$ [81]. Η δεύτερη κατηγορία προκύπτει από την ασαφοποίηση της πρότασης $\max\{x \in [0,1] \mid a \wedge x \leq b\}$, η οποία και αποτελεί έναν εναλλακτικό τρόπο αναπαράστασης της πράξης της συνεπαγωγής στην κλασική λογική. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας μια ασαφή τομή και επεκτείνωντας την πράξη max στην πιο γενικευμένη πράξη του supremum (sup) λαμβάνουμε την κατηγορία των *R-συνεπαγωγών*, η οποία δίνεται από τη σχέση, $\mathcal{J}_R(a,b) = \sup\{x \in [0,1] \mid t(a,x) \leq b\}$ [81]. Η πράξη αυτή αναφέρεται αρκετές φορές και ως τελεστής ω_t, όπου t αντιπροσωπεύει την τ-νόρμα που χρησιμοποιείται στον ορισμό του τελεστή.

Οι ασαφείς συνεπαγωγές που είδαμε είναι γνησίως φθίνουσες (αύξουσες) στο πρώτο (δεύτερο) όρισμα. Πέραν όμως από την ομοιότητά τους αυτή υπάρχουν αρκετά σημαντικά σημεία στα οποία διαφέρουν. Πρώτιστα, για όλες τις R-συνεπαγωγές ισχύει ότι, $\mathcal{J}_R(a,b) = 1$ ανν $a \leq b$ [53]. Επίσης ισχύει η ιδιότητα, $\mathcal{J}_R(a,b) \geq c$ ανν $t(a,c) \leq b$, όπου t είναι η ίδια τ-νόρμα που χρησιμοποιείται για τον ορισμό της $\mathcal{J}_R$. Αυτό σημαίνει ότι οι τλεστές $\mathcal{J}_R$ και t είναι *παρακείμενοι* (*adjoint*). Λόγω των παραπάνω ιδιοτήτων, οι R-συνεπαγωγές προσφέρουν μια *φυσική* (*natural*) επέκταση του κλασσικού κανόνα modus ponens [94]. Πιο συγκεκριμένα αν $A \rightarrow B \geq n_1$ και $A \geq n_2$, τότε έχουμε ότι $B \geq t(n_1,n_2)$ όπου t είναι ο adjoint τελεστής της ασαφής συνεπαγωγής ($\rightarrow$). Επιπρόσθετα, για τις R-συνεπαγωγές ισχύει η παρακάτω ιδιότητα, την οποία και θα χρησιμοποιήσουμε στις αποδείξεις αρκετών θεωρημάτων στα κεφάλαια που ακολουθούν:

Λήμμα 2.4.1 *[81, 53] Έστω $a,b,c \in [0,1]$. Τότε ο τελεστής οι R-συνεπαγωγές και οι τ-νόρμες ικανοποιούν την παρακάτω ιδιότητα:*

- $\mathcal{J}_R(t(a,b),c) = \mathcal{J}_R(a,\mathcal{J}_R(b,c))$.

Το συμπέρασμα που προκύπτει, λοιπόν, είναι ότι οι S- και οι R-λογικές εμφανίζουν αρκετά διαφορετικές ιδιότητες [77]. Συνήθεις R-συνεπαγωγές είναι η συνεπαγωγή Lukasiewicz, $\mathcal{J}_L(a,b) = \min(1, 1-a+b)$, η συνεπαγωγή Gödel, $\mathcal{J}_G(a,b) = b$, αν $a > b$, $\mathcal{J}_G(a,b) = 1$ διαφορετικά, και η συνεπαγωγή Goguen, $\mathcal{J}_P(a,b) = a/b$, αν $a > b$, $\mathcal{J}_P(a,b) = 1$ διαφορετικά, ενώ από τις S-συνεπαγωγές, η συνεπαγωγή Kleene-Dienes, $\mathcal{J}_{KD}(a,b) = \max(1-a,b)$ και η συνεπαγωγή Reichenbach, $\mathcal{J}_R(a,b) = 1-a+ab$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η συνεπαγωγής Lukasiewicz είναι ταυτόχρονα και R και S-συνεπαγωγή [81].

Είναι πολύ σημαντικό να σημειώσουμε ότι μια R-συνεπαγωγή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να οριστεί ένα ασαφές συμπλήρωμα. Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε, $c(a) = \mathcal{J}_R(a,0)$. Τότε το c ονομάζεται το *προσυμπλήρωμα* (*precomplement*) της R-συνεπαγωγής $\mathcal{J}_R$ [53]. Για παράδειγμα, το προσυμπλήρωμα της συνεπαγωγής Lukasiewicz είναι το, $c(a) = \min(1, 1-a+0) = 1-a, a \in [0,1]$, το οποίο ουσιαστικά είναι η άρνηση Lukasiewicz, ενώ το προσυμπλήρωμα της συνεπαγωγής του Gödel είναι το, $c(a) = 0$, αν $a > 0$, αλλιώς $c(0) = 1$, αφού $0 \leq 0$ και άρα, $\mathcal{J}_G(0,0) = 1$. Πολύ καλές πηγές για τις ασαφείς συνεπαγωγές αποτελούν τα [81] και [114], ενώ πολλές από τις ιδιότητες που αναφέραμε αποδεικνύονται στο [53]

Όπως λοιπόν γίνεται προφανές από την παραπάνω παρουσίαση, για να ορίσουμε μια ασαφή λογική χρειαζόμαστε να ορίσουμε τους ασαφής τελεστές, c, t, u και $\mathcal{J}$ που θα χρησιμοποιήσουμε στη συγκεκριμένη εφαρμογή. Συνεπώς, υπάρχουν περισσότερες από μια ασαφής λογικές ακόμα και για το ίδιο σύνολο κατασκευαστών. Αυτό συμβαίνει γιατί υπάρχουν περισσότεροι από ένας τρόπος να *χαλαρώσουμε* τις ιδιότητες της άλγεβρας Boole και λογικής. Μια τέτοια συλλογή τελεστών αναφέρεται συνήθως ως *ασαφής τετράδα* (*fuzzy quadruple*), $\langle c, t, u, \mathcal{J}\rangle$, ή *ασαφής τριάδα* (*fuzzy triple*) στην περίπτωση που έχουμε μόνο τους τελεστές $\langle c, t, u\rangle$. Για παράδειγμα έχουμε την τετράδα που ορίζει τη λογική Lukasiewicz, $\langle c_L, u_L, t_L, \mathcal{J}_L\rangle$, τη λογική Gödel, $\langle c_G, u_G, t_G, \mathcal{J}_G\rangle$, τη λογική του γινομένου (product logic), $\langle c_G, u_P, t_P, \mathcal{J}_P\rangle$ και τη λογική του Zadeh, $\langle c_L, u_G, t_G, \mathcal{J}_{KD}\rangle$.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη σύνταξη και τη σημασιολογία της ασαφούς κατηγορηματικής λογικής Πρώτης-Τάξης. Υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης διαθέτει μια μικρή εμπειρία με την κλασική λογική Πρώτης-Τάξης.

2.4.1 R-ασαφείς λογικές

Ορισμός 2.4.2 *Μια γλώσσα R-ασαφούς κατηγορηματικής λογικής Πρώτης-Τάξης αποτελείται από ένα μη-κενό σύνολο* κατηγορημάτων *(*predicates*), όπου κάθε ένα σχετίζεται με ένα θετικό φυσικό αριθμό που υποδεικνύει το βαθμό (arity) του κατηγορήματος, ένα πιθανά κενό σύνολο* σταθερών *(*constants*), ένα μη-κενό σύνολο από* μεταβλητές, *το σύνολο των* λογικών τελεστών *(*logical connectives*)* $\{\&, \to\}$, *από ένα μη-κενό σύνολο* σταθερών αληθείας *(*truth constants*)* $\bar{r}$ *για κάθε ρητό αριθμό* $r \in [0,1]$ *και τέλος από το σύνολο των* ποσοδεικτών *(*quantifiers*)* $\{\exists, \forall\}$. *Τα κατηγορήματα υποδεικνύονται από τα κεφαλαία γράμματα* $P, Q, R, ...$, *οι σταθερές από τα μικρά γράμματα από τα αρχικά του λατινικού αλφαβήτου* $c, d, ...$ *ενώ οι μεταβλητές από μικρά γράμματα από τα τελευταία του λατινικού αλφαβήτου* $x, y, ...,$.

Ως όρους *(*terms*) ορίζουμε το σύνολο των σταθερών και των μεταβλητών. Οι* ατομικές φόρμουλες *(*atomic formulas*) έχουν τη μορφή* $P(t_1, ..., t_n)$, *όπου* P *είναι ένα κατηγόρημα βαθμού* n *και* $t_1, ..., t_n$ *είναι όροι. Οι φόρμουλες μιας R-ασαφούς κατηγορηματικής λογικής Πρώτης-Τάξης ορίζονται επαγωγικά ως εξής:*

- *Κάθε ατομική φόρμουλα* $P(t_1, ..., t_n)$ *είναι μια φόρμουλα.*
- *Αν* ϕ, ψ *είναι φόρμουλες και* x *είναι μια μεταβλητή τότε και οι* $\phi \to \psi, \phi\&\psi, (\exists x)\phi, (\forall x)\phi$ *είναι επίσης φόρμουλες.*
- *Αν* r *είναι ένας ρητός αριθμός από το διάστημα* $[0,1]$, *τότε και η* $\bar{r}$ *είναι φόρμουλα.*

Οι υπόλοιποι τελεστές που λείπουν από τον παραπάνω ορισμό, όπως είναι η άρνηση, η ισοδυναμία ανάμεσα σε φόρμουλες και η ένωση συνήθως ορίζονται με τη χρήση των παραπάνω τελεστών ως εξής:

$$\begin{aligned} \neg\phi &= \phi \to \bar{0} \\ \phi \equiv \psi &= (\phi \to \psi)\&(\psi \to \phi) \\ \phi \vee \psi &= \neg(\neg\phi\&\neg\psi) \end{aligned}$$

Ορισμός 2.4.3 *Όπως και στην κλασική κατηγορηματική λογική Πρώτης-Τάξης έτσι και στην ασαφή, η ερμηνεία της γλώσσας δίνεται από τις επονομαζόμενες* δομές Πρώτης-Τάξης *(*First-Order structures*). Μια δομή ορίζεται από μια τριάδα* $\boldsymbol{M} = \langle M, (r_P)_P, (m_c)_c\rangle$, *όπου* M *είναι ένα μη-κενό σύνολο αντικειμένων που ονομάζεται* *χώρος ερμηνείας (*domain of interpretation*). Στη συνέχεια αντιστοιχούμε κάθε σαθερά c, σε ένα αντικείμενο $m_c \in M$ και κάθε κατηγόρημα n-οστού βαθμού P σε μια ασαφή σχέση n-οστού βαθμού $r_P : M^n \to [0,1]$, η οποία διαισθητικά αντιστοιχεί κάθε πλειάδα από n αντικείμενα του M, $(m_1, ..., m_n)$, στο βαθμό συμμετοχής της πλειάδας αυτής στην ασαφή σχέση r_P, δηλαδή το βαθμό $r_P(m_1, ..., m_n) \in [0,1]$.*

Το τελευταίο βήμα για την ερμηνεία μιας γλώσσας Πρώτης-Τάξης είναι ο ορισμός των *εκτιμήσεων* (*valuations*) αλλά και των τιμών αληθείας μιας σύνθετης φόρμουλας από τις επιμέρους φόρμουλες. Οι εκτιμήσεις χρησιμοποιούνται για την αντιστοίχηση των μεταβλητών σε αντικείμενα του M.

Ορισμός 2.4.4 *Έστω $\boldsymbol{M}$ μια δομή. Μια $\boldsymbol{M}$-*εκτίμηση *(*$\boldsymbol{M}$-valuation*) μεταβλητών είναι μια απεικόνιση u η οποία αντιστοιχεί κάθε μεταβλητή x σε ένα αντικείμενο $u(x) \in M$. Έστω u' μια εκτίμηση. Τότε με $u \equiv_x u'$ συμβολίζουμε τη νέα εκτίμηση u η οποία αντιστοιχεί με τον ίδιο τρόπο με την u' όλες τις μεταβλητές, εκτός από τη μεταβλητή x. Η ερμηνεία ενός όρου με βάση τα $\boldsymbol{M}$, u ορίζεται ως εξής: $\|x\|_{\boldsymbol{M},u} = u(x)$, $\|c\|_{\boldsymbol{M},u} = m_c$. Τέλος ορίζουμε το* βαθμό αληθείας *(*truth value*) $\|\phi\|_{\boldsymbol{M},u}$ μιας φόρμουλας ως εξής:*

$$\begin{aligned}
\|P(t_1, ..., t_n)\|_{\boldsymbol{M},u} &= r_P(\|t_1\|_{\boldsymbol{M},u}, ..., \|t_n\|_{\boldsymbol{M},u}), \\
\|\bar{r}\|_{\boldsymbol{M},u} &= r, \\
\|\phi \& \psi\|_{\boldsymbol{M},u} &= t(\|\phi\|_{\boldsymbol{M},u}, \|\psi\|_{\boldsymbol{M},u}), \\
\|\phi \to \psi\|_{\boldsymbol{M},u} &= \mathcal{J}_R(\|\phi\|_{\boldsymbol{M},u}, \|\psi\|_{\boldsymbol{M},u}), \\
\|(\exists x)\phi\|_{\boldsymbol{M},u} &= \sup\{\|\phi\|_{\boldsymbol{M},u'} | u \equiv_x u'\}, \\
\|(\forall x)\phi\|_{\boldsymbol{M},u} &= \inf\{\|\phi\|_{\boldsymbol{M},u'} | u \equiv_x u'\}
\end{aligned}$$

Όπως παρατηρούμε στις R-ασαφείς λογικές τα βασικά στοιχεία είναι οι τ-νόρμες και οι R-συνεπαγωγές. Ως συμπλήρωμα στις λογικές αυτές λαμβάνουμε το προσυμπλήρωμα της R-συνεπαγωγής, δηλαδή ορίζουμε $c(a) = \mathcal{J}_R(a, 0)$. Οι πιο δημοφιλείς R-ασαφείς λογικές είναι η λογική του Lukasiewicz, που ορίζεται από την τ-νόρμα και την R-συνεπαγωγή του Lukasiewicz. Από τους τελεστές αυτούς μπορούμε να ορίσουμε την άρνηση αλλά και την σ-νόρμα του Lukasiewicz. Επίσης η λογική του Gödel, στην οποία χρησιμοποιείται η τ-νόρμα και η ασαφής συνεπαγωγή του Gödel. Το προσυμπλήρωμα της συνεπαγωγής αυτής είναι το συμπλήρωμα του Gödel ενώ η ένωση δίνεται επίσης από την σ-νόρμα του Gödel. Τέλος, μια ακόμα λογική είναι η λογική του γινομένου, η οποία ορίζεται από την τ-νόρμα του γινομένου και την R-συνεπαγωγή του Goguen. Το προσυμπλήρωμα της συνεπαγωγής αυτής είναι για ακόμα μια φορά το συμπλήρωμα του Gödel, ενώ η σ-νόρμα που προκύπτει είναι η σ-νόρμα του πιθανοκρατικού αθροίσματος. Ο αναγνώστης που διαθέτει το απαιτούμενο μαθηματικό υπόβαθρο παραπέμπεται στο [53] για μια λεπτομερή παρουσίαση αξιωματικών συστημάτων των λογικών αυτών, των μετα-μαθηματικών ιδιοτήτων τους, όπως είναι η *ορθότητα* (*soundness*), η *πληρότητά* (*completeness*) και η *συμπάγεια* (*compactness*) αλλά και των αλγεβρικών ιδιοτήτων της θεωρίας μοντέλων τους.

2.4.2 S-ασαφείς λογικές

Η πρώτη τυπική μελέτη για τις S-ασαφείς λογικές, δηλαδή παρουσίαση τυπικής σύνταξης, ανάπτυξη αξιωματικών συστημάτων, σημασιολογία και μελέτη των ιδιοτήτων τους όπως η ορθότητα, η πληρότητα και η συμπάγεια, παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στο [25]. Η γλώσσα των S-ασαφών Λογικών-Πρώτης τάξης ορίζεται ακριβώς όπως και αυτή των R-ασαφών λογικών με τη μόνη διαφορά ότι αντί για να θεωρήσουμε τον τελεστή $\rightarrow$ ως βασικό τελεστή της γλώσσας, θεωρούμε τον τελεστή $\neg$. Συνεπώς, ορίζουμε ότι αν ϕ είναι μια φόρμουλα, τότε και η $\neg\phi$ είναι επίσης φόρμουλα. Στην περίπτωση αυτή η πράξη της συνεπαγωγής ορίζεται από τη φόρμουλα $\phi \rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$, όπου $\vee$ είναι η ένωση που ορίζεται όπως και προηγουμένως και που όπως είδαμε και στην παρουσίασή μας στις ασαφείς συνεπαγωγές είναι ακριβώς ο τρόπος με τον οποίο ορίζονται οι S-συνεπαγωγές. Τέλος στον ορισμό 3.1 για τους βαθμούς αληθείας αφαιρούμε την σχέση που δίνει τη σημασιολογία της φόρμουλας $\phi \rightarrow \psi$ προσθέτοντας τη σχέση $\|\neg\phi\|_{\mathbf{M},u} = c(\|\phi\|_{\mathbf{M},u})$.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα διάφορα ασαφή συμπληρώματα και τ-νόρμες λαμβάνουμε τα διαφορετικά είδη S-ασαφών λογικών. Πιο συγκεκριμένα από το συμπλήρωμα Lukasiewicz και την τ-νόρμα του Gödel παίρνουμε την σ-νόρμα του Gödel και την S-συνεπαγωγή του Kleene-Dienes. Η λογική που προκύπτει ονομάζεται min-max fuzzy logic. Επιπλέον, από το συμπλήρωμα και την τ-νόρμα του Lukasiewicz παίρνουμε την σ-νόρμα αλλά και την S-συνεπαγωγή του Lukasiewicz. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η S-ασαφής λογική του Lukasiewicz είναι ακριβώς η ίδια με την R-ασαφή λογική του Lukasiewicz. Τέλος, από το συμπλήρωμα του Lukasiewicz και την τ-νόρμα του γινομένου παίρνουμε την σ-νόρμα του πιθανοκρατικού αθροίσματος και την S-συνεπαγωγή του Reichenbach.

Σε αυτό το σημείο ολοκληρώνουμε την παρουσίασή μας για τις ασαφείς λογικές. Αξίζει να σημειώσουμε ότι και οι ασαφείς προτασιακές λογικές έχουν επίσης μελετηθεί στη βιβλιογραφία. Μια λεπτομερής παρουσίαση των R-ασαφών προτασιακών λογικών γίνεται στο [53], ενώ μια σύγκριση ανάμεσα στις R- και τις S-ασαφείς προτασιακές λογικές γίνεται στο [77].

Κεφάλαιο 3

Εκφραστικές Ασαφείς Περιγραφικές Λογικές

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε και θα μελετήσουμε την ασαφή επέκταση της ΠΛ $\mathcal{SHOIN}$ δηλαδή την ασαφή γλώσσα fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$ (f-$\mathcal{SHOIN}$). Ο ρόλος του κεφαλαίου αυτού είναι διττός. Αφενός η σύνταξη, η σημασιολογία και οι υπηρεσίες συλλογιστικής της fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$ έχουν παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία από τον Straccia [137]. Έτσι λοιπόν το κεφάλαιο αυτό αποτελεί κατά ένα μέρος εισαγωγή στη γλώσσα f-$\mathcal{SHOIN}$, η οποία όμως είναι αρκετά σημαντική καθώς είναι μια από τις βασικές γλώσσες που θα ασχοληθούμε στη συνέχεια της διατριβής. Για το λόγο αυτό αφιερώνουμε ένα ολόκληρο κεφάλαιο σε αυτήν. Παρόλα αυτά, όμως, πρέπει να επισημάνουμε ότι σε μερικά σημεία η παρουσίασή μας διαφέρει ελάχιστα από αυτή που γίνεται στο [137], όπως είναι η σημασιολογία των αξιωμάτων υπαγωγής εννοιών και ρόλων, η σημασιολογία των περιορισμών πληθυκότητας η οποία βασίζεται στις επεκτάσεις που παρουσιάστηκαν στο [126] αλλά και η σημασιολογία των ονοματικών εννοιών.

Εκτός από την εισαγωγή στη σύνταξη και τη σημασιολογία της f-$\mathcal{SHOIN}$, παρουσιάζουμε και δική μας συνεισφορά η οποία σχετίζεται με γενικά θέματα της γλώσσας αυτής αλλά και γενικότερα των ασαφών ΠΛ. Πιο συγκεκριμένα, μελετάμε τη σημασιολογία τους και αποδεικνύουμε ότι οι ασαφείς ΠΛ αποτελούν ορθές επεκτάσεις των κλασικών ΠΛ, δηλαδή στις ακραίες τιμές 0 και 1 η σημασιολογία των ασαφών ΠΛ ταυτίζεται με αυτή των κλασικών ΠΛ. Στη συνέχεια μελετάμε ιδιότητες που ισχύουν στην κλασική λογική του Boole, όπως είναι οι νόμοι του αποκλειόμενου μέσου και της αντίφασης, στο πεδίο της ασαφούς λογικής και των ασαφών ΠΛ. Όπως είναι προφανές οι ιδιότητες αυτές τις περισσότερες περιπτώσεις δεν ικανοποιούνται από την άλγεβρα των ασαφών συνόλων. Έτσι λοιπόν, στη μελέτη μας αυτή προτείνουμε έναν πρωτότυπο τρόπο με τον οποίο μπορούμε να αντιληφθούμε και να ερμηνεύσουμε τους κανόνες αυτούς στο πεδίο των ασαφών συνόλων και παρέχουμε την αντίστοιχη απόδειξη. Θα λέγαμε δηλαδή ότι παρέχουμε έναν ασαφή νόμο του αποκλειόμενου μέσου και του νόμου της αντίφασης. Τα αποτελέσματα αυτά αποδείχτηκαν πολύ σημαντικά καθώς στη συνέχεια είναι δυνατό να τα χρησιμοποιήσουμε για να επιλύσουμε το πρόβλημα της διαχείρισης γενικευμένων και κυκλικών ορολογιών στις ασαφείς ΠΛ, το οποίο ήταν ένα ανοικτό πρόβλημα για πολλά χρόνια. Επιπρόσθετα στο Κεφάλαιο 5 θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τα αποτελέσματα αυτά για να μελετήσουμε την έννοια των ξένων ασαφών εννοιών και συνόλων, η οποία, από όσο γνωρίζουμε, δεν είναι ορισμένη στην ασαφή συνολοθεωρία.

Το κεφάλαιο αυτό οργανώνεται ως εξής. Στην ενότητα 3.1 παρουσιάζουμε τη σύνταξη, τη σημασιολογία και τις ιδιότητες των ασαφών ερμηνειών της γλώσσας f-$\mathcal{SHOIN}$. Στην ενότητα 3.2 παρουσιάζουμε ισοδυναμίες εννοιών που ισχύουν στις ασαφείς ΠΛ ανάλογα με το σύνολο των ασαφών τελεστών που χρησιμοποιούμε κάθε φορά. Στην ενότητα 3.3 παρουσιάζουμε τα προβλήματα συλλογιστικής των ασαφών ΠΛ αλλά και τη συνεισφορά μας για τα γενικευμένα και κυκλικά αξιώματα. Τέλος, στην ενότητα 3.4 εισάγουμε την έννοια των μοντέλων με μαρτυρία η οποία είναι σημαντική για το υπόλοιπο της διατριβής.

3.1 Σύνταξη και Σημασιολογία της f-$\mathcal{SHOIN}$

Όπως στις κλασικές, έτσι και στις ασαφείς ΠΛ ορίζουμε αρχικά ένα αλφάβητο από ατομικές ασαφείς έννοιες ($\mathbf{C}$), ατομικούς ασαφείς ρόλους ($\mathbf{R}$) και άτομα ($\mathbf{I}$). Οι f-$\mathcal{SHOIN}$-έννοιες και ρόλοι ορίζονται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο με τον οποίο ορίζονται και οι $\mathcal{SHOIN}$-έννοιες και ρόλοι, δηλαδή χρησιμοποιώντας τον επαγωγικό ορισμό 2.1.1. Αυτό συμβαίνει διότι οι επεκτάσεις που επιβάλλουμε στη γλώσσα $\mathcal{SHOIN}$ αναφέρονται στο βαθμό συμμετοχής ενός ατόμου σε μια κλάση, άρα στο επίπεδο των ισχυρισμών, και όχι στο επίπεδο των κλάσεων και των ρόλων.

Παρόλο που ο ορισμός των $\mathcal{SHOIN}$-εννοιών και ρόλων είναι ο ίδιος με αυτών των fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$-εννοιών και ρόλων η σημασιολογία της γλώσσας f-$\mathcal{SHOIN}$ είναι αρκετά διαφορετική. Αυτό συμβαίνει διότι διαισθητικά θέλουμε να αποδώσουμε μια ασαφή σημασία στα δομικά στοιχεία της γλώσσας, όπως είναι οι έννοιες οι ρόλοι και οι κατασκευαστές. Για το λόγο αυτό λοιπόν η σημασιολογία της ασαφούς γλώσσας ορίζεται με τη βοήθεια των *ασαφών ερμηνειών* (*fuzzy interpretations*) [135]. Μια ασαφής ερμηνεία αποτελείται από ένα ζευγάρι $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ όπου ο χώρος ερμηνείας $\Delta^{\mathcal{I}}$ είναι ένα μη κενό σύνολο αντικειμένων και $\cdot^{\mathcal{I}}$ είναι μια *ασαφής συνάρτηση ερμηνείας* (*fuzzy interpretation function*), η οποία απεικονίζει

1. ένα άτομο $a \in \mathbf{I}$ σε ένα στοιχείο $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$,
2. μια ατομική έννοια $\mathsf{A} \in \mathbf{C}$ σε μια συνάρτηση συμμετοχής $\mathsf{A}^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \to [0,1]$,
3. και έναν ατομικό ρόλο $R \in \mathbf{R}$ σε μια συνάρτηση συμμετοχής της μορφής, $R^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \to [0,1]$.

Διαισθητικά ένα αντικείμενο (ζεύγος αντικειμένων) μπορεί να ανήκει σε μια έννοια (ρόλο) σε οποιοδήποτε βαθμό ανάμεσα στο 0 και 1. Για παράδειγμα η σχέση, $\mathsf{HotPlace}^{\mathcal{I}}(\mathtt{Rome}^{\mathcal{I}}) = 0.7$, σημαίνει ότι η Ρώμη είναι ζεστό μέρος με βαθμό ίσο με 0.7. Επιπρόσθετα οι συναρτήσεις ερμηνείας μπορούν να επεκταθούν για να ερμηνεύσουμε οποιαδήποτε πολύπλοκη f-$\mathcal{SHOIN}$-έννοια και ρόλο. Όπως και στην κλασική περίπτωση για να το πετύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε τους τελεστές της ασαφούς συνολοθεωρίας για να πραγματοποιήσουμε τις αντίστοιχες πράξεις. Για παράδειγμα εφόσον μια έκφραση της μορφής $C \sqcup D$ αναπαριστά μια ένωση ανάμεσα στις έννοιες C και D, τότε αν χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή της ασαφούς ένωσης (u) μπορούμε να γράψουμε τη σχέση $(C \sqcup D)^{\mathcal{I}}(a) = u(C^{\mathcal{I}}(a), D^{\mathcal{I}}(a))$ η οποία υποδηλώνει ότι ο βαθμός συμμετοχής ενός αντικειμένου $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ στην ερμηνεία της ένωση δυο ασαφών εννοιών ισούται με τη σ-νόρμα των βαθμών συμμετοχής του αντικειμένου αυτού στα ασαφή σύνολα $C^{\mathcal{I}}$ και $D^{\mathcal{I}}$. Επιπρόσθετα, επειδή όπως είδαμε στην ενότητα 2.1 η έννοια $\forall R.C$ ερμηνεύεται ως μια συνεπαγωγή της μορφής, $\forall y(R(x,y) \to C(y))$, τότε

Πίνακας 3.1: *Σύνταξη και Σημασιολογία fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$-εννοιών*

Κατασκευαστής	**Σύνταξη**	**Σημασιολογία**
καθολική έννοια	$\top$	$\top^{\mathcal{I}}(a) = 1$
κενή έννοια	$\bot$	$\bot^{\mathcal{I}}(a) = 0$
σύζευξη	$C \sqcap D$	$(C \sqcap D)^{\mathcal{I}}(a) = t(C^{\mathcal{I}}(a), D^{\mathcal{I}}(a))$
διάζευξη	$C \sqcup D$	$(C \sqcup D)^{\mathcal{I}}(a) = u(C^{\mathcal{I}}(a), D^{\mathcal{I}}(a))$
άρνηση	$\neg C$	$(\neg C)^{\mathcal{I}}(a) = c(C^{\mathcal{I}}(a))$
ονοματική έννοια	$\{o\}$	$\{o\}^{\mathcal{I}}(a) = 1$ αν $a \in \{o^{\mathcal{I}}\}$, διαφορετικά $\{o\}^{\mathcal{I}}(a) = 0$
υπαρξιακός περιορισμός	$\exists R.C$	$(\exists R.C)^{\mathcal{I}}(a) = \sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b))$
περιορισμός τιμής	$\forall R.C$	$(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a) = \inf_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b))$
περιορισμός το-λιγότερο	$\geq pR$	$(\geq pR)^{\mathcal{I}}(a) = \sup\limits_{b_1,\ldots,b_p \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(\mathop{t}\limits_{i=1}^{p} R^{\mathcal{I}}(a,b_i), \mathop{t}\limits_{i<j}\{b_i \neq b_j\})$
περιορισμός το-πολύ	$\leq pR$	$(\leq pR)^{\mathcal{I}}(a) = \inf\limits_{b_1,\ldots,b_{p+1} \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(\mathop{t}\limits_{i=1}^{p+1} R^{\mathcal{I}}(a,b_i), \mathop{u}\limits_{i<j}\{b_i = b_j\})$
αντίστροφοι ρόλοι	R^-	$(R^-)^{\mathcal{I}}(b,a) = R^{\mathcal{I}}(a,b)$

αν γενικεύσουμε την πράξη $\forall$ στην πράξη του infimum (inf), και την πράξη $\rightarrow$ ως μια ασαφή συνεπαγωγή προκύπτει η σχέση, $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a) = \inf_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}}\{\mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b))\}$, η οποία δίνει την ασαφή σημασιολογία της έννοιας $\forall R.C$. Τέλος θα αναφερθούμε στους περιορισμούς πληθυκότητας. Ένας περιορισμός το-λιγότερο της μορφής $\geq pR$ είναι ισοδύναμος με την *φόρμουλα* (*formula*) πρώτης τάξης:

$$(\geq pR)^{\mathcal{I}}(x) = \exists y_1, \ldots, y_p. \bigwedge_{i=1}^{p} R^{\mathcal{I}}(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i<j} y_i \neq y_i$$

ο οποίος διαισθητικά μας λέει ότι πρέπει να υπάρχουν p y_i τα οποία είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δυο και για τα οποία ισχύει $R(x, y_i)$, όπου x είναι μια ελεύθερη μεταβλητή. Έτσι λοιπόν αν ερμηνεύσουμε την πράξη $\exists$ με το supremum (sup), και την πράξη $\wedge$ με μια τ-νόρμα λαμβάνουμε την εξίσωση:

$$(\geq pR)^{\mathcal{I}}(a) = \sup_{b_1,\ldots,b_p \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(\mathop{t}_{i=1}^{p} R^{\mathcal{I}}(a,b_i), \mathop{t}_{i<j}\{b_i \neq b_j\})$$

Από την άλλη μεριά ένας περιορισμός το-πολύ της μορφής $\leq pR$ είναι ισοδύναμος με τη φόρμουλα πρώτης τάξης:

$$(\leq pR)^{\mathcal{I}}(x) \forall y_1, \ldots, y_{p+1}. \bigwedge_{i=1}^{p+1} R^{\mathcal{I}}(x, y_i) \wedge \rightarrow \bigvee_{i<j} y_i = y_i$$

στην οποία αν ο τελεστής $\forall$ αντιστοιχηθεί στο infimum, ο τελεστής $\rightarrow$ σε μια ασαφή συνεπαγωγή, ο $\vee$ σε μια σ-νόρμα και ο $\wedge$ σε μια τ-νόρμα λαμβάνουμε την εξίσωση:

$$(\leq pR)^{\mathcal{I}}(a) = \inf_{b_1,\ldots,b_{p+1} \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(\mathop{t}_{i=1}^{p+1} R^{\mathcal{I}}(a,b_i), \mathop{u}_{i<j}\{b_i = b_j\})$$

Το πλήρες σύνολο της σημασιολογίας των κατασκευαστών εννοιών και ρόλων της γλώσσας f-$\mathcal{SHOIN}$ παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.1.

Ένα ασαφές *σώμα ορολογίας* (*terminological box*) (*TBox*) είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από αξιώματα ασαφών εννοιών. Έστω C και D δυο f-$\mathcal{SHOIN}$-έννοιες. Αξιώματα της μορφής $C \sqsubseteq D$ ονομάζονται *αξιώματα υπαγωγής ασαφών εννοιών* (*fuzzy concept inclusion axioms*), ενώ αξιώματα της μορφής $C \equiv D$ ονομάζονται *αξιώματα ισοδυναμίας ασαφών εννοιών* (*fuzzy concept equivalence axioms*). Μια ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί το αξίωμα $C \sqsubseteq D$ αν $\forall a \in \Delta^{\mathcal{I}}$, $C^{\mathcal{I}}(a) \leq D^{\mathcal{I}}(a)$ ενώ ικανοποιεί το $C \equiv D$ αν $C^{\mathcal{I}}(a) = D^{\mathcal{I}}(a)$. Τέλος, μια ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί ένα f-$\mathcal{SHOIN}$ σώμα ορολογίας $\mathcal{T}$ αν ικανοποιεί κάθε αξίωμα στο $\mathcal{T}$. Τότε λέμε ότι η $\mathcal{I}$ είναι *μοντέλο* (*model*) του $\mathcal{T}$.

Όπως παρατηρούμε η ερμηνεία που έχουμε αποδώσει στην υπαγωγή μιας έννοιας σε μια άλλη έχει χροιά κλασσικής υπαγωγής. Δηλαδή μια ασαφής έννοια είτε υπάγεται είτε όχι σε μια άλλη. Αυτός είναι άλλωστε και ο τρόπος με τον οποίο ορίζεται η σχέση υποσυνόλου ανάμεσα σε δυο ασαφή σύνολα [81]. Ο Straccia στο [137], προτείνει την έννοια της *ασαφούς υπαγωγής* (*fuzzy subsumption*) ασαφών εννοιών. Συντακτικά μια ασαφής συνεπαγωγή ορίζεται από μια δήλωση της μορφής $\langle C \sqsubseteq D, n\rangle$, όπου $n \in [0,1]$, ενώ μια ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί το αξίωμα αυτό αν $\inf_{x\in\Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(C^{\mathcal{I}}(x), D^{\mathcal{I}}(x)) \geq n$ [137]. Όπως επισημαίνεται στο [14] πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στη χρήση των αξιωμάτων αυτών στις ασαφές ΠΛ. Πιο συγκεκριμένα αν χρησιμοποιήσουμε την ασαφή συνεπαγωγή του Kleene-Dienes τότε $\inf_{x\in\Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(C^{\mathcal{I}}(x), C^{\mathcal{I}}(x)) = \inf_{x\in\Delta^{\mathcal{I}}} \max(1 - C^{\mathcal{I}}(x), C^{\mathcal{I}}(x)) = 0.5$, δηλαδή μια έννοια C υπάγεται μόνο κατά το ήμισυ στον εαυτό της, κάτι το οποίο δεν είναι αισθητικά λογικό. Επιπρόσθετα, ένα αξίωμα ασαφούς συνεπαγωγής της μορφής $\langle \mathsf{Man} \sqsubseteq \mathsf{Human}, 1\rangle$ το οποίο δηλώνει ότι ένας άντρας είναι πάντα άνθρωπος, δηλαδή δεν υπάρχει καμία ασάφεια στην υπαγωγή αυτή πράγμα το οποίο είναι λογικό, θα είχε ως αποτέλεσμα οι έννοιες Man και Human να ερμηνευτούν ως κλασικά (μη-ασαφή) σύνολα. Πιο συγκεκριμένα η $\mathcal{I}$ ικανοποιεί το αξίωμα αυτό αν $\inf_{x\in\Delta^{\mathcal{I}}} \max(1-\mathsf{Man}^{\mathcal{I}}(x), \mathsf{Human}^{\mathcal{I}}(x)) \geq 1$ το οποίο ισχύει ανν είτε $1-\mathsf{Man}^{\mathcal{I}}(x) = 1 \Rightarrow \mathsf{Man}^{\mathcal{I}}(x) = 0$ ή $\mathsf{Human}^{\mathcal{I}}(x) = 1$. Τέλος οι υπαγωγές αυτού του είδους θα επέφεραν πολλές και σημαντικές αλλαγές στη σύνταξη της ασαφούς OWL (που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο) οι οποίες είναι δύσκολο να υλοποιηθούν.

Ένα ασαφές *σώμα ρόλων* (*role box*) *RBox* είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από αξιώματα ασαφών ρόλων. Αξιώματα ασαφών ρόλων της μορφής $\mathsf{Trans}(R)$, ονομάζονται αξιώματα *μεταβατικών ασαφών ρόλων* (*fuzzy transitive role axioms*), ενώ αξιώματα ασαφών ρόλων της μορφής $R \sqsubseteq S$ ονομάζονται αξιώματα *υπαγωγής ασαφών ρόλων* (*fuzzy role inclusion axioms*). Μια ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί ένα αξίωμα $\mathsf{Trans}(R)$ αν

$$\forall a, c \in \Delta^{\mathcal{I}}, R^{\mathcal{I}}(a,c) \geq \sup_{b\in\Delta^{\mathcal{I}}} \{t(R^{\mathcal{I}}(a,b), R^{\mathcal{I}}(b,c))\}$$

ενώ ικανοποιεί το $R \sqsubseteq S$ αν $\forall\langle a,b\rangle \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}, R^{\mathcal{I}}(a,b) \leq S^{\mathcal{I}}(a,b)$. Τέλος, η $\mathcal{I}$ ικανοποιεί ένα f-$\mathcal{SHOIN}$ RBox αν ικανοποιεί όλα τα αξιώματα στο $\mathcal{R}$. Σε αυτή την περίπτωση η $\mathcal{I}$ λέγεται μοντέλο του $\mathcal{R}$. Ένα σύνολο από αξιώματα υπαγωγής ρόλων καθορίζει μια *ιεραρχία ρόλων* (*role hierarchy*) $\mathcal{R}_h$. Επιπρόσθετα παρατηρήστε ότι η σημασιολογία των αξιωμάτων υπαγωγής και των αντίστροφων ρόλων συνεπάγεται ότι αν $R \sqsubseteq S$, τότε και $\mathsf{Inv}(R) \sqsubseteq \mathsf{Inv}(S)$, όπως και στην κλασική περίπτωση.

Ένα ασαφές *σώμα ισχυρισμών* (*assertional box*) *ABox* είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από ασαφή αξιώματα ατόμων τα οποία αποκαλούνται ασαφείς ισχυρισμοί. Ένας *ασαφής ισχυρισμός* (*fuzzy assertion*) [135] είναι μια δήλωση της μορφής $(a : C)\bowtie n$, $((a,b) : R)\bowtie n$, όπου $\bowtie \in \{\geq, >, \leq, <\}$, $a \doteq b$, ή $a \neq b$, για $a, b \in \mathbf{I}$. Θα γράφουμε επίσης $(a : C) = n$ αντί για δυο ασαφείς ισχυρισμούς της μορφής $(a : C) \geq n$ και $(a : C) \leq n$. Ισχυρισμοί οι οποίοι περιέχουν είτε την ανισότητα $\geq$ ή την $>$ θα ονομάζονται *θετικοί* (*positive*) ισχυρισμοί, ενώ ισχυρισμοί που περιέχουν είτε την $\leq$ ή την $<$ *αρνητικοί* (*negative*). Δοθείσης μιας ασαφούς ερμηνείας $\mathcal{I}$,

$$\begin{array}{rll} \text{η } \mathcal{I} \text{ ικανοποιεί τον } (a : C) \geq n & \text{αν} & C^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) \geq n, \\ \text{η } \mathcal{I} \text{ ικανοποιεί τον } (a : C) \leq n & \text{αν} & C^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) \leq n, \\ \text{η } \mathcal{I} \text{ ικανοποιεί τον } ((a,b) : R) \geq n & \text{αν} & R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \geq n, \\ \text{η } \mathcal{I} \text{ ικανοποιεί τον } ((a,b) : R) \leq n & \text{αν} & R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \leq n, \\ \text{η } \mathcal{I} \text{ ικανοποιεί τον } a \doteq b & \text{αν} & a^{\mathcal{I}} = b^{\mathcal{I}}, \\ \text{η } \mathcal{I} \text{ ικανοποιεί τον } a \not\doteq b & \text{αν} & a^{\mathcal{I}} \neq b^{\mathcal{I}}. \end{array}$$

Η ικανοποιησιμότητα των ασαφών ισχυρισμών που περιέχουν μια από τις ανισότητες $>$ ή $<$ ορίζεται με ανάλογο τρόπο. Μια ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί ένα ασαφές *ABox* $\mathcal{A}$ αν ικανοποιεί όλους τους ασαφείς ισχυρισμούς στο $\mathcal{A}$. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο του $\mathcal{A}$.

Όπως είναι προφανές, διαφορετικοί ασαφείς τελεστές ορίζουν και διαφορετικές ασαφείς ΠΛ. Για παράδειγμα η ασαφής-$\mathcal{SHOIN}$ που χρησιμοποιεί τους τελεστές της λογικής του Lukasiewicz έχει διαφορετικές ιδιότητες από αυτή που χρησιμοποιεί τους τελεστές της λογικής του Gödel. Έτσι λοιπόν πρέπει να εισάγουμε κάποιο συμβολισμό ο οποίος θα μας βοηθάει να διακρίνουμε ανάμεσα στις διαφορετικές ασαφείς ΠΛ. Στο [129] προτείναμε το συμβολισμό $\mathrm{f}_{\mathcal{J}}$-$\mathcal{L}$, όπου $\mathcal{J}$ είναι μια ασαφής συνεπαγωγή και $\mathcal{L}$ αναπαριστά μια ΠΛ γλώσσα. Στην περίπτωση που η $\mathcal{J}$ είναι μια R-συνεπαγωγή, ο συμβολισμός μας δηλώνει επίσης και ποια είναι η τ-νόρμα που χρησιμοποιείται, λόγω του ορισμού των R-συνεπαγωγών, ενώ ως άρνηση μπορούμε να θεωρήσουμε το προσυμπλήρωμα του $\mathcal{J}$ και ως σ-νόρμα το *δυαδικό* τελεστή (dual) που προκύπτει από την εξίσωση $u(a, b) = c(t(c(a), c(b)))$. Από την άλλη πλευρά αν $\mathcal{J}$ είναι μια S-συνεπαγωγή τότε επίσης λόγω ορισμού των S-συνεπαγωγών γνωρίζουμε και το ασαφές συμπλήρωμα και την σ-νόρμα. Η τ-νόρμα μπορεί να οριστεί από το δυαδικό τελεστή ο οποίος δίνεται από την εξίσωση $t(a, b) = c(u(c(a), c(b)))$. Έτσι λοιπόν η γλώσσα f_L-$\mathcal{SHOIN}$ είναι η ασαφής-$\mathcal{SHOIN}$ η οποία χρησιμοποιεί τους τελεστές της λογικής του Lukasiewicz, ενώ η γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$ είναι η ασαφής-$\mathcal{SHOIN}$ η οποία χρησιμοποιεί την ασαφή συνεπαγωγή του Kleene-Dienes, την τ-νόρμα και την σ-νόρμα του Gödel και την άρνηση του Lukasiewicz. Τις ασαφείς ΠΛ που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο τις ονομάζουμε *κανονικές* (*normal*). Αντίθετα, οι μη-κανονικές (abnormal) ασαφείς ΠΛ μπορούν να οριστούν δηλώνοντας όλους τους τελεστές της ασαφούς τετράδας με μια δήλωση της μορφής, $\mathrm{f}_{\langle c,t,u,\mathcal{J}\rangle}$-$\mathcal{L}$. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε περιπτώσεις όπου οι κανονικές ασαφείς λογικές εμφανίζουν ανεπιθύμητες ιδιότητες, όπως συμβαίνει στην ασαφή λογική του Gödel [40], έτσι λοιπόν χρειάζεται να τροποποιήσουμε κάποιους από τους τελεστές τους [40]. Για παράδειγμα η γλώσσα $\mathrm{f}_{\langle c_L,t_G,u_G,\mathcal{J}_G\rangle}$-$\mathcal{SHOIN}$ συμβολίζει την ασαφή λογική $\mathcal{SHOIN}$ η οποία χρησιμοποιεί όλους τους τελεστές της ασαφούς λογικής του Gödel με τη διαφορά ότι το μη-ενειλικτικό και ασυνεχές ασαφές συμπλήρωμα του Gödel (c_G) έχει αντικατασταθεί από το ενειλικτικό και συνεχές συμπλήρωμα Lukasiewicz (c_L).

Παράδειγμα 3.1.1 *Ας θεωρήσουμε την ασαφή βάση γνώσης (Σ) που εισαγάγαμε στην εισαγωγή της αναφοράς μας για την εφαρμογή κατάτμησης και περιγραφής εικόνων. Αν θέλαμε να δώσουμε τυπικό ορισμό στις δηλώσεις τις οποίες κάναμε στο κεφάλαιο εκείνο θα είχαμε την παρακάτω βάση γνώσης.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \mathsf{Arm} \sqsubseteq \exists \mathsf{isDirectPartOf.Body},\ \mathsf{Body} \sqsubseteq \exists \mathsf{isPartOf.Human}, \\
&\quad \mathsf{Human} \equiv \exists \mathsf{hasPart.Body} \sqcap \exists \mathsf{hasPart.Arm}, \\
&\quad \top \sqsubseteq\ \leq 1\, \mathsf{Inv(hasDirectPart)}\}, \\
\mathcal{A} &= \{((\mathsf{o}_1, \mathsf{o}_2) : \mathsf{isDirectPartOf}) \geq 0.8,\ (\mathsf{o}_1 : \mathsf{Arm}) \geq 0.75, \\
&\quad ((\mathsf{o}_2, \mathsf{o}_3) : \mathsf{isPartOf}) \geq 0.9,\ (\mathsf{o}_2 : \mathsf{Body}) \geq 0.85\} \\
\mathcal{R} &= \{\mathsf{Trans(isPartOf)},\ \mathsf{isDirectPartOf} \sqsubseteq \mathsf{isPartOf}, \\
&\quad \mathsf{isDirectPartOf} \sqsubseteq \mathsf{hasDirectPart}^-, \\
&\quad \mathsf{hasDirectPart}^- \sqsubseteq \mathsf{isDirectPartOf}, \\
&\quad \mathsf{hasPart} \sqsubseteq \mathsf{isPartOf}^-,\ \mathsf{isPartOf}^- \sqsubseteq \mathsf{hasPart}\}.
\end{aligned}$$

Το αξίωμα υπαγωγής $\top \sqsubseteq\ \leq 1\, \mathsf{Inv(hasDirectPart)}$ *δηλώνει ότι ο ρόλος* hasDirectPart *είναι συναρτησιακός, δηλαδή, οποιοδήποτε αντικείμενο του χώρου ερμηνείας ($\top$) δε μπορεί να σχετίζεται με παραπάνω από ένα αντικείμενα μέσω της σχέσης αυτής. Τα τελευταία τέσσερα αξιώματα υπαγωγής ρόλων δηλώνουν ότι ο ρόλος* isDirectPartOf *είναι ο αντίστροφος του ρόλου* hasDirectPart *και ότι ο ρόλος* hasPart *είναι αντίστροφος του ρόλου* isPartOf*. Όλα τα προηγούμενα αξιώματα μπορούν να περιγραφούν και στις κλασικές ΠΛ. Το σημείο στο οποίο διαφέρουν οι ασαφείς ΠΛ είναι στο ABox. Όπως παρατηρούμε και στους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να δηλώσουμε το βαθμό συμμετοχής ενός ατόμου η ζεύγους ατόμων σε μια ασαφής κλάση η ρόλο.*

Τώρα έστω $\mathcal{I}$ μια ασαφής ερμηνεία. Προκειμένου η $\mathcal{I}$ να είναι μοντέλο του $\mathcal{A}$ θα πρέπει να ικανοποιεί τους ασαφείς ισχυρισμούς. Πιο συγκεκριμένα πρέπει να ισχύουν τα ακόλουθα, $\mathsf{isDirectPartOf}^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_1^{\mathcal{I}}, \mathsf{o}_2^{\mathcal{I}}) \geq 0.8$, $\mathsf{isPartOf}^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_2^{\mathcal{I}}, \mathsf{o}_3^{\mathcal{I}}) \geq 0.9$, $\mathsf{Arm}^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_1^{\mathcal{I}}) \geq 0.75$, $\mathsf{Body}^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_2^{\mathcal{I}}) \geq 0.85$.

Επιπρόσθετα, αν η $\mathcal{I}$ ικανοποιεί και το RBox τότε οι ακόλουθες σχέσεις πρέπει να ισχύουν. Το αξίωμα $\mathsf{isDirectPartOf} \sqsubseteq \mathsf{isPartOf}$ *συνεπάγεται ότι* $\mathsf{isAPartOf}^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_1^{\mathcal{I}}, \mathsf{o}_2^{\mathcal{I}}) \geq \mathsf{isDirectPartOf}^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_1^{\mathcal{I}}, \mathsf{o}_2^{\mathcal{I}}) \geq 0.8$. *Επιπλέον, εφόσον ο ρόλος* isPartOf *είναι μεταβατικός και λόγω της σημασιολογίας των αντίστροφων ρόλων έχουμε ότι,*

$$(\mathsf{isPartOf}^-)^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_3^{\mathcal{I}}, \mathsf{o}_1^{\mathcal{I}}) = \mathsf{isPartOf}^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_1^{\mathcal{I}}, \mathsf{o}_3^{\mathcal{I}}) \geq \sup\{\ldots t(0.8, 0.9) \ldots\} \geq t(0.8, 0.9).$$

Επιπρόσθετα, από τις σχέσεις $(\mathsf{isPartOf}^-)^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_3^{\mathcal{I}}, \mathsf{o}_1^{\mathcal{I}}) \geq t(0.8, 0.9)$ *και* $\mathsf{isPartOf}^- \sqsubseteq \mathsf{hasPart}$ *μπορούμε να συμπεράνουμε ότι,* $\mathsf{hasAPart}^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_3^{\mathcal{I}}, \mathsf{o}_1^{\mathcal{I}}) \geq 0.8$ *το οποίο μας δίνει,* $(\exists \mathsf{hasPart.Arm})^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_3^{\mathcal{I}}) = \sup\{\ldots, \min(\mathsf{hasPart}^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_3^{\mathcal{I}}, \mathsf{o}_1^{\mathcal{I}}), (\mathsf{Arm})^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_1^{\mathcal{I}})), \ldots\}$ *δηλαδή,* $(\exists \mathsf{hasPart.Arm})^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_3^{\mathcal{I}}) \geq t(t(0.8, 0.9), 0.75)$. *Χρησιμοποιώντας παρόμοιους συλλογισμούς λαμβάνουμε,* $(\exists \mathsf{hasPart.Body})^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_3^{\mathcal{I}}) \geq t(0.85, 0.9)$, *και τελικά λόγω του τελευταίου αξιώματος ισοδυναμίας εννοιών έχουμε ότι,*

$$\mathsf{Human}^{\mathcal{I}}(\mathsf{o}_3^{\mathcal{I}}) \geq t(t(t(0.8, 0.9), 0.75), t(0.85, 0.9)).$$

Στην περίπτωση που η τ-νόρμα είναι αυτή του Gödel, έχουμε $\min(0.8, 0.9) = 0.8$, $\min(0.8, 0.75) = 0.75$, $\min(0.85, 0.9) = 0.85$, $\min(0.75, 0.85) = 0.75$ *ενώ στην περίπτωση της τ-νόρμας του γινομένου έχουμε τους εξής υπολογισμούς,* $t(0.8, 0.9) = 0.72 \cdot 0.9 = 0.72$, $0.85 \cdot 0.9 = 0.765$, $0.72 \cdot 0.75 = 0.54$ *και τελικά* $0.54 \cdot 0.765 = 0.413$. $\diamondsuit$

Τελειώνοντας την ενότητα αυτή παρουσιάζουμε την πρώτη μας συνησφορά στις ασαφείς ΠΛ. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των ασαφών ερμηνειών.

Θεώρημα 3.1.2 *Οι ασαφείς ερμηνείες ταυτίζονται με τις κλασικές ερμηνείες αν περιοριστούμε στους βαθμούς συμμετοχής 0 και 1.*

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της επαγωγής στη δομή των εννοιών θα δείξουμε ότι αν $E^{\mathcal{I}}(a) = 1$, τότε $a \in E^{\mathcal{I}}$. Επιπρόσθετα, θα δείξουμε επίσης ότι η σημασιολογία των υπαγωγών εννοιών και ρόλων αλλά και των αξιωμάτων μεταβατικών ρόλων συμπίπτει με αυτή των κλασικών ΠΛ.

Υπενθυμίζουμε ότι η μαθηματική επαγωγή αποτελείται από τρία στάδια. Στο πρώτο στάδιο αποδεικνύουμε τη βασική περίπτωση (base case) με $n = 0$, σε δεύτερο στάδιο υποθέτουμε ότι η περίπτωση με $n = k$, που ονομάζεται υπόθεση επαγωγής (induction hypothesis), ισχύει, ενώ σε τρίτο στάδιο χρησιμοποιούμε την υπόθεση επαγωγής για να αποδείξουμε την περίπτωση με $n = k + 1$. Τότε, επαγωγικά η ιδιότητά μας ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n. Στην περίπτωσή μας η βασική περίπτωση αντιστοιχεί στην περίπτωση των ονοματικών εννοιών και ρόλων και στις ονοματικές έννοιες, δηλαδή $A^{\mathcal{I}}(a) = 1$, $R^{\mathcal{I}}(a,b) = 1$ και $\{o\}^{\mathcal{I}}(a) = 1$, η υπόθεση επαγωγής αντιστοιχεί στην υπόθεση ότι, αν $C^{\mathcal{I}}(a) = 1$ και $D^{\mathcal{I}}(a) = 1$, τότε $a \in C^{\mathcal{I}}$ και $a \in D^{\mathcal{I}}$, ενώ η περίπτωση με $n = k + 1$ αναφέρεται στο συνδιασμό των εννοιών C και D με κατασκευαστές εννοιών.

Έστω $\mathcal{I}$ μια ασαφής ερμηνεία, $a, b \in \Delta^{\mathcal{I}}$, $p \in \mathbb{N}$, $C^{\mathcal{I}}(a) \in \{0, 1\}$ και $R^{\mathcal{I}}(a,b) \in \{0, 1\}$. Τότε, για τη βασική περίπτωση έχουμε ότι,

- αν $A^{\mathcal{I}}(a) = 1$, όπου A μια ατομική έννοια, τότε το a ανήκει ολοκληρωτικά στο A, δηλαδή $a \in A^{\mathcal{I}}$ σε συμβολισμό κλασικών συνόλων.

- αν $R^{\mathcal{I}}(a,b) = 1$, όπου R ένας ατομικός ρόλος, τότε το ζεύγος $\langle a, b\rangle$ ανήκει ολοκληρωτικά στην R, δηλαδή $\langle a, b\rangle \in R^{\mathcal{I}}$ σε συμβολισμό κλασικών συνόλων.

- αν $\{o\}^{\mathcal{I}}(a) = 1$, τότε σύμφωνα με τον Πίνακα 3.1, ισχύει ότι $a \in \{o^{\mathcal{I}}\}$.

Έστω τώρα ότι ισχύει ότι, αν $C^{\mathcal{I}}(a) = 1$ και $D^{\mathcal{I}}(a) = 1$, τότε $a \in C^{\mathcal{I}}$ και $a \in D^{\mathcal{I}}$. Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση αυτή, αλλά και την απόδειξη της βασικής περίπτωσης, για να αποδείξουμε ότι αν $E^{\mathcal{I}}(a) = 1$ τότε $a \in E^{\mathcal{I}}$, όπου E είναι μια από τις έννοιες, $\neg C$, $C \sqcap D$, $C \sqcup D$, $\forall R.C$, $\exists R.C$, $\geq nR$ ή $\leq nR$.

- αν $(\neg C)^{\mathcal{I}}(a) = 1$, τότε έχουμε $(\neg C)^{\mathcal{I}}(a) = c(C^{\mathcal{I}}(a)) = 1$. Εφόσον, $C^{\mathcal{I}}(a) \in \{0, 1\}$ τότε από τις οριακές συνθήκες των ασαφών συμπληρωμάτων έχουμε ότι $C^{\mathcal{I}}(a) = 0$, συνεπώς, $a \notin C^{\mathcal{I}}$.

- αν $(C \sqcup D)^{\mathcal{I}}(a) = 1$, τότε $u(C^{\mathcal{I}}(a), D^{\mathcal{I}}(a)) = 1$. Από τις ιδιότητες των σ-νορμών που παρουσιάσαμε στην ενότητα 2.3.1, και εφόσον περιοριζόμαστε μόνο στους βαθμούς 0 και 1, έχουμε ότι είτε $C^{\mathcal{I}}(a) = 1$ ή $D^{\mathcal{I}}(a) = 1$ έτσι ώστε η σ-νόρμα να είναι ίση με 1. Λόγω της υπόθεσης επαγωγής, είτε $a \in C^{\mathcal{I}}$ ή $a \in D^{\mathcal{I}}$.

- αν $(C \sqcap D)^{\mathcal{I}}(a) = 1$, τότε $t(C^{\mathcal{I}}(a), D^{\mathcal{I}}(a)) = 1$. Λόγω της οριακής συνθήκης των τ-νορμών πρέπει να ισχύει ότι $C^{\mathcal{I}}(a) = 1$ και $D^{\mathcal{I}}(a) = 1$. Από την υπόθεση επαγωγής, $a \in C^{\mathcal{I}}$ και $a \in D^{\mathcal{I}}$.

- αν $(\exists R.C)^{\mathcal{I}}(a) = 1$, τότε $\sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b)) = 1$. Λόγω των ιδιοτήτων των τ-νορμών και εφόσον ασχολούμαστε μόνο με τις τιμές 0 και 1 πρέπει να υπάρχει κάποιο $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ για το οποίο $R^{\mathcal{I}}(a,d) = 1$ και $C^{\mathcal{I}}(d) = 1$. Με άλλα λόγια υπάρχει κάποιο $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$, για το οποίο $\langle a, d \rangle \in R^{\mathcal{I}}$ και λόγω της υπόθεσης επαγωγής $d \in C^{\mathcal{I}}$.

- αν $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a) = 1$, τότε $\inf_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a, b), C^{\mathcal{I}}(b)) = 1$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $b \in \Delta^{\mathcal{I}}$ πρέπει να ισχύει $\mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a, b), C^{\mathcal{I}}(b)) = 1$. Τότε έχουμε δυο περιπτώσεις:

  1. Αν $\mathcal{J}$ είναι μια R-συνεπαγωγή έχουμε ότι $R^{\mathcal{I}}(a, b) \leq C^{\mathcal{I}}(b)$. Συνεπώς, αν $R^{\mathcal{I}}(a, b) = 0$ τότε είτε $C^{\mathcal{I}}(b) = 0$, ή $C^{\mathcal{I}}(b) = 1$ ενώ αν $R^{\mathcal{I}}(a, b) = 1$ τότε $C^{\mathcal{I}}(b) = 1$.
  2. Αν $\mathcal{J}$ είναι μια S-συνεπαγωγή έχουμε ότι $u(c(R^{\mathcal{I}}(a, b)), C^{\mathcal{I}}(b)) = 1$. Λόγω της οριακής συνθήκης των σ-νορμών έχουμε ότι είτε $c(R^{\mathcal{I}}(a, b)) = 1 \Rightarrow R^{\mathcal{I}}(a, b) = 0$, ή $C^{\mathcal{I}}(b) = 1$.

  Και στις δυο περιπτώσεις έχουμε ότι είτε $R^{\mathcal{I}}(a, b) = 0$, ή $C^{\mathcal{I}}(b) = 1$, δηλαδή είτε $\langle a, b \rangle \notin R^{\mathcal{I}}$ ή $b \in C^{\mathcal{I}}$ για κάθε $b \in \Delta^{\mathcal{I}}$, το οποίο μας δίνει τη σημασιολογία της κλασικής έννοιας του περιορισμού τιμής.

- αν $(\geq pR)^{\mathcal{I}}(a) = 1$, τότε $\sup_{b_1, \ldots b_p \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(t_{i=1}^{p} R^{\mathcal{I}}(a, b_i), t_{i<j}\{b_i \neq b_j\}) = 1$. Λόγω της οριακής συνθήκης και του ότι κοιτάμε μόνο τις τιμές 0 και 1 πρέπει να υπάρχει κάποια p-πλειάδα για την οποία $R^{\mathcal{I}}(a, b_i) = 1$, άρα υπάρχουν p ζεύγη $\langle a, b_i \rangle$ τα οποία όλα ανήκουν στο ρόλο $R^{\mathcal{I}}$.

- αν $(\leq pR)^{\mathcal{I}}(a) = 1$, τότε $\inf_{b_1, \ldots b_{p+1} \in \Delta^{\mathcal{I}}} u_{i=1}^{p+1} c(R^{\mathcal{I}}(a, b_i)) = 1$. Λόγω της οριακής συνθήκης, για κάθε $p + 1$-πλειάδα πρέπει να υπάρχει κάποιο $\langle a, b_k \rangle$ για το οποίο $c(R^{\mathcal{I}}(a, b_k)) = 1 \Rightarrow R^{\mathcal{I}}(a, b_k) = 0$. Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε μια $p + 1$-πλειάδα όπου για όλα τα $\langle a, b_i \rangle$ θα ισχύει ότι $c(R^{\mathcal{I}}(a, b_i)) = 0 \Rightarrow R^{\mathcal{I}}(a, b_k) = 1$. Συνεπώς, υπάρχουν το πολύ p ζεύγη $\langle a, b_i \rangle$ τα οποία ανήκουν στο ρόλο $R^{\mathcal{I}}$.

Στο σημείο αυτό θα εξετάσουμε και τα αξιώματα εννοιών και ρόλων αλλά και την περίπτωση των ασαφών ισχυρισμών.

- Έστω το αξίωμα, $C \sqsubseteq D$. Μια ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί την υπαγωγή αυτή αν $\forall a \in \Delta^{\mathcal{I}}, C^{\mathcal{I}}(a) \leq D^{\mathcal{I}}(a)$. Από τη στιγμή που εξετάζουμε μόνο τις τιμές 0 και 1, ισχύει ότι για κάθε $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ είτε $C^{\mathcal{I}}(a) = 0$ ή $D^{\mathcal{I}}(a) = 1$, το οποίο σημαίνει ότι αν το a ανήκει στο $C^{\mathcal{I}}$ θα ανήκει επίσης και στο $D^{\mathcal{I}}$.

- Η περίπτωση των αξιωμάτων υπαγωγής ρόλων μπορεί να δειχθεί όπως και προηγουμένως.

- Έστω το αξίωμα $\mathsf{Trans}(R)$. Μια ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί το αξίωμα μεταβατικών ασαφών ρόλων αν $R^{\mathcal{I}}(a, c) \geq \sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}}\{t(R^{\mathcal{I}}(a, b), R^{\mathcal{I}}(b, c))\}$, $\forall a, c \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Τώρα, αν για κάποιο $b \in \Delta^{\mathcal{I}}$, ισχύει ότι $R^{\mathcal{I}}(a, b) = 1$ και $R^{\mathcal{I}}(b, c) = 1$, τότε $t(R^{\mathcal{I}}(a, b), R^{\mathcal{I}}(b, c)) = 1$ άρα υπάρχει ένα R-μονοπάτι από το a στο c. Συνεπώς, $R^{\mathcal{I}}(a, c) = 1$, το οποίο σημαίνει ότι αν $\{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle\} \subseteq R^{\mathcal{I}}$, τότε $\langle a, c \rangle \in R^{\mathcal{I}}$.

- Αν $R^{\mathcal{I}}(a, b) = 1$, τότε λόγω της σημασιολογίας των αντίστροφων ρόλων έχουμε ότι, $(R^{-})^{\mathcal{I}}(b, a) = 1$, συνεπώς, $\langle a, b \rangle \in R^{\mathcal{I}}$ ανν $\langle b, a \rangle \in (R^{-})^{\mathcal{I}}$.

- Έστω $(a : C) \geq 1$. Μια ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί τον ασαφή ισχυρισμό αν $C^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) \geq 1$, συνεπώς $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$. Παρομοίως και για τα υπόλοιπα ήδη ισχυρισμών $((a, b) : R) \bowtie 1$.

■

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αρκετά σημαντικό καθώς μας δείχνει ότι οι ασαφείς Περιγραφικές Λογικές αποτελούν *ορθές επεκτάσεις* (*sound extensions*) των κλασικών Περιγραφικών Λογικών. Μια λογική γλώσσα L' ονομάζεται ορθή επέκταση μια γλώσσας L αν περιορίζοντας το σύνολο των βαθμών αληθείας της L' προκύπτουν οι ίδιες ταυτολογίες με τη γλώσσα L. Στην προκειμένη περίπτωση αν περιορίσουμε το σύνολο των τιμών αληθείας από το μοναδιαίο διάστημα $[0, 1]$ στο σύνολο $\{0, 1\}$, συνεχίζοντας να χρησιμοποιούμε τους ασαφείς τελεστές, θα λάβουμε τις κλασικές ΠΛ.

3.2 Ισοδυναμίες Εννοιών

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, η χρήση διαφορετικών ασαφών τελεστών δημιουργεί ασαφείς λογικές, οι οποίες έχουν αρκετά διαφορετικές λογικές ιδιότητες. Στιν παρούσα ενότητα θα δούμε τις ιδιότητες που προκύπτουν από διαφορετικές επιλογές ασαφών τελεστών στις ΠΛ.

Για κάθε τριάδα $\langle c, t, u\rangle$, λόγω τον αναγκαίων ιδιοτήτων που πρέπει να ικανοποιεί κάθε ασαφής τελεστής [81], ισχύουν οι ακόλουθες ισοδυναμίες εννοιών:

$$\begin{array}{rclcrcl}
\neg\top & \equiv & \bot, & \qquad & \neg\bot & \equiv & \top, \\
C \sqcap \top & \equiv & C, & & C \sqcup \bot & \equiv & C, \\
C \sqcup \top & \equiv & \top, & & C \sqcap \bot & \equiv & \bot.
\end{array}$$

Αν το ασαφές συμπλήρωμα είναι ενειλικτικό τότε επιπρόσθετα ισχύει:

$$\neg\neg C \equiv C.$$

Επιπρόσθετα αν η ασαφής τριάδα ικανοποιεί τους κανόνες DeMorgan, αποκαλούμενη *δυαδική* (*dual*) τριάδα, έχουμε ότι,

$$\neg(C \sqcup D) \equiv \neg C \sqcap \neg D \text{ και } \neg(C \sqcap D) \equiv \neg C \sqcup \neg D.$$

Για παράδειγμα οι τιπλέτες, $\langle c_L, t_L, u_L\rangle$ και $\langle c_L, t_G, u_G\rangle$, ικανοποιούν τις ισοδυναμίες αυτές. Επιπρόσθετα για κάθε δυαδική τριάδα $\langle c, t, u\rangle$ και S-συνεπαγωγή $\mathcal{J}_S$ ισχύει ότι,

$$\begin{array}{rclcrcl}
\neg\exists R.C & \equiv & \forall R.\neg C, & & \neg\forall R.C & \equiv & \exists R.\neg C, \\
\neg \leq p_1 R & \equiv & \geq (p_1 + 1)R, & & \neg \geq p_1 R & \equiv & \left\{ \begin{array}{ll} \leq (p_1 - 1)R, & p_1 \in \mathbb{N}^* \\ \bot, & p_1 = 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

Για παράδειγμα, η ασαφής τετράδα $\langle c_L, t_G, u_G, \mathcal{J}_{KD}\rangle$, ικανοποιεί τις ισοδυναμίες αυτές. Σε αυτό το σημείο επισημαίνουμε ότι οι ισοδυναμίες εννοιών $\exists R.C \equiv \neg\forall R.\neg C$ και $\forall R.C \equiv \neg\exists R.\neg C$ ισχύουν αν επιπρόσθετα το ασαφές συμπλήρωμα είναι ενειλικτικό.

Επιπλέον, αν η ασαφής τριάδα ικανοποιεί τους νόμους της *αντίφασης* (*law of contradiction*) και του *αποκλειόμενου μέσου* (*excluded middle*), τότε οι ακόλουθες ισοδυναμίες ισχύουν:

$$C \sqcap \neg C \equiv \bot \text{ και } C \sqcup \neg C \equiv \top.$$

Για παράδειγμα η τριάδα $\langle c_L, t_L, u_L \rangle$, ικανοποιεί τις ισοδυναμίες αυτές. Τέλος αν η τριάδα είναι *επιμεριστική* (*distributive*), οι ακόλουθες ισοδυναμίες ισχύουν:

$$\begin{array}{rcl} C_1 \sqcap (C_2 \sqcup C_3) & \equiv & (C_1 \sqcap C_2) \sqcup (C_1 \sqcap C_2) \text{ και} \\ C_1 \sqcup (C_2 \sqcap C_3) & \equiv & (C_1 \sqcup C_2) \sqcap (C_1 \sqcup C_2). \end{array}$$

Για παράδειγμα η τριάδα $\langle c_L, t_G, u_G \rangle$ ικανοποιεί τις ιδιότητες αυτές.

Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι οι τριάδες που ικανοποιούν τους κανόνες του αποκλειόμενου μέσου και της αντίφασης δεν ικανοποιούν την επιμεριστική ιδιότητα [81].

Στην περίπτωση που το ασαφές συμπλήρωμα είναι ενειλικτικό, η ασαφής τριάδα είναι δυαδική και η ασαφής συνεπαγωγή είναι μια S-συνεπαγωγή η ασαφής ΠΛ διατηρεί μια πολύ σημαντική έννοια των κλασικών ΠΛ, αυτή της *κανονικής μορφής άρνησης* (ΚΜΑ) (*negation normal form* - NNF) [62]. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.2.1 (κανονική μορφή άρνησης) *Μια έννοια C βρίσκεται σε κανονική μορφής άρνησης $\sim C$ αν ο κατασκευαστής της άρνησης $\neg$ εμφανίζεται μόνο μπροστά από τις ατομικές έννοιες που συνθέτουν την C.*

Έστω f-$\mathcal{L}$ μια ασαφής ΠΛ στην οποία το ασαφές συμπλήρωμα είναι ενειλικτικό, η ασαφής τριάδα είναι δυαδική και η ασαφής συνεπαγωγή είναι μια S-συνεπαγωγή. Τότε, κάθε f-$\mathcal{L}$-έννοια C μπορεί να μετατραπεί στην ισοδύναμη μορφή NNF σπρώχνοντας τις αρνήσεις προς το εσωτερικό της έννοιας και κάνοντας χρήση των παρακάτω ισοδυναμιών εννοιών:

$$\begin{array}{rclrcl} \neg\top & \equiv & \bot, & \neg\bot & \equiv & \top, \\ \neg(C \sqcup D) & \equiv & \neg C \sqcap \neg D, & \neg(C \sqcap D) & \equiv & \neg C \sqcup \neg D, \\ \neg\exists R.C & \equiv & \forall R.\neg C, & \neg\forall R.C & \equiv & \exists R.\neg C, \\ \neg \leq p_1 R & \equiv & \geq (p_1+1)R, & \neg \geq p_1 R & \equiv & \left\{ \begin{array}{ll} \leq (p_1-1)R, & p_1 \in \mathbb{N}^* \\ \bot, & p_1 = 0 \end{array} \right. \\ \neg\neg C & \equiv & C & & & \end{array}$$

$\diamondsuit$

Έστω για παράδειγμα οι ασαφείς Περιγραφικές Λογικές f$_{KD}$-$\mathcal{L}$, δηλαδή οι ασαφείς ΠΛ που χρησιμοποιούν την ασαφή τετράδα $\langle c_L, t_G, u_G, \mathcal{J}_{KD} \rangle$ για να αποδώσουν σημασιολογία στα δομικά τους στοιχεία. Όπως είδαμε και προηγουμένως, η τετράδα αυτή ικανοποιεί τους κανόνες επανεγγραφής εννοιών του ορισμού 3.2.1. Τότε μια έννοια της μορφής $\neg(\neg C \sqcap \exists R.(C \sqcup \leq 1R))$ μπορεί να μετατραπεί στην σημασιολογικά ισοδύναμη έννοια $C \sqcup \forall R.(\neg C \sqcap \geq 2R)$, η οποία και βρίσκεται σε ΚΜΑ.

3.3 Υπηρεσίες Εξαγωγής Συμπερασμάτων

Μέχρι στιγμής έχουμε δει πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα σώματα ορολογίας, ρόλων και ισχυρισμών των ΠΛ για τη δημιουργία βάσεων γνώσης. Στο παρών κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τις *υπηρεσίες εξαγωγής συμπερασμάτων* (*inference services*) ή *υπηρεσίες συλλογιστικής* (*reasoning services*) που μπορούμε να υποστηρίξουμε σε ασαφείς ΠΛ. Επιπρόσθετα θα δείξουμε πώς μπορούμε να εφαρμόσουμε διαδικασίες συλλογιστικής με βάση γενικευμένα αξιώματα, κάτι το οποίο ήταν ένα ανοικτό πρόβλημα για τις ασαφείς ΠΛ για αρκετά χρόνια.

Αρχικά εισάγουμε συμβολισμό ο οποίος είναι πολύ χρήσιμος για τη συνέχεια. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\rhd$ για να δηλώσουμε τις ανισότητες της μορφής $\geq, >$ ενώ το σύμβολο $\lhd$ για να δηλώσουμε τις ανισότητες της μορφής $\leq, <$. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιούμε το σύμβολο $+$ για να δηλώσουμε την *ισχυροποίηση* (*strengthening*) ή την *εξασθένιση* (*weakening*) μιας ανισότητας. Για παράδειγμα η εφαρμογή του τελεστή $+$ στην $\geq$ δίνει την ανισότητα $>$, δηλαδή την ισχυροποιεί, ενώ η εφαρμογή του στην ανισότητα $>$ δίνει την ανισότητα $\geq$, δηλαδή την εξασθενεί. Τέλος χρησιμοποιούμε με τη γραφή $\neg \bowtie$ δηλώνουμε την *άρνηση των ανισοτήτων*, δηλαδή η εφαρμογή του τελεστή $\neg$ στην ανισότητα $\geq$ μας δίνει την ανισότητα $<$, ενώ η εφαρμογή του στην ανισότητα $<$ μας δίνει την ανισότητα $\geq$.

Μια f-$\mathcal{SHOIN}$ βάση γνώσης $\Sigma = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \rangle$ είναι *ικανοποιήσιμη* (*satisfiable*) (μή-ικανοποιήσιμη) ανν υπάρχει (δεν υπάρχει) μια ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$ η οποία ικανοποιεί όλα τα αξιώματα της Σ. Σε αυτήν την περίπτωση η $\mathcal{I}$ λέγεται μοντέλο της Σ. Μια f-$\mathcal{SHOIN}$-έννοια C είναι *n-ικανοποιήσιμη* (*n-satisfiable*) μ.β.τ. Σ ανν υπάρχει ένα μοντέλο $\mathcal{I}$ της Σ στο οποίο υπάρχει κάποιο $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $C^{\mathcal{I}}(a) = n$, και $n \in (0, 1]$ [100]. Η έννοια C υπάγεται στην D μ.β.τ. Σ ανν για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της Σ έχουμε ότι $\forall d \in \Delta^{\mathcal{I}}, C^{\mathcal{I}}(d) \leq D^{\mathcal{I}}(d)$. Ένα ασαφές σώμα ισχυρισμών $\mathcal{A}$ είναι *συνεπές* (*ασυνεπές*) μ.β.τ. σώμα ορολογίας $\mathcal{T}$ και το σώμα ρόλων $\mathcal{R}$ αν υπάρχει (δεν υπάρχει) μοντέλο $\mathcal{I}$ των $\mathcal{T}$ και $\mathcal{R}$ το οποίο ικανοποιεί κάθε ισχυρισμό στο $\mathcal{A}$. Δοθέντος ενός αξιώματος ασαφών εννοιών, ασαφών ρόλων ή έναν ασαφή ισχυρισμό Ψ, λέμε ότι η Σ *συνεπάγεται* (*entails*) το Ψ, γράφοντας

$$\Sigma \models \Psi,$$

ανν όλα το μοντέλα $\mathcal{I}$ της Σ ικανοποιούν το Ψ. Όπως δείχνεται στο [135], ένα ασαφές ABox $\mathcal{A}$ μπορεί να περιέχει ένα πλήθος από θετικούς ισχυρισμούς της μορφής, $(a : C) \rhd n_i$ με $n_i \in [0, 1]$ και $1 \leq i$, χωρίς να εμφανίζεται κάποια *αντίφαση* (*contradiction*). Για το λόγο αυτό στο [135], ορίστηκε η έννοια του *μέγιστου κάτω φράγματος* (*greatest lower bound*) ενός ισχυρισμού ϕ μ.β.τ. Σ ως,

$$glb(\Sigma, \phi) = \sup\{n : \Sigma \models \phi \geq n\},$$

όπου $\sup \emptyset = 0$. Επιπρόσθετα, στο [135] δόθηκε μια διαδικασία για την εύρεση του μέγιστου ελάχιστου φράγματος. Εφόσον μια τέτοια διαδικασία είναι ανεξάρτητη από την εκφραστικότητα της ΠΛ γλώσσας μπορεί να εφαρμοστεί και στη δική μας περίπτωση αρκεί να βρεθεί μια διαδικασία η οποία θα αποφασίζει τα προβλήματα συλλογιστικής της fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$.

Όπως έχει αποδειχθεί στη βιβλιογραφία των ασαφών ΠΛ, τα προβλήματα της ικανοποιησιμότητας ασαφών ΠΛ εννοιών, υπαγωγής εννοιών, και συνεπαγωγής μ.β.τ. μια βάση γνώσης $\Sigma = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \rangle$ μπορούν να αναχθούν στο πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας μιας βάσης γνώσης Σ' [135]. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τις παρακάτω ικανές και αναγκαίες συνθήκες, οι οποίες εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στο [135].

$$\begin{array}{rcl}
C \text{ n-ικανοποιήσιμη μ.β.τ. } \Sigma & \text{ανν} & \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \cup \{(a : C) \geq n\} \rangle \text{ ικανοποιήσιμη} \\
C \sqsubseteq D \text{ μ.β.τ. } \Sigma & \text{ανν} & \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \cup \{(a : C) \geq n, (a : D) < n\} \rangle \\
 & & \text{μη-ικανοποιήσιμη για κάθε } n \in [0, 1] \\
\Sigma \models \phi \rhd n & \text{ανν} & \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \cup \{\phi \neg \rhd n\} \rangle \text{ μη-ικανοποιήσιμη}
\end{array}$$

όπου ϕ είναι ένας (κλασικός) $\mathcal{SHOIN}$ ισχυρισμός εννοιών ή ρόλων, δηλαδή της μορφής $a : C$ και $(a, b) : R$.

Παρατηρήστε ότι για να ελέγξουμε το πρόβλημα της υπαγωγής θα πρέπει να ελέγξουμε τη μη-ικανοποιησιμότητα της βάσης γνώσης για κάθε βαθμό $n \in [0, 1]$. Προφανώς κάτι τέτοιο είναι πρακτικώς αδύνατο. Ο Straccia στο [135] αποδεικνύει ότι αρκεί να ελέγξουμε για μη-ικανοποιησιμότητα τη βάση γνώσης μόνο για δυο τυχαία επιλεγμένες τιμές από τα διαστήματα (0,0.5] και (0.5,1]. Πιο συγκεκριμένα, $C \sqsubseteq D$ μ.β.τ. Σ ανν η βάση γνώσης $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \cup \{(a : C) \geq n, (a : D) < n\} \rangle$ είναι μη-ικανοποιήσιμη για $n \in \{n_1, n_2\}$, όπου $n_1 \in (0, 0.5]$ και $n_2 \in (0.5, 1]$.

3.3.1 Γενικευμένα και Κυκλικά Αξιώματα στις Ασαφείς ΠΛ

Όπως δείξαμε στα παραπάνω μπορούμε να ανάγουμε όλα μας τα προβλήματα στο πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας μιας βάσης γνώσης. Ο έλεγχος όμως της ικανοποιησιμότητας μιας βάσης γνώσης $\Sigma = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \rangle$ εκ πρώτης όψης φαίνεται λίγο περίπλοκος καθώς πρέπει να κοιτάξουμε για κάποια ερμηνεία που είναι ταυτόχρονα μοντέλο τόσο του $\mathcal{T}$, του $\mathcal{R}$ αλλά και του $\mathcal{A}$. Για το λόγο αυτό στις κλασικές ΠΛ έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι με βάση τις οποίες το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας μιας βάσης γνώσης $\Sigma = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \rangle$ μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα της συνέπειας του σώματος ισχυρισμών $\mathcal{A}$ με βάση μόνο το $\mathcal{R}$, δηλαδή μια μέθοδος απαλοιφής του $\mathcal{T}$. Οι μέθοδοι αυτοί χωρίζονται σε δυο κατηγορίες ανάλογα με τον τύπο των αξιωμάτων που βρίσκονται στο $\mathcal{T}$.

Στην περίπτωση που το $\mathcal{T}$ είναι απλό τότε αυτό μπορεί πολύ εύκολα να απαλειφθεί εφαρμόζοντας τη μέθοδο του *ξεδιπλώματος* (*unfolding*) [101]. Στην περίπτωση όμως που το $\mathcal{T}$ περιλαμβάνει γενικευμένα ή κυκλικά αξιώματα η μέθοδος αυτή δε μπορεί να εφαρμοστεί. Σε αυτήν την περίπτωση εφαρμόζεται μια άλλη μέθοδος η οποία ονομάζεται *εσωτερίκευση* (*internalization*) και βασίζεται στην ιδέα ότι οι περιορισμοί που επιβάλουν στα μοντέλα μας ένα αξίωμα της μορφής $C \sqsubseteq D$ μπορεί να κωδικοποιηθεί σε μια έννοια της μορφής $\neg C \sqcup D$ [3]. Όπως παρατηρούμε η τεχνική αυτή βασίζεται στην ιδιότητα του αποκλειόμενου μέσου. Πιο συγκεκριμένα εφόσον στην άλγεβρα Boole ισχύει ότι $\neg C \sqcup C$ (ένα αντικείμενο είτε ανήκει στο C είτε στην άρνηση του), αν έχουμε C τότε λόγω του $C \sqsubseteq D$ θα έχουμε και D, άρα προκύπτει η παραπάνω έννοια.

Στην προηγούμενη ενότητα δείξαμε ότι οι κλασσικοί κανόνες της άλγεβρας Boole, όπως είναι οι κανόνες De Morgan ή ο κανόνας του αποκλειόμενου μέσου δεν ικανοποιούνται από όλες τις ασαφείς λογικές. Μάλιστα, όπως έχει αποδειχθεί, είναι αδύνατο να ορίσουμε στο διάστημα [0,1] τελεστές που να ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες της άλγεβρας Boole [37]. Το επακόλουθο του χαρακτηριστικού αυτού είναι ότι πολλές τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί στις κλασσικές ΠΛ και οι οποίες βασίζονται σε πολλούς από τους κανόνες αυτούς, όπως είναι η διαδικασία της εσωτερίκευσης που είδαμε παραπάνω, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε όλες τις ασαφείς ΠΛ. Αυτό είχε ως συνέπεια για πολλά χρόνια οι αλγόριθμοι εξαγωγής συμπερασμάτων που παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία για τις ασαφείς ΠΛ υποθέτουν ότι τα σώματα ορολογίας περιέχουν μόνο απλά αξιώματα (δηλαδή μη κυκλικά και μη γενικευμένα) [135, 59, 118, 129, 128].

Όπως όμως παρατηρούμε στο [126] εφόσον βρισκόμαστε στην ασαφή και όχι στην κλασική λογική είναι απολύτως λογικό κάποιες από τις κλασικές ιδιότητες να μην ισχύουν. Αυτό το οποίο θα ήταν λογικό είναι να μπορέσουμε κατά μια έννοια να ασαφοποιήσουμε τις ιδιότητες αυτές και να βρούμε ανάλογη έκφρασή τους στην περίπτωση των ασαφών λογικών. Κατά συνέπεια η νέα αυτή μορφή θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευάσουμε αλγορίθμους εξαγωγής συμπερασμάτων. Πιο συγκεκριμένα στα [126, 131] παρουσιάζουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.3.1 *Για κάθε $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$, $n \in [0,1]$, και ασαφή ερμηνεία $\mathcal{I}$*

1. *είτε $C^{\mathcal{I}}(a) < n$ ή $C^{\mathcal{I}}(a) \geq n$*[1]*, και*

2. *αν $C^{\mathcal{I}}(a) \geq n_1$ και $(\neg C)^{\mathcal{I}}(a) \geq n_2$, τότε $\bot^{\mathcal{I}}(a) \geq \max(0, n_1 + n_2 - (C^{\mathcal{I}}(a) + c(C^{\mathcal{I}}(a))))$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη της πρώτης πρότασης είναι προφανής. Αν $C^{\mathcal{I}}(a) = 0$, τότε για κάθε $n \in (0,1]$ $C^{\mathcal{I}}(a) = 0 < n$ και για $n = 0$ $C^{\mathcal{I}}(a) = 0 \geq n$, ενώ για $C^{\mathcal{I}}(a) = 1$, για κάθε $n \in [0,1]$ $C^{\mathcal{I}}(a) = 1 \geq n$. Τέλος, για $C^{\mathcal{I}}(a) = n \in (0,1)$, και $n' \in [0,1]$ είτε $n < n'$ ή $n \geq n'$.

Ας εστιάσουμε στη δεύτερη πρόταση. Έστω ότι έχουμε τις ανισότητες $C^{\mathcal{I}}(a) \geq n_1$ και $(\neg C)^{\mathcal{I}}(a) \geq n_2$. Σύμφωνα με τη σημασιολογία έχουμε ότι $(\neg C)^{\mathcal{I}}(a) = c(C^{\mathcal{I}}(a))$. Συνεπώς, προσθέτοντας κατά μέλη λαμβάνουμε την ανισότητα:

$$n_1 + n_2 \leq C^{\mathcal{I}}(a) + c(C^{\mathcal{I}}(a)).$$

Συνεπώς, αν $n_1 + n_2 > C^{\mathcal{I}}(a) + c(C^{\mathcal{I}}(a))$ η συνθήκη $\bot^{\mathcal{I}}(a) \geq \max(0, n_1 + n_2 - (C^{\mathcal{I}}(a) + c(C^{\mathcal{I}}(a))) = n_1 + n_2 - (C^{\mathcal{I}}(a) + c(C^{\mathcal{I}}(a))) > 0$, υποδεικνύει μια αντίφαση καθώς στη σημασιολογία των ασαφών ΠΛ απαιτούμε να ισχύει $\bot^{\mathcal{I}}(a) = 0$. ■

Η πρόταση 1 στο παραπάνω λήμμα αποτελεί μια ασαφή έκφραση του αξιώματος $\top \sqsubseteq C \sqcup \neg C$, το οποίο ισχύει στις κλασσικές ΠΛ, ενώ η πρόταση 2 μια ασαφή έκφραση του αξιώματος $C \sqcap \neg C \sqsubseteq \bot$. Η πρώτη περίπτωση θα μπορούσαμε επίσης να πούμε ότι μοιάζει με την τεχνική της *συλλογιστικής υπό συνθήκες* (*reasoning by cases*) [6]. Αντιθέτως, ας δούμε ένα παράδειγμα για τη δεύτερη περίπτωση. Έστω ότι έχουμε την τριάδα $\langle c_L, t_G, u_G \rangle$, τότε $C^{\mathcal{I}}(a) + c(C^{\mathcal{I}}(a)) = C^{\mathcal{I}}(a) + 1 - C^{\mathcal{I}}(a) = 1$. Αν $n_1 = 0.7$ και $n_2 = 0.6$, τότε $0 = \bot^{\mathcal{I}}(a) \geq 0.7 + 0.6 - (n + 1 - n) = 0.3$, το οποίο αποτελεί μια αντίφαση (αφού $\bot^{\mathcal{I}}(a) = 0$, για κάθε $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$), ενώ αν $n_2 = 0.2$, τότε $\bot^{\mathcal{I}}(a) \geq \max(0, 0.7 + 0.2 - 1) = 0$, το οποίο είναι δυνατό. Πράγματι είναι δυνατόν να ισχύουν ταυτόχρονα τα $C^{\mathcal{I}}(a) \geq 0.7$ και $(\neg C)^{\mathcal{I}}(a) \geq 0.2 \rightarrow C^{\mathcal{I}}(a) \leq 0.8$.

Στο [131] βασιζόμαστε στον προσαρμοσμένο (ασαφοποιημένο) κανόνα του αποκλειόμενου μέσου για να μπορέσουμε να διαχειριστούμε γενικευμένα και κυκλικά αξιώματα. Πιο συγκεκριμένα αποδίδουμε το παρακάτω λήμμα, το οποίο εδώ αποδεικνύουμε.

Λήμμα 3.3.2 *Μια ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί την υπαγωγή $C \sqsubseteq D$ ανν για κάθε $n \in [0,1]$ και $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$, είτε $C^{\mathcal{I}}(a) < n$ ή $D^{\mathcal{I}}(a) \geq n$.*

Απόδειξη: Για την ορθή φορά, έστω μια ερμηνεία $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in [0,1]$ να ικανοποιεί είτε τη σχέση $C^{\mathcal{I}}(a) < n$ είτε την $D^{\mathcal{I}}(a) \geq n$. Έστω επίσης ότι αντίθετα υπάρχει κάποιο αντικείμενο, $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $C^{\mathcal{I}}(d) = n_1 > D^{\mathcal{I}}(d) = n_2$, όπου $n_1, n_2 \in [0,1]$. Τότε, αν θέσουμε $n = n_1$ για την ερμηνεία αυτή θα ισχύει ότι $C^{\mathcal{I}}(d) \not< n_1$, και $D^{\mathcal{I}}(d) = n_2 \not\geq n_1$, άτοπο.

[1] Παρομοίως είτε $C^{\mathcal{I}}(a) \leq n$ ή $C^{\mathcal{I}}(a) > n$

Για την αντίθετη φορά, έστω ότι μια ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί την υπαγωγή $C \sqsubseteq D$. Έστω επίσης ένα τυχαίο αντικείμενο $d \in \Delta^{\mathcal{I}}$, για το οποίο $C^{\mathcal{I}}(d) = n_1$ και $D^{\mathcal{I}}(d) = n_2$, με $n_1, n_2 \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Εφόσον η ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί την υπαγωγή θα ισχύει, $n_1 \leq n_2$. Τότε έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Αν $n < n_1$, τότε $D^{\mathcal{I}}(d) \geq n_1 > n$.

2. Αν $n \geq n_1$, τότε έχουμε δυο περιπτώσεις

   - Αν $n \leq n_2$, τότε $D^{\mathcal{I}}(d) = n_2 \geq n$,

   - Αν $n > n_2$, τότε $C^{\mathcal{I}}(d) = n_1 \leq n_2 < n$.

Σε όλες τις περιπτώσεις η $\mathcal{I}$ είτε ικανοποιεί τη σχέση $C^{\mathcal{I}}(a) < n$ είτε την $D^{\mathcal{I}}(a) \geq n$, για κάθε βαθμό συμμετοχής $n \in [0, 1]$. ■

Εφαρμόζοντας μια αφαίρεση (abstraction) από τα μοντέλα ενός αξιώματος υπαγωγής μπορούμε γενικά να πούμε ότι το αξίωμα $C \sqsubseteq D$ ικανοποιείται ανν ικανοποιείται ένας από τους ασαφείς ισχυρισμούς $(a : C) < n$ και $(a : D) \geq n$ για κάθε $n \in [0, 1]$. Η ιδιότητα αυτή μας επιτρέπει να αναπαραστήσουμε (κωδικοποιήσουμε) τους σημασιολογικούς περιορισμούς που επιβάλλονται από τα αξιώματα υπαγωγής με τη μορφή διαζευκτικών ασαφών ισχυρισμών δημιουργώντας έτσι ένα σύνολο από σώματα ισχυρισμών. Για παράδειγμα, αν $\mathcal{T} = \{C_1 \sqsubseteq D_1, C_2 \sqsubseteq D_2\}$, είναι ένα σώμα όρων τότε εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδέα λαμβάνουμε τις εναλλακτικές:

$$\begin{array}{ll}
\{(a : C_1) < n, (a : C_2) < n\} & \text{ή} \\
\{(a : C_1) < n, (a : D_2) \geq n\} & \text{ή} \\
\{(a : D_1) \geq n, (a : C_2) < n\} & \text{ή} \\
\{(a : D_1) \geq n, (a : D_2) \geq n\} &
\end{array}$$

για κάθε $n \in [0, 1]$ αλλά και άτομο $a \in \mathbf{I}$. Οι εναλλακτικές αυτές συλλαμβάνουν ακριβώς το σύνολο των μοντέλων που περιγράφει το TBox. Όπως είναι φυσικό, σε μια διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων, οι παραπάνω περιορισμοί θα πρέπει να επιβληθούν σε κάθε άτομο $a \in \mathbf{I}$ και για κάθε τιμή $n \in [0, 1]$. Αξίζει να παρατηρήσουμε η μέθοδος αυτή είναι παρόμοια με αυτή που εφαρμόζεται και στις κλασσικές ΠΛ από τη διαδικασία της εσωτερίκευσης. Στην περίπτωση αυτή, για το παραπάνω σώμα όρων θα είχαμε το εσωτερικευμένο αξίωμα $\top \sqsubseteq (\neg C_1 \sqcup D_1) \sqcap (\neg C_2 \sqcup D_2)$, το οποίο διαισθητικά λέει ότι για όλα τα άτομα που μπορεί να προκύψουν σε ένα σώμα ισχυρισμών ($\top$) θα ισχύει,

$$\begin{array}{rl}
\{a : \neg C_1, a : \neg C_2\} & \text{ή} \\
\{a : \neg C_1, a : D_2\} & \text{ή} \\
\{a : D_1, a : \neg C_2\} & \text{ή} \\
\{a : D_1, a : D_2\} &
\end{array}$$

Η μόνη διαφορά είναι ότι από τη στιγμή που βρισκόμαστε στις ασαφείς ΠΛ θα πρέπει επιπλέον να διαχειριστούμε και τους βαθμούς συμμετοχής που εμφανίζονται. Ως επακόλουθο έχουμε τα παρακάτω θεωρήματα αναγωγής των υπηρεσιών εξαγωγής συμπερασμάτων στο πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας.

Θεώρημα 3.3.3 (Αναγωγή στη Συνέπεια) *Έστω $\mathcal{T} = \{C_i \sqsubseteq D_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ ένα ασαφές TBox, $\mathcal{R}$ ένα RBox και $\mathcal{A}$ ένα ABox. Τότε ορίζουμε,*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(a,n) \quad = \quad & \{\Phi \mid \text{για κάποιο } \Phi \in \{(a:C_i) < n, (a:D_i) \geq n\} \\ & \text{και για όλα τα } C_i \sqsubseteq D_i \in \mathcal{T}\},\end{aligned}$$

ως το σύνολο των δυνατών ABox που προκύπτουν από την εφαρμογή του κανόνα της συλλογιστικής υπο-συνθήκες σε όλα τα αξιώματα υπαγωγής του TBox και για ένα βαθμό συμμετοχής $n \in [0,1]$. Προφανώς το $\mathcal{A}(a,n)$ περιέχει 2^m διαφορετικά ABox. Τότε,

- *Η ασαφής έννοια E υπάγεται στην F μ.β.τ. $\mathcal{T}$ και το $\mathcal{R}$ ανν για κάποιο άτομο a το,*

  $$\mathcal{A}_j \cup \{(a:E) \geq n, (a:F) < n\} \cup \mathcal{A}_l,$$

  με $\mathcal{A}_j \in \mathcal{A}(a,n)$ και $\mathcal{A}_l \in \mathcal{A}(b,n)$, είναι ασυνεπές μ.β.τ. $\mathcal{R}$, για κάθε $1 \leq j < l \leq 2^m$, $n \in [0,1]$ και για κάθε νέο άτομο b.

- *Το $\mathcal{A}$ είναι συνεπές μ.β.τ. $\mathcal{T}$ και το $\mathcal{R}$ ανν κάποιο από τα*

  $$\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_j \cup \mathcal{A}_l$$

  για $1 \leq i < l \leq 2^m$, με $\mathcal{A}_j \in \mathcal{A}(a,n)$ και $\mathcal{A}_l \in \mathcal{A}(b,n)$, είναι συνεπές μ.β.τ. $\mathcal{R}$ για κάθε $n \in [0,1]$, για κάθε άτομο a που βρίσκεται σε κάποιο ισχυρισμό στο $\mathcal{A}$ και για κάθε άλλο άτομο b.

3.4 Μοντέλα με Μαρτυρία

Από τον Πίνακα 3.1 παρατηρούμε ότι η σημασιολογία του υπαρξιακού περιορισμού και του περιορισμού τιμής στις ασαφείς ΠΛ ορίζεται με τη βοήθεια του infimum και του supremum ενός συνόλου από βαθμούς συμμετοχής. Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια άπειρη ερμηνεία, δηλαδή μια ερμηνεία στην οποία α) ο χώρος ερμηνείας $\Delta^{\mathcal{I}} = \{b_1, b_2, \ldots\}$ περιέχει άπειρο αριθμό από αντικείμενα, β) η έννοια $\forall R.C$ είναι n-ικανοποιήσιμη ($(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a) = n$ για κάποιο $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$) αλλά γ) για κάθε αντικείμενο $b_i \in \Delta^{\mathcal{I}}$, διαφορετικό από το a, να ισχύει $\max(1 - R^{\mathcal{I}}(a, b_i), C^{\mathcal{I}}(b_i)) > n$. Αυτό είναι δυνατό γιατί παρόλο που η πράξη max των βαθμών συμμετοχής είναι αυστηρά μεγαλύτερη από την τιμή n το όριο της ακολουθίας μπορεί να τείνει στο n και άρα το infimum να είναι ίσο με αυτό. Το γεγονός αυτό παρατηρήθηκε πρώτα από τον Hajek [54]. Ευτυχώς όμως υπάρχουν ασαφείς ΠΛ (αλλά και ασαφείς λογικές γενικότερα) οι οποίες έχουν ένα άπειρο μοντέλο ανν έχουν και ένα *μοντέλο με μαρτυρία* (*witnessed model*). Ένα μοντέλο ονομάζεται μοντέλο με μαρτυρία [54] αν για $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a) = n$ υπάρχει κάποιο αντικείμενο $b \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $R^{\mathcal{I}}(a, b_i) = n$ και $C^{\mathcal{I}}(b_i) = n$, δηλαδή ένα αντικείμενο το οποίο μαρτυρεί το βαθμό συμμετοχής τους a στην έννοια $\forall R.C$. Ο Hajek αποδεικνύει την ιδιότητα αυτή για την Lukasiewicz ασαφή ΠΛ. Στη συνέχεια καταλήγει ότι οι αποδείξεις για τη λογική αυτή μπορούν να τροποποιηθούν για να εφαρμοστούν στις ασαφείς f_{KD}-ΠΛ τις οποίες και εξετάζουμε στην ενότητα αυτή. Αυτή η μεταφορά των αποδείξεων από τη λογική Lukasiewicz συμβαίνει διότι οι τελεστές που χρησιμοποιούμε εδώ μπορούν να οριστούν μέσω των τελεστών της λογικής Lukasiewicz [97]. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, στη συνέχεια της διατριβής και ιδιαίτερα για τις αποδείξεις θα θεωρούμε μόνο μοντέλα με μαρτυρία εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.

Κεφάλαιο 4

Συλλογιστική σε Πολύ Εκφραστικές Ασαφείς ΠΛ

Μέχρι στιγμής η συντριπτική πλειοψηφία των αλγορίθμων εξαγωγής συμπερασμάτων που έχουν παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία ασχολούνται με τις ασαφείς περιγραφικές λογικές f_{KD}-$\mathcal{L}$, δηλαδή τις ασαφείς ΠΛ που χρησιμοποιούν την άρνηση Lukasiewicz, την τομή και την ένωση Gödel και την ασαφή συνεπαγωγή του Kleene-Dienes. Μοναδικές εξαιρέσεις αποτελούν οι αλγόριθμοι που παρουσιάζονται στα [136] και [15]. Στις εργασίες αυτές παρουσιάζονται αλγόριθμοι βελτιστοποίησης για τις γλώσσες f_L-$\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$ και f_P-$\mathcal{ALC}f$, αντίστοιχα, δηλαδή για ασαφείς επεκτάσεις των γλωσσών $\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$ και $\mathcal{ALC}f$.[1] Όπως βλέπουμε οι γλώσσες αυτές δεν έχουν μεγάλη εκφραστική δυνατότητα και δεν περιέχουν περίπλοκους κατασκευαστές, όπως είναι οι μεταβατικοί και αντίστροφοι ρόλοι, οι ιεραρχίες ρόλων, οι περιορισμοί πληθυκότητας (ή οι συναρτησιακοί περιορισμοί πληθυκότητας) και οι ονοματικές έννοιες. Στο κεφάλαιο αυτό θα συνεισφέρουμε σημαντικά στο χώρο των ασαφών Περιγραφικών Λογικών παρουσιάζοντας αλγορίθμους συλλογιστικής, οι οποίοι αποφασίζουν το πρόβλημα της συνέπειας ενός ασαφούς σώματος ισχυρισμών $\mathcal{A}$ με βάση ένα ασαφές σώμα ρόλων $\mathcal{R}$ για πολύ εκφραστικές ασαφείς Περιγραφικές Λογικές της οικογένειας των f_{KD}-$\mathcal{L}$ γλωσσών και πιο συγκεκριμένα για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η εργασία μας επεκτείνει τον αλγόριθμο που παρουσιάστηκε στο [135] για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{ALC}$ προς διάφορες κατευθύνσεις, και πιο συγκεκριμένα στη μελέτη των επιπλέον κατασκευαστών της γλώσσας f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$, στη μελέτη των τεχνικών που χρησιμοποιούνται στις κλασικές ΠΛ για την εξασφάλιση του τερματισμού και της ορθότητας των αλγορίθμων, αλλά και στη διαχείριση γενικευμένων και κυκλικών αξιωμάτων. Τα αποτελέσματα αυτά θα επιτευχθούν σταδιακά. Αρχικά θα ξεκινήσουμε από τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SI}$ θα προχωρήσουμε στη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$ και τελικά θα καταλήξουμε στα γενικευμένα και κυκλικά αξιώματα.

Το παρόν κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής. Αρχικά στην ενότητα 4.1 θα εισάγουμε κάποιες βασικές έννοιες και το συμβολισμό ο οποίος θα χρησιμοποιηθεί στο υπόλοιπο του κεφαλαίου. Στη συνέχεια στην ενότητα 4.2 θα ξεκινήσουμε από τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SI}$ και θα δείξουμε πώς μπορούμε να διαχειριστούμε μεταβατικούς και

[1] Η γλώσσα $\mathcal{ALC}f$ αποτελεί επέκταση της γλώσσας $\mathcal{ALC}$ με αξιώματα συναρτησιακών ρόλων τα οποία δηλώνονται με τη σύνταξη $\mathsf{Func}(R)$. Στις κλασικές ΠΛ μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί το $\mathsf{Func}(R)$ αν $\forall a, b, c \in \Delta^{\mathcal{I}}, R^{\mathcal{I}}(a, b) \wedge R^{\mathcal{I}}(a, c) \rightarrow c = b$, ενώ στις ασαφείς ΠΛ αν $\forall a, b, c \in \Delta^{\mathcal{I}}$ αν $R^{\mathcal{I}}(a, b) > 0$ και $R^{\mathcal{I}}(a, c) > 0$ τότε $b = c$. Στο [15] οι συγγραφείς ονομάζουν τη γλώσσα τους f_P-$\mathcal{ALC}f$ όμως όπως παρατηρούμε η γλώσσα $\mathcal{ALC}f$ είναι λιγότερο εκφραστική από τη γλώσσα $\mathcal{ALCF}$ καθώς η δεύτερη επιτρέπει αξιώματα της μορφής $\leq 1R \sqcup \exists R.C \sqsubseteq D \sqcap \geq 1F$.

αντίστροφους ρόλους σε αυτήν την ασαφή λογική. Η μελέτη μας αυτή θα μας οδηγήσει σε ένα αλγόριθμο για τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$. Επιπρόσθετα, στην ενότητα 4.3, θα επεκτείνουμε τον αλγόριθμο της f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ και θα δούμε πώς μπορούμε να διαχειριστούμε επιπλέον ιεραρχίες ρόλων ($\mathcal{H}$), περιορισμούς πληθυκότητας ($\mathcal{N}$), αλλά και τις πολύ δύσκολες ονοματικές έννοιες ($\mathcal{O}$) δίνοντας έτσι μια διαδικασία για τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$. Ο αλγόριθμος αυτός είναι πολύ σημαντικός καθώς η γλώσσα αυτή αποτελεί ουσιαστικά το λογικό ανάλογο της γλώσσας f$_{KD}$-OWL. Επισημαίνουμε ότι αρχικά όλοι οι αλγόριθμου που θα παρουσιάσουμε δε θα διαχειρίζονται γενικευμένα και κυκλικά αξιώματα με σκοπό η παρουσίαση μας να γίνει όσο το δυνατόν πιο απλή και κατανοητή. Η μεθοδολογία με την οποία διαχειριζόμαστε γενικευμένες και κυκλικές ορολογίες θα παρουσιαστεί στην ενότητα 4.4.

4.1 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στις κλασσικές ΠΛ, αλλά και στις ασαφείς ΠΛ, το πρόβλημα της συνέπειας ελέγχεται συνήθως με αλγορίθμους tableaux [52]. Οι αλγόριθμοι αυτού περιλαμβάνουν κανόνες (επέκτασης) οι οποίοι αναλαμβάνουν να αναλύσουν τις περίπλοκες έννοιες, οι οποίες πιθανόν να βρίσκονται μέσα σε (ασαφείς) ισχυρισμούς σε απλούστερες. Είναι λογικό λοιπόν οι κανόνες αυτοί να βασίζονται στη σημασιολογία των κατασκευαστών της γλώσσας. Για παράδειγμα η έννοια $C \sqcap D$ μας λέει ότι ο βαθμός συμμετοχής ενός αντικειμένου στην έννοια αυτή ισούται με τον ελάχιστο από του βαθμούς που το αντικείμενο $a^{\mathcal{I}}$ ανήκει στις $C^{\mathcal{I}}$ και $D^{\mathcal{I}}$, δηλαδή $(C \sqcap D)^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) = \max(C^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}), D^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}))$. Έτσι λοιπόν αν έχουμε τον ισχυρισμό $(a : C \sqcap D) \geq n$ τότε μπορούμε να συνεπάγουμε ότι οι ισχυρισμοί $(a : C) \geq n$ και $(a : D) \geq n$ πρέπει επίσης να ισχύουν. Παρόμοια, ένας ισχυρισμός της μορφής $(a : \forall R.C) \geq n$, ικανοποιείται αν για κάθε $b^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ ισχύει η ανίσωση $\max(1 - R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}), C^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}})) \geq n$, δηλαδή είτε $R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \leq 1 - n$ ή $C^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}}) \geq n$. Έτσι λοιπόν αν υπάρχει ένας ισχυρισμός της μορφής $((a, b) : R) \geq n'$, με $n' > 1 - n$ θα πρέπει να επιβάλουμε τον ισχυρισμό $(b : C) \geq n$ διότι σε διαφορετική περίπτωση ο αρχικός μας ισχυρισμός δεν ικανοποιείται.

Λόγω της πολυπλοκότητας των γλωσσών $\mathcal{SI}$ και $\mathcal{SHOIN}$ χρησιμοποιούμε συνήθως μια βοηθητική δομή για την ανάπτυξη των αλγορίθμων μας αυτή του tableau [57, 67]. Ένα tableau αποτελεί μια *αφαίρεση* (*abstraction*) ενός μοντέλου του $\mathcal{A}$. Με την έννοια αφαίρεση εννοούμε ότι ενώ στη γενική περίπτωση σε ένα μοντέλο τα αντικείμενα μπορεί να είναι τυχαία συνδεδεμένα μεταξύ τους ή ακόμα και ασύνδετα, σε ένα tableau οι κόμβοι συνδέονται με έναν τέτοιο τρόπο με τον οποίο δημιουργείται μια δεντρική (tree-like), δασική (forest-like) ή γραφική (graph-like) δομή. Δοθέντος ενός ασαφούς tableau είναι σχεδόν άμεσο να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος δημιουργεί μια τέτοια δομή, και να αποδείξουμε ότι ο αλγόριθμος αποτελεί έναν αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει τη συνέπεια του $\mathcal{A}$. Έτσι λοιπόν προτού παρουσιάσουμε αλγορίθμους συλλογιστικής για τις γλώσσας f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ και f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ προτείνουμε την επέκταση των δομών αυτών σε αυτή των ασαφών tableau με σκοπό να διαχειριστούμε τους βαθμούς συμμετοχής που εμφανίζονται στις ασαφείς ΠΛ.

Στο παρελθόν, οι αλγόριθμοι εξαγωγής συμπερασμάτων για τις ασαφείς ΠΛ επενεργούσαν τόσο πάνω σε θετικούς αλλά και αρνητικούς ισχυρισμούς [135, 129, 128, 131]. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η παρουσίαση των αλγορίθμων αυτών να γίνεται με δυσκολία, διότι απαιτείται η εισαγωγή πάρα πολλών κανόνων που τις περισσότερες φορές είναι μια απλή επανάληψη άλλων κανόνων, κάνοντάς τους έτσι δύσκολους στην κατανόηση από μη ειδικούς στην ασαφή συνολοθεωρία. Στην περίπτωση την οποία η ασαφής ΠΛ περιέχει άρνηση αλλά επιπρόσθετα υποστηρίζει την έννοια της κανονικής μορφής άρνησης που ορίσαμε παραπάνω, τότε μπορούμε να μετατρέψουμε τους αρνητικούς ισχυρισμούς που μπορεί να υπάρχουν σε ισοδύναμους θετικούς ισχυρισμούς. Πιο συγκεκριμένα οι αρνητικοί ασαφείς ισχυρισμοί της μορφής $(a : C) \leq n$ και $(a : C) < n$ μπορούν εύκολα να μετατραπούν στην *Κανονική Μορφή Θετικής Ανισότητας* (ΚΜΘΑ) (*Positive Inequality Normal Form* - PINF), εφαρμόζοντάς τους ένα ασαφές συμπλήρωμα και στις δυο πλευρές της ανισότητας δίνοντας έτσι τους ασαφείς ισχυρισμούς, $(a : \neg C) \geq 1 - n$ και $(a : \neg C) > 1 - n$ (παρόμοια και για ισχυρισμούς που περιέχουν ρόλους). Στη συνέχεια μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις έννοιες αυτές στην ΚΜΑ τους και να λάβουμε τους ασαφείς ισχυρισμούς, $(a :\sim C) \geq 1 - n$ και $(a :\sim C) > 1 - n$.

Το κέρδος μας από το μετασχηματισμό αυτό είναι ότι, ενώ στη γενική περίπτωση θα χρειαζόμασταν έναν επιπλέον κανόνα επέκτασης για κάθε έννοια και αρνητικό ισχυρισμό, για να αναλύσουμε για παράδειγμα τον ισχυρισμό $(a : C \sqcap D) \leq n$, τώρα οι ισχυρισμοί αυτοί μπορούν ουσιαστικά να αντιμετωπιστούν από τους κανόνες που έχουμε για τους θετικούς ισχυρισμούς. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η σύνταξη της γλώσσας πρέπει να επεκταθεί ελάχιστα για να επιτραπεί *απλή άρνηση ρόλων* (*simple role negation*), δηλαδή ισχυρισμοί της μορφής $((a, b) : \neg R) \geq n$. Παρατηρήστε επίσης ότι η άρνηση αυτή δεν επηρεάζει την αποφασισιμότητα της γλώσσας [135]. Στα επόμενα, και χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι όλοι οι ασαφείς ισχυρισμοί ενός ασαφούς ABox $\mathcal{A}$ βρίσκονται σε ΚΜΘΑ.

Η ιδέα αυτή εμφανίστηκε για πρώτη φορά στο [136]. Εκεί οι συγγραφείς χρησιμοποιούν έναν αλγόριθμο εξαγωγής συμπερασμάτων ο οποίος βασίζεται σε τεχνικές βελτιστοποίησης, έτσι λοιπόν η επέκταση πολλών εννοιών των αλγορίθμων tableaux, που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια, όπως τα συγκρουόμενα ζεύγη και η αναγωγή των υπηρεσιών εξαγωγής συμπερασμάτων στην περίπτωση που μόνο θετικές ανισότητες χρησιμοποιούνται δεν παρουσιάστηκε. Έτσι λοιπόν κάποιοι ορισμοί από την ενότητα 3.3 χρειάζεται να τροποποιηθούν καθώς έχουμε να διαχειριστούμε μόνο θετικές ανισότητες. Πιο συγκεκριμά τα προβλήματα της υπαγωγής εννοιών και της συνεπαγωγής ασαφών ισχυρισμών ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο.

$$\begin{aligned} C \sqsubseteq D \text{ μ.β.τ. } \Sigma \quad & \text{ανν} \quad \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \cup \{(a : C) \geq n, (a : \neg D) > 1 - n\} \rangle \\ & \qquad\quad \text{μη-ικανοποιήσιμη } \forall n \in [0, 1] \\ \Sigma \models \phi \rhd n \quad & \text{ανν} \quad \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \cup \{\neg\phi + \rhd 1 - n\} \rangle \text{ μη-ικανοποιήσιμη} \end{aligned}$$

όπου ϕ είναι ένας ασαφής ισχυρισμός εννοιών ή ρόλων. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι $\Sigma \models \phi \geq n$ ανν η $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \cup \{\phi < n\} \rangle$ είναι μη-ικανοποιήσιμη. Συνεπώς, η ανισότητα $\phi < n$ πρέπει να αναχθεί στην ισοδύναμη $\neg\phi > 1 - n$ η οποία με βάση το συμβολισμό που ορίσαμε στην ενότητα 3.3 γράφεται ως $\neg\phi + \geq 1 - n$. Για την περίπτωση της υπαγωγής εννοιών έχουμε ότι $C \sqsubseteq D$ μ.β.τ. Σ ανν η $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \cup \{(a : C) \geq n, (a : D) < n\} \rangle$ είναι μη-ικανοποιήσιμη. Αν ανάγουμε τους αρνητικούς ισχυρισμούς στην ΚΜΘΑ τους θα λάβουμε την αναγωγή που παρουσιάζουμε παραπάνω.

Για τη συνέχεια, και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε αφενός ότι όλοι οι ισχυρισμοί που εμφανίζονται στο $\mathcal{A}$ βρίσκονται σε κανονική μορφή θετικής ανισότητας και αφετέρου ότι οι έννοιες C που συμμετέχουν στους ισχυρισμούς αυτούς βρίσκονται σε κανονική μορφή άρνησης. Κάτι τέτοιο είναι δυνατό γιατί οι τελεστές της οικογένειας των f_{KD}-$\mathcal{L}$ ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες που χρειάζονται για να ισχύει η ιδιότητα της κανονικής μορφής άρνησης.

4.2 Εξαγωγή Συμπερασμάτων στην f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$

4.2.1 Μεταβατικοί Ρόλοι στις Ασαφείς ΠΛ

Στις κλασικές ΠΛ ένας ρόλος R είναι μεταβατικός ανν για κάθε $a, b, c \in \Delta^{\mathcal{I}}$, $\langle a, b\rangle \in R^{\mathcal{I}}$ και $\langle b, c\rangle \in R^{\mathcal{I}}$ συνεπάγονται $\langle a, c\rangle \in R^{\mathcal{I}}$. Η Sattler αποδεικνύει στο [120] ότι, για $a, b, c_1, \ldots, c_n \in \Delta^{\mathcal{I}}$, αν R είναι μεταβατικός, $\langle a, b\rangle \in R^{\mathcal{I}}$, $\langle b, c_i\rangle \in R^{\mathcal{I}}$, $1 \leq i \leq n$, και $a \in (\forall R.C)^{\mathcal{I}}$, τότε όλα τα αντικείμενα $b, c_1, \ldots, c_n$ θα πρέπει να ανήκουν στο σύνολο $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}$, για παράδειγμα $b \in (\forall R.C)^{\mathcal{I}}$ γιατί:

1. $\langle a, c_i\rangle \in R^{\mathcal{I}}$ (καθώς ο R είναι μεταβατικός),

2. $c_i \in C^{\mathcal{I}}$ (λόγω του 1. και καθώς $a \in (\forall R.C)^{\mathcal{I}}$) και

3. $b \in (\forall R.C)^{\mathcal{I}}$ (λόγω της σημασιολογίας της έννοιας $\forall R.C$).

Αυτό συνεπάγεται ότι σε όλα τα μοντέλα θα ισχύει το αξίωμα της μορφής $\forall R.C \sqsubseteq \forall R.(\forall R.C)$. Αυτή η ιδιότητα μας δίνει τη δυνατότητα όταν διενεργούμε μηχανισμούς συλλογιστικής σε γλώσσες που περιλαμβάνουν μεταβατικούς ρόλους, αντί να υπολογίζουμε σταδιακά το μεταβατικό κλείσιμο της σχέσης, κάτι το οποίο θα είχε μεγάλο κόστος για τον αλγόριθμό μας, να προωθούμε τους περιορισμούς τιμής σε διαδοχικά άτομα. Έχει αποδειχθεί ότι η διάδοση αυτή είναι πολύ σημαντική διότι με τη χρήση της μπορούμε να διατηρήσουμε την ιδιότητα του *δενδρικού μοντέλου* (*tree-model property*) [6], η οποία είναι μια ιδιότητα που οδηγεί σε αποφασίσιμες διαδικασίες [145]. Στόχος μας στην ενότητα αυτή είναι να παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα που εμφανίζονται στο [133] για την επέκταση της ιδιότητας αυτής στην περίπτωση των ασαφών περιγραφικών λογικών.

Στις ασαφείς ΠΛ, τα αντικείμενα ανήκουν στα ασαφή σύνολα (ακόμα και σε βαθμό μηδέν). Όπως γνωρίζουμε, ένας ασαφής ρόλος R είναι μεταβατικός ανν,

$$\forall a, c \in \Delta^{\mathcal{I}}, R^{\mathcal{I}}(a, c) \geq \sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} \min(R^{\mathcal{I}}(a, b), R^{\mathcal{I}}(b, c)).$$

Εφόσον αυτό ισχύει για το ελάχιστο άνω φράγμα, για ένα τυχαίο αντικείμενο $b \in \Delta^{\mathcal{I}}$ θα έχουμε ότι, $R^{\mathcal{I}}(a, c) \geq \min(R^{\mathcal{I}}(a, b), R^{\mathcal{I}}(b, c))$ και εφαρμόζοντας ένα ασαφές συμπλήρωμα και στις δυο μεριές της ανισότητας παίρνουμε,

$$c(R^{\mathcal{I}}(a, c)) \leq c(\min(R^{\mathcal{I}}(a, b), R^{\mathcal{I}}(b, c))).$$

Έστω $a, b \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και R ένας μεταβατικός ρόλος. Αν $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a) \geq v_a$, τότε έχουμε τα εξής βήματα συνεπαγωγής:

$$\begin{array}{ll}
(1)\ \inf_{d \in \Delta^{\mathcal{I}}} \max(c(R^{\mathcal{I}}(a, d)), C^{\mathcal{I}}(d)) \geq v_a & \Rightarrow_{\mu o \nu o \tau o \nu \acute{\iota} \alpha} \\
(2)\ \inf_{d \in \Delta^{\mathcal{I}}} \max(c(\min(R^{\mathcal{I}}(a, b), R^{\mathcal{I}}(b, d))), C^{\mathcal{I}}(d)) \geq v_a & \Rightarrow_{DeMorgan} \\
(3)\ \inf_{d \in \Delta^{\mathcal{I}}} \max(\max(c(R^{\mathcal{I}}(a, b)), c(R^{\mathcal{I}}(b, d))), C^{\mathcal{I}}(d)) \geq v_a & \Rightarrow_{\pi\rho o\sigma\epsilon\tau\alpha\iota\rho\iota\sigma\tau\iota\kappa\acute{o}\tau\eta\tau\alpha} \\
(4)\ \inf_{d \in \Delta^{\mathcal{I}}} \max(c(R^{\mathcal{I}}(a, b)), \max(c(R^{\mathcal{I}}(b, d)), C^{\mathcal{I}}(d))) \geq v_a & \Rightarrow_{Lemma 2.3.1} \\
(5)\ \max(c(R^{\mathcal{I}}(a, b)), \inf_{d \in \Delta^{\mathcal{I}}} \max(c(R^{\mathcal{I}}(b, d)), C^{\mathcal{I}}(d))) \geq v_a & \Rightarrow \\
(6)\ \max(c(R^{\mathcal{I}}(a, b)), (\forall R.C)^{\mathcal{I}}(b)) \geq v_a, &
\end{array}$$

το οποίο σημαίνει ότι είτε $c(R^{\mathcal{I}}(a,b)) \geq v_a$ ή $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(b) \geq v_a$. Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε ορισμένα σχόλια για τα παραπάνω. Πρώτιστα, το αντικείμενο b είναι ένα τυχαίο αντικείμενο του $\Delta^{\mathcal{I}}$. Με άλλα λόγια για ένα οποιοδήποτε αντικείμενο $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$, αν $c(R^{\mathcal{I}}(a,x)) < v_a$, έχουμε $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(x) \geq v_a$. Παρομοίως, αν $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a) > v_a \geq c(R^{\mathcal{I}}(a,x))$, έχουμε ότι $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(x) > v_a$. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα αυτά έχουμε το ακόλουθο άμεσο συμπέρασμα.

Πόρισμα 4.2.1 *Αν* $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a) \rhd n$, *και* $\mathsf{Trans}(R)$ *τότε, σε μια* f_{KD}*-ΠΛ ισχύει ότι,* $(\forall R.(\forall R.C))^{\mathcal{I}}(a) \rhd n$.

Όπως και στην περίπτωση του κανόνα της αντίφασης (Λήμμα 3.3.1) αυτό είναι ένα ασαφές ανάλογο του αξιώματος $\forall R.C \sqsubseteq \forall R.(\forall R.C)$.

Έτσι λοιπόν και στις ασαφείς ΠΛ η παραπάνω ιδιότητα μας λέει ότι αν έχουμε ότι $(a : \forall R.C) \geq n$, $(a,b) : R \geq n'$ και Trans (R) τότε είναι απαραίτητο να θέσουμε τον ισχυρισμό $(b : \forall R.C) \geq n$ ανν $n' > 1-n$, έτσι ώστε να σεβαστούμε τη σημασιολογία των τελεστών της γλώσσας f_{KD}-$\mathcal{SI}$ και κατ' επέκταση ο αλγόριθμός μας να είναι σωστός.

Αξίζει σε αυτό το σημείο να επισημάνουμε ότι στην περίπτωση που δε έχουμε μετατρέψει τους αρνητικούς ισχυρισμούς στην ΚΜΘΑ, είτε διότι θέλουμε να εργαστούμε τόσο με θετικούς όσο και με αρνητικούς ισχυρισμούς είτε διότι μετά τη μετατροπή δε μπορούμε να πάρουμε την ΚΜΑ, ανάλογη ιδιότητα με την παραπάνω εμφανίζεται και στην περίπτωση των υπαρξιακών περιορισμών με αρνητικές ανισότητες. Πιο συγκεκριμένα, στο [133] αποδεικνύουμε ότι αν $(\exists R.C)^{\mathcal{I}}(a) \lhd n$, και $\mathsf{Trans}(R)$ τότε, σε μια f_{KD}-ΠΛ ισχύει ότι, $(\exists R.(\exists R.C))^{\mathcal{I}}(a) \lhd n$. Η απόδειξη της ιδιότητας αυτής είναι αρκετά απλή διότι στις f_{KD}-ΠΛ ισχύει ότι $(\exists R.C)^{\mathcal{I}}(a) \lhd n \equiv \neg(\forall R.\neg C)^{\mathcal{I}}(a) \rhd 1-n$. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των περιορισμών τιμής λαμβάνουμε την παραπάνω ιδιότητα. Στο [131] χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα αυτή για να κατασκευάσουμε έναν κανόνα επέκτασης που διαχειρίζεται τις περιπτώσεις αυτές καθώς δεν έχουμε εισάγει την έννοια της ΚΜΘΑ.

4.2.2 Δυναμικό Μπλοκάρισμα για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SI}$

Όπως είναι γνωστό από τις κλασσικές Περιγραφικές Λογικές η παρουσία μεταβατικών ρόλων προκαλεί πρόβλημα στον τερματισμό των αλγορίθμων. Όπως είναι προφανές το αποτέλεσμα αυτό ισχύει και για τις ασαφείς ΠΛ. Για παράδειγμα έστω οι ισχυρισμοί $(a : \exists R.C) \geq 0.7$ και $(a : \forall R.(\exists R.C)) \geq 0.7$ με Trans (R). Ο πρώτος ισχυρισμός μας λέει ότι πρέπει να υπάρχει κάποιο b τέτοιο ώστε $((a,b) : R) \geq 0.7$ και $(b : C) \geq 0.7$. Αντίστοιχα ο δεύτερος ισχυρισμός μας λέει ότι για οποιοδήποτε b θα πρέπει να ισχύει $\max(1-R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b^{\mathcal{I}}),(\exists R.C)^{\mathcal{I}}(b)) \geq 0.7$, δηλαδή είτε $R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b^{\mathcal{I}}) \leq 0.3$ ή $(\exists R.C)^{\mathcal{I}}(b) \geq 0.7$. Εφόσον όμως ισχύει ότι $((a,b) : R) \geq 0.7 > 1-0.7$ τότε ο περιορισμός τιμής δεν ικανοποιείται και θα πρέπει να επιβάλουμε τον ισχυρισμό $(b : \exists R.C) \geq 0.7$. Τέλος για τον ίδιο λόγω και επειδή η R είναι μεταβατική, όπως δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα, θα πρέπει να ισχύει ότι $(b : \forall R.(\exists R.C)) \geq 0.7$. Όπως είναι προφανές η συλλογιστική αυτή θα μπορούσε να συνεχιστεί και για το άτομο b, δημιουργώντας ένα άτομο c για το οποίο θα ίσχυαν οι ισχυρισμοί, $((b,c) : R) \geq 0.7$, $(c : C) \geq 0.7$, $(c : \exists R.C) \geq 0.7$ και $(c : \forall R.(\exists R.C)) \geq 0.7$, αλλά και για κάθε άλλο άτομο που προσθέτουμε και άρα να δημιουργηθεί μια άπειρη αλυσίδα. Αυτό το πρόβλημα τερματισμού μπορεί να διορθωθεί αν εφαρμόσουμε τεχνικές *μπλοκαρίσματος* (*blocking*) [120, 67]. Οι τεχνικές αυτές σταματούν την εκτέλεση του αλγορίθμου όταν ένας συγκεκριμένος τύπος κύκλου στην εκτέλεση των κανόνων έχει σχηματιστεί. Στην παραπάνω περίπτωση, από ένα σημείο και μετά, παρατηρούμε ότι τα άτομα που δημιουργούμε ανήκουν στις ίδιες έννοιες και με τους ίδιους ακριβώς βαθμούς συμμετοχής, όπως για παράδειγμα συμβαίνει για τα άτομα b και c. Έτσι λοιπόν μπορούμε να σταματήσουμε την εκτέλεση των κανόνων και να χρησιμοποιήσουμε ένα προγενέστερο άτομο με σκοπό να ικανοποιήσουμε τους ισχυρισμούς του τελευταίου ατόμου στην αλυσίδα. Πιο συγκεκριμένα με το που δημιουργούμε το άτομο c και παρατηρούμε ότι είναι ισοδύναμο με το b μπορούμε να σταματήσουμε την εκτέλεση του αλγορίθμου και να χρησιμοποιήσουμε το άτομο που είναι ισοδύναμο με τον c, δηλαδή το b, για να ικανοποιήσουμε τους ισχυρισμούς των ατόμων που δείχνουν στον c, δηλαδή και πάλι τον b. Με άλλα λόγια δημιουργούμε τη σύνδεση $((b,b) : R) \geq 0.7$. Τότε λέμε ότι ο b μπλοκάρει (blocks) τον c ή ότι ο c είναι μπλοκαρισμένος από τον b. Αν μελετήσουμε τους ισχυρισμούς του b θα δούμε ότι όλοι ικανοποιούνται από τους ισχυρισμούς που βρίσκονται στον ίδιο.

Στην περίπτωση της ΠΛ $\mathcal{S}$, δηλαδή όπου μόνο μεταβατικοί ρόλοι υπάρχουν, η τεχνική που χρησιμοποιείται ονομάζεται *μπλοκάρισμα υποσυνόλου* (*subset blocking*) [120], δηλαδή η εκτέλεση του αλγορίθμου σταματάει όταν το σύνολο των εννοιών που ανήκει κάποιο άτομο (στην περίπτωση των ασαφών ΠΛ το σύνολο των ισχυρισμών κάποιου ατόμου) είναι υποσύνολο του συνόλου των εννοιών (ισχυρισμών) που ανήκει κάποιο προγενέστερό του. Όπως αποδεικνύουν οι Horrocks και Sattler στο [67] η τεχνική αυτή δεν δίνει σωστά αποτελέσματα στην περίπτωση που η ΠΛ περιλαμβάνει αντίστροφους ρόλους, όπως συμβαίνει δηλαδή στην ΠΛ $\mathcal{SI}$. Διαισθητικά αυτό συμβαίνει διότι ενώ στις άλλες γλώσσες οι κανόνες επέκτασης μόνο προωθούν πληροφορία σε "επόμενα" άτομα η ύπαρξη αντίστροφων ρόλων μπορεί να προκαλέσει τη μεταφορά πληροφορίας σε προηγούμενα άτομα και άρα είναι δυνατόν να επηρεαστούν άλλα σημεία του δέντρου μας. Έτσι λοιπόν, το μπλοκάρισμα υποσυνόλου πρέπει να τροποποιηθεί ως προς τρεις κατευθύνσεις.

Πρώτον η συνθήκη ισοδυναμίας και κατ' επέκταση το μπλοκάρισμα ανάμεσα σε δυο άτομα θα πρέπει να κρίνεται από την ισότητα των συνόλων των ισχυρισμών τους, σε αντίθεση με το μποκάρισμα υποσυνόλου, στο οποίο δυο άτομα είναι ισοδύναμα αν το σύνολο ισχυρισμών του ενός είναι υποσύνολο του συνόλου ισχυρισμών του άλλου. Η αναγκαιότητα της τροποποίησης αυτής γίνεται αντιληπτή από το Σχήμα 4.1.

$$\{\ldots,(x:\forall R^{-}.\neg C)\geq 0.7,\ldots\}=\mathcal{L}(x)$$

$$\{\ldots,(y:C)\geq 0.7,\ldots\}=\mathcal{L}(y)$$

$$((y,z):R)\geq 0.7$$

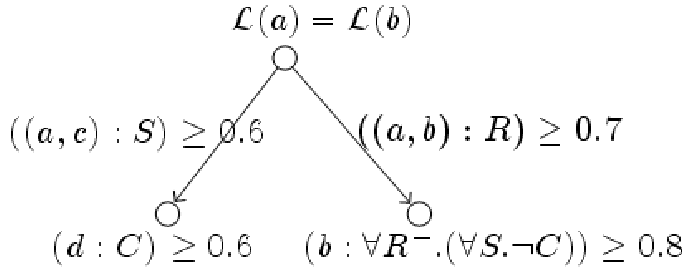
$$\mathcal{L}(z)\subseteq\mathcal{L}(x)$$

Σχήμα 4.1: *Αδυναμία μπλοκαρίσματος με συνθήκη υποσυνόλου*

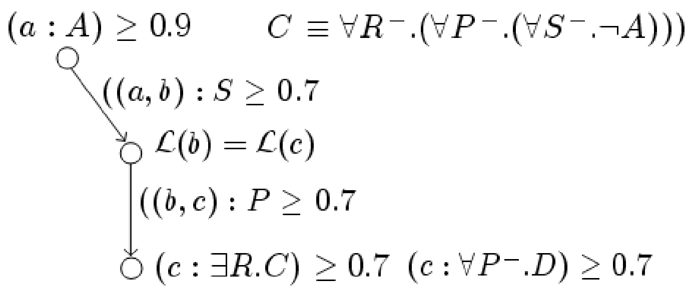
Στο σχήμα αυτό έστω ότι το σύνολο των ασαφών ισχυρισμών του ατόμου z (του τρίτου) είναι υποσύνολο των ισχυρισμών του x (δηλαδή του πρώτου). Αν εφαρμόσουμε το μπλοκάρισμα υποσυνόλου τότε το z θα μπλοκάρεται από το x και άρα το y θα πρέπει να χρησιμοποιήσει τον x για να ικανοποιήσεις τους περιορισμούς του. Πιο συγκεκριμένα θα πρέπει να ενώσουμε τον y με τον x με την ίδια ακμή με την οποία ο y

ενώνεται με τον z. Συνεπώς έχουμε $((y,x):R) \geq 0.7$. Εφόσον έχουμε αντίστροφους ρόλους θα ισχύει ότι $((x,y):R^{-}) \geq 0.7$. Ο ισχυρισμός όμως στο x επιβάλει να ισχύουν είτε $((x,y):R^{-}) \leq 0.3$ ή $(y:\neg C) \geq 0.7$. Εφόσον, εμφανώς το πρώτο δεν ισχύει θα πρέπει να ισχύει το δεύτερο. Ο δεύτερος ισχυρισμός όμως έρχεται και αυτός με τη σειρά του σε αντίθεση με τον ισχυρισμό $(y:C) \geq 0.7$.

Δεύτερον, οι κανόνες επέκτασης του αλγορίθμου μας που απευθύνονται σε περιορισμούς τιμής θα πρέπει να εφαρμοστούν ακόμα και αν οι ισχυρισμοί αυτοί βρίσκονται σε άτομα που είναι μπλοκαρισμένα. Η σημασία αυτής της συνθήκης φαίνεται στο Σχήμα 4.2. Έστω ότι το σύνολο των ισχυρισμών του ατόμου b είναι το ίδιο με αυτό του a και άρα ο a μπλοκάρει τον b. Παρόλα αυτά βλέπουμε ότι είναι σημαντικό ο αλγόριθμός μας να μην τερματίσει εντελώς αλλά κάποιοι κανόνες να τρέξουν για λίγο ακόμα. Τότε θα δούμε ότι λόγω της σημασιολογίας των κατασκευαστών θα πρέπει να ισχύει ότι $(a:\forall S.\neg C) \geq 0.8$ και εν συνεχεία ότι $(d:\neg C) \geq 0.8$ κάτι το οποίο έρχεται σε αντίφαση με τον ισχυρισμό $(d:C) \geq 0.6$. Η συνθήκη αυτή κωδικοποιείται στον αλγόριθμό μας με τη χρήση της έννοιας των έμμεσα μπλοκαρισμένων κόμβων [67].



Σχήμα 4.2: *Παραδείγματα αναγκαιότητας των έμμεσα μπλοκαρισμένων κόμβων*



Σχήμα 4.3: *Παραδείγματα αναγκαιότητας σπασίματος του μπλοκαρίσματος*

Τέλος αν η επιπλέον εκτέλεση που είδαμε παραπάνω εισάγει πληροφορία σε κάποιον κόμβο που μπλοκάρει κάποιον μεταγενέστερο θα πρέπει το μπλοκάρισμα να "σπάσει" εφόσον δε θα ισχύει πλέον ότι το σύνολο των ισχυρισμών των κόμβων είναι το ίδιο. Και αυτή η συνθήκη με τη σειρά της είναι πολύ σημαντική. Αυτό μπορούμε να το παρατηρήσουμε στο Σχήμα 4.3. Στο σχήμα αυτό θεωρούμε ότι το σύνολο ισχυρισμών των ατόμων b και c είναι ίδια και άρα ο b μπλοκάρει τον c. Λόγω όμως του ισχυρισμού $(c:\forall P^{-}.D) \geq 0.7$ θα πρέπει να εισάγουμε τον ισχυρισμό $(b:D) \geq 0.7$. Τότε δεν ισχύει πλέον $\mathcal{L}(b) = \mathcal{L}(c)$ και το μπλοκάρισμα στον c πρέπει να "σπάσει". Τότε ο ισχυρισμός $(c:\exists R.C) \geq 0.7$ λόγω της σημασιολογίας του $\exists$ θα δημιουργήσει έναν νέο κόμβο e για τον οποίο θα ισχύουν τα $((c,e):R) \geq 0.7$ και $(e:C) \geq 0.7$.

Όμως όπως βλέπουμε η έννοια C είναι ισοδύναμη με την $\forall R^{-}.(\forall P^{-}.(\forall S^{-}.\neg A))$ άρα θα ισχύει ότι $(e : \forall R^{-}.(\forall P^{-}.(\forall S^{-}.\neg A))) \geq 0.7$. Όπως γίνεται αντιληπτό ο ισχυρισμός αυτός συνεπάγεται ότι πρέπει να ισχύει $(a : \neg A) \geq 0.7$ το οποίο εμφανώς έρχεται σε αντίφαση με τον ισχυρισμό $(a : A) \geq 0.9$. Η τεχνική μπλοκαρίσματος αυτή ονομάζεται *δυναμικό μπλοκάρισμα* (*dynamic blocking*). Στο παράδειγμα 4.2.9 θα δούμε πώς δουλεύουν οι μηχανισμοί αυτοί σε μια συγκεκριμένη βάση γνώσης.

4.2.3 Ένα ασαφές tableau για f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ σώματα ισχυρισμών

Όπως είδαμε και στην αρχή του κεφαλαίου μας οι αλγόριθμοι που θα αναπτύξουμε θα βασίζονται στην τεχνολογία των αλγορίθμων tableaux. Εφόσον η διαδικασία μας περιλαμβάνει κάποια πολύπλοκα στοιχεία, όπως είναι το μπλοκάρισμα και οι μεταβατικοί ρόλοι, συχνά είναι χρήσιμο και εύκολο να προχωρήσουμε σε δυο στάδια. Αρχικά προσεγγίζουμε τα μοντέλα του σώματος ισχυρισμών της εκάστοτε γλώσσας ορίζοντας την έννοια της δομής των (ασαφών) tableau, η οποία όπως είπαμε παραπάνω αποτελεί μια αφαίρεση των μοντέλων της. Αφού στη συνέχεια αποδείξουμε την σχέση ανάμεσα στην ύπαρξη ενός ασαφούς tableau και ενός μοντέλου για ένα ασαφές σώματος ισχυρισμών τότε είναι σχετικά εύκολο να κατασκευάσουμε μια διαδικασία η οποία κατασκευάζει μια δομή από την οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ασαφές tableau και άρα να αποδείξουμε ότι η διαδικασία μας αποφασίζει το πρόβλημα της συνέπειας ενός ασαφούς σώματος ισχυρισμών. Έτσι λοιπόν αρχικά ορίζουμε την έννοια του ασαφούς tableau για τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$. Ο ορισμός αυτός αποτελεί επέκταση του ορισμού που παρουσιάζεται στο [67] για τη γλώσσα $\mathcal{SI}$.

Ορισμός 4.2.2 *Για κάθε έννοια D ορίζουμε επαγωγικά το σύνολο των υπο-εννοιών της ($sub(D)$) ως,*

$$\begin{array}{rcl} sub(A) & = & \{A\} \text{ για κάθε ατομική έννοια } A \in \mathbf{C}, \\ sub(C \sqcap D) & = & \{C \sqcap D\} \cup \{sub(C)\} \cup \{sub(D)\}, \\ sub(C \sqcup D) & = & \{C \sqcup D\} \cup \{sub(C)\} \cup \{sub(D)\}, \\ sub(\exists R.C) & = & \{\exists R.C\} \cup \{sub(C)\}, \\ sub(\forall R.C) & = & \{\forall R.C\} \cup \{sub(C)\}, \end{array}$$

$\diamondsuit$

Ορισμός 4.2.3 *Για μια ασαφή έννοια D και ένα RBox $\mathcal{R}$ ορίζουμε $cl(D, \mathcal{R})$ ως το μικρότερο σύνολο f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$-εννοιών το οποίο ικανοποιεί τα εξής:*

- $D \in cl(D, \mathcal{R})$,
- *Το $cl(D, \mathcal{R})$ είναι κλειστό ως προς τις υπο-έννοιες της D και της $\sim D$, και*
- *αν $\forall R.C \in cl(D, \mathcal{R})$ και $\mathsf{Trans}(R)$, τότε $\forall R.C \in cl(D, \mathcal{R})$*

Τέλος ορίζουμε $cl(\mathcal{A}, \mathcal{R}) = \bigcup_{(a:D) \rhd n \in \mathcal{A}} cl(D, \mathcal{R})$. $\diamondsuit$

Όταν το $\mathcal{R}$ είναι προφανές από τα συμφραζόμενα θα γράφουμε απλώς $cl(\mathcal{A})$.

Ορισμός 4.2.4 *Έστω $\mathcal{A}$ ένα f_{KD}-$\mathcal{SI}$ ABox, $\mathcal{R}$ ένα f_{KD}-$\mathcal{SI}$ RBox, $\boldsymbol{R}_{\mathcal{A}}$ το σύνολο των ρόλων που εμφανίζονται στο $\mathcal{A}$ και στο $\mathcal{R}$ μαζί με τους αντίστροφούς τους, και $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ το σύνολο των ατόμων στο $\mathcal{A}$. Ένα ασαφές* tableau *T για το $\mathcal{A}$ μ.β.τ. $\mathcal{R}$ ορίζεται ως μια τετράδα ($\boldsymbol{S}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{V}$) τέτοια ώστε: $\boldsymbol{S}$ είναι ένα σύνολο από στοιχεία, $\mathcal{L} : \boldsymbol{S} \times cl(\mathcal{A}) \to [0,1]$ απεικονίζει κάθε ζεύγος στοιχείου και έννοιας στο βαθμό με τον οποίο το στοιχείο αυτό ανήκει στην έννοια, $\mathcal{E} : \boldsymbol{R}_{\mathcal{A}} \times \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S} \to [0,1]$ απεικονίζει κάθε ρόλο του $\boldsymbol{R}_{\mathcal{A}}$ και ζεύγος στοιχείων στο βαθμό συμμετοχής του ζεύγους αυτού στο ρόλο, και $\mathcal{V} : \mathbf{I}_{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{S}$ απεικονίζει άτομα τα οποία εμφανίζονται στο $\mathcal{A}$ σε στοιχεία του $\boldsymbol{S}$. Για κάθε $s,t \in \boldsymbol{S}$, $C,E \in cl(\mathcal{A})$, $A \in \mathbf{C}$, $n \in (0,1]$, A είναι μια ατομική ή ονοματική έννοια και $R \in \boldsymbol{R}_{\mathcal{A}}$, το T ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

1. $\mathcal{L}(s,\bot) = 0$ *και* $\mathcal{L}(s,\top) = 1$ *για κάθε* $s \in \boldsymbol{S}$,
2. *Αν* $\mathcal{L}(s,\neg A) = n$, *τότε* $\mathcal{L}(s,A) = 1-n$,
3. *Αν* $\mathcal{E}(\neg R,\langle s,t\rangle) = n$, *τότε* $\mathcal{E}(R,\langle s,t\rangle) = 1-n$,
4. *Αν* $\mathcal{L}(s,C \sqcap E) \rhd n$, *τότε* $\mathcal{L}(s,C) \rhd n$ *και* $\mathcal{L}(s,E) \rhd n$,
5. *Αν* $\mathcal{L}(s,C \sqcup E) \rhd n$, *τότε* $\mathcal{L}(s,C) \rhd n$ *ή* $\mathcal{L}(s,E) \rhd n$,
6. *Αν* $\mathcal{L}(s,\forall R.C) \rhd n$, *τότε είτε* $\mathcal{E}(\neg R,\langle s,t\rangle) \rhd n$ *ή* $\mathcal{L}(t,C) \rhd n$, $\forall t \in \boldsymbol{S}$,
7. *Αν* $\mathcal{L}(s,\exists R.C) \rhd n$, *τότε υπάρχει* $t \in \boldsymbol{S}$ *τέτοιο ώστε* $\mathcal{E}(R,\langle s,t\rangle) \rhd n$ *και* $\mathcal{L}(t,C) \rhd n$,
8. *Αν* $\mathcal{L}(s,\forall R.C) \rhd n$ *και* $\mathsf{Trans}(R)$, *τότε είτε* $\mathcal{E}(\neg R,\langle s,t\rangle) \rhd n$ *ή* $\mathcal{L}(t,\forall R.C) \rhd n$, $\forall t \in \boldsymbol{S}$,
9. $\mathcal{E}(R,\langle s,t\rangle) \rhd n$ *ανν* $\mathcal{E}(\mathsf{Inv}(R),\langle t,s\rangle) \rhd n$,
10. *Αν* $(a : C) \rhd n \in \mathcal{A}$, *τότε* $\mathcal{L}(\mathcal{V}(a),C) \rhd n$,
11. *Αν* $((a,b) : R) \rhd n \in \mathcal{A}$, *τότε* $\mathcal{E}(R,\langle \mathcal{V}(a),\mathcal{V}(b)\rangle) \rhd n$,

$\diamondsuit$

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε κάποια σχόλια για τον παραπάνω ορισμό. Στον παραπάνω ορισμό βασιστήκαμε στη σημασιολογία των κατασκευαστών της ασαφούς γλώσσας f_{KD}-$\mathcal{SI}$ για να δώσουμε ιδιότητες των μοντέλων της. Εστιάσαμε σε ιδιότητες που προκύπτουν από τη σχέση μιας ασαφούς έννοιας με έναν βαθμό συμμετοχής, καθώς όπως έχουμε δει καλούμαστε να διαχειριστούμε ασαφείς ισχυρισμούς που περιέχουν κάποια μορφή ανισότητας. Έτσι λοιπόν, αν $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) \geq n$, τότε $\inf_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} \max(1 - R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b^{\mathcal{I}}), C^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}})) \geq n$ και άρα για κάθε τυχαίο $b \in \Delta^{\mathcal{I}}$ είτε

$$1 - R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b^{\mathcal{I}}) \geq n \Rightarrow \neg R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b^{\mathcal{I}}) \geq n$$

ή $C^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}}) \geq n$. Συνεπώς, η ιδιότητα 6 πρέπει να διαβαστεί ως, αν $\mathcal{L}(s,\forall R.C) \geq n$, τότε είτε $\mathcal{E}(\neg R,\langle s,t\rangle) \geq n$ είτε $\mathcal{L}(t,C) \geq n$ και αν $\mathcal{L}(s,\forall R.C) > n$, τότε είτε $\mathcal{E}(\neg R,\langle s,t\rangle) > n$ είτε $\mathcal{L}(t,C) > n$. Από τις ιδιότητες των μεταβατικών ρόλων που είδαμε στην παραπάνω ενότητα προκύπτει επίσης και η ιδιότητα 8. Επιπρόσθετα, η ιδιότητα 7 προκύπτει από το γεγονός ότι εξετάζουμε μόνο μοντέλα με μαρτυρία, αλλιώς δε θα μπορούσαμε να κάνουμε την υπόθεση αυτή. Τέλος, παρατηρήστε ότι εφόσον όλες οι έννοιες έχουν μετατραπεί στην ΚΜΑ τους, η άρνηση στην ιδιότητα 2 εμφανίζεται μόνο μπροστά από ατομικές έννοιες $A \in \mathbf{C}$, ενώ η απλή άρνηση ρόλων στην ιδιότητα 3 προκύπτει από το γεγονός ότι όλοι οι ισχυρισμοί έχουν μετατραπεί στην ΚΜΘΑ.

Λήμμα 4.2.5 *Ένα f_{KD}-$\mathcal{SI}$-ABox $\mathcal{A}$ είναι συνεπές μ.β.τ. $\mathcal{R}$ ανν υπάρχει ένα ασαφές tableau T για το $\mathcal{A}$ μ.β.τ. $\mathcal{R}$.*

Απόδειξη: Για την ορθή φορά έχουμε ότι, έστω $T = (\mathbf{S}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$ ένα ασαφές tableau για το $\mathcal{A}$ μ.β.τ. $\mathcal{R}$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο $\mathcal{I} = (\Delta, \cdot^{\mathcal{I}})$ του $\mathcal{A}$ και του $\mathcal{R}$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{array}{rcl}
\Delta^{\mathcal{I}} & = & \mathbf{S} \\
a^{\mathcal{I}} & = & \mathcal{V}(a),\ a \in \mathbf{I}_{\mathcal{A}} \\
\top^{\mathcal{I}}(s) & = & \mathcal{L}(s, \top) \text{ για κάθε } s \in \mathbf{S} \\
\bot^{\mathcal{I}}(s) & = & \mathcal{L}(s, \bot) \text{ για κάθε } s \in \mathbf{S} \\
A^{\mathcal{I}}(s) & = & \mathcal{L}(s, A) \text{ για κάθε } s \in \mathbf{S} \text{ και ατομική έννοια } A \\
R^{\mathcal{I}}(s,t) & = & \left\{ \begin{array}{ll} R^{+}_{\mathcal{E}}(s,t) & \text{αν } \mathsf{Trans}(R) \\ R_{\mathcal{E}}(s,t) & \text{διαφορετικά} \end{array} \right.
\end{array}$$

όπου $R_{\mathcal{E}}(s,t)$ είναι μια δυαδική ασαφής σχέση (ρόλος) ο οποίος ορίζεται ως, $R_{\mathcal{E}}(s,t) = \mathcal{E}(R, \langle s,t\rangle)$ για κάθε $\langle s,t\rangle \in \mathbf{S} \times \mathbf{S}$, και $R^{+}_{\mathcal{E}}$ συμβολίζει το sup-min μεταβατικό της κλείσιμο [81].

Εφαρμόζοντας επαγωγή στη δομή των εννοιών μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\mathcal{L}(s, C) \rhd n$, τότε $C^{\mathcal{I}}(s) \rhd n, \forall s \in \mathbf{S}$, όπου C είναι μια f_{KD}-$\mathcal{SI}$-έννοια. Επιπρόσθετα, οι ιδιότητα 1 χρησιμεύει στη σωστή ερμηνεία των εννοιών $\top$ και $\bot$, ενώ η ιδιότητα 9 την ορθή ερμηνεία των αντίστροφων ρόλων. Αυτό, μαζί με τις ιδιότητες 10 και 11 συνεπάγεται ότι η $\mathcal{I}$ ικανοποιεί κάθε ισχυρισμό στο $\mathcal{A}$.

Στη συνέχεια και χωρίς βλάβη της γενικότητας θα δείξουμε τις περιπτώσεις όπου $\mathcal{L}(s, C) \geq n$. Οι περιπτώσεις με $\mathcal{L}(s, C) > n$, δηλαδή αυτές της ανίσωσης $>$, μπορούν να δειχτούν με παρόμοιο τρόπο.

Πρώτα εξετάζουμε την βασική περίπτωση της υπαγωγής, δηλαδή το στάδιο με $n = 0$ το οποίο αντιστοιχεί στις ατομικές έννοιες και ρόλους και στις αρνήσεις τους (λόγω της κανονικής μορφής άρνησης).

- Αν $\mathcal{L}(s, A) \geq n$ και A είναι μια ατομική, τότε από τον ορισμό της ερμηνείας $\mathcal{I}$ $A^{\mathcal{I}}(s) = \mathcal{L}(s, A) \geq n$.

- Αν $\mathcal{L}(s, \neg A) \geq n$ τότε λόγω της ιδιότητας 2 στον ορισμό 4.2.4 έχουμε, $\mathcal{L}(s, A) = 1 - \mathcal{L}(s, \neg A) \leq 1 - n$. Εξ' ορισμού της $\mathcal{I}$, $A^{\mathcal{I}}(s) \leq 1 - n$, συνεπώς $(\neg A)^{\mathcal{I}}(s) \geq c(1 - n) = n$.

- Παρομοίως μπορούμε να δείξουμε και τις περιπτώσεις των ατομικών ρόλων, δηλαδή τις περιπτώσεις όπου $\mathcal{E}(R, \langle s,t\rangle) \geq n$ και $\mathcal{E}(\neg R, \langle s,t\rangle) \geq n$.

Στο σημείο αυτό υποθέτουμε ότι ισχύει ότι, αν $\mathcal{L}(s, C) \geq n$ και $\mathcal{L}(s, D) \geq n$, τότε $C^{\mathcal{I}}(s) \geq n$, $D^{\mathcal{I}}(s) \geq n$. Θα χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση αυτή για να αποδείξουμε ότι αν $\mathcal{L}(s, E) \geq n$, τότε $E^{\mathcal{I}}(s) \geq n$, όπου E είναι μια από τις έννοιες $C \sqcap D$, $C \sqcup D$, $\forall R.C$ ή $\exists R.C$.

- Αν $\mathcal{L}(s, C \sqcap D) \geq n$, τότε $\mathcal{L}(s, C) \geq n$ και $\mathcal{L}(s, D) \geq n$, άρα λόγω της υπόθεσης της επαγωγής $C^{\mathcal{I}}(s) \geq n$, $D^{\mathcal{I}}(s) \geq n$ και $(C \sqcap D)^{\mathcal{I}}(s) = \min(C^{\mathcal{I}}(s), D^{\mathcal{I}}(s)) \geq n$.

- Η περίπτωση με $\mathcal{L}(s, C \sqcup D) \rhd n$ είναι παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση.

- Αν $\mathcal{L}(s, \exists R.C) \geq n$, τότε υπάρχει $t \in \mathbf{S}$ τέτοιο ώστε, $\mathcal{E}(R, \langle s, t \rangle) \geq n$ και $\mathcal{L}(t, C) \geq n$. Από τη βασική περίπτωση έχουμε ότι $R^{\mathcal{I}}(s, t) \geq n$ ενώ λόγω της υπόθεσης της επαγωγής, $C^{\mathcal{I}}(t) \geq n$. Συνεπώς έχουμε ότι ισχύει, $(\exists R.C)^{\mathcal{I}}(s) = \sup_{t \in \Delta^{\mathcal{I}}} \min(R^{\mathcal{I}}(s, t), C^{\mathcal{I}}(t)) \geq n$.

- Αν $\mathcal{L}(s, \forall R.C) \geq n$ και $R^{\mathcal{I}}(s, t) = p$, τότε είτε

  1. $\mathcal{E}(R, \langle s, t \rangle) = p$, ή
  2. $\mathcal{E}(R, \langle s, t \rangle) \neq p$. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχουν ενδεχομένως μονοπάτια $l \geq 1$ της μορφής, $\mathcal{E}(R, \langle s, s_{l_1} \rangle) = p_{l_1}$, $\mathcal{E}(R, \langle s_{l_1}, s_{l_2} \rangle) = p_{l_2}, \ldots$, $\mathcal{E}(R, \langle s_{l_m}, t \rangle) = p_{l_{m+1}}$, και $\mathsf{Trans}(P)$. Ο βαθμός συμμετοχής p του ζεύγους $\langle s, t \rangle$ στο ρόλο $R^+_{\mathcal{E}}$, θα είναι ίσος με το μέγιστο βαθμό (εφόσον δεν μπορούμε να έχουμε άπειρο πλήθος μονοπατιών) όλων των ελάχιστων βαθμών του κάθε μονοπατιού. Αν ο βαθμός αυτός δεν είναι μικρότερος η ίσος από $1 - n$ τότε υπάρχει κάποιο μονοπάτι k όπου όλοι οι βαθμοί

     $$\mathcal{E}(R, \langle s_{k_i}, s_{k_{i+1}} \rangle) = p_{k_{i+1}},\ 0 \leq i \leq m,\ s_{k_0} \equiv s,\ s_{k_{m+1}} \equiv t$$

     δεν είναι μικρότεροι οι ίσοι από τον $1 - n$ (και άρα και όλοι οι βαθμοί $\mathcal{E}(\neg R, \langle s_{k_i}, s_{k_{i+1}} \rangle) = 1 - p_{k_{i+1}}$ δε θα είναι μεγαλύτεροι ίσοι από τον n), γιατί όλα τα p_{k_i} θα είναι μεγαλύτερα ή ίσα από τον ελάχιστο βαθμό του μονοπατιού. Συνεπώς, λόγω της ιδιότητας 8, θα έχουμε ότι $\mathcal{L}(s_{k_i}, \forall P.C) \geq n$, για κάθε $1 \leq i \leq m$.

  Συνοψίζοντας, αν $p \leq 1 - n$ τότε $\max(1 - p, C^{\mathcal{I}}(t)) \geq n$. Στην περίπτωση που $p \not\leq 1 - n$ τότε $\mathcal{L}(t, C) \geq n$, άρα $C^{\mathcal{I}}(t) \geq n$ και άρα $\max(1 - p, C^{\mathcal{I}}(t)) \geq n$. Και στις δυο περιπτώσεις $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(s) \geq n$.

Για την αντίθετη φορά, αν $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ είναι ένα μοντέλο του $\mathcal{A}$ μ.β.τ. $\mathcal{R}$, τότε ένα ασαφές tableau $T = (\mathbf{S}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$ για τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{R}$ μπορεί να οριστεί ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \Delta^{\mathcal{I}} \\ \mathcal{E}(R, \langle s, t \rangle) &= R^{\mathcal{I}}(s, t) \\ \mathcal{L}(s, C) &= C^{\mathcal{I}}(s) \\ \mathcal{V}(a) &= a^{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

1. Οι ιδιότητες 1-7 και 9 του ορισμού 4.2.4 ικανοποιούνται ως άμεσο επακόλουθο της σημασιολογίας της γλώσσας f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$.

2. Η ιδιότητα 8 του ορισμού 4.2.4 ικανοποιείται ως αποτέλεσμα της σημασιολογίας των μεταβατικών ρόλων και της σημασιολογίας των περιορισμών τιμής τα οποία και διερευνήσαμε στην υπο-ενότητα 4.2.1. Πιο συγκεκριμένα, αν $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(s) \geq n$ και $\mathsf{Trans}(R)$ τότε είτε $R^{\mathcal{I}}(s, t) \leq 1 - n \Rightarrow \neg R^{\mathcal{I}}(s, t) \geq n$, ή $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(t) \geq n$, αλλιώς αν $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(s) > n$, τότε είτε $R^{\mathcal{I}}(s, t) < 1 - n \Rightarrow \neg R^{\mathcal{I}}(s, t) > n$ είτε $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(t) > n$. Εξ' ορισμού του T αν $\mathcal{L}(s, \forall R.C) \rhd n$ και $\mathsf{Trans}(R)$ τότε είτε $\mathcal{E}(\neg R, \langle s, t \rangle) \rhd n$ ή $\mathcal{L}(t, \forall R.C) \rhd n$.

3. Το T ικανοποιεί τις ιδιότητες 10 και 11 του ορισμού 4.2.4 γιατί η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο του $\mathcal{A}$.

■

4.2.4 Κατασκευάζοντας ένα f_{KD}-$\mathcal{SI}$ ασαφές tableau

Με βάση το Λήμμα που αποδείξαμε στην προηγούμενη ενότητα, για να αναπτύξουμε μια τυπική διαδικασία που θα αποφασίζει τη συνέπεια ενός ABox με βάση ένα RBox πρέπει να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος θα κατασκευάζει ένα ασαφές tableau για ένα f_{KD}-$\mathcal{SI}$ ABox και RBox. Μια τέτοια διαδικασία θα βασιστεί στους αλγορίθμους tableaux [52]. Γενικά μιλώντας οι αλγόριθμοι tableaux αποτελούνται από ένα σύνολο κανόνων, που όπως θα δούμε ονομάζονται κανόνες επέκτασης. Οι κανόνες αυτοί χρησιμοποιούνται για να αποσυνθέτουμε τις περίπλοκες έννοιες σε περισσότερο απλές, έως ότου να φτάσουμε στο επίπεδο των ατομικών εννοιών στο οποίο η ικανοποιησιμότητα ή μη μιας έννοιας είναι προφανής. Έτσι λοιπόν, η εξαγωγή των κανόνων αυτών βασίζεται στη σημασιολογία των κατασκευαστών της συγκεκριμένης γλώσσας αναπαράστασης γνώσης και πιο συγκεκριμένα διαθέτοντας ήδη τη δομή tableau από τον ορισμό 4.2.4 οι κανόνες αυτοί μπορούν να βασιστούν στις ιδιότητες που περιγράφει ο ορισμός αυτός. Έτσι λοιπόν μπορούμε να αποφασίσουμε για τη συνέπεια ή την ασυνέπεια ενός σώματος ισχυρισμών. Για μια ανασκόπηση των περισσοτέρων αλγορίθμων tableaux που έχουν αναπτυχθεί για τις Περιγραφικές Λογικές ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [7]. Στη συνέχεια θα δώσουμε όλες τις τεχνικές λεπτομέρειες ενός αλγορίθμου tableau για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SI}$.

Όπως ο αλγόριθμος που παρουσιάζεται στο [70], έτσι και ο δικός μας ενεργεί σε *δάση ολοκλήρωσης* (*completion-forests*) $\mathcal{F}$, τα οποία ουσιαστικά αποτελούνται από ένα σύνολο από *δέντρα ολοκλήρωσης* (*completion-trees*) τα οποία είναι τυχαία συνδεδεμένα μεταξύ τους λόγω των τυχαίων συνδέσεων που μπορεί να ορίζονται από τους ισχυρισμούς ενός σώματος ισχυρισμών. Η εφαρμογή των κανόνων του αλγορίθμου σε κάθε ένα από τα άτομα του σώματος ισχυρισμών είναι αυτή που ουσιαστικά δημιουργεί τη δενδρική δομή για κάθε ένα από αυτά. Επιπλέον, υπενθυμίζουμε ότι λόγω της δυνατότητας ορισμού μεταβατικών ρόλων, ο τερματισμός του αλγορίθμου είναι προβληματικός και διασφαλίζεται με τη χρήση τεχνικών *μπλοκαρίσματος* (*blocking*), οι οποίες σταματούν την εκτέλεση του αλγορίθμου όταν ένας συγκεκριμένος τύπος κύκλου έχει σχηματιστεί. Πιο συγκεκριμένα λόγω της ύπαρξης μεταβατικών και αντίστροφων ρόλων χρειαζόμαστε την τεχνική του δυναμικού μπλοκαρίσματος.

Ορισμός 4.2.6 *Ένα δάσος ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$ για ένα f_{KD}-$\mathcal{SI}$ ABox $\mathcal{A}$ μ.β.τ. RBox $\mathcal{R}$ είναι μια συλλογή από δέντρα των οποίων οι ρίζες είναι τυχαία συνδεδεμένες μεταξύ τους με ακμές. Κάθε δέντρο αποτελείται από ένα σύνολο κόμβων οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με ακμές. Κάθε κόμβος x χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο από τριάδες εννοιών $\langle C, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$ όπου $C \in cl(\mathcal{A})$ και κάθε ακμή $\langle x, y$ από ένα σύνολο από τριάδες ρόλων $\mathcal{L}(\langle x, y\rangle) = \{\langle R, \rhd, n\rangle\}$, όπου $R \in \boldsymbol{R}_{\mathcal{A}}$ είναι (πιθανά αντίστροφοι) ρόλοι που εμφανίζονται στο $\mathcal{A}$. Τόσο το $\mathcal{L}(x)$ όσο και το $\mathcal{L}(\langle x, y\rangle)$ ονομάζονται* ετικέτες *(*labels*) των x και $\langle x, y\rangle$, αντίστοιχα. Διαισθητικά, κάθε τριάδα $\langle C, \rhd, n\rangle$ ($\langle R, \rhd, n\rangle$), που ονομάζεται* τριάδα συμμετοχής *(*membership triple*), αναπαριστά το βαθμό συμμετοχής και τον τύπο της ανισότητας του κάθε κόμβου (ζεύγος κόμβων) σε μια έννοια C (ρόλο R).*

Πίνακας 4.1: *Κανόνες επέκτασης για την f_{KD}-$\mathcal{SI}$*

Κανόνας		Περιγραφή
$\sqcap_{\rhd}$	αν 1.	$\langle C_1 \sqcap C_2, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ο x δεν είναι έμμεσα μπλοκαρισμένος, και
	2.	$\{\langle C_1, \rhd, n\rangle, \langle C_2, \rhd, n\rangle\} \not\subseteq \mathcal{L}(x)$
	τότε	$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) \cup \{\langle C_1, \rhd, n\rangle, \langle C_2, \rhd, n\rangle\}$
$\sqcup_{\rhd}$	αν 1.	$\langle C_1 \sqcup C_2, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ο x δεν είναι έμμεσα μπλοκαρισμένος, και
	2.	$\{\langle C_1, \rhd, n\rangle, \langle C_2, \rhd, n\rangle\} \cap \mathcal{L}(x) = \emptyset$
	τότε	$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) \cup \{C\}$ για κάποιο $C \in \{\langle C_1, \rhd, n\rangle, \langle C_2, \rhd, n\rangle\}$
$\exists_{\rhd}$	αν 1.	$\langle \exists R.C, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ο x δεν είναι μπλοκαρισμένος,
	2.	ο x δεν έχει κάποιο $R_{\rhd n}$-γείτονα y με $\langle C, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(y)$
	τότε	δημιούργησε νέο κόμβο y με $\mathcal{L}(\langle x, y\rangle) = \{\langle R, \rhd, n\rangle\}$, $\mathcal{L}(y) = \{\langle C, \rhd, n\rangle\}$
$\forall_{\rhd}$	αν 1.	$\langle \forall R.C, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ο x δεν είναι έμμεσα μπλοκαρισμένος,
	2.	ο x έχει έναν $R_{\rhd' n'}$-γείτονα y με $\langle C, \rhd, n\rangle \notin \mathcal{L}(y)$ και
	3.	η ακμή $\langle x, y\rangle$ συγκρούεται με την $\langle \neg R, \rhd, n\rangle$
	τότε	$\mathcal{L}(y) \to \mathcal{L}(y) \cup \{\langle C, \rhd, n\rangle\}$
$\forall_{+\rhd}$	αν 1.	$\langle \forall R.C, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$ με $\mathsf{Trans}(R)$, ο x δεν είναι έμμεσα μπλοκαρισμένος,
	2	ο x έχει έναν $R_{\rhd' n'}$-γείτονα y με, $\langle \forall R.C, \rhd, n\rangle \notin \mathcal{L}(y)$, και
	3.	η ακμή $\langle x, y\rangle$ συγκρούεται με την $\langle \neg R, \rhd, n\rangle$
	τότε	$\mathcal{L}(y) \to \mathcal{L}(y) \cup \{\langle \forall R.C, \rhd, n\rangle\}$

*Αν οι κόμβοι x και y είναι συνδεδεμένοι με μια ακμή $\langle x, y\rangle$ έχοντας $\langle R, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(\langle x, y\rangle)$, τότε ο y ονομάζεται $R_{\rhd n}$-*διάδοχος *($R_{\rhd n}$-*successor*) του x και ο x ονομάζεται $R_{\rhd n}$-*προκάτοχος *($R_{\rhd n}$-*predecessor*) του y. Αν ο y είναι ένας $R_{\rhd n}$-διάδοχος ή ένας $\mathsf{Inv}(R)_{\rhd n}$-*προκάτοχος *του x, τότε ονομάζεται $R_{\rhd n}$-γείτονας ($R_{\rhd n}$-*neighbour*) του x. Έστω ότι ο y είναι ένας $R_{\geq n}$-γείτονας του x. Τότε η ακμή $\langle x, y\rangle$* συγκρούεται *(*conjugates*) με τριάδες της μορφής $\langle \neg R, \geq, m\rangle$ αν $n + m > 1$, ενώ συγκρούεται με τριάδες της μορφής $\langle \neg R, >, m\rangle$ αν $n + m \geq 1$. Παρομοίως, αν ο y είναι ένας $R_{>n}$-γείτονας του x, τότε η ακμή $\langle x, y\rangle$ συγκρούεται με τριάδες της μορφής $\langle \neg R, \rhd, m\rangle$ αν $n + m \geq 1$. Διαισθητικά, οι ορισμοί αυτοί μας δηλώνουν ότι η ακμή $\langle x, y\rangle$ περιέχει μια τριπλέτα η οποία αντιπροσωπεύει έναν ασαφή ισχυρισμό ο οποίος έρχεται σε αντίθεση με τον ισχυρισμό που αντιπροσωπεύει η τριπλέτα συμμετοχής $\langle \neg R, \rhd, m\rangle$. Για παράδειγμα αν $\langle R, >, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(\langle x, y\rangle)$, τότε ο y είναι ένας $R_{>0.8}$-γείτονας του x και η ακμή $\langle x, y\rangle$ συγκρούεται με την τριπλέτα $\langle \neg R, \geq, 0.2\rangle$ αφού $0.8 + 0.2 \geq 1$. Πιο συγκεκριμένα, η πρώτη τριπλέτα υποδηλώνει έναν ισχυρισμό της μορφής $((x, y) : R) > 0.8$, ενώ η δεύτερη τριπλέτα έναν ασαφή ισχυρισμό της μορφής $((x, y) : \neg R) \geq 0.8 \Rightarrow ((x, y) : R) \leq 0.2$ τα οποία προφανώς έρχονται σε σύγκρουση. Ως συνήθως, *πρόγονος *(*ancestor*) είναι το μεταβατικό κλείσιμο του προκατόχου.*

Αντιστοίχως ορίζουμε τη σύγκρουση ανάμεσα σε τριάδες εννοιών. Πιο συγκεκριμένα η τριάδα $\langle C, \geq, n\rangle$ συγκρούεται με την τριάδα $\langle \neg C, \geq, m\rangle$ αν $m + n > 1$, ενώ συγκρούεται με την τριάδα $\langle \neg C, >, m\rangle$ αν $n + m \geq 1$.

*Ένας κόμβος x είναι μπλοκαρισμένος (*blocked*) ανν δεν είναι κόμβος ρίζα και είναι είτε *έμμεσα μπλοκαρισμένος *(*indirectly blocked*) ή *άμεσα μπλοκαρισμένος *(*directly blocked*). Ένας κόμβος x είναι άμεσα μπλοκαρισμένος ανν κανένας από τους προγόνους του δεν είναι μπλοκαρισμένος και έχει προγόνο y τέτοιο ώστε $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(y)$. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι ο y μπλοκάρει άμεσα τον x. Ένας κόμβος x είναι έμμεσα μπλοκαρισμένος ανν κάποιος από τους προγόνους του είναι μπλοκαρισμένος.*

*Για κάποιο κόμβο x, λέμε ότι το σύνολο $\mathcal{L}(x)$ περιέχει *αντίφαση *(*clash*) αν περιέχει ένα από τα ακόλουθα:*

- *δυο συγκρουόμενες τριάδες,*
- *μια από τις τριάδες* $\langle \bot, \geq, n\rangle$, *με* $n > 0$, $\langle \bot, >, n\rangle$, *ή* $\langle C, >, 1\rangle$,

Επιπρόσθετα, λέμε ότι η ακμή $\langle x, y\rangle$ *περιέχει μια αντίφαση ανν*

- *υπάρχουν δυο συγκρουόμενες τριάδες στο* $\mathcal{L}(\langle x, y\rangle)$
- *η τριάδα* $\langle R, >, 1\rangle$, *ή*
- *το* $\mathcal{L}(\langle x, y\rangle) \cup \{\langle \mathsf{Inv}(R), \rhd, n\rangle \mid \langle R, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(\langle y, x\rangle)\}$, *όπου* x, y *είναι κόμβοι ρίζες, περιέχει δυο συγκρουόμενες τριάδες.*

$\diamondsuit$

Η έννοια των συγκρουόμενων ασαφών ισχυρισμών ή τριάδων εμφανίστηκε πρώτη φορά στο [135] με σκοπό την αναπαράσταση ζευγών ισχυρισμών που έρχονται σε αντιπαράθεση. Καθώς ασχολούμαστε μόνο με ισχυρισμούς που βρίσκονται στην ΚΜΘΑ ο ορισμός μας διαφέρει από αυτόν που δίνεται στο [135] και ο οποίος χρησιμοποιείται μέχρι στιγμής σε όλους τους αλγορίθμους tableaux που έχουν παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία [135, 59, 131].

Ορισμός 4.2.7 (Αλγόριθμος tableaux) *Για ένα* f_{KD}-$\mathcal{SI}$ *ABox* $\mathcal{A}$, *ο αλγόριθμος αρχικοποιεί ένα δέντρο* $\mathcal{F}$ *ώστε να περιέχει*

1. *έναν κόμβο ρίζα* x_{a_i}, *για κάθε άτομο* $a_i \in \mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ *που εμφανίζεται στο ABox* $\mathcal{A}$, *χαρακτηρισμένο με μια ετικέτα* $\mathcal{L}(x_{a_i})$ *τέτοια ώστε:*

$$\mathcal{L}(x_{a_i}) = \{\langle C_i, \rhd, n\rangle \mid (a_i : C_i) \rhd n \in \mathcal{A}\} \text{ και}$$

2. *μια ακμή* $\langle x_{a_i}, x_{a_j}\rangle$, *για κάθε ισχυρισμό* $((a_i, a_j) : R_i) \rhd n \in \mathcal{A}$, *με μια ετικέτα* $\mathcal{L}(\langle x_{a_i}, x_{a_j}\rangle)$ *τέτοια ώστε:*

$$\mathcal{L}(\langle x_{a_i}, x_{a_j}\rangle) = \{\langle R_i, \rhd, n\rangle \mid ((a_i, a_j) : R_i) \rhd \in \mathcal{A}\}.$$

Τέλος, ο αλγόριθμος επεκτείνει το RBox $\mathcal{R}$ *προσθέτοντας προσθέτοντας αξιώματα* $\mathsf{Trans}(\mathsf{Inv}(R))$ *για κάθε* $\mathsf{Trans}(R) \in \mathcal{R}$. *Στη συνέχεια το* $\mathcal{F}$ *επεκτείνεται εφαρμόζοντας διαδοχικά τους κανόνες επέκτασης (*completion rules*) του Πίνακα 4.3. Λέμε ότι το δάσος είναι πλήρες (*complete*) όταν, για κάποιο κόμβο* x, *η ετικέτα* $\mathcal{L}(x)$ *περιέχει μια αντίφαση, ή κανένας από τους κανόνες ολοκλήρωσης δεν εφαρμόζεται. Ο αλγόριθμος απαντά 'το* $\mathcal{A}$ *είναι συνεπές μ.β.τ.* $\mathcal{R}$*' ανν οι κανόνες ολοκλήρωσης μπορούν να εφαρμοστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργηθεί ένα πλήρες και ελεύ*θερο αντιφάσεων *(*clash-free*) δάσος ολοκρήρωσης, και 'το* $\mathcal{A}$ *είναι μη-συνεπές μ.β.τ.* $\mathcal{R}$*' σε διαφορετική περίπτωση.*

$\diamondsuit$

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε κάποια σχόλια για τους παραπάνω ορισμούς και τους κανόνες επέκτασης. Οι κανόνες επέκτασης βασίζονται στις ιδιότητες που παρουσιάστηκαν στον ορισμό 4.2.4. Για παράδειγμα, έστω ο κανόνας $\forall_{\triangleright}$. Αν $\langle \forall R.C, \geq, 0.7\rangle \in \mathcal{L}(x)$, και $\langle R, \geq, 0.6\rangle \in \mathcal{L}(\langle x, y\rangle)$, αυτό σημαίνει ότι η τελευταία τριάδα παραβιάζει την ιδιότητα 6 του ορισμού 4.2.4. Η ιδιότητα αυτή λέει ότι ο βαθμός συμμετοχής της ακμής $\langle x, y\rangle$ στο ρόλο $\neg R$ πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό 0.7, αλλιώς ο βαθμός συμμετοχής του κόμβου y στην έννοια C θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από 0.7. Στην περίπτωση μας όμως η ακμή $\langle x, y\rangle$ ανήκει στο ρόλο R σε βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο με 0.6 και άρα στο ρόλο $\neg R$ σε βαθμό μικρότερο ίσο από 0.4. Για να μπορέσει ο κανόνας $\forall_{\triangleright}$ να ελέγξει αν οι περιορισμοί αυτοί ισχύουν συγκρίνει την ακμή $\langle x, y\rangle$ ως προς σύγκρουση με την τεχνητή τριάδα $\langle \neg R, \geq, 0.7\rangle$. Στην προκειμένη περίπτωση υφίσταται σύγκρουση, συνεπώς πρέπει να προσθέσουμε την τριάδα $\langle C, \geq, 0.7\rangle$ στην ετικέτα του κόμβου y. Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι τεχνητές τριάδες δεν εισάγονται στο δέντρο ολοκλήρωσης αλά απλώς χρησιμοποιούνται μόνο για την εκτέλεση των παραπάνω ελέγχων.

Παράδειγμα 4.2.8 *Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα κανόνων επέκτασης.*

- $\sqcap_{>}$: $\{\langle C \sqcap D, >, 0.6\rangle, \langle C, >, 0.7\rangle\} \subseteq \mathcal{L}(x)$. *Έτσι λοιπόν, ούτε* $\langle C, >, 0.6\rangle \in \mathcal{L}(x)$ *ούτε* $\langle D, >, 0.6\rangle \in \mathcal{L}(x)$, *και άρα πρέπει να προσθέσουμε και τις δυο τριάδες στην ετικέτα του κόμβου* x.

- $\exists_{\geq}$: *Έστω* $\langle \exists\,\mathsf{Inv}(R).C, \geq, 0.7\rangle \in \mathcal{L}(x)$. *Τότε δημιουργούμε έναν νέο κόμβο* y *στο δάσος και θέτουμε,* $\langle \mathsf{Inv}(R), \geq, 0.7\rangle \in \mathcal{L}(\langle x, y\rangle)$, $\langle C, \geq, 0.7\rangle \in \mathcal{L}(y)$.

- $\forall_{+>}$: *Έστω* $\langle \forall\,\mathsf{Inv}(R).C, >, 0.6\rangle \in \mathcal{L}(x)$, $\langle R, \geq, 0.7\rangle \in \mathcal{L}(\langle y, x\rangle)$ *με* $\mathsf{Trans}(R)$. *Τότε, υπάρχει ρόλος* $\mathsf{Inv}(R)$ *με* $\mathsf{Trans}(\mathsf{Inv}(R))$, *ο* y *είναι ένας* $\mathsf{Inv}(R)_{\geq 0.7}$*-γείτονας του* x *με* $\langle \forall\,\mathsf{Inv}(R).C, >, 0.6\rangle \notin \mathcal{L}(y)$, *και η ακμή* $\langle y, x\rangle$ *συγκρούεται με την τριάδα* $\langle \neg\,\mathsf{Inv}(R), >, 0.6\rangle$, *αφού* $\langle R, \geq, 0.7\rangle \in \mathcal{L}(\langle y, x\rangle)$. *Συνεπώς, η τριάδα* $\langle \forall\,\mathsf{Inv}(R).C, >, 0.6\rangle$ *πρέπει να προστεθεί στην ετικέτα* $\mathcal{L}(y)$.

$\diamondsuit$

Από την τελευταία περίπτωση παρατηρούμε ότι η παρουσία αντίστροφων ρόλων μπορεί να προωθήσει πληροφορία προς προγενέστερους κόμβους, (εδώ από τον x στον προηγούμενό του τον y). Η πληροφορία αυτή μπορεί στη συνέχεια να επηρεάσει άλλα κλαδιά του δέντρου και τελικά να έχουμε κάποια σύγκρουση. Στο επόμενο παράδειγμα βλέπουμε τη σημασία των έμμεσα μπλοκαρισμένων κόμβων και της εφαρμογής κανών επέκτασης σε αυτούς.

Παράδειγμα 4.2.9 *Έστω η ασαφής βάση γνώσης* $\Sigma = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A}, \mathcal{R}\rangle$, *με* $\mathcal{T} = \{C \equiv \forall R^{-}.(\forall P^{-}.\neg A)\}$, $\mathcal{A} = \{(\mathsf{a} : A) \geq 0.8, (\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}\rangle : P) \geq 0.8, (\mathsf{b} : C) \geq 0.8, (\mathsf{b} : \exists R.C) \geq 0.8, (\mathsf{b} : \forall R.(\exists R.C)) \geq 0.8\}$ *και* $\mathcal{R} = \{\mathsf{Trans}(R)\}$. *Πρώτα ο αλγόριθμος επεκτείνει το* $\mathcal{R}$ *προσθέτοντας το αξίωμα* $\mathsf{Trans}(R^{-})$. *Στη συνέχεια, για να ελέγξουμε τη συνέπεια του* $\mathcal{A}$ *μ.β.τ.* $\mathcal{T}$ *και το* $\mathcal{R}$ *ο αλγόριθμος αρχικοποιεί το επόμενο δάσος ολοκλήρωσης:*

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \langle A, \geq, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{a}}) \\
(2) & \langle C, \geq, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{b}}) \\
(3) & \langle \exists R.C, \geq, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{b}}) \\
(4) & \langle \forall R.(\exists R.C), \geq, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{b}}) \\
(5) & \langle P, \geq, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{a}}, x_{\mathsf{b}}).
\end{array}
$$

Στη συνέχεια λαμβάνουμε τις παρακάτω εφαρμογές των κανόνων επέκτασης:

$$\begin{array}{lll} (6) & \langle C, \geq, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1}), \langle R, \geq, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{b}}, x_{\mathsf{o}_1}) & \exists_{\geq} : (3) \\ (7) & \langle \exists R.C, \geq, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1}) & \forall_{\geq} : (4) \\ (8) & \langle \forall R.(\exists R.C), \geq, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1}) & \forall_{+} : (4) \end{array}$$

Όπως παρατηρούμε $\mathcal{L}(x_{\mathsf{b}}) = \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1})$, άρα ο κόμβος x_{o_1} μπλοκάρεται από τον x_{b}. Από την άλλη όμως δεν είναι έμμεσα μπλοκαρισμένος. Συνεπώς, εφόσον ισχύει ότι $\langle \forall R^-.(\forall P^-.\neg A), \geq, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1})$ (λόγω του αξιώματος ορισμού του C στο TBox) έχουμε την παρακάτω εφαρμογή κανόνων επέκτασης:

$$\begin{array}{lll} (9) & \langle \forall P^-.\neg A, \geq, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{b}}) & (\forall_{\geq}) : (6) \\ (10) & \langle \neg A, \geq, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{a}}) & (\forall_{\geq}) : (9) \\ (11) & \textit{αντίφαση}\ (10)\ \textit{και}\ (1) & \end{array}$$

Παρατηρήστε στο σημείο αυτό ότι η εισαγωγή της τριάδας $\langle \forall P^-.\neg A, \geq, 0.8\rangle$ στην ετικέτα $\mathcal{L}(x_{\mathsf{b}})$ έχει ως συνέπεια το σπάσιμο του μπλοκαρίσματος στον κόμβο x_{o_1} εφόσον δεν ισχύει πια ότι $\mathcal{L}(x_{\mathsf{b}}) = \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1})$. Όπως παρατηρούμε οι έννοιες των έμμεσα μπλοκαρισμένων κόμβων και του δυναμικού μπλοκαρίσματος είναι απολύτως απαραίτητες στην παρουσία αντίστροφων ρόλων για να μπορέσουμε να αναγνωρίσουμε ορθά τη συνέπεια ή ασυνέπεια ενός ABox. Επίσης, παρατηρείστε ότι αν ο αλγόριθμος διάλεγε να επεκτείνει τον κόμβο x_{o_1} (εφόσον ο κόμβος αυτός δεν είναι πια μπλοκαρισμένος) αντί για τον κόμβο x_{b}, τότε θα είχε δημιουργήσει έναν άλλον κόμβο, έστω τον x_{o_2}, για τον οποίο θα ίσχυε ότι $\mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1}) = \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_2})$. Τότε και πάλι θα προσθέταμε το $\langle \forall P^-.\neg A, \geq, 0.8\rangle$ στον κόμβο x_{o_1}, εφόσον ο x_{o_2} δε θα ήταν έμμεσα μπλοκαρισμένος, το μπλοκάρισμα στον κόμβο x_{o_2} θα έσπαγε, αλλά τότε δε θα ίσχυε ότι $\mathcal{L}(x_{\mathsf{b}}) = \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1})$. Συνεπώς ο κόμβος x_{o_1} θα μπλοκαριζόταν για πάντα ενώ ο x_{o_2} θα ήταν έμμεσα μπλοκαρισμένος. Τότε ο αλγόριθμος δε θα είχε άλλη επιλογή από το να αναγνωρίσει την αντίφαση στον κόμβο x_{a}, όπως δείξαμε στα βήματα από το (9) ως το (11).

4.2.5 Αποφασισιμότητα της f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$

Λήμμα 4.2.10 (Τερματισμός) *Έστω $\mathcal{A}$ ένα f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ ABox και $\mathcal{R}$ ένα RBox. Τοτε, όταν αρχικοποιήσουμε τη διαδικασία για το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{R}$ ο αλγόριθμος επέκτασης τερματίζει.*

Απόδειξη: Έστω $m = |cl(\mathcal{A})|$, $k = |\mathbf{R}_{\mathcal{A}}|$ και l το πλήθος των διαφορετικών βαθμών συμμετοχής που εμφανίζονται στο $\mathcal{A}$. Προφανώς, τα m και l είναι γραμμικά ως προς το μέγεθος του $\mathcal{A}$. Ο τερματισμός είναι επακόλουθο των παρακάτω ιδιοτήτων των κανόνων επέκτασης:

1. Οι κανόνες επέκτασης δεν αφαιρούν ποτέ κόμβους από το δάσος ή έννοιες από τις ετικέτες των κόμβων.

2. Μόνο ο κανόνας ($\exists_{\rhd}$) δημιουργεί νέους κόμβους, και η κάθε δημιουργία ενεργοποιείται όταν τριάδες του τύπου $\langle \exists R.C, \rhd, n\rangle$ βρίσκονται στην ετικέτα ενός κόμβου, όπου το $\exists R.C$ βρίσκεται στο $cl(\mathcal{A})$. Καθώς κανένας κόμβος δεν διαγράφεται οι κανόνες αυτοί δεν εφαρμόζονται επανειλημμένα για την ετικέτα ενός κόμβου. Εφόσον το $cl(\mathcal{A})$ περιέχει το πολύ m έννοιες της μορφής $\exists R.C$, ο έξω-βαθμός (out-degree) του δάσους είναι φραγμένος από τον αριθμό ml.

3. Οι κόμβοι χαρακτηρίζονται από τριάδες του τύπου $\langle C, \rhd, n\rangle$, άρα υπάρχουν το πολύ 2^{8ml} διαφορετικοί τρόποι να χαρακτηρίσουμε την ετικέτα ενός ζεύγους κόμβων. Συνεπώς, αν ένα μονοπάτι p είναι μήκους το λιγότερο 2^{8ml}, τότε στο μονοπάτι αυτό θα υπάρχουν δυο κόμβοι x, y οι οποίοι περιέχουν τις ίδιες ετικέτες και άρα η συνθήκη μπλοκαρίσματος εφαρμόζεται. Εφόσον ένα μονοπάτι το οποίο περιέχει μπλοκαρισμένους κόμβους δεν μπορεί να μεγαλώσει παραπάνω, το μήκος των μονοπατιών του δάσους είναι το-πολύ 2^{4ml}.

■

Όπως φαίνεται από το προηγούμενο λήμμα ο αλγόριθμος χρειάζεται στη χείριστη περίπτωση εκθετικό χώρο (exponential space). Αυτό οφείλεται σε ένα πολύ γνωστό πρόβλημα το οποίο η f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ κληρονομεί από την κλασική γλώσσα $\mathcal{SI}$ [143]. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τις ακόλουθες έννοιες τις οποίες και έχουμε δανειστεί από το [143],

$$C \equiv \exists R.D \sqcap \forall R.(\exists R.D)$$

$$D \equiv (A_1 \sqcup B_1) \sqcap (A_2 \sqcup B_2) \sqcap \ldots \sqcap (A_m \sqcup B_m)$$

όπου R είναι ένας μεταβατικός ρόλος. Τώρα ας υποθέσουμε ότι έχουμε να ελέγξουμε τη συνέπεια του ασαφούς ABox $\mathcal{A} = \{(a : C) \geq 0.8\}$. Η έννοια C προκαλεί τη δημιουργία $R_{\geq 0.8}$-διαδόχου b_i για τον οποίο ισχύει ότι $(b_i : D) \geq 0.8$. Τώρα λόγω του κανόνα $\sqcup_{\geq}$, ο οποίος μπορεί να διαλέξει να εισάγει τον ισχυρισμό $(b_i : A_i) \geq 0.8$ ή τον $(b_i : B_i) \geq 0.8$, για κάθε ένα από τα $1 \leq i \leq m$ υπάρχουν 2^m διαφορετικοί τρόποι να επεκτείνουμε την D. Συνεπώς, ο αλγόριθμος μπορεί να χρειαστεί να δημιουργήσει ένα μονοπάτι εκθετικού μήκους προτού η συνθήκη μπλοκαρίσματος εφαρμοστεί. Ο Tobies [143] παρουσιάζει μια βελτιστοποιημένη συνθήκη μπλοκαρίσματος η οποία και οδηγεί σε έναν αλγόριθμο για την $\mathcal{SI}$ που τρέχει σε πολυωνυμικό χώρο PSPACE. Η προσαρμογή της τεχνικής αυτής στην περίπτωση της γλώσσας f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ αφήνεται ως μελλοντική έρευνα.

Θεώρημα 4.2.11 (Ορθότητα (soundness)) *Αν οι κανόνες μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ ABox $\mathcal{A}$ και RBox $\mathcal{R}$ έτσι ώστε να προκύψει ένα πλήρες και ελεύθερο αντιφάσεων δάσος ολοκλήρωσης τότε το $\mathcal{A}$ έχει ένα ασαφές tableau μ.β.τ. $\mathcal{R}$.*

Απόδειξη: Έστω ένα πλήρες και ελεύθερο αντιφάσεων δάσος ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$. Η κατασκευή ενός ασαφούς tableau $T = (\mathbf{S}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$ βασίζεται στη μέθοδο κατασκευής ενός ασαφούς μοντέλου, που παρουσιάστηκε στο [135], αλλά και στη μεθόδου που παρουσιάζεται στο [67] για την κατασκευή ενός σωστού tableau από ένα πιθανόν μπλοκαρισμένο δάσος ολοκλήρωσης.

Η μέθοδος που παρουσιάζεται στο [135] είναι εμφανώς απαραίτητη γιατί εκτός από το μέρος των κόμβων και των ακμών είναι απαραίτητο να διαχειριστούμε και τους βαθμούς οι οποίοι εμφανίζονται στο δάσος ολοκλήρωσης. Πιο συγκεκριμένα, από το σύνολο των τριάδων που υπάρχουν στην ετικέτα ενός κόμβου θα πρέπει να προσδιορίσουμε το βαθμό συμμετοχής που θα έχει ο κόμβος x σε κάποια έννοια στο ασαφές tableau. Για να το πετύχουμε αυτό κάνουμε χρήση της μεθόδου κατασκευής ενός ασαφούς μοντέλου από ένα επεκτεταμένο δάσος, ο οποίος προτείνεται στο [135]. Πιο συγκεκριμένα, για ένα σύνολο από τριάδες $\langle A, \geq, n_i\rangle$, όπου i θετικός ακέραιος, που υπάρχουν στο $\mathcal{L}(x)$, η μέγιστη τιμή από τις n_i επιλέγεται ως ο βαθμός συμμετοχής του x στο ασαφές σύνολο $A^{\mathcal{I}}$, δηλαδή ο βαθμός $\mathcal{L}(x, A)$. Αν η μέγιστη τιμή εμφανίζεται σε μια τριάδα της μορφής $\langle A, >, n\rangle$ ένας μικρός βαθμός ϵ προστίθεται σε αυτόν. Η ύπαρξη μιας τέτοιας τιμής εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι το κατασκευασμένο δάσος είναι ελεύθερο αντιφάσεων. Επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να επιβάλουμε όλοι οι αριθμοί ϵ που προστίθενται να είναι ίσοι μεταξύ τους. Επιπρόσθετα, αν δεν υπάρχει καμία τριάδα της μορφής $\langle A, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ακόμα και αν υπάρχουν τριάδες της μορφής τριάδες $\langle \neg A, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, τότε θέτουμε το βαθμό του x στο A ίσο με 0.

Στην περίπτωση που μια έννοια περιορισμού τιμής $\forall R.C$ αλλά και μια ακμή η οποία ανήκει στο ρόλο R αλλά δεν δημιουργεί σύγκρουση (και συνεπώς ο κανόνας $\forall_{\rhd}$ δεν εφαρμόστηκε κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου) ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται στην επιλογή της τιμής της ακμής στο ρόλο R και του ϵ, αν αυτό είναι απαραίτητο, για να μη δημιουργηθούν συγκρούσεις στο μοντέλο που κατασκευάζουμε. Για παράδειγμα, έστω $\langle \forall R.C, \geq 0.8\rangle \in \mathcal{L}(x)$ και $\langle R, >, 0.199\rangle \in \mathcal{L}(\langle x, y\rangle)$, τότε η ακμή $\langle x, y\rangle$ δε συγκρούεται με την τριπλέτα $\langle \neg R, \geq, 0.8\rangle$, αφού $0.8 + 0.199 < 1$, θα πρέπει όμως στην κατασκευή να προσέξουμε έτσι ώστε $\mathcal{E}(R, \langle x, y\rangle) = 0.199 + \epsilon$, με $0 < \epsilon \leq 0.2 - 0.199$ αλλιώς η ιδιότητα 6 του ασαφούς tableau δε θα ικανοποιείται.

Επιπρόσθετα οι έννοιες της μορφής $\neg A$ ερμηνεύονται από τους βαθμούς συμμετοχής της έννοιας A. Παρόμοια και για τους ρόλους. Η συνάρτηση η οποία λαμβάνει υπόψη της όλους τους παραπάνω περιορισμούς και επιστρέφει τη μέγιστη τιμή στην οποία ένας κόμβος ανήκει σε μια έννοια (αντίστοιχα για ζεύγη κόμβων και ρόλους) είναι η *glb* [135]. Επίσης, παρατηρήστε για τη συνέχεια ότι ετικέτες της μορφής $\mathcal{L}(s, C)$ αναφέρονται σε στοιχεία του ασαφούς tableau, ενώ ετικέτες της μορφής $\mathcal{L}(x)$ σε κόμβους του δάσους ολοκλήρωσης.

Ένα ασαφές tableau T μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{S} & = & \{x \mid \text{Ο } x \text{ είναι ένας κόμβος στο } \mathcal{F}, \text{ μη μπλοκαρισμένος}\},\\
\mathcal{L}(x, \perp) & = & 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{S},\\
\mathcal{L}(x, \top) & = & 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{S},\\
\mathcal{L}(x, C) & = & glb[\rhd, n_i], \text{ για } \langle C, \rhd, n_i\rangle \in \mathcal{L}(x) \text{ και } x \text{ μη μπλοκαρισμένος},\\
\mathcal{L}(x, \neg A) & = & 1 - \mathcal{L}(x, A), \text{ για κάθε } x \text{ στο } \mathcal{F} \text{ μη μπλοκαριμένο, με } \langle \neg A, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(x),\\
\mathcal{E}(R, \langle x, y\rangle) & = & \{glb[\rhd, n_i] \mid 1.\ \text{Ο } y \text{ είναι ένας } R_{\rhd n_i}\text{-γείτονας του } x,\\
 & & \qquad 2. \langle R, \rhd, n_i\rangle \in \mathcal{L}(\langle x, z\rangle) \text{ και ο } y \text{ μπλοκάρει τον } z \text{ ή}\\
 & & \qquad 3. \langle \mathsf{Inv}(R), \rhd, n_i\rangle \in \mathcal{L}(\langle y, z\rangle) \text{ και ο } x \text{ μπλοκάρει τον } z\},\\
\mathcal{E}(\neg R, \langle p, q\rangle) & = & 1 - \mathcal{E}(R, \langle p, q\rangle) \text{ για κάθε } \langle p, q\rangle \in \mathbf{S} \times \mathbf{S},\\
\mathcal{V}(a_i) & = & x_{a_i}, \text{ where } x_{a_i} \text{ is a root node},
\end{array}
$$

Μπορεί να δειχθεί ότι το T είναι ένα ασαφές tableau για το $\mathcal{A}$ μ.β.τ. $\mathcal{R}$:

- Οι ιδιότητες 1-3 του ορισμού 4.2.4 ικανοποιούνται γιατί ο $\mathcal{F}$ είναι ελεύθερος αντιφάσεων και λόγω της κατασκευής του T. Έστω, $\mathcal{L}(p, \neg A) = n_1 \geq n$. Ο ορισμός του T συνεπάγεται ότι $1 - n \geq 1 - n_1 = \mathcal{L}(p, A)$. Η ιδιότητα 3 προκύπτει από τους ίδιους ισχυρισμούς.

- Οι ιδιότητες 4 και 5 του ορισμού 4.2.4 ικανοποιούνται γιατί κανένας από τους κανόνες $\sqcup_{\rhd}$, και $\sqcap_{\rhd}$ δεν εφαρμόζεται σε κάποιο κόμβο του $\mathcal{F}$, και ο x δεν είναι μπλοκαρισμένος. Για παράδειγμα, έστω $\mathcal{L}(x, C \sqcap D) = n_1 \geq n$. Ο ορισμός του T συνεπάγεται ότι, είτε $\langle C \sqcap D, \geq, n_1\rangle \in \mathcal{L}(x)$ ή $\langle C \sqcap D, >, n'\rangle \in \mathcal{L}(x)$, όπου $n_1 = n' + \epsilon$. Η πληρότητα του $\mathcal{F}$ συνεπάγεται ότι είτε $\langle C, \geq, n_1\rangle \in \mathcal{L}(x)$ και $\langle D, \geq, n_1\rangle \in \mathcal{L}(x)$ ή $\langle C, >, n'\rangle \in \mathcal{L}(x)$ και $\langle D, >, n'\rangle \in \mathcal{L}(x)$. Συνεπώς, $\mathcal{L}(s, C) = glb[\langle C, \rhd, n_i\rangle] \geq \mathcal{L}(s, C \sqcap D) \geq n$, $\mathcal{L}(s, D) = glb = [\langle C, \rhd, n_i\rangle] \geq \mathcal{L}(s, C \sqcap D) \geq n$. Η ιδιότητα 5 προκύπτει με παρόμοιο τρόπο.

- Η ιδιότητα 6 του ορισμού 4.2.4 ικανοποιείται. Έστω $x \in \mathbf{S}$ με $\mathcal{L}(x, \forall R.C) = n_1 \geq n$ και $\mathcal{E}(\neg R, \langle x, y\rangle) \not\geq n$. Ο ορισμός του T συνεπάγεται ότι είτε $\langle \forall R.C, \geq, n_1\rangle \in \mathcal{L}(x)$ ή $\langle \forall R.C, >, n'\rangle \in \mathcal{L}(x)$ με $n_1 = n' + \epsilon$. Επιπρόσθετα, εφόσον η συνάρτηση glb δε δημιουργεί περιττές συγκρούσεις όταν αυτές δεν υπάρχουν έχουμε ότι είτε:

  1. ο y είναι ένας $R_{\rhd,r}$-γείτονας του x
  2. $\langle R, \rhd, r\rangle \in \mathcal{L}(\langle x, z\rangle)$, και ο y μπλοκάρει τον z άρα $\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(z)$, ή
  3. $\langle \mathsf{Inv}(R), \rhd, r\rangle \in \mathcal{L}(\langle y, z\rangle)$, και ο x μπλοκάρει τον z, άρα $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(z)$

  και τα $\langle R, \rhd, r\rangle$ ή $\langle \mathsf{Inv}(R), \rhd, r\rangle$ προκαλούν σύγκρουση. Συνεπώς, και για τις τρεις περιπτώσεις ο κανόνας $\forall_{\rhd}$ διασφαλίζει ότι είτε $\langle C, \geq, n_1\rangle \in \mathcal{L}(y)$ ή $\langle C, >, n'\rangle \in \mathcal{L}(y)$. Συνεπώς, είτε $\mathcal{L}(y, C) \geq n_1 \geq n$, ή $\mathcal{L}(y, C) \geq n' + \epsilon = n_1 \geq n$. Ανάλογη απόδειξη ισχύει και για την περίπτωση που ισχύει ότι $\mathcal{L}(x, \forall R.C) > n$ αλλά και για την ιδιότητα 8 του ορισμού 4.2.4 λόγω του κανόνα $\forall_{+}$.

- Η ιδιότητα 7 του ορισμού 4.2.4 ικανοποιείται. Έστω $x \in \mathbf{S}$ με $\mathcal{L}(x, \exists R.C) = n_1 \geq n$. Ο ορισμός του T συνεπάγεται ότι είτε $\langle \exists R.C, \geq, n_1\rangle \in \mathcal{L}(x)$ ή $\langle \exists R.C, >, n'\rangle \in \mathcal{L}(x)$, με $n_1 = n' + \epsilon$. Τότε ο κανόνας $\exists_{\rhd}$ διασφαλίζει ότι είτε υπάρχει:

  1. προκάτοχος y τέτοιος ώστε $\langle \mathsf{Inv}(R), \geq, n_1\rangle \in \mathcal{L}(\langle y, x\rangle)$ και $\langle C, \geq, n_1\rangle \in \mathcal{L}(y)$ ή αντίστοιχα με την ανισότητα $>$ και το βαθμό n'. Επειδή ο κόμβος y είναι προκάτοχος του x δε μπορεί να είναι μπλοκαρισμένος, άρα ο $y \in \mathbf{S}$, και ισχύει ότι $\mathcal{E}(R, \langle x, y\rangle) \geq n_1 \geq n$ και $\mathcal{L}(y, C) \geq n_1$ ή $\mathcal{E}(R, \langle x, y\rangle) \geq n' + \epsilon = n_1 \geq n$ και $\mathcal{L}(y, C) \geq n' + \epsilon = n_1 \geq n$.
  2. διάδοχος y τέτοιος ώστε $\langle R, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(\langle x, y\rangle)$, $\langle C, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(y)$ ή αντίστοιχα με την ανισότητα $>$ και το βαθμό n'. Αν ο y δεν είναι μπλοκαρισμένος τότε ο $y \in \mathbf{S}$ και ισχύει ότι $\mathcal{E}(R, \langle x, y\rangle) \geq n_1$ και $\mathcal{L}(y, C) \geq n_1$ ή $\mathcal{E}(R, \langle x, y\rangle) \geq n' + \epsilon$ και $\mathcal{L}(y, C) \geq n' + \epsilon = n_1$. Διαφορετικά, ο y είναι μπλοκαρισμένος από κάποιον z. Συνεπώς, ο $z \in \mathbf{S}$ και ισχύει ότι $\langle R, \geq, n_1\rangle \in \mathcal{L}(\langle x, z\rangle)$ και $\langle C, \geq, n_1\rangle \in \mathcal{L}(z)$ ή $\langle R, >, n'\rangle \in \mathcal{L}(\langle x, z\rangle)$ και $\langle C, >, n\rangle \in \mathcal{L}(z)$. Και στις δυο περιπτώσεις $\mathcal{L}(z, C) \geq n$ και $\mathcal{E}(R, \langle x, z\rangle) \geq n$.

  Παρομοίως για την περίπτωση όπου $\mathcal{L}(p, \exists R.C) > n$.

- Η ιδιότητα 9 του ορισμού 4.2.4 ικανοποιείται λόγω του συμμετρικού ορισμού της απεικόνισης $\mathcal{E}$.

- Οι ιδιότητες 10-11 ικανοποιούνται λόγω της αρχικοποίησης του δάσους ολοκλήρωσης και του ότι ο αλγόριθμος δεν μπλοκάρει ποτέ κόμβους ρίζας.

■

Λήμμα 4.2.12 (Πληρότητα (completeness)) *Έστω $\mathcal{A}$ ένα f_{KD}-$\mathcal{SI}$ ABox και $\mathcal{R}$ ένα RBox. Αν το $\mathcal{A}$ έχει ένα ασαφές tableau μ.β.τ. $\mathcal{R}$ τότε οι κανόνες επέκτασης μπορούν να εκτελεστούν με τέτοιο τρόπο ώστε ο αλγόριθμος να δημιουργήσει έναν πλήρες και ελεύθερο αντιφάσεων δάσος ολοκλήρωσης για το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{R}$.*

Απόδειξη: Έστω $T = (\mathbf{S}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$ ένα ασαφές tableau για το $\mathcal{A}$ μ.β.τ. $\mathcal{R}$. Εφόσον γνωρίζουμε ότι το $\mathcal{A}$ έχει ένα ασαφές tableau (T) μ.β.τ. $\mathcal{R}$ μπορούμε να

Πίνακας 4.2: *Ο κανόνας $\sqcup'_{\triangleright}$*

Κανόνας		Περιγραφή
$\sqcup'_{\triangleright}$	αν 1.	$\langle C_1 \sqcup C_2, \triangleright, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ο x δεν είναι έμμεσα μπλοκαρισμένος, και
	2.	$\{\langle C_1, \triangleright, n\rangle, \langle C_2, \triangleright, n\rangle\} \cap \mathcal{L}(x) = \emptyset$
	τότε	$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) \cup \{C\}$ για κάποιο $C \in \{\langle C_1, \triangleright, n\rangle, \langle C_2, \triangleright, n\rangle\}$ το οποίο δε συγκρούεται με την τριάδα $\langle \neg C_1, \geq, 1 - \mathcal{L}(\pi(x), C_1)\rangle$ ή την $\langle \neg C_2, \geq, 1 - \mathcal{L}(\pi(x), C_2)\rangle$

οδηγήσουμε την εκτέλεση των κανόνων επέκτασης έτσι ώστε να κατασκευάσουμε ένα πλήρες και ελεύθερο αντιφάσεων δάσος ολοκλήρωσης. Παρόμοια με το [67] μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση π η οποία αντιστοιχεί κόμβους του $\mathcal{F}$ σε στοιχεία του $\mathbf{S}$, και να οδηγήσουμε την εκτέλεση του μη-ντετερμινιστικού κανόνα $\sqcup_{\triangleright}$. Ο τροποποιημένος κανόνας $\sqcup_{\triangleright}$ που προτείνουμε διαφέρει από αυτόν στο [67], κατά τον ακόλουθο τρόπο. Χρησιμοποιώντας τους βαθμούς συμμετοχής, που βρίσκονται στο ασαφές tableau, δημιουργούμε τεχνητές τριάδες οι οποίες ελέγχονται ως προς σύγκρουση με τις υποψήφιες προς εισαγωγή τριάδες που πρόκειται να εισαχθούν στο $\mathcal{F}$ από τον κανόνα. Οι τριάδες που δε δημιουργούν αντίφαση μπορούν να εισαχθούν με ασφάλεια. Με αυτόν τον τρόπο διασφαλίζουμε ότι μια νέα τριάδα σε έναν κόμβο δεν επιβάλει πιο ισχυρούς περιορισμούς για τη συμμετοχή του κόμβου σε μια έννοια σε σχέση με αυτούς που ήδη γνωρίζουμε στο ασαφές tableau και οι οποίοι σχετίζονται με το μοντέλο της βάσης γνώσης. Ο τροποποιημένες κανόνας $\sqcup'_{\triangleright}$ παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2. Οι παρατηρήσεις αυτές μαζί με την ιδιότητα του τερματισμού διασφαλίζουν την πληρότητα του αλγορίθμου. ■

Θεώρημα 4.2.13 *Ο αλγόριθμος tableau είναι μια διαδικασία απόφασης για το πρόβλημα της συνέπειας ενός f_{KD}-$\mathcal{SI}$ ABox, της n-ικανοποιησιμότητας και της υπαγωγής f_{KD}-$\mathcal{SI}$-εννοιών με βάση ένα RBox.*

Το παραπάνω θεώρημα είναι άμεση συνέπεια των Λημμάτων 4.2.5, 4.2.11 και 4.2.12. Όπως επίσης αναφέραμε στην ενότητα 3.3, η υπαγωγή εννοιών μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα της συνέπειας.

4.3 Εξαγωγή Συμπερασμάτων στην $\mathbf{f}_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$

4.3.1 Ιεραρχίες Ρόλων

Τα αποτελέσματα της ιδιότητας της μεταβατικότητας στις κλασσικές ΠΛ επεκτάθηκαν στο [67] και στις ιεραρχίες ρόλων, δηλαδή για την περίπτωση που ένας ρόλος R που εμφανίζεται σε έναν περιορισμό τιμής περιέχει μεταβατικούς υπο-ρόλους. Πιο συγκεκριμένα αν $x \in (\forall R.C)^{\mathcal{I}}$, $\langle x, y\rangle \in P^{\mathcal{I}}$, $\mathsf{Trans}(P)$ και $P \,\underline{\circledast}\, R$, τότε $y \in (\forall P.C)^{\mathcal{I}}$.

Η έρευνα της ιδιότητας αυτής στην περίπτωση των ασαφών περιγραφικών λογικών που περιλαμβάνουν τόσο μεταβατικούς ρόλους αλλά και ιεραρχίες ρόλων γίνεται στο [133]. Πιο συγκεκριμένα έστω $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(x) \geq c_a$, $P^{\mathcal{I}}(x,y) = p$, $\mathsf{Trans}(P)$, και $c_a, p \in [0,1]$, όπως πριν, αλλά επιπλέον ας θεωρήσουμε ότι $P \sqsubseteq^* R$. Εφόσον η P είναι μεταβατική τότε, $\forall x, y \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και για κάποιο τυχαίο $z \in \Delta^{\mathcal{I}}$ ισχύει ότι, $P^{\mathcal{I}}(x,y) \geq \min(P^{\mathcal{I}}(x,z), P^{\mathcal{I}}(z,y))$. Λόγω της σημασιολογίας των αξιωμάτων υπαγωγής ρόλων έχουμε ότι:

$$R^{\mathcal{I}}(x,y) \geq P^{\mathcal{I}}(x,y) \geq \min(P^{\mathcal{I}}(x,z), P^{\mathcal{I}}(z,y)).$$

Αν εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση των μεταβατικών ρόλων στην υπο-ενότητα 4.2.1 θα λάβουμε:

$$\max(c(P^{\mathcal{I}}(a,b)), (\forall P.C)^{\mathcal{I}}(b)) \geq v_a,$$

το οποίο σημαίνει ότι είτε $c(P^{\mathcal{I}}(a,b)) \geq v_a$ ή $(\forall P.C)^{\mathcal{I}}(b) \geq v_a$. Έτσι λοιπόν επεκτείνοντας τα αποτελέσματα της ενότητα 4.2.1 έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 4.3.1 *Αν* $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a) \rhd n$, *και* $\mathsf{Trans}(P)$ *με* $P \sqsubseteq^* R$ *τότε, σε μια* f_{KD}*-ΠΛ ισχύει ότι,* $(\forall P.(\forall P.C))^{\mathcal{I}}(a) \rhd n$.

4.3.2 Περιορισμοί Πληθυκότητας

Στην τρέχουσα ενότητα θα ασχοληθούμε με τους περιορισμούς πληθυκότητας. Θα διερευνήσουμε τη σημασιολογία τους για να μπορέσουμε στη συνέχεια να αναπτύξουμε ορθούς (sound), πλήρεις (complete) και αποδοτικούς (efficient) κανόνες οι οποίοι διαχειρίζονται τέτοιου είδους έννοιες. Πιο συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι τα προβλήματα συλλογιστικής για τους περιορισμούς πληθυκότητας, μ.β.τ. σημασιολογία που παρουσιάστηκε στο [137], μπορεί να αναχθεί σε ένα απλό πρόβλημα *μετρήματος* (*counting*), όπως ακριβώς συμβαίνει και στις κλασικές ΠΛ γλώσσες που περιλαμβάνουν τέτοιους περιορισμούς, όπως είναι η γλώσσα $\mathcal{SHIN}$ [70]. Η μόνη διαφορά είναι ότι επιπρόσθετα η διαδικασία της μέτρησης πρέπει να λάβει υπόψη της και τους εκάστοτε βαθμούς συμμετοχής.

Έστω ο περιορισμός το-λιγότερο $(\geq pR)^{\mathcal{I}}(a) \geq n$, όπου $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Σύμφωνα με τον Πίνακα 3.1 και χρησιμοποιώντας την τ-νορμα min έχουμε την εξής ανίσωση:

$$\sup_{b_1,\ldots,b_p \in \Delta^{\mathcal{I}}} \min(\min_{i=1}^{p} R^{\mathcal{I}}(a,b_i), \min_{i<j}\{b_i \neq b_j\}) \geq n.$$

Προκειμένου να μπορέσουμε να αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο συλλογιστικής επιβάλλουμε τον περιορισμό ότι οι ισότητες $(\{b_i = b_j\})$ και οι ανισότητες $(\{b_i \neq b_j\})$ των αντικειμένων ερμηνεύονται με τον κλασσικό τρόπο, δεν είναι δηλαδή ασαφείς. Κάτω από αυτό το πρίσμα, η παραπάνω ανισότητα μπορεί να απλοποιηθεί στην ανίσωση:

$$\sup_{b_1,\ldots,b_p \in \Delta^{\mathcal{I}}} \min_{i=1}^{p}\{R^{\mathcal{I}}(a,b_i)\} \geq n.$$

Διαισθητικά η ανίσωση αυτή σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον p ζεύγη $\langle a, b_i \rangle$, για τα οποία να ισχύει $R^{\mathcal{I}}(a,b_i) \geq n$. Η σημασιολογία αυτή είναι διαισθητικά ορθή καθώς είναι παρόμοια με αυτή των κλασικών περιορισμών πληθυκότητας, όπου θα απαιτούσαμε την ύπαρξη p ζευγών για τα οποία $R^{\mathcal{I}}(a,b_i) \geq 1$, το οποίο απλά σημαίνει p ζεύγη. Από την άλλη ένας ισχυρισμός $(\geq pR)^{\mathcal{I}}(a) > n$ συνεπάγεται ότι υπάρχουν το λιγότερο p ζεύγη $\langle a, b_i\rangle$, για τα οποία ισχύει $R^{\mathcal{I}}(a, b_i) > n$.

Ας υποθέσουμε τώρα έναν περιορισμό το-πολύ της μορφής $(\leq pR)^{\mathcal{I}}(a) \geq n$. Χρησιμοποιώντας τη σημασιολογία που παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.1 αλλά και τους ασαφείς τελεστές της γλώσσας f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ λαμβάνουμε τη σχέση,

$$\inf_{b_1,\ldots,b_{p+1}\in\Delta^{\mathcal{I}}} \max(1 - \min_{i=1}^{p+1} R^{\mathcal{I}}(a, b_i), \max_{i<j}\{b_i = b_j\}).$$

Πάλι, θεωρώντας μόνο κλασικές ισότητες και ανισότητες μπορούμε να γράψουμε την ανίσωση: $\inf_{b_1,\ldots,b_{p+1}\in\Delta^{\mathcal{I}}} \max(1 - \min_{i=1}^{p+1} R^{\mathcal{I}}(a, b_i)) \geq n$, από την οποία τελικά, λόγω των κανόνων DeMorgan προκύπτει η μορφή:

$$\inf_{b_1,\ldots,b_{p+1}\in\Delta^{\mathcal{I}}} \max_{i=1}^{p+1}\{1 - R^{\mathcal{I}}(a, b_i)\} \geq n.$$

Διαισθητικά η ανίσωση αυτή σημαίνει ότι για κάθε $p+1$ ζεύγη $\langle a, b_i\rangle$, που μπορούν να σχηματιστούν, υπάρχει τουλάχιστον ένα για το οποίο ισχύει ότι, $c(R^{\mathcal{I}}(a, b_k)) \geq n$. Επιπλέον, μπορούμε να ερμηνεύσουμε την παραπάνω εξίσωση με έναν διαφορετικό τρόπο ο οποίος θα μοιάζει περισσότερο με τη σημασιολογία των κλασικών περιορισμών το-πολύ. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να πούμε ότι υπάρχουν το πολύ p ζεύγη $\langle a, b_i\rangle$ για τα οποία ισχύει, $c(R^{\mathcal{I}}(a, b_i)) < n$. Παρομοίως, ένας περιορισμός το-πολύ της μορφής $(\leq pR)^{\mathcal{I}}(a) > n$ συνεπάγεται ότι υπάρχουν το πολύ p ζεύγη $\langle a, b_i\rangle$, για τα οποία ισχύει ότι $c(R^{\mathcal{I}}(a, b_i)) \leq n$. Συνεπώς, η συλλογιστική μ.β.τ. περιορισμούς πληθυκότητας μπορεί να αναχθεί στην καταμέτρηση του πλήθους των ασαφών ισχυρισμών, $((a, b_i) : R) \geq n'$ που ικανοποιούν τον παραπάνω περιορισμό. Αν βρούμε ότι παραπάνω από p ισχυρισμοί ικανοποιούν την ανισότητα αυτή, τότε θα πρέπει μη-ντετερμινιστικά να ενώσουμε (ταυτοποιήσουμε) μερικά από τα b_i, όπως ακριβώς συμβαίνει και στην περίπτωση του αλγορίθμου της γλώσσας $\mathcal{SHOIN}$ [68].

Ας αναλογιστούμε τώρα τις οριακές τιμές 0 και 1, και ας εφαρμόσουμε την παραπάνω ανίσωση στον κλασικό περιορισμό το-πολύ, $a \in (\leq pR)^{\mathcal{I}}$. Ο ισχυρισμός αυτός σε ασαφές ΠΛ μπορεί να γραφτεί ως, $(\leq pR)^{\mathcal{I}}(a) \geq 1$, το οποίο συνεπάγεται ότι υπάρχουν το πολύ p $b_i \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοια ώστε να ισχύει, $c(R^{\mathcal{I}}(a, b_i)) < 1 \Rightarrow R^{\mathcal{I}}(a, b_i) > 0$. Εφόσον ενδιαφερόμαστε μόνο για τις τιμές 0 και 1 η τελευταία ανίσωση, ικανοποιείται αν $R^{\mathcal{I}}(a, b_i) = 1$. Τελικά, έχουμε ότι η $(\leq pR)^{\mathcal{I}}(a) \geq 1$ ικανοποιείται αν υπάρχουν το πολύ p διάδοχοι του a στην $R^{\mathcal{I}}$.

Όπως παρατηρούμε στο [126], από τη στιγμή που έχουμε ορίσει ασαφή σημασιολογία για τους περιορισμούς πληθυκότητας είναι δυνατόν να συμβαίνει να έχουμε ταυτόχρονα τους ισχυρισμούς $(a : (\geq p_1R)) \geq n_1$ και $(a : (\leq p_2R)) \geq n_2$, με $p_1 > p_2$, χωρίς να δημιουργείται κάποια σύγκρουση. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 4.3.2 *Έστω $\mathcal{A} = \{(a : (\geq p_1R)) \geq n_1, (a : (\leq p_2R)) \geq n_2\}$ ένα ασαφές σώμα ισχυρισμών, με $n_1, n_2 \in [0, 1]$, $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, και $p_2 < p_1$. Τότε $\mathcal{A}$ είναι ικανοποιήσιμο ανν $n_1 + n_2 \leq 1$.*

Απόδειξη: Για την "μόνο-αν" περίπτωση έστω $\mathcal{I}$ ένα μοντέλο του $\mathcal{A}$. Από τον πρώτο ισχυρισμό έχουμε ότι, $R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_i^{\mathcal{I}}) \geq n_1$ και $a^{\mathcal{I}}, b_i^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$, για κάθε $1 \leq i \leq p_1$. Επιπρόσθετα, από το δεύτερο έχουμε ότι για κάθε $p_2 + 1$-πλειάδα υπάρχει κάποιο $b_k^{\mathcal{I}}$ για το οποίο ισχύει,

$$c(R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_k^{\mathcal{I}})) \geq n_2 \Rightarrow R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_k^{\mathcal{I}}) \leq 1 - n_2.$$

Εφόσον $p_1 > p_2$ και $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, τότε $p_1 \geq p_2 + 1$. Συνεπώς, για αυτό το b_k θα έχουμε επίσης $R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_k^{\mathcal{I}}) \geq n_1$. Συνδιάζοντας τις ανωτέρω δυο ανισώσεις έχουμε $1 - n_2 \geq R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_k^{\mathcal{I}}) \geq n_1$, το οποίο σημαίνει ότι $1 - n_2 \geq n_1$ ή $1 \geq n_1 + n_2$. Για την αντίστροφη φορά, δεδομένου ότι $1 \geq n_1 + n_2 \Rightarrow 1 - n_1 \geq n_2$ μπορούμε πολύ απλά να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο στο οποίο υπάρχει ένα ζεύγος $\langle a, b_k \rangle$ για το οποίο ισχύει $1 - n_1 \geq R(a, b_k) \geq n_2$. ∎

Στις κλασσικές ΠΛ, εφόσον $n_1, n_2 \in \{0, 1\}$, η ανισότητα $n_1 + n_2 \leq 1$ ικανοποιείται ανν είτε $n_1 = 0$ ή $n_2 = 0$. Όντως στις κλασσικές ΠΛ ένα άτομο δεν μπορεί να ανήκει ταυτόχρονα και στις δυο αυτές έννοιες.

4.3.3 Μπλοκάρισμα Ζευγαρώματος και Ονοματικοί Κόμβοι

Όπως είδαμε στην υπο-ενότητα 4.2.2 η παρουσία μεταβατικών ρόλων δημιουργεί προβλήματα τερματισμού τα οποία επιλύονται με την εισαγωγή μεθόδων μπλοκαρίσματος όπως είναι το μπλοκάρισμα υποσυνόλου. Στη συνέχεια είδαμε ότι όταν περαιτέρω η ΠΛ επιτρέπει και αντίστροφους ρόλους τότε τα πράγματα γίνονται ακόμα πιο περίπλοκα και η αρχική συνθήκη μπλοκαρίσματος πρέπει να τροποποιηθεί χρησιμοποιώντας το δυναμικό μπλοκάρισμα στο οποίο τα μπλοκαρίσματα ανάμεσα στους κόμβους μπορούν να σπάνε και να ξαραδημιουργώνται δυναμικά αλλά και επίσης είναι απαραίτητο να αφήνουμε την εκτέλεση αρκετών κανόνων ακόμα και αν αυτοί πρόκειται να εφαρμοστούν σε μπλοκαρισμένους κόμβους. Είδαμε τέλος στην υπο-ενότητα 4.2.2 και στην απόδειξη του λήμματος 4.2.11 πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα ασαφές tableau από ένα πεπερασμένο δάσος δημιουργώντας μια ακμή από τον κόμβο που δείχνει στον μπλοκαρισμένο κόμβο προς τον κόμβο που μπλοκάρει τον μπλοκαρισμένο κόμβο. Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε εν συντομία τα προβλήματα που δημιουργώνται από την προσθήκη περιορισμών πληθυκότητας και τις γενικές αρχές επίλυσής τους.

Όπως αποδεικνύουν οι Horrocks et. al. στο [70] τα πράγματα γίνονται ακόμα πιο δύσκολα στην περίπτωση όπου η ΠΛ γλώσσας προσφέρει ταυτόχρονα μεταβατικούς και αντίστροφους ρόλους αλλά και περιορισμούς πληθυκότητας. Αυτό συμβαίνει διότι η προκύπτουσα γλώσσα δε διατηρεί την ιδιότητα του *πεπερασμένου μοντέλου* (*finite-model property*) [67, 6]. Δηλαδή υπάρχουν f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$-έννοιες οι οποίες είναι ικανοποιήσιμες μόνο σε άπειρες ερμηνείες. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι για τις έννοιες αυτές δεν είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε την τεχνική του δυναμικού μπλοκαρίσματος και άρα όταν πρόκειται να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο από το πεπερασμένο δάσος να το πράξουμε εισάγοντας μια ακμή από τον κόμβο που δείχνει στον μπλοκαρισμένο κόμβο προς τον κόμβο που μπλοκάρει τον μπλοκαρισμένο. Για παράδειγμα έστω ότι σε κάποιο σημείο της εκτέλεσης του αλγορίθμου μας έχουμ ότι $((a, b) : R) \geq 0.7$, $((b, c) : R) \geq 0.7$ και έστω ότι ο κόμβος b μπλοκάρει τον c. Ακολουθώντας την τεχνική της f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ θε έπρεπε να δημιουργήσουμε μια ακμή $(b, b) : R) \geq 0.7$ προκειμένου να ικανοποιηθούν οι ισχυρισμοί που βρίσκονται στον b. Αν όμως ο κόμβος b περιέχει έναν ισχυρισμό της μορφής $(b :\leq 1R^-) \geq 0.6$ τότε ο ισχυρισμός αυτός θα παραβιαζόταν και το μοντέλο μας δε θα ήταν σωστό καθώς θα ίσχυαν τα $((b, a) : R^-) \geq 0.7$, $((b, b) : R^-) \geq 0.7$.

Πρακτικά όμως, όπως είναι αντιληπτό, ο αλγόριθμός μας δεν είναι δυνατόν να δημιουργεί άπειρα μοντέλα για τις έννοιες αυτές. Αυτό το οποίο όμως μπορεί να συμβεί είναι ο αλγόριθμος μας να κατασκευάζει ένα πεπερασμένο δάσος, από το οποίο όμως να είναι εξασφαλισμένο ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα άπειρο μοντέλο (στην ουσία ένα άπειρο tableau). Αυτό όπως θα δούμε περακάτω επιτυγχάνεται με τη διαδοχική αντιγραφή και *ξετύλιγμα* (*unravelling*) των υπο-γράφων που βρίσκονται κάτω από τους κόμβους που δημιουργούν το μπλοκάρισμα. Η κατάλληλη τεχνική μπλοκαρίσματος που εξασφαλίζει ότι ένα τέτοιο ξετύλιγμα είναι δυνατό ονομάζεται *μπλοκάρισμα ζευγαρώματος* (*pair-wise blocking*) [67]. Δηλαδή, το μπλοκάρισμα συμβαίνει όταν δυο κόμβοι ανήκουν στο ίδιο σύνολο εννοιών, οι πρόγονοι τους ανήκουν στο ίδιο σύνολο εννοιών και οι ρόλοι που τους συνδέουν είναι επίσης ίδιοι.

Το τελευταίο εμπόδιο στην ανάπτυξη ενός αλγορίθμου συλλογιστικής για την f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ είναι οι ονοματικοί κόμβοι. Όπως αναλύουν οι συγγραφείς στο [68] οι ονοματικοί κόμβοι εισάγουν περαιτέρω προβλήματα τα οποία και ήταν πολύ δύσκολο να αντιμετωπιστούν. Πιο συγκεκριμένα οι ονοματικοί κόμβοι εισάγουν δυο δυσκολίες. Πρώτον, λόγω της ερμηνείας τους δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν δυο κόμβοι x και y στο δάσος τέτοιοι ώστε $\langle\{o\}, \geq, 1\rangle \in \mathcal{L}(x) \cap \mathcal{L}(y)$. Προκειμένου λοιπόν ο αλγόριθμός μας να κατασκευάζει ένα σωστό μοντέλο θα πρέπει να συγχωνεύσει τους κόμβους αυτούς. Αν οι κόμβοι x και y βρίσκονται σε διαφορετικά δέντρα του δάσους αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η δομή του δάσους των γλωσσών f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ και f$_{KD}$-$\mathcal{SHIN}$ να μην είναι αρκετή και να χρειαζόμαστε πλέον τη δομή του γράφου. Μιλάμε δηλαδή πλέον για *γράφους ολοκλήρωσης* (*completion-graphs*) **G**.

Η δεύτερη και μεγαλύτερη δυσκολία είναι ότι πρέπει να διασφαλίσουμε ότι η διαδικασία του ξετυλίγματος δεν παραβιάζει πιθανούς περιορισμούς πληθυκότητας πάνω σε ρόλους που συνδέουν κόμβους με ονοματικές έννοιες. Έστω για παράδειγμα τα παρακάτω αξιώματα υπαγωγής που εμφανίζονται στο [68].

$$\begin{array}{rcl} \top & \sqsubseteq & \exists R^-.\{o\} \\ \{o\} & \sqsubseteq & \leq 100 R.F \end{array}$$

Το πρώτο αξίωμα μας λέει ότι σε κάθε μοντέλο κάθε αντικείμενο συνδέεται μέσω της $(R^-)^\mathcal{I}$ με το αντικείμενο $o^\mathcal{I}$, ή αλλιώς ότι υπάρχει μια ακμή $R^\mathcal{I}$ από το $o^\mathcal{I}$ προς όλα τα αντικείμενα του $\Delta^\mathcal{I}$. Ταυτόχρονα το δεύτερο αξίωμα μας λέει ότι ο αριθμός των συνδέσεων $R^\mathcal{I}$ περιορίζονται σε 100. Έστω ότι η διαδικασία μας έχει δημιουργήσει έναν γράφο με 10 κόμβους και έχει εφαρμόσει μπλοκάρισμα ζευγαρώματος. Εφόσον η F είναι μια f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ έννοια τότε αυτή ενδέχεται να είναι ικανοποιήσιμη μόνο σε ένα άπειρο μοντέλο. Αν όμως δημιουργήσουμε ένα άπειρο μοντέλο με τη χρήση της μεθόδου του ξετυλίγματος το μοντέλο αυτό θα είναι προφανώς λανθασμένο, διότι θα περιλαμβάνει άπειρες συνδέσεις $R^\mathcal{I}$ οι οποίες και αντιβαίνουν του δεύτερου αξιώματος. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται στο [68] με έναν ιδιαίτερα μη-ντετερμινιστικό κανόνα, τον κανόνα NN. Επιπρόσθετα είναι σημαντικό να προσέξουμε το μπλοκάρισμα να λαμβάνει χώρα μόνο ανάμεσα σε κόμβους των οποίων οι ενδιάμεσοι δεν περιέχουν ονοματικές έννοιες. Στη συνέχεια θα δείξουμε πώς μπορούμε να επεκτείνουμε τον κανόνα NN στην περίπτωση της γλώσσας f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$.

4.3.4 Ένα ασαφές tableau για f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ ABox

Παρόμοια με την περίπτωση της γλώσσας f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ θα προχωρήσουμε και εδώ σταδιακά. Πρώτα θα ορίσουμε την έννοια του ασαφούς tableau για f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ σώματα ασαφών ισχυρισμών $\mathcal{A}$ και ρόλων $\mathcal{R}$ και θα αποδείξουμε τη σύνδεση ανάμεσα σε ένα ασαφές tableau και σε ένα μοντέλο για το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{R}$. Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο που θα κατασκευάζει ένα πεπερασμένο ασαφές tableau χρησιμοποιώντας την τεχνική του μπλοκαρίσματος ζευγαρώματος με σκοπό η διαδικασία μας να τερματίζει. Τέλος, θα δείξουμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα άπειρο ασαφές tableau από τον πεπερασμένο γράφο που έχει κατασκευάσει ο αλγόριθμος, αποδεικνύοντας έτσι την ορθότητα του αλγορίθμου, ενώ στη συνέχεια θα αποδείξουμε και την πληρότητά του.

Ο ορισμός 4.2.2 που είδαμε στην ενότητα 4.2.3 χρειάζεται να επεκταθεί ελαφρώς για να καλύψει τις νέες έννοιες της γλώσσας f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τις παρακάτω προσθήκες:

$$\begin{aligned} sub(\{o\}) &= \{\{o\}\}, \\ sub(\geq nR) &= \{\geq nR\} \text{ και} \\ sub(\leq nR) &= \{\leq nR\} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα και στον ορισμό 4.2.3 η τρίτη συνθήκη πρέπει να αντικατασταθεί από την παρακάτω:

- αν $\forall S.C \in cl(D,\mathcal{R})$, $R \,\underline{\circledast}\, S$ και $\mathsf{Trans}(R)$, τότε $\forall R.C \in cl(D,\mathcal{R})$

Στη συνέχεια, για λόγους συντομίας θα δείξουμε μόνο τις ιδιότητες οι οποίες αλάζουν ή τις επιπρόσθετες ιδιότητες σε σχέση με τον ορισμό που δώσαμε για τα ασαφή tableau f_{KD}-$\mathcal{SI}$ σωμάτων ασαφών ισχυρισμών (ορισμός 4.2.4).

Ορισμός 4.3.3 *Έστω $\mathcal{A}$ ένα f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$ ABox, $\mathcal{R}$ ένα f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$ RBox, $\boldsymbol{R}_{\mathcal{A}}$ το σύνολο των ρόλων που εμφανίζονται στο $\mathcal{A}$ και στο $\mathcal{R}$ μαζί με τους αντίστροφούς τους, και $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ το σύνολο των ατόμων στο $\mathcal{A}$. Ένα* ασαφές tableau *T για το $\mathcal{A}$ μ.β.τ. $\mathcal{R}$ ορίζεται όπως και στον ορισμό 4.2.4, αλλά επιπλέον για κάθε $o \in \mathbf{I}$, το T ικανοποιεί τις παρακάτω επιπρόσθετες και τροποποιημένες ιδιότητες:*

8'. *Αν $\mathcal{L}(s,\forall R.C) \rhd n$, $P \,\underline{\circledast}\, R$ και $\mathsf{Trans}(P)$, τότε είτε $\mathcal{E}(\neg P,\langle s,t\rangle) \rhd n$ ή $\mathcal{L}(t,\forall P.C) \rhd n$, $\forall t \in \boldsymbol{S}$,*

12. *Αν $\mathcal{E}(R,\langle s,t\rangle) \rhd n$ και $R \,\underline{\circledast}\, S$, τότε $\mathcal{E}(S,\langle s,t\rangle) \rhd n$,*

13. *Αν $\mathcal{L}(s,\geq pR) \rhd n$, τότε $\sharp R^T(s,\rhd,n) \geq p$,*

14. *Αν $\mathcal{L}(s,\leq pR) \rhd n$, τότε $\sharp R^T(s,+\rhd,1-n) \leq p$,*

15. *Αν $\mathcal{L}(x,\{o\}) = 1$ και $\mathcal{L}(y,\{o\}) = 1$, για κάποιο $o \in I$, τότε $x = y$,*

16. *$\mathcal{L}(x,\{o\}) = 1$, ή $\mathcal{L}(x,\neg\{o\}) = 1$*

17. *Αν $a \doteq b \in \mathcal{A}$ ($a \neq b \in \mathcal{A}$), τότε $\mathcal{V}(a) = \mathcal{V}(b)$ ($\mathcal{V}(a) \neq \mathcal{V}(b)$).*

όπου $\sharp$ αναπαριστά την πληθυκότητα ενός συνόλου και $R^T(s,\rhd,n) = \{t \in \boldsymbol{S} \mid \mathcal{E}(R,\langle s,t\rangle) \rhd n\}$ επιστρέφει το σύνολο των στοιχείων $t \in \boldsymbol{S}$ τα οποία συμμετέχουν στο ρόλο R με κάποιο στοιχείο s και σε βαθμό, μεγαλύτερο ή ίσο, ή αυστηρά μεγαλύτερο από ένα δοθέν βαθμό n.

$\diamondsuit$

Όπως στον ορισμό 4.2.4 έτσι και στον παραπάνω ορισμό βασιστήκαμε στη σημασιολογία της ασαφούς γλώσσας f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ για να δώσουμε ιδιότητες των μοντέλων της και τη σχέση που έχουν οι εξισώσης της σημασιολογίας σε σχέση με έναν βαθμό συμμετοχής και μια θετική ανισότητα. Η ιδιότητα 11 πρέπει να διαβαστεί ως, αν $\mathcal{L}(s, \leq pR) \geq n$ τότε υπάρχουν το πολύ p στοιχεία $t \in \mathbf{S}$ τέτοια ώστε $\mathcal{E}(R, \langle s, t\rangle) > 1 - n$ $(+ \geq \equiv >)$, ενώ αν $\mathcal{L}(s, \leq pR) > n$, τότε υπάρχουν το πολύ p $t \in \mathbf{S}$ τέτοια ώστε $\mathcal{E}(R, \langle s, t\rangle) \geq 1 - n$ $(+ > \equiv \geq)$, το οποίο είναι άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων που παρουσιάσαμε στην υπο-ενότητα 4.3.2. Από τις ιδιότητες των μεταβατικών ρόλων και των αξιωμάτων υπαγωγής ρόλων προκύπτει επίσης και η ιδιότητα 8' η οποία ουσιαστικά αποτελεί την τροποποιημένη ιδιότητα 8 του ορισμού 4.2.4.

Λήμμα 4.3.4 *Ένα f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ ABox $\mathcal{A}$ είναι συνεπές μ.β.τ. $\mathcal{R}$ ανν υπάρχει ένα ασαφές tableau T για το $\mathcal{A}$ μ.β.τ. $\mathcal{R}$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη του λήμματος είναι παρόμοι με αυτή του λήμματος 4.2.5 με κάποιες διαφορετικές σημαντικές τεχνικές λεπτομέριες αλλά και προσθήκες λόγω της επιπλέον εκφραστικότητας. Οι διαφορές φαίνονται παρακάτω.

Για την ορθή φορά έχουμε ότι, έστω $T = (\mathbf{S}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$ ένα ασαφές tableau για το $\mathcal{A}$ μ.β.τ. $\mathcal{R}$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο $\mathcal{I} = (\Delta, \cdot^{\mathcal{I}})$ του $\mathcal{A}$ και του $\mathcal{R}$ ως $\Delta^{\mathcal{I}} = \mathbf{S}$, $a^{\mathcal{I}} = \mathcal{V}(a)$, όπου $a \in \mathbf{I}_{\mathcal{A}}$, $\top^{\mathcal{I}}(s) = \mathcal{L}(s, \top)$ και $\bot^{\mathcal{I}}(s) = \mathcal{L}(s, \bot)$ για κάθε $s \in \mathbf{S}$, ενώ για τις ατομικές και τις ονοματικές έννοιες αλλά και τους ρόλους έχουμε τα ακόλουθα:

$$
\begin{array}{rcl}
A^{\mathcal{I}}(s) & = & \mathcal{L}(s, A), \text{ για κάθε } s \in \mathbf{S} \text{ και ατομική ή ονοματική έννοια } A \\
R^{\mathcal{I}}(s,t) & = & \begin{cases} R^{+}_{\mathcal{E}}(s,t), & \text{αν } \mathsf{Trans}(R) \\ \max\limits_{P \,\underline{\circledast}\, R, P \neq R}(R_{\mathcal{E}}(s,t), P^{\mathcal{I}}(s,t)), & \text{διαφορετικά.} \end{cases}
\end{array}
$$

Παρατηρήστε ότι η ερμηνεία των μη-μεταβατικών ρόλων είναι αναδρομική με σκοπό να ερμηνεύσουμε ορθά αυτούς τους μη-μεταβατικούς ρόλους οι οποίοι έχουν μεταβατικούς υπο-ρόλους. Από τον ορισμό του ρόλου $R^{\mathcal{I}}$ και την ιδιότητα 12, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν $R^{\mathcal{I}}(s,t) = n \in (0, 1]$, τότε είτε $\mathcal{E}(R, \langle s, t\rangle) = n$, ή $\mathcal{E}(R, \langle s, t\rangle) = 0$ και υπάρχουν ενδεχομένως πολλά μονοπάτια $l \geq 1$ της μορφής,

$$\mathcal{E}(P, \langle s, s_{l_1}\rangle) = p_{l_1}, \mathcal{E}(P, \langle s_{l_1}, s_{l_2}\rangle) = p_{l_2}, \ldots, \mathcal{E}(P, \langle s_{l_m}, t\rangle) = p_{l_{m+1}},$$

με $\mathsf{Trans}(P)$, $P \,\underline{\circledast}\, R$ και,

$$\mathcal{E}(R, \langle s, t\rangle) = \max(0, \sup_{l}\{\min(p_{l_1}, \ldots, p_{l_{m+1}})\}).$$

Η ιδιότητα 12 του T διασφαλίζει ότι $\forall s, t \in \Delta^{\mathcal{I}}, P^{\mathcal{I}}(s,t) \leq R^{\mathcal{I}}(s,t)$ για κάθε $P \,\underline{\circledast}\, R$, άρα η $\mathcal{I}$ ικανοποιεί την ιεραρχία των ρόλων ενώ οι ιδιότητες 15 και 16 τη σωστή ερμηνεία των ονοματικών εννοιών, βάση της σημασιολογίας που έχουμε αποδώσει στο προϋγούμενο κεφάλαιο. Εφαρμόζοντας επαγωγή στη δομή των εννοιών μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\mathcal{L}(s, C) \rhd n$, τότε $C^{\mathcal{I}}(s) \rhd n, \forall s \in \mathbf{S}$, όπου C είναι μια f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$-έννοια. Αυτό, μαζί με τις ιδιότητες 10, 11 και 17, και την ερμηνεία των ονοματικών και των ρόλων συνεπάγεται ότι η $\mathcal{I}$ ικανοποιεί κάθε ισχυρισμό στο $\mathcal{A}$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε τις περιπτώσεις όπου $\mathcal{L}(s, C) \geq n$. Οι περιπτώσεις με $\mathcal{L}(s, C) > n$, δηλαδή αυτές της ανίσωσης $>$, μπορούν να δειχτούν με παρόμοιο τρόπο.

Η βασική περίπτωση της υπαγωγής, δηλαδή το στάδιο με $n = 0$ είναι παρόμοια με την βασική περίπτωση στο λήμμα 4.2.5. Η μόνη διαφορά είναι στις ονοματικές έννοιες τις οποίες και δείχνουμε παρακάτω.

- Αν $\mathcal{L}(x, \{s\}) = 1$, τότε από τον ορισμό της ερμηνείας $\{s\}^{\mathcal{I}}(x) = \mathcal{L}(x, \{s\}) \geq 1$.
- Αν $\mathcal{L}(x, \neg\{s\}) = 1$ τότε λόγω της ιδιότητας 2 του ορισμού 4.2.4 έχουμε, $\mathcal{L}(x, \{s\}) = 1 - \mathcal{L}(x, \neg\{s\}) \leq 0$. Εξ' ορισμού της $\mathcal{I}$, $\{s\}^{\mathcal{I}}(x) \leq 0$, συνεπώς $(\neg\{s\})^{\mathcal{I}}(x) \geq c(0) = 1$.

Στο σημείο αυτό υποθέτουμε ότι ισχύει ότι, αν $\mathcal{L}(s, C) \geq n$ και $\mathcal{L}(s, D) \geq n$, τότε $C^{\mathcal{I}}(s) \geq n$, $D^{\mathcal{I}}(s) \geq n$. Θα χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση αυτή για να αποδείξουμε ότι $\mathcal{L}(s, E) \geq n$, τότε $E^{\mathcal{I}}(s) \geq n$, όπου E είναι μια από τις έννοιες $\forall R.C$, $\geq nR$ ή $\leq nR$. Η απόδειξη για τις έννοιες $C \sqcap D$, $C \sqcup D$, $\exists R.C$ είναι η ίδια με αυτή που δείχθηκε στην απόδειξη του λήμματος 4.2.5.

- Αν $\mathcal{L}(s, \forall R.C) \geq n$ και $R^{\mathcal{I}}(s, t) = p$, τότε είτε

  1. $\mathcal{E}(R, \langle s, t\rangle) = p$, ή
  2. $\mathcal{E}(R, \langle s, t\rangle) \neq p$. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχουν ενδεχομένως μονοπάτια $l \geq 1$ της μορφής, $\mathcal{E}(P, \langle s, s_{l_1}\rangle) = p_{l_1}$, $\mathcal{E}(P, \langle s_{l_1}, s_{l_2}\rangle) = p_{l_2}, \ldots$, $\mathcal{E}(P, \langle s_{l_m}, t\rangle) = p_{l_{m+1}}$, με $\mathsf{Trans}(P)$ και $P \circledast R$. Ο βαθμός συμμετοχής p του ζεύγους $\langle s, t\rangle$ στο ρόλο $P^+_{\mathcal{E}}$, θα είναι ίσος με το μέγιστο βαθμό (εφόσον δεν μπορούμε να έχουμε άπειρο πλήθος μονοπατιών) όλων των ελάχιστων βαθμών του κάθε μονοπατιού. Αν ο βαθμός αυτός δεν είναι μικρότερος η ίσος από $1 - n$ τότε υπάρχει κάποιο μονοπάτι k όπου όλοι οι βαθμοί

     $$\mathcal{E}(P, \langle s_{k_i}, s_{k_{i+1}}\rangle) = p_{k_{i+1}},\ 0 \leq i \leq m,\ s_{k_0} \equiv s,\ s_{k_{m+1}} \equiv t$$

     δεν είναι μικρότεροι οι ίσοι από τον $1 - n$, γιατί όλα τα p_{k_i} θα είναι μεγαλύτερα ή ίσα από τον ελάχιστο βαθμό του μονοπατιού. Συνεπώς, λόγω της ιδιότητας 8', θα έχουμε ότι $\mathcal{L}(s_{k_i}, \forall P.C) \geq n$, για κάθε $1 \leq i \leq m$.

  Συνοψίζοντας, αν $p \leq 1 - n$ τότε $\max(1 - p, C^{\mathcal{I}}(t)) \geq n$. Στην περίπτωση που $p \not\leq 1 - n$ τότε $\mathcal{L}(t, C) \geq n$, άρα $C^{\mathcal{I}}(t) \geq n$ και άρα $\max(1 - p, C^{\mathcal{I}}(t)) \geq n$. Και στις δυο περιπτώσεις $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(s) \geq n$.

- Αν $\mathcal{L}(s, \geq pR) \geq n$ τότε έχουμε, $\mathcal{E}(R, \langle s, t_i\rangle) \geq n$, $1 \leq i \leq p$. Από τη βασική περίπτωση έχουμε ότι, $R^{\mathcal{I}}(s, t_i) \geq n$, και έτσι

  $$(\geq pR)^{\mathcal{I}}(s) = \sup_{t_i \in \Delta^{\mathcal{I}}} \{\ldots, \min_{i=1}^{p}(R^{\mathcal{I}}(s, t_i)), \ldots\} \geq n.$$

- Αν $\mathcal{L}(s, \leq pR) \geq n$ τότε υπάρχουν το πολύ p ζεύγη $\langle s, t_i\rangle$ για τα οποία, $\mathcal{E}(R, \langle s, t_i\rangle) > 1 - n$, $1 \leq i \leq p$. Έτσι σε όλες τις $p + 1$-πλειάδες που μπορούν να σχηματιστούν θα υπάρχει ένα ζεύγος $\langle s, t_{p+1}\rangle$ για το οποίο $\mathcal{E}(R, \langle s, t_{p+1}\rangle) \leq 1 - n$ (ακόμα και αν $\mathcal{E}(R, \langle s, t_{p+1}\rangle) = 0 \leq 1 - n$). Συνεπώς, $R^{\mathcal{I}}(s, t_{p+1}) \leq 1 - n \Rightarrow c(R^{\mathcal{I}}(s, t_{p+1})) \geq n$. Τέλος, έχουμε ότι,

  $$(\leq pR)^{\mathcal{I}}(s) = \inf_{t_i \in \Delta^{\mathcal{I}}} \{\ldots, \max(\max_{i=1}^{p}(c(R^{\mathcal{I}}(s, t_i))), c(R^{\mathcal{I}}(s, t_{p+1}))), \ldots\} \geq n,$$

  για $1 \leq i \leq p$.

Για την αντίθετη φορά, αν $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ είναι ένα μοντέλο του $\mathcal{A}$ μ.β.τ. $\mathcal{R}$, τότε ένα ασαφές tableau $T = (\mathbf{S}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$ για τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{R}$ μπορεί να οριστεί ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \Delta^{\mathcal{I}} \\ \mathcal{E}(R, \langle s,t \rangle) &= R^{\mathcal{I}}(s,t) \\ \mathcal{L}(s,C) &= C^{\mathcal{I}}(s) \\ \mathcal{V}(a) &= a^{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

1. Οι ιδιότητες 1-7, 9 και 12-16 του ορισμού 4.3.3 ικανοποιούνται ως άμεσο επακόλουθο της σημασιολογίας της γλώσσας f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$.

2. Η ιδιότητα 8' του ορισμού 4.3.3 ικανοποιείται ως αποτέλεσμα της σημασιολογίας των μεταβατικών ρόλων, των ιεραρχιών ρόλων και της σημασιολογίας των περιορισμών τιμής τα οποία και διερευνήσαμε στην ενότητα 4.3.2. Πιο συγκεκριμένα, αν $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(s) \geq n$, $P \sqsubseteq^{*} R$ και $\mathsf{Trans}(P)$ τότε είτε $P^{\mathcal{I}}(s,t) \leq 1-n$, ή $(\forall P.C)^{\mathcal{I}}(t) \geq n$, αλλιώς αν $(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(s) > n$, τότε είτε $P^{\mathcal{I}}(s,t) < 1-n$ είτε $(\forall P.C)^{\mathcal{I}}(t) > n$. Εξ' ορισμού του T αν $\mathcal{L}(s, \forall R.C) \rhd n$, $P \sqsubseteq^{*} R$ και $\mathsf{Trans}(P)$ τότε είτε $\mathcal{E}(\neg P, \langle s,t \rangle) \rhd n$ ή $\mathcal{L}(t, \forall P.C) \rhd n$.

3. Το T ικανοποιεί τις ιδιότητες 10, 11 και 17 του ορισμού 4.3.3 γιατί η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο του $\mathcal{A}$.

■

4.3.5 Κατασκευάζοντας ένα $\mathbf{f}_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ ασαφές tableau

Όπως αναφέραμε στην υπο-ενότητα 4.3.3 ο αλγόριθμος μας ενεργεί σε γράφους ολοκλήρωσης $\mathbf{G}$, εφόσον η παρουσία ονοματικών εννοιών μπορεί να εξαναγκάσει δυο κόμβους σε διαφορετικά σημεία του γράφου να ταυτιστούν, παραβιάζοντας έτσι τη δενδρική ιδιότητα της γλώσσας $\mathcal{SHIN}$ [70]. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιούμε τις έννοιες του μπλοκαρίσματος ζευγαρώματος, των μπλοκαρίσιμων κόμβων, έτσι ώστε τα μπλοκαρισμένα μονοπάτια να μην περιέχουν ονοματικούς κόμβους, αλλά και του κανόνα NN για να αντιμετωπίσουμε περιορισμούς το-πολύ που σχετίζονται με ονοματικούς κόμβους.

Ορισμός 4.3.5 (Γράφος Ολοκλήρωσης) *Ένας γράφος ολοκλήρωσης $\boldsymbol{G}$ για ένα f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$ ABox $\mathcal{A}$ μ.β.τ. ένα RBox $\mathcal{R}$ είναι ένας κατευθυνόμενος γράφος $\boldsymbol{G} = (\mathbf{V}, E, \mathcal{L}, \neq, \doteq)$ όπου κάθε κόμβος $x \in V$ χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο από τριάδες εννοιών $\langle C, \rhd, n \rangle \in \mathcal{L}(x)$ όπου*

$$C \in cl(\mathcal{A}, \mathcal{R}) \cup \{\{o\} \mid o \in \mathbf{I}\} \cup \{\leq mR.C \mid (\leq nR.C) \in cl(\mathcal{A}, \mathcal{R}) \text{ και } m \leq n\},$$

και κάθε ακμή $\langle x,y \rangle \in E$ από ένα σύνολο από τριάδες ρόλων $\mathcal{L}(\langle x,y \rangle) = \{\langle R, \rhd, n \rangle\}$, όπου $R \in \boldsymbol{R}_A$ είναι (πιθανά αντίστροφοι) ρόλοι που εμφανίζονται στο $\mathcal{A}$. Τόσο το $\mathcal{L}(x)$ όσο και το $\mathcal{L}(\langle x,y \rangle)$ ονομάζονται ετικέτες *(*labels*) των x και $\langle x,y \rangle$, αντίστοιχα. Διαισθητικά, κάθε τριάδα $\langle C, \rhd, n \rangle$ ($\langle R, \rhd, n \rangle$), που ονομάζεται* τριάδα συμμετοχής *(*membership triple*), αναπαριστά το βαθμό συμμετοχής και τον τύπο της ανισότητας του κάθε κόμβου (ζεύγος κόμβων) σε μια έννοια C (ρόλο R). Επιπρόσθετα, οι σχέσεις $\neq$ και $\doteq$ χρησιμοποιούνται για να παρακολουθήσουμε τις ανισότητες και*

Πίνακας 4.3: *Επιπλέον κανόνες επέκτασης για την f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$*

Κανόνας		Περιγραφή
$\forall'_{+\triangleright}$	αν 1.	$\langle \forall S.C, \triangleright, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ο x δεν είναι έμμεσα μπλοκαρισμένος,
	2.	υπάρχει κάποιος ρόλος R, με $\mathsf{Trans}(R)$, και $R \sqsubseteq^* S$,
	3	ο x έχει έναν $R_{\triangleright' n'}$-γείτονα y με, $\langle \forall R.C, \triangleright, n\rangle \notin \mathcal{L}(y)$, και
	4.	η ακμή $\langle x, y\rangle$ συγκρούεται με την $\langle \neg R, \triangleright, n\rangle$
	τότε	$\mathcal{L}(y) \to \mathcal{L}(y) \cup \{\langle \forall R.C, \triangleright, n\rangle\}$
$\geq_\triangleright$	αν 1.	$\langle \geq pR, \triangleright, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ο x δεν είναι μπλοκαρισμένος,
	2.	δεν υπάρχουν p $R_{\triangleright n}$-γείτονες $y_1, \ldots, y_p$ του x με $y_i \neq y_j$ και $1 \leq i < j \leq p$
	τότε	δημιούργησε p νέους κόμβους $y_1, \ldots, y_p$, με $\mathcal{L}(\langle x, y_i\rangle) = \{\langle R, \triangleright, n\rangle\}$ και $y_i \neq y_j$ για $1 \leq i < j \leq p$
$\leq_\triangleright$	αν 1.	$\langle \leq pR, \triangleright, n\rangle \in \mathcal{L}(z)$, ο z δεν είναι έμμεσα μπλοκαρισμένος, $\sharp R_c^{\mathbf{G}}(z, \triangleright, n) > p$, υπάρχουν δυο από αυτούς τους κόμβους, x, y, χωρίς να ισχύει $y \neq x$
	τότε	1. αν x είναι ένας ονοματικός κόμβος, τότε $\mathsf{Συγχώνευση}(y, x)$ 2. αλλιώς αν y είναι ονοματικός κόμβος ή κόμβος ρίζα ή πρόγονος του x, τότε $\mathsf{Συγχώνευση}(x, y)$ 3. αλλιώς $\mathsf{Συγχώνευση}(y, x)$
$\{o\}$	αν 1.	για κάποιο $\{o\}$ υπάρχουν δυο κόμβοι x, y με $\langle \{o\}, \geq, 1\rangle \in \mathcal{L}(x) \cap \mathcal{L}(y)$
	2.	και δεν ισχύει $x \neq y$
	τότε	$\mathsf{Συγχώνευση}(x, y)$
$NN_\triangleright$	αν 1.	$\langle \leq pR, \triangleright, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ο x είναι ένας ονοματικός κόμβος, $\sharp R_c^{\mathbf{G}}(x, \triangleright, n) > 1$ ένας από τους οποίους είναι μπλοκαρίσιμος, έστω ο y και ο x είναι διάδοχος του y,
	2.	δεν υπάρχει m τέτοιος ώστε $1 \leq m \leq p$, $\langle \leq mR, \triangleright, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$ και $\sharp R_c^{\mathbf{G}}(x, \triangleright, n) \geq m$ είναι m ονοματικοί κόμβοι $z_1, ..., z_m$ του x, με $z_i \neq z_j$, για κάθε $1 \leq i < j \leq m$
	τότε	1. μάντεψε ένα m, με $1 \leq m \leq n$ και θέσε $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x) \cup \{\langle \leq mR, \triangleright, n\rangle\}$ 2. δημιούργησε m νέους κόμβους $z_1, ..., z_m$ με $\mathcal{L}(x, z_i) = \{\langle R, +\triangleright, 1-n\rangle\}$, $\mathcal{L}(z_i) = \{\langle \{o_i\}, \triangleright, 1\rangle\}$, για κάθε $o_i \in \mathbf{I}$ νέο στον $\mathbf{G}$, και $z_i \neq z_j$ για $1 \leq i < j \leq m$
$\{o\}_\triangleright$	αν 1.	$\langle \{o\}, \triangleright, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$ ($\langle \neg\{o\}, \triangleright, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$), και
	2.	$\langle \{o\}, \geq, 1\rangle \notin \mathcal{L}(x)$ ($\langle \neg\{o\}, \geq, 1\rangle \notin \mathcal{L}(x)$)
	τότε	$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) \cup \{\langle \{o\}, \geq, 1\rangle\}$ ($\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) \cup \{\langle \neg\{o\}, \geq, 1\rangle\}$)

ισότητες ανάμεσα στους κόμβους του $\boldsymbol{G}$, για παράδειγμα η σχέση $x \doteq y$ δηλώνει ότι οι κόμβοι x και y είναι ίδιοι.

Αν οι κόμβοι x και y είναι συνδεδεμένοι με μια ακμή $\langle x, y\rangle$ έχοντας $\langle P, \triangleright, n\rangle \in \mathcal{L}(\langle x, y\rangle)$, και $P \sqsubseteq^* R$, τότε ο y ονομάζεται $R_{\triangleright n}$-διάδοχος ($R_{\triangleright n}$-successor*) του x και ο x ονομάζεται $R_{\triangleright n}$-προκάτοχος (*$R_{\triangleright n}$-predecessor*) του y. Αν ο y είναι ένας $R_{\triangleright n}$-διάδοχος ή ένας $\mathsf{Inv}(R)_{\triangleright n}$-προκάτοχος του x, τότε ονομάζεται $R_{\triangleright n}$-γείτονας (*$R_{\triangleright n}$-neighbour*) του x. Έστω ότι ο y είναι ένας $R_{\geq n}$-γείτονας του x. Τότε η ακμή $\langle x, y\rangle$* συγκρούεται *(*conjugates*) με τριάδες της μορφής $\langle \neg R, \geq, m\rangle$ αν $n + m > 1$, ενώ συγκρούεται με τριάδες της μορφής $\langle \neg R, >, m\rangle$ αν $n + m \geq 1$. Παρομοίως, αν ο y είναι ένας $R_{>n}$-γείτονας του x, τότε η ακμή $\langle x, y\rangle$ συγκρούεται με τριάδες της μορφής $\langle \neg R, \triangleright, m\rangle$ αν $n + m \geq 1$. Διαισθητικά, οι ορισμοί αυτοί μας δηλώνουν ότι η ακμή $\langle x, y\rangle$ περιέχει μια τριπλέτα η οποία αντιπροσωπεύει έναν ασαφή ισχυρισμό ο οποίος έρχεται σε αντίθεση με τον ισχυρισμό που αντιπροσωπεύει η τριπλέτα συμμετοχής $\langle \neg R, \triangleright, m\rangle$. Για παράδειγμα αν $\langle P, >, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(\langle x, y\rangle)$ και $P \sqsubseteq^* R$, τότε ο y είναι ένας $R_{>0.8}$-γείτονας του x και η ακμή $\langle x, y\rangle$ συγκρούεται με την τριπλέτα $\langle \neg R, \geq, 0.2\rangle$ αφού $0.8 + 0.2 \geq 1$. Πιο συγκεκριμένα, η πρώτη τριπλέτα υποδηλώνει έναν ισχυρισμό* *της μορφής* $((x, y) : R) \geq ((x, y) : P) > 0.8$*, ενώ η δεύτερη τριπλέτα έναν ασαφή ισχυρισμό της μορφής* $((x, y) : \neg R) \geq 0.8 \Rightarrow ((x, y) : R) \leq 0.2$ *τα οποία προφανώς έρχονται σε σύγκρουση. Ως συνήθως,* πρόγονος *(*ancestor*) είναι το μεταβατικό κλείσιμο του προκατόχου.*

Για ένα ρόλο R*, έναν κόμβο* $x \in \boldsymbol{G}$*, έναν τύπο ανισότητας* $\rhd$ *και έναν βαθμό συμμετοχής* $n \in [0, 1]$ *ορίζουμε:*

$$\begin{aligned} R_c^{\boldsymbol{G}}(x, \rhd, n) \;\; = \;\; & \{y \mid y \text{ είναι ένας } R_{\rhd' n'}\text{-γείτονας του } x, \text{ και} \\ & \langle x, y\rangle \text{ συγκρούεται με την } \langle \neg R, \rhd, n\rangle\}. \end{aligned}$$

όπου $\rhd'$ *και* $n' \in [0, 1]$ *δηλώνουν έναν τυχαίο τύπο ανισότητας και βαθμό συμμετοχής. Διαισθητικά, το σύνολο* $R_c^{\boldsymbol{G}}(x, \rhd, n)$ *περιέχει τους* R*-γείτονες του κόμβου* x *για τους οποίους η ακμή* $\langle x, y\rangle$ *περιέχει μια τριάδα η οποία παραβιάζει ένα δοθέντα περιορισμό.*

Ένας κόμβος y *ονομάζεται* μπλοκαρίσιμος *(*blockable*) αν δεν περιέχει ονοματικές έννοιες στην ετικέτα του* $\mathcal{L}(y)$*, αλλιώς ονομάζεται* ονοματικός *(*nominal*). Ένας κόμβος* x *είναι μπλοκαρισμένος (*label blocked*) ανν έχει προγόνους* x'*,* y *και* y' *τέτοιους ώστε*

1. *ο* x *είναι διάδοχος του* x' *και ο* y *διάδοχος του* y'*,*
2. *ο* y *δεν είναι κόμβος ρίζα,*
3. *οι* y, x *και όλοι οι κόμβοι στο μονοπάτι από τον* y *στον* x *είναι μπλοκαρίσιμοι,*
4. $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(y)$ *και* $\mathcal{L}(x') = \mathcal{L}(y')$ *και τέλος,*
5. $\mathcal{L}(\langle x', x\rangle) = \mathcal{L}(\langle y', y\rangle)$*.*

Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι ο y *μπλοκάρει τον* x*. Ένας κόμβος* y *είναι* έμμεσα μπλοκαρισμένος *(*indirectly blocked*) ανν κάποιος από τους προγόνους του είναι μπλοκαρισμένος.*

Για κάποιο κόμβο x*, λέμε ότι το σύνολο* $\mathcal{L}(x)$ *περιέχει* αντίφαση *(*clash*) αν περιέχει ένα από τα ακόλουθα:*

- *δυο συγκρουόμενες τριάδες,*
- *μια από τις τριάδες* $\langle \perp, \geq, n\rangle$*, με* $n > 0$*,* $\langle \perp, >, n\rangle$*, ή* $\langle C, >, 1\rangle$*,*
- *κάποια τριάδα* $\langle \leq pR, \rhd, n\rangle$ *και ο* x *έχει* $p + 1$ $R_{\rhd_i n_i}$*-γείτονες* $y_0, \ldots, y_p$ *όλες οι ακμές* $\langle x, y_i\rangle$ *συγκρούονται με την τριάδα* $\langle \neg R, \rhd, n\rangle$ *και* $y_i \neq y_j$*, για κάθε* $0 \leq i < j \leq p$*, ή*
- *για κάποιο* $o \in \mathbf{I}$*, υπάρχουν οι κόμβοι* $x \neq y$ *με* $\langle \{o\}, \geq, 1\rangle \in \mathcal{L}(x) \cap \mathcal{L}(y)$*.*

Επιπρόσθετα, λέμε ότι η ακμή $\langle x, y\rangle$ *περιέχει μια αντίφαση ανν υπάρχουν δυο συγκρουόμενες τριάδες στο* $\mathcal{L}(\langle x, y\rangle)$ *ή αν περιέχει την τριάδα* $\langle R, >, 1\rangle$ *ή αν* $\mathcal{L}(\langle x, y\rangle) \cup \{\langle \mathsf{Inv}(R), \rhd, n\rangle \mid \langle R, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(\langle y, x\rangle)\}$*, όπου* x, y *είναι κόμβοι ρίζες, περιέχει δυο συγκρουόμενες τριάδες.* $\diamondsuit$

Ορισμός 4.3.6 (Αλγόριθμος tableaux) *Για ένα f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$ ABox $\mathcal{A}$, ο αλγόριθμος αρχικοποιεί έναν γράφο $\boldsymbol{G}$ ώστε να περιέχει (i) έναν κόμβο ρίζα x_{a_i}, για κάθε άτομο $a_i \in \mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ που εμφανίζεται στο ABox $\mathcal{A}$, χαρακτηρισμένο με μια ετικέτα $\mathcal{L}(x_{a_i})$ τέτοια ώστε $\{\langle C_i, \rhd, n\rangle, \langle\{a_i\}, \geq, 1\rangle\} \subseteq \mathcal{L}(x_{a_i})$ για κάθε ισχυρισμό της μορφής $(a_i : C_i) \rhd n \in \mathcal{A}$, και $\{\langle C_j, \rhd, n\rangle, \langle\{a_j\}, \geq, 1\rangle\} \subseteq \mathcal{L}(x_{a_i})$ για κάθε $(a_j : C_j) \rhd n \in \mathcal{A}$ με $a_i \doteq a_j \in \mathcal{A}$ (ii) μια ακμή $\langle x_{a_i}, x_{a_j}\rangle$, για κάθε ισχυρισμό $((a_i, a_j) : R_i) \rhd n \in \mathcal{A}$, με μια ετικέτα $\mathcal{L}(\langle x_{a_j}, x_{a_j}\rangle)$ τέτοια ώστε $\{\langle R_i, \rhd, n\rangle\} \subseteq \mathcal{L}(\langle x_{a_i}, x_{a_j}\rangle)$ και (iii) έναν ονοματικό κόμβο r_i, με $\mathcal{L}(r_{o_i}) = \{\langle\{o_i\}, \geq, 1\rangle\}$ για κάθε ονοματική έννοια $\{o_i\}$ που εμφανίζεται στα $\mathcal{T}$ και $\mathcal{A}$. Επιπλέον, αρχικοποιούμε τη σχέση $\neq$ ως $x_{a_i} \neq x_{a_j}$ αν $a_i \neq a_j \in \mathcal{A}$ και τη σχέση $\doteq$ να είναι κενή. Τέλος, ο αλγόριθμος επεκτείνει το RBox $\mathcal{R}$ προσθέτοντας αξιώματα υπαγωγής ρόλων $\mathsf{Inv}(P) \sqsubseteq \mathsf{Inv}(R)$, για κάθε $P \sqsubseteq R \in \mathcal{R}$ και προσθέτοντας αξιώματα $\mathsf{Trans}(\mathsf{Inv}(R))$ για κάθε $\mathsf{Trans}(R) \in \mathcal{R}$. Στη συνέχεια το $\boldsymbol{G}$ επεκτείνεται εφαρμόζοντας διαδοχικά τους κανόνες* επέκτασης *(*completion rules*) των Πινάκων 4.1 και 4.3. Λέμε ότι ο γράφος είναι* πλήρης *(*complete*) όταν, για κάποιο κόμβο x, η ετικέτα $\mathcal{L}(x)$ περιέχει μια αντίφαση, ή κανένας από τους κανόνες ολοκλήρωσης δεν εφαρμόζεται. Ο αλγόριθμος απαντά 'το $\mathcal{A}$ είναι συνεπές μ.β.τ. $\mathcal{R}$' ανν οι κανόνες ολοκλήρωσης μπορούν να εφαρμοστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργηθεί ένας πλήρης και* ελεύθερος αντιφάσεων *(*clash-free*) γράφος ολοκρήρωσης, και 'το $\mathcal{A}$ είναι μη-συνεπές μ.β.τ. $\mathcal{R}$' σε διαφορετική περίπτωση.*

Συγχώνευση: Συγχώνευση ενός κόμβου y στον κόμβο x, σημαίνει ότι προσθέτουμε τα περιεχόμενα της ετικέτας $\mathcal{L}(y)$ στην $\mathcal{L}(x)$, "μετακινούμε" όλες τις ακμές που κατευθύνονται στον y έτσι ώστε να κατευθύνονται στον x και "μετακινούμε" όλες τις ακμές που κατευθύνονται από τον y σε ονοματικούς κόμβους ώστε να κατευθύνονται από τον x στους ίδιους ονοματικούς κόμβους. Στη συνέχεια αν ο y δεν είναι κόμβος ρίζα τον διαγράφουμε (μαζί με κάθε μπλοκαρίσιμο υποδέντρο κάτω από τον y) από τον γράφο ολοκλήρωσης, αλλιώς θέτουμε την ετικέτα $\mathcal{L}(y)$ στην κενή και $x \doteq y$. Πιο συγκεκριμένα, η συγχώνευση ενός κόμβου y στον x (γράφοντας Συγχώνευση(y,x)) σε ένα γράφο $\boldsymbol{G} = (V, E, \mathcal{L}, \neq, \doteq)$ παράγει έναν νέο γράφο ο οποίο προκύπτει από τον $\boldsymbol{G}$ ως εξής:

1. *Για κάθε κόμβο z τέτοιο ώστε $\langle z, y\rangle \in E$*
   - *αν $\{\langle x, z\rangle, \langle z, x\rangle\} \cap E = \emptyset$, τότε προσθέτουμε $\langle z, x\rangle$ στο E και θέτουμε $\mathcal{L}(\langle z, x\rangle) = \mathcal{L}(\langle z, y\rangle)$,*
   - *αν $\langle z, x\rangle \in E$, τότε θέτουμε $\mathcal{L}(\langle z, x\rangle) = \mathcal{L}(\langle z, x\rangle) \cup \mathcal{L}(\langle z, y\rangle)$,*
   - *αν $\langle x, z\rangle \in E$, τότε θέτουμε $\mathcal{L}(\langle x, z\rangle) = \mathcal{L}(\langle x, z\rangle) \cup \{\langle \mathsf{Inv}(R), \rhd, n\rangle \mid \langle R, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(\langle z, y\rangle)\}$ και*
   - *αφαιρούμε την ακμή $\langle z, y\rangle$ από το E.*
2. *Για όλους τους ονοματικούς κόμβους z τέτοιους ώστε $\langle y, z\rangle \in E$*
   - *αν $\{\langle x, z\rangle, \langle z, x\rangle\} \cap E = \emptyset$, τότε προσθέτουμε $\langle x, z\rangle$ στο E και θέτουμε $\mathcal{L}(\langle x, z\rangle) = \mathcal{L}(\langle y, z\rangle)$,*
   - *αν $\langle x, z\rangle \in E$, τότε θέτουμε $\mathcal{L}(\langle x, z\rangle) = \mathcal{L}(\langle x, z\rangle) \cup \mathcal{L}(\langle y, z\rangle)$,*
   - *αν $\langle z, x\rangle \in E$, τότε θέτουμε $\mathcal{L}(\langle z, x\rangle) = \mathcal{L}(\langle z, x\rangle) \cup \{\langle \mathsf{Inv}(R), \rhd, n\rangle \mid \langle R, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(\langle y, z\rangle)\}$ και*
   - *αφαιρούμε την ακμή $\langle y, z\rangle$ από το E*

3. *θέτουμε* $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x) \cup \mathcal{L}(y)$*;*

4. *προσθέτουμε* $x \neq z$ *για κάθε* z *τέτοιο ώστε* $y \neq z$*;*

5. *αν* y *είναι ένας κόμβος ρίζα τότε θέτουμε* $x \doteq y$*, και*

6. *Κλάδεμα(*y*).*

Κλάδεμα: Το κλάδεμα ενός κόμβου y *από έναν γράφο ολοκλήρωσης* $\boldsymbol{G}$*, αποδίδει έναν νέο γράφο ο οποίος προκύπτει από τον* $\boldsymbol{G}$ *ως εξής:*

1. *για όλους τους διαδόχους* z *του* y*, διαγράφουμε την* $\langle y, z\rangle$ *από το* $\boldsymbol{G}$*, και αν ο κόμβος* z *είναι μπλοκαρίσιμος τότε Κλάδεμα(*z*);*

2. *αν* y *είναι ένας κόμβος ρίζα τότε* $\mathcal{L}(y) = \emptyset$*, αλλιώς διαγράφουμε τον* y*.*

Στρατηγική εφαρμογής κανόνων: Όπως επισημαίνεται στο [68] προκειμένου να διασφαλίσουμε τον τερματισμό της διαδικασίας, και πιο συγκεκριμένα να διασφαλίσουμε ένα άνω φράγμα στον αριθμό εφαρμογών του κανόνα $NN_{\triangleright}$*, οι κανόνες επέκτασης πρέπει να εφαρμόζονται σύμφωνα με την ακόλουθη στρατηγική:*

1. *ο κανόνας* $\{o\}_{\triangleright}$ *εφαρμόζεται με τη μέγιστη προτεραιότητα,*

2. *μετά εφαρμόζεται ο κανόνας* $\{o\}$*,*

3. *στη συνέχεια εφαρμόζονται οι κανόνες* $\leq_{\triangleright}$ *και* $NN_{\triangleright}$ *σε ονοματικούς κόμβους χαμηλών επιπέδων. Στην περίπτωση που και οι δυο κανόνες είναι εφαρμόσιμοι στον ίδιο κόμβο, ο κανόνας* $NN_{\triangleright}$ *εφαρμόζεται πρώτος.*

4. *Όλοι οι άλλοι κανόνες εφαρμόζονται με χαμηλότερη προτεραιότητα.*

$\diamondsuit$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε ότι η μέθοδος της συγχώνευσης και του κλαδέματος που παρουσιάσαμε προηγουμένως διαφέρει από τις κλασσικές μεθόδους που παρουσιάστηκαν στο [68]. Ο λόγος είναι ότι ο αλγόριθμος στο [68] ασχολείται μόνο με το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας μιας έννοιας. Αυτό συμβαίνει διότι η γλώσσα $\mathcal{SHOIN}$ είναι αρκετά εκφραστική έτσι ώστε ένα ABox να απορροφηθεί σε μόλις μια έννοια, πράγμα το οποίο στην ασαφή ΠΛ f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ δε μπορεί να γίνει. Έτσι λοιπόν πρέπει να επεκτείνουμε τον αλγόριθμο ώστε να μπορεί να διαχειριστεί άμεσα το πρόβλημα της συνέπειας ενός ασαφούς ABox. Η ουσιώδης διαφορά με τον κλασικό αλγόριθμο βρίσκεται στο ότι όταν συγχωνεύουμε έναν κόμβο y σε έναν κόμβο x, αν ο y είναι κόμβος ρίζα, δηλαδή ένας κόμβος ο οποίος αναπαριστά ένα άτομο του ABox, ο κόμβος αυτός δεν πρέπει να διαγραφεί, όπως συμβαίνει συνήθως στον αλγόριθμο στο [68], αλλά η ετικέτα του ($\mathcal{L}(y)$) πρέπει να τεθεί ίση με το κενό σύνολο $\emptyset$ και επιπλέον πρέπει να θέσουμε $x \doteq y$, όπως ακριβώς συμβαίνει και στον αλγόριθμο που ελέγχει τη συνέπεια ενός $\mathcal{SHIQ}$ ABox στο [70]. Αυτή η τροποποίηση είναι ουσιώδης για τη δημιουργία ενός σωστού f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ tableau, δηλαδή ένα tableau το οποίο ικανοποιεί τις ιδιότητες 15 και 16 του ορισμού 4.3.3.

Παράδειγμα 4.3.7 *Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα κανόνων επέκτασης.*

- $\forall_+$: *Έστω* $\langle \forall S.C, >, 0.6\rangle \in \mathcal{L}(x)$, $\langle \mathsf{Inv}(P), \geq, 0.7\rangle \in \mathcal{L}(\langle y, x\rangle)$ *με* $\mathsf{Trans}(R)$ *και* $P \sqsubseteq R \sqsubseteq S$. *Τότε, υπάρχει ο ρόλος* R, *με* $R \,\underline{\overset{*}{\sqsubseteq}}\, S$, *και ο* y *είναι ένας* $R_{\geq,0.7}$-*γείτονας του* x, *εφόσον ο* y *είναι ένας* $\mathsf{Inv}(R)_{\geq,0.7}$-*προκάτοχος του* x, *η ακμή* $\langle x, y\rangle$ *συγκρούεται με την τριάδα* $\langle \mathsf{Inv}(R), <, 0.4\rangle$ *και* $\langle \forall R.C, >, 0.6\rangle \notin \mathcal{L}(y)$. *Συνεπώς, η τριάδα* $\langle \forall R.C, >, 0.6\rangle$ *πρέπει να προστεθεί την ετικέτα* $\mathcal{L}(y)$.

- $\leq_{\geq}$: *Έστω* $\langle \leq 2S.C, \geq, 0.7\rangle \in \mathcal{L}(x)$, $\langle S, >, 0.7\rangle \in \mathcal{L}(\langle x, y_1\rangle)$, $\langle S, >, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(\langle x, y_2\rangle)$, $\langle P, \geq, 0.4\rangle \in \mathcal{L}(\langle x, y_3\rangle)$ *με* $P \,\underline{\overset{*}{\sqsubseteq}}\, S$. *Συνεπώς, ο* x *έχει τρείς* $S_{\rhd' n}$-*γείτονες όλοι από τους οποίους συγκρούονται με την* $\langle S, \leq, 0.3\rangle$. *Συνεπώς, πρέπει να συγχωνεύσουμε μη-ντετερμινιστικά δύο από αυτούς τους γείτονες.*

$\diamondsuit$

Παράδειγμα 4.3.8 *Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο τον οποίο περιγράψαμε παραπάνω για να εξάγουμε τα συμπεράσματα τα οποία προκύπτουν από τη γνώση που μελετήσαμε στο παράδειγμα 3.1.1. Το ερώτημα το οποίο μας ενδιαφέρει είναι αν η περιοχή* o_3 *αναφέρεται σε κάποιον άνθρωπο με βαθμό μεγαλύτερο ίσο του 0.75. Το ερώτημα αυτό μπορεί να γραφεί ως,* $\Sigma \models (\mathsf{o}_3 : \mathsf{Human}) \geq 0.75$. *Όπως είδαμε στην ενότητα 3.3 το πρόβλημα αυτό μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα της συνέπειας του σώματος ισχυρισμών* $\mathcal{A} \cup \{\mathsf{o}_3 : (\neg\mathsf{Human}) > 0.25\}$. *Ο γράφος ολοκλήρωσης* $\boldsymbol{G}$ *αρχικοποιείται με τρεις κόμβους ρίζες, έναν για κάθε άτομο του σώματος ισχυρισμών,* x_{o_i}, $1 \leq i \leq 3$. *Επιπρόσθετα, δημιουργεί και δυο ακμές,* $\langle x_{\mathsf{o}_1}, x_{\mathsf{o}_2}\rangle$ *και* $\langle x_{\mathsf{o}_2}, x_{\mathsf{o}_3}\rangle$. *Οι ετικέτες των κόμβων και των ακμών αρχικοποιούνται έτσι ώστε να περιέχουν τις ακόλουθες τριάδες,*

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \langle \mathsf{isDirectPartOf}, \geq, 0.8\rangle \in \mathcal{L}(\langle x_{\mathsf{o}_1}, x_{\mathsf{o}_2}\rangle) \\
(2) & \langle \mathsf{isPartOf}, \geq, 0.9\rangle \in \mathcal{L}(\langle x_{\mathsf{o}_2}, x_{\mathsf{o}_3}\rangle) \\
(3) & \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_2}) = \{\langle \mathsf{Body}, \geq, 0.85\rangle, \langle \{\mathsf{o}_2\}, \geq, 1\rangle\} \\
(4) & \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1}) = \{\langle \mathsf{Arm}, \geq, 0.75\rangle, \langle \{\mathsf{o}_1\}, \geq, 1\rangle\} \\
(5) & \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_3}) = \{\langle \neg\mathsf{Human}, >, 0.25\rangle, \langle \{\mathsf{o}_3\}, \geq, 1\rangle\}
\end{array}
$$

Λόγω του αξιώματος $\mathsf{Human} \equiv \exists\mathsf{hasPart.Body} \sqcap \exists\mathsf{hasPart.Arm}$ *αντικαθιστούμε την έννοια* $\neg\mathsf{Human}$, *με τη σύνθετη έννοια* $\neg(\exists\mathsf{hasPart.Body} \sqcap \exists\mathsf{hasPart.Arm})$. *Τελικά, αν μετατρέψουμε την έννοια αυτή στην κανονική μορφή άρνησής της παίρνουμε την ακόλουθη ετικέτα για τον κόμβο αυτό,*

$$(5)\ \langle \forall\mathsf{hasPart.}\neg\mathsf{Body} \sqcup \forall\mathsf{hasPart.}\neg\mathsf{Arm}, >, 0.25\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_3})$$

Ως δεύτερο βήμα ο αλγόριθμος επεκτείνει το σώμα ρόλων προσθέτοντας τα αξιώματα $\mathsf{isPartOf} \sqsubseteq \mathsf{hasPart}^-$, *λόγω του αξιώματος,* $\mathsf{isPartOf}^- \sqsubseteq \mathsf{hasPart} \in \mathcal{R}$ *και το* $\mathsf{Trans}(\mathsf{isPartOf}^-)$ *λόγω της δήλωσης* $\mathsf{Trans}(\mathsf{isPartOf}) \in \mathcal{R}$.

Στη συνέχεια ο αλγόριθμος επεκτείνει το γράφο ολοκλήρωσης εφαρμόζοντας επαναληπτικά τους κανόνες του Πίνακα 4.3, ελέγχοντας ταυτόχρονα για αντιφάσεις και για μπλοκάρισμα ανάμεσα σε ζεύγη κόμβων του δέντρου. Έτσι λοιπόν λαμβάνουμε τα παρακάτω βήματα εφαρμογής του αλγορίθμου.

$$
\begin{array}{ll}
(6) & \langle \forall\mathsf{hasPart.}\neg\mathsf{Body}, >, 0.25\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_3}) \mid \\
 & \qquad \langle \forall\mathsf{hasPart.}\neg\mathsf{Arm}, >, 0.25\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_3}) \quad \sqcup_{>} : (5)
\end{array}
$$

Συνεπώς, στο σημείο αυτό έχουμε δυο δυνατούς γράφους ολοκλήρωσης. Για τον πρώτο γράφο η επέκταση συνεχίζει με τον ακόλουθο τρόπο,

(6_1)	$\langle\forall\mathsf{hasPart}.\neg\mathsf{Body}, >, 0.25\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_3})$	
(7_1)	$\langle\neg\mathsf{Body}, >, 0.25\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_2})$	$\forall_> : (6_1), (2)$
(8_1)	*αντίφαση στις τριάδες των βημάτων* (7_1) *και* (3) *αφού* $0.25 + 0.85 \geq 1$.	

Για το δεύτερο δυνατό τρόπο επέκτασης έχουμε την παρακάτω ακολουθία βημάτων.

(6_2)	$\langle\forall\mathsf{hasPart}.\neg\mathsf{Arm}), >, 0.25\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_3})$	
(7_2)	$\langle\neg\mathsf{Arm}, >, 0.25\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_2})$	$\forall_> : (6_2), (2)$
(8_2)	$\langle\forall\mathsf{isPartOf}^-.\neg\mathsf{Arm}), <, 0.25\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_2})$	$\forall_+ : (6_2), (2)$
(9_2)	$\langle\neg\mathsf{Arm}, >, 0.25\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1})$	$\forall_> : (8_2), (1)$
(10_2)	*αντίφαση ανάμεσα στις τριάδες των* (9_2) *και* (4)	

Έτσι λοιπόν όλοι οι δυνατοί δρόμοι οδηγούν σε ένα γράφο ολοκλήρωσης ο οποίος περιέχει αντίφαση. Έτσι λοιπόν η βάση γνώση μας συνεπάγεται λογικά τον ισχυρισμό που θέλαμε να εξετάσουμε.

Στο σημείο αυτό αξίζει να εξηγήσουμε πώς μεταφερόμαστε από το βήμα 7_2 *στο* 8_2. *Ο κόμβος,* x_{o_3} *έχει τον* x_{o_1} *ως* $\mathsf{isPartOf}^-_{\geq 0.8}$*-γείτονα, αφού* $\langle\mathsf{isPartOf}, \geq, 0.9\rangle \in \mathcal{L}(\langle x_{\mathsf{o}_2}, x_{\mathsf{o}_3}\rangle)$. *Επίσης ισχύει ότι,* $\mathsf{Trans}(\mathsf{isPartOf}^-)$, $\mathsf{isPartOf}^- \sqsubseteq \mathsf{hasPart}$ *και ότι η ακμή* $\langle x_{\mathsf{o}_2}, x_{\mathsf{o}_3}\rangle$ *συγκρούεται με την τριάδα,* $\langle\mathsf{isPartOf}^-, <, 0.75\rangle$. *Έτσι λοιπόν ο κανόνας* $\forall_+$ *προσθέτει την τριάδα,* $\langle\forall\mathsf{isPartOf}^-.\neg\mathsf{Arm}), >, 0.25\rangle$ *στον κόμβο* x_{o_2}.

$\diamondsuit$

4.3.6 Αποφασισιμότητα της $\mathbf{f}_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$

Λήμμα 4.3.9 (Τερματισμός) *Έστω* $\mathcal{A}$ *ένα* f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$ *ABox και* $\mathcal{R}$ *ένα RBox. Τοτε, όταν αρχικοποιήσουμε τη διαδικασία για το* $\mathcal{A}$ *και* $\mathcal{R}$ *ο αλγόριθμος επέκτασης τερματίζει.*

Απόδειξη: Ο τερματισμός του αλγορίθμου είναι συνέπεια των ίδιων ιδιοτήτων που διασφαλίζουν τον τερματισμό του αλγορίθμου της κλασικής γλώσσας $\mathcal{SHOIN}$ [68]. Εν συντομία έχουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις:

- Όλοι οι κανόνες εκτός από αυτούς της *συρρίκνωσης*[2] (*shrinking rules*) επεκτείνουν αυστηρά το γράφο ολοκλήρωσης, προσθέτοντας νέους κόμβους και ακμές ή επεκτείνοντας τις ετικέτες τους, ενώ ούτε αφαιρούν κόμβους, ακμές ή έννοιες από αυτές.

- Νέοι κόμβοι εισάγονται μόνο από τους *κανόνες γεννήτορες*[3] (*generator rules*) και κάθε ένας από αυτούς τους κανόνες εφαρμόζεται το πολύ μια φορά για μια έννοια σε μια τριάδα μιας ετικέτας ενός κόμβου x και των κληρονόμων τους. Ακόμα και αν εφαρμοστεί ένας κανόνας συρρίκνωσης, τότε αν κάποιος R-γείτονας y του x συγχωνευτεί σε κάποιον άλλο κόμβο z, τότε τα περιεχόμενα της ετικέτας $\mathcal{L}(y)$ προστίθενται στην $\mathcal{L}(z)$, ο z "κληρονομεί" όλες τις ανισότητες

[2] αυτοί είναι οι κανόνες $\leq_\triangleright$ και $\{o\}$

[3] οι κανόνες γενήτορες είναι οι $\exists_\triangleright$, $\geq_\triangleright$ και $NN_\triangleright$

y, και είτε ο z είναι ένας R-γείτονας του x (αν ο x είναι ένας ονοματικός κόμβος ή ο y ένας διάδοχος του x) ή το x αφαιρείται από το γράφο από μια εφαρμογή της μεθόδου του κλαδέματος (αν ο x είναι μπλοκαρίσιμος και διάδοχος του y).

- Εφόσον όλοι οι κόμβοι χαρακτηρίζονται από τριάδες που περιέχουν έννοιες από το σύνολο $cl(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ και οι ακμές με τριάδες από τους ρόλους $\mathbf{R}_\mathcal{A}$, προφανώς υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος από δυνατούς χαρακτηρισμούς για ένα ζεύγος μπλοκαρίσιμων κόμβων και μια ακμή. Επιπρόσθετα, από τον Πίνακα 4.3 μπορούμε να δούμε ότι για μια τυχαία τριάδα της μορφής $\langle C, \rhd, n\rangle$ μόνο η τιμή n εμφανίζεται στην επέκταση ενός κόμβου x. Αυτή είναι μια ιδιότητα των ασαφών τελεστών που χρησιμοποιεί η γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$. Συνεπώς, η συνθήκη μπλοκαρίσματος διασφαλίζει ότι το μήκος των μονοπατιών που αποτελούνται μόνο από μπλοκαρίσιμους κόμβους είναι φραγμένο.

- Όπως και στην περίπτωση της κλασικής $\mathcal{SHOIN}$, ο αριθμός των ονοματικών κόμβων είναι φραγμένος. Αυτό είναι επακόλουθο των παρακάτω γεγονότων. Ο κανόνας $NN_\rhd$ μπορεί να εφαρμοστεί αφότου μια ονοματική έννοια έχει εισαχθεί στην ετικέτα ενός μπλοκαρίσιμου κόμβου x ως απόρροια της μεθόδου **Συγχώνευση** σε κάποιο κλαδί ενός από τα δέντρα που έχουν την αρχή τους σε ένα κόμβο ρίζα. Αλλιώς δεν είναι δυνατόν ένας μπλοκαρίσιμος κόμβος να έχει έναν ονοματικό κόμβο ως διάδοχο, το οποίο απαιτεί η πρώτη συνθήκη του κανόνα. Τώρα, εφόσον ο x περιέχει μια από τις ονοματικές έννοιες που υπάρχουν αρχικά στο $\mathcal{A}$ (αφού οι κόμβοι που δημιουργούνται από τον κανόνα $NN_\rhd$ θεωρούνται από την αρχή ονοματικοί κόμβοι) και ο κανόνας $\{o\}$ εφαρμόζεται με τη μέγιστη προτεραιότητα, ο x συγχωνεύεται με έναν υπάρχοντα ονοματικό κόμβο ο οποίος περιέχει κάποια από τις αρχικές ονοματικές έννοιες. Συνέπεια αυτής της συγχώνευσης είναι ότι κάποιος προκάτοχος τους x συγχωνεύεται με κάποιον ονοματικό κόμβο n_1 (ο οποίος έχει δημιουργηθεί από εφαρμογή τους κανόνα $NN_\rhd$ στον κόμβο x) από κάποιον από τους κανόνες συρρίκνωσης (λόγω της μεθόδου του κλαδέματος, αυτό δε μπορεί να συμβεί σε κάποιο διάδοχο του x). Η συγχώνευση του προκατόχου του x συμβαίνει γιατί ο κανόνας $NN_\rhd$ προσθέτει την έννοια $\leq mR$ στο x μαζί με m διαδόχους. Συνεπώς, ο x έχει $m+1$ διάδοχους (τους m που δημιούργησε ο κανόνας $NN_\rhd$ και ένα προκάτοχο) και ο κανόνας $\leq_\rhd$ θα εκτελεστεί. Τώρα ο n_1 είτε περιέχει έναν ονοματικό κόμβο από τους αρχικούς ή κάποιον από αυτούς που δημιουργούνται από τον κανόνα $NN_\rhd$. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή είναι δυνατόν όλοι οι πρόγονοι του x να συγχωνευτούν σε κάποιο ονοματικό κόμβο. Αλλά, εφόσον το μήκος ενός μονοπατιού μπλοκαρίσιμων κόμβων είναι φραγμένο, αυτή η επαναληπτική συγχώνευση είναι επίσης φραγμένη. Τέλος, αν ο κανόνας $NN_\rhd$ έχει εφαρμοστεί σε μια έννοια $(\leq nR.C)$, δε μπορεί να εφαρμοστεί ξανά στην έννοια αυτή.

■

Θεώρημα 4.3.10 (Ορθότητα (soundness)) *Αν οι κανόνες μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$ ασαφές σώμα ισχυρισμών $\mathcal{A}$ και ρόλων $\mathcal{R}$ έτσι ώστε να προκύψει ένας πλήρες και ελεύθερος αντιφάσεων γράφος ολοκλήρωσης τότε το $\mathcal{A}$ έχει ένα ασαφές tableau μ.β.τ. $\mathcal{R}$.*

Απόδειξη: Έστω ένας πλήρης και ελεύθερος αντιφάσεων γράφος ολοκλήρωσης $\mathbf{G}$. Από το γράφο αυτό μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ασαφές tableau

$T = (\mathbf{S}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$ ξετυλίγοντας τους μπλοκαρισμένους κόμβους των δενδρικών τμημάτων του γράφου (δηλαδή των τμημάτων που περιέχουν μόνο μπλοκαρίσιμους κόμβους και άρα η μέθοδος της συγχώνευσης δεν καταστρέφει τη δενδρική δομή που δημιουργούν οι κανόνες επέκτασης). Η μέθοδος του ξετυλίγματος είναι απαραίτητη καθώς υπάρχουν f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$-έννοιες που είναι ικανοποιήσιμες μόνο σε άπειρα μοντέλα. Έτσι λοιπόν το ασαφές tableau που θα πάρουμε θα πρέπει να είναι άπειρο, κάτι το οποίο δε συμβαίνει στη γλώσσα $\mathcal{SI}$ [67] αλλά και στην ασαφή της επέκταση, τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SI}$ [133].

Κάθε στοιχείο του $\mathbf{S}$ αντιστοιχεί σε ένα μονοπάτι στον $\mathbf{G}$. Μετακινούμενοι προς τα κάτω, προς τους μπλοκαρισμένους κόμβους, και πάλι πάνω σε αυτούς που προκαλούν το μπλοκάρισμα μπορούμε να ορίσουμε άπειρο αριθμό τέτοιων μονοπατιών. Πιο συγκεκριμένα, ένα μονοπάτι είναι μια ακολουθία από ζευγάρια κόμβων του $\mathbf{G}$ της μορφής $p = [\frac{x_0}{x'_0}, \ldots, \frac{x_n}{x'_n}]$. Για ένα τέτοιο μονοπάτι ορίζουμε $\mathsf{Tail}(p) := x_n$ και $\mathsf{Tail}'(p) := x'_n$. Με τη σύνταξη $[p \mid \frac{x_{n+1}}{x'_{n+1}}]$ θέλουμε να δείξουμε το μονοπάτι $[\frac{x_0}{x'_0}, \ldots, \frac{x_n}{x'_n}, \frac{x_{n+1}}{x'_{n+1}}]$. Το σύνολο των μονοπατιών $\mathsf{Paths}(\mathbf{G})$ ενός γράφου-ολοκλήρωσης $\mathbf{G}$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

- Για κάθε μπλοκαρίσιμο κόμβο x του $\mathbf{G}$ ο οποίος είναι διάδοχος ενός ονοματικού κόμβου ή ενός κόμβου ρίζα, $[\frac{x}{x}] \in \mathsf{Paths}(\mathbf{G})$, και
- Για ένα μονοπάτι $p \in \mathsf{Paths}(\mathbf{G})$ και έναν κόμβο z του $\mathbf{G}$:
  - αν ο z είναι ένας διάδοχος του $\mathsf{Tail}(p)$ και δεν είναι μπλοκαρισμένος, τότε $[p \mid \frac{z}{z}] \in \mathsf{Paths}(\mathbf{G})$, ή
  - αν ο y είναι ένας διάδοχος του $\mathsf{Tail}(p)$ και ο z μπλοκάρει τον y, τότε $[p \mid \frac{z}{y}] \in \mathsf{Paths}(\mathbf{G})$

Παρατηρήστε ότι όλοι οι κόμβοι που εμφανίζονται σε ένα μονοπάτι είναι μπλοκαρίσιμοι κόμβοι. Επιπρόσθετα, αν $p \in \mathsf{Paths}(\mathbf{G})$, τότε ο $\mathsf{Tail}(p)$ δεν είναι μπλοκαρισμένος. $\mathsf{Tail}(p) = \mathsf{Tail}'(p)$ ανν ο $\mathsf{Tail}'(p)$ δεν είναι μπλοκαρισμένος. Επιπλέον, ισχύει ότι $\mathcal{L}(\mathsf{Tail}(p)) = \mathcal{L}(\mathsf{Tail}'(p))$.

Το κομμάτι της ανάθεσης βαθμού συμμετοχής ενός μονοπατιού p με ουρά $\mathsf{Tail}(p)$ σε κάποια έννοια στο ασαφές tableau ορίζεται με το ίδιο τρόπο που δείξαμε και στην περίπτωση της απόδειξης της ορθότητας της γλώσσας f_{KD}-$\mathcal{SI}$, δηλαδή στην απόδειξη του λήμματος 4.2.11, με τη χρήση της συνάρτησης glb. Αυτό όμως το οποίο πρέπει να επισημάνουμε είναι ότι οι έννοιες της μορφής $\neg A$ ερμηνεύονται από τους βαθμούς συμμετοχής της έννοιας A, όπως και στην περίπτωση της f_{KD}-$\mathcal{SI}$ με τη μόνη προσθήκη ότι η A μπορεί να είναι τόσο μια ατομική όσο και μια ονοματική έννοια. Επισημαίνουμε και πάλι ότι ετικέτες της μορφής $\mathcal{L}(s, C)$ αναφέρονται σε στοιχεία του ασαφούς tableau, ενώ ετικέτες της μορφής $\mathcal{L}(x)$ σε κόμβους του γράφου ολοκλήρωσης.

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\mathsf{Nom}(\mathbf{G})$ για να αναπαραστήσουμε το σύνολο των ονοματικών κόμβων και των κόμβων ρίζας του $\mathbf{G}$ (οι οποίοι από την αρχικοποίησή τους είναι ονοματικοί), και τότε ορίζουμε ένα ασαφές tableau T ως εξής:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{S} & = & \mathsf{Nom}(\mathbf{G}) \cup \mathsf{Paths}(\mathbf{G}), \\
\mathcal{L}(p, C) & = & \begin{cases} glb[\rhd, n_i], \text{ για } \langle C, \rhd, n_i \rangle \in \mathcal{L}(\mathsf{Tail}(p)), & \text{αν } p \in \mathsf{Paths}(\mathbf{G}) \\ glb[\rhd, n_i], \text{ για } \langle C, \rhd, n_i \rangle \in \mathcal{L}(p), & \text{αν } p \in \mathsf{Nom}(\mathbf{G}) \end{cases} \\
\mathcal{L}(p, \neg A) & = & 1 - \mathcal{L}(p, A), \text{ αν } \langle \neg A, \rhd, n \rangle \in \mathcal{L}(\mathsf{Tail}(p)) \text{ και } A \in \mathbf{C} \text{ ή } A \in \mathsf{Nom}(\mathbf{G}), \\
\mathcal{L}(p, \bot) & = & 0, \text{ για κάθε } p \in \mathbf{S}, \\
\mathcal{L}(p, \top) & = & 1, \text{ για κάθε } p \in \mathbf{S}, \\
\mathcal{E}(R, \langle p, [p|\frac{x}{x'}] \rangle) & = & glb[\rhd, n], \langle R, \rhd, n \rangle \in \mathcal{L}(\langle \mathsf{Tail}(p), x' \rangle) \\
\mathcal{E}(R, \langle [q|\frac{x}{x'}], q \rangle) & = & glb[\rhd, n], \langle \mathsf{Inv}(R), \rhd, n \rangle \in \mathcal{L}(\langle \mathsf{Tail}(q), x' \rangle) \\
\mathcal{E}(R, \langle p, x \rangle) & = & glb[\rhd, n], \text{ ο } x \in \mathsf{Nom}(\mathbf{G}) \text{ είναι ένας } R\text{-γείτονας του } \mathsf{Tail}(p) \\
\mathcal{E}(R, \langle x, p \rangle) & = & glb[\rhd, n], \text{ ο } \mathsf{Tail}(p) \text{ είναι ένας } R\text{-γείτονας του } x \in \mathsf{Nom}(\mathbf{G}) \\
\mathcal{E}(R, \langle [\frac{x}{x}], [\frac{y}{y}] \rangle) & = & glb[\rhd, n], \text{ οι } x, y \text{ είναι κόμβοι ρίζας ή ονοματικοί κόμβοι και} \\
& & \qquad \text{ο } y \text{ είναι } R\text{-γείτονας του } x, \\
\mathcal{E}(\neg R, \langle p, q \rangle) & = & 1 - \mathcal{E}(R, \langle p, q \rangle) \text{ για κάθε } \langle p, q \rangle \in \mathbf{S} \times \mathbf{S}, \\
\mathcal{V}(a_i) & = & \begin{cases} [\frac{x_{a_i}}{x_{a_i}}] \text{ αν ο } x_{a_i} \text{ είναι ένας κόμβος ρίζα στο } \mathbf{G} \text{ με } \mathcal{L}(x_0^i) \neq \emptyset \\ [\frac{x_{a_j}}{x_{a_j}}] \text{ αν } \mathcal{L}(x_{a_i}) = \emptyset, \text{ ο } x_{a_j} \text{ είναι κόμβος ρίζα,} \\ \qquad \text{με } \mathcal{L}(x_{a_j}) \neq \emptyset \text{ και } x_{a_i} \doteq x_{a_j} \end{cases}
\end{array}
$$

Μπορεί να δειχθεί ότι το T είναι ένα ασαφές tableau για το $\mathcal{A}$ μ.β.τ. $\mathcal{R}$:

- Οι ιδιότητες 1-3 του ορισμού 4.2.4 ικανοποιούνται γιατί ο $\mathbf{G}$ είναι ελεύθερος αντιφάσεων και λόγω της κατασκευής του T. Έστω, $\mathcal{L}(p, \neg A) = n_1 \geq n$. Ο ορισμός του T συνεπάγεται ότι $1 - n \geq 1 - n_1 = \mathcal{L}(p, A)$. Η ιδιότητα 3 προκύπτει από τους ίδιους ισχυρισμούς.

- Οι ιδιότητες 4 και 5 του ορισμού 4.2.4 ικανοποιούνται γιατί κανένας από τους κανόνες $\sqcup_\rhd$, και $\sqcap_\rhd$ δεν εφαρμόζεται σε κάποιο κόμβο του $\mathbf{G}$, και ο $\mathsf{Tail}(p)$ δεν είναι μπλοκαρισμένος. Για παράδειγμα, έστω $\mathcal{L}(p, C \sqcap D) = n_1 \geq n$. Ο ορισμός του T συνεπάγεται ότι είτε $\langle C \sqcap D, \geq, n_1 \rangle \in \mathcal{L}(\mathsf{Tail}(p))$ ή $\langle C \sqcap D, >, n' \rangle \in \mathcal{L}(\mathsf{Tail}(p))$, με $n_1 = n' + \epsilon$. Η πληρότητα του $\mathbf{G}$ συνεπάγεται ότι είτε $\langle C, \geq, n_1 \rangle \in \mathcal{L}(\mathsf{Tail}(p))$ και $\langle D, \geq, n_1 \rangle \in \mathcal{L}(\mathsf{Tail}(p))$ ή $\langle C, >, n' \rangle \in \mathcal{L}(\mathsf{Tail}(p))$ και $\langle D, >, n' \rangle \in \mathcal{L}(\mathsf{Tail}(p))$. Συνεπώς, $\mathcal{L}(s, C) \geq \mathcal{L}(s, C \sqcap D) \geq n$, $\mathcal{L}(s, D) \geq \mathcal{L}(s, C \sqcap D) \geq n$. Η ιδιότητα 5 προκύπτει με παρόμοιο τρόπο.

- Για την ιδιότητα 6 του ορισμού 4.2.4, έστω $p, q \in \mathbf{S}$ με $\mathcal{L}(p, \forall R.C) = n_1 \geq n$ και $\mathcal{E}(\neg R, \langle p, q \rangle) \not\geq n$. Ο ορισμός του T συνεπάγεται ότι είτε $\langle \forall R.C, \geq, n_1 \rangle \in \mathcal{L}(z_p)$ ή $\langle \forall R.C, >, n' \rangle \in \mathcal{L}(z_p)$ με $n_1 = n' + \epsilon$ και $z_p = \mathsf{Tail}(p)$ αν $p \in \mathsf{Paths}(\mathbf{G})$, ή $z_p = z$ αν $z \in \mathsf{Nom}(\mathbf{G})$. Τώρα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις,
  - Αν $p \in \mathsf{Paths}(\mathbf{G})$, τότε $z_p = \mathsf{Tail}(p)$ και
    * Αν $q = [p|\frac{x}{x'}]$, τότε ο x' είναι ένας $R_{\rhd r}$-διάδοχος του $\mathsf{Tail}(p)$ και, εφόσον η μέθοδος glb δε δημιουργεί περιττές συγκρούσεις έχουμε ότι η τριάδα $\langle R, \rhd, r \rangle \in \mathcal{L}(\langle \mathsf{Tail}(p), x' \rangle)$ είναι τέτοια που συγκρούεται με την $\langle R, \leq, 1 - n \rangle$. Συνεπώς, λόγω πληρότητας του $\mathbf{G}$ έχουμε ότι είτε $\langle C, \geq, n_1 \rangle \in \mathcal{L}(x')$ ή $\langle C, >, n' \rangle \in \mathcal{L}(x')$, και είτε $x' = x$ ή η συνθήκη μπλοκαρίσματος συνεπάγεται ότι $\mathcal{L}(x') = \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(q)$.
    * Αν $p = [q|\frac{x}{x'}]$, τότε ο x' είναι ένας $\mathsf{Inv}(R)_{\rhd r}$-διάδοχος του $\mathsf{Tail}(q)$ και πάλι, ο ορισμός του glb συνεπάγεται ότι η τριάδα $\langle \mathsf{Inv}(R), \rhd, r \rangle \in \mathcal{L}(\langle \mathsf{Tail}(q), x' \rangle)$ συγκρούεται με την $\langle \mathsf{Inv}(R), \leq, 1 - n \rangle$. Έτσι λοιπόν,

λόγω πληρότητας του $\mathbf{G}$, είτε $\langle C, \geq, n_1\rangle \in \mathcal{L}(\mathsf{Tail}(q)) = \mathcal{L}(q)$ ή $\langle C, >, n'\rangle \in \mathcal{L}(\mathsf{Tail}(q)) = \mathcal{L}(q)$.

* Αν $q = x \in \mathsf{Nom}(\mathbf{G})$, τότε ο x είναι ένας $R_{\triangleright n}$-γείτονας του $\mathsf{Tail}(p)$ και η πληρότητα συνεπάγεται ότι είτε $\langle C, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$ ή $\langle C, >, n'\rangle \in \mathcal{L}(x)$.

– Αν $z_p = z \in \mathsf{Nom}(\mathbf{G})$, τότε είτε

* $q \in \mathsf{Paths}(\mathbf{G})$, και ο $\mathsf{Tail}(q)$ είναι ένας $R_{\triangleright r}$-γείτονας του z και λόγω πληρότητας είτε $\langle C, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(q)$, ή $\langle C, >, n'\rangle \in \mathcal{L}(q)$ ή
* $q = x \in \mathsf{Nom}(\mathbf{G})$, ο x είναι $R_{\triangleright r}$-γείτονας του z και λόγω πληρότητας είτε $\langle C, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(q)$ ή $\langle C, >, n'\rangle \in \mathcal{L}(q)$.

Ανάλογη απόδειξη ισχύει και για την ιδιότητα 6 με $\mathcal{L}(p, \forall R.C) > n$ αλλά και για την ιδιότητα 8' του ορισμού 4.3.3.

- Για την ιδιότητα 7 του ορισμού 4.2.4, έστω κάποιος κόμβος $p \in \mathbf{S}$ με $\mathcal{L}(p, \exists R.C) \geq n$.

  – Αν $p \in \mathsf{Paths}(\mathbf{G})$, τότε είτε $\langle \forall R.C, \geq, n_1\rangle \in \mathcal{L}(p)$ ή $\langle \forall R.C, >, n'\rangle \in \mathcal{L}(p)$ με $n_1 = n' + \epsilon$. Εφόσον ο $\mathsf{Tail}(p)$ δεν είναι μπλοκαρισμένος, η πληρότητα του $\mathbf{G}$ συνεπάγεται την ύπαρξη ενός R-γείτονα y του $\mathsf{Tail}(p)$ ο για τον οποίο είτε $\langle C, \geq, n_1\rangle \in \mathcal{L}(y)$ ή $\langle C, >, n'\rangle \in \mathcal{L}(y)$.

  * Αν ο y είναι ένας ονοματικός κόμβος, τότε $y \in \mathbf{S}$, $\mathcal{L}(y, C) \geq n$ και $\mathcal{E}(R, \langle p, y\rangle) \geq n$.
  * Αν ο y είναι μπλοκαρίσιμος και διάδοχος του $\mathsf{Tail}(p)$, τότε $\langle p, [p|\frac{y'}{y}]\rangle \in \mathbf{S}$, και είτε $y' = y$, ή ο y' μπλοκάρει τον y. Και στις δυο περιπτώσεις είτε η τριάδα $\langle C, \geq, n_1\rangle$ είτε η $\langle C, >, n'\rangle$ βρίσκονται στην ετικέτα $\mathcal{L}(y')$.
  * Αν ο y είναι μπλοκαρίσιμος και προκάτοχος του $\mathsf{Tail}(p)$, τότε είτε $p = [r|\frac{y}{y}|\frac{\mathsf{Tail}(p)}{\mathsf{Tail}'(p)}]$, ή $p = [r|\frac{z}{z}|\frac{\mathsf{Tail}(p)}{\mathsf{Tail}'(p)}]$ και ο $\mathsf{Tail}(p)$ μπλοκάρει τον $\mathsf{Tail}'(p)$, συνεπώς ο $\mathsf{Tail}'(p)$ είναι ένας R-γείτονας του z. Στην πρώτη περίπτωση είτε $\langle C, \geq, n_1\rangle \in \mathcal{L}(y)$ ή $\langle C, >, n'\rangle \in \mathcal{L}(y)$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση λόγω του μπλοκαρίσματος ζευγών έχουμε ότι $\mathcal{L}(z) = \mathcal{L}(y)$, άρα ο z μπορεί να ικανοποιήσει τον υπαρξιακό περιορισμό του $\mathsf{Tail}(p)$.

  – Αν $p \in \mathsf{Nom}(\mathbf{G})$, τότε η πληρότητα συνεπάγεται την ύπαρξη κάποιου R-διαδόχου x του p για τον οποίο είτε $\langle C, \geq, n_1\rangle \in \mathcal{L}(x)$ ή $\langle C, >, n'\rangle \in \mathcal{L}(x)$.

  * Αν ο x είναι ονοματικός κόμβος, τότε $\mathcal{E}(R, \langle p, x\rangle) \geq n$ και $\mathcal{L}(x, C) \geq n$.
  * Αν ο x είναι μπλοκαρίσιμος, τότε ο x είναι ένας ασφαλής R-γείτονας του p και συνεπώς μη μπλοκαρισμένος. Συνεπώς, υπάρχει ένα μονοπάτι $q \in \mathsf{Paths}(\mathbf{G})$ με $\mathsf{Tail}(q) = x$, $\mathcal{E}(R, \langle p, q\rangle) \geq n$ και $\mathcal{L}(q, C) \geq n$

  Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις, $\mathcal{E}(R, \langle p, q\rangle) \geq n_1 \geq n$, $\mathcal{L}(q, C) \geq n_1 \geq n$. Παρομοίως για την περίπτωση που $\mathcal{L}(p, \exists R.C) > n$.

- Η ιδιότητα 12 του ορισμού 4.3.3 ικανοποιείται λόγω του ορισμού της σχέσης του R-διάδοχου η οποία λαμβάνει υπόψη της την ιεραρχία των ρόλων $\underline{\ast}$.

- Οι ιδιότητες 13-14 του ορισμού 4.3.3 ικανοποιούνται λόγω της κατασκευής του T όπως ακριβώς συμβαίνει και στην κλασική περίπτωση [68].

- Οι ιδιότητες 15 και 16 ικανοποιούνται λόγω της πληρότητας του $\mathbf{G}$, του κανόνα $\{o\}_{\triangleright}$, της συνάρτησης glb που αναθέτει σε κάθε $p \in \mathbf{S}$ είτε $\mathcal{L}(p, \{o\}) = 1$ αν $\langle \{o\}, \geq, 1\rangle \in \mathcal{L}(\mathsf{Tail}(p))$ ή $\mathcal{L}(p, \neg\{o\}) = 0$ αν δεν υπάρχει καμία τριάδα της μορφής $\langle \{o\}, \geq, 1\rangle$ στο $\mathcal{L}(\mathsf{Tail}(p))$ και άρα $\mathcal{L}(p, \neg\{o\}) = 1 - \mathcal{L}(p, \{o\}) = 1 - 0 = 1$ και λόγω του ότι οι ονοματικοί κόμβοι δεν μπλοκάρονται και δεν ξετυλίγονται.

- Οι ιδιότητες 10-11 του ορισμού 4.2.4 και η ιδιότητα 17 του ορισμού 4.3.3 ικανοποιούνται λόγω της αρχικοποίησης του γράφου ολοκλήρωσης και του ότι ο αλγόριθμος δεν μπλοκάρει ποτέ κόμβους ρίζας. Επιπρόσθετα, για κάθε κόμβο ρίζα x_{a_i} του οποίου η ετικέτα και οι ακμές έχουν αφαιρεθεί από την εφαρμογή της μεθόδου της συγχώνευσης , υπάρχει κάποιος άλλος κόμβος ρίζα x_{a_j} με $x_{a_i} = x_{a_j}$ και $\{\langle C, \triangleright, n\rangle | (a_i : C) \triangleright n \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{L}(x_{a_j})$.

■

Λήμμα 4.3.11 (Πληρότητα (completeness)) *Έστω $\mathcal{A}$ ένα f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$ ABox και $\mathcal{R}$ ένα RBox. Αν το $\mathcal{A}$ έχει ένα ασαφές tableau μ.β.τ. $\mathcal{R}$ τότε οι κανόνες επέκτασης μπορούν να εκτελεστούν με τέτοιο τρόπο ώστε ο αλγόριθμος να δημιουργήσει έναν πλήρες και ελεύθερο αντιφάσεων γράφο ολοκλήρωσης για το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{R}$.*

Απόδειξη: Έστω $T = (\mathbf{S}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$ ένα ασαφές tableau για το $\mathcal{A}$ μ.β.τ. $\mathcal{R}$. Παρόμοια με το [70] αλλά και την απόδειξη του λήμματος 4.2.12 μπορούμε να ορίσουμε

Πίνακας 4.4: *Ο κανόνας $\leq'_{\triangleright}$*

Κανόνας		Περιγραφή
$\leq'_{\triangleright}$	αν 1.	$\langle \leq pR.C, \triangleright, n\rangle \in \mathcal{L}(z)$, ο z δεν είναι έμμεσα μπλοκαρισμένος,
		$\sharp R_c^{\mathbf{G}}(x, \triangleright, n) > p$, υπάρχουν δυο από αυτούς, έστω οι x, y,
		χωρίς να ισχύει $y \neq x$ και $\pi(y) = \pi(x)$
	τότε	1. αν ο x είναι ονοματικός κόμβος ή κόμβος ρίζα, τότε Συγχώνευση(y, x)
		2. αλλιώς αν ο y είναι ονοματικός ή κόμβος ρίζα ή πρόγονος του x,
		τότε Συγχώνευση(x, y)
		3. αλλιώς Συγχώνευση(y, x)

μια απεικόνιση π η οποία αντιστοιχεί κόμβους του $\mathbf{G}$ σε στοιχεία του $\mathbf{S}$, και να οδηγήσουμε την εκτέλεση των μη-ντετερμινιστικών κανόνων. $\sqcup_{\triangleright}$, $\leq_{\triangleright}$, και $NN_{\triangleright}$. Ο τροποποιημένος κανόνας $\sqcup_{\triangleright}$ παρουσιάστηκε στον Πίνακα 4.2. Ο τροποποιημένος κανόνας $\leq'_{\triangleright}$, παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.4. Οι παρατηρήσεις αυτές μαζί με την ιδιότητα του τερματισμού διασφαλίζουν την πληρότητα του αλγορίθμου. ■

Θεώρημα 4.3.12 *Ο αλγόριθμος tableau είναι μια διαδικασία απόφασης για το πρόβλημα της συνέπειας ενός f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$ ABox, της n-ικανοποιησιμότητας και της υπαγωγής f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$-εννοιών με βάση ένα RBox.*

Το παραπάνω θεώρημα είναι άμεση συνέπεια των Λημμάτων 4.3.4, 4.3.10 και 4.3.11. Όπως επίσης αναφέραμε στην ενότητα 3.3, η υπαγωγή εννοιών μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα της συνέπειας.

4.4 Γενικευμένα και Κυκλικά Αξιώματα

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τις τροποποιήσεις και τις προσθήκες που χρειάζεται ο αλγόριθμος που παρουσιάσαμε παραπάνω για να διαχειριστεί ορολογίες οι οποίες περιέχουν γενικευμένα και/ή κυκλικά αξιώματα.

Στην υπο-ενότητα 3.3.1 δείξαμε πώς μπορούμε να διαχειριστούμε γενικευμένα και κυκλικά αξιώματα και πιο συγκεκριμένα πώς μπορούμε να αναγάγουμε τη σημασιολογία τους σε ασαφείς ισχυρισμούς. Η μεοδολογία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη κανώνων tableaux που θα διαχειρίζονται ορολογίες που περιέχουν τέτοιου είδους αξιώματα. Όπως παρατηρούμε όμως η διαδικασία που περιγράφεται από το Θεώρημα 3.3.3 απαιτεί να εφαρμόσουμε διαδικασίες συλλογιστικής για κάθε βαθμό συμμετοχής $n \in [0,1]$ κάτι το οποίο προφανώς είναι πρακτικά αδύνατο να γίνει. Αυτό λοιπόν το οποίο χρειαζόμαστε να κάνουμε πρώτιστα είναι να περιορίσουμε το σύνολο των βαθμών συμμετοχής τον οποίο καλούμαστε να διαχειριστούμε. Πραγματικά από το [139] γνωρίζουμε ότι όταν διαχειριζόμαστε τις f_{KD}-ΠΛ μπορούμε να περιορίσουμε το σύνολο των βαθμών συμμετοχής σε ένα πεπερασμένο και στην πραγματικότητα αρκετά μικρό σύνολο. Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε τα παρακάτω σύνολα.

$$\begin{aligned} X^{\mathcal{A}} &= \{0, 0.5, 1\} \cup \\ &\quad \{n \mid \{\phi \geq n, \phi \leq n\} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\} \cup \\ &\quad \{n + \epsilon \mid \phi > n \in \mathcal{A}\} \cup \\ &\quad \{n - \epsilon \mid \phi < n \in \mathcal{A}\} \text{ και} \\ N^{\mathcal{A}} &= X^{\mathcal{A}} \cup \{1 - n \mid n \in X^{\mathcal{A}}\} \end{aligned}$$

όπου ϵ τείνει στο 0. Διαισθητικά, το σύνολο αυτό περιέχει όλους τους βαθμούς συμμετοχής που βρίσκονται στο σώμα ισχυρισμών και είναι σχετικοί με την ικανοποιησιμότητα ή μη των ισχυρισμών αυτών, μαζί με τις ασαφείς αρνήσεις τους, δηλαδή το $1 - n$. Ο λόγος για τον οποίο μπορούμε να το κάνουμε αυτό είναι ότι οι τελεστές που χρησιμοποιούνται στις f_{KD}-ΠΛ ικανοποιούν την ιδιότητα της ταυτοδυναμίας ($t(a,a) = a = u(a,a)$). Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να περιοριστούμε μόνο στους βαθμούς που εμφανίζονται στους ασαφείς ισχυρισμούς. Έτσι λοιπόν αν ένα ασαφές σώμα ισχυρισμών $\mathcal{A}$ είναι συνεπές, τότε υπάρχει ένα μοντέλο που χρησιμοποιεί μόνο τους βαθμούς που εμφανίζονται στο σύνολο $N^{\mathcal{A}}$. Για παράδειγμα για να ικανοποιήσουμε τον ισχυρισμό $(a : C) \geq n$, θέτουμε $C^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) = n$, ενώ για να ικανοποιήσουμε τον ισχυρισμό $(a : C) > n$, θέτουμε $C^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) = n + \epsilon$, για ένα ικανοποιητικά μικρό $\epsilon \in [0,1]$.

Από την προηγούμενη ανάλυση γίνεται αντιληπτό ότι προτού εφαρμόσουμε διαδικασίες συλλογιστικής θα πρέπει να *κανονικοποιήσουμε* (*normalize*) ένα σώμα ισχυρισμών. Με άλλα λόγια θα πρέπει να ξαναγράψουμε τους ισχυρισμούς που χρησιμοποιούν μια από τις ανισότητες $>$ και $<$. Πιο συγκεκριμένα ένας ισχυρισμός της μορφής $(a : C) > n$ αντικαθίσταται από τον $(a : C) \geq n + \epsilon$ ενώ ένας ισχυρισμός της μορφής $(a : C) < n$, από τον $(a : C) \leq n - \epsilon$. Παρατηρούμε ότι σε ένα κανονικοποιημένο σώμα ισχυρισμών οι βαθμοί συμμετοχής λαμβάνονται από το διάστημα $[0, 1 + \epsilon]$ αντί για το διάστημα $[0,1]$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η διαδικασία της κανονικοποίησης διατηρεί την ικανοποιησιμότητα.

Πρόταση 4.4.1 *Έστω $\Sigma = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \rangle$ μια ασαφής βάση γνώση. Τότε, η Σ είναι ικανοποιήσιμη ανν η κανονικοποιημένη βάση γνώση $\overline{\Sigma}$ είναι ικανοποιήσιμη.*

Η απόδειξη της πρότασης αυτής παρουσιάζεται στο [85].

Στη συνέχεια μπορούμε να προχωρήσουμε στην επέκταση των αλγορίθμων που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο αυτό.

Οι περισσότερες έννοιες που εμφανίζονται στους ορισμούς 4.2.4, 4.2.6 και 4.2.7 για τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ αλλά αυτές που εμφανίζονται στους ορισμούς 4.3.3, 4.3.5 και 4.3.6 για τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην περίπτωση των γενικευμένων και κυκλικών αξιωμάτων με ελάζιστες τροποποιήσεις για να δώσουν μια διαδικασία συλλογιστικής με γενικευμένα και/ή κυκλικά αξιώματα στις γλώσσας f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ και f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$.

Πιο συγκεκριμένα οι ορισμοί των ασαφών tableau 4.2.4 και 4.3.3 για τις γλώσσες f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ και f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$, αντίστοιχα μπορούν να επεκταθούν με την παρακάτω ιδιότητα:

- Αν $C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}$, τότε είτε $\mathcal{L}(s, \neg C) \geq 1 - n + \epsilon$ ή $\mathcal{L}(s, D) \geq n$, για κάθε $s \in \mathbf{S}$ και $n \in N^{\mathcal{A}}$.

όπου $N^{\mathcal{A}}$ είναι όπως ορίζεται παραπάνω. Στη συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα αυτή για να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο επέκτασης ο οποίος ουσιαστικά κωδικοποιεί τη σημασιολογία και τους περιορισμούς ενός αξιώματα επαγωγής σε ασαφείς ισχυρισμούς.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως προκειμένου να εφαρμόσουμε διαδικασίες συλλογιστικής με γενικευμένα και κυκλικά αξιώματα θα πρέπει πρώτιστα να εφαρμόσουμε μια διαδικασία κανονικοποίησης του σώματος ισχυρισμών. Έτσι λοιπόν οι έννοιες που εμφανίζονται στους ορισμούς 4.2.6, 4.2.7, 4.3.5 και 4.3.6 χρειάζεται, σε μερικές περιπτώσεις, να τροποποιηθούν ελαφρώς. Πρώτιστα οι βαθμοί συμμετοχής που εμφανίζονται στις τριάδες συμμετοχής ($\langle C, \rhd, n \rangle$) παίρνουν τιμές από το διάστημα $[+\epsilon, 1 + \epsilon]$. Επιπρόσθετα, οι συνθήκες αντίφασης των ορισμών αυτών είναι ακόμα ένα στοιχείο το οποίο χρειάζεται να τροποποιηθεί. Πιο συγκεκριμένα, η συνθήκη αντίφασης $\langle C, >, 1 \rangle$ πρέπει να αντικατασταθεί από τη συνθήκη $\langle C, \geq, 1 + \epsilon \rangle$, ενώ η συνθήκη $\langle \perp, >, n \rangle$ από την $\langle \perp, \geq, n + \epsilon \rangle$. Τέλος στον Πίνακα 4.5 φαίνεται ο νέος κανόνας ο οποίος χρησιμοποιείται για να μεταφέρει τη σημασιολογία των αξιωμάτων υπαγωγής ενός σώματος ορολογίας, στα άτομα ενός ABox. Όπως παρατηρούμε ο αλγόριθμος ενδέχεται να εισάγει την τριάδα $\langle \neg C, \geq, 1 - n + \epsilon \rangle$. Στην περίπτωση αυτή μετά την εισαγωγή της τριάδας αυτής, ο αλγόριθμος θα πρέπει να μετατρέψει την έννοια $\neg C$ στην αντίστοιχη κανονική μορφή άρνησής της.

Πίνακας 4.5: *Ο κανόνας $\sqsubseteq$*

Κανόνας		**Περιγραφή**
$\sqsubseteq$	αν 1.	$C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}$, ο x δεν είναι έμμεσα μπλοκαρισμένος και
	2.	$\{\langle \neg C, \geq, 1 - n + \epsilon \rangle, \langle D, \geq, n \rangle\} \cap \mathcal{L}(x) = \emptyset$ για κάποιο $n \in N^{\mathcal{A}}$
	τότε	$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) \cup \{E\}$ για κάποιο $E \in \{\langle \neg C, \geq, 1 - n + \epsilon \rangle, \langle D, \geq, n \rangle\}$

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα που χρησιμοποιούν το νέο κανόνα.

Παράδειγμα 4.4.2 *Έστω η βάση γνώσης*

$$\Sigma = \langle \{\mathsf{HotPinkRose} \sqsubseteq \exists \mathsf{nextGen.HotPinkRose}\}, \{(a : \mathsf{HotPinkRose}) \geq 0.6\} \rangle$$

η οποία περιέχει ένα κυκλικό αξίωμα. Η Σ είναι προφανώς ικανοποιήσιμη. Πρώτιστα δημιουργούμε το σύνολο των βαθμών συμμετοχής το οποίο στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι το $N^{\mathcal{A}} = \{0, 0.5, 1\} \cup \{0.4, 0.6\}$. Στη συνέχεια ο αλγόριθμος μας αρχικοποιεί τον παρακάτω γράφο ολοκλήρωσης,

$$(1) \quad \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1}) = \{\langle \mathsf{HotPinkRose}, \geq, 0.6\rangle, \langle\{\mathsf{o}_1\}, \geq, 1\rangle\}$$

Στη συνέχεια ο γράφος επεκτείνεται με βάσει τους κανόνες του Πίνακα 4.3 αλλά και τον κανόνα του Πίνακα 4.5. Πιο συγκεκριμένα μια από τις δυνατές ακολουθίες εφαρμογής των κανόνων στο γράφο αυτό είναι η ακόλουθη.

$$
\begin{array}{ll}
(2a) & \langle \neg\mathsf{HotPinkRose}, >, 1 - 0.6 + \epsilon\rangle \cup \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1}) \text{ περιέχει αντίφαση } (1), (2a) \mid \\
 & \quad (2b)\ \langle \exists \mathsf{nextGen.HotPinkRose}, \geq, 0.6\rangle \cup \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1}) \sqsubseteq\!: (1), n = 0.6 \\
(3b) & \langle \mathsf{HotPinkRose}, \geq, 0.6\rangle \in \mathcal{L}(y_1), \langle \mathsf{nextGen}, \geq, 0.6\rangle \in \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1}, y_1)\ \exists_{\geq} : (2b) \\
(4ab) & \langle \neg\mathsf{HotPinkRose}, >, 1 - 0.6 + \epsilon\rangle \cup \mathcal{L}(y_1) \text{ περιέχει αντίφαση } (3b), (4ab) \mid \\
 & \quad (4bb)\ \langle \exists \mathsf{nextGen.HotPinkRose}, \geq, 0.6\rangle \cup \mathcal{L}(x_1) \sqsubseteq\!: (3b), n = 0.6 \\
(5bb) & \langle \mathsf{HotPinkRose}, \geq, 0.6\rangle \in \mathcal{L}(y_2), \langle \mathsf{nextGen}, \geq, 0.6\rangle \in \mathcal{L}(y_1, y_2)\ \exists_{\geq} : (4bb)
\end{array}
$$

Στο σημείο αυτό η επέκταση σταματά διότι εφαρμόζεται το μπλοκάρισμα ζευγαρώματος. Πιο συγκεκριμένα, ο y_1 είναι `nextGen`*-διάδοχος του x_{o_1} και ο y_2* `nextGen`*-διάδοχος του y_1, $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1})$, $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2)$ και $\mathcal{L}(\langle x_{\mathsf{o}_1}, y_1\rangle) = \mathcal{L}(\langle y_1, y_2\rangle)$, άρα ο y_2 μπλοκάρεται από τον y_1 με βάση το μπλοκάρισμα ζευγαρώματος.* ♢

Παράδειγμα 4.4.3 *Έστω η βάση γνώσης $\Sigma = \langle\{C \sqsubseteq D\}, \{(a : C) > 0.3, (a : D) \leq 0.3\}\rangle$. Όπως είναι προφανές η βάση αυτή είναι μη-ικανοποιήσιμη. Πρώτα κανονικοποιούμε το σώμα ισχυρισμών οπότε προκύπτει η νέα βάση γνώσης Σ into $\Sigma = \langle\{C \sqsubseteq D\}, \{(a : C) \geq 0.3 + \epsilon, (a : D) \leq 0.3\}\rangle$, όπου ϵ είναι ένας μικρός θετικός αριθμός, για παράδειγμα $\epsilon = 0.01$. Σε δεύτερο βήμα μετατρέπουμε τους αρνητικούς ισχυρισμούς στην ΚΜΘΑ, πιο συγκεκριμένα τον ισχυρισμό $(a : D) \leq 0.3$ στον ισχυρισμό $(a : \neg D) \geq 0.7$. Συνεπώς, το σύνολο των βαθμών συμμετοχής που προκύπτει είναι το $N^{\mathcal{A}} = \{0, 0.5, 1\} \cup \{0.3, 0.3 + \epsilon, 0.7 - \epsilon, 0.7\}$. Ξεκινάμε αρχικοποιώντας τον γράφο ολοκλήρωσης ως,*

$$(1) \quad \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1}) = \{\langle C, \geq, 0.3 + \epsilon\rangle, \langle \neg D, \geq, 0.7\rangle\}$$

Στη συνέχεια ο γράφος επεκτείνεται με βάσει τους κανόνες του Πίνακα 4.3 αλλά και τον κανόνα του Πίνακα 4.5. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τα ακόλουθα βήματα.

$$
\begin{array}{ll}
(2a) & \langle \neg C, \geq, 1 - (0.3 + \epsilon) + \epsilon\rangle \cup \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1}) \mid \\
 & \quad (2b)\ \langle D, \geq, 0.3 + \epsilon\rangle \cup \mathcal{L}(x_{\mathsf{o}_1}) \sqsubseteq\!: (1), n = 0.3 + \epsilon \\
(3a) & \text{αντίφαση στο } (2a) : \langle \neg C, \geq, 1 - (0.3 + \epsilon) + \epsilon\rangle \equiv \langle \neg C, \geq, 0.7\rangle \text{ και } \langle C, \geq, 0.3 + \epsilon\rangle \\
(3b) & \text{αντίφαση στο } (2b) : \langle D, \geq, 0.3 + \epsilon\rangle \text{ και } \langle D, \leq, 0.3\rangle
\end{array}
$$

Παρατηρήστε ότι οποιοδήποτε άλλο βαθμό και αν είχαμε επιλέξει για την εφαρμογή του κανόνα $\sqsubseteq$ τελικά πάλι θα είχαμε καταλήξει σε αντίφαση γιατί πάλι σε κάποιο σημείο θα έπρεπε να επιλέξουμε το βαθμό $0.3 + \epsilon$. Απλώς στην περίπτωση αυτή θα υπάρξει μεγαλύτερη καθυστέρηση στην εύρεση της αντίφασης αυτής. ♢

Πίνακας 4.6: *Ο κανόνας* $\sqsubseteq'$

Κανόνας		Περιγραφή
$\sqsubseteq'$	αν 1.	$C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}$, x δεν είναι έμμεσα μπλοκαρισμένος και
	2.	$\{\langle \neg C, \geq, 1-n+\epsilon\rangle, \langle D, \geq, n\rangle\} \cap \mathcal{L}(x) = \emptyset$ για κάποιο $n \in N^{\mathcal{A}}$
	τότε	$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) \cup \{E\}$ για κάποιο $E \in \{\langle \neg C, \geq, 1-n+\epsilon\rangle, \langle D, \geq, n\rangle\}$, το οποίο δε συγκρούεται με την $\langle C, \geq, \mathcal{L}(\pi(x), C)\rangle$ ή την $\langle \neg D, \geq, 1-\mathcal{L}(\pi(x), D)\rangle$

Όσον αφορά στις αποδείξεις των θεωρημάτων τους τερματισμού, της ορθότητας και της πληρότητας αυτές συνεχίζουν να ισχύουν με πολύ μικρές τροποποίησεις. Ο τερματισμός είναι συνέπεια του πεπερασμένου πλήθους βαθμών συμμετοχής ο οποίος χρησιμοποιείται από τον κανόνα $\sqsubseteq$. Στην απόδειξη της ορθότητας, εφόσον έχουμε μόνο κανονικοποιημένες ανισότητες η συνάρτηση *glb* μπορεί να αντικατασταθεί από τη max. Αλλά και πάλι θα πρέπει να προσέξουμε την επιλογή της τιμής του παράγοντα ϵ ώστε να ερμηνεύσουμε σωστά τους περιορισμούς τιμής. Τέλος, όπως παρατηρούμε από τον Πίνακα 4.5 ο κανόνας $\sqsubseteq$ είναι και αυτός ένας μη-ντετερμινιστικός κανόνας. Έτσι λοιπόν για την περίπτωση της απόδειξης της πληρότητας ο κανόνας αυτός θα πρέπει να "οδηγηθεί". Ο τροποποιημένος κανόνας φαίνεται στον Πίνακα 4.6.

Κεφάλαιο 5

Ασαφής Επέκταση της Γλώσσας OWL

Στο παρόν κεφάλαιο προτείνουμε την ασαφή επέκταση της γλώσσας οντολογιών OWL, δημιουργώντας την *ασαφή OWL* (*fuzzy-OWL* ή *f-OWL*). Με τον τρόπο αυτό προσπαθούμε να δώσουμε μια γλώσσα αναπαράστασης γνώσης η οποία θα είναι ικανή να περιγράψει ασαφή και ανακριβή γνώση σε εφαρμογές του Σημασιολογικού Ιστού που αντιμετωπίζουν σημαντικό όγκο τέτοιας πληροφορίας. Παρόλο που όπως έχουμε προαναφέρει η fuzzy-OWL σχετίζεται άμεσα με την ασαφή Περιγραφική Λογική fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$, της οποίας η σύνταξη και η σημασιολογία έχει παρουσιαστεί στο [137], οι δυο αυτές γλώσσες εμφανίζουν και αρκετές διαφορές.

Πιο συγκεκριμένα, στην ενότητα 5.1 αφού εισάγουμε τη σύνταξη και τη σημασιολογία, θα μελετήσουμε τη σημασιολογία των αξιωμάτων πεδίου ορισμού και συνόλου τιμών ενός ασαφούς ρόλου. Περισσότερο όμως θα ασχοληθούμε με τη μελέτη της σημασιολογίας των αξιωμάτων ξένων ασαφών εννοιών. Όπως αποδεικνύεται είναι δυνατόν να αποδώσουμε δυο διαφορετικές σημασιολογίες στα αξιώματα αυτά, οι οποίες τις περισσότερες φορές διαφέρουν σημαντικά. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματά μας για τον ασαφή νόμο της αντίφασης μελετάμε τις σημασιολογίες αυτές και προσδοκούμε στο να αποφανθούμε ποιος από τους δυο τρόπους είναι ο καταλληλότερος για τις ασαφείς ΠΛ. Το πρόβλημα αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η έννοια των ξένων ασαφών συνόλων δεν είναι μελετημένη στη βιβλιογραφία. Στη συνέχεια στην ενότητα 5.2 παρουσιάζουμε τις επεκτάσεις που χρειάζεται η RDF/XML σύνταξη της OWL έτσι ώστε να μπορέσουμε να αναπαραστήσουμε ασάφεια. Τέλος, στην ενότητα 5.3 προτείνουμε μια μέθοδο αναγωγής του προβλήματος της συνεπαγωγής ασαφών οντολογιών OWL στο πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας βάσεων γνώσης ασαφών Περιγραφικών Λογικών. Όπως προκύπτει από το πρότυπο της OWL οι υπηρεσίες συλλογιστικής της OWL είναι ελάχιστα περισσότερες από αυτές των κλασικών ΠΛ, έτσι λοιπόν χρειάζεται επίσης να δείξουμε πώς αυτά τα προβλήματα μπορούν να αναχθούν στο πρόβλημα της συνέπειας. Η συνεισφορά αυτή, χωρίς όμως τις αποδείξεις τους, παρουσιάστηκαν στα [130] και [132], ενώ οι αποδείξεις βρίσκονται στο [125].

5.1 Σημασιολογία της Fuzzy-OWL

Η σύνταξη της ασαφούς επέκτασης της γλώσσας OWL, που θα παρουσιάσουμε, είναι σχεδόν παρόμοια με αυτή της γλώσσας OWL [11]. Έτσι λοιπόν μπορούμε να δημιουργήσουμε περιγραφές OWL κλάσεων (OWL class descriptions), αξιώματα κλά-

Πίνακας 5.1: *Περιγραφές Κλάσεων fuzzy-OWL*

Αφηρημένη Σύνταξη	Σύνταξη ΠΛ	Σημασιολογία
Class(A)	A	$A^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \to [0,1]$
Class(owl:Thing)	$\top$	$\top^{\mathcal{I}}(a) = 1$
Class(owl:Nothing)	$\bot$	$\bot^{\mathcal{I}}(a) = 0$
intersectionOf($C, D, \dots$)	$C \sqcap D$	$(C \sqcap D)^{\mathcal{I}}(a) = t(C^{\mathcal{I}}(a), D^{\mathcal{I}}(a))$
unionOf($C, D, \dots$)	$C \sqcup D$	$(C \sqcup D)^{\mathcal{I}}(a) = u(C^{\mathcal{I}}(a), D^{\mathcal{I}}(a))$
complementOf(C)	$\neg C$	$(\neg C)^{\mathcal{I}}(a) = c(C^{\mathcal{I}}(a))$
OneOf($o_1, o_2, \dots$)	$\{o_1\} \sqcup \{o_2\}$	$(\{o_1\} \sqcup \{o_2\})^{\mathcal{I}}(a) = \begin{cases} 1, & \text{αν } a \in \{o_1^{\mathcal{I}}, o_2^{\mathcal{I}}\} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$
restriction(R someValuesFrom(C))	$\exists R.C$	$(\exists R.C)^{\mathcal{I}}(a) = \sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b))$
restriction(R allValuesFrom(C))	$\forall R.C$	$(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a) = \inf_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b))$
restriction(R hasValue(o))	$\exists R.\{o\}$	$(\exists R.\{o\})^{\mathcal{I}}(a) = \sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a,b), \{o\}^{\mathcal{I}}(b))$
restriction(R minCardinality(m))	$\geq pR$	$(\geq pR)^{\mathcal{I}}(a) = \sup\limits_{b_1,\dots,b_p \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(\mathop{t}\limits_{i=1}^{p} R^{\mathcal{I}}(a,b_i), \mathop{t}\limits_{i<j}\{b_i \neq b_j\})$
restriction(R maxCardinality(m))	$\leq pR$	$(\leq pR)^{\mathcal{I}}(a) = \inf\limits_{b_1,\dots,b_{p+1} \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(\mathop{t}\limits_{i=1}^{p+1} R^{\mathcal{I}}(a,b_i), \mathop{u}\limits_{i<j}\{b_i = b_j\})$

σεων (class axioms) αλλά και αξιώματα ιδιοτήτων (property axioms) με ακριβώς τον ίδιο τρόπο ο οποίος ορίζεται από τη γλώσσα OWL και παρουσιάστηκε στην ενότητα 2.2. Για παράδειγμα μπορούμε να ορίσουμε την κλάση των αντικειμένων που έχουν άσπρο χρώμα ως την τομή των κλάσεων των αντικειμένων που είναι ταυτόχρονα μπλε, πράσινα και κόκκινα. Σε αφηρημένη σύνταξη η δήλωση αυτή είναι η ακόλουθη, Class(White complete intersectionOf(Red Green Blue)).

Οι διαφορές ανάμεσα στη γλώσσα OWL και την fuzzy-OWL εστιάζονται μόνο στη δήλωση των OWL γεγονότων (OWL facts). Στην περίπτωση της fuzzy-OWL, εκτός από τη δήλωση ότι ένα άτομο (ζεύγος ατόμων) σχετίζεται με μια κλάση (ιδιότητα), χρειαζόμαστε επιπλέον να δηλώσουμε το βαθμό συμμετοχής του ατόμου (ζεύγους ατόμων) στην κλάση (ιδιότητα) αλλά επιπρόσθετα και μια ανισότητα, όπως συμβαίνει άλλωστε και στους ασαφείς ισχυρισμούς της γλώσσας f-$\mathcal{SHOIN}$. Ακολουθώντας την ορολογία της γλώσσας OWL ονομάζουμε τα αξιώματα αυτά ως *ασαφή γεγονότα* (*fuzzy facts*). Χρησιμοποιώντας τα ασαφή γεγονότα μπορούμε να δηλώσουμε ότι η περιοχή μιας εικόνας, reg_1, είναι μπλε σε βαθμό μεγαλύτερο ίσο του 0.8. Όπως θα δούμε και στη συνέχεια, η δήλωση του αξιώματος αυτού σε αφηρημένη σύνταξη είναι η ακόλουθη: Individual(reg_1 type(Blue) >= 0.8).

Παρότι οι τροποποιήσεις που επιβάλλουμε στο συντακτικό της OWL είναι οι ελάχιστες δυνατές, για να αποδώσουμε ασαφές νόημα στα δομικά στοιχεία της γλώσσας (κλάσεις, ιδιότητες και αξιώματα) πρέπει να επεκτείνουμε τη σημασιολογία της γλώσσας. Στην περίπτωση της OWL DL, την οποία και εξετάζουμε, οι ερμηνείες είναι παρόμοιες με αυτές των ΠΛ που είδαμε στο κεφάλαιο 3. Έτσι λοιπόν ορίζουμε και εδώ μια *ασαφή ερμηνεία* (*fuzzy interpretation*) της f-OWL $\mathcal{I}$, ως ένα ζεύγος $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$, όπου $\Delta^{\mathcal{I}}$ είναι ο χώρος ερμηνείας, και $\cdot^{\mathcal{I}}$ μια ασαφής συνάρτηση ερμηνείας που αντιστοιχεί ένα άτομο $a \in \mathbf{I}$ σε ένα στοιχείο $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$, μια κλάση της f-OWL A σε μια συνάρτηση συμμετοχής $\mathsf{A}^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \to [0,1]$ και μια ιδιότητα αντικειμένων της f-OWL $R \in \mathbf{R}$ σε μια δυαδική συνάρτηση συμμετοχής $R^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \to [0,1]$.

Μια ασαφής ερμηνεία της γλώσσας f-OWL μπορεί να επεκταθεί για να αποδώσει σημασιολογία σε περιγραφές ασαφών κλάσεων, αξιώματα ασαφών κλάσεων και αξιώματα ασαφών ιδιοτήτων. Στους Πίνακες 5.1 και 5.2 μπορούμε να δούμε την αφηρημένη σύνταξη μιας περιγραφής fuzzy-OWL κλάσης, την αντίστοιχη δήλωση σε Περιγραφικές Λογικές και τη σημασιολογία της δήλωσης αυτής. Οι αγκύλες ([ ]) που εμφανίζονται στα αξιώματα των ασαφών γεγονότων δηλώνουν ότι τα πεδία αυτά είναι

Πίνακας 5.2: *Αξιώματα ασαφούς OWL*

Αφηρημένη Σύνταξη	Σύνταξη ΠΛ	Σημασιολογία
(Class A partial $C_1 \ \dots \ C_n$)	$A \sqsubseteq \prod_{i=1}^{n} C_i$	$A^{\mathcal{I}}(a) \leq t(C_1^{\mathcal{I}}(a), \dots, C_n^{\mathcal{I}}(a))$
(Class A complete $C_1 \ \dots \ C_n$)	$A \equiv \prod_{i=1}^{n} C_i$	$A^{\mathcal{I}}(a) = t(C_1^{\mathcal{I}}(a), \dots, C_n^{\mathcal{I}}(a))$
(EnumeratedClass $A \ o_1 \ \dots \ o_n$)	$A \equiv \bigsqcup_{i=1}^{n} \{o_i\}$	$A^{\mathcal{I}}(a) = \begin{cases} 1, & \text{αν } a \in \{o_1^{\mathcal{I}}\} \cup \ldots \cup \{o_n^{\mathcal{I}}\} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$
(SubClassOf C_1, C_2)	$C_1 \sqsubseteq C_2$	$C_1^{\mathcal{I}}(a) \leq C_2^{\mathcal{I}}(a)$
(EquivalentClasses $C_1 \ \dots \ C_n$)	$C_i \equiv C_j$	$C_i^{\mathcal{I}}(a) = C_j^{\mathcal{I}}(a), 1 \leq i < j \leq n$
(DisjointClasses $C_1 \ \dots \ C_n$)	$C_i \sqcap C_j \sqsubseteq \bot$	$t(C_i^{\mathcal{I}}(a), C_j^{\mathcal{I}}(a)) = 0, \ 1 \leq i < j \leq n$
	$C_i \sqsubseteq \neg C_j$	$C_i^{\mathcal{I}}(a) \leq (\neg C_j)^{\mathcal{I}}(a), \ 1 \leq i < j \leq n$
(SubPropertyOf R_1, R_2)	$R_1 \sqsubseteq R_2$	$R_1^{\mathcal{I}}(a,b) \leq R_2^{\mathcal{I}}(a,b)$
(EquivalentProperties $R_1 \ \dots \ R_n$)	$R_i \equiv R_j$	$R_i^{\mathcal{I}}(a,b) = R_j^{\mathcal{I}}(a,b), 1 \leq i < j \leq n$
ObjectProperty(R super(R_1) ... super(R_n)	$R \sqsubseteq R_i$	$R^{\mathcal{I}}(a,b) \leq R_i^{\mathcal{I}}(a,b)$
domain(C_1) ... domain(C_k)	$\exists R.\top \sqsubseteq C_i$	$R^{\mathcal{I}}(a,b) \leq C_i^{\mathcal{I}}(a)$
range(C_1) ... range(C_h)	$\top \sqsubseteq \forall R.C_i$	$1 \leq \mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a,b), C_i^{\mathcal{I}}(b))$
[InverseOf(S)]	$R \equiv S^-$	$R^{\mathcal{I}}(a,b) = (S^-)^{\mathcal{I}}(a,b)$
[Symmetric]	$R \equiv R^-$	$R^{\mathcal{I}}(a,b) = (R^-)^{\mathcal{I}}(a,b)$
[Functional]	$\top \sqsubseteq \leqslant 1R$	$\inf_{b_1,b_2 \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(\overset{2}{\underset{i=1}{t}} R^{\mathcal{I}}(a,b_i), b_1 = b_2) \geq 1$
[InverseFunctional]	$\top \sqsubseteq \leqslant 1R^-$	$\inf_{b_1,b_2 \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(\overset{2}{\underset{i=1}{t}} (R^-)^{\mathcal{I}}(a,b_i), b_1 = b_2) \geq 1$
[Transitive])	$\mathsf{Trans}(R)$	$\sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a,b), R^{\mathcal{I}}(b,c)) \leq R^{\mathcal{I}}(a,c)$
Individual(o type(C_1) [$\bowtie$] [l_1]...type(C_n) [$\bowtie$] [l_n]	$(o : C_i) \bowtie l_i$	$C_i^{\mathcal{I}}(o^{\mathcal{I}}) \bowtie l_i, l_i \in [0,1], 1 \leq i \leq n$
value(R_1, o_1) [$\bowtie$] [k_1]...value(R_ℓ, o_ℓ)) [$\bowtie$] [k_ℓ]	$((o, o_i) : R_i) \bowtie k_i$	$R_i^{\mathcal{I}}(o^{\mathcal{I}}, o_i^{\mathcal{I}}) \bowtie k_i, k_i \in [0,1], 1 \leq i \leq \ell$
Sameindividual($o_1 \ \dots \ o_n$)	$o_1 = \cdots = o_n$	$o_1^{\mathcal{I}} = \cdots = o_n^{\mathcal{I}}$
DifferentIndividuals($o_1 \ \dots \ o_n$)	$o_i \neq o_j$	$o_i^{\mathcal{I}} \neq o_j^{\mathcal{I}}, 1 \leq i < j \leq n$

προαιρετικά. Σε επόμενες ενότητες θα αναλυθεί περαιτέρω το θέμα αυτό.

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις για τις εξισώσεις που εμφανίζονται στον Πίνακα 5.2. Πρώτον, η σημασιολογία των αξιωμάτων ορισμού του πεδίου ορισμού μιας ασαφούς ιδιότητα προκύπτει από την ερμηνεία του αξιώματος Περιγραφικής Λογικής, $\exists R.\top \sqsubseteq C_i$. Πιο συγκεκριμένα η υπαγωγή αυτή ικανοποιείται αν,

$$a \in \Delta^{\mathcal{I}}, \ \sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a,b), 1) \leq C_i^{\mathcal{I}}(a).$$

Εφόσον η ανισότητα ισχύει για το supremum, θα ισχύει για ένα οποιοδήποτε $b \in \Delta^{\mathcal{I}}$ έτσι λοιπόν ισχύει ότι,

$$t(R^{\mathcal{I}}(a,b), 1) \leq C_i^{\mathcal{I}}(a)$$

και τέλος, λόγω της οριακής συνθήκης των τ-νορμών η ανισότητα μπορεί να απλοποιηθεί στην μορφή,

$$R^{\mathcal{I}}(a,b) \leq C_i^{\mathcal{I}}(a).$$

Παρομοίως, η σημασιολογία των αξιωμάτων ορισμού του πεδίου τιμών μιας ασαφούς ιδιότητας προκύπτει από την ανισότητα $1 \leq \inf_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a,b), C_i^{\mathcal{I}}(b))$ η οποία αποτελεί ερμηνεία τους αξιώματος $\top \sqsubseteq \forall R.C_i$, θεωρώντας ένα οποιοδήποτε αντικείμενο $b \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Στην περίπτωση τώρα που χρησιμοποιούμε R-συνεπαγωγές, με χρήση των ιδιοτήτων τους, η παραπάνω ανισότητα μπορεί να απλοποιηθεί και να γραφτεί ως, $R^{\mathcal{I}}(a,b) \leq C_i^{\mathcal{I}}(b)$. Στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε S-συνεπαγωγές, μια τέτοια απλοποιημένη μορφή δεν μπορεί να επιτευχθεί. Όπως λοιπόν παρατηρούμε, οι R-συνεπαγωγές αποδίδουν καλύτερο διαισθητικά νόημα στα αξιώματα αυτά από τις S-συνεπαγωγές.

Τέλος παρατηρούμε ότι στην περίπτωση των αξιωμάτων ξένων κλάσεων αποδίδουμε δυο διαφορετικές ερμηνείες. Αυτές προκύπτουν από την ασαφοποίηση δυο *συντακτικά* διαφορετικών αλλά *σημασιολογικά* ισοδύναμων αξιωμάτων που χρησιμοποιούνται στις ΠΛ για τη δήλωση τέτοιων αξιωμάτων. Πιο συγκεκριμένα στις ΠΛ μια κλάση είναι ξένη με μια άλλη αν ισχύει ότι $C \sqsubseteq \neg D$ ή $C \sqcap D \sqsubseteq \bot$. Όπως είναι προφανές στην κλασική λογική του Boole (Boolean logic) τα αξιώματα αυτά είναι ισοδύναμα. Κάτι τέτοιο όμως δεν ισχύει *πάντα* στην ασαφή λογική. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 5.1.1 *Έστω $\langle c, t, u \rangle$ μια ασαφής τριάδα η οποία ικανοποιεί το νόμο της αντίφασης (law of contradiction). Τότε, $C \sqcap D \sqsubseteq \bot$, ανν $C \sqsubseteq \neg D$.*

Απόδειξη: Έστω ότι $C \sqcap D \sqsubseteq \bot$, ισχύει για κάθε ασαφή ερμηνεία $\mathcal{I}$. Αυτό σημαίνει ότι $\forall x \in \Delta^{\mathcal{I}}.t(C^{\mathcal{I}}(x), D^{\mathcal{I}}(x)) \leq 0$. Εφόσον η ασαφής τριάδα ικανοποιεί το νόμο της αντίφασης έχουμε ότι, $\forall x \in \Delta^{\mathcal{I}}.t(C^{\mathcal{I}}(x), D^{\mathcal{I}}(x)) \leq t((\neg D)^{\mathcal{I}}(x), D^{\mathcal{I}}(x))$ και λόγω της ιδιότητας της μονοτονίας των τ-νορμών, έχουμε ότι, $\forall x \in \Delta^{\mathcal{I}}.C^{\mathcal{I}}(x) \leq \neg D^{\mathcal{I}}(x)$. Εφόσον η σχέση αυτή ισχύει για κάθε ασαφή ερμηνεία $\mathcal{I}$ μπορούμε να αφαιρεθούμε από τις ερμηνείες και να γράψουμε ότι γενικά ισχύει ότι, $C \sqsubseteq \neg D$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να εργαστούμε και στην περίπτωση στην οποία ισχύει, $C \sqsubseteq \neg D$, για κάθε ασαφή ερμηνεία $\mathcal{I}$. ■

Στην περίπτωση που ο νόμος της αντίφασης δεν ισχύει, αυτοί οι δυο ορισμοί του αξιώματος ξένων κλάσεων έχουν τελείως διαφορετικές ιδιότητες. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι έχουμε το αξίωμα DisjointClasses(C C). Χρησιμοποιώντας το πρώτο αξίωμα του Πίνακα 5.2 λαμβάνουμε $t(C^{\mathcal{I}}(a), C^{\mathcal{I}}(a)) = 0$, για κάθε $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Τώρα αν t είναι η τομή Gödel ή η συνάρτηση γινομένου λαμβάνουμε ότι, $t(C^{\mathcal{I}}(a), C^{\mathcal{I}}(a)) = 0$ ανν $C^{\mathcal{I}}(a) = 0$, για κάθε $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Αυτό διαισθητικά σημαίνει ότι η έννοια C ερμηνεύεται με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο ερμηνεύεται και η κενή έννοια (κλάση). Από την άλλη μεριά, αν χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο αξίωμα λαμβάνουμε, $C^{\mathcal{I}}(a) \leq c(C^{\mathcal{I}}(a))$ και αν c είναι η άρνηση Lukasiewicz έχουμε $C^{\mathcal{I}}(a) \leq 1 - C^{\mathcal{I}}(a) \Rightarrow C^{\mathcal{I}}(a) \leq \frac{1}{2}$. Όπως παρατηρούμε ο πρώτος ορισμός είναι πιο κοντά στην κλασική λογική (τη λογική του Boole) για το τι σημαίνει ένα αξίωμα ξένων κλάσεων. Από την άλλη μεριά, όμως, ο δεύτερος ορισμός, παρόλο που εμφανίζει κάποιες ανεπιθύμητες ιδιότητες σε κάποιες οριακές περιπτώσεις, μπορεί να θεωρηθεί ως μια μορφή ασαφοποίησης της έννοιας των ξένων κλάσεων. Γενικώς, από όσο γνωρίζουμε, ένας κατάλληλος ορισμός για την έννοια των ξένων ασαφών συνόλων δεν έχει δοθεί στη βιβλιογραφία των ασαφών συνόλων. Ακόμα και στο [9] στο οποίο γίνεται αναφορά για τα ασαφή ξένα σύνολα οι συγγραφείς χρησιμοποιούν και πάλι τις δυο παραπάνω μορφές χωρίς να προτείνουν μια από τις δυο. Έτσι λοιπόν είναι δύσκολο να επιλέξουμε ανάμεσα σε αυτούς τους δυο ορισμούς χωρίς να έχουμε κάποια ένδειξη υπέρ του ενός ή του άλλου. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να δώσουμε κάποια ένδειξη υπέρ ενός από τα αξιώματα αυτά. Το ενδιαφέρον είναι ότι για ακόμα μια φορά θα χρησιμοποιήσουμε τους ασαφοποιημένους κανόνες της κλασικής λογικής, που παρουσιάσαμε στο Λήμμα 3.3.1, και αυτή τη φορά τον νόμο της αντίφασης.

Έστω ότι χρησιμοποιούμε το κλασικό αξίωμα ξένων εννοιών $C \sqcap D \sqsubseteq \bot$, αλλά αντίθετα αντί να το ερμηνεύσουμε με τον τρόπο που ερμηνεύουμε τα κλασικά αξιώματα υπαγωγής ας χρησιμοποιήσουμε τον ασαφοποιημένο νόμο της αντίφασης του Λήμματος 3.3.1. Σύμφωνα με το λήμμα αυτό το παραπάνω αξίωμα πρέπει να διαβαστεί ως: Αν $C^{\mathcal{I}}(a) = n_1$ και $D^{\mathcal{I}}(a) = n_2$, τότε $\bot^{\mathcal{I}}(a) = \max(0, n_1 + n_2 + C^{\mathcal{I}}(a) + c(C^{\mathcal{I}}(a)))$. Η ερμηνεία της έννοιας $\bot$ είναι συνεπής με τη σημασιολογία των ασαφών ΠΛ αν

$\bot^{\mathcal{I}}(a) = 0$, για κάθε $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και $\mathcal{I}$. Συνεπώς έχουμε τα εξής:

$$n_1 + n_2 \leq C^{\mathcal{I}}(a) + c(C^{\mathcal{I}}(a)) \Rightarrow C^{\mathcal{I}}(a) + D^{\mathcal{I}}(a) \leq C^{\mathcal{I}}(a) + c(C^{\mathcal{I}}(a)) \Rightarrow D^{\mathcal{I}}(a) \leq c(C^{\mathcal{I}}(a)).$$

Αν το c είναι ενειλικτικό τότε λαμβάνουμε $c(D^{\mathcal{I}}(a)) \geq C^{\mathcal{I}}(a)$. Εφόσον η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $\mathcal{I}$ και $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τότε μπορούμε να αφαιρεθούμε από τις ερμηνείες και να γράψουμε $C \sqsubseteq \neg D$. Εν' κατακλείδι διαφαίνεται ότι η σημασιολογία που προκείπτει από τα αξιώματα υπαγωγής $C \sqsubseteq \neg D$ είναι περισσότερο κατάλληλη για τις ασαφείς ΠΛ. Από όσο γνωρίζουμε αυτή είναι και η πρώτη απόπειρα για έναν σωστό και κατάλληλο ορισμό της έννοιας των ξένων ασαφών εννοιών και κατ' επέκταση και των ξένων ασαφών συνόλων στη βιβλιογραφία.

Τελειώνοντας την παρουσίαση μας για τη σημασιολογία της ασαφούς OWL θα αναφέρουμε μερικούς ορισμούς. Μια *ασαφής οντολογία* (*fuzzy ontology*) O, αποτελείται από ένα σύνολο αξιωμάτων fuzzy-OWL. Λέμε ότι μια ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι *μοντέλο* της O ανν ικανοποιεί όλα τα αξιώματα που αποτελούν την O. Θα λέμε ότι μια ασαφής οντολογία O_1 *συνεπάγεται λογικά* (*entails*) μια ασαφή οντολογία O_2, και θα γράφουμε $O_1 \models O_2$, αν κάθε μοντέλο της O_1 είναι και μοντέλο της O_2.

5.2 Αφηρημένη και RDF/XML Σύνταξη fuzzy-OWL

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στην αφηρημένη και στην RDF/XML σύνταξη της fuzzy-OWL.

Ο Πίνακας 5.3 παρουσιάζει την αφηρημένη σύνταξη των ασαφών γεγονότων της γλώσσας f-OWL. Παρατηρούμε ότι ο συνήθης ορισμός των γεγονότων της γλώσσας OWL έχει επεκταθεί προκειμένου να είναι δυνατή η δήλωση του βαθμού συμμετοχής αλλά και του τύπου της ανισότητας που θέλουμε να χρησιμοποιηθεί. Για το λόγο αυτό ορίζονται ορισμένα νέα στοιχεία, αυτό του *membership*, το οποίο αντιπροσωπεύει μια γενικότερη δήλωση συμμετοχής και το οποίο αποτελείται από δυο επιμέρους στοιχεία, αυτά του *ineqType* και *degree*. Το στοιχείο ineqType χρησιμοποιείται για να δηλωθεί ο τύπος της ανισότητας. Έτσι λοιπόν οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει είναι ένα από τα αλφαριθμητικά “>=”, “<=”, “>” and “<” αλλά και η αυστηρή ισότητα (“=”). Τέλος το στοιχείο degree χρησιμοποιείται για να δηλώσουμε το βαθμό συμμετοχής του συγκεκριμένου ατόμου στην αντίστοιχη κλάση και είναι τύπου πραγματικού αριθμού από το διάστημα $[0, 1]$.

Πίνακας 5.3: *Αφηρημένη Σύνταξη της Γλώσσας f-OWL*

individual	::=	‘Individual(’ [individualID] {annotation}
		{‘type’(type ‘)’ membership} {value membership } ‘)’
membership	::=	[ineqType] [degree]
ineqType	::=	‘=’ | ‘>=’ | ‘>’ | ‘<=’ | ‘<’
degree	::=	‘degree(’ real-number-between-0-and-1-inclusive ‘)’

Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη ενότητα οι αγκύλες χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν ότι τα πεδία ineqType και degree είναι προαιρετικά. Στην περίπτωση την οποία σε κάποιο ασαφές γεγονός δε δηλωθούν είναι διαισθητικά λογικό να υποθέσουμε ότι ο βαθμός ο οποίος υπονοείται είναι αυτός του 1 (δηλαδή πλήρης συμμετοχή) ενώ ως τύπο ανισότητας να λάβουμε την αυστηρή ισότητα (=). Έτσι λοιπόν η επέκτασή μας είναι απολύτως συμβατή με την κλασική OWL καθώς τα μη ασαφή γεγονότα της

OWL ερμηνεύονται ως ασαφή γεγονότα στα οποία υπάρχει πλήρης συμμετοχή του ατόμου στην κλάση. Επιπρόσθετα παρατηρούμε ότι το στοιχείο membership μπορεί να τοποθετηθεί τόσο μετά το στοιχείο type όσο και μετά το στοιχείο value. Στην πρώτη περίπτωση μπορούμε να δηλώσουμε ασαφή γεγονότα ανάμεσα σε ένα άτομο και μια κλάση ενώ στη δεύτερη περίπτωση ανάμεσα σε ένα ζεύγος αντικειμένων και μια ιδιότητα.

Ας εστιάσουμε τώρα στην RDF/XML σύνταξη της fuzzy-OWL. Για να παρουσιάσουμε τη σύνταξη αυτή θα αναφερθούμε σε μερικά παραδείγματα. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να οργανώσουμε ένα ταξίδι διακοπών. Μια τέτοια γνώση μπορεί να περιέχει ασαφή γεγονότα, όπως για παράδειγμα ότι η Ρώμη είναι κοντά με την Αθήνα με βαθμό ίσο με 0.75, ότι είναι ζεστό μέρος με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο με 0.7, ότι η Αθήνα είναι κοντά στην Κύπρο με βαθμό μεγαλύτερο ίσο από 0.6 και είναι ζεστό μέρος με βαθμό μεγαλύτερο ίσο από 0.8. Όπως συμβαίνει με τις γλώσσες OWL και RDF υπάρχουν δυο τρόποι να γράψουμε τη γνώση μας αυτή. Πρώτα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνεπτυγμένη μορφή της RDF/XML και να γράψουμε,

```
<HotPlace rdf:about="Rome" owlx:ineqType="≥" owlx:degree="0.7">
  <closeTo rdf:resource="Athens" owlx:degree="0.75"/>
</HotPlace>
```

Από την άλλη μεριά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το στοιχείο `rdf:Description` της RDF και να δώσουμε μια διαφορετική μορφή των δήλωσης ασαφών γεγονότων. Χρησιμοποιώντας το στοιχείο αυτό η ασαφής γνώση μας για την Αθήνα μπορεί να δηλωθεί από το ακόλουθο αξίωμα:

```
<rdf:Description rdf:about="Athens">
  <rdf:type rdf:resource="HotPlace" owlx:ineqType="≥" owlx:degree="0.8"/>
  <closeTo rdf:resource="Cyprus" owlx:ineqType="≥" owlx:degree="0.6"/>
</rdf:Description>
```

5.3 Αναγωγή στη γλώσσα f-$\mathcal{SHOIN}$

Το ερώτημα που τίθεται λοιπόν τώρα είναι αν μπορούμε να βρούμε έναν αλγόριθμο εξαγωγής συμπερασμάτων για την fuzzy-OWL ο οποίος θα μπορεί να παρέχει υπηρεσίες συλλογιστικής, όπως τον έλεγχο για το αν μια ασαφής οντολογία συνεπάγεται μια άλλη. Ας εξετάσουμε πρώτα τι συμβαίνει στην κλασική περίπτωση της γλώσσας OWL.

Όπως έχει γίνει προφανές από τα προηγούμενα κεφάλαια, η OWL δεν προσθέτει ουσιαστικά κάποια μεγαλύτερη εκφραστική δυνατότητα από αυτή των Περιγραφικών Λογικών. Αντίθετα ο σκοπός της είναι να δώσει μια εκφραστική γλώσσα η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί από ανθρώπους που έχουν από μικρή έως καθόλου γνώση των Περιγραφικών Λογικών για την αναπαράσταση γνώσης. Γι αυτό το λόγο προσφέρει κατασκευαστές οι οποίοι ουσιαστικά είναι συντακτική ζάχαρη αντίστοιχων Περιγραφικών Λογικών. Στο [65] οι συγγραφείς προτείνουν μια μέθοδο μετάφρασης μιας OWL οντολογίας σε μια βάση γνώσης Περιγραφικής Λογικής. Επιπλέον, τρόπο όλα τα ερωτήματα συλλογιστικής που απευθύνονται σε μια OWL οντολογία μπορούν να μετατραπούν στα συνήθη ερωτήματα συλλογιστικής των ΠΛ, για τα οποία έχουν αναπτυχθεί αλγόριθμοι και υλοποιηθεί βελτιστοποιημένες πλατφόρμες εξαγωγής συμπερασμάτων. Με τη σειρά μας, για να μπορέσουμε να προσφέρουμε υπηρεσίες συλλογιστικής στην fuzzy-OWL θα εξετάσουμε την αναγωγή των αξιωμάτων fuzzy-OWL σε αξιώματα ασαφών ΠΛ.

Το πρώτο βήμα σε μια τέτοια αναγωγή είναι να δούμε πώς μεταφράζονται οι περιγραφές και τα αξιώματα των ασαφών κλάσεων και ιδιοτήτων σε περιγραφές ασαφών εννοιών και αξιωμάτων ασαφών ΠΛ. Μια τέτοια αναγωγή περιγράφεται στο [65]. Εφόσον δεν προτείνουμε κάποια συντακτική επέκταση στα αξιώματα και τις περιγραφές των ασαφών κλάσεων και ιδιοτήτων η αναγωγή αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην fuzzy-OWL. Η αναγωγή αυτή δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας επαγωγικός ορισμός μιας απεικόνισης ($\mathcal{V}$) η οποία βασίζεται στην αντιστοιχία ανάμεσα στα αξιώματα και της περιγραφές των κλάσεων και των ιδιοτήτων και στα ΠΛ αξιώματα τα οποία έχουμε παρουσιάσει στους Πίνακες 5.1 και 5.2. Η μόνη ουσιαστική διαφορά μας με την αναγωγή στο [65] είναι η διαχείριση των αξιωμάτων ξένων κλάσεων. Ενώ στην κλασική OWL τα αξιώματα αυτά μεταφράζονται στο αξίωμα ΠΛ, $C \sqsubseteq \neg D$, στην τρέχουσα παρουσίαση θα υποθέσουμε ότι σε αυτά τα αξιώματα αποδίδουμε τη σημασιολογία η οποία προκύπτει από το αξίωμα $C \sqcap D \sqsubseteq \bot$.

Πίνακας 5.4: *Μετάφραση γεγονότων f-OWL σε ισχυρισμούς f-ΠΛ*

Τμήμα ασαφούς γεγονότος	**Μετάφραση** $\mathcal{F}(F)$
Individual($x_1 \bowtie n_1 ... x_p \bowtie n_p$)	$\mathcal{F}(a : x_1 \bowtie n_1), ..., \mathcal{F}(a : x_n \bowtie n_p)$ όπου a νέο άτομο
$a : type(C) \bowtie n$	$(a : \mathcal{V}(C)) \bowtie n$
$a : type(C)$	$(a : \mathcal{V}(C)) = 1$
$a : value(R\ x) \bowtie n$	$((a, b) : R) \bowtie n$, $\mathcal{F}(b : x)$ όπου b ένα νέο άτομο
$a : value(R\ x)$	$((a, b) : R) = 1$, $\mathcal{F}(b : x)$ όπου b ένα νέο άτομο
$a : o$	$a = o$
Sameindividual($o_1\ \ldots\ o_n$)	$\mathcal{V}(o_i) = \mathcal{V}(o_j)$ $1 \leq i < j \leq n$
DifferentIndividuals($o_1\ \ldots\ o_n$)	$\mathcal{V}(o_i) \neq \mathcal{V}(o_j)$ $1 \leq i < j \leq n$

Έχοντας μεταφράσει τα αξιώματα και τις περιγραφές ασαφών κλάσεων και ιδιοτήτων μας μένει μόνο η μετάφραση των ασαφών γεγονότων. Όπως επισημαίνεται και στο [65], το σημείο αυτό αποτελεί ίσως το πιο δύσκολο της όλης αναγωγής. Αυτό συμβαίνει διότι τα γεγονότα OWL μπορούν να δηλωθούν σε σχέση με *ανώνυμα άτομα* (anonymous individuals). Στο [65] δυο αναγωγές παρουσιάστηκαν, μια για τη γλώσσα OWL DL και μια για τη γλώσσα OWL Lite. Αυτό συμβαίνει διότι η OWL DL εμπεριέχει τελεστές τους οποίους η OWL Lite δεν υποστηρίζει, όπως για παράδειγμα οι ονοματικές έννοιες. Έτσι λοιπόν και η αναγωγή των γεγονότων στην OWL DL κάνει χρήση κάποιων από αυτούς τους τελεστές για να αποδοθεί μια περιεκτική αναγωγή. Αξίζει στο σημείο αυτό να σημειώσουμε ότι η αναγωγή που χρησιμοποιήθηκε στη γλώσσα OWL Lite μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στη γλώσσα OWL DL (το αντίστροφο δε μπορεί να συμβεί). Μελετώντας προσεκτικά τις αναγωγές που έχουν προταθεί για την κλασική OWL, θα διαπιστώσουμε ότι στην περίπτωση της fuzzy-OWL μόνο η μετάφραση της OWL Lite μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στις δυο περιπτώσεις. Αυτό συμβαίνει διότι η ασαφής-OWL περιέχει βαθμούς συμμετοχής αλλά και ανισότητες οι οποίες δεν μπορούν να απαλειφθούν με τη χρήση ονοματικών εννοιών. Για παράδειγμα, ενώ τα αξιώματα (γεγονότα) $a : C, R(a, b)$ μπορούν να μεταφραστούν στο μοναδικό γεγονός $a : C \sqcap \exists R.\{b\}$ (σε αυτήν την ιδέα βασίζεται η

Πίνακας 5.5: *Από τη λογική συνεπαγωγή στη μη-ικανοποιησιμότητα*

Αξίωμα A	Μετατροπή $\mathcal{G}(A)$
$C \sqsubseteq D$	$\{(x:C) \geq n, (x:D) < n\rangle\}$, $\forall n \in [0,1]$
$\mathsf{Trans}(R)$	$\{(x:\exists R.(\exists R.\{y\})) \geq n, (x:\exists R.\{y\}) < n\}$, $\forall n \in [0,1]$
$R \sqsubseteq S$	$\{(x:\exists R.\{y\}) \geq n, (x:\exists S.\{y\}) < n\}$, $\forall n \in [0,1]$
$(a:C)\bowtie n$	$(a:C)\neg \bowtie n$
$((a,b):R)\bowtie n$	$(a:\forall R.\neg B) + \bowtie u(c(n), c(n)), (b:B)\bowtie n$, όπου B μια νέα έννοια για τις f_S-OWL γλώσσες $(a:\forall R.\neg B) \geq 1, (b:B) + \bowtie c(n)$, όπου B μια νέα έννοια για τις f_R-OWL γλώσσες
$a = b$	$a \neq b$
$a \neq b$	$a = b$

μετάφραση της OWL DL), τα ασαφή γεγονότα $a : C \geq 0.6, R(a,b) \geq 0.8$ δεν μπορούν. Στον Πίνακα 5.4 ορίζουμε επαγωγικά μια απεικόνιση ($\mathcal{F}$) η οποία μετατρέπει τα ασαφή γεγονότα της fuzzy-OWL σε ισχυρισμούς f-$\mathcal{SHOIN}$.

Ας δούμε με ένα παράδειγμα πώς λειτουργεί η απεικόνιση $\mathcal{F}$. Έστω το αξίωμα, Individual(type(C) value(R Individual(type(D) >= 0.8)) > 0.7). Αν εφαρμόσουμε την απεικόνιση $\mathcal{F}$ αυτό το ασαφές γεγονός μεταφράζεται στους ασαφείς ισχυρισμούς, $(a : \mathcal{V}(C)) = 1$, $((a,b) : R) > 0.7$ and $(b : \mathcal{V}(D)) \geq 0.8$. Όπως παρατηρούμε στο αξίωμα αυτό γίνεται χρήση δυο ανώνυμων ατόμων, τόσο για τη συμμετοχή στην κλάση C όσο και στη συμμετοχή στην ιδιότητα R. Έτσι λοιπόν, η απεικόνιση $\mathcal{F}$ εισάγει δυο νέα άτομα a και b, τα οποία χρησιμοποιούνται στους ασαφείς ισχυρισμούς.

Θεώρημα 5.3.1 *Η αναγωγή της fuzzy-OWL DL και της fuzzy-OWL Lite στην fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$ και fuzzy-$\mathcal{SHIF}$, αντίστοιχα, διατηρεί την ικανοποιησιμότητα. Αυτό σημαίνει ότι, ένα f-OWL DL (αντίστοιχα f-OWL Lite) αξίωμα ή γεγονός ικανοποιείται από μια ασαφή ερμηνεία $\mathcal{I}$ ανν η αντιστοίχηση ικανοποιείται από την $\mathcal{I}$.*

Για παράδειγμα, έστω O_1 και O_2 δύο ασαφείς οντολογίες και K_1 και K_2 δυο ασαφείς βάσεις γνώσης οι οποίες προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου της αναγωγής στις O_1 και O_2, αντίστοιχα. Τότε $O_1 \models O_2$ ανν $K_1 \models K_2$. Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι $K_1 \models K_2$ ανν $K_1 \models A$ για κάθε αξίωμα A της K_2.

Με βάση τα προηγούμενα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πρέπει να ανάγουμε το πρόβλημα της συνεπαγωγής μιας βάσης γνώσης f-$\mathcal{SHOIN}$ από μια άλλη στο πρόβλημα της μη-ικανοποιησιμότητας μιας f-$\mathcal{SHOIN}$ βάσης γνώσης. Πιο συγκεκριμένα, πρέπει να ορίσουμε μια απεικόνιση $\mathcal{G}$ τέτοια ώστε $K \models A$ ανν $K \cup \{\mathcal{G}(A)\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμη. Ο ορισμός μιας τέτοιας απεικόνισης φαίνεται στον Πίνακα 5.5.

Σχετικά με τον παραπάνω ορισμό παρατηρούμε τα εξής. Αρχικά, βλέπουμε ότι στην αναγωγή της συνεπαγωγής του προβλήματος της υπαγωγής εννοιών και ρόλων αλλά και στην αναγωγή του προβλήματος των αξιωμάτων μεταβατικών ρόλων πρέπει να ελέγξουμε για μη-ικανοποιησιμότητα του σώματος ισχυρισμών που προκύπτει για όλους τους βαθμούς $n \in [0,1]$. Προφανώς, μια τέτοια εργασία είναι πρακτικά αδύνατη. Ο Straccia αποδεικνύει στο [135] ότι για την υπαγωγή εννοιών αρκεί να ελέγξουμε τη μη-ικανοποιησιμότητα του σώματος ισχυρισμών μόνο για δυο τιμές n_1 και n_2 που έχουμε επιλέξει τυχαία από τα διαστήματα $(0, 0.5]$ και $(0.5, 1]$, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να επεκταθούν εύκολα και στην περίπτωση της υπαγωγής των αξιωμάτων μεταβατικών ρόλων καθώς τα σώματα ισχυρισμών τα οποία δημιουργεί η απεικόνιση ουσιαστικά αποτελούν έναν έλεγχο μη-ικανοποιησιμότητας για δυο αξιώματα υπαγωγής της μορφής $\exists R.\{y\} \sqsubseteq \exists S.\{y\}$ και $\exists R.\exists R.\{y\} \sqsubseteq \exists R.\{y\}$.

Τέλος, για τη συνεπαγωγή ασαφών ισχυρισμών ρόλων παρατηρούμε δυο πράγματα. Πρώτιστα, χρειαζόμαστε δυο διαφορετικές μεθόδους αναγωγής, ανάλογα με το αν η ασαφής γλώσσα OWL χρησιμοποιεί S- ή R-συνεπαγωγές. Επιπρόσθετα, οι δυο τρόποι που χρησιμοποιούμε είναι ίσως περισσότερο περίπλοκοι από όσο θα χρειαζόταν. Κάτι τέτοιο όμως είναι απολύτως απαραίτητο λόγω της ύπαρξης μεταβατικών ρόλων. Επιπρόσθετα οι μέθοδοι αυτοί είναι και οι δυο σύμφωνες με τις κλασικές ΠΛ όπου το πρόβλημα της συνεπαγωγής του ισχυρισμού $(a,b):R$ μ.β.τ. $\Sigma = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \rangle$ ανάγεται στην μη-ικανοποιησιμότητα του σώματος $\mathcal{A} \cup \{a : \forall R.\neg B, b : B\}$ μ.β.τ. $\mathcal{T}$, $\mathcal{R}$. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε τις οριακές τιμές 0 και 1 και χρησιμοποιήσουμε την πρώτη μέθοδο θα έχουμε $\Sigma \models (a,b) : R \geq 1$ ανν $\mathcal{A} \cup \{a : \forall R.\neg C > 1-1, b : C \geq 1\}$ το οποίο τελικά δίνει $\mathcal{A} \cup \{a : \forall R.\neg C \geq 1, b : C \geq 1\}$, ενώ με τη δεύτερη θα έχουμε $\Sigma \models (a,b) : R \geq 1$ ανν $\mathcal{A} \cup \{a : \forall R.\neg C \geq 1, b : C > 1-1\}$ το οποίο πάλι μας δίνει $\mathcal{A} \cup \{a : \forall R.\neg C \geq 1, b : C \geq 1\}$.

Θεώρημα 5.3.2 *Έστω Σ και Σ' δυο f-$\mathcal{SHOIN}$ βάσεις γνώσης. Τότε $\Sigma \models \Sigma'$ ανν η f-$\mathcal{SHOIN}$ βάση γνώσης $\Sigma \cup \mathcal{G}(A)$ είναι μη-ικανοποιήσιμη για κάθε αξίωμα A της Σ'.*

Απόδειξη: Δοθέντος ότι $\Sigma \models \Sigma'$ ανν $\Sigma \models A$ για κάθε αξίωμα $A \in \Sigma'$ αρκεί να δείξουμε ότι $\Sigma \models A$ ανν $\Sigma \cup \mathcal{G}(A)$ είναι μη-ικανοποιήσιμη για κάθε αξίωμα A. Για να το πετύχουμε αυτό θα εξετάσουμε ένα-ένα τα αξιώματα του Πίνακα 5.5. Έστω, C, D δύο έννοιες, R, S δύο ρόλοι, a, b άτομα και x, y νέα άτομα. Τότε,

- $\Sigma \models C \sqsubseteq D$ ανν $\Sigma' = \Sigma \cup \{(x : C) \geq n, (x : D) < n\}$, για κάθε $n \in (0,1]$ είναι μη-ικανοποιήσιμο. Αν $\Sigma \models C \sqsubseteq D$ τότε για όλα τα μοντέλα $\mathcal{I}$ της Σ, ισχύει $\forall x \in \Delta^{\mathcal{I}}.C^{\mathcal{I}}(x) \leq D^{\mathcal{I}}(x)$. Έτσι λοιπόν η Σ' είναι μη-ικανοποιήσιμη. Σε αντίθετη περίπτωση θα υπήρχε κάποια ερμηνεία $\mathcal{I}$, κάποιο αντικείμενο $w \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και κάποιος βαθμός $n' \in (0,1]$ τ.ω. $C^{\mathcal{I}}(w) = n' \geq n' > D^{\mathcal{I}}(w)$, το οποίο οδηγεί σε άτοπο.

  Για το αντίστροφο, ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{I}$ είναι ένα μοντέλο της Σ, η Σ' είναι μη-ικανοποιήσιμη, αλλά αντιθέτως υποθέτουμε ότι $C \not\sqsubseteq D$. Τότε υπάρχει $w \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τ.ω. $C^{\mathcal{I}}(w) > D^{\mathcal{I}}(w)$. Επεκτείνοντας την $\mathcal{I}$ στην $\mathcal{I}'$ έτσι ώστε $x^{\mathcal{I}'} = w$ και $C^{\mathcal{I}'}(x^{\mathcal{I}'}) = n \in (0,1]$ παίρνουμε ένα μοντέλο για την Σ και $\{(x : C) \geq n, (x : C) < n\}$. Έτσι λοιπόν η $\mathcal{I}'$ είναι ένα μοντέλο της Σ', άτοπο.

- $\Sigma \models \mathsf{Trans}(R)$ ανν $\Sigma' = \Sigma \cup \{(x : \exists R.(\exists R.\{y\})) \geq n, (x : \exists R.\{y\}) < n\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμη, για κάθε $n \in (0,1]$. Ας υποθέσουμε ότι $\Sigma \models \mathsf{Trans}(R)$. Τότε σε κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της Σ ισχύει ότι,

$$\forall x, y \in \Delta^{\mathcal{I}}.R^{\mathcal{I}}(x,y) \geq \sup_{z \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(x,z), R^{\mathcal{I}}(z,y)).$$

  Βασιζόμενοι στις οριακές συνθήκες των τ-νορμών η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί ως,

$$\forall x, y \in \Delta^{\mathcal{I}}.t(R^{\mathcal{I}}(x,y), 1) \geq \sup_{z \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(x,z), t(R^{\mathcal{I}}(z,y), 1)),$$

ενώ χρησιμοποιώντας τη σημασιολογία των ονοματικών εννοιών έχουμε

$$\forall x, y \in \Delta^{\mathcal{I}}.t(R^{\mathcal{I}}(x,y), \{y\}^{\mathcal{I}}(y)) \geq \sup_{z\in\Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(x,z), t(R^{\mathcal{I}}(z,y), \{y\}^{\mathcal{I}}(y))).$$

Η τ-νόρμα του δεξιού μέλους αποτελεί στην ουσία και το supremum των πράξεων $t(R^{\mathcal{I}}(z,w), \{y\}^{\mathcal{I}}(w))$, για κάθε $w \in \Delta^{\mathcal{I}}$, γιατί αν $w \neq y$ τότε λόγω της σημασιολογίας των ονοματικών εννοιών θα έχουμε $\{y\}^{\mathcal{I}}(w) = 0$ και άρα $t(a, 0) = 0$. Το supremum αυτό είναι ουσιαστικά ένας υπαρξιακός περιορισμός στο άτομο z. Με παρόμοιο τρόπο λαμβάνουμε έναν υπαρξιακό περιορισμό για το x τόσο στο αριστερό αλλά και στο δεξί μέλος. Έτσι λοιπόν λαμβάνουμε, $\forall x, y \in \Delta^{\mathcal{I}}.(\exists R.\{y\})^{\mathcal{I}}(x) \geq (\exists R.(\exists R.\{y\})^{\mathcal{I}}(x)$. Έτσι λοιπόν κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της Σ δεν ικανοποιεί το $\{(x : \exists R.(\exists R.\{y\})) \geq n, (x : \exists R.\{y\}) < n\}$ για κάθε $n \in (0, 1]$.

Για το αντίστροφο, ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{I}$ είναι ένα μοντέλο της Σ, ότι Σ' είναι μη-ικανοποιήσιμη αλλά υπάρχουν $a, c \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοια ώστε να ισχύει: $R^{\mathcal{I}}(a,c) < \sup_b t(R^{\mathcal{I}}(a,b), R^{\mathcal{I}}(b,c))$. Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο όπως προηγουμένως, έχουμε ότι $(\exists R.\{c\})^{\mathcal{I}}(a) < (\exists R.(\exists R.\{c\}))^{\mathcal{I}}(a)$. Επεκτείνοντας την $\mathcal{I}$ στην $\mathcal{I}$' έτσι ώστε $x^{\mathcal{I}'} = a$, $y^{\mathcal{I}'} = c$ και $(\exists R.(\exists R.\{c\}))^{\mathcal{I}'}(a) = n'$, για κάποιο $n' \in (0, 1]$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο της Σ' το οποίο οδηγεί σε άτοπο.

- $\Sigma \models R \sqsubseteq S$ ανν $\Sigma' = \Sigma \cup \{(x : \exists R.\{y\}) \geq n, (x : \exists S.\{y\}) < n\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμη, για κάθε $n \in (0, 1]$. Ας υποθέσουμε ότι $\Sigma \models R \sqsubseteq S$. Τότε σε κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της Σ έχουμε ότι $\forall x, y \in \Delta^{\mathcal{I}}.R^{\mathcal{I}}(x,y) \leq S^{\mathcal{I}}(x,y)$. Δουλεύοντας με παρόμοιο τρόπο όπως και στην προηγούμενη περίπτωση έχουμε τα ακόλουθα βήματα συνεπαγωγής:

$$\begin{array}{rcll}
\forall x, y \in \Delta^{\mathcal{I}}.R^{\mathcal{I}}(x,y) & \leq & S^{\mathcal{I}}(x,y) & \Rightarrow \\
\forall x, y \in \Delta^{\mathcal{I}}.t(R^{\mathcal{I}}(x,y), 1) & \leq & t(S^{\mathcal{I}}(x,y), 1) & \Rightarrow \\
t(R^{\mathcal{I}}(x,y), \{y\}^{\mathcal{I}}(y)) & \leq & t(S^{\mathcal{I}}(x,y), \{y\}^{\mathcal{I}}(y)) & \Rightarrow \\
\sup_{z\in\Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(x,z), \{y\}^{\mathcal{I}}(z)) & \leq & \sup_{z\in\Delta^{\mathcal{I}}} t(S^{\mathcal{I}}(x,z), \{y\}^{\mathcal{I}}(z)) & \Rightarrow \\
(\exists R.\{y\})^{\mathcal{I}}(x) & \leq & (\exists S.\{y\})^{\mathcal{I}}(x). &
\end{array}$$

  Έτσι λοιπόν δεν υπάρχει ερμηνεία $\mathcal{I}$' η οποία να ικανοποιεί την Σ'.

  Για την αντίστροφη περίπτωση έτσι ότι η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο της Σ, Σ' είναι μη-ικανοποιήσιμη, αλλά αντίθετα $R \not\sqsubseteq S$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $a, b \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τ.ω. $R^{\mathcal{I}}(a,b) > S^{\mathcal{I}}(a,b)$. Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο έχουμε $(\exists R.\{b\})^{\mathcal{I}}(a) > (\exists S.\{b\})^{\mathcal{I}}(a)$. Επεκτείνοντας την $\mathcal{I}$ στην $\mathcal{I}'$ έτσι ώστε $x^{\mathcal{I}'} = a$, $y^{\mathcal{I}'} = b$ και $(\exists R.\{b\})^{\mathcal{I}'}(x^{\mathcal{I}'}) = n$, για κάποιο $n \in (0, 1]$ έχουμε $(\exists R.\{y\})^{\mathcal{I}'}(x^{\mathcal{I}'}) \geq n > (\exists S.\{y\})^{\mathcal{I}'}(x^{\mathcal{I}'})$, το οποίο είναι μοντέλο της Σ', άτοπο.

- $\Sigma \models (a : C) \bowtie n$ ανν $\Sigma \cup \{(a : C) \neg\bowtie n\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμη. Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση όπου $\bowtie = \geq$. Όλες οι άλλες μπορούν να αποδειχτούν με τον ίδιο τρόπο. Έστω $\Sigma \models (a : C) \geq n$. Τότε σε κάθε μοντέλο της Σ ισχύει ότι $C^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) \geq n$, έτσι λοιπόν δεν μπορούμε να βρούμε ερμηνεία όπου $C^{\mathcal{I}}(a) < n$, και άρα η $\Sigma \cup \{(a : C)\neg \geq n\}$, με $\neg \geq \equiv <$, είναι μη-ικανοποιήσιμη.

  Για το αντίστροφο, έστω ότι $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο της Σ στο οποίο $C^{\mathcal{I}}(a) < n$. Τότε η $\mathcal{I}$ ικανοποιεί τον ασαφή ισχυρισμό $(a : C) < n \equiv (a : C)\neg \geq n$ και συνεπώς η $\Sigma \cup \{(a : C)\neg \geq n\}$ είναι ικανοποιήσιμη.

- $\Sigma \models ((a,b):R)\bowtie n$ ανν $\Sigma \cup \{(a:\forall R.\neg B) + \bowtie u(c(n),c(n)), (b:B) \geq n\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμη και η ασαφής OWL χρησιμοποιεί μια S-συνεπαγωγή, ενώ $\Sigma \models ((a,b):R)\bowtie n$ ανν $(a:\forall R.\neg B) \geq 1, (b:B) + \bowtie c(n)$ είναι μη-ικανοποιήσιμη και η ασαφής OWL χρησιμοποιεί μια R-συνεπαγωγή. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα δείξουμε μόνο την περίπτωση όπου $\bowtie = \geq$. Αν $\Sigma \models ((a,b):R) \geq n$, τότε σε κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της Σ θα ισχύει $R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \geq n$. Τότε έχουμε δυο περιπτώσεις:

  1. Έστω ότι η ασαφής γλώσσα OWL χρησιμοποιεί μια S-συνεπαγωγή, τότε από την τελευταία σχέση έχουμε $c(R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}})) \leq c(n)$. Για να είναι η $\mathcal{I}$ μοντέλο του πρώτου ABox θα πρέπει επίσης να ικανοποιεί τον ισχυρισμό $b:B \geq n$ δηλαδή $B^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}}) \geq n \Rightarrow (\neg B)^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}}) \leq c(n)$. Συνεπώς,
$$\begin{array}{rcll} u(c(R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}), (\neg B)^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}})) & \leq & u(c(n),c(n)) & \Rightarrow \\ \inf_{b^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}} u(c(R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}), (\neg B)^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}})) & \leq & u(c(n),c(n)) & \Rightarrow \\ (\forall R.\neg B)^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) & \leq & u(c(n),c(n)). & \end{array}$$
Εν' κατακλείδι δεν υπάρχει ερμηνεία που να ικανοποιεί τον ισχυρισμό $(a:\forall R.\neg B) > u(c(n),c(n))$, $(+ \geq =>)$.

  2. Έστω ότι η ασαφής γλώσσα OWL χρησιμοποιεί μια R-συνεπαγωγή. Για να είναι η $\mathcal{I}$ μοντέλο του δεύτερου ABox θα πρέπει να ικανοποιεί τον ισχυρισμό $b:B > c(n)$ δηλαδή $B^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}}) > c(n) \Rightarrow (\neg B)^{\mathcal{I}}(b) < n$. Λόγω του ότι για οποιαδήποτε R-συνεπαγωγή $\mathcal{J}_R(n_1,n_2) = 1$ ανν $n_1 \leq n_2$, επειδή $(\neg B)^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}}) < n \leq R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}})$ τότε $\mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}), (\neg B)^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}})) < 1$, άρα και το inf είναι μικρότερο του 1 και τελικά ο ισχυρισμός $a:\forall R.\neg B \geq 1$ δεν ικανοποιείται από την $\mathcal{I}$.

Για το αντίστροφο προχωρούμε με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο της Σ και ότι οι βάσεις γνώσης, για τις αντίστοιχες περιπτώσεις των ασαφών συνεπαγωγών, είναι μη-ικανοποιήσιμες αλλά παρόλα αυτά έστω ότι $\Sigma \not\models ((a,b):R) \geq n$ δηλαδή $R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) < n$. Τώρα έχουμε και πάλι δυο περιπτώσεις:

1. Έστω οι ασαφείς γλώσσες OWL που χρησιμοποιούν S-συνεπαγωγές. Από το $R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) < n$ προκύπτει ότι $c(R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}})) > c(n)$. Τώρα η $\mathcal{I}$ μπορεί να επεκταθεί ώστε $B^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}}) = n$, άρα να ικανοποιεί τον ισχυρισμό $(b:C) \geq n$, ενώ επίσης να ισχύει ότι $(\neg B)^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}}) = c(n) \geq c(n)$. Επιπρόσθετα για κάθε άλλο $w \in \Delta^{\mathcal{I}}$ μπορούμε να θέσουμε $(\neg B)^{\mathcal{I}}(w) = 1$. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε γιατί η B είναι μια νέα έννοια στη βάση γνώσης. Συνεπώς $\max(c(R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}})), (\neg B)^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}})) > u(c(n),c(n))$, αλλά και $\max(c(R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, w)), (\neg B)^{\mathcal{I}}(w)) = 1 > u(c(n),c(n))$. Τελικά, η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο της Σ και ικανοποιεί το $\{(a:\forall R.\neg B) + \bowtie u(c(n),c(n)), (b:B) \geq n\}$, άτοπο.

2. Έστω τώρα οι ασαφείς γλώσσες OWL που χρησιμοποιούν R-συνεπαγωγές. Η $\mathcal{I}$ μπορεί να επεκταθεί ώστε να ικανοποιεί τον ισχυρσιμό $(b:B) > c(n)$ και πιο συγκεκριμένα να ισχύει $B^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}}) = n_1 > c(n) \Rightarrow (\neg B)^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}}) = c(n_1) < n$, επιπρόσθετα να ισχύει ότι $R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) = n_2 < n$ θέτοντας $c(n_1) \geq n_2$, αλλά και τέλος $(\neg B)^{\mathcal{I}}(w) = 1$ για κάθε άλλο $w \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Τότε έχουμε $(\neg B)^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}}) \geq R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}})$, αλλά και $(\neg B)^{\mathcal{I}}(w) \geq R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, w)$ για κάθε w, άρα $\inf_{z \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, z), (\neg B)^{\mathcal{I}}(z)) = 1$ συνεπώς η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο της

Σ και ικανοποιεί τους ισχυριμσούς $(a : \forall R.\neg B) \geq 1, (b : B) + \bowtie c(n)$, άτοπο.

- $\Sigma \models a = b$ ανν $\Sigma \cup \{a \neq b\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμη. Έστω $\Sigma \models a = b$, τότε σε κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της Σ, $a^{\mathcal{I}} = b^{\mathcal{I}}$, έτσι η $\mathcal{I}$ δε μπορεί να ικανοποιεί το αξίωμα $a \neq b$.

  Για το αντίστροφο, αν $\Sigma \cup \{a \neq b\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμη, τότε για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της Σ, ισχύει $a^{\mathcal{I}} = b^{\mathcal{I}}$, άρα $\Sigma \models a = b$.

- $\Sigma \models a \neq b$ ανν $\Sigma \cup \{a = b\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμη. Η περίπτωση αυτή είναι παρόμοια με την προηγούμενη.

■

Όσον αφορά την αναγωγή του προβλήματος της συνεπαγωγής της γλώσσας f-$\mathcal{SHIF}$ στο πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας της f-$\mathcal{SHIF}$ πρέπει να λάβουμε υπόψη μας κάποιες παραμέτρους. Πιο συγκεκριμένα, η γλώσσα f-$\mathcal{SHIF}$ δεν υποστηρίζει ονοματικές έννοιες, έτσι λοιπόν η αναγωγή της υπαγωγής ρόλων και των αξιωμάτων μεταβατικών ρόλων, που παρουσιάστηκε στον Πίνακα 5.5 δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Αυτό άλλωστε ισχύει και στην κλασική περίπτωση, δηλαδή για τη γλώσσα OWL Lite [65]. Για το λόγο αυτό πρέπει να αναπτύξουμε μια νέα μέθοδο αναγωγής των αξιωμάτων αυτών. Βασιζόμενοι στη μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε στο [65] (αλλά όπως θα δούμε στη συνέχεια χωρίς να την ακολουθούμε πλήρως), στον Πίνακα 5.5 αντικαθιστούμε κάθε ονοματική έννοια με μια *νέα* ατομική έννοια B. Η νέα απεικόνιση συμβολίζεται με $\mathcal{G}'$. Με τον τρόπο αυτό ορίζουμε μια μέθοδο αναγωγής για τη γλώσσα f-$\mathcal{SHIF}$.

Θεώρημα 5.3.3 *Έστω Σ και Σ' δύο f-$\mathcal{SHIF}$ βάσεις γνώσης που έχουν προκύψει από δύο OWL Lite ασαφείς οντολογίες. Τότε $\Sigma \models \Sigma'$ ανν η f-$\mathcal{SHIF}$ βάση γνώσης $\Sigma \cup \{\mathcal{G}'(\mathcal{A})\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμη, για κάθε αξίωμα $A \in \Sigma'$.*

Απόδειξη: Θα ακολουθήσουμε παρόμοια λογική με το Θεώρημα 5.3.2.

- $\Sigma \models \mathsf{Trans}(R)$ ανν $\Sigma' = \Sigma \cup \{(x : \exists R.(\exists R.B)) \geq n, (x : \exists R.B) < n\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο, για κάθε $n \in (0, 1]$. Έστω ότι $\Sigma \models \mathsf{Trans}(R)$. Τότε για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της Σ ισχύει ότι

$$\forall x, y \in \Delta^{\mathcal{I}}.R^{\mathcal{I}}(x, y) \geq \sup_z t(R^{\mathcal{I}}(x, z), R^{\mathcal{I}}(z, y)).$$

  Με χρήση της μονοτονίας έχουμε,

$$t(R^{\mathcal{I}}(x, y), B^{\mathcal{I}}(y)) \geq \sup_z t(R^{\mathcal{I}}(x, z), t(R^{\mathcal{I}}(z, y), B^{\mathcal{I}}(y))).$$

  Εφόσον αυτό ισχύει για όλα τα $x, y \in \Delta^{\mathcal{I}}$, θα ισχύει και για το supremum του y, συνεπώς,

$$\sup_y t(R^{\mathcal{I}}(x, y), B^{\mathcal{I}}(y)) \geq \sup_z t(R^{\mathcal{I}}(x, z), \sup_y t(R^{\mathcal{I}}(z, y), B^{\mathcal{I}}(y)))$$

  το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$(\exists R.B)^{\mathcal{I}}(x) \geq \sup_z t(R^{\mathcal{I}}(x, z), (\exists R.B)^{\mathcal{I}}(z)) = (\exists R.(\exists R.B))^{\mathcal{I}}(x).$$

Εφόσον αυτό ισχύει για όλα τα μοντέλα $\mathcal{I}$, άρα η Σ' ειναι μη-ικανοποιήσιμη.

Για το αντίστροφο, έστω ότι η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο της Σ, η Σ' είναι μη-ικανοποιήσιμη, αλλά υπάρχουν $a, b \in \Delta^{\mathcal{I}}$, τ.ω.

$$\sup_w t(R^{\mathcal{I}}(a,w), R^{\mathcal{I}}(w,b)) = p_1 > p_2 = R^{\mathcal{I}}(a,b).$$

Επίσης ισχύει ότι $R^{\mathcal{I}}(a,b) = t(R^{\mathcal{I}}(a,b),1)$. Τότε μπορούμε να επεκτείνουμε την $\mathcal{I}$ στο b έτσι ώστε $B^{\mathcal{I}}(b) = 1$ και $B^{\mathcal{I}}(w) = 0$, για κάθε $w \neq b$. Συνεπώς, έχουμε ότι $t(R^{\mathcal{I}}(a,b),1) = t(R^{\mathcal{I}}(a,b), B^{\mathcal{I}}(b)) = \sup_{w \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a,w), B^{\mathcal{I}}(w)) = (\exists R.B)^{\mathcal{I}}(a)$. Παρατηρήστε ότι ο λόγος για τον οποίο μπορούμε να κάνουμε μια τέτοια επέκταση, είναι ότι το B δεν εμφανίζεται πουθενά στη βάση γνώσης έτσι η συνάρτηση συμμετοχής του ($B^{\mathcal{I}}$) δεν περιορίζεται από κανένα αξίωμα της. Με παρόμοιο τρόπο έχουμε ότι, $p_2 = (\exists R.(\exists R.B))^{\mathcal{I}}(a)$. Έτσι, μπορούμε να επεκτείνουμε την $\mathcal{I}$ στην $\mathcal{I}'$, ώστε να ισχύουν τα $x^{\mathcal{I}'} = a$, $y^{\mathcal{I}'} = b$ και $n = (\exists R.B)^{\mathcal{I}}(x^{\mathcal{I}'})$, κατασκευάζοντας μια ερμηνεία η οποία είναι μοντέλο της Σ' για $n = p_1$.

- $\Sigma \models R \sqsubseteq S$, ανν $\Sigma' = \Sigma \cup \{(x : \exists R.B) \geq n, (x : \exists S.B) < n\}$, όπου B μια νέα έννοια. Σε κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της Σ έχουμε ότι $\forall a, b \in \Delta^{\mathcal{I}}.R^{\mathcal{I}}(a,b) \leq S^{\mathcal{I}}(a,b)$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μονοτονίας των τ-νορμών παίρνουμε τη σχέση $\forall a, b \in \Delta^{\mathcal{I}}.t(R^{\mathcal{I}}(a,b), B^{\mathcal{I}}(b)) \leq t(S^{\mathcal{I}}(a,b), B^{\mathcal{I}}(b))$. Εφόσον η σχέση αυτή ισχύει για όλα τα $b \in \Delta^{\mathcal{I}}$ θα ισχύει και για το supremum, έτσι λοιπόν

$$\begin{array}{rcl} \forall a, b \in \Delta^{\mathcal{I}}. \sup_b t(R^{\mathcal{I}}(a,b), B^{\mathcal{I}}(b)) & \leq & \sup_b t(S^{\mathcal{I}}(a,b), B^{\mathcal{I}}(b)) \quad \Rightarrow \\ \forall a, b \in \Delta^{\mathcal{I}}.(\exists R.B)^{\mathcal{I}}(a) & \leq & (\exists S.B)^{\mathcal{I}}(a). \end{array}$$

  Εφόσον αυτό ισχύει για όλα τα $\mathcal{I}$, το $\{(x : \exists R.B) \geq n, (x : \exists S.B) < n\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο. Για το αντίστροφο, έστω ότι $\mathcal{I}$ είναι ένα μοντέλο της Σ, η Σ' είναι μη-ικανοποιήσιμη, αλλά αντίθετα υπάρχουν $a, b \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τ.ω. $R^{\mathcal{I}}(a,b) = p_1 > p_2 = S^{\mathcal{I}}(a,b)$. Λόγω της οριακής συνθήκης των τ-νορμών έχουμε $R^{\mathcal{I}}(a,b) = t(R^{\mathcal{I}}(a,b),1)$. Συνεπώς, μπορούμε να επεκτείνουμε την $\mathcal{I}$ στο αντικείμενο b έτσι ώστε $B^{\mathcal{I}}(b) = 1$ και $B^{\mathcal{I}}(w) = 0$, για κάθε $w \neq b$. Έτσι έχουμε $t(R^{\mathcal{I}}(a,b),1) = t(R^{\mathcal{I}}(a,b), B^{\mathcal{I}}(b)) = \sup_{w \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a,w), B^{\mathcal{I}}(w)) = (\exists R.B)^{\mathcal{I}}(a)$. Παρομοίως, $p_2 = (\exists S.B)^{\mathcal{I}}(x)$. Μπορούμε, λοιπόν, να επεκτείνουμε την $\mathcal{I}$ στην $\mathcal{I}'$, έτσι ώστε $x^{\mathcal{I}'} = a$, $y^{\mathcal{I}'} = b$ και $n = (\exists R.B)^{\mathcal{I}}(x^{\mathcal{I}'})$, κατασκευάζοντας μια ερμηνεία η οποία είναι μοντέλο της Σ' για $n = p_1$.

■

Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνουμε ότι η προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε στο [65] για την αναγωγή των προβλημάτων συνεπαγωγής της $\mathcal{SHIF}$ στο πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας βάσεων γνώσεων $\mathcal{SHIF}$ είναι διαφορετική από αυτήν που ακολουθούμε εδώ. Πιο συγκεκριμένα, στο [65] το πρόβλημα της συνεπαγωγής ενός αξιώματος της μορφής $R \sqsubseteq S$ ανάγεται στη μη-ικανοποιησιμότητα της έννοιας $B \sqcap \exists R.(\forall S^-.\neg B)$, ενώ η συνεπαγωγή ενός αξιώματος μεταβατικών ρόλων ($\mathsf{Trans}(R)$) ανάγεται στη μη-ικανοποιησιμότητα της έννοιας $B \sqcap \exists R.(\exists R.(\forall S^-.\neg B))$, όπου και στις δυο περιπτώσεις η έννοια B είναι μια καινούργια έννοια που δεν εμφανίζεται στη βάση γνώσης. Στην περίπτωση της fuzzy-$\mathcal{SHIF}$, μια παρόμοια αναγωγή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

Από την αναγωγή των προβλημάτων συλλογιστικής της fuzzy-OWL στο πρόβλημα της μη-ικανοποιησιμότητας μια fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$ βάσης γνώσης, τα νέα αποτελέσματα για την εξαγωγή συμπερασμάτων σε πολύ εκφραστικές ασαφείς Περιγραφικές Λογικές και τους επιπλέον κανόνες επέκτασης για υπαγωγές γενικευμένων και/ή κυκλικών εννοιών που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (δείτε επίσης τα [128], [134], [131] και [130]), συνεπάγεται ότι μπορούμε να υποστηρίξουμε πλήρως μηχανισμούς συλλογιστικής για την ασαφή γλώσσα f$_{KD}$-OWL. Η γλώσσα f$_{KD}$-OWL μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πρακτικές εφαρμογές και τομείς του Σημασιολογικού Ιστού, που εμφανίζεται ασαφής και ανακριβής πληροφορία, για την αναπαράσταση και διενέργεια εργασιών συλλογιστικής σε τέτοιου είδους γνώση [132]. Η επέκταση των αλγορίθμων tableaux για τη διαχείριση και άλλων νορμών σε εκφραστικές ΠΛ είναι ένα ενδιαφέρον ανοικτό, αλλά και συνάμα αρκετά δύσκολο πρόβλημα.

Κεφάλαιο 6

Προσοντούχοι Περιορισμοί και Ασαφείς Ονοματικές Έννοιες

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε αλγόριθμους συλλογιστικής για μια ασαφή επέκταση της γλώσσας $\mathcal{SHOIN}$ και πιο συγκεκριμένα έναν αλγόριθμο εξαγωγής συμπερασμάτων την f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ μαζί με τις απαραίτητες επεκτάσεις για τη διαχείριση γενικευμένων και κυκλικών ορολογιών. Ο αλγόριθμος αυτός είναι αρκετά σημαντικός καθώς η γλώσσα $\mathcal{SHOIN}$ αποτελεί το μαθηματικό υπόβαθρο της γλώσσας OWL DL και άρα θα μπορούσαμε να πούμε ότι η γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ θα μπορούσε να θεωρηθεί το λογικό υπόβαθρο της γλώσσας f$_{KD}$-OWL DL.

Στο παρόν κεφάλαιο θα επεκτείνουμε τον αλγόριθμο της f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ προς δυο κατευθύνσεις. Πρώτιστα θα ασχοληθούμε με τους προσοντούχους περιορισμούς πληθυκότητας (qualified cardinality restrictions) [143], οι οποίοι έχουν ζητηθεί αρκετές φορές στη βιβλιογραφία από τους χρήστες εφαρμογών ή ερευνητές διαφόρων επιστημονικών πεδίων που έχουν υιοθετήσει τη γλώσσα OWL [112, 46]. Οι κατασκευαστές αυτοί αποτελούν μια απλή, αλλά ταυτόχρονα εκφραστική, επέκταση των απλών περιορισμών πληθυκότητας. Στην ενότητα 6.1 θα εισάγουμε τη σημασιολογία τους ενώ στην ενότητα 6.2 θα μελετήσουμε τους κατασκευαστές αυτούς στο χώρο των ασαφών ΠΛ ακολουθώντας τις παρατηρήσεις που εμφανίζονται στο [143] για τη δυσκολία που παρουσιάζουν στην εκτέλεση ορθής συλλογιστικής. Η ανάλυση αυτή θα μας οδηγήσει σε κανόνες επέκτασης και τελικά σε έναν ορθό και πλήρη αλγόριθμο συλλογιστικής για τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIQ}$. Τέλος, στην ενότητα 6.3 θα επεκτείνουμε τον αλγόριθμο της f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIQ}$ για τη διαχείριση ασαφών ονοματικών εννοιών ($\mathcal{O}_f$) παρουσιάζοντας έναν αλγόριθμο για τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SHO}_f\mathcal{IQ}$. Οι ασαφείς ονοματικές έννοιες προτάθηκαν στο [14] και σε μερικές περιπτώσεις θα μπορούσαν να φανούν χρήσιμες σε πρακτικές εφαρμογές. Οι συγγραφείς όμως στο [14] δεν παρουσιάζουν έναν αλγόριθμο για τους κατασκευαστές αυτούς το οποίο μάλιστα τους οδηγεί σε ένα μικρό πρόβλημα στη σημασιολογία που προτείνουν, το οποίο και διορθώνουμε.

6.1 Προσοντούχοι Περιορισμοί Πληθυκότητας: Η f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIQ}$

Οι *προσοντούχοι περιορισμοί πληθυκότητας* (ΠΠΠ) [6, 143] (*qualified cardinality restrictions - QCRs*) ορίζονται ως μια επέκταση των απλών περιορισμών πληθυκότητας. Πιο συγκεκριμένα, όπως γνωρίζουμαι, οι περιορισμοί πληθυκότητας ορίζουνε έννοιες κοιτώντας το πλήθος των συνδέσεων ενός αντικειμένου με άλλα μέσω κάποιου ρόλου. Δηλαδή μια έννοια της μορφής $\geq 3R$ δηλώνει το σύνολο των αντικειμένων που συνδέονται μέσω της $R^{\mathcal{I}}$ με 3 άλλα αντικείμενα. Θα μπορούσαμε όμως επιπρόσθετα να προσδώσουμε ένα *προσόν* στα αντικείμενα με τα οποία συνδέεται ένα αντικείμενο. Για παράδειγμα στην εισαγωγή μας ορίσαμε την έννοια των ανθρώπων που έχουν ακριβώς 3 παιδιά ως $\mathsf{Human} \sqcap \geq 3\mathsf{hasChild} \sqcap \leq 3\mathsf{hasChild}$. Με τους προσοντούχους περιορισμούς πληθυκότητας μπορούμε να προσδώσουμε ένα προσόν στα παιδιά, δηλαδή θα μπορούσαμε να ορίσουμε την έννοια των ανθρώπων που έχουν ακριβώς 3 παιδιά τα οποία ταυτόχρονα είναι και αρσενικά ως,

$$\mathsf{Human} \sqcap \geq 3\mathsf{hasChild.Male} \sqcap \leq 3\mathsf{hasChild.Male}.$$

Όπως είναι αντιληπτό η σύνταξη των κατασκευαστών αυτών είναι η $\geq nR.C$ και $\leq nR.C$, όπου τα n, R είναι όπως και στους περιορισμούς πληθυκότητας, ενώ C είναι μια ΠΛ έννοια. Η σημασιολογία των κατασκευαστών αυτών δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
(\leq nR.C)^{\mathcal{I}} &= \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \sharp\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid R^{\mathcal{I}}(x,y) \wedge C^{\mathcal{I}}(y)\} \leq n\} \\
(\geq nR.C)^{\mathcal{I}} &= \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \sharp\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid R^{\mathcal{I}}(x,y) \wedge C^{\mathcal{I}}(y)\} \geq n\}
\end{aligned}$$

Όπως είναι λογικό με τους προσοντούχους περιορισμούς πληθυκότητας μπορούμε να μελετήσουμε επιπλέον ισοδυναμίες εννοιών σχετικά με αυτές που ορίσαμε στην ενότητα 3.2. Πιο συγκεκριμένα υπό την παρουσία των προσοντούχων περιορισμών πληθυκότητας ο κατασκευαστής του περιορισμού τιμής ($\forall R.C$) γίνεται συντακτική ζάχαρη καθώς ισχύει ότι $\leq 0R.\neg C \equiv \forall R.C$ [143].

Τέλος, αναφέρουμε ότι σε ονοματολογία των ΠΛ οι κατασκευαστές αυτοί συμβολίζονται με ($\mathcal{Q}$), άρα η επέκταση της γλώσσας $\mathcal{SHOIN}$ με προσοντούχους περιορισμούς πληθυκότητας ονομάζεται $\mathcal{SHOIQ}$.

Η σημασιολογία των εννοιών αυτών στις ασαφείς ΠΛ δίνονται από μια απλή επέκταση της σημασιολογίας των απλών περιορισμών πληθυκότητας. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
(\geq pR.C)^{\mathcal{I}}(x) &= \sup_{b_1,\ldots,b_p \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(\overset{p}{\underset{i=1}{t}}\{t(R^{\mathcal{I}}(a,b_i), C^{\mathcal{I}}(b_i))\}, \underset{i<j}{t}\{b_i \neq b_j\}) \\
(\leq pR.C)^{\mathcal{I}}(x) &= \inf_{b_1,\ldots,b_{p+1} \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(\overset{p+1}{\underset{i=1}{t}}\{t(R^{\mathcal{I}}(a,b_i), C^{\mathcal{I}}(b_i))\}, \underset{i<j}{u}\{b_i = b_j\})
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια μελετάμε την ισοδυναμία εννοιών $\leq 0R.\neg C \equiv \forall R.C$, που ισχύει στις κλασικές ΠΛ, στις ασαφείς ΠΛ. Διερευνούμε την ιδιότητα αυτή για τις διάφορες ασαφείς τετράδες που μπορούμε να έχουμε και όχι για κάποιες συγκεκριμένες, δίνοντας ένα γενικευμένο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.1.1 *Η ισοδυναμία $\forall R.C \equiv \leq 0R.\neg C$ ισχύει αν το c είναι ένα ενειλικτικό ασαφές συμπλήρωμα και είτε*

1. *η $\mathcal{J}$ είναι μια R-συνεπαγωγή και το c το προσυμπλήρωμα της $\mathcal{J}$, ή*
2. *η $\mathcal{J}$ είναι μια S-συνεπαγωγή και η ασαφής τριάδα $\langle c, t, u\rangle$ ικανοποιεί τους κανόνες DeMorgan.*

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας τη σημασιολογία των ΠΠΠ το-πολύ που είδαμε παραπάνω και θέτοντας $p = 0$ λαμβάνουμε τη σημασιολογία της έννοιας $\leq 0R.\neg C$. Συνεπώς έχουμε:

$$(\leq 0R.\neg C)^{\mathcal{I}}(a) = \inf_{b_1 \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(\underset{i=1}{\overset{1}{t}}\{t(R^{\mathcal{I}}(a,b_i), c(C^{\mathcal{I}}(b_i)))\}, \underset{i<j}{u}\{b_i = b_j\}).$$

Η σ-νόρμα $u_{i<j}\{b_i = b_j\}$ είναι ίση με 0 καθώς στην εξίσωση έχουμε μόνο ένα αντικείμενο του $\Delta^{\mathcal{I}}$. Συνεπώς, καμία σύγκριση δε γίνεται και άρα $u(0,0) = 0$. Στο σημείο αυτό διακρείνουμε δυο περιπτώσεις.

Έστω ότι η $\mathcal{J}$ είναι μια R-συνεπαγωγή και c ένα ενειλικτικό ασαφές προσυμπλήρωμα της $\mathcal{J}$. Τότε έχουμε τα παρακάτω βήματα ισότητας:

$$\begin{aligned}
(\leq 0R.\neg C)^{\mathcal{I}}(a) &= \inf_{b_1 \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(t(R^{\mathcal{I}}(a,b_1), c(C^{\mathcal{I}}(b_1))), 0) \\
&= \inf_{b_1 \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a,b_1), \mathcal{J}(c(C^{\mathcal{I}}(b_1)), 0)) \text{ (Λήμμα 2.4.1)} \\
&= \inf_{b_1 \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a,b_1), c(c(C^{\mathcal{I}}(b_1)))) \text{ (προσυμπλήρωμα της } \mathcal{J}) \\
&= \inf_{b_1 \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a,b_1), C^{\mathcal{I}}(b_1)) \text{ (ενειλικτικό συμπλήρωμα)} \\
&= (\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a).
\end{aligned}$$

Τώρα έστω ότι η $\mathcal{J}$ είναι μια S-συνεπαγωγή και έστω ότι η ασαφής τετράδα $\langle c, t, u \rangle$, όπου c ένα ενειλικτικό συμπλήρωμα, ικανοποιεί τους κανόνες DeMorgan. Τότε, έχουμε τα παρακάτω βήματα ισοτήτων:

$$\begin{aligned}
(\leq 0R.\neg C)^{\mathcal{I}}(a) &= \inf_{b_1 \in \Delta^{\mathcal{I}}} u(c(t(R^{\mathcal{I}}(a,b_1), c(C^{\mathcal{I}}(b_1)))), 0) \\
&= \inf_{b_1 \in \Delta^{\mathcal{I}}} c(t(R^{\mathcal{I}}(a,b_1), c(C^{\mathcal{I}}(b_1)))) \text{ (οριακή συνθήκη της } u) \\
&= \inf_{b_1 \in \Delta^{\mathcal{I}}} u(c(R^{\mathcal{I}}(a,b_1)), c(c(C^{\mathcal{I}}(b_1)))) \text{ (κανόνας DeMorgan)} \\
&= \inf_{b_1 \in \Delta^{\mathcal{I}}} u(c(R^{\mathcal{I}}(a,b_1)), C^{\mathcal{I}}(b_1)) \text{ (ενειλικτικό συμπλήρωμα)} \\
&= (\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a).
\end{aligned}$$

■

6.2 Συλλογιστική με τους Προσοντούχους Περιορισμούς Πληθυκότητας

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της εξαγωγής συμπερασμάτων σε ασαφείς ΠΛ που περιέχουν ΠΠΠ. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις θα ασχοληθούμε μόνο με τις f$_{KD}$-$\mathcal{L}$ λογικές και άρα ουσιαστικά με τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIQ}$.

Για να μπορέσουν να αποδώσουν μια ορθή διαδικασία συλλογιστικής για τους ΠΠΠ οι αλγόριθμοι των κλασσικών ΠΛ εκτός από το να τροποποιήσουν κατάλληλα τους κανόνες για τους απλούς περιορισμούς πληθυκότητας χρησιμοποιούν και έναν ειδικό κανόνα ο οποίος ονομάζεται *κανόνας της επιλογής* (*choose*-rule) [61]. Ο κανόνας αυτός εισάγει πληροφορία η οποία βρίσκεται κατά μια έννοια κρυμμένη στη σημασιολογία της γλώσσας και είναι απολύτως απαραίτητη για τη δημιουργία μιας σωστής διαδικασίας. Εμφανώς η ίδια περίπτωση ισχύει και στις ασαφείς ΠΛ που προσφέρουν την εκφραστικότητα των τελεστών αυτών. Έστω για παράδειγμα το ασαφές ABox,

$$\mathcal{A}_c = \{(a : (\geq 3R.\top)) \geq 0.7, (a : (\leq 1R.B)) \geq 0.7, (a : (\leq 1R.\neg B)) \geq 0.7\}$$

το οποίο είναι δανεισμένο από την κλασική περίπτωση [143] αλλά προσαρμοσμένο για τις ασαφείς ΠΛ.

Το παραπάνω ABox είναι ασυνεπές διότι οι ακόλουθες συνθήκες πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα:

$$\sup_{b_1,\ldots,b_3 \in \Delta^{\mathcal{I}}} \min_{i=1}^{3}\{\min(R^{\mathcal{I}}(a, b_i), \top^{\mathcal{I}}(b_i))\} \geq 0.7,$$
$$\inf_{b_1,b_2 \in \Delta^{\mathcal{I}}} \max_{i=1}^{2}\{\max(1 - R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_i), 1 - B^{\mathcal{I}}(b_i))\} \geq 0.7,$$
$$\inf_{b_1,b_2 \in \Delta^{\mathcal{I}}} \max_{i=1}^{2}\{\max(1 - R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_i), B^{\mathcal{I}}(b_i))\} \geq 0.7.$$

Από την πρώτη εξίσωση λαμβάνουμε ότι πρέπει να υπάρχουν τρία b_i τέτοια ώστε

$$\forall b_i \in \Delta^{\mathcal{I}}, R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_i) \geq 0.7,\ 1 \leq i \leq 3,$$

ενώ από τις τελευταίες δυο εξισώσεις λαμβάνουμε ότι για κάθε ζεύγος $\langle b_i, b_j\rangle$ ισχύουν,

$$\max(1 - R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_i), 1 - B^{\mathcal{I}}(b_i)) \geq 0.7$$

και

$$\max(1 - R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_j), B^{\mathcal{I}}(b_j)) \geq 0.7,\ 1 \leq i < j \leq 3.$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε ότι $\forall b_i, 1 - R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_i) \leq 0.3 < 0.7$. Συνεπώς, για να ικανοποιηθούν οι τελευταίες δυο εξισώσεις θα πρέπει για κάθε ζεύγος $\langle b_i, b_j\rangle$ και για κάποιο από τα δυο αντικείμενα, έστω το b_i, να ισχύει ότι, $1 - B^{\mathcal{I}}(b_i) \geq 0.7$ ενώ για άλλο, δηλαδή για το b_j, θα πρέπει να ισχύει ότι $B^{\mathcal{I}}(b_j) \geq 0.7 \Rightarrow 1 - B^{\mathcal{I}}(b_j) \leq 0.3 < 0.7$. Εμφανώς αυτό δεν μπορεί να ισχύει για κάθε ζεύγος $\langle b_i, b_j\rangle, 1 \leq i < j \leq 3$.

Παρόλα αυτά, ένας αφελής αλγόριθμος ίσως να μη μπορούσε να ανακαλύψει την παραπάνω ασυνέπεια. Πιο συγκεκριμένα έστω ότι για να ικανοποιήσουμε τον ισχυρισμό $(a : (\geq 3R.\top)) \geq 0.7$ δημιουργούμε πρώτα τρία άτομα b_i για τα οποία θέτουμε $((a, b_i) : R) \geq 0.7$, $1 \leq i \leq 3$. Τότε θα φαίνεται σαν να έχουμε ικανοποιήσει όλους τους ισχυρισμούς του ABox εφόσον δεν υπάρχει κάποια προφανής αντίφαση (clash) στο ABox. Αυτό θα σήμαινε ότι ο αλγόριθμος είναι μη-ορθός. Όπως επισημαίνεται στο [143], η αιτία για το λάθος αυτό είναι ότι υπάρχει κρυμμένη πληροφορία η οποία δε λαμβάνεται υπόψιν κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου και η οποία είναι κρίσιμη για την εκτέλεση των κανόνων επέκτασης για τους ΠΠΠ. Στην κλασική περίπτωση η κρυμμένη πληροφορία είναι ότι ένα αντικείμενο b_i είτε ανήκει στο σύνολο $B^{\mathcal{I}}$ είτε στο $(\neg B)^{\mathcal{I}}$, δηλαδή η διαδικασία της συλλογιστικής υπό συνθήκες που έχουμε ήδη δει. Στην περίπτωση των ασαφών ΠΛ, όπως αναλύσαμε στην υπό-ενότητα 3.3.1 και στο λήμμα 3.3.1, έχουμε ότι για κάθε $n \in [0, 1]$, και $b_i^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ θα ισχύει είτε $B^{\mathcal{I}}(b_i^{\mathcal{I}}) > n$ ή $B^{\mathcal{I}}(b_i^{\mathcal{I}}) \leq n$.[1] Συνεπώς, στο παραπάνω παράδειγμα θα πρέπει να έχουμε

[1]Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιούμε τη μορφή είτε $B^{\mathcal{I}}(b_i^{\mathcal{I}}) > n$ ή $B^{\mathcal{I}}(b_i^{\mathcal{I}}) \leq n$ σε αντίθεση με τη μορφή είτε $B^{\mathcal{I}}(b_i^{\mathcal{I}}) \geq n$ ή $B^{\mathcal{I}}(b_i^{\mathcal{I}}) < n$ (μεταφέραμε δηλαδή την ισότητα) που χρησιμοποιήσαμε στην επίλυση των γενικευμένων αξιωμάτων. Αυτό θα αιτιολογηθεί στη συνέχεια.

ότι είτε $(b_i : B) > 0.3$ ή $(b_i : B^{\mathcal{I}}) \leq 0.3$ $(b_i : \neg B^{\mathcal{I}}) \geq 0.7$ σε ΚΜΘΑ), για κάθε $1 \leq i \leq 3$. Αν διαλέξουμε $(b_i : B) > 0.3$ για δυο από τα τρία άτομα b_i, τότε ο πρώτος περιορισμός το-πολύ παραβιάζεται, εφόσον απαιτεί να ισχύει ότι $B^{\mathcal{I}}(b_i^{\mathcal{I}}) \leq 0.3$ για όλα τα b_i, ενώ αν διαλέξουμε $(b_i : \neg B) \geq 0.7$, τότε $1 - B^{\mathcal{I}}(b_i^{\mathcal{I}}) \geq 0.7 > 0.3$ και άρα παραβιάζεται ο δεύτερος περιορισμός το-πολύ. Τελικά καταλήγουμε ότι και στις δυο περιπτώσεις οι ισχυρισμοί δεν μπορούν να ικανοποιηθούν ταυτόχρονα και άρα το ABox είναι ασυνεπές.

Για να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε έναν σωστό αλγόριθμο θα πρέπει να εφαρμόσουμε μια τέτοια συλλογιστική υπο-συνθήκες με σκοπό να εισάγουμε την κρυμμένη πληροφορία κατά τη διάρκεια εκτέλεσης των κανόνων και κατασκευής του μοντέλου. Θα πρέπει να προσέξουμε όμως ώστε η πληροφορία αυτή να είναι άμεσα συνυφασμένη με την εκτέλεση (ή μη) των ΠΠΠ το-πολύ. Πιο συγκεκριμένα εφαρμόζοντας την ανάλυση που είδαμε για τους απλούς περιορισμούς πληθυκότητας στην υπο-ενότητα 4.3.2 σε ενάν ΠΠΠ θα λέγαμε ότι ο περιορισμός $(\leq pR.C)^{\mathcal{I}}(a) \geq n$ μας λέει ότι υπάρχουν το πολύ p ζεύγη $\langle a, b_i \rangle$ για τα οποία ισχύει $\max(c(R(a, b_i)), c(C^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}}))) < n$ δηλαδή και $R(a, b_i) > 1 - n$ και $C^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}}) > 1 - n$. Στο σημείο αυτό λοιπόν παρατηρούμε δυο πράγματα. Πρώτον, ο βαθμός με τους οποίους χρειάζεται να εκτελέσουμε τη συλλογιστική υπο-συνθήκες είναι ο βαθμός $1 - n$. Ήδη από το προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι χρησιμοποιήσαμε το βαθμό $0.3 = 1 - 0.7$ αλλά και τον $1 - 0.3$ ο οποίος βέβαια προκύπτει λόγω ΚΜΘΑ. Δεύτερον, παρατηρούμε ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $>$ το οποίο αιτιολογεί τη χρήση τη μορφής της συλλογιστικής υπο-συνθήκες είτε $B(b_i) > n$ ή $B(b_i) \leq n$ αντί για τη μορφή είτε $B(b_i) \geq n$ ή $B(b_i) < n$. Εν κατακλείδι όλες οι συνθήκες αυτές αποτελούν το κατώφλι για την ικανοποίηση ή μη των ΠΠΠ το-πολύ.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις αλλαγές που χρειάζονται οι ορισμοί για τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ έτσι ώστε να αποδώσουμε μια διαδικασία συλλογιστικής για τους προσοντούχους περιορισμούς πληθυκότητας και άρα για τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIQ}$.

Πρώτιστα στον ορισμό των υπο-εννοιών μιας f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$-έννοιας (βλ υπο-ενότητα 4.2.3) χρειάζεται να προσθέσουμε την ακόλουθη γραμμή:

$$sub(\leq nR.C) = \{\leq nR.C\} \cup \{sub(C)\}$$

Ορισμός 6.2.1 *Έστω $\mathcal{A}$ ένα f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIQ}$ ABox, $\mathcal{R}$ ένα f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIQ}$ RBox, $\boldsymbol{R}_{\mathcal{A}}$ το σύνολο των ρόλων που εμφανίζονται στο $\mathcal{A}$ και στο $\mathcal{R}$ μαζί με τους αντίστροφούς τους, και $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ το σύνολο των ατόμων στο $\mathcal{A}$. Ένα ασαφές* tableau *T για το $\mathcal{A}$ μ.β.τ. $\mathcal{R}$ ορίζεται όπως και στον ορισμό 4.3.3, αλλά επιπλέον ικανοποιεί τις παρακάτω επιπρόσθετες και τροποποιημένες ιδιότητες:*

13'. Αν $\mathcal{L}(s, \geq pR.C) \rhd n$, τότε $\sharp R^T(s, \rhd, n, C) \geq p$,

14'. Αν $\mathcal{L}(s, \leq pR.C) \rhd n$, τότε $\sharp R^T(s, +\rhd, 1-n, C) \leq p$,

18. Αν $\mathcal{L}(s, \leq pR.C) \rhd n$ και $\mathcal{E}(R, \langle s, t \rangle) + \rhd 1 - n$, τότε είτε $\mathcal{L}(t, \neg C) \rhd n$ ή $\mathcal{L}(t, C) + \rhd 1 - n$,

όπου $R^T(s, \rhd, n.C) = \{t \in \boldsymbol{S} \mid \mathcal{E}(R, \langle s, t \rangle) \rhd n$ και $\mathcal{L}(s, C) \rhd n\}$. $\diamondsuit$

Όπως παρατηρούμε από τον παραπάνω ορισμό, η ιδιότητα 18 είναι αυτή που κωδικοποιεί τα ευρήματα μας στην αρχή της υπο-ενότητας αυτής.

Λήμμα 6.2.2 *Ένα f_{KD}-$\mathcal{SHOIQ}$ ABox $\mathcal{A}$ είναι συνεπές μ.β.τ. $\mathcal{R}$ ανν υπάρχει ένα ασαφές tableau T για το $\mathcal{A}$ μ.β.τ. $\mathcal{R}$.*

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν του λήμματος 4.3.4

Πίνακας 6.1: *Κανόνες επέκτασης για προσοντούχους περιορισμούς πληθυκότητας*

Κανόνας		**Περιγραφή**
επιλογή	αν 1.	$\langle \leq pR.C, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ο x δεν είναι έμμεσα μπλοκαρισμένος
	2.	υπάρχει R-γείτονας y του x, με $\{\langle \neg C, \rhd, n\rangle, \langle C, +\rhd, 1-n\rangle\} \cap \mathcal{L}(x) = \emptyset$
	3.	η ακμή $\langle x, y\rangle$ συγκρούεται με την τριάδα $\langle \neg R, \rhd, n\rangle$
	τότε	$\mathcal{L}(y) \rightarrow \mathcal{L}(y) \cup \{E\}$, για κάποιο $E \in \{\langle \neg C, \rhd, n\rangle, \langle C, +\rhd, 1-n\rangle\}$
$\geq_{\rhd}$	αν 1.	$\langle \geq pR.C, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ο x δεν είναι μπλοκαρισμένος,
	2.	δεν υπάρχουν p $R_{\rhd n}$-γείτονες $y_1, \ldots, y_p$ of x με
		$\langle C, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(y_i)$ και $y_i \neq y_j$ για $1 \leq i < j \leq p$
	τότε	δημιούργησε p νέους κόμβους $y_1, \ldots, y_p$, με $\mathcal{L}(\langle x, y_i\rangle) = \{\langle R, \rhd, n\rangle\}$,
		$\langle C, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(y_i)$ και $y_i \neq y_j$ για $1 \leq i < j \leq p$
$\leq_{\rhd}$	αν 1.	$\langle \leq pR.C, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(z)$, ο z δεν είναι έμμεσα μπλοκαρισμένος,
		$\sharp R_c^{\mathbf{G}}(z, \rhd, n, C) > p$, υπάρχουν δυο από αυτούς τους κόμβους, x, y,
		χωρίς να ισχύει $y \neq x$
	τότε	1. αν x είναι ένας ονοματικός κόμβος, τότε $\mathsf{Συγχώνευση}(y, x)$
		2. αλλιώς αν y είναι ονοματικός κόμβος ή κόμβος ρίζα ή πρόγονος του x,
		τότε $\mathsf{Συγχώνευση}(x, y)$
		3. αλλιώς $\mathsf{Συγχώνευση}(y, x)$

Όπως και στις περιπτώσεις των f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ και f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ έτσι και με τους προσοντούχους περιορισμούς πληθυκότητας μπορούμε να βασιστούμε στις ιδιότητες που περιγράφονται από τον ορισμό του ασαφούς tableau για να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε κανόνες οι οποίοι αποφασίζουν το πρόβλημα της συνέπειας ενός ασαφούς σώματος ισχυρισμών. Στον Πίνακα 6.1 παρουσιάζουμε τους κανόνες οι οποίοι χρειάζονται για τους ΠΠΠ. Πιο συγκεκριμένα έχουμε έναν επιπλέον κανόνα, τον κανόνα της επιλογής, ενώ οι κανόνες των απλών περιορισμών πληθυκότητας χρειάζονται κάποιες μικρές επεκτάσεις. Οι ορισμοί του γράφου ολοκλήρωσης για ένα f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIQ}$ ABox αλλά και η αρχικοποίησή του είναι ακριβώς η ίδια με την περίπτωση της f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$.

Επιπρόσθετα για ένα ρόλο R, έναν κόμβο $x \in \mathbf{G}$, έναν τύπο ανισότητας $\rhd$ και έναν βαθμό συμμετοχής $n \in [0,1]$ ορίζουμε:

$$\begin{aligned} R_c^{\mathbf{G}}(x, \rhd, n, C) \quad = \quad & \{y \mid y \text{ είναι ένας } R_{\rhd' n'}\text{-γείτονας του } x, \\ & \langle x, y\rangle \text{ συγκρούεται με την } \langle \neg R, \rhd, n\rangle, \text{ και} \\ & \text{το } \mathcal{L}(y) \cup \{\langle \neg C, \rhd, n\rangle\} \text{ περιέχει αντίφαση}\}\}. \end{aligned}$$

Τέλος, λόγω της ύπαρξης ΠΠΠ μια συνθήκη αντίφασης χρειάζεται να προσαρμοστεί. Πιο συγκεκριμένα, για κάποιο κόμβο x, λέμε ότι το σύνολο $\mathcal{L}(x)$ περιέχει *αντίφαση* (*clash*) αν ικανοποιεί μια από τις συνθήκες που περιγράφονται στον ορισμό 4.3.5 αλλά επιπλέον περιέχει:

- κάποια τριάδα $\langle \leq pR.C, \rhd, n\rangle$ και ο x έχει $p+1$ $R_{\rhd_i n_i}$-γείτονες $y_0, \ldots, y_p$, όλες οι ακμές $\langle x, y_i\rangle$ συγκρούονται με την τριάδα $\langle \neg R, \rhd, n\rangle$, η ετικέτα $\mathcal{L}(y_i) \cup \{\langle \neg C, \rhd, n\rangle\}$ περιέχει μια αντίφαση και $y_i \neq y_j$, για κάθε $0 \leq i < j \leq p$.

Λήμμα 6.2.3 *Έστω $\mathcal{A}$ ένα f_{KD}-$\mathcal{SHOIQ}$ ABox. Τότε,*

1. *όταν αρχικοποιούμε τη διαδικασία για ένα f_{KD}-$\mathcal{SHOIQ}$ σώμα ισχυρισμών $\mathcal{A}$ και σώμα όρων $\mathcal{R}$, ο αλγόριθμος επέκτασης τερματίζει.*

2. *Το $\mathcal{A}$ έχει ένα ασαφές tableau ανν οι κανόνες επέκτασης μπορούν να εφαρμοστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύψει ένας πλήρες και ελεύθερος αντιφάσεων γράφος ολοκλήρωσης.*

Απόδειξη: Η απόδειξη για τον τερματισμό αλλά και για την ορθότητα του αλγορίθμου (η ορθή φορά της 2ης πρότασης) προκείπτουν άμεσα από τις αποδείξεις τερματισμού και ορθότητας της γλώσσας f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$ αλλά και λόγω της ανάλυσης που παρουσιάσαμε παραπάνω για τους προσοντούχους περιορισμούς πληθυκότητας.

Η απόδειξη της πληρότητας (αντίστροφη φορά της 2ης πρότασης) μπορεί και αυτή πολύ εύκολα να δειχθεί αν βασιστούμε στην απόδειξη της πληρότητας για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$. Η μόνη προσθήκη που χρειάζεται είναι ότι λόγω του νέου μη-ντετερμινιστικού κανόνα της *επιλογή* χρειάζεται να δείξουμε τον τροποποιημένο κανόνα, δηλαδή τον κανόνα *επιλογή′*, ο οποίος προκύπτει από την οδήγηση της εκτέλεσης των κανόνων μ.β.τ. δοθέν ασαφές tableau για το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{R}$. Ο κανόνας αυτός φαίνεται στον Πίνακα 6.2.

Πίνακας 6.2: *Ο κανόνας επιλογή′*

Κανόνας		**Περιγραφή**
επιλογή′	αν 1.	$\langle \leq pR.C, \rhd, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ο x δεν είναι έμμεσα μπλοκαρισμένος
	2.	υπάρχει R-γείτονας y του x, με $\{\langle\neg C, \rhd, n\rangle, \langle C, +\rhd, 1-n\rangle\} \cap \mathcal{L}(x) = \emptyset$
	3.	η ακμή $\langle x, y\rangle$ συγκρούεται με την τριάδα $\langle\neg R, \rhd, n\rangle$ and
	τότε	$\mathcal{L}(y) \to \mathcal{L}(y) \cup \{E\}$, για κάποιο $E \in \{\langle\neg C, \rhd, n\rangle, \langle C, +\rhd, 1-n\rangle\}$ το οποίο δε συγκρούεται με την $\langle C, \geq, \mathcal{L}(\pi(x), C)\rangle$ ή την $\langle\neg C, \geq, 1-\mathcal{L}(\pi(x), D)\rangle$

■

Παράδειγμα 6.2.4 *Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμό μας για να μπορέσουμε να αναγνωρίζουμε ότι το σώμα ασαφών ισχυρισμών $\mathcal{A}_c$ που είδαμε στην αρχή της υπο-ενότητας αυτής είναι ασυνεπές. Πρώτα ο αλγόριθμος αρχικοποιεί έναν κόμβο ρίζα x_a, ο οποίος χαρακτηρίζεται από την ετικέτα $\mathcal{L}(x_a) = \{\langle\geq 3R.\top, \geq, 0.7\rangle, \langle\leq 1R.B, \geq, 0.7\rangle, \langle\leq 1R.\neg B, \geq, 0.7\rangle\}$. Στη συνέχει εφαρμόζουμε επαναληπτικά τους κανόνες του Πίνακα 6.1. Πρώτα, ο κανόνας $\geq_{\geq}$ δημιουργεί τρεις κόμβους b_i, τέτοιους ώστε $\mathcal{L}(\langle x_a, b_i\rangle) = \{\langle R, \geq, 0.7\rangle\}$, $\mathcal{L}(b_i) = \{\langle\top, \geq, 0.7\rangle\}$ με $b_1 \neq b_2 \neq b_3$. Τότε για τον ΠΠΠ το-πολύ $\leq 1R.B$ ο κανόνας επιλογή εισάγει μη-ντετερμινιστικά είτε την τριάδα $\langle\neg B, \geq, 0.7\rangle$ ή την $\langle B, >, 0.3\rangle$ στις ετικέτες των $\mathcal{L}(b_i)$. Αν επιλέξουμε την τριάδα $\langle\neg B, \geq, 0.7\rangle$ για δύο από τους κόμβους τότε έχουμε μια αντίφαση: $\langle\leq 1R.B, \geq, 0.7\rangle \in \mathcal{L}(x_a)$, και για δύο κόμβους b_i, η ακμή $\langle x_a, b_i\rangle$ συγκρούεται με την τριάδα $\langle\neg R, \geq, 0.7\rangle$, το $\mathcal{L}(b_i) \cup \{\langle\neg B, \geq, 0.7\rangle\}$ περιέχει μια αντίφαση και οι δύο κόμβοι είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Αν επιλέξουμε να εισάγουμε την τριάδα $\langle B, >, 0.3\rangle$ για δυο από αυτούς τότε και πάλι έχουμε μια αντίφαση: $\langle\leq 1R.\neg B, \geq, 0.7\rangle \in \mathcal{L}(x_a)$, και για δύο από τους κόμβους b_i η ακμή $\langle x_a, b_i\rangle$ συγκρούεται με την τριάδα $\langle\neg R, \geq, 0.7\rangle$, το $\mathcal{L}(b_i) \cup \{\langle\neg\neg B, \geq, 0.7\rangle\}$ περιέχει μια αντίφαση (αφού το $\langle B, >, 0.3\rangle$ συγκρούεται με το $\langle B, \geq, 0.7\rangle \equiv \langle\neg\neg B, \geq, 0.7\rangle$) και οι κόμβοι b_i είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Συνεπώς, όλοι οι δυνατοί τρόποι επέκτασης του γράφου οδηγούν σε αντίφαση και άρα το $\mathcal{A}_c$ είναι ασυνεπές.*

6.3 Ασαφείς Ονοματικές Έννοιες: Η f$_{KD}$-$\mathcal{SHO}_f\mathcal{IQ}$

Οι Bobillo et. al. προτείνουν στο [14] μια επέκταση των ονοματικών εννοιών τις οποίες αποκαλούν *ασαφείς ονοματικές έννοιες* (*fuzzy nominals*). Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να περιγράψουμε την έννοια των χωρών που μιλούν Γερμανικά ως το ασαφές σύνολο το οποίο περιέχει ακριβώς τη Γερμανία με βαθμό συμμετοχής 1, την Αυστρία με βαθμό 1 και τη Σουηδία με βαθμό 0.67 καθώς μόνο τα $\frac{2}{3}$ του πληθυσμού της Σουηδίας μιλούν Γερμανικά. Εμφανώς με τους ήδη υπάρχοντες κατασκευαστές της γλώσσας f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIQ}$ είναι αδύνατο να περιγράψουμε τη γνώση αυτή. Ένα αξίωμα της μορφής $\mathsf{GermanSpeaking} \equiv \{germany\} \sqcup \{austria\} \sqcup \{switzerland\}$ δεν αποδίδει τη σωστή σημασιολογία καθώς η έννοια GermanSpeaking θα περιείχε τα αντικείμενα $germany^{\mathcal{I}}, austria^{\mathcal{I}}$ και $switzerland^{\mathcal{I}}$ σε βαθμό 1, ενώ αν γράφαμε τους ισχυρισμούς $(germany : \mathsf{GermanSpeaking}) \geq 1$, $(austria : \mathsf{GermanSpeaking}) \geq 1$ και $(switzerland : \mathsf{GermanSpeaking}) \geq 0.67$ η σημασιολογία της γλώσσας δε θα απέκλειε να υπάρχει και κάποιο άλλο στοιχείο το οποίο ανήκει στην έννοια αυτή σε κάποιο βαθμό. Για το λόγω αυτό οι Bobillo et. al. επεκτείνουν τη σύνταξη του κατασκευαστή των ασαφών ονοματικών εννοιών για να μπορούμε να ορίζουμε επιπλέον και το βαθμό συμμετοχής του ατόμου (αντικειμένου) στην ασαφή έννοια (σύνολο). Πιο συγκεκριμένα για $o \in \mathbf{I}$ και $n \in (0,1]$ το $\{o,n\}$ αποτελεί μια έννοια που ονομάζεται ασαφής ονοματικής έννοια. Χρησιμοποιώντας τις έννοιες αυτές στην περίπτωσή μας μπορούμε να γράψουμε το αξίωμα.

$$\mathsf{GermanSpeaking} \equiv \{germany, 1\} \sqcup \{austria, 1\} \sqcup \{switzerland, 0.67\}.$$

Η έννοια $\{germany, 1\} \sqcup \{austria, 1\} \sqcup \{switzerland, 0.67\}$ μπορεί για συντομία να γραφτεί ως $\{(germany, 1), (austria, 1), (switzerland, 0.67)\}$.

Η σημασιολογία τους δίνεται από τη σχέση: $\{o,n\}^{\mathcal{I}}(a) = \begin{cases} n, & \text{αν } a = o^{\mathcal{I}} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι οι Bobillo et. al. αρχικά είχαν προτείνει τον κατασκευαστή $\{(o_1, n_1), \ldots, (o_k, n_k)\}$, με τη σημασιολογία $\{(o_1, n_1), \ldots, (o_k, n_k)\}^{\mathcal{I}}(a) = \sup_{a=o_i^{\mathcal{I}}, 1 \leq i \leq n} n_i$. Η σημασιολογία αυτή όμως επιτρέπει να υπάρχουν $1 \leq i,j \leq k$ με $i \neq j$ τέτοια ώστε $o_i = o_j$ και $n_i \neq n_j$ κάτι το οποίο κατά την προσωπική μας άποψη δε θα έπρεπε να είναι δυνατόν αλλά θα έπρεπε να συνεπάγεται μια αντίφαση καθώς συνεπάγεται ότι το ίδιο αντικείμενο ανήκει στο ίδιο ασαφές σύνολο με δυο διαφορετικούς βαθμούς. Τέλος αναφέρουμε ότι οι συγγραφείς στο [14] αναφέρουν την ασαφή γλώσσα τους ως f-$\mathcal{SHOIN}$. Όπως συμβαίνει όμως στη βιβλιογραφία των ΠΛ ο κανόνας είναι ο κάθε νέος κατασκευαστής σε μια ΠΛ γλώσσα να υποδεικνύεται με την ύπαρξη ενός γράμματος. Εφόσον το πρόθεμα "f-" χρησιμοποιείται για να υποδείξει τη δυνατότητα ορισμού ασαφών ισχυρισμών, προτείνουμε την ονομασία $\mathcal{O}_f$ για τον κατασκευαστή των ασαφών ονοματικών εννοιών. Αυτό συνεπάγεται ότι η ασαφής γλώσσα $\mathcal{SHOIQ}$ η οποία επιτρέπει ασαφείς ονοματικές έννοιες είναι η γλώσσα f-$\mathcal{SHO}_f\mathcal{IQ}$.

Παρόλο που ο κατασκευαστής των ασαφών ονοματικών εννοιών προτείνεται στο [14] οι συγγραφείς δεν παρουσιάζουν μια tableaux διαδικασία συλλογιστικής για αυτούς, αλλά μια διαδικασία αναγωγής της γλώσσας f-$\mathcal{SHO}_f\mathcal{IN}$ στην κλασική ΠΛ $\mathcal{SHOIN}$ στηριζόμενοι στην εργασία του Straccia [139] για την αναγωγή f$_{KD}$-ΠΛ σε κλασικές ΠΛ. Στη συνέχεια θα δείξουμε πώς μπορούμε να τροποποιήσουμε τον αλγόριθμο συλλογιστικής της γλώσσας f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIQ}$ για να διαχειριστούμε τους κατασκευαστές των ασαφών ονοματικών εννοιών.

Πρώτιστα ο ορισμός 4.3.3 χρειάζεται κάποιες σημαντικές αλλαγές. Εμφανώς οι ιδιότητες αυτές είναι οι 15 και 16 καθώς τώρα είναι δυνατόν ένα στοιχείο του ασαφούς tableau να ανήκει σε μια ασαφή ονοματική έννοια σε κάποιο βαθμό. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τις παρακάτω τροποποιημένες ιδιότητες.

15'. Αν $\mathcal{L}(x, \{o, n\}) = n$ και $\mathcal{L}(y, \{o, n\}) = n$, για κάποια $o \in I$ και $n \in (0, 1]$, τότε $x = y$.

16'. $\mathcal{L}(x, \{o, n\}) = n$.

Στη συνέχεια χρειαζόμαστε κάποιες τροποποιήσεις στον αλγόριθμο κατασκευής του γράφου ολοκλήρωσης για να υποστηρίξουμε τις ασαφείς ονοματικές έννοιες. Πρώτιστα χρειάζεται να προσθέσουμε κάποιες επιπλέον συνθήκες αντίφασης, αλλά και οι υπόλοιπες συνθήκες που αναφέρονται σε ονοματικές έννοιες χρειάζεται και αυτές να προσαρμοστούν στις απαιτήσεις των ασαφών ονοματικών εννοιών. Πιο συγκεκριμένα, για κάποιο κόμβο x, λέμε ότι το σύνολο $\mathcal{L}(x)$ περιέχει *αντίφαση* (*clash*) αν ικανοποιεί μια από τις συνθήκες που περιγράφονται στον ορισμό 4.3.5, τις συνθήκες για την f_{KD}-$\mathcal{SHOIQ}$ αλλά και επιπλέον περιέχει:

- για κάποιο $o \in \mathbf{I}$ και $n \in (0, 1]$, υπάρχουν οι κόμβοι $x \neq y$ με $\langle \{o, n\}, \geq, n \rangle \in \mathcal{L}(x) \cap \mathcal{L}(y)$.
- δυο τριάδες της μορφής $\langle \{o, n_1\}, \rhd, k_1 \rangle$ και $\langle \{o, n_2\}, \rhd, k_2 \rangle$ με $n_1 \neq n_2$.
- μια τριάδα της μορφής $\langle \{o, n\}, \rhd, k \rangle$ και οι τεχνητές τριάδες $\langle C_o, \geq, n \rangle$ και $\langle \neg C_o, \rhd, k \rangle$ συγκρούονται μεταξύ τους.

Η δεύτερη συνθήκη κωδικοποιεί αυτό το οποίο αναφέραμε και παραπάνω, ότι δηλαδή σε ένα ασαφές σύνολο δεν μπορεί να υπάρχει ένα αντικείμενο $o^{\mathcal{I}}$ το οποίο ανήκει στο ασαφές σύνολο με δυο διαφορετικούς βαθμούς. Η τρίτη περίπτωση αναγνωρίζει τις αντιφάσεις που προκύπτουν από ασαφείς ισχυρισμούς με ασαφείς ονοματικές έννοιες. Για παράδειγμα, οι ασαφείς ισχυρισμοί $(a : \{o, 0.5\}) \geq 0.6$ και $(b : \{o, 0.5\}) > 0.5$ αντιπροσωπεύουν αντιφάσεις καθώς το $\{o, 0.5\}$ ερμηνεύεται ως το ασαφές σύνολο στο οποίο το αντικείμενο $o^{\mathcal{I}}$ ανήκει σε βαθμό ίσο με 0.5 άρα το $a^{\mathcal{I}}$ δε μπορεί να ανήκει σε βαθμό το λιγότερο ίσο με 0.6 και ούτε το $b^{\mathcal{I}}$ σε βαθμό αυστηρά μεγαλύτερο από 0.5. Τις περιπτώσεις αυτές τις αναγνωρίζουμε χρησιμοποιώντας τεχνητές τριάδες, όπως φαίνεται από τη συνθήκη αντίφασης. Στη πρώτη περίπτωση ο γράφος ολοκλήρωσης θα περιείχε την τριάδα $\langle \{o, 0.5\}, \geq, 0.6 \rangle$ και άρα οι τριάδες $\langle C_o, \geq, 0.5 \rangle$ και $\langle \neg C_o, \geq, 0.6 \rangle$ συγκρούονται μεταξύ τους, ενώ στη δεύτερη περίπτωση οι τριάδες $\langle C_o, \geq, 0.5 \rangle$ και $\langle \neg C_o, >, 0.5 \rangle$ συγκρούονται μεταξύ τους, επίσης.

Η αρχικοποίηση ενός γράφου ολοκλήρωσης για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SHO}_f\mathcal{IQ}$ είναι παρόμοια με αυτήν της γλώσσας f_{KD}-$\mathcal{SHOIQ}$ αντιμετωπίζοντας κατάλληλα τις ασαφείς ονοματικές έννοιες, δηλαδή δημιουργούμε έναν ονοματικό κόμβο r_{o_i}, με $\mathcal{L}(r_i) = \{\langle \{o_i, n\}, \geq, n \rangle, \langle \neg\{o_i, n\}, \geq, 1 - n \rangle, \{o_i, 1\}, \geq, 1\}$ για κάθε ασαφή ονοματική έννοια $\{o_i, n\}$ που εμφανίζεται στα $\mathcal{T}$ και $\mathcal{A}$. Τέλος, στον Πίνακα 6.3 παρουσιάζουμε τους κανόνες επέκτασης που χρειάζονται για τη διαχείριση ασαφών ονοματικών εννοιών.

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε κάποια παραδείγματα συλλογιστικής με τις ασαφείς ονοματικές έννοιες.

Πίνακας 6.3: *Κανόνες για τις ασαφείς ονοματικές έννοιες της γλώσσας* f_{KD}-$\mathcal{SHO}_f\mathcal{IQ}$

Κανόνας		Περιγραφή
$\{o,n\}$	αν 1.	για κάποιο $\{o,n\}$ υπάρχουν δυο κόμβοι x,y με $\langle\{o,n\},\geq,k\rangle \in \mathcal{L}(x)\cap\mathcal{L}(y)$
	2.	και δεν ισχύει $x \neq y$
	τότε	Συγχώνευση(x,y)
$\{o,n\}_{\rhd}$	αν 1.	$\langle\{o,n\},\rhd,k\rangle \in \mathcal{L}(x)$, και
	2.	$\{\langle\{o,n\},\geq,n\rangle,\langle\neg\{o,n\},\geq,1-n\rangle\} \nsubseteq \mathcal{L}(x)=\emptyset$
	τότε	$\mathcal{L}(x)\rightarrow\mathcal{L}(x)\cup\{\langle\{o,n\},\geq,n\rangle,\langle\neg\{o,n\},\geq,1-n\rangle\}$

Παράδειγμα 6.3.1 *Έστω η βάση γνώσης* $\Sigma = \langle\mathcal{T},\mathcal{A}\rangle$, *με* $\mathcal{T} = \{\mathsf{GermanSpeaking} \equiv \{(germany,1),(austria,1),(switzerland,0.67)\}\}$ *και* $\mathcal{A} = \{(a : \mathsf{GermanSpeaking}) = 0.67\}$. *Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το άτομο a είναι η Σουηδία. Με άλλα λόγια επιθυμούμε να επαληθεύσουμε τη λογική συνεπαγωγή* $\Sigma \models a \doteq switzerland$. *Όπως είδαμε σε προϋγούμενο κεφάλαιο για τη γλώσσα OWL το πρόβλημα συλλογιστικής αυτό μπορεί να αναχθεί εύκολα στο πρόβλημα της μη-ικανοποιησιμότητας της βάσης γνώσσης* $\Sigma' = \langle\mathcal{T},\mathcal{A}\cup\{a \neq switzerland\}\rangle$. *Στη συνέχεια αρχικοποιούμε ένα γράφο ολοκλήρωσης ώστε να περιέχει τους παρακάτω κόμβους με τις αντίστοιχες ετικέτες:*

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \mathcal{L}(x_{\mathsf{a}}) = \{\langle\mathsf{GermanSpeaking},=,0.67\rangle,\langle\{\mathsf{a}\},\geq,1\rangle\} \\
(2) & \mathcal{L}(r_{germany}) = \{\langle\{germany,1\},\geq,1\rangle,\langle\neg\{germany,1\},\geq,0\rangle\} \\
(3) & \mathcal{L}(r_{austria}) = \{\langle\{austria,1\},\geq,1\rangle,\langle\neg\{austria,1\},\geq,0\rangle\} \\
(4) & \mathcal{L}(r_{switzerland}) = \{\langle\{switzerland,0.67\},\geq,0.67\rangle,\langle\neg\{switzerland,0.67\},\geq,0.33\rangle, \\
 & \qquad \langle\{switzerland,1\},\geq,1\rangle\}
\end{array}
$$

αλλά και τη σχέση $\neq$ *σε* $x_{\mathsf{a}} \neq r_{switzerland}$.

Λόγω του αξιώματος υπαγωγής του σώματος ορολογίας η ετικέτα του κόμβου x_{a} *αντικαθίσταται από τον ορισμό της έννοιας* GermanSpeaking *άρα έχουμε*

$$
\begin{array}{rcl}
\langle\{germany,1\}\sqcup\{austria,1\}\sqcup\{switzerland,0.67\},\geq,0.67\rangle & \in & \mathcal{L}(x_{\mathsf{a}}) \text{ και} \\
\langle\neg\{germany,1\}\sqcap\neg\{austria,1\}\sqcap\neg\{switzerland,0.67\},\geq,0.33\rangle\} & \in & \mathcal{L}(x_{\mathsf{a}})
\end{array}
$$

το οποίο προκείπτει διότι ο ισχυρισμός $(a : \mathsf{GermanSpeaking}) = 0.67$ *ισονδυναμεί με δυο ισχυρισμούς της μορφής* $(a : \mathsf{GermanSpeaking}) \geq 0.67$ *και* $(a : \mathsf{GermanSpeaking}) \leq 0.67 \rightarrow (a : \neg\mathsf{GermanSpeaking}) \geq 0.33$.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε επαναληπτικά τους κανόνες επέκτασης για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SHOIQ}$ *μαζί με τους επιπλέον κανόνες που είδαμε παραπάνω. Έτσι λοιπόν λαμβάνουμε τα παρακάτω βήματα εφαρμογής του αλγορίθμου.*

$$
\begin{array}{lll}
(5) & \{\langle\neg\{germany,1\},\geq,0.33\rangle,\langle\neg\{switzerland,0.67\},\geq,0.33\rangle, & \\
 & \qquad \langle\neg\{austria,1\},\geq,0.33\rangle\} \subseteq \mathcal{L}(x_{\mathsf{a}}) & \sqcap_{\geq}\times 2 : (1) \\
(6a) & \langle\{germany,1\},\geq,0.67\rangle \cup \mathcal{L}(x_{\mathsf{a}}) & \sqcup_{\geq} : (1) \\
(6b) & \langle\{austria,1\},\geq,0.67\rangle \cup \mathcal{L}(x_{\mathsf{a}}) & \sqcup_{\geq} : (1) \\
(6c) & \langle\{switzerland,0.67\},\geq,0.67\rangle \cup \mathcal{L}(x_{\mathsf{a}}) & \sqcup_{\geq} : (1) \\
(7a) & \{\langle\{germany,1\},\geq,1\rangle,\langle\neg\{germany,1\},\geq,0\rangle\} \subseteq \mathcal{L}(x_{\mathsf{a}}) & \{o,n\}_{\geq} : (6a) \\
(7b) & \{\langle\{austria,1\},\geq,1\rangle,\langle\neg\{austria,1\},\geq,0\rangle\} \subseteq \mathcal{L}(x_{\mathsf{a}}) & \{o,n\}_{\geq} : (6b) \\
(7c) & \{\langle\{switzerland,0.67\},\geq,0.67\rangle, & \\
 & \qquad \langle\neg\{switzerland,0.67\},\geq,0.33\rangle\} \subseteq \mathcal{L}(x_{\mathsf{a}}) & \{o,n\}_{\geq} : (6c) \\
(8a) & \textit{Το } \mathcal{L}(x_{\mathsf{a}}) \textit{ του κλαδιού } a \textit{ περιέχει αντίφαση: } (7a),\ (5) & \\
(8b) & \textit{Το } \mathcal{L}(x_{\mathsf{a}}) \textit{ του κλαδιού } b \textit{ περιέχει αντίφαση: } (7b),\ (5) & \\
(8c) & \textit{Ο γράφος περιέχει αντίφαση: } (7c),\ (4),\ x_{\mathsf{a}} \neq r_{switzerland} &
\end{array}
$$

Από το παράδειγμα αυτό γίνεται αντιληπτή και η σημασία του κανόνα $\{o,n\}_{\triangleright}$ για τη σωστή εύρεση όλων των αντιφάσεων που βρίσκονται έμμεσα μέσα στο γράφο ολοκλήρωσης.

Η μέθοδος για τα γενικευμένα και κυκλικά αξιώματα μπορεί να εφαρμοστεί πάνω σε ονοματικές και κατ' επέκταση και σε ασαφείς ονοματικές έννοιες. Το μόνο σημείο το οποίο είναι προφανές ότι χρειάζεται προσαρμογή είναι η κατασκευή του συνόλου των σχετικών βαθμών ($N^{\mathcal{A}}$) στο οποίο χρειάζεται να συμπεριλάβουμε και βαθμούς που πιθανόν να εμφανίζονται σε ασαφείς ονοματικές έννοιες σε οποιοδήποτε στοιχείο της βάσης γνώσης μας.

Παράδειγμα 6.3.2 *Έστω το σώμα ορολογίας*

$$\mathcal{T} = \{\{(greece, 1), (albania, 0.8), (montenegro, 0.7), (croatia, 0.6)\} \sqsubseteq \mathsf{VulcanMed}\}.$$

Εμφανώς το ασαφές σώμα όρων συνεπάγεται ότι $(albania : \mathsf{VulcanMed}) \geq 0.8$. *Για να ελέγξουμε το ερώτημα αυτό ελέγχουμε την ασυνέπεια του σώματος ισχυρισμών* $\mathcal{A} = \{(albania : \neg\mathsf{VulcanMed}) > 0.2\}$ *το οποίο κανονικοποιημένο γράφεται ώς* $\mathcal{A} = \{(albania : \neg\mathsf{VulcanMed}) \geq 0.2 + \epsilon\}$. *Για να το αποδείξουμε αυτό, και εφόσον εμφανίζονται γενικευμένα αξιώματα, κατασκευάζουμε αρχικά το σύνολο των σχετικών βαθμών, το οποίο είναι το* $N^{\mathcal{A}} = \{0, 0.2, 0.2{+}\epsilon, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8{-}\epsilon, 0.8, 1\}$ *και στη συνέχεια αρχικοποιούμε ένα γράφο ολοκλήρωσης ώστε να περιέχει τους παρακάτω κόμβους με τις αντίστοιχες ετικέτες κόμβων:*

$$\begin{array}{ll}
(1) & \mathcal{L}(x_{albania}) = \{\langle\neg\mathsf{VulcanMed}, \geq, 0.2+\epsilon\rangle, \langle\{albania, 1\}, \geq, 1\rangle\} \\
(2) & \mathcal{L}(r_{albania}) = \{\langle\{albania, 0.8), \geq, 0.8\rangle, \langle\neg\{albania, 0.8\}, \geq, 0.2\rangle, \\
 & \qquad\qquad\quad \langle\{albania, 1\}, \geq, 1\rangle\}
\end{array}$$

Η αρχικοποίηση είναι παρόμοια και για τις άλλες ασαφείς ονοματικές έννοιες αλλά τις έχουμε παραλείψει χάριν συντομίας.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε επαναληπτικά τους κανόνες επέκτασης για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SHOIQ}$ *μαζί με τους επιπλέον κανόνες που είδαμε παραπάνω αλλά και τους κανόνες για τα γενικευμένα και κυκλικά αξιώματα. Έτσι λοιπόν λαμβάνουμε τα παρακάτω βήματα εφαρμογής του αλγορίθμου.*

$$\begin{array}{lll}
(3) & \textit{Συγχώνευση}(x_{albania}, r_{albania}) & \{o\} : (1), (2) \\
(4a) & \{\langle\neg\{greece, 1\}, \geq, 1-n+\epsilon\rangle, \langle\neg\{albania, 0.8\}, \geq, 1-n+\epsilon\rangle, & \\
 & \quad \langle\neg\{montenegro, 0.7\}, \geq, 1-n+\epsilon\rangle, & \\
 & \quad \langle\neg\{croatia, 0.6\}, \geq, 1-n\rangle\} \subseteq \mathcal{L}(x_{albania}) & \sqsubseteq: (3) \\
(4b) & \langle\mathsf{VulcanMed}, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(x_{albania}) &
\end{array}$$

Η παραπάνω διάζευξη θα πραγματοποιηθεί για κάθε $n \in N^{\mathcal{A}}$. Έτσι λοιπόν, όταν φτάσουμε να επιλέξουμε την τιμή $n = 0.8$, τότε και οι δυο εναλλακτικές στο 4ο βήμα θα καταλήξουν σε αντίφαση. Στο βήμα $4b$ το $\mathcal{L}(x_{albania})$ περιέχει σύγκρουση λόγω των τριάδων $\{\langle\neg\mathsf{VulcanMed}, \geq, 0.2+\epsilon\rangle, \langle\mathsf{VulcanMed}, \geq, 0.8\rangle\} \subseteq \mathcal{L}(x_{albania})$, ενώ στο βήμα $4a$ το $\mathcal{L}(x_{albania})$ περιέχει πάλι σύγκρουση λόγω των τριάδων $\langle\neg\{albania, 0.8\}, \geq, 1-n+\epsilon\rangle, \langle\{albania, 0.8), \geq, 0.8\rangle \subseteq \mathcal{L}(x_{albania})$ αφού $n = 0.8 \Rightarrow 1-n = 0.2+\epsilon > 0.2$ και άρα $1 - n + 0.8 > 1$.

Κεφάλαιο 7

Ασαφής $\mathcal{SROIQ}$ και η Πρόταση OWL 1.1

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε μια ασαφή επέκταση της γλώσσας $\mathcal{SHOIN}$. Επίσης είδαμε ότι η γλώσσα $\mathcal{SHOIN}$ είναι μια πολύ σημαντική γλώσσα αναπαράστασης γνώσης καθώς αποτελεί το μαθηματικό υπόβαθρο της γλώσσας OWL η οποία με τη σειρά της αποτελεί το πρότυπο της W3C για την αναπαράσταση γνώσης στο σημασιολογικό ιστό. Παρόλο που η OWL και η $\mathcal{SHOIN}$ είναι αρκετά εκφραστικές γλώσσες αναπαράστασης γνώσης η χρήση τους τα τελευταία χρόνια σε εφαρμογές έχει δείξει ότι εμφανίζουν και αρκετές ελλείψεις [112, 46]. Για παράδειγμα μια πολύ σημαντική έλλειψη είναι η απουσία των προσοντούχων περιορισμών πληθυκότητας τους οποίους και μελετήσαμε στο περιεχόμενο των ασαφών ΠΛ στις ενότητες 6.1 και 6.2.

Η εμπειρία μας όμως από τη χρήση της OWL ανέδειξε μια άλλη πολύ σημαντική αδυναμία. Όπως είδαμε η $\mathcal{SHOIN}$, αλλά και η έρευνα στις ΠΛ την πρώτη δεκαετία ανάπτυξής τους, είχε εστιάσει σε μεγάλο βαθμό στη μελέτη των ιδιοτήτων των κατασκευαστών εννοιών όπως είναι ή άρνηση, οι περιορισμοί τιμής, οι υπαρξιακοί περιορισμοί, οι προσοντούχοι περιορισμοί πληθυκότητας, οι ονοματικές έννοιες, οι υπαρξιακοί περιορισμοί αλλά και οι περιορισμοί τιμής, δίνοντας αρκετά αποτελέσματα πολυπλοκότητας αλλά και αλγορίθμους συλλογιστικής. Αντιθέτως, όσον αφορά στους ρόλους που εμφανίζονται σε μια βάση γνώσης πέραν από τα αξιώματα μεταβατικών ρόλων, τους αντίστροφους ρόλους και τις ιεραρχίες αυτά τα οποία μπορούμε να περιγράψουμε και να πούμε για τους ρόλους είναι σχετικά περιορισμένα. Η πιο σημαντική έλλειψη είναι ότι δε μπορούμε να εκφράσουμε ένα είδος μεταφοράς (διάδοσης) ενός ρόλου πάνω από άλλους ρόλους. Κάτι τέτοιο είναι πολύ χρήσιμο σε εφαρμογές ανατομίας αλλά και εφαρμογές ανάλυσης πολυμέσων. Για παράδειγμα δε μπορούμε να περιγράψουμε το γεγονός ότι αν ένα αντικείμενο έχει ως τμήμα ένα άλλο αντικείμενο το οποίο με τη σειρά του περιέχει κάποιο άλλο, τότε το πρώτο αντικείμενο έχει ως τμήμα και το τελευταίο αντικείμενο. Πιο συγκεκριμένα είναι επιθυμητό να μπορούμε να γράψουμε το παρακάτω αξίωμα σύνθεσης ρόλων:

$$\mathsf{hasSegment} \circ \mathsf{isConnectedTo} \sqsubseteq \mathsf{hasSegment}$$

Όταν το αξίωμα αυτό συνδυαστεί με υπαρξιακούς περιορισμούς αλλά και περιορισμούς τιμής μπορεί να δώσει πολύ εκφραστικά λογικά συμπεράσματα. Οι παρατηρήσεις αυτές οδήγησαν στη δημιουργία της γλώσσας $\mathcal{RIQ}$ [74], η οποία επεκτείνει την $\mathcal{SHIN}$ με *περίπλοκα αξιώματα υπαγωγής ρόλων* (ΠΑΥΡ), της μορφής $R_1 \dots R_n \sqsubseteq S$ αλλά και προσοντούχους περιορισμούς πληθυκότητας. Η σημασιολογία των αξιωμάτων ΠΑΥΡ δίνεται με τη χρήση του τελεστή της σύνθεσης ρόλων από τη θεωρία συνόλων. Πιο συγκεκριμένα μια $\mathcal{RIQ}$ ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί ένα αξίωμα ΠΑΥΡ $R_1 \ldots R_n \sqsubseteq S$ αν $R_1^{\mathcal{I}} \circ \ldots \circ R_n^{\mathcal{I}} \subseteq S^{\mathcal{I}}$.

Στη συνέχεια προστέθηκαν σταδιακά στη γλώσσα $\mathcal{RIQ}$ κάποια μικρής εκφραστικότητας αξιώματα ρόλων, όπως αξιώματα ξένων ρόλων (disjoint roles), συμμετρίας ενός ρόλου (symmetry), αντι-συμμετρίας (antisymmetry), ανακλαστικότητας (reflexivity), μη-ανακλαστικότητας (irreflexivity), απλής άρνησης ρόλων αλλά και ένας νέος κατασκευαστής εννοιών που θα δούμε στη συνέχεια, δίνοντας τη γλώσσα $\mathcal{SRIQ}$ [64] και τέλος ονοματικές έννοιες, δίνοντας τη γλώσσα $\mathcal{SROIQ}$ [71]. Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι τα γράμματα που υποδείκνυαν αξιώματα μεταβατικών ρόλων και ιεραρχίας εγκαταλείφθηκαν διότι όπως θα δούμε στη συνέχεια τα ΠΑΥΡ είναι αρκετά εκφραστικά για να περιγράψουν αξιώματα της μορφής αυτής. Επιπρόσθετα, αναφέρουμε ότι το γράμμα $\mathcal{R}$ στην ονοματολογία εμπνεύστηκε από την ομοιότητα των αξιωμάτων αυτών με τις *λογικές γραμματικής* (*grammar logics*) [34].

Όπως θα λέγαμε ότι η OWL αποτελεί μια RDF/XML σειριοποίηση (serialization) της $\mathcal{SHOIN}$, αλλά ακόμα και μια γλώσσα περισσότερο φιλική προς τους χρήστες παρέχοντας αξιώματα που είναι συντακτική ζάχαρη, έτσι και για την $\mathcal{SROIQ}$ ήταν αναγκαίο να δημιουργηθεί μια γλώσσα η οποία θα διαθέτει τη φιλοσοφία της OWL. Έτσι λοιπόν η ανάπτυξη της γλώσσας $\mathcal{SROIQ}$ οδήγησε στην επέκταση του προτύπου OWL και στην πρόταση (recommendation) της OWL 1.1 [109, 49]. Όπως και η OWL έτσι και η OWL 1.1 διαθέτει αφηρημένη σύνταξη με την οποία ο χρήστης μπορεί να ορίσει αξιώματα τα οποία προσφέρει η $\mathcal{SROIQ}$. Στο σημείο αυτό, όμως, είναι απαραίτητο να επισημάνουμε ότι στην πρόταση της OWL 1.1 οι συγγραφείς προσπάθησαν να διορθώσουν κάποια προβλήματα και δυσκολίες οι οποίες προέκυψαν από τη χρήση της OWL. Οι δυσκολίες αυτές αναφέρονται κυρίως στην XML σύνταξη της OWL και στα εργαλεία που έχουν κατασκευαστεί για τη γλώσσα OWL. Έτσι λοιπόν δεν αξίζει να τα αναφέρουμε εδώ. Για το σκοπό αυτό ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [99].

Όπως έχει αποδειχθεί τα προβλήματα της ικανοποιησιμότητας μιας $\mathcal{SHOIN}$-έννοιας και της συνέπειας ενός $\mathcal{SHOIN}$ σώματος ισχυρισμών είναι εξαιρετικά *δύσβατα*[1] (*intractable*). Πιο συγκεκριμένα, έχει αποδειχθεί ότι οι αλγόριθμοι tableaux για τη γλώσσα $\mathcal{SHOIN}$ βρίσκονται στην κλάση πολυπλοκότητας 2-NExpTime [143], δηλαδή στην κλάση των προβλημάτων που αποφασίζονται από μια μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing σε διπλά εκθετικό χρόνο ($2^{2^{n^k}}$). Η πολυπλοκότητα αυτή αναφέρεται στη χείριστη περίπτωση και σήμερα έχουν αναπτυχθεί αρκετές βελτιστοποιημένες μηχανές συλλογιστικής, όπως είναι το FaCT++ [41] ο RacerPro [51] και το Pellet [123] οι οποίες συμπεριφέρονται σχετικά καλά στην πράξη. Παρόλα αυτά βρισκόμαστε ακόμη πολύ μακριά έως ότου προσφέρουμε γρήγορους και αποδοτικούς μηχανισμούς συλλογιστικής για εκατομμύρια δεδομένων. Για παράδειγμα με σχετικά μεγάλα TBox (περίπου 200 αξιώματα υπαγωγής εννοιών και άλλα τόσα ρόλων) στην καλύτερη περίπτωση οι μηχανές αυτές μπορούν να εφαρμόσουν διαδικασίες συλλογιστικής για όχι περισσότερους απο 5000 ισχυρισμούς σε λογικά χρονικά πλαίσια.

Για το λόγο αυτό έχουν μελετηθεί και αναπτυχθεί *βατές* (*tractable*) Περιγραφικές Λογικές, δηλαδή ΠΛ στις οποίες τα προβλήματα συλλογιστικής αποφασίζονται σε πολυπλοκότητα μικρότερη της πολυωνυμικής. Οι πιο δημοφιλείς από τις γλώσσες αυτές είναι η $\mathcal{EL}$++ [5], η DL-Lite [29] και η Horn-$\mathcal{SHIQ}$ [75]. Για το λόγω

[1] Ένα πρόβλημα ονομάζεται δύσβατο αν είναι δυσκολότερο, μιλώντας με όρους υπολογιστικής πολυπλοκότητας, από πολυωνυμικό.

αυτό και η πρόταση της OWL 1.1 περιλαμβάνει ένα κείμενο στο οποίο περιγράφονται πολλές από τις βατές αυτές γλώσσες [48]. Προφανώς και οι γλώσσες αυτές είναι περιορισμένες, με την έννοια ότι σε πολλές περιπτώσεις προσφέρουν αισθητά λιγότερους κατασκευαστές από αυτούς της OWL DL. Κάθε μια από τις γλώσσες αυτές προσφέρει ένα διαφορετικό σύνολο κατασκευαστών και το κίνητρο πίσω από τη δημιουργία καθεμίας τους ήταν διαφορετικό. Για παράδειγμα η $\mathcal{EL}$++ παρέχει κατασκευαστές που είναι απαραίτητοι για την αναπαράσταση γνώσης σε ιατρικές εφαρμογές, ενώ η γλώσσα DL-Lite φτιάχτηκε με σκοπό να χρησιμοποιηθεί σε εφαρμογές βάσεων δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα η DL-Lite είναι ικανή να περιγράφει ένα μεγάλο πλήθος από τα δομικά στοιχεία των UML διαγραμμάτων [32], όπως είναι οι ιεραρχίες εννοιών, οι ξένες έννοιες και οι συναρτησιακοί περιορισμοί. Επιπρόσθετα, η γλώσσα αυτή είναι αρκετά ενδιαφέρουσα καθώς η πολυπλοκότητά της, με βάση τα δεδομένα, είναι LogSpace, άρα ανάλογη αυτής των βάσεων δεδομένων. Για το λόγω αυτό, μάλιστα, έγινε αντιληπτό ότι η DL-Lite μπορεί να υποστηρίξει *συζευγμένες επερωτήσεις* (*conjunctive queries*) οι οποίες είναι δυνατόν να αποτιμηθούν με τη βοήθεια SQL επερωτήσεων πάνω σε ένα σχεσιακό σύστημα βάσεων δεδομένων. Ένα ενδιαφέρον ερευνητικό θέμα θα ήταν να μελετήσουμε αν οι συγκεκριμένες ΠΛ παραμένουν βατές μετά από την ασαφή επέκτασή τους, αλλά και κατά πόσο μπορούμε να επεκτείνουμε την κλασική γλώσσα επερωτήσεων που χρησιμοποιεί η DL-Lite στην περίπτωση των ασαφών επεκτάσεων.

Το πρόβλημα αυτό μελετήθηκε πρώτα από το Straccia ο οποίος παρουσιάζει την ασαφή γλώσσα f_{KD}-DL-Lite [140]. Ο Straccia χρησιμοποιεί την κλασική γλώσσα επερωτήσεων της DL-Lite, δηλαδή συζευγμένες επερωτήσεις στις οποίες οι συζεύξεις ($\wedge$) ερμηνεύονται ως τ-νόρμες, και αποδεικνύει ότι αυτές μπορούν να αποτιμηθούν πάνω σε f_{KD}-DL-Lite οντολογίες εφαρμόζοντας ελάχιστες αλλαγές στον κλασικό αλγόριθμο της DL-Lite. Ακόμα μια προσέγγιση για ασαφείς βατές ΠΛ δίνεται από τον Vojtáš [146], ο οποίος προτείνει μια ασαφή επέκταση της γλώσσας $\mathcal{EL}$ την οποία και ονομάζει $\mathcal{EL}^{@}$. Η $\mathcal{EL}$ αποτελεί μια υπο-γλώσσα της $\mathcal{EL}$++ η οποία επιτρέπει μόνο τομές εννοιών ($\sqcap$) και υπαρξιακούς περιορισμούς ($\exists$). Στη γλώσσα αυτή ο Vojtáš προτείνει οι τομές των εννοιών να ερμηνεύονται ως ασαφείς συναθροιστηκές συναρτήσεις (fuzzy aggregation functions) και όχι με τη χρήση των τ-νορμών. Έτσι λοιπόν η γλώσσα επερωτήσεων υλοποιείται εσωτερικά στη γλώσσα. Αυτό συνεπάγεται επιπρόσθετα ότι η εκφραστικότητα της γλώσσας επερωτήσεων είναι περιορισμένη καθώς η $\mathcal{EL}$ (ως ΠΛ γλώσσα) επιτρέπει μόνο επερωτήσεις που έχουν δενδρική δομή.

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τη σύνταξη και τη σημασιολογία μιας ασαφούς επέκτασης της γλώσσας $\mathcal{SROIQ}$, δημιουργώντας έτσι τη γλώσσα fuzzy-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$ (f-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$). Θα μελετήσουμε ενδιαφέρουσες ιδιότητες, οι οποίες ισχύουν στην κλασική ΠΛ $\mathcal{SROIQ}$, στην περίπτωση της fuzzy-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$ (βλέπε θεώρημα 7.1.3) και επιπρόσθετα θα μελετήσουμε και θα επεκτείνουμε την ιδιότητα που αποδείξαμε για τους περιορισμούς πληθυκότητας (υπο-ενότητα 4.3.2, λήμμα 4.3.2) και σε άλλες νόρμες πέραν από τις νόρμες της γλώσσας f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$ (βλέπε θεώρημα 7.1.4). Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματά μας αυτά για να ορίσουμε μια ασαφή επέκταση της γλώσσας OWL 1.1, δίνοντας τη γλώσσα fuzzy-OWL 1.1. Οι γλώσσες αυτές, χωρίς τα παραπάνω θεωρήματα, παρουσιάστηκαν στο [124]. Τέλος θα ασχοληθούμε με την ασαφή γλώσσα f_{KD}-DL-Lite. Στη διατριβή αυτή θα επεκτείνουμε τη γλώσσα επερωτήσεων που παρουσιάζεται στο [140] με μια οικογένεια πολύ εκφραστικών ασαφών γλωσσών επερωτήσεων και πιο συγκεκριμένα με τις σταθμισμένες συζευγμένες επερωτήσεις (weighted conjunctive queries) [148]. Οι γλώσσες αυτές έχουν προταθεί για ανάκτηση δεδομένων στο χώρο των ασαφών βάσεων δεδομένων και της ασαφούς ανάκτησης δεδομένων [33]. Διάφοροι συγγραφείς έχουν προτείνει διαφορετικές σημασιολογίες για τις γλώσσες αυτές, όπως είναι οι επερωτήσεις που βασίζονται σε τ-νόρμες [17, 111] και οι επερωτήσεις βασίζονται σε συναθροιστικές συναρτήσεις [116, 148, 30]. Όπως έχει αποδειχθεί [18, 152] οι προσεγγίσεις αυτές ακολουθούν παρόμοιες αρχές και σε πολλές περιπτώσεις μπορούν να αναπαρασταθούν συνολικά είτε από τους τελεστές των ασαφών συνεπαγωγών είτε από ασαφείς συναθροιστηκές συναρτήσεις. Έτσι λοιπόν θα ορίσουμε τις γενικευμένες ασαφείς επερωτήσεις (general fuzzy conjunctive queries) οι οποίες αποτελούν ουσιαστικά ένα πλαίσιο για τις περισσότερες από τις παραπάνω προσεγγίσεις, αλλά επιπρόσθετα θα προτείνουμε και νέες, όπως είναι η οικογένεια των επερωτήσεων σταθμισμένων τριγωνικών νορμών (fuzzy weighted t-norms) [31]. Αρχικά όμως θα ξεκινήσουμε από τον ορισμό μιας άλλης, πρωτότυπης, γλώσσας επερωτήσεων την οποία ονομάζουμε γλώσσα επερωτήσεων κατωφλίων (threshold conjunctive queries). Η γλώσσα αυτή δεν ακολουθεί τόσο την ασαφή λογική των παραπάνω γλωσσών, παρόλα αυτά όμως είναι πολύ σημαντικές καθώς γενικεύουν το πρόβλημα της λογικής συνεπαγωγής των ασαφών ισχυρισμών. Όπως έχει αποδειχθεί ακόμα και με αυτές τις πολύ εκφραστικές γλώσσες επερωτήσεων η πολυπλοκότητα της συλλογιστικής στη γλώσσα f_{KD}-DL-Lite παραμένει η ίδια [105, 106].

Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημάνουμε ότι σε αντίθεση με τα προηγούμενα κεφάλαια και τις γλώσσες $\mathcal{SHOIN}$ και $\mathcal{SHOIQ}$ δε θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο tableaux για καμία από τις ασαφείς ΠΛ f-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$, ούτε ακόμα και για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$. Στη διατριβή αυτή δεν ασχοληθήκαμε με το πρόβλημα αυτό καθώς ο αλγόριθμος της κλασικής $\mathcal{SROIQ}$ χρησιμοποιεί ένα στάδιο προ-επεξεργασίας στο οποίο τα ΠΑΥΡ μεταφράζονται σε ένα σύνολο από *μη-ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα* (*non-deterministic finite automaton*) [74] ακολουθώντας τις αρχές που περιγράφονται στο [63]. Τη χρονική στιγμή αυτή δεν είναι εντελώς γνωστό στο συγγραφέα κατά πόσο η θεωρία των ασαφών αυτομάτων είναι επαρκής για να μπορέσουμε να περιγράψουμε μια τέτοια κατασκευή για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$ ή για οποιαδήποτε άλλη ασαφή ΠΛ που επιτρέπει ΠΑΥΡ. Το πρόβλημα αυτό αφήνεται για μελλοντική έρευνα έχοντας ως πιθανό σημείο εκκίνησης το [36].

7.1 Ασαφής Επέκταση της Γλώσσας $\mathcal{SROIQ}$

Ως συνήθως έχουμε ένα αλφάβητο από διακεκριμένων ατομικών εννοιών ($\mathbf{C}$), ατομικών ρόλων ($\mathbf{R}$) (συμπεριλαμβανομένου και ενός ρόλου U ο οποίος αναπαριστά τον καθολικό ρόλου) και ατόμων ($\mathbf{I}$). Το σύνολο των ρόλων ορίζεται ως $\mathbf{R} \cup \{R^- \mid R \in \mathbf{R}\}$, όπου ο R^- λέγεται ο αντίστροφος ρόλος του R. Οι f-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$-έννοιες ορίζονται από τον ακόλουθο επαγωγικό ορισμό:

Ορισμός 7.1.1 *Το σύνολο των f-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$-εννοιών είναι το μικρότερο σύνολο τέτοιο ώστε:*

1. *κάθε ατομική έννοια $\mathsf{A} \in \mathbf{C}$ αλλά και οι ειδικές έννοιες $\top$, $\bot$ είναι f-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$-έννοιες,*

2. *Αν $o \in \mathbf{I}$, $n \in [0,1]$, τότε η $\{o, n\}$ είναι μια f-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$-έννοια,*

3. *Αν οι C και D είναι f-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$-έννοιες, ο R είναι ένας f-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$-ρόλος, ο S είναι ένας απλός f-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$-ρόλος και $p \in \mathbb{N}$, τότε οι $(C \sqcup D)$, $(C \sqcap D)$, $(\neg C)$, $(\forall R.C)$, $(\exists R.C)$, $(\geq pS.C)$, $(\leq pS.C)$ και $\exists S.\mathsf{Self}$ είναι επίσης f-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$-έννοιες.*

Παρόμοια με την κλασική $\mathcal{SROIQ}$ [71], για να διατηρήσουμε την αποφασισιμότητα της γλώσσας περιορίζουμε τους ρόλους που συμμετέχουν σε ΠΠΠ μόνο σε απλούς.

Τα σώματα ορολογίας $\mathcal{T}$ και σώματα ισχυρισμών $\mathcal{A}$ ορίζονται όπως και στην περίπτωση της γλώσσας f-$\mathcal{SHOIN}$. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι διαφορετικά από την κλασική γλώσσας $\mathcal{SROIQ}$ δε χρειάζεται να ορίσουμε ισχυρισμούς ανάμεσα σε ένα άτομο και την απλή άρνηση ενός ρόλου, δηλαδή έναν ισχυρισμό της μορφής $((a,b) : \neg R) \geq n$. Αυτό συμβαίνει διότι αυτή η μορφή ισχυρισμών ήδη προσφέρεται στις ασαφείς Περιγραφικές Λογικές μέσω των αρνητικών ασαφών ισχυρισμών. Πιο συγκεκριμένα ένας ισχυρισμός της μορφής "Ο Γιάννης δε συμπαθεί τη Μαρία" μπορεί να αναπαρασταθεί με τον αρνητικό ισχυρισμό, $((\mathsf{John}, \mathsf{Mary}) : \mathsf{likes}) \leq 0$ το οποίο, λόγω των οριακών ιδιοτήτων των ασαφών συμπληρωμάτων, είναι ανάλογο με τον ισχυρισμό $((\mathsf{John}, \mathsf{Mary}) : \neg\mathsf{likes}) \geq 1$.

Ένα ασαφές σώμα ρόλων $\mathcal{R}$ αποτελείται από δυο συστατικά. Το πρώτο είναι μια ιεραρχία ρόλων *role hierarchy* $\mathcal{R}_h$, η οποία αποτελείται από *περίπλοκα αξιώματα υπαγωγής ρόλων* (ΠΑΥΡ) (*complex role inclusion axioms* - RIAs) και το δεύτερο από ένα σύνολο από αξιώματα ρόλων $\mathcal{R}_a$ [71]. Ένα ΠΑΥΡ είναι της μορφής $R_1 \dots R_n \sqsubseteq S$, όπου τα $R_1, \dots, R_n, S$ είναι f-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$-ρόλοι. Διαισθητικά, τα αξιώματα αυτά μας λένε ότι η σύνθεση των ρόλων $R_1, \dots, R_n$ συνεπάγεται το ρόλο S. Έστω οι ρόλοι $R, S \neq U$. Ένα αξίωμα ρόλων μπορεί να είναι ένα από τα ακόλουθα, $\mathsf{Trans}(R)$, $\mathsf{Ref}(R)$, ϵ-$\mathsf{Ref}(R,n)$, $\mathsf{Irr}(R)$, $\mathsf{Sym}(R)$, $\mathsf{ASym}(R)$, και $\mathsf{Dis}(R,S)$ [71]. Διαισθητικά, τα αξιώματα αυτά μας λένε ότι ο ρόλος R είναι μεταβατικός, *ανακλαστικός* (*reflexive*), *ε-ανακλαστικός* (*ϵ-reflexive*), *μη-ανακλαστικός* (*irreflexive*), *συμμετρικός* (*symmetric*), *αντι-συμμετρικός* (*antisymmetric*), και ότι ο R είναι ξένος ρόλος με τον S, αντίστοιχα. Συγκριτικά με τα αξιώματα της $\mathcal{SROIQ}$ [71] η ϵ-ανακλαστικότητα είναι προφανώς ένα καινούργιο είδος αξιώματος. Παρόμοια με την κλασική $\mathcal{SROIQ}$ επιτρέπουμε μόνο *κανονικές* (*regular*) ιεραρχίες ρόλων αλλά και απλούς (*simple*) ρόλους στα αξιώματα $\mathsf{Irr}(R)$, $\mathsf{ASym}(R)$, $\mathsf{Dis}(R,S)$ και στις έννοιες της μορφής $\exists R.\mathsf{Self}$ με σκοπό να διατηρηθεί η αποφασισιμότητα της γλώσσας. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [71] για τον ορισμό των κανονικών ιεραρχιών και των απλών ρόλων. Ως συνήθως μια ασαφής βάση γνώσης Σ ορίζεται ως μια τριάδα της μορφής $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \rangle$, η οποία περιέχει ένα TBox, ένα RBox και ένα ABox, αντίστοιχα.

Όπως είναι φυσικό η σημασιολογία της ασαφούς $\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$ δίνεται με τη βοήθεια των ασαφών ερμηνειών που εισάγαμε και για την περίπτωση της ασαφούς γλώσσας f-$\mathcal{SHOIN}$ άρα λοιπόν δε θα επεκταθούμε ως προς αυτό το κομμάτι περαιτέρω, παρά στη συνέχεια θα αποδώσουμε τη σημασιολογία των των f-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$-εννοιών, αλλά και των TBox, RBox and ABox αξιωμάτων της γλώσσας f-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$.

Ορισμός 7.1.2 *Δοθείσας μιας ασαφής ερμηνείας $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$, των εννοιών C, D, των ρόλων R, S και του μη-αρνητικού ακεραίου p η ερμηνεία των f-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$-εννοιών ορίζεται επαγωγικά από τις εξισώσεις του Πίνακα 3.1 τις εξισώσεις της σημασιολογίας των προσοντούχων περιορισμών πληθυκότητας που είδαμε στην ενότητα 6.1, τη σημασιολογία των ασαφών ονοματικών εννοιών που είδαμε στην ενότητα 6.3, αλλά και την παρακάτω εξίσωση:*

$$(\exists R.\mathsf{Self})^{\mathcal{I}}(a) = R^{\mathcal{I}}(a,a)$$

Επιπρόσθετα, η ασαφής ερμηνεία αναθέτει στον καθολικό ρόλο U τη συνάρτηση συμμετοχής $U^{\mathcal{I}}(a,b) = 1$, για κάθε δυάδα $\langle a,b\rangle \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$.

Η ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί το GCI $C \sqsubseteq D$, γράφοντας $\mathcal{I} \models C \sqsubseteq D$, αν $\forall a \in \Delta^{\mathcal{I}}.C^{\mathcal{I}}(a) \leq D^{\mathcal{I}}$. Αν η $\mathcal{T}$ ικανοποιεί κάθε GCI τότε λέμε ότι η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο του $\mathcal{T}$.

Επιπλέον, για κάθε ασαφή ερμηνεία $\mathcal{I}$ και αντικείμενα $a,b,c \in \Delta^{\mathcal{I}}$ έχουμε τα ακόλουθα:

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{I} \models \mathsf{Trans}(R) & \textit{αν} & R^{\mathcal{I}}(a,c) \geq \sup\limits_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} \{t(R^{\mathcal{I}}(a,b), R^{\mathcal{I}}(b,c))\} \\
\mathcal{I} \models \mathsf{Ref}(R) & \textit{αν} & R^{\mathcal{I}}(a,a) = 1 \\
\mathcal{I} \models \epsilon\text{-}\mathsf{Ref}(R,n) & \textit{αν} & R^{\mathcal{I}}(a,a) \geq n \\
\mathcal{I} \models \mathsf{Irr}(R) & \textit{αν} & R^{\mathcal{I}}(a,a) = 0 \\
\mathcal{I} \models \mathsf{Sym}(R) & \textit{αν} & R^{\mathcal{I}}(a,b) = R^{\mathcal{I}}(b,a) \\
\mathcal{I} \models \mathsf{ASym}(R) & \textit{αν} & R^{\mathcal{I}}(a,b) \neq R^{\mathcal{I}}(b,a) \\
\mathcal{I} \models \mathsf{Dis}(R,S) & \textit{αν} & t(R^{\mathcal{I}}(a,b), S^{\mathcal{I}}(a,b)) = 0 \ \textit{ή} \\
 & & R^{\mathcal{I}}(a,b) \leq c(S^{\mathcal{I}}(a,b)) \\
\mathcal{I} \models R_1 \ldots R_n \sqsubseteq S & \textit{αν} & [R_1^{\mathcal{I}} \circ^t \ldots \circ^t R_n^{\mathcal{I}}](a,b) \leq S^{\mathcal{I}}(a,b)
\end{array}
$$

Επίσης, ο αντίστροφο ρόλος R^- του R ερμηνεύεται ως $(R^-)^{\mathcal{I}}(a,b) = R^{\mathcal{I}}(a,b)$. Στην περίπτωση την οποία η $\mathcal{I}$ ικανοποιεί κάθε αξίωμα στο $\mathcal{R}$ λέμε ότι η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο του $\mathcal{R}$.

Η ικανοποιησιμότητα ενός ασαφούς σώματος ισχυρισμών και ο ορισμός μοντέλου του είναι όπως και στην περίπτωση της f-$\mathcal{SHOIN}$.

Όπως βλέπουμε τα RIA ερμηνεύονται με τη βοήθεια της $\sup -t$ σύνθεσης των ασαφών ιδιοτήτων. Από τις ιδιότητες της $\sup -t$ σύνθεσης και τη σημασιολογία των αντίστροφων ρόλων προκύπτει ότι αν η $\mathcal{I}$ ικανοποιεί το αξίωμα $R_1 \ldots R_n \sqsubseteq S$, τότε ικανοποιεί επίσης και το αξίωμα $\mathsf{Inv}(R_n) \ldots \mathsf{Inv}(R_1) \sqsubseteq \mathsf{Inv}(S)$. Συνεπώς, η σημασιολογία των ΠΑΥΡ στις ασαφείς ΠΛ κατέχει ανάλογες ιδιότητες με αυτή των κλασικών ΠΛ.

Όπως δείχνετε στο [71], η $\mathcal{SROIQ}$ έχει αρκετή εκφραστική δυνατότητας έτσι ώστε να μπορούμε να κωδικοποιήσουμε τη σημασιολογία πολλών αξιωμάτων ρόλων με τη χρήση των ΠΑΥΡ αλλά και με τη χρήση της ειδικής έννοιας $\exists R.\mathsf{Self}$. Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει την περίπτωση αυτή στο πεδίο των ασαφών ΠΛ και της f-$\mathcal{SRO}_f\mathcal{IQ}$.

Θεώρημα 7.1.3 (Αναγωγή αξιωμάτων RBox) *Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα RBox δεν περιέχει αξιώματα ρόλων της μορφής* $\mathsf{Irr}(R)$, $\mathsf{Ref}(R)$, $\mathsf{Trans}(R)$, *και* $\mathsf{Sym}(R)$.

Απόδειξη: Για την περίπτωση των αξιωμάτων συμμετρικών ρόλων είναι είδη γνωστό από τη γλώσσα OWL και τα αξιώματα του Πίνακα 5.2 ότι αυτά μπορούν να αναχθούν σε αξιώματα υπαγωγής ρόλων. Πιο συγκεκριμένα, $\mathsf{Sym}(R)$ ανν $R^- \sqsubseteq R$ και $R \sqsubseteq R^-$. Τώρα έστω η ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$. Τότε,

- $\mathcal{I} \models \mathsf{Trans}(R)$, αν $\forall a,b \in \Delta^{\mathcal{I}}.R^{\mathcal{I}}(a,c) \geq \sup_{b\in\Delta^{\mathcal{I}}}\{t(R^{\mathcal{I}}(a,b), R^{\mathcal{I}}(b,c))\}$. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε η τελευταία πράξη αποτελεί την $\sup -t$ σύνθεση ανάμεσα στον ρόλο R και τον εαυτό του, συνεπώς $\mathcal{I} \models \mathsf{Trans}(R)$ ανν ικανοποιείται η σχέση $[R^{\mathcal{I}} \circ^t R^{\mathcal{I}}](a,b) \sqsubseteq R^{\mathcal{I}}(a,b)$. Εν κατακλείδι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα αξιώματα της μορφής $\mathsf{Trans}(R)$ με ΠΑΥΡ της μορφής $RR \sqsubseteq R$.

- $\mathcal{I} \models \mathsf{Ref}(R)$, αν $\forall a \in \Delta^{\mathcal{I}}.R^{\mathcal{I}}(a,a) = 1$. Τότε έχουμε τα ακόλουθα βήματα συνεπαγωγής:

$$R^{\mathcal{I}}(a,a) = 1 \Rightarrow R^{\mathcal{I}}(a,a) \geq 1 \Rightarrow (\exists R.\mathsf{Self})^{\mathcal{I}}(a) \geq \top^{\mathcal{I}}(a).$$

  Η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$, συνεπώς μπορούμε να αντικαταστήσουμε το αξίωμα $\mathsf{Ref}(R)$ με το αξίωμα $\top \sqsubseteq \exists R.\mathsf{Self}$.

- $\mathcal{I} \models \mathsf{Irr}(R)$, αν $\forall a \in \Delta^{\mathcal{I}}.R^{\mathcal{I}}(a,a) = 0$. Τότε έχουμε τα ακόλουθα βήματα συνεπαγωγής:

$$R^{\mathcal{I}}(a,a) = 0 \Rightarrow R^{\mathcal{I}}(a,a) \leq 0 \Rightarrow c((\exists R.\mathsf{Self})^{\mathcal{I}})(a) \geq c(0) \Rightarrow$$

$$(\neg\exists R.\mathsf{Self})^{\mathcal{I}}(a) \geq 1 \Rightarrow (\neg\exists R.\mathsf{Self})^{\mathcal{I}}(a) \geq \top^{\mathcal{I}}(a).$$

  Συνεπώς μπορούμε να αντικαταστήσουμε το αξίωμα $\mathsf{Irr}(R)$ με το αξίωμα $\top \sqsubseteq \neg\exists R.\mathsf{Self}$.

■

Συγκρίνοντας με το [71] παρατηρούμε λοιπόν ότι με τη χρήση των ΠΑΥΡ και της ειδικής έννοιας $\exists R.\mathsf{Self}$ μπορούμε να απαλείψουμε το ίδιο σύνολο αξιωμάτων ρόλων. Αξίζει επιπλέον να σημειώσουμε ότι τα αξιώματα της ϵ-ανακλαστικότητας (ϵ-$\mathsf{Ref}(R,n)$) δεν μπορούν να απαλειφθούν.

Όπως δείξαμε στην υπο-ενότητα 4.3.2 και στο λήμμα 4.3.2 εφόσον έχουμε ορίσει ασαφή σημασιολογία για τους περιορισμούς πληθυκότητας (και άρα και για τους προσοντούχους περιορισμούς πληθυκότητας) είναι δυνατόν να ισχύουν οι ισχυρισμοί $(a : (\geq p_1 R.C)) \geq n_1$ και $(a : (\leq p_2 R.C)) \geq n_2$, με $p_1 > p_2$ και $n_1, n_2 \in [0,1]$ ταυτόχρονα, χωρίς να εμφανίζεται κάποια αντίφαση. Μάλιστα δείξαμε ότι αν χρησιμοποιούμε τους ασαφείς τελεστές της οικογένειας των f_{KD}-ΠΛ κάτι τέτοιο ισχύει ανν $n_1 + n_2 \leq 1$. Στη συνέχεια, και εφόσον η γλώσσα $\mathcal{SROIQ}$ προσφέρει προσοντούχους περιορισμούς πληθυκότητας, θα επεκτείνουμε τα ευρήματα του λήμματος σε τυχαίες ασαφείς ΠΛ προσφέροντας έτσι μια γενική μελέτη για ένα μεγάλο φάσμα ασαφών τελεστών. Το πρόβλημα αυτό ήταν ανοικτό από το [126].

Θεώρημα 7.1.4 *Έστω το ABox $\mathcal{A} = \{(a : (\geq p_1 R.C)) \geq n_1, (a : (\leq p_2 R.C)) \geq n_2\}$, με $n_1, n_2 \in [0,1]$, $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ και $p_2 < p_1$. Τότε το $\mathcal{A}$ είναι συνεπές σε ένα μοντέλο με μαρτυρία ανν $c(n_2) \geq n_1$, και όταν η ασαφής τετράδα $\langle c, t, u, \mathcal{J}\rangle$ ικανοποιεί τους κανόνες De Morgan, το c είναι ένα ενειλικτικό συμπλήρωμα και είτε*

1. *η $\mathcal{J}$ είναι μια S-συνεπαγωγή, ή*
2. *η $\mathcal{J}$ είναι μια R-συνεπαγωγή και το c είναι το προσυμπλήρωμα της $\mathcal{J}$.*

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας και για λόγους αναγνωσιμότητας και απλότητας, θα εστιάσουμε μόνο σε απλούς περιορισμούς πληθυκότητας, δηλαδή έννοιες της μορφής. $\geq p_1 R$ και $\leq p_2 R$, και όχι σε ΠΠΠ. Τα αποτελέσματα μεταφέρονται στην περίπτωση των ΠΠΠ άμεσα.

Για την αντίθετη φορά έστω $\mathcal{I}$ ένα μοντέλο με μαρτυρία για το $\mathcal{A}$. Τότε $(\geq p_1 R)^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) \geq n_1$ και χρησιμοποιώντας τη σημασιολογία των περιορισμών πληθυκότητας λαμβάνουμε τα ακόλουθα βήματα,

$$\sup_{b_1,\ldots,b_{p_1}\in\Delta^{\mathcal{I}}} t(\overset{p_1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b_i)\}, \underset{i<j}{t}\{b_i \neq b_j\}) \geq n_1.$$

Εφόσον η $\mathcal{I}$ είναι ερμηνεία με μαρτυρία, υπάρχει κάποια πλειάδα από αντικείμενα b_i για την οποία, $t(\overset{p_1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b_i)\}, \underset{i<j}{t}\{b_i \neq b_j\}) \geq n_1$. Εφόσον $p_1 > p_2$ και $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, τότε $p_1 \geq p_2 + 1$. Τότε, λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας των ασαφών συζεύξεων έχουμε ότι

$$t(t(\overset{p_2+1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b_i)\}, \underset{i<j}{t}\{b_i \neq b_j\}), G) \geq n_1,$$

όπου $G = t(\overset{p_1}{\underset{k=p_2+2}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b_k)\}, \underset{k<l}{t}\{b_k \neq b_l\})$. Συνεπώς, λόγω της ιδιότητας $t(a,b) \leq a, b$ έχουμε ότι,

$$t(\overset{p_2+1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b_i)\}, \underset{i<j}{t}\{b_i \neq b_j\}) \geq n_1. \tag{7.1}$$

Τώρα ας λάβουμε υπόψη μας τον περιορισμό το-πολύ. Εφόσον αυτοί ορίζονται από ασαφείς συνεπαγωγές θα πρέπει να διακρίνουμε ανάμεσα σε δυο περιπτώσεις:

(1) Έστω η $\mathcal{J}$ μια S-συνεπαγωγή. Τότε, από την ανισότητα $(\leq p_2 R)^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) \geq n_2$ μπορούμε να συνεπάγουμε ότι,

$$\inf_{b_1,\ldots,b_{p_2+1}\in\Delta^{\mathcal{I}}} u(c(\overset{p_2+1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b_i)\}), \underset{i<j}{u}\{b_i = b_j\}) \geq n_2.$$

Εφόσον η ανίσωση αυτή ισχύει για το infimum, τότε για μια τυχαία πλειάδα θα έχουμε ότι $u(c(\overset{p_2+1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b_i)\}), \underset{i<j}{u}\{b_i = b_j\}) \geq n_2$. Τέλος, έχουμε τα ακόλουθα βήματα συνεπαγωγής:

$$\begin{array}{rcl}
n_2 & \leq & u(c(\overset{p_2+1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b_i)\}), \underset{i<j}{u}\{b_i = b_j\}) \\
 & = & c(t(\overset{p_2+1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b_i)\}, \underset{i<j}{t}\{b_i \neq b_j\})) \text{ (De Morgan)} \\
 & \Rightarrow & \text{(ενειλικτικό και γνησίως μονότονο συμπλήρωμα)} \\
c(n_2) & \geq & t(\overset{p_2+1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b_i)\}, \underset{i<j}{t}\{b_i \neq b_j\}) \\
 & \geq & n_1 \text{ (εξίσωση 7.1)}
\end{array}$$

Παρατηρήστε στο σημείο αυτό ότι οι ισότητες και ανισότητες των αντικειμένων που εμφανίζονται θεωρούνται μη-ασαφείς άρα $c(a = b) \equiv a \neq b$.

(2) Έστω η $\mathcal{J}$ be μια R-συνεπαγωγη. Και πάλι για μια τυχαία πλειάδα θα έχουμε, $\mathcal{J}(\overset{p_2+1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}},b_i)\}, \underset{i<j}{u}\{b_i = b_j\}) \geq n_2$. Τότε, έχουμε τα ακόλουθα βήματα συνεπαγωγής:

$$
\begin{aligned}
n_2 &\leq \mathcal{J}(\overset{p_2+1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_i)\}, \underset{i<j}{u}\{b_i = b_j\}) \\
&= \mathcal{J}(\overset{p_2+1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_i)\}, c(\underset{i<j}{t}\{b_i \neq b_j\})) \text{ (De Morgan)} \\
&= \mathcal{J}(\overset{p_2+1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_i)\}, \mathcal{J}(\underset{i<j}{t}\{b_i \neq b_j\}, 0)) \text{ (προσυμπλήρωμα)} \\
&= \mathcal{J}(t(\overset{p_2+1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_i)\}, \underset{i<j}{t}\{b_i \neq b_j\}), 0) \text{ (Λήμμα 2.4.1)} \\
&= c(t(\overset{p_2+1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_i)\}, \underset{i<j}{t}\{b_i \neq b_j\})) \text{ (προσυμπλήρωμα της } \mathcal{J}) \\
&\Rightarrow \text{ (ενειλικτικό και γνησίως μονότονο συμπλήρωμα)} \\
c(n_2) &\geq t(\overset{p_2+1}{\underset{i=1}{t}}\{R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b_i)\}, \underset{i<j}{t}\{b_i \neq b_j\}) \\
&\geq n_1 \text{ (εξίσωση 7.1)}
\end{aligned}
$$

Για την ορθή φορά δεδομένου ότι $c(n_2) \geq n_1$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο με μαρτυρία στο οποίο οι ισχυρισμοί ικανοποιούνται. ■

Στο παραπάνω λήμμα χρησιμοποιήσαμε την έννοια του μοντέλου με μαρτυρία το οποίο όπως φαίνεται και από την απόδειξη είναι απολύτως αναγκαίο για να δουλέψει η απόδειξη. Η συνθήκη αυτή μπορεί να δείχνει περιοριστική αλλά όπως έχει δειχθεί στο [54] υπάρχουν ασαφείς ΠΛ οι οποίες έχουν ένα μοντέλο με μαρτυρία ανν έχουν ένα τυχαίο μοντέλο. Όπως είδαμε αυτό ισχύει για την οικογένεια των f_{KD}-ΠΛ. Πιστεύουμε επίσης ότι η ιδιότητα αυτή πιθανόν να ισχύει για μια πολύ μεγάλη κλάση ασαφών ΠΛ αρκεί να αντικαταστήσουμε τους μη-συνεχείς ασαφούς τελεστές, όπως είναι το συμπλήρωμα του Gödel με κάποιο συνεχές συμπλήρωμα όπως τονίζουν και οι συγγραφείς στο [15]. Παρόλα αυτά αυτό αποτελεί θέμα για περισσότερη έρευνα διότι μέχρι στιγμής δεν υπάρχει κάποια τυπική απόδειξη.

7.2 Η Ασαφής Γλώσσα OWL 1.1

Όπως περιγράφεται στο [47] η OWL 1.1 είναι μια επέκταση της OWL DL η οποία αυξάνει την εκφραστικότητά της σε αυτήν της γλώσσας $\mathcal{SROIQ}$ [49]. Εκτός από τα αξιώματα της $\mathcal{SROIQ}$ η OWL 1.1 προσθέτει ακόμα κάποια επιπλέον αξιώματα τα οποία όμως αποτελούν συντακτική ζάχαρη για τη γλώσσα $\mathcal{SROIQ}$, είχαν όμως ζητηθεί από πολλούς χρήστες της γλώσσας OWL DL και η έλλειψή τους δυσχέραινε την ανάπτυξη γνώσης. Ένα από τα αξιώματα αυτά είναι το το αξίωμα DisjointUnion. Ακολουθώντας την ασαφή επέκταση της OWL, έτσι και εδώ η επέκτασή μας εστιάζεται σε ασαφή γεγονότα (fuzzy facts), αλλά επιπρόσθετα και στον κατασκευαστή απαρίθμησης (enumerated class constructor). Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε την αφηρημένη σύνταξη της γλώσσας fuzzy-OWL 1.1. Οι τροποποιημένοι ορισμοί φαίνονται στον Πίνακα 7.1.

Η RDF/XML σύνταξη της fuzzy-OWL 1.1 μπορεί να αποδοθεί με τον ίδιο τρόπο με αυτόν της fuzzy-OWL DL. Σε αυτό το σημείο θα δείξουμε μόνο την RDF/XML σύνταξη του αξιώματος ορισμού της έννοιας των χωρών που μιλάνε Γερμανικά, δηλαδή ένα αξίωμα που εμπλέκει ασαφείς ονοματικές έννοιες, καθώς δεν είχαμε εισάγει τον τελεστή αυτό στην περίπτωση της ασαφής γλώσσας OWL. Η έννοια αυτή μπορεί να οριστεί ως εξής:

Πίνακας 7.1: *Αφηρημένη Σύνταξη f-OWL 1.1*

classAssertion	::=	'ClassAssertion' '(' annotation individualURI description [membership] ')'
objPropAss	::=	'ObjectPropertyAssertion' '(' annotation objectPropertyExpression sourceIndividualURI targetIndividualURI membership ')'
negObjPropAss	::=	'NegativeObjectPropertyAssertion' '(' annotation objectPropExp sourceIndividualURI targetIndividualURI membership')'
objectOneOf	::=	'ObjectOneOf' '(' individualURI individualURI [degree]')'
membership	::=	[ineqType] [degree]
ineqType	::=	'=' | '>=' | '>' | '<=' | '<'
degree	::=	'degree(' real-number-between-0-and-1-inclusive ')'

```
<owl:Class rdf:ID="GermanSpeaking">
  <owl:oneOf rdf:parseType="Collection">
    <Country rdf:about="#Germany" owlx:degree="1"/>
    <Country rdf:about="#Austria" owlx:degree="1"/>
    <Country rdf:about="#Switzerland" owlx:degree="0.67"/>
  </owl:oneOf>
</owl:Class>
```

Στη συνέχεια μπορούμε να παρουσιάσουμε τη σημασιολογία της ασαφούς γλώσσας OWL 1.1. Αυτή φαίνεται στον Πίνακα 7.2. Όπως φαίνεται από τον πίνακα αυτόν παρόλο που χρησιμοποιούμε τον κατασκευαστή των ασαφών ονοματικών εννοιών στις απαριθμημένες έννοιες δεν τον χρησιμοποιούμε στον κατασκευαστή hasValue. Ο κατασκευαστής αυτός προέρχεται από τον κατασκευαστή *γεμίσματος* (*fills*), του οποίου η σύνταξη σε ΠΛ είναι η $R : o$ και η σημασιολογία $(R : o)^{\mathcal{I}} = \{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid (d, o^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}\}$ [6]. Διαισθητικά, ένας ισχυρισμός της μορφής $a : (R : o)$ έχει σαν σκοπό να περιγράψει το γεγονός ότι το a συνδέεται με ένα συγκεκριμένο άτομο (το o) μέσω της R. Ο κατασκευαστής αυτός είναι συντακτική ζάχαρη στην περίπτωση που επιτρέπουμε ονοματικές έννοιες και υπαρξιακούς περιορισμούς και πιο συγκεκριμένα γράφεται ως $\exists R.\{o\}$. Ένας φυσικός τρόπος να αποδώσουμε σημασιολογία στις ασαφείς ΠΛ στον κατασκευαστή του γεμίσματος είναι μέσω της εξίσωσης $(R : o)^{\mathcal{I}}(d) = R^{\mathcal{I}}(d, o^{\mathcal{I}})$, η οποία είναι διαφορετική από τη σημασιολογία που θα προέκυπτε από ένα αξίωμα της μορφής $a : \exists R.\{(o, n)\}$.

Ακόμα και αν θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε τη μεθοδολογία αυτή για να περιγράψουμε έναν ασαφή ισχυρισμό της μορφής $(a : (R : o)) \geq n$ κάτι τέτοιο θα μας οδηγούσε σε λανθασμένα αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα ο ισχυρισμός $a : (R : o) \geq n$ μας λέει ότι το o γεμίζει την R για το a σε βαθμό το λιγότερο ίσο με n, με άλλα λόγια $((a, o) : R) \geq n$. Από την άλλη όμως ο ισχυρισμός $a : \exists R.\{o, n\}$ δηλώνει ότι $t(R^{\mathcal{I}}(a, o), \{o, n\}^{\mathcal{I}}(o)) \geq 1$ κάτι το οποίο ισχύει ανν $n = 1$ και $R^{\mathcal{I}}(a, o) = 1$, αλλιώς έχουμε μια αντίφαση. Προκειμένου να αποδώσουμε σωστά τον ασαφή ισχυρισμό ρόλων θα έπρεπε να δημιουργήσουμε τον ισχυρισμό $a : \exists R.\{o, n\} \geq n$, στο οποίο εμφανώς η ονοματική έννοια είναι περιττή. Γενικά ισχυριζόμαστε ότι οι ασαφείς ονοματικές έννοιες είναι χρήσιμες και έχουν λογικό νόημα μόνο στις περιπτώσεις των απαριθμημένων εννοιών, δηλαδή στις έννοιες $\{(o_1, n_1), \ldots, (o_m, n_m)\}$, και στην περίπτωση όπου $m > 1$. Επιπρόσθετα, παρατηρήστε ότι εφόσον δεν έχουμε ορίσει απλή άρνηση σε ρόλους τα ασαφή γεγονότα της μορφής negativeObjectPropertyAssertion(R a $b \geq n$), αντιστοιχίζονται σε ασαφής ισχυρισμούς της μορφής $((a, b) : R) \geq^{-} c(n)$, δηλαδή $((a, b) : R) \leq c(n)$.

Πίνακας 7.2: *Περιγραφές Κλάσεων και Αξιωμάτων της Ασαφούς OWL 1.1*

Αφηρημένη Σύνταξη	**Σύνταξη ΠΛ**	**Σημασιολογία**
Class(owl:Thing)	$\top$	$\top^{\mathcal{I}}(a) = 1$
Class(owl:Nothing)	$\bot$	$\bot^{\mathcal{I}}(a) = 0$
ObjectIntersectionOf($C, D, \dots$)	$C \sqcap D$	$(C \sqcap D)^{\mathcal{I}}(a) = t(C^{\mathcal{I}}(a), D^{\mathcal{I}}(a))$
ObjectUnionOf($C, D, \dots$)	$C \sqcup D$	$(C \sqcup D)^{\mathcal{I}}(a) = u(C^{\mathcal{I}}(a), D^{\mathcal{I}}(a))$
ObjectComplementOf(C)	$\neg C$	$(\neg C)^{\mathcal{I}}(a) = c(C^{\mathcal{I}}(a))$
ObjectOneOf($(o_1, n_1), (o_2, n_2), \dots$)	$\{(o_1, n_1), (o_2, n_2)\}$	$\{(o_1, n_1), (o_2, n_2)\}^{\mathcal{I}}(a) = u(\{o_1, n_1\}^{\mathcal{I}}(a), \{o_2, n_2\}^{\mathcal{I}}(a))$
ObjectSomeValuesFrom(S C))	$\exists R.C$	$(\exists R.C)^{\mathcal{I}}(a) = \sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a, b), C^{\mathcal{I}}(b))$
ObjectAllValuesFrom(R C))	$\forall R.C$	$(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a) = \inf_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a, b), C^{\mathcal{I}}(b))$
ObjecthasValue(R o))	$\exists R.\{(\mathrm{o},1)\}$	$(\exists R.\{(o, 1)\})^{\mathcal{I}}(a) = \sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a, b), \{(o, 1)\}^{\mathcal{I}}(b))$
ObjectExistsSelf(R)	$\exists R.\mathsf{Self}$	$(\exists R.\mathsf{Self})^{\mathcal{I}}(a) = R^{\mathcal{I}}(a, a)$
ObjectMinCardinality(R p C))	$\geq pR.C$	$(\geq pR.C)^{\mathcal{I}}(a) =$ $\sup\limits_{b_1, \dots, b_p \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(\mathop{t}\limits_{i=1}^{p}\{t(R^{\mathcal{I}}(a, b_i), C^{\mathcal{I}}(b_i))\}, \mathop{t}\limits_{i<j}\{b_i \neq b_j\})$
ObjectMaxCardinality(R p C))	$\leq pR.C$	$(\leq pR.C)^{\mathcal{I}}(a) =$ $\inf\limits_{b_1, \dots, b_{p+1} \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(\mathop{t}\limits_{i=1}^{p+1}\{t(R^{\mathcal{I}}(a, b_i), C^{\mathcal{I}}(b_i))\}, \mathop{u}\limits_{i<j}\{b_i = b_j\})$
ObjectExactCardinality(R p C))	$\geq pR.C \sqcap \leq pR.C$	$(= pR.C)^{\mathcal{I}}(a) = t((\geq pR.C)^{\mathcal{I}}(a), (\leq pR.C)^{\mathcal{I}}(a))$
SubClassOf(C_1 C_2)	$C_1 \sqsubseteq C_2$	$C_1^{\mathcal{I}}(a) \leq C_2^{\mathcal{I}}(a)$
EquivalentClasses(C_1 ... C_n)	$C_1 \equiv \dots \equiv C_n$	$C_1^{\mathcal{I}}(a) = \dots = C_n^{\mathcal{I}}(a)$
DisjointClasses(C_1 ... C_n)	$C_i \sqcap C_j \sqsubseteq \bot$	$t(C_i^{\mathcal{I}}(a), C_j^{\mathcal{I}}(a)) = 0$ ή $C_i^{\mathcal{I}}(a) \leq c(C_j^{\mathcal{I}}(a))$, $1 \leq i < j \leq n$
DisjointUnion(C $C_1 \dots C_n$)	$C \equiv C_1 \sqcup \dots \sqcup D_n$, $C_i \sqcap C_j \sqsubseteq \bot$	$C^{\mathcal{I}}(a) = u(C_1^{\mathcal{I}}(a), \dots, C_2^{\mathcal{I}}(a))$, $t(C_i^{\mathcal{I}}(a), C_j^{\mathcal{I}}(a)) = 0$ ή $C_i^{\mathcal{I}}(a) \leq c(C_j^{\mathcal{I}}(a))$, $1 \leq i < j \leq n$
ObjectPropertyRange(R C)	$\exists R.\top \sqsubseteq C$	$R^{\mathcal{I}}(a, b) \leq C_i^{\mathcal{I}}(a)$
ObjectPropertyDomain(R C)	$\top \sqsubseteq \forall R.C$	$1 \leq \mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a, b), C_i^{\mathcal{I}}(b))$
InverseObjectProperties(R S)]	$R \equiv S^-$	$R^{\mathcal{I}}(a, b) = (S^-)^{\mathcal{I}}(a, b)$
InverseFunctionalObjectProperty(R)	$\top \sqsubseteq \leqslant 1R^-$	$\inf\limits_{b_1, b_2 \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(t((R^-)^{\mathcal{I}}(a, b_1), (R^-)^{\mathcal{I}}(a, b_2)), b_1 = b_2) \geq 1$
SymmetricObjectProperty(R)	$R \equiv R^-$	$R^{\mathcal{I}}(a, b) = (R^-)^{\mathcal{I}}(a, b)$
FunctionalObjectProperty(R)	$\top \sqsubseteq \leqslant 1R$	$\inf\limits_{b_1, b_2 \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(t(R^{\mathcal{I}}(a, b_1), R^{\mathcal{I}}(a, b_2)), b_1 = b_2) \geq 1$
TransitiveObjectProperty(R)	$\mathsf{Trans}(R)$	$\sup\limits_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a, b), R^{\mathcal{I}}(b, c)) \leq R^{\mathcal{I}}(a, c)$
ReflexiveObjectProperty(R)	$\mathsf{Ref}(R)$	$R^{\mathcal{I}}(a, a) = 1$
IrreflexiveObjectProperty(R)	$\mathsf{Irr}(R)$	$R^{\mathcal{I}}(a, a) = 0$
AntisymmetricObjectProperty(R)	$\mathsf{ASym}(R)$	$t(R^{\mathcal{I}}(a, b), R^{\mathcal{I}}(b, a)) = 0$
SubObjectPropertyOf(R_1 R_2)	$R_1 \sqsubseteq R_2$	$R_1^{\mathcal{I}}(a, b) \leq R_2^{\mathcal{I}}(a, b)$
SubObjectPropertyOf(SubObjectPropertyChain($R_1 \dots R_n$) S)	$R_1 \dots R_n \sqsubseteq S$	$R_1^{\mathcal{I}}(a, y_1) \circ^t \dots \circ^t R_n^{\mathcal{I}}(y_n, b) \leq S^{\mathcal{I}}(a, b)$
EquivalentObjectProperties(R_1 ... R_n)	$R_1 \equiv \dots \equiv R_n$	$R_1^{\mathcal{I}}(a, b) = \dots = R_n^{\mathcal{I}}(a, b)$
DisjointObjectProperties(R_1 ... R_n)	$\mathsf{Dis}(R_i, R_j)$	$t(R_i^{\mathcal{I}}(a, b), R_j^{\mathcal{I}}(a, b)) = 0$, ή $R_i^{\mathcal{I}}(a, b) \leq c(R_j^{\mathcal{I}}(a, b))$, $1 \leq i < j \leq n$
ClassAssertion(a type(C) [$\bowtie$] [n])	$(a : C) \bowtie n$	$C^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) \bowtie n, n \in [0, 1]$
ObjectPropertyAssertion(R_1 a b [$\bowtie$] [n])	$((a, b) : R) \bowtie n$	$R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \bowtie n, n \in [0, 1]$
NegObjectPropertyAssertion(R a b [$\bowtie$] [n])	$((a, b) : R) \bowtie^- c(n)$	$R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \bowtie^- c(n), n \in [0, 1]$
Sameindividual($o_1 \dots o_p$)	$o_1 = \dots = o_p$	$o_1^{\mathcal{I}} = \dots = o_p^{\mathcal{I}}$
DifferentIndividuals($o_1 \dots o_p$)	$o_i \neq o_j$	$o_i^{\mathcal{I}} \neq o_j^{\mathcal{I}}, 1 \leq i < j \leq p$

Μια f-OWL 1.1 οντολογία ορίζεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και στη γλώσσα f-OWL.

7.3 Εκφραστικές Γλώσσες Επερωτήσεων: Η Περίπτωση της $\mathbf{f}_{KD}$-DL-Lite

7.3.1 DL-Lite και Ασαφής DL-Lite

Πρόσφατα οι Calvanese et al πρότειναν τη γλώσσα DL-Lite [26] ως μια γλώσσα η οποία μπορεί να εκφράσει τα περισσότερα από τα στοιχεία της γλώσσας μοντελοποίησης UML και η οποία ταυτόχρονα έχει χαμηλή υπολογιστική πολυπλοκότητα. Πιο συγκεκριμένα ο στόχος ήταν να προσφερθεί μια βατή Περιγραφική Λογική, δηλαδή μια λογική στην οποία όλα τα προβλήματα συλλογιστικής της να μπορούν στη χειρότερη περίπτωση να αποφασιστούν σε πολυωνυμικό χρόνο. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη γλώσσα DL-Lite$_{core}$ (η απλά DL-Lite), σε αντίθεση με τις άλλες γλώσσες της οικογένειας DL-Lite οι οποίες παρουσιάζονται στο [27]. Μια DL-Lite οντολογία ($\mathcal{O}$) είναι ένα σύνολο από αξιώματα τα οποία έχουν την παρακάτω μορφή:

1. αξιώματα υπαγωγής εννοιών: $B \sqsubseteq C$ με

   $$B := \mathsf{A} \mid \exists R \mid \exists R^-$$

   $$C := B \mid \neg B \mid C1 \sqcap C2$$

   όπου ο B ονομάζεται βασική κλάση (έννοια), η C μια γενική κλάση η A είναι μια ατομική έννοια και ο R ένας ατομικός ρόλος.

2. αξιώματα συναρτησιακών ρόλων: $\mathsf{Func}(R), \mathsf{Func}(R^-)$, όπου ο R είναι ένας ατομικός ρόλος, και

3. αξιώματα ατόμων: $B(\mathsf{a}), R(\mathsf{a}, \mathsf{b})$ όπου τα a και b είναι άτομα.

Όπως και στις άλλες ΠΛ μια DL-Lite ερμηνεία αποτελείται από μια δυάδα $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$.

Όπως παρατηρούμε η DL-Lite περιορίζει τη χρήση των κατασκευαστών της γλώσσας. Για παράδειγμα επιτρέπει άρνηση και τομή εννοιών αλλά μόνο στο δεξί μέλος των αξιωμάτων. Με τον τρόπο αυτόν περιορίζεται η αλληλεπίδραση ανάμεσα σε κατασκευαστές της γλώσσας οι οποίοι είναι γνωστό ότι προκαλούν δυσβατότητες [6, κεφ. 3].

Τα προβλήματα συλλογιστικής που συναντάμε στην DL-Lite είναι τα γνωστά μας προβλήματα από τις ΠΛ, της συνέπειας μιας οντολογίας, του ελέγχου υπαγωγής δυο εννοιών, του ελέγχου της συνεπαγωγής ενός ισχυρισμού (ή αλλιώς έλεγχος στιγμιότυπου). Η DL-Lite όμως προσφέρει και ένα ακόμα πρόβλημα συλλογιστικής, αυτό της *απάντησης συζευγμένων επερωτήσεων* (*conjunctive query answering*) το οποίο δεν έχουμε εισάγει στα προηγούμενα κεφάλαια. Το πρόβλημα αυτό είναι αρκετά δύσκολο για τις εκφραστικές Περιγραφικές Λογικές που είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Πιο συγκεκριμένα μετά από την εργασία του Tessaris για την απάντηση περιορισμένων επερωτήσεων στη γλώσσα $\mathcal{SHIf}$ [141] το πρόβλημα ήταν ανοικτό για πολλά χρόνια ως τις πρόσφατες εργασίες της Glimm η οποία παρουσιάζει στο [44] έναν αλγόριθμο απάντησης γενικευμένων συζευγμένων επερωτήσεων για τη γλώσσα $\mathcal{SHQ}$ και έναν για απάντηση περιορισμένων συζευγμένων επερωτήσεων στη γλώσσα $\mathcal{SHOQ}$ και στη συνέχεια στο [43] έναν αλγόριθμο για τυχαίες συζευγμένες επερωτήσεις για τη γλώσσα $\mathcal{SHIQ}$. Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι ιδιαίτερα μη-ντετερμινιστικοί και η πρακτική τους αξία δεν έχει αποδειχθεί ακόμα. Αντίθετα όμως το πρόβλημα της απάντησης συζευγμένων επερωτήσεων πάνω από DL-Lite οντολογίες είναι LogSpace ως προς το πλήθος των ατόμων, δηλαδή ίδιας πολυπλοκότητας με την αποτίμηση SQL επερωτήσεων πάνω σε μια σχεσιακή βάση δεδομένων. Ακόμα πιο ενδιαφέρον είναι ότι η αποτίμηση συζευγμένων επερωτήσεων σε DL-Lite οντολογίες μπορεί να αναχθεί στην αποτίμηση ενός συνόλου SQL επερωτήσεων και άρα η διαδικασία συλλογιστικής μπορεί να γίνει με τη χρήση σχεσιακών βάσεων δεδομένων.

Ας ορίσουμε λοιπόν τυπικά τις συζευγμένες επερωτήσεις. Μια *συζευγμένη επερώτηση* (*conjunctive query* - CQ) q είναι μια ερώτηση της μορφής

$$q(X) \leftarrow \exists Y.conj(X,Y) \tag{7.2}$$

ή απλά $q(X) \leftarrow conj(X,Y)$, όπου το $q(X)$ λέγεται η κεφαλή, το $conj(X,Y)$ λέγεται το σώμα, το δυάνυσμα X περιλαμβάνει τις *διακεκριμένες μεταβλητές* (*distinguished variables*), το Y περιλαμβάνει τις υπαρξιακά προσοδεικτούμενες μεταβλητές οι οποίες ονομάζονται *μη-διακεκριμένες μεταβλητές* (*non-distinguished variables*), και τα $conj(X,Y)$ είναι μια σύζευξη ΠΛ ατόμων της μορφής $\mathsf{A}(v)$, $R(v_1,v_2)$, όπου τα A, R είναι αντίστοιχα, ατομικές κλάσεις και ρόλοι και τα v, v_1 και v_2 είναι μεταβλητές ατόμων από τα διανύσματα X και Y ή άτομα που εμφανίζονται στην $\mathcal{O}$. Μια *αποτίμηση* (*evaluation*) $[X \mapsto S]$ είναι μια αντικατάσταση των μεταβλητών του X με άτομα από το σύνολο ατόμων S. Μια επερώτηση $q(X) \leftarrow \exists Y.conj(X,Y)$ ερμηνεύεται σε μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ ως το σύνολο $q^{\mathcal{I}}$ των πλειάδων S τέτοιο ώστε το σώμα της επερώτησης $\exists Y.conj(X,Y)$ αποτιμάτε σε αληθές στην αποτίμηση $[X \mapsto S]$ και την ερμηνεία $\mathcal{I}$. Δοθείσας μια αποτίμησης $[X \mapsto S]$, αν κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της $\mathcal{O}$ ικανοποιεί την $q_{[X\mapsto S]}$, λέμε ότι η $\mathcal{O}$ συνεπάγεται λογικά το $q_{[X\mapsto S]}$. Στην περίπτωση αυτή, το S ονομάζεται *λύση* (*solution*) της q. Μια *διαζευγμένη επερώτηση* (*disjunctive query* - DQ) είναι ένα σύνολο από συζευγμένες επερωτήσεις οι οποίες μοιράζονται την ίδια κεφαλή.

Πίνακας 7.3: *Σημασιολογία f_{KD}-DL-Lite κλάσεων, ιδιοτήτων και αξιωμάτων*

Σύνταξη	Σημασιολογία
$\exists R$	$(\exists R)^{\mathcal{I}}(o_1) = \sup_{o_2\in\Delta^{\mathcal{I}}} \{R^{\mathcal{I}}(o_1,o_2)\}$
$\neg B$	$(\neg B)^{\mathcal{I}}(o) = 1 - B^{\mathcal{I}}(o)$
$C_1 \sqcap C_2$	$(C_1 \sqcap C_2)^{\mathcal{I}}(o) = t(C_1^{\mathcal{I}}(o), C_2^{\mathcal{I}}(o))$
R^-	$(R^-)^{\mathcal{I}}(o_2,o_1) = R^{\mathcal{I}}(o_1,o_2)$
$B \sqsubseteq C$	$\forall o \in \Delta^{\mathcal{I}},\ B^{\mathcal{I}}(o) \leq C^{\mathcal{I}}(o)$
$\mathsf{Func}(R)$	$\forall o_1 \in \Delta^{\mathcal{I}}, \sharp\{o_2 \mid R^{\mathcal{I}}(o_1,o_2) > 0\} = 1$
$B(\mathsf{a}) \geq n$	$B^{\mathcal{I}}(\mathsf{a}^{\mathcal{I}}) \geq n$
$R(\mathsf{a},\mathsf{b}) \geq n$	$R^{\mathcal{I}}(\mathsf{a}^{\mathcal{I}},\mathsf{b}^{\mathcal{I}}) \geq n$

Μετά από προσεκτική προ-επεξεργασία μιας δοθείσας DL-Lite οντολογίας και συζευγμένης επερώτησης, η απάντηση συζευγμένων επερωτήσεων μπορεί να εκτελεσθεί από μια σχεσιακή βάση δεδομένων με τη χρήση SQL επερωτήσεων [29]. Ακόμα και οι ερωτήσεις συνέπειας της βάσης γνώσης μπορούν και αυτές να μεταφραστούν σε ένα σύνολο από SQL ερωτήσεις [29].

Ο Straccia προτείνει στο [140] την ασαφής γλώσσα DL-Lite (f_{KD}-DL-Lite), η οποία επεκτείνει την DL-Lite$_{core}$ με ασαφείς ισχυρισμούς της μορφής που έχουμε δει και στα προηγούμενα κεφάλαια. Η σημασιολογία της ασαφούς DL-Lite ορίζονται και σε αυτήν την περίπτωση με τη χρήση των ασαφών ερμηνειών. Ακολουθώντας τον Straccia στο [140], χρησιμοποιούμε τους ασαφείς τελεστές της οικογένειας των f_{KD}-ΠΛ. Η σημασιολογία των f_{KD}-DL-Lite κλάσεων, ιδιοτήτων και αξιωμάτων φαίνονται στον Πίνακα 7.3.

Τέλος, όπως αποδεικνύει ο Straccia [140], οι αλγόριθμοι υπαγωγής εννοιών και ελέγχου συνέπειας μιας βάσης γνώσης για την f_{KD}-DL-Lite είναι παρόμοιοι με αυτούς της DL-Lite [29]. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [29] και [140].

7.3.2 Εκφραστικές Ασαφείς Γλώσσες Επερωτήσεων

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε δυο γλώσσες επερωτήσεων για ασαφείς οντολογίες. Αφορμή μας για την πρόταση αυτή αποτέλεσε η γλώσσα f_{KD}-DL-Lite και οι δυνατότητες που έχει για αποδοτική αποτίμηση συζευγμένων επερωτήσεων. Η πρώτη γλώσσα επεκτείνει τις συζευγμένες επερωτήσεις εισάγοντας κατώφλια στα άτομα της ερώτησης. Το κίνητρο μας για την επέκταση αυτή ήταν η προσπάθεια επέκτασης του προβλήματος της συνεπαγωγής ενός ασαφούς ισχυρισμού. Από όσο γνωρίζουμε η γλώσσα αυτή δεν έχει προταθεί στη βιβλιογραφία. Η δεύτερη γλώσσα αποτελεί μια επέκταση της πρώτης με γενικευμένους ασαφείς τελεστές. Από τους τελεστές αυτούς προκύπτει ότι η γλώσσα αυτή ουσιαστικά ορίζει μια οικογένεια γλωσσών προσφέροντας μια πληθώρα από διαφορετικές σημασιολογίες και η οποία γενικεύει και της επερωτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν στο [140]. Η ιδέα της γλώσσας αυτής προέρχεται από τις σταθμισμένες επερωτήσεις που έχουν προταθεί στις ασαφείς σχεσιακές βάσεις δεδομένων [148] και για τις οποίες έχουν προταθεί πολλές σημασιολογίες [18, 17, 111, 116, 30]. Σε αντίθεση με τις παραπάνω προσεγγίσεις οι οποίες προτείνουν μια συγκεκριμένη συνάρτηση ερμηνείας, εμείς θα αποδώσουμε μια γενικευμένη σύνταξη η οποία να μπορεί να καλύψει τις περισσότερες από τις προσεγγίσεις αυτές. Ταυτόχρονα θα δείξουμε ότι αυτή μπορεί να καλύψει ακόμα περισσότερες σημασιολογίες δίνοντας ένα τέτοιο παράδειγμα. Στη συνέχεια εισάγουμε τις γλώσσες αυτές.

Επερωτήσεις Κατωφλίων Όπως επισημαίνεται στο [29] στην DL-Lite (αλλά και στις περισσότερες Περιγραφικές Λογικές) το πρόβλημα της συνεπαγωγής ενός κλασικού ισχυρισμού είναι μια ειδική περίπτωση των συζευγμένων επερωτήσεων. Εφόσον η f_{KD}-DL-Lite επεκτείνει την DL-Lite με ασαφείς ισχυρισμούς, θα ήταν φυσικό να απαιτούσαμε η γλώσσα επερωτήσεών μας να είναι μια γενίκευση του προβλήματος της συνεπαγωγής ενός, αυτή τη φορά, ασαφούς ισχυρισμού. Αυτό σημαίνει ότι η γλώσσα επερωτήσεων επιτρέπει στους χρήστες να περιγράφουν τη σύζευξη ασαφών ισχυρισμών στις επερωτήσεις. Με τον τρόπο αυτό ορίζουμε τις *συζευγμένες επερωτήσεις κατωφλίων* (*conjunctive threshold queries* - CTQ) οι οποίες επεκτείνουν τα άτομα $\mathsf{A}(v), R(v_1, v_2)$ των συζευγμένων επερωτήσεων της εξίσωσης 7.2 στην ακόλουθη μορφή $\mathsf{A}(v) \geq t_1, R(v_1, v_2) \geq t_2$, όπου τα $t_1, t_2 \in (0, 1]$ είναι κατώφλια. Όπως αποδείχθηκε οι επερωτήσεις αυτές είναι περισσότερο σημαντικές από ότι φαίνεται. Πιο συγκεκριμένα αυτού του είδους οι επερωτήσεις χρησιμοποιήθηκαν και για αναπτυχθεί ένας αλγόριθμος εξαγωγής συμπερασμάτων για τη ασαφή γλώσσα fuzzy-CARIN [91].

Παράδειγμα 7.3.1 *Για παράδειγμα με τις επερωτήσεις αυτού του τύπου μπορούμε να ζητήσουμε να μας επιστραφούν τα τμήματα μιας εικόνας που είναι μπλε σε βαθμό όχι μικρότερο από 0.7 και κυκλικά σε βαθμό όχι μικρότερο από 0.8 χρησιμοποιώντας την ακόλουθη συζευγμένη επερώτηση κατωφλίου:*

$$q(v) \leftarrow \mathsf{Segment}(v) \geq 1, \mathsf{Blue}(v) \geq 0.7, \mathsf{Circular}(v) \geq 0.8.$$

Είναι προφανές ότι οι επερωτήσεις κατωφλίων είναι πιο εκφραστικές και ευέλικτες από αυτές της εξίσωσης 7.2 εφόσον οι χρήστες μπορούν να επιβάλουν διαφορετικά κατώφλια για διαφορετικά άτομα της επερώτησης.

Τυπικά, δοθείσας μιας f_{KD}-DL-Lite οντολογίας $\mathcal{O}$, μιας συζευγμένη επερώτηση κατωφλίων q_T και μιας αποτίμησης $[X \mapsto S]$, λέμε ότι η $\mathcal{O}$ συνεπάγεται λογικά την q_T (γράφοντας $\mathcal{O} \models_{\mathrm{T}} q_T$) αν κάθε ερμηνεία $\mathcal{I}$ της $\mathcal{O}$ ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη: για κάθε άτομο $\mathsf{A}(v) \geq t_1$ $(R(v_1, v_2) \geq t_2)$ της q_T, έχουμε ότι $\mathsf{A}^{\mathcal{I}}(v)_{X \mapsto S} \geq t_1$ (resp. $R^{\mathcal{I}}(v_1, v_2)_{X \mapsto S} \geq t_2$). Στην περίπτωση αυτή, το S ονομάζεται *λύση* (*solution*) της q_T. Όπως παρατηρούμε από τα παραπάνω το σύνολο λύσεων μιας συζευγμένης επερώτησης κατωφλίων είναι κλασικό (μη-ασαφές), δηλαδή μια πλειάδα είτε ανήκει είτε όχι στο σύνολο λύσεων. Μια *διαζευγμένη επερωτήση κατωφλίων* (*disjunctive threshold query* - DTQ) είναι ένα σύνολο από συζεύξεις επερωτήσεων κατωφλίων οι οποίες μοιράζονται την ίδια κεφαλή.

Γενικευμένες Ασαφείς Επερωτήσεις Εφόσον η f_{KD}-DL-Lite προσφέρει ασαφείς ισχυρισμούς θα ήταν χρήσιμο η επερωτήσεις να επιτρέπουν στην αποτίμησή τους το συσχετισμό βαθμών συμμετοχής με τις πλειάδες που ανήκουν στο σύνολο λύσεων. Με άλλα λόγια μια πλειάδα να ανήκει στο σύνολο λύσεων σε κάποιο βαθμό συμμετοχής. Όπως είδαμε κάτι τέτοιο δε συμβαίνει με τις συζευγμένες επερωτήσεις κατωφλίων στις οποίες μια λύση είτε ανήκει είτε όχι στο σύνολο λύσεων. Για το λόγω αυτό εισάγουμε τις γενικευμένες ασαφείς επερωτήσεις. Συντακτικά, οι *γενικευμένες ασαφείς συζευγμένες επερωτήσεις* (*general fuzzy conjunctive queries* - GFCQ) επεκτείνουν τα άτομα $\mathsf{A}(v), R(v_1, v_2)$ των συζευγμένων επερωτήσεων της εξίσωσης 7.2 σε άτομα της ακόλουθης μορφής $\mathsf{A}(v) : k_1, R(v_1, v_2) : k_2$, όπου οι $k_1, k_2 \in (0, 1]$ είναι βαθμοί.

Στο σημείο αυτό το ερώτημα το οποίο τίθεται είναι τι είδους σημασιολογία θα αποδώσουμε στα παραπάνω γενικευμένα ασαφή άτομα. Οι γλώσσες αυτές είχαν ήδη προταθεί στο [148] για τις ασαφείς σχεσιακές βάσεις δεδομένων, όμως οι προσεγγίσεις που ακολούθησαν πρότειναν συγκεκριμένες συναρτήσεις ερμηνείας [17, 111, 116, 30]. Ακολουθώντας της σημασιολογία και τη φιλοσοφία που προτάθηκε για την ασαφή γλώσσα SWRL [107] (μια επέκταση της γλώσσας κανόνων SWRL του Σημασιολογικού Ιστού [72] με ασαφείς ισχυρισμούς), επιλέγουμε να αφήσουμε τη σημασιολογία του τελεστή σύζευξης (G) και αυτόν του τελεστή που υπολογίζει το βαθμό που έχουμε προσαρτήσει σε κάθε άτομο με το βαθμό του ατόμου (a) ελεύθερο. Όπως αποδείχθηκε και στα [18, 152] οι παραπάνω προσεγγίσεις έχουν κάποια κοινά στοιχεία και μπορούν να αναπαρασταθούν από γενικευμένους ασαφείς τελεστές.

Για να απλοποιήσουμε την παρουσίαση αναπαριστούμε τα άτομα των γενικευμένων ασαφών συζευγμένων επερωτήσεων με $atom_i(\bar{v})$. Δοθείσας μιας f_{KD}-DL-Lite οντολογίας $\mathcal{O}$, μιας ασαφής ερμηνείας $\mathcal{I}$ της $\mathcal{O}$, μιας γενικευμένης ασαφής συζευγμένης επερώτησης q_F και μιας αποτίμησης $[X \mapsto S]$, ο βαθμός αληθείας της q_F στην $\mathcal{I}$ για την αποτίμηση αυτή δίνεται από τη σχέση

$$d = \sup_{S' \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \cdots \times \Delta^{\mathcal{I}}} \{G_{i=1}^{n} \ a(k_i, atom_i^{\mathcal{I}}(\bar{v})_{[X \mapsto S, Y \mapsto S']})\}$$

όπου τα k_i ($1 \leq i \leq n$) και τα $atom_i$ είναι όπως περιγράψαμε παραπάνω, η G είναι μια συνάρτηση για την αποτίμηση των συζεύξεων και a είναι μια συνάρτηση για την αποτίμηση των βαθμών που έχουμε προσαρτήσει σε κάθε άτομο με αυτόν του ατόμου. Το $S : d$ ονομάζεται ενδεχόμενη λύση (*candidate solution*) της q_F. Όταν $d > 0$, τότε η $S : d$ ονομάζεται λύση της q_F. Επιπρόσθετα, η σημασιολογική συνάρτηση θα πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτων συνθήκη:

$$\text{Αν } atom_i^{\mathcal{I}}(\bar{v})_{[X \mapsto S, Y \mapsto S']} = 0 \text{ για κάθε αποτίμηση } S' \text{ και } i \in [1, n], \text{τότε } d = 0. \quad (7.3)$$

Μια *γενικευμένη ασαφής διάζευξη επερωτήσεων* (*general fuzzy disjunctive query* - GFDQ) αποτελείται από ένα σύνολο γενικευμένων ασαφών συζευγμένων επερωτήσεων οι οποίες μοιράζονται την ίδια κεφαλή. Η διάζευξη ερμηνεύεται ως η σ-νόρμα (u) των διαζεύξεων.

Όπως τονίσαμε και παραπάνω αφήσαμε ελεύθερη την ερμηνεία των συζεύξεων και των προσαρμοσμένων βαθμών με τη χρήση των συναρτήσεων G και a. Συνεπώς, έχουμε αρκετές επιλογές για να ορίσουμε σημασιολογία για τα γενικευμένα ασαφή συζευγμένα επερωτήματα. Σε ότι ακολουθεί θα παρουσιάσουμε μερικές από αυτές τις επιλογές καθορίζοντας τις συναρτήσεις αυτές.

1. *Επερωτήσεις Ασαφών Κατωφλίων (fuzzy threshold queries)*: Όπως είδαμε οι επερωτήσεις κατωφλίων κάνουν μια κλασική, δηλαδή μη-ασαφή αποτίμηση ερωτήσεων. Αυτό συνεπάγεται ότι αν έχουμε έναν ισχυρισμό της μορφής $(a : C) \geq 0.18$ και μια επερώτηση κατωφλίου της μορφής $q_T(v) \leftarrow C(v) \geq 0.2$ το a δε θα συμπεριλαμβανόταν στο σύνολο λύσεων καθώς δεν πληροί τον περιορισμό. Αν παρόλα αυτά επιλέξουμε μια τ-νόρμα (t) ως τη συνάρτηση αποτίμησης συζεύξεων και τις R-συνεπαγωγές ως τη συνάρτηση αποτίμησης των προσαρτημένων βαθμών και των ατόμων, τότε λαμβάνουμε τις επερωτήσεις ασαφών κατωφλίων, στις οποίες ο βαθμός αληθείας της q_F στην $\mathcal{I}$ δίνεται από την εξίσωση:

   $$d = \sup_{S' \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \cdots \times \Delta^{\mathcal{I}}} \{t_{i=1}^{n} \ \omega_t(k_i, atom_i^{\mathcal{I}}(\bar{v})_{[X \mapsto S, Y \mapsto S']})\}.$$

   Δοθέντος κάποιου συνόλου S', αν για όλα τα άτομα της επερώτησης έχουμε ότι $atom_i^{\mathcal{I}}(\bar{v})_{[X \mapsto S, Y \mapsto S']} \geq k_i$, εφόσον $\mathcal{J}_R(x, y) = 1$ όταν $y \geq x$ [81], τότε έχουμε ότι $d = 1$, το οποίο δίνει τη σημασιολογία των επερωτήσεων κατωφλίων. Στη συνέχεια αν για κάποιο άτομο ισχύει $atom_i^{\mathcal{I}}(\bar{v})_{[X \mapsto S, Y \mapsto S']} < k_i$ τότε η R-συνεπαγωγή αρχίζει σταδιακά (σε αντίθεση με τις συζευγμένες επερωτήσεις κατωφλίων) να φιλτράρει (να δίνει μια ποινή) το βαθμό του ατόμου σε σχέση με το βαθμό k_i.

   Όπως αποδεικνύεται στο [18] πολλές από τις προτάσεις για σημασιολογία σταθμισμένων επερωτήσεων που είχαν προταθεί [17, 111, 24] εμπίπτουν στην κατηγορία των επερωτήσεων ασαφών κατωφλίων.

2. *Κλασική γλώσσα συζευγμένων επερωτήσεων (conjunctive queries)* [140]: Είναι μια ειδική περίπτωση των επερωτήσεων ασαφών κατωφλίων, όπου όλα τα $k_i = 1$.

Εφόσον $\mathcal{J}_R(1, y) = y$ [81], ο βαθμός αληθείας της q_F στην $\mathcal{I}$ δίνεται από τη σχέση:

$$d = \sup_{S' \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \cdots \times \Delta^{\mathcal{I}}} \{t_{i=1}^{n} \; atom_i^{\mathcal{I}}(\bar{v})_{[X \mapsto S, Y \mapsto S']}\}.$$

3. *Επερωτήσεις Ασαφών Συναθροίσεων (fuzzy aggregation queries)*: Αν χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις ασαφούς συνάθροισης [81], όπως η συνάρτηση $G(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i}$, για την αποτίμηση των συζεύξεων και η συνάρτηση $a(k_i, y) = k_i * y$ για την αποτίμηση των προσαρτημένων βαθμών και των βαθμών των ατόμων, λαμβάνουμε τις επερωτήσεις ασαφών συναθροίσεων, στις οποίες ο βαθμός αληθείας της q_F στην $\mathcal{I}$ δίνεται από τη σχέση:

$$d = \sup_{S' \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \cdots \times \Delta^{\mathcal{I}}} \frac{\sum_{i=1}^{n} \; k_i * atom_i^{\mathcal{I}}(\bar{v})_{[X \mapsto S, Y \mapsto S']}}{\sum_{i=1}^{n} \; k_i}.$$

Επιπρόσθετα, μπορούμε να δείξουμε ότι πολλές από τις προτάσεις που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία για σημασιολογία σταθμισμένων επερωτήσεων [116, 30] αποτελούν ουσιαστικά μέλος της οικογένειας των επερωτήσεων ασαφών συναθροίσεων. Πιο συγκεκριμένα οι Salton, Fox και Wu προτείνουν την παρακάτω συνάρτηση ερμηνείας:

$$d = \sup_{S' \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \cdots \times \Delta^{\mathcal{I}}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \; (atom_i^{\mathcal{I}}(\bar{v})_{[X \mapsto S, Y \mapsto S']})^w}{n} \right)^{1/w}.$$

όπου $w_1 = w_2 = \ldots = w_n = w$ και $w \in (0, +\infty]$. Από την άλλη οι S.-J. Chen και S.-M. Chen προτείνουν ως συνάρτηση ερμηνείας το γεωμετρικό μέσο (geometric mean) [30]:

$$d = \sup_{S' \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \cdots \times \Delta^{\mathcal{I}}} \left(\prod_{i=1}^{n} \; atom_i^{\mathcal{I}}(\bar{v})_{[X \mapsto S, Y \mapsto S']} \right)^{1/w}.$$

Κάτω όμως από το γενικό πρίσμα των επερωτήσεων ασαφών συναθροίσεων, όπως φαίνεται από τη θεωρία των ασαφών συναθροιστικών συναρτήσεων [81] οι συναρτήσεις αυτές αποτελούν παραλλαγές της συνάρτησης του γενικευμένου μέσου (generalized mean) η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$d_w = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^w}{n} \right)^{1/w}$$

όπου $w \in \mathbb{R}^*$. Αν $w \in (0, +\infty]$ τότε έχουμε την προσέγγιση των Salton, Fox και Wu [116], ενώ αν $w \to 0$ τότε η συνάρτηση d τείνει προς το γεωμετρικό μέσο [81]. Επιπρόσθετα, από την ανάλυση αυτή μπορούμε πολύ εύκολα να οδηγηθούμε σε μια νέα σημασιολογία για τις σταθμισμένες επερωτήσεις όπως για παράδειγμα επιλέγοντας $w = -1$ και λαμβάνοντας τη συνάρτηση του αρμονικού μέσου (harmonic mean) [81]:

$$d = \sup_{S' \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \cdots \times \Delta^{\mathcal{I}}} \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{atom_i^{\mathcal{I}}(\bar{v})_{[X \mapsto S, Y \mapsto S']}}}.$$

4. *Επερωτήσεις σταθμισμένων ασαφών τ-νορμών (fuzzy weighted t-norms)*: Αν χρησιμοποιήσουμε σταθμισμένες ασαφείς τ-νόρμες [31] ως συνάρτηση συζεύξεων και προσαρτημένων βαθμών, λαμβάνουμε τις επερωτήσεις των ασαφών βαρών, στις οποίες ο βαθμός αληθείας της q_F στην $\mathcal{I}$ δίνεται από τη σχέση:

$$d = \sup_{S' \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \cdots \times \Delta^{\mathcal{I}}} \{\min_{i=1}^{n} u(\overline{k} - k_i, t(\overline{k}, atom_i^{\mathcal{I}}(\bar{v})_{[X \mapsto S, Y \mapsto S']}))\},$$

όπου $\overline{k} = \max_{i=1}^{n} k_i$. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τους τελεστές αυτούς ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [31].

Ο Yager [149], προτείνει τη χρήση των S-συνεπαγωγών [81] (σε αντίθεση με τις R-συνεπαγωγές των επερωτήσεων ασαφών κατωφλίων), δηλαδή τη συνάρτηση:

$$d = \sup_{S' \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \cdots \times \Delta^{\mathcal{I}}} \{\min_{i=1}^{n} u(1 - k_i, atom_i^{\mathcal{I}}(\bar{v})_{[X \mapsto S, Y \mapsto S']})\},$$

Η προσέγγιση αυτή είναι ειδική περίπτωση των επερωτήσεων σταθμισμένων ασαφών τ-νορμών, όπου $\overline{k} = 1$, διότι $t(1, a) = a$. Παρόμοια προσέγγιση έγινε και από τον Sanchez [119].

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι οι παραπάνω γενικευμένες ασαφείς συζευγμένες επερωτήσεις ικανοποιούν τη συνθήκη 7.3.

Ο αλγόριθμος της f$_{KD}$-DL-Lite υλοποιήθηκε στο σύστημα ONTOSEARCH2 [104]. Επιπρόσθετα, αλγόριθμοι για την απάντηση όλων των παραπάνω γλωσσών επερωτήσεων αναπτύχθηκαν και ενσωματώθηκαν στο ONTOSEARCH2 και από τα πρώτα πειράματα είδαμε ότι αφενώς, όπως και στην κλασική DL-Lite μπορούμε να διαχειριστούμε εκατομμύρια ασαφούς ισχυρισμούς αλλά και επιπρόσθετα η απόδοση του συστήματος μειώνεται κατά περίπου 20% σε σχέση με τις κλασικές επερωτήσεις της DL-Lite [105, 106]. Κάτι τέτοιο είναι αμελητέο καθώς οι χρόνοι απόκρισης τους συστήματος είναι της τάξης των millisecond ακόμα και για αρκετά μεγάλες f$_{KD}$-DL-Lite οντολογίες.

Κεφάλαιο 8

Σχετική Βιβλιογραφία

Οι ασαφείς Περιγραφικές Λογικές έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία για την αναπαράσταση και τη διενέργεια εργασιών συλλογιστικής σε εφαρμογές που αντιμετωπίζουν μεγάλο όγκο ανακριβούς και ασαφούς γνώσης.

Η πρώτη παρουσίαση ασαφούς Περιγραφικής Λογικής έγινε από τον Yen στο [150]. Ο Yen παρουσιάζει τη σύνταξη και τη σημασιολογία μιας ασαφούς επέκτασης της Περιγραφικής Λογικής $\mathcal{FL}_0$. Η γλώσσα $\mathcal{FL}_0$ προκύπτει από τη γλώσσα $\mathcal{ALC}$ αφαιρώντας τον κατασκευαστή της άρνησης και του υπαρξιακού περιορισμού. Επιπρόσθετα, αποδίδει έναν αλγόριθμο εξαγωγής συμπερασμάτων, ο οποίος όμως βασίζεται στους δομημένους αλγορίθμους (structural algorithms). Οι αλγόριθμοι αυτοί είχαν προταθεί για τη διενέργεια συλλογιστικής στις ΠΛ τα πρώτα χρόνια μελέτης τους, στην πορεία όμως αποδείχθηκε ότι δεν μπορούν να διαχειριστούν περίπλοκους κατασκευαστές, όπως είναι αυτοί που χρησιμοποιεί η γλώσσα $\mathcal{ALC}$. Στη συνέχεια, οι Tresp και Molitor [144] παρουσίασαν μια ασαφή επέκταση της γλώσσας $\mathcal{ALC}$, στην οποία η σημασιολογία βασιζόταν στους γενικευμένους τελεστές των τ-νορμών και σ-νορμών. Επιπρόσθετα, οι συγγραφείς εισήγαγαν έναν ακόμα τελεστή στη γλώσσα f-$\mathcal{ALC}$. Ο νέος κατασκευαστής ονομάζεται *τροποποιητής εννοιών* (*concept modifier*) και με αυτόν μπορούμε να δημιουργήσουμε νέες έννοιες τροποποιώντας τη συνάρτηση συμμετοχής των ήδη υπαρχόντων. Για παράδειγμα από την έννοια **Ψηλός** μπορούμε να δημιουργήσουμε τις έννοιες πολύ(**Ψηλός**) ή σχετικά(**Ψηλός**), όπου οι τελεστές πολύ($\cdot$) και σχετικά($\cdot$) είναι συναρτήσεις που επενεργούν πάνω στο ασαφές σύνολο **Ψηλός** και ονομάζονται τροποποιητές. Ο αλγόριθμος που παρουσιάζεται στο [144] βασίζεται σε ένα συνδιασμό αλγορίθμων tableaux και μεθόδων βελτιστοποίησης με σκοπό την επίλυση των ασαφών εξισώσεων που δημιουργούνται από τους κανόνες επέκτασης.

Ο Straccia ήταν ο πρώτος που παρουσίασε μια αναλυτική μέθοδο tableau για τη διενέργεια εργασιών συλλογιστικής στην ασαφή γλώσσα f-$\mathcal{ALC}$ [135, 138] χωρίς να απαιτείται κάποιος αλγόριθμος επίλυσης των εξισώσεων. Ο αλγόριθμος που παρουσιάστηκε ήταν για την ασαφή ΠΛ f_{KD}-$\mathcal{ALC}$, δηλαδή την ασαφή γλώσσα $\mathcal{ALC}$ με τους συγκεκριμένους ασαφείς, και όχι γενικευμένους, τελεστές. Ο Straccia μελετάει επίσης την αναγωγή των προβλημάτων στο πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας αλλά και την πολυπλοκότητα της γλώσσας κάνοντας έτσι μια κλασική, μιλώντας με όρους Περιγραφικών Λογικών, προσέγγιση στις ασαφείς ΠΛ. Η επέκταση του αλγορίθμου του Straccia για την προσθήκη τροποποιητών εννοιών έγινε από τον Hoelldobler στα [59, 60].

Προσεγγίσεις για την επέκταση περισσότερο εκφραστικών ΠΛ παρουσιάστηκαν στα [118, 117], [137], [136] και [15].

Η ασαφής γλώσσα που παρουσιάζει ο Sanchez [118] είναι η f$_{KD}$-$\mathcal{ALCQ}$. Επιπρόσθετα, οι συγγραφείς ασαφοποιούν και τους ποσοδείκτες (quantifier) κάτι το οποίο παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στις ασαφείς ΠΛ, δημιουργώντας έτσι τελικά τη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{ALCQ}_F$. Η ασαφοποίηση αυτή όμως έχει άμεσες συνέπειες στις διαδικασίες εξαγωγής συμπερασμάτων, και στο [117] οι ίδιοι συγγραφείς παρουσιάζουν μια διαδικασία για την εύρεση του διαστήματος ικανοποιησιμότητας μια έννοιας χωρίς να εξετάζουν τα προβλήματα της συνεπαγωγής ασαφών ισχυρισμών και της υπαγωγής εννοιών.

Επιπλέον, ο Straccia στο [137] παρουσιάζει τη σύνταξη και τη σημασιολογία της ασαφούς επέκτασης της πολύ εκφραστικής ΠΛ $\mathcal{SHOIN}(\mathcal{D})$. Η γλώσσα $\mathcal{SHOIN}(\mathcal{D})$ είναι η $\mathcal{SHOIN}$, που είδαμε στην ενότητα 3, μαζί με *στέρεους χώρους* (*concrete domains*). Οι στέρεοι χώροι χρησιμοποιούνται για την περιγραφή τύπων δεδομένων. Ο Straccia ασαφοποιεί τους στέρεους χώρους με σκοπό τη δυνατότητα ορισμού συναρτήσεων συμμετοχής μέσα από την ασαφή γλώσσα. Για παράδειγμα έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε τη συνάρτηση $High(x)$ ή να χρησιμοποιήσουμε ασαφή κατηγορήματα τύπων δεδομένων της μορφής $<_{170}$. Επιπρόσθετα, στο [137] γίνεται χρήση γενικευμένων τελεστών, το οποίο έχει σαν συνέπεια να μην παρουσιάζεται κάποια διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων. Επιπλέον, στο [137] δε γίνεται καμία μελέτη της σημασιολογίας των μεταβατικών ρόλων και των αξιωμάτων υπαγωγής ρόλων σε σχέση με τους περιορισμούς τιμής αλλά και της σημασιολογίας των περιορισμών πληθυκότητας.

Επίσης, στο [136] ο Straccia ασχολείται για πρώτη φορά με το πρόβλημα της εξαγωγής συμπερασμάτων σε ασαφείς ΠΛ που περιέχουν στέρεους χώρους παρουσιάζοντας έτσι τη γλώσσα $\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$. Η σημασιολογία βασίζεται σε γενικευμένους τελεστές, όμως η διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων, περιορίζεται στις γλώσσες f$_{KD}$-$\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$ και f$_L$-$\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$. Η μέθοδος συλλογιστικής βασίζεται σε συνδυασμό αλγορίθμων tableaux και μεθόδων βελτιστοποίησης και όχι αναλυτικές μεθόδους tableaux. Πιο συγκεκριμένα ο Straccia χρησιμοποιεί τη μέθοδο του Mixed Integer Linear Programming. Τέλος, οι Bobillo και Straccia επεκτείνουν τη μέθοδο αυτή στο [15], χρησιμοποιώντας Mixed Integer Quadratically Constrained Programming, για να παρέχουν έναν αλγόριθμο συλλογιστικής για τη γλώσσα f$_{\langle c_L, t_P, u_P, \mathcal{J}_P\rangle}$-$\mathcal{ALC}f$, δηλαδή η ασαφής γλώσσα $\mathcal{ALC}f$ στην οποία χρησιμοποιούμε την ασαφή λογική του γινομένου, στην οποία όμως έχουμε αντικαταστήσει το μη συνεχές συμπλήρωμα του Gödel με το συμπλήρωμα του Lukasiewicz. Η γλώσσα $\mathcal{ALC}f$ λαμβάνεται από την $\mathcal{ALC}$ επιτρέποντας συναρτησιακούς ρόλους (feature roles) ή αξιώματα συναρτησιακών ρόλων της μορφής $\mathsf{Func}(R)$.

Ανάμεσα στις προαναφερθείσες εργασίες για τις ασαφείς ΠΛ αξίζει να αναφέρουμε τις εργασίες των Bonatti και Tettamanzi [16], ο οποίος εξετάζει την πολυπλοκότητα των προβλημάτων συλλογιστικής στην ασαφή ΠΛ $\mathcal{ALC}$, και Hajek [54] ο οποίος παρουσιάζει πολύ σημαντικές ιδιότητες για αρκετές ασαφείς ΠΛ που βασίζονται στη γλώσσα $\mathcal{ALC}$. Πιο συγκεκριμένα ο Hajek αποδεικνύει ότι το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας μια έννοιας, και της υπαγωγής εννοιών για την ασαφή ΠΛ f$_L$-$\mathcal{ALC}$ είναι αποφασίσιμο, ενώ στις γλώσσες f$_P$-$\mathcal{ALC}$ και f$_G$-$\mathcal{ALC}$ τα προβλήματα αυτά είναι αποφασίσιμα σε *μοντέλα με μαρτυρία* (*witnessed models*). 'Οσον αφορά τα τυχαία μοντέλα, οι γλώσσες f$_P$-$\mathcal{ALC}$ και f$_G$-$\mathcal{ALC}$ υπολείπονται της ιδιότητας του πεπερασμένου μοντέλου [54]. Τα αποτελέσματα αυτά επεκτείνονται εκ νέου και στο πρόβλημα της συνέπειας ενός ασαφούς σώματος ισχυρισμών στο [55].

Όπως παρατηρούμε σε όλες τις προηγούμενες εργασίες, οι αλγόριθμοι εξαγωγής συμπερασμάτων που παρουσιάζονται αναφέρονται σε πολύ ασθενείς ασαφείς ΠΛ, όπως είναι οι γλώσσες $\mathcal{ALC}$, $\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$, $\mathcal{ALCQ}_F$ (στην οποία μάλιστα η σημασιολογία των ασαφών προσοδεικτών απέτρεψε τους συγγραφείς να αποδώσουν μια διαδικασία συλλογιστικής για τα συνήθη προβλήματα των ΠΛ), ή η $\mathcal{ALC}$ επεκταμένη με κλασικούς (μη-ασαφείς) συναρτησιακούς ρόλους. Επιπρόσθετα, σε όλες τις παραπάνω προσεγγίσεις στις οποίες παρουσιάζονται αλγόριθμοι συλλογιστικής οι ορολογίες θεωτείται ότι δεν περιέχουν ούτε γενικευμένα ούτε κυκλικά αξιώματα, με μόνη εξαίρεση το [15]. Απ' όσο γνωρίζουμε, οι περισσότερο εκφραστικές ασαφείς Περιγραφικές Λογικές για τις οποίες ένας *αναλυτικός* (*analytic*) και *εσωτερικός* (*internal*)[1] αλγόριθμος tableau έχει παρουσιαστεί είναι οι γλώσσες f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$ [129, 133], η γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SHIN}$ [128, 133] και η γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$ [130, 125]. Προκειμένου να αποδοθεί μια ορθή και πλήρης διαδικασία μελετήθηκε η σημασιολογία των εκφραστικών κατασκευαστών, όπως είναι οι περιορισμοί πληθυκότητας, τα αξιώματα υπαγωγής και μεταβατικών ρόλων και οι αντίστροφοι ρόλοι. Δείξαμε ότι οι μεταβατικοί ρόλοι και οι ιεραρχίες ρόλων έχουν παρόμοιες ιδιότητες με τις κλασικές ΠΛ και άρα μπορούμε να κατασκευάσουμε κανόνες επέκτασης που να τους διαχειρίζονται αποδοτικά. Παρομοίως, δείξαμε ότι και το πρόβλημα της συλλογιστικής με περιορισμούς πληθυκότητας μπορεί να αναχθεί σε ένα πρόβλημα μετρήματος R-γειτόνων ενός ατόμου, ακριβώς όπως και στην κλασική περίπτωση.

Επιπρόσθετα, στα [130, 125] εξετάζουμε τη σύνταξη και τη σημασιολογία της ασαφούς επέκτασης της γλώσσας OWL. Η εργασία του Straccia στο [137] βρίσκεται πολύ κοντά στη ασαφή-OWL, καθώς παρουσιάζει τη γλώσσα f-$\mathcal{SHOIN}$, δεν γίνεται όμως μελέτη των εκφραστικών αξιωμάτων της OWL όπως είναι τα αξιώματα ξένων εννοιών, τα αξιώματα πεδίου ορισμού και συνόλου τιμών των συναρτησιακών ρόλων αλλά και της αναγωγής μιας f-OWL οντολογίας σε μια f-$\mathcal{SHOIN}$ βάση γνώσης και της αναγωγής των προβλημάτων συλλογιστικής της f-OWL τα οποία είναι ελαφρός περισσότερα από τα κλασικά προβλήματα των ΠΛ. Στις εργασίες [130, 125] μελετάμε τα θέματα αυτά καθώς επίσης και την αφηρημένη και RDF/XML σύνταξη της ασαφούς-OWL αλλά επιπρόσθετα παρουσιάζουμε και μια διαδικασία αναγωγής των προβλημάτων συλλογιστικής της ασαφούς-OWL στις ασαφείς-ΠΛ. Τέλος στο [131] μελετάμε το πρόβλημα της συλλογιστικής με γενικευμένα και κυκλικά σώματα ορολογίας. Έτσι λοιπόν, παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο συλλογιστικής στην ασαφή ΠΛ f$_{KD}$-$\mathcal{ALC}$ κλείνοντας ένα ανοικτό πρόβλημα των ασαφών Περιγραφικών Λογικών. Αξίζει να σημειώσουμε ότι ταυτόχρονα το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται από τον Li et. al. στο [85], όμως η μέθοδος που προτείνεται είναι διαφορετική από αυτή που παρουσιάσαμε στο [131] και στην υπο-ενότητα 4.4.

Μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα συλλογιστικής των f$_{KD}$-ΠΛ γίνεται από τον Straccia στο [139]. Εκεί ο Straccia παρουσιάζει μια διαδικασία για την αναγωγή μιας f$_{KD}$-$\mathcal{ALCH}$ (f$_{KD}$-$\mathcal{ALC}$ με αξιώματα υπαγωγής ρόλων) βάσης γνώσης σε μια βάση γνώσης $\mathcal{ALCH}$, δηλαδή μια μέθοδο αναγωγής της ασαφής ΠΛ στην αντίστοιχη κλασική ΠΛ. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις βελτιστοποιημένες πλατφόρμες εξαγωγής συμπερασμάτων των κλασικών ΠΛ για την εκτέλεση διαδικασιών συλλογιστικής στις ασαφείς ΠΛ. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε από τον Li et. al. για την αναγωγή των γλωσσών f$_{KD}$-$\mathcal{ALCN}$ και f$_{KD}$-$\mathcal{ALCQ}$ στις αντί-

[1] Ως εσωτερικό ονομάζουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος δουλεύει αποκλειστικά πάνω στα στοιχεία της γλώσσας χωρίς να καλεί εξωτερικά συστήματα βελτιστοποίησης και επίλυσης συστημάτων εξισώσεων

στοιχες κλασικές γλώσσες $\mathcal{ALCN}$ και $\mathcal{ALCQ}$ στα [87] και [86], αντίστοιχα. Τέλος, η μέθοδος αυτή επεκτείνεται περαιτέρω στο [14] και στη γλώσσα f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$. Παρόλο που οι τεχνικές αυτές υπόσχονται αποδοτικούς τρόπους συλλογιστικής για τις ασαφείς ΠΛ, μέσω της χρήσης των βελτιστοποιημένων αλγορίθμων των κλασικών ΠΛ, δεν έχουν αξιολογηθεί στην πράξη. Μάλιστα η τεχνική αυτή δημιουργεί πολύ μεγάλες ιεραρχίες ρόλων, οι οποίες είναι γνωστό από τις κλασικές ΠΛ ότι επιφέρουν σημαντική μείωση της απόδοσης των αλγορίθμων συλλογιστικής [67]. Έτσι λοιπόν η πρακτικής τους χρήση δεν είναι ακόμα αποδεδειγμένη.

Τελειώνοντας την παρουσίασή μας για τις ασαφείς ΠΛ θα αναφερθούμε στις βατές ΠΛ. Οι βατές ασαφείς ΠΛ δεν έχουν γνωρίσει ακόμη μεγάλη άνθιση και τα περισσότερα προβλήματα στον τομέα αυτό είναι ανοικτά. Η πρώτη προσέγγιση γίνεται από τον Straccia [140] ο οποίος ουσιαστικά αποδεικνύει ότι ο αλγόριθμος για την αποτίμηση των κλασικών συζευγμένων επερωτήσεων πάνω σε μια f$_{KD}$-DL-Lite οντολογία είναι σχεδόν ίδιος με αυτόν της κλασικής DL-Lite. Υπάρχει μόνο μια μικρή διαφορά στον έλεγχο συνέπειας μιας f$_{KD}$-DL-Lite οντολογίας. Στη συνέχεια στο [105] επεκτείνουμε τα αποτελέσματα αυτά ως προς δυο κατευθύνσεις. Αφενός, προτείνουμε δυο πολύ εκφραστικές γλώσσες συζευγμένων επερωτήσεων, παρουσιάζοντας αλγόριθμους για την αποτίμηση των επερωτήσεων αυτών και αφετέρου υλοποιούμε τους αλγορίθμους αυτούς στην πλατφόρμα ONTOSEARCH2 παρέχοντας μια αρχική μελέτη της απόδοσης του συστήματος.

Οι γλώσσες επερωτήσεων που προτείναμε είναι εμπνευσμένες από το χώρο της ασαφούς ανάκτησης πληροφορίας όπου έχει προταθεί η επέκταση των κλασικών συζευγμένων επερωτήσεων με την προσθήκη βαρών στα άτομα της επερώτησης δημιουργώντας τις σταθμισμένες επερωτήσεις [148]. Από τότε πολλοί ερευνητές προσπάθησαν να αποδώσουν μια κατάλληλη σημασιολογία για τις επερωτήσεις αυτές δημιουργώντας μια πληθώρα από συναρτήσεις σημασιολογίας [148, 17, 111, 24, 116, 30]. Όπως φάνηκε όμως στη συνέχεια πολλές από τις συναρτήσεις αυτές μπορούν να ομαδοποιηθούν σε κοινές κατηγορίες επερωτήσεων χρησιμοποιώντας τελεστές από την ασαφή συνολοθεωρία [18, 152]. Πιο συγκεκριμένα οι προσεγγίσεις στα [17, 111, 24] χρησιμοποιούν ασαφείς συνεπαγωγές. Όπως επίσης δείξαμε και εμείς ακόμα και οι προσεγγίσεις στα [148, 116, 30] μπορούν να αναπαρασταθούν κάτω από το γενικό πρίσμα των ασαφών συναθροιστικών συναρτήσεων.

Τέλος, άλλες βατές ΠΛ που έχουν μελετηθεί στη βιβλιογραφία ως προς τις ασαφείς επεκτάσεις τους είναι η ΠΛ $\mathcal{EL}$ [4]. Η $\mathcal{EL}$ είναι μια αρκετά ασθενής ΠΛ η οποία επιτρέπει μόνο τομές εννοιών και υπαρξιακούς περιορισμούς, σε αντίθεση όμως με την DL-Lite η χρήση των τελεστών αυτών γίνεται ελεύθερα. Ο Vojtáš προτείνει στο [146] μια ασαφής επέκταση της γλώσσας $\mathcal{EL}$ την οποία ονομάζει $\mathcal{EL}^{@}$. Στη γλώσσα αυτή οι τομές εννοιών ερμηνεύονται ως ασαφείς συναθροιστηκές συναρτήσεις (fuzzy aggregation functions) και όχι με τη χρήση των τ-νορμών. Για το σκοπό αυτό η γλώσσα αυτή προορίζεται για την απάντηση επερωτήσεων. Το πρόβλημα της ασαφούς επέκτασης και της εξαγωγής συμπερασμάτων σε πιο εκφραστικές βατές ΠΛ, όπως είναι η $\mathcal{EL}$++ [5] και η Horn-$\mathcal{SHIQ}$ [75] είναι ανοικτό.

Κεφάλαιο 9

Συνεισφορά και Θέματα προς Έρευνα

Όπως είδαμε, οι ασαφείς ΠΛ έχουν εξελιχθεί σε ένα πολύ δυνατό και χρήσιμο εργαλείο αναπαράστασης και διαχείρισης ασαφούς και ανακριβούς γνώσης και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μια πληθώρα από εφαρμογές οι οποίες αντιμετωπίζουν τέτοιου τύπου γνώση. Ήδη αυτό είχε γίνει φανερό από την εργασία των Meghini et. al. [92, 93], οι οποίοι πρότειναν τις ασαφείς Περιγραφικές Λογικές ως ένα κατάλληλο θεωρητικό μοντέλο για την αναζήτηση πολυμεσικής πληροφορίας. Ένα σημαντικό συστατικό το οποίο προσφέρουν οι Περιγραφικές Λογικές και αντίστοιχα θα έπρεπε να το παρέχουν και οι ασαφείς Περιγραφικές Λογικές είναι η διενέργεια συλλογιστικής, δηλαδή η δυνατότητα εξαγωγής συμπερασμάτων από την καταγεγραμμένη γνώση. Έτσι λοιπόν θα λέγαμε ότι αυτό οδήγησε στην πρώτη σημαντική εργασία στις ασαφείς ΠΛ, αυτή του αλγορίθμου συλλογιστικής για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{ALC}$ από τον Straccia [135]. Από τότε πολλές εργασίες πάνω στο θέμα αυτό έχουν δημοσιευτεί [60, 117, 137, 16, 54], όμως στην συντριπτική τους πλειοψηφία παρουσιάζουν μόνο τη σύνταξη και τη σημασιολογία των ασαφών γλωσσών που προτείνουν χωρίς να παρουσιάζονται αλγόριθμοι συλλογιστικής αλλά ακόμα περισσότερο χωρίς να μελετώνται οι ιδιότητες της ασαφούς σημασιολογίας των κατασκευαστών των γλωσσών. Ίσως μοναδικές εξαιρέσεις είναι οι αλγόριθμοι συλλογιστικής για τις γλώσσες f_L-$\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$ και f_{KD}-$\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$ που παρουσιάστηκαν στο [136] και ο αλγόριθμος για την f_{KD}-$\mathcal{ALC}_m$ (f_{KD}-$\mathcal{ALC}$ με τροποποιητές εννοιών) που παρουσιάστηκε στο [60].

Ακόμα και σε αυτήν τη περίπτωση παρατηρούμε ότι οι γλώσσες αυτές αποτελούν ασαφείς επεκτάσεις της βασικής ΠΛ $\mathcal{ALC}$ ή της $\mathcal{ALC}$ με στέρεους χώρους ($\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$) οι οποίες είναι σημαντικά πιο ασθενείς από τις ΠΛ που έχουν προταθεί για το σημασιολογικό ιστό, όπως είναι οι γλώσσες $\mathcal{SHOIN}(\mathbf{D}^+)$ και $\mathcal{SHIF}(\mathbf{D}^+)$. Ακόμα περισσότερο οι παραπάνω αλγόριθμοι αυτοί κάνουν την παραδοχή ότι τα σώματα ορολογίας που ορίζονται από τους χρήστες είναι απλά (simple) και μη κυκλικά (acyclic), δηλαδή δεν περιέχουν ούτε γενικευμένα αξιώματα ούτε κύκλους στους ορισμούς. Η ανάπτυξη αλγορίθμων συλλογιστικής για τις γλώσσες αυτές αλλά και τις γενικευμένες και κυκλικές ορολογίες κρίνεται πολύ σημαντική γιατί αφενός θα μπορέσουμε να προσφέρουμε πολύ εκφραστικές υπηρεσίες συλλογιστικής στις εφαρμογές που χρησιμοποιούν ασαφείς ΠΛ, αλλά και αφετέρου θα συντελέσουν στην ευρύτερη αποδοχή των ασαφών ΠΛ στο χώρο του Σημασιολογικού Ιστού. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ήδη από το Μάρτιο του 2007 δημιουργήθηκε μια νέα ομάδα ενδιαφέροντος (incubator group) στην W3C η οποία έχει ως αποκλειστικό στόχο να εξετάσει τη δυνατότητα επέκτασης των γλωσσών του Σημασιολογικού Ιστού με διαφόρων ειδών μαθηματικά πλαίσια που διαχειρίζονται τύπους αβεβαιότητας και η οποία ενδέχεται να οδηγήσει στη δημιουργία μιας ομάδας εργασίας (working group). Απαραίτητη προϋπόθεση, όμως, για να συμβεί κάτι τέτοιο είναι η τεχνολογία των ασαφών ΠΛ, αλλά και γενικότερα όλων των επεκτάσεων των ΠΛ με μοντέλα αβεβαιότητας, να συμβαδίσει με τα τρέχοντα πρότυπα της W3C, όπως είναι η γλώσσας OWL, δηλαδή οι γλώσσες $\mathcal{SHOIN}(\mathbf{D}^+)$ και $\mathcal{SHIF}(\mathbf{D}^+)$.

Στη διατριβή αυτή συνεισφέρουμε σημαντικά προς την κατεύθυνση αυτή προτείνοντας αλγορίθμους συλλογιστικής για πολύ εκφραστικές ασαφείς ΠΛ. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάζουμε αλγορίθμους για τις γλώσσες f_{KD}-$\mathcal{SI}$ και f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$ και ταυτόχρονα λύνουμε και το πρόβλημα της συλλογιστικής με γενικευμένα και κυκλικά σώματα ορολογίας. Έτσι λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι καλύπτουμε προβλήματα συλλογιστικής για τη γλώσσα f_{KD}-OWL. Στη συνέχεια όμως προχωρούμε παραπέρα σε επεκτάσεις της f-OWL και παρουσιάζουμε αλγορίθμους συλλογιστικής για τις γλώσσες f_{KD}-$\mathcal{SHOIQ}$ και f_{KD}-$\mathcal{SHO}_f\mathcal{IQ}$. Ένα πολύ σημαντικό στοιχείο των αποτελεσμάτων μας είναι ότι δείχνουμε πώς πρέπει να μελετάμε τη σημασιολογία των εκφραστικών τελεστών μιας ασαφής ΠΛ προκειμένου να οδηγηθούμε σε αλγορίθμους συλλογιστικής για αυτές. Τέλος ακολουθώντας τις τρέχουσες εξελίξεις τόσο στο Σημασιολογικό Ιστό αλλά και στις ΠΛ, παρουσιάσουμε τη σύνταξη και τη σημασιολογία μιας ασαφούς επέκτασης των γλωσσών $\mathcal{SROIQ}$ και OWL1.1 οι οποίες αποτελούν το μέλλον της OWL. Τέλος ασχολούμαστε με βατές ΠΛ, οι οποίες αποτελούν μέρος της πρότασης OWL1.1, και προτείνουμε δυο νέες πολύ εκφραστικές γλώσσες επερωτήσεων για την βατή ασαφή ΠΛ f-DL-Lite.

- **Αλγόριθμος συλλογιστικής για την ασαφή ΠΛ $\mathbf{f}_{KD}$-$\boldsymbol{\mathcal{SI}}$:** Στο πλαίσιο της εργασίας αυτής προσπαθήσαμε να αποδώσουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος να αποφασίζει τα βασικά προβλήματα της ασαφής ΠΛ f_{KD}-$\mathcal{SI}$. Η δυσκολία συλλογιστικής στη γλώσσα αυτή έγκειται στην ύπαρξη των μεταβατικών και των αντίστροφων ρόλων οι οποίοι αφενός χρειάζονται ειδικούς κανόνες επέκτασης, για να διαχειριστούμε τη σημασιολογία τους, αλλά επιπρόσθετα προκαλούν προβλήματα μη-τερματισμού. Έτσι λοιπόν μελετήσαμε τη σημασιολογία των μεταβατικών ρόλων, με σκοπό να μπορέσουμε να βρούμε κανόνες για τη διαχείρισή τους στις ασαφείς ΠΛ. Η μελέτη αυτή παρουσιάστηκε στην υπο-ενότητα 4.2.1 και έδωσε ως αποτέλεσμα το Πόρισμα 4.2.1. Στη συνέχεια μελετήσαμε το πρόβλημα του μη-τερματισμού και είδαμε ότι οι κλασικές μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν και στη γλώσσας f_{KD}-$\mathcal{SI}$. Τα αποτελέσματα αυτά οδήγησαν σε έναν αλγόριθμο tableaux για τη γλώσσα αυτή του οποίου αποδείξαμε την ορθότητα (Λήμμα 4.2.11), τον τερματισμό (Λήμμα 4.2.10) και την πληρότητα (Λήμμα 4.2.12). Τα ευρύματα συνεπάγονται την αποφασισιμότητα της γλώσσας (Θεώρημα 4.2.13).

- **Αλγόριθμος συλλογιστικής για την ασαφή ΠΛ $\mathbf{f}_{KD}$-$\boldsymbol{\mathcal{SHOIN}}$:** Εμπλουτίσαμε τα αποτελέσματα που αποκτήθηκαν από τη μελέτη των αξιωμάτων μεταβατικών ρόλων και της γλώσσας f_{KD}-$\mathcal{SI}$ ώστε να μπορέσουμε να διαχειριστούμε ιεραρχίες ρόλων και περιορισμούς πληθυκότητας. Πιο συγκεκριμένα δείξαμε ότι ο κανόνας επέκτασης των μεταβατικών ρόλων (κανόνας $\forall_{+_\triangleright}$) μπορεί να επεκταθεί ώστε να διαχειριστεί και ιεραρχίες ρόλων. Η μελέτη για το συνδυασμό μεταβατικών και ιεραρχιών ρόλων γίνεται στην υπο-ενότητα 4.3.1 και το αποτέλεσμα είναι το Πόρισμα 4.3.1 και ο κανόνας $\forall'_{+_\triangleright}$ (Πίνακας 4.3). Επιπρόσθετα, μελετήσαμε τη σημασιολογία των περιορισμών πληθυκότητας έτσι ώστε να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε κανόνες tableaux για αυτούς. Φαινομενικά η σημασιολογία τους είναι αρκετά περίπλοκη, βρήκαμε όμως ότι το πρόβλημα της συλλογιστικής με αυτούς, στην περίπτωση των f_{KD}-ΠΛ, μπορεί να αναχθεί σε ένα πρόβλημα μετρήματος των γειτόνων ενός ατόμου. Η μελέτη αυτή παρουσιάστηκε στην υπο-ενότητα 4.3.2. Ένα επακόλουθο από τη μελέτη αυτή ήταν το Λήμμα 4.3.2 το οποίο χαρακτηρίζει τη σημασιολογία των κατασκευαστών αυτών στις f_{KD}-ΠΛ. Στη συνέχεια μελετήσαμε τα πρόβλημα του μη-τερματισμού που προκύπτουν στη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$ και δείξαμε ότι οι κλασικές μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν και στην ασαφή περίπτωση.

Όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα μας οδήγησαν σε έναν αλγόριθμο tableaux για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$ του οποίου αποδείξαμε την ορθότητα (Λήμμα 4.3.10), τον τερματισμό (Λήμμα 4.3.9) και την πληρότητα (Λήμμα 4.3.11). Τα ευρύματα συνεπάγονται την αποφασισιμότητα της γλώσσας αυτής (Θεώρημα 4.3.12).

- **Συλλογιστική με γενικευμένα και κυκλικά σώματα ορολογίας:** Μελετήθηκε και αποδόθηκε αλγόριθμος συλλογιστικής ο οποίος αποφασίζει τις υπηρεσίες εξαγωγής συμπερασμάτων των ΠΛ με βάση ένα γενικευμένο και/ή κυκλικό σώμα ορολογίας. Το πρόβλημα της συλλογιστικής με γενικευμένα και/ή κυκλικά αξιώματα ήταν ένα ανοικτό πρόβλημα για πολλά χρόνια στο χώρο των ασαφών Περιγραφικών Λογικών. Η μελέτη και οι βασικές έννοιες που οδήγησαν στην επίλυση του προβλήματος παρουσιάστηκαν στην ενότητα 3.3. Πιο συγκεκριμένα στο Λήμματα 3.3.1 αναθεωρούμε τον κανόνα του αποκλειόμενου μέσου και δείχνουμε ότι στην περίπτωση της ασαφής λογικής ο τρόπος σκέψης μας για τους κανόνες της άλγεβρας Boole πρέπει να είναι διαφορετικός. Στη συνέχεια βασισμένοι στη σκέψη αυτή και τον τροποποιημένο κανόνα ήταν δυνατόν να δείξουμε το πώς μπορούμε να κωδικοποιήσουμε τη σημασιολογία που επιβάλλεται από ένα αξίωμα υπαγωγής εννοιών σε αμοιβαίως αποκλειόμενους ασαφείς ισχυρισμούς δείχνοντας το Λήμμα 3.3.2 και τέλος το πώς μπορούμε να διαχειριστούμε και τα προβλήματα συλλογιστικής όπως είναι η υπαγωγή εννοιών και η συνέπεια ενός ασαφούς σώματος ισχυρισμών με βάση ένα γενικευμένο και/ή κυκλικό σώμα ορολογίας δείχνοντας το Θεώρημα 3.3.3. Βασισμένοι στα αποτελέσματα αυτά μπορέσαμε να κατασκευάσουμε τους απαραίτητους κανόνες επέκτασης για την διενέργεια συλλογιστικής σε γενικευμένα και/ή κυκλικά TBox. Οι κανόνες και η μεθοδολογία παρουσιάστηκε στην ενότητα 4.4.

- **Αλγόριθμος Συλλογιστική με Προσοντούχους Περιορισμούς Πληθυκότητας (f_{KD}-$\mathcal{SHOIQ}$):** Μελετήθηκαν οι προσοντούχοι περιορισμοί πληθυκότητας. Αρχικά μελετήσαμε τις επιπλέον ισοδυναμίες εννοιών που προσφέρουν αποδεικνύοντας το Θεώρημα 6.1.1. Στη συνέχεια ασχοληθήκαμε με το πρόβλημα της συλλογιστικής με του ΠΠΠ. Όπως είναι γνωστό από τις κλασικές λογικές η συλλογιστική με τους κατασκευαστές αυτούς χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή καθώς όπως αποδεικνύεται στο [143] μπορούμε πολύ εύκολα να οδηγηθούμε σε λανθασμένα αποτελέσματα. Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε εκτός από το να τροποποιήσουμε τους κανόνες που απευθύνονται στους απλούς περιορισμούς πληθυκότητας και έναν επιπλέον κανόνα, τον κανόνα της επιλογής. Στην ενότητα 6.2 μελετάμε την περίπτωση αυτή στις ασαφείς ΠΛ. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τη μελέτη μας αυτή για να προτείνουμε τον κανόνα της επιλογής στις ασαφείς Περιγραφικές Λογικές. Τέλος, στο Λήμμα 6.2.3 αποδεικνύουμε τον τερματισμό, την ορθότητα και την πληρότητα του αλγορίθμου για τη λογική f_{KD}-$\mathcal{SHOIQ}$.

- **Συλλογιστική με Ασαφείς Ονοματικές Έννοιες ($\mathbf{f}_{KD}$-$\mathcal{SHO}_f\mathcal{IQ}$):** Μελετήθηκε ο κατασκευαστής των ασαφών ονοματικών εννοιών ο οποίος προτάθηκε στο [14]. Αρχικά διορθώνουμε κάποια μικρά προβλήματα που παρουσιάζει η σημασιολογία η οποία προτάθηκε στο [14]. Στη συνέχεια επεκτείνουμε τον αλγόριθμο που προτείναμε για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SHOIQ}$ έτσι ώστε να αποδώσουμε έναν αλγόριθμο συλλογιστικής για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SHO}_f\mathcal{IQ}$, δηλαδή για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SHOIQ}$ η οποία επιπλέον διαθέτει τον κατασκευαστή των ασαφών ονοματικών εννοιών. Οι κανόνας αυτοί φαίνονται στον Πίνακα 6.3.

- **Ασαφής επέκταση της γλώσσας OWL:** Επεκτάθηκε η σύνταξη και η σημασιολογία της γλώσσας οντολογιών του Σημασιολογικού Ιστού OWL με ασαφή σύνολα. Επίσης, αποδόθηκε μια διαδικασία αναγωγής μιας fuzzy-OWL οντολογίας σε μια fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$ βάση γνώσης, η οποία έχει ως σκοπό τη διενέργεια εργασιών συλλογιστικής στη fuzzy-OWL μέσω της fuzzy-$\mathcal{SHOIN}$. Η γλώσσα fuzzy-OWL καθώς και η μέθοδος αναγωγής παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 5. Στο Θεώρημα 5.3.1 αποδεικνύουμε ότι η αναγωγή αυτή διατηρεί την ικανοποιησιμότητα, ενώ στα Θεωρήματα 5.3.2 και 5.3.3 αποδεικνύουμε την αναγωγή των προβλημάτων της λογικής συνεπαγωγής στο πρόβλημα της μη-ικανοποιησιμότητας.

- **Ασαφείς επεκτάσεις της πρότασης OWL 1.1:** Μελετήθηκαν οι ασαφείς επεκτάσεις της πρότασης OWL 1.1. Η OWL 1.1 είναι μια πρόταση η οποία έχει υποβληθεί στην W3C και πολύ σύντομα αναμένεται να γίνει και πρότυπο. Η OWL 1.1 αποτελείται από ένα σύνολο από έγγραφα. Το πιο σημαντικό από αυτά περιγράφει την επέκταση της OWL DL, με επιπλέον κατασκευαστές οι οποίοι αντιστοιχούν στην πολύ εκφραστική Περιγραφική Λογική $\mathcal{SROIQ}$. Επιπρόσθετα η πρόταση OWL 1.1 περιγράφει ένα σύνολο από περιορισμένες ΠΛ γλώσσες των οποίων τα πιο σημαντικά προβλήματα συλλογιστικής αποφασίζονται σε χρόνο μικρότερο από πολυωνυμικό. Με άλλα λόγια οι γλώσσες αυτές είναι βατές. Στην παρούσα διατριβή μελετήσαμε ασαφείς επεκτάσεις της γλώσσας $\mathcal{SROIQ}$ ορίζοντας τη σύνταξη και τη σημασιολογία της γλώσσας f-$\mathcal{SROIQ}$. Επιπρόσθετα, επεκτείναμε τα αποτελέσματα του Λήμματος 4.3.2 κάνοντας μια γενική μελέτη ως προς διάφορες συνεχείς νόρμες, αποδεικνύοντας το Θεώρημα 7.1.4 αλλά και μελετήσαμε κλασικές ιδιότητες των κατασκευαστών της γλώσσας $\mathcal{SROIQ}$ στην ασαφή περίπτωση (Θεώρημα 7.1.3) Τέλος, μελετήσαμε μια από τις βατές ΠΛ που περιγράφει η πρόταση OWL 1.1. Πιο συγκεκριμένα προτείναμε δυο πολύ εκφραστικές γλώσσες επερωτήσεων των οποίων η σημασιολογία επεκτείνει πολλές υπάρχουσες προτάσεις για σταθμισμένες γλώσσες επερωτήσεων.

Στο επόμενο του κεφαλαίου αυτού σημειώνουμε τα θέματα με τα οποία δεν ασχοληθήκαμε στη διατριβή αυτή και τα οποία αποτελούν ανοικτά θέματα προς περαιτέρω έρευνα.

- *Επέκταση αλγορίθμων για άλλους ασαφείς τελεστές:* Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 4 στη διατριβή αυτή ασχοληθήκαμε με την ανάπτυξη αλγορίθμων συλλογιστικής για πολύ εκφραστικές ασαφείς ΠΛ της οικογένειας των f_{KD}-ΠΛ.

Πιο συγκεκριμένα επεκτείναμε τους αλγορίθμους που είχαν προταθεί για την f$_{KD}$-$\mathcal{ALC}$ στις γλώσσες f$_{KD}$-$\mathcal{SI}$, f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIN}$, f$_{KD}$-$\mathcal{SHOIQ}$ και τελικά στην f$_{KD}$-$\mathcal{SHO}_f\mathcal{IQ}$. Όπως είδαμε το άλμα από τη γλώσσα $\mathcal{ALC}$ στις πολύ εκφραστικές $\mathcal{SI}$, $\mathcal{SHOIN}$ και $\mathcal{SHOIQ}$ είναι πολύ δύσκολο ακόμα και για τις κλασικές ΠΛ καθώς χρειάζεται να μελετήσουμε τους κατασκευαστές της μεταβατικότητας, της ιεραρχίας ρόλων, των αντίστροφων ρόλων, των περιορισμών πληθυκότητας και των προσοντούχων περιορισμών, αντιμετωπίζοντας ταυτόχρονα προβλήματα μη-τερματισμού χρησιμοποιώντας τις τεχνικές του δυναμικού μπλοκαρίσματος και του μπλοκαρίσματος ζευγαρώματος. Η επέκταση των αλγορίθμων μας σε πολύ εκφραστικές ασαφείς ΠΛ που χρησιμοποιούν άλλους ασαφείς τελεστές θα έπρεπε να μελετήσει αντίστοιχα τους κατασκευαστές αυτούς και τις τεχνικές μπλοκαρίσματος. Τα τελευταία χρόνια γίνεται μια τέτοια προσπάθεια, με αξιοσημείωτα παραδείγματα τα [136] και [15] όπου εξετάζονται οι γλώσσες f$_L$-$\mathcal{ALC}$ και f$_{\langle c_L, t_P, u_P, \mathcal{J}_P\rangle}$-$\mathcal{ALC}f$. Όπως βλέπουμε όμως, όπως συνέβαινε και με την περίπτωση των f$_{KD}$-ΠΛ οι αλγόριθμοι αυτοί απευθύνονται ακόμα σε ΠΛ μειωμένης εκφραστικότητας και πιο συγκεκριμένα στη γλώσσα $\mathcal{ALC}$ και τη γλώσσα $\mathcal{ALC}f$. Το ενδιαφέρον είναι ότι στο [15] οι συγγραφείς επιτρέπουν γενικευμένα και/ή κυκλικά αξιώματα το οποίο συνεπάγεται ότι ο αλγόριθμός τους απαιτεί την εφαρμογή μπλοκαρίσματος. Αυτό είναι άκρως ενδιαφέρον καθώς αν η τεχνική μπλοκαρίσματος αυτή αποδειχθεί ορθή και χρήσιμη και στην περίπτωση των πολύ εκφραστικών ασαφών ΠΛ τότε το μόνο που θα έλλειπε για την ανάπτυξη αλγορίθμων για γλώσσες όπως οι f$_L$-$\mathcal{SI}$, f$_{\langle c_L, t_P, u_P, \mathcal{J}_P\rangle}$-$\mathcal{SI}$, f$_L$-$\mathcal{SHI}$ και f$_{\langle c_L, t_P, u_P, \mathcal{J}_P\rangle}$-$\mathcal{SHI}$ θα ήταν να μελετήσουμε τους μεταβατικούς ρόλους και τις ιεραρχίες ρόλων κάτι το οποίο πιστεύουμε ότι μετά τις αποδείξεις που παρουσιάσαμε στη διατριβή αυτή για την περίπτωση των f$_{KD}$-ΠΛ δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο.

- *Σύνδεση με τις ασαφείς Τροπικές Λογικές:* Όπως είναι γνωστό από τα πρώτα χρόνια της έρευνας στις Περιγραφικές Λογικές, υπάρχει στενή σχέση αυτών με τις *Τροπικές Λογικές* (*Modal Logics*) [142]. Η σύνδεση αυτή έχει αποδειχθεί σημαντική καθώς σε πολλές περιπτώσεις, ιδιότητες και χαρακτηριστικά τα οποία έχουν αποδειχθεί στη μια γλώσσα μπορούν πολύ εύκολα να μεταφερθούν στην άλλη. Θα ήταν πολύ σημαντικό λοιπόν και στην περίπτωση των ασαφών επεκτάσεων να εξετάσουμε τη σύνδεση και τη σχέση που έχουν οι ασαφείς Περιγραφικές Λογικές με τις ασαφείς Τροπικές Λογικές [45, 56].

- *Επέκταση Περιγραφικών Λογικών με Γλώσσες Κανόνων:* Ένα από τα σημαντικότερα ερευνητικά θέματα του Σημασιολογικού Ιστού είναι η επέκταση των γλωσσών οντολογιών, όπως είναι η OWL και οι ΠΛ, με *γλώσσες κανόνων* (*rule languages*). Οι γλώσσες κανόνων είναι μια άλλη πολύ σημαντική οικογένεια γλωσσών αναπαράστασης γνώσης [89, 88]. Διαισθητικά ένα σύστημα κανόνων περιγράφει γνώση χρησιμοποιώντας ένα σύνολο από κανόνες της μορφής ΑΝ-ΤΟΤΕ (IF-THEN). Δηλαδή περιγράφουμε μια συνθήκη η οποία αν ισχύει, τότε κάποια αποτελέσματα πρέπει επίσης να ισχύουν. Για παράδειγμα μπορεί κάποιος να περιγράφει τη γνώση ότι ο αδερφός του πατέρα του είναι ο θείος του γράφοντας, $\mathsf{Father}(x, y) \wedge \mathsf{Borther}(y, z) \rightarrow \mathsf{Uncle}(x, z)$. Συγκριτικά με τις ΠΛ οι γλώσσες κανόνων βασίζονται σε αρκετά διαφορετικές ιδιότητες και χαρακτηριστικά από αυτά των γλωσσών κανόνων [23]. Για το λόγο αυτό και η σύνδεσή τους είναι ένα πολύ δύσκολο εγχείρημα. Παρόλα αυτά αυτή τη στιγμή έχουν αναπτυχθεί αρκετές προτάσεις για τη σύνδεση βάσεων γνώσης Περιγραφικών Λογικών με βάσεις κανόνων. Παραδείγματα τέτοιων προσεγγίσεων είναι η γλώσσα SWRL [73], η γλώσσα DL+log [113], το σύστημα CARIN [84], η RuleML [58], τα πλ-προγράμματα (dl-programs) [39] και άλλες. Για αρκετές από τις γλώσσες αυτές γνωρίζουμε ήδη ασαφείς επεκτάσεις τους, όπως είναι η *ασαφής SWRL* (*fuzzy-SWRL*) [107] και η *ασαφής RuleML* (*fuzzy-RuleML*), [127] το *ασαφές CARIN* [91] και τα fuzzy dl-programs [90]. Σε όλες αυτές τις προσεγγίσεις μόνο η σημασιολογία των επεκταμένων γλωσσών έχουν παρουσιαστεί με μόνη εξαίρεση το [91] όπου παρουσιάζονται αλγόριθμοι συλλογιστικής. Αντιθέτως η μελέτη του προβλήματος συλλογιστικής στις γλώσσες αυτές είναι στη γενική περίπτωση ανοικτό. Επιπρόσθετα, η ασαφής επέκταση και άλλων τέτοιων προσεγγίσεων είναι ένα ακόμα ενδιαφέρον ανοικτό πρόβλημα.

- *Βατές Περιγραφικές Λογικές:* Στη διατριβή αυτή ασχοληθήκαμε με τη βατή Περιγραφική Λογική DL-Lite. Πιο συγκεκριμένα στην ενότητα 7.3 μελετήσαμε το πρόβλημα της αποτίμησης πολύ εκφραστικών γενικευμένων ασαφών συζευγμένων επερωτήσεων στην περίπτωση της ασαφούς βατής ΠΛ f-DL-Lite. Ένα ενδιαφέρον ερευνητικό θέμα θα ήταν να μελετήσουμε τις ασαφείς επεκτάσεις και τους αλγορίθμους συλλογιστικής και για άλλες βατές Περιγραφικές Λογικές όπως η $\mathcal{EL}$++ και η Horn-$\mathcal{SHIQ}$.

- *Εφαρμογή των ασαφών ΠΛ στο πρόβλημα της ανάλυσης και περιγραφής εικόνων και βίντεο:* Όπως έχει γίνει προφανές από τη διατριβή αυτή βασικό κίνητρό μας αποτέλεσε η χρήση των ασαφών ΠΛ στο πρόβλημα της ανάλυσης και χαρακτηρισμού πολυμεσικών κειμένων. Τα τελευταία χρόνια υπάρχει μεγάλο ενδιαφέρον στο πρόβλημα της εφαρμογής γενικότερα των ΠΛ στο πεδίο αυτό με αξιόλογα παραδείγματα τα [96, 122, 93, 103]. Όπως όμως έχει γίνει αντιληπτό οι κλασικές ΠΛ εμφανίζουν αρκετά προβλήματα και ελλείψεις όταν εφαρμόζονται στο πεδίο αυτό, όπως είναι η διαχείριση ασαφούς και αβέβαιης γνώσης οι χωρο-χρονικές σχέσεις και άλλες.

Παράρτημα Α

Αποδόσεις Ξένων Όρων

abstract syntax	:	αφηρημένη σύνταξη
ancestor	:	πρόγονος
anti-symmetric	:	αντι-συμμετρικός
assertion	:	ισχυρισμός
associative	:	προσεταιριστική
atomic	:	ατομικός
blockable	:	μπλοκαρίσιμος
blocking	:	μπλοκάρισμα
bottom concept	:	κενή έννοια
boundary condition	:	οριακή συνθήκη
cardinality	:	πληθυκότητα
characteristic function	:	χαρακτηριστική συνάρτηση
clash	:	αντίφαση
clash-free	:	ελεύθερος αντιφάσεων
class	:	κλάση
commutative	:	αντιμεταθετική
compactness	:	συμπάγεια
complement	:	συμπλήρωμα
complete (forest/graph)	:	πλήρης (δάσος/γράφος)
completeness	:	πληρότητα
completion-graph	:	γράφος ολοκλήρωσης
completion-forest	:	δάσος ολοκλήρωσης
composition	:	σύνθεση
concrete domain	:	στέρεος χώρος
concept	:	έννοια
conjugates	:	συγκρούεται
conjunctive query	:	συζευγμένη επερώτηση
consistency	:	συνέπεια
constructor	:	κατασκευαστής
datatypes	:	τύποι δεδεομένων
decidable	:	αποφασίσιμος
domain	:	χώρος ή πεδίο
edge	:	ακμή
element	:	στοιχείο
entailment	:	λογική συνεπαγωγή

equilibrium	:	σημείο ισορροπίας
equivalence	:	ισοδυναμία
existential restriction	:	υπαρξιακός περιορισμός
expansion	:	επέκταση
fact	:	γεγονός
finite-model property	:	ιδιότητα πεπερασμένου μοντέλου
formal	:	τυπικό
functional	:	συναρτησιακός
fuzzy	:	ασαφές
general axiom	:	γενικευμένο αξίωμα
idempotent	:	ταυτοδύναμη
imperfect	:	ατελής (γνώση)
implication	:	συνεπαγωγή (πράξη - κατασκευαστής)
individual	:	άτομο
internalization	:	εσωτερίκευση
interpretation	:	ερμηνεία
intractable	:	δύσβατο
involutive	:	ενειλικτικό
irreflexive	:	μη-ανακλαστική
knowledge base	:	βάση γνώσης
label	:	ετικέτα
membership function	:	συνάρτηση συμμετοχής
model	:	μοντέλο
model-theoretic	:	μοντελοθεωρητική
node	:	κόμβος
nominal	:	ονοματικός
norm	:	νόρμα
normalization	:	κανονικοποίηση
number restriction	:	περιορισμός πληθυκότητας
object	:	αντικείμενο
ontology	:	οντολογία
pair-wise	:	ζευγαρώματος
possibilistic theory	:	θεωρία δυνατοτήτων
precomplement	:	προσυμπλήρωμα
predecessor	:	προκάτοχος
property	:	ιδιότητα
role	:	ρόλος
quadruple	:	τετράδα
qualifier	:	προσοδείκτης
quantifier	:	ποσοδείκτης
reasoning	:	συλογιστική
reflexive	:	ανακλαστική
satisfiability	:	ικανοποιησιμότητα
semantics	:	σημασιολογία
singleton	:	μονοσύνολο
soundness	:	ορθότητα
subsumption	:	υπαγωγή
successor	:	διάδοχος

symmetric	:	συμμετρικός
syntactic sugar	:	συντακτική ζάχαρη
termination	:	τερματισμός
terminology	:	ορολογία
top concept	:	καθολική έννοια
tractable	:	βατό
transitive	:	μεταβατικός
triple	:	τριάδα
uncertainty	:	αβεβαιότητα
unfolding	:	ξεδίπλωμα
unravelling	:	ξετύλιγμα
value restriction	:	περιορισμός τιμής
weighted query	:	σταθμισμένη επερώτηση
weighted t-norm	:	σταθμισμένη τριγωνική νόρμα

□

Παράρτημα B

Γλωσσάριο Συμβόλων

χ_S	:	Η χαρακτηριστική συνάρτηση του κλασικού συνόλου S
μ_A	:	Η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφές συνόλου A
c	:	Τελεστής ασαφούς συμπληρώματος (άρνησης)
t	:	Τελεστής ασαφούς τομής (τ-νόρμα)
u	:	Τελεστής ασαφούς ένωσης (σ-νόρμα ή τ-κονόρμα)
$\mathcal{J}$	:	Τελεστής ασαφούς συνεπαγωγής
$\langle c, t, u\rangle$	:	Μια ασαφής τριάδα που περιέχει τους ασαφείς τελεστές c, t, u
$\langle c, t, u, J\rangle$	:	Μια ασαφής τετράδα που περιέχει τους ασαφείς τελεστές $c, t, u, \mathcal{J}$
sup	:	supremum: Το ελάχιστο άνω φράγμα ενός συνόλου αριθμών
inf	:	infimum: Το μέγιστο κάτω φράγμα ενός συνόλου αριθμών
C	:	Το σύνολο των ατομικών εννοιών μιας ΠΛ γλώσσας
R	:	Το σύνολο των ατομικών ρόλων μιας ΠΛ γλώσσας
I	:	Το σύνολο των ατόμων μιας ΠΛ γλώσσας
$\sqcup$	:	Το σύμβολο της ένωσης δυο εννοιών
$\sqcap$	:	Το σύμβολο της τομής δυο εννοιών
$\exists$	:	Ο υπαρξιακός προσοδείκτης που στις ΠΛ χρησιμοποιείται στους υπαρξιακούς περιορισμούς
$\forall$	:	Ο καθολικός προσοδείκτης που στις ΠΛ χρησιμοποιείται στους περιορισμούς τιμής
$\sqsubseteq$	:	Το σύμβολο της υπαγωγής δυο εννοιών ή ρόλων
$\neg$	:	Το σύμβολο της άρνησης μιας έννοιας, ή γενικότερα ενός στοιχείου
$\sim$	:	Η πράξη της κανονικής μορφής άρνησης μιας έννοιας ($\sim C$)
$\bot$	:	Η κενή έννοια
$\top$	:	Η καθολική έννοια
R^-	:	Ο αντίστροφος του ρόλου R
$\mathcal{T}$	:	Ένα σώμα ορολογίας
$\mathcal{R}$	:	Ένα σώμα ρόλων
$\mathcal{A}$	:	Ένα σώμα ισχυρισμών
$\mathsf{Trans}(R)$	:	Σύνταξη αξιώματος μεταβατικότητας
$\mathsf{Ref}(R)$	:	Σύνταξη αξιώματος ανακλαστικότητας
$\mathsf{Irr}(R)$	:	Σύνταξη αξιώματος μη-ανακλαστικότητας
$\mathsf{Sym}(R)$	:	Σύνταξη αξιώματος συμμετρικότητας
$\mathsf{ASym}(R)$	:	Σύνταξη αξιώματος αντι-συμμετρικότητας
$\mathsf{Dis}(R, S)$	:	Σύνταξη αξιώματος ξένων ρόλων

$\mathcal{I}$	:	Μια ερμηνεία (interpretation)
$\Delta^{\mathcal{I}}$	:	Ένας χώρος ερμηνείας (domain of interpretation) ο οποίος αποτελείται από ένα σύνολο αντικειμένων
$.^{\mathcal{I}}$	:	Μια συνάρτησης ερμηνείας που ερμηνεύει τα στοιχεία μιας ΠΛ γλώσσας
$\models$	:	Το σύμβολο της λογικής συνεπαγωγής (entailment)
$\mathbb{N}$	:	Το σύνολο των φυσικών αριθμών
$\mathbb{N}^*$	:	Το σύνολο των φυσικών αριθμών χωρίς το στοιχείο 0
$\bowtie$	:	Αντιπροσωπεύει μια από τις ανισότητες $\geq, >, \leq$ ή $<$
$\rhd$	:	Αντιπροσωπεύει μια από τις ανισότητες $\geq$ ή $>$
$\lhd$	:	Αντιπροσωπεύει μια από τις ανισότητες $\leq$ ή $<$
$\bowtie^-$	:	Αντιπροσωπεύει την αντανάκλαση μιας ανισότητας: π.χ. $\geq^- = \leq, <^- = >$
$+\bowtie$	:	Αντιπροσωπεύει την ισχυροποίηση ή εξασθένιση μιας ανισότητας: π.χ. $+\geq = >, + < = \leq$
$\neg \bowtie$	:	Αντιπροσωπεύει την άρνηση μιας ανισότητας: π.χ. $\neg \geq = <, \neg < = \geq$
$\mathcal{A}(a, n)$	:	Συμβολίζει τα 2^m διαφορετικά ABox που προκύπτουν για το άτομο a και το βαθμό n μετά από την εφαρμογή της συλλογιστικής υπο συνθήκες σε m αξιώματα υπαγωγής εννοιών σε μια ασαφή ΠΛ
$\mathcal{F}$	:	Ένα δάσος ολοκλήρωσης
$\mathbf{G}$	:	Ένας γράφος ολοκλήρωσης
$\mathsf{Paths}(\mathbf{G})$	:	Τα μονοπάτια του γράφου ολοκλήρωσης $\mathbf{G}$
$\mathsf{Nom}(\mathbf{G})$	:	Οι ονοματικοί κόμβοι του γράφου ολοκλήρωσης $\mathbf{G}$
$\mathsf{Tail}(p)$	:	Ο μη μπλοκαρισμένος κόμβος της ουράς ενός μονοπατιού κάποιου γράφου ολοκλήρωσης: π.χ. $\mathsf{Tail}([\frac{x_0}{x_0'}, \ldots, \frac{x_n}{x_n'}]) = x_n$
$\mathsf{Tail}'(p)$	:	Ο ενδεχομένως μπλοκαρισμένος κόμβος της ουράς ενός μονοπατιού κάποιου γράφου ολοκλήρωσης: π.χ. $\mathsf{Tail}([\frac{x_0}{x_0'}, \ldots, \frac{x_n}{x_n'}]) = x_n'$
$sub(C)$	:	Το σύνολο που είναι κλειστό ως προς τις υπο-έννοιες της C
$cl(C, \mathcal{R})$	:	Το σύνολο που είναι κλειστό ως προς τις υπο-έννοιες της C, της $\sim C$ αλλά και ως προς τις έννοιες που μπορούν να προκείψουν από το RBox $\mathcal{R}$, π.χ. $\forall R.C$ αν $\forall S.C$ και $R \sqsubseteq_* S$
T	:	Ένα ασαφές tableau
$\langle r, s \rangle$	:	Μια ακμή ενός ασαφούς tableau ή δάσους ή γράφου ολοκλήρωσης
$\mathcal{L}(s, C)$	:	Ο βαθμός συμμετοχής του στοιχείου s στην έννοια C
$\mathcal{E}(R, \langle r, s \rangle)$	:	Ο βαθμός συμμετοχής του ζεύγους στοιχείων $\langle r, s \rangle$ στο ρόλο R
$\mathcal{V}(a)$	:	Απεικόνιση του ατόμου a σε στοιχείο του ασαφούς tableau
$\mathcal{L}(x)$	:	Η ετικέτα τους κόμβου x η οποία περιέχει τριάδες συμμετοχής
$\mathcal{L}(\langle x, y \rangle)$	:	Η ετικέτα της ακμής $\langle x, y \rangle$ η οποία περιέχει τριάδες συμμετοχής
glb	:	Η συνάρτηση που επιστρέφει το βαθμό συμμετοχής ενός στοιχείου ενός ασαφούς tableau σε μια έννοια κοιτάζοντας τις τριάδες συμμετοχής του αντίστοιχου κόμβου στην έννοια αυτή στο δάσος ή δέντρο ολοκλήρωσης
$\sharp\{\cdot\}$	:	Η πληθυκότητα ενός συνόλου
$R^T(s, \rhd, n)$	:	το σύνολο των στοιχείων $t \in \mathbf{S}$ τα οποία συμμετέχουν στο ρόλο R με το στοιχείο s και σε βαθμό, μεγαλύτερο ή ίσο, ή αυστηρά μεγαλύτερο (αναλόγως πώς ορίζεται από την ανισότητα $\rhd$) από ένα δοθέν βαθμό n
$R_c^{\mathbf{G}}(x, \rhd, n)$	:	Το σύνολο των R-γειτόνων του κόμβου x για τους οποίους η ακμή $\langle x, y \rangle$ περιέχει μια τριάδα η οποία παραβιάζει ένα δοθέντα περιορισμό

□

Γλωσσάριο

'Ατομο (individual) Μια οντότητα η οποία δίνει ταυτότητα σε ένα αντικείμενο στη σύνταξη της γλώσσας και με τη χρήση του οποίου μπορούμε να δημιουργήσουμε σχέσεις στιγμιοτύπου ανάμεσα σε αυτό και μια έννοια ή ανάμεσα σε αυτό, κάποιο άλλο άτομο και έναν ρόλο.

Αλγόριθμος Συλλογιστικής (Reasoning algorithm) Ένας αλγόριθμος ο οποίος αποφασίζει (decides) τα προβλήματα συλλογιστικής (υπηρεσίες εξαγωγής συμπερασμάτων) μιας γλώσσας αναπαράστασης γνώσης

Αξιώμα υπαγωγής γενικευμένων εννοιών (general concept inclusion axiom) Ένα αξίωμα υπαγωγής εννοιών στο οποίο και οι δυο έννοιες που συμμετέχουν είναι σύνθετες έννοιες

Ασαφές σύνολο (fuzzy set) Η γενίκευση ενός κλασικού (crisp) συνόλου, το οποίο περιλαμβάνει στοιχεία τα οποία ανήκουν στο ασαφές σύνολο σε κάποιο βαθμό συμμετοχής σε αντίθεση με το να ανήκουν ή όχι πλήρως

Ατομική έννοια (ρόλος) (atomic concept (role)) Μια έννοια (ρόλος) που σε μια βάση γνώσης δεν αναλύεται σε άλλες απλούστερες, είναι δηλαδή πρωτογενής

Βάση γνώσης (knowledge base) Ένα σύνολο αξιωμάτων το οποίο περιγράφει τα στοιχεία (έννοιες, σχέσεις, αντικείμενα ή άτομα) και τις μεταξύ τους συσχετίσεις σε ένα συγκεκριμένο πεδίο (domain).

Γενικευμένο σώμα ορολογίας (General TBox) Ένα σώμα ορολογίας στο οποίο εμφανίζονται αξιώματα υπαγωγής γενικευμένων εννοιών

Έννοια (concept) Ένα μοναδιαίο (unary) κατηγόρημα το οποίο αντιπροσωπεύει ένα σύνολο αντικειμένων

Ερμηνεία (interpretation) Μια μαθηματική δομή η οποία μας δίνει μια συγκεκριμένη τυπική σημασία για τα στοιχεία μιας γλώσσας και κατ' επέκταση και της βάσης γνώσης

Εσωτερίκευση (Internalization) Η μέθοδος κωδικοποίησης όλων των αξιωμάτων ενός σώματος ορολογίας σε μια μόνο έννοια ή καμιά φορά και ένα μόνο αξίωμα

Ισοδυναμία εννοιών (concept equivalence) Ένα αξίωμα της μορφής $C \equiv D$ το οποίο δηλώνει ότι οι έννοιες C και D είναι ισοδύναμες

Ισχυρισμός (assertion) Μία σχέση στιγμιοτύπου (ή αλλιώς αξίωμα ατόμων) ανάμεσα σε ένα άτομο και μια έννοια ή ανάμεσα σε ένα ζεύγος ατόμων και ένα ρόλο.

Κανονικοποίηση (Normalization) Η διαδικασία αντικατάστασης των ασαφών ισχυρισμών ενός σώματος ισχυρισμών που χρησιμοποιούν τις αυστηρές ανισότητες $>$ και $<$ με ισχυρισμούς που χρησιμοποιούν τις ανισότητες $\geq$ και $\leq$

Κυκλικό σώμα ορολογίας (Cylic TBox) Ένα σώμα ορολογίας που εμφανίζονται αξιώματα στα οποία μια έννοια του αριστερού μέλους κάποιου αξιώματος ορίζεται είτε άμεσα είτε έμμεσα (μεταβατικά μέσω άλλων αξιωμάτων υπαγωγής εννοιών) από τον εαυτό της

Λογική Συνεπαγωγή (entailment) Το σύνολο (πεδίο) πάνω στο οποίο ερμηνεύουμε τη βάση γνώσης μας

Μοντέλο (model) Μία ερμηνεία η οποία ικανοποιεί ένα αξίωμα υπαγωγής, ρόλων ή ατόμου, ένα σώμα ορολογίας, ρόλων ή ισχυρισμών ή μια βάση γνώσης

Ξεδίπλωμα (Unfolding) Η διαδικασία αντικατάστασης των εννοιών ενός σώματος ορολογίας με τους ορισμούς τους έτσι ώστε κάθε έννοια να ορίζεται μόνο από ατομικές έννοιες

Ξετύλιγμα (Unravelling) Η μέθοδος κατασκευής ενός απείρου (ασαφούς) tableau από ένα πεπερασμένο δάσος ή γράφο ολοκλήρωσης με την επαναληπτική αντιγραφή μονοπατιών του δάσους ή γράφου

Ρόλος (role) Ένα δυαδικό (binary) κατηγόρημα το οποίο αντιπροσωπεύει ένα σύνολο από ζεύγη αντικειμένων

Σημασιολογία (semantics) Μια μαθηματική θεωρία με βάση την οποία περιγράφεται το πώς μπορούμε να δώσουμε ερμηνεία (σημασία) στα στοιχεία μιας γλώσσας

Στέρεος χώρος (concrete domain) Το **σταθερό** σύνολο (πεδίο) πάνω το οποίο αποτελεί την ερμηνεία των τύπων δεδομένων μας (datatypes)

Σύνθετη έννοια (Έννοια Περιγραφής) (Complex concept (Concept Description)) Μία έννοια η οποία χρησιμοποιεί τις ατομικές έννοιες με σκοπό να περιγράψει περισσότερο σύνθετες έννοιες

Σώμα Ισχυρισμών (ABox) Ένα σύνολο από ισχυρισμούς

Σώμα Ορολογίας (TBox) Ένα σύνολο από αξιώματα υπαγωγής ($C \sqsubseteq D$) και ισοδυναμίας εννοιών ($C \equiv D$)

Σώμα Ρόλων (RBox) Ένα σύνολο από αξιώματα ρόλων όπως είναι τα $\mathsf{Trans}(R)$, $R \sqsubseteq S$, $\mathsf{Ref}(R)$, $\mathsf{Irr}(R)$, και άλλα, ανάλογα και με την εκφραστικότητα της Περιγραφικής Λογικής

Υπαγωγή εννοιών (ρόλων) (concept (role) subsumption) Ένα αξίωμα της μορφής $C \sqsubseteq D$ ($R \sqsubseteq S$) το οποίο δηλώνει ότι η έννοια C (ρόλος R) είναι υπο-έννοια, εξειδίκευση ή αλλιώς λιγότερο γενική (υπο-ρόλος) της έννοιας D (του ρόλου S)

Χώρος ερμηνείας (domain of interpretation) Μια μαθηματική δομή η οποία μας δίνει μια συγκεκριμένη τυπική σημασία για τα στοιχεία μιας γλώσσας και κατ' επέκταση και της βάσης γνώσης

Βιβλιογραφία

[1] J. Alejandro, Tseng Belle, and J. Smith. Modal keywords, ontologies and reasoning for video understanding. In *Proceedings of the International Conference on Image and Video Retrieval*, 2003.

[2] Thanos Athanasiadis, Phivos Mylonas, Yannis Avrithis, and Stefanos Kollias. Semantic image segmentation and object labeling. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 17(3):298–312, 2007.

[3] F. Baader. Augmenting Concept Languages by Transitive Closure of Roles: An Alternative to Terminological Cycles. Research Report RR-90-13, 1990. An abridged version appeaered in Proc. IJCAI-91,pp.446-451.

[4] F. Baader. Terminological cycles in a description logic with existential restrictions. In *Proceeding of the International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 03)*, 2003.

[5] F. Baader, S. Brandt, and C. Lutz. Pushing the $\mathcal{EL}$ envelope. In *Proceeding of the International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 05)*, 2005.

[6] F. Baader, D. McGuinness, D. Nardi, and P.F. Patel-Schneider. *The Description Logic Handbook: Theory, implementation and applications.* Cambridge University Press, 2002.

[7] F. Baader and U. Sattler. Tableau algorithms for description logics. In R. Dyckhoff, editor, *Proceedings of the International Conference on Automated Reasoning with Tableaux and Related Methods (Tableaux 2000)*, volume 1847 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pages 1–18, St Andrews, Scotland, UK, 2000. Springer-Verlag.

[8] Franz Baader, Ian Horrocks, and Ulrike Sattler. Description Logics for the Semantic Web. *KI – Künstliche Intelligenz*, 16(4):57–59, 2002.

[9] W. Bandler and L. Kohout. Fuzzy power sets and fuzzy implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:13–30, 1980.

[10] Sean Bechhofer and Carole Goble. Description Logics and Multimedia - Applying Lessons Learnt from the GALEN Project. In *KRIMS 96 Workshop on Knowledge Representation for Interactive Multimedia Systems, ECAI 96*, Budapest, 1996.

[11] Sean Bechhofer, Frank van Harmelen, James Hendler, Ian Horrocks, Deborah L. McGuinness, Peter F. Patel-Schneider, and Lynn Andrea Stein eds. OWL web ontology language reference. Technical report, Feb 2004.

[12] A. B. Benitez, J. R. Smith, and S. Chang. MediaNet: a multimedia information network for knowledge representation. In *Proc. SPIE Vol. 4210, p. 1-12, Internet Multimedia Management Systems, John R. Smith; Chinh Le; Sethuraman Panchanathan; C.-C. J. Kuo; Eds.*, pages 1–12, October 2000.

[13] Tim Berners-Lee, James Hendler, and Ora Lassila. The semantic web. *Scientific American*, 2001.

[14] Fernando Bobillo, Miguel Delgado, and Juan Gómez-Romero. A crisp representation for fuzzy $\mathcal{SHOIN}$ with fuzzy nominals and general concept inclusions. In *Proc. of the 2nd International Workshop on Uncertainty Reasoning for the Semantic Web (URSW 06), Athens, Georgia*, 2006.

[15] Fernando Bobillo and Umberto Straccia. A fuzzy description logic with product t-norm. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems (Fuzz-IEEE-07), London*, 2007.

[16] P. Bonatti and A. Tettamanzi. Some complexity results on fuzzy description logics. In A. Petrosino V. Di Gesù, F. Masulli, editor, *WILF 2003 International Workshop on Fuzzy Logic and Applications*, LNCS 2955, Berlin, 2005. Springer Verlag.

[17] A. Bookstein. Fuzzy requests: An approach to weighted boolean searches. *Journal of the Americal Society for Information Science*, 31:240–247, 1980.

[18] G. Bordogna, P. Bosc, and G Pasi. Fuzzy inclusion in database and information retrieval query interpretation. In *Proceedings of the 1996 ACM symposium on Applied Computing*, pages 547–551, 1996.

[19] A. Borgida. On the relative expressiveness of description logics and predicate logics. *Artificial Intelligence*, 82:353–367, 1996.

[20] R. Brachman and H. Levesque. *Knowledge Representation and Reasoning.* Morgan Kaufmann, 2004.

[21] Tim Bray, Jean Paoli, C. M. Sperberg-McQueen, and Eve Maler. Extensible Markup Language (XML) 1.0 (Second Edition) – W3C Recommendation 6 October 2000. Technical report, World Wide Web Consortium, 2000. Available at `http://www.w3.org/TR/REC-xml`.

[22] Dan Brickley and R.V. Guha. Resource Description Framework (RDF) Schema Specification 1.0. W3C Recommentdation, `URLhttp://www.w3.org/TR/rdf-schema`, Mar. 2000.

[23] Jos De Bruijn, Thomas Eiter, Axel Polleres, and Hans Tompits. On representational issues about combinations of classical theories with nonmonotonic rules. In *Proceedings of the 1st International Conference on Knowledge Science, Engineering and Management*, 2006.

[24] D.A. Buell and D.H. Kraft. Threshold values and boolean retrieval systems. *Journal of Information Processing & Management*, 17:127–136, 1981.

[25] D. Butnariu, E.P. Klement, and S. Zafrany. On triangular norm-based propositional fuzzy logics. *Fuzzy Sets and Systems*, 69:241–255, 1995.

[26] D. Calvanese, G. De Giacomo, M. Lenzerini, R. Rosati, and G. Vetere. DL-Lite: Practical Reasoning for Rich DLs. In *Proc. of the DL2004 Workshop*, 2004.

[27] Diego Calvanese, Giuseppe De Giacomo, Domenico Lembo, Maurizio Lenzerini, and Riccardo Rosati. Data complexity of query answering in description logics. In *Proc. of the Tenth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2006)*, pages 260–270, 2006.

[28] Diego Calvanese, Giuseppe De Giacomo, Maurizio Lenzerini, Daniele Nardi, and Riccardo Rosati. Description logic framework for information integration. In *Proc. of the 6th Int. Conf. on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 2–13, 1998.

[29] Diego Calvanese, Giuseppe De Giacomo, Domenico Lembo, Maurizio Lenzerini, and Riccardo Rosati. Dl-lite: Tractable description logics for ontologies. In *Proceedings of the 20th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI 2005)*, pages 602–607, 2005.

[30] S.J. Chen and S.M. Chen. A new method for fuzzy information retrieval based on geometric-mean averaging operators. In *Workshop on Artificial Intelligence.*

[31] A. Chortaras, Giorgos Stamou, and Andreas Stafylopatis. Adaptation of weighted fuzzy programs. In *Proc. of the International Conference on Artificial Neural Networks (ICANN 2006)*, pages 45–54. Springer, 2006.

[32] S. Cranefield and M. Purvis. UML as an ontology modelling language. In *IJCAI-99 Workshop on Intelligent Information Integration*, 1999.

[33] V. Cross. Fuzzy information retrieval. *Journal of Intelligent Information Systems*, 3:29–56, 1994.

[34] Stephane Demri. The Complexity of Regularity in Grammar Logics and Related Modal Logics. *Journal of Logic and Computation*, 11(6):933–960, 2001.

[35] Francesco M. Donini, Maurizio Lenzerini, Daniele Nardi, and Andrea Schaerf. Deduction in concept languages: From subsumption to instance checking. *Journal of Logic and Computation*, 4(4):423–452, 1994.

[36] Mansoor Doostfatemeh and Stefan C. Kremer. New directions in fuzzy automata. *Journal of Fuzzy Sets and Systems*, 38:175–214, 2005.

[37] Didier Dubois and Henri Prade. Can we enforce full compositionality in uncertainty calculi? In *National Conference on Artificial Intelligence*, pages 149–154, 1994.

[38] Didier Dubois and Henri Prade. Possibilistic logic. In D. Gabbay and C.J. Hogger, editors, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence*, volume 3, pages 439–513. 1994.

[39] Thomas Eiter, Thomas Lukasiewicz, Roman Schindlauer, and Hand Tompits. Combining answer set programming with description logics for the semantic web. In *Proc. of the 19th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI 2004)*, 2004.

[40] F. Esteva, L. Godo, P. Hajek, and M. Navara. Residuated fuzzy logics with an involutive negation. *Archive for Mathematical Logic*, 39:103–124, 2000.

[41] FaCT++. `http://owl.man.ac.uk/factplusplus/`, 2003.

[42] Ronald Fagin. Fuzzy queries in multimedia database systems. In *Proc. Seventeenth ACM Symp. on Principles of Database Systems*, pages 1–10, 1998.

[43] Birte Glimm, Ian Horrocks, Carsten Lutz, and Uli Sattler. Conjunctive query answering for the description logic $\mathcal{SHIQ}$. In *Proc. of the 20th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI 2007)*, 2007.

[44] Birte Glimm, Ian Horrocks, and Ulrike Sattler. Conjunctive query answering for description logics with transitive roles. In *Proc. of the 2006 Description Logic Workshop (DL 2006)*, volume 189, 2006.

[45] L. Godo, F. Esteva, and Petr Hajek. A fuzzy modal logic for belief functions. In *Proceedings of the 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence, Seattle*, pages 723–729, 2001.

[46] C. Golbreich, O. Dameron, B. Gibaud, and A. Burgun. Web ontology language requirements w.r.t. expressiveness of taxonomy and axioms in medicine. In *2nd International Semantics Web Conference (ISWC 03)*, pages 180–194, 2003.

[47] B.C. Grau, I. Horrocks, B. Parsia, and P. Patel-Schnieder. Netx steps for OWL. In *Proceedings of the 2nd International Workshop on OWL Experiences and Directions (OWL ED 2006)*, 2006.

[48] Bernardo Cuenca Grau. Tractable fragments of the OWL 1.1 web ontology language. `http://www.w3.org/Submission/owl11-tractable/`, 2006.

[49] Bernardo Cuenca Grau and Boris Motik. OWL 1.1 web ontology language: Model-theoretic semantics. `http://www.w3.org/Submission/owl11-semantics/`, 2006.

[50] N. Guarino. Formal ontology and information systems. In *Proc. Formal Ontology in Information Systems (FOIS'98)*, pages 3–15, 1998.

[51] Volker Haarslev and Ralf Möller. RACER System Description. In *IJCAR-01*, volume 2083, 2001.

[52] Reiner Hähnle. Tableaux and related methods. In Alan Robinson and Andrei Voronkov, editors, *Handbook of Automated Reasoning*, pages 103–137. Elsevier Science Publishers, 2001.

[53] P. Hajek. *Metamathematics of fuzzy logic.* Kluwer, 1998.

[54] P. Hajek. Making fuzzy description logic more general. *Fuzzy Sets and Systems*, 154(1):1–15, 2005.

[55] P. Hajek. Computational complexity of t-norm based propositional fuzzy logics with rational truth constants. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(13):677–682, 2006.

[56] Petr Hajek and Dagmar Harmancova. A many-values modal logic. In *Proceedings of the Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Granada*, 1996.

[57] Joseph Y. Halpern and Yoram Moses. A guide to completeness and complexity for modal logics of knowledge and belief. *Artificial Intelligence*, 54(3):319–379, 1992.

[58] D. Hirtle, H. Boley, B. Grosof, M. Kifer, M. Sintek, S. Tabet, and G. Wagner. Schema Specification of RuleML 0.89. `http://www.ruleml.org/0.89/`, May 2005.

[59] S. Hölldobler, T. D. Khang, and H.-P. Störr. A fuzzy description logic with hedges as concept modifiers. In *Proceedings InTech/VJFuzzy'2002*, pages 25–34, 2002.

[60] S. Hölldobler, N. H. Nga, and T. D. Khang. The fuzzy description logic $\mathcal{ALC}_{FLH}$. In *International workshop on Description Logics.* CEUR, 2005.

[61] B. Hollunder and F. Baader. Qualified number restrictions in concept languages. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'91)*, pages 335–346. Morgan Kaufman, 1991.

[62] Bernhard Hollunder, Werner Nutt, and Manfred Schmidt-Schaus. Subsumption algorithms for concept description languages. In *European Conference on Artificial Intelligence*, pages 348–353, 1990.

[63] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation.* Addison-Wesley, 1997.

[64] I. Horrocks, O. Kutz, and U. Sattler. The irresistible $\mathcal{SRIQ}$. In *Proc. of the International Workshop on OWL: Experiences and Directions*, 2005.

[65] I. Horrocks and P. Patel-Schneider. Reducing OWL entailment to description logic satisfiability. *Journal of Web Semantics*, pages 345–357, 2004.

[66] I. Horrocks, P. F. Patel-Schneider, and F. van Harmelen. From $\mathcal{SHIQ}$ and RDF to OWL: The making of a web ontology language. *Journal of Web Semantics*, 1, 2003.

[67] I. Horrocks and U. Sattler. A description logic with transitive and inverse roles and role hierarchies. *Journal of Logic and Computation*, 9:385–410, 1999.

[68] I. Horrocks and U. Sattler. A tableaux decision procedure for $\mathcal{SHOIQ}$. In *Proc. 19th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI 05)*, 2005.

[69] I. Horrocks, U. Sattler, and S. Tobies. Practical reasoning for expressive description logics. In *Proceedings of the 6th International Conference on Logic for Programming and Automated Reasoning (LPAR'99)*, number 1705 in LNAI, pages 161–180. Springer-Verlag, 1999.

[70] I. Horrocks, U. Sattler, and S. Tobies. Reasoning with Individuals for the Description Logic $\mathcal{SHIQ}$. In David MacAllester, editor, *CADE-2000*, number 1831 in LNAI, pages 482–496. Springer-Verlag, 2000.

[71] Ian Horrocks, Oliver Kutz, and Ulrike Sattler. The even more irresistible $\mathcal{SROIQ}$. In *KR*, pages 57–67, 2006.

[72] Ian Horrocks and Peter F. Patel-Schneider. A Proposal for an OWL Rules Language. In *Proc. of the Thirteenth International World Wide Web Conference (WWW 2004)*, pages 723–731. ACM, 2004.

[73] Ian Horrocks, Peter F. Patel-Schneider, Harold Boley, Said Tabet, Benjamin Grosof, and Mike Dean. SWRL: A Semantic Web Rule Language Combining OWL and RuleML. W3C Member Submission, `http://www.w3.org/Submission/SWRL/`, May 2004.

[74] Ian Horrocks and Ulrike Sattler. Decidability of $\mathcal{SHIQ}$ with complex role inclusion axioms. *Artificial Intelligence*, 160(1–2):79–104, December 2004.

[75] U. Hustadt, B. Motik, and U. Sattler. In proc. of the 19th int. joint conf. on artificial intelligence (ijcai 2005). In *Data Complexity of Reasoning in Very Expressive Description Logics*, 2005.

[76] ISO/IEC. Mpeg-7 part 3 - visual. ISO/IEC JTC1/SC29/WG11/N4062, Pattaya, December 2001.

[77] E. Klement and M. Navara. A survey of different triangular norm-based fuzzy logics. *Fuzzy Sets and Systems*, 101(5):241–251, 1999.

[78] Erich Peter Klement, Radko Mesiar, and Endre Pap. Triangular norms. position paper I: basic analytical and algebraic properties. *Fuzzy Sets and Systems*, 143:5–26, 2004.

[79] Erich Peter Klement, Radko Mesiar, and Endre Pap. Triangular norms. position paper II: general constructions and parameterized families. *Fuzzy Sets and Systems*, 145:411–438, 2004.

[80] G. J. Klir. *Uncertainty and Information: Foundations of Generalized Information Theory.* Willey, 2005.

[81] G. J. Klir and B. Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications.* Prentice-Hall, 1995.

[82] R. Kowalski. Predicate logic as a programming language. In *Information Processing 74*, pages 569–574, 1974.

[83] Ora Lassila and Ralph R.Swick. Resource Description Framework (RDF) Model and Syntax Specification – W3C Recommendation 22 February 1999. Technical report, World Wide Web Consortium, 1999.

[84] Alon Levy and Marie-Christine Rousset. Combining horn rules and description logics in CARIN. *Artificial Intelligence*, 104:165–209, 1998.

[85] Yanhui Li, Baowen Xu, Jianjiang Lu, and Dazhou Kang. Discrete tableau algorithms for $\mathcal{FSHI}$. In *Proceedings of the International Workshop on Description Logics (DL 2006), Lake District, UK*, 2006.

[86] Yanhui Li, Baowen Xu, Jianjiang Lu, and Dazhou Kang. Reasoning technique for extended fuzzy $\mathcal{ALCQ}$. In *ICCSA (2)*, pages 1179–1188, 2006.

[87] Yanhui Li, Baowen Xu, Jianjiang Lu, Dazhou Kang, and Peng Wang. Extended fuzzy description logic $\mathcal{ALCN}$. In *Proceedings of the 9th International Conference on Knowledge Based Intelligent Information and EngineeringSystems (KES-05)*, pages 896–902, 2005.

[88] Vladimir Lifschitz. Foundations of logic programming. pages 69–127, 1996.

[89] J. W. Lloyd. *Foundations of logic programming*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1984.

[90] Thomas Lukasiewicz. In proc. of ruleml 2006. In *Fuzzy Description Logic Programs under the Answer Set Semantics for the Semantic Web*, 2006.

[91] T. Mailis, G. Stoilos, and G. Stamou. Proceedings of the first international conference on web reasoning and rule systems (RR-07), 2007. In *Expressive Reasoning with Horn Rules and Fuzzy Description Logics*, 2007.

[92] Carlo Meghini, Fabrizio Sebastiani, and Umberto Straccia. Reasoning about the form and content for multimedia objects (extended abstract). In *Proceedings of AAAI 1997 Spring Symposium on Intelligent integration and Use of Text, Image, Video and Audio*, pages 89–94, Stanford University, California, 1997.

[93] Carlo Meghini, Fabrizio Sebastiani, and Umberto Straccia. A model of multimedia information retrieval. *Journal of the ACM*, 48(5):909–970, 2001.

[94] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman & Hall/CRC, 1997.

[95] M. Minski. *A Framework for Representing Knowledge*. Behavioral Science, 1981.

[96] R. Moeller, B. Neumann, and M. Wessel. Towards computer vision with description logics-some recent progress. In *Workshop on Integration of Speech and Image Understanding*, pages 101–115, 1999.

[97] P. Mostert and A. Shields. On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary. *The Annals of Mathematics*, 65(1):117–143, 1957.

[98] Boris Motik. On the properties of metamodeling in OWL. In Yolanda Gil, Enrico Motta, Richard V. Benjamins, and Mark Musen, editors, *Proc. of the 4th Int. Semantic Web Conf. (ISWC 2005)*, volume 3729 of *LNCS*, pages 548–562. Springer, November 6–10 2005.

[99] Boris Motik and Ian Horrocks. Problems with OWL syntax. In *Proc. of the 2nd Int. Workshop on OWL Experiences and Directions (OWLED 06)*, 2006.

[100] M. Navara. Satisfiability in fuzzy logic. *Neural Network World*, 10(5):845–858, 2000.

[101] B. Nebel. Terminological reasoning is inherently intractable. *Journal of Artificial Intelligence*, 43:235–249, 1990.

[102] Bernhard Nebel. *Reasoning and Revision in Hybrid Representation Systems.* Springer-Verlag, 1990.

[103] B. Neumann and R. Möller. On scene interpretation with description logics. In H.I. Christensen and H.-H. Nagel, editors, *Cognitive Vision Systems: Samping the Spectrum of Approaches*, number 3948 in LNCS, pages 247–278. Springer, 2006.

[104] J. Z. Pan, E. Thomas, and D. Sleeman. ONTOSEARCH2: Searching and Querying Web Ontologies. In *Proc. of WWW/Internet 2006*, pages 211–218, 2006.

[105] J.Z. Pan, G. Stamou, G. Stoilos, and E. Thomas. Expressive querying over fuzzy DL-Lite ontologies. In *Proceedings of the International Workshop on Description Logics (DL 2007)*, 2007.

[106] J.Z. Pan, G. Stamou, G. Stoilos, and E. Thomas. Scalable querying services over fuzzy ontologies. In *Proceedings of the International World Wide Web Conference (WWW 2008), Beijing*, 2008.

[107] J.Z. Pan, G. Stoilos, G. Stamou, V. Tzouvaras, and I. Horrocks. f-SWRL: A fuzzy extension of SWRL. *Journal on Data Semantics, special issue on Emergent Semantics*, 4090:28–46, 2006.

[108] Peter F. Patel-Schneider, Patrick Hayes, and Ian Horrocks. OWL Web Ontology Language Semantics and Abstract Syntax. Technical report, W3C, Feb. 2004. W3C Recommendation, URL http://www.w3.org/TR/2004/REC-owl-semantics-20040210/.

[109] Peter F. Patel-Schneider, Ian Horrocks, and Boris Motik. OWL 1.1 web ontology language structural specification and functional-style syntax. `http://www.w3.org/Submission/owl11-owl_specification/`, 2006.

[110] R. Quillian. *Word Concepts: A Theory and Simulation of some basic capabilities.* Behavioral Science, 1967.

[111] T. Radecki. Fuzzy set theoretical approach to document retrieval. *Journal of Information Processing & Management*, 15:235–245, 1979.

[112] A. L. Rector and I. Horrocks. Experience building a large, re-usable medical ontology using a description logic with transitivity and concept inclusions. In *Proceedings Workshop on Ontological Engineering, AAAI Spring Symposium, Stanford CA.*, pages 100–107. Hanley and Belfus, Inc., Philadelphia, PA, 1997.

[113] Riccardo Rosati. DL+Log: Tight integration of description logics and disjunctive datalog. In *Proceedings of the 10th International Conference of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2006)*, pages 68–78, 2006.

[114] D. Ruan and E. E. Kerre. Fuzzy implication operators and generalized fuzzy method of cases. *Fuzzy Sets and Systems*, 54(1):23–37, 1993.

[115] P. Salembier and F. Marqués. Region-based representations of image and video: Segmentation tools for multimedia services. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 9(8):1147–1169, 1999.

[116] G. Salton, E.A. Fox, and H. Wu. Extended boolean information retrieval. *Journal of Communications of ACM*, 26:1022–1036, 1983.

[117] D. Sánchez and A.G.B. Tettamanzi. Reasoning and quantification in fuzzy description logics. In *Proceedings of the Workshop on Fuzzy Logic and the Semantic Web*, 2005.

[118] D. Sánchez and G.B. Tettamanzi. Generalizing quantification in fuzzy description logic. In *Proceedings 8th Fuzzy Days in Dortmund*, 2004.

[119] E. Sanchez. Importance in knowledge systems. *Information Systems*, 14(6):455–464, 1989.

[120] Ulrike Sattler. A concept language extended with different kinds of transitive roles. In *KI '96: Proceedings of the 20th Annual German Conference on Artificial Intelligence*, pages 333–345. Springer-Verlag, 1996.

[121] M.S. Schauß and G. Smolka. Attributive concept descriptions with complements. *Artificial Intelligence*, 48(1):1–26, 1991.

[122] E. Di Sciascio and F. Donini. Description logics for image recognition: a preliminary proposal. In *Proceedings of the International Workshop on Description Logics (DL 99)*, 1999.

[123] Evren Sirin, Bijan Parsia, Bernardo Cuenca Grau, Aditya Kalyanpur, and Yarden Katz. Pellet: A practical OWL-DL reasoner. *Journal of Web Semantics*, 5:51–53, 2007.

[124] G. Stoilos and G. Stamou. Extending fuzzy description logics for the semantic web. In *Proceedings of the 3rd International Workshop on OWL Experiences and Direction (OWL ED 2007)*, 2007.

[125] G. Stoilos, G. Stamou, and J.Z. Pan. Fuzzy OWL: A proposal for handling imprecise knowledge in the semantic web. submitted to the international journal of uncertainty, fuzziness and knowledge-based systems, 2006.

[126] G. Stoilos, G. Stamou, and J.Z. Pan. Handling imprecise knowledge with fuzzy description logics. In *Proceedings of the International Workshop on Description Logics (DL 2006), Lake District, UK*, 2006.

[127] G. Stoilos, G. Stamou, V. Tzouvaras, and J.Z. Pan. Uncertainty and RuleML rulebases: A preliminary report. In A. Adi, editor, *Proceedings of the International Conference on Rules and Rule Markup Languages for the Semantic Web*, volume 3791 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 199–203. Springer-Verlag, 2005.

[128] G. Stoilos, G. Stamou, V. Tzouvaras, J.Z. Pan, and I. Horrocks. The fuzzy description logic f-$\mathcal{SHIN}$. In *Proc. of the International Workshop on Uncertainty Reasoning for the Semantic Web*, pages 67–76, 2005.

[129] G. Stoilos, G. Stamou, V. Tzouvaras, J.Z. Pan, and I. Horrocks. A fuzzy description logic for multimedia knowledge representation. In *Proc. of the International Workshop on Multimedia and the Semantic Web*, 2005.

[130] G. Stoilos, G. Stamou, V. Tzouvaras, J.Z. Pan, and I. Horrocks. Fuzzy OWL: Uncertainty and the semantic web. In *Proc. of the International Workshop on OWL: Experiences and Directions*, 2005.

[131] G. Stoilos, U. Straccia, G. Stamou, and J.Z. Pan. General concept inclusions in fuzzy description logics. In *Proceedings of the 17th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI 06)*, pages 457–461. IOS Press, 2006.

[132] Giorgos Stoilos, Nikos Simou, Giorgos Stamou, and Stefanos Kollias. Uncertainty and the semantic web. *IEEE Intelligent Systems*, 21(5):84–87, 2006.

[133] Giorgos Stoilos, Giorgos Stamou, Vassilis Tzouvaras, Jeff Z. Pan, and Ian Horrocks. Reasoning with very expressive fuzzy description logics. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 30(8):273–320, 2007.

[134] Giorgos Stoilos, Giorgos Stamou, Vassilis Tzouvaras, Jeff Z. Pan, and Ian Horrocks. Reasoning with very expressive fuzzy description logics. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 30(5):273–320, 2007.

[135] U. Straccia. Reasoning within fuzzy description logics. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 14:137–166, 2001.

[136] U. Straccia. Description logics with fuzzy concrete domains. In *21st Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-05)*, Edinburgh, 2005.

[137] U. Straccia. Towards a fuzzy description logic for the semantic web. In *Proceedings of the 2nd European Semantic Web Conference*, 2005.

[138] Umberto Straccia. A fuzzy description logic. In *AAAI '98/IAAI '98: Proceedings of the fifteenth national/tenth conference on Artificial intelligence/Innovative applications of artificial intelligence*, pages 594–599. American Association for Artificial Intelligence, 1998.

[139] Umberto Straccia. Transforming fuzzy description logics into classical description logics. In *Proceedings of the 9th European Conference on Logics in Artificial Intelligence (JELIA-04)*, number 3229 in Lecture Notes in Computer Science, pages 385–399, Lisbon, Portugal, 2004. Springer Verlag.

[140] Umberto Straccia. Answering vague queries in fuzzy DL-Lite. In *Proceedings of the 11th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, (IPMU-06)*, pages 2238–2245, 2006.

[141] Sergio Tessaris. *Questions and answers: reasoning and querying in Description Logic*. PhD thesis, University of Manchester, 2001.

[142] Helmut Thiele. On the definition of modal operators in fuzzy logic. In *Proceedings of The Twenty-Third International Symposium on Multiple-Valued Logic, Sacramento, CA, USA*, 1993.

[143] Stephan Tobies. *Complexity Results and Practical Algorithms for Logics in Knowledge Representation.* PhD thesis, Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 2001. URL http://lat.inf.tu-dresden.de/research/phd/Tobies-PhD-2001.pdf .

[144] C. Tresp and R. Molitor. A description logic for vague knowledge. In *In proc of the 13th European Conf. on Artificial Intelligence (ECAI-98)*, 1998.

[145] Moshe Y. Vardi. Why is modal logic so robustly decidable? In *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, pages 149–184, 1997.

[146] Peter Vojtas. Proc. of the 2nd int. workshop on uncertainty reasoning for the semantic web, athens, georgia. In *$\mathcal{EL}$ Description Logics with aggregation of user preference concepts*, 2006.

[147] Michal Walicki. Mathematical logic - an introduction. `http://www.ii.uib.no/~michal/und/i227/book/book.pdf`, 2005. Department of Informatics, University of Bergen.

[148] W.G. Waller and D.H. Kraft. A mathematical model of a weighted boolean retrieval system. *Journal of Information Processing & Management*, 15:247–260, 1979.

[149] R.R Yager. A note on weighted queries in information retrieval systems. *Journal of the Americal Society for Information Science*, 38:23–24, 1987.

[150] J. Yen. Generalising term subsumption languages to fuzzy logic. In *In Proc of the 12th Int. Joint Conf on Artificial Intelligence (IJCAI-91)*, pages 472–477, 1991.

[151] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.

[152] S. Zadrożny and J. Kacprzyk. An extended fuzzy boolean model of information retrieval revisited. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems (Fuzz-IEEE-05)*, pages 547–551, 2005.

Κατάλογος δημοσιεύσεων

G. Stoilos, G. Stamou, V. Tzouvaras, J.Z. Pan, and I. Horrocks. A fuzzy description logic for multimedia knowledge representation. In *Proc. of the International Workshop on Multimedia and the Semantic Web*, 2005.

G. Stoilos, G. Stamou, V. Tzouvaras, J.Z. Pan, and I. Horrocks. The fuzzy description logic f-$\mathcal{SHIN}$. In *Proc. of the International Workshop on Uncertainty Reasoning for the Semantic Web*, pages 67–76, 2005.

G. Stoilos, G. Stamou, V. Tzouvaras, J.Z. Pan, and I. Horrocks. Fuzzy OWL: Uncertainty and the semantic web. In *Proc. of the International Workshop on OWL: Experiences and Directions*, 2005.

G. Stoilos, U. Straccia, G. Stamou, and J.Z. Pan. General concept inclusions in fuzzy description logics. In *Proceedings of the 17th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI 06)*, pages 457–461. IOS Press, 2006.

Giorgos Stoilos, Nikos Simou, Giorgos Stamou, and Stefanos Kollias. Uncertainty and the semantic web. *IEEE Intelligent Systems*, 21(5):84–87, 2006.

G. Stoilos, G. Stamou, and J.Z. Pan. Handling imprecise knowledge with fuzzy description logics. In *Proceedings of the International Workshop on Description Logics (DL 2006), Lake District, UK*, 2006.

Giorgos Stoilos, Giorgos Stamou, Vassilis Tzouvaras, Jeff Z. Pan, and Ian Horrocks. Reasoning with very expressive fuzzy description logics. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 30(8):273–320, 2007.

G. Stoilos and G. Stamou. Extending fuzzy description logics for the semantic web. In *Proceedings of the 3rd International Workshop on OWL Experiences and Direction (OWL ED 2007)*, 2007.

J.Z. Pan, G. Stamou, G. Stoilos, and E. Thomas. Scalable querying services over fuzzy ontologies. In *Proceedings of the International World Wide Web Conference (WWW 2008), Beijing*, 2008.

G. Stoilos, G. Stamou, and S. Kollias, ‘Reasoning with qualified cardinality restrictions in fuzzy description logics’, in *Proceedings of the International Conference on Fuzzy Systems (Fuzz-IEEE 08)*, (2008).

□

Βιογραφικό Σημείωμα

Προσωπικά Στοιχεία

Όνομα	:	Γεώργιος Στοΐλος
Ημερομηνία Γέννησης	:	01 Ιουλίου 1981
Οικογενειακή Κατάσταση	:	Άγαμος
Υπηκοότητα	:	Ελληνική

Σπουδές

- *Νοέμβριος 2003 - Δεκέμβριος 2007*	:	Υποψήφιος Διδάκτωρ της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Η/Υ, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
- *Νοέμβριος 1999 - Οκτώβριος 2003*	:	Φοιτητής του τμήματος Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών, Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Συμμετοχή σε Ερευνητικά Προγράμματα

- *2006 - Σήμερα*	:	X-Media (FP6-IP)
- *2006 - Σήμερα*	:	K-Space (FP6-NOE)
- *2004 - 2007*	:	Knowledge Web (FP6-NOE)
- *2004 - 2005*	:	Acemedia (FP6-IP)
- *2002 - 2003*	:	PoLoS (IST-2001-35283)

Συμμετοχή σε Δραστηριότητες Προτυποποίησης

- *2007 - Σήμερα*	:	W3C Uncertainty Reasoning for
	:	the Semantic Web XG
- *2007 - Σήμερα*	:	W3C OWL 1.1 WG
- *2005 - Σήμερα*	:	W3C Rule Interchange Format WG
- *2005 - 2007*	:	Fuzzy RuleML TG

Διδακτική Δραστηριότητα

- *2007 - Σήμερα*	:	Βοηθός στο μάθημα Έμπειρα Συστήματα και
	:	Εφαρμογές στη Ρομποτική
- *2003 - 2006*	:	Βοηθός εργαστηρίου στο μάθημα Επεξεργασία, Ανάλυση και Τεχνολογίες Εικόνας και Βίντεο

Περίληψη Δημοσιεύσεων

Ο Γεώργιος Στοΐλος έχει δημοσιεύσει μέχρι το 2007 τέσσερα άρθρα σε έγκριτα επιστημονικά περιοδικά, τρία από τα οποία στα Artificial Intelligence Research, IEEE Intelligent Systems και Fundamenda Informaticae, τα οποία αναφέρονται στον κατάλογο Expanded Citation Index με impact factors 1.795, 2.41 και 0.58 (στοιχεία 2006), αντίστοιχα. Ένα άρθρο στο συνέδριο κλάσης A+, International World Wide Web Conference, με acceptance rate μικρότερο του 15%, δυο άρθρα στα συνέδρια κλάσης A, International Semantic Web Conference και European Conference of Artificial Intelligence, με acceptance rate μικρότερο του 25% και επτά σε λοιπά συνέδρεια και ημερίδες. Τέλος έχει συμμετάσχει στη συγγραφική ομάδα του βιβλίου "Σημασιολογικός Ιστός: Ευφυής Διαχείριση Γνώσης". Τα άρθρα του έχουν λάβει περισσότερες από 95 αναφορές από δημοσιευμένα άρθρα και βιβλία και 12 από τεχνικές αναφορές και διατριβές.

Μη εκπαιδευτικές δραστηριότητες

Ο Γεώργιος Στοΐλος αποτέλεσε για σειρά ετών πρωταθλητής Ελλάδος και μέλος της Εθνικής ομάδας στο άθλημα της αντισφαίρισης στις κατηγορίες από 12 έως 18 ετών. Ενδεικτικές διακρίσεις είναι οι ακόλουθες:

- *1998* : 8η θέση στο Πανευρωπαϊκό Ομαδικό Πρωτάθλημα κάτων των 18
- *1998* : 1η θέση στο Πανελλήνιο Σχολικό Πρωτάθλημα (διπλά)
- *1998* : 2η θέση στο Πανελλήνιο Σχολικό Πρωτάθλημα (μονά)
- *1997* : 2η θέση στο Πανελλήνιο Πρωτάθλημα κάτων των 16 (μονά & διπλά)
- *1997* : 1η θέση στο Πανελλήνιο Σχολικό Πρωτάθλημα (διπλά)
- *1997* : 2η θέση στο Πανελλήνιο Σχολικό Πρωτάθλημα (μονά)
- *1993* : 1η θέση στο Πανελλήνιο Πρωτάθλημα κάτω των 12 (μονά)

□

Ευρετήριο