



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

**Έλεγχος Πλοήγησης Κινητών Ρομποτικών Οχημάτων Μέσω  
Ευφύων Ελεγκτών και Μη-Γραμμικών Μετασχηματισμών  
Ισοδυναμίας Ανάδρασης**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

**Γεώργιος Π. Μούστρης**

Αθήνα, Απρίλιος 2010





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
 ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
 ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
 ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

## Έλεγχος Πλοήγησης Κινητών Ρομποτικών Οχημάτων Μέσω Ευφών Ελεγκτών και Μη-Γραμμικών Μετασχηματισμών Ισοδυναμίας Ανάδρασης

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Γεώργιος Π. Μούστρης

Συμβουλευτική Επιτροπή : Σπυρίδων Τζαφέστας

Ανδρέας - Γεώργιος Σταφυλοπάτης

Ελπίδα Τζαφέστα

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 27<sup>η</sup> Απριλίου 2010

.....  
 Σπυρίδων Τζαφέστας  
 Ομ. Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
 Ανδρέας-Γεώργιος Σταφυλοπάτη  
 Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
 Ελπίδα Τζαφέστα  
 Αν. Καθηγήτρια ΕΚΠΑ

.....  
 Γεώργιος Παπαβασιλόπουλος  
 Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
 Γεώργιος Στασινόπουλος  
 Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
 Τρύφων Κουσιουρής  
 Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
 Νικόλαος Μαράτος  
 Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Απρίλιος 2010

.....  
Γεώργιος Π. Μούστρης

Διδάκτωρ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Γεώργιος Π. Μούστρης, 2010

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.





## Περίληψη

Η πλοήγηση οποιουδήποτε κινούμενου ρομποτικού οχήματος εξαρτάται από πολλούς παράγοντες και συστήματα τα οποία πρέπει να λειτουργούν αρμονικά μεταξύ τους αλλά και να παρέχουν μια καλή λύση στο υπό-πρόβλημα που προσπαθεί να λύσει το κάθε ένα. Αναλύοντας τη διαδικασία της πλοήγησης, την οποία πρέπει το ρομπότ να επιτελεί αυτόνομα, ξεχωρίζουν τρεις λειτουργίες οι οποίες είναι κρίσιμες για την επιτυχή εκτέλεσή της. Η πρώτη είναι ο σχεδιασμός της πορείας που πρέπει να ακολουθήσει ένα ρομπότ για να πάει από ένα σημείο σε κάποιο άλλο. Ο σχεδιασμός μπορεί να λάβει υπόψη του πολλές γενικές ή ειδικές συνθήκες όπως η ελαχιστοποίηση του ολικού μήκους της πορείας, η απόσταση από ενδεχόμενα εμπόδια στο χώρο κίνησης, κινηματικοί ή/και δυναμικοί περιορισμοί του ίδιου του ρομπότ, κατανάλωση ενέργειας κλπ.

Η δεύτερη κρίσιμη λειτουργία είναι η χωροθέτηση του ρομπότ, δηλαδή ο υπολογισμός της θέσης του μέσα στον κόσμο που κινείται. Είναι εύκολα κατανοητό ότι προτού γίνει οποιαδήποτε σχεδίαση, η θέση του ρομπότ μέσα στον κόσμο πρέπει να είναι γνωστή με μεγάλη ακρίβεια. Βέβαια, αυτό δεν αρκεί. Η θέση πρέπει να είναι γνωστή καθ' όλη τη διάρκεια της λειτουργίας του ρομπότ, ενώ η ακριβής εκτίμησή της είναι ζωτικής σημασίας για την επιτυχή εκτέλεση οποιασδήποτε εργασίας μέσα στον κόσμο.

Η τρίτη κρίσιμη λειτουργία είναι η ίδια η κίνηση του ρομπότ, δηλαδή η εκτέλεση της σχεδιασμένης πορείας. Είναι κατανοητό ότι όσο καλή και αν είναι η σχεδιασμένη πορεία και η χωροθέτηση, αν η παρακολούθησή της περιέχει μεγάλα σφάλματα η πλοήγηση καταρρέει. Η παρούσα διδακτορική διατριβή ασχολείται με αυτό το πρόβλημα, το οποίο ονομάζεται «παρακολούθηση πορείας». Αρχικά αναπτύσσεται ένας ασαφής ελεγκτής ο οποίος παρέχει λύση στο πρόβλημα της παρακολούθησης για διάφορα είδη πορειών. Ο ελεγκτής αυτός εμπεριέχει όλα τα προτερήματα του ασαφούς ελέγχου όπως η απλότητα στη διατύπωση των κανόνων, η εγγενής ευρωστία σε θόρυβο, η επεκτασιμότητα, κλπ.

Με βάση τον ασαφή ελεγκτή παρουσιάζονται δυο συγκεκριμένες υλοποιήσεις του πάνω σε πραγματικά ρομποτικά οχήματα. Οι υλοποιήσεις αυτές εκτελούνται πάνω σε μια Προγραμματιζόμενη Συστοιχία Λογικών Πυλών (Field Programmable Gate Array-FPGA) και ολοκληρώνονται μέσα σε ένα «Σύστημα-σε-Ψηφίδα» (System on a Chip-SoC). Τα συστήματα αυτά παρέχουν πλεονεκτήματα ως προς τους απλούς υπολογιστές ή τους προγραμματιζόμενους λογικούς ελεγκτές, με το κύριο πλεονέκτημα να είναι η μεγάλη επεξεργαστική ταχύτητα η οποία και είναι απαραίτητη για την εκτέλεση ασαφούς ελέγχου σε πραγματικό χρόνο. Παρουσιάζονται πειράματα σε δυο πραγματικά ρομπότ για την θεωρητική αξιολόγηση του ελέγχου αλλά και της ίδιας της υλοποίησής του.

Τέλος, αναλύεται μια θεωρητική συνεισφορά στο πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται ένας μη γραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος απλοποιεί το πρόβλημα. Ο μετασχηματισμός αυτός είναι ένας κατά τμήματα γραμμικός ομοιομορφισμός, στην περίπτωση πολυγωνικών πορειών αναφοράς, ή ένας διαφορομορφισμός, στην περίπτωση συνεχώς διαφορίσιμων καμπύλων, ο οποίος μετασχηματίζει την πορεία αναφοράς σε ευθεία. Όταν ο μετασχηματισμός εφαρμοσθεί σε ένα ρομποτικό σύστημα, μπορεί να επεκταθεί σε όλο το χώρο κατάστασης και να οδηγήσει σε ένα μετασχηματισμένο σύστημα εξισώσεων το οποίο είναι «ισοδύναμο ανάδρασης» (feedback equivalent) με το αρχικό. Η ισοδυναμία ανάδρασης συνίσταται σε έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων του χώρου κατάστασης του ρομπότ, μαζί με έναν μετασχηματισμό της εισόδου του. Αποτέλεσμα αυτού είναι η απλοποίηση του προβλήματος της παρακολούθησης αφού η παρακολούθηση λαμβάνει χώρο στον μετασχηματισμένο χώρο όπου η πορεία αναφοράς είναι πλέον ευθεία.

Η απλοποίηση έχει διττή έννοια. Αφενός μπορεί ν' απλοποιηθεί η σχεδίαση ελεγκτών, αφετέρου μπορούν να απλοποιηθούν υπάρχοντες ελεγκτές μιας και η παρακολούθηση ευθείας είναι σημαντικά πιο απλή από την παρακολούθηση τυχαίων απλών καμπύλων. Στην παρούσα διατριβή δίνεται περισσότερη έμφαση στο δεύτερο σκέλος, δηλαδή στην απλοποίηση υπάρχοντων ελεγκτών, όπου παρουσιάζεται η απλοποίηση του αρχικού ασαφούς ελεγκτή, και ο μετασχηματισμός του σε διακοπτικό ασαφή έλεγχο.

### **Λέξεις Κλειδιά**

Μη-ολονομικά συστήματα, Κινητά ρομποτικά οχήματα, Μη-γραμμικός έλεγχος, Ασαφής έλεγχος, Διακοπτικός έλεγχος, Ισοδυναμία ανάδρασης, Μη-γραμμικός μετασχηματισμός, Πλοήγηση, Σύστημα σε Ψηφίδα, Προγραμματιζόμενη Συστοιχία Λογικών Πυλών, FPGA, Παρακολούθηση πορείας



# Abstract

The navigation process of every mobile robot depends on many parameters and systems that must function harmonically as well as provide a good solution to the sub-problem each one tries to solve. By analyzing the navigation process, which the robot must execute autonomously, three tasks stand out as critical for its success. The first is the planning of the path that the robot must follow in order to move from one point to another. The planning task can take into account several general or special conditions such as the minimization of the total travel length, the distance from obstacles, kinematic and/or dynamic constraints of the robot itself, power consumption, etc.

The second critical task is the localization task, i.e. the calculation of the robot's position into the world. It is evident that before any planning is done, the robot's position must be known with great accuracy. However, this is not enough. The position must be known throughout the entire robot operation and a precise estimation is vital to the successful execution of any task within the world.

The third critical task is the robot's motion itself, i.e. the execution of the preplanned path. It is clear that however good the planned path and the localization are, if the tracking of the path contains significant errors, the navigation collapses. This dissertation is devoted to this problem, also known as the "path tracking" problem. Firstly, a fuzzy logic controller is developed that provides a solution to the tracking problem for various path categories. This controller possesses all the advantages of fuzzy control such as rule simplicity, inherent robustness to noise, modularity, etc.

Based on this fuzzy controller two specific designs on actual robotic systems are presented. These designs are implemented on a Field Programmable Gate Array (FPGA) board and integrated into a System-on-a-Chip (SoC). These systems provide advantages over simple computers or programmable logic controllers, the most important of which is the increased computational speed which is required for real time fuzzy control. Field experiments are also presented, in order to assess the theoretical features of the control as well as its implementations.

Finally, a theoretical contribution to the path tracking problem is analyzed. Specifically, a non linear transformation that simplifies the problem is presented. This transformation is a piece-wise linear homeomorphism, in the case of polygonal reference path, or a diffeomorphism in the case of continuously differentiable curves, that transforms the reference path into a straight line. When this map is applied to a robotic system, it can be extended to the entire state space and result to a transformed system of equations that is "feedback equivalent" with the original system. The feedback equivalence consists of a change of coordinates in state space along with an input transformation. This results in a simplification of the tracking

problem, since the tracking task takes place in the transformed domain where the reference path is now a straight line.

The simplification has a twofold meaning. On the one hand, the design of new tracking controllers can be simplified, and on the other hand an existing tracking controller can also be reduced to a simpler form since tracking straight lines is much simpler than tracking arbitrary simple curves. In this Thesis more emphasis is put to the second case, i.e. to the simplification of existing controllers. This simplification of the initial fuzzy controller is presented along with its transformation to a switching fuzzy controller.

**Keywords**

Non-holonomic systems, Mobile robots, Non-linear control, Fuzzy control, Feedback equivalence, Switching control, Non-linear transformations, Robot navigation, System on a Chip, Field Programmable Gate Array, FPGA, Path tracking

# Πρόλογος

Η διατριβή αυτή παρουσιάζει τα ερευνητικά αποτελέσματα μιας μακρόχρονης πορείας στο Εργαστήριο Ρομποτικής και Αυτοματισμού της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Σε αυτές τις γραμμές θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, τον κ. Σπύρο Τζαφέστα για την πολύτιμη καθοδήγησή του, τόσο σε επιστημονικά θέματα όσο και σε γενικότερες καταστάσεις που προέκυψαν κατά τη διάρκεια αυτών των ετών. Η εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπο μου ήταν μια διαρκής πηγή έμπνευσης αλλά και κίνητρο για την περαιτέρω ολοκλήρωση της επιστημονικής μου προσωπικότητας. Μου έδωσε την ευκαιρία να εκπληρώσω ένα όνειρο που είχα από όταν ήρθα σε επαφή με την επιστημονική σκέψη: να εισαχθώ στον κόσμο της επιστήμης και να έρθω σε επαφή με πολλούς ερευνητές του πεδίου μου, τόσο στην Ελλάδα όσο και στο εξωτερικό. Να δω «ιδίους όμμασι» το πώς εξελίσσεται η ανθρώπινη, και δη η επιστημονική γνώση. Το μέχρι τώρα ταξίδι μου στον κόσμο αυτό ήταν αρκετά δύσκολο αλλά, για όποιον το γνωρίσει και εκτιμήσει την αξία του, είναι μοναδικό. Ειλικρινά τον ευχαριστώ γι' αυτή την ευκαιρία.

Φυσικά, σ' αυτό το ταξίδι δεν ήμουν μόνος. Είχα αρκετούς ανθρώπους δίπλα μου τους οποίους θα ήθελα και να ευχαριστήσω. Αρχικά λοιπόν πρέπει να κάνω ιδιαίτερη αναφορά στον φίλο και συνάδελφο Κυριάκο Δεληπαράσχο. Η συμβολή του στη διατριβή μου και στα ερευνητικά αποτελέσματα ήταν θεμελιώδης αφού όλες οι πειραματικές υλοποιήσεις έγιναν με τη βοήθειά του, συνδυάζοντας τα δύο ερευνητικά μας πεδία. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω όλους τους συναδέλφους στο εργαστήριο, τον Μάνθο Αλιφραγκή, τον Ανδρέα Μαντέλο, τον Δημήτρη Αρίστο και όλα τα υπόλοιπα μέλη, για μια άψογη συνεργασία και για το ευχάριστο και παραγωγικό κλίμα που είχαμε.

Στην πορεία μου αυτή πρέπει φυσικά ν' αναφερθώ και στα άτομα τα οποία με στήριξαν μέσα από την αμέριστη αγάπη και, πολλές φορές, υπομονή τους! Στους γονείς μου και τον αδερφό μου, οι οποίοι έκαναν αυτό το ταξίδι μου εφικτό. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω και την αγαπημένη μου γυναίκα Κατερίνα η οποία με στήριξε ηθικά και ψυχολογικά σε πολλές δύσκολες στιγμές, αλλά και με περίμενε με πολύ υπομονή. Η διατριβή μου είναι αφιερωμένη σε αυτούς.



# Περιεχόμενα

Λίστα Σχημάτων.....	17
Λίστα Πινάκων.....	21
<b>Κεφάλαιο 1</b>	
<b>Εισαγωγή.....</b>	<b>23</b>
1.1. Εισαγωγή.....	23
1.2. Ορισμός της πορείας .....	24
1.3. Το πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας .....	27
1.4. Συμβολή της διατριβής.....	29
1.5. Διάρθρωση της διατριβής .....	30
<b>Κεφάλαιο 2</b>	
<b>Ασαφής έλεγχος παρακολούθησης πορείας μη-ολονομικού ρομποτικού οχήματος .....</b>	<b>33</b>
2.1. Εισαγωγή.....	33
2.2. Ασαφής Ελεγκτής.....	34
2.3. Χωρικό παράθυρο.....	38
2.4. Ευρωστία.....	39
2.5. Αποτελέσματα προσομοιώσεων .....	42
2.6. Θόρυβος πορείας.....	46
<b>Κεφάλαιο 3</b>	
<b>Σύστημα σε Ψηφίδα (SoC) για το Πρόβλημα της Παρακολούθησης Πορείας σε Κινητά Ρομπότ .....</b>	<b>51</b>
3.1. Εισαγωγή.....	51
3.2. Συνοπτική περιγραφή του Συστήματος.....	52
3.3. Πρόγραμμα επίβλεψης ελέγχου.....	55
3.4. Προβλήματα κβάντωσης .....	59

3.5. Περιγραφή υλικού σε υψηλό επίπεδο .....	61
3.6. Πειράματα.....	62
3.7. Συμπεράσματα.....	65

## **Κεφάλαιο 4**

### **Αναγωγή της παρακολούθησης πορείας σε παρακολούθηση ευθείας μέσω ισοδυναμίας ανάδρασης.....67**

4.1. Εισαγωγή.....	67
4.2. Ευθύς μετασχηματισμός.....	69
4.3. Αντίστροφος μετασχηματισμός.....	72
4.4. Θεωρητική ανάλυση ελέγχου .....	75
4.5. Εφαρμογή στην παρακολούθηση πορείας.....	78
4.5.1 Προσομοίωση .....	79
4.6. Συμπεράσματα.....	81

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Μετασχηματισμός μήκους, γωνίας, ταχύτητας και καμπυλότητας ... 82

## **Κεφάλαιο 5**

### **Κρουστικά φαινόμενα και διακοπτικός έλεγχος στην παρακολούθηση πορείας.....85**

5.1. Εισαγωγή.....	85
5.2. Διακοπτικά και κρουστικά φαινόμενα .....	87
5.3. Διακοπτικός ασαφής έλεγχος .....	91
5.4. Αποτελέσματα προσομοιώσεων και συγκρίσεων.....	95
5.5. Συμπεράσματα.....	98

## **Κεφάλαιο 6**

### **Σύστημα σε Ψηφίδα (SoC) για την παρακολούθηση πορείας μέσω του μετασχηματισμού SWAM..... 101**

6.1. Εισαγωγή.....	101
6.2. Κινηματική και οδομετρία του Khepera II .....	103
6.3. Αλγόριθμος επεξεργασίας Video και βαθμονόμηση .....	108
6.4. Πειραματικά αποτελέσματα.....	114

## **Κεφάλαιο 7**

### **Απλοποίηση του ελέγχου πλοήγησης των ρομποτικών οχημάτων μέσω ισοδυναμίας ανάδρασης..... 123**

7.1. Εισαγωγή.....	123
7.2. Εισαγωγικές έννοιες .....	123
7.3. Ο Λοξός Μετασχηματισμός Ευθειοποίησης.....	126
7.4. Ισοδυναμία ανάδρασης.....	129
7.5. Εφαρμογή και αποτελέσματα προσομοιώσεων .....	132
7.6. Συμπεράσματα.....	134
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Μαθηματικές αποδείξεις .....	135

## **Κεφάλαιο 8**

Συμπεράσματα.....	143
Βιβλιογραφία .....	147





## Λίστα σχημάτων

Σχήμα 1. Ορισμός γενικευμένων συντεταγμένων.....	26
Σχήμα 2. Παραμετροποίηση της καμπύλης ως προς την ταχύτητα.....	27
Σχήμα 3. Ορισμός των δυο εισόδων $\phi_1, \phi_2$ .....	34
Σχήμα 4. Διαμέριση του σφάλματος γωνίας $\varphi_1$ .....	35
Σχήμα 5. Διαμέριση του σφάλματος διεύθυνσης $\varphi_2$ .....	35
Σχήμα 6. Διαμέριση της εξόδου $\kappa$ .....	36
Σχήμα 7. Επιφάνεια κανόνων του ασαφούς ελεγκτή.....	37
Σχήμα 8. Ορισμός του χωρικού παραθύρου .....	39
Σχήμα 9. Περιοχή εκτίμησης θέσης του ρομπότ για σύστημα GPS με θόρυβο θέσης .....	41
Σχήμα 10. Εύρος γωνίας για την εκτίμηση διεύθυνσης με θόρυβο.....	42
Σχήμα 11. Παρακολούθηση ευθείας - line (0,0,45).....	42
Σχήμα 12. Παρακολούθηση ευθείας - line (0,0,45).....	42
Σχήμα 13. Παρακολούθηση τόξου - circ(0,0,700) .....	43
Σχήμα 14. Παρακολούθηση τόξου - circ(0,0,700) .....	43
Σχήμα 15. Παρακολούθηση τόξου - circ(0,0,500) .....	43
Σχήμα 16. Παρακολούθηση ημιτόνου sin(1000,2,800).....	43
Σχήμα 17. Παρακολούθηση τόξου με 100% θόρυβο οδομετρίας. ....	43
Σχήμα 18. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 17. ....	43
Σχήμα 19. Παρακολούθηση ημιτόνου με 100% θόρυβο οδομετρίας.....	44
Σχήμα 20. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 19. ....	44
Σχήμα 21. Παρακολούθηση ευθείας με 100% θόρυβο οδομετρίας.....	44
Σχήμα 22. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 21. ....	44
Σχήμα 23. Παρακολούθηση τόξου με θόρυβο 1000cm. ....	44
Σχήμα 24. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 23 σε λογαριθμική κλίμακα. ....	44
Σχήμα 25. Πραγματική και εκτιμώμενη πορεία για την προσομοίωση του Σχήμα 23. ....	45
Σχήμα 26. Παρακολούθηση ευθείας με θόρυβο 10 000cm (100m). ....	45
Σχήμα 27. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 26 σε λογαριθμική κλίμακα. ....	45
Σχήμα 28. Παρακολούθηση ευθείας με θόρυβο 100 000cm (1Km). ....	45
Σχήμα 29. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 28 σε λογαριθμική κλίμακα. ....	45
Σχήμα 30. Παρακολούθηση ευθείας με θόρυβο 1Km. ....	46
Σχήμα 31. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 30 σε λογαριθμική κλίμακα. ....	46
Σχήμα 32. Παρακολούθηση ημιτόνου με θόρυβο 100cm. ....	46

Σχήμα 33. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 32. ....	46
Σχήμα 34. Παρακολούθηση ημιτόνου με θόρυβο 500cm. ....	46
Σχήμα 35. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 34. ....	46
Σχήμα 36. Παρακολούθηση ημιτόνου με θόρυβο πορείας 500cm. ....	47
Σχήμα 37. Ελάχιστη απόσταση από την κανονική και την ενθόρυβη πορεία του Σχήμα 54. ....	47
Σχήμα 38. Παρακολούθηση κύκλου με θόρυβο 200cm. ....	48
Σχήμα 39. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 38. ....	48
Σχήμα 40. Παρακολούθηση κύκλου με θόρυβο 700cm. ....	48
Σχήμα 41. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 40. ....	48
Σχήμα 42. Παρακολούθηση ευθείας με θόρυβο 200cm. ....	48
Σχήμα 43. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 42. ....	48
Σχήμα 44. Γενική περιγραφή του συστήματος. ....	53
Σχήμα 45. Το ρομποτικό σύστημα κατά την διάρκεια πειραμάτων ....	53
Σχήμα 46. Η εφαρμογή Matlab κατά τη διάρκεια ενός πειράματος ....	54
Σχήμα 47. Διάγραμμα ροής του κυρίως προγράμματος. ....	56
Σχήμα 48. Διαγράμματα ροής (α) ρουτίνα για το «χωρικό παράθυρο», (b) ρουτίνα διόρθωσης της υπερχειλίσης των οπτικών κωδικοποιητών ....	57
Σχήμα 49. Κβάντωση της ακτίνας στροφής για $u'=100$ mm/sec. ....	60
Σχήμα 50. Μέγιστο σχετικό σφάλμα μεταξύ της πραγματικής και της επιθυμητής καμπυλότητας σε σχέση με την ταχύτητα, για όλες τις εισόδους του ελεγκτή. ....	60
Σχήμα 51. Σχηματικό διάγραμμα υψηλού επιπέδου της αρχιτεκτονικής του SoC. ....	62
Σχήμα 52. Πάνω: Το πείραμα της σιγμοειδούς καμπύλης με την πορεία αναφοράς (μαύρο), την εκτίμηση θέσης της οδομετρίας (μπλε) και την εκτίμηση του DGPS (κόκκινο). Κάτω: Το πείραμα της ευθείας γραμμής με την πορεία αναφοράς (μαύρο), την εκτίμηση της οδομετρίας (μπλε) και του DGPS (κόκκινο). ....	63
Σχήμα 53. Ελάχιστη απόσταση (σε μέτρα) των λύσεων της οδομετρίας και του GPS ως προς την πορεία αναφοράς, σε σχέση με το κανονικοποιημένο μήκος. ....	64
Σχήμα 54. Μετασχηματισμός μιας πολυγωνικής αλυσίδας ....	68
Σχήμα 55. Μετασχηματισμός μιας πολυγωνικής αλυσίδας (μπλε) όπου $\theta_s = 0$ ....	71
Σχήμα 56. Εύρεση του ενεργού παλμού ....	74
Σχήμα 57. Αντιστρεψιμότητα εξαρτώμενη από τη γωνία μετατόπισης ....	74
Σχήμα 58. Διάγραμμα ελέγχου ....	79

Σχήμα 59. Αποτελέσματα προσομοίωσης για τους δυο ελεγκτές παρακολούθησης ευθείας. Τα $A_c$ , $A_p$ είναι οι πορείες της πρώτης προσομοίωσης στον φυσικό και κανονικό χώρο αντίστοιχα ενώ τα $B_c$ , $B_p$ είναι για τη δεύτερη. ....	80
Σχήμα 60. Κρουστικά φαινόμενα σε πολυγωνικές πορείες. ....	87
Σχήμα 61. Επιφάνειες μεταγωγής στον φυσικό και κανονικό χώρο.....	89
Σχήμα 62. Είσοδοι του ασαφούς ελεγκτή στην περίπτωση παρακολούθησης ευθείας .....	91
Σχήμα 63. Απεικόνιση του περιορισμένου συνόλου της εισόδου στις δυο περιπτώσεις παρακολούθησης ευθείας .....	92
Σχήμα 64. Ενεργοί κανόνες του ασαφούς ελεγκτή ως προς τη γωνία $\phi$ .....	93
Σχήμα 65. Απεικόνιση του οριακού στρώματος.....	94
Σχήμα 66. Ο περιοριστικός χώρος εισόδου.....	95
Σχήμα 67. Πορείες αναφοράς (μπλε) και robot (κόκκινη) στον φυσικό χώρο για την πρώτη προσομοίωση .....	96
Σχήμα 68. Πορεία του robot στον κανονικό χώρο για την πρώτη προσομοίωση .....	96
Σχήμα 69. Απεικόνιση της εισόδου $\phi_1$ ως προς την $\phi_2$ για την πρώτη προσομοίωση.....	97
Σχήμα 70. Πορείες των τριών ελεγκτών στον φυσικό χώρο .....	98
Σχήμα 71. Απεικόνιση του πειραματικού πεδίου .....	102
Σχήμα 72. Γενική τοπολογία του πειραματικού συστήματος .....	102
Σχήμα 73. Απεικόνιση των γενικευμένων μεταβλητών του διαφορικού κινηματικού μοντέλου.....	104
Σχήμα 74. Απεικόνιση των ταχυτήτων του διαφορικού μοντέλου .....	105
Σχήμα 75. Εικόνες των προτύπων βαθμονόμησης της κάμερας .....	110
Σχήμα 76. Μοντέλο εφαπτομενικής παραμόρφωσης της κάμερας .....	111
Σχήμα 77. Μοντέλο ακτινικής παραμόρφωσης της κάμερας .....	112
Σχήμα 78. Ολικό μοντέλο παραμόρφωσης της κάμερας .....	112
Σχήμα 79. Απεικόνιση του robot όπως φαίνεται από την κάμερα. Διακρίνεται το κόκκινο LED στο κέντρο του για την εξαγωγή της θέσης του.....	113
Σχήμα 80. Απεικόνιση του εξωγενούς συστήματος αναφοράς για τα πειράματα.....	115
Σχήμα 81. Στιγμιότυπα από το βίντεο του πρώτου πειράματος.....	116
Σχήμα 82. Πορεία του robot κατά το πρώτο πείραμα .....	116
Σχήμα 83. Πορεία του robot για το πρώτο πείραμα, μετά την επεξεργασία του βίντεο .....	117
Σχήμα 84. Απόσταση της πορείας της οδομετρίας και της κάμερας από την πορεία αναφοράς για το πρώτο πείραμα .....	117
Σχήμα 85. Στιγμιότυπα από το βίντεο του δεύτερου πειράματος.....	118
Σχήμα 86. Πορεία του robot κατά το δεύτερο πείραμα .....	119

Σχήμα 87. Πορεία του robot για το δεύτερο πείραμα, μετά την επεξεργασία του βίντεο .....	119
Σχήμα 88. Απόσταση της πορείας της οδομετρίας και της κάμερας από την πορεία αναφοράς για το δεύτερο πείραμα .....	120
Σχήμα 89. Απεικόνιση του λοξού μετασχηματισμού ευθειοποίησης για ημιτονική πορεία αναφοράς .....	127
Σχήμα 90. Διάγραμμα ελέγχου .....	132
Σχήμα 91. Παρακολούθηση ημιτονοειδούς πορείας. Τροχιές των ρομπότ στον φυσικό χώρο.	133
Σχήμα 92. Παρακολούθηση ημιτονοειδούς πορείας. Τροχιές των ρομπότ στον κανονικό χώρο.....	133

## **Λίστα Πινάκων**

Πίνακας 1. Βάση κανόνων τους ασαφούς ελεγκτή .....	37
Πίνακας 2. Αποτελέσματα σύγκρισης των τριών ελεγκτών .....	97
Πίνακας 3. Εσωγενείς παράμετροι της κάμερας όπως παρήχθησαν από τη βαθμονόμηση ..	111



# Κεφάλαιο 1

---

## Εισαγωγή

### 1.1. Εισαγωγή

Ένα βασικό πεδίο της ρομποτικής αποτελούν τα κινητά ρομπότ (mobile robots) στα οποία έχει αφιερωθεί ένας μεγάλος όγκος έρευνας και βιβλιογραφίας. Ο όρος «κινητό ρομπότ» αναφέρεται συνήθως σε ρομποτικά οχήματα, δηλαδή σε ρομπότ τα οποία μετακινούνται με τροχούς (ή ερπύστριες), σε αντιδιαστολή με άλλα είδη ρομπότ τα οποία κινούνται με κινούμενα άκρα (biped robots, hexapods, snake robots, insect robots, flying robots κλπ). Το ενδιαφέρον για τα ρομποτικά οχήματα είναι εύλογο μιας και το περιβάλλον δράσης τους είναι το έδαφος, οπότε και μοιράζονται το περιβάλλον τους, κατά το μεγαλύτερο χρόνο λειτουργίας τους, με τους ανθρώπους.

Ο έλεγχος των ρομποτικών οχημάτων αποτελεί έναν αρκετά ενδιαφέροντα στόχο μιας και τα συστήματα αυτά είναι εξόχως μη-γραμμικά και έχουν περισσότερους βαθμούς ελευθερίας απ' ότι εισόδους ελέγχου, είναι δηλαδή υπό-οδηγούμενα (underactuated). Μια βασική διεργασία την οποία πρέπει να επιτελούν, είναι η αυτόνομη πλοήγηση. Αυτό συνίσταται στην μετακίνησή τους από έναν σημείο σε κάποιο άλλο κατά τέτοιο τρόπο ώστε να πληρούνται ορισμένοι περιορισμοί. Κατά την ανάλυση της διαδικασίας της πλοήγησης διακρίνονται τρεις βασικές λειτουργίες. Η πρώτη είναι ο σχεδιασμός της πορείας που πρέπει να ακολουθήσει ένα ρομπότ για να πάει από ένα σημείο σε κάποιο άλλο. Ο σχεδιασμός μπορεί να λάβει υπόψη του πολλές γενικές ή ειδικές συνθήκες όπως η ελαχιστοποίηση του ολικού μήκους της πορείας, η απόσταση από ενδεχόμενα εμπόδια στο χώρο κίνησης, κινηματικοί ή/και δυναμικοί περιορισμοί του ίδιου του ρομπότ, κατανάλωση ενέργειας κλπ.

Η δεύτερη κρίσιμη λειτουργία είναι η χωροθέτηση του ρομπότ, δηλαδή ο υπολογισμός της θέσης του μέσα στον κόσμο που κινείται. Είναι εύκολα κατανοητό

ότι προτού γίνει οποιαδήποτε σχεδίαση, η θέση του ρομπότ μέσα στον κόσμο πρέπει να είναι γνωστή με μεγάλη ακρίβεια. Βέβαια, αυτό δεν αρκεί. Η θέση πρέπει να είναι γνωστή καθ' όλη τη διάρκεια της λειτουργίας του ρομπότ ενώ η ακριβής εκτίμηση της είναι ζωτικής σημασίας για την επιτυχή εκτέλεση οποιασδήποτε εργασίας μέσα στον κόσμο.

Η τρίτη κρίσιμη λειτουργία είναι η ίδια η κίνηση του ρομπότ, δηλαδή η εκτέλεση της σχεδιασμένης πορείας. Είναι κατανοητό ότι όσο καλή και αν είναι η σχεδιασμένη πορεία και η χωροθέτηση, αν η παρακολούθηση της περιέχει μεγάλα σφάλματα η πλοήγηση καταρρέει.

Η σχεδίαση και η εκτέλεση της πορείας είναι προβλήματα τα οποία δυσχεραίνονται και από την εμφάνιση ειδικών περιορισμών οι οποίοι αναδύονται από την ίδια τη φύση των ρομποτικών μοντέλων. Οι περιορισμοί αυτοί ονομάζονται μη-ολονομικοί περιορισμοί (non-holonomic constraints) και περιορίζουν τις επιτρεπόμενες κινήσεις που μπορεί να εκτελέσει το ρομπότ. Εκφράζουν περιορισμούς στις γενικευμένες ταχύτητες του συστήματος και προέρχονται από την αλληλεπίδραση των τροχών με το έδαφος. Οι περιορισμοί αυτό πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τη σχεδίαση της πορείας αναφοράς αλλά και στον έλεγχο των ρομπότ ειδάλλως το σύστημα δεν θα μπορέσει ποτέ να εκτελέσει τις κινήσεις χωρίς σφάλμα.

## 1.2. Ορισμός της πορείας

Όπως έχει αναφερθεί, η παρακολούθηση πορείας (path tracking) είναι ένα αναπόσπαστο κομμάτι του ελέγχου κάθε ρομποτικού οχήματος. Κατά τη διαδικασία αυτή, υπάρχει μια γεωμετρική καμπύλη που παράγεται από τον αλγόριθμο σχεδίασης, και το ρομπότ καλείται να την ακολουθήσει. Από την πλευρά του ελέγχου, η σχεδίαση αποτελεί τον βρόχο προστροφοδότησης (feedforward loop) ενώ η παρακολούθηση της πορείας είναι ο βρόχος ανατροφοδότησης (feedback loop). Η πορεία που παράγει ο αλγόριθμος σχεδίασης μπορεί να είναι είτε μια συνεχής καμπύλη με συνεχείς παραγώγους μέχρι κάποιας τάξης, δηλαδή κλάσης  $C^r$ , στο  $\mathbb{R}^n$  (όπου  $n$  είναι η διάσταση του χώρου μέσα στον οποίο κινείται το ρομπότ π.χ.  $\mathbb{R}^2$  για κίνηση σε επίπεδο,  $\mathbb{R}^3$  για κίνηση στο χώρο κλπ), είτε απλά μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή κλάσης  $C^0$ .

Στη δεύτερη περίπτωση η καμπύλη αποτελείται από την μη-συμβιβαστή ένωση  $\coprod_{i \in I} A_i$  απλούστερων καμπύλων  $A_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i \in I \subset \mathbb{N}$ . Η ένωση αυτή αποτελεί ένα διατεταγμένο σύνολο. Τα σημεία τομής των διαδοχικών καμπύλων ορίζουν ένα σύνολο σημείων  $W \in \mathbb{R}^n$  που ονομάζεται *χάρτης δρόμου (roadmap)*. Ουσιαστικά, ο αλγόριθμος σχεδίασης αρχικά παράγει το χάρτη δρόμου και στη συνέχεια ενώνει τα σημεία αυτά με διάφορες απλές καμπύλες ώστε να παραχθεί μια συνεχής καμπύλη. Αν και μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια απειρία καμπύλων  $A_i$ , συνήθως χρησιμοποιούνται ευθείες γραμμές και τόξα κύκλων. Στην απλούστερη περίπτωση χρησιμοποιούνται αποκλειστικά ευθείες γραμμές για τη σύνδεση των σημείων του χάρτη δρόμου, παράγοντας έτσι κατά-τμήματα γραμμικές πορείες (piecewise linear paths) ή αλλιώς, πολυγωνικές αλυσίδες (polygonal chains).



Η χρήση πολυγωνικών αλυσίδων είναι ευρέως διαδεδομένη μιας και παραγωγή (ή ακόμα και η χρήση στον έλεγχο) καμπύλων κλάσης  $C^r$  είναι εξαιρετικά δύσκολη έως αδύνατη. Επίσης, για το πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας, το οποίο είναι ουσιαστικά ένα γεωμετρικό πρόβλημα ελέγχου, χρειάζονται αναλυτικοί τύποι του πορείας παραμετροποιημένοι ως προς το μήκος της καμπύλης. Στη γενική περίπτωση αυτοί οι τύποι δεν μπορούν να παραχθούν γιατί θα απαιτούσαν την αναλυτική ολοκλήρωση τυχαίων μη γραμμικών συναρτήσεων (ανάλογα με τον χώρο κίνησης του ρομπότ και του κινηματικού του μοντέλου). Από την άλλη, αν η καμπύλη έχει πεπερασμένο μήκος, είναι δηλαδή επανορθώσιμη (rectifiable), τότε η πολυγωνική προσέγγιση της μπορεί να την προσεγγίσει απειροστά κοντά, με ενδεχομένως άπειρο αριθμό σημείων. Την πολυγωνική γραμμή μπορούν εύκολα να την χειριστούν ηλεκτρονικοί υπολογιστές και να την χρησιμοποιήσουν σε υπολογιστικούς αλγορίθμους. Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι ανάλογα με το μοντέλο του ρομποτικού οχήματος που χρησιμοποιείται, είναι πιθανό η πολυγωνική πορεία να μην αποτελεί λύση του συστήματος, δηλαδή της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει τη δυναμική του. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί όταν π.χ. η καμπυλότητα εισέρχεται σαν κατάσταση στο σύστημα (π.χ. το μοντέλο car-like), οπότε και η παράγωγος της πρέπει να είναι πεπερασμένη. Σ' αυτή την περίπτωση, οι πολυγωνικές αλυσίδες αποτελούν μια προσέγγιση της λύσης του συστήματος (δηλαδή της τροχιάς που πρέπει ν' ακολουθήσει το ρομπότ). Η παρακολούθηση μιας τέτοιας πορείας θα εμφανίζει εγγενή σφάλματα τα οποία όμως μπορούν να θεωρηθούν ανεκτά.

Ένα από τα κύρια μοντέλα που χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία για την ανάλυση και εφαρμογή των αλγορίθμων ελέγχου ορίζεται από τις εξισώσεις,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \tan \varphi / l \end{bmatrix} v \quad (1.1)$$

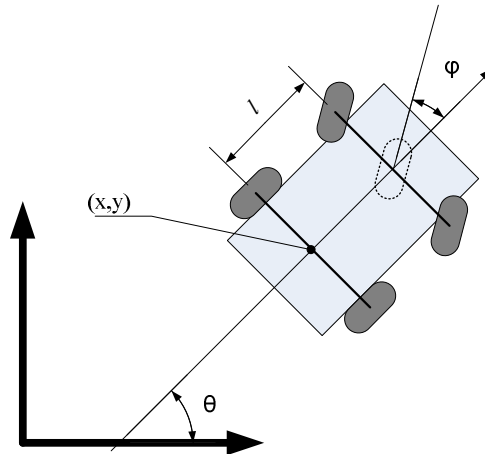
θεωρώντας σταθερή την ταχύτητα  $v$  και φραγμένη την γωνία  $\varphi$ . Αναφορικά με το Σχήμα 1, τα  $(x,y)$  δηλώνουν τις συντεταγμένες του μεσαίου σημείου του πίσω άξονα των τροχών,  $\theta$  είναι η διεύθυνση του οχήματος,  $\varphi$  είναι η γωνία στροφής των μπροστινών τροχών ως προς τη διεύθυνση του ρομπότ και  $l$  είναι το μεταξόνιο, δηλαδή η απόσταση των δυο αξόνων. Είσοδοι του συστήματος θεωρούνται η ταχύτητα  $v$  και η γωνία στροφής  $\varphi$ . Η καμπυλότητα  $\kappa$  της τροχιάς που διαγράφει το ρομπότ σχετίζεται με τη γωνία στροφής και το μεταξόνιο σύμφωνα με την εξίσωση (1.2),

$$\kappa = \frac{\tan \varphi}{l} \quad (1.2)$$

Αν θεωρήσουμε σταθερή την ταχύτητα με την οποία κινείται το όχημα, τότε μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις εξισώσεις (1.1) ως εξής,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} \kappa \quad (1.3)$$

Για να είναι πιο ρεαλιστικό το μοντέλο, επιβάλλουμε άνω και κάτω φράγμα στην είσοδο  $\kappa$  έτσι ώστε το όχημα να μπορεί να στρίψει με μια ελάχιστη ακτίνα. Συνεπώς ο χώρος εισόδου είναι  $U = [\kappa_{\min}, \kappa_{\max}]$ . Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από τις (1.3) είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως το *αυτοκίνητο του Dubins (Dubins Car)* [1]



Σχήμα 1. Ορισμός γενικευμένων συντεταγμένων

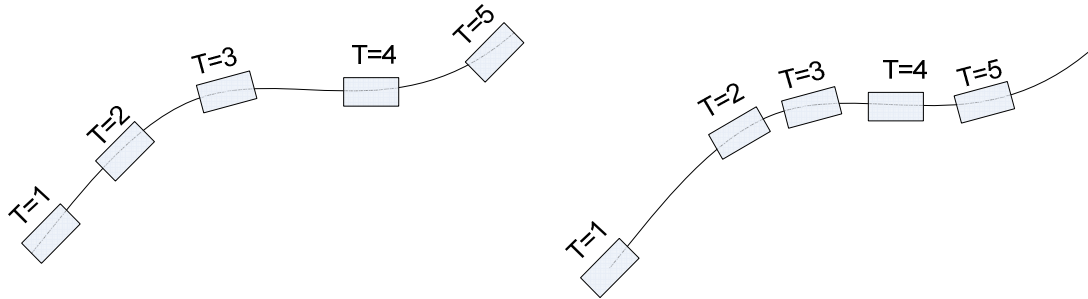
Οι εξισώσεις (1.3) περιγράφουν ένα σύστημα το οποίο έχει τη γενική μορφή,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1.4)$$

Τέτοια συστήματα ονομάζονται *συστήματα αφινικά ως προς την είσοδο (control affine)* [1] και περιγράφονται από τον γραμμικό συνδυασμό των διανυσματικών πεδίων  $g_i(x)$  ως προς την είσοδο ελέγχου  $u$ . Το διανυσματικό πεδίο  $f(x)$  ονομάζεται *ολίσθηση (drift)* του συστήματος. Αν η ολίσθηση είναι μηδέν ( $f(x) = 0$ ) τότε το σύστημα ονομάζεται *γραμμικό ως προς την είσοδο (control linear)*. Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (1.3) εμφανίζουν τον όρο ολίσθησης  $[v \cos \theta \ v \sin \theta \ 0]^T$  ως αποτέλεσμα της σταθεροποίησης της ταχύτητας. Είναι εμφανές ότι το σύστημα αυτό δεν είναι σταθεροποιήσιμο (stabilizable), δεν έχει καν σημείο ισορροπίας, μιας και η ολίσθηση δεν μπορεί ποτέ να μηδενιστεί ενώ το διανυσματικό πεδίο της εισόδου (ο όρος  $g(x)$ ) δεν μπορεί να ακυρώσει την ολίσθηση. Αυτό είναι φυσιολογικό μιας και το σύστημα (1.3) περιγράφει ένα όχημα το οποίο κινείται αδιάλειπτα οπότε και δεν ηρεμεί ποτέ.

Αν χαλαρώναμε τον περιορισμό της ταχύτητας και επιτρέπαμε στην ταχύτητα να παίρνει τιμές στο  $\{0,1\}$ , δηλαδή επιτρέπαμε να μπορεί να σταματήσει το όχημα, τότε το σύστημα είναι σταθεροποιήσιμο. Ουσιαστικά όμως αυξάνουμε τις εισόδους ελέγχου επιτρέποντας και τον έλεγχο της ταχύτητας. Για το πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας, μια τέτοια παραδοχή είναι άνευ νοήματος μιας και ο έλεγχος της ταχύτητας δεν παίζει κανένα ρόλο (κάτι τέτοιο φυσικά δεν μπορεί να

ειπωθεί και για το πρόβλημα της σταθεροποίησης σε ένα σημείο π.χ. το παρκινγκ, ή το πρόβλημα παρακολούθησης τροχιάς). Η ταχύτητα εισάγει μια χρονική επαναπαραμετροποίηση του ρυθμού με το οποίο το ρομπότ κινείται πάνω σε μια πορεία και δεν επηρεάζει την γεωμετρία της πορείας.



Σχήμα 2. Παραμετροποίηση της καμπύλης ως προς την ταχύτητα

Για παράδειγμα, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2 την ίδια πορεία μπορεί να την διατρέξει το ρομπότ με δυο διαφορετικές συναρτήσεις ταχύτητας  $v_1(t), v_2(t)$ . Ουσιαστικά όμως, η πορεία είναι γεωμετρικά η ίδια.

### 1.3. Το πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας

Το γενικό πρόβλημα της παρακολούθησης μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:  
«Έστω ένα σύστημα  $\Sigma$  της μορφής,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u) \\ y &= h(t, x, u) \end{aligned} \quad (1.5)$$

όπου  $x \in \mathbb{R}^n$  είναι το διάνυσμα κατάστασης,  $u \in \mathbb{R}^m$  είναι το διάνυσμα εισόδου και  $y \in \mathbb{R}^k$  είναι το διάνυσμα της εξόδου. Έστω  $x_r(t)$  μια επιτρεπτή τροχιά αναφοράς στο χώρο κατάστασης η οποία αποτελεί λύση του συστήματος και η οποία αντιστοιχεί σε μια είσοδο αναφοράς  $u_r$ , δηλαδή  $\dot{x}_r = f(t, x_r, u_r)$ . Να βρεθεί ο κατάλληλος νόμος ελέγχου  $u = u(t, x, x_r, u_r)$  έτσι ώστε  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_r(t)) = 0$ . Ο ορισμός αυτός περιγράφει την παρακολούθηση καταστάσεων μέσω ανάδρασης καταστάσεων (*state-feedback state tracking*) [2]. Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα της παρακολούθησης έχει διατυπωθεί σαν ένα πρόβλημα σταθεροποίησης σε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο σημείο ισορροπίας. Εναλλακτικά, και κατά κόρον, κάποιος ορίζει ένα σύστημα σφάλματος (τη δυναμική σφάλματος) της μορφής,

$$\begin{aligned} \dot{e} &= h(e, u, t) \\ e &= d(x(t), x_r(t)) \quad , \quad d(x, x) = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

το οποίο περιγράφει την απόσταση της κατάστασης του συστήματος από την τροχιά αναφοράς σύμφωνα με κάποια συνάρτηση απόστασης  $d(\cdot, \cdot)$ . Το πρόβλημα λοιπόν

μετασχηματίζεται στην εύρεση του νόμου ελέγχου  $u = u(e, t)$  ο οποίος όταν εφαρμοστεί στο σύστημα (1.6), μετατρέπει την αρχή σε τοπικά (ή ολικά) ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Η διατύπωση του προβλήματος όπως παρουσιάστηκε προηγουμένως αναφέρεται στην παρακολούθηση τροχιάς (*trajectory tracking*). Το πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας ορίζεται ομοίως με μόνη διαφορά τον ορισμό της τροχιάς αναφοράς  $x_r(t)$ . Η παρακολούθηση πορείας αναφέρεται στην παρακολούθηση της εικόνας της καμπύλης  $x_r(t)$ . Η διαφορά αυτή μπορεί να γίνει κατανοητή ανατρέχοντας στο ορισμό της καμπύλης. Συγκεκριμένα, έστω  $I$  ένα μη-κενό σύνολο πραγματικών αριθμών και έστω μια μεταβλητή  $t \in I$ . Μια διανυσματική συνάρτηση  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  κλάσης  $C^r$  ονομάζεται παραμετρική καμπύλη κλάσης  $C^r$ . Η μεταβλητή  $t$  ονομάζεται *παράμετρος* της καμπύλης  $\gamma$  και το σύνολο  $I$  ονομάζεται *εικόνα* της καμπύλης. Η εικόνα μιας καμπύλης μπορεί να αντιστοιχεί σε περισσότερες από μια καμπύλες οι οποίες ονομάζονται *ισοδύναμες*. Πιο αναλυτικά, αν

$$\begin{aligned} \gamma_1: I_1 &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \gamma_2: I_2 &\rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1.7)$$

είναι δυο καμπύλες κλάσης  $C^r$  και

$$\begin{aligned} \varphi: I_1 &\rightarrow I_2, \\ \varphi(t)' &\neq 0, \quad t \in I_1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

είναι μια αμφιριπτική απεικόνιση (bijection) τέτοια ώστε,

$$\gamma_2(\varphi(t)) = \gamma_1(t) \quad (1.9)$$

τότε λέμε ότι η καμπύλη  $\gamma_2$  αποτελεί μια επαναπαραμετροποίηση (reparametrization) της  $\gamma_1$ . Προφανώς μιας και οι δυο καμπύλες έχουν την ίδια εικόνα, για το πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας δεν παίζει ρόλο η παραμετροποίηση της καμπύλης. Επιπλέον, είναι εμφανές ότι για την ταχύτητα της καμπύλης ισχύει,

$$\frac{d\gamma_2(\varphi(t))}{d\varphi(t)} \dot{\varphi}(t) = \frac{d\gamma_1(t)}{dt} \Rightarrow v_{\gamma_2} \dot{\varphi}(t) = v_{\gamma_1} \quad (1.10)$$

δηλαδή, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η παραμετροποίηση αλλάζει την ταχύτητα διάσχισης της καμπύλης. Συνεπώς η ταχύτητα δεν παίζει ενεργό ρόλο στο πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας αφού για την ίδια καμπύλη μπορούν να οριστούν διαφορετικές ταχύτητες.

#### 1.4. Συμβολή της διατριβής

Η διατριβή έχει παραγάγει τέσσερις διαφορετικές συνεισφορές στο γενικό πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας για κινητά ρομποτικά οχήματα. Οι συνεισφορές αυτές κινούνται σε διαφορετικά επίπεδα η κάθε μια. Ξεκινούν από τη θεωρητική σχεδίαση ενός ασαφούς ελεγκτή για τη λύση του προβλήματος, στην πραγματική υλοποίησή του μέσω ψηφιακών κυκλωμάτων (FPGA) και καταλήγουν στην εισαγωγή μιας καθαρά θεωρητικής τεχνικής (δύο μετασχηματισμών) για την απλοποίηση του ελέγχου. Από τις τέσσερις αυτές συνεισφορές, η πιο σημαντική είναι η καθαρά θεωρητική πλευρά μιας και παρέχει ένα γενικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο μπορούν να στηριχτούν υπάρχουσες ή μελλοντικές τεχνικές ελέγχου ώστε να απλοποιηθούν.

Πιο αναλυτικά, η πρώτη συνεισφορά αφορά στη σχεδίαση ενός εύρωστου (σθεναρού) ασαφούς ελεγκτή ο οποίος επιλύει το πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας. Ο ελεγκτής αυτός θεωρεί πορείες αναφοράς οι οποίες περιγράφονται από ένα σύνολο σημείων. Όμως μπορεί εύκολα να εφαρμοσθεί και σε άλλες κατηγορίες πορειών όπως οι συνεχείς και οι διαφορίσιμες καμπύλες. Σημαντικό στοιχείο του ελεγκτή αυτού είναι η μεγάλη ευρωστία του, δηλαδή η μεγάλη ανοχή που επιδεικνύει στο θόρυβο χωροθέτησης του ρομπότ.

Η δεύτερη συνεισφορά αφορά στην υλοποίηση και την αξιολόγηση του ασαφούς ελέγχου πάνω σε πραγματικά ρομπότ. Ο ασαφής ελεγκτής υλοποιήθηκε πάνω σε ένα FPGA και ολοκληρώθηκε σε ένα αυτόνομο σύστημα, ονομαζόμενο και system-on-a-chip (SoC). Η υλοποίηση και η σύνδεσή του με πραγματικά ρομπότ αναλύεται διεξοδικά και περιγράφονται οι αλγόριθμοι και οι τεχνικές για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων που ανακύπτουν όπως θέματα χρονισμού, κβαντισμού, κλπ.

Οι δυο τελευταίες συνεισφορές έχουν έναν καθαρά θεωρητικό χαρακτήρα. Στην πρώτη περίπτωση, δημιουργείται ένας «κατά-τμήματα αφινικός μετασχηματισμός» για πολυγωνικές πορείες αναφοράς, ο οποίος μετασχηματίζει το χώρο δράσης του ρομπότ σε έναν άλλο χώρο κατά τέτοιο τρόπο ώστε η πορεία αναφοράς να προβάλλεται σε μια ευθεία. Αποδεικνύεται ότι η επίδραση του μετασχηματισμού αυτού πάνω στο κινηματικό μοντέλο του ρομπότ είναι αναλλοίωτη, δηλαδή οι εξισώσεις παραμένουν οι ίδιες. Κατά αυτό τον τρόπο, το πρόβλημα παρακολούθησης πορείας ανάγεται στο κατά πολύ ευκολότερο πρόβλημα της παρακολούθησης ευθείας. Τούτο συνεπάγεται την απλοποίηση της σχεδίασης νέων ελεγκτών καθώς και τη μείωση της πολυπλοκότητας υπαρχόντων.

Η δεύτερη θεωρητική συνεισφορά είναι η επέκταση της προηγούμενης πάνω σε συνεχώς διαφορίσιμες καμπύλες αναφοράς. Εξάγονται εκ νέου οι σχέσεις ενός νέου μετασχηματισμού ο οποίος είναι πλέον ένας διαφορομορφισμός μεταξύ δυο χώρων. Και σ' αυτή την περίπτωση ο μετασχηματισμός φέρει τις ίδιες ιδιότητες όπως π.χ. την αναλλοιωσιμότητα του μοντέλου, την απλοποίηση του ελέγχου, κλπ.

Από την παρούσα ερευνητική εργασία έχουν προκύψει επτά δημοσιεύσεις σε διεθνή περιοδικά και συνέδρια. Οι τέσσερις από αυτές έχουν δημοσιευτεί ενώ, κατά τη στιγμή της συγγραφής της παρούσας, η μία έχει γίνει δεκτή για δημοσίευση και οι άλλες δυο βρίσκονται υπό έλεγχο στα αντίστοιχα περιοδικά. Αναλυτικά οι δημοσιεύσεις αυτές είναι,

- [1] G. Moustris and S.G. Tzafestas, "A Robust Fuzzy Logic Path Tracker for Non-holonomic Mobile Robots.," International Journal on Artificial Intelligence Tools, vol. 14, 2005, pp. 935-966.
- [2] G. Moustris and S.G. Tzafestas, "Reducing a class of polygonal path tracking to straight line tracking via nonlinear strip-wise affine transformation," Mathematics and Computers in Simulation, vol. 79, Nov. 2008, pp. 133-148.
- [3] K. Deliparaschos, G. Moustris, and S. Tzafestas, "Autonomous SoC for Fuzzy Robot Path Tracking," Proceedings of the European Control Conference 2007, Kos, Greece: 2007.
- [4] G. Moustris, K. Deliparaschos, and S. Tzafestas, "Tracking Control Using the Strip-wise Affine Transformation: An Experimental SoC Design," Proceedings of the European Control Conference 2009, Budapest, Hungary: 2009.
- [5] S.G. Tzafestas, K. Deliparaschos, G. Moustris "Fuzzy Logic Path Tracking Control for Autonomous Non-Holonomic Mobile Robots: Design of System on a Chip", Robotics and Autonomous Systems, 2009 (accepted).
- [6] G. Moustris, S.G. Tzafestas, "Switching Fuzzy Tracking Control for Mobile Robots under Curvature Constraints," Control Engineering Practice, 2010 (under review).
- [7] G. Moustris, S.G. Tzafestas, "Simplifying robot tracking control through feedback equivalence" Automatica, 2010 (under review)

### 1.5. Διάρθρωση της διατριβής

Η διάρθρωση των κεφαλαίων της διατριβής ουσιαστικά ακολουθεί και τη χρονολογική σειρά της υλοποίησης του κάθε ερευνητικού θέματος που παρουσιάζεται. Η γενική δομή ακολουθεί μια σειριακή λογική όπου το κάθε κεφάλαιο υποστηρίζεται από τα προηγούμενα, ενώ οι θεωρητικές συνεισφορές ακολουθούνται από πειραματικές υλοποιήσεις.

- **Κεφάλαιο 2**

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ένας ασαφής ελεγκτής για το πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας. Παρουσιάζεται η δομή του και το σχήμα ελέγχου. Παρατίθενται εκτενείς προσομοιώσεις για την αποτίμησή του καθώς και η λειτουργία του κάτω από θόρυβο.

- **Κεφάλαιο 3**

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύεται η υλοποίηση του ασαφούς ελεγκτή πάνω σε ένα FPGA καθώς και η εκτέλεση πειραμάτων με ένα πραγματικό διαφορικό ρομπότ P3DX. Παρουσιάζονται τα διάφορα βήματα της σχεδίασης καθώς και

τα προβλήματα που ανακύπτουν από το ίδιο το σύστημα αλλά και το ρομποτικό όχημα αυτό καθ' αυτό.

- **Κεφάλαιο 4**

Εδώ παρουσιάζεται ο «κατά-ταινίες αφινικός μετασχηματισμός» (strip-wise affine map) ο οποίος μετασχηματίζει την πορεία αναφοράς στο χώρο κίνησης του ρομπότ, σε μια ευθεία σε έναν άλλο κανονικοποιημένο χώρο. Παράγονται οι εξισώσεις κίνησης του μετασχηματισμένου μοντέλου και αναλύεται η εφαρμογή του στην παρακολούθηση πορείας, μαζί με αποτελέσματα προσομοιώσεων.

- **Κεφάλαιο 5**

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η εφαρμογή του μετασχηματισμού πάνω στην παρακολούθηση πολυγωνικών πορειών και ειδικότερα ο τρόπος απλοποίησης του αρχικού ασαφούς ελεγκτή που αναλύθηκε στο κεφάλαιο 2. Εξάγονται θεωρητικά αποτελέσματα για την ευστάθεια το συστήματος το οποίο εμφανίζει κρουστικά φαινόμενα. Αποδεικνύεται ότι η απλοποίηση του ελεγκτή μέσω του μετασχηματισμού οδηγεί σε μείωση της βάσης κανόνων του κατά 70%.

- **Κεφάλαιο 6**

Εδώ αναλύεται η πειραματική εφαρμογή του μετασχηματισμού πάνω σε ένα ρομπότ Khepera II. Ο μετασχηματισμός υλοποιήθηκε σε ένα FPGA το οποίο εκτελεί τους αναγκαίους υπολογισμούς σε πραγματικό χρόνο. Περιγράφεται η πειραματική διάταξη καθώς και ο αλγόριθμος επεξεργασίας Video ο οποίος χρησιμοποιείται για την εξαγωγή της πραγματικής θέσης του ρομπότ.

- **Κεφάλαιο 7**

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η γενίκευση του κατά-ταινίες αφινικού μετασχηματισμού πάνω σε συνεχώς διαφορίσιμες καμπύλες αναφοράς. Εξάγονται οι σχετικοί μαθηματικοί τύποι και ερευνάται η επίδραση του πάνω στο μοντέλο του συστήματος. Δείχνεται ότι ο μετασχηματισμός αυτός, ο οποίος ονομάζεται και λοξός μετασχηματισμός ευθειοποίησης (skew rectification map), εμφανίζει τα ίδια χαρακτηριστικά με τον SWAM ενώ παρουσιάζονται και αποτελέσματα προσομοιώσεων.

- **Κεφάλαιο 8**

Στο τελικό κεφάλαιο γίνεται μια ανακεφαλαίωση των θεμάτων που παρουσιάστηκαν στη διατριβή ενώ παράλληλα προτείνονται και περαιτέρω θέματα τα οποία χρήζουν έρευνας.





## Κεφάλαιο 2

---

### Ασαφής έλεγχος παρακολούθησης πορείας μη-ολονομικού ρομποτικού οχήματος

#### 2.1. Εισαγωγή

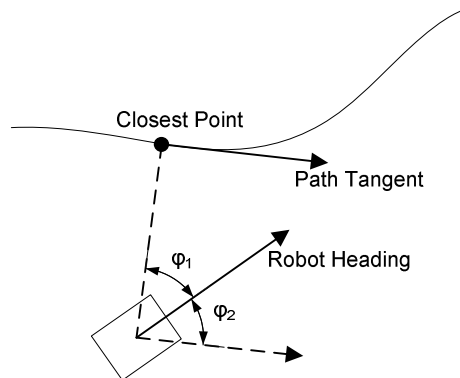
Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε έναν ασαφή ελεγκτή παρακολούθησης πορείας για το λεγόμενο μοντέλο του Dubins. Το μοντέλο αυτό περιγράφεται από τις εξισώσεις (1.3). Παρόμοιοι ελεγκτές έχουν προταθεί και από πολλούς άλλους ερευνητές (ενδεικτικά αναφέρεται η βιβλιογραφία στα [3-42]).

Στην παρούσα εφαρμογή θα θεωρήσουμε ότι η καμπύλη αναφοράς είναι γνωστή και περιγράφεται από ένα σύνολο σημείων  $W = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Επιπλέον θα θεωρήσουμε ότι σε κάθε σημείο προσαρτάται μια κατεύθυνση  $\theta_j$  έτσι ώστε κάθε σημείο να περιγράφει μια *διάταξη* του ρομπότ. Η «καμπύλη» αναφοράς λοιπόν δίνεται σαν ένας πίνακας  $P \in \mathbb{R}^{3 \times k}$  της μορφής,

$$P_{*,j} = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ \theta_j \end{bmatrix}, \quad \theta_j = \text{atan2}(x_{j+1} - x_j, y_{j+1} - y_j) \quad (2.1)$$

όπου  $k$  είναι ο συνολικός αριθμός των σημείων της καμπύλης. Στην οριακή περίπτωση  $j = k$  θεωρούμε ότι  $\theta_k = \theta_{k-1}$ . Η ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών σημείων είναι σταθερή και ισούται με  $\Delta S_{path}$ . Αυτό μπορεί να μεταφραστεί και κάπως αντίστροφα: η καμπύλη αναφοράς είναι συνεχής και την δειγματοληπτούμε με σταθερό χωρικό βήμα μήκους  $\Delta S_{path}$  προκειμένου να την

παρακολουθήσει το ρομπότ. Οι μεταβλητές σφάλματος είναι οι γωνίες  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  που ορίζονται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3. Ορισμός των δυο εισόδων  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$

Το ακριβές μοντέλο κίνησης είναι μια διακριτοποιημένη μορφή του μοντέλου του Dubins, το οποίο περιγράφεται από τις εξισώσεις,

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \kappa \cdot \Delta s \\ \Delta x &= \frac{2}{\kappa} \sin\left(\frac{\kappa \cdot \Delta s}{2}\right) \cos\left(\theta_0 + \frac{\kappa \cdot \Delta s}{2}\right) \\ \Delta y &= \frac{2}{\kappa} \sin\left(\frac{\kappa \cdot \Delta s}{2}\right) \sin\left(\theta_0 + \frac{\kappa \cdot \Delta s}{2}\right)\end{aligned}\quad (2.2)$$

όπου  $\kappa$  είναι η καμπυλότητα και  $\Delta s$  είναι το διανυόμενο διάστημα μέσα σε ένα βήμα ελέγχου. Η κίνηση που περιγράφεται από το (2.2) αναλύεται ως εξής:

1. στο χρόνο  $t_0$  το ρομπότ έχει καμπυλότητα  $\kappa_0$
2. διατηρεί την καμπυλότητα  $\kappa_0$  και διανύει διάστημα  $\Delta s$
3. στο χρόνο  $t_1$  έχει καλύψει διάστημα  $\Delta s$  και ακαριαία αλλάζει καμπυλότητα σε  $\kappa_1$
4. ο βρόχος αρχίζει από την αρχή

Οι εισοδοί ελέγχου του συστήματος είναι η καμπυλότητα  $\kappa$  και το διάστημα  $\Delta s$ . Θεωρώντας ότι το διάστημα  $\Delta s$  είναι σταθερό μέσα σε κάθε βήμα ελέγχου, ο έλεγχος απλοποιείται περισσότερο. Σημειώνεται ότι στο σύστημα (2.2) δεν εκφράζεται καθόλου ο χρόνος. Δηλαδή το μοντέλο είναι καθαρά γεωμετρικό. Η κίνηση που περιγράφεται από αυτό το σύστημα, αποτελείται από ενωμένα τόξα κύκλου αφού η καμπυλότητα είναι κατά τμήματα σταθερή.

## 2.2. Ασαφής Ελεγκτής

Ο ελεγκτής που θα χρησιμοποιηθεί έχει δυο εισόδους, τις γωνίες  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , και παράγει σαν έξοδο την καμπυλότητα  $\kappa$  με την οποία πρέπει να στρίψει το ρομποτικό όχημα. Υπενθυμίζεται ότι η ταχύτητα του ρομπότ είναι σταθερή. Οι δυο

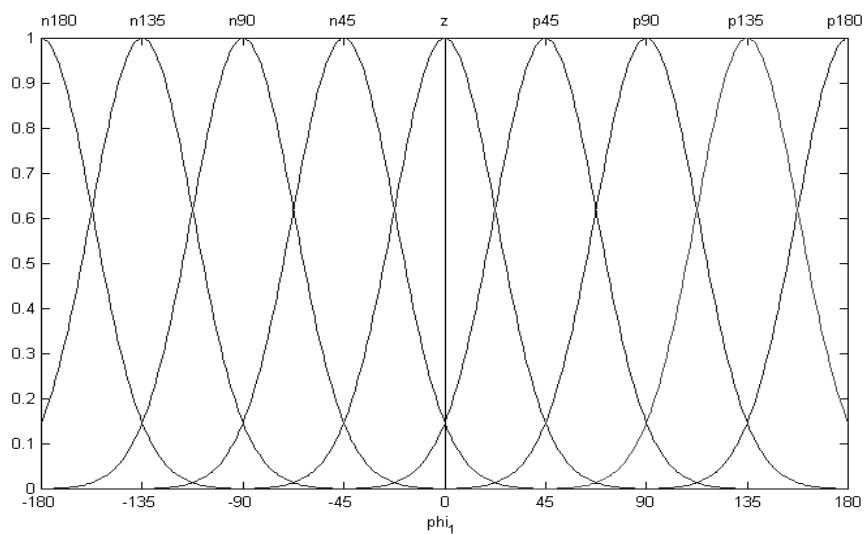
είσοδοι έχουν διαμεριστεί σε εννιά ασαφή σύνολα η κάθε μια, με γκαουσιανές συναρτήσεις συμμετοχής. Αναλυτικά,

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \{n180, n135, n90, n45, z, p45, p90, p135, p180\} \\ \varphi_2 &= \{nvb, nbig, nmid, ns, zero, ps, pmid, pbig, pnb\}\end{aligned}\quad (2.3)$$

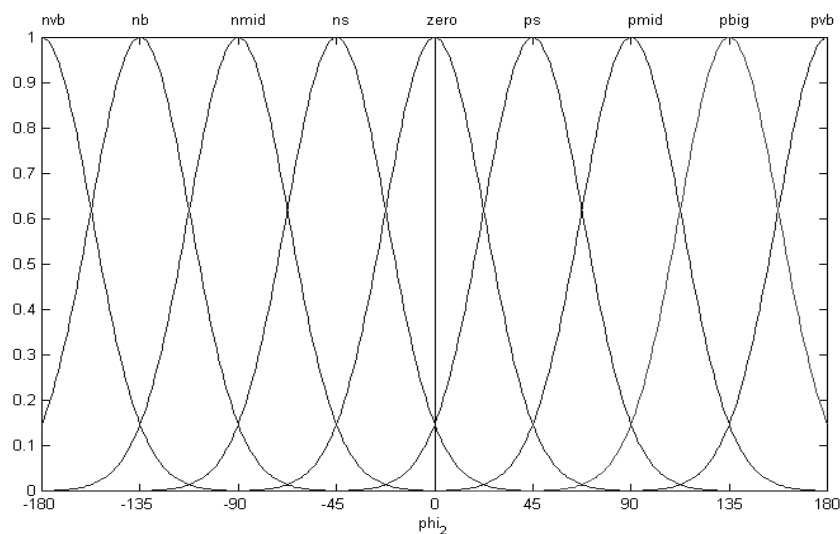
Η έξοδος αποτελείται από πέντε ασαφή σύνολα επίσης με γκαουσιανές συναρτήσεις συμμετοχής,

$$\kappa = \{nb, nm, ze, pm, pb\}\quad (2.4)$$

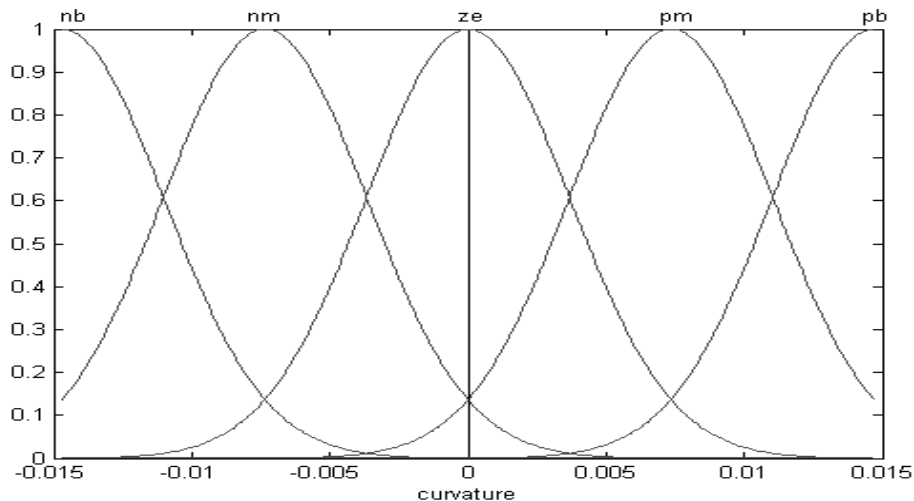
Οι διαμερίσεις των εισόδων και της εξόδου φαίνονται στο Σχήμα 4, στο Σχήμα 5 και Σχήμα 6 αντίστοιχα.



Σχήμα 4. Διαμέριση του σφάλματος γωνίας  $\varphi_1$



Σχήμα 5. Διαμέριση του σφάλματος διεύθυνσης  $\varphi_2$

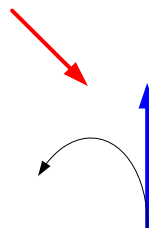


Σχήμα 6. Διαμέριση της εξόδου  $\kappa$

Ο τελεστής συμπερασμού (implication) του ασαφούς συστήματος, είναι ο τελεστής Mamdani  $R_c$  ενώ ο τελεστής σύνθεσης (aggregation) είναι ο τελεστής  $\min$ . Η βάση κανόνων του ασαφούς ελεγκτή αποτελείται από  $9 \times 9 = 81$  κανόνες. Η λογική του ελέγχου θα μπορούσε να προσομοιάσει στο να προσπαθεί κάποιος να οδηγήσει ένα αυτοκίνητο (το ρομπότ) βλέποντας οδικές πινακίδες (το εκάστοτε κοντινότερο σημείο της πορείας) οι οποίες δείχνουν προς την κατεύθυνση που πρέπει να ακολουθηθεί (γωνία  $\varphi_2$ ). Έτσι ανάλογα με το που βρίσκεται πινακίδα (γωνία  $\varphi_1$ ) και με το που δείχνει, στρίβουμε κατάλληλα το όχημα (καμπυλότητα  $\kappa$ ). Ένας τυπικός κανόνας έχει τη μορφή,

- R1: AN  $\varphi_1$  είναι P45 ΚΑΙ  $\varphi_2$  είναι NBIG ΤΟΤΕ  $\kappa$  είναι PB

και θα μπορούσε να απεικονιστεί ποιοτικά ως εξής,

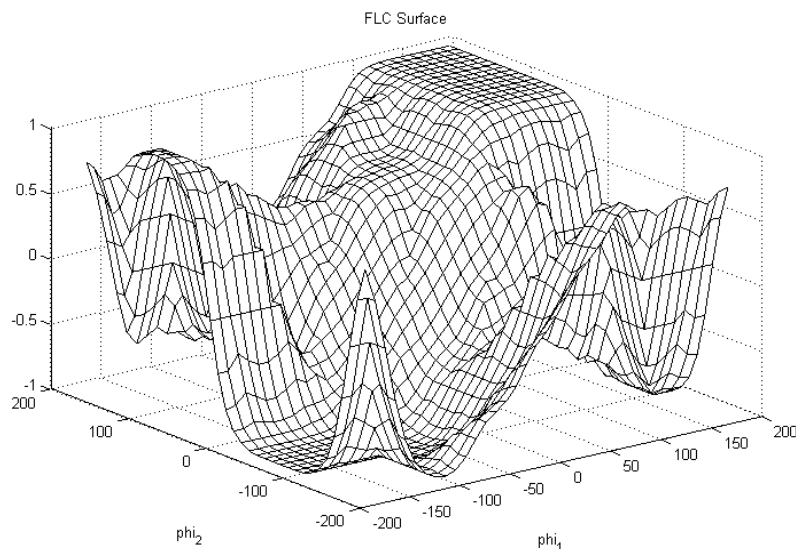


Το παραπάνω διάγραμμα δείχνει ότι αν το κοντινότερο σημείο (κόκκινο βέλος) βρίσκεται στις  $\varphi_1 = 45^\circ$  και δείχνει προς τις  $\varphi_2 = -135^\circ$ , τότε το ρομπότ πρέπει να στρίψει «δυνατά» αριστερά. Η πλήρης βάση κανόνων φαίνεται στον Πίνακα 1. Υπάρχει μια ειδική περίπτωση που χρήζει ιδιαίτερης προσοχής. Όταν το κοντινότερο σημείο βρίσκεται στην  $\varphi_1 = 180^\circ$  τότε είναι ισοδύναμο με το να βρίσκεται στις  $\varphi_1 = -180^\circ$ . Αν και η  $\varphi_1 \in (-180, 180]$  και συνεπώς δεν παίρνει ποτέ την τιμή  $-180^\circ$ , μιλάμε με όρους ασαφών συνόλων.

Πίνακας 1. Βάση κανόνων τους ασαφούς ελεγκτή

$\varphi_1 \backslash \varphi_2$	pnb	pbig	pmid	ps	zero	ns	nmid	nbig	nvb
p180	pb	pb	pb	pm	ze	nm	nb	nb	pb
p135	pb	pb	pb	pb	pm	nm	nb	Pb	pb
p90	pb	pb	pb	pm	pm	pm	pb	pb	Pb
p45	pb	pb	pb	pm	pm	ze	nb	pb	pb
z	pb	pb	Pb	pm	ze	nm	nb	nb	nb
n45	nb	nb	pb	ze	nm	nb	nb	nb	nb
n90	nb	nb	nb	nm	nm	nb	nb	nb	nb
n135	nb	nb	pb	pm	nm	nb	nb	nb	nb
n180	pb	pb	pb	pm	zero	nm	nb	nb	pb

Οι κανόνες που ισχύουν για τα ασαφή σύνολα n180, p180 πρέπει να είναι συνεπείς μεταξύ τους όσον αφορά στην συνέχεια. Αν και οι μαθηματικές τιμές των συνόλων n180, p180 βρίσκονται στα δυο αντίθετα άκρα του πεδίου ορισμού της  $\varphi_1$ , στην πραγματικότητα καλύπτουν μια συνεχή περιοχή. Αυτό είναι φυσικό επακόλουθο της κυκλικής περιοδικότητας των γωνιών. Αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό από το Σχήμα 7.



Σχήμα 7. Επιφάνεια κανόνων του ασαφούς ελεγκτή

Από το σχήμα φαίνεται ότι όταν  $\varphi_1, \varphi_2 \approx -180^\circ$  εμφανίζεται μια κορυφή. Αν η επιφάνεια εκεί ήταν επίπεδη (και άρα αρνητική), όταν οι γωνίες θα διασχίσουν τις  $180^\circ$  προς τις  $-180^\circ$ , ή ανάποδα, τότε η έξοδος θα έκανε «άλματα» μεταξύ της μέγιστης θετικής και της ελάχιστης αρνητικής τιμής της. Αυτή η συμπεριφορά προκαλεί ταλαντώσεις στο όχημα. Για ν' αποφευχθεί κάτι τέτοιο, «πολώνονται» οι κανόνες στην περιοχή  $\varphi_1, \varphi_2 \approx -180^\circ$  ώστε να εμφανίζουν την κορυφή.

### 2.3. Χωρικό παράθυρο

Η στρατηγική ελέγχου για την παρακολούθηση πορείας βασίζεται στην παρακολούθηση ενός σημείου αναφοράς πάνω στην πορεία (το εκάστοτε κοντινότερο σημείο). Αν και ο έλεγχος είναι επιτυχής, σε σχέση με έναν άνθρωπο οδηγό του λείπει ένα βασικό συστατικό: η προοπτική. Ο άνθρωπος δεν παρακολουθεί ένα σημείο αλλά ένα τμήμα της πορείας, προϋπολογίζοντας έτσι τις κινήσεις του. Για παράδειγμα, προκειμένου να στρίψει έχει ήδη δει τη στροφή και προετοιμάζει τις κινήσεις που θα επιτρέψουν την εύκολη πλοήγηση στην στροφή αυτή. Από την άλλη, ο ελεγκτής θα «δει» τη στροφή μόλις φτάσει σ' αυτή, χωρίς να γνωρίζει καν τι ακολουθεί, και αντιδρά κάπως «νευρικά».

Η προοπτική εισάγεται στο σχήμα ελέγχου με την παρουσίαση περισσότερων του ενός σημείων αναφοράς πάνω στην πορεία. Πιο συγκεκριμένα, αντί να υπολογίζεται η είσοδος του συστήματος από το κοντινότερο μόνο σημείο, ο ελεγκτής υπολογίζει την είσοδο για μια σειρά διαδοχικών σημείων, αρχίζοντας από το κοντινότερο. Εισάγεται δηλαδή στον ελεγκτή ένα «χωρικό παράθυρο» της πορείας. Στη συνέχεια, από τις διάφορες τιμές ελέγχου που έχει υπολογίσει ο ελεγκτής υπολογίζεται μια, η οποία και εισάγεται σαν είσοδος στο σύστημα. Πιο συγκεκριμένα, αν  $W_{order}$  είναι ο αριθμός σημείων του χωρικού παραθύρου, τον οποίο θα ονομάσουμε τάξη (*order*) του παραθύρου, και  $u_i$  είναι η έξοδος του ασαφούς ελεγκτή για το  $i$  σημείο αναφοράς του χωρικού παραθύρου, τότε η είσοδος  $\kappa$  του συστήματος είναι,

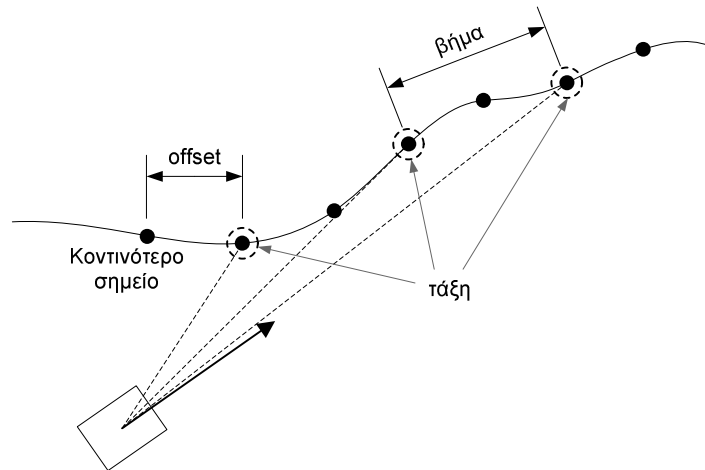
$$\kappa = f(\{u_i\}), \quad i = 1 \dots W_{order} \quad (2.5)$$

Η συνάρτηση  $f$  που έχουμε χρησιμοποιήσει αποκλειστικά, είναι ο μέσος όρος των  $u_i$  οπότε η (2.5) έχει τη μορφή,

$$\kappa = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_{W_{order}}}{W_{order}} \quad (2.6)$$

Μια πρώτη παρατήρηση που μπορεί να γίνει σχετικά με το χωρικό παράθυρο είναι ότι η τελική τιμή  $\kappa$  εξαρτάται σημαντικά από το χωρικό βήμα  $\Delta S_{path}$ , δηλαδή από την απόσταση των σημείων της πορείας. Αν το χωρικό βήμα είναι «αρκετά» μικρό, λόγω της συνέχειας του ασαφούς ελεγκτή οι τιμές  $u_i$  που θα παραχθούν από τα σημεία του παραθύρου θα διαφέρουν ελάχιστα. Συνεπώς, η πληροφορία που θα παρέχει κάθε σημείο θα είναι ουσιαστικά η ίδια με αποτέλεσμα η όλη λειτουργία του παραθύρου να εκφυλίζεται. Με άλλα λόγια, η διασπορά των τιμών  $u_i$  είναι τόσο μικρή ώστε ο μέσος όρος τους να διαφέρει ελάχιστα από αυτές. Το πρόβλημα αυτό μπορούμε να το υπερπηδήσουμε με το να θεωρούμε σημεία τα οποία δεν είναι συνεχή αλλά απέχουν μεταξύ τους. Δηλαδή, το χωρικό παράθυρο αποτελείται από  $W_{order}$  τα οποία απέχουν μεταξύ τους  $W_{step}$  σημεία, ή αλλιώς, κάθε «ενεργό» σημείο του παραθύρου απέχει από το προηγούμενο  $W_{step} - 1$  σημεία. Την παράμετρο  $W_{step}$  την ονομάζουμε βήμα (*step*) του χωρικού παραθύρου. Επιπλέον, εισάγουμε και μια

«πόλωση» στο χωρικό παράθυρο προωθώντας το μπροστά από το κοντινότερο σημείο. Δηλαδή, το χωρικό παράθυρο δεν αρχίζει από το κοντινότερο σημείο της πορείας αλλά από  $W_{offset}$  σημεία μετά. Την παράμετρο  $W_{offset}$  την ονομάζουμε *offset* του παραθύρου. Σχηματικά, τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 8.



Σχήμα 8. Ορισμός του χωρικού παραθύρου

Στο σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο 3<sup>ης</sup> τάξης, με βήμα=2 και offset=1. Ουσιαστικά το χωρικό παράθυρο δειγματοληπτεί την πορεία με χωρική περίοδο ίση με το βήμα. Αν η τάξη του παραθύρου είναι ίση με ένα, τότε το παράθυρο εκφυλίζεται σε ένα σημείο και μεταπίπτει στην αρχική περίπτωση όπου υπήρχε ένα μοναδικό σημείο αναφοράς κάθε στιγμή.

## 2.4. Ευρωστία

Ένα σημείο το οποίο δεν είναι αρκετά εμφανές, είναι ότι ο ελεγκτής παρακολούθησης εξαρτάται από την εκτίμηση της θέσης του ρομπότ και όχι από την θέση αυτή καθ' αυτή. Δηλαδή, ο αλγόριθμος χωροθέτησης (localization) του ρομπότ έχει σημαντική επίπτωση στη λειτουργία της παρακολούθησης. Αυτό είναι λογικό μιας και η θέση το ρομπότ είναι γνωστή με κάποια ακρίβεια, οπότε και αν η ακρίβεια αυτή είναι χαμηλή η πλοήγηση καθίσταται εξαιρετικά δυσχερής.

Γενικά μπορούμε να διακρίνουμε δυο κατηγορίες για τον εντοπισμό ρομπότ [43]: τις τεχνικές εξ αναμετρήσεως (dead reckoning π.χ. οδομετρία, INS) και τα συστήματα που βασίζονται σε σημεία αναφοράς (reference based systems π.χ. GPS, active beacons, DGPS κλπ). Η οδομετρία είναι μια ευρέως διαδεδομένη τεχνική η οποία είναι αρκετά φτηνή αλλά είναι επιρρεπής σε μεγάλα σφάλματα. Η βασική ιδέα πίσω από την οδομετρία είναι ότι η εκτίμηση της θέσης τη χρονική στιγμή t+1 εξαρτάται από την εκτίμηση τη χρονική στιγμή t. Προφανώς, αν εισάγεται σφάλμα σε κάθε εκτίμηση, αυτό προστίθεται στην επόμενη εκτίμηση οπότε και συσσωρεύεται με το χρόνο οδηγώντας σε μεγάλες αποκλίσεις από την πραγματική τιμή. Από την άλλη, τα συστήματα αναφοράς χρησιμοποιούν σήματα που εκπέμπονται από το ρομπότ ή/και από γνωστά σημεία ώστε να εκτιμηθεί η θέση. Στην περίπτωση αυτή η εκτίμηση τη χρονική στιγμή t+1 εξαρτάται από την

πραγματική θέση στη χρονική στιγμή  $t+1$ . Φυσικά και σ' αυτή την περίπτωση υπάρχει περιορισμένη ακρίβεια αλλά το σφάλμα δεν έχει αθροιστική επίδραση.

Τα παραπάνω μπορούν να εκφραστούν μαθηματικώς με τις παρακάτω εξισώσεις:

- Οδομετρία

$$\begin{aligned}\theta_{est}(t+1) &= \theta(t+1) \\ x_{est}(t+1) &= x_{est}(t) + \frac{2}{\kappa} \sin\left(\frac{\kappa \cdot \Delta s}{2}\right) \cos\left(\theta_{est}(t) + \frac{\kappa \cdot \Delta s}{2}\right) \\ y_{est}(t+1) &= y_{est}(t) + \frac{2}{\kappa} \sin\left(\frac{\kappa \cdot \Delta s}{2}\right) \sin\left(\theta_{est}(t) + \frac{\kappa \cdot \Delta s}{2}\right)\end{aligned}\quad (2.7)$$

- Συστήματα αναφοράς

$$\begin{aligned}\theta_{est}(t+1) &= \theta(t+1) \\ x_{est}(t+1) &= x(t+1) \\ y_{est}(t+1) &= y(t+1)\end{aligned}\quad (2.8)$$

όπου τα  $x_{est}, y_{est}, \theta_{est}$  είναι οι εκτιμώμενες παράμετροι. Οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν έναν «τέλειο» εντοπισμό, δηλαδή χωρίς σφάλμα στην ακρίβεια. Φυσικά αυτό είναι αδύνατο. Προκειμένου να μοντελοποιηθεί καλύτερα ο αλγόριθμος εντοπισμού, προσθέτουμε στις (2.7), (2.8) θόρυβο. Έτσι, οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή,

- Οδομετρία

$$\begin{aligned}\theta_{est}(t+1) &= \theta(t+1) + \theta\acute{o}\rhoυβoς \\ x_{est}(t+1) &= x_{est}(t) + \frac{2}{\kappa} \sin\left(\frac{\kappa \cdot \Delta s}{2}\right) \cos\left(\theta_{est}(t) + \frac{\kappa \cdot \Delta s}{2}\right) + \theta\acute{o}\rhoυβoς \\ y_{est}(t+1) &= y_{est}(t) + \frac{2}{\kappa} \sin\left(\frac{\kappa \cdot \Delta s}{2}\right) \sin\left(\theta_{est}(t) + \frac{\kappa \cdot \Delta s}{2}\right) + \theta\acute{o}\rhoυβoς\end{aligned}\quad (2.9)$$

- Συστήματα αναφοράς

$$\begin{aligned}\theta_{est}(t+1) &= \theta(t+1) + \theta\acute{o}\rhoυβoς \\ x_{est}(t+1) &= x(t+1) + \theta\acute{o}\rhoυβoς \\ y_{est}(t+1) &= y(t+1) + \theta\acute{o}\rhoυβoς\end{aligned}\quad (2.10)$$

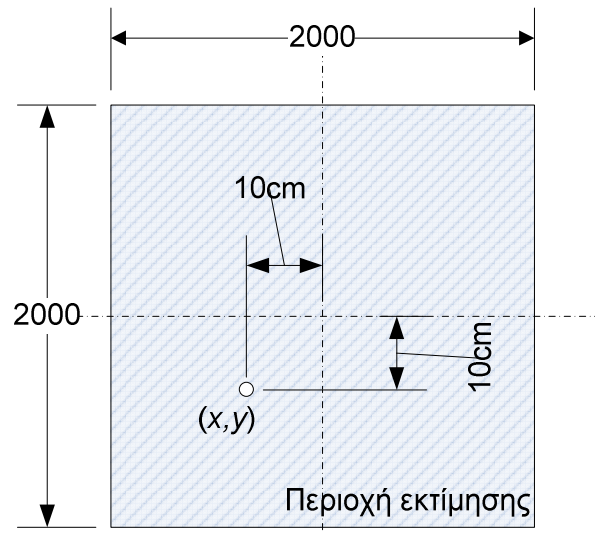
Γενικά μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα επηρεάζεται από δυο ειδών θορύβους. Ο πρώτος επηρεάζει την εκτίμηση της θέσης, δηλαδή τις μεταβλητές  $x, y$  και ονομάζεται *θόρυβος θέσης*, ενώ ο δεύτερος επηρεάζει την εκτίμηση της διεύθυνσης  $\theta$  και ονομάζεται *θόρυβος γωνίας*. Θα θεωρήσουμε ότι ο θόρυβος έχει τη μορφή,

$$\begin{aligned}A \cdot r + M & , \text{ θόρυβος θέσης} \\ A_\theta \cdot r_\theta + M_\theta & , \text{ θόρυβος γωνίας}\end{aligned}$$



όπου  $r, r_\theta$  είναι τυχαίες μεταβλητές με ομοιόμορφη κατανομή στο  $[-1,1]$ ,  $A, A_\theta$  είναι τα πλάτη των θορύβων και  $M, M_\theta$  είναι σταθερές οι οποίες εκφράζουν τη μέση τιμή. Η περιγραφή του θορύβου θέσης είναι διαφορετική για την περίπτωση της οδομετρίας και του GPS. Για την οδομετρία, δεδομένου ότι  $\max(\Delta x) = \max(\Delta y) = \Delta s = 1\text{cm}$ , σημειώνουμε το πλάτος του θορύβου ως ποσοστό του  $\Delta s$ . Συνεπώς, ένας θόρυβος πλάτους 50% μεταφράζεται σε  $A = 0.5\Delta s = 0.5\text{cm}$ . Το ίδιο ισχύει και για το μέσο όρο  $M$ . Το παραπάνω εκφράζει το ποσοστό σφάλματος ανά διανυόμενη απόσταση.

Για την περίπτωση του GPS, μια τέτοια περιγραφή δεν έχει νόημα. Συνεπώς, τόσο το πλάτος  $A$  όσο και η μέση τιμή  $M_\theta$  εκφράζονται σε cm.

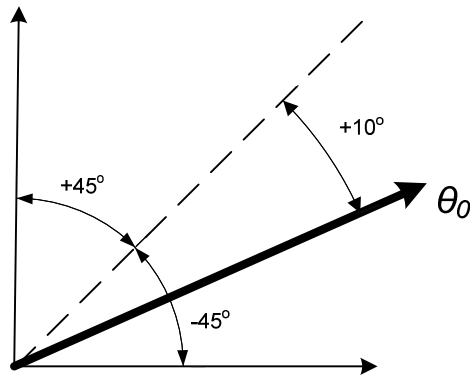


Σχήμα 9. Περιοχή εκτίμησης θέσης του ρομπότ για σύστημα GPS με θόρυβο θέσης

Σ' αυτή την κατάσταση, ένας θόρυβος θέσης πλάτους 1000cm και μέσου όρου 10cm σημαίνει ότι η εκτίμηση θέσης του ρομπότ δίνεται από μια ομοιόμορφη κατανομή που καλύπτει ένα τετράγωνο  $2000 \times 2000 \text{ cm}^2$ . Το κέντρο του τετραγώνου βρίσκεται στο  $(x+10, y+10)$  όπως φαίνεται και στο Σχήμα 9.

Η περιγραφή του θορύβου γωνίας συμπίπτει με αυτή του θορύβου για τα συστήματα GPS. Το πλάτος και η μέση τιμή εκφράζονται σε μοίρες. Έτσι, αν η διεύθυνση του ρομπότ είναι  $\theta_0$  και ο θόρυβος έχει πλάτος  $45^\circ$  και μέσο όρο  $10^\circ$ , η περιοχή εκτίμησης της διεύθυνσης φαίνεται στο Σχήμα 10. Το πραγματικό εύρος τιμών είναι  $2A_\theta = 90^\circ$  περιστραμμένο  $10^\circ$  ανθρωπολογικά σε σχέση με την πραγματική διεύθυνση  $\theta_0$ .

Τα αποτελέσματα προσομοιώσεων που παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα, δείχνουν ότι η συμπεριφορά του ελεγκτή είναι ικανοποιητική, ακόμα και κάτω από θόρυβο. Στην περίπτωση που γίνεται χρήση οδομετρίας, η συσσώρευση σφαλμάτων με το χρόνο οδηγεί το ρομπότ σε σταδιακή απόκλιση από την προκαθορισμένη πορεία που πρέπει ν' ακολουθήσει. Πρέπει όμως να συνεκτιμηθεί και το πλάτος του θορύβου το οποίο είναι αρκετά υψηλό (από 100% έως 1000%).



Σχήμα 10. Εύρος γωνίας για την εκτίμηση διεύθυνσης με θόρυβο

Από την άλλη, οι προσομοιώσεις με εκτίμηση θέσης μέσω συστημάτων αναφοράς αναδεικνύουν μια αρκετά μεγάλη ανοχή του ελεγκτή στο θόρυβο, ο οποίος έχει πλάτος της τάξης των 10 000 cm.

## 2.5. Αποτελέσματα προσομοιώσεων

Οι προσομοιώσεις συνίστανται στην παρακολούθηση τριών ειδών πορειών:

### 1. Ευθεία γραμμή

$Line(x_0, y_0, \theta_0)$ , όπου  $x_0, y_0$  είναι οι συντεταγμένες του πρώτου σημείου της ευθείας και  $\theta_0$  η γωνία κλίσης της.

### 2. Τόξο κύκλου

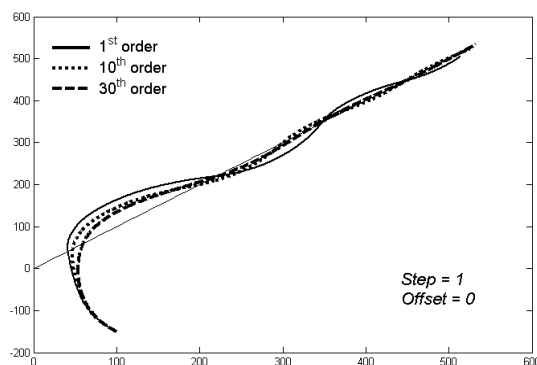
$Circ(x_0, y_0, R)$ , όπου  $x_0, y_0$  είναι οι συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου και  $R$  είναι η ακτίνα του.

### 3. Ημιτονοειδής γραμμή

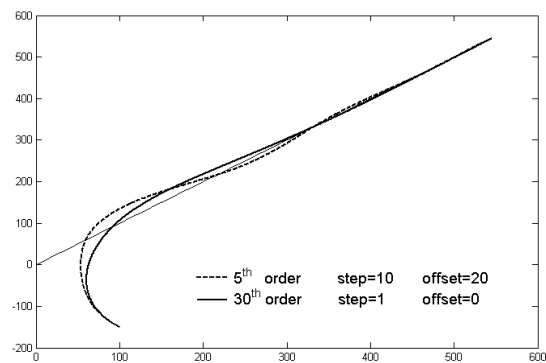
$Sin(x_0, y_0, R)$ . Η εξίσωση που παράγει τη γραμμή περιγράφεται από τον τύπο

$$y = x_0 e^{\frac{-y_0 x}{N}} \cos\left(\frac{2\pi x}{R}\right), \text{ όπου } N \text{ είναι ο συνολικός αριθμός σημείων.}$$

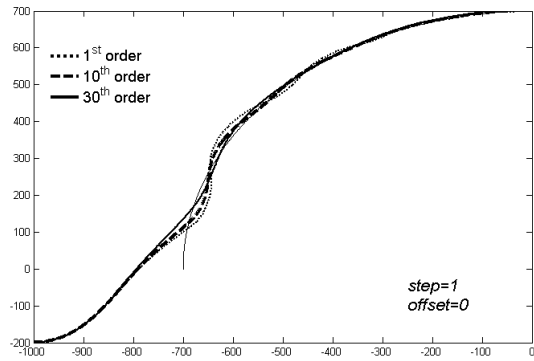
Τ' αποτελέσματα παρουσιάζονται στη συνέχεια.



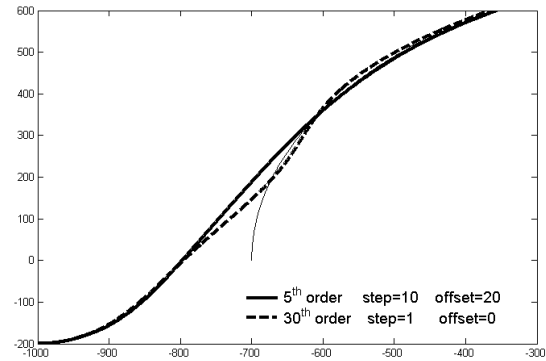
Σχήμα 11. Παρακολούθηση ευθείας - line (0,0,45)



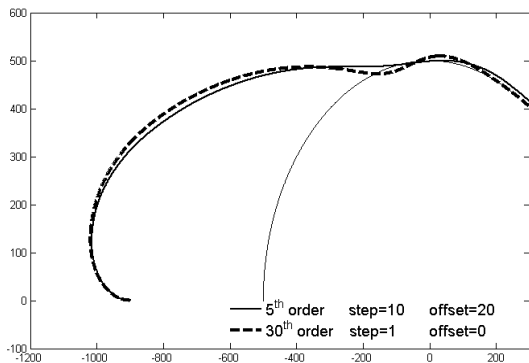
Σχήμα 12. Παρακολούθηση ευθείας - line (0,0,45)



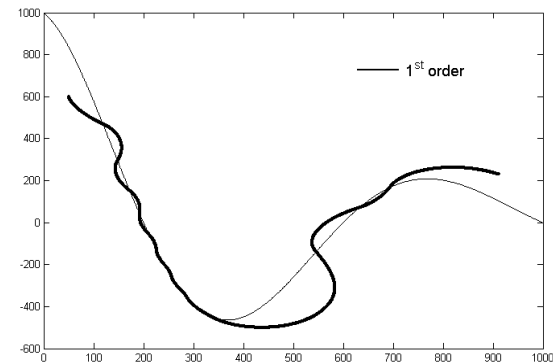
Σχήμα 13. Παρακολούθηση τόξου - circ(0,0,700)



Σχήμα 14. Παρακολούθηση τόξου - circ(0,0,700)



Σχήμα 15. Παρακολούθηση τόξου - circ(0,0,500)

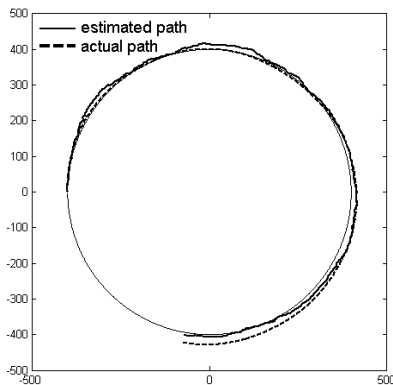


Σχήμα 16. Παρακολούθηση ημιτόνου sin(1000,2,800)

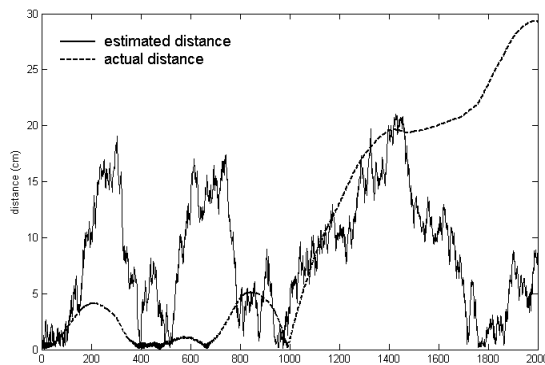
Από τα διαγράμματα είναι εμφανές ότι ένα μεγαλύτερο βήμα μαζί με μεγαλύτερο offset και μικρότερη τάξη παραθύρου δίνει καλύτερα αποτελέσματα απ' ότι μια μεγάλη τάξη με μικρό βήμα και offset. Η παρατήρηση αυτή είναι αρκετά χρήσιμη μιας και μειώνει σημαντικά τον υπολογιστικό φόρτο της τεχνικής του χωρικού παραθύρου.

Στην συνέχεια παρατίθενται αποτελέσματα προσομοίωσης με θόρυβο, τα οποία έχουν ομαδοποιηθεί σε δυο κατηγορίες: αυτά που χρησιμοποιούν οδομετρία και αυτά που χρησιμοποιούν συστήματα αναφοράς. Στην συνέχεια παρατίθενται αποτελέσματα προσομοίωσης με θόρυβο, τα οποία έχουν ομαδοποιηθεί σε δυο κατηγορίες: αυτά που χρησιμοποιούν οδομετρία και αυτά που χρησιμοποιούν συστήματα αναφοράς.

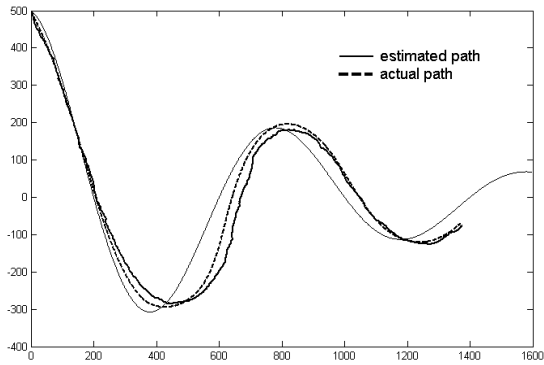
• Προσομοιώσεις με χρήση οδομετρίας



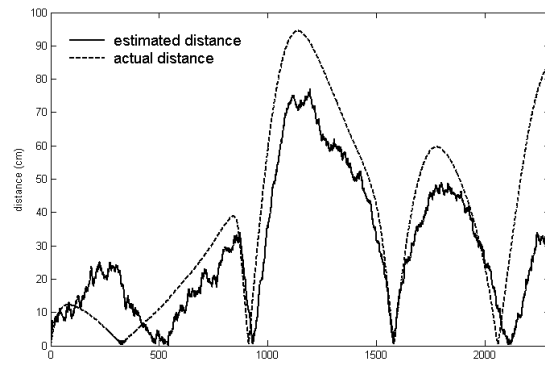
Σχήμα 17. Παρακολούθηση τόξου με 100% θόρυβο οδομετρίας.



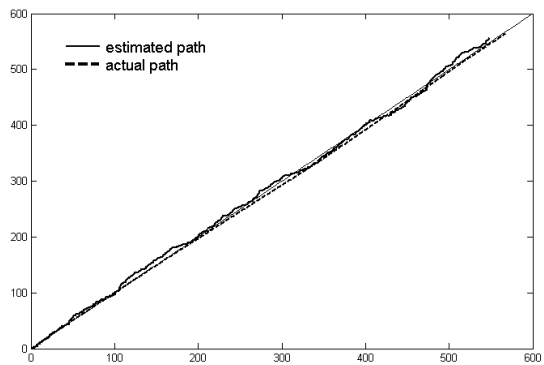
Σχήμα 18. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 17.



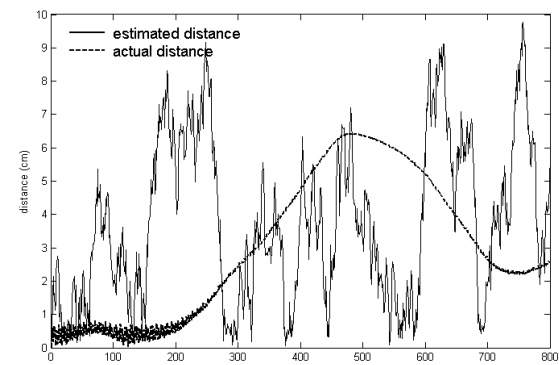
Σχήμα 19. Παρακολούθηση ημιτόνου με 100% θόρυβο οδομετρίας.



Σχήμα 20. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 19.

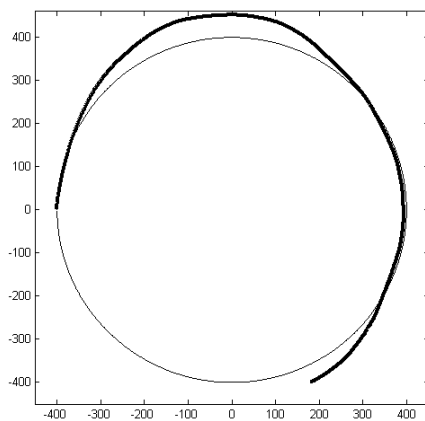


Σχήμα 21. Παρακολούθηση ευθείας με 100% θόρυβο οδομετρίας.

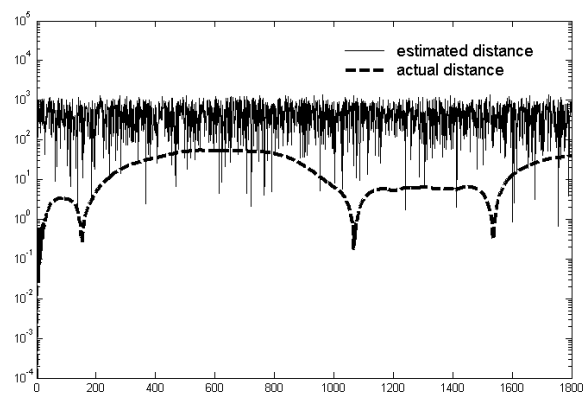


Σχήμα 22. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 21.

- Προσομοιώσεις με χρήση συστημάτων αναφοράς

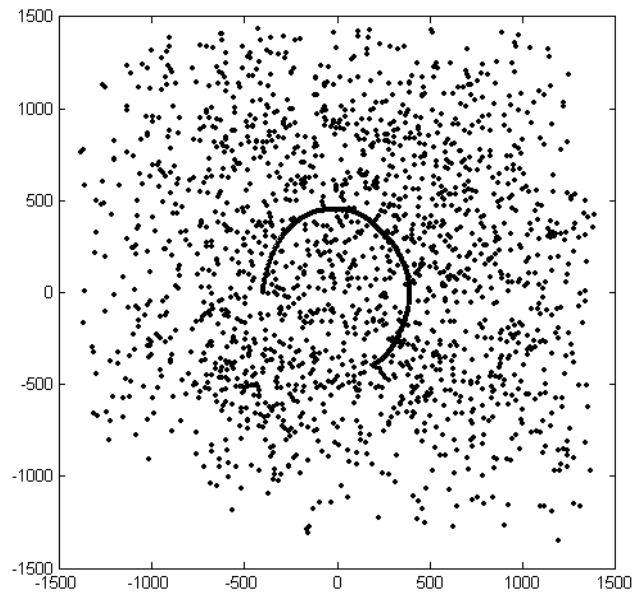


Σχήμα 23. Παρακολούθηση τόξου με θόρυβο 1000cm.

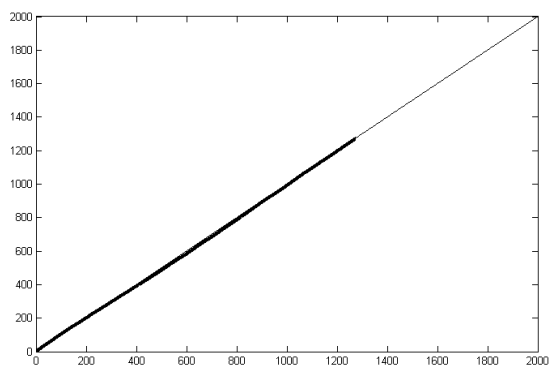


Σχήμα 24. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 23 σε λογαριθμική κλίμακα.

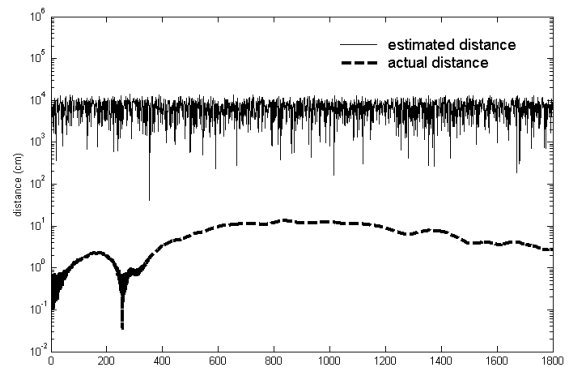
Για να γίνει πιο κατανοητή και εμφανής η διαδικασία της παρακολούθησης πορείας κάτω από ένα τέτοιο επίπεδο θορύβου, όπως αυτό που παρουσιάζεται στο Σχήμα 23, παραθέτουμε στη συνέχεια την εκτίμηση της θέσης την οποία «βλέπει» ο ελεγκτής. Κάθε μαύρη κουκίδα αποτελεί και μια θέση εκτίμησης σε μια χρονική στιγμή.



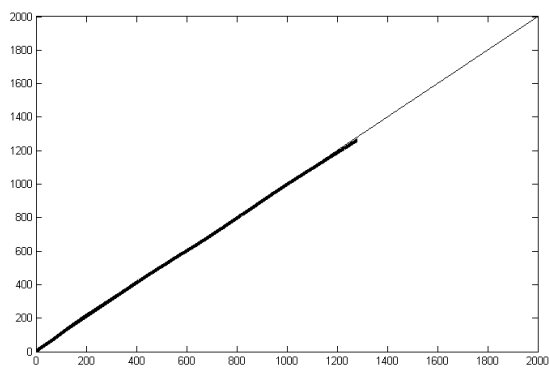
Σχήμα 25. Πραγματική και εκτιμώμενη πορεία για την προσομοίωση του Σχήμα 23.



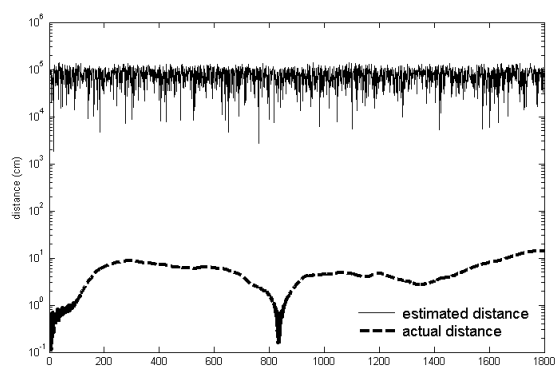
Σχήμα 26. Παρακολούθηση ευθείας με θόρυβο 10 000cm (100m).



Σχήμα 27. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 26 σε λογαριθμική κλίμακα.



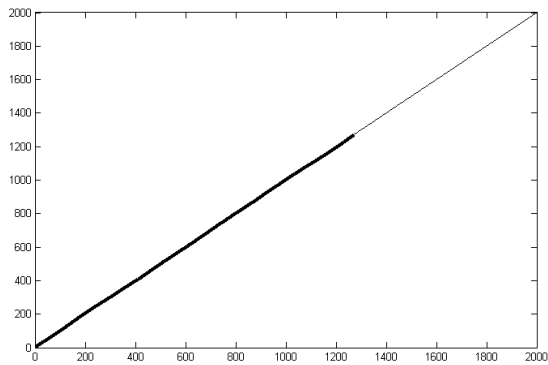
Σχήμα 28. Παρακολούθηση ευθείας με θόρυβο 100 000cm (1km).



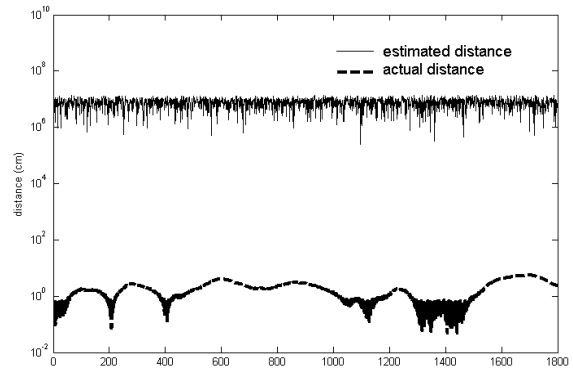
Σχήμα 29. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 28 σε λογαριθμική κλίμακα.

Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι η ανοχή στο θόρυβο στην περίπτωση της παρακολούθησης ευθείας φαίνεται να είναι αρκετά μεγάλη. Η προσομοίωση στο

Σχήμα 28 χρησιμοποιεί θόρυβο πλάτους ενός χιλιομέτρου. Στην επόμενη προσομοίωση χρησιμοποιείται θόρυβος 100km.

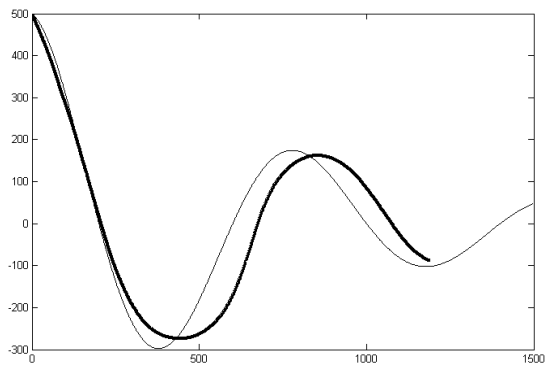


Σχήμα 30. Παρακολούθηση ευθείας με θόρυβο 1Km.

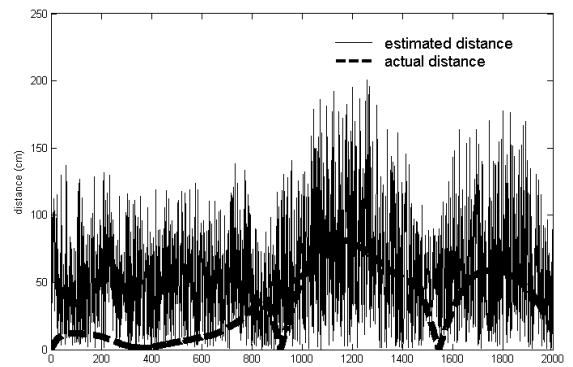


Σχήμα 31. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 30 σε λογαριθμική κλίμακα.

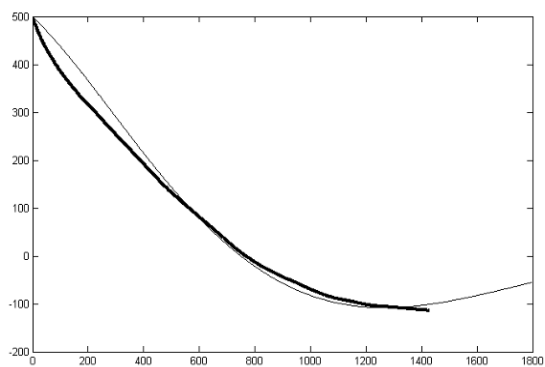
Τέλος, παρουσιάζονται και δυο προσομοιώσεις για την παρακολούθηση ημιτονοειδών καμπύλων.



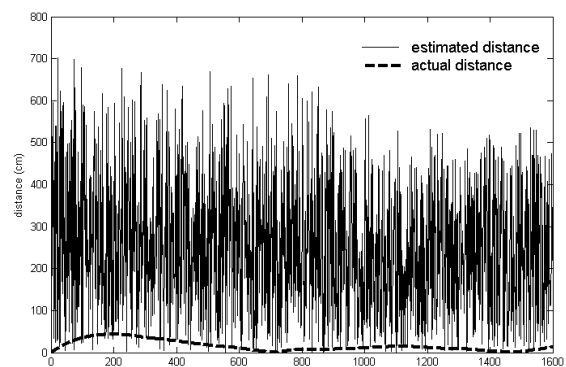
Σχήμα 32. Παρακολούθηση ημιτόνου με θόρυβο 100cm.



Σχήμα 33. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 32.



Σχήμα 34. Παρακολούθηση ημιτόνου με θόρυβο 500cm.



Σχήμα 35. Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 34.

## 2.6. Θόρυβος πορείας

Πέρα από την αβεβαιότητα που υπάρχει σχετικά με την εκτίμηση της θέσης και της διεύθυνσης του ρομπότ, μπορούμε να πούμε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις

εμφανίζεται και θόρυβος στην πορεία αναφοράς που πρέπει να παρακολουθήσει. Τέτοιες αποκλίσεις μπορούν να παρουσιαστούν αν υπάρχει θόρυβος ή απόκλιση του τοπογραφικού υποβάθρου πάνω στο οποίο γίνεται ο σχεδιασμός της πορείας του ρομπότ. Επίσης, το φαινόμενο αυτό είναι περισσότερο εμφανές όταν το ρομπότ καλείται να παρακολουθήσει μια πορεία η οποία έχει προκύψει από προηγούμενη καταγραφή της κίνησης του. Στην περίπτωση αυτή, μιας και η εκτίμηση της θέσης εισάγει σφάλματα, η πορεία αναφοράς θα εμφανίζει και αυτή θόρυβο.

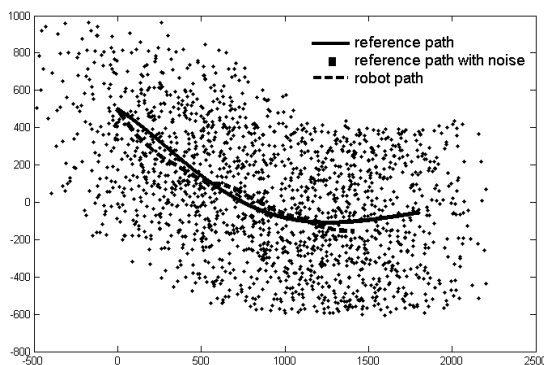
Αν και δεν θ' ασχοληθούμε με τη μοντελοποίηση τέτοιου θορύβου, μπορούμε να τον μοντελοποιήσουμε κάπως «ελεύθερα» με το εξής τρόπο· όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η πορεία εκφράζεται από μια ακολουθία σημείων που προκύπτει από τη δειγματοληψία της συνεχούς καμπύλης με βήμα μήκους  $\Delta S_{path}$ . Όπως και με την περίπτωση του εντοπισμού θέσης, σε κάθε σημείο προσθέτουμε θόρυβο με ομοιόμορφη κατανομή της μορφής,

$$A_p \cdot r_p + M_p$$

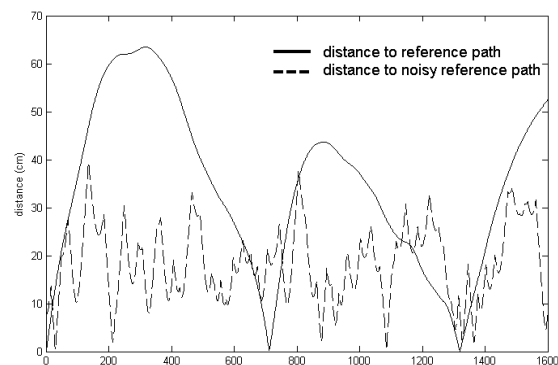
όπου τα  $A_p, M_p$  είναι το πλάτος και η μέση τιμή του θορύβου ενώ η  $r_p$  είναι η τυχαία μεταβλητή. Συνεπώς, το  $i$  σημείο αναφοράς της πορείας θα είναι,

$$\text{στήλη } i: \begin{bmatrix} x_i + \text{θόρυβος} \\ y_i + \text{θόρυβος} \\ \theta_i \end{bmatrix}$$

όπου τα  $x_i, y_i$  είναι οι συντεταγμένες του κανονικού σημείου. Σε μια τέτοια κατάσταση, ο στόχος του ρομπότ είναι να παρακολουθήσει την κανονική πορεία «βλέποντας» όμως την ενθόρυβη πορεία. Τα παρακάτω σχήματα διευκρινίζουν τη διαδικασία.



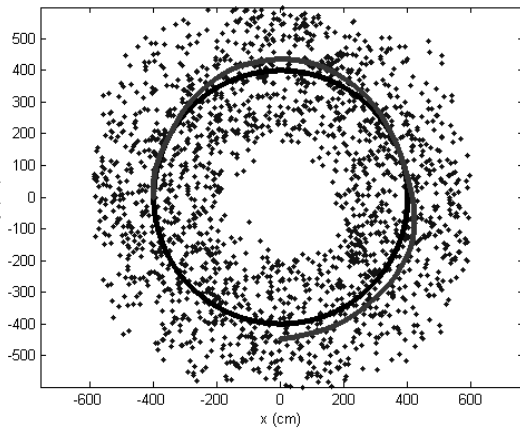
Σχήμα 36. Παρακολούθηση ημιτόνου με θόρυβο πορείας 500cm.



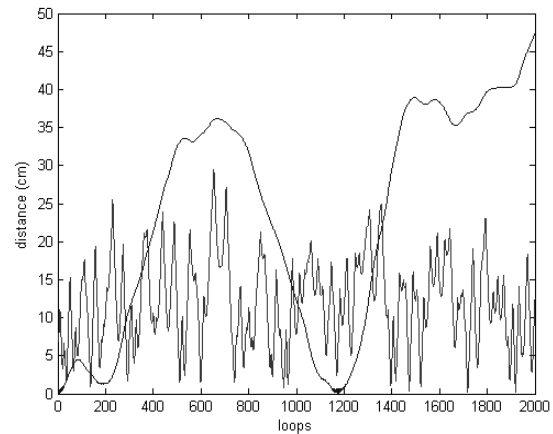
Σχήμα 37. Ελάχιστη απόσταση από την κανονική και την ενθόρυβη πορεία του Σχήμα 54.

Η έντονη γραμμή στο Σχήμα 36 αντιπροσωπεύει την κανονική πορεία, δηλαδή την πορεία που πρέπει ν' ακολουθήσει το ρομπότ. Οι τελείες αντιπροσωπεύουν την ενθόρυβη πορεία, αυτή δηλαδή που «βλέπει» το ρομπότ. Δεν έχουν ενωθεί για να είναι το σχήμα ευανάγνωστο. Όπως μπορεί να δει κανείς, ο ελεγκτής «διαβάζει» μέσα από το θόρυβο και παρακολουθεί την κανονική πορεία. Η συμπεριφορά αυτή μπορεί ν' αποδοθεί στο χωρικό παράθυρο το οποίο φαίνεται να λειτουργεί σαν ένα

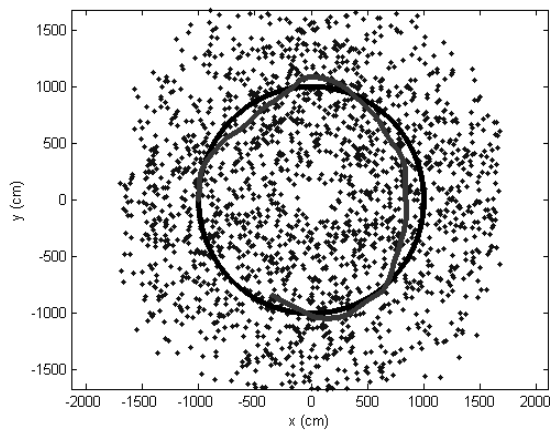
είδος χωρικού χαμηλοπερατού φίλτρου. Το παράθυρο που χρησιμοποιήθηκε είναι 10<sup>ης</sup> τάξης, βήματος 20 και offset 30. Στη συνέχεια παρατίθενται προσομοιώσεις για κυκλικές και ευθείες πορείες.



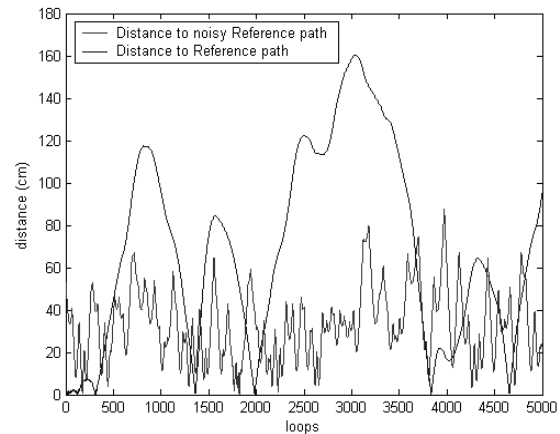
**Σχήμα 38.** Παρακολούθηση κύκλου με θόρυβο 200cm.



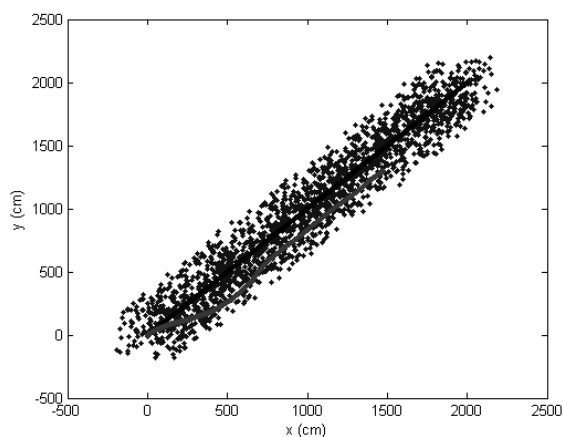
**Σχήμα 39.** Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 38.



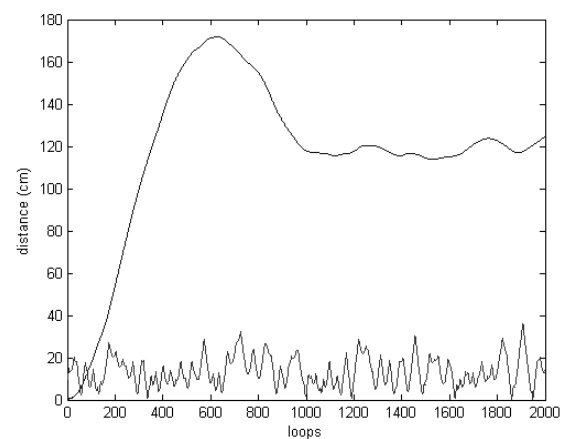
**Σχήμα 40.** Παρακολούθηση κύκλου με θόρυβο 700cm.



**Σχήμα 41.** Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 40.



**Σχήμα 42.** Παρακολούθηση ευθείας με θόρυβο 200cm.



**Σχήμα 43.** Πραγματική και εκτιμώμενη απόσταση για το Σχήμα 42.



Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζεται η υλοποίηση του ασαφούς ελεγκτή πάνω σε ένα Σύστημα-σε-Ψηφίδα το οποίο ελέγχει ένα πραγματικό ρομπότ. Η ανάλυση του συστήματος και τα πειράματα πεδίου αναλύονται διεξοδικά και αποτιμάται η επίδοση του ελεγκτή σε πραγματικές συνθήκες.



## Κεφάλαιο 3

---

### Σύστημα σε Ψηφίδα (SoC) για το Πρόβλημα της Παρακολούθησης Πορείας σε Κινητά Ρομπότ

#### 3.1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται ένα σύστημα σε ψηφίδα (System on Chip – SoC) για το πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας σε αυτόνομα μη-ολονομικά κινούμενα ρομπότ. Το SoC περιλαμβάνει έναν ψηφιακό ασαφή ελεγκτή (Digital Fuzzy Logic Controller-DFLC) [44] και ένα πρόγραμμα ελέγχου της ροής των διαδικασιών που εκτελείται μέσα στον μαλακό πυρήνα μικροεπεξεργαστή Microblaze™ της εταιρίας Xilinx. Ο ασαφής ελεγκτής υλοποιεί τον ασαφή αλγόριθμο παρακολούθησης πορείας που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ολόκληρο το σύστημα προσαρμόστηκε πάνω σε ένα ρομπότ Pioneer 3-DX8 και στη συνέχεια εκτελέστηκαν διάφορα πειράματα ούτως ώστε να γίνει αποτίμηση της γενικής απόδοσης του συστήματος. Επίσης, αναλύονται διάφορα προβλήματα κβάντωσης και περιορισμοί που προκύπτουν λόγω της δεδομένης σύνθεσης του συστήματος.

Τα FPGA προσφέρουν διάφορα προτερήματα σε σχέση με τα κυκλώματα μονού επεξεργαστή, από τη μια, και τα ολοκληρωμένα κυκλώματα ειδικών εφαρμογών (ASIC-Application Specific Integrated Circuit) από την άλλη. Τα FPGA αναβαθμίζονται στο πεδίο λειτουργίας και δεν απαιτούν το χρόνο και τη δαπάνη επανασχεδιασμού των ASIC. Όταν επαναπρογραμματίσιμα μπορούν να ενσωματώνουν μελλοντικές αναβαθμίσεις. Προσφέρουν μικρότερο κύκλο σχεδίασης και μειωμένο χρόνο προώθησης στην αγορά διότι δεν δαπανάται κατασκευαστικός χρόνος (παραγωγή σχεδίου, μάσκας και άλλα κατασκευαστικά βήματα).

Ένα κύκλωμα πάνω σε ένα FPGA μπορεί να θεωρηθεί ως μια «υλική» (hard) υλοποίηση ενός προγράμματος. Τα συστήματα μονού επεξεργαστή συνήθως απαιτούν διάφορα επίπεδα αφαίρεσης ώστε να μπορούν να προγραμματίζουν εργασίες και να μοιράζονται πόρους του συστήματος. Το επίπεδο οδηγών ελέγχει τους πόρους υλικού ενώ το λειτουργικό σύστημα διαχειρίζεται τη μνήμη και το εύρος ζώνης του επεξεργαστή. Οποιοσδήποτε επεξεργαστής μπορεί να εκτελεί μόνο μια εντολή κάθε φορά και τα συστήματα που βασίζονται σ' αυτούς βρίσκονται συνεχώς στον κίνδυνο να παρουσιάσουν υστέρηση στην εκτέλεση κριτικών διεργασιών. Από την άλλη πλευρά, τα FPGA δεν χρησιμοποιούν λειτουργικό σύστημα και ελαχιστοποιούν τα ζητήματα αξιοπιστίας μέσω του πραγματικού παραλληλισμού διεργασιών και την χρησιμοποίηση αποκλειστικών υλικών κυκλωμάτων σε κάθε διεργασία. Τα σημερινά FPGA περιέχουν εκατοντάδες μονάδες DSP φτάνοντας σε ταχύτητες των 500MHz, υπερκεράζοντας τα συστήματα DSP και RISC κατά μια τάξη του 100 με 1000.

Ανάλογες ρομποτικές εφαρμογές για τη χρήση FPGA ολοκληρωμένων κυκλωμάτων σημειώνονται στη βιβλιογραφία από διάφορους ερευνητές [45-48]. Μια ανασκόπηση των εφαρμογών των FPGA πάνω σε ρομποτικές εφαρμογές παρέχεται από τους Leong και Tsoi στο [46]. Μία αξιοσημείωτη μελέτη που αναφέρεται στην βιβλιογραφία [48] είναι η χρήση των FPGA στα διαστημόπλοια προσεδάφησης, Mars Pathfinder, Mars Surveyor '98, and Mars Surveyor '01.

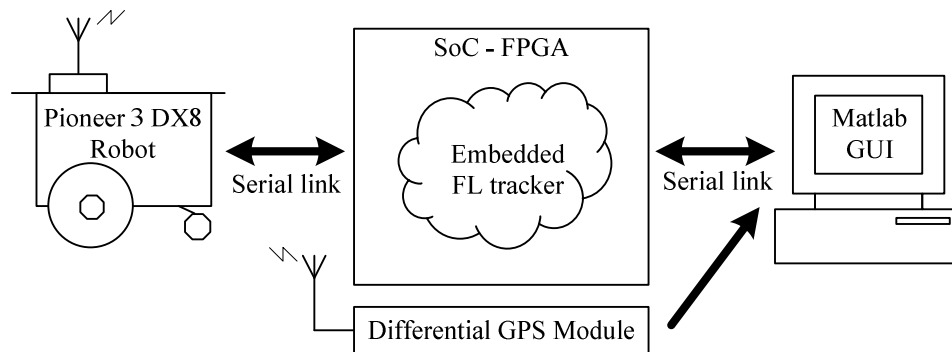
Στην παρούσα εφαρμογή ο DFCLC έχει την δυνατότητα παραμετροποίησης για διαφορετικό αριθμό εισόδων και εξόδων, αριθμό τριγωνικών ή τραπεζοειδών ασαφών συνόλων ανά είσοδο, μέθοδο για τις προϋποθέσεις των κανόνων (t-norm, s-norm), τύπο διαιρέτη και επιπλέον αριθμό σταδίων αγωγού των διαφόρων λειτουργικών μονάδων (modules ή functional blocks) του κυκλώματος. Η αρχιτεκτονική του ελεγκτή προϋποθέτει επικάλυψη μέχρι 2 ασαφών συνόλων μεταξύ των παρακείμενων συνόλων και χρειάζεται  $2^n$  (όπου n αριθμός των εισόδων του ελεγκτή) κύκλους ρολογιού στην συχνότητα που δουλεύει ο πυρήνας, ούτως ώστε να δειγματοληπτηθούν τα δεδομένα εισόδου (ο ρυθμός δειγματοληψίας εισόδου είναι ίσος με 56.34 ns), δεδομένου ότι επεξεργάζεται έναν ενεργό κανόνα ανά κύκλο ρολογιού. Στην παρούσα εφαρμογή το SoC (που εμπεριέχει και το DFCLC) επιτυγχάνει μία συχνότητα πυρήνα της τάξης των 71 MHz.

Ο ασαφής αλγόριθμος παρακολούθησης πορείας που χρησιμοποιήθηκε στην εφαρμογή αυτή έχει υποστεί κάποιες τροποποιήσεις ώστε να είναι δυνατή η προσαρμογή του στο DFCLC. Ενώ ο πρωτότυπος ελεγκτής είναι τύπου Mamdani με Γκαουσιανές συναρτήσεις συμμετοχής, ο ελεγκτής που χρησιμοποιήθηκε εδώ είναι Takagi-Sugeno μηδενικού τύπου με τριγωνικές συναρτήσεις συμμετοχής.

### 3.2. Συνοπτική περιγραφή του Συστήματος

Το σύστημα που μελετάται αποτελείται από τέσσερις λειτουργικές μονάδες κατάλληλα διασυνδεδεμένες μεταξύ τους. Η γενική μορφή της πλατφόρμας της εφαρμογής φαίνεται στο Σχήμα 44 ενώ στο Σχήμα 45 παρουσιάζεται μια φωτογραφία του πραγματικού συστήματος κατά την διάρκεια πειραμάτων. Στη φωτογραφία διακρίνονται το ρομπότ Pioneer 3-DX8, η πλακέτα που περιλαμβάνει

το FPGA, ο φορητός υπολογιστής που τρέχει το περιβάλλον της ρομποτικής εφαρμογής καθώς και μέρος του διαφορικού GPS.



Σχήμα 44. Γενική περιγραφή του συστήματος

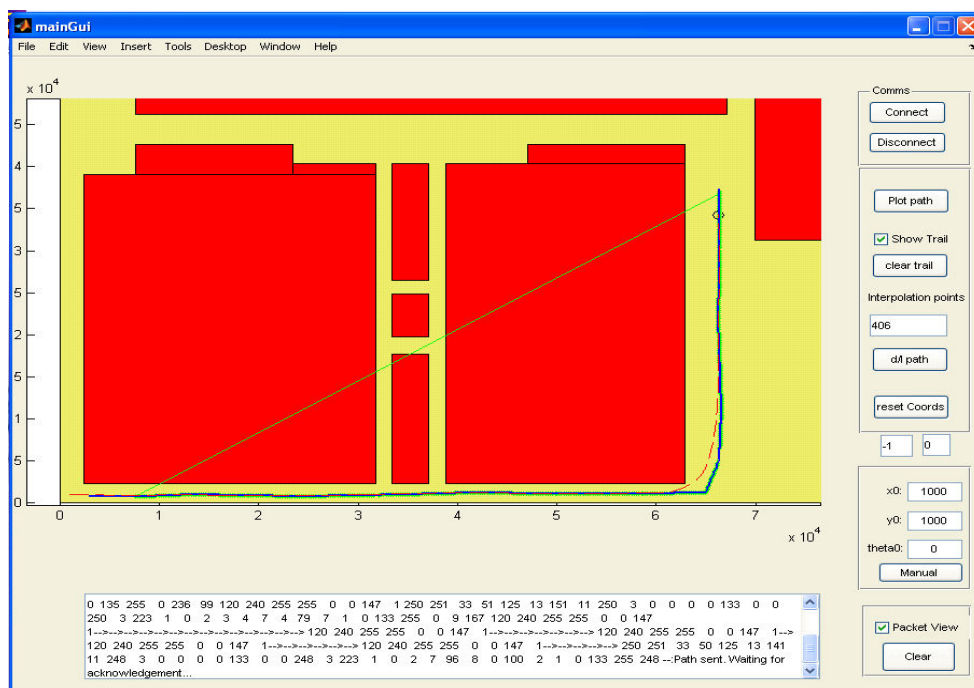


Σχήμα 45. Το ρομποτικό σύστημα κατά την διάρκεια πειραμάτων

Σκοπός του FPGA SoC είναι η υλοποίηση της αυτόνομης λογικής ελέγχου του ρομπότ. Λαμβάνει τις πληροφορίες της οδομετρίας από το ρομπότ και στέλνει τις εντολές πλοήγησης που εξάγονται από τον ασαφή ελεγκτή παρακολούθησης πορείας. Πέραν της πλοήγησης, το SoC αναλαμβάνει να αποκωδικοποιήσει τα πακέτα δεδομένων που στέλνει το ρομπότ που περιλαμβάνουν τη θέση του, την κατάσταση των κινητήρων, τις μετρήσεις από τους αισθητήρες υπερήχων, κλπ, και επίσης κωδικοποιεί τις εντολές πλοήγησης σε ένα πακέτο δεδομένων που διαβιβάζεται στο ρομπότ. Με άλλα λόγια το SoC υλοποιεί έναν κωδικοποιητή/αποκωδικοποιητή (codec) που χρησιμεύει στην επικοινωνία εισόδου/εξόδου με το ρομπότ. Επίσης στέλνει κρίσιμες πληροφορίες σε μία εφαρμογή παρακολούθησης που έχει υλοποιηθεί σε περιβάλλον Matlab. Το πρόγραμμα που αναλαμβάνει όλες αυτές τις δραστηριότητες έχει υλοποιηθεί σε γλώσσα C και εκτελείται στον μαλακό πυρήνα επεξεργαστή Microblaze™. Επιπλέον

το ίδιο πρόγραμμα είναι υπεύθυνο για τον χειρισμό των απαιτούμενων συγχρονισμών στο σύστημα

Η εφαρμογή Matlab συνδέεται με το FPGA μέσω μιας θύρας USB και εμφανίζει πληροφορίες όσον αφορά τη θέση και την ταχύτητα του ρομπότ, όπως αυτή προκύπτει από την οδομετρία του, καθώς και επιπρόσθετα δεδομένα που χρησιμοποιούνται στον έλεγχο παρακολούθησης πορείας. Επιπροσθέτως, υπολογίζει τη θέση του ρομπότ σχετικά με τον εξωτερικό κόσμο και τα τοπικά συστήματα συντεταγμένων. Μια σημαντική λειτουργία της εφαρμογής είναι ότι παρέχει στο ρομπότ τη διαδρομή που πρέπει ν' ακολουθήσει. Αυτό επιτυγχάνεται ζωγραφίζοντας στην εφαρμογή την επιθυμητή διαδρομή. Στη συνέχεια, το πρόγραμμα εφαρμόζει έναν αλγόριθμο γραμμικής παρεμβολής ώστε να παραγάγει όλα τ' απαραίτητα σημεία της διαδρομής με σταθερό βήμα δειγματοληψίας. Ο χρήστης έχει την δυνατότητα να ορίσει τον αριθμό των σημείων παρεμβολής. Στη συνέχεια τα δεδομένα αυτά αποστέλλονται στο SoC και αμέσως μετά την επιτυχή μετάπτωση της διαδρομής, το SoC ξεκινάει την διαδικασία του ελέγχου παρακολούθησης. Μια απεικόνιση της εφαρμογής φαίνεται στο Σχήμα 46.



**Σχήμα 46. Η εφαρμογή Matlab κατά τη διάρκεια ενός πειράματος**

Η ρομποτική πλατφόρμα που χρησιμοποιήθηκε είναι το ρομπότ διαφορικής κίνησης P3-DX8 της εταιρίας ActivMedia. Το εν λόγω ρομπότ έχει ανάλυση 1 mm για την εκτίμηση της θέσης του και ανάλυση γωνίας 1° για τη διεύθυνση του. Το κινηματικό μοντέλο του ρομπότ εξομοιώνεται ως ένα όχημα φραγμένης καμπυλότητας και όχι ως διαφορικής κίνησης (differential drive), πράγμα που έχει ως αποτέλεσμα έναν περιορισμό στη μέγιστη καμπυλότητα που μπορεί να στρίψει. Ο λόγος του περιορισμού αυτού οφείλεται στο γεγονός ότι αρχικά ο ασαφής ελεγκτής προοριζόταν για το μοντέλο του Dubins. Όπως θα αναλυθεί σε επόμενη ενότητα, ο περιορισμός στην καμπυλότητα σε συνάρτηση με τη διακριτότητα μιας μοίρας του ρομπότ εισάγει ένα πρόβλημα κβάντωσης στην καμπυλότητα, και συνεπώς στον έλεγχο.

Το ρομπότ επικοινωνεί με το FPGA μέσω σειριακού πρωτοκόλλου (RS232) για την αποστολή και λήψη των μορφοποιημένων δεδομένων (data frames). Η εταιρία ActivMedia κάνει χρήση του δικού της πρωτοκόλλου εντολών για την επικοινωνία με το ρομπότ που είναι αποθηκευμένο στον μικροελεγκτή του. Τα πακέτα δεδομένων που αποστέλλονται από το ρομπότ ονομάζονται *SIP* (Server Information Packets), ενώ τα πακέτα που λαμβάνονται από το ρομπότ ονομάζονται *CP* (Command Packets).

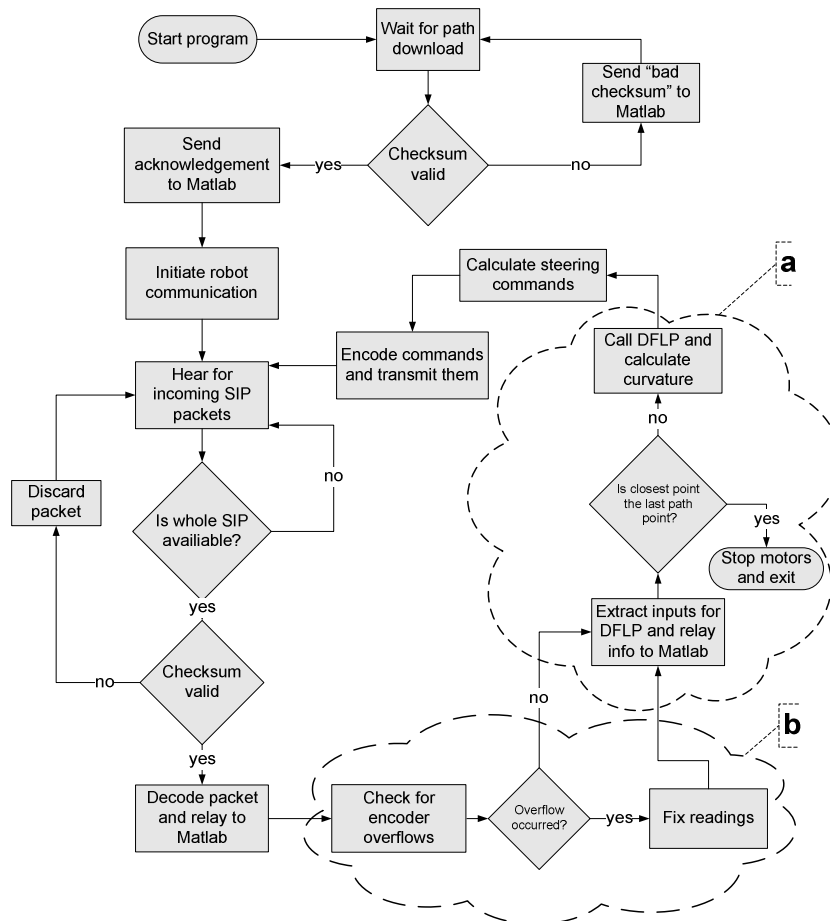
Τα πειράματα που έγιναν έδειξαν ότι ενώ ο ασαφής ελεγκτής δουλεύει ικανοποιητικά, η απόδοση του υποβαθμίζεται λόγω των λαθών της οδομετρίας του ρομπότ που αθροίζονται κατά τη διάρκεια του χρόνου που εκτελείται το πείραμα.

### 3.3. Πρόγραμμα επίβλεψης ελέγχου

Το πρόγραμμα που έχει την καθολική εποπτεία του συντονισμού όλων των διαδικασιών υλοποιήθηκε σε γλώσσα C με τη βοήθεια της εφαρμογής Platform Studio Software Development Kit (SDK), που είναι μέρος του πακέτου EDK Platform Studio, και εκτελείται στο επεξεργαστή Microblaze που βρίσκεται μέσα στο FPGA. Ο επεξεργαστής είναι χρονισμένος στα 71 MHz και κάνει χρήση RISC συνόλου εντολών. Για την εξυπηρέτηση της επικοινωνίας με τον έξω κόσμο χρησιμοποιήθηκαν δύο κανάλια εισόδων/εξόδων, ένα σειριακό (RS232) και ένα USB με 16 byte προσωρινής μνήμης (buffer) στις εισόδους και εξόδους. Το διάγραμμα ροής του κυρίως προγράμματος φαίνεται στο Σχήμα 47.

Κατά την έναρξη της εκτέλεσης το πρόγραμμα περιμένει από τον χρήστη να «κατεβάσει» μία νέα διαδρομή. Επιλέγοντας το «κατέβασμα» της διαδρομής, το πρόγραμμα αρχίζει να «ακούει» για εισερχόμενα πακέτα δεδομένων από το την εφαρμογή Matlab. Αμέσως μόλις η διαδρομή φορτωθεί στο FPGA, υπολογίζεται το άθροισμα ελέγχου λάθους (checksum) και αποστέλλεται μια επιβεβαίωση στην εφαρμογή Matlab. Κατόπιν ο έλεγχος του προγράμματος μεταφέρεται πίσω στον εξωτερικό βρόγχο. Με μια κατάλληλη εντολή από τον χρήστη, το πρόγραμμα ανοίγει μια σύνδεση με το ρομπότ και αρχίζει τη διαδικασία συγχρονισμού στέλνοντας ειδικά διαμορφωμένα πακέτα δεδομένων. Σε αυτό το σημείο της ροής του προγράμματος το ρομπότ αρχίζει να στέλνει τα SIP πακέτα στο FPGA.

Στην συνέχεια το πρόγραμμα μεταφέρεται στον κύριο βρόχο ελέγχου (main control loop) και περιμένει για τα εισερχόμενα SIP πακέτα. Από τη στιγμή που θα υπάρξει ένα ολόκληρο έγκυρο πακέτο SIP, τότε αυτό αποκωδικοποιείται και εξάγονται τα δεδομένα της οδομετρίας  $(x, y, \theta)$  τα οποία παράλληλα μεταβιβάζονται και στην εφαρμογή Matlab. Λόγω του ότι τα SIP πακέτα χρησιμοποιούν μικρό μήκος λέξης για την κωδικοποίηση των δεδομένων, μαζί με το γεγονός ότι η ανάλυση της οδομετρίας είναι σχετικά μεγάλη (της τάξης του χιλιοστού του μέτρου), οι μετρήσεις που προέρχονται από τους οπτικούς κωδικοποιητές δεν είναι εύκολο να χρησιμοποιηθούν για τον εντοπισμό θέσης (localization).

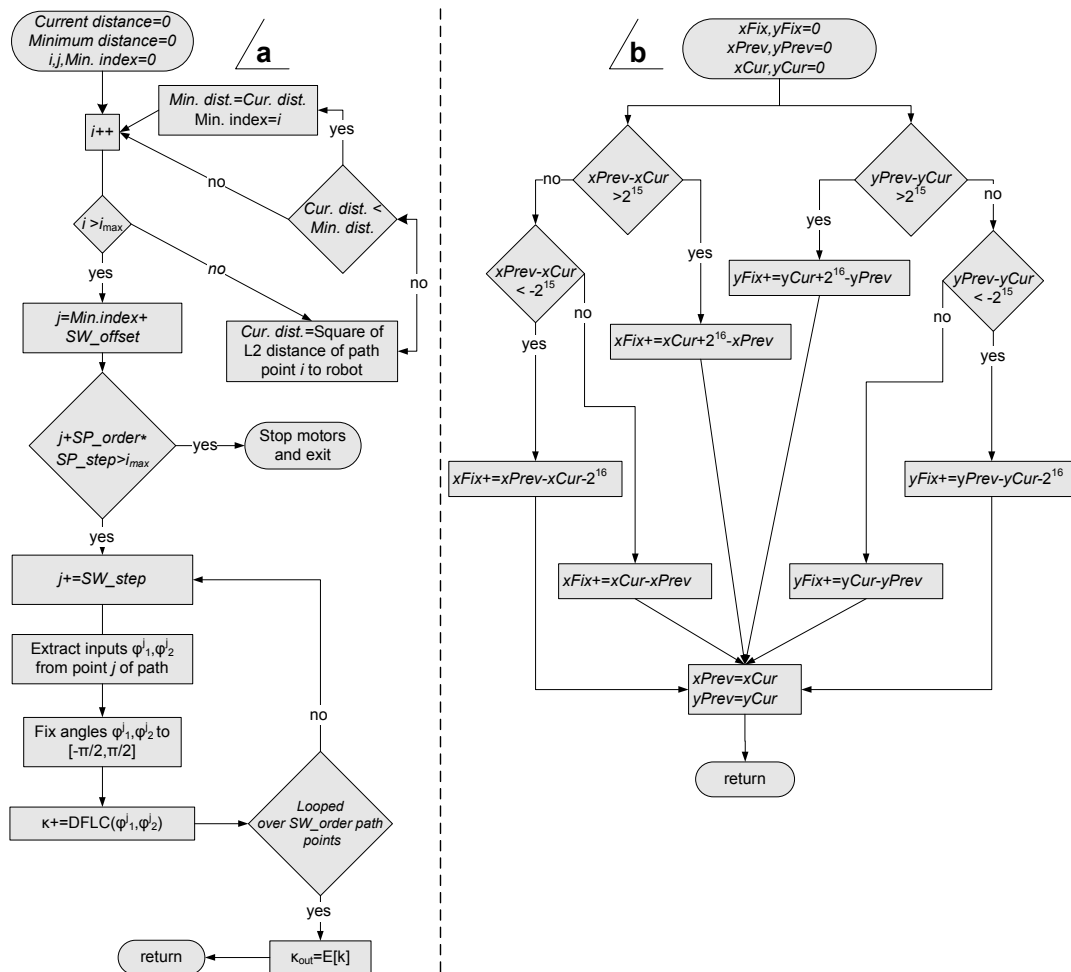


Σχήμα 47. Διάγραμμα ροής του κυρίως προγράμματος

Τα δεδομένα στα πακέτα SIP κωδικοποιούνται ως προσημασμένοι ακέραιοι των 16 bit (signed integers). Τα πακέτα δεδομένων της οδομετρίας πολλαπλασιάζονται με το συντελεστή 0.485, που ανεβάζει το ωφέλιμο εύρος σε -15892 έως 15892 mm, ή -16 έως 16 m, που και πάλι είναι αρκετά περιορισμένο. Προκειμένου να μεγαλώσει το εύρος περισσότερο, το πρόγραμμα χρησιμοποιεί μια εσωτερική απεικόνιση των συντεταγμένων τύπου double. Σε αυτή την περίπτωση, οι συντεταγμένες  $(x, y)$  που εξάγονται από τα πακέτα SIP χρησιμοποιούνται ως  $\Delta x$  και  $\Delta y$  με το σημείο εγγραφής να μηδενίζεται κάθε φορά που συμβαίνει υπερχείλιση των αισθητήρων. Ο αλγόριθμος αυτός παρουσιάζεται στο Σχήμα 48b.

Αμέσως μετά το τέλος του υπολογισμού των δεδομένων οδομετρίας, η ροή του προγράμματος μεταφέρεται στον αλγόριθμο που είναι υπεύθυνος για τον έλεγχο της παρακολούθησης δρόμου (Σχήμα 48a). Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος υλοποιεί την τεχνική «χωρικού παραθύρου» που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ο αλγόριθμος λαμβάνει το κοντινότερο σημείο της διαδρομής και υπολογίζει τις δυο εισόδους του ελεγκτή για το σημείο  $j$  του παραθύρου και εν συνεχεία καλεί τον DFLC με ορίσματα τις εισόδους αυτές. Όταν ολοκληρωθεί η διαδικασία επιστρέφει τη μέση τιμή όλων των υπολογισμένων καμπυλοτήτων  $k_j$  και επανεισέρχεται στον κύριο βρόχο του προγράμματος. Ο αλγόριθμος σταματάει το ρομπότ εάν ανιχνεύσει ότι βρίσκεται πολύ κοντά στο τέλος της διαδρομής ώστε να μην υπάρχει ένα πλήρες χωρικό παράθυρο.





**Σχήμα 48. Διαγράμματα ροής (α) ρουτίνα για το «χωρικό παράθυρο», (β) ρουτίνα διόρθωσης της υπερχειλίσης των οπτικών κωδικοποιητών**

Για να βρεθεί το κοντινότερο σημείο της διαδρομής χρησιμοποιείται το τετράγωνο της Ευκλείδειας L2-νόρμας, δεδομένου ότι ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας της κανονικής Ευκλείδειας απόστασης είναι υπολογιστικά δαπανηρός. Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της νόρμας είναι τύπου long int (64bit integer) και όχι τύπου double, πράγμα που αυξάνει σημαντικά την ταχύτητα εκτέλεσης του κώδικα στον επεξεργαστή Microblaze χωρίς τη χρήση συνεπεξεργαστή κινητής υποδιαστολής (Floating Point Unit – FPU). Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι ο προηγούμενος χειρισμός έχει μεγάλη σημασία στην επίδοση του αλγορίθμου μιας και ο μεγαλύτερος υπολογιστικός φόρτος λαμβάνει χώρα κατά τη διάρκεια αυτού του υπολογισμού. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η διαδρομή αποτελείται από εκατοντάδες δείγματα σημείων, ο αλγόριθμος καλείται να τα ελέγξει όλα για να βρει το κοντινότερο σημείο. Είναι αναγκαίο λοιπόν η προηγούμενη διαδικασία να γίνει όσο το δυνατό γρηγορότερα, ώστε να αποφευχθεί η περίπτωση τα πακέτα που λαμβάνονται από το ρομπότ να μην αναθέτονται έγκαιρα στις μεταβλητές τους, πράγμα που οδηγεί σε τεμαχισμένα πακέτα SIP και απώλεια συγχρονισμού του FPGA με το ρομπότ αφού τα πακέτα δεν μπορούν πλέον να ανακτηθούν σωστά από το FPGA.

Μετά τον υπολογισμό της καμπυλότητας, σειρά έχει η δημιουργία των εντολών προς το ρομπότ. Το ρομπότ Pioneer που χρησιμοποιούμε δεν διαθέτει

κάποια ειδική εντολή σχετικά με την καμπυλότητα, οπότε η τελευταία πρέπει να εκφραστεί συναρτήσει της γραμμικής και της γωνιακής ταχύτητας. Η καμπυλότητα εκφράζεται από την εξίσωση  $\kappa = \omega / \nu$  όπου  $\omega$  είναι η γωνιακή ταχύτητα (rad/sec) και  $\nu$  η γραμμική ταχύτητα (m/sec) του ρομπότ. Τα πακέτα εντολών που δέχεται το ρομπότ πρέπει να περιέχουν τη γραμμική ταχύτητα σε mm/sec και τη γωνιακή ταχύτητα σε deg/sec. Υποθέτοντας ότι η πραγματική καμπυλότητα που πρέπει να ακολουθήσει το ρομπότ είναι  $\kappa$  σε rad/m, και έστω ότι η γραμμική ταχύτητα  $\nu'$  (mm/sec) δίνεται, τότε η γωνιακή ταχύτητα  $\omega'$  (deg/sec) που θα σταλθεί στο ρομπότ με τη μορφή εντολής υπολογίζεται από την εξίσωση,

$$\kappa = \frac{\omega}{\nu} \left( \frac{rad}{m} \right) = \frac{\omega' (deg/sec)}{\nu' (mm/sec)} \frac{\pi / 180}{/1000} \Rightarrow \omega' = \kappa \cdot \nu' \cdot \frac{180}{1000 \cdot \pi} \quad (3.1)$$

Η πραγματική καμπυλότητα που λαμβάνεται από τον DFCLC είναι ένας προσημασμένος ακέραιος 12 bit, δηλαδή  $-2^{11} \leq \kappa \leq 2^{11} - 1$  ή -2048 έως 2047. Η καμπυλότητα κανονικοποιείται στο [-1,1] και πολλαπλασιάζεται με μια σταθερή μέγιστη καμπυλότητα  $\kappa_{max}$  λόγω του ότι η διαφορική κίνηση του ρομπότ δεν θέτει κάποιο όριο στην ακτίνα περιστροφής του. Κανονικά το θετικό εύρος των τιμών θα έπρεπε να διαιρεθεί με 2047, αλλά για να αποφύγουμε τον έλεγχο πρόσημου, διαιρούμε με 2048. Αυτό εισάγει σφάλμα 1 λιγότερου σημαντικού bit (Least Significant Bit - LSB) στο θετικό εύρος τιμών, που όμως θεωρείται ασήμαντο συγκρινόμενο με τα λάθη κβάντωσης που εισάγει το ρομπότ (βλέπε ενότητα §3.4). Με αυτό τον τρόπο ελέγχεται η ελάχιστη ακτίνα στρέψης του ρομπότ. Συνεπώς η εξίσωση (3.1) παίρνει τη μορφή,

$$\omega' = \frac{\kappa}{2048} \kappa_{max} \cdot \nu' \cdot \frac{180}{1000 \cdot \pi} \quad (\pm 1 \text{ lsb}) \quad (3.2)$$

Μόλις η γραμμική ταχύτητα\*  $\nu'$  του ρομπότ εξαχθεί από το πακέτο SIP και υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα  $\omega'$  με την βοήθεια της εξίσωσης (4), οι εντολές κίνησης στέλνονται πίσω στο ρομπότ. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ταχύτητα ουσιαστικά απεμπλέκεται από τον έλεγχο παρακολούθησης αφού η είσοδος ελέγχου είναι η καμπυλότητα. Η ταχύτητα μπορεί κάλλιστα να ελεγχθεί από έναν ανεξάρτητο ελεγκτή ταχύτητας. Ο συγκεκριμένος ελεγκτής θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως γεωμετρικός ελεγκτή παρακολούθησης πορείας μιας και η καμπυλότητα είναι το μοναδικό μέγεθος που ορίζει εξολοκλήρου τη διαδρομή του ρομπότ. Σε άλλες εφαρμογές όπως ο κινηματικός-δυναμικός έλεγχος παρακολούθησης, όπου η δυναμική του ρομπότ λαμβάνεται υπόψη, θα έπρεπε να εισαχθεί και η ταχύτητα στο βρόχο ελέγχου. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή ο έλεγχος ταχύτητας δεν είναι απαραίτητος στο πρόβλημα της παρακολούθησης αφού θεωρούμε ότι η ταχύτητα του ρομπότ είναι πολύ μικρή για να επηρεάσει την κινηματική του συμπεριφορά.

\* Το ρομπότ της εφαρμογής (Pioneer 3-DX8) έχει ενσωματωμένο έναν ελεγκτή ταχύτητας. Οι εντολές ταχύτητας που λαμβάνει προσαρμόζονται ανάλογα μέσω του αλγορίθμου ταχύτητας που χρησιμοποιεί. Επομένως η ταχύτητα που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της εξίσωσης (3.2) δεν είναι η αρχική ταχύτητα που δόθηκε ως εντολή προς το ρομπότ, αλλά η πραγματική τρέχουσα ταχύτητα που ανέφερε το ρομπότ στο τελευταίο SIP πακέτο που έστειλε.

Σε αντίθεση με ένα ρομποτικό όχημα (car-like robot) που η καμπυλότητα και η πραγματική κίνηση περιορίζονται λόγω της μηχανικής διάταξης του συστήματος διεύθυνσης (γωνία στρέψης των τροχών), στην παρούσα εφαρμογή μία τέτοια συμπεριφορά εξομοιώνεται με τον τρόπο που εξηγήσαμε παραπάνω. Ο τρόπος αυτός (τεχνητός φραγμός της καμπυλότητας) εισάγει ένα νέο πρόβλημα που αναλύεται στην επόμενη ενότητα.

### 3.4. Προβλήματα κβάντωσης

Το ρομπότ Pioneer χρησιμοποιεί 16 bit ακέραιους για την κωδικοποίηση των πακέτων SIP. Αντίστοιχα και για την κωδικοποίηση των ορισμάτων στα πακέτα εντολών. Το όρισμα της εντολής για την γωνιακή ταχύτητα έχει σύνολο τιμών [0,300] deg/sec με 1 deg/sec/bit διακριτότητα. Δεδομένου ότι η  $\omega'$  λαμβάνει ακέραιες τιμές με ανάλυση 1 deg/sec, η καμπυλότητα παρουσιάζει και αυτή κβάντωση. Λύνοντας την (3.1) ως προς  $\kappa$  (ή  $R = 1/\kappa$  την ακτίνα στροφής σε μέτρα), έχουμε,

$$R = \frac{v'}{\omega'} \cdot \frac{180}{1000 \cdot \pi} \quad (3.3)$$

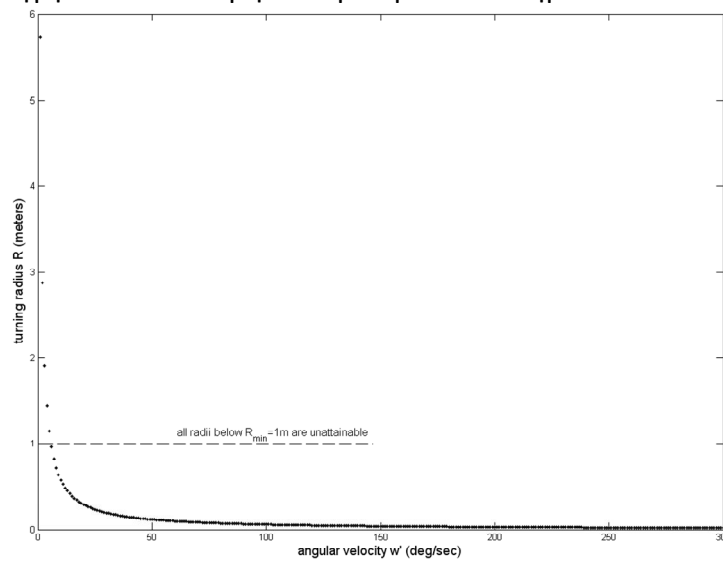
Από τη γραφική παράσταση της ακτίνας  $R$  ως προς την κβαντισμένη γωνιακή ταχύτητα  $\omega'$  για  $v'=100$  mm/sec (Σχήμα 49) φαίνεται ότι η ανάλυση για μικρές τιμές της καμπυλότητας (μεγάλες τιμές της  $R$ ) είναι χαμηλή, πηγαίνοντας από  $R=5.73$  ( $\omega'=1$ ) στο  $R=2.86$  ( $\omega'=2$ ) στο  $R=1.91$  ( $\omega'=3$ ), ενώ για μεγάλες καμπυλότητες (μικρές ακτίνες) είναι υψηλή. Αυτό έχει σοβαρό αντίκτυπο στον τρόπο που συμπεριφέρεται ο ελεγκτής στο πρόβλημα της παρακολούθησης. Όταν για παράδειγμα το ρομπότ βρίσκεται πάνω στη διαδρομή, δηλαδή  $\varphi_1, \varphi_2 \approx 0$ , ο DFLLC στέλνει εντολές μικρής καμπυλότητας (μεγάλη ακτίνα) για την αποφυγή «νευρικών» κινήσεων (π.χ. ταλαντώσεων) στην πλοήγηση. Εάν η ανάλυση στο εύρος μικρών καμπυλοτήτων είναι ανεπαρκής, ο έλεγχος υποβαθμίζεται διότι οι εντολές καμπυλότητας ψαλιδίζονται (clip) στις διαθέσιμες τιμές. Επιπλέον, εφόσον υπάρχει περιορισμός στην ελάχιστη ακτίνα στροφής, όλες οι τιμές στο Σχήμα 49, κάτω από το χαμηλότερο όριο  $R_{\min}$  (που ορίστηκε στο 1 m στην εφαρμογή που μελετάμε), δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν από το ρομπότ. Επειδή η ακτίνα  $R$  είναι μονότονα φθίνουσα ως προς το  $\omega'$ , και το  $\omega'$  αρχίζει από το 1 deg/sec, μπορούμε να βρούμε την τιμή των διαθέσιμων επιπέδων κβάντωσης αντικαθιστώντας με  $R=1$  στην εξίσωση (3.3) και λύνοντας ως προς  $\omega'$ . Δηλαδή,

$$L_{\min} = \left\lfloor v' \cdot \frac{180}{1000 \cdot \pi} \right\rfloor \quad (3.4)$$

, όπου  $\lfloor \cdot \rfloor$  είναι η συνάρτηση κάτω περικοπής (floor function).

Παρατηρώντας τις εξισώσεις (3.3) και (3.4) βλέπουμε ότι αυξάνοντας την ταχύτητα  $v'$ , η μέγιστη ακτίνα στροφής αυξάνει γραμμικά μαζί με την ανάλυση σε αυτό το εύρος, δηλαδή την τιμή  $L_{\min}$ . Η προφανής λύση για  $v'$  αυξηθεί η ανάλυση της καμπυλότητας είναι  $v'$  αυξηθεί η ταχύτητα. Η λύση αυτή παρουσιάζει το πρόβλημα της εύρεσης μίας κατάλληλης ταχύτητας για το ρομπότ, μιας και οι

χαμηλές ταχύτητες μειώνουν την ανάλυση της καμπυλότητας, ενώ οι υψηλές μπορούν να οδηγήσουν σε ένα μη αποκρινόμενο σύστημα.

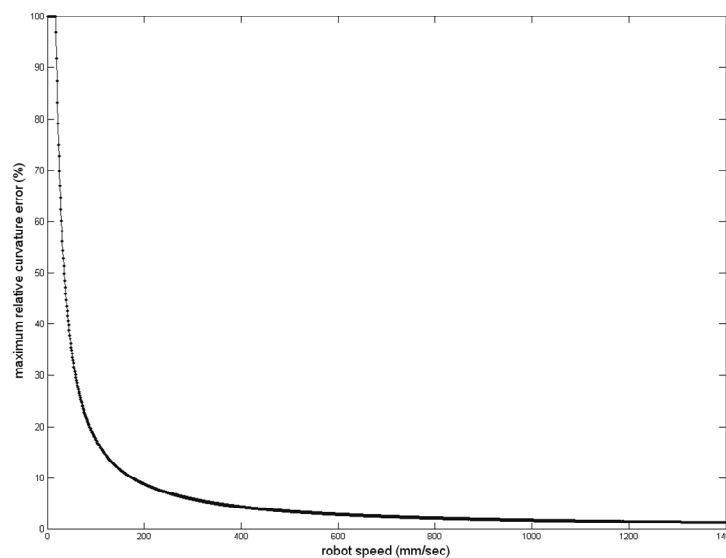


Σχήμα 49. Κβάντωση της ακτίνας στροφής για  $u'=100$  mm/sec

Προκειμένου να υπολογιστεί ένα αποδεκτό επίπεδο σφάλματος μεταξύ της καμπυλότητας από το DFCLC και της πραγματικής καμπυλότητας που ακολουθεί το ρομπότ, βρίσκουμε το μέγιστο σχετικό σφάλμα σε σχέση με όλες τις διαθέσιμες ταχύτητες για όλες τις διαθέσιμες εισόδους, ήτοι,

$$100 \cdot \sup_{\varphi_1, \varphi_2} [(\kappa_{FLC} - \kappa_{Actual}) / \kappa_{Actual}] \quad (3.5)$$

Κατά τον τρόπο αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό το μέγιστο δυνατό σχετικό σφάλμα για κάθε ταχύτητα μεταξύ της πραγματικής και της επιθυμητής καμπυλότητας. Η γραφική παράσταση του σφάλματος δίνεται στο Σχήμα 50. Η ελάχιστη ακτίνα στροφής ορίστηκε στο ένα μέτρο ( $\kappa_{max} = 10^{-3}$ ).



Σχήμα 50. Μέγιστο σχετικό σφάλμα μεταξύ της πραγματικής και της επιθυμητής καμπυλότητας σε σχέση με την ταχύτητα, για όλες τις εισόδους του ελεγκτή

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, καθώς η ταχύτητα αυξάνει το σφάλμα μειώνεται. Ένας ανεκτός συνδυασμός κόστους και ποιότητας (trade-off) για την ταχύτητα είναι τα 1000 mm/sec (ή 1 m/sec) όπου το λάθος πέφτει κάτω από 1.745%. Τα διαθέσιμα επίπεδα κβάντωσης σε αυτήν την ταχύτητα, όπως προκύπτουν από την εξίσωση (3.4) είναι  $L_{min} = 57$ . Ως εκ τούτου η ταχύτητα ορίστηκε στα 1000 mm/sec σε όλα τα πειράματα που έγιναν.

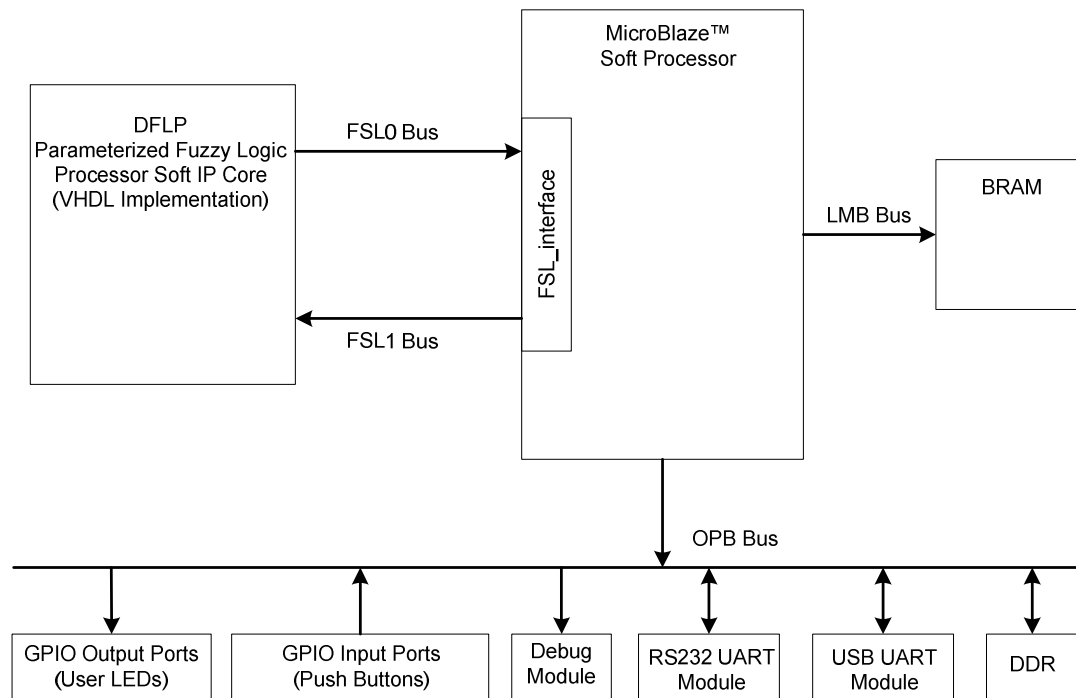
### 3.5. Περιγραφή υλικού σε υψηλό επίπεδο

Στην παράγραφο αυτή θα αναλυθεί ακροθιγώς η αρχιτεκτονική του SoC. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο [49] για μια πιο εκτενή παρουσίαση. Στο Σχήμα 51 φαίνεται μια υψηλού επιπέδου περιγραφή της αρχιτεκτονικής. Ο μαλακός πυρήνας του επεξεργαστή Microblaze™ είναι ένας από τους διαθέσιμους πυρήνες του Xilinx Embedded Development Kit της εταιρίας Xilinx. Ο όρος μαλακός πυρήνας (soft core) σημαίνει ότι η υλοποίηση της συγκεκριμένης λειτουργικής μονάδας χρησιμοποιεί στοιχειώδη γενική λογική (πύλες) μέσα στο FPGA και όχι ένα δεσμευμένο (σκληρός πυρήνας) από κατασκευής του FPGA κομμάτι πυριτίου πάνω στην ψηφίδα.

Ο επεξεργαστής Microblaze βασίζεται στην αρχιτεκτονική μηχανών περιορισμένου συνόλου εντολών (Reduced Instruction Set Computer – RISC) και έχει αρκετές ομοιότητες με την αρχιτεκτονική DLX που περιγράφεται στην αναφορά [50]. Χαρακτηριστικό του Microblaze είναι ο αγωγός  $3^{wv}$  βαθμίδων, ενώ οι περισσότερες εντολές ολοκληρώνονται σε ένα μόνο κύκλο ρολογιού. Επίσης, το σύνολο εντολών (instruction set) και ο δίαυλος δεδομένων του (data words) είναι 32 bit. Ο πυρήνας του επεξεργαστή έχει την δυνατότητα να επιτύχει μία συχνότητα λειτουργίας της τάξης των 100 MHz στην οικογένεια των FPGA Spartan 3 που χρησιμοποιείται στην παρούσα εφαρμογή. Επιπλέον ο επεξεργαστής δίνει τη δυνατότητα διασύνδεσης με τον On-chip περιφερειακό δίαυλο επικοινωνίας (On-chip Peripheral Bus – OPB) που επιτρέπει τη γρήγορη πρόσβαση σε ένα ευρύ αριθμό περιφερειακών λειτουργικών μονάδων, καθώς επίσης και με τον τοπικό δίαυλο μνήμης (Local Memory Bus – LMB) για τη γρήγορη πρόσβαση σε τοπικές μνήμες (συνήθως ενσωματωμένη μνήμη (block RAM – BRAM) μέσα στο FPGA).

Επιπρόσθετα ο επεξεργαστής έχει την δυνατότητα διασύνδεσης με τον γρήγορης μονής κατεύθυνσης δίαυλο επικοινωνίας (Fast Simplex Bus – FSL), που καθιστά εύκολη τη διασύνδεση του με μαλακούς πυρήνες τρίτων, έτσι ώστε οι τελευταίοι να λειτουργήσουν ως συνεπεξεργάστες για την ταχύτερη εκτέλεση κρίσιμων, από πλευράς χρόνου εκτέλεσης, ή πολύπλοκων αλγορίθμων. Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι δίαυλος FSL είναι ένας δίαυλος μονής κατεύθυνσης (unidirectional) από σημείο σε σημείο (point-to-point) που συμπεριφέρεται ως διεπαφή (interface) για την ροή των δεδομένων από και προς τον επεξεργαστή. Κάθε κανάλι FSL παρέχει ένα μικρής καθυστέρησης (latency) μέσο αλληλεπίδρασης στον αγωγό (pipeline) του επεξεργαστή που επιτρέπει τη διασύνδεση του με άλλους πυρήνες για την επιτάχυνση του χρόνου εκτέλεσης των εντολών του. Η παρούσα εφαρμογή που αναλύεται στο κεφάλαιο αυτό

χρησιμοποιεί το DFLC ως συνεπεξεργάστη του Microblaze μέσω του διαύλου FSL για τους λόγους που αναφέρθηκαν προηγουμένως.



Σχήμα 51. Σχηματικό διάγραμμα υψηλού επιπέδου της αρχιτεκτονικής του SoC

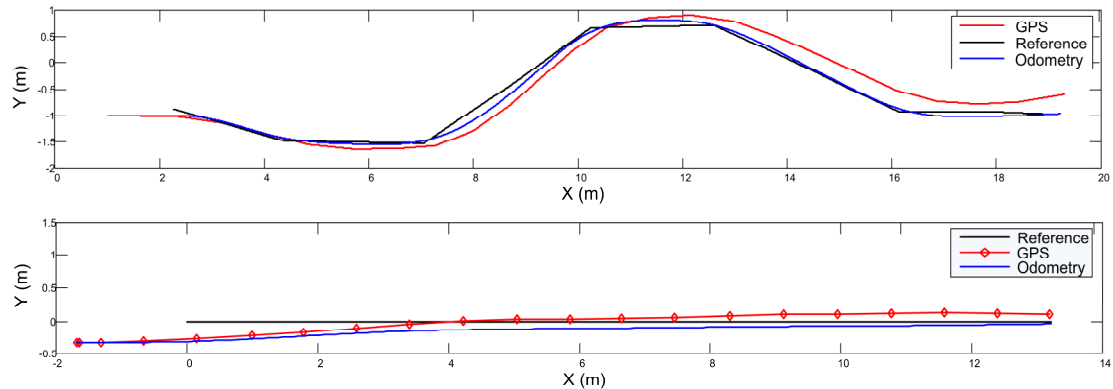
Όπως έχει ήδη ειπωθεί η αρχιτεκτονική του SoC αποτελείται από το DFLC που επικοινωνεί με τον επεξεργαστή Microblaze μέσω του διαύλου FSL, τις μνήμες BRAM που επικοινωνούν με τον επεξεργαστή μέσω του διαύλου LMB, και τέλος όλες τις υπόλοιπες περιφερειακές μονάδες (όπως π.χ οι γενικής χρήσης είσοδοι/έξοδοι (General Purpose IO ports – GPIO), το UART (Universal Asynchronous Receive Transmit Module)) που βρίσκονται στο FPGA μέσω του διαύλου OPB. Συνοπτικά λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι ο DFLC έχει αναλάβει τον αλγόριθμο της παρακολούθησης πορείας, ενώ ο Microblaze κυρίως εκτελεί τον C κώδικα που έχει τη γενική εποπτεία της ροής ελέγχου του συστήματος.

### 3.6. Πειράματα

Στην παράγραφο αυτή παρουσιασθούν δύο πειράματα με το σύστημα του ρομπότ, που διεξήχθησαν στον χώρο του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Σκοπός των πειραμάτων ήταν η εκτίμηση της απόδοσης του συστήματος και πιο συγκεκριμένα του ασαφούς ελεγκτή παρακολούθησης πορείας. Τα πειράματα βασίζονται στην παρακολούθηση δυο προκαθορισμένων διαδρομών. Η πρώτη διαδρομή είναι μια ευθεία γραμμή (straight line) και η δεύτερη είναι σιγμοειδούς σχήματος (S-shaped path). Προκειμένου να ληφθεί η πραγματική διαδρομή του ρομπότ κατά τη διάρκεια των πειραμάτων, τοποθετήθηκε ένας διαφορικός δέκτης GPS με την κεραία του πάνω στο ρομπότ. Το διαφορικό σύστημα GPS είναι το μοντέλο Trimble 4700 GPS και τέθηκε σε λειτουργία κινηματικής παρακολούθησης (Kinematic Survey mode), κατά την οποία η διαδρομή που έχει διανύσει το ρομπότ υπολογίζεται μετά το τέλος

του πειράματος (post processing). Η ανάλυση του DGPS με αυτό τον τρόπο λειτουργίας έχει ακρίβεια  $\pm 1 \text{ cm} + 1 \text{ ppm}$  για απόσταση έως 10 Km, ενώ τα δείγματα θέσης λαμβάνονται κάθε 1 δευτερόλεπτο.

Τα αποτελέσματα των πειραμάτων φαίνονται στο Σχήμα 52 για την ευθεία και τη σιγμοειδή διαδρομή.

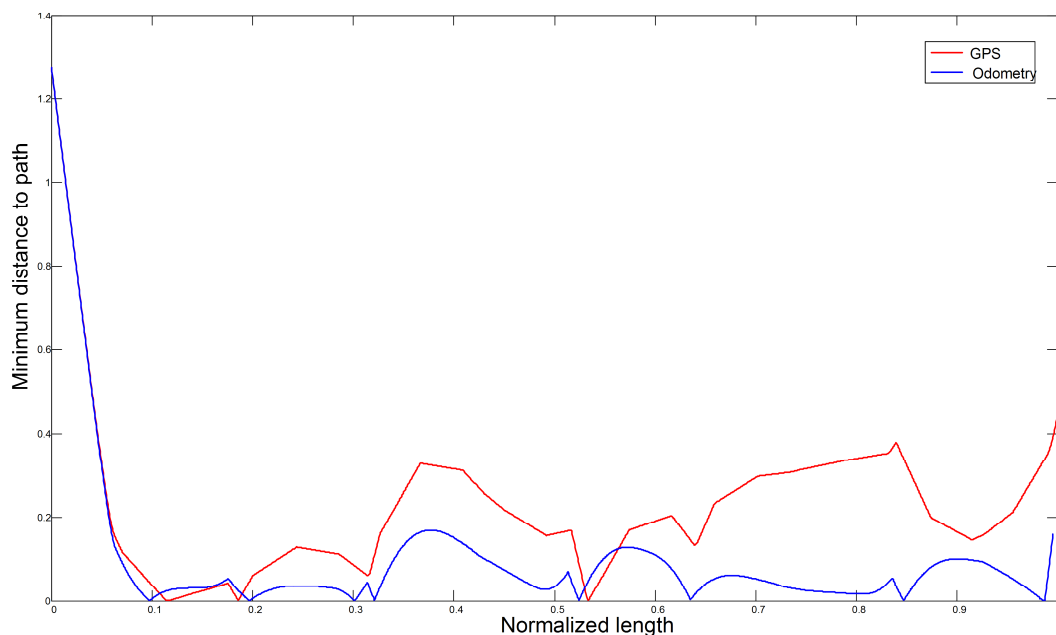
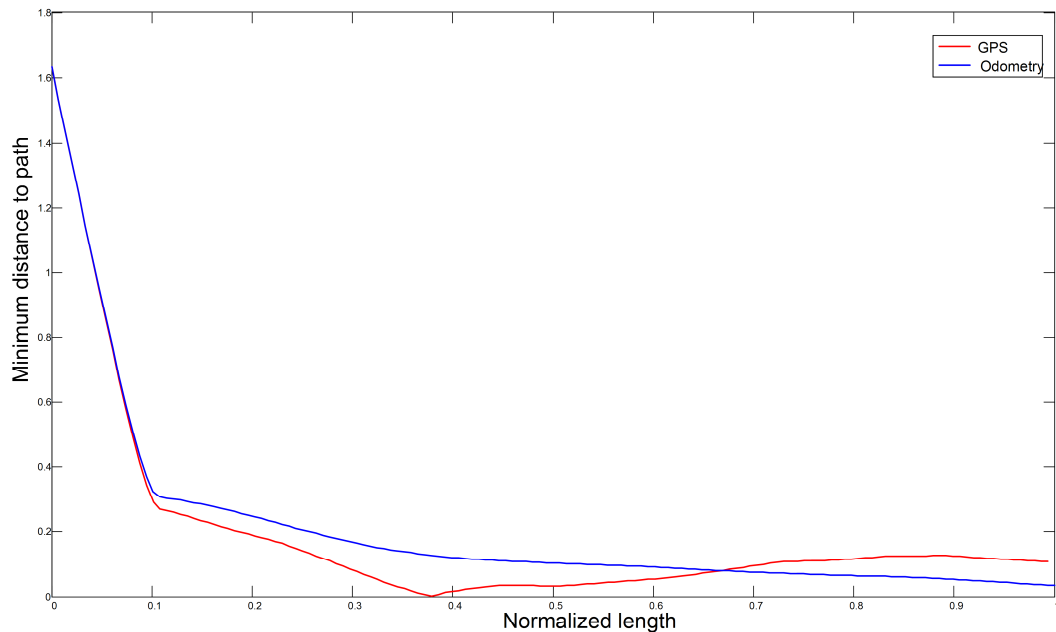


**Σχήμα 52.** Πάνω: Το πείραμα της σιγμοειδούς καμπύλης με την πορεία αναφοράς (μαύρο), την εκτίμηση θέσης της οδομετρίας (μπλε) και την εκτίμηση του DGPS (κόκκινο). Κάτω: Το πείραμα της ευθείας γραμμής με την πορεία αναφοράς (μαύρο), την εκτίμηση της οδομετρίας (μπλε) και του DGPS (κόκκινο)

Στο πείραμα της ευθείας διαδρομής το ρομπότ ακολούθησε μια ευθεία 25 μέτρων. Το ρομπότ αρχικά βρισκόταν εκτός της πορείας. Το Σχήμα 52 δεν δείχνει όλη τη διάρκεια του πειράματος αλλά το κομμάτι εκείνο στο οποίο το DGPS έχει υψηλή ποιότητα εύρεσης θέσης (συντελεστής ποιότητας  $Q=1$ ) δεδομένου ότι για να αξιολογηθεί ο ελεγκτής της εφαρμογής, χρειάζονται αξιόπιστες τιμές της θέσης του ρομπότ από το DGPS. Εδώ πρέπει να διευκρινιστεί ότι η εκτίμηση θέσης από το DGPS δεν πρέπει να συγχέεται με τη θέση που χρησιμοποιεί ο εκλεκτής παρακολούθησης και προέρχεται από τα δεδομένα της οδομετρίας. Επομένως δεδομένα θέσης από το DGPS με  $Q>1$  (όπου το 1 είναι η καλύτερη και 6 η χειρότερη ποιότητα) απορρίφθηκαν.

Στο δεύτερο πείραμα της σιγμοειδούς διαδρομής εφαρμόστηκαν οι ίδιες προδιαγραφές για το DGPS. Η σιγμοειδής διαδρομή έχει μήκος περίπου 25 μέτρα και, όπως και στο πείραμα της ευθείας, όλα τα δεδομένα του DGPS με  $Q>1$  απορρίφθηκαν. Αξίζει να σημειωθεί ότι η σιγμοειδής διαδρομή δεν αποτελεί εφικτή πορεία αναφοράς μιας και η παράγωγος της καμπυλότητας είναι ασυνεχής στις κορυφές των πολυγώνων. Ωστόσο, αν η ασυνέχεια είναι μικρή το ρομπότ καταφέρνει να ακολουθήσει την διαδρομή με ακρίβεια. Προκειμένου να εξαχθεί μια ποσοτική ερμηνεία των αποτελεσμάτων των δυο πειραμάτων, υπολογίστηκε η ελάχιστη απόσταση των λύσεων της οδομετρίας και του DGPS από την πορεία αναφοράς. Όμως μιας και οι διαδρομές δεν είναι παρά μια συλλογή σημείων, και στην περίπτωση του GPS μια αρκετά αραιή συλλογή αφού παρέχει στίγμα κάθε ένα μέτρο περίπου, οι διαδρομές υπέρ-δειγματοληπτούνται (upsample) με ένα σχήμα γραμμικής παρεμβολής. Επιπλέον, μια απ' ευθείας σύγκριση των λύσεων της οδομετρίας και του GPS δεν είναι εφικτή αφού τα δείγματα δεν είναι συγχρονισμένα οπότε και δεν μπορούν να συγκριθούν στίγματα διαφορετικών χρονικών στιγμών των δυο διαδρομών. Αντί αυτού, σχεδιάζεται η απόσταση σε

σχέση με το κανονικοποιημένο μήκος, ως προς το μέγιστο μήκος των δυο, κάθε διαδρομής .



**Σχήμα 53. Ελάχιστη απόσταση (σε μέτρα) των λύσεων της οδομετρίας και του GPS ως προς την πορεία αναφοράς, σε σχέση με το κανονικοποιημένο μήκος**

Όπως είναι φανερό, όταν η διάταξη (configuration/pose) του ρομπότ βρίσκεται «κοντά» στη διάταξη της πορείας, το σφάλμα διατηρείται κάτω από τα 40cm (20cm για την παρακολούθηση ευθείας). Επιπλέον, η εκτίμηση θέσης από την οδομετρία του ρομπότ είναι πολύ κοντά στην διαδρομή. Αυτό σημαίνει ότι αν χρησιμοποιηθούν δεδομένα DGPS μεγαλύτερης ακρίβειας σε πραγματικό χρόνο (Real-Time Kinematic DGPS data feed) ως είσοδος θέσης (αντί της οδομετρίας του ρομπότ ή και σε συνδυασμό) στον ελεγκτή, τότε αυτός θα μπορούσε να αποδώσει πολύ καλύτερα.



### 3.7. Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε μια ρομποτική πλατφόρμα βασισμένη σε SoC, για το πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας σε μη-ολονομικά κινητά ρομπότ. Η συνολική καθυστέρηση του ελέγχου είναι πολύ μικρή παρότι περιορίζεται από την απόκριση του ελεγχόμενου συστήματος (ρομπότ). Οι εξομοιώσεις και τα πειράματα που έγιναν έδειξαν ότι η συνολική επίδοση του ελεγκτή είναι ικανοποιητική παρ' όλους τους περιορισμούς που εμφανίζει το πραγματικό σύστημα, όπως για παράδειγμα η κβάντωση των διαθέσιμων εντολών πλοήγησης και η ύπαρξη «νεκρής περιοχής» στην είσοδο ελέγχου. Η επίδοση του ελεγκτή οφείλεται στη μεγάλη σθεναρότητα του αλγορίθμου παρακολούθησης σε συνδυασμό με την «ήρεμη» συμπεριφορά κίνησης που προσδίδει η τεχνική χωρικού παραθύρου όταν εισάγεται στο βρόχο ελέγχου.



## Κεφάλαιο 4

---

### Αναγωγή της παρακολούθησης πορείας σε παρακολούθηση ευθείας μέσω ισοδυναμίας ανάδρασης

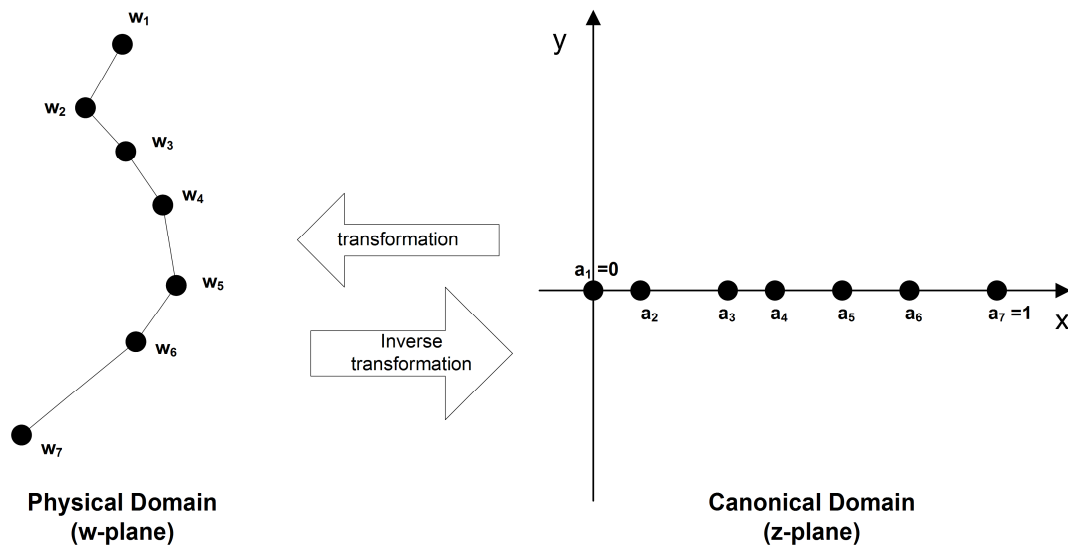
#### 4.1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε έναν μετασχηματισμό ο οποίος μετασχηματίζει απλές πολυγωνικές αλυσίδες σε ευθεία, καθώς και την εφαρμογή του στο πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας. Η βασική ιδέα πίσω απ' κάτι τέτοιο είναι να αναχθεί το πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας σε παρακολούθηση ευθείας, κάτι το οποίο είναι γενικά απλούστερο. Πέρα από την σχεδίαση ελεγκτών για την παρακολούθηση ευθείας, ο μετασχηματισμός εμφανίζει και άλλα προτερήματα αν εφαρμοσθεί σε υπάρχοντες ελεγκτές. Το σημείο αυτό θα αναλυθεί στη συνέχεια.

Θα θεωρήσουμε ότι έχουμε μια απλή πολυγωνική αλυσίδα (καμπύλη κλάσης  $C^0$ ) η οποία αποτελεί και την καμπύλη αναφοράς που πρέπει ν' ακολουθήσει το ρομπότ. Η καμπύλη βρίσκεται μέσα σε ένα μιγαδικό χώρο  $D_p = \mathbb{C}$  τον οποίο ονομάζουμε *φυσικό χωρίο* (*physical domain*). Θεωρούμε επίσης τον μετασχηματισμένο μιγαδικό χώρο  $D_c = \mathbb{C}$  που ονομάζουμε *κανονικό χωρίο* (*canonical domain*). Θα κατασκευάσουμε έναν ομοιομορφισμό  $\Phi: D_c \rightarrow D_p$  ο οποίος μετασχηματίζει τον πραγματικό άξονα του  $D_c$  στην πολυγωνική αλυσίδα στον  $D_p$  (Σχήμα 54).

Αν και μπορεί να υπάρχουν αρκετοί μετασχηματισμοί οι οποίοι εκτελούν μια τέτοια λειτουργία, πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι ο  $\Phi$  θα δράσει επίσης πάνω στις εξισώσεις κατάστασης του ρομπότ. Είναι λοιπόν σημαντικό το μετασχηματισμένο μοντέλο να έχει κατάλληλη μορφή ώστε να επιτρέπει ανάλυση των ιδιοτήτων του, περισσότερο δε την ανάλυση ελέγχου. Θα περιορίσουμε την κλάση των διαθέσιμων

μετασχηματισμών σε αυτούς που διατηρούν την αφινική μορφή των εξισώσεων κατάστασης του ρομποτικού μοντέλου, τουλάχιστον τοπικά.



Σχήμα 54. Μετασχηματισμός μιας πολυγωνικής αλυσίδας

Παρόμοιοι μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται στην χαρτογραφία όπου κάποιος επιζητά να συγχωνέψει διαφορετικούς χάρτες ώστε να συμπέσουν τα κοινά σημεία τους. Τέτοιοι μετασχηματισμοί ονομάζονται *rubber sheets* [51],[52]. Ωστόσο, αυτοί οι μετασχηματισμοί δουλεύουν σε μια φραγμένη περιοχή, συνήθως στα όρια του χάρτη, και δημιουργούν ένα τριγωνισμό μεταξύ των δυο χωρίων. Στη συνέχεια εφαρμόζονται τοπικοί ομοιομορφισμοί μεταξύ κάθε ζεύγους τριγώνων. Ένας διαδεδομένος τέτοιος αλγόριθμος χρησιμοποιεί αφινικούς μετασχηματισμούς μεταξύ των τριγώνων και ονομάζεται *χάρτης τριγωνισμού (triangulation map)*[53]. Ένας τέτοιος χάρτης είναι ένας *κατά-τμήματα γραμμικός ομοιομορφισμός piecewise linear homeomorphism (PLH)* [54],[55] μεταξύ των δυο χωρίων. Οι χάρτες τριγωνισμού είναι ακατάλληλοι για το θεωρούμενο πρόβλημα μιας και δεν μπορεί να υπάρξει τριγωνισμός συνευθειακών σημείων όπως αυτών πάνω στον πραγματικό άξονα του κανονικού χωρίου. Επιπλέον αυτοί οι χάρτες δεν οδηγούν πάντα σε 1-1 απεικονίσεις και ενδέχεται να χρειάζονται την εισαγωγή καινούργιων σημείων για να υπερκεραστεί αυτό το πρόβλημα. Κάτι τέτοιο είναι απαγορευτικό για την παρακολούθηση πορείας μιας και η εισαγωγή καινούργιων σημείων θα παραμορφώσει το πορεία. Τέλος, χρειάζεται ένας άπειρος αριθμός τριγώνων ώστε να επικαλυφθεί όλο το επίπεδο.

Επιζητώντας τη δημιουργία ενός ολικού μετασχηματισμού ο οποίος ορίζεται σε όλο το φυσικό και κανονικό επίπεδο, θα χρησιμοποιήσουμε μια παραπλήσια διαδικασία και θα χωρίσουμε τα δυο χωρία σε ταινίες, εφαρμόζοντας σε κάθε ταινία έναν κατάλληλο αφινικό μετασχηματισμό. Συνεπώς ο προτεινόμενος μετασχηματισμός μπορεί να ονομαστεί και *κατά-ταινίες αφινικός μετασχηματισμός (strip-wise affine transformation)*. Προφανώς τα δυο χωρία επεκτείνονται σε όλο το χώρο που τα εμπεριέχει (το μιγαδικό επίπεδο) οπότε θα χρησιμοποιούμε τη λέξη «χωρίο» και «χώρος» χωρίς διάκριση. Ένας τέτοιος ομοιομορφισμός έχει και κάποια άλλα βολικά στοιχεία, όπως το ότι διατηρεί την τοπική γραμμικότητα. Μιας και ο  $\Phi$  δρα πάνω στον φυσικό χώρο παραμορφώνοντας τον, παραμορφώνει και όλα τα αντικείμενα που βρίσκονται μέσα σ' αυτόν. Αυτό σημαίνει ότι ολόκληρος ο χάρτης του κόσμου που κινείται μέσα το ρομπότ (τα εμπόδια δηλαδή) μαζί με το σώμα του

ρομπότ, απεικονίζονται στον κανονικό χώρο. Σε πολλές εφαρμογές τα εμπόδια αναπαρίστανται από πολύγωνα, κάτι το οποίο μειώνει σημαντικά την πολυπλοκότητα και τον υπολογιστικό φόρτο. Κάτι τέτοιο δεν είναι αναγκαίο όμως σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου μιας και ο έλεγχος παρακολούθησης είναι ανεξάρτητος από άλλες λειτουργίες πλοήγησης. Ένα ακόμα σημαντικό πλεονέκτημα των PLH είναι ότι η αντιστρεψιμότητα τους μπορεί να εξακριβωθεί γεωμετρικώς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός μπορεί να λυθεί σε κλειστέ μορφή.

Η διαδικασία κατασκευής του μετασχηματισμού  $\Phi$  διαιρείται σε τρία βήματα. Στο πρώτο κατασκευάζεται ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το ευθύγραμμο τμήμα  $[0,1)$  του πραγματικού άξονα του κανονικού χώρου στην πολυγωνική αλυσίδα του φυσικού χώρου. Στη συνέχεια ο μετασχηματισμός επεκτείνεται σε όλο τον πραγματικό άξονα και τέλος σε όλο το κανονικό επίπεδο. Λόγω της ειδικής μορφής του μετασχηματισμού, πρέπει να επιβληθούν ειδικοί περιορισμοί στην καμπύλη αναφοράς (πολυγωνική αλυσίδα) ώστε αυτός να είναι αμφιρριπτικός. Συγκεκριμένα, η πολυγωνική αλυσίδα πρέπει να είναι αυστηρά μονότονη.

#### 4.2. Ευθύς μετασχηματισμός

Θεωρούμε την πολυγωνική αλυσίδα  $A = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ,  $w_i \in \mathbb{C}$  στο μιγαδικό κανονικό χωρίο. Κάθε κορυφή  $w_i$  της αλυσίδας μετασχηματίζεται σε ένα σημείο  $a_i$  του πραγματικού άξονα του κανονικού χωρίου ανάλογα με το κανονικοποιημένο διάστημα που του αντιστοιχεί, δηλαδή,

$$a_i = \sum_{k=1}^i \frac{S_k}{S}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.1)$$

όπου  $S_k = |w_k - w_{k-1}|$ ,  $S = \sum_{k=1}^n S_k$ . Θεωρούμε επίσης ότι  $S_1 = 0$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο η πρώτη κορυφή  $w_1$  προβάλλεται στο 0 ενώ η τελευταία  $w_n$  στο 1. Κάθε κορυφή προβάλλεται γραμμικά στο  $[0,1]$  ανάλογα με το μερικό της μήκος. Η ακμή της πολυγωνικής αλυσίδας από την κορυφή  $w_{k-1}$  στην  $w_k$  προβάλλεται γραμμικά στο διάστημα  $[a_k, a_{k+1}]$ . Ο μετασχηματισμός του διαστήματος  $[a_k, a_{k+1}]$  στην αντίστοιχη ακμή υλοποιείται από την συνάρτηση,

$$f_{k-1}(x) = w_{k-1} + S \cdot (x - a_{k-1}) \cdot e^{j \cdot \arg(w_k - w_{k-1})} \quad (4.2)$$

Κάθε διάστημα  $[a_k, a_{k+1}]$  μετασχηματίζεται από μια ανάλογη συνάρτηση  $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ . Προκειμένου να κατασκευάσουμε έναν γενικό μετασχηματισμό ο οποίος προβάλλει την αλυσίδα στο διάστημα  $[0,1)$ , χρησιμοποιούμε τον παρακάτω τετραγωνικό παλμό του πραγματικού άξονα,

$$\psi_k = \begin{cases} 1 & , x \in [a_k, a_{k+1}) \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases} \quad (4.3)$$

Ο παλμός είναι μιγαδική συνάρτηση της μεταβλητής  $z = x + jy$  του κανονικού χώρου αλλά δεν θα γράφουμε το όρισμα για λόγους ευανάγνωσης. Κάθε συνάρτηση  $f_{k-1}$  πολλαπλασιάζεται με τον αντίστοιχο παλμό και το γινόμενο τους αθροίζεται ώστε να οριστεί ο γενικός μετασχηματισμός που μετασχηματίζει το  $[0,1)$  στην πολυγωνική αλυσίδα (Εξίσωση (4.4)),

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) \psi_k \Leftrightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} (w_k + S \cdot (x - a_k) \cdot e^{j \cdot \arg(w_{k+1} - w_k)}) \psi_k \quad (4.4)$$

Για την επέκταση στα διαστήματα  $(-\infty, 0)$ ,  $[1, +\infty)$  θεωρούμε μια επέκταση των ακμών του πολυγώνου. Για το διάστημα  $(-\infty, 0)$  θεωρούμε την ακμή που ξεκινάει από το άπειρο και καταλήγει στην κορυφή  $w_1$ . Η ακμή αυτή σχηματίζει γωνία  $\theta_{-\infty}$  με τον πραγματικό άξονα. Αντίστοιχα για το διάστημα  $[1, +\infty)$  θεωρούμε την ακμή που αρχίζει από την κορυφή  $w_n$  και ξεφεύγει στο άπειρο σχηματίζοντας γωνία  $\theta_{+\infty}$  με τον πραγματικό άξονα. Οι εξισώσεις που μετασχηματίζουν αυτούς τους κλάδους δίνονται από τις Εξ.(4.5),

$$\begin{aligned} f_{-\infty}(x) &= (w_1 + S \cdot (x - a_1) \cdot e^{j \cdot \theta_{-\infty}}) \psi_0, \\ f_{+\infty}(x) &= (w_n + S \cdot (x - a_n) \cdot e^{j \cdot \theta_{+\infty}}) \psi_n \end{aligned} \quad (4.5)$$

όπου  $\psi_0$  είναι ο ανοιχτός-από-αριστερά παλμός με μια κατερχόμενη άκρη στο  $x = a_1$  ενώ  $\psi_n$  είναι ο ανοιχτός-από-δεξιά παλμός με μια ανερχόμενη άκρη στο  $x = a_n$ . Συνδυάζοντας τις (4.4) και (4.5) λαμβάνουμε τον γενικό μετασχηματισμό,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} (w_k + S \cdot (x - a_k) \cdot e^{j \cdot \arg(w_{k+1} - w_k)}) \psi_k + f_{-\infty}(x) + f_{+\infty}(x) \quad (4.6)$$

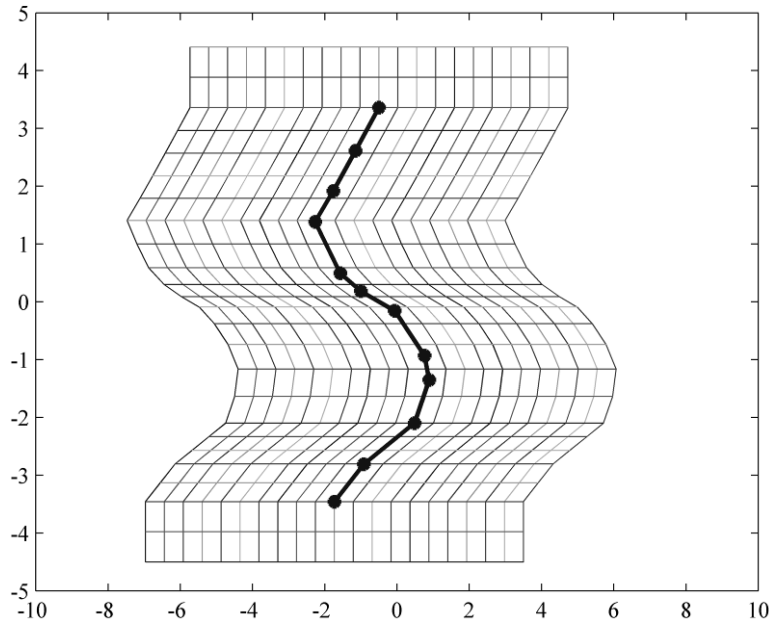
Χρησιμοποιώντας τις συμβάσεις:  $\theta_k = \arg(w_{k+1} - w_k)$ ,  $a_0 = -\infty$ ,  $a_{n+1} = +\infty$ ,  $w_0 \triangleq$  το σημείο στο άπειρο που αντιστοιχεί στο  $a_0$ ,  $w_{n+1} \triangleq$  το σημείο στο άπειρο που αντιστοιχεί στο  $a_{n+1}$ ,  $\theta_0 = \arg(w_1 - w_0) = \theta_{-\infty}$ ,  $\theta_n = \arg(w_{n+1} - w_n) = \theta_{+\infty}$ , η Εξ.(4.6) παίρνει τη μορφή,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (w_k + S \cdot (x - a_k) \cdot e^{j \cdot \theta_k}) \psi_k \quad (4.7)$$

όπου τα  $f_{-\infty}, f_{+\infty}$  αντιστοιχούν στα  $k=0$  και  $k=n$ . Για να επεκτείνουμε τον μετασχηματισμό σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, έστω  $z = x + jy$  μια μιγαδική μεταβλητή στον κανονικό χώρο. Θεωρούμε την απεικόνιση,

$$\Phi(z) = y \cdot S \cdot e^{j \cdot \theta_s} + f(x) \quad (4.8)$$

όπου  $\theta_s$  είναι μια γωνία στο  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Ταυτίζουμε τη μεταβλητή  $w = u + jv$  στο φυσικό χώρο με τον μετασχηματισμό  $\Phi(z)$ , δηλαδή  $w = u + jv = \Phi(z)$ . Ο μετασχηματισμός αυτός παράγει μια γραμμική μετατόπιση της πολυγωνικής γραμμής κατά τη διεύθυνση  $\theta_s$ . Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 55.



Σχήμα 55. Μετασχηματισμός μιας πολυγωνικής αλυσίδας (μπλε) όπου  $\theta_s = 0$

Όπως είναι φανερό από το Σχήμα 55, κάθε ακμή παράγει έναν αφινικό μετασχηματισμό ο οποίος ισχύει μόνο μέσα στην ταινία την οποία σχηματίζει καθώς μετατίθεται. Συνεπώς ο μετασχηματισμός  $\Phi(z)$  μπορεί να χαρακτηριστεί ως κατά-ταινίες αφινικός μετασχηματισμός. Μιλώντας αυστηρά ο  $\Phi(z)$  είναι ένας μη γραμμικός μετασχηματισμός. Αυτός ο τύπος επέκτασης του μετασχηματισμού στο επίπεδο μοιάζει αρκετά με τον τραπεζοειδή διαμερισμό (trapezoidal decomposition) ενός πολυγώνου. Στην περίπτωση αυτή όμως έχουμε δημιουργήσει ένα διαμερισμό κατά ταινίες. Ο διαμερισμός όμως αυτός δεν εγγυάται ότι η μετασχηματισμός θα είναι 1-1. Είναι εύκολα κατανοητό ότι αν κάποιος επιλέξει διαφορετικές γωνίες μετατόπισης αλλάζοντας τη γωνία  $\theta_s$ , την οποία και θα ονομάζουμε *γωνία μετατόπισης (shifting angle)* του μετασχηματισμού, οι ταινίες μπορεί να επικαλύπτονται. Συνεπώς ο μετασχηματισμός δεν θα είναι αντιστρέψιμος. Μια γωνία μετατόπισης η οποία παράγει έναν αντιστρέψιμο μετασχηματισμό δεν είναι πάντα εφικτή. Η ύπαρξη μιας τέτοιας γωνίας (ή συνόλου γωνιών) εξαρτάται από τη γεωμετρία της πολυγωνικής γραμμής. Η αντιστρεψιμότητα του μετασχηματισμού και η κλάση των πολυγωνικών αλυσίδων που την ευνοούν εξετάζεται στην επόμενη παράγραφο.

Μια πρώτη παρατήρηση σχετικά με την αντιστρεψιμότητα του μετασχηματισμού είναι ότι η Ιακωβιανή του δεν πρέπει να είναι μηδενική. Η Ιακωβιανή δίνεται από την εξίσωση,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^R(x)}{\partial x} & S \cos(\theta_s) \\ \frac{\partial f^I(x)}{\partial x} & S \sin(\theta_s) \end{vmatrix} = S^2 \sum_{k=0}^n \sin(\theta_s - \theta_k) \psi_k \quad (4.9)$$

όπου  $f^I, f^R$  είναι το πραγματικό και μιγαδικό μέρος του  $f(x)$  αντίστοιχα. Η Ιακωβιανή είναι μηδενική όταν,

$$\frac{\partial f^R(x)}{\partial x} \cdot \sin(\theta_s) - \frac{\partial f^I(x)}{\partial x} \cdot \cos(\theta_s) = 0, \quad (4.10)$$

ή αντίστοιχα,

$$\tan(\theta_s) = \frac{\partial f^I(x) / \partial x}{\partial f^R(x) / \partial x} = \frac{\Im\{f'(x)\}}{\Re\{f'(x)\}} \quad (4.11)$$

Μιας και  $\Im\{f'(x)\}/\Re\{f'(x)\}$  είναι η διεύθυνση της παραγώγου του  $f(x)$  κατά μήκος της πολυγωνικής γραμμής, η παραπάνω συνθήκη υπονοεί ότι η γωνία μετατόπισης του μετασχηματισμού δεν πρέπει να συμπίπτει με τις γωνίες των ακμών του πολυγώνου. Με άλλα λόγια, η αλυσίδα δεν πρέπει να μετατοπιστεί κατά μήκος κάποιας ακμής της. Αυτό φυσικά μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητό μιας και σε μια τέτοια περίπτωση η ταινία που αντιστοιχεί σ' αυτή την ακμή εκφυλίζεται σε μια γραμμή και όλα τα σημεία της γραμμής αυτής θα αντιστοιχούν σε όλη την ακμή. Πέρα από αυτά όμως, είναι δυνατή η περίπτωση να μην υπάρχει γωνία μετατόπισης που να οδηγεί σε αντιστρέψιμο μετασχηματισμό.

### 4.3. Αντίστροφος μετασχηματισμός

Όπως φαίνεται από την Εξ.(4.8) ο μετασχηματισμός  $\Phi(z)$  δεν είναι αναλυτικός οπότε και μια πρώτη προσπάθεια αντιστροφής του με την λύση ως προς  $z$ , αποτυγχάνει. Χειριζόμενοι τον  $\Phi(z)$  σαν μια απεικόνιση  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , μπορούμε να τον γράψουμε σε μορφή πινάκων ως εξής,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \cdot \sum_{k=0}^n \cos(\theta_k) \psi_k & S \cos(\theta_s) \\ S \cdot \sum_{k=0}^n \sin(\theta_k) \psi_k & S \sin(\theta_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n (w_k^R - S \cdot a_k \cdot \cos(\theta_k)) \psi_k \\ \sum_{k=0}^n (w_k^I - S \cdot a_k \cdot \sin(\theta_k)) \psi_k \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Σε μια πιο γενική μορφή, η Εξ.(4.12) είναι,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathbf{B} \quad (4.13)$$

Προκειμένου να λύσουμε την (4.12) ως προς  $[x, y]^T$  ο πίνακας  $\mathbf{A}$  δεν πρέπει να είναι ιδιάζων. Φυσικά η ορίζουσα του  $\mathbf{A}$  είναι η Ιακωβιανή του συστήματος. Δεδομένου ότι η Ιακωβιανή δεν είναι μηδενική, ο αντίστροφος πίνακας του συστήματος είναι,



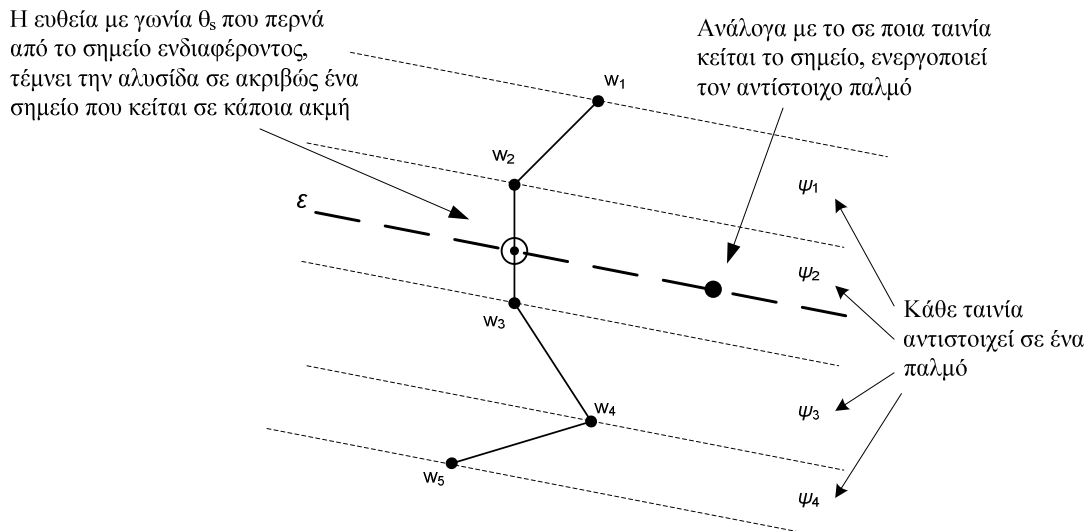
$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \sin(\theta_s) & -\cos(\theta_s) \\ -\sum_{k=0}^n \sin(\theta_k) \psi_k & \sum_{k=0}^n \cos(\theta_k) \psi_k \end{bmatrix}}{S \cdot \sum_{k=0}^n \sin(\theta_s - \theta_k) \psi_k} \quad (4.14)$$

και το αντίστροφο σύστημα είναι,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C/S - a_k \\ -C/S \end{bmatrix}, \quad C = \sum_{k=0}^n \frac{w_k^R \sin(\theta_k) - w_k^I \cos(\theta_k)}{\sin(\theta_s - \theta_k)} \psi_k \quad (4.15)$$

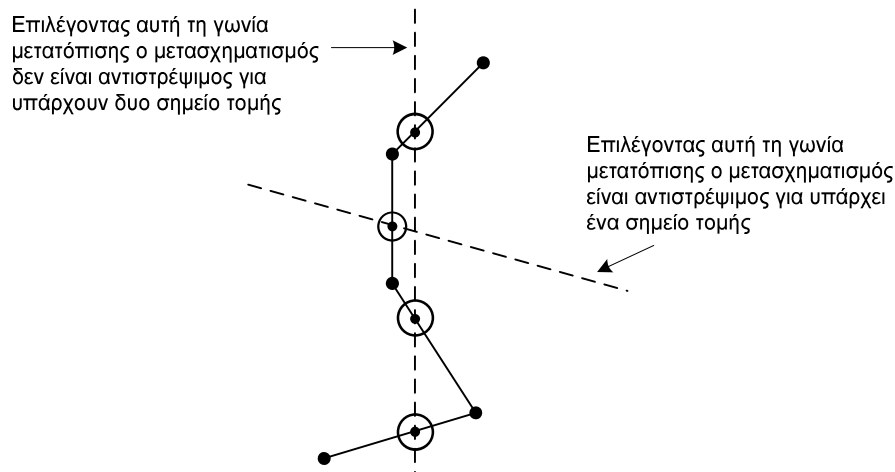
Μια πιο κοντινή ματιά στην (4.15) αναδεικνύει ένα λεπτό πρόβλημα της εξίσωσης. Οι τετραγωνικοί παλμοί  $\psi_k$  είναι συναρτήσεις της μεταβλητής  $x$  και συνεπώς η (4.15) δεν παρέχει μια πραγματική λύση στο πρόβλημα αντιστροφής του μετασχηματισμού. Χρειάζεται επιπλέον ένας τρόπος ώστε να βρίσκεται κάθε φορά ποιος παλμός είναι ενεργός. Αν κάτι τέτοιο δοθεί, τότε τα αθροίσματα της (4.15) εκφυλίζονται και οι εξίσωση παρέχει το αντίστροφο σύστημα. Ο ενεργός παλμός μπορεί να υπολογιστεί αλγοριθμικά διενεργώντας έναν έλεγχο σημείου-μέσα σε-ταινία.

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 56, αν το σημείο τομής της αλυσίδας και της ευθείας με γωνία  $\theta_s$  που περνά από το υπ' όψιν σημείο (ευθεία  $\varepsilon$ ) είναι γνωστό, τότε είναι γνωστή και η αντίστοιχη ακμή οπότε και μπορεί να προσδιοριστεί εύκολα ο ενεργός παλμός. Αν θεωρήσουμε μια κάθετη στην ευθεία μετατόπισης του μετασχηματισμού (η οποία έχει γωνία  $\theta_s$ ) και λάβουμε τις κάθετες προβολές των κορυφών  $\{w_i\}$  πάνω στην ευθεία αυτή, έστω  $\{\beta_i\}$ , καθώς επίσης και την προβολή του σημείου που ενδιαφερόμαστε, έστω  $\delta$ , τότε το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του διαστήματος  $(\beta_{i-1}, \beta_i)$  μέσα στο οποίο οποία κείται το  $\delta$ . Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό σαν *δυναδική αναζήτηση (binary search)* και εκτελείται βέλτιστα σε  $O(\log n)$ . Από το Σχήμα 56 μπορούμε να παρατηρήσουμε επίσης και κάτι σχετικό με την αντιστροφή του συστήματος. Αν η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει την πολυγωνική αλυσίδα σε περισσότερα από ένα σημεία, τότε αντιστοιχούν δυο παλμοί στο υπ' όψιν σημείο. Ως αποτέλεσμα, ο μετασχηματισμός δεν μπορεί ν' αντιστραφεί μιας και δεν είναι 1-1 απεικόνιση. Επιλέγοντας διαφορετικές γωνίες μετατόπισης, ο μετασχηματισμός μπορεί να γίνει 1-1, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 57.



Σχήμα 56. Εύρεση του ενεργού παλμού

Φυσικά, δεν επιτρέπουν όλες οι πολυγωνικές αλυσίδες έναν αντιστρέψιμο μετασχηματισμό. Μιας και κάθε σημείο του φυσικού χώρου πρέπει ν' αντιστοιχεί σε ακριβώς έναν παλμό, κάποιος μπορεί να πει ότι η ευθεία με γωνία  $\theta_s$  η οποία «σαρώνει» την αλυσίδα κατά διεύθυνση κάθετη στην  $\theta_s$ , πρέπει να συναντά την πολυγωνική αλυσίδα σε ακριβώς ένα σημείο. Αυτό υπονοεί κατ' ευθείαν ότι η αλυσίδα πρέπει να είναι μια *αυστηρά μονότονη πολυγωνική αλυσίδα (strictly monotone polygonal chain)*.



Σχήμα 57. Αντιστρεψιμότητα εξαρτώμενη από τη γωνία μετατόπισης

Σημειώνοντας την ένωση όλων σφηνών\* ως  $a(C)$ , οι Preparata και Supowit έχουν δείξει στο [56] ότι μια πολυγωνική αλυσίδα είναι μονότονη ως προς μια γραμμή  $\ell$  αν και μόνο αν η κάθετη στην  $\ell$  έχει πολική γωνία  $\theta \notin a(C)$ . Ελέγχοντας την αλυσίδα για μονοτονία μπορεί κάποιος να δει αν ο μετασχηματισμός μπορεί να γίνει αμφιρριπτικός ή όχι. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο μετασχηματισμός δεν γίνεται αμφιρριπτικός χρησιμοποιώντας την γωνία μονοτονίας σαν γωνία μετατόπισης,

\* Η σφήνα δυο διαδοχικών ακμών ενός πολυγώνου με γωνίες  $\theta_{i-1}, \theta_i$  είναι η διαφορά των γωνιών τους.

αλλά την διεύθυνση της καθέτου. Για παράδειγμα, αν η αλυσίδα είναι μονότονη ως προς μια γωνία  $\theta$ , ο μετασχηματισμός είναι αμφιρριπτικός ως προς τη γωνία μετατόπισης  $\theta + \pi/2$  (ή  $\theta - \pi/2$  ανάλογα με το ποια γωνία ανήκει στο  $[-\pi/2, \pi/2]$ ). Αν το πλάτος του  $a(C)$  είναι μεγαλύτερο από  $\pi$  τότε δεν υπάρχει διεύθυνση ως προς την οποία η αλυσίδα είναι μονότονη, και συνεπώς ο μετασχηματισμός αντιστρέψιμος. Συνεπάγεται ότι το μέγεθος του συνόλου των γωνιών μετατόπισης που οδηγούν σε αντιστρέψιμο μετασχηματισμό είναι  $\pi - a(C)$ , δηλαδή το σύνολο των γωνιών μετατόπισης και των σφηνών είναι συμπληρωματικά.

#### 4.4. Θεωρητική ανάλυση ελέγχου

Ο μετασχηματισμός  $\Phi(z)$  μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα νέο σύστημα συντεταγμένων ως προς την πολυγωνική καμπύλη. Σ' αυτή την παράγραφο θα διερευνήσουμε το πώς εφαρμόζεται ο  $\Phi(z)$  στον έλεγχο των κινητών ρομπότ. Συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε το μοντέλο του ρομποτικού αυτοκινήτου (car-like robot), που περιγράφεται από τις Εξ.(4.16), καθώς και το μοντέλο του Dubins (Εξ. (1.3)). Το ρομποτικό αυτοκίνητο δίνεται από το παρακάτω σύστημα εξισώσεων,

$$\Sigma: \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \kappa \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad (4.16)$$

Οι καταστάσεις του ορίζονται σε σχέση με το Σχήμα 1 ενώ οι είσοδοι  $u_1, u_2$  εκφράζουν την ταχύτητα και την παράγωγο της καμπυλότητας αντίστοιχα. Το μοντέλο αυτό είναι γραμμικό ως προς τις εισόδους (control-linear) και κυβερνάται από τον μη-ολονομικό περιορισμό της κίνησης χωρίς ολίσθηση (*rolling without slipping*) καθώς επίσης και από τον περιορισμό του άκαμπτου σώματος (*rigid body constraint*). Οι παραπάνω περιορισμοί εκφράζονται με την Πφαφιανή μορφή,

$$\begin{aligned} \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta &= 0 \\ \dot{x} \sin(\theta + \phi) - \dot{y} \cos(\theta + \phi) - \dot{\theta} l \cos \phi &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Από τις Εξ.(4.16) βλέπουμε ότι ο  $\Phi(z)$  μετασχηματίζει έναν υποχώρο του χώρου κατάστασης του συστήματος. Θα συμβολίσουμε όλες τις μεταβλητές κατάστασης στον φυσικό και στο κανονικό χώρο με τους δείκτες «p» και «c» αντίστοιχα. Τότε, το επίπεδο  $u - v$  (φυσικός χώρος) απεικονίζεται στο επίπεδο  $x - y$  (κανονικός χώρος), δηλαδή το διάνυσμα κατάστασης  $\mathbf{x} = [x_p, y_p, \theta_p, \kappa_p]^T$  μετασχηματίζεται στο διάνυσμα  $\mathbf{x}' = [x_c, y_c, \theta_p, \kappa_p]^T$ . Ο ομοιομορφισμός  $\Phi$  ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των δυο διανυσμάτων και το νέο σύστημα έχει τη μορφή,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\kappa}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{-1}S \sin(\theta_s - \theta_p) \\ -J^{-1}S \sum_{k=0}^n \sin(\theta_k - \theta_p) \psi_k \\ \kappa_p \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad (4.18)$$

Όπως φαίνεται, ο  $\Phi$  επηρεάζει μόνο έναν υποχώρο του χώρου κατάστασης και οι καταστάσεις  $\theta_p, \kappa_p$  μένουν ανεπηρέαστες. Το σύστημα αυτό δεν ικανοποιεί τον περιορισμό κίνησης χωρίς ολίσθηση μιας και γενικά θα είναι  $\dot{x}_c \sin \theta_p - \dot{y}_c \cos \theta_p \neq 0$ , δηλαδή το ρομπότ δεν κινείται εφαπτομενικά προς την διεύθυνση του. Αν συμπεριλάβουμε τη διεύθυνση και την καμπυλότητα στον μετασχηματισμό, μπορούμε τότε να τον επεκτείνουμε στις τέσσερις διαστάσεις και να γράψουμε τις εξισώσεις του συστήματος χρησιμοποιώντας καταστάσεις που βρίσκονται αποκλειστικά στον κανονικό χώρο. Έστω λοιπόν  $\tilde{x} = [x_c, y_c, \theta_c, \kappa_c]^T$  το διάνυσμα των κανονικών καταστάσεων και  $\Psi$  ο επεκταμένος μετασχηματισμός ο οποίος στέλνει τον κανονικό χώρο κατάστασης στον φυσικό χώρο κατάστασης, δηλαδή  $x = \Psi(\tilde{x})$ , τότε,

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = f(x, u) \\ \dot{x} = D\Psi(\tilde{x})\dot{\tilde{x}} \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{\tilde{x}} = D\Psi^{-1}(\tilde{x})f(\Psi(\tilde{x}), u) \quad (4.19)$$

όπου  $D\Psi$  είναι η Ιακωβιανή μήτρα του  $\Psi$ . Η νέα καταστατική εξίσωση μετάβασης είναι  $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, u)$  όπου η  $\tilde{f}(\tilde{x}, u)$  ισούται με το δεξιό μέλος της ισότητας (4.19). Τα δυο συστήματα λέγεται ότι βρίσκονται σε *ισοδυναμία κατάστασης (state-space equivalence)* [57]. Η είσοδος ελέγχου  $u(\cdot)$  του συστήματος δεν αλλάζει. Αυτό σημαίνει ότι ο  $\Psi$  εδραιώνει μια αντιστοιχία μεταξύ των διανυσματικών πεδίων κάτω από σταθερή είσοδο. Επιπλέον, ο  $\Psi$  διατηρεί τις τροχιές στις δυο πολλαπλότητες οι οποίες αντιστοιχούν στις ίδιες εισόδους  $u(\cdot) \in U$ , δηλαδή ισχύει,

$$\gamma_t^u(x_0) = \Psi(\tilde{\gamma}_t^u(\tilde{x}_0)) \quad (4.20)$$

για κάθε είσοδο  $u$  και χρόνο  $t$  για τα οποία υπάρχει η (4.20), όπου τα  $\tilde{\gamma}_t^u(\tilde{x}_0), \gamma_t^u(x_0)$  υποδηλώνουν τροχιές των δυο συστημάτων που αντιστοιχούν στην είσοδο  $u$  και περνούν από τα  $\tilde{x}_0, x_0$  για  $t=0$ . Επιστρέφοντας στις εξισώσεις (4.16) του αρχικού συστήματος, απλές πράξεις δείχνουν ότι το ισοδύναμο σύστημα κατάστασης κάτω από τον μετασχηματισμό  $\Psi$  είναι,

$$\tilde{\Sigma} : \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \\ \dot{\kappa}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{-1}\gamma^{-1} \cos \theta_c \\ S^{-1}\gamma^{-1} \sin \theta_c \\ S^{-1}\gamma^{-1}\kappa_c \\ 3S^{-1}\gamma^{-3}\kappa_c^2 \cos(2\theta_c) \sum_{k=0}^n \cos(\theta_k - \theta_s) \psi_k \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ S^3\gamma^3 J^{-1} \end{bmatrix} u_2 \quad (4.21)$$

Έστω ότι  $p_{ref}$  είναι η καμπύλη αναφοράς στο φυσικό χώρο (μια πολυγωνική αλυσίδα στο μιγαδικό επίπεδο). Θεωρούμε τα δύο συστήματα  $\Sigma$  και  $\tilde{\Sigma}$ . Έστω επίσης ότι  $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}, p_{ref}, t)$  είναι ένας νόμος ανάδρασης του  $\Sigma$  ο οποίος οδηγεί το ρομπότ πάνω στην καμπύλη (ένας ελεγκτής παρακολούθησης πορείας δηλαδή). Μιας και οι είσοδοι δεν μετασχηματίζονται από τον  $\Psi$ , ο ίδιος νόμος ελέγχου δρα και στο  $\tilde{\Sigma}$  χρησιμοποιώντας τις κανονικές μεταβλητές κατάστασης, δηλαδή,

$$\mathbf{u}_p \text{ στο κανονικό μοντέλο : } \mathbf{u}_p(\Psi(\tilde{\mathbf{x}}), \Phi(\tilde{p}_{ref}), t) = \mathbf{u}_p(\Psi(\tilde{\mathbf{x}}), \Phi(I_c), t) \quad (4.22)$$

Εδώ το  $I_c$  δηλώνει το διάστημα  $\{y_c = 0 / x_c \in [0, 1]\}$  του κανονικού επιπέδου. Αυτό σημαίνει ότι ο νόμος  $\mathbf{u}_p$  που δρα σαν ελεγκτής παρακολούθησης πορείας στο  $\Sigma$ , δρα σαν ελεγκτής παρακολούθησης ευθείας στο  $\tilde{\Sigma}$ . Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό μιας και λόγω της αμφιριπτικής σχέσης των τροχιών στους δυο χώρους κατάστασης, για κάθε τροχιά που προσεγγίζει την καμπύλη αναφοράς στον φυσικό χώρο, η εικόνας της στον κανονικό χώρο προσεγγίζει το ευθύγραμμο τμήμα  $I_c$  που βρίσκεται στον κανονικό πραγματικό άξονα. Από την άλλη όμως, αυτό σημαίνει ότι ένας *υπάρχων* ελεγκτής παρακολούθησης πορείας του  $\Sigma$  μετασχηματίζεται σε έναν ελεγκτή παρακολούθησης ευθείας του  $\tilde{\Sigma}$ , ενώ ζητάμε το αντίθετο· ένας ελεγκτής παρακολούθησης ευθείας να μετασχηματιστεί σε έναν ελεγκτή παρακολούθησης πορείας ώστε να έχουμε ανάγκη την σχεδίαση ελεγκτών παρακολούθησης πορείας σε ελεγκτές παρακολούθησης ευθείας. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι δυο νόμοι ελέγχου είναι ουσιαστικά οι ίδιοι, ασχέτως αν δρουν στο κανονικό ή στο φυσικό μοντέλο. Αυτό που αλλάζει είναι η εξάρτηση από τις κανονικές ή τις φυσικές καταστάσεις. Μιας και η είσοδος είναι αναλλοίωτη ως προς τον  $\Psi$ , έστω ότι ο  $\mathbf{u}_c(\tilde{\mathbf{x}}, I_c, t)$  είναι ένας ελεγκτής παρακολούθησης ευθείας στο  $\tilde{\Sigma}$ . Τότε,

$$\mathbf{u}_c \text{ στο φυσικό μοντέλο: } \mathbf{u}_c(\Psi^{-1}(x), \Phi^{-1}(p_{ref}), t) \quad (4.23)$$

είναι ο προκύπτων ελεγκτής πορείας του  $\Sigma$ . Αυτό όμως μεταθέτει το βάρος στη σχεδίαση ενός ελεγκτή παρακολούθησης ευθείας για το κανονικό σύστημα  $\tilde{\Sigma}$ . Θα δείξουμε τώρα πως μπορούμε ν' αποφύγουμε κάτι τέτοιο.

Όπως είναι κατανοητό, οι δυο είσοδοι του φυσικού συστήματος μπορούν να μετασχηματιστούν από τον  $\Psi$  μιας και η πρώτη είσοδος είναι η ταχύτητα ενώ η δεύτερη είναι η παράγωγος της καμπυλότητας. Συνεπώς μπορούμε να συμπεριλάβουμε τον μετασχηματισμό της εισόδου και να γενικεύσουμε τον  $\Psi$  στον  $\hat{\Psi} = (\Psi, \Omega)$ , όπου  $u = \Omega(\tilde{u}, \tilde{x}) = (F_1(\tilde{u}, \tilde{x}), F_2(\tilde{u}, \tilde{x}))$  είναι η απεικόνιση που στέλνει τις εισόδους από τον *κανονικό χώρο εισόδου* στον *φυσικό χώρο εισόδου*. Συνεπώς ο  $\Omega$  μπορεί να ιδωθεί σαν ένας μετασχηματισμός του χώρου εισόδου. Συγκεκριμένα, αν  $u_1 = v_p$ ,  $u_2 = \dot{k}_c$  τότε,

$$\begin{aligned}
u_1 &= F_1(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}) = S\gamma\tilde{u}_1, \\
u_2 &= F_2(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}) = \frac{\partial S^{-3}J\gamma^{-3}\kappa_c}{\partial \theta_c} \dot{\theta}_c + S^{-3}J\gamma^{-3}\dot{\kappa}_c \\
&= -3S^{-3}J\gamma^{-5}\kappa_c \cos(2\theta_c) \sum_{k=0}^n \cos(\theta_k - \theta_s) \psi_k \cdot \kappa_c \tilde{u}_1 + S^{-3}J\gamma^{-3}\tilde{u}_2 \\
&= -3S^{-3}J\gamma^{-5}\kappa_c^2 \cos(2\theta_c) \sum_{k=0}^n \cos(\theta_k - \theta_s) \psi_k \cdot \tilde{u}_1 + S^{-3}J\gamma^{-3}\tilde{u}_2
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Αντικαθιστώντας τα  $u_1, u_2$  στο  $\tilde{\Sigma}$  (Εξ.(4.21)) λαμβάνουμε το νέο σύστημα  $\hat{\Sigma}$ ,

$$\hat{\Sigma}: \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \\ \dot{\kappa}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_c \\ \sin \theta_c \\ \kappa_c \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{u}_2 \tag{4.25}$$

Τα δύο συστήματα  $\Sigma$  και  $\hat{\Sigma}$  λέγεται ότι βρίσκονται σε *ισοδυναμία ανάδρασης (feedback equivalence)* [58],[59]. Ο μετασχηματισμός  $\Omega$  της εισόδου είναι ουσιαστικά ένας μετασχηματισμός ανάδρασης του  $\hat{\Sigma}$  ο οποίος εισάγει τις καταστάσεις  $\tilde{x}$  πίσω στην είσοδο. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι  $\tilde{\mathbf{u}}_c(\tilde{x}, I, t)$  είναι ένας ελεγκτής παρακολούθησης ευθείας στον  $\hat{\Sigma}$ . Τότε, αυτός ο ελεγκτής μετασχηματίζεται σε ελεγκτή παρακολούθησης πορείας του  $\Sigma$  σύμφωνα με τις Εξ. (4.24), δηλαδή,

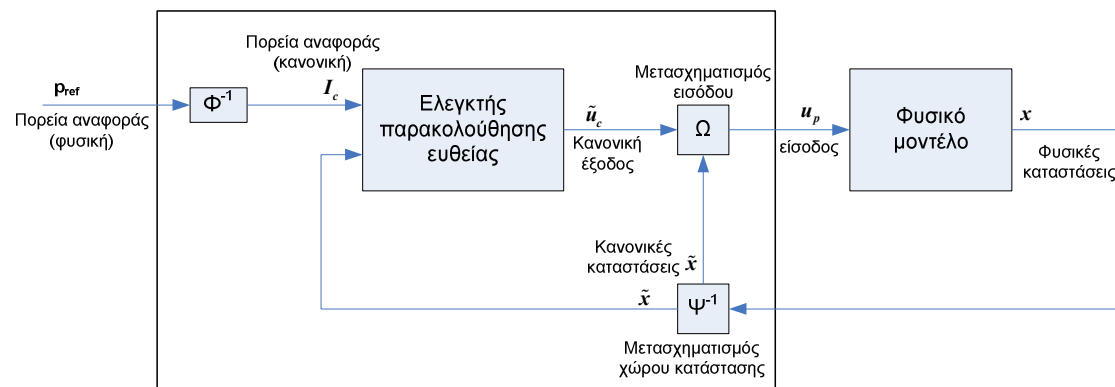
$$\mathbf{u}_p(\mathbf{x}, p_{ref}, t) = \Omega(\tilde{\mathbf{u}}_c(\tilde{x}, I, t), \tilde{x}) = \Omega(\tilde{\mathbf{u}}_c(\Psi^{-1}(\mathbf{x}), \Phi^{-1}(p_{ref}), t), \Psi^{-1}(\mathbf{x})) \tag{4.26}$$

Μια πιο προσεκτική ματιά στο σύστημα  $\hat{\Sigma}$  αποκαλύπτει ότι το σύστημα αυτό είναι στην πραγματικότητα το *ρομποτικό αυτοκίνητο* στον κανονικό χώρο. Με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός  $\hat{\Psi} = (\Psi, \Omega)$  διατηρεί τη μορφή του  $\Sigma$  και το ρομποτικό αυτοκίνητο του φυσικού χώρου απεικονίζεται σε ένα ρομποτικό αυτοκίνητο στον κανονικό χώρο. Αυτή είναι μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα του μετασχηματισμού μιας και ο ελεγκτής ευθείας  $\tilde{\mathbf{u}}_c(\tilde{x}, I, t)$  του  $\hat{\Sigma}$  είναι στην πραγματικότητα ένας ελεγκτής παρακολούθησης ευθείας για το μοντέλο του ρομποτικού αυτοκινήτου. Συνεπώς για να δημιουργήσουμε έναν ελεγκτή πορείας για το ρομποτικό αυτοκίνητο, το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να δημιουργήσουμε έναν ελεγκτή για ευθεία και μετά, χρησιμοποιώντας τις Εξ.(4.24), να τον αναγάγουμε σε ελεγκτή για γενικές αυστηρά μονότονες πολυγωνικές πορείες.

#### 4.5. Εφαρμογή στην παρακολούθηση πορείας

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε την εφαρμογή του μετασχηματισμού στην παρακολούθηση πορείας κινητών ρομπότ. Θα υποθέσουμε ότι η καμπύλη αναφοράς είναι γνωστή και ότι είναι μια αυστηρά μονότονη πολυγωνική αλυσίδα στο επίπεδο. Αυτός ο περιορισμός είναι σημαντικός μιας και για να εφαρμόσουμε

την τεχνική αυτή, η απεικόνιση πρέπει να είναι αντιστρέψιμη. Ακολουθώντας την ορολογία που έχουμε υιοθετήσει,  $\hat{\Psi} = (\Psi, \Omega)$  είναι ο μετασχηματισμός ισοδυναμίας ανάδρασης μεταξύ του φυσικού και κανονικού μοντέλου,  $\Psi$  είναι η απεικόνιση μεταξύ των δυο χώρων κατάστασης και  $\Omega$  είναι ο μετασχηματισμός εισόδου. Επιπλέον θεωρούμε ότι είναι γνωστός ένας ελεγκτής παρακολούθησης ευθείας για το μοντέλο. Ο ελεγκτής αυτός θα δρα πάνω στο κανονικό μοντέλο και θα συμβολίζεται με  $\tilde{u}_c$ . Το πραγματικό φυσικό σήμα ανάδρασης θα συμβολίζεται με  $u_p$  και δίνεται από την Εξ.(4.26). Βεβαίως το ρομπότ βρίσκεται μέσα στον φυσικό χώρο. Το διάγραμμα του ελέγχου παρουσιάζεται στο Σχήμα 58



Σχήμα 58. Διάγραμμα ελέγχου

Τα μπλοκ μέσα στο παραλληλόγραμμο μπορούν να θεωρηθούν σαν τον πραγματικό ελεγκτή πορείας. Ουσιαστικά υλοποιούν την Εξ.(4.26).

#### 4.5.1 Προσομίωση

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε δυο αποτελέσματα προσομοιώσεων χρησιμοποιώντας την παρούσα τεχνική. Οι προσομοιώσεις έγιναν στο Simulink και χρησιμοποιήθηκαν δυο ελεγκτές ευθείας που πάρθηκαν από τη βιβλιογραφία. Ο πρώτος ελεγκτής προορίζεται για το σύστημα του ρομποτικού αυτοκινήτου ενώ ο δεύτερος για το μοντέλο του Dubins. Πιο συγκεκριμένα, ο πρώτος ελεγκτής περιγράφεται στο [60] και δίνεται από την εξίσωση,

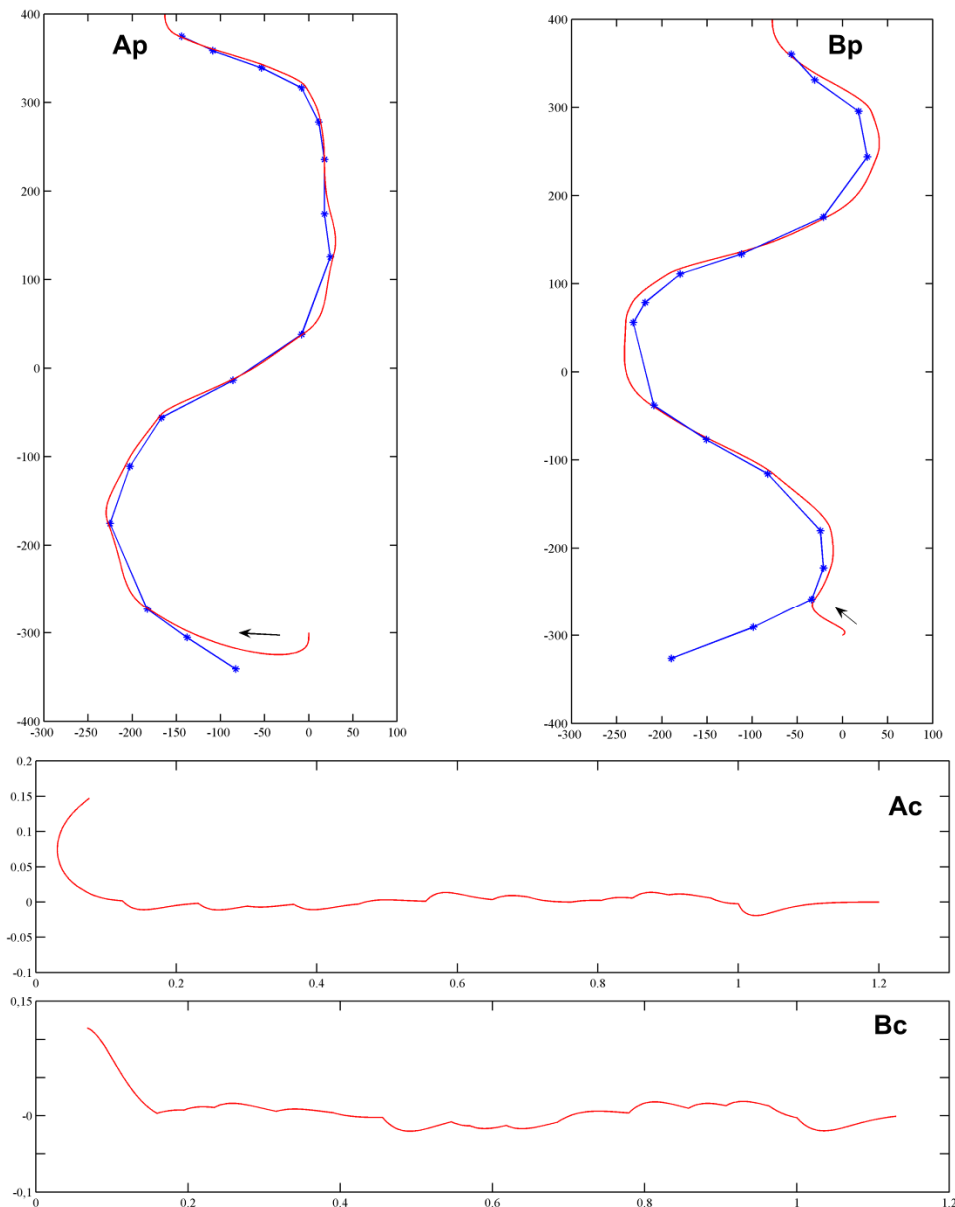
$$\frac{dk}{ds} = -3k\kappa - 3k^2\theta - k^3y \Rightarrow \dot{\kappa} = (-3k\kappa - 3k^2\theta - k^3y)v \quad (4.27)$$

θεωρώντας μια σταθερή ταχύτητα  $v$ . Η παράμετρος  $\sigma = 1/k$  ονομάζεται *ομαλότητα (smoothness)* και γενικά προσδιορίζει την ομαλότητα της καμπύλης ελέγχου. Ο δεύτερος ελεγκτής δίνεται από τους Kamga και Rachid στο [3] όπου θεωρούν το μοντέλο του Dubins και γραμμικοποιούν τη δυναμική σφάλματος. Ορίζουν μια νέα είσοδο ελέγχου  $u = \cos^3\theta \tan\phi/l = \kappa \cos^3\theta$  και κατασκευάζουν έναν γραμμικό ελεγκτή που σταθεροποιεί το σύστημα μέσω της τοποθέτησης πόλων. Δείχνουν ότι το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι ισοδύναμο με μια διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού και συσχετίζουν τα δυο κέρδη ανάδρασης  $f_1, f_2$  με το

συντελεστή απόσβεσης  $\zeta$  και τη φυσική συχνότητα  $\omega_n$ . Αν και οι ίδιοι θέτουν  $\zeta=1$  και οδηγούν το σύστημα σε κρίσιμη απόσβεση, εμείς έχουμε χρησιμοποιήσει  $\zeta>1$  παράγοντας υπέρ-αποσβεννύμενες λύσεις. Λύνοντας ως προς  $\kappa$ , την είσοδο του φυσικού συστήματος, ο νόμος ελέγχου δίνεται από την εξίσωση,

$$\kappa = f_1 \gamma \cos^3 \theta + f_2 \sin \theta \cos^2 \theta \quad (4.28)$$

Τα αποτελέσματα προσομοίωσης των δυο ελεγκτών παρουσιάζονται στο Σχήμα 59. Τα δυο πάνω σχήματα παρουσιάζουν τις τροχιές των ρομπότ στο φυσικό χώρο ενώ τα δυο κάτω, στον κανονικό. Και στις δυο περιπτώσεις η ταχύτητα θεωρείται σταθερή.



**Σχήμα 59.** Αποτελέσματα προσομοίωσης για τους δυο ελεγκτές παρακολούθησης ευθείας. Τα  $A_c$ ,  $A_p$  είναι οι πορείες της πρώτης προσομοίωσης στον φυσικό και κανονικό χώρο αντίστοιχα ενώ τα  $B_c$ ,  $B_p$  είναι για τη δεύτερη.



#### 4.6. Συμπεράσματα

Υπάρχουν αρκετά ενδιαφέροντα σχόλια τα οποία μπορούν να γίνουν αναφορικά με το μετασχηματισμό ισοδυναμίας ανάδρασης. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό καταστάσεων  $\Psi$  λαμβάνουμε το σύστημα εξισώσεων (4.21). Το σύστημα όμως αυτό μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω μορφή,

$$\tilde{\Sigma}: \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_c & 0 \\ \sin \theta_c & 0 \\ \kappa_c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{-1}\gamma^{-1} & 0 \\ 3S^{-1}\gamma^{-3}\kappa_c^2 \cos(2\theta_c) \sum_{k=0}^n \cos(\theta_k - \theta_s) \psi_k & S^3\gamma^3 J^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = f(\tilde{\mathbf{x}})M(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{u} \quad (4.29)$$

όπου  $f(\cdot)$  είναι η συνάρτηση μετάβασης του αρχικού συστήματος. Προφανώς ο πίνακας  $M(\tilde{\mathbf{x}})$  μπορεί να συγκεκριαστεί με την είσοδο  $\mathbf{u}$  και το γινόμενο  $M(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{u}$  μπορεί να θεωρηθεί σαν η νέα είσοδος  $\tilde{\mathbf{u}}$  του συστήματος, κάνοντας έτσι τον  $M(\tilde{\mathbf{x}})$  έναν μετασχηματισμό εισόδου του  $\tilde{\Sigma}$ . Σε συνδυασμό με την Εξ.(4.24), είναι φανερό ότι  $\mathbf{u} = \Omega(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}) = M^{-1}(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{\mathbf{u}}$  και  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = f(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{\mathbf{u}}$ . Συνεπώς, η επίδραση της αλλαγής συντεταγμένων του χώρου κατάστασης στη συνάρτηση μετάβασης του αρχικού συστήματος μπορεί ν' αντισταθμιστεί από έναν κατάλληλο μετασχηματισμό εισόδου, αφήνοντας ουσιαστικά ανεπηρέαστες τις εξισώσεις του συστήματος. Πράγματι, η ιδιότητα αυτή είναι που καθιστά δυνατή την αναγωγή της παρακολούθησης πορείας σε παρακολούθηση ευθείας με το να επιτρέπει σε κάποιον να χρησιμοποιεί ελεγκτές παρακολούθησης ευθείας για το ίδιο σύστημα. Το σημείο αυτό χρήζει περισσότερης προσοχής. Υπάρχει επίσης και άλλος ένας μετασχηματισμός ο οποίος απεικονίζει τον πραγματικό άξονα πάνω στην καμπύλη. Αυτός είναι ο μετασχηματισμός  $(x, y) \rightarrow (s, d)$  που περιγράφεται από ένα κινούμενο πλαίσιο Frenet πάνω στην καμπύλη. Ουσιαστικά ορίζει ένα σύστημα συντεταγμένων του οποίου άξονες είναι η εφαπτομένη του εκάστοτε σημείου της καμπύλης και η αντίστοιχη κάθετος. Προφανώς, η καμπύλη απεικονίζεται στον άξονα "s" μιας και έχει μηδενική συντεταγμένη "d".

Λόγω των ειδικών περιορισμών που πρέπει να τεθούν στην καμπύλη αναφοράς, ο μετασχηματισμός αυτός είναι τοπικός και η απόσταση του ρομπότ από την καμπύλη πρέπει να διατηρείται πάντα κάτω από μια τιμή. Αν εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός αυτός στο μοντέλο (4.16), τότε λαμβάνουμε τις λεγόμενες *συντεταγμένες πορείας (path coordinates)*,

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{d} \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_p}{1 - d\kappa(s)} \\ \sin \theta_p \\ \frac{\tan \varphi}{l} - \frac{\kappa(s) \cos \theta_p}{1 - d\kappa(s)} \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad (4.30)$$

όπου  $\theta_p$  είναι η σχετική διεύθυνση του ρομπότ ως προς την εφαπτομένη του κοντινότερου σημείου. Είναι εμφανές ότι το σύστημα (4.30) είναι πιο πολύπλοκο

από το αρχικό. Ο στόχος της παρακολούθησης πορείας είναι να σταθεροποιήσει την  $d$  στο μηδέν. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι αν η καμπύλη αναφοράς είναι ευθεία ( $\kappa(s)=0$ ) τότε το σύστημα (4.30) μεταπίπτει στο αρχικό και οι συντεταγμένες  $(s,d)$  είναι ουσιαστικά οι  $(x,y)$ . Αυτό υποδεικνύει ότι μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει τον κατά-ταίνιες αφινικό μετασχηματισμό για να «ισιώσει» την πορεία αναφοράς, και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσει τους διάφορους ελεγκτές που έχουν κατασκευαστεί με βάση το σύστημα (4.30) για την παρακολούθηση πορείας. Φυσικά, οι ελεγκτές αυτοί θα είναι πιο απλοί μιας και η καμπυλότητα στην Εξ.(4.30) θα έχει αντικατασταθεί από το μηδέν. Αυτό μας δείχνει και μια άλλη χρήση του παρόντος μετασχηματισμού, δηλαδή την απλοποίηση των ήδη υπαρχόντων ελεγκτών.

Όπως αναφέρθηκε πριν, το «ίσιωμα» της πορείας αναφοράς ανάγει την σχεδίαση ελεγκτών παρακολούθησης πορείας σε ελεγκτές παρακολούθησης ευθείας. Είναι όμως προφανές ότι ένας ελεγκτής πορείας μπορεί εύκολα να παρακολουθήσει μια ευθεία. Συνεπώς, θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει έναν ελεγκτή πορείας για να παρακολουθήσει την ευθεία στον κανονικό χώρο. Η διαφορά μεταξύ ελεγκτών πορείας και ελεγκτών ευθείας είναι η εξάρτηση τους από διάφορα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της υπό παρακολούθηση πορείας. Για παράδειγμα, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, οι διάφοροι ελεγκτές που χρησιμοποιούν τις Εξ. (4.30) και προσπαθούν να μηδενίσουν την απόσταση  $d$ , χρησιμοποιούν εγγενώς και την καμπυλότητα  $\kappa(s)$  της καμπύλης αναφοράς. Αν τους ζητηθεί να παρακολουθήσουν μια ευθεία γραμμή, τότε μπορούν ν' απλουστευτούν αντικαθιστώντας την καμπυλότητα στις (4.30) με το μηδέν. Άλλα παραδείγματα ελεγκτών είναι οι ασαφείς ελεγκτές. Για παράδειγμα, οι Baltes και Otte παρουσίασαν στο [4] έναν ασαφή ελεγκτή που χρησιμοποιεί την καμπυλότητα της πορείας μαζί με την απόσταση και το σφάλμα διεύθυνσης για να βγάλει σαν έξοδο την εντολή οδήγησης. Έχουν διαμερίσει την καμπυλότητα σε τρία ασαφή σύνολα, παράγοντας ένα σύνολο  $9 \times 5 \times 3 = 135$  κανόνων. Στην περίπτωση όμως της ευθείας γραμμής, η καμπυλότητα είναι συνεχώς μηδενική οπότε και η ασαφής είσοδος της καμπυλότητας είναι πλέον άχρηστη. Ως αποτέλεσμα, οι ασαφείς κανόνες μειώνονται στους 45.

## **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Μετασχηματισμός μήκους, γωνίας, ταχύτητας και καμπυλότητας**

Στο παράρτημα αυτό θα παρουσιάσουμε τις αποδείξεις για το μετασχηματισμό του μήκους, της γωνίας, της ταχύτητας και της καμπυλότητας κάτω από τον κατά-ταίνιες αφινικό μετασχηματισμό. Οι εξισώσεις αυτές ορίζουν τις εξισώσεις μετασχηματισμού των καταστάσεων και της εισόδου του μοντέλου του ρομποτικού αυτοκινήτου. Όλες οι ποσότητες που αναφέρονται στον φυσικό χώρο θα συμβολίζονται με έναν δείκτη  $p$  ενώ αυτές που αναφέρονται στον κανονικό χώρο, με δείκτη  $c$ .

- Γωνία

$$\left. \begin{aligned} dy_p &= S \sum_{\kappa=0}^n \sin \theta_{\kappa} \psi_{\kappa} dx_c + S \sin \theta_s dy_c \\ dx_p &= S \sum_{\kappa=0}^n \cos \theta_{\kappa} \psi_{\kappa} dx_c + S \cos \theta_s dy_c \end{aligned} \right\} \tan \theta_p = \frac{dy_p}{dx_p} = \frac{\sum_{\kappa=0}^n \sin \theta_{\kappa} \psi_{\kappa} + \sin \theta_s \frac{dy_c}{dx_c}}{\sum_{\kappa=0}^n \cos \theta_{\kappa} \psi_{\kappa} + \cos \theta_s \frac{dy_c}{dx_c}} \Rightarrow \quad (4.31)$$

$$\tan \theta_p = \frac{\sum_{\kappa=0}^n \sin \theta_{\kappa} \psi_{\kappa} + \sin \theta_s \tan \theta_c}{\sum_{\kappa=0}^n \cos \theta_{\kappa} \psi_{\kappa} + \cos \theta_s \tan \theta_c} \Rightarrow \theta_p = \tan^{-1} \left( \frac{\sum_{\kappa=0}^n \sin \theta_{\kappa} \psi_{\kappa} + \sin \theta_s \tan \theta_c}{\sum_{\kappa=0}^n \cos \theta_{\kappa} \psi_{\kappa} + \cos \theta_s \tan \theta_c} \right)$$

Η Εξ.(4.31) δίνει την γωνία στο φυσικό χώρο ( $\theta_p$ ) σε σχέση με τη γωνία στον κανονικό χώρο ( $\theta_c$ ). Λύνοντας ως προς  $\theta_c$  έχουμε,

$$\theta_c = \tan^{-1} \left( \frac{\tan(\theta_p) \sum_{\kappa=0}^n \cos \theta_{\kappa} \psi_{\kappa} - \sum_{\kappa=0}^n \sin \theta_{\kappa} \psi_{\kappa}}{\sin(\theta_s) - \tan(\theta_p) \cos(\theta_s)} \right) \quad (4.32)$$

Συνεπώς, αν το ρομπότ έχει διεύθυνση  $\theta_p$  στο φυσικό χώρο, μπορούμε μέσω της (4.32) να υπολογίσουμε τη διεύθυνση του στον κανονικό χώρο. Παραγωγίζοντας την (4.32) λαμβάνουμε,

$$\frac{d\theta_p}{d\theta_c} = \frac{\sum_{\kappa=0}^n \sin(\theta_s - \theta_{\kappa}) \psi_{\kappa}}{1 + \sin 2\theta_c \sum_{\kappa=0}^n \cos(\theta_s - \theta_{\kappa}) \psi_{\kappa}} = \sum_{\kappa=0}^n \sin(\theta_s - \theta_{\kappa}) \psi_{\kappa} \cdot \gamma^{-2} = S^{-2} J \gamma^{-2} \quad (4.33)$$

όπου,

$$\gamma = \gamma(\theta_c) = \sqrt{1 + \sin 2\theta_c \sum_{\kappa=0}^n \cos(\theta_s - \theta_{\kappa}) \psi_{\kappa}} \quad (4.34)$$

και  $J = S^2 \cdot \sum_{\kappa=0}^n \sin(\theta_s - \theta_{\kappa}) \psi_{\kappa}$  είναι η Ιακωβιανή του  $\Phi$

- Μήκος

Για το διαφορικό μήκος έχουμε,

$$ds_p^2 = dx_p^2 + dy_p^2 = S^2 (dx_c^2 + dy_c^2 + 2dx_c dy_c \sum_{\kappa=0}^n \cos(\theta_{\kappa} - \theta_s) \psi_{\kappa}) \quad (4.35)$$

Μιας και  $ds_c^2 = dx_c^2 + dy_c^2$ , λαμβάνοντας υπόψη τις (4.35) και (4.31), έχουμε,

$$\begin{aligned}
ds_p^2 &= S^2 (ds_c^2 + 2dx_c dy_c \sum_{\kappa=0}^n \cos(\theta_\kappa - \theta_s) \psi_\kappa) \frac{ds_c^2}{ds_c^2} = S^2 (1 + 2 \frac{dx_c dy_c}{dx_c^2 + dy_c^2} \sum_{\kappa=0}^n \cos(\theta_\kappa - \theta_s) \psi_\kappa) ds_c^2 \Rightarrow \\
ds_p^2 &= S^2 (1 + 2 \frac{1}{\frac{dx_c}{dy_c} + \frac{dy_c}{dx_c}} \sum_{\kappa=0}^n \cos(\theta_\kappa - \theta_s) \psi_\kappa) ds_c^2 = S^2 (1 + 2 \frac{1}{\frac{1}{\tan \theta_c} + \tan \theta_c} \sum_{\kappa=0}^n \cos(\theta_\kappa - \theta_s) \psi_\kappa) ds_c^2 \Rightarrow \\
ds_p^2 &= S^2 (1 + 2 \frac{\tan \theta_c}{1 + \tan^2 \theta_c} \sum_{\kappa=0}^n \cos(\theta_\kappa - \theta_s) \psi_\kappa) ds_c^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow ds_p^2 = (1 + \sin 2\theta_c \sum_{\kappa=0}^n \cos(\theta_\kappa - \theta_s) \psi_\kappa) S^2 ds_c^2 \\
\frac{ds_p}{ds_c} &= S \sqrt{1 + \sin 2\theta_c \sum_{\kappa=0}^n \cos(\theta_\kappa - \theta_s) \psi_\kappa} = S \cdot \gamma \tag{4.36}
\end{aligned}$$

- **Καμπυλότητα**

Η καμπυλότητα ορίζεται σαν  $\kappa = d\theta / ds$ , οπότε από τις (4.36), (4.33) έχουμε,

$$\frac{\kappa_p}{\kappa_c} = S^{-3} J \gamma^{-3} \tag{4.37}$$

- **Ταχύτητα**

Από την (4.36) έχουμε,

$$\frac{ds_p}{ds_c} = S \cdot \gamma \Rightarrow \frac{ds_p/dt}{ds_c/dt} = S \cdot \gamma \Rightarrow \frac{v_p}{v_c} = S \cdot \gamma \tag{4.38}$$

Δηλαδή η ταχύτητα μετασχηματίζεται όπως και το διαφορικό μήκος.

## Κεφάλαιο 5

---

### Κρουστικά φαινόμενα και διακοπτικός έλεγχος στην παρακολούθηση πορείας

#### 5.1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια ανάλυση των κρουστικών φαινομένων (impulsive effects) τα οποία εμφανίζονται κατά την παρακολούθηση πολυγωνικών πορειών, καθώς και την εφαρμογή του κατά-ταινίες αφινικού μετασχηματισμού (SWAM) που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Πιο συγκεκριμένα, θα δούμε το πώς ο μετασχηματισμός αυτός οδηγεί σε σημαντική απλοποίηση της βάσης κανόνων του ασαφούς ελεγκτή που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2 όπως επίσης και τη μετατροπή του σε διακοπτικό ασαφή ελεγκτή (switching fuzzy controller).

Όπως έχουμε αναφέρει, σε μια τυπική περίπτωση ελέγχου πορείας, η πορεία παράγεται από τον αλγόριθμο σχεδίασης (planner) ο οποίος υπολογίζει μια εφικτή γεωμετρική καμπύλη μεταξύ του σημείου «αρχής» και του σημείου «τέλους». Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να λάβει υπόψη και ειδικούς περιορισμούς για την παραγωγή της καμπύλης, όπως η ελάχιστη απόσταση από εμπόδια, κινηματικούς και δυναμικούς περιορισμούς, ολικό μήκος καμπύλης κλπ. Στη συνέχεια η πορεία παρουσιάζεται στον ελεγκτή παρακολούθησης ο οποίος καλείται να την ακολουθήσει. Φυσικά, ο σκοπός του ελεγκτή είναι να οδηγήσει το robot πάνω στην προδιαγεγραμμένη πορεία, αντισταθμίζοντας τις διάφορες διαταραχές όπως π.χ. την ολίσθηση (γλίστρημα) των τροχών, το ανώμαλο τερέν, την ασάφεια στον προσδιορισμό της θέσης του robot (localization) κλπ. Η μελέτη του προβλήματος της παρακολούθησης πορείας έχει παραγάγει ένα μεγάλο όγκο ερευνητικής βιβλιογραφίας η οποία εκτείνεται από κλασσικές τεχνικές ελέγχου [3],[60],[61] σε

μη γραμμικές μεθοδολογίες [6],[20],[34],[40],[62] σε ευφυείς στρατηγικές ελέγχου [4],[5],[8],[12],[13],[15],[18],[19],[21],[22],[24],[27-29],[31-33],[35],[41],[42],[49],[63],[64]. Οι ελεγκτές ασαφούς λογικής έχουν χρησιμοποιηθεί από πολλούς ερευνητές μιας και η ασαφής λογική παρέχει έναν πιο διαισθητικό τρόπο ανάλυσης και διατύπωσης των δράσεων ελέγχου [4],[5],[8],[13],[15],[19],[21],[22],[28],[31],[33],[35],[49],[63],[64], ο οποίος παρακάμπτει τον μεγαλύτερο όγκο της μαθηματικής ανάλυσης που χρειάζεται ένα τόσο μη γραμμικό πρόβλημα όπως η παρακολούθηση πορείας. Επίσης, οι ασαφείς ελεγκτές μπορεί να είναι λιγότερο πολύπλοκοι στην υλοποίηση τους και παρέχουν μεγαλύτερη ανοχή στον θόρυβο και στην απροσδιοριστία των παραμέτρων του συστήματος.

Οι περισσότεροι ελεγκτές παρακολούθησης πορείας έχουν σαν στρατηγική την παρακολούθηση ενός σημείου πάνω στην πορεία. Ως προς αυτό λοιπόν το σημείο, μπορούν να ορισθούν σήματα σφάλματος και το πρόβλημα μπορεί να αναδιατυπωθεί σαν ένα πρόβλημα σταθεροποίησης (stabilization) της δυναμικής σφάλματος (error dynamics). Συγκεκριμένα, έστω ότι  $x_r(t) \in \mathbb{R}^n$  είναι η πορεία αναφοράς,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  είναι το διάνυσμα κατάστασης του ρομπότ και  $e(t) \in \mathbb{R}^k$  είναι το διάνυσμα σφάλματος. Επίσης, αν  $S: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  είναι μια συνάρτηση επιλογής (selection function), και  $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $d(0,0) = 0$  είναι μια κατάλληλη συνάρτηση απόστασης (distance function), μπορούμε να γράψουμε,

$$x_r^p(t) = S(x(t), x_r(t)) \quad , \quad x_r^p \in x_r \quad (5.1)$$

και

$$e = d(x(t), x_r^p(t)) \quad (5.2)$$

Η δυναμική σφάλματος μπορεί συνεπώς να οριστεί ως,

$$\dot{e} = h(e, u, t) \quad (5.3)$$

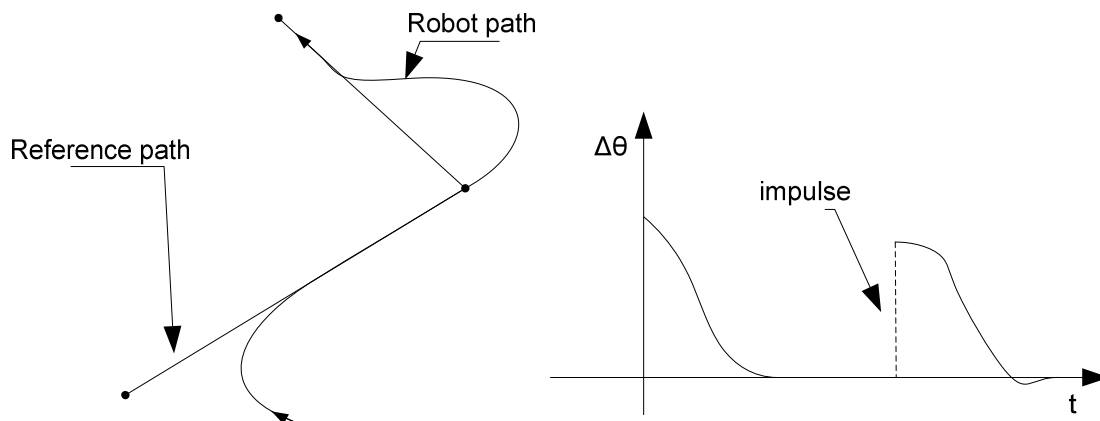
όπου  $u \in \mathbb{R}^m$  είναι η είσοδος ελέγχου και  $h$  είναι μια συνάρτηση η οποία παράγεται από την Εξίσωση (5.3) και την εξίσωση του συστήματος. Η συνάρτηση επιλογής περιέχει το μηχανισμό της επιλογής του σημείου παρακολούθησης  $x_r^p(t)$  πάνω στην πορεία αναφοράς. Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $S$  μπορεί να εκφράζει την ελάχιστη Ευκλείδεια απόσταση του robot από την πορεία αναφοράς. Σε μια τέτοια περίπτωση το σημείο παρακολούθησης είναι το κοντινότερο σημείο της πορείας ως προς το robot. Πρέπει να σημειωθεί ότι η συνάρτηση επιλογής μπορεί να μην είναι διαφορίσιμη ή ακόμα και συνεχής.

Στην παραπάνω διατύπωση του προβλήματος της παρακολούθησης ο στόχος είναι να βρεθεί ένας νόμος ελέγχου  $u = u(e, t)$  ο οποίος εγγυάται ότι η αρχή της Εξίσωσης (5.3) είναι ένα τοπικά (ή ολικά) ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας. Αν και γενικά επιδιώκεται η ασυμπτωτική ή και εκθετική ευστάθεια, σε πολλές πρακτικές εφαρμογές κάτι τέτοιο δεν μπορεί ν' επιτευχθεί. Τούτο μπορεί να συμβεί όταν η πορεία αναφοράς δεν είναι μια εφικτή τροχιά του robot. Όπως έχει αναφερθεί, αρκετοί ερευνητές χρησιμοποιούν πολυγωνικές πορείες αναφοράς οι οποίες παρουσιάζουν ασυνέχεια της παραγώγου στις κορυφές

της πολυγωνικής γραμμής. Τέτοιες πορείες είναι ευκολότερες στο χειρισμό τους από τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές και παρουσιάζουν μικρότερη πολυπλοκότητα σε πραγματικές υλοποιήσεις τεχνικών ελέγχου.

## 5.2. Διακοπτικά και κρουστικά φαινόμενα

Είναι φανερό ότι για ρομποτικά οχήματα που παρουσιάζουν φραγμούς στην καμπυλότητα τους (όπως αυτό του Dubins Car ή του Car-like robot), οι πολυγωνικές πορείες δεν είναι λύσεις του συστήματος αλλά είναι κατά τμήματα λύσεις. Συνεπώς η δυναμική σφάλματος παρουσιάζει κρουστικά φαινόμενα (impulsive effects) τα οποία διαταράσσουν τη λύση του σφάλματος από το σημείο ισορροπίας της. Πιο αναλυτικά, τα κρουστικά φαινόμενα παρουσιάζονται στο σφάλμα διεύθυνσης το οποίο περιγράφει την απόκλιση της διεύθυνσης του robot από τη διεύθυνση του σημείου παρακολούθησης. Όταν το σημείο παρακολούθησης αλλάζει κλάδο (ακμή), η διεύθυνση του «πηδάει» εισάγοντας έτσι μια ώση στο σήμα σφάλματος.



Σχήμα 60. Κρουστικά φαινόμενα σε πολυγωνικές πορείες.

Η επακόλουθη δυναμική σφάλματος είναι ένα διακοπτικό κρουστικό σύστημα (switched impulsive system) με επιφάνειες μεταγωγής εξαρτώμενες από τις καταστάσεις του συστήματος, δηλαδή ο χάρτης επαναφοράς (reset map)  $M$  είναι ένα υποσύνολο του χώρου κατάστασης καθώς επίσης και χρονικά αναλλοίωτος. Οι εξισώσεις του συστήματος έχουν τη μορφή,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)), & x(t) &\notin M \\ x(t^+) &= I(x(t)), & x(t) &\in M \end{aligned} \quad (5.4)$$

όπου  $I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι ο νόμος επαναφοράς (reset law). Ο χάρτης επαναφοράς  $M$  ορίζεται από τη γεωμετρία της πορείας αναφοράς και από τη συγκεκριμένη συνάρτηση επιλογής που χρησιμοποιείται. Οι Εξισώσεις (5.4) μπορούν να επαναδιατυπωθούν ώστε να περιλαμβάνουν κινούμενες χρονικές στιγμές των κρουστικών αλμάτων. Αν το σύστημα περνάει από τις επιφάνειες μεταγωγής τις χρονικές στιγμές  $\tau_i$ , το διακριτό σύνολο  $E = \{\tau_1, \tau_2, \dots : \tau_1 < \tau_2 < \dots\} \subset \mathbb{R}^+$  συμβολίζει τις στιγμές των αλμάτων και οι Εξ. (5.4) λαμβάνουν τη μορφή,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)), & t \notin E \\ x(t^+) &= I_k(x(t)), & t \in E\end{aligned}\quad (5.5)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι χρονικές στιγμές εξαρτώνται από την κίνηση του συστήματος μέσα στο χώρο κατάστασης, οπότε και το σύνολο  $E$  δεν είναι προκαθορισμένο.

Μια άλλη επίπτωση της εμφάνισης κρουστικών αλμάτων στον έλεγχο της παρακολούθησης πορείας, είναι το γεγονός ότι σε μη-ολονομικά μοντέλα όπως το Dubins Car, το σημείο μηδέν της δυναμικής σφάλματος δεν είναι ένα σημείο ισορροπίας. Μια ποιοτική αντίληψη του γεγονότος αυτού μπορεί να ληφθεί από την επισκόπηση στο Σχήμα 60. Αν στο σύστημα επιτραπεί να παρακολουθήσει «τέλεια» (χωρίς σφάλμα) κάθε ακμή, οδηγώντας τη λύση του σφάλματος στο μηδέν, τότε όταν το robot αλλάζει ακμή η ώση θα διαταράσσει το σφάλμα διεύθυνσης. Συνεπώς η αρχή του συστήματος σφάλματος δεν είναι ένα πραγματικά αναλλοίωτο σύνολο και συνεπώς δεν μπορεί να είναι και σημείο ισορροπίας (για βασικές έννοιες πάνω στα κρουστικά συστήματα δείτε το [65]). Ποσοτικά, αυτό μπορεί να εξαχθεί από το γεγονός ότι  $f(0) = 0$  αλλά  $I_k(0) \neq 0$ , όπως θα δειχθεί στη συνέχεια.

Επιστρέφοντας στο θέμα του ελέγχου και του μετασχηματισμού SWAM, για την ανάλυση και την προσομοίωση θα θεωρήσουμε τον μοντέλο του Dubins που περιγράφεται από τις εξισώσεις,

$$\Sigma: \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_p \cos \theta_p \\ v_p \sin \theta_p \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_p \end{bmatrix} \kappa_p \quad (5.6)$$

Ως γνωστόν, και σύμφωνα με το προηγούμενο κεφάλαιο, ο δείκτης «p» υποδηλώνει ποσότητες (καταστάσεις, εισόδους) στο φυσικό χώρο. Ο μετασχηματισμός ο οποίος μετασχηματίζει το κανονικό διάνυσμα καταστάσεων στο φυσικό διάνυσμα καταστάσεων, δηλαδή ο μετασχηματισμό  $\Psi$  (Εξ.(4.19)), ορίζεται από τις παρακάτω εξισώσεις,

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ \theta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_c S \cos \theta_s + \text{Re}(f(x_c)) \\ y_c S \sin \theta_s + \text{Im}(f(x_c)) \\ \tan^{-1} \left( \frac{\sum_{\kappa=0}^n \sin \theta_\kappa \psi_\kappa + \sin \theta_s \tan \theta_c}{\sum_{\kappa=0}^n \cos \theta_\kappa \psi_\kappa + \cos \theta_s \tan \theta_c} \right) \end{bmatrix} = \Psi(\tilde{x}) \quad (5.7)$$

και οι νέες εξισώσεις του συστήματος είναι,

$$\tilde{\Sigma}: \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_c \cos \theta_c \\ v_c \sin \theta_c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S^3 \gamma^3 J^{-1} v_c \end{bmatrix} \kappa_p \quad (5.8)$$



όπου το  $J$  υποδηλώνει την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού SWAM, δηλαδή του  $\Phi(z = x_c + jy_c)$ , και  $\gamma = \sqrt{1 + \sin 2\theta_c \sum_{\kappa=0}^n \cos(\theta_s - \theta_\kappa) \psi_\kappa}$ . Ο δείκτης «c» υποδηλώνει ποσότητες στον κανονικό χώρο. Στο μοντέλο του Dubins, η είσοδος του συστήματος είναι μόνο η καμπυλότητα  $\kappa_p$ , δηλαδή είναι βαθμωτή, όποτε επεκτείνουμε την απεικόνιση  $\Psi$  στην  $\tilde{\Psi} = (\Psi, \Omega)$ , όπου  $\Omega$  είναι ο μετασχηματισμός εισόδου,

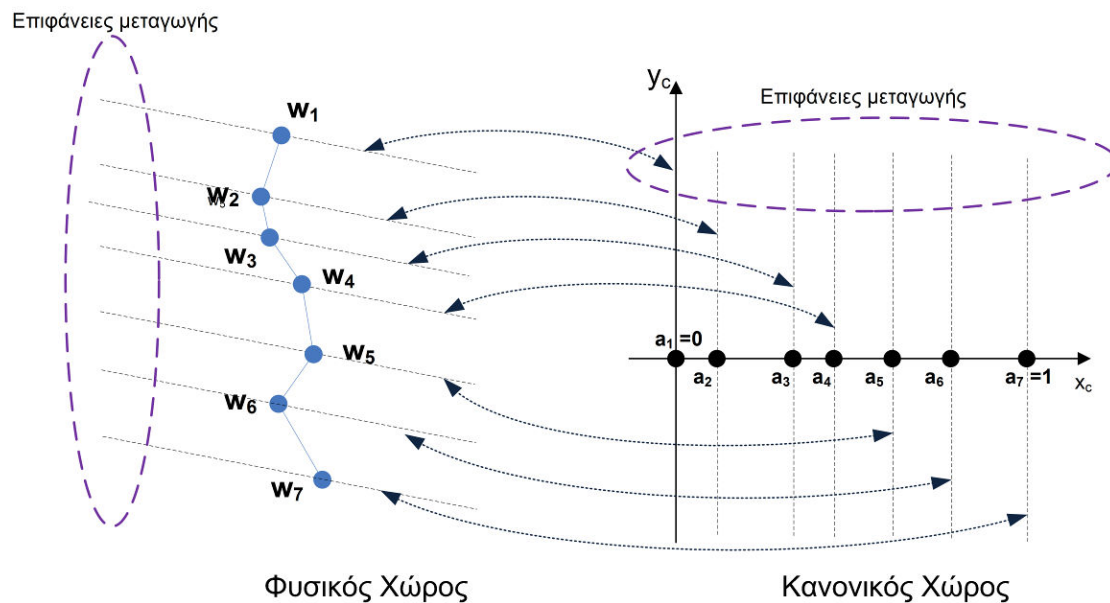
$$\kappa_p = \Omega(\kappa_c, \tilde{x}) = S^{-3} J \gamma^{-3} \kappa_c \quad (5.9)$$

που μετασχηματίζει την είσοδο από τον κανονικό χώρο εισόδου στον φυσικό χώρο εισόδου. Εφαρμόζοντας την (5.9) στην (5.8), προκύπτει το κανονικό σύστημα,

$$\hat{\Sigma}: \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_c \cos \theta_c \\ v_c \sin \theta_c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_c \end{bmatrix} \kappa_c \quad (5.10)$$

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα συστήματα  $\Sigma$  και  $\hat{\Sigma}$  είναι ισοδύναμα ανάδρασης [58],[59],[66]. Αν λύσουμε την Εξ. (5.7) ως προς  $\theta_c$  θα δούμε ότι η διεύθυνση στον κανονικό χώρο κατάστασης δεν είναι συνεχής συνάρτηση της  $\theta_p$ . Αυτό οφείλεται στην παρουσία των παλμικών συναρτήσεων  $\psi_\kappa$ .

Όταν οι καταστάσεις περνούν από τον ένα παλμό στον άλλο, η κανονική διεύθυνση παρουσιάζει κρουστικά άλματα. Η φυσική διεύθυνση όμως παραμένει συνεχής. Στον κανονικό χώρο οι επιφάνειες μεταγωγής είναι κατακόρυφες ευθείες οι οποίες περνούν από τα σημεία  $a_i$ , και κάθε ευθεία αντιστοιχεί σε ένα σημείο (Σχήμα 61).



Σχήμα 61. Επιφάνειες μεταγωγής στον φυσικό και κανονικό χώρο

Χρησιμοποιώντας την τυπική νομενκλατούρα, συμβολίζουμε την κανονική διεύθυνση ακριβώς πριν από το άλμα με  $\theta_c$  ενώ απειροστά μετά, με  $\theta_c^+$ . Όταν το

άλμα λαμβάνει χώρα, η φυσική διεύθυνση παραμένει η ίδια, οπότε από τις Εξ.(5.7) έχουμε,

$$\frac{\sin \theta_{\kappa-1} + \sin \theta_s \tan \theta_c}{\cos \theta_{\kappa-1} + \cos \theta_s \tan \theta_c} = \frac{\sin \theta_{\kappa} + \sin \theta_s \tan \theta_c^+}{\cos \theta_{\kappa} + \cos \theta_s \tan \theta_c^+} \Rightarrow \dots$$

$$\theta_c^+ = \tan^{-1} \frac{\sin(\theta_{\kappa} - \theta_{\kappa-1}) + \tan \theta_c \sin(\theta_{\kappa} - \theta_s)}{\sin(\theta_{\kappa-1} - \theta_s)} = I_k(\tilde{\mathbf{x}}(t))$$
(5.11)

Η Εξ.(5.11) περιγράφει το νόμο επαναφοράς του κανονικού μοντέλου. Μιας και ο στόχος της παρακολούθησης πορείας στον κανονικό χώρο είναι η παρακολούθηση μιας ευθείας (τον πραγματικό άξονα), τα σήματα σφάλματος είναι η απόσταση από πραγματικό άξονα, δηλαδή η συντεταγμένη  $y_c$ , και η διεύθυνση  $\theta_c$ , αφού η διεύθυνση αναφοράς είναι μηδέν. Όμως η Εξ.(5.11) μας δείχνει ότι,

$$I_k(0) = \tan^{-1} \frac{\sin(\theta_{\kappa} - \theta_{\kappa-1})}{\sin(\theta_{\kappa-1} - \theta_s)} \quad (5.12)$$

οπότε και η κρουστική ώση στην αρχή των αξόνων της δυναμικής σφάλματος δεν είναι μηδενική και διαταράσσει το σύστημα, οδηγώντας το μακριά από το μηδέν κατά τις χρονικές στιγμές των επαναφορών (resets). Παρατηρούμε επίσης ότι το πλάτος των επαναφορών εξαρτάται από την αλγεβρική τιμή των καταστάσεων του συστήματος. Ας υποθέσουμε τώρα ότι παρέχουμε ένα σταθεροποιητικό νόμο ανάδρασης για τη συνεχή δυναμική του συστήματος σφάλματος (το οποίο αποτελείται από τις δυο τελευταίες εξισώσεις κατάστασης της Εξ.(5.10)), ο οποίος μετατρέπει την αρχή σε ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας. Μιας και η είσοδος  $\kappa_c$  είναι φραγμένη και ελέγχει την παράγωγο της  $\theta_c$ , ο ρυθμός μεταβολής του σφάλματος διεύθυνσης είναι πεπερασμένος. Συνεπώς, αν το σύστημα βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, η είσοδος δεν μπορεί ν' ακυρώσει τις ώσεις κατά τη διάρκεια των επαναφορών. Τουλάχιστον, χωρίς να επηρεάσει και το σφάλμα απόστασης, δηλαδή την κατάσταση  $y_c$ . Με άλλα λόγια, δεν μπορεί να υπάρξει νόμος ανάδρασης ο οποίος να σταθεροποιεί ασυμπτωτικά το κρουστικό σύστημα στην αρχή, αφού δεν υπάρχει νόμος ανάδρασης ο οποίος να σταθεροποιεί τη συνεχή δυναμική του συστήματος σφάλματος και ταυτόχρονα να μηδενίζει τις κρουστικές ώσεις. Αυτό βέβαια είναι αναμενόμενο αφού η πορεία αναφορά δεν είναι μια εφικτή λύση του συστήματος.

Αν, τώρα, θεωρήσουμε ότι η πορεία αναφοράς στον φυσικό χώρο είναι  $p_{ref}$  και  $\tilde{\mathbf{u}}_c(\tilde{\mathbf{x}}, I_c, t)$  είναι ένας ελεγκτής παρακολούθησης ευθείας στον κανονικό χώρο, όπου  $I_c$  είναι το διάστημα  $\{y_c = 0 / x_c \in [0, 1]\}$  του πραγματικού άξονα του κανονικού χώρου, δηλαδή είναι η πορεία αναφοράς στον κανονικό χώρο, τότε ο ελεγκτής αυτός μετασχηματίζεται σε έναν ελεγκτή παρακολούθησης πορείας για το σύστημα  $\Sigma$  σύμφωνα με την εξίσωση,

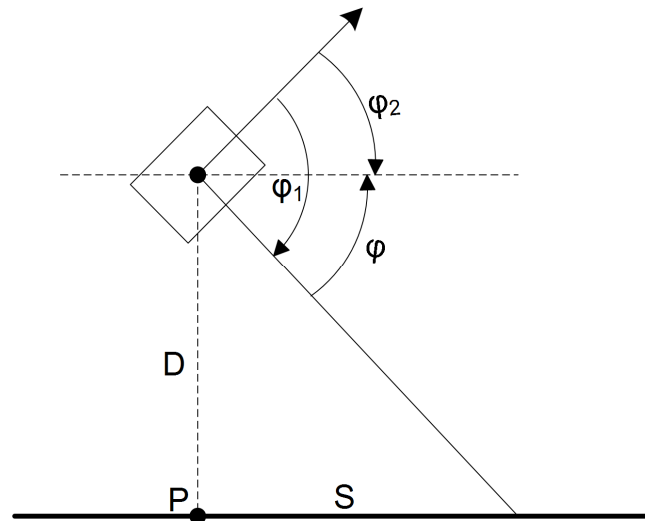
$$\mathbf{u}_p(\mathbf{x}, p_{ref}, t) = \Omega(\tilde{\mathbf{u}}_c(\tilde{\mathbf{x}}, I, t), \tilde{\mathbf{x}}) = \Omega(\tilde{\mathbf{u}}_c(\Psi^{-1}(\mathbf{x}), \Phi^{-1}(p_{ref}), t), \Psi^{-1}(\mathbf{x})) \quad (5.13)$$

Όπως έχει αναφερθεί, τα συστήματα  $\Sigma$  και  $\tilde{\Sigma}$  έχουν την ίδια μορφή και εκφράζουν το μοντέλο του Dubins στον φυσικό και κανονικό χώρο αντίστοιχα. Συνεπώς ο

ελεγκτής  $\tilde{\mathbf{u}}_c(\tilde{\mathbf{x}}, I_c, t)$  μπορεί να είναι ένας προϋπάρχων ελεγκτής του συστήματος, μόνο που στην περίπτωση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί ώστε να παρακολουθεί μόνο ευθείες. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι ο ελεγκτής αυτός είναι ο ασαφής ελεγκτής που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2, και θα διερευνήσουμε το πώς μπορεί ν' απλοποιηθεί.

### 5.3. Διακοπτικός ασαφής έλεγχος

Στην περίπτωση της παρακολούθησης ευθείας, δηλαδή της παρακολούθησης της πορείας αναφοράς στον κανονικό χώρο, η προσανατολισμένη ευθεία γραμμή χωρίζει το επίπεδο σε δυο ημιεπίπεδα, τα οποία παρέχουν δυο γενικές περιπτώσεις για την τοποθέτηση του robot στο χώρο. Λόγω της συμμετρίας των δυο αυτών περιπτώσεων, θα αναλύσουμε μόνο τη μία. Ας θεωρήσουμε ότι το robot βρίσκεται στο θετικό ημιεπίπεδο και η απόσταση του από το κοντινότερο σημείο P είναι D (Σχήμα 62).



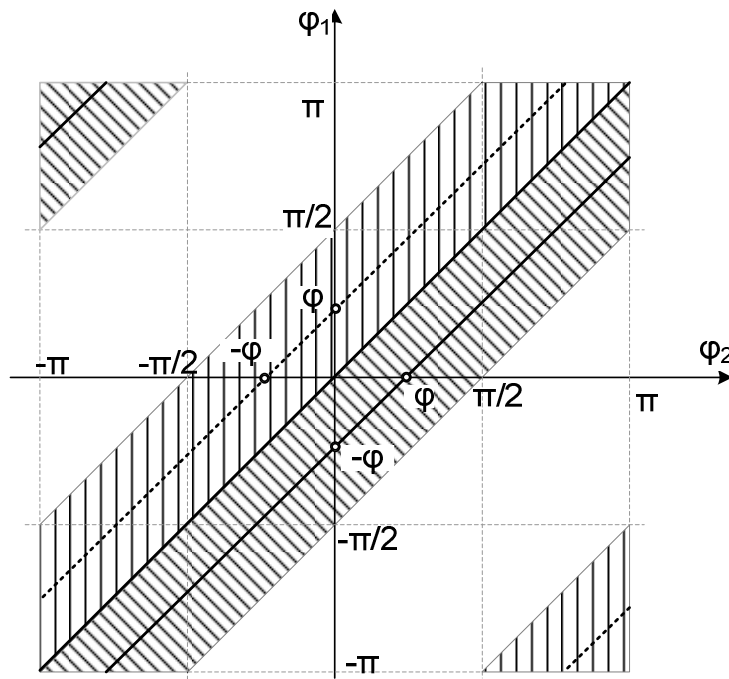
Σχήμα 62. Είσοδοι του ασαφούς ελεγκτή στην περίπτωση παρακολούθησης ευθείας

Επιπλέον, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το robot δεν παρακολουθεί το κοντινότερο σημείο P αλλά αυτό που βρίσκεται απόσταση S μπροστά. Η ευθεία που ενώνει το robot με αυτό το σημείο, σχηματίζει γωνία  $\varphi$  με την πορεία. Στην περίπτωση αυτή, μεταβάλλοντας τη γωνία  $\varphi_2$  διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις για τη σχέση των γωνιών  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ , με τρεις απ' αυτές να είναι οι ίδιες, δηλαδή,

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= -\varphi, \quad \varphi_2 \in [-\pi + \varphi, 0] \cup [0, \varphi] \cup [\varphi, \pi] \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= 2\pi - \varphi, \quad \varphi_2 \in [-\pi, -\pi + \varphi] \end{aligned} \quad (5.14)$$

Όταν το robot βρίσκεται στο θετικό ημιεπίπεδο, η γωνία  $\varphi$  είναι επίσης θετική. Αντίθετα, όταν βρίσκεται στο αρνητικό ημιεπίπεδο, η  $\varphi$  αλλάζει πρόσημο αν και οι (5.14) παραμένουν οι ίδιες. Σε σχέση με το σημείο παρακολούθησης, μπορούμε να έχουμε δυο περιπτώσεις. Είτε να κρατήσουμε σταθερή τη γωνία  $\varphi$ , είτε να κρατήσουμε σταθερή την απόσταση S. Σε κάθε περίπτωση, το κοντινότερο σημείο P μπορεί να βρεθεί πολύ εύκολα μιας και οι συντεταγμένες του είναι  $(x_c, 0)$ , όπου  $x_c$  είναι η πραγματική συντεταγμένη του robot στον κανονικό χώρο. Στην περίπτωση

που κρατάμε σταθερή την απόσταση  $S$ , η γωνία  $\varphi$  λαμβάνει τιμές στο κλειστό διάστημα  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Η δυάδα  $(\varphi_1, \varphi_2)$  είναι περιορισμένη μέσα σε μια ταινία, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 63.



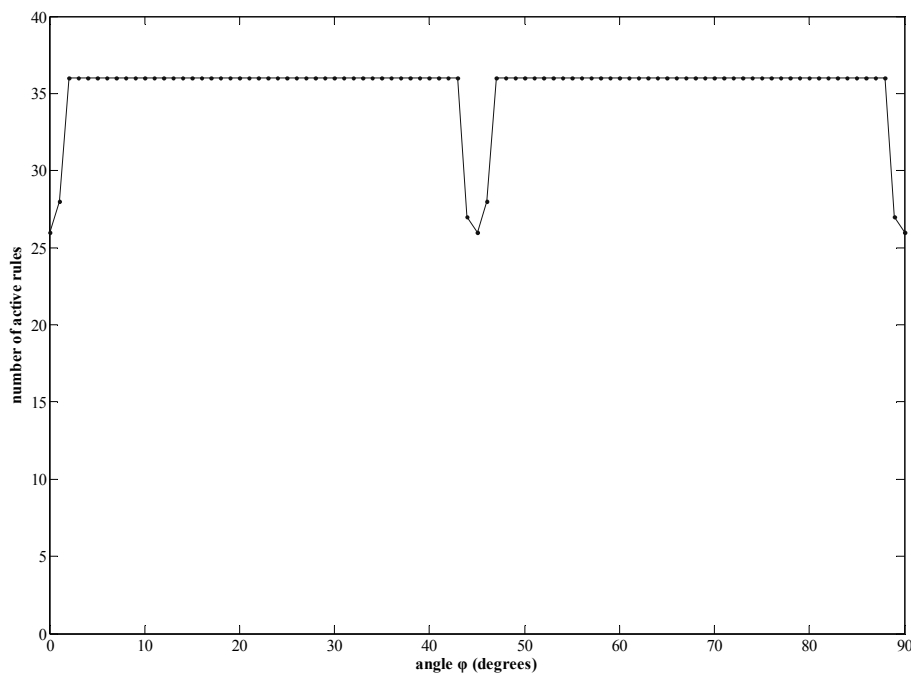
Σχήμα 63. Απεικόνιση του περιορισμένου συνόλου της εισόδου στις δυο περιπτώσεις παρακολούθησης ευθείας

Στην περίπτωση σταθερής γωνίας  $\varphi$  οι εισόδοι «ολισθαίνουν» πάνω σε δυο γραμμές (συμπαγής και διακεκομμένη στο Σχήμα 63). Πρέπει να σημειωθεί ότι λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, ο χώρος εισόδου είναι συμμετρικός ως προς την ευθεία  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Ως αποτέλεσμα, η ταινία με κατακόρυφη διαγράμμιση, στην πρώτη περίπτωση, και η παχιά διακεκομμένη γραμμή, στη δεύτερη, αντιστοιχούν στην περίπτωση που το robot βρίσκεται στο αρνητικό ημιεπίπεδο. Η έξοδος του ελεγκτή είναι επίσης συμμετρική ως προς την ευθεία  $\varphi_1 = \varphi_2$ , κάτι που υποδηλώνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο το πρώτο σύνολο εισόδων (θετικό ημιεπίπεδο) για τον έλεγχο. Φυσικά, η έξοδος θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το πρόσημο της συντεταγμένης  $y_c$  του robot ώστε να καλυφθούν και τα δυο ημιεπίπεδα.

Στην εφαρμογή αυτή επιλέξαμε να κρατήσουμε σταθερή τη γωνία  $\varphi$ , περιορίζοντας την είσοδο πάνω στις δυο ευθείες. Αυτό οδηγεί επίσης σε μια σημαντική μείωση της βάσης κανόνων του ασαφούς ελεγκτή, όπως θα δειχθεί στη συνέχεια. Ταυτόχρονα όμως, εισάγει διακοπτικά φαινόμενα στον ελεγκτή. Συγκεκριμένα, οι δυο παχιές γραμμές στο Σχήμα 63 αντιπροσωπεύουν τις περιπτώσεις όπου το robot βρίσκεται στο θετικό και αρνητικό ημιεπίπεδο αντίστοιχα. Όταν το robot βρίσκεται στο θετικό ημιεπίπεδο η είσοδος ολισθαίνει στη συμπαγή γραμμή ενώ όταν robot διασχίζει τον πραγματικό άξονα και μπαίνει στο αρνητικό ημιεπίπεδο, η είσοδος μεταπίπτει στη διακεκομμένη γραμμή. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι δυο ευθείες σχηματίζουν γωνία  $\pi/4$  με τον πραγματικό άξονα ενώ οι αποτέμνουσες καθορίζονται πλήρως από τη γωνία  $\varphi$  (Εξ.(5.14)). Όταν όμως το robot κινείται πάνω στον πραγματικό άξονα, η είσοδος πρέπει να πάρει την τιμή

μηδέν (αυτό μπορεί να εξακριβωθεί πολύ απλά από το Σχήμα 62). Αφού όμως η είσοδος είναι περιορισμένη πάνω στις δυο ευθείες, δεν μπορεί ποτέ να φτάσει την αρχή των αξόνων. Στην περίπτωση αυτή ο ελεγκτής παρουσιάζει πολλή γρήγορη μεταγωγή μεταξύ των δυο ευθειών, κάτι που τελικά οδηγεί σε ταλαντώσεις (chattering).

Μιας και η είσοδος είναι περιορισμένη στις δυο ευθείες είναι φανερό ότι ορισμένοι κανόνες του ασαφούς ελεγκτή δεν ενεργοποιούνται ποτέ, οπότε και μπορούν ν' αφαιρεθούν. Εφόσον οι ευθείες ορίζονται από τη γωνία  $\varphi$ , είναι αυτή η παράμετρος η οποία και καθορίζει τον αριθμό των ενεργών κανόνων. Μια απεικόνιση των ενεργών κανόνων ως προς τη γωνία  $\varphi$  φαίνεται στο Σχήμα 64.

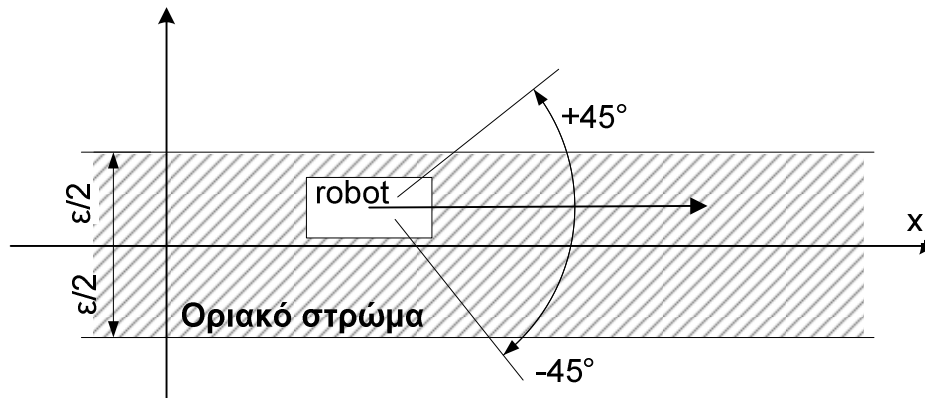


**Σχήμα 64. Ενεργοί κανόνες του ασαφούς ελεγκτή ως προς τη γωνία  $\varphi$**

Η γωνία μεταβάλλεται στο διάστημα  $[0^\circ, 90^\circ]$  με τις  $0^\circ$  να αντιστοιχούν στο σημείο του πραγματικού απείρου ενώ οι  $90^\circ$  στο κοντινότερο σημείο. Από το διάγραμμα φαίνεται ότι η μεγαλύτερη μείωση κανόνων συμβαίνει σε τρεις περιπτώσεις, δηλαδή στις  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  και  $90^\circ$ . Σ' αυτά τα σημεία οι κανόνες είναι 26. Επιλέξαμε να δώσουμε στη γωνία  $\varphi$  την τιμή  $45^\circ$  για δυο λόγους. Πρώτον, η γωνία με  $0^\circ$  εκφυλίζει τον έλεγχο μιας και όταν το robot γίνεται παράλληλο με τον πραγματικό άξονα, κοιτώντας προς το πραγματικό  $+\infty$ , οι δύο εισοδοι λαμβάνουν την τιμή μηδέν και ο ασαφής ελεγκτής παράγει επίσης μηδενική έξοδο. Ως αποτέλεσμα, το robot κινείται παράλληλα με τον πραγματικό άξονα και δεν τον προσεγγίζει ποτέ. Δεύτερον, η τιμή των  $45^\circ$  προσθέτει «προοπτική» στον ελεγκτή επιτρέποντας του να «δει μπροστά».

Υπάρχει όμως και άλλος ένας σημαντικός λόγος για την επιλογή των  $45^\circ$ : η εξάλειψη των ταλαντώσεων (chattering). Στον διακοπτικό έλεγχο και στο έλεγχο ολίσθησης τροχιάς (sliding mode control) είναι κοινή πρακτική να εισάγεται μια μορφή υστέρησης ώστε να μετριάζεται η πολύ γρήγορη μεταγωγή που εμφανίζεται στην επιφάνεια ολίσθησης. Αν και δεν θα υλοποιήσουμε μεταγωγή με υστέρηση, θα κινηθούμε με παρόμοιο τρόπο. Εισάγουμε ένα οριακό στρώμα (boundary layer) πλάτους  $\varepsilon$  στοιχισμένο στον πραγματικό άξονα, το οποίο και περιέχει την κανονική

πορεία. Όταν το robot εισέρχεται σ' αυτό το στρώμα, ο έλεγχος είναι ομαλότερος και ουσιαστικά χάνει τη διακοπτική του φύση (Σχήμα 65).



Σχήμα 65. Απεικόνιση του οριακού στρώματος

Ακριβέστερα, οι εισοδοι του ελεγκτή έξω από το οριακό στρώμα περιγράφονται από τις εξισώσεις,

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_2 &= -\text{sgn}(y_c)\theta_c \\ \hat{\varphi}_1 &= \hat{\varphi}_2 - \pi/4\end{aligned}\quad (5.15)$$

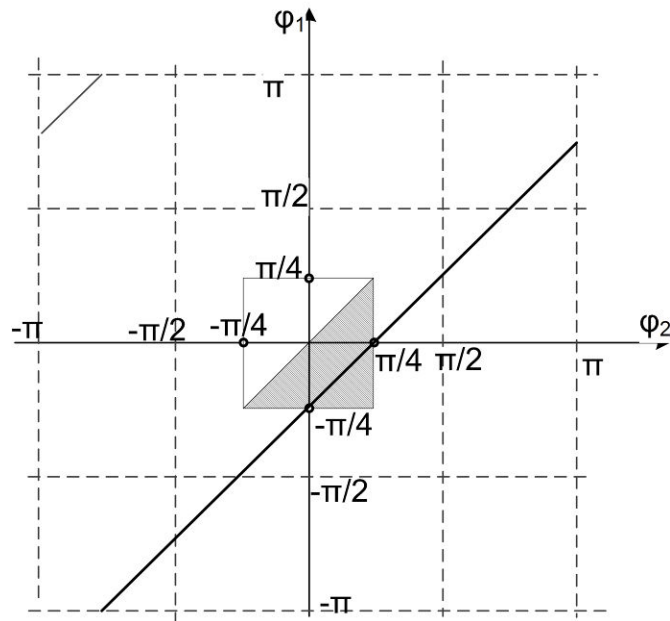
Η συνάρτηση προσήμου χρησιμοποιείται ώστε να εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία του προβλήματος παρακολούθησης ευθείας και να περιορίσουμε την είσοδο μόνο στη μία ευθεία (αυτή που αντιστοιχεί στο θετικό ημιεπίπεδο). Φυσικά, στην περίπτωση αυτή η έξοδος δίνεται από,

$$\kappa_c = \text{sgn}(y_c)\hat{\kappa}_c \quad (5.16)$$

Εδώ, το  $\hat{\kappa}_c$  υποδηλώνει την πραγματική έξοδο του ασαφούς ελεγκτή ενώ οι «καπελωμένες» εισοδοι της Εξ.(5.15) υποδηλώνουν τις πραγματικές εισόδους. Όταν το robot βρίσκεται μέσα στο οριακό στρώμα και  $\varphi_2 \in [-\pi/4, \pi/4]$ , οι εισοδοι περιγράφονται από τις εξισώσεις,

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_2 &= -\text{sgn}(y_c)\theta_c \\ \hat{\varphi}_1 &= \hat{\varphi}_2 - \text{sat}\left(\frac{2y_c}{\varepsilon}\right)(\hat{\varphi}_2 - \pi/4)\end{aligned}\quad (5.17)$$

Η συνάρτηση  $\text{sat}(\cdot)$  είναι η συνάρτηση κορεσμού με άνω και κάτω φράγματα το 1 και -1 αντίστοιχα. Από τις προηγούμενες εξισώσεις μπορούμε να δούμε ότι όταν  $\hat{\varphi}_2 = \pi/4 \rightarrow \hat{\varphi}_1 = \pi/4$  και όταν  $\hat{\varphi}_2 = -\pi/4 \rightarrow \hat{\varphi}_1 = -\pi/4$ , συνεπώς η είσοδος είναι περιορισμένη μέσα στο τετράγωνο  $[-\pi/4, \pi/4] \times [-\pi/4, \pi/4]$ . Η συνάρτηση κορεσμού εξομαλύνει τον έλεγχο με το να επιτρέπει στις εισόδους να ξεφεύγουν από τις ευθείες και να λαμβάνουν περισσότερες τιμές. Μια απεικόνιση φαίνεται στο Σχήμα 66.



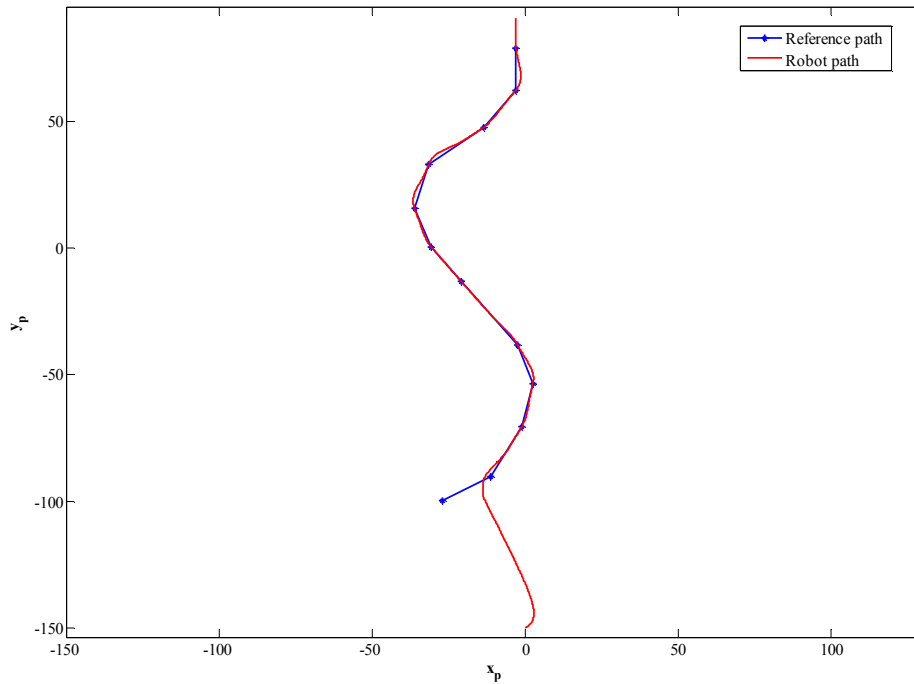
Σχήμα 66. Ο περιοριστικός χώρος εισόδου

Λόγω της χρήσης της συμμετρίας του προβλήματος, οι πραγματικές εισοδοί του ελεγκτή κινούνται μόνο στο σκιασμένο μέρος του περιοριστικού τετραγώνου. Σε αυτή την περιοχή υπάρχουν τρεις ενεργοί κανόνες. Όμως, αυτοί οι κανόνες είναι παρόντες και όταν οι εισοδοί ολισθαίνουν πάνω στην ευθεία. Συνεπώς, η εξάλειψη των ταλαντώσεων με τη χρήση του οριακού στρώματος δεν εισάγει καινούργιους κανόνες στην απλοποιημένη βάση κανόνων του ασαφούς ελεγκτή. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν επιλέγουμε  $\varphi=45^\circ$  και είναι άλλος ένας σημαντικός λόγος για την επιλογή της συγκεκριμένης τιμής.

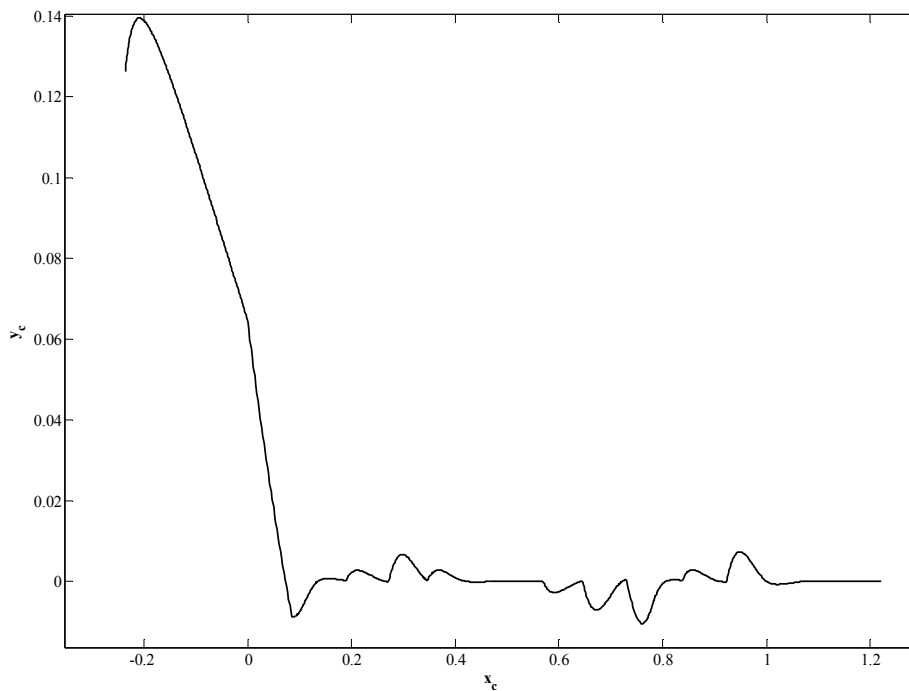
#### 5.4. Αποτελέσματα προσομοιώσεων και συγκρίσεων

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα δυο προσομοιώσεων χρησιμοποιώντας τις τεχνικές που αναλύθηκαν προηγουμένως. Στην πρώτη προσομοίωση ο διακοπτικός ασαφής ελεγκτής «τρέχει» μόνος του, και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από το φυσικό και κανονικό χώρο ώστε να παρουσιασθεί ο τρόπος λειτουργίας του ελέγχου. Στη δεύτερη προσομοίωση, ο διακοπτικός ασαφής ελεγκτής συγκρίνεται με άλλους δυο ελεγκτές και συγκρίνονται και αναλύονται τα αποτελέσματα. Και στα δυο πειράματα η πορεία αναφοράς είναι μια πολυγωνική γραμμή και οι κλάδοι επέκτασης είναι κατακόρυφοι. Η γωνία μετατόπισης του SWAM είναι  $\theta_s=0^\circ$  ενώ η αρχική θέση του robot είναι, σε κάθε περίπτωση, στο κάτω μέρος των εικόνων.

Στην πρώτη προσομοίωση ο διακοπτικός ελεγκτής παρακολουθεί μια πολυγωνική πορεία αναφοράς, με την αρχική θέση του robot να είναι εκτός της πορείας. Οι πορείες του robot στον φυσικό και κανονικό χώρο παρουσιάζονται στο Σχήμα 67 και Σχήμα 68 αντίστοιχα.



**Σχήμα 67. Πορείες αναφοράς (μπλε) και robot (κόκκινη) στον φυσικό χώρο για την πρώτη προσομοίωση**

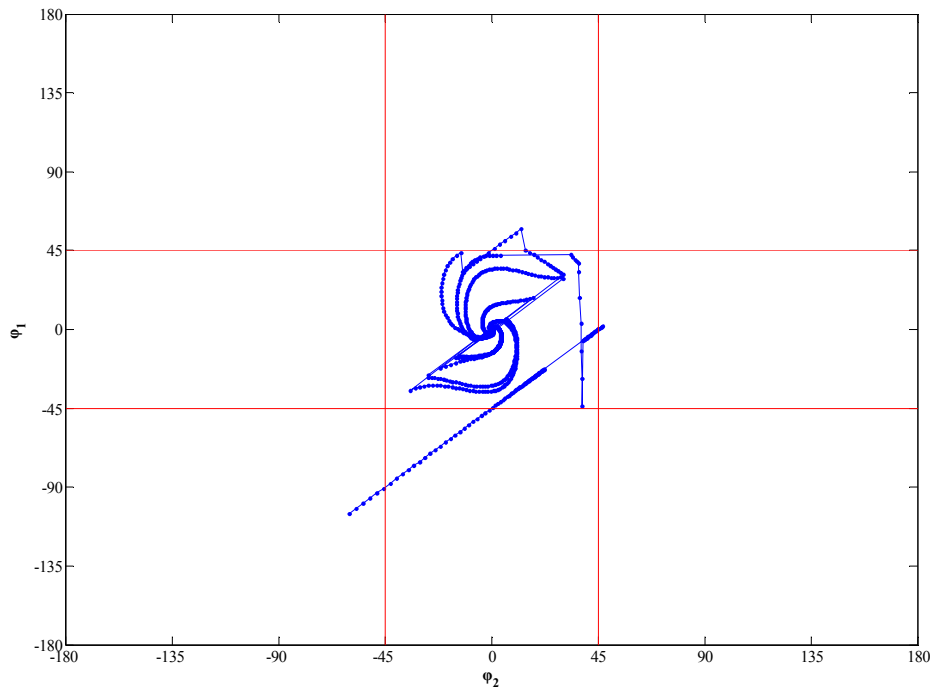


**Σχήμα 68. Πορεία του robot στον κανονικό χώρο για την πρώτη προσομοίωση**

Η επίδραση των κρουστικών ώσεων στην πορεία του robot είναι εμφανής στο Σχήμα 68. Μπορούμε να δούμε ότι η διεύθυνση υφίσταται κρουστικές διαταραχές κατά μήκος του πραγματικού άξονα, οι οποίες υποχρεώνουν το σύστημα να υπερψωθεί. Η απεικόνιση των εισόδων κατά την προσομοίωση αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 69. Είναι φανερό ότι οι εισοδοί ολισθαίνουν πάνω στις περιοριστικές ευθείες ενώ όταν το robot κινείται μέσα στο οριακό στρώμα, οι εισοδοί κινούνται μέσα στην περιοχή  $[-\pi/4, \pi/4] \times [-\pi/4, \pi/4]$ . Πρέπει να σημειωθεί ότι οι εισοδοί αυτές δεν



είναι οι «καπελωμένες» εισοδοί που οδηγούν τον ελεγκτή αλλά οι κανονικές εισοδοί πριν από τον κατοπτρισμό συμμετρίας.



Σχήμα 69. Απεικόνιση της εισόδου  $\phi_1$  ως προς την  $\phi_2$  για την πρώτη προσομοίωση

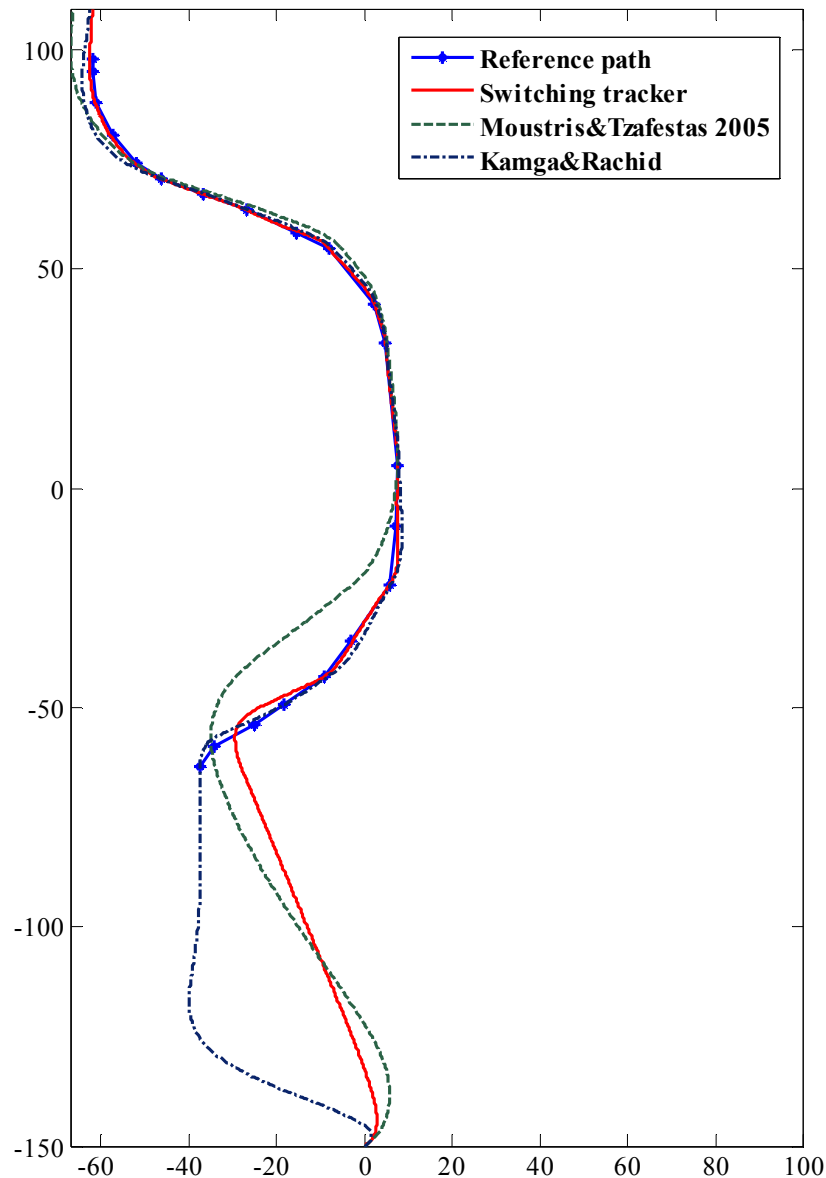
Το επόμενο πείραμα απεικονίζει τον έλεγχο παρακολούθησης από τρεις ελεγκτές. Ο πρώτος ελεγκτής είναι ο διακοπτικός ασαφής ελεγκτής που αναλύθηκε προηγουμένως. Ο δεύτερος ελεγκτής είναι ο αρχικός ασαφής ελεγκτής απ' τον οποίο προήλθε ο διακοπτικός ελεγκτής ενώ ο τελευταίος ελεγκτής είναι αυτός που παρουσιάστηκε από τους Kamga&Rachid [3], ο οποίος αναλύθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο (Εξ.(4.28)). Και στις τρεις περιπτώσεις η πορεία αναφοράς και η αρχική θέση του robot είναι φυσικά η ίδια. Το Σχήμα 70 δείχνει τα αποτελέσματα και των τριών ελεγκτών στο φυσικό χώρο. Μια ανάλυση των πορειών των τριών ελεγκτών παρουσιάζεται στον Πίνακας 2.

Πίνακας 2. Αποτελέσματα σύγκρισης των τριών ελεγκτών

	Διακοπτικός Ασαφής Ελεγκτής	Moustris&Tzafestas 2005	Kamga&Rachid
Μέση τιμή	15.7268	18.0667	17.7592
rms	31.292	32.3431	33.5429

Από την ανάλυση είναι εμφανές ότι ο διακοπτικός ελεγκτής υπερτερεί έναντι των άλλων δυο. Πιο συγκεκριμένα, ο μέσος όρος της απόστασης του robot από την πορεία αναφοράς είναι εμφανώς μικρότερος, κάτι που σημαίνει ότι ο διακοπτικός ελεγκτής βρίσκει την πορεία αναφοράς γρηγορότερα όπως επίσης και ότι διατηρεί το robot πιο κοντά στην πορεία αναφοράς καθ' όλη τη διάρκεια του πειράματος. Μπορούμε επίσης να δούμε ότι και η rms τιμή της απόστασης είναι μικρότερη για τον διακοπτικό ελεγκτή, κάτι που σημαίνει ότι η απόσταση του robot από την

πορεία αναφοράς παρουσιάζει μικρότερη διακύμανση, δηλαδή ο διακοπτικός ελεγκτής παρακολουθεί την πορεία με μεγαλύτερη ακρίβεια.



**Σχήμα 70. Πορείες των τριών ελεγκτών στον φυσικό χώρο**

Έμφαση πρέπει να δοθεί στη σύγκριση μεταξύ του διακοπτικού ελεγκτή και του αρχικού ασαφούς ελεγκτή μιας και ο διακοπτικός ελεγκτής προέρχεται από τον αρχικό αυτόν ασαφή ελεγκτή. Τα αποτελέσματα του Πίνακα 2 δείχνουν ότι ο διακοπτικός ελεγκτής αποδίδει σημαντικά καλύτερα από τον προκάτοχο του και σε συνδυασμό με το γεγονός ότι παρουσιάζει μια μείωση κανόνων της τάξης του 70%, είναι εμφανές ότι παρέχει μια σημαντική βελτίωση.

## 5.5. Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε την εφαρμογή του κατά-ταινίες αφινικού μετασχηματισμού στο πρόβλημα παρακολούθησης πορείας για το μοντέλο του

Dubins. Η εφαρμογή αυτή οδηγεί στην «κατασκευή» ενός απλοποιημένου ασαφούς ελεγκτή ο οποίος χρησιμοποιήθηκε σε προηγούμενα κεφάλαιο, και περιγράφεται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2. Η απλοποίηση συνίσταται στην μείωση της βάσης κανόνων του ελεγκτή από 81 κανόνων σε 26 (70% μείωση). Επιπλέον, ο ελεγκτής μετασχηματίζεται σε έναν διακοπτικό ασαφή ελεγκτή, περιορίζοντας τις εισόδους του σε δυο περιοριστικές πολλαπλότητες (ευθείες). Προκειμένου να εξαλειφθούν και φαινόμενα ταλαντώσεων, εισήχθη ένα οριακό στρώμα μέσα στο οποίο ο έλεγχος χάνει τη διακοπτική του μορφή και γίνεται ομαλός, χωρίς όμως να επέλθει και αύξηση των ασαφών κανόνων. Η σύγκριση που παρουσιάζεται μεταξύ του διακοπτικού ελεγκτή, του αρχικού ασαφούς ελεγκτή και ενός τρίτου, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο διακοπτικός ελεγκτής υπερτερεί έναντι των άλλων, αλλά κυρίως έναντι του προκατόχου του, μιας και παρακολουθεί καλύτερα την πορεία αναφοράς αλλά έχει και σημαντικά λιγότερους ασαφείς κανόνες.



## Κεφάλαιο 6

---

### Σύστημα σε Ψηφίδα (SoC) για την παρακολούθηση πορείας μέσω του μετασχηματισμού SWAM

#### 6.1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια πειραματική υλοποίηση ενός συστήματος σε ψηφίδα (System on a Chip) για την παρακολούθηση πορείας μέσω του μετασχηματισμού SWAM. Ο μετασχηματισμός υλοποιήθηκε πάνω σε ένα FPGA Spartan 3-1500 μέσω της χρήσης VHDL και εργαλείων EDA. Το FPGA υλοποιεί επίσης, μέσω του μαλακού πυρήνα που αναλύεται στο [44], τον ψηφιακό ασαφή ελεγκτή (Digital Fuzzy Logic Controller) που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 3. Ο ελεγκτής αυτός είναι ένας ασαφής ελεγκτής Takagi-Sugeno μηδενικού τύπου με επικάλυψη «2».

Το FPGA συνδέεται με μια εφαρμογή που εκτελείται μέσα στο πρόγραμμα MATLAB, η οποία είναι υπεύθυνη για την επικοινωνία και την απεικόνιση των δεδομένων. Το σύστημα ελέγχει ένα διαφορικό ρομπότ Khepera II, το οποίο και χρησιμοποιήθηκε για την εκτέλεση πειραμάτων. Μιας και το robot είναι διαφορικής κινηματικής, εξομοιώθηκε με το μοντέλο του Dubins ρυθμίζοντας την ταχύτητα του σε μια σταθερή τιμή και επιβάλλοντας άνω φράγμα στην μέγιστη καμπυλότητα με την οποία μπορεί να κινηθεί.

Σκοπός των πειραμάτων είναι η εξακρίβωση της ικανότητας του μετασχηματισμού SWAM να εφαρμοστεί σε πραγματικές συνθήκες για το πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας. Προς τούτο, πρέπει να συγκριθεί η πραγματική πορεία που εκτελεί το robot με την πορεία αναφοράς αλλά και με την «αντιληπτή» πορεία την οποία θεωρεί το robot ότι ακολουθεί, δηλαδή τη λύση της οδομετρίας του. Συνεπώς, πάνω από το πειραματικό πεδίο στερεώθηκε μια

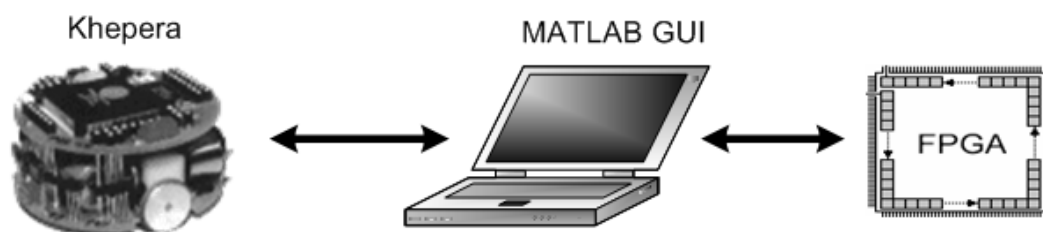
βιντεοκάμερα η οποία κατέγραφε όλα τα πειράματα. Μία απεικόνιση του πειραματικού πεδίου φαίνεται στο Σχήμα 71.



Σχήμα 71. Απεικόνιση του πειραματικού πεδίου

Μετά το πέρας των πειραμάτων, υπολογίστηκε η «πραγματική» πορεία του robot (μέσω ανάλυσης του βίντεο) και συγκρίθηκε με την πορεία αναφοράς και την πορεία της οδομετρίας. Η κάμερα βαθμονομήθηκε εκ των προτέρων χρησιμοποιώντας το Camera Calibration Toolbox του J.Y. Bouguet [67].

Η γενική τοπολογία του συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 72.



Σχήμα 72. Γενική τοπολογία του πειραματικού συστήματος

Παρατηρούμε ότι το robot επικοινωνεί με το FPGA μέσω του υπολογιστή, ο οποίος και εκτελεί το πρόγραμμα στο MATLAB. Το robot στέλνει δεδομένα οδομετρίας (ή πιο σωστά, δεδομένα κίνησης των κωδικοποιητών των τροχών του) στο MATLAB, το οποίο ανασκευάζει τα οδομετρικά δεδομένα υπολογίζοντας τη θέση του robot στο παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων. Στην συνέχεια, προωθεί τα δεδομένα αυτά στο FPGA το οποίο υπολογίζει το μετασχηματισμό SWAM και την έξοδο του ασαφούς

ελεγκτή. Η έξοδος αυτή επαναπροωθείται στο MATLAB, το οποίο την κωδικοποιεί σε κατάλληλες εντολές κίνησης τις οποίες και αποστέλλει στο robot.

Από την έως τώρα ανάλυση είναι φανερό ότι η πειραματικά διάταξη ουσιαστικά συνδυάζει τις τεχνικές των προηγούμενων κεφαλαίων. Πιο συγκεκριμένα, η αρχιτεκτονική του FPGA είναι εν πολλοίς η ίδια με αυτή που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3, ελαφρώς τροποποιημένη ώστε να υλοποιεί και το μετασχηματισμό που αναλύεται στο Κεφάλαιο 4. Επιπροσθέτως, ο ασαφής έλεγχος αναλύεται στο Κεφάλαιο 5 §5.3, μόνο που στην παρούσα πειραματική διάταξη επιλέχθηκε ο δεύτερος τρόπος παρακολούθησης της πορείας. Συγκεκριμένα, στον διακοπτικό ασαφή έλεγχο του προηγούμενου κεφαλαίου, και αναφορικά με το Σχήμα 63, είχαμε θεωρήσει ότι το robot δεν παρακολουθεί το κοντινότερο σημείο P αλλά αυτό που βρίσκεται απόσταση  $S$  μπροστά. Η ευθεία που ενώνει το robot με αυτό το σημείο, σχηματίζει γωνία  $\phi$  με την πορεία. Η σχέση των γωνιών  $\phi$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  περιγράφεται από την Εξ. (5.14), όπου  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  είναι οι εισοδοί του ασαφούς ελεγκτή.

Σε σχέση με το σημείο παρακολούθησης είχαμε διακρίνει δυο περιπτώσεις. Η πρώτη, την οποία και επιλέξαμε για τον διακοπτικό έλεγχο, είναι να κρατήσουμε σταθερή τη γωνία  $\phi$ . Η δεύτερη περίπτωση, την οποία επιλέξαμε στα πειράματα αυτού του κεφαλαίου, είναι να κρατήσουμε σταθερή την απόσταση  $S$ . Στην περίπτωση αυτή η γωνία  $\phi$  λαμβάνει τιμές στο κλειστό διάστημα  $[-\pi/2, \pi/2]$  και η δυάδα  $(\phi_1, \phi_2)$  είναι περιορισμένη μέσα σε μια ταινία, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 63.

## 6.2. Κινηματική και οδομετρία του Khepera II

Το ρομπότ Khepera II είναι ένα κινητό ρομποτικό σύστημα διαφορικής κινηματικής το οποίο περιγράφεται από τις εξισώσεις (6.1),

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \theta \\ \frac{r}{2} \sin \theta \\ \frac{r}{L} \end{bmatrix} u_r + \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \theta \\ \frac{r}{2} \sin \theta \\ -\frac{r}{L} \end{bmatrix} u_l \quad (6.1)$$

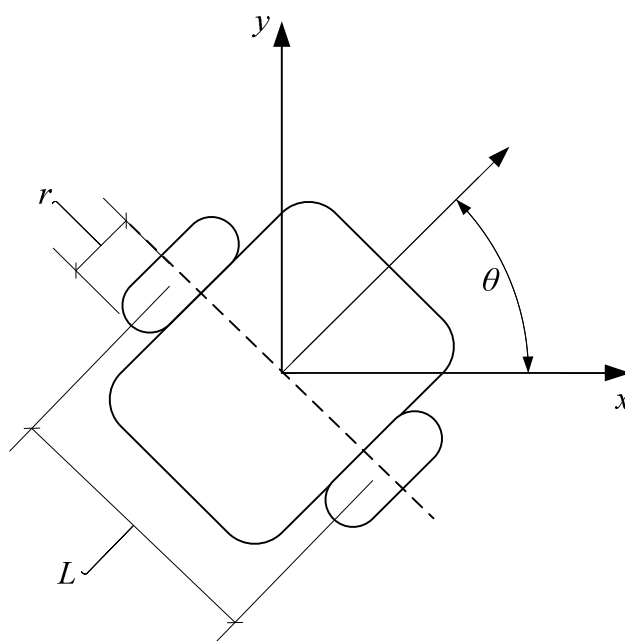
όπου  $x, y$  είναι οι συντεταγμένες του σημείου στο μέσο του άξονα,  $L$  είναι το μήκος του άξονα (η απόσταση των δυο τροχών),  $r$  είναι η ακτίνα των τροχών και  $u_r$ ,  $u_l$  οι γωνιακές ταχύτητες των τροχών (σε rad/sec). Μια διαγραμματική απεικόνιση του μοντέλου φαίνεται στο Σχήμα 73. Οι εξισώσεις (6.1) μπορούν να μετασχηματιστούν, μέσα από έναν κατάλληλο μετασχηματισμό της εισόδου, σε ένα μοντέλο το οποίο μοιάζει αρκετά με το μοντέλο του Dubins. Πιο αναλυτικά, το σύστημα αυτό περιγράφεται από τις εξισώσεις,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} u_{\omega} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{r}{L} \end{bmatrix} u_{\psi} \quad (6.2)$$

ενώ ο μετασχηματισμός εισόδου είναι,

$$\begin{aligned} u_{\omega} &= \frac{u_r + u_l}{2} \\ u_{\psi} &= u_r - u_l \end{aligned} \quad (6.3)$$

Η είσοδος  $u_{\omega}$  εκφράζει τη «μετατόπιση» του robot ενώ η  $u_{\psi}$  τη «στροφή» του.



Σχήμα 73. Απεικόνιση των γενικευμένων μεταβλητών του διαφορικού κινηματικού μοντέλου

Μπορούμε να επεκτείνουμε το μετασχηματισμό κάνοντας τις εξής παρατηρήσεις: Η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου στη περιφέρεια του τροχού ισούται με  $v = r\omega$ . Μπορεί πολύ εύκολα να αποδειχτεί ότι και η γραμμική ταχύτητα του κέντρου του τροχού ισούται με τη γραμμική ταχύτητα της περιφέρειας του. Αν θεωρήσουμε ότι  $v_r, v_l$  είναι οι γραμμικές ταχύτητες των τροχών, τότε,

$$\begin{aligned} v_r &= ru_r \\ v_l &= ru_l \end{aligned} \quad (6.4)$$

οπότε και μπορούμε να γράψουμε το μοντέλο (6.1) με βάση τις γραμμικές ταχύτητες των δυο τροχών, δηλαδή,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta / 2 \\ \sin \theta / 2 \\ 1 / L \end{bmatrix} v_r + \begin{bmatrix} \cos \theta / 2 \\ \sin \theta / 2 \\ -1 / L \end{bmatrix} v_l \quad (6.5)$$



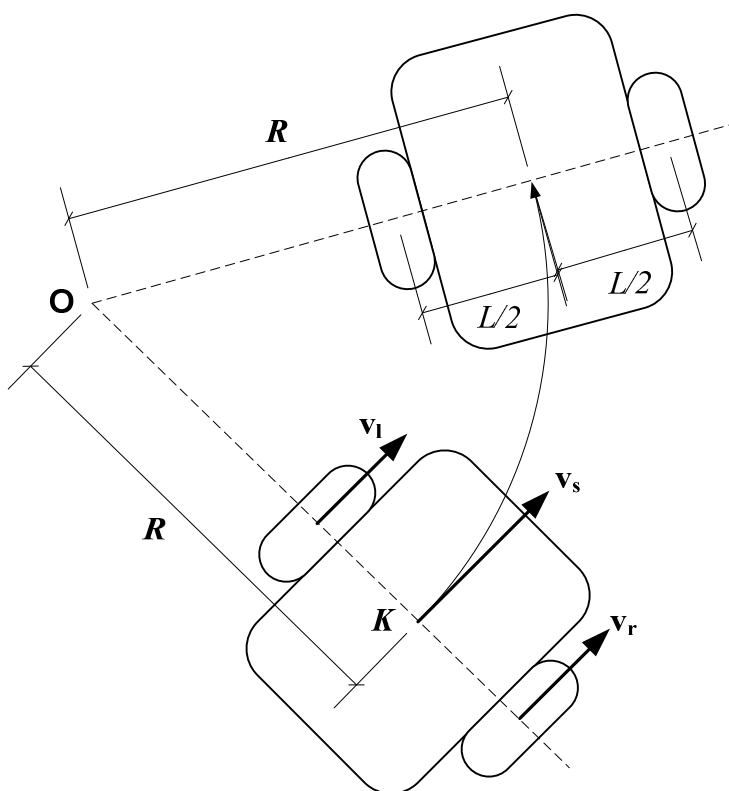
Θεωρώντας τώρα το μετασχηματισμό εισόδου,

$$\begin{aligned} u_s &= \frac{v_r + v_l}{2} \\ u_\theta &= \frac{v_r - v_l}{L} \end{aligned} \quad (6.6)$$

το νέο μετασχηματισμένο σύστημα έχει τη μορφή,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} u_s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_\theta \quad (6.7)$$

Έστω λοιπόν ότι το robot εκτελεί στροφή ακτίνας  $R$  ως προς το μέσο του άξονα, με κέντρο το σημείο  $O$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 74. Το  $O$  ονομάζεται *Στιγμαίο Κέντρο Καμπυλότητας*. Οι γραμμικές ταχύτητες των τροχών είναι  $v_r, v_l$ .



Σχήμα 74. Απεικόνιση των ταχυτήτων του διαφορικού μοντέλου

Η γραμμική ταχύτητα του μέσου του άξονα (το σημείο  $K$ ), είναι φυσικά  $v_s = \omega R$ . Για τις γραμμικές ταχύτητες των τροχών όμως, ισχύει,

$$\begin{aligned} v_r &= \omega(R + L/2) \\ v_l &= \omega(R - L/2) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Προσθέτοντας τις (6.8) μεταξύ τους, και σε συνδυασμό με την εξίσωση της γραμμικής ταχύτητας του σημείου  $K$  έχουμε,

$$v_s = \frac{v_r + v_l}{2} \quad (6.9)$$

Αφαιρώντας τώρα τις (6.8) προκύπτει η εξίσωση για τη γωνιακή ταχύτητα του σημείου  $K$ . Δηλαδή,

$$v_\theta = \frac{v_r - v_l}{L} = \omega \quad (6.10)$$

Παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές  $v_s, v_\theta$  ταυτίζονται με τις μεταβλητές εισόδου  $u_s, u_\theta$ , συνεπώς οι μετασχηματισμένες μεταβλητές εισόδου των Εξ.(6.6) εκφράζουν τη γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του robot. Αν μετασχηματίσουμε περαιτέρω την είσοδο  $u_\theta$ , δηλαδή τη γωνιακή ταχύτητα, εισάγοντας την καμπυλότητα  $u_\kappa$  σύμφωνα με το μετασχηματισμό,

$$u_\theta = u_\kappa \cdot u_s \quad (6.11)$$

και θεωρήσουμε ότι η γραμμική ταχύτητα είναι σταθερή, δηλαδή  $u_s = v$ , τότε το σύστημα (6.7) μετασχηματίζεται στη γνώριμη μορφή του μοντέλου του Dubins, δηλαδή,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} u_\kappa \quad (6.12)$$

Βλέπουμε λοιπόν, ότι το διαφορικό κινηματικό μοντέλο μπορεί να εξομοιώσει την κινηματική συμπεριφορά του μοντέλου του Dubins, κάτι που φυσικά είναι αναμενόμενο. Από την πλευρά του ελέγχου, παρατηρούμε ότι η είσοδος του μοντέλου είναι μόνο η καμπυλότητα  $u_\kappa$ . Όμως το διαφορικό μοντέλο έχει δυο εισόδους, τις ταχύτητες των τροχών. Συνεπώς για να υπολογίσουμε το πραγματικό διάνυσμα εισόδου του robot, ξεκινώντας από την καμπυλότητα, χρειαζόμαστε και μια δεύτερη εξίσωση. Φυσικά αυτή η εξίσωση προκύπτει από την ταχύτητα  $u_s = v$  την οποία θεωρούμε σταθερή και a priori γνωστή. Συνδυάζοντας λοιπόν τις εξισώσεις (6.11)(6.10) και (6.9) έχουμε,

$$\begin{aligned} v_r &= v(1 + u_\kappa L / 2) \\ v_l &= v(1 - u_\kappa L / 2) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Οι εξ.(6.13) μας δίνουν τις ταχύτητες των τροχών του robot έχοντας σας δεδομένα τη γραμμική ταχύτητα του και την καμπυλότητα με την οποία πρέπει να κινηθεί. Εφόσον η ταχύτητα είναι σταθερή, η μόνη είσοδος είναι η καμπυλότητα η οποία και αποτελεί την έξοδο του ασαφούς ελεγκτή που υλοποιεί το FPGA.

Για την ανακατασκευή των οδομετρικών δεδομένων, το MATLAB ζητά από το robot κάθε 12,5 msec πληροφορίες για τους κωδικοποιητές των δυο τροχών του. Το

Κηφερα επιστρέφει την 32bit τιμή των δυο κωδικοποιητών εκφρασμένη σε μονάδες παλμών, όπου ένας παλμός αντιστοιχεί σε 0,08 mm. Συνεπώς, αν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές αυτές με 0,08, λαμβάνουμε το ολικό διάστημα που έχουν κινηθεί οι δυο τροχοί από την αρχή του πειράματος. Ας υποθέσουμε τώρα ότι τη χρονική στιγμή  $t$  το διάστημα του αριστερού και του δεξιού τροχού είναι  $S_L(t)$  και  $S_R(t)$  αντίστοιχα ενώ οι τιμές τους κατά την προηγούμενη κλήση, δηλαδή την χρονική στιγμή  $t-1$ , είναι  $S_L(t-1)$  και  $S_R(t-1)$ . Θεωρούμε επίσης ότι μέσα στο χρονικό διάστημα  $\Delta t$  η εντολή εισόδου, η καμπυλότητα  $\kappa$ , είναι σταθερή. Αυτό μεταφράζεται σε σταθερές ταχύτητες τροχών. Δηλαδή κατά το χρονικό διάστημα  $\Delta t$  το ρομπότ εκτελεί τόσο κύκλο. Τότε, από την Εξ.(6.10) έχουμε,

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{v_r - v_l}{L} = \frac{\Delta S_r - \Delta S_l}{\Delta t L} \Leftrightarrow \Delta\theta = \frac{\Delta S_r - \Delta S_l}{L} \quad (6.14)$$

Θεωρώντας γνωστή την αρχική διεύθυνση του robot ως προς το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων, και ίση με  $\theta_0$ , η διεύθυνση του κατά τη χρονική στιγμή  $t$  ισούται με,

$$\theta(t) = \theta_0 + \sum_{\tau=0}^t \Delta\theta(\tau) = \theta_0 + \sum_{\tau=0}^t \frac{\Delta S_r(\tau) - \Delta S_l(\tau)}{L} \quad (6.15)$$

Αντίστοιχα, από την Εξ.(6.9) λαμβάνουμε το διάστημα  $\Delta S(t)$  το οποίο έχει κινηθεί το robot (το σημείο K δηλαδή) μέσα στο χρονικό διάστημα  $\Delta t$ . Δηλαδή,

$$v_s = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{v_r + v_l}{2} \Leftrightarrow \Delta S = \frac{\Delta S_r + \Delta S_l}{2} \quad (6.16)$$

Για να υπολογίσουμε τη μετατόπιση του robot ως προς τους άξονες  $x, y$ , λύνουμε το σύστημα της κινηματικής για το χρονικό διάστημα  $\Delta t$  θεωρώντας την είσοδο σταθερή. Οι λύσεις αυτές έχουν παρουσιαστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο και περιγράφονται από τις Εξ.(2.2). Πιο αναλυτικά,

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= 2 \frac{\Delta S}{\Delta\theta} \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \cos\left(\theta_{t-1} + \frac{\Delta\theta}{2}\right) \\ \Delta y(t) &= 2 \frac{\Delta S}{\Delta\theta} \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \sin\left(\theta_{t-1} + \frac{\Delta\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Στην περίπτωση όπου το robot εκτελεί ευθεία, οπότε και  $\Delta\theta=0$ , μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι οι τύποι (6.17) παίρνουν τη μορφή,

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \Delta S \cos\left(\theta_{t-1} + \frac{\Delta\theta}{2}\right) \\ \Delta y(t) &= \Delta S \sin\left(\theta_{t-1} + \frac{\Delta\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Φυσικά, για να βρούμε τις απόλυτες συντεταγμένες του robot τη χρονική στιγμή  $t$ , αθροίζουμε τις παραπάνω εξισώσεις, δηλαδή,

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 + \sum_{\tau=0}^t \Delta x(\tau) \\
 y(t) &= y_0 + \sum_{\tau=0}^t \Delta y(\tau)
 \end{aligned}
 \tag{6.19}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε λοιπόν ανασκευάσει το διάνυσμα κατάστασης του robot, δηλαδή τις καταστάσεις  $(x, y, \theta)$ . Πρέπει να σημειωθεί ότι ο χρόνος δεν εμφανίζεται πουθενά στις εξισώσεις οδομετρίας. Αυτό επιλέχθηκε σκόπιμα αφού μειώνει σημαντικά το σφάλμα. Μιας και το Khepera έχει επιλογή να επιστρέφει τις ταχύτητες των τροχών του, και όχι τις τιμές των κωδικοποιητών του, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τύπους οδομετρίας που εμπλέκουν τις ταχύτητες, απλοποιώντας έτσι και τις ίδιες τις εξισώσεις. Όμως, η χρήση των ταχυτήτων εισάγει δυο σφάλματα. Το πρώτο αφορά τις ίδιες τις ταχύτητες όπως τις υπολογίζει το ίδιο το robot. Μέσα στο χρονικό διάστημα των 12,5 msec όπου γίνονται δυο διαδοχικές κλήσεις στο robot, το Khepera δεν μπορεί να μετρήσει με ακρίβεια την ταχύτητα των τροχών. Δεύτερον, οι τύποι οδομετρίας με ταχύτητες εμπλέκουν και το χρονικό διάστημα  $\Delta t$  μέσα στους ίδιους τους υπολογισμούς. Κάτι τέτοιο εισάγει μεγάλο σφάλμα αφού το διάστημα αυτό δεν είναι σταθερό. Το διάστημα αυτό εκφράζει το χρόνο μεταξύ δυο διαδοχικών κλήσεων από το MATLAB στο Khepera. Όπως είναι κατανοητό υπάρχει αφενός μια μικρή καθυστέρηση για τη μεταφορά των δεδομένων αλλά επίσης και καθυστέρηση στην εκτέλεση της κλήσης από το ίδιο το MATLAB. Η εκτέλεση της κλήσης γίνεται δημιουργώντας ένα αντικείμενο *timer* το οποίο εκτελεί τη συγκεκριμένη εντολή ανά 12,5 msec. Αυτή η περίοδος όμως δεν είναι εγγυημένη αφού εξαρτάται σημαντικά από τις άλλες διεργασίες που τρέχει ο υπολογιστής τη στιγμή εκείνη. Συνεπώς, το  $\Delta t$  μπορεί να διαφέρει από την ονομαστική του τιμή, κάτι που επιβεβαιώθηκε και πειραματικά.

### 6.3. Αλγόριθμος επεξεργασίας Video και βαθμονόμηση

Προκειμένου να εξαχθεί η πραγματική πορεία του robot και να συγκριθεί με την οδομετρία του, πρέπει να γίνει επεξεργασία του βίντεο το οποίο καταγράφει την κίνηση του robot. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, πάνω από το πειραματικό πεδίο στερεώθηκε μια ψηφιακή κάμερα η οποία κατέγραφε τα πειράματα σε ανάλυση 720p, δηλαδή 1280x720 pixels. Πριν από τη διενέργεια των πειραμάτων, η κάμερα βαθμονομήθηκε ώστε να εξαλειφθεί (ή μειωθεί πιο σωστά) η παραμόρφωση του φακού. Αυτό έγινε χρησιμοποιώντας τις βιβλιοθήκες Camera Calibration Toolbox του MATLAB [67] που αναπτύχθηκαν από τον J.Y.Bouguet. Οι βιβλιοθήκες αυτές συνθέτουν ένα μοντέλο παραμόρφωσης της κάμερας και δημιουργούν μη-γραμμικούς μετασχηματισμούς οι οποίοι επιστρέφουν τις πραγματικές τιμές ενός pixel στο χώρο (και το ανάποδο).

Το μοντέλο παραμόρφωσης της κάμερας χαρακτηρίζεται από ορισμένες παραμέτρους οι οποίες πρέπει να υπολογιστούν. Οι παράμετροι ονομάζονται *εσωγενείς (intrinsic)* παράμετροι και είναι:

- Το εστιακό μήκος  $f_c$ : διάνυσμα 2x1
- Το κύριο σημείο  $cc$ : διάνυσμα 2x1

- Ο συντελεστής ασυμμετρίας  $a_c$  : βαθμωτό μέγεθος
- Το διάνυσμα ακτινικών-εφαπτομενικών παραμορφώσεων  $k_c$  : διάνυσμα 5x1

Έχοντας λοιπόν σαν δεδομένα τις παραπάνω παραμέτρους, έστω ότι ένα σημείο  $P$  στο χώρο έχει συντεταγμένες  $[X_c, Y_c, Z_c]$  ως προς το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας. Η προβολή του σημείου αυτό πάνω στο επίπεδο της κάμερας είναι,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_c / Z_c \\ Y_c / Z_c \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Οι συντεταγμένες του σημείου αυτού μετά την προσθήκη της παραμόρφωσης του φακού είναι,

$$\begin{bmatrix} x_d^1 \\ x_d^2 \end{bmatrix} = (1 + k_c^1 r^2 + k_c^2 r^2 + k_c^5 r^6) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + x_d^t \quad (6.21)$$

όπου  $r^2 = x^2 + y^2$  και  $x_d^t$  είναι το διάνυσμα της εφαπτομενικής παραμόρφωσης που δίνεται από τον τύπο,

$$x_d^t = \begin{bmatrix} 2k_c^3 xy + k_c^4 (r^2 + 2x^2) \\ 2k_c^4 xy + k_c^3 (r^2 + 2y^2) \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι εκθέτες των παραμέτρων υποδηλώνουν την αντίστοιχη συντεταγμένη του διανύσματος και όχι ύψωση σε δύναμη. Δηλαδή το  $k_c^3$  υποδηλώνει το τρίτο στοιχείο του διανύσματος  $k_c$  και όχι δύναμη. Έχοντας, λοιπόν, το διάνυσμα των σημείων  $x_d$ , οι συντεταγμένες του σημείου της εικόνας σε pixel δίνεται από την εξίσωση,

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} x_d^1 \\ x_d^2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

όπου ο πίνακας  $K$  ονομάζεται *πίνακας της κάμερας* και ορίζεται ως,

$$K = \begin{bmatrix} f_c^1 & a_c f_c^1 & cc^1 \\ 0 & f_c^2 & cc^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

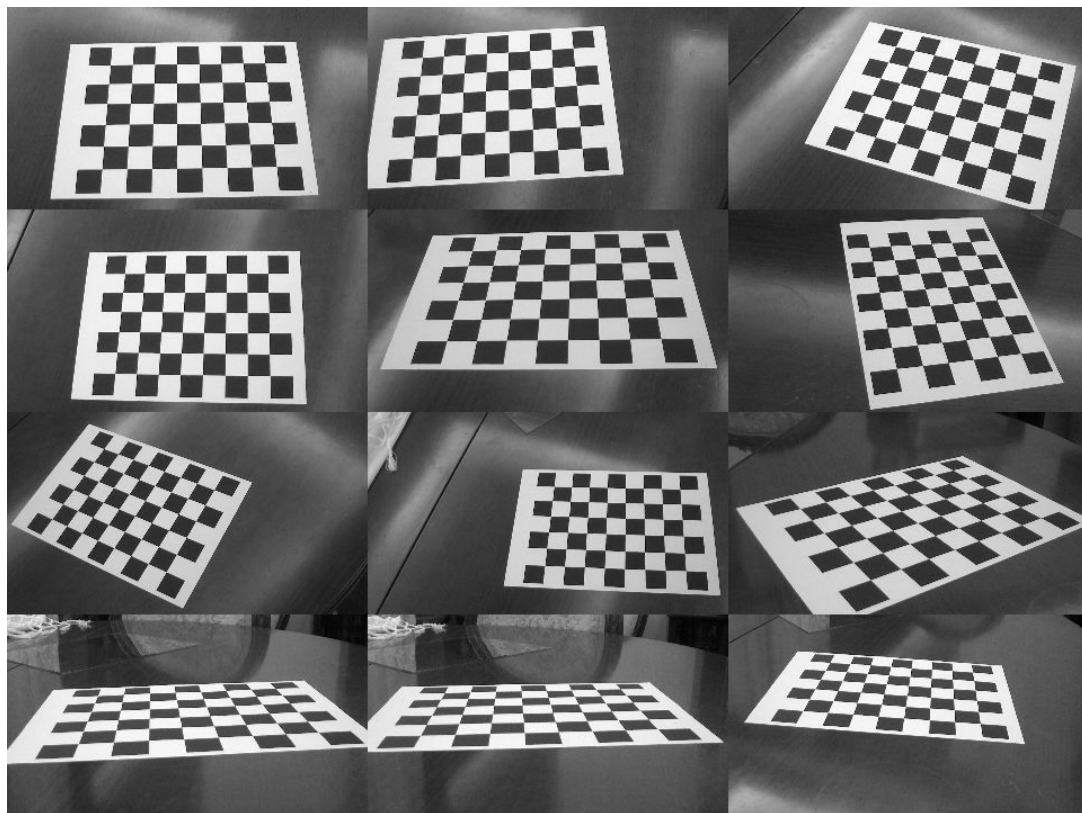
Ο αντίστροφος μετασχηματισμός, δηλαδή από τις συντεταγμένες της εικόνας (pixels) σε συντεταγμένες στο χώρο, είναι ένας μη γραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος δεν έχει αναλυτική λύση. Το Camera Calibration Toolbox χρησιμοποιεί έναν επαναληπτικό αλγόριθμο ώστε να κάνει μια εκτίμηση του αντίστροφου μετασχηματισμού. Ουσιαστικά προσπαθεί να λύσει την (6.21) ως προς  $[x, y]^T$ . Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται *normalize* και είναι αρκετά χρήσιμη στα πειράματα

γιατί επιτρέπει τον υπολογισμό της θέσης του robot μέσα από την ανάλυση του βίντεο, όπου εξάγουμε τις συντεταγμένες σε pixels.

Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα εξωτερικό σύστημα συντεταγμένων, αυτό σχετίζεται με το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας με έναν γραμμικό (αφινικό πιο σωστά) μετασχηματισμό. Δηλαδή, αν οι συντεταγμένες του σημείου  $\mathbf{P}$  ως προς το εξωτερικό σύστημα είναι  $[X, Y, Z]$  και ως προς την κάμερα είναι  $[X_c, Y_c, Z_c]$ , τότε τα δυο διανύσματα συνδέονται με το τύπο,

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + T \quad (6.25)$$

όπου  $R$  είναι ένας πίνακας στροφής στο χώρο και  $T$  είναι ένα διάνυσμα μετατόπισης. Οι  $R, T$  ονομάζονται *εξωγενείς (extrinsic)* παράμετροι. Για τη βαθμονόμηση της κάμερας, το πρόγραμμα χρησιμοποιεί μια συλλογή εικόνων ενός προτύπου βαθμονόμησης και συγκεκριμένα μια εκτυπωμένη σκακιέρα με τετράγωνα διαστάσεων 28x28mm. Οι εικόνες βαθμονόμησης φαίνονται στο Σχήμα 75.



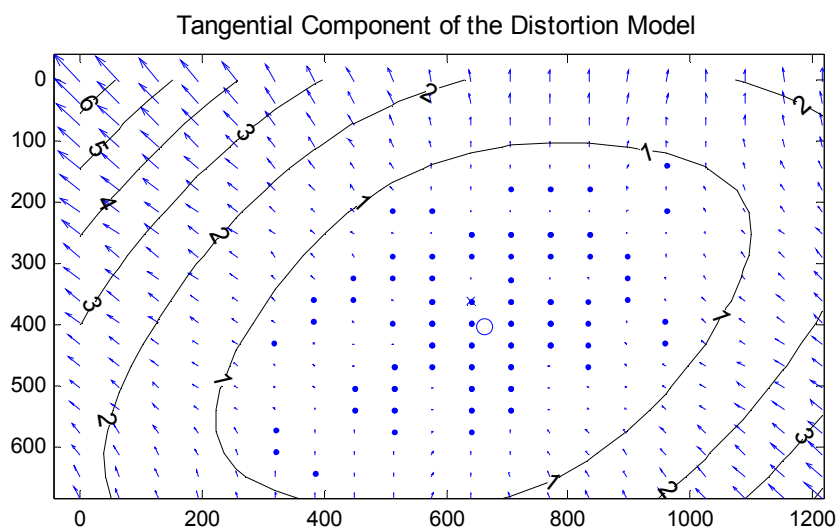
Σχήμα 75. Εικόνες των προτύπων βαθμονόμησης της κάμερας

Η εκτίμηση των εσωγενών παραμέτρων της κάμερας μετά από την επεξεργασία των εικόνων βαθμονόμησης, παρουσιάζεται στον επόμενο πίνακα.

Πίνακας 3. Εσωγενείς παράμετροι της κάμερας όπως παρήχθησαν από τη βαθμονόμηση

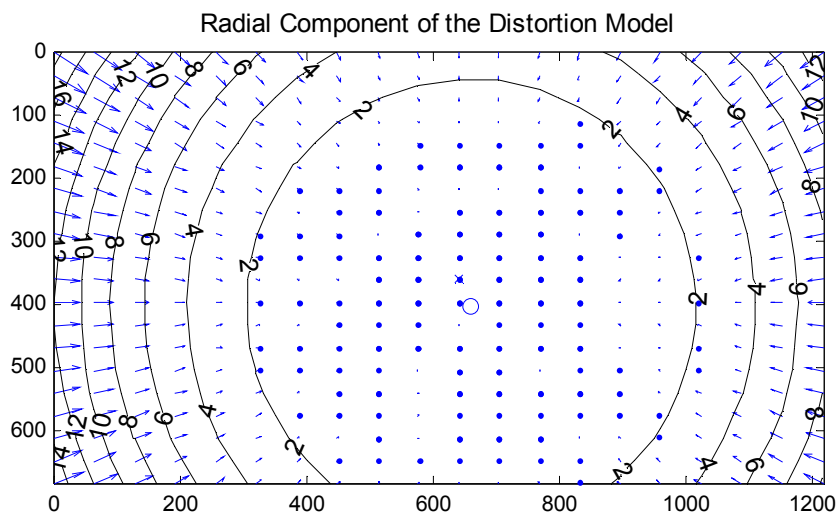
	Τιμή	Σφάλμα
$f_c$	[ 1611.751388202526600 , 1638.959392541008400 ]	[ 13.0094027812587 , 8.06897844372317 ]
$cc$	[ 660.518704704271270 , 402.590297954776020 ]	[ 14.8705341907901 , 30.60764555355458 ]
$a_c$	0.0	0.0
$k_c$	[ -0.116846670844514 , 0.046423954975585, -0.006445837344329 , -0.002959267661346 , 0 ]	[ 0.023707686981070 , 0.159047973749887 , 0.002294912303617 , 0.00211233514674 , 0.000000000000000 ]

Το σφάλμα ισούται με τρεις τυπικές αποκλίσεις. Το ολικό σφάλμα της προβολής είναι [0.61307 , 0.70830] pixels. Τα μοντέλα της ακτινικής, εφαπτομενικής και ολικής παραμόρφωσης της κάμερας παρουσιάζονται στις ακόλουθες εικόνες.



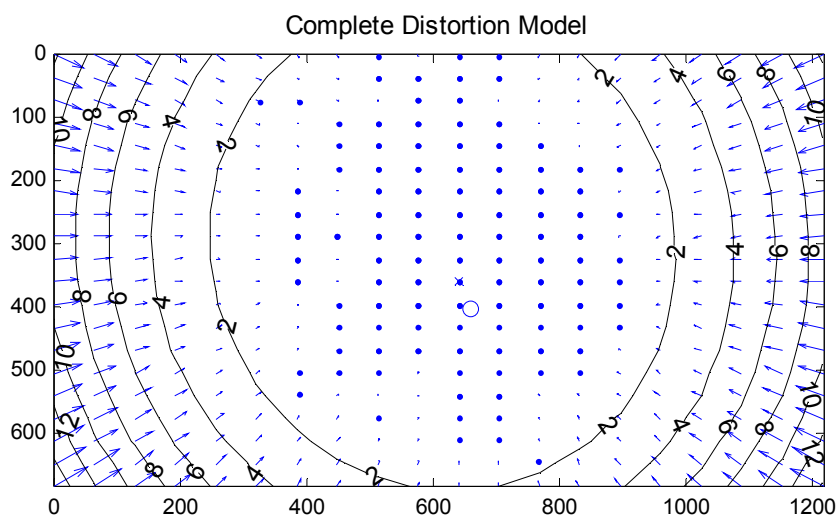
Pixel error	= [0.6131, 0.7083]	
Focal Length	= (1611.75, 1638.96)	+/- [13.01, 8.069]
Principal Point	= (660.519, 402.59)	+/- [14.87, 30.61]
Skew	= 0	+/- 0
Radial coefficients	= (-0.1168, 0.04642, 0)	+/- [0.02371, 0.159, 0]
Tangential coefficients	= (-0.006446, -0.002959)	+/- [0.002295, 0.002111]

Σχήμα 76. Μοντέλο εφαπτομενικής παραμόρφωσης της κάμερας



Pixel error	= [0.6131, 0.7083]	
Focal Length	= (1611.75, 1638.96)	+/- [13.01, 8.069]
Principal Point	= (660.519, 402.59)	+/- [14.87, 30.61]
Skew	= 0	+/- 0
Radial coefficients	= (-0.1168, 0.04642, 0)	+/- [0.02371, 0.159, 0]
Tangential coefficients	= (-0.006446, -0.002959)	+/- [0.002295, 0.002111]

**Σχήμα 77. Μοντέλο ακτινικής παραμόρφωσης της κάμερας**



Pixel error	= [0.6131, 0.7083]	
Focal Length	= (1611.75, 1638.96)	+/- [13.01, 8.069]
Principal Point	= (660.519, 402.59)	+/- [14.87, 30.61]
Skew	= 0	+/- 0
Radial coefficients	= (-0.1168, 0.04642, 0)	+/- [0.02371, 0.159, 0]
Tangential coefficients	= (-0.006446, -0.002959)	+/- [0.002295, 0.002111]

**Σχήμα 78. Ολικό μοντέλο παραμόρφωσης της κάμερας**

Έχοντας υπολογίσει τον πίνακα των εσωγενών παραμέτρων, μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε την πορεία του robot από την επεξεργασία του βίντεο των πειραμάτων. Προκειμένου να εξαχθεί η πορεία του robot, τοποθετήθηκε στο κέντρο



του ένα κόκκινο LED. Όλη η επιφάνεια του robot καλύφθηκε με μαύρη μονωτική ταινία ώστε να γίνει πιο εύκολος ο εντοπισμός του LED λόγω της μεγάλης βαθμίδας που θα παρουσιάζει η χρωματική του εικόνα. Μια απεικόνιση του robot όπως φαίνεται από την κάμερα, παρουσιάζεται στο Σχήμα 79.



**Σχήμα 79.** Απεικόνιση του robot όπως φαίνεται από την κάμερα. Διακρίνεται το κόκκινο LED στο κέντρο του για την εξαγωγή της θέσης του

Ο αλγόριθμος για τον εντοπισμό του LED μέσα στην εικόνα βασίζεται στην υψηλή αντίθεση που έχει η περιοχή του κόκκινου LED με το γύρω χώρο. Συγκεκριμένα, αρχικά γίνεται ένας μετασχηματισμός του χρωματικού χώρου από RGB στον γενικευμένο χώρο  $rgb$ . Ο χώρος αυτό εκφράζει το ποσοστό του κάθε χρώματος πάνω σε κάθε pixel. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{R+G+B} \\ g &= \frac{G}{R+G+B} \\ b &= \frac{B}{R+G+B} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Ο χώρος αυτός αποτελεί τον πλήρη χώρο του οποίου υποχώρος είναι ο λεγόμενος χώρος  $rg$  ( $rg$  chromaticity space), ο οποίος αποτελείται μόνο από τις πρώτες δυο εξισώσεις. Μετά το μετασχηματισμό, για να αυξηθεί η αντίθεση περαιτέρω, υψώνουμε κάθε pixel της εικόνας στην τρίτη δύναμη, δηλαδή,

$$(r', g', b')_{(u,v)} = (r^3, g^3, b^3)_{(u,v)} \quad (6.27)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε ξανά το μετασχηματισμό, δηλαδή υπολογίζουμε ξανά το ποσοστό χρώματος του κάθε pixel στην καινούργια εικόνα (το οποίο ουσιαστικά είναι το ποσοστό του ποσοστού) και εφαρμόζουμε ένα thresholding στο επίπεδο του κόκκινου χρώματος. Το αποτέλεσμα αυτής της επεξεργασίας είναι μια δυαδική

(ασπρόμαυρη) εικόνα όπου τα pixel με μεγάλο ποσοστό κόκκινου χρώματος έχουν τιμή «1». Έτσι, τα pixel του LED όπου έχουν μεγάλη ένταση στο κόκκινο κανάλι, έχουν την τιμή «1» ενώ τα υπόλοιπα έχουν την τιμή «0». Εμπειρικά το κατώφλι ορίστηκε στο «0.6». Φυσικά, το επόμενο βήμα είναι να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του σημείου το οποίο εκφράζει το «κέντρο» του LED, άρα και το σημείο κίνησης του robot. Το σημείο αυτό το ορίσαμε ως τον διάμεσο (median) των σημείων της τελικής εικόνας που έχουν την τιμή «1».

Ο παραπάνω αλγόριθμος εφαρμόζεται στο πρώτο frame του βίντεο και, όπως είναι κατανοητό, δεν είναι αρκετά γρήγορος αφού επεξεργάζεται όλη την εικόνα (1280x720). Για να επιταχυνθεί η επεξεργασία όλου του βίντεο, στα επόμενα frames θεωρούμε μια περιοχή ενδιαφέροντος (region of interest, ROI) της εικόνας, και όχι ολόκληρη την εικόνα. Η περιοχή αυτή είναι ένα τετράγωνο 17x17 pixel με κέντρο το σημείο που υπολογίστηκε από το προηγούμενο frame. Αυτό είναι αρκετά λογικό αν αναλογιστούμε ότι μεταξύ δυο frame το robot δεν μπορεί να έχει κινηθεί πολύ οπότε και θα βρίσκεται αρκετά κοντά μέσα σε δυο διαδοχικά frames. Ο αλγόριθμος του βίντεο έχει ακρίβεια περίπου  $\pm 2$  pixels που μεταφράζεται σε 2.4mm. Δηλαδή, η πορεία του robot που υπολογίζει η κάμερα έχει σφάλμα περίπου 2.4mm.

#### 6.4. Πειραματικά αποτελέσματα

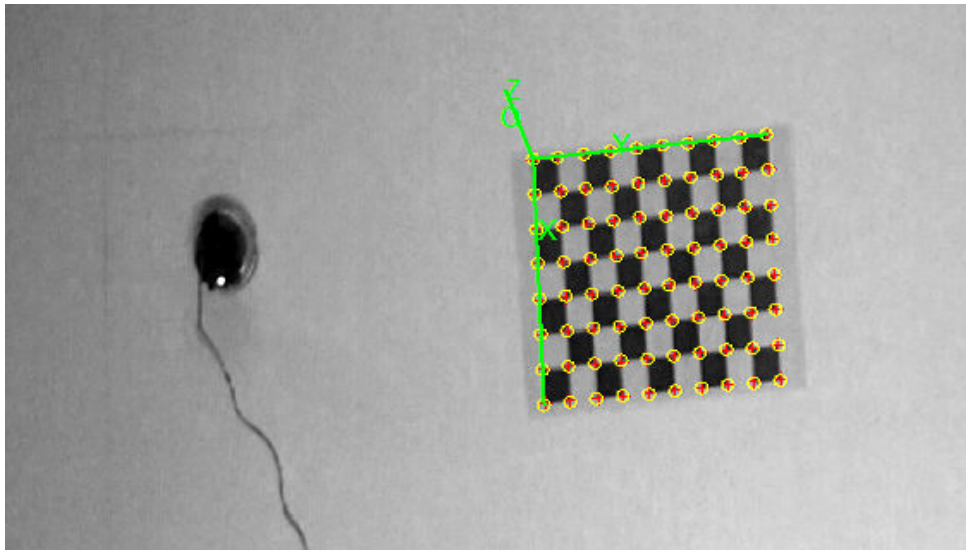
Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα δυο πειραμάτων για την παρακολούθηση πορείας μέσω του SoC. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η πορεία σχεδιάστηκε στο MATLAB και μεταφέρθηκε στο FPGA. Από κει, το robot έπαιρνε εντολές κίνησης, μέσω του MATLAB, από το FPGA. Πριν από κάθε πείραμα, βιντεοσκοπήθηκε ένα πρότυπο βαθμονόμησης (σκακιέρα) ώστε να δημιουργηθεί ένα εξωγενές σύστημα συντεταγμένων για την εικόνα. Μια συγκεκριμένη γωνία της σκακιέρας είχε δηλωθεί σαν την αρχή των αξόνων ενώ οι δυο άλλες πλευρές ήταν οι άξονες x και y (βλέπε Σχήμα 80). Το παγκόσμιο σύστημα συντεταγμένων ταυτίζεται με το σύστημα συντεταγμένων του robot το οποίο έχει αρχή των αξόνων του το σημείο κίνησης του robot (σημείο K στο Σχήμα 74). Ο άξονας x ταυτίζεται με την αρχική διεύθυνση του robot. Η πορεία αναφοράς είναι ορισμένη σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων. Προφανώς, τα δυο συστήματα συνδέονται με μια αφινική σχέση (στροφή + μετατόπιση) δηλαδή,

$$p_c = R_w p_r + T_w \quad (6.28)$$

όπου  $p_r, p_c$  είναι οι συντεταγμένες στο χώρο του robot και της κάμερας αντίστοιχα ενώ τα  $R_w, T_w$  είναι ο πίνακας στροφής και το διάνυσμα μετατόπισης. Το διάνυσμα μετατόπισης μπορεί να βρεθεί πολύ εύκολα μιας και η θέση του σημείου του robot στο πρώτο frame, αν εκφραστεί στο εξωγενές σύστημα αναφοράς της κάμερας, ισούται με αυτό ακριβώς το διάνυσμα. Δηλαδή, στην αρχή του πειράματος οι συντεταγμένες του robot στο εσωτερικό του σύστημα είναι (0,0) ενώ η θέση του ως προς το σύστημα της κάμερας (το εξωγενές σύστημα και όχι το σύστημα που είναι προσκολλημένο στην ίδια την κάμερα) δίνεται από τον αλγόριθμο επεξεργασίας εικόνας. Έστω ότι οι συντεταγμένες αυτές είναι  $p_c^0$ . Τότε από την Εξ.(6.28) έχουμε,

$$p_c^0 = T_w \quad (6.29)$$

όποτε και ανακτάμε το διάνυσμα μετατόπισης.



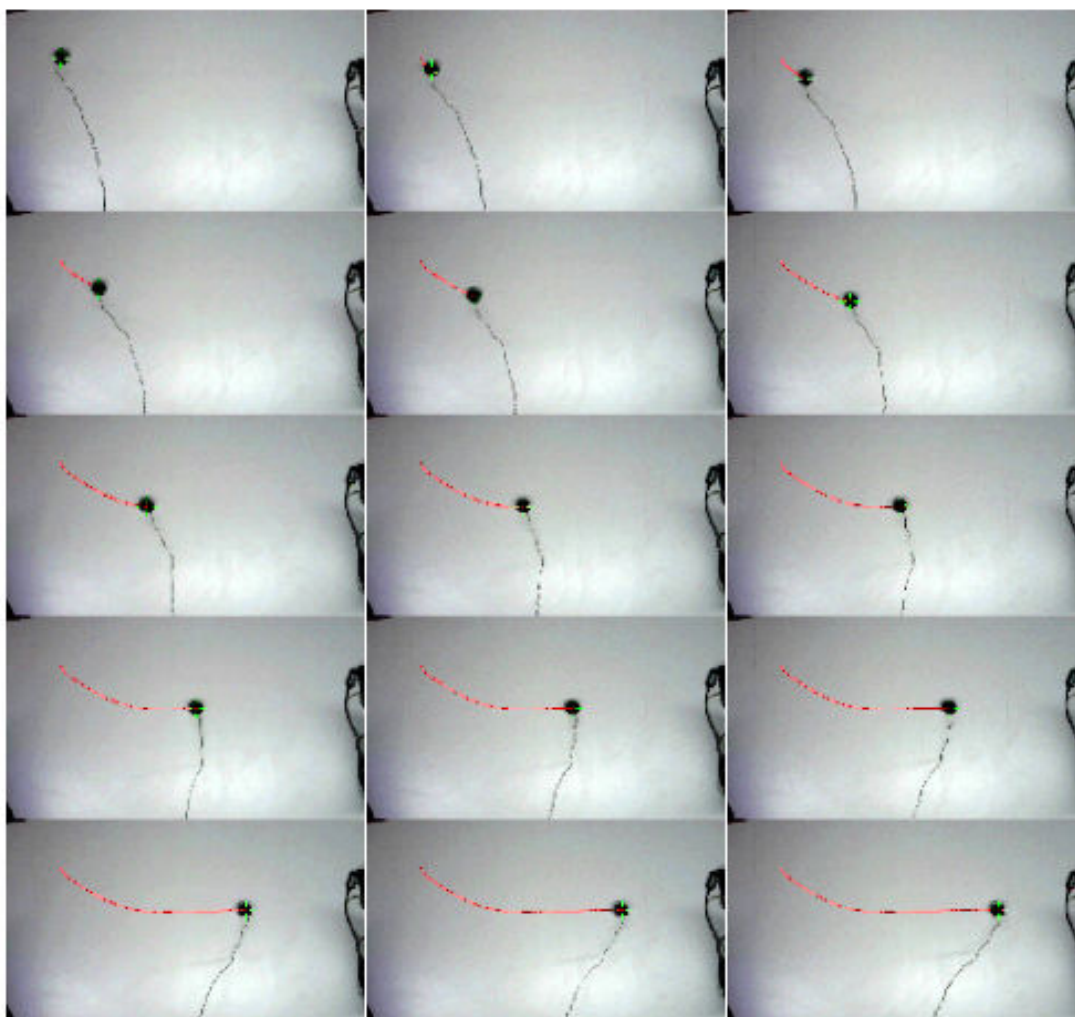
Σχήμα 80. Απεικόνιση του εξωγενούς συστήματος αναφοράς για τα πειράματα

Ο πίνακας στροφής όμως δεν μπορεί να ανακτηθεί απ' ευθείας. Για να υπολογιστεί ο πίνακας θα πρέπει να έχουμε την αρχική διεύθυνση του robot ως προς το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας. Μιας και ο πίνακας εκφράζει στροφή στο επίπεδο, θα έχει τη μορφή,

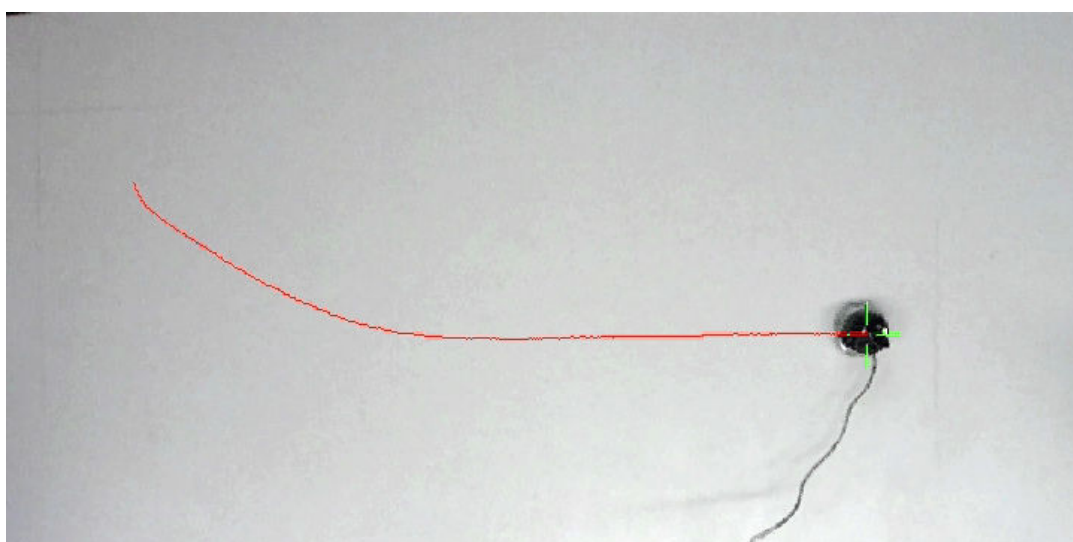
$$R_w = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

Για να βρεθεί η γωνία  $\theta$  έχει τοποθετηθεί πάνω στο robot και ένα δεύτερο LED πράσινου χρώματος, το οποίο βρίσκεται στην άκρη του robot πάνω στο άξονα x του εσωτερικού συστήματος συντεταγμένων του. Η ευθεία που περνάει από τα δυο LED είναι στην ουσία ο άξονα x του robot. Πριν από κάθε πείραμα, υπολογίστηκαν οι συντεταγμένες του δεύτερου LED ως προς το σύστημα της κάμερας. Έχοντας λοιπόν τα δυο αυτά σημεία, η γωνία  $\theta$  μπορεί να υπολογιστεί πολύ εύκολα.

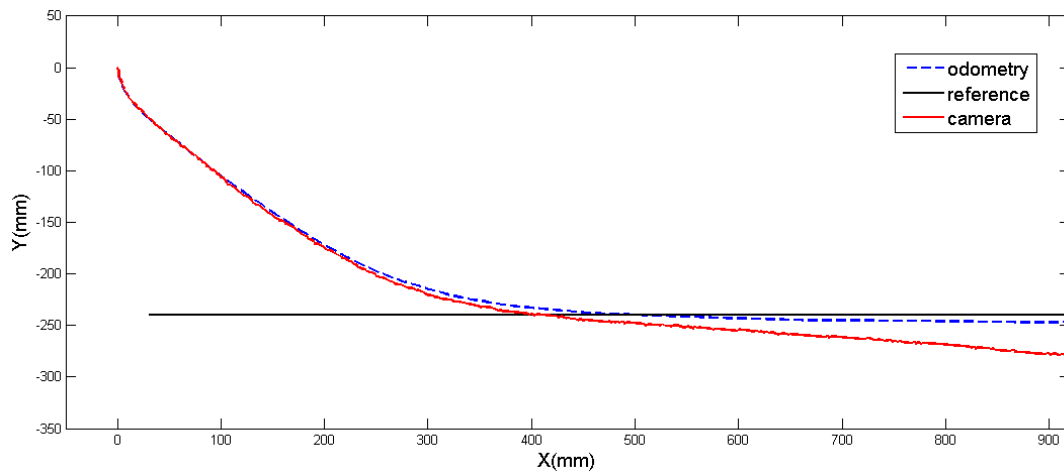
Στο πρώτο πείραμα, η πορεία αναφοράς ήταν μια ευθεία την οποία έπρεπε να παρακολουθήσει το robot. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η πορεία αυτή σχεδιάστηκε στο MATLAB και «φορτώθηκε» στο FPGA. Στιγμιότυπα του βίντεο του πρώτου πειράματος παρουσιάζονται στο Σχήμα 81. Μια απεικόνιση ολόκληρης της πορείας που εκτέλεσε το robot φαίνεται στο Σχήμα 82. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι εικόνες αυτές είναι οι πρωτότυπες εικόνες του βίντεο οι οποίες περιέχουν και την παραμόρφωση λόγω της κάμερας. Μετά την ανάλυση του βίντεο και την απομάκρυνση της παραμόρφωσης, η πορεία της οδομετρίας, η πραγματική πορεία του robot (πορεία από το βίντεο) και η πορεία αναφοράς παρουσιάζονται στο Σχήμα 83. Όπως είναι εμφανές, η πραγματική πορεία αρχίζει και εμφανίζει απόκλιση από την λύση της οδομετρίας μετά το πέρας ενός διαστήματος (αν και βέβαια ισχύει το ανάποδο-η οδομετρία αποκλίνει από την πραγματική πορεία).



Σχήμα 81. Στιγμιότυπα από το βίντεο του πρώτου πειράματος

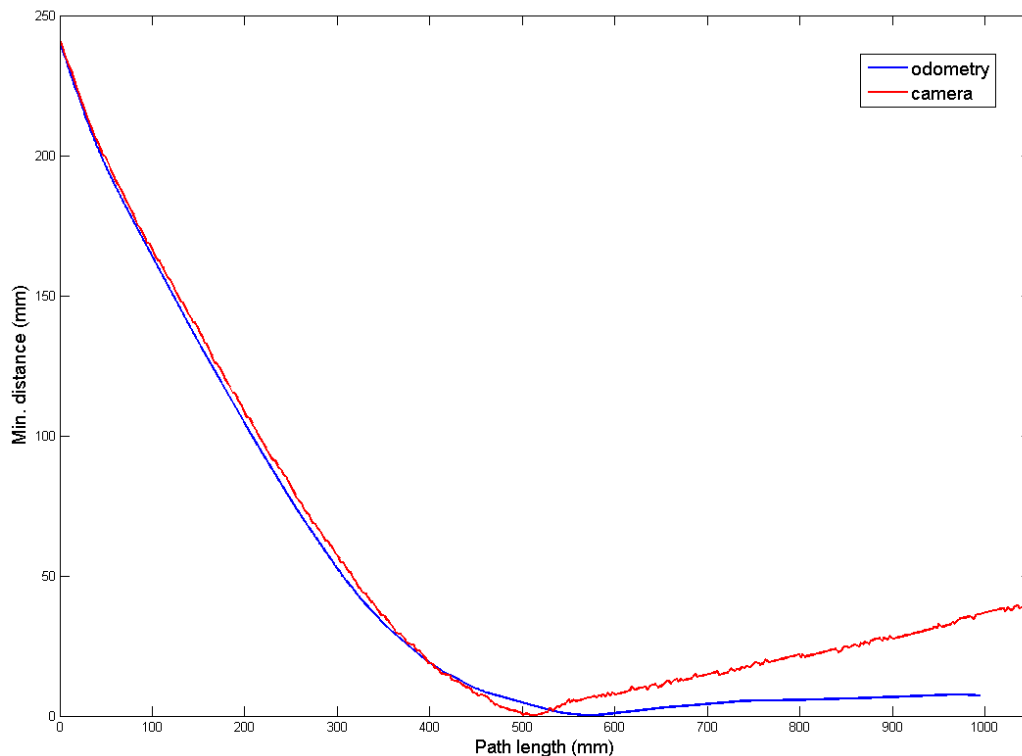


Σχήμα 82. Πορεία του robot κατά το πρώτο πείραμα



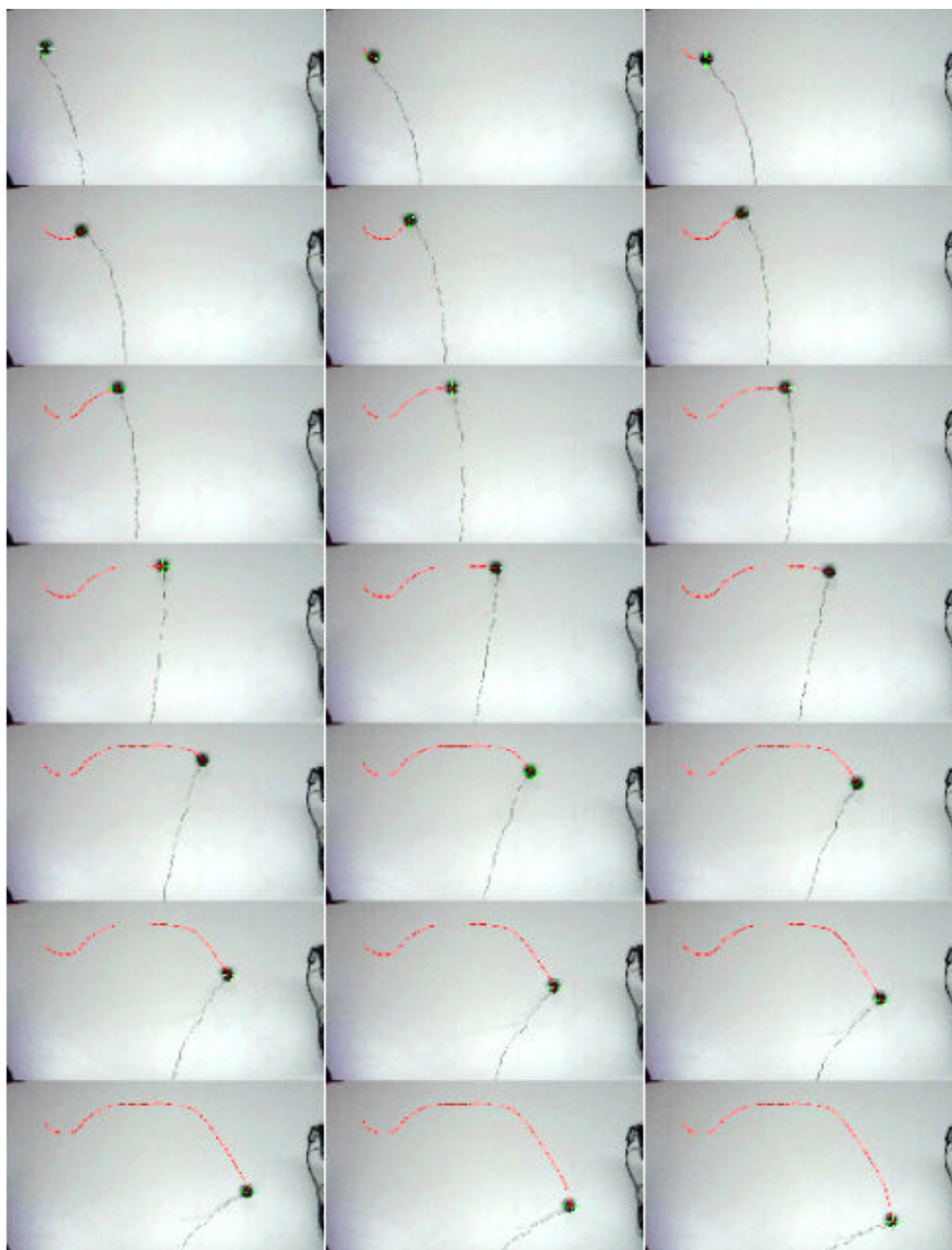
**Σχήμα 83.** Πορεία του robot για το πρώτο πείραμα, μετά την επεξεργασία του βίντεο

Την απόσταση των δυο λύσεων, της οδομετρίας και της κάμερας, την βλέπουμε στο Σχήμα 84 όπου παρουσιάζεται η ελάχιστη απόσταση τους από την πορεία αναφοράς.

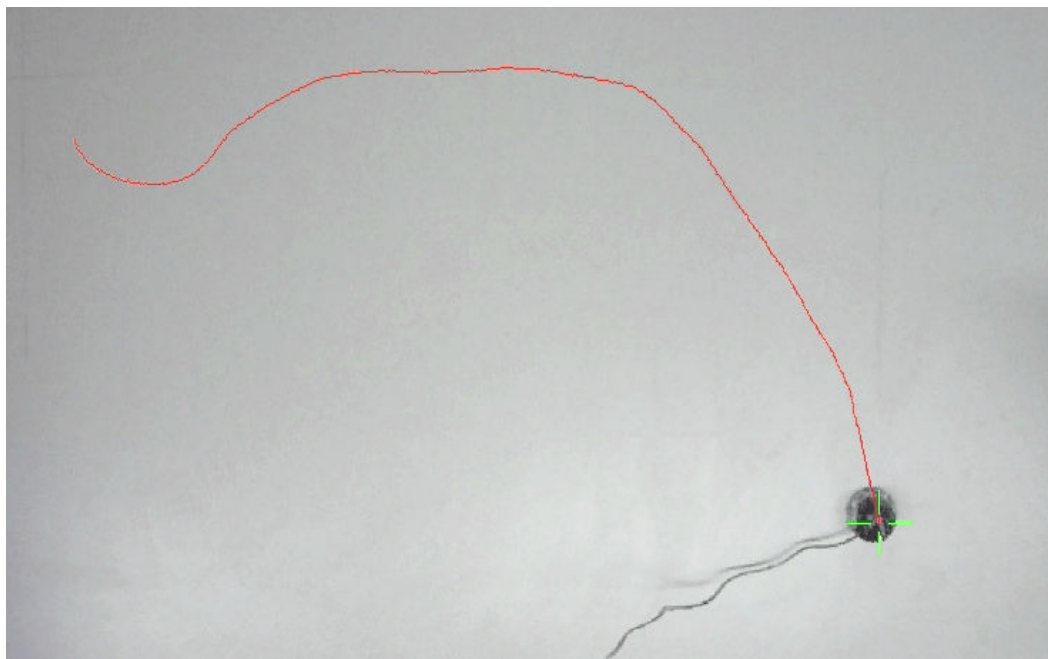


**Σχήμα 84.** Απόσταση της πορείας της οδομετρίας και της κάμερας από την πορεία αναφοράς για το πρώτο πείραμα

Τα αποτελέσματα του δεύτερου πειράματος παρατίθενται στη συνέχεια. Σε αυτό το πείραμα η πορεία αναφοράς είναι μια καμπύλη (όχι πλέον ευθεία). Το σύστημα αναφοράς της κάμερας είναι το ίδιο με το προηγούμενο πείραμα ενώ χρησιμοποιήθηκε και η ίδια διαδικασία για την ταυτοποίηση (registration) του συστήματος συντεταγμένων του robot ως προς το εξωγενές σύστημα της κάμερας.

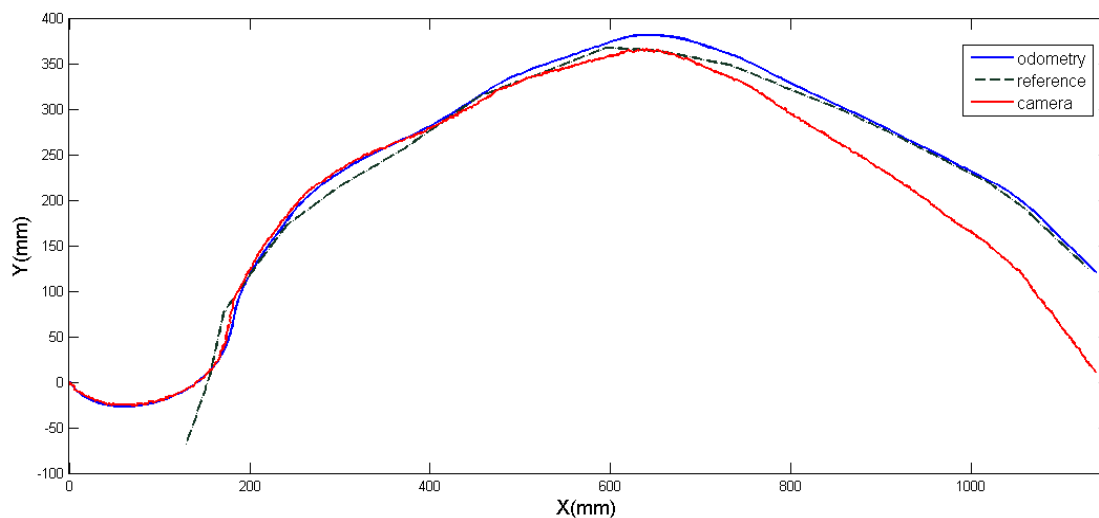


Σχήμα 85. Στιγμιότυπα από το βίντεο του δεύτερου πειράματος



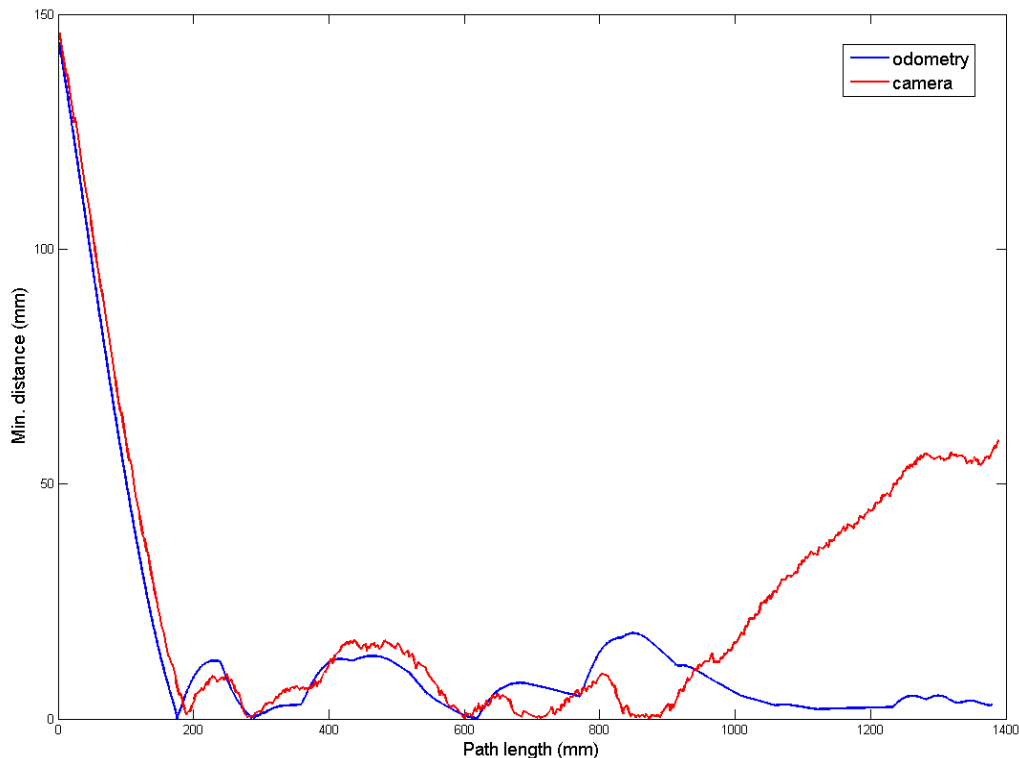
**Σχήμα 86. Πορεία του robot κατά το δεύτερο πείραμα**

Οι πορείες της οδομετρίας και τη κάμερας, το σύστημα συντεταγμένων της κάμερας μετά από την επεξεργασία του βίντεο, παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.



**Σχήμα 87. Πορεία του robot για το δεύτερο πείραμα, μετά την επεξεργασία του βίντεο**

Η ελάχιστη απόσταση των δυο λύσεων, της οδομετρίας και της κάμερας, από την πορεία αναφοράς παρουσιάζεται στο Σχήμα 88 .



**Σχήμα 88.** Απόσταση της πορείας της οδομετρίας και της κάμερας από την πορεία αναφοράς για το δεύτερο πείραμα

Από την ανάλυση των δυο πειραμάτων, και ειδικότερα των σχημάτων όπου απεικονίζουν την ελάχιστη απόσταση των δυο πορειών από την πορεία αναφοράς, είναι εμφανές ότι από κάποιο σημείο και μετά η πραγματική πορεία του robot αρχίζει και αποκλίνει από την πορεία αναφοράς. Επίσης, φαίνεται ότι η λύση της οδομετρίας εμφανίζει μεγάλη απόκλιση, από κάποιο σημείο και μετά, με την πραγματική πορεία. Αυτό συμβαίνει διότι η οδομετρία εισάγει αθροιστικά σφάλματα στην εκτίμηση της θέσης οπότε και τα σφάλματα αυτά επηρεάζουν την λύση της σημαντικά, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, όπου το ολικό σφάλμα γίνεται αρκετά μεγάλο. Με άλλα λόγια, η απόκλιση του robot από την πορεία αναφοράς οφείλεται στα σφάλματα της οδομετρίας.

Φυσικά όμως, προκύπτει το ερώτημα για την ολική αξιολόγηση του συστήματος παρακολούθησης της πορείας, δηλαδή τον έλεγχο αυτόν καθ' αυτόν. Πως μπορεί να αξιολογηθεί ο έλεγχος με τόση απόκλιση της πραγματικής πορείας του robot από την πορεία αναφοράς. Η απάντηση σε τούτο το ερώτημα μπορεί να δοθεί αν εξετάσουμε προσεκτικότερα τα δυο σχήματα. Από το Σχήμα 84 και το Σχήμα 88 παρατηρούμε ότι αν και η πραγματική πορεία αποκλίνει προς το τέλος, η πορεία της οδομετρίας παρακολουθεί αρκετά καλά την πορεία αναφοράς. Δηλαδή η πορεία της οδομετρίας εμφανίζει μικρό σφάλμα απόκλισης. Αναλογιζόμενοι πως ο ελεγκτής θεωρεί σαν την «πραγματική» θέση του robot τη θέση που του παρέχει η οδομετρία, εύκολα συνάγεται το συμπέρασμα ότι ο ελεγκτής δουλεύει αρκετά καλά. Δηλαδή, ο ελεγκτής παράγει τις σωστές εντολές κίνησης, δεδομένης της θέσης που του παρέχει η οδομετρία. Στην αντίθετη περίπτωση θα βλέπαμε και την πορεία της οδομετρίας να αποκλίνει, πράγμα που δεν συμβαίνει. Συνεπώς, αν χρησιμοποιούσαμε μια πιο ακριβή μέθοδο χωροθέτησης του robot, έτσι ώστε η



εκτίμηση της θέσης να εμφανίζει μικρότερο σφάλμα ως προς την πραγματική θέση, τότε το robot θα παρακολουθούσε την πορεία αναφοράς με μεγαλύτερη ακρίβεια.



## Κεφάλαιο 7

---

### Απλοποίηση του ελέγχου πλοήγησης των ρομποτικών οχημάτων μέσω ισοδυναμίας ανάδρασης

#### 7.1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε την επέκταση του μετασχηματισμού SWAM σε καμπύλες αναφοράς κλάσης  $C^r$ , δηλαδή συνεχώς παραγωγίσιμες όσες φορές χρειαστεί. Αυτό βρίσκεται σε αντιδιαστολή με τις πολυγωνικές καμπύλες αναφοράς στις οποίες εφαρμόζεται ο SWAM. Ο νέος μετασχηματισμός είναι πλέον διαφορίσιμος παντού και συνεπώς δεν είναι ομοιομορφισμός αλλά ένας διαφορομορφισμός μεταξύ του φυσικού και του κανονικού χώρου. Αποδεικνύεται ότι προκειμένου να είναι αμφιριπτικός, η καμπύλη αναφοράς πρέπει να είναι μονότονη. Η μονοτονικότητα πρέπει να ιδωθεί μέσα στα πλαίσια της διαφορικής γεωμετρίας και δεν πρέπει να συγχέεται με την μονοτονικότητα των συναρτήσεων. Η έννοια αυτή είναι μιας απ' ευθείας επέκταση της μονοτονικότητας των πολυγωνικών καμπύλων, όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 4. Ο ακριβής ορισμός της παρουσιάζεται σε επόμενη ενότητα.

#### 7.2. Εισαγωγικές έννοιες

Το κινηματικό μοντέλο το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για την ανάλυση του μετασχηματισμού, είναι το μοντέλο του ρομποτικού οχήματος (Car-like robot) το

οποίο περιγράφεται από τις εξισώσεις (4.16). Για ευκολία παρατίθεται και στη συνέχεια.

$$\Sigma: \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ \kappa \\ 0 \end{bmatrix} u_p^1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_p^2 \quad (7.1)$$

Ως γνωστόν, οι μεταβλητές  $x, y$  υποδηλώνουν το κέντρο του πίσω άξονα του ρομπότ, το  $\theta$  είναι η διεύθυνση του και  $\kappa$  είναι η καμπυλότητα. Οι είσοδοι του είναι η ταχύτητα  $u_p^1$  και η παράγωγος της καμπυλότητας  $u_p^2$ . Το κινηματικό αυτό μοντέλο χρησιμοποιείται ευρέως στον σχεδιασμό πορείας και στον έλεγχο των κινητών ρομπότ μιας και περιλαμβάνει τα ουσιαστικά στοιχεία της κίνησης του ρομπότ. Πρέπει να σημειωθεί ότι το μοντέλο αυτό είναι ένα αφινικό ως προς την είσοδο μοντέλο με μηδενικό όρο ολίσθησης. Το σύστημα επίσης διέπεται από τον μη-ολονομικό περιορισμό της «κίνησης χωρίς ολίσθηση» που εκφράζεται με τους δυο Πφαφιανούς περιορισμούς,

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x} \sin(\theta + \varphi) - \dot{y} \cos(\theta + \varphi) - \dot{\theta} l \cos \varphi \\ 0 &= \dot{x} \sin(\theta) - \dot{y} \cos(\theta + \varphi) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Από την οπτική του γεωμετρικού ελέγχου, το σύστημα (7.1) περιγράφει το γραμμικό συνδυασμό δυο διανυσματικών πεδίων τα οποία εξελίσσονται πάνω σε μια πολλαπλότητα (manifold)  $M = \mathbb{R}^3 \times S^1$ . Οι γενικευμένες ταχύτητες βρίσκονται μέσα στον εφαπτόμενο χώρο  $T_q M$  του εκάστοτε σημείου  $q$  της πολλαπλότητας και συνεπώς εκφράζουν τις διαθέσιμες διευθύνσεις κίνησης. Οι εξισώσεις (7.2) περιγράφουν το συνδεδεμένο Πφαφιανό σύστημα του μοντέλου (7.1), το οποίο έχει τη μορφή,

$$G(q)\dot{q} = 0 \quad (7.3)$$

Το διάνυσμα  $q$  είναι το διάνυσμα καταστάσεων και ο πίνακας  $G(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$  είναι ο λεγόμενος πίνακας περιορισμών (constraint matrix). Κάθε διάνυσμα-γραμμή του πίνακα (συνδιάνυσμα)  $G$  βρίσκεται στον συνεφαπτόμενο χώρο  $T_q^* M$  του σημείου  $q$  της πολλαπλότητας, ο οποίος είναι και ο δυαδικός χώρος του εφαπτόμενου χώρου. Η εξίσωση (7.3) εκφράζει περιορισμούς της κίνησης του συστήματος. Προφανώς, μιας και οι γενικευμένες ταχύτητες πρέπει να ικανοποιούν την (7.3), είναι εμφανές ότι βρίσκονται μέσα στο μηδενικό χώρο (null space) του  $G$ . Μπορούμε να μεταφερθούμε από την εξίσωση (7.3) στην (7.1) λύνοντας το σύστημα ως προς τις ταχύτητες  $\dot{q}$ . Μιας και το σύστημα είναι υποκαθορισμένο (ο πίνακας  $G$  είναι ένας πίνακας  $2 \times 4$ ), δυο γενικευμένες ταχύτητες μπορούν να κυμαίνονται ελεύθερα. Οι δυο αυτές ταχύτητες είναι ακριβώς οι δυο είσοδοι του συστήματος (7.1). Η μη-ολονομικότητα του συστήματος προέρχεται από το γεγονός πως οι εξισώσεις (7.2) δεν είναι ολοκληρώσιμες, δηλαδή δεν εκφράζουν την παράγωγο κάποιας συνάρτησης. Συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα του Frobenius, αν  $\Delta$  είναι η κατανομή που παράγεται από τα δυο διανυσματικά πεδία του  $\Sigma$ , το σύστημα είναι ολονομικό αν η  $\Delta$  είναι ενελεκτική (involutive) κάτω από την πράξη της αγκύλης Lie

(Lie bracket). Η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται από το  $\Sigma$  και συνεπώς το σύστημα είναι μη-ολονομικό.

Μιας και ο χώρος κατάστασης  $M$  είναι μια τετραδιάστατη πολλαπλότητα, είναι τοπικά διαφορομορφική προς το  $E^4$  (τον τετραδιάστατο Ευκλείδειο χώρο). Το σύστημα συντεταγμένων που περιγράφει το  $\Sigma$  πάνω στο  $M$  είναι μια απεικόνιση  $g$  από μια ανοιχτή περιοχή  $V \subset M$  σε μια ανοιχτή περιοχή  $g(V) \subset E^4$ . Ονομάζουμε την εικόνα του  $V$  στο  $E^4$  μέσω της  $g$ , φυσικό χώρο κατάστασης και τις συντεταγμένες που τον παραμετροποιούν ως τις φυσικές συντεταγμένες ή φυσικές καταστάσεις. Οι φυσικές συντεταγμένες είναι ακριβώς οι συντεταγμένες που περιγράφουν το σύστημα (7.1), οι οποίες από εδώ και στο εξής θα συμβολίζονται με το δείκτη « $p$ ». Μια αλλαγή μεταβλητών στο  $V$  επάγει μια νέα απεικόνιση  $g'$  από το  $V$  σε μια νέα περιοχή  $g'(V) \subset E^4$ . Την περιοχή αυτή θα την ονομάσουμε *κανονικό χώρο κατάστασης* και τις νέες συντεταγμένες *κανονικές συντεταγμένες* ή *κανονικές καταστάσεις*. Θα συμβολίζονται με τον δείκτη « $c$ ». Φυσικά, οι νέες συντεταγμένες φέρουν ειδικές ιδιότητες που θ' αναλυθούν στη συνέχεια. Οι δυο χώροι (φυσικός και κανονικός) συνδέονται με έναν διαφορομορφισμό  $\Psi$  ο οποίος μετασχηματίζει τις συντεταγμένες από τον ένα χώρο στον άλλο. Δηλαδή, αν  $q_p, q_c$  είναι το φυσικό και το κανονικό διάνυσμα κατάστασης αντίστοιχα, τότε,

$$q_p = \Psi(q_c) \quad (7.4)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω λοιπόν, έστω μια πορεία αναφοράς  $p_p^r$  στη διδιάστατη υπό-πολλαπλότητα του  $M$  η οποία παραμετροποιείται από τις δυο πρώτες φυσικές καταστάσεις  $x_p, y_p$ . Στο φυσικό χώρο κατάστασης η υπό-πολλαπλότητα αυτή αντιστοιχεί σε ένα διδιάστατο γραμμικό υποχώρο. Ο υποχώρος αυτός εκφράζει το επίπεδο πάνω στο οποίο κινείται το ρομπότ, θα συμβολίζεται με  $D_p$  και θα ονομάζεται *φυσικό χωρίο* (physical domain). Η πορεία είναι παραμετροποιημένη ως προς μια μεταβλητή  $s$  (όχι κατ' ανάγκη το μήκος τόξου) και η έκφραση της στο φυσικό χωρίο είναι,

$$p_p^r = (x_{p,r}(s), y_{p,r}(s)) \quad (7.5)$$

Κάτω από το μετασχηματισμό συντεταγμένων, το φυσικό χωρίο προβάλλεται σε έναν διδιάστατο υποχώρο του κανονικού χώρου κατάστασης. Ο υποχώρος αυτός θα συμβολίζεται ως  $D_c$  και θα ονομάζεται *το κανονικό χωρίο* (canonical domain). Η πορεία αναφοράς στο κανονικό χωρίο περιγράφεται από τις εξισώσεις,

$$p_c^r = (x_{c,r}(s), y_{c,r}(s)) = \Phi^{-1}(p_p^r) \quad (7.6)$$

όπου  $\Phi: D_c \rightarrow D_p$  είναι η απεικόνιση που στέλνει το κανονικό χωρίο στο φυσικό χωρίο. Η  $\Phi$  είναι ο περιορισμός της  $\Psi$  στο  $D_c$ .

Το πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας των κινητών ρομποτικών οχημάτων ζητά την κατασκευή ενός νόμου ανάδρασης  $u(q_p, p_p^r, t)$  τέτοιος ώστε  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(q_p(t)|_{D_p}, p_p^r(s)) = 0$  όπου  $q_p(t)|_{D_p}$  είναι η προβολή του  $q_p$  στο φυσικό χωρίο,

δηλαδή η δυάδα  $(x_p, y_p)$  και  $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d(a, a) = 0$  είναι μια κατάλληλη συνάρτηση απόστασης. Αν η πορεία αναφοράς είναι παραμετροποιημένη ως προς το χρόνο  $t$ , τότε το πρόβλημα είναι γνωστό ως το πρόβλημα παρακολούθησης τροχιάς και η συνθήκη παρακολούθησης είναι  $\lim_{t \rightarrow \infty} (q_p(t)|_{Dp} - p_p^r(t)) = 0$ . Ουσιαστικά το πρόβλημα παρακολούθησης πορείας ζητά την παρακολούθηση της εικόνας της τροχιάς. Προφανώς, για να είναι εγγυημένο το μηδενικό σφάλμα στην παρακολούθηση, η πορεία αναφοράς πρέπει να είναι μια εφικτή τροχιά του συστήματος, δηλαδή πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις (7.1).

Η κύρια ιδέα που αναπτύσσεται στο κεφάλαιο αυτό είναι ότι ο μετασχηματισμός συντεταγμένων  $\Phi$  μετασχηματίζει την πορεία αναφοράς από το φυσικό χωρίο σε μια ευθεία στο κανονικό χωρίο, και συγκεκριμένα στον άξονα  $x$ . Όμως, ο μετασχηματισμός έχει ειδικές ιδιότητες, και συγκεκριμένα ότι το μετασχηματισμένο σύστημα στον κανονικό χώρο κατάστασης έχει τις ίδιες εξισώσεις κατάστασης. Συνεπώς το  $\Sigma$  παρουσιάζει ένα είδος αναλλοιωσιμότητας μορφής (form invariance) κάτω από τον  $\Phi$ . Με αυτόν τον τρόπο το μοντέλο του ρομποτικού οχήματος του φυσικού χώρου απεικονίζεται σε ένα μοντέλο ρομποτικού οχήματος στον κανονικό χώρο όπου πλέον η πορεία αναφοράς είναι ευθεία. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί ν' απλοποιηθεί ο έλεγχος αφού η παρακολούθηση πορείας είναι γενικά πιο απλή από την παρακολούθηση τυχαίων καμπύλων.

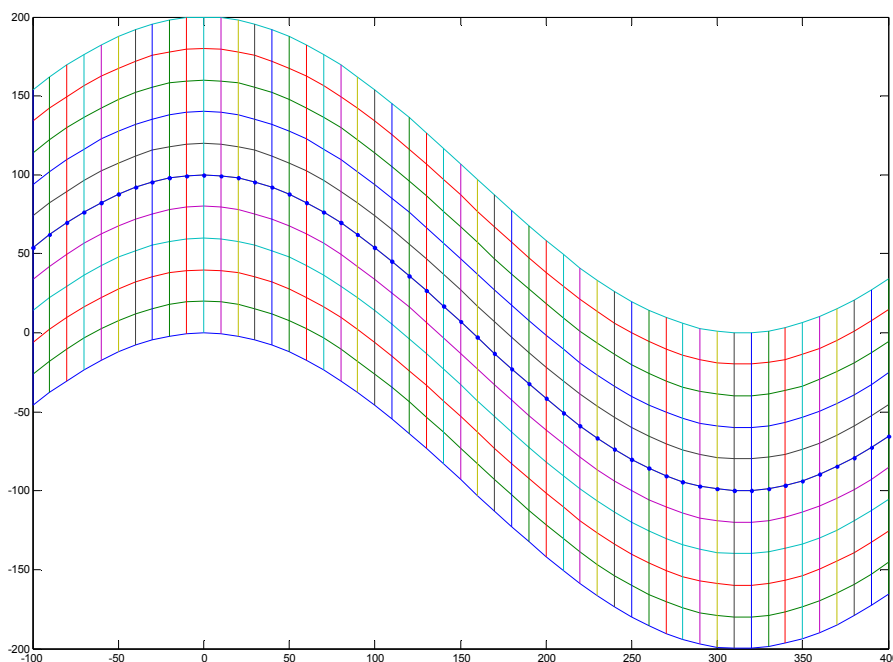
Η απεικόνιση  $\Phi$  εκτελεί έναν μετασχηματισμό ευθειοποίησης (rectification) οπότε και θα ονομάζεται *λοξός μετασχηματισμός ευθειοποίησης (skew rectification map-SRM)*. Ο όρος «λοξός» προέρχεται από το γεγονός ότι οι κανονικές συντεταγμένες υλοποιούν έναν λοξό σύστημα συντεταγμένων.

### 7.3. Ο Λοξός Μετασχηματισμός Ευθειοποίησης

Για ν' αναλύσουμε τον SRM, ας θεωρήσουμε την πορεία αναφοράς  $p_p^r$  στον φυσικό χώρο, όπως περιγράφεται από την εξίσωση (7.5). Ταυτίζουμε την παράμετρο  $s$  με την κανονική συντεταγμένη  $x_c$ . Προκειμένου ν' απλοποιήσουμε την ανάλυση θα θεωρήσουμε επίσης ότι η διδιάστατη υπό-πολλαπλότητα στη οποία κινείται το ρομπότ, είναι Ευκλείδεια (κάτι τέτοιο δικαιολογείται από τις περισσότερες ρομποτικές εφαρμογές). Ο μετασχηματισμός  $\Phi$  περιγράφεται από τις εξισώσεις,

$$\Phi: \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{p,r}(x_c) + y_c \cos \theta_s \\ y_{p,r}(x_c) + y_c \sin \theta_s \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

όπου  $\theta_s$  είναι μια γωνία, η γωνία μετατόπισης (*shifting angle*). Πρέπει να σημειωθεί ότι όλες οι συντεταγμένες εξαρτώνται από το χρόνο. Ο συμβολισμός όμως των ορισμάτων του χρόνου δεν εμφανίζεται για λόγους ευκρίνειας των εξισώσεων. Η απεικόνιση αυτή παράγει μια γραμμική μετατόπιση της πορείας κατά τη διεύθυνση  $\theta_s$ , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 89.



Σχήμα 89. Απεικόνιση του λοξού μετασχηματισμού ευθειοποίησης για ημιτονική πορεία αναφοράς

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού δίνεται από την εξίσωση,

$$J = x'_{p,r} \sin \theta_s - y'_{p,r} \cos \theta_s \quad (7.8)$$

Ο τόνος υποδηλώνει παραγώγιση ως προς το όρισμα  $x_c$ . Για να εξασφαλισθεί η αντιστρεψιμότητα του μετασχηματισμού πρέπει η Ιακωβιανή να μην είναι ιδιάζουσα. Αν  $\mathbf{u}_T(x_c)$  είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο  $x_c$  και  $\mathbf{u}_{\theta_s}$  είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα με διεύθυνση  $\theta_s$ , τότε η Ιακωβιανή μπορεί να γραφτεί ως,

$$J = u_r \mathbf{u}_T \cdot \mathbf{u}_{\theta_s}^\perp = u_r \cos \omega \quad (7.9)$$

όπου  $\mathbf{u}_{\theta_s}^\perp$  είναι το ορθογώνιο διάνυσμα στο  $\mathbf{u}_{\theta_s}$ ,  $\omega$  είναι η γωνία μεταξύ των δυο διανυσμάτων και  $u_r(x_c) = \|(x'_{p,r}, y'_{p,r})\|$  είναι η φυσική ταχύτητα αναφοράς της πορείας στο σημείο  $x_c$ . Προφανώς η Ιακωβιανή είναι ιδιάζουσα όταν η εφαπτομένη της καμπύλης γίνεται παράλληλη προς το  $\mathbf{u}_{\theta_s}$ . Παρατηρούμε ότι παρόμοια συνθήκη ισχύει και για τον κατά ταινίες αφινικό μετασχηματισμό.

Εφόσον η καμπύλη αναφοράς είναι συνεχώς διαφορίσιμη, το εφαπτόμενο διάνυσμα μεταβάλλεται συνεχώς ως προς  $x_c$  και η Ιακωβιανή είναι είτε συνεχώς θετική είτε συνεχώς αρνητική. Η προβολή της καμπύλης στον άξονα  $x$  ενός συστήματος αναφοράς περιστραμμένο κατά  $\theta_s^\perp = \theta_s - \pi/2$  είναι  $\hat{x} = x_{p,r} \sin \theta_s - y_{p,r} \cos \theta_s$ . Συνεπώς η συνθήκη μη-μηδενισμού της Ιακωβιανής υπονοεί ότι το  $\hat{x}$  είναι μονότονο. Αυτό, με τη σειρά του, υπονοεί πως η καμπύλη εκφράζει μια συνάρτηση στο περιστραμμένο σύστημα αναφοράς. Ένας άλλος τρόπος για να ιδωθεί αυτό είναι με μια πιο προσεκτική θεώρηση της (7.9). Αν μια

γραμμή με κλίση  $\theta_s$  σαρώνει την καμπύλη κατά τη διεύθυνση  $\theta_s^\perp$ , τότε πρέπει να τη συναντά το πολύ σε ένα σημείο, αλλιώς η καμπύλη θα «πισωγουρίσει» και το επαφτόμενο διάνυσμα θα γίνει κάθετο στο  $\mathbf{u}_{\theta_s}^\perp$  μηδενίζοντας την Ιακωβιανή. Αυτό ουσιαστικά είναι μια περιστραμμένη εκδοχή του ελέγχου της κατακόρυφης ευθείας (vertical line test). Μια τέτοια καμπύλη ονομάζεται *μονότονη*, σε αντιστοιχία με τις μονότονες πολυγωνικές αλυσίδες [56].

Για ν' αντιστρέψουμε το μετασχηματισμό έστω ότι  $\hat{x}_p, \hat{y}_p, \hat{x}_{p,r}, \hat{y}_{p,r}$  είναι οι αντίστοιχες μεταβλητές στο περιστραμμένο κατά  $\theta_s^\perp$  σύστημα. Τότε ισχύει,

$$\begin{aligned}\hat{x}_p &= x_p \sin \theta_s - y_p \cos \theta_s \\ \hat{y}_p &= x_p \cos \theta_s + y_p \sin \theta_s \\ \hat{x}_{p,r} &= x_{p,r}(x_c) \sin \theta_s - y_{p,r}(x_c) \cos \theta_s \\ \hat{y}_{p,r} &= x_{p,r}(x_c) \cos \theta_s + y_{p,r}(x_c) \sin \theta_s\end{aligned}\quad (7.10)$$

Στο νέο σύστημα ο μετασχηματισμός παίρνει τη μορφή,

$$\begin{aligned}\hat{x}_p &= \hat{x}_{p,r}(x_c) \\ \hat{y}_p &= \hat{y}_{p,r}(x_c) + y_c\end{aligned}\quad (7.11)$$

και οι εξισώσεις του αντίστροφου συστήματος είναι,

$$\Phi^{-1} : \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{p,r}^{-1}(\hat{x}_p) \\ \hat{y}_p - \hat{y}_{p,r} \circ \hat{x}_{p,r}^{-1}(\hat{x}_p) \end{pmatrix}\quad (7.12)$$

Σημειώνουμε ότι το  $\hat{x}_{p,r}$  μπορεί ν' αντιστραφεί μιας και  $\partial \hat{x}_{p,r} / \partial x_c = J$  οπότε και είναι μονότονη συνάρτηση του  $x_c$ . Όταν το ρομπότ κινείται πάνω στη φυσική πορεία αναφοράς ισχύει ότι  $x_p = x_{p,r}$  και  $y_p = y_{p,r}$ . Τότε, από τις Εξ.(7.7) έχουμε,

$$\begin{aligned}y_c &= 0, \\ x_p(x_c, 0) &= x_{p,r}(x_c)\end{aligned}\quad (7.13)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι όντως ο  $\Phi$  απεικονίζει τη φυσική πορεία αναφοράς στον κανονικό άξονα  $x$  και η κανονική πορεία αναφοράς συμβολίζεται ως,

$$I_c = p_c^r = \{(x_c, y_c) / x_c \in [0, x_c^{\max}], y_c = 0\}\quad (7.14)$$

όπου  $x_c^{\max}$  είναι η μέγιστη τιμή της κανονικής μεταβλητής.



#### 7.4. Ισοδυναμία ανάδρασης

Ο μετασχηματισμός  $\Phi$  μπορεί να επεκταθεί σε όλο το χώρο κατάστασης και να συμπεριλάβει όλες τις συντεταγμένες. Προς τούτο, θεωρούμε το μετασχηματισμό των  $\theta_p$  και  $\kappa_p$  κάτω από τον  $\Phi$ , δηλαδή,

$$\tan \theta_p = \frac{dy_p}{dx_p} = \frac{y'_{p,r} + \sin \theta_s \tan \theta_c}{x'_{p,r} + \cos \theta_s \tan \theta_c} \quad (7.15)$$

$$\kappa_p = \gamma^{-3} \cos^3 \theta_c (u_r^3 \kappa_r - (a_r \cos \omega + u_r^2 \kappa_r \sin \omega) \tan \theta_c) + J \gamma^{-3} \kappa_c$$

όπου το  $\gamma$  δίνεται από τον τύπο (οι αποδείξεις των εξισώσεως παρατίθενται στο παράρτημα),

$$\gamma = \frac{ds_p}{ds_c} = \sqrt{u_r^2 \cos^2 \theta_c + \sin^2 \theta_c + 2 \cos \theta_c \sin \theta_c u_r \sin \omega} \quad (7.16)$$

και το  $\kappa_r(x_c)$  είναι η καμπυλότητα αναφοράς, δηλαδή η καμπυλότητα της φυσικής καμπύλης αναφοράς. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (7.12) και (7.15) μπορούμε να γράψουμε το μετασχηματισμό  $\Psi$  ο οποίος στέλνει τον κανονικό χώρο κατάστασης στο φυσικό χώρο κατάστασης,

$$\Psi(q_c) = \begin{pmatrix} x_{p,r}(x_c) + y_c \cos \theta_s \\ y_{p,r}(x_c) + y_c \sin \theta_s \\ \tan^{-1} \left( \frac{y'_{p,r} + \sin \theta_s \tan \theta_c}{x'_{p,r} + \cos \theta_s \tan \theta_c} \right) \\ \gamma^{-3} \cos^3 \theta_c (u_r^3 \kappa_r - (a_r \cos \omega + u_r^2 \kappa_r \sin \omega) \tan \theta_c) + J \gamma^{-3} \kappa_c \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

Η επίδραση του  $\Psi$  στο σύστημα  $\Sigma$  μπορεί να ερευνηθεί σημειώνοντας πρώτα ότι,

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_p = F(q_p)u_p \\ \dot{q}_p = D\Psi(q_c)\dot{q}_c \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{q}_c = D\Psi(q_c)^{-1} F(\Psi(q_c))u_p \quad (7.18)$$

Ο πίνακας  $F(q_p)$  είναι ο πίνακας του συστήματος  $\Sigma$  και ο  $D\Psi$  είναι ο Ιακωβιανός πίνακας του  $\Psi$  που δίνεται από τον τύπο,

$$D\Psi(q_c) = \begin{bmatrix} \partial_{x_c} x_p & \partial_{y_c} x_p & 0 & 0 \\ \partial_{x_c} y_p & \partial_{y_c} y_p & 0 & 0 \\ \partial_{x_c} \theta_p & 0 & \partial_{\theta_c} \theta_p & 0 \\ \partial_{x_c} \kappa_p & 0 & \partial_{\theta_c} \kappa_p & \partial_{\kappa_c} \kappa_p \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

Μετά από αρκετές επίπονες πράξεις, οι κανονικές γενικευμένες ταχύτητες βρίσκεται ότι περιγράφονται από τις εξισώσεις,

$$\Sigma' : \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \\ \dot{\kappa}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^{-1} \cos \theta_c \\ \gamma^{-1} \sin \theta_c \\ \gamma^{-1} \kappa_c \\ -\gamma^{-1} \left( \frac{\partial_{x_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \cos \theta_c + \frac{\partial_{\theta_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \kappa_c \right) \end{bmatrix} u_p^1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma^3 J^{-1} \end{bmatrix} u_p^2 \quad (7.20)$$

Οι μερικές παράγωγοι  $\partial_{x_c} \kappa_p$  και  $\partial_{\theta_c} \kappa_p$  μπορούν να υπολογιστούν από την (7.15),

Τα συστήματα  $\Sigma$  και  $\Sigma'$  συνδέονται μέσω ενός μετασχηματισμού των καταστάσεων. Όπως έχει αναφερθεί και στο Κεφάλαιο 4, τα συστήματα αυτά ονομάζονται *ισοδύναμα κατάστασης (state space equivalent)* [57-59],[66],[68]. Παρατηρούμε ότι η είσοδος  $\mathbf{u}_p = (u_p^1, u_p^2)$  δεν επηρεάζεται από το μετασχηματισμό. Έστω λοιπόν ότι  $\mathbf{u}_p(q_p, p_p^r, t)$  είναι ένας νόμος ανάδρασης στο  $\Sigma$  ο οποίος οδηγεί το ρομπότ πάνω στην πορεία αναφοράς (είναι δηλαδή ένας ελεγκτής παρακολούθησης πορείας). Αφού η είσοδος δεν μετασχηματίζεται από τον  $\Psi$ , ο ίδιος νόμος ανάδρασης επιδρά και στο κανονικό σύστημα  $\Sigma'$  χρησιμοποιώντας τις κανονικές καταστάσεις, δηλαδή,

$$\mathbf{u}_p \text{ στο κανονικό μοντέλο : } \mathbf{u}_p(\Psi(q_c), \Phi(I_c), t) \quad (7.21)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο νόμος  $\mathbf{u}_p$  που δρα σαν ελεγκτής παρακολούθησης στο φυσικό μοντέλο, δρα σαν ελεγκτής παρακολούθησης ευθειών στο κανονικό μοντέλο. Αυτό σημαίνει ότι ένας *υπάρχων* ελεγκτής του  $\Sigma$  μετασχηματίζεται σε έναν ελεγκτή στο  $\Sigma'$ . Οι δυο νόμοι ανάδρασης είναι οι ίδιοι ασχέτως του εάν δρουν στο φυσικό ή στο κανονικό μοντέλο. Αυτό που αλλάζει είναι η εξάρτηση στις φυσικές ή στις κανονικές μεταβλητές. Εφόσον η είσοδος είναι αναλλοίωτη κάτω από τον  $\Psi$ , έστω  $\mathbf{u}_p(q_c, I_c, t)$  ένας ελεγκτής *παρακολούθησης πορείας* στο  $\Sigma'$ . Τότε,

$$\mathbf{u}_p \text{ στο φυσικό μοντέλο : } \mathbf{u}_p(\Psi^{-1}(q_p), \Phi^{-1}(p_p^r), t) \quad (7.22)$$

είναι ο προκύπτων ελεγκτής στο φυσικό σύστημα. Η σημασία των εξισώσεων (7.21) και (7.22) εξαρτάται από το είδος τις διεργασίας που θέλει κάποιος να επιτελέσει. Η εξίσωση (7.21) χρησιμοποιείται προκειμένου ν' απεικονιστεί ένας ελεγκτής παρακολούθησης πορείας σε έναν ελεγκτή παρακολούθησης ευθείας. Αντίθετα, η Εξ.(7.22) χρησιμοποιείται προκειμένου να σχεδιαστεί ένας ελεγκτής ευθείας για το κανονικό σύστημα και μετά να μετασχηματιστεί σε ελεγκτή πορείας. Μιας και τα συστήματα  $\Sigma$  και  $\Sigma'$  είναι διαφορετικά, φαίνεται ότι ο μετασχηματισμός εισάγει ένα νέο βήμα στον έλεγχο πορείας. Δηλαδή, τη σχεδίαση ενός ελεγκτή για το νέο σύστημα  $\Sigma'$ . Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, αυτό μπορεί να αποφευχθεί με την επέκταση του  $\Psi$  και στο χώρο εισόδου.

Οι δυο είσοδοι του φυσικού συστήματος μπορούν επίσης να μετασχηματιστούν από τον  $\Psi$  μιας και η πρώτη είσοδος  $u_p^1$  είναι η ταχύτητα του ρομπότ ενώ η δεύτερη είσοδος  $u_p^2$  είναι η παράγωγος της καμπυλότητας. Μετασχηματίζοντας την είσοδο, επεκτείνουμε το διαφορομορφισμό  $\Psi$  στον

$\widehat{\Psi} = (\Psi, \Omega)$ , όπου  $\Omega: U_c \rightarrow U_p$  είναι η απεικόνιση που στέλνει τον κανονικό χώρο εισόδου  $U_c$  στον φυσικό χώρο εισόδου  $U_p$ . Για τις εισόδους ελέγχου ισχύει δηλαδή και  $\mathbf{u}_p = \Omega(q_c, u_c) = (F_1(q_c, u_c), F_2(q_c, u_c))$ . Αναλυτικά,

$$\begin{aligned} u_p^1 &= F_1(q_c, u_c) = \gamma u_c^1 \\ u_p^2 &= F_2(q_c, u_c) = \left( \frac{\partial_{x_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \cos \theta_c + \frac{\partial_{\theta_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \kappa_c \right) \gamma^{-1} u_c^1 + \partial_{\kappa_c} \kappa_p u_c^2 \end{aligned} \quad (7.23)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ.(7.23) στο σύστημα  $\Sigma'$  έχουμε,

$$\widehat{\Sigma}: \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \\ \dot{\kappa}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_c \\ \sin \theta_c \\ \kappa_c \\ 0 \end{bmatrix} u_c^1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_c^2 \quad (7.24)$$

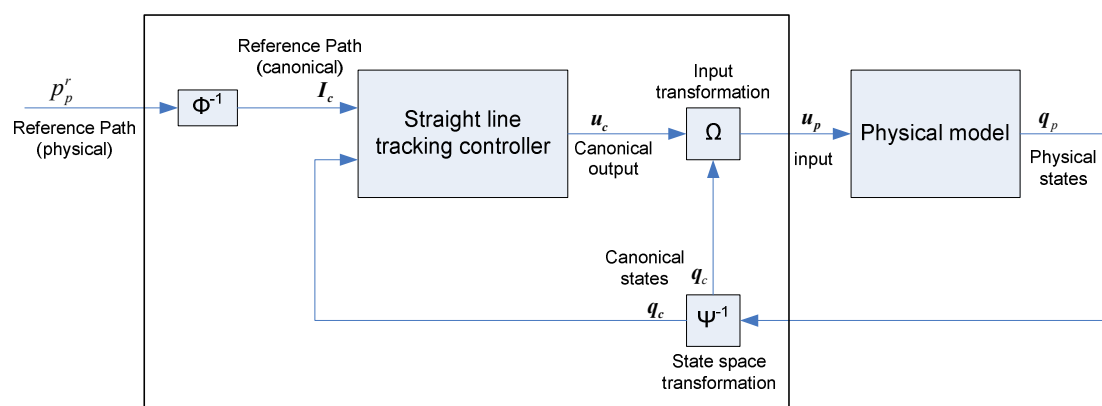
Τα συστήματα  $\Sigma$  και  $\widehat{\Sigma}$  λέγεται ότι είναι ισοδύναμα ανάδρασης (feedback equivalent). Ο μετασχηματισμός  $\Omega$  της εισόδου μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας μετασχηματισμός ανάδρασης του  $\widehat{\Sigma}$  που ανατροφοδοτεί τις καταστάσεις πίσω στην είσοδο. Έστω τώρα ότι  $\mathbf{u}_c(q_c, I_c, t)$  είναι ένας ελεγκτής παρακολούθησης ευθείας για το σύστημα  $\widehat{\Sigma}$ . Η εικόνα του στον κανονικό χώρο εισόδου μέσω του  $\Omega$ , δηλαδή ο ελεγκτής παρακολούθησης πορείας (καμπύλης) για το φυσικό σύστημα  $\Sigma$  περιγράφεται από τον τύπο,

$$\mathbf{u}_p(q_p, p_p^r, t) = \Omega(q_c, u_c(q_c, I_c, t)) = \Omega(\Psi^{-1}(q_p), u_c(\Phi^{-1}(q_p), \Phi^{-1}(p_p^r), t)) \quad (7.25)$$

Μια πιο προσεκτική ματιά στα συστήματα  $\Sigma$  και  $\widehat{\Sigma}$  δείχνει ότι έχουν ακριβώς την ίδια μορφή. Με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός ισοδυναμίας ανάδρασης, η απεικόνιση  $\Psi$ , απεικονίζει το ρομποτικό αυτοκίνητο από τον φυσικό χώρο κατάστασης σε ένα ρομποτικό αυτοκίνητο στον κανονικό χώρο κατάστασης. Συνεπώς το  $\Sigma$  παρουσιάζει ένα είδος αναλλοιωσιμότητας μορφής κάτω από τον  $\widehat{\Psi}$ . Το πλεονέκτημα αυτής της διαδικασίας είναι ότι η πορεία αναφοράς έχει μειωθεί σε ευθεία οπότε και ελεγκτής ευθείας (7.25) είναι ένας ελεγκτής πορείας για το φυσικό σύστημα, δηλαδή για το ρομποτικό αυτοκίνητο. Συνεπώς, προκειμένου να κατασκευάσουμε έναν ελεγκτή παρακολούθησης πορείας για το φυσικό μοντέλο, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν ελεγκτή παρακολούθησης ευθείας για το κανονικό μοντέλο και να τον αναγάγουμε σε ελεγκτή πορείας στον φυσικό χώρο. Επιπλέον, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε υπάρχοντες ελεγκτές πορείας στον κανονικό χώρο. Όμως, οι ελεγκτές αυτοί μπορούν ν' απλοποιηθούν ώστε να παρακολουθούν μόνο ευθείες, μειώνοντας έτσι την πολυπλοκότητα τους. Η εφαρμογή αυτών των μεθόδων αναλύεται στην επόμενη ενότητα.

## 7.5. Εφαρμογή και αποτελέσματα προσομοιώσεων

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την εφαρμογή της απεικόνισης στον έλεγχο παρακολούθησης πορείας κινητών ρομπότ. Θα παρουσιαστούν επίσης αποτελέσματα προσομοιώσεων για δυο ελεγκτές. Θεωρούμε ότι η πορεία αναφοράς είναι δεδομένη και ότι είναι αρκούτως ομαλή στον φυσικό χώρο. Επιπλέον, η πορεία είναι μια μονότονη καμπύλη, όπως αναλύθηκε προηγουμένως. Έστω λοιπόν ότι  $\hat{\Psi}$  είναι ο μετασχηματισμός ισοδυναμίας ανάδρασης,  $\Psi$  είναι ο μετασχηματισμός συντεταγμένων του χώρου κατάστασης και  $\Omega$  ο μετασχηματισμός εισόδου. Έστω επίσης ότι  $u_c$  είναι ένας ελεγκτής παρακολούθησης ευθείας στον κανονικό χώρο. Ο ελεγκτής αυτός επιδρά στο κανονικό μοντέλο, δηλαδή παρακολουθεί τον άξονα  $x$  του κανονικού χώρου. Το πραγματικό σήμα ανάδρασης που οδηγεί το ρομπότ συμβολίζεται ως  $u_p$ . Η σχέση μεταξύ των δυο δίνεται από την Εξ.(7.25). Το διάγραμμα ελέγχου παρουσιάζεται στο Σχήμα 90.



Σχήμα 90. Διάγραμμα ελέγχου

Τα μπλοκ μέσα στο παραλληλόγραμμο μπορούν να θεωρηθούν σαν τον πραγματικό ελεγκτή πορείας. Ουσιαστικά υλοποιούν την Εξ.(7.25).

Για τις προσομοιώσεις έχουμε επιλέξει δυο ελεγκτές. Ο πρώτος είναι ο ελεγκτής που χρησιμοποιήθηκε και στις προσομοιώσεις του μετασχηματισμού SWAM και περιγράφεται στο [63]. Όπως έχει αναφερθεί, είναι ένας ελεγκτής ευθείας και περιγράφεται από την εξίσωση,

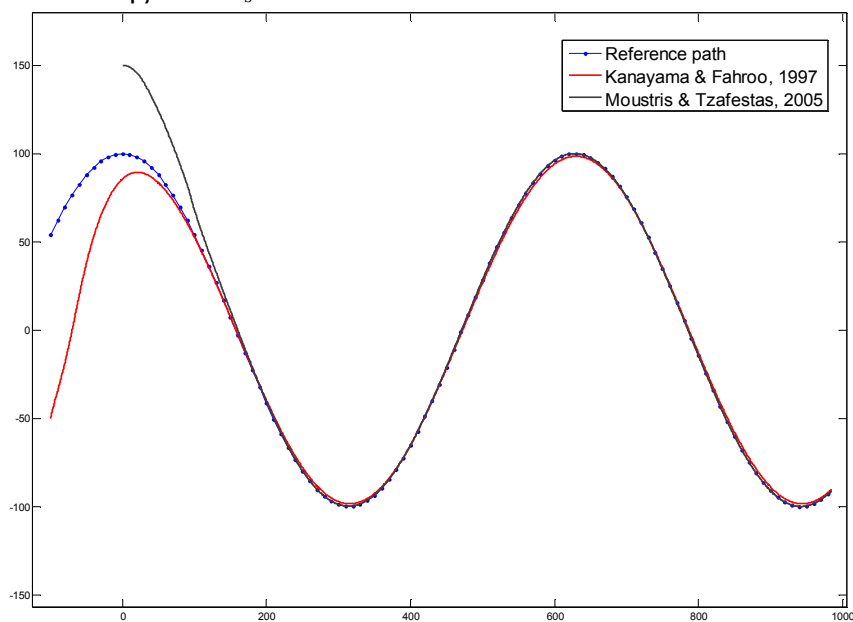
$$\dot{k} = (-3k\kappa - 3k^2\theta - k^3y)u \quad (7.26)$$

όπου η ταχύτητα  $u$  θεωρείται σταθερή και το  $k$  είναι μια σταθερά τέτοια ώστε να εξασφαλίζεται η ασυμπτωτική ευστάθεια του ελεγκτή στο μηδέν. Συνδέεται με τη μεταβλητή  $\sigma=1/k$ , η οποία ελέγχει και την ομαλότητα της κίνησης του ρομπότ. Ο δεύτερος ελεγκτής είναι ο διακοπτικός ελεγκτής που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 5. Ο ελεγκτής αυτός είναι ένας ασαφής ελεγκτής που έχει διαμορφωθεί ώστε να παρακολουθεί ευθείες, και έχει προκύψει από τον αρχικό ασαφή ελεγκτή του κεφαλαίου 2 μετά από μείωση της βάσης κανόνων του κατά 70%. Ο ελεγκτής αυτός προορίζεται για το μοντέλο του Dubins. Τα αποτελέσματα προσομοιώσεων παρουσιάζονται στο Σχήμα 91 και στο Σχήμα 92. Το πρώτο σχήμα απεικονίζει τις

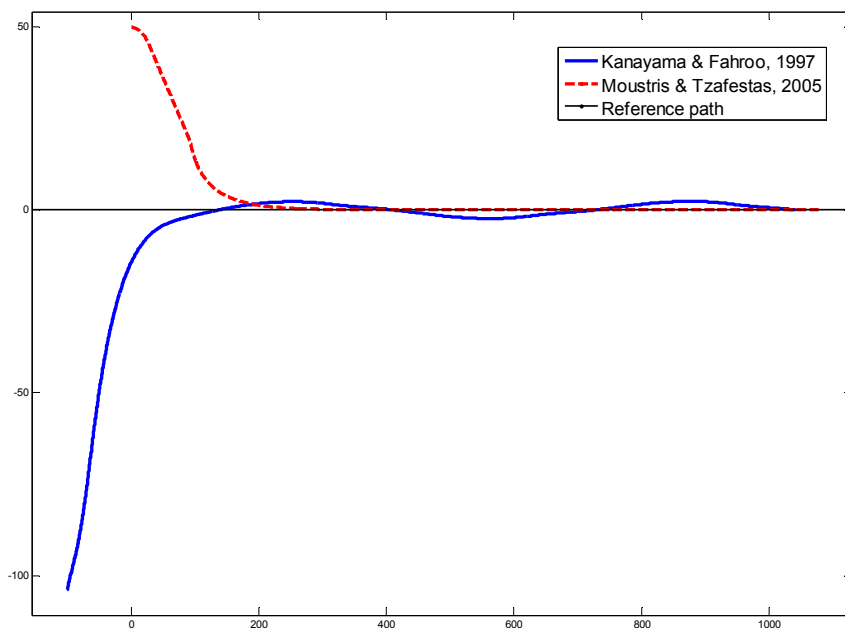
πορείες του ρομπότ στο φυσικό χώρο ενώ το δεύτερο, στον κανονικό. Και στις δυο περιπτώσεις η ταχύτητα είναι σταθερή. Η πορεία αναφοράς είναι ημιτονοειδής και περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις,

$$\begin{aligned}x_{p,r}(x_c) &= x_c \\y_{p,r}(x_c) &= 100 \cos(0.01x_c)\end{aligned}\quad (7.27)$$

Η γωνία μετατόπισης είναι  $\theta_s = \pi/2$ .



Σχήμα 91. Παρακολούθηση ημιτονοειδούς πορείας. Τροχιές των ρομπότ στον φυσικό χώρο.



Σχήμα 92. Παρακολούθηση ημιτονοειδούς πορείας. Τροχιές των ρομπότ στον κανονικό χώρο.

Σημειώνεται ότι οι ελεγκτές δρουν στον κανονικό χώρο όπου η πορεία αναφοράς είναι ευθεία. Επίσης, τα αποτελέσματα αυτά δρουν σαν μια απόδειξη της

εφαρμογής του μετασχηματισμού παρά σαν έλεγχος της απόδοσης των ίδιων των ελεγκτών.

## 7.6. Συμπεράσματα

Ένα πρώτο ενδιαφέρον σχόλιο που μπορεί να γίνει σχετικά με το μετασχηματισμό  $\Psi$  είναι η μορφή της εξίσωσης (7.20). Από απλή επισκόπηση βλέπουμε ότι οι εξισώσεις του συστήματος μπορούν να γραφτούν με τη μορφή,

$$\dot{q}_c = \begin{bmatrix} \cos \theta_c & 0 \\ \sin \theta_c & 0 \\ \kappa_c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ -\gamma^{-1} \left( \frac{\partial_{x_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \cos \theta_c + \frac{\partial_{\theta_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \kappa_c \right) & \gamma^3 J^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p^1 \\ u_p^2 \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

ή πιο περιληπτικά,

$$\Sigma' : \dot{q}_c = F(q_c)M(q_c)u_p \quad (7.29)$$

Ο πίνακας  $F$  είναι ο πίνακας μεταβολής του συστήματος  $\Sigma$ , δηλαδή,

$$\Sigma : \dot{q}_p = F(q_p)u_p \quad (7.30)$$

Από την εξίσωση (7.29) φαίνεται ότι η φυσική είσοδος  $u_p$  μπορεί να συγχωνευθεί με τον πίνακα  $M$  και το διάνυσμα  $M(q_c)u_p$  είναι ουσιαστικά η κανονική είσοδος  $u_c$ . Συνεπώς ο  $M$  είναι ένας μετασχηματισμός εισόδου του  $\Sigma'$ . Λαμβάνοντας υπόψη το μετασχηματισμό της εισόδου  $\Omega$ , ισχύει ότι,

$$u_p = \Omega(q_c, u_c) = M^{-1}(q_c)u_c \quad (7.31)$$

Με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός  $\Omega$  μπορεί να εξαχθεί απ' ευθείας από τις μετασχηματισμένες εξισώσεις κατάστασης. Επιπλέον, φαίνεται ότι ο μετασχηματισμός συντεταγμένων του φυσικού συστήματος μπορεί ν' αντισταθμιστεί από έναν κατάλληλο μετασχηματισμό εισόδου έτσι ώστε η μορφή του συστήματος να παραμείνει η ίδια. Όπως έχει αναφερθεί και για το μετασχηματισμό SWAM, η ιδιότητα αυτή είναι που επιτρέπει την αναγωγή της παρακολούθησης πορείας σε παρακολούθηση ευθείας. Μαθηματικά, αυτή η ιδιότητα μπορεί να εκφραστεί συνδυάζοντας τις Εξ.(7.29) και (7.18), δηλαδή,

$$F \cdot M \cdot u_p = D\Psi^{-1} \cdot F(\Psi) \cdot u_p \Rightarrow (F \cdot M - D\Psi^{-1} \cdot F(\Psi))u_p = 0 \quad (7.32)$$

Τα ορίσματα δεν αναγράφονται για λόγους ευκρίνειας. Εφόσον η εξίσωση (7.32) ισχύει για όλα τα  $u_p$ , έχουμε,

$$F \cdot M = D\Psi^{-1} \cdot F(\Psi) \Rightarrow F(\Psi) = D\Psi \cdot F \cdot M \quad (7.33)$$

Σχετικά με την εφαρμογή του μετασχηματισμού στον έλεγχο κινητών ρομποτικών οχημάτων, έχουμε αναδείξει τη χρήση του στον έλεγχο παρακολούθησης πορείας. Όμως, μπορούμε επίσης να τον εφαρμόσουμε και στον έλεγχο παρακολούθησης τροχιάς. Έστω λοιπόν ότι η φυσική πορεία αναφορά είναι παραμετροποιημένη ως προς μια χρονική συνάρτηση  $\sigma(t)$ . Εφαρμόζοντας την ισοδυναμία ανάδρασης όπως περιγράφηκε προηγουμένως, λαμβάνουμε την κανονική τροχιά αναφοράς, η οποία είναι ακριβώς η καμπύλη  $(\sigma(t), 0)$ . Συνεπώς, η παρακολούθηση τροχιάς στον κανονικό χώρο έχει αναχθεί στην παρακολούθηση ενός χρονικά μεταβαλλόμενου σημείου αναφοράς πάνω στον άξονα  $x$ . Επίσης, πρέπει να σημειωθεί ότι ο μετασχηματισμός δεν περιορίζεται στο ρομποτικό μοντέλο που αναλύεται εδώ. Μπορεί εύκολα να εφαρμοσθεί και σε διαφορετικά κινηματικά μοντέλα όπως το μοντέλο του Dubins (χρησιμοποιήθηκε στις προσομοιώσεις), το μοντέλο του Reeds & Shepps, στο ρομπότ διαφορικής κίνησης κλπ. μιας και τα μοντέλα αυτά αποτελούν απλοποιήσεις του ρομποτικού οχήματος [1],[69].

Πρέπει επίσης να αναφερθεί και ο χώρος ορισμού του μετασχηματισμού  $\Phi$ . Αν η πορεία αναφοράς είναι πεπερασμένη, τότε ο μετασχηματισμός ορίζεται μέσα στην ταινία που περικλείει την καμπύλη. Τα άκρα της ταινίας αυτής είναι ευθείες με κλίση  $\theta_s$  οι οποίες διέρχονται από το αρχικό και τελικό σημείο της. Προκειμένου να επεκτείνουμε το μετασχηματισμό σε όλο το φυσικό χώρο, μπορούμε να επαυξήσουμε την καμπύλη με άλλες δυο μονότονες καμπύλες που πηγαίνουν στο άπειρο. Παρόμοια τακτική ακολουθήσαμε και με το μετασχηματισμό SWAM όπου προσαρτήσαμε στην πολυγωνική αλυσίδα δυο ευθείες που φεύγουν στο άπειρο. Η πρώτη καμπύλη  $p_p^{-\infty}$  αρχίζει από σημείο  $p_p^r(0)$  και εκτείνεται προς το άπειρο με κατεύθυνση  $-u_{\theta_s}^\perp$  ενώ η δεύτερη καμπύλη  $p_p^{+\infty}$  αρχίζει από το  $p_p^r(x_c^{\max})$  και εκτείνεται προς το άπειρο με διεύθυνση  $u_{\theta_s}^\perp$ . Η καμπύλη  $p_p^{-\infty} \cup p_p^r \cup p_p^{+\infty}$  χωρίζει το φυσικό χώρο σε δυο μέρη. Η εικόνα της στον κανονικό χώρο είναι ολόκληρος ο άξονας  $x$  και προφανώς η πρώτη καμπύλη αρχίζει από το μηδέν και εκτείνεται στο  $-\infty$  ενώ η δεύτερη αρχίζει από το  $x_c^{\max}$  και εκτείνεται στο  $+\infty$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο ο μετασχηματισμός πλέον ορίζεται σε όλο τον κανονικό και φυσικό χώρο, δηλαδή είναι ένας ολικός μετασχηματισμός.

#### ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Μαθηματικές αποδείξεις

Στο παράρτημα αυτό θα παρουσιάσουμε τις μαθηματικές αποδείξεις των τύπων που εμφανίζονται στο κεφάλαιο αυτό. Θεωρούμε λοιπόν τις εξισώσεις του μετασχηματισμού  $\Phi$ , δηλαδή,

$$\Phi : \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{p,r}(x_c) + y_c \cos \theta_s \\ y_{p,r}(x_c) + y_c \sin \theta_s \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

Για την παράγωγο του ισχύει,

$$\begin{pmatrix} x'_p \\ y'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_{p,r}(x_c) + \cos \theta_s \\ y'_{p,r}(x_c) + \sin \theta_s \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

Όπως έχει αναφερθεί, ο τόνος συμβολίζει την παραγωγή ως προς το όρισμα της συνάρτησης. Η φυσική γωνία  $\theta_p$  δίνεται από τον τύπο,

$$\tan \theta_p = \frac{dy_p}{dx_p} = \frac{y'_{p,r}(x_c)dx_c + \sin \theta_s dy_c}{x'_{p,r}(x_c)dx_c + \cos \theta_s dy_c} = \frac{y'_{p,r}(x_c) + \sin \theta_s dy_c / dx_c}{x'_{p,r}(x_c) + \cos \theta_s dy_c / dx_c} \quad (7.36)$$

Όμως  $dy_c / dx_c = \tan \theta_c$  οπότε,

$$\tan \theta_p = \frac{y'_{p,r}(x_c) + \sin \theta_s \tan \theta_c}{x'_{p,r}(x_c) + \cos \theta_s \tan \theta_c} \quad (7.37)$$

Λύνοντας την (7.37) ως προς  $\theta_c$  έχουμε,

$$\tan \theta_c = \frac{x'_{p,r}(x_c) \tan \theta_p - y'_{p,r}(x_c)}{\sin \theta_s - \cos \theta_s \tan \theta_p} \quad (7.38)$$

Για το διαφορικό μήκος έχουμε,

$$\begin{aligned} ds_p^2 &= dx_p^2 + dy_p^2 = \left( \frac{\partial x_p}{\partial x_c} dx_c + \frac{\partial x_p}{\partial y_c} dy_c \right)^2 + \left( \frac{\partial y_p}{\partial x_c} dx_c + \frac{\partial y_p}{\partial y_c} dy_c \right)^2 = \\ &= (x'_{p,r} dx_c + \cos \theta_s dy_c)^2 + (y'_{p,r} dx_c + \sin \theta_s dy_c)^2 = \\ &= (x'^2_{p,r} + y'^2_{p,r}) dx_c^2 + dy_c^2 + 2 dx_c dy_c (x'_{p,r} \cos \theta_s + y'_{p,r} \sin \theta_s) \end{aligned} \quad (7.39)$$

Διαιρώντας με το  $ds_c^2 = dx_c^2 + dy_c^2$  λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} \frac{ds_p^2}{ds_c^2} &= \frac{(x'^2_{p,r} + y'^2_{p,r}) dx_c^2 + dy_c^2 + 2 dx_c dy_c (x'_{p,r} \cos \theta_s + y'_{p,r} \sin \theta_s)}{dx_c^2 + dy_c^2} = \\ &= \frac{(x'^2_{p,r} + y'^2_{p,r}) + \tan^2 \theta_c + 2 \tan \theta_c (x'_{p,r} \cos \theta_s + y'_{p,r} \sin \theta_s)}{1 + \tan^2 \theta_c} = \\ &= (x'^2_{p,r} + y'^2_{p,r}) \cos^2 \theta_c + \sin^2 \theta_c + 2 \sin \theta_c \cos \theta_c (x'_{p,r} \cos \theta_s + y'_{p,r} \sin \theta_s) \end{aligned} \quad (7.40)$$

οπότε,

$$\gamma = \frac{ds_p}{ds_c} = \sqrt{(x'^2_{p,r} + y'^2_{p,r}) \cos^2 \theta_c + \sin^2 \theta_c + 2 \sin \theta_c \cos \theta_c (x'_{p,r} \cos \theta_s + y'_{p,r} \sin \theta_s)} \quad (7.41)$$

Αν, όπως έχει αναφερθεί,  $\mathbf{u}_r = (x'_{p,r}, y'_{p,r})$  είναι η ταχύτητα αναφοράς, δηλαδή η παράγωγος της καμπύλης στο εκάστοτε σημείο  $x_c$  και  $\mathbf{u}_{\theta_s}$  είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα με διεύθυνση  $\theta_s$ , τότε η (7.41) μπορεί να γραφτεί ως,



$$\gamma = \frac{ds_p}{ds_c} = \sqrt{u_r^2 \cos^2 \theta_c + \sin^2 \theta_c + 2 \sin \theta_c \cos \theta_c u_r \sin \omega} \quad (7.42)$$

όπου  $\omega$  είναι η γωνία των διανυσμάτων  $\mathbf{u}_r$  και  $\mathbf{u}_{\theta_s}^\perp$ , η οποία ορίζεται επίσης και από την Ιακωβιανή (Εξ.(7.9)). Από την εξίσωση (7.42) μπορούμε εύκολα να συνάγουμε και τη σχέση των ταχυτήτων στον φυσικό και κανονικό χώρο, η οποία ταυτίζεται και με την σχέση των δυο εισόδων, δηλαδή,

$$\gamma = \frac{ds_p / dt}{ds_c / dt} = \frac{v_p}{v_c} = \frac{u_p^1}{u_c^1} \quad (7.43)$$

Για τις εξισώσεις της καμπυλότητας έχουμε,

$$\kappa_p = \frac{d\theta_p}{ds_p} = \frac{\frac{\partial \theta_p}{\partial x_c} dx_c + \frac{\partial \theta_p}{\partial y_c} dy_c + \frac{\partial \theta_p}{\partial \theta_c} d\theta_c}{\gamma ds_c} \Rightarrow \kappa_p = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \theta_p}{\partial x_c} \frac{dx_c}{ds_c} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \theta_p}{\partial \theta_c} \kappa_c \quad (7.44)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέρους της (7.44) μπορεί να υπολογιστεί ως εξής,

$$\frac{\partial \tan \theta_p}{\partial x_c} = \frac{1}{\cos^2 \theta_p} \frac{\partial \theta_p}{\partial x_c} = \frac{y_{p,r}'' (x_{p,r}' + \cos \theta_s \tan \theta_c) - x_{p,r}'' (y_{p,r}' + \sin \theta_s \tan \theta_c)}{(x_{p,r}' + \cos \theta_s \tan \theta_c)^2} \quad (7.45)$$

Φυσικά ισχύει  $dx_c / ds_c = \cos \theta_c$ . Επίσης είναι αληθές ότι,

$$\cos^2 \theta_p = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta_p} = \frac{(x_{p,r}' \cos \theta_c + \cos \theta_s \sin \theta_c)^2}{\gamma^2} \quad (7.46)$$

Τώρα, αν  $\mathbf{a}_r = (x_{p,r}'', y_{p,r}'')$  είναι το διάνυσμα επιτάχυνσης αναφοράς και  $\mathbf{a}_r^\perp = (y_{p,r}'', -x_{p,r}'')$  είναι το κάθετο του διάνυσμα, τότε συνδυάζοντας τις (7.46) και (7.45) έχουμε,

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \theta_p}{\partial x_c} \frac{dx_c}{ds_c} = \gamma^{-3} \cos^3 \theta_c (\mathbf{u}_r \mathbf{a}_r^\perp + \mathbf{u}_{\theta_s} \mathbf{a}_r^\perp \tan \theta_c) \quad (7.47)$$

Αν  $\mathbf{u}_T, \mathbf{u}_N$  είναι τα μοναδιαία εφαπτόμενα και κάθετα διανύσματα της καμπύλης αναφοράς, ξέρουμε από την στοιχειώδη διαφορική γεωμετρία όχι ισχύει,

$$\mathbf{a}_r = a_r \mathbf{u}_T + u_r^2 \kappa_r \mathbf{u}_N \quad (7.48)$$

και συνεπώς,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r \mathbf{a}_r^\perp &= u_r \mathbf{u}_T (a_r \mathbf{u}_N + u_r^2 \kappa_r \mathbf{u}_T) = u_r^3 \kappa_r, \\ -\mathbf{u}_{\theta_s} \mathbf{a}_r^\perp &= \mathbf{u}_{\theta_s}^\perp \mathbf{a}_r = a_r \mathbf{u}_T \mathbf{u}_{\theta_s}^\perp + u_r^2 \kappa_r \mathbf{u}_N \mathbf{u}_{\theta_s}^\perp = a_r \cos \omega + u_r^2 \kappa_r \sin \omega \end{aligned} \quad (7.49)$$

οπότε η Εξ.(7.47) παίρνει τη μορφή,

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \theta_p}{\partial x_c} \frac{dx_c}{ds_c} = \gamma^{-3} \cos^3 \theta_c (u_r^3 \kappa_r - (a_r \cos \omega + u_r^2 \kappa_r \sin \omega) \tan \theta_c) \quad (7.50)$$

Για τον δεύτερο όρο της (7.44) έχουμε,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tan \theta_p}{\partial \theta_c} &= \frac{1}{\cos^2 \theta_p} \frac{\partial \theta_p}{\partial \theta_c} = \frac{x'_{p,r} \sin \theta_s - y'_{p,r} \cos \theta_s}{(x'_{p,r} \cos \theta_c + \cos \theta_s \sin \theta_c)^2} \Rightarrow \\ \frac{\partial \theta_p}{\partial \theta_c} &= \cos^2 \theta_p \frac{x'_{p,r} \sin \theta_s - y'_{p,r} \cos \theta_s}{(x'_{p,r} \cos \theta_c + y'_{p,r} \sin \theta_c)^2} \end{aligned} \quad (7.51)$$

και συνδυάζονται την (7.46) προκύπτει,

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial \theta_c} = \gamma^{-2} (x'_{p,r} \sin \theta_s - y'_{p,r} \cos \theta_s) = J \gamma^{-2} \quad (7.52)$$

οπότε και η τελική εξίσωση της καμπυλότητας είναι,

$$\kappa_p = \gamma^{-3} \cos^3 \theta_c (u_r^3 \kappa_r - (a_r \cos \omega + u_r^2 \kappa_r \sin \omega) \tan \theta_c) + J \gamma^{-3} \kappa_c \quad (7.53)$$

Για την επίδραση του μετασχηματισμού  $\Psi$  πάνω στις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος  $\Sigma$ , σύμφωνα με την Εξ.(7.18) έχουμε,

$$\dot{q}_c = D\Psi(q_c)^{-1} F(\Psi(q_c)) u_p \quad (7.54)$$

και,

$$F(\Psi(q_c)) = F(q_p) = \begin{bmatrix} \cos \theta_p & 0 \\ \sin \theta_p & 0 \\ \kappa_p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D\Psi(q_c) = \begin{bmatrix} \partial_{x_c} x_p & \partial_{y_c} x_p & 0 & 0 \\ \partial_{x_c} y_p & \partial_{y_c} y_p & 0 & 0 \\ \partial_{x_c} \theta_p & 0 & \partial_{\theta_c} \theta_p & 0 \\ \partial_{x_c} \kappa_p & 0 & \partial_{\theta_c} \kappa_p & \partial_{\kappa_c} \kappa_p \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

Ο αντίστροφος Ιακωβιανός πίνακας δίνεται από τον τύπο,

$$D\Psi(q_c)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_{y_c} y_p}{J} & -\frac{\partial_{y_c} x_p}{J} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial_{x_c} y_p}{J} & \frac{\partial_{x_c} x_p}{J} & 0 & 0 \\ -\partial_{y_c} y_p \frac{\partial_{x_c} \theta_p}{J \partial_{\theta_c} \theta_p} & \partial_{y_c} x_p \frac{\partial_{x_c} \theta_p}{J \partial_{\theta_c} \theta_p} & \frac{1}{\partial_{\theta_c} \theta_p} & 0 \\ \partial_{y_c} y_p \frac{\partial_{x_c} \theta_p \partial_{\theta_c} \kappa_p - \partial_{x_c} \kappa_p \partial_{\theta_c} \theta_p}{J \partial_{\kappa_c} \kappa_p \partial_{\theta_c} \theta_p} & -\partial_{y_c} x_p \frac{\partial_{x_c} \theta_p \partial_{\theta_c} \kappa_p - \partial_{x_c} \kappa_p \partial_{\theta_c} \theta_p}{J \partial_{\kappa_c} \kappa_p \partial_{\theta_c} \theta_p} & -\frac{1}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p \partial_{\theta_c} \theta_p} & \frac{1}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας τον  $D\Psi(q_c)^{-1}$  με τον  $F(\Psi(q_c))$  έχουμε,

$$\dot{q}_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial_{y_c} x_p \sin \theta_p - \partial_{y_c} y_p \cos \theta_p}{J} & 0 \\ \frac{\partial_{x_c} x_p \sin \theta_p - \partial_{x_c} y_p \cos \theta_p}{J} & 0 \\ \frac{J\kappa_p + \partial_{x_c} \theta_p (\partial_{y_c} x_p \sin \theta_p - \partial_{y_c} y_p \cos \theta_p)}{J\partial_{\theta_c} \theta_p} & 0 \\ \frac{\partial_{x_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \frac{\partial_{y_c} x_p \sin \theta_p - \partial_{y_c} y_p \cos \theta_p}{J} - \frac{\partial_{\theta_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \frac{J\kappa_p + \partial_{x_c} \theta_p (\partial_{y_c} x_p \sin \theta_p - \partial_{y_c} y_p \cos \theta_p)}{J\partial_{\theta_c} \theta_p} & \frac{1}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \end{bmatrix} u_p$$

Μπορούμε ν' απλοποιήσουμε κατά πολύ τις πράξεις παρατηρώντας την εξής δομή στον πίνακα,

$$\dot{q}_c = \begin{bmatrix} -\frac{A}{J} & 0 \\ \frac{B}{J} & 0 \\ K & 0 \\ \frac{\partial_{x_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \frac{A}{J} - \frac{\partial_{\theta_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} K & \frac{1}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \end{bmatrix} u_p, \quad (7.56)$$

όπου,

$$\begin{aligned} A &= \partial_{y_c} x_p \sin \theta_p - \partial_{y_c} y_p \cos \theta_p, \\ B &= \partial_{x_c} x_p \sin \theta_p - \partial_{x_c} y_p \cos \theta_p, \\ K &= \frac{J\kappa_p + \partial_{x_c} \theta_p (\partial_{y_c} x_p \sin \theta_p - \partial_{y_c} y_p \cos \theta_p)}{J\partial_{\theta_c} \theta_p} = \frac{J\kappa_p + \partial_{x_c} \theta_p A}{J\partial_{\theta_c} \theta_p} \end{aligned} \quad (7.57)$$

Για τους όρους αυτούς έχουμε,

$$\begin{aligned} \sin \theta_p &= \sin(\tan^{-1}(\frac{y'_{p,r}(x_c) + \sin \theta_s \tan \theta_c}{x'_{p,r}(x_c) + \cos \theta_s \tan \theta_c})) = \frac{\frac{y'_{p,r}(x_c) + \sin \theta_s \tan \theta_c}{x'_{p,r}(x_c) + \cos \theta_s \tan \theta_c}}{\sqrt{1 + (\frac{y'_{p,r}(x_c) + \sin \theta_s \tan \theta_c}{x'_{p,r}(x_c) + \cos \theta_s \tan \theta_c})^2}} = \\ &= \frac{y'_{p,r}(x_c) + \sin \theta_s \tan \theta_c}{\sqrt{(x'_{p,r}(x_c) + \cos \theta_s \tan \theta_c)^2 + (y'_{p,r}(x_c) + \sin \theta_s \tan \theta_c)^2}} = \frac{y'_{p,r}(x_c) \cos \theta_c + \sin \theta_s \sin \theta_c}{\gamma} \end{aligned} \quad (7.58)$$

και,

$$\begin{aligned} \cos \theta_p &= \cos(\tan^{-1}(\frac{y'_{p,r}(x_c) + \sin \theta_s \tan \theta_c}{x'_{p,r}(x_c) + \cos \theta_s \tan \theta_c})) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{y'_{p,r}(x_c) + \sin \theta_s \tan \theta_c}{x'_{p,r}(x_c) + \cos \theta_s \tan \theta_c})^2}} = \\ &= \frac{x'_{p,r}(x_c) + \cos \theta_s \tan \theta_c}{\sqrt{(x'_{p,r}(x_c) + \cos \theta_s \tan \theta_c)^2 + (y'_{p,r}(x_c) + \sin \theta_s \tan \theta_c)^2}} = \frac{x'_{p,r}(x_c) \cos \theta_c + \cos \theta_s \sin \theta_c}{\gamma} \end{aligned} \quad (7.59)$$

οπότε,

$$\begin{aligned} A &= \cos \theta_s \frac{y'_{p,r}(x_c) \cos \theta_c + \sin \theta_s \sin \theta_c}{\gamma} - \sin \theta_s \frac{x'_{p,r}(x_c) \cos \theta_c + \cos \theta_s \sin \theta_c}{\gamma} = \\ &= \frac{y'_{p,r}(x_c) \cos \theta_c \cos \theta_s - x'_{p,r}(x_c) \cos \theta_c \sin \theta_s}{\gamma} = -J\gamma^{-1} \cos \theta_c \end{aligned} \quad (7.60)$$

Για το  $B$  έχουμε,

$$\begin{aligned} B &= x'_{p,r}(x_c) \frac{y'_{p,r}(x_c) \cos \theta_c + \sin \theta_s \sin \theta_c}{\gamma} - y'_{p,r}(x_c) \frac{x'_{p,r}(x_c) \cos \theta_c + \cos \theta_s \sin \theta_c}{\gamma} = \\ &= \frac{x'_{p,r}(x_c) \sin \theta_s \sin \theta_c - y'_{p,r}(x_c) \sin \theta_s \cos \theta_c}{\gamma} = J\gamma^{-1} \sin \theta_c \end{aligned} \quad (7.61)$$

Για το  $K$  ισχύει,

$$K = \frac{J\kappa_p - \partial_{x_c} \theta_p J\gamma^{-1} \cos \theta_c}{J\partial_{\theta_c} \theta_p} = \frac{1}{\partial_{\theta_c} \theta_p} (-\frac{1}{\gamma} \partial_{x_c} \theta_p \cos \theta_c + \kappa_p) \quad (7.62)$$

Αντικαθιστώντας το  $\kappa_p$  από τον (7.44) έχουμε,

$$K = \frac{1}{\partial_{\theta_c} \theta_p} (-\frac{1}{\gamma} \partial_{x_c} \theta_p \cos \theta_c + \frac{1}{\gamma} \partial_{x_c} \theta_p \cos \theta_c + \frac{1}{\gamma} \partial_{\theta_c} \theta_p \kappa_c) = \gamma^{-1} \kappa_c \quad (7.63)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις, για την τέταρτη σειρά του πίνακα (7.56) έχουμε,

$$\frac{\partial_{x_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \frac{A}{J} - \frac{\partial_{\theta_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} K = -\gamma^{-1} (\frac{\partial_{x_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \cos \theta_c + \frac{\partial_{\theta_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \kappa_c) \quad (7.64)$$

και,

$$\partial_{\kappa_c} \kappa_p = J\gamma^{-3} \quad (7.65)$$

Η εξίσωση λοιπόν (7.56) γράφεται τελικά ως,

$$\dot{q}_c = \begin{bmatrix} \gamma^{-1} \cos \theta_c & 0 \\ \gamma^{-1} \sin \theta_c & 0 \\ \gamma^{-1} \kappa_c & 0 \\ -\gamma^{-1} \left( \frac{\partial_{x_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \cos \theta_c + \frac{\partial_{\theta_c} \kappa_p}{\partial_{\kappa_c} \kappa_p} \kappa_c \right) & J^{-1} \gamma^3 \end{bmatrix} u_p, \quad (7.66)$$



## Κεφάλαιο 8

---

### Συμπεράσματα

Η διατριβή αυτή ασχολήθηκε με το πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας κινητών ρομποτικών οχημάτων τα οποία κυβερνώνται από μη-ολονομικούς περιορισμούς. Οι πορείες αναφοράς διακρίθηκαν σε εφικτές πορείες, δηλαδή σε πορείες που ικανοποιούν τις εξισώσεις κίνησης του μοντέλου, και σε μη εφικτές πορείες. Περισσότερη έμφαση δίνεται στις μη εφικτές πορείες οι οποίες έχουν πολυγωνική μορφή, δηλαδή αποτελούνται από ευθύγραμμα τμήματα. Αν και οι πορείες αυτές εισάγουν ένα εγγενές σφάλμα, παρουσιάζουν σημαντικό πλεονέκτημα στον έλεγχο αφού μπορούν να προσεγγίσουν απειροστά κοντά μια εφικτή πορεία αλλά μπορούν να υποστούν επεξεργασία αρκετά εύκολα από ψηφιακούς επεξεργαστές. Κάτι τέτοιο είναι γενικά αδύνατο για εφικτές πορείες γιατί συνήθως περιγράφουν διαφορίσιμες καμπύλες παραμετροποιημένες ως προς το μήκος τόξου. Συνεπώς, η ολοκλήρωση τους ή και η αντιστροφή τους είναι εν γένει αρκετά δύσκολη έως αδύνατη.

Αρχικά σχεδιάστηκε ένας ασαφής ελεγκτής τύπου Mamdani ο οποίος παρακολουθεί πορείες αναφοράς που κωδικοποιούνται σαν ένα σύνολο σημείων. Ο ελεγκτής αυτός επιλέγει το κοντινότερο σημείο και καθοδηγεί κατάλληλα το ρομπότ ώστε να οδηγηθεί πάνω στην πορεία. Παράλληλα εισήχθη και μια τεχνική που ονομάζεται «χωρικό παράθυρο», η οποία βελτιώνει αισθητά τον έλεγχο και εισάγει προοπτική στον ελεγκτή. Ο ελεγκτής αυτός δοκιμάστηκε σε προσομοιώσεις και φάνηκε ότι παρουσιάζει αρκετά μεγάλη ευρωστία ως προς την εκτίμηση της θέσης του ρομπότ αλλά και ως προς την ίδια την πορεία.

Στη συνέχεια, ο ελεγκτής αυτός υλοποιήθηκε πάνω σε ένα FPGA από έναν ψηφιακό ασαφή ελεγκτή (DFLC). Ο ψηφιακός ελεγκτής αυτός εκτελείται αρκετά γρήγορα ώστε να ολοκληρωθεί σε ένα σύστημα-σε-ψηφίδα για να επιτελεί παράλληλα και άλλες λειτουργίες. Το σύστημα αυτό συνδέθηκε πάνω σε ένα διαφορικό ρομπότ P3-DX μαζί με ένα διαφορικό GPS. Εκτελέστηκαν πειράματα για

την αξιολόγηση του ελεγκτή παρακολούθησης όπου καταδείχθηκε ότι ο ελεγκτής αποδίδει ικανοποιητικά, αν και η απόδοση του υποβαθμίζεται από το σφάλμα της οδομετρίας η οποία χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση της θέσης του.

Για την παρακολούθηση πορείας παρουσιάστηκε επίσης και μια θεωρητική συνεισφορά της διατριβής. Συγκεκριμένα, αναλύθηκε ένας κατά τμήματα ομοιομορφικός μετασχηματισμός, ονομαζόμενος και κατά-ταινίες αφινικός μετασχηματισμός, ο οποίος παίρνει μια πολυγωνική πορεία αναφοράς και την προβάλλει σε ένα χώρο όπου είναι πλέον ευθεία. Παράλληλα αποδεικνύεται ότι η επίδραση του μετασχηματισμού αυτού πάνω στις εξισώσεις κίνησης του ρομπότ, παρουσιάζει αναλλοιωσιμότητα. Δηλαδή, το μοντέλο παραμένει το ίδιο. Συνεπώς, το πρόβλημα της παρακολούθησης πορείας έχει αναχθεί στο πρόβλημα της παρακολούθησης ευθείας για το ίδιο μοντέλο. Με αυτό τον τρόπο απλοποιείται σημαντικά η σχεδίαση ελεγκτών μιας και η παρακολούθηση ευθείας είναι πιο απλή από την παρακολούθηση γενικών πολυγωνικών καμπύλων. Η τεχνική αυτή οδηγεί επίσης και στην απλοποίηση υπάρχοντων ελεγκτών μιας και μπορούν πλέον να εφαρμοσθούν μόνο στην παρακολούθηση ευθείας όπου η δομή τους είναι πιο απλή.

Η απλοποίηση αυτή είναι και το θέμα του επόμενου κεφαλαίου όπου ο μετασχηματισμός αυτός εφαρμόζεται στον αρχικό ασαφή ελεγκτή. Η ανάλυση της εφαρμογής οδηγεί σε έναν διακοπτικό ασαφή ελεγκτή ο οποίος και παρουσιάζει μείωση της βάσης κανόνων του κατά 70%. Παράλληλα, αναλύεται θεωρητικά η παρακολούθηση μη εφικτών πολυγωνικών πορειών και αποδεικνύεται ότι το σύστημα δεν μπορεί να σταθεροποιηθεί στις πορείες αυτές αλλά εμφανίζει κρουστικά φαινόμενα τα οποία το διαταράσσουν από το σημείο ισορροπίας. Όμως, όσο καλύτερη είναι η πολυγωνική προσέγγιση της εφικτής πορείας, η διαταραχή αυτή μειώνεται και το σφάλμα γίνεται μικρό.

Μια παραλλαγή του ελεγκτή αυτού υλοποιήθηκε πάνω σε FPGA και εφαρμόστηκε σε ένα διαφορετικό ρομπότ Khepera II. Το FPGA υλοποίησε τον μετασχηματισμό SWAM, τον ασαφή ελεγκτή καθώς και το γενικότερο σχήμα ελέγχου. Εκτελέστηκαν πειράματα με χρήση video όπου η κάμερα ήταν στερεωμένη πάνω από το πεδίο δράσης του ρομπότ. Η κάμερα κατέγραφε την κίνηση του ρομπότ ώστε να συναχθεί η πραγματική του πορεία. Μετά από επεξεργασία του video των πειραμάτων μέσω αλγορίθμων επεξεργασίας εικόνας, υπολογίστηκε η πραγματική του πορεία και συγκρίθηκε με την λύση της οδομετρίας. Και εδώ φάνηκε ότι ο έλεγχος είναι ικανοποιητικός αν και το σφάλμα της οδομετρίας υποβαθμίζει την ακρίβεια.

Τέλος, παρουσιάστηκε και μια δεύτερη θεωρητική συμβολή της διατριβής πάνω στην απλοποίηση του ελέγχου παρακολούθησης. Αυτή συνίσταται στην επέκταση του μετασχηματισμού SWAM σε συνεχώς διαφορίσιμες καμπύλες αναφοράς. Ο μετασχηματισμός πλέον έχει άλλη, αλλά συγγενή, μορφή και ονομάστηκε λοξός μετασχηματισμός ευθειοποίησης. Εξήχθησαν οι εξισώσεις κίνησης και το μετασχηματισμένο μοντέλο όπου αποδείχθηκε ότι διατηρεί και εδώ τη μορφή του. Συνεπώς, η απλοποίηση του ελέγχου είναι δυνατή μέσω της χρήσης αυστηρά ελεγκτών παρακολούθησης ευθείας ή της απλοποίησης ελεγκτών πορείας. Επίσης, σημειώθηκε και η εφαρμογή αυτού του μετασχηματισμού στον έλεγχο παρακολούθησης τροχιάς μέσω μιας μικρής παραλλαγής.



Η διατριβή αυτή αφήνει χώρο για περαιτέρω ερευνητικά θέματα, ιδίως θεωρητικά. Συγκεκριμένα, είναι ενδιαφέρον να εξεταστεί η χρήση του μετασχηματισμού πάνω σε περισσότερα ρομποτικά μοντέλα όπως π.χ. τα ρομποτικά οχήματα με τρέιλερ, τα μη-επανδρωμένα εναέρια οχήματα, οι ρομποτικοί βραχίονες κλπ. Σημαντικό ενδιαφέρον παρουσιάζει και η γενική ανάλυση της κλάσης των μετασχηματισμών που παρουσιάζουν παρόμοια αναλλοιωσιμότητα ως προς αυτά τα συστήματα καθώς και το είδος των συστημάτων αυτών. Τέλος, από μια πιο πρακτική σκοπιά, μπορεί να ερευνηθεί και η εφαρμογή του μετασχηματισμού πάνω στο έλεγχο συστημάτων με φραγμένες εισόδους, μιας και ο μετασχηματισμός αλλοιώνει τα φράγματα της εισόδου.



## Βιβλιογραφία

- [1] S.M. LaValle, *Planning Algorithms*, Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- [2] E. Lefeber, *Tracking Control of Nonlinear Mechanical Systems*, Universiteit Twente, 2000.
- [3] A. Kamga and A. Rachid, "A simple path tracking controller for car-like mobile robots," *ECC97 Proc.*, 1997.
- [4] J. Baltes and R. Otte, "A fuzzy logic controller for car-like mobile robots," *Computational Intelligence in Robotics and Automation, 1999. CIRA '99. Proceedings. 1999 IEEE International Symposium on*, 1999, pp. 89-94.
- [5] F. Abdessemed, K. Benmahammed, and E. Monacelli, "A fuzzy-based reactive controller for a non-holonomic mobile robot," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 47, May. 2004, pp. 31-46.
- [6] C. Altafini, "Following a path of varying curvature as an output regulation problem," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 47, 2002, pp. 1551-1556.
- [7] G. Antonelli, S. Chiaverini, and G. Fusco, "Real-time path tracking for unicycle-like mobile robots under velocity and acceleration constraints," *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001*, 2001, pp. 119-124 vol.1.
- [8] G. Antonelli, S. Chiaverini, and G. Fusco, "A Fuzzy-Logic-Based Approach for Mobile Robot Path Tracking," *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, vol. 15, 2007, pp. 211-221.
- [9] M. Bak, N.K. Poulsen, and O. Ravn, *Path following mobile robot in the presence of velocity constraints*, Richard Petersens Plads, Building 321, DK-2800 Kgs. Lyngby: Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DTU, 2001.
- [1] A. Balluchi, A. Bicchi, A. Balestrino, and G. Casalino, "Path tracking control for Dubin's cars," *Robotics and Automation, 1996. Proceedings., 1996 IEEE International Conference on*, 1996, pp. 3123-3128 vol.4.
- [11] A. Balluchi, P. Souères, and A. Bicchi, "Hybrid Feedback Control for Path Tracking by a Bounded-Curvature Vehicle," *Proceedings of the 4th International Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control*, Springer-Verlag, 2001, pp. 133-146.
- [12] J. Baltes and Y. Lin, "Path-Tracking Control of Non-holonomic Car-Like Robot with Reinforcement Learning," Springer-Verlag, 2000, pp. 162-173.
- [13] M. Cao and E.L. Hall, "Fuzzy logic control for an automated guided vehicle," *Intelligent Robots and Computer Vision XVII: Algorithms, Techniques, and Active Vision*, vol. 3522, 1998, pp. 303-312.
- [14] M. Davidson, V. Bahl, and K. Moore, "Spatial integration for a nonlinear path tracking control law," *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, 2002, pp. 4291- 4296 vol.5.

- [15] A. El Hajjaji and S. Bentalba, "Fuzzy path tracking control for automatic steering of vehicles," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 43, Jun. 2003, pp. 203-213.
- [16] J. Guldner, W. Sienel, Han-Shue Tan, J. Ackermann, S. Patwardhan, and T. Bunte, "Robust automatic steering control for look-down reference systems with front and rear sensors," *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, vol. 7, 1999, pp. 2-11.
- [17] H. Hu and D. Gu, "Generalised Predictive Control of an Industrial Mobile Robot," *IASTED International Conference on Intelligent Systems and Control, Santa Barbara, CA, USA*, 1999.
- [18] A. Homaifar, D. Battle, and E. Tunstel, "Soft computing-based design and control for mobile robot path tracking," *Computational Intelligence in Robotics and Automation, 1999. CIRA '99. Proceedings. 1999 IEEE International Symposium on*, 1999, pp. 35-40.
- [19] L. Jiangzhou, S. Sekhavat, and C. Laugier, "Fuzzy variable-structure control for nonholonomic vehicle path tracking," *Intelligent Transportation Systems, 1999. Proceedings. 1999 IEEE/IEEJ/JSAI International Conference on*, 1999, pp. 465-470.
- [20] K. Koh and H. Cho, "A path tracking control system for autonomous mobile robots: an experimental investigation," *Mechatronics*, vol. 4, Dec. 1994, pp. 799-820.
- [21] T. Lee, H. Lam, F. Leung, and P. Tam, "A practical fuzzy logic controller for the path tracking of wheeled mobile robots," *Control Systems Magazine, IEEE*, vol. 23, 2003, pp. 60- 65.
- [22] K. Liu and F. Lewis, "Fuzzy logic-based navigation controller for an autonomous mobile robot," *Systems, Man, and Cybernetics, 1994. 'Humans, Information and Technology'. 1994 IEEE International Conference on*, 1994, pp. 1782-1789 vol.2.
- [23] A.D. Luca, G. Oriolo, and C. Samson, "Feedback control of a nonholonomic car-like robot," *Planning robot motion*, J. Laumond, Ed., Berlin, DE: Springer-Verlag, 1998.
- [24] E. Maalouf, M. Saad, and H. Saliyah, "A higher level path tracking controller for a four-wheel differentially steered mobile robot," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 54, Jan. 2006, pp. 23-33.
- [25] H. Mäkelä, "Outdoor Navigation of Mobile Robots," Helsinki University of Technology, 2001.
- [26] A. Micaelli and C. Samson, *Trajectory tracking for unicycle-type and two-steering- wheels mobile robots*.
- [27] A. Ollero and O. Amidi, "Predictive path tracking of mobile robots. Application to the CMU NavLab," *Advanced Robotics, 1991. 'Robots in Unstructured Environments', 91 ICAR., Fifth International Conference on*, 1991, pp. 1081-1086 vol.2.
- [28] A. Ollero, A. Garcia-Cerezo, J.L. Martinez, and A. Mandow, "Fuzzy tracking methods for mobile robots," *Applications of fuzzy logic: Towards high machine intelligence quotient systems*, M. Jamshidi, A. Titli, L. Zadeh, and S. Boverie, Eds., New Jersey: Prentice-Hall, 1997.
- [29] N. Pavon, O. Sanchez, and A. Ollero, "MLP neural networks to control a mobile robot using multiple goal points," *Automation Congress, 2004. Proceedings. World, 2004*, pp. 395-398.
- [30] E.J. Perez, A. Poncela, A. Bandera, C. Urdiales, and F. Sandoval, "A curvature-

- based path tracking method for Autonomous Mobile Robots,” *Proc. 8th Int. Symp. on Intelligent Robotics Systems*, 2000, pp. 335–340.
- [31] F. Raimondi and L. Ciancimino, “Intelligent neuro-fuzzy dynamic path following for car-like vehicle,” *Advanced Motion Control, 2008. AMC '08. 10th IEEE International Workshop on*, 2008, pp. 744-750.
- [32] F. Raimondi and L. Ciancimino, “An Intelligent Car Driver for Safe Navigation with Fuzzy Obstacle Avoidance,” *Fuzzy Logic and Applications*, Springer Berlin / Heidelberg, 2009, pp. 336-343.
- [33] A. Rodríguez-Castaño, G. Heredia, and A. Ollero, “Fuzzy path tracking and position estimation of autonomous vehicles using differential GPS,” *Mathware Soft Comput*, vol. 7, 2000, pp. 257-264.
- [34] C. Samson, “Control of chained systems application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 40, 1995, pp. 64-77.
- [35] O. Sanchez, A. Ollero, and G. Heredia, “Adaptive fuzzy control for automatic path tracking of outdoor mobile robots. Application to Romeo 3R,” *Fuzzy Systems, 1997., Proceedings of the Sixth IEEE International Conference on*, 1997, pp. 593-599 vol.1.
- [36] V. Sankaranarayanan and A.D. Mahindrakar, “Switched control of a nonholonomic mobile robot,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 14, May. 2009, pp. 2319-2327.
- [37] P. Soueres, A. Balluchi, and A. Bicchi, “Optimal feedback control for route tracking with a bounded-curvature vehicle,” *International Journal of Control*, vol. 74, 2001, pp. 1009-1019.
- [38] T. Hamel, P. Souères, and D. Meizel, “Path following with a security margin for mobile robots,” *International Journal of Systems Science*, vol. 32, Aug. 2001, pp. 989-1002.
- [39] J. Wit, *Vector Pursuit Path Tracking for Autonomous Ground Vehicles*, University of Florida, 2000.
- [40] J. Wit, C.D. Crane, and D. Armstrong, “Autonomous ground vehicle path tracking,” *J. Robot. Syst.*, vol. 21, 2004, pp. 439-449.
- [41] Xinxin Yang, Kezhong He, Muhe Guo, and Bo Zhang, “An intelligent predictive control approach to path tracking problem of autonomous mobile robot,” *Systems, Man, and Cybernetics, 1998. 1998 IEEE International Conference on*, 1998, pp. 3301-3306 vol.4.
- [42] X. Xu, X. Wang, and D. Hu, “Mobile Robot Path-Tracking Using an Adaptive Critic Learning PD Controller,” *Advances in Neural Networks - ISNN 2004*, 2004, pp. 25-34.
- [43] J. Borenstein, H.R. Everett, L. Feng, and D. Wehe, “Mobile Robot Positioning - Sensors and Techniques,” *Journal of Robotic Systems, Special Issue on Mobile Robots*, vol. 14, pp. 231-249.
- [44] K. Deliparaschos, F. Nenedakis, and S. Tzafestas, “Design and Implementation of a Fast Digital Fuzzy Logic Controller Using FPGA Technology,” *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 45, Jan. 2006, pp. 77-96.
- [45] A. Kongmunvattana and P. Chongstivatana, “A FPGA-based behavioral control system for a mobile robot,” *Circuits and Systems, 1998. IEEE APCCAS 1998. The 1998 IEEE Asia-Pacific Conference on*, 1998, pp. 759-762.
- [46] P. Leong and K. Tsoi, “Field programmable gate array technology for robotics applications,” *Robotics and Biomimetics (ROBIO). 2005 IEEE International Conference on*, 2005, pp. 295-298.

- [47] T. Li, Shih-Jie Chang, and Yi-Xiang Chen, "Implementation of human-like driving skills by autonomous fuzzy behavior control on an FPGA-based car-like mobile robot," *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 50, 2003, pp. 867- 880.
- [48] R. Reynolds, P. Smith, L. Bell, and H. Keller, "The design of Mars lander cameras for Mars Pathfinder, Mars Surveyor '98 and Mars Surveyor '01," *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 50, 2001, pp. 63-71.
- [49] K. Deliparaschos, G. Moustiris, and S. Tzafestas, "Autonomous SoC for Fuzzy Robot Path Tracking," *Proceedings of the European Control Conference 2007*, Kos, Greece: 2007.
- [50] D.A. Patterson and J.L. Hennessy, *Computer architecture: a quantitative approach*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1990.
- [51] E. Shimizu and T. Fuse, "Rubber-sheeting of historical maps in GIS and its application to landscape visualization Old-Time Cities: Focusing on Tokyo of the Past," *Proceedings of the 8th International Conference on Computers in Urban Planning and Urban Management*, 2003.
- [52] P. Landau and E. Schwartz, "Subset warping: rubber sheeting with cuts," *CVGIP: Graph. Models Image Process*, vol. 56, 1994, pp. 247-266.
- [53] A. Saalfeld, "Joint triangulations and triangulation maps," *Proceedings of the third annual symposium on Computational geometry*, Waterloo, Ontario, Canada: ACM Press, 1987, pp. 195-204.
- [54] R.E. Groff, "Piecewise Linear Homeomorphisms for Approximation of Invertible Maps," The University of Michigan, 2003.
- [55] H. Gupta and R. Wenger, "Constructing piecewise linear homeomorphisms of simple polygons," *J. Algorithms*, vol. 22, 1997, pp. 142-157.
- [56] F.P. Preparata and K.J. Supowit, "Testing a Simple Polygon for Monotonicity," *Info. Proc. Lett.*, vol. 12, 1981, pp. 161-164.
- [57] W. Respondek, *Geometry of static and dynamic feedback*, 2001.
- [58] R.B. Gardner and W.F. Shadwick, "Feedback equivalence of control systems," *Systems & Control Letters*, vol. 8, May. 1987, pp. 463-465.
- [59] R.B. Gardner and W.F. Shadwick, "Feedback equivalence for general control systems," *Systems & Control Letters*, vol. 15, Jul. 1990, pp. 15-23.
- [60] Y. Kanayama and F. Fahroo, "A new line tracking method for nonholonomic vehicles," *Robotics and Automation, 1997. Proceedings., 1997 IEEE International Conference on*, 1997, pp. 2908-2913 vol.4.
- [61] C. Altafini, "A Path-Tracking Criterion for an LHD Articulated Vehicle," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 18, 1999, pp. 435-441.
- [62] M. Egerstedt, X. Hu, and A. Stotsky, "Control of a car-like robot using a dynamic model," *Robotics and Automation, 1998. Proceedings. 1998 IEEE International Conference on*, 1998, pp. 3273-3278 vol.4.
- [63] G. Moustiris and S. Tzafestas, "A Robust Fuzzy Logic Path Tracker for Non-holonomic Mobile Robots.," *International Journal on Artificial Intelligence Tools*, vol. 14, 2005, pp. 935-966.
- [64] G. Zavlangas, S. Tzafestas, and K. Althoefer, "Fuzzy Obstacle Avoidance and Navigation for Omnidirectional Mobile Robots."
- [65] J. Shen and Z. Jing, "Stability Analysis for Systems with Impulse Effects," *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 45, 2006, pp. 1703-1717.
- [66] R. Hermann, "The theory of equivalence of Pfaffian systems and input systems under feedback," *Theory of Computing Systems*, vol. 15, 1981, pp. 343-356.

- [67] J.Y. Bouguet,, “Camera Calibration Toolbox for Matlab.”
- [68] W.F. Shadwick, “Absolute equivalence and dynamic feedback linearization,” *Systems & Control Letters*, vol. 15, Jul. 1990, pp. 35-39.
- [69] J.P. Laumond, *Robot Motion Planning and Control*, Springer-Verlag New York, Inc., 1998.