



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Αναδρομική Εκτίμηση Κατάστασης Μη Γραμμικών  
Στοχαστικών Δυναμικών Συστημάτων: Νέα Μη  
Γραμμικά Φίλτρα Kalman, Βελτιωμένα Φίλτρα  
Σωματιδίων και Εφαρμογή σε Συστήματα  
Συνεχούς Καταγραφής της Γλυκόζης

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

Αλέξανδρου Χ.  
Χαραλαμπίδη

Αθήνα, Απρίλιος 2011

(this page is left intentionally blank)



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

**Αναδρομική Εκτίμηση Κατάστασης Μη Γραμμικών  
Στοχαστικών Δυναμικών Συστημάτων: Νέα Μη  
Γραμμικά Φίλτρα Kalman, Βελτιωμένα Φίλτρα  
Σωματιδίων και Εφαρμογή σε Συστήματα  
Συνεχούς Καταγραφής της Γλυκόζης**

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

του

**Αλέξανδρου Χ.  
Χαραλαμπίδη**

**Συμβουλευτική Επιτροπή:** Γεώργιος Π. Παπαβασιλόπουλος  
Βασίλειος Ζ. Μαμαρέλης  
Πέτρος Α. Μαραγκός

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 1<sup>η</sup> Απριλίου 2011.

.....  
Γεώργιος Π. Παπαβασιλόπουλος  
Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
Βασίλειος Ζ. Μαμαρέλης  
Καθηγητής USC

.....  
Πέτρος Α. Μαραγκός  
Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
Τρύφων Γ. Κουσιουρής  
Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
Βασίλειος-Γ. Παπανικολάου  
Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
Κων. Ι. Κυριακόπουλος  
Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
Γεώργιος Δ. Μήτσος  
Λέκτορας Παν. Κύπρου

Αθήνα, Απρίλιος 2011.

.....  
Αλέξανδρος Χ. Χαραλαμπίδης  
Διδάκτωρ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

© 2011 Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights reserved.

## Περίληψη

Το πρώτο μέρος της διατριβής αφορά την αναδρομική εκτίμηση κατάστασης μη γραμμικών στοχαστικών συστημάτων διακριτού χρόνου. Εισαγωγικά παρουσιάζεται ο μαθηματικός φορμαλισμός και τα βασικά αποτελέσματα στην περιοχή με έμφαση στο Φίλτρο Kalman και τις μη γραμμικές παραλλαγές του (EKF, UKF, GHKF), ενώ γίνεται συνοπτική παρουσίαση και των Particle Filters. Ύστερα, παρουσιάζονται κάποιες ευρετικές τροποποιήσεις στα Φίλτρα Kalman για μη γραμμικά συστήματα: αντιστροφή της συνάρτησης εξόδου, εκτίμηση συγκεκριμένης μη γραμμικής συνάρτησης της κατάστασης, εναλλακτικό σύνολο σ-σημείων για το UKF και χρήση της επικρατούσας τιμής. Ακολούθως μελετώνται συστήματα που αποτελούνται από γραμμικά δυναμικά συστήματα τα οποία διασυνδέονται μεταξύ τους με μη γραμμικές στατικές χαρακτηριστικές. Αρχικά εξετάζεται η περίπτωση όπου οι χαρακτηριστικές έχουν μία είσοδο, στην οποία είναι δυνατό όλα τα προβλήματα υπολογισμού αναμενόμενων τιμών να αναχθούν σε προβλήματα ολοκλήρωσης σε μία και δύο διαστάσεις. Με τον τρόπο αυτό είναι εφικτό να γίνουν ακριβέστεροι υπολογισμοί σε σχέση με τον άμεσο υπολογισμό που απαιτεί ολοκλήρωση στο χώρο κατάστασης ο οποίος ενδέχεται να έχει μεγάλη διάσταση. Κατόπιν εξετάζεται η περίπτωση χαρακτηριστικών με πολλές εισόδους, όπου και πάλι είναι δυνατή η μείωση της τάξης της ολοκλήρωσης. Επίσης αποδεικνύεται ότι οι προτεινόμενες τεχνικές δίνουν αποτελέσματα αναλλοίωτα σε μετασχηματισμούς ομοιότητας του χώρου κατάστασης. Προτείνεται μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό των αναμενόμενων τιμών, εναλλακτική της Gauss-Hermite, ειδικά σχεδιασμένη για μη γραμμικά φίλτρα βάσει ελαχιστοποίησης νορμών και αποδεικνύεται η σύγκλιση της. Τέλος, προτείνονται βελτιώσεις στα Auxiliary Particle Filter και Unscented Particle Filter. Όλες οι προτεινόμενες τεχνικές συγκρίνονται σε κατάλληλα παραδείγματα με τις πρότυπες. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι σε πολλές περιπτώσεις η βελτίωση είναι δραστηκή.

Το δεύτερο μέρος αφορά τη χρήση φίλτρων σε δεδομένα από Σύστημα Συνεχούς Καταγραφής της Γλυκόζης (ΣΣΚΓ). Εξηγείται η σημασία του ΣΣΚΓ στη δημιουργία Τεχνητού Παγκρέατος και περιγράφονται τα προβλήματα που έχουν τα ΣΣΚΓ. Σχεδιάζονται φίλτρα βασισμένα στο Φίλτρο Kalman και τα Particle Filters κάνοντας χρήση απλών μοντέλων για τη δυναμική του συστήματος. Τα φίλτρα εφαρμόζονται σε πειραματικά δεδομένα από ασθενείς σε ΜΕΘ και τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η χρήση των φίλτρων οδηγεί σε σημαντική μείωση του σφάλματος εκτίμησης της γλυκόζης.

**Λέξεις Κλειδιά:** Μη Γραμμικά Συστήματα, Στοχαστικά Συστήματα, Αναδρομική Εκτίμηση Κατάστασης, Νόμος του Bayes, Φίλτρο Kalman, Συστήματα Ειδικής Δομής, Φίλτρα Σωματιδίων, Auxiliary Particle Filter, Unscented Particle Filter, Αριθμητικές Μέθοδοι, Μέθοδος Ολοκλήρωσης Gauss-Hermite, Τεχνητό Πάγκρεας, Συστήματα Συνεχούς Καταγραφής της Γλυκόζης

## Abstract

The first part of this thesis deals with the recursive state estimation of discrete time nonlinear stochastic systems. The formulation of the problem and some basic results are presented in the introduction, with emphasis on the Kalman Filter and its nonlinear variants (EKF, UKF, GHKF), while the Particle Filters are also mentioned. Then, some heuristic modifications of nonlinear Kalman Filters are presented: inversion of the output function, estimation of a specific state function, use of an alternative sigma-point set for UKF and use of the mode. In the following, systems that consist of linear dynamical systems interconnected through static nonlinear characteristics are studied. Initially, the case of single-input nonlinearities is considered and it is proved that in this case it is possible to reduce the computation of all the expected values involved to one and two-dimensional integration. This way, more accurate calculations can be made than with the direct integration on the state space, which may be of high dimension. Then the case of multi-input characteristics is treated, and it is shown that again it is possible to reduce the integration order. Furthermore, it is shown that the results of the proposed techniques are invariant to similarity transformations of the state space. A quadrature technique, alternative to the Gauss-Hermite quadrature, specially designed for nonlinear filters using norm minimization concepts is proposed and its convergence is proved. Finally, improvements for the Auxiliary Particle Filter and the Unscented Particle Filter are presented. All the proposed techniques are compared with the standard ones in suitable examples. The results show that in some cases the improvement is drastic.

The second part deals with the use of filters in data from a Continuous Glucose Monitoring System (CGMS). The importance of the CGMS in the construction of an Artificial Pancreas is explained and the problems of CGMSs are described. Filters based on the Kalman Filter and on the Particle Filter are designed using simple models of the systems dynamics. The filters are applied to experimental data from ICU patients, and the results show that the use of filters leads to significant reduction of the glucose estimation error.

**Keywords:** Nonlinear Systems, Stochastic Systems, Recursive State Estimation, Bayes' Rule, Kalman Filter, Systems of Special Structure, Particle Filters, Auxiliary Particle Filter, Unscented Particle Filter, Numerical Methods, Gauss-Hermite Quadrature, Artificial Pancreas, Continuous Glucose Monitoring Systems

# Ευχαριστίες

Ο συγγραφέας επιθυμεί να εκφράσει τις ευχαριστίες του στον επιβλέποντα καθ. Γεώργιο Παπαβασιλόπουλο για την καθοδήγηση και τη βοήθεια που του προσέφερε καθώς και για το γεγονός ότι του παρείχε τις κατάλληλες συνθήκες για τη διεξαγωγή έρευνας. Αναμφίβολα η παρουσία του κ. Παπαβασιλόπουλου επηρέασε την όλη εξέλιξη της διδακτορικής έρευνας. Σημαντική ήταν και η συνεισφορά του καθ. Βασιλείου Μαρμαρέλη, καθηγητή στο University of Southern California, η οποία αφορά το πρακτικό μέρος της διατριβής. Στο ίδιο μέρος συνεισέφερε και ο λέκτορας του Παν. Κύπρου Γεώργιος Μήτσης. Στους δύο αυτούς καθηγητές εκφράζω την ευχαριστία μου και για το γεγονός ότι ήταν συνεχώς πρόθυμοι να βοηθήσουν με κάθε τρόπο παρά τη γεωγραφική απόσταση που χωρίζει τη χώρα μας από τις δικές τους. Ευχαριστώ επίσης τον καθ. Πέτρο Μαραγκό που συμμετείχε στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή.

Ο καθηγητής του τομέα μας Τρύφων Κουσιουρής είναι εδώ και χρόνια ένας από τους ανθρώπους που με έχουν βοηθήσει πολύ στην πορεία μου τόσο όταν ήμουν προπτυχιακός φοιτητής όσο και πιο πρόσφατα, κατά τα χρόνια που ήμουν υποψήφιος διδάκτορας. Εξαιρετική αναφορά πρέπει να γίνει και στον καθηγητή της ΣΕΜΦΕ Βασίλειο Παπανικολάου, ο οποίος επίσης ήταν πάντα πρόθυμος να συνεισφέρει, αλλά και ο οποίος υπήρξε ο διδάσκων στο προπτυχιακό μάθημα Πιθανοτήτων και Στατιστικής όταν το παρακολούθησα, επομένως από αυτόν διδάχτηκα για πρώτη φορά το αντικείμενο της Θεωρίας Πιθανοτήτων, που τόσο κεντρική θέση έχει στη διατριβή αυτή. Ακόμη πρέπει να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον καθηγητή Κωνσταντίνο Κυριακόπουλο της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών για την προθυμία του να συμμετάσχει στην επταμελή επιτροπή κρίσης.

Επιθυμώ ακόμη να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα του Εργαστηρίου ΣΑΕ Ιωάννη Κορδώνη, με τον οποίο είχαμε πολλές συζητήσεις για ερευνητικά θέματα και στενή συνεργασία στο επικουρικό έργο.

Θερμές ευχαριστίες επιθυμώ επίσης να εκφράσω προς όλους τους συνεργάτες μας στο Νοσοκομείο «ΑΤΤΙΚΟΝ». Ήταν πάντα χαρά μου να έρχομαι σε επικοινωνία με όλους τους. Ιδιαίτερα θέλω να ευχαριστήσω τον καθηγητή Παθολογίας Γεώργιο Δημητριάδη, τον καθ. Απόστολο Αρμαγανίδη, διευθυντή της Β' Πανεπιστημιακής Μονάδας Εντατικής Θεραπείας, και τον ιατρό Κωνσταντίνο Ποντίκη, ο οποίος ήταν υπεύθυνος για τη συγκέντρωση των δεδομένων που παρουσιάζονται στο πρακτικό μέρος της διατριβής.

Σχεδόν αποκλειστική πηγή χρηματοδότησης για την εκπόνηση της διδακτορικής αυτής διατριβής αποτέλεσε υποτροφία από τον Ειδικό Λογαριασμό Έρευνας του Ιδρύματος.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>10</b>
1.1	Μη Γραμμικά Στοχαστικά Συστήματα . . . . .	12
1.1.1	Μαθηματική Περιγραφή του Προβλήματος . . . . .	13
1.1.2	Περιπτώσεις Αναλυτικής Επίλυσης . . . . .	14
1.1.3	Προσεγγιστικές Τεχνικές για Μη Γραμμικά Συστήματα . . . .	16
1.2	Τεχνητό Πάγκρεας . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Σύγκριση Προτύπων και Τροποποιημένων Τεχνικών Αναδρομικής Εκτίμησης Κατάστασης</b>	<b>24</b>
2.1	Εισαγωγή . . . . .	24
2.2	Προτεινόμενες Τροποποιήσεις . . . . .	25
2.2.1	Αντιστροφή της Εξίσωσης Εξόδου . . . . .	25
2.2.2	Εκτίμηση Συνάρτησης της Κατάστασης . . . . .	26
2.2.3	Νέο Σύνολο $\sigma$ -Σημείων . . . . .	29
2.2.4	Χρήση της Επικρατούσας ως Εκτίμηση της Μέσης Τιμής . . . .	31
2.3	Προσομοιώσεις . . . . .	32
2.3.1	Μονοδιάστατο Παράδειγμα με Αντιστρέψιμη Εξίσωση Εξόδου	33
2.3.2	Μονοδιάστατο Παράδειγμα με Μη Αντιστρέψιμη Εξίσωση Εξόδου	37
2.3.3	Διδιάστατο Διγραμμικό Σύστημα . . . . .	40
2.3.4	Τετραδιάστατο Παράδειγμα Κινητήρα Συνεχούς Ρεύματος . . . .	41
2.4	Συμπεράσματα . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Εκτίμηση Κατάστασης Μη Γραμμικών Συστημάτων Ειδικής Δομής</b>	<b>49</b>
3.1	Εισαγωγή . . . . .	49
3.2	Ανάλυση της Κλάσης Υπό Μελέτη . . . . .	50
3.2.1	Ορισμός της Κλάσης . . . . .	50
3.2.2	Ο Προτεινόμενος Αλγόριθμος . . . . .	50
3.2.3	Ιδιότητα Αναλλοιώτου σε Γραμμικούς Μετασχηματισμούς . . . .	56
3.3	Σημαντικές Υποκλάσεις . . . . .	57
3.3.1	Συστήματα με Γραμμική Δυναμική και Μη Γραμμική Έξοδο . . . .	57
3.3.2	SISO Γραμμικά Συστήματα με Μη Γραμμική Ανατροφοδότηση	57
3.3.3	MIMO Γραμμικά Συστήματα με Μη Γραμμική Αποσυζευγμένη Ανατροφοδότηση . . . . .	58



3.3.4	Εν Σειρά Σύνδεση Γραμμικών Συστημάτων με Μη Γραμμικές Χαρακτηριστικές . . . . .	58
3.3.5	Αυθαίρετα Δίκτυα Γραμμικών Συστημάτων Διασυνδεδεμένων με Μη Γραμμικές Χαρακτηριστικές . . . . .	59
3.4	Παραδείγματα . . . . .	60
3.4.1	Γραμμικό Σύστημα με Μη-Γραμμικότητα Αισθητήρα (Α) . . . . .	60
3.4.2	Γραμμικό Σύστημα με Μη-Γραμμικότητα Αισθητήρα (Β) . . . . .	61
3.4.3	Γραμμικό Σύστημα με Μη-Γραμμικότητα και Δυναμική Αισθητήρα . . . . .	62
3.5	Συμπεράσματα . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Συστήματα Ειδικής Δομής με Στατικές Χαρακτηριστικές Πολλών Εισόδων και Νέα Μέθοδος Ολοκλήρωσης για Φίλτρα Κατανομικών Κατανομών</b>	<b>64</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	64
4.2	Ανάλυση για την Κλάση υπό Μελέτη . . . . .	65
4.2.1	Περιγραφή της Κλάσης . . . . .	65
4.2.2	Δομικά Στοιχεία του Αλγορίθμου . . . . .	66
4.2.3	Ο Προτεινόμενος Αλγόριθμος Φιλτραρίσματος . . . . .	68
4.3	Νέα Μέθοδος Αριθμητικού Υπολογισμού των Αναμενόμενων Τιμών . . . . .	72
4.4	Αριθμητικό Παράδειγμα . . . . .	76
4.5	Συμπεράσματα . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Βελτιωμένα Φίλτρα Σωματιδίων</b>	<b>80</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	80
5.2	Τροποποιημένο Auxiliary Particle Filter . . . . .	81
5.3	Τροποποιημένο Unscented Particle Filter . . . . .	84
5.4	Αριθμητικό Παράδειγμα και Σχολιασμός . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Εφαρμογή Τεχνικών Εκτίμησης Κατάστασης στο Σύστημα Ινσουλίνης-Σακχάρου</b>	<b>89</b>
6.1	Εισαγωγή . . . . .	89
6.2	Χρήση Φίλτρου Kalman και Βαθμονόμηση του Οργάνου . . . . .	92
6.2.1	Φιλτράρισμα της Κυματομορφής Ρεύματος . . . . .	92
6.2.2	Βαθμονόμηση . . . . .	93
6.2.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα . . . . .	94
6.3	Εκτίμηση με πιο Σύνθετα Μοντέλα . . . . .	96
6.3.1	Μοντέλο Δεύτερης Τάξης . . . . .	96
6.3.2	Φίλτρα Σωματιδίων . . . . .	98
6.3.3	Αριθμητικά Αποτελέσματα . . . . .	99
6.4	Σχολιασμός και Συμπεράσματα . . . . .	101
	<b>Επίλογος</b>	<b>103</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Η διατριβή αυτή αποτελείται από δύο μέρη, το θεωρητικό, στο οποίο εξετάζεται το πρόβλημα της αναδρομικής εκτίμησης κατάστασης μη γραμμικών στοχαστικών συστημάτων, και το πρακτικό, στο οποίο μελετάται η χρήση φίλτρων σε ένα Σύστημα Συνεχούς Καταγραφής της Γλυκόζης (ΣΣΚΓ).

Μάλιστα, η ανάγκη για φιλτράρισμα στα δεδομένα του ΣΣΚΓ αποτέλεσε σημαντικό κίνητρο και για τη διεξαγωγή έρευνας στη Θεωρία Εκτίμησης. Αντίστροφα, αν και στο πρακτικό μέρος εφαρμόζονται τεχνικές των οποίων η θεωρητική βάση προϋπήρχε, η ενασχόληση με τη συγκεκριμένη θεωρητική περιοχή βοήθησε στη σχεδίαση καλύτερων φίλτρων για το ΣΣΚΓ. Έτσι, παρόλο που τα δύο μέρη θα μπορούσαν να υπάρχουν και ανεξάρτητα, στην πραγματικότητα αποτελούν προϊόν της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης.

Το θεωρητικό μέρος καταλαμβάνει τη μεγαλύτερη έκταση. Στην ενότητα 1.1 γίνεται μία ανασκόπηση της θεωρίας αναδρομικής εκτίμησης κατάστασης μη γραμμικών στοχαστικών συστημάτων διακριτού χρόνου. Δίνεται έμφαση στο Φίλτρο Kalman και τις μη γραμμικές παραλλαγές του. Το Φίλτρο Σωματιδίων παρουσιάζεται συνοπτικά. Στα κεφάλαια 2–5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

Το κεφάλαιο 2 έχει ως θέμα του κάποιες τροποποιημένες εκδοχές μη γραμμικών φίλτρων Kalman. Οι τροποποιήσεις αυτές έχουν κυρίως ευρετική βάση και δεν αποτελούν τη συνέπεια κάποιας μαθηματικής πρότασης. Είναι σχεδιασμένες έτσι ώστε να αντιμετωπίζονται κάποια φαινόμενα που εμφανίζονται στην εκτίμηση κατάστασης ορισμένων μη γραμμικών συστημάτων. Στο κεφάλαιο αυτό αναδεικνύεται μέσω των παραδειγμάτων που μελετώνται η δυσκολία που παρουσιάζει το πρόβλημα της αναδρομικής εκτίμησης, όπως επίσης και το γεγονός ότι οι υπάρχουσες τεχνικές δεν αρκούν για την επιτυχή αντιμετώπιση όλων των προβλημάτων φιλτραρίσματος. Αναδεικνύεται επίσης η σημασία της σχεδίασης φίλτρων που είναι σχεδιασμένα ειδικά για το σύστημα του οποίου την κατάσταση θέλουμε να εκτιμήσουμε.

Ακολούθως, η προσοχή εστιάζεται σε συστήματα ειδικής δομής. Συγκεκριμένα,

---

Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να επικοινωνήσει με το συγγραφέα στην ηλεκτρονική διεύθυνση alexchar@central.ntua.gr

εξετάζονται τα συστήματα που αποτελούνται από τη μη γραμμική στατική διασύνδεση γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Το κεφάλαιο 3 περιλαμβάνει την περίπτωση όπου οι μη γραμμικές στατικές χαρακτηριστικές έχουν μία είσοδο. Το βασικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου είναι ότι σε αυτήν την περίπτωση είναι δυνατό ο υπολογισμός όλων των εμπλεκόμενων αναμενόμενων τιμών να αναχθεί σε ολοκλήρωση σε μία και δύο διαστάσεις, ενώ χωρίς τις τεχνικές του κεφαλαίου αυτού χρειάζεται ολοκλήρωση στο χώρο κατάστασης, που ενδέχεται να έχει πολλές διαστάσεις. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατό να γίνονται ακριβείς υπολογισμοί χωρίς μεγάλο υπολογιστικό κόστος.

Στο κεφάλαιο 4 γενικεύονται τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου, και αποδεικνύεται ότι η τάξη της ολοκλήρωσης μπορεί να μειωθεί και στην περίπτωση όπου οι μη γραμμικές στατικές χαρακτηριστικές έχουν περισσότερες από μία εισόδους. Σε αυτήν την περίπτωση ενδέχεται να μην αρκεί ολοκλήρωση σε μία και δύο διαστάσεις, όμως πάλι η απαιτούμενη τάξη της ολοκλήρωσης μπορεί να είναι σημαντικά μικρότερη από τη διάσταση του χώρου. Επιπλέον, προτείνεται μία μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης ειδική για τον υπολογισμό αναμενόμενων τιμών σε μη γραμμικά φίλτρα. Η μέθοδος βασίζεται στην ελαχιστοποίηση νορμών και αποδεικνύεται η σύγκλισή της.

Το κεφάλαιο 5 πραγματεύεται τα Particle Filters. Συγκεκριμένα, προτείνονται κάποιες βελτιώσεις στο Auxiliary Particle Filter (APF) και το Unscented Particle Filter (UPF). Για το APF, οι βελτιώσεις αφορούν τον τρόπο με τον οποίο τα βοηθητικά βάρη λαμβάνονται υπόψη κατά την επαναδειγματοληψία και τον τρόπο με τον οποίο τα βάρη επαναπροσδιορίζονται μετά την επαναδειγματοληψία. Για το UPF, αφορούν τον τρόπο με τον οποίο οι υπολογισμοί για το κάθε σωματίδιο λαμβάνουν υπόψη την ύπαρξη των άλλων σωματιδίων.

Όλες οι προτεινόμενες τεχνικές εφαρμόζονται σε κατάλληλα παραδείγματα, στα οποία και συγκρίνονται με τις υπάρχουσες. Διαπιστώνουμε ότι οι προτεινόμενες τεχνικές σε πολλές περιπτώσεις οδηγούν σε σημαντική βελτίωση της απόδοσης.

Σχετικά με το πρακτικό μέρος, γίνεται μία εισαγωγή σε αυτό στην ενότητα 1.2, όπου εξηγείται η ανάγκη για Τεχνητό Πάγκρεας σε όσους πάσχουν από Διαβήτη και σε ασθενείς στη Μονάδα Εντατικής Θεραπείας. Γίνεται επίσης αναφορά στην ιδιαίτερη σημασία που έχει το Σύστημα Συνεχούς Καταγραφής της Γλυκόζης στη δημιουργία Τεχνητού Παγκρέατος. Το κεφάλαιο 6 περιλαμβάνει τα αντίστοιχα αποτελέσματα, τα οποία δείχνουν ότι η χρήση ειδικά σχεδιασμένων φίλτρων βασισμένων στο Φίλτρο Kalman και στα Φίλτρα Σωματιδίων, τα οποία εφαρμόζονται σε απλά μοντέλα του συστήματος, μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική μείωση του σφάλματος εκτίμησης της γλυκόζης.

Από την έρευνα που παρουσιάζεται στη διατριβή αυτή έχουν προκύψει κατά το χρόνο της συγγραφής της οι δημοσιευμένες εργασίες [1] (προκαταρκτική μορφή του κεφαλαίου 2), [2] (αντιστοιχεί στο περιεχόμενο του κεφαλαίου 3) και [3] (προκαταρκτική μορφή της [2]), ενώ κάποια άλλα τμήματα έχουν υποβληθεί ή πρόκειται να υποβληθούν για δημοσίευση.

## 1.1 Μη Γραμμικά Στοχαστικά Συστήματα

Είναι γνωστό ότι για πολλά συστήματα, τεχνικά ή μη, δεν υπάρχει γραμμικό μοντέλο που να μπορεί να εξυπηρετήσει ικανοποιητικά σκοπούς όπως η πρόβλεψη, η εκτίμηση κατάστασης, ο έλεγχος ή η βελτιστοποίηση. Σχετικά παραδείγματα υπάρχουν άφθονα στην βιβλιογραφία, τόσο σε συγγράμματα Μη Γραμμικών Συστημάτων και Διαφορικών Εξισώσεων [4]–[6] όσο και σε βιβλία συγκεκριμένων εφαρμογών, π.χ. στα [7], [8], [9] που πραγματεύονται Ηλεκτρικές Μηχανές, Ρομποτική και Δυναμική των Πτήσεων αντίστοιχα.

Πέραν της μη γραμμικότητας, σε πολλά συστήματα είναι σημαντικός ο παράγοντας της αβεβαιότητας. Ενίοτε είναι άγνωστες κάποιες παράμετροι που αλλάζουν σχετικά αργά, άλλες φορές όμως το σύστημα υπόκειται διαρκώς σε επιδράσεις άγνωστες εκ των προτέρων (διαταραχές). Για την πρώτη περίπτωση έχουν αναπτυχθεί τεχνικές που συνήθως καλούνται προσαρμοστικές [10], [11]. Αναφορικά με τη δεύτερη περίπτωση, έχει σημασία αν είναι γνωστά κάποια στατιστικά χαρακτηριστικά των διαταραχών. Για παράδειγμα, κατά το σχεδιασμό του ελεγκτή μίας ανεμογεννήτριας είναι δυνατό να ληφθούν υπόψη παράγοντες όπως η κατανομή ή η αυτοσυσχέτιση της ταχύτητας του ανέμου [12]. Στην περίπτωση που είναι γνωστή η κατανομή πιθανότητας των διαταραχών, έχουμε την περίπτωση της στοχαστικής αβεβαιότητας. Εκτός από τις διαταραχές, αβεβαιότητα σε ένα σύστημα εισάγεται από τα σφάλματα των μετρήσεων. Και για τα σφάλματα αυτά, συχνά είναι γνωστό αν είναι συσχετισμένα και ποια είναι η κατανομή τους.

Στοχαστικά μοντέλα έχουν χρησιμοποιηθεί στην επιστήμη του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού από πολύ παλιά, ιδίως στις περιοχές των Τηλεπικοινωνιών [13]–[15], της Θεωρίας Πληροφορίας [16], [17] και της Ηλεκτρονικής [18]. Συνήθως όμως χρησιμοποιούνται γραμμικά στοχαστικά μοντέλα. Επιπλέον, στις Τηλεπικοινωνίες και την Ηλεκτρονική συναντώνται κυρίως μοντέλα συνεχούς χρόνου, με στόχο την περιγραφή φαινομένων όπως ο θερμικός θόρυβος ή ο θόρυβος βολής, αλλά και εξαιτίας του ότι όταν ξεκίνησαν να αναπτύσσονται οι περιοχές αυτές κυριαρχούσαν οι αναλογικές διατάξεις.

Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις λαμβάνονται μετρήσεις που αφορούν ένα σύστημα σε διακριτές χρονικές στιγμές. Δεδομένου και του ότι η σύγχρονη τεχνολογία χρησιμοποιεί ψηφιακά συστήματα ικανά να εκτελέσουν τους απαιτούμενους για μη γραμμικά συστήματα υπολογισμούς, είναι εύλογο πως έχει υπάρξει σημαντική ερευνητική δραστηριότητα στην περιοχή των μη γραμμικών στοχαστικών συστημάτων διακριτού χρόνου [19], [20], [21]. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις και φίλτρα στο συνεχή χρόνο μπορεί να συμβουλευτεί τις αναφορές [22], [23], [24]. Πολύ ενδιαφέρουσα ιστορική ανασκόπηση και συζήτηση σχετικά με την ανάγκη για εκτίμηση και τη σύνδεση ανάμεσα σε διαφορετικές τεχνικές αποτελεί η εισαγωγή του βιβλίου [25].

Το θεωρητικό μέρος της παρούσας εργασίας αφορά αποκλειστικά συστήματα διακριτού χρόνου. Αυτό οφείλεται, πέραν των ανωτέρω, και στο γεγονός ότι οι μετρήσεις του Συστήματος Συνεχούς Καταγραφής Γλυκόζης που χρησιμοποιήθηκε στο πρακτι-

κό μέρος λαμβάνονται σε διακριτά χρονικά διαστήματα.

Στις επόμενες υποενότητες δίνεται η μαθηματική περιγραφή των μη γραμμικών στοχαστικών συστημάτων, εξηγείται η δυνατότητα επίλυσης του προβλήματος εκτίμησης αναδρομικά, αναλύονται δύο σημαντικές περιπτώσεις όπου είναι εφικτή η αναλυτική επίλυση και τέλος παρουσιάζονται οι υπάρχουσες τεχνικές αριθμητικής επίλυσης.

### 1.1.1 Μαθηματική Περιγραφή του Προβλήματος

Η γενική μορφή του προβλήματος μη γραμμικού φιλτραρίσματος για δυναμικά συστήματα με προσθετικό θόρυβο είναι η εκτίμηση της κατάστασης συστημάτων της μορφής

$$x_{k+1} = f(x_k) + w_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

$$y_k = h(x_k) + v_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

όπου  $x_k$  είναι η κατάσταση του συστήματος και  $y_k$  η μετρούμενη έξοδος κατά τη χρονική στιγμή  $k$ .  $w_k$  είναι η διαταραχή, η οποία θα αναφέρεται και ως θόρυβος διεργασίας, ενώ  $v_k$  είναι ο θόρυβος ή σφάλμα μέτρησης. Στην εργασία αυτή, εκτός από τα σημεία όπου αναφέρεται κάτι διαφορετικό, οι τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.)  $x_0$ ,  $w_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  και  $v_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  θεωρούνται αμοιβαία ανεξάρτητες και κανονικά κατανοημένες με γνωστές παραμέτρους, ενώ επιπλέον οι  $w_k$  και  $v_k$  έχουν μηδενικό μέσο. Διαθέσιμες μετρήσεις υπάρχουν από τη στιγμή  $k = 1$  και έπειτα.

Ας υποθέσουμε ότι  $p_{X_0}(x_0)$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π., βλ. και [26] σελ. 59) της αρχικής κατάστασης  $x_0$ ,  $p_V(v_k)$  είναι η σ.π.π. του σφάλματος μέτρησης και  $p_W(w_k)$  είναι η σ.π.π. της διαταραχής. Τότε ισχύει  $p_{Y|X}(y_k|x_k) = p_V(y_k - h(x_k))$  και  $p_{X_{k+1}|X_k}(x_{k+1}|x_k) = p_W(x_{k+1} - f(x_k))$ . Στο εξής οι δείκτες στις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας θα παραλείπονται για συντομία. Ορίζουμε  $y_{1:k} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ .

Τότε, βάσει του Νόμου του Bayes ([27], βλ. και [26], [28], [29]) ισχύουν οι ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις:

$$p(x_{k+1}|y_{1:k}) = \int p(x_{k+1}|x_k)p(x_k|y_{1:k})dx_k, \quad (1.3)$$

$$p(x_{k+1}|y_{1:k+1}) = p(y_{k+1}|x_{k+1})p(x_{k+1}|y_{1:k})/c_k, \quad (1.4)$$

όπου

$$c_k = \int p(y_{k+1}|x_{k+1})p(x_{k+1}|y_{1:k})dx_{k+1}. \quad (1.5)$$

Ωστόσο δεν είναι δυνατός ο αναλυτικός υπολογισμός των παραπάνω ολοκληρωμάτων. Η αριθμητική ολοκλήρωση για αρκετά πυκνό πλέγμα στο χώρο του  $x_k$  και για κάθε χρονική στιγμή έχει πολύ μεγάλο υπολογιστικό κόστος εκτός κι αν το  $x_k$  είναι μικρής διάστασης, συνεπώς οι (1.3)–(1.5) έχουν κυρίως θεωρητικό ενδιαφέρον.

Στην επόμενη υποενότητα εξετάζονται δύο περιπτώσεις όπου το πρόβλημα λύνεται αναλυτικά, και οι οποίες αποτελούν τη βάση για πολλές προσεγγιστικές τεχνικές επίλυσης στις περιπτώσεις που δεν είναι εφικτή η αναλυτική επίλυση.

## 1.1.2 Περιπτώσεις Αναλυτικής Επίλυσης

### Χώρος Κατάστασης Πεπερασμένου Πλήθους

Έστω ότι το  $x_k$  ανήκει σε ένα χώρο κατάστασης πλήθους  $M$ . Έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας,  $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, M\}$  ο χώρος αυτός. Ας υποθέσουμε ότι για κάθε χρονική στιγμή  $k$  ισχύει ότι  $p(x_{k+1} = s_{k+1} | x_k = s_k, \dots, x_0 = s_0) = p(x_{k+1} = s_{k+1} | x_k = s_k)$ , δηλαδή ότι η κατανομή του  $x_{k+1}$  εξαρτάται μόνο από το  $x_k$  και όχι από τις προηγούμενες καταστάσεις του συστήματος, όπως ισχύει και στην περίπτωση της εξ. (1.1). Η ακολουθία  $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$  καλείται τότε πεπερασμένη Μαρκοβιανή ανέλιξη ή αλυσίδα (finite Markov chain).

Έστω  $\pi_{ij} = p(x_{k+1} = j | x_k = i)$  και  $\Pi = (\pi_{ij})$ . Τότε, αν το διάνυσμα γραμμή  $p^{(k)} = [p_1^{(k)} \dots p_M^{(k)}]$  εκφράζει την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $x_k$ , δηλαδή  $p(x_k = i) = p_i^{(k)}$ , ισχύει η αναδρομική σχέση  $p^{(k+1)} = p^{(k)}\Pi$ .

**Σχόλιο 1.1.** *Ενδεχομένως να φανόταν πιο φυσικό να οριστεί  $\pi_{ij} = p(x_{k+1} = i | x_k = j)$  με το  $p^{(k)}$  να είναι διάνυσμα στήλη ώστε να ισχύει  $p^{(k+1)} = \Pi p^{(k)}$  και οι αναλλοίωτες κατανομές να είναι δεξιά και όχι αριστερά ιδιοδιανύσματα του  $\Pi$ , ωστόσο οι παραπάνω ορισμοί έχουν κυριαρχήσει στη βιβλιογραφία των Μαρκοβιανών αλυσίδων.*

Ας υποθέσουμε τώρα ότι λαμβάνεται μία μέτρηση  $y_k$  η κατανομή της οποίας εξαρτάται από το  $x_k$  το οποίο όμως δεν είναι γνωστό. Ένα τέτοιο μοντέλο καλείται κρυμμένο Μαρκοβιανό μοντέλο (Hidden Markov Model, HMM). Ξεκινάμε με την περίπτωση που το  $y_k$  λαμβάνει ένα πεπερασμένο πλήθος τιμών, έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας  $\mathcal{Y} = \{1, 2, \dots, L\}$ , και ύστερα θα παρουσιαστεί η περίπτωση όπου ισχύει η (1.2).

Έστω  $h_{ij} = p(y_k = j | x_k = i)$ . Ας υποθέσουμε ότι με βάση τις πληροφορίες που έχουμε τη χρονική στιγμή  $k$ ,  $I_k$ , γνωρίζουμε ότι η κατανομή του  $x_k$  εκφράζεται από το  $p^{(k)}$ . Τότε η εκ των προτέρων ως προς τη μέτρηση  $y_{k+1}$  κατανομή του  $x_{k+1}$  είναι  $p^{(k+1,-)} = p^{(k)}\Pi$ . Μας ενδιαφέρει να βρούμε ποια είναι η εκ των υστέρων κατανομή του  $x_{k+1}$  λαμβάνοντας υπόψη και τη μέτρηση  $y_{k+1}$ . Την απάντηση τη δίνει ο Νόμος του Bayes. Αν γνωρίζουμε ότι  $y_{k+1} = j$ , ισχύει ότι

$$p_i^{(k+1)} = \frac{h_{ij} p_i^{(k+1,-)}}{\sum_{l=1}^M h_{lj} p_l^{(k+1,-)}}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.6)$$

Επομένως, αν γνωρίζουμε την αρχική κατανομή πιθανότητας  $p^{(0)}$ , μπορούμε να υπολογίσουμε την  $p^{(1,-)} = p^{(0)}\Pi$ , και μόλις ληφθεί η μέτρηση  $y_1$  μπορεί να υπολογιστεί η κατανομή  $p^{(1)}$  βάσει της (1.6). Ακολούθως, και με την  $y_2$ , υπολογίζεται η  $p^{(2)}$  και ούτω καθεξής. Η δυνατότητα αναδρομικής επίλυσης, η οποία έπεται από τη Μαρκοβιανή ιδιότητα της αλυσίδας, είναι καθοριστική, διότι με αυτόν τον τρόπο ο υπολογισμός της κατανομής  $p^{(n)}$  με βάση την  $p^{(0)}$  και το σύνολο  $y_{1:n}$  απαιτεί αριθμό πράξεων ανάλογο του  $n$ , ενώ αν έπρεπε να βρεθεί η πιθανότητα κάθε τροχιάς  $x_{0:n}$  θα είχαμε κόστος εκθετικό ως προς  $n$ .

Στην περίπτωση που αντί για πεπερασμένο σύνολο  $\mathcal{Y}$  ισχύει η (1.2), και αν τώρα  $\mathcal{X} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_M\}$ , αντί της (1.6) ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$p_i^{(k+1)} = \frac{p(y_{k+1}|h(Q_i))p_i^{(k+1,-)}}{\sum_{i=1}^M p(y_{k+1}|h(Q_i))p_i^{(k+1,-)}}, \quad i = 1, \dots, M \quad (1.7)$$

και ως εκ τούτου πάλι είναι εφικτή η αναδρομική επίλυση.

**Σχόλιο 1.2.** Δεδομένου ότι το πρόβλημα εκτίμησης κατάστασης για κρυμμένα Μαρκοβιανά μοντέλα λύνεται άμεσα με χρήση του Νόμου του Bayes, δεν είναι σκόπιμο να αναζητηθεί τότε και πού εμφανίστηκε για πρώτη φορά η παραπάνω μέθοδος επίλυσης. Ενδιαφέρουσα εισαγωγή στα κρυμμένα Μαρκοβιανά μοντέλα ο αναγνώστης μπορεί να βρει στην αναφορά [30], ενώ τα μοντέλα αυτά από τη σκοπιά της Θεωρίας Πληροφορίας εξετάζονται στις εργασίες [17] και [31].

## Γραμμικά Συστήματα

Το πρόβλημα της εκτίμησης κατάστασης για γραμμικά συστήματα αρχικά είχε μελετηθεί από τους Wiener και Kolmogorov στις αρχές της δεκαετίας του '40, ωστόσο αναδρομικές τεχνικές άρχισαν να μελετώνται κατά τη δεκαετία του '50 (βλ. την εισαγωγή του [25]). Σήμερα η επικρατής ονομασία του φίλτρου που επιλύει το πρόβλημα είναι φίλτρο Kalman (Kalman Filter, KF, βλ. [11], [32]–[34]) και αυτή την ονομασία θα χρησιμοποιούμε στο εξής. Σημειώνεται ότι πάρα πολλές από τις τεχνικές για μη γραμμικά συστήματα βασίζονται στο φίλτρο Kalman (βλ. την επόμενη υποενότητα).

Ας υποθέσουμε ότι ένα δυναμικό σύστημα περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k + w_k, \quad (1.8)$$

$$y_k = C_k x_k + D_k + v_k, \quad (1.9)$$

όπου οι τ.μ.  $w_k$  και  $v_k$  είναι κανονικά κατανομημένες με μηδενικό μέσο, ενώ οι μήτρες συνδιακύμανσής τους είναι  $Q$  και  $R$  αντίστοιχα. Υποθέτουμε επίσης ότι είναι γνωστό πως η τ.μ.  $x_k$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο  $\hat{x}_k$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $P_{x_k}$ . Τότε, από την (1.8) και εκ των προτέρων ως προς τη μέτρηση  $y_{k+1}$ , η τ.μ.  $x_{k+1}$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο  $\hat{x}_{k+1}^-$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $P_{x_{k+1}}^-$  που δίνονται από τις ακόλουθες:

$$\hat{x}_{k+1}^- = A_k \hat{x}_k + B_k, \quad (1.10)$$

$$P_{x_{k+1}}^- = A_k P_{x_k} A_k^T + Q. \quad (1.11)$$

Από την (1.9), η τιμή πρόβλεψης της  $y_{k+1}$  είναι

$$\hat{y}_{k+1}^- = C_{k+1} \hat{x}_{k+1}^- + D_k \quad (1.12)$$

ενώ η μήτρα συνδιακύμανσής της

$$P_{y_{k+1}}^- = C_{k+1} P_{x_{k+1}}^- C_{k+1}^T + R, \quad (1.13)$$

και η μήτρα ετεροσυνδιακύμανσης της  $x_{k+1}$  με την  $y_{k+1}$  είναι ίση με

$$P_{x_{k+1}y_{k+1}}^- = P_{x_{k+1}}^- C_{k+1}^T. \quad (1.14)$$

Η τιμή της μέτρησης  $y_{k+1}$  όταν ληφθεί μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διορθωθεί η κατανομή. Το κέρδος Kalman (Kalman gain) δίνεται από τη σχέση

$$K_{k+1} = P_{x_{k+1}y_{k+1}}^- P_{y_{k+1}}^{-1}, \quad (1.15)$$

και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των εκ των υστέρων τιμών του μέσου και της μήτρας συνδιακύμανσης της  $x_{k+1}$ , σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1} (y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^-), \quad (1.16)$$

$$P_{x_{k+1}} = P_{x_{k+1}}^- - K_{k+1} P_{y_{k+1}}^- K_{k+1}^T. \quad (1.17)$$

Έτσι, το βήμα πρόβλεψης πραγματοποιείται βάσει των (1.10)–(1.11), ενώ το βήμα διόρθωσης βάσει των (1.16)–(1.17) και των ορισμών (1.12)–(1.15). Αν, επομένως, είναι γνωστό ότι η  $x_0$  είναι κανονικά κατανεμημένη με μέσο  $\hat{x}_0$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $P_{x_0}$ , οι (1.10)–(1.17) μπορούν να εφαρμοστούν αναδρομικά για να δώσουν τα στατιστικά χαρακτηριστικά της  $x_n$  όταν είναι γνωστές οι μετρήσεις  $y_{1:n}$ .

**Σχόλιο 1.3.** Σημειώνεται ([32],[11]) ότι αν αφαιρεθεί η υπόθεση της κανονικότητας των κατανομών, το φίλτρο παρέχει τη γραμμική εκτίμηση της κατάστασης με την ελάχιστη διακύμανση του σφάλματος, παρόλο που δεν είναι, στη γενική περίπτωση, το βέλτιστο φίλτρο, το οποίο ενδέχεται να είναι μη γραμμικό.

### 1.1.3 Προσεγγιστικές Τεχνικές για Μη Γραμμικά Συστήματα

Ακόμα και στην περίπτωση που οι θόρυβοι ακολουθούν την κανονική κατανομή, όταν το σύστημα δεν είναι γραμμικό, η κατανομή της κατάστασης δεν είναι κανονική. Ωστόσο πολλές από τις τεχνικές προσεγγίζουν την κατανομή με μία κανονική, και απλά σε κάθε βήμα ανανεώνουν τις παραμέτρους της (μέση τιμή και μήτρα συνδιακύμανσης). Έχουν αναπτυχθεί και άλλες τεχνικές στις οποίες δεν γίνεται αυτή η προσέγγιση και οι οποίες μπορούν να δώσουν ακριβέστερα αποτελέσματα, αλλά με αυξημένο υπολογιστικό κόστος. Ξεκινάμε με την πρώτη κατηγορία τεχνικών και ακολουθεί η παρουσίαση και τεχνικών που δεν βασίζονται στην προσέγγιση αυτή.

**Σχόλιο 1.4.** Ένας ακόμη λόγος για τον οποίο οι προσεγγιστικές τεχνικές προσαθούν να προσεγγίσουν τη μέση τιμή της μεταβλητής κατάστασης είναι ότι αποτελεί την εκτιμήτρια ελάχιστου τετραγωνικού σφάλματος. Συγκεκριμένα, αν  $x$  είναι μία τ.μ.,  $\mathbb{E}[x]$  η αναμενόμενη τιμή της και  $\hat{x}$  μία εκτίμηση της  $x$ , ισχύει ότι  $\mathbb{E}[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T] = \mathbb{V}[x] + (\mathbb{E}[x] - \hat{x})(\mathbb{E}[x] - \hat{x})^T$ .



## Τεχνικές με Προσέγγιση Βάσει Κανονικής Κατανομής

Στις τεχνικές αυτές, η διόρθωση γίνεται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman. Ωστόσο, κάθε τεχνική παρέχει μία μέθοδο για να προσεγγιστούν οι αναμενόμενες τιμές και οι μήτρες συνδιακύμανσης (οι οποίες επίσης ορίζονται ως αναμενόμενες τιμές) που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη υποενότητα. Οι αναμενόμενες αυτές τιμές είναι της μορφής  $\mathbb{E}[g(X)]$  όπου  $g$  είναι μία (διανυσματική) μη γραμμική συνάρτηση και  $X$  μία (επίσης διανυσματική) κανονικά κατανεμημένη τ.μ. (βλ. π.χ., [35]). Η μέθοδος προσέγγισης των αναμενόμενων τιμών αυτών είναι και το σημείο που διαφοροποιεί τις τεχνικές. Ακολουθούν ορισμένες από τις κυριότερες. Ενδιαφέρουσα συγκριτική μελέτη αποτελεί η αναφορά [36].

**Extended Kalman Filter** Στο Επεκτεταμένο Φίλτρο Kalman (Extended Kalman Filter, EKF) [37] οι εξισώσεις (1.1)–(1.2) γραμμικοποιούνται χρησιμοποιώντας αναπτύγματα Taylor πρώτης τάξης. Πιο συγκεκριμένα, για το βήμα πρόβλεψης, αν  $\hat{x}_k$  είναι ο εκτιμώμενος μέσος της  $x_k$  ύστερα από το βήμα διόρθωσης της χρονικής στιγμής  $k$ , τότε η (1.1) γραμμικοποιείται γύρω από το  $\hat{x}_k$ . Για το βήμα διόρθωσης, η (1.2) γραμμικοποιείται γύρω από το  $\hat{x}_{k+1}^-$ , όπου  $\hat{x}_{k+1}^-$  είναι ο εκτιμώμενος μέσος της  $x_{k+1}$  ύστερα από το βήμα πρόβλεψης της χρονικής στιγμής  $k+1$ . Προφανώς, γίνεται η υπόθεση ότι οι Ιακωβιανές μήτρες των  $f$  και  $h$  είναι διαθέσιμες.

Το EKF έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα. Η απόδοσή του είναι ικανοποιητική όταν οι μη-γραμμικότητες είναι ήπιες. Σε αντίθετη περίπτωση μπορεί να παρατηρηθούν ακόμη και φαινόμενα αστάθειας [19].

**Sigma Point Kalman Filters** Σε αυτή την κατηγορία φίλτρων τα ολοκληρώματα που αντιπροσωπεύουν τις αναμενόμενες τιμές προσεγγίζονται μέσω ενός πεπερασμένου σταθμισμένου μέσου όρου πάνω σε ένα κατάλληλο σύνολο σημείων, τα οποία καλούνται  $\sigma$ -σημεία (sigma points,  $\sigma$ -points στο εξής). Η προσέγγιση που γίνεται είναι  $\mathbb{E}[g(X)] \approx \sum_{i=1}^l w_i g(X_i)$ . Αυτή η προσέγγιση μπορεί να βασιστεί στη διαίσθηση ότι το σύνολο  $\{X_i, i = 1, \dots, l\}$  με βάρη  $\{w_i, i = 1, \dots, l\}$  προσεγγίζει την κανονική κατανομή της τ.μ.  $X$  [38], ή μπορεί να εκληφθεί ως τεχνική αριθμητικής ολοκλήρωσης [35] εφόσον

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int g(x) \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |P|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T P^{-1}(x-\mu)} dx \quad (1.18)$$

στην περίπτωση που η τ.μ.  $X$  έχει μέσο  $\mu$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $P$ . Βλ. επίσης [36] για μία διαφορετική εξήγηση της ίδιας προσέγγισης. Ανεξάρτητα από τη φυσική διαίσθηση που οδηγεί στη χρήση της προσέγγισης αυτής, η επιλογή των  $\sigma$ -points και των βαρών τους επηρεάζει την ακρίβεια της προσέγγισης.

Μία λύση στο πρόβλημα παρέχεται από τον unscented transformation [38], [19] (η μετάφραση του όρου δεν κρίνεται σκόπιμη). Έστω  $n$  η διάσταση του υποκείμενου χώρου. Τότε υπολογίζονται  $2n+1$   $\sigma$ -points. Στη βασική μορφή του αλγορίθμου [38] αυτά είναι:  $X_0 = \mu$ ,  $X_i = \mu + \sqrt{n + \kappa} S_i, i = 1, \dots, n$  και  $X_i = \mu - \sqrt{n + \kappa} S_i, i =$

$n + 1, \dots, 2n$ , όπου  $S_i$  είναι η  $i$ -οστή στήλη της μήτρας  $S = \sqrt{P}$  (η  $S$  υπολογίζεται χρησιμοποιώντας παραγοντοποίηση Cholesky και είναι τέτοια ώστε  $P = SS^T$ ). Τα αντίστοιχα βάρη είναι  $W^{(0)} = \kappa/(n + \kappa)$ ,  $W^{(i)} = 1/\{2(n + \kappa)\}$ ,  $i = 1, \dots, 2n$ . Με την επιλογή  $\kappa = 3 - n$ , το σύνολο των  $\sigma$ -points προσεγγίζει καλύτερα τις ροπές μέχρι τέταρτης τάξης της κανονικής κατανομής [19].

Στην εργασία [19] παρουσιάζεται τροποποιημένη μορφή του αλγορίθμου, η οποία έχει ως εξής:  $X_0 = \mu$ ,  $X_i = \mu + \gamma S_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  και  $X_i = \mu_k - \gamma S_i$ ,  $i = n+1, \dots, 2n$ , όπου  $\gamma = \sqrt{n_x + \lambda}$ ,  $\lambda = \alpha^2(n_x + \kappa) - n_x$ , και τα  $\alpha$  και  $\kappa$  είναι παράμετροι.

Αναλόγως με το αν υπολογίζεται μέση τιμή ή διακύμανση χρησιμοποιούνται διαφορετικά βάρη για το  $X_0$  (στην (1.19) ο δείκτης  $m$  αφορά τη μέση τιμή και ο δείκτης  $c$  τη διακύμανση). Τα βάρη για τα διάφορα σημεία είναι:

$$W_m^{(0)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda}, W_c^{(0)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta \quad (1.19)$$

$$W_m^{(i)} = W_c^{(i)} = \frac{1}{2(n_x + \lambda)}, \quad (1.20)$$

όπου το  $\beta$  αποτελεί επίσης παράμετρο.

Στο εξής, οι τιμές των παραμέτρων που θα χρησιμοποιούνται είναι  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\kappa = 3 - n$ . Για περισσότερες λεπτομέρειες και κριτήρια επιλογής των παραμέτρων βλ. [19]. Το  $\sigma$ -point φίλτρο που προκύπτει από τη χρήση του unscented transform καλείται Unscented Kalman Filter (UKF). Το UKF έχει δοκιμαστεί σε εφαρμογές, βλ. π.χ. [39]–[41], με αποτελέσματα σε πολλές περιπτώσεις καλύτερα από αυτά του EKF.

Άλλη λύση παρέχεται από τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Hermite [42], [35]. Σε αυτήν, χρησιμοποιούνται τα πολυώνυμα Hermite για τον προσδιορισμό των  $\sigma$ -points και των βαρών τους. Στη μονοδιάστατη περίπτωση, η προσέγγιση γίνεται ως ακολούθως (βλ. και [35]): Έστω  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $J$  η τριδιαγώνια συμμετρική  $m \times m$  μήτρα με μηδενική κύρια διαγώνιο και  $J_{r,r+1} = \sqrt{r}$ ,  $r = 1, \dots, m-1$ ,  $x_i$  η  $i$ -οστή ιδιοτιμή της  $J$  και  $w_i$  το τετράγωνο της πρώτης συνιστώσας του  $i$ -οστού ιδιοδιανύσματος της  $J$ . Τότε, και για την τυποποιημένη κανονική κατανομή (μηδενικός μέσος και μοναδιαία διακύμανση), η προσέγγιση δίνεται από την κατωτέρω σχέση

$$\mathbb{E}[g(X)] \approx \sum_{i=1}^m w_i g(\mu + \sqrt{P}x_i) \quad (1.21)$$

και είναι ακριβής για πολυώνυμα βαθμού έως  $2m - 1$ .

Στη  $n$ -διάστατη περίπτωση χρησιμοποιούνται  $m^n$  σημεία και η προσέγγιση είναι

$$\mathbb{E}[g(X)] \approx \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m w_{i_1} \dots w_{i_n} g(\mu + x_{i_1}S_1 + \dots + x_{i_n}S_n), \quad (1.22)$$

όπου  $S_i$  είναι η  $i$ -οστή στήλη της  $S = \sqrt{P}$  όπως προηγουμένως. Η προσέγγιση είναι ακριβής για συναρτήσεις της μορφής  $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ ,  $0 \leq i_k \leq m$ . Τα αποτελέσματα,

σύμφωνα με την εργασία [35], είναι καλύτερα από τα αντίστοιχα του UKF, ωστόσο το υπολογιστικό κόστος είναι μεγάλο για συστήματα με μεγάλη διάσταση.

Πρέπει να σημειωθεί ότι αν η δυναμική του συστήματος (αντίστοιχα, η εξίσωση της εξόδου) είναι γραμμική, τότε για το βήμα πρόβλεψης (αντίστοιχα, για το βήμα διόρθωσης) μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα οι εξισώσεις του KF.

## Τεχνικές με Προσέγγιση Βάσει Μη Κανονικής Κατανομής

Τέτοιες τεχνικές εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία λίγα χρόνια μετά το φίλτρο Kalman. Πιο συγκεκριμένα, στην εργασία [43], η σ.π.π. της κατάστασης προσεγγίζεται με την σ.π.π. μίας κανονικής κατανομής πολλαπλασιασμένη με πολυώνυμο. Στα βήματα πρόβλεψης και διόρθωσης αναπροσαρμόζονται και οι συντελεστές του πολυωνύμου. Εξετάζεται η μονοδιάστατη περίπτωση, ωστόσο προκύπτουν περίπλοκοι τύποι. Επιπλέον, οι συναρτήσεις που προκύπτουν ενδέχεται να μην αποτελούν σ.π.π., μη όντας εξασφαλισμένα μη αρνητικές.

Στην εργασία [44] η σ.π.π. προσεγγίζεται από άθροισμα σ.π.π. κανονικών κατανομών. Οι σ.π.π. έχουν σε αυτήν την περίπτωση εξασφαλισμένα τις ιδιότητες που πρέπει να έχει κάποια συνάρτηση για να αποτελεί σ.π.π. Παρουσιάζονται διάφορες παραλλαγές της τεχνικής αυτής, και μελετάται λεπτομερώς η περίπτωση γραμμικών συστημάτων με μη κανονικά κατανεμημένο θόρυβο. Σε όλες τις παραλλαγές το φίλτρο λειτουργεί αιτιοκρατικά.

Τη δεκαετία του '90 έκανε την εμφάνιση του το φίλτρο σωματιδίων (Particle Filter, PF). Η σχετική βιβλιογραφία σήμερα είναι ιδιαίτερα εκτενής, βλ. π.χ. τις ανασκοπήσεις [20], [21]. Υπάρχουν πολλές παραλλαγές, που συχνά εμφανίζονται στη βιβλιογραφία και με άλλα ονόματα, όπως "Condensation Filter", "Sequential Monte Carlo Filter", "Sequential Imputations" κ.ά.

Στο PF η σ.π.π. της κατάστασης προσεγγίζεται από ένα σύνολο σωματιδίων που το καθένα αναπαριστά μία συνάρτηση του Dirac με ένα αντίστοιχο βάρος, δηλαδή η προσέγγιση είναι

$$p(x_k|y_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N W_k^i \delta_{x_k^i}(x_k). \quad (1.23)$$

Τότε η μέση τιμή μίας συνάρτησης  $g$  της κατάστασης μπορεί να εκτιμηθεί με την ακόλουθη εξίσωση.

$$\mathbb{E}[g(x_k)] \approx \sum_{i=1}^N W_k^i g(x_k^i) \quad (1.24)$$

Είναι εύλογη η υπόθεση ότι με αρκούντως μεγάλο αριθμό σωματιδίων η προσέγγιση θα είναι καλή, ωστόσο η ασυμπτωτική ανάλυση του PF είναι δύσκολο πρόβλημα [45], [46].

Υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί αλγόριθμοι (βλ. π.χ. [20], [21], [47]) για την ανανέωση των  $W_k^i$  και  $x_k^i$ . Ο απλούστερος τέτοιος αλγόριθμος, και ενδεχομένως ο πρώτος που εμφανίστηκε στη βιβλιογραφία [48] έχει ως εξής:

Αρχικά λαμβάνονται  $N$  τυχαία δείγματα με βάση την κατανομή της αρχικής κατάστασης. Το σύνολο αυτό χρησιμοποιείται ως προσέγγιση της κατανομής της αρχικής κατάστασης. Ύστερα, όπως και στα προηγούμενα φίλτρα γίνεται χωριστά βήμα πρόβλεψης και βήμα διόρθωσης.

Για το βήμα πρόβλεψης, έστω  $x_k^i, i = 1, \dots, N$  το σύνολο που προσεγγίζει την κατανομή της  $x_k$  (τα βάρη σε αυτό το σημείο θα είναι πάντα ίσα, όπως άλλωστε είναι και για  $k = 0$ ). Για κάθε σωματίδιο, λαμβάνεται ένα δείγμα διαταραχής  $w_k^i$  με βάση την κατανομή της διαταραχής, και υπολογίζεται το νέο σωματίδιο  $x_{k+1}^{i,-}$ . Το σύνολο των νέων σωματιδίων αποτελεί την προσέγγιση της εκ των προτέρων ως προς τη μέτρηση  $y_{k+1}$  κατανομής της  $x_{k+1}$ .

Για το βήμα διόρθωσης υπολογίζεται αρχικά η πιθανοφάνεια κάθε δείγματος  $l_k^i = p(y_{k+1}|x_{k+1}^{i,-})$ . Κανονικοποιώντας έτσι ώστε το άθροισμα των βαρών να είναι ίσο με 1, έχουμε ότι

$$W_{k+1}^i = \frac{p(y_{k+1}|x_{k+1}^{i,-})}{\sum_{n=1}^N p(y_{k+1}|x_{k+1}^{n,-})}. \quad (1.25)$$

Το σύνολο των σωματιδίων  $x_{k+1}^{i,-}$  με βάρη  $W_{k+1}^i$  αποτελεί προσέγγιση της εκ των υστέρων κατανομής της  $x_{k+1}$ . Το βήμα διόρθωσης ολοκληρώνεται με τη διαδικασία επαναδειγματοληψίας, η οποία έχει σκοπό την αποφυγή του φαινομένου του «εκφυλισμού των βαρών» (weight degeneracy). Πράγματι, αν επαναλαμβανόταν διαρκώς η παραπάνω διαδικασία ανανέωσης με τα βάρη να πολλαπλασιάζονται διαρκώς, ύστερα από ένα αριθμό βημάτων, όλα τα σωματίδια εκτός από ένα θα είχαν σχεδόν μηδενικό βάρος (εξήγηση του φαινομένου αυτού υπάρχει στη σχετική βιβλιογραφία).

Η διαδικασία επαναδειγματοληψίας αποτελεί τη λήψη  $N$  τυχαίων δειγμάτων από την κατανομή  $\sum_{i=1}^N W_{k+1}^i \delta_{x_{k+1}^i}(x_{k+1})$ , δηλαδή για όλα τα νέα σωματίδια  $x_{k+1}^j, j = 1, \dots, N$  ισχύει  $P(x_{k+1}^j = x_{k+1}^{i,-}) = W_{k+1}^i$ . Με αυτόν τον τρόπο, για τα σωματίδια που είχαν μεγάλη πιθανοφάνεια είναι πιθανότερο να υπάρχουν πιο πολλά νέα σωματίδια, και άρα να δίνεται μεγαλύτερη έμφαση σε περιοχές του χώρου κατάστασης όπου είναι πιθανότερο να ανήκει η κατάσταση του συστήματος. Τα νέα σωματίδια, αφού έχουν επιλεγεί με τυχαίο τρόπο, είναι ισοβαρή.

Είναι εμφανές ότι παρόλο που τα σύγχρονα υπολογιστικά συστήματα διαθέτουν αυξημένη ισχύ, ο αλγόριθμος για μεγάλο αριθμό σωματιδίων έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος και άρα υπάρχει η ανάγκη για βελτιωμένες εκδόσεις του αλγορίθμου που θα αξιοποιούν καλύτερα την υπολογιστική ισχύ.

## 1.2 Τεχνητό Πάγκρεας

Ο Σακχαρώδης Διαβήτης (Diabetes Mellitus, αναφερόμενος και απλώς ως Διαβήτης) είναι μία ομάδα μεταβολικών διαταραχών που χαρακτηρίζονται από υπεργλυκαιμία (αυξημένα επίπεδα γλυκόζης στο αίμα) και δυσανεξία στη γλυκόζη, εξαιτίας έλλειψης ινσουλίνης ή μειωμένης δράσης της ινσουλίνης ή εξαιτίας και των δύο αυτών

παραγόντων [49]. Οι τρεις κύριοι τύποι Διαβήτη είναι ο διαβήτης τύπου 1, ο διαβήτης τύπου 2 και ο διαβήτης κύησης. Υπάρχουν και άλλοι, ειδικοί, τύποι διαβήτη.

Η ινσουλίνη παράγεται από το πάγκρεας και είναι η κύρια ορμόνη που ρυθμίζει την πρόσληψη γλυκόζης από τα περισσότερα κύτταρα (εξαιρούνται τα κύτταρα του κεντρικού νευρικού συστήματος). Ο διαβήτης τύπου 1 (ή ινσουλινοεξαρτώμενος διαβήτης) είναι αυτοάνοσο νόσημα στο οποίο το ανοσοποιητικό σύστημα επιτίθεται στα κύτταρα που παράγουν ινσουλίνη. Ο διαβήτης τύπου 2 χαρακτηρίζεται από αντίσταση στην ινσουλίνη, δηλαδή είναι μειωμένη η δράση της ινσουλίνης. Ο Διαβήτης έχει επιπτώσεις τόσο βραχυπρόθεσμες όσο και μακροπρόθεσμες, και ο διαβήτης τύπου 1 είναι θανατηφόρος αν δεν αντιμετωπιστεί με τη χορήγηση ινσουλίνης. Περισσότερες πληροφορίες πρέπει να αναζητηθούν σε σχετική βιβλιογραφία.

Αξίζει, ωστόσο, να αναφέρουμε ότι σύμφωνα με εκτιμήσεις [50], το 2000 έπασχε από Διαβήτη το 2,8% του παγκόσμιου πληθυσμού, ενώ η αντίστοιχη εκτίμηση για το 2030 είναι 4,4%. Σχετικά με το διαβήτη τύπου 1, και μόνο για την ηλικιακή ομάδα μέχρι 14 ετών, εμφανίζονται παγκοσμίως 70000 νέες περιπτώσεις κάθε χρόνο (εκτίμηση για το 2007, [49]) ενώ ο αντίστοιχος αριθμός για τη χώρα μας μόνο είναι 160 νέες περιπτώσεις.

Η μελέτη [51] σε ασθενείς με ινσουλινοεξαρτώμενο διαβήτη έδειξε ότι η χορήγηση ινσουλίνης σε ποσότητες τέτοιες ώστε τα επίπεδα γλυκόζης να είναι όσο πιο κοντά γίνεται στα φυσιολογικά, μειώνει τις μακροπρόθεσμες συνέπειές του. Η χορήγηση αυτή μπορεί να γίνεται με μεγαλύτερο αριθμό ενέσεων, αλλά μπορεί να γίνεται και με αντλία συνεχούς έγχυσης. Η ρύθμιση των επιπέδων της γλυκόζης μπορεί να είναι ακριβέστερη αν η αντλία συνεχούς έγχυσης συνδυάζεται με ένα Σύστημα Συνεχούς Καταγραφής της Γλυκόζης (ΣΣΚΓ). Η διάταξη αυτή παρέχει ανατροφοδότηση, ως εκ τούτου η ύπαρξή της δίνει τη δυνατότητα να εφαρμοστεί έλεγχος κλειστού βρόχου. Μία αντλία συνεχούς έγχυσης συνδυασμένη με ΣΣΚΓ και τον κατάλληλο νόμο ελέγχου ονομάζεται συχνά Τεχνητό Πάγκρεας, αν και το πάγκρεας επιτελεί και άλλες λειτουργίες εκτός από το να ρυθμίζει τα επίπεδα γλυκόζης, και δεν επιτυγχάνει αυτόν τον σκοπό μόνο μέσω της έκκρισης ινσουλίνης.

Η κατασκευή όμως ενός πλήρως αυτόνομου Τεχνητού Παγκρέατος που θα λειτουργεί ικανοποιητικά συναντά δυσκολίες. Στο μεταβολισμό της γλυκόζης παίζουν ρόλο πολλές ορμόνες (ινσουλίνη, γλυκαγόνη, κορτιζόλη, κατεχολαμίνες κ.ά.) και όργανα (πάγκρεας, ήπαρ, κ.ά.). Σε σχέση με άλλα συστήματα, π.χ. ηλεκτρομηχανικά, στα οποία χρησιμοποιείται έλεγχος κλειστού βρόχου, είναι πολύ δυσκολότερο να μοντελοποιηθεί το σύστημα αυτό, δεδομένου πως οι επιδράσεις των παραγόντων που επηρεάζουν τα επίπεδα γλυκόζης είναι πολύ δύσκολο να ποσοτικοποιηθούν με ακρίβεια. Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί πολλά μοντέλα (βλ. τις ανασκοπήσεις [52] και [53]). Ιδιαίτερα διαδεδομένο είναι το λεγόμενο Minimal Model [54]. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η εργασία [55] στην οποία ένα σχετικά σύνθετο μοντέλο χρησιμοποιείται για να εξηγηθούν κάποιες ταλαντώσεις στα επίπεδα γλυκόζης και ινσουλίνης.

Σχετικά με τον ελεγκτή, έχουν προταθεί πολλές διαφορετικές τεχνικές σχεδίασης, που χρησιμοποιούν ακόμα και προσαρμοστικό έλεγχο [56] ή σθεναρό έλεγχο [57]. Πιο διαδεδομένες τεχνικές όμως είναι το Model Predictive Control [58], [59] ή ο

PID έλεγχος [60], [59]. Αξίζει στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι (υπό ορισμένες συνθήκες τουλάχιστον) και το πάγκρεας λειτουργεί με τρόπο όμοιο με αυτόν ενός PID ελεγκτή (βλ. το διάγραμμα 1 του άρθρου [61]).

Η καλή λειτουργία του Συστήματος Συνεχούς Καταγραφής της Γλυκόζης είναι καθοριστική για το Τεχνητό Πάγκρεας, μιας και το υπό έλεγχο σύστημα όπως προαναφέραμε παρουσιάζει αβεβαιότητα, άρα αν η μεταβλητή που θέλουμε να ρυθμίσουμε (τα επίπεδα γλυκόζης στο αίμα) δεν μετράται με ακρίβεια, είναι αδύνατο να γίνει καλή ρύθμιση. Υπάρχουν πολλά ΣΣΚΓ διαθέσιμα εμπορικά. Ωστόσο τα σφάλματα στις μετρήσεις που λαμβάνονται δυσχεραίνουν την κατασκευή του Τεχνητού Παγκρέατος. Επομένως, ο ελεγκτής θα πρέπει να ενσωματώνει και κάποιο φίλτρο που να εκτιμά τα επίπεδα γλυκόζης από τις διαθέσιμες μετρήσεις. Η εργασία [62] ασχολείται και με αυτό το θέμα, ωστόσο όπως καταλήγουν και οι συγγραφείς της, υπάρχουν πολλά ανοικτά προβλήματα.

Υπεργλυκαιμία και αντίσταση στην ινσουλίνη παρατηρούνται συχνά στους ασθενείς στη Μονάδα Εντατικής Θεραπείας (ΜΕΘ), ακόμα και αν προηγουμένως δεν έπασχαν από Διαβήτη [58]. Σημαντικό ρόλο στο μηχανισμό αυτό διαδραματίζει η κορτιζόλη. Όπως εξηγείται στην εργασία [63], παλαιότερα θεωρείτο πως τα αυξημένα επίπεδα γλυκόζης ήταν αποδεκτά και ότι η υπεργλυκαιμία λόγω του στρες για τους ασθενείς στη ΜΕΘ ήταν ωφέλιμη. Μελέτες όμως δείχνουν, [64, 63], ότι η ρύθμιση των επιπέδων γλυκόζης σε φυσιολογικά επίπεδα μειώνει σημαντικά τη θνησιμότητα και τη νοσηρότητα των ασθενών.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι στη ΜΕΘ οι ασθενείς σιτίζονται μέσω αντλίας. Αυτό έχει ως συνέπεια η παροχή της γλυκόζης λόγω της σίτισης όχι απλά να μην είναι άγνωστη αλλά να αποτελεί μία επιπλέον είσοδο ελέγχου. Μάλιστα, αν ανιχνευτεί υπογλυκαιμία, κατάσταση πιο επικίνδυνη από την υπεργλυκαιμία, αυξάνοντας προσωρινά το ρυθμό παροχής της σίτισης μπορούν τα επίπεδα γλυκόζης να επανέλθουν σε φυσιολογικά επίπεδα. Επιπλέον, και η αντλία ινσουλίνης χορηγεί την ινσουλίνη ενδοφλέβια αντί για υποδόρια οπότε η δράση πάλι είναι πιο άμεση. Επομένως αν υπάρχει ακριβής και αξιόπιστη μέτρηση της συγκέντρωσης της γλυκόζης στο αίμα για τους ασθενείς στη ΜΕΘ, η ρύθμισή της στα επιθυμητά επίπεδα παρουσιάζει λιγότερες δυσκολίες συγκριτικά με την περίπτωση των ασθενών με διαβήτη τύπου 1.

Τα παραπάνω, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι ασθενείς στη ΜΕΘ παρακολουθούνται στενά και υπάρχει συνεχής καταγραφή δεδομένων για αυτούς, καθιστά τη ΜΕΘ ιδιαίτερα πρόσφορο πεδίο για έρευνες σχετικά με το Τεχνητό Πάγκρεας. Το Εργαστήριο Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου του ΕΜΠ συνεργάζεται με τη ΜΕΘ του Πανεπιστημιακού Γενικού Νοσοκομείου «ΑΤΤΙΚΟΝ». Τοποθετήθηκε ΣΣΚΓ (και συγκεκριμένα η συσκευή Glucoday S της A. Menarini Diagnostics) σε 10 ασθενείς. Έτσι, έχουν καταγραφεί μετρήσεις γλυκόζης ανά τρίλεπτο για 48 ώρες περίπου για κάθε ασθενή, ενώ έχουν καταγραφεί και μεταβλητές όπως ο ρυθμός παροχής ινσουλίνης, ο ρυθμός σίτισης, καθώς και πλήθος άλλων στοιχείων, ενώ τα επίπεδα γλυκόζης έχουν μετρηθεί (περίπου 10 μετρήσεις για κάθε ασθενή) και με άλλους τρόπους ώστε να μπορεί να γίνεται βαθμονόμηση του ΣΣΚΓ και έλεγχος της ακριβείας του.

Τα δεδομένα που έδωσε το ΣΣΚΓ αναλύονται στο Κεφ. 6. Διαπιστώνεται ότι

υπάρχει ανάγκη για φιλτράρισμα των δεδομένων. Αυτό γίνεται με τεχνικές αναδρομικής εκτίμησης κατάστασης. Το θέμα του Κεφ. 6 είναι ακριβώς αυτό, η εφαρμογή τεχνικών αναδρομικής εκτίμησης ώστε από τις μετρήσεις του ΣΣΚΓ και τα υπόλοιπα δεδομένα να εκτιμώνται τα επίπεδα γλυκόζης.

## Κεφάλαιο 2

# Σύγκριση Προτύπων και Τροποποιημένων Τεχνικών Αναδρομικής Εκτίμησης Κατάστασης

### 2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσονται τροποποιημένες εκδοχές των φίλτρων εκτίμησης κατάστασης και συγκρίνονται αριθμητικά με τις υπάρχουσες τεχνικές, και πιο συγκεκριμένα με τα EKF, UKF και PF. Τα συστήματα που μελετώνται είναι της μορφής (1.1)–(1.2).

Για το UKF, η επιλογή των  $\sigma$ -points είναι σημαντική. Διάφορες πτυχές της επιλογής εξετάζονται στην εργασία [19]. Ένας νέος αλγόριθμος επιλογής σημείων παρουσιάζεται σε αυτό το κεφάλαιο, και σε κάποιες περιπτώσεις οδηγεί σε σημαντικά καλύτερα αποτελέσματα από τον αλγόριθμο του UKF που παρουσιάστηκε στην εργασία [38].

Εκτός από τη δυναμική του συστήματος, μη-γραμμικότητες μπορεί να υπάρχουν και στις εξισώσεις εξόδου. Υπό ορισμένες συνθήκες, η αντιστροφή της μη-γραμμικότητας εξόδου και η αντικατάσταση της εξόδου από μία εικονική γραμμική έξοδο μπορεί να αντιμετωπίσει μη γραμμικά φαινόμενα υπερύψωσης. Αυτή η ιδέα επεξηγείται με ένα κατάλληλο παράδειγμα, και οι προσομοιώσεις δείχνουν ότι το σφάλμα του EKF μπορεί να μειωθεί δραστικά με αυτόν τον τρόπο. Η περίπτωση των έντονων μη-γραμμικοτήτων στις εξισώσεις εξόδου μπορεί να αντιμετωπιστεί αποτελεσματικά και με τη χρήση φίλτρων που βασίζονται στην επικρατούσα αντί για τη μέση τιμή.

Διαφορετικά φίλτρα ενδέχεται να εκτιμούν καλύτερα διαφορετικές μεταβλητές κα-

---

Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζονται σε προκαταρκτική μορφή και στην εργασία [1].



τάστασης του συστήματος ή συναρτήσεις του διανύσματος κατάστασης. Επιπλέον, σε ορισμένες περιπτώσεις είναι δυνατό να σχεδιαστούν φίλτρα ειδικά για την εκτίμηση κάποιας συγκεκριμένης συνάρτησης της εξόδου. Ένα σχετικό παράδειγμα παρουσιάζεται στην υποενότητα 2.2.2.

Στην ενότητα 2.2 παρουσιάζονται οι προτεινόμενες τροποποιήσεις των τεχνικών φιλτραρίσματος, στην ενότητα 2.3 περιέχονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων με τις οποίες συγκρίνεται η απόδοση των προτεινόμενων τεχνικών, και στην ενότητα 2.4 εξάγονται τα συμπεράσματα.

## 2.2 Προτεινόμενες Τροποποιήσεις

### 2.2.1 Αντιστροφή της Εξίσωσης Εξόδου

Ας υποθέσουμε ότι το EKF χρησιμοποιείται στο ακόλουθο παράδειγμα. Έστω ότι η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από την (2.1), όπου  $\eta$  είναι η διαταραχή.

$$\dot{x} = -\alpha x^3 + \eta \quad (2.1)$$

Η απλούστερη προσέγγιση στο διακριτό χρόνο με χρονικό βήμα  $\delta$  δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση, στην οποία  $w_k$  είναι το αποτέλεσμα της διαταραχής.

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \delta x_k^3 + w_k. \quad (2.2)$$

Όμως η συνάρτηση  $x - \alpha \delta x^3$  δεν είναι μονότονη συνάρτηση του  $x$ , και επιπλέον το σημείο ισορροπίας στο 0 του συστήματος  $x_{k+1} = x_k - \alpha \delta x_k^3$  δεν είναι ολικά ευσταθές, αν και θα έπρεπε να είναι ώστε η δυναμική του συστήματος διακριτού χρόνου να αποτελεί καλή προσέγγιση της δυναμικής της (2.1). Εφόσον η προαναφερθείσα συνάρτηση έχει μέγιστο για

$$x_\infty = \frac{1}{\sqrt{3\alpha\delta}}, \quad (2.3)$$

η ακόλουθη προσέγγιση διαθέτει περισσότερα χαρακτηριστικά της δυναμικής συνεχούς χρόνου.

$$x_{k+1} = f(x_k) + w_k, f(x) = \begin{cases} x - \alpha \delta x^3 & |x| < x_\infty, \\ -\frac{2}{3}x_\infty & x \leq -x_\infty, \\ \frac{2}{3}x_\infty & x \geq x_\infty. \end{cases} \quad (2.4)$$

Έστω, επίσης, ότι η εξίσωση εξόδου είναι η (2.5).

$$y_k = x_k^3 + v_k \quad (2.5)$$

Τότε το EKF εφαρμόζεται στο σύστημα που περιγράφεται από τις (2.4)–(2.5). Η (2.5) έχει τη μορφή της (1.2) με  $h(x) = x^3$ . Ας υποθέσουμε ότι για κάποια χρονική στιγμή  $k$  ισχύει  $\hat{x}_k^- = 1, P_{x_k^-} = 1, x_k = 2$  και  $y_k = 8$ , ενώ η διακύμανση του  $v_k$  είναι ίση με 1. Τότε εφόσον  $h'(x) = 3x^2, h'(\hat{x}_k^-) = 3$  και το κέρδος Kalman θα

είναι ίσο με  $\frac{3}{3^2+1}$ . Εφόσον η προβλεπόμενη έξοδος ήταν ίση με 1, το EKF δίνει  $\hat{x}_k = 1 + 0.3(8 - 1) = 3.1$ .

Η εκ των υστέρων τιμή για την έξοδο είναι μεγαλύτερη από την παρατηρούμενη, παρόλο που δεν υπήρχε σφάλμα μέτρησης και η προβλεπόμενη τιμή ήταν μικρότερη από την παρατηρούμενη. Αυτό συμβαίνει επειδή η πρώτη τάξη προσέγγιση της  $h$  που προκύπτει χρησιμοποιώντας την παράγωγό της είναι έγκυρη μόνο τοπικά. Έτσι, εξαιτίας της μη-γραμμικότητας της συνάρτησης εξόδου, το φίλτρο αντί για να εξομαλύνει τα παρατηρούμενα δεδομένα, υπόκειται σε αυτό το φαινόμενο υπερύψωσης.

Ένας τρόπος να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα είναι η αντιστροφή της εξίσωσης εξόδου. Αν δεν υπήρχε σφάλμα μέτρησης, θα ίσχυε  $x_k = \sqrt[3]{y_k}$ , όπου η κυβική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού ορίζεται καταλλήλως. Τώρα ισχύει  $x_k = \sqrt[3]{y_k + v_k}$ . Εφόσον η  $v_k$  είναι τ.μ., η  $\sqrt[3]{y_k + v_k}$  είναι επίσης τ.μ., και δεν είναι υπολογιστικά δύσκολο να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διακύμανσή της.

Για το σκοπό αυτό, προσδιορίζεται ένα κατάλληλο σύνολο  $\{V_1, V_2, \dots, V_N\}$  του οποίου η κατανομή προσεγγίζει την κατανομή του  $v_k$ . Συγκεκριμένα, αν  $F(x)$  είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π., βλ. και [26] σελ. 52) της  $v_k$ , τότε υπολογίζεται το σύνολο  $X = \{X_n = F^{-1}(\frac{1}{2N} + \frac{n-1}{N}), n = 1 \dots N\}$ , και κανονικοποιείται για να δώσει το σύνολο  $V = \{V_n = \sqrt{\frac{R}{\sum_{l=1}^N X_l^2}} X_n, n = 1 \dots N\}$ , όπου  $R$  είναι η διακύμανση της  $v_k$ . Τότε, για κάθε βήμα, υπολογίζεται ο μέσος  $s_k$  και η διακύμανση  $l_k$  του συνόλου  $\{\sqrt[3]{y_k + V_1}, \dots, \sqrt[3]{y_k + V_N}\}$ .

Η προτεινόμενη τεχνική είναι η εφαρμογή του EKF στο σύστημα του οποίου η δυναμική δίνεται από την (2.4) και η εξίσωση εξόδου του είναι η

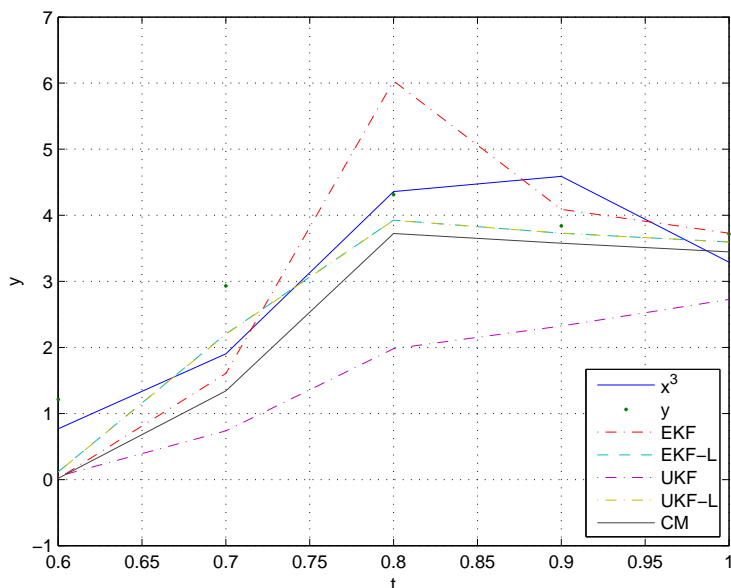
$$s_k = x_k + r_k, \quad (2.6)$$

όπου η διακύμανση του  $r_k$  είναι ίση με  $l_k$ , το οποίο υπολογίζεται, μαζί με το  $s_k$ , από το βήμα αντιστροφής.

Η αντιστροφή της εξόδου μπορεί να εφαρμοστεί και στο UKF. Η αποτελεσματικότητά της φαίνεται στο Σχ. 2.1, όπου το επίθημα -L δείχνει ότι έχει εφαρμοστεί αντιστροφή εξόδου. Το Σχ. 2.1 δείχνει ότι η αντιστροφή εξόδου εξαλείφει το φαινόμενο υπερύψωσης στο EKF και ότι βελτιώνει και τα αποτελέσματα του UKF. Η μαύρη καμπύλη του σχήματος αντιστοιχεί στην αναμενόμενη τιμή που προκύπτει διαμερίζοντας το χώρο κατάστασης με σταθερό πλέγμα (βλ. ενότητα 2.3). Σε άλλη πραγματοποίηση του πειράματος, η οποία παρουσιάζεται στο Σχ. 2.2, το EKF παγιδεύεται στο μηδέν ενώ υπερύψωση παρουσιάζεται στο UKF. Και σε αυτήν την περίπτωση, η αντιστροφή εξόδου είναι αποτελεσματική τόσο για το EKF όσο και για το UKF. Αριθμητικές τιμές για το σφάλμα πρόβλεψης και για όλες τις τεχνικές φιλτραρίσματος παρουσιάζονται στην ενότητα 2.3.

## 2.2.2 Εκτίμηση Συνάρτησης της Κατάστασης

Στη γενική περίπτωση το πρόβλημα εκτίμησης αφορά την εκτίμηση μίας συνάρτησης της κατάστασης,  $z_k = g(x_k)$ . Η συνάρτηση  $g$  μπορεί να είναι η ταυτοτική, η



Σχήμα 2.1: Χρονοσειρά δεδομένων εξόδου και αποτελέσματα διαφόρων μεθόδων εκτίμησης που δείχνουν το φαινόμενο υπερύψωσης για το EKF.

συνάρτηση εξόδου  $h$ , ή κάποια άλλη συνάρτηση. Εφόσον η  $z_k$  είναι τ.μ., μπορεί να είναι επιθυμητό να προσεγγιστεί η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή μόνο κάποια χαρακτηριστικά της, όπως η αναμενόμενη τιμή ή η διακύμανση.

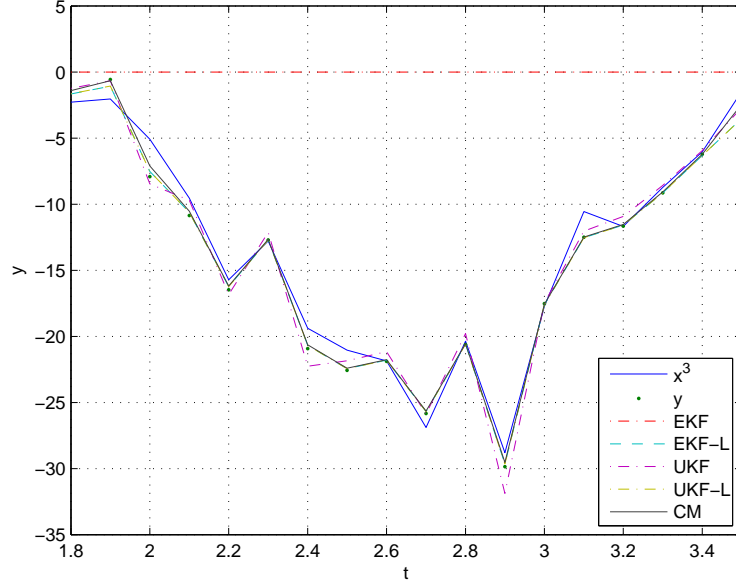
Όπως θα φανεί, η συνάρτηση  $g$  και τα χαρακτηριστικά που πρέπει να εκτιμηθούν έχουν σημαντικό αντίκτυπο στη διαδικασία επιλογής φίλτρου, γιατί είναι δυνατό διαφορετικά φίλτρα να εκτιμούν καλύτερα διαφορετικές συναρτήσεις, ή και να γίνει σχεδιασμός φίλτρου ειδικού για τη συνάρτηση που πρέπει να εκτιμηθεί. Η δυνατότητα αυτή αναδεικνύεται με το ακόλουθο παράδειγμα.

Ας θεωρήσουμε το σύστημα με δυναμική (2.4) και έξοδο

$$y_k = x_k^2 + v_k. \quad (2.7)$$

Έστω ότι  $w_k$  και  $v_k$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με διακυμάνσεις  $Q$  και  $R$  αντίστοιχα. Η (2.7) έχει τη μορφή της (1.2) με  $h(x) = x^2$ . Έστω επίσης ότι είναι γνωστό πως  $x_0 = 0$ . Τότε  $\hat{x}_1^- = 0$  και έτσι  $h'(\hat{x}_1^-) = 0$ , άρα το κέρδος Kalman είναι μηδέν και τελικά  $\hat{x}_1 = 0$ . Αναδρομικά προκύπτει ότι  $\hat{x}_k = 0$ , ανεξάρτητα από την ακολουθία εξόδου.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για κάθε  $k$  η σ.π.π. της κατάστασης είναι άρτια. Πράγματι, αν η ακολουθία εξόδου είναι  $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ , τότε για κάθε ζεύγος ακολουθιών  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  και  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  συνεπών με την  $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ , το ζεύγος  $\{-x_1, -x_2, \dots, -x_k\}$  και  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  είναι επίσης συνεπές με την ακολουθία εξόδου και εξίσου πιθανό. Λαμβάνοντας την περιθώρια κατανομή ως προς τα



Σχήμα 2.2: Χρονοσειρά δεδομένων εξόδου και αποτελέσματα διαφόρων μεθόδων εκτίμησης που δείχνουν το φαινόμενο υπερύψωσης για το UKF και το ενδεχόμενο το EKF να παγιδευτεί στο μηδέν.

πιθανά  $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$  και  $\{v_1, \dots, v_k\}$  διαπιστώνουμε ότι  $p(x_k) = p(-x_k)$ . Επομένως η αναμενόμενη τιμή της  $x_k$  πράγματι είναι 0, ακριβώς όπως θα την υπολογίζαμε και με το EKF ή το UKF.

Ωστόσο, η σ.π.π., η οποία για  $k = 0, 1, 2, 5, 10, 50, 100$  (το 0 αντιστοιχεί στη σ.π.π. της αρχικής κατάστασης) και σε μία τυχαία πραγματοποίηση παρουσιάζεται στο Σχ. 2.3, δεν μπορεί να προσεγγιστεί καλά από τη σ.π.π. μίας κανονικής κατανομής ούτε για  $k = 1$ . Ως εκ τούτου, αν δεν είναι η αναμενόμενη τιμή του  $x_k$  που πρέπει να εκτιμηθεί αλλά κάποια άλλη ποσότητα, όπως η αναμενόμενη τιμή του  $x_k^2$ , τα EKF και UKF έχουν κακή απόδοση. Σημειώνεται ότι και για  $x_0 \neq 0$ , εφόσον για κάποιο  $k$  η τιμή του  $x_k$  θα είναι κοντά στο 0, θα προκύψει το ίδιο πρόβλημα.

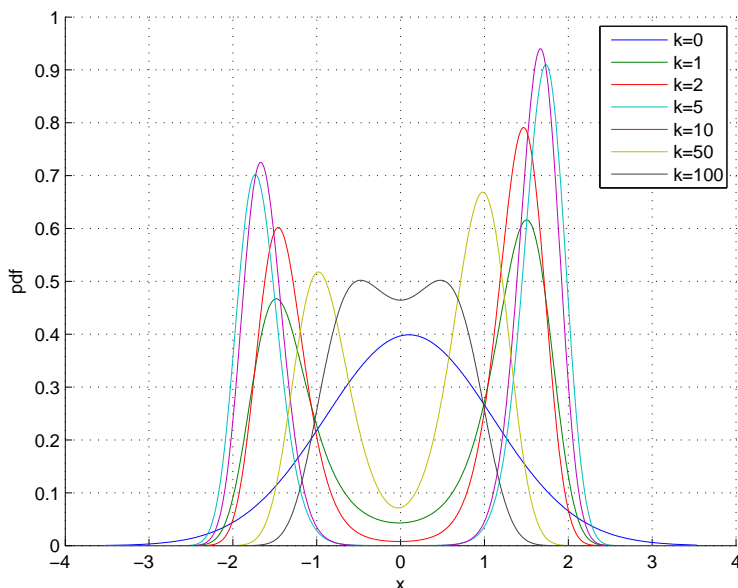
Ακολουθεί ένας εναλλακτικός τρόπος για την εκτίμηση του  $x_k^2$ . Θέτουμε  $z_k = x_k^2$ . Τότε αν  $|z_k| < \frac{1}{3\alpha\delta}$  ισχύει

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= (x_k - \alpha\delta x_k^3 + w_k)^2 = x_k^2 - 2\alpha\delta x_k^4 + \alpha^2\delta^2 x_k^6 + w_k^2 + 2(x_k - \alpha\delta x_k^3)w_k = \\ &= z_k - 2\alpha\delta z_k^2 + \alpha^2\delta^2 z_k^3 + w_k^2 + 2(x_k - \alpha\delta x_k^3)w_k, \end{aligned} \quad (2.8)$$

ενώ σε διαφορετική περίπτωση ισχύει

$$z_{k+1} = x_\infty^2 - 2\alpha\delta x_\infty^4 + \alpha^2\delta^2 x_\infty^6 + w_k^2 \pm 2(x_\infty - \alpha\delta x_\infty^3)w_k, \quad (2.9)$$

όπου το  $x_\infty$  ορίζεται στην (2.3). Η αναμενόμενη τιμή για τον άγνωστο όρο είναι  $\mathbb{E}[w_k^2 + 2(x_k - \alpha\delta x_k^3)w_k] = Q$ . Η διακύμανσή του εξαρτάται από το  $|x_k|$ . Είναι δυνατό



Σχήμα 2.3: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατάστασης για διάφορα  $k$  σε μία τυχαία πραγματοποίηση.

να δημιουργηθεί εκτός γραμμής ένας πίνακας αναφοράς που να περιέχει τη διακύμανση του αγνώστου όρου για διάφορες τιμές του  $x_k$  και να χρησιμοποιείται για την εύρεση της διακύμανσης σε κάθε χρονικό βήμα. Έτσι, προκύπτει μία εκτίμηση του  $x_k^2$  μέσω της εκτίμησης της κατάστασης του συστήματος που ορίζεται από τις (2.10)–(2.11),

$$z_{k+1} = z_k - 2\alpha\delta z_k^2 + \alpha^2\delta^2 z_k^3 + Q + n_k \quad (2.10)$$

$$y_k = z_k + v_k \quad (2.11)$$

όπου η τ.μ.  $n_k$  έχει μηδενικό μέσο αλλά η κατανομή και η διακύμανσή της εξαρτώνται από το  $z_k$ .

Για αριθμητικά αποτελέσματα και σύγκριση των διαφόρων τεχνικών φιλτραρίσματος στο συγκεκριμένο πρόβλημα βλ. την υποενότητα 2.3.2.

## 2.2.3 Νέο Σύνολο $\sigma$ -Σημείων

### Μονοδιάστατη Περίπτωση

Ο αλγόριθμος UKF της υποενότητας 1.1.3 προσεγγίζει την κανονική κατανομή με μέσο  $M$  και διακύμανση  $P$  χρησιμοποιώντας τρία  $\sigma$ -points, στις θέσεις  $M$ ,  $M - \gamma\sqrt{P}$  και  $M + \gamma\sqrt{P}$  όπου η παράμετρος  $\gamma$  και τα αντίστοιχα βάρη εξηγούνται στην υποενότητα 1.1.3.

Με περισσότερα σημεία μπορεί να προκύψει καλύτερη προσέγγιση. Έστω  $N$  ο επιθυμητός αριθμός  $\sigma$ -points. Ο ακόλουθος αλγόριθμος παρέχει ένα τρόπο για την προσέγγιση της κανονικής κατανομής μέσου  $M$  και διακύμανσης  $P$  χρησιμοποιώντας  $N$  σημεία. Έστω  $\{p_i = \frac{1}{2N} + \frac{i-1}{N}, i = 1 \dots N\}$ . Τότε αν  $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$  είναι η σ.κ.π. της πρότυπης κανονικής κατανομής, έστω  $\{y_i = F^{-1}(p_i), i = 1 \dots N\}$ . Τότε το σύνολο  $\{y_i, i = 1 \dots N\}$  έχει μηδενικό μέσο αλλά όχι απαραίτητα διακύμανση 1. Ένα σύνολο με μοναδιαία διακύμανση προκύπτει αν θέσουμε

$$\{x_i = \sqrt{\frac{N}{\sum_{i=1}^N y_i^2}} y_i, i = 1 \dots N\}. \quad (2.12)$$

Το προτεινόμενο σύνολο από  $\sigma$ -points ορίζεται από την κατωτέρω σχέση

$$\{\sigma_i = M + \sqrt{P} x_i, i = 1 \dots N\}, \quad (2.13)$$

και η μέση τιμή του και η διακύμανση ισούνται με  $M$  και  $P$  αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι τόσο στη μονοδιάστατη όσο και στην πολυδιάστατη περίπτωση τα προτεινόμενα σημεία είναι ισοβαρή.

### Πολυδιάστατη Περίπτωση

Έστω  $M$  ο διανυσματικός μέσος και  $P$  η μήτρα συνδιακύμανσης μίας  $n$ -διάστατης κανονικής κατανομής. Εφόσον η  $P$  είναι συμμετρική, είναι δυνατό να βρεθούν  $n$  ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα  $\{v_i, i = 1 \dots n\}$  με αντίστοιχες ιδιοτιμές  $\{\lambda_i, i = 1 \dots n\}$ . Η  $P$  είναι θετικά ορισμένη επομένως όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές. Έστω  $\{z_i, i = 1 \dots n\}$  ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. που ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Τότε το τυχαίο διάνυσμα  $M + \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} z_i v_i$  ακολουθεί την (πολυμεταβλητή) κανονική κατανομή με μέσο  $M$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $P$ .

Εφόσον η τυποποιημένη κανονική κατανομή προσεγγίζεται από το σύνολο που ορίζεται στην (2.12), το ακόλουθο σύνολο, που αποτελείται από  $N^n$  στοιχεία, μπορεί να θεωρηθεί ως μία προσέγγιση της  $n$ -διάστατης κανονικής κατανομής με μέσο  $M$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $P$ .

$$\{\sigma_{j_1, j_2, \dots, j_n} = M + \sum_{i=1}^n x_{j_i} \sqrt{\lambda_i} v_i, j_i = 1 \dots N, i = 1 \dots n\} \quad (2.14)$$

Η μέση τιμή και η μήτρα συνδιακύμανσής του είναι πράγματι  $M$  και  $P$  αντίστοιχα.

Για μεγάλο  $n$  ο πληθώραριθμός του συνόλου αυτού,  $N^n$ , θα είναι πολύ μεγαλύτερος από  $2n + 1$  ακόμη και για  $N = 2$ . Πέραν αυτού, ο παραπάνω αλγόριθμος συμπεριλαμβάνει υπολογισμό των ιδιοτιμών της  $P$ , ενώ για το σύνολο που περιγράφηκε στην υποενότητα 1.1.3 χρειάζεται μόνο ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας μίας θετικά ορισμένης συμμετρικής μήτρας, που έχει υπολογιστική πολυπλοκότητα  $O(n^3)$  χρησιμοποιώντας αποσύνθεση Cholesky. Ωστόσο, οι αριθμητικές δοκιμές με το τετραδιάστατο παράδειγμα της υποενότητας 2.3.4 δείχνουν ότι, για εκείνη την περίπτωση, το επιπλέον υπολογιστικό κόστος που συνδέεται με το προτεινόμενο σύνολο από  $\sigma$ -points δεν είναι απαγορευτικό.

Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι η χρήση όλων των συνδυασμών  $j_i$  στο  $\sum_{i=1}^n x_{j_i} \sqrt{\lambda_i} v_i$  μπορεί να συμβάλει στον ακριβέστερο υπολογισμό της διακύμανσης μίας συνάρτησης της κατάστασης, συγκριτικά με το σύνολο από  $\sigma$ -points της υποενότητας 1.1.3. Έστω ότι η τ.μ.  $(x_1, x_2)^T$  είναι κανονικά κατανοημένη με μηδενικό μέσο και μοναδιαία μήτρα συνδιακύμανσης, και ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το μέσο και τη διακύμανση της  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ . Ο τυποποιημένος αλγόριθμος χρησιμοποιεί πέντε σημεία, τα  $\{(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)\}$ . Όλα αυτά απεικονίζονται από την  $f$  στο 0 και έτσι η διακύμανση της  $f$  εκτιμάται ίση με το 0. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος για  $N = 2$  χρησιμοποιεί τέσσερα σημεία, τα  $\{(-1, 1), (1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}$ . Δύο εξ αυτών απεικονίζονται στο 1 και δύο στο  $-1$ , οπότε η διακύμανση εκτιμάται ίση με 1, που είναι και η ακριβής τιμή. Και οι δύο αλγόριθμοι εκτιμούν, σωστά, το μέσο ίσο με 0.

Αριθμητικά αποτελέσματα από τη χρήση του προτεινόμενου συνόλου  $\sigma$ -point σε προβλήματα αναδρομικής εκτίμησης κατάστασης παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα.

## 2.2.4 Χρήση της Επικρατούσας ως Εκτίμηση της Μέσης Τιμής

Τα μη γραμμικά φίλτρα που βασίζονται στο φίλτρο Kalman προσεγγίζουν τη μέση τιμή μεταδίδοντας και διορθώνοντας τις τιμές της μέσης τιμής και της μήτρας συνδιακύμανσης. Εκτός από το ότι αυτές οι ποσότητες δεν μπορούν να υπολογιστούν ακριβώς, η διόρθωση με το κέρδος Kalman δεν είναι βέλτιστη για μη γραμμικά συστήματα. Η επικρατούσα τιμή της εκ των υστέρων κατανομής ωστόσο είναι σχετικά εύκολο να υπολογιστεί. Παρόλου που η κατανομή δεν είναι κανονική, άρα η επικρατούσα δεν συμπίπτει απαραίτητα με τη μέση τιμή, ενδέχεται να παρέχει μία καλή προσέγγιση. Οι υπολογισμοί γίνονται όπως εξηγείται ακολούθως.

Ας υποθέσουμε ότι μετά το βήμα πρόβλεψης του χρονικού βήματος  $k$ , η μέση τιμή και η μήτρα συνδιακύμανσης είναι  $\hat{x}_{k+1}^- = M$  και  $P_{x_{k+1}}^- = P$  αντίστοιχα. Αν η τιμή της εξόδου τη χρονική στιγμή  $k + 1$  είναι  $y_{k+1} = y$  και η μήτρα συνδιακύμανσης του σφάλματος είναι  $R$ , τότε η σ.π.π. της  $x_{k+1}$  είναι ίση με

$$\frac{1}{I} \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |P|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-M)^T P^{-1}(x-M)} \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |R|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(y-h(x))^T R^{-1}(y-h(x))} \quad (2.15)$$

όπου

$$I = \int \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |P|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-M)^T P^{-1}(x-M)} \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |R|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(y-h(x))^T R^{-1}(y-h(x))} dx. \quad (2.16)$$

Επομένως μεγιστοποιείται για την τιμή του  $x$  που ελαχιστοποιεί την

$$\frac{1}{2} \left[ (x - M)^T P^{-1}(x - M) + (y - h(x))^T R^{-1}(y - h(x)) \right]. \quad (2.17)$$

Η παράγωγος της ανωτέρω παράστασης ισούται με

$$P^{-1}(x - M) + \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^T R^{-1}(h(x) - y). \quad (2.18)$$

Παρόλο που η διαδικασία μεγιστοποίησης που περιγράφηκε παραπάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση μίας εκτίμησης της μέσης τιμής, δεν παρέχει εκτίμηση για τη διακύμανση της κατάστασης. Επομένως για το επόμενο βήμα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η τιμή της διακύμανσης όπως υπολογίζεται από κάποιο φίλτρο βασισμένο στο KF. Ο πειραματισμός έδειξε ότι καλύτερα αποτελέσματα προκύπτουν χρησιμοποιώντας για το επόμενο βήμα και την τιμή του μέσου που δίνει το βασισμένο στο KF φίλτρο. Έτσι, τόσο η τιμή του μέσου όσο και της διακύμανσης που υπολογίζεται από το βασισμένο σε KF φίλτρο μεταδίδεται από χρονικό βήμα σε χρονικό βήμα, ενώ η παραπάνω διαδικασία εκτελείται κάθε χρονική στιγμή χωριστά για να προκύψει η εκτίμηση της επικρατούσας τιμής.

## 2.3 Προσομοιώσεις

Σε αυτή την ενότητα οι προτεινόμενες τεχνικές φιλτραρίσματος εφαρμόζονται σε τέσσερα παραδείγματα. Πρώτα παρουσιάζονται δύο μονοδιάστατα παραδείγματα, ύστερα ένα διδιάστατο παράδειγμα και τελικά ένα τετραδιάστατο παράδειγμα με έναν κινητήρα συνεχούς ρεύματος.

Σε κάθε παράδειγμα εφαρμόζονται διάφορες παραλλαγές του φίλτρου Kalman, όπως εξηγείται λεπτομερέστερα σε κάθε υποενότητα. Για λόγους σύγκρισης εφαρμόζεται και το φίλτρο σωματιδίων. Χρησιμοποιείται η παραλλαγή που παρουσιάστηκε στην υποενότητα 1.1.3 (Sampling Importance Resampling, SIR), υλοποιώντας το βήμα επαναδειγματοληψίας με τον αλγόριθμο της αναφοράς [65] (stratified resampling).

Για τα μονοδιάστατα παραδείγματα, εκτός από τις παραπάνω τεχνικές, εφαρμόζεται και η διαμέριση του χώρου κατάστασης με σταθερό πλέγμα και η προσέγγιση του συστήματος από μία πεπερασμένη αλυσίδα Markov (βλ. και την υποενότητα 1.1.2). Χρησιμοποιώντας αυτήν την προσέγγιση, για κάθε χρονικό βήμα είναι γνωστή η πιθανότητα του ενδεχομένου να ανήκει η κατάσταση σε κάποιο διάστημα του πλέγματος. Η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από μία Μαρκοβιανή μήτρα, η οποία είναι σταθερή και δεν χρειάζεται να υπολογίζεται σε κάθε χρονικό βήμα ή σε κάθε εκτέλεση. Για το βήμα διόρθωσης, ως πιθανοφάνεια ενός διαστήματος χρησιμοποιείται η πιθανοφάνεια του κέντρου του. Αν ο αριθμός των διαστημάτων είναι αρκετά μεγάλος, είναι δυνατό να βρεθεί μία πολύ καλή προσέγγιση της μέσης τιμής όχι μόνο της κατάστασης αλλά και της εξόδου ή κάποιας άλλης συνάρτησης της κατάστασης. Το πλέγμα επιλέγεται λεπτότερο σε περιοχές όπου η κατάσταση του συστήματος περνά περισσότερο χρόνο. Για τα παραδείγματα που ακολουθούν, το πλέγμα επιλέγεται λεπτότερο κοντά στο 0.



**Σχόλιο 2.1.** Σε προβλήματα περισσότερων διαστάσεων, ακόμα και στο διδιάστατο παράδειγμα, αυτή η προσέγγιση θα είχε τεράστιο υπολογιστικό κόστος, γιατί αν χρησιμοποιείτο πλέγμα πυκνό σε όλες τις διαστάσεις, ο αριθμός των περιοχών θα ήταν πολύ μεγάλος.

Είναι σκόπιμο να συγκριθούν τα αποτελέσματα των φίλτρων με το Cramer-Rao κάτωτα φράγμα (Cramer-Rao lower bound, CRLB) [66], [67]. Επειδή η εκτιμώμενη ποσότητα (δηλ. η κατάσταση του συστήματος) είναι επίσης τ.μ., χρησιμοποιείται η εκδοχή van Trees ή εκ των υστέρων εκδοχή του CRLB. Στην εργασία [68] υποδεικνύεται ένας τρόπος για τον αναδρομικό υπολογισμό του εκ των υστέρων CRLB για το πρόβλημα του μη γραμμικού φιλτραρίσματος διακριτού χρόνου. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζεται το πρόβλημα εκτίμησης της κατάστασης του συστήματος όπως περιγράφεται από τις (1.1)–(1.2) με διαταραχή και σφάλμα μέτρησης που ακολουθούν την κανονική κατανομή, μηδενικού μέσου και με μήτρα συνδιακύμανσης  $Q$  και  $R$  αντίστοιχα. Αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$\mathbb{E}[(\hat{x}_k - x_k)(\hat{x}_k - x_k)^T] \geq J_k^{-1} \quad (2.19)$$

όπου η  $J_k$  δίνεται από τις ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις

$$J_0 = P_0^{-1}, \quad (2.20)$$

$$J_{k+1} = D_k^{22} - D_k^{21}(J_k + D_k^{11})^{-1}D_k^{12}, \quad (2.21)$$

$$D_k^{11} = \mathbb{E}\{[\nabla_{x_k} f^T(x_k)]Q^{-1}[\nabla_{x_k} f^T(x_k)]^T\}, \quad (2.22)$$

$$D_k^{12} = -\mathbb{E}\{[\nabla_{x_k} f^T(x_k)]Q^{-1}\}, D_k^{21} = [D_k^{12}]^T, \quad (2.23)$$

$$D_k^{22} = Q^{-1} + \mathbb{E}\{[\nabla_{x_{k+1}} h^T(x_{k+1})]R^{-1}[\nabla_{x_{k+1}} h^T(x_{k+1})]^T\}, \quad (2.24)$$

όπου  $P_0$  είναι η εκ των προτέρων μήτρα συνδιακύμανσης της αρχικής κατάστασης. Οι ανωτέρω εξισώσεις ισχύουν για μη ιδιάζουσες  $Q$  και  $R$ . Για την περίπτωση ιδιάζουσας  $Q$  ή  $R$  βλ. την προαναφερθείσα εργασία.

Οι αναμενόμενες τιμές στις (2.22)–(2.24) μπορούν να προσεγγιστούν υπολογίζοντας τις αντίστοιχες παραστάσεις για ένα μεγάλο αριθμό τυχαίων εκτελέσεων και λαμβάνοντας τη μέση τιμή. Για τα παραδείγματα αυτής της ενότητας, 10000 εκτελέσεις έγιναν για την προσέγγιση.

**Σχόλιο 2.2.** Για τα γραμμικά συστήματα το CRLB είναι πάντα «σφιχτό», δηλ. είναι δυνατό να υπάρξει εκτίμηση με σφάλμα όσο και το CRLB (εύκολα άλλωστε φαίνεται ότι εκτελώντας τις παραπάνω εξισώσεις για γραμμικά συστήματα η  $J_k^{-1}$  θα είναι η μήτρα συνδιακύμανσης του φίλτρου Kalman), ενώ για μη γραμμικά συστήματα η απόκλιση μεταξύ του φράγματος και της βέλτιστης εκτίμησης μπορεί κατά περίπτωση να είναι ή να μην είναι σημαντική, όπως θα φανεί και στα ακόλουθα παραδείγματα.

### 2.3.1 Μονοδιάστατο Παράδειγμα με Αντιστρέψιμη Εξίσωση Εξόδου

Σε αυτή την υποενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για το πρόβλημα της εκτίμησης της κατάστασης του συστήματος με δυναμική που περιγράφεται από την

Πίνακας 2.1: Πίνακας των rms τιμών του σφάλματος εκτίμησης και του υπολογιστικού χρόνου για το παράδειγμα της υποενότητας 2.3.1, α' περίπτωση.

Τεχνική	Μέσο Σφάλμα		Μέγιστο Σφάλμα		Υπολ. Χρόνος (ms)
	$x$	$y$	$x$	$y$	
EKF	0.8345	18.53	3.2019	4148	0.15
UKF	0.3891	1.2593	0.6110	40.58	0.35
MUKF(P)	0.3890	1.2455	0.6050	39.22	0.60
MUKF	0.3868	1.4356	0.6577	52.40	0.75
UKF-Mode	0.4117	0.7430	0.6807	1.055	0.54
MUKF-Mode	0.4117	0.7449	0.6744	1.061	0.94
MUKF(15)-Mode	0.4110	0.7437	0.6762	1.060	1.25
EKF-L	0.4227	0.7785	0.7237	1.263	0.71
UKF-L	0.4219	0.7775	0.7218	1.263	0.84
PF/SIR(50)	0.3872	0.8251/0.8464	0.6499	3.524/3.521	0.24
PF/SIR(1000)	0.3759	0.7212/0.7459	0.5876	1.351/1.349	1.68
CM(50)	0.3764	0.8561/0.8784	0.5882	4.434/4.438	0.07
CM(1000)	0.3753	0.7156/0.7404	0.5882	1.023/1.058	2.39

(2.4) και έξοδο που δίνεται από την (2.5).

Το σύστημα προσομοιώθηκε υπό τις ακόλουθες συνθήκες. Οι παράμετροι είναι ίσες με  $\alpha = 0.1$ ,  $\delta = 0.1$ . Η αρχική κατάσταση  $x_0$  είναι κανονικά κατανοημένη με μέσο 0.1 και διακύμανση 1, και ανεξάρτητη των ακολουθιών τ.μ.  $w_k$  και  $v_k$  που επίσης θεωρούνται κανονικές και μεταξύ τους ανεξάρτητες, ενώ επιπλέον είναι ακολουθίες ισόνομων τ.μ. με μηδενικό μέσο. Η διακύμανση της  $v_k$  είναι ίση με 1, ενώ για την πρώτη περίπτωση που μελετάται η διακύμανση της  $w_k$  ισούται με  $\delta$ . Το σύστημα προσομοιώνεται μέχρι τη στιγμή  $t = 10$  ( $k = 100$ ).

Προκειμένου να συγκριθούν οι διαφορετικές μέθοδοι εκτίμησης, το πείραμα έχει εκτελεστεί 1000 φορές. Οι προσομοιωμένες μέσες τιμές για τα  $x^2$  και  $y^2$  είναι 1.47 και 23.32 αντίστοιχα. Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζεται η μέση και η μέγιστη (από τις 1000) rms τιμή για το σφάλμα εκτίμησης των  $x$  και  $y$ , όπως επίσης και ο μέσος χρόνος υπολογισμού ανά βήμα σε msec. Οι υπολογιστικοί χρόνοι έχουν καταγραφεί σε έναν Η/Υ των 64-bit με ρολόι 2.9 GHz που εκτελούσε MATLAB 7.2 για Linux, όπως και οι υπολογιστικοί χρόνοι που εμφανίζονται στα υπόλοιπα κεφάλαια. Τονίζεται ότι σε αυτήν την ενότητα, με τον όρο «εκτίμηση  $y$ » εννοείται η εκτίμηση του  $h(x)$ . Αντίστοιχα για τον όρο «σφάλμα  $y$ ». Τονίζεται επίσης ότι, όπου δεν αναφέρεται κάτι διαφορετικό, η εκτιμώμενη τιμή του  $h(x)$  είναι η  $h(\hat{x})$ .

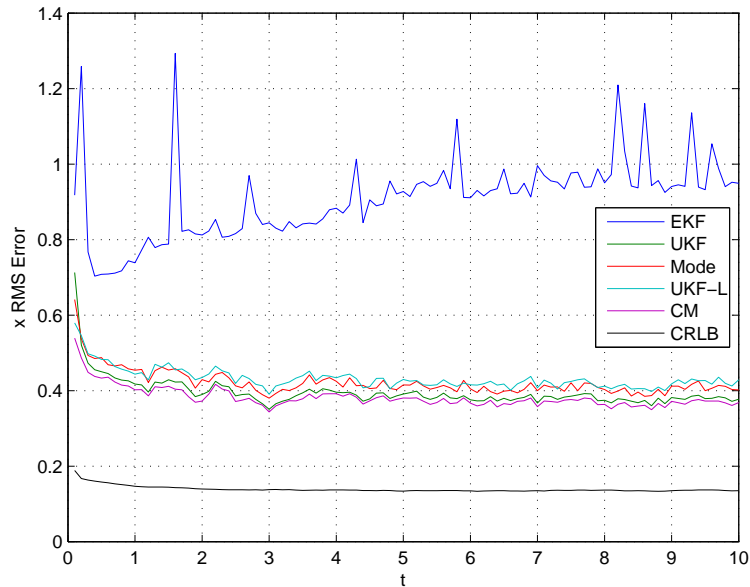
Στον Πίνακα 2.1, EKF και UKF είναι τα Extended και Unscented Kalman Filter αντίστοιχα χωρίς κάποια τροποποίηση. Το MUKF (Modified UKF) είναι το τροπο-

ποιημένο UKF στο οποίο έχει χρησιμοποιηθεί το  $\sigma$ -point σύνολο που προτάθηκε στην υποενότητα 2.2.3. Η τιμή του  $N$  είναι ίση με 9. Για το MUKF(P) το προτεινόμενο  $\sigma$ -point σύνολο χρησιμοποιήθηκε μόνο για το βήμα πρόβλεψης. Για τα επόμενα τρία φίλτρα το επίθημα ‘-Mode’ δείχνει ότι η εκτίμηση της κατάστασης προκύπτει από τη διαδικασία μεγιστοποίησης που περιγράφηκε στην υποενότητα 2.2.4. Για την ελαχιστοποίηση της (2.17) στο παράδειγμα αυτό αρχικά υπολογίζεται η τιμή της πάνω σε πλέγμα με βήμα ίσο με 0.3, ύστερα επιλέγεται το σημείο που δίνει τη μικρότερη τιμή, και ύστερα η διαδικασία επαναλαμβάνεται με ένα τοπικό πλέγμα βήματος 0.001. Ο πειραματισμός έδειξε ότι ο τρόπος αυτός είναι ταχύτερος σε σχέση με τις αναδρομικές μεθόδους. Το MUKF(15) είναι MUKF με  $N = 15$ . Τα EKF-L και UKF-L είναι EKF και UKF με αντεστραμμένη την εξίσωση εξόδου, δηλ. με εξίσωση εξόδου (2.6) αντί για (2.5).

Για το PF/SIR (Particle Filter with Sampling Importance Resampling), ο αριθμός σε παρένθεση είναι ο αριθμός των σωματιδίων. Δεδομένου ότι το PF παρέχει μία προσέγγιση και της κατανομής, η μέση τιμή του  $y$  μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας την (1.24). Ο αριθμός αριστερά της καθέτου (/) το σφάλμα με βάση την εκτίμηση της  $\mathbb{E}[h(x_k)]$  από την (1.24), ενώ ο αριθμός δεξιά της καθέτου είναι το σφάλμα με βάση την προσέγγιση  $h(\mathbb{E}[(x_k)])$ . Όπως είναι αναμενόμενο, η πρώτη εκ των δύο αυτών τιμών είναι μικρότερη. Τέλος, έχει γίνει διαμέριση του χώρου με σταθερό πλέγμα (CM), όπως περιγράφηκε και στην αρχή αυτής της ενότητας. Ο αριθμός σε παρένθεση είναι ο αριθμός των διαστημάτων του πλέγματος, ενώ οι αριθμοί αριστερά και δεξιά της καθέτου έχουν την ίδια έννοια όπως και στο PF. Και σε αυτήν την περίπτωση, το γεγονός ότι είναι γνωστή η κατανομή της κατάστασης επιτρέπει ακριβέστερη εκτίμηση της εξόδου.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το EKF δεν παρέχει ικανοποιητική εκτίμηση ούτε για το  $x$  ούτε για το  $y$ , λόγω του μη γραμμικού φαινομένου που περιγράφηκε στην υποενότητα 2.2.1. Το UKF επίσης επηρεάζεται από το ίδιο φαινόμενο, και το σφάλμα για το  $y$  είναι υψηλό, παρόλο που το  $x$  εκτιμάται καλά. Τα MUKF και MUKF(P) είναι ελαφρώς καλύτερα από το UKF, αλλά και αυτά είναι μη ικανοποιητικά για το  $y$ , ιδίως το MUKF που δίνει χειρότερα αποτελέσματα από το UKF. Η επικρατούσα τιμή μπορεί να συμβάλει στον υπολογισμό πολύ σθεναρούς εκτίμησης για το  $y$ , όπως φαίνεται από το πολύ χαμηλό μέσο σφάλμα για το  $y$  και ακόμα καλύτερο μέγιστο σφάλμα για το  $y$ , συγκρίσιμα μόνο με αυτά του CM(1000). Η αντιστροφή της εξίσωσης εξόδου μειώνει ουσιαστικά το σφάλμα εκτίμησης του  $y$  τόσο για το EKF όσο και για το UKF, αλλά αυξάνει το σφάλμα στην εκτίμηση του  $x$ . Τα PF και CM, με πολλά σωματίδια και διαστήματα αντίστοιχα, αποδίδουν καλύτερα από το UKF-L, αλλά το γεγονός ότι το σφάλμα για το  $y$  στην περίπτωση των EKF-L και UKF-L είναι μικρότερο από αυτό των PF(50) και CM(50) δείχνει ότι η αντιστροφή της εξόδου μπορεί να λειτουργήσει πολύ αποτελεσματικά. Είναι ενδιαφέρον ότι αν και το CM(50) δίνει σφάλμα για το  $x$  συγκρίσιμο με αυτό του PF(1000), το σφάλμα για το  $y$  είναι μεγαλύτερο από ότι για το PF(50).

Το Σχήμα 2.4 παρουσιάζει την rms τιμή του σφάλματος στην εκτίμηση του  $x$  για κάθε χρονικό βήμα, καθώς και το αντίστοιχο Cramer-Rao κατώτατο φράγμα. Οι κα-

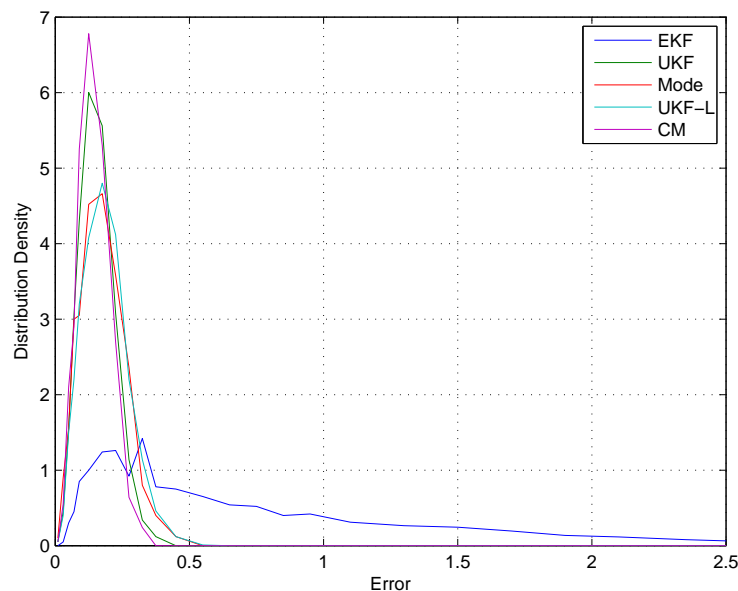


Σχήμα 2.4: Μεταβατική απόκριση διαφόρων φίλτρων και CRLB για το παράδειγμα της υποενότητας 2.3.1, α' περίπτωση.

μύλες για τα 'Mode' και 'CM' αντιστοιχούν στα 'MUKF(15)-Mode' και 'CM(1000)' του Πίνακα 2.1. Εκτός από το EKF, όλες οι άλλες μέθοδοι συγκλίνουν γρήγορα στη μόνιμη κατάστασή τους. Είναι επίσης αξιοσημείωτο ότι το CRLB είναι σημαντικά χαμηλότερο από ότι το σφάλμα του 'CM(1000)' (η rms τιμή του είναι 0.1391). Αυτό συμβαίνει επειδή η μη-γραμμικότητα είναι έντονη.

Το Σχ. 2.5 παρουσιάζει την κατανομή του rms σφάλματος εκτίμησης του  $x$  για τις 1000 εκτελέσεις του πειράματος και για τα ίδια φίλτρα που εμφανίζονται στο Σχ. 2.4. Η αναποτελεσματικότητα του EKF είναι εμφανής.

Το σύστημα μελετήθηκε και για διακύμανση του  $\omega_k$  ίση με 0.1δ. Σε αυτήν την περίπτωση οι προσομοιωμένες μέσες τιμές των  $x^2$  και  $y^2$  είναι 0.58 και 2.51 αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.2. Και στην περίπτωση αυτή, το EKF δεν αποδίδει καλά, και το UKF εκτιμά το  $x$  καλά αλλά το σφάλμα του για το  $y$  δεν είναι ικανοποιητικό. Η χρήση της επικρατούσας τιμής οδηγεί σε εξαιρετική εκτίμηση του  $y$ , ενώ δίνει και μία καλή εκτίμηση του  $x$ . Η αντιστροφή της εξίσωσης εξόδου επιτρέπει την καλή εκτίμηση του  $y$ , αλλά χειροτερεύει την εκτίμηση του  $x$ . Τέλος, παρατηρούμε ότι για αυτήν την περίπτωση το CM εκτιμά το  $y$  καλύτερα από το PF. Η rms τιμή του CRLB σε αυτήν την περίπτωση είναι ίση με 0.1852.



Σχήμα 2.5: Κατανομή των τιμών του rms σφάλματος για το παράδειγμα της υποενότητας 2.3.1, α' περίπτωση.

### 2.3.2 Μονοδιάστατο Παράδειγμα με Μη Αντιστρέψιμη Εξίσωση Εξόδου

Σε αυτή την υποενότητα μελετάται το σύστημα με δυναμική που δίνεται από την (2.4) και έξοδο που δίνεται από την (2.7). Για την πρώτη περίπτωση που εξετάζεται οι παράμετροι και η κατανομή του  $x_0$  είναι αυτές του προηγούμενου παραδείγματος. Οι κατανομές των  $w_k$  και  $v_k$  είναι αυτές της πρώτης περίπτωσης του παραδείγματος εκείνου. Το σύστημα προσομοιώνεται μέχρι τη στιγμή  $t = 10$  και εκτελούνται 1000 πραγματοποιήσεις του πειράματος, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα.

Οι προσομοιωμένες τιμές για τα  $x^2$  και  $y^2$  είναι 1.46 και 5.82 αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.3. Μόνο το σφάλμα εκτίμησης για το  $y$  δίνεται, για τους λόγους που εξηγήθηκαν στην ενότητα 2.3.2. Οι τιμές στη δεύτερη μέχρι και την τέταρτη στήλη προκύπτουν από την εφαρμογή των μεθόδων φιλτραρίσματος στις (2.10)–(2.11) (πραγματικό σύστημα), ενώ εκείνες στην πέμπτη μέχρι και στην έβδομη στήλη προκύπτουν από την εφαρμογή των μεθόδων φιλτραρίσματος στις (2.4) και (2.7) (εικονικό σύστημα). Κατά την εκτίμηση της κατάστασης του εικονικού συστήματος, για απλοποίηση, υποθέτουμε ότι το  $n_k$  κατανέμεται κανονικά. Οι υπολογιστικοί χρόνοι είναι ανά βήμα και σε ms.

Αφού το εικονικό σύστημα έχει γραμμική εξίσωση εξόδου, η αντιστροφή της εξόδου δεν είναι εφαρμόσιμη. Η γραμμικότητα της εξίσωσης εξόδου επίσης συνεπάγεται ότι η μέση και η επικρατούσα τιμή συμπίπτουν, δεδομένου ότι η κατανομή

Πίνακας 2.2: Πίνακας των rms τιμών του σφάλματος εκτίμησης και του υπολογιστικού χρόνου για το παράδειγμα της υποενότητας 2.3.1, β' περίπτωση.

Τεχνική	Μέσο Σφάλμα		Μέγιστο Σφάλμα		Υπολ. Χρόνος (ms)
	$x$	$y$	$x$	$y$	
EKF	0.4899	1.4082	1.3000	116	0.15
UKF	0.3357	0.7314	0.7976	73.88	0.36
MUKF(P)	0.3357	0.7178	0.7950	71.50	0.61
MUKF	0.3336	0.8337	0.8042	92.05	0.77
UKF-Mode	0.3379	0.3806	0.8273	0.864	0.55
MUKF-Mode	0.3371	0.3868	0.8365	0.825	0.96
MUKF(15)-Mode	0.3367	0.3843	0.8306	0.792	1.28
EKF-L	0.3916	0.4219	0.7965	0.865	0.72
UKF-L	0.3907	0.4199	0.7936	0.864	0.85
PF/SIR(50)	0.3413	0.3928/0.3969	0.8401	2.341/2.344	0.25
PF/SIR(1000)	0.3276	0.3594/0.3656	0.8037	1.273/1.272	1.80
CM(50)	0.3272	0.3607/0.3672	0.8112	1.007/1.017	0.08
CM(1000)	0.3271	0.3576/0.3641	0.8112	0.799/0.849	3.62

Πίνακας 2.3: Πίνακας των rms τιμών του σφάλματος εκτίμησης και του υπολογιστικού χρόνου για το παράδειγμα της υποενότητας 2.3.2, α' περίπτωση.

Τεχνική	(2.4), (2.7)			(2.10)–(2.11)		
	Σφάλμα		Υπολ. Χρόνος (ms)	Σφάλμα		Υπολ. Χρόνος (ms)
	Μέσο	Μέγιστο		Μέσο	Μέγιστο	
EKF	0.6879	2.1890	0.15	0.6524	0.9558	0.29
UKF	1.6435	3.8932	0.36	0.6525	0.9577	0.52
MUKF	1.1867	2.9310	0.29	0.6475	0.9655	0.46
PF/SIR(100)	0.6237	1.0864	0.28	0.6665	1.4922	0.42
PF/SIR(1000)	0.6136	0.9033	1.34	0.6566	1.2394	1.48
CM(30)	0.6331	1.4777	0.05	0.6370	0.9280	4.27
CM(100)	0.6137	0.9222	0.06	0.6368	0.9284	11.70

Πίνακας 2.4: Πίνακας των rms τιμών του σφάλματος εκτίμησης και του υπολογιστικού χρόνου για το παράδειγμα της υποενότητας 2.3.2, β' περίπτωση.

Τεχνική	(2.4), (2.7)			(2.10)–(2.11)		
	Σφάλμα		Υπολ. Χρόνος (ms)	Σφάλμα		Υπολ. Χρόνος (ms)
	Μέσο	Μέγιστο		Μέσο	Μέγιστο	
EKF	2.0468	4.8162	0.15	0.6518	0.9227	0.29
UKF	2.0468	4.8162	0.36	0.6519	0.9255	0.51
MUKF	1.9572	3.8193	0.29	0.6470	0.9321	0.45
PF/SIR(100)	0.6239	0.9027	0.28	0.6640	1.0056	0.42
PF/SIR(1000)	0.6150	0.8753	1.34	0.6550	0.9417	1.49
CM(30)	0.6324	1.2925	0.05	0.6365	0.8894	4.29
CM(100)	0.6147	0.8994	0.07	0.6363	0.8889	11.80

της κατάστασης μετά το βήμα πρόβλεψης προσεγγίζεται από μία κανονική κατανομή. Επομένως μόνο οι υπόλοιπες τεχνικές φιλτραρίσματος εφαρμόστηκαν σε αυτό το σύστημα. Πρέπει επίσης να σημειώσουμε ότι για το MUKF το τροποποιημένο  $\sigma$ -point σύνολο εφαρμόζεται μόνο στο βήμα πρόβλεψης, διότι η εξίσωση εξόδου του εικονικού συστήματος είναι γραμμική και έτσι το βήμα διόρθωσης γίνεται με βάση της εξισώσεις του φίλτρου Kalman.

Το EKF συμπεριφέρεται καλά και για τα δύο συστήματα, ενώ το UKF μόνο για το εικονικό. Το MUKF παρουσιάζει σημαντικά μικρότερο σφάλμα σε σχέση με το UKF μόνο για το πραγματικό σύστημα. Το γεγονός ότι το σφάλμα εκτίμησης χρησιμοποιώντας EKF, UKF ή MUKF για το εικονικό σύστημα είναι παραπλήσιο με αυτό του CM ή του PF για το πραγματικό σύστημα αναδεικνύει την αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης τεχνικής. Επιπλέον, το γεγονός ότι το CM(100) για το εικονικό σύστημα δίνει αποτελέσματα συγκρίσιμα με αυτά του CM(100) για το πραγματικό σύστημα δείχνει ότι η απλοποίηση που γίνεται, δηλ. ότι η τ.μ.  $n_k$  είναι κανονικά κατανεμημένη, δεν εισάγει σημαντικό σφάλμα. Αυτό το γεγονός, σε συνδυασμό με την αποδοτικότητα των EKF, UKF και MUKF για συστήματα με ήπιες μη-γραμμικότητες όπως το εικονικό σύστημα, είναι που οδηγεί στην καλή απόδοση των προαναφερθέντων φίλτρων όταν εφαρμόζονται στο εικονικό σύστημα.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο υπολογιστικός χρόνος για το CM στην περίπτωση του εικονικού συστήματος είναι υψηλός επειδή η στοχαστική μήτρα εξαρτάται από τη διακύμανση της διαταραχής, και επομένως πρέπει να υπολογίζεται σε κάθε χρονικό βήμα. Αυτός είναι και ο λόγος που η τεχνική CM(1000) δεν δοκιμάστηκε σε αυτό το σύστημα.

Η δεύτερη περίπτωση που μελετάται διαφέρει από την πρώτη ως προς τη μέση τιμή της κατανομής της αρχικής κατάστασης, η οποία είναι 0 αντί για 0.1. Οι προσομοιωμένες μέσες τιμές για τα  $x^2$  και  $y^2$  σε αυτήν την περίπτωση είναι 1.46 και

Πίνακας 2.5: Πίνακας των rms τιμών του σφάλματος εκτίμησης και του υπολογιστικού χρόνου για το παράδειγμα της υποενότητας 2.3.3, α' περίπτωση

Τεχνική	Μέσο Σφάλμα		Μέγιστο Σφάλμα		Υπολ. Χρόνος (ms)
	$x_1$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	
EKF	7.9181	3.5974	10.3128	3.9498	0.11
UKF	7.5795	3.5907	10.3435	3.9177	0.25
MUKF	6.6326	3.5734	7.9090	3.8778	0.29

5.83 αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.4 και είναι όμοια με αυτά της πρώτης περίπτωσης εκτός από την απόδοση των EKF, UKF και MUKF για το πραγματικό σύστημα. Όπως εξηγείται στην υποενότητα 2.3.2, αυτά τα τρία φίλτρα εκτιμούν την κατάσταση να είναι 0 όλες τις χρονικές στιγμές όταν η αρχική τους εκτίμηση είναι 0. Ωστόσο, αριθμητικά λάθη στον υπολογισμό των  $\sigma$ -points για το MUKF οδηγούν σε απόκλιση από το 0. Η ισχυρή εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες στα αποτελέσματα των EKF, UKF και MUKF δείχνει ότι είναι καλύτερο να εφαρμόζονται στο εικονικό σύστημα.

### 2.3.3 Διδιάστατο Διγραμμικό Σύστημα

Το σύστημα που μελετάται σε αυτήν την υποενότητα περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις.

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x_k + x_{1,k}x_{2,k} \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \end{bmatrix} + w_k,$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k.$$

Στις ανωτέρω εξισώσεις,  $w_k$  και  $v_k$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες ακολουθίες κανονικά κατανομημένων τυχαίων μεταβλητών, ανεξάρτητες μεταξύ τους και από την αρχική κατάσταση που είναι επίσης κανονική τ.μ.

Εφόσον η εξίσωση εξόδου είναι γραμμική, η αντιστροφή της εξόδου δεν έχει εφαρμογή, και η εκτίμηση βάσει της επικρατούσας τιμής ταυτίζεται με τον εκτιμώμενο μέσο. Επιπλέον, το PF/SIR απέδιδε άσχημα ακόμη και για 10000 σωματίδια, για τα οποία ο υπολογιστικός χρόνος ήταν πολύ μεγάλος. Για αυτό το λόγο παρουσιάζονται αποτελέσματα μόνο για τα EKF, UKF και MUKF. Για το MUKF, το  $N$  επελέγη ίσο με 2. Τα τρία εφαρμοζόμενα φίλτρα διαφέρουν σε αυτό το παράδειγμα μόνο στο βήμα πρόβλεψης, δεδομένου ότι η εξίσωση εξόδου είναι γραμμική και άρα το βήμα διόρθωσης γίνεται με τις εξισώσεις του φίλτρου Kalman.

Για την πρώτη περίπτωση που εξετάζεται, το  $w_k$  έχει μέση τιμή 0 και η μήτρα συνδιακύμανσής του είναι ίση με  $10I_2$ , ενώ το  $v_k$  έχει μηδενική μέση τιμή και διακύμανση



Πίνακας 2.6: Πίνακας των rms τιμών του σφάλματος εκτίμησης και του υπολογιστικού χρόνου για το παράδειγμα της υποενότητας 2.3.3, β' περίπτωση

Τεχνική	Μέσο Σφάλμα		Μέγιστο Σφάλμα		Υπολ. Χρόνος (ms)
	$x_1$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	
EKF	33.2416	3.7100	69.4051	4.4110	0.11
UKF	29.0547	3.6893	73.0664	4.4738	0.25
MUKF	15.1896	3.6279	21.3721	3.9544	0.29

ιση με 100. Η αρχική κατάσταση  $x_0$  επίσης έχει μηδενική μέση τιμή και η μήτρα συνδιακύμανσής της είναι ίση με  $100I_2$ . Το σύστημα προσομοιώνεται μέχρι για  $k = 1000$ . Πραγματοποιούνται 1000 εκτελέσεις. Οι rms τιμές για τα  $x_1$  και  $x_2$  είναι 40427 και 3.6578 αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα των τεχνικών φιλτραρίσματος παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.5, ενώ οι αντίστοιχες τιμές για το CRLB είναι 3.1966 και 3.1624. Το MUKF αποδίδει καλύτερα από το UKF, το οποίο με τη σειρά του αποδίδει καλύτερα από το EKF. Η διαφορά είναι μεγαλύτερη για το μέγιστο rms σφάλμα. Η δεύτερη περίπτωση διαφέρει ως προς τη διακύμανση του  $v_k$  που τώρα είναι ίση με 1000. 1000 εκτελέσεις γίνονται και σε αυτήν την περίπτωση, και για αυτές οι rms τιμές για τα  $x_1$  και  $x_2$  είναι 10311 και 3.6518. Ο Πίνακας 2.6 παρουσιάζει τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Τώρα η διαφορά μεταξύ MUKF και UKF είναι πολύ μεγαλύτερη, ιδίως ως προς τη συμπεριφορά στη χειρότερη περίπτωση. Οι τιμές του CRLB είναι τώρα 3.3661 και 3.1624.

Τα αποτελέσματα αυτής της υποενότητας δείχνουν ότι, υπό ορισμένες συνθήκες, το προτεινόμενο  $\sigma$ -point σύνολο μπορεί να βελτιώσει σημαντικά την απόδοση χωρίς αύξηση στο υπολογιστικό κόστος.

### 2.3.4 Τετραδιάστατο Παράδειγμα Κινητήρα Συνεχούς Ρεύματος

Το τελευταίο παράδειγμα που μελετάται αφορά έναν κινητήρα Σ.Ρ. του οποίου η θέση μετράται με έναν κωδικοποιητή  $\sin/\cos$  ( $\sin/\cos$  encoder). Το ρεύμα της διέγερσης θεωρείται σταθερό και οι μαγνητικές μη-γραμμικότητες αμελούνται.  $\theta$  είναι η γωνιακή θέση,  $\omega$  η γωνιακή ταχύτητα και  $i$  το ρεύμα τυμπάνου.  $e$  είναι η τάση που εφαρμόζεται στο τύμπανο και σε αυτό το παράδειγμα θεωρείται σταθερή. Υποθέτουμε ότι ο συντελεστής απόσβεσης  $b(t)$  μεταβάλλεται περιοδικά. Η δυναμική του

συστήματος δίνεται από τις (2.25)–(2.29).

$$\dot{\theta} = \omega \quad (2.25)$$

$$J\dot{\omega} = -b(t)\omega + Ki \quad (2.26)$$

$$L\dot{i} = e - K\omega - Ri \quad (2.27)$$

$$\dot{\phi}_b = \omega_{b0} \quad (2.28)$$

$$b(t) = b_0 + b_1 \cos(\phi_b) \quad (2.29)$$

Μετράται μόνο η γωνιακή θέση, χρησιμοποιώντας όπως προαναφέρθηκε έναν  $\sin/\cos$  encoder. Υποθέτουμε ότι μετρήσεις λαμβάνονται κάθε  $\delta = 0.01\text{sec}$  σύμφωνα με τις (2.30)–(2.31)

$$y_{1,k} = \sin(\theta_k) + v_{1,k}, \quad (2.30)$$

$$y_{2,k} = \cos(\theta_k) + v_{2,k}, \quad (2.31)$$

όπου  $v_{1,k}$  και  $v_{2,k}$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες κανονικές τ.μ. με μηδενικό μέσο και διακύμανση  $R_v$ .

Στο διακριτό χρόνο και με βήμα ίσο με  $\delta$ , και λαμβάνοντας υπόψη ότι το σύστημα υπόκειται σε διαταραχές, η δυναμική προσεγγίζεται από τις ακόλουθες εξισώσεις.

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \delta\omega_k + w_{1,k} \quad (2.32)$$

$$\omega_{k+1} = \omega_k + \delta(-b_k\omega_k + Ki_k)/J + w_{2,k} \quad (2.33)$$

$$i_{k+1} = i_k + \delta(e - K\omega_k - Ri_k)/L + w_{3,k} \quad (2.34)$$

$$\phi_{b,k+1} = \phi_{b,k} + \delta\omega_{b0} + w_{4,k} \quad (2.35)$$

$$b_k = b_0 + b_1 \cos(\phi_{b,k}) \quad (2.36)$$

Επομένως το πρόβλημα είναι να εκτιμηθεί η κατάσταση του συστήματος με εξισώσεις κατάστασης (2.32)–(2.35) όπου το  $b_k$  ορίζεται από την (2.36), και εξισώσεις εξόδου (2.30)–(2.31).

Όπως στην υποενότητα 2.2.1, οι (2.30)–(2.31) μπορούν να αντιστραφούν για να δώσουν μία εικονική μέτρηση του  $\theta$ , αλλά σε αυτήν την περίπτωση η αντιστροφή δεν γίνεται άμεσα. Ισχύει  $\theta = \arctan(y_1 - v_1, y_2 - v_2)$ , όπου  $\arctan(y, x)$  είναι η γωνία της οποίας το ημίτονο και το συνημίτονο είναι ίσα με  $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$  και  $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

αντίστοιχα. Έστω  $R = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ ,  $\phi = \arctan(y_1, y_2)$  ώστε να ισχύει  $y_1 = R\sin\phi$  και  $y_2 = R\cos\phi$ .

Τότε ορίζουμε τις τ.μ.  $n = \cos\phi v_1 - \sin\phi v_2$  και  $r = -\sin\phi v_1 - \cos\phi v_2$ . Είναι (από κοινού) κανονικά κατανομημένες και μπορεί να εξακριβωθεί μέσω απλών υπολογισμών ότι έχουν διακύμανση ίση με  $R_v$ , όπως και ότι είναι ασυσχέτιστες άρα ανεξάρτητες. Ας ορίσουμε την τ.μ.

$$q = -\frac{n}{r + R}. \quad (2.37)$$

Τότε

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan(R\sin\phi + r\sin\phi - n\cos\phi, R\cos\phi + r\cos\phi + n\sin\phi) \\ &= \arctan((R+r)\sin\phi - n\cos\phi, (R+r)\cos\phi + n\sin\phi) \\ &= \arctan(\sin\phi + q\cos\phi, \cos\phi - q\sin\phi). \quad (2.38)\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \quad (2.39)$$

μπορεί να ελεγχθεί ότι

$$\theta = \arctan(\sin\phi + q\cos\phi, \cos\phi - q\sin\phi) = \phi + \arctan(q). \quad (2.40)$$

Εφόσον η  $\arctan$  είναι περιττή συνάρτηση και η σ.π.π. της  $n$  είναι επίσης περιττή έπεται ότι  $\mathbb{E}[\arctan(q)] = 0$  και άρα  $\mathbb{E}[\theta] = \phi$ . Η διακύμανση της  $\arctan(q)$  εξαρτάται από το  $R$ .

Σημειώνουμε ότι η  $\phi$  είναι και η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας του  $\theta$ . Πράγματι, η πιθανοφάνεια είναι ίση με

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi R_v}} e^{-\frac{(y_1 - \sin\phi)^2}{2R_v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi R_v}} e^{-\frac{(y_2 - \cos\phi)^2}{2R_v}}. \quad (2.41)$$

Άρα μεγιστοποιείται όταν η παράσταση  $(y_1 - \sin\phi)^2 + (y_2 - \cos\phi)^2$  ελαχιστοποιείται. Όμως ισχύει ότι

$$\begin{aligned}(y_1 - \sin\phi)^2 + (y_2 - \cos\phi)^2 &= \\ &= y_1^2 + y_2^2 + \sin^2\phi + \cos^2\phi - 2(y_1\sin\phi + y_2\cos\phi) = \\ &= y_1^2 + y_2^2 + 1 - 2(y_1\sin\phi + y_2\cos\phi). \quad (2.42)\end{aligned}$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η παράσταση  $(y_1\sin\phi + y_2\cos\phi)$  μεγιστοποιείται για  $\phi = \arctan(y_1, y_2)$  και ολοκληρώνεται η απόδειξη του ισχυρισμού.

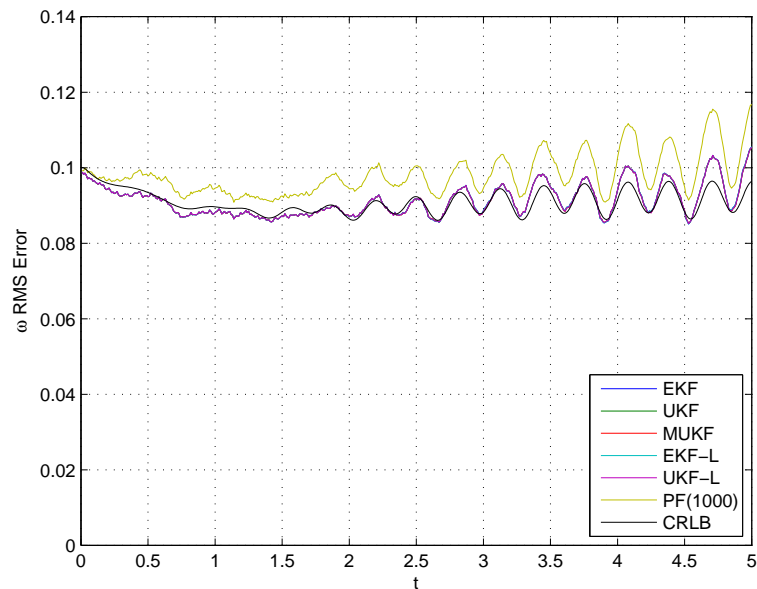
**Σχόλιο 2.3.** Η αντιστροφή δίνει την τιμή  $\theta \bmod 2\pi$ . Προκειμένου να αποφευχθούν άλματα κατά  $2\pi$ , σε κάθε χρονικό βήμα προστίθεται στο  $\arctan(y_1, y_2)$  το ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$  που το κάνει όσο πλησιέστερο γίνεται στην προηγούμενη εκτίμηση του  $\theta$ .

Οι παράμετροι του συστήματος για τις προσομοιώσεις ήταν οι ακόλουθες: (σε μονάδες του SI).  $K = 0.035$ ,  $L = 0.5$ ,  $R = 2$ ,  $J = 0.03$ ,  $b_0 = 0.01$ ,  $b_1 = 0.003$ ,  $\omega_{b0} = 10$ ,  $e = 20$ . Το σύστημα προσομοιώνεται μέχρι τη στιγμή  $t = 20$ .

Για την πρώτη περίπτωση που εξετάζεται, η διακύμανση του  $w_k$  είναι ίση με  $10^{-4}I_4$ , ενώ η διακύμανση του  $v_{1,k}$  και του  $v_{2,k}$  είναι ίση με  $10^{-4}$ . Η αρχική κατάσταση έχει μήτρα συνδιακύμανσης  $0.01I_4$ . Όλες οι αναφερθείσες τ.μ. είναι κανονικά κατανοημένες, ανεξάρτητες μεταξύ τους και με μηδενικό μέσο.

Πίνακας 2.7: Πίνακας των rms τιμών του σφάλματος εκτίμησης και του υπολογιστικού χρόνου για το παράδειγμα της υποενότητας 2.3.4, α' περίπτωση

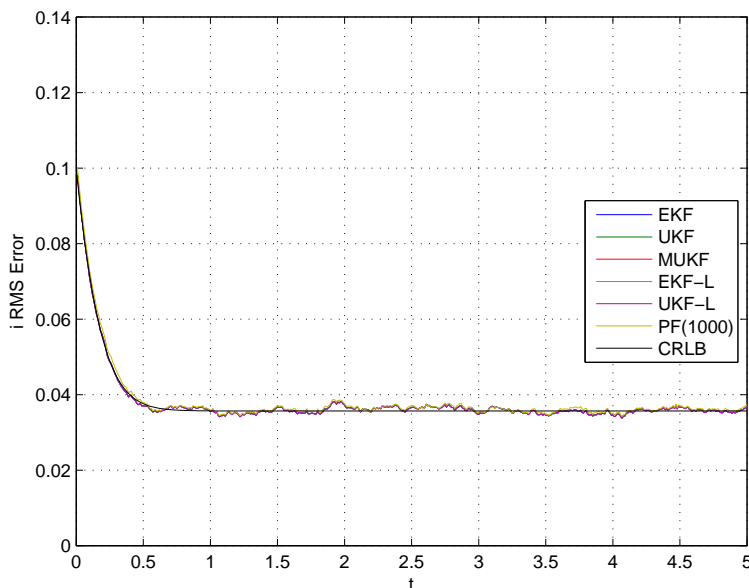
Τεχνική	Μέσο Σφάλμα				Μέγιστο Σφάλμα				Χρόνος (ms)
	$\theta$	$\omega$	$i$	$\phi_b$	$\theta$	$\omega$	$i$	$\phi_b$	
EKF	0.0079	0.0968	0.0363	0.1942	0.0083	0.1384	0.0485	0.4230	0.16
UKF	0.0079	0.0967	0.0363	0.1942	0.0083	0.1384	0.0485	0.4235	0.57
MUKF	0.0079	0.0967	0.0363	0.1942	0.0083	0.1384	0.0485	0.4233	1.14
EKF-L	0.0079	0.0968	0.0363	0.1942	0.0084	0.1384	0.0485	0.4228	0.13
UKF-L	0.0079	0.0967	0.0363	0.1942	0.0084	0.1384	0.0485	0.4233	0.57
PF/SIR(1000)	0.0079	0.1077	0.0368	0.2492	0.0084	0.1793	0.0484	0.7624	1.59



Σχήμα 2.6: Μεταβατική απόκριση διαφόρων φίλτρων για την εκτίμηση του  $\omega$  και αντίστοιχο CRLB, α' περίπτωση.

Τα αποτελέσματα από 1000 εκτελέσεις παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.7. Οι τιμές για τα σφάλματα εκτίμησης που εμφανίζονται είναι rms τιμές, ενώ οι rms τιμές για τις τέσσερις μεταβλητές είναι ίσες με 298.6, 29.1, 9.4 και 115.5. Οι αντίστοιχες τιμές του CRLB είναι 0.0079, 0.0909, 0.0364 και 0.1283.

Για το MUKF, το  $N$  επελέγη ίσο με 2. Τα αποτελέσματα με χρήση της επικρατούσας τιμής σχεδόν ταυτίζονταν με αυτά που προκύπτουν από τη χρήση του μέσου,



Σχήμα 2.7: Μεταβατική απόκριση διαφόρων φίλτρων για την εκτίμηση του  $i$  και αντίστοιχο CRLB, α' περίπτωση.

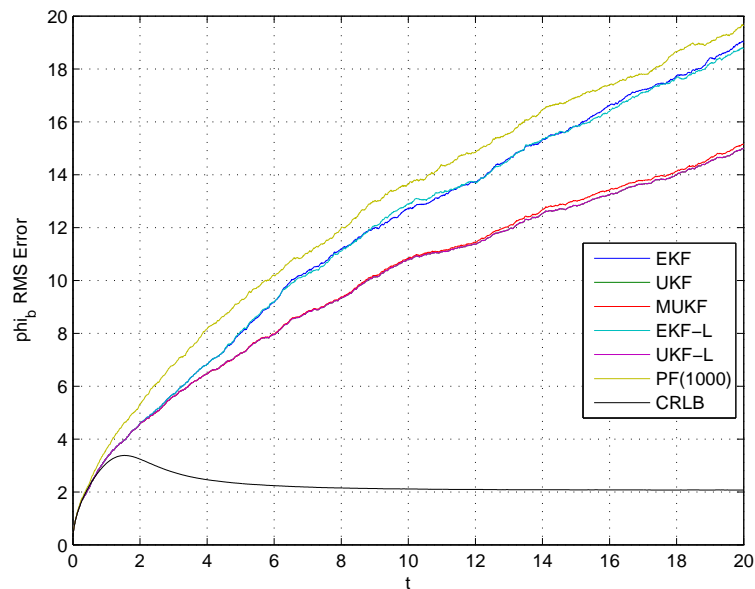
και για αυτό δεν περιλαμβάνονται στον πίνακα. Σημειώνουμε, επίσης, ότι για απλοποίηση η διακύμανση του  $q$  που ορίζεται στην (2.37), η οποία εξαρτάται από το  $R$ , έχει θεωρηθεί σταθερή με τιμή αυτήν που έχει για  $R = 1$ .

Εκτός από το PF, που δεν εκτιμά τα  $\omega$  και  $\phi_b$  με τόση ακρίβεια όσο οι άλλες μέθοδοι, δεν παρατηρούνται διαφορές ανάμεσα στις διαφορετικές τεχνικές. Αυτό συμβαίνει επειδή η απόδοση των φίλτρων είναι κοντά στο Cramer-Rao κατώτατο φράγμα, οπότε δεν υπάρχει περιθώριο βελτίωσης. Αυτό επιβεβαιώνεται στα Σχ. 2.6 και 2.7. Στο Σχ. 2.6 παρουσιάζονται οι κυματομορφές της rms τιμής του σφάλματος εκτίμησης για τη γωνιακή ταχύτητα καθώς και το αντίστοιχο Cramer-Rao φράγμα. Η απόδοση των βασισμένων στο φίλτρο Kalman μεθόδων είναι πράγματι πολύ κοντά στο CRLB. Το Σχ. 2.7 παρουσιάζει τις αντίστοιχες κυματομορφές για το ρεύμα του κινητήρα και μπορεί να παρατηρηθεί ότι οι τιμές του rms σφάλματος και του CRLB πρακτικά ταυτίζονται. Παρατηρούμε επίσης ότι οι rms τιμές ακολουθούν το κάτω φράγμα και κατά τη διάρκεια του μεταβατικού φαινομένου. Το ίδιο ισχύει και για τις rms τιμές των σφαλμάτων στην εκτίμηση του  $\theta$  (το αντίστοιχο διάγραμμα παραλείπεται για λόγους οικονομίας χώρου). Πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι τα σφάλματα για το  $\phi_b$  δεν είναι τόσο κοντά στο CRLB (βλ. και το Σχ. 2.8).

Το σύστημα μελετήθηκε και με διαφορετικές τιμές για τις μήτρες συνδιακύμανσης των θορύβων και της αρχικής κατάστασης. Συγκεκριμένα, για τη δεύτερη περίπτωση, η αρχική κατάσταση και η διαταραχή έχουν μήτρα συνδιακύμανσης ίση με  $10^{-1}I_4$ , ενώ η διακύμανση των  $v_{1,k}$  και  $v_{2,k}$  είναι ίση με  $10^{-2}$ . Τα αποτελέσματα από 1000

Πίνακας 2.8: Πίνακας των rms τιμών του σφάλματος εκτίμησης και του υπολογιστικού χρόνου για το παράδειγμα της υποενότητας 2.3.4, β' περίπτωση

Τεχνική	Μέσο Σφάλμα				Μέγιστο Σφάλμα				Χρόνος (ms)
	$\theta$	$\omega$	$i$	$\phi_b$	$\theta$	$\omega$	$i$	$\phi_b$	
EKF	0.1027	2.8636	1.1186	11.174	0.1084	4.2943	1.4269	39.3164	0.16
UKF	0.1017	2.7161	1.1184	9.2123	0.1066	4.1888	1.4208	32.3189	0.56
MUKF	0.1021	2.7176	1.1183	9.2943	0.1076	4.1978	1.4206	33.3555	1.12
EKF-L	0.1004	2.8578	1.1185	11.136	0.1050	4.2194	1.4279	48.5524	0.13
UKF-L	0.1004	2.7161	1.1184	9.2126	0.1050	4.1877	1.4207	32.3655	0.57
PF/SIR(1000)	0.0965	3.1289	1.1603	12.020	0.1012	4.9182	1.4557	47.6644	1.35



Σχήμα 2.8: Μεταβατική απόκριση διαφόρων φίλτρων για την εκτίμηση του  $\phi_b$  και αντίστοιχο CRLB, β' περίπτωση.

εκτελέσεις με αυτές τις συνθήκες παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.8. Οι rms τιμές για τις τέσσερις μεταβλητές είναι ίσες με 300.8, 29.4, 9.5 και 115.6. Τώρα υπάρχουν σημαντικότερες διαφορές μεταξύ των διαφορετικών αλγορίθμων φιλτραρίσματος. Π.χ., ενώ το PF(1000) δίνει την καλύτερη εκτίμηση για το  $\theta$ , δεν εκτιμά πολύ καλά το  $\omega$ . Η αντιστροφή της εξόδου μειώνει το σφάλμα εκτίμησης για το  $\theta$  καθώς και το σφάλμα στην εκτίμηση του  $\omega$  από το EKF. Το UKF αντίθετα, που αντιμετωπίζει καλύτερα τις

Πίνακας 2.9: Συγκριτικά αποτελέσματα εκτιμήσεων βάσει της μέσης και της επικρατούσας τιμής για το παράδειγμα της υποενότητας 2.3.4, β' περίπτωση

Τεχνική	Μέσο Σφάλμα				Μέγιστο Σφάλμα				Χρόνος (ms)
	$\theta$	$\omega$	$i$	$\phi_b$	$\theta$	$\omega$	$i$	$\phi_b$	
MUKF	0.1021	2.7131	1.1261	9.3882	0.1060	3.5359	1.3459	24.1602	1.14
MUKF-Mode	0.0960	2.7130	1.1261	9.3882	0.0991	3.5342	1.3459	24.1601	9.44

μη-γραμμικότητες από μόνο του, δεν ωφελείται από την αντιστροφή για την εκτίμηση του  $\omega$ .

Όπως και πριν, το CRLB πρακτικά ταυτίζεται με το σφάλμα της καλύτερης τεχνικής για τα  $i$  και  $\theta$ , ενώ η απόκλιση είναι μικρή για το  $\omega$ . Τα διαγράμματα παραλείπονται για συντομία. Το αντίστοιχο διάγραμμα για το  $\phi_b$ , για το οποίο η απόκλιση μεταξύ CRLB και των σφαλμάτων εκτίμησης είναι μεγάλη, είναι το Σχ. 2.8. Οι rms τιμές του CRLB για τις τέσσερις μεταβλητές κατάστασης είναι ίσες με 0.0957, 2.6901, 1.1248 και 2.2860. Οι υπολογιστικοί χρόνοι δίνονται σε msec. Το MUKF είναι πιο απαιτητικό υπολογιστικά από το UKF, αλλά οι χρόνοι είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Αυτό δείχνει ότι το MUKF μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμη και σε τετραδιάστατα συστήματα, τουλάχιστον για  $N = 2$ .

Με τα χαρακτηριστικά των θορύβων της δεύτερης περίπτωσης, η επικρατούσα δεν ταυτίζεται πλήρως με τη μέση τιμή. Επειδή η διαδικασία μεγιστοποίησης που ακολουθήθηκε (αναδρομική μέθοδος βασισμένη στις μεθόδους που περιγράφονται στις [69, 70] και η οποία παρέχεται από τη συνάρτηση 'fminunc' του MATLAB) είναι χρονοβόρα, έγιναν μόνο 100 εκτελέσεις. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.9. Η επικρατούσα τιμή παρέχει καλύτερη εκτίμηση για το  $\theta$  από το οποίο εξαρτάται άμεσα η έξοδος. Αυτή η παρατήρηση είναι σε συμφωνία και με τα αποτελέσματα των προηγούμενων παραδειγμάτων.

## 2.4 Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου δείχνουν ότι η αντιστροφή της εξίσωσης εξόδου για το σχηματισμό μίας εικονικής γραμμικής εξόδου μπορεί να αντιμετωπίσει μη γραμμικά φαινόμενα και να μειώσει το σφάλμα εκτίμησης της εξόδου. Διαπιστώθηκε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις η έξοδος μπορεί να εκτιμηθεί πολύ καλά χρησιμοποιώντας τεχνικές βασισμένες στην επικρατούσα τιμή. Η δυνατότητα αξιοποίησης της δυναμικής μίας συγκεκριμένης συνάρτησης της κατάστασης για την εκτίμησή της αναδείχτηκε μέσω ενός παραδείγματος, στο οποίο με αυτόν τον τρόπο βελτιώνεται η συμπεριφορά των EKF και UKF. Τέλος, προτείνεται ένα νέο  $\sigma$ -point σύνολο για το UKF, το οποίο σε ένα παράδειγμα αποδίδει σημαντικά καλύτερα από το διαδεδομένο σύνολο.

Αναδείχθηκε ότι το Cramer-Rao κάτω φράγμα σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να

χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει περιθώριο βελτίωσης, ενώ σε άλλες περιπτώσεις η τιμή του μπορεί να είναι πολύ χαμηλότερη από την κατώτερη εφικτή τιμή. Επιπλέον, κάθε μία από τις προτεινόμενες τροποποιήσεις βοηθά στη μείωση του σφάλματος εκτίμησης κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Σε κάποιο βαθμό, το αν θα υπάρχει μείωση ή όχι είναι αναμενόμενο με βάση τη φύση του προβλήματος. Κάποιες πλευρές αυτού του θέματος αναφέρθηκαν.

Περαιτέρω μελέτη θα μπορούσε να αφορά τη γενική περίπτωση της αντιστροφής της εξόδου και της εκτίμησης μίας συγκεκριμένης συνάρτησης της κατάστασης. Δεδομένου ότι ο πληθώραριθμός του προτεινόμενου  $\sigma$ -point συνόλου αυξάνεται εκθετικά με τη διάσταση του χώρου κατάστασης, θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθούν περιπτώσεις όπου η Ιακωβιανή της  $f$  στην (1.1) ή της  $h$  στην (1.2) είναι αραιή προκειμένου το νέο σύνολο να είναι εφαρμόσιμο σε συστήματα μεγαλύτερης τάξης.



## Κεφάλαιο 3

# Εκτίμηση Κατάστασης Μη Γραμμικών Συστημάτων Ειδικής Δομής

### 3.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή και φάνηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για τα συστήματα μεγάλης διάστασης είναι υπολογιστικά απαιτητικό να γίνονται ακριβείς υπολογισμοί. Για παράδειγμα, το GHKF, όπως εξηγήθηκε στην υποενότητα 1.1.3, χρησιμοποιεί  $m^n$  σημεία (βλ. την εξ. 1.22), αριθμό εκθετικό ως προς τη διάσταση του χώρου.

Τα φίλτρα της βιβλιογραφίας έχουν σχεδιαστεί για ένα γενικό μη γραμμικό σύστημα. Ωστόσο, αν είναι γνωστό ότι το σύστημα είναι ειδικής δομής αυτή η πληροφορία μπορεί να αξιοποιηθεί για να γίνεται ακριβέστερα το βήμα πρόβλεψης ή διόρθωσης. Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάται μία συγκεκριμένη κλάση μη γραμμικών συστημάτων. Συγκεκριμένα, για την εξίσωση εξόδου, κάθε έξοδος είναι μία μη γραμμική συνάρτηση μίας μεταβλητής, με είσοδο ένα γραμμικό συνδυασμό των μεταβλητών κατάστασης. Για τη δυναμική του συστήματος, εκτός από το γραμμικό όρο, επιτρέπονται και μη γραμμικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής με είσοδο, και σε αυτήν την περίπτωση, ένα γραμμικό συνδυασμό των μεταβλητών κατάστασης. Αξιοποιώντας αυτή τη δομή, η ολοκλήρωση σε  $n$  διαστάσεις μπορεί να αντικατασταθεί από την επίλυση γραμμικών συστημάτων στις  $n$  διαστάσεις και ολοκλήρωση σε μία και δύο διαστάσεις. Αποφεύγοντας τη  $n$ -διάστατη ολοκλήρωση είναι εφικτό να γίνονται ακριβείς υπολογισμοί χωρίς μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης τεχνικής αναδεικνύεται και σε τρία παραδείγματα.

Στην ενότητα 3.2 ορίζεται η κλάση μη γραμμικών συστημάτων που μελετάται

---

Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζονται και στην εργασία [2], της οποίας προκαταρκτική έκδοση αποτελεί η [3].

σε αυτό το κεφάλαιο, και παρουσιάζεται λεπτομερώς η προτεινόμενη τεχνική. Στην ενότητα 3.3 παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο οι εξισώσεις πέντε σημαντικών υποκλάσεων της γενικής κλάσης μπορούν να γραφούν στη μορφή της γενικής κλάσης. Στην ενότητα 3.4 η προτεινόμενη τεχνική δοκιμάζεται σε τρία παραδείγματα. Η ενότητα 3.5 περιέχει τα συμπεράσματα.

## 3.2 Ανάλυση της Κλάσης Υπό Μελέτη

### 3.2.1 Ορισμός της Κλάσης

Η κλάση που εξετάζεται αποτελείται από τα συστήματα με δυναμική της μορφής

$$x_{k+1} = Ax_k + \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k) + w_k \quad (3.1)$$

και εξίσωση εξόδου της μορφής

$$y_{k,i} = h_i(C_i^T x_k) + v_{k,i}, i = 1, \dots, N_o, \quad (3.2)$$

όπου οι  $g_i$  και  $h_i$  είναι μη γραμμικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής,  $N_c, N_o \in \mathbb{N}$ , ενώ τα  $C_i$  και  $D_i$  είναι διανύσματα-στήλη στον  $\mathbb{R}^n$ .

Στην επόμενη υποενότητα αναλύεται το πρόβλημα αναδρομικής εκτίμησης κατάστασης για συστήματα της μορφής (3.1)–(3.2) και παρουσιάζεται η προτεινόμενη τεχνική. Στην υποενότητα 3.2.3 αποδεικνύεται ότι γραμμικοί μετασχηματισμοί του χώρου κατάστασης δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματα.

### 3.2.2 Ο Προτεινόμενος Αλγόριθμος

Η ακόλουθη πρόταση είναι το κύριο εργαλείο που χρησιμοποιείται για να μειωθεί η διάσταση της ολοκλήρωσης.

**Πρόταση 3.1.** *Ας υποθέσουμε ότι  $x$  είναι μία κανονικά κατανομημένη τυχαία μεταβλητή με τιμές στον  $\mathbb{R}^n$ , μέσο  $M$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $P > 0$ ,  $C$  είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα-στήλη στον  $\mathbb{R}^n$  και  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μία Borel-μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε η τ.μ.  $g(C^T x)$  να έχει πεπερασμένη διακύμανση. Ας υποθέσουμε επίσης ότι  $\{v_i, i = 1, \dots, n-1\}$  είναι  $n-1$  γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα τέτοια ώστε  $v_i^T P C = 0$ . Έστω  $S = \mathbb{E}[xg(C^T x)]$ . Τότε το  $S$  είναι η μοναδική λύση του γραμμικού συστήματος*

$$\begin{bmatrix} C^T \\ v_1^T \\ \vdots \\ v_{n-1}^T \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[C^T x g(C^T x)] \\ v_1^T M \mathbb{E}[g(C^T x)] \\ \vdots \\ v_{n-1}^T M \mathbb{E}[g(C^T x)] \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, τα διανύσματα  $\{v_1, \dots, v_{n-1}, C\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αυτό αποδεικνύεται ως ακολούθως. Έστω ότι

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n C = 0. \quad (3.4)$$

Αναστρέφοντας τα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής και πολλαπλασιάζοντάς τα εκ δεξιών με  $PC$  προκύπτει ότι

$$\lambda_1 v_1^T PC + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}^T PC + \lambda_n C^T PC = 0 \Rightarrow \lambda_n C^T PC = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0. \quad (3.5)$$

Όμως τότε

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} = 0 \quad (3.6)$$

και εφόσον τα  $\{v_i, i = 1, \dots, n-1\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$  και ολοκληρώνεται ο ισχυρισμός. Επομένως ο πίνακας των συντελεστών του γραμμικού συστήματος είναι μη ιδιάζων και άρα το σύστημα δέχεται μοναδική λύση.

Για να αποδειχτεί ότι η λύση αυτή είναι το  $S$ , χρησιμοποιείται το γεγονός ότι οι τ.μ.  $C^T x$  και  $v_i^T x$  είναι ασυσχέτιστες και κανονικά κατανομημένες (από κοινού), επομένως είναι ανεξάρτητες. Πράγματι,  $\text{Cov}(C^T x, v_i^T x) = C^T P v_i = 0$  άρα  $v_i^T S = \mathbb{E}[v_i^T x g(C^T x)] = \mathbb{E}[v_i^T x] \mathbb{E}[g(C^T x)] = v_i^T M \mathbb{E}[g(C^T x)]$ . Η εξίσωση  $C^T S = \mathbb{E}[C^T x g(C^T x)]$  έπεται από τον ορισμό του  $S$ .  $\square$

**Σχόλιο 3.1.** Εφόσον η μήτρα  $P$  είναι θετικά ορισμένη και το  $C$  είναι μη μηδενικό, πάντα υπάρχουν τέτοια  $\{v_i, i = 1, \dots, n-1\}$ .

**Σχόλιο 3.2.** Ο υπολογισμός του  $S$  απευθείας από τον ορισμό του,  $S = \mathbb{E}[xg(C^T x)]$ , είναι ένα πρόβλημα ολοκλήρωσης στις  $n$  διαστάσεις. Με την παραπάνω πρόταση, έχει αναχθεί στο  $n$ -διάστατο γραμμικό σύστημα (3.3) και σε δύο μονοδιάστατα προβλήματα ολοκλήρωσης, την προσέγγιση του  $\mathbb{E}[x_C g(x_C)]$  και του  $\mathbb{E}[g(x_C)]$ , όπου  $x_C = C^T x$  είναι τ.μ. με πραγματικές τιμές.

Σε αυτό το κεφάλαιο, τόσο για το βήμα πρόβλεψης όσο και για το βήμα διόρθωσης, η αριθμητική προσέγγιση των ολοκληρωμάτων θα γίνεται με βάση τη μέθοδο προσεγγιστικής ολοκλήρωσης Gauss-Hermite, δηλαδή με βάση τις (1.21) και (1.22). Ωστόσο, ο προτεινόμενος αλγόριθμος μπορεί να συνδυαστεί με οποιαδήποτε μέθοδο προσεγγιστικής ολοκλήρωσης. Όπως θα φανεί στο υπόλοιπο μέρος αυτής της ενότητας, μόνο μέχρι διδιάστατη ολοκλήρωση χρειάζεται, επειδή ο προτεινόμενος αλγόριθμος χρησιμοποιεί την Πρόταση 3.1 για να μειώσει τη διάσταση της ολοκλήρωσης. Έτσι η προσέγγιση μπορεί να είναι ακριβής χωρίς να είναι υπολογιστικά απαιτητική.

Τονίζεται το λεπτό σημείο ότι η Πρόταση 3.1 ισχύει για κανονικές τυχαίες μεταβλητές, ενώ η πραγματική κατανομή της κατάστασης δεν είναι κανονική. Όμως, ακόμη και χωρίς την Πρόταση 3.1, για παράδειγμα στο GHKF, οι αναμενόμενες τιμές υπολογίζονται για κανονική κατανομή. Ως εκ τούτου, αν η προσέγγιση είναι ακριβής, η χρήση της πρότασης δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα, ενώ μειώνει τον υπολογιστικό χρόνο.

Και για τα δύο βήματα, όλοι οι υπολογισμοί αναλύονται πρώτα λεπτομερώς και ύστερα ο αλγόριθμος παρουσιάζεται σε σύντομη μορφή.

## Βήμα Πρόβλεψης

Έστω ότι η  $x_k$  έχει μέσο  $\hat{x}_k$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $P_{x_k}$ . Τότε από την (3.1) προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}[x_{k+1}] = A\hat{x}_k + \sum_{i=1}^{N_c} B_i \mathbb{E}[g_i(D_i^T x_k)]. \quad (3.7)$$

Εφόσον, για κάθε  $i = 1 \dots N_c$ , η  $D_i^T x_k$  είναι κανονική τ.μ. με πραγματικές τιμές, μέσο  $D_i^T \hat{x}_k$  και διακύμανση  $D_i^T P_{x_k} D_i$ , η  $\mathbb{E}[g_i(D_i^T x_k)]$  προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας την (1.21) με  $g = g_i$ ,  $\mu = D_i^T \hat{x}_k$  και  $P = D_i^T P_{x_k} D_i$ . Έστω  $\bar{g}_i$  η τιμή που προκύπτει. Τότε η πρόβλεψη για το μέσο είναι η ακόλουθη:

$$\hat{x}_{k+1}^- = A\hat{x}_k + \sum_{i=1}^{N_c} B_i \bar{g}_i. \quad (3.8)$$

**Σχόλιο 3.3.** Οι αναμενόμενες τιμές σε αυτή την παράγραφο είναι δεσμευμένες ως προς  $\hat{x}_k$  και  $P_{x_k}$ . Οι συνθήκες αυτές παραλείπονται προκειμένου να απλοποιηθεί ο συμβολισμός. Για παράδειγμα, γράφουμε  $\mathbb{E}[x_{k+1}]$  αντί για  $\mathbb{E}[x_{k+1}|\hat{x}_k, P_{x_k}]$  και  $V[x_{k+1}]$  αντί για  $V[x_{k+1}|\hat{x}_k, P_{x_k}]$ .

Το βήμα πρόβλεψης περιλαμβάνει τον υπολογισμό της εκ των προτέρων διακύμανσης της  $x_{k+1}$ . Ισχύει

$$\begin{aligned} P_{x_{k+1}}^- &= V[x_{k+1}] = V \left[ Ax_k + \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k) + w_k \right] = \\ &= V[Ax_k] + V \left[ \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k) \right] + \text{Cov} \left( Ax_k, \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k) \right) + \\ &\quad + \text{Cov} \left( \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k), Ax_k \right) + V[w_k]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Είναι γνωστό ότι  $V[w_k] = Q$  και  $V[Ax_k] = AP_{x_k}A^T$ .

Ας θεωρήσουμε τον δεύτερο όρο της (3.9).

$$\begin{aligned} &V \left[ \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k) \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k) \left( \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k) \right)^T \right] - \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k) \right] \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k) \right]^T = \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k) g_j(D_j^T x_k) B_j^T \right] - \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} B_i \mathbb{E} [g_i(D_i^T x_k)] \mathbb{E} [g_j(D_j^T x_k)] B_j^T = \\ &= \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} B_i \mathbb{E} [g_i(D_i^T x_k) g_j(D_j^T x_k)] B_j^T - \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} B_i \mathbb{E} [g_i(D_i^T x_k)] \mathbb{E} [g_j(D_j^T x_k)] B_j^T. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Για  $i = j$ , η  $\mathbb{E} \left[ g_i(D_i^T x_k) g_j(D_j^T x_k) \right]$  προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας την (1.21) με  $g = g_i^2$ ,  $\mu = D_i^T \hat{x}_k$  και  $P = D_i^T P_{x_k} D_i$ . Για  $i \neq j$ , η  $\mathbb{E} \left[ g_i(D_i^T x_k) g_j(D_j^T x_k) \right]$  προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας την (1.22) με  $g(x_1, x_2) = g_i(x_1) g_j(x_2)$ ,  $\mu = (D_i^T \hat{x}_k, D_j^T \hat{x}_k)^T$  και  $P$  ίση με

$$\begin{bmatrix} D_i^T P_{x_k} D_i & D_i^T P_{x_k} D_j \\ D_j^T P_{x_k} D_i & D_j^T P_{x_k} D_j \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Και στις δύο περιπτώσεις, έστω  $\bar{g}_{ij}$  η προσέγγιση που προκύπτει για την  $\mathbb{E} \left[ g_i(D_i^T x_k) g_j(D_j^T x_k) \right]$ . Τότε η προσέγγιση για τον δεύτερο όρο της (3.9) είναι

$$V \left[ \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k) \right] \approx \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} B_i \bar{g}_{ij} B_j^T - \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} B_i \bar{g}_i \bar{g}_j B_j^T. \quad (3.12)$$

Ο τέταρτος όρος της (3.9) είναι ο ανάστροφος του τρίτου όρου, οπότε αρκεί να προσεγγιστεί μόνο ο τρίτος όρος. Ισχύει:

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left( Ax_k, \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k) \right) &= \mathbb{E} \left[ Ax_k \left( \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k) \right)^T \right] - \mathbb{E} [Ax_k] \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k) \right]^T \\ &= \sum_{i=1}^{N_c} \mathbb{E} \left[ Ax_k g_i(D_i^T x_k) B_i^T \right] - A \hat{x}_k \left( \sum_{i=1}^{N_c} B_i \mathbb{E} \left[ g_i(D_i^T x_k) \right] \right)^T \\ &= A \sum_{i=1}^{N_c} \mathbb{E} \left[ x_k g_i(D_i^T x_k) \right] B_i^T - A \hat{x}_k \sum_{i=1}^{N_c} \mathbb{E} \left[ g_i(D_i^T x_k) \right] B_i^T. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Η  $\mathbb{E} \left[ x_k g_i(D_i^T x_k) \right]$  προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας την (3.3). Οι αναμενόμενες τιμές στο δεξιό μέλος της (3.3) προσεγγίζονται από τα  $\bar{g}_{ii}$  και  $\bar{g}_i$ . Τα διανύσματα  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  εξαρτώνται από το  $i$  και το χρονικό βήμα  $k$ . Έστω  $\bar{x} \bar{g}_i$  η λύση της (3.3). Τότε η προσέγγιση για τον τρίτο όρο της (3.9) είναι

$$\text{Cov} \left( Ax_k, \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i^T x_k) \right) \approx A \sum_{i=1}^{N_c} \bar{x} \bar{g}_i B_i^T - A \hat{x}_k \sum_{i=1}^{N_c} \bar{g}_i B_i^T. \quad (3.14)$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.12) και (3.14) μπορεί να υπολογιστεί μία προσέγγιση της  $P_{x_{k+1}}^-$  και να ολοκληρωθεί το βήμα πρόβλεψης. Ο αλγόριθμος που περιγράφηκε παραπάνω συνοψίζεται στο Σχ. 3.1.

## Βήμα Διόρθωσης

Για το βήμα διόρθωσης πρέπει να υπολογιστούν τα  $\hat{y}_{k+1}^-$ ,  $P_{y_{k+1}}^-$  και  $P_{x_{k+1}, y_{k+1}}^-$ . Οι υπολογισμοί αυτοί γίνονται με τεχνικές αντίστοιχες με του βήματος πρόβλεψης.

```

1: function PREDICTIONSTEP( $\hat{x}_k, P_{x_k}$ )
2:   for  $i \leftarrow 1 : N_c$  do
3:     Calculate  $\bar{g}_i$  using (1.21)
4:   end for
5:   for  $i \leftarrow 1 : N_c$  do
6:     for  $j \leftarrow 1 : N_c$  do
7:       if  $i = j$  Calculate  $\bar{g}_{ij}$  using (1.21)
8:       if  $i \neq j$  Calculate  $\bar{g}_{ij}$  using (1.22)
9:     end for
10:  end for
11:  for  $i \leftarrow 1 : N_c$  do
12:    Calculate  $\bar{x}\bar{g}_i$  solving (3.3)
13:  end for
14:   $V \leftarrow \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} B_i \bar{g}_{ij} B_j^T - \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} B_i \bar{g}_i \bar{g}_j B_j^T$ 
15:   $COV \leftarrow A \sum_{i=1}^{N_c} \bar{x}\bar{g}_i B_i^T - A \hat{x}_k \sum_{i=1}^{N_c} \bar{g}_i B_i^T$ 
16:   $\hat{x}_{k+1}^- \leftarrow A \hat{x}_k + \sum_{i=1}^{N_c} B_i \bar{g}_i$  ▷ Prediction Mean
17:   $P_{x_{k+1}}^- \leftarrow A P_{x_k} A^T + V + COV + COV^T + Q$ 
18: ▷ Prediction Covariance
19: end function

```

---

Σχήμα 3.1: Αλγόριθμος Βήματος Πρόβλεψης

Ξεκινάμε από το  $\hat{y}_{k+1}^-$ . Από την (3.2) έπεται ότι για  $i = 1 \dots N_i$

$$\hat{y}_{k+1, i}^- = \mathbb{E} \left[ h_i(C_i^T x_{k+1}) \right]. \quad (3.15)$$

**Σχόλιο 3.4.** Οι αναμενόμενες τιμές σε αυτή την παράγραφο είναι δεσμευμένες ως προς  $\hat{x}_{k+1}^-$  και  $P_{x_{k+1}}^-$ . Οι συνθήκες αυτές παραλείπονται προκειμένου να απλοποιηθεί ο συμβολισμός. Για παράδειγμα, γράφουμε  $\mathbb{E} \left[ h_i(C_i^T x_{k+1}) \right]$  αντί για  $\mathbb{E} \left[ h_i(C_i^T x_{k+1}) | \hat{x}_{k+1}^-, P_{x_{k+1}}^- \right]$ .

Η  $\mathbb{E} \left[ h_i(C_i^T x_{k+1}) \right]$  προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας την (1.21) με  $g = h_i$ ,  $\mu = C_i^T \hat{x}_{k+1}^-$  και  $P = C_i^T P_{x_{k+1}}^- C_i$ . Έστω  $\bar{h}_i$  η τιμή που προκύπτει. Για την  $P_{y_{k+1}}$ , από την (3.2) προκύπτει

$$\begin{aligned} (P_{y_{k+1}}^-)_{i,j} &= \\ &= \mathbb{E}[(h_i(C_i^T x_{k+1}) + v_{k+1,i})(h_j(C_j^T x_{k+1}) + v_{k+1,j})] - \mathbb{E}[h_i(C_i^T x_{k+1}) + v_{k+1,i}] \mathbb{E}[h_j(C_j^T x_{k+1}) + v_{k+1,j}] \\ &= \mathbb{E}[h_i(C_i^T x_{k+1}) h_j(C_j^T x_{k+1})] + R_{i,j} - \mathbb{E}[h_i(C_i^T x_{k+1})] \mathbb{E}[h_j(C_j^T x_{k+1})]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Η  $\mathbb{E}[h_i(C_i^T x_{k+1}) h_j(C_j^T x_{k+1})]$  μπορεί να προσεγγιστεί όπως η  $\mathbb{E}[g_i(D_i^T x_k) g_j(D_j^T x_k)]$  στο βήμα πρόβλεψης. Έστω  $\bar{h}_{ij}$  η προσεγγιστική τιμή που προκύπτει. Τότε η προ-

```

1: function CORRECTIONSTEP( $\hat{x}_{k+1}^-$ ,  $P_{x_{k+1}}^-$ ,  $y_{k+1}$ )
2:   for  $i \leftarrow 1 : N_o$  do
3:     Calculate  $\bar{h}_i$  using (1.21)
4:   end for
5:   for  $i \leftarrow 1 : N_o$  do
6:     for  $j \leftarrow 1 : N_o$  do
7:       if  $i = j$  Calculate  $\bar{h}_{ij}$  using (1.21)
8:       if  $i \neq j$  Calculate  $\bar{h}_{ij}$  using (1.22)
9:     end for
10:  end for
11:  for  $i \leftarrow 1 : N_o$  do
12:    Calculate  $\overline{xh}_i$  solving (3.3)
13:  end for
14:   $\hat{y}^- \leftarrow (\bar{h}_i)$ 
15:   $P_y^- \leftarrow (\bar{h}_{ij} - \bar{h}_i \bar{h}_j) + R$ 
16:   $P_{x,y}^- \leftarrow (\overline{xh}_j - \hat{x}_{k+1}^- \bar{h}_j)$ 
17:   $K \leftarrow P_{x,y}^- P_y^{-1}$ 
18:   $\hat{x}_{k+1} \leftarrow \hat{x}_{k+1}^- + K (y_{k+1} - \hat{y}^-)$  ▷ Updated Mean
19:   $P_{x_{k+1}} \leftarrow P_{x_{k+1}}^- - K P_y^- K^T$  ▷ Updated Covariance
20: end function

```

---

Σχήμα 3.2: Αλγόριθμος Βήματος Διόρθωσης

σέγγιση για το  $(P_{y_{k+1}}^-)_{i,j}$  είναι

$$(P_{y_{k+1}}^-)_{i,j} \approx \bar{h}_{ij} - \bar{h}_i \bar{h}_j + R_{ij}. \quad (3.17)$$

Τέλος, η  $j$ -οστή στήλη της  $P_{x_{k+1},y_{k+1}}^-$ ,  $(P_{x_{k+1},y_{k+1}}^-)_j$  είναι ίση με

$$(P_{x_{k+1},y_{k+1}}^-)_j = \mathbb{E}[x_{k+1} h_j (C_j^T x_{k+1})] - \mathbb{E}[x_{k+1}] \mathbb{E}[h_j (C_j^T x_{k+1})]. \quad (3.18)$$

Η  $\mathbb{E}[x_{k+1} h_j (C_j^T x_{k+1})]$  υπολογίζεται αντίστοιχα με την  $\mathbb{E}[x_k g_i (D_i^T x_k)]$  στο βήμα πρόβλεψης. Αν η προσεγγιστική τιμή συμβολίζεται με  $\overline{xh}_j$ , η προσέγγιση για τη στήλη  $(P_{x_{k+1},y_{k+1}}^-)_j$  είναι

$$(P_{x_{k+1},y_{k+1}}^-)_j \approx \overline{xh}_j - \hat{x}_{k+1}^- \bar{h}_j. \quad (3.19)$$

Μετά τον υπολογισμό των  $\hat{y}_{k+1}^-$ ,  $P_{y_{k+1}}^-$  και  $P_{x_{k+1},y_{k+1}}^-$ , το βήμα διόρθωσης ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας τις (1.15)–(1.17) όπως στο KF και τις μη γραμμικές παραλλαγές του. Ο αλγόριθμος του βήματος διόρθωσης συνοψίζεται στο Σχ. 3.2.

### 3.2.3 Ιδιότητα Αναλλοιώτου σε Γραμμικούς Μετασχηματισμούς

Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων χρησιμοποιούνται συχνά στη θεωρία τόσο των γραμμικών [71] όσο και των μη γραμμικών [4] συστημάτων. Το Φίλτρο Kalman δεν επηρεάζεται από γραμμικούς μετασχηματισμούς, δηλαδή αν η κατάσταση του συστήματος μετασχηματιστεί μέσω του  $x' = Tx$ , τότε ισχύει  $\hat{x}'_k = T\hat{x}_k$  για κάθε  $k$ . Σε αυτήν την υποενότητα αποδεικνύεται ότι για την κλάση υπό μελέτη, και η προτεινόμενη τροποποιημένη τεχνική έχει αυτήν την ιδιότητα. Το γεγονός αυτό έχει τη σημαντική συνέπεια ότι η επιλογή πραγματοποίησης στο χώρο κατάστασης μίας συνάρτησης μεταφοράς είναι αδιάφορη όταν σημασία έχουν μόνο οι είσοδοι και οι έξοδοι. Αυτή η συνέπεια χρησιμοποιείται στην ενότητα 3.4.

Έστω επομένως  $T$  μία μη ιδιάζουσα  $n \times n$  μήτρα. Με απλούς υπολογισμούς προκύπτει ότι στις συντεταγμένες που ορίζονται από τη σχέση  $x' = Tx$ , το σύστημα περιγράφεται από τις ακόλουθες:

$$x'_{k+1} = A'x'_k + \sum_{i=1}^{N_c} B'_i g_i(D_i'^T x'_k) + w'_k, \quad (3.20)$$

$$y_{k,i} = h_i(C_i'^T x'_k) + v_{k,i}, i = 1, \dots, N_o, \quad (3.21)$$

όπου

$$A' = TAT^{-1}, \quad (3.22)$$

$$B'_i = TB_i, \quad (3.23)$$

$$D'_i = (T^T)^{-1}D_i, \quad (3.24)$$

$$C'_i = (T^T)^{-1}C_i, \quad (3.25)$$

ενώ επιπλέον έχουμε ότι

$$w'_k \sim \mathcal{N}(0, TQT^T), \quad (3.26)$$

$$x'_0 \sim \mathcal{N}(T\hat{x}_0, TP_{x_0}T^T). \quad (3.27)$$

Το αποτέλεσμα αυτής της υποενότητας διατυπώνεται στην ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 3.2.** *Ας θεωρήσουμε το σύστημα που περιγράφεται από τις (3.1)–(3.2) και το μετασχηματισμό συντεταγμένων  $x' = Tx$ . Αν  $\hat{x}_k$  και  $P_{x_k}$  είναι οι εκτιμήσεις του προτεινόμενου φίλτρου για τις αρχικές συντεταγμένες, ενώ  $\hat{x}'_k$  και  $P_{x'_k}$  είναι οι εκτιμήσεις για τις μετασχηματισμένες συντεταγμένες, τότε για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  ισχύει*

$$\hat{x}'_k = T\hat{x}_k, P_{x'_k} = TP_{x_k}T^T. \quad (3.28)$$

*Απόδειξη.* Για  $k = 0$  η (3.28) είναι στοιχειώδες αποτέλεσμα της Θεωρίας Πιθανοτήτων, διατυπωμένο και στην (3.27). Έστω ότι η (3.28) ισχύει για τη χρονική στιγμή  $k$ . Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για  $k + 1$ .



Για κάθε  $i = 1 \dots N_c$ , από την (3.24) έπεται ότι  $D_i'^T \hat{x}'_k = D_i^T T^{-1} T \hat{x}_k = D_i^T \hat{x}_k$  και  $D_i'^T P_{x_k}' D_i' = D_i^T T^{-1} T P_{x_k} T^T (T^T)^{-1} D_i = D_i^T P_{x_k} D_i$ . Οπότε τα  $\sigma$ -points για τη μη γραμμική συνάρτηση  $g_i$  δεν επηρεάζονται από το μετασχηματισμό. Αυτό συνεπάγεται ότι  $\bar{g}'_i = \bar{g}_i$  και  $\bar{g}'_{ij} = \bar{g}_{ij}$ .

Το δεξιό μέλος της (3.3) επομένως δεν αλλάζει. Η μήτρα των συντελεστών πολλαπλασιάζεται εκ δεξιών με  $T^{-1}$ , γιατί αυτό ισχύει για την πρώτη γραμμή λόγω της (3.24), και η επιλογή  $v'_i = v_i T^{-1}$  είναι έγκυρη για τις υπόλοιπες γραμμές. Επομένως  $\bar{x} \bar{g}'_i = T \bar{x} \bar{g}_i$  είναι η λύση του αντίστοιχου συστήματος (3.3).

Χρησιμοποιώντας τις ισότητες  $\bar{g}'_i = \bar{g}_i$ ,  $\bar{g}'_{ij} = \bar{g}_{ij}$  και  $\bar{x} \bar{g}'_i = T \bar{x} \bar{g}_i$  καθώς και τις (3.20), (3.22)–(3.23) και (3.26), μπορεί να εξακριβωθεί ότι  $\hat{x}_{k+1}^- ' = T \hat{x}_{k+1}^-$  και  $P_{x_{k+1}}^- ' = T P_{x_{k+1}}^- T^T$ .

Για το βήμα διόρθωσης, όμοια με το βήμα πρόβλεψης, ισχύει ότι  $C_i'^T \hat{x}_{k+1}^- ' = C_i^T T^{-1} T \hat{x}_{k+1}^- = C_i^T \hat{x}_{k+1}^-$  και  $C_i'^T P_{x_{k+1}}^- ' C_i' = C_i^T T^{-1} T P_{x_{k+1}}^- T^T (T^T)^{-1} C_i = C_i^T P_{x_{k+1}}^- C_i$ , άρα πάλι ο μετασχηματισμός δεν επηρεάζει τα  $\sigma$ -points για τις μη γραμμικές συναρτήσεις. Οπότε  $\bar{h}'_j = \bar{h}_j$ ,  $\bar{h}'_{ij} = \bar{h}_{ij}$  και  $\bar{x} \bar{h}'_j = T \bar{x} \bar{h}_j$ . Χρησιμοποιώντας αυτές τις ισότητες μαζί με τις  $\hat{x}_{k+1}^- ' = T \hat{x}_{k+1}^-$  και  $P_{x_{k+1}}^- ' = T P_{x_{k+1}}^- T^T$  εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο αλγόριθμος βήματος διόρθωσης του Σχ. 3.2 δίνει  $\hat{x}'_{k+1} = T \hat{x}_{k+1}$  και  $P'_{x_{k+1}} = T P_{x_{k+1}} T^T$ .  $\square$

**Σχόλιο 3.5.** Χρησιμοποιώντας όμοια επιχειρήματα αποδεικνύεται εύκολα ότι ούτε το UKF επηρεάζεται από γραμμικούς μετασχηματισμούς.

## 3.3 Σημαντικές Υποκλάσεις

### 3.3.1 Συστήματα με Γραμμική Δυναμική και Μη Γραμμική Έξοδο

Είναι προφανές ότι η γραμμική δυναμική είναι της μορφής (3.1) με  $N_c = 0$ . Επομένως, ένα τέτοιο σύστημα ανήκει στην υπό μελέτη κλάση με την προϋπόθεση κάθε έξοδος του συστήματος να είναι στη μορφή της (3.2). Αυτή η υποκλάση είναι υποσύνολο της υποκλάσης που περιγράφεται στην υποενότητα 3.3.4.

### 3.3.2 SISO Γραμμικά Συστήματα με Μη Γραμμική Ανατροφοδότηση

Αν ένα SISO (single input-single output) γραμμικό σύστημα περιγράφεται από την

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k + w_k, \quad y_k = cx_k, \quad (3.29)$$

δηλαδή δεν υπάρχει σφάλμα μέτρησης, και εφαρμόζεται ανατροφοδότηση εξόδου της μορφής  $u_k = g(y_k)$ , τότε η δυναμική του συστήματος είναι της μορφής (3.1) με  $N_c = 1$ ,  $B_1 = b$ ,  $C_1 = c$  και  $g_1 = g$ . Η έξοδος είναι γραμμική, και επομένως για το βήμα

διόρθωσης οι (1.12)–(1.17) μπορούν να εφαρμοστούν απευθείας, με  $R = 0$  στην (1.13).

### 3.3.3 MIMO Γραμμικά Συστήματα με Μη Γραμμική Αποσυζευγμένη Ανατροφοδότηση

Έστω ότι ένα MIMO σύστημα περιγράφεται από την

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, \quad y_k = Cx_k, \quad (3.30)$$

όπου  $B$  είναι μία  $n \times m$  μήτρα, ενώ  $C$  είναι μία  $m \times n$  μήτρα. Έστω επίσης  $B_i$  η  $i$ -οστή στήλη του  $B$  και  $C_i$  η  $i$ -οστή γραμμή του  $C$ . Αν εφαρμοστεί ανατροφοδότηση της μορφής  $(u_k)_i = g_i((y_k)_i)$ , τότε όπως προηγουμένως η δυναμική του συστήματος είναι της μορφής (3.1) με  $N_c = m$ , και για το βήμα διόρθωσης οι (1.12)–(1.17) μπορούν να εφαρμοστούν απευθείας με  $R = 0$  στην (1.13). Σημειώνουμε ότι η (3.30) με ανατροφοδότηση  $(u_k)_i = g_i((y_k)_i)$  και χωρίς διαταραχή είναι η μορφή της υπόθεσης του Θεωρήματος Ρορον (βλ. [4] ή [72], και [73] για την περίπτωση του διακριτού χρόνου).

### 3.3.4 Εν Σειρά Σύνδεση Γραμμικών Συστημάτων με Μη Γραμμικές Χαρακτηριστικές

Ας υποθέσουμε ότι η έξοδος ενός γραμμικού συστήματος συνδέεται στην είσοδο μίας μη γραμμικής συνάρτησης μίας μεταβλητής, της οποίας η έξοδος συνδέεται στην είσοδο ενός άλλου γραμμικού συστήματος και ούτω καθεξής. Η έξοδος του συνολικού συστήματος είναι η έξοδος της τελευταίας μη γραμμικής χαρακτηριστικής. Αν υπάρχουν  $n_s$  γραμμικά συστήματα και  $n_s$  μη γραμμικές συναρτήσεις, η μαθηματική περιγραφή του συστήματος είναι ως ακολούθως.

Τα γραμμικά συστήματα περιγράφονται από τις

$$x_{k+1}^{(m)} = A^{(m)}x_k^{(m)} + b_m u_k^{(m)} + w_k^{(m)}, \quad (3.31)$$

$$y_k^{(m)} = c_m x_k^{(m)}, \quad 1 \leq m \leq n_s - 1 \quad (3.32)$$

$$x_{k+1}^{(n_s)} = A^{(n_s)}x_k^{(n_s)} + b_{n_s} u_k^{(n_s)} + w_k^{(n_s)}, \quad (3.33)$$

$$y_k^{(n_s)} = g^{n_s}(c_{n_s} x_k^{(n_s)}) + v_k^{(n_s)}, \quad (3.34)$$

ενώ η διασύνδεσή τους από τις

$$u_k^{(m)} = g^{(m-1,m)}(y_k^{(m-1)}), \quad m = 2, \dots, n_s. \quad (3.35)$$

Η κατάσταση του συνολικού συστήματος είναι

$$x = \left[ x^{(1)T} \quad x^{(2)T} \quad \dots \quad x^{(n_s)T} \right]^T. \quad (3.36)$$

Τότε το συνολικό σύστημα είναι της μορφής (3.1) με  $N_c = n_s - 1$ ,  $N_o = 1$ ,

$$A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_{n_s}) = \begin{bmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & \dots & A_{n_s} \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

$$B_1 = [O \quad b_2^T \quad \dots \quad O]^T, \dots, B_{n_s-1} = [O \quad O \quad \dots \quad b_{n_s}^T]^T, \quad (3.38)$$

$$g_i = g^{(i,i+1)}, i = 1, \dots, n_s - 1, \quad (3.39)$$

$$D_1 = [c_1 \quad O \quad O \quad \dots \quad O], \dots, D_{n_s-1} = [O \quad \dots \quad O \quad c_{n_s-1}], \quad (3.40)$$

$$Q = \text{diag}(Q_1, Q_2, \dots, Q_{n_s}), \quad (3.41)$$

$$h_1 = g^{(n_s)}, \quad (3.42)$$

$$C_1 = [O \quad \dots \quad O \quad c_{n_s}], \quad (3.43)$$

$$R = \text{diag}(O, \dots, R_{n_s}). \quad (3.44)$$

### 3.3.5 Αυθαίρετα Δίκτυα Γραμμικών Συστημάτων Διασυνδεδεμένων με Μη Γραμμικές Χαρακτηριστικές

Η περίπτωση γραμμικών συστημάτων διασυνδεδεμένων σε τοπολογία πιο σύνθετη από την εν σειρά σύνδεση της προηγούμενης υποενότητας μπορεί επίσης να αντιμετωπιστεί με την τεχνική που παρουσιάστηκε σε αυτήν την ενότητα.

Έστω ότι υπάρχουν  $n_s$  γραμμικά συστήματα που περιγράφονται από τις (3.31)–(3.33), και διασυνδέονται μέσω των μη γραμμικών χαρακτηριστικών  $g_i, i = 1 \dots N_c$ , όπου η είσοδος της χαρακτηριστικής  $g_i$  είναι η έξοδος  $y_{r_i}$ , ενώ η έξοδος της  $g_i$  οδηγείται στην είσοδο  $u_{t_i}$ . Είναι δυνατό δύο μη γραμμικές χαρακτηριστικές να οδηγούνται στην είσοδο του ίδιου γραμμικού συστήματος, δηλ. να ισχύει  $t_i = t_j$  για  $i \neq j$ , που σημαίνει ότι η είσοδος του γραμμικού συστήματος είναι το άθροισμα όλων των αντίστοιχων μη γραμμικών χαρακτηριστικών. Έτσι κάθε τοπολογία διασύνδεσης περιλαμβάνεται στην υποκλάση. Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, η έξοδος του συνολικού συστήματος είναι η έξοδος του συστήματος με δείκτη  $n_s$ .

Τότε το συνολικό σύστημα είναι της μορφής (3.1) όπου οι (3.37) και (3.41)–(3.44) ισχύουν απαράλλακτες, ενώ για  $i = 1 \dots N_c$  τα διανύσματα  $B_i$  και  $D_i$  δίνονται από τις

$$B_i = [O \quad \dots \quad b_{t_i}^T \quad \dots \quad O]^T, \quad D_i = [O \quad \dots \quad c_{r_i} \quad \dots \quad 0]. \quad (3.45)$$

Πίνακας 3.1: Πίνακας των rms τιμών του σφάλματος εκτίμησης και του υπολογιστικού χρόνου για το παράδειγμα της υποενότητας 3.4.1

Τεχνική	Μέση Τιμή	Τυπ. Απόκλιση	Μέγιστη Τιμή	Χρόνος
EKF	0.9519	0.1743	1.6149	0.09
UKF	0.2976	0.0430	0.5403	0.28
AGHKF(3)	0.2840	0.0433	0.5456	1.11
AGHKF(5)	0.2858	0.0378	0.3941	1.16
GHKF(3)	0.2840	0.0433	0.5456	0.86
GHKF(5)	0.2858	0.0378	0.3941	3.74

## 3.4 Παραδείγματα

### 3.4.1 Γραμμικό Σύστημα με Μη-Γραμμικότητα Αισθητήρα (A)

Έστω ότι ένα γραμμικό σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$G_{sys}(z) = \frac{0.093258}{(z - 0.9)(z^2 - 1.559z + 0.81)} \quad (3.46)$$

οδηγείται από λευκό θόρυβο κανονικής κατανομής με μηδενικό μέσο και διακύμανση ίση με 1, και ότι η έξοδος του γραμμικού συστήματος μετράται αλλά ο αισθητήρας υπόκειται σε μη-γραμμικότητα και θόρυβο, ώστε αν  $s(k)$  είναι η έξοδος του γραμμικού συστήματος και  $y(k)$  είναι η διαθέσιμη μέτρηση τη χρονική στιγμή  $k$ , να ισχύει

$$y(k) = s(k)^3 + v(k) \quad (3.47)$$

όπου  $v(k)$  είναι λευκός θόρυβος κανονικής κατανομής με μηδενικό μέσο και τυπική απόκλιση ίση με 0.3. Ο στόχος είναι να εκτιμηθεί η έξοδος του γραμμικού συστήματος. Οι ακόλουθες μήτρες παρέχουν μία ελάχιστη πραγματοποίηση σε χώρο κατάστασης του συστήματος.

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & 0.7794 & 1 \\ 0 & -0.2025 & 0.7794 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \quad c = [0.3730 \quad 0 \quad 0] \quad (3.48)$$

Σημειώνεται ότι αν και η πραγματοποίηση δεν είναι μοναδική, όπως δείξαμε στην υποενότητα 3.2.3 κάθε άλλη ισοδύναμη πραγματοποίηση θα έδινε τα ίδια αποτελέσματα.

Στο πρόβλημα αυτό εφαρμόστηκαν για λόγους σύγκρισης τα EKF, UKF, GHKF καθώς και η προτεινόμενη τεχνική επιτάχυνσης των υπολογισμών συνδυασμένη με ολοκλήρωση Gauss-Hermite (accelerated GHKF, AGHKF) όπως παρουσιάστηκε σε

Πίνακας 3.2: Πίνακας των rms τιμών του σφάλματος εκτίμησης και του υπολογιστικού χρόνου για το παράδειγμα της υποενότητας 3.4.2

Τεχνική	Μέση Τιμή	Τυπ. Απόκλιση	Μέγιστη Τιμή	Χρόνος
EKF	0.9502	0.1733	1.6416	0.10
UKF	0.3289	0.0841	1.3668	0.28
AGHKF(7)	0.3099	0.1028	3.2055	1.22
AGHKF(11)	0.3010	0.0342	0.4271	1.32
GHKF(4)	0.3208	0.0961	1.7011	1.94
GHKF(7)	0.3108	0.1170	3.6893	10.10

αυτό το κεφάλαιο. Έγιναν 1000 εκτελέσεις, για χρόνο  $k = 1 \dots 100$ . Η αρχική κατάσταση  $x_0$  υποθέτουμε πως ακολουθεί την κανονική κατανομή με μηδενικό μέσο όρο και μήτρα συνδιακύμανσης  $0.01I_3$ . Ο Πίνακας 3.1 παρουσιάζει τα στατιστικά χαρακτηριστικά της rms τιμής του σφάλματος εκτίμησης της εξόδου του γραμμικού συστήματος για τις 1000 εκτελέσεις που έγιναν, καθώς και τον υπολογιστικό χρόνο κάθε μεθόδου. Τα GHKF και AGHKF έχουν εφαρμοστεί με δύο τιμές για την παράμετρο  $m$  των (1.21) και (1.22). Οι τιμές αυτές δίνονται εντός παρενθέσεως στον Πίνακα 3.1.

Το EKF δεν αποδίδει καλά. Σε αυτό το παράδειγμα τα GHKF και AGHKF έχουν την ίδια απόδοση για ίδιο  $m$ . Για  $m = 3$  το GHKF είναι ταχύτερο, επειδή για το AGHKF απαιτείται επιπλέον υπολογιστικός χρόνος για τις πράξεις που περιγράφηκαν στην υποενότητα 3.2.2. Ωστόσο, η αύξηση του  $m$  στην τιμή 5 μειώνει σημαντικά το μέγιστο σφάλμα, και η μείωση αυτή γίνεται σχεδόν χωρίς κόστος για το AGHKF, ενώ για το GHKF η αύξηση του χρόνου είναι σημαντική. Σημειώνουμε ότι η  $G_{sys}$  επιλέγεται έτσι ώστε η rms τιμή της εξόδου του συστήματος να είναι ίση με 1.

### 3.4.2 Γραμμικό Σύστημα με Μη-Γραμμικότητα Αισθητήρα (B)

Έστω ότι τώρα ισχύει για τον αισθητήρα  $y(k) = s(k)^3(1+0.25 \cos(20s(k))) + v(k)$  αντί για την (3.47) και ότι όλες οι άλλες παράμετροι είναι ίδιες με το προηγούμενο παράδειγμα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.2. Το EKF πάλι δεν αποδίδει καλά. Η διαφορά ανάμεσα στα διάφορα  $\sigma$ -point φίλτρα τώρα είναι μεγαλύτερη από ότι στην προηγούμενη περίπτωση. Αυτό αποδίδεται στο γεγονός ότι τώρα η εξίσωση εξόδου έχει πιο περίπλοκη μορφή, και επομένως μία ακριβέστερη μέθοδος ολοκλήρωσης έχει μεγαλύτερη σημασία. Το AGHKF επιτρέπει τιμή του  $m$  ίση με 11 χωρίς σημαντικό υπολογιστικό κόστος.

Σημειώνουμε επίσης ότι σε αυτήν την περίπτωση, στην οποία η μέθοδος ολοκλήρωσης Gauss-Hermite δίνει προσεγγιστικές τιμές για τις αναμενόμενες τιμές στην

Πίνακας 3.3: Πίνακας των rms τιμών του σφάλματος εκτίμησης και του υπολογιστικού χρόνου για το παράδειγμα της υποενότητας 3.4.3

Τεχνική	Μέση Τιμή	Τυπ. Απόκλιση	Μέγιστη Τιμή	Χρόνος
EKF	0.9458	0.1729	1.6848	0.18
UKF	0.4752	0.0447	0.6197	0.73
AGHKF(4)	0.4652	0.0427	0.5960	1.20
AGHKF(21)	0.4652	0.0427	0.5960	1.57
GHKF(3)	0.4649	0.0460	0.6095	5.79
GHKF(4)	0.4652	0.0427	0.5960	18.02

(3.3), τα αποτελέσματα για τα GHKF(7) και AGHKF(7) δεν ταυτίζονται.

### 3.4.3 Γραμμικό Σύστημα με Μη-Γραμμικότητα και Δυναμική Αισθητήρα

Σε αυτήν την υποενότητα υποθέτουμε ότι ο αισθητήρας, εκτός από μη γραμμικός, είναι ένα δυναμικό σύστημα. Η μαθηματική περιγραφή του συνολικού συστήματος είναι η εξής: Η έξοδος του γραμμικού συστήματος που περιγράφεται από την (3.46) συνδέεται στην είσοδο μίας στατικής μη γραμμικής χαρακτηριστικής με εξίσωση  $y = x^3$ . Στην έξοδο της στατικής μη-γραμμικότητας προστίθεται λευκός θόρυβος κανονικής κατανομής με διακύμανση ίση με 0.2, και το άθροισμα συνδέεται στην είσοδο ενός γραμμικού συστήματος που περιγράφεται από εξισώσεις κατάστασης της μορφής (3.29), με μήτρες ίσες με  $A = 0.1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0.995$ . Η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$G_{sen}(z) = \frac{0.99499}{z - 0.1}. \quad (3.49)$$

Η έξοδος αυτής της συνάρτησης μεταφοράς μετράται, αλλά η μέτρηση υπόκειται σε προσθετικό λευκό θόρυβο κανονικής κατανομής με τυπική απόκλιση 0.3. Τότε το πρόβλημα είναι της μορφής που περιγράφηκε στην υποενότητα 3.3.4. Η αρχική κατάσταση  $x_0$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με μηδενικό μέσο και μήτρα συνδιακύμανσης  $0.01I_4$ . Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3. Η διαφορά στον υπολογιστικό χρόνο μεταξύ GHKF και AGHKF είναι πολύ μεγαλύτερη από ότι στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις επειδή το σύστημα τώρα είναι τετραδιάστατο.

## 3.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αποδείξαμε ότι, στην περίπτωση της μελετώμενης κλάσης, μπορεί να δοθεί λύση στο πρόβλημα του μη γραμμικού φιλτραρίσματος στις  $n$  διαστάσεις λύνοντας έναν αριθμό γραμμικών συστημάτων στις  $n$  διαστάσεις και προβλημάτων

προσεγγιστικής ολοκλήρωσης στις μία και δύο διαστάσεις. Η μέθοδος αυτή επιτρέπει ακριβέστερους υπολογισμούς από την άμεση προσεγγιστική ολοκλήρωση στις  $n$  διαστάσεις. Τρία παραδείγματα δείχνουν ότι πράγματι η προτεινόμενη τεχνική οδηγεί σε μείωση του υπολογιστικού χρόνου, που είναι μεγαλύτερη για μεγαλύτερη διάσταση του συστήματος. Τα αποτελέσματα, επίσης, επιβεβαιώνουν το γεγονός ότι το EKF συμπεριφέρεται χειρότερα από τα  $\sigma$ -point φίλτρα όταν υπάρχουν ισχυρές μη-γραμμικότητες όπως μία κυβική μη γραμμική χαρακτηριστική.

Περαιτέρω μελέτη θα μπορούσε να επικεντρωθεί στην εύρεση γενικότερων ή άλλων κλάσεων συστημάτων των οποίων η ειδική δομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το σχεδιασμό ειδικών φίλτρων.

## Κεφάλαιο 4

# Συστήματα Ειδικής Δομής με Στατικές Χαρακτηριστικές Πολλών Εισόδων και Νέα Μέθοδος Ολοκλήρωσης για Φίλτρα Κανονικών Κατανομών

### 4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δείξαμε ότι για μία κλάση μη γραμμικών συστημάτων είναι δυνατό να αποφευχθεί η χρήση ολοκλήρωσης στις  $n$ -διαστάσεις και αντί για αυτή να λυθούν κάποια γραμμικά συστήματα στις  $n$ -διαστάσεις και να υπολογιστούν ολοκληρώματα σε μία και δύο διαστάσεις. Η κλάση αυτή είχε περιγραφεί με τις εξισώσεις (3.1)–(3.2) και αντιστοιχούσε όπως είδαμε στα συστήματα που αποτελούνται από γραμμικά συστήματα που διασυνδέονται μεταξύ τους με μη γραμμικές στατικές χαρακτηριστικές μίας εισόδου.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δείξουμε ότι με ανάλογες τεχνικές η διάσταση της ολοκλήρωσης μπορεί να μειωθεί και για ευρύτερη κλάση συστημάτων. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι με αντίστοιχο τρόπο η τάξη της ολοκλήρωσης μπορεί να μειωθεί και στην περίπτωση που υπάρχουν στατικές χαρακτηριστικές με περισσότερες από μία εισόδους, απλά τότε ενδέχεται να μην αρκεί ολοκλήρωση σε μόνο δύο διαστάσεις. Επιπλέον, παρουσιάζεται μία μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό αναμενόμενων τιμών εναλλακτική της μεθόδου Gauss-Hermite, η οποία είναι σχεδιασμένη για το πρόβλημα αναδρομικής εκτίμησης. Οι δύο προτεινόμενες τεχνικές μπορούν να εφαρμόζονται ξεχωριστά ή συνδυασμένα.

Στην ενότητα 4.2 ορίζεται η υπό μελέτη κλάση και εξηγείται πώς μπορεί να μειωθεί η διάσταση της ολοκλήρωσης. Στην ενότητα 4.3 παρουσιάζεται η νέα μέθοδος ολο-



κλήρωσης, ενώ στην ενότητα 4.4 παρουσιάζεται ένα αριθμητικό παράδειγμα στο οποίο συγκρίνεται η απόδοση των προτεινόμενων τεχνικών με τις υπάρχουσες. Η ενότητα 4.5 περιέχει τα συμπεράσματα.

## 4.2 Ανάλυση για την Κλάση υπό Μελέτη

### 4.2.1 Περιγραφή της Κλάσης

Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο  $N_s$  γραμμικών δυναμικών συστημάτων που περιγράφονται από τις σχέσεις  $S^{(i)} : x_{k+1}^{(i)} = A^{(i)}x_k^{(i)} + B^{(i)}u_k^{(i)}, y_k^{(i)} = C^{(i)}x_k^{(i)}$  για  $i = 1, \dots, N_s$ . Υποθέτουμε ότι αυτά τα συστήματα διασυνδέονται και γραμμικά αλλά και μέσω μη γραμμικών συναρτήσεων.

Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι η γραμμική διασύνδεση περιγράφεται από τη μήτρα  $\Lambda$  όπου  $\lambda_{ij}$  είναι το κέρδος από την έξοδο του  $S^{(j)}$  στην είσοδο του  $S^{(i)}$  (η είσοδος κάθε συστήματος είναι γραμμικός συνδυασμός των εξόδων όλων των συστημάτων καθώς και των μη γραμμικών συναρτήσεων, όπως εξηγείται ακολούθως). Η μη γραμμική διασύνδεση γίνεται μέσω των μη γραμμικών συναρτήσεων  $g_i, i = 1, \dots, N_c$ . Η συνάρτηση  $g_i$  λαμβάνει ως είσοδο το διάνυσμα  $D_i x$ , δηλαδή επιτρέπονται γραμμικοί συνδυασμοί καταστάσεων και διαφορετικών συστημάτων. Η μήτρα  $D_i$  έχει  $l_i$  γραμμές και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε πως έχει πλήρη βαθμό γραμμών. Κάθε έξοδος μη γραμμικής συνάρτησης οδηγείται στις εισόδους όλων των γραμμικών συστημάτων σύμφωνα με τα στοιχεία της μήτρας  $M$ , και το κέρδος από την έξοδο της  $g_j$  στην είσοδο του  $S^{(i)}$  είναι ίσο με  $\mu_{ij}$ . Επομένως το  $u_k^{(i)}$  δίνεται από την

$$u_k^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_s} \lambda_{ij} y_k^{(j)} + \sum_{j=1}^{N_c} \mu_{ij} g_j(D_j x_k). \quad (4.1)$$

Τότε ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 4.1.** Θεωρούμε τα  $N_s$  γραμμικά δυναμικά συστήματα που περιγράφθηκαν ανωτέρω, και των οποίων η διασύνδεση περιγράφεται από τις  $M, \Lambda$  και  $g_i, D_i$  για  $i = 1, \dots, N_c$ . Υποθέτουμε επιπλέον ότι το συνολικό σύστημα  $S$  με κατάσταση  $x = [x^{(1)T} \dots x^{(N_s)T}]^T$  υπόκειται σε προσθετική διαταραχή  $w_k$ . Ορίζουμε  $\text{diag}(A^{(i)})$  να είναι η block-διαγώνια μήτρα με διαγώνια στοιχεία  $A^{(1)}, \dots, A^{(N_s)}$  και ομοίως ορίζουμε τις  $\text{diag}(B^{(i)})$  και  $\text{diag}(C^{(i)})$ . Τότε η δυναμική της κατάστασης του συνολικού συστήματος  $S$  περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$x_{k+1} = Ax_k + \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i x_k) + w_k, \quad (4.2)$$

όπου  $B_i$  είναι η  $i$ -οστή στήλη της μήτρας  $B = \text{diag}(B^{(i)})M$  και  $A = \text{diag}(A^{(i)}) + \text{diag}(B^{(i)})\Lambda \text{diag}(C^{(i)})$ .

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας την (4.1) και τη σχέση  $y_k^{(i)} = C^{(i)}x_k^{(i)}$  στην  $x_{k+1}^{(i)} = A^{(i)}x_k^{(i)} + B^{(i)}u_k^{(i)}$  προκύπτει ότι  $x_{k+1}^{(i)} = A^{(i)}x_k^{(i)} + B^{(i)}\sum_{j=1}^{N_s}\lambda_{ij}C^{(j)}x_k^{(j)} + B^{(i)}\sum_{j=1}^{N_s}\mu_{ij}g_j(D_jx_k)$ . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο των τελευταίων αυτών σχέσεων για  $i = 1 \dots N_s$  ισοδυναμεί με την (4.2), η οποία λαμβάνει υπόψη και τον προσθετικό θόρυβο  $w_k$ .  $\square$

Η μετρούμενη έξοδος του συνολικού συστήματος  $S$  μπορεί να περιέχει και γραμμικό και μη γραμμικό μέρος. Περιγράφεται από την

$$y_k = \begin{bmatrix} y_k^L \\ y_k^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^L x_k \\ (h_i(C_i^N x_k)) \end{bmatrix} + v_k. \quad (4.3)$$

Το  $(h_i(C_i^N x_k))$  είναι ένα διάνυσμα στήλη που περιέχει τις  $N_o$  μη γραμμικές εξόδους. Η  $C_i$  έχει  $r_i$  γραμμές και, όπως η  $D_i$ , υποθέτουμε πως έχει πλήρη βαθμό γραμμών. Αν υπάρχουν μόνο γραμμικές εξόδοι, τότε  $N_o = 0$  και  $y_k = y_k^L$ . Αν υπάρχουν μόνο μη γραμμικές εξόδοι, τότε η  $C^L$  είναι η κενή μήτρα και  $y_k = y_k^N$ .

Η κλάση που περιγράφτηκε παραπάνω είναι γνησίως ευρύτερη της κλάσης του προηγούμενου κεφαλαίου, επειδή σε εκείνη την κλάση οι  $D_i$  και  $C_i^N$  ( $D_i^T$  και  $C_i^T$  με τους συμβολισμούς του προηγούμενου κεφαλαίου) ήταν διανύσματα γραμμής, ενώ τώρα μπορεί να έχουν περισσότερες γραμμές. Ισοδύναμα, τώρα οι μη γραμμικές χαρακτηριστικές μπορεί να έχουν περισσότερες από μία εισόδους πραγματικής μεταβλητής, ενώ στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαν μόνο μία είσοδο πραγματικής μεταβλητής.

**Σχόλιο 4.1.** Δεδομένου πως όλη η παρακάτω ανάλυση θα γίνει ξεχωριστά για κάθε χρονικό βήμα τα αποτελέσματα ισχύουν και για χρονομεταβλητά γραμμικά δυναμικά συστήματα, αλλά για απλοποίηση του συμβολισμού παραλείπουμε το χρονικό δείκτη στις μήτρες  $A^{(i)}$ ,  $B^{(i)}$ ,  $C^{(i)}$ ,  $i = 1 \dots N_s$ .

## 4.2.2 Δομικά Στοιχεία του Αλγορίθμου

Όπως θα φανεί στην επόμενη υποενότητα, ο αλγόριθμος χρειάζεται να υπολογίζει αναμενόμενες τιμές των τριών ακόλουθων μορφών:  $\mathbb{E}[f(Lx)]$ ,  $\mathbb{E}[f(L_1x, L_2x)]$  και  $\mathbb{E}[xf(Lx)]$ , όπου η τ.μ.  $x$  είναι  $n$ -διάστατη και ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο  $\hat{x}$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $P$ , όπου  $L, L_1$  και  $L_2$  είναι  $m \times n$ ,  $n_1 \times n$  και  $n_2 \times n$  μήτρες με πλήρη βαθμό γραμμών. Παρακάτω εξηγείται πώς υπολογίζεται κάθε μία από αυτές.

### Υπολογισμός της αναμενόμενης τιμής $\mathbb{E}[f(Lx)]$

Η τ.μ.  $\xi = Lx$  είναι  $m$ -διάστατη και κανονικά κατανεμημένη, με μέση τιμή  $L\hat{x}$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $LPL^T$ , οπότε ο υπολογισμός της  $\mathbb{E}[f(Lx)] = \mathbb{E}[f(\xi)]$  είναι ένα πρόβλημα  $m$ -διάστατης ολοκλήρωσης, και οποιαδήποτε μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει μία προσέγγιση.

### Υπολογισμός της αναμενόμενης τιμής $\mathbb{E}[f(L_1x, L_2x)]$

Ας ορίσουμε τη  $n_1 + n_2$ -διάστατη τ.μ.  $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1x \\ L_2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} x$ . Ισχύει

$$\hat{z} = \mathbb{E}[z] = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \hat{x}, P_z = V[z] = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} L_1^T & L_2^T \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

επομένως η  $\mathbb{E}[f(L_1x, L_2x)] = \mathbb{E}[f(z_1, z_2)]$  μπορεί να προσεγγιστεί με αριθμητική ολοκλήρωση στις  $n_1 + n_2$  διαστάσεις. Ενδεχομένως, όμως,  $\text{rank} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = r < n_1 + n_2$ .

Σε αυτήν την περίπτωση είναι δυνατό να βρεθούν μήτρες  $C$  και  $R$  ώστε  $\text{rank} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = CR$ . Πράγματι, αν η μήτρα  $R$  αποτελείται από  $r$  γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές της  $\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$ , τότε κάθε γραμμή της  $\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$  είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμών της  $R$ , οπότε αρκεί τα στοιχεία της  $C$  να τειθούν ίσα με τους αντίστοιχους συντελεστές.

Ας ορίσουμε τώρα την  $r$ -διάστατη τ.μ.  $\zeta = Rx$ . Η  $\zeta$  είναι κανονικά κατανομημένη, με  $\hat{\zeta} = \mathbb{E}[\zeta] = R\hat{x}$  και  $P_\zeta = V[\zeta] = RPR^T$ . Ισχύει  $z = C\zeta$ , οπότε  $\mathbb{E}[f(z)] = \mathbb{E}[f(C\zeta)]$ . Αν οριστεί η συνάρτηση  $f_C(\zeta) = f(C\zeta)$ , συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι  $\mathbb{E}[f(L_1x, L_2x)] = \mathbb{E}[f_C(\zeta)]$ , οπότε ο υπολογισμός της  $\mathbb{E}[f(L_1x, L_2x)]$  είναι πρόβλημα αριθμητικής ολοκλήρωσης στις  $r$  διαστάσεις.

### Υπολογισμός της αναμενόμενης τιμής $\mathbb{E}[xf(Lx)]$

Ο υπολογισμός της  $\mathbb{E}[xf(Lx)]$  ανάγεται στις  $m$  διαστάσεις χρησιμοποιώντας την ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 4.2.** Έστω ότι η  $x$  είναι τ.μ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή με τιμές στον  $\mathbb{R}^n$ , μέση τιμή  $M$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $P > 0$ , η  $L$  είναι  $m \times n$  μήτρα πλήρους βαθμού γραμμών και η  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι Borel-μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε η  $f(Lx)$  να έχει πεπερασμένη διακύμανση. Ας υποθέσουμε επίσης ότι  $L^\perp$  είναι μία  $(n - m) \times n$  μήτρα πλήρους βαθμού γραμμών τέτοια ώστε  $L^\perp PL^T = 0$ . Έστω  $S = \mathbb{E}[xf(Lx)]$ . Τότε η  $S$  είναι η μοναδική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{bmatrix} L \\ L^\perp \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[Lxf(Lx)] \\ L^\perp M \mathbb{E}[f(Lx)] \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

*Απόδειξη.* Είναι εύκολο να δείχτεί ότι  $\text{rank} \begin{bmatrix} L \\ L^\perp \end{bmatrix} = n$ . Πράγματι, αν δεν ισχύει η τελευταία εξίσωση τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα  $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2]$ ,  $\lambda_1 \in \mathbb{R}^m$ ,  $\lambda_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$  ώστε  $\lambda \begin{bmatrix} L \\ L^\perp \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 L + \lambda_2 L^\perp = 0$ . Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία εξίσωση από δεξιά με  $PL^T$  προκύπτει η σχέση  $\lambda_1 LPL^T + \lambda_2 L^\perp PL^T = 0 \Rightarrow \lambda_1 LPL^T = 0$ . Όμως αφού  $P > 0$  και  $\text{rank} L = m$ ,  $LPL^T > 0$ , άρα  $\lambda_1 = 0$ . Αυτό συνεπάγεται ότι  $\lambda_2 L^\perp = 0$ . Εφόσον  $\text{rank} L^\perp = n - m$ , έπεται ότι  $\lambda_2 = 0$ . Έτσι ολοκληρώνεται ο ισχυρισμός και αποδεικνύεται ότι το (4.5) έχει μοναδική λύση.

Ας δείξουμε τώρα ότι η  $S$  ικανοποιεί το σύστημα (4.5). Προφανώς  $LS = L\mathbb{E}[xf(Lx)] = \mathbb{E}[Lxf(Lx)]$ . Για να δειχθεί η δεύτερη διανυσματική εξίσωση, αξιοποιείται το γεγονός

ότι οι τ.μ.  $Lx$  και  $L^\perp x$  είναι ανεξάρτητες. Πράγματι,  $\text{Cov}(L^\perp x, Lx) = L^\perp P L^T = 0$ , και εφόσον η τ.μ.  $x$  ακολουθεί την κανονική κατανομή, αυτό συνεπάγεται ότι οι  $Lx$  και  $L^\perp x$  είναι ανεξάρτητες. Τότε οι  $f(Lx)$  και  $L^\perp x$  είναι ανεξάρτητες, επομένως  $\mathbb{E}[L^\perp x f(Lx)] = \mathbb{E}[L^\perp x] \mathbb{E}[f(Lx)] = L^\perp M \mathbb{E}[f(Lx)]$ , και ολοκληρώνεται η απόδειξη.  $\square$

**Σχόλιο 4.2.** Πάντα υπάρχει τέτοια μήτρα  $L^\perp$ , επειδή η  $P$  είναι θετικά ορισμένη και η  $L$  είναι πλήρους βαθμού γραμμών. Πράγματι, αν ο  $\mathbb{R}^n$  εφοδιαστεί με το εσωτερικό γινόμενο  $\langle v_1, v_2 \rangle = v_1^T P v_2$ , τότε  $\text{Row}(L^\perp) = (\text{Row} L)^\perp$ .

**Σχόλιο 4.3.** Η Πρόταση 4.2 ισχύει για κανονικές τυχαίες μεταβλητές, ενώ η πραγματική κατανομή της κατάστασης δεν είναι κανονική. Όμως, στα μη γραμμικά Φίλτρα Kalman οι αναμενόμενες τιμές υπολογίζονται για κανονική κατανομή ακόμα και χωρίς τη χρήση της Πρότασης 4.2. Οπότε, αν η αριθμητική ολοκλήρωση είναι ακριβής, η χρήση της πρότασης δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα.

**Σχόλιο 4.4.** Η Πρόταση 3.1 του προηγούμενου κεφαλαίου είναι ειδική περίπτωση της παραπάνω πρότασης και καλύπτει την περίπτωση όπου η  $L$  έχει μόνο μία γραμμή.

Η αριθμητική προσέγγιση των ολοκληρωμάτων μπορεί να γίνει με οποιαδήποτε μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης, όπως για παράδειγμα με την ολοκλήρωση Gauss-Hermite με την τεχνική που παρουσιάζεται στην ενότητα 4.3.

### 4.2.3 Ο Προτεινόμενος Αλγόριθμος Φιλτραρίσματος

Η ανάλυση είναι όμοια με αυτή του προηγούμενου κεφαλαίου, ιδίως για το βήμα πρόβλεψης. Η κεντρική ιδέα είναι ότι όλες οι αναμενόμενες τιμές που χρειάζεται να υπολογιστούν έχουν μία από τις τρεις προαναφερθείσες μορφές.

#### Βήμα Πρόβλεψης

Έστω ότι η  $x_k$  έχει μέσο  $\hat{x}_k$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $P_{x_k}$ . Τότε από την (4.2) προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}[x_{k+1}] = A\hat{x}_k + \sum_{i=1}^{N_c} B_i \mathbb{E}[g_i(D_i x_k)]. \quad (4.6)$$

Η  $\mathbb{E}[g_i(D_i x_k)]$  βρίσκεται στην πρώτη μορφή της προηγούμενης υποεπέντητας. Έστω  $\bar{g}_i$  η προσεγγιστική της τιμή. Τότε η προβλεπόμενη μέση τιμή είναι:

$$\hat{x}_{k+1}^- = A\hat{x}_k + \sum_{i=1}^{N_c} B_i \bar{g}_i. \quad (4.7)$$

**Σχόλιο 4.5.** Όλες οι αναμενόμενες τιμές σε αυτήν την παράγραφο είναι δεσμευμένες ως προς  $\hat{x}_k$  και  $P_{x_k}$ , αλλά οι συνθήκες παραλείπονται για συντομία. Για παράδειγμα, γράφουμε  $\mathbb{E}[x_{k+1}]$  αντί για  $\mathbb{E}[x_{k+1} | \hat{x}_k, P_{x_k}]$  και  $V[x_{k+1}]$  αντί για  $V[x_{k+1} | \hat{x}_k, P_{x_k}]$ .

Το βήμα πρόβλεψης περιλαμβάνει και υπολογισμό της εκ των προτέρων μήτρας συνδιακύμανσης της  $x_{k+1}$ . Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P_{x_{k+1}}^- &= \mathbb{V}[x_{k+1}] = \mathbb{V}\left[Ax_k + \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i x_k) + w_k\right] = \\ &= \mathbb{V}[Ax_k] + \mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i x_k)\right] + \text{Cov}\left(Ax_k, \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i x_k)\right) + \\ &\quad + \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i x_k), Ax_k\right) + \mathbb{V}[w_k]. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Είναι γνωστό ότι  $\mathbb{V}[w_k] = Q$  και  $\mathbb{V}[Ax_k] = AP_{x_k}A^T$ .

Ο δεύτερος όρος της (4.8) είναι ίσος με

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i x_k) \left(\sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i x_k)\right)^T\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i x_k)\right] \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i x_k)\right]^T = \\ &= \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} B_i \mathbb{E}[g_i(D_i x_k) g_j(D_j x_k)] B_j^T - \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} B_i \mathbb{E}[g_i(D_i x_k)] \mathbb{E}[g_j(D_j x_k)] B_j^T. \quad (4.9) \end{aligned}$$

Για  $i = j$ , η  $\mathbb{E}[g_i(D_i x_k) g_j(D_j x_k)] = \mathbb{E}[g_i^2(D_i x_k)]$  έχει την πρώτη μορφή της προηγούμενης υποενότητας, ενώ για  $i \neq j$  έχει τη δεύτερη μορφή. Και στις δύο περιπτώσεις, ας συμβολίσουμε με  $\bar{g}_{ij}$  την αντίστοιχη προσεγγιστική τιμή. Τότε η χρησιμοποιούμενη προσέγγιση είναι

$$\mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i x_k)\right] \approx \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} B_i \bar{g}_{ij} B_j^T - \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} B_i \bar{g}_i \bar{g}_j B_j^T. \quad (4.10)$$

Ο τέταρτος όρος της (4.8) είναι ο ανάστροφος του τρίτου όρου, οπότε αρκεί να προσεγγιστεί ο τρίτος όρος. Ισχύει:

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(Ax_k, \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i x_k)\right) &= \mathbb{E}\left[Ax_k \left(\sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i x_k)\right)^T\right] - \mathbb{E}[Ax_k] \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i x_k)\right]^T = \\ &= A \sum_{i=1}^{N_c} \mathbb{E}[x_k g_i(D_i x_k)] B_i^T - A \hat{x}_k \sum_{i=1}^{N_c} \mathbb{E}[g_i(D_i x_k)] B_i^T. \quad (4.11) \end{aligned}$$

Η  $\mathbb{E}[x_k g_i(D_i x_k)]$  έχει την τρίτη μορφή της προηγούμενης υποενότητας. Αν η προσεγγιστική τιμή συμβολίζεται με  $\bar{x}g_i$ , η προσέγγιση για τον τρίτο όρο της (4.8) είναι

$$\text{Cov}\left(Ax_k, \sum_{i=1}^{N_c} B_i g_i(D_i x_k)\right) \approx A \sum_{i=1}^{N_c} \bar{x}g_i B_i^T - A \hat{x}_k \sum_{i=1}^{N_c} \bar{g}_i B_i^T. \quad (4.12)$$

```

1: function PREDICTIONSTEP( $\hat{x}_k, P_{x_k}$ )
2:   Calculate  $\bar{g}_i, \bar{g}_{ij}, \bar{x}\bar{g}_i$ 
3:    $V \leftarrow \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} B_i \bar{g}_{ij} B_j^T - \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} B_i \bar{g}_i \bar{g}_j B_j^T$ 
4:    $COV \leftarrow A \sum_{i=1}^{N_c} \bar{x}\bar{g}_i B_i^T - A \hat{x}_k \sum_{i=1}^{N_c} \bar{g}_i B_i^T$ 
5:    $\hat{x}_{k+1}^- \leftarrow A \hat{x}_k + \sum_{i=1}^{N_c} B_i \bar{g}_i$  ▷ Prediction Mean
6:    $P_{x_{k+1}}^- \leftarrow A P_{x_k} A^T + V + COV + COV^T + Q$  ▷ Prediction Covariance
7: end function

```

---

Σχήμα 4.1: Αλγόριθμος Βήματος Πρόβλεψης

Αντικαθιστώντας τις (4.10) και (4.12) στην (4.8) προκύπτει μία προσέγγιση της  $P_{x_{k+1}}^-$ . Ο παραπάνω αλγόριθμος συνοψίζεται στο Σχ. 4.1.

## Βήμα Διόρθωσης

Και για το βήμα διόρθωσης, οι αναμενόμενες τιμές που συναντώνται έχουν μία από τις τρεις μορφές της προηγούμενης υποενοτήτας. Οι τιμές που χρειάζεται να υπολογιστούν είναι οι  $\hat{y}_{k+1}^-$ ,  $P_{y_{k+1}}^-$  και  $P_{x_{k+1}, y_{k+1}}^-$ .

Για την  $\hat{y}_{k+1}^-$ , από την (4.3) έπεται ότι

$$\hat{y}_{k+1, i}^- = \begin{bmatrix} C^L \hat{x}_{k+1}^- \\ (\mathbb{E} [h_i(C_i^N x_{k+1})]) \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

**Σχόλιο 4.6.** Όλες οι αναμενόμενες τιμές της παραγράφου αυτής είναι δεσμευμένες ως προς  $\hat{x}_{k+1}^-$  και  $P_{x_{k+1}}^-$ , αλλά οι συνθήκες παραλείπονται για συντομία. Για παράδειγμα, γράφουμε  $\mathbb{E} [h_i(C_i^N x_{k+1})]$  αντί για  $\mathbb{E} [h_i(C_i^N x_{k+1}) | \hat{x}_{k+1}^-, P_{x_{k+1}}^-]$ .

Η προσεγγιστική τιμή της  $\mathbb{E} [h_i(C_i^N x_{k+1})]$  θα συμβολίζεται με  $\bar{h}_i$ .

Η  $P_{x_{k+1}, y_{k+1}}^-$  δίνεται από την

$$P_{x_{k+1}, y_{k+1}}^- = \begin{bmatrix} P_{x_{k+1}}^- (C^L)^T \\ (\mathbb{E} [x_{k+1} h_i(C_i^N x_{k+1})]) - \hat{x}_{k+1}^- (\mathbb{E} [h_i(C_i^N x_{k+1})]) \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

όπου  $(\mathbb{E} [x_{k+1} h_i(C_i^N x_{k+1})])$  είναι η  $n \times N_o$  μήτρα της οποίας η  $i$ -οστή στήλη είναι ίση με  $\mathbb{E} [x_{k+1} h_i(C_i^N x_{k+1})]$  και αντίστοιχα το  $(\mathbb{E} [h_i(C_i^N x_{k+1})])$  είναι διάνυσμα γραμμής. Έστω ότι συμβολίζουμε την προσεγγιστική τιμή της  $\mathbb{E} [x_{k+1} h_i(C_i^N x_{k+1})]$  με  $\bar{x} \bar{h}_i$ .

- 1: **function** CORRECTIONSTEP( $\hat{x}_{k+1}^-$ ,  $P_{x_{k+1}}^-$ ,  $y_{k+1}$ )
- 2:   Calculate  $\bar{h}_i$ ,  $\bar{h}_{ij}$ ,  $\bar{x}\bar{h}_i$
- 3:    $\hat{y}^- \leftarrow \begin{bmatrix} C^L \hat{x}_{k+1}^- \\ (\bar{h}_i) \end{bmatrix}$
- 4:    $P_y^- \leftarrow \begin{bmatrix} C^L P_{x_{k+1}}^- (C^L)^T & C^L (\bar{x}\bar{h}_i - \hat{x}_{k+1}^- \bar{h}_i) \\ \star & (\bar{h}_{ij} - \bar{h}_i \bar{h}_j) \end{bmatrix} + R$
- 5:    $P_{x,y}^- \leftarrow \begin{bmatrix} P_{x_{k+1}}^- (C^L)^T \\ (\bar{x}\bar{h}_i) - \hat{x}_{k+1}^- (\bar{h}_i) \end{bmatrix}$
- 6:    $K \leftarrow P_{x,y}^- P_y^{-1}$
- 7:    $\hat{x}_{k+1} \leftarrow \hat{x}_{k+1}^- + K (y_{k+1} - \hat{y}^-)$  ▷ Updated Mean
- 8:    $P_{x_{k+1}} \leftarrow P_{x_{k+1}}^- - K P_y^- K^T$  ▷ Updated Covariance
- 9: **end function**

Σχήμα 4.2: Αλγόριθμος Βήματος Διόρθωσης

Η  $P_{y_{k+1}}^-$  δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση.

$$P_{y_{k+1}}^- = \begin{bmatrix} C^L P_{x_{k+1}}^- (C^L)^T & C^L \left( \mathbb{E} \left[ x_{k+1} h_i(C_i^N x_{k+1}) \right] - \hat{x}_{k+1}^- \mathbb{E} \left[ h_i(C_i^N x_{k+1}) \right] \right) \\ \star & \mathbb{E} \left[ h_i(C_i^N x_{k+1}) h_j(C_j^N x_{k+1}) \right] - \mathbb{E} \left[ h_i(C_i^N x_{k+1}) \right] \mathbb{E} \left[ h_j(C_j^N x_{k+1}) \right] \end{bmatrix} + R, \quad (4.15)$$

όπου  $\star$  είναι η ανάστροφη μήτρα του πίνακα που βρίσκεται στη συμμετρική θέση. Η προσεγγιστική τιμή της  $\mathbb{E} \left[ h_i(C_i^N x_{k+1}) h_j(C_j^N x_{k+1}) \right]$  θα συμβολίζεται με  $\bar{h}_{ij}$ .

Μετά τον υπολογισμό των  $\hat{y}_{k+1}^-$ ,  $P_{y_{k+1}}^-$  και  $P_{x_{k+1},y_{k+1}}^-$ , το βήμα διόρθωσης ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.15)–(1.17). Το βήμα διόρθωσης συνοψίζεται στο Σχ. 4.2. Τέλος, διατυπώνουμε χωρίς λεπτομερή απόδειξη την ακόλουθη πρόταση, που είναι ανάλογη με την Πρόταση 3.2 του προηγούμενου κεφαλαίου.

**Πρόταση 4.3.** Θεωρούμε το σύστημα που περιγράφεται από τις (4.2)–(4.3) και το μετασχηματισμό συντεταγμένων  $x' = Tx$ . Αν  $\hat{x}_k$  και  $P_{x_k}$  είναι οι εκτιμήτριες του προτεινόμενου φίλτρου για τις αρχικές συντεταγμένες ενώ  $\hat{x}'_k$  και  $P_{x'_k}$  είναι οι εκτιμήτριες για τις μετασχηματισμένες συντεταγμένες, τότε για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  ισχύει ότι

$$\hat{x}'_k = T \hat{x}_k, P_{x'_k} = T P_{x_k} T^T. \quad (4.16)$$

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι ανάλογη με την απόδειξη της Πρότασης 3.2 του προηγούμενου κεφαλαίου. Η κεντρική ιδέα είναι ότι οι αναμενόμενες τιμές των μη γραμμικών συναρτήσεων δεν αλλάζουν με το μετασχηματισμό, δηλαδή  $\bar{g}'_i = \bar{g}_i$ , κλπ.  $\square$

### 4.3 Νέα Μέθοδος Αριθμητικού Υπολογισμού των Αναμενόμενων Τιμών

Όπως και στην εργασία [35], η μονοδιάστατη αριθμητική ολοκλήρωση χρησιμοποιείται ως βάση για την πολυδιάστατη ολοκλήρωση. Αυτό γίνεται ως ακολούθως.

Υποθέτουμε ότι  $\sum_{i=1}^m w_i \gamma(x_i)$  είναι η προσέγγιση της  $\mathbb{E}[\gamma(\chi)]$  όταν η  $\chi$  ακολουθεί την πρότυπη κανονική κατανομή (δηλαδή έχει μέσο όρο μηδέν και μοναδιαία διακύμανση). Ας θεωρήσουμε τώρα την προσέγγιση της  $\mathbb{E}[g(X)]$  όταν η  $X$  είναι  $n$ -διάστατη κανονική κατανομή με μέσο  $\mu$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $P$ . Έστω  $S_i$  η  $i$ -οστή στήλη της  $S = \sqrt{P}$ , όπου  $S$  είναι μήτρα τέτοια ώστε  $P = SS^T$ . Η  $S$  υπολογίζεται με παραγοντοποίηση Cholesky. Τότε αν  $v_i$ ,  $i = 1 \dots n$ , είναι  $n$  ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την πρότυπη κανονική κατανομή, τότε η  $\mu + \sum S_i v_i$  είναι ισόνομη με τη  $X$ . Επομένως είναι εύλογη η ακόλουθη προσέγγιση.

$$\mathbb{E}[g(X)] \approx \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m w_{i_1} \dots w_{i_n} g(\mu + x_{i_1} S_1 + \dots + x_{i_n} S_n) \quad (4.17)$$

Όμως, στο πρόβλημα του μη γραμμικού φιλτραρίσματος οι παράμετροι της κατανομής της κατάστασης δεν είναι γνωστές ακριβώς. Επομένως είναι σκόπιμο να χρησιμοποιηθεί κάποια προσέγγιση που είναι σθεναρή ως προς τις αποκλίσεις στις παραμέτρους. Η ευαισθησία της προσέγγισης ως προς το μέσο  $\mu$  είναι ένα άθροισμα της μορφής  $\sum_{i=1}^M W_i \frac{\partial g}{\partial x}(X_i)$ , όπου  $M = m^n$  είναι ο συνολικός αριθμός των σημείων, των οποίων οι θέσεις δίνονται από τα  $X_i$  και τα βάρη από τα  $W_i$ . Το άθροισμα αυτό είναι το εσωτερικό γινόμενο  $(W_1, \dots, W_M) \cdot (\frac{\partial g}{\partial x}(X_1), \dots, \frac{\partial g}{\partial x}(X_M))$ . Εφόσον το  $(\frac{\partial g}{\partial x}(X_1), \dots, \frac{\partial g}{\partial x}(X_M))$  δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων (άλλωστε ακόμα και η  $g$  είναι άγνωστη αφού ο αλγόριθμος δεν εξαρτάται από αυτήν), είναι λογικό να ελαχιστοποιηθεί η νόρμα του  $(W_1, \dots, W_M)$ , μιας και βάσει της ανισότητας Hölder έχουμε ότι

$$|\sum_{i=1}^M W_i \frac{\partial g}{\partial x}(X_i)| \leq \|(W_1, \dots, W_M)\|_p \|\frac{\partial g}{\partial x}(X_1), \dots, \frac{\partial g}{\partial x}(X_M)\|_q, \quad (4.18)$$

για οποιαδήποτε  $1 \leq p, q \leq \infty$  που είναι τέτοια ώστε  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Η νόρμα  $\|(W_1, \dots, W_M)\|_p$ ,  $1 < p \leq \infty$ , ελαχιστοποιείται όταν όλα τα βάρη είναι ίσα με  $\frac{1}{M}$  (το άθροισμα τους πρέπει να είναι ίσο με 1). Αυτή η επιλογή θα ελαχιστοποιούσε και τη διακύμανση του εσωτερικού γινομένου αν οι  $\frac{\partial g}{\partial x}(X_i)$  ήταν ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, μιας και η διακύμανση αυτή θα ήταν ανάλογη του  $\|(W_1, \dots, W_M)\|_2^2$ . Τα βάρη  $W_i$ ,  $i = 1 \dots M$ , είναι όλα ίσα αν και μόνο αν τα βάρη  $w_i$ ,  $i = 1 \dots m$ , είναι όλα ίσα. Για τον προτεινόμενο αλγόριθμο, επομένως, επιλέγεται  $w_i = \frac{1}{m}$  για τη μονοδιάστατη περίπτωση, προκειμένου να προκύψει σθεναρή εκτιμήτρια.

Επομένως, η προσεγγιστική τιμή της  $\mathbb{E}[\gamma(\chi)]$  είναι η τιμή  $\sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \gamma(x_i)$  η οποία είναι ίση με την αναμενόμενη τιμή  $\mathbb{E}[\gamma(\chi)]$  όταν η  $\chi$  ακολουθεί διακριτή κατανομή,



με πιθανές τιμές ισοπίθανες και ίσες με  $x_i, i = 1 \dots m$ . Είναι εύλογο, επομένως, να επιλεγούν τα  $x_i, i = 1 \dots m$  ώστε η αντίστοιχη κατανομή να είναι όσο πιο κοντά γίνεται στην κανονική κατανομή. Οι τιμές των  $x_i, i = 1 \dots m$ , επιλέγονται με χρήση της ακόλουθης πρότασης.

**Πρόταση 4.4.** Έστω  $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$  η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.) της πρότυπης κανονικής κατανομής. Αν  $G(x)$  είναι η σ.κ.π. του συνόλου σημείων  $\{x_i, i = 1 \dots m\}$ , τότε για κάθε  $1 \leq p \leq \infty$ , το κριτήριο  $C_p = \|F - G\|_p$  ελαχιστοποιείται για το σύνολο σημείων

$$\{l_n = F^{-1}(p_n), p_n = \frac{1}{2m} + \frac{n-1}{m}, n = 1 \dots m\}. \quad (4.19)$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση όπου  $1 \leq p < \infty$ . Τότε, για οποιαδήποτε επιλογή των  $x_1 \leq \dots \leq x_k \leq \dots \leq x_m$ , έστω  $h(x_1, \dots, x_m)$  η αντίστοιχη τιμή του κριτηρίου  $C_p = \|F - G\|_p$ . Ισχύει

$$h(x_1, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{x_1} |F(x)|^p dx + \int_{x_1}^{x_2} |F(x) - \frac{1}{m}|^p dx + \dots + \int_{x_k}^{x_{k+1}} |F(x) - \frac{k}{m}|^p dx + \dots + \int_{x_m}^{\infty} |F(x) - 1|^p dx. \quad (4.20)$$

Τότε

$$\frac{\partial h}{\partial x_k} = |F(x_k) - \frac{k-1}{m}|^p - |F(x_k) - \frac{k}{m}|^p. \quad (4.21)$$

Οπότε  $\frac{\partial h}{\partial x_k} > 0$  για  $F(x_k) > \frac{1}{2}(\frac{k-1}{m} + \frac{k}{m})$  ενώ  $\frac{\partial h}{\partial x_k} < 0$  για  $F(x_k) < \frac{1}{2}(\frac{k-1}{m} + \frac{k}{m})$ . Σημειώνουμε ότι  $\frac{1}{2}(\frac{k-1}{m} + \frac{k}{m}) = \frac{1}{2m} + \frac{k-1}{m} = p_k = F(l_k)$ . Εφόσον η  $F$  είναι γνησίως αύξουσα, έπεται ότι  $\frac{\partial h}{\partial x_k} > 0$  για  $x_k > l_k$  και  $\frac{\partial h}{\partial x_k} < 0$  για  $x_k < l_k$ .

Χρησιμοποιώντας την τελευταία πρόταση είναι εύκολο να δείχτεί ότι για οποιαδήποτε  $y_1 \leq \dots \leq y_k \leq \dots \leq y_m$  ισχύει  $h(l_1, \dots, l_m) \leq h(y_1, \dots, y_m)$ . Πράγματι, αν  $y_m \leq l_m$  θέτουμε  $y_k^{(1)} = y_k$  για  $k < m$  και  $y_m^{(1)} = l_m$ , ενώ αν  $y_m > l_m$ , έστω  $r$  ο ελάχιστος δείκτης ώστε  $y_r > l_m$  και θέτουμε  $y_k^{(1)} = y_k$  για  $k < r$  και  $y_k^{(1)} = l_m$  για  $k \geq r$ . Τότε, σε κάθε περίπτωση,  $h(y_1^{(1)}, \dots, y_m^{(1)}) \leq h(y_1, \dots, y_m)$  και  $y_m^{(1)} = l_m$ . Ομοίως, μπορεί να βρεθεί μία  $m$ -άδα  $y_1^{(2)} \leq \dots \leq y_k^{(2)} \leq \dots \leq y_m^{(2)}$  ώστε  $h(y_1^{(2)}, \dots, y_m^{(2)}) \leq h(y_1^{(1)}, \dots, y_m^{(1)})$  και  $y_{m-1}^{(2)} = l_{m-1}, y_m^{(2)} = l_m$ . Μετά από  $m$  βήματα, σχηματίζεται μία  $m$ -άδα  $y_1^{(m)} \leq \dots \leq y_k^{(m)} \leq \dots \leq y_m^{(m)}$  με τις ιδιότητες  $h(y_1^{(m)}, \dots, y_m^{(m)}) \leq h(y_1^{(m-1)}, \dots, y_m^{(m-1)})$  και  $y_k^{(m)} = l_k, k = 1 \dots m$ . Συνδυάζοντας όλες τις ανισότητες που προέκυψαν σε αυτά τα βήματα συμπεραίνουμε ότι  $h(l_1, \dots, l_m) \leq h(y_1, \dots, y_m)$ .

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση  $p = \infty$ . Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι για τα προτεινόμενα σημεία η τιμή του κριτηρίου είναι  $C_\infty = \frac{1}{2m}$ . Για οποιαδήποτε  $m$ -άδα  $x_1 \leq \dots \leq x_k \leq \dots \leq x_m$ , είναι δυνατό να οριστούν τα ακόλουθα  $2m$  διαστήματα:  $I_l = [0, F(x_1))$ ,  $I_r = [F(x_m), 1]$ ,  $I_k^{(l)} = [F(x_k), \frac{F(x_k) + F(x_{k+1})}{2}]$  και

$I_k^{(r)} = [\frac{F(x_k)+F(x_{k+1})}{2}, F(x_{k+1}))$  για  $k = 1 \dots m - 1$ . Εφόσον η ένωσή τους είναι το μοναδιαίο διάστημα, τουλάχιστον ένα από αυτά έχει μήκος μεγαλύτερο ή ίσο με  $\frac{1}{2m}$ . Αλλά αν  $G(x)$  είναι η σ.κ.π. που αντιστοιχεί στη  $m$ -άδα  $x_1 \leq \dots \leq x_k \leq \dots \leq x_m$ , η τιμή του  $C_\infty = \|F - G\|_\infty$  είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μέγιστο μήκος των διαστημάτων αυτών. Πράγματι,  $\lim_{x \rightarrow x_1^-} (F(x) - G(x)) = F(x_1) = \lambda(I_l)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_m^+} (G(x) - F(x)) = 1 - F(x_m) = \lambda(I_r)$ . Επιπλέον, για  $k = 1 \dots m - 1$ , η  $G$  είναι σταθερή στο  $[x_k, x_{k+1})$ . Έστω  $G_k$  η τιμή της στο διάστημα αυτό (γίνεται η υπόθεση ότι  $x_k < x_{k+1}$ , αλλιώς ούτε το  $I_k^{(l)}$  ούτε το  $I_k^{(r)}$  είναι το διάστημα με το μέγιστο μήκος). Τότε προφανώς  $\max\{|G_k - F(x_k)|, |G_k - F(x_{k+1})|\} \geq \frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{2} = \lambda(I_k^{(l)}) = \lambda(I_k^{(r)})$ . Με την παρατήρηση ότι  $\lim_{x \rightarrow x_k^+} (G(x) - F(x)) = G_k - F(x_k)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_{k+1}^-} (G(x) - F(x)) = G_k - F(x_{k+1})$  ολοκληρώνεται η απόδειξη.  $\square$

**Σχόλιο 4.7.** Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι οι ανωτέρω συλλογισμοί αποδεικνύουν και ότι η επιλογή των βέλτιστων  $x_i, i = 1 \dots m$  είναι μοναδική.

**Σχόλιο 4.8.** Η απόδειξη ισχύει χωρίς αλλαγές για οποιαδήποτε συνεχή και γνησίως αύξουσα  $F$ . Για  $p < \infty$  χρειάζεται και η υπόθεση ότι η τιμή του κριτηρίου  $C_p$  είναι πεπερασμένη. Εύκολα επαληθεύεται ότι αν  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$  όπου  $X$  τ.μ. με σ.κ.π.  $F$ , τότε  $C_p < \infty \forall p \in [1, \infty)$ .

Είναι ενδιαφέρον να μελετηθεί αν η προτεινόμενη προσέγγιση συγκλίνει στην ακριβή τιμή της αναμενόμενης τιμής καθώς  $m \rightarrow \infty$ . Η ιδιότητα αυτή υφίσταται για μία αρκετά μεγάλη κατηγορία συναρτήσεων:

**Πρόταση 4.5.** Έστω ότι η  $\gamma$  είναι συνεχής συνάρτηση εκθετικής τάξης, δηλαδή υπάρχουν  $M, a > 0$  ώστε  $|\gamma(x)| \leq Me^{a|x|}$ . Τότε

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma(l_n) = \mathbb{E}[\gamma(x)]. \quad (4.22)$$

*Απόδειξη.* Έστω αυθαίρετο  $\varepsilon > 0$ . Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει  $m_0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $m > m_0$ ,  $|\mathbb{E}[\gamma(x)] - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma(l_n)| < \varepsilon$ . Αφού  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Me^{a|x|} e^{-x^2/2} dx < \infty$ , είναι δυνατό να βρεθεί  $T_1 > 0$  ώστε  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{-T_1} Me^{a|x|} e^{-x^2/2} dx + \int_{T_1}^{\infty} Me^{a|x|} e^{-x^2/2} dx \right) < \varepsilon/3$ . Ομοίως, είναι δυνατό να βρεθεί  $T_2 > 0$  ώστε  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} M \int_{T_2}^{\infty} e^{-x^2/4} dx < \varepsilon/12$ . Θέτουμε  $T = \max\{T_1, T_2, 4a\}$  και ορίζουμε  $\gamma_T = \gamma \cdot \chi_{[-T, T]}$ , όπου  $\chi_{[-T, T]}$  είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου  $[-T, T]$ , και  $\gamma_T^c = \gamma - \gamma_T = \gamma \cdot \chi_{\{|x| > T\}}$ .

Τότε το  $|\mathbb{E}[\gamma(x)] - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma(l_n)|$  είναι ίσο με

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}[\gamma(x)] - \mathbb{E}[\gamma_T(x)] + \mathbb{E}[\gamma_T(x)] - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma_T(l_n) + \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma_T(l_n) - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma(l_n)| \leq \\ & \leq |\mathbb{E}[\gamma_T^c(x)]| + |\mathbb{E}[\gamma_T(x)] - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma_T(l_n)| + |\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma_T^c(l_n)|. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Για τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της (4.23) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[\gamma_T^C(x)]| &\leq \mathbb{E}[|\gamma_T^C(x)|] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{-T} |\gamma(x)| e^{-x^2/2} dx + \int_T^{\infty} |\gamma(x)| e^{-x^2/2} dx \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{-T_1} M e^{a|x|} e^{-x^2/2} dx + \int_{T_1}^{\infty} M e^{a|x|} e^{-x^2/2} dx \right) < \varepsilon/3. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ο τρίτος όρος του δεξιού μέλους της (4.23) είναι επίσης φραγμένος από το  $\varepsilon/3$ . Αυτό αποδεικνύεται με τον ακόλουθο τρόπο. Ας συμβολίσουμε με  $n_T$  τον ελάχιστο ακέραιο  $n$  για τον οποίο ισχύει  $l_n > T$ . Τότε

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma_T^C(l_n) \right| &\leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m |\gamma_T^C(l_n)| \leq \frac{1}{m} \sum_{n:|l_n|>T} |\gamma(l_n)| \leq M \frac{1}{m} \sum_{n:|l_n|>T} e^{a|l_n|} = 2M \frac{1}{m} \sum_{n:l_n>T} e^{al_n} \\ &= 2M \frac{1}{m} \sum_{n=n_T}^m e^{al_n} = 2M \sum_{n=n_T}^{m-1} \frac{1}{m} e^{al_n} + 4M \frac{e^{al_m}}{2m} \leq 4M \left( \sum_{n=n_T}^{m-1} \frac{1}{m} e^{al_n} + \frac{e^{al_m}}{2m} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Από τον ορισμό του  $l_n$ , για  $n = n_T \dots m-1$  ισχύει ότι  $\frac{1}{m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_n}^{l_{n+1}} e^{-x^2/2} dx$ . Οπότε

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} e^{al_n} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_n}^{l_{n+1}} e^{-x^2/2} e^{al_n} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_n}^{l_{n+1}} e^{-x^2/4} e^{-x^2/4} e^{al_n} dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_n}^{l_{n+1}} e^{-x^2/4} e^{-l_n^2/4} e^{al_n} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_n}^{l_{n+1}} e^{-x^2/4} dx \end{aligned} \quad (4.26)$$

επειδή για  $n \geq n_T$  ισχύει  $l_n > T \geq 4a$  και επομένως  $l_n^2/4 \geq al_n$ . Επιπλέον,  $\frac{1}{2m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_m}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$ . Επομένως

$$\begin{aligned} \frac{e^{al_m}}{2m} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_m}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{al_m} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_m}^{\infty} e^{-x^2/4} e^{-x^2/4} e^{al_m} dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_m}^{\infty} e^{-x^2/4} e^{-l_m^2/4} e^{al_m} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_m}^{\infty} e^{-x^2/4} dx. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma_T^C(l_n) \right| &\leq 4M \left( \sum_{n=n_T}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_n}^{l_{n+1}} e^{-x^2/4} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_m}^{\infty} e^{-x^2/4} dx \right) = \\ &= 4M \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_{n_T}}^{\infty} e^{-x^2/4} dx \leq 4M \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{T_2}^{\infty} e^{-x^2/4} dx < 4\varepsilon/12 = \varepsilon/3. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος της (4.23),  $|\mathbb{E}[\gamma_T(x)] - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma_T(l_n)|$ , μπορεί να γραφεί ως  $|\int \gamma_T d\mu - \int \gamma_T d\mu_m|$  όπου  $\mu$  η πρότυπη κανονική κατανομή ενώ

$\mu_m$  είναι η κατανομή του συνόλου  $\{l_1, \dots, l_m\}$ . Η  $\gamma$  είναι συνεχής στο συμπαγές διάστημα  $[-T, T]$ , άρα ο περιορισμός της σε αυτό είναι φραγμένος. Αφού η  $\gamma_T$  ταυτίζεται με τη  $\gamma$  στο  $[-T, T]$  και είναι μη μηδενική έξω από αυτό, είναι φραγμένη. Επιπλέον, έχει σύνολο σημείων ασυνέχειας μηδενικού μέτρου  $\mu$  (τα μόνα πιθανά σημεία είναι το  $-T$  και το  $T$ ). Συνεπώς (βλ. την απόδειξη του Θεωρήματος 25.8 του [28])  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int \gamma_T d\mu_m = \int \gamma_T d\mu$  αν δειχθεί ότι η  $\mu_m$  συγκλίνει ασθενώς στη  $\mu$ . Εφόσον η  $F$  είναι παντού συνεχής, αρκεί για το σκοπό αυτό να δειχτεί ότι  $\forall x \in \mathbb{R} \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x) = F(x)$ , όπου  $F_m$  είναι η σ.κ.π. του  $\{l_1, \dots, l_m\}$ . Αν ο πληθάρημος του συνόλου  $A$  συμβολίζεται με  $|A|$ , τότε  $F_m(x) = \frac{1}{m} |\{n : l_n \leq x\}| = \frac{1}{m} |\{n : F(l_n) \leq F(x)\}| = \frac{1}{m} |\{n : \frac{1}{2m} + \frac{n-1}{m} \leq F(x)\}| = \frac{1}{m} |\{n \leq mF(x) + 1/2\}|$ . Αλλά  $|\{n \leq mF(x) + 1/2\}| = mF(x) + \Delta_m$ , όπου  $|\Delta_m| \leq 1/2$ , άρα έπεται ότι  $F_m(x) \rightarrow F(x)$  καθώς  $m \rightarrow \infty$ .

Είναι επομένως δυνατό να επιλεγεί ακέραιος  $m_0$  ώστε για κάθε  $m > m_0$  να ισχύει  $|\mathbb{E}[\gamma_T(x)] - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma_T(l_n)| < \varepsilon/3$ . Τότε, από την (4.23) έπεται ότι  $|\mathbb{E}[\gamma(x)] - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \gamma(l_n)| < \varepsilon$  για κάθε  $m > m_0$ .  $\square$

**Σχόλιο 4.9.** Το γεγονός ότι στην παραπάνω απόδειξη αρκεί η  $\gamma_T$  να είναι φραγμένη και να έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας αποδεικνύει ότι η μέθοδος συγκλίνει για συναρτήσεις εκθετικής τάξης με πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η  $\gamma$  είναι εκθετικής τάξης πάλι προκύπτει ότι η  $\gamma_T$  είναι φραγμένη. Δεδομένου πως η  $\gamma_T$  θα έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας (το πολύ δύο περισσότερα από τη  $\gamma$ ), η παραπάνω απόδειξη ισχύει.

**Σχόλιο 4.10.** Η απαίτηση η  $\gamma$  να έχει σύνολο σημείων ασυνέχειας μηδενικού μέτρου είναι ουσιώδης, ακόμα και για συναρτήσεις στις οποίες φαινομενικά δεν υπάρχει πρόβλημα. Ενδιαφέρον παράδειγμα αποτελεί η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου  $\bigcup_{n=1}^{\mathbb{N}} \{l_n, n = 1 \dots m\}$  (τα  $l_n$  εξαρτώνται από το  $m$ ), δηλαδή του συνόλου  $\{F^{-1}(p_n), p_n = \frac{1}{2m} + \frac{n-1}{m}, 1 \leq n \leq m, n, m \in \mathbb{N}\}$ . Το σύνολο αυτό είναι προφανώς αριθμήσιμο, άρα έχει μέτρο μηδέν και επομένως η αναμενόμενη τιμή της χαρακτηριστικής του συνάρτησης είναι ίση με 0. Όμως όλες οι προσεγγίσεις είναι ίσες με 1, άρα συγκλίνουν στο 1. Το παράδοξο αυτό συμβαίνει επειδή το σύνολο αυτό, αν και μέτρου 0, είναι πυκνό στο  $\mathbb{R}$  και η χαρακτηριστική του δεν είναι πουθενά συνεχής.

## 4.4 Αριθμητικό Παράδειγμα

Το υπό μελέτη σύστημα αποτελείται από τρία μη γραμμικώς διασυνδεδεμένα γραμμικά συστήματα. Το πρώτο έχει έναν πραγματικό πόλο στο 0.9 και ένα ζεύγος μιγαδικών πόλων στις θέσεις  $0.9(\cos \frac{\pi}{8} \pm i \sin \frac{\pi}{8})$ . Το δεύτερο έχει έναν πραγματικό πόλο στο 0.9 και ένα ζεύγος μιγαδικών πόλων στις θέσεις  $0.9(\cos \frac{\pi}{8} \pm i \sin \frac{\pi}{8})$ . Το τρίτο έχει έναν πραγματικό πόλο στο 0.9. Τα τρία αυτά συστήματα δεν έχουν μηδενικά και έχουν κέρδος τέτοιο ώστε όταν οδηγούνται από Γκαουσσσιανό λευκό θόρυβο (Gaussian White Noise, GWN) με μοναδιαία διακύμανση, η διακύμανση της εξόδου τους να είναι και αυτή ίση με 1.

Τα παραπάνω συστήματα περιγράφονται στο χώρο κατάστασης από τις ακόλουθες (στρογγυλοποιημένες) μήτρες:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & 0.7794 & 1 \\ 0 & -0.2025 & 0.7794 \end{bmatrix}, A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & 0.8315 & 1 \\ 0 & -0.1186 & 0.8315 \end{bmatrix}, B^{(1)} = B^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \\ C^{(1)} = [0.373 \ 0 \ 0], C^{(2)} = [0.2277 \ 0 \ 0], A^{(3)} = 0.9, B^{(3)} = 0.5, C^{(3)} = 0.8718. \quad (4.29)$$

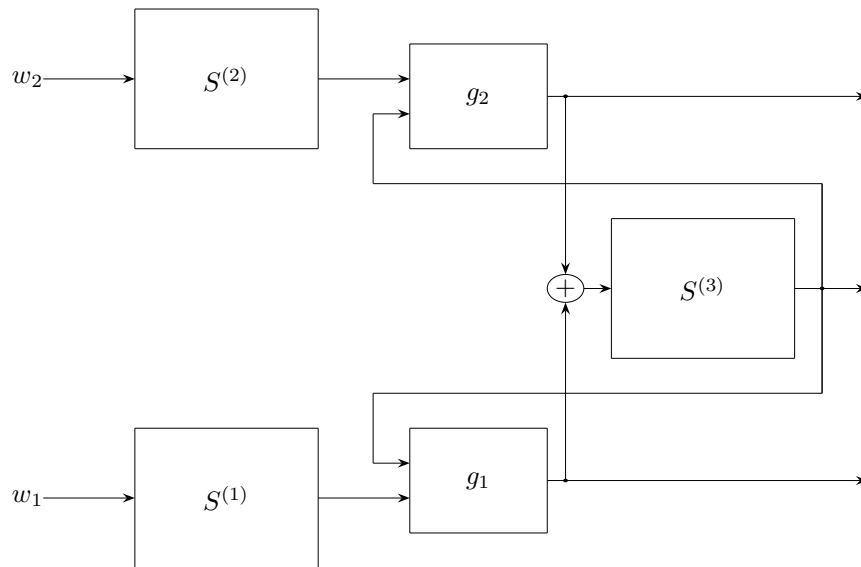
Τα γραμμικά συστήματα διασυνδέονται μόνο μέσω μη γραμμικών χαρακτηριστικών, δηλαδή  $\Lambda = 0_{3 \times 3}$ . Υπάρχουν δύο μη γραμμικές χαρακτηριστικές, η  $g_1$  και η  $g_2$ . Η  $g_1$  περιγράφεται από τη σχέση  $g_1(D_1x) = (y_1^S + 0.2(y_1^S)^2)(\pi + \arctan(5y_3^S))$  και η  $g_2$  από την  $g_2(D_2x) = (y_2^S + 0.2(y_2^S)^2)(\pi + \arctan(5y_3^S))$ , όπου  $y_i^S$  είναι η έξοδος του  $i$ -οστού γραμμικού συστήματος. Οι έξοδοι των  $g_1$  και  $g_2$  οδηγούνται στην είσοδο του τρίτου συστήματος, δηλαδή  $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Τα δύο πρώτα γραμμικά συστήματα οδηγούνται από GWN με διακύμανση ίση με 10. Υποθέτουμε πως η αρχική κατάσταση έχει μηδενικό μέσο και μήτρα συνδιακύμανσης ίση με  $I_{7 \times 7}$ .

Η έξοδος του συστήματος έχει και γραμμικό και μη γραμμικό μέρος. Το γραμμικό μέρος αποτελείται από την  $y_3^S$ . Οι μη γραμμικές μεταβλητές εξόδου είναι ίσες με τις εξόδους των δύο μη γραμμικών χαρακτηριστικών, δηλαδή  $h_i = g_i$ ,  $C_i^N = D_i$ ,  $i = 1, 2$ . Και στις τρεις ακολουθίες εξόδου προστίθεται GWN με διακύμανση ίση με 10, ή ισοδύναμα  $R = 10I_{3 \times 3}$ . Το σύστημα παρουσιάζεται σε μορφή μπλοκ διαγράμματος στο Σχ. 4.3.

Έστω ότι ο στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε το συνδυασμό των μεταβλητών κατάστασης που δίνει το γραμμικό μέρος της εξόδου, δηλαδή το  $y_3^S$ . Αυτό το πρόβλημα εκτίμησης μπορεί να αντιμετωπιστεί αποτελεσματικά με τις προτεινόμενες τεχνικές. Πράγματι, η συνολική τάξη του συστήματος είναι 7, επομένως για να υπολογιστούν άμεσα οι απαιτούμενες αναμενόμενες τιμές χρειάζεται ολοκλήρωση 7<sup>ης</sup> τάξης. Χρησιμοποιώντας όμως τον προτεινόμενο αλγόριθμο, και αφού  $\text{rank} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 3$ , χρειάζεται μόνο ολοκλήρωση 3<sup>ης</sup> τάξης.

Τόσο για την ολοκλήρωση Gauss-Hermite όσο και για τη νέα μέθοδο ολοκλήρωσης που προτείνεται σε αυτό το κεφάλαιο, η παράμετρος  $m$  της (4.17) έχει τεθεί ίση με 5. Για λόγους σύγκρισης, έχει εφαρμοστεί στο πρόβλημα και το UKF. Η άμεση ολοκλήρωση ήταν πολύ αργή ακόμα και για  $m = 3$  (περίπου 100 φορές πιο αργή), ενώ τα αποτελέσματά της ήταν πολύ κοντά σε αυτά της ολοκλήρωσης μειωμένης τάξης.

Τα αποτελέσματα από 100 επαναλήψεις του πειράματος παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1. Το Gauss-Hermite Φίλτρο Kalman με μειωμένη τάξη ολοκλήρωσης (Gauss-Hermite Kalman Filter-Reduced Integration Order, GHKF-RO) δίνει σημαντικά καλύτερα αποτελέσματα, ιδίως στη χειρότερη περίπτωση. Η μείωση της τάξης ολοκλήρωσης δίνει τη δυνατότητα βελτίωσης των αποτελεσμάτων σε εύλογο χρονικό διάστημα. Χρήση της νέας μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης (novel quadrature, NQKF-RO) οδηγεί σε περαιτέρω βελτίωση των αποτελεσμάτων, και αυτή η βελτίωση



Σχήμα 4.3: Μπλοκ διάγραμμα του υπό μελέτη συστήματος.

Πίνακας 4.1: Πίνακας των rms τιμών του σφάλματος εκτίμησης

Τεχνική	Μέση Τιμή	Μέγιστη Τιμή	Χρόνος (ms)
UKF	4.30	8.68	2.42
GHKF-RO	3.60	6.18	13.03
NQKF-RO	3.16	4.94	13.05

γίνεται χωρίς επιπλέον κόστος σε σχέση με το GHKF-RO. Οι υπολογιστικές απαιτήσεις που παρουσιάζονται είναι ανά βήμα και έχουν καταγραφεί σε ένα PC των 64 bit με συχνότητα ρολογιού ίση με 2.9 GHz που τρέχει MATLAB 7.2 για Linux. Σημειώνεται ότι οι τιμές των  $l_n$  στην (4.19) υπολογίζονται εκτός γραμμής, αφού είναι ίδιες σε κάθε βήμα. Για  $m = 5$  όπως στο παράδειγμά μας, οι τιμές αυτές είναι (κατόπιν στρογγυλοποίησης) -1.28155, -0.52440, 0, 0.52440 και 1.28155.

## 4.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο γενικεύτηκαν τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου δείχνοντας πως μείωση της τάξης της ολοκλήρωσης είναι εφικτή με αντίστοιχο τρόπο και στην περίπτωση που οι μη γραμμικές χαρακτηριστικές έχουν περισσότερες από μία εισόδους. Επιπλέον, παρουσιάστηκε μία νέα μέθοδος αριθμητικού υπολογισμού των αναμενόμενων τιμών που εμπλέκονται στα μη γραμμικά φίλτρα η οποία σχεδιάστηκε με βάση την ελαχιστοποίηση νορμών. Οι προτεινόμενες τεχνικές δοκιμάστηκαν σε ένα

επταδιάστατο παράδειγμα στο οποίο επιτρέπουν ακριβέστερους υπολογισμούς χωρίς μεγάλη υπολογιστική επιβάρυνση. Τα αποτελέσματά τους είναι καλύτερα από αυτά του UKF. Στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε επίσης ότι η προτεινόμενη μέθοδος αριθμητικού υπολογισμού οδηγεί σε καλύτερη απόδοση από τη μέθοδο Gauss-Hermite.

# Κεφάλαιο 5

## Βελτιωμένα Φίλτρα Σωματιδίων

### 5.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, η αύξηση της υπολογιστικής ισχύος επιτρέπει τη χρήση τεχνικών που δεν περιορίζονται στην προσέγγιση της κατανομής από μία κανονική κατανομή, αλλά προσεγγίζουν την κατανομή της κατάστασης από έναν κυρτό συνδυασμό συναρτήσεων Dirac ή κανονικών κατανομών, έχουν δε προταθεί στη βιβλιογραφία πολλές παραλλαγές των τεχνικών αυτών.

Το ζητούμενο είναι η προσέγγιση να είναι ακριβής χωρίς όμως να είναι υπερβολικά απαιτητική σε υπολογιστικούς πόρους. Επομένως θα πρέπει να μη χρησιμοποιείται πολύ μεγάλος αριθμός συναρτήσεων, ούτε και να χρειάζονται σε κάθε βήμα ιδιαίτερα σύνθετοι υπολογισμοί για την ανανέωση των παραμέτρων κάθε συνάρτησης. Στις επόμενες δύο ενότητες αυτού του κεφαλαίου προτείνονται τροποποιήσεις για τα Particle Filters (προσέγγιση με συναρτήσεις Dirac).

Πιο συγκεκριμένα, στην ενότητα 5.2 προτείνονται κάποιες τροποποιήσεις στο Auxiliary Particle Filter [74, 20, 21]. Το Auxiliary Particle Filter σχεδιάστηκε ώστε να αντιμετωπίζει το γεγονός ότι από τα σωματίδια που προκύπτουν από το βήμα πρόβλεψης μπορεί πολλά να λάβουν πολύ μικρό βάρος από το βήμα διόρθωσης (επειδή η πιθανοφάνεια της νέας μέτρησης θα είναι πολύ μικρή). Για τον σκοπό αυτό, πρώτα υπολογίζεται μία εκτίμηση των βαρών αυτών, και δημιουργούνται περισσότερα νέα σωματίδια από τα σωματίδια που εκτιμάται ότι θα οδηγήσουν σε μεγαλύτερα βάρη. Αυτό είναι κάτι που λαμβάνεται υπόψη από το φίλτρο κατά τον υπολογισμό των βαρών μετά την επαναδειγματοληψία. Οι προτεινόμενες τροποποιήσεις αφορούν αφενός το πόσο περισσότερο πρέπει να προτιμηθούν τα σωματίδια με μεγαλύτερο εκτιμώμενο βάρος, αφετέρου το πώς αντισταθμίζεται το γεγονός ότι από τα σωματίδια που προέκυψαν από το προηγούμενο χρονικό βήμα κάποια λαμβάνονται περισσότερο υπόψη (πέραν της μεγαλύτερης πιθανοφάνειας στην οποία ενδεχομένως οδηγούν).

Η ενότητα 5.3 αφορά στο Unscented Particle Filter [47]. Το φίλτρο αυτό έχει



χαρακτηριστικά και φίλτρου σωματιδίων και φίλτρου αθροίσματος κανονικών κατανομών. Σε κάθε σωματίδιο αντιστοιχεί μία κανονική κατανομή, η μέση τιμή και η μήτρα συνδιακύμανσης της οποίας υπολογίζονται με τις εξισώσεις του Unscented Kalman Filter. Ωστόσο, από την κατανομή που προκύπτει από το βήμα διόρθωσης λαμβάνεται τυχαία ένα δείγμα και το βάρος του σωματιδίου υπολογίζεται όπως στα Particle Filters. Σε αυτό το κεφάλαιο προτείνεται διόρθωση σχετικά με τη μήτρα συνδιακύμανσης, ώστε να λαμβάνεται υπόψη το γεγονός ότι τα σωματίδια δεν είναι ανεξάρτητα αλλά το κάθε ένα αποτελεί μέρος του συνολικού φίλτρου, άρα οι εξισώσεις του Unscented Kalman Filter δεν είναι οι πλέον κατάλληλες.

Στην τελευταία ενότητα μελετάται ένα παράδειγμα μη γραμμικού συστήματος που έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς στη σχετική βιβλιογραφία. Συγκρίνονται οι τροποποιημένες τεχνικές με τις υπάρχουσες τόσο από πλευράς απόδοσης όσο και από πλευράς υπολογιστικού κόστους. Προκύπτει ότι οι προτεινόμενες αλλαγές βελτιώνουν την απόδοση των φίλτρων, με περιορισμένη ή και χωρίς υπολογιστική επιβάρυνση.

## 5.2 Τροποποιημένο Auxiliary Particle Filter

Η ενότητα αυτή ξεκινά με λεπτομερέστερη παρουσίαση του Auxiliary Particle Filter και ακολουθούν οι προτεινόμενες τροποποιήσεις. Υποθέτουμε ότι το σύστημα του οποίου την κατάσταση θέλουμε να εκτιμήσουμε δίνεται από τις (1.1)-(1.2).

Έστω  $x_{k-1}^i, W_{k-1}^i, i = 1 \dots N_p$  τα σωματίδια που προέκυψαν από το βήμα  $k-1$  με τα αντίστοιχα βάρη και  $y_k$  η τιμή της εξόδου για το χρονικό βήμα  $k$ . Στις απλούστερες εκδοχές του Particle Filter, σε αυτό το σημείο από κάθε σωματίδιο θα λαμβανόταν ένα νέο σωματίδιο με βάση τη (στοχαστική) δυναμική του συστήματος, και αυτή η διαδικασία θα συνιστούσε το βήμα πρόβλεψης. Ωστόσο στο Auxiliary Particle Filter σε αυτό το σημείο γίνεται μία εκτίμηση του πόσο σημαντική θα είναι η συνεισφορά των σωματιδίων που θα προκύψουν. Το σωματίδιο που θα προκύψει από το  $x_{k-1}^i$  είναι τ.μ. ίση με  $f(x_{k-1}^i) + w_{k-1}^i$  (το  $w_{k-1}^i$  δεν πρέπει να συγχέεται με το  $W_{k-1}^i$ ). Αντιπροσωπευτική τιμή της τ.μ. αυτής μπορεί να θεωρεί η μέση τιμή, η επικρατούσα τιμή της (συμπίπτουν για κανονική κατανομή) ή μία τυχαία πραγματοποίηση.

Έστω  $\mu_k^i$  η αντιπροσωπευτική αυτή τιμή. Τότε είναι λογικό να θεωρηθεί, ιδίως αν η διακύμανση της διαταραχής είναι σχετικά μικρή, ότι το  $i$ -οστό σωματίδιο θα έχει πιθανοφάνεια περίπου  $p(y_k | \mu_k^i)$ . Για το λόγο αυτό αντιστοιχίζεται στο  $i$ -οστό σωματίδιο το βάρος  $W_{k-1}^i p(y_k | \mu_k^i)$ . Με βάση αυτά τα βάρη γίνεται επαναδειγματοληψία των  $x_{k-1}^i, i = 1 \dots N_p$ , και προκύπτουν τα σωματίδια με δείκτες  $j^i, i = 1 \dots N_p$ . Οι δείκτες σωματιδίων με μεγάλα βάρη, αναμένεται να εμφανιστούν περισσότερες φορές, ενώ οι δείκτες σωματιδίων με μικρά βάρη έχουν σημαντική πιθανότητα να μην εμφανιστούν καμία.

Από τα σωματίδια που δίνει η επαναδειγματοληψία,  $x_{k-1}^{j^i}$ , προκύπτουν νέα σωματίδια  $x_k^i = f(x_{k-1}^{j^i}) + w_{k-1}^i, i = 1 \dots N_p$ . Η μέτρηση  $y_k$  έχει πιθανοφάνεια  $p(y_k | x_k^i)$ . Επειδή όμως πρέπει να ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι το σωματίδιο  $x_{k-1}^{j^i}$ , από το οποίο προήλθε το  $x_k^i$ , είχε λάβει ως παράγοντα στο βάρος του το  $p(y_k | \mu_k^i)$ , το βάρος του

$i$ -οστού σωματιδίου στο βήμα  $k$  είναι  $W_k^i = \frac{p(y_k|x_k^i)}{p(y_k|\mu_k^i)}$ . Ο αλγόριθμος μπορεί να βρεθεί σε μορφή διαγράμματος στις αναφορές [20, 21].

Η πρώτη προτεινόμενη αλλαγή αφορά το τελευταίο σημείο, δηλαδή το βάρος που δίνεται στο  $x_k^i$ . Ο παραπάνω αλγόριθμος αντισταθμίζει τον παράγοντα  $p(y_k|\mu_k^i)$  λόγω του εκτιμώμενου βάρους με το να διαιρέσει με τον παράγοντα αυτό. Όμως, αυτό έχει το μειονέκτημα ότι δεν λαμβάνεται υπόψη ο αριθμός των σωματιδίων που τελικά προήλθαν από το σωματίδιο  $x_{k-1}^{j^i}$ . Έτσι, αν από αυτό το σωματίδιο μέσω της επαναδειγματοληψίας προκύψουν  $s^{j^i}$  νέα σωματίδια, το καθένα θα έχει βάρος (πριν το βήμα διόρθωσης)  $\frac{1}{p(y_k|\mu_k^i)}$ , άρα το συνολικό τους βάρος θα είναι  $s^{j^i} \cdot \frac{1}{p(y_k|\mu_k^i)}$ . Το βάρος αυτό είναι τ.μ. ως προς την επαναδειγματοληψία, αφού ο αριθμός  $s^{j^i}$  δεν είναι προκαθορισμένος. Το χαρακτηριστικό αυτό, παρόλο που η μέση τιμή του βάρους είναι ανάλογη του

$$\frac{W_{k-1}^{j^i} p(y_k|\mu_k^i)}{p(y_k|\mu_k^i)} = W_{k-1}^{j^i} \quad (5.1)$$

δεν είναι επιθυμητό, διότι η διακύμανση που παρουσιάζει η τ.μ.  $s^{j^i}$  εισάγει θόρυβο (έστω και μικρή ποσότητα) στο φίλτρο.

**Σχόλιο 5.1.** Τα παραπάνω βάρη δεν είναι κανονικοποιημένα. Σημασία όμως έχει το γεγονός ότι για δύο διαφορετικά σωματίδια,  $x_{k-1}^{j^i1}$  και  $x_{k-1}^{j^i2}$ , οι αναμενόμενες τιμές των βαρών των σωματιδίων που προκύπτουν από τα δύο αυτά σωματίδια, έχουν λόγο ίσο με  $W_{k-1}^{j^i1}/W_{k-1}^{j^i2}$ . Ούτως ή άλλως, μετά τη διαδικασία που μελετάμε ακολουθεί κανονικοποίηση των βαρών. Αντιστοίχως και για την παρακάτω περίπτωση.

Η προτεινόμενη τροποποίηση είναι το βάρος που θα έχει το σωματίδιο  $x_k^i$  μετά την επαναδειγματοληψία να είναι ίσο με  $\frac{W_{k-1}^{j^i}}{s^{j^i}}$ . Τότε το συνολικό βάρος των σωματιδίων που προήλθαν από το  $x_{k-1}^{j^i}$  θα είναι σίγουρα  $s^{j^i} \frac{W_{k-1}^{j^i}}{s^{j^i}} = W_{k-1}^{j^i}$ . Να ανατίθεται η προαναφερθείσα τιμή του βάρους είναι εφικτό διότι οι τιμές ανατίθενται μετά την επαναδειγματοληψία, άρα η τιμή του  $s^{j^i}$  έχει καθοριστεί. Το μόνο που απαιτείται είναι ο αλγόριθμος επαναδειγματοληψίας να καταμετρά πόσα αντίγραφα προκύπτουν από κάθε ένα από τα αρχικά σωματίδια, κάτι που δεν συνεπάγεται σημαντικό κόστος.

Η σκοπιμότητα της προτεινόμενης τροποποίησης μπορεί να αναδειχθεί από το ακόλουθο παράδειγμα. Έστω ότι δύο διαφορετικά σωματίδια,  $x_{k-1}^{i1}$  και  $x_{k-1}^{i2}$  έχουν ίσα βάρη πριν την επαναδειγματοληψία (για απλοποίηση υποθέτουμε και ότι έχουν ίσα βάρη από το προηγούμενο βήμα), και αυτά είναι τέτοια ώστε βάσει του συνολικού αριθμού σωματιδίων να αντιστοιχούν 1.5 σωματίδια σε κάθε ένα από αυτά τα δύο, δηλαδή  $W_{k-1}^{i1} = W_{k-1}^{i2}$ ,  $W_{k-1}^{i1} p(y_k|\mu_k^{i1}) = W_{k-1}^{i2} p(y_k|\mu_k^{i2}) = \frac{1.5}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} W_{k-1}^i p(y_k|\mu_k^i)$ . Ενδέχεται από το πρώτο σωματίδιο να προκύψει ένα νέα σωματίδιο, ενώ από το δεύτερο να προκύψουν δύο, δηλαδή να ισχύει  $s^{i1} = 1, s^{i2} = 2$ . Ο αλγόριθμος της βιβλιογραφίας θα δώσει στα τρία νέα σωματίδια ίσα βάρη, άρα έμμεσα θα δώσει στο σωματίδιο  $x_{k-1}^{i2}$  διπλάσιο βάρος από ότι στο  $x_{k-1}^{i1}$ . Αντίθετα, ο προτεινόμενος αλγόριθμος θα δώσει

στα σωματίδια που προέρχονται από το  $x_{k-1}^{i_2}$  το μισό βάρος, οπότε συνολικά τα βάρη θα είναι ίσα.

Η δεύτερη προτεινόμενη τροποποίηση αφορά το πόσο θα επηρεάζεται η επαναδειγματοληψία από τα βοηθητικά βάρη  $p(y_k|\mu_k^i)$ . Οι υπάρχοντες αλγόριθμοι δημιουργούν αριθμό σωματιδίων ανάλογο του βοηθητικού βάρους  $p(y_k|\mu_k^i)$ . Ωστόσο αυτό δεν είναι απαραίτητα βέλτιστο. Έστω ότι από το προηγούμενο βήμα έχουν προκύψει σωματίδια σε δύο διαφορετικές περιοχές του χώρου κατάστασης, και ότι με τη νέα μέτρηση τα βοηθητικά βάρη είναι διαφορετικά. Σε κάθε περίπτωση είναι λογικό να δημιουργηθούν περισσότερα σωματίδια στην περιοχή που υπάρχει μεγαλύτερο βάρος. Για να βρεθεί πόσο περισσότερα πρέπει να δημιουργηθούν στην περιοχή με το μεγαλύτερο βάρος, χρειάζεται να γνωρίζουμε πόσο καλή είναι η προσέγγιση της κατανομής σε μία περιοχή ανάλογα με τον αριθμό των σωματιδίων εκεί.

Στη βιβλιογραφία συχνά, θεωρείται ότι η απόκλιση είναι αντιστρόφως ανάλογη του αριθμού των σωματιδίων. Αυτό γίνεται γιατί υπάρχουν φράγματα της μέσης τετραγωνικής απόκλισης της εκτίμησης της μέσης τιμής μίας συνάρτησης από την ακριβή τιμή που είναι αντιστρόφως ανάλογα του αριθμού των σωματιδίων, τα οποία ισχύουν με τις κατάλληλες υποθέσεις [45]. Επομένως η rms τιμή της απόκλισης είναι αντιστρόφως ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του αριθμού των σωματιδίων.

Άρα αν έχουμε μία περιοχή με πιθανότητα  $p_1$  και μία άλλη με πιθανότητα  $p_2$ , και αν έχουμε  $n_1$  σωματίδια στην πρώτη και  $n_2$  στη δεύτερη, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η απόκλιση θα είναι ανάλογη του  $\frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n_2}$  ή του  $\frac{p_1}{\sqrt{n_1}} + \frac{p_2}{\sqrt{n_2}}$ . Αν  $n$  είναι ο συνολικός αριθμός σωματιδίων που θα διατεθούν για την προσέγγιση στις δύο αυτές περιοχές, τότε για την πρώτη περίπτωση θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την παράσταση  $\frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n-n_1}$ . Με παραγωγή προκύπτει

$$\frac{d}{dn} \left( \frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n-n_1} \right) = -\frac{p_1}{n_1^2} + \frac{p_2}{(n-n_1)^2} = -\frac{p_1}{n_1^2} + \frac{p_2}{n_2^2}. \quad (5.2)$$

Αυτό δείχνει ότι έχουμε ελάχιστο για  $n_1/n_2 = \sqrt{p_1/p_2}$ . Επομένως διαπιστώνουμε πως είναι σκόπιμο τα βοηθητικά βάρη να είναι ανάλογα του  $\sqrt{p(y_k|\mu_k^i)}$ .

**Σχόλιο 5.2.** Στο παραπάνω πρόβλημα ελαχιστοποίησης ενδέχεται η τιμή που προκύπτει από τη διαδικασία με την παράγωγο να μην αντιστοιχεί σε ακέραια  $n_1, n_2$ . Τότε το ελάχιστο θα είναι για μία από τις ακέραιες τιμές που είναι εκατέρωθεν του μη ακεραίου ελαχίστου. Επειδή όμως ο αλγόριθμος απλώς αναθέτει κάποια βάρη για την επαναδειγματοληψία τα οποία δεν είναι απαραίτητα ακέραια, δεν υπάρχει πρόβλημα να είναι τα βοηθητικά βάρη ίσα με  $\sqrt{p(y_k|\mu_k^i)}$ . Αντίστοιχα και για τη δεύτερη περίπτωση.

Αν ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα  $\frac{p_1}{\sqrt{n_1}} + \frac{p_2}{\sqrt{n_2}}$ , η παραγωγή δίνει

$$\frac{d}{dn} \left( \frac{p_1}{\sqrt{n_1}} + \frac{p_2}{\sqrt{n-n_1}} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{p_1}{n_1^{3/2}} + \frac{p_2}{(n-n_1)^{3/2}} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{p_1}{n_1^{3/2}} + \frac{p_2}{n_2^{3/2}} \right). \quad (5.3)$$

Η θεώρηση αυτή επομένως μας οδηγεί στο να χρησιμοποιήσουμε βοηθητικά βάρη ανάλογα του  $\sqrt[3]{p(y_k|\mu_k^i)^2}$ .

**Σχόλιο 5.3.** Δεδομένου πως είναι πιο λογικό να θεωρηθούν ανεξάρτητα τα σφάλματα από διαφορετικές περιοχές, και τότε προστίθενται οι μέσες τετραγωνικές τιμές και όχι οι rms τιμές των σφαλμάτων, η τελευταία θεώρηση ίσως δεν φαίνεται τόσο φυσική όσο η αντίστοιχη με τις μέσες τετραγωνικές τιμές. Επειδή όμως ούτως ή άλλως πρόκειται για φράγματα τα οποία χρησιμοποιούνται για να βοηθήσουν την αναζήτηση της συνάρτησης με την οποία λαμβάνονται υπόψη οι πιθανοφάνειες, είναι σκόπιμο να εξεταστεί και αυτή η προσέγγιση.

Οι τροποποιήσεις που προτείνονται σε αυτήν την ενότητα δοκιμάζονται σε ένα αριθμητικό παράδειγμα στην ενότητα 5.4.

## 5.3 Τροποποιημένο Unscented Particle Filter

Το Unscented Particle Filter [47] είναι μία τεχνική που έχει κάποια κοινά χαρακτηριστικά με τις τεχνικές αθροίσματος κανονικών κατανομών. Σε κάθε σωματίδιο αντιστοιχεί μία κανονική κατανομή. Για το βήμα πρόβλεψης, οι παράμετροί της ανανεώνονται όπως στο Unscented Kalman Filter, ξεχωριστά για κάθε σωματίδιο. Το βήμα διόρθωσης ξεκινά πάλι με το βήμα διόρθωσης του Unscented Kalman Filter, για κάθε σωματίδιο ξεχωριστά. Ωστόσο ύστερα από αυτή τη διαδικασία, από κάθε μία κατανομή που προκύπτει λαμβάνεται ένα σωματίδιο τυχαία και το βάρος του σωματιδίου υπολογίζεται όπως στα Particle Filters.

Δηλαδή, αν το  $i$ -οστό σωματίδιο για το χρονικό βήμα  $k - 1$  ήταν το  $x_k^{i-1}$ , και η νέα κατανομή έχει μέση τιμή  $\hat{x}_k^i$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $P_k^i$ , θα ληφθεί τυχαία το  $\tilde{x}_k^i \sim \mathcal{N}(\hat{x}_k^i, P_k^i)$  και το βάρος που του αναλογεί είναι

$$W_k^i = \frac{p(y_k | \tilde{x}_k^i) p(\tilde{x}_k^i | x_k^{i-1})}{p(\tilde{x}_k^i | \hat{x}_k^i, P_k^i)}, \quad (5.4)$$

όπου η τιμή  $p(\tilde{x}_k^i | \hat{x}_k^i, P_k^i)$  είναι η τιμή της σ.π.π. της  $\mathcal{N}(\hat{x}_k^i, P_k^i)$  στο  $\tilde{x}_k^i$ .

Η προσέγγιση της εκ των υστέρων κατανομής για το βήμα  $k$  δίνεται από τα  $\tilde{x}_k^i, W_k^i$ . Πριν την επανάληψη της διαδικασίας για το βήμα  $k + 1$  γίνεται επαναδειγματοληψία από την οποία προκύπτουν τα  $x_k^i = \tilde{x}_k^{j_i}$ . Στο  $x_k^i$  ο αλγόριθμος του Unscented Particle Filter αντιστοιχίζει τη μήτρα συνδιακύμανσης  $P_k^{j_i}$ , η οποία θα χρησιμοποιηθεί στις εξισώσεις του Unscented Kalman Filter στο επόμενο βήμα.

Η λογική του παραπάνω αλγορίθμου είναι ότι οι κανονικές κατανομές  $\mathcal{N}(\hat{x}_k^i, P_k^i)$ ,  $i = 1, \dots, N_p$  αποτελούν μία σχετικά καλή προσέγγιση της εκ των υστέρων κατανομής, άρα είναι καλό τα σωματίδια να λαμβάνονται από αυτές, μιας και είναι βέλτιστο να λαμβάνονται από την εκ των υστέρων κατανομή. Ασφαλώς, την εκ των υστέρων κατανομή μπορεί να προσεγγίσει το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{N_p} \frac{1}{N_p} \mathcal{N}(\hat{x}_k^i, P_k^i) \quad (5.5)$$

και όχι κάθε μία κατανομή ξεχωριστά. Ωστόσο, οι εξισώσεις του Unscented Kalman Filter έχουν χρησιμοποιηθεί για κάθε σωματίδιο ξεχωριστά, οπότε οι μήτρες συνδιακύμανσης που αντιστοιχίζονται στα σωματίδια είναι πιο κοντά στη μήτρα συνδιακύμανσης της συνολικής κατανομής, και όχι στη μήτρα συνδιακύμανσης που πρέπει να έχει κάθε σωματίδιο ώστε το άθροισμα (5.5) να αποτελεί καλή προσέγγιση της εκ των υστέρων κατανομής.

Η ακόλουθη θεώρηση παρέχει ένα τρόπο επιλογής των μητρών συνδιακύμανσης ώστε η συνολική κατανομή να προσεγγίζει την εκ των υστέρων κατανομή. Έστω ότι οι θέσεις των σωματιδίων είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την εκ των υστέρων κατανομή, η οποία έχει μέση τιμή  $\bar{x}$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $P$ . Αυτό είναι το επιθυμητό, αν και στην πράξη δεν ισχύει απόλυτα. Αν σε κάθε σωματίδιο  $x_i$  αντιστοιχεί μία τ.μ.  $v_i$  με μέση τιμή  $x_i$  και μήτρα συνδιακύμανσης  $P_i$ , τότε η προσέγγιση της εκ των υστέρων κατανομής είναι η τ.μ.  $v = \sum_{i=1}^{N_p} I_i v_i$ , όπου κάθε μία από τις  $I_i, i = 1, \dots, N_p$  λαμβάνει την τιμή 1 με πιθανότητα  $\frac{1}{N_p}$ , αλλιώς λαμβάνει την τιμή 0, ενώ πάντα ακριβώς μία από αυτές έχει την τιμή 1, δηλαδή αποτελούν τις δείκτριες συναρτήσεις των ενδεχομένων  $[v = v_i]$ .

Τότε, για δεδομένα  $x_i, i = 1, \dots, N_p$ , η μήτρα συνδιακύμανσης της συνολικής κατανομής είναι

$$\begin{aligned} V[v] &= V\left[\sum_{i=1}^{N_p} I_i v_i\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N_p} I_i v_i - \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} x_i\right) \left(\sum_{i=1}^{N_p} I_i v_i - \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} x_i\right)^T\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N_p} \left(I_i v_i - \frac{x_i}{N_p}\right)\right) \left(\sum_{i=1}^{N_p} \left(I_i v_i - \frac{x_i}{N_p}\right)\right)^T\right] = \\ &= \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} \mathbb{E}\left[\left(I_i v_i - \frac{x_i}{N_p}\right) \left(I_j v_j - \frac{x_j}{N_p}\right)^T\right] \quad (5.6) \end{aligned}$$

Για  $i = j$  ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(I_i v_i - \frac{x_i}{N_p}\right) \left(I_i v_i - \frac{x_i}{N_p}\right)^T\right] &= \mathbb{E}\left[I_i^2 v_i v_i^T - I_i \frac{1}{N_p} v_i x_i^T - I_i \frac{1}{N_p} x_i v_i^T + \frac{1}{N_p^2} x_i x_i^T\right] = \\ &= \frac{\mathbb{E}[v_i v_i^T]}{N_p} - \frac{1}{N_p^2} x_i x_i^T = \frac{P_i + x_i x_i^T}{N_p} - \frac{1}{N_p^2} x_i x_i^T, \quad (5.7) \end{aligned}$$

ενώ για  $i \neq j$  έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(I_i v_i - \frac{x_i}{N_p}\right) \left(I_j v_j - \frac{x_j}{N_p}\right)^T\right] &= \mathbb{E}\left[I_i I_j v_i v_j^T - I_i \frac{1}{N_p} v_i x_j^T - I_j \frac{1}{N_p} x_i v_j^T + \frac{1}{N_p^2} x_i x_j^T\right] = \\ &= -\frac{1}{N_p^2} x_i x_j^T \quad (5.8) \end{aligned}$$

Επομένως η  $V[v]$  εξαρτάται από τις τιμές των  $x_i$ . Ισχύει ότι  $\mathbb{E}[x_i x_i^T] = P + \bar{x} \bar{x}^T$ , ενώ για  $i \neq j$  ισχύει  $\mathbb{E}[x_i x_j^T] = \bar{x} \bar{x}^T$ . Άρα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} V[v] &= \frac{\sum_{i=1}^{N_p} P_i}{N_p} + N_p \left( \frac{1}{N_p} - \frac{1}{N_p^2} \right) (P + \bar{x} \bar{x}^T) - \frac{N_p^2 - N_p}{N_p^2} \bar{x} \bar{x}^T = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N_p} P_i}{N_p} + \left( 1 - \frac{1}{N_p} \right) P. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Διαπιστώνουμε συνεπώς ότι  $V[v] = P \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N_p} P_i = P$ , για την περίπτωση μάλιστα που τα  $P_i, i = 1, \dots, N_p$ , είναι μεταξύ τους ίσα, η συνθήκη είναι  $P_i = \frac{1}{N_p} P$ .

Η παραπάνω ανάλυση δείχνει ότι το να είναι η κάθε μία από τις μήτρες  $P_i$  περίπου ίση με  $P$ , δεν είναι βέλτιστο, αντίθετα πρέπει να είναι περίπου ίσες με  $\frac{1}{N_p} P$ . Δεδομένου ότι οι εξισώσεις του Unscented Kalman Filter αυτήν την τιμή προσπαθούν να προσεγγίσουν, είναι λογικό μετά από την επαναδειγματοληψία, οι μήτρες  $P_k^i$  να πολλαπλασιάζονται με  $\frac{\alpha}{N_p}$ . Ο παράγοντας  $\alpha$  μπαίνει επειδή η σύγκλιση δεν γίνεται σε ένα βήμα, επομένως ξεκινώντας από μία μήτρα της τάξης του  $\frac{P}{N_p}$ , μετά το επόμενο βήμα η μήτρα θα είναι της τάξης του  $\frac{1}{\alpha} P$ . Η τιμή του  $\alpha$  μπορεί να βρεθεί με πειραματισμό. Πάντως και η επιλογή  $\alpha = 1$  αναμένεται να δώσει αρκετά καλά αποτελέσματα, ιδίως αν η σύγκλιση είναι αρκετά γρήγορη.

Υπάρχει επίσης η δυνατότητα οι μήτρες  $P_k^i$  να τίθενται ίσες με 0, κάτι που αντιστοιχεί σε  $\alpha = 0$ . Η επιλογή αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι σε αυτήν την περίπτωση, το βήμα πρόβλεψης του Unscented Kalman Filter γίνεται χωρίς υπολογιστικό κόστος, με την εκ των προτέρων μέση τιμή ίση με  $f(x_{k-1}^i)$  και την εκ των προτέρων μήτρα συνδιακύμανσης ίση με τη μήτρα συνδιακύμανσης της διαταραχής. Η εξοικονόμηση υπολογιστικού κόστους δίνει τη δυνατότητα για μεγαλύτερο αριθμό σωματιδίων, οπότε και ο όρος  $\frac{P}{N_p}$  θα είναι ακόμα πιο κοντά στο 0.

Οι προτεινόμενες τροποποιήσεις δοκιμάζονται σε ένα αριθμητικό παράδειγμα στην ενότητα που ακολουθεί.

## 5.4 Αριθμητικό Παράδειγμα και Σχολιασμός

Το σύστημα στο οποίο θα δοκιμαστούν οι διάφορες παραλλαγές του Particle Filter περιγράφεται από τις σχέσεις

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + 25 \frac{x_k}{1 + x_k^2} + 8 \cos(1.2k) + w_k, \quad (5.10)$$

$$y_k = \frac{x_k^2}{20} + v_k \quad (5.11)$$

και για πρώτη φορά εμφανίστηκε στην εργασία [75]. Από τότε έχει μελετηθεί εκτεταμένα στη βιβλιογραφία [48, 20, 65, 21]. Τα  $x_0, w_k$  και  $v_k$  είναι ανεξάρτητες τ.μ.

Πίνακας 5.1: Πίνακας των rms τιμών του σφάλματος εκτίμησης για τις διάφορες παραλλαγές των Φίλτρου Σωματιδίων

Φίλτρο	Μέση Τιμή	Τυπική Απόκλιση	Μέγιστη Τιμή	Υπολ. Χρόνος <sup>1</sup> (ms)
PF-SIR	5.41541	1.34547	11.63975	0.18850 (3.56)
APF	5.37662	1.18517	9.68630	0.24240
APF- $\sqrt{\cdot}$	5.31901	1.13784	9.32619	0.24800
APF- $\sqrt[3]{\cdot}^2$	5.33066	1.13710	9.33985	0.31380
APF-MR	5.33339	1.16558	9.42745	0.28180
APF-MR- $\sqrt{\cdot}$	5.18590	1.11002	9.24750	0.28530
APF-MR- $\sqrt[3]{\cdot}^2$	5.19944	1.13456	9.58607	0.35500
UPF	5.90033	1.78609	13.34652	20.90770
UPF - $\alpha = 0.1$	5.08705	1.37431	13.44550	20.91310
UPF - $\alpha = 0.2$	5.03754	1.27727	12.69427	20.90010
UPF - $\alpha = 1$	5.12051	1.27182	12.59017	20.90210
UPF - $\alpha = 0$	5.02658	1.20974	12.95750	12.98660

που ακολουθούν την κανονική κατανομή και έχουν μέσο όρο 0. Το  $x_0$  έχει διακύμανση 0.001, ενώ όπως στις εργασίες [48, 21, 20] για τις διακυμάνσεις των  $w_k$  και  $v_k$  υποθέτουμε ότι  $V[w_k] = 10$ ,  $V[v_k] = 1$ . Το σύστημα εκτελείται μέχρι για  $k = 100$ .

Έγιναν 1000 δοκιμές και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1. PF-SIR είναι το Sampling Importance Resampling Filter της βιβλιογραφίας [20]. APF είναι το Auxiliary Particle Filter, για όλες τις παραλλαγές του οποίου τα βοηθητικά βάρη υπολογίζονται για μία τυχαία πραγματοποίηση της τ.μ.  $f(x_{k-1}^i) + w_{k-1}^i$ , όπως και στην εργασία [20]. Με  $\sqrt{\cdot}$  και  $\sqrt[3]{\cdot}^2$  σημειώνουμε τις προτεινόμενες στην ενότητα 5.2 τροποποιήσεις στον τρόπο με τον οποίο λαμβάνεται υπόψη το βοηθητικό βάρος, ενώ με MR (Modified Reweighting) σημειώνουμε την προτεινόμενη τροποποίηση στον τρόπο επαναπροσδιορισμού των βαρών μετά την επαναδειγματοληψία. UPF είναι το Unscented Particle Filter, και  $\alpha$  η παράμετρος που αναφέρεται στην ενότητα 5.3. Η επαναδειγματοληψία γίνεται με τον αλγόριθμο που προτάθηκε στην εργασία [65], ενώ όπως και στο λογισμικό [76] στις πιθανοφάνειες προστίθεται μία πάρα πολύ μικρή τιμή ώστε να αποκλειστεί το ενδεχόμενο λόγω στρογγυλοποίησης να είναι όλες 0. Σε όλες τις παραλλαγές χρησιμοποιήθηκαν 50 σωματίδια.

Διαπιστώνουμε ότι οι προτεινόμενες τροποποιήσεις στο APF βελτιώνουν τη συμπεριφορά, τόσο αν εφαρμοστούν μεμονωμένα, όσο και αν εφαρμοστούν σε συνδυασμό, στην οποία περίπτωση προκύπτουν και τα καλύτερα αποτελέσματα. Σχετικά με την προτεινόμενη τροποποίηση στο UPF, από τις τιμές της παραμέτρου  $\alpha$  που δοκιμάστηκαν τα καλύτερα αποτελέσματα προέκυψαν για  $\alpha = 0$ , επιλογή που όπως

<sup>1</sup>Βλ. την προτελευταία παράγραφο της ενότητας.

προαναφέρθηκε έχει και υπολογιστικό πλεονέκτημα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι ενώ το UPF μπορεί με σωστή ρύθμιση να δώσει μικρό σφάλμα στη μέση περίπτωση, στη χειρότερη περίπτωση δίνει μεγαλύτερο σφάλμα και από το PF-SIR.

Τα υπολογιστικά κόστη των προτεινόμενων τεχνικών διαφέρουν, όμως για το PF και τις διάφορες παραλλαγές του APF οι διαφορές δεν είναι πολύ μεγάλες, όπως και για τις διάφορες παραλλαγές του UPF μεταξύ τους. Ωστόσο η υλοποίηση σε MATLAB που έγινε οδηγεί σε μεγάλο κόστος για το UPF, γιατί οι υπολογισμοί σε αυτήν την περίπτωση δεν γίνονται «διανυσματοποιημένα» (“vectorized”). Αυτό γίνεται επειδή σε MATLAB είναι εύκολο να υπολογιστούν, για παράδειγμα, όλα τα βάρη των σωματιδίων μαζί, ή να δημιουργηθούν με μία κλήση όλα τα νέα σωματίδια, ενώ οι εξισώσεις του Unscented Kalman Filter καλούνταν για κάθε σωματίδιο χωριστά στην υλοποίηση που έγινε. Αν οι υπολογισμοί των σωματιδίων για το PF-SIR γίνουν και αυτοί μη διανυσματοποιημένα, το κόστος είναι αυτό που εμφανίζεται σε παρένθεση στον Πίνακα 5.1.

Το συμπέρασμα από τα αριθμητικά αποτελέσματα είναι ότι οι προτεινόμενες τροποποιήσεις μπορούν να βοηθήσουν στη μείωση του σφάλματος εκτίμησης, και η επιλογή της παραλλαγής που θα χρησιμοποιηθεί μπορεί να γίνει λαμβάνοντας υπόψη την απόδοση των διαφόρων παραλλαγών στο εκάστοτε πρόβλημα αλλά και τις τεχνικές λεπτομέρειες της υλοποίησης που θα γίνει.



## Κεφάλαιο 6

# Εφαρμογή Τεχνικών Εκτίμησης Κατάστασης στο Σύστημα Ινσουλίνης-Σακχάρου

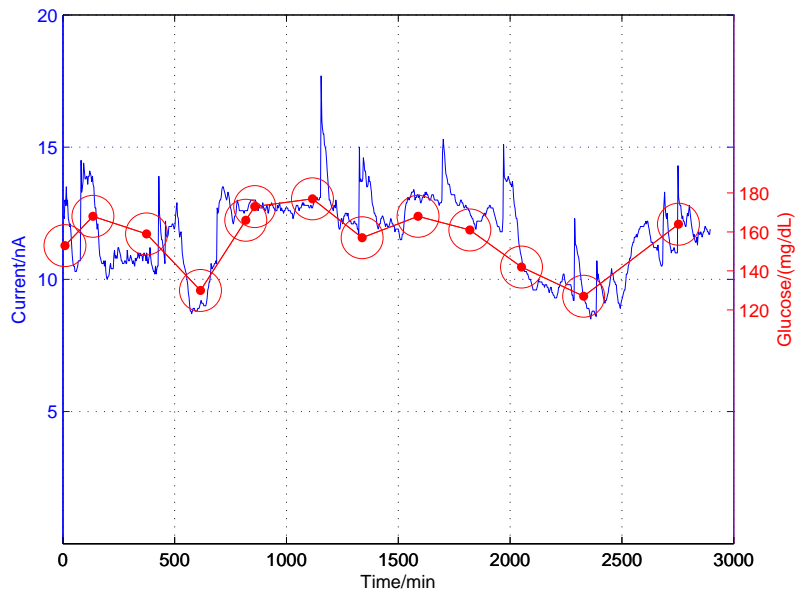
### 6.1 Εισαγωγή

Ο βιοαισθητήρας του οργάνου (δηλαδή του Συστήματος Συνεχούς Καταγραφής της Γλυκόζης) που χρησιμοποιήθηκε μετατρέπει τα επίπεδα γλυκόζης σε ρεύμα, και με βάση την τιμή του ρεύματος μπορεί να υπολογιστεί η τιμή της γλυκόζης. Το όργανο καταγράφει και άλλες πληροφορίες (για παράδειγμα την τάση τροφοδοσίας, η οποία γίνεται με μπαταρία, δεδομένου πως το όργανο είναι φορητό), ανάμεσα στις οποίες περιλαμβάνεται και μία βοηθητική μεταβλητή (πίεση), η οποία όπως θα δούμε μπορεί να βοηθήσει στην εκτίμηση της τιμής της γλυκόζης.

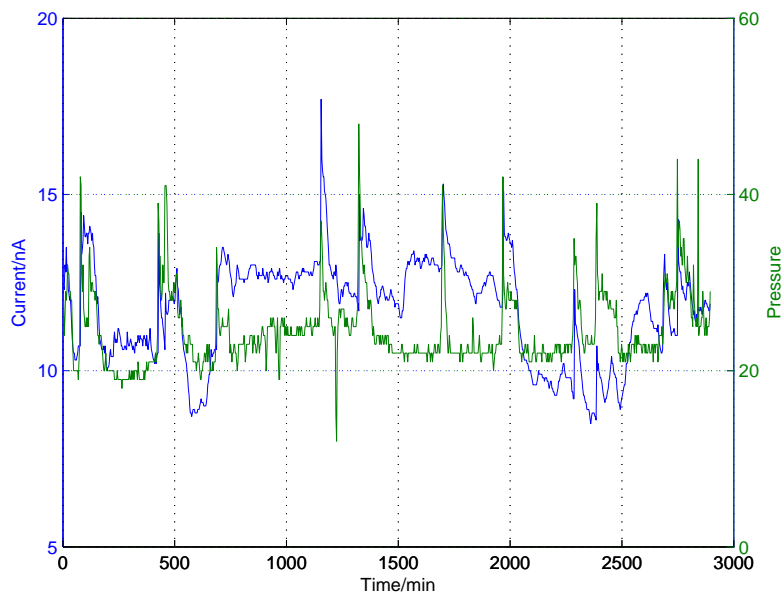
Στο Σχ. 6.1 βλέπουμε την κυματομορφή ρεύματος και τις τιμές γλυκόζης (που έδωσε ο αναλυτής αερίων αίματος) για τον πρώτο ασθενή. Διαπιστώνουμε ότι εμφανίζονται κάποιες αιχμές που υποχωρούν άλλοτε σύντομα και άλλοτε σε περισσότερο χρόνο. Παρατηρώντας προσεκτικά τις τιμές στο 7<sup>ο</sup>, στο 8<sup>ο</sup> και στο 12<sup>ο</sup> δείγμα διαπιστώνουμε ότι οι αιχμές αυτές θα πρέπει να κόβονται από το φίλτρο αλλιώς το σφάλμα θα είναι μεγάλο. Επιπλέον παρατηρούμε ότι χρειάζεται και τακτική βαθμονόμηση για να είναι μικρό το σφάλμα, μιας και με το πέρασμα του χρόνου ο λόγος ρεύμα/γλυκόζη αυξομειώνεται.

Το Σχ. 6.2 απεικονίζει σε κοινό διάγραμμα τις κυματομορφές ρεύματος και πίεσης. Διαπιστώνουμε από το διάγραμμα αυτό ότι οι αιχμές ρεύματος συνήθως συμπίπτουν με αιχμές πίεσης, γεγονός που μπορεί να αξιοποιηθεί στο σχεδιασμό του φίλτρου ρεύματος.

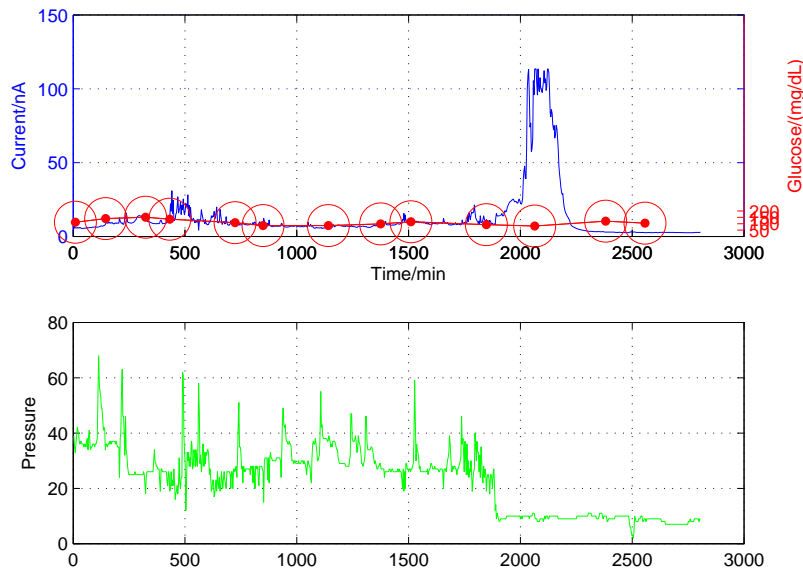
Στο Σχ. 6.3 βλέπουμε τις κυματομορφές ρεύματος και πίεσης καθώς επίσης και τις καταγεγραμμένες τιμές γλυκόζης για τον τρίτο ασθενή. Σε αυτήν την περίπτωση



Σχήμα 6.1: Κυματομορφή ρεύματος και τιμές γλυκόζης για τον ασθενή 1.



Σχήμα 6.2: Κυματομορφές ρεύματος και πίεσης για τον ασθενή 1.



Σχήμα 6.3: Κυματομορφή ρεύματος, τιμές γλυκόζης και κυματορφή πίεσης για τον ασθενή 3.

βλέπουμε ότι τη χρονική στιγμή 1850 περίπου παρουσιάζεται ένα φαινόμενο που ξεκινά με απότομη πτώση των επιπέδων πίεσης τα οποία τελικά σταθεροποιούνται με εξαίρεση ένα σύντομο χρονικό διάστημα, ενώ επιπλέον κατά το φαινόμενο αυτό το ρεύμα αρχικά αυξάνεται δραστικά και ύστερα μειώνεται και σταθεροποιείται (οπότε και παύει να περιέχει οποιαδήποτε πληροφορία). Είναι εμφανές ότι οι τιμές του ρεύματος μετά την έναρξη του φαινομένου δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκτιμηθούν τα επίπεδα γλυκόζης, ενώ απόκλιση παρουσιάζεται επίσης στο διάστημα 400-500. Υπήρξαν και δύο περιπτώσεις ασθενών στους οποίους ολόκληρη η καταγραφή δεν μπόρεσε να χρησιμοποιηθεί.

Τα παραπάνω διαγράμματα δείχνουν ότι τα δεδομένα είναι τέτοια που απαιτούν τη χρήση φίλτρου και βαθμονόμησης. Στην ενότητα 6.2 παρουσιάζεται μία πρώτη τεχνική βασισμένη στο Φίλτρο Kalman σε ένα πολύ απλό μοντέλο και τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα. Η ενότητα 6.3 αφορά τη χρήση πιο σύνθετων μοντέλων και φίλτρων σωματιδίων. Τέλος, στην ενότητα 6.4 γίνεται σχολιασμός των αποτελεσμάτων, εξετάζεται η αυτόματη ανίχνευση των περιπτώσεων που παρουσιάζουν προβλήματα και εξάγονται τα συμπεράσματα του κεφαλαίου.

## 6.2 Χρήση Φίλτρου Kalman και Βαθμονόμηση του Οργάνου

### 6.2.1 Φιλτράρισμα της Κυματομορφής Ρεύματος

Το φίλτρο που χρησιμοποιείται είναι βασισμένο στο Φίλτρο Kalman, ωστόσο ο σχεδιασμός του περιλαμβάνει απλοποιήσεις και παραδοχές που προέκυψαν από την επισκόπηση του συνόλου των δεδομένων και κατόπιν πειραματισμού.

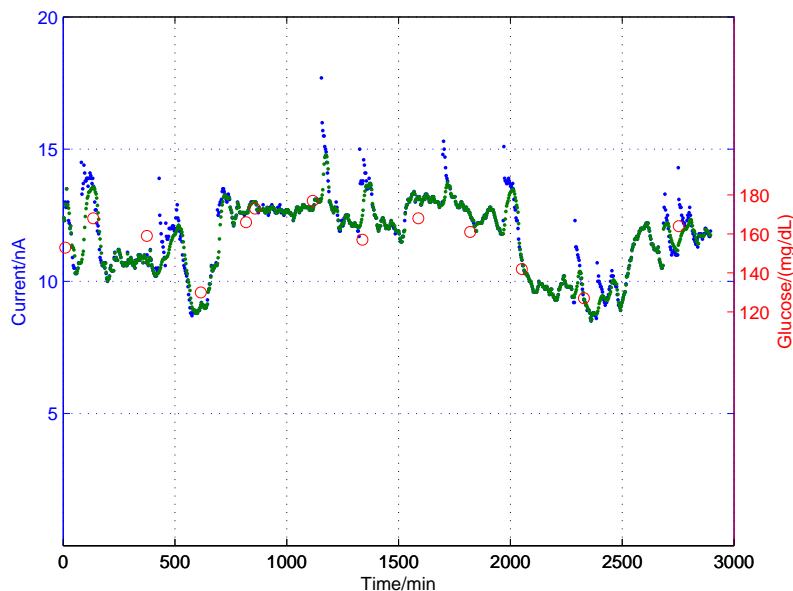
Η κεντρική ιδέα είναι η χρήση μίας μεταβλητής  $x_k$  που αντιπροσωπεύει την φιλτραρισμένη τιμή του ρεύματος, δηλαδή την τιμή ρεύματος που θα μετρούταν αν δεν υπήρχε θόρυβος. Η  $x_k$  με τη μετρούμενη τιμή ρεύματος  $I_k$  συνδέεται με τη σχέση  $I_k = x_k + v_k$ , δηλαδή η  $I_k$  αντιμετωπίζεται ως μία μέτρηση της  $x_k$  στην οποία υπάρχει θόρυβος. Όπως θα δούμε, η διακύμανση του θορύβου υποθέτουμε ότι εξαρτάται από την κυματομορφή της πίεσης, μιας και είδαμε πως όταν η πίεση έχει ανωμαλίες, υπάρχουν μεγάλα σφάλματα στο ρεύμα.

Σχετικά με τη δυναμική του  $x_k$ , έστω  $w_k = x_{k+1} - x_k$ , ώστε  $x_{k+1} = x_k + w_k$ . Αν  $w_k$  ήταν ακολουθία τ.μ. με γνωστά χαρακτηριστικά θα μπορούσαν να εφαρμοστούν οι εξισώσεις του Φίλτρου Kalman. Τα  $w_k$  δεν είναι ανεξάρτητα. Δεδομένου ότι δεν έχουμε επαρκή πληροφορία για αυτές τις τ.μ., μπορούμε να υπολογίσουμε το κέρδος Kalman που θα αντιστοιχούσε στην περίπτωση των ανεξάρτητων  $w_k$  και να κάνουμε το βήμα διόρθωσης με αυτό. Αυτός είναι και ο χρησιμοποιούμενος αλγόριθμος. Η τυπική απόκλιση των  $w_k$ ,  $\sigma_w$ , είναι παράμετρος του αλγορίθμου. Απομένει να εξηγήσουμε τον αλγόριθμο με τον οποίο από την κυματομορφή πίεσης υπολογίζεται η τυπική απόκλιση του  $v_k$ ,  $\sigma_{v_k}$ .

Δεδομένου ότι η πίεση κυμαίνεται όπως είδαμε σε κάποια βασικά επίπεδα τα οποία κανονικά αλλάζουν αργά, και από τα οποία αποκλίνει απότομα τις στιγμές που είναι μεγάλο το σφάλμα, το πρώτο στάδιο του αλγορίθμου έχει ως στόχο να εντοπίσει ποια είναι τα επίπεδα αυτά. Συγκεκριμένα, κάθε χρονική στιγμή αρχικά απομονώνονται τα 100 τελευταία δείγματα (μέχρι τη στιγμή 100 χρησιμοποιείται το τμήμα από την αρχή ως την τρέχουσα χρονική στιγμή). Κατόπιν, προκειμένου να υπολογιστεί μία πρώτη εκτίμηση του βασικού επιπέδου της πίεσης, τα δείγματα αυτά ταξινομούνται και επιλέγεται η τιμή του δεκάτου εκατοστημορίου. Έγκυρα θεωρούνται τα δείγματα με πίεση που δεν υπερβαίνει κατά περισσότερο από 20% το επίπεδο αυτό. Από τα έγκυρα δείγματα εξάγεται η τιμή διαμέσου, και αυτή η τιμή, έστω  $p_k^{(n)}$ , είναι η τιμή που χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί η τιμή του  $\sigma_{v_k}$  ως εξής:

Έστω  $p_k$  η τιμή της πίεσης τη στιγμή  $k$ . Υπολογίζουμε το  $r_k = \frac{p_k - p_k^{(n)}}{p_k^{(n)}}$ . Αν ισχύουν οι σχέσεις  $r_{k-1} \leq H$ ,  $-0.1 \leq r_k \leq H$  (το  $H$  είναι παράμετρος), τότε ισχύει  $\sigma_{v_k} = \sigma_v$  όπου  $\sigma_v$  είναι η τιμή του σφάλματος όταν δεν υπάρχει απότομη μεταβολή (αυτό εκφράζουν οι προαναφερθείσες σχέσεις) και επίσης αποτελεί παράμετρο. Σε αντίθετη περίπτωση ισχύει  $\sigma_{v_k} = \sqrt{5}|p_k - p_k^{(n)}|\sigma_v$ .

Στο εξής οι τιμές των παραμέτρων που θα χρησιμοποιούνται είναι  $s_w = 0.25$ ,  $s_v = 0.1$ ,  $H = 0.06$ . Η αρχική εκτίμηση κατάστασης που χρησιμοποιείται είναι η τιμή του



Σχήμα 6.4: Εφαρμογή του φίλτρου Kalman στον ασθενή 1.

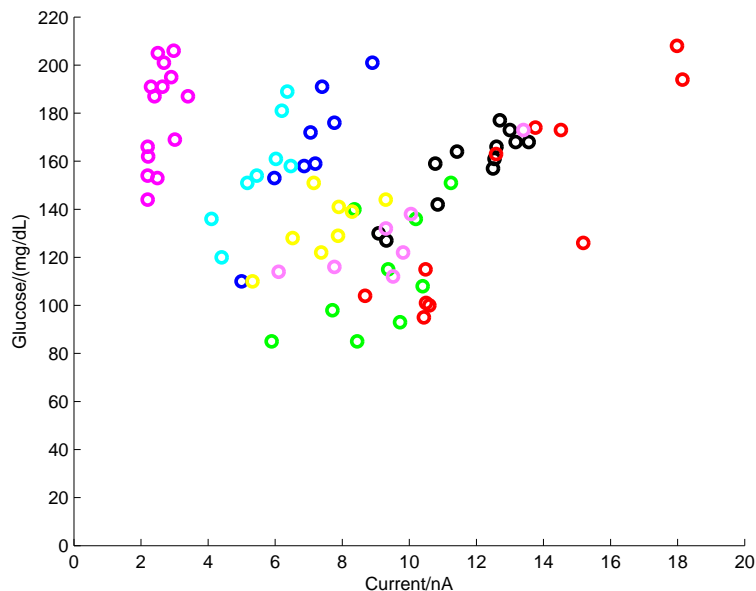
τρίτου δείγματος (αυτό έχει ως μόνη συνέπεια το να μην μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος για έξι λεπτά μετά τη λήψη της πρώτης τιμής ρεύματος), ενώ η αρχική διακύμανση τίθεται ίση με 3. Στο Σχ. 6.4 παρουσιάζεται η κυματομορφή ρεύματος μαζί με την εκτίμηση που προκύπτει (με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η εκτίμηση). Διαπιστώνουμε ότι το φίλτρο λειτουργεί, κόβοντας το μεγαλύτερο μέρος των αιχμών.

## 6.2.2 Βαθμονόμηση

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία φιλτραρίσματος της προηγούμενης ενότητας σε όλους τους ασθενείς (εξαιρούνται οι δύο περιπτώσεις ασθενών όπου η καταγραφή δεν ήταν ικανοποιητική και το άκυρο τμήμα στον ασθενή 3), προκύπτουν τα ζεύγη τιμών ρεύματος και γλυκόζης που απεικονίζονται στο Σχ. 6.5.

Δεδομένου ότι ο λόγος ρεύμα/γλυκόζη αλλάζει με το πέρασμα του χρόνου, όποτε λαμβάνεται νέα μέτρηση (με τον αναλυτή αερίων αίματος ή άλλη μέθοδο) της γλυκόζης, είναι σκόπιμο να γίνεται επαναβαθμονόμηση. Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται είναι ο εξής: Όταν ληφθεί η πρώτη μέτρηση, υπολογίζεται ο συντελεστής  $c_1 = g_1/x_{k_1}$ , όπου  $g_1$  είναι η τιμή γλυκόζης από την πρώτη μέτρηση, ενώ  $x_{k_1}$  είναι η τιμή του φιλτραρισμένου ρεύματος τη στιγμή που έγινε η πρώτη μέτρηση (τη συμβολίζουμε με  $k_1$ ). Για τις επόμενες μετρήσεις της γλυκόζης εφαρμόζουμε τη σχέση

$$c_n = 0.4c_{n-1} + 0.6g_n/x_{k_n} \quad (6.1)$$



Σχήμα 6.5: Ζεύγη τιμών ρεύματος και γλυκόζης με διαφορετικό χρώμα για κάθε ασθενή.

για να υπολογίσουμε το νέο συντελεστή.

Έχοντας υπολογίσει το συντελεστή αυτό, οι τιμές (φιλτραρισμένου) ρεύματος μετατρέπονται σε τιμές γλυκόζης με τη σχέση  $g = c \cdot x$ . Ασφαλώς, όταν υπολογίζεται το σφάλμα τη στιγμή  $k_n$  προκειμένου να αξιολογήσουμε το όργανο και τις μεθόδους φιλτραρίσματος και βαθμονόμησης, χρησιμοποιούμε το συντελεστή  $c_{n-1}$ , δηλαδή το σφάλμα εκτίμησης είναι  $e_n = g_n - c_{n-1} \cdot x_{k_n}$ .

### 6.2.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Η απόδοση των προτεινόμενων τεχνικών αξιολογείται συγκρίνοντας τις rms τιμές του σχετικού σφάλματος εκτίμησης με τις αντίστοιχες τιμές του σφάλματος στην περίπτωση που δεν εφαρμόζονταν αυτές οι τεχνικές. Σχετικά με το φίλτρο, εναλλακτικά θα μπορούσαν να χρησιμοποιούνται οι τιμές ρεύματος χωρίς να περάσουν από κάποιο φίλτρο. Σχετικά με τη βαθμονόμηση, θα μπορούσε η τελευταία τιμή του λόγου γλυκόζη/ρεύμα να χρησιμοποιείται για τη μετατροπή από τιμές ρεύματος σε τιμές γλυκόζης, δηλαδή να ισχύει

$$c_n = g_n / x_{k_n}. \quad (6.2)$$

Επομένως έχουμε τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις.

Επιπλέον, έχει ενδιαφέρον να μελετηθεί η επίπτωση της συχνότητας επαναβαθμονόμησης στο μέγεθος του σφάλματος εκτίμησης. Ο Πίνακας 6.1 παρουσιάζει την

Πίνακας 6.1: Τιμές του rms σχετικού σφάλματος εκτίμησης ανάλογα με το αν χρησιμοποιείται φίλτρο στο ρεύμα, αν η μέθοδος βαθμονόμησης χρησιμοποιεί μόνο το τελευταίο δείγμα και ανάλογα με τον αριθμό βαθμονομήσεων.

Αριθμός Βαθμονομήσεων	Με φίλτρο, με την (6.1)	Με φίλτρο, με την (6.2)	Χωρίς φίλτρο, με την (6.1)	Χωρίς φίλτρο, με την (6.2)
1	0.217	0.217	0.227	0.227
2	0.197	0.190	0.211	0.208
4	0.164	0.169	0.183	0.195
6	0.141	0.154	0.170	0.192
Σε κάθε δείγμα	0.137	0.145	0.157	0.170

rms τιμή του σφάλματος για τις τέσσερις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο ανάλογα με τον αριθμό των βαθμονομήσεων. Οι περιπτώσεις που διακρίνουμε είναι ο αριθμός αυτός να είναι 1,2,4,6 και τέλος να είναι ίσος με τον αριθμό των δειγμάτων αίματος που έχουν ληφθεί για τον κάθε ασθενή (τελευταία γραμμή του πίνακα). Στον πίνακα συμπεριλαμβάνονται οι 7 καταγραφές στις οποίες δεν υπήρχαν προβλήματα και το κομμάτι από την καταγραφή του διαγράμματος 6.3 (ασθενής 3) μέχρι και το 10<sup>ο</sup> δείγμα. Επίσης, σε όσες περιπτώσεις το πρώτο δείγμα είχε ληφθεί πολύ νωρίς, δεν λαμβάνεται υπόψη.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις η εφαρμογή των προτεινόμενων τεχνικών οδηγεί σε μείωση του σφάλματος η οποία πολλές φορές είναι σημαντική. Πιο συγκεκριμένα, η χρήση του φίλτρου πάντα μειώνει το σφάλμα ανεξάρτητα από τη μέθοδο της βαθμονόμησης και τον αριθμό βαθμονομήσεων. Η χρήση πιο σύνθετης τεχνικής βαθμονόμησης έχει, όπως είναι αναμενόμενο, σημαντική επίπτωση μόνο όταν είναι μεγάλος ο αριθμός των βαθμονομήσεων, και στην περίπτωση αυτή οδηγεί σε μείωση του σφάλματος. Αντίθετα, όταν γίνεται μόνο μία βαθμονόμηση, και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιείται ο αρχικός συντελεστής μέχρι το τέλος οπότε τα αποτελέσματα ταυτίζονται.

Η από κοινού χρήση φίλτρου και πιο σύνθετης βαθμονόμησης σε σχέση με την απλούστερη δυνατή εκτίμηση οδηγεί πάντα σε μείωση του σφάλματος, ακόμα και για μία βαθμονόμηση, ενώ για συχνότερες βαθμονομήσεις η μείωση φτάνει και το 27%.

Ο Πίνακας 6.2 δείχνει τα αποτελέσματα αν εξαιρεθεί ολόκληρη η καταγραφή του ασθενή 3. Διαπιστώνουμε ότι και σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να προκύψει σημαντική μείωση, μέχρι 25%. Επιπλέον διαπιστώνουμε ότι τώρα τα σφάλματα είναι αρκετά μικρότερα, επομένως η συνεισφορά των περιπτώσεων που παρουσιάζουν προβλήματα στο μέσο σφάλμα είναι σημαντική. Αν συμπεριληφθούν και οι άλλοι δύο ασθενείς το σφάλμα εκτίμησης γίνεται πολύ μεγάλο είτε με είτε χωρίς φίλτρα, και είναι εφικτή μόνο μικρή μείωση κατόπιν προσεκτικής επιλογής των παραμέτρων.

Πίνακας 6.2: Τιμές του rms σχετικού σφάλματος εκτίμησης για την περίπτωση που δεν συμπεριληφθεί η καταγραφή του διαγράμματος 6.3.

Αριθμός Βαθμονομήσεων	Με φίλτρο, με την (6.1)	Με φίλτρο, με την (6.2)	Χωρίς φίλτρο, με την (6.1)	Χωρίς φίλτρο, με την (6.2)
1	0.155	0.155	0.167	0.167
2	0.142	0.142	0.164	0.170
4	0.141	0.152	0.160	0.170
6	0.126	0.134	0.148	0.168
Σε κάθε δείγμα	0.122	0.135	0.136	0.152

## 6.3 Εκτίμηση με πιο Σύνθετα Μοντέλα

### 6.3.1 Μοντέλο Δεύτερης Τάξης

Με το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη ενότητα λαμβάνεται υπόψη για την πρόβλεψη μόνο η τρέχουσα τιμή του εκτιμώμενου ρεύματος, δηλαδή θεωρείται πως δεν έχουμε καμία πληροφορία για το αν η τιμή αυτή θα αυξηθεί ή θα μειωθεί και πόσο. Ωστόσο, η υπόθεση αυτή αποτελεί υπεραπλούστευση, μιας και το χρονικό βήμα είναι μικρό, επομένως ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος δεν περιμένουμε να αλλάζει σημαντικά μέσα σε ένα βήμα.

Συνεπώς τώρα θα θεωρήσουμε για το ρεύμα όχι μόνο την «θέση» του, δηλαδή την τιμή του, αλλά και την «ταχύτητά» του, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του, ως μεταβλητή κατάσταση. Για το ρυθμό μεταβολής θα θεωρήσουμε ότι στη μέση περίπτωση μειώνεται σε κάθε βήμα κατά ένα σταθερό ποσοστό. Επιπλέον, θεωρούμε πως οι μεταβολές είναι πολλαπλασιαστικές, με το σκεπτικό ότι όσο μεγαλύτερες είναι οι τιμές της γλυκόζης, τόσο πιθανότερο είναι να έχουμε μεγαλύτερες σε απόλυτο μέγεθος μεταβολές. Επομένως το μοντέλο που θεωρούμε είναι:

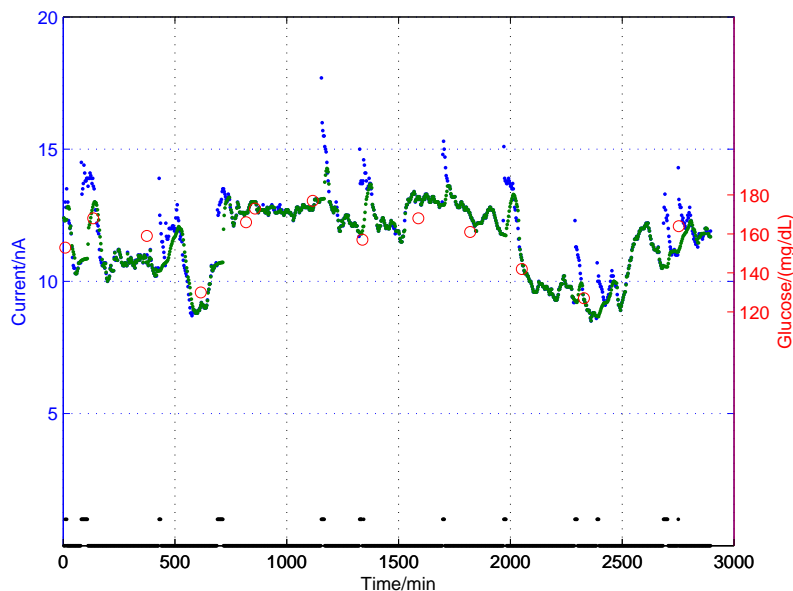
$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-r \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} x_{k,1}w_{k,1} \\ w_{k,2} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k. \quad (6.4)$$

Οι τ.μ.  $v_k$ ,  $w_{k,1}$  και  $w_{k,2}$  θεωρούνται ανεξάρτητες. Μετά από πειραματισμό επελέγησαν για τις τυπικές αποκλίσεις οι τιμές  $s_{w,1} \approx 0.018$  και  $s_{w,2} = 0.005$ . Η τιμή του  $s_{w,1}$  έχει επιλεγεί ώστε η ωριαία σχετική μεταβολή να έχει τυπική απόκλιση ίση με 0.08, μέσω της σχέσης<sup>1</sup>  $V[w_{k,1}] = \sqrt[20]{1 + 0.08^2} - 1$ . Για την τιμή της παραμέτρου  $r$  η τιμή που χρησιμοποιήθηκε ήταν  $r = 0.18$ , η οποία αντιστοιχεί σε «χρόνο ημιζώης» για την ταχύτητα περίπου ίσο με  $3 \frac{\log 0.5}{\log 0.82} \approx 10.5$  λεπτά.

<sup>1</sup>Είναι εύκολο να δειχθεί ότι αν  $z_1, z_2, \dots, z_N$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με





Σχήμα 6.6: Εφαρμογή του φίλτρου δεύτερης τάξης στον ασθενή 1.

Σχετικά με το θόρυβο μετρήσεων επιλέγουμε  $s_v = 0.085$ , ενώ ακολουθείται αντίστοιχη διαδικασία σχετικά με την κυματομορφή πίεσης. Επιπλέον, για τις περιπτώσεις που έχουμε ότι  $|y_k - \hat{x}_k^-| > 2,35\sqrt{P_{k,11}^-}$ , δηλαδή που η μέτρηση απέχει περισσότερο από 2.35 τυπικές αποκλίσεις από την αναμενόμενη τιμή, η μέτρηση δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψη, με το σκεπτικό ότι εκείνη τη χρονική στιγμή έχει γίνει άλμα. Ως συνέπεια του γεγονότος ότι τα άλματα τώρα ανιχνεύονται και με αυτόν τον τρόπο, αυξάνουμε την τιμή της παραμέτρου  $H$  στην τιμή 0.1. Η αρχικοποίηση γίνεται βάσει των πέντε πρώτων δειγμάτων ρεύματος, ενώ στην επόμενη υποενότητα χρησιμοποιείται η πρώτη τιμή από τον αναλυτή αερίων αίματος και τα πέντε δείγματα ρεύματος πριν από αυτή.

Στο Σχ. 6.6 εμφανίζεται η εκτίμηση που προκύπτει από την εφαρμογή του παραπάνω φίλτρου στην κυματομορφή ρεύματος του ασθενή 1. Σε σχέση με το πρώτης τάξης φίλτρο, οι αιχμές κόβονται περισσότερο. Η κυματομορφή μαύρου χρώματος έχει την τιμή 1 όταν η τιμή του ρεύματος θεωρείται μη προβλέψιμη και 0 όταν θεωρείται προβλέψιμη. Διαπιστώνουμε πως πράγματι μη προβλέψιμα θεωρούνται τα δείγματα μετά από άλμα, και το τμήμα με μη προβλέψιμες τιμές έχει μεγαλύτερη διάρκεια όταν το άλμα είναι μεγάλο ή η τιμή του ρεύματος δεν επιστρέφει στα προ άλματος επίπεδα.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα από την εφαρμογή του φίλτρου αυτού παρουσιάζονται στην υποενότητα 6.3.3.

---

μηδενικό μέσο και διακύμανση  $Q$ , τότε ισχύει  $V[(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_N)] = (1+Q)^N - 1$   
 $\Leftrightarrow Q = \sqrt[N]{V+1} - 1$ .

### 6.3.2 Φίλτρα Σωματιδίων

Σε αυτήν την υποενότητα δίνονται οι λεπτομέρειες της εφαρμογής φίλτρων σωματιδίων. Κίνητρο για τη χρήση φίλτρων σωματιδίων αποτελεί το γεγονός ότι δίνουν τη δυνατότητα ενιαίας αντιμετώπισης για φιλτράρισμα και βαθμονόμηση, ενώ μέχρι τώρα τα προβλήματα αυτά αντιμετωπιζόνταν χωριστά.

Πράγματι, στη μέχρι στιγμής θεώρηση κατά το διάστημα ανάμεσα σε δύο λήψεις δείγματος αίματος όλες οι μεταβολές στο ρεύμα αντιμετωπίζονται ως μεταβολές στη γλυκόζη, και ο συντελεστής από γλυκόζη σε ρεύμα αναπροσαρμόζεται μόνο όταν ληφθεί νέο δείγμα. Στην πραγματικότητα όμως, ο συντελεστής αλλάζει συνέχεια. Επομένως, ανεξάρτητα από τη δυναμική του συστήματος γλυκόζης, είναι σκόπιμο να θεωρείται ως μία επιπλέον μεταβλητή κατάστασης ο συντελεστής αυτός. Διευκρινίζεται ότι σε αυτήν την περίπτωση η δυναμική της γλυκόζης μπορεί να μελετηθεί άμεσα και όχι έμμεσα ως δυναμική του ρεύματος.

Για το βήμα διόρθωσης, σε κάθε βήμα υπάρχει μία μέτρηση του ρεύματος, το οποία είναι το γινόμενο του συντελεστή με τη γλυκόζη. Η ύπαρξη αυτού του γινομένου είναι που εισάγει μη γραμμικότητα στο σύστημα και καθιστά αναγκαία τη χρήση φίλτρων σωματιδίων. Όταν λαμβάνεται και μέτρηση από τον αναλυτή αερίων αίματος, στο βήμα διόρθωσης τα σωματίδια λαμβάνουν βάρος ανάλογο με την πιθανοφάνεια της μέτρησης αυτής, επομένως ευνοούνται τα σωματίδια με τιμή γλυκόζης κοντά στη μέτρηση.

Ο πειραματισμός έδειξε ότι δεν προκύπτει πλεονέκτημα από τη χρήση μοντέλου τάξης μεγαλύτερης του ένα για τη δυναμική της γλυκόζης. Επομένως ως μεταβλητές κατάστασης θεωρούνται τα επίπεδα γλυκόζης και ο συντελεστής μετατροπής από γλυκόζη σε ρεύμα. Επομένως το μοντέλο είναι:

$$x_{k+1,1} = x_{k,1}(1 + w_{k,G}) \quad (6.5)$$

$$x_{k+1,2} = x_{k,2}(1 + w_{k,c}) \quad (6.6)$$

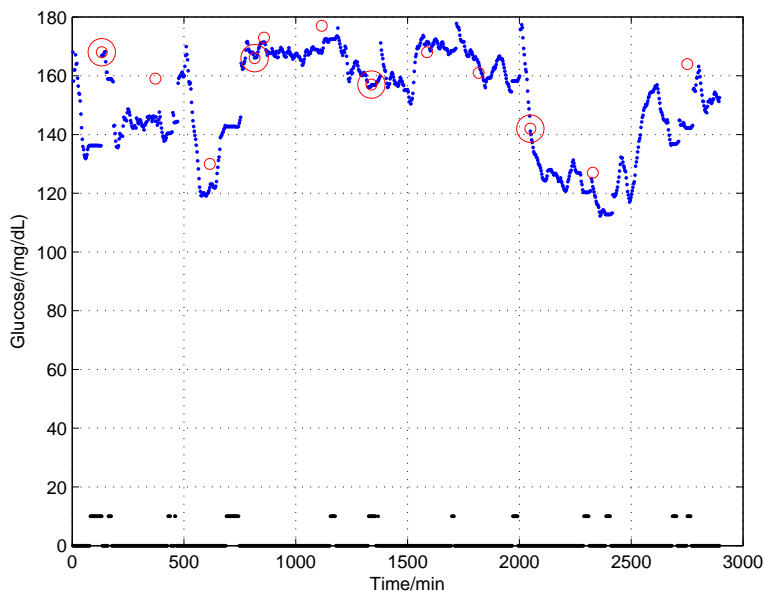
$$y_{k,C} = x_{k,1}x_{k,2} + v_{k,C} \quad (6.7)$$

$$y_{k,G} = \sum_{n=1}^N \delta_{k,k_n}(x_{k,1} + v_{k,G}) \quad (6.8)$$

$k_n, n = 1 \dots, N$  είναι όπως και στην υποενότητα 6.2.2 οι στιγμές στις οποίες λαμβάνεται δείγμα αίματος και  $\delta$  το δέλτα του Kronecker.  $v_{k,G}$  είναι το σφάλμα του αναλυτή αερίου αίματος. Θεωρήθηκε πως η τυπική απόκλιση του είναι ίση με 10mg/dL (όλες οι τιμές των παραμέτρων προέκυψαν με βάση τη διαθέσιμη γνώση για το σύστημα αλλά και κατόπιν πειραματισμού).

Σχετικά με τις  $V[w_{k,G}]$  και  $V[w_{k,c}]$  πρέπει να ισχύει  $V[w_{k,G}] > V[w_{k,c}]$ , γιατί το αντίθετο θα σήμαινε ότι ο συντελεστής αλλάζει πιο γρήγορα από όσο αλλάζει η γλυκόζη και άρα η απόδοση του οργάνου θα είναι πολύ χαμηλή. Οι ωριαίες διακυμάνσεις που θεωρήθηκαν ήταν 10% και 2%. Οι τιμές αυτές οδηγούν με τον τρόπο που εξηγήθηκε στην προηγούμενη υποσημείωση σε  $V[w_{k,G}] \approx 0.0005$  και  $V[w_{k,c}] \approx 0.00002$ .

Επιπλέον, όποτε συμβεί άλμα θεωρούμε πως ο συντελεστής μπορεί να αλλάξει απότομα. Για το λόγο αυτό, όταν ανιχνευτεί άλμα, για το βήμα πρόβλεψης σε κάθε



Σχήμα 6.7: Εφαρμογή του φίλτρου σωματιδίων στον ασθενή 1.

σωματίδιο η δεύτερη συνιστώσα πολλαπλασιάζεται επιπλέον με έναν συντελεστή μέσης τιμής 1 και με διακύμανση  $V[w_{k,G}]$ . Άλμα θεωρείται πως έχει συμβεί όταν ισχύει η συνθήκη  $|y_k - \hat{x}_{k,1}| > 2\sqrt{P_{k,11}}$  ενώ στο προηγούμενο βήμα δεν ίσχυε.

Στο Σχ. 6.7 βλέπουμε τα εκτιμώμενα επίπεδα γλυκόζης για τον ασθενή 1, υποθέτοντας ότι έχουν ληφθεί μόνο τα τέσσερα δείγματα που σημειώνονται με διπλό κύκλο. Η απόδοση είναι πολύ καλή, κάτι που φαίνεται και από το γεγονός ότι σε μία από τις τρεις επαναβαθμονομήσεις δεν φαίνεται άλμα στην εκτίμηση, ενώ και στις άλλες δύο είναι πολύ μικρό. Τα άλματα αυτά είναι φυσιολογικό να εμφανίζονται γιατί όταν ληφθεί νέο δείγμα πρέπει να γίνεται αναπροσαρμογή της εκτίμησης. Στην αρχική βαθμονόμηση υπάρχει άλμα επειδή η αρχικοποίηση έγινε με βάση τις αφιльтραριστές τιμές, όμως επειδή το δείγμα αίματος ελήφθη κατά τη διάρκεια αιχμής, οι φιλτραρισμένες τιμές διαφέρουν σημαντικά. Με μαύρο χρώμα βλέπουμε και πάλι τα απρόβλεπτα δείγματα, με την κυματομορφή τώρα να έχει τις τιμές 10 ή 0, προκειμένου να είναι ευδιάκριτη.

Στην επόμενη υποενότητα τα αριθμητικά αποτελέσματα της μεθόδου αυτής συγκρίνονται με τις προηγούμενες.

### 6.3.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Στην περίπτωση που συμπεριληφθεί και η καταγραφή του διαγράμματος 6.3 το μοντέλο δεύτερης τάξης (6.3)–(6.4) με το ρυθμό μεταβολής της γλυκόζης ως δεύτε-

Πίνακας 6.3: Τιμές του rms σχετικού σφάλματος εκτίμησης για το Φίλτρο Kalman πρώτης τάξης και το Particle Filter.

Αριθμός Βαθμολογήσεων	Φίλτρο Kalman πρώτης τάξης	Particle Filter
1	0.217	0.217
2	0.197	0.177
4	0.164	0.144
6	0.141	0.125
Σε κάθε δείγμα	0.137	0.125

Πίνακας 6.4: Τιμές του rms σχετικού σφάλματος εκτίμησης για τα Φίλτρα Kalman και το Particle Filter, για την περίπτωση που δεν συμπεριληφθεί η καταγραφή του διαγράμματος 6.3.

Αριθμός Βαθμολογήσεων	Φίλτρο Kalman πρώτης τάξης	Φίλτρο Kalman δεύτερης τάξης	Particle Filter
1	0.155	0.138	0.133
2	0.142	0.130	0.121
4	0.141	0.134	0.120
6	0.126	0.119	0.108
Σε κάθε δείγμα	0.122	0.120	0.111

ρη μεταβλητή κατάστασης δεν συμπεριφέρεται τόσο καλά. Αυτό μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι η αύξηση της πολυπλοκότητας οδηγεί σε μείωση της σθεναρότητας. Αντίθετα, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το μοντέλο (6.5)–(6.8) σε συνδυασμό με τη χρήση φίλτρου σωματιδίων δίνει πολύ καλά αποτελέσματα, ωστόσο στην περίπτωση αυτή δεν γίνεται η αύξηση της  $V[w_{k,c}]$  όταν συμβεί άλμα, κάτι που επίσης μπορεί να αποδοθεί στο ότι η αύξηση της πολυπλοκότητας οδηγεί σε μείωση της σθεναρότητας.

Στον Πίνακα 6.3 βλέπουμε τις τιμές του rms σφάλματος. Σε όλες τις περιπτώσεις το πιο σύνθετο μοντέλο δίνει καλύτερα αποτελέσματα. Το φίλτρο σωματιδίων που χρησιμοποιήθηκε είναι PF/SIR με 100000 σωματίδια. Σε αυτήν την περίπτωση χρειάζονται λίγα δέκατα του δευτερολέπτου για κάθε βήμα, χρόνος που σε πολλές άλλες εφαρμογές θα ήταν απαγορευτικός, όμως στη συγκεκριμένη το βήμα είναι ίσο με 3 λεπτά οπότε ο αλγόριθμος είναι πρακτικά εφαρμόσιμος, απλά δεν είναι εύκολο να βρεθούν με πειραματισμό οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων.

Ο Πίνακας 6.4 παρουσιάζει τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την περίπτωση που δεν συμπεριληφθεί η καταγραφή του διαγράμματος 6.3. Τότε το Φίλτρο Kalman δεύτερης τάξης οδηγεί σε μείωση του σφάλματος σε σχέση με το πρώτης τάξης. Και

σε αυτήν την περίπτωση όμως, τα καλύτερα αποτελέσματα δίνονται από τη χρήση φίλτρου σωματιδίων στο μοντέλο (6.5)–(6.8). Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι με το μοντέλο αυτό τα αποτελέσματα είναι καλύτερα ακόμη και για μία βαθμονόμηση, ενώ φαινομενικά το πλεονέκτημα του μοντέλου είναι ότι συνδυάζει βαθμονόμηση και φιλτράρισμα. Ο λόγος για τον οποίο μπορούν τα αποτελέσματα να είναι καλύτερα είναι ότι το πολλαπλασιαστικό μοντέλο μπορεί να εξηγήσει τις μεταβολές του ρεύματος και με μεταβολή στο συντελεστή, επομένως μπορεί να γίνει ακριβέστερη εκτίμηση της κατανομής πιθανότητας της γλυκόζης.

## 6.4 Σχολιασμός και Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήθηκαν φίλτρα με στόχο να εκτιμάται κατά το δυνατόν ακριβέστερα η τιμή της γλυκόζης. Διαπιστώθηκε ότι στην πλειοψηφία των περιπτώσεων είναι δυνατό η χρήση φίλτρου ή και κατάλληλης μεθόδου βαθμονόμησης να οδηγήσει σε σημαντική μείωση του σφάλματος.

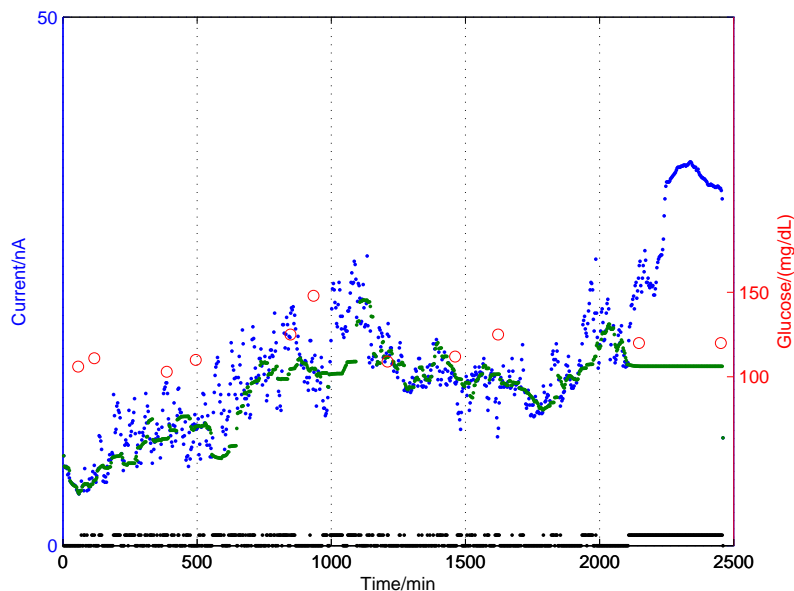
Επίσης μελετήθηκε η επίδραση της συχνότητας των βαθμονομήσεων στο σφάλμα, και το συμπέρασμα είναι ότι, ανάλογα και με τη μέθοδο, υπάρχει αρκετή βελτίωση μέχρι τον αριθμό των 4-6 βαθμονομήσεων (συνολικά κατά τη διάρκεια της καταγραφής, που είναι περίπου ίση με 48 ώρες).

Το κύριο σημείο που αναδείχθηκε είναι ότι έχει μεγάλη σημασία να ανιχνεύονται οι χρονικές περιόδους κατά τις οποίες η μέτρηση του αισθητήρα αποκλίνει σημαντικά από την πραγματική τιμή. Κατά τον υπόλοιπο χρόνο το σφάλμα δεν είναι μεγάλο, και τότε σημασία έχει η σωστή βαθμονόμηση του οργάνου. Η χρήση πιο σύνθετου μοντέλου για τη δυναμική της γλυκόζης επομένως μπορεί να βοηθήσει μόνο όταν εμφανίζονται αιχμές.

Για την ανίχνευση των αιχμών όπως είδαμε μπορεί να βοηθήσει και η κυματομορφή της πίεσης. Όπως αναφέρθηκε, σε τρεις (ιδίως σε δύο) από τις δέκα περιπτώσεις η κυματομορφή είχε αρκετά προβλήματα ώστε να μη μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Αν πρόκειται οι αλγόριθμοι εκτίμησης που παρουσιάστηκαν να ενσωματωθούν σε κάποιο σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου, θα πρέπει οι περιπτώσεις στις οποίες δεν είναι δυνατή η εκτίμηση να αναγνωρίζονται αυτόματα.

Στο Σχ. 6.8 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τη χρήση του φίλτρου της υποενότητας 6.3.1 στα δεδομένα της τέταρτης καταγραφής. Είναι εμφανές τόσο το γεγονός ότι η καταγραφή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, όσο όμως και ότι το φίλτρο «αντιλαμβάνεται» το γεγονός αυτό με το να κατατάσσει το μεγαλύτερο μέρος των δειγμάτων ως απρόβλεπτα. Η διαφορά του Σχ. 6.8 από το Σχ. 6.6 ως προς το ποσοστό του πλήθους των απρόβλεπτων δειγμάτων είναι καταφανής. Επομένως το ποσοστό αυτό θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως ένα κριτήριο για την αυτόματη αναγνώριση των καταγραφών με προβλήματα.

Σημειώνουμε ότι το φίλτρο σωματιδίων λειτουργεί ακόμη καλύτερα, καθώς με εξαίρεση το αρχικό τμήμα όλα τα υπόλοιπα δείγματα με ελάχιστες εξαιρέσεις αναγνωρίζονται ως απρόβλεπτα.



Σχήμα 6.8: Εφαρμογή του φίλτρου Kalman δεύτερης τάξης στον ασθενή 4.

Η ανάλυση αυτού του κεφαλαίου δείχνει ότι βάσει των 10 καταγραφών που έγιναν οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως ο αισθητήρας παρέχει δεδομένα τα οποία με χρήση κατάλληλων τεχνικών αναδρομικής εκτίμησης κατάστασης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βρεθεί ικανοποιητική εκτίμηση των επιπέδων γλυκόζης, απλά όχι σε όλες τις περιπτώσεις και όχι καθ' όλη τη διάρκεια της καταγραφής. Ωστόσο οι περιπτώσεις και τα τμήματα που τα δεδομένα δεν είναι έγκυρα είναι εφικτό να αναγνωρίζονται αυτόματα.

Προκειμένου να επιβεβαιωθεί ότι τα παραπάνω συμπεράσματα είναι σωστά, χρειάζεται να γίνουν περισσότερες καταγραφές. Ιδίως σχετικά με την αναγνώριση των προβλημάτων, δεν είναι δυνατό να διαπιστωθεί με βεβαιότητα ότι μπορεί να γίνεται αυτόματα. Αν για παράδειγμα χρησιμοποιείται ως κριτήριο το ποσοστό των απρόβλεπτων δειγμάτων, αν έχουμε υπόψη μόνο δύο ή τρεις περιπτώσεις μπορούμε να θέσουμε το κατώφλι σε κατάλληλο σημείο ώστε να αναγνωρίζονται αυτόματα οι περιπτώσεις που θέλουμε, όμως αυτό δεν εγγυάται ότι με το κατώφλι αυτό θα αναγνωριστούν σωστά και νέες καταγραφές.

Επομένως απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση. Είναι προφανές ότι σε πολύ μεγάλο βαθμό τα αποτελέσματα, ιδίως όσα έχουν σχέση με την αναγνώριση αιχμών και προβληματικών καταγραφών, αφορούν αποκλειστικά το συγκεκριμένο όργανο. Σίγουρα όμως αν η σχεδίαση κατάλληλου συστήματος εκτίμησης δίνει τη δυνατότητα να εφαρμοστεί έλεγχος γλυκόζης κλειστού βρόχου, αξίζει να αφιερωθεί ο αντίστοιχος χρόνος λόγω της μεγάλης σημασίας που έχει το πρόβλημα.

# Επίλογος

Η διατριβή αυτή αναδεικνύει το γεγονός ότι οι υπάρχουσες τεχνικές εκτίμησης κατάστασης για μη γραμμικά στοχαστικά συστήματα δεν είναι επαρκείς, όμως σε πολλές ενδιαφέρουσες περιπτώσεις είναι δυνατό να εφαρμοστούν ειδικές τεχνικές που δίνουν πολύ καλύτερα αποτελέσματα. Αυτό γίνεται εμφανές τόσο στις υποενότητες 2.2.1 και 2.2.2 του κεφαλαίου 2, όσο και στα κεφάλαια 3–4.

Επιπλέον φάνηκε το γεγονός ότι οι υπάρχουσες τεχνικές είναι επιδεκτικές βελτιώσεων και για τη γενική περίπτωση. Προτάθηκαν βελτιώσεις και για τα μη γραμμικά φίλτρα Kalman με έμφαση στην επιλογή της μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης, αλλά και για τα φίλτρα σωματιδίων, με προτεινόμενες βελτιώσεις στο Auxiliary Particle Filter και το Unscented Particle Filter. Όπως και για τα συστήματα ειδικής δομής, σε αρκετές από τις περιπτώσεις η βελτίωση είναι δραστηκή.

Αναμφίβολα προκύπτουν και νέα ερωτήματα. Ένα από αυτά είναι κατά πόσον οι τεχνικές των ενότητων 2.2.1 και 2.2.2 είναι δυνατό να γενικευτούν, αλλά και κατά πόσον μπορούν να υποστηριχθούν και με κάποια μαθηματική πρόταση, δεδομένου πως τώρα προκύπτουν διαισθητικά. Πεδίο μελέτης σίγουρα αποτελεί και η αναζήτηση ευρύτερων ή άλλων κλάσεων συστημάτων των οποίων η ειδική δομή να είναι εκμεταλλεύσιμη. Αυτό θα μπορούσε να αφορά κλάσεις που προκύπτουν από τη μαθηματική δομή του συστήματος, αλλά και περιπτώσεις όπου ειδικά προβλήματα οδηγούν σε προβλήματα φιλτραρίσματος ειδικής μορφής, όπως για παράδειγμα το πρόβλημα της αναγνώρισης συστημάτων, όπου μπορεί το σύστημα προς αναγνώριση να μην έχει ειδική δομή, όμως το γεγονός ότι οι παράμετροι αλλάζουν πολύ αργά εισάγει δομή στο πρόβλημα της από κοινού εκτίμησης των παραμέτρων και των μεταβλητών κατάστασης.

Σημαντικό είναι πάντα το ερώτημα της ευστάθειας. Όλα τα μη γραμμικά φίλτρα που μελετώνται στη διατριβή αυτή, τόσο τα πρότυπα όσο και τα προτεινόμενα, προσπαθούν να ελαχιστοποιήσουν το σφάλμα χωρίς να παρέχουν κάποια εγγύηση ευστάθειας. Φίλτρα τα οποία σχεδιάζονται ώστε να ελαχιστοποιείται το σφάλμα αλλά με τον περιορισμό να έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες ευστάθειας θα είχαν μεγάλη πρακτική χρησιμότητα.

Σχετικά με το πρακτικό μέρος, τα φίλτρα που έχουν προταθεί μπορούν να αποτελέσουν σημαντικότερη συνιστώσα ενός ολοκληρωμένου συστήματος ελέγχου γλυκόζης κλειστού βρόχου. Επιπλέον, μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για τη σχεδίαση πιο εξελιγμένων φίλτρων που θα χειρίζονται καλύτερα τις αιχμές και τις περιπτώσεις με προβλήματα. Ωστόσο, όπως εξηγήθηκε και στο αντίστοιχο κεφάλαιο, η σχεδίαση

δεν θα είναι μεταφέρσιμη σε διαφορετικούς αισθητήρες.

Είναι σίγουρο πως αν η χρήση τεχνικών αναδρομικής εκτίμησης εκτίμησης δώσει τη δυνατότητα για την κατασκευή αποτελεσματικού Τεχνητού Παγκρέατος, το γεγονός αυτό θα αποτελέσει ένα πολύ σημαντικό επίτευγμα για την επιστημονική αυτή περιοχή αλλά και για τα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου γενικότερα, και μάλιστα ένα επίτευγμα που θα δείξει πόσο σημαντικό ρόλο καλείται να παίξει η σύγχρονη τεχνολογία στη βελτίωση και παράταση της ζωής πολλών συνανθρώπων μας.



# Βιβλιογραφία

- [1] Charalampidis, A. C. and G. P. Papavassilopoulos: *Comparison of Standard and Modified Recursive State Estimation Techniques For Nonlinear Systems*. In *Proceedings of the 17th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 132–138, Jun. 2009.
- [2] Charalampidis, A. C. and G. P. Papavassilopoulos: *Computationally Efficient Kalman Filtering for a Class of Nonlinear Systems*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(3):483–491, Mar. 2011, ISSN 0018-9286.
- [3] Charalampidis, A. C. and G. P. Papavassilopoulos: *Improved Unscented Kalman Filtering For a Class of Nonlinear Systems*. In *Proceedings of the 3rd Panhellenic Conference of Electrical and Computer Engineering Students*, Apr. 2009.
- [4] Khalil, H. K.: *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 3rd edition, 2002.
- [5] Glendinning, P.: *Stability, instability, and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*. Cambridge Univ. Press, 1994.
- [6] Boyce, W. E. and R. C. DiPrima: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, 2008.
- [7] Fitzgerald, A. E., C. Kingsley, and S. D. Umans: *Electric Machinery*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 6th edition, 2002.
- [8] Jazar, R. N.: *Theory of Applied Robotics: Kinematics, Dynamics, and Control*. Springer, 2nd edition, 2010.
- [9] Etkin, B.: *Dynamics of Atmospheric Flight*. Dover Publications, 2005.
- [10] Astrom, K. J. and B. Wittenmark: *Adaptive Control*. Addison-Wesley, Boston, MA, USA, 2nd edition, 1994.
- [11] Goodwin, G. C. and K. S. Sin: *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Dover Publications, New York, NY, USA, 2009.

- [12] Charalampidis, A. C., A. E. Chaniotis, and A. G. Kladas: *Wind Time Series modeling and Stochastic Optimal Control for a Grid-Connected Wind Turbine Generator*. In *Proceedings of the 3rd Panhellenic Conference of Electrical and Computer Engineering Students*, Apr. 2009.
- [13] Haykin, S. and M. Moher: *Communication systems*. Wiley, 5th edition, 2009.
- [14] van Trees, H. L.: *Detection, Estimation and Modulation Theory*. Wiley, New York, 1968.
- [15] Πρωτονοτάριος, Ε. Ν.: *Στοχαστικές ανελίξεις και μετάδοση σημάτων*. Σημειώσεις, Αθήνα, 1987.
- [16] Shannon, C. E.: *A mathematical theory of communication*. Bell Sys. Tech. J., 27:379–423, 623–656, 1948.
- [17] Ash, R. B.: *Information Theory*. Dover Publications, 1990.
- [18] Millman, J. και Χ. Χαλκιάς: *ωλοκληρωμένη ηλεκτρονική*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1990.
- [19] Julier, S. and J. K. Uhlmann: *Unscented filtering and nonlinear estimation*. Proceedings of the IEEE, 92(3):401–422, Mar. 2004.
- [20] Sanjeev Arulampalam, M., S. Maskel, N. Gordon, and T. Clapp: *A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking*. IEEE Transactions on Signal Processing, 50(2):174–188, Feb. 2002.
- [21] Cappé, O., S. J. Godsill, and E. Moulines: *An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo*. Proceedings of the IEEE, 95(5):899–924, 2007.
- [22] Oksendal, B.: *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, 2003.
- [23] Hanson, F. B.: *Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis, and Computation*. Advances in Design and Control. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [24] Kalman, R. E. and R. S. Bucy: *New Results in Linear Filtering and Prediction Theory*. Journal of Basic Engineering, 83D:95–108, 1961.
- [25] Sorenson, H. W.: *Parameter Estimation: Principles and Problems*. Marcel Dekker, New York, NY, 1980.
- [26] Κοκολάκης, Γ. και Ι. Σπηλιώτης: *Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική*. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1999.

- [27] Bayes, T.: *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 53:370–418, 1763.
- [28] Billingsley, P.: *Probability and Measure*. Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 3rd edition, 1995.
- [29] Ash, R. B.: *Basic Probability Theory*. Dove, Mineola, NY, 2008. Available: [www.math.uiuc.edu/~r-ash/BPT.html](http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/BPT.html).
- [30] Rabiner, L. R.: *A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition*. Proceedings of the IEEE, 77(2):257–286, 1989.
- [31] Ephraim, Y. and N. Merhav: *Hidden Markov Processes*. IEEE Transactions on Information Theory, 48(6):1518–1569, 2002.
- [32] Kalman, R. E.: *A new approach to linear filtering and prediction problem*. ASME Journal of Basic Engineering, 82(1):35–45, Mar. 1960.
- [33] Anderson, B. D. O. and J. B. Moore: *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.
- [34] Simon, D.: *Optimal State Estimation: Kalman,  $H_\infty$  and Nonlinear Approaches*. John Wiley, Hoboken, NJ, 2006.
- [35] Ito, K. and K. Xiong: *Gaussian Filters for Nonlinear Filtering Problems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 45(5):910–927, May 2000.
- [36] Lefebvre, T., H. Bruyninckx, and J. d. Schutter: *Kalman filters for non-linear systems: a comparison of performance*. International Journal of Control, 77(7):639–653, May. 2004.
- [37] Smith, G. L., S. F. Schmidt, and L. A. McGee: *Application of statistical filter theory to the optimal estimation of position and velocity on board a circumlunar vehicle*. Technical Report TR R-135, NASA, 1962.
- [38] Julier, S., J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte: *A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators*. IEEE Transactions on Automatic Control, 45(3):477–482, Mar. 2000.
- [39] Qu, C. C. and J. Hahn: *Computation of arrival cost for moving horizon estimation via unscented Kalman filtering*. J. of Process Control, 19(2):358–363, Feb. 2009.
- [40] M. St-Pierre and D. Gingras: *Comparison between the unscented Kalman filter and the extended Kalman filter for the position estimation module of an integrated navigation information system*. In *Proc. 2004 IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, pages 831–835, Jun. 2004.

- [41] Romanenko, A. and J. A. A. M. Castro: *The unscented filter as an alternative to the EKF for nonlinear state estimation: a simulation case study*. Computer and Chemical Engineering, 28(3):347–355, Mar. 2004.
- [42] Davis, P. J. and P. Rabinowitz: *Methods of Numerical Integration*. Academic Press, New York, 1975.
- [43] Sorenson, H. W. and A. R. Stubberud: *Non-linear filtering by approximation of the a posteriori density*. International Journal of Control, 8(1):33–51, 1968.
- [44] Sorenson, H. W. and D. L. Alspach: *Recursive Bayesian estimation using Gaussian sums*. Automatica, 7(4):465–479, 1971.
- [45] Crisan, D. and A. Doucet: *A survey of convergence results on particle filtering methods for practitioners*. IEEE Transactions on Signal Processing, 50(3):736–746, Mar. 2002.
- [46] Hu, X. L., T. B. Schon, and L. Ljung: *A Basic Convergence Result for Particle Filtering*. IEEE Transactions on Signal Processing, 56(4):1337–1348, Apr. 2008.
- [47] van der Merwe, R., A. Doucet, N. de Freitas, and E. Wan: *The Unscented Particle Filter*. Technical Report CUED/F-INFENF/TR 380, Cambridge University, Aug. 2000.
- [48] Gordon, N. J., D. J. Salmond, and A. F. M. Smith: *Novel approach to nonlinear/non-Gaussian state estimation*. IEE Proceedings-F, 140(2):107–113, Apr. 1993.
- [49] International Diabetes Federation: *Diabetes Atlas*. International Diabetes Federation, Brussels, Belgium, 3rd edition, 2007. Available: <http://www.diabetesatlas.org/downloads>.
- [50] Wild, S., G. Roglic, A. Green, R. Sicree, and H. King: *Global Prevalence of Diabetes*. Diabetes Care, 27(5):1047–1053, 2004.
- [51] The Diabetes Control and Complications Trial Research Group: *The effect of intensive treatment of diabetes on the development and progression of long-term complications in insulin-dependent diabetes mellitus*. The New England Journal of Medicine, 329(14):977–986, Sep. 1993.
- [52] Wilinska, M. E. and R. Hovorka: *Simulation models for in silico testing of closed-loop glucose controllers in type 1 diabetes*. Drug Discovery Today: Disease Models, 5(4):289–298, 2009.
- [53] Makroglou, A., J. Li, and Y. Kuang: *Mathematical models and software tools for the glucose-insulin regulatory system and diabetes: an overview*. Applied Numerical Mathematics, 56(3-4):559–573, 2006.

- [54] Bergman, R. N.: *Minimal Model: Perspective from 2005*. Hormone Research, 64(3):8–15, 2006.
- [55] Sturis, J., K. S. Polonsky, E. Mosekilde, and E. Van Cauter: *Computer model for mechanisms underlying ultradian oscillations of insulin and glucose*. American Journal of Physiology - Endocrinology And Metabolism, 260(5):E801–E809, 1991.
- [56] Eren-Oruklu, M., A. Cinar, L. Quinn, and D. Smith: *Adaptive control strategy for regulation of blood glucose levels in patients with type 1 diabetes*. Journal of Process Control, 19(8):1333–1346, 2009.
- [57] Ruiz-Velazquez, E., R. Femat, and D. U. Campos-Delgado: *Blood glucose control for type I diabetes mellitus: A robust tracking  $H_\infty$  problem*. Control Engineering Practice, 12(9):1179–1195, 2004.
- [58] Van Herpe, T., N. Haverbeke, B. Pluymers, G. Van den Berghe, and B. De Moor: *The application of Model Predictive Control to normalize glycemia of critically ill patients*. In *Proc. of the European Control Conference 2007*, pages 3116–3123, Jul. 2007.
- [59] Markakis, M. G., G. D. Mitsis, G. P. Papavassilopoulos, P. A. Ioannou, and V. Z. Marmarelis: *A switching control strategy for the attenuation of blood glucose disturbances*. Optimal Control Applications and Methods, 2009.
- [60] Nishida, K., S. Shimoda, K. Ichinose, E. Araki, and M. Shichiri: *What is artificial endocrine pancreas? Mechanism and history*. World Journal of Gastroenterology, 15(33):4105–4110, 2009.
- [61] Koeslag, J. H., P. T. Saunders, and E. Terblanche: *A reappraisal of the blood glucose homeostat which comprehensively explains the type 2 diabetes mellitus-syndrome X complex*. The Journal of Physiology, 549(2):333, 2003.
- [62] Sparacino, G., A. Facchinetti, A. Maran, and C. Cobelli: *Continuous glucose monitoring time series and hypo/hyperglycemia prevention: requirements, methods, open problems*. Current Diabetes Reviews, 4(3):181–192, 2008.
- [63] Van den Berghe, G.: *Role of intravenous insulin therapy in critically ill patients*. Endocrine Practice, 10:17–20, 2004.
- [64] Van den Berghe, G., P. Wouters, F. Weekers, C. Verwaest, F. Bruyninckx, M. Schetz, D. Vlasselaers, P. Ferdinande, P. Lauwers, and R. Bouillon: *Intensive insulin therapy in critically ill patients*. New England Journal of medicine, 345(19):1359–1367, 2001.
- [65] Kitagawa, G.: *Monte Carlo Filter and Smoother for Non-Gaussian Nonlinear State Space Modules*. Journal of Computational and Graphical Statistics, 5(1):1–25, Mar. 1996.

- [66] Cramer, H.: *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1946.
- [67] Rao, C.: *Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters*. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 37:81–89, 1945.
- [68] Tichavsky, P., C. H. Muravchik, and A. Nehorai: *Posterior Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering*. IEEE Transactions on Signal Processing, 46(5):1386–1396, May. 1998.
- [69] Coleman, T. F. and Y. Li: *An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds*. SIAM Journal on Optimization, 6:418–445, 1996.
- [70] Coleman, T. F. and Y. Li: *On the Convergence of Reflective Newton Methods for Large-Scale Nonlinear Minimization Subject to Bounds*. Mathematical Programming, 67(2):189–224, 1994.
- [71] Chen, C. T.: *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, New York, 3rd edition, 1999.
- [72] Popov, V. M.: *Criterion of quality for non-linear controlled systems*. In *Preprints of the First IFAC World Congress*, pages 173–176, 1960.
- [73] Szego, G.: *On the absolute stability of sampled-data control systems*. Proc. Nat'l Acad. Sci., 50(3):558–560, Sep. 1963.
- [74] Pitt, M. K. and N. Shephard: *Filtering via simulation: Auxiliary particle filters*. Journal of the American Statistical Association, 94(446):590–599, Jun. 1999.
- [75] Netto, M., L. Gimeno, and M. Mendes: *On the optimal and suboptimal nonlinear filtering problem for discrete-time systems*. Automatic Control, IEEE Transactions on, 23(6):1062–1067, Dec 1978, ISSN 0018-9286.
- [76] de Freitas, N. and R. van der Merwe: [http://www.cs.ubc.ca/~nando/software/upf\\_demos.tar.gz](http://www.cs.ubc.ca/~nando/software/upf_demos.tar.gz), Aug. 2000. MATLAB Code.