



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ &
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΠΡΟΗΓΜΕΝΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ
ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟ ΤΟΥ
ΤΡΟΠΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ
ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Παναγιώτη Χ. Ρουσόπουλου

Επιβλέπων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Ν. Παπαοδυσσεύς

Αθήνα Οκτώβριος 2010



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ &
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΠΡΟΗΓΜΕΝΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ ΠΡΟΤΥΠΩΝ
ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟ ΤΟΥ
ΤΡΟΠΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ
ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Παναγιώτη Χ. Ρουσόπουλου

Συμβουλευτική Επιτροπή : Κωνσταντίνος Ν. Παπαοδυσσεύς

Ηλίας Β. Κουκούτσης

Βασίλειος Γ. Λούμος

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 7^η Οκτωβρίου 2010

.....
Κ. Παπαοδυσσεύς
Αναπλ. Καθ. ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....
Η. Κουκούτσης
Επικ. Καθ. ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....
Β. Λούμος
Καθ. ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....
Α. Γ. Σταφυλοπάτης
Καθ. ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....
Θ. Ρασσιάς
Καθ. ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....
Ν. Θεοδώρου
Καθ. ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....
Μ. Ζερβάκης
Κάθ. Τμήματος Η.Μ.Μ.Υ.
Πολυτεχνείου Κρήτης

Αθήνα Οκτώβριος 2010

.....

Παναγιώτης Χ. Ρουσόπουλος

Διδάκτωρ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Παναγιώτης Χ. Ρουσόπουλος 2010

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Στον Κώστα,
στη μητέρα και την αδερφή μου,
σε όλους όσους με στήριξαν.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με στήριξαν σε αυτή την προσπάθεια και με βοήθησαν να ολοκληρώσω την εργασία αυτή.

Πρώτα και πάνω από όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα μου τον κύριο Κωνσταντίνο Παπαοδυσσέα. Είναι ο άνθρωπος που με προέτρεψε να ξεκινήσω αυτή την προσπάθεια και στάθηκε δίπλα μου σε όλη τη διάρκειά της. Οι συμβουλές του σε όλα τα επίπεδα ήταν πολύτιμες και χωρίς τη βοήθειά του δεν θα είχα καταφέρει να ολοκληρώσω αυτή την εργασία. Τον ευχαριστώ για την καθημερινή συνεργασία που είχαμε, για την πολύτιμη συμπαράσταση και βοήθεια που μου προσέφερε ώστε να λυθεί κάθε πρόβλημα που μου προέκυπτε, για το κουράγιο που μου έδινε να προχωρήσω όταν κάποιες στιγμές απογοητευόμουν, για τις χιλιάδες ώρες που αντιμετωπίσαμε με επιτυχία δυσκολίες σε επιστημονικό μα και σε ανθρώπινο επίπεδο που φάνταζαν αξεπέραστες, για τις στιγμές φοβερού γέλιου που περνάγαμε μαζί καθώς και με όλους τους συνεργάτες του. Δίπλα του είχα, και έχω, μόνο να κερδίσω επιστημονικά, πνευματικά και ψυχικά.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής μου τους καθηγητές κ.κ. Ηλία Κουκούτση και Βασίλειο Λούμο. Με τις κατευθύνσεις που μου έδιναν και με τη συμπαράστασή που μου προσέφεραν σε όλα τα επίπεδα βοήθησαν πάρα πολύ στο να ολοκληρωθεί αυτή η προσπάθεια. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς επιτροπής, τους καθηγητές κ.κ. Ανδρέα Σταφυλοπάτη, Νίκο Θεοδώρου, Θεμιστοκλή Ρασσιά και Μιχάλη Ζερβάκη. Όποτε χρειάστηκα και ζήτησα τη βοήθεια και τις συμβουλές τους μου τις προσέφεραν με μεγάλη χαρά συμβάλλοντας στην καλύτερη συγγραφή αυτού του διδακτορικού.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τη μητέρα και την αδερφή μου για την ψυχική, υλική και κάθε άλλου είδους συμπαράσταση που μου προσέφεραν. Δίχως τη βοήθειά τους δε θα είχα καταφέρει να ολοκληρώσω αυτή την εργασία ένα σημαντικό μέρος της οποίας ηθικά τους ανήκει.

Περιεχόμενα

Στόχοι και δομή της παρούσης εργασίας σελ. 1

Μέρος 1^ο

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

- 1.1 Περί του προϊστορικού οικισμού του Ακρωτηρίου Θήρας της Ύστερης Εποχής του Χαλκού σελ. 3
- 1.2 Οι φημισμένες τοιχογραφίες της ανασκαφής Ακρωτηρίου Θήρας σελ. 3
- 1.3 Η σπουδαιότητα εντοπισμού του τρόπου κατασκευής των τοιχογραφιών Ακρωτηρίου Θήρας σελ. 11

Κεφάλαιο 2. Πρώτο στάδιο ψηφιακής επεξεργασίας των φωτογραφιών των προς μελέτη τοιχογραφιών.

- 2.1 Αυτοματοποιημένη κατάτμηση των φωτογραφιών σελ. 13
- 2.2 Αυτόματη εξαγωγή των περιγραμμάτων των μορφών των τοιχογραφιών σελ. 14

Κεφάλαιο 3. Πρώτος χωρισμός των περιγραμμάτων των μορφών των τοιχογραφιών σε τμήματα.

- 3.1 Ορισμός του αντικειμένου περιγράμματος..... σελ. 16
- 3.2 Ορισμός του τμήματος αντικειμένου περιγράμματος σελ. 18
- 3.3 Μια πρώτη εκτίμηση των σημείων αλλαγής τμημάτων αντικειμένου σελ. 24

Κεφάλαιο 4. Επιλογή ενός συνόλου stencils που πιθανώς χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των τοιχογραφιών του Ακρωτηρίου.

- 4.1 Αρχική επιλογή ενός συνόλου υποψηφίων καμπυλογράφων από ιστορικής και αρχαιολογικής σκοπιάς σελ. 35

- 4.2 Σύντομη ιστορική ανασκόπηση αναφορικά με τα επιλεγέντα γεωμετρικά πρότυπα σελ. 40
- 4.3 Η αναγκαιότητα ανάπτυξης νέων μεθόδων για την επιβεβαίωση της χρήσης καμπυλογράφων και τον ακριβή εντοπισμό των παραμέτρων αυτών σελ. 42
- 4.4 Αρχική επιβεβαίωση της ορθότητας επιλογής αυτών των καμπυλογράφων και πρώτη εκτίμηση των παραμέτρων τους σελ. 43

Κεφάλαιο 5. Ακριβής εντοπισμός των γεωμετρικών καμπυλογράφων ως και των τμημάτων αντικειμένων που αντιστοιχούν σε αυτούς.

- 5.1 Μία νέα εξαντλητική μέθοδος προσαρμογής καμπυλών σελ. 56
- 5.2 Ακριβής προσδιορισμός των καμπυλογράφων που πιθανότατα χρησιμοποιήθηκαν για το σχεδιασμό των τοιχογραφιών σελ.72
- 5.2.1 Προσδιορισμός των ορίων των πρωταρχικών παραμέτρων κάθε πιθανού οδηγού
- 5.2.2 Ακριβής προσδιορισμός των τιμών των πρωταρχικών παραμέτρων των καμπυλογράφων.
- 5.3 Ακριβής εντοπισμός των τμημάτων αντικειμένου που αντιστοιχούν στους ευρεθέντες καμπυλογράφους σελ. 82

Μέρος 2^ο

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

- 1.1 Η σπουδαιότητα της ταυτοποίησης χαρακτών αρχαίων επιγραφών. Μία πρώτη περιγραφή του στόχου της παρούσης εργασίας σελ. 92
- 1.2 Οι δυσκολίες του εγχειρήματος της αυτόματης ταυτοποίησης χαρακτών αρχαίων επιγραφών σελ. 95

Κεφάλαιο 2. Εξαγωγή και επεξεργασία του περιγράμματος των υλοποιήσεων συμβόλων της αλφαβήτου που εμφανίζονται επί επιγραφών

- 2.1 Κατάτμηση της ψηφιακής εικόνας των γραμμάτων των επιγραφών σελ. 98

- 2.2 Εξαγωγή του περιγράμματος μιας υλοποίησης κάθε συμβόλου της αλφαβήτου από την κατατημένη της εικόνα σελ. 105

Κεφάλαιο 3. Ορισμός κρισίων σημείων περιγράμματος υλοποιήσεων συμβόλων της αλφαβήτου και εντοπισμός αυτών σελ. 108

Κεφάλαιο 4. Βέλτιστη προσαρμογή των περιγραμμάτων των επιγραφικών υλοποιήσεων ενός συμβολογράμματος

- 4.1 Θεωρητική ανάλυση σελ. 128
- 4.2 Οπτική απόδοση της βέλτιστης προσαρμογής υλοποιήσεων συμβολογραμμάτων σελ. 133
- 4.3 Υλοποίηση της διαδικασίας προσαρμογής στον υπολογιστή σελ. 170

Κεφάλαιο 5. Κριτήρια ομοιότητας υλοποιήσεων γραμμάτων στη θέση βέλτιστης προσαρμογής

- 5.1 Απεικονίσεις συμβολογραμμάτων που υλοποιούνται με τέσσερα κτυπήματα..... σελ. 178
- 5.2 Απεικονίσεις συμβολογραμμάτων που υλοποιούνται με τρία κτυπήματασελ.181
- 5.3 Απεικονίσεις συμβολογραμμάτων που υλοποιούνται με δύο κτυπήματασελ. 183
- 5.4 Απεικονίσεις υλοποιήσεων συμβολογραμμάτων με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά..... σελ. 184
- 5.5 Ορισμός ενός κριτηρίου ομοιότητας στη θέση βέλτιστης προσαρμογής σελ. 185

Κεφάλαιο 6. Εξαγωγή γεωμετρικών χαρακτηριστικών από υλοποιήσεις των συμβολογραμμάτων σε επιγραφές

- 6.1 Παράδειγμα εφαρμογής της μεθοδολογίας για το γράμμα Γ σελ. 197
- 6.2 Παράδειγμα εφαρμογής της μεθοδολογίας για το γράμμα Α σελ. 200
- 6.3 Παράδειγμα εφαρμογής της μεθοδολογίας για το γράμμα Ο σελ. 204

Κεφάλαιο 7. Κριτήρια ταυτοποίησης λιθοξόων

- 7.1 Στατιστικοί έλεγχοι της υποθέσεως ότι δύο επιγραφές προέρχονται απ' τον ίδιο χαρακτή βασισμένοι στη βέλτιστη προσαρμογή υλοποιήσεων συμβολογραμμάτων σελ. 209
- 7.2 Μέθοδοι ταυτοποίησης βασισμένες στη στατιστική επεξεργασία των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των υλοποιήσεων συμβολογραμμάτων επί των επιγραφών σελ. 210
- 7.3 Πιθανοφάνεια στη θέση βέλτιστης προσαρμογής υλοποιήσεων συμβολογραμμάτων σε δύο επιγραφές σελ. 214

Κεφάλαιο 8. Εφαρμογή της μεθοδολογίας στην ταυτοποίηση του χαρακτή ικανού αριθμού επιγραφών

- 8.1 Επιλογή του συνόλου των επιγραφών επί του οποίου δοκιμάστηκε η μεθοδολογία σελ. 216
- 8.2 Πρώτο στάδιο επεξεργασίας των επιγραφών σελ. 217
- 8.3 Καθορισμός των διαφορετικών χαρακτών που εσμίλευσαν το σύνολο των εξεταζομένων επιγραφών σελ. 218
- 8.4 Κατάταξη των επιγραφών που απέμειναν με το κριτήριο της μέγιστης πιθανοφάνειας της παραγράφου 7 σελ. 219

Συμπεράσματα - Δημοσιεύσεις σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά σχετικές με την παρούσα εργασίασελ. 229

Παράρτημα

- Π.Κ. Γενικά περί καμπυλών σελ. 233**
- Π.Σ. Θεμελιώδεις έννοιες και θεωρήματα σχετικά με συγκεκριμένες στατιστικές κατανομές και έλεγχο στατιστικών υποθέσεων σελ. 255**
- Π.Τ. Μία νέα μέθοδος κατάτμησης φωτογραφιών Αρχαίων Τοιχογραφιών και Επιγραφών..... σελ. 268**
- Π.Γ. Περί Γραφολογίας σελ. 274**
- Π.Π. Περί προσαρμογής καμπυλών σελ. 279**

Αναφορές σελ. 280

ΣΤΟΧΟΙ ΚΑΙ ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΗΣ

ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η παρούσα διατριβή αφορά σε δύο θέματα:

Το πρώτο περιλαμβάνει μία προσπάθεια εντοπισμού του τρόπου κατασκευής/σχεδίασης των φημισμένων τοιχογραφιών της Ύστερης Εποχής του Χαλκού (περί τα 1630 π.Χ.), οι οποίες έχουν ανασκαφεί στο Ακρωτήρι Θήρας.

Το δεύτερο θέμα αφορά στην αυτόματη ταυτοποίηση γραφένων αρχαίων επιγραφών με σκοπό την ορθή χρονολόγηση αυτών, η οποία είναι πολύ μεγάλης σημασίας για την Αρχαιολογία και την ορθή καταγραφή της Ιστορίας.

Και τα δύο αυτά θέματα αντιμετωπίζονται για πρώτη φορά σε αυτήν την εργασία, αλλά και από την ερευνητική μας ομάδα.

Το πρώτο θέμα αναπτύσσεται αναλυτικά στο πρώτο μέρος της παρούσης και περιλαμβάνει τα εξής επιμέρους στάδια:

1Α) Γίνεται μια πρώτη επεξεργασία των εικόνων των προς μελέτη τοιχογραφιών με σκοπό την εξαγωγή του περιγράμματος των απεικονιζομένων θεματικών ενοτήτων σε κατάλληλη μορφή.

1Β) Διατυπώνονται ορισμοί θεμελιωδών οντοτήτων καθώς και η βασική υπόθεση περί χρήσεως γεωμετρικών καμπυλογράφων στη σχεδίαση των τοιχογραφιών.

1Γ) Επιλέγονται πιθανά γεωμετρικά πρότυπα των καμπυλογράφων, με κριτήρια αρχαιολογικής και ιστορικής φύσεως.

1Δ) Γίνεται μία πρώτη εκτίμηση των πιθανών μονοκονδυλιών με χρήση της καμπυλότητας και ελαχιστοποίηση κατάλληλα επιλεγμένων συναρτήσεων λάθους.

1Ε) Παρουσιάζεται μια πρωτότυπη εξαντλητική μέθοδος προσαρμογής καμπυλών, η οποία προσφέρει την αδιαμφισβήτητα βέλτιστη σχετική θέση αυτών.

1ΣΤ) Επί τη βάση των προηγουμένων, προσδιορίζονται οι ακριβείς παράμετροι των πιθανών καμπυλογράφων.

1Ζ) Υποστηρίζεται ουσιαδώς η υπόθεση περί χρήσεως καμπυλογράφων, με έμμεση αναπαραγωγή του τρόπου σχεδίασης των περιγραμμάτων. Παράλληλα προσδιορίζονται τα ακριβή όρια των πιθανών μονοκονδυλιών πάνω στις ζωγραφισμένες θεματικές ενότητες. Τα σχετικά αποτελέσματα μαζί με οπτική απόδοση τους επί των εικόνων των τοιχογραφιών παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 5.3.

Στο δεύτερο μέρος αυτής της εργασίας παρουσιάζεται για πρώτη φορά μια ολοκληρωμένη μέθοδος αυτόματης ταυτοποίησης γραφέα αρχαίων επιγραφών, η οποία περιλαμβάνει τα εξής επιμέρους στάδια:

2Α) Πραγματοποιείται μία πρώτη επεξεργασία των εικόνων των προς μελέτη επιγραφών με σκοπό την εξαγωγή του περιγράμματος, σε κατάλληλη μορφή, όλων των υλοποιήσεων των συμβόλων της αλφαβήτου (συμβολογραμμάτων) που εμφανίζονται σε αυτές.

2Β) Καθορίζονται κρίσιμα σημεία καμπής επί κάθε υλοποίησης ενός συμβολογράμματος, με ελαχιστοποίηση κατάλληλα επιλεγμένων συναρτήσεων λάθους και χρήση της καμπυλότητας.

2Γ) Πραγματοποιείται βέλτιστη προσαρμογή των υλοποιήσεων των περιγραμμάτων του ίδιου συμβολογράμματος με επέκταση και κατάλληλη τροποποίηση της μεθόδου προσαρμογής καμπυλών που παρουσιάζεται στο πρώτο μέρος.

2Δ) Επί της θέσης βέλτιστης προσαρμογής των περιγραμμάτων δύο γραμμάτων, ορίζονται ποσότητες που περιγράφουν την ποιότητα προσαρμογής.

2Ε) Διατυπώνονται πρωτότυπα στατιστικά κριτήρια για τον υπολογισμό της πιθανοφάνειας και τον έλεγχο της υπόθεσης εάν μία επιγραφή ανήκει σε ένα γραφέα ή όχι.

2ΣΤ) Παρουσιάζεται μία επιπλέον μέθοδος ταυτοποίησης γραφέα, η οποία χρησιμοποιεί γεωμετρικά χαρακτηριστικά που εξάγονται αυτόματα από τα περιγράμματα των γραμμάτων. Οι τιμές αυτών των χαρακτηριστικών ακολουθούν συγκεκριμένες στατιστικές κατανομές με χρήση των οποίων διατυπώνονται περαιτέρω κριτήρια για το εάν μια επιγραφή έχει χαραχθεί από ένα γραφέα ή όχι.

2Ζ) Και οι δύο ανωτέρω μέθοδοι συνολικά χρησιμοποιούνται για την ταυτοποίηση του γραφέα 32 αρχαιοελληνικών επιγραφών, τις οποίες επέλεξε ο παγκοσμίου φήμης επιγραφολόγος κύριος Steven Tracy τ. διευθυντής της Αμερικανικής Σχολής Κλασικών Σπουδών στην Αθήνα και νυν καθηγητής της σχολής ιστορικών σπουδών του ινστιτούτου προηγμένων σπουδών του Princeton στο New Jersey των Ηνωμένων Πολιτειών. Ο ίδιος κατά βάση, καθώς και άλλοι διακεκριμένοι επιγραφολόγοι, αξιολόγησαν την επίδοση του συστήματος. Ο τρόπος εφαρμογής της μεθόδου ως και τα σχετικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 8.

Τα αποτελέσματα και συμπεράσματα της παρούσης εργασίας παρουσιάζονται στο τέλος αυτής, πριν τα παραρτήματα και τη βιβλιογραφία, μαζί με τα πλήρη στοιχεία των εννέα δημοσιεύσεων σε έγκριτα διεθνή επιστημονικά περιοδικά που συνδέονται με τη διατριβή.

ΜΕΡΟΣ 1^ο

1. Εισαγωγή

1.1 Περί του προϊστορικού οικισμού του Ακρωτηρίου Θήρας της Ύστερης Εποχής του Χαλκού.

Γύρω στα 1620 π.Χ. , έλαβε χώρα μιας τεράστιας ισχύος ηφαιστειακή έκρηξη στη νήσο της Θήρας, η οποία έθραψε κάτω από ένα παχύ στρώμα ηφαιστειακής τέφρας άνω των 15 μέτρων τον οικισμό που ήκμαζε στο Ακρωτήρι. Αυτό το γιγαντιαίου μεγέθους γεωλογικό συμβάν παγίδεψε στα ερείπια του οικισμού υλικό και στοιχεία που σήμερα μας δίνουν τη δυνατότητα να σχηματίσουμε μια καλή εικόνα της κοινωνίας στο Αιγαίο κατά την περίοδο της Ύστερης Εποχής του Χαλκού. Οι ανασκαφές στην περιοχή αποκάλυψαν τον οικισμό ο οποίος αναπτύχθηκε εκεί από τα μέσα της 5^{ης} χιλιετίας π.Χ. (τέλος νεολιθικής εποχής) έχοντας μια μακρόχρονη ιστορία τεσσάρων χιλιάδων ετών. Τα ευρήματα έχουν προκαλέσει το διεθνές ενδιαφέρον πολλών επιστημονικών κλάδων ([1.3],[1.4]). Τα πιο σημαντικά από αυτά είναι οι καλά διατηρημένες τοιχογραφίες, οι οποίες εκτός απ'τη μεγάλη και διαχρονική καλλιτεχνική τους αξία, μας δίνουν και πολύτιμες πληροφορίες για το επίπεδο της πολιτισμικής , πνευματικής και κοινωνικής ζωής στο Αιγαίο της Ύστερης Εποχής του Χαλκού.

1.2 Οι φημισμένες τοιχογραφίες της ανασκαφής Ακρωτηρίου Θήρας

Τα μέχρι σήμερα αποκατασταθέντα σύνολα τοιχογραφιών του Ακρωτηρίου αποκαλύπτουν μία εξαιρετικά μεγάλη ποικιλία θεμάτων: Αφηρημένα σχέδια, γεωμετρικά σχήματα, άψυχα αντικείμενα και κατασκευές, φυτά, ζώα και η ανθρώπινη μορφή συνιστούσαν τη θεματογραφία τους ([1.3],[1.4]).

Η τέχνη της ζωγραφικής στο Ακρωτήρι ήταν στενά συνδεδεμένη με τις ανάγκες και επιθυμίες μιας πιθανότατα φιλελεύθερης κοινωνίας, με σημαντικές εμπορικές και

ναυτιλιακές δραστηριότητες. Ειδικότερα, η ευρεία διάδοση των τοιχογραφιών στα κτίρια του Ακρωτηρίου, καταδεικνύει ότι η τέχνη στη Θήρα χρησιμοποιήθηκε από μια ευρεία, ασφαλώς εύπορη, κοινωνική ομάδα. Ο καλλιτέχνης χρησιμοποιεί χρώματα για να εκφράσει τις ιδέες του και να τις αποτυπώσει πάνω στο ασβεστοκονίαμα.

Παρότι αναφέρεται η ύπαρξη ασβεστοκονιαμάτων σε πρωτομινωικά περιβάλλοντα της Κρήτης, στα μέσα περίπου της τρίτης χιλιετίας π.Χ., η διακόσμηση τοίχων με παραστάσεις θεωρείται ανατολικής (αιγυπτιακής ή συριακής) προέλευσης και είναι πολλοί οι λόγοι που προκαλούν τους αρχαιολόγους να σκέπτονται ότι «αν η τέχνη της τοιχογραφίας είναι όντως νεωτερισμός που ήλθε από την Ανατολή, δεν αποκλείεται η πύλη της εισόδου στην περιοχή του Αιγαίου να ήταν οι Κυκλάδες, ίσως δε και αυτή η ίδια η Θήρα» [1.3].

Η επιλογή του θέματος κάθε τοιχογραφίας σχετιζόταν με το κτίριο, τους ανθρώπους στους οποίους απευθυνόταν και με τον χρόνο κατά τον οποίο είχε εκτελεσθεί ή κατά τον οποίο προοριζόταν να παρουσιαστεί.

Η άριστη διατήρηση και η πειστική αποκατάσταση των τοιχογραφιών της Θήρας λειτούργησε ως πρόκληση σε επιστήμονες πολλών διαφορετικών κλάδων να ερευνήσουν τις τοιχογραφίες αναζητώντας και άλλες πληροφορίες πέραν των καλλιτεχνικών που αφορούν τόσο στο πολιτιστικό όσο και στο τεχνολογικό και γνωσιολογικό επίπεδο των κατοίκων του Ακρωτηρίου εκείνης της εποχής.

Ο οικισμός της Ύστερης Εποχής του Χαλκού του Ακρωτηρίου που έχει έρθει στο φως από την αρχαιολογική σκαπάνη έως σήμερα, περιλαμβάνει μεταξύ των άλλων και τα εξής κτίρια: την Οικία των Γυναικών, την Δυτική Οικία, το Συγκρότημα Δ, το Κτίριο Β, την Ξεστή 3 και την Ξεστή 4. Οι τοιχογραφίες που μελετήθηκαν στην παρούσα διατριβή ανήκουν στην Ξεστή 3 και στην Οικία Γυναικών και είναι συγκεκριμένα οι «Κροκοσυλλέκτριες», το «Γυμνό Αγόρι», τα «Γυμνά Αγόρια», η «Αγριόπαπια» από την Ξεστή 3 και τα «Παγκράτια» από την Οικία Γυναικών. Ακολουθεί σύντομη παρουσίαση των τοιχογραφιών αυτών. ([1.3] περισσότερες λεπτομέρειες).

1) «Κροκοσυλλέκτριες».



Εικόνα 1.1α

Η συγκεκριμένη τοιχογραφία βρισκόταν στον πρώτο όροφο της Ξεστής 3 στο δωμάτιο «3α». Είναι μια σύνθεση που καταλάμβανε τον ανατολικό τοίχο και παρουσιάζει δύο γυναικείες μορφές που ασχολούνται με τη συλλογή κρόκου, ενός πολύτιμου καρυκεύματος. Η μορφή που βρίσκεται στα αριστερά (εικόνα 1.1 α) απεικονίζεται με στραμμένο το κεφάλι προς μία άλλη γυναικεία φιγούρα, την οποία αντικρίζει με σοβαρό ύφος. Έχει πλούσια

μαύρα μαλλιά δεμένα με γαλάζια ταινία πάνω από το μέτωπο. Με τα άκρα των δακτύλων του δεξιού χεριού η νέα γυναίκα συλλέγει τα άνθη τα οποία προφανώς θα βάλει μέσα στο καλάθι που κρατάει στο αριστερό της χέρι. Η δεύτερη μορφή (εικόνα 1.1 β), πολύ πιο νεανική, έχει το κεφάλι κατά το μεγαλύτερο μέρος του ξυρισμένο (το μέρος αυτό παριστάνεται με γαλάζιο χρώμα). Και με τα δύο χέρια, τα οποία σημειωτέον ο καλλιτέχνης παριστάνει ως δεξιά, προσπαθεί να συλλέξει τα άνθη. Με ζωνρό και ανήσυχο βλέμμα αντικρίζει τη γυναίκα απέναντί της, ενώ αγωνιά προφανώς για την ορθότητα των ενεργειών της.



Εικόνα 1.1β

2) «Γυμνό Αγόρι»



Εικόνα 1.2

Η τοιχογραφία αυτή βρισκόταν στο βόρειο διάδρομο του δωματίου 3β στο ισόγειο της Ξεστής 3. Είναι μία από τις τέσσερις ανδρικές μορφές του δωματίου που φαίνεται πως συμμετείχαν σε κάποια τελετουργική διαδικασία. Ο νεαρός που παρουσιάζεται στην τοιχογραφία κρατάει με τα δυο του χέρια μια μόνωτη φιάλη (δηλαδή φιάλη με μία χειρολαβή).

3) «Γυμνά Αγόρια»



Εικόνα 1.3

Στη διατριβή αυτή μελετώνται επίσης οι βασικές μορφές από την τοιχογραφία «Γυμνά Αγόρια». Η τελευταία βρισκόταν στο ισόγειο της Ξεστής 3 στο μεσαίο διάδρομο του δωματίου 3β. Η μορφή η οποία ενδεικτικά παρουσιάζεται στην εικόνα 1.3 είναι ένας

άρρενας μικρών διαστάσεων που κρατά μια μικρή φιάλη. Διακρίνεται μόνο το περίγραμμα της φιάλης και αυτό πάρα πολύ αμυδρά.

4) «Αγριόπαπια»



Εικόνα 1.4

Στον πρώτο όροφο της Ξεστής 3 και στο δωμάτιο 3β βρισκόταν η τοιχογραφία αγριόπαπια η οποία παρουσιάζει ένα ελόβιο πτηνό μάλλον κατά τη στιγμή της απογείωσης.

5) «Παγκράτια»



Εικόνα 1.5

Είναι μία ζωγραφική σύνθεση η οποία βρισκόταν στην Οικία Γυναικών και πιο συγκεκριμένα στο νότιο τοίχο του δυτικού τμήματος του συγκεκριμένου κτιρίου. Αναπαριστά, σε υπερφυσικό μέγεθος, το φυτό Παγκράτιο που είναι περισσότερο γνωστό με το όνομα «Κρινάκι της θάλασσας». Είναι φυτό που απαντάται ακόμα και σήμερα σε πολλές παραλίες της Θήρας, της Σύρου και άλλων νήσων των Κυκλάδων.

Στην απαρχή αυτής της προσπάθειας σε όλες τις προαναφερθείσες τοιχογραφίες παρατηρήσαμε αξιοσημείωτη σταθερότητα πολλών γραμμών, κυρίως περιγραμμάτων, με ιδιαίτερη καθαρότητα και ομαλότητα να τις χαρακτηρίζει. Παρατηρήσαμε επίσης σημαντική επαναληψιμότητα σε πολλές από αυτές τις ζωγραφικές γραμμές. Χαρακτηριστικό

παράδειγμα της επαναληψιμότητας αυτής είναι η σημαντική ομοιότητα του άνω μέρους του δεξιού βραχίονα των δύο θηλυκών μορφών στις «Κροκοσυλλέκτριες», καθώς και της πλάτης της μορφής στην εικόνα 1.1β. Η ομοιότητα σε αυτά τα τρία περιγράμματα είναι εντυπωσιακή και ήταν ένα από τα στοιχεία που μας οδήγησαν στο να ερευνήσουμε την πιθανότητα να υπάρχει κάποιος οδηγός κατασκευής για τις τοιχογραφίες.

1.3 Η σπουδαιότητα εντοπισμού του τρόπου κατασκευής των τοιχογραφιών Ακρωτηρίου Θήρας

Ένας από τους στόχους της παρούσης διατριβής είναι να συμβάλλει όσο το δυνατόν περισσότερο στην εύρεση του τρόπου κατασκευής των προαναφερθεισών τοιχογραφιών. Προς την κατεύθυνση αυτή αναπτύχθηκαν νέες μέθοδοι προσαρμογής καμπυλών και αναγνώρισης προτύπων οι οποίες και εφαρμόστηκαν στις ψηφιακές φωτογραφίες των τοιχογραφιών. Ο εντοπισμός της μεθόδου σχεδίασης των τοιχογραφιών αυτών μπορεί να οδηγήσει στην κατανόηση λίαν σημαντικών πτυχών του πολιτισμικού, πρωτοεπιστημονικού και τεχνολογικού επιπέδου αυτού του λαμπρού πολιτισμού της Ύστερης Εποχής του Χαλκού που ήκμασε Αιγαίο. Στην παρούσα διατριβή θεμελιώνεται η ύπαρξη λίαν σημαντικής γεωμετρικής αίσθησης στον οικισμό και η γνώση πολλών γεωμετρικών σχημάτων η σύλληψη των οποίων εθεωρείτο μέχρι τώρα ότι είχε γίνει έως και χίλια τρακόσια χρόνια αργότερα. Διατυπώνεται δηλαδή και θεμελιώνεται η άποψη ότι για την κατασκευή πολλών από τις τοιχογραφίες του Ακρωτηρίου έχουν χρησιμοποιηθεί καμπυλογράφοι οι οποίοι αντιστοιχούν σε αυτά τα γεωμετρικά σχήματα. Ο εντοπισμός της μεθόδου κατασκευής των τοιχογραφιών του οικισμού είναι ουσιώδους σημασίας για την Ιστορία του πολιτισμού που ήκμασε στο Αιγαίο εφόσον μπορεί:

1) Να ανοίξει δρόμους προς την γνώση του πολιτιστικού και τεχνολογικού επιπέδου του πολιτισμού στο Αιγαίο, τη Μεσόγειο, αλλά και την ευρύτερη αυτής περιοχή, κατά την Ύστερη Εποχή του Χαλκού.

2) Να βοηθήσει στην κατανόηση της γένεσης των μαθηματικών και των επιστημών στον Ελλαδικό χώρο κατά τους Ιστορικούς χρόνους.

3) Να βοηθήσει στην κατανόηση της γένεσης του δυτικού τρόπου σκέψης.

4) Να συμβάλλει στην ανακατασκευή των τοιχογραφιών, ακόμη και στις περιπτώσεις όπου δεν έχουν διασωθεί σημαντικού σχετικά μεγέθους τμήματα μεταξύ γειτονικών θραυσμάτων, κάτι που είναι πολύ δύσκολο ή και αδύνατο, ακόμη και για ειδικά εκπαιδευμένους αρχαιολόγους και συντηρητές.

Η πραγματοποιηθείσα βιβλιογραφική έρευνα κατέδειξε ότι, εκτός της ερευνητικής μας ομάδας, δεν έχει προηγηθεί να γίνει προσπάθεια διερεύνησης με χρήση εργαλείων πληροφορικής για το αν έχουν χρησιμοποιηθεί καμπυλογράφοι στη σχεδίαση προϊστορικών τοιχογραφιών. Δεν έχει γίνει καν μια τέτοια προσπάθεια αναφορικά με άλλου τύπου τοιχογραφίες ή ζωγραφικούς πίνακες εν γένει. Το πλησιέστερο σχετικό γνωστικό πεδίο είναι αυτό της προσαρμογής καμπυλών (curve fitting). Σε αυτό το πεδίο, που γνωρίζει ιδιαίτερη άνθηση τις τελευταίες δύο-τρεις δεκαετίες, αντιμετωπίζονται διάφορα προβλήματα όπως: αυτόματη προσαρμογή καμπυλών σε θορυβώδη δεδομένα κατά τρόπο αναλλοίωτο σε αφηνικούς μετασχηματισμούς, προσαρμογή των θορυβωδών δεδομένων με τμηματικώς ομαλές καμπύλες, όπως τα πολυώνυμα ή αλγεβρικές καμπύλες, προσαρμογή καμπυλών και επιφανειών με μεθόδους Bayesian στατιστικής, με συνδυασμό μετρικών και μεθόδων μέγιστης πιθανοφάνειας, προσαρμογή κωνικών σε αρχιτεκτονικά σχέδια κυρίως σταδίων ή ναών κλπ. Ο κατάλογός σχετικών δημοσιεύσεων παρουσιάζεται στο παράρτημα Π.Π. μαζί με σύντομη περίληψη του περιεχομένου των άρθρων.

2. Πρώτο στάδιο ψηφιακής επεξεργασίας των φωτογραφιών των προς μελέτη τοιχογραφιών

2.1 Αυτοματοποιημένη κατάτμηση των φωτογραφιών

Το πρώτο στάδιο επεξεργασίας των τοιχογραφιών αφορά στην εφαρμογή μιας πρωτότυπης μεθοδολογίας κατάτμησης έγχρωμης εικόνας, η οποία κυρίως στοχεύει στην εξαγωγή όσο το δυνατόν πιο ξεκάθαρων συνόρων μεταξύ περιοχών (περιγραμμάτων) σε κάθε τοιχογραφία ακόμα και όταν στη φωτογραφία υπάρχει ανομοιογενής εξασθένηση χρωμάτων, ασαφής υφή, ρωγμές, πρόσθετα εξωγενή υλικά κ.λπ.

Ακολουθεί μια συνοπτική περιγραφή των βημάτων της μεθόδου:

Βήμα 1

Ορίζουμε την έννοια του «θορύβου λόγω φθοράς» (decay noise), έννοια η οποία περιγράφει την τυχαία φθορά χρώματος και υφής που με τον καιρό δημιουργήθηκε σε κάθε μια εκ των τοιχογραφιών που μελετάμε.

Βήμα 2

Ορίζουμε ένα πολυδιάστατο έγχρωμο ιστόγραμμα της εικόνας της τοιχογραφίας και εξαγούμε τα μέγιστα αυτού που έχουν τιμή πάνω από ένα κατάλληλα επιλεγμένο κατώφλι.

Βήμα 3

Για κάθε τοπικό μέγιστο ορίζουμε μια κατάλληλα επεκτεταμένη περιοχή που το περιέχει αρχίζοντας από το μεγαλύτερο τοπικό μέγιστο και μεταβαίνοντας προς το μικρότερο.

Βήμα 4

Για κάθε μία τέτοια επεκτεταμένη περιοχή, θεωρούμε ότι το σύνολο των pixels που ανήκουν σε αυτή συνιστούν μια πρώτη προσέγγιση μιας περιοχής της εικόνας. Παρατηρήσαμε ότι μέσω αυτής της διαδικασίας μπορούμε να λάβουμε μια κλάση περιοχών $E_{C(i,j,k)}$ που πιθανώς αλληλοεπικαλύπτονται, πλην όμως δεν καλύπτουν ολόκληρη την έγχρωμη εικόνα.

Βήμα 5

Ακολουθως κάνουμε την εύλογη υπόθεση ότι οι διαβαθμίσεις κάθε χρώματος σε μία ενότητα είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με συγκεκριμένη

μέση τιμή και διασπορά. Με βάση αυτή την υπόθεση επεκτείνουμε περαιτέρω τις περιοχές που δημιουργήθηκαν στο βήμα 4. Η διαδικασία αυτή γεννά μια κλάση ευρύτερων περιοχών οι οποίες έχουν ακόμα μεγαλύτερη πιθανότητα αλληλοκάλυψης, πλην όμως η ένωσή τους καλύπτει ακόμα μεγαλύτερο κομμάτι της εικόνας.

Βήμα 6

Σε αυτό το βήμα υλοποιούμε τον τελικό στόχο που είναι η απόδοση κάθε pixel της εικόνας μας σε μία και μόνη περιοχή. Προκειμένου να το πετύχουμε αυτό, ορίζουμε αρχικά στο χώρο R, G, B μια απόσταση d ενός pixel P , με χρωματικές συντεταγμένες R_P, G_P, B_P , από το χρωματικό περιεχόμενο μιας τυχαίας περιοχής U και με βάση την ελαχιστοποίηση αυτής της απόστασης αποδίδουμε με μοναδικό τρόπο κάθε pixel σε μία περιοχή.

Βήμα 7

Τέλος, πραγματοποιούμε μείωση του θορύβου λόγω φθοράς σε κάθε περιοχή της τοιχογραφίας και βελτίωση των περιγραμμάτων, με χρήση πρωτότυπων μορφολογικών μετασχηματισμών.

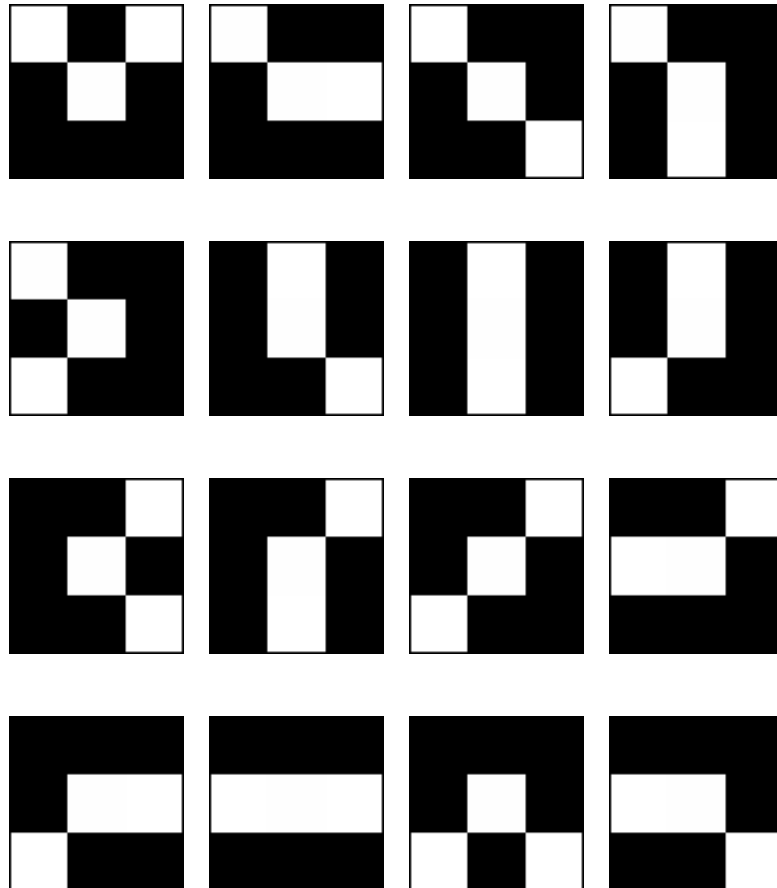
Αναλυτική περιγραφή των ανωτέρω βημάτων παρατίθεται στο παράρτημα Π.Τ.

2.2 Αυτόματη εξαγωγή των περιγραμμάτων των μορφών των τοιχογραφιών

Για να μπορούν να λειτουργήσουν οι αλγόριθμοι που θα παρουσιαστούν στα επόμενα, πρέπει το περίγραμμα κάθε θεματικής ενότητας να έχει πολύ συγκεκριμένη μορφή. Ειδικότερα, κάθε εικονοστοιχείο του περιγράμματος πρέπει να έχει επακριβώς δύο γειτονικά pixels ενώ απαγορεύεται να υπάρχουν διαδοχικά εικονοστοιχεία του περιγράμματος που να σχηματίζουν ορθή γωνία. Οι επιτρεπτοί συνδυασμοί pixels σε συνεκτικότητα οκτώ παρουσιάζονται κατωτέρω στην εικόνα 2.2. Επειδή καμία τεχνική κατάτμησης εικόνας δεν μπορεί να προσφέρει τέτοια περιγράμματα, αναπτύχθηκε ειδικός κώδικας και έγινε χρήση πρωτότυπων μορφολογικών μετασχηματισμών, ώστε από την κατατμημένη εικόνα να εξάγεται αυτόματα το περίγραμμα στην επιθυμητή αυτή μορφή.

1	2	3
8	0	4
7	6	5

Εικόνα 2.1
Αρίθμηση μιας περιοχής συνεκτικότητας Σ8.



Εικόνα 2.2
Σε αυτήν την εικόνα παρουσιάζονται όλοι οι επιτρεπτοί συνδυασμοί εικονοστοιχείων. Με άσπρο χρώμα εμφανίζονται τα pixels που ανήκουν στο περίγραμμα.

3. Πρώτος χωρισμός των περιγραμμάτων των μορφών των τοιχογραφιών σε τμήματα

3.1 Ορισμός του αντικειμένου περιγράμματος

Εξετάζοντας διάφορες τοιχογραφίες του Ακρωτηρίου παρατηρήσαμε ότι υπάρχουν θεματικές ενότητες οι οποίες αποτελούνται από πολλά ζωγραφισμένα στοιχεία. Για παράδειγμα η γυναικεία μορφή που παρουσιάζεται στην εικόνα 1.1α αποτελείται από αρκετά τέτοια στοιχεία όπως: (1) η πάνω ζωγραφική γραμμή του δεξιού πήχεως, (2) οι ρίγες στο δεξιό και στο αριστερό πέτο, (3) η αριστερή πινελιά του αριστερού πήχεως, (4) η συνεχής ζωγραφική γραμμή η οποία αποτελείται από την αριστερή πλευρά του λαιμού μαζί με τον αριστερό ώμο και την αριστερή γραμμή του αριστερού χεριού, (5) το εσωτερικό περίγραμμα του αριστερού ώμου (6) η πάνω γραμμή του φορέματος στη μέση, (7) η εξωτερική γραμμή κάθε μπούκλας στα μαλλιά της γυναικείας μορφής, (8) η συνεχής ζωγραφική γραμμή η οποία αποτελείται από το μέτωπο και την πάνω γραμμή της μύτης κ.λπ.

Ας θεωρήσουμε ότι το περίγραμμα κάθε θεματικής ενότητας είναι μια διανυσματική καμπύλη $\vec{r}(t)$. Ορίζουμε σαν αντικείμενο περιγράμματος ή απλά αντικείμενο ένα υποσύνολο σημείων του περιγράμματος μιας θεματικής ενότητας το οποίο είναι ομαλό, όπου η αρχή και το τέλος αυτού του υποσυνόλου είναι ασυνέχειες του περιγράμματος ή ασυνέχειες του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος του περιγράμματος. Για παράδειγμα όσον αφορά στα στοιχεία που αναφέρονται στο σημείο (2) μία ρίγα στο αριστερό πέτο αποτελεί ένα ξεχωριστό αντικείμενο περιγράμματος όπως φαίνεται στην εικόνα 3.1. Το ίδιο συμβαίνει και με το εσωτερικό και εξωτερικό περίγραμμα του αριστερού ώμου της γυναικείας μορφής (ίδε εικόνα 3.2).



Εικόνα 3.1
Λεπτομέρεια της εικόνας 1.1α όπου με ματζέντα αστερίσκους παρουσιάζεται το αντικείμενο περιγράμματος ενός πέτου .



Εικόνα 3.2
Λεπτομέρεια της εικόνας 1.1α όπου με ματζέντα αστερίσκους παρουσιάζονται δύο αντικείμενα περιγράμματος. Το εσωτερικό και το εξωτερικό του αριστερού της ώμου.

Εξετάζοντας ενδελεχώς κανείς διάφορα αντικείμενα παρατηρεί ότι κατά πάσα πιθανότητα αποτελούνται από μια ένωση διαδοχικών καμπυλών πολλαπλώς παραγωγισίμων σε καθεμιά από τις οποίες αυστηρά αντιστοιχεί ένα τμήμα αντικειμένου περιγράμματος, όπως αυτό θα οριστεί στην ακόλουθη παράγραφο.

Μία αυστηρή διατύπωση της βασικής υπόθεσης μας

Η βασική υπόθεση που ελέγχουμε και θα υποστηρίξουμε σε αυτή την εργασία μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: κάθε αντικείμενο είναι μία καμπύλη C_{2-} , δηλαδή μια καμπύλη που έχει συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξεως και τμηματικώς συνεχή δεύτερη παράγωγο με πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας αυτής (ίδη παράρτημα Π.Κ.). Δηλαδή, κάθε αντικείμενο είναι ένωση μικρού πλήθους απείρως παραγωγισίμων ή τουλάχιστον C_{n-} $n > 2$ καμπυλών. Κάθε τέτοια απείρως παραγωγίσιμη καμπύλη θεωρούμε ότι αντιστοιχεί σε μία μονοκονδυλιά. Ισοδυνάμως, για να φτιάξει ο καλλιτέχνης γύρω στο 1650 π.Χ. μία θεματική ενότητα περιγράμματος, υποθέτουμε ότι χρησιμοποιούσε έναν οδηγό (ένα είδος καμπυλογράφου είτε σχετικού μηχανισμού), μετακινούσε για ένα διάστημα το πινέλο με χρήση του οδηγού, παράγοντας κατ' αυτόν τον τρόπο μία καμπύλη πρακτικά απείρως παραγωγίσιμη. Εν συνεχεία, επανατοποθετούσε τον ίδιο ή άλλον οδηγό και σχεδίαζε το επόμενο τμήμα του περιγράμματος της θεματικής ενότητας προσέχοντας επιμελώς να εξασφαλίσει, για αισθητικούς λόγους, τη συνέχεια της επαπτομένης του περιγράμματος. Στα σημεία όμως αλλαγής οδηγού/καμπυλογράφου δε μπορούσε εκ των πραγμάτων να εξασφαλίσει τη συνέχεια των παραγώγων ανωτέρας τάξεως, η οποία άλλωστε ήταν εντελώς έξω απ' τις γνώσεις του.

3.2 Ορισμός του τμήματος αντικειμένου περιγράμματος

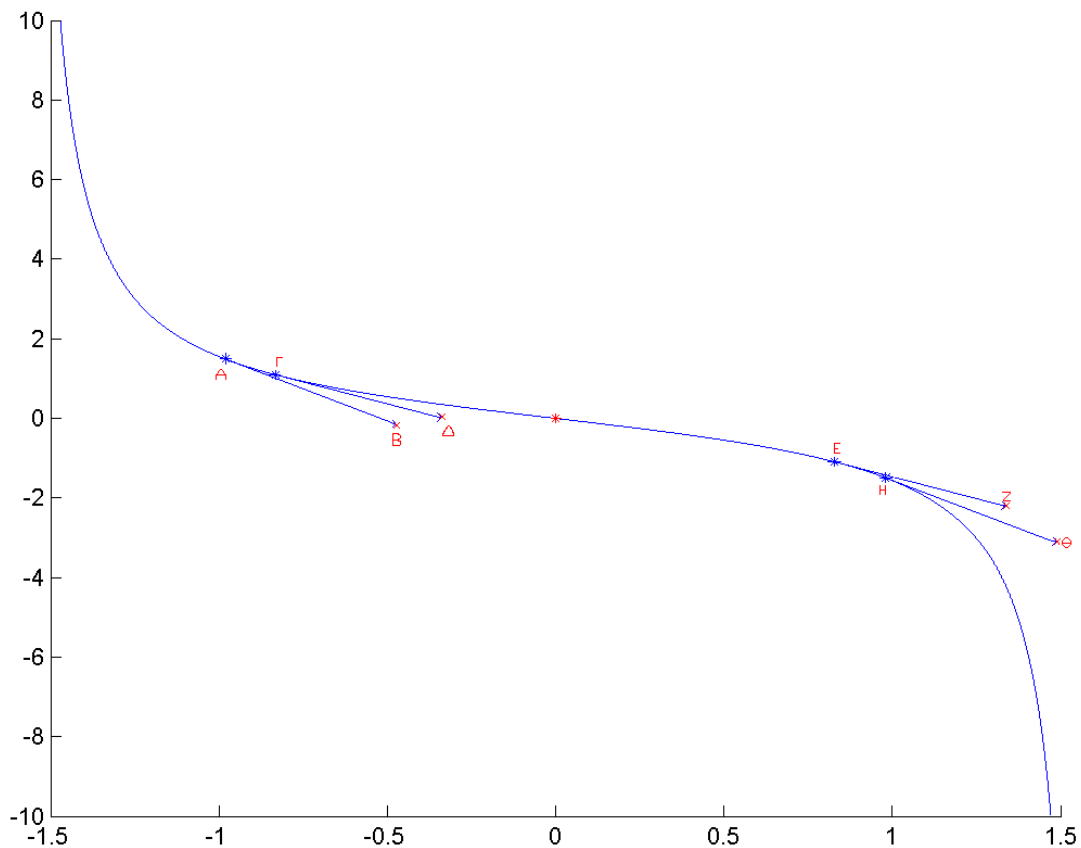
Ας υποθέσουμε ότι μια τοιχογραφία που εξετάζουμε δεν έχει υποστεί φθορά και κατά συνέπεια όλα τα περιγράμματα των αντικειμένων είναι συνεχή και περιγράφονται από την τμηματικά δύο φορές παραγωγίσιμη μονοπαραμετρική διανυσματική εξίσωση $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}$. Ορίζουμε σαν τμήμα αντικειμένου περιγράμματος ένα υποσύνολο σημείων του οποίου τα άκρα είναι ένα από τα κάτωθι:

(1) Η αρχή ή το τέλος ενός αντικειμένου, (2) Ένα σημείο όπου η δεύτερη παράγωγος $\vec{r}''(s)$ είναι ασυνεχής, δηλαδή υπάρχει ασυνέχεια στην καμπυλότητα, (3) Ένα σημείο όπου η τιμή της ορίζουσας

$$C^k = \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

αλλάζει πρόσημο, δηλαδή σε σημεία όπου επισυμβαίνει αλλαγή κοίλων.

Στην περίπτωση αυτή η καμπύλη που περιγράφει το αντικείμενο αλλάζει τον τρόπο που στρέφει τα κοίλα της εκατέρωθεν του σημείου όπου η ανωτέρω μήτρα μηδενίζεται. Με άλλα λόγια εάν διαγράψει κανείς την καμπύλη με μια συγκεκριμένη φορά, τότε όντας επί της καμπύλης όταν τα κοίλα είναι στα αριστερά του η ορίζουσα C^k είναι θετική ενώ όταν τα κοίλα είναι στα δεξιά του η ορίζουσα C^k είναι αρνητική.



Εικόνα 3.3

Στην εικόνα 3.3 άνωθεν παρουσιάζονται τέσσερα εφαπτόμενα διανύσματα σε μια καμπύλη. Τα \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{EZ} είναι δύο διαφορετικά στιγμιότυπα του $\vec{r}'(t)$ και τα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{H\Theta}$ του $\vec{r}'(t + \Delta t)$ όπου $\vec{r}(t)$ η διανυσματική ακτίνα της καμπύλης. Όταν $\Delta t \rightarrow 0$ τότε για το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Delta}$ έχουμε: $\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{AB} = \vec{r}'(t + dt) - \vec{r}'(t) = \vec{r}''(t)dt$. Κατά την ίδια συλλογιστική για το διάνυσμα $\overrightarrow{Z\Theta}$ έχουμε: $\overrightarrow{Z\Theta} = \overrightarrow{H\Theta} - \overrightarrow{EZ} = \vec{r}'(t + dt) - \vec{r}'(t) = \vec{r}''(t)dt$. Παρατηρούμε ότι στο

πρώτο στιγμιότυπο το εξωτερικό γινόμενο $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$ έχει ανθωρολογιακή φορά, είναι δηλαδή θετικό επί του άξονα των z , ενώ στο δεύτερο έχει ωρολογιακή, είναι δηλαδή αρνητικό επί του z άξονα. Αλλά

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} = \vec{k} c^k.$$

άρα τα σημεία αλλαγής προσήμου της C^k είναι σημεία αλλαγής κοίλων.

Έστω ότι έχουμε την ειδική περίπτωση όπου η καμπύλη μας περιγράφεται από μία συνάρτηση της μορφής $y = f(x)$. Τότε η ανεξάρτητη μεταβλητή της καμπύλης είναι το x και η διανυσματική εξίσωση αυτής είναι η $\vec{r}(x) = x\vec{i} + f(x)\vec{j}$. Τότε,

$$c^k = \begin{vmatrix} 1 & f'(x) \\ 0 & f''(x) \end{vmatrix} = f''(x),$$

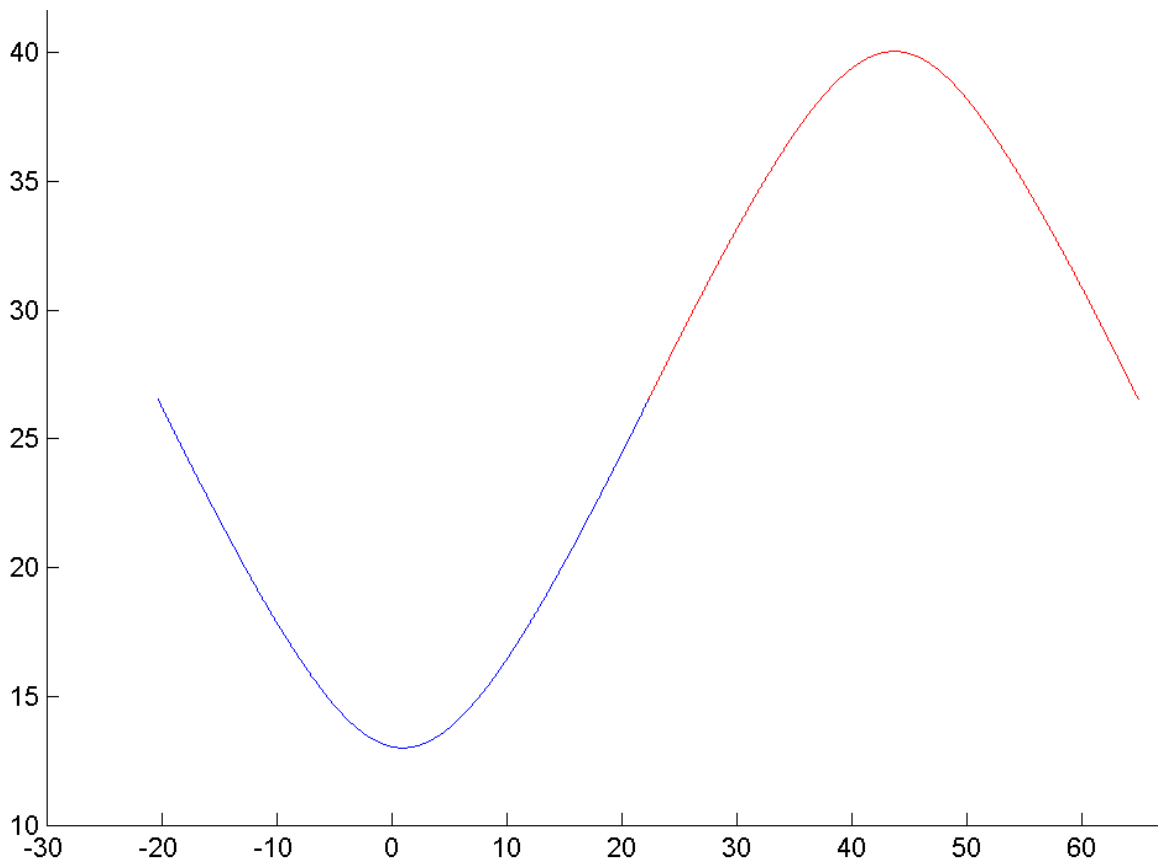
γεγονός που συνδέει τα κοίλα με τη δεύτερη παράγωγο κατά τα γνωστά.

Ο εντοπισμός του εκάστοτε τμήματος αντικειμένου περιγράμματος είναι πολύ μεγάλης σημασίας, μιας και αν πράγματι ο καλλιτέχνης χρησιμοποιούσε καμπυλογράφους ως εργαλεία ζωγραφικής, τότε κάθε φορά που τοποθετούσε έναν καμπυλογράφο πάνω στον τοίχο προκειμένου να ζωγραφίσει μια γραμμή, θεωρούμε ότι δημιουργούσε ένα τμήμα αντικειμένου. Δηλαδή κάθε ζωγραφική γραμμή που γινόταν με μία συνεχή κίνηση του πινέλου και ενώ αυτό στηριζότο σε κάποιον οδηγό, θεωρούμε ότι αντιστοιχεί σε ένα τμήμα αντικειμένου. Γι' αυτό μερικές φορές χρησιμοποιούμε εναλλακτικά τον όρο «συνεχής μονοκονδυλιά» γι' αυτό το τμήμα.

Συνεπώς θα διατυπώσουμε και θα θεμελιώσουμε την υπόθεση ότι κάθε αντικείμενο περιγράμματος είναι μία καμπύλη C_{2-} , ενώ κάθε τμήμα αντικειμένου περιγράμματος είναι μία καμπύλη C_{∞} δηλαδή μια μορφή καμπύλης απείρως παραγωγίσιμη. (παράρτημα Π.Κ.)

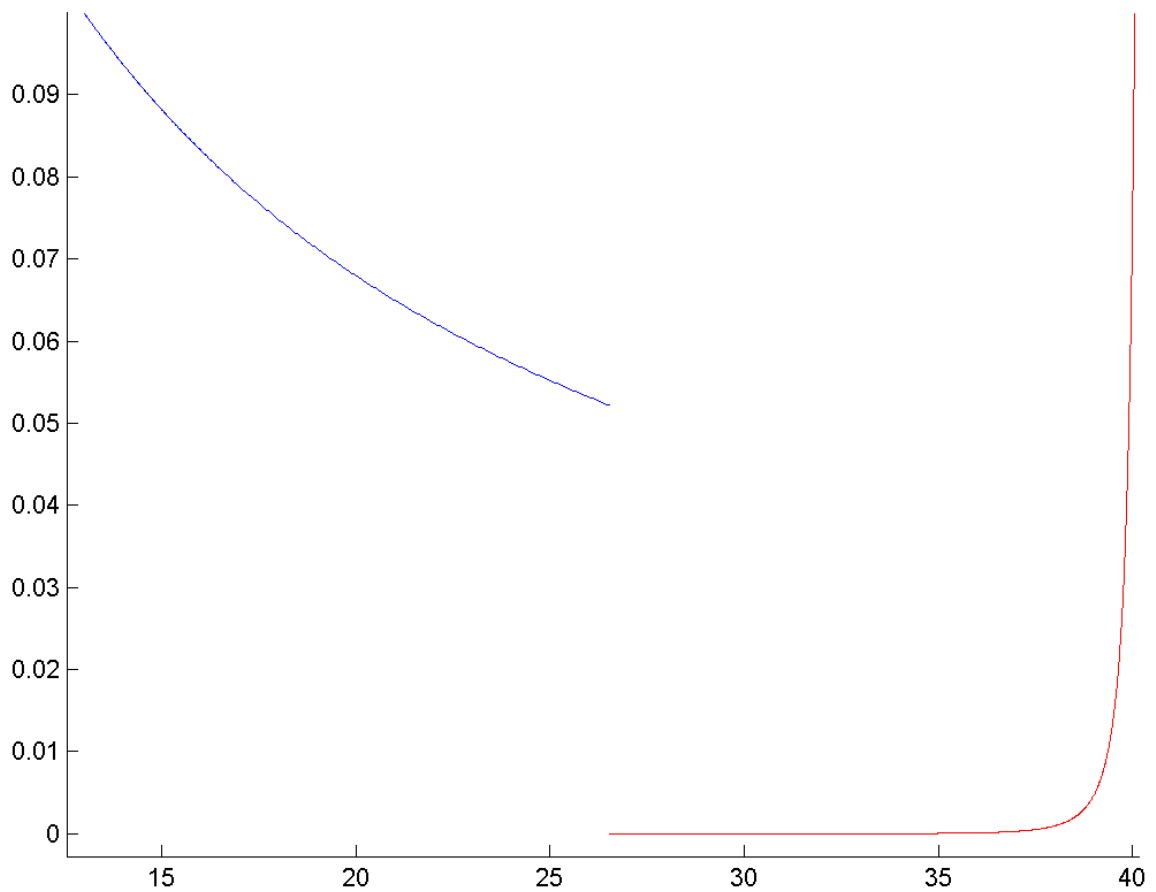
Ένα τεχνικό παράδειγμα

Στο παρακάτω σχήμα (εικόνα 3.4) έχουν παρασταθεί δύο διαφορετικές υπερβολές τοποθετημένες κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται η συνέχεια των τιμών των δύο συναρτήσεων καθώς και η συνέχεια του μοναδιαίου εφαπτομένου διανύσματος.



Εικόνα 3.4

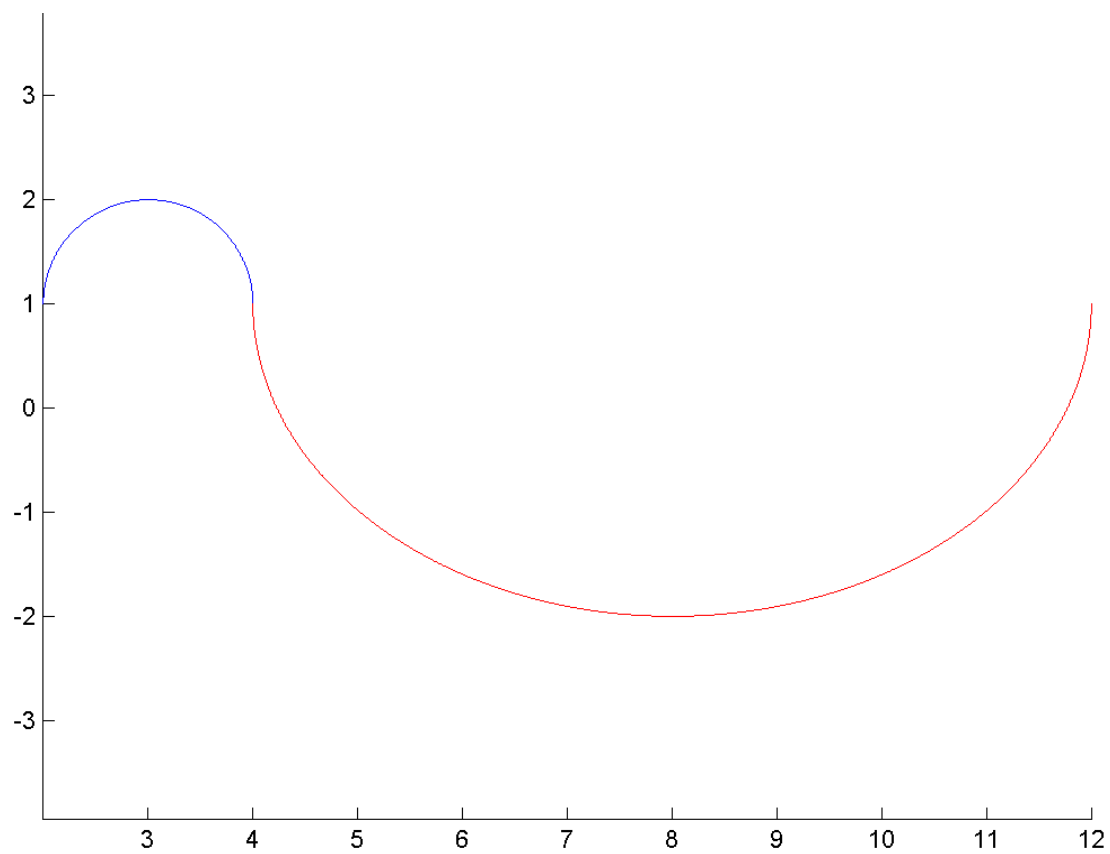
Το παράδειγμα αυτό συνιστά μία τεχνητή προσομοίωση πιθανής προσπάθειας του καλλιτέχνη να δημιουργήσει μια συνεχή γραμμή με κατάλληλη διαδοχική τοποθέτηση δύο καμπυλογράφων, εν προκειμένω υπερβολών. Όταν δηλαδή ο καλλιτέχνης δημιουργεί μια ομαλή καμπύλη με δύο ή περισσότερους καμπυλογράφους προσπαθεί, σε γλώσσα σύγχρονων μαθηματικών, να εξασφαλίσει σε κάθε αλλαγή καμπυλογράφου τη συνέχεια των τιμών των συναρτήσεων και των τιμών των μοναδιαίων εφαπτόμενων διανυσμάτων. Η αλλαγή στις τιμές της καμπυλότητας (δηλαδή της $\vec{r}''(s)$) είναι αυτή που καταδεικνύει τη χρήση διαφορετικών καμπυλογράφων ή και διαφορετικών τμημάτων του ίδιου οδηγού.



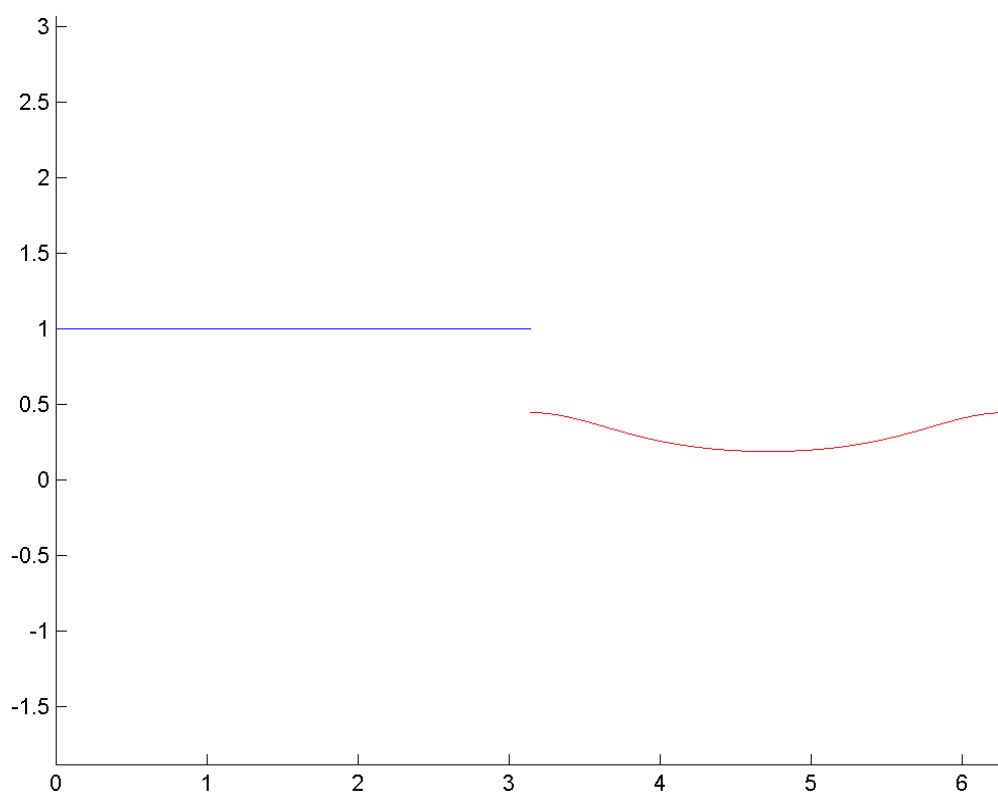
Εικόνα 3.5

Στην εικόνα 3.5 παριστάνεται η καμπυλότητα των δύο υπερβολών. Παρατηρούμε το άλμα στην τιμή αυτής κατά τη μετάβαση από τη μία υπερβολή στην άλλη.

Στην εικόνα 3.6 αναπαρίσταται ανάλογο αποτέλεσμα τεχνητής προσομοίωσης αλλαγής καμπυλογράφου και στην εικόνα 3.7 το άλμα στην τιμή της καμπυλότητας στο σημείο αλλαγής καμπυλογράφου. Οι καμπύλη με το μπλε χρώμα αναπαριστά κύκλο και αυτή με το κόκκινο έλλειψη.



Εικόνα 3.6



Εικόνα 3.7

3.3 Μια πρώτη εκτίμηση των σημείων αλλαγής τμημάτων αντικειμένου

Όπως ήδη αναφέρθηκε αλλά και θα αναλυθεί εκτενέστερα περαιτέρω, τα σημεία αλλαγής καμπυλογράφου χαρακτηρίζονται είτε από αλλαγή των κοίλων είτε από αλλαγή της καμπυλότητας διαφορεικά εκατέρωθεν του εκάστοτε σημείου. Άρα μία πρώτη εκτίμηση των σημείων αλλαγής καμπυλογράφου πραγματοποιείται μέσω του προσδιορισμού σημείων όπου επισυμβαίνει τουλάχιστον ένα εκ των δύο προαναφερθέντων γεγονότων.

Πράγματι, έστω ένα αντικείμενο C_A του περιγράμματος μιας μορφής που απεικονίζεται σε μία τοιχογραφία. Έστω ότι το αντικείμενο αυτό αποτελείται από L_0 εικονοστοιχεία. Θα αναλύσουμε κατωτέρω τις δύο διαφορετικές μεθόδους αρχικής εκτιμήσεως των πιθανών σημείων αλλαγής καμπυλογράφων.

Προσδιορισμός των σημείων του αντικειμένου περιγράμματος C_A όπου επισυμβαίνει σημαντική αλλαγή κοίλων.

Έστω ένας αριθμός pixels L_s , μικρό ποσοστό του L_0 . Προκειμένου να εντοπίσουμε τα σημεία του C_A όπου επισυμβαίνει αλλαγή κοίλων, ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Διαιρούμε το C_A σε υποσύνολα διαδοχικών εικονοστοιχείων, όπου τα υποσύνολα αυτά έχουν μήκος L_s και είναι ελαφρώς επικαλυπτόμενα μεταξύ τους σε, έστω L_{ov} , εικονοστοιχεία. Υπολογίσουμε το πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο βέλτιστα ταιριάζει σε κάθε τέτοιο υποσύνολο με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων. Κατ' αυτό τον τρόπο παίρνουμε ένα σύνολο διαδοχικών, ελαφρά επικαλυπτόμενων πολυωνυμίων καμπυλών τρίτου βαθμού, έστω S_i , $i=1,2,\dots,N_s$ το οποίο καλύπτει όλο το C_A



Εικόνα 3.8

Διαδοχικά υποσύνολα σημείων μήκους L_s και τα αντίστοιχα βέλτιστα πολυώνυμα τρίτου βαθμού, χρωματισμένα εναλλάξ, τα οποία επικαλύπτουν ένα αντικείμενο περιγράμματος της εικόνας 1.1.α

Αξίζει να σημειωθεί ότι όλα τα μικρά κενά που υπήρχαν σε διάφορα αντικείμενα λόγω φθοράς καλύπτονται με αυτή τη διαδικασία. Καλές τιμές για τα μεγέθη L_s και L_{ov} είναι οι κάτωθι

$$L_s = \begin{cases} [0.15 \cdot L_o], & L_o \geq 400 \text{ ακον} / \alpha \\ [0.33 \cdot L_o], & L_o < 400 \text{ ακον} / \alpha \end{cases} \quad L_{ov} = \begin{cases} [0.09 \cdot L_s], & L_o \geq 400 \text{ ακον} / \alpha \\ [0.18 \cdot L_s], & L_o < 400 \text{ ακον} / \alpha \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{όπου} \\ \text{για} \end{array}$$

κάθε $x \in R$, $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x . Γειτονικές τιμές των L_s και L_{ov} δίνουν πολύ παρόμοια και ικανοποιητικά αποτελέσματα. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα πιθανά σημεία καμπής των πολυωνυμικών καμπυλών τρίτου βαθμού S_i και τα θεωρούμε ως πιθανά σημεία χωρισμού των τμημάτων αντικειμένων περιγράμματος. Τα σημεία καμπής ορίζονται μέσω της μεθόδου που περιγράφεται στην παράγραφο 3.2. Από αυτά τα σημεία καμπής επιλέγουμε ως πιθανά σημεία αλλαγής καμπυλογράφου εκείνα τόσο αριστερά όσο και δεξιά των οποίων η ορίζουσα (3.1) κρατά σταθερό πρόσημο για ικανό αριθμό pixels. Ο αριθμός αυτός επιλέγεται να είναι το $\frac{L_{ov}}{2}$. Η απαίτηση η ορίζουσα (3.1) να διατηρεί σταθερό πρόσημο για ικανό αριθμό pixels αριστερά του σημείου και σταθερά τα αντίθετο πρόσημο δεξιά αυτού, εξασφαλίζει την αποφυγή λανθασμένης επιλογής σημείων λόγω τυχαίων διακυμάνσεων των κοίλων, οι οποίες οφείλονται στη φθορά, στις ενδογενείς ατέλειες της πινελιάς αλλά και στην πολυωνυμική προσέγγιση.

Προσδιορισμός των σημείων του αντικειμένου περιγράμματος C_A εκατέρωθεν των οποίων επισυμβαίνει σημαντική αλλαγή στην τιμή της καμπυλότητας.

Έστω L_K ένας μικρός αριθμός pixel, σημαντικά μικρό ποσοστό του L_0 . Π.χ. εάν το αντικείμενο C_A αποτελείται από περίπου 400 εικονοστοιχεία, γεγονός αρκετά σύνηθες, τότε μία ικανοποιητική επιλογή για την ανάλυση που θα ακολουθήσει είναι $L_K = 30$. Όλα τα pixels του C_A προκύπτουν, από τους αλγορίθμους που έχουμε αναπτύξει, σε φυσική αρίθμηση επομένως θεωρούμε το υποσύνολο των εικονοστοιχείων του C_A , έστω C_A^E , το οποίο αποτελείται από τα pixels με φυσική αρίθμηση από $L_K + 1$ έως $L_0 - L_K + 1$. Το υποσύνολο C_A^E έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε εικονοστοιχείο αυτού να μπορεί να είναι κέντρο μίας περιοχής ακτίνας L_K εικονοστοιχείων, η οποία ανήκει εξ ολοκλήρου στο C_A . Θεωρούμε τώρα τυχόν pixel $P \in C_A^E$ το οποίον έστω ότι είναι το υπ' αριθμόν i εικονοστοιχείο του C_A . Προσεγγίζουμε το σύνολο των pixels του C_A $(i - L_K + 1, i)$ με δύο πολυώνυμα 3^{ου} βαθμού ως προς το μήκος του υποσυνόλου αυτού. Πράγματι έστω $m = i - L_K + 1$, οπότε ορίζουμε την εξής ακολουθία μηκών επ' αυτού του συνόλου εικονοστοιχείων:

- $\xi_0 = 0$
- εάν $d(P_{m+1}, P_m)$ είναι η απόσταση του κέντρου του υπ' αριθμόν $(m + 1)$ pixel απ' το κέντρο του υπ' αριθμόν m pixel τότε θέτουμε $\xi_1 = d(P_{m+1}, P_m)$
- εάν $d(P_{m+2}, P_{m+1})$ είναι η απόσταση του κέντρου του υπ' αριθμόν $(m + 2)$ pixel απ' το κέντρο του υπ' αριθμόν $(m + 1)$ pixel τότε θέτουμε $\xi_2 = d(P_{m+2}, P_{m+1}) + \xi_1$ και ούτω καθ' εξής έως ότου φτάσουμε στο υπ' αριθμόν i pixel.

Οι σχετικές πολυωνυμικές προσεγγίσεις ορίζονται από τις σχέσεις

$$x'(\xi) = a_0 \xi^3 + a_1 \xi^2 + a_2 \xi + a_3 \quad (3.2)$$

$$y'(\xi) = \beta_0 \xi^3 + \beta_1 \xi^2 + \beta_2 \xi + \beta_3 \quad (3.3)$$

Θεωρούμε επίσης το σύνολο των εικονοστοιχείων του C_A $(i, i + L_K - 1)$. Και αναλόγως ορίζουμε την ακολουθία μηκών s_j ως εξής

- $s_0 = 0$.

- εάν $d(P_{i+1}, P_i)$ είναι η απόσταση του κέντρου του υπ' αριθμόν $(i+1)$ pixel απ' το κέντρο του υπ' αριθμόν i pixel τότε θέτουμε $s_1 = d(P_{i+1}, P_i)$
- εάν $d(P_{i+2}, P_{i+1})$ είναι η απόσταση του κέντρου του υπ' αριθμόν $(i+2)$ pixel απ' το κέντρο του υπ' αριθμόν $(i+1)$ pixel τότε θέτουμε $s_2 = d(P_{i+2}, P_{i+1}) + s_1$ και ούτω καθ' εξής έως ότου φτάσουμε στο υπ' αριθμόν $i + L_K - 1$ pixel.

Το σύνολο των εικονοστοιχείων του $C_A(i, i + L_K - 1)$ προσεγγίζεται με δύο πολυώνυμα 5^{ου} βαθμού έστωσαν τα κάτωθι

$$x^r(s) = \gamma_0 s^5 + \gamma_1 s^4 + \gamma_2 s^3 + \gamma_3 s^2 + \gamma_4 s + \gamma_5 \quad (3.4)$$

$$y^r(s) = \delta_0 s^5 + \delta_1 s^4 + \delta_2 s^3 + \delta_3 s^2 + \delta_4 s + \delta_5 \quad (3.5)$$

Η απαίτηση βέλτιστης προσαρμογής κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων του συνόλου των pixels $(i - L_K + 1, i)$ και $(i, i + L_K - 1)$ από τα πολυώνυμα $x^\ell(\xi)$, $y^\ell(\xi)$ και $x^r(s)$, $y^r(s)$ αντίστοιχα, ισοδυναμεί με την ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση των ποσοτήτων:

$$E_x = \sum_{j=m}^i (x_j - x^\ell(\xi_{j-m}))^2 + \sum_{j=i}^{i+L_K-1} (x_j - x^r(s_{j-i}))^2 = \min \quad (3.6)$$

$$E_y = \sum_{j=m}^i (y_j - y^\ell(\xi_{j-m}))^2 + \sum_{j=i}^{i+L_K-1} (y_j - y^r(s_{j-i}))^2 = \min \quad (3.7)$$

υπό τους κάτωθι περιορισμούς π_1) και π_2).

π_1) Επειδή ο καλλιτέχνης εξασφάλιζε συνέχεια της γραμμής που σχεδίαζε, απαιτούμε για κάθε i , οι τιμές των x και y πολυωνύμων επί του κέντρου του i να είναι ίσες. Με άλλα λόγια

$$x^l(\xi_{i-m}) = x^r(s_0) \quad (3.8)$$

$$y^l(\xi_{i-m}) = y^r(s_0) \quad (3.9)$$

π_2) Επειδή υποθέτουμε ότι ο καλλιτέχνης φρόντιζε να εξασφαλίζει όχι μόνο τη συνέχεια, αλλά και το ομαλό του περιγράμματος, δηλαδή σε σύγχρονα μαθηματικά την ισότητα των μοναδιαίων εφαπτόμενων διανυσμάτων εκατέρωθεν κάθε σημείου, απαιτούμε

$$\frac{d}{d\xi} x^l(\xi_{i-m}) = \frac{d}{ds} x^r(s_0) \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{d\xi} y^l(\xi_{i-m}) = \frac{d}{ds} y^r(s_0) \quad (3.11)$$

Λύνοντας κάθε ένα από τα ανωτέρω προβλήματα ελαχιστοποίησης μία φορά για το x και μία φορά για το y με χρήση δύο πολλαπλασιαστών Lagrange σε κάθε περίπτωση, λαμβάνουμε τους συντελεστές των τεσσάρων πολυωνύμων $x^\ell(\xi)$, $y^\ell(\xi)$ και $x^r(s)$, $y^r(s)$ ως εξής:

Ορίζουμε την κάτωθι Lagrangian προς ελαχιστοποίηση:

$$Lx(a_\zeta, \gamma_\eta, \mu_1, \mu_2) = E_x + \mu_1 \pi_1 + \mu_2 \pi_2 \quad (3.12)$$

$$\text{με } \zeta = 0, \dots, 3 \text{ και } \eta = 0, \dots, 5$$

όπου

$$\pi_1 = a_0 \xi_{i-m}^3 + a_1 \xi_{i-m}^2 + a_2 \xi_{i-m} + a_3 - \gamma_5 \quad (3.13)$$

$$\pi_2 = 3a_0 \xi_{i-m}^2 + 2a_1 \xi_{i-m} + a_2 - \gamma_4 \quad (3.14)$$

Στο σημείο ελαχιστοποίησης της Lagrangian όλες οι μερικές παράγωγοι αυτής ισούνται με το μηδέν, γεγονός που μας παρέχει το κάτωθι γραμμικό σύστημα.

$$\frac{\partial Lx}{\partial a_\zeta} = 0 \quad \zeta = 0, \dots, 3 \Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial a_\zeta} + \frac{\partial \mu_1 \pi_1}{\partial a_\zeta} + \frac{\partial \mu_2 \pi_2}{\partial a_\zeta} = 0$$

Αλλά για όλα τα ζ από μηδέν έως τρία έχουμε

$$\frac{\partial E_x}{\partial a_\zeta} = -2 \sum_{j=m}^i x_j \xi_{j-m}^{3-\zeta} + 2 \sum_{\kappa=0}^3 \alpha_\kappa \sum_{j=m}^i \xi_{j-m}^{3-\kappa} \xi_{j-m}^{3-\zeta}$$

$$\frac{\partial \mu_1 \pi_1}{\partial a_\zeta} = \mu_1 \xi_{i-m}^{3-\zeta}$$

$$\frac{\partial \mu_2 \pi_2}{\partial a_\zeta} = \mu_2 (3-\zeta) \xi_{i-m}^{2-\zeta}$$

Αντιστοίχως για όλα τα $\eta = 0, \dots, 5$ ισχύει

$$\frac{\partial Lx}{\partial \gamma_\eta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial \gamma_\eta} + \frac{\partial \mu_1 \pi_1}{\partial \gamma_\eta} + \frac{\partial \mu_2 \pi_2}{\partial \gamma_\eta} = 0$$

και

$$\frac{\partial E_x}{\partial \gamma_\eta} = -2 \sum_{j=i}^{i+L_k-1} x_j S_{j-i}^{5-\eta} + 2 \sum_{\kappa=0}^5 \gamma_\kappa \sum_{j=i}^{i+L_k-1} S_{j-i}^{5-\kappa} S_{j-i}^{5-\eta},$$

ενώ για $\eta = 0, \dots, 3$

$$\frac{\partial \mu_1 \pi_1}{\partial \gamma_\eta} = 0$$

$$\frac{\partial \mu_2 \pi_2}{\partial \gamma_\eta} = 0,$$

για $\eta = 4$

$$\frac{\partial \mu_1 \pi_1}{\partial \gamma_\eta} = 0,$$

$$\frac{\partial \mu_2 \pi_2}{\partial \gamma_\eta} = -\mu_2$$

και τέλος για $\eta = 5$

$$\frac{\partial \mu_1 \pi_1}{\partial \gamma_\eta} = -\mu_1,$$

$$\frac{\partial \mu_2 \pi_2}{\partial \gamma_\eta} = 0.$$

Άρα το σχετικό σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι το κάτωθι:

Για $\zeta = 0, \dots, 3$

$$-2 \sum_{j=m}^i x_j \xi_{j-m}^{3-\zeta} + 2 \sum_{\kappa=0}^3 \alpha_\kappa \sum_{j=m}^i x_j \xi_{j-m}^{3-\kappa} \xi_{j-m}^{3-\zeta} + \mu_1 \xi_{i-m}^{3-\zeta} + \mu_2 (3-\zeta) \xi_{i-m}^{2-\zeta} = 0$$

(σχέση 3.15)

για $\eta = 0, \dots, 3$

$$-2 \sum_{j=i}^{i+L_k-1} x_j S_{j-i}^{5-\eta} + 2 \sum_{\kappa=0}^5 \gamma_\kappa \sum_{j=i}^{i+L_k-1} S_{j-i}^{5-\kappa} S_{j-i}^{5-\eta} = 0 \quad (3.16)$$

για $\eta = 4$

$$-2 \sum_{j=i}^{i+L_k-1} x_j S_{j-i}^{5-\eta} + 2 \sum_{\kappa=0}^5 \gamma_\kappa \sum_{j=i}^{i+L_k-1} S_{j-i}^{5-\kappa} S_{j-i}^{5-\eta} - \mu_1 = 0 \quad (3.17)$$

και για $\eta = 5$

$$-2 \sum_{j=i}^{i+L_k-1} x_j S_{j-i}^{5-\eta} + 2 \sum_{\kappa=0}^5 \gamma_\kappa \sum_{j=i}^{i+L_k-1} S_{j-i}^{5-\kappa} S_{j-i}^{5-\eta} - \mu_2 = 0 \quad (3.18)$$

Ομοίως για την προσέγγιση των y_j των pixels εκατέρωθεν του i -οστού ορίζουμε την Lagrangian

$$Ly(b_\zeta, \delta_\eta, \mu_3, \mu_4) = E_y + \mu_3 \pi_3 + \mu_4 \pi_4 \quad (3.19)$$

όπου το E_y δίνεται από την έκφραση (3.7) και αυτές των π_3 και π_4 από τις

$$\pi_3 = \beta_0 \xi_{i-m}^3 + \beta_1 \xi_{i-m}^2 + \beta_2 \xi_{i-m} + \beta_3 - \delta_5 \quad (3.20)$$

$$\pi_4 = 3\beta_0 \xi_{i-m}^2 + 2\beta_1 \xi_{i-m} + \beta_2 - \delta_4 \quad (3.21)$$

Η ελαχιστοποίηση της $Ly(b_\zeta, \delta_\eta, \mu_3, \mu_4)$ προσφέρει ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων εντελώς ανάλογο με αυτό που προσφέρει η ελαχιστοποίηση της $Lx(a_\zeta, \gamma_\eta, \mu_1, \mu_2)$.

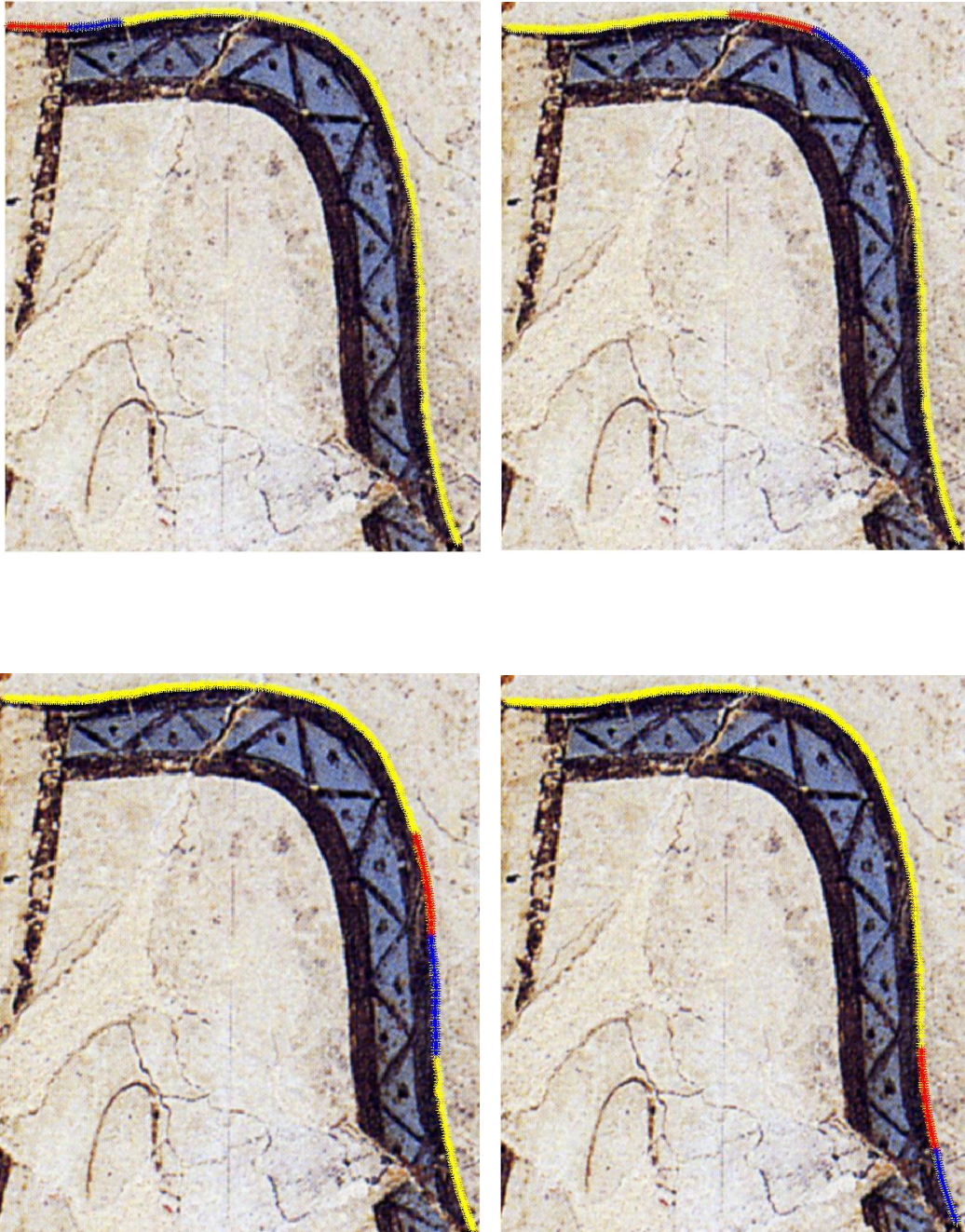
Η λύση των ανωτέρω δύο γραμμικών συστημάτων παρέχει τόσο τους πολλαπλασιαστές Lagrange, όσο και τους συντελεστές των πολυωνύμων (3.2) - (3.5). Επομένως η όλη διαδικασία μας παρέχει τις βέλτιστες πολυωνυμικές προσεγγίσεις εκατέρωθεν του τυχόντος i -οστού εικονοστοιχείου του αντικειμένου C_a .

Όταν το κεντρικό pixel i αλλά και οι περιοχές των pixels $(i - L_K + 1, i)$ και $(i, i + L_K - 1)$ βρίσκονται εξ ολοκλήρου εντός ενός υποσυνόλου του C_a που υποθέτουμε ότι έχει σχεδιαστεί με χρήση ενός και του αυτού καμπυλογράφου, τότε οι καμπυλότητες στο κεντρικό σημείο i που υπολογίζονται τόσο από την αριστερά όσο και τη δεξιά του i πολυωνυμική προσέγγιση, αναμένει κανείς να είναι πολύ παραπλήσιας τιμής, δηλαδή η απόλυτη διαφορά τους να είναι κάτω από ένα κατώφλι. Αντιθέτως, στα σημεία που βρίσκονται κοντά σε αλλαγή καμπυλογράφου αναμένει κανείς ότι, πιθανότατα, αριστερά και δεξιά του σημείου οι καμπυλότητες θα διαφέρουν σημαντικά. Άρα εάν ορίσουμε την ποσότητα

$$\Delta\kappa(i) = \left| \sqrt{\left(\frac{d^2}{d\xi^2} x'(\xi_{i-m})\right)^2 + \left(\frac{d^2}{d\xi^2} y'(\xi_{i-m})\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{d^2}{ds^2} x^r(0)\right)^2 + \left(\frac{d^2}{ds^2} y^r(0)\right)^2} \right| \quad (3.22)$$

η γραφική παράσταση του $\Delta\kappa(i)$ για κάθε $i \in C_A^E$ αναμένει κανείς ότι θα παρουσιάζει λίαν σημαντικές κορυφές κοντά στα σημεία αλλαγής stencils.

Οι εικόνες 3.9α έως 3.9δ παρουσιάζουν σχετικές πολωνυμικές προσεγγίσεις επί ενός αντικειμένου της τοιχογραφίας. Εξ' άλλου οι εικόνες 3.10 και 3.11 καταδεικνύουν την ύπαρξη σημαντικών κορυφών στη διαφορά των τιμών των καμπυλοτήτων όπως αυτές εκφράζονται στη σχέση (3.22).

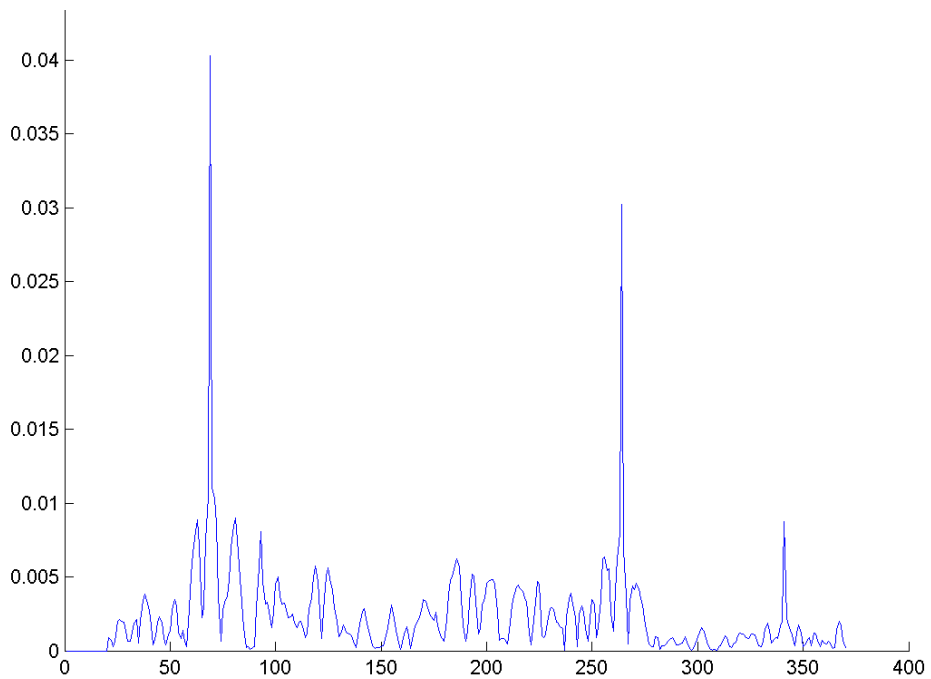


Εικόνες 3.9α, 3.9β, 3.9γ, 3.9δ.

Με κόκκινους αστερίσκους απεικονίζονται πολωνυμικές προσεγγίσεις (δειγματοληπτικά) τρίτου βαθμού του υποσυνόλου pixels αριστερά του εκάστοτε σημείου του περιγράμματος (κίτρινοι αστερίσκοι), και με μπλε οι πολωνυμικές προσεγγίσεις πέμπτου βαθμού.



Εικόνα 3.10
 Με ματζέντα αστερίσκους απεικονίζονται τα σημεία στα οποία επισυμβαίνει μέγιστη αλλαγή στην τιμή καμπυλότητας της πολυωνυμικής προσέγγισης.



Εικόνα 3.11
 Γραφική παράσταση των τιμών αλλαγής της καμπυλότητας από σημείο σε σημείο. Οι τρεις κορυφές που ξεχωρίζουν αντιστοιχούν στους αστερίσκους με χρώμα ματζέντα στην εικόνα 3.10.

Άρα, είναι λίαν εύλογο να υποθέσουμε ότι τα σημεία αλλαγής καμπυλογράφου ανήκουν στο σύνολο των σημείων που παρουσιάζουν σημαντικό άλμα στην καμπυλότητα, δηλαδή σημαντική τιμή του $\Delta\kappa(i)$. Το αντίθετο όμως, δεν ισχύει κατ' ανάγκη. Το τελικό κριτήριο εντοπισμού των εν λόγω σημείων και άρα των τμημάτων αντικειμένου παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 5.

Μία θεμελιώδης υπόθεση:

Διατυπώνουμε την εικασία, η οποία θα υποστηριχθεί διεξοδικά, ότι κάθε υποσύνολο εικονοστοιχείων που εντοπίζονται μεταξύ δύο διαδοχικών σημαντικών κορυφών του $\Delta\kappa$ ή μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων αλλαγής κοίλων ή μεταξύ ενός μεγίστου της διαφοράς καμπυλότητας και ενός σημείου αλλαγής κοίλων, κατά κανόνα συνιστά μία αρχική εκτίμηση ενός τμήματος αντικειμένου περιγράμματος, δηλαδή ενός τμήματος του περιγράμματος της απεικονιζόμενης μορφής το οποίο σχεδιάστηκε με μονοκονδυλιά. Έστω ότι δύο διαδοχικά σημεία πιθανής αλλαγής stencil απέχουν μεταξύ τους μικρή επικαμπύλια απόσταση 1 ή 2cm οπότε αυτό θα είναι και το μήκος της υποψήφιας μονοκονδυλιάς. Όμως μία καμπύλη τόσο μικρού μήκους μπορεί να προσαρμοστεί πολύ ικανοποιητικά σε μεγάλο πλήθος προτύπων καμπυλών. Επομένως για να έχει νόημα η ανάλυση που θα ακολουθήσει είναι απαραίτητο και εύλογο να υποθέσουμε ότι τα υποψήφια τμήματα αντικειμένου θα έχουν ένα μήκος μεγαλύτερο ενός κατωφλίου. Η ακριβής τιμή αυτού του ελαχίστου μήκους επελέγη με δοκιμή και επανάθεση, αλλά και με ποιοτική ανάλυση της διαδικασίας σχεδίασης.

Συγκεκριμένα, όσο το μήκος του τμήματος αυτού μεγαλώνει, η πιθανότητα βέλτιστης προσαρμογής με μικρό λάθος συνεχώς μειώνεται. Ο ακριβής υπολογισμός αυτής της πιθανότητας δεν είναι εφικτός διότι δε γνωρίζουμε καθόλου τι είχε πρόθεση να ζωγραφίσει ο καλλιτέχνης. Π.χ. αν είχε πρόθεση να ζωγραφίσει μία γραμμή με ελαφρό κυματισμό αλλά με πολλές τοπικές αλλαγές κοίλων, τότε θα ήμασταν βέβαιοι ότι τα πιθανά πρότυπα που διαλέξαμε είναι λανθασμένα. Αντιστρόφως, μπορούμε να διατυπώσουμε εύλογες υποθέσεις για το τι επιθυμούσε αυτός να σχεδιάσει, όπως π.χ. ότι α) δεν επιθυμούσε να παράξει γραμμές με τοπική κυμάτωση, β) ήθελε γραμμές σταθερής κυρτότητας για σημαντικό μήκος, γ) ήθελε να δημιουργήσει στο θεατή τη μέγιστη αίσθηση ομαλότητας κλπ. Πάλι όμως υπάρχουν άπειρες καμπύλες που ικανοποιούν αυτές τις απαιτήσεις, αρά δε μπορεί να οριστεί επακριβώς ο δειγματικός χώρος και ούτε να υπολογιστούν τιμές πιθανότητας για τις διάφορες καμπύλες. Για το λόγο αυτό εφαρμόσαμε την εξής μέθοδο: ξεκινήσαμε από ένα υποψήφιο τμήμα αντικειμένου μικρού μήκους π.χ. 2,5 εκατοστών. Προσαρμόσαμε σε αυτό βέλτιστα τις επιλεγείσες θεωρητικές πρότυπες καμπύλες με τη μέθοδο που αναφέρθηκε και ελέγξαμε τη διακριτότητα των λαθών προσαρμογής. Επιλέγαμε υποψήφιο τμήμα

αντικειμένου όλο και μεγαλύτερου μήκους έως ότου το ελάχιστο λάθος προσαρμογής διαφοροποιείτο σαφώς από τα υπόλοιπα. Αυτή η μέθοδος υπέδειξε ότι για μήκος υποψηφίου τμήματος αντικειμένου μεγαλύτερου των 6.5 εκατοστών μία μόνο υποψήφια πρότυπο καμπύλη έδινε λάθος βέλτιστης προσαρμογής αισθητά μικρότερο από το λάθος προσαρμογής όλων των άλλων. Η επαναληψιμότητα της εξαιρετικής προσαρμογής της ίδιας θεωρητικής καμπύλης σε τμήματα αντικειμένου μεγάλου μήκους, σημαντικού αριθμού και τυχαίου προσανατολισμού φαίνεται να δικαιώνει αυτή την προσέγγιση. Ένας ακόμη λόγος επιβεβαίωσης της ορθότητας επιλογής αυτού του κατώφλιου, είναι η εξαιρετικά ομαλή και πλήρης κάλυψη των περιγραμμάτων όλων των ζωγραφικών ενοτήτων που εξετάστηκαν. Σημειωτέον, οι ζωγραφικές αυτές ενότητες έχουν πολύ διαφορετική θεματολογία μεταξύ τους. Επιπλέον, δεδομένου ότι οι διαστάσεις των κυρίων ζωγραφικών στοιχείων στις τοιχογραφίες που μελετήθηκαν είναι το πολύ 60cm×80cm, τότε είναι λογικό να υποθέσει κανείς με βάση κριτήρια μίας καλής και αποδοτικής σχεδίασης, ότι οι καλλιτέχνες της εποχής, θα παρήγαγαν μονοκονδυλιές με μέσο μήκος από 8 έως 15cm. Τα ανωτέρω επιβεβαιώνουν ότι το κατώφλι των 6.5 cm για τα αρχικά τμήματα αντικειμένου είναι απολύτως εύλογο. Για κάθε τμήμα του περιγράμματος ενός ζωγραφικού στοιχείου που περατούται σε δύο υποψήφια σημεία αλλαγής καμπυλογράφου και έχει μήκος μεγαλύτερο των 6.5cm, θα χρησιμοποιούμε τον όρο «αρχική εκτίμηση αντικειμένου περιγράμματος» ή «αρχική εκτίμηση μονοκονδυλιάς». Το αντίστοιχο σύμβολο που θα χρησιμοποιούμε είναι το C_A^T ή T_A^{EK} , όπου θέσαμε τον άνω δείκτη EK ως εκπρόσωπο της φράσης «αρχική εκτίμηση αντικειμένου περιγράμματος».

4. Επιλογή ενός συνόλου stencils που πιθανώς χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των τοιχογραφιών του Ακρωτηρίου

4.1 Αρχική επιλογή ενός συνόλου υποψηφίων καμπυλογράφων από ιστορικής και αρχαιολογικής σκοπιάς

Όπως προαναφέρθηκε απαρχή αυτής της προσπάθειας της μελέτης των τοιχογραφιών ήταν οι παρατηρήσεις που έγιναν και αφορούσαν στη σταθερότητα πολλών ζωγραφικών γραμμών και στην πιθανή επαναληψιμότητα κάποιων εξ' αυτών. Οι εν λόγω παρατηρήσεις μας υπέβαλλαν την ιδέα ότι υπήρχε κάποιος συστηματικός τρόπος κατασκευής τους με χρήση οδηγών του πινέλου είτε καμπυλογράφων. Οι καμπυλογράφοι όμως αυτοί θα έπρεπε να μπορούν να κατασκευαστούν με τα μέσα της εποχής. Η σύλληψή τους επίσης θα έπρεπε να ήταν συμβατή με το πολιτιστικό, γνωσιολογικό και τεχνολογικό επίπεδο των τότε κατοίκων των νήσων του Αιγαίου Πελάγους. Η μέχρι σήμερα αρχαιολογικές ανακαλύψεις και η επεξεργασία των ευρημάτων καταδεικνύουν την ύπαρξη ενός πολιτισμού στο Ακρωτήρι με πολύ προηγμένες γνώσεις σε διάφορους τομείς όπως στη ναυσιπλοΐα, στην αγγειοπλαστική, στην αρχιτεκτονική.

Ειδικότερα η ανάγκη των τότε κατοίκων του Ακρωτηρίου να ταξιδεύουν στις δύσκολες κυματώδεις θάλασσες του Αιγαίου και γενικότερα της Μεσογείου, τους ώθησε να αυξήσουν τις εμπειρικές τους γνώσεις σε τομείς όπως η μελέτη των θαλασσιών ρευμάτων, η μετεωρολογία και η αστρονομία. Επιπλέον υπάρχουν σαφείς ενδείξεις ότι, γύρω στα 1650 π.Χ., είχαν εφαρμοστεί επιστημονικές μέθοδοι για την προφύλαξη των κτιρίων από τους σεισμούς. Εξ άλλου έχει επιβεβαιωθεί ότι διάφορα ορυκτά της Θήρας χρησιμοποιήθηκαν για τη δημιουργία χρωστικών ουσιών με τις οποίες σχεδιάστηκαν οι τοιχογραφίες. Επίσης τα απεικονιζόμενα θέματα επί των τοιχογραφιών συχνά υποδεικνύουν ένα πολύ υψηλό για την εποχή πολιτισμικό επίπεδο ([1.3],[1.13]).

Όλα τα ανωτέρω υποδηλώνουν ότι με κανένα τρόπο δεν μπορεί να αποκλειστεί το ενδεχόμενο να είχε αναπτυχθεί στο Ακρωτήρι στην Ύστερη Εποχή του Χαλκού η κατάλληλη υψηλή τεχνογνωσία, η οποία επέτρεπε χρήση οδηγών είτε καμπυλογράφων μεγάλης

ακριβείας, ως και τη χρήση αυτών των οργάνων για τη σχεδίαση των τοιχογραφιών. Επειδή, δε, τα περιγράμματα μερικών μορφών κεκαλυμμένα πλην σαφώς θυμίζουν γεωμετρικά σχήματα, προχωρήσαμε ακόμα περισσότερο διατυπώνοντας την υπόθεση ότι οι οδηγοί/καμπυλογράφοι αντιστοιχούσαν σε γεωμετρικά πρότυπα.

Το επόμενο βήμα ήταν να επιλέξουμε ένα σύνολο γεωμετρικών σχημάτων συμβατό με την εποχή. Οι κατευθυντήριοι άξονες σε αυτή μας την προσπάθεια ήταν τα σχετικά αρχαιολογικά ευρήματα και οι ιστορικές μελέτες. Πράγματι, σχήματα σπειρών, έστω και σε πρωτόλεια μορφή απαντώνται σε πολλούς πολιτισμούς ακόμα και χιλιάδες χρόνια πριν την άνθηση του πολιτισμού του Ακρωτηρίου (ίδε [1.14] και αναφορές σε αυτό). Επιπλέον είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι ένα πιθανό σύνολο γεωμετρικών προτύπων που χρησιμοποιήθηκαν σαν οδηγοί, είναι μέρος των γεωμετρικών σχημάτων που μελετήθηκαν στους ιστορικούς και στους κλασικούς χρόνους. Με άλλα λόγια, είναι απολύτως εύλογο να υποθέσουμε ότι προηγήθηκε η σύλληψη και η εμπειρική κατασκευή πολλών γεωμετρικών σχημάτων όπως του κύκλου, της έλλειψης, της υπερβολής, της γραμμικής σπείρας, ορισμένων κανονικών πολυγώνων κλπ. και μετά επακολούθησε η αυστηρή μαθηματική τους θεμελίωση και μελέτη.

Επί τη βάση των ανωτέρω, καταλήξαμε σε ένα πρώτο σύνολο πιθανών γεωμετρικών προτύπων, τα οποία υλοποιημένα σε μορφή οδηγών είτε καμπυλογράφων ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν για το σχεδιασμό των τοιχογραφιών.

Τα γεωμετρικά πρότυπα που επελέγησαν ως υποψήφια είναι πρότυπα που θα μπορούσαν να κατασκευαστούν με τα μέσα της εποχής. Είναι χαρακτηριστικό ότι η έλλειψη, η υπερβολή και η γραμμική σπείρα, αν και απαιτούν εξαιρετική γεωμετρική αίσθηση για να κατασκευαστούν, κατασκευάζονται με σχετικά απλά μέσα, συμβατά με την εποχή. Η δε κατασκευή τους με κανένα τρόπο δεν προϋποθέτει μαθηματική θεμελίωση και αναλυτική μελέτη αυτών όπως αυτές επισυνέβησαν στους κλασικούς χρόνους.

Συνεπώς, με βάση τα ανωτέρω, τελικώς επιλέξαμε τρεις τύπους σπειρών και τις κωνικές τομές να αντιστοιχούν σε πιθανούς υποψήφιους οδηγούς\stencils.

1. Σπείρα εκτόλιξης κύκλου

Το σχήμα αυτό προκύπτει εάν εκτυλίξουμε ένα λεπτό σκοινί ή νήμα γύρω από ένα σταθερό πάσσαλο-κύλινδρο διαμέτρου έστω $2r_0$ (ίδε εικόνα 4.1). Σε σύγχρονα μαθηματικά ο συναρτησιακός της τύπος δίνεται από τη σχέση

$$\vec{r}(g^U) = \left(x_0 + r_0 \sqrt{1 + g^{U^2}} \cos \left(g^U - \arctan g^U \right) \right) \vec{i} + \left(y_0 + r_0 \sqrt{1 + g^{U^2}} \sin \left(g^U - \arctan g^U \right) \right) \vec{j} \quad (4.1)$$

όπου x_0, y_0 το κέντρο της σπείρας και $g^U \in \mathfrak{R}$ η ανεξάρτητη μεταβλητή της. Σημειώνεται ότι η g^U αντιστοιχεί στην πολική γωνία του τελευταίου σημείου επαφής του νήματος με τον πάσσαλο. Είναι προφανές ότι προσεγγίσεις αυτής της καμπύλης μπορούν να προκύψουν μέσα από διάφορες καθημερινές εμπειρίες.

2. Εκθετική σπείρα

Η εκθετική σπείρα είναι ένα σχήμα, πολύ ικανοποιητικές προσεγγίσεις του οποίου απαντώνται στη φύση (εικόνα 4.1). Είναι χαρακτηριστικό ότι η κάτοψη της τρισδιάστατης έλικας μερικών κοχυλιών αντιστοιχεί σε αυτό το σχήμα με πάρα πολύ ικανοποιητική ακρίβεια. Ο συναρτησιακός της τύπος σε διανυσματική μορφή δίδεται από τη σχέση

$$\vec{r}(g^X) = \left(x_0 + ae^{\beta g^X} \cos g^X \right) \vec{i} + \left(y_0 + ae^{\beta g^X} \sin g^X \right) \vec{j} \quad (4.2)$$

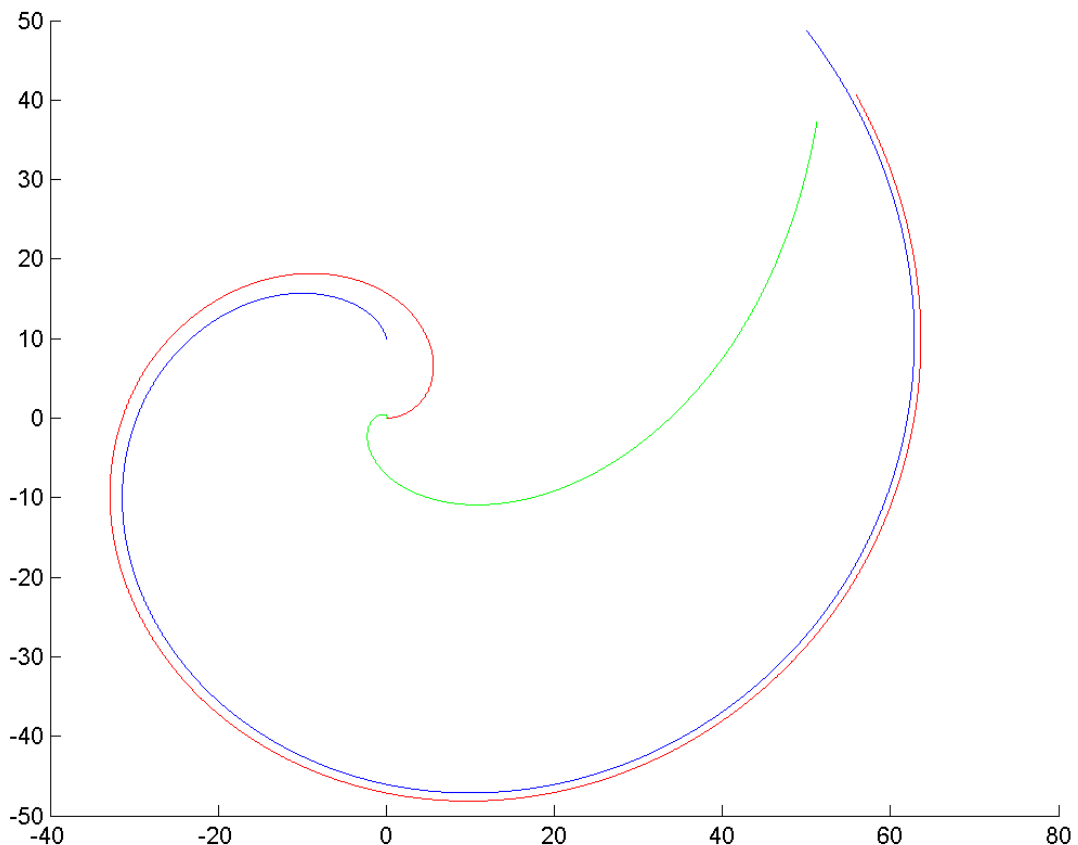
όπου x_0, y_0 το κέντρο της σπείρας, a και β σταθερές και $g^X \in \mathfrak{R}$ η ανεξάρτητη μεταβλητή της, η οποία είναι και η πολική γωνία του αντίστοιχου σημείου της.

3. Γραμμική Σπείρα (του Αρχιμήδη)

Η γραμμική σπείρα είναι μια καμπύλη που, όπως προαναφέραμε, απαιτεί ιδιαίτερα υψηλή γεωμετρική αίσθηση για να κατασκευαστεί. (εικόνα 4.1) Ο συναρτησιακός της τύπος σε διανυσματική μορφή δίδεται από τη σχέση

$$\vec{r}(g) = \left(x_0 + \mu^A g \cos g \right) \vec{i} + \left(y_0 + \mu^A g \sin g \right) \vec{j} \quad (4.3)$$

όπου x_0, y_0 το κέντρο της σπείρας, μ^A σταθερά και $g \in \mathfrak{R}$ η ανεξάρτητη μεταβλητή της, η οποία είναι και η πολική γωνία του αντίστοιχου σημείου της. Είναι αξιοσημείωτο ότι η σπείρα αυτή δεν απαντάται στη φύση.



Εικόνα 4.1

Μία γραμμική σπείρα σημειούμενη με κόκκινη γραμμή με $\mu^A = 10,47$, μαζί με μία ομόκεντρη σπείρα εκτύλιξης με $r_0 = 10,47$ που παρουσιάζεται με μπλε γραμμή ως και μία εκθετική με $a = 10^{\wedge}(-1.2)$ και $\beta = 1$ η οποία σημειώνεται με πράσινο. Παρατηρούμε ότι η γραμμική σπείρα και η σπείρα εκτύλιξης έχουν τις ίδιες σταθερές και γι' αυτό ασυμπτωτικά τείνουν να συμπέσουν ενώ η τελευταία είναι στραμμένη κατά $\pi/2$ για λόγους εποπτείας. Για τους ίδιους λόγους, οι σταθερές της εκθετικής σπείρας επελέγησαν να είναι τάξεις μικρότερες των μ^A και r^0 .

4. Υπερβολή

Είναι ένα γεωμετρικό σχήμα που έχει δύο άξονες και δύο σκέλη. Εάν οι άξονες της υπερβολής είναι παράλληλοι προς τους $x - y$ άξονες, το κέντρο είναι το O και οι κορυφές της βρίσκονται επί του άξονος των y , όπως φαίνεται στην εικόνα 4.2, τότε η εξίσωση της δίδεται από τον τύπο

$$\vec{r}(x) = x\vec{i} \pm \beta\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\vec{j} \quad (4.4)$$

όπου a, β σταθερές.

Η υπερβολή προκύπτει εάν τμήσουμε έναν ορθό κώνο με ένα επίπεδο που είναι παράλληλο προς τον άξονα του κώνου, είναι δε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων η διαφορά

των αποστάσεων των οποίων από δύο δεδομένα σημεία, τις εστίες, είναι σταθερή (παράρτημα Π.Κ.).

5. Έλλειψη / κύκλος

Το γεωμετρικό αυτό σχήμα είναι κλειστό και έχει δύο άξονες. Εάν αυτοί είναι παράλληλοι προς τους $x - y$ άξονες και το κέντρο της έλλειψης είναι το (χ_0, y_0) τότε η εξίσωση της έλλειψης δίδεται από τον τύπο

$$\vec{r}(\mathcal{G}^E) = (\chi_0 + a \cos \mathcal{G}^E) \vec{i} + (y_0 + b \sin \mathcal{G}^E) \vec{j} \quad (4.5)$$

όπου a και b σταθερές και $\mathcal{G}^E \in [0, 2\pi)$ η ανεξάρτητη παράμετρος αυτής.

Η έλλειψη προκύπτει όταν τμήσουμε έναν ορθό κώνο με ένα επίπεδο που δεν είναι παράλληλο προς τον άξονα του κώνου, ούτε προς μία γενέτειρα αυτού. Εάν το επίπεδο αυτό είναι κάθετο στον άξονα του κώνου, τότε $a = b$ και η έλλειψη εκφυλίζεται σε κύκλο. Η έλλειψη είναι δε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων το άθροισμα των αποστάσεων των οποίων από δύο δεδομένα σημεία, τις εστίες, είναι σταθερό. (παράρτημα Π.Κ.)

Η καμπύλη αυτή προκύπτει από προβολή κύκλου σε επίπεδο που σχηματίζει γωνία $\arccos\left(\frac{b}{a}\right)$ όπου $b < a$ με το επίπεδο του κύκλου. Η πολική γωνία \mathcal{G}^E του κύκλου αυτού είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή της ελλείψεως στην ανωτέρω μορφή.

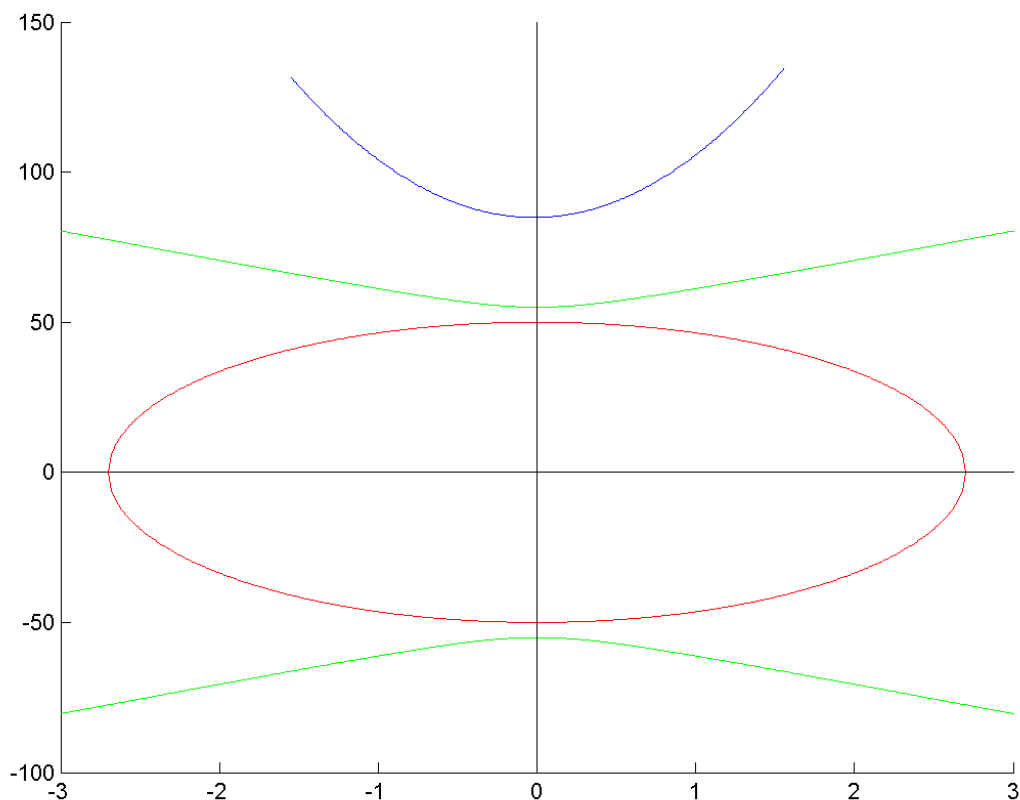
6. Παραβολή

Η παραβολή είναι ένα σχήμα με ένα σκέλος το οποίο προκύπτει εάν τμήσουμε έναν ορθό κώνο με ένα επίπεδο παράλληλο προς μία γενέτειρά του. (παράρτημα Π.Κ.). Εάν ο άξονας συμμετρίας της είναι ο y άξονας όπως φαίνεται στην εικόνα 4.2 τότε η εξίσωση της παραβολής δίδεται από τη σχέση

$$y = a\chi^{P^2} + b\chi^P + c, \quad \chi^P \in \mathfrak{R} \quad (4.6)$$

όπου a, b, c σταθερές.

Η παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από ένα δεδομένο σημείο, την εστία της και από μια ευθεία κάθετη στον άξονα της, τη διευθετούσα. (παράρτημα Π.Κ.).



Εικόνα 4.2

Γραφικές παραστάσεις μιας υπερβολής (πράσινο χρώμα) , μιας έλλειψης (κόκκινο χρώμα) και μιας παραβολής (μπλε χρώμα).

7. Γενική εξίσωση κωνικής

Όπως αναλυτικά περιγράφεται στο σχετικό παράρτημα Π.Κ. αυτή είναι η

$$AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F = 0 \quad (4.7)$$

Αν η εξίσωση αυτή αντιστοιχεί σε κύκλο, έλλειψη, υπερβολή, ή παραβολή εξαρτάται από τη διακρίνουσα $\Delta = 4AB - C^2$.

4.2 Σύντομη ιστορική ανασκόπηση αναφορικά με τα επιλεγέντα γεωμετρικά πρότυπα

Συνοπτική ιστορική αναδρομή περί των κωνικών

Ο Μέναιχμος, τον 4ο π.Χ. αιώνα είναι ο πρώτος που απέδειξε ότι οι καμπύλες έλλειψη, παραβολή και υπερβολή προκύπτουν από την τομή επιπέδου και ορθού κυκλικού κώνου και μελέτησε τις ιδιότητές τους. Η μελέτη αυτή ήταν η απαρχή της θεωρίας των κωνικών τομών.

Ο Απολλώνιος ο Περγαίος (3^{ος}-2^{ος} π.Χ. αιώνας), φαίνεται ότι εμπνεύστηκε από τους όρους του Ευκλείδη «παραβάλλειν», «ελλείπειν» και «υπερβάλλειν» και έδωσε πρώτος αυτός την ονομασία των τριών κωνικών τομών που ισχύει και σήμερα δηλαδή «παραβολή», «έλλειψη» και «υπερβολή». Παρατήρησε επίσης ότι για να πάρουμε τις τρεις κωνικές τομές αρκεί να τμηθεί ένας κώνος με επίπεδο άσχετα αν αυτός είναι ορθογώνιος, αμβλυγώνιος ή οξυγώνιος. Το πολύ σημαντικό έργο του σχετικά με τις κωνικές τομές αποτελεί ένα κλασικό έργο που του χάρισε την προσωνυμία «ο Μέγας Γεωμέτρης» από τους σύγχρονους του.

Σημειώνεται ότι ο Ευκλείδης, ο θεμελιωτής της αξιωματικής θεώρησης, αφιέρωσε τμήμα των δοκιμίων του στη μελέτη των κωνικών ([1.5] ως [1.10]).

Συνοπτική ιστορική αναδρομή περί της γραμμικής σπείρας

Η γραμμική σπείρα είναι ένα σχήμα που ως τώρα θεωρείτο ότι πρώτος συνέλαβε ο Κόνων ο Σάμος (3^{ος} π.Χ. αιώνας). Όμως ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός αυτής έγινε για πρώτη φορά από τον Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.), το μεγαλύτερο μαθηματικό όλων των εποχών, στο σχετικό του βιβλίο «Περί Ελίκων». Ο ορισμός της καμπύλης αυτής μπορεί να δοθεί και ως εξής:

Θεωρούμε ημιευθεία ΟΑ η οποία στρέφεται με σταθερή ταχύτητα περί ενός σταθερού σημείου Ο. Στην ημιευθεία ΟΑ θεωρούμε ένα κινητό σημείο Μ που κινείται με σταθερή ταχύτητα από το Ο προς το Α. Στην αρχή του χρόνου η ΟΑ συμπίπτει με τον ημιάξονα ΟΑ, το δε κινητό σημείο Μ βρίσκεται στο σημείο Ο. Ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ σχηματίζει γραμμική σπείρα.

Στο έργο «Περί ελίκων» ο Αρχιμήδης πραγματοποιεί πολύ εκτενή και μεθοδική μελέτη των ιδιοτήτων της καμπύλης αυτής. Το έργο περιλαμβάνει 28 θεωρήματα, 6 πορίσματα και 7 ορισμούς που αφορούν σε αυτήν. Σε ένα από τα πιο εντυπωσιακά θεωρήματα ο Αρχιμήδης κατάφερε με τη βοήθεια αυτής της καμπύλης να κατασκευάσει κύκλο ίσου εμβαδού με τρίγωνο που συνεπάγεται επίλυση του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου ([1.5] ως [1.10]).

4.3 Η αναγκαιότητα ανάπτυξης νέων μεθόδων για την επιβεβαίωση της χρήσης καμπυλογράφων και τον ακριβή εντοπισμό των παραμέτρων αυτών

Για την αντιμετώπιση του προβλήματος του αν χρησιμοποιήθηκε ή όχι οδηγός για τη σχεδίαση των τοιχογραφιών, ως και για τον ακριβή εντοπισμό των παραμέτρων τους στην περίπτωση που χρησιμοποιήθηκαν οδηγοί, χρειαζόμαστε μια εξαντλητική μέθοδο προσαρμογής θορυβώδους καμπύλης σε πρότυπο. Συγκεκριμένα, η μέθοδος αυτή πρέπει να δίνει αναμφισβήτητα το ελάχιστο λάθος προσαρμογής ενός ζωγραφισμένου περιγράμματος ανάμεσα σε ένα σύνολο πιθανών υποψηφίων προτύπων.

Επιπλέον, εν προκειμένω έχουμε στη διάθεσή μας πολλές διαφορετικές θορυβώδεις υλοποιήσεις του ιδίου προτύπου και καλούμεθα να προσδιορίσουμε τόσο τη συναρτησιακή μορφή όσο και τις ακριβείς τιμές των παραμέτρων αυτών των προτύπων καμπυλών που βέλτιστα παρήγαγαν αυτές τις υλοποιήσεις. Τονίζεται ότι οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν μόνο ελαχιστοποίηση συναρτήσεων δεν ανήκουν σε αυτή την κατηγορία διότι δε μπορούμε να αποδείξουμε ότι το σημείο στο οποίο αυτές συγκλίνουν είναι το απολύτως ελάχιστο. Αντιθέτως, η πράξη αποδεικνύει ότι οι αλγόριθμοι προσαρμογής καμπυλών που βασίζονται σε ελαχιστοποίηση συναρτήσεων συγκλίνουν, στην καλύτερη περίπτωση, σε ένα ελάχιστο, το οποίο δεν είναι εν γένει απόλυτο αλλά ένα σημείο κοντά σε αυτό. Επιπλέον, αλλάζοντας τις αρχικές συνθήκες κανείς λαμβάνει, πρακτικά σε κάθε περίπτωση, διαφορετικό σημείο σύγκλισης, γεγονός που καθιστά επισφαλείς τις αποφάσεις τις σχετικές με το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε.

Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές δημοσιεύσεις που αφορούν στην βέλτιστη προσαρμογή διδιάστατων καμπυλών. Σχετική αναφορά σε αυτές γίνεται στο παράρτημα Π.Π.

4.4 Αρχική επιβεβαίωση της ορθότητας επιλογής αυτών των καμπυλογράφων και πρώτη εκτίμηση των παραμέτρων τους.

Θεωρούμε τυχόν τμήμα αντικειμένου περιγράμματος, έστω αυτό C_A^T , που ανήκει στο σύνολο των T_A^{EK} όπως αυτό προσδιορίστηκε στην παράγραφο 3.3. Ακολουθεί η περιγραφή μιας μεθοδολογίας για τον προσδιορισμό της πιθανότερης προτύπου καμπύλης (stencil/καμπυλογράφου) η οποία μπορεί να αντιστοιχεί σε αυτό το τμήμα αντικειμένου, ως και μια πρώτη εκτίμηση των παραμέτρων της προτύπου αυτής καμπύλης. Η εν λόγω μεθοδολογία περιλαμβάνει τα εξής βήματα.

Βήμα 1. Διαλέγουμε ένα τυχόν τμήμα αντικειμένου, το οποίο έστω ότι αποτελείται από N^P σημεία και υπολογίζουμε τη συνάρτηση μήκους S αυτού, όπως ακριβώς περιεγράφη στην παράγραφο 3.3. Προσεγγίζουμε τις συντεταγμένες των pixels του C_A^T με δύο πολυώνυμα βαθμού N ως προς το μήκος του όποτε το τμήμα αντικειμένου περιγράφεται ως

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}, \text{ όπου } x(s) = \sum_{i=0}^N a_i s^{N-i} \text{ και } y(s) = \sum_{i=0}^N \beta_i s^{N-i}$$

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή επελέγησαν οι βαθμοί πολυωνύμου $N = 5$ ή $N = 7$ ώστε να έχουμε ικανοποιητική ομαλή προσέγγιση του εκάστοτε τμήματος του περιγράμματος, χωρίς όμως αξιόλογους κυματισμούς της προσεγγιστικής πολυωνυμικής καμπύλης.

Βήμα 2. Υπολογίζουμε την καμπυλότητα του $\vec{r}(s)$ του ανωτέρω βήματος. Για το σκοπό αυτό υπολογίζουμε πρώτα τα κάτωθι:

$$\frac{d}{ds} x(s) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i (N-i) s^{N-i-1} \text{ και } \frac{d}{ds} y(s) = \sum_{i=0}^{N-1} \beta_i (N-i) s^{N-i-1}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} x(s) = \sum_{i=0}^{N-2} a_i (N-i)(N-i-1) s^{N-i-2} \text{ και } \frac{d^2}{ds^2} y(s) = \sum_{i=0}^{N-2} \beta_i (N-i)(N-i-1) s^{N-i-2} .$$

Η καμπυλότητα του $\vec{r}(s)$ είναι τώρα

$$\kappa^{APROX} = \left\| \frac{d^2}{ds^2} \vec{r}(s) \right\| = \sqrt{\left(\frac{d^2}{ds^2} x(s) \right)^2 + \left(\frac{d^2}{ds^2} y(s) \right)^2} \quad (4.8)$$

οπού χρησιμοποιήσαμε τον άνω δείκτη 'APROX' για να υποδηλώσουμε ότι αυτή η καμπυλότητα είναι η προκύπτουσα από την πολυωνυμική προσέγγιση κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων, η οποία όμως περιγράφει πολύ ικανοποιητικά την καμπυλότητα του ζωγραφισμένου τμήματος C_A^T .

Δημιουργούμε , επομένως , την υπακολουθία της προσεγγιστικής καμπυλότητας κ_j^{APROX} , όπου η j-οστή τιμή της ακολουθίας είναι η τιμή της καμπυλότητας στο υπ' αριθμόν j pixel του τμήματος αντικειμένου. Δηλαδή σε αναλυτική μορφή

$$\kappa_j^{APROX} = \left\| \frac{d^2}{ds^2} \vec{r}(s) \right\|_{s=s_j} \quad j = 0,1,\dots,N^P - 1 \quad (4.9)$$

Βήμα 3. Διατυπώνουμε προς στιγμήν την υπόθεση ότι το συγκεκριμένο τμήμα αντικειμένου προσεγγίζεται από ένα από τα επιλεγέντα γεωμετρικά πρότυπα που αναφέρονται στην παράγραφο 4.1. Εν γένει δεν υπάρχει αναλυτική έκφραση της ανεξαρτήτου μεταβλητής σα συνάρτηση του μήκους της αντίστοιχης καμπύλης. Σε μερικές δε περιπτώσεις, όπως στην έλλειψη ή την υπερβολή δεν είναι καν εφικτή η αναλυτική έκφραση του μήκους S της καμπύλης συναρτήσει της τυχούσης ανεξαρτήτου μεταβλητής τους. Με άλλα λόγια, στην έλλειψη το μεν διαφορικό μήκος έχει την κάτωθι έκφραση

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 \vartheta^E + b^2 \cos^2 \vartheta^E} d\vartheta^E$$

ενώ το ολοκλήρωμα

$$\int \sqrt{a^2 \sin^2 \vartheta^E + b^2 \cos^2 \vartheta^E} d\vartheta^E$$

έχει αποδειχθεί ότι δεν έχει αναλυτική έκφραση, γεγονός άλλωστε που γέννησε τον κλάδο «Ελλειπτικά Ολοκληρώματα». Για τους ανωτέρω λόγους προσεγγιστικά και με χρήση του διαφορικού τύπου που συνδέει το στοιχειώδες επικαμπύλιο μήκος με τη στοιχειώδη μεταβολή της ανεξαρτήτου μεταβλητής της καμπύλης, θα δημιουργήσουμε αριθμητικά τις ακολουθίες $\vartheta_j, \vartheta_j^U, \vartheta_j^X, \vartheta_j^E, \vartheta_j^Y, x_j, j = 0,1,\dots,N^P - 1$, οι οποίες αντιστοιχούν μονοσήμαντα στην ακολουθία μηκών S_j των pixels του τμήματος αντικειμένου, για γραμμική σπείρα, σπείρα εκτύλιξης , εκθετική σπείρα , έλλειψη, υπερβολή και παραβολή αντίστοιχα. Σε ισοδύναμη διατύπωση για τυχούσες τιμές των πρωτογενών παραμέτρων ενός εκάστοτε γεωμετρικού προτύπου δημιουργούμε μία ακολουθία τιμών τις ανεξαρτήτου μεταβλητής του συγκριμένου προτύπου, η οποία πλήρως αντιστοιχεί στην υπακολουθία μηκών $S_j, j = 0,1,\dots,N^P - 1$. Πραγματοποιούμε αυτή τη διαδικασία για όλα τα επιλεγέντα γεωμετρικά πρότυπα.

Συγκεκριμένα:

Υπακολουθία τιμών ανεξαρτήτου μεταβλητής για τη γραμμική σπείρα.

Ας υποθέσουμε ότι ένα συγκεκριμένο τμήμα αντικειμένου C_A^T έχει προκύψει από ένα γεωμετρικό πρότυπο γραμμικής σπείρας με κέντρο το σημείο x_0, y_0 σταθεράς μ^A αρχής γενομένης από την τιμή της παραμέτρου ϑ_0 (εξίσωση 4.3). Δημιουργούμε την ακολουθία ϑ_j ως εξής: Το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας είναι προφανώς το ϑ_0 . Εάν κινηθούμε επί της γραμμικής σπείρας από το σημείο που αντιστοιχεί στο ϑ_0 , στο σημείο που αντιστοιχεί στο $\vartheta_0 + d\vartheta$ θα διανύσουμε στοιχειώδες επικαμπύλιο μήκος

$$ds = \mu^A \sqrt{1 + \vartheta_0^2} d\vartheta \quad (4.10)$$

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή το δεύτερο pixel του C_A^T απέχει από το πρώτο S_1 , ενώ θεωρούμε επίσης ότι η απόσταση μεταξύ των δύο πρώτων pixels είναι τόσο μικρή, ώστε ο ανωτέρω τύπος για το μήκος να ισχύει προσεγγιστικά σε λίαν ικανοποιητικό βαθμό. Ισοδυνάμως θεωρούμε ότι ισχύει

$$s_1 = \mu^A \sqrt{1 + \vartheta_0^2} \delta\vartheta_1 \Leftrightarrow \delta\vartheta_1 = \frac{s_1}{\mu^A \sqrt{1 + \vartheta_0^2}}. \quad (4.11)$$

Άρα είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι το δεύτερο στοιχείο της ζητούμενης ακολουθίας είναι το

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 + \delta\vartheta_1 = \vartheta_0 + \frac{s_1}{\mu^A \sqrt{1 + \vartheta_0^2}}. \quad (4.12)$$

Εν συνεχεία εάν κινηθούμε επί της γραμμικής σπείρας από το σημείο που αντιστοιχεί στο ϑ_1 , στο σημείο που αντιστοιχεί στο $\vartheta_1 + d\vartheta$ θα διανύσουμε στοιχειώδες επικαμπύλιο μήκος

$$ds = \mu^A \sqrt{1 + \vartheta_1^2} d\vartheta. \quad (4.13)$$

Το τρίτο pixel του C_A^T απέχει από το πρώτο επικαμπύλιο μήκος S_2 , άρα απέχει από το προηγούμενό του απόσταση $\delta S = S_2 - S_1$. Υιοθετώντας πάλι την υπόθεση ότι η απόσταση δεύτερου και τρίτου pixel είναι πολύ μικρή, τότε προσεγγιστικά ισχύει ότι

$$s_2 - s_1 = \mu^A \sqrt{1 + \vartheta_1^2} \delta\vartheta_2 \Leftrightarrow \delta\vartheta_2 = \frac{s_2 - s_1}{\mu^A \sqrt{1 + \vartheta_1^2}}. \quad (4.14)$$

Άρα είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι το τρίτο στοιχείο την ζητούμενης ακολουθίας είναι το

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + \delta\vartheta_2 = \vartheta_1 + \frac{s_2 - s_1}{\mu^A \sqrt{1 + \vartheta_1^2}}. \quad (4.15)$$

Εντελώς ανάλογα ορίζουμε το j -οστό στοιχείο της ακολουθίας των τιμών της ανεξαρτήτου μεταβλητής, μέσω του αναδρομικού τύπου

$$\vartheta_j = \vartheta_{j-1} + \delta\vartheta_j = \vartheta_{j-1} + \frac{s_j - s_{j-1}}{\mu^A \sqrt{1 + \vartheta_{j-1}^2}} \quad j = 1, \dots, N^P - 1. \quad (4.16)$$

Υπακολουθία τιμών ανεξαρτήτου μεταβλητής για τη σπείρα εκτύλιξης.

Αν υποθέσουμε πως το συγκεκριμένο αντικείμενο περιγράμματος C_A^T έχει παραχθεί από ένα γεωμετρικό πρότυπο σπείρας εκτύλιξης (εξίσωση 4.1) όπου x_0, y_0 το κέντρο της σπείρας, r_0 η ακτίνα του άξονα εκτύλιξης και ϑ^U η πρωτογενής παράμετρος. Αρχής γενομένης από την τιμή ϑ_0^U της πρωτογενούς παραμέτρου, η ακολουθία των τιμών ϑ_j^U δημιουργείται ως εξής:

Το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας είναι το ϑ_0^U . Κινούμενοι επί της σπείρας εκτύλιξης από το πρώτο σημείο αυτής, που αντιστοιχεί στο ϑ_0^U , προς το δεύτερο που αντιστοιχεί στο $\vartheta_0^U + d\vartheta^U$ διανύουμε στοιχειώδες επικαμπύλιο μήκος

$$ds = r_0 \vartheta_0^U d\vartheta^U. \quad (4.17)$$

Όπως ήδη γνωρίζουμε, στην εν λόγω εφαρμογή, η απόσταση S_1 μεταξύ των δύο πρώτων pixels του συγκεκριμένου C_A^T είναι τόσο μικρή ώστε, εάν αυτό είχε παραχθεί από γεωμετρικό πρότυπο σπείρας εκτύλιξης, ο ανωτέρω τύπος να ισχύει προσεγγιστικά σε πολύ καλό βαθμό. Ισοδυνάμως θεωρούμε ότι ισχύει

$$s_1 = r_0 \vartheta_0^U \delta\vartheta_1^U \Leftrightarrow \delta\vartheta_1^U = \frac{s_1}{r_0 \vartheta_0^U}. \quad (4.18)$$

Συνεπώς εύλογα υποθέτουμε ότι το δεύτερο στοιχείο της εν λόγω ακολουθίας είναι το

$$\vartheta_1^U = \vartheta_0^U + \delta\vartheta_1^U = \vartheta_0^U + \frac{s_1}{r_0 \vartheta_0^U}. \quad (4.19)$$

Αν συνεχίσουμε να κινούμαστε επί της σπείρας εκτύλιξης από το σημείο που αντιστοιχεί στο \mathcal{G}_1^U , προς το σημείο που αντιστοιχεί στο $\mathcal{G}_1^U + d\mathcal{G}_1^U$ θα διανύσουμε στοιχειώδες επικαμπύλιο μήκος $ds = r_0 \mathcal{G}_1^U d\mathcal{G}_1^U$. Έχοντας υποθέσει ότι η απόσταση $\delta s = s_2 - s_1$ μεταξύ δεύτερου και τρίτου σημείου είναι πολύ μικρή (όπου S_2 η απόσταση από το πρώτο στο τρίτο σημείο του C_A^T) τότε ισχύει πού ικανοποιητικά η προσέγγιση

$$s_2 - s_1 = r_0 \mathcal{G}_1^U \delta \mathcal{G}_2^U \Leftrightarrow \delta \mathcal{G}_2^U = \frac{s_2 - s_1}{r_0 \mathcal{G}_1^U} \quad (4.20)$$

Με την ίδια συλλογιστική συνάγουμε ότι ο τρίτος όρος της ακολουθίας είναι ο

$$\mathcal{G}_2^U = \mathcal{G}_1^U + \delta \mathcal{G}_2^U = \mathcal{G}_1^U + \frac{s_2 - s_1}{r_0 \mathcal{G}_1^U} \quad (4.21)$$

και ο j -οστός όρος είναι ο

$$\mathcal{G}_j^U = \mathcal{G}_{j-1}^U + \delta \mathcal{G}_j^U = \mathcal{G}_{j-1}^U + \frac{s_j - s_{j-1}}{r_0 \mathcal{G}_{j-1}^U} \quad j = 1, \dots, N^P - 1. \quad (4.22)$$

Υπακολουθία τιμών ανεξαρτήτου μεταβλητής για την περίπτωση της εκθετικής σπείρας.

Έστω η εκθετική σπείρα με κέντρο x_0, y_0 , πρωταρχικές παραμέτρους α, β και ανεξάρτητη παράμετρο \mathcal{G}^X (εξίσωση 4.2). Με την ίδια μέθοδο όπως προηγουμένως δημιουργούμε την ακολουθία των τιμών της ανεξαρτήτου παραμέτρου \mathcal{G}^X :

$$\mathcal{G}_0^X, \mathcal{G}_j^X = \mathcal{G}_{j-1}^X + \delta \mathcal{G}_j^X = \mathcal{G}_{j-1}^X + \frac{s_j - s_{j-1}}{\alpha \sqrt{1 + \beta^2} e^{\beta \mathcal{G}_{j-1}^X}} \quad j = 1, \dots, N^P - 1 \quad (4.23)$$

Υπακολουθία τιμών ανεξαρτήτου μεταβλητής για την υπερβολή με παράμετρο το \mathcal{G}^Y

Ας υποθέσουμε ότι το συγκεκριμένο τμήμα αντικειμένου C_A^T έχει προκύψει από γεωμετρικό πρότυπο υπερβολής με κέντρο το σημείο x_0, y_0 και πρωτογενείς παραμέτρους a, b , τα μήκη των ημιαξόνων της. Έστω ότι το συγκεκριμένο τμήμα αντικειμένου αντιστοιχεί στο τμήμα της υπερβολής που εκκινά από το σημείο με τιμή παραμέτρου \mathcal{G}_0^Y . Δημιουργούμε πάλι την ακολουθία \mathcal{G}_j^Y ως εξής:

Το πρώτο στοιχείο αυτής είναι προφανώς το \mathcal{G}_0^Y . Κινούμενοι επί της υπερβολής από το σημείο που αντιστοιχεί στο \mathcal{G}_0^Y , προς το σημείο που αντιστοιχεί στο $\mathcal{G}_0^Y + d\mathcal{G}^Y$ διανύουμε στοιχειώδες επικαμπύλιο μήκος

$$ds = \sqrt{(a^2 + b^2) \cosh^2 \mathcal{G}_0^Y - a^2} d\mathcal{G}^Y. \quad (4.24)$$

Το δεύτερο pixel του C_A^T απέχει από το πρώτο S_1 , ενώ πάλι θεωρούμε ότι ο ανωτέρω τύπος ισχύει προσεγγιστικά, λόγω μικρής αποστάσεως των διαδοχικών pixels . Θεωρούμε δηλαδή ότι ισχύει

$$s_1 = \sqrt{(a^2 + b^2) \cosh^2 \mathcal{G}_0^Y - a^2} \delta\mathcal{G}_1^Y \Leftrightarrow \delta\mathcal{G}_1^Y = \frac{s_1}{\sqrt{(a^2 + b^2) \cosh^2 \mathcal{G}_0^Y - a^2}} \quad (4.25)$$

Άρα το δεύτερο στοιχείο της ακολουθίας είναι το

$$\mathcal{G}_1^Y = \mathcal{G}_0^Y + \delta\mathcal{G}_1^Y = \mathcal{G}_0^Y + \frac{s_1}{\sqrt{(a^2 + b^2) \cosh^2 \mathcal{G}_0^Y - a^2}}. \quad (4.26)$$

Κινούμενοι στη συνέχεια επί της υπερβολής από το σημείο που αντιστοιχεί στο \mathcal{G}_1^Y , προς σημείο που αντιστοιχεί στο $\mathcal{G}_1^Y + d\mathcal{G}^Y$ διανύσουμε στοιχειώδες μήκος $ds = \sqrt{(a^2 + b^2) \cosh^2 \mathcal{G}_1^Y - a^2} d\mathcal{G}^Y$. Με πολύ ικανοποιητική προσέγγιση ισχύει ότι

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= \sqrt{(a^2 + b^2) \cosh^2 \mathcal{G}_1^Y - a^2} \delta\mathcal{G}_2^Y \Leftrightarrow \\ \delta\mathcal{G}_2^Y &= \frac{s_2 - s_1}{\sqrt{(a^2 + b^2) \cosh^2 \mathcal{G}_1^Y - a^2}}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

οπότε μια ικανοποιητική τιμή του τρίτου στοιχείου της ακολουθίας είναι η

$$\mathcal{G}_2^Y = \mathcal{G}_1^Y + \delta\mathcal{G}_2^Y = \mathcal{G}_1^Y + \frac{s_2 - s_1}{\sqrt{(a^2 + b^2) \cosh^2 \mathcal{G}_1^Y - a^2}}. \quad (4.28)$$

Η έκφραση για το γενικό όρο της ακολουθίας είναι κατ' ανάλογο τρόπο η

$$\mathcal{G}_j^Y = \mathcal{G}_{j-1}^Y + \delta\mathcal{G}_j^Y = \mathcal{G}_{j-1}^Y + \frac{s_j - s_{j-1}}{\sqrt{(a^2 + b^2) \cosh^2 \mathcal{G}_{j-1}^Y - a^2}} \quad j = 1, \dots, N^P - 1. \quad (4.29)$$

Υπακολουθία τιμών ανεξαρτήτου μεταβλητής για την υπερβολή με παράμετρο το χ .

Στον υπολογιστή η περιγραφή της υπερβολής με παράμετρο το \mathcal{G}^Y , έχει το σοβαρό μειονέκτημα ένα πολύ μεγάλο εύρος πεδίο τιμών να πρέπει να παραχθεί από ένα πολύ μικρό εύρος πεδίου ορισμού. Τα τελευταία συνεπάγεται ότι, συχνά, για να δημιουργήσουμε την υπερβολή στον υπολογιστή, είμαστε αναγκασμένοι να κινηθούμε στα όρια του λάθους υπερχείλισης είτε του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας ή ακόμα αρκετές φορές να βρεθούμε

εντός αυτού του λάθους. Γι αυτό το λόγο , όπου είναι εφικτό προτιμούμε να δημιουργούμε υπολογιστικά την υπερβολή με παράμετρο το χ (ή το y). Εάν ο άξονας της υπερβολής που περνά απ' τις δύο εστίες της είναι ο άξονας των y τότε η εξίσωση της ανωτέρω υπερβολής έχει ως εξής:

$$y = \pm \beta \sqrt{1 + \frac{\chi^2}{\alpha^2}}, \chi \in \mathfrak{R}. \quad (4.30)$$

Τότε η ακολουθία των τιμών της παραμέτρου χ η οποία θα γεννούσε την ακολουθία επικαμπυλίων αποστάσεων s_j στην περίπτωση που το συγκεκριμένο τμήμα αντικειμένου είχε παραχθεί από αυτήν την υπερβολή, είναι η

$$\chi_0, \chi_j = \chi_{j-1} + \delta\chi_j = \chi_{j-1} + (s_j - s_{j-1}) \frac{a\sqrt{a^2 + \chi_{j-1}^2}}{\sqrt{a^4 + (\alpha^2 + \beta^2)\chi_{j-1}^2}} \quad j = 1, \dots, N^P - 1 \quad (4.31)$$

Υπακολουθία τιμών ανεξαρτήτου μεταβλητής για την έλλειψη

Έστω η έλλειψη κέντρου χ_0, y_0 πρωταρχικών παραμέτρων a, b και με ανεξάρτητη παράμετρο $\mathcal{G}^E \in [0, 2\pi)$ η οποία περιγράφεται από τη διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r}(\mathcal{G}^E) = (\chi_0 + a \cos \mathcal{G}^E) \vec{i} + (y_0 + b \sin \mathcal{G}^E) \vec{j} \quad (4.32)$$

Τότε προχωρώντας όπως στην περίπτωση της υπερβολής , η ακολουθία των τιμών της \mathcal{G}^E η οποία αντιστοιχεί στην ακολουθία επικαμπυλίων μηκών s_j στην περίπτωση που το C_A^T έχει παραχθεί από καμπυλογράφο σχήματος έλλειψης είναι η

$$\mathcal{G}_0^E, \mathcal{G}_j^E = \mathcal{G}_{j-1}^E + \delta\mathcal{G}_j^E = \mathcal{G}_{j-1}^E + \frac{s_j - s_{j-1}}{\sqrt{a^2 \sin^2 \mathcal{G}_{j-1}^E + b^2 \cos^2 \mathcal{G}_{j-1}^E}} \quad j = 1, \dots, N^P - 1 \quad (4.33)$$

Υπακολουθία τιμών ανεξαρτήτου μεταβλητής για την παραβολή με παράμετρο το χ

Έστω η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον y -άξονα πρωταρχικές παραμέτρους a, b, c και εξίσωση $y = a\chi^{P^2} + b\chi^P + c, \chi^P \in \mathfrak{R}$. Τότε αν ο καμπυλογράφος που έχει γεννήσει το τμήμα αντικειμένου C_A^T αντιστοιχεί σε τμήμα παραβολής η ακολουθία τιμών της ανεξάρτητου παραμέτρου έχει ως κάτωθι.

$$\chi_0^P, \chi_j^P = \chi_{j-1}^P + \frac{s_j - s_{j-1}}{\sqrt{1 + (2a\chi_{j-1}^P + b)^2}} \quad j = 1, \dots, N^P \quad (4.34)$$

Βήμα 4. Για κάθε υποψήφιο γεωμετρικό πρότυπο ορίσαμε στο προηγούμενο βήμα μία αντίστοιχη ακολουθία τιμών της ανεξαρτήτου μεταβλητής του προτύπου, με την οποία αυτό συνήθως ορίζεται. Δηλαδή, όπως έχει ήδη αναφερθεί ανθρωπομορφιστικά η κατάλληλη παράμετρος για να οριστούν οι σπείρες είναι η πολική γωνία \mathcal{G} του τυχόντος σημείου τους, της ελλείψεως το \mathcal{G}^E με γεωμετρικό νόημα την πολική γωνία του κύκλου η προβολή του οποίου γεννά τη συγκεκριμένη έλλειψη κλπ.

Στο παρόν βήμα θα δημιουργήσουμε αντίστοιχες ακολουθίες τιμών των καμπυλοτήτων για κάθε υποψήφιο γεωμετρικό πρότυπο και κάθε τμήμα αντικειμένου χωριστά. (Τα περί καμπυλότητας παρουσιάζονται αναλυτικότερα στο παράρτημα Π.Κ.)

Η ακολουθία τιμών καμπυλοτήτων για το τμήμα αντικειμένου C_A^T για την περίπτωση της γραμμικής σπείρας.

Η καμπυλότητα της γραμμικής σπείρας δίδεται από τον τύπο

$$\kappa^{LIN} = \frac{\mathcal{G}^2 + 2}{\mu^A (1 + \mathcal{G}^2)^{3/2}}. \quad (4.35)$$

Άρα η ακολουθία καμπυλοτήτων κ_j^{LIN} είναι το σύνολο των τιμών της καμπυλότητας στα pixels του C_A^T , εάν αυτό είχε προκύψει από γραμμική σπείρα, δηλαδή,

$$\kappa_j^{LIN} = \frac{\mathcal{G}_j^2 + 2}{\mu^A (1 + \mathcal{G}_j^2)^{3/2}} \quad j = 0, \dots, N^P - 1 \quad (4.36)$$

Με άλλα λόγια, το δεδομένο είναι οι αποστάσεις των pixels του τμήματος αντικειμένου C_A^T της τοιχογραφίας ή ισοδυνάμως η ακολουθία μηκών $S_j \quad j = 0, \dots, N^P - 1$. Εάν αυτό το τμήμα αντικειμένου είχε προκύψει με οδηγό μία συγκεκριμένη γραμμική σπείρα, τότε αυτή η ακολουθία S_j θα αντιστοιχούσε μονοσήμαντα και με λίαν ικανοποιητική προσέγγιση στην ακολουθία τιμών \mathcal{G}_j της ανεξαρτήτου μεταβλητής που χρησιμοποιούμε όπως αυτή υπολογίστηκε στο βήμα 3. Η ακολουθία τιμών καμπυλοτήτων κ_j^{LIN} αντιστοιχεί μονοσήμαντα στην ακολουθία τιμών \mathcal{G}_j επί των pixels του C_A^T . Αξίζει να τονίσουμε ότι οι τιμές των ακολουθιών κ_j^{LIN} και \mathcal{G}_j καθορίζονται μόνο από την αρχική τιμή της ανεξαρτήτου μεταβλητής \mathcal{G}_0 και την προσδιοριστέα τιμή της πρωταρχικής παραμέτρου μ^A της γραμμικής σπείρας.

Η ακολουθία τιμών καμπυλοτήτων του τμήματος αντικειμένου C_A^T για την σπείρα εκτύλιξης.

Η καμπυλότητα της σπείρας εκτύλιξης δίδεται από τον τύπο

$$\kappa^{UNW} = \frac{1}{r_0 \varrho^U} \quad (4.37)$$

Κατά συνέπεια, η ακολουθία τιμών κ_j^{UNW} που μας δίνει τις τιμές της καμπυλότητας στα pixels του συγκεκριμένου αντικειμένου περιγράμματος, εάν αυτό είχε προκύψει από σπείρα εκτύλιξης, έχει την έκφραση

$$\kappa_j^{UNW} = \frac{1}{r_0 \varrho_j^U} \quad (4.38)$$

με τις τιμές της ϱ_j^U όπως αυτές υπολογίστηκαν στο βήμα 3. Η ακολουθία των τιμών ϱ_j^U δημιουργεί μονοσήμαντα την ακολουθία των τιμών των καμπυλοτήτων κ_j^{UNW} επί των pixels του C_A^T ενώ οι ακριβείς τιμές αυτών των ακολουθιών καθορίζονται από την αρχική τιμή ϱ_0^U και την τιμή της πρωταρχικής παραμέτρου r_0 .

Η ακολουθία τιμών καμπυλοτήτων του C_A^T για την εκθετική σπείρα.

Η έκφραση που δίνει την καμπυλότητα της εκθετικής σπείρας είναι η ακόλουθη.

$$\kappa^{EXP} = \frac{1}{a\sqrt{1+b^2} e^{b\varrho^X}} \quad (4.39)$$

Εάν το συγκεκριμένο αντικείμενο περιγράμματος έχει προκύψει από σπείρα εκτύλιξης, η ακολουθία τιμών κ_j^{EXP} που μας δίνει τις τιμές της καμπυλότητας στα pixels αυτού έχει την έκφραση

$$\kappa_j^{EXP} = \frac{1}{a\sqrt{1+b^2} e^{b\varrho_j^X}} \quad (4.40)$$

με τις τιμές της ϱ_j^X που υπολογίστηκαν στο βήμα 3. Η ακολουθία των τιμών ϱ_j^X δημιουργεί μονοσήμαντα την ακολουθία των τιμών των καμπυλοτήτων κ_j^{EXP} επί των pixels του C_A^T ενώ οι ακριβείς τιμές αυτών των ακολουθιών καθορίζονται από την αρχική τιμή ϱ_0^X και τις τιμές των πρωταρχικών παραμέτρων a, b .

Η ακολουθία τιμών καμπυλοτήτων του C_A^T στην περίπτωση που ο καμπυλογράφος είναι υπερβολή.

Ο αναλυτικός τύπος της καμπυλότητας της υπερβολής είναι ο κάτωθι

$$\kappa^{YPE} = \frac{ab}{\left((a^2 + b^2)\cosh^2 \mathcal{G}^Y - a^2\right)^{3/2}}. \quad (4.41)$$

Άρα η ακολουθία καμπυλοτήτων κ_j^{YPE} είναι το σύνολο των τιμών της καμπυλότητας στα pixels του C_A^T , εάν αυτό είχε προκύψει από υπερβολή, δηλαδή,

$$\kappa_j^{YPE} = \frac{ab}{\left((a^2 + b^2)\cosh^2 \mathcal{G}_j^Y - a^2\right)^{3/2}} \quad j = 0, 1, \dots, N^P - 1 \quad (4.42)$$

Οι τιμές της \mathcal{G}_j^Y υπολογίστηκαν στο βήμα 3 και καθορίζονται από την αρχική τιμή \mathcal{G}_0^Y και τις τιμές των πρωταρχικών παραμέτρων a, b της υπερβολής. Από τα \mathcal{G}_0^Y και a, b καθορίζονται και οι τιμές της ακολουθίας κ_j^{YPE} .

Εάν χρησιμοποιηθεί ως ανεξάρτητη παράμετρος το χ των καρτεσιανών συντεταγμένων ο αναλυτικός τύπος της καμπυλότητας έχει ως εξής:

$$\kappa^{YPE} = \frac{a^4 b^4}{\left[(a^2 b^2 + b^4)\chi^2 + b^2\right]^{3/2}} \quad (4.43)$$

Και συνεπώς η ακολουθία καμπυλοτήτων που αντιστοιχεί στο σύνολο των τιμών χ_j είναι η

$$\kappa_j^{YPE} = \frac{a^4 b^4}{\left[(a^2 b^2 + b^4)\chi_j^2 + b^2\right]^{3/2}}. \quad (4.44)$$

Η ακολουθία αυτή καθορίζεται πλήρως από την αρχική τιμή χ_0 της ανεξάρτητου μεταβλητής και τιμές των πρωταρχικών παραμέτρων a, b . Όπως προαναφέρθηκε η συγκεκριμένη ανεξάρτητη μεταβλητή είναι προτιμητέα στις υπολογιστικές εφαρμογές διότι με τη χρήση αυτής περιορίζονται σημαντικά τα προβλήματα αριθμητικής ανακρίβειας και σφάλματος λόγω πεπερασμένου μήκους λέξης.

Η ακολουθία τιμών καμπυλοτήτων του C_A^T στην περίπτωση που ο καμπυλογράφος είναι έλλειψη.

Ο αναλυτικός τύπος της καμπυλότητας της έλλειψης είναι ο κάτωθι

$$\kappa^{ELL} = \frac{ba}{\left(b^2 \cos^2 \mathcal{G}^E + a^2 \sin^2 \mathcal{G}^E\right)^{3/2}}. \quad (4.45)$$

Άρα η ακολουθία καμπυλοτήτων κ_j^{ELL} είναι το σύνολο των τιμών της καμπυλότητας στα pixels του C_A^T , εάν αυτό έχει προκύψει από έλλειψη, δηλαδή,

$$\kappa_j^{ELL} = \frac{ba}{\left(b^2 \cos^2 \vartheta_j^E + a^2 \sin^2 \vartheta_j^E\right)^{3/2}} \quad j = 0, 1, \dots, N^P - 1 \quad (4.46)$$

Οι τιμές της ϑ_j^E υπολογίστηκαν στο βήμα 3 και καθορίζονται από την αρχική τιμή ϑ_0^E και τις τιμές των πρωταρχικών παραμέτρων a, b της έλλειψης. Από τα ϑ_0^E και a, b καθορίζονται και οι τιμές της ακολουθίας κ_j^{ELL} .

Η ακολουθία τιμών καμπυλοτήτων του C_A^T στην περίπτωση που ο καμπυλογράφος είναι παραβολή.

Ο αναλυτικός τύπος της καμπυλότητας της παραβολής είναι ο κάτωθι

$$\kappa^{PAR} = \frac{2a}{\left(1 + (2a\chi^P + b)^2\right)^{3/2}}. \quad (4.47)$$

Άρα η ακολουθία καμπυλοτήτων κ_j^{PAR} είναι το σύνολο των τιμών της καμπυλότητας στα pixels του C_A^T , εάν αυτό έχει προκύψει από παραβολή, δηλαδή,

$$\kappa_j^{PAR} = \frac{2a}{\left(1 + (2a\chi_j^P + b)^2\right)^{3/2}} \quad j = 0, 1, \dots, N^P - 1 \quad (4.48)$$

Οι τιμές της χ_j^P υπολογίστηκαν στο βήμα 3 και καθορίζονται από την αρχική τιμή χ_0^P και τις τιμές των πρωταρχικών παραμέτρων a, b, c της παραβολής. Από τα χ_0^P και a, b, c καθορίζονται και οι τιμές της ακολουθίας κ_j^{PAR} .

Βήμα 5 . Έχουμε ήδη προσεγγίσει το τμήμα αντικειμένου C_A^T με κατάλληλα πολυώνυμα και έχουμε παράξει την ακολουθία καμπυλοτήτων κ_j^{APROX} εφ' όλων των pixels αυτού. Επειδή το σχετικό λάθος προσέγγισης είναι ιδιαίτερος μικρό, είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι οι τιμές των κ_j^{APROX} είναι ικανοποιητικές προσεγγίσεις των πραγματικών τιμών της καμπυλότητας στα σημεία αυτά του οδηγού που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκε για το σχεδιασμό του C_A^T .

Τίθεται τώρα το ερώτημα: Υπάρχει κάποια από τις ακολουθίες $\kappa_j^{LIN}, \kappa_j^{UNW}, \kappa_j^{EXP}, \kappa_j^{YPE}, \kappa_j^{ELL}, \kappa_j^{PAR}$ η οποία με κατάλληλες τιμές των πρωταρχικών

παραμέτρων δύναται να προσεγγίσει ικανοποιητικά την κ_j^{APROX} , τόσο ώστε να μπορούμε να αποδεχτούμε την υπόθεση ότι το αντίστοιχο γεωμετρικό πρότυπο έχει γεννήσει το τμήμα αντικειμένου C_A^T ;

Μία πρώτη απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα δοθεί σε αυτό το βήμα. Όντως, θεωρούμε τις εξής συναρτήσεις λάθους:

Για τη γραμμική σπείρα

$$E^{LIN}(\mu^A, \vartheta_0) = \sum_{j=0}^{N^p-1} (\kappa_j^{APROX} - \kappa_j^{LIN})^2 \Leftrightarrow$$

$$E^{LIN}(\mu^A, \vartheta_0) = \sum_{j=0}^{N^p-1} \left(\kappa_j^{APROX} - \frac{\vartheta_j^2 + 2}{\mu^A (1 + \vartheta_j^2)^{3/2}} \right)^2 \quad (4.49)$$

Για τη σπείρα εκτόλιξης

$$E^{UNW}(r_0, \vartheta_0^U) = \sum_{j=0}^{N^p-1} (\kappa_j^{APROX} - \kappa_j^{UNW})^2 \Leftrightarrow$$

$$E^{UNW}(r_0, \vartheta_0^U) = \sum_{j=0}^{N^p-1} \left(\kappa_j^{APROX} - \frac{1}{r_0 \vartheta_j^U} \right)^2 \quad (4.50)$$

Για την εκθετική σπείρα

$$E^{EXP}(a, b, \vartheta_0^x) = \sum_{j=0}^{N^p-1} (\kappa_j^{APROX} - \kappa_j^{EXP})^2 \Leftrightarrow$$

$$E^{EXP}(a, b, \vartheta_0^x) = \sum_{j=0}^{N^p-1} \left(\kappa_j^{APROX} - \frac{1}{a \sqrt{1 + b^2} e^{b \vartheta_j^x}} \right)^2 \quad (4.51)$$

Για την υπερβολή

$$E^{YPE}(a, b, \chi_0) = \sum_{j=0}^{N^p-1} (\kappa_j^{APROX} - \kappa_j^{YPE})^2 \Leftrightarrow$$

$$E^{YPE}(a, b, \chi_0) = \sum_{j=0}^{N^p-1} \left(\kappa_j^{APROX} - \frac{a^4 b^4}{[(a^2 b^2 + b^4) \chi_j^2 + b^2]^{3/2}} \right)^2 \quad (4.52)$$

Να σημειωθεί ότι επιλέγουμε την έκφραση του λάθους αυτού με ανεξάρτητη μεταβλητή το χ για την πρότυπη υπερβολή, ούτως ώστε να μειωθεί κατά το δυνατόν το αριθμητικό λάθος πεπερασμένης ακρίβειας.

Για την έλλειψη

$$E^{ELL}(a, b, \vartheta_0^E) = \sum_{j=0}^{N^P-1} (\kappa_j^{APROX} - \kappa_j^{ELL})^2 \Leftrightarrow$$

$$E^{ELL}(a, b, \vartheta_0^E) = \sum_{j=0}^{N^P-1} \left(\kappa_j^{APROX} - \frac{ba}{(b^2 \cos^2 \vartheta_j^E + a^2 \sin^2 \vartheta_j^E)^{3/2}} \right)^2 \quad (4.53)$$

Για την παραβολή

$$E^{PAR}(a, b, c, \chi_0^P) = \sum_{j=0}^{N^P-1} (\kappa_j^{APROX} - \kappa_j^{PAR})^2 \Leftrightarrow$$

$$E^{PAR}(a, b, c, \chi_0^P) = \sum_{j=0}^{N^P-1} \left(\kappa_j^{APROX} - \frac{2a}{(1 + (2a\chi_j^P + b)^2)^{3/2}} \right)^2 \quad (4.54)$$

Ελαχιστοποιούμε κάθε μία από τις ανωτέρω ποσότητες $E^{LIN}(\mu^A, \vartheta_0)$, $E^{UNW}(r_0, \vartheta_0^U)$, $E^{EXP}(a, b, \vartheta^X)$, $E^{YPE}(a, b, \chi_0)$, $E^{ELL}(a, b, \vartheta_0^E)$, $E^{PAR}(a, b, c, \chi_0^P)$ με χρήση του αλγορίθμου Nelder-Mead, εκκινώντας από μία αρχική εκτίμηση και αφήνοντας τον αλγόριθμο να συγκλίνει στο \mathcal{R}^2 , στο \mathcal{R}^3 ή στο \mathcal{R}^4 , αναλόγως με το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών της συνάρτησης του λάθους προσέγγισης. Με αυτό τον τρόπο λαμβάνουμε κάθε φορά μία τιμή κάθε λάθους κοντά στο ελάχιστο, για κάθε C_A^T .

Κατ' αυτόν τον τρόπο για κάθε υποψήφιο καμπυλογράφο βρίσκουμε τις τιμές των θεμελιωδών παραμέτρων του ώστε τμήμα της καμπύλης της καμπυλότητας του, βέλτιστα να προσεγγίζει το K_S^{APROX} με βάση την επιλεγμένη απόσταση, όπου K_S^{APROX} είναι η καμπυλότητα της πολυωνυμικής προσέγγισης του τμήματος αντικειμένου συναρτήσεως του μήκους S . Ταυτόχρονα εντοπίζουμε το ακριβές τμήμα της συγκεκριμένης καμπύλης της

καμπυλότητας αυτής της βέλτιστης προσέγγισης, άρα με μία έννοια επιτυγχάνουμε μια πρώτη εκτίμηση του τμήματος του καμπυλογράφου που χρησιμοποιήθηκε.

Επομένως μετά το πέρας αυτής της διαδικασίας και για κάθε αρχική εκτίμηση τμήματος αντικειμένου μήκους μεγαλύτερου του κατωφλίου των 6.5 εκατοστών, έχουμε αντιστοιχίσει 6 λάθη ένα για κάθε υποψήφιο γεωμετρικό πρότυπο. Ένα από αυτά τα λάθη θα είναι κάθε φορά ελάχιστο και εφ' όσον η μέση του τιμή αυτού παραμένει μικρότερη από ένα πολύ λογικό κατώφλι, π.χ. μικρότερη των 0.8 χιλιοστών, τότε θεωρούμε πιθανό ότι το συγκεκριμένο τμήμα αντικειμένου σχεδιάστηκε με χρήση ενός οδηγού που αντιστοιχεί στο γεωμετρικό πρότυπο που γέννησε αυτό το ελάχιστο λάθος και με παραμέτρους του οδηγού παραπλήσιες με αυτές στις οποίες συνέκλινε ο αλγόριθμος ελαχιστοποίησης.

Η ανωτέρω διαδικασία έδωσε για όλα τα προσδιορισθέντα τμήματα αντικειμένου σαν υποψήφια πρότυπο καμπύλη κατά βάση γραμμικές σπείρες ή υπερβολές και σε μικρότερο βαθμό ελλείψεις.

5. Ακριβής εντοπισμός των γεωμετρικών καμπυλογράφων ως και των τμημάτων αντικειμένων που αντιστοιχούν σε αυτούς

Στο κεφάλαιο 4, θεμελιώσαμε ότι σε όλα τα προσδιορισθέντα τμήματα αντικειμένου με μέσο λάθος προσέγγισης μικρότερο των 0.8 χιλιοστών αντιστοιχούν πρότυπες γραμμικές σπείρες ή υπερβολές ή ελλείψεις. Οι πρωταρχικές παράμετροι αυτών των προτύπων καμπυλών, πρέπει να ομαδοποιηθούν, με σκοπό τελικά να επιλεγεί ο ελάχιστος δυνατός αριθμός γεωμετρικών σχημάτων που αντιστοιχούν σε οδηγούς που πιθανόν να χρησιμοποιήθηκαν για τη σχεδίαση αυτών των τοιχογραφιών. Για το σκοπό αυτό ανεπτύχθη ένα σύνολο μεθόδων και αλγορίθμων που θα περιγραφούν σε αυτό το κεφάλαιο.

5.1 Μία νέα εξαντλητική μέθοδος προσαρμογής καμπυλών.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο ισοπληθή σύνολα σημείων στο επίπεδο, τα οποία θα μπορούσαν να συνιστούν δύο διακριτές ψηφιακές καμπύλες. Ας υποθέσουμε επίσης ότι ζητούμε έναν ακριβή και ταχύ τρόπο για να προσδιορίσουμε τη γωνία στροφής και την παράλληλη μετατόπιση ως προς x και y την οποία πρέπει να υποστεί το ένα σύνολο σημείων ως στερεό σώμα προκειμένου να ταιριάζει βέλτιστα στο άλλο σύνολο. Μία λύση σε αυτό το πρόβλημα θα μπορούσε να ήταν η ελαχιστοποίηση μιας κατάλληλης συνάρτησης λάθους. (ίδε και παράρτημα Π.Π.). Μια τέτοια προσέγγιση όμως, κατά βάση δεν είναι τόσο

ταχεία και κυρίως δεν είναι ακριβής με την έννοια ότι όποιον αναδρομικό αλγόριθμο ελαχιστοποίησης συνάρτησης και αν χρησιμοποιήσουμε, ποτέ δεν θα είμαστε σίγουροι ότι το σημείο στο οποίο συνέκλινε ο αλγόριθμος θα είναι όντως το απολύτως ελάχιστο. Για το λόγο αυτό επιχειρήσαμε να δώσουμε αναλυτική λύση σε αυτό το πρόβλημα διατυπώνοντας και αποδεικνύοντας το κατωτέρω λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 5.1

Έστωσαν, δύο ομοεπίπεδα, ισοπληθή σύνολα σημείων (x_i, y_i) και (P_i, Q_i) έκαστον πλήθους N . Θεωρούμε ότι καθένα από τα σύνολα αυτά μπορεί να στρέφεται και να μετατοπίζεται σε στερεό σώμα. Ζητείται η γωνία περιστροφής θ και το διάνυσμα μετατόπισης $x_\mu \vec{i} + y_\mu \vec{j}$ για τα οποία η διακριτή καμπύλη (x_i, y_i) μετακινούμενη ως στερεό σώμα θα ταιριάζει βέλτιστα με την (P_i, Q_i) υπό την έννοια των Ελαχίστων Τετραγώνων.

Τα θ και x_μ, y_μ δίδονται από τις κάτωθι σχέσεις:

$$\tan \theta = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N P_i - \sum_{i=1}^N Q_i \sum_{i=1}^N x_i - N \sum_{i=1}^N (y_i P_i) + N \sum_{i=1}^N (x_i Q_i)}{-\sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N P_i - \sum_{i=1}^N Q_i \sum_{i=1}^N y_i + N \sum_{i=1}^N (x_i P_i) + N \sum_{i=1}^N (y_i Q_i)} \quad (5.1)$$

$$x_\mu = \frac{\sum_{i=1}^N P_i - \cos \theta \sum_{i=1}^N x_i + \sin \theta \sum_{i=1}^N y_i}{N} \quad (5.2)$$

$$y_\mu = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i - \sin \theta \sum_{i=1}^N x_i - \cos \theta \sum_{i=1}^N y_i}{N} \quad (5.3)$$

Απόδειξη

Έστω θ γωνία στροφής και x_μ, y_μ το βέλος τυχούσης παράλληλης μετατόπισης των σημείων (x_i, y_i) ως στερεού σώματος. Το αποτέλεσμα τέτοιων μετασχηματισμών επί της καμπύλης (x_i, y_i) είναι μια νέα ψηφιακή καμπύλη έστω (X_i, Y_i) οι συντεταγμένες της οποίας δίδονται από τις σχέσεις

$$X_i = x_i \cos \theta - y_i \sin \theta + x_\mu \quad (5.4)$$

$$Y_i = x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + y_\mu$$

Ορίζουμε σε λάθος προσέγγισης της καμπύλης (P_i, Q_i) από την εστραμμένη και μετατοπισμένη καμπύλη (X_i, Y_i) , το άθροισμα των τετραγώνων των ευκλειδίων αποστάσεων των σημείων ενός προς ένα, δηλαδή το

$$E(\theta, x_\mu, y_\mu) = \sum_{i=1}^N ((X_i - P_i)^2 + (Y_i - Q_i)^2)$$

ή ισοδυνάμως το

$$E(\theta, x_\mu, y_\mu) = \sum_{i=1}^N ((x_i \cos \theta - y_i \sin \theta + x_\mu - P_i)^2 + (x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + y_\mu - Q_i)^2) \quad (5.5)$$

Η ανωτέρω συνάρτηση λάθους είναι προφανώς φραγμένη κάτω από το μηδέν στο \mathfrak{R}^3 . Άρα έχει infimum (μέγιστο κάτω φράγμα) και επειδή είναι συνεχής συνάρτηση των θ και x_μ, y_μ σε όλο το πεδίο ορισμού της, το infimum ανήκει στο πεδίο τιμών της συνάρτησης και συνεπώς είναι ελάχιστο αυτής. Επιπλέον η εν λόγω συνάρτηση λάθους είναι απείρως παραγωγίσιμη άρα στο σημείο ελαχίστου έχουμε

$$\nabla E(\theta, x_\mu, y_\mu) = 0 \quad (5.6)$$

ή ισοδυνάμως

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial E}{\partial x_\mu} = \frac{\partial E}{\partial y_\mu} = 0.$$

Η εξίσωση $\frac{\partial E}{\partial x_\mu} = 0$ δίνει:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N [2(x_i \cos \theta - y_i \sin \theta + x_\mu - P_i)] &= 0 \Leftrightarrow \\ \cos \theta \sum_{i=1}^N x_i - \sin \theta \sum_{i=1}^N y_i + Nx_\mu - \sum_{i=1}^N P_i &= 0 \Leftrightarrow \\ x_\mu &= \frac{\sum_{i=1}^N P_i - \cos \theta \sum_{i=1}^N x_i + \sin \theta \sum_{i=1}^N y_i}{N} \end{aligned}$$

που είναι η έκφραση (5.2)

Η εξίσωση $\frac{\partial E}{\partial y_\mu} = 0$ δίνει:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N [2(x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + y_\mu - Q_i)] &= 0 \Leftrightarrow \\ \sin \theta \sum_{i=1}^N x_i + \cos \theta \sum_{i=1}^N y_i + Ny_\mu - \sum_{i=1}^N Q_i &= 0 \Leftrightarrow \\ y_\mu &= \frac{\sum_{i=1}^N Q_i - \sin \theta \sum_{i=1}^N x_i - \cos \theta \sum_{i=1}^N y_i}{N} \end{aligned}$$

που είναι η έκφραση (5.3)

Η εξίσωση $\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$ δίνει:

$$\sum_{i=1}^N \left(2(x_i \cos \theta - y_i \sin \theta + x_\mu - P_i)(-x_i \sin \theta - y_i \cos \theta) + \right. \\ \left. + 2(x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + y_\mu - Q_i)(x_i \cos \theta - y_i \sin \theta) \right) = 0 \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^N \left(-x_\mu x_i \sin \theta + x_i P_i \sin \theta - x_\mu y_i \cos \theta + \right. \\ \left. + y_i P_i \cos \theta + y_\mu x_i \cos \theta - x_i Q_i \cos \theta - y_\mu y_i \sin \theta + y_i Q_i \sin \theta \right) = 0 \Leftrightarrow \\ -x_\mu \sin \theta \sum_{i=1}^N x_i + \sin \theta \sum_{i=1}^N (x_i P_i) - x_\mu \cos \theta \sum_{i=1}^N y_i + \\ + \cos \theta \sum_{i=1}^N (y_i P_i) + y_\mu \cos \theta \sum_{i=1}^N x_i - \cos \theta \sum_{i=1}^N (x_i Q_i) - y_\mu \sin \theta \sum_{i=1}^N y_i + \sin \theta \sum_{i=1}^N (y_i Q_i) = 0$$

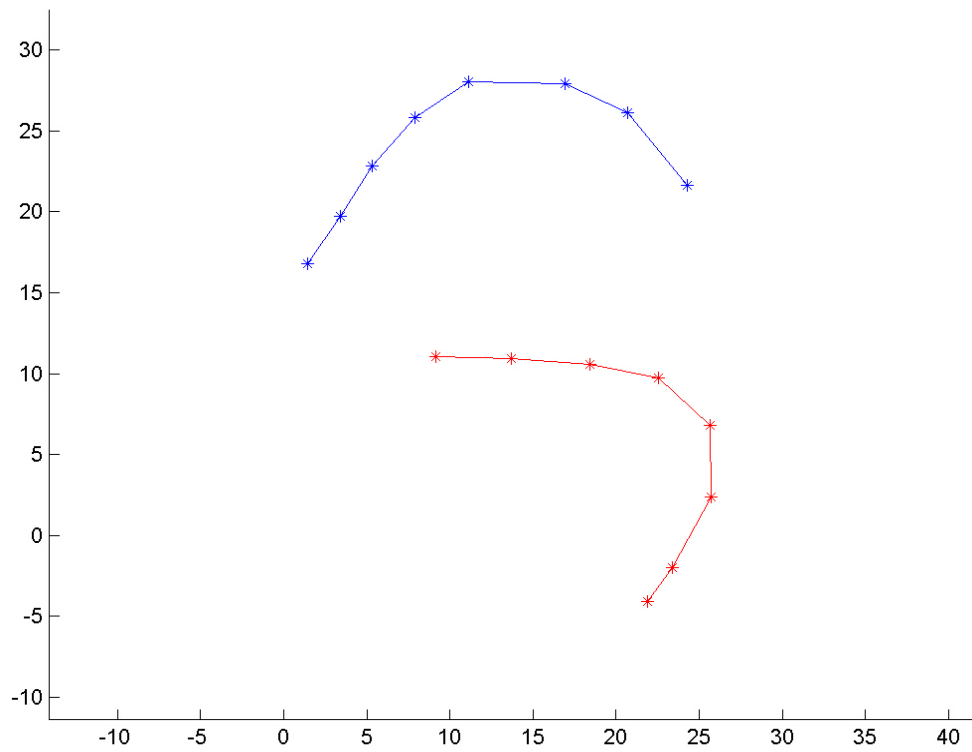
Αντικαθιστώντας τις τιμές των x_μ και y_μ ανωτέρω και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην

$$\tan \theta = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N P_i - \sum_{i=1}^N Q_i \sum_{i=1}^N x_i - N \sum_{i=1}^N (y_i P_i) + N \sum_{i=1}^N (x_i Q_i)}{-\sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N P_i - \sum_{i=1}^N Q_i \sum_{i=1}^N y_i + N \sum_{i=1}^N (x_i P_i) + N \sum_{i=1}^N (y_i Q_i)}$$

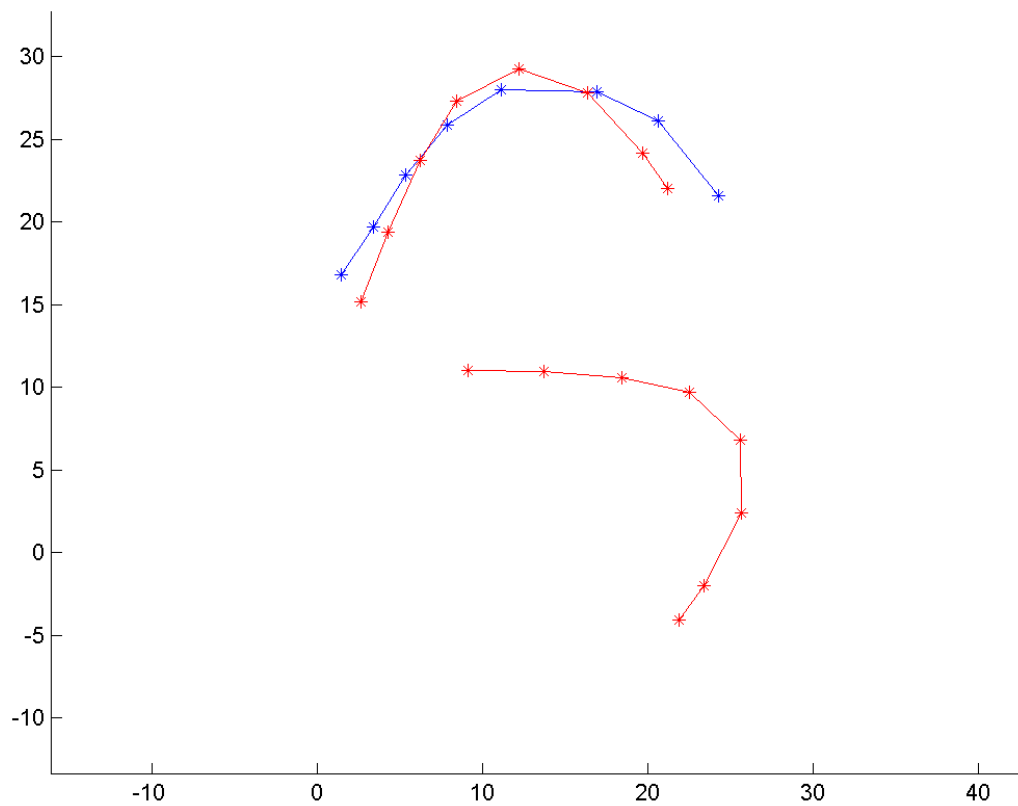
που είναι η έκφραση (5.1)

Αν ο παρονομαστής της $\tan \theta$ είναι 0^+ και ο αριθμητής θετικός ή δυϊκώς ο παρονομαστής της $\tan \theta$ 0^- και ο αριθμητής αρνητικός τότε $\theta = \pi/2$. Αν ο παρονομαστής της $\tan \theta$ είναι 0^- και ο αριθμητής θετικός ή δυϊκώς ο παρονομαστής της $\tan \theta$ 0^+ και ο αριθμητής αρνητικός τότε $\theta = -\pi/2$. Αν ο παρονομαστής της $\tan \theta$ είναι διάφορος του μηδενός τότε η εν λόγω εξίσωση έχει δύο λύσεις στο $[0, 2\pi)$ που διαφέρουν κατά π . Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση λάθους είναι περιοδική με περίοδο 2π και επομένως αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Στο διάστημα αυτό υπολογίζω και τις δύο τριάδες λύσεων, αντικαθιστώντας το θ στις εκφράσεις (5.2) και (5.3) για τα x_μ, y_μ αντίστοιχα και κρατώ αυτή που δίνει το μικρότερο σφάλμα, έστω E . Επειδή, όπως δείξαμε προηγουμένως, η συνάρτηση $E(\theta, x_\mu, y_\mu)$ έχει ελάχιστο στην περιόδό της, αυτό που βρήκαμε με την ανωτέρω μέθοδο είναι και το ελάχιστό της.

Στις επόμενες εικόνες 5.1α και 5.1β παρουσιάζεται μια σχηματική αναπαράσταση εφαρμογής του λήμματος. Σε αυτές παρουσιάζονται δύο ομοεπίπεδες ψηφιακές καμπύλες αποτελούμενες από 8 σημεία η καθεμία. Μεταξύ των αστερίσκων έχει γίνει γραμμική παρεμβολή για να υπάρχει καλύτερη εποπτεία. Σημειώνεται ότι η κόκκινη καμπύλη που υφίσταται τη στροφή και την παράλληλη μετατόπιση μετακινείται σε στερεό σώμα.



Εικόνα 5.1α
 Δύο ισοπληθείς ομοεπίπεδες ψηφιακές καμπύλες, σε τυχούσα αρχική θέση η μία σημειούμενη με 8 κόκκινους αστερίσκους, η δε άλλη με 8 μπλε αστερίσκους.



Εικόνα 5.1β
 Η καμπύλη με τους κόκκινους αστερίσκους έχει περιστραφεί και μετατοπιστεί σύμφωνα με το ΛΗΜΜΑ 5.1, ούτως ώστε να προσαρμοστεί στην καμπύλη των 8 μπλε αστερίσκων βέλτιστα κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων.

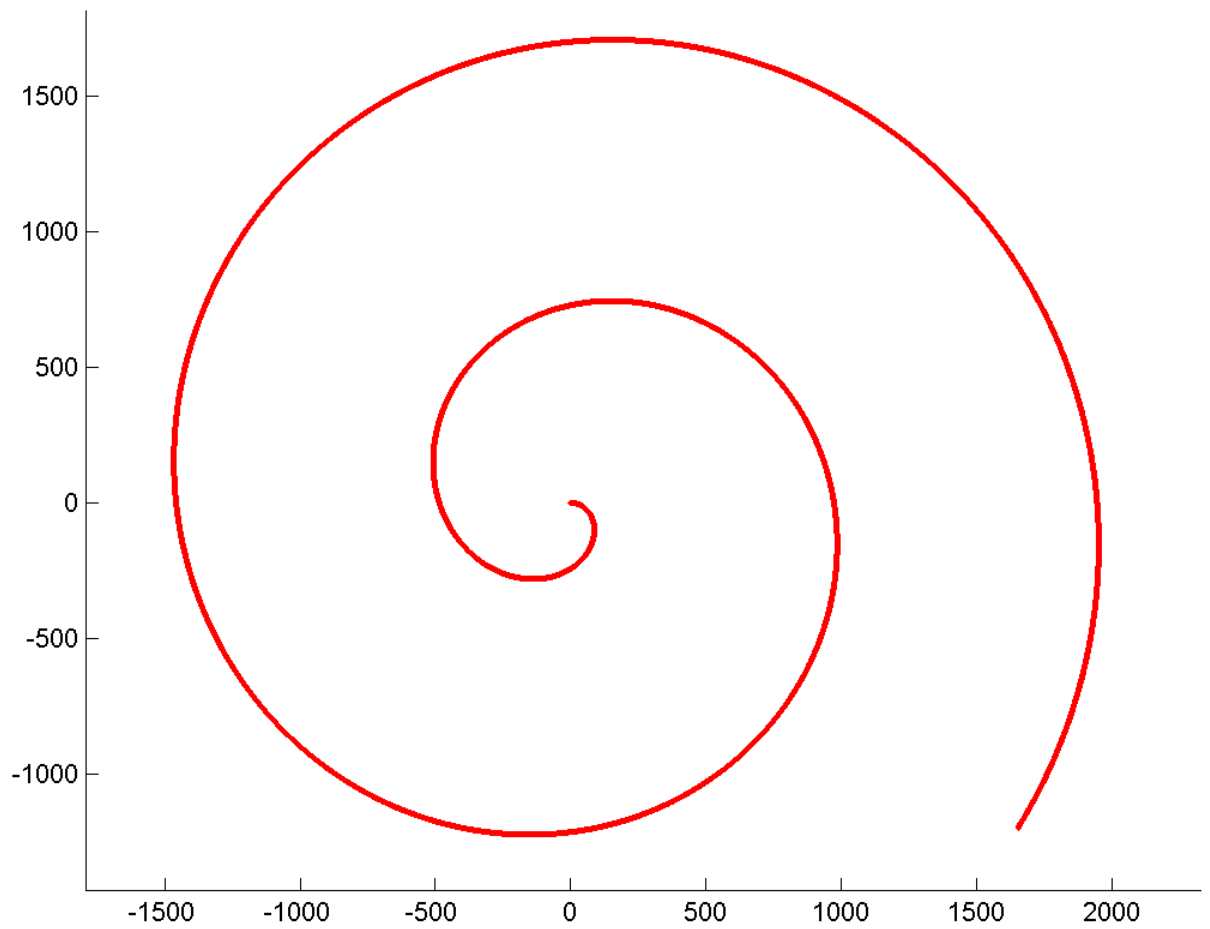
Θα χρησιμοποιήσουμε το ανωτέρω λήμμα για να αναπτύξουμε μία πρωτότυπη μεθοδολογία προσαρμογής θορυβώδους καμπύλης, όπως είναι ένα τμήμα αντικειμένου C_A^T , σε μία πρότυπη.

Διαδικασία 1: Ένα σύνολο βημάτων για μια πρώτη προσαρμογή θορυβώδους καμπύλης σε πρότυπη.

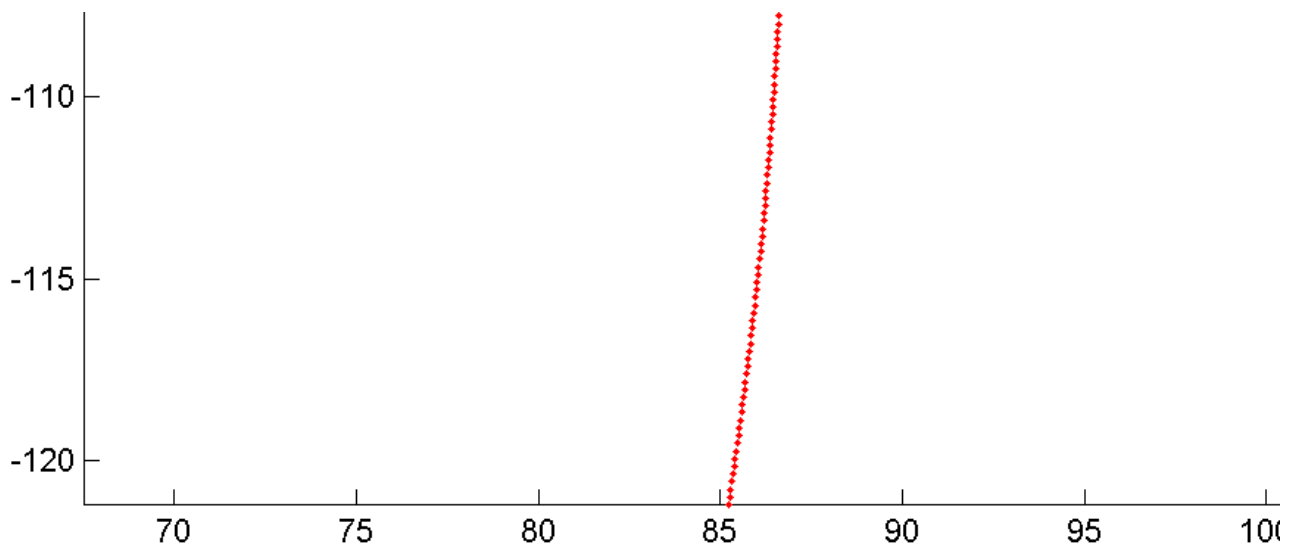
Βήμα Δ1.1

Δημιουργούμε μια πυκνή πρότυπο ψηφιακή καμπύλη, για την οποία θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο P^s , ως εξής: εάν η ανεξάρτητη μεταβλητή αυτής είναι $x \in [a, b]$, δημιουργούμε μια πολύ πυκνή διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$, με βήμα διαμέρισης $\frac{1}{12}$ ή $\frac{1}{24}$ του pixel της εικόνας της τοιχογραφίας. Εάν η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι κάποια γωνία $\theta \in [a, b]$ κάνουμε μια πυκνή διαμέριση του διαστήματος αυτού με βήμα 10^{-3} rad ή 10^{-4} rad. Επειδή φροντίσαμε οι εικόνες των τοιχογραφιών που επεξεργαζόμαστε να έχουν ληφθεί με εξαιρετική ανάλυση, τουλάχιστον 60 pixels ανά εκατοστό, αυτό σημαίνει ότι το επιλεγέν βήμα διαμέρισης αντιστοιχεί περίπου σε μήκος καμπύλης της τάξης των 0.01 mm ή 0.005 mm.

Επιπλέον, στις περιπτώσεις όπου δεν ορίζονται μαθηματικώς για την πρότυπο καμπύλη τα όρια της ανεξάρτητης μεταβλητής της όπως π.χ. στην περίπτωση της υπερβολής ή των σπειρών, θέσαμε εμείς τέτοια όρια με εύλογο και προφανή τρόπο. Συγκεκριμένα, δεδομένου ότι οι υπό μελέτη τοιχογραφίες δεν ξεπερνούν σε μέγεθος τις διαστάσεις ενός τοίχου π.χ. 3 επί 4 μέτρα, λαμβάνουμε αμέσως ένα άνω όριο για τα μεγέθη των πιθανών οδηγιών. Τονίζουμε επίσης, ότι οι οδηγοί θα έπρεπε να ήταν εύχρηστοι για να διευκολύνουν την καλλιτεχνική εργασία γεγονός που επιβεβαιώνει ότι τα προαναφερθέντα όρια ισχύουν εν αφθονία. Μια τέτοια πρότυπη πυκνή γραμμική σπείρα, το πεδίο ορισμού θ της οποίας αρχίζει από το μηδέν και τελειώνει σε κάτι παραπάνω από 4π φαίνεται στην κάτωθι εικόνα 5.2α



Εικόνα 5.2α



Εικόνα 5.2β

Λεπτομέρεια της γραμμικής σπείρας της εικόνας 5.2.α. όπου φαίνεται ότι η καμπύλη είναι ψηφιακή.

Βήμα Δ1.2

Με αρχή το πρώτο σημείο της πυκνής προτύπου καμπύλης P^s , δημιουργούμε εγγεγραμμένο πολύγωνο σε αυτήν, «αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες» με τη θορυβώδη-ζωγραφισμένη καμπύλη. Με τον όρο «αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες» εννοούμε το εξής: είναι ήδη γνωστή απ' το κεφάλαιο 4 η ακολουθία των ευκλειδείων αποστάσεων των διαδοχικών σημείων του C_A^T , δηλαδή η ακολουθία

$$\delta s_j = d(P_j, P_{j+1}), \quad j = 0, \dots, N^p - 1 \quad (5.7)$$

όπου P_j το j -οστό σημείο του C_A^T , το $d(P, Q)$ είναι το εναλλακτικό σύμβολο που θα χρησιμοποιούμε για την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο τυχόντων σημείων P και Q και ως συνήθως N^p είναι το πλήθος των pixels του C_A^T . Εν συνεχεία, ας ονομάσουμε M_1^1 το πρώτο σημείο του P^s και ας αναζητήσουμε το σημείο M_2^1 του P^s , το οποίο έχει την ιδιότητα η απόστασή του από το M_1^1 να είναι πλησιέστερη στο δs_1 , από όλα τα σημεία του P^s . Σε αυστηρή διατύπωση

$$M_2^1 \in P^s \wedge (t(M_2^1) > t(M_1^1)): |d(M_2^1, M_1^1) - \delta s_1| = \min.$$

Όπου t η ανεξάρτητη μεταβλητή της πρότυπης καμπύλης, $t(M)$ η τιμή αυτής στο τυχόν σημείο της M , ενώ η ανισότητα $t(M_2^1) > t(M_1^1)$ μας εξασφαλίζει ότι διαγράφουμε την P^s πάντα κατά την ίδια φορά.

Συνεχίζοντας, αναλόγως προσδιορίζουμε και το σημείο M_3^1 :

$$M_3^1 \in P^s \wedge (t(M_3^1) > t(M_2^1)): |d(M_3^1, M_2^1) - \delta s_2| = \min$$

και αναδρομικά ορίζουμε το M_j^1 :

$$M_j^1 \in P^s \wedge (t(M_j^1) > t(M_{j-1}^1)): |d(M_j^1, M_{j-1}^1) - \delta s_{j-1}| = \min, \quad j \leq N^p \quad (5.8)$$

Τονίζουμε πάλι ότι η συνθήκη $t(M_j^1) > t(M_{j-1}^1)$ μας διασφαλίζει ότι τα σημεία επιλέγονται πάντα με την ίδια φορά επί της προτύπου καμπύλης P^s . Στο τέλος αυτής της διαδικασίας έχουμε πρακτικά εξασφαλίσει την ισότητα

$$d(M_j^1, M_{j+1}^1) \approx \delta s_j \quad \text{για κάθε } j = 1, \dots, N^p - 1 \quad (5.9)$$

με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια και για αυτόν ακριβώς το λόγο δημιουργήσαμε τον όρο

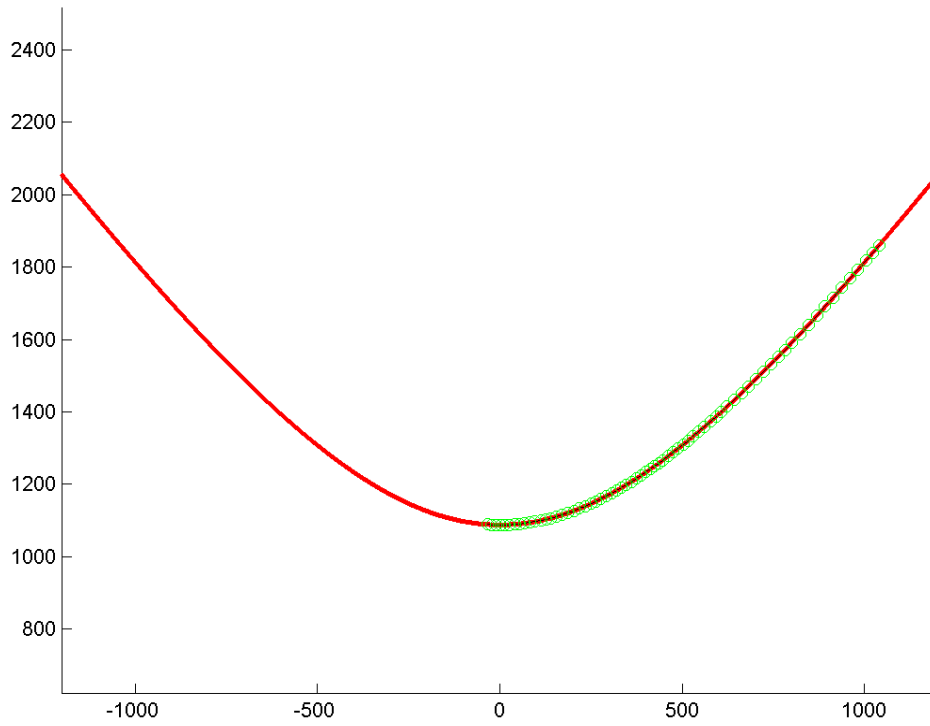
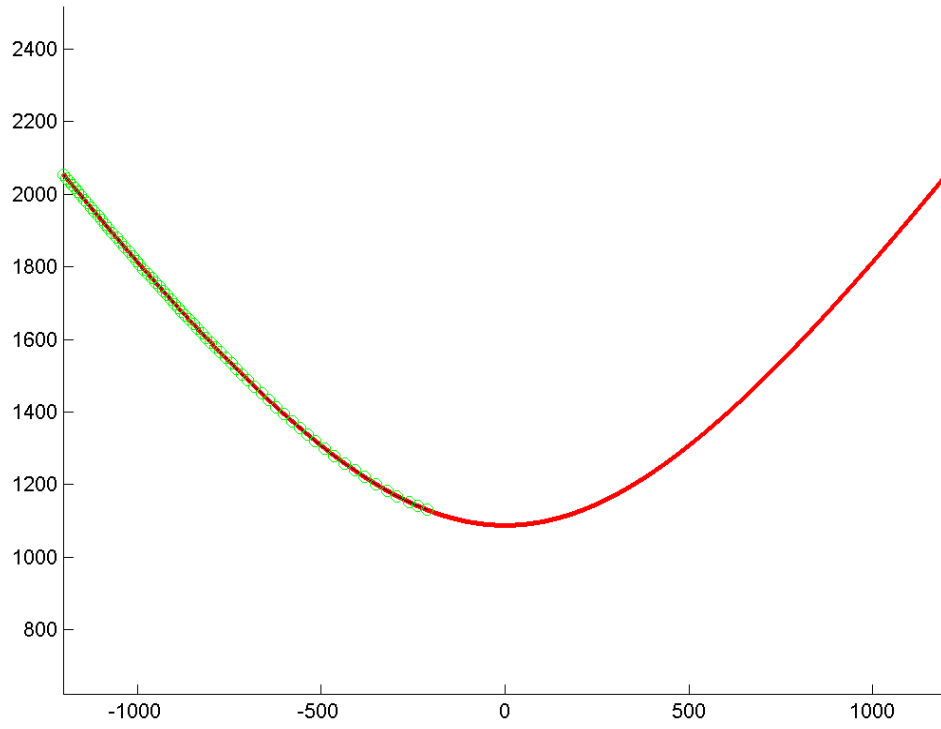
«αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες».

Στην παρακάτω ομάδα εικόνων παριστάνεται η δημιουργία «αμφιμονοσήμαντα ισομήκων» εγγεγραμμένων πολυγώνων σε μια υποψήφια πρότυπο καμπύλη P^S .



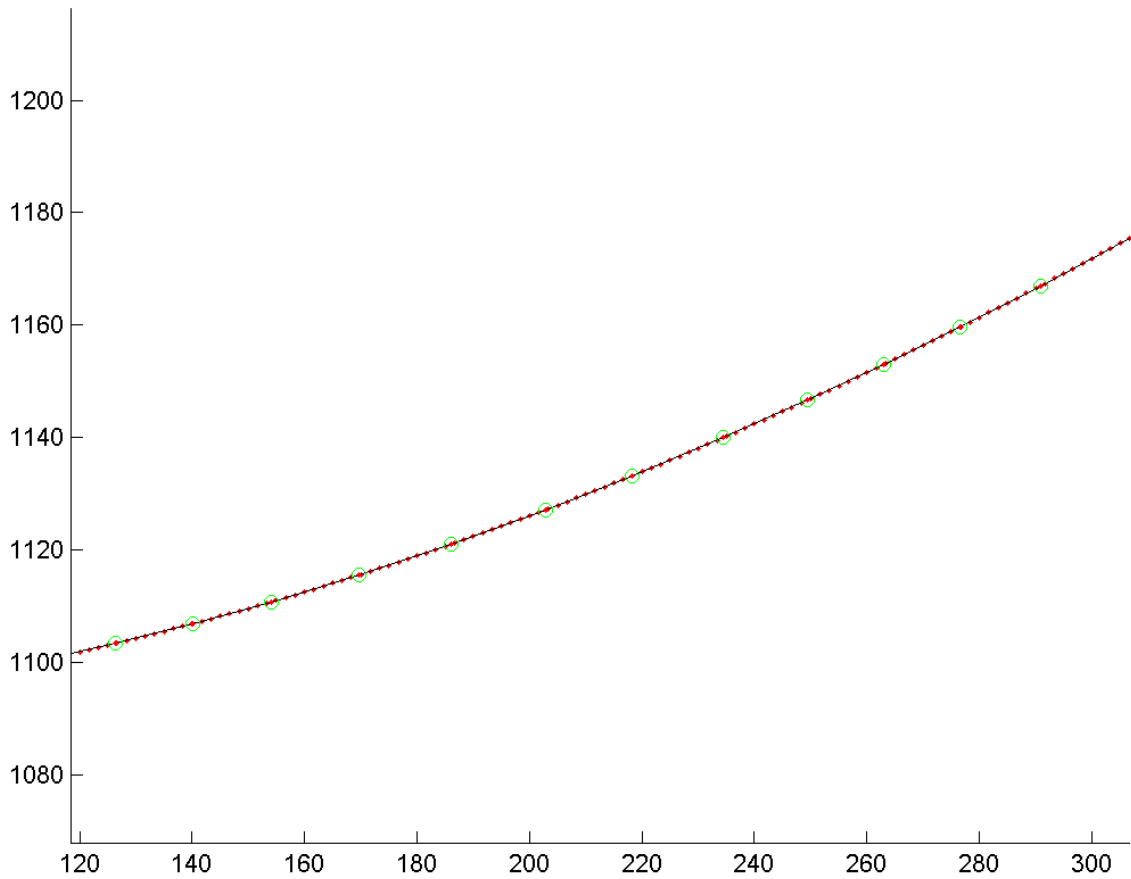
Εικόνα 5.3α

Οι κίτρινοι αστερίσκοι αποτελούν ένα αντικείμενο περιγράμματος C_A^T . Έχει γίνει μια δειγματοληψία της ψηφιακής καμπύλης της τοιχογραφίας για να προσφέρει καλύτερη εποπτεία.



Εικόνα 5.3β

Το αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες πολύγωνο του αντικείμενου περιγράμματος C_A^T του προηγούμενου σχήματος σε δύο θέσεις μιας υπονηφιάς προτύπου καμπύλης. Το κέντρο των πράσινων κύκλων είναι οι κορυφές αυτού του πολυγώνου.



Εικόνα 5.3γ

Λεπτομέρεια της παραπάνω εικόνας 5.3β. Η εστιγμένη καμπύλη στην πραγματικότητα είναι πολύ πιο πυκνή. Έχει γίνει μια δειγματοληψία αυτής για να προσφέρει καλύτερη εποπτεία

Βήμα Δ1.3

Αφού δημιουργήσαμε το πρώτο «αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες» με το C_A^T πολύγωνο $M_1^1 M_2^1 \dots M_{N^P}^1$ όλες οι κορυφές του οποίου είναι στοιχεία του P^S , «ολισθαίνουμε» το πρώτο σημείο αυτού και δημιουργούμε ένα δεύτερο αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες πολύγωνο με σημείο εκκίνησης το δεύτερο στοιχείο του P^S . Συνεχίζουμε τη διαδικασία παράγοντας όλη την κλάση των αμφιμονοσήμαντα ισομήκων με το C_A^T πολυγώνων με κορυφές τα σημεία M_j^n του P^S όπου ο άνω δείκτης n δείχνει το σημείο του P^S απ' όπου εκκινεί το πολύγωνο, ενώ ο κάτω δείκτης j είναι ο πληθικός αριθμός των κορυφών του πολυγώνου. $j = 1, \dots, N^P$. Αναλυτικά, ως πρώτο σημείο του n -οστού πολυγώνου θέτουμε το n -οστό σημείο της πυκνής προτύπου καμπύλης P^S , ενώ οι επόμενες κορυφές του πολυγώνου είναι τα σημεία του P^S που ορίζονται απ' την αναδρομική συνθήκη

$$M_j^n \in P^S \wedge (t(M_j^n) > t(M_{j-1}^n)): |d(M_j^n, M_{j-1}^n) - \delta s_{j-1}| = \min, \quad j = 2, \dots, N^P \quad (5.10)$$

Προφανώς τα ανωτέρω πολύγωνα δημιουργούνται εφ' όσον παραμένουμε εντός των ορίων

της προτύπου καμπύλης όπως αυτή ορίστηκε στο βήμα Δ1.1. Κατ' αυτόν τον τρόπο, δημιουργούμε μία πλήρη κλάση πολυγωνικών καμπυλών εγγεγραμμένων στην πρότυπη, κάθε μία από τις οποίες είναι αμφιμονοσήμαντα ισομήκης με τη θορυβώδη καμπύλη, εν προκειμένω με την αρχική εκτίμηση του τμήματος αντικειμένου.

Βήμα Δ1.4

Εφαρμόζουμε το Λήμμα 5.1 για να προσαρμόσουμε τη θορυβώδη καμπύλη π.χ. C_A^T , στρέφοντας και μετατοπίζοντας την ως στερεό σώμα, σε κάθε αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες πολύγωνο $M_1^n M_2^n \dots M_{N^p}^n$, εγγεγραμμένο στο P^S . Κατ' αυτόν τον τρόπο για όλα τα δυνατά σημεία εκκίνησης λαμβάνουμε ένα αντίστοιχο λάθος προσέγγισης E^n , αντίστοιχη γωνία στροφής \mathcal{G}_a^n και μετατοπίσεις x_a^n και y_a^n , όπου ο κάτω δείκτης a δηλώνει ότι οι αντίστοιχες ποσότητες είναι αρχικές εκτιμήσεις των βέλτιστων τιμών τους.

Απολύτως αυστηρά, για να μας δώσει η ανωτέρω διαδικασία 1 τη βέλτιστη σχετική θέση θορυβώδους και προτύπου καμπύλης θα έπρεπε, λόγω του τρόπου δημιουργίας της εκάστοτε ισομήκους καμπύλης, η θορυβώδης καμπύλη να είναι εγγεγραμμένη στην πρότυπη. Στην προκειμένη εφαρμογή εάν θεωρήσουμε ότι ο καλλιτέχνης που δημιουργούσε, περίπου 3650 χρόνια πριν, τις συγκεκριμένες τοιχογραφίες, ακουμπούσε το πινέλο σε έναν οδηγό στη μία του πλευρά τότε συνήθως ισχύει σε πολύ ικανοποιητικό βαθμό η υπόθεση ότι το περίγραμμα της πινελιάς είναι εγγεγραμμένο στην πρότυπο καμπύλη. Για να άρουμε εν τούτοις αυτό τον αυστηρό περιορισμό, αναπτύξαμε μία δεύτερη εξαντλητική διαδικασία προσαρμογής της θορυβώδους καμπύλης στην πρότυπο η οποία περιγράφεται κατωτέρω.

Εάν η υπόθεσή μας είναι σωστή, ο καλλιτέχνης ή οι καλλιτέχνες γύρω στο 1650 π.Χ., περιέστρεφε και μετατόπιζε τον οδηγό ώστε να τον τοποθετήσει στο σημείο του επίπεδου τοίχου που επιθυμούσε και προσάρμοζε στον οδηγό το πινέλο προκειμένου να δημιουργήσει κάθε φορά κάποιο αντικείμενο περιγράμματος. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή έχουμε την πληροφορία των διάφορων C_A^T και προσαρμόζουμε το καθένα εξ αυτών στους πιθανούς οδηγούς. Προσπαθούμε με άλλα λόγια να ακολουθήσουμε την αντίστροφη πορεία.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι τα τελικά συμπεράσματα αυτής της εργασίας επιβεβαιώνουν με πολύ μεγάλη πιθανότητα τους ανωτέρω ισχυρισμούς.

Διαδικασία 2: Τελική βέλτιστη προσαρμογή του εκάστοτε C_A^T σε τυχούσα πρότυπο καμπύλη.

Βήμα Δ2.1

Για κάθε σημείο εκκίνησης και κάθε αμφιμονοσήμαντα ισομήκες πολύγωνο $M_1^n M_2^n \dots M_{N^P}^n$ τοποθετούμε το C_A^T ώστε να ταιριάζει βέλτιστα στο πολύγωνο αυτό με εφαρμογή της διαδικασίας 1. Δηλαδή περιστρέφουμε το C_A^T κατά γωνία θ_a^n και το μετατοπίζουμε παράλληλα κατά x_a^n, y_a^n ώστε αυτό να ταιριάζει βέλτιστα στο πολύγωνο $M_1^n M_2^n \dots M_{N^P}^n$ σύμφωνα με το Λήμμα 5.1. Με αυτή τη διαδικασία το C_A^T μεταφέρεται ως στερεό σώμα στα σημεία Γ_j ($j=1, \dots, N^P$) τα οποία σχηματίζουν το πολύγωνο Γ_A^T που είναι ίσο με το C_A^T . Στη θέση βέλτιστης προσαρμογής του C_A^T στην πρότυπο καμπύλη P^S κάθε ένα από τα σημεία αυτά βρίσκεται πολύ κοντά στο ομόλογο του σημείο του αμφιμονοσήμαντα ισομήκους πολυγώνου: δηλαδή το Γ_1 κοντά στο M_1^n το Γ_2 στο M_2^n κ.ο.κ.

Βήμα Δ2.2

Ορίζουμε μια νέα έννοια απόστασης του C_A^T από όλη την πρότυπο καμπύλη P^S ως εξής:

$$d^f(C_A^T, P^S) = d^f(\Gamma_A^T, P^S) = \sum_{j=1}^{N^P} \frac{d(\Gamma_j, P^S)}{N^P} \quad (5.11)$$

όπου προφανώς

$$d(\Gamma_j, P^S) = \min_{M \in P^S} (d(\Gamma_j, M)). \quad (5.12)$$

Βήμα Δ2.3

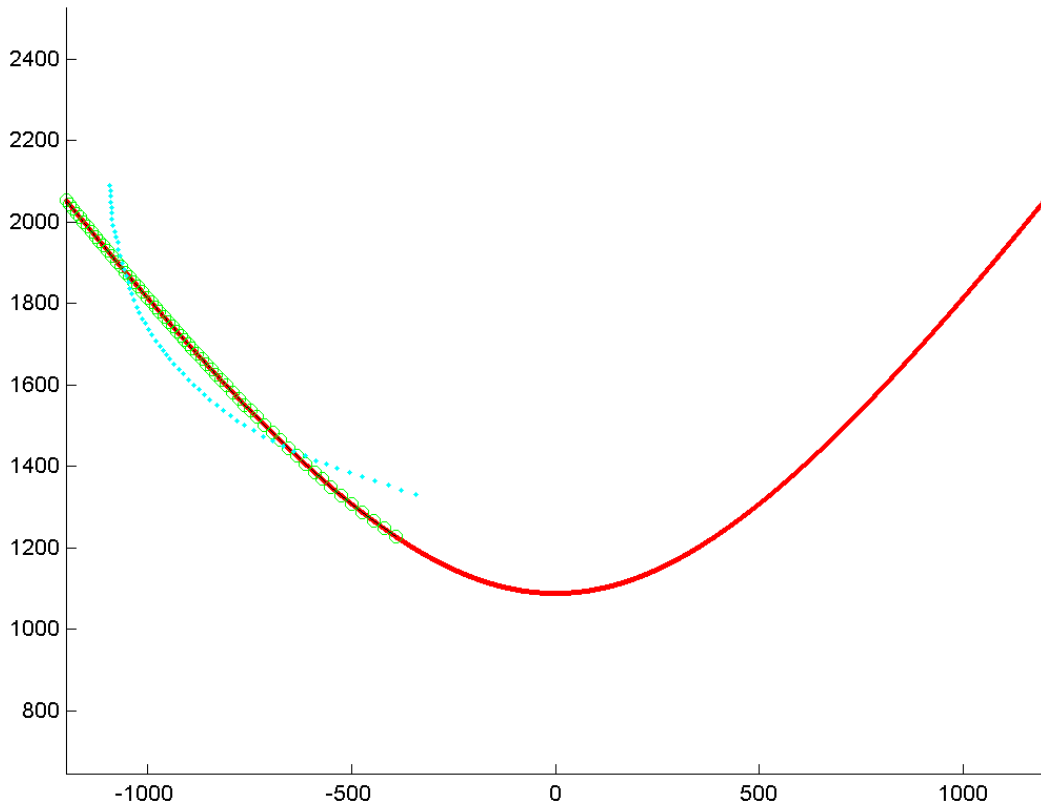
Μετακινούμε παράλληλα και περιστρέφουμε το Γ_A^T γύρω από τη θέση του, όπως αυτή προσδιορίστηκε στο βήμα Δ2.1. Η μετατόπιση και η στροφή του Γ_A^T γίνεται εντός πολύ στενών ορίων τα οποία προσδιορίζονται ως ακολούθως: έχουμε ήδη θέσει ένα αποδεκτό όριο λάθους προσαρμογής του C_A^T στην πρότυπη καμπύλη π.χ. τα 0.8mm ανά pixel. Εάν το μέσο μήκος των τμημάτων αντικειμένου είναι π.χ. 10.7cm τότε μία περιστροφή του C_A^T γύρω απ' τη θέση ισορροπίας μέχρι $0.8/107 = 0.0075 \text{ grad}$ ενδέχεται να μην καταστρατηγήσει τη συγκεκριμένη απαίτηση άνω φράγματος στο λάθος. Τα ίδια ισχύουν για μία παράλληλη μετατόπιση κατά τον x άξονα και τον y άξονα μέχρι 0.8mm.

Περιστρέφουμε και μετατοπίζουμε το Γ_A^T γύρω από τα θ_a^n, x_a^n, y_a^n εντός των προαναφερθέντων στενών ορίων και με πολύ μικρά βήματα αλλαγής της γωνίας και της

μετατόπισης, π.χ. 0.0005rad και 0.01mm. Για κάθε θέση του Γ_A^T εντός των ορίων αυτών, υπολογίζουμε το λάθος που ορίστηκε στο βήμα Δ2.2. Κρατάμε το μικρότερο από όλα αυτά τα λάθη και θεωρούμε ότι αυτό είναι το ελάχιστο λάθος με το οποίο το C_A^T δύναται να προσεγγίσει την εκάστοτε πρότυπο καμπύλη κοντά στο σημείο εκκίνησης n .

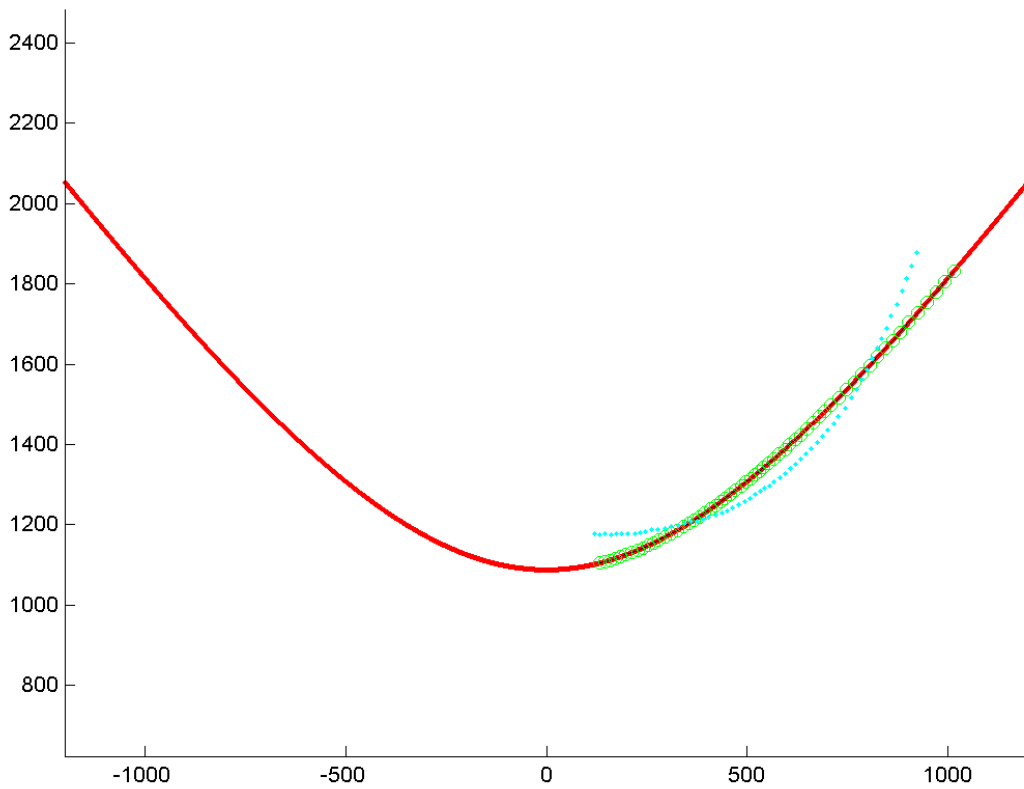
Το ελάχιστο όλων αυτών των λαθών μας δίνει το βέλτιστο τρόπο με τον οποίο το εκάστοτε C_A^T προσαρμόζεται σε όλη την πρότυπο καμπύλη. Ταυτόχρονα, ο συνδυασμός των μετασχηματισμών που εφαρμόστηκαν στις διαδικασίες 1 και 2 δίνουν την ακριβή γωνία στροφής καθώς και τις μετατοπίσεις κατά x και y οι οποίες πραγματοποιούν αυτή τη βέλτιστη προσαρμογή του εκάστοτε C_A^T επί της συγκεκριμένης προτύπου καμπύλης. Επιπλέον το ελάχιστο αυτό λάθος αντιστοιχεί σε κάποιο σημείο του πυκνού προτύπου που είναι σημείο εκκίνησης του τμήματος του P^S το οποίο βέλτιστα αντιστοιχεί στο C_A^T .

Στις παρακάτω εικόνες (5.4α έως 5.4γ) παρουσιάζονται διαδοχικά σε ορισμένες χαρακτηριστικές θέσεις μιας υποψήφιας προτύπου καμπύλης οι προσαρμογές ενός αντικειμένου περιγράμματος C_A^T σε αυτήν. Στο σχήμα 5.4γ παρουσιάζεται η προσαρμογή με το μικρότερο λάθος.



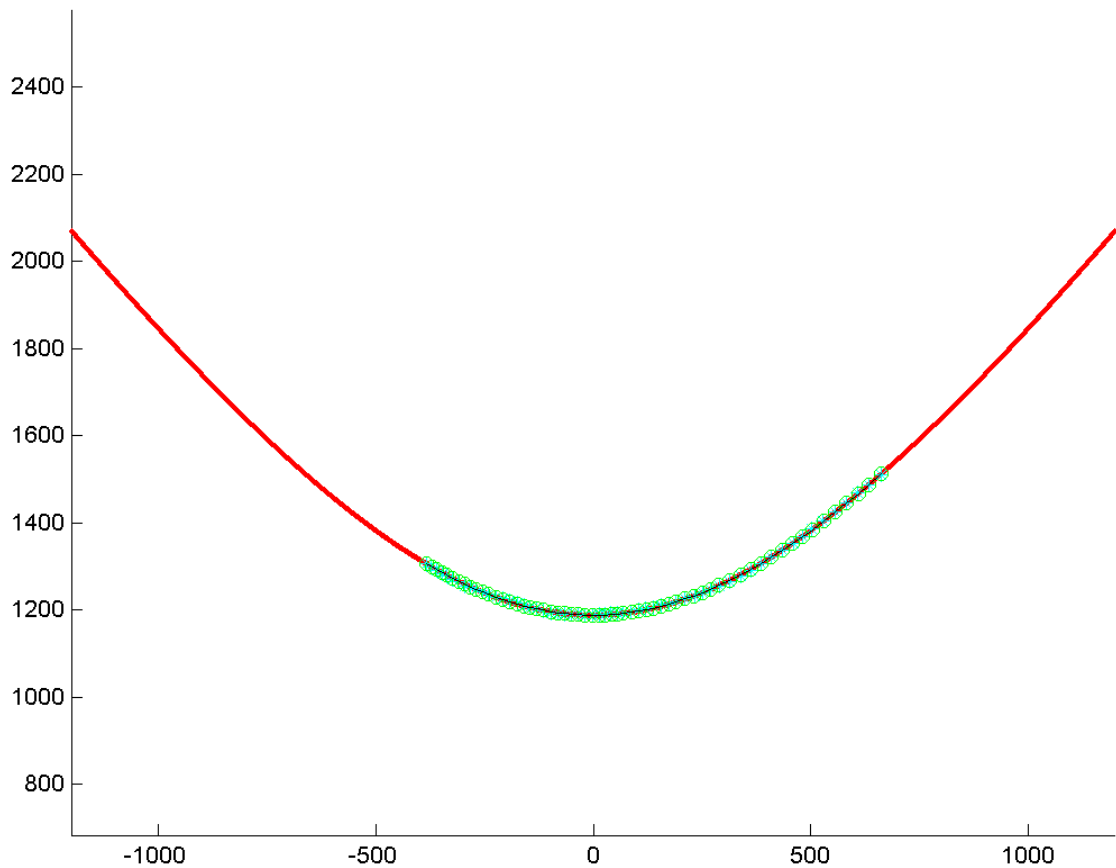
Εικόνα 5.4α

Ταίριασμα ενός C_A^T σε ένα κομμάτι υποψήφιας προτύπου υπερβολής.



Εικόνα 5.4β

Ταίριασμα του ίδιου C_A^T σε άλλο κομμάτι της ίδιας υποψήφιας προτύπου υπερβολής.



Εικόνα 5.4γ

Ταίριασμα του ιδίου C_A^T σε ένα κομμάτι της ίδιας υπονήφιας προτύπου υπερβολής που δίνει το μικρότερο λάθος.

Στην περίπτωση που το λάθος προσαρμογής της διαδικασίας 1 είναι μικρό τότε η διόρθωση στην τιμή του λάθους που δίνει η διαδικασία 2 είναι μικρότερη του 10%. Επειδή όμως επιθυμούμε αφ' ενός την αδιαμφισβήτητη ελαχιστοποίηση του λάθους αλλά και το βέλτιστο δυνατό προσδιορισμό των παραμέτρων του πρότυπου οδηγού, για το λόγο αυτό αναπτύξαμε και εφαρμόσαμε τη διαδικασία 2.

Δηλαδή συμπερασματικά οι διαδικασίες 1 και 2 περιλαμβάνουν τα εξής:

1) Δημιουργούμε το αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες με το C_A^T πολύγωνο, το οποίο εκκινεί από το πρώτο σημείο του P^S . 2) Εφαρμόζουμε το Λήμμα 5.1 και προσαρμόζουμε βέλτιστα το ζωγραφισμένο τμήμα αντικειμένου C_A^T στο συγκεκριμένο ισόμηκες πολύγωνο. Το Λήμμα 5.1 προσφέρει και το λάθος προσαρμογής έστω E_1 . 3) Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 και 2 με σημεία εκκίνησης τα επόμενα σημεία του P^S και έχουμε κάθε φορά ένα λάθος E_n . Το αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες του C_A^T με το μικρότερο E ταιριάζει βέλτιστα στο Γ_A^T . 4) Ακολούθως υπολογίζουμε την «απόσταση» του εκάστοτε Γ_A^T από την πρότυπο καμπύλη. Το τμήμα της προτύπου καμπύλης που δίνει τη μικρότερη απόσταση, είναι και το «αντίστοιχο» τμήμα της προτύπου καμπύλης στο εκάστοτε C_A^T . Ουσιαστικά δηλαδή το C_A^T

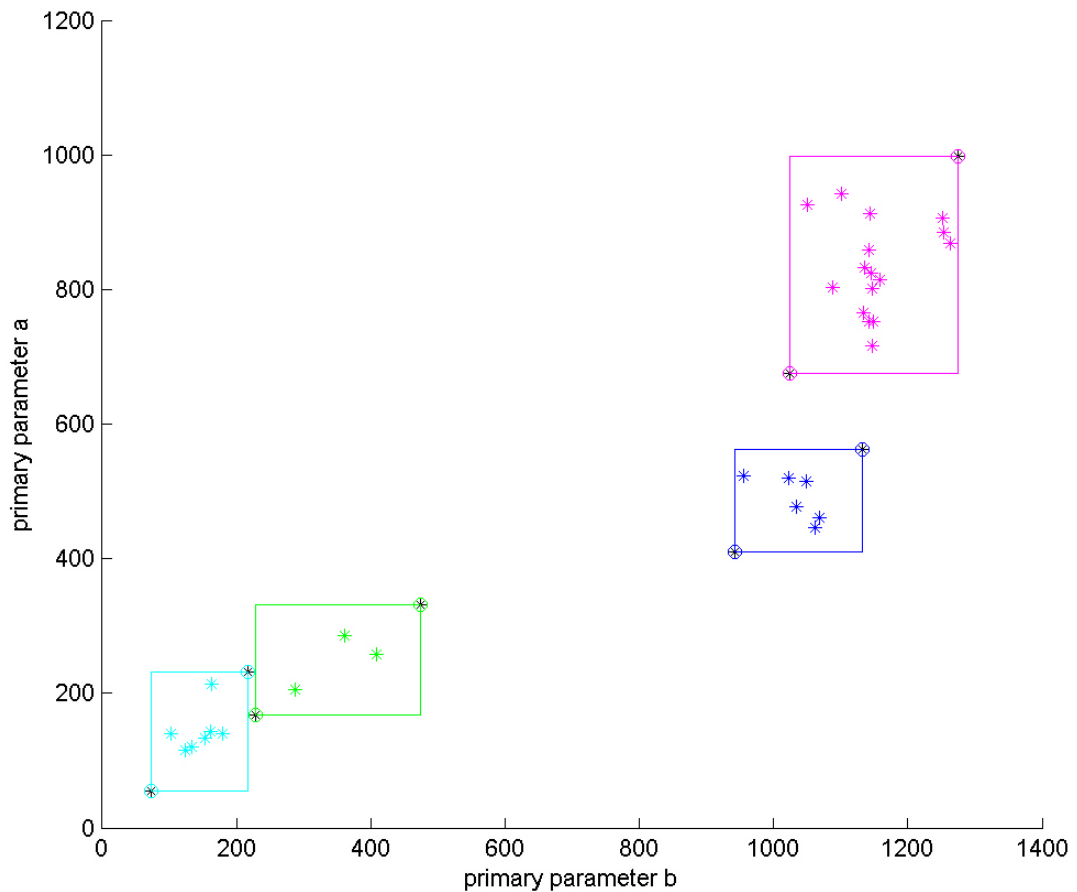
αντιστοιχίζεται βέλτιστα σε ένα τμήμα προτύπου μέσω του Γ_A^T .

5.2 Ακριβής προσδιορισμός των καμπυλογράφων που πιθανότατα χρησιμοποιήθηκαν για το σχεδιασμό των τοιχογραφιών

Μετά το πέρας της διαδικασίας που περιγράφεται στο κεφάλαιο 4 σε κάθε τμήμα αντικειμένου C_A^T έχει αντιστοιχισθεί με μονοσήμαντο τρόπο ένας τύπος προτύπου γεωμετρικής καμπύλης και συγκεκριμένα υπερβολή, γραμμική σπείρα ή έλλειψη, ως και μία πρώτη εκτίμηση των πρωταρχικών παραμέτρων αυτού του γεωμετρικού προτύπου. Στο παρόν κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την πληροφορία, για να προσδιορίσουμε το ελάχιστο δυνατό πλήθος καμπυλογράφων, οι οποίοι πιθανότατα χρησιμοποιήθηκαν για τη δημιουργία των εν λόγω τοιχογραφιών. Προς την κατεύθυνση αυτή επιτελούνται τα παρακάτω βήματα.

5.2.1 Προσδιορισμός των ορίων των πρωταρχικών παραμέτρων κάθε πιθανού οδηγού

Ας θεωρήσουμε όλα τα τμήματα αντικειμένου C_A^T για τα οποία προέκυψε ότι αντιστοιχούν σε υπερβολή μετά την εφαρμογή των μεθόδων του κεφαλαίου 4. Προς το σκοπό αυτό, για παράδειγμα, απεικονίζουμε κατ' αρχήν όλες τις υπολογισθείσες πρωταρχικές παραμέτρους (a,b) κάθε προτύπου υπερβολής που αντιστοιχίστηκε σε κάθε ένα τμήμα αντικειμένου στη διαδικασία του κεφ. 4. Στη γραφική αυτή παράσταση η οποία παρουσιάζεται στην εικόνα 5.5 κάθε αστερίσκος αντιστοιχεί σε μία πρότυπη υπερβολή, είναι δε εύλογο να υποθέσουμε ότι κάθε υποψήφιος οδηγός γεννά και μία κλάση παραπλήσιων τέτοιων σημείων δηλαδή ένα «νέφος» τέτοιων σημείων.



Εικόνα 5.5

Γραφική παράσταση στο χώρο των πρωταρχικών παραμέτρων των υπερβολών που βέλτιστα προσεγγίζουν κάθε τμήμα αντικειμένου. Στο σχήμα αναπαρίσταται το αποτέλεσμα της διαδικασίας συσταδοποίησης. Η βαθμονόμηση των αξόνων είναι σε pixel. Η ανάλυση κάθε εικόνας είναι 59.7 pixels ανά εκατοστό.

Πράγματι, και μία απλή εποπτεία του εικόνας 5.5, καταδεικνύει ότι υπάρχουν τέσσερις τέτοιες κλάσεις σημείων όπου το κάθε νέφος παρίσταται και με διαφορετικό χρώμα. Εν τούτοις εφαρμόσαμε αρχές και μεθόδους από τη θεωρία συσταδοποίησης (clustering methods) για να χωρίσουμε τα αντικείμενα σε ομάδες. Η εφαρμογή της διαδικασίας clustering με χρήση του αλγορίθμου K-means όσο και ενός ιεραρχικού αλγορίθμου, επιβεβαίωσε το χωρισμό σε τέσσερις κλάσεις, όπως εμφανίζονται στην εικόνα 5.5. Επειδή οι διαφοροποιήσεις μεταξύ των $a_{j,v}$ $b_{j,v}$ κάθε κλάσης, όπου ο δείκτης j διατρέχει τα υποψήφια τμήματα αντικειμένου C_A^T που βέλτιστα προσεγγίστηκαν από τα σημεία αυτής της κλάσης, οφείλονται σε πολλούς τυχαίους παράγοντες. Επομένως αναμένει κανείς, σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, ότι κάθε μια από τις τυχαίες μεταβλητές $a_{j,v}$ και $b_{j,v}$ ακολουθεί κανονική κατανομή για το τυχόν v -οστό χωρίο. Εφαρμογή του τεστ Kolmogorov–Smirnov ($\alpha=0.01$) επιβεβαίωσε ότι δεν υπάρχουν λόγοι απόρριψης αυτής της υπόθεσης.

Συγκεκριμένα έστωσαν $(a_{j,v}, b_{j,v})$ οι πρωταρχικές παράμετροι της j -οστής υπερβολής του v -οστού χωρίου. Διατυπώνουμε και υιοθετούμε την υπόθεση ότι ο οδηγός που ενδεχομένως γέννησε κάθε κλάση ήταν ο μεγιστοπιθάνος δηλαδή αυτός που είχε πρωταρχικές παραμέτρους τη θεωρητική μέση τιμή του πληθυσμού των $a_{j,v}$ αφ' ενός και $b_{j,v}$ αφ' ετέρου. Όπως προαναφέρθηκε οι μεταβλητές αυτές ακολουθούν κανονικές κατανομές τις οποίες ευλόγως θεωρούμε ανεξάρτητες. Έστωσαν μ_v^a, μ_v^b οι μέσες θεωρητικές τιμές αυτών των κατανομών, \bar{a}_v, \bar{b}_v οι δειγματικές μέσες τιμές και S_v^a, S_v^b οι δειγματικές τυπικές αποκλίσεις για το v -οστό χωρίο. Τότε οι ποσότητες t_v^a και t_v^b

$$t_v^a = \frac{\bar{a}_v - \mu_v^a}{\left(\frac{S_v^a}{\sqrt{N_v}} \right)} \quad (5.13)$$

$$t_v^b = \frac{\bar{b}_v - \mu_v^b}{\left(\frac{S_v^b}{\sqrt{N_v}} \right)} \quad (5.14)$$

ακολουθούν η κάθε μία κατανομή Student με βαθμούς ελευθερίας $N_v - 1$ όπου N_v το πλήθος των υπερβολών του v -οστού χωρίου. Υπενθυμίζουμε ότι ο αριθμός N_v είναι ίσος και με τον αριθμό των τμημάτων αντικείμενου C_A^T που βέλτιστα προσεγγίστηκαν από υπερβολή με πρωταρχικές παραμέτρους εντός του v -οστού χωρίου. Επειδή ένα συγκεκριμένο ποσοστό ενός πληθυσμού που ακολουθεί κατανομή Student με $N_v - 1$ βαθμούς ελευθερίας εντοπίζεται εντός ενός αντίστοιχου διαστήματος $(-\delta_v, \delta_v)$ τότε οι παράμετροι του εκάστοτε οδηγού είναι ο πληθυσμιακός μέσος όρος των $a_{j,v}, b_{j,v}$ που βρίσκεται εντός του ορθογωνίου παραλληλογράμμου το οποίο ορίζεται από τις ανισότητες

$$\bar{a}_v - \delta_v \frac{S_v^a}{\sqrt{N_v}} \leq \mu_v^a \leq \bar{a}_v + \delta_v \frac{S_v^a}{\sqrt{N_v}} \quad (5.15)$$

και

$$\bar{b}_v - \delta_v \frac{S_v^b}{\sqrt{N_v}} \leq \mu_v^b \leq \bar{b}_v + \delta_v \frac{S_v^b}{\sqrt{N_v}} \quad (5.16)$$

Για παράδειγμα στο χωρίο που είναι χρωματισμένο με χρώμα ματζέντα ανήκουν 18 αντικείμενα περιγράμματος με $\bar{a}_1 = 836.43, \bar{b}_1 = 1149.96, S_1^a = 72.25, S_1^b = 55.92$, οπότε

προκύπτουν τα όρια του χωρίου $[674.89, 997.97] \times [1024.93, 1275.00]$ για το a και το b της υπερβολής αντίστοιχα.

Στο χωρίο που είναι χρωματισμένο με μπλε χρώμα εντάσσονται 6 αντικείμενα περιγράμματος με $\bar{a}_2 = 486.21, \bar{b}_2 = 1036.90, S_2^a = 32.23, S_2^b = 39.85$, οπότε προκύπτουν τα όρια του χωρίου $[453.15, 519.28] \times [996.01, 1077.79]$ για το a και το b της υπερβολής αντίστοιχα.

Στο χωρίο που ο χρωματισμός είναι πράσινος ανήκουν 3 αντικείμενα περιγράμματος με $\bar{a}_3 = 249.40, \bar{b}_3 = 351.84, S_3^a = 40.97, S_3^b = 61.00$, οπότε προκύπτουν τα όρια του χωρίου $[167.04, 331.76] \times [229.21, 474.47]$ για το a και το b της υπερβολής αντίστοιχα.

Τέλος στο χωρίο που ο χρωματισμός είναι κυανός ανήκουν 7 αντικείμενα περιγράμματος με $\bar{a}_4 = 143.62, \bar{b}_4 = 145.35, S_4^a = 32.54, S_4^b = 26.57$, οπότε προκύπτουν τα όρια του χωρίου $[55.29, 231.95] \times [73.24, 217.46]$ για το a και το b της υπερβολής αντίστοιχα.

Σε επόμενο βήμα δημιουργούμε ένα πλέγμα τιμών για κάθε κλάση όπως περιγράφεται κατωτέρω.

5.2.2 Ακριβής προσδιορισμός των τιμών των πρωταρχικών παραμέτρων των καμπυλογράφων.

Βήμα1: Δημιουργία πυκνού πλέγματος σε κάθε χωρίο τιμών των πρωταρχικών παραμέτρων

Στην παράγραφο 5.2.1 έχουμε ομαδοποιήσει όλες τις πρωταρχικές παραμέτρους κάθε τύπου υποψηφίων οδηγών. Είναι απολύτως εύλογο να υποθέσουμε ότι οι ακριβείς τιμές των πρωταρχικών παραμέτρων του οδηγού ο οποίος «γέννησε» τα τμήματα αντικειμένου του κάθε χωρίου, βρίσκονται εντός ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου όπως αυτό ορίστηκε προηγούμενα.

Εν συνεχεία δημιουργούμε διαμερίσεις I^a, I^b πλήθους σημείων K_a και K_b αντίστοιχα, των διαστημάτων που προκύπτουν από τις ανωτέρω ανισότητες (5.15) και (5.16) με πολύ μικρό βήμα διαμέρισης για κάθε χωρίο χωριστά. Ακολούθως, μέσω του καρτεσιανού γινομένου $I^a \times I^b$ των εν λόγω διαμερίσεων, λαμβάνουμε $K_a \cdot K_b$ σημεία που σχηματίζουν ένα ορθογώνιο πλέγμα σε κάθε διαφορετικό χωρίο πρωτογενών παραμέτρων. Κάθε ζεύγος τιμών (I_λ^a, I_μ^b) $\lambda = 1, \dots, K_a$ $\mu = 1, \dots, K_b$ αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη

πρωτότυπη υπερβολή με πρωταρχικές παραμέτρους τις συντεταγμένες αυτού του σημείου στον a, b χώρο.

Βήμα2: Βέλτιστη προσαρμογή όλων των τμημάτων αντικειμένου C_A^T σε κάθε πρότυπο καμπύλη του πλέγματος.

Όπως προαναφέρθηκε κάθε σημείο του πλέγματος $I^a \times I^b$ αντιστοιχεί μονοσήμαντα μια πρότυπη καμπύλη, για παράδειγμα μια υπερβολή. Εφαρμόζοντας τις διαδικασίες που περιγράφηκαν στην παράγραφο 5.1 προσαρμόζουμε βέλτιστα όλα τα τμήματα αντικειμένου του συγκεκριμένου χωρίου στην πρότυπο αυτή καμπύλη του σημείου I_λ^a, I_μ^b και κατ' αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε N_ν αντίστοιχα μέσα λάθη βέλτιστης προσαρμογής $\varepsilon_{\lambda,\mu}^\rho, \rho = 1, \dots, N_\nu$ και μέγιστα λάθη βέλτιστης προσαρμογής $\zeta_{\lambda,\mu}^\rho$. Αποδίδουμε ένα συνολικό μέσο λάθος προσαρμογής όλων των C_A^T στη συγκεκριμένη πρότυπη υπερβολή, ως και ένα μέγιστο σχετικό λάθος ως εξής:

$$E_{\lambda,\mu}^{ALL} = \sum_{\rho=1}^{N_\nu} \varepsilon_{\lambda,\mu}^\rho \quad (5.17)$$

και

$$Z_{\lambda,\mu}^{ALL} = \max \{ \zeta_{\lambda,\mu}^\rho, \rho = 1, \dots, N_\nu \}. \quad (5.18)$$

Οπτική αναπαράσταση των λαθών αυτών για ένα συγκεκριμένο χωρίο υπερβολών και αντίστοιχο ορθογώνιο πλέγμα παρουσιάζεται στις εικόνες 5.6α και 5.6β.

Βήμα3: Τελικός προσδιορισμός των τιμών των πρωταρχικών παραμέτρων κάθε οδηγού

Δοκιμάσαμε τρεις διαφορετικές δυνατότητες για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του οδηγού που γέννησε όλα τα τμήματα αντικειμένου ενός χωρίου και συγκεκριμένα:

α) Την ελαχιστοποίηση του ολικού λάθους $E_{\lambda,\mu}^{ALL}$ πάνω σε όλα τα σημεία I_λ^a, I_μ^b του ορθογωνίου πλέγματος του χωρίου.

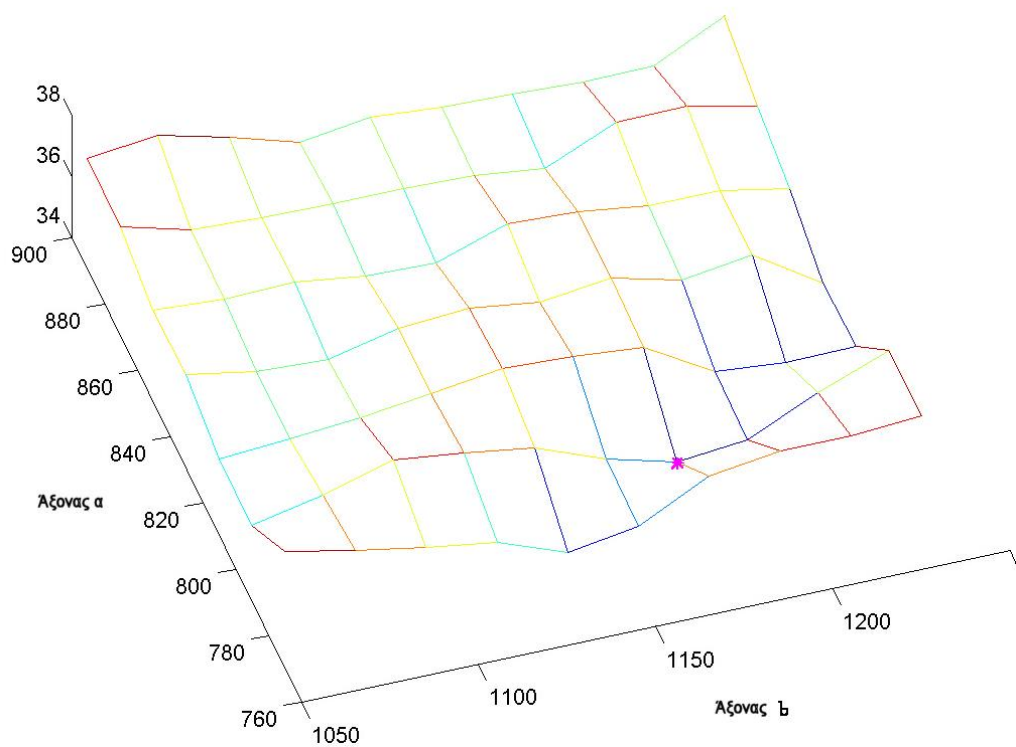
β) Την ελαχιστοποίηση του λάθους $Z_{\lambda,\mu}^{ALL}$ πάνω σε όλα τα σημεία I_λ^a, I_μ^b του ορθογωνίου πλέγματος του χωρίου.

γ) Την ελαχιστοποίηση ενός γραμμικού συνδυασμού $\beta_1 \frac{E_{\lambda,\mu}^{ALL}}{N_\nu} + \beta_2 Z_{\lambda,\mu}^{ALL}$ με βάρη

β_1, β_2 , για κάθε σημείο του πλέγματος $I^a \times I^b$.

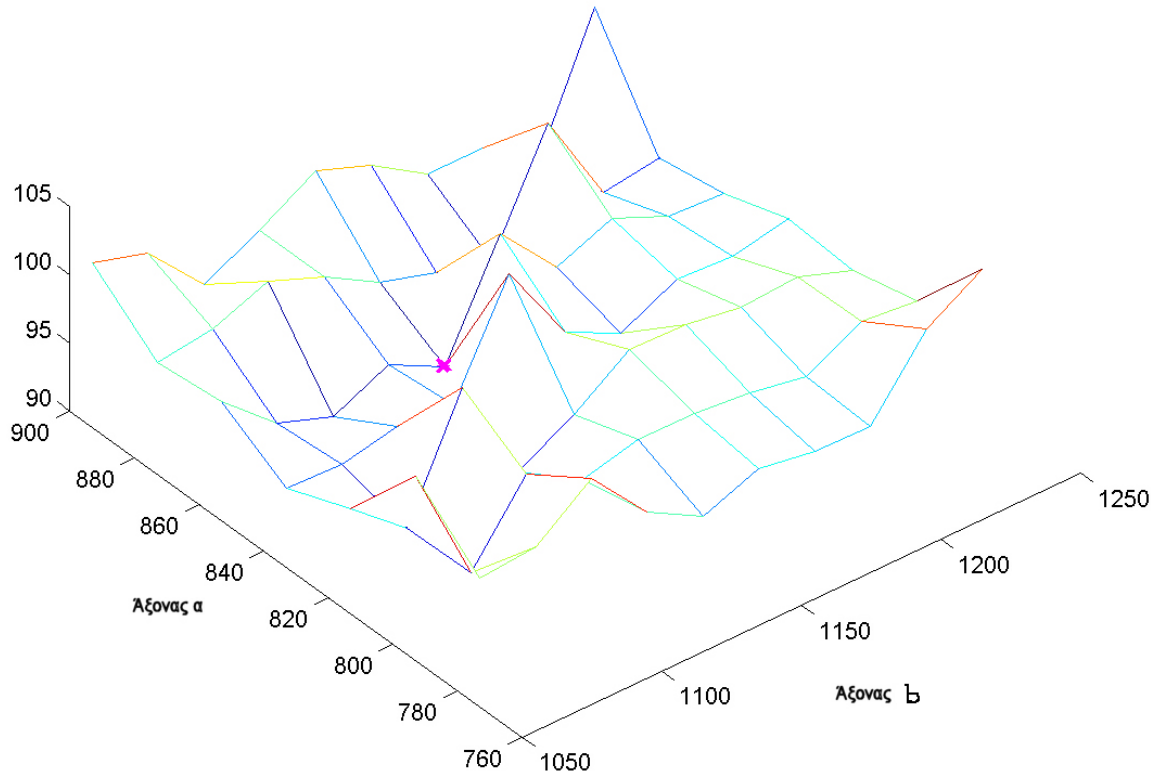
Η τελική μας απόφαση για την επιλογή του καταλληλότερου κριτηρίου καθοδηγήθηκε από την τελική εμφάνιση των προτύπων οδηγών επί των υπαρκτών ζωγραφισμένων

αντικειμένων. Συγκεκριμένα, κατά την εναλλαγή τμημάτων αντικειμένου, όπου αυτή υπήρχε, έπρεπε οι οδηγοί που εντοπίσαμε να εξασφάλιζαν κατά το δυνατόν συνέχεια του περιγράμματος αντικειμένου ως και συνέχεια του εφαπτομένου μοναδιαίου διανύσματος. Και τα τρία προαναφερθέντα κριτήρια έδωσαν παραπλήσια εξαιρετικά αποτελέσματα όπως μπορεί να φανεί και στα σχήματα 5.6.



Εικόνα 5.6α

Γραφική αναπαράσταση του πλέγματος $I^a \times I^b$ και των αντίστοιχων λαθών $E_{\lambda,\mu}^{ALL}$ για το χωρίο της εικόνας 5.5 με χρώμα ματζέντα. Το σημείο του πλέγματος με το ελάχιστο λάθος σημειώνεται με ματζέντα αστερίσκο.



Εικόνα 5.6β

Γραφική αναπαράσταση του πλέγματος $I^a \times I^b$ και των αντίστοιχων λαθών $Z_{\lambda,\mu}^{ALL}$ για το χωρίο της εικόνας 5.5 με χρώμα ματζέντα. Το σημείο του πλέγματος με το ελάχιστο λάθος σημειώνεται με ματζέντα αστερίσκο.

Ελάχιστα καλύτερο διεφάνη να είναι το κριτήριο γ με

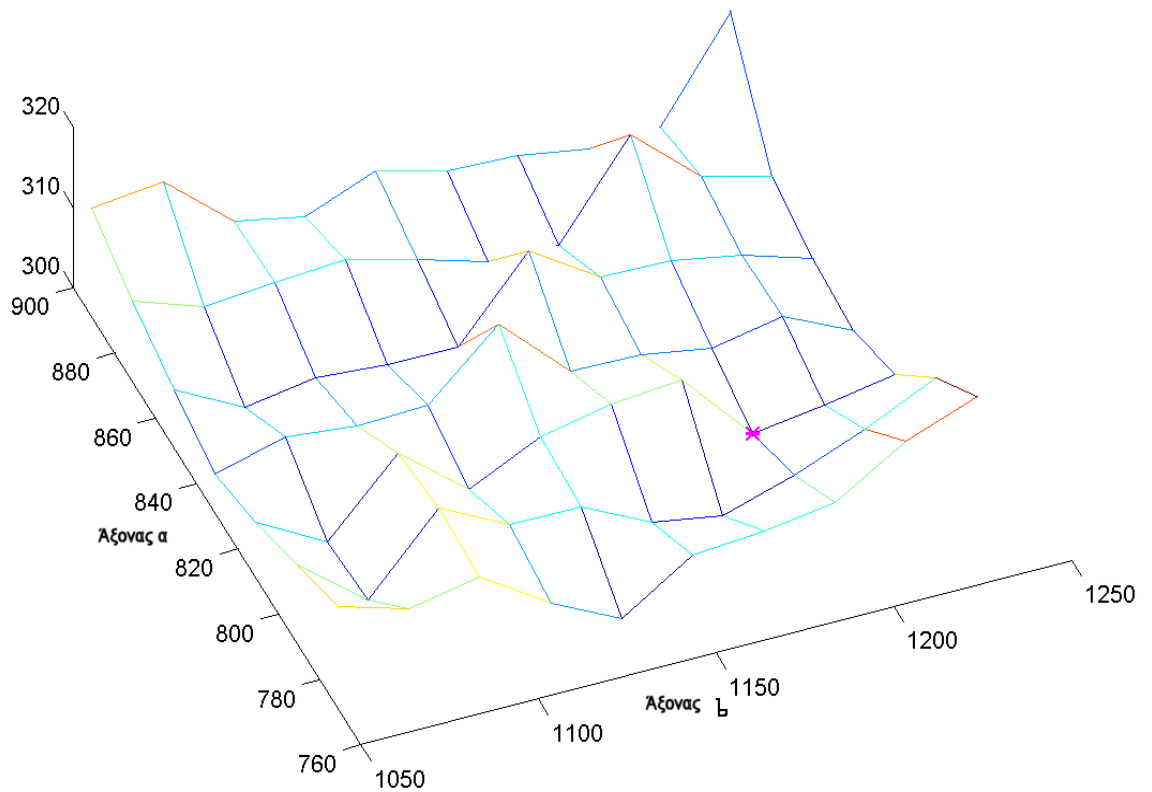
$$\beta_1 = \underset{\rho C_A^T}{mean} \left(\min_{\lambda,\mu} (\zeta_{\lambda,\mu}^\rho) \right) \cong 5.5 \quad (5.19)$$

και

$$\beta_2 = \underset{\rho C_A^T}{mean} \left(\min_{\lambda,\mu} (\varepsilon_{\lambda,\mu}^\rho) \right) \cong 1.4 \quad (5.20)$$

Δηλαδή, για κάθε τμήμα αντικειμένου C_A^T εφαρμόζουμε το Λήμμα 5.1, τη διαδικασία 1 και τη διαδικασία 2 της παραγράφου 5.1 και ταιριάζουμε βέλτιστα αυτό το C_A^T σε κάθε πρότυπη υπερβολή με παραμέτρους a, b που αντιστοιχούν σε κάθε σημείο (λ, μ) του πλέγματος που δημιουργήσαμε. Κάθε τέτοια βέλτιστη προσαρμογή πραγματοποιείται με ένα μέσο λάθος $\varepsilon_{\lambda,\mu}^\rho$ και ένα μέγιστο λάθος $\zeta_{\lambda,\mu}^\rho$. Για κάθε τμήμα αντικειμένου υπολογίζουμε το ελάχιστο λάθος $\varepsilon_{\min}^\rho = \min_{\lambda,\mu} (\varepsilon_{\lambda,\mu}^\rho)$ δηλαδή το ελάχιστο λάθος προσαρμογής σε όλο το πλέγμα. Επίσης υπολογίζουμε το ελάχιστο μέγιστο λάθος σε όλο το πλέγμα $\zeta_{\min}^\rho = \min_{\lambda,\mu} (\zeta_{\lambda,\mu}^\rho)$

. Από τα $\varepsilon_{\min}^{\rho}$ και ζ_{\min}^{ρ} υπολογίζουμε τα β_1 και β_2 με υπολογισμό του μέσου όρου τους. Εν συνεχεία, για κάθε σημείο (λ, μ) του πλέγματος ξεχωριστά υπολογίζουμε το βέλτιστο λάθος προσαρμογής $\eta_{\lambda, \mu}^{\rho} = \beta_1 \varepsilon_{\lambda, \mu}^{\rho} + \beta_2 \zeta_{\lambda, \mu}^{\rho}$, όπου το ρ τρέχει σε όλα τα C_A^T της συγκεκριμένης κλάσης. Τα βάρη β_1 και β_2 επελέγησαν προηγουμένως εις τρόπον ώστε η συνεισφορά των μέσων λαθών $\varepsilon_{\lambda, \mu}^{\rho}$ και των μεγίστων λαθών $\zeta_{\lambda, \mu}^{\rho}$ στο συνολικό λάθος $\eta_{\lambda, \mu}^{\rho}$, να είναι της ίδιας τάξεως. Ένα σημείο του πλέγματος, έστω το λ_0, μ_0 , θα ελαχιστοποιεί την ποσότητα $H_{\lambda, \mu} = \underset{\rho}{\text{mean}}(\eta_{\lambda, \mu}^{\rho})$. Η υπερβολή με παραμέτρους που αντιστοιχούν στο σημείο του πλέγματος λ_0, μ_0 , θεωρούμε ότι είναι το πρότυπο του οδηγού που γέννησε τα συγκεκριμένα τμήματα αντικειμένου C_A^T .



Εικόνα 5.6γ

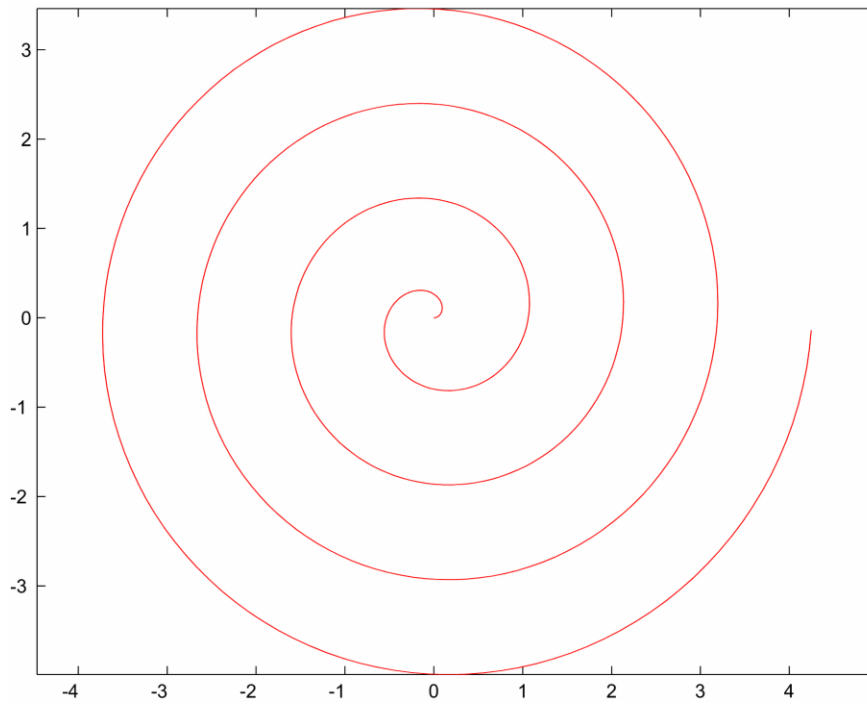
Γραφική αναπαράσταση του πλέγματος $I^a \times I^b$ και των αντίστοιχων λαθών $H_{\lambda, \mu}$ για το χωρίο της εικόνας 5.5 με χρώμα ματζέντα. Το σημείο του πλέγματος με το ελάχιστο λάθος σημειώνεται με ματζέντα αστερίσκο.

Παρόμοια διαδικασία ακολουθήθηκε για όλες τις υποψήφιες πρότυπες καμπύλες, οπότε και εντοπίστηκαν οι εξής υποψήφιοι οδηγοί, οι οποίοι αναγράφονται στον πίνακα 5.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1

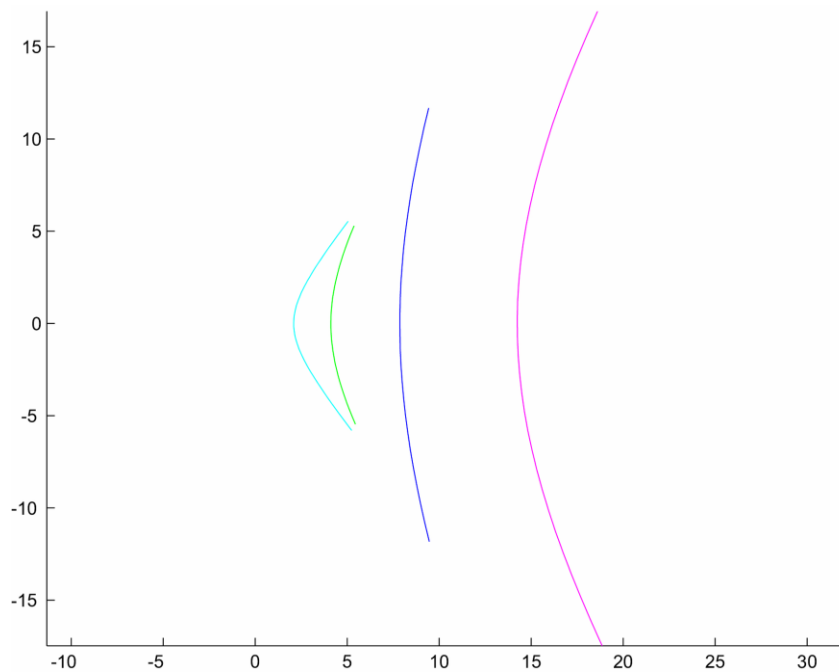
Τύπος Οδηγού	Χρώμα Απεικόνισης	Πρωταρχικές Παράμετροι [cm]	
Υπερβολή 1	Ματζέντα	a = 14.24	b = 20.12
Υπερβολή 2	Πράσινο	a = 4.11	b = 6.29
Υπερβολή 3	Μπλε	a= 7.86	b=17.63
Υπερβολή 4	Κυανούν	a= 2.09	b= 2.52
Έλλειψη 1	Κίτρινο	a= 4.64	b= 6.03
Έλλειψη 2	Μωβ	a=10.85	b= 7.96
Γραμμική Σπείρα	Κόκκινο	k=0.169	

Ακολουθούν σχηματικές αναπαραστάσεις των προτύπων καμπυλών που αναφέρονται στον πίνακα ανωτέρω.



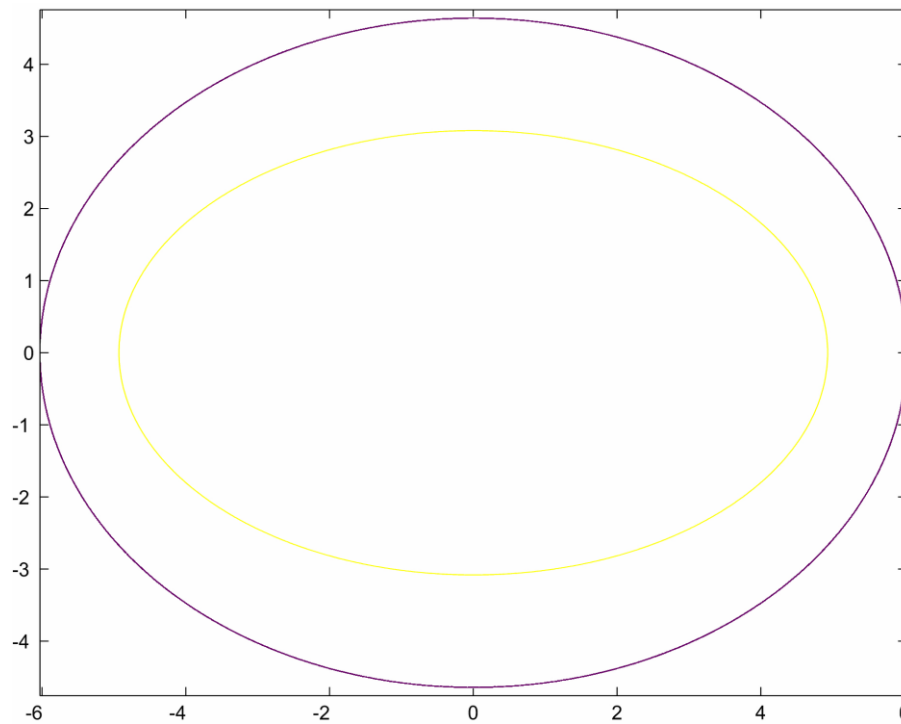
Εικόνα 5.7

Σχηματική αναπαράσταση της γραμμικής σπείρας που προέκυψε από την παραπάνω διαδικασία. Το χρώμα είναι χαρακτηριστικό της προτύπου καμπύλης και δεσμεύεται στις επόμενες εικόνες ώστε να αφορά μόνο τμήματα αυτής.



Εικόνα 5.8

Σχηματική αναπαράσταση των υπερβολών που προέκυψαν από την παραπάνω διαδικασία. Το χρώμα κάθε προτύπου καμπύλης είναι χαρακτηριστικό αυτής και δεσμεύεται στις επόμενες εικόνες ώστε να αφορά μόνο τμήματα της.



Εικόνα 5.9

Σχηματική αναπαράσταση των ελλείψεων που προέκυψαν από την παραπάνω διαδικασία. Τα χρώματα αυτών είναι χαρακτηριστικά και δεσμεύονται στις επόμενες εικόνες ώστε να αφορούν μόνο τμήματα τους.

5.3 Ακριβής εντοπισμός των τμημάτων αντικειμένου που αντιστοιχούν στους ευρεθέντες καμπυλογράφους

Αναφορικά με κάθε υποψήφια πρότυπο καμπύλη που εντοπίστηκε στην παράγραφο 5.2, επιτελέσαμε την εξής διαδικασία: προσαρμόσαμε βέλτιστα όλα τα αρχικά τμήματα αντικειμένου C_A^T στην καμπύλη αυτή με εφαρμογή της μεθόδου που περιγράφει στην παράγραφο 5.1. Τονίζουμε ότι η αρχική εκτίμηση των τμημάτων αντικειμένου που έγινε στο κεφάλαιο 4 αφορούσε σε τμήματα περιγράμματος που είχαν μήκος μεγαλύτερο των 6.5 εκατοστών και προσδιορίστηκαν από την υπόθεση ότι τα πιθανά σημεία αλλαγής καμπυλογράφου είναι ή σημεία άλματος της καμπυλότητας ή σημεία αλλαγής κοίλων. Τα σημεία αυτά εντοπίστηκαν με τη μέθοδο του κεφαλαίου 3. Επίσης τονίζουμε ότι τα τμήματα αυτά είναι μια αρχική εκτίμηση των πιθανών μονοκονδυλιών τις οποίες πιθανότατα πραγματοποίησαν οι καλλιτέχνες για να σχεδιάσουν τις τοιχογραφίες. Άρα, η μέθοδος της παραγράφου 5.1 ήταν απαραίτητο να εφαρμοστεί στις αρχικές εκτιμήσεις των μονοκονδυλιών, ώστε να μην υπάρχει αμφισβήτηση ότι κάθε μία από αυτές ταιριάζει βέλτιστα σε ένα συγκεκριμένο οδηγό. Τα σχετικά αποτελέσματα της εφαρμογής της

μεθόδου κατέδειξαν ότι όντως κάθε αρχική εκτίμηση μονοκονδυλιάς αντιστοιχεί σε μία από τις υποψήφιες πρότυπες καμπύλες του πίνακα 5.1 με εξαιρετικά μικρό λάθος και μάλιστα ακριβώς στον ίδιο τύπο καμπύλης που προέβλεπε η μέθοδος της παραγράφου 4 η οποία και βασιζόταν στην καμπυλότητα. Ισοδυνάμως ο χωρισμός των πρωταρχικών παραμέτρων σε ομάδες (clusters) είναι απολύτως συνεπής και επιβεβαιώνεται από την εφαρμογή της μεθόδου της παραγράφου 5.1 στα αρχικά τμήματα αντικείμενου C_A^T .

Το λάθος προσαρμογής κάθε αρχικής μονοκονδυλιάς στην αντίστοιχη θεωρητική πρότυπο καμπύλη ήταν εξαιρετικά μικρό. Συγκεκριμένα το μέσο λάθος προσαρμογής ήταν πάντα μικρότερο από 0.33mm ανά pixel, ενώ το μέγιστο λάθος προσαρμογής ήταν πάντα μικρότερο των 0.8mm. Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζεται πως ορίσαμε τελεσιδίκως τα όρια των τμημάτων αντικείμενου, δηλαδή των μονοκονδυλιών. Πράγματι: έστω ένα αντικείμενο, δηλαδή το περίγραμμα μιας θεματικής ενότητας, το οποίο δεν έχει καλυφθεί πλήρως από τα αρχικώς εντοπισθέντα τμήματα C_A^T και έστω A^Π ένα ακάλυπτο τμήμα αυτού του περιγράμματος. Ας υποθέσουμε επίσης ότι στο ένα άκρο του A^Π περατούται το τμήμα αντικείμενου $C_{A,1}^T$ ενώ στο άλλο άκρο έστω ότι περατούται το $C_{A,2}^T$. Προεκτείνουμε το $C_{A,1}^T$ ένα pixel κάθε φορά, εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία της παραγράφου 5.1 στην ίδια πρότυπη καμπύλη και ελέγχουμε εάν το μέσο λάθος προσαρμογής παραμένει μικρότερο από 0.33mm και ταυτόχρονα εάν το μέγιστο λάθος προσαρμογής παραμένει μικρότερο των 0.8mm. Όσο αυτό συμβαίνει θεωρούμε ότι το $C_{A,1}^T$ επεκτείνεται. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και για το $C_{A,2}^T$ λαμβάνοντας κάθε φορά ένα pixel από το κατάλληλο άκρο του A^Π και προσθέτοντάς το στο $C_{A,2}^T$. Στο τέλος αυτής της διαδικασίας θεωρούμε ότι έχουμε τελεσιδίκως προσδιορίσει τα άκρα των $C_{A,1}^T$ και $C_{A,2}^T$ που αρχικά συνόρευαν με το A^Π . Επιπλέον εάν τα αντίστοιχα άκρα αυτών των δύο μονοκονδυλιών δεν είναι όμορα θεωρούμε ότι το κομμάτι του A^Π που παραμένει ακάλυπτο συνιστά ένα νέο, μικρού μήκους τμήμα αντικείμενου στο οποίο εφαρμόζουμε τη μέθοδο της παραγράφου 5.1 για όλες τις πρότυπες καμπύλες που εντοπίστηκαν στην παράγραφο 5.2 (πίνακας 5.1). Η πρότυπος καμπύλη που δίνει το μικρότερο λάθος προσαρμογής, θεωρούμε ότι γέννησε το μειωμένο τμήμα A^Π , εφ' όσον το αντίστοιχο μέσο και μέγιστο λάθος προσαρμογής παραμένει εντός των προαναφερθέντων ορίων. Κατ' αυτόν τον τρόπο, επιτύχαμε πλήρη κάλυψη των περιγραμμάτων όλων των κυρίων θεματικών ενοτήτων που εμφανίζονται στις τοιχογραφίες που μελετήθηκαν. Τέλος δοκιμάσαμε εάν οι συνενώσεις όμορων τμημάτων αντικείμενου που αντιστοιχούν ακριβώς στην ίδια πρότυπο καμπύλη, μπορούν να σχηματίσουν μια ενιαία μονοκονδυλιά ή όχι.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι η μέθοδος που περιεγράφη προσφέρει μια εξαιρετικά ομαλή κάλυψη των περιγραμμάτων των θεματικών ενοτήτων, όπως φαίνεται και από τις εικόνες 5.10 έως 5.14. Ειδικότερα, πρακτικά σε κάθε αλλαγή τμήματος αντικειμένου, ελέγξαμε την Ευκλείδεια απόσταση των βέλτιστα προσαρμοσμένων προτύπων καμπυλών εκατέρωθεν του σημείου αλλαγής, καθώς και τη γωνία των μοναδιαίων εφαπτομένων διανυσμάτων σε αυτές. Και οι δύο είχαν εξαιρετικά μικρές τιμές: η μεν Ευκλείδεια απόσταση ήταν πάντα μικρότερη του 1mm η δε διαφορά στις γωνίες ήταν κατά μέσον όρο μικρότερη των 2.5 μοιρών. Αυτό είναι μια επιπλέον επιβεβαίωση της ορθότητας των υποθέσεων που διετυπώθησαν, αφ' ενός διότι η μέθοδος προσαρμογής καμπυλών της παραγράφου 5.1 δεν είχε ενδογενώς τέτοιο περιορισμό και αφ' ετέρου κυρίως διότι το τελικό αποτέλεσμα της τμηματικής κάλυψης του περιγράμματος είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικό από αισθητικής απόψεως.

Τέλος σημειώνουμε ότι τα τμήματα αντικειμένου που τελεσιδικώς προσδιορίστηκαν αντιστοιχούν σε τμήματα καμπύλης με τα κάτωθι μέσα και μέγιστα μήκη.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.2

Τύπος Οδηγού	Πλήθος C_A^T	Μέσο Μήκος C_A^T [cm]	Πλήθος «μεγάλων» C_A^T μήκους >6.5	Μέσο Μήκος «μεγάλων» C_A^T [cm]	Μέγιστο μήκος [cm]
Υπερβολή 1 (Ματζέντα)	55	5.83	38	9.14	24.00
Υπερβολή 2 (Πράσινη)	9	7.05	5	8.32	13.61
Υπερβολή 3 (Μπλε)	16	6.06	13	6.92	9.59
Υπερβολή 4 (Κυανή)	9	4.13	4	8.32	11.56
Έλλειψη 1 (Κίτρινη)	2	12.10	2	12.10	15.09
Έλλειψη 2 (Μωβ)	6	11.90	6	11.90	14.85
Γραμμική Σπείρα (Κόκκινη)	31	4.85	17	8.46	15.57



Εικόνα 5.10

Βέλτιστη τοποθέτηση τμημάτων των πιθανών καμπυλογράφων επί του περιγράμματος της κροκοσυλλέκτριας της εικόνας 1.1. α. Τα τμήματα αυτά θεωρούμε ότι αντιπροσωπεύουν τη θέση-διαδρομή του οδηγού του πινέλου που χρησιμοποιήθηκε για να ζωγραφιστεί το αντίστοιχο υποσύνολο του περιγράμματος της μορφής.



Εικόνα 5.11
Βέλτιστη τοποθέτηση τμημάτων των πιθανών καμπυλογράφων επί του περιγράμματος της κροκοσυλλέκτριας της εικόνας 1.1. β.

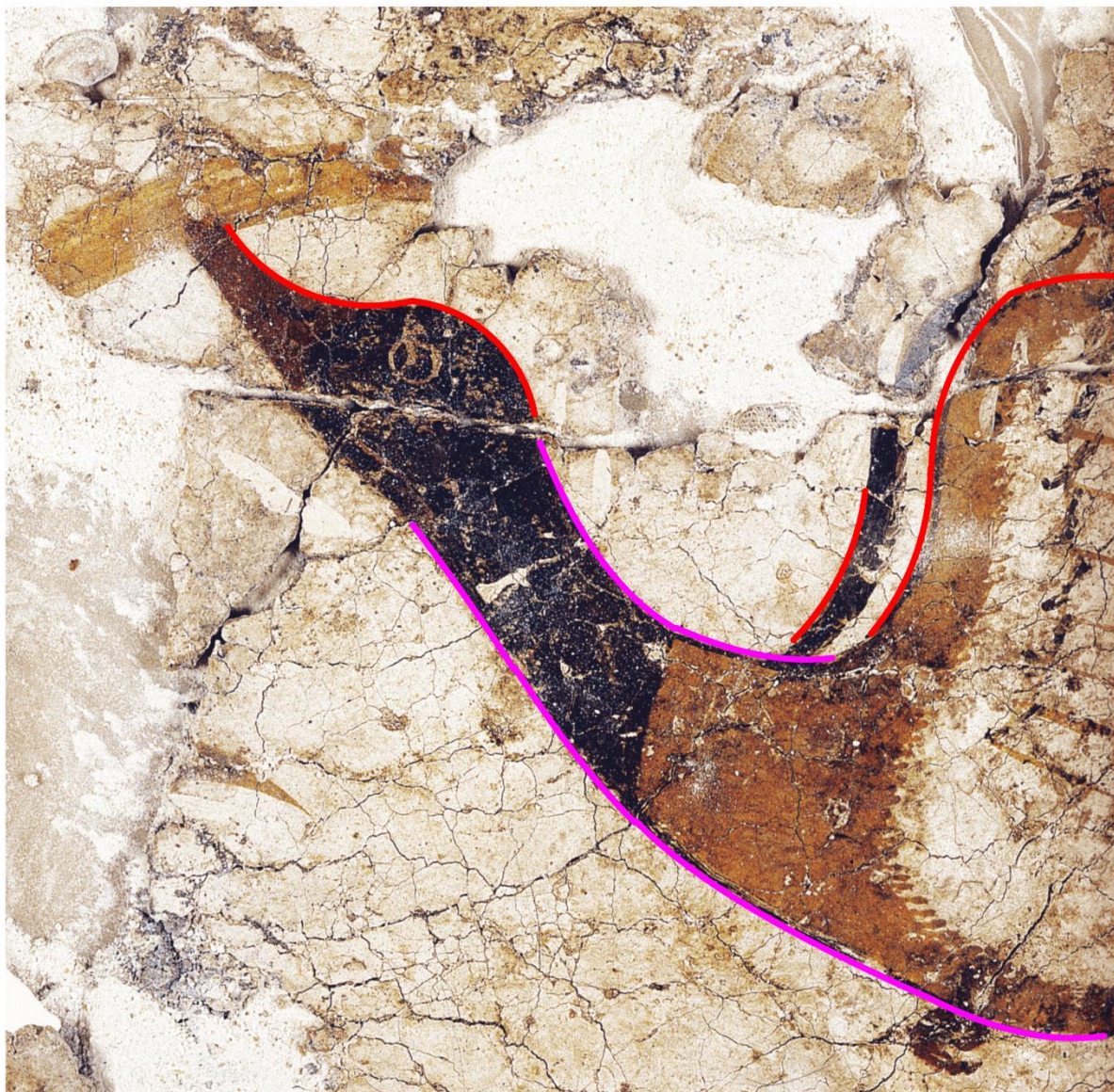


Εικόνα 5.12

Βέλτιστη τοποθέτηση τμημάτων των πιθανών καμπυλογράφων επί του περιγράμματος της αντρικής μορφής της εικόνας 1.2. Τα τμήματα αυτά θεωρούμε ότι αντιπροσωπεύουν τη θέση-διαδρομή του οδηγού του πινέλου που χρησιμοποιήθηκε για να ζωγραφιστεί το αντίστοιχο υποσύνολο του περιγράμματος της μορφής.



Εικόνα 5.13
Βέλτιστη τοποθέτηση τμημάτων των πιθανών καμπυλογράφων επί του περιγράμματος της παιδικής μορφής της εικόνας 1.3.



Εικόνα 5.13

Βέλτιστη τοποθέτηση τμημάτων των πιθανών καμπυλογράφων επί του περιγράμματος του ελόβιου πτηνού της εικόνας 1.4. Εκ νέου τα τμήματα αυτά θεωρούμε ότι αντιπροσωπεύουν τη θέση-διαδρομή του οδηγού του πινέλου που χρησιμοποιήθηκε για να ζωγραφιστεί το αντίστοιχο υποσύνολο του περιγράμματος του πτηνού.



Εικόνα 5.14

Βέλτιστη τοποθέτηση τμημάτων των πιθανών καμπυλογράφων επί του περιγράμματος των παγκρατίων εικόνας 1.5. (Δεν μελετήθηκαν οι περιοχές που έχουν υποστεί σημαντική φθορά ούτε τα τμήματα της τοιχογραφίας που ζωγραφίστηκαν εκ των υστέρων τη σύγχρονη εποχή από συντηρητές.) Εκ νέου τα τμήματα αυτά θεωρούμε ότι αντιπροσωπεύουν τη θέση-διαδρομή του οδηγού του πινέλου που χρησιμοποιήθηκε για να ζωγραφιστεί το αντίστοιχο υποσύνολο του περιγράμματος των φυτών.

ΜΕΡΟΣ 2^ο

1. Εισαγωγή

1.1 Η σπουδαιότητα της ταυτοποίησης χαρακτών αρχαίων επιγραφών. Μία πρώτη περιγραφή του στόχου της παρούσης εργασίας

Ένας από τους βασικότερους τομείς της αρχαιολογίας είναι και η επιγραφολογία, ο κλάδος που ασχολείται με τις αρχαίες επιγραφές. Ο συγκεκριμένος τομέας έχει μεγάλο πεδίο εφαρμογής σε παγκόσμιο επίπεδο και είναι καθοριστικής σημασίας για την ορθή καταγραφή της ιστορίας ([1.1]-[1.2]). Η μελέτη που παρουσιάζεται κατωτέρω έγινε σε στενή συνεργασία με έναν από τους σημαντικότερους αρχαιολόγους και από τους μεγαλύτερους επιγραφολόγους σε παγκόσμιο επίπεδο, τον καθηγητή κ. Steve Tracy της σχολής ιστορικών σπουδών του ινστιτούτου προηγμένων σπουδών του Princeton στο New Jersey των Ηνωμένων Πολιτειών και πρώην διευθυντή της Αμερικανικής Σχολής Κλασικών Σπουδών στην Αθήνα.

Η σημασία της ορθής ιστορικής καταγραφής δεν αφορά μόνο στις ελληνικές επιγραφές αλλά και σε όλες όσες σχετίζονται με αρχαίους πολιτισμούς. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τους πολιτισμούς που έχουν αναπτυχθεί στη Μεσοποταμία, την Αίγυπτο, την Ιταλία. Στην Ελλάδα ο πλούτος των επιγραφών που έχει ανακαλυφθεί σε όλους τους αρχαιολογικούς χώρους είναι τεράστιος, κάτι που καθιστά τον τομέα της επιγραφολογίας έναν από τους πιο σημαντικούς. Οι πληροφορίες που εξάγονται μέσα από τη μελέτη αυτών των επιγραφών είναι πολύτιμες όχι μόνο για την αρχαιολογία αυτή καθ' εαυτή, αλλά και για την ιστορία καθώς και για άλλες ανθρωπιστικές επιστήμες που έχουν πεδίο έρευνας την αρχαία εποχή. ([1.1]-[1.2]).

Οι γραφείς όμως αυτών των επιγραφών, ούτε υπέγραφαν ούτε έβαζαν ημερομηνία στα κείμενά τους, γεγονός που σήμερα καθιστά τη χρονολογική κατάταξη των κειμένων εξαιρετικά δύσκολη και συχνά αδύνατη. Μέχρι σήμερα η κατάταξη αυτή γινόταν με βάση συγκριτικές χρονολογήσεις, το «ένστικτο» και την εν γένει εμπειρία των αρχαιολόγων. Οι τρόποι αυτοί προσφέρουν αποτελέσματα, πλην

όμως κανείς εξ αυτών δε δίνει με συνέπεια, αντικειμενικά και αδιαμφισβήτητα συμπεράσματα. Επομένως, είναι ιδιαίτερος σημαντική για την ιστορία και την αρχαιολογία η εξεύρεση μαθητικοποιημένων κριτηρίων με τελικό στόχο την με αντικειμενικό τρόπο κατάταξη, ομαδοποίηση και χρονολόγηση των επιγραφών. Εξ άλλου όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ένας από τους πολύ επιφανείς καθηγητές ιστορίας, ο Christian Habicht, «η σωστή χρήση των επιγραφών για ιστορικούς λόγους γίνεται μόνο μέσω της ορθής χρονολόγησής τους».

Εκτενής βιβλιογραφική έρευνα κατέδειξε ότι ουδείς ως τώρα, εκτός της ερευνητικής μας ομάδας, είχε επιχειρήσει αυτόματη ταυτοποίηση γραφέων αρχαίων επιγραφών με χρήση μεθόδων της επιστήμης των υπολογιστών. Έχουν γίνει μόνο κάποιες πρώτες προσπάθειες στην αυτόματη γραφολογία. Ο κλάδος αυτός που εξελίσσεται τα τελευταία χρόνια περιλαμβάνει δημοσιευμένες εργασίες σε θέματα όπως: αναγνώριση γραφέα από μία λέξη που τη γράφουν διαφορετικά άτομα, επικύρωση γραφέως αγγλικού κειμένου με σύγκριση αγνώστου εγγράφου με συγκεκριμένα έγγραφα αναφοράς, ταυτοποίηση γραφέως επί τη βάση γραφημάτων, αλλά και συγκεκριμένων χαρακτήρων, όπως και με χρήση συνεκτικών υποσυνόλων του περιγράμματος γραμμμάτων, επικύρωση γραφέως κινεζικών ιδεογραμμμάτων, αναγνώριση γραφέως από γραμμές κειμένου με λατινικούς χαρακτήρες με χρήση Hidden Markov Models καθώς και με συνδυασμό υφής και μορφής χαρακτήρων κλπ. Ο κατάλογος σχετικών δημοσιεύσεων παρουσιάζεται στο παράρτημα Π.Γ. μαζί με περίληψη του περιεχομένου των άρθρων.

Στην παρούσα διατριβή παρουσιάζεται μία εντελώς πρωτότυπη μεθοδολογία για τη χρονολόγηση αυτών των επιγραφών, η οποία βασίζεται στην αυτόματη ταυτοποίηση του λιθοξόου που χάραξε κάθε επιγραφή. Με άλλα λόγια, ο μοναδικός ίσως τρόπος ορθής χρονολόγησης των επιγραφών είναι η ομαδοποίησή τους ανά γραφέα και αυτό διότι οι γραφείς ήταν μικρού αριθμού, δεδομένου ότι το να είσαι γραφεύς ήταν επάγγελμα στην αρχαιότητα.

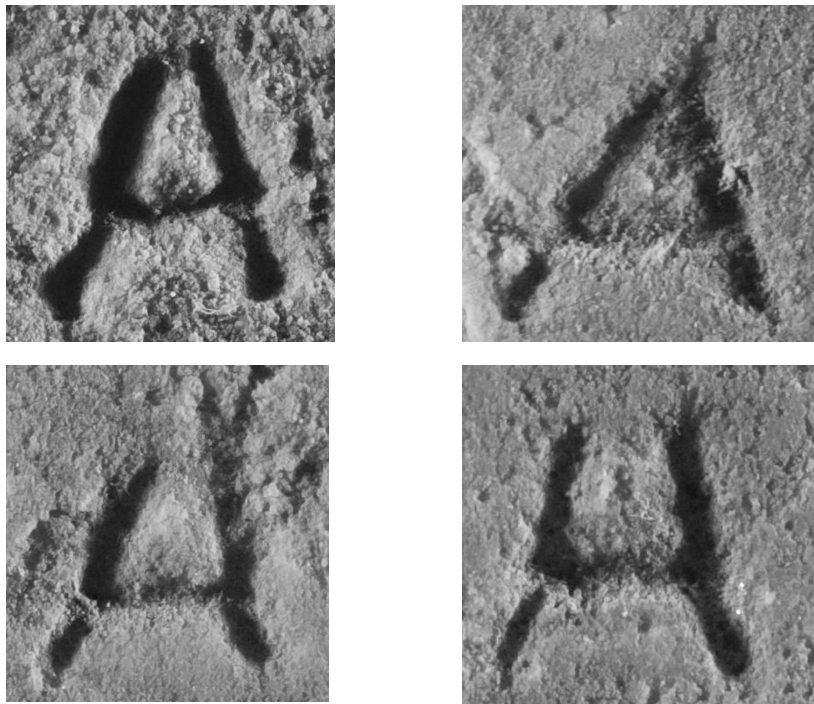
Από τη στιγμή που θα επιτευχθεί η ομαδοποίηση των επιγραφών ανά χαρακτήρα είναι πολύ πιο εύκολο, πρακτικά σχεδόν σίγουρο, να μπορεί να συναχθεί η περίοδος που έζησε ο χαρακτήρας από το συνδυασμό του περιεχομένου των κειμένων που έγραψε. Επομένως, ο σκοπός της παρούσης διατριβής είναι η συμβολή στη δημιουργία ενός ολοκληρωμένου πληροφοριακού συστήματος το οποίο θα επιτυγχάνει την αυτόματη ταυτοποίηση χαρακτών με βάση την πληροφορία που εξάγεται από τις ψηφιακές απεικονίσεις των αρχαίων επιγραφών. Στο πλαίσιο αυτής

της προσπάθειας, έχουν εξαχθεί μαθηματικοποιημένα κριτήρια τα οποία, σε αντίθεση με τα όσα εφαρμόζονται μέχρι σήμερα, δίνουν ποσοτικά αποτελέσματα, τα οποία με τη σειρά τους οδηγούν σε ταυτοποίηση του χαρακτήρα και κατά συνέπεια ομαδοποίηση των επιγραφών. Τα κριτήρια αυτά οδήγησαν στην ανάπτυξη πρωτότυπων αλγορίθμων αναγνώρισης προτύπων, μέσω των οποίων επετεύχθη ταυτοποίηση των γραφών ικανού αριθμού επιγραφών με πλήρη επιτυχία. Τονίζεται ότι η ανάπτυξη ενός τέτοιου συστήματος θα συνιστά και μία σημαντική συμβολή στον κλάδο της αυτόματης γραφολογίας, ο οποίος έχει τα τελευταία χρόνια, αρχίσει αργά πλην σταθερά να εξελίσσεται ([2.1]-[2.14]).

1.2 Οι δυσκολίες του εγχειρήματος της αυτόματης ταυτοποίησης χαρακτών αρχαίων επιγραφών

Στην προσπάθεια της αυτόματης ταυτοποίησης γραφέως, υπάρχουν πολύ σημαντικές δυσκολίες. Οι πιο χαρακτηριστικές είναι οι κάτωθι:

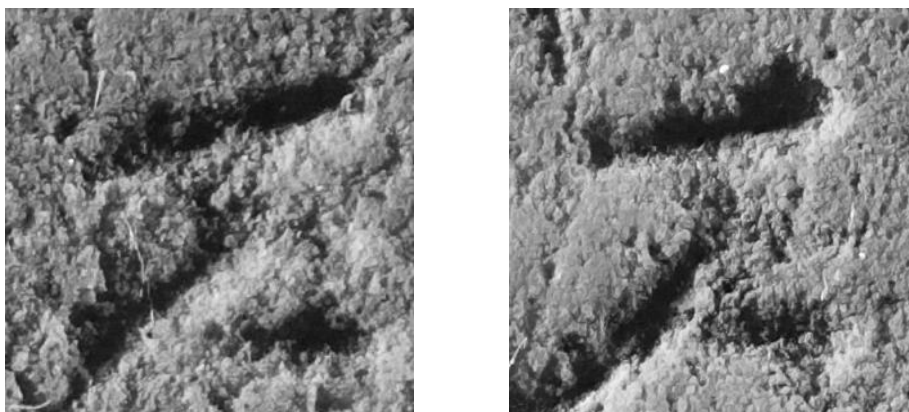
- υπάρχει μεγάλη μεταβλητότητα του σχήματος, του μεγέθους και του προσανατολισμού των υλοποιήσεων ενός τυχόντος συμβόλου της αλφαβήτου σε μία επιγραφή. Παραδείγματος χάριν τα γράμματα που παρουσιάζονται στην εικόνα 1.1 είναι υλοποιήσεις του ίδιου συμβολογράμματος επί της ίδιας επιγραφής και εμφανίζουν σημαντικές διαφορές αυτού του τύπου μεταξύ τους.



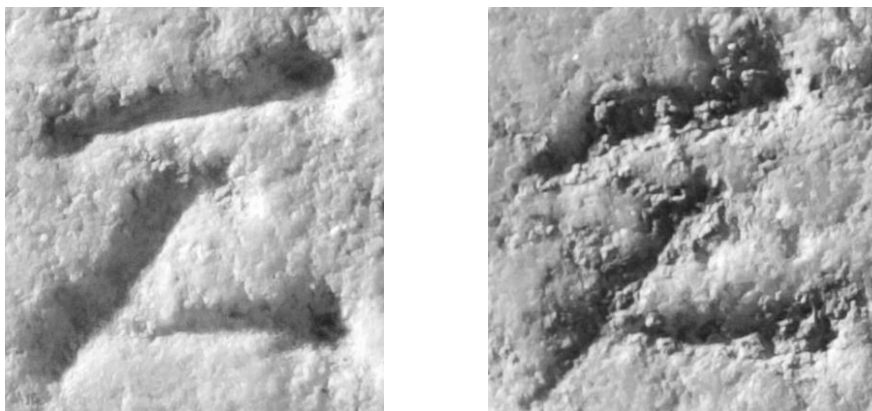
Εικόνα 1.1

- Είναι πολύ σύνηθες οι διαφορές μεταξύ των υλοποιήσεων γραμμάτων του ίδιου γραφέα να είναι συγκρίσιμες με τις διαφορές υλοποιήσεων γραμμάτων που προέρχονται από διαφορετικούς γραφείς. Παραδείγματος

χάριν στις εικόνες 1.2α και 1.2β παρουσιάζονται δύο ζεύγη υλοποιήσεων του γράμματος Σ καθένα εκ των οποίων προέρχεται από διαφορετικό χαρακτή. Και τα τέσσερα αυτά γράμματα έχουν πολύ παρόμοιες υλοποιήσεις, έχουν όμως και κάποιες διαφορές τις οποίες το σύστημα που αναπτύχθηκε καλείται να εντοπίσει.



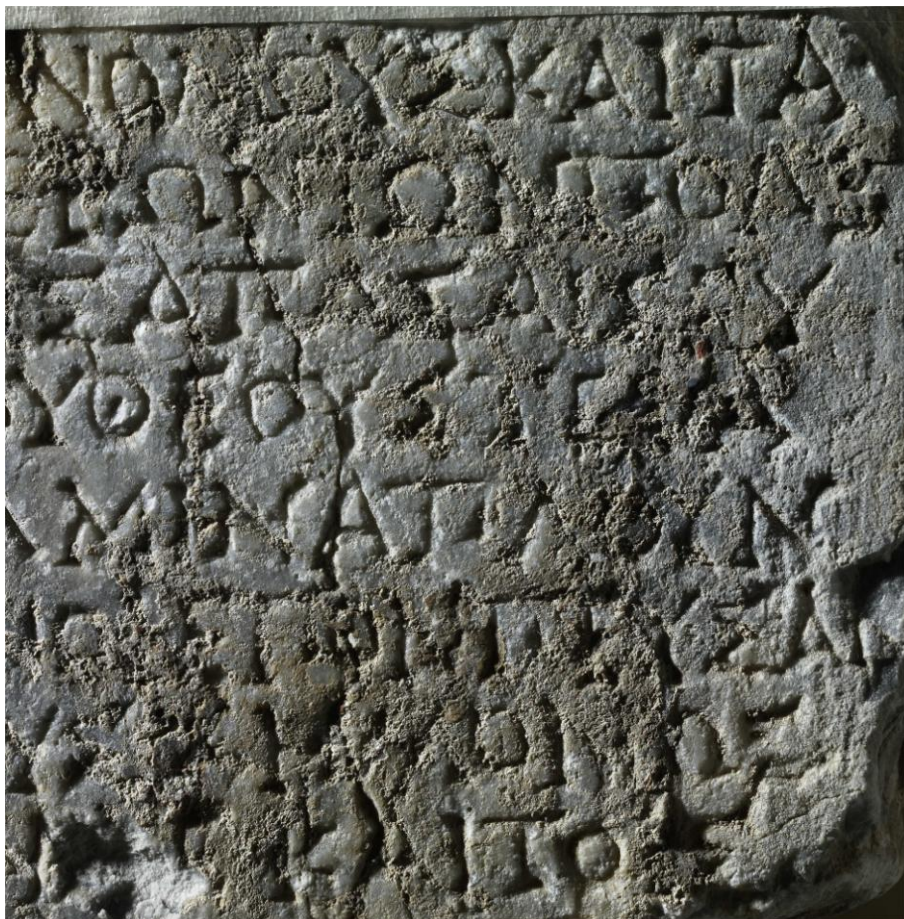
Εικόνα 1.2α



Εικόνα 1.2β

- Σε πολλές περιπτώσεις οι επιγραφές παρουσιάζουν σημαντική φθορά. Παραδείγματος χάριν, αρκετές από τις επιγραφές που μελετήθηκαν είχαν

προηγουμένως χρησιμοποιηθεί είτε σα δομικά υλικά είτε σαν πλάκες πεζοδρομίου, γεγονός που έχει προκαλέσει μεγάλη φθορά στα γράμματα των επιγραφών.



Εικόνα 1.3

Λεπτομέρεια της προς μελέτη επιγραφής με κωδικό αριθμό 0286. Είναι χαρακτηριστική η φθορά που έχει υποστεί η επιγραφή.

- Είναι επίσης χαρακτηριστικό ότι συναντήσαμε πολύ σημαντικές διαφοροποιήσεις στον τρόπο με τον οποίο έχουν υλοποιηθεί διάφορα γράμματα από τον ίδιο χαρακτή: πολύ συχνά ο ίδιος γραφέας πότε ενώνει τη μεσαία κεραία του Α μόνο με το αριστερό σκέλος αυτού, πότε μόνο με το δεξί, ενώ πολλές φορές την παραλείπει τελείως. Επίσης, εντός της ίδιας επιγραφής, πολλές φορές διαφέρει και η γωνία μεταξύ των σκελών του Α καθώς και ο τρόπος υλοποίησεως της κορυφής αυτού (ίδε εικόνα 1.1). Αξίζει να σημειωθεί ότι παρόμοιες διαφορές επισυμβαίνουν στα περισσότερα γράμματα της αλφαβήτου.

- Τέλος, συχνά οι επιγραφές ανασκάπτονται σε θραύσματα και η συντήρηση που επακολουθεί αναπόφευκτα προκαλεί αλλοιώσεις στην τελική μορφή των γραμμάτων. (Είναι πολύ χαρακτηριστικές οι λεπτομέρειες των εικόνων 2.2 και 2.3)

2. Εξαγωγή και επεξεργασία του περιγράμματος των υλοποιήσεων συμβόλων της αλφαβήτου που εμφανίζονται επί επιγραφών

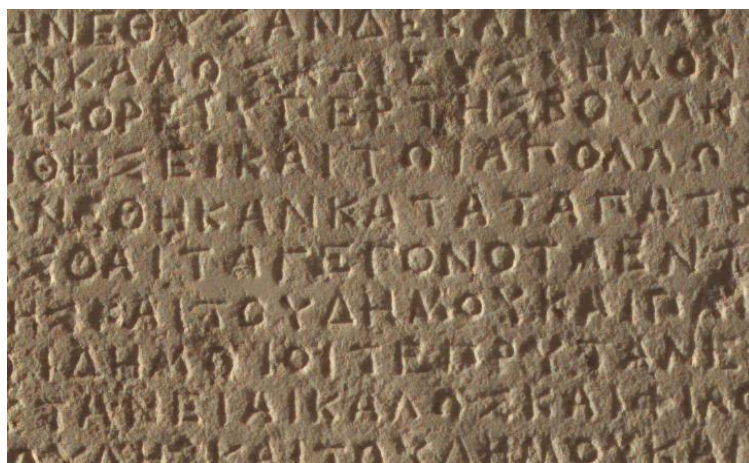
2.1 Κατάτμηση της ψηφιακής εικόνας των γραμμάτων των επιγραφών

Κατ' αρχήν φωτογραφίσαμε ψηφιακά όλες τις προς μελέτη επιγραφές. Για κάθε επιγραφή πραγματοποιήσαμε μια πανοραμική λήψη και ακολούθως επί μέρους φωτογραφήσεις της επιγραφής με πολύ υψηλή ανάλυση. Η δεύτερες λήψεις είναι και οι κατάλληλες για την περαιτέρω επεξεργασία των υλοποιήσεων των γραμμάτων των επιγραφών. Ακολουθούν κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα φωτογραφιών από συνολικές και λεπτομερειακές λήψεις ορισμένων από τις επιγραφές που μελετήθηκαν. Μερικές από αυτές ελήφθησαν στο χώρο φύλαξης της Αμερικανικής Σχολής στη στοά του Αττάλου στην Αρχαία Αγορά και άλλες στο Επιγραφικό Μουσείο στην οδό Τοσίτσα.



Εικόνα 2.1α

Ψηφιακή φωτογραφία μιας προς μελέτη επιγραφής (κωδικός 6006)



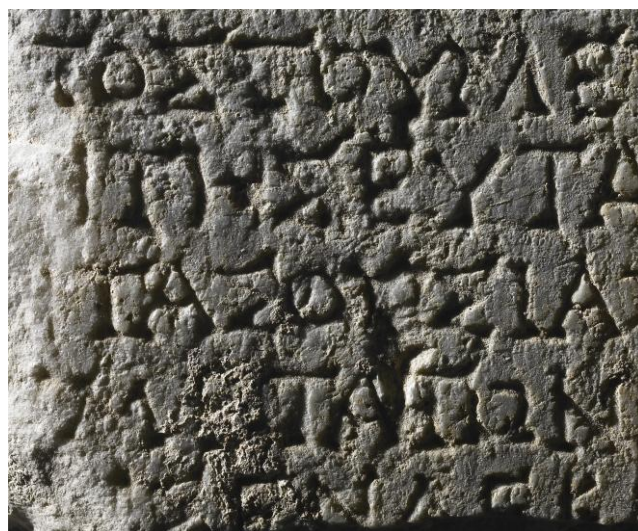
Εικόνα 2.1β

Λεπτομέρεια της εικόνας 2.1α



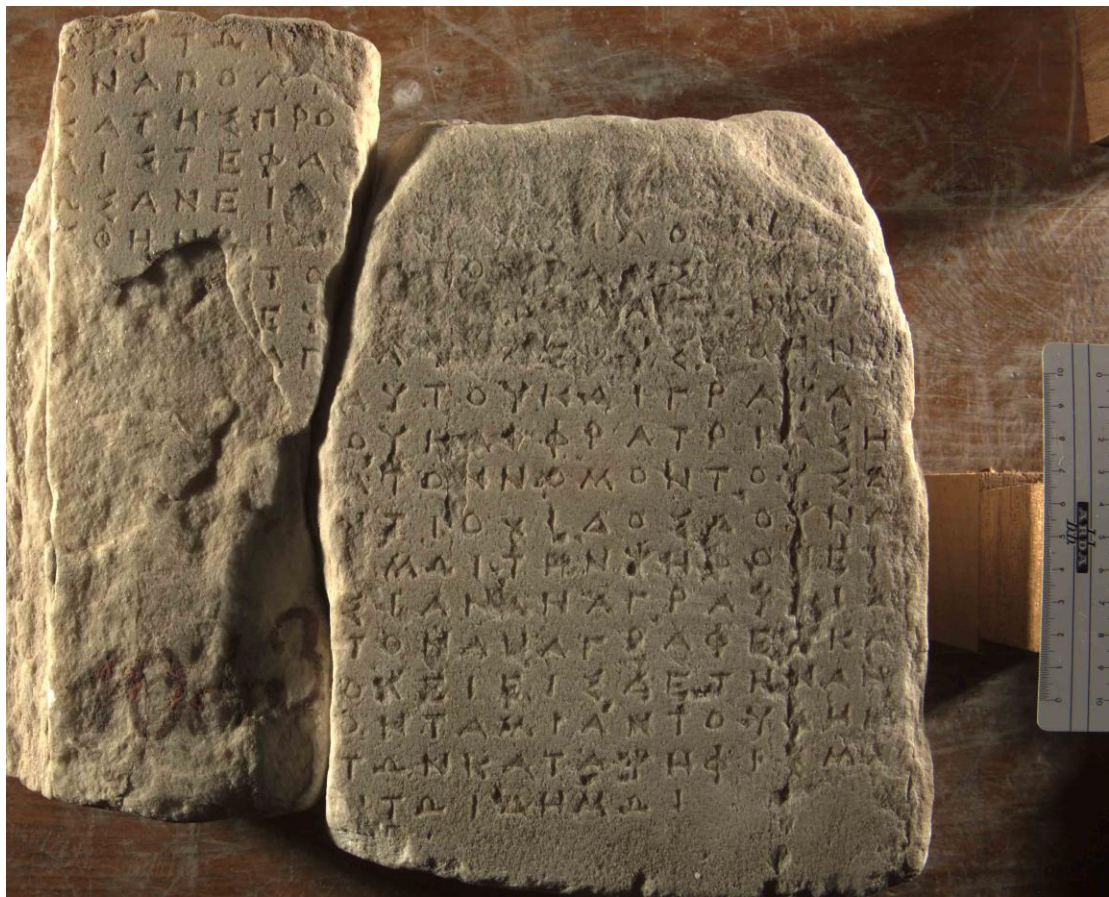
Εικόνα 2.2α

Ψηφιακή φωτογραφία μιας προς μελέτη επιγραφής (κωδικός 0286)



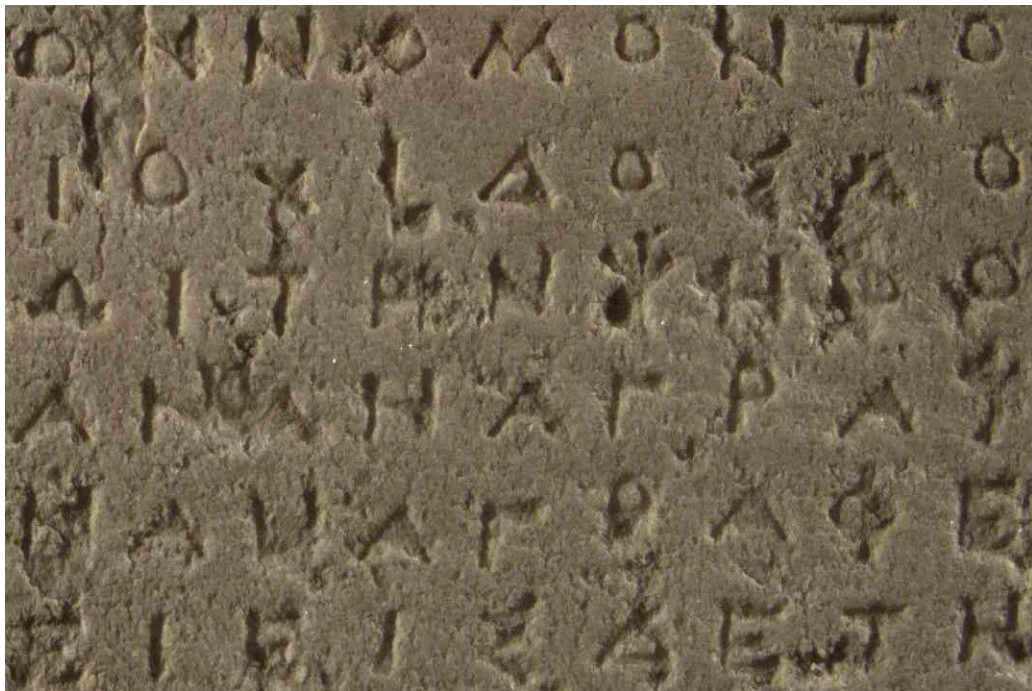
Εικόνα 2.2β

Λεπτομέρεια της εικόνας 2.2α



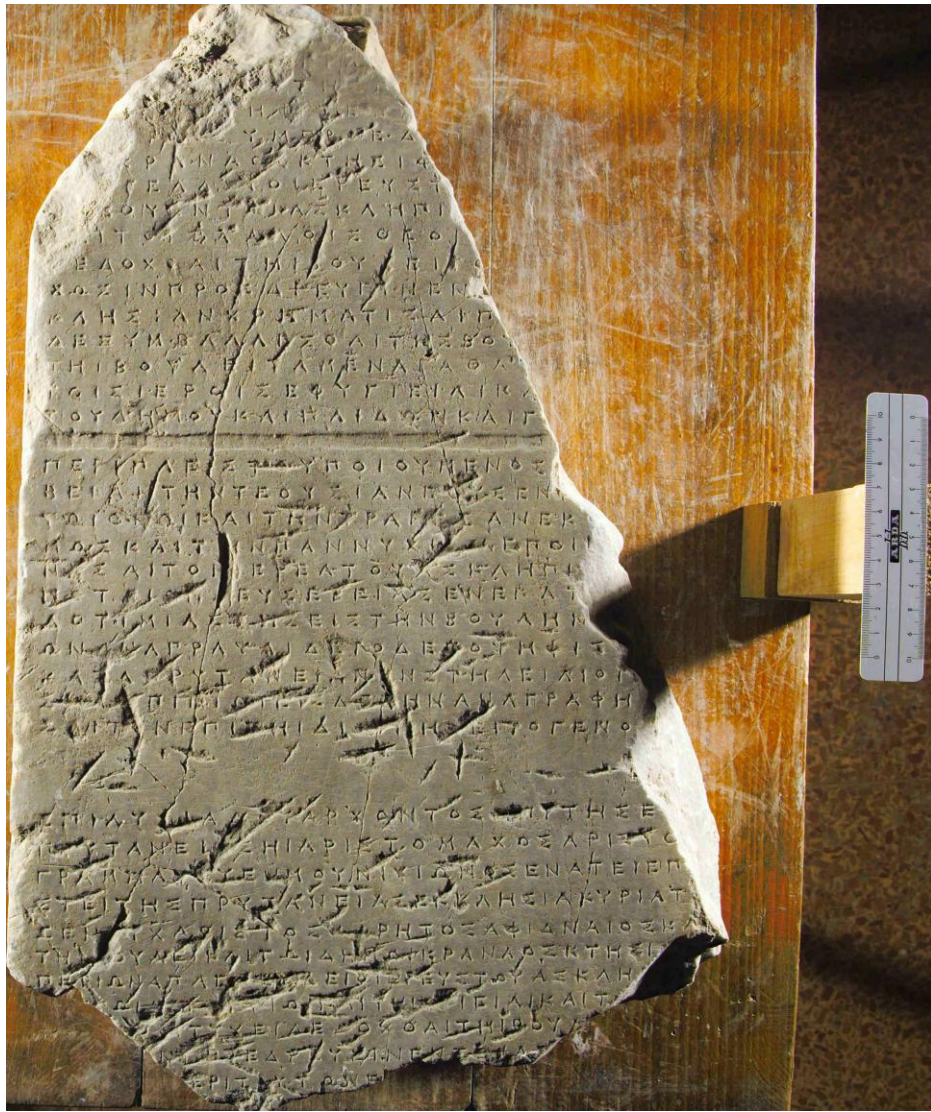
Εικόνα 2.3α

Ψηφιακή φωτογραφία μιας προς μελέτη επιγραφής (κωδικός 7335)



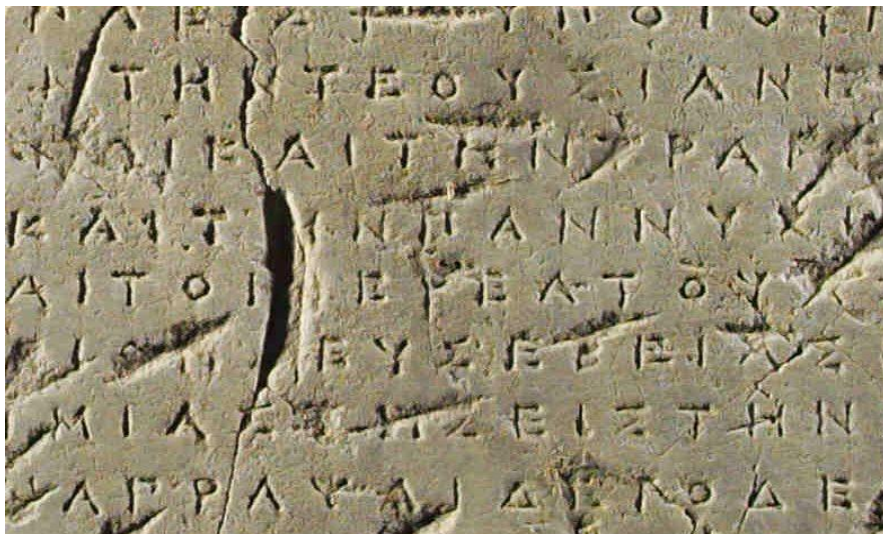
Εικόνα 2.3β

Λεπτομέρεια της εικόνας 2.3α



Εικόνα 2.4α

Ψηφιακή φωτογραφία μιας προς μελέτη επιγραφής (κωδικός 7457)



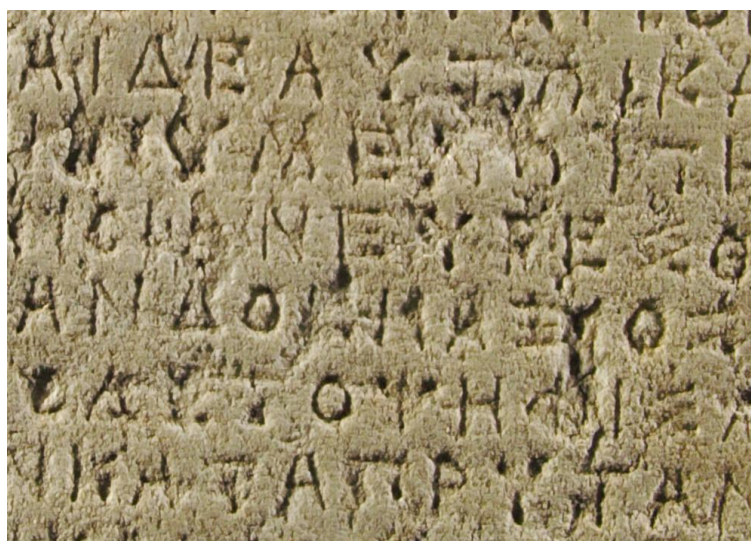
Εικόνα 2.4β

Λεπτομέρεια της εικόνας 2.4α



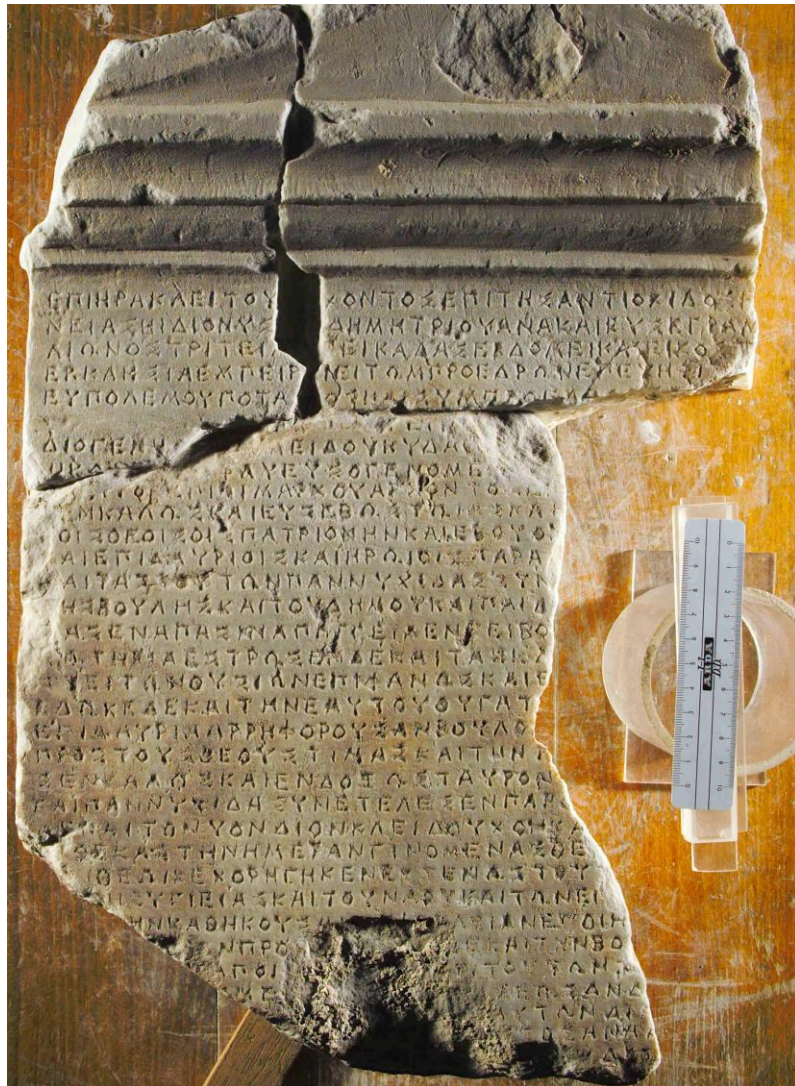
Εικόνα 2.5α

Ψηφιακή φωτογραφία μιας προς μελέτη επιγραφής (κωδικός 7519)



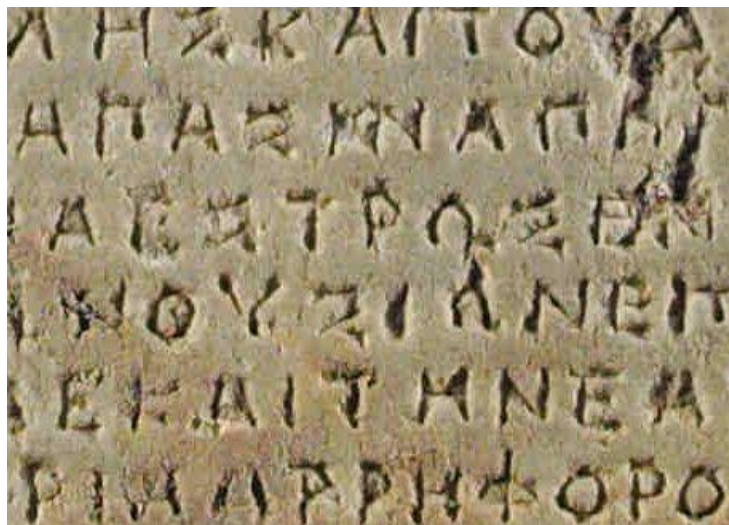
Εικόνα 2.5β

Λεπτομέρεια της εικόνας 2.5α



Εικόνα 2.6α

Ψηφιακή φωτογραφία μιας προς μελέτη επιγραφής (κωδικός 7567)



Εικόνα 2.6β

Λεπτομέρεια της εικόνας 2.6α

Εν συνεχεία, για την επεξεργασία των γραμμάτων γίνεται εξαγωγή τους από το υπόβαθρο της επιγραφής. Οι αλγόριθμοι κατάτμησης που χρησιμοποιήθηκαν για τη διαδικασία αυτή είναι ουσιαστικά οι ίδιοι που χρησιμοποιήθηκαν για την κατάτμηση των τοιχογραφιών της Θήρας που μελετήθηκαν σε αυτή τη διατριβή. Η εφαρμογή των αλγορίθμων αυτών έγινε αρχικά σε έγχρωμες φωτογραφίες αλλά στο τέλος παρήχθησαν φωτογραφίες διαβάθμισης του γκρι. Στην παράγραφο 2.1 του πρώτου μέρους της παρούσης εργασίας γίνεται αναφορά στα βήματα της εν λόγω διαδικασίας, ενώ αναλυτική περιγραφή αυτής γίνεται στο παράρτημα Π.Τ.

2.2 Εξαγωγή του περιγράμματος μιας υλοποίησης κάθε συμβόλου της αλφαβήτου από την κατατμημένη της εικόνα

Δέουσα μορφή περιγράμματος υλοποιήσεων συμβολογραμμάτων

Για όλες τις εφαρμογές που αντιμετωπίζονται περαιτέρω σε αυτή τη διατριβή το περίγραμμα πρέπει να έχει μία συγκεκριμένη μορφή, ανάλογη με αυτήν που περιγράφει στην παράγραφο 2.2 του πρώτου μέρους της εργασίας. Δηλαδή 1) κάθε εικονοστοιχείο πρέπει να έχει ακριβώς δύο γειτονικά. Με τον όρο γειτονικά εννοούμε ότι αν θεωρήσουμε το τυχόν εικονοστοιχείο του περιγράμματος σαν κέντρο μιας περιοχής pixels 3x3 (περιοχή συνεκτικότητας 8 στην οποία δίνουμε το όνομα Σ8) τότε ακριβώς δύο ακόμα pixels του περιγράμματος βρίσκονται εντός της περιοχής αυτής. 2) Μόνο συγκεκριμένοι σχηματισμοί των τριών εικονοστοιχείων του περιγράμματος επιτρέπονται να βρίσκονται εντός της Σ8. Ειδικότερα επιτρέπονται οι σχηματισμοί που παρουσιάζονται στην εικόνα 2.2 του πρώτου μέρους. 3) Όλα τα pixels του περιγράμματος είναι αριθμημένα ωρολογιακά στη φυσική τους σειρά: το υπ' αριθμόν ένα pixel είναι αυτό που βρίσκεται ψηλότερα και αριστερότερα στην εικόνα. Το υπ' αριθμόν n pixel έχει δύο ακριβώς γειτονικά δηλαδή το υπ' αριθμόν n-1 και το υπ' αριθμόν n+1, στη σωστή διάταξη. 4) Απαγορεύεται να υπάρχουν συμπλέγματα μεμονωμένων pixels συνολικού αριθμού μικρότερου ενός κατωφλίου. Αυτό το κατώφλι είναι συνήθως το 5% του συνολικού αριθμού εικονοστοιχείων του περιγράμματος.

Ειδικός πρωτότυπος κώδικας αναπτύχθηκε για να εξασφαλίζει την ικανοποίηση των τεσσάρων ανωτέρω συνθηκών. Στην εικόνα 2.7α παρουσιάζεται μια φωτογραφία της υλοποίησης ενός συμβολογράμματος Α σε διαβάθμιση του γκρι όπως αυτή

εξήχθη από την ψηφιακή φωτογραφία ευρύτερου τμήματος της επιγραφής. Στην εικόνα 2.7β παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της αυτόματης κατάτμησης της φωτογραφίας αυτής και στην 2.7γ το τελικό περίγραμμα που εξήχθη, όπως αυτό προέκυψε από την κατατμημένη έκδοση της υλοποίησης. Στις εικόνες 2.8, 2.9 ,2.10 και 2.11 παρουσιάζονται αντίστοιχες φωτογραφίες υλοποιήσεων των συμβολογραμμάτων Σ, Μ ,Ο και Τ.



Εικόνα 2.7α



Εικόνα 2.7β



Εικόνα 2.7γ



Εικόνα 2.8α



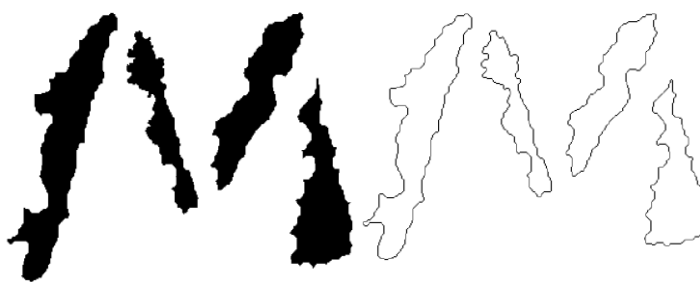
Εικόνα 2.8β



Εικόνα 2.8γ



Εικόνα 2.9α



Εικόνα 2.9β

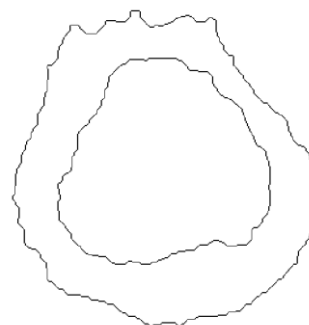
Εικόνα 2.9γ



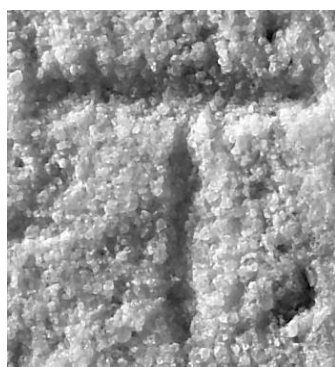
Εικόνα 2.10α



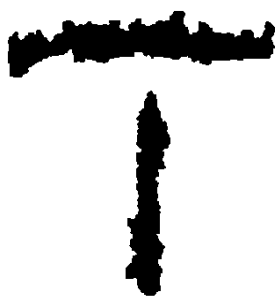
Εικόνα 2.10β



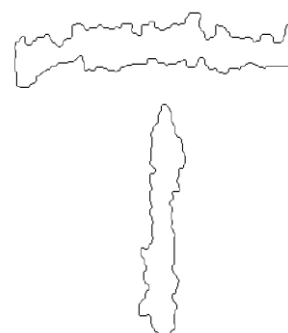
Εικόνα 2.10γ



Εικόνα 2.11α



Εικόνα 2.11β



Εικόνα 2.11γ

3. Ορισμός κρίσιμων σημείων περιγράμματος υλοποιήσεων συμβόλων της αλφαβήτου και εντοπισμός αυτών

Για κάθε υλοποίηση ενός συμβολογράμματος σε μια επιγραφή, εντοπίζουμε ένα σύνολο χαρακτηριστικών σημείων επί του περιγράμματος των υλοποιήσεων, για τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο κρίσιμα σημεία ή χαρακτηριστικά σημεία.

Προσέγγιση του περιγράμματος με πολυώνυμο ως προς το μήκος.

Στην παρακάτω διαδικασία δημιουργούμε υποσύνολα διαδοχικών εικονοστοιχείων του περιγράμματος πλήθους L_s το καθένα. Ακολούθως υπολογίζουμε το πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού το οποίο βέλτιστα προσεγγίζει κάθε τέτοιο υποσύνολο όπου η παράμετρος του πολυωνύμου είναι το μήκος ξ του εκάστοτε αντιστοίχου προς προσέγγιση τμήματος. Συγκεκριμένα έστωσαν τα εικονοστοιχεία P_1, P_2, \dots, P_{L_s} . Δύο διαδοχικά εξ αυτών απέχουν απόσταση

$$d(P_i, P_{i+1}) = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (3.1)$$

όπου (x_i, y_i) οι συντεταγμένες του P_i και (x_{i+1}, y_{i+1}) αυτές του P_{i+1} . Εν συνεχεία ορίζουμε την ακολουθία ξ_i όπου

$$\xi_1 = 0 \text{ και } \xi_{i+1} = \sum_{k=1}^i d(P_k, P_{k+1}) \quad i = 1, 2, \dots, L_s - 1. \quad (3.2)$$

Κάθε όρος της ακολουθίας αυτής εκφράζει το μήκος της αλυσίδας των εικονοστοιχείων που ξεκινάει από το P_1 και περατούται στο P_i . Συνεπώς προσεγγίζουμε τις συντεταγμένες κάθε ομάδας εικονοστοιχείων με τα πολυώνυμα

$$\hat{x}_i = a_0 \xi_i^3 + a_1 \xi_i^2 + a_2 \xi_i + a_3 \quad i = 1, 2, \dots, L_s \quad (3.3)$$

και

$$\hat{y}_i = b_0 \xi_i^3 + b_1 \xi_i^2 + b_2 \xi_i + b_3, \quad i = 1, 2, \dots, L_s \quad (3.4)$$

κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων, προσδιορίζοντας τους συντελεστές $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$ ούτως ώστε το λάθος προσέγγισης

$$E = \sum_{i=1}^{L_s} \left\{ (x_i - \hat{x}_i)^2 + (y_i - \hat{y}_i)^2 \right\} \quad (3.5)$$

να είναι ελάχιστο. Η εύρεση των συντελεστών αυτών γίνεται μέσω των εξής βημάτων: κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι η ποσότητα E είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση των προσδιοριστέων συντελεστών, είναι δε φραγμένη κάτω από το μηδέν. Άρα, έχει τουλάχιστον ένα απόλυτο ελάχιστο, στο οποίο όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial E}{\partial a_0}, \dots, \frac{\partial E}{\partial a_3}, \frac{\partial E}{\partial b_0}, \dots, \frac{\partial E}{\partial b_3}$ είναι μηδέν. Η απαίτηση αυτή οδηγεί ευθύγραμμα σε ένα γραμμικό σύστημα ως προς τους προσδιοριστέους συντελεστές, το οποίον εν γένει προσφέρει με μοναδικό τρόπο τους συντελεστές που ελαχιστοποιούν την ποσότητα E . Τα πολυώνυμα που αντιστοιχούν στο σημειοσύνολο P_1, P_2, \dots, P_{L_s} τα συμβολίζουμε με Sx_j και Sy_j .

Με επανάληψη της ανωτέρω διαδικασίας και αρχίζοντας από το τυχόν pixel x_j, y_j του περιγράμματος, λαμβάνουμε ένα ζεύγος πολυωνύμων Sx_j, Sy_j το οποίον βέλτιστα προσεγγίζει τα εικονοστοιχεία του περιγράμματος $P_j, P_{j+1}, \dots, P_{j+L_s-1}$. Με κατάλληλη επιλογή της ακολουθίας των εικονοστοιχείων εκκίνησης λαμβάνουμε ένα σύνολο διαδοχικών επικαλυπτομένων ζευγών πολυωνύμων 3^{00} βαθμού, έστωσαν αυτά

$$Sx_j, Sy_j \quad j = 1, 2, \dots, N_s \quad (3.6)$$

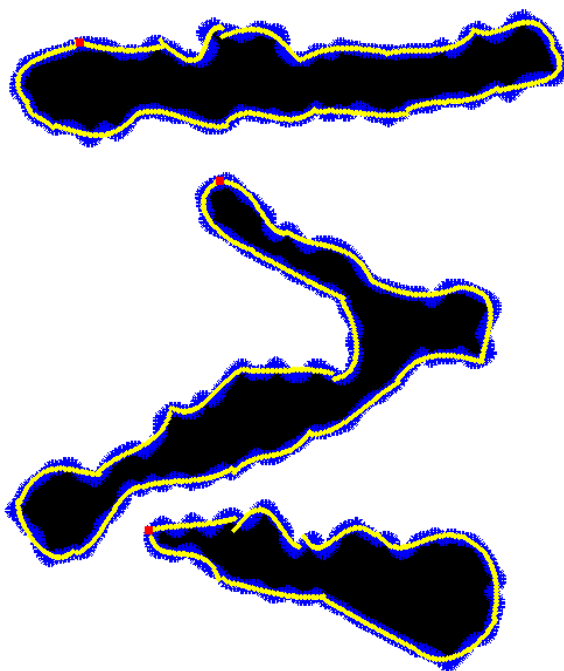
τα οποία καλύπτουν όλο το περίγραμμα κάθε γράμματος.

Συνήθως, όπως αναλυτικά θα περιγραφεί κατωτέρω, επιλέγουμε το σημείο εκκίνησης του $j+1$ -οστού πολυωνύμου να απέχει απ' το σημείο εκκίνησης του j -οστού κατά AM, που είναι ένα μικρό ποσοστό του συνολικού αριθμού pixels του περιγράμματος κάθε γράμματος. Προκειμένου να υπάρχει ομοιομορφία στην εφαρμογή της μεθόδου, για να δημιουργήσουμε τις επικαλυπτόμενες αλυσίδες στην περίπτωση που το σημείο εκκίνησης αυτών βρίσκεται στα τελευταία L_s pixels του περιγράμματος, «δανειζόμαστε» pixels από τα πρώτα του περιγράμματος. Η ποσότητα L_s είναι το ακέραιο μέρος ενός ποσοστού του συνολικού αριθμού των pixels του περιγράμματος, έστω αυτό 25%. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα αυτής της διαδικασίας είναι ότι πιθανά μικρά κενά που υπάρχουν σε πολλές περιπτώσεις λόγω φθοράς των επιγραφών καλύπτονται με τα αντίστοιχα σημεία των πολυωνύμων προσέγγισης.



Εικόνα 3.1

Ψηφιακή αναπαράσταση μιας υλοποίησης Α. Το περίγραμμα αυτής αναπαρίσταται με μπλε αστερίσκους και οι διαδοχικές πολυωνυμικές προσεγγίσεις του περιγράμματος με κίτρινους. Η πρώτη εξ αυτών εκκινεί από συγκεκριμένο σημείο που σημειώνεται με μεγάλο κόκκινο τετράγωνο για καλύτερη εποπτεία. Σημειώνεται ότι η κάθε νησίδα προσεγγίζεται αυτόνομα.



Εικόνα 3.2

Ψηφιακή αναπαράσταση μιας υλοποίησης Σ. Το περίγραμμα αυτής αναπαρίσταται με μπλε αστερίσκους και οι διαδοχικές πολυωνυμικές προσεγγίσεις του περιγράμματος με κίτρινους. Η πρώτη εξ αυτών εκκινεί από συγκεκριμένο σημείο που σημειώνεται με μεγάλο κόκκινο τετράγωνο για καλύτερη εποπτεία. Σημειώνεται ότι η κάθε νησίδα προσεγγίζεται αυτόνομα.



Εικόνα 3.3

Ψηφιακή αναπαράσταση μιας υλοποίησης Μ. Το περίγραμμα αυτής αναπαρίσταται με μπλε αστερίσκους. Με κίτρινο χρώμα αναπαρίστανται οι διαδοχικές πολυωνμικές προσεγγίσεις του περιγράμματος. Η πρώτη εξ αυτών εκκινεί από συγκεκριμένο σημείο που σημειώνεται με μεγάλο κόκκινο τετράγωνο για καλύτερη εποπτεία.

Εξαγωγή ομαλοποιημένου περιγράμματος κάθε γράμματος

Όπως προαναφέρθηκε, για να αποφύγουμε την ενδεχόμενη πόλωση που οφείλεται στην επιλογή του πρώτου σημείου της αλυσίδας των L_s pixels στην προηγούμενη μέθοδο, επιτελούμε τα εξής : αρχικά διαλέγουμε σαν πρώτο σημείο ένα τυχαίο pixel έστω το υπ' αριθμόν P_1 όπως προκύπτει απ' την εξαγωγή του περιγράμματος, δημιουργούμε την αλυσίδα A_1 των pixels P_1, \dots, P_{1+L_s-1} και την προσεγγίζουμε με τα πολώνυμα Sx_1, Sy_1 όπως περιγράφεται ανωτέρω. Αν υποθεθεί ότι το σύνολο των pixels ολοκλήρου του περιγράμματος είναι L_p , επιλέγουμε το ακέραιο μέρος ενός μικρού ποσοστού του L_p έστω $AM = [0.025 L_p]$. Επιλέγουμε το υπ' αριθμόν $P_1 + AM$ pixel ως νέα αρχή μιας αλυσίδας L_s pixels και σε επόμενο βήμα σχηματίζουμε την αλυσίδα A_2 των εικονοστοιχείων $P_{1+AM}, \dots, P_{1+L_s+AM-1}$, την οποία και προσεγγίζουμε πάλι, δημιουργώντας τα πολώνυμα Sx_2, Sy_2 . Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία δημιουργώντας την αλυσίδα των pixels $P_{1+2AM}, \dots, P_{1+L_s+2AM-1}$ και τα πολώνυμα Sx_3, Sy_3 κ.ο.κ. έως ότου $vAM \leq L_p$ και $(v+1)AM > L_p$. Κατ' αυτόν τον τρόπο κάθε pixel του περιγράμματος «καλύπτεται» από πολλά διαφορετικά

προσεγγιστικά πολυώνυμα Sx_i, Sy_i . Επομένως, για κάθε pixel υπολογίζουμε το μέσο όρο των πολυωνύμων που το προσεγγίζουν και κατ' αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνουμε μια πολύ ομαλή κάλυψη (x_i^E, y_i^E) του περιγράμματος της υλοποίησης του συμβολογράμματος, η οποία πρακτικά είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου εκκίνησης.



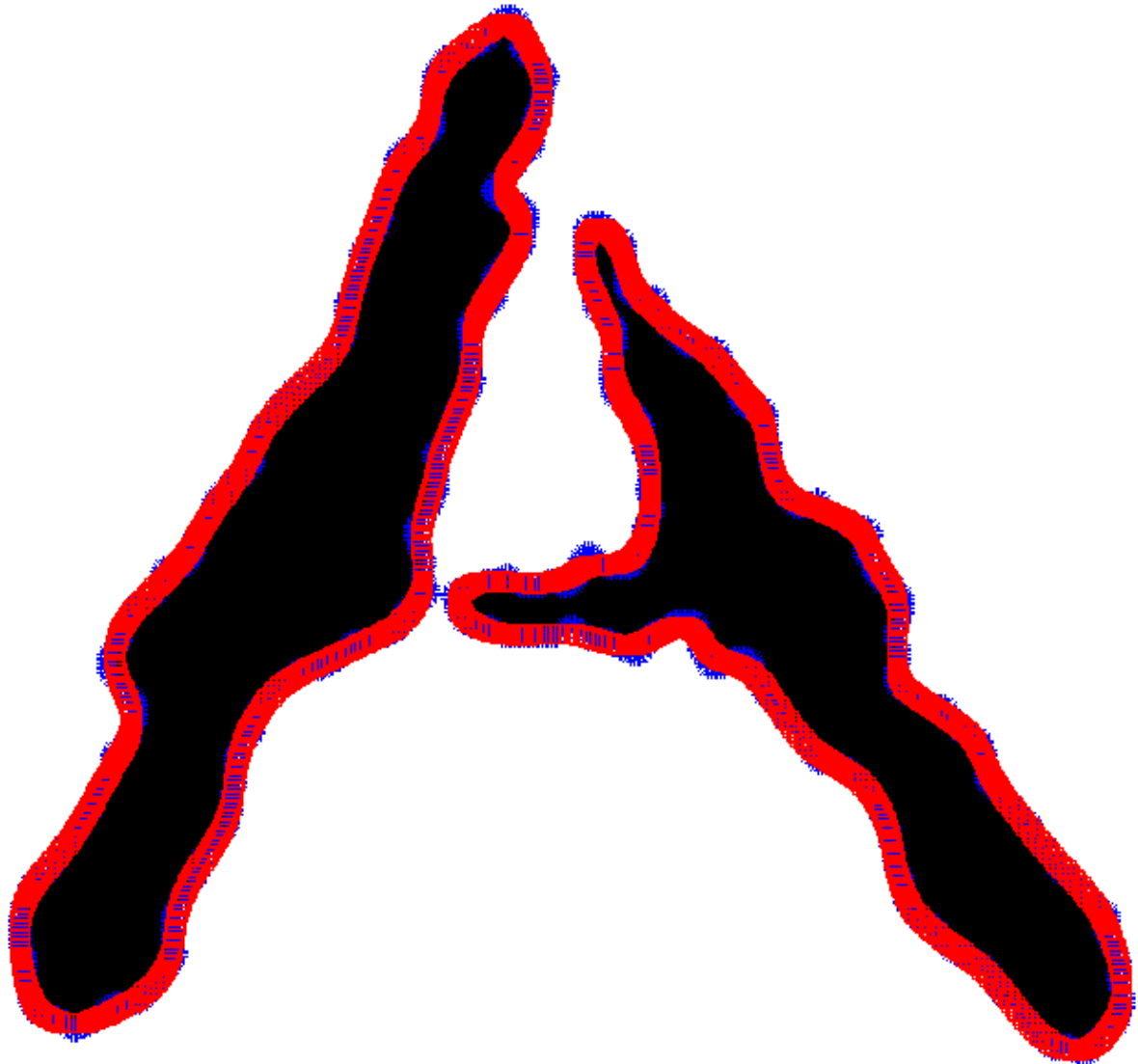
Εικόνα 3.4α

Πολλαπλές πολυωνυμικές προσεγγίσεις του περιγράμματος του Α της εικόνας 3.1. Στην εικόνα παρουσιάζονται τέσσερις από αυτές τις προσεγγίσεις με διαφορετικό χρώμα η κάθε μία. Η προσέγγιση με πράσινο χρώμα εμφανίζεται εντονότερη διότι έχει τυπωθεί τελευταία. Το μπλε χρώμα αναπαριστά το πραγματικό περίγραμμα.



Εικόνα 3.4β

Λεπτομέρεια της εικόνας 3.4α : φαίνονται καθαρά με διαφορετικό χρώμα τέσσερις ομάδες πολυωνυμικών προσεγγίσεων που εκκινούν από διαφορετικά σημεία του περιγράμματος. Το μπλε χρώμα αναπαριστά το πραγματικό περίγραμμα.



Εικόνα 3.4γ

Τελική προσέγγιση του περιγράμματος της υλοποίησης του Α της εικόνας 3.1: με κόκκινα τετραγωνίδια αναπαρίσταται ο μέσος όρος των προσεγγίσεων της εικόνας 3.4α



Εικόνα 3.4δ

Λεπτομέρεια της εικόνας 3.4γ. Φαίνεται καθαρά η ομαλοποίηση που έχει γίνει μέσω της διαδικασίας του μέσου όρου των ομάδων των πολυωνυμικών προσεγγίσεων. Με μπλε χρώμα παρουσιάζεται το πραγματικό περίγραμμα της υλοποίησης του γράμματος ενώ με κόκκινο η τελική προσέγγιση.



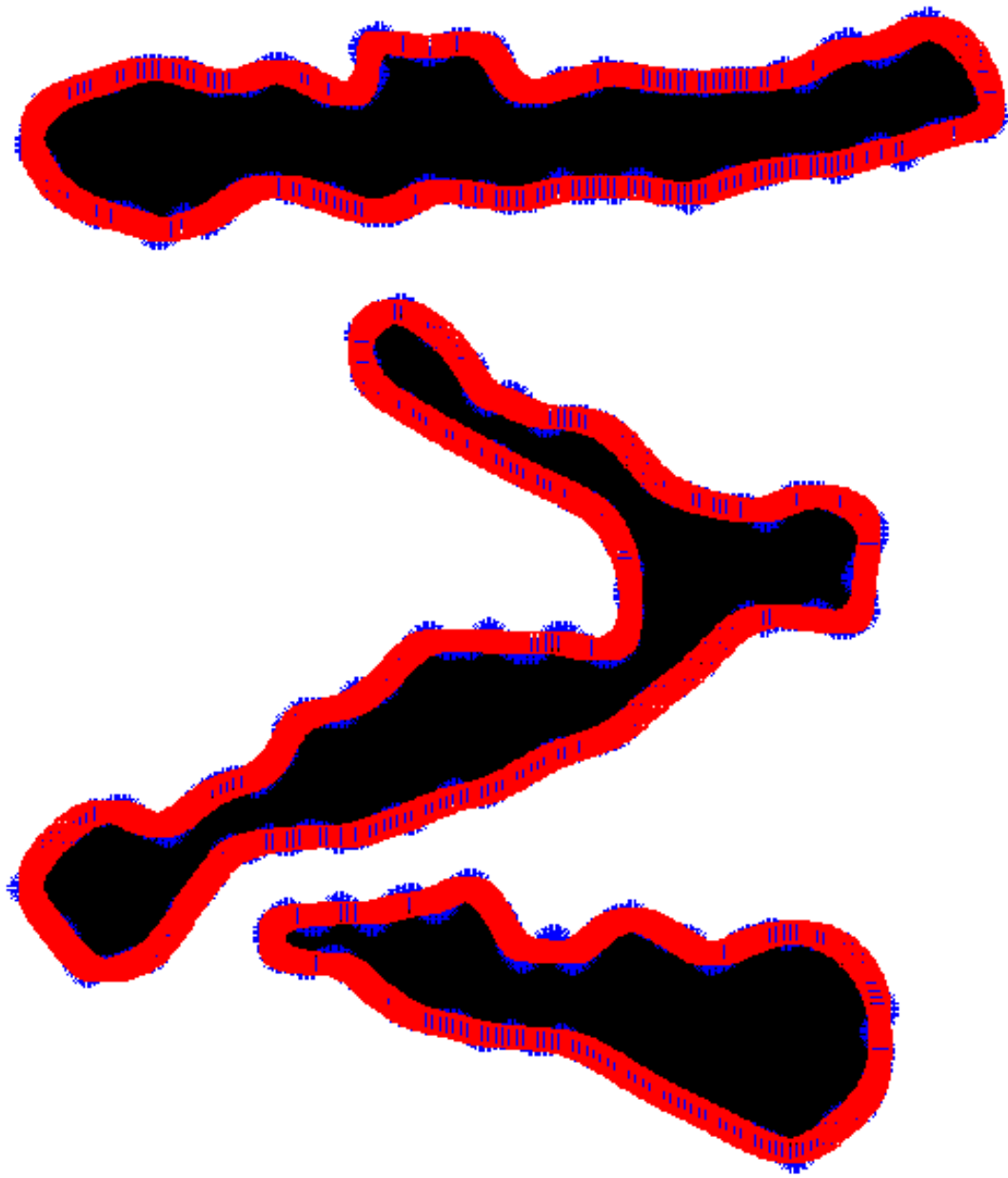
Εικόνα 3.5α

Πολλαπλές πολυωνμικές προσεγγίσεις του περιγράμματος του Σ της εικόνας 3.2. Στην εικόνα παρουσιάζονται τέσσερις από αυτές τις προσεγγίσεις με διαφορετικό χρώμα η κάθε μία. Η προσέγγιση με πράσινο χρώμα εμφανίζεται εντονότερη διότι έχει τυπωθεί τελευταία. Το μπλε χρώμα αναπαριστά το πραγματικό περίγραμμα.



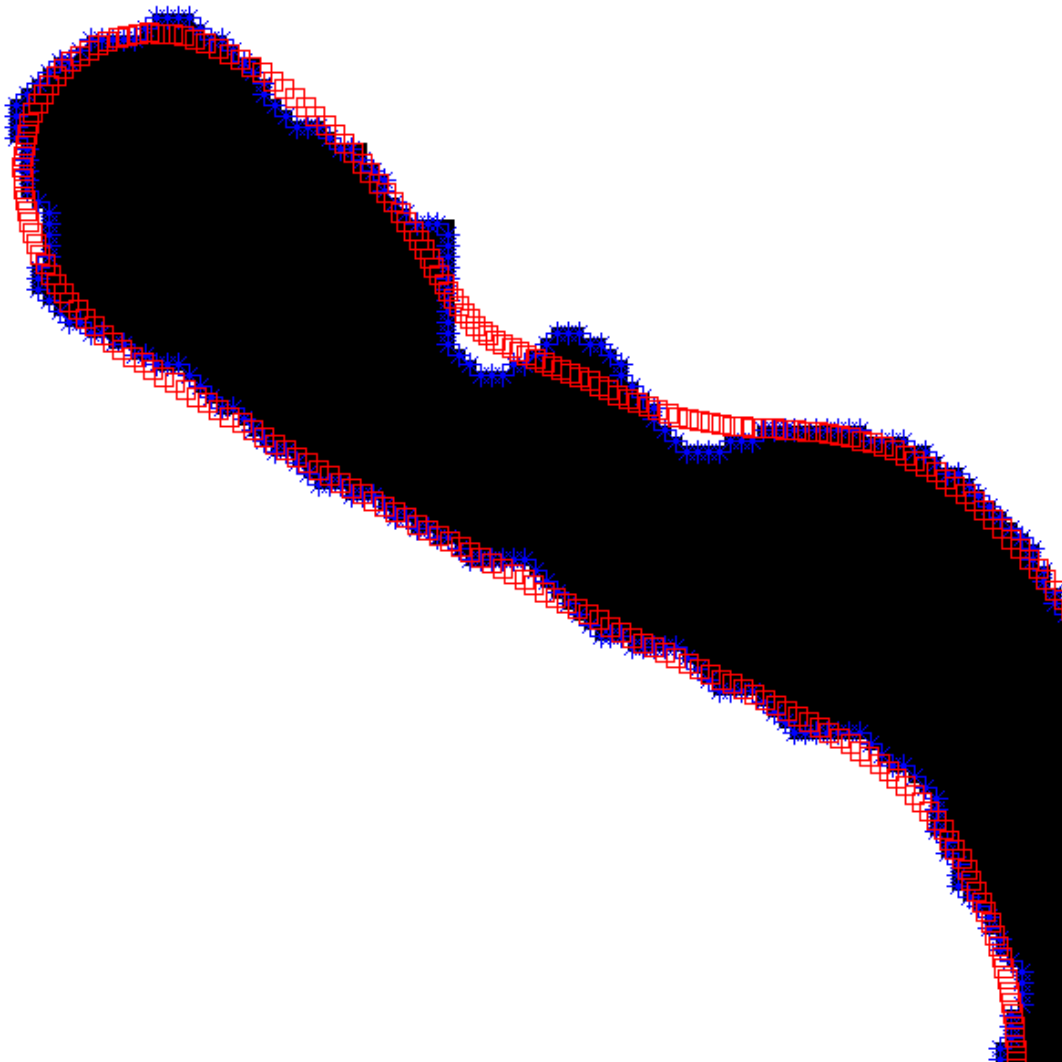
Εικόνα 3.5β

Λεπτομέρεια της εικόνας 3.5α: φαίνονται καθαρά οι τέσσερις ομάδες πολωνυμικών προσεγγίσεων που εκκινούν από διαφορετικά σημεία του περιγράμματος. Το μπλε χρώμα αναπαριστά το πραγματικό περίγραμμα.



Εικόνα 3.5γ

Τελική προσέγγιση του περιγράμματος της υλοποίησης του Σ της εικόνας 3.2: με κόκκινα τετραγωνίδια αναπαρίσταται ο μέσος όρος των προσεγγίσεων της εικόνας 3.5α



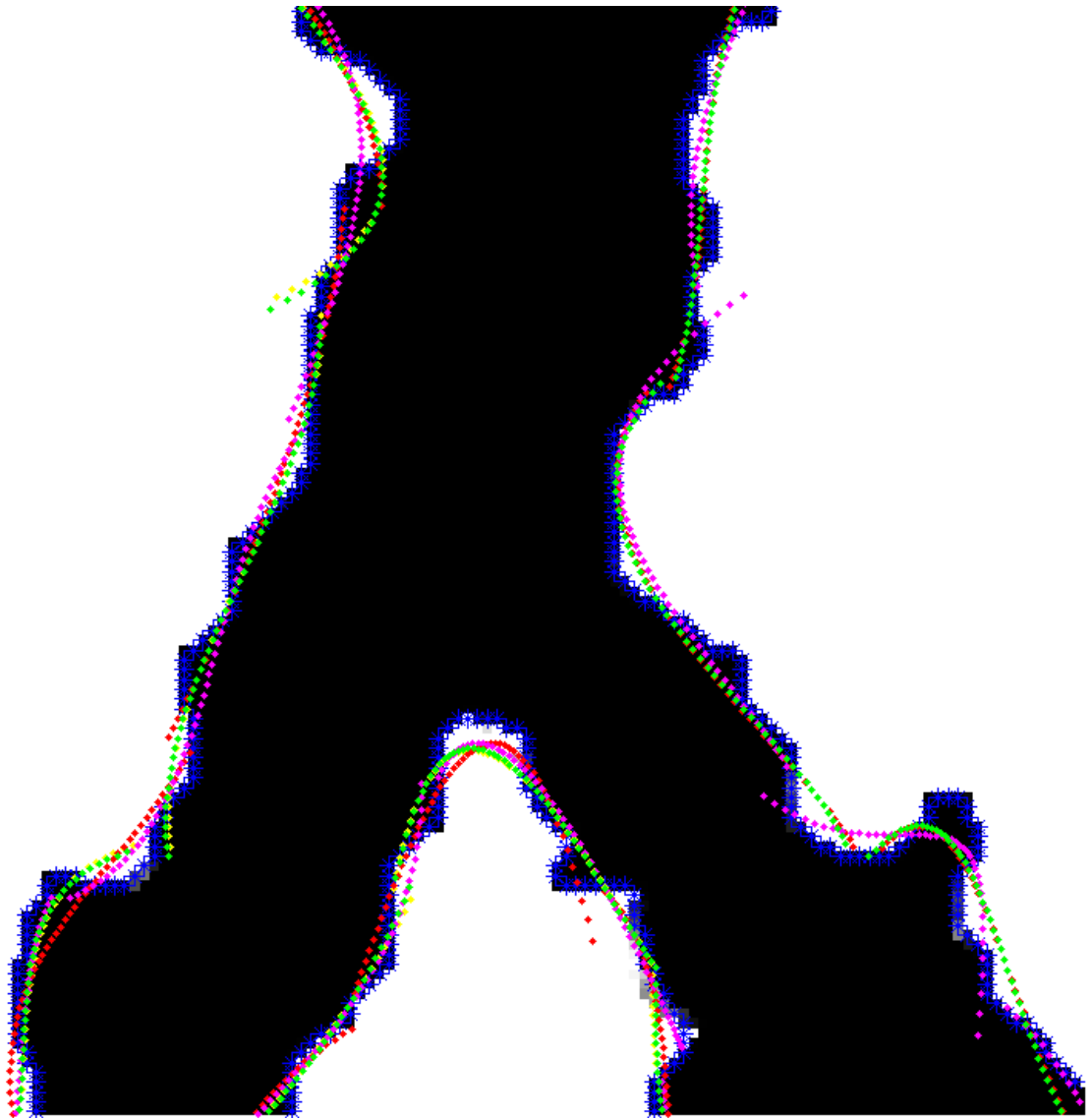
Εικόνα 3.5δ

Λεπτομέρεια της εικόνας 3.5γ. Φαίνεται καθαρά η ομαλοποίηση που έχει γίνει μέσω της διαδικασίας του μέσου όρου των ομάδων των πολυωνυμικών προσεγγίσεων. Με μπλε χρώμα παρουσιάζεται το πραγματικό περίγραμμα της υλοποίησης του γράμματος ενώ με κόκκινο η τελική προσέγγιση.



Εικόνα 3.6α

Πολλαπλές πολυωνμικές προσεγγίσεις του περιγράμματος του Μ της εικόνας 3.3. Στην εικόνα παρουσιάζονται 4 από αυτές τις προσεγγίσεις με διαφορετικό χρώμα η κάθε μία. Η προσέγγιση με πράσινο χρώμα εμφανίζεται εντονότερη διότι έχει τυπωθεί τελευταία. Το μπλε χρώμα αναπαριστά το πραγματικό περίγραμμα.



Εικόνα 3.6β

Λεπτομέρεια της εικόνας 3.6α ώστε να φαίνονται καθαρά οι τέσσερις ομάδες πολυωνυμικών προσεγγίσεων που εκκινούν από διαφορετικά σημεία του περιγράμματος. Το μπλε χρώμα αναπαριστά το πραγματικό περίγραμμα.



Εικόνα 3.6γ

Τελική προσέγγιση του περιγράμματος της υλοποίησης του Μ της εικόνας 3.3: με κόκκινα τετραγωνίδια αναπαρίσταται ο μέσος όρος των προσεγγίσεων της εικόνας 3.6α.

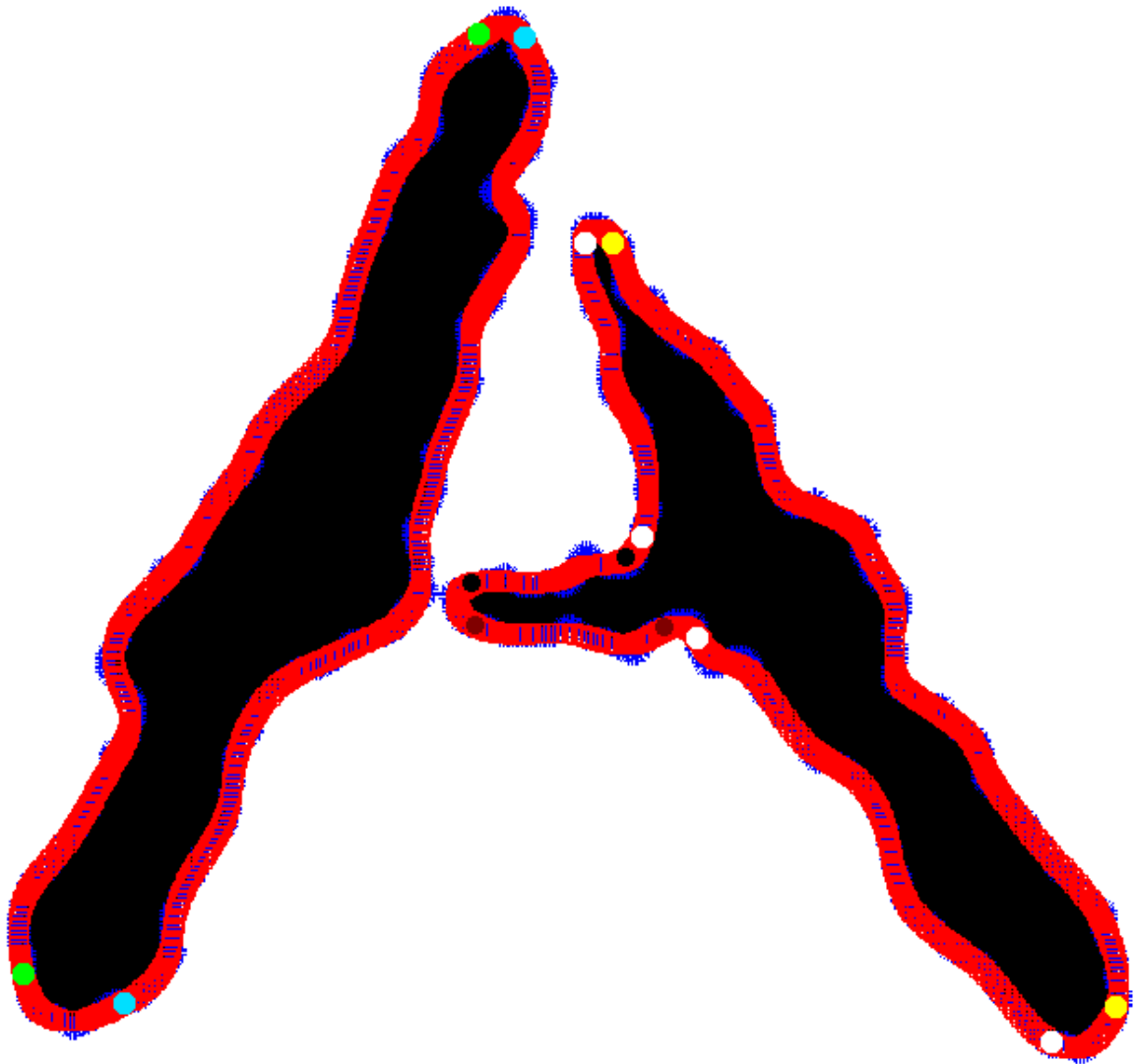


Εικόνα 3.6δ

Λεπτομέρεια της εικόνας 3.6γ Φαίνεται καθαρά η ομαλοποίηση που έχει γίνει μέσω της διαδικασίας του μέσου όρου των ομάδων των πολωνυμικών προσεγγίσεων. Με μπλε χρώμα παρουσιάζεται το πραγματικό περίγραμμα της υλοποίησης του γράμματος ενώ με κόκκινο η τελική προσέγγιση.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε αριθμητικά την καμπυλότητα (ίδη παράτημα Π.Κ.) αυτής της ομαλοποιημένης προσέγγισης του περιγράμματος σε κάθε σημείο (x_i^E, y_i^E) αυτής και ύστερα το μέσο όρο και τη διασπορά των τιμών της καμπυλότητας. Εντοπίζουμε τα σημεία στα οποία η καμπυλότητα έχει τοπικό μέγιστο και επίσης τιμή τουλάχιστον τριπλάσια της διασποράς της καθώς και τα αντίστοιχα τους σημεία στο αρχικό περίγραμμα. Τα τελευταία τα θεωρούμε σαν σημεία καμπής του αρχικού περιγράμματος και τα ονομάζουμε κρίσιμα σημεία αυτού. Θα θέλαμε να τονίσουμε ότι στα εντελώς καμπύλα τμήματα των συμβολογραμμάτων O , Φ και Ω δεν εντοπίζουμε σημεία καμπής εάν τα τμήματα αυτά είναι απομονωμένα. Εάν η υλοποίηση του συμβολογράμματος αποτελείται από νησίδες, η ανωτέρω διαδικασία πραγματοποιείται για όλες τις νησίδες και τον ρόλο του L_p τον παίζει το πλήθος των pixels της κάθε νησίδας.

Τέλος αφήνουμε κατάλληλα ζεύγη κρίσιμων σημείων καμπής να σχηματίζουν τις πλευρές του εκάστοτε συμβόλου της αλφαβήτου, σύμφωνα με την ανθρώπινη αίσθηση. Σχετικά παραδείγματα παρουσιάζονται στις επόμενες σελίδες.



Εικόνα 3.7

Στην εικόνα αυτή παρουσιάζονται τα κρίσιμα του ομαλοποιημένου περιγράμματος (κόκκινο χρώμα) του Α της εικόνας 3.4γ. Τα ομόχρωμα σημεία είναι κρίσιμα σημεία που ανήκουν στην ίδια πλευρά. Τα σημεία αυτά παρουσιάζονται σε μεγέθυνση για καλύτερη εποπτεία.



Εικόνα 3.8

Στην εικόνα αυτή παρουσιάζονται τα κρίσιμα του ομαλοποιημένου περιγράμματος (κόκκινο χρώμα) του Σ της εικόνας 3.5γ. Τα ομόχρωμα σημεία είναι κρίσιμα σημεία που ανήκουν στην ίδια πλευρά. Τα σημεία αυτά παρουσιάζονται σε μεγέθυνση για καλύτερη εποπτεία.



Εικόνα 3.9

Στην εικόνα αυτή παρουσιάζονται τα κρίσιμα του ομαλοποιημένου περιγράμματος (κόκκινο χρώμα) του Μ της εικόνας 3.6γ. Τα ομόχρωμα σημεία είναι κρίσιμα σημεία που ανήκουν στην ίδια πλευρά. Τα σημεία αυτά παρουσιάζονται σε μεγέθυνση για καλύτερη εποπτεία.

4. Βέλτιστη προσαρμογή των περιγραμμάτων των επιγραφικών υλοποιήσεων ενός συμβολογράμματος

4.1 Θεωρητική ανάλυση

Ας υποθεθεί ότι επιθυμούμε να ελέγξουμε την ομοιότητα των υλοποιήσεων ενός συμβόλου της αλφαβήτου που εμφανίζονται σε κάποια επιγραφή ή επιγραφές. Ένας ευθύγραμμος τρόπος για να κάνουμε αυτό τον έλεγχο θα ήταν μια διαδικασία η οποία θα περιελάμβανε βέλτιστη προσαρμογή των συγκρινομένων περιγραμμάτων και εκτίμηση του λάθους αυτής της προσαρμογής. Μία τέτοια διαδικασία στην περίπτωση των αρχαίων, καθώς και άλλων επιγραφών, εμπεριέχει ενδογενώς σοβαρές δυσκολίες οι οποίες οφείλονται στο γεγονός ότι οι υλοποιήσεις των γραμμάτων επί των επιγραφών έχουν διαφορετικό προσανατολισμό και μέγεθος. Για την αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών, η χρησιμοποιητέα μέθοδος προσαρμογής πρέπει να εξαλείφει την τυχαιότητα στον προσανατολισμό και το μέγεθος που έχουν οι συγκρινόμενες υλοποιήσεις γραμμάτων. Επομένως, η πρωτότυπη μέθοδος που επελέγη για τη βέλτιστη προσαρμογή των περιγραμμάτων δύο συμβόλων της αλφαβήτου συμπεριλαμβάνει τα εξής βήματα: α) Τοποθετούμε τα περιγράμματα των δύο υλοποιήσεων του εξεταζομένου συμβόλου της αλφαβήτου σε ένα κοινό πλαίσιο (καμβά) ούτως ώστε τα κέντρα βάρους αυτών να συμπίπτουν. β) Το περίγραμμα του ενός γράμματος διατηρείται σταθερό και θεωρείται σαν μία ψηφιακή καμπύλη αναφοράς. γ) Το περίγραμμα της άλλης υλοποίησης περιστρέφεται, υφίσταται ομοιοθεσία και μετατοπίζεται παράλληλα και ως προς τους δύο άξονες συντεταγμένων. δ) Ορίζεται ένα μέτρο της απόστασης μεταξύ του περιγράμματος αναφοράς και του μετασχηματισμένου περιγράμματος και επιλέγεται εκείνος ο μετασχηματισμός που προσφέρει τη μικρότερη απόσταση μεταξύ των δύο καμπυλών ή ισοδυνάμως το μικρότερο λάθος προσαρμογής. ε) Τέλος το περίγραμμα αναφοράς καθώς και το μετασχηματισμένο περίγραμμα συγκρίνονται και με μια επιπλέον μέθοδο δηλαδή επί τη βάση ενός ακόμα κατάλληλα επιλεγμένου κριτηρίου όσον αφορά στη μεταξύ τους προσαρμογή.

Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή των βημάτων αυτών .

A. Διαδικασία περιστροφής: Έστω Π_1 το περίγραμμα αναφοράς και Π_2 αυτό στο οποίο θα εφαρμοστούν οι μετασχηματισμοί. Κατ' αρχήν εντοπίζουμε τα κέντρα βάρους των Π_1, Π_2 , έστωσαν KB_1 και KB_2 αντίστοιχα. Μεταφέρουμε το Π_2 ούτως ώστε το κέντρο βάρους του να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, αφαιρώντας από κάθε σημείο αυτού το διάνυσμα $\overrightarrow{OKB_2}$.

Ακολουθώς πραγματοποιούμε ένα σύνολο περιστροφών του μετατοπισμένου Π_2 όπου, κατά τα γνωστά, η τυχούσα στροφή του περιγράμματος πραγματοποιείται πολλαπλασιάζοντας κάθε σημείο του μετατοπισμένου Π_2 με τη μήτρα περιστροφής

$$TR = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Κατά τον τρόπο αυτό λαμβάνουμε μία πρώτη μετασχηματισμένη ψηφιακή καμπύλη την $\Pi_2^R(\varphi)$.

B. Ομοιοθεσία: Εν συνεχεία επιτελούμε ομοιοθεσία του $\Pi_2^R(\varphi)$ με κέντρο το σημείο O. Με άλλα λόγια πολλαπλασιάζουμε κάθε συνιστώσα όλων των σημείων της ψηφιακής καμπύλης $\Pi_2^R(\varphi)$ με έναν θετικό πραγματικό αριθμό έστω λ . Είναι προφανές ότι με αυτό τον τρόπο και αν ισχύει $\lambda > 1$ πραγματοποιούμε μεγέθυνση του περιγράμματος Π_2 ενώ δε όταν $\lambda < 1$ σμίκρυνση του περιγράμματος αυτού. Με αυτή τη διαδικασία λαμβάνουμε μία δεύτερη μετασχηματισμένη παραλλαγή του Π_2 την $\Pi_2^{RO}(\varphi, \lambda)$, η οποία θεωρητικά έχει κέντρο βάρους το O και συμπεριλαμβάνει τόσο την αλλαγή του προσανατολισμού του γράμματος όσο και την τροποποίηση του μεγέθους αυτού.

Γ. Παράλληλη μετατόπιση: Μετατοπίζουμε παραλλήλως το $\Pi_2^{RO}(\varphi, \lambda)$ στο KB_1 . Εν συνεχεία επιτρέπουμε στο μετατοπισμένο $\Pi_2^{RO}(\varphi, \lambda)$ να μετακινείται κατά $\delta x, \delta y$ γύρω απ το KB_1 και τοιουτοτρόπως λαμβάνουμε ένα $\Pi_2^{ROP}(\varphi, \lambda, \delta x, \delta y)$.

Ένα Κριτήριο προσαρμογής των Π_1 και Π_2 .

Θεωρούμε ως τη βέλτιστη προσαρμογή των Π_1 και Π_2 εκείνο το σχηματισμό που αποτελείται από το Π_1 στην αρχική του θέση και στο αρχικό του μέγεθος και από το $\Pi_2^{ROP}(\varphi^B, \lambda^B, \delta x^B, \delta y^B)$, όπου τα $\varphi^B, \lambda^B, \delta x^B, \delta y^B$ είναι εκείνες οι

παράμετροι του μετασχηματισμού που καθιστούν την απόσταση των δύο ψηφιακών καμπυλών Π_1 και $\Pi_2^{ROP}(\varphi^B, \lambda^B, \delta x^B, \delta y^B)$ ελάχιστη σύμφωνα με ένα κατάλληλα επιλεγμένο κριτήριο. Για τον ορθό προσδιορισμό του κριτηρίου αυτού πραγματοποιήθηκαν πολλές δοκιμές. Η πρώτη και πλέον ευθύγραμμη δοκιμή ήταν να υπολογίσουμε την Ευκλείδεια απόσταση κάθε σημείου (pixel) της καμπύλης $\Pi_2^{ROP}(\varphi, \lambda, \delta x, \delta y)$ από την καμπύλη Π_1 και εν συνεχεία να θεωρήσουμε σαν κριτήριο απόστασης των δύο καμπυλών το μέσο όρο των αποστάσεων αυτών. Το κριτήριο αυτό δεν απέδωσε ικανοποιητικά κυρίως λόγω του ότι στη βέλτιστη θέση υπήρχαν πολλά τμήματα των δύο περιγραμμάτων που ήταν σε άμεση γειτνίαση, ενώ σύμφωνα με την ανθρώπινη κοινή λογική δε θα έπρεπε. Αυτή η λανθασμένη προσαρμογή οφείλεται στο γεγονός ότι ενώ για τον άνθρωπο κάθε σύμβολο της αλφαβήτου έχει μία καθορισμένη μορφή, κατά την υλοποίηση αυτού του συμβόλου στην πέτρα προκύπτει μία πολύ διαταραγμένη παραλλαγή του ιδανικού περιγράμματος. Επομένως, δεν είναι απαραίτητο ότι το σωστό σκέλος του Π_1 θα ταιριάζει βέλτιστα με το αντίστοιχο σκέλος του Π_2^{ROP} . Αυτός ήταν και ο κυριότερος λόγος για τον οποίο αποφασίστηκε ο χωρισμός του περιγράμματος κάθε υλοποίησης συμβόλου της αλφαβήτου σε πλευρές, οι οποίες περατούνται σε κρίσιμα σημεία όπως αυτά ορίστηκαν και εξήχθησαν στην προηγούμενη παράγραφο.

Το ανωτέρω δεν ήταν το μοναδικό μειονέκτημα αυτού του κριτηρίου. Πράγματι, η επόμενη δοκιμή αφορούσε στην επιλογή ενός κριτηρίου σύμφωνα με το οποίο η απόσταση μεταξύ των περιγραμμάτων δύο υλοποιήσεων ενός συμβόλου της αλφαβήτου υπολογιζόταν πλευρά πλευρά. Συγκεκριμένα, και θεωρώντας για παράδειγμα το συμβολόγραμμα A, η απόσταση κάθε σημείου της αριστερής πλευράς του αριστερού σκέλους του Π_1 υπολογίζεται μόνον από την αντίστοιχη πλευρά του $\Pi_2^{ROP}(\varphi, \lambda, \delta x, \delta y)$. Ομοίως, η απόσταση της δεξιάς πλευράς του αριστερού σκέλους του Π_1 υπολογίζεται μόνον από την αντίστοιχη πλευρά του $\Pi_2^{ROP}(\varphi, \lambda, \delta x, \delta y)$ κ.ο.κ. Σε μαθηματική διατύπωση, αυτή η απόσταση των δύο καμπυλών Π_1 και $\Pi_2^{ROP}(\varphi, \lambda, \delta x, \delta y)$ γράφεται

$$\varepsilon_1 = \sum_{k=1}^{N_S} \sum_{i=1}^{N_{1,k}} d(P_{k,i}, \Pi_{2,k}) \quad (4.2)$$

όπου N_s είναι ο αριθμός των πλευρών του προς μελέτη γράμματος, $\Pi_{2,k}$ η k πλευρά του $\Pi_2^{ROP}(\varphi, \lambda, \delta x, \delta y)$, τα $P_{k,i}$ είναι τα σημεία της k πλευράς του Π_1 , $N_{1,k}$ είναι ο αριθμός των σημείων της k πλευράς του Π_1 , $d(P_{k,i}, \Pi_{2,k})$ είναι η απόσταση του υπ' αριθμόν i σημείου $P_{k,i}$ από το αντίστοιχο τμήμα της καμπύλης του περιγράμματος Π_2^{ROP} και η θεωρούμενη βέλτιστη προσαρμογή είναι αυτή στην οποία ελαχιστοποιείται η ποσότητα ε_1 .

Το συγκεκριμένο κριτήριο δεν είχε ως αποτέλεσμα κατάλληλη προσαρμογή των εν λόγω καμπυλών. Πράγματι, η δεδομένη δυνατότητα ομοιοθεσίας της καμπύλης Π_2 , καθώς και το γεγονός ότι η θεωρούμενη βέλτιστη θέση ήταν αυτή που ελαχιστοποιούσε το ε_1 , οδήγησε σε σημαντική σμίκρυνση αυτής της καμπύλης σε σχέση με την Π_1 . Ανάλογα προβλήματα θα υπήρχαν και εάν η απόσταση οριζότο με βάση το περίγραμμα του μετασχηματιζομένου γράμματος.

Βέλτιστο κριτήριο προσαρμογής περιγραμμάτων

Το κριτήριο που οδήγησε στη βέλτιστη προσαρμογή των Π_1 , $\Pi_2^{ROP}(\varphi, \lambda, \delta x, \delta y)$ αφορούσε στην ελαχιστοποίηση της ποσότητας ε η μαθηματική έκφραση της οποίας είναι η ακόλουθη:

$$\varepsilon = \left(\sum_{k=1}^{N_s} \sum_{i=1}^{N_{1,k}} d(P_{k,i}, \Pi_{2,k}^{ROP}) + \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_{2,k}} d(Q_{k,j}, \Pi_{1,k}) \right) / 2 \quad (4.3)$$

όπου N_s είναι ο αριθμός των πλευρών του προς μελέτη γράμματος, $\Pi_{2,k}^{ROP}$ η k πλευρά του $\Pi_2^{ROP}(\varphi, \lambda, \delta x, \delta y)$, $P_{k,i}$ τα σημεία της k πλευράς του Π_1 , $N_{1,k}$ ο αριθμός των σημείων της k πλευράς του Π_1 και $d(P_{k,i}, \Pi_{2,k}^{ROP})$ η απόσταση του υπ' αριθμόν i σημείου $P_{k,i}$ από το αντίστοιχο τμήμα της καμπύλης του περιγράμματος

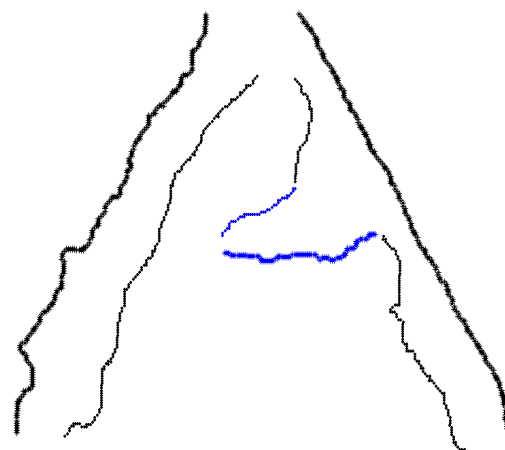
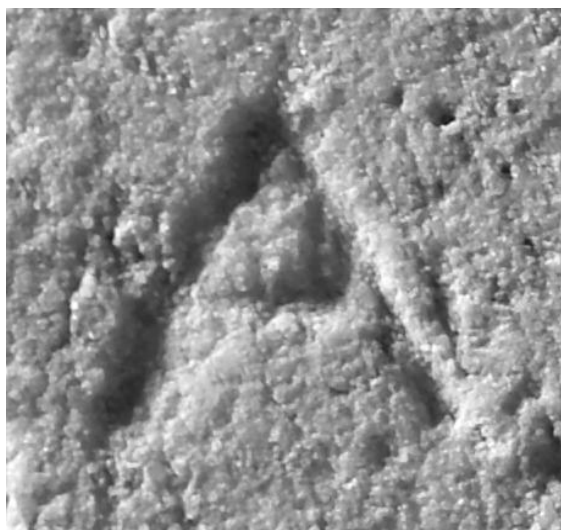
Π_2^{ROP} . Αντιστοίχως $\Pi_{1,k}$ είναι η k πλευρά του Π_1 , $Q_{k,j}$ τα σημεία της k πλευράς του Π_2^{ROP} , $N_{2,k}$ είναι ο αριθμός των σημείων της k πλευράς του Π_2 και $d(Q_{k,j}, \Pi_{1,k})$

είναι η απόσταση του υπ' αριθμόν j σημείου $Q_{k,j}$ από το αντίστοιχο τμήμα της καμπύλης του περιγράμματος Π_1 . Η ποσότητα ε υπολογίζεται για κάθε δυνατή θέση του Π_2 από 2 όρους διπλών αθροισμάτων. Η δυνατότητα ομοιοθεσίας του Π_2^{ROP} σε συνδυασμό με την επιθυμητή ελαχιστοποίηση του ε δεν οδηγεί σε παθολογική σμίκρυνση αυτού όπως στην περίπτωση της ποσότητας ε_1 . Αυτό συμβαίνει διότι σε μια τέτοια περίπτωση μειώνεται μεν ο πρώτος όρος, αυξάνεται όμως σημαντικά ο δεύτερος. Κατά συνέπεια η ελαχιστοποίηση της ποσότητας ε ποσοτικοποίησε με βέλτιστο τρόπο την προσαρμογή των Π_1 και Π_2 όταν στο Π_2 ασκούνται οι προαναφερθέντες τελεστές.

4.2 Οπτική απόδοση της βέλτιστης προσαρμογής υλοποιήσεων συμβολογραμμάτων

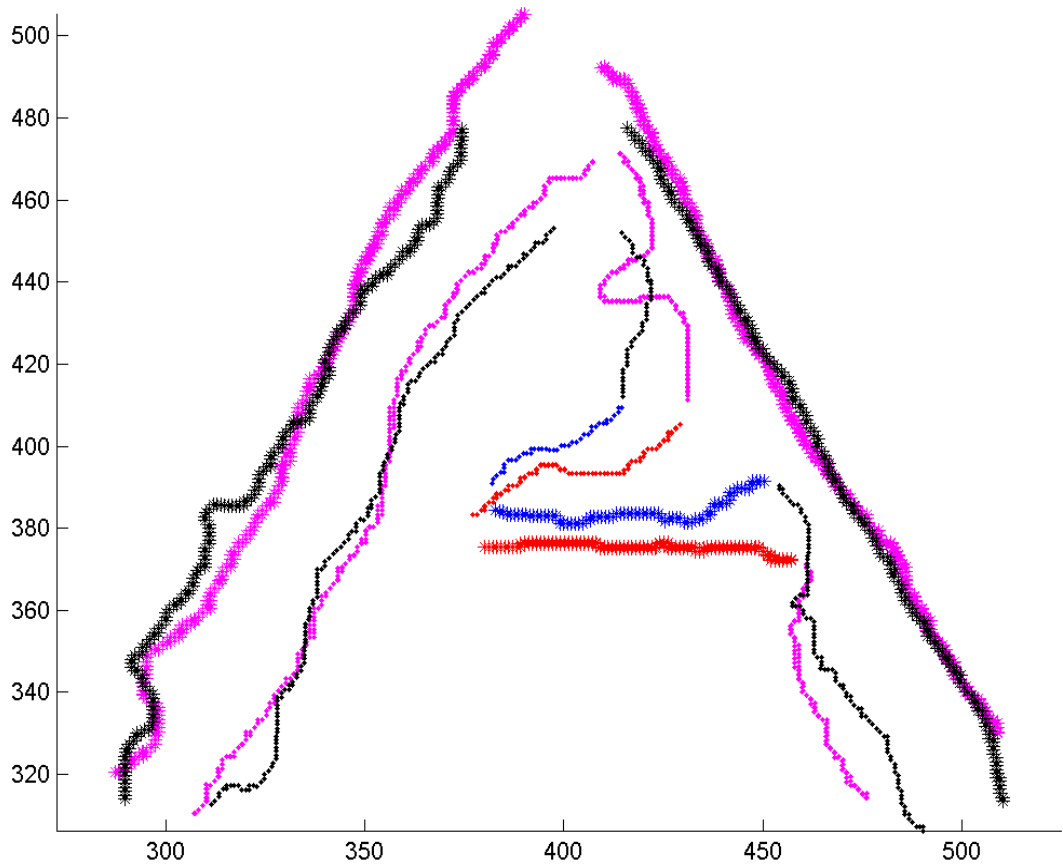
Ακολουθούν κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα βέλτιστης προσαρμογής διαφόρων περιγραμμάτων υλοποιήσεων των συμβολογραμμάτων A, Σ, και Μ που είναι από τα πιο χαρακτηριστικά. Να σημειωθεί ότι ενώ η σύγκριση μεταξύ των περιγραμμάτων γίνεται πλευρά προς αντίστοιχη πλευρά, τα διάφορα περιγράμματα που υφίστανται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας, υφίστανται αυτούς ως στερεό σώμα. Είναι επίσης χαρακτηριστικό το γεγονός ότι το κριτήριο ελαχιστοποίησης της ποσότητας ε της σχέσης (4.3) λειτουργεί και σε πολύ θορυβώδεις υλοποιήσεις όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στις εικόνες 4.6, 4.8, 4.9 και 4.14. Για λόγους καλής εποπτείας τα περιγράμματα εμφανίζονται με διαφορετικό χρώμα και σύμβολο εκτύπωσης ανά υλοποίηση και ανά σκέλος. Η πρότυπη υλοποίηση εμφανίζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα ενώ αυτή που υφίσταται κάθε φορά τους μετασχηματισμούς με μαύρο και μπλε.

Στις επόμενες σελίδες θεωρώντας τις ανά δύο, στην μεν αριστερή σελίδα παρουσιάζονται ξεχωριστά δύο υλοποιήσεις και τα περιγράμματά τους, στη μεν δεξιά σελίδα η βέλτιστη τοποθέτηση των περιγραμμάτων και των δύο υλοποιήσεων στο καρτεσιανό επίπεδο.



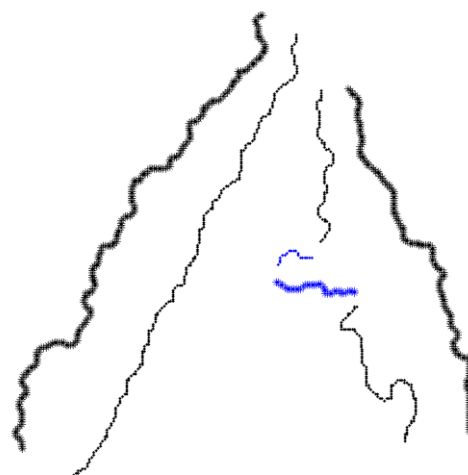
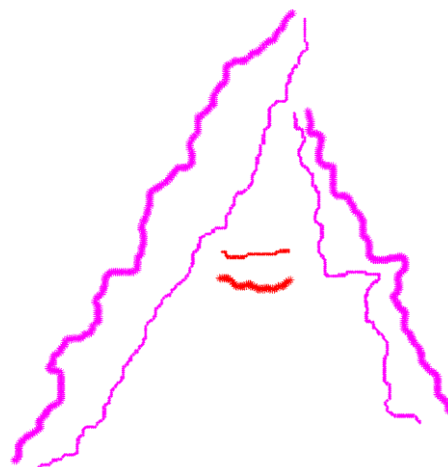
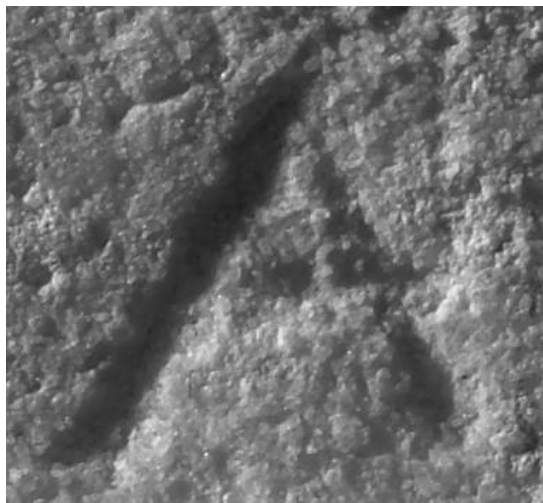
Εικόνα 4.1α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος **A** διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν στον **ίδιο** χαρακτήρα όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



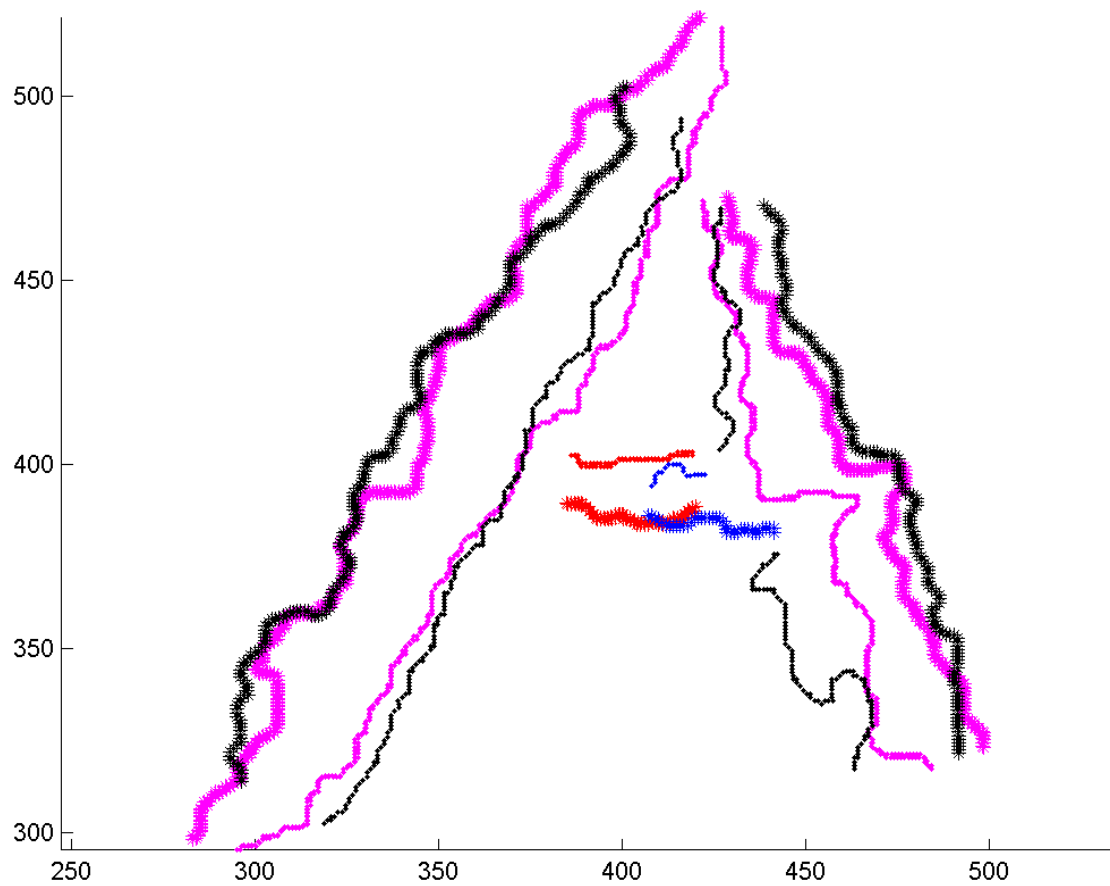
Εικόνα 4.1β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων απ' τον **ίδιο** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



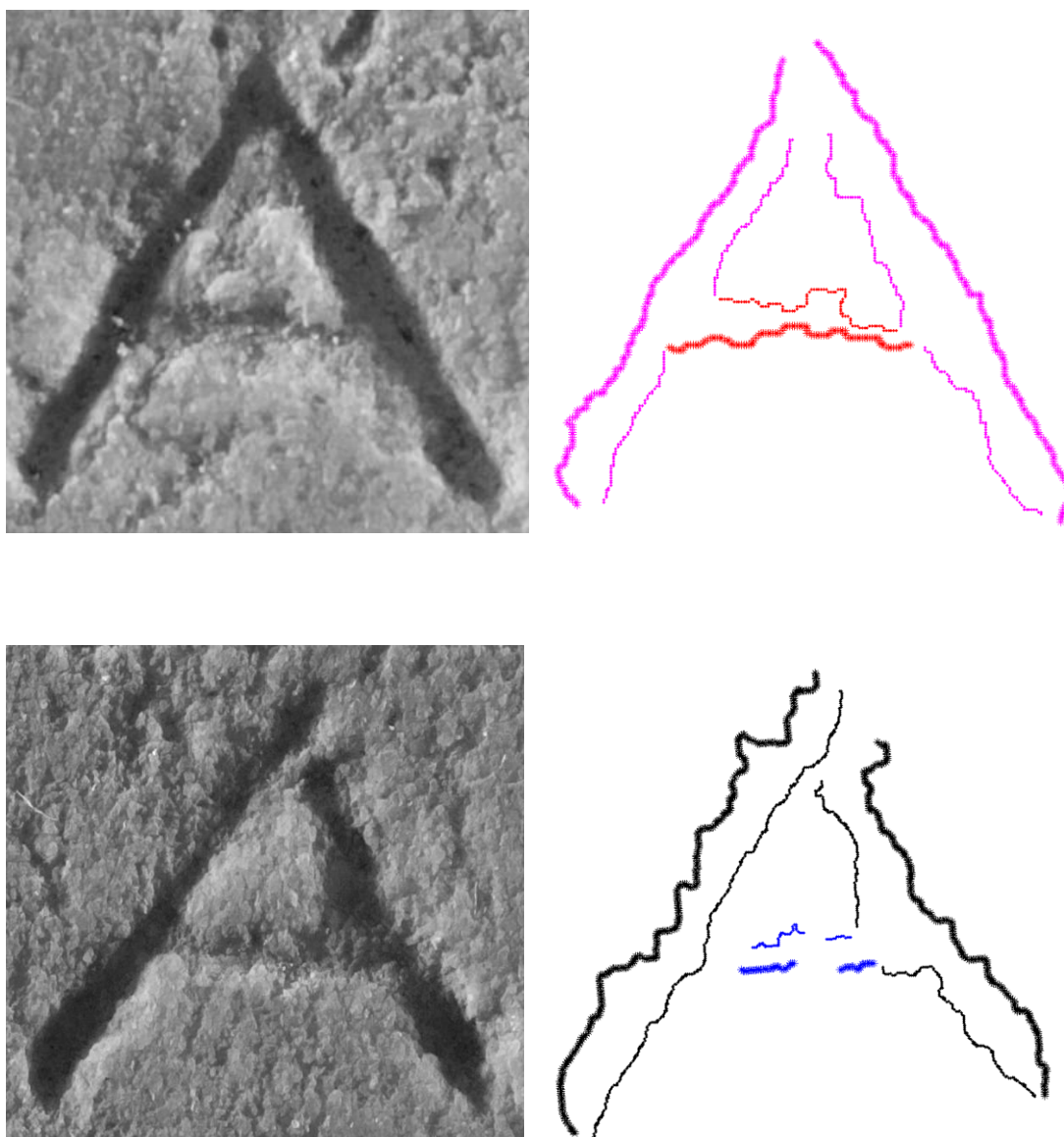
Εικόνα 4.2α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος Α διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν στον **ίδιο** χαρακτήρα όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



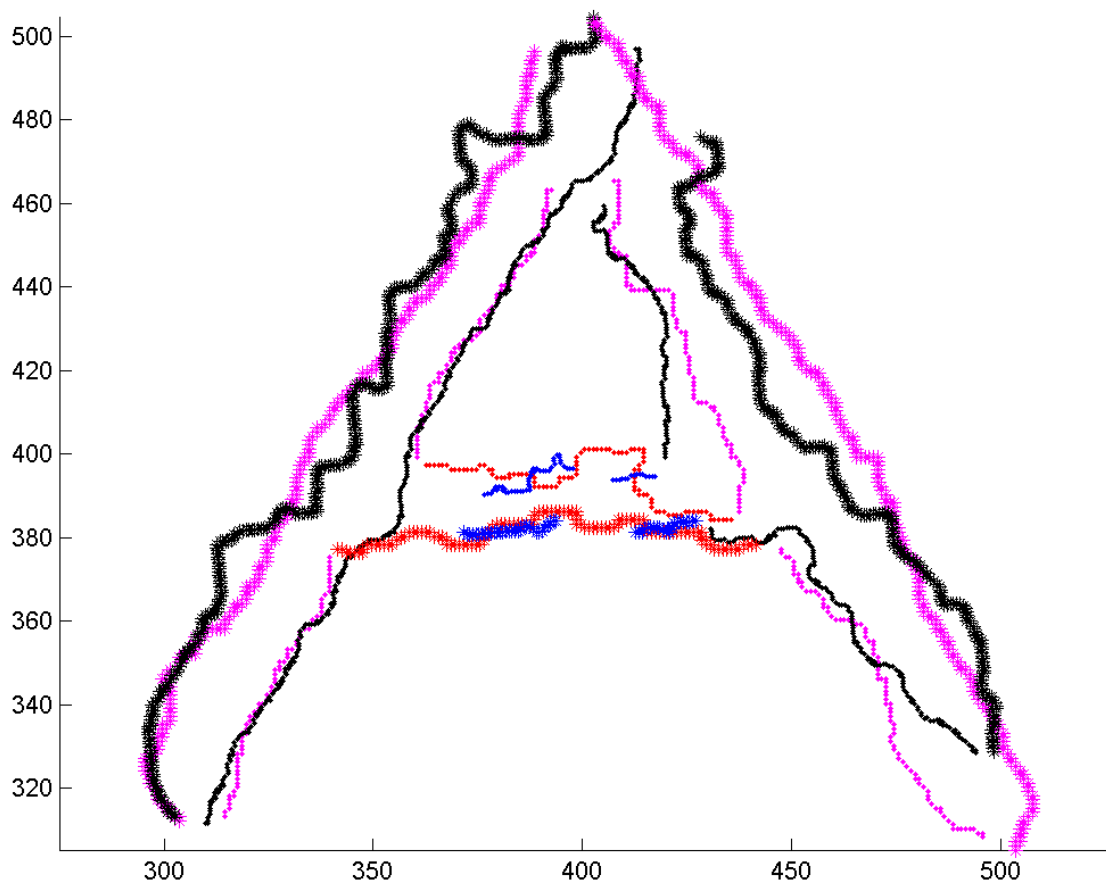
Εικόνα 4.2β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων απ' τον **ίδιο** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



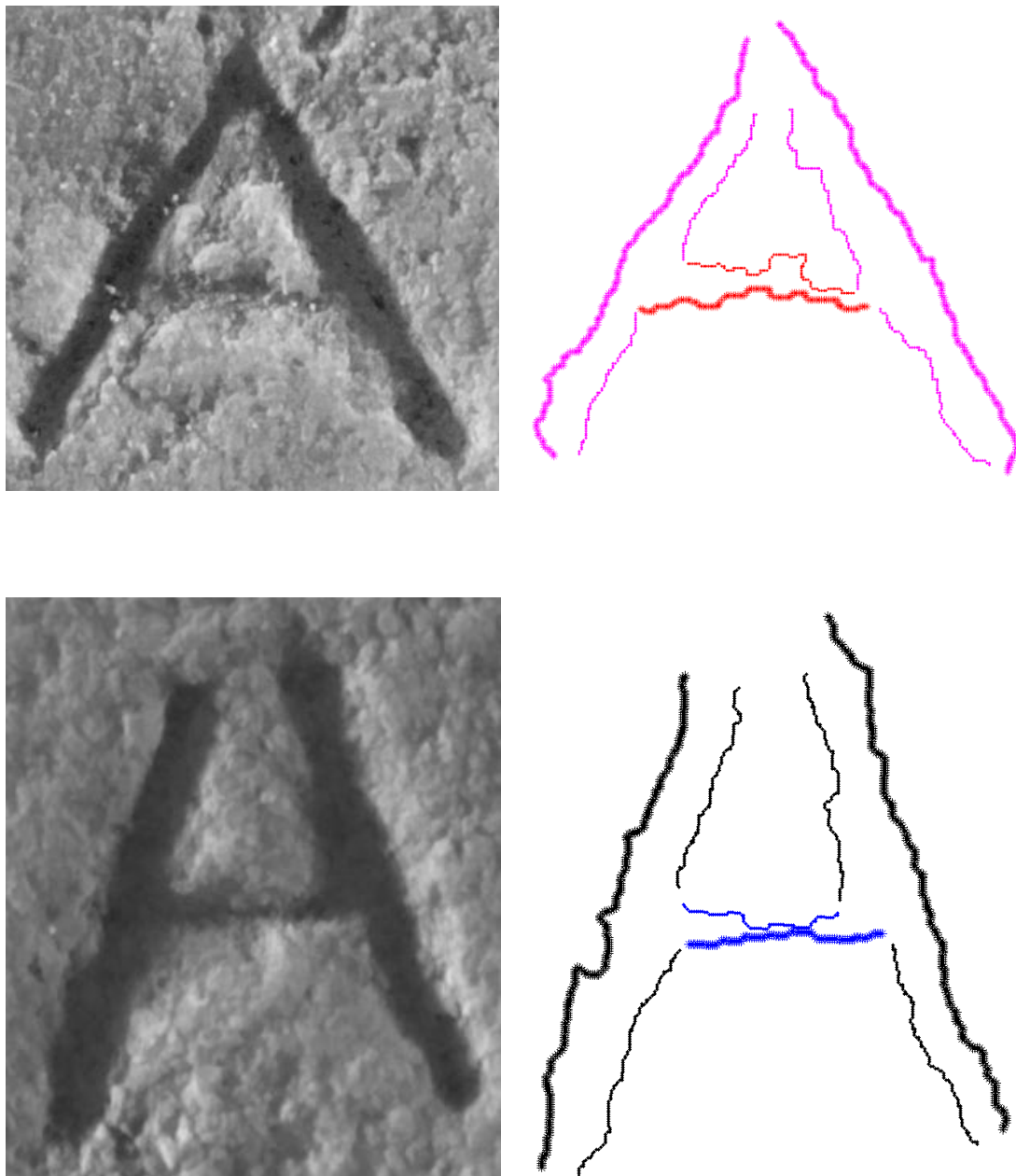
Εικόνα 4.3α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος **A** διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν στον **ίδιο** χαρακτή όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



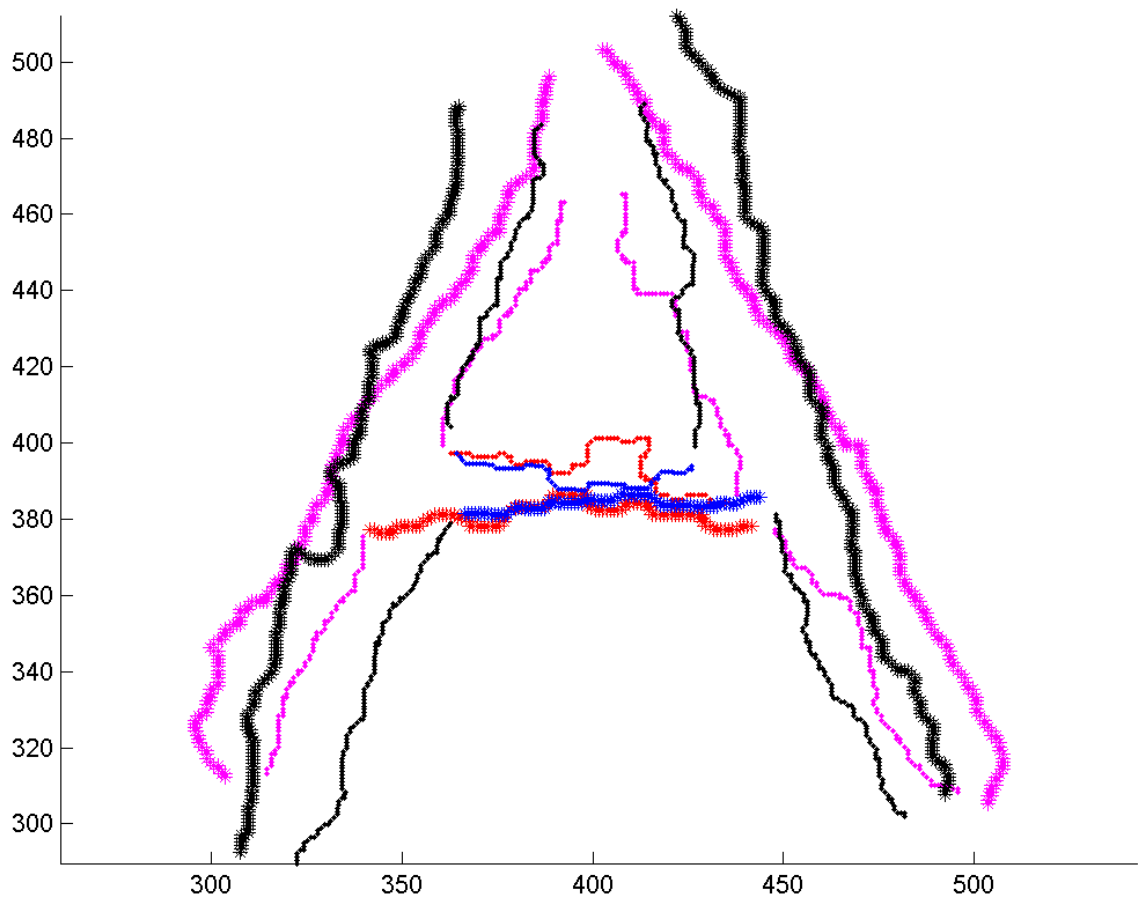
Εικόνα 4.3β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων απ' τον **ίδιο** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



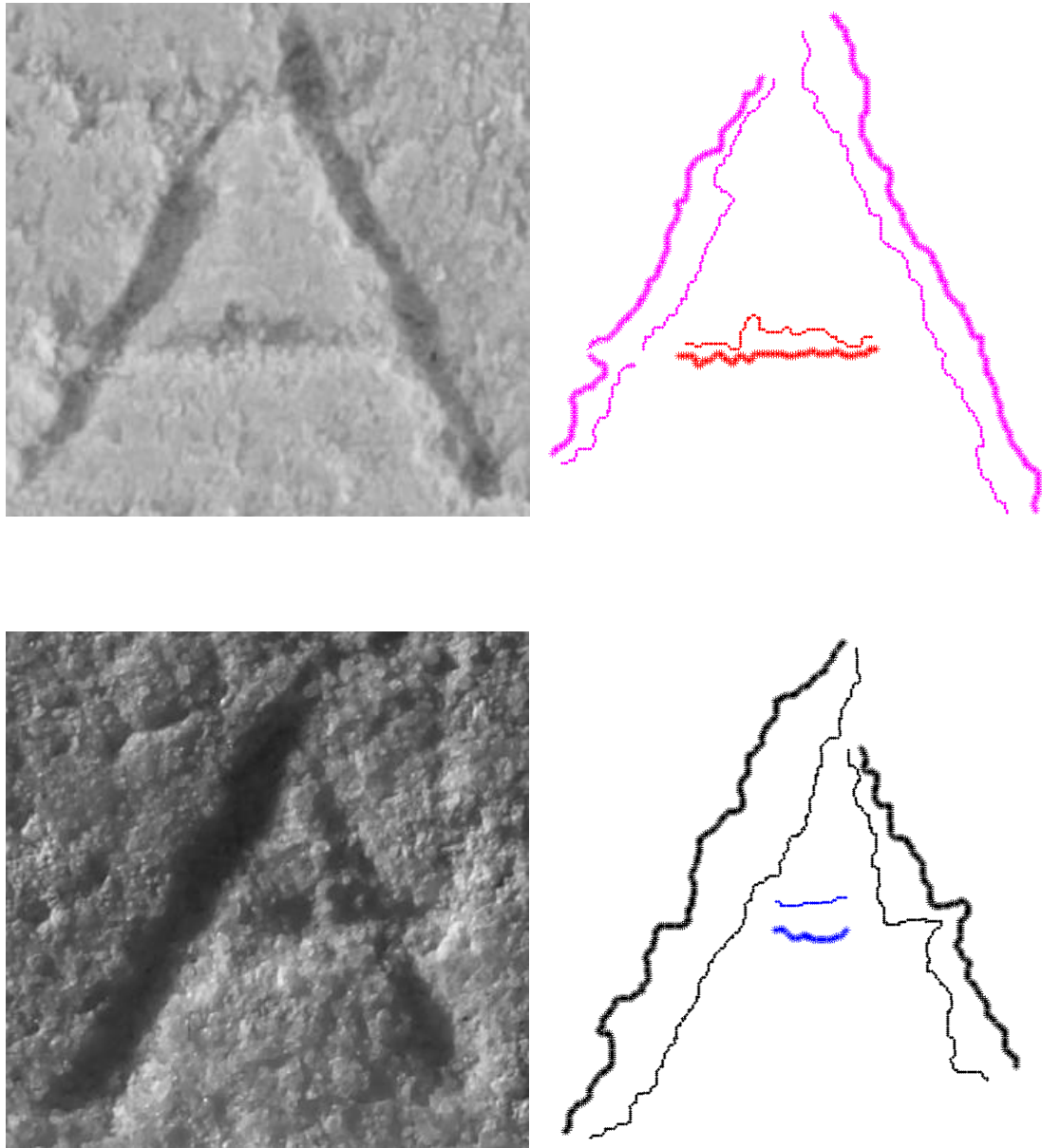
Εικόνα 4.4α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος Α διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν σε **διαφορετικό** χαρακτήρα όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



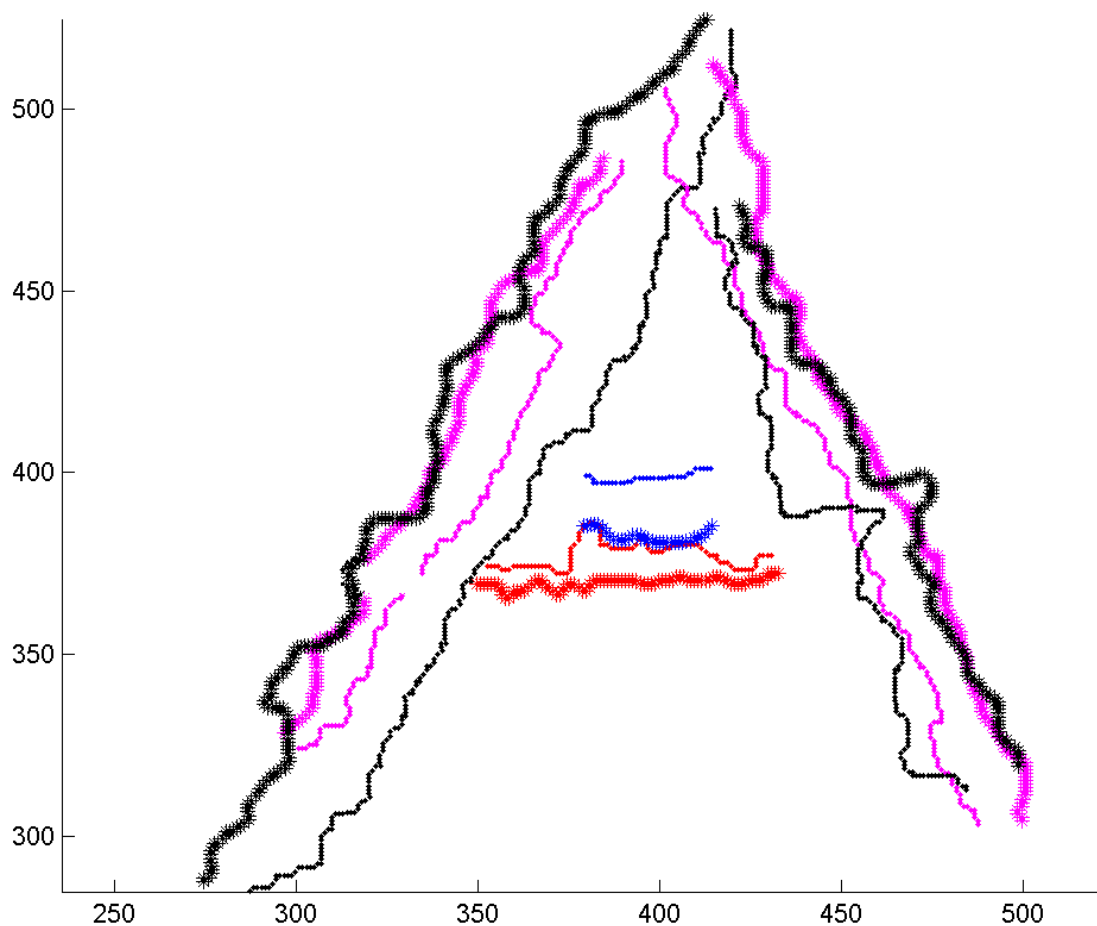
Εικόνα 4.4β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων από διαφορετικό χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



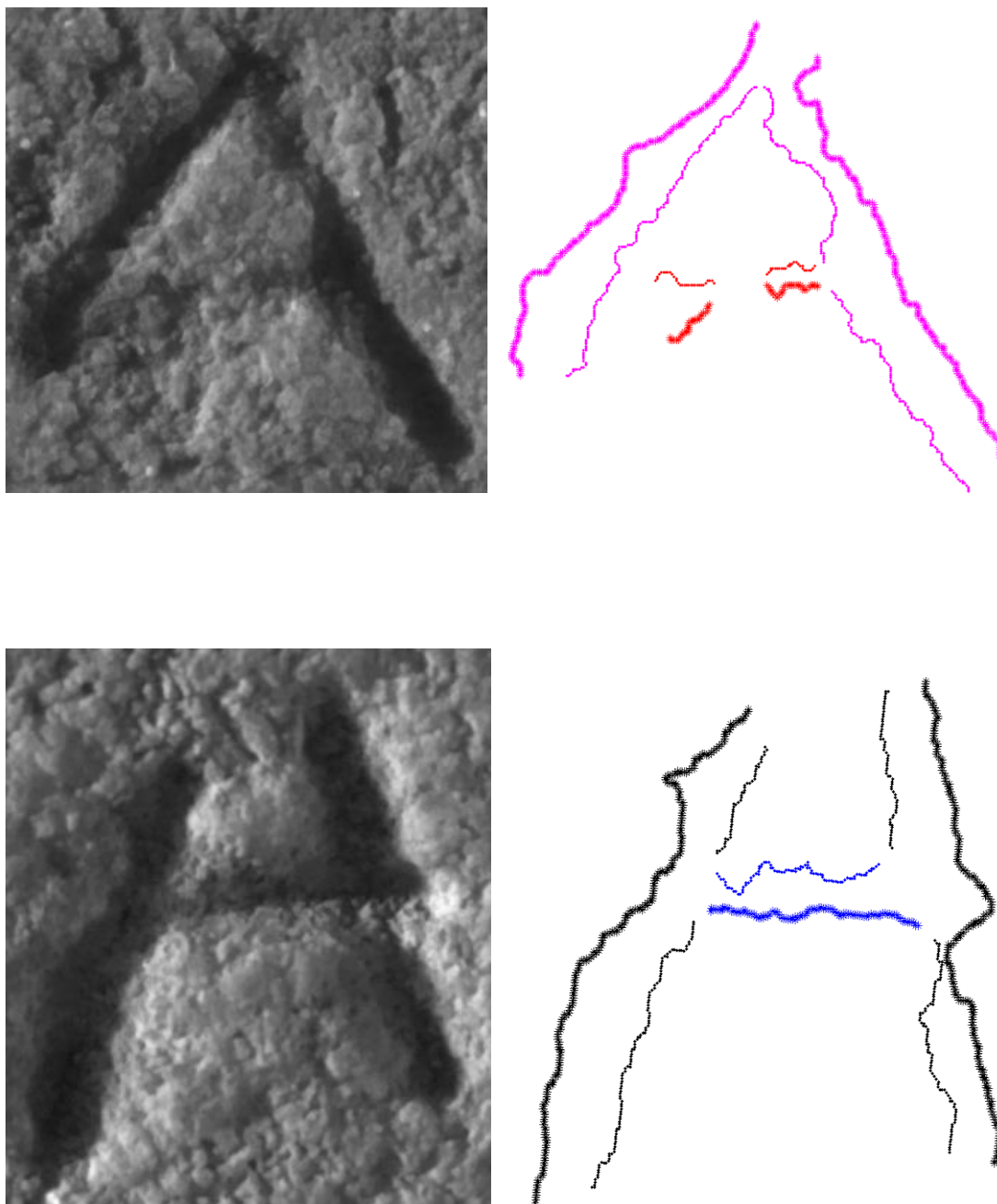
Εικόνα 4.5α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος Α διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν σε **διαφορετικό** χαρακτήρα όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



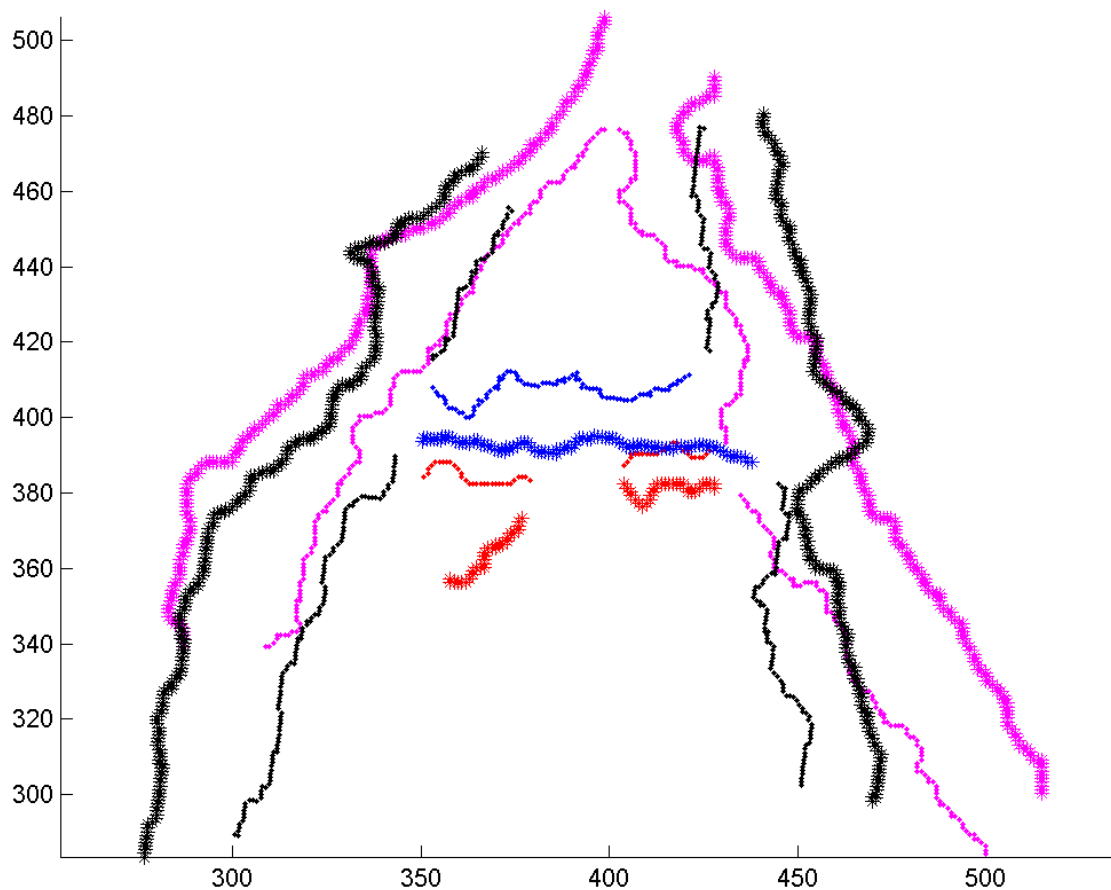
Εικόνα 4.5β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων από **διαφορετικό** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



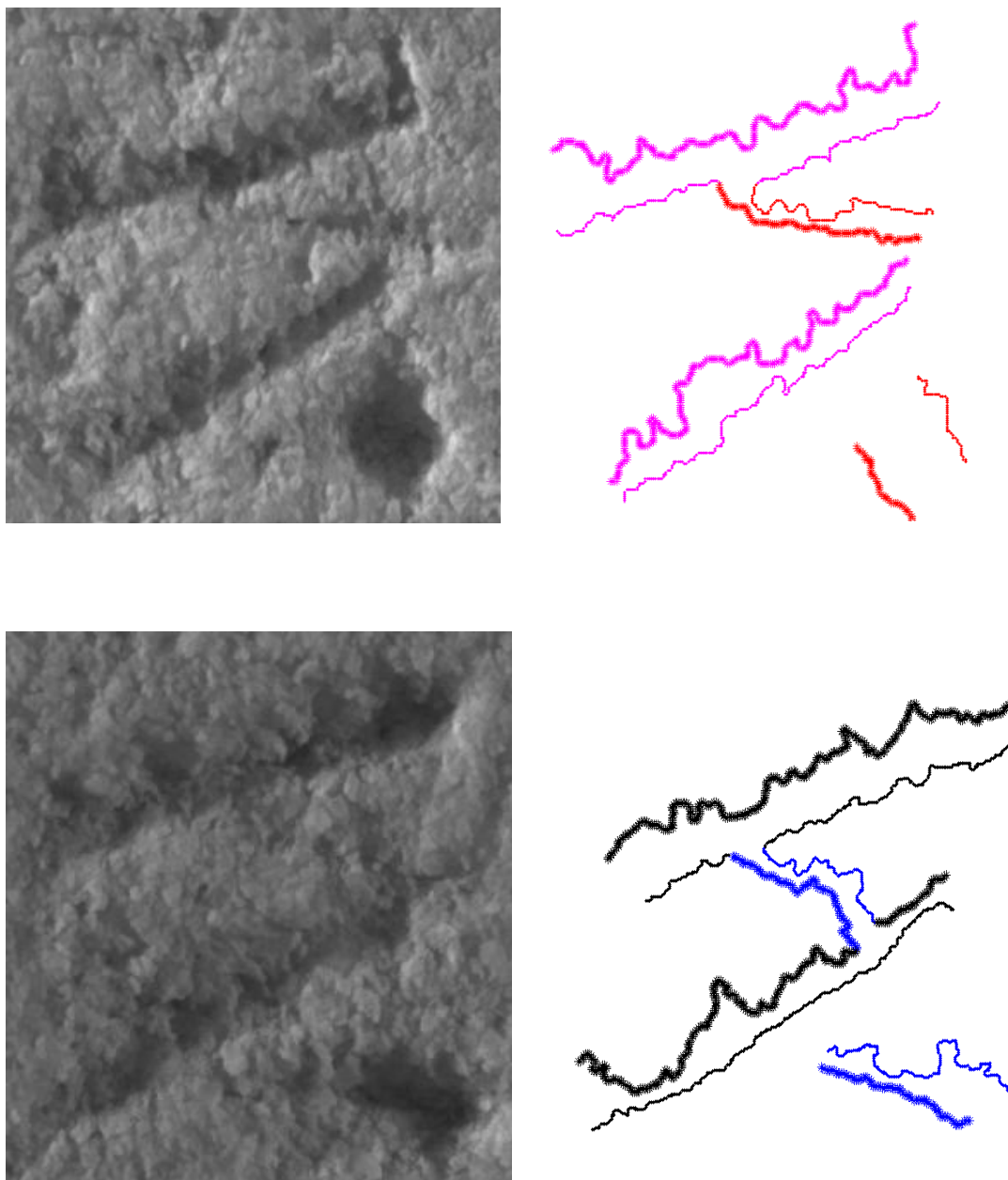
Εικόνα 4.6α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος Α διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν σε **διαφορετικό** χαρακτήρα όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



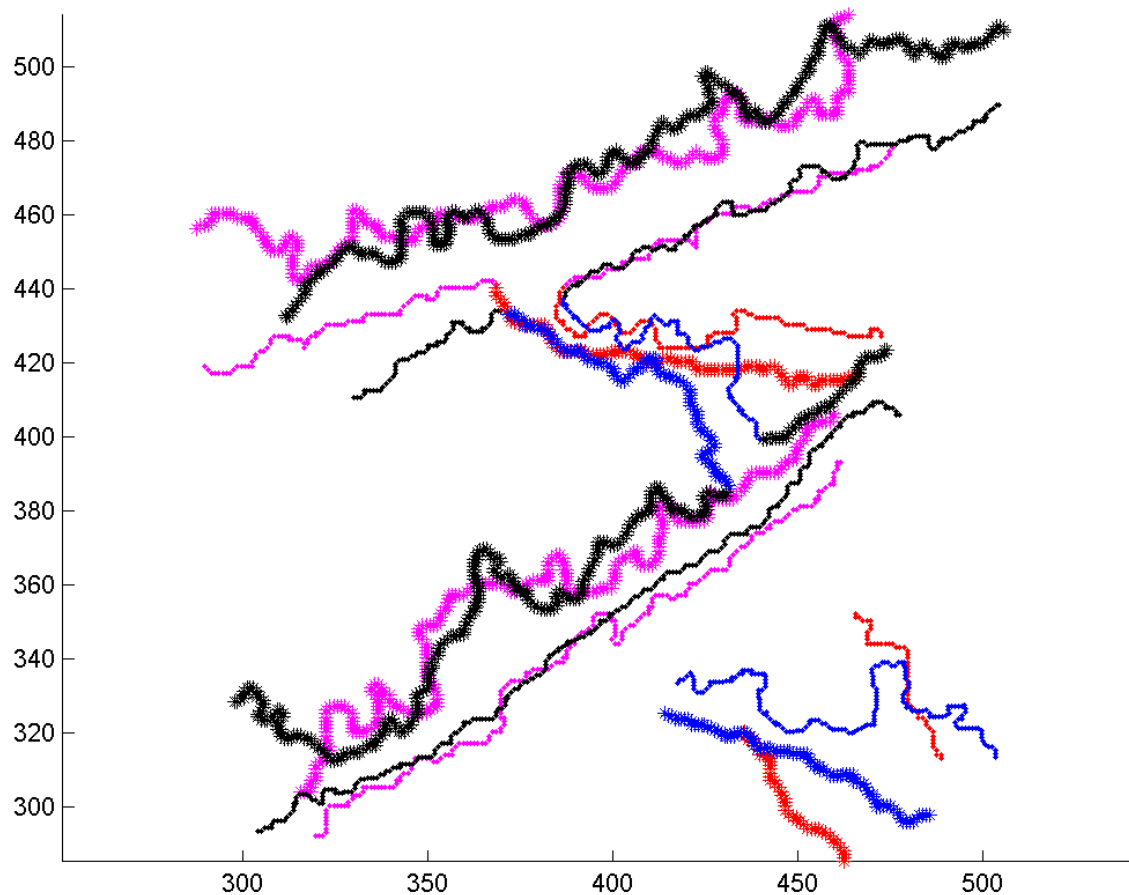
Εικόνα 4.6β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων από **διαφορετικό** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



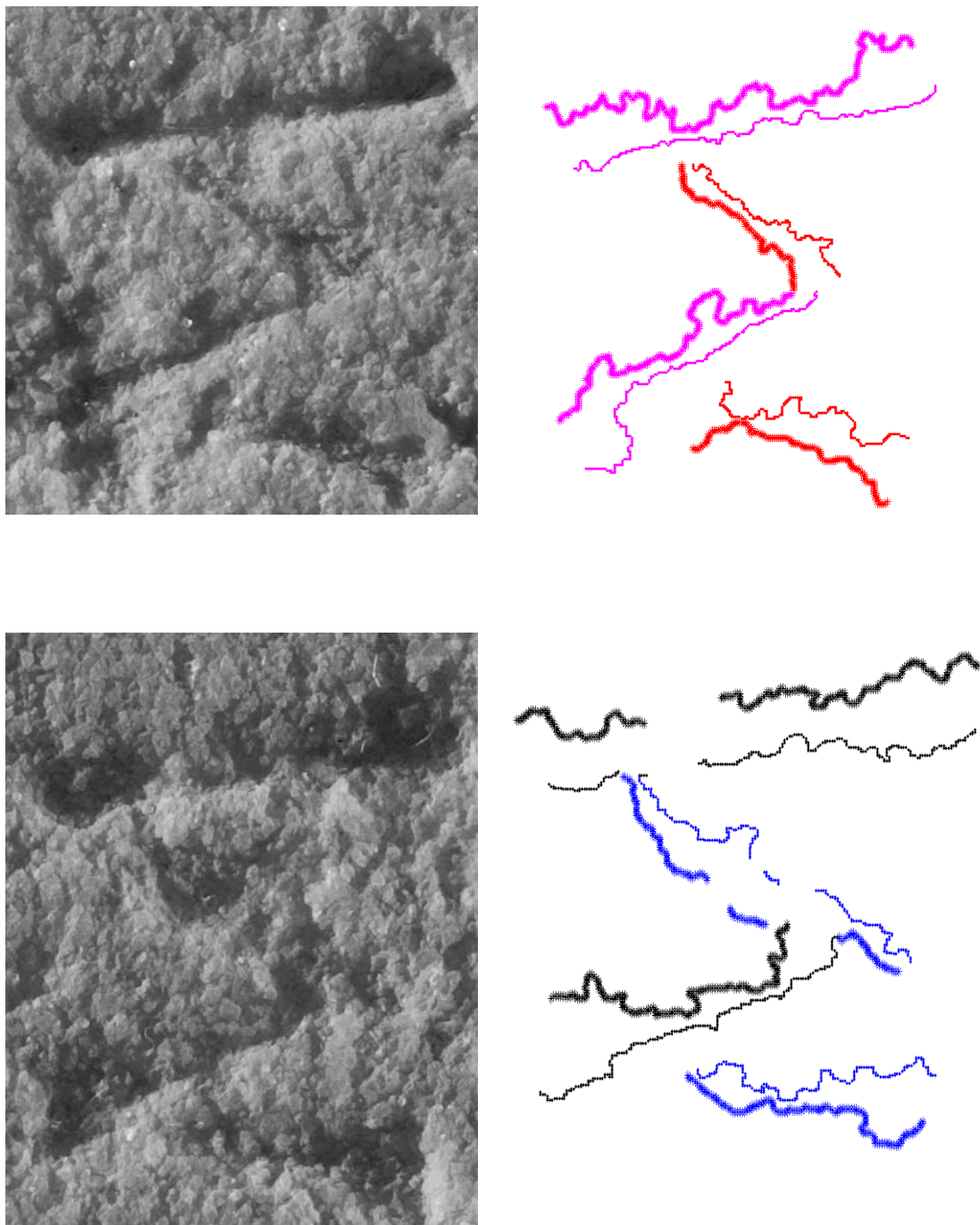
Εικόνα 4.7α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος Σ διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν στον **ίδιο** χαρακτήρα όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



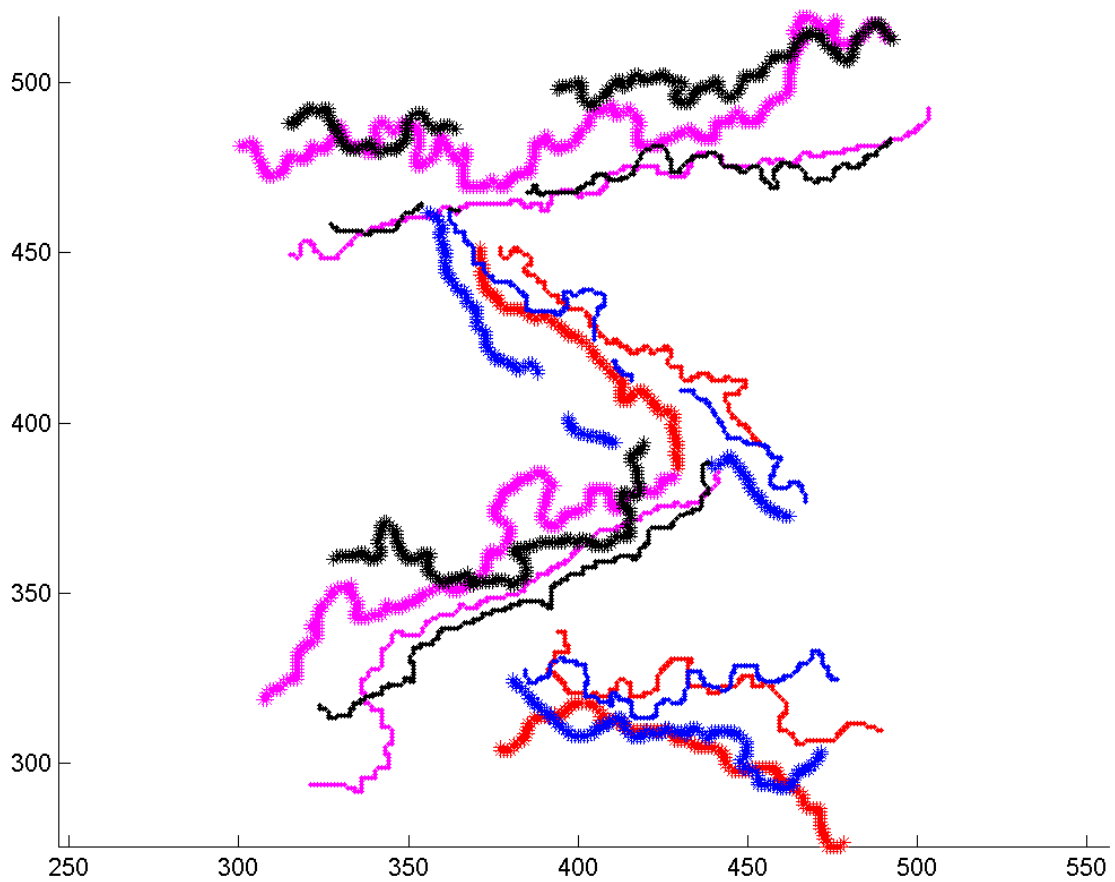
Εικόνα 4.7β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων απ' τον **ίδιο** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



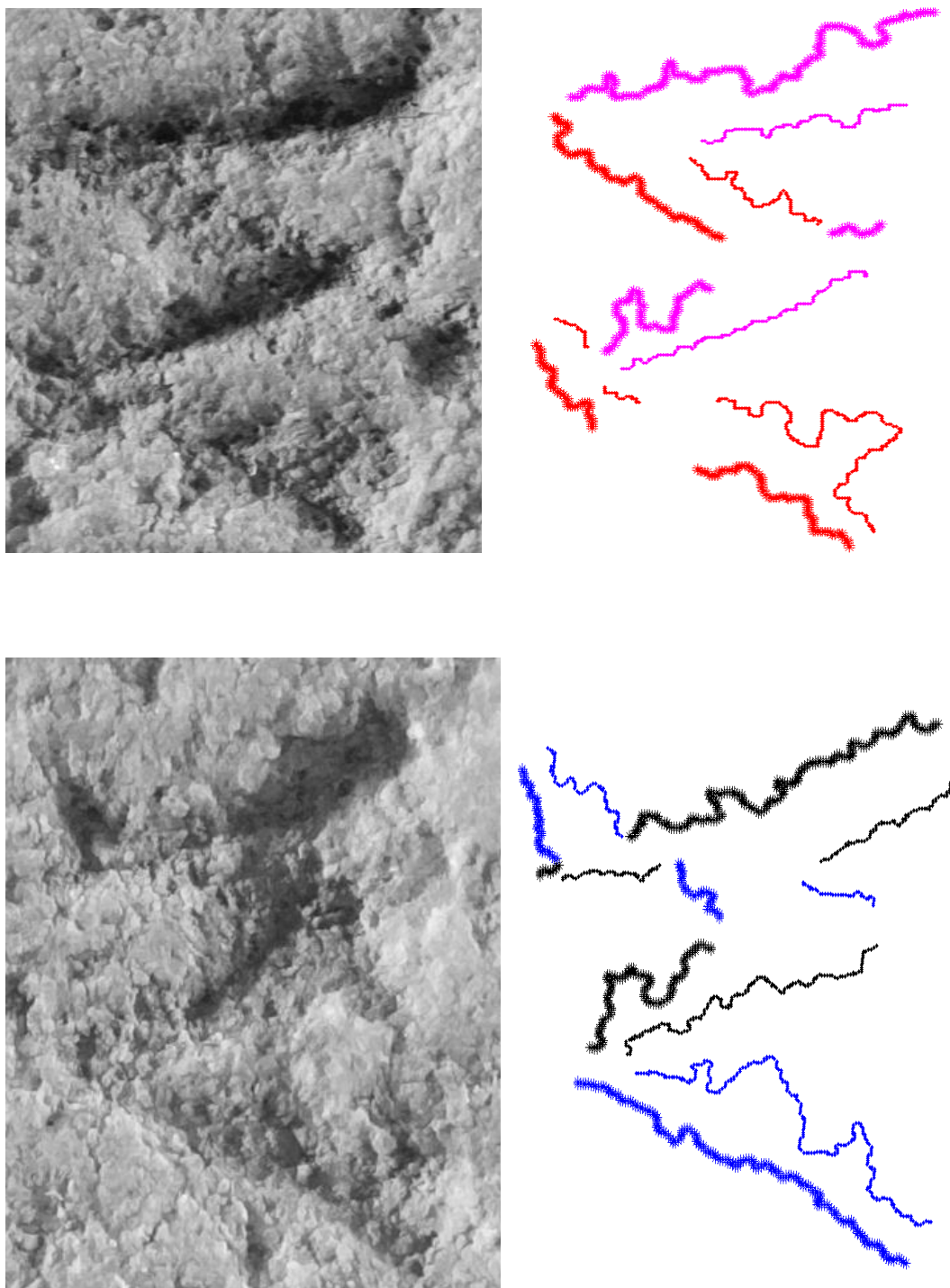
Εικόνα 4.8α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος Σ διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν στον **ίδιο** χαρακτήρα όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



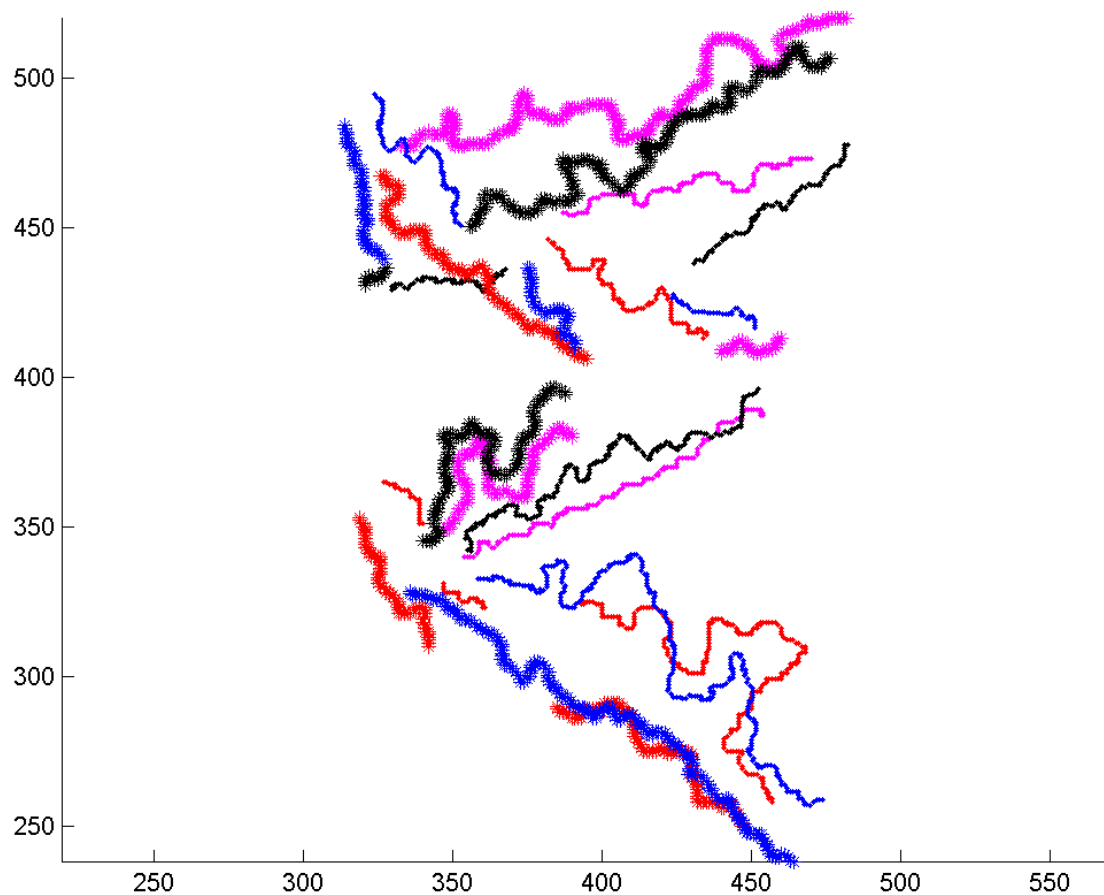
Εικόνα 4.8β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων απ' τον **ίδιο** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



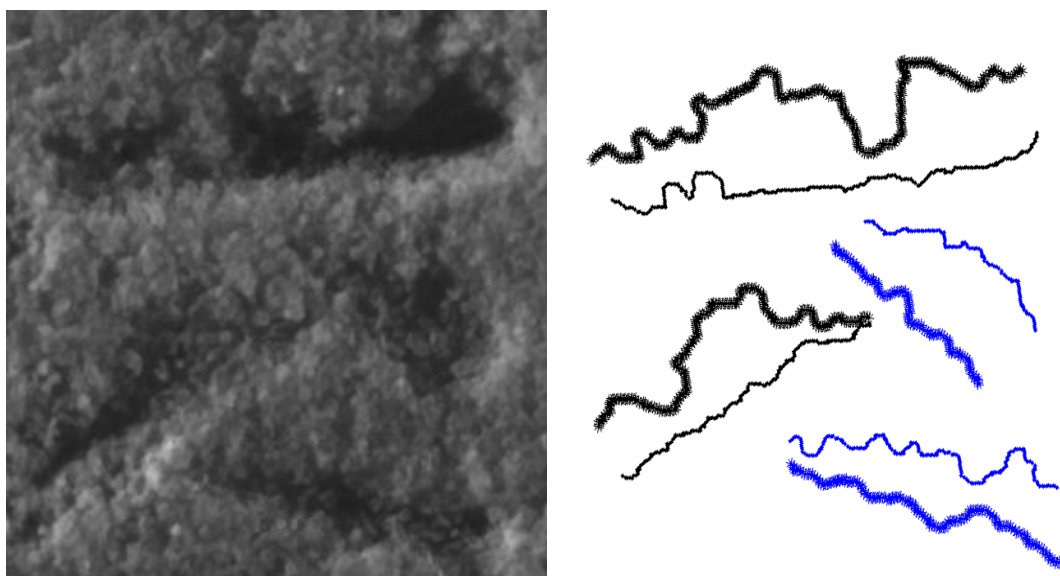
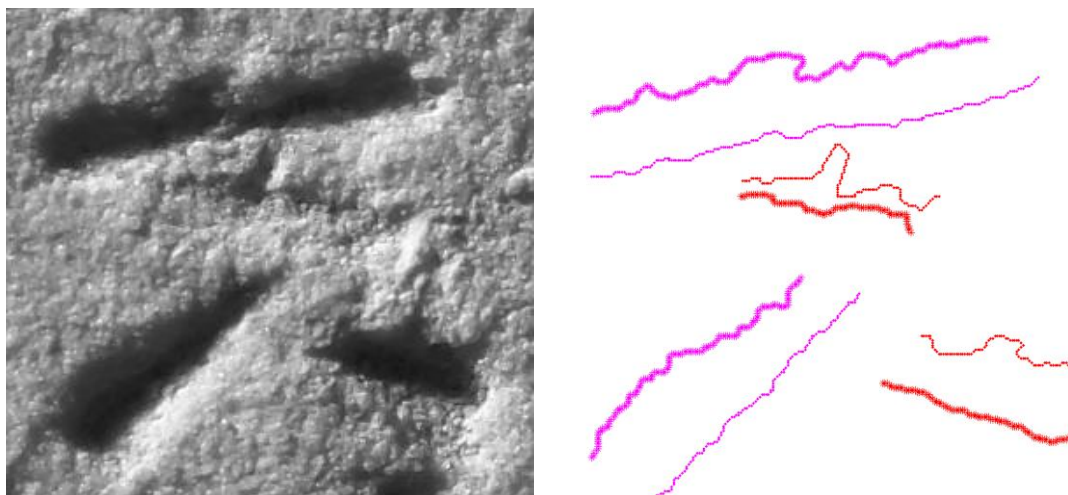
Εικόνα 4.9α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος Σ διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν στον **ίδιο** χαρακτή όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



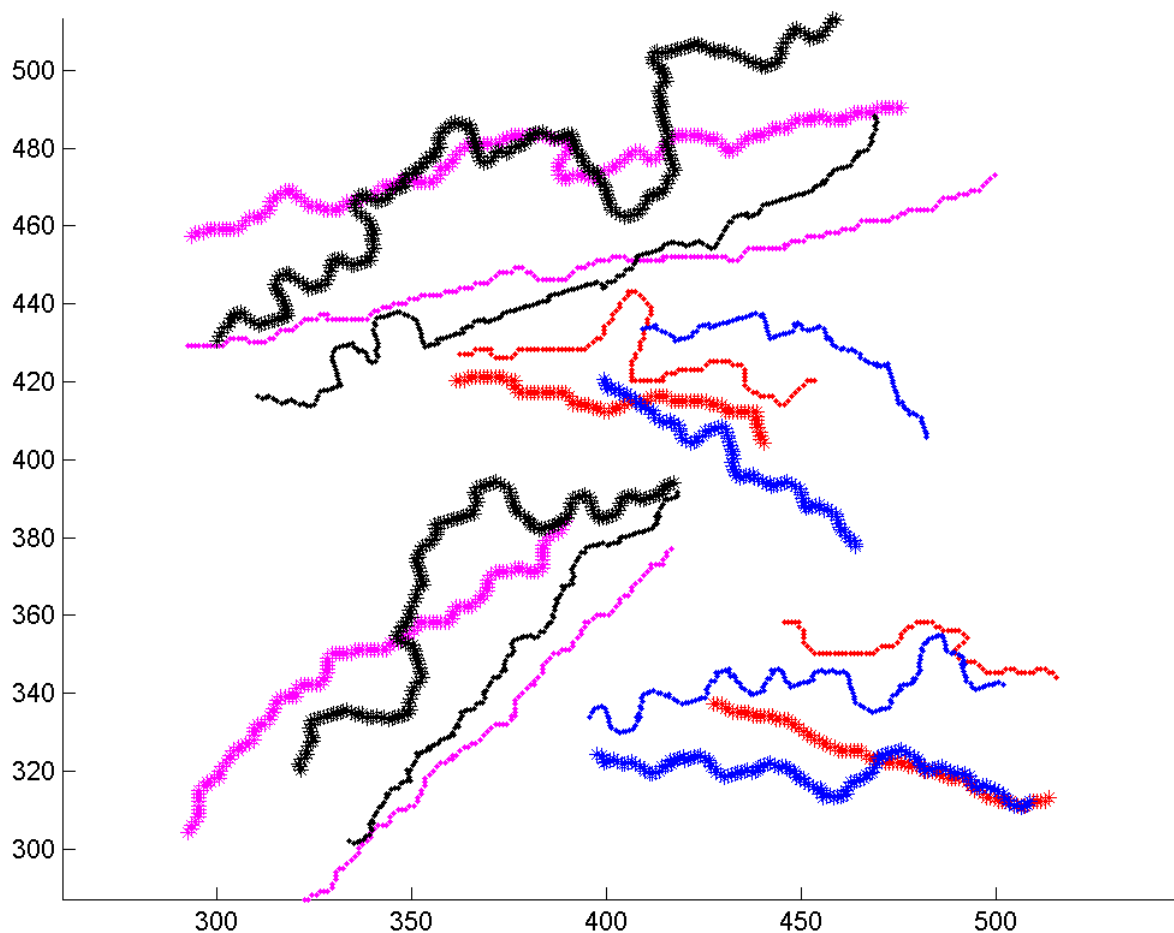
Εικόνα 4.9β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων απ' τον **ίδιο** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



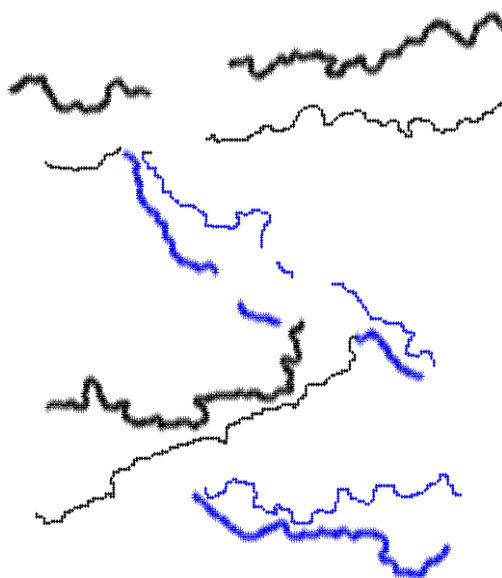
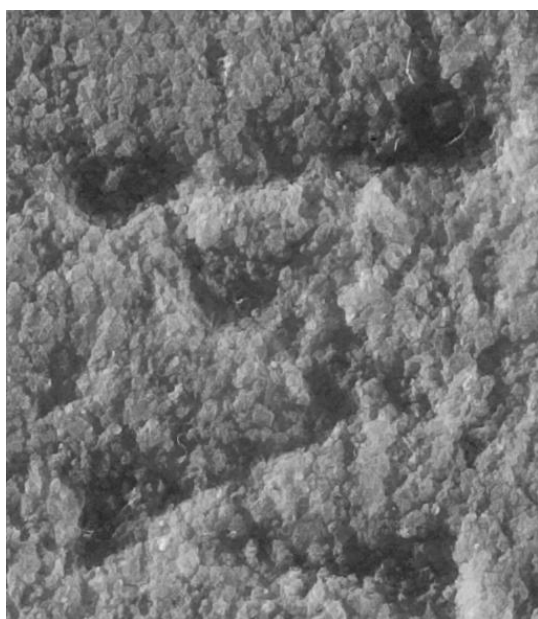
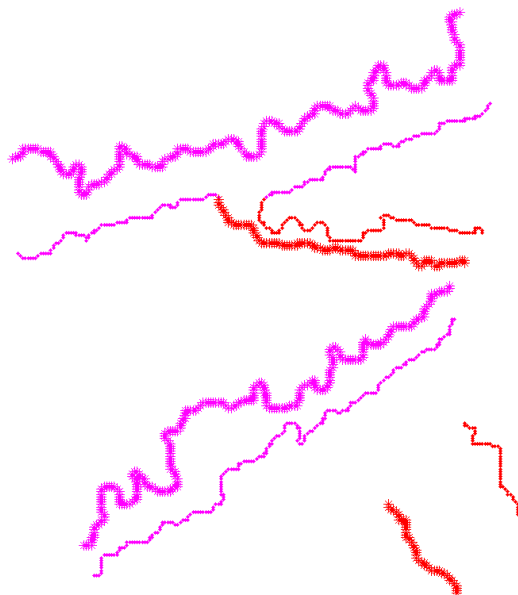
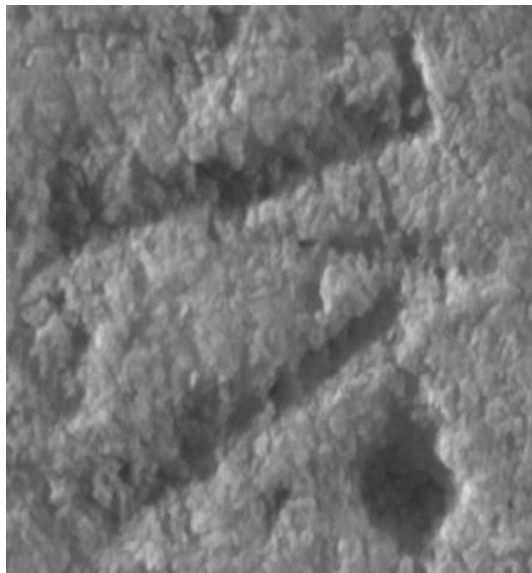
Εικόνα 4.10α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος Σ διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν σε **διαφορετικό** χαρακτή όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



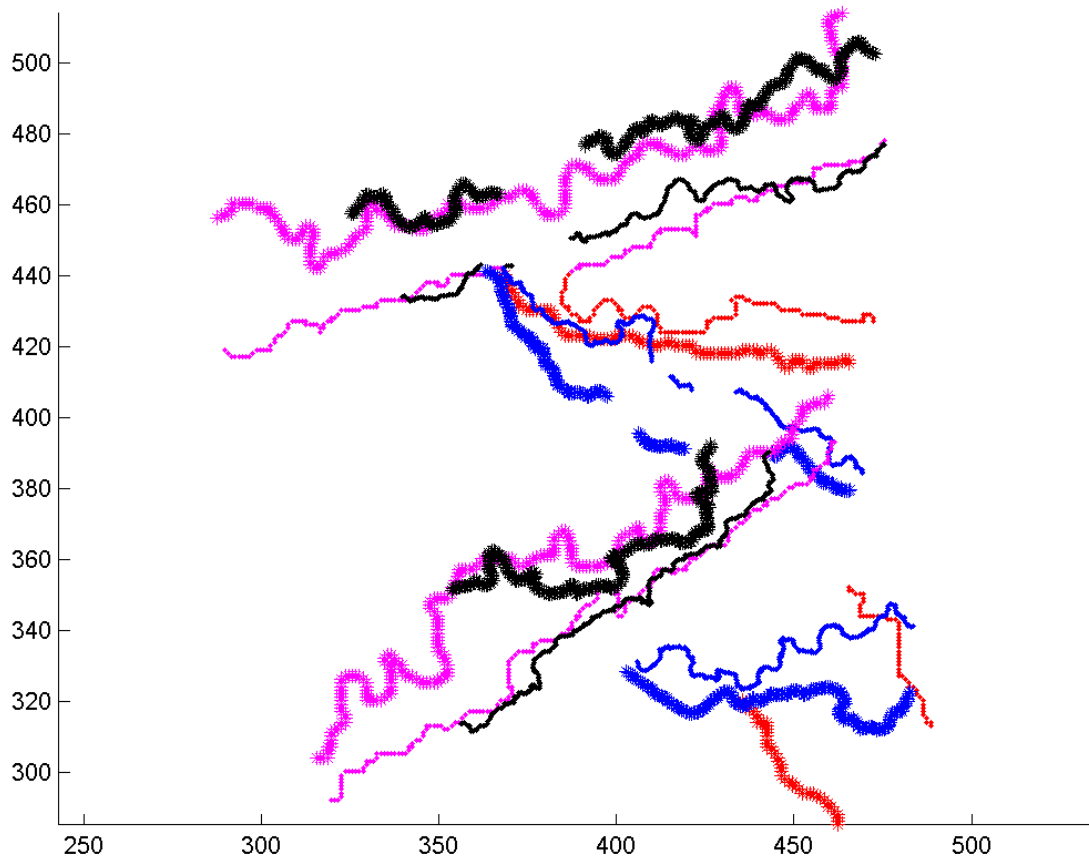
Εικόνα 4.10β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων από **διαφορετικό** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



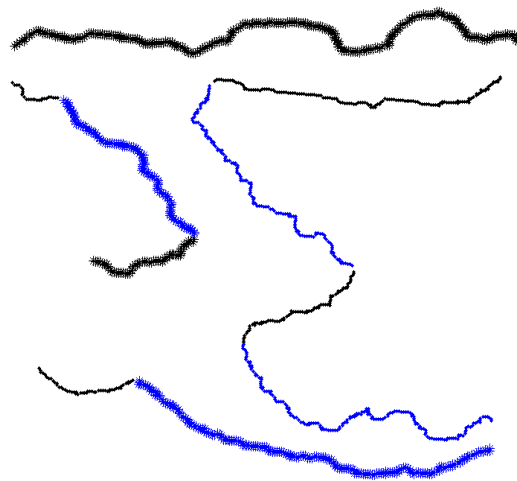
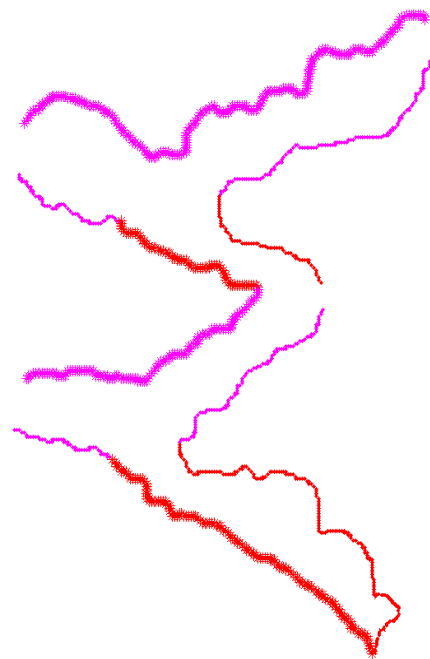
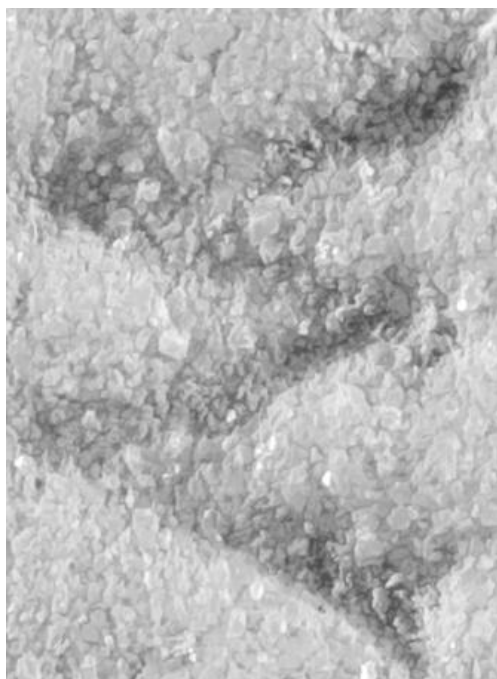
Εικόνα 4.11α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος Σ διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν σε **διαφορετικό** χαρακτήρα όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



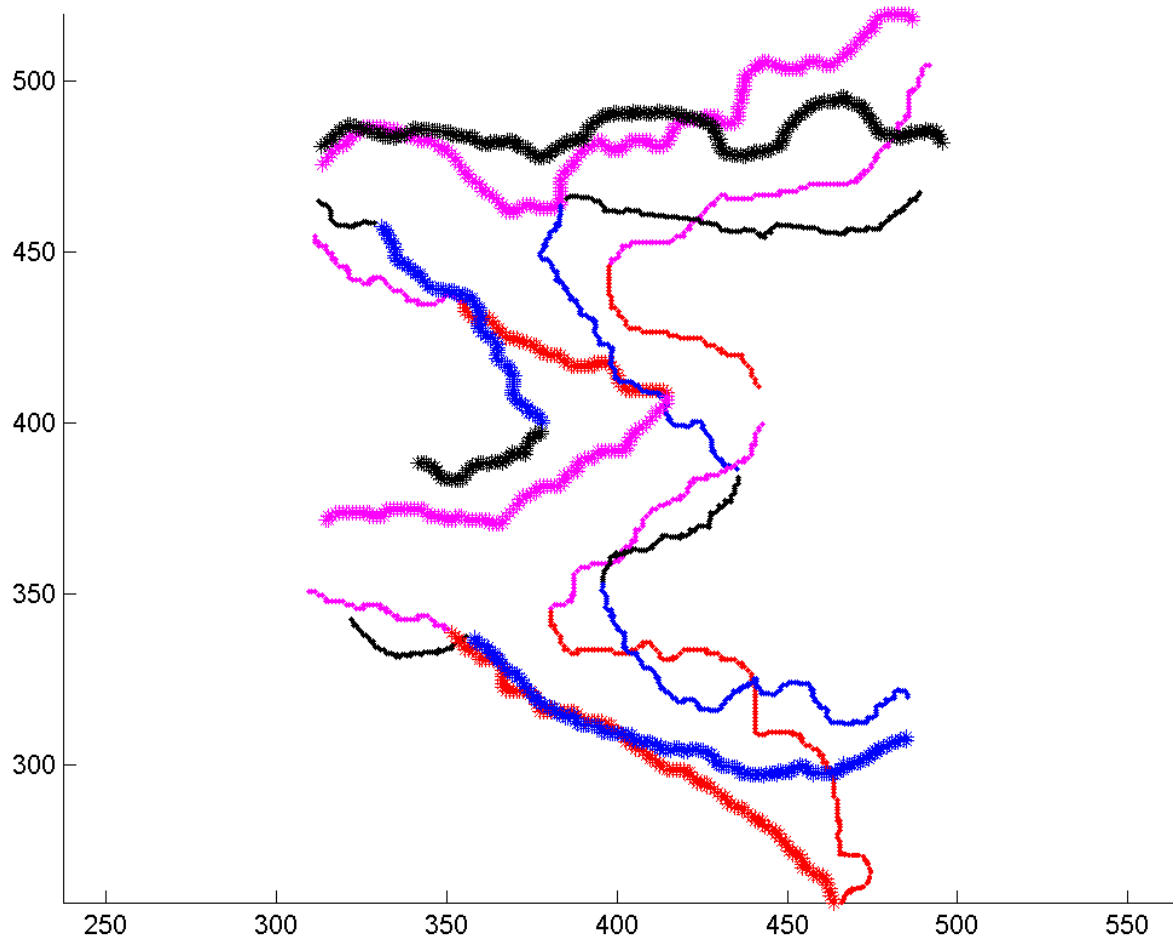
Εικόνα 4.11β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων από **διαφορετικό** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



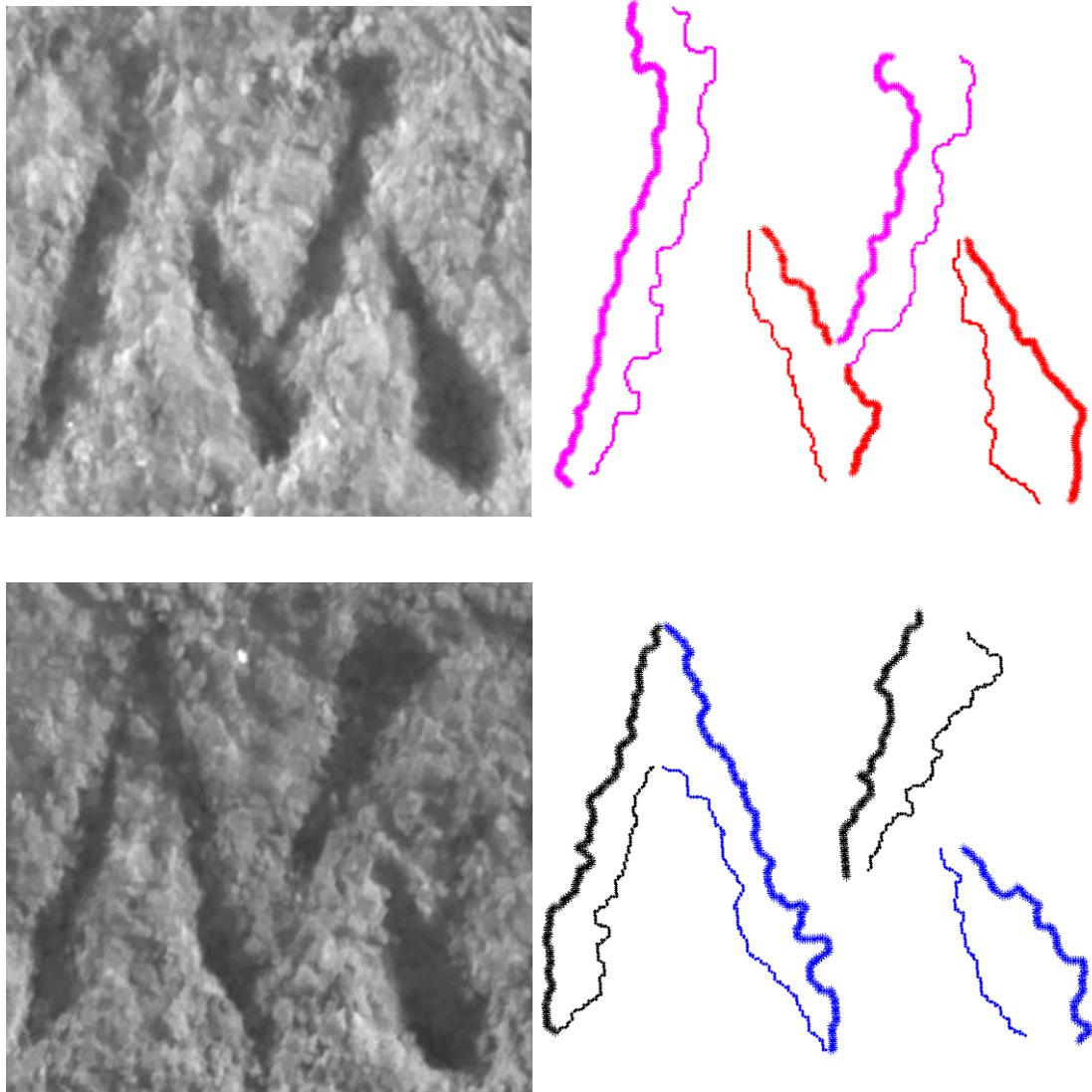
Εικόνα 4.12α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος Σ διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν σε **διαφορετικό** χαρακτήρα όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



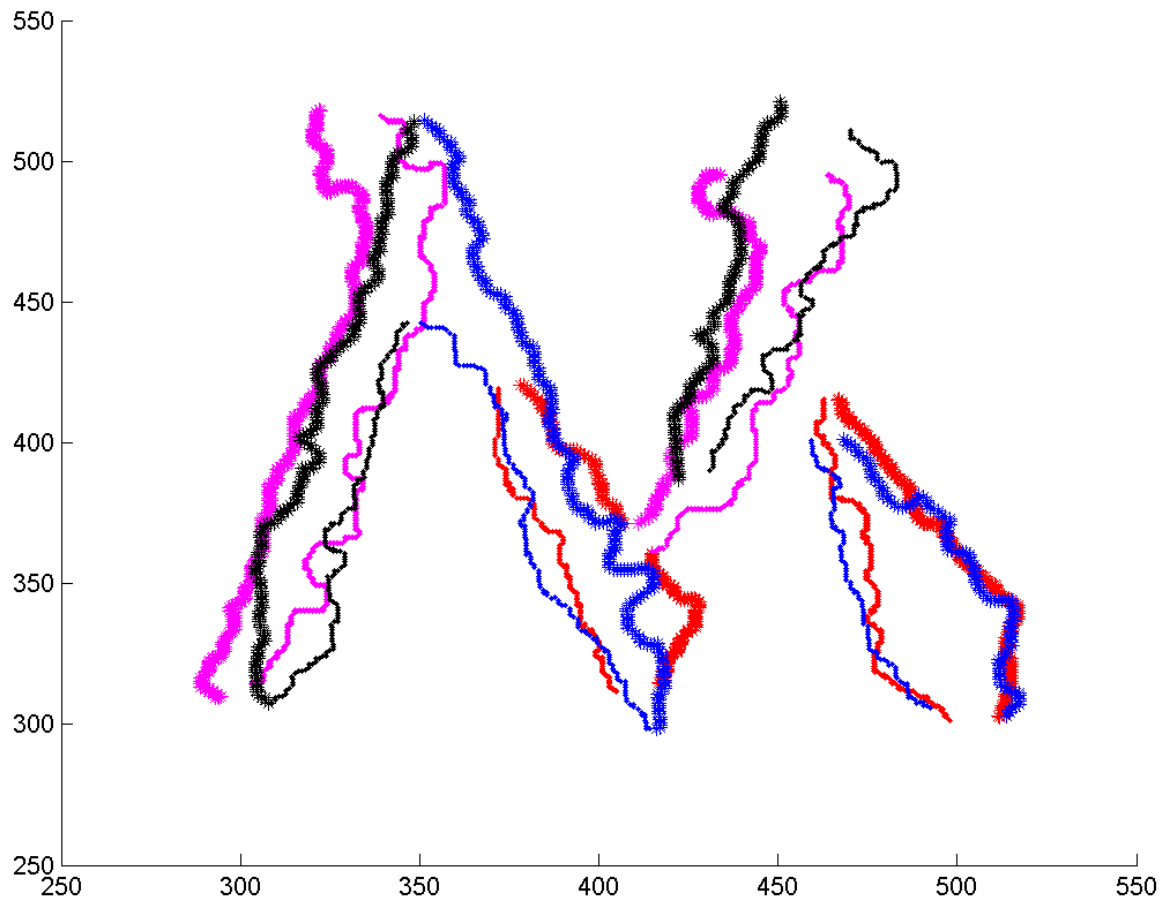
Εικόνα 4.12β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων από **διαφορετικό** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



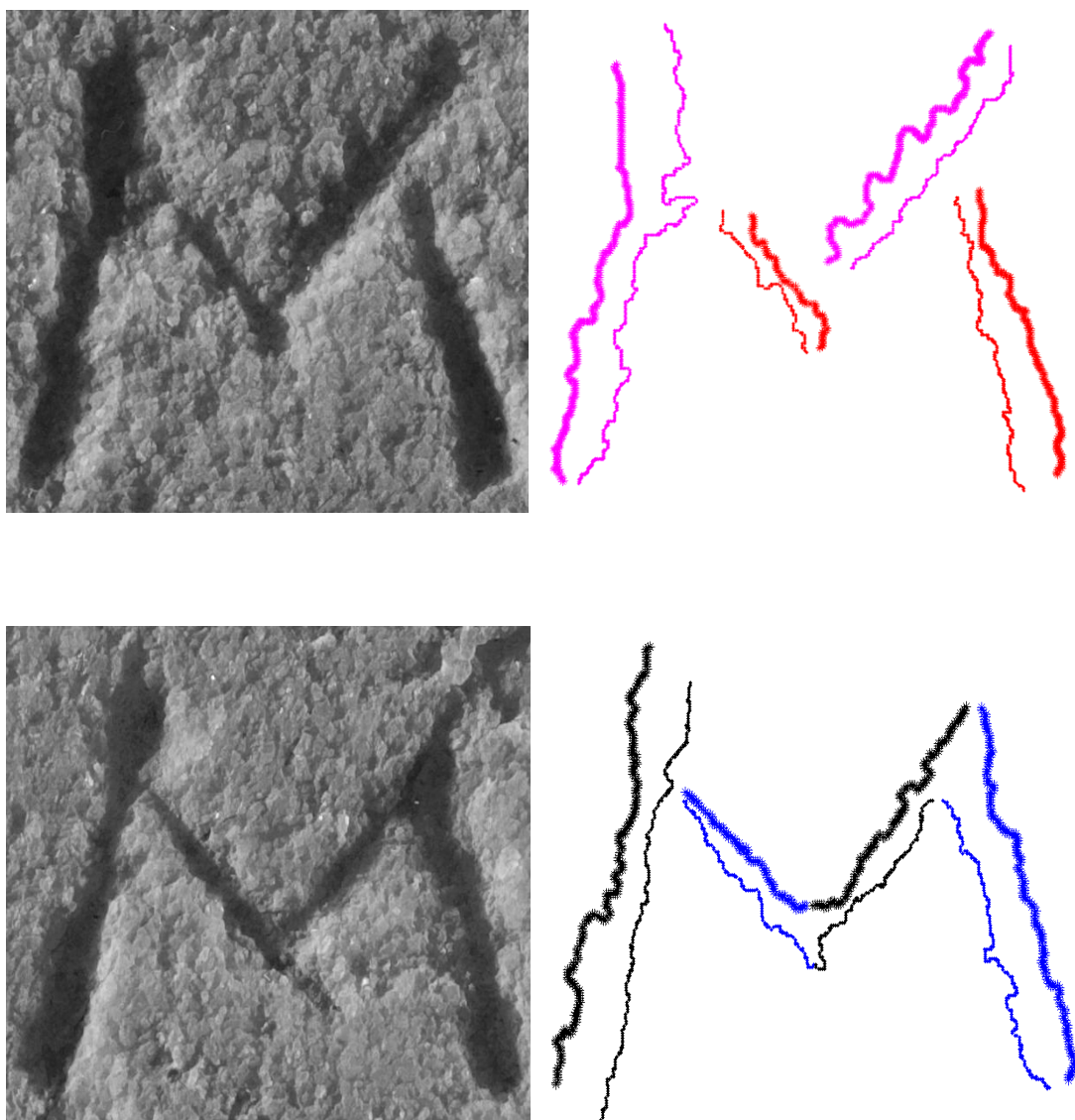
Εικόνα 4.13α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος **Μ** διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν σε **ίδιο** χαρακτή. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



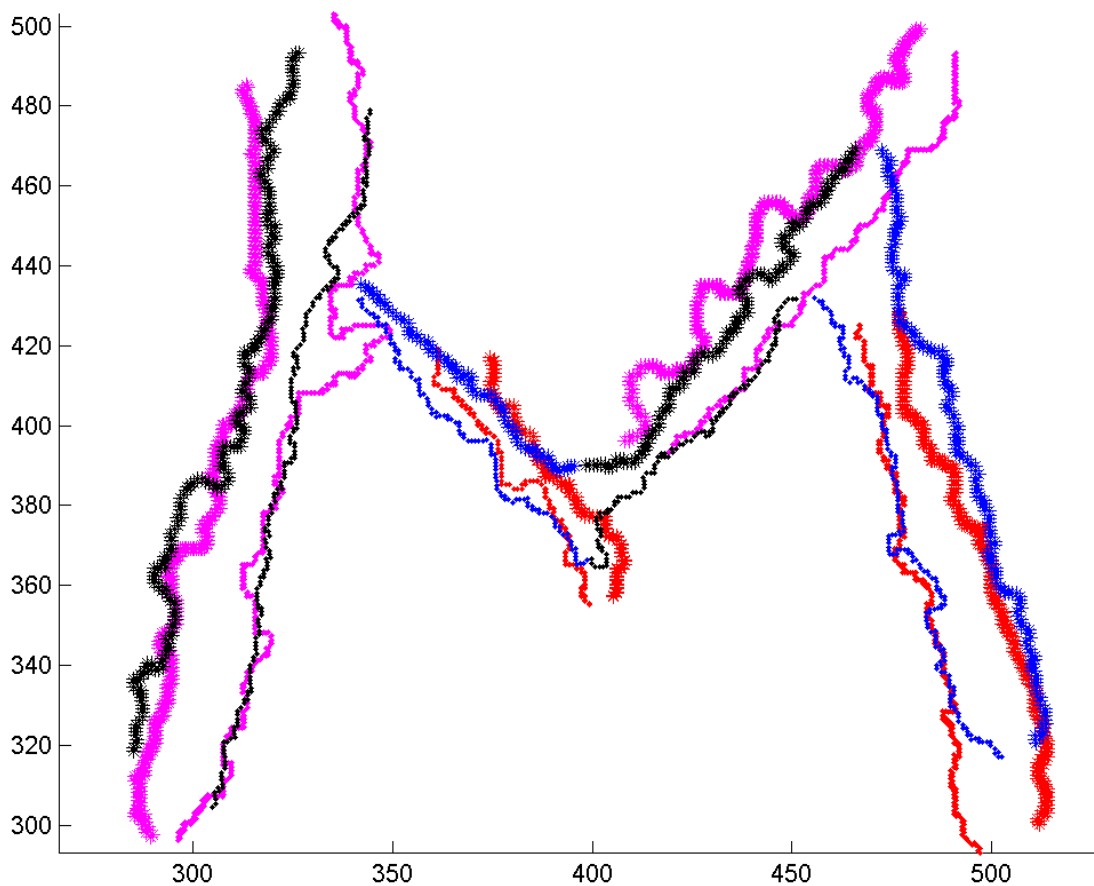
Εικόνα 4.13β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων απ' τον **ίδιο** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



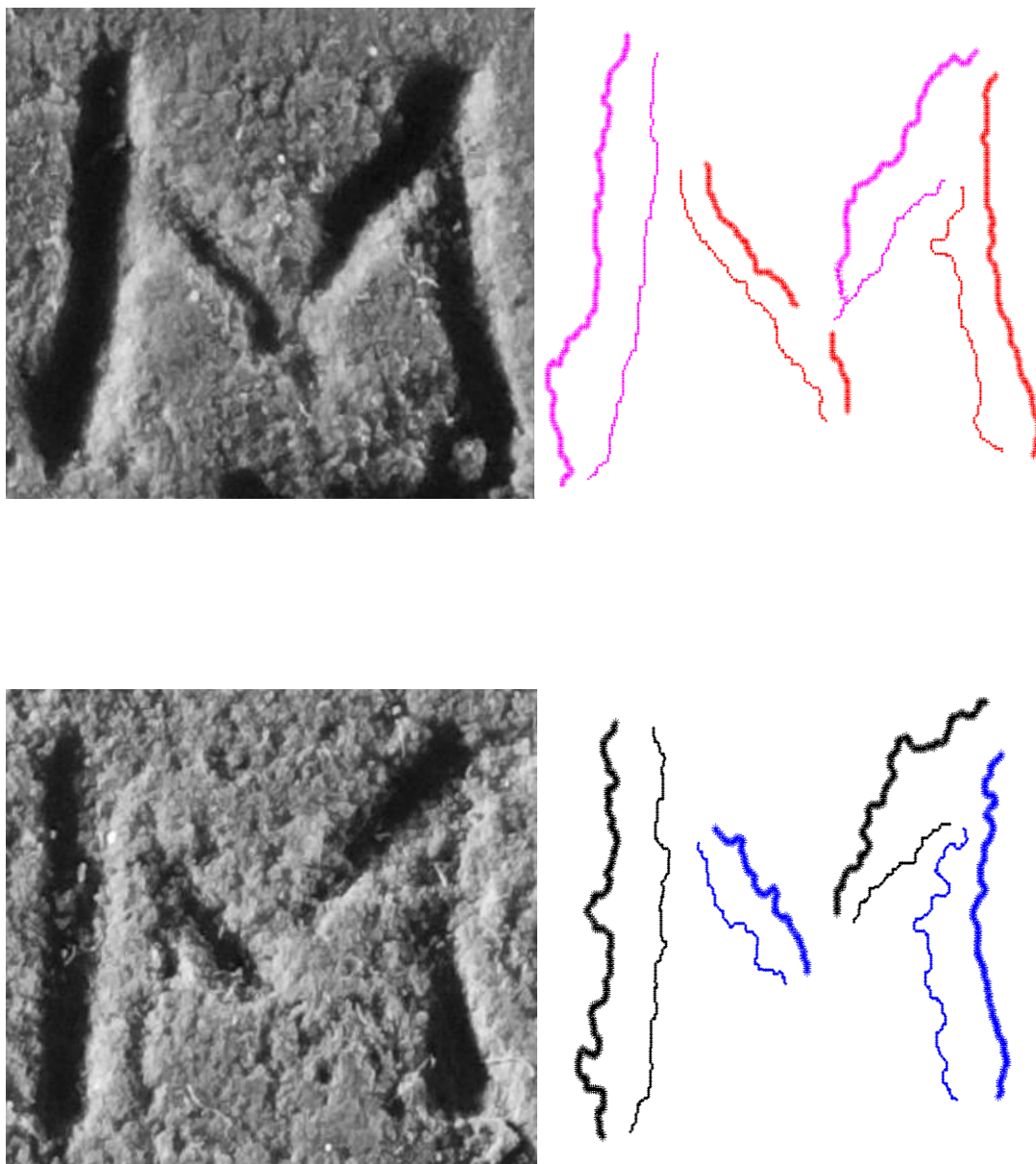
Εικόνα 4.14α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος **Μ** διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν στον **ίδιο** χαρακτήρα όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



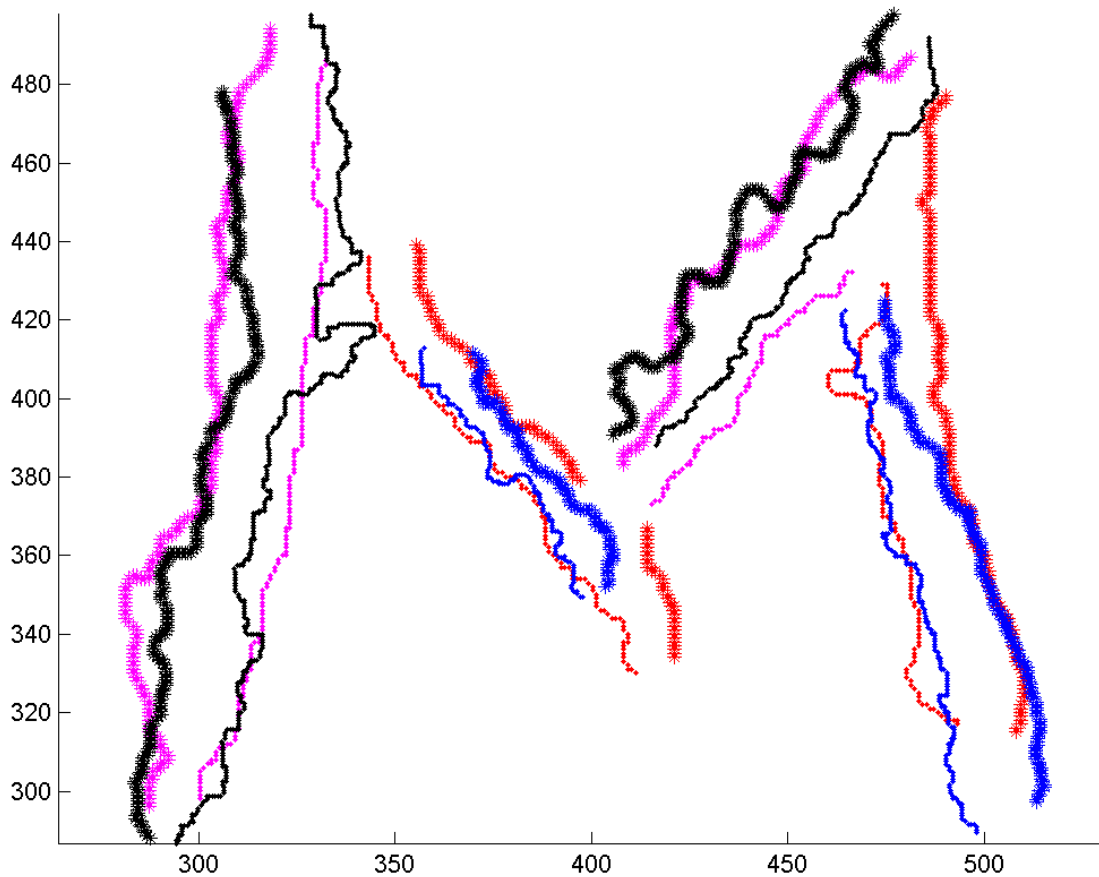
Εικόνα 4.14β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων απ' τον **ίδιο** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



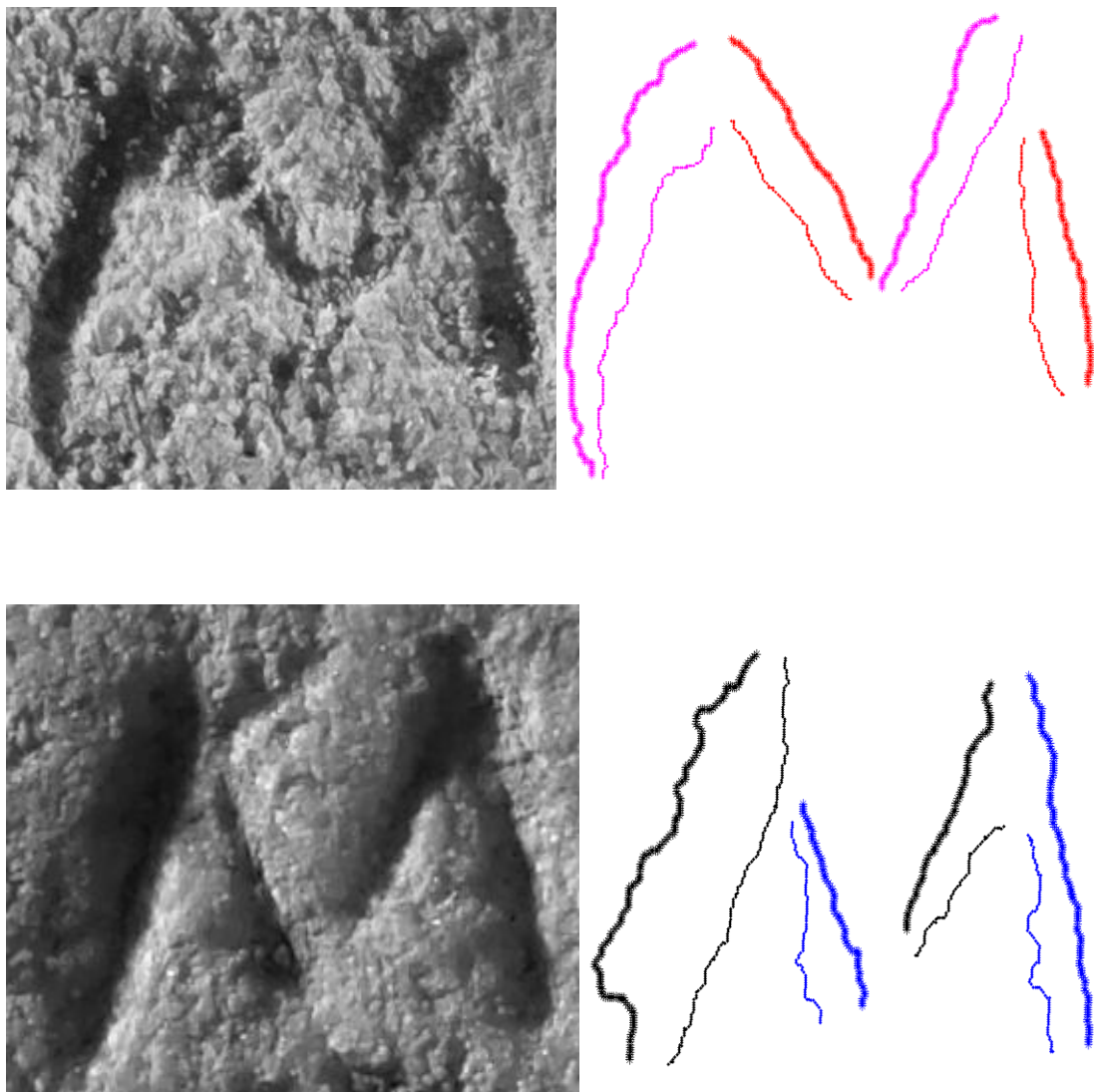
Εικόνα 4.15α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος **Μ** διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν στον **ίδιο** χαρακτή όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



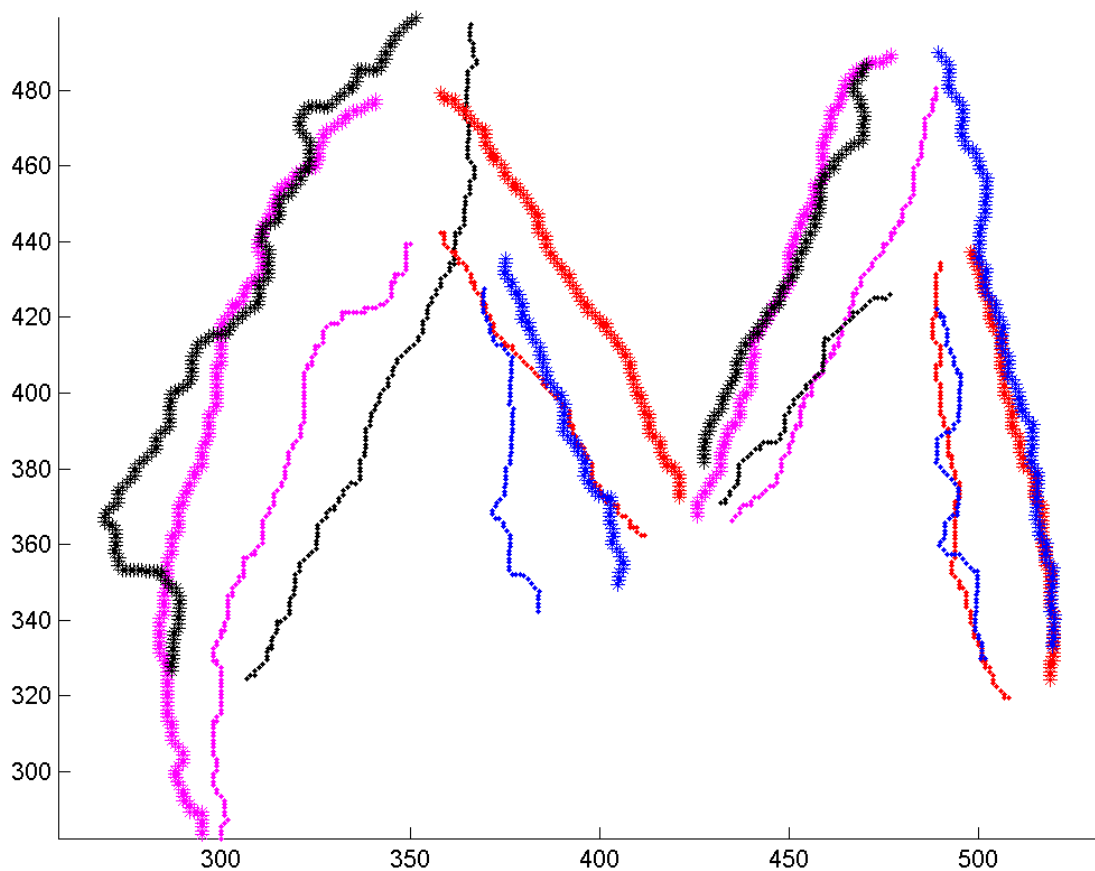
Εικόνα 4.15β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων απ' τον **ίδιο** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



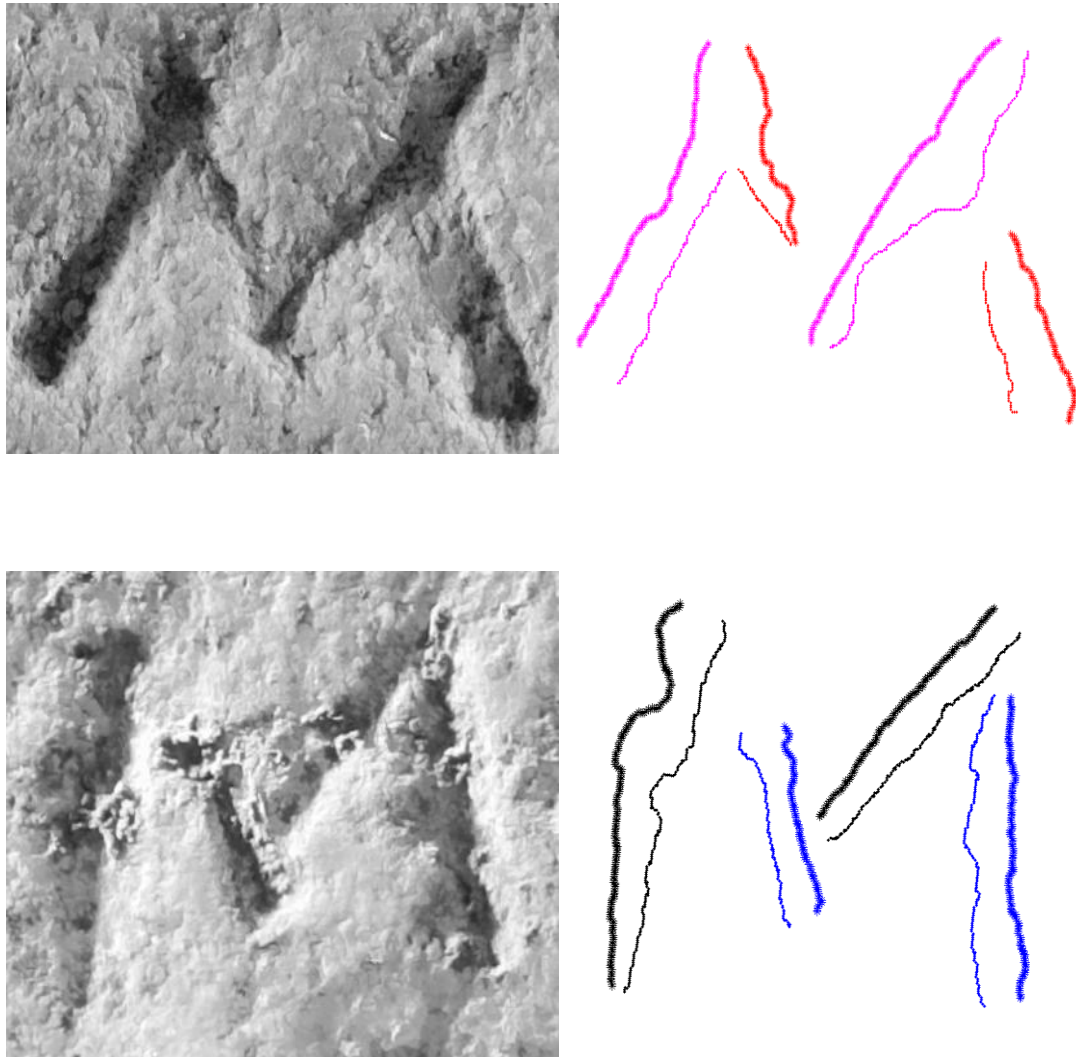
Εικόνα 4.16α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος **Μ** διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν σε **διαφορετικό** χαρακτή όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



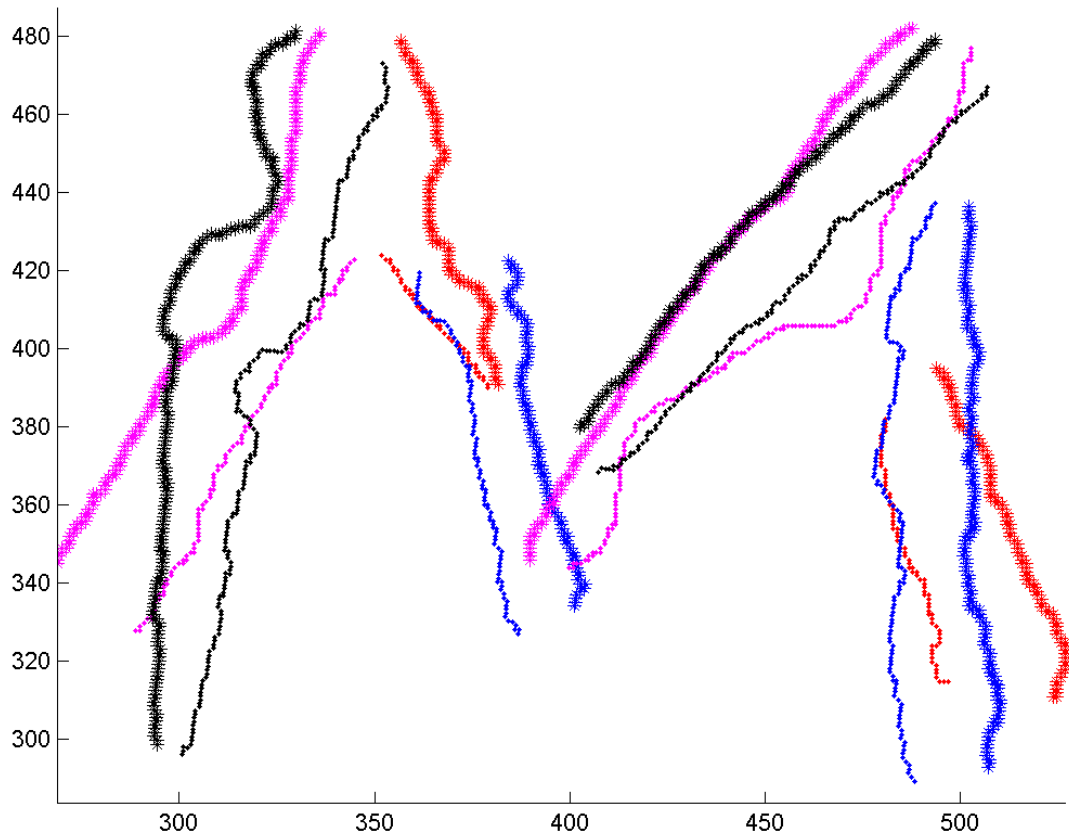
Εικόνα 4.16β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων από **διαφορετικό** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



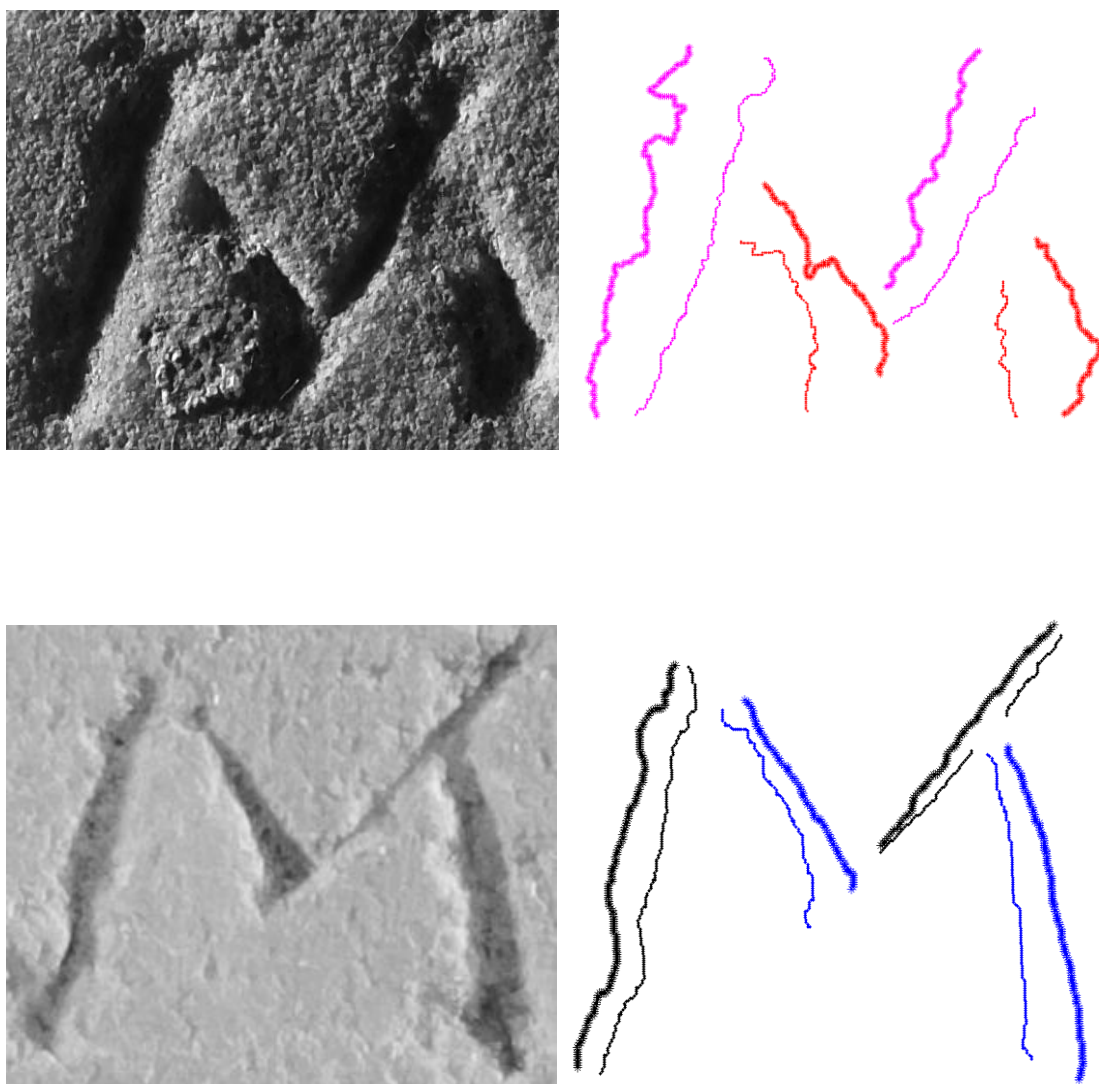
Εικόνα 4.17α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος **Μ** διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν σε **διαφορετικό** χαρακτήρα όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



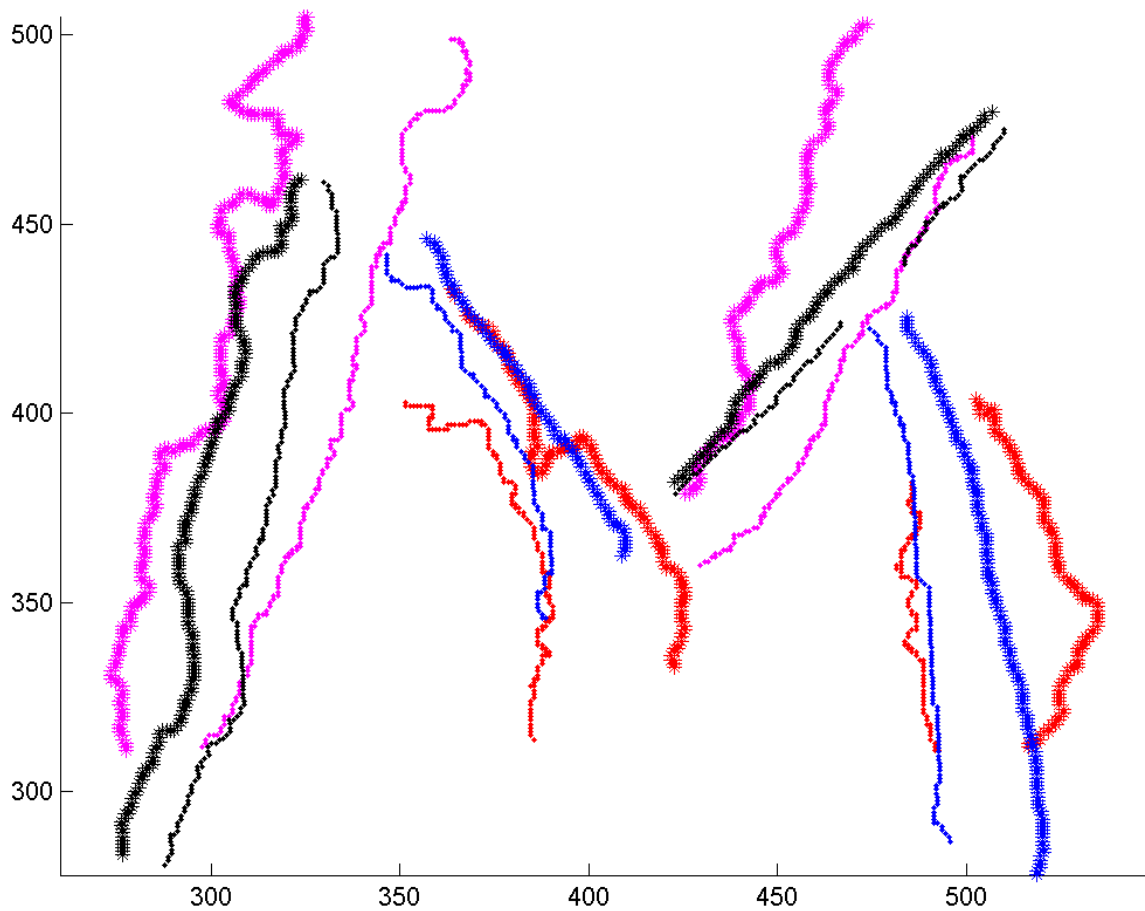
Εικόνα 4.17β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων από **διαφορετικό** χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.



Εικόνα 4.18α

Στις εικόνες αριστερά εμφανίζονται δύο υλοποιήσεις του γράμματος **Μ** διαφορετικών επιγραφών που ανήκουν σε **διαφορετικό** χαρακτήρα όπως απέδειξε η εφαρμογή της μεθοδολογίας. Στις εικόνες δεξιά εμφανίζονται οι εξαχθείσες πλευρές των σκελών του γράμματος.



Εικόνα 4.18β

Βέλτιστα ταιριασμένα περιγράμματα των προηγούμενων υλοποιήσεων προερχόμενων από διαφορετικό χαρακτή. Η υλοποίηση που παρουσιάζεται με ματζέντα και κόκκινο χρώμα τοποθετείται πρώτη στο σύστημα αξόνων και παραμένει σταθερή ενώ αυτή με το μαύρο και μπλε χρώμα υφίσταται τους μετασχηματισμούς της παράλληλης μετατόπισης, στροφής και ομοιοθεσίας ως ένα στερεό σώμα. Η βέλτιστη τοποθέτηση της μιας σε σχέση με την άλλη γίνεται ανά σκέλος και πλευρά προς πλευρά. Οι ματζέντα αστερίσκοι ταιριάζουν με τους μαύρους, οι ματζέντα τελείες με τις μαύρες, οι κόκκινοι αστερίσκοι με τους μπλε και οι κόκκινες τελείες με τις μπλε.

4.3 Υλοποίηση της διαδικασίας προσαρμογής στον υπολογιστή

Πρόβλημα και σχετικό λήμμα: Έστωσαν δύο ισοπληθή και ομοεπίπεδα σύνολα σημείων (x_i, y_i) και $(p_i, q_i) i = 1, 2, \dots, N$. Ζητείται να βρεθεί η κατάλληλη γωνία περιστροφής, το κατάλληλο βέλος μετατόπισης ως και ο συντελεστής ομοιοθεσίας $\lambda \in R^+$, οι οποίοι όταν δρουν στην καμπύλη (p_i, q_i) την προσαρμόζουν στη (x_i, y_i) βέλτιστα κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων. Θεωρούμε ότι οι ανωτέρω μετασχηματισμοί πραγματοποιούνται σε τρία βήματα:

Πρώτα η στροφή, μετά η παράλληλη μετατόπιση και εν συνεχεία η ομοιοθεσία. Για τη στροφή και την παράλληλη μετατόπιση το κριτήριο βέλτιστης προσαρμογής είναι η ελαχιστοποίηση της ποσότητας

$$\varepsilon_{RT}(\varphi, x_\delta, y_\delta) = \sum_{i=1}^N \left\{ (x_i - p_i \cos \varphi + q_i \sin \varphi - x_\delta)^2 + (y_i - p_i \sin \varphi - q_i \cos \varphi - y_\delta)^2 \right\} \quad (\text{σχέση 4.4})$$

όπου φ η γωνία περιστροφής και x_δ, y_δ οι παράλληλες μετατοπίσεις κατά τον αντίστοιχο άξονα. Η ελαχιστοποίηση αυτής της ποσότητας οδηγεί στη λύση $(\varphi^O, x_\delta^O, y_\delta^O)$ όπου

$$\tan \varphi^O = \frac{\sum_{i=1}^N \{(y_i - \bar{y})p_i - (x_i - \bar{x})q_i\}}{\sum_{i=1}^N \{(x_i - \bar{x})p_i + (y_i - \bar{y})q_i\}} \quad (4.5)$$

$$x_\delta^O = \bar{x} - \bar{p} \cos \varphi + \bar{q} \sin \varphi \quad (4.6)$$

$$y_\delta^O = \bar{y} - \bar{p} \sin \varphi - \bar{q} \cos \varphi \quad (4.7)$$

όπου $\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{q}$ είναι τα βαρύκεντρα των αντιστοίχων ψηφιακών καμπυλών, δηλαδή

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}, \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{N}, \quad \bar{p} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{N}, \quad \bar{q} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{N}. \quad (4.8)$$

Η ομοιοθεσία βέλτιστης προσαρμογής πραγματοποιείται σε δεύτερο στάδιο μέσω ελαχιστοποίησης της ποσότητας

$$\varepsilon_{RTO}(\lambda) = \sum_{i=1}^N \left\{ (x_i - \lambda \text{sign}(x_i, a_i - \bar{a})(a_i - \bar{a}) - \bar{a})^2 + (y_i - \lambda \text{sign}(y_i, \beta_i - \bar{\beta})(\beta_i - \bar{\beta}) - \bar{\beta})^2 \right\} \quad (\text{σχέση 4.9})$$

όπου

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi^o & -\sin \varphi^o \\ \sin \varphi^o & \cos \varphi^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_\delta^o \\ y_\delta^o \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\bar{a} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i, \quad \bar{\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \beta_i \quad (4.11)$$

και

$$\text{sign}(x, a) = \begin{cases} 1 & \alpha \nu x a \geq 0 \\ -1 & \alpha \nu x a < 0 \end{cases}. \quad (4.12)$$

Η ελαχιστοποίηση της ε_{RTO} προσφέρει το βέλτιστο συντελεστή ομοιοθεσίας, όσον αφορά στην προσαρμογή των ψηφιακών καμπυλών (x_i, y_i) και (p_i, q_i) ,

$$\lambda^o = \frac{\sum_{i=1}^N \left\{ |(x_i - \bar{a})(\alpha_i - \bar{a})| + |(y_i - \bar{\beta})(\beta_i - \bar{\beta})| \right\}}{\sum_{i=1}^N \left\{ (a_i - \bar{a})^2 + (\beta_i - \bar{\beta})^2 \right\}}. \quad (4.13)$$

Άρα καταλήγουμε στη διατύπωση του κάτωθι λήμματος.

Λήμμα 1: Έστωσαν δύο ισοπληθή και ομοεπίπεδα σύνολα σημείων (x_i, y_i) και $(p_i, q_i) i = 1, 2, \dots, N$. Η γωνία φ^o , η μετατόπιση κατά τον άξονα των x x_δ^o , η μετατόπιση κατά τον άξονα των y y_δ^o και ο συντελεστής ομοιοθεσίας λ^o που όταν δράσουν στην καμπύλη (p_i, q_i) την προσαρμόζουν βέλτιστα στην (x_i, y_i) κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων, δίνονται από τις σχέσεις (4.5), (4.6), (4.7) και (4.13).

Απόδειξη: Θα ξεκινήσουμε την απόδειξη κάνοντας την παρατήρηση ότι η διαδικασία ομοιοθεσίας είναι ανεξάρτητη από την παράλληλη μετατόπιση και τη στροφή. Η παρατήρηση αυτή θα επιβεβαιωθεί στα επόμενα.

Πράγματι, έστω ότι επιτελούμε στροφή των σημείων (p_i, q_i) κατά γωνία φ και παράλληλη μετατόπιση της εστραμμένης αυτής καμπύλης κατά (x_δ, y_δ) , οπότε προκύπτει η ψηφιακή καμπύλη $(\alpha_i, \beta_i) i = 1, 2, \dots, N$ μέσω των σχέσεων

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_\delta \\ y_\delta \end{bmatrix}.$$

Τότε η συνάρτηση λάθους του $\varepsilon_{RT}(\varphi, x_\delta, y_\delta)$ λαμβάνει τη μορφή

$$\varepsilon_{RT} = \sum_{i=1}^N \left\{ (x_i - p_i \cos \varphi + q_i \sin \varphi - x_\delta)^2 + (y_i - p_i \sin \varphi - q_i \cos \varphi - y_\delta)^2 \right\}, \text{ δηλαδή τη}$$

σχέση (4.4).

Αυτή η συνάρτηση λάθους είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και φραγμένη κάτω από το μηδέν άρα σύμφωνα με το αξίωμα του Αρχιμήδη θα έχει τουλάχιστον σε ένα σημείο ολικό ελάχιστο, στο οποίο και θα ισχύει $\nabla \varepsilon_{RT} = 0$. Ισοδυνάμως θα ισχύει,

$$\frac{\partial \varepsilon_{RT}}{\partial x_\delta} = \sum_{i=1}^N \left\{ (x_i - p_i \cos \varphi + q_i \sin \varphi - x_\delta) \right\} = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{RT}}{\partial y_\delta} = \sum_{i=1}^N \left\{ (y_i - p_i \sin \varphi - q_i \cos \varphi - y_\delta) \right\} = 0 \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{RT}}{\partial \varphi} &= \sum_{i=1}^N 2 \left\{ (p_i \sin \varphi + q_i \cos \varphi)(x_i - p_i \cos \varphi + q_i \sin \varphi - x_\delta) \right\} + \\ &\sum_{i=1}^N 2 \left\{ (-p_i \cos \varphi + q_i \sin \varphi)(y_i - p_i \sin \varphi - q_i \cos \varphi - y_\delta) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Λύνοντας τις (4.14) και (4.15) ως προς x_δ και y_δ λαμβάνουμε τα κάτωθι αποτελέσματα

$$x_\delta = \bar{x} - \bar{p} \cos \varphi + \bar{q} \sin \varphi \quad (4.17)$$

και

$$y_\delta = \bar{y} - \bar{p} \sin \varphi - \bar{q} \cos \varphi \quad (4.18)$$

όπου $\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{q}$ είναι τα βαρύκεντρα των αντιστοίχων ψηφιακών καμπυλών, δηλαδή

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}, \bar{y} = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{N}, \bar{p} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{N}, \bar{q} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{N}. \quad (4.19)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των x_δ, y_δ , όπως αυτές προκύπτουν από τις (4.17) και (4.18), στην (4.16) προκύπτει

$$\sum_{i=1}^N \{(x_i - \bar{x})(p_i \sin \varphi + q_i \cos \varphi) + (y_i - \bar{y})(-p_i \cos \varphi + q_i \sin \varphi)\} = 0 \quad (4.20)$$

Αν $\cos \varphi \neq 0$ από την (4.20) προκύπτει

$$\tan \varphi = \frac{\sum_{i=1}^N \{(y_i - \bar{y})p_i - (x_i - \bar{x})q_i\}}{\sum_{i=1}^N \{(x_i - \bar{x})p_i + (y_i - \bar{y})q_i\}} \quad (4.21)$$

που είναι ίδια με την έκφραση (4.5)

Η περίπτωση $\cos \varphi$ ίσον με το μηδέν εξετάζεται ξεχωριστά με αντικατάσταση της $\varphi = \pm \pi/2$ στην (4.16) και έλεγχο για να διαπιστωθεί αν η ισότητα ισχύει.

Για την υλοποίηση στον υπολογιστή λαμβάνουμε υπ' όψιν ότι η \tan στο $[0, 2\pi)$ λαμβάνει την ίδια τιμή για δύο γωνίες που διαφέρουν κατά π . Για το λόγο αυτό εντοπίζουμε την φ από τη σχέση (4.21) μέσω της $a \tan$ του δεξιού μέλους της. Εάν η γωνία που θα βρεθεί είναι η φ , αντικαθιστούμε τόσο αυτήν όσο και την $\varphi + \pi$ στην (4.4) και επιλέγουμε σαν γωνία ολικού ελαχίστου λάθους εκείνη που δίνει τη μικρότερη τιμή του \mathcal{E}_{RT} .

Από τη στιγμή που επετεύχθη η βέλτιστη προσαρμογή των ψηφιακών καμπυλών, μόνο με στροφή και παράλληλη μετατόπιση της δεύτερης, στο επόμενο στάδιο αναζητείται ο βέλτιστος συντελεστής ομοιοθεσίας για ακόμα καλύτερη προσαρμογή αυτών των καμπυλών. Η ομοιοθεσία όμως πρέπει να γίνει κατάλληλα, ούτως ώστε να μην καταστρατηγεί την προηγουμένως επιτευχθείσα προσαρμογή των καμπυλών. Για να εξασφαλιστεί αυτό, πρέπει η ομοιοθεσία να μην αλλάζει το κέντρο βάρους της ομοιοθετούμενης καμπύλης. Δηλαδή, εάν η καμπύλη (p_i, q_i) μετά τη βέλτιστη στροφή και μετατόπισή της παράγει την καμπύλη (a_i, β_i) με κέντρο βάρους το $(\bar{a}, \bar{\beta})$ τότε πρέπει να ομοιοθετηθεί η (a_i, β_i) με κέντρο ομοιοθεσίας το $(\bar{a}, \bar{\beta})$ και συντελεστή ομοιοθεσίας $\lambda \in R^+$ ώστε να προσεγγίσει τη (x_i, y_i) βέλτιστα κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων.

Αυτή η διαδικασία ομοιοθεσίας και βέλτιστης προσαρμογής, έχει μία πολύ σημαντική ιδιαιτερότητα. Εάν για κάποιο i οι ποσότητες $(x_i - \bar{a})$ και $(a_i - \bar{a})$ είναι ετερόσημες, τότε για κάθε ομοιοθεσία η ποσότητα $\varepsilon_1 = (x_i - \bar{a}) - \lambda(a_i - \bar{a})$ αυξάνεται απολύτως, καθ' όσον οι ποσότητες $(x_i - \bar{a})$ και

$-\lambda(a_i - \bar{a})$ είναι ομόσημες, ενώ επιθυμούμε την ελαχιστοποίηση της ε_1 . Το ίδιο συμβαίνει και εάν οι ποσότητες $(y_i - \bar{\beta})$ και $(\beta_i - \bar{\beta})$ είναι ετερόσημες. Για να παρακάμψουμε αυτή τη δυσκολία χρησιμοποιήσαμε τη συνάρτηση $sign(x, a)$ η οποία εκφράζει το ομόσημο και ετερόσημο των ποσοτήτων x, a δηλαδή

$$sign(x, a) = \begin{cases} 1 & \alpha \nu \ x a \geq 0 \\ -1 & \alpha \nu \ x a < 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Για τους ανωτέρω λόγους επελέγη η ελαχιστοποίηση της κάτωθι ποσότητας ε_{RTO} ως το βέλτιστο κριτήριο προσαρμογής.

$$\varepsilon_{RTO}(\lambda, x_\delta, y_\delta, \varphi) = \sum_{i=1}^N \left\{ \left((x_i - \bar{a}) - \lambda sign(x_i - \bar{a}, a_i - \bar{a})(a_i - \bar{a}) \right)^2 + \left((y_i - \bar{\beta}) - \lambda sign(y_i - \bar{\beta}, \beta_i - \bar{\beta})(\beta_i - \bar{\beta}) \right)^2 \right\} \quad (4.23)$$

$$\text{όπου } \bar{a} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \text{ και } \bar{\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \beta_i$$

Πράγματι, παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι η ομοιοθεσία ως προς την αρχή των αξόνων δεν αλλάζει ούτε την τιμή του $sign(x_i - \bar{a}, a_i - \bar{a})$ ούτε αυτήν του $sign(y_i - \bar{\beta}, \beta_i - \bar{\beta})$, διότι ο πολλαπλασιασμός επί πραγματική θετική σταθερά δεν μετακινεί το σημείο από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται. Επίσης παρατηρούμε ότι εάν παραγωγίσουμε την $\varepsilon_{RTO}(\lambda, x_\delta, y_\delta, \varphi)$ ως προς x_δ, y_δ και φ και απαιτήσουμε αυτές οι μερικές παράγωγοι να είναι μηδέν, τότε προκύπτουν οι σχέσεις (4.17), (4.18) και (4.21), γεγονός που αποδεικνύει ότι όντως η διαδικασία ομοιοθεσίας είναι ανεξάρτητη από την παράλληλη μετατόπιση και τη στροφή. Συνεπώς, καθ' όλη τη διαδικασία της ομοιοθεσίας, η συνάρτηση $\varepsilon_{RTO}(\lambda, x_\delta, y_\delta, \varphi)$ παραμένει συνεχώς παραγωγίσιμη. Επομένως, εάν αναζητήσουμε τα σημεία όπου $\frac{\partial \varepsilon_{RTO}}{\partial \lambda} = 0$ λαμβάνουμε ισοδυνάμως την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^N \left\{ (\alpha_i - \bar{a}) sign(x_i - \bar{a}, \alpha_i - \bar{a}) \left((x_i - \bar{a}) - \lambda (\alpha_i - \bar{a}) sign((x_i - \bar{a}), (\alpha_i - \bar{a})) \right) \right\} + \sum_{i=1}^N \left\{ (\beta_i - \bar{\beta}) sign(y_i - \bar{\beta}, \beta_i - \bar{\beta}) \left((y_i - \bar{\beta}) - \lambda (\beta_i - \bar{\beta}) sign((y_i - \bar{\beta}), (\beta_i - \bar{\beta})) \right) \right\} = 0 \quad (4.24)$$

Άρα τελικά

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^N \left\{ |(x_i - \bar{a})(\alpha_i - \bar{\alpha})| + |(y_i - \bar{\beta})(\beta_i - \bar{\beta})| \right\}}{\sum_{i=1}^N \left\{ (\alpha_i - \bar{\alpha})^2 + (\beta_i - \bar{\beta})^2 \right\}}, \quad (4.25)$$

καθ' όσον $sign(x, \alpha)^2 = 1$ και $sign(x, \alpha)x\alpha = |x\alpha|$. ο.ε.δ.

Η χρησιμότητα του ανωτέρω λήμματος έγκειται στο γεγονός ότι επιταχύνει δραστικά και ουσιαστικά τη διαδικασία βέλτιστης προσαρμογής δύο υλοποιήσεων ενός συμβόλου της αλφαβήτου. Πράγματι, θεωρητικά η διαδικασία αυτής της βέλτιστης προσαρμογής που περιεγράφη στην παράγραφο (4.1), θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί και με κάποιο αλγόριθμο ελαχιστοποίησης συναρτήσεων. Ο αλγόριθμος αυτός θα ελαχιστοποιούσε την ποσότητα ε της σχέσεως (4.3) στον χώρο των δυνατών περιστροφών, των δυνατών παράλληλων μετατοπίσεων x_δ, y_δ και των δυνατών ομοιοθεσιών (λ). Εν τούτοις, οι αλγόριθμοι ελαχιστοποίησης εκ της φύσεως τους δεν παρέχουν εγγυημένα τη βέλτιστη τοποθέτηση των δύο περιγραμμάτων αλλά συνήθως μια τοποθέτηση πλησίον της βέλτιστης. Επίσης η σύγκλισή τους εξαρτάται καθοριστικά από την επιλογή των αρχικών συνθηκών. Η πράξη όμως έδειξε ότι η επίλυση του προβλήματος της αυτόματης ταυτοποίησης γραφέως απαιτεί εξαιρετική ακρίβεια, γεγονός που επιβάλλει εξαντλητική αναζήτηση της θέσεως βέλτιστης προσαρμογής των δύο περιγραμμάτων στο χώρο $(\varphi, x_\delta, y_\delta, \lambda) \subset R^4$. Κάτι τέτοιο καθιστά τη διαδικασία εξαιρετικά χρονοβόρα καθώς κατά κανόνα η γωνία φ εντός της ίδιας επιγραφής μπορεί να λαμβάνει όλες τις τιμές από -30 έως 30 μοίρες, τα x_δ, y_δ για τη δεδομένη ανάλυση εικόνας από -27 έως 27 εικονοστοιχεία και ο συντελεστής ομοιοθεσίας από 0.50 έως 2.00. Σημειώνεται ότι υπήρξαν ειδικές περιπτώσεις επιγραφών για τις οποίες απαιτήθηκε ακόμα μεγαλύτερο εύρος του διαστήματος τιμών του συντελεστή ομοιοθεσίας. Για να μειώσουμε τον υπολογιστικό φόρτο, εφαρμόζουμε την εξής τεχνική :

Πρώτον χωρίζουμε τις πλευρές κάθε σκέλους κάθε περιγράμματος σε N^T τμήματα, όπου κάθε τμήμα περιλαμβάνει περίπου τον ίδιο αριθμό pixels με τα άλλα π.χ. εάν μία πλευρά αποτελείται από 107 pixels τη χωρίζουμε σε 12 τμήματα όπου τα 11 αποτελούνται από 9 pixels και το δωδέκατο από 8. Τονίζεται ότι οι αντίστοιχες πλευρές τόσο του πρότυπου Π_1 όσο και του Π_2 που θα υποστούν τους μετασχηματισμούς χωρίζονται σε ίδιο αριθμό τμημάτων. Για παράδειγμα, εάν το εξεταζόμενο σύμβολο της αλφαβήτου είναι το A τότε η αριστερή πλευρά του

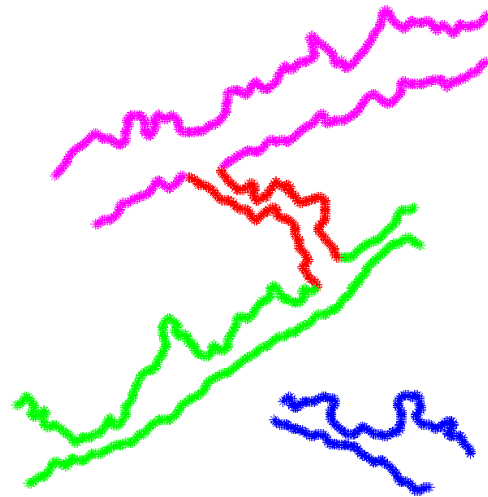
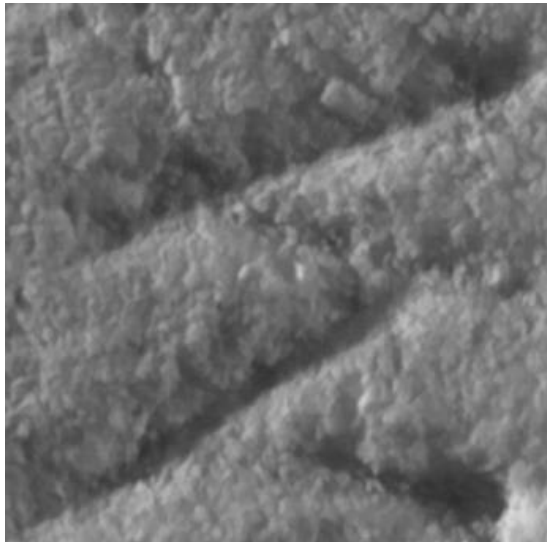
αριστερού σκέλους τόσο του Π_1 όσο και του Π_2 θα χωριστούν στον ίδιο αριθμό τμημάτων, έστω 12, η δεξιά πλευρά του αριστερού σκέλους και του Π_1 και του Π_2 σε, έστω, 16 τμήματα και οι δύο κοκ. Με αυτό τον τρόπο διαμέρισης των πλευρών τους, τα Π_1 και Π_2 εκπροσωπούνται από δύο ισοπληθή υποσύνολα των σημείων τους, επομένως το λήμμα 1 μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα οπότε και θα μας προσφέρει μία λίαν ικανοποιητική προσέγγιση των βέλτιστων τιμών των $(\varphi, x_\delta, y_\delta, \lambda)$. Γύρω από αυτή την προσέγγιση, χτίζουμε ένα υπερ-ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στο \mathbb{R}^4 , έστω V , εντός του οποίου η πράξη έχει επιβεβαιώσει ότι πάντα βρίσκεται η τετράδα τιμών που ελαχιστοποιεί την ποσότητα ε της σχέσης (4.3). Χωρίζουμε το V σε μια πολύ λεπτή διαμέριση π.χ. 0.2 μοίρες για τη γωνία φ , 0.25 του pixel για τα x_δ, y_δ και 0.005 για το λ της ομοιοθεσίας και για κάθε σημείο αυτής της διαμέρισης του V υπολογίζουμε την ποσότητα ε . Το γεγονός ότι η προσέγγιση που δίνει η εφαρμογή του λήμματος 1 είναι λίαν ικανοποιητική, εξασφαλίζει το μικρό μέγεθος του V και το σχετικά γρήγορο υπολογισμό της βέλτιστης θέσεως προσαρμογής των Π_1 Π_2 με εξαιρετική ακρίβεια.

5. Κριτήρια ομοιότητας υλοποιήσεων γραμμάτων στη θέση βέλτιστης προσαρμογής

Θεωρούμε δύο υλοποιήσεις του ίδιου συμβολογράμματος επί δύο διαφορετικών επιγραφών, έστωσαν αυτές Y^{Π} και Y^{Γ} . Ας υποθεθεί ότι η κάθε υλοποίηση αποτελείται από τέσσερα κτυπήματα και συγκεκριμένα η Y^{Π} από τα $S_1^{\Pi}, S_2^{\Pi}, S_3^{\Pi}, S_4^{\Pi}$ και η Y^{Γ} από τα $S_1^{\Gamma}, S_2^{\Gamma}, S_3^{\Gamma}, S_4^{\Gamma}$. Χρησιμοποιούμε τον όρο κτύπημα για να περιγράψουμε ένα σκέλος ενός οποιουδήποτε γράμματος το οποίο κατά κανόνα δημιουργήθηκε με ένα κτύπημα της σμίλης επί του μαρμάρου. Κατ' αυτόν τον τρόπο, κάθε σύμβολο της αλφαβήτου αποτελείται κατά κανόνα από ένα καθορισμένο αριθμό κτυπημάτων-σκελών: για παράδειγμα τα συμβολογράμματα Σ, Μ, Ε αποτελούνται από τέσσερα κτυπήματα, τα Α, Ν από τρία κτυπήματα τα Τ, Λ από δύο κ.λ.π. Πρέπει να αναφέρουμε ότι έχει ληφθεί ειδική μέριμνα για τα καμπύλα γράμματα, δηλαδή αυτά που περιέχουν μη ευθύγραμμο τμήματα όπως π.χ. τα Ρ, Ο, Β, Ω, Φ κ.λ.π., αναφορικά με το πλήθος των κτυπημάτων που τα δημιούργησαν. Συγκεκριμένα θεωρούμε ότι το γράμμα Ρ αποτελείται από δύο κτυπήματα, ένα ευθύγραμμο σκέλος και μία καμπύλη όπως φαίνεται στις εικόνες 5.11 και 5.12 αν και αυτό κάποιες φορές μπορεί να εμπεριέχει μίας μορφής κατάχρηση, με την έννοια ότι ο λιθοξόος μπορεί να χάρασσε το καμπύλο τμήμα με περισσότερα κτυπήματα από ένα.

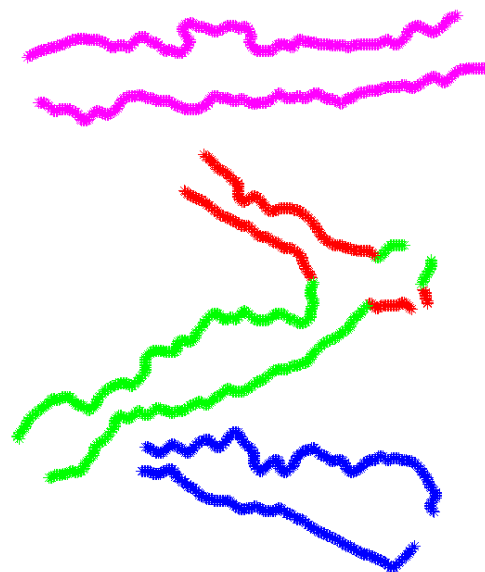
Στις επόμενες σελίδες ακολουθούν ορισμένες εικόνες υλοποιήσεων συμβολογραμμάτων καθώς και τα περιγράμματά τους. Για λόγους καλής εποπτείας τα διαφορετικά κτυπήματα εμφανίζονται με διαφορετικό χρώμα.

5.1 Απεικονίσεις συμβολογραμμάτων που υλοποιούνται με τέσσερα κτυπήματα



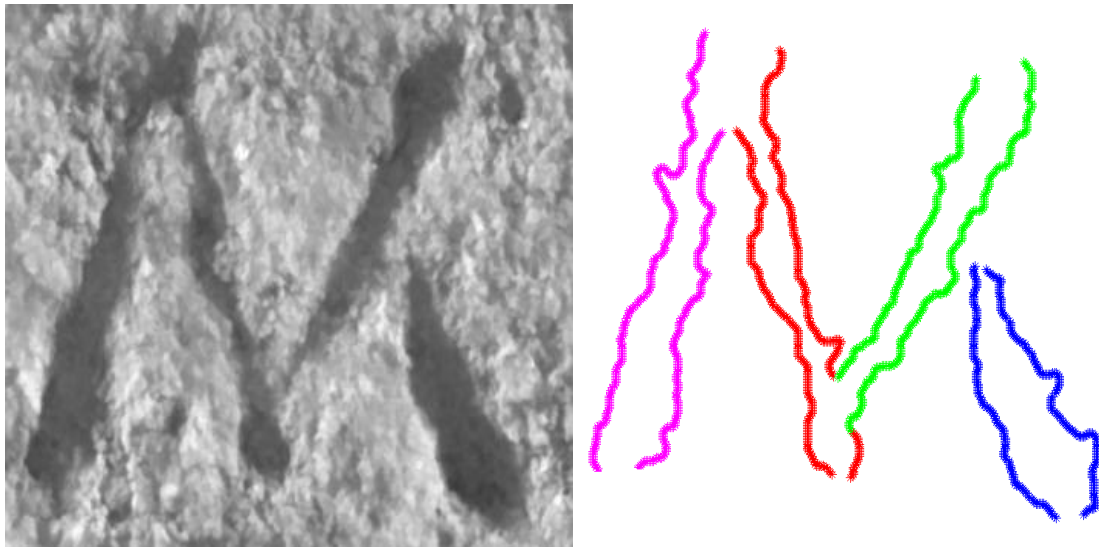
Εικόνα 5.1

Ψηφιακή εικόνα ενός γράμματος Σ , και τελική μορφή του περιγράμματος αυτού στο x-y επίπεδο. Με χρώμα ματζέντα παρουσιάζεται το πρώτο κτύπημα, με κόκκινο το δεύτερο με πράσινο το τρίτο και με μπλε το τέταρτο.



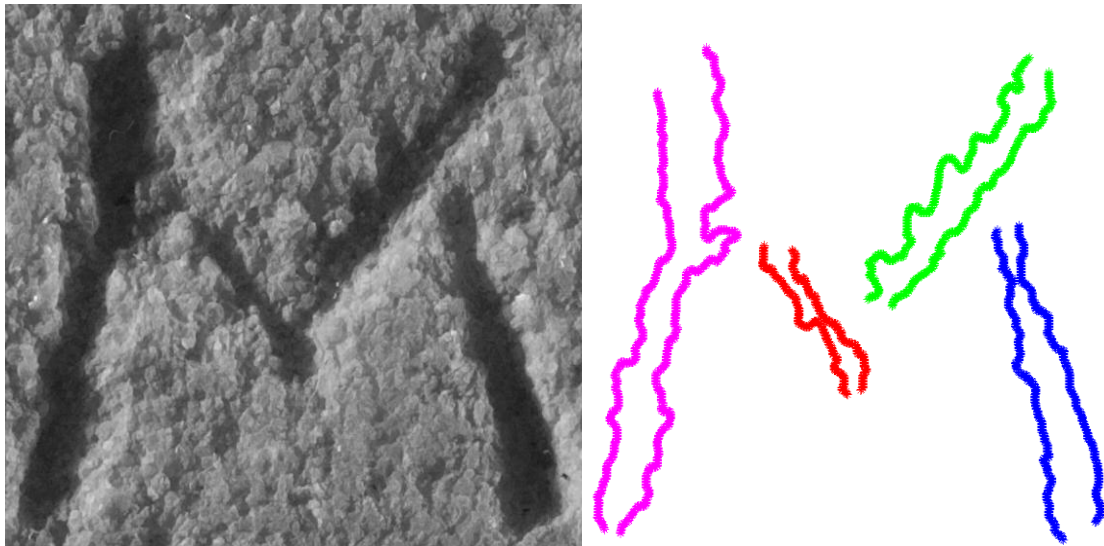
Εικόνα 5.2

Ένα άλλο παράδειγμα ψηφιακής εικόνας ενός γράμματος Σ , και τελική μορφή του περιγράμματος αυτού στο x-y επίπεδο. Η αντιστοιχία των χρωμάτων είναι η ίδια με την εικόνα 5.1



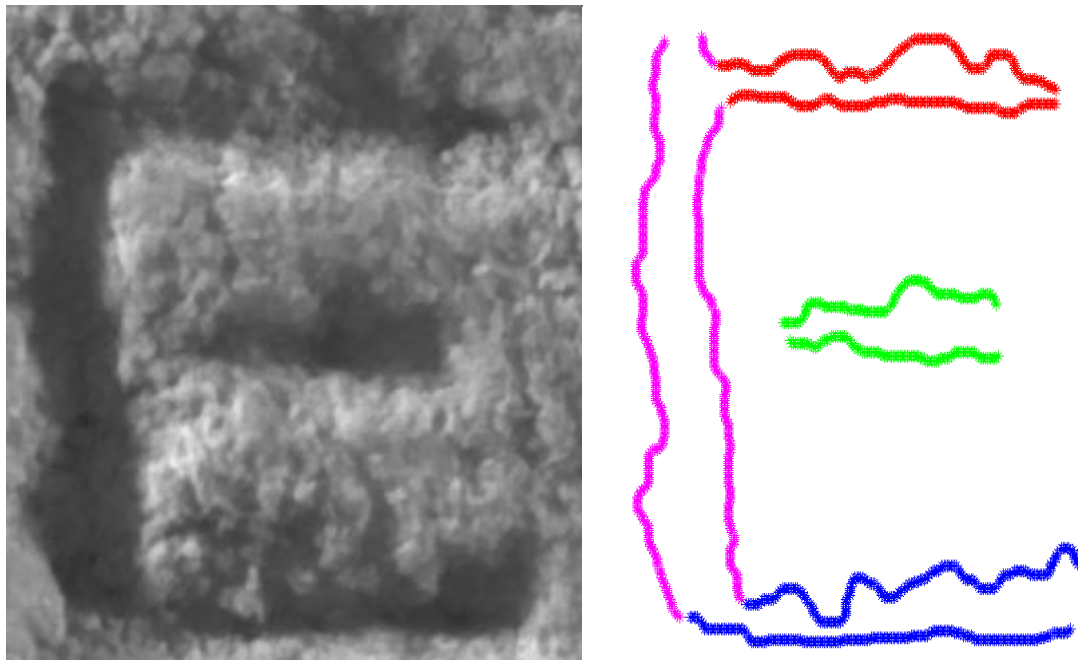
Εικόνα 5.3

Ψηφιακή εικόνα ενός γράμματος M, και τελική μορφή του περιγράμματος αυτού στο x-y επίπεδο. Με χρώμα ματζέντα παρουσιάζεται το πρώτο κτύπημα, με κόκκινο το δεύτερο με πράσινο το τρίτο και με μπλε το τέταρτο.



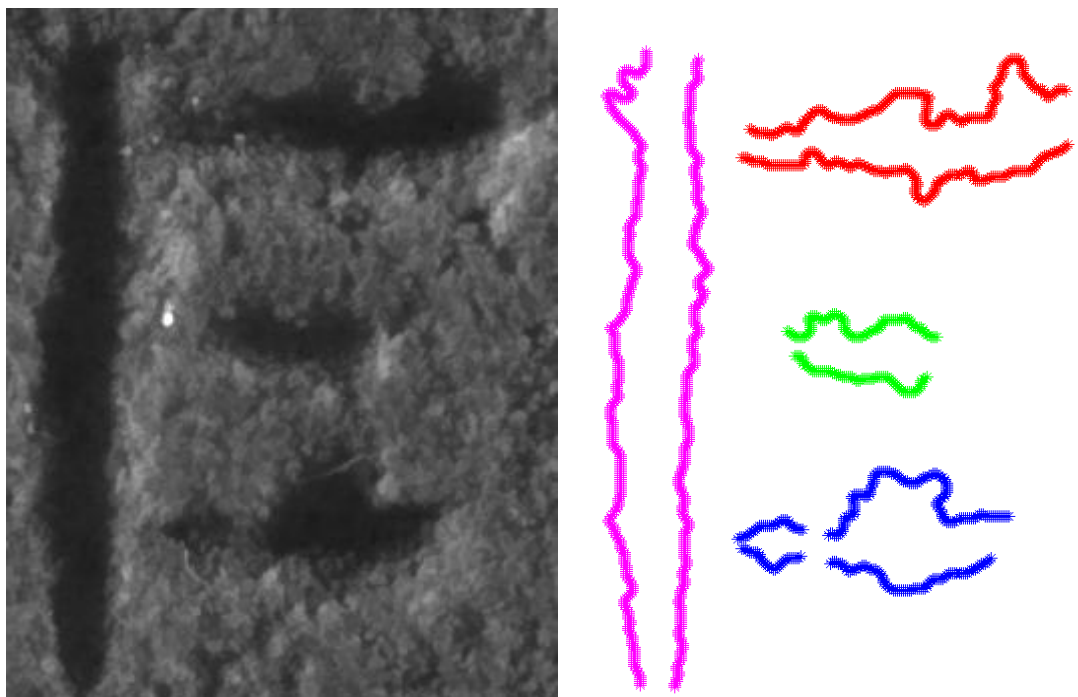
Εικόνα 5.4

Ένα άλλο παράδειγμα ψηφιακής εικόνας ενός γράμματος M, και τελική μορφή του περιγράμματος αυτού στο x-y επίπεδο. Η αντιστοιχία των χρωμάτων είναι η ίδια με την εικόνα 5.3



Εικόνα 5.5

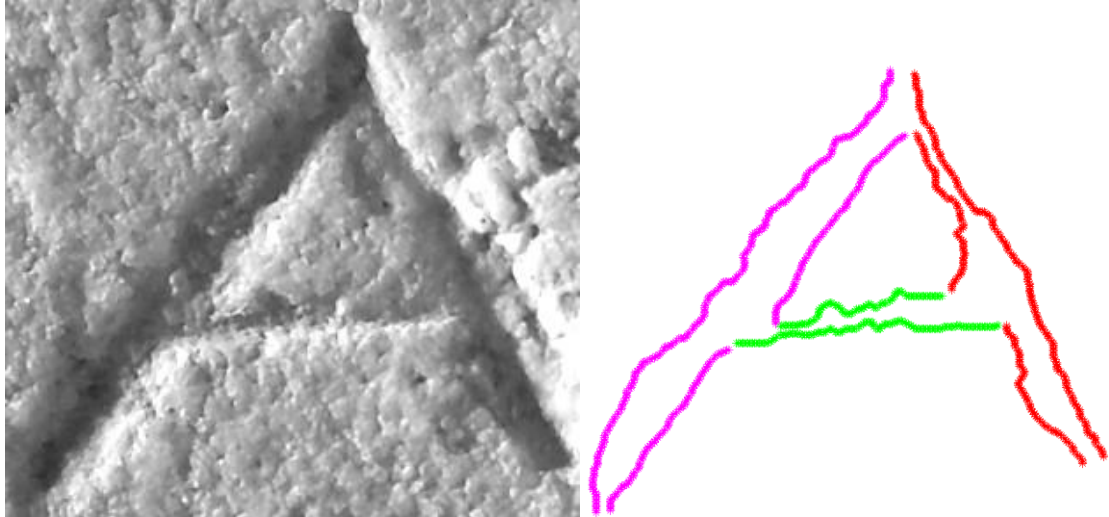
Ψηφιακή εικόνα ενός γράμματος E, και τελική μορφή του περιγράμματος αυτού στο x-y επίπεδο. Με χρώμα ματζέντα παρουσιάζεται το πρώτο κτύπημα, με κόκκινο το δεύτερο με πράσινο το τρίτο και με μπλε το τέταρτο.



Εικόνα 5.6

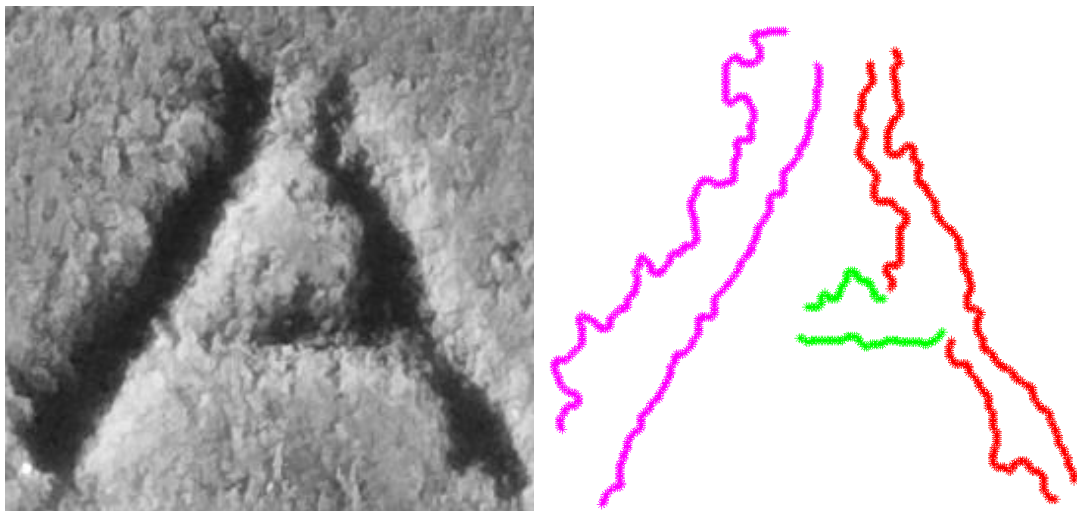
Ένα άλλο παράδειγμα ψηφιακής εικόνας ενός γράμματος E, και τελική μορφή του περιγράμματος αυτού στο x-y επίπεδο. Η αντιστοιχία των χρωμάτων είναι η ίδια με την εικόνα 5.5

5.2 Απεικονίσεις συμβολογραμμάτων που υλοποιούνται με τρία κτυπήματα



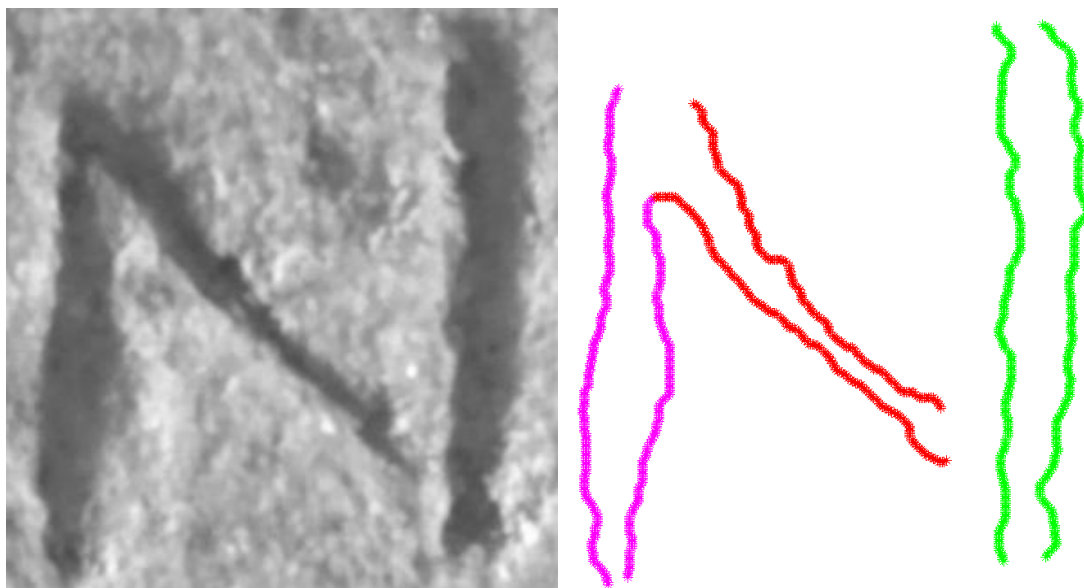
Εικόνα 5.7

Ψηφιακή εικόνα ενός γράμματος A, και τελική μορφή του περιγράμματος αυτού στο x-y επίπεδο. Με χρώμα ματζέντα παρουσιάζεται το πρώτο κτύπημα, με κόκκινο το δεύτερο και με πράσινο το τρίτο.

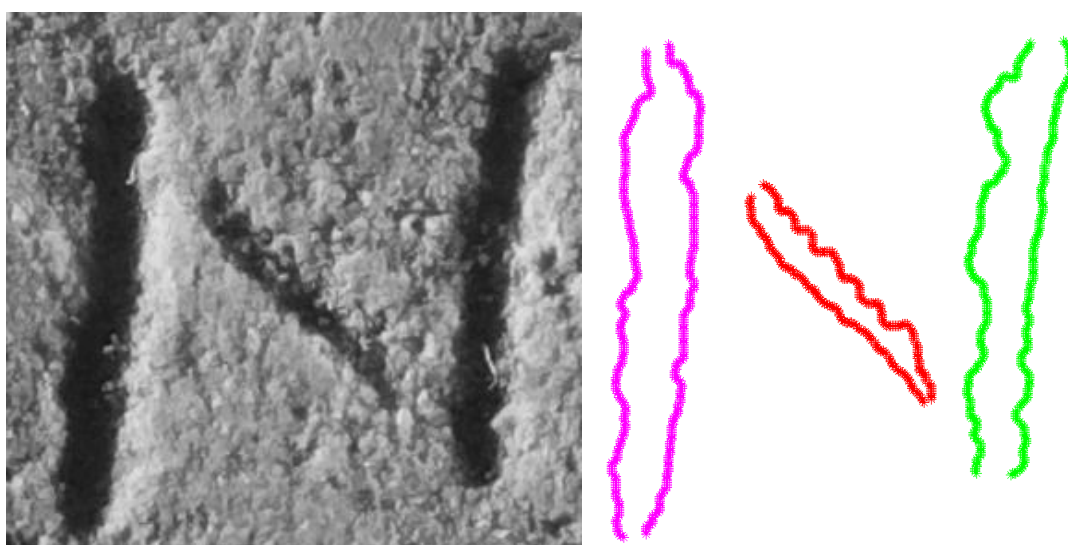


Εικόνα 5.8

Ένα άλλο παράδειγμα ψηφιακής εικόνας ενός γράμματος A, και τελική μορφή του περιγράμματος αυτού στο x-y επίπεδο. Η αντιστοιχία των χρωμάτων είναι η ίδια με την εικόνα 5.7

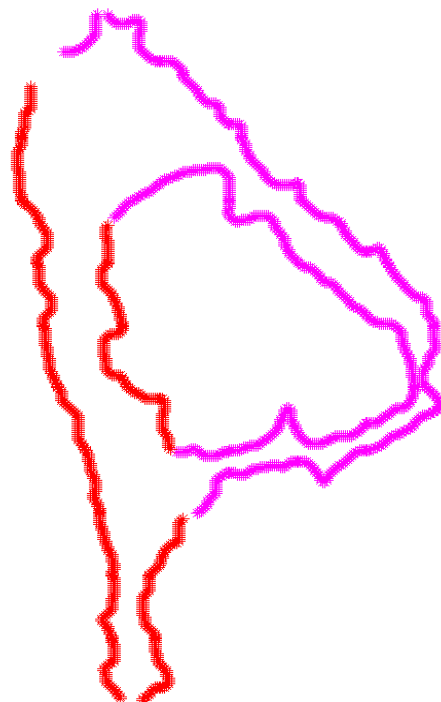


Εικόνα 5.9
Ψηφιακή εικόνα ενός γράμματος N, και τελική μορφή του περιγράμματος αυτού στο x-y επίπεδο. Με χρώμα ματζέντα παρουσιάζεται το πρώτο κτύπημα, με κόκκινο το δεύτερο με πράσινο το τρίτο.



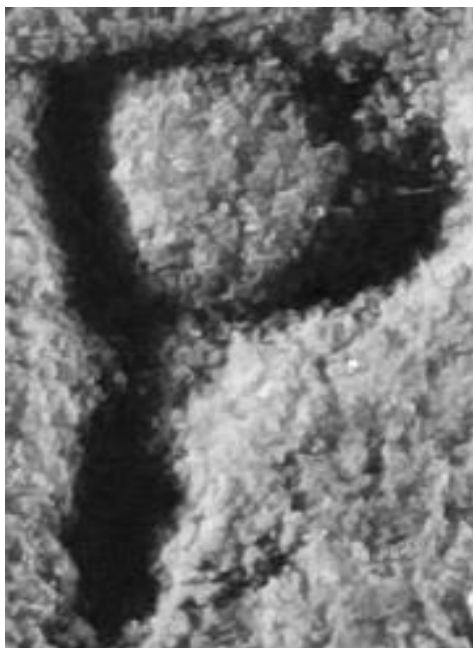
Εικόνα 5.10
Ένα άλλο παράδειγμα ψηφιακής εικόνας ενός γράμματος N, και τελική μορφή του περιγράμματος αυτού στο x-y επίπεδο. Η αντιστοιχία των χρωμάτων είναι η ίδια με την εικόνα 5.9

5.3 Απεικονίσεις συμβολογραμμάτων που υλοποιούνται με δύο κτυπήματα



Εικόνα 5.11

Ψηφιακή εικόνα ενός γράμματος P, και τελική μορφή του περιγράμματος αυτού στο x-επίπεδο. Με χρώμα ματζέντα παρουσιάζεται το πρώτο κτύπημα και με κόκκινο το δεύτερο.

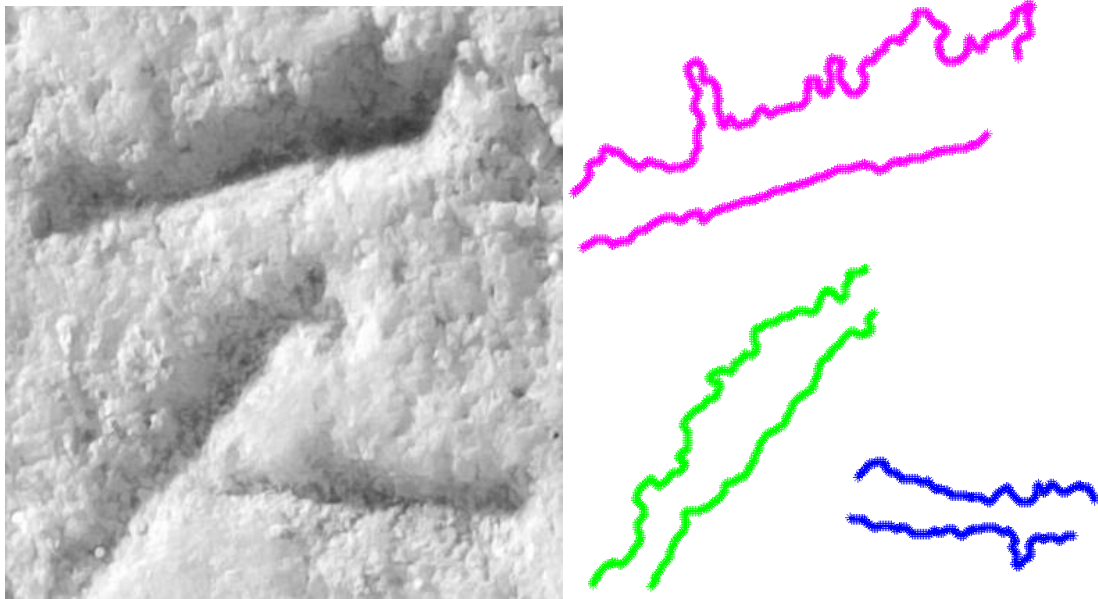


Εικόνα 5.12

Έτερο παράδειγμα ψηφιακής εικόνας ενός γράμματος P, και τελική μορφή του περιγράμματος αυτού στο x-y επίπεδο. Η αντιστοιχία των χρωμάτων είναι η ίδια με την εικόνα 5.11

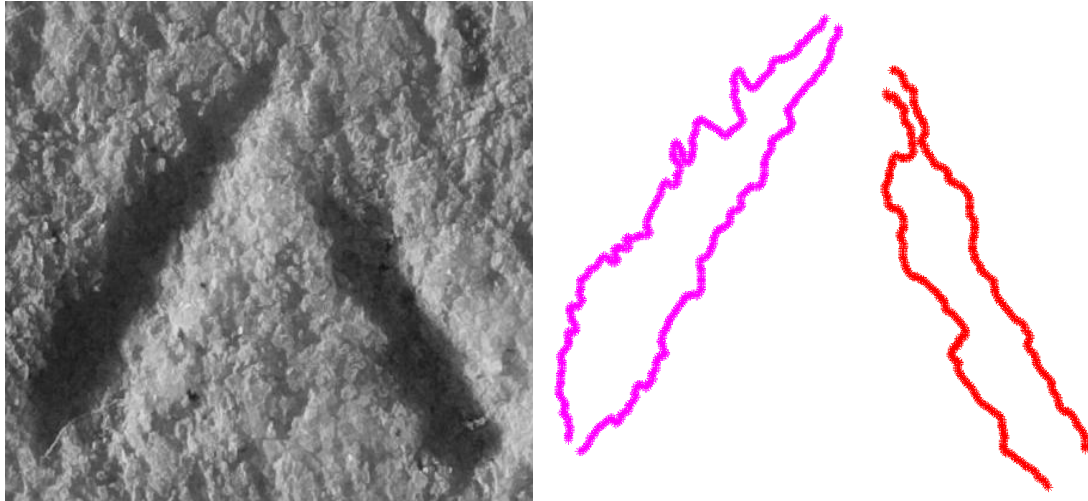
5.4 Απεικονίσεις υλοποιήσεων συμβολογραμμάτων με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά

Είναι χαρακτηριστικό ότι μερικοί αρχαίοι γραφείς είχαν την τάση να παραλείπουν συχνά κάποιο σκέλος ενός συμβολογράμματος. Για παράδειγμα ο λιθοξόος, τον οποίο θα αποκαλέσουμε παρακάτω «χέρι τρία», είχε τη συνήθεια να παραλείπει συχνά το δεύτερο σκέλος του συμβολογράμματος Σ (εικόνα 5.13) ενώ ο γραφέας που ονομάζεται κατωτέρω «χέρι τέσσερα» συχνά δεν κτυπούσε τη μεσαία κεραία του Λ (εικόνα 5.14). Μια τέτοια υλοποίηση του Λ ξεχωρίζει από το Λ από τα συμφραζόμενα στην επιγραφή.



Εικόνα 5.13

Ψηφιακή εικόνα ενός γράμματος Σ της «χειρός τρία» και τελική μορφή του περιγράμματος αυτού στο x-y επίπεδο. Με χρώμα ματζέντα παρουσιάζεται το πρώτο κτύπημα, το δεύτερο χτύπημα δεν έχει υλοποιηθεί, το τρίτο κτύπημα παρουσιάζεται με πράσινο χρώμα και με μπλε το τέταρτο.



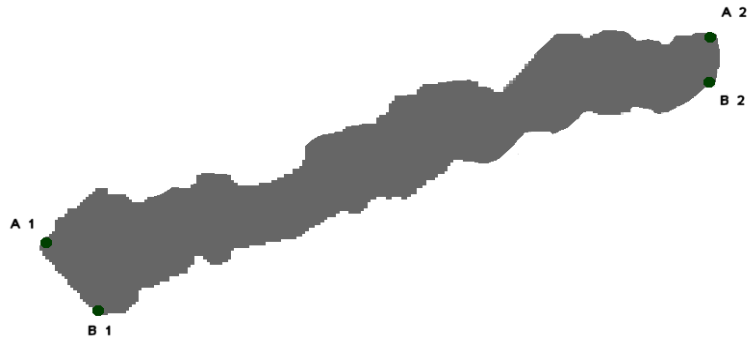
Εικόνα 5.14

Ψηφιακή εικόνα ενός γράμματος Α της «χειρός τέσσερα» και τελική μορφή του περιγράμματος αυτού στο x-y επίπεδο. Με χρώμα ματζέντα παρουσιάζεται το πρώτο κτύπημα, το δεύτερο κτύπημα παρουσιάζεται με κόκκινο χρώμα και το τρίτο κτύπημα δεν έχει υλοποιηθεί.

Για το λόγο αυτό, στα επόμενα, από αυστηρά μαθηματικής απόψεως θα θεωρούμε ότι κάποιο από τα κτυπήματα S_i το οποίο δεν υλοποιείται μπορεί να είναι το κενό σύνολο.

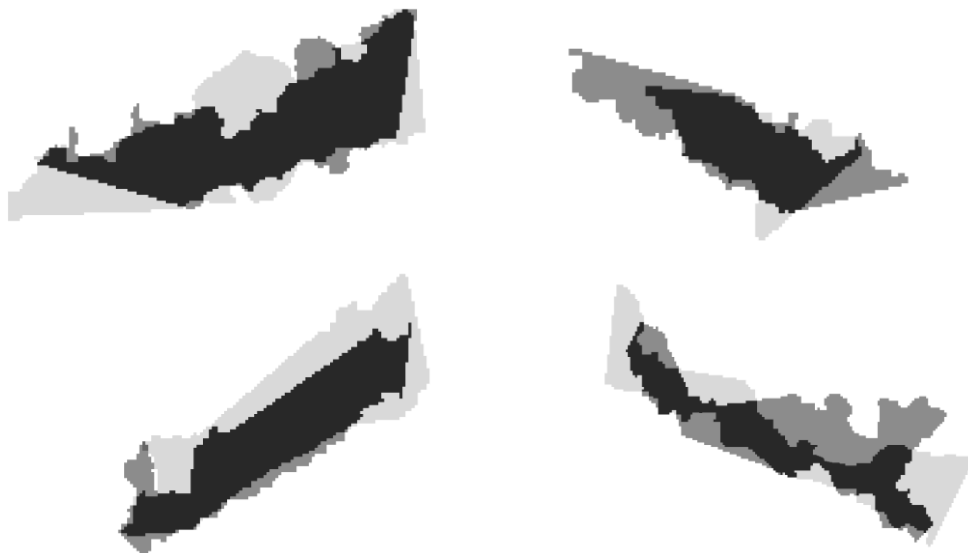
5.5 Ορισμός ενός κριτηρίου ομοιότητας στη θέση βέλτιστης προσαρμογής

Στο σημείο αυτό, ας θεωρήσουμε τις υλοποιήσεις Y^{Π} και Y^T ενός συμβολογράμματος, βέλτιστα προσαρμοσμένες μεταξύ τους με τη μέθοδο που περιγράφει στο κεφάλαιο 4 όπου η Y^{Π} παίζει το ρόλο της προτύπου υλοποίησης και η Y^T της τρεχούσης. Έστωσαν δύο αντίστοιχα κτυπήματα S_1^{Π} και S_1^T σε αυτή τη θέση βέλτιστης προσαρμογής, όπου υπενθυμίζουμε ότι η Y^T μετασχηματίζεται σαν στερεό σώμα και μπορεί να έχει υποστεί ομοιοθεσία με συντελεστή λ . Ακολούθως δημιουργούμε μία περιορισμένη εκδοχή του κάθε κτυπήματος ως εξής: έστωσαν A_1, A_2, B_1, B_2 , τα τέσσερα κρίσιμα σημεία του υπό εξέταση κτυπήματος όπως αυτά ορίστηκαν στο κεφάλαιο 3, όπου τα A_1, A_2 ορίζουν τη μία πλευρά του σκέλους και τα B_1, B_2 την άλλη πλευρά αυτού. Ενώνουμε τα A_1, B_1 αφ' ενός και τα A_2, B_2 αφ' εταίρου με ευθύγραμμα τμήματα οπότε και σχηματίζεται η κλειστή καμπύλη $A_1A_2B_2B_1$. Η περιοχή που αυτή ορίζει φαίνεται στην εικόνα 5.15.



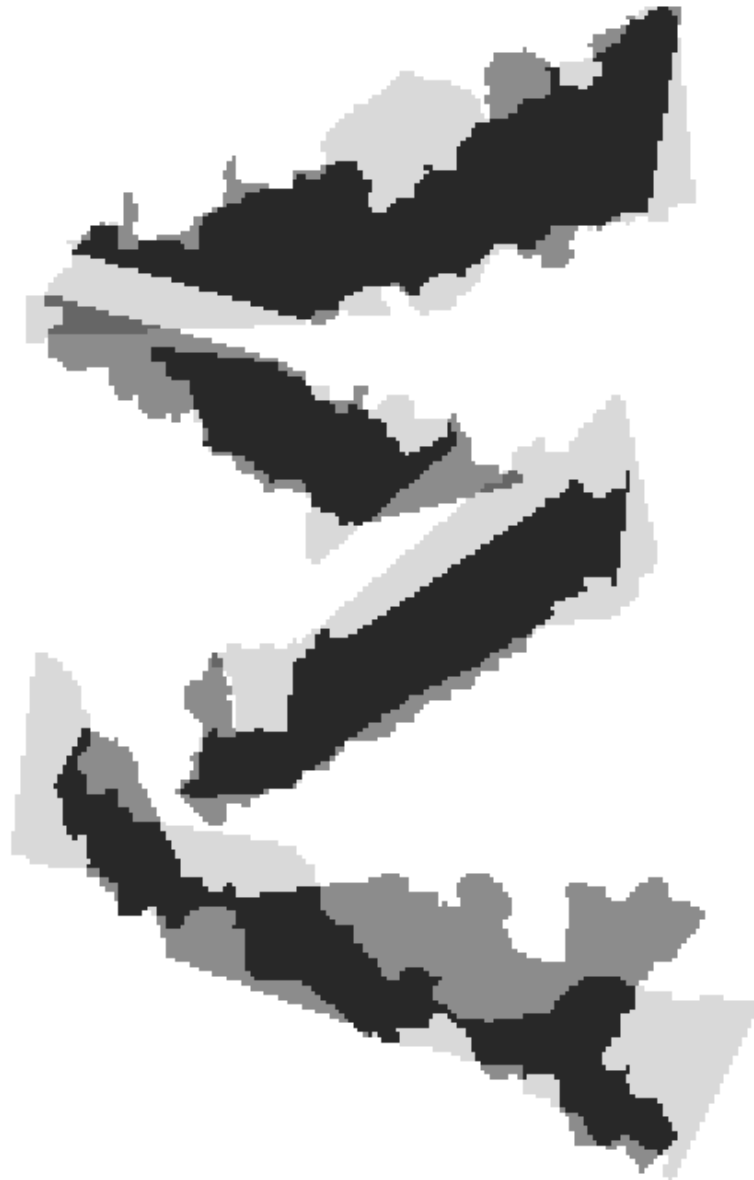
Εικόνα 5.15

Σημειώνεται ότι σε περίπτωση που έχουμε ένα σκέλος το οποίο αποτελείται από νησίδες, τότε εκτός των A_1 A_2 και B_1 B_2 , διασυνδέουμε με ευθύγραμμα τμήματα διαδοχικά κρίσιμα σημεία που γεφυρώνουν δύο διαδοχικές αλυσίδες επί της ίδιας πλευράς του σκέλους, ούτως ώστε να δημιουργηθεί μία κλειστή καμπύλη που περιβάλλει το σκέλος. Εφαρμόζουμε αυτή τη διαδικασία στα χτυπήματα S_1^Π και S_1^T , οπότε και λαμβάνουμε τις βέλτιστα προσαρμοσμένες κλειστές καμπύλες $A_1^\Pi A_2^\Pi B_2^\Pi B_1^\Pi$ και $A_1^T A_2^T B_2^T B_1^T$ όπως αυτές φαίνονται στην εικόνα 5.16. Στο εν λόγω σχήμα παρουσιάζονται τέσσερα χτυπήματα του συμβολογράμματος Σ βέλτιστα προσαρμοσμένα το καθένα ξεχωριστά καθώς και όλα μαζί στην εικόνα 5.17.



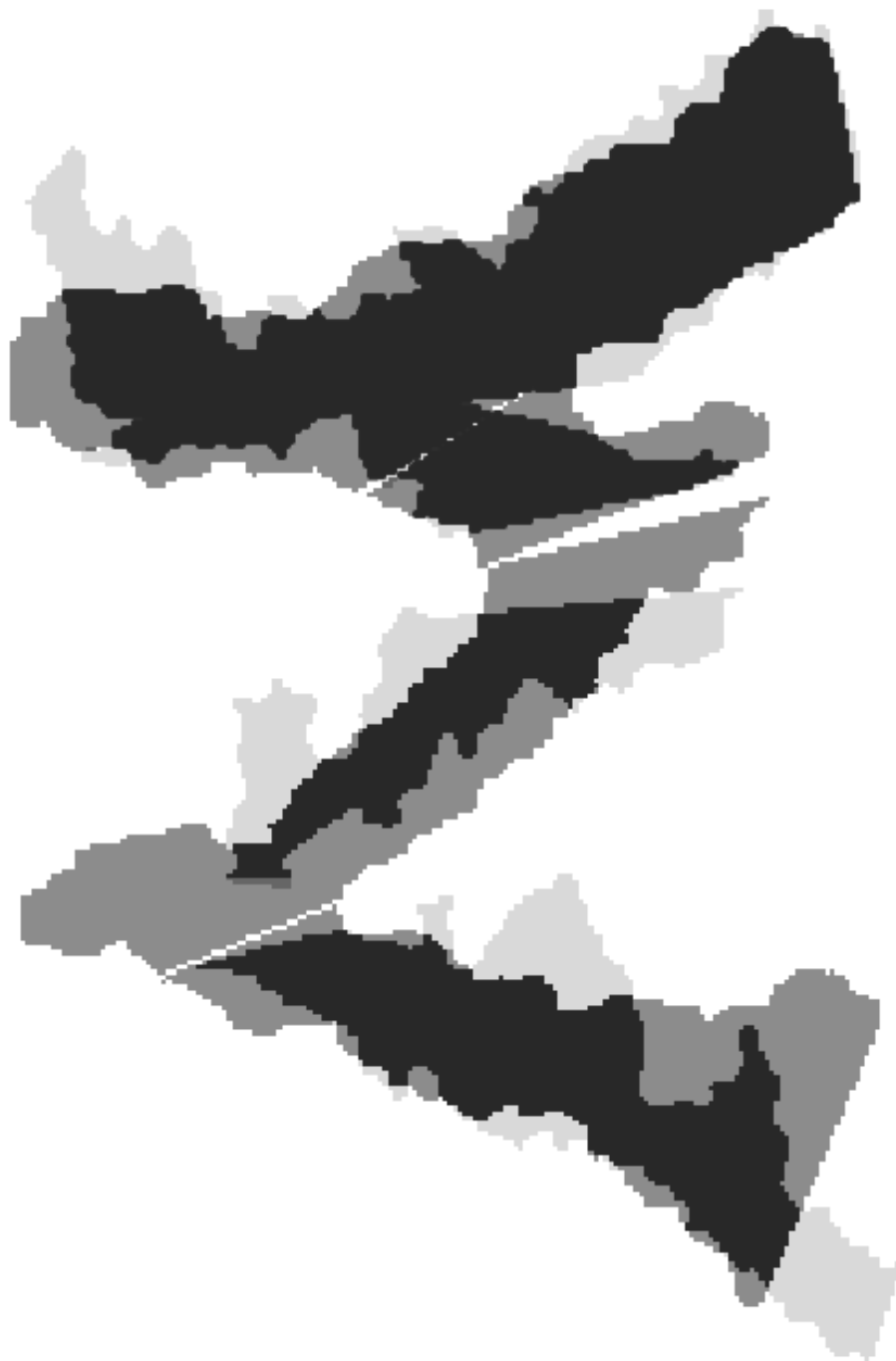
Εικόνα 5.16

Βέλτιστα προσαρμοσμένα χτυπήματα δύο υλοποιήσεων του συμβολογράμματος Σ της **ίδιας χειρός**. Η περιοχή με τον ανοικτότερο τόνο είναι της τρέχουσας υλοποίησης, αυτή με τον αμέσως πιο σκούρο τόνο της πρότυπης και η πιο σκούρα όλων η περιοχή της τομής των δύο.



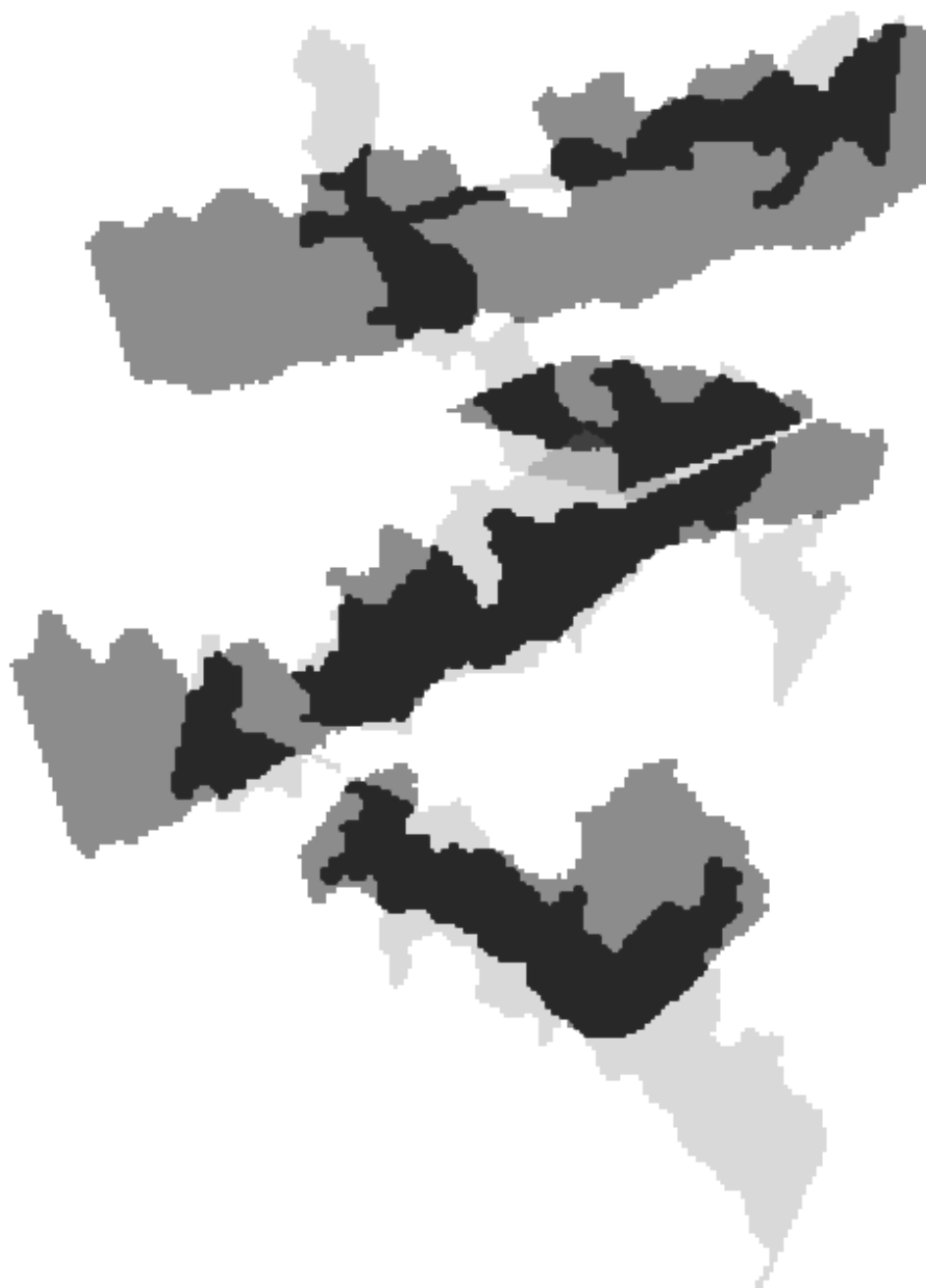
Εικόνα 5.17

Συνολική εικόνα των προηγούμενων βέλτιστα ταιριασμένων κτυπημάτων των δύο υλοποιήσεων του συμβολογράμματος Σ που προέρχονται από το **ίδιο χέρι**. Η τρέχουσα υλοποίηση μετασχηματίζεται ως στερεό σώμα δηλαδή όλα τα σκέλη αυτής υφίστανται τους ίδιους ακριβώς μετασχηματισμούς.



Εικόνα 5.18

Εικόνα βέλτιστα ταιριασμένων κτυπημάτων δύο υλοποιήσεων του συμβολογράμματος Σ που προέρχονται από το **ίδιο χέρι**. Η περιοχή με τον ανοικτότερο τόνο είναι της τρέχουσας υλοποίησης, αυτή με τον αμέσως πιο σκούρο τόνο της πρότυπης και η πιο σκούρα όλων η περιοχή της τομής των δύο.



Εικόνα 5.19

Συνολική εικόνα δύο βέλτιστα ταιριασμένων υλοποιήσεων του συμβολογράμματος Σ **διαφορετικής χειρός**. Η περιοχή με τον ανοικτότερο τόνο είναι της τρέχουσας υλοποίησης, αυτή με τον αμέσως πιο σκούρο τόνο της πρότυπης και η πιο σκούρα όλων η περιοχή της τομής των δύο.



Εικόνα 5.20

Συνολική εικόνα δύο βέλτιστα ταιριασμένων υλοποιήσεων του συμβολογράμματος Σ **διαφορετικής χειρός**. Η περιοχή με τον ανοικτότερο τόνο είναι της τρέχουσας υλοποίησης, αυτή με τον αμέσως πιο σκούρο τόνο της πρότυπης και η πιο σκούρα όλων η περιοχή της τομής των δύο.

Η γνώση του ότι οι υλοποιήσεις στις εικόνες 5.17 και 5.18 προέρχονται από τον ίδιο χαρακτήρα και αυτές στις εικόνες 5.19 και 5.20 από διαφορετικό προέρχεται από την εφαρμογή του συστήματος που περιγράφεται στην παρούσα εργασία.

Κάθε μία από αυτές τις κλειστές καμπύλες χωρίζει το επίπεδο σε δύο χωρία, ένα εσωτερικό E_1^{Π} ή E_1^T και ένα εξωτερικό X_1^{Π} ή X_1^T . Σε αυτό το σημείο ορίζουμε μία ποσότητα δE_1 η οποία είναι πηλίκο δύο εμβαδών και συγκεκριμένα την

$$\delta E_1 = \frac{\text{εμβαδόν της } E_1^{\Pi} \cap E_1^T}{\text{εμβαδόν της } E_1^{\Pi} \cup E_1^T} = \frac{EMB(E_1^{\Pi} \cap E_1^T)}{EMB(E_1^{\Pi} \cup E_1^T)} \quad (5.1)$$

Ομοίως ορίζουμε παρόμοιες ποσότητες και για τα άλλα κτυπήματα:

$$\delta E_k = \frac{EMB(E_k^{\Pi} \cap E_k^T)}{EMB(E_k^{\Pi} \cup E_k^T)} \quad k = 2,3,4 \quad (5.2)$$

Εάν κάποιο από τα κτυπήματα E_k^{Π} , E_k^T $k=1,\dots,4$ δεν υπάρχει τότε στην αντίστοιχη ποσότητα δE_k αποδίδουμε την ποσότητα μηδέν.

Στην ιδανική περίπτωση που ο ίδιος χαρακτήρας αναπαρήγαγε τέλεια το συμβολόγραμμα που είχε στο μυαλό του σε όλες τις επιγραφές, τότε η ποσότητα δE_k θα ισούτο με ένα. Όμως, όπως προαναφέρθηκε οι υλοποιήσεις του ίδιου συμβολογράμματος που προέρχονται από το ίδιο χέρι διαφοροποιούνται σημαντικά εξ αιτίας πολλών παραγόντων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την απόκλιση των αριθμών δE_k από τη μονάδα προς μικρότερες τιμές, τόσο περισσότερο όσο λιγότερο καλλιγράφος είναι ο χαρακτήρας. Από την άλλη πλευρά όταν τα κτυπήματα E_k^{Π} και E_k^T προέρχονται από διαφορετικά χέρια, φαίνεται λίαν εύλογο να υποθέσει κανείς ότι οι ποσότητες δE_k είναι στατιστικά πολύ μικρότερες από όταν τα κτυπήματα προέρχονται από το ίδιο χέρι. Για να ποσοτικοποιήσουμε αυτή την παρατήρηση, πραγματοποιήσαμε τα εξής βήματα.

Βήμα 1: Υπολογισμός των ποσοτήτων δE_k αναφορικά με τις υλοποιήσεις ενός συμβολογράμματος επί της ίδιας επιγραφής.

Έστω μια οποιαδήποτε επιγραφή με αριθμό I , επί της οποίας υπάρχουν N_I υλοποιήσεις ενός συμβολογράμματος, έστω του Σ . Θεωρούμε την πρώτη υλοποίηση σαν πρότυπο και προσαρμόζουμε βέλτιστα όλες τις άλλες σε αυτήν διαδοχικά με τη μέθοδο που περιεγράφη στο κεφάλαιο 4. Σε κάθε μία τέτοια βέλτιστη προσαρμογή υπολογίζουμε τις τέσσερις ποσότητες δE_k $k=1,\dots,4$ όπως αυτές

ορίστηκαν στη σχέση (5.2) και ονομάζουμε αυτές $\delta E_{k,1,j}$ $j = 2, \dots, N_I$. Εν συνεχεία θεωρούμε σαν πρότυπο τη δεύτερη υλοποίηση του Σ της επιγραφής I και υπολογίζουμε τις ποσότητες $\delta E_{k,2,j}$ $j = 3, \dots, N_I$ κ.ο.κ.

Σε αυτό το σημείο και για κάθε κτύπημα χωριστά υπολογίζουμε το μέσο όρο των ανωτέρω ποσοτήτων καθώς και τη δειγματική διασπορά τους δηλαδή τις ποσότητες

$$\delta E_k^{\Sigma, I} = \frac{1}{N_I - 1} \sum_{i=1}^{N_I-1} \frac{1}{N_I - i} \sum_{j=i+1}^{N_I} \delta E_{k,i,j} \quad k = 1, \dots, 4 \quad (5.3)$$

$$SE_k^{\Sigma, I} = \sqrt{\frac{1}{N_I - 1} \sum_{i=1}^{N_I-1} \frac{1}{N_I - i} \sum_{j=i+1}^{N_I} (\delta E_{k,i,j} - \delta E_k^{\Sigma, I})^2} \quad k = 1, \dots, 4 \quad (5.4)$$

όπου το πρώτο άθροισμα αφορά στις πρότυπες υλοποιήσεις ενώ το δεύτερο στις τρέχουσες, ο πρώτος άνω δείκτης, εν προκειμένω το Σ , εκπροσωπεί το εξεταζόμενο σύμβολο της αλφαβήτου, ο δεύτερος άνω δείκτης τον αριθμό της επιγραφής και ο κάτω δείκτης τον αριθμό του αντίστοιχου κτυπήματος.

Βήμα 2: Υπολογισμός των ποσοτήτων δE_k για τη σύγκριση των υλοποιήσεων του ίδιου συμβολογράμματος σε δύο διαφορετικές επιγραφές.

Έστω μια οποιαδήποτε επιγραφή με αριθμό I , επί της οποίας υπάρχουν N_I υλοποιήσεις ενός συμβολογράμματος, και μία δεύτερη επιγραφή με αριθμό J με N_J υλοποιήσεις του ίδιου συμβολογράμματος επ' αυτής. Θεωρούμε την πρώτη υλοποίηση της I σαν πρότυπο και προσαρμόζουμε βέλτιστα όλες τις υλοποιήσεις της J σε αυτήν διαδοχικά με τη μέθοδο που περιεγράφη στο κεφάλαιο 4. Σε κάθε μία τέτοια βέλτιστη προσαρμογή υπολογίζουμε τις τέσσερις ποσότητες δE_k $k = 1, \dots, 4$ όπως αυτές ορίστηκαν στη σχέση (5.2) και ονομάζουμε αυτές $\delta E_{k,1,j}$ $j = 1, \dots, N_J$. Εν συνεχεία θεωρούμε σαν πρότυπο τη δεύτερη υλοποίηση του Σ της επιγραφής I και υπολογίζουμε τις ποσότητες $\delta E_{k,2,j}$ $j = 1, \dots, N_J$ κ.ο.κ. , έως ότου όλες οι N_J υλοποιήσεις του Σ της επιγραφής I παίξουν το ρόλο της προτύπου.

Σε αυτό το σημείο και για κάθε χτύπημα χωριστά υπολογίζουμε το μέσο όρο των ανωτέρω ποσοτήτων καθώς και τη δειγματική διασπορά τους δηλαδή τις ποσότητες

$$\delta E_k^{\Sigma,I,J} = \frac{1}{N_I} \sum_{i=1}^{N_I} \frac{1}{N_J} \sum_{j=1}^{N_J} \delta E_{k,i,j} \quad k=1,\dots,4 \quad (5.5)$$

$$SE_k^{\Sigma,I,J} = \sqrt{\frac{1}{N_I} \sum_{i=1}^{N_I} \frac{1}{N_J} \sum_{j=1}^{N_J} (\delta E_{k,i,j} - \delta E_k^{\Sigma,I,J})^2} \quad k=1,\dots,4 \quad (5.6)$$

Η διαφοροποίηση στο ότι οι ποσότητες δE_k αφορούν στη σύγκριση δύο επιγραφών εντοπίζεται στο γεγονός της ύπαρξης τριών άνω δεικτών όπου ο πρώτος συμβολίζει το γράμμα της αλφαβήτου, εν προκειμένω το Σ , ο δεύτερος την πρότυπο επιγραφή και ο τρίτος την τρέχουσα, ενώ όπως πάντα ο κάτω δείκτης συμβολίζει τον αριθμό του κτυπήματος.

Βήμα3: Ένα μέτρο για την εκτίμηση του εάν δύο διαφορετικές επιγραφές προέρχονται από τον ίδιο χαρακτή.

Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι όταν οι επιγραφές I και J προέρχονται από τον ίδιο χαρακτή, οι ποσότητες $\delta E_k^{\Sigma,I}$ και $\delta E_k^{\Sigma,I,J}$ θα έχουν πολύ περισσότερο παραπλήσιες τιμές για όλα τα χτυπήματα, απ' όταν οι I και J προέρχονται από διαφορετικό χέρι. Η ποσοτικοποίηση αυτής της παρατήρησης βασίζεται στο γεγονός ότι κάθε μία ποσότητα δE_i είναι κατ' ουσίαν ένα ποσοστό (άλλωστε λαμβάνει τιμή πάντοτε στο $[0,1]$) και επομένως για $N_I \geq 5, N_J \geq 5$ ακολουθεί κατά προσέγγιση κανονική κατανομή. Η υπόθεση αυτή δεν απορρίφθηκε από τα σχετικά τεστ Kolmogorov-Smirnoff ($\alpha=0.001$). Επίσης, εάν οι επιγραφές I και J προέρχονται από τον ίδιο χαρακτή, τότε οι πληθυσμιακές μέσες τιμές των ποσοτήτων $\delta E_k^{\Sigma,I}$ και $\delta E_k^{\Sigma,I,J}$ είναι ίσες. Άρα, ένα μέτρο που ποσοτικά περιγράφει το αν δύο επιγραφές προέρχονται από το ίδιο χέρι ή όχι επιλέγεται να είναι το σύνολο των ποσοτήτων

$$\delta_k^{\Sigma,I,J} = \frac{\delta E_k^{\Sigma,I} - \delta E_k^{\Sigma,I,J}}{\sqrt{\frac{(SE_k^{\Sigma,I})^2}{N_I(N_I-1)/2} + \frac{(SE_k^{\Sigma,I,J})^2}{N_I N_J}}} \quad (5.7)$$

Όσο πιο κοντά στο μηδέν είναι η ποσότητα $\delta_k^{\Sigma,I,J}$ τόσο περισσότερο αναμένεται οι επιγραφές I και J να προέρχονται από τον ίδιο χαρακτή. Εμφατικότερα δε, εάν οι επιγραφές I και J προέρχονται από διαφορετικό χαρακτή, αναμένεται να υπάρχει ικανός αριθμός συμβόλων της αλφαβήτου και κτυπημάτων των υλοποιήσεων τους αναφορικά με τα οποία οι ποσότητες $\delta_k^{\Sigma,I,J}$ θα διαφέρουν στατιστικά σημαντικά. Επειδή οι ποσότητες του αριθμητή ακολουθούν κανονική κατανομή όπως προαναφέρθηκε, η κάθε μία ποσότητα $\delta_k^{\Sigma,I,J}$ $k = 1, \dots, 4$ ακολουθεί κατανομή Student ή για $N_I \geq 5, N_J \geq 5$ ακολουθεί με πολύ ικανοποιητική προσέγγιση τυπική κανονική κατανομή. Σε περίπτωση που έχουμε κατανομή Student και εάν οι διασπορές $(SE_k^{\Sigma,I})^2$ και $(SE_k^{\Sigma,I,J})^2$ είναι ίσες τότε οι βαθμοί ελευθερίας της κατανομής είναι

$$d_k^{\Sigma,I,J} = N_I N_J + \frac{N_I(N_I - 1)}{2} - 2 \quad (5.8)$$

ενώ αν οι διασπορές είναι άνισες και αν θέσω $N_{II} = N_I(N_I - 1)/2$ και $N_{IJ} = N_I N_J$ τότε ισχύει

$$d_k^{\Sigma,I,J} = \frac{\left((SE_k^{\Sigma,I})^2 / N_{II} + (SE_k^{\Sigma,I,J})^2 / N_{IJ} \right)^2}{\frac{\left((SE_k^{\Sigma,I})^2 / N_{II} \right)^2}{N_{II} - 1} + \frac{\left((SE_k^{\Sigma,I,J})^2 / N_{IJ} \right)^2}{N_{IJ} - 1}} \quad (5.9)$$

Εφ' όσον δεν γνωρίζουμε a priori αν οι πληθυσμιακές διασπορές των ποσοτήτων $\delta_k^{\Sigma,I,J}$ είναι ίσες ή άνισες, διαλέγουμε τη σχέση (5.9) για τους βαθμούς ελευθερίας της Student, διότι καλύπτει και τις δύο περιπτώσεις.

Η σχετική ανάλυση που οδηγεί σε ταυτοποίηση γραφέα θα γίνει στο κεφάλαιο 7 με χρήση πιθανοφανειών.

6. Εξαγωγή γεωμετρικών χαρακτηριστικών από υλοποιήσεις των συμβολογραμμάτων σε επιγραφές

Στο κεφάλαιο αυτό θα διατυπωθούν περαιτέρω κριτήρια ομοιότητας υλοποιήσεων συμβολογραμμάτων που εμφανίζονται σε διαφορετικές επιγραφές, όπου οι υλοποιήσεις των γραμμάτων δεν είναι αναγκαίο να έχουν προσαρμοστεί βέλτιστα. Ο τελικός σκοπός βεβαίως είναι η κατάταξη των επιγραφών ανά γραφέα.

Έστω η εικόνα ενός γράμματος. Αυτή αποτελείται από pixel τα κέντρα των οποίων ορίζουν ένα σύνολο σημείων S πάνω στο οποίο θεωρούμε όλα τα γεωμετρικά σχήματα που μας ενδιαφέρουν. Για παράδειγμα ευθύγραμμο τμήματα, κύκλους, ελλείψεις, γωνίες, τρίγωνα και άλλα. Επομένως ορίζουμε ένα νέο σύνολο, το G , που είναι το σύνολο των γεωμετρικών σχημάτων, τα οποία προκύπτουν από το σύνολο των σημείων του S . Δηλαδή το G είναι σύνολο υποσυνόλων του S .

Συνήθως τα στοιχεία του G προσδιορίζονται με εξισώσεις. Για παράδειγμα ένα ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $A(x_0, y_0)$ και $B(x_1, y_1)$ είναι στοιχείο του G και ορίζεται με τη βοήθεια των παραμετρικών εξισώσεων ως εξής:

$$E_{AB} = \{(x, y) \in S : x = x_0 + \lambda \cdot (x_1 - x_0) \text{ και } y = y_0 + \lambda \cdot (y_1 - y_0) \text{ με } 0 \leq \lambda \leq 1\} \quad (6.1)$$

Πάνω στο G ορίζουμε ένα σύνολο τελεστών. Αναφέρουμε κάτωθι τους πιο χαρακτηριστικούς:

- Αν AB είναι ευθύγραμμο τμήμα ορίζουμε σαν ένα τελεστή το μήκος του AB , έστω L_{AB} .
- Αν A, B, C, D είναι σημεία του S ορίζουμε σαν τελεστή $R1_{ABCD}$ το λόγο

$$\text{του μέτρου του } AB \text{ προς το μέτρο του } CD. \text{ Δηλαδή } R1_{ABCD} = \frac{\|\vec{AB}\|}{\|\vec{CD}\|}.$$

- Αν A, B, C συγγραμμικά σημεία του S ορίζουμε σαν τελεστή $R2_{ABC}$ το λόγο του μέτρου του AB προς το μέτρο του AC . Δηλαδή

$$R2_{ABC} = \frac{\|\overline{AB}\|}{\|\overline{AC}\|}.$$

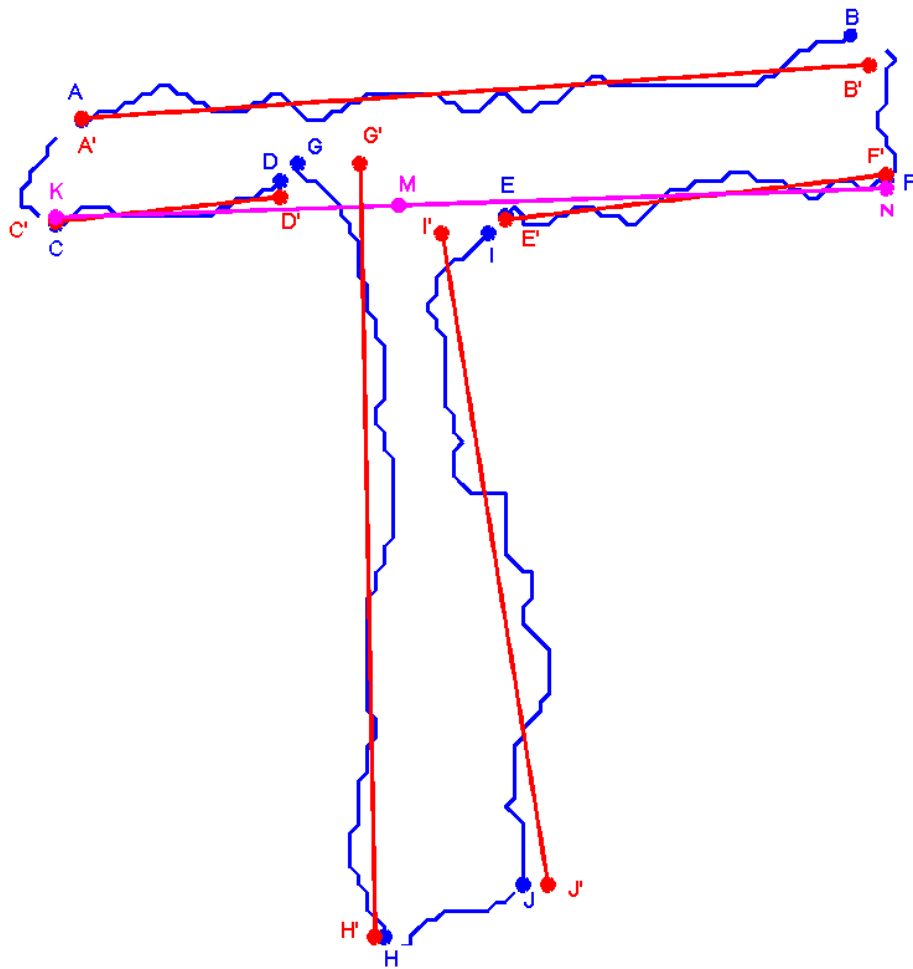
- Αν A, B, C είναι σημεία του S ορίζουμε σαν τελεστή Γ_{ABC} τη γωνία των διανυσμάτων $\overline{AB}, \overline{BC}$.
- Αν A, B, C, D είναι σημεία του S ορίζουμε σαν τελεστή Γ_{ABCD} τη γωνία των διανυσμάτων $\overline{AB}, \overline{CD}$.
- Έστω \vec{r} η συνάρτηση της διανυσματικής ακτίνας μιας οποιασδήποτε καμπύλης του S και (x_0, y_0) ένα σημείο αυτής. Ορίζουμε ως τελεστή K που δρα επί του $(\vec{r}, (x_0, y_0))$ αυτόν που δίνει την καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο (x_0, y_0) .
- Ορίζεται επίσης ο τελεστής LS_C ο οποίος δίνει το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που προσεγγίζει βέλτιστα την τυχούσα καμπύλη C κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων. Δηλαδή ως θεωρήσουμε το σύνολο των σημείων (x_n, y_n) με $n = 1, 2, \dots, N$ που θεωρούμε ότι σχηματίζουν τη διακριτή καμπύλη C . Υπολογίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα $ΚΛ$ που προσεγγίζει βέλτιστα τα (x_n, y_n) κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων με τη μέθοδο που περιγράφεται στο κεφάλαιο 3 του δευτέρου μέρους της εργασίας. Ορίζουμε ως τελεστή LS_C αυτόν που δίνει το μήκος του $ΚΛ$.

Ο βασικός σκοπός της παρούσης προσέγγισης

Ο σκοπός της προσέγγισης που παρουσιάζεται εδώ είναι, για κάθε σύμβολο της αλφαβήτου χωριστά, να δημιουργήσουμε ένα σύνολο τελεστών που επαρκώς περιγράφουν το συμβολόγραμμα. Εν συνεχεία, σε κάθε επιγραφή χωριστά και για κάθε συμβολόγραμμα θα υπολογίσουμε τις στατιστικές κατανομές των τιμών αυτών των τελεστών. Ευελπιστούμε ότι επιγραφές που ανήκουν στον ίδιο χαρακτήρα θα έχουν κατανομές των τιμών των τελεστών με παρόμοιες στατιστικές ιδιότητες, ενώ αντιθέτως οι αντίστοιχες κατανομές δύο επιγραφών που προέρχονται από διαφορετικούς χαρακτήρες αναμένουμε να διαφέρουν στατιστικά σημαντικά.

6.1 Παράδειγμα εφαρμογής της μεθοδολογίας για το γράμμα T

Σε πρώτο στάδιο θα δοθεί ως παράδειγμα η αναλυτική περιγραφή της μεθόδου για τον ορισμό και την εξαγωγή των επιλεγέντων χαρακτηριστικών του γράμματος T. Μετά την εξαγωγή των γραμμών T από το υπόβαθρό τους, και την εξαγωγή του περιγράμματος κάθε γράμματος (ίδη εικόνα 2.11), χωρίσαμε αυτό σε έξι (6) επί μέρους περιοχές όπως αυτές φαίνονται στην εικόνα 6.1.



Εικόνα 6.1

Περίγραμμα ενός συμβολογράμματος T με τα κρίσιμα σημεία αυτού και τις ευθύγραμμες τμηματικές προσεγγίσεις αυτού, κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων.

Υπενθυμίζουμε ότι τα σημεία καμπής A, B, C, D, E, F, G, H, I, J προσδιορίστηκαν με βάση την παρατήρηση ότι σε αυτά η καμπυλότητα του εξομαλυμένου

περιγράμματος είναι τοπικά μέγιστη και πάνω από ένα κατώφλι όπως περιεγράφη στο κεφάλαιο 3.

Επομένως θεωρώντας, για παράδειγμα, το τμήμα AB ενός γράμματος T, αυτό πλέον είναι ένα σύνολο pixels, κάθε ένα από τα οποία αντιπροσωπεύεται από τις συντεταγμένες του κεντρικού του σημείου. Δηλαδή, το AB θεωρείται πλέον το σύνολο των σημείων (x_n, y_n) , $n=1,2,\dots,N_1$, που είναι κέντρα των αντιστοίχων pixels του AB. Άρα είναι δυνατόν να βρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ε_1 , οριζόμενο από τα σημεία A'B' (εικόνα 6.1), που βέλτιστα προσεγγίζει το τμήμα AB κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων σύμφωνα με τη μέθοδο του κεφαλαίου 3.

Εντελώς ανάλογα ορίζονται και τα σημεία C'D' για το τμήμα CD, τα σημεία E'F' για το τμήμα EF, τα σημεία G'H' για το τμήμα GH και τα σημεία I'J' για το τμήμα IJ. Επίσης, εάν θεωρήσουμε την ένωση των σημείων που σχηματίζουν τα τμήματα CD και EF, μπορούμε να προσδιορίσουμε το ευθύγραμμο τμήμα $\varepsilon_{2,3}$ που βέλτιστα προσεγγίζει αυτό το επεκτεταμένο σύνολο σημείων όπως αυτό φαίνεται στην εικόνα 6.1 και που ορίζεται από τα σημεία K και N.

Καθορισμός καταλλήλων τελεστών επί του σημειοσυνόλου του γράμματος T

- Έστωσαν (x_A, y_A) οι συντεταγμένες του σημείου A, (x_B, y_B) του σημείου B, $(x_{A'}, y_{A'})$ του A' και $(x_{B'}, y_{B'})$ του B'. Τότε ορίζουμε τον τελεστή $TL\varepsilon_1 = LS_{AB}$ μέσω της σχέσεως:

$$TL\varepsilon_1 = \sqrt{(x_{B'} - x_{A'})^2 + (y_{B'} - y_{A'})^2} \quad (6.2)$$

που εκφράζει το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ε_1 . Ομοίως ορίζεται ο τελεστής $TL\varepsilon_2$ που εκφράζει το μήκος του τμήματος C'D', ο τελεστής $TL\varepsilon_3$ που εκφράζει το μήκος του τμήματος E'F', ο $TL\varepsilon_4$ που εκφράζει το μήκος του τμήματος H'G', ο $TL\varepsilon_5$ που εκφράζει το μήκος του τμήματος I'J' και ο τελεστής $TL\varepsilon_{2,3}$ που εκφράζει το μήκος του τμήματος KN.

- Επειδή τα απόλυτα μήκη $TL\varepsilon_i$ που ορίστηκαν ανωτέρω εξαρτώνται από το μέγεθος που χαράσσει ο γραφέας, γεγονός που εν γένει δεν τον χαρακτηρίζει, είναι προτιμότερο να ελέγξουμε στατιστικές κατανομές από καταλλήλους λόγους των προαναφερθέντων μηκών οι οποίοι είναι

ανεξάρτητοι του μεγέθους του γράμματος. Ορίζουμε επομένως τους τελεστές:

$$\tau T1 = \frac{TL\varepsilon_3}{TL\varepsilon_2} \quad (6.3)$$

$$\tau T2 = \frac{TL\varepsilon_1}{TL\varepsilon_{2,3}} \quad (6.4)$$

$$\tau T3 = \frac{TL\varepsilon_1 + TL\varepsilon_{2,3}}{TL\varepsilon_4 + TL\varepsilon_5} \quad (6.5)$$

- Έστωσαν τα σημεία τομής του ευθυγράμμου τμήματος $\varepsilon_{2,3}$ με τις ευθείες επί των οποίων κείνται τα τμήματα ε_4 και ε_5 , T_1 και T_2 αντιστοίχως. Αν θεωρήσουμε το σημείο M (εικόνα 6.1) ως το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $T_1 T_2$, τότε μπορούμε να ορίσουμε σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει παραπάνω τον ακόλουθο τελεστή:

$$\tau T4 = \frac{L_{KM}}{L_{KN}} \quad (6.6)$$

- Ακολούθως ορίζουμε τις εξής γωνίες οι οποίες εξαντλούν όλους τους δυνατούς βαθμούς ελευθερίας του ενός σκέλους του T ως προς το άλλο:

$$\tau T5 = \Gamma_{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{KN}} \quad (6.7)$$

δηλαδή την προσημασμένη γωνία μεταξύ των LS διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{KN} ,

$$\tau T6 = \Gamma_{\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{IJ}} \quad (6.8)$$

δηλαδή την προσημασμένη γωνία μεταξύ των LS διανυσμάτων \overrightarrow{GH} και \overrightarrow{IJ} και

$$\tau T7 = \Gamma_{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{GH}} \quad (6.9)$$

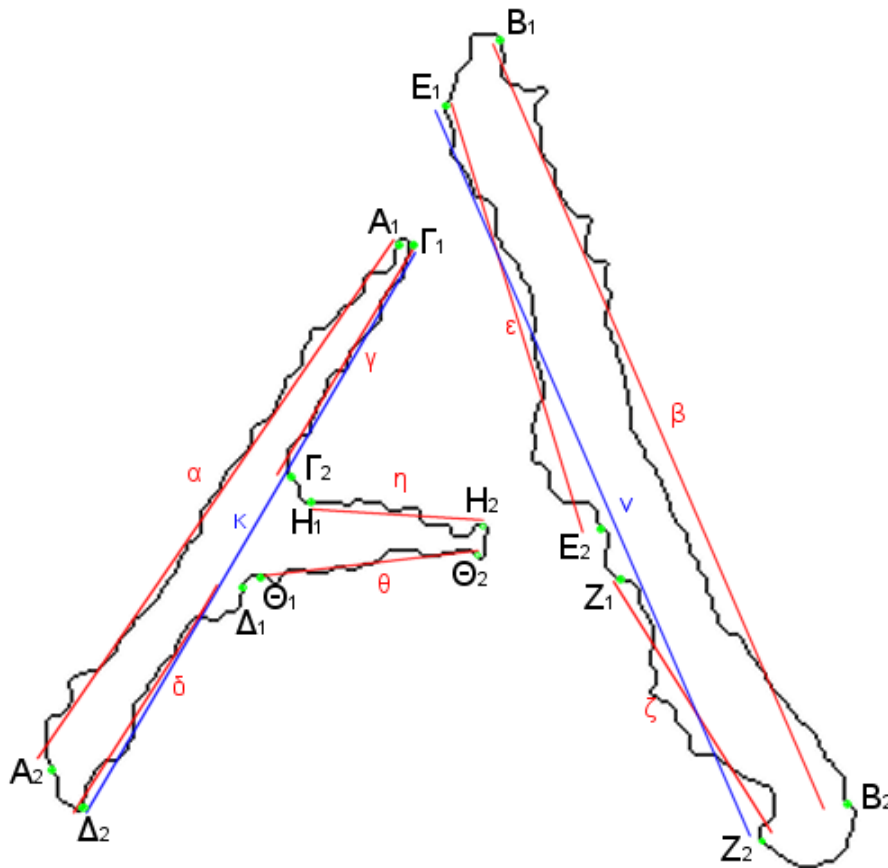
δηλαδή την προσημασμένη γωνία μεταξύ των LS διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{GH} .

Επομένως, ορίσαμε ανωτέρω ένα σύνολο τελεστών που δρουν στο γράμμα T και το χαρακτηρίζει λίαν ικανοποιητικά. Η συγκεκριμένη διαδικασία γεννά ένα σύνολο τιμών με πεδίο τους πραγματικούς αριθμούς για κάθε επιγραφή χωριστά και για όλες τις υλοποιήσεις του συμβολογράμματος T επ' αυτής. Σε επόμενο κεφάλαιο

παρουσιάζεται στατιστική επεξεργασία των τιμών με σκοπό την ταυτοποίηση του χαρακτήρα.

6.2 Παράδειγμα εφαρμογής της μεθοδολογίας για το γράμμα A

Ορίζουμε εκ νέου ένα σύνολο τελεστών που προσιδιάζουν λίαν ικανοποιητικά το γράμμα A. Κατ' αρχήν, τα κρίσιμα σημεία κάθε υλοποίησης του συμβολογράμματος A επί των επιγραφών έχουν ορισθεί όπως στο κεφάλαιο 3 και έχουν καθορίσει τις πλευρές του γράμματος σύμφωνα με την ανθρώπινη διαίσθηση. Συγκεκριμένα: α) Η αλυσίδα pixels $A_1 A_2$ με φορά από πάνω προς τα κάτω είναι η αριστερή πλευρά του αριστερού σκέλους του A. (εικόνα 6.2) β) Η ένωση των δύο αλυσίδων pixels $\Gamma_1 \Gamma_2$ και $\Delta_1 \Delta_2$ με φορά από πάνω προς τα κάτω αποτελεί τη δεξιά πλευρά του αριστερού σκέλους του A. γ) Η αλυσίδα pixels $B_1 B_2$ με φορά από πάνω προς τα κάτω είναι η δεξιά πλευρά του δεξιού σκέλους του A. δ) Επειδή στο συγκεκριμένο σχήμα η οριζόντια κεραία του A δεν περατούται στο δεξί σκέλος, η αριστερή πλευρά του δεξιού σκέλους του A αποτελείται από την αλυσίδα pixels $E_1 Z_2$ με φορά από πάνω προς τα κάτω. Αν η μεσαία κεραία περατούτο στο δεξί σκέλος τότε η ένωση δύο αλυσίδων pixels $E_1 E_2$ και $Z_1 Z_2$ με φορά από πάνω προς τα κάτω θα αποτελούσε την αριστερή πλευρά του δεξιού σκέλους του A κατ' αναλογία με την περίπτωση β ανωτέρω. Εννοείται ότι μπορεί να ισχύει και το δυϊκώς αντίστοιχο ή και η μεσαία κεραία να μην περατούται σε κανένα σκέλος ή και στα δύο. ε) Η αλυσίδα pixels $H_1 H_2$ με φορά από αριστερά προς τα δεξιά συνιστά την πάνω πλευρά της μεσαίας κεραίας. στ) Η αλυσίδα pixels $\Theta_1 \Theta_2$ με φορά από αριστερά προς τα δεξιά συνιστά την κάτω πλευρά της μεσαίας κεραίας.



Εικόνα 6.2

Περίγραμμα ενός συμβολογράμματος A με τα κρίσιμα σημεία αυτού και τις ευθύγραμμες τμηματικές προσεγγίσεις αυτού, κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων.

Επί τη βάσει των ανωτέρω ορίζονται οι κατάλληλοι τελεστές που περιγράφονται ακολούθως:

Καθορισμός καταλλήλων τελεστών επί του σημειοσυνόλου του γράμματος A

- Ο τελεστής $ALS_{A_1A_2}$ ο οποίος δίνει το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος α . Το τμήμα αυτό έχει προκύψει από βέλτιστη προσέγγιση της διακριτής καμπύλης A_1A_2 κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων. Αναλόγως, αν θεωρήσουμε ότι το διακριτό τμήμα γ προσεγγίζει βέλτιστα κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων την καμπύλη $\Gamma_1\Gamma_2$, το δ τη $\Delta_1\Delta_2$, το β τη B_1B_2 , το ϵ την E_1E_2 , το η την H_1H_2 και

το θ τη $\Theta_1 \Theta_2$ τότε ορίζονται οι τελεστές $ALS_{\Gamma_1 \Gamma_2}$, $ALS_{\Delta_1 \Delta_2}$, $ALS_{B_1 B_2}$, $ALS_{E_1 E_2}$, $ALS_{H_1 H_2}$ και $ALS_{\Theta_1 \Theta_2}$ που αντιστοίχως δίνουν το μήκος αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων. (εικόνα 6.3)

- Όπως και στην περίπτωση του T , οι ανωτέρω τελεστές έχουν τιμές ανάλογες του μεγέθους των υλοποιήσεων του A . Επειδή δεν υπάρχει κατ' ανάγκη σχέση μεταξύ του μεγέθους των υλοποιήσεων του A σε μία επιγραφή και της ιδιομορφίας της γραφής ενός χαρακτήρα, θα προτιμήσουμε να μελετήσουμε τελεστές που περιγράφουν τις αναλογίες του εκάστοτε γράμματος. Για το λόγο αυτό ορίζουμε τους τελεστές:

$$\tau A_1 = \frac{ALS_{A_1 A_2}}{ALS_{B_1 B_2}} \quad (6.10)$$

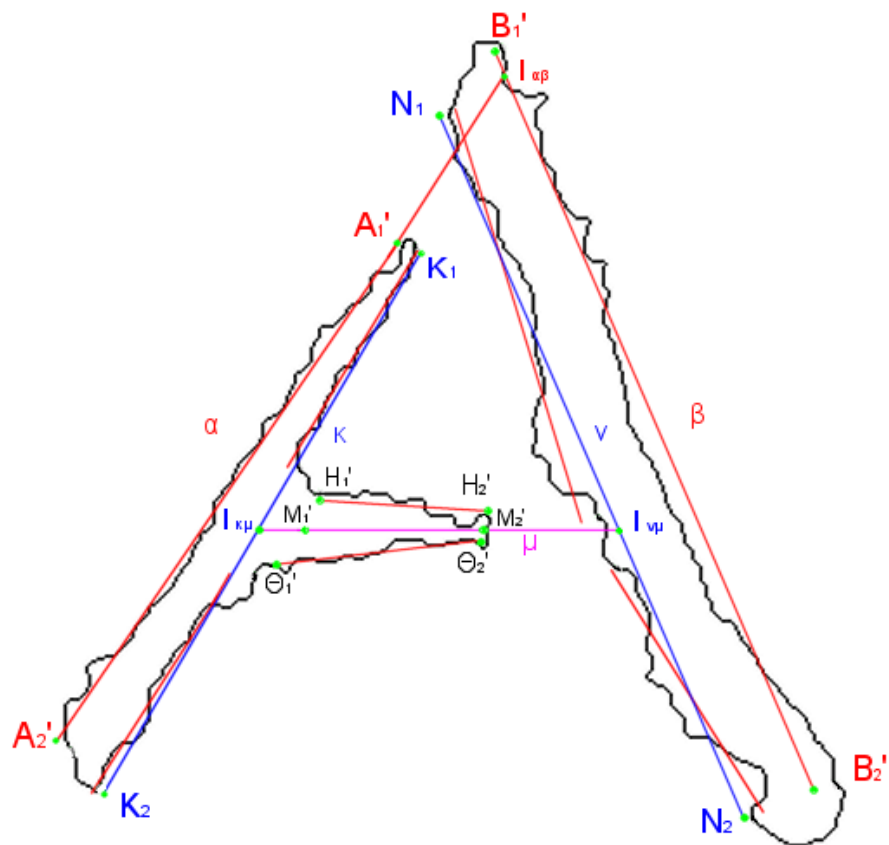
$$\tau A_2 = \frac{ALS_{H_1 H_2}}{ALS_{A_1 A_2}} \quad (6.11)$$

- Εάν θεωρήσουμε το σημείο τομής $I_{\alpha\beta}$ των ευθειών επί των οποίων κείνται τα ευθύγραμμα τμήματα α και β και χρησιμοποιήσουμε προς στιγμήν το συμβολισμό $A'_1 A'_2$ για το α και $B'_1 B'_2$ για το β , τότε μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή:

$$\tau A_3 = \frac{\overline{I_{\alpha\beta} A'_1}}{\overline{I_{\alpha\beta} A'_2}}, \quad (6.12)$$

Όπου $\overline{I_{\alpha\beta} A'_1}$ και $\overline{I_{\alpha\beta} A'_2}$ είναι τα προσημασμένα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων $I_{\alpha\beta} A'_1$ και $I_{\alpha\beta} A'_2$, με θετική την φορά από πάνω προς τα κάτω. Με εντελώς όμοιο τρόπο ορίζεται και ο τελεστής

$$\tau A_4 = \frac{\overline{I_{\alpha\beta} B'_1}}{\overline{I_{\alpha\beta} B'_2}} \quad (6.13)$$



Εικόνα 6.3

Περίγραμμα του ίδιου συμβολογράμματος A του σχήματος 6.2 με επιπλέον γεωμετρικές οντότητες, απαραίτητες για τον ορισμό τελεστών που χαρακτηρίζουν τον εκάστοτε γραφέα.

Σημειώνεται ότι χρησιμοποιήσαμε αλγεβρικές τιμές για τα μήκη $I_{\alpha\beta}A_1'$, $I_{\alpha\beta}A_2'$, $I_{\alpha\beta}B_1'$, $I_{\alpha\beta}B_2'$ καθώς το σημείο τομής $I_{\alpha\beta}$ μπορεί να είναι είτε εσωτερικό είτε εξωτερικό σημείο των πλευρών $A_1'A_2'$ και $B_1'B_2'$.

- Ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό για το γράμμα A είναι η προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{A_1'A_2'}$ και $\overrightarrow{B_1'B_2'}$. Με άλλα λόγια με βάση και τα όσα έχουν προαναφερθεί ορίζουμε τον τελεστή

$$\tau A_5 = \Gamma_{A_1' A_2', B_1' B_2'} \quad (6.14)$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε τον τελεστή

$$\tau A_6 = \Gamma_{K_1 K_2, N_1 N_2} \quad (6.15)$$

που εκφράζει την προσημασμένη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{K_1 K_2}$ και $\overrightarrow{N_1 N_2}$ καθώς και τους τελεστές

$$\tau A_7 = \Gamma_{K_1 K_2, H_1 H_2} \quad (6.16)$$

(γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{K_1 K_2}$ και $\overrightarrow{H_1 H_2}$)

και

$$\tau A_8 = \Gamma_{N_1 N_2, \Theta_1 \Theta_2} \quad (6.17)$$

(γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{N_1 N_2}$ και $\overrightarrow{\Theta_1 \Theta_2}$)

6.3 Παράδειγμα εφαρμογής της μεθοδολογίας για το γράμμα O

Έστω το περίγραμμα μιας τυχούσης υλοποίησης σε μια επιγραφή του συμβόλου O, όπως αυτό εξήχθη με τη μέθοδο που περιγράφει στο κεφάλαιο 2. Το περίγραμμα αυτό αποτελείται από ένα σύνολο pixels και έστω N_{int}^O το πλήθος των pixels που σχηματίζουν το εσωτερικό περίγραμμα, έστω δε N_{ext}^O το πλήθος των pixels που σχηματίζουν το εξωτερικό περίγραμμα του O (εικόνα 6.4). Τόσο το εσωτερικό όσο και το εξωτερικό σύνορο του O μπορούν να περιγραφούν με μία ακολουθία διανυσμάτων $\overrightarrow{r_i^{int}}$, $i = 1, 2, \dots, N_{int}^O$ και $\overrightarrow{r_j^{ext}}$, $j = 1, 2, \dots, N_{ext}^O$ όπου κάθε διάνυσμα έχει ως αρχή ένα σημείο αναφοράς στο εσωτερικό του O, π.χ. το κέντρο βάρους του γράμματος.

Στο σημείο αυτό προσεγγίζουμε βέλτιστα τόσο την εσωτερική αλυσίδα εικονοστοιχείων όσο και την εξωτερική με μία διαφορετική έλλειψη την κάθε μία με τον εξής αναδρομική διαδικασία:

Στάδιο 1: αρχικοποίηση. Αρχικά θεωρούμε τον κύκλο ως υποπερίπτωση έλλειψης, με κέντρο το κέντρο βάρους του γράμματος O, έστω K, και ακτίνα τη μέση τιμή των $\left\| \overrightarrow{r_i^{int}} \right\|$, $i = 1, 2, \dots, N_{int}^O$. Θεωρούμε τώρα την τυχούσα ημιευθεία με αρχή το K

και διεύθυνση αυτή του $\overrightarrow{r}_i^{\text{int}}$, η οποία τέμνει τον κύκλο στο σημείο M_i . Θα συμβολίσουμε το διάνυσμα \overrightarrow{KM}_i ως $\overrightarrow{r}^E(t_i | \Pi)$ όπου t_i είναι η τιμή της παραμέτρου της καμπύλης στο M_i και $\Pi = \{\alpha, \beta, \chi_0, y_0, \varphi\}$ το σύνολο των τρεχουσών τιμών των παραμέτρων της έλλειψης όπου α, β είναι τα μήκη των ημιαξόνων της έλλειψης (παράρτημα Π.Κ.), χ_0, y_0 οι συντεταγμένες του κέντρου αυτής και φ η γωνία στροφής. Ορίζεται ως απόσταση της αρχικής εκτίμησης της έλλειψης, δηλαδή του κύκλου, από το εσωτερικό περίγραμμα του O η ποσότητα

$$L_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{int}}^O} \left(\overrightarrow{r}_i^{\text{int}} - \overrightarrow{r}^E(t_i | \Pi) \right)^2 \quad (6.18)$$

Στάδιο 2. Εφαρμόζουμε έναν από τους κλασικούς αλγορίθμους ελαχιστοποίησης συναρτήσεων π.χ. τον Nelder- Mead ([4.3]) , με σκοπό την ελαχιστοποίηση της ποσότητας L_{int} . Κατά το πρώτο βήμα εκτέλεσης ενός τέτοιου αλγορίθμου οι τιμές των παραμέτρων του Π επαναπροσδιορίζονται προς την κατεύθυνση μείωσης του L_{int} . Κατ' αυτόν τον τρόπο δημιουργείται μία νέα έλλειψη E^1 με κέντρο $K^1(\chi_0^1, y_0^1)$ όπου ο άνω δείκτης 1 δείχνει τον αριθμό της αναδρομής. Όπως και στο στάδιο 1 ενώνουμε το K^1 με όλα τα εικονοστοιχεία του εσωτερικού περιγράμματος του συμβολογράμματος O , δημιουργώντας μία νέα ακολουθία διανυσμάτων $\overrightarrow{r}_i^{\text{int}}$. Προχωρώντας όπως στο στάδιο 1 σχηματίζουμε την τυχούσα ημιευθεία με αρχή το K^1 και διεύθυνση αυτή του $\overrightarrow{r}_i^{\text{int}}$, η οποία τέμνει την έλλειψη E^1 στο σημείο M_i . Υπολογίζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{K^1M}_i$ που είναι η νέα εκτίμηση του $\overrightarrow{r}^E(t_i | \Pi)$ και επαναπροσδιορίζουμε την τιμή της προς ελαχιστοποίηση ποσότητας

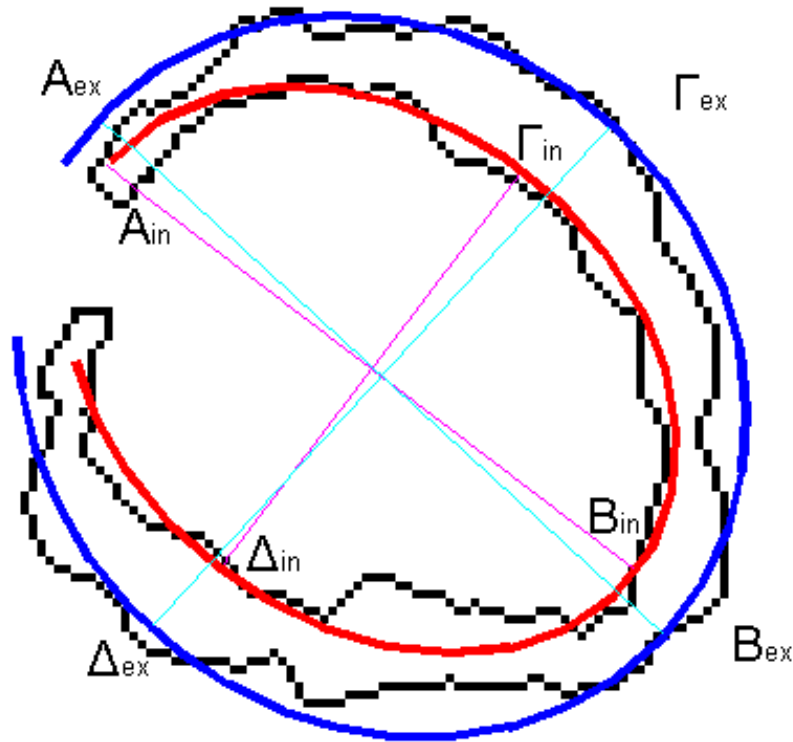
$$L_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{int}}^O} \left(\overrightarrow{r}_i^{\text{int}} - \overrightarrow{r}^E(t_i | \Pi) \right)^2 \quad (6.19)$$

Στάδιο 3(επανάληψη της διαδικασίας μέχρι συγκλίσεως). Αφήνουμε τον αναδρομικό αλγόριθμο ελαχιστοποίησης να εξελιχθεί, δημιουργώντας συνεχώς νέες προσεγγίσεις της βέλτιστης έλλειψης, νέες ακολουθίες $\overrightarrow{r}_i^{\text{int}}$, $\overrightarrow{r}^E(t_i | \Pi)$ και νέα εκτίμηση του λάθους προσαρμογής L_{int} . Η διαδικασία θεωρούμε ότι συνέκλινε όταν η ποσότητα

$$\frac{\sqrt{L_{\text{int}}}}{N_{\text{int}}^O} \quad (6.20)$$

δηλαδή η μέση απόσταση της έλλειψης από το εσωτερικό περίγραμμα, είναι μικρότερη από ένα κατώφλι, έστω 4 pixels. (σχήμα 6.4)

Με εντελώς ανάλογο τρόπο γίνεται και η προσέγγιση του εξωτερικού περιγράμματος μιας υλοποίησης του συμβόλου Ο με μία βέλτιστη έλλειψη.



Εικόνα 6.4

Περίγραμμα ενός συμβολογράμματος Ο με τις βέλτιστες ελλείψεις που προσεγγίζουν το εσωτερικό (κόκκινη) και εξωτερικό (μπλε) περίγραμμα αυτού. Με χρώμα ματζέντα απεικονίζονται οι άξονες της εσωτερικής έλλειψης και με κυανό αυτοί της εξωτερικής.

Χρησιμοποιώντας αυτές τις προσεγγίσεις για το εσωτερικό και το εξωτερικό περίγραμμα του Ο ορίσαμε τους ακόλουθους τελεστές γι' αυτό το συμβολόγραμμα.

Καθορισμός καταλλήλων τελεστών επί του σημειοσυνόλου του γράμματος Ο

Έστω a_{int} και b_{int} ο μεγάλος και μικρός ημιάξονας αντίστοιχα της ελλείψεως που βέλτιστα προσεγγίζει το εσωτερικό του περιγράμματος του Ο. (εικόνα 6.5). Αναλόγως ορίζονται και οι δύο ημιάξονες a_{ext} και b_{ext} της ελλείψεως που προσεγγίζει το εξωτερικό περίγραμμα του Ο (εικόνα 6.6). Επίσης, έστω $\phi_{\text{int}} \in [0, \pi)$

η γωνία που σχηματίζει ο άξονας των χ με τον μεγάλο ημιάξονα a_{int} (εικόνα 6.5) και $\phi_{ext} \in [0, \pi)$ με τον μεγάλο ημιάξονα της εξωτερικής έλλειψης (εικόνα 6.6).

- Ορίζουμε τον τελεστή

$$\tau O_1 = \frac{a_{int}}{b_{int}} \quad (6.21)$$

- Επίσης ορίζουμε τον τελεστή

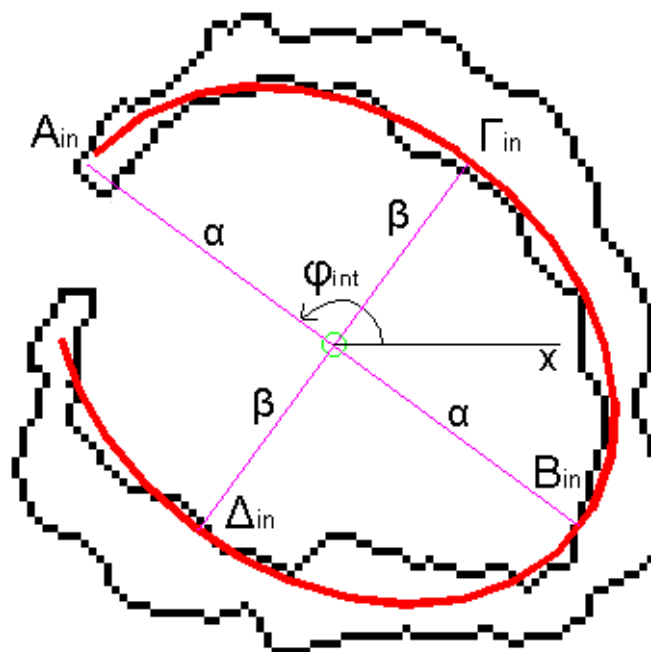
$$\tau O_2 = \frac{a_{ext}}{b_{ext}} \quad (6.22)$$

- Ο τρίτος τελεστής που ορίζουμε είναι ο

$$\tau O_3 = \frac{a_{ext}}{a_{int}} \quad (6.23)$$

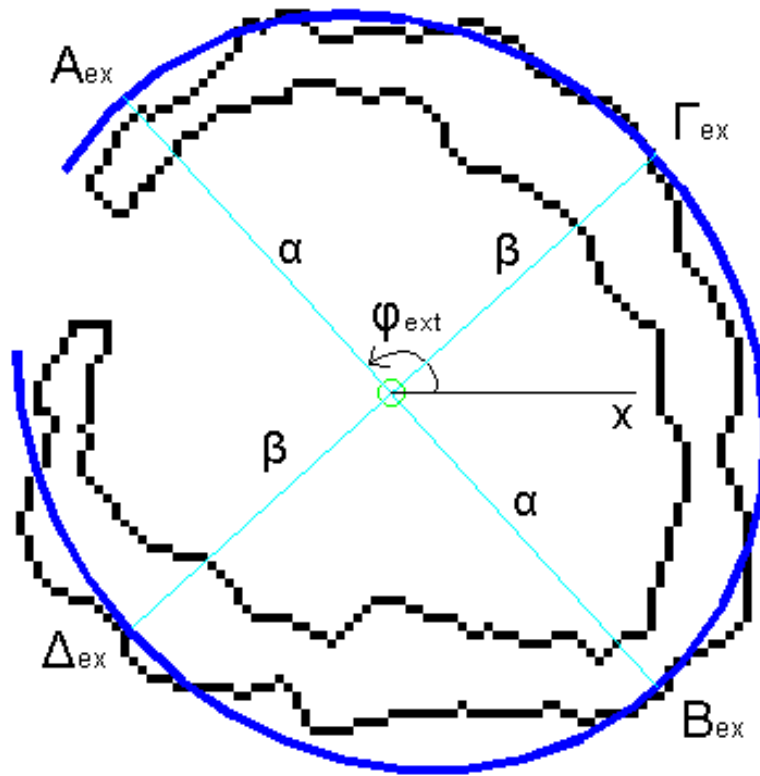
- Ο τελευταίος τελεστής είναι ο

$$\tau O_4 = \phi_{ext} - \phi_{int} \quad (6.24)$$



Εικόνα 6.5

Στο σχήμα αυτό απεικονίζεται η γωνία που σχηματίζει ο άξονας των χ με το μεγάλο ημιάξονα της έλλειψης που βέλτιστα προσεγγίζει το **εσωτερικό** περίγραμμα του συμβολογράμματος O του σχήματος 6.4



Εικόνα 6.6

Στο σχήμα αυτό απεικονίζεται η γωνία που σχηματίζει ο άξονας των x με το μεγάλο ημιάξονα της έλλειψης που βέλτιστα προσεγγίζει το **εξωτερικό** περίγραμμα του συμβολογράμματος O του σχήματος 6.5

7. Κριτήρια ταυτοποίησης λιθοξόων

7.1 Στατιστικοί έλεγχοι της υποθέσεως ότι δύο επιγραφές προέρχονται απ' τον ίδιο χαρακτή βασισμένοι στη βέλτιστη προσαρμογή υλοποιήσεων συμβολογραμμάτων

Διατυπώσαμε και υποστηρίξαμε προηγουμένως την εικασία (κεφάλαιο 5) ότι εάν ταιριάζουμε βέλτιστα τις υλοποιήσεις ενός συμβόλου της αλφαβήτου, π.χ. του Σ , που εμφανίζονται σε μια επιγραφή J , σε όλες τις υλοποιήσεις του ίδιου γράμματος μιας άλλης επιγραφής I που προς στιγμήν θεωρείται πρότυπη τότε η ποσότητα (τύπος 5.7)

$$\delta_k^{\Sigma,I,J} = \frac{\delta E_k^{\Sigma,I} - \delta E_k^{\Sigma,I,J}}{\sqrt{\frac{(SE_k^{\Sigma,I})^2}{N_I(N_I-1)/2} + \frac{(SE_k^{\Sigma,I,J})^2}{N_I N_J}}}$$

ακολουθεί κατανομή Student, ή για συνολικό πλήθος συγκρίσεων μεγαλύτερο του 30 τυπική κανονική κατανομή με πολύ ικανοποιητική προσέγγιση. Επιπλέον διατυπώσαμε την εύλογη υπόθεση ότι εάν οι επιγραφές I και J προέρχονται από διαφορετικό χαρακτή, αναμένεται να υπάρξει ικανός αριθμός συμβόλων της αλφαβήτου και κτυπημάτων των υλοποιήσεων τους αναφορικά με τα οποία οι ποσότητες $\delta_k^{L,I,J}$ θα διαφέρουν στατιστικά σημαντικά (ο άνω δείκτης L είναι από τον αγγλικό όρο Letter ώστε να εκφράζει, χωρίς σύγχυση τυχόν σύμβολο της ελληνικής αλφαβήτου). Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, είναι δυνατόν να διατυπωθεί η υπόθεση ότι δύο επιγραφές δεν έχουν χαραχθεί από τον ίδιο λιθοξόο και αυτή μπορεί να ελεγχθεί στατιστικά. Συγκεκριμένα διατυπώνουμε τόσες μηδενικές υποθέσεις $H_0^{L,k}$ όσα τα σύμβολα της αλφαβήτου που εξετάζουμε και όσα τα κτυπήματα των υλοποιήσεων κάθε συμβόλου (τα οποία συμβολίζονται με το δείκτη k). Για κάθε εξεταζόμενο ζεύγος επιγραφών, ελέγχουμε εάν αυτές οι υποθέσεις είναι αποδεκτές ή όχι, πραγματοποιώντας πολλαπλά τεστ, τόσα όσο το άθροισμα των κτυπημάτων των υλοποιήσεων των εξεταζόμενων συμβόλων της αλφαβήτου. Φερ' ειπείν εάν τα

εξεταζόμενα γράμματα είναι το A (αποτελούμενο εν γένει από 3 κτυπήματα), το Σ (σχηματιζόμενο εν γένει από 4 κτυπήματα), το Μ (εν γένει 4 κτυπήματα), το Ν (εν γένει 3 κτυπήματα), το Τ (2 κτυπήματα), το Ο (εν γένει 1 κτύπημα) και το Ρ (εν γένει 2 κτυπήματα) τότε το σύνολο των ελέγχων που πρέπει να πραγματοποιηθούν για να δεχτούμε ή να απορρίψουμε ότι δύο επιγραφές I και J προέρχονται απ' τον ίδιο χαρακτήρα είναι $N^H = 3+4+4+3+2+1+2 = 19$. Κάθε τέτοιος έλεγχος γίνεται με βαθμό εμπιστοσύνης $\frac{a}{19} = \frac{10^{-3}}{19}$, προκειμένου, σύμφωνα με το κριτήριο Bonferoni, ο συνολικός βαθμός εμπιστοσύνης αποδοχής ότι οι δύο επιγραφές I και J είναι έργο της ίδιας χειρός να είναι $a = 10^{-3}$.

Σημειώνεται ότι το κριτήριο ταυτοποίησης μπορεί να εφαρμοστεί εξίσου επιτυχώς και εάν, αντί να χρησιμοποιήσουμε τόσα $\delta_k^{L,J}$ όσα τα σκέλη του εκάστοτε εξεταζόμενου γράμματος L , πραγματοποιήσουμε τους ελέγχους με χρήση του μέσου όρου ως προς K των ποσοτήτων αυτών.

Με βάση αυτή τη μέθοδο αποφασίζεται το πλήθος των διαφορετικών χειρών που εσμίλευσαν το πλήθος των εξεταζόμενων επιγραφών. Η σχετική λεπτομερής περιγραφή της εφαρμογής θα γίνει στο κεφάλαιο 8.

7.2 Μέθοδοι ταυτοποίησης βασισμένες στη στατιστική επεξεργασία των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των υλοποιήσεων συμβολογραμμάτων επί των επιγραφών

Στην προηγούμενη παράγραφο αναπτύχθηκε μια μέθοδος με βάση την οποία μπορεί να προσδιοριστεί ο αριθμός των διαφορετικών χαρακτών που εσμίλευσαν τις επιγραφές που μας εδόθησαν. Ταυτόχρονα μπορεί να προσδιοριστεί μία πρώτη επιγραφή που ανήκει σε κάθε χαρακτήρα η οποία κατ' ουσίαν χαρακτήρισε και το χέρι, όπως αναλυτικότερα περιγράφεται στο κεφάλαιο 8.

Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε μια πρώτη πρωτότυπη μέθοδο κατάταξης των υπολοίπων επιγραφών στα ήδη προσδιορισθέντα χέρια. Θεωρούμε ένα τυχαίο συμβολόγραμμα καθώς και ένα τυχαίο γεωμετρικό χαρακτηριστικό αυτού. Για καλύτερη περιγραφή της μεθόδου ας θεωρήσουμε το συμβολόγραμμα A και τον τελεστή τA_5 αυτού που εκφράζει την προσανατολισμένη γωνία των διανυσμάτων

$\overrightarrow{A_1A_2}$ και $\overrightarrow{B_1B_2}$ (παράγραφος 6.2 εικόνα 6.2). Οι ιδιαιτερότητες ενός τέτοιου χαρακτηριστικού είναι άμεσα συνδεδεμένες με τη μέση τιμή καθώς και με την τυπική απόκλιση του αντίστοιχου τελεστή του. Στην παράγραφο αυτή θα οριστούν πρωτότυπα ποσοτικοποιημένα κριτήρια βασισμένα στη μέση τιμή των τιμών των διαφορών τελεστών τL_m (όπου το σύμβολο L αντιπροσωπεύει το εκάστοτε γράμμα και ο δείκτης m τον αύξοντα αριθμό του εκάστοτε τελεστή αυτού). Τα κριτήρια αυτά θα χρησιμοποιηθούν προκειμένου μια επιγραφή αγνώστου χαρακτή να αποδοθεί στον κατάλληλο, με βάση τον χωρισμό που προσφέρει η μέθοδος της παραγράφου 7.1 και με χρήση μίας έννοιας μέγιστης πιθανοφάνειας. Πράγματι κατ' αρχήν έχουμε ήδη θεωρήσει ότι όλες οι ποσότητες τL_m ακολουθούν κανονική κατανομή. Τα σχετικά τεστ Kolmogorov-Smirnoff δεν απέριψαν αυτή την υπόθεση με επίπεδο σημαντικότητας $a = 0.001$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι εξετάζουμε μια νέα επιγραφή, έστω I_u της οποίας δε γνωρίζουμε το χαρακτή. Υπολογίζουμε τις ποσότητες τL_m για όλα τα εξεταζόμενα χαρακτηριστικά και όλες τις υλοποιήσεις των συμβολογραμμάτων που υπάρχουν στη I_u . Σε αυτό το σημείο ας υιοθετήσουμε την υπόθεση ότι η επιγραφή I_u προέρχεται από το χέρι H_ℓ $\ell = 1, \dots, N^W$ όπου N^W ο αριθμός των χειρών που έχουν εντοπιστεί και που ως τώρα είναι 9. Θεωρούμε μία επιγραφή I_ℓ που έχουμε ήδη κατατάξει στο χέρι H_ℓ και υπολογίζουμε τις τιμές των αντίστοιχων τελεστών ως και τη μέση τιμή $\overline{X}_{m,\ell}^L$ και διασπορά αυτών $(S_{m,\ell}^L)^2$. Επειδή έχουμε υιοθετήσει την υπόθεση ότι όλες αυτές οι ποσότητες ακολουθούν κανονική κατανομή και εάν ο τελεστής τL_m λαμβάνει $N_{m,\ell}^L$ τιμές επί της επιγραφής I_ℓ και $N_{m,u}^L$ τιμές επί της επιγραφής I_u τότε η ποσότητα

$$t_{m,\ell}^L = \frac{(\overline{X}_{m,\ell}^L - \overline{X}_{m,u}^L) - (\mu_{m,\ell}^L - \mu_{m,u}^L)}{\sqrt{\frac{(S_{m,\ell}^L)^2}{N_{m,\ell}^L} + \frac{(S_{m,u}^L)^2}{N_{m,u}^L}}} \quad (7.1)$$

ακολουθεί κατανομή Student με $d_{m,\ell,u}$ βαθμούς ελευθερίας. Εάν οι διασπορές $(S_{m,\ell}^L)^2$ και $(S_{m,u}^L)^2$ είναι ίσες τότε ισχύει

$$d_{m,\ell,u} = N_{m,\ell}^L + N_{m,u}^L - 2 \quad (7.2)$$

ενώ αν οι διασπορές είναι άνισες τότε ισχύει

$$d_{\kappa,\ell,u} = \frac{\left(\left(S_{m,\ell}^L \right)^2 / N_{m,\ell}^L + \left(S_{m,u}^L \right)^2 / N_{m,u}^L \right)^2}{\frac{\left(\left(S_{m,\ell}^L \right)^2 / N_{m,\ell}^L \right)^2}{N_{m,\ell}^L - 1} + \frac{\left(\left(S_{m,u}^L \right)^2 / N_{m,u}^L \right)^2}{N_{m,u}^L - 1}} \quad (7.3)$$

Εφ' όσον δεν γνωρίζουμε a priori αν οι πληθυσμιακές διασπορές ενός χαρακτηριστικού είναι ίσες ή άνισες, διαλέγουμε τη σχέση (7.3) για τους βαθμούς ελευθερίας της Student διότι καλύπτει και τις δύο περιπτώσεις. Θεωρητικά, δε γνωρίζουμε τους πληθυσμιακούς μέσους των διαφόρων χαρακτηριστικών, δηλαδή τον πληθυσμιακό μέσο των τιμών ενός τελεστή επί του συνόλου των υλοποιήσεων των γραμμάτων που έχει σμιλεύσει ένας χαρακτήρας. Επειδή όμως προς στιγμήν έχουμε αποδεχθεί την υπόθεση ότι οι συγκρινόμενες επιγραφές I_u και I_ℓ προέρχονται από το ίδιο χέρι, τότε υποχρεωτικά οι πληθυσμιακοί μέσοι $\mu_{m,\ell}^L$ και $\mu_{m,u}^L$ θα είναι ίσοι για όλα τα γράμματα L και όλους τους τελεστές $t_{L,m}$ που ορίζονται επί των γραμμάτων αυτών. Κατά συνέπεια $(\mu_{m,\ell}^L - \mu_{m,u}^L) = 0$ και η ποσότητα $t_{m,\ell}^L$ είναι γνωστή. Επειδή, δε, η $t_{m,\ell}^L$ ακολουθεί γνωστή κατανομή Student με γνωστή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t)$, είναι επίσης γνωστή και η τιμή $f(t_{m,\ell}^L)$. Με άλλα λόγια η πιθανότητα η τιμή της ποσότητας $t_{m,\ell}^L$ να βρίσκεται στο διάστημα $[t_{m,\ell}^L, t_{m,\ell}^L + dt]$ είναι $f(t_{m,\ell}^L)dt$, υπό την προϋπόθεση ότι οι επιγραφές I_u και I_ℓ έχουν προκύψει από το ίδιο χέρι.

Στο σημείο αυτό τονίζουμε ότι η επιλογή των τελεστών έχει γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε τα χαρακτηριστικά του κάθε συμβολογράμματος που το περιγράφουν να είναι ανεξάρτητα. Εδώ θα διατυπώσουμε την επιπλέον υπόθεση ότι τα σύνολα των τιμών που λαμβάνουν αυτοί οι τελεστές είναι και στατιστικώς ανεξάρτητα (stochastically independent). Τα σχετικά τεστ συσχέτισης δεν απέρριψαν αυτή την υπόθεση. Με βάση τα ανωτέρω, αν θεωρήσουμε όλους τους τελεστές ενός γράμματος

πλήθους N_τ^L , τότε η συνολική πιθανότητα ταυτόχρονα όλες οι ποσότητες $t_{m,\ell}^L$ να ανήκουν στα διαστήματα $[t_{1,\ell}^L, t_{1,\ell}^L + dt], [t_{2,\ell}^L, t_{2,\ell}^L + dt] \dots [t_{m,\ell}^L, t_{m,\ell}^L + dt]$ με δεδομένη την υπόθεση ότι $\mu_{m,\ell}^L = \mu_{m,u}^L$ $m = 1, 2, \dots, N_\tau^L$ είναι το γινόμενο

$$\delta p_\ell^L = \prod_{m=1}^{N_\tau^L} f(t_{m,\ell}^L) dt \quad (7.4)$$

Ακολούθως ορίζουμε την ποσότητα

$$p_\ell^L = N_\tau^L \sqrt[N_\tau^L]{\prod_{m=1}^{N_\tau^L} f(t_{m,\ell}^L)} \quad (7.5)$$

σαν μέτρο της πιθανοφάνειας το τυχόν γράμμα L που εμφανίζεται τόσο επί της I_u όσο και επί της I_ℓ να προέρχεται από το ίδιο χέρι, δηλαδή το H_ℓ . Είναι προφανές ότι η νιοστή ρίζα ετέθη με σκοπό ώστε το μέτρο αυτό πιθανοφάνειας να έχει τιμή το μέγεθος της οποίας πρακτικά δεν επηρεάζεται από το πλήθος των τελεστών που έχουμε ορίσει σε κάθε γράμμα.

Εν συνεχεία θεωρούμε όλα τα συμβολογράμματα οι υλοποιήσεις των οποίων εμφανίζονται επί της επιγραφής I_u και για κάθε ένα από αυτά υπολογίζουμε τις ανωτέρω ποσότητες $t_{m,\ell}^L$ και εν τέλει τις δp_ℓ^L και p_ℓ^L . Ορίζουμε την ποσότητα

$$p_\ell = \prod_{L \in I_u} p_\ell^L \quad (7.6)$$

σαν το συνολικό μέτρο της πιθανοφάνειας οι επιγραφές I_u και I_ℓ να προέρχονται απ' τον ίδιο γραφέα, όσον αφορά τους τελεστές επί των γραμμάτων της αλφαβήτου όπως αυτοί ορίστηκαν στο κεφάλαιο 6.

Το τελικό μέτρο πιθανοφάνειας για το αν οι I_u και I_ℓ προέρχονται απ' τον ίδιο χαρακτήρα θα υπολογιστεί λαμβάνοντας υπ' όψιν και τη βέλτιστη προσαρμογή των υλοποιήσεων των συμβολογραμμάτων της επιγραφής I_ℓ , στις υλοποιήσεις της I_u όπως αναλύεται κατωτέρω.

7.3 Πιθανοφάνεια στη θέση βέλτιστης προσαρμογής υλοποιήσεων συμβολογραμμάτων σε δύο επιγραφές

Ας θεωρήσουμε τις υλοποιήσεις ενός συμβόλου της αλφαβήτου, έστω του Σ , οι οποίες εμφανίζονται επί της αγνώστου χαρακτή επιγραφής I_u και έστω ότι θέλουμε περαιτέρω να ελέγξουμε εάν οι I_u και I_ℓ προέρχονται από το ίδιο χέρι τουλάχιστον όσον αφορά στο Σ . Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 4, θεωρούμε όλα τα Σ της I_ℓ σαν πρότυπες υλοποιήσεις και προσαρμόζουμε βέλτιστα τις υλοποιήσεις του Σ της επιγραφής I_u στις πρότυπες. Όπως θεμελιώθηκε στο κεφάλαιο 5 ένα μέτρο που ποσοτικά περιγράφει το αν δύο επιγραφές προέρχονται από το ίδιο χέρι ή όχι επελέγη να είναι το σύνολο των ποσοτήτων (σχέση 5.7)

$$\delta_k^{\Sigma, I, J} = \frac{\delta E_k^{\Sigma, I} - \delta E_k^{\Sigma, I, J}}{\sqrt{\frac{(SE_k^{\Sigma, I})^2}{N_I(N_I - 1)/2} + \frac{(SE_k^{\Sigma, I, J})^2}{N_I N_J}}}$$

οι οποίες ακολουθούν κατανομή Student, ή για συνολικό πλήθος συγκρίσεων μεγαλύτερο του 30 τυπική κανονική κατανομή με πολύ ικανοποιητική προσέγγιση και με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έστω $g(z)$. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας αυτής της κατανομής στα σημεία $\delta_k^{\Sigma, I, J}$, τόσο περισσότερο αναμένεται οι επιγραφές I και J να προέρχονται από τον ίδιο χαρακτή. Αντιστρόφως εάν οι επιγραφές I και J προέρχονται από διαφορετικό χαρακτή, αναμένεται να υπάρχει ικανός αριθμός συμβόλων της αλφαβήτου και κτυπημάτων των υλοποιήσεων τους αναφορικά με τα οποία οι ποσότητες $g(\delta_k^{\Sigma, I, J})$ θα είναι πολύ μικρές. Επομένως, εάν N_K^Σ είναι το πλήθος των κτυπημάτων του Σ ορίζουμε την ποσότητα

$$Q_\ell^\Sigma = N_K^\Sigma \sqrt{\prod_{k=1}^{N_K^\Sigma} g(\delta_k^{\Sigma, I_u, I_\ell})} \quad (7.7)$$

σα μέτρο της πιθανοφάνειας του γεγονότος οι υλοποιήσεις του Σ επί των I_u και I_ℓ να προέρχονται απ' το ίδιο χέρι.

Το συνολικό μέτρο της πιθανοφάνειας, με βάση αυτή την προσέγγιση, όλα τα γράμματα που εξετάζονται στην I_u και στην I_ℓ να προέρχονται απ' τον ίδιο χαρακτήρα ορίζεται να είναι η ποσότητα

$$Q_\ell = \prod_{L \in I_u} Q_\ell^L \quad (7.8)$$

Το συνολικό μέτρο πιθανοφάνειας του γεγονότος ότι οι I_u και I_ℓ προέρχονται από τον ίδιο χαρακτήρα, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις προσεγγίσεις τόσο της παρούσης παραγράφου 7.3 όσο και της 7.2, ορίζεται να είναι η ποσότητα.

$$\Gamma_{u,\ell} = p_\ell Q_\ell \quad (7.9)$$

8. Εφαρμογή της μεθοδολογίας στην ταυτοποίηση του χαρακτήρα ικανού αριθμού επιγραφών

8.1 Επιλογή του συνόλου των επιγραφών επί του οποίου δοκιμάστηκε η μεθοδολογία

Η μέθοδος που αναπτύχθηκε και παρουσιάστηκε προηγουμένως εφαρμόστηκε σε επιγραφές τις οποίες επέλεξε ο καθηγητής κ. Steven Tracy. Ο κ. S. Tracy τ. διευθυντής της Αμερικανικής Σχολής Κλασικών Σπουδών και νυν καθηγητής στο center of advanced research του Princeton university, θεωρείται ένας από τους μεγαλύτερους επιγραφολόγους/αρχαιολόγους παγκοσμίως και έχει αφιερώσει πάνω από τέσσερις δεκαετίες της ζωής του στη μελέτη των Αρχαίων Ελληνικών επιγραφών. Ειδικότερα ο καθηγητής Tracy έχει κατατάξει ανά χαρακτήρα εκατοντάδες επιγραφές στη ζωή του, χρησιμοποιώντας, κυρίως διαισθητικά, πληθώρα πληροφοριών όπως την τεχνοτροπία κάθε γραφέα, τις ιδιομορφίες των γραμμάτων που ο γραφέας παρήγαγε, τα σημεία ανασκαφής των επιγραφών αλλά και γενικού περιεχομένου αρχαιολογικές πληροφορίες. Ο καθηγητής επέλεξε 32 επιγραφές διαφόρων χειρών και επιμελέστατα φρόντισε να μη μας δοθεί κανενός είδους πληροφορία σε σχέση με αυτές, ούτε για το σημείο που ανεσκάφησαν, ούτε για το που αναφέρετο το περιεχόμενό τους ούτε για την ευρύτερη εποχή κατά την οποία εσμιλεύθησαν, ούτε για δημοσιεύσεις που έχουν γίνει σε σχέση με αυτές. Επιπλέον ο κύριος S. Tracy δε μας έδωσε τις επιγραφές με το διεθνή κωδικό με τον οποίο είναι γνωστές αλλά με τον κωδικό καταγραφής της Αμερικανικής Σχολής Κλασικών Σπουδών που είναι γνωστός μόνο σε αυτόν και σε ελάχιστους συνεργάτες του. Ακολουθεί ο κατάλογος των επιγραφών που μας εδόθησαν.

Κατάλογος Διαθεσίμων Επιγραφών Προς Ταυτοποίηση Γραφέως				
E_1	0068		E_{17}	7237
E_2	0247		E_{18}	7245
E_3	0286		E_{19}	7254
E_4	1640		E_{20}	7335
E_5	4033		E_{21}	7400
E_6	4266		E_{22}	7405
E_7	4424		E_{23}	7446
E_8	4917		E_{24}	7457
E_9	5297		E_{25}	7481
E_{10}	6006		E_{26}	7482
E_{11}	6053		E_{27}	7542
E_{12}	6124		E_{28}	7587
E_{13}	6295		E_{29}	7519
E_{14}	6671		E_{30}	7566
E_{15}	7041		E_{31}	7567
E_{16}	7190		E_{32}	7723

Πίνακας 8.1

8.2 Πρώτο στάδιο επεξεργασίας των επιγραφών

Κατ' αρχήν πραγματοποιήθηκε ψηφιακή φωτογράφιση των τριάντα δύο επιγραφών με μηχανή πολύ υψηλής ευκρίνειας (των δεκατεσσάρων megapixels) και αυστηρό πρωτόκολλο φωτογράφισης. Εν συνεχεία εξήχθησαν τα γράμματα από τις φωτογραφίες των επιγραφών εντεθειμένα μαζί με το μάρμαρο, σε ένα ορθογώνιο πλαίσιο (εικόνες 1.1, 1.2, 2.7α ως 2.11α). Σε επόμενο στάδιο, πραγματοποιήθηκε κατάτμηση των εικόνων με τη μέθοδο που περιγράφει στην παράγραφο 2.1 οπότε και ελήφθη η εκδοχή κάθε γράμματος σε δυαδική (ασπρόμαυρη) εικόνα όπως ενδεικτικά παρουσιάζεται στις εικόνες 2.7β ως 2.11β. Από την ασπρόμαυρη φωτογραφία κάθε γράμματος εξήχθη το περίγραμμα αυτού αυτόματα ακριβώς όπως περιγράφει στην παράγραφο 2.2.

Ακολούθως, επί του περιγράμματος κάθε γράμματος εντοπίστηκαν τα κρίσιμα σημεία αυτού. Σχετικά παραδείγματα εμφανίζονται στις εικόνες 3.7 έως 3.9.

8.3 Καθορισμός των διαφορετικών χαρακτών που εσμίλευσαν το σύνολο των εξεταζομένων επιγραφών

Κατ' αρχήν θεωρήσαμε τις υλοποιήσεις των γραμμάτων κάθε διαθέσιμης επιγραφής σαν πρότυπες και προσαρμόσαμε βέλτιστα σ' αυτές τις αντίστοιχες υλοποιήσεις των άλλων επιγραφών με τη μέθοδο που περιεγράφη στο κεφάλαιο 4. Για παράδειγμα σε όλες τις υλοποιήσεις του Α της E_1 προσαρμόσαμε βέλτιστα τις υλοποιήσεις του Α που εμφανίζονται σε κάθε μία άλλη επιγραφή. Η ίδια διαδικασία εφαρμόστηκε στο Σ, το Μ, το Γ, το Ο, κ.λ.π. υπό την προϋπόθεση ότι υπήρχε ικανός αριθμός υλοποιήσεων (μεγαλύτερος ή ίσος του τέσσερα) και στις δύο συγκρινόμενες επιγραφές. Για κάθε ζεύγος επιγραφών υπολογίστηκαν οι ποσότητες του κεφαλαίου 5 και της παραγράφου 7.1.

Εν συνεχεία επιτελέσαμε εξαντλητικούς ελέγχους στατιστικών υποθέσεων όλων των επιγραφών ανά δύο, με τη μέθοδο και το κριτήριο που περιγράφηκαν στην παράγραφο 7.1. Επιλέξαμε τις δύο επιγραφές για τις οποίες η υπόθεση ότι προέρχονται από τον ίδιο χαρακτήρα απερρίφθη με τον μέγιστο βαθμό εμπιστοσύνης, δηλαδή το μικρότερο α , υπό τον όρο ότι $\alpha \leq 10^{-4}$. Αυτές ήταν η E_{21} και η E_{25} οι οποίες απεδόθησαν σε δύο διαφορετικά χέρια που τα ονομάσαμε H_1 και H_2 . Στο σημείο αυτό, για απλότητα τροποποιήσαμε το συμβολισμό ως εξής: η επιγραφή E_{21} ονομάστηκε $\mathcal{E}_{1,1}$ όπου ο πρώτος δείκτης αντιπροσωπεύει τον αύξοντα αριθμό της χειρός στον οποίον η επιγραφή E_{21} απεδόθη, ο δε δεύτερος δείκτης τον αύξοντα αριθμό της επιγραφής που διαπιστώνουμε ότι ο χαρακτήρας σμίλευσε. Επομένως, με βάση αυτό το συμβολισμό, η E_{25} μετονομάστηκε σε $\mathcal{E}_{2,1}$.

Το επόμενο βήμα ήταν να επιτελέσουμε όλους τους άλλους εξαντλητικούς ελέγχους των επιγραφών που απέμειναν με τις επιγραφές $\mathcal{E}_{1,1}$ και $\mathcal{E}_{2,1}$ και επελέγη εκείνη για την οποία η υπόθεση ότι προέρχεται από το χέρι H_1 ή το χέρι H_2 απερρίφθη με το μέγιστο βαθμό εμπιστοσύνης, πάντα υπό τον όρο ότι $\alpha \leq 10^{-4}$. Αυτή ήταν η E_{29} την οποία και ονομάσαμε $\mathcal{E}_{3,1}$ καθώς θεωρήσαμε ότι προέρχεται από διαφορετικό χαρακτήρα τον H_3 .

Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία επιτελέσαμε όλους τους ελέγχους με όλες τις επιγραφές που κάθε φορά απέμεναν. Εκείνη η επιγραφή για την οποία η υπόθεση ότι ανήκει σε κάποιο απ' τα ήδη υπάρχοντα χέρια απορρίπτετο με το μεγαλύτερο βαθμό εμπιστοσύνης, όταν αυτός ήταν μεγαλύτερος από $1-\alpha$ όπου $\alpha \leq 10^{-4}$, θεωρήσαμε ότι ανήκε σε κάποιο καινούργιο χέρι. Κατ' αυτό τον τρόπο καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι οι τριάντα δύο επιγραφές που ελέγχθησαν προέρχονταν από 9 διαφορετικούς γραφείς. Σημειώνουμε ότι η παραπάνω διαδικασία είναι σε μεγάλο βαθμό ανεξάρτητη από την επιλογή του κατωφλίου α , διότι μόλις εντοπίστηκαν τα 9 χέρια, το επίπεδο σημαντικότητας με το οποίο δεν μπορούσαμε να απορρίψουμε ότι οι υπόλοιπες επιγραφές έγιναν από κάποιο από αυτά τα χέρια, ήταν τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο απ' το 10^{-4} .

8.4 Κατάταξη των επιγραφών που απέμειναν με το κριτήριο της μέγιστης πιθανοφάνειας της παραγράφου 7

Μετά τον καθορισμό των εννέα διαφορετικών χαρακτών, υπολογίσαμε τις τιμές των τελεστών που ορίστηκαν στο κεφάλαιο 6, ως και τις τιμές των ποσοτήτων που αναφέρονται στο κεφάλαιο 5 και στις παραγράφους 7.2 και 7.3. Επομένως κατατάξαμε τις υπόλοιπες 23 επιγραφές στα 9 διαφορετικά χέρια, επί τη βάση του κριτηρίου μέγιστης πιθανοφάνειας (παράγραφος 7.3). Σε κάθε επιγραφή αναφοράς θεωρούμε ότι επιτελείται αλλαγή γραφέα όταν, στην ταξινομημένη λίστα επιγραφών, η βύθιση της τιμής της πιθανοφάνειας είναι μεγαλύτερη ή ίση του $5 \cdot 10^{-2}$. Το σκεπτικό αυτής της επιλογής βασίζεται στο γεγονός ότι κατ' αυτόν τον τρόπο λαμβάνεται υπ' όψιν ο κύριος όγκος του πληθυσμού μιας κανονικής κατανομής. Χαρακτηριστικά παραδείγματα της εφαρμογής παρουσιάζονται κατωτέρω όπου οι επιγραφές που παρήχθησαν από τον ίδιο γραφέα με την πρότυπη επιγραφή εμφανίζονται με τον ίδιο χρωματισμό. Επίσης παρατίθενται πίνακες συγκρίσεων της πιθανοφάνειας αναφορικά με το εάν ένα σύνολο επιγραφών έχει παραχθεί απ' τον ίδιο χαρακτήρα με μία επιγραφή που θεωρείται ως πρότυπη με βάση τις μεθόδους που ανεπτύχθησαν προηγούμενα. Η πιθανοφάνεια υπολογίζεται κατ' αρχήν χωριστά για καθένα εκ των γραμμάτων Α,Σ,Μ,Ο ως και συνολικά. Η απόδοση επιγραφών ανά χαρακτήρα γίνεται μόνο επί τη βάση της συνολικής πιθανοφάνειας.

Πρότυπο 7400
(Απεδόθη στο λιθοξόο 1)

α/ α	Πιθαν/α Α	Κατ/ξη Α	Πιθαν/α Σ	Κατ/ξη Σ	Πιθαν/α Μ	Κατ/ξη Μ	Πιθαν/α Ο	Κατ/ξη Ο	Συνολική Πιθαν/α	Συνολική Κατ/ξη
1	1.550e-002	7400	1.321e-002	7400	1.293e-002	7400	3.603e-002	7400	9.533e-008	7400
2	1.362e-002	7405	1.010e-002	7405	1.018e-002	7190	3.286e-002	7405	4.107e-008	7405
3	1.175e-002	7245	9.532e-003	7190	9.628e-003	7542	1.751e-002	7542	1.787e-008	7542
4	1.171e-002	6671	9.523e-003	6124	9.332e-003	6124	1.705e-002	6124	1.725e-008	6124
5	1.142e-002	7542	9.293e-003	7542	9.092e-003	7405	1.670e-002	7245	3.495e-012	7041
6	1.140e-002	6124	9.017e-003	7723	8.596e-003	7237	1.305e-003	7587	3.325e-012	6671
7	1.115e-002	7041	8.888e-003	7041	2.140e-003	7723	1.185e-003	7041	6.735e-013	7245
8	1.099e-002	4266	8.695e-003	7457	2.104e-003	6671	1.157e-003	7237	5.251e-013	4266
9	6.873e-004	6006	8.257e-003	0247	1.983e-003	7482	1.041e-003	6671	2.120e-013	7723
10	6.659e-004	0247	1.644e-003	4266	1.948e-003	5297	1.035e-003	4266	1.065e-013	7190
11	4.190e-005	7587	1.298e-004	6671	1.513e-004	0247	8.931e-004	7446	2.036e-014	0247
12	4.106e-005	7567	1.268e-004	7245	1.500e-004	4917	8.830e-004	7723	3.863e-015	7237
13	4.105e-005	7190	1.242e-004	0286	2.977e-005	7041	4.423e-004	6006	2.221e-016	6006
14	4.057e-005	4917	1.232e-004	7446	2.974e-005	7587	4.312e-004	0286	7.242e-017	7457
15	1.245e-005	7723	3.855e-005	4424	2.893e-005	7457	2.677e-005	7190	6.142e-017	7587
16	1.235e-005	7237	3.814e-005	4033	2.841e-005	7254	2.672e-005	7567	2.985e-017	7446
17	1.227e-005	4424	3.796e-005	0068	2.810e-005	4266	2.638e-005	4424	1.621e-017	0286
18	1.221e-005	7254	3.779e-005	7587	2.709e-005	7245	2.521e-005	4917	1.334e-017	7482
19	1.153e-005	7457	3.762e-005	4917	2.702e-005	0286	2.517e-005	7254	1.093e-017	5297
20	1.149e-005	7446	3.613e-005	1640	2.661e-005	4033	2.501e-005	6295	5.770e-018	4917
21	1.121e-005	0286	3.564e-005	7254	2.606e-005	4424	2.499e-005	7457	8.606e-019	7567
22	1.090e-005	6053	3.321e-005	7482	2.554e-005	6295	2.448e-005	0247	3.250e-019	4424
23	1.065e-005	7335	3.299e-005	5297	2.521e-005	7335	2.242e-005	7335	3.111e-019	7254
24	1.050e-005	7519	3.262e-005	6295	2.511e-005	7481	2.228e-005	6053	2.073e-019	6295
25	1.024e-005	0068	3.252e-005	6053	2.497e-005	1640	2.075e-005	7482	1.857e-019	0068
26	1.007e-005	7566	3.216e-005	6006	2.480e-005	7567	2.042e-005	7566	1.663e-019	4033
27	9.951e-006	6295	3.164e-005	7567	2.432e-005	7566	1.984e-005	7519	1.662e-019	7335
28	9.766e-006	7482	3.146e-005	7237	2.417e-005	0068	1.977e-005	0068	1.637e-019	1640
29	9.588e-006	7481	3.063e-005	7566	2.363e-005	7446	1.901e-005	7481	1.586e-019	6053
30	9.566e-006	1640	2.979e-005	7481	2.273e-005	6006	1.898e-005	1640	1.531e-019	7566
31	9.537e-006	5297	2.807e-005	7519	2.009e-005	6053	1.805e-005	4033	1.363e-019	7481
32	9.083e-006	4033	2.762e-005	7335	1.921e-005	7519	1.785e-005	5297	1.123e-019	7519

Πίνακας 8.2

Πρότυπο 1640 (Απεδόθη στο λιθοξόο 2)										
α/ α	Πιθαν/α Α	Κατ/ξη Α	Πιθαν/α Σ	Κατ/ξη Σ	Πιθαν/α Μ	Κατ/ξη Μ	Πιθαν/α Ο	Κατ/ξη Ο	Συνολική Πιθαν/α	Συνολική Κατ/ξη
1	1.131e-002	1640	1.165e-002	1640	1.172e-002	1640	1.619e-002	1640	2.498e-008	1640
2	8.973e-003	7482	9.354e-003	4266	9.256e-003	7482	1.443e-002	7482	1.001e-008	7482
3	8.925e-003	7481	9.082e-003	7190	8.435e-003	4033	1.294e-002	4033	8.232e-009	4033
4	8.872e-003	0247	9.057e-003	7481	8.396e-003	7481	1.255e-002	0068	7.932e-009	7481
5	8.427e-003	4033	8.952e-003	4033	8.034e-003	7237	1.169e-002	7481	6.031e-009	0068
6	8.207e-003	0068	8.733e-003	0286	7.368e-003	0068	1.142e-002	6053	2.070e-012	4266
7	8.129e-003	6295	8.361e-003	7482	1.827e-003	7567	1.096e-002	0247	1.362e-012	7567
8	4.981e-003	6053	8.071e-003	7254	1.820e-003	6006	1.056e-002	6295	9.571e-013	7041
9	4.937e-003	7567	7.949e-003	0068	1.756e-003	7041	7.416e-003	7567	7.465e-013	7542
10	3.088e-003	4917	4.921e-003	7041	1.754e-003	7542	7.117e-003	7542	3.117e-013	6053
11	2.983e-003	7542	2.997e-003	4424	4.392e-004	4266	6.641e-003	4917	1.152e-013	0247
12	2.861e-003	7405	2.953e-003	7457	4.313e-004	7457	1.254e-003	6006	1.018e-013	6295
13	1.391e-003	6006	9.304e-004	7237	6.824e-005	7587	1.215e-003	6671	8.228e-014	7237
14	6.865e-004	4266	9.284e-004	7245	6.658e-005	6124	1.190e-003	7566	6.262e-014	6006
15	6.859e-004	4424	4.649e-004	7587	6.597e-005	4917	7.479e-004	7405	6.122e-014	0286
16	6.835e-004	6671	4.588e-004	7400	6.349e-005	6053	7.342e-004	4266	4.517e-014	4424
17	6.635e-004	7566	4.552e-004	6124	6.299e-005	7190	3.642e-004	0286	2.437e-014	4917
18	6.619e-004	6124	8.871e-005	7405	6.230e-005	4424	3.529e-004	4424	1.173e-014	7405
19	3.303e-004	7237	8.634e-005	6053	6.210e-005	7400	3.428e-004	7400	6.817e-015	6124
20	3.290e-004	7400	8.454e-005	6671	6.186e-005	7405	3.400e-004	6124	4.036e-015	6671
21	3.271e-004	7041	2.120e-005	0247	5.985e-005	0286	3.388e-004	7041	3.916e-015	7254
22	3.234e-004	5297	2.099e-005	7335	5.967e-005	7245	3.388e-004	5297	3.212e-015	7400
23	3.226e-004	7254	2.038e-005	7567	5.870e-005	7335	3.334e-005	7237	7.521e-016	7457
24	3.218e-004	0286	2.036e-005	6295	5.827e-005	6295	3.239e-005	7519	7.059e-016	7566
25	3.095e-004	7723	2.020e-005	5297	5.751e-005	6671	3.218e-005	7723	2.862e-016	7190
26	1.944e-005	7587	2.014e-005	7723	5.597e-005	0247	3.178e-005	7587	1.102e-016	5297
27	1.904e-005	7519	2.006e-005	7542	5.356e-005	7723	3.130e-005	7457	3.011e-017	7245
28	1.898e-005	7245	1.973e-005	6006	4.983e-005	5297	3.111e-005	7254	1.959e-017	7587
29	1.891e-005	7335	1.833e-005	7566	4.879e-005	7566	2.865e-005	7245	1.074e-017	7723
30	1.887e-005	7457	1.824e-005	7446	4.837e-005	7254	2.850e-005	7446	6.267e-019	7335
31	1.816e-005	7190	1.802e-005	4917	4.822e-005	7446	2.758e-005	7190	4.434e-019	7446
32	1.770e-005	7446	1.647e-005	7519	4.073e-005	7519	2.691e-005	7335	4.132e-019	7519

Πίνακας 8.3

Πρότυπο 7519

(Απεδόθη στο λιθοξόο 3)

α/α	Πιθαν/α Α	Κατ/ξη Α	Πιθαν/α Σ	Κατ/ξη Σ	Πιθαν/α Μ	Κατ/ξη Μ	Πιθαν/α Ο	Κατ/ξη Ο	Συνολική Πιθαν/α	Συνολική Κατ/ξη
1	1.317e-002	7519	9.900e-003	7519	1.159e-002	7519	2.825e-002	7519	4.269e-008	7519
2	1.138e-002	6006	9.861e-003	7587	5.972e-003	5297	2.480e-002	6006	5.668e-009	6053
3	1.097e-002	7567	9.090e-003	6053	5.827e-003	6053	2.214e-002	7567	5.294e-009	6295
4	9.708e-003	5297	8.904e-003	4424	5.582e-003	6295	1.763e-002	5297	3.191e-009	5297
5	8.813e-003	7566	8.643e-003	7566	5.478e-003	7587	1.486e-002	7566	3.132e-009	6006
6	8.532e-003	0247	8.635e-003	6295	5.370e-003	7482	1.426e-002	6295	2.661e-009	7567
7	8.508e-003	6053	8.568e-003	6006	1.311e-003	7567	1.258e-002	6053	1.458e-009	7566
8	8.480e-003	0068	8.361e-003	7567	1.296e-003	6006	1.170e-002	0247	1.519e-011	6671
9	8.158e-003	6671	7.961e-003	7446	1.289e-003	7566	3.109e-003	6671	3.123e-013	7587
10	7.704e-003	6295	3.124e-003	5297	1.279e-003	6671	2.955e-003	7405	3.357e-014	0247
11	7.522e-003	7400	4.776e-004	7041	1.002e-004	4424	2.933e-003	7400	1.812e-014	7482
12	7.458e-003	7405	4.758e-004	4917	9.887e-005	0286	3.672e-004	0068	7.344e-015	7400
13	1.474e-003	7542	4.747e-004	7482	1.967e-005	7542	3.615e-004	1640	7.124e-015	7405
14	1.455e-003	0286	4.687e-004	6671	1.950e-005	6124	3.529e-004	0286	5.438e-015	4424
15	1.425e-003	7245	2.308e-005	7723	1.935e-005	7245	2.209e-005	7482	1.164e-015	0068
16	1.406e-003	4917	2.216e-005	7190	1.930e-005	4917	2.209e-005	7542	9.563e-016	0286
17	1.365e-003	6124	2.206e-005	7237	1.906e-005	7335	2.172e-005	6124	2.616e-016	4917
18	1.325e-003	4266	2.174e-005	7457	1.889e-005	7400	2.060e-005	7245	4.809e-017	7446
19	3.271e-004	7723	2.090e-005	0068	1.884e-005	7237	2.028e-005	4917	4.529e-017	7041
20	3.247e-004	1640	2.053e-005	7542	1.846e-005	0247	1.884e-005	7723	3.393e-017	1640
21	3.241e-004	4424	1.948e-005	4033	1.790e-005	4266	1.882e-005	4424	1.314e-017	7542
22	3.220e-004	7482	1.896e-005	4266	1.789e-005	0068	1.814e-005	7587	1.072e-017	7245
23	3.189e-004	7587	1.894e-005	7405	1.777e-005	7446	1.798e-005	4266	9.956e-018	6124
24	3.149e-004	7041	1.889e-005	7245	1.764e-005	7190	1.765e-005	7446	8.083e-018	4266
25	3.139e-004	7457	1.884e-005	0286	1.738e-005	7041	1.762e-005	7457	2.436e-018	7723
26	1.927e-005	7446	1.823e-005	0247	1.713e-005	7723	1.737e-005	7481	1.910e-018	7457
27	1.900e-005	7190	1.764e-005	7400	1.713e-005	7481	1.734e-005	7041	1.334e-019	7237
28	1.860e-005	7237	1.753e-005	7254	1.709e-005	7254	1.727e-005	7237	1.257e-019	7190
29	1.784e-005	7481	1.723e-005	6124	1.708e-005	7405	1.693e-005	7190	9.624e-020	4033
30	1.726e-005	4033	1.714e-005	1640	1.705e-005	4033	1.679e-005	4033	7.738e-020	7481
31	1.655e-005	7254	1.602e-005	7335	1.687e-005	1640	1.368e-005	7254	6.781e-020	7254
32	1.476e-005	7335	1.458e-005	7481	1.589e-005	7457	1.300e-005	7335	5.856e-020	7335

Πίνακας 8.4

Πρότυπο 7335
(Απεδόθη στο λιθοξόο 4)

α/ α	Πιθαν/α Α	Κατ/ξη Α	Πιθαν/α Σ	Κατ/ξη Σ	Πιθαν/α Μ	Κατ/ξη Μ	Πιθαν/α Ο	Κατ/ξη Ο	Συνολική Πιθαν/α	Συνολική Κατ/ξη
1	1.147e-002	7335	1.219e-002	7335	1.242e-002	7335	1.142e-002	7335	1.982e-008	7335
2	9.186e-003	7041	8.474e-003	7237	7.593e-003	7482	1.018e-002	7254	4.758e-009	7237
3	9.037e-003	7237	8.361e-003	7254	7.294e-003	5297	8.904e-003	7237	1.198e-009	7254
4	8.906e-003	4266	6.872e-003	4266	7.029e-003	7405	6.377e-003	7481	2.096e-011	4266
5	8.678e-003	7254	6.868e-003	7481	6.980e-003	7237	6.325e-003	4033	2.270e-012	7482
6	8.486e-003	4424	6.765e-003	4424	6.489e-003	4917	6.293e-003	4266	2.069e-013	1640
7	8.134e-003	7446	6.622e-003	7587	1.623e-003	7254	6.242e-003	1640	1.090e-013	0286
8	1.561e-003	7587	6.613e-003	6053	1.607e-003	7041	6.006e-003	7482	1.079e-013	4424
9	1.525e-003	7190	6.548e-003	1640	1.603e-003	7400	1.835e-003	5297	5.297e-014	7481
10	1.522e-003	7542	2.558e-003	7482	1.600e-003	0286	1.797e-003	6295	1.761e-014	7587
11	1.513e-003	7723	3.995e-004	7567	4.019e-004	7542	1.790e-003	0286	1.192e-014	4033
12	1.481e-003	7245	3.897e-004	4033	3.903e-004	6671	5.506e-004	7567	8.391e-015	7041
13	1.173e-004	7457	3.849e-004	0286	6.114e-005	7190	5.417e-004	6124	4.470e-015	5297
14	1.166e-004	6124	3.812e-004	6295	6.035e-005	0247	5.327e-004	7190	1.070e-015	7567
15	1.164e-004	4917	1.870e-005	5297	5.914e-005	7567	3.359e-005	7405	1.026e-015	6053
16	1.110e-004	7405	1.861e-005	7190	5.897e-005	1640	3.336e-005	4424	9.242e-016	7190
17	1.090e-004	7400	1.853e-005	7245	5.892e-005	7481	3.243e-005	6053	8.045e-016	6295
18	1.035e-004	6671	1.813e-005	6006	5.836e-005	4033	3.225e-005	6006	4.601e-016	7405
19	9.897e-005	0286	1.813e-005	0068	5.710e-005	6295	3.189e-005	0068	2.999e-016	7542
20	9.736e-005	0247	1.808e-005	7457	5.637e-005	4424	3.150e-005	7041	1.966e-016	4917
21	8.992e-005	6053	1.805e-005	7041	5.621e-005	6006	3.062e-005	7587	9.374e-017	7446
22	8.587e-005	1640	1.795e-005	0247	5.570e-005	7587	3.013e-005	7245	7.501e-017	7400
23	8.298e-005	4033	1.757e-005	7405	5.566e-005	7723	2.922e-005	7519	5.666e-017	6124
24	8.255e-005	7566	1.697e-005	7542	5.527e-005	6124	2.892e-005	7542	3.495e-017	7245
25	8.233e-005	7567	1.684e-005	7566	5.444e-005	4266	2.790e-005	0247	3.119e-017	7723
26	2.057e-005	6295	1.625e-005	6124	5.323e-005	6053	2.768e-005	7457	1.296e-017	6671
27	2.053e-005	7481	1.613e-005	7400	5.291e-005	0068	2.662e-005	7400	2.972e-018	7457
28	2.052e-005	6006	1.574e-005	7519	5.088e-005	7566	2.462e-005	7566	2.940e-018	0247
29	2.052e-005	0068	1.531e-005	7723	5.069e-005	7457	2.420e-005	7723	1.741e-018	7566
30	1.947e-005	7482	1.426e-005	6671	4.552e-005	7519	2.252e-005	6671	6.743e-019	6006
31	1.787e-005	5297	1.422e-005	7446	4.231e-005	7245	2.214e-005	7446	6.275e-019	0068
32	1.744e-005	7519	1.292e-005	4917	3.663e-005	7446	2.017e-005	4917	3.650e-019	7519

Πίνακας 8.5

Πρότυπο 7190
(Απεδόθη στο λιθοξόο 5)

α/α	Πιθαν/α Α	Κατ/ξη Α	Πιθαν/α Σ	Κατ/ξη Σ	Πιθαν/α Μ	Κατ/ξη Μ	Πιθαν/α Ο	Κατ/ξη Ο	Συνολική Πιθαν/α	Συνολική Κατ/ξη
1	1.447e-002	7190	2.019e-002	7190	1.678e-002	7190	1.625e-002	7190	7.966e-008	7190
2	1.072e-002	7723	1.361e-002	7041	9.910e-003	7400	1.578e-002	7041	1.772e-008	7041
3	1.014e-002	7041	1.179e-002	7567	9.732e-003	7237	1.162e-002	4033	4.934e-010	7587
4	9.742e-003	7457	1.139e-002	7400	8.987e-003	7542	9.727e-003	0286	1.644e-010	7723
5	9.683e-003	7587	1.138e-002	7723	8.581e-003	7723	9.451e-003	0068	2.905e-011	7400
6	9.473e-003	7245	1.112e-002	7587	8.139e-003	7041	2.291e-003	7587	1.069e-011	6671
7	9.461e-003	7446	1.105e-002	7405	2.002e-003	7587	2.215e-003	7245	1.608e-012	7245
8	5.854e-003	4266	1.092e-002	4424	1.995e-003	7457	2.171e-003	1640	7.913e-013	7457
9	5.710e-003	4424	1.072e-002	6671	1.946e-003	6671	1.368e-003	7457	5.257e-013	4424
10	3.563e-003	7254	6.752e-003	1640	1.884e-003	7482	1.334e-003	7254	3.381e-013	4266
11	3.381e-003	6671	4.055e-003	7446	4.649e-004	0247	1.301e-003	4266	2.980e-013	7446
12	3.374e-003	7542	4.027e-003	4033	4.614e-004	5297	5.167e-004	7567	1.936e-013	7254
13	1.689e-003	7400	1.271e-003	0247	7.201e-005	0286	5.129e-004	5297	1.335e-013	7542
14	8.357e-004	7237	1.264e-003	7245	7.181e-005	4917	5.125e-004	6053	1.269e-013	7567
15	8.192e-004	7335	6.278e-004	4266	7.073e-005	4266	5.108e-004	0247	1.158e-013	0247
16	8.133e-004	7405	6.179e-004	7254	6.777e-005	7405	1.572e-004	7723	5.467e-014	4033
17	7.825e-004	4917	6.155e-004	0068	6.680e-005	6124	1.545e-004	6006	3.213e-014	7237
18	7.795e-004	6124	1.212e-004	6006	6.597e-005	7254	1.532e-004	6124	2.282e-014	7405
19	3.839e-004	0247	1.209e-004	7542	6.559e-005	1640	1.525e-004	7400	1.701e-014	1640
20	3.268e-004	0286	1.205e-004	6124	6.532e-005	7567	1.516e-004	6671	6.827e-015	0286
21	3.192e-004	7567	3.000e-005	6295	6.442e-005	4033	1.510e-004	6295	6.516e-015	0068
22	3.119e-004	6006	2.983e-005	0286	6.274e-005	7335	1.404e-004	7446	9.610e-016	6124
23	3.038e-004	6053	2.977e-005	7457	6.274e-005	0068	1.361e-004	4424	3.365e-016	6006
24	2.993e-004	7566	2.974e-005	6053	6.196e-005	4424	1.341e-004	7237	2.317e-016	6053
25	2.984e-004	6295	2.952e-005	5297	6.181e-005	7481	4.175e-005	7482	1.154e-016	5297
26	1.814e-005	4033	2.947e-005	7237	6.068e-005	7245	3.880e-005	4917	7.728e-017	6295
27	1.787e-005	0068	2.882e-005	4917	6.031e-005	7566	3.780e-005	7519	6.281e-017	4917
28	1.771e-005	1640	2.673e-005	7482	5.764e-005	6006	3.749e-005	7405	3.548e-017	7482
29	1.750e-005	7519	2.622e-005	7566	5.718e-005	6295	3.645e-005	7542	3.104e-017	7335
30	1.739e-005	7481	2.462e-005	7519	5.535e-005	7446	3.313e-005	7566	1.567e-017	7566
31	1.688e-005	7482	2.354e-005	7481	5.005e-005	6053	3.189e-005	7481	8.064e-019	7481
32	1.653e-005	5297	2.148e-005	7335	4.050e-005	7519	2.815e-005	7335	6.595e-019	7519

Πίνακας 8.6

Πρότυπο 7446
(Απεδόθη στο λιθοξόο 6)

α/ α	Πιθαν/α Α	Κατ/ξη Α	Πιθαν/α Σ	Κατ/ξη Σ	Πιθαν/α Μ	Κατ/ξη Μ	Πιθαν/α Ο	Κατ/ξη Ο	Συνολική Πιθαν/α	Συνολική Κατ/ξη
1	1.191e-002	7446	1.358e-002	7446	1.530e-002	7446	2.675e-002	7446	6.619e-008	7446
2	1.065e-002	7245	1.207e-002	7245	8.096e-003	7245	2.384e-002	7723	2.143e-008	7245
3	1.046e-002	7723	1.153e-002	4424	7.234e-003	7457	2.105e-002	7457	1.718e-008	7723
4	9.701e-003	7457	1.084e-002	7457	6.853e-003	7723	2.061e-002	7245	1.600e-008	7457
5	9.657e-003	7041	1.006e-002	7723	6.521e-003	4266	1.942e-002	4266	6.993e-011	7190
6	9.642e-003	4266	1.003e-002	6053	6.473e-003	7254	9.445e-003	7254	4.896e-011	7041
7	9.579e-003	4424	9.852e-003	7041	1.606e-003	7542	8.876e-003	7041	4.811e-011	4424
8	6.021e-003	7587	9.633e-003	6671	1.572e-003	7400	8.854e-003	7587	3.144e-011	4266
9	5.826e-003	7190	9.606e-003	7566	1.549e-003	7190	7.913e-003	4424	2.287e-011	7587
10	3.543e-003	7542	6.032e-003	0247	1.540e-003	7405	7.910e-003	7542	4.742e-012	7542
11	3.450e-003	7237	3.699e-003	7190	7.479e-004	7237	7.508e-003	7237	4.205e-012	7254
12	3.391e-003	7254	3.675e-003	4917	3.701e-004	7587	2.095e-003	7190	7.391e-013	4917
13	1.675e-003	4917	1.160e-003	7587	5.798e-005	7041	2.082e-003	4917	5.468e-013	6671
14	8.268e-004	6671	1.098e-003	6006	5.768e-005	4917	1.937e-003	7335	4.332e-013	7237
15	8.118e-004	6124	5.411e-004	6295	5.629e-005	0247	1.221e-003	6671	6.549e-014	6053
16	8.051e-004	7335	5.388e-004	7519	5.625e-005	6671	1.202e-003	6124	5.276e-014	0247
17	7.795e-004	7405	5.311e-004	5297	5.508e-005	4424	5.865e-004	0286	1.747e-014	7400
18	7.779e-004	7400	1.054e-004	7542	5.497e-005	0286	5.850e-004	6295	1.614e-014	7405
19	3.645e-004	0286	1.037e-004	0068	5.448e-005	1640	5.636e-004	7400	7.437e-015	7566
20	3.612e-004	6295	1.036e-004	7567	5.356e-005	7566	5.454e-004	7405	4.522e-015	6295
21	3.519e-004	0247	2.577e-005	4266	5.151e-005	4033	4.419e-004	0247	1.078e-015	7335
22	3.461e-004	6053	2.537e-005	7400	5.141e-005	7482	4.320e-004	6053	1.049e-015	6124
23	3.385e-004	7566	2.468e-005	7405	5.069e-005	6124	4.272e-005	7566	6.573e-016	6006
24	3.263e-004	7567	2.392e-005	0286	4.998e-005	0068	4.035e-005	6006	2.810e-016	0286
25	3.239e-004	6006	2.237e-005	7237	4.983e-005	7567	3.943e-005	7567	6.640e-017	7567
26	1.873e-005	0068	2.222e-005	4033	4.930e-005	7481	3.666e-005	0068	1.491e-017	5297
27	1.853e-005	7519	2.122e-005	6124	4.779e-005	5297	3.286e-005	5297	1.256e-017	7519
28	1.789e-005	5297	2.106e-005	7482	4.583e-005	6006	3.265e-005	1640	3.558e-018	0068
29	1.739e-005	1640	2.029e-005	7254	4.369e-005	6053	3.216e-005	7481	6.262e-019	1640
30	1.632e-005	7481	2.025e-005	1640	4.198e-005	7335	3.210e-005	7519	5.659e-019	4033
31	1.631e-005	4033	1.682e-005	7481	3.957e-005	6295	3.162e-005	7482	5.416e-019	7482
32	1.583e-005	7482	1.648e-005	7335	3.922e-005	7519	3.033e-005	4033	4.352e-019	7481

Πίνακας 8.7

Πρότυπο 0247 (Απεδόθη στο λιθοξόο 7)										
α/ α	Πιθαν/α Α	Κατ/ξη Α	Πιθαν/α Σ	Κατ/ξη Σ	Πιθαν/α Μ	Κατ/ξη Μ	Πιθαν/α Ο	Κατ/ξη Ο	Συνολική Πιθαν/α	Συνολική Κατ/ξη
1	1.382e-002	0247	1.111e-002	0247	1.053e-002	0247	1.869e-002	0247	3.022e-008	0247
2	1.259e-002	6671	1.088e-002	6671	1.026e-002	6671	1.684e-002	0068	2.022e-008	6671
3	1.118e-002	7567	1.076e-002	7587	9.260e-003	4917	1.625e-002	6053	1.621e-008	4917
4	1.113e-002	4917	1.069e-002	4917	9.009e-003	7723	1.472e-002	4917	2.777e-010	7723
5	1.104e-002	6006	1.025e-002	4424	8.471e-003	7542	1.439e-002	6671	7.059e-011	7542
6	1.078e-002	6053	1.015e-002	7041	8.353e-003	7400	2.764e-003	7567	7.704e-012	6053
7	1.072e-002	0068	1.011e-002	7446	8.246e-003	7190	2.642e-003	6295	2.962e-012	0068
8	6.490e-003	7723	1.008e-002	7723	7.981e-003	7405	2.376e-003	6006	2.438e-012	6295
9	6.487e-003	4424	9.803e-003	7190	2.002e-003	7237	2.169e-003	7566	1.173e-012	7566
10	4.063e-003	7542	6.108e-003	6295	1.952e-003	0286	2.134e-003	1640	1.064e-012	4424
11	4.006e-003	6295	3.835e-003	7566	1.510e-004	7566	5.356e-004	7542	6.065e-013	7400
12	3.988e-003	7041	3.831e-003	7542	1.492e-004	7482	4.981e-004	6124	5.901e-013	6006
13	1.978e-003	4266	1.211e-003	7457	1.489e-004	0068	4.714e-004	7723	3.903e-013	7041
14	9.903e-004	7245	1.188e-003	6053	1.456e-004	6124	4.670e-004	7457	2.258e-013	7190
15	9.866e-004	7457	5.935e-004	6124	4.589e-005	7587	3.589e-004	7519	1.368e-013	7405
16	9.794e-004	6124	5.704e-004	6006	4.519e-005	7254	3.570e-004	4424	4.214e-014	6124
17	9.615e-004	7400	5.663e-004	7400	4.486e-005	4424	2.754e-004	0286	4.181e-014	7567
18	9.343e-004	7566	3.564e-004	7405	4.478e-005	7041	2.154e-004	7041	2.487e-014	7457
19	4.679e-004	7405	1.786e-004	4266	4.462e-005	7457	1.686e-004	5297	1.023e-014	7587
20	4.667e-004	7519	1.103e-004	0068	4.419e-005	7335	1.334e-004	7400	5.276e-015	7446
21	4.649e-004	5297	6.913e-005	5297	4.320e-005	4266	1.029e-004	7405	1.177e-015	4266
22	4.547e-004	1640	6.812e-005	4033	4.128e-005	4033	1.002e-004	7482	1.166e-015	0286
23	2.840e-004	7587	4.298e-005	7245	4.091e-005	1640	9.897e-005	7481	7.294e-016	1640
24	2.240e-004	7481	4.250e-005	0286	4.087e-005	7567	9.843e-005	7245	2.513e-016	7237
25	1.766e-004	7446	4.201e-005	7519	3.993e-005	5297	7.770e-005	7446	2.307e-016	7519
26	5.456e-005	7482	3.325e-005	7237	3.946e-005	6006	7.722e-005	4266	2.161e-016	5297
27	5.387e-005	7190	3.312e-005	7567	3.822e-005	7245	7.309e-005	7587	1.600e-016	7245
28	5.259e-005	7237	3.013e-005	7254	3.805e-005	7446	7.183e-005	7237	1.432e-017	7482
29	5.116e-005	7254	1.838e-005	1640	3.771e-005	6295	5.702e-005	4033	1.234e-017	7481
30	5.106e-005	0286	1.757e-005	7482	3.704e-005	6053	5.531e-005	7254	8.108e-018	4033
31	5.059e-005	4033	1.582e-005	7335	3.658e-005	7481	5.188e-005	7190	3.851e-018	7254
32	4.535e-005	7335	1.523e-005	7481	3.280e-005	7519	2.782e-005	7335	8.820e-019	7335

Πίνακας 8.8

Πρότυπο 4266
(Απεδόθη στο λιθοξόο 8)

α/ α	Πιθαν/α Α	Κατ/ξη Α	Πιθαν/α Σ	Κατ/ξη Σ	Πιθαν/α Μ	Κατ/ξη Μ	Πιθαν/α Ο	Κατ/ξη Ο	Συνολική Πιθαν/α	Συνολική Κατ/ξη
1	1.626e-002	4266	1.386e-002	4266	1.088e-002	4266	2.954e-002	4266	7.243e-008	4266
2	1.259e-002	7587	9.813e-003	4424	9.868e-003	7237	2.605e-002	4424	2.817e-008	7587
3	1.220e-002	4424	9.496e-003	7587	9.523e-003	7587	2.521e-002	7542	2.002e-008	4424
4	1.120e-002	7446	9.389e-003	7190	8.632e-003	7542	2.475e-002	7587	2.835e-010	7542
5	1.115e-002	6671	9.372e-003	1640	8.374e-003	7457	1.091e-002	7446	2.428e-010	7457
6	8.742e-003	7041	7.368e-003	0286	8.335e-003	7567	6.213e-003	7245	2.261e-010	7041
7	8.686e-003	7245	7.267e-003	7245	6.460e-003	6006	4.760e-003	7041	1.841e-010	7245
8	6.727e-003	7723	7.111e-003	7041	6.419e-003	4424	3.730e-003	7723	2.254e-011	7237
9	6.691e-003	4917	6.992e-003	4033	4.044e-003	4917	2.862e-003	7254	1.545e-011	7190
10	4.154e-003	7237	5.500e-003	7457	4.006e-003	7190	2.670e-003	7457	1.815e-012	7723
11	4.037e-003	7542	3.467e-003	0068	1.998e-003	7405	8.430e-004	7237	5.620e-013	7254
12	3.974e-003	6124	3.362e-003	7254	7.903e-004	7482	7.367e-004	6124	2.751e-013	7446
13	1.975e-003	7457	1.061e-003	0247	7.841e-004	1640	7.127e-004	7400	2.648e-013	7400
14	9.889e-004	7254	1.045e-003	6053	7.696e-004	6124	7.038e-004	7405	2.346e-013	4917
15	9.733e-004	7405	8.244e-004	7400	7.645e-004	7041	5.541e-004	4917	1.922e-013	0286
16	9.597e-004	7190	6.526e-004	7237	4.737e-004	7400	5.435e-004	7335	1.318e-013	7405
17	9.518e-004	7400	5.142e-004	7481	4.723e-004	0068	4.281e-004	7190	8.088e-014	6124
18	9.364e-004	7335	3.228e-004	7542	4.697e-004	7245	2.140e-004	0286	5.035e-014	6671
19	4.344e-004	0286	1.557e-004	7723	4.649e-004	7723	1.651e-004	6671	1.772e-014	1640
20	4.308e-004	6053	9.639e-005	7405	4.640e-004	6671	9.460e-005	0247	9.115e-015	6053
21	4.277e-004	0247	6.026e-005	5297	2.808e-004	0286	7.375e-005	6053	5.946e-015	6006
22	4.242e-004	6295	5.897e-005	6671	2.781e-004	7481	7.247e-005	6295	3.963e-015	0068
23	2.436e-004	7566	3.709e-005	7482	2.759e-004	6295	7.066e-005	7566	3.070e-015	4033
24	9.699e-004	6006	3.639e-005	7446	2.747e-004	6053	6.943e-005	7567	2.866e-015	0247
25	1.532e-004	7567	3.595e-005	6124	2.719e-004	4033	5.486e-005	6006	2.481e-015	7567
26	4.498e-005	0068	2.799e-005	7567	6.680e-005	0247	5.406e-005	1640	8.755e-016	7335
27	4.462e-005	1640	2.795e-005	6295	6.553e-005	7566	5.383e-005	0068	3.044e-016	7481
28	4.283e-005	7481	2.753e-005	7335	6.294e-005	5297	4.972e-005	7481	2.369e-016	6295
29	4.104e-005	4033	2.182e-005	7566	6.254e-005	7335	3.937e-005	4033	4.391e-017	7482
30	4.068e-005	7519	1.732e-005	6006	6.191e-005	7446	3.822e-005	7482	2.460e-017	7566
31	3.924e-005	5297	1.566e-005	4917	5.910e-005	7254	3.381e-005	7519	3.869e-018	5297
32	3.921e-005	7482	9.687e-006	7519	5.114e-005	7519	2.600e-005	5297	6.813e-019	7519

Πίνακας 8.9

Ακολουθεί συγκεντρωτικός πίνακας των αποτελεσμάτων που αναγράφονται στην τελευταία στήλη των πινάκων 8.2 έως 8.9. Στην τρίτη γραμμή αναγράφονται οι αριθμοί των επιγραφών που προέκυψαν από τον πρώτο έλεγχο που περιγράφεται στην παράγραφο 8.3. Ακολουθούν οι επιγραφές που απεδόθησαν σε κάθε χέρι με τη μέθοδο του κεφαλαίου 8. Πέραν της «0286» δεν απεδόθησαν άλλες επιγραφές στο «Χέρι 9».

Πίνακας Συγκεντρωτικών Αποτελεσμάτων								
Χέρι 1	Χέρι 2	Χέρι 3	Χέρι 4	Χέρι 5	Χέρι 6	Χέρι 7	Χέρι 8	Χέρι 9
7400	1640	7519	7335	7190	7446	0247	4266	0286
7405	7482	6053	7237	7041	7245	6671	7587	
7542	4033	6295	7254		7723	4917	4424	
6124	7481	5297			7457			
	0068	6006						
		7567						
		7566						

Πίνακας 8.10

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή αντιμετωπίστηκαν πολύ σημαντικά προβλήματα σε σχέση με τα οποία προτάθηκαν πρωτότυπες μέθοδοι επιλύσεως και συνήχθησαν ιδιαίτερος χρήσιμα συμπεράσματα.

Όσον αφορά στη μελέτη του τρόπου κατασκευής των τοιχογραφιών του Ακρωτηρίου που μελετήθηκαν:

- Αντιμετώπιστηκε το πρόβλημα της εύρεσης ελαχίστου αριθμού προτύπων που βέλτιστα προσαρμόζονται σε ένα δεδομένο σύνολο περιγραμμάτων. Δόθηκε μία πρωτότυπη λύση σε αυτό η οποία συμπεριλαμβάνει ένα σύνολο νέων αλγορίθμων προσαρμογής καμπυλών και αναγνώρισης προτύπων.
- Με βάση την ανωτέρω μέθοδο, διαπιστώθηκε ότι για τη δημιουργία των τοιχογραφιών αυτών έχουν χρησιμοποιηθεί οδηγοί - καμπυλογράφοι.
- Οι καμπυλογράφοι αυτοί ακολουθούν με πάρα πολύ μεγάλη ακρίβεια συγκεκριμένα γεωμετρικά πρότυπα η κατασκευή των οποίων απαιτεί πολύ καλή γεωμετρική αίσθηση, ιδιαίτερος σημαντική έμπνευση για την εποχή και υψηλό επίπεδο πειραματισμού. Επισημαίνεται ότι η κατασκευή αυτών των καμπυλών είναι συμβατή με τα μέσα της εποχής, ενώ δεν απαιτείται γι' αυτήν γνώση της αναλυτικής τους έκφρασης. Τονίζεται ότι η αξιωματική θεμελίωση και μελέτη αυτών των γεωμετριών σχημάτων έλαβε χώρα στους κλασικούς χρόνους, τουλάχιστον 1200 χρόνια μετά την περίοδο ακμής του οικισμού του Ακρωτηρίου.
- Τα ανωτέρω υποστηρίζουν την άποψη ότι η συναισθηματική γνώση των μαθηματικών, η οποία συχνά αναδύεται μέσα απ' την τέχνη και τις ανάγκες της καθημερινής ζωής, προηγείται της αυστηρής θεμελίωσής τους. Επομένως, μπορεί να υποστηρίξει κανείς την άποψη ότι η υποσυνείδητη γνώση των μαθηματικών των κλασικών χρόνων γεννήθηκε στον ευρύτερο χώρο του Αιγαίου.

Στο δεύτερο τμήμα αυτής της εργασίας αναπτύχθηκε μία εντελώς πρωτότυπη προσέγγιση χρονολόγησης αρχαίων επιγραφών, οι οποίες αποτελούν την κύρια πηγή ορθής καταγραφής της ιστορίας. Η μέθοδος αυτή χρονολόγησης βασίζεται στην ταυτοποίηση των γραφών αυτών των επιγραφών.

- Για να επιτευχθεί η ταυτοποίηση αυτή σε πρώτο στάδιο αναπτύχθηκε σύστημα ψηφιακής επεξεργασίας των εικόνων των γραμμάτων επί των προς μελέτη επιγραφών.
- Εν συνεχεία αναπτύχθηκε μέθοδος βέλτιστης προσαρμογής περιγραμμάτων υλοποιήσεων γραμμάτων και πρωτότυπα κριτήρια ποσοτικοποίησης αυτής της βέλτιστης προσαρμογής.
- Επελέγησαν και υπολογίστηκαν γεωμετρικά χαρακτηριστικά που κατά το δυνατόν περιγράφουν τις ιδιομορφίες των υλοποιήσεων των γραμμάτων και άρα χαρακτηρίζουν τον τρόπο γραφής κάθε χαρακτήρα.
- Επί τη βάση των ανωτέρω διατυπώθηκε πρωτότυπη στατιστική μέθοδος κατάταξης των επιγραφών που μελετήθηκαν ανά γραφέα.
- Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε εφαρμόστηκε σε 32 Αττικές επιγραφές που επέλεξε ο διακεκριμένος αρχαιολόγος καθηγητής κος Steve Tracy και οδήγησε σε κατάταξη των επιγραφών ανά χαρακτήρα με 100% επιτυχία.

**ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ ΣΕ ΔΙΕΘΝΗ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ
ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΤΗΝ ΠΑΡΟΥΣΑ ΕΡΓΑΣΙΑ**

1. Roussopoulos, P., Papaodysseus, C., Arabadjis, D., Exarhos, M., Panagopoulos, M. “Image and pattern analysis for the determination of the method of drawing celebrated Thera wall paintings circa 1650 B.C.” *The ACM Journal on Computing and Cultural Heritage*. Δεκτό για δημοσίευση Ιούνιος 2010.
2. S.V.Tracy, C. Papaodysseus, P. Roussopoulos, M. Panagopoulos, D. Fragoulis, D. Dafi and Th. Panagopoulos “Identifying Hands on Ancient Athenian Inscriptions: First Steps towards a Digital Approach” *Archaeometry* 49 4 (2007) 749–764.
3. M. Panagopoulos, C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, D. Dafi, S. Tracy «Automatic writer identification of ancient Greek inscriptions». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 31, no. 8, pp. 1404-1414, July 2009.
4. C. Papaodysseus, T. Panagopoulos, M. Exarhos, D. Fragoulis, G. Roussopoulos, P. Rousopoulos, G. Galanopoulos, C. Triantafillou, A. Vlachopoulos, C. Doulas “Distinct, Late Bronze age (c.1650 BC) Wall-Paintings from Akrotiri, Thera, Comprising Advanced Geometrical Patterns” *Archaeometry* 48 , 1 (2006) 97–114.
5. Constantin Papaodysseus, Mihalis Exarhos, Mihalis Panagopoulos, Panayiotis Rousopoulos, Constantin Triantafillou, and Thanasis Panagopoulos “Image and Pattern Analysis of 1650 B.C. Wall Paintings and Reconstruction” *IEEE Transactions On Systems, Man, And Cybernetics—Part a: Systems And Humans*, Vol. 38, no. 4, JULY 2008 pp. 958-965.
6. Th. Panagopoulos, C. Papaodysseus, M. Exarhos, C. Triantafillou, G. Roussopoulos, P. Roussopoulos, “Prehistoric Wall-Paintings Reconstruction Using Image Pattern Analysis And Curve Fitting”, *WSEAS Transactions on Electronics I*, no 1 108-113, 2004.
7. C. Papaodysseus, M. Panagopoulos, P. Rousopoulos, G. Galanopoulos & C. Doulas “ Geometric templates used in the Akrotiri (Thera) wall-paintings”. *Antiquity* 82 (Jan. 2008): 401–408.

8. D. Fragoulis, A. Skembris, C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, Th. panagopoulos, M. Panagopoulos, C. Triantafyllou, A. Vlachopoulos and C. Doumas. "Origins and Application of Geometry" in the Thera Prehistoric Civilization Ca. 1650 BC. *Centaurus* 2005: Vol. 47: PP. 316–340.
9. P. Rousopoulos, C. Papaodysseus, D. Arabatzis, M. Panagopoulos, M. Exarhos "Reconstruction of c.1650 B.C. Fragmented Wall Paintings by Exploitation of the Thematic Content". *International Journal Of Computer Interaction & Information Technology*.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Π.Κ. Γενικά περί καμπυλών.

Π.Κ. 1 Σχετικοί ορισμοί.

Ορισμός καμπύλης στο χώρο \mathcal{R}^n

Ως καμπύλη στον χώρο \mathcal{R}^n θεωρείται το σύνολο των σημείων, δηλαδή των διατεταγμένων n -άδων, όλες οι συνιστώσες των οποίων εξαρτώνται συναρτησιακά μόνο από μία ελεύθερη μεταβλητή, η οποία παίρνει τιμές σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathcal{R}$. Άρα, ισοδυνάμως, η καμπύλη είναι το σύνολο των σημείων $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ που προκύπτουν από μία απεικόνιση $I \rightarrow \mathcal{R}^n$ διατεταγμένη n -άδα, όπου $t \in I$.

Ορισμός C_n, C_n^t και C_{n-} καμπύλης.

Μία καμπύλη λέγεται C_n ομαλή ή απλώς C_n εάν η επιβατική της ακτίνα $\vec{r}(t)$ έχει όλες τις παραγώγους μέχρι και τάξεως n και επιπλέον η n -οστή παράγωγος του $\vec{r}(t)$ είναι συνεχής.

Επειδή, όπως είναι γνωστό, η ύπαρξη της παραγώγου τάξεως n εγγυάται τη συνέχεια της παραγώγου τάξεως $n-1$, συνεπάγεται ότι μία C_n καμπύλη είναι και η ίδια συνεχής, αλλά και έχει όλες τις παραγώγους του $\vec{r}(t)$ τάξεως από 1 έως n συνεχείς.

Εάν μία καμπύλη είναι μία ένωση C_n καμπυλών θα λέγεται τμηματικώς C_n και συμβολίζεται με C_n^t . Είθισται η απλώς τμηματικώς συνεχής καμπύλη να λέγεται C_0^t .

Ορίζουμε σαν C_{n-} καμπύλη, αυτήν η οποία έχει όλες τις παραγώγους μέχρι τάξη $n-1$ συνεχείς, αλλά πού η n -οστή τάξεως παράγωγος του $\vec{r}(t)$ τμηματικώς υπάρχει, δηλαδή υπάρχει παντού εκτός ενδεχομένως από ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων.

Ορισμός επιβατικής ακτίνας σε τυχόν σημείο καμπύλης

Έστω τυχούσα καμπύλη $C \subset \mathfrak{R}^n$ και $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ τυχόν σημείο αυτής. Έστω O η αρχή των αξόνων, $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ μία ορθοκανονική βάση του \mathfrak{R}^n , t η παράμετρος της καμπύλης και t_m η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής t που αντιστοιχεί στο σημείο m . Η επιβατική ακτίνα στο m ορίζεται ως

$$\vec{r}(t_m) = \overrightarrow{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \quad (\text{Π.Κ.1})$$

Ορισμός εφαπτομένου και μοναδιαίου εφαπτομένου διανύσματος καμπύλης

Έστω η καμπύλη $C \subset \mathfrak{R}^n$ με ανεξάρτητη μεταβλητή t και έστω $M(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ τυχόν σημείο της C , όπου οι συναρτήσεις $x_i(t)$, $i=1, \dots, n$, είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα I . Τότε το διάνυσμα $\vec{r}'(t) = x_1'(t)\vec{e}_1 + x_2'(t)\vec{e}_2 + \dots + x_n'(t)\vec{e}_n$ εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο M .

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο τυχόν σημείο M της καμπύλης είναι το

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}. \quad (\text{Π.Κ.2})$$

Εάν οι συναρτήσεις $x_i(t)$, $i=1, \dots, n$, είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο I τότε μπορεί να οριστεί η δεύτερη παράγωγος της επιβατικής ακτίνας, μέσω της σχέσεως $\vec{r}''(t) = x_1''(t)\vec{e}_1 + x_2''(t)\vec{e}_2 + \dots + x_n''(t)\vec{e}_n$. Με προφανή επέκταση ορίζονται οι παράγωγοι ανωτέρας τάξεως του διανύσματος επιβατικής ακτίνας.

Π.Κ. 2 Ορισμός καμπυλότητας καμπύλης και σχετικά χρήσιμα θεωρήματα

Π.Κ. 2.1 Η περίπτωση του κύκλου: μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα \vec{T} , αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία κύκλου και $\vec{r}'(s)$.

Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου στο επίπεδο με παράμετρο την πολική γωνία, έστω ϑ , έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned}x(\vartheta) &= x_0 + a \cos(\vartheta) \\y(\vartheta) &= y_0 + a \sin(\vartheta)\end{aligned}$$

όπου x_0, y_0 οι συντεταγμένες του κέντρου K του κύκλου, a η ακτίνα αυτού και $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Γεωμετρικά η ανεξάρτητη μεταβλητή ϑ είναι η προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζει το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{i} του άξονος x , με την επιβατική ακτίνα \overrightarrow{KM} όπου M τυχόν σημείο του κύκλου.

Το στοιχειώδες μήκος του κύκλου είναι $ds = \sqrt{x'(\vartheta)^2 + y'(\vartheta)^2} d\vartheta = a d\vartheta$. Συνεπώς το μήκος αυτού είναι $s = a\vartheta$ όπως πρώτος παρατήρησε και απέδειξε ο μεγάλος Αρχιμήδης.

Με χρήση της παραμέτρου s οι εξισώσεις του κύκλου γίνονται

$$\begin{aligned}x(s) &= x_0 + a \cos\left(\frac{s}{a}\right) \\y(s) &= y_0 + a \sin\left(\frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$

Συνεπώς το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στον κύκλο τότε γίνεται

$$\vec{r}'(s) = -\sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j}. \quad (\text{Π.Κ.3})$$

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα συμβολίζεται και με \vec{T} . Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το μήκος s του κύκλου τότε $\vec{T} = \vec{r}'(s)$, ενώ στη γενική περίπτωση τυχούσης μεταβλητής t ισχύει

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}. \quad (\text{Π.Κ.4})$$

Παραγωγίζοντας την (Π.Κ.3) προκύπτει

$$\begin{aligned} \vec{r}''(s) &= -\frac{1}{a} \cos\left(\frac{s}{a}\right) \vec{i} - \frac{1}{a} \sin\left(\frac{s}{a}\right) \vec{j} \Leftrightarrow \\ \vec{r}''(s) &= -\frac{1}{a^2} (\vec{r}(s) - x_0 \vec{i} - y_0 \vec{j}) = -\frac{1}{a^2} \overrightarrow{KM}. \end{aligned}$$

Επομένως $\|\vec{r}''(s)\| = \frac{1}{a}$, δηλαδή το μέτρο του διανύσματος του $\vec{r}''(s)$ μας προσφέρει αμέσως την ακτίνα του κύκλου. Επιπλέον

$$\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) \equiv 1 \Rightarrow \frac{d}{ds} (\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s)) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \cdot \vec{T}(s) = 0 \Leftrightarrow \vec{r}''(s) \cdot \vec{T}(s) = 0. \quad \text{Όλα τα}$$

ανωτέρω καταδεικνύουν ότι το διάνυσμα $\vec{r}''(s)$ σε τυχόν σημείο M του κύκλου δείχνει προς το κέντρο του κύκλου K και

$$\overrightarrow{MK} = \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2}. \quad (\text{Π.Κ.5})$$

Συνεπώς η γνώση ενός τυχόντος σημείου M του κύκλου και του διανύσματος $\vec{r}''(s)$ σε αυτό το σημείο ορίζει μονοσήμαντα τον κύκλο.

Π.Κ. 2.2 Η γενική περίπτωση καμπύλης. Ο εγγύτατος κύκλος και η καμπυλότητα με παράμετρο το μήκος καμπύλης s .

Έστω τυχούσα καμπύλη σε χώρο οσονδήποτε διαστάσεων της οποίας η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το μήκος της s . Στο \mathcal{R}^2 ισχύει

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$$

ενώ στο \mathcal{R}^3

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$$

Σημειώνεται ότι επειδή εξ υποθέσεως $d\vec{r} = d\vec{s}$, $\|\vec{r}'(s)\| \equiv \left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| \equiv \frac{\|d\vec{s}\|}{ds} = 1$ που σημαίνει ότι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{T}(s)$ στο τυχόν σημείο A της καμπύλης ισούται με $\vec{r}'(s)$, δηλαδή $\vec{T}(s) = \vec{r}'(s) \forall s$.

Εξ άλλου $\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \vec{r}''(s)$, οπότε ας θεωρήσουμε το μοναδικό κύκλο (K) ο οποίος περνάει από το ίδιο σημείο A, έχει το ίδιο $\frac{d\vec{T}(s)}{ds}$ στο A με τη δεδομένη καμπύλη και κείται στο ίδιο επίπεδο με το $\vec{T}(s)$. Θα αποδείξουμε ότι εάν B είναι το σημείο $\vec{r}(s+ds)$ και $\vec{T}(s+ds)$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο B τότε το B ανήκει επίσης στον κύκλο (K), ενώ επίσης τα $\vec{T}(s)$ και $\vec{T}(s+ds)$ εφάπτονται στον (K) στα αντίστοιχα σημεία.

Απόδειξη: Ακολουθώντας τη συλλογιστική που αναπτύξαμε στην παράγραφο 2.1, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το $\frac{d\vec{T}(s)}{ds}$ είναι κάθετο στο $\vec{T}(s)$. Πράγματι, ισχύει ότι

$$\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) \equiv 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s)) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \cdot \vec{T}(s) = 0 \Leftrightarrow \vec{r}''(s) \cdot \vec{T}(s) = 0.$$

Επομένως το $\vec{T}(s)$ εφάπτεται και στον κύκλο (K) και στη δεδομένη καμπύλη αφού το $\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \vec{r}''(s)$ εξ υποθέσεως είναι κοινό και στη δεδομένη καμπύλη και στον (K).

Επίσης $\vec{r}(s+ds) = \vec{r}(s) + \vec{r}'(s)ds = \vec{r}(s) + \vec{T}(s)ds$ γεγονός που αποδεικνύει ότι και το σημείο $\vec{r}(s+ds)$, δηλαδή το σημείο B επίσης ανήκει στον (K). Όντως αν O η αρχή των αξόνων και K το κέντρο του (K), τα δεδομένα είναι ότι $\vec{OB} = \vec{r}(s+ds)$, $\vec{OA} = \vec{r}(s)$, οπότε και $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{r}'(s)ds = \vec{T}(s)ds$. Άλλα προφανώς $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{KB} - \vec{KA}$, οπότε $\vec{KB} = \vec{KA} + \vec{T}(s)ds$. Επειδή, δε, ο (K) και η καμπύλη έχουν το ίδιο μοναδιαίο εφαπτόμενο στο A, το B ανήκει στον (K).

Τέλος $\vec{T}(s+ds) = \vec{T}(s) + \frac{d\vec{T}}{ds} ds$. Αλλά $\vec{T}(s)$ και $\frac{d\vec{T}}{ds}$ είναι κοινά και στον κύκλο

(K) και στην καμπύλη. Άρα $\vec{T}(s+ds)$ εφάπτεται επίσης στον κύκλο (K) στο σημείο B. οεδ.

Ακριβώς επειδή ο κύκλος (K) έχει κοινά σημεία με την καμπύλη τα $\vec{r}(s)$ και $\vec{r}(s+ds)$ ως και κοινές εφαπτόμενες στα σημεία αυτά, ονομάζεται *εγγύτατος κύκλος* διότι είναι η καλύτερη δευτέρας τάξεως προσέγγιση της καμπύλης.

Ορισμός: Ορίζουμε, εύλογα, την καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο $A(\vec{r}(s))$ την καμπυλότητα του κύκλου (K). Επειδή δε, ο κύκλος (K) εξ υποθέσεως έχει κοινό $\vec{r}''(s)$ με την καμπύλη, προφανώς η καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο

$A(\vec{r}(s))$ είναι $\frac{1}{\|\vec{r}''(s)\|}$. Το κέντρο δε του εγγυτάτου κύκλου είναι το σημείο

$\vec{r}(s) + \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2}$, η δε ακτίνα του (K) είναι $\frac{1}{\|\vec{r}''(s)\|}$, η οποία και λέγεται εγγυτάτη ακτίνα

ή ακτίνα καμπυλότητας.

Π.Κ. 2.3 Η καμπυλότητα στη γενική περίπτωση καμπύλης με τυχούσα παράμετρο.

Έστω τυχούσα καμπύλη με τυχούσα ανεξάρτητη μεταβλητή t . Άρα στο \mathcal{R}^2

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Παραγωγίζοντας ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή έχουμε

$$\vec{r}'(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{ds} \left| \vec{r}'(t) \right| \Leftrightarrow \frac{\vec{r}'(t)}{\left| \vec{r}'(t) \right|} = \frac{d\vec{r}(t)}{ds}$$

Αλλά

$$\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \vec{T}(t) \quad (\text{βλέπε και π.κ.2})$$

Άρα

$$\vec{T}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{ds}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς t έχουμε

$$\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}(t)}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right) \frac{ds}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} |\vec{r}'(t)| \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{\frac{d\vec{T}(t)}{dt}}{|\vec{r}'(t)|} \Leftrightarrow \left\| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right\| = \frac{\left\| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right\|}{\left\| \vec{r}'(t) \right\|} = \frac{\left\| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right\|}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} = k \quad (\text{Π.Κ.6})$$

Όπου k η καμπυλότητα εκπεφρασμένη, στην τελευταία σχέση, ως προς την ανεξάρτητη παράμετρο t .

Π.Κ. 3 Θεμελιώδεις Ορισμοί Και Θεωρήματα Επί Των Κωνικών Τομών

Π.Κ. 3.1 Περί Ελλείψεως

Π.Κ. 3.1.1 Η βασική ιδιότητα της ελλείψεως.

Έστωσαν δύο σταθερά σημεία E_1 και E_2 , τα οποία συνήθως ονομάζονται εστίες. Ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M το άθροισμα των αποστάσεων των οποίων από τα E_1 και E_2 είναι σταθερό.

Λύση

Χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας θεωρούμε κατ' αρχήν ότι οι δύο εστίες κείνται επί του x άξονα με το μέσο τους επί της αρχής των αξόνων O στα σημεία

$(-c,0)$ και $(c,0)$, $c < a$. Εάν το σταθερό άθροισμα είναι δύο $2a$ και $M(x,y)$ τυχόν σημείο του γεωμετρικού τόπου, πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$\begin{aligned} 2a &= ME_1 + ME_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ 4a^2 &= (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ 2a^2 &= x^2 + c^2 + y^2 + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ 2a^2 - x^2 - c^2 - y^2 &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Μετά από ύψωση στο τετράγωνο και απλοποιήσεις λαμβάνουμε

$$a^4 + x^2c^2 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$$

Και θέτοντας $b^2 = a^2 - c^2$ τελικά λαμβάνουμε

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Π.Κ. 7})$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων οι συντεταγμένες των οποίων ικανοποιούν αυτή την εξίσωση ονομάζεται έλλειψη, είναι δε ένα σχήμα με άξονες συμμετρίας τους x και y . Προφανώς, η έλλειψη συναντά τον άξονα των x στο $(\pm a, 0)$, τον δε άξονα των y στο $(0, \pm b)$.

Π.Κ 3.1.2 Η γενική εξίσωση της ελλείψεως.

Η (Π.Κ. 7) είναι η εξίσωση της ελλείψεως οι άξονες της οποίας είναι άξονες των συντεταγμένων. Μια πρώτη γενίκευση προκύπτει εάν στρέψουμε την έλλειψη περί την αρχή των αξόνων κατά γωνία φ ανθρωπολογικά. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση, το τυχόν σημείο (x, y) της ελλείψεως μετασχηματίζεται στο σημείο (X, Y) που ορίζεται από τη σχέση

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (\text{Π.Κ. 8})$$

Η τελευταία ισοδυναμία οφείλεται στο γεγονός ότι ισχύει

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Η Π.Κ. 8 δίνει τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= X \cos \varphi + Y \sin \varphi \\ y &= -X \sin \varphi + Y \cos \varphi \end{aligned}$$

οπότε με αντικατάσταση στην (Π.Κ. 7) προκύπτει η εξίσωση

$$AX^2 + BY^2 + CXY + F = 0 \quad (\text{Π.Κ. 9})$$

Όπου

$$A = b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi$$

$$B = b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi$$

$$C = (b^2 - a^2) 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$F = -a^2 b^2$$

Υπολογίζουμε την ποσότητα

$$\Delta = 4AB - C^2 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 4a^2 b^2 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) = 4a^2 b^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 4a^2 b^2$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα Δ , που ονομάζεται διακρίνουσα, είναι πάντοτε θετική, η δε τιμή της δεν εξαρτάται από την περιστροφή της ελλείψεως.

Για να γράψουμε τη γενική εξίσωση της έλλειψης πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας και την πιθανή παράλληλη μετατόπιση του κέντρου της. Πράγματι, εάν η έλλειψη έχει άξονες συμμετρίας παράλληλους προς τους άξονες συντεταγμένων αλλά το κέντρο της βρίσκεται στην θέση (x_0, y_0) τότε ας θεωρήσουμε ένα τυχόν σημείο $M(x, y)$ αυτής. Έστω τώρα ότι στρέφουμε την έλλειψη κατά γωνία φ ανθρωπολογικά, οπότε το σημείο M μετατοπίζεται στο $N(X, Y)$. Το ερώτημα που τίθεται είναι: ποιά είναι η σχέση που συνδέει τα (X, Y) ; Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, πρώτα μετατοπίζουμε την έλλειψη ώστε το κέντρο της να γίνει η αρχή των αξόνων $(0, 0)$. Τότε

το σημείο $M(x, y)$ μετατοπίζεται στο $M'(x-x_0, y-y_0)$. Προφανώς η εξίσωση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες του M' είναι

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Π.Κ. 10})$$

Εάν, τώρα, περιστρέψουμε την έλλειψη στη νέα της θέση γύρω από το $(0,0)$ τότε το $M'(x-x_0, y-y_0)$ μεταφέρεται στο σημείο $N'(u, v)$, με

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \quad (\text{Π.Κ. 11})$$

$$\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Αλλά, για να μεταφερθεί τελικά το $N'(u, v)$ στο $N(X, Y)$ πρέπει να μετατοπιστεί κατά (x_0, y_0) όπως και όλη η υπόλοιπη έλλειψη. Δηλαδή ισχύει :

$$\begin{aligned} X &= u + x_0, Y = v + y_0 \Leftrightarrow \\ u &= X - x_0, v = Y - y_0 \end{aligned} \quad (\text{Π.Κ. 12})$$

Με αντικατάσταση των ανωτέρω σχέσεων (Π.Κ. 12) στην (Π.Κ. 11) λαμβάνω τελικά

$$\begin{aligned} (x-x_0) &= (X-x_0)\cos\varphi + (Y-y_0)\sin\varphi \\ (y-y_0) &= -(X-x_0)\sin\varphi + (Y-y_0)\cos\varphi \end{aligned} \quad (\text{Π.Κ. 13})$$

Με αντικατάσταση των ανωτέρω σχέσεων (Π.Κ. 13) στην (Π.Κ. 10), απαλοιφή των παρανομαστών και αναγωγή ομοίων όρων, λαμβάνουμε τη γενική εξίσωση της ελλείψεως

$$AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F = 0 \quad (\text{Π.Κ. 14})$$

όπου

$$\begin{aligned} A &= b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi \\ B &= b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

$$C = (b^2 - a^2)2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$D = -2x_0(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi) + 2y_0 \sin \varphi \cos \varphi(a^2 + b^2)$$

$$E = -2y_0(b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi) + 2x_0 \sin \varphi \cos \varphi(a^2 + b^2)$$

$$F = b^2(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)^2 + a^2(x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi)^2 - a^2b^2$$

Η διακρίνουσα $\Delta = 4AB - C^2$, διατηρεί τις ίδιες ιδιότητες η δε τιμή της δεν εξαρτάται από τη θέση της ελλείψεως.

Αν μας δοθεί η γενική εξίσωση της ελλείψεως (Π.Κ. 14) μπορούμε να βρούμε τη γωνία που πρέπει να την περιστρέψουμε ώστε οι άξονες συμμετρίας της να είναι παράλληλοι προς τους άξονες συντεταγμένων. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$A - B = (b^2 - a^2)(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = (b^2 - a^2) \cos 2\varphi$$

και επίσης ότι

$$C = (b^2 - a^2) \sin 2\varphi$$

οπότε τελικά

$$\tan 2\varphi = \frac{C}{A - B}.$$

Η γνώση της γωνίας φ προσφέρει αμέσως τα a b από τα A B C .

Π.Κ. 3.1.3 Πολική εξίσωση της ελλείψεως (Π.Κ. 7)

Έστω η έλλειψη με άξονα συμμετρίας τους άξονες συντεταγμένων και έστω ένα επίπεδο που διέρχεται από τον άξονα x και σχηματίζει δίεδρο γωνία γ προς το xy επίπεδο τέτοια ώστε $\cos \gamma = \frac{b}{a}$. Θεωρούμε τον κύκλο (K) κέντρου O και ακτίνας a που κείται επί του επιπέδου αυτού. Η προβολή του (K) επί του xy είναι η έλλειψη που περιγράφεται από την εξίσωση (Π.Κ. 7). Όντως, εάν x, y είναι οι συντεταγμένες επί του πλαγίου επιπέδου, τότε η εξίσωση του κύκλου (K) σε πολικές συντεταγμένες επί του επιπέδου αυτού είναι

$$x = a \cos \vartheta$$

$$y = a \sin \vartheta$$

Η έλλειψη (Π.Κ.7) και ο κύκλος (Κ) έχουν πάντα κοινή x συντεταγμένη στα αντίστοιχα σημεία τους. Η προβολή όμως του τυχόντος σημείου του κύκλου (Κ) επί του xy επιπέδου έχει y συντεταγμένη όπου

$$y = v \cos \gamma = \frac{b}{a} a \sin \vartheta = b \sin \vartheta$$

Άρα η προβολή του τυχόντος σημείου του κύκλου (Κ) επί του xy επιπέδου ικανοποιεί την εξίσωση της ελλείψεως (Π.Κ.7), η δε προβολή αυτού δίνεται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= a \cos \vartheta \\ y &= b \sin \vartheta \end{aligned} \quad (\text{Π.Κ. 15})$$

όπου $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

Οι (Π.Κ. 15) είναι οι πολικές εξισώσεις της ελλείψεως όπου όμως τονίζεται ότι η γωνία ϑ είναι η πολική γωνία του κύκλου (Κ) στο επίπεδό του και όχι αυτή της ελλείψεως.

Π.Κ. 3.2 Περί Υπερβολής

Π.Κ. 3.2.1 Η βασική ιδιότητα της Υπερβολής

Έστωσαν δύο σταθερά σημεία E_1 και E_2 τα οποία συνήθως ονομάζονται εστίες της Υπερβολής. Ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M η διαφορά των αποστάσεων των οποίων από τις εστίες είναι έχει απόλυτη τιμή σταθερή, έστω $2a$.

Λύση

Χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας θεωρούμε κατ' αρχήν ότι οι δύο εστίες κείνται επί του x άξονα στα σημεία $(-c, 0)$ και $(c, 0)$ αντιστοίχως με $c > a$. Τότε για το τυχόν σημείο $M(x, y)$ του γεωμετρικού τόπου, πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$\begin{aligned} 2a &= |ME_1 - ME_2| = \left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| \Leftrightarrow \\ 4a^2 &= (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ 2a^2 &= x^2 + c^2 + y^2 - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ 2a^2 - x^2 - c^2 - y^2 &= -\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Μετά από ύψωση στο τετράγωνο και απλοποιήσεις λαμβάνουμε

$$a^4 + x^2c^2 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0 \quad (\text{Π.Κ. 16})$$

Αλλά στο προκείμενο $c > a$, οπότε υπάρχει το σημείο επί του άξονα των x με συντεταγμένες $(a, 0)$ για το οποίο ισχύει $a + c - (c - a) = 2a$, άρα το σημείο αυτό που βρίσκεται ανάμεσα στις δύο εστίες ανήκει στο γεωμετρικό τόπο. Επομένως, σε αντίθεση με την έλλειψη, στο προκείμενο θέτουμε $c^2 - a^2 = b^2$ $b \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς η σχέση (Π.Κ. 16) μετασχηματίζεται στην

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Π.Κ. 17})$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων οι συντεταγμένες των οποίων ικανοποιούν αυτή την εξίσωση ονομάζεται υπερβολή. Παρατηρούμε ότι για $y = 0$ προκύπτει $x = \pm a$, γεγονός που επιβεβαιώνει ότι ο γεωμετρικός τόπος συναντά τον άξονα στα σημεία $(-a, 0)$ και $(a, 0)$ ανάμεσα στις δύο εστίες. Εξ' άλλου παρατηρούμε ότι για $x = 0$ η εξίσωση δεν έχει λύση εν \mathbb{R} γεγονός που αποδεικνύει ότι ο άξονας των y δεν συναντά το γεωμετρικό τόπο. Επιπλέον παρατηρούμε ότι αν το σημείο (x, y) ανήκει στο γεωμετρικό τόπο, το αυτό ισχύει και για τα σημεία $(-x, y)$, $(-x, -y)$ και $(x, -y)$. Άρα η υπερβολή έχει δύο κλάδους (διότι δεν την τέμνει ο άξονας των y) έχει άξονες συμμετρίας τόσο τον άξονα των y όσο και των x , δηλαδή τον άξονα που ορίζουν οι εστίες ως και τη μεσοκάθετο αυτών, έχει δε σημείο συμμετρίας το μέσο των εστιών.

Π.Κ. 3.2.2 Η γενική εξίσωση της υπερβολής

Η (Π.Κ. 17) είναι η εξίσωση της υπερβολής οι άξονες της οποίας είναι άξονες των συντεταγμένων. Μια πρώτη γενίκευση αυτής της εξισώσεως προκύπτει εάν στρέψουμε την υπερβολή περί την αρχή των αξόνων κατά γωνία φ ανθρωπολογικά. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση, το τυχόν σημείο (x, y) της υπερβολής μετασχηματίζεται στο σημείο (X, Y) που ορίζεται από τη σχέση

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (\text{Π.Κ. 18})$$

Η (Π.Κ. 18) δίνει εκ νέου τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= X \cos \varphi + Y \sin \varphi \\ y &= -X \sin \varphi + Y \cos \varphi \end{aligned}$$

οπότε με αντικατάσταση στην (Π.Κ. 17) προκύπτει η εξίσωση

$$AX^2 + BY^2 + CXY + F = 0 \quad (\text{Π.Κ. 19})$$

Όπου

$$A = b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi$$

$$B = b^2 \sin^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi$$

$$C = (b^2 + a^2)2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$F = -a^2 b^2$$

Υπολογίζουμε την ποσότητα

$$\Delta = 4AB - C^2 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = -4a^2 b^2 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) = 4a^2 b^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = -4a^2 b^2$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή η διακρίνουσα Δ , είναι πάντοτε αρνητική, η δε τιμή της είναι πάλι ανεξάρτητη από την περιστροφή της υπερβολής.

Για να γράψουμε τη γενική εξίσωση της υπερβολής πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας και την πιθανή παράλληλη μετατόπιση του κέντρου της. Πράγματι, εάν η υπερβολή έχει άξονες συμμετρίας παράλληλους προς τους άξονες συντεταγμένων αλλά το κέντρο της βρίσκεται στην θέση (x_0, y_0) τότε, προφανώς, η εξίσωσή της είναι

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Π.Κ. 20})$$

Εάν, επιπλέον, η έλλειψη είναι και εστραμμένη περί το (x_0, y_0) τότε πρώτα τη μετατοπίζουμε παραλλήλως στην αρχή των αξόνων και την περιστρέφουμε όπως προηγουμένως, μέσω των σχέσεων

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - x_0) \\ (y - y_0) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} (x - x_0) \\ (y - y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \quad (\text{Π.Κ. 21})$$

όπου βεβαίως $U = X - x_0$, $V = Y - y_0$. Άρα η (Π.Κ 21) δίνει τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= U \cos \varphi + V \sin \varphi + x_0 = (X - x_0) \cos \varphi + (Y - y_0) \sin \varphi + x_0 \\ y &= -U \sin \varphi + V \cos \varphi + y_0 = -(X - x_0) \sin \varphi + (Y - y_0) \cos \varphi + y_0 \end{aligned}$$

και λαμβάνουμε την γενική εξίσωση της υπερβολής η οποία είναι ίδιας μορφής με της ελλείψεως δηλαδή η :

$$AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F = 0 \quad (\text{Π.Κ. 22})$$

όπου

$$A = b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi$$

$$B = b^2 \sin^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi$$

$$C = (b^2 + a^2) 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$D = -2x_0(b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi) - 2y_0 \sin \varphi \cos \varphi (b^2 + a^2)$$

$$E = -2y_0(b^2 \sin^2 \varphi - a^2 \cos^2 \varphi) - 2x_0 \sin \varphi \cos \varphi (b^2 + a^2)$$

$$F = b^2(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)^2 - a^2(x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi)^2 - a^2 b^2$$

Η διακρίνουσα $\Delta = 4AB - C^2$, διατηρεί ακριβώς την ίδια τιμή και τις ίδιες ιδιότητες, άρα χαρακτηρίζει την υπερβολή.

Αν μας δοθεί η γενική εξίσωση της υπερβολής (Π.Κ. 19) μπορούμε να βρούμε τη γωνία με την οποία πρέπει να την περιστρέψουμε ώστε οι άξονες συμμετρίας της να είναι παράλληλοι προς τους άξονες συντεταγμένων. Όντως, παρατηρούμε ότι

$$A - B = (b^2 + a^2) \cos 2\varphi$$

και επίσης ότι

$$C = (b^2 + a^2) \sin 2\varphi$$

οπότε τελικά

$$\tan 2\varphi = \frac{C}{A - B}.$$

Γνώση της γωνίας φ προσφέρει αμέσως τα a b από τα A B C ανωτέρω.

Π.Κ. 3.2.3 «Πολική» εξίσωση της υπερβολής (Π.Κ. 17)

Η (Π.Κ.17) μπορεί να γραφεί σε μία εναλλακτική κομψή μορφή με εκμετάλλευση των λεγόμενων υπερβολικών τριγωνομετρικών αριθμών, οι οποίοι άλλωστε πήραν το όνομά τους από αυτήν. Όντως, είθισται να ορίζεται το υπερβολικό συνημίτονο για κάθε $t \in R$ μέσω της σχέσεως

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

ενώ το υπερβολικό ημίτονο μέσω της

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Με ευθύγραμμες πράξεις αποδεικνύονται οι κάτωθι σχέσεις.

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

$$\sinh(2t) = 2 \sinh(t) \cosh(t)$$

$$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t)$$

Με χρήση των ανωτέρω η εξίσωση της υπερβολής (Π.Κ. 17), πρώτα για το θετικό κλάδο μετασχηματίζεται εάν χρησιμοποιήσουμε το $t \in R$ τέτοιο ώστε

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = e^t$$

και

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = e^{-t}$$

ή ισοδυνάμως

$$\frac{x}{a} = \cosh(t) \text{ και } \frac{y}{b} = \sinh(t).$$

Άρα οι ισοδύναμες με την (Π.Κ. 17) εναλλακτικές εξισώσεις είναι οι

$$x = a \cosh(t) \quad (\text{Π.Κ. 23})$$

$$y = b \sinh(t)$$

Αναλόγως για τον αρνητικό κλάδο της υπερβολής οι εξισώσεις γίνονται

$$x = -a \cosh(t) \quad (\text{Π.Κ. 24})$$

$$y = b \sinh(t)$$

Π.Κ. 3.2.4 Ασύμπτωτες της υπερβολής

Εάν στην εξίσωση της υπερβολής (Π.Κ. 20) διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με $(x - x_0)^2$ και αφήσουμε το x να τείνει στο άπειρο, λαμβάνουμε

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} & \text{για } (y - y_0)(x - x_0) > 0 \\ -\frac{b}{a} & \text{για } (y - y_0)(x - x_0) < 0 \end{cases} \quad (\text{Π.Κ. 25})$$

Ισοδυνάμως, καθώς $x, y \rightarrow \infty$ η υπερβολή και στους δύο κλάδους της τείνει να ταυτιστεί ασυμπτωτικά με δύο ευθείες που ονομάζονται ασύμπτωτες της υπερβολής.

Π.Κ. 3.3 Περί Παραβολής

Π.Κ. 3.3.1 Η βασική ιδιότητα της Παραβολής

Ζητείται να ευρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ τα οποία ισαπέχουν από μια ευθεία δ , που ονομάζεται διευθετούσα και από μια εστία E . Ο γεωμετρικός αυτός τόπος ονομάζεται παραβολή.

Λύση

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε σα διευθετούσα τον άξονα των x και σαν εστία ένα σημείο επί του άξονος των y έστω το $E(0, y_0)$. Τότε η απόσταση του τυχόντος σημείου $M(x, y)$ του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου από τη διευθετούσα είναι προφανώς $|y|$, ενώ $ME = \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}$.

Άρα, το τυχόν σημείο της παραβολής θα ικανοποιεί τη σχέση

$$y^2 = x^2 + (y - y_0)^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2y_0} + \frac{y_0}{2}. \quad (\text{Π.Κ. 26})$$

Π.Κ. 3.3.2 Η γενική εξίσωση της παραβολής

Η εξίσωση της παραβολής με εστία την $E(x_0, y_0)$ και διευθετούσα στο $y = y_1$ με $y_1 \neq y_0$ είναι προφανώς η

$$y - y_1 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \Leftrightarrow y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται επίσης

$$y = ax^2 + bx + c \quad (\text{Π.Κ. 27})$$

όπου

$$a = \frac{1}{2(y_0 - y_1)}, \quad b = \frac{x_0}{y_1 - y_0}, \quad c = \frac{x_0^2 + y_0^2 - y_1^2}{2(y_0 - y_1)}.$$

Ανάλογα με προηγουμένως προκύπτει ότι η γενική εξίσωση της παραβολής με τυχούσα εστία και διευθετούσα με τυχούσα διεύθυνση είναι ίδιας μορφής με αυτήν της ελλείψεως και της υπερβολής και είναι η

$$AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F = 0 \quad (\text{Π.Κ. 28})$$

όπου

$$A = a \cos^2 \varphi$$

$$B = a \sin^2 \varphi$$

$$C = 2a \cos \varphi \sin \varphi$$

$$D = b \cos \varphi + \sin \varphi$$

$$E = b \sin \varphi - \cos \varphi$$

$$F = c$$

Οι ανωτέρω εκφράσεις των A, B, C, D, E, F λαμβάνονται εάν στην εξίσωση (Π.Κ. 27) τα (x, y) στραφούν κατά φ και μετασχηματιστούν στα (X, Y) .

Η διακρίνουσα $\Delta = 4AB - C^2$, είναι πάντα μηδέν. Ισχύει δε πάλι

$$\tan 2\varphi = \frac{C}{A - B} \quad (\text{Π.Κ. 29})$$

Π.Κ. 3.4 Η Έλλειψη η Υπερβολή και η Παραβολή είναι τομές ορθού κώνου με επίπεδο.

Απόδειξη για την υπερβολή (μια ειδική περίπτωση)

Χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι ο άξονας του ορθού κώνου συμπίπτει με τον άξονα των z , θα αποδείξουμε δε την (Π.Κ. 17) αντικαθιστώντας τη μεταβλητή x με τη μεταβλητή z .

Πράγματι, εάν γ είναι η γωνία μιας γενέτειρας του κώνου με τον άξονα των z τότε οι εξισώσεις αυτού του ορθού κώνου σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι οι

$$x = r \sin \gamma \cos \varphi$$

$$y = r \sin \gamma \sin \varphi \quad (\text{Π.Κ. 30})$$

$$z = r \cos \gamma$$

Εάν τμήσουμε αυτό τον κώνο με ένα επίπεδο παράλληλο προς τον άξονα των z , π.χ. χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας με το επίπεδο $x = x_1$ λαμβάνουμε

$$r^2 \cos^2 \varphi = \frac{x_1^2}{\sin^2 \gamma}$$

$$\frac{y^2}{\sin^2 \gamma} = r^2 \sin^2 \varphi = r^2 - r^2 \cos^2 \varphi = \frac{z^2}{\cos^2 \gamma} - \frac{x_1^2}{\sin^2 \gamma} \Leftrightarrow \frac{z^2}{\cos^2 \gamma} - \frac{y^2}{\sin^2 \gamma} = \frac{x_1^2}{\sin^2 \gamma} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Όπου $b = x_1$, $a = x_1 \cot \gamma$ ο.ε.δ.

Γενική περίπτωση.

Όπως και στην περίπτωση της υπερβολής εκφράζουμε τις συντεταγμένες του κώνου με τη βοήθεια των σφαιρικών συντεταγμένων μέσω των εξισώσεων (Π.Κ. 30). Ακολούθως, χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ένα επίπεδο, έστω (E), παράλληλο προς τον άξονα των x το οποίο τέμνει το xy επίπεδο στην ευθεία $y = y_0$, $y_0 < 0$. Έστω επίσης ότι το (E) σχηματίζει μια διέδρο γωνία β , με το xy επίπεδο και ότι χωρίς βλάβη της γενικότητας $0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Τότε για την εξίσωση του (E) θα ισχύει η σχέση.

$$z = (y - y_0) \tan \beta \quad (\text{Π.Κ. 31})$$

Εν συνεχεία διαλέγουμε άξονες επί του (E), έστω X και Y. Επιλέγουμε τον X άξονα ούτως ώστε να ταυτίζεται με την τομή του (E) με το επίπεδο xy , τον δε Y ώστε να συμπίπτει με την ευθεία $y = y_0$. Για τους X και Y ισχύει

$$X = x, \quad Y = \frac{z}{\sin \beta} \quad (\text{Π.Κ. 32})$$

Τα σημεία τομής του (E) με τον κώνο ικανοποιούν ταυτόχρονα τις εξισώσεις (Π.Κ. 30) και (Π.Κ. 32) και κατά συνέπεια ισχύουν οι σχέσεις.

$$r = \frac{Y \sin \beta}{\cos \gamma}$$

$$r \cos \varphi = \frac{X}{\sin \gamma}$$

$$r \sin \varphi = \frac{r \cos \gamma + y_0 \tan \beta}{\sin \gamma \tan \beta}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τις σχέσεις αυτές, αθροίζοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες και εξισώνοντας τα προκύπτοντα δεύτερα μέλη λαμβάνουμε τη σχέση

$$Y^2 \left(\frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \gamma} - \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \gamma} \right) + X^2 \left(-\frac{1}{\sin^2 \gamma} \right) + Y \left(\frac{2y_0 \cos \beta}{\sin^2 \gamma} \right) - \frac{y_0^2}{\sin^2 \gamma} = 0 \quad (\text{Π.Κ 33})$$

Περίπτωση παραβολής

Αν το (E) είναι παράλληλο προς τη γενέτειρα του κώνου τότε ισχύει

$$\beta - \gamma = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + \gamma$$

(στο yz επίπεδο ισχύει $\gamma < 0$) και κατά συνέπεια ισχύει

$$\sin \beta = \cos \gamma \quad \text{και} \quad \cos \beta = -\sin \gamma$$

αλλά τότε ο συντελεστής του Y^2 στη σχέση (Π.Κ. 33) ισούται με το μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε εξίσωση παραβολής. ο.ε.δ.

Περίπτωση έλλειψης

Αν το επίπεδο (E) δεν είναι παράλληλο στη γενέτειρα και ισχύει $0 < \beta < \gamma + \frac{\pi}{2}$

τότε αυτό τέμνει μόνο το άνω ήμισυ του κώνου. Επειδή το ημίτονο είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ τότε ισχύει $0 < \sin \beta < \cos \gamma \Rightarrow \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \gamma} < 1$

Εντελώς ανάλογα και αφού στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ το συνημίτονο είναι γνησίως

φθίνουσα συνάρτηση ισχύει $1 > \cos \beta > -\sin \gamma$. Συνεπώς $\frac{\cos \beta}{|\sin \gamma|} > 1 \Rightarrow \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \gamma} > 1$

Από τις δύο τελευταίες κλασματικές ανισότητες προκύπτει για τον συντελεστή του Y^2 στη σχέση (Π.Κ. 33) ότι $\frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \gamma} - \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \gamma} < 0$. Παρατηρούμε επίσης ότι ο συντελεστής του X^2 στην ίδια σχέση είναι πάντα αρνητικός. Άρα σύμφωνα με τη γενική εξίσωση της κωνικής (Π.Κ. 14) και επειδή η διακρίνουσα $\Delta = 4AB$ είναι πάντα θετική, η τομή του (E) με το άνω ήμισυ του κώνου είναι έλλειψη. ο.ε.δ.

Περίπτωση υπερβολής

Αν το επίπεδο (E) δεν είναι παράλληλο στη γενέτειρα και ισχύει $\beta - \gamma > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} + \gamma < \beta < \frac{\pi}{2}$ τότε αυτό τέμνει και τα δύο ημίσεια του κώνου. Επειδή το ημίτονο είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ τότε ισχύει

$$\cos \gamma < \sin \beta \leq 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \gamma} > 1$$

Εντελώς ανάλογα και αφού στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ το συνημίτονο είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ισχύει $-\sin \gamma > \cos \beta \geq 0$. Συνεπώς $\frac{\cos \beta}{|\sin \gamma|} < 1 \Rightarrow \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \gamma} < 1$.

Από τις δύο τελευταίες κλασματικές ανισότητες προκύπτει για τον συντελεστή του Y^2 στη σχέση (Π.Κ. 33) ότι $\frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \gamma} - \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \gamma} > 0$. Παρατηρούμε επίσης ότι ο συντελεστής του X^2 στην ίδια σχέση είναι πάντα αρνητικός. Άρα σύμφωνα με τη γενική εξίσωση της κωνικής (Π.Κ. 14) και επειδή η διακρίνουσα $\Delta = 4AB$ είναι πάντα αρνητική, η τομή του (E) με τον κώνο είναι υπερβολή. ο.ε.δ.

Π.Σ. Θεμελιώδεις έννοιες και θεωρήματα σχετικά με συγκεκριμένες στατιστικές κατανομές και έλεγχο στατιστικών υποθέσεων.

Π.Σ. 1 Κανονική κατανομή (Normal Distribution)

Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται ότι ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 , συμβολικά $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σππ) $f(x)$ είναι της μορφής

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R \quad (\text{Π.Σ.1})$$

Ως γνωστόν γι' αυτή τη συνάρτηση έχει αποδειχθεί ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Θα επιβεβαιώσουμε ότι αυτή η σππ έχει πράγματι μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 .

Όντως, για κάθε τυχαία μεταβλητή X με σππ $f(x)$ ισχύει

$$\text{μέση τιμή } X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu + \mu) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu) f(x) dx + \mu,$$

οπότε με την αντικατάσταση $z = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \Rightarrow dz = -\frac{(x-\mu)dx}{\sigma^2}$ προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu) f(x) dx = 2 \int_{\mu}^{+\infty} (x - \mu) f(x) dx = -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\infty} e^z dz = 0.$$

Άρα τελικώς αποδείξαμε ότι: μέση τιμή $X = \mu$.

Αναλόγως ισχύει

Διασπορά $X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$, οπότε με την αντικατάσταση $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$, λαμβάνω

Διασπορά $X =$

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z(e^{-\frac{z^2}{2}})' dz = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[z(e^{-\frac{z^2}{2}}) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right\} =$$

$$-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (0 - \sqrt{2\pi}) = \sigma^2$$

Άρα τελικώς αποδείξαμε ότι: διασπορά $X = \sigma^2$

Τυπική κανονική κατανομή

Εάν η τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διασπορά ένα, δηλαδή $Z \sim N(0,1)$, τότε αυτή λέγεται τυπική κανονική κατανομή (standard normal distribution - *sn*). Η μεγάλη χρησιμότητα μια τέτοιας κατανομής έγκειται στο γεγονός ότι οι πιθανότητες αναφορικά με οποιαδήποτε κανονική κατανομή, μπορούν να υπολογιστούν βάσει των πιθανοτήτων της Z . Πράγματι έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Τότε η πιθανότητα $P(X \leq t)$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω της Z ως εξής:

$$P(X \leq t) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{t - \mu}{\sigma}\right). \text{ Αλλά εάν χρησιμοποιήσω τον τύπο της κανονικής}$$

κατανομής (Π.Σ.1) και τον ορισμό της πιθανότητας P έχω:

$$P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (\text{Π.Σ.2})$$

Με την αντικατάσταση $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ στο τελευταίο ολοκλήρωμα λαμβάνουμε

$$P(X \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = P(Z \leq \frac{t-\mu}{\sigma}) \quad (\text{Π.Σ.3})$$

Άρα η γνώση των πιθανοτήτων της Z παρέχει αμέσως γνώση των πιθανοτήτων της X μέσω του ανωτέρου τύπου. Γι' αυτό το λόγο όλοι οι στατιστικοί πίνακες και οι

περισσότερες βάσεις δεδομένων στους υπολογιστές υπολογίζουν και χρησιμοποιούν ως τυχαία μεταβλητή αναφοράς την Z .

Π.Σ. 2 Κατανομή χ^2

Έστω μια τυπική κανονική κατανομή, $X \sim N(0,1)$ και έστω ένας πληθυσμός, μία ιδιότητα/ποσότητα I του οποίου ακολουθεί την X . Δειγματοληπτούμε τυχαία n άτομα του πληθυσμού και μετρούμε την I για κάθε άτομο οπότε λαμβάνουμε n μετρήσεις-ποσότητες $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$. Υπολογίζουμε την ποσότητα

$$\chi_{n,1}^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \dots + \chi_n^2. \quad (\text{Π.Σ.4})$$

Δειγματοληπτούμε τυχαία με επανάθεση, για δεύτερη φορά το συγκεκριμένο πληθυσμό, μετρούμε πάλι την I των ατόμων του δείγματος, οπότε και λαμβάνουμε μια νέα ποσότητα $\chi_{n,2}^2$. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία για i -οστή φορά οπότε και λαμβάνουμε την ποσότητα $\chi_{n,i}^2$. Αφήνοντας το i να τείνει στο άπειρο, λαμβάνουμε μια στατιστική κατανομή των $\chi_{n,i}^2$, η οποία συμβολίζεται X_n^2 και ονομάζεται κατανομή X -τετράγωνο (chi-square) με n βαθμούς ελευθερίας. Για να γράψουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X -τετράγωνο, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση Γάμα, η οποία είναι η αναλυτική επέκταση του $n!$ και δίνεται από τον τύπο

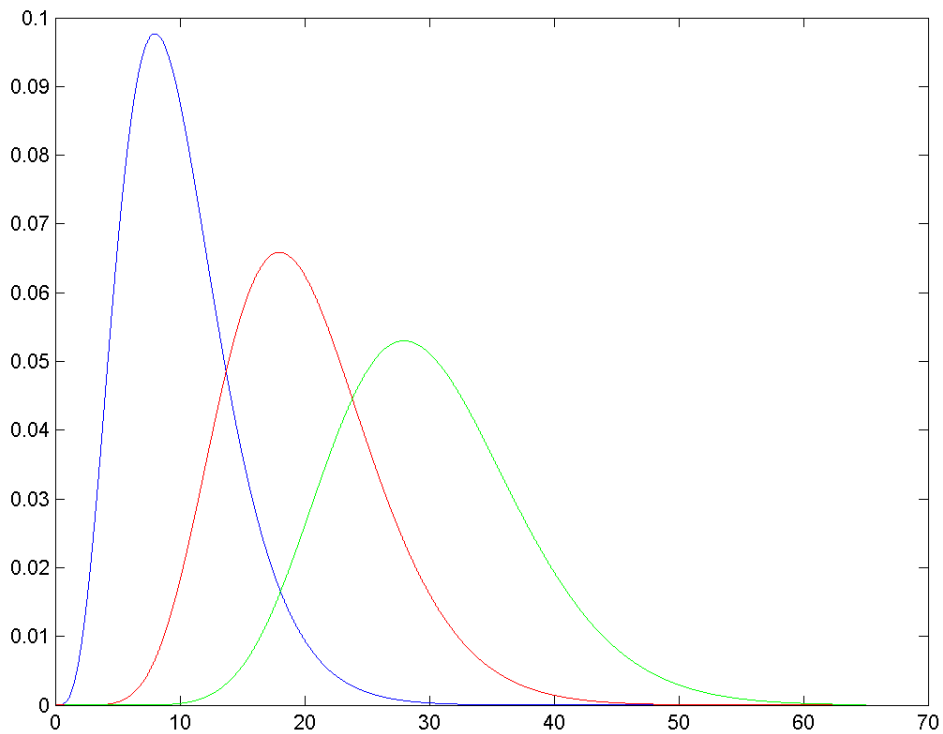
$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (n > 0) \quad (\text{Π.Σ.5})$$

Πράγματι όταν το n είναι ακέραιος $\Gamma(n) = (n-1)!$ διότι προφανώς $\Gamma(1) = 1$, ενώ εύκολα αποδεικνύεται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ότι $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής X -τετράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας έχει ως εξής:

$$f_{x^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{Π.Σ.6})$$

γραφική παράσταση της οποίας παρατίθεται κατωτέρω για διάφορα n.



Εικόνα Π.Σ. 1

Γραφική παράσταση της (σππ) μιας κατανομής χ^2 για διάφορους βαθμούς ελευθερίας. Με μπλε χρώμα αναπαρίσταται η σππ με 10 βαθμούς ελευθερίας με κόκκινο χρώμα με 20 βαθμούς και με πράσινο χρώμα με 30 βαθμούς

Σημειώνεται ότι η δειγματική διασπορά S_n^2 ενός τυχαίου δείγματος n ατόμων όταν ο πληθυσμιακός μέσος μ είναι γνωστός δίνεται από τον τύπο

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \quad (\text{Π.Σ.7})$$

Εάν, επιπλέον, ο πληθυσμός αυτός ακολουθεί κανονική κατανομή, τότε, η ποσότητα

$$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

ακολουθεί κατανομή X – τετράγωνο με n

βαθμούς ελευθερίας δεδομένου ότι όλες οι ποσότητες $\frac{x_i - \mu}{\sigma}$ ακολουθούν $N(0,1)$.

Εάν ο πληθυσμιακός μέσος μ είναι άγνωστος τότε η δειγματική διασπορά δίνεται από τον τύπο

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{Π.Σ.8})$$

Το $(n-1)$ στον παρονομαστή εισάγεται αντί του n για να αποφεύγεται η πόλωση κατά τη στατιστική επεξεργασία των δειγμάτων.

Έστω η τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί την $N(\mu, \sigma^2)$. Παρατηρούμε ότι η ποσότητα

$$Y^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \quad (\text{Π.Σ.9})$$

είναι άθροισμα των τετραγώνων των ποσοτήτων $y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$. Επειδή, δε, η πληθυσμιακή μέση τιμή του y_i είναι μηδέν ενώ η πληθυσμιακή διασπορά του y_i τείνει στο ένα όταν $n \rightarrow \infty$ προκύπτει ότι και τα y_i οριακά ακολουθούν τυπική κανονική κατανομή. Η Y^2 είναι τελικά μια κατανομή X – τετράγωνο, αλλά με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας λόγω του ενός περιορισμού που εισάγει η εξάρτηση του \bar{x} από τα x_i . Άρα η δειγματική διασπορά ενός κανονικού πληθυσμού διασυνδέεται άμεσα με την κατανομή X – τετράγωνο.

Π.Σ. 3 Κατανομή t ή Student

Έστω μια κανονική κατανομή, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και έστω ένας πληθυσμός, μία ιδιότητα/ποσότητα I του οποίου ακολουθεί την X . Δειγματοληπτούμε τυχαία n άτομα του πληθυσμού και μετρούμε την I για κάθε άτομο οπότε λαμβάνουμε n μετρήσεις-ποσότητες $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$. Υπολογίζουμε το δειγματικό μέσο αυτών

$$\bar{\chi}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_i, \text{ όπου ο κάτω δείκτης στο } \bar{\chi}_1 \text{ υποδηλώνει ότι αυτή είναι η πρώτη}$$

δειγματοληψία που πραγματοποιήσαμε. Επαναλαμβάνουμε για δεύτερη φορά την τυχαία δειγματοληψία οπότε και λαμβάνουμε ένα νέο δειγματικό μέσο $\bar{\chi}_2$. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία, οπότε κατά την i -οστή τυχαία δειγματοληψία λαμβάνουμε το δειγματικό μέσο $\bar{\chi}_i$. Αφήνοντας το i να τείνει στο άπειρο, λαμβάνουμε μια κατανομή \bar{X} των $\bar{\chi}_i$. Η κατανομή αυτή περιγράφεται μέσω της ποσότητας

$$Z = \frac{\bar{\chi} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (\text{Π.Σ.10})$$

η οποία ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή.

Εάν η πληθυσμιακή διασπορά σ είναι άγνωστη τότε η κατανομή των $\bar{\chi}$ περιγράφεται από την ποσότητα

$$t = \frac{\bar{\chi} - \mu}{S / \sqrt{n}} \quad (\text{Π.Σ.11})$$

η οποία ακολουθεί κατανομή t ή Student με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Η κατανομή Student n βαθμών ελευθερίας έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την κάτωθι:

$$f_{t,n}(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (\text{Π.Σ.12})$$

Π.Σ. 4. Έλεγχος υποθέσεων σχετικών με πληθυσμιακές μέσες τιμές

Π.Σ.4.1 Υποθέσεις για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού από ένα δείγμα του

α) Όταν η πληθυσμιακή διασπορά είναι γνωστή

Έστω ότι δειγματοληπτούμε τυχαία N άτομα από ένα κανονικό πληθυσμό του οποίου γνωρίζουμε τη διασπορά και έστω $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ η μέση τιμή του δείγματος.

Διατυπώνουμε την υπόθεση ότι η κανονική κατανομή από την οποία δειγματοληπτήσαμε έχει μέση τιμή μ .

Υπάρχει ένα κριτήριο για να αποδεχθούμε ή να απορρίψουμε αυτή την υπόθεση το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

Κριτήριο ελέγχου υπόθεσης 1

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την ορθότητα της υπόθεσης:

$$H_0 : \text{η μέση τιμή του πληθυσμού είναι } \mu$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \text{η μέση τιμή του πληθυσμού δεν είναι } \mu$$

Για το σκοπό αυτό, υπολογίζουμε την τιμή της ποσότητας

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{N}}$$

και την συγκρίνουμε με δύο προκαθορισμένες συμμετρικές τιμές $-t_\alpha$ και t_α του πεδίου ορισμού της τυπικής κανονικής κατανομής. Εάν η τιμή του Z ανήκει στο διάστημα

$(-t_\alpha, t_\alpha)$ τότε αποδεχόμαστε την H_0 με ένα βαθμό εμπιστοσύνης $P = \int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} f(z) dz$, όπου

$f(z)$ η σππ της τυπικής κανονικής κατανομής. Στην αντίθετη περίπτωση απορρίπτουμε την H_0 ή ισοδυνάμως αποδεχόμαστε την εναλλακτική της H_1 , με τον ίδιο βαθμό εμπιστοσύνης.

Η ιδέα που βρίσκεται πίσω από αυτό το κριτήριο είναι αρκετά ευθύγραμμη. Πράγματι, η ποσότητα Z ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή ([4.1],[4.2]), εάν δε επιλέξουμε τις τιμές $-t_\alpha, t_\alpha$ ούτως ώστε ο μεγαλύτερος όγκος του κανονικού πληθυσμού να βρίσκεται στο μεταξύ τους διάστημα, τότε θεωρούμε ότι είναι εξαιρετικά απίθανο να πάρουμε ένα δείγμα N ατόμων από αυτό τον πληθυσμό το οποίο να έχει μέση δειγματική τιμή \bar{X} τέτοια ώστε το Z να είναι εκτός του διαστήματος $(-t_\alpha, t_\alpha)$. Η πιθανότητα το Z να βρεθεί εκτός του διαστήματος αυτού είναι

$$\alpha = 2 \int_{t_\alpha}^{\infty} f(z) dz \quad (\text{Π.Σ.13})$$

όπου $f(z)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής όπως αυτή ορίστηκε ανωτέρω. Είναι προφανές ότι όσο μικρότερο είναι το α , τόσο μεγαλύτερη είναι η δύναμη αυτού του τεστ με την έννοια ότι τόσο περισσότερο είμαστε σίγουροι ότι η H_0 δεν ισχύει εάν βρεθούμε εκτός των ορίων $-t_\alpha, t_\alpha$. Το α λέγεται συνήθως επίπεδο σημαντικότητας και μερικές τυπικές τιμές του είναι οι 0.05, 0.01, 0.001 και 0.0001.

β) Όταν η πληθυσμιακή διασπορά δεν είναι γνωστή

Έστω ότι δειγματοληπτούμε τυχαία N άτομα από ένα κανονικό πληθυσμό του οποίου δεν γνωρίζουμε τη διασπορά και έστω $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ η μέση τιμή του δείγματος. Διατυπώνουμε την υπόθεση ότι η κανονική κατανομή από την οποία δειγματοληπήσαμε έχει μέση τιμή μ .

Υπάρχει και σε αυτή την περίπτωση ένα κριτήριο για να αποδεχθούμε ή να απορρίψουμε αυτή την υπόθεση το οποίον διατυπώνεται ως εξής:

Κριτήριο ελέγχου υπόθεσης 2

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την ορθότητα της υπόθεσης:

$$H_0 : \text{η μέση τιμή του πληθυσμού είναι } \mu$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \text{η μέση τιμή του πληθυσμού δεν είναι } \mu$$

Για το σκοπό αυτό, υπολογίζουμε την τιμή της ποσότητας

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{N}}$$

όπου $S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$ η τυπική απόκλιση του δείγματος.

Την ποσότητα t τη συγκρίνουμε με δύο προκαθορισμένες συμμετρικές τιμές $-t_\alpha$ και t_α του πεδίου ορισμού της κατανομής Student με $N-1$ βαθμούς ελευθερίας. Εάν η τιμή του t κείται εντός του διαστήματος $(-t_\alpha, t_\alpha)$ τότε αποδεχόμαστε την H_0 . Αλλιώς, απορρίπτουμε την H_0 ή ισοδυνάμως αποδεχόμαστε την εναλλακτική της H_1 .

Πάλι, η ιδέα που βρίσκεται πίσω από αυτό το κριτήριο είναι αρκετά ευθύγραμμη. Η ποσότητα t ακολουθεί κατανομή Student με $N-1$ βαθμούς ελευθερίας ([4.1],[4.2]), εάν δε επιλέξουμε τις τιμές $-t_\alpha, t_\alpha$ ούτως ώστε ο μεγαλύτερος όγκος του πληθυσμού Student να βρίσκεται στο μεταξύ τους διάστημα, τότε θεωρούμε ότι είναι εξαιρετικά απίθανο να πάρουμε ένα δείγμα N ατόμων από αυτό τον πληθυσμό το οποίο να έχει μέση δειγματική τιμή \bar{X} τέτοια ώστε το t να είναι εκτός του διαστήματος $(-t_\alpha, t_\alpha)$. Η

πιθανότητα το t να βρεθεί εκτός του διαστήματος αυτού είναι $\alpha = 2 \int_{t_\alpha}^{\infty} f(t) dt$ όπου

$f(t)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Student με $N-1$ βαθμούς ελευθερίας όπως αυτή ορίστηκε προηγουμένως. Είναι προφανές ότι όσο μικρότερο είναι το α , τόσο μεγαλύτερη είναι η δύναμη αυτού του τεστ. Το α λέγεται συνήθως επίπεδο σημαντικότητας όπως και προηγουμένως.

Π.Σ. 4.2 Υποθέσεις που αφορούν στη διαφορά των μέσων δύο πληθυσμών.

α) Όταν οι πληθυσμιακές διασπορές είναι γνωστές

Έστωσαν δύο κανονικοί πληθυσμοί $P_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $P_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ όπου τα μ_1, μ_2 είναι άγνωστα ενώ τα σ_1, σ_2 είναι γνωστά. Δειγματοληπτούμε τυχαία από τον πληθυσμό P_1 ένα δείγμα N_1 ατόμων και ανεξάρτητα, από τον P_2 ένα δείγμα N_2 ατόμων. Έστωσαν $\bar{x} = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} x_i$ και $\bar{y} = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} y_i$ οι μέσες τιμές των δύο δειγμάτων αντίστοιχα. Διατυπώνουμε την υπόθεση ότι οι δύο κανονικοί πληθυσμοί έχουν διαφορά μέσων τιμών μια γνωστή ποσότητα $\delta\mu = \mu_1 - \mu_2$. Υπάρχει ένα κριτήριο για να αποδεχθούμε ή να απορρίψουμε την υπόθεση αυτή το οποίον διατυπώνεται ως εξής:

Κριτήριο ελέγχου υπόθεσης 3

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την ορθότητα της υπόθεσης:

$$H_0 : \text{οι δύο πληθυσμοί έχουν διαφορά μέσων τιμών } \delta\mu$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \text{οι δύο πληθυσμοί δεν έχουν διαφορά μέσων τιμών } \delta\mu$$

Για το σκοπό αυτό, υπολογίζουμε την τιμή της ποσότητας

$$Z = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}} \quad (\text{Π.Σ.14})$$

η οποία ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή και τη συγκρίνουμε με δύο προκαθορισμένες συμμετρικές τιμές $-t_\alpha$ και t_α του πεδίου ορισμού αυτής της κατανομής. Εάν η τιμή του Z ανήκει στο διάστημα $(-t_\alpha, t_\alpha)$ τότε αποδεχόμαστε την H_0 . Αλλιώς, απορρίπτουμε την H_0 ή ισοδυνάμως αποδεχόμαστε την εναλλακτική της H_1 .

Η συλλογιστική πάνω στην οποία βασίζεται το κριτήριο αυτό είναι η ίδια με αυτήν που περιεγράφη στα κριτήρια 1 και 2, επειδή η ποσότητα Z ακολουθεί πάλι τυπική κανονική κατανομή. Η πιθανότητα το Z να βρεθεί εκτός του διαστήματος $(-t_\alpha, t_\alpha)$ είναι πάλι $\alpha = 2 \int_{t_\alpha}^{\infty} f(t) dt$ όπου $f(t)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής.

β) Όταν οι πληθυσμιακές διασπορές δεν είναι γνωστές

Έστωσαν δύο κανονικοί πληθυσμοί $P_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $P_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ όπου τόσο τα μ_1, μ_2 όσο και τα σ_1, σ_2 είναι άγνωστα και δεν έχουμε καμία πληροφορία για αυτά. Δειγματοληπτούμε τυχαία από τον πληθυσμό P_1 ένα δείγμα N_1 ατόμων και ανεξάρτητα, από τον P_2 ένα δείγμα N_2 ατόμων. Έστωσαν $\bar{x} = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} x_i$ και $\bar{y} = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} y_i$ οι μέσες τιμές των δύο δειγμάτων αντίστοιχα. Διατυπώνουμε την υπόθεση ότι οι δύο κανονικοί πληθυσμοί έχουν διαφορά μέσων τιμών μια γνωστή ποσότητα $\delta\mu = \mu_1 - \mu_2$. Υπάρχει ένα κριτήριο για να αποδεχθούμε ή να απορρίψουμε την υπόθεση αυτή το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

Κριτήριο ελέγχου υπόθεσης 4

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την ορθότητα της υπόθεσης:

$$H_0 : \text{οι δύο πληθυσμοί έχουν διαφορά μέσων τιμών } \delta\mu$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : \text{οι δύο πληθυσμοί δεν έχουν διαφορά μέσων τιμών } \delta\mu$$

Για το σκοπό αυτό, υπολογίζουμε την τιμή της ποσότητας

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}, \quad (\text{Π.Σ.15})$$

$$\text{όπου } S_1 = \sqrt{\frac{1}{N_1 - 1} \sum_{i=1}^{N_1} (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{και} \quad S_2 = \sqrt{\frac{1}{N_2 - 1} \sum_{i=1}^{N_2} (y_i - \bar{y})^2}$$

είναι οι τυπικές αποκλίσεις των δύο δειγμάτων. Η ποσότητα t ακολουθεί κατανομή Student με n βαθμούς ελευθερίας όπου n είναι το ακέραιο μέρος της ποσότητας

$$\frac{\left(\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{N_1}\right)^2}{N_1-1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{N_2}\right)^2}{N_2-1}} \quad (\text{Π.Σ.16})$$

Όταν διατυπώνουμε την υπόθεση ότι η διαφορά των δύο πληθυσμιακών μέσων $\mu_1 - \mu_2$ είναι γνωστή, τότε η τιμή της ποσότητας t στην Π.Σ.15 είναι γνωστή. Την τιμή αυτή τη συγκρίνουμε με δύο προκαθορισμένες συμμετρικές τιμές $-t_\alpha$ και t_α του πεδίου ορισμού της κατανομής Student με n βαθμούς ελευθερίας και εάν αυτή ανήκει στο διάστημα $(-t_\alpha, t_\alpha)$ τότε αποδεχόμαστε την H_0 . Αλλιώς, απορρίπτουμε την H_0 ή ισοδυνάμως αποδεχόμαστε την εναλλακτική της H_1 .

Η συλλογιστική πάνω στην οποία βασίζεται το κριτήριο αυτό είναι η ίδια με αυτήν που περιεγράφη στο κριτήριο 2. Η πιθανότητα το t να βρεθεί εκτός του

διαστήματος $(-t_\alpha, t_\alpha)$ είναι πάλι $\alpha = 2 \int_{t_\alpha}^{\infty} f(t) dt$ όπου $f(t)$ είναι η συνάρτηση

πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Student με n βαθμούς ελευθερίας. Εκ νέου όσο μικρότερη είναι η τιμή του a , τότε εάν το t βρεθεί εκτός του διαστήματος $(-t_\alpha, t_\alpha)$, τόσο περισσότερο βέβαιο είμαστε ότι ισχύει η H_1 δηλαδή ότι η H_0 απορρίπτεται.

Π.Σ. 5 Έλεγχος υποθέσεων κατανομής με τεστ Kolmogorov-Smirnoff

Υποθεθίστω ότι μετράμε μια ιδιότητα ενός πληθυσμού και λαμβάνουμε ένα σύνολο μετρήσεων ως ακολούθως: η μέτρηση χ_1 επιβεβαιώθηκε ν_1 φορές η μέτρηση χ_2 ν_2 φορές και η μέτρηση χ_n ν_n φορές. Χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι τα $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ είναι διατεταγμένα. Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση

ότι οι τιμές της συγκεκριμένης ιδιότητας αυτού του πληθυσμού ακολουθούν μια κατανομή με γνωστή συνάρτηση κατανομής Φ_t (cumulative function). Για το σκοπό αυτό μπορούμε να εφαρμόσουμε το ισχυρό τεστ που αναπτύχθηκε από τους Kolmogorov-Smirnoff και περιγράφεται κατωτέρω. ([4.1],[4.2]).

Όντως ας είναι f_i οι σχετικές συχνότητες εμφάνισης των χ_i , δηλαδή

$$f_i = \frac{V_i}{\sum_{k=1}^n V_k} \quad (\text{Π.Σ.17})$$

Έστωσαν επίσης οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες εμφάνισης F_i όπου

$$F_i = \sum_{j=1}^i f_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Π.Σ.18})$$

Για κάθε τιμή μέτρησης χ_i υπολογίζουμε την τιμή της θεωρητικής συνάρτησης κατανομής $\Phi(\chi_i)$ και εν συνεχεία υπολογίζουμε την ακολουθία διαφορών

$$\Delta_i = |F_i - \Phi(\chi_i)|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{Π.Σ.19})$$

Έστω $D_0 = \sup \{\Delta_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Τότε αποδέχομαι την υπόθεση

H_0 : η ιδιότητα του συγκεκριμένου πληθυσμού έχει συνάρτηση κατανομής Φ_t

εάν $D_0 < D_{n,\alpha}$, όπου $D_{n,\alpha}$ είναι σταθερές, οι ακριβείς τιμές των οποίων καθορίζονται

από το πλήθος του δείγματος $N = \sum_{j=1}^n V_j$ και από το επίπεδο σημαντικότητας α .

Εάν $D_0 \geq D_{n,\alpha}$ τότε η H_0 απορρίπτεται δηλαδή ισοδυνάμως γίνεται δεκτή η εναλλακτική της

H_1 : η ιδιότητα του συγκεκριμένου πληθυσμού δεν έχει συνάρτηση κατανομής Φ_t

Π.Τ. Μία νέα μέθοδος κατάτμησης φωτογραφιών Αρχαίων Τοιχογραφιών και Επιγραφών

Σε αυτό το σημείο περιγράφεται μια πρωτότυπη μέθοδος κατάτμησης εικόνας, η οποία έχει δημοσιευθεί στην εργασία [5.1] και έχει παρουσιασθεί στα πλαίσια της διδακτορικής διατριβής του Δρ. Μιχάλη Έξαρχου [5.3]. Αυτή η μέθοδος κατάτμησης κυρίως στοχεύει στην εξαγωγή όσο το δυνατόν πιο ξεκάθαρων συνόρων μεταξύ περιοχών (περιγράμματα) όταν στη φωτογραφία υπάρχει ανομοιογενής εξασθένιση χρωμάτων, ασαφής υφή, ρωγμές καθώς και πρόσθετα εξωγενή υλικά σε κάθε τοιχογραφία, επιγραφή κλπ.

Σε αυτό το σημείο περιγράφεται μια πρωτότυπη μέθοδος κατάτμησης, η οποία κυρίως στοχεύει στην εξαγωγή όσο το δυνατόν πιο ξεκάθαρων συνόρων μεταξύ περιοχών (περιγράμματα) όταν στη φωτογραφία υπάρχει ανομοιογενής εξασθένιση χρωμάτων, ασαφής υφή, ρωγμές καθώς και πρόσθετα εξωγενή υλικά σε κάθε τοιχογραφία κλπ.

Κατ' αρχήν ορίζουμε την έννοια του «θορύβου λόγω φθοράς» (decay noise), έννοια η οποία περιγράφει την τυχαία φθορά χρώματος και υφής που με τον καιρό δημιουργήθηκε σε κάθε μια εκ των τοιχογραφιών που μελετάμε. Μια απλή μέθοδος προκειμένου να υπολογισθεί αυτή η κατανομή θορύβου (decay noise) λόγω φθοράς, είναι η ακόλουθη: μετατρέπουμε την αρχική έγχρωμη εικόνα της επιγραφής μας σε εικόνα ασπρόμαυρης κλίμακας. Ακολουθώς υπολογίζουμε την ένταση της κλίσης (ανάδελτα)

$$G_f(i, j) = |\Delta_x| + |\Delta_y| = |I(i+1) - I(i)| + |I(j+1) - I(j)| \quad (\text{Π.Τ.1})$$

σε κάθε εικονοστοιχείο (i, j) της εικόνας μας. ([5.3])

Κατόπιν υπολογίζουμε την μέση τιμή E_G και την διασπορά R_G της κλίσης $G_f(i, j)$ και ελέγχουμε τον αριθμό των pixels N_G που κείνται στο διάστημα $(E_G - R_G, E_G + R_G)$. Αν ο αριθμός N_G είναι μικρότερος από ένα σημαντικό ποσοστό P_G ($P_G = 0.8$ για τη συγκεκριμένη εφαρμογή) του συνολικού αριθμού των pixels της εικόνας μας, N , τότε θεωρούμε ότι υπάρχει μια σημαντική παρουσία θορύβου λόγω φθοράς, οπότε πρέπει να εφαρμοσθεί μια ειδική διαδικασία προκειμένου να εξομαλυνθεί το χρώμα στην εκάστοτε τοιχογραφία που επεξεργαζόμαστε. Η διαδικασία αυτή έχει ως εξής. Μεταθέτουμε μια μάσκα διαστάσεων 9×9 pixels σε όλη την έγχρωμη τοιχογραφία μας, έτσι ώστε κάθε φορά ένα pixel της τοιχογραφίας μας να είναι το κέντρο αυτής της μάσκας. Εν συνεχεία αποδίδουμε την μέση τιμή του κόκκινου, του πράσινου και του μπλε χρώματος όλων των pixels της μάσκας μας στο κεντρικό pixel. Κατ' αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνουμε την χρωματική εξομάλυνση μιας εικόνας. Εάν ο N_G είναι μεγαλύτερος ή ίσος του $P_G * N$ τότε αγνοούμε την προαναφερθείσα διαδικασία εξομάλυνσης.

Εν συνεχεία, ορίζουμε ένα κατάλληλο πολυδιάστατο έγχρωμο ιστόγραμμα και εξάγουμε το μέγιστο αυτού σύμφωνα με την παρακάτω διαδικασία:

Υπολογίζουμε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή κάθε χρωματικής συνιστώσας R, G, B για όλα τα pixels της εικόνας της τοιχογραφίας μας, έστωσαν, $R_m, R_M, G_m, G_M, B_m, B_M$

και διαιρούμε καθένα από τα διαστήματα $[R_m, R_M], [G_m, G_M], [B_m, B_M]$ σε p υποδιαστήματα $S_X^i, i = 1, 2, \dots, p, X = R, G, B$ μήκους $l_X = (X_M - X_m)/p$.

Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο όλων αυτών των μονοδιάστατων διαστημάτων και κατ' αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε μια τρισδιάστατη διαμέριση του παραλληλεπίπεδου $[R_m, R_M] \times [G_m, G_M] \times [B_m, B_M]$. Εν συνεχεία, ταξινομούμε όλα τα pixels της εικόνας μας μέσα σ' αυτά τα τρισδιάστατα διαστήματα με έναν ευθύγραμμο τρόπο: έστω ένα pixel χρώματος R, G, B , τότε το pixel αυτό ταξινομείται στο τρισδιάστατο διάστημα

$I_{i,j,k}$ αν και μόνον αν $R \in S_R^i$ και $G \in S_G^j$ και $B \in S_B^k$. Παρατηρήθηκε ότι, η τιμή $p = 32$, έδωσε πολύ καλά αποτελέσματα για τις τοιχογραφίες και τις επιγραφές.

Ακολουθώντας, μετράμε τον αριθμό των pixels $M_{i,j,k}$ που ανήκουν σε κάθε κυψέλη $I_{i,j,k}$ και εντοπίζουμε το τοπικό μέγιστο του $M_{i,j,k}$, $i, j, k = 1, 2, \dots, p$ που αντιστοιχεί, όμως, σ' ένα αριθμό pixels μεγαλύτερο από ένα συγκεκριμένο κατώφλι TH_M . Για την συγκεκριμένη εφαρμογή και για την επιλεγείσα ανάλυση της εικόνας θέσαμε $TH_M = 100$. Για κάθε τέτοιο τοπικό μέγιστο, έστω το (a, b, c) θεωρούμε την «επεκτεταμένη» κυψέλη

$$E_{C(i,j,k)} = \bigcup_{i=a-1}^{a+1} \bigcup_{j=b-1}^{b+1} \bigcup_{k=c-1}^{c+1} I_{i,j,k}. \quad (\text{Π.Τ.2})$$

Θεωρούμε ότι το σύνολο των pixels που ανήκουν σε αυτή την «επεκτεταμένη» κυψέλη είναι μια πρώτη προσέγγιση μιας περιοχής της εικόνας. Παρατηρήσαμε ότι μέσω αυτής της διαδικασίας μπορούμε να λάβουμε μια κλάση περιοχών $E_{C(i,j,k)}$ που πιθανώς αλληλοεπικαλύπτονται, πλην όμως δεν καλύπτουν ολόκληρη την έγχρωμη εικόνα.

Ακολουθώντας, κάνουμε την εύλογη παραδοχή ότι, σε μια μονοχρωματική περιοχή, οι χρωματικές διαβαθμίσεις μπορούν να θεωρηθούν τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν μια κανονική κατανομή. Βασιζόμενοι σ' αυτήν την υπόθεση, μπορούμε να επεκτείνουμε τις περιοχές τις οποίες θεωρήσαμε προηγούμενα μέσω της παρακάτω διαδικασίας:

- Υπολογίζουμε την μέση τιμή μ_X και την διασπορά σ_X , με $X = R, G, B$ των τριών χρωματικών συντεταγμένων R, G, B σε κάθε σύνολο pixels $E_{C(i,j,k)}$ που έχει οριστεί προηγουμένως.

- Αφού το καθοριστικά μεγαλύτερο μέρος του πληθυσμού μιας κανονικής κατανομής κείται στο τρισδιάστατο διάστημα

$$J = [\mu_R - 3.12\sigma_R, \mu_R + 3.12\sigma_R] \times [\mu_G - 3.12\sigma_G, \mu_G + 3.12\sigma_G] \times [\mu_B - 3.12\sigma_B, \mu_B + 3.12\sigma_B]$$

(σχέση Π.Τ.3)

τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αν περισσότερα pixels από αυτά που ανήκουν στο $E_{C(i,j,k)}$ ανήκουν στην εν λόγω περιοχή, τα εν λόγω pixels έχουν χρωματικές συντεταγμένες σε ένα αντίστοιχο διάστημα $J_{(i,j,k)}$.

- Με αυτό τον τρόπο, επεκτείνουμε την περιοχή $E_{C(i,j,k)}$, σε μια ευρύτερη, η οποία περιλαμβάνει όλα τα pixels που έχουν χρωματικές συντεταγμένες στο διάστημα $J_{(i,j,k)}$.

Η ανωτέρω διαδικασία γεννά μια κλάση ευρύτερων περιοχών $J_{(i,j,k)}$, οι οποίες έχουν ακόμα μεγαλύτερη πιθανότητα αλληλοκάλυψης.

Λαμβάνοντας μια μη επικαλυπτόμενη κατάτμηση εικόνας

Ο τελικός στόχος είναι να ταξινομήσουμε κάθε pixel της εικόνας μας σε μία και μόνη περιοχή. Προκειμένου να το πετύχουμε αυτό, ορίζουμε αρχικά μια απόσταση d ενός pixel P , με χρωματικές συντεταγμένες R_P, G_P, B_P , από μια τυχαία περιοχή U με μέσες τιμές των χρωματικών συντεταγμένων R, G, B των pixels, μ_X , $X = R, G, B$ μέσω της σχέσης:

$$d_{(p,u)} = |(\mu_R - R_P)| + |(\mu_G - G_P)| + |(\mu_B - B_P)| \quad (\text{Π.Τ.4})$$

Τώρα, αν ένα pixel ταξινομείται σε περισσότερες από μια περιοχές, έστωσαν αυτές U_1, U_2, \dots, U_n μέσω της παραπάνω διαδικασίας, τότε κατατάσσουμε το pixel αυτό στην περιοχή από την οποία έχει την μικρότερη απόσταση, π.χ. $d_{(p,U_k)} = \min_{j=1, \dots, n} \{d_{(p,U_j)}\} \Rightarrow P \in U_k$. Με την ίδια μέθοδο, αποδίδουμε σε μια ορισμένη περιοχή όλα τα pixels που δεν έχουν ταξινομηθεί σε κάποια περιοχή κατά την διάρκεια της διαδικασίας της αρχικής εξαγωγής των χρωματικών περιοχών.

Τελικά, σε κάθε pixel της εικόνας της τοιχογραφίας αποδίδουμε ένα χρωματικό περιεχόμενο ίσο με τις μέσες τιμές μ_X , $X = R, G, B$ της περιοχής στην οποία ανήκει το pixel. Με τον τρόπο αυτό, επιτυγχάνουμε μια «πρώτη προσέγγιση ομογενοποίησης» της εικόνας.

Μείωση θορύβου λόγω φθοράς και βελτίωση περιγραμμάτων

Αφού χωρίσουμε την εικόνα της επιγραφής μας και λάβουμε την «ομογενοποιημένη» εικόνα, χρησιμοποιούμε τη διαδικασία που περιγράφεται παρακάτω προκειμένου να μειώσουμε τον θόρυβο λόγω φθοράς.

Μια μάσκα διαστάσεων $m \times n$, όπου m και n περιττοί, ολισθαίνει σε όλη την εικόνα μας έχοντας κάθε φορά ως κέντρο ένα pixel P αυτής. Σε κάθε θέση της μάσκας μετράμε τον αριθμό των pixels της περιμέτρου αυτής, τα οποία ανήκουν σε κάθε μια εκ των περιοχών που ορίσαμε προηγουμένως. Έστω U_M η περιοχή με τον μεγαλύτερο αριθμό pixels περιμέτρου και έστω N_M αυτός ο αριθμός. Αν ο N_M είναι μεγαλύτερος από ένα ποσοστό, έστω $\Pi_{m,n}$, του αριθμού των περιμετρικών pixels της μάσκας, τότε όλα τα pixels αυτής αποδίδονται στην περιοχή U_M . Η προηγούμενη διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς, έως ότου δεν χρειάζεται να γίνει απόδοση ενός pixel σε κάποια περιοχή.

Ακολούθως, κάθε μια εκ των διαστάσεων της μάσκας μειώνεται κατά δύο και η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου $m = n = 3$.

Η παραπάνω διαδικασία εξαφανίζει τον θόρυβο λόγω φθοράς σε κάθε περιοχή με επιτυχία. Μολαταύτα, κάποιο ποσό θορύβου λόγω φθοράς παραμένει ακόμα στα σύνορα των περιοχών. Προκειμένου να μειώσουμε και αυτό το θόρυβο λόγω φθοράς εφαρμόζουμε την παρακάτω διαδικασία:

Μια μάσκα διαστάσεων $m \times n$, όπου m και n περιττοί, ολισθαίνει σε όλη την εικόνα μας έχοντας κάθε φορά ως κέντρο ένα pixel P αυτής. Σε κάθε θέση της μάσκας μετράμε τον αριθμό των pixels αυτής τα οποία ανήκουν σε κάθε καθορισμένη περιοχή ξεχωριστά, και έστω U_{\max} και U_{\min} οι περιοχές με το μεγαλύτερο και το μικρότερο

αριθμό pixels αντίστοιχα, έστωσαν αυτοί οι αριθμοί N_{\max} και N_{\min} . Κατόπιν ελέγχουμε αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1. Το κέντρο της μάσκας να ανήκει στην περιοχή U_{\min} .
2. Το N_{\min} να είναι μικρότερο από ένα ποσοστό, έστω $\Pi_{\min(m,n)}$ του αριθμού των pixels της μάσκας.
3. Το N_{\max} να είναι μεγαλύτερο από ένα ποσοστό, έστω $\Pi_{\max(m,n)}$ του αριθμού των pixels της μάσκας.

Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες αυτές, τότε καταχωρούμε το κεντρικό pixel της μάσκας στην περιοχή U_{\max} . Η προαναφερθείσα διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς μέχρις ότου δεν υπάρχει πλέον pixel προς καταχώρηση.

Ακολούθως, κάθε μια εκ των διαστάσεων της μάσκας μειώνεται κατά δύο και η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου $m = n = 3$.

Σημειώνουμε πως υπάρχει μια πολύ στενή σχέση μεταξύ του βαθμού του θορύβου λόγω φθοράς, που έχει υποστεί καθεμιά από τις επιγραφές ή τις τοιχογραφίες που μελετούμε και των κατάλληλων τιμών των κατωφλίων $\Pi_{m,n}$, $\Pi_{\min(m,n)}$ και $\Pi_{\max(m,n)}$.

Κατ' αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε την «τελικώς ομογενοποιημένη» εικόνα. Αν θέλουμε να πάρουμε μια ακόμα πιο ομογενοποιημένη κατάτμηση μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία εξομάλυνσης η οποία αναφέρεται παραπάνω, σε καθεμιά από τις ληφθείσες περιοχές ξεχωριστά, όπου όμως χρησιμοποιείται το αρχικό περιεχόμενο του χρώματος που είχαν τα pixels της περιοχής που εξετάζουμε. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας υποβάλλεται εκ νέου στην προαναφερθείσα διαδικασία κατάτμησης.

Η διαδικασία αυτή στις αρχαίες επιγραφές επιθυμούμε να μας δώσει μια δίτιμη (binary) εικόνα. Αυτό το πετυχαίνουμε ως εξής: Κατ αρχήν μετατρέπουμε την εικόνα κάθε γράμματος σε εικόνα διαβάθμισης του γκρι και ύστερα εφαρμόζουμε την προηγούμενη προσέγγιση σε μονοδιάστατη διαμέριση. Με την ολοκλήρωση της εφαρμογής στην εικόνα του γράμματος έχουν απομείνει δύο μόνο περιοχές

αποχρώσεων του γκρι. Όλα τα εικονοστοιχεία που έχουν ενταχθεί στην περιοχή με τη χαμηλότερη τιμή απόχρωσης του γκρι θεωρείται ότι ανήκουν στο σώμα του γράμματος και αποδίδεται σε αυτά η τιμή μηδέν. Αντιθέτως σε όλα τα υπόλοιπα αποδίδεται η τιμή ένα ή η τιμή 255 ανάλογα με το αριθμητικό σύστημα που εκάστοτε χρησιμοποιούμε. Σχετικά αποτελέσματα της διαδικασίας φαίνονται στις εικόνες 2.7 έως 2.11 του δεύτερου μέρους της εργασίας.

Π.Γ. Περί αυτόματης γραφολογίας.

Αναφορά σε εργασίες περί γραφολογίας σε διεθνή ερευνητικά περιοδικά.

Τα τελευταία χρόνια το πρόβλημα της αυτόματης αναγνώρισης γραφέα αντιμετωπίζεται από πολλούς ερευνητές σε διεθνές επίπεδο. Ακολούθως παρουσιάζονται τα βασικά σημεία κάποιων εργασιών δημοσιευμένων σε διεθνή περιοδικά που πραγματεύονται το συγκεκριμένο θέμα: στην εργασία [2.1] (E.N. Zois and V. Anastassopoulos, 2000) προτείνεται μια μέθοδος που κάνει χρήση μίας μόνο λέξης για την αναγνώριση του γραφέα. Τα δεδομένα για τον έλεγχο της μεθόδου προήλθαν από 50 γραφείς που έδωσαν γραπτά μία λέξη (τη λέξη «χαρακτηριστικό»), τόσο στα ελληνικά όσο και στα αγγλικά για να φανεί η γλωσσική ανεξαρτησία της μεθόδου. Η κάθε λέξη θεωρήθηκε σαν εικόνα με 256 επίπεδα γκριζου. Για την προεργασία των εικόνων χρησιμοποιήθηκαν δύο αλγόριθμοι: πρώτον χρησιμοποιήθηκε κατωφλιοποίηση εικόνας (image thresholding) και δεύτερον λέπτυνση καμπυλών (curve thinning). Η κατωφλιοποίηση γίνεται με χρήση ιστογράμματος για το διαχωρισμό γκριζων και λευκών pixels (με τιμή κατωφλίου μεταξύ 170 και 180). Η διαδικασία λέπτυνσης παράγει ίχνη γραφής με πλάτος μόνο ένα pixel. Η λέπτυνση γίνεται με χρήση μορφολογικών τελεστών. Μετά την προεπεξεργασία, η εξαγωγή των χαρακτηριστικών γίνεται μετασχηματίζοντας μορφολογικά τις συναρτήσεις προβολής των προεπεξεργασμένων εικόνων. Η προβολή αυτή γίνεται αντιστοιχίζοντας τη

διδιάστατη εικόνα σε μονοδιάστατη συνάρτηση, η οποία μετράει τον αριθμό των pixels σε κάθετες στήλες της εικόνας.

Στην εργασία [2.2] (H. Said, T. Tan, and K. Baker, 2000), ο αλγόριθμος που προτείνεται δεν εξαρτάται από το κείμενο. Βασίζεται, όμως, στη θεώρηση ότι ο γραφικός χαρακτήρας κάθε συγγραφέα έχει ξεχωριστή υφή. Συγκεκριμένα, τα κείμενα ψηφιοποιούνται και θεωρούνται δυαδικές εικόνες. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί ανάλυση υφής σε ψηφιακές εικόνες για την αναγνώριση του γραφέα. Η μέθοδος συμπεριλαμβάνει τρία βασικά στάδια: α) την κανονικοποίηση των δειγμάτων, β) την εξαγωγή των χαρακτηριστικών και γ) την αναγνώριση.

Η κανονικοποίηση αφορά στην κατά το δυνατόν εξάλειψη της τυχαιότητας στις αποστάσεις μεταξύ γραμμών και λέξεων. Αυτή δε πραγματοποιείται με χρήση της μεθόδου Horizontal Projection Profile (HPP). Τελικά, επιλέγονται τυχαία blocks της κανονικοποιημένης εικόνας στα οποία γίνεται ανάλυση υφής

Για την εξαγωγή των χαρακτηριστικών χρησιμοποιούνται δύο καθιερωμένες μέθοδοι ανάλυσης υφής, η τεχνική πολύ-καναλικού φιλτραρίσματος Gabor και η grey-scale co-occurrence matrix. Η αναγνώριση του γραφέα γίνεται τελικά με τη βοήθεια δύο ταξινομητών αποστάσεων, του ταξινομητή weighted Euclidean distance και του ταξινομητή κοντινότερου γείτονα.

Στην εργασία [2.3] (Cha S.-H., Srihari S.N., 2000) αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της επικύρωσης γραφέα με τη βοήθεια του μοντέλου διχοτόμησης, σύμφωνα με το οποίο το πρόβλημα χωρίζεται σε δύο πιθανές κλάσεις ταξινόμησης από ένα πολύ μεγαλύτερο σύνολο. Η προσπάθεια σχετικά με ένα έγγραφο άγνωστου γραφέα εστιάζει στο ερώτημα εάν ο γραφέας του κειμένου ανήκει ή όχι σε κάθε μία από τις διαθέσιμες κλάσεις. Για να γίνει αυτό αλγοριθμικά πρέπει να συγκριθεί η απόσταση μεταξύ κάθε εγγράφου αναφοράς και του αγνώστου εγγράφου. Στην εν λόγω εργασία επιλέγεται ένα σύνολο χαρακτηριστικών που εξάγονται από το έγγραφο και σχηματίζεται έτσι ένα διάνυσμα τιμών. Για την επικύρωση του γραφέα ενός εγγράφου λαμβάνεται υπ' όψιν η συνολική απόσταση των διανυσμάτων χαρακτηριστικών του αγνώστου εγγράφου από τα αντίστοιχα διανύσματα του εγγράφου αναφοράς.

Στην εργασία [2.4] (Zhu Y., Tan T. & Wang Y., 2000) οι συγγραφείς θεωρούν ότι οι εικόνες του κειμένου περιέχουν ειδικά χαρακτηριστικά υφής. Βασικό κομμάτι

της μεθόδου είναι η εφαρμογή του διδιάστατου Gabor φίλτρου για την εξαγωγή των χαρακτηριστικών υφής. Η ταξινόμηση των δειγμάτων γίνεται με ταξινομητή σταθμισμένης ευκλείδειας απόστασης (weighted Euclidean distance).

Μια μέθοδος διαχωρισμού γραφών που έχει να κάνει με τα γραφήματά τους και όχι με ολόκληρο το κείμενο παρουσιάζεται στις εργασίες [2.5] (Bensefia A., Nosary A., Paquet T. & Heutte L., 2002), [2.11] (A. Bensefia, T. Paquet and L. Heutte, 2005a) και [2.12] (Bensefia A., Paquet T. & Heutte L. 2005b) . Τα γραφήματα είναι στοιχειώδη σχέδια γραπτού κειμένου που παράγονται από αλγόριθμους κατάτμησης. Η ένωση δύο ή τριών συνεχόμενων γραφημάτων «παράγει» δίγραμμο ή τρίγραμμο γραφήματα αντίστοιχα. Σύμφωνα με τους συγγραφείς τα αναλλοίωτα χαρακτηριστικά κάθε γραφέα έχουν να κάνουν με τον ιδιαίτερο τρόπο σχεδιασμού των ανωτέρω γραφημάτων από τον καθένα εξ αυτών. Η μέθοδος που προτείνεται ανακτά με αλγόριθμο κατάτμησης όλα τα γραφήματα κάθε γραφέα και τα ομαδοποιεί με ακολουθιακό αλγόριθμο ομαδοποίησης και χρήση μέτρου ομοιότητας συσχέτισης, για σύγκριση. Μετά από πολλές επαναλήψεις, για απαλοιφή της επίδρασης της ακολουθιακότητας στην ομαδοποίηση, προκύπτουν κάποιες ομάδες αναλλοίωτων χαρακτηριστικών των γραφών. Για την αναγνώριση του γραφέα ενός κειμένου, γίνεται η υπόθεση ότι η διαφοροποίηση των γραφημάτων μεταξύ διαφορετικών γραφών είναι πιο έντονη από τη διαφοροποίηση των γραφημάτων του ίδιου γραφέα. Το μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι απαιτεί εκτεταμένο κείμενο από κάθε γραφέα για να εξαχθούν αξιόπιστα τα αναλλοίωτα χαρακτηριστικά.

Ειδικά στην εργασία [2.12] με βάση προηγούμενες μελέτες, που προτείνουν ότι τα γραφήματα μπορούν να χαρακτηρίσουν κάθε γραπτό, η ερευνητές επεκτείνουν αυτή την ιδέα χρησιμοποιώντας τα γραφήματα για να χαρακτηρίσουν μία ολόκληρη βάση χειρογράφων, κι όχι ένα απομονωμένο κείμενο κάθε φορά. Η εξαγωγή των χαρακτηριστικών γίνεται με αλγόριθμο ομαδοποίησης, ώστε τα γραφήματα που παράγονται από κάθε χειρόγραφο να προσαρμόζονται επαναληπτικά στα συνολικά γραφήματα από ολόκληρη τη βάση. Στη συνέχεια, οι συγγραφείς αντιμετωπίζουν το πρόβλημα με χρήση της Information Retrieval Theory (Θεωρία Ανάκτησης Πληροφορίας).

Μία προσπάθεια αναγνώρισης γραφέα που στηρίζεται στους χαρακτήρες του κειμένου γίνεται στην εργασία [2.6] (B. Zhang, S. N. Srihari, S. Lee, 2003). Στη μελέτη αυτή στην κατατημημένη εικόνα εντοπίζονται οι χαρακτήρες και για την αναγνώριση εφαρμόζεται αναζήτηση κ-κοντινότερου-γείτονα σε δύο στάδια και ακολούθως χρησιμοποιείται ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο. Σε αυτή την εργασία διαφαίνεται ότι τα χαρακτηριστικά των αριθμητικών ψηφίων, όντας παρόμοια μεταξύ τους ανά γραφέα, δεν προσφέρονται για αναγνώριση. Αν συνδυαστούν τα δέκα αριθμητικά ψηφία με τους δέκα πρώτους αγγλικούς χαρακτήρες από a έως j η δυνατότητα αναγνώρισης παρουσιάζει σημαντική βελτίωση δίνοντας ποσοστό κοντά στο 94%. Όλοι μαζί οι χαρακτήρες (26 μικρά γράμματα, 26 κεφαλαία και 10 αριθμοί) οδηγούν σε ακρίβεια κοντά στο 97%. Παρόμοια συμπεράσματα φάνηκε να ισχύουν γενικά και για το πρόβλημα της επικύρωσης.

Στις εργασίες [2.7] (Schomaker L. & Bulacu M. 2004a) και [2.8] Schomaker L., Bulacu M. & Franke K. 2004b) κατ' αρχήν προτείνεται ο χωρισμός των ιχνών των γραμμάτων και λέξεων σε στοιχειώδη συστατικά, χωρίς αλλοίωση της πληροφορίας που αυτά μεταφέρουν. Ο χωρισμός γίνεται με ευρεστικό τρόπο πάνω στο περίγραμμα c των συνεκτικών συστατικών (connected-components), δηλαδή των συνεχόμενων ιχνών γραφής. Το περίγραμμα αυτό εξάγεται από τον αλγόριθμο του Moore. Το αποτέλεσμα της διαμέρισης/του χωρισμού είναι πολλά μικρότερα διακριτά συστατικά τα οποία οι συγγραφείς ονομάζουν *fraglets*. Σε κάθε ένα από αυτά εφαρμόζεται πάλι η μέθοδος του Moore και τελικά παράγεται ένα διάνυσμα σταθερής διάστασης που παίρνει την ονομασία *Fragmented Connected-Component Contour (FCO3)*. Στη συνέχεια, τα FCO3s από όλες τις σελίδες κειμένου του συνόλου δεδομένων δόθηκαν ως είσοδος σε ένα *Self-Organizing Feature Map* και πραγματοποιήθηκε εκπαίδευση ώστε τελικά το δίκτυο να έχει ενσωματώσει τα απαραίτητα πρότυπα για την αναγνώριση του γραφέα. Για να φτάσει η μέθοδος να δώσει αποτέλεσμα για την αναγνώριση ενός γραφέα πρέπει να εξαχθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας παραγωγής από το γραφέα των προτύπων που έχουν ενσωματωθεί στο δίκτυο. Αυτό βασίζεται στην υπόθεση ότι ο κάθε γραφέας θεωρείται στοχαστικός παραγωγέας ενός υποσυνόλου των βασικών προτύπων. Η σύγκριση των χαρακτηριστικών από τα κείμενα των συγγραφέων έγινε με βάση την απόσταση Hamming.

Στις εργασίες [2.9] (Schlapbach A. & Bunke H. 2004) και [2.10] (A. Schlapbach, H. Bunke, 2007) αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της αναγνώρισης γραφέα με τη βοήθεια των Hidden Markov Models (HMMs). Για κάθε πιθανό γραφέα δημιουργείται και εκπαιδεύεται ένα ξεχωριστό HMM. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός αριθμού προτύπων αναγνώρισης καθένα εκ των οποίων αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο γραφέα. Τόσο κατά τη διαδικασία αναγνώρισης όσο και κατά τη διαδικασία της επαλήθευσης των αποτελεσμάτων, μια γραμμή η οποία προέρχεται από έναν άγνωστο γραφέα είναι είσοδος σε κάθε HMM. Στην έξοδο επιστρέφεται μια τιμή της πιθανοφάνειας η συγκεκριμένη γραμμή να ανήκει στον αντίστοιχο γραφέα σε λογαριθμική κλίμακα. Η συνολική πιθανοφάνεια χρησιμοποιείται τόσο για αναγνώριση όσο και για επιβεβαίωση ταυτότητας. Σε πρώτη φάση το εν λόγω σύστημα ελέγχθηκε επί τη βάσει 2200 γραμμών που προήρχοντο από 50 διαφορετικούς γραφείς.

Στην εργασία [2.13] (M. Bulacu, L. Schomaker, 2007) οι συγγραφείς προτείνουν μια μέθοδο αναγνώρισης γραφέα γραπτού κειμένου η οποία βασίζεται α) στην ανάλυση της υφής και β) στη μορφή των χαρακτήρων. Όσον αφορά στην υφή οι συγγραφείς προτείνουν, από κοινού συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (Σ.Π.Π.) που αφορούν στην κατεύθυνση και καμπυλότητα των χαρακτήρων του κειμένου. Αυτές οι Σ.Π.Π. χαρακτηρίζουν κάθε γραφέα άρα χρησιμοποιούνται για την πιθανή ταυτοποίηση αυτών. Ανάλογα, όσον αφορά στη μορφή των χαρακτήρων, στην εν λόγω εργασία προτείνεται κάθε γραφέας να θεωρείται «ένας στοχαστικός γεννήτορας χαρακτηριστικών», ως και ότι η Σ.Π.Π. της κατανομής αυτών τον χαρακτηρίζει. Ένας συνδυασμός των δύο προσεγγίσεων χρησιμοποιείται για την αυτόματη ταυτοποίηση γραφέα.

Π.Π. Περί προσαρμογής καμπυλών (Curve fitting)

Αναφορά σε εργασίες προσαρμογής καμπυλών σε διεθνή ερευνητικά περιοδικά

Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές δημοσιεύσεις που αφορούν στην βέλτιστη προσαρμογή διδιάστατων καμπυλών. Οι προς προσαρμογή καμπύλες σε μερικές δημοσιεύσεις δίδονται με την πεπλεγμένη τους μορφή $f(x, y) = 0$, ενώ σε άλλες με την αναλυτική διανυσματική τους παράσταση $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.

Πιο συγκεκριμένα στις δημοσιεύσεις [3.1] ως [3.5] η βέλτιστη προσαρμογή μίας καμπύλης σε πεπλεγμένη μορφή σε ένα σύνολο δεδομένων, επιχειρείται μέσω ελαχιστοποίησης κατάλληλα επιλεγμένων αποστάσεων. Οι σχετικές διαδικασίες θεωρούν την εκάστοτε καμπύλη σαν ένα στερεό σώμα, το οποίο περιστρέφεται και μετατοπίζεται παράλληλα, ενώ ταυτόχρονα επιτρέπεται ελευθερία στις παραμέτρους της πεπλεγμένης μορφής της καμπύλης. Ειδικότερα στην εργασία [3.4] η προσαρμογή μιας προτύπου καμπύλης σε δεδομένα γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε η διαδικασία προσαρμογής να παραμένει αναλλοίωτη σε αφφινικούς μετασχηματισμούς. Η βέλτιστη θέση προσαρμογής εντοπίζεται από την απαίτηση η μετασχηματισμένη καμπύλη να έχει την ελάχιστη τετραγωνική απόσταση από τα δεδομένα.

Άλλες εργασίες ([3.6]-[3.9]) προσεγγίζουν τα δεδομένα με τμηματικώς ομαλές γνωστές καμπύλες που και στην περίπτωση αυτή περιγράφονται είτε με πεπλεγμένη είτε με άμεση παραμετρική μορφή. Η προσέγγιση γίνεται πάλι με ελαχιστοποίηση κατάλληλων αποστάσεων, οι δε τμηματικώς ομαλές καμπύλες είναι άλλοτε κωνικές, άλλοτε πρώτα πολυώνυμα ή αλγεβρικές καμπύλες κλπ.

Ένα άλλο σύνολο δημοσιεύσεων χρησιμοποιεί στατιστικές μεθόδους, όπως π.χ. οι Bayesian και οι μέγιστης πιθανοφάνειας, για τη βέλτιστη προσαρμογή προτύπου καμπύλης σε θορυβώδη δεδομένα ή συνδυασμό μετρικών αποστάσεων και στατιστικής. ([3.5] και [3.10])

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Αναφορές σχετικές με Αρχαιολογία, Ιστορία και Ιστορία των Μαθηματικών

- [1.1] Tracy S.V., “Attic Letter-Cutters of 300 to 229 B.C.”, Athens and Macedon, Berkeley Ed., 2003.
- [1.2] Steve Tracy “Dating Athenian Inscriptions: A New Approach” in *Proceedings of the American Philosophical Society* 144, 2000, 67-75.
- [1.3] Doumas, C. 1991. The Wall Paintings of Thera. 2nd Edition Athens 1999: The Thera Foundation.
- [1.4] Doumas, C., 1990. The Elements at Akrotiri, in Hardy D.A.(ed.), Thera and the Aegean world III pp. 24-30.
- [1.5] Szabo, A., 1968. The beginnings of Greek Mathematics, Dordrecht: Reidel.
- [1.6] Exarchakos, T., 1997. History of mathematics: Mathematics in Babylonia and ancient Egypt. Vol. A. (Ιστορία των μαθηματικών: Τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των αρχαίων Αιγυπτίων. Τομ. Α.)
- [1.7] Lucas N. H. Bunt, Phillip S. Jones, Jack D. Bedient, The historical roots of elementary mathematics, Prentice-Hall, inc Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [1.8] Sir Thomas Heath, A history of Greek mathematics – Volume 1: From Thales to Euclid, Dover Publications Inc., New York, 1981
- [1.9] Ev.Spandagos, R. Spandagou, D. Travlou, Ancient Greece mathematicians, Aethra, Athens, June 2000
- [1.10] Sir Thomas Heath, A history of Greek mathematics – Volume 2, Dover Publications Inc., New York, 1981.
- [1.11] Stephen V. Tracy, Constantin Papaodysseus, “The Study of Hands on Greek Inscriptions: The Need for Digital Approach” *American Journal of Archaeology*. The Journal of the Archaeological Institute of America. Vol. 113 (1) January 2009

[1.12] C. Papaodysseus, M. Panagopoulos, P. Rousopoulos, G. Galanopoulos & C. Doumas “ Geometric templates used in the Akrotiri (Thera) wall-paintings”. *Antiquity* 82 (Jan. 2008): 401–408.

[1.13] D. Fragoulis, A. Skembris, C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, Th. panagopoulos, M. Panagopoulos, C. Triantafyllou, A. Vlachopoulos and C. Doumas. “Origins and Application of Geometry” in the Thera Prehistoric Civilization Ca. 1650 bC. *Centaurus* 2005: Vol. 47: pp. 316–340.

2. Αναφορές σχετικές με αυτόματη γραφολογία (writer identification) και την αναγνώριση προτύπων.

[2.1] E. N. Zois and V. Anastassopoulos, “Morphological waveform coding for writer identification”, *Pattern Recognition*, 33:385–398, 2000.

[2.2] H. Said, T. Tan, and K. Baker, “Personal identification based on handwriting”, *Pattern Recognition*, 33(1):149-160, January 2000.

[2.3] Cha S.-H., Srihari S.N., “Multiple feature integration for writer verification”, Schomaker L.R.B. & Vuurpijl L.G. (Eds.), *Proc. of the 7th Int. Workshop on Frontiers in Handwriting Recognition*, pp. 333-342, 2000.

[2.4] Zhu Y., Tan T. & Wang Y. 2000, “Biometric personal identification based on handwriting”, *Proceedings of the 15th International Conference on Pattern Recognition*, IEEE, vol. 2, pp. 797-800.

[2.5] Bensefia A., Nosary A., Paquet T. & Heutte L. 2002, “Writer identification by writer’s invariants”, In *Proceedings of the Eighth International Workshop on Frontiers in Handwriting Recognition*, IEEE, pp. 274-279.

[2.6] B. Zhang, S. N. Srihari, S. Lee, “Individuality of Handwritten Characters”, *7th Int. Conf. on Document Analysis and Recognition, Edinburgh, Scotland, August 3-6, (Paper ID:527)*, 2003.

- [2.7] Schomaker L. & Bulacu M. 2004a, “Automatic writer identification using connected-component contours and edge-based features of uppercase western script”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 26, no. 6, pp. 787-798, June 2004.
- [2.8] Schomaker L., Bulacu M. & Franke K. 2004b, “Automatic writer identification using fragmented connected-component contours”, In *Proceedings of the 9th International Workshop Frontiers in Handwriting Recognition*, IEEE, pp. 185-190.
- [2.9] Schlapbach A. & Bunke H. 2004, “Off-line handwriting identification using HMM based recognizers”, IEEE.
- [2.10] A. Schlapbach, H. Bunke, “A writer identification and verification system using HMM based Recognizers”, *Pattern Analysis & Applications*, Vol. 10, Number 1 / February, 2007.
- [2.11] A. Bensefia, T. Paquet and L. Heutte, “A writer identification and verification system”, *Pattern Recognition Letters* 26 2080–2092, 2005.
- [2.12] Bensefia A., Paquet T. & Heutte L. 2005b, “Handwritten document analysis for automatic writer recognition”, *Electronic Letters on Computer Vision and Image Analysis*, vol. 5, no. 2, pp. 72-86.
- [2.13] M. Bulacu, L. Schomaker, “Text-Independent Writer Identification and Verification Using Textural and Allographic Features”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 29, no. 4, April 2007
- [2.14] R.G. Casey, E. Lecolinet, “A survey of methods and strategies in character segmentation”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 18, no 7 (1996) 690-760.
- [2.15] S.V.Tracy, C. Papaodysseus, P. Roussopoulos, M. Panagopoulos, D. Fragoulis, D. Dafi and Th. Panagopoulos “Identifying Hands On Ancient Athenian Inscriptions: First Steps Towards a Digital Approach” *Archaeometry* 49 4 (2007) 749–764.
- [2.16] M. Panagopoulos, C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, D. Dafi, S. Tracy «Automatic writer identification of ancient Greek inscriptions». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 31, no. 8, pp. 1404-1414, July 2009.
- [2.17] Constantin Papaodysseus, Dimitrios K. Fragoulis, Mihalis Panagopoulos, Thanasis Panagopoulos, Panayiotis Rousopoulos, Mihalis Exarhos, and Angelos

Skembris « Determination of the Method of Construction of 1650 B.C. Wall Paintings»
IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 28, NO. 9, pp
1361-1371. September 2006

3. Αναφορές σχετικές με Προσαρμογή Καμπυλών και Αναγνώριση Προτύπων (Curve Fitting and Pattern Recognition)

[3.1] M. Sarfraz, “Fitting curve to planar digital data”, στο 6th International Conference on Information Visualisation, pp. 633, 10-12 July, London, 2002.

[3.2] S.J. Ahn, W. Rauh, H.S. Cho, H.J. Warnecke, “Orthogonal distance fitting of implicit curves and surfaces”, IEEE Transactions On Pattern Analysis and Machine Intelligence, pp. 620-638, 2002.

[3.3] M. Werman, Z. Geyzel, “Fitting a Second Degree Curve in the Presence of Error”, IEEE Trans. on PAMI, (Vol. 17, No. 2), pp. 207-211, February 1995.

[3.4] Atieg G. A. Watson, “A class of methods for fitting a curve or surface to data by minimizing the sum of squares of orthogonal distances”, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 158, no 2, pp. 277-296, September 2003.

[3.5] C. Papaodysseus, M. Exarhos, Th. Panagopoulos, C. Triantafillou, G. Roussopoulos, A. Pantazi, V. Loumos, D. Fragoulis, Chr. Doumas, “Identification of Geometrical Shapes in Paintings and its Application to Demonstrate the Foundations of Geometry in 1650 B.C.”, *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 14, no 7, pp. 862-873, July 2005.

[3.6] Rosin P.L. “On Serlio’s constructions of ovals”, *Mathematical Intelligencer*- Vol. 23, no 1, pp. 58–69, 2001, “A survey and comparison of traditional piecewise circular approximations to the ellipse”, *Computer Aided Geometric Design*- Vol. 16, no 4, pp.269–286, 1999.

[3.7] Rosin P.L. “Ellipse fitting using orthogonal hyperbolae and Stirling’s oval”, *Graphical Models and Image Processing*- Vol. 60, no 3, pp. 209-213, 1998.

- [3.8] Klaus Voss, Herbert Suesse, “Invariant Fitting of Planar Objects by Primitives”, IEEE Transactions on PAMI, (Vol. 19, No. 1), pp. 80-84, January 1997.
- [3.9] Daniel Craig, “Fitting Curves and Surfaces With Constrained Implicit Polynomials”, IEEE Transactions on PAMI, (Vol. 21, No. 1), pp. 31-41, January 1999.
- [3.10] M. Werman and Daniel Keren, “A Bayesian Method for Fitting Parametric and Nonparametric Models to Noisy Data”, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 23, no. 5, pp. 528 – 534, May 2001.
- [3.11] P. V. C. Hough, “A method and means for recognizing complex patterns”, US Patent 3069654, 1962
- [3.12] C. Papaodysseus, T. Panagopoulos, M. Exarhos, D. Fragoulis, G. Roussopoulos, P. Rousopoulos, G. Galanopoulos, C. Triantafyllou, A. Vlachopoulos, C. Doumas “Distinct, Late Bronze age (c.1650 BC) Wall-Paintings from Akrotiri, Thera, Comprising Advanced Geometrical Patterns” *Archaeometry* 48 , 1 (2006) 97–114.
- [3.13] Roussopoulos, P., Papaodysseus, C., Arabadjis, D., Exarhos, M., Panagopoylos, M. “Image and pattern analysis for the determination of the method of drawing celebrated Thera wall paintings circa 1650 B.C.” *The ACM Journal on Computing and Cultural Heritage*. Δεκτό για δημοσίευση Ιούνιος 2010.
- [3.14] C. Papaodysseus, Th. Panagopoulos, M. Exarhos, C. Triantafyllou, D. Fragoulis, “Contour-shape Based Reconstruction of Fragmented, 1600 B.C. Wall Paintings”, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 50, No 6, pp.1277-1288, June 2002.
- [3.15] Th. Panagopoulos, C. Papaodysseus, M. Exarhos, C. Triantafyllou, G. Roussopoulos, P. Roussopoulos, “Prehistoric Wall-Paintings Reconstruction Using Image Pattern Analysis And Curve Fitting”, *WSEAS Transactions on Electronics 1*, no 1 108-113, 2004.

4. Αναφορές σχετικές με Στατιστική

- [4.1] Γ. Κοκολάκης, Ι. Σπηλιώτης «Εισαγωγή στη θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική» Εκδόσεις Συμεών Έκδοση 2^η Μάιος 1991.
- [4.2] Πέτρος Α. Κιόχος «Επαγωγική Στατιστική» Σύγχρονη Εκδοτική Φεβρουάριος 1989.
- [4.3] G. Hommel, “A comparison of two modified Bonferoni procedures”, *Biometrika* 76: 624-625, 1989.
- [4.3] Nelder, J. A. and R. Mead, "A simplex method for function minimization", *Computer Journal*, Vol. 7, pp. 308-313, 1965.

5. Αναφορές σχετικές με Κατάτμηση Εικόνας

- [5.1] Constantin Papaodysseus, Mihalis Exarhos, Mihalis Panagopoulos, Panayiotis Rousopoulos, Constantin Triantafillou, and Thanasis Panagopoulos “Image and Pattern Analysis of 1650 B.C. Wall Paintings and Reconstruction” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—part a: Systems and Humans*, vol. 38, no. 4, July 2008 pp 958-965.
- [5.2] Román-Roldán R., Gómez-Lopera J. F., Atae-Allah C., Martínez-Aroza J., Luque-Escamilla P. L., “A measure of quality for evaluating methods of segmentation and edge detection”, *Pattern Recognition* 34, 969-980, 2001.
- [5.3] Έξαρχος Μ. “Ανάπτυξη πρωτότυπων αλγορίθμων ψηφιακής επεξεργασίας σήματος και αναγνώρισης προτύπων με εφαρμογή στην αρχαιολογία και την αυτόματη αναγνώριση μουσικών οργάνων”. Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Τομέας Επικοινωνιών Ηλεκτρονικής και Συστημάτων Πληροφορικής Μάιος 2004.