



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ,
ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Προβλήματα Αλληλεπίδρασης Μη-Γραμμικών Οπτικών Παλμών

Νικόλαος Μοσχονάς

Διδακτορική Διατριβή

Επιβλέπων Καθηγητής:
Κυριάκος Χιτζανίδης, Καθηγητής ΣΗΜΜΥ, ΕΜΠ

Μάιος 2012



Προβλήματα Αλληλεπίδρασης Μη-Γραμμικών Οπτικών Παλμών

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΜΟΣΧΟΝΑ
Διπλωματούχου Φυσικού Ε.Κ.Π.Α.

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1. Κ. Χιτζανίδης, Καθ. ΕΜΠ (Επιβλέπων)
2. Ι. Βομβορίδης, Καθ. ΕΜΠ
3. Π. Κωττής, Καθ. ΕΜΠ

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1. Κ. Χιτζανίδης, Καθ. ΕΜΠ (Επιβλέπων)
2. Ι. Βομβορίδης, Καθ. ΕΜΠ
3. Π. Κωττής, Καθ. ΕΜΠ
4. Η. Γλύτσης, Καθ. ΕΜΠ
5. Ι. Ρουμελιώτης, Καθ. ΕΜΠ
6. Η. Αβραμόπουλος, Καθ. ΕΜΠ
7. Β. Ρόθος, Επ. Καθ. ΑΠΘ

Η έγκριση της διδακτορικής διατριβής από την Ανώτατη Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202).

*στον Κυριάκο
τον ευχαριστώ για την υπομονή του*

Πρόλογος

Το κείμενο αυτό είναι αποκύημα πολλών παραγόντων, που είτε προϋπήρχαν είτε προέκυψαν κατά τη διάρκεια της διατριβής. Ένας πρωταρχικός ήταν και είναι το ενδιαφέρον για τη Φυσική και την Επιστήμη γενικότερα. Έστω και αν το θέμα δεν ανήκει σε αυτό που ονομάζουμε «θεωρητική Φυσική», νομίζω ότι όποιος ρωτάει όχι μόνο το «πώς», αλλά κυρίως το «γιατί», κάνει Φυσική, είτε η έρευνα αφορά τα μικρά είτε τα μεγάλα του κόσμου αυτού. Το ερώτημα «πώς», το οποίο επίσης τίθεται εδώ, συνδέεται με το τρόπο λειτουργίας και περισσότερο με τη μηχανική των πραγμάτων, και βέβαια είναι και αυτό ενδιαφέρον. Εξάλλου η Μη-Γραμμική Οπτική είναι ένας τομέας με έντονη επιστημονική και τεχνολογική δραστηριότητα, πεδίο συνάντησης για ιδέες και μεθόδους προερχόμενες από τη Φυσική Πλάσματος, τη Κυματική, τη Δυναμική, το Χάος. Είναι επίσης, για μένα, και η πόρτα για το γενικότερο πεδίο των μη-γραμμικών φαινομένων, ένα πεδίο όπου συναντά κανείς «πλάσματα» όπως παράξενους ελκυστές, σολιτόνια, χαοτικές πεταλούδες, όπου η συντομότερη οδός δεν είναι «ευθεία γραμμή», και η μελέτη του μας φέρνει λίγο πιο κοντά στη κατανόηση της Φύσης. Εκτός αυτών, η Μη-Γραμμική Οπτική ασχολείται με τη μελέτη και τη σχεδίαση της επόμενης γενιάς τηλεπικοινωνιακών συστημάτων και οπτικών συσκευών, που μέλλουν να αντικαταστήσουν τις παρούσες ηλεκτρονικές. Οι μακροχρόνιες προοπτικές της είναι επίσης ένας από τους κινητήριους παράγοντες της εργασίας.

Οι υπόλοιποι παράγοντες που συνετέλεσαν στην εργασία και τη συγγραφή της είναι μάλλον πολλοί και πολύπλοκοι για να απαριθμηθούν. Αποτελούν ουσιαστικά όλο το πλέγμα των σχέσεων και αλληλεπιδράσεων μου κατά τη διάρκεια της διατριβής, είτε άμεσα, είτε έμμεσα σχετιζόμενες με αυτή. Στις πρώτες συγκαταλέγονται αυτές με τους συναδέλφους μου στο Εργαστήριο Πλάσματος Ηλεκτρονικής Δέσμης και Μη-Γραμμικής Οπτικής και άλλα μέλη της επιστημονικής κοινότητας, εν ζωή ή αποθανόντα, τα οποία αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης τότε μέσω προσωπική επαφής και τότε μέσω της εργασίας τους. Στις τελευταίες περιλαμβάνονται άλλες σχέσεις που επιδρούν ποικιλοτρόπως, φιλοσοφικές ανησυχίες που μπορεί κανείς να έχει και βέβαια ο χρόνος που μπορεί να διαθέσει. Όπως και να έχει, η ολοκλήρωση (κατά το δυνατό) μιας τόσο μακροχρόνιας εργασίας είναι μια διαδικασία «μη γραμμική».

Ίσως ο Πρόλογος μοιάζει ήδη πολύ σοβαρός και προιδαίνει για κάποια εξαιρετικά πρωτότυπη επιστημονική εργασία. Η παρούσα διατριβή δεν διεκδικεί τέτοια διάσταση. Πιστεύω ότι εδώ και πολλά χρόνια οι διδακτορικές διατριβές, πολύ σπάνια έχουν την επίδραση στην εξέλιξη της επιστήμης και της τεχνολογίας που μπορεί να είχαν κάποιες από τις συνολικά μακράν λιγότερες που εκδίδονταν ετησίως μέχρι τα μέσα του 20ου αιώνα. Θέλω παρόλα αυτά να πιστεύω ότι αυτή η διατριβή προσθέτει ένα ακόμα λίθο στην έρευνα της σύγχρονης Οπτικής και των Μη-Γραμμικών φαινομένων. Όμως η εκπόνηση μιας τέτοιας εργασίας προσφέρει στον ίδιο το συντελεστή της περισσότερο από ένα πράγματα. Τον βοηθά να εντρυφήσει στην επιστημονική μέθοδο, να χρησιμοποιήσει δηλαδή τα ορθολογικά εργαλεία έρευνας και κριτικής. Η γνώση τους είναι χρήσιμη όχι μόνο στην ενασχόληση με την επιστημονική έρευνα, αλλά αποτελεί και οδηγό για πολλές (όχι όλες) καταστάσεις που ανακύπτουν στη ζωή μας. Επίσης δίνει τη δυνατότητα χρησιμοποιώντας αυτά τα εργαλεία, να οργανώσει κανείς και να ολοκληρώσει κάτι μακροπρόθεσμο που καταλήγει και σε κάτι (σχετικά) νέο. Όπως είπε και κάποιος, «η έρευνα είναι σα μια βόλτα στους αγριότοπους», μετά από αυτό είσαι πιο δυνατός. Κάτι ακόμα που μου έγινε κατανοητό είναι ότι η εκπόνηση μιας επιστημονικής έρευνας είναι κάτι που χρειάζεται, περισσότερο ίσως από οτιδήποτε άλλο, υπομονή και επιμονή. Αυτό το κατάλαβα τα δύο τελευταία χρόνια της διατριβής, όπου

έπρεπε να έχω περίσσια από τις αυτές τις αρετές, κάτι που δεν είναι και το δυνατό σημείο του υποφαινομένου.

Θέλω να πιστεύω ότι τα μαθήματα αυτά δε θα ξεχαστούν.

Η διατριβή εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Πλάσματος, Ηλεκτρονικής Δέσμης και Μη Γραμμικής Οπτικής του τομέα Ηλεκτρομαγνητικών Εφαρμογών, Ηλεκτροοπτικής και Ηλεκτρονικών Υλικών της Σχολής Η.Μ.Μ.Υ. του Ε.Μ.Π.

Νίκος Μοσχονάς
Μάιος 2012

Περιεχόμενα

Εκτενής Περίληψη
Extensive Summary

iii

vi

1. Περί σολιτονίων, μη γραμμικών παλμών και αλληλεπιδράσεων αυτών γενικά.....	1
1.1. Σολιτόνια και Μη Γραμμικά κύματα	2
1.1.1. Διανυσματικά σολιτόνια.....	5
1.1.2. Σολιτονικές αλληλεπιδράσεις.....	5
1.2. Μη γραμμική οπτική, φυσική και τεχνολογία.....	8
1.3. NLS	11
1.3.1. Μη γραμμική απόκριση και χωρικά σολιτόνια	12
1.3.2. Χρονικά σολιτόνια.....	15
1.3.3. Διατηρήσιμες ποσότητες και συμμετρίες	18
1.4. Φαινόμενα	20
1.4.1. Γραμμικά	20
1.4.2. Μη-Γραμμικά	25
1.5. Μέθοδοι.....	34
1.5.1. Αναλυτικές	34
1.5.2. Αριθμητικές μέθοδοι και προγράμματα	35
1.6. Σύνοψη της εργασίας.....	36
2. Δύο προβλήματα αλληλεπίδρασης μέσω ετεροδιαμόρφωσης φάσης παρουσία περιοδικά μεταβαλλόμενης διασποράς.....	39
2.1. Διαχείριση Διασποράς και Σολιτόνια.....	40
2.2. Συζευγμένες NLS	43
2.2.1. Διπλοθάστικότητα	43
2.2.2. Αλληλεπίδραση παλμών σε WDM και Διαχείριση διασποράς.....	46
2.3. Μεταβολική μέθοδος (Variational method) και στοιχεία δυναμικής ανάλυσης.....	49
2.3.1. Μεταβολική μέθοδος.....	49
2.3.2. Στοιχεία δυναμικής ανάλυσης-Τομές Poincaré.....	51
2.4. Εφαρμογή DM σε διπλοθλαστικά υλικά	54
2.4.1. W_1 και W_2 ίσα (Γκαουσιανό ansatz)	57
2.4.2. W_1 και W_2 άνισα (Γκαουσιανό ansatz)	87
2.4.3. sech ansatz, $W_1=W_2$	91
2.4.4. Μερικά συμπεράσματα.....	103
2.5. Εφαρμογή DM σε WDM.....	104
2.5.1. DM-soliton (σολιτόνιο διαχείρισης διασποράς).....	104
2.5.2. Αλληλεπίδραση σολιτονίων διαχείρισης διασποράς.....	111
2.6. Συμπεράσματα.....	114
3. Αλληλεπίδραση στενών χρονικών παλμών.....	117
3.1. Φαινόμενα ανώτερης τάξης.....	118
3.2. Άμεση Μέθοδος Διαταραχών της NLS.....	123
3.3. Εφαρμογή της Άμεσης Μεθόδου στην NLS ανώτερης τάξης	124
3.3.1. Φορμαλισμός του προβλήματος.....	125
3.3.2. Αποτελέσματα	131
3.4. Συμπεράσματα.....	139

4. Αυθόρμητη γένεση παλμών Τύπου X	141
4.1. Γενικά περί αυτό-εστίασης κυματικής κατάρρευσης (Wave collapse)	142
4.1.1. Θεώρημα Virial.....	146
4.1.2. Μοντέλο κατάρρευσης οπτικής δέσμης σε επίπεδο κυματοδηγό-κρίσιμη ισχύς	148
4.2. Χωροχρονική διαμορφωτική αστάθεια (modulational instability-MI)	149
4.3. Κύματα τύπου X (X waves).....	151
4.4. Μελέτη γένεσης κυμάτων «Τύπου-X» με τη χρήση CW	153
4.4.1. Μια «ενεργειακή» μελέτη.....	155
4.4.2. Αριθμητική διερεύνηση	158
4.5. Συμπεράσματα	167
5. Σύμφωνη αλληλεπίδραση δισδιάστατων παλμών παρουσία επίπεδου κύματος και χωροχρονική μετάθεση	169
5.1. Γενικά περί αλληλεπίδρασης χωροχρονικών παλμών και ακτίνων.....	170
5.2. Αλληλεπίδραση χωροχρονικών κυματοπακέτων παρουσία CW.....	173
5.2.1. Μελέτη δημιουργίας «αμαλγάματος».....	173
5.2.2. Αριθμητική διερεύνηση	178
5.3. Συμπεράσματα	190
6. Συμπεράσματα και Προοπτικές	191
6.1. Συμπεράσματα	192
6.2. Προτεινόμενες επεκτάσεις.....	194
APPENDIX A Κώδικες	197
APPENDIX B Ολοκληρώματα	219
APPENDIX C Μέθοδοι Ανάλυσης που εξετάστηκαν αλλά δεν ακολουθήθηκαν	221
APPENDIX D Αρκτικόλεξα	223
Δημοσιεύσεις σχετικές με τη διατριβή	224
Βιβλιογραφία-Αναφορές	225
Συνοπτικό Βιογραφικό Σημείωμα	235

Εκτενής Περίληψη

Η παρούσα διδακτορική διατριβή αποτελείται από τη παρουσίαση της εργασίας μας πάνω σε τέσσερα προβλήματα Μη-Γραμμικής Οπτικής, με τα οποία ασχοληθήκαμε στο εργαστήριο Πλάσματος, Ηλεκτρονικής Δέσμης και Μη-Γραμμικής Οπτικής. Ο κοινός παρονομαστής αυτών των προβλημάτων είναι οι αλληλεπιδράσεις φωτεινών παλμών παρουσία μη-γραμμικότητας, όταν δηλαδή η απόκριση του μέσου εξαρτάται από τον ίδιο τον παλμό. Οι εν λόγω παλμοί (ή ακτίνες) με τους οποίους ασχολούμαστε μπορεί να είναι σολιτονικοί ή και όχι, αλλά σε κάθε περίπτωση το ενδεδειγμένο μοντέλο περιγραφής τους είναι η μη-γραμμική εξίσωση του Schrödinger (NLS). Η μελέτη που ακολουθούμε είναι, ανάλογα με το πρόβλημα, είτε αναλυτική (ή για να το πούμε πιο σωστά, ημί-αναλυτική) και είτε αριθμητική.

Οι αλληλεπιδράσεις των παλμών, που λόγω των φαινομένων που εμπλέκονται συχνά ονομάζονται «μη-γραμμικοί», μπορούν να είναι σύμφωνες ή ασύμφωνες, να εξαρτώνται δηλαδή από τη σχετική τους φάση ή και όχι. Ανάλογα με το είδος της αλληλεπίδρασης αλλάζει η απόκριση του μέσου, οπότε τα φαινόμενα που κυριαρχούν, και βέβαια πρέπει να μοντελοποιηθούν, είναι κάθε φορά διαφορετικά. Μία άλλη διαφοροποίηση, σχετική τόσο με τη Φυσική όσο και με τη μεθοδολογία, είναι η διαστάσεις του προβλήματος. Για παράδειγμα, οι παλμοί που οδεύουν σε μονότροπη οπτική ίνα είναι μονοδιάστατες οντότητες, διότι, καθώς είναι εγκλωβισμένοι στις χωρικές διατάσεις, το μόνο που υπόκειται σε δυναμική εξέλιξη και επίδραση μη-γραμμικότητας σε τυχαίο σημείο της γραμμής διάδοσης είναι το χρονικό τους εύρος. Ένας τέτοιος παλμός, με κατάλληλη ισχύ, μπορεί σχετικά εύκολα να δημιουργήσει ένα σολιτόνιο που θα οδεύει αδιατάρακτο. Ένας παλμός με συγκεκριμένο χρονικό εύρος που στέλνεται σε επίπεδο κυματοδηγό αποτελεί πρόβλημα δύο διατάσεων, ενώ, όταν οδεύει σε ελεύθερο μέσο, τριών.

Για να μπορέσουμε να συμπεριλάβουμε αυτά τα θέματα γράψαμε μια σχετικά εκτενή εισαγωγή, η οποία βρίσκεται στο 1^ο Κεφάλαιο. Εκεί, εκτός από μερικά ιστορικά στοιχεία για την έρευνα πάνω στα μη-γραμμικά κύματα γενικά, αλλά και για τις αναπαραστάσεις τους στην Οπτική, δίνονται σύντομες εξηγήσεις για τους όρους σολιτόνιο και τις σύμφωνες ή ασύμφωνες αλληλεπιδράσεις των παλμών. Ακόμα, αναφέρονται τα κύρια εμπλεκόμενα φαινόμενα και σκιαγραφούνται κάποιες συνήθειες μέθοδοι προσέγγισης του προβλήματος της εξέλιξης των παλμών, μερικές από τις οποίες χρησιμοποιήσαμε στη μελέτη μας. Επίσης γίνεται σύντομη αναφορά στο μαθηματικό υπόβαθρο των μοντέλων, την NLS και κάποιες διατηρήσιμες ποσότητες που χρειάζονται στην ανάλυση.

Στα Κεφάλαια 2 και 3, καταγράφεται η μελέτη δύο μονοδιάστατων προβλημάτων. Και στις δύο περιπτώσεις, μελετάται η ασύμφωνη αλληλεπίδραση σολιτονικών παλμών και το μοντέλο που χρησιμοποιείται είναι δύο εξισώσεις NLS συζευγμένες, κατά κύριο λόγο μέσω του όρου της ετεροδιαμόρφωσης φάσης. Επίσης, και στα δύο προβλήματα χρησιμοποιούμε διαταρακτικές μεθόδους προσέγγισης. Συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 2 ασχολούμαστε με την επίδραση κάποιας περιοδικής μεταβολής της διασποράς στην αλληλεπίδραση των παλμών. Κατ' αρχάς μελετάμε την επίδραση της περιοδικής μεταβολής μικρού πλάτους, αλλά για διάφορες συχνότητες, στη σύζευξη των κάθετα πολωμένων ρυθμών σολιτονικού παλμού που διαδίδεται σε ίνα με ισχυρή διπλοθλαστικότητα. Χρησιμοποιούμε τη Μεταβολική Μέθοδο για να εκπέσουμε από το πρόβλημα δύο συζευγμένων PDEs σε σύστημα ODEs με μεταβλητές τα χαρακτηριστικά των ρυθμών του παλμού. Μέσω δυναμικής ανάλυσης του συστήματος βρίσκουμε τις χαρακτηριστικές του συχνότητες, οι οποίες μας οδηγούν στη διερεύνησή μας. Για να έχουμε μια γενική εικόνα του συστήματος για μεγάλο εύρος αρχικών τιμών, αλλά και της συχνότητας και πλάτους της διαταραχής χρησιμοποιούμε τομές Poincaré, μέσω των οποίων μπορούμε να έχουμε εικόνα για πιθανούς συντονισμούς, αλλά κυρίως για την ευστάθειά του. Καθώς τα συστήματα που μελετάμε είναι τριών βαθμών ελευθερίας, οι τομές καταλήγουν να είναι τεσσάρων διαστάσεων. Αντλώντας εμπειρία από τη βιβλιογραφία

της σχετικής μεθοδολογίας, μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για την ευστάθεια του συστήματος παρατηρώντας είτε τρισδιάστατες προβολές των τομών, είτε παράγοντας τις ίδιες τις τομές, όπου χρησιμοποιούμε χρωματισμό για την αναπαράσταση της τέταρτης διάστασης. Ακόμα επιλύουμε το ζεύγος των PDEs αριθμητικά και, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αυτά της δυναμικής ανάλυσης, μπορούμε να βρούμε για ποιες τιμές της συχνότητας της διαταραχής η Μεταβολική Μέθοδος αποτυγχάνει να δώσει σωστή ποσοτική ή ακόμα και ποιοτική περιγραφή.

Ένα ακόμα πρόβλημα που μοντελοποιείται από τις ίδιες εξισώσεις είναι η αλληλεπίδραση σολιτονικών παλμών διαφορετικής συχνότητας παρουσία διαχείρισης διασποράς (DM). Σε αυτή τη περίπτωση η συχνότητα της διαχείρισης είναι αρκετά μεγαλύτερη από τις χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος, κάτι που επιτρέπει πολύ μεγάλες μεταβολές του πλάτους αυτής, χωρίς να καταστρέφει τους παλμούς. Ακολουθώντας μια απλή αλγεβρική διαδικασία και δυναμική ανάλυση, υπολογίζουμε την απαραίτητη ενέργεια και τερέτισμα για τους παλμούς και δείχνουμε ότι, για συγκεκριμένες τιμές της συχνότητας και του πλάτους της διαχείρισης, η φασματική μετατόπιση κατά την αλληλεπίδραση (σύγκρουση) των παλμών μπορεί να μηδενιστεί.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετάμε ένα ακόμα πρόβλημα αλληλεπίδρασης σολιτονικών παλμών με διαφορετική συχνότητα. Η διαφορά με τα προηγούμενα είναι ότι οι παλμοί θεωρούνται στενοί, με εύρος κάτω του 1ps. Ως εκ τούτου, φαινόμενα ανώτερης τάξης, όπως το Raman και η διασπορά 3^{ns} τάξης, δε μπορούν να αγνοηθούν. Ιδιαίτερα το φαινόμενο Raman προκαλεί ολίσθηση στη συχνότητας των παλμών, καθώς και μεταφορά ενέργειας μεταξύ τους. Το βασικό μοντέλο είναι δύο συζευγμένες NLS, μαζί με επιπλέον όρους. Χρησιμοποιούμε την Άμεση Μέθοδο Διαταραχών και καταλήγουμε πάλι σε σύστημα συνήθων διαφορικών με μεταβλητές τα χαρακτηριστικά των παλμών. Το σύστημα μας δίνει μια καλή αίσθηση για την επίδραση των φαινομένων πάνω στους παλμούς, σαφέστερη από ότι οι PDEs. Εξετάζουμε τη δυνατότητα ισοζύγισης της χρονικής μετατόπισης που προκαλεί η ολίσθηση συχνότητας, τουλάχιστον για τον ένα παλμό (κανάλι), μέσω της αλληλεπίδρασης του με παλμούς μικρότερης συχνότητας. Φαίνεται πως κάτι τέτοιο είναι δυνατό, αλλά η ενεργειακή απώλεια που υφίσταται ο παλμός μπορεί να γίνει υπολογίσιμη.

Στο υπόλοιπο της εργασίας ασχολούμαστε με δύο προβλήματα σύμφωνης αλληλεπίδρασης, που αφορούν δισδιάστατα κυματοπακέτα, δηλαδή χωροχρονικούς παλμούς. Η μελέτη που εκτελούμε είναι αριθμητική και το μοντέλο που ακολουθείται είναι η δισδιάστατη NLS. Καθώς οι παλμοί έχουν ίδια συχνότητα, μπορούν να ειπωθούν σαν υπέρθεση του ενός στον άλλο και να μοντελοποιηθούν από μία μόνο εξίσωση.

Το πρώτο πρόβλημα αφορά τη δυνατότητα δημιουργίας μη-γραμμικού κύματος «X». Τα συγκεκριμένα κυματοπακέτα, ανάλογα των γραμμικών κυμάτων «X», μελετώνται εκτεταμένα τα τελευταία χρόνια, λόγω της ιδιότητας τους να διαδίδονται αναλλοίωτα σε δύο ή και τρεις διαστάσεις, δηλαδή σε επίπεδους κυματοδηγούς και ελεύθερα μέσα, πάντα με κανονική διασπορά. Η αιτία που ευνοεί την ύπαρξη τους είναι η μορφή της χωροχρονικής διαμορφωτικής αστάθειας. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η δυνατότητα δημιουργίας τους από μετασχηματισμό συνηθισμένων κυματοπακέτων, όπως τέτοια γκαουσιανού προφίλ. Μέσω της αλληλεπίδρασης τέτοιων παλμών με επίπεδο συνεχές κύμα (CW) δείχνουμε ότι μπορεί να δημιουργηθεί κυματοπακέτο τύπου «X», το οποίο διαδίδεται διατηρώντας το πλάτος και το σχήμα του για αρκετά μήκη περίθλασης, ενώ οι συνήθεις γκαουσιανοί παλμοί καταστρέφονται γρήγορα λόγω διασποράς. Ρυθμιστικό ρόλο στη δημιουργία τους παίζει το πλάτος, αλλά κυρίως η σχετική φάση του CW. Με τη βοήθεια μιας ποιοτικής περισσότερο μελέτης, μπορούμε να επιλέξουμε τα αρχικά χαρακτηριστικά των παλμών, ώστε να αποφευχθεί η διασπορά, ή ο χρονικός διαχωρισμός τους, και να διατηρηθούν αρκετά, ώστε να μετασχηματιστούν σε κυματοπακέτο «ΤύπουX».

Το δεύτερο πρόβλημα, το οποίο είναι και το τελευταίο της διατριβής, παρουσιάζεται στο 5^ο Κεφάλαιο και αφορά στη σύμφωνη αλληλεπίδραση χωροχρονικών γκαουσιανών παλμών παρουσία CW. Το μέσο διάδοσης θεωρείται ξανά κανονικής διασποράς. Ανάλογα με την αρχική τους μετατόπιση, το πλάτος και τη φάση τους, όπως και ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του CW εξετάζουμε τη δυνατότητα συσσωμάτωσής τους και δημιουργίας «αμαλγάματος». Ως αμάλγαμα νοείται το συσσωμάτωμα που συμπεριφέρεται σαν ένα κυματοπακέτο επαρκούς ενέργειας που δύναται να εξελιχθεί δυναμικά και να μη διασπαρθεί. Στη περίπτωση της κανονικής διασποράς η δυναμική εξέλιξη του κυματοπακέτου καταλήγει σε χρονικό διαχωρισμό του σε δύο νέα κυματοπακέτα χρονικά μετατοπισμένα. Έχουμε λοιπόν μια «χωροχρονική μετάθεση», όπου δύο κυματοπακέτα χωρικά μετατοπισμένα, αφού αλληλεπιδράσουν, καταλήγουν σε δύο άλλα κυματοπακέτα, χρονικά και φασματικά μετατοπισμένα.

Extensive Summary

The current doctoral thesis consists of four problems in the field of Nonlinear Optics, which we have studied in the Plasma Electron Beam and Nonlinear Optics Laboratory of NTUA. All of the problems have to do with interactions of optical pulses in the presence of nonlinearity. This means that the response of the medium depends on the pulses themselves. Those pulses (or beams) that we deal with, can be of solitonic nature or not, but in any case the indicated model, which describes their evolution, is the Nonlinear Schrödinger Equation (NLS). Our method of study changes according to the problem. In some cases we follow mainly an analytical approach (or rather semi-analytical) while in other, our study is mainly a numerical one.

Pulses interactions can be coherent or incoherent, depending on their dependence on pulses' relative phase. Those pulses we deal with are often called “nonlinear”, since they trigger nonlinear phenomena. Depending on the nature of the interaction (coherent or incoherent), there are different phenomena that are dominant each time. Thus the equations that model them have to change accordingly. Another variation, relative to the physics and the methodology of the problem is imposed by its dimensions. For example, the temporal pulses propagating along a standard monomode fiber are one dimensional entities, because they are trapped along the spatial dimensions and it is only their temporal width, at a certain point along the propagation line, that is subjected to nonlinear effects and dynamical evolution. Such a pulse, with the proper power, can relatively easy create a soliton and propagate undisturbed. A pulse propagating along a planar waveguide is a problem of two dimensions, while another propagating in a bulk medium is a problem of three dimensions.

The introduction of the work, found in Chapter 1, is relatively extended, in order for all the above issues to be included. We give some historical elements, concerning the progress of the research on nonlinear waves in general, and also in Optics more specifically. Some brief descriptions about solitons and the nature of pulse and beam interactions are also given. Furthermore, we present the main phenomena that appear in the problems that we study, and the more usual analytical and numerical methods of study followed in relative problems in Optics. Some of these methods are employed in this work. There is also a brief reference on the mathematical background of our study, the NLS and some conserved quantities that are needed in our analysis.

In Chapters 2 and 3 we study two one-dimensional problems. In both cases we deal with the incoherent interaction of solitonic pulses and the model used is a pair of NLS coupled mainly by the term of cross-phase modulation. Also, in both problems we use perturbative methods. More specifically, in Chapter 2 we study the influence of periodically modulated dispersion in pulse interactions. Firstly we deal with the effect that this periodic modulation has on the coupling of two orthogonally polarized modes of a pulse propagating inside a fiber with strong birefringence. The modulation is actually no more than a perturbation, having small amplitude. Nevertheless, it is the frequency of modulation that is most important and we study a wide spectrum of values. We use the Variational Method to transform the problem of two coupled PDEs to one of a system of ODEs. The variables of the system are chosen to be the modes' characteristics. We perform dynamical analysis of the system in order to retrieve the eigenfrequencies of it, and we use those as guidance through our study. In order to capture a general picture of the system, for a wide range of initial values and of the frequency and amplitude of the modulation, we employ a Poincaré surface of section analysis. Through it we can unveil characteristics of the system, like resonances, chaotic areas, initial values that lead to escapes and generally we can check its stability. Since we end up with systems of three degrees of freedom, the surfaces of section are four-dimensional. Thankfully, there is some not that extended bibliography concerning exactly those subjects, which mainly comes from

the field of Astrophysics. Hence by creating three dimensional projections of the surfaces of section we can still comment on system stability. Also, we can create even the four dimensional surfaces themselves by employing color as the fourth dimension. We also solve the coupled PDEs numerically and compare the results with those of the ODEs. Doing systematic comparisons we can comment not only on the stability of the system, meaning the resilience of mode coupling, but also we can test the validity of the Variational Method, which appears to fail for certain values of modulation's frequency.

Another problem that can be modeled with the same equations is the interaction of solitonic pulses of different frequency in the presence of Dispersion Management (DM). Such interactions can happen in a WDM communication system. In this case the frequency of dispersion modulation is quite larger than the characteristic frequencies of the pulses. By employing a simple algebraic procedure and dynamical analysis of the ODEs system, we are able to choose the values of energy enhancement and pre-chirp of the pulse and create a DM-soliton. It is also shown that the sifting of frequency, experienced by the DM-solitons after their collisions, can be nullified through the proper selection of the period and local values of the dispersion.

At Chapter 3 we study yet another problem concerning the interaction of solitonic pulses with different frequencies. However, this time we deal with ultrashort pulses, being of width lesser than 1ps. For this reason, higher order effects, like Raman scattering and dispersion of the third order cannot be ignored. Most importantly, the Raman effect causes downshift of pulse frequency, as well as energy transfer between the pulses, during their collision. The model used is a pair of NLS, with added terms of higher order. We approach the problem through the Direct Perturbation Method, which also gives us a system of ODEs to solve. Our main concern is the possibility of balancing the temporal displacement of pulses, caused by the frequency shift, by forcing collisions with pulses of lower frequency (another channel), which cause opposite temporal displacement. It is shown that this can be possible, but the energy transfer that takes place at every collision can be destructive for the solitonic pulse, in the long run.

The rest of the thesis concerns problems of coherent interaction of two-dimensional (spatiotemporal) wavepackets. Our study is mainly numerical and the model that we use is the two-dimensional NLS. Since the pulses are now considered to have the same frequency, they can be presented as a superposition of one over the other and their evolution can be modeled by one equation.

The first problem concerns the possibility of spontaneous nonlinear X-wave generation. The specific wavepackets are the analogue of the linear X-waves and are intensively studied for a few years now because they appear to travel through slab waveguides or bulk media without distortion. A necessity for their existence is the medium to be of normal dispersion and the reason behind their specific shape is the spatiotemporal modulation instability (MI) which amplifies specific sidebands. Of great interest is the possibility of creating such wavepackets from simple Gaussian spatiotemporal pulses. We show that this could be made possible through the interaction of such a pulse with a continuous plane wave (CW). The presence of the CW enhances the MI and can reshape the pulse to create an "X-like" wavepacket which does not have the resilience of the linear counterpart, but can propagate for longer distances than the Gaussian pulse, before succumbing to dispersion. The amplitude and most of all the initial phase of the CW are the critical controlling factors. By employing a mostly qualitative analysis we can choose the initial characteristic of the Gaussian pulse and the CW, in order to avoid the temporal splitting or the dispersion of the former and reshape it to an X-like wavepacket.

The second problem, which is also the last problem of this thesis, presented at the 5th Chapter, concerns coherent interactions of spatiotemporal Gaussian pulses, in the presence of

CW. The medium is again considered to be of normal dispersion. We examine the possibility of them fusing together and even amalgamate. The amalgamation is the state where the pulses merge and create one wavepacket which evolves dynamically without dispersing outright, as the individual pulses would. Hence in the normal dispersion regime, if that wavepacket has the proper “mass” (energy) will experience temporal splitting. That could create two wavepackets with temporal displacement. In that case we have a situation of spatiotemporal reallocation, where two pulses spatially displaced, interact and create two new wavepackets, which are temporally and spectrally displaced.

Κεφάλαιο 1

Περί σολιτονίων, μη-γραμμικών παλμών και αλληλεπιδράσεων αυτών γενικά

Παρατίθενται εδώ κάποια απαραίτητα εισαγωγικά στοιχεία σχετικά με τα σολιτόνια και τη μη-γραμμική κυματική κατ' επέκταση. Δίνονται κάποια ιστορικά στοιχεία για τα εντυπωσιακά αυτά πεδία της έρευνας, σκιαγραφείται το μαθηματικό τους υπόβαθρο και παρατίθενται παραδείγματα, μελλοντικών ως επί τω πλείστον, εφαρμογών στην Φωτονική τεχνολογία. Εκτενέστερη αναφορά γίνεται στα φυσικά φαινόμενα που διέπουν τη δημιουργία, διάδοση και αλληλεπίδραση των μη-γραμμικών φωτεινών παλμών και ακτίνων σε οπτικά μέσα. Πολλά, αν και όχι όλα από τα φαινόμενα που παρατίθενται, αποτελούν περισσότερο ή λιγότερο αντικείμενο μελέτης στα υπόλοιπα Κεφάλαια της εργασίας.

1.1 Σολιτόνια και Μη-Γραμμικά κύματα

Εν αρχή, λοιπόν, ήταν ο Scott Russell, ο Σκοτσέζος μηχανικός, που το 1834 παρατήρησε αυτό το περίφημο πια κύμα που ταξίδευε κατά μήκος ενός καναλιού, για περισσότερο από ένα μίλι ουσιαστικά αμετάβλητο σε πλάτος και εύρος, χωρίς δηλαδή διασπορά. Ο ίδιος κατέγραψε τη παρατήρηση του, αλλά παρέμεινε ξεχασμένη για πολλά χρόνια. Ο λόγος ήταν ότι η τότε θεωρία περιέγραφε τη διάδοση γραμμικών μόνο κυμάτων και δε μπορούσε να εξηγήσει το παραπάνω φαινόμενο. Η αλήθεια είναι ότι ουσιαστική έρευνα για μη-γραμμικά φαινόμενα ξεκίνησε πολύ αργότερα, ίσως κάπου πενήντα χρόνια πριν από σήμερα. Η κυμάτωση που παρατήρησε ο Russell, η οποία επέδειξε φαινομενική «επιμονή» να διατηρεί το σχήμα της κατά τη διάδοση είναι σήμερα γνωστή σα «σολιτόνιο», ή «σολιτονικό κύμα» και αποτελεί μια από τις σημαντικότερες ανακαλύψεις της μη-γραμμικής επιστήμης. Μία άλλη σημαντική ανακάλυψη είναι ο «παράξενος ελκυστής», ο οποίος είναι σύστημα φαινομενικά απλό, με λίγους βαθμούς ελευθερίας, που όμως οδηγεί σε χάος. Έτσι η εμφάνιση των σολιτονίων σε συστήματα με πάρα πολλούς ή και άπειρους βαθμούς ελευθερίας δείχνει κάτι ακόμα πιο εντυπωσιακό. Φαίνεται πως συλλογικά φαινόμενα μπορεί να οδηγήσουν σε συνεκτικές δομές, σαν ένα είδος αυτό-οργάνωσης. Η συνύπαρξη συνεκτικών δομών με το χάος είναι θέμα έρευνας και σήμερα.

Το σολιτόνιο μπορεί να οριστεί σαν ένα χωρικά εντοπισμένο κύμα, ιδιαίτερα ευσταθές, που ελλείψει απωλειών διατηρεί την ενέργεια του και ιδανικά το πλάτος και το εύρος του, ενώ σε άλλη περίπτωση τα μεγέθη αυτά αποτελούν αντικείμενο περιοδικής μόνο διακύμανσης, πάντα χωρίς αυτό να διασπείρεται. Μόλις το 1895 οι Korteweg και de Vries ανέπτυξαν τη θεωρία που μπορούσε να ερμηνεύσει την ύπαρξη του σολιτονικού κύματος του Russell, έκφραση της οποίας είναι η μη-γραμμική διαφορική εξίσωση που φέρει το όνομα τους [4, 28, 29] Πολύ αργότερα, το 1953, οι Fermi, Pasta και Ulam, εκτελώντας μία αριθμητική προσομοίωση διέγερσης ενός μονοδιάστατου σωματιδιακού πλέγματος, παρατήρησαν ότι η μετάδοση ενέργειας σε ένα ρυθμό ακολουθείτο από τη μετάδοση τους σε άλλους ρυθμούς, αλλά τελικά ξαναγύριζε αναλλοίωτη στον αρχικό. Πέρασαν αρκετά χρόνια μέχρι που το 1965 οι Zabusky και Kruskal εξήγησαν θεωρητικά το παραπάνω φαινόμενο ορίζοντας παράλληλα το «σολιτόνιο» [33]. Το όνομα επιλέχθηκε ώστε να θυμίζει τη μοναχική διάδοση του κύματος (ή αλλιώς του προεξέχοντος ενεργειακού λοβού), και ταυτόχρονα τη σωματιδιακή συμπεριφορά του. Τα σολιτόνια δεν είναι μόνο αναλλοίωτα στη διασπορά, αλλά παραμένουν αναλλοίωτα και μετά από τις μεταξύ τους συγκρούσεις! Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 1.1. Το σολιτόνιο είναι βέβαια περισσότερο μια μαθηματική οντότητα. Αναφέρεται στις ευσταθείς και αναλλοίωτες λύσεις συγκεκριμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων, ενώ στη πραγματικότητα τα δευτερογενή φαινόμενα που επιδρούν μακροπρόθεσμα και σίγουρα οι απώλειες πιστοποιούν ότι δεν υπάρχει τίποτα αναλλοίωτο στη φύση. Έτσι τα κύματα που επιδεικνύουν τις παραπάνω εντυπωσιακές ιδιότητες, έστω και αν κάποια στιγμή φθίνουν λόγω απωλειών, ονομάζονται «σολιτονικά κύματα», αντί για «σολιτόνια». Επειδή στην Οπτική χρησιμοποιούνται και οι δύο όροι για κάθε περίπτωση, τους χρησιμοποιούμε και εδώ κατά βούληση.

Χωρίς να επεκταθούμε ιδιαίτερα στην καθαρά μαθηματική διάσταση τους, οι εξισώσεις που έχουν σολιτονικές λύσεις περιγράφουν συστήματα με άπειρους βαθμούς ελευθερίας, τα οποία είναι πλήρως ολοκληρώσιμα. Τα σολιτόνια έχουν έντονο ενδιαφέρον για τους μαθηματικούς και υπάρχουν πολλά βιβλία αφιερωμένα στις μαθηματικές τους ιδιότητες [28-30].

Τα σολιτονικά κύματα παρουσιάζουν επίσης μεγάλο ενδιαφέρον για φυσικούς και μηχανικούς. Μετά την εργασία των Zabusky και Kruskal, τα σολιτόνια άρχισαν να «εμφανίζονται» παντού. Έτσι, χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν κάποια υδροδυναμικά κύματα (συμπεριλαμβανομένων των τσουνάμης [73, 74] και των “rogue waves” (κύματα

απρόβλεπτης συμπεριφοράς) [75]), εντοπισμένα κύματα σε αστροφυσικό πλάσμα, εντοπισμένους ρυθμούς σε μαγνητικούς κρυστάλλους, τη δυναμική βιολογικών συστημάτων, όπως το DNA, τη διάδοση αναλλοίωτων φωτεινών παλμών σε οπτική ίνα και αλλού [10, 15, 16, 28,]. Οι περιπτώσεις αυτές των μη-γραμμικών κυμάτων περιγράφονται προσεγγιστικά από τις μαθηματικές εξισώσεις που δίνουν σολιτόνια. Επαναλαμβάνουμε όμως ότι τα σολιτονικά αυτά κύματα έχουν τις ιδιότητες των μαθηματικών σολιτονίων. Επιπλέον, δύνανται να «γεννηθούν» μέσω της διέγερσης ενός φυσικού συστήματος, το οποίο έχει τις κατάλληλες προϋποθέσεις για τη διατήρηση σολιτονίων. Το επίσης ενδιαφέρον είναι πως, ακόμα και αν η διέγερση δεν έχει επακριβώς τα χαρακτηριστικά της σολιτονικής λύσης, εάν αυτή είναι αρκετά ισχυρή, μπορεί να προκαλέσει τη δημιουργία σολιτονικού κύματος. Τα προβλήματα που μελετάμε στη παρούσα εργασία βασίζονται σε ανάλογη προσέγγιση.

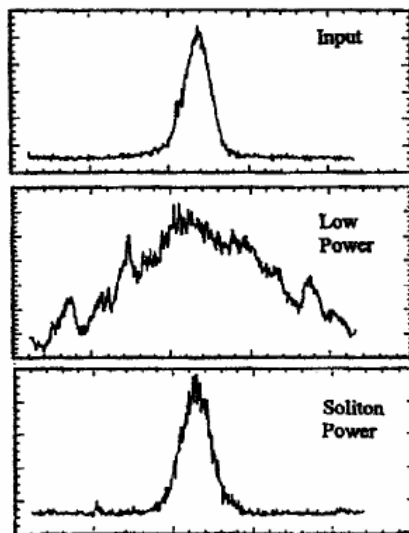


Σχήμα 1.1: Σύγκρουση σολιτονικών κυμάτων χαμηλής έντασης σε ρηχό νερό (φωτογραφία Terry Toedtemeier, 1978).

Στο πεδίο της Οπτικής τα μη-γραμμικά κύματα και γενικότερα τα μη-γραμμικά φαινόμενα είναι πλέον αντικείμενο επισταμένης μελέτης για τη κατανόηση τους και τη χρήση τους σε οπτικές συσκευές. Η ανάπτυξη αυτή είχε ως απαρχή και προϋπόθεση την εφεύρεση του laser. Μέσω αυτού μπόρεσαν να παραχθούν ακτίνες και παλμοί μικρού εύρους και μεγάλης έντασης, κάτι απαραίτητο για την εμφάνιση μη-γραμμικών φαινομένων και δημιουργία σολιτονικών κυμάτων. Η μελέτη τους περιγράφεται από τη «Μη-Γραμμική Οπτική» και τα σολιτόνια χωρίζονται σε «χρονικά» και «χωρικά», ανάλογα με το αν η παγίδευση τους κατά τη διάδοση είναι στο χρόνο ή στο χώρο. Τα χρονικά σολιτόνια είναι οπτικοί παλμοί που διατηρούν το σχήμα τους και τα χωρικά είναι ακτίνες που διατηρούν σταθερό το εγκάρσιο (προς τη διεύθυνση διάδοσης) εύρος τους. Οι δύο περιπτώσεις είναι ουσιαστικά όμοιες, αν ανταλλάξει κανείς το χρόνο με μία εγκάρσια χωρική διάσταση και βασίζονται στη μη-γραμμική διαμόρφωση του δείκτη διάθλασης. Για να γίνει αυτό απαιτείται η ακτινοβολία να έχει τη κατάλληλη ένταση. Το φαινόμενο δε ονομάζεται «οπτικό φαινόμενο Kerr» [7, 8]. Η εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από την ένταση προκαλεί αυτόεστίαση (ή και από-εστίαση) κατά μήκος της εγκάρσιας χωρικής διάστασης, ενώ για τους χρονικούς παλμούς προκαλεί χρονικά εξαρτημένη αυτοδιαμόρφωση φάσης (self phase modulation-SPM). Έτσι, χωρικό σολιτόνιο δημιουργείται όταν η τάση για αυτοεστίαση εξισορροπεί τη φυσική τάση για περίθλαση της ακτίνας. Παρομοίως, χρονικός σολιτονικός παλμός δημιουργείται και όταν η SPM εξισορροπεί τη διασπορά. Και στις δύο περιπτώσεις, το σολιτόνιο διαδίδεται στο οπτικό μέσο χωρίς να αλλάζει το σχήμα του και καθώς είναι το ίδιο που διαμορφώνει τις συνθήκες διάδοσης, λέμε ότι «αυτό-παγιδεύεται».

Η πρώτη παρατήρηση χωρικού σολιτονίου έγινε το 1964 όπου οπτικές ακτίνες (κύματα σταθερού πλάτους-CW) επέδειξαν αυτό-παρίδευση κατά τη διάδοσή τους σε μη-γραμμικό μέσο [76]. Το φαινόμενο έγινε περισσότερο κατανοητό τη δεκαετία του 80, μετά από περισσότερα πειράματα [77]. Στο σχήμα 1.2 φαίνεται μια απεικόνιση πειραματικής παρατήρησης δημιουργίας χωρικού σολιτονίου, από το βιβλίο των Trillo και Torruellas [15-Κεφ. 1].

Τα χρονικά σολιτόνια παρατηρήθηκαν λίγο αργότερα, το 1967, όπου επιδείχθηκε η δυνατότητα παλμών να περνούν απaráλλακτοι μέσα από κάποιο οπτικό μέσο [78]. Ένα σημαντικό πείραμα το 1980 έδειξε ότι παλμοί με ορισμένη ένταση μπορούν να διαδίδονται αναλλοίωτοι από διασπορά κατά μήκος οπτικής ίνας [79]. Αυτό πυροδότησε εκτεταμένη έρευνα γύρω από τη δυνατότητα χρήσης σολιτονικών παλμών σε φορείς πληροφορίας κατά μήκος δικτύου οπτικών ινών. Η συγκεκριμένη τεχνολογία φαίνεται πως έχει σαφή πλεονεκτήματα έναντι των συνήθων «γραμμικών» τρόπων μετάδοσης πληροφορίας, RZ και NRZ [5, 11].



Σχήμα 1.2: Δημιουργία χωρικού σολιτονίου σε ημιαγωγικό κυματοδηγό. Πάνω φαίνεται το προφίλ έντασης της ακτίνας στην είσοδο, όπου αν η ένταση δεν είναι αρκετή η ακτίνα περιθλάται (μέση), ενώ αν είναι κατάλληλη (κάτω) διατηρείται σχεδόν αναλλοίωτη (σχήμα από [15, Κεφ. 1]).

Τα παραπάνω σολιτόνια ονομάζονται και «φωτεινά» (“bright”). Αυτό για να διαχωριστούν από τα λεγόμενα σκοτεινά (dark solitons). Ενώ τα χρονικά φωτεινά σολιτόνια χρειάζονται ανώμαλη διασπορά για να διαδοθούν, τα σκοτεινά χρειάζονται κανονική διασπορά (βλέπε κεφάλαιο 1.4). Ουσιαστικά είναι βυθίσεις στην φωτεινή ένταση ενός CW και παρατηρήθηκαν πρώτη φορά το 1973 [43]. Χωρικά σκοτεινά σολιτόνια έχουν επίσης παρατηρηθεί [3, 15].

Τη δεκαετία του 90 μελετήθηκαν μερικές ακόμα μορφές φωτεινών σολιτονίων, όπως τα χωροχρονικά σολιτόνια (οπτικές βολίδες), τα σολιτόνια Bragg, οι οπτικές δίνες, τα quadratic solitons (τετραγωνικής μη-γραμμικότητας), τα διανυσματικά σολιτόνια, αυτά που δημιουργούνται σε περιοδικές διακριτές δομές κ.α. [3, 15]. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι μη-γραμμικοί παλμοί με περισσότερες από μία διάσταση. Τα χρονικά και χωρικά σολιτόνια στα οποία αναφερθήκαμε παραπάνω είναι μονοδιάστατες οντότητες. Θα ειπωθούν περισσότερα για αυτό όταν αναφερθούμε στην εξίσωση που τα περιγράφει, αλλά τώρα αρκεί να πούμε ότι περιγράφονται από τη χρονική τους, ή τη μία χωρική τους, διάσταση και τη διάσταση της διάδοσης, οπότε λέμε ότι είναι παλμοί 1D ή (1+1)D. Οι φωτεινοί παλμοί δύο ή τριών διαστάσεων, (2+1)D και (3+1)D, είναι ακόμα πιο περίπλοκες οντότητες και η

δημιουργία σολιτονίου από αυτούς κάτι που απαιτεί ακόμα πιο ιδιαίτερες συνθήκες. Παρόλα αυτά η απουσία ύπαρξης σολιτονικού παλμού έχει οδηγήσει στη μελέτη φαινομένων όπως η κυματική κατάρρευση, οι αλληλεπιδράσεις πολυδιάστατων μη-γραμμικών παλμών, και σε απόπειρες εξεύρεσης ευσταθών λύσεων, όπως τα μη-γραμμικά κύματα «Τύπου-X» [6]. Όλα τα παραπάνω αποτελούν αντικείμενο έρευνας μέχρι και σήμερα.

1.1.1 Διανυσματικά σολιτόνια

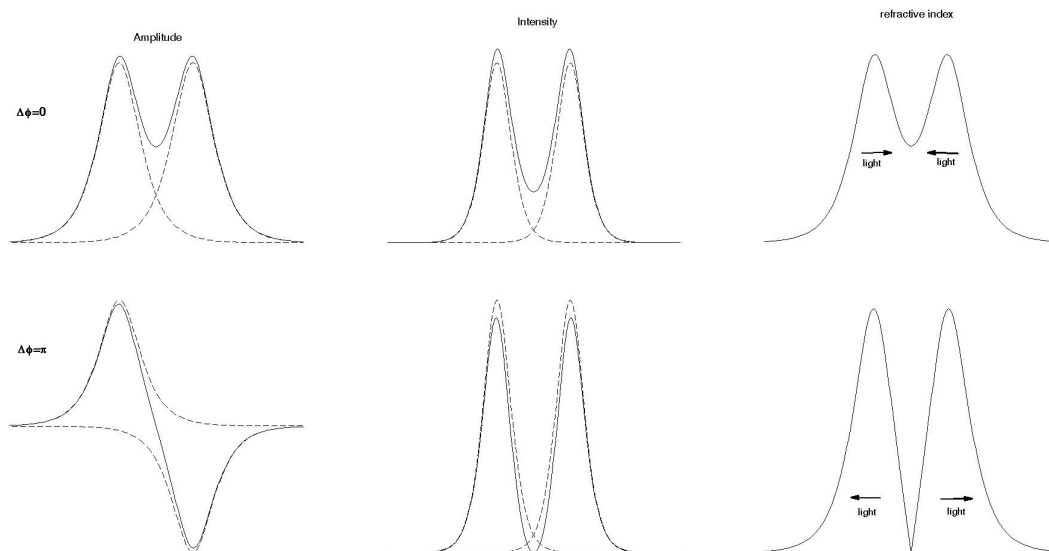
Μια χαρακτηριστική περίπτωση τους αποτελεί αντικείμενο της μελέτης στο 2^ο Κεφάλαιο, ως εκ τούτου παραθέτουμε μερικά βασικά στοιχεία. Τα διανυσματικά σολιτόνια λοιπόν αποτελούνται από δύο ή περισσότερες συνιστώσες (ρυθμούς) οι οποίες αλληλο-παγιδεύονται και διαδίδονται μαζί. Βασική προϋπόθεση για τη δημιουργία ευσταθών μορφών είναι οι δύο ρυθμοί να μη συμβάλουν, ή αλλιώς, η συμβολή τους να μην επηρεάζει το δείκτη διάθλασης, διότι τότε αυτός δε θα έχει μια σταθερή διαμόρφωση με αποτέλεσμα να καταστρέφεται η κυματοδότηση. Με άλλα λόγια, ιδανικά, η αλληλεπίδραση μεταξύ των συνιστωσών πρέπει να είναι ασύμφωνη. Η πρώτη πρόταση για διανυσματικό σολιτόνιο έγινε από τον Manakov, ο οποίος θεώρησε ένα πεδίο με δύο συνιστώσες ορθογώνια πολωμένες, έτσι ώστε να μη συμβάλουν [34]. Το σύστημα του αποτελείται από δύο μη-γραμμικά συζευγμένες εξισώσεις, μία για κάθε συνιστώσα. Ο όρος σύζευξης αντιπροσωπεύει την ετεροδιαμόρφωση φάσης (cross phase modulation-XPM), ουσιαστικά την αλλαγή του δείκτη διάθλασης που «βλέπει» η μία συνιστώσα λόγω ύπαρξης της άλλης. Το σύστημα του Manakov θέτει τους όρους των SPM και XPM σαν ισοδύναμους και είναι το μόνο ολοκληρώσιμο. Παρόλα αυτά έχουν βρεθεί σολιτονικές λύσεις για συστήματα με διαφορετική σχέση μεταξύ αυτών των όρων. Χαρακτηριστική περίπτωση είναι αυτό που περιγράφει τη διάδοση ορθογώνια πολωμένων ρυθμών σε ένα με ισχυρή διπλοθλαστικότητα. Επίσης, κυματομορφές που διατηρούν το σχήμα τους βρίσκονται και στη περίπτωση της ασθενούς διπλοθλαστικότητας, όπου οι ρυθμοί αλληλεπιδρούν σύμφωνα, λόγω του φαινομένου «μίξης τεσσάρων φωτονίων» (four wave mixing-FWM) [3]. Οι συζευγμένοι αυτοί παλμοί αναφέρονται επίσης ως διανυσματικά σολιτόνια. Όλα αυτά τα παραδείγματα αφορούν συζευγμένους θεμελιώδεις (χαμηλούς) ρυθμούς. Ανώτεροι ρυθμοί, χρονικοί και χωρικοί, που συζευγμένοι επιδεικνύουν σημαντική ευστάθεια έχουν παρατηρηθεί σε αριθμητικές εργασίες και πειράματα [35, 36].

1.1.2 Σολιτονικές αλληλεπιδράσεις

Συχνά ονομάζονται και «συγκρούσεις», προς χάρη των σωματιδιακών ιδιοτήτων των σολιτονίων και είναι από τα πλέον ενδιαφέροντα πεδία έρευνας στη μη-γραμμική Οπτική, αλλά και γενικότερα. Χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τις σύμφωνες (coherent), όπου το αποτέλεσμα εξαρτάται από τη σχετική φάση των παλμών και τις ασύμφωνες (incoherent), όπου δεν εξαρτάται.

Η αλληλεπίδραση είναι σύμφωνη όταν η χρονική απόκριση του μη-γραμμικού μέσου είναι αρκετά σύντομη ώστε να αισθανθεί τα αποτελέσματα της παρεμβολής των σολιτονίων (ή σημάτων) κατά τη μερική ή ολική αλληλοεπικάλυψη τους. Τα υλικά με τους πλέον συνήθεις στην οπτική τύπους μη-γραμμικότητας (Kerr και τετραγωνικής) έχουν τη γρήγορη απόκριση που απαιτείται, αντίθετα τα φωτοδιαθλαστικά υλικά έχουν αργό χρόνο απόκρισης (έστω τ) και επηρεάζονται από τη σχετική φάση μόνο αν παραμένει σταθερή για χρόνο μεγαλύτερο από τ . Για μεγάλη συχνότητα μεταβολής της φάσης οι αλληλεπιδράσεις είναι ουσιαστικά ασύμφωνες.

Ένα άλλο σημείο διαφοροποίησης είναι οι διαστάσεις του συστήματος. Αν και τα βασικά χαρακτηριστικά του τρόπου αλληλεπίδρασης των σολιτονικών κυμάτων παρατηρούνται σε διάφορα είδη μη-γραμμικότητας και σε παλμούς και ακτίνες μίας ή περισσότερων διαστάσεων, οι αλληλεπιδράσεις παλμών (2+1)D και πάνω γίνονται ιδιαίτερα πολύπλοκες. Αντίθετα, η περίπτωση για Kerr μη-γραμμικότητα και (1+1)D σολιτόνια είναι πιο εύκολο να μελετηθεί αναλυτικά, καθώς οι αλληλεπιδράσεις μπορούν να περιγραφούν επακριβώς από τη μέθοδο αντίστροφης σκέδασης [37]. Ακόμα, καθώς το σύστημα που τα περιγράφει είναι ολοκληρώσιμο δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας των παλμών. Για τον ίδιο λόγο, οι συγκρούσεις είναι πλήρως ελαστικές και ο αριθμός των σολιτονίων που συμμετέχουν διατηρείται, τα οποία επίσης διατηρούν τις ταχύτητες τους, (και στις ασύμφωνες αλληλεπιδράσεις διατηρούν και τη προ-σύγκρουσης διεύθυνση διάδοσης). Έτσι, δύο σολιτόνια ίδιας συχνότητας που οδεύουν παράλληλα, με μετατόπιση που δε ξεπερνά μερικές φορές το πλάτος τους, και όντας συμφασικά ($\Delta\phi = 0$) έλκονται, ενώ αν έχουν αντίθετη φάση ($\Delta\phi = \pi$) απωθούνται. Για ενδιάμεσες τιμές της φάσης η αλληλεπίδραση τα οδηγεί σε πιο περίπλοκες κινήσεις, συνδυασμούς έλξης-άπωσης, ενώ μπορεί να υπάρξει ανταλλαγή ενέργειας. Μία σχηματική εξήγηση φαίνεται στο σχήμα 1.3. Η συμφασική παρεμβολή των σολιτονίων αυξάνει την ένταση ανάμεσα τους. Εφόσον το μέσο παρουσιάζει εστιάζουσα μη-γραμμικότητα θα αυξηθεί και ο δείκτης διάθλασης στη περιοχή αυτή. Με το τρόπο αυτό περισσότερο φως στρέφεται προς τη περιοχή ανάμεσα τους και άρα οι παλμοί προσεγγίζουν ο ένας τον άλλο. Το αντίθετο συμβαίνει όταν συμβάλουν καταστροφικά. Η ένταση στο μέσο πέφτει και μαζί της και ο δείκτης διάθλασης σε σχέση με τη γύρω περιοχή. Το φως κινείται μακριά από τις μικρές τιμές του δείκτη και οι παλμοί απωθούνται [1, 38].



Σχήμα 1.3: Σχηματική αναπαράσταση της ενισχυτικής (άνω σειρά) και καταστροφικής (κάτω) σύμφωνης αλληλεπίδρασης δύο σολιτονικών παλμών. Στη μέση παρίσταται η διαμόρφωση ης έντασης και δεξιά του δείκτη διάθλασης. Οι διακεκομμένες παριστούν τους παλμούς μόνους.

Για τη περίπτωση των συμφασικών σολιτονίων, το αποτέλεσμα της σύγκρουσης τους εξαρτάται από το είδος της μη-γραμμικότητας. Οι πλέον συχνές περιπτώσεις είναι η τύπου Kerr και η κορέσιμη. Στη παρούσα εργασία ασχολούμαστε αποκλειστικά με τη πρώτη, αξίζει όμως να πούμε ότι στα φυσικά συστήματα, για μεγάλες τιμές της έντασης του φωτός, η μη-γραμμικότητα είναι ουσιαστικά κορέσιμη. Αυτό σημαίνει ότι για πολύ μεγάλη ένταση

ισχυροποιούνται φαινόμενα που διακόπτουν την διαρκή αυτοεστίαση κάνοντας τη μη-γραμμική απόκριση του υλικού ασθενέστερη από την ιδανική Kerr περίπτωση. Παρακάτω θα επανέλθουμε για λίγο σε αυτό το θέμα. Για τη περίπτωση Kerr λοιπόν, τα συμφασικά σολιτόνια έλκονται μέχρι συσσωμάτωσης και μετά εκτελούν περιοδική έλξη-άπωση ταλαντούμενα γύρω από το μέσο της αρχικής τους απόστασης. Τα χωρικά σολιτόνια που ταξιδεύουν συγκλίνοντα με γωνία αρκετά μεγάλη δύναται να μη παγιδευτούν, αλλά να περάσουν το ένα μέσα από το άλλο, αποκτώντας μια μικρή μετατόπιση. Να πούμε ακόμα ότι, όταν συγκρούονται σολιτόνια διαφορετικού πλάτους, χρονικά ή χωρικά, υπάρχει πάντα ανταλλαγή ενέργειας. Έπειτα από τη σύγκρουση τα σολιτόνια μεταβάλλουν το εύρος τους εξισορροπώντας έτσι την αλλαγή του πλάτους.

Οι αλληλεπιδράσεις μη-γραμμικών χωροχρονικών παλμών και ακτίνων, διαστάσεων $(2+1)$ και $(3+1)D$, σε επίπεδο κυματοδηγό ή μαζικό μέσο, είναι φαινόμενα ακόμα πιο πολύπλοκα αλλά και πλουσιότερα σε δυνατά αποτελέσματα. Στη περίπτωση της μη-γραμμικότητας τύπου Kerr, οι αλληλεπιδράσεις είναι σχετικά βραχύβιες, καθώς για ανώμαλη διασπορά οι παλμοί μπορεί να οδηγηθούν σε έντονη αυτοεστίαση και κατάρρευση, ενώ σε μέσο με κανονική διασπορά δύναται να διαχωριστούν σε δύο ή περισσότερα κυματοπακέτα έκαστος, τα οποία να αλληλεπιδράσουν εκ νέου. Παρόλα αυτά, η αλληλεπίδραση μπορεί να οδηγήσει σε φαινόμενα όπως η δημιουργία συσσωματώματος, αμαλγάματος, η χωροχρονική μετάθεση ή σε διάλυση των παλμών [6]. Στις περιπτώσεις αυτές αναφερόμαστε εκτενέστερα στο Κεφάλαιο 5. Αξίζει να προσθέσουμε ότι ευσταθέστεροι μη-γραμμικοί παλμοί παρατηρούνται σε μέσα με κορέσιμη μη-γραμμικότητα. Υπό συνθήκες μπορούν να είναι αρκετά ευσταθείς, ώστε να μπορούν να ονομάζονται επίσης «σολιτόνια». Στις αλληλεπιδράσεις τους η διατήρηση του αριθμού των παλμών δεν είναι δεδομένη, όπως στους $(1+1)D$ παλμούς. Έτσι οι παλμοί μπορεί να περάσουν ο ένας μέσα από τον άλλο, να συσσωματωθούν ή να καταστραφούν [3, 38]. Ακόμα, οι περισσότεροι βαθμοί ελευθερίας στη κίνηση τους επιτρέπουν τη δημιουργία φωτεινών δομών (αν και όχι πάντα ευσταθών) αποτελούμενων από ορισμένο αριθμό αλληλεπιδρώντων κυματοπακέτων, σε συγκεκριμένες αποστάσεις και με συγκεκριμένη στροφορμή. Παραδείγματα αποτελούν, το ζεύγος σολιτονίων που περιστρέφονται το ένα γύρω από το άλλο, τα δακτυλιοειδή σολιτόνια κ.α [3, 15]

Οι ασύμφωνες αλληλεπιδράσεις είναι ακόμα ένα μεγάλο κεφάλαιο, με έντονο φυσικό και τεχνολογικό ενδιαφέρον. Το τι θεωρούμε όμως ασύμφωνο είναι και θέμα παραδοχών. Ουσιαστικά η πλέον ξεκάθαρη περίπτωση είναι τα φωτοδιαθλαστικά υλικά, όπου ο χρόνος απόκρισης τους είναι πολύ μεγαλύτερος από τη μεταβολή της σχετικής φάσης μεταξύ σολιτονίων. Όμως, όταν τα σολιτόνια έχουν μεγάλη συχνοτική διαφορά, η αλληλεπίδραση τους μπορεί να θεωρηθεί ασύμφωνη, και να μοντελοποιηθεί από αντίστοιχες εξισώσεις με καλή προσέγγιση. Το τι θεωρείται μεγάλη διαφορά δεν είναι απόλυτα καθορισμένο και συχνά διαφέρει από τον ένα συγγραφέα στον άλλο. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία μια διαφορά 2 με 5 φορές το φασματικό εύρος των παλμών θεωρείται αρκετή [2, 5]. Επίσης ασύμφωνη θεωρείται η αλληλεπίδραση μεταξύ κάθετα πολωμένων ρυθμών, τουλάχιστο για τη περίπτωση υλικού με ισχυρή διπλοθλαστικότητα.

Ένας έμμεσος τρόπος επίδρασης της φάσης είναι το FWM, αλλά και αυτό υπό περιπτώσεις είναι ασήμαντο και μπορεί να αγνοηθεί στη μοντελοποίηση (βλέπε και [39, 40, 84]). Οι ασύμφωνες αλληλεπιδράσεις είναι πάντα ελκτικές. Οι παλμοί υπερτίθενται και αυξάνουν τοπικά το δείκτη διάθλασης, οπότε το φως έχει την τάση να κινηθεί προς τα εκεί. Λόγω της μεγάλης διαφοράς στη συχνότητα όμως, ο ένας κινείται (διαδίδεται) αρκετά πιο γρήγορα από τον άλλο και περνά από μέσα του με μόνο αποτέλεσμα μια μικρή μετατόπιση των παλμών. Σημαντικότερη είναι η επίδραση στους παλμούς στην περίπτωση που αυτοί ξεκινούν αλληλο-επικαλυπτόμενοι. Με αυτό το τρόπο ο παλμός δε διαπερνά συνολικά τον άλλο και η σύγκρουση τους δεν είναι συμμετρική. Είναι «ατελής» και επιφέρει φασματική μετατόπιση, που μπορεί να οδηγήσει και στη παγίδευση των παλμών [83, 84]. Οι ασύμφωνες

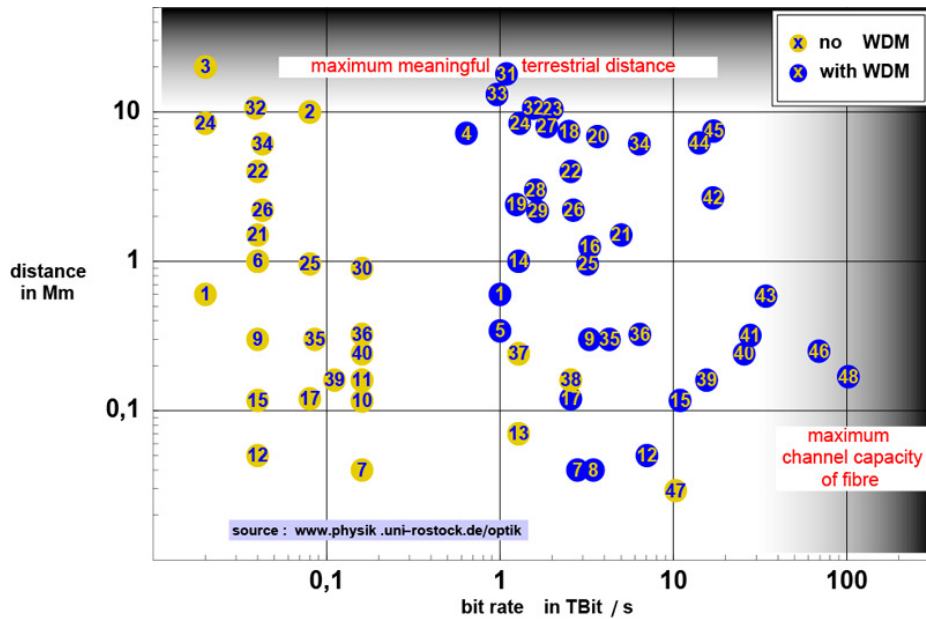
αλληλεπιδράσεις έχουν ιδιαίτερη σημασία στο πεδίο της οπτικής καθώς, κατ' αρχάς, περιγράφουν τις συγκρούσεις σολιτονικών παλμών διαφορετικών καναλιών σε κάποιο μη-γραμμικό τηλεπικοινωνιακό σύστημα με φασματική πολυπλεξία (wavelength division multiplexing-WDM).

1.2 Μη-γραμμική οπτική, φυσική και τεχνολογία

Τα φαινόμενα στην οπτική είναι στη πλειοψηφία τους μη-γραμμικά. Η ανακάλυψη τους και η μελέτη τους εμπλουτίζει τη κατανόηση μας για την αλληλεπίδραση του φωτός με την ύλη. Επιπλέον, ανοίγει νέες δυνατότητες τεχνολογικών εφαρμογών, η προσπάθεια για τις οποίες ξεκίνησε από τις αρχικές ακόμα ανακαλύψεις των χωρικών και χρονικών σολιτονίων.

Θα μπορούσαμε να χωρίσουμε χρονικά τις προσπάθειες τεχνολογικής εκμετάλλευσης της πληθώρας των μη-γραμμικών φαινομένων σε δύο περιόδους. Στη πρώτη περίοδο, πριν το 2003, κυριαρχούσε η έρευνα για την ανάπτυξη τηλεπικοινωνιακού συστήματος οπτικών ινών βασισμένο στα σολιτόνια. Δεν εννοούμε ότι δεν υπήρχε βασική και εφαρμοσμένη έρευνα προς άλλες κατευθύνσεις, αλλά η πλειοψηφία των δημοσιευμένων εργασιών στη μη-γραμμική φωτονική αφορούσε τη διάδοση χρονικών παλμών. Οι εργασίες κάλυπταν όλο το φάσμα των φαινομένων και των προβλημάτων που εμφανίζονται κατά τη διάδοση ενός καναλιού, ή πολλών, σε διαμόρφωση φασματικής πολυπλεξίας (WDM), όπως είναι οι αλληλεπιδράσεις των σολιτονίων, φαινόμενα ανώτερης τάξης σαν το Raman και η διασπορά $3^{η}$ τάξης, η χρήση διαφόρων τύπων ενισχυτών και φίλτρων, η διαχείριση διασποράς και άλλα. Η μελέτη κάλυπτε και όλο το φάσμα της μεθοδολογίας. Μετά την εξεύρεση των στάσιμων λύσεων μέσω της μεθόδου αντίστροφης σκέδασης (IST) χρησιμοποιήθηκαν κατά κόρο διαταρακτικές μέθοδοι και άλλες ημι-αναλυτικές, όπως η Μεταβολική Μέθοδος, για να επιτύχουν την ανάλυση της επίδρασης επιπλέον φαινομένων. Οι πλήρως αριθμητικές προσεγγίσεις ήταν επίσης πολλές, ενώ πολλά και ενδιαφέροντα ήταν και τα πειράματα διάδοσης μέσα από εκατοντάδες χιλιόμετρα ίνας, ενός καναλιού ή πολλών σε προσομοιώσεις του WDM (βλέπε [2, 5, 11, 13] και σχετικές αναφορές). Τέτοιες προσπάθειες, όπως και πειράματα γίνονται βέβαια και σήμερα και έχει αποδειχθεί ότι οι σολιτονικοί παλμοί σε συνδυασμό με τη χρήση τεχνολογίας WDM μπορούν να επιτρέψουν διάδοση πληροφορίας δεκάδων TB/s σε αποστάσεις εκατοντάδων ή και χιλιάδων χιλιομέτρων. Στο σχήμα 1.4 φαίνεται η κατανομή των πλέον επιτυχημένων πειραμάτων διάδοσης σε οπτική ίνα, σε σχέση με το ρυθμό μετάδοσης και την απόσταση διάδοσης. Το σχήμα είναι παρμένο από ένα πολύ ενδιαφέρον ιστότοπο του πανεπιστημίου του Rostock και είναι ενημερωμένος μέχρι και το 2011 [13, 63]. Τα νούμερα αφορούν τις αναφορές των πειραμάτων, όπου βρίσκονται στον εν λόγω ιστότοπο. Αρκεί να πούμε ότι τα πειράματα με σολιτονικούς παλμούς καταλαμβάνουν τις περισσότερες από τις ακρότατες θέσεις, είτε σε σχέση με το ρυθμό μετάδοσης, είτε σε σχέση με τη μέγιστη απόσταση.

Παρόλο που οι μελέτες συνεχίζονται και τα πειραματικά αποτελέσματα είναι όλο και καλύτερα, μετά το 2002 η προοπτική εφαρμογής των σολιτονίων σε φορείς πληροφορίας σε ένα αναβαθμισμένο σύστημα τηλεπικοινωνιών, φαντάζει όλο και πιο μακρινή. Εκείνη τη χρονιά ξεκίνησαν διαδικασίες εφαρμογής των σολιτονικών οπτικών επικοινωνιών στη Florida των ΗΠΑ και στην Αυστραλία. Όμως, η γενικότερη επιχειρηματική κρίση που ξεκινούσε εκείνη την εποχή επηρέασε και τη βιομηχανία τηλεπικοινωνιών, σε βαθμό που η σοβαρή αναβάθμιση των δικτύων οπτικών ινών, που απαιτούσε η χρήση σολιτονικών παλμών, να θεωρηθεί υπερβολική και όλες οι απόπειρες εφαρμογής να σταματήσουν. Η έρευνα για τις τηλεπικοινωνίες εξακολουθεί να έχει χρηματοδότηση, αλλά προτιμώντα πλέον άλλοι τομείς, όπως η συνεχής αναβάθμιση των κινητών τηλεφώνων στη κατεύθυνση mini-υπολογιστών και παιχνιδιομηχανών.



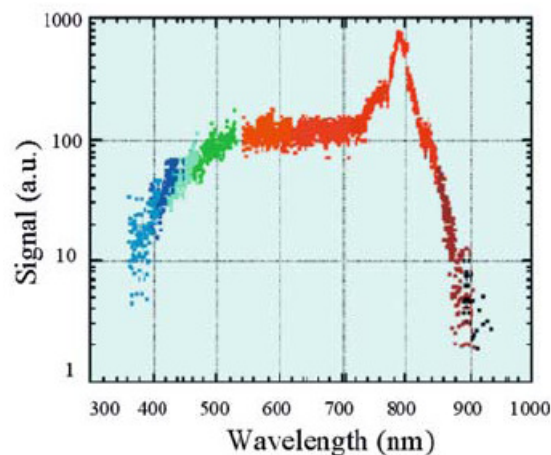
Σχήμα 1.4: Καταγραφή πειραματικών αποτελεσμάτων, από το 1998 έως το 2011, για διάδοση σε μία ίνα με χρήση ή όχι τεχνολογίας WDM (μπλε και κίτρινοι κύκλοι). Η πλήρης λίστα των αναφορών (νούμερα) βρίσκεται στον ιστότοπο [63].

Καθώς τα φώτα «χαμήλωσαν» πάνω από τις σολιτονικές τηλεπικοινωνίες, άλλα προβλήματα και πιθανές εφαρμογές της μη-γραμμικής οπτικής αναδύθηκαν. Η φυσική των χωρικών σολιτονίων και των χωροχρονικών παλμών, για παράδειγμα, ήταν ανέκαθεν αντικείμενο έρευνας, παράλληλα με τα χρονικά σολιτόνια, αλλά μετά το 2002 περισσότερα μέλη της κοινότητας των επιστημόνων και μηχανικών κινήθηκαν προς αυτή τη κατεύθυνση. Οι προσπάθειες τεχνολογικής αξιοποίησης στρέφονται πλέον κυρίως, προς τη διαχείριση του φωτός, τη δημιουργία νέων συχνοτήτων, τη κατασκευή διατάξεων για πιθανή χρήση σε οπτικά κυκλώματα και άλλες εφαρμογές που αφορούν οπτικές συσκευές. Οι περισσότερες από αυτές βρίσκονται στο επίπεδο της έρευνας και του μελλοντικού σχεδιασμού, αλλά θα αναφερθούμε σε μερικές καθώς έτσι αναδεικνύεται και ο πλούτος των μη-γραμμικών φαινομένων.

Με τη χρήση οπτικών ινών μόνο, έχουν υλοποιηθεί ενισχυτές “Raman”, οι οποίοι λαμβάνουν το σήμα και με τη χρήση μια ακτινοβολίας-«αντλίας» που έχει μήκος κύματος λίγο μεγαλύτερο από αυτό του σήματος, μεταφέρουν ενέργεια στο σήμα [1]. Ακόμα, με τη χρήση οπτικών ινών έχουν σχεδιαστεί και κατασκευαστεί οπτικά συμβολόμετρα τύπου Fabry-Perot, Sagnac και Mach-Zehnder. [11]. Σχεδιασμένα να εκμεταλλεύονται μη-γραμμικά φαινόμενα όπως τα SPM και XPM έχουν πληθώρα χρήσεων, όπως σαν αποσυζεύκτες συχνοτήτων σε WDM, σαν οπτικές λογικές πύλες, και άλλα [11]. Υπάρχουν και άλλες πιθανές συσκευές που χρησιμοποιούν τις μη-γραμμικές ιδιότητες των ινών με χρήσεις όπως σολιτονικές μνήμες [64], διατάξεις ανάγνωσης και διαγραφής [65], οπτικές λογικές πύλες [66], και άλλα.

Μια άλλη εφαρμογή είναι η χρήση σολιτονικών παλμών για χάραξη κυματοδηγών. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η μη-γραμμική διάδοση επιτυγχάνεται μέσω της αλλαγής του δείκτη διάθλασης. Το φαινόμενο αυτό είναι παροδικό και όταν παύσει η ακτινοβολία ο δείκτης διάθλασης επανέρχεται στην αρχική του τιμή, εκτός αν το υλικό είναι φωτοευαίσθητο, οπότε η αλλαγή είναι μόνιμη [67]. Σύμφωνα με την αρχή αυτή κατασκευάζονται φράγματα Bragg σε ίνες, που έχουν πάμπολλες χρήσεις στη διαχείριση οπτικών παλμών [68].

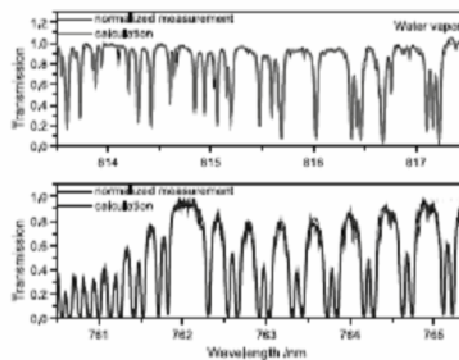
Το βασικότερο μη-γραμμικό φαινόμενο, υπεύθυνο για τη δημιουργία των σολιτονίων, είναι η ετεροδιαμόρφωση φάσης (SPM), στην οποία αναφερόμαστε εκτενέστερα παρακάτω. Λόγω αυτής, ο παλμός, ή η ακτίνα, υφίστανται εστίαση, η οποία εξισορροπεί τη διασπορά ή τη περίθλαση. Οι ακτίνες και χωροχρονικοί παλμοί που διαδίδονται σε επίπεδους κυματοδηγούς ή ελεύθερα μέσα, δύνανται να εστιάσουν πολύ έντονα, ενώ ταυτόχρονα το φασματικό τους περιεχόμενο διευρύνεται σημαντικά. Ουσιαστικά η έντονη αυτοεστίαση δημιουργεί υπερσυνεχές φάσμα (supercontinuum generation), που είναι σημαντικό για πολλές εφαρμογές. Στο σχήμα 1.5 φαίνεται το φάσμα ενός παλμού laser στα $3TW$ με $\lambda=800nm$ και εύρους $70fs$ ύστερα από διάδοση 10 μέτρων σε αέρα και έντονη αυτοεστίαση. Το αρχικό φασματικό εύρος των $10nm$ επεκτάθηκε και καταλαμβάνει $10\mu m$ στο οπτικό φάσμα και $4\mu m$ στο υπέρυθρο. Το φάσμα περιλαμβάνει τις ζώνες απορρόφησης πολλών στοιχείων της ατμόσφαιρας.



Σχήμα 1.5: Φάσμα παλμού laser ($P=3TW$, $\lambda=800nm$, και εύρους $70fs$) μετά από διάδοση στον αέρα. Η πτώση μετά τα $800nm$ οφείλεται στη μη-διακριτικότητα του οργάνου. Η ένταση δίνεται σε absorbance units [69].



(α)



(β)

Σχήμα 1.6: (α) Κατακόρυφη διάδοση, στον ουρανό σε ύψος $9Km$ ακτίνας laser με $P=5TW$ και $\lambda=800nm$. (β) Φάσμα ατμοσφαιρικής απορρόφησης, μέσω τεχνολογίας LIDAR (εικόνα από [71]).

Αυτή η ιδιότητα των πολύ στενών και έντονων παλμών να εστιάζουν ώστε να δημιουργούν φωτεινό «νήμα», ή να διασπώνται σε πολλά νήματα με ταυτόχρονη δημιουργία υπερσυνεχούς φάσματος, δίνει τη δυνατότητα χρήσης τους σε εφαρμογές τύπου LIDAR (Light Detection And Ranging) [70]. Στο σχήμα 1.6(α) φαίνεται η εικόνα λευκού φωτός που δημιουργήθηκε από αυτοεστίαση laser, όπως δόθηκε από το τηλεσκόπιο στο Tautenburg, στη

Γερμανία. Η ακτίνα πέρασε ένα λεπτό στρώμα νεφών που προκάλεσε σκέδαση Mie που είναι αντιληπτή από την άλω. Στο Σχ. 1.6(β) φαίνεται η φασματική ανάλυση μέρους από το οπισθοσκεδαζόμενο λευκό φως. Τέτοιου είδους τεχνική βοηθάει στην ανάλυση των στοιχείων της ατμόσφαιρας πολλά χιλιόμετρα πάνω από το έδαφος.

Πέρα από τις παραπάνω δυνατές εφαρμογές, υπάρχει πλέον μία όλο και διευρυνόμενη έρευνα και βιβλιογραφία για τη διαχείριση μη-γραμμικών οπτικών κυματοπακέτων σε ελεύθερα μέσα. Σε πειράματα και προσομοιώσεις έχουν παρατηρηθεί παλμοί που αυτο-παγιδεύονται, αλληλο-παγιδεύονται, διαδίδονται ανεμπόδιστοι από περίθλαση και διασπορά (όπως οι οπτικές βολίδες και τα κύματα X στα οποία αναφερόμαστε στο Κεφάλαιο 4), συνδυάζονται για να δημιουργήσουν επιπλέον παλμούς ή δημιουργούν στάσιμους φωτεινούς σχηματισμούς [3, 6, 15]. Ο βαθμός ελέγχου που αποκτάται δείχνει και το δρόμο προς μια μελλοντική νέα γενιά από πλήρως οπτικές διατάξεις.

1.3 NLS

Είναι πλέον αρκετές οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που δίνουν σολιτονικές λύσεις και μοντελοποιούν φυσικά συστήματα που δύνανται να εμφανίσουν τέτοια κύματα. Καθώς τα φαινόμενα ονομάζονται «μη-γραμμικά», δεν είναι βέβαιο τυχαίο ότι περιγράφονται από μη-γραμμικές εξισώσεις. Μία από τις ευρύτερα γνωστές είναι η Korteweg de Vries, στην οποία αναφερθήκαμε νωρίτερα, γνωστή και σαν KdV (σχέση 1.1). Δύο ακόμα είναι η Kadomtsev-Petviashvili (KP-σχέση 1.2), που είναι γενίκευση της KdV και περιλαμβάνει την επίδραση εγκάρσιας (x) διάστασης και η sine-Gordon (σχέση 1.3).

$$\text{KdV} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{KP} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right) \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{Sine-Gordon} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (1.3)$$

Δε θα δώσουμε πολλές λεπτομέρειες για τα μεγέθη και τους συντελεστές στις εξισώσεις, αλλά σημειώνουμε ότι η z θεωρείται η διεύθυνση διάδοσης και ότι όλες οι μεταβλητές είναι κανονικοποιημένες. Η συνάρτηση u περιγράφει τη περιβάλλουσα του κύματος, ενώ στη sine-Gordon διατηρήθηκε το θ καθώς χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής της είναι οι γωνίες περιστροφής συζευγμένων εκκρεμών. Η KdV βρίσκει πολλές εφαρμογές στην υδροδυναμική καθώς περιγράφει κύματα σε ρηχό νερό, αλλά έχει χρησιμοποιηθεί και για τη μοντελοποίηση των τσουνάμιας. Πέραν αυτών, χρησιμοποιείται για τη περιγραφή υποβρύχιων κυμάτων στους ωκεανούς, αλλά και για κύματα αρτηριακής πίεσης, για ακουστικά σολιτόνια σε πλάσμα, όπως και αλλού [4]. Παρομοίως και για την KP, η οποία χρησιμοποιείται κυρίως για περιγραφή επιφανειακών σολιτονικών κυμάτων. Η sine-Gordon, αποτελεί συνεχές όριο συστήματος από συζευγμένα εκκρεμή. Χρησιμοποιείται στη φυσική στερεάς κατάστασης με πλέον σημαντική της χρήση τη περιγραφή διάδοσης σε επαφές Josephson.

Όλες οι παραπάνω, υπό ορισμένες συνθήκες, προσεγγίζονται μετασχηματιζόμενες από τη μη-γραμμική εξίσωση του Schrödinger (nonlinear Schrödinger equation-NLS) [80]. Είναι ίσως η σημαντικότερη εξίσωση της μη-γραμμικής δυναμικής και σίγουρα η σημαντικότερη της μη-γραμμικής οπτικής. Περιγράφει πλήθος φυσικών συστημάτων τα οποία έχουν να κάνουν με αργά μεταβαλλόμενη περιβάλλουσα κύματος. Θεωρώντας βαθμωτή περιβάλλουσα $u(\mathbf{x}, z)$, οδεύοντος κύματος στη διεύθυνση z , μπορούμε να γράψουμε την NLS στη παρακάτω γενική μορφή,

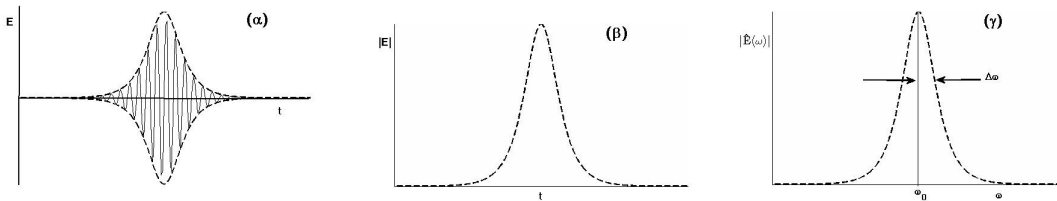
$$\text{NLS} \quad i\partial_z u + \partial_j g^{jk} \partial_k u + f(|u|^2)u = 0 \quad (1.4)$$

,όπου $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $j, k=1, \dots, D$, (συμβολίζει τις εγκάρσιες στη διάδοση συνιστώσες του χώρου και το χρόνο). Το g^{jk} συμβολίζει τα στοιχεία του τανυστή διασποράς, όπου για διατηρητικά συστήματα είναι πραγματικά και ο τανυστής διαγώνιος πίνακας. Το $f(|u|^2)$ σχετίζεται με τη μη-γραμμική μεταβολή της φάσης. Μία συνήθης μορφή της συνάρτησης είναι η $f(|u|^2) = q|u|^{2\sigma}$, όπου στη περίπτωση υλικών τύπου Kerr έχουμε $\sigma=1$, ή αλλιώς «κυβική» μη-γραμμικότητα. Όταν ακόμα $gq>0$ εμφανίζεται διαμορφωτική αστάθεια, για την οποία θα μιλήσουμε παρακάτω [81]. Η περίπτωση της κορέσιμης μη-γραμμικότητας διαμορφώνεται όπως $f(|u|^2) = q|u|^2/(1+|u|^2)$, αλλά δε θα επεκταθούμε περαιτέρω. Ακόμα, σε άλλες περιπτώσεις ο πρώτος όρος της σχέσης (1.4) είναι μερική παράγωγος ως προς το χρόνο. Στην οπτική η NLS χρησιμοποιείται με τη παραπάνω μορφή, αν και οι δύο αυτές διαστάσεις είναι κατ' ουσία ισοδύναμες και μπορούν να μετασχηματιστούν μέσω της σχέσης $z=(c/n_0)t$. Η έννοια της περιβάλλουσας περιγράφεται στο σχήμα 1.7.

Υιοθετώντας τη προσέγγιση της «αργά μεταβαλλόμενης περιβάλλουσας», γράφουμε το πεδίο, που το παίρνουμε για απλότητα γραμμικά πολωμένο, σε γινόμενο του γρήγορα μεταβαλλόμενου όρου και ενός αργού, όπως:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x}[E(\vec{r}, t) + c.c.] \exp(-i\omega_0 t) \quad (1.5)$$

Το $E(\vec{r}, t)$ είναι αργά μεταβαλλόμενη συναρτήσει του χρόνου και το μέτρο της φαίνεται στο σχήμα 1.7(β).



Σχήμα 1.7: Σχηματική παράσταση για (α) διαμορφωμένο κύμα, (β) πλάτος περιβάλλουσας, (γ) φάσμα.

Η NLS με κυβική μη-γραμμικότητα χρησιμοποιείται για να περιγράψει και προβλήματα όπως τα κύματα βαρύτητας σε βαθύ νερό [16]. Μετασχηματιζόμενη στην εξίσωση Ginzburg-Landau τη συναντάμε σε προβλήματα υπεραγωγιμότητας και στη μονοδιάστατη περίπτωση περιγράφει τα λεγόμενα σολιτόνια Davydov σε α -ελικοειδείς πρωτεΐνες [81]. Η ίδια εξίσωση στη τρισδιάστατη μορφή της χρησιμοποιείται και για τη περιγραφή συμπυκνωμάτων Bose-Einstein [10, 30]. Η NLS αποδεικνύεται ένα πολύ γενικό μοντέλο που περιγράφει την εξέλιξη κάποιας αργά μεταβαλλόμενης περιβάλλουσας σε συστήματα με διασπορά και ασθενή μη-γραμμικότητα. Δύο από τις πλέον συνήθεις στην Οπτική μορφές της εξάγονται περιληπτικά παρακάτω.

1.3.1 Μη-γραμμική απόκριση και χωρικά σολιτόνια

Ξεκινώντας από τις εξισώσεις Maxwell μπορούμε να καταλήξουμε στη σχέση (1.6), κυματική εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη του ηλεκτρικού πεδίου οπτικού κύματος που οδεύει σε μη-γραμμικό υλικό [1],

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (1.6)$$

, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό και ε_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού. Η πόλωση \vec{P} γράφεται,

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}_L(\vec{r}, t) + \vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) \quad (1.7)$$

, όπου ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος είναι το γραμμικό μέρος και το δεύτερο το μη-γραμμικό. Αυτοί δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις [7, 8]:

$$\vec{P}_L(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt' \quad (1.8)$$

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) \vec{E}(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_2) \vec{E}(\vec{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \quad (1.9)$$

Τα $\chi^{(1)}, \chi^{(3)}$ είναι οι ταυιστές επιδεκτικότητας πρώτης και τρίτης τάξης. Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν με τη προϋπόθεση ότι η απόκριση του μέσου παραμένει τοπική (local). Η επιδεκτικότητα δεύτερης τάξης (quadratic), είναι επίσης συνδεδεμένη με μη-γραμμικά φαινόμενα όπως η γένεση δεύτερης αρμονικής, αλλά αγνοήθηκε, καθώς θεωρούμε ότι το μέσο διάδοσης διαθέτει συμμετρία αντιστροφής (κεντροσυμμετρικό) [8]. Μία ακόμα σημαντική παραδοχή που απλοποιεί τη σχέση (1.9) είναι να θεωρήσουμε ότι το μέσο έχει άμεση απόκριση, έτσι ώστε η χρονική εξάρτηση της επιδεκτικότητας να δίνεται από τη συνάρτηση δέλτα. Αυτή η προσέγγιση είναι ασφαλής για παλμούς με εύρος από 1ps και πάνω. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις η σχέση (1.9) γίνεται:

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (1.10)$$

Χρειάζονται μερικές ακόμα απλοποιητικές προϋποθέσεις για να καταλήξουμε στην απλούστερη μορφή της NLS. Κατ' αρχάς το \vec{P}_{NL} μπορεί να αντιμετωπιστεί σα διαταραχή του \vec{P}_L καθώς η μεταβολή του δείκτη διάθλασης Δn που προκαλεί είναι μικρή ($\Delta n/n < 10^{-6}$). Ακόμα, το ηλεκτρικό πεδίο θεωρείται ότι διατηρεί τη γραμμική του πόλωση, έστω στο x , οπότε μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε σα βαθμωτό μέγεθος. Αυτό δεν ισχύει για διπλοθλαστικά μέσα. Τέλος, το πεδίο θεωρείται ημι-μονοχρωματικό και μπορεί να γραφεί σα γινόμενο ενός γρήγορα μεταβαλλόμενου μέρους και της αργά μεταβαλλόμενης περιβάλλουσας, όπως στη σχέση (1.5). Όταν αυτή η σχέση χρησιμοποιηθεί στη σχέση (1.10) καταλήγει με όρους ταλαντούμενους με συχνότητα ω_0 και $3\omega_0$. Ο τελευταίος έχει αμελητέα επίδραση καθώς απαιτεί προσαρμογή φάσης (phase matching), οπότε το σημαντικότερο και αργά μεταβαλλόμενο μέρος της μη-γραμμικής πόλωσης γράφεται,

$$P_{NL}(\vec{r}, t) \approx \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} E(\vec{r}, t), \quad (1.11)$$

όπου $\varepsilon_{NL} = (3/4) \chi_{xxx}^{(3)} |E(\vec{r}, t)|^2$. Το γραμμικό μέρος δε, γράφεται $P_L = \varepsilon_0 \chi_{xx}^{(1)} E$. Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην εξίσωση (1.6), ο μετασχηματισμός Fourier \tilde{E} του πεδίου βρίσκεται να ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz [1],

$$\nabla^2 \tilde{E} + \varepsilon(\omega) k_0^2 \tilde{E} = 0, \quad (1.12)$$

, όπου $\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\vec{r}, t) \exp[i(\omega - \omega_0)t] dt$, $k_0 = \omega/c$ και $\varepsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL}$ η συνολική διηλεκτρική σταθερά. Καθώς ο δείκτης διάθλασης n και ο συντελεστής απωλειών α , συνδέονται με τη σταθερά μέσω της σχέσης $\varepsilon = (n + i\alpha c/2\omega)^2$, καταλήγουμε στις συνολικές εκφράσεις τους,

$$n'(\omega) = n_0 + n_2 |E|^2 \text{ και } \alpha'(\omega) = \alpha + \alpha_2 |E|^2, \quad (1.13)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ένδειξη n_0 για το γραμμικό δείκτη. Οι μη-γραμμικοί συντελεστές του δείκτη διάθλασης και των απωλειών είναι

$$n_2 = \frac{3}{8n} \operatorname{Re}(\chi_{xxxx}^{(3)}) \text{ και } \alpha_2 = \frac{3\omega_0}{4nc} \operatorname{Im}(\chi_{xxxx}^{(3)}). \quad (1.14)$$

Το τελευταίο είναι πολύ μικρό και συνήθως αγνοείται, ενώ ο δείκτης διάθλασης γράφεται συχνά και σαν $n' = n_0 + n_{nl}(I)$, με $I = |E|^2$ η ένταση της ακτινοβολίας. Μη-γραμμικά μέσα αυτού του είδους, όπου κυριαρχεί η επιδεκτικότητα τρίτης τάξης, είναι και τα μέσα τύπου Kerr.

Για τη περίπτωση των χωρικών σολιτονίων εστιάζουμε στη διάδοση μίας ακτίνας CW. Μια γενική λύση της σχέσης (1.6) μπορεί να γραφεί στη μορφή της σχέσης (1.5), με $E(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) \exp(i\beta_0 z)$, όπου $\beta_0 = \kappa_0 n_0 = 2\pi n_0 / \lambda$. Θεωρούμε ότι η ακτίνα οδεύει κατά μήκος του z και περιθλάται στις εγκάρσιες διαστάσεις x, y . Η συνάρτηση U είναι η περιβάλλουσα της ακτίνας, η οποία χωρίς περίθλαση και μη-γραμμικά φαινόμενα πρέπει να παραμένει απaráλλακτη. Παρουσία των παραπάνω φαινομένων, η περιβάλλουσα θεωρείται πως μεταβάλλεται αργά κατά μήκος του z , σε μήκος πολύ μεγαλύτερο του μήκους κύματος. Αυτή η θεώρηση ονομάζεται παρααξονική προσέγγιση και βάση αυτής η $\partial^2 U / \partial z^2$ καθίσταται αμελητέα και παραλείπεται. Τελικά, η U βρίσκεται να ικανοποιεί τη παρακάτω εξίσωση:

$$i \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2\beta_0} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \kappa_0 n_{nl}(I) U = 0 \quad (1.15)$$

Απουσία μη-γραμμικών φαινομένων η εξίσωση χρησιμοποιείται στη μελέτη περίθλασης γραμμικών κυμάτων [41].

Εστιάζοντας στη περίπτωση της μη-γραμμικότητας τύπου Kerr και κανονικοποιώντας τα παραπάνω μεγέθη, όπως, $X = x/W_0$, $Y = y/W_0$, $Z = z/L_d$, $u = (\kappa_0 |n_2| L_d)^{1/2} U$, με $L_d = \beta_0 W_0^2$ το μήκος περίθλασης και W_0 ένα μέτρο του εγκάρσιου εύρους της ακτίνας, η εξίσωση παίρνει τη χαρακτηριστική μορφή της (2+1)D NLS:

$$i \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) \pm |u|^2 u = 0 \quad (1.16)$$

Το πρόσημο του μη-γραμμικού όρου είναι θετικό για $n_2 > 0$ (εστίαση) και αρνητικό για $n_2 < 0$ (αποεστίαση). Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει τη διάδοση ακτίνας που διαδίδεται σε ελεύθερο μέσο (bulk medium: μέσο ελεύθερο ορίων και ανομοιογενειών), περιθλάται σε δύο εγκάρσιες διαστάσεις, ενώ υπόκειται στο μη-γραμμικό φαινόμενο Kerr. Η εξίσωση δεν είναι ολοκληρώσιμη και για $n_2 > 0$ προβλέπει το φαινόμενο της κυματικής κατάρρευσης, για το οποίο θα πούμε περισσότερα παρακάτω.

Όταν η ακτίνα διαδίδεται σε επίπεδο (slab) κυματοδηγό, περιορισμένη κατά τη μία εγκάρσια διάσταση περιθλάται μόνο κατά την άλλη διάσταση (έστω τη X). Σε τέτοια περίπτωση η λύση της εξίσωσης (1.6) μπορεί να γραφεί σαν $E(\vec{r}, t) = U(x, z) G(y) \exp(i\beta_0 z)$, όπου η $G(y)$ περιγράφει το πλάτος του ρυθμού κυματοδηγήσης, που θεωρείται σταθερό. Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με τα προηγούμενα, καταλήγει κανείς στη (1+1)D NLS:

$$i \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \pm |u|^2 u = 0 \quad (1.17)$$

Η εξίσωση αυτή είναι ολοκληρώσιμη και λύνεται επακριβώς από τη μέθοδο αντίστροφης σκέδασης (inverse scattering method-IST) και για τα δυο πρόσημα του μη-γραμμικού όρου [37, 42]. Η απλούστερη λύση της είναι ένα CW επίπεδο κύμα, $u(Z, X) = u_0 \exp(ipZ + iqX)$, όπου το u_0 είναι σταθερά και τα p, q ικανοποιούν τη σχέση $p = -q^2/2 + \operatorname{sgn}(n_2)u_0^2$. Για τη περίπτωση εστιάζουσας μη-γραμμικότητας βρίσκεται ότι η εξίσωση (1.17) έχει τη λύση

$$u(Z, X) = a \operatorname{sech}(aX) \exp(ia^2 Z/2) \quad (1.18)$$

Το a είναι παράμετρος που καθορίζει το πλάτος και το εύρος της ακτίνας, αλλά και το πως εξελίσσεται η φάση. Η σχέση (1.18) είναι ο βασικός ρυθμός που κυματοδηγείται λόγω της διάδοσης της ακτίνας, το φωτεινό σολιτόνιο. Αν αυτή έχει εξ' αρχής το συγκεκριμένο σχήμα, τότε όλη της η ενέργεια αυτοπαγιδεύεται και διαδίδεται αδιατάρακτη. Εάν δεν έχει αυτό το σχήμα, (για παράδειγμα, είναι γκαουσιανής μορφής), μέρος της ενέργειας διαφεύγει σε ανώτερους ρυθμούς και χάνεται σαν ακτινοβολία. Ταυτόχρονα, το σχήμα της ακτίνας προσαρμόζεται ώστε να αποκτήσει την ευσταθή "sech" μορφή.

Να σημειώσουμε επιπλέον ότι ακτίνες κάθε μεγέθους μπορούν να αυτοπαγιδευθούν με τη προϋπόθεση ότι έχουν τη κατάλληλη ένταση. Η απαιτούμενη ένταση και η σχέση της με τα χαρακτηριστικά της ακτίνας και του υλικού φαίνεται καλλίτερα εάν η σχέση (1.18) γραφεί σε φυσικές μονάδες,

$$U(z, x) = \sqrt{I_0} \operatorname{sech}(x/W_0) \exp(iz/2L_d), \quad (1.19)$$

όπου $I_0 = (\kappa_0 n_2 L_d)^{-1}$ μέγιστη ένταση, όπου είναι ανάλογη του W_0^{-2} . Αυτό σημαίνει βέβαια ότι ακτίνες με μικρότερο εύρος χρειάζονται μεγαλύτερη ένταση, το οποίο είναι κατανοητό καθώς η περίθλαση είναι ισχυρότερη σε στενές ακτίνες.

1.3.2 Χρονικά σολιτόνια

Χρονικά σολιτόνια είναι παλμοί που διαδίδονται κατά μήκος οπτικών ινών και διατηρούν το σχήμα τους κατά τη διάδοση. Η δυνατότητα δημιουργίας και διάδοσης τους παρατηρήθηκε πρώτη φορά από τους Hasegawa et al το 1973 [43]. Έκτοτε είναι αντικείμενο ιδιαίτερα εκτεταμένης έρευνας για τη χρήσης τους σε οπτικά συστήματα τηλεπικοινωνιών [11].

Η βασική διαφορά με τις CW ακτίνες που δύνανται να δημιουργήσουν χωρικά σολιτόνια, είναι ότι ο παλμός είναι χρονοεξαρτώμενος. Το αργά μεταβαλλόμενο μέρος πεδίου διαδιδόμενο σε οπτική ίνα μπορεί να γραφεί,

$$E(\vec{r}, t) = U(z, t)F(x, y) \exp(i\beta_0 z) \quad (1.20)$$

, όπου η $F(x, y)$ είναι η εγκάρσια κατανομή του πεδίου, σχετιζόμενη με το θεμελιώδη ρυθμό της ίνας που τη θεωρούμε ως μονότροπη (single mode fiber) [14]. Η εξάρτηση του παλμού U από το χρόνο σημαίνει ότι το φασματικό περιεχόμενο του δεν ταξιδεύει ολόκληρο με την ίδια ταχύτητα, λόγω χρωματικής διασποράς. Εξαιτίας αυτής ο δείκτης διάθλασης εξαρτάται από τη συχνότητα και η σχέση (1.13) γράφεται

$$n'(\omega) = n(\omega) + n_2 |E|^2. \quad (1.21)$$

Η εξάρτηση αυτή από τη συχνότητα προκαλεί διαπλάτυνση του παλμού και είναι ανάλογη της περίθλασης στα χωρικά σολιτόνια.

Σύμφωνα με γνωστή ανάλυση [1], παίρνοντας το μετασχηματισμό Fourier του αργά μεταβαλλόμενου πεδίου (σχέση 1.20), που ικανοποιεί την εξίσωση (1.12), καταλήγουμε σε ανεξάρτητες εξισώσεις για την F και την U . Έτσι για $\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = \tilde{U}(z, \omega - \omega_0)F(x, y) \exp(i\beta_0 z)$, στο πλαίσιο της παρααξονικής προσέγγισης, καταλήγουμε στις

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\varepsilon(\omega)\kappa_0^2 - \beta'^2]F = 0 \quad (1.22)$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} + (\beta'^2 - \beta_0^2)\tilde{U} = 0. \quad (1.23)$$

Ο κυματάριθμος β' εμπεριέχει την εξάρτηση από τη συχνότητα και τις αλλαγές λόγω φαινομένου Kerr, δηλαδή

$$\beta'(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta, \quad (1.24)$$

όπου

$$\Delta\beta = \kappa_0 n_2 |U|^2 \frac{\int \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^4 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy} \equiv \frac{n_2 \omega_0}{c A_{eff}} |U|^2 \equiv \gamma |U|^2 \quad (1.25)$$

Ο συντελεστής του $|U|^2$, γ , ονομάζεται μη-γραμμική παράμετρος και στη προκειμένη περίπτωση ορίζεται από τη σχέση (1.25). Το A_{eff} είναι η ενεργός περιοχή του πυρήνα της ίνας και εξαρτάται από την εγκάρσια κατανομή του πεδίου, δηλαδή από τα χαρακτηριστικά της ίνας. Δε θα επεκταθούμε στη επίλυση της εξίσωσης (1.22) και στους ρυθμούς που μπορεί να αναπτυχθούν στον οπτικό κυματοδηγό, αλλά για μονότροπη ίνα με ακτίνα πυρήνα « α », ο ρυθμός που διαδίδεται είναι ο θεμελιώδης HE_{11} και η εγκάρσια κατανομή είναι $F(x, y) = J_0(\kappa\rho)$, με $\rho \leq \alpha$ και $\kappa = (n^2 \kappa_0^2 - \beta^2)^{1/2}$. Η έκφραση αυτή προσεγγίζεται πολύ καλά και από μια απλή γκαουσιανή κατανομή, όπως $F(x, y) \approx \exp[-(x^2 + y^2)/w^2]$. Το εύρος της κατανομής w υπολογίζεται ανάλογα με την ίνα. Υπό συνθήκες γκαουσιανής προσέγγισης υπολογίζεται ότι $A_{eff} = \pi w^2$. Δεδομένου ότι τα χαρακτηριστικά της ίνας δεν αλλάζουν μπορούμε να πάρουμε την εγκάρσια κατανομή ως σταθερή (για περισσότερα στοιχεία πάνω σε οπτικούς κυματοδηγούς κοίτα και [11, 12]).

Η σχέση (1.23) μπορεί να γραφεί όπως

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} = i[\beta(\omega) + \Delta\beta - \beta_0] \tilde{U} \quad (1.26)$$

η οποία δείχνει ότι για κάθε τιμή της συχνότητας, μέσα στο φασματικό εύρος του παλμού, έχουμε διαφορετική μετατόπιση φάσης. Αυτή η μετατόπιση εξαρτάται βέβαια από τη συχνότητα, αλλά και από την ένταση.

Παίρνοντας τον αντίθετο μετασχηματισμό Fourier για την (1.26) καταλήγουμε στην εξίσωση διάδοσης της U . Πριν γίνει αυτό και επειδή η $\beta(\omega)$ είναι συχνά άγνωστη, παίρνουμε την επέκταση της κατά Taylor γύρω από τη φέρουσα συχνότητα ω_0 . Έτσι γίνεται

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + (1/2)(\omega - \omega_0)^2 \beta_2 + (1/6)(\omega - \omega_0)^3 \beta_3 + \dots \quad (1.27)$$

, όπου $\beta_m = \left. \frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0}$ με $m=1, 2, \dots$. Αν το φασματικό εύρος του παλμού είναι πολύ

μικρότερο της φέρουσας, κάτι σύνηθες για παλμούς με εύρος πάνω από $1ps$, οι όροι τρίτης τάξης και πάνω μπορούν να αγνοηθούν ως αμελητέοι. Αν βέβαια για κάποια τιμή της φέρουσας ισχύει $\beta_2 \approx 0$, μπορεί να χρειαστεί να συμπεριληφθεί ο όρος του β_3 .

Κάνοντας την αντικατάσταση στην εξίσωση (1.26) και παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier καταλήγουμε στην

$$i \frac{\partial U}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \gamma |U|^2 U = 0. \quad (1.28)$$

Τα β_1 και β_2 είναι η διασπορά πρώτης και δεύτερης τάξης, ενώ $\beta_1 = 1/v_g$, δηλαδή το αντίστροφο της ταχύτητας ομάδος του παλμού. Προφανώς η β_2 εξαρτάται από τη διασπορά της ταχύτητας ομάδος. Ονομάζεται δε και «διασπορά ταχύτητας ομάδος» (group velocity dispersion-GVD).

Η εξίσωση (1.28) μπορεί επίσης να μετασχηματιστεί στη μονοδιάστατη NLS. Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω κανονικοποιήσεις, όπως (το Γαλιλαϊκό μετασχηματισμό) $T = (t - \beta_1 z)/T_0$, $Z = z/L_D$ και $u = \sqrt{|\gamma| L_D} U$, όπου T_0 ένας χρονικός παράγοντας

κανονικοποίησης (συχνά χρησιμοποιούμε το χρονικό εύρος του παλμού) και $L_D = T_0^2 / |\beta_2|$ το μήκος διασποράς. Βάσει αυτών η εξίσωση μετασχηματίζεται στη παρακάτω:

$$i \frac{\partial u}{\partial Z} - \frac{s}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} \pm |u|^2 u = 0 \quad (1.29)$$

Το s είναι το πρόσημο της β_2 . Για ανώμαλη διασπορά είναι αρνητικό και η εξίσωση είναι ουσιαστικά όμοια με την (1.17). Μέσω της IST βρίσκεται ότι η εξίσωση έχει πολλές σολιτονικές λύσεις, η απλούστερη των οποίων είναι το σολιτόνιο πρώτης τάξης (ή βασικής τάξης-fundamental soliton). Η συγκεκριμένη λύση, χρήσιμη και στις τηλεπικοινωνίες, βρίσκεται για ανώμαλη διασπορά και εστιάζουσα μη-γραμμικότητα και είναι,

$$u = n \operatorname{sech}(nT) \exp(in^2 Z / 2) \quad (1.30)$$

, όπου n παράγοντας που καθορίζει το πλάτος και το εύρος του σολιτονίου. Για να μπορεί να διαδοθεί ένα σολιτόνιο πρώτης τάξης η συνθήκη που θα πρέπει να ισχύει ανάμεσα στα φυσικά μεγέθη είναι $L_D / L_{NL} = N^2 = 1$. Το N είναι ακέραιος αριθμός που συμβολίζει τη τάξη του σολιτονίου. Το $L_{NL} = 1 / \gamma P_0^2$ είναι το μήκος της μη-γραμμικότητας, ένας δείκτης για την επίδραση της μη-γραμμικότητας στη διάδοση. Το P_0 είναι η μέγιστη ισχύς.

Η εξίσωση (1.29) έχει λύση και για τη περίπτωση κανονικής διασποράς με τη μορφή των σκοτεινών σολιτονίων. Αυτά αποτελούν βυθίσεις σε ένα ισχυρό φωτεινό υπόβαθρο. Η πιο απλή μορφή αυτής της λύσης, όπου το πλάτος της βύθισης ισούται με αυτό του υποβάθρου και είναι:

$$u = \tanh(T) \exp(iZ) \quad (1.31)$$

Από τις εξισώσεις (1.17) και (1.29) φαίνεται πως η διάδοση ακτίνας σε επίπεδο κυματοδηγό και η διάδοση παλμού σε οπτική ίνα είναι φαινόμενα ανάλογα. Το γενικότερο φαινόμενο ονομάζεται «χωροχρονική αναλογία» [44, 245]. Παρόλα αυτά υπάρχουν και σαφείς διαφορές ανάμεσα στα χρονικά και χωρικά σολιτόνια και γενικότερα μη-γραμμικά κύματοπακέτα. Κατ αρχάς, η διασπορά είναι ένα σχετικά αδύναμο φαινόμενο, ιδιαίτερα όταν η φέρουσα επιλέγεται σε περιοχή ελαχιστοποίησης της διασποράς. Το φαινόμενο Kerr στις ίνες, οι οποίες είναι κατασκευασμένες συνήθως από γυαλί πυριτίας (silica: οξείδιο του πυριτίου) είναι επίσης αδύναμο, αλλά είναι αρκετό να εξισορροπήσει τη διαπλάτυνση του παλμού. Αντίθετα, οι ακτίνες υφίστανται περίθλαση που συνήθως είναι φαινόμενο αρκετά ισχυρό, οπότε για να μπορέσει να σχηματιστεί σολιτόνιο, ακόμα και (1+1)D χρειάζονται μεγάλες ισχύεις και υλικά με έντονη μη-γραμμικότητα. Οι μεγάλες ισχύεις προκαλούν την ενίσχυση φαινομένων ανώτερης τάξης, όπως το φαινόμενο Raman, διασπορά τρίτης τάξης κ.λ.π. Στη περίπτωση αυτή η (1.17) είναι ανεπαρκής και χρειάζεται να αλλάξουμε το μοντέλο μας σε αυτό της NLS ανώτερης τάξης, η οποία εν γένει δεν είναι ολοκληρώσιμη. Η (2+1)D NLS είναι ολοκληρώσιμη από την IST μόνο για μη γραμμικότητα τύπου Kerr, αλλά και πάλι, οι λύσεις είναι ασταθείς, ενώ μπορεί να οδηγηθούν σε κατάρρευση.

Μία ακόμα σημαντική διαφορά μεταξύ χρονικών και χωρικών σολιτονικών κυμάτων είναι ότι τα πρώτα αναφέρονται σε αποστάσεις διάδοσης της τάξης των χιλιομέτρων, ή και εκατοντάδων χιλιομέτρων, ενώ τα χωρικά σε αποστάσεις της τάξης των mm και cm . Το αίτιο είναι η διαφορά μεταξύ των μηκών περίθλασης και διασποράς. Για παράδειγμα, ακόμα και για παλμό εύρους $1ps$ σε μέσο με $|\beta_2| = 1ps^2 / Km$, το μήκος διασποράς είναι $1Km$. Για οπτική ακτίνα εγκάρσιας διάστασης $20\mu m$, για μήκος κύματος $1\mu m$, το μήκος περίθλασης είναι μικρότερο από $1mm$ [3].

Οι έννοιες του χρονικού και χωρικού σολιτονίου μπορούν να συνυπάρξουν σε αυτή του χωροχρονικού σολιτονίου, ή εν γένει μη-γραμμικού παλμού. Η μετάβαση σε παλμό τέτοιου είδους είναι διαισθητικά εύκολη λόγω της αναλογίας της εγκάρσιας χωρικής με τη χρονική

διάσταση. Η NLS μπορεί να είναι (2+1)D ή (3+1)D, ανάλογα με το αν ο παλμός διαδίδεται σε επίπεδο κυματοδηγό ή ελεύθερο μέσο. Στη γενικότερη περίπτωση γράφεται:

$$i \frac{\partial u}{\partial Z} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) - \frac{s}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} \pm f(|u|^2)u = 0 \quad (1.32)$$

Θα επανέλθουμε στους χωροχρονικούς παλμούς στα Κεφάλαια 4 και 5.

1.3.3 Διατηρήσιμες ποσότητες και συμμετρίες

Αναφέρουμε τέλος κάποιες από τις συμμετρίες και διατηρήσιμες ποσότητες της NLS. Αν και έχουν βρεθεί πολλές, παραθέτουμε μόνο κάποιες βασικές με σημαντικό φυσικό ενδιαφέρον, οι οποίες έχουν και ιδιαίτερη βαρύτητα για τη παρούσα εργασία.

Το θεώρημα της Nöther συνδέει τυχόν διατηρήσιμες ποσότητες με συμμετρίες του συστήματος [27]. Ως συμμετρία ορίζεται ο μετασχηματισμός που αφήνει αναλλοίωτες τις εξισώσεις Euler-Lagrange. Τέτοιοι μετασχηματισμοί μπορεί να είναι του ίδιου του «πεδίου» u , όπως $u \rightarrow u + \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} \psi^{(\nu)}$, ή και των συντεταγμένων, όπως $x_{\mu} \rightarrow x_{\mu} + \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} \varphi_{\mu}^{(\nu)}$. Οι μετασχηματισμοί δίνονται στη γενικότερη τους μορφή για διανυσματικό πεδίο και οι ποσότητες ε_{ν} θεωρούνται πολύ μικρές, ώστε να είναι απειροστοί. Το εν λόγω θεώρημα λοιπόν εφαρμόζεται σε Λαγκρανζιανά συστήματα, τα οποία προκύπτουν από κάποιο ολοκλήρωμα δράσης [20]. Παίρνοντας τη γενικότερη μορφή της NLS, από τη σχέση (1.4), η Λαγκρανζιανή πυκνότητα θα είναι

$$\mathcal{L}(u, u_z, \nabla u) = (i/2)(u^* u_z - u u_z^*) - \partial_j u g^{jk} \partial_k u + F(|u|^2) \quad (1.33)$$

, με $F(|u|^2) = \int_0^{|u|^2} f(s) ds$. Το ολοκλήρωμα της δράσης ορίζεται:

$$S = \int L dz = \int \mathcal{L} d^D x dz \quad (1.34)$$

Το L είναι η Λαγκρανζιανή. Εδώ να σημειώσουμε ξανά ότι ο «χρόνος» για το σύστημα μας είναι η διεύθυνση διάδοσης z . Το x στις παραπάνω σχέσεις συμβολίζει τις εγκάρσιες διαστάσεις και το χρόνο. Στο παρόν πρόβλημα οι ανεξάρτητες μεταβλητές (ή «πεδία») είναι τα u και u^* . Έτσι η εξίσωση (1.4) μπορεί να προκύψει από το μεταβολικό πρόβλημα $\delta S / \delta u = \delta S / \delta u^* = 0$. Σύμφωνα με την αρχή της ελάχιστης δράσης, όταν το σύστημα οδεύει από μία κατάσταση σε μία άλλη μεταξύ των «χρόνων» z_1 και z_2 , στο χώρο των συντεταγμένων, ακολουθεί δρόμο όπου η δράση είναι ακρότατη (συνήθως ελάχιστη), οπότε $\delta S = 0$. Από αυτή τη σχέση μπορούμε να καταλήξουμε στις εξισώσεις Euler-Lagrange για το u ,

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x_{\mu}} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \quad (1.35)$$

, με $\mu=0, \dots, D$, (όπου με «0» συμβολίζεται το z), και αντίστοιχα για το u^* . Οι εξισώσεις είναι ισοδύναμες με την (1.4). Τα παραπάνω θα είναι χρήσιμα και στη κατανόηση της Μεταβολικής μεθόδου που χρησιμοποιείται στο Κεφάλαιο 2.

Οι εξισώσεις παραμένουν αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς εάν και η δράση παραμένει αναλλοίωτη. Έτσι και η Λαγκρανζιανή πρέπει να μένει αναλλοίωτη, εκτός από τη προσθήκη κάποιου ολικού διαφορικού $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + a \partial_{\mu} \mathcal{J}^{(\mu)}$. Χωρίς να επεκταθούμε περισσότερο, το θεώρημα προβλέπει πως αν ισχύει αυτό, τότε ισχύει και η εξίσωση συνέχειας $\partial_z I_0^{(k)} + \partial_j I_j^{(k)} = 0$, όπου το ρεύμα I , εάν μηδενίζεται στο άπειρο, μας δείχνει πως ισχύει η

διατήρηση κάποιου φορτιού. Συγκεκριμένα θα ισχύει $(d/dz) \int I_0^{(k)} d^D x = 0$ (βλέπε και [232]).

Τα παραπάνω ρεύματα δίνονται από

$$I_\mu^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\mu} \left[\sum_{\nu=0}^D u_\nu \varphi_\nu^{(k)} - \psi^{(\nu)} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\mu^*} \left[\sum_{\nu=0}^D u_\nu^* \varphi_\nu^{(k)} - \psi^{(\nu)} \right] - \mathcal{L} \varphi_\mu^{(k)}. \quad (1.36)$$

Βάσει αυτών βρίσκονται και οι παρακάτω διατηρήσιμες ποσότητες (ολοκληρώματα κίνησης).

A) Διατήρηση της «μάζας».

Η συμμετρία από την οποία προέρχεται είναι το αναλλοίωτο του ολοκληρώματος της δράσης στο μετασχηματισμό βαθμίδας (gauge), δηλαδή όταν $u \rightarrow ue^{iz}$, που σημαίνει ότι οι εξίσώσεις είναι αναλλοίωτες σε αλλαγή της φάσης. Η εξίσωση συνέχειας γράφεται,

$$\partial_z \mathcal{N} + \partial_j \mathcal{J}^j = 0, \quad (1.37)$$

όπου $\mathcal{N} = |u|^2$ και $\mathcal{J}^j = i(u g^{jk} \partial_k u^* - u^* g^{jk} \partial_k u)$. Επομένως το ολοκλήρωμα $N = \int |u|^2 d^D x$ διατηρείται. Για χωρικές συντεταγμένες εκφράζει την ισχύ της ακτίνας, ενώ για χωροχρονικές την ενέργεια του παλμού.

B) Διατήρηση της Χαμιλτονιανής.

Προέρχεται από το αναλλοίωτο της δράσης στη μεταβολή του «χρόνου», $z \rightarrow z + \varepsilon$ και καταλήγει στην εξίσωση συνέχειας

$$\partial_z \mathcal{H} + \partial_j \mathcal{L}^j = 0, \quad (1.38)$$

όπου $\mathcal{H} = \partial_j u^* g^{jk} \partial_k u - F(|u|^2)$ η Χαμιλτονιανή πυκνότητα και $\mathcal{L}^j = -u_z g^{jk} \partial_k u^* - u_z^* g^{jk} \partial_k u$, στοιχεία της πυκνότητας ενεργειακής ροής. Βάσει της (1.38) ισχύει η διατήρηση της Χαμιλτονιανής $H = \int \mathcal{H} d^D x$. Αυτό είναι έκφραση της διατήρησης της ολικής ενέργειας κατά τη διάδοση.

Γ) Διατήρηση της ορμής.

Προέρχεται από το αναλλοίωτο της δράσης στην εγκάρσια μετατόπιση κατά τη διάσταση k , $x_k \rightarrow x_k + \varepsilon$. Καταλήγει στην εξίσωση συνέχειας

$$\partial_z \mathcal{P}_k + \partial_j \mathcal{W}_k^j = 0, \quad (1.39)$$

όπου συνδέει τη πυκνότητα της ορμής κατά τη k διάσταση με τα στοιχεία του τανυστή τάσεων (ροή της ορμής). Έχουμε λοιπόν, $\mathcal{W}_k^j = -\partial_k u (g^{mj} \partial_m u^*) - (\partial_m u g^{mj}) \partial_k u^* - \delta_k^j \mathcal{L}$, όπου δ_k^j το δέλτα του Kronecker. Όπως και προηγουμένως, θα ισχύει η διατήρηση της k συνιστώσας της ορμής που είναι $P_k = \int \mathcal{P}_k d^D x$.

Δ) Διατήρηση της γωνιακής στροφορμής

Η στροφορμή ορίζεται $\vec{M} = \int \hat{x} \times \mathcal{P} d^D x$ και η διατήρηση της είναι απόρροια της διατήρησης της δράσης κατά τη περιστροφή: $\hat{x} \rightarrow \hat{x} + \hat{x} \times \hat{\varepsilon}$.

Ε) Η NLS παραμένει αναλλοίωτη στο Γαλιλαϊκό μετασχηματισμό

Ο μετασχηματισμός $z' = z$, $x'^i \equiv x^i + 2g^{ij} k_j z$ και $u' \equiv u \exp i(k_i g^{ij} x_j - k_i g^{ij} k_j z)$, όπου $k = |\hat{k}|$ το μέτρο ενός κυματοδιανύσματος που δείχνει τη διεύθυνση της μετατόπισης. Με αυτό το τρόπο μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση ως προς ένα άλλο, βολικότερο, σύστημα αναφοράς.

Ένα επιπλέον εντυπωσιακό χαρακτηριστικό των σολιτονικών λύσεων είναι η ευστάθεια τους. Ευσταθείς βέβαια είναι οι λύσεις της μονοδιάστατης NLS, με την οποία ασχολούμαστε στο 2^ο και 3^ο Κεφάλαιο της διατριβής. Επίσης, κατά τη διάδοση των σολιτονίων η απλή NLS δεν είναι ικανή να περιγράψει όλες τις σημαντικές φυσικές διεργασίες που λαμβάνουν χώρα καθώς αυτά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και με την ύλη. Για να γίνει αυτό πρέπει να προστεθούν επιπλέον όροι στην εξίσωση, που δρουν διαταρακτικά στη σολιτονική της λύση. Παρόλα αυτά, έχει δειχθεί επανειλημμένα σε πειράματα και αριθμητικές προσομοιώσεις ότι οι σολιτονικές λύσεις παραμένουν ευσταθείς, έστω και αν μεταβάλουν το σχήμα τους, κάτω από ποικίλες διαταραχές, συχνά μάλιστα πολύ έντονες. Μερικά παραδείγματα τέτοιων διαταραχών είναι η περιοδική ενίσχυση, η μεταβολή της διασποράς, τα μη-γραμμικά φαινόμενα ανώτερης τάξης. Οι διαταραχές αυτές χωρίζονται σε χαμιλτονιανές και μη, με τις πρώτες να διατηρούν τη Χαμιλτονιανή του συστήματος, ενώ στις άλλες ανήκουν αυτές που επιβάλλουν έστω και περιοδικές χρονικές μεταβολές ή μεταβολή της ενέργειας. Τα σολιτόνια είναι ιδιαίτερα ευσταθή και επίμονα απέναντι στις πρώτες, αλλά συχνά αρκετά ανθεκτικά και στις άλλες [146, 147]. Περισσότερες λεπτομέρειες θα φανούν από την ανάλυση συγκεκριμένων προβλημάτων στα επί μέρους Κεφάλαια.

1.4 Φαινόμενα

1.4.1 Γραμμικά

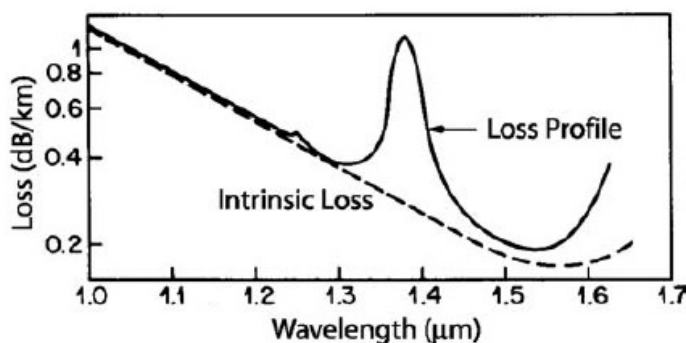
A) Απώλειες

Οι απώλειες στην ισχύ των παλμών και των ακτίνων είναι ένας σημαντικός παράγοντας για τις τεχνολογικές εφαρμογές, περισσότερο δε για τη διάδοση κατά μήκος ινών, καθώς οι απαιτούμενες αποστάσεις είναι πολύ μεγάλες. Οι βασικοί παράγοντες που προκαλούν απώλεια ισχύος είναι η απορρόφηση των φωτονίων από το υλικό και η σκέδαση Rayleigh. Μία ίνα και, εν γένει, ένα οπτικό μέσο το οποίο δεν είναι ομογενές, αλλά έχει διαφοροποιήσεις στη πυκνότητα του, λόγω συνήθων κατασκευαστικών ατελειών, προκαλεί ακόμα μεγαλύτερες απώλειες στους παλμούς.

Αν η αρχική ισχύς του παλμού είναι P_0 , η μεταβολή της λόγω απωλειών δίνεται ως

$$P = P_0 \exp(-\alpha L) \quad (1.40)$$

, όπου α είναι ο συντελεστής απωλειών και L το μήκος διάδοσης. Ο συντελεστής α εξαρτάται από τη συχνότητα του φωτός. Στο σχήμα 1.8 δίνονται οι τιμές του συντελεστή για τυπική (πυριτία) μονότροπη ίνα, συναρτήσει του μήκους κύματος των παλμών. Οι απώλειες ελαχιστοποιούνται για $\lambda \approx 1.53 \mu\text{m}$.



Σχήμα 1.8: Απώλειες σε DB/Km σε μονότροπη ίνα. Η διακεκομμένη καμπύλη παριστά τις απώλειες λόγω σκέδασης Rayleigh (Σχήμα από [45]).

Στις αναλυτικές μελέτες γύρω από τη διάδοση σολιτονικών παλμών χρησιμοποιούνται συχνά μήκη κύματος κοντά στα $1.5\mu m$, ώστε οι απώλειες να είναι αμελητέες και να μη προσθέτουν κάποιο όρο στις εξισώσεις διάδοσης.

B) Διασπορά

Όταν ένα H/M κύμα διαδίδεται σε διηλεκτρικό, αλληλεπιδρά με τα δέσμια ηλεκτρόνια. Γενικά μιλώντας, η απόκριση του μέσου εξαρτάται από τη συχνότητα του κύματος. Αυτή η εξάρτηση προκαλεί τη (χρωματική) διασπορά, και εμφανίζεται σαν εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από τη συχνότητα. Αν το κύμα ήταν βέβαια μονοχρωματικό, δε θα υπήρχε ουσιαστικά αυτό το πρόβλημα. Οι ακτίνες όμως, ή οι παλμοί, έχουν κάποιο χρονικό εύρος, το οποίο μεταφράζεται σε αντίστοιχο φασματικό. Το αποτέλεσμα είναι ότι κάθε στοιχείο του φάσματος «βλέπει» διαφορετική τιμή του δείκτη διάθλασης και άρα διαδίδεται με διαφορετική ταχύτητα, $c/n(\omega)$.

Αυτό που προκαλεί τη διασπορά, σε φυσικό επίπεδο, είναι ότι το μέσο χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένες συχνότητες συντονισμού των ηλεκτρονίων του, στις οποίες και απορροφά την H/M ακτινοβολία. Μακριά από τις συχνότητες συντονισμού, ο δείκτης διάθλασης προσεγγίζεται πολύ καλά από το τύπο του Sellmeier,

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2} \quad (1.41)$$

, όπου ω_j είναι οι συχνότητες συντονισμού και B_j ένας συντελεστής βαρύτητας για το συγκεκριμένο συντονισμό [1]. Το άθροισμα στη σχέση (1.41) περιλαμβάνει τους συντονισμούς που βρίσκονται στο φάσμα του παλμού. Οι συχνότητες και οι συντελεστές τους υπολογίζονται πειραματικά και για τη περίπτωση του γυαλιού πυριτίας βρίσκονται $B_1=0.6961663$, $B_2=0.4079426$, $B_3=0.8974794$, $\lambda_1=0.0684043\mu m$, $\lambda_2=0.1162414\mu m$, $\lambda_3=9.896161\mu m$ [46].

Η διασπορά είναι φυσικά γραμμικό φαινόμενο και προκαλεί τη χρονική διαπλάτυνση του παλμού. Ο συνδυασμός της με τη μη-γραμμικότητα του μέσου μπορεί να ευνοήσει τη δημιουργία και διάδοση σολιτονίων. Τα φαινόμενα της διασποράς μπορούν να εκφραστούν μαθηματικά αναπτύσσοντας το κυματάριθμο του ρυθμού β σε σειρά Taylor γύρω από τη κεντρική συχνότητα ω_0 , όπως φαίνεται στη σχέση (1.27). Σε αυτή τη σχέση, οι συντελεστές β_1 και β_2 σχετίζονται με το δείκτη διάθλασης ως εξής

$$\beta_1 = \frac{1}{v_g} = \frac{n_g}{c} = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) \quad (1.42)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{c} \left(2 \frac{dn}{d\omega} + \omega \frac{d^2n}{d\omega^2} \right) \quad (1.43)$$

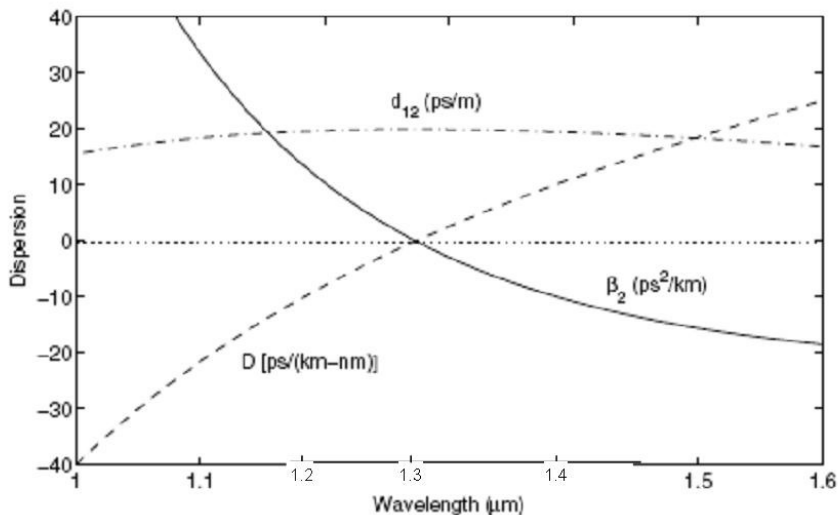
, όπου το n_g ονομάζεται «ομαδικός δείκτης» και το v_g είναι η ταχύτητα ομάδος. Από φυσική άποψη, ο παλμός κινείται με την ομαδική του ταχύτητα, που όμως δεν είναι ίδια για όλα τα φασματικά του στοιχεία. Το β_2 αντιπροσωπεύει αυτή τη διαφοροποίηση της ομαδικής ταχύτητας που οδηγεί σε διασπορά των φασματικών στοιχείων και διαπλάτυνση του παλμού. Για αυτό το λόγο ονομάζεται και παράμετρος GVD. Στη τεχνολογία των οπτικών ινών χρησιμοποιείται συχνά και η παράμετρος D , αντί της β_2 , ή οποία ορίζεται παρακάτω,

$$D = \frac{d\beta_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 \approx \frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2}. \quad (1.44)$$

Μία σημαντική επίπτωση της διασποράς είναι ότι οι παλμοί με διαφορετικές κεντρικές συχνότητες διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες ομάδος. Η διαφορά αυτή εκφράζεται από τη παράμετρο «ολίσθησης» $d_{12} = \beta_1(\omega_1) - \beta_1(\omega_2)$. Στο σχήμα 1.9 φαίνονται τιμές των παραμέτρων β_2 , D και του d_{12} για κάποιες τιμές του μήκους κύματος, χαρακτηριστικές στη

φωτονική τεχνολογία. Οι τιμές του d_{12} υπολογίζονται βάση του $\lambda_2=0.55\mu m$. Οι τιμές αφορούν γυαλί πυριτίας και οι παράμετροι της διασποράς μηδενίζονται για $\lambda_D \approx 1.312\mu m$. Για μεγαλύτερα μήκη κύματος το β_2 είναι αρνητικό, ενώ για μικρότερα θετικό. Όταν το υλικό παρουσιάζει αρνητική παράμετρο λέμε ότι η διασπορά είναι ανώμαλη ενώ σε αντίθετη περίπτωση κανονική.

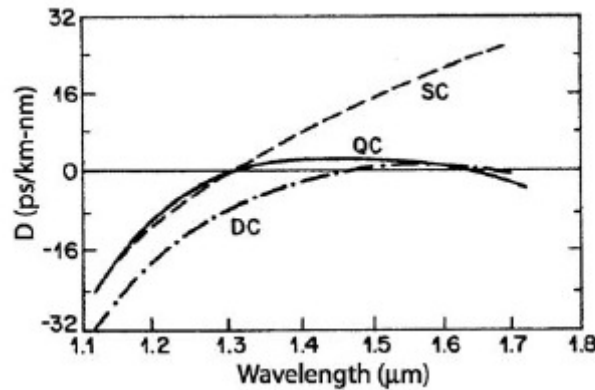
Ανάλογα με το είδος της διασποράς, τα μη-γραμμικά φαινόμενα επιδρούν διαφορετικά στο παλμό. Στη περίπτωση της κανονικής διασποράς ($\beta_2 > 0$), τα φασματικά στοιχεία του παλμού που έχουν μεγάλες τιμές συχνότητας οδεύουν πιο αργά από αυτά με μικρές τιμές. Αντίθετα στην ανώμαλη διασπορά ($\beta_2 < 0$), τα στοιχεία με μεγάλες συχνότητες είναι αυτά που οδεύουν ταχύτερα. Η περιοχή ανώμαλης διασποράς είναι ιδιαίτερα σημαντική στις τηλεπικοινωνίες οπτικών ινών, καθώς είναι σε αυτή τη περιοχή που δημιουργούνται τα φωτεινά σολιτόνια. Για παλμούς περισσοτέρων διαστάσεων, παρατηρούνται εξίσου ενδιαφέροντα φαινόμενα, όπως η κυματική κατάρρευση για μη-γραμμικότητα τύπου Kerr και η δημιουργία σολιτονικών δομών σε μέσα με κορέσιμη μη-γραμμικότητα.



Σχήμα 1.9: Μεταβολή των παραμέτρων β_2 , D και d_{12} με το μήκος κύματος, σε γυαλί πυριτίας [1].

Θα πρέπει ακόμα να σημειωθεί ότι όταν οι παλμοί διαδίδονται σε ίνα, (και δεν είναι χωροχρονικοί παλμοί σε ελεύθερο μέσο), ο παράγοντας της διασποράς εξαρτάται και από τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της. Η ίνα αποτελείται συνήθως από τρία στρώματα, τον πυρήνα (core) από γυαλί, την επένδυση (cladding) και το περίβλημα (jacket). Αλλάζοντας την ακτίνα του πυρήνα ή τη διαφορά μεταξύ των δεικτών αυτού και της επένδυσης, μπορεί κανείς να επηρεάσει τις τιμές της διασποράς και να μετατοπίσει το λ_D [47]. Τέτοιες τεχνικές χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία ινών μετατοπισμένης διασποράς (dispersion shifted fibers) για τηλεπικοινωνιακή χρήση. Όταν η μετατόπιση του μηδενισμού της διασποράς είναι πολύ μεγάλη, πέραν των $1.6\mu m$, οι ίνες που δημιουργούνται παρουσιάζουν μεγάλες τιμές κανονικής διασποράς για μήκος κύματος από 1.3 έως $1.55\mu m$. Τέτοιες ίνες ονομάζονται «αντισταθμιστικής διασποράς» (dispersion compensating fibers-DCF) και χρησιμοποιούνται στη διαχείριση διασποράς, τεχνική για την οποία θα πούμε περισσότερα στο Κεφάλαιο 2. Επιπλέον υπάρχει η δυνατότητα κατασκευής ινών επίπεδης διασποράς (dispersion flattened fibers) οι οποίες παρουσιάζουν σχεδόν αμετάβλητη διασπορά για μεγάλη περιοχή του φάσματος. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση πολλαπλών διαφορετικών επενδύσεων. Στο

σχήμα 1.10 φαίνονται οι τιμές της παραμέτρου D για δύο τέτοιες ίνες παράλληλα με μία συνήθη μονότροπη ίνα.



Σχήμα 1.10: Μεταβολή της παραμέτρου διασποράς D με το μήκος κύματος για τρία είδη ίνας: SC (single clad) μονής επένδυσης, DC (double) διπλής επένδυσης και QC (quadruple) τετραπλής [48].

Γ) Διασπορά 3^{ης} τάξης

Η επίδραση του όρου β_2 στη σχέση (1.27) είναι η πλέον σημαντική, όπως άλλωστε και η διασπορά 2^{ης} τάξης στην NLS. Παρόλα αυτά ο όρος β_3 μπορεί, κατά περίπτωση, να είναι σημαντικός. Για παράδειγμα, όταν το μήκος κύματος της οπτικής ακτινοβολίας είναι κοντά στο λ_D το β_2 γίνεται πολύ μικρό, οπότε το β_3 θα είναι ο κυρίαρχος όρος διασποράς. Ακόμα, για πολύ στενούς παλμούς, όπου $T_0 < 1ps$, η διασπορά τρίτης τάξης πρέπει και πάλι να συμπεριληφθεί, έστω και αν το β_2 δεν είναι αμελητέας τιμής. Αυτό γιατί το φασματικό εύρος $\Delta\omega$, είναι πλέον αρκετά μεγάλο, ώστε να μη θεωρείται αμελητέο σε σχέση με το ω_0 .

Η εξίσωση, αντίστοιχη με τη σχέση (1.28), που περιλαμβάνει την επίδραση διασποράς 3^{ης} τάξης στη διάδοση χρονικών παλμών, χωρίς τη παρουσία μη-γραμμικών φαινομένων, γράφεται

$$i \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{i\beta_3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} = 0 \quad (1.45)$$

, όπου έχουμε κάνει το Γαλιλαϊκό μετασχηματισμό στο κινούμενο σύστημα αναφοράς του παλμού $t \rightarrow t - z/v_g$. Μέσω του μετασχηματισμού Fourier μπορούμε να βρούμε τη λύση της εξίσωσης και να τη συσχετίσουμε με τις παραμέτρους της διασποράς,

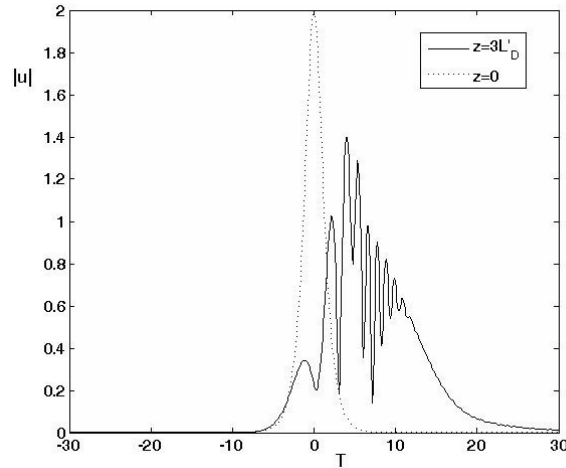
$$U(z,t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(0,\omega) \exp\left(\frac{i}{2}\beta_2\omega^2 z + \frac{i}{6}\beta_3\omega^3 z - i\omega t\right) d\omega. \quad (1.46)$$

Στις περιπτώσεις που το β_3 είναι σημαντικό, προκαλεί εμφανή διαπλάτυνση στο παλμό, όπως έχει δειχθεί και πειραματικά [(49)]. Η επίδραση του όμως δεν είναι συμμετρική όπως του β_2 και προκαλεί κυματώσεις στο παλμό, στη μπροστινή του «ουρά» (μέτωπο) όταν το β_3 είναι αρνητικό και στη πίσω (ουρά) όταν είναι θετικό.

Για να δώσουμε μια σαφή εικόνα της επίδρασης της διασποράς 3^{ης} τάξης, υιοθετούμε τη περίπτωση μηδενικής β_2 (βλέπε και σχετικές εργασίες [51, 52]). Σε αυτή τη περίπτωση η κανονικοποίηση της εξίσωσης διάδοσης γίνεται με βάση το μήκος διασποράς τρίτης τάξης $L'_D = T_0^3 / |\beta_3|$. Η νέα εξίσωση, συγκρινόμενη με την (1.29), θα είναι

$$i \frac{\partial u}{\partial Z'} - \text{sign}(\beta_3) \frac{i}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial T'^3} + |u|^2 u = 0, \quad (1.47)$$

όπου $Z' = z/L'_D$, και $u = \tilde{N}U$, ενώ $\tilde{N}^2 = L'_D/L_{NL} = (\gamma P_0 T_0^3)/|\beta_3|$ είναι παράγοντας αντίστοιχος με την «τάξη» του σολιτονίου N , που χρησιμοποιείται στη κανονικοποίηση για την (1.29). Έτσι λοιπόν για παλμό με $\tilde{N} = 2$, στο Σχ.1.11 φαίνεται η δραματική μεταβολή του σχήματος του ύστερα από απόσταση $z = 3L'_D$. Ο παλμός πλαταίνει και αποκτά ταλαντώσεις στη πίσω (trailing) ουρά του. Βέβαια η εμφανιζόμενη διαμόρφωση ίσως να μην είναι τόσο καταστροφική για τον παλμό, καθώς το β_3 είναι συνήθως μικρό. Έτσι για $\beta_2=0$, και με β_3 να παίρνει τιμές μεταξύ -0.10 και $-0.15 ps^3/Km$, και με παλμό με τυπικό εύρος κοντά στο $T_0=10ps$, η απόσταση του παραδείγματος υπολογίζεται γύρω στα $20000Km$.



Σχήμα 1.11: Μεταβολή του πλάτους sech παλμού, $\tilde{N} = 2$, υπό τη επίδραση μη-γραμμικότητας και διασποράς 3^{ης} τάξης. Πρόκειται για γνωστό αποτέλεσμα που αναπαράχθηκε επακριβώς από τον αριθμητικό κώδικα που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία, και για λόγους σύγκρισης.

Δ) Διπλοθλαστικότητα

Ακόμα και οι μονότροπες ίνες δεν είναι στην πραγματικότητα τέτοιες καθώς μπορούν να υποστηρίξουν την συν-διάδοση δύο ρυθμών πολωμένων σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους. Έτσι λοιπόν μόνο σε μία ιδανικά κατασκευασμένη ίνα, με τέλεια κυλινδρική συμμετρία, ένας ρυθμός που ξεκινά στην x -διεύθυνση δεν θα «συζευχθεί» με τον αντίστοιχο του στην y -διεύθυνση, ενώ στην πραγματικότητα ακόμα και μικρές αποκλείσεις από τη συμμετρία (λόγω μηχανικών τάσεων για παράδειγμα ή και ατελειών στην κατασκευή) καταλήγουν σε πιο περίπλοκη διάδοση δύο ρυθμών. Η σταθερά διάδοσης ακριβώς λόγω της απουσίας συμμετρίας είναι (έστω και λίγο) διαφορετική για τους δύο αυτούς ρυθμούς, οπότε εμφανίζεται το φαινόμενο της ρυθμικής διπλοθλαστικότητας (modal birefringence). Η ισχύς της ορίζεται ως

$$B_m = \frac{|\beta_x - \beta_y|}{k_0} = |n_x - n_y| \quad (1.48)$$

όπου n_x και n_y οι δείκτες διάθλασης για τους κάθετους ρυθμούς [1]. Ο άξονας με τον μικρότερο δείκτη καλείται γρήγορος, ενώ αντίστοιχα ο άλλος, καλείται αργός. Κατά τη διάδοση οι δύο ρυθμοί ανταλλάσσουν ενέργεια με περίοδο

$$L_B = \frac{2\pi}{|\beta_x - \beta_y|} \quad (1.49)$$

ενώ το L_B ονομάζεται και μήκος επανάληψης.

Επιπλέον, στις πραγματικές ίνες το B_m δεν είναι σταθερό, και η τιμή του μεταβάλλεται, συνήθως κατά λίγο, με τυχαίο τρόπο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να αλλάζει με παρόμοια τυχαίο τρόπο η πόλωση του φωτός μέσα στην ίνα. Κάτι τέτοιο δεν επηρεάζει την απόδοση της κυματοδότησης όταν είναι ένα συνεχές κύμα (CW) αυτό που στέλνουμε (οι φωτοανιχνευτές είναι αναισθητοί σε αλλαγές της πόλωσης). Όταν όμως επιθυμούμε να σταλούν στενοί παλμοί κατά μήκος ίνας πολλών χιλιομέτρων, όπως σε ένα οπτικό τηλεπικοινωνιακό δίκτυο, τότε γεννάται ένα ακόμη πρόβλημα. Καθώς η διπλοθλαστικότητα της ίνας μεταβάλλεται με τυχαίο τρόπο, παρομοίως μεταβάλλονται και οι ταχύτητες ομάδας των δύο ρυθμών, με τελικό αποτέλεσμα την διαπλάτυνση του παλμού. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται «Διασπορά Πολωμένων Ρυθμών» (Polarization Mode Dispersion-PMD) [1].

Ένας τρόπος που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της τυχειότητας της διασποράς είναι η επιβολή ισχυρής διπλοθλαστικότητας από κατασκευής της ίνας, έτσι ώστε οι μικρές διακυμάνσεις που μπορεί να παρουσιαστούν να «πνίγονται» και να μην επηρεάζουν σημαντικά την πόλωση. Υπάρχουν διάφορες τεχνικές δημιουργίας τέτοιων ινών με πλέον συνηθισμένες την επιβολή ελλειπτικότητας στον πυρήνα και την επιβολή μηχανικής τάσης, αλλά η περιγραφή τους δεν θα απασχολήσει την παρούσα διατριβή [1, 12, 13]. Οι ίνες αυτές ονομάζονται εν γένει, «οπτικές ίνες διατηρούμενης πόλωσης» και η χρησιμότητα τους έγκειται, κατ' αρχάς στο ότι όταν πολωμένο φως (παλμός λέιζερ) μπει στην ίνα «κατά μήκος» ενός εκ των δύο αξόνων πόλωσης, τείνει να διατηρήσει την πόλωση του. Όταν βέβαια το φως εισέλθει στην ίνα υπό γωνία, οπότε θα δημιουργηθούν δύο κάθετα πολωμένοι ρυθμοί, αυτοί θα έχουν σημαντική διαφορά στις ταχύτητες τους (φασικές αλλά κυρίως στις ταχύτητες ομάδος) με αποτέλεσμα να τείνουν να διαχωριστούν αρκετά σύντομα και να οδεύσουν πλέον σε χωριστοί παλμοί σημαντικά μικρότερης ενέργειας. Οι ίνες με ισχυρή διπλοθλαστικότητα μπορεί να έχουν $B_m \sim 10^{-4}$.

Ε) Περίθλαση

Εφόσον υπάρχει κάποιο κύμα ή ειδικότερα κάποια ακτίνα ή χωροχρονικός παλμός που οδεύει σε οπτικό μέσο, υφίσταται περίθλαση. Το φαινόμενο αυτό δεν ενδιαφέρει όταν ο παλμός κυματοδηγείται σε οπτική ίνα περιορισμένη ακτίνας, αλλά σε ελεύθερο μέσο ή και επίπεδο κυματοδηγό είναι αναπόφευκτο. Οφείλεται στη σκέδαση του φωτός από τα μόρια του μέσου και από ατέλειες στη κρυσταλλική δομή που υπάρχουν πάντα. Υπάρχουν διάφορα είδη σκέδασης, ανάλογα με το μήκος κύματος και τη φύση του μέσου (στερεό, υγρό ή αέριο). Επίσης, η σκέδαση μπορεί να προκαλέσει μετατόπιση συχνότητας, όπως η σκέδαση Raman, που αναφέρεται παρακάτω. Η πλέον συνηθισμένη είναι η σκέδαση Rayleigh και η σκέδαση Bragg για υλικά με κρυσταλλική δομή, όπου δεν προκαλούν τέτοια μετατόπιση. Το αποτέλεσμα είναι η διαπλάτυνση της ακτίνας, στην εγκάρσια πλέον διάσταση. Ουσιαστικά το φαινόμενο είναι ανάλογο της ανώμαλης διασποράς στην οποία υφίστανται οι χρονικοί παλμοί, με τη διαφορά ότι δεν υπάρχουν υλικά με μηδενική περίθλαση και ότι είναι φαινόμενο πολύ ισχυρότερο, με εξαίρεση τη διασπορά πολύ στενών παλμών.

1.4.2 Μη-Γραμμικά

Α) Διαμορφωτική Αστάθεια (modulation instability-MI)

Το φαινόμενο της διαμορφωτικής αστάθειας είναι πολύ σημαντικό για την έντονη εμφάνιση μη-γραμμικών φαινομένων και τη δημιουργία σολιτονίων. Στη παρούσα παράγραφο εξηγούμε περιληπτικά τι σημαίνει η MI και σκιαγραφούμε τη μέθοδο διερεύνησής της για τη μονοδιάστατη NLS. Στο Κεφάλαιο 4 αναφερόμαστε στην MI για την (2+1)D NLS.

Η NLS στη μορφή (1.17) έχει την απλούστερη της λύση στη μορφή συνεχούς (CW) επίπεδου κύματος

$$u(Z, X) = u_0 \exp(ipZ + iqX), \quad (1.50)$$

με το u_0 να είναι σταθερό και τα p, q να ακολουθούν τη σχέση διασποράς $p = -q^2/2 + \text{sgn}(n_2)u_0^2$. Το CW μπορεί να διαδίδεται αμετάβλητο με μόνη εξαίρεση τη μετατόπιση της φάσης, που εξαρτάται από την ένταση. Διαμορφωτική αστάθεια είναι η κατάσταση στην οποία το CW επίπεδο κύμα (και γενικότερα κάποια λύση) δεν είναι ευσταθές κάτω από την επίδραση μικρών διαταραχών. Για να εξεταστεί αυτή η πιθανότητα, η τυπική διαδικασία είναι η προσθήκη μικρής διαταραχής $u_1 + iv_1$ και διερεύνηση ύπαρξης τέτοιας λύσης, όπως,

$$u = (u_0 + u_1 + iv_1) \exp(ipZ + iqX). \quad (1.51)$$

Αντικαθιστώντας τη παραπάνω στην εξίσωση (1.17) και γραμμικοποιώντας, καταλήγει κανείς σε σύστημα εξισώσεων για τα u_1 και v_1 . Το επόμενο βήμα είναι η διερεύνηση λύσεων του συστήματος με τη μορφή επιπέδων κυμάτων $\exp(iKZ + iQX)$, οπότε βρίσκεται η παρακάτω σχέση διασποράς:

$$K = -qQ \pm Q \left[Q^2/4 - \text{sgn}(n_2)u_0^2 \right]^{1/2} \quad (1.52)$$

Η λύση είναι ευσταθής εάν διαταραχές οποιουδήποτε κυματάριθμου Q δε μεγαλώνουν κατά μήκος της διάδοσης, που σημαίνει ότι το K πρέπει να είναι πραγματικός.

Έτσι, η σχέση (1.52) δείχνει ότι η λύση θα είναι σίγουρα ευσταθής μόνο για $n_2 < 0$ (αποεστιάζουσα μη-γραμμικότητα). Ουσιαστικά η διαταραχή δημιουργεί κυματώσεις μικρού πλάτους στο υπόβαθρο του επίπεδου κύματος. Όταν $n_2 > 0$ και ταυτόχρονα η ισχύς του κύματος ξεπερνά μια συγκεκριμένη τιμή, ($u_0^2 > Q^2/4$), το K γίνεται μιγαδικός και η λύση (1.50) γίνεται ασταθής. Αυτή είναι η περίπτωση της διαμορφωτικής αστάθειας. Η παρουσία της σηματοδοτεί τη δυνατότητα ύπαρξης σολιτονικών λύσεων, καθώς χωρικά εντοπισμένα φωτεινά σολιτόνια, με ουρές που σβήνουν στο άπειρο, φαίνεται πως υπάρχουν μόνο όταν η λύση επίπεδου κύματος είναι ασταθής.

Τα παραπάνω αφορούν τα χωρικά σολιτόνια, αλλά η ανάλυση για τα χρονικά και την εξίσωση (1.29) είναι απολύτως ανάλογη. Το μόνο επιπλέον συμπέρασμα είναι ότι η MI αναπτύσσεται για εστιάζουσα μη-γραμμικότητα, αλλά και ανώμαλη διασπορά.

B) Αυτοδιαμόρφωση φάσης (self phase modulation-SPM)

Ο όρος αυτοδιαμόρφωση φάσης χρησιμοποιείται στις αναφορές για χρονικούς παλμούς και είναι αποτέλεσμα του μη-γραμμικού φαινομένου Kerr, δηλαδή της μεταβολής του δείκτη διάθλασης συναρτήσει της έντασης ακτινοβολίας. Εξαιτίας αυτού η φάση διαμορφώνεται κατά το εύρος του παλμού με αποτέλεσμα τη γένεση νέων συχνοτήτων. Σε συνδυασμό με ανώμαλη διασπορά διατηρεί τη συγκέντρωση της ισχύος γύρω από το κέντρο του παλμού και δημιουργεί τις κατάλληλες συνθήκες για την ύπαρξη σολιτονίων. Η SPM είναι ανάλογη της «αυτοεστίασης» στα χωρικά σολιτόνια. Στο επίπεδο του αποτελέσματος δεν υπάρχει διαφορά, ο χρονικός παλμός εστιάζει γύρω από το σημείο μέγιστης έντασης, ενώ στα χωρικά σολιτόνια θα μπορούσε κανείς να αντικαταστήσει την ορολογία περί συχνοτήτων με αυτή για χωρικό φάσμα κυματάριθμων. Οι όροι SPM και αυτοεστίαση εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται στα ξεχωριστά αυτά πεδία, καθώς είναι διαισθητικά πιο σωστό να χρησιμοποιούνται αποκλειστικά στο πεδίο του χρόνου και του χώρου αντίστοιχα.

Παρατηρήθηκε για πρώτη φορά σε γυαλί, σε πειράματα στα τέλη της δεκαετίας του 60 και το 1970 [53]. Στο φυσικό επίπεδο η μη-γραμμική απόκριση του μέσου οφείλεται στη μη αρμονική κίνηση των δέσμιων ηλεκτρονίων κάτω από την επίδραση του πεδίου. Αυτό έχει

σαν αποτέλεσμα, η πόλωση που δημιουργείται λόγω των διπόλων να μην είναι γραμμική με το πεδίο, αλλά να υπακούει στη σχέση [8],

$$\vec{P} = \epsilon_0(\chi^{(1)} \cdot \vec{E} + \chi^{(2)} : \vec{E}\vec{E} + \chi^{(3)} : \vec{E}\vec{E}\vec{E} + \dots) \quad (1.53)$$

, που γεφυρώνει τις σχέσεις (1.7) και (1.8). Όπως έχουμε αναφέρει το $\chi^{(j)}$ είναι η επιδεκτικότητα j τάξης και είναι ταυιστής $j+1$ τάξης. Επίσης να υπενθυμίσουμε ότι, για κεντροσυμμετρικά υλικά όπως τα AlGaAs και SiO₂, η επίδραση της $\chi^{(2)}$ είναι μηδαμινή.

Η $\chi^{(3)}$ μένει ως η σημαντικότερη αιτία εμφάνισης μη-γραμμικών φαινομένων, όπως η μεταβολή του δείκτη διάθλασης με την ένταση (μη-γραμμική διάθλαση), η γένεση τρίτης αρμονικής και η μίξη τεσσάρων φωτονίων (FWM). Τα δύο τελευταία χρειάζονται ειδική προσαρμογή φάσης για να έχουν κάποια σημασία, αλλιώς μπορούν να αγνοηθούν. Αποδεικνύεται εύκολα ότι η εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από την ένταση, όπως στην (1.21) προκαλεί αντίστοιχη μεταβολή της φάσης του παλμού. Αυτή η αυτό-προκαλούμενη μεταβολή στη φάση, είναι το SPM. Άρα λοιπόν, αφού η φάση του παλμού μεταβάλλεται ως

$$\phi = n' \kappa_0 z = (n + n_2 |E|^2) \kappa_0 z \quad (1.54)$$

γίνεται φανερό και το κομμάτι που οφείλεται στη μη-γραμμική απόκριση. Αν αντί για όλο το πεδίο χρησιμοποιήσουμε το μέρος που μας ενδιαφέρει, δηλαδή την αργά μεταβαλλόμενη περιβάλλουσα U , με ένα επιπλέον μετασχηματισμό $U \rightarrow U / \sqrt{P_0}$, μπορούμε να εκφράσουμε το μη-γραμμικό μέρος της φάσης ως

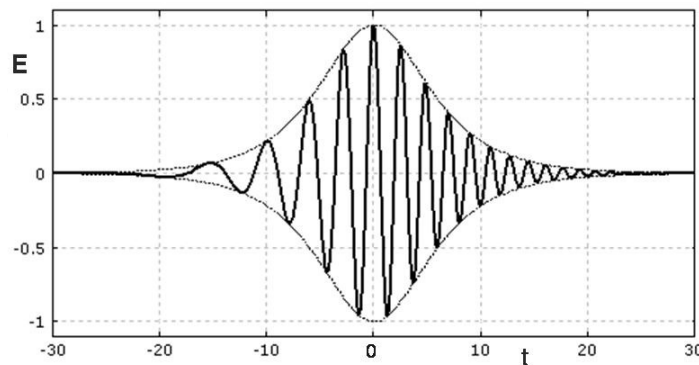
$$\phi_{NL}(z, t) = |U(0, t)|^2 (z / L_{NL}), \quad (1.55)$$

θεωρώντας πάντα τις απώλειες μηδενικές [1].

Η χρονική εξάρτηση της φάσης, μέσω της (1.55), προκαλεί φασματική διεύρυνση. Η χρονικά μεταβαλλόμενη φάση σημαίνει, ουσιαστικά, ότι η επί μέρους συχνότητας κατά το χρονικό εύρος του παλμού, θα διαφέρει από τη κεντρική ω_0 . Η διαφοροποίηση $\delta\omega$ δίνεται,

$$\delta\omega(t) = -\frac{\partial \phi_{NL}}{\partial t} = -\left(\frac{z}{L_{NL}}\right) \frac{\partial}{\partial t} |U(0, t)|^2 \quad (1.56)$$

το μείον προέρχεται από τον παράγοντα $\exp(-i\omega_0 t)$ στη σχέση (1.5). Η χρονική εξάρτηση του $\delta\omega$ αναφέρεται ως «τερέτισμα» (chirp). Η εικόνα ενός πεδίου με τερέτισμα συχνότητας φαίνεται στο σχήμα 1.12. Το chirp αυξάνει κατά τη διάδοση, που σημαίνει ότι νέες συχνότητες γεννιούνται διαρκώς. Αυτό είναι και το αίτιο της φασματικής διεύρυνσης. Η κατασκευαστική επιβολή αρχικού chirp (για $z=0$), είναι πολύ σημαντική στη διάδοση σολιτονίων «Διαχείρισης Διασποράς», όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 2.



Σχήμα 1.12: Αναπαράσταση πεδίου με τερέτισμα συχνότητας (frequency chirp). Η συχνότητα φαίνεται να αλλάζει κατά «μήκος» της περιβάλλουσας.

Μπορεί να γίνει κατανοητό ποιοτικά, το πως η SPM, από εστιάζουσα μη-γραμμικότητα, σε συνδυασμό με ανώμαλη διασπορά, ευνοούν τη δημιουργία χρονικών σολιτονικών παλμών. Όταν αντίθετα, το μέσο έχει κανονική διασπορά αυτό δεν είναι δυνατό, καθώς ο παλμός διευρύνεται μέχρι να εξαφανιστεί, πιο γρήγορα από ότι συμβαίνει όταν δεν υπάρχουν τα μη-γραμμικά φαινόμενα. Αυτό συμβαίνει διότι η SPM δημιουργεί νέα φασματικά στοιχεία, συγκεκριμένα, χαμηλές συχνότητες (red-shifted) στο μέτωπο του παλμού και ψηλές (blue-shifted) στην ουρά. Στη κανονική διασπορά οι χαμηλές συχνότητες οδεύουν γρηγορότερα από της ψηλές, έτσι τελικά ο παλμός διευρύνεται περαιτέρω. Αντίθετα, στην ανώμαλη διασπορά, οι χαμηλές συχνότητες οδεύουν πιο αργά από τις γρήγορες, έτσι τελικά και εφόσον ο παλμός έχει το κατάλληλο σχήμα, τα δύο φαινόμενα δύνανται να ισορροπήσουν.

Γ) Ετεροδιαμόρφωση φάσης (cross phase modulation-XPM)

Η XPM, (παρατηρήθηκε το 1984 [119]), είναι από τα πλέον σημαντικά φαινόμενα και αφορά τη μη-γραμμική αλληλεπίδραση μεταξύ δύο πεδίων, με διαφορετικές κεντρικές συχνότητες, που συμπορεύονται στο μέσο. Όταν τα πεδία συνυπάρχουν στο χώρο ή το χρόνο, έχοντας έστω μερική αλληλοεπικάλυψη, η αμοιβαία επίδραση τους στο δείκτη διάθλασης καταλήγει σε αμοιβαία επίδραση πάνω τους. Η αλληλεπίδραση που περιγράφεται από το XPM είναι ασύμφωνη και ελκτική, ενώ μπορεί να οδηγήσει ακόμα και σε αλληλο-παγίδευση των πεδίων, χωρίς να υπάρξει ανταλλαγή ενέργειας. Το XPM εμφανίζεται πάντα μαζί με το SPM και το όνομά του σημαίνει ετεροδιαμόρφωση φάσης αντιστοίχως. Η ονομασία επίσης προέρχεται από την έρευνα για τα χρονικά σολιτόνια, αλλά ξανά το φαινόμενο έχει αντίστοιχο αποτέλεσμα στα χωρικά καθώς ο δείκτης διάθλασης που γίνεται «αισθητός» από την ακτίνα διαμορφώνεται από την ίδια, αλλά και από τις υπόλοιπες συν-διαδιδόμενες ακτίνες.

Στο Κεφάλαιο 2 αναφερόμαστε ξανά στο φαινόμενο και στη μοντελοποίηση του σαν όρο μη-γραμμικής σύζευξης μεταξύ NLS εξισώσεων, η κάθε μία εκ των οποίων περιγράφει την εξέλιξη της περιβάλλουσας ενός εκ των πεδίων (παλμών). Οι παλμοί μπορεί να αλληλο-παγιδευτούν ή να περάσουν ο ένας μέσα από τον άλλο, οπότε το XPM να έχει διαρκή ή χρονικά πολύ μικρή επίδραση (σύγκρουση). Εδώ απλά παραθέτουμε την επίδραση στη φάση του παλμού, κατ' αντιστοιχία με το SPM. Έτσι όταν δύο πεδία καλύπτουν τον ίδιο χώρο, το συνολικό πεδίο μπορεί να γραφεί,

$$\bar{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [E_1 \exp(-i\omega_1 t) + E_2 \exp(-i\omega_2 t)] + c.c, \quad (1.57)$$

, όπου θεωρούμε και τα δύο πεδία πολωμένα κατά τη διεύθυνση «x». Η συνολική μεταβολή της φάσης λόγω και των δύο μη-γραμμικών φαινομένων για το πεδίο με κεντρική συχνότητα ω_1 γράφεται:

$$\phi_{NL} = (|E_1|^2 + 2|E_2|^2)n_2\kappa_0 z \quad (1.58)$$

Αντίστοιχη μεταβολή συμβαίνει και στη φάση του άλλου πεδίου. Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος οφείλεται στο SPM, ενώ ο δεύτερος στο XPM. Φαίνεται πως η επίδραση του XPM είναι διπλάσιας ισχύος, για παλμούς με την ίδια ένταση. Η συν-διάδοση επιφέρει περαιτέρω φασματική διαπλάτυνση, η οποία είναι και μη-συμμετρική [1]. Μεγαλύτερο όμως τεχνολογικό ενδιαφέρον έχουν οι συγκρούσεις τέτοιων παλμών, που όπως αναφέρεται και στο Κεφάλαιο 2 είναι πλήρως ελαστικές, χωρίς παραμένουσα επίδραση στη συχνότητα και ενέργεια των παλμών. Μια αρκετά καλή ανάλυση της επίδρασης του XPM στο φάσμα των παλμών μπορεί να βρεθεί στη [248]. Εδώ θα αρκεστούμε να αναφέρουμε ότι για δεδομένους παλμούς με διαφορετικής κεντρικής συχνότητας, καθώς ο ταχύτερος προσπερνά τον πιο αργό, η επίδραση του εμπρόσθιου τμήματος του πρώτου έχει ως αποτέλεσμα την ελάττωση της κεντρικής συχνότητας του δεύτερου, ενώ, η ουρά του πρώτου επιδρά αυξάνοντας τη συχνότητα του αργού παλμού. Το αντίθετο συμβαίνει στον πρώτο (γρήγορο παλμό). Έτσι, αν ο γρήγορος παλμός χρονικά μετατοπισμένος πάνω από δύο φορές το FWHM (full width at

half maximum-το εύρος στο 50% της μέγιστης έντασης) του ευρύτερου παλμού μπορεί να διαπεράσει τον αργό, έχουμε «πλήρη σύγκρουση» και η τελική μετατόπιση της κεντρικής συχνότητας θα είναι μηδενική και για τους δύο παλμούς. Το XPM προκαλεί επίσης φασματική διαπλάτυνση, ανάλογη με αυτή που προκαλεί το SPM.

Αλληλεπίδραση μέσω XPM υπάρχει και μεταξύ των συνιστωσών πεδίου που οδεύει σε διπλοθλαστικό μέσο.

Δ) Μη-γραμμική διπλοθλαστικότητα

Αυτά που ειπώθηκαν στη παράγραφο 1.4.1 αφορούν την πολύ καλά γνωστή γραμμική διπλοθλαστικότητα. Όταν όμως το πεδίο είναι αρκετά ισχυρό μπορεί να δημιουργήσει μη-γραμμική διπλοθλαστικότητα της οποίας το μέγεθος εξαρτάται από την ένταση του πεδίου.

Εν γένει, το ηλεκτρικό πεδίο ενός τυχαία πολωμένου οπτικού κύματος μπορεί να γραφεί,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} (\hat{x}E_x + \hat{y}E_y) \exp(-i\omega_0 t) + c.c \quad (1.59)$$

, όπου E_x και E_y είναι οι μιγαδικές συνιστώσες του πεδίου στις διευθύνσεις της πόλωσης. Η αξονική συνιστώσα E_z θεωρείται μικρή και την αγνοούμε.

Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία που καταλήγει στην απλή NLS μπορεί να βρεθεί η P_{NL} . Η επιδεκτικότητα τώρα, είναι τανυστής 4^{ης} τάξης με 81 στοιχεία, αλλά για ένα ισοτροπικό μέσο όπως το γυαλί πυριτίας μόνο τρία στοιχεία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και μπορεί να εκφραστεί μέσω αυτών, ως

$$\chi_{ijkl}^{(3)} = \chi_{xxyy}^{(3)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \chi_{xyxy}^{(3)} \delta_{ik} \delta_{jl} + \chi_{xyyx}^{(3)} \delta_{il} \delta_{jk} \quad (1.60)$$

Όπου δ είναι η συνάρτηση του Kronecker με $\delta_{ij}=1$ για $i=j$ και $\delta_{ij}=0$ για $i \neq j$. Έτσι το P_{NL}

μπορεί να γραφεί $\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} (\hat{x}P_x + \hat{y}P_y) \exp(-i\omega_0 t) + c.c$. με τα P_x και P_y να είναι,

$$P_i = \frac{3\epsilon_0}{4} \sum_j (\chi_{xxyy}^{(3)} E_i E_j E_j^* + \chi_{xyxy}^{(3)} E_j E_i E_j^* + \chi_{xyyx}^{(3)} E_j E_j E_i^*) \quad (1.61)$$

όπου i, j είναι x ή y [7]. Ακόμα, λόγω της περιστροφικής συμμετρίας του ισοτροπικού μέσου έχουμε $\chi_{xxyy}^{(3)} + \chi_{xyxy}^{(3)} + \chi_{xyyx}^{(3)} = \chi_{xxxx}^{(3)}$. Τα μεγέθη των τριών προσθετέων της τελευταίας σχέσης εξαρτώνται από τους φυσικούς μηχανισμούς που συνθέτουν το $\chi^{(3)}$. Καθώς για το γυαλί πυριτίας υπάρχει ένας κατά βάση κυρίαρχος μηχανισμός, τα μεγέθη τους είναι πολύ κοντινά και με καλή προσέγγιση μπορούμε να τα θεωρήσουμε ίσα [50]. Έτσι, οι συνιστώσες της πόλωσης, από τη σχέση (1.61) γίνονται

$$P_x = \frac{3\epsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[\left(|E_x|^2 + \frac{2}{3} |E_y|^2 \right) E_x + \frac{1}{3} (E_x^* E_y) E_y \right] \quad (1.62\alpha)$$

$$P_y = \frac{3\epsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[\left(|E_y|^2 + \frac{2}{3} |E_x|^2 \right) E_y + \frac{1}{3} (E_y^* E_x) E_x \right] \quad (1.62\beta)$$

Ο τελευταίος όρος στις παραπάνω εξισώσεις είναι υπεύθυνος για FWM, ένα εν γένει ανεπιθύμητο φαινόμενο στις τηλεπικοινωνίες, για το οποίο θα μιλήσουμε πάλι λίγο αργότερα. Από τις (1.62α και β), απαλείφοντας τους όρους του FWM, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η μη γραμμική «συμβολή» στην αλλαγή του δείκτη διάθλασης είναι

$$\Delta n_x = n_2 \left(|E_x|^2 + \frac{2}{3} |E_y|^2 \right) \text{ και } \Delta n_y = n_2 \left(|E_y|^2 + \frac{2}{3} |E_x|^2 \right) \quad (1.63)$$

Ο πρώτος όρος στα θροίσματα είναι υπεύθυνος για την αυτοδιαμόρφωση φάσης (SPM), ενώ ο δεύτερος για την λεγόμενη ετεροδιαμόρφωση φάσης (XPM) και λόγω της ύπαρξης του επιβάλλεται μη-γραμμική σύζευξη μεταξύ των συνιστωσών του πεδίου. Ακόμα, καθώς τα

Δn_x και Δn_y είναι εν γένει άνισα δημιουργούν μη-γραμμική διπλοθλαστικότητα, το μέγεθος της οποίας εξαρτάται από την ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

Ε) Σκέδαση Raman

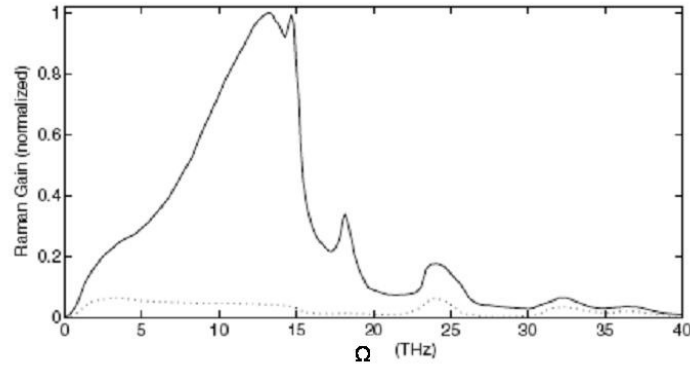
Σε μοριακό επίπεδο, η «σκέδαση Raman» περιγράφει την επίδραση οπτικού πεδίου στα μόρια του μέσου και τη μεταφορά μικρού ποσού της ισχύος του (περίπου ένα στα 10^6 φωτόνια) σε άλλο πεδίο χαμηλότερης συχνότητας. Πρόκειται λοιπόν για ανελαστική σκέδαση, σε αντίθεση με τη σκέδαση των περισσοτέρων από τα φωτόνια που είναι ελαστική (τύπου Rayleigh). Από την άποψη της Κβαντομηχανικής, ένα φωτόνιο διεγείρει το μόριο, ή το άτομο, και αυτό με τη σειρά του επανερχόμενο σε μια κατάσταση που δεν είναι η αρχική του εκπέμπει φωτόνιο που διαφέρει από το αρχικό σε συχνότητα (ενέργεια). Σε αντίθεση με τη σκέδαση Rayleigh, το φαινόμενο είναι μη-γραμμικό και αναφέρεται συχνά σε φαινόμενο Raman [54].

Παρατηρήθηκε ότι το φαινόμενο σχετίζεται με τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, ενώ εντείνεται για ακτινοβολία μεγάλης έντασης. Η προσπίπτουσα ακτινοβολία λειτουργεί σαν αντλία, η οποία μέσω του φαινομένου Raman δημιουργεί ακτινοβολία μικρότερης συχνότητας, τη λεγόμενη “Stokes”. Για προσπίπτουσα ακτινοβολία μεγάλης έντασης, η δευτερογενής ακτινοβολία μπορεί να γίνει αρκετά ισχυρή, παίρνοντας μεγάλο μέρος της αρχικής ενέργειας [55]. Καθώς η μελέτη στράφηκε στη πρόκληση του φαινομένου, αυτό ονομάστηκε εξαναγκασμένη σκέδαση Raman (stimulated Raman scattering-SRS) και με αυτό τον όρο χρησιμοποιείται και σήμερα στην Οπτική. Η βασική πιθανή χρήση του φαινομένου, για την οποία έχει γίνει εκτεταμένη έρευνα, είναι η δημιουργία ινών που δρουν σαν ενισχυτές, ενώ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στη δημιουργία ακτινοβολίας laser συγκεκριμένης συχνότητας [11].

Αν θεωρηθεί το απλό σχετικά πρόβλημα της διάδοσης συνεχούς ή σχεδόν συνεχούς κύματος (κάποιας ακτίνας), υψηλής έντασης σε γυαλί πυριτίας, η ένταση της Stokes ακτινοβολίας (I_s), μπορεί να δοθεί από τη παρακάτω σχέση,

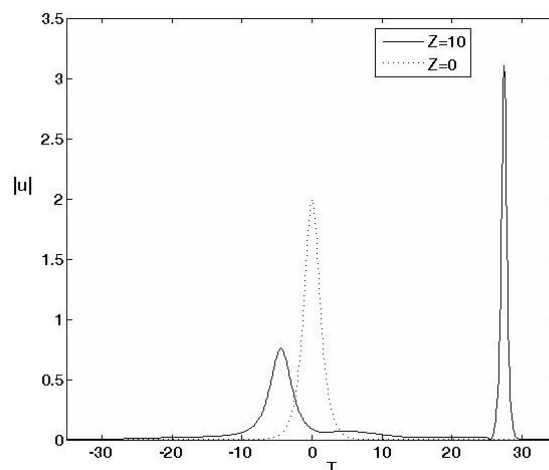
$$\frac{dI_s}{dz} = g_R I_p I_s \quad (1.64)$$

, όπου I_p είναι η ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας [7]. Το g_R ονομάζεται συντελεστής Raman. Μεγάλης σημασίας είναι η εξάρτηση αυτού του συντελεστή από τη φασματική διαφορά μεταξύ της «αντλίας» και της ακτινοβολίας Stokes. Ο συντελεστής εξαρτάται βέβαια και από το υλικό, όπως και από πιθανές προσμίξεις στο γυαλί, αλλά είναι η εξάρτηση του από τη συχνότητα που ενδιαφέρει. Στο σχήμα 1.13 φαίνεται το φάσμα του κέρδους Raman $g_R(\Omega)$, με $\Omega = \omega_p - \omega_s$, η φασματική διαφορά μεταξύ της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και αυτής που ενισχύεται (Stokes) μέσω του φαινομένου. Η καταγραφή έγινε για διάδοση ακτινοβολίας με $\lambda=1\mu m$ σε πυριτία, αλλά διατηρεί τη μορφή αυτή και για διαφορετικά μήκη κύματος, όπου απλά το g_R είναι αντιστρόφως ανάλογο το λ . Οι τιμές είναι κανονικοποιημένες στο $10^{-13} m/W$. Η μέγιστη μεταφορά ενέργειας γίνεται για $\Omega \approx 13.2 THz$, ενώ το φαινόμενο εκτείνεται σε μεγάλη περιοχή του φάσματος καθώς η πυριτία είναι άμορφο μη κρυσταλλικό υλικό και οι συχνότητες μοριακών ταλαντώσεων καλύπτουν ευρύ συνεχές φάσμα [56].



Σχήμα 1.13: Φάσμα του κέρδους Raman $g_R(\Omega)$ για γυαλί πυριτίας και για $\lambda=1\mu m$. Η διάστικτη γραμμή δείχνει το φάσμα για τη περίπτωση που τα πεδία της «αντλίας» και του Stokes είναι κάθετα πολωμένα (σχήμα από [57]).

Το SRS έχει και σαφή αρνητικά αποτελέσματα, ιδιαίτερα δε, στη διάδοση στενών και μεγάλης έντασης παλμών. Ουσιαστικά προκαλεί μετατόπιση ενέργειας εντός του ευρέους φάσματος του παλμού και τελικά τη φασματική του μετατόπιση. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ολίσθηση συχνότητας (self frequency shift-SFS). Το γενεσιουργό της αίτιο ονομάζεται και «ενδοπαλμική σκέδαση Raman» (intra pulse Raman scattering-IRS). Όπως θα δούμε και στο Κεφάλαιο 3, το SFS είναι τόσο ισχυρότερο, όσο το εύρος του παλμού γίνεται μικρότερο. Για τα σολιτόνια ανώτερης τάξης το φαινόμενο επιδρά ακόμα πιο δραματικά και συχνά οδηγεί σε διαχωρισμό του παλμού. Για λόγους ελέγχου του αριθμητικού μας κώδικα, που χρησιμοποιείται ευρέως στη συνέχεια, λύσαμε την εξίσωση (3.37α) με $\sigma=0.01$ και χωρίς τους όρους σύζευξης, για αρχικό σολιτόνιο με $N=2$. Το αποτέλεσμα της επίδρασης του IRS φαίνεται στο σχήμα 1.14 και ομοιάζει απόλυτα με γνωστά θεωρητικά αποτελέσματα [1]. Η μετατόπιση ενέργειας, από τις υψηλότερες συχνότητες του παλμού στις χαμηλότερες, έχει σαν αποτέλεσμα το διαχωρισμό του σε έναν ακόμα πιο στενό με μεγάλο πλάτος (Stokes) και σε έναν με μικρό πλάτος που υποκύπτει στη διασπορά. Ο στενός παλμός φαίνεται να μένει «πίσω» καθώς έχει χαμηλότερη κεντρική συχνότητα του αρχικού.



Σχήμα 1.14: Διαχωρισμός σολιτονικού παλμού ανώτερης τάξης ($N=2$) από την επίδραση του ενδοπαλμικού φαινομένου Raman (IRS), όταν $\sigma=0.01$. Η εικόνα προέρχεται από αριθμητική επίλυση της (3.37α) χωρίς τους όρους σύζευξης.

ΣΤ) Κατάρρευση κύματος (wave collapse)

Η κυματική κατάρρευση είναι ένα από τα πλέον ενδιαφέροντα και εντυπωσιακά φαινόμενα στη μη-γραμμική οπτική και κυματική γενικότερα. Η ιδιάζουσα αυτή συμπεριφορά δεν είναι κάτι το περιορισμένο αφού εμφανίζεται σε συστήματα που αφορούν διάδοση σε πλάσμα, στην υδροδυναμική, στα συμπυκνώματα Bose-Einstein και βέβαια στη μη-γραμμική οπτική. Ο τελευταίος αυτός τομέας, λόγω της επιτυχίας της NLS να περιγράφει τα μη-γραμμικά φαινόμενα μέσω ενός σχετικά απλού μοντέλου, παραμένει ιδανικός για τη μελέτη του φαινομένου της κατάρρευσης, που είναι πολύ γενικότερο.

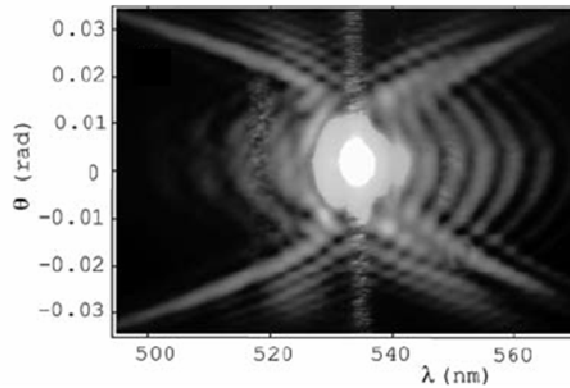
Όπως είναι κατανοητό, η μελέτη για το εν λόγω φαινόμενο ξεκίνησε λίγο μετά την ανακάλυψη του laser. Φάνηκε ότι μια ακτίνα φωτός με ισχύ μεγαλύτερη από κάποια κρίσιμη τιμή P_{cr} , μπορούσε να αυτοεστιάσει [58-60]. Όπως ήδη αναφέρθηκε, το αίτιο αυτού του φαινομένου είναι η μη-γραμμική επιδεκτικότητα, όπου στα οπτικά μέσα προκαλεί μεταβολή του δείκτη διάθλασης. Όταν η ισχύς $P > P_{cr}$ η αυτοεστίαση καταναλώνει τη γραμμική περίθλαση με αποτέλεσμα η ακτίνα να συνεχίζει να εστιάζει, φαινομενικά μέχρι τον απειρισμό της έντασης, δηλαδή του πλάτους του κύματος με παράλληλο μηδενισμό του εύρους. Κάποια στιγμή βέβαια η διαδικασία σταματάει λόγω ανάπτυξης άλλων φαινομένων, όπως ο σχηματισμός πλάσματος και οι μη-γραμμικές απώλειες. Η έντονη αυτοεστίαση δύναται να επιβάλει άνω όριο στην ισχύ των ακτίνων, έτσι για διάδοση σε γυαλί αυτό είναι $P \sim 10^6 W$, ενώ για τον αέρα είναι της τάξης $P \sim 10^{10} W$ [6].

Το φαινόμενο παρατηρείται συνήθως σε 2D και 3D παλμούς και ακτίνες και θα αναφερθούμε εκτενέστερα σε αυτό στα Κεφάλαια 4 και 5.

Z) Κωνική Εκπομπή

Το conical emission (CE) είναι ένα μη-γραμμικό φαινόμενο που εμφανίζεται όταν ακτίνα μεγάλης έντασης οδεύει σε πυκνό μέσο, του οποίου τα άτομα έχουν δύο ενεργειακές στάθμες. Παρατηρείται λοιπόν, ότι υπάρχει μια ακτινοβολία παρά τον άξονα διάδοσης, συνήθως (αλλά όχι πάντα) χαμηλότερης συχνότητας από αυτή της ακτίνας. Επιπλέον, η ακτίνα του κώνου εκπομπής της ακτινοβολίας εξαρτάται από το μήκος κύματος της. Από την εποχή της ανακάλυψής του, το 1970, έχουν διατυπωθεί πολλές διαφορετικές θεωρίες για τη προέλευση του, η οποία παραμένει ακόμη αντικείμενο έρευνας [(26)]. Ανάμεσα στις περισσότερες δημοφιλείς είναι η εξήγηση του σαν ένα συνδυασμό διάθλασης και FWM, σαν ακτινοβολία Cerenkov μέσω κάποιας κινούμενης πόλωσης που ίσως δημιουργείται από την ακτίνα στο μέσο, μέσω του φαινομένου Raman, και άλλες [61].

Ανάλογα με το είδος της διασποράς, το φαινόμενο εμφανίζεται με διαφορετικό τρόπο στο χώρο και το χρόνο. Για ανώμαλη διασπορά, η εκπεμπόμενη ακτινοβολία εμφανίζεται σε δακτυλίδια σταθερής έντασης, που εκτείνονται γύρω από την ακτίνα ή το παλμό. Για κανονική διασπορά δημιουργούνται κωνικές «ουρές» στο χωροχρονικό παλμό, δίνοντας στο προφίλ της έντασης ένα σχήμα σαν «X». Στη προκειμένη περίπτωση η κωνική εκπομπή, που ουσιαστικά είναι ενίσχυση κάποιων πλευρικών φασματικών ζωνών, σχετίζεται και με τα τελείως γραμμικά κύματα «X», για τα οποία θα αναφερθούμε διεξοδικότερα στο Κεφάλαιο 4. Ουσιαστικά, το φαινόμενο CE μπορεί να ειπωθεί σαν τη χωροχρονική διαμορφωτική αστάθεια, όπου για κανονική διασπορά ευνοεί την ενίσχυση πλευρικών φασματικών ζωνών που είναι μετατοπισμένες προς τα κάτω και προς τα πάνω σε σχέση με το γεννήτορα τους παλμό. Στο σχήμα 1.15 φαίνεται το χωροχρονικό φάσμα γκαουσιανού παλμού (με εύρος $T_{FWHM} = 200 fs$ και $X_{FWHM} = 130 \mu m$, $\lambda_0 = 527 nm$ και ενέργειας $E = 3 \mu J$) μετά τη διάδοση του σε 2cm νερού (κανονική διασπορά). Το φάσμα έχει μια εμφανή «X» μορφή.



Σχήμα 1.15: Φάσμα μακρινού πεδίου ενός χωροχρονικού παλμού ύστερα από διάδοση σε 2cm νερού. Πειραματικό αποτέλεσμα από το [188].

Η) Μίξη τεσσάρων φωτονίων (four wave mixing-FWM)

Μια άλλη συνηθισμένη ονομασία είναι βέβαια «μίξη τεσσάρων κυμάτων» και αφορά τη γένεση δύο φωτονίων συχνότητας ω_3 και ω_4 , από δύο που αλληλεπιδρούν αρχικά, με συχνότητες ω_1 και ω_2 , σύμφωνα με τη σχέση $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$ (διατήρηση της ενέργειας). Πρόκειται για ένα ακόμα μη-γραμμικό φαινόμενο, όπου όπως το SPM και XPM προέρχεται από την επιδεκτικότητα 3^{ης} τάξης και τη μη-γραμμική πόλωση που υφίσταται το μέσο σε σχέση με το προσπίπτον πεδίο. Το FWM έχει μελετηθεί εκτενέστατα λόγω της δυνατής χρήσης του για δημιουργία κυμάτων διαφορετικής συχνότητας (βλέπε [1] και σχετικές αναφορές). Δυστυχώς το φαινόμενο δρα υποβαθμιστικά για την ομαλή διάδοση σολιτονικών παλμών διαφορετικής συχνότητας, όπως σε σύστημα με φασματική πολυπλεξία (WDM). Κατά τη σύγκρουση των παλμών δύο διαφορετικών καναλιών συχνότητας ω_1 και ω_2 , μέρος της ενέργειας τους διαφεύγει και ενισχύει τις συχνότητες ω_3 και ω_4 . Αν δεν υπάρχουν κανάλια με τις τελευταίες, η δράση του FWM ενισχύει το θόρυβο, οπότε σε κάθε περίπτωση υποβαθμίζει το τηλεπικοινωνιακό σύστημα.

Καθώς το φαινόμενο αυτό δεν αποτελεί αντικείμενο της παρούσας διατριβής δε θα επεκταθούμε πολύ, αλλά πρέπει να αναφερθεί ότι για να έχει σημαντική επίδραση η διαφορά φάσης μεταξύ των τεσσάρων κυμάτων οφείλει να είναι πολύ μικρή ή και μηδέν. Αυτό ονομάζεται «προσαρμογή φάσης» (phase matching) και στη περίπτωση σύγκρουσης δύο παλμών είναι δύσκολο να ικανοποιείται. Όταν όμως έχουμε ταυτόχρονη διάδοση πολλών καναλιών, διαφορετικής συχνότητας, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των παλμών είναι πολύ συχνές και οι απώλειες λόγω του FWM, έστω και μικρές, προστίθενται διαρκώς. Έχουν προταθεί διάφορες λύσεις για το πρόβλημα που επιβάλλεται σε πιθανό τηλεπικοινωνιακό δίκτυο. Μεταξύ αυτών είναι η ηθελημένη επιλογή ανόμοιας φασματικής απόστασης μεταξύ γειτονικών καναλιών και η διαχείριση διασποράς. Αποδεικνύεται ότι η επίδραση του FWM είναι αντιστρόφως ανάλογη της τοπικής τιμής της διασποράς. Χρησιμοποιώντας διαχείριση διασποράς, μπορεί κανείς να επιβάλει μεγάλες τιμές τοπικά, ενώ ο μέσος όρος της να μένει μικρός. Έτσι η επίδραση του FWM εκμηδενίζεται (βλέπε [5, 11] και τις αναφορές αυτών).

Θ) Gordon Haus Jitter

Το “jitter” σημαίνει τρέμουλο, ή τρόμος και είχε από το 1986, οπότε και έγινε η αναλυτική περιγραφή του, κατά κάποιο τρόπο τρομοκρατήσει τη κοινότητα όσων ασχολούνταν με σολιτονικές τηλεπικοινωνίες [62]. Προκαλείται από τους ενισχυτές του οπτικού δικτύου, που είναι απαραίτητοι σε σύστημα WDM για να αντιμετωπίζουν τις απώλειες. Αν και οι παράγοντες των απωλειών και της ενίσχυσης δεν συμπεριλαμβάνονται στη παρούσα διατριβή, (για λόγους που εξηγούνται στα επί μέρους Κεφάλαια), αξίζει να αναφερθούμε στο

χρονικό τρέμουλο που επιβάλλεται στους σολιτονικούς παλμούς για την αναστάτωση που προκάλεσε, αλλά και για τη προτεινόμενη λύση που το περιορίζει.

Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες, η χρήση των ενισχυτών αναπληρώνει την ενέργεια του σολιτονίου, αλλά και αυξάνει το θόρυβο μέσω της ενισχυμένης αυθόρμητης εκπομπής (amplified spontaneous emission-ASE). Το αποτέλεσμα αυτής είναι η μικρή και τυχαία αλλαγή των παραμέτρων του σολιτονίου, δηλαδή του πλάτους, της συχνότητας και της φάσης. Η παρουσία της διασποράς μετατρέπει τις μεταβολές της συχνότητας σε αντίστοιχες χρονικές, μετατοπίζοντας το παλμό από το χρονικό του παράθυρο. Η μετατόπιση είναι βέβαια μικρή, αλλά η συνεχής επίδραση των ενισχυτών επιφέρει σημαντικές μετατοπίσεις σε κάθε παλμό, οι οποίες μάλιστα είναι τελείως ανόμοιες. Από τις λύσεις που έχουν προταθεί, αυτή με τη μεγαλύτερη υποστήριξη είναι η χρήση φίλτρων, που θα επαναφέρουν τα σολιτόνια στην αρχική τους συχνότητα [11]. Ευτυχώς όμως, η χρήση της διαχείρισης διασποράς και μόνο μπορεί να περιορίσει σε μεγάλο βαθμό αυτές τις χρονικές μετατοπίσεις. Περισσότερα για αυτό αναφέρονται στο Κεφάλαιο 2.

Υπάρχουν ακόμα περισσότερα φαινόμενα τα οποία οφείλονται στη μη-γραμμική απόκριση του μέσου, όπως οι απώλειες (two-photon absorption), η αυτό-διαμόρφωση απότομων άκρων (“self-steepening”), η σκέδαση Brillouin, η δημιουργία πλάσματος κατά τη διάδοση ακτίνας μεγάλης έντασης και άλλα. Αυτά είναι φαινόμενα ανώτερης τάξης και υπό ορισμένες συνθήκες δεν επηρεάζουν ιδιαίτερα τη διάδοση χρονικών ή χωροχρονικών παλμών. Δεν συμπεριλαμβάνονται στα μοντέλα που χρησιμοποιούνται στη παρούσα διατριβή, αλλά κάποια από αυτά αναφέρονται ξανά, μαζί με τους λόγους της παράλειψής τους.

1.5 Μέθοδοι

Παρακάτω παραθέτουμε μερικές από τις πλέον διαδεδομένες αναλυτικές και αριθμητικές μεθόδους στη μελέτη της NLS. Κάποιες από αυτές χρησιμοποιούνται στη παρούσα εργασία, ενώ άλλες όχι, αλλά συμπεριλαμβάνονται καθώς είναι σημαντικές.

1.5.1 Αναλυτικές

A) Μέθοδος αντίστροφης σκέδασης (Inverse scattering transform method-IST)

Στη συγκεκριμένη μέθοδο οφείλεται η εξεύρεση των περιφημων σολιτονικών λύσεων της μονοδιάστατης NLS και θα παραθέσουμε μια πολύ απλοϊκή περιγραφή, λόγω της σημασίας της, παρόλο που δε τη χρησιμοποιήσαμε. Η IST χρησιμοποιείται για την εξεύρεση λύσεων σε μη-γραμμικά προβλήματα, όταν περιγράφονται από πλήρως ολοκληρώσιμες μερικές διαφορικές. Στα γραμμικά προβλήματα, η συνηθέστερη μέθοδος είναι η χρήση μετασχηματισμού Fourier για να μετατραπεί η λύση της εξίσωσης σε πρόβλημα εύρεσης ιδιοτιμών. Έτσι, διερευνώντας τη διάδοση κύματος, για παράδειγμα με αρχική μορφή $u(Z=0,T)$, μπορεί κανείς να βρει συνεχές φάσμα ιδιοτιμών, που αντιστοιχεί σε επίπεδα κύματα διαδιδόμενα σε ομογενές μέσο, αλλά και διακριτές ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στους χωρικά εντοπισμένους ρυθμούς που εμφανίζονται σε ανομοιογενή μέσα.

Σε ένα μη-γραμμικό πρόβλημα, η μεθόδευση της IST είναι να το μετατρέψει σε γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών, όπου το αρχικό πεδίο $u(Z=0,T)$ θα παίζει ρόλο δημιουργίας «ενεργού δυναμικού». Όμως καθώς το πεδίο εξελίσσεται κατά τη διάδοση, θα αλλάζουν παράλληλα και οι ιδιοτιμές. Έτσι προσπαθεί κανείς να βρει ιδιοτιμές που παραμένουν αναλλοίωτες καθώς το ενεργό δυναμικό μεταβάλλεται.

Συνοπτικά, τα βήματα της IST είναι τα ακόλουθα. Για δεδομένο αρχικό πεδίο, βρίσκεται βοηθητική ιδιοσυνάρτηση $\Psi(T, \lambda)$, όπου λ οι ιδιοτιμές. Τα δεδομένα του προβλήματος «σκέδασης» περιλαμβάνουν τα πλάτη του εκπεμπόμενου και ανακλώμενου κύματος, $a(\lambda)$ και $b(\lambda)$ αντίστοιχα, τις διακριτές ιδιοτιμές $\{\lambda_n\}$ και τους συντελεστές των αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων, b_n . Μέσω του μετασχηματισμού Fourier βρίσκεται η εξέλιξη αυτών με το z και τελικά, από αυτά, κατασκευάζεται η μορφή του πεδίου $u(Z, T)$. Κάθε μία από τις διακριτές ιδιοτιμές δίνει εντοπισμένη λύση, η οποία αντιστοιχεί σε σολιτόνιο. Καθώς οι ιδιοτιμές που ενδιαφέρουν είναι ανεξάρτητες του z , οι σολιτονικές λύσεις διατηρούν το σχήμα τους [37, 41, 42]. Για να δώσουμε ένα παράδειγμα, η βασική σολιτονική λύση της NLS, στη μορφή της (1.29), για εστιάζουσα μη-γραμμικότητα βρέθηκε να είναι

$$u(Z, T) = n \operatorname{sech} [n(T - T_0 - \delta Z)] \exp [i\delta T + i(n^2 - \delta^2)Z/2 + i\phi] \quad (1.65)$$

, όπου δ η «ταχύτητα» του σολιτονίου που όμως αντιπροσωπεύει μετατόπιση από τη κεντρική συχνότητα. Ακόμα το T_0 είναι κάποια χρονική μετατόπιση και το ϕ η φάση του. Μέσω γαλιλαϊκού μετασχηματισμού στο σύστημα αναφοράς του εν λόγω σολιτονίου παίρνουμε τη μορφή της (1.30).

Για τη λύση της NLS με όρους ανώτερης τάξης έχει αναπτυχθεί η διαταρακτική μέθοδος αντίστροφης σκέδασης που «ρίχνει» τη μερική διαφορική σε σύστημα συνήθων διαφορικών που περιγράφουν τις παραμέτρους του παλμού. Ούτε αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται στην διατριβή αυτή και καθώς είναι ιδιαίτερα πεπλεγμένη δε δίνονται περαιτέρω λεπτομέρειες (βλέπε [2] για περίληψη).

B) Μεταβολική μέθοδος

Λέγεται και Λαγκρανζιανή μέθοδος, είναι διαταρακτική και χρησιμοποιείται πολύ συχνά σε προβλήματα διάδοσης στη μη-γραμμική οπτική, από τη πρώτη της εφαρμογή το 1979 [120]. Είναι αδιαβατική μέθοδος, που σημαίνει ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν θεωρούμε πως οι διαταραχή στην NLS είναι αρκετά μικρή ώστε να μην επηρεάζει τη μορφή του πεδίου (παλμού), αλλά μόνο τα χαρακτηριστικά του, έτσι ώστε να ισχύει (πλάτος)×(εύρος)=σταθερό. Περιλαμβάνει την υιοθεσία της αρχικής μορφής του παλμού (ansatz), η οποία και πρέπει να διατηρείται, και υπολογίζοντας τη Λαγκρανζιανή του προβλήματος, μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange, καταλήγει σε σύστημα συνήθων διαφορικών για τα χαρακτηριστικά του παλμού. Η αδιατάρακτη εξίσωση θα πρέπει να έχει μία καλά ορισμένη λύση, όπως το σολιτόνιο, αλλά δεν είναι απαραίτητο να είναι πλήρως ολοκληρώσιμη. Επίσης δεν απαιτείται το ansatz να είναι και η λύση της αδιατάρακτης. Περισσότερα θα ειπωθούν στο Κεφάλαιο 2, όπου και χρησιμοποιείται.

Υπάρχουν και άλλες παρόμοιες μέθοδοι, όπως η Αδιαβατική, η μέθοδος των ροπών και η εύρεση συνήθων διαφορικών μέσω Χαμιλτονιανής, αντί Λαγκρανζιανής ανάλυσης, αλλά δεν είναι τόσο δημοφιλείς [2, 5].

Γ) Άμεση μέθοδος διαταραχών

Η μέθοδος αυτή έχει πιο περίπλοκο φορμαλισμό από τη προηγούμενη και απαιτεί τη γνώση και χρήση κάποιας λύσης της αδιατάρακτης εξίσωσης. Έχει όμως το πλεονέκτημα ότι μπορεί να περιγράψει μη-διατηρητικές διαταραχές ενώ μπορεί να δώσει και διορθώσεις στο αρχικό σχήμα του παλμού, εφόσον υπόκειται στις διαταραχές, όπως φαινόμενα ανώτερης τάξης.

Η μέθοδος γραμμικοποιεί την εξίσωση, γύρω από τη λύση της αδιατάρακτης, σε κλιμακούμενες τάξεις διάδοσης. Έτσι στη μηδενική τάξη έχουμε την αδιατάρακτη εξίσωση με τη γνωστή λύση (u^0) και σε πρώτη τάξη μια γραμμική εξίσωση, όπου λύνεται σε πρόβλημα ιδιοτιμών, ώστε να κατασκευαστεί τελικά η u^1 από τις ιδιοσυναρτήσεις. Επειδή κάποιοι όροι απειρίζονται, απαιτείται ο μηδενισμός των συντελεστών τους. Από το μηδενισμό τους προκύπτουν συνήθεις διαφορικές που περιγράφουν τη μεταβολή των

παραμέτρων του παλμού. Η μέθοδος μπορεί να δώσει και τη διόρθωση u^1 και να χρησιμοποιηθεί εκ νέου για τον υπολογισμό της δεύτερης τάξης u^2 . Στο Κεφάλαιο 3 παρατίθεται μια φορμαλιστική σύνοψη της μεθόδου.

Η διαδικασία ομοιάζει με τη διαταρακτική μέθοδο αντίστροφης σκέδασης, με την οποία έχει και τις ίδιες συνήθειες διαφορικές σαν αποτέλεσμα. Οι ODEs περιλαμβάνουν ολοκληρώματα που είναι συνήθως δύσκολο να υπολογιστούν αναλυτικά. Περισσότερα για αυτό θα δούμε στο Κεφάλαιο 3.

1.5.2 Αριθμητικές μέθοδοι και προγράμματα

A) Μέθοδος χωριζόμενου βήματος (split step Fourier method)

Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι και η πλέον συνήθης στην επίλυση της NLS, μαζί με μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων, όπου όμως δε χρησιμοποιήσαμε, οπότε και δε θα αναφερθούμε. Η “split-step” είναι μία ψευδο-φασματική μέθοδος, που επιλύει τη μερική διαφορική μεταφέροντάς τη στο χώρο των συχνοτήτων. Εφαρμόζεται σε μεγάλη ποικιλία προβλημάτων της μη-γραμμικής οπτικής, όπως διάδοση στην ατμόσφαιρα, οπτικούς συζεύκτες, ίνες βαθμωτού δείκτη διάθλασης και σε πιο συνηθισμένα προβλήματα όπως η διάδοση παλμών σε μονότροπες ίνες και CW ακτίνων σε επίπεδο κυματοδηγό και ελεύθερο μέσο. Στη τελευταία περίπτωση προβλημάτων, την αναφέρουν και σαν “beam propagation method”. Καθώς πρόκειται για γνωστή αριθμητική μέθοδο δε θα αναφέρουμε πολλές λεπτομέρειες. Η περιγραφή της βρίσκεται σε αρκετά κλασικά βιβλία μη-γραμμικής οπτικής [1]. Ο κώδικας που αναπτύξαμε για την επίλυση της NLS, των συζευγμένων NLS και αυτής με όρους ανώτερης τάξης βρίσκεται στο Appendix A.

Απλά αναφέρουμε ότι η μέθοδος απαιτεί τον διαχωρισμό της εξίσωσης σε γραμμικούς και μη-γραμμικούς όρους. Η απόσταση διάδοσης χωρίζεται σε L βήματα εύρους dz . Διαχωρίζουμε τους όρους της εξίσωσης σε γραμμικούς και μη-γραμμικούς που ανήκουν σε αντίστοιχο τελεστή. Αρχικά χρησιμοποιούμε μόνο το γραμμικό τελεστή για να βρούμε την εξέλιξη του παλμού στο χώρο Fourier, μετά από $dz/2$. Έχοντας αυτό το αποτέλεσμα επιβάλλουμε το μη-γραμμικό τελεστή για διάδοση κατά ένα ολόκληρο βήμα dz . Τέλος, χρησιμοποιούμε το προηγούμενο αποτέλεσμα επιβάλλοντας πάλι το γραμμικό τελεστή για διάδοση ξανά κατά $dz/2$. Τα σφάλματα από τη μέθοδο είναι ανάλογα του dz^3 (βλέπε [1] και [72]).

Ο κώδικας έχει καλή ακρίβεια και για βήμα της τάξης 10^{-4} κρατά σταθερές όλες τις διατηρήσιμες ποσότητες.

B) Προγράμματα επίλυσης συστήματος ODEs

Αναπτύξαμε δύο τέτοια προγράμματα, καθώς οι διαταρακτικές μέθοδοι που εφαρμόζονται στα Κεφάλαια 2 και 3 ξεκινούν από μερικές διαφορικές εξισώσεις και καταλήγουν σε συστήματα συνήθων. Και τα δύο προγράμματα χρησιμοποιούν μέθοδο Runge-Kutta και βρίσκονται στο Appendix A. Το πρώτο είναι ένα πρόγραμμα σε MATLAB και το δεύτερο σε C. Το τελευταίο βασίστηκε σε παλαιότερο πρόγραμμα αρχικά κατασκευασμένο από το μακαρίτη καθηγητή Φυσικής Χρόνη Πολυμίλη και μεταποιημένο από τον υπεύθυνο καθηγητή της παρούσα διατριβής, Κυριάκο Χιτζανίδη. Χρησιμοποιήθηκε λόγω της δυνατότητας του να παράγει τομές Poincaré, που είναι απαραίτητες στο Κεφάλαιο 2.

1.6 Σύνοψη της Εργασίας

Πέραν του 1^{ου} Κεφαλαίου, η εργασία αποτελείται από τέσσερα Κεφάλαια στα οποία περιγράφονται οι επί μέρους ερευνητικές δραστηριότητες της διατριβής και δίνονται αποτελέσματα, συν ένα ακόμα μικρό Κεφάλαιο, όπου συνοψίζονται συμπεράσματα και προτείνονται μελλοντικές προεκτάσεις. Όλες οι ερευνητικές δραστηριότητες αφορούν προβλήματα αλληλεπίδρασης χρονικών και χωροχρονικών μη-γραμμικών παλμών, είτε μεταξύ τους, είτε με κάποιο συνεχές επίπεδο κύμα, που συχνά για λόγους συντομίας αναφέρεται σαν επίπεδο κύμα ή απλά σαν CW. Επίσης, όλες οι δραστηριότητες αφορούν την επίλυση κάποιας μορφής της NLS, διαταραγμένης ή όχι. Όμως, δεν αφορούν ένα μοναδικό και σαφώς συγκεκριμένο πρόβλημα, ούτε τα Κεφάλαια τους είναι συνέχεια το ένα του άλλου, εκτός από το 5^ο, που μπορεί να θεωρηθεί επέκταση του 4^{ου}. Το συνδεδειγμένο τους στοιχείο είναι ότι αφορούν προβλήματα μη-γραμμικής σύζευξης και γενικότερα αλληλεπίδρασης παλμών. Τα Κεφάλαια 1 και 2 αφορούν τη συν-διάδοση χρονικών παλμών σε οπτική ίνα, και τα Κεφάλαια 4 και 5 τη διάδοση και αλληλεπίδραση χωροχρονικών παλμών.

Συνοπτικά, στο Κεφάλαιο 2 μελετώνται δύο περιπτώσεις ασύμφωνης (XPM) αλληλεπίδρασης. Η πρώτη περίπτωση, και περισσότερο εκτεταμένη, αφορά τη διάδοση δύο κάθετα πολωμένων ρυθμών του κυματοπακέτου, όταν η ίνα χαρακτηρίζεται από ισχυρή διπλοθλαστικότητα, αλλά και περιοδική μεταβολή της διασποράς. Η δεύτερη αφορά συγκρούσεις παλμών διαφορετικών καναλιών σε ίνα με ισχυρή διαχείριση διασποράς. Το αρχικό μοντέλο είναι δύο NLS συζευγμένες μέσω του όρου XPM. Χρησιμοποιούμε τη Μεταβολική μέθοδο και καταλήγουμε, ανάλογα με τη περίπτωση, σε σύστημα με τέσσερις έως και οκτώ συνήθεις διαφορικές. Καθώς στη περίπτωση της συμπίεσης σε διπλοθλαστική ίνα, το σύστημα που καταλήγουμε έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας, χρησιμοποιούμε τις τομές Poincaré για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε την εξέλιξη του συστήματος. Μέσω σύγκρισης των αποτελεσμάτων με απευθείας αριθμητική επίλυση αποδεικνύεται ότι υπάρχουν ορισμένες περιοχές τιμών της περιόδου και της έντασης της διασποράς, όπως και των αρχικών συνθηκών των παλμών, όπου η Μεταβολική μέθοδος επιτυγχάνει να περιγράψει την εξέλιξη του συστήματος, ενώ για άλλες τιμές αποτυγχάνει.

Στο 3^ο Κεφάλαιο ασχολούμαστε πάλι με τις συγκρούσεις σολιτονικών παλμών διαφορετικής συχνότητας, οι οποίοι όμως είναι πολύ στενοί με εύρος τάξης λίγων εκατοντάδων femtoseconds. Εξαιτίας αυτού, η διάδοση τους γίνεται υπό την επίδραση των φαινομένων ανώτερης τάξης, του Raman και της διασποράς 3^{ης} τάξης. Το φαινόμενο Raman πέρα από την ολίσθηση συχνότητας σε κάθε παλμό χωριστά, μεταφέρει ενέργεια από τους παλμούς υψηλότερης συχνότητας προς αυτούς με χαμηλότερη. Σαν αποτέλεσμα το μοντέλο των συζευγμένων NLS περιλαμβάνει αρκετούς διαταρακτικούς όρους. Το πρόβλημα προσεγγίζεται με την άμεση μέθοδο διαταραχών. Επειδή οι εξισώσεις στις οποίες καταλήγουμε περιλαμβάνουν ολοκληρώματα που δεν έχουν αναλυτική έκφραση, τα αντικαθιστούμε με προσεγγιστικές εκφράσεις. Η σύγκριση με την αριθμητική επίλυση δείχνει καλή συμφωνία. Επειδή η ολίσθηση συχνότητας επιφέρει και χρονική μετατόπιση, μελετάται η δυνατότητα εξισορρόπησης της τελευταίας από αντίθετες μετατοπίσεις λόγω των σολιτονικών συγκρούσεων.

Το 4^ο Κεφάλαιο διαφέρει από τα δύο προηγούμενα καθώς ασχολούμαστε πλέον με χωροχρονικούς παλμούς (2+1)D. Μελετάται η δυνατότητα δημιουργίας και διάδοσης μη-γραμμικού κυματοπακέτου «Τύπου-X», μέσω της αλληλεπίδρασης δισδιάστατου γκαουσιανού παλμού με επίπεδο κύμα, παρουσία φαινομένου Kerr, περίθλασης και κανονικής διασποράς. Σε αντίθεση με τα προηγούμενα, η αλληλεπίδραση είναι σύμφωνη, ενώ η μελέτη είναι μόνο αριθμητική. Παρόλα αυτά χρησιμοποιώντας ποιοτικές παρατηρήσεις που αφορούν την επίδραση των εμπλεκόμενων φαινομένων μπορούμε να σκιαγραφήσουμε περιοχές αρχικών τιμών που ευνοούν την εμφάνιση τέτοιων κυματοπακέτων και με αυτό το

τρόπο να καθοδηγήσουμε την αριθμητική μελέτη. Αποδεικνύεται ότι η διαφορά φάσης μεταξύ παλμού και CW είναι καταλυτικής σημασίας για την εξέλιξη του.

Στο 5^ο Κεφάλαιο χρησιμοποιούμε κάποια από τα συμπεράσματα του προηγούμενου για να μελετήσουμε αριθμητικά τη σύμφωνη αλληλεπίδραση γκαουσιανών κυματοπακέτων, ξανά παρουσία CW. Ανάλογα με την αρχική τους εγκάρσια μετατόπιση, διαφορά φάσης και βέβαια ενέργεια, οι παλμοί δύνανται να εξελιχθούν αυτόνομα, να υποκύψουν γρήγορα στη διασπορά, ή να συσσωματωθούν δημιουργώντας ένα νέο κυματοπακέτο το οποίο δύναται να εστιάσει εκ νέου, ή να διαχωριστεί σε δύο διακριτά κυματοπακέτα χρονικά μετατοπισμένα.

Το τελευταίο, 6^ο Κεφάλαιο, χρησιμοποιείται για να συγκεντρωθούν τα συμπεράσματα της εργασίας, αλλά και να προτείνουμε δυνατές επεκτάσεις. Στο τέλος του εντύπου υπάρχουν τα Appendix, όπου παραθέτονται οι κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν, ολοκληρώματα για τα Κεφάλαια 2 και 3, οι αγγλικές συντομογραφίες καθώς και μια αναφορά σε μεθόδους που δοκιμάσαμε, αλλά δεν ευδοκίμησαν.

Να σημειώσουμε ακόμα ότι, καθώς το βασικό μοντέλο είναι η NLS και ασχολούμαστε με τη περιβάλλουσα του παλμού, ή της ακτίνας, χρησιμοποιούμε κατά τόπους διάφορες ονομασίες για αυτά, συνήθεις στη βιβλιογραφία. Έτσι οι παλμοί μπορεί να αναφέρονται σαν λοβοί, στη περίπτωση που προηγείται αυτοεστίαση σε νημάτια, ενώ συχνά σαν κυματοπακέτα. Σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιούμε τη προσέγγιση της «αργά μεταβαλλόμενης περιβάλλουσας» που καταλήγει στην NLS, όπως επίσης και τη παραξονική προσέγγιση που αναφέραμε παραπάνω. Η εργασία είναι χωρισμένη σε Κεφάλαια (π.χ. 1^ο), κεφάλαια (π.χ. 1.1) και παραγράφους (π.χ. 1.1.1). Τα σχήματα αναφέρονται ως «σχήμα» ή «Σχ.» και οι τύποι σαν «σχέση», ή τίποτα και απλώς δίνεται το νούμερο της σε παρένθεση.

Κεφάλαιο 2

Δύο προβλήματα αλληλεπίδρασης μέσω ετεροδιαμόρφωσης φάσης παρουσία περιοδικά μεταβαλλόμενης διασποράς

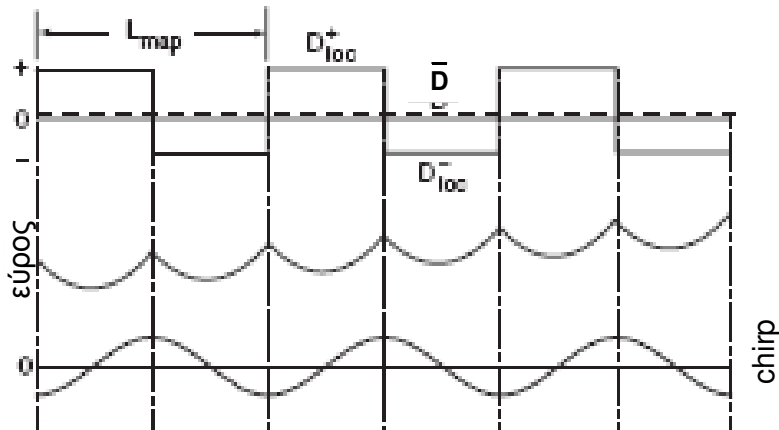
Στο παρόν Κεφάλαιο ασχολούμαστε με τη συν-διάδοση μη-γραμμικών χρονικών παλμών, ή γενικότερα κυματοπακέτων σε γραμμή μεταφορά μεταβαλλόμενης διασποράς. Ασχολούμαστε με δύο προβλήματα, όπου και τα δύο μοντελοποιούνται με τις συζευγμένες NLS μέσω όρων εταιροδιαμόρφωσης φάσης (XPM). Το πρώτο πρόβλημα, για το οποίο αφιερώνεται και η μεγαλύτερη έκταση, αφορά τη διάδοση παλμού όπου λόγω πόλωσης αποτελείται από δύο συνιστώσες με διαφορετικές ταχύτητες ομάδος, λόγω ισχυρής διπλοθλαστικότητας. Εξετάζουμε τις συνθήκες εκείνες της μεταβολής της διασποράς, που δύνανται να διαχωρίσουν τον παλμό στις συνιστώσες του και να τον καταστρέψουν. Το δεύτερο πρόβλημα, αφορά την αλληλεπίδραση παλμών διαφορετικού μήκους κύματος, κάτι που συμβαίνει κατά τη φασματική πολυπλεξία. Η κύρια μέθοδος μελέτης μας είναι η μεταβολική μέθοδος. Είναι αναλυτική και μετατρέπει το πρόβλημα των συζευγμένων μερικών διαφορικών (NLS) σε πρόβλημα επίλυσης συστήματος συνήθων διαφορικών. Στοιχεία δυναμικής ανάλυσης χρησιμοποιούνται για τη μελέτη του συστήματος.

2.1 Διαχείριση Διασποράς και Σολιτόνια

Κατ' αρχάς Διαχείριση Διασποράς (Dispersion Management-DM), έχουμε όταν εναλλάσσεται η τιμή της διασποράς κατά μήκος της γραμμής διάδοσης με συγκεκριμένο τρόπο. Ο συνηθέστερος τρόπος έγκειται στην περιοδική εναλλαγή δύο τμημάτων μεγαλύτερης και μικρότερης διασποράς, ή ακόμα και διαφορετικού πρόσημου (ομαλής και ανώμαλης), έτσι ώστε ο μέσος όρος τους \bar{D} να έχει τιμή συνήθως μικρή και επίσης συνήθως αρκετά μικρότερη από τις απόλυτες τιμές της διασποράς στα επί μέρους τμήματα. Τα τμήματα δεν είναι απαραίτητο να έχουν ίδιο μήκος, έτσι αν τα μήκη τους είναι L_1 και L_2 με τιμές διασποράς D^+ και D^- (ανώμαλης και ομαλής), τότε θα ισχύει

$$D^+L_1 + D^-L_2 = \bar{D}L_{map}, \quad (2.1)$$

όπου L_{map} το συνολικό μήκος της περιόδου διαχείρισης. Στο σχήμα 2.1 δίνεται ένα παράδειγμα μιας τέτοιας διάταξης όπου όμως δεν έχει συμπεριληφθεί η μη-γραμμικότητα, οπότε λόγω της μη μηδενικής μέσης διασποράς ο παλμός μοιραία πλαταίνει.



Σχήμα 2.1: Παράδειγμα διάταξης Διαχείρισης Διασποράς. Στο πάνω μέρος φαίνονται οι εναλλασσόμενες τιμές διασποράς ενώ στη μέση και κάτω φαίνεται η εξέλιξη του εύρους και του chirp (τερέτισμα) του παλμού [5].

Η ιδέα της περιοδικής εναλλαγής τμημάτων ίνας με διαφορετική διασπορά είναι λοιπόν παλαιότερη από αυτή ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος που βασίζεται σε μη-γραμμικούς παλμούς. Η Διαχείριση Διασποράς σε συνδυασμό με παλμούς χαμηλής ισχύος («γραμμικούς») προτάθηκε πρώτη φορά το 1980 ([85]) για διάδοση «μη επιστροφής στο μηδέν» (NRZ), αλλά βέβαια μπορεί να εφαρμοστεί και για διάδοση «επιστροφής στο μηδέν» (RZ) με σκοπό την επίτευξη WDM [86, 87]. Το πλεονέκτημα του DM είναι οι τοπικά μεγάλες τιμές της διασποράς που εξαλείφουν τη «μίξη τεσσάρων φωτονίων» (FWM) [5]. Όμως, οι παλμοί υπόκεινται σε διαπλάτυνση λόγω της \bar{D} , με αποτέλεσμα να έχουν σημαντική αλληλοεπικάλυψη για μεγάλο μήκος διάδοσης και έτσι υπόκεινται και σε μη-γραμμικά ενδοκαναλικά και διακαναλικά φαινόμενα.

Όμως μπορούμε πολύ εύκολα να βάλουμε τη μη-γραμμικότητα στο παιχνίδι, μέσω του φαινομένου Kerr και του SPM, απλώς χρησιμοποιώντας παλμούς μεγαλύτερης ισχύος. Ενώ ισχύει ότι είχαμε δει στο Κεφάλαιο 1, όπου η μετατόπιση φάσης λόγω SPM μπορεί να καταργήσει αυτή που επιβάλλει η διασπορά, εδώ αρκεί να καταργηθεί η μετατόπιση που επιβάλλει η \bar{D} . Η διαφορά είναι ότι οι μεταβολές της φάσης, (αλλά και άλλων παραμέτρων του παλμού) είναι ιδιαίτερα μεγαλύτερες κατά μήκος της Περιόδου Διασποράς, ενώ μηδενίζονται βέβαια εκεί που μηδενίζεται το chirp. Το αποτέλεσμα αυτής της ισορροπίας είναι και πάλι η δυνατότητα δημιουργίας παλμών που δεν καταστρέφονται από τη διασπορά

και ονομάζονται, «Σολιτόνια Διαχείρισης Διασποράς» (DM-solitons). Καθώς όμως πλέον δε μιλάμε για παλμούς που διαδίδονται αδιατάρακτοι, αλλά για κυματοπακέτα που αν και διατηρούνται περιοδικά, υπόκεινται σε μεγάλες αλλαγές κατά τη διάδοση, (και είναι «αναπνέοντες παλμοί», “breathers”), δεν είναι σολιτόνια με την κλασική έννοια του όρου, αλλά κύματα σολιτονικού τύπου. Στην εργασία αυτή θα διατηρήσουμε τον όρο «σολιτόνια διαχείρισης διασποράς», καθώς είναι ο πλέον χρησιμοποιούμενος στη βιβλιογραφία.

Σε περίπτωση που η επί μέρους τιμές διασποράς των τμημάτων είναι αρκετά μεγαλύτερες από τη μέση, το βέλτιστο σχήμα του παλμού δεν είναι καν “sech”, αλλά γκαουσιανού τύπου. Αυτό συμβαίνει για τον απλό λόγο ότι στα επιμέρους τμήματα η διασπορά είναι το φαινόμενο που κυριαρχεί, και η λύση της NLS για διασπορά χωρίς μη-γραμμικότητα είναι γκαουσιανή. Παρόλα αυτά, ούτε η γκαουσιανή είναι ιδιοτιμή της NLS με Διαχείριση Διασποράς. Ο Smith [88] πρώτος ανακάλυψε πως για την το δυνατό αδιατάρακτη διάδοση του παλμού αυτός χρειάζεται να έχει παραπάνω ενέργεια, άρα και ενισχυμένο πλάτος σε σχέση με ένα παλμό του ίδιου εύρους που διαδίδεται σε οπτικό δρόμο άνευ Διαχείρισης, με διασπορά ίση με τη \bar{D} . Μάλιστα βρήκε ένα εμπειρικό τύπο όπου έδινε αυτή την ενίσχυση να εξαρτάται από τις τιμές διασποράς των τμημάτων. Γι’ αυτό όμως θα μιλήσουμε και αργότερα [89]. Εκτός αυτών, σημαντικό ρόλο στην ομαλή περιοδική διάδοση του «σολιτονίου Διαχείρισης Διασποράς» έχει και το τερέτισμα, η αρχική τιμή του οποίου θα πρέπει να είναι συγκεκριμένη ώστε να διασφαλίζεται η περιοδικότητα αυτού αλλά και των άλλων χαρακτηριστικών του παλμού κατά μήκος του L_{map} .

Παρόλη την πολυπλοκότητα των φαινομένων που υπεισέρχονται, και παρόλη τη διαφορετικότητα από τα συνήθη σολιτόνια, έχει αποδειχτεί και πειραματικά ότι μπορεί να επιτευχθεί η ισορροπία μεταξύ μεταβαλλόμενης διασποράς, SPM, chirp και κατάλληλης ισχύος, ώστε οι εν λόγω παλμοί να διαδοθούν και να μπορούν να αποτελούν τους φορείς πληροφορίας για ένα οπτικό τηλεπικοινωνιακό σύστημα [88, 90-92]. Μάλιστα αποδείχτηκε πειραματικά ότι η χρήση της μεταβαλλόμενης διασποράς μειώνει δραστικά ακόμα ένα φαινόμενο καταστροφικό για την ομαλή διάδοση των σολιτονίων, το χρονικό τρόπο Gordon-Haus [93].

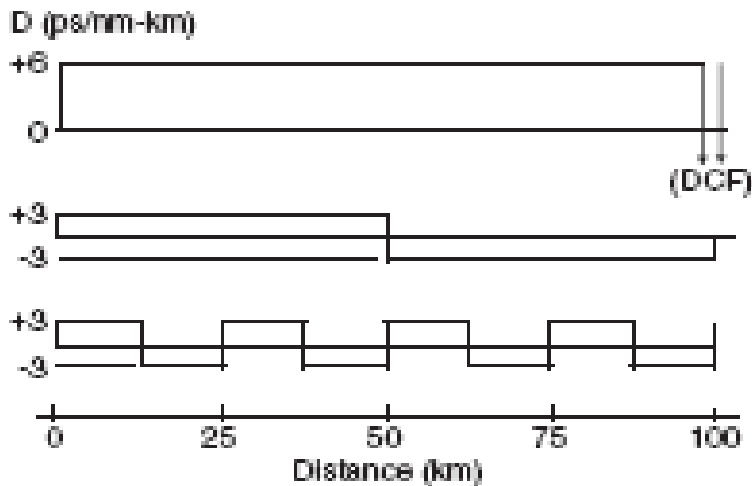
Ας αναφερθούμε τώρα σε κάποιες λεπτομέρειες για το είδος της Διαχείρισης για να περιορίσουμε και τον τρόπο μοντελοποίησης του προβλήματος. Στη περίπτωση που οι τιμές διασποράς των επιμέρους τμημάτων δε διαφέρουν σημαντικά από τη μέση τιμή της διασποράς λέμε ότι έχουμε ασθενή Διαχείριση. Αντίθετα όταν οι τοπικές τιμές διασποράς διαφέρουν σημαντικά από αυτή της μέσης και όταν το L_{map} είναι συγκρίσιμο με τη περίοδο του σολιτονίου, η Διαχείριση ονομάζεται ισχυρή. Έτσι αν θέσουμε $\Delta D = D_1 - D_2$, στην πρώτη περίπτωση έχουμε $\Delta D L_{map} < 1$ και στη δεύτερη $\Delta D L_{map} \geq 1$, τα μεγέθη είναι κανονικοποιημένα. Ο παραπάνω τρόπος διάκρισης είναι ισοδύναμος με τον συχνά απαντούμενο στη βιβλιογραφία, όπου ασθενή διαχείριση έχουμε όταν $L_{D_{1,2}} \approx L_{\bar{D}} \approx L_{NL}$, ενώ ισχυρή όταν $L_{D_{1,2}} \ll L_{\bar{D}}, L_{NL}$. Ακόμα ένας τρόπος είναι και ο υπολογισμός του μέτρου της

«ισχύος διαχείρισης» $S = \left| \frac{L_1 |\beta_{21}| - L_2 |\beta_{22}|}{\Gamma_{FWHM}} \right|$, με μη κανονικοποιημένα μεγέθη, όπου για $S > 1$

έχουμε ισχυρή διαχείριση. Στη περίπτωση της ασθενούς διαχείρισης το πρόβλημα μοντελοποιείται μέσω της τεχνικής του «σολιτονίου οδεύοντος κέντρου» (guiding center soliton). Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση οι μικρές και γρήγορες εναλλαγές της διασποράς (ή και της ισχύος λόγω πιθανών απωλειών και περιοδικής ενίσχυσης) θεωρούνται κατά μέσο όρο ασήμαντες και υπεισέρχονται σε μία νέα κανονικοποίηση της διάστασης διάδοσης. Έτσι η εξίσωση διάδοσης είναι πάλι η NLS και η λύση είναι ένα διαμορφωμένο sech [94-96]. Για ισχυρή, όμως, διαχείριση οι έντονες μεταβολές της φάσης και οι επίσης έντονες αλλά

περιοδικές μεταβολές του σχήματος του παλμού καθιστούν το «κουκούλωμα» από τον μέσο όρο άστοχο. Εδώ η μορφή της λύσης δεν είναι γνωστή και δεν μπορεί να προσεγγιστεί από το guiding center soliton. Παρ' όλα αυτά, έχουν δοθεί πολλές προσεγγιστικές περιγραφές [5, 97-99], ενώ έχει αποδειχθεί ότι αναπνέοντες οδεύοντες παλμοί μπορούν να υποστηριχθούν ακόμα και για μηδενική ή και κανονική μέση διασπορά [5, 100, 101]

Όσον αφορά τη μορφή της διαχείρισης, έχουν προταθεί διάφορες διαμορφώσεις. Κατ' αρχάς υπάρχει το σχέδιο της ίνας μειούμενης διασποράς (dispersion decreasing fiber), όπου η τιμή της διασποράς μειώνεται βαθμοτά σε παραπάνω από δύο βαθμίδες, ώστε να προσεγγίζει την εκθετική μείωση της ισχύος λόγω απωλειών. Μία τέτοια μορφοποίηση προσεγγίζεται από τη μέθοδο του guiding center soliton. Η πλέον συνήθης μορφοποίηση όμως είναι αυτή όπου η περίοδος διαχείρισης αποτελείται από δύο τμήματα διαφορετικής τιμής διασποράς με μικρή ή μεγάλη διαφορά. Η περίοδος αυτή θεωρείται συμμετρική αν αποτελείται από τμήματα ίδιου μήκους, ή όχι, αν τα τμήματα είναι διαφορετικού μήκους. Η τελευταία διαμόρφωση εξάλλου είναι και προσφιλής τεχνολογικά, καθώς η διασπορά ενός μεγάλου μήκους ίνας μπορεί να ισοσταθμιστεί ένα αντισταθμιστικό τμήμα (DCF) μικρού μήκους αλλά ισχυρής διασποράς αντίθετου προσήμου, το οποίο και μπορεί να προστεθεί εύκολα σε υπάρχοντα οπτικά δίκτυα. Σαν παραδείγματα συγκεκριμένων περιόδων διαχείρισης που έχουν χρησιμοποιηθεί πειραματικά αναφέρουμε αυτό της France Telecom, όπου επετεύχθη διάδοση 320Gb/s σολιτονικών παλμών σε WDM για πάνω από 1100Km ([102]) και τις κατασκευές της Deutsche Telekom [103, 104].



Σχήμα 2.2: Αναπαράσταση διαφορετικών μορφών διαχείρισης διασποράς[5].

Μέχρι τώρα δεν αναφερθήκαμε στην ενίσχυση που σε ένα οπτικό τηλεπικοινωνιακό σύστημα θα είναι απαραίτητη. Αν δούμε τη Διαχείριση Διασποράς σα διαταραχή στην εξίσωση διάδοσης, η περιοδική ενίσχυση επιβάλλει ακόμα μία διαταραχή. Ανάλογα με το μήκος της Περιόδου Διαχείρισης και την απόσταση μεταξύ των ενισχυτών L_a , έχουμε δύο περιπτώσεις. Όταν $L_{map} \gg L_a$, η μεταβολή της διασποράς και η περιοδική ενίσχυση μπορούν να ειδωθούν σα δύο διαφορετικά προβλήματα[97 105]. Η μεγάλη συχνότητα της περιοδικής ενίσχυσης μπορεί να θεωρηθεί ότι δεν επηρεάζει τον παλμό στο μέτρο όπου ενεργούν η διασπορά και η μη-γραμμικότητα, οπότε η ενίσχυση και οι απώλειες μπορούν να εξαιρεθούν σε ένα μοντέλο που περιγράφει τη διάδοση. Από την άλλη μεριά, εάν $L_{map} = L_a$, τέτοιου είδους απλοποίηση δε μπορεί να γίνει.

Στη παρούσα εργασία θεωρούμε τις απώλειες και την ενίσχυση εκτός του μοντέλου και υιοθετούμε μια διάδοση «άνευ απωλειών». Αυτό γίνεται και για λόγους απλότητας, καθώς η

εργασία εστιάζει στην επίδραση της διαχείρισης διασποράς στη διάδοση. Η προσέγγιση αυτή βρίσκει περαιτέρω αιτιολόγηση, στο ότι **κατά κύριο λόγο μελετάμε τη διάδοση διανυσματικού μη-γραμμικού παλμού, κάτι για το οποίο δεν έχει γίνει παρόμοια αναλυτική μελέτη στο παρελθόν, σε αντίθεση με το σολιτόνιο διαχείρισης διασποράς που θεωρείται πάντα γραμμικά πολωμένο** και βάση του οποίου έχουν διατυπωθεί οι προτάσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Σαν τελευταία σημείωση, αναφέρουμε ότι οι τιμές της διασποράς των δύο τμημάτων θα αναφέρονται σαν D_1 και D_2 (ή για μη κανονικοποιημένα μεγέθη β_{21}, β_{22}), αλλά όταν παρουσιάζουν διασπορά αντίθετου πρόσημου, δύναται να αναφέρονται και σαν D_+ και D_- .

2.2 Συζευγμένες NLS

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 1, οι συζευγμένες NLS περιγράφουν τη διάδοση και αλληλεπίδραση δύο σολιτονικών παλμών, έχοντας σαν κύριο και συχνά σα μόνο όρο σύζευξης αυτόν που περιγράφει το φαινόμενο της ετεροδιαμόρφωσης φάσης, XPM. Παρακάτω περιγράφουμε το πως καταλήγουμε στις συζευγμένες εξισώσεις για την περίπτωση διάδοσης με ισχυρή διπλοθλαστικότητα και την αλληλεπίδραση παλμών διαφορετικού μήκους κύματος, κάτι που συμβαίνει και στην περίπτωση φασματικής πολυπλεξίας (WDM).

2.2.1 Διπλοθλαστικότητα

Για να καταλήξουμε στις εξισώσεις που διέπουν την εξέλιξη των δύο πολώσεων, ακολουθούμε τη διαδικασία της παραγράφου 1.3.2 για πεδίο μονής πόλωσης, του κεφαλαίου 1.4, αλλά και της παραγράφου 2.2.2 για τη περίπτωση του WDM. Γράφουμε λοιπόν

$$E_j(\vec{r}, t) = F(x, y)U_j(z, t)\exp(i\beta_{0j}z), \quad (2.2)$$

Όπου το $F(x, y)$ είναι η χωρική κατανομή του μεμονωμένου ρυθμού, A_j το αργά μεταβαλλόμενο πλάτος και β_{0j} η αντίστοιχη σταθερά διάδοσης, ενώ $j=x, y$. Έτσι μπορεί να βρεθεί ότι τα πλάτη ικανοποιούν το παρακάτω ζεύγος εξισώσεων,

$$\frac{\partial U_x}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial U_x}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} + \frac{a}{2} U_x = i\gamma \left(|U_x|^2 + \frac{2}{3} |U_y|^2 \right) U_x + \frac{i\gamma}{3} U_x^* U_y^2 \exp(-2i\Delta\beta z), \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial U_y}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} + \frac{a}{2} U_y = i\gamma \left(|U_y|^2 + \frac{2}{3} |U_x|^2 \right) U_y + \frac{i\gamma}{3} U_y^* U_x^2 \exp(-2i\Delta\beta z), \quad (2.3b)$$

Όπου $\Delta\beta = \beta_{0x} - \beta_{0y} = 2\pi/L_B$. Λόγω της γραμμικής διπλοθλαστικότητας οι δύο πολώσεις έχουν διαφορετικές ταχύτητες ομάδας, οπότε εν γέννη $\beta_{1x} \neq \beta_{1y}$, εκτός αν μιλάμε για ίνες χαμηλής διπλοθλαστικότητας, οπότε είναι σχεδόν ίσα. Στις εξισώσεις αυτές αναγνωρίζουμε τον πρώτο όρο στο δεύτερο μέλος, σαν την αυτοδιαμόρφωση φάσης, ενώ δίπλα του είναι ο όρος της ετεροδιαμόρφωσης φάσης. Ο τελευταίος όρος αφορά συμμασική σύζευξη και είναι υπεύθυνος για ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ των πολώσεων. Σε ίνες με ισχυρή διπλοθλαστικότητα όμως, το L_B είναι πολύ μικρότερο από τα άλλα χαρακτηριστικά μήκη και το μήκος διάδοσης, οπότε ο εν λόγω όρος ταλαντώνεται ραγδαία με αποτέλεσμα η συμβολή του να είναι κατά μέσο όρο αμελητέα. Καθώς ασχολούμαστε με την συγκεκριμένη αυτή περίπτωση, ο όρος αυτός δεν εμφανίζεται στο μοντέλο.

Ότι έχουμε πει μέχρι τώρα αφορά ύπαρξη «γραμμικής» διπλοθλαστικότητας, με την έννοια ότι υπάρχουν δύο διευθύνσεις πόλωσης κάθετες μεταξύ τους και σε περίπτωση που γραμμικά πολωμένο πεδίο μπει κατά μήκος μίας εκ των δύο διευθύνσεων, αυτό θα διαδοθεί διατηρώντας την πόλωση του. Ο όρος «γραμμική» δεν πρέπει να συγχέεται με τη γραμμικότητα ή τη μη-γραμμικότητα των φαινομένων. Η γενικότερη περίπτωση του είναι η «ελλειπτική» διπλοθλαστικότητα. Τέτοιου είδους ίνες επιβάλουν ελλειπτική πόλωση στο πεδίο [106]. Χωρίς να μπούμε σε περαιτέρω λεπτομέρειες, αποδεικνύεται ότι τα αργά μεταβαλλόμενα πλάτη των δύο συνιστωσών του πεδίου περιγράφονται από εξισώσεις σαν τις (2.3), αλλά με διαφορετικό συντελεστή του XPM όρου. Στη γενικότερη λοιπόν περίπτωση, με ισχυρή διπλοθλαστικότητα, οι εξισώσεις είναι,

$$\frac{\partial U_x}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial U_x}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} + \frac{a}{2} U_x = i\gamma \left(|U_x|^2 + \beta |U_y|^2 \right) U_x, \quad (2.4\alpha)$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial U_y}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} + \frac{a}{2} U_y = i\gamma \left(|U_y|^2 + \beta |U_x|^2 \right) U_y, \quad (2.4\beta)$$

Όπου το B καθορίζεται από τη γωνία ελλειπτικότητας ϑ . Έτσι για ίνες γραμμικής διπλοθλαστικότητας ($\vartheta = 0^\circ$) $\beta = 2/3$, ενώ σε κυκλικής ($\vartheta = 45^\circ$) $\beta = 2$. Μία άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση έχουμε όταν $\beta = 1$, που είναι και η μόνη περίπτωση όπου για $a = 0$ οι παραπάνω εξισώσεις είναι ολοκληρώσιμες, έχουν δηλαδή αναλυτική λύση [34].

Το ζεύγος εξισώσεων (2.4) περιγράφει περίπτωση συν-διάδοσης γενικότερη αυτής που αφορά την ύπαρξη διπλοθλαστικότητας. Το διανυσματικό σολιτόνιο (vector soliton) είναι μία πιθανή λύση του ζεύγους, όπου κάθε μία εκ των εξισώσεων περιγράφει την εξέλιξη μίας εκ των συνιστωσών του, που όμως διαδίδονται μαζί συνιστώντας ένα κυματοπακέτο. Το ζεύγος μπορεί να έχει βέβαια σολιτονικού τύπου λύση όταν δεν υπάρχουν απώλειες, ή έστω υπάρχουν ενισχυτές για αναπλήρωσή τους. Στο εξής θα θεωρήσουμε $a = 0$. Επίσης, οι εξισώσεις (2.4) μοντελοποιούν διάδοση σε ίνες ισχυρής διπλοθλαστικότητας. Η επίσης ενδιαφέρουσα περίπτωση μικρής διπλοθλαστικότητας έχει προσεγγιστεί σε πολλές εργασίες, αριθμητικές ([107]) και αναλυτικές ([108]), όπου η συνήθης προσέγγιση που ακολουθείται είναι η απαλοιφή της μικρής διαφοράς στις ταχύτητες ομάδος. Στην περίπτωση των εξισώσεων (2.4) οι συνιστώσες A_x και A_y είναι ασύμφωνες, αλλά οι διαφορές στις ταχύτητες ομάδος είναι μεγάλες και δε μπορούν να αγνοηθούν.

Θεωρώντας τώρα ανώμαλη διασπορά και χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς της παραγράφου 1.3.2, οι εξισώσεις (2.4) μπορούν να γραφούν

$$i \left(\frac{\partial u}{\partial Z} + \delta \frac{\partial u}{\partial T} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} + \left(|u|^2 + \beta |v|^2 \right) u = 0 \quad (2.5\alpha)$$

$$i \left(\frac{\partial v}{\partial Z} - \delta \frac{\partial v}{\partial T} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial T^2} + \left(|v|^2 + \beta |u|^2 \right) v = 0 \quad (2.5\beta),$$

όπου u και v είναι τα κανονικοποιημένα πλάτη των συνιστωσών του πεδίου, πολωμένων στους άξονες x και y αντίστοιχα, $T = (1 - \bar{\beta}_1 z) / T_0$, με $\bar{\beta}_1 = \frac{1}{2} (\beta_{1x} + \beta_{1y})$, ενώ

$$\delta = \frac{(\beta_{1x} - \beta_{1y}) T_0}{2 |\beta_2|} \quad (2.6)$$

είναι η διαφορά στις ταχύτητες ομάδος μεταξύ των συνιστωσών. Οι παραπάνω εξισώσεις απλοποιούνται ακόμα περισσότερο κάνοντας το μετασχηματισμό $u = \tilde{u} \exp \left[i(\delta^2 Z / 2 - \delta T) \right]$ και $v = \tilde{v} \exp \left[i(\delta^2 Z / 2 + \delta T) \right]$:

$$i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial T^2} + (|\tilde{u}|^2 + \beta |\tilde{v}|^2) \tilde{u} = 0 \quad (2.7\alpha)$$

$$i \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial T^2} + (|\tilde{v}|^2 + \beta |\tilde{u}|^2) \tilde{v} = 0 \quad (2.7\beta)$$

Όπως αναφέραμε ήδη, για $\beta \neq 0$ οι εξ.(2.7) έχουν αναλυτική, σολιτονική λύση μόνο όταν $\beta = 1$. Η διάσημη αυτή περίπτωση βρήκε τη λύση της από τον Manakov με τη χρήση της IST [34]. Στην απλή της μορφή αυτή είναι,

$$\tilde{u} = \cos \theta \sec h(T) \exp(iZ/2), \quad (2.8\alpha)$$

$$\tilde{v} = \sin \theta \sec h(T) \exp(iZ/2), \quad (2.8\beta)$$

Όπου θ γωνία του πεδίου με τον «αργό» άξονα διπλοθλαστικότητας, που στη περίπτωση μας αναγνωρίζεται σαν τη γωνία πόλωσης.

Στις ίνες όμως η διπλοθλαστικότητα σπάνια μπορεί να εκπροσωπηθεί από $\beta = 1$. Συγκεκριμένα, όταν μελετάμε την ιδιαίτερα συχνή και ενδιαφέρουσα περίπτωση της ισχυρής και γραμμικής διπλοθλαστικότητας, τότε $\beta = 2/3$. Ευτυχώς, έστω και αν δεν έχουν βρεθεί αυστηρές αναλυτικές λύσεις, θα λέγαμε πάλι «σολιτονικές», υπάρχουν κυματομορφές που ικανοποιούν τις εξ.(2.5) οπότε και διαδίδονται με ευστάθεια, διατηρώντας τη μορφή τους. Αυτές λοιπόν ονομάζονται πιο σωστά «κύματα σολιτονικού τύπου» και έχουν μελετηθεί σε διάφορους τομείς [110-112].

Μία ενδιαφέρουσα οδεύουσα λύση, για τη περίπτωση $\theta = 45^\circ$ [109] είναι,

$$\tilde{u} = \tilde{v} = n \sec h \left[(1 + \beta)^{1/2} nT \right] \exp \left[i(1 + \beta)n^2 Z / 2 \right] \quad (2.9)$$

Είναι κατανοητό ότι οι παλμοί αυτοί είναι στενότεροι από το κανονικό σολιτόνιο, καθώς αλληλεπιδρούν και μέσω του XPM όρου. Σε ένα τέτοιο σολιτονικό κύμα η διασπορά εξισορροπείται από το SPM αλλά και από το XPM.

Κανείς όμως δεν πρέπει να ξεχνά την εξ. (2.5) και τη διαφορά που υπάρχει στις ταχύτητες ομάδος των συνιστωσών. Αυτό, με άλλα λόγια, είναι και η αιτία για το PMD, το οποίο τείνει να διευρύνει το κυματοπακέτο και εν τέλει να διαχωρίσει τις δύο συνιστώσες. Η κάθε μία από αυτές, μόνη, δεν θα είχε αρκετή ενέργεια να εξισορροπήσει τη διασπορά και θα χανόταν.

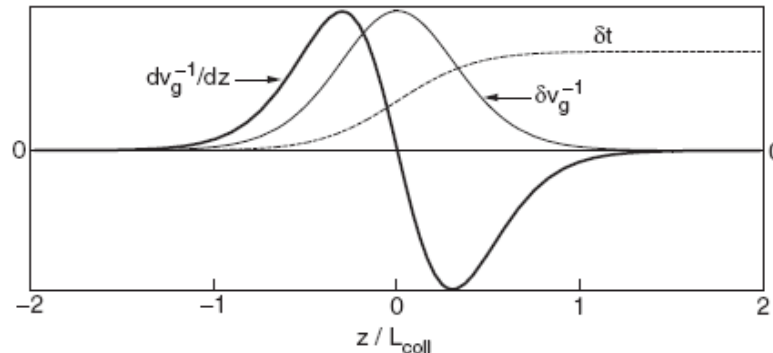
Αυτό το οποίο, μπορεί να συγκρατήσει τις συνιστώσες μαζί είναι ο όρος αλληλεπίδρασης τους, το XPM. Έτσι, όταν η ενέργεια τους είναι επαρκής, η μία συνιστώσα έλκει την άλλη προκαλώντας μετατόπιση στην κεντρική τους συχνότητα, τόση ώστε να εξισορροπήσει τελικά τη διαφορά στις ταχύτητες. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται παγίδευση (trapping).

2.2.2 Αλληλεπίδραση παλμών σε WDM και Διαχείριση διασποράς

Μία από τις πρώτες σκέψεις για εφαρμογή σολιτονικών πλαμών ήταν η χρήσης τους για πολυπλεξία μήκους κύματος (wavelength division multiplexing-WDM). Η συνύπαρξη πολλών καναλιών στην ίδια ίνα εγείρει το θέμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ παλμών διαφορετικής συχνότητας, άρα και διαφορετικής ταχύτητας ομάδος, κυρίως μέσω του μη-γραμμικού φαινομένου XPM. Εδώ η αλληλοπαγίδευση δεν είναι το ζητούμενο και η αλληλεπίδραση των εν λόγω παλμών αναφέρεται συχνά και ως «σύγκρουση». Είναι δε εντυπωσιακό, το ότι οι συγκρούσεις μεταξύ συνήθων σολιτονίων είναι πλήρως ελαστικές με τα «γρήγορα» σολιτόνια να πλησιάζουν τα αργά, να συγκρούονται και να εξέρχονται της αλληλεπίδρασης αμετάβλητα. Ένα καλά σχεδιασμένο WDM τηλεπικοινωνιακό σύστημα που χρησιμοποιεί σολιτόνια, θα έχει φασματική απόσταση μεταξύ των καναλιών πάνω από δύο φορές το φασματικό τους εύρος. Έτσι οι αλληλεπιδράσεις θα είναι ελαστικές και ασύμφωνες. Το μήκος που διανύουν οι δύο παλμοί κατά τη σύγκρουση δίνεται από τον τύπο

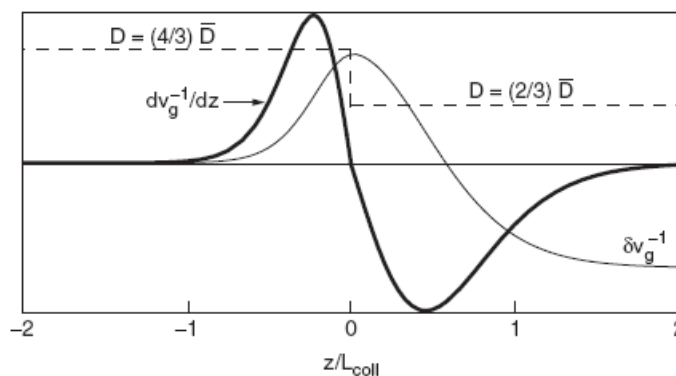
$$L_{coll} = \frac{2\tau}{D\Delta\lambda}, \quad (2.10)$$

όπου τ το FWHM της έντασης του παλμού D η τιμή της διασποράς και $\Delta\lambda$ η διαφορά στα μήκη κύματος. Το σχήμα 2.3 είναι παρμένο από τη κλασική εργασία των Mollenauer, Evangelides et. al. [84]. Δείχνει τη μεταβολή στη ταχύτητα, παράγωγο αυτής και στη χρονική μετατόπιση σολιτονικού παλμού κατά τη διάρκεια σύγκρουσης με παλμό άλλου καναλιού. Η συμμετρία της αλληλεπίδρασης δεν επιφέρει, τελικά, καμία αλλαγή στη ταχύτητα ομάδας, οπότε και καμία φασματική μετατόπιση. Η αναπήδηση της συχνότητας επιφέρει μόνο χρονική μετατόπιση.



Σχήμα 2.3: Ενδεικτικό σχήμα της μεταβολής της ταχύτητας (συχνότητας) της επιτάχυνσης και της χρονικής μετατόπισης σολιτονικού παλμού κατά τη διάρκεια σύγκρουσης.[84]

Δυστυχώς η χρήση σολιτονίων σε WDM εντείνει το φαινόμενο του FWM, ενώ έχουν αποδειχθεί και ευαίσθητα σε χρονικές μετατοπίσεις λόγω του Gordon-Haus jitter. Ένα άλλο τεχνικό πρόβλημα είναι ότι οι υπάρχουσες ίνες δεν έχουν τις κατάλληλες τιμές διασποράς για αρκετά ευρύ φάσμα συχνοτήτων ώστε οι σολιτονικοί παλμοί να εξισορροπούν τη μη-γραμμικότητα, ενώ οι κατασκευή εξειδικευμένων ινών κρίνεται απαγορευτική. Πειράματα έχουν δείξει ότι τα προβλήματα αυτά μπορούν να εξομαλυνθούν με χρήση φίλτρων κυλιόμενης συχνότητας. Έχει δε επιτευχθεί διάδοση μέχρι 8 καναλιών με ρυθμούς 5-10GB/s για 9000Km [113].



Σχήμα 2.4: Μεταβολή της ταχύτητας και της επιτάχυνσης για σύγκρουση με κέντρο σε ασυνέχεια της διασποράς D (εικόνα από [5]). Βλέπε και Σχ. 2.83(β) για το φασματικό αποτέλεσμα μεμονωμένων συγκρούσεων πάνω στην ασυνέχεια.

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι τα παραπάνω προβλήματα αντιμετωπίζονται με τη Διαχείριση Διασποράς. Ένα νέο όμως πρόβλημα εγείρεται εδώ. Η σύγκρουση συνήθως διαρκεί για δεκάδες χιλιόμετρα και η ύπαρξη διαταραχής, όπως οι ενισχυτές ή και η αλλαγή της

διασποράς καταστρέφει τη συμμετρία της αλληλεπίδρασης με αποτέλεσμα τη φασματική μετατόπιση των παλμών. Η ύπαρξη της διασποράς δε, μετατρέπει τη συχνοτική μετατόπιση σε χρονική μετατόπιση. Δεδομένου ότι ένας παλμός μπορεί να υποστεί από καμία έως πολλές συγκρούσεις από διαφορετικά κανάλια, δίνει μια αίσθηση για την πιθανή πτώση του SNR ενός τέτοιου συστήματος. Μια εικόνα της φασματικής μετατόπισης δίνεται στο σχήμα 2.4, όπου το κέντρο της σύγκρουσης εμφανίζεται να βρίσκεται πάνω στην ασυνέχεια του D . Η διαφορά στο μήκος της αλληλεπίδρασης πριν και μετά την ασυνέχεια οφείλεται στο ότι το L_{col} εξαρτάται αντιστρόφως από το D .

Στην πολύ βασική, για το ζήτημα της σολιτονικής διάδοσης υπό διαταραχή, εργασία τους [84] ο Mollenauer και οι συνεργάτες του χωρίς να λύσουν την NLS κατέληξαν σε αναλυτικό συμπέρασμα για τη φασματική μετατόπιση. Τα συμπεράσματα τους ισχύουν τουλάχιστον για ασθενή διαχείριση. Έτσι, αν η κεντρική συχνότητα του παλμού είναι Ω , διαδίδεται σε δρόμο με περιοδικά μεταβαλλόμενη διασπορά, ακόμα και με περιοδική ενίσχυση, και συγκρούσει με παλμό συχνότητας $-\Omega$, η φασματική του μετατόπιση θα είναι

$$\delta\Omega = \frac{16L_{pert}}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Im}(\tilde{g}_n) \frac{n^3 x^4}{\sinh^2(nx)}, \quad (2.11)$$

όπου $x = \pi^2 / (2\Omega L_{pert})$ και $\tilde{g}_n = (1/L_{pert}) \int_0^{L_{pert}} (G/\Delta) \exp(-i\pi n z' / L_{pert}) dz'$, ενώ το G σχετίζεται με την περιοδική ενίσχυση, $\Delta(z) = D(z) / \bar{D}$ και $L_{pert} = L_{map}$. Ενώ θα επανέλθουμε στον αναλυτικό αυτό τύπο, ένα πρώτο συμπέρασμα είναι πως η μετατόπιση θα είναι τελικά ελάχιστη όταν $L_{col} > 2L_{pert}$. Το κακό είναι ότι η σχέση αυτή θέτει άνω όριο στη φασματική

απόσταση μεταξύ καναλιών, καθώς σε συνδυασμό με τη (2.10) δίνει $\Delta\lambda_{\max} = \frac{\tau}{DL_{pert}}$. Έτσι

για παράδειγμα, για παλμούς εύρος 20ps, $D=0.5\text{ps}/(\text{nmKm})$, έχουμε $\Delta\lambda_{\max} \approx 1.2\text{nm}$, οπότε μπορούμε να έχουμε 4 το πολύ κανάλια. Θεωρητικά το πρόβλημα λύνεται με χρήση ινών σταδιακά μειούμενης διασποράς [5, 114, 115].

Η κατάσταση αλλάζει εκ νέου, στην περίπτωση της ισχυρής διαμόρφωσης. Έχει παρατηρηθεί σε προσομοιώσεις αλλά και σε πειράματα [116, 117] ότι η ύπαρξη μεγάλων περιοδικών αλλαγών στη διασπορά, από θετικές σε αρνητικές τιμές, κάνει τον παλμό να αλλάζει κατεύθυνση ραγδαία. Έτσι δύο παλμοί διαφορετικής κεντρικής συχνότητας που κατά μέσο όρο πλησιάζουν, βρίσκονται να συγκλίνουν για μία τιμή της τοπικής διασποράς και ραγδαία να αποκλίνουν για την άλλη τιμή. Το αποτέλεσμα αυτής της εναλλαγής είναι, η αλληλεπίδραση των παλμών να αποτελείται από πολλές μικρές συγκρούσεις. Αρχικά ατελείς, (όπου οι παλμοί δεν προλαβαίνουν να περάσουν ο ένας μέσα από τον άλλο πριν αλλάξουν κατεύθυνση), αργότερα πλήρεις, (όπου αλλάζοντας κατεύθυνση περνούν ο ένας μέσα από τον άλλο μία ή περισσότερες φορές) και τελικά καθώς ο γρήγορος παλμός προσπερνά τον αργό έχουμε ξανά έναν αριθμό από ατελείς συγκρούσεις. Ενώ οι πλήρεις συγκρούσεις που προλαβαίνουν να λάβουν χώρα κατά μήκος ενός τμήματος, πριν αλλάξει η διασπορά, δεν επιφέρουν μεταβολή στη συχνότητα, κατά τη διάρκεια των ατελών έχουμε (π.χ. για τον αργό παλμό) αύξηση της συχνότητας του στην αρχή και μείωση στο τελικό στάδιο της αλληλεπίδρασης. Βέβαια αυτό δε σημαίνει ότι το η συνολική μετατόπιση θα είναι μηδέν. Παρακάτω θα δούμε πως απλά με την κατάλληλη επιλογή των τιμών της διασποράς, η μετατόπιση συχνότητας μπορεί να εκμηδενιστεί.

Θα ξεκινήσουμε σκιαγραφώντας το πως καταλήγουμε σε αυτές τις εξισώσεις, στη γενική περίπτωση, όπου θέλουμε να περιγράψουμε δύο οπτικά πεδία διαφορετικού μήκους κύματος, που διαδίδονται σε μονότροπη ίνα.

Στη ημί-μονοχρωματική προσέγγιση το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο γράφεται σαν άθροισμα των δύο ηλεκτρικών πεδίων,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [E_1 \exp(-i\omega_1 t) + E_2 \exp(-i\omega_2 t)] + c.c., \quad (2.12)$$

όπου \hat{x} το μοναδιαίο διάνυσμα πόλωσης και ω_1, ω_2 οι κεντρικές συχνότητες των παλμών. Τα πλάτη θεωρούνται ξανά ότι είναι αργά μεταβαλλόμενα.

Ακολουθώντας τα βήματα του προηγούμενου κεφαλαίου και χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.10) για την πόλωση, εύκολα καταλήγει κανείς ότι

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \left\{ \begin{array}{l} P_{NL}(\omega_1) \exp(-i\omega_1 t) + P_{NL}(\omega_2) \exp(-i\omega_2 t) \\ + P_{NL}(2\omega_1 - \omega_2) \exp[-i(2\omega_1 - \omega_2)t] \\ + P_{NL}(2\omega_2 - \omega_1) \exp[-i(2\omega_2 - \omega_1)t] \end{array} \right\} + c.c., \quad (2.13)$$

όπου $P_{NL}(\omega_i) = \chi_{eff} (|E_i|^2 + 2|E_{3-i}|^2) E_i$ και $P_{NL}(2\omega_i - \omega_{3-i}) = \chi_{eff} E_i^2 E_{3-i}^*$ με $i=1,2$ και

$$\chi_{eff} = (3\varepsilon_0/4) \chi_{xxx}^{(3)}.$$

Οι δύο τελευταίοι όροι του αθροίσματος στην (2.13) προέρχονται από το FWM και καθώς πρέπει να τηρούνται συνθήκες συμφασικότητας, οι οποίες σπάνια υπάρχουν, ούτως ώστε οι εν λόγω συνιστώσες να αναπτυχθούν οι όροι αυτοί αγνοούνται στην περαιτέρω ανάλυση. Οι δύο πρώτοι όροι είναι αυτοί που περιγράφουν τη μη-γραμμική συνεισφορά στο δείκτη διάθλασης. Όπως είδαμε στο προηγούμενο λοιπόν κεφάλαιο, η συνολική πόλωση (γραμμική και μη) θα είναι

$$P(\omega_i) = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i \quad (2.14)$$

όπου η γραμμική και η μη-γραμμική συνεισφορά στη διηλεκτρική σταθερά θα είναι

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^L + \varepsilon_i^{NL} = (n_i^L + \Delta n_i)^2, \quad (2.15)$$

ενώ για $\Delta n_i \ll n_i^L$ και $n_i^L \approx n_2^L = n_2$ το μη-γραμμικό κομμάτι του δείκτη διάθλασης θα είναι

$$\Delta n_i \approx n_2 (|E_i|^2 + 2|E_{3-i}|^2) \quad (2.16)$$

Από την (2.16) φαίνεται ότι ο δείκτης διάθλασης που γίνεται «αισθητός» από το οπτικό πεδίο επηρεάζεται πλέον όχι μόνο από το ίδιο, αλλά και από συν-διαδιδόμενα πεδία [118, 119]. Τώρα, η φάση του πεδίου υπόκειται την παρακάτω μετατόπιση

$$\phi_i^{NL} = (\omega_i / c) \Delta n_i z = n_2 (\omega_i / c) (|E_i|^2 + 2|E_{3-i}|^2) z, \quad (2.17)$$

όπου ο πρώτος όρος σχετίζεται με την αυτοδιαμόρφωση φάσης (SPM), ενώ ο δεύτερος με την ετεροδιαμόρφωση φάσης (XPM). Παρατηρούμε ότι ο όρος αυτός είναι δύο (2) φορές ισχυρότερος του SPM. Ποιοτικά μιλώντας, ο αριθμός των όρων διπλασιάζεται για δύο ξεχωριστές συχνότητες, συγκριτικά με όταν αυτές είναι (σχεδόν) ταυτόσημες.

Μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στις εξισώσεις διάδοσης των παλμών των δύο πεδίων χρησιμοποιώντας την τεχνική της παραγράφου 1.3.2. Έτσι, θεωρώντας ότι τα μη-γραμμικά φαινόμενα δεν επηρεάζουν σημαντικά την εγκάρσια διαμόρφωση του πεδίου, αυτό μπορεί να γραφεί

$$E_i(\vec{r}, t) = F_i(x, y) U_i(z, t) \exp(i\beta_{0i} z), \quad (2.18)$$

με $F_i(x, y)$ την εγκάρσια διαμόρφωση του ρυθμού του i πεδίου και $U_i(z, t)$ το αντίστοιχο αργά μεταβαλλόμενο πλάτος, ενώ β_{0i} είναι η σταθερά διάδοσης για την αντίστοιχη κεντρική συχνότητα ω_i . Μετά από αλγεβρικούς υπολογισμούς, όπου θέτουμε τους συντελεστές των $\exp(i\beta_{0i} z - i\omega_i t)$ ίσους με το μηδέν, και αγνοώντας τις απώλειες, η εξίσωση διάδοσης του $U_i(z, t)$ είναι

$$\frac{\partial U_i}{\partial z} + \beta_{1i} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{i\beta_{2i}}{2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = in_2 \left(\frac{\omega_i}{c} \right) (f_{ii} |U_i|^2 + 2f_{ik} |U_k|^2) U_i, \quad (2.19)$$

$$\text{όπου } k \neq i, \beta_{1i} = 1/v_{g1} \text{ και } f_{ik} = \frac{\int \int_{-\infty}^{\infty} |F_i(x, y)|^2 |F_k(x, y)|^2 dx dy}{\left(\int \int_{-\infty}^{\infty} |F_i(x, y)|^2 dx dy \right) \left(\int \int_{-\infty}^{\infty} |F_k(x, y)|^2 dx dy \right)}.$$

Οι διαφορές μεταξύ των f_{ik} είναι σημαντικές μόνο για πολύτροπη ίνα, αλλά είναι μικρές για μονότροπη, οπότε μπορούν να θεωρηθούν ίσα. Σε αυτή τη περίπτωση η (2.18) μπορεί να γραφεί στην παρακάτω σύστημα συζευγμένων PDEs

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{1}{v_{g1}} \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{i\beta_{21}}{2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = i\gamma_1 \left(|U_1|^2 + 2|U_2|^2 \right) U_1 \quad (2.20\alpha)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{1}{v_{g2}} \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{i\beta_{22}}{2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = i\gamma_2 \left(|U_2|^2 + 2|U_1|^2 \right) U_2, \quad (2.20\beta)$$

όπου $\gamma_i = n_2 \omega_i / (cA_{eff})$ η μη-γραμμική παράμετρος και $A_{eff} = 1/f_{11}$ η ενεργός περιοχή του πυρήνα της ίνας. Οι τιμές των γ_1, γ_2 είναι $\sim 1W^{-1}/Km$, ανάλογα με τις συχνότητες. Στη γενική λοιπόν περίπτωση οι παλμοί έχουν διαφορετική διασπορά, αλλά και ομαδική ταχύτητα. Αυτή η διαφορά στις ομαδικές ταχύτητες παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της αλληλεπίδρασης.

2.3 Μεταβολική μέθοδος (Variational method) και στοιχεία δυναμικής ανάλυσης

2.3.1 Μεταβολική Μέθοδος

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τους Anderson και Lisack [120, 121] σε προβλήματα Φυσικής Πλάσματος και Οπτικής που περιγράφονταν από την NLS. Σύμφωνα με τη μέθοδο, ένα πρόβλημα που περιγράφεται από μια απειροδιάστατη μερική διαφορική εξίσωση, «εκπίπτει» σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών. Η επιτυχία της μεθόδου στην ποιοτική και ποσοτική περιγραφή των προβλημάτων, στα οποία χρησιμοποιήθηκε αρχικά, οδήγησε πολλούς ερευνητές στην υιοθεσία της σε ποικίλα προβλήματα, συχνότερα δε στη μη-γραμμική οπτική [108-110, 123-125]. Αυτά περιλαμβάνουν τη μελέτη χώρο-χρονικών παλμών και τη μελέτη προβλημάτων που περιγράφονται από περισσότερες από μία συζευγμένες μερικές διαφορικές, όπως το προβλήματα που προσεγγίζουμε στο παρόν κεφάλαιο.

Η διαδικασία της μετάπτωσης από το χώρο των άπειρων διαστάσεων των μερικών διαφορικών στο χώρο πεπερασμένων διαστάσεων ονομάζεται εν' γένει «ακρωτηριασμός Galerkin». Οι «διαστάσεις» αυτές είναι επιλεγμένες φυσικές παράμετροι του προβλήματος, των οποίων η εξέλιξη περιγράφεται από το σύστημα των συνήθων διαφορικών. Η λύση του συστήματος προσφέρει την αναλυτική περιγραφή των παραμέτρων αυτών, οπότε και μια καλή εικόνα για την εξέλιξη του αρχικού φυσικού προβλήματος, ενώ κερδίζουμε σημαντικά σε υπολογιστικό χρόνο.

Αρχικά πρέπει κανείς να επιλέξει μια δοκιμαστική συνάρτηση (ή και περισσότερες, μία για κάθε μερική διαφορική) των εν λόγω παραμέτρων, η οποία υποτίθεται ότι αποτελεί και λύση της διαφορικής και αναφέρεται ως “ansatz”. Λέμε «υποτίθεται» διότι δεν είναι απαραίτητο η συνάρτηση αυτή να αποτελεί ακριβή λύση. Αυτό είναι βολικό, καθώς σε πολλά προβλήματα δεν υπάρχει ακριβής αναλυτική λύση, ή δεν τη γνωρίζουμε. Επίσης, δεν υπάρχει κάποιος κανόνας για το ποιες και πόσες παραμέτρους θα περιλαμβάνει η εν λόγω συνάρτηση. Η κατανόηση της σημαντικότητας κάποιων παραμέτρων του γενικότερου προβλήματος είναι ο πραγματικός οδηγός για τον συνυπολογισμό τους στο ansatz, οπότε και το τελικό σύστημα μπορεί να δίνει μια καλή ή ίσως μια πολύ φτωχή ή και λανθασμένη προσεγγιστική περιγραφή

του προβλήματος. Θεωρούμε δε, ότι η συνάρτηση αυτή, όντας λύση, διατηρείται ως τέτοια κατά μήκος της δυναμικής μεταβλητής (συνήθως ο χρόνος), έστω και αν οι επιλεγμένες παράμετροι μεταβάλλονται.

Το φυσικό υπόβαθρο της μεθόδου βρίσκεται στην Λαγκρανζιανή (Lagrangian) προσέγγιση, γνωστή από τη κλασική μηχανική, δηλαδή, η εξέλιξη ενός συστήματος στο χώρο των θέσεων (συντεταγμένων), από μία «χρονική στιγμή» z_1 σε μία άλλη z_2 , ακολουθεί το μονοπάτι της ελάχιστης δράσης [20, 21]. Αυτό επιβάλλει την ελαχιστοποίηση ενός ολοκληρώματος δράσης $S(u, u^*)$ (αρχή του Χάμιλτον), και τελικά οδηγεί στις εξισώσεις Euler-Lagrange. Η αρχή του Χάμιλτον περιγράφει την κίνηση σε συστήματα όπου όλες οι παρούσες δυνάμεις προέρχονται από ένα δυναμικό (monogenic). Υπενθυμίζουμε ότι λόγω της μορφής της NLS που χρησιμοποιούμε, ως δυναμική μεταβλητή («χρόνο») εννοούμε το z και όχι το t .

Έτσι, θα πρέπει να ισχύει,

$$\delta S = \delta \int L dz = 0, \quad (2.21)$$

όπου $L = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(u, u^*) dt$ η Λαγκρανζιανή του προβλήματος και \mathcal{L} η Λαγκρανζιανή πυκνότητα. Απαιτώντας $\delta \mathcal{L} / \delta u^* = \delta \mathcal{L} / \delta u = 0$, πρέπει να μπορούμε να αναπαράγουμε την αρχική μερική διαφορική, και τη συζυγή της. Δηλαδή, αν η εν λόγω διαφορική είναι η (1.29), θα πρέπει να είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^*} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} \right)} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial u^*}{\partial t} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} = 0 \quad (2.22)$$

Δεδομένου του αρχικού ansatz με τις κατάλληλα επιλεγμένες φυσικές παραμέτρους a_i , υπολογίζουμε καταρχάς τη Λαγκρανζιανή σε συνάρτηση αυτών των παραμέτρων. Καθώς οι παράμετροι είναι συναρτήσεις του z , οι μεταβολές της L σε σχέση με αυτές πρέπει να είναι μηδενικές, οπότε και θα έχουμε

$$\frac{\delta L}{\delta a_i} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial a_i}{\partial z} \right)} - \frac{\partial L}{\partial a_i} = 0 \quad (2.23)$$

Από τις παραπάνω καταλήγουμε σε σύστημα ODEs, μία για κάθε φυσική παράμετρο. Ουσιαστικά, ο χώρος των επιτρεπών μεταβολών περιορίζεται στον υπόχωρο των φυσικών μας παραμέτρων. Περισσότερες λεπτομέρειες για τη μέθοδο μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο του Whitham [18] και στο [246].

Η μέθοδος έχει χρησιμοποιηθεί κυρίως σε συντηρητικά συστήματα, αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να επεκταθεί και σε μη συντηρητικά [126].

Η μέθοδος αυτή έχει αρκετά παλιότερα χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη γραμμικών προβλημάτων, γνωστή ως «Μέθοδος βελτιστοποίησης Rayleigh-Ritz». Μία από τις εφαρμογές της είναι στην κβαντική μηχανική, για την εύρεση ευσταθών κυματοσυναρτήσεων [32].

Ολοκληρώνοντας, είναι απαραίτητο να επισημάνουμε κάποια χαρακτηριστικά της μεθόδου. Όπως προ-είπαμε, η μεταβολική μέθοδος έχει αξία μόνο εάν το επιλεγμένο anatz μπορεί να «συλλάβει» τη σωστή εξέλιξη του παλμού. Πιο συγκεκριμένα, στην ανάλυση μας θεωρήσαμε ότι ο παλμός διατηρεί τη γκαουσιανή του μορφή (ή sech) κατά τη διάδοση. Αυτό βέβαια δεν είναι πάντα αληθές. Ακόμα και αν ο παλμός δεν καταστρέφεται, η μεταβολή της διασποράς του επιβάλλει σημαντικές (αν και συχνά περιοδικές) αλλαγές, ενώ η επίδραση του XPM ενισχύει τοπικά τη μη-γραμμικότητα και τη δημιουργία πλευρικών λοβών. Ο Gabiton στις εργασίες του αναφέρει πως η συμφωνία μεταξύ των μοντέλων ODEs και PDEs καταρρέει εάν η περίοδος της Διαμόρφωσης Διασποράς δεν είναι μικρότερη από τη περίοδο

του σολιτονίου [127, 128]. Ακόμα, η διατήρηση της ενέργειας του ansatz που επιβάλει η μέθοδος, έχει ως αποτέλεσμα να μη μπορεί να περιγράψει την ανάπτυξη μικρής ακτινοβολίας συνεχούς φάσματος λόγω των μεταβολών της διασποράς [129], αλλά ούτε και λόγω της αναπόφευκτης προσαρμογής του αρχικού παλμού σε οδεύοντα σολιτονικό παλμό.

Παρόλα αυτά, έχει χρησιμοποιηθεί και σε προβλήματα σύζευξης από πολλούς συγγραφείς προβλέποντας με επιτυχία την εξέλιξη παλμών διαφορετικών καναλιών και διανυσματικών σολιτονίων [109, 117, 122, 130-132].

2.3.2 Στοιχεία δυναμικής ανάλυσης-Τομές Poincaré

Συχνά τα φυσικά συστήματα περιγράφονται με τη βοήθεια διαφορικών συστημάτων, με γενική μορφή

$$\dot{x}(t) = f(x, t), \quad (2.24)$$

όπου το x είναι η διανυσματική έκφραση n συντεταγμένων και η $f(x, t)$ είναι συνεχής και με συνεχείς μερικές παραγώγους και ορισμένη σε πεδίο $\Pi = \{(t, x) : t \in J, x \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, όπου $J \subset \mathbb{R}$ και $D \subset \mathbb{R}^n$. Στη περίπτωση που η f είναι ανεξάρτητη του χρόνου, το σύστημα λέγεται αυτόνομο και η μελέτη του είναι πολύ πιο εύκολη καθώς η Χαμιλτονιανή τους διατηρείται.

Ένα άλλο ευεργετικό χαρακτηριστικό των αυτόνομων συστημάτων είναι ότι μπορούμε να κάνουμε τη μελέτη τους στο χώρο των συντεταγμένων, που είναι n διαστάσεων, αντί για το «χώρο των λύσεων» που είναι $n+1$. Για παράδειγμα, εάν έχουμε ένα απλό μονοδιάστατο σύστημα $\dot{x}(t) = f(x)$, που παριστά την κίνηση ενός σώματος, τότε το $f(x)$ είναι η ταχύτητα του σημείου x και η λύση $x = x(t, t_0, x_0)$ παριστάνει την κίνηση του σώματος, που ξεκινά από τη θέση x_0 τη στιγμή t_0 . Αν τώρα έχουμε ένα λίγο πιο περίπλοκο αυτόνομο δυναμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= g(x, v) \end{aligned} \quad (2.25)$$

με το x να παριστά τη θέση του σώματος και το v τη ταχύτητα, τότε οι λύσεις του συστήματος μπορούν να παρασταθούν στο επίπεδο x - v . Ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών στο παραπάνω σύστημα είναι βέβαια $n=1$, οπότε λέμε ότι έχει ένα βαθμό ελευθερίας (β.ε.). Γενικά, ένα σύστημα με n β.ε. μπορεί να παρασταθεί σε χώρο διαστάσεων $2n$. Ο χώρος αυτός ονομάζεται χώρος φάσεων και κάθε απεικόνιση της εξέλιξης είναι καμπύλη, $\{x(t, t_0, x_0), v(t, t_0, y_0)\}$, στο χώρο αυτό και την ονομάζουμε τροχιά. Από κάθε σημείο αυτού του χώρου μπορεί να περνά μόνο μία τροχιά, ενώ δε μπορεί να ξαναπεράσει εκτός εάν είναι κλειστή, και τότε αντιστοιχεί σε περιοδική λύση.

Όταν δεν υπάρχει αναλυτική λύση, (που είναι και το συνηθέστερο), αλλά ακόμα και όταν υπάρχει, η απεικόνιση στο χώρο φάσεων δύναται να αποκαλύψει ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του συστήματος, όπως τα στάσιμα σημεία και τη συμπεριφορά των λύσεων γύρω από αυτά. Στάσιμο (ή κρίσιμο, ή σημείο ισορροπίας) είναι το σημείο $x_{\sigma\sigma}$, όπου $f(x_{\sigma\sigma})=0$. Η φύση και η θέση των σ.σ. καθορίζει τη συμπεριφορά των τροχιών του φασικού χώρου, η οποία είναι ένδειξη για τη συμπεριφορά του συστήματος. Έτσι μια τροχιά ενός αυτόνομου συστήματος μπορεί ή να μένει απλά στο σ.σ., ή να το πλησιάζει (για $t \rightarrow \infty$), ή να είναι κλειστή καμπύλη (περιοδική), ή να πλησιάζει κλειστή καμπύλη, ή να τείνει να φύγει στο άπειρο (μη φραγμένη). Ένα ακόμα σημαντικό ζήτημα είναι η ευστάθεια. Αν η μετατόπιση του σώματος από το στάσιμο σημείο προκαλέσει απομάκρυνση, τότε το σημείο είναι ασταθές. Αν προκαλέσει επαναφορά, τότε είναι ευσταθές, ενώ αν καταλήξει σε περιφορά γύρω από αυτό, τότε είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Για πιο περίπλοκα συστήματα, όπως αυτά που περιλαμβάνουν περισσότερα από ένα σώματα, είναι συχνά προτιμότερο να περάσουμε από το χώρο των θέσεων-ταχυτήτων στο χώρο των «γενικευμένων» συντεταγμένων, οι οποίες επιλέγονται κάθε φορά ανάλογα με το πρόβλημα. Δηλαδή, σχηματικά είναι $(x, v) \rightleftharpoons (q, \dot{q})$ ή (q, p) , ο μετασχηματισμός στο χώρο των γενικευμένων «θέσεων και ορμών». Από κει και πέρα είναι συχνότατα πολύ πιο βολικό να υιοθετήσει κανείς Λαγκρανζιανή περιγραφή του προβλήματος και να το περιγράψει μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange, που είδαμε πιο πάνω. Ακόμα προτιμότερη είναι ίσως η Χαμιλτονιανή περιγραφή, που εισάγει και τις ορμές-συζυγείς των θέσεων (p και q). Από τη Χαμιλτονιανή μπορεί κανείς να περιγράψει το σύστημα μέσω $2n$ εξισώσεων Hamilton-Jacobi. Περισσότερα για τις δύο αυτές περιγραφές και για τα δυναμικά συστήματα εν γένη βρίσκονται σε κλασικά βιβλία της Μηχανικής και μη-γραμμικής δυναμικής [20-22]. Εδώ θα αρκεστούμε να αναφέρουμε ότι ο μετασχηματισμός της Λαγκρανζιανής στη Χαμιλτονιανή γίνεται μέσω της σχέσης του Legendre, όπως,

$$H(q, p, t) = \sum \dot{q}p - \mathcal{L}(q, p, t) \quad (2.26)$$

, όπου φαίνονται οι πυκνότητες των H και L αντιστοίχως, όπως χρησιμοποιούνται παρακάτω. Εκτός από την απεικόνιση στο φασικό χώρο μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τη «τομή Poincaré», η οποία είναι μια δημοφιλής μέθοδος στη μελέτη δυναμικών συστημάτων, όπου μπορεί να αποκαλύψει ποιοτικά και μερικώς ποσοτικά την εξέλιξη των μεταβλητών για μεγάλο εύρος αρχικών συνθηκών. Είναι βεβαίως πιο χρήσιμη στη μελέτη ασθενώς διαταραγμένων συστημάτων.

Μπορούμε να καταλάβουμε την απεικόνιση σε τομή Poincaré αν σκεφτούμε, για παράδειγμα, ένα διατηρητικό σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας. Θεωρώντας τις φυσικές διαδρομές (trajectories, ή αλλιώς καμπύλες λύσεων) ευρισκόμενες σε τρισδιάστατη ισοενεργειακή επιφάνεια $H(p_1, p_2, q_1, q_2) = H_0$, εάν η κίνηση είναι φραγμένη, έπειτα από ορισμένο χρονικό διάστημα, θα τμήσουν επανειλημμένα κάποια δεδομένη δισδιάστατη επιφάνεια, για παράδειγμα την (q_1, p_1) επιφάνεια με $q_2 = \text{σταθερό}$. Εάν υπάρχει ακόμα μία σταθερά της κίνησης («ολοκλήρωμα») πέραν της Χαμιλτονιανής, ώστε να συσχετίσουμε το q_1 με το p_1 , (οπότε και το σύστημα θα είναι ολοκληρώσιμο), τότε θα μπορούμε να γράψουμε $p_1 = p_1(q_1)$, οπότε και τα σημεία τομής με την εν' λόγω επιφάνεια θα βρίσκονται σε μια κλειστή λεία καμπύλη. Η περιγεγραμμένη περιοχή είναι ολοκληρωτική σταθερά, ενώ οι καμπύλες πάνω στη συγκεκριμένη τομή ανήκουν σε επιφάνειες που δύνανται να σχηματιστούν με το πέρασμα του χρόνου και την εξέλιξη του συστήματος στο χώρο των φάσεων. Οι επιφάνειες πάνω στις οποίες τελείται η κίνηση, και το ίχνος τους στην τομή είναι οι κλειστές καμπύλες, είναι οι λεγόμενες και αμετάβλητοι τόροι, όπου στην απλή περίπτωση που περιγράφουμε είναι δύο διαστάσεων. Στην παρούσα εργασία δε θα επεκταθούμε περαιτέρω επί του θέματος αυτού [22].

Για ασθενώς μόνο διαταραγμένα συστήματα, αυτές οι επιφάνειες των καμπύλων λύσεων για ομαλή (regular) κίνηση (επιφάνειες KAM) διατηρούνται για τις περισσότερες από τις αρχικές συνθήκες, ενώ αλλάζουν τοπολογία κοντά σε συντονισμούς (μεταξύ του αδιατάρακτου συστήματος και της διαταραχής) και σχηματίζουν «αλυσίδες νησιών». Μέσα σε αυτά τα νησιά, κάθε ένα από τα οποία αντιπροσωπεύει μια ακόμα περιοδική (ή καλλίτερα ημιπεριοδική) κίνηση για τις μεταβλητές, μπορεί να έχουμε νέα αλλαγή τοπολογίας και δημιουργία νησιών μέσα σε νησιά. Να πούμε ακόμα ότι ένας συντονισμός αντιπροσωπεύεται από μια περιοδική τροχιά όπου «επισκέπτεται» την τομή σε συγκεκριμένα λίγα μόνο σημεία, τα οποία και περικλείονται από τα νησιά. Ανάμεσα στις διατηρούμενες επιφάνειες KAM δημιουργούνται λεπτές περιοχές-φλοιοί στοχαστικότητας όπου στον ευρύτερο φασικό χώρο γεμίζουν τις περιοχές ανάμεσα στους εναπομείναντες τόρους. Καθώς η ισχύς της διαταραχής αυξάνει, οι περιοχές αυτές αναμειγνύονται και επεκτείνονται, καταστρέφοντας τις επιφάνειες KAM, με τελική κατάληξη την απόλυτα στοχαστική κίνηση.

Έτσι η μελέτη τομών Poincaré επιτρέπει την ανάδειξη άγνωστων ολοκληρωμάτων της κίνησης, αποκαλύπτει την τοπική ευστάθεια, τα όρια μετάβασης της κίνησης από ομαλή σε στοχαστική για δεδομένες περιοχές αρχικών συνθηκών, άγνωστες περιοδικότητες και πολλές άλλες ιδιότητες του συστήματος. Εδώ να σημειώσουμε ότι δεν υπάρχει κάποια γενική μέθοδος για την ανάδειξη ολοκληρωμάτων κίνησης, οπότε και η εικόνα της τομής είναι ένα χρήσιμο ποιοτικό εργαλείο.

Γενικότερα, σε σύστημα n βαθμών ελευθερίας, η τομή Poincaré έχει $2n-2$ διαστάσεις. Αυτό γιατί η κίνηση γίνεται σε φασικό χώρο $2n$ διαστάσεων και εάν βρίσκεται σε ισοενεργειακή επιφάνεια ($H=H_0$) περιορίζεται στις $2n-1$ διαστάσεις. Έτσι για σύστημα δύο β.ε. η τομή Poincaré είναι δισδιάστατη (βλέπε Appendix A, Σχ.Α), ενώ για τρεις τετραδιάστατη. Εδώ έγκειται η δυσκολία της αποτελεσματικής χρήσης της τομής Poincaré, ώστε να συλλέξουμε πληροφορίες για το υπό μελέτη σύστημα. Πράγματι ενώ υπάρχουν πάμπολλες εργασίες πάνω σε δισδιάστατα συστήματα, υπάρχουν σχετικά λίγες για $n>2$, οι περισσότερες στο πεδίο της Αστρονομίας.

Πρωτοπόρος στη μελέτη συστημάτων τριών β.ε. ήταν ο Froeschlé όπου χρησιμοποίησε τη μέθοδο της στερεοσκοπίας και των «λεπτών τομών» (slices) [134, 135, 142]. Ο στόχος του ήταν να μελετήσει τη δομή τοροειδών επιφανειών, στην τομή, που εμφανίζονταν στη «γειτονία» περιοδικών τροχιών. Παρόμοιες μέθοδοι χρησιμοποιήθηκαν από τον Κοντόπουλο και άλλους [26, 136, 137]. Εκτός της μεθόδου των λεπτών τομών, οι παραπάνω μελέτησαν επιμελώς τρισδιάστατες προβολές των τετραδιάστατων τομών του συστήματος. Συγκρίνοντας τις με κάποια άλλα δεδομένα, όπως τους εκθέτες Lyapunov, μπόρεσαν να βγάλουν συμπεράσματα σχετικά με τη μορφή των τομών και τι είδους τροχιά αντιπροσωπεύουν, αλλά και άλλες πληροφορίες, γνωστές από τα συστήματα με δύο β.ε. όπως την ύπαρξη ολοκληρωμάτων της κίνησης. Ένας άλλος τρόπος μελέτης των τομών είναι η παράθεση ποικίλων δισδιάστατων προβολών τους [138], ενώ η ίσως πληρέστερη μέθοδος είναι αυτή του «χρώματος και περιστροφής» που δίνει αποκαλυπτικά αποτελέσματα [139]. Ουσιαστικά δημιουργούμε πάλι κάποια τρισδιάστατη προβολή της τομής και χρησιμοποιούμε χρωματισμό για να αποδώσουμε τις τιμές της τέταρτης μεταβλητής (διάστασης). Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να οπτικοποιήσουμε τέσσερις διαστάσεις σε ένα τρισδιάστατο σχήμα και επιπλέον με τη βοήθεια κάποιου υπολογιστικού πακέτου μπορούμε να περιστρέψουμε την τομή, ώστε τελικά να καταλάβουμε τη μορφή της και άρα να μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την τροχιά που αντιπροσωπεύει. Η μέθοδος αυτή σε συνδυασμό με τις προηγούμενες χρησιμοποιήθηκε και από άλλους συγγραφείς [140, 141], όπως και στην παρούσα δουλειά, όπου η δημιουργία των «τετραδιάστατων» απεικονίσεων υλοποιήθηκε με το πακέτο MATLAB 8.

Αντλώντας από την εμπειρία των παραπάνω συγγραφέων, παρατηρώντας τη μορφή της τομής, μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την κατάσταση του συστήματος, σε δεδομένες αρχικές συνθήκες και τιμές παραμέτρων. Σύμφωνα με την κατηγοριοποίηση των Vrahatis et al. στο [141] οι τρισδιάστατες προβολές και οι τετραδιάστατες απεικονίσεις των τομών των τροχιών θα έχουν α) τοροειδής δισδιάστατη επιφάνεια (“rotational torus”), όπως για παράδειγμα στο Σχ. 2.11(α, β, γ, ζ, η) που φαίνεται πιο ξεκάθαρα, β) αλυσίδα δισδιάστατων τοροειδών (Σχ. 2.15 για $j=7$), γ) μορφή κλειστής κορδέλας, δύο ή μίας διάστασης (“tube-like”), όπως στο Σχ 2.22, δ) νέφος σημείων που γεμίζει τρεις ή και τέσσερις διαστάσεις, όπως στο Σχ 2.16(δ), στ’) διαφυγή προς το άπειρο (“escape”), όπως στο Σχ. 2.11(ε, ι). Στις τρεις πρώτες περιπτώσεις, ή ύπαρξη επιφανειών είναι ακριβώς αντίστοιχη με την παρουσία κλειστών καμπυλών για δύο β.ε. (καμπυλών KAM) και αντιπροσωπεύει φραγμένη κίνηση, οπότε και παραμονή των μεταβλητών εντός των ορίων που φαίνονται στην τομή. Στις περιπτώσεις (β) και (γ) βρίσκουμε την αντιστοιχία των τριών β.ε., στα «νησιά» που παρατηρούμε κοντά σε συντονισμούς, αν και επί της παρούσης δε θα ασχοληθούμε περαιτέρω με αυτό. Η περίπτωση (δ) είναι σημάδι εργοδικής κίνησης και αντιστοιχεί στις

τροχιές που στους δύο β.ε. γεμίζουν δισδιάστατο χώρο ανάμεσα από τις καμπύλες KAM. Εδώ υπάρχει και το πρόβλημα της «διάχυσης». Αυτό συμβαίνει διότι για 3 β.ε η κίνηση σε ισοενεργειακή επιφάνεια στο φασικό χώρο είναι 5 διαστάσεων, ενώ οι αντίστοιχες επιφάνειες KAM μόνο τριών (παρουσιάζουν τις δισδιάστατες τοροειδείς τομές), οπότε δεν μπορούν να εσωκλείσουν τις εργοδικές τροχιές που έχουν την τάση να καλύψουν όλο το χώρο. Αυτό σε συνδυασμό με το ότι οι τρισδιάστατες απεικονίσεις των τομών είναι προβολές τεσσάρων διατάσεων δημιουργεί αλληλοεπικαλύψεις των τομών που δυσχεραίνουν την κατανόηση τους. Όμως, το σύστημα με το οποίο θα ασχοληθούμε είναι σύστημα με τάση στη διαφυγή. Πολλές εργοδικές τροχιές δεν είναι αενάως φραγμένες και δεν τείνουν να πλησιάσουν κάθε σημείο του χώρου, αλλά είναι τέτοιες που πολύ γρήγορα διαφεύγουν με κάποιες από τις μεταβλητές να τείνουν στο άπειρο. Κάτι τέτοιο γίνεται άμεσα φανερό και είναι η περίπτωση (στ').

Για την πληρότητα, να σημειώσουμε ακόμα ότι οι δισδιάστατες επιφάνειες στην τομή φανερώνουν την ύπαρξη δύο ακόμα ολοκληρωμάτων της κίνησης, ενώ οι απεικονίσεις των εργοδικών τροχιών φανερώνουν την απώλεια τουλάχιστον ενός, χωρίς να σημαίνει ότι η τροχιά θα διαφύγει στο μέλλον. Οι τροχιές που διαφεύγουν έχουν μόνο τη Χαμιλτονιανή σα διατηρήσιμη ποσότητα.

Για μια επίδειξη δισδιάστατης τομής, όπως δημιουργήθηκε από τον κώδικα που χρησιμοποιήσαμε, δείτε το Appendix A. Εκεί αναπαριστάται η τομή του συστήματος “Toda Lattice” για συγκεκριμένη τιμή της ενέργειας.

2.4 Εφαρμογή DM σε διπλοθλαστικά υλικά

Στο παρόν κεφάλαιο καταπιανόμαστε με δύο θέματα:

- A** Εξετάζουμε την εξέλιξη των συνιστωσών του παλμού δια μέσου ενός δυναμικού συστήματος με μεταβλητές επιλεγμένες παραμέτρους αυτού.
- B** Ελέγχουμε την ισχύ της μεταβολικής μεθόδου, τη δυνατότητα της δηλαδή να περιγράψει την εξέλιξη του σύνθετου παλμού, για διάφορες τιμές της έντασης και της συχνότητας της διαταραχής.

Οι εξισώσεις (2.27) για μεταβαλλόμενη διασπορά $D_i(Z)$, όπου $i=1,2$ συμβολίζει τη γενικότερη περίπτωση όπου οι τιμές της διασπορά είναι διαφορετικές για τις δύο συνιστώσες, γράφονται

$$i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} + \frac{d_1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial T^2} + (|\tilde{u}|^2 + \beta |\tilde{v}|^2) \tilde{u} = 0 \quad (2.27\alpha)$$

$$i \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z} + \frac{d_2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial T^2} + (|\tilde{v}|^2 + \beta |\tilde{u}|^2) \tilde{v} = 0 \quad (2.27\beta)$$

όπου $d_i = D_i(Z)/\bar{D}_i$, και \bar{D}_i η μέση τιμή της διασποράς για την εκάστοτε συνιστώσα. Αν τώρα θεωρήσουμε ότι υπάρχουν απώλειες και ενίσχυση, τα φαινόμενα αυτά μπορούν να συμπεκνωθούν στην αλλαγή του μη-γραμμικού συντελεστή που στο εξής θα συμβολίζεται με “g”. Αν και θεωρούμε διάδοση χωρίς απώλειες και αργότερα θα θέσουμε ξανά $g=1$ αρχικά διατηρούμε την ορολογία χάριν της γενικότητας και της ομοιότητας με παλαιότερους συγγραφείς [2]. Απαλείφοντας το «καπελάκι» από το συμβολισμό των συνιστωσών, το τελικό σύστημα των συζευγμένων PDEs γράφεται,

$$i \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{d_1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} + g (|u|^2 + \beta |v|^2) u = 0 \quad (2.28\alpha)$$

$$i \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{d_2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial T^2} + g(|v|^2 + \beta|u|^2)v = 0 \quad (2.28\beta)$$

Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα των (2.28) είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i}{2}(u_Z u^* - u^* u) + \frac{i}{2}(v_Z v^* - v^* v) \\ & - \frac{1}{2}d_1|u_T|^2 - \frac{1}{2}d_2|v_T|^2 + \frac{1}{2}g(|u|^4 + |v|^4 + 2\beta|u|^2|v|^2) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Χρησιμοποιούμε αρχικά σαν ansatz Γκαουσιανές συναρτήσεις. Η επιλογή αυτή έχει να κάνει και με το γεγονός ότι το σολιτόνιο διαχείρισης, για ισχυρή διαχείριση, είναι πιο κοντά σε αυτή τη μορφή. Από την άλλη η ευκολία υπολογισμού κάποιων ολοκληρωμάτων, κάνει την επιλογή της γκαουσιανής πολύ βολικότερη του sech, ενώ δικαιολογείται φυσικά και από το γεγονός της ομοιότητας των δύο κατανομών. Εν τέλει, θυσιάζουμε λίγη, ακόμα, από την ποσοτική ακρίβεια για να επιτύχουμε ένα ευανάγνωστο και ακριβές ποιοτικά αποτέλεσμα. Έτσι, οι συναρτήσεις μας είναι,

$$u = A_1 \exp\left[-\left(\frac{T-T_1}{W_1}\right)^2\right] \exp\left\{i\left[-\omega_1(T-T_1) + \frac{b_1}{W_1}(T-T_1)^2\right]\right\} \quad (2.30\alpha)$$

$$v = A_2 \exp\left[-\left(\frac{T-T_2}{W_2}\right)^2\right] \exp\left\{i\left[-\omega_2(T-T_2) + \frac{b_2}{W_2}(T-T_2)^2\right]\right\} \quad (2.30\beta)$$

Όλες οι παραπάνω παράμετροι, η χρονική θέση T_i , η μετατόπιση της κεντρικής συχνότητας ω_i , οι παράμετροι του εύρους και του τερετίσματος (chirp), W_i και b_i αντίστοιχα, είναι συναρτήσεις του Z . Το ίδιο ισχύει για τα πλάτη A_i που όμως είναι μιγαδικά μεγέθη και συμπεριλαμβάνουν τη φάση ϕ_i .

Εισάγοντας τις παραπάνω στην \mathcal{L} , μπορούμε να υπολογίσουμε τη Λαγκρανζιανή όπως,

$$\begin{aligned} L_G = & \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \left(A_1^2 A_1^{*2} W_1 + A_2^2 A_2^{*2} W_2 \frac{2\sqrt{2}\beta A_1 A_1^* A_2 A_2^* e^{-\frac{2\Delta T^2}{W_1^2 + W_2^2}}}{\sqrt{\frac{1}{W_1^2} + \frac{1}{W_2^2}}} \right) \\ & - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{d_1 A_1 A_1^* [1 + W_1^2 (b_1^2 + \omega_1^2)]}{W_1} \right\} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{d_2 A_2 A_2^* [1 + W_2^2 (b_2^2 + \omega_2^2)]}{W_2} \right\} \quad (2.31) \\ & - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ 2i A_1 A_{1z}^* W_1 + A_1^* W_1 [-2i A_{1z} + A_1 (W_1 b_{1z} + 4\omega_1 T_{1z} - b_1 W_{1z})] \right\} \\ & - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ 2i A_2 A_{2z}^* W_2 + A_2^* W_2 [-2i A_{2z} + A_2 (W_2 b_{2z} + 4\omega_2 T_{2z} - b_2 W_{2z})] \right\} \end{aligned}$$

, όπου $\Delta T = T_1 - T_2$. Ο δείκτης “G” στην L συμβολίζει την επιλογή των γκαουσιανών ansatze και ο δείκτης “Z” σε κάποιες παραμέτρους συμβολίζει διαφοράση. Σε παλαιότερη εργασία, [132], είχαν χρησιμοποιηθεί και παράγοντες για τις φάσεις ϕ_1, ϕ_2 , όμως, όπως και στην παρούσα, φάνηκε ότι δεν παίζουν κανένα ρόλο στην εξέλιξη των υπολοίπων παραμέτρων.

Ακολουθώντας τώρα τη μεθοδολογία του κεφαλαίου 2.3 (μεταβολική μέθοδος) για τις μεταβολές της L_G με τις παραμέτρους όπως στην (2.23), καταλήγουμε σε εξισώσεις των παραμέτρων, οι οποίες δε περιλαμβάνουν το πλάτος, όπως δε περιλαμβάνουν και τη φάση που είναι το συζυγές του. Όπως είπαμε, ακόμα και όταν εκτελούμε τη μέθοδο βάζοντας κάποια φάση στο ansatz, καμία από τις ODEs των υπολοίπων μεγεθών δε τη περιλαμβάνει.

Αυτό είναι απεικόνιση της α-φασικότητας της αλληλεπίδρασης. Όπως θα δούμε, η εξέλιξη του πλάτους είναι άμεσα συνδεδεμένη με την εξέλιξη του εύρους, λόγω διατήρησης της «μάζας» του κάθε ρυθμού. Οι συνήθειες διαφορικές λοιπόν είναι

$$\frac{dT_1}{dZ} = -d_1\omega_1 \quad (2.32\alpha)$$

$$\frac{dT_2}{dZ} = -d_2\omega_2 \quad (2.32\beta)$$

$$\frac{dW_1}{dZ} = 2d_1b_1 \quad (2.32\gamma)$$

$$\frac{dW_2}{dZ} = 2d_2b_2 \quad (2.32\delta)$$

$$\frac{d\omega_1}{dZ} = \frac{4\beta g E_2 (T_1 - T_2)}{(W_1^2 + W_1^2)^{3/2}} e^{-\frac{2(T_1 - T_2)^2}{W_1^2 + W_1^2}} \quad (2.32\epsilon)$$

$$\frac{d\omega_2}{dZ} = -\frac{4\beta g E_1 (T_1 - T_2)}{(W_1^2 + W_1^2)^{3/2}} e^{-\frac{2(T_1 - T_2)^2}{W_1^2 + W_1^2}} \quad (2.32\sigma\tau)$$

$$\frac{db_1}{dZ} = \frac{2d_1}{W_1^3} - \frac{gE_1}{\sqrt{2}W_1^2} - \frac{2\beta g E_2 W_1 e^{-\frac{2(T_1 - T_2)^2}{W_1^2 + W_1^2}}}{(W_1^2 + W_1^2)^{3/2}} \left[1 - 4 \frac{(T_1 - T_2)^2}{W_1^2 + W_1^2} \right] \quad (2.32\zeta)$$

$$\frac{db_2}{dZ} = \frac{2d_2}{W_2^3} - \frac{gE_2}{\sqrt{2}W_2^2} - \frac{2\beta g E_1 W_2 e^{-\frac{2(T_1 - T_2)^2}{W_1^2 + W_1^2}}}{(W_1^2 + W_1^2)^{3/2}} \left[1 - 4 \frac{(T_1 - T_2)^2}{W_1^2 + W_1^2} \right] \quad (2.32\eta)$$

Ακόμα, από $A_i \frac{\delta L_G}{\delta A_i^*} - A_i^* \frac{\delta L_G}{\delta A_i} = 0$ βρίσκουμε τις παρακάτω διατηρήσιμες ποσότητες

$$E_1 = |A_1|^2 W_1 \quad (2.33)$$

$$E_2 = |A_2|^2 W_2, \quad (2.34)$$

ενώ από $\frac{\delta L_G}{\delta T_1} + \frac{\delta L_G}{\delta T_2} = 0$ βρίσκουμε ότι

$$\frac{d}{dZ} (E_1\omega_1 + E_2\omega_2) = 0 \quad (2.35)$$

Οι παραπάνω τρεις διατηρήσιμες ποσότητες παραπέμπουν στα γνωστά ολοκληρώματα της κίνησης για την NLS, αυτά των επί μέρους ενεργειών των παλμών-συνιστωσών E_u, E_v και της συνολικής ορμής P , όπως

$$E_u = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dT = \sqrt{\pi/2} |A_1|^2 W_1 \quad (2.36)$$

$$E_v = \int_{-\infty}^{\infty} |v|^2 dT = \sqrt{\pi/2} |A_2|^2 W_2 \quad (2.37)$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2} (u_T u^* - u u_T^* + v_T v^* - v v_T^*) dT \sim -(E_1\omega_1 + E_2\omega_2) \quad (2.38)$$

Ακόμα μία διατηρήσιμη ποσότητα είναι η Χαμιλτονιανή του συστήματος, που μπορεί να υπολογιστεί αφού πρώτα βρούμε τη Χαμιλτονιανή πυκνότητα, μέσω της (2.26), όπου τα q και p είναι τα u, u^* και u_z, u_z^* αντίστοιχα. Έπειτα αντικαθιστούμε τα ansatze και καταλήγουμε

$$H_8 = -\frac{1}{4} g \sqrt{\pi} \left(\frac{E_1^2}{W_1} + \frac{E_2^2}{W_2} + \frac{2\sqrt{2}\beta E_1 E_2}{\sqrt{W_1^2 + W_2^2}} e^{-\frac{2(T_1 - T_2)^2}{W_1^2 + W_2^2}} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{E_1 d_1}{W_1^2} - E_1 d_1 (b_1^2 + \omega_1^2) - \frac{E_2 d_2}{W_2^2} - E_2 d_2 (b_2^2 + \omega_2^2) \right) \quad (2.39)$$

όπου ο δείκτης «8» συμβολίζει τον αριθμό των μεταβλητών. Η Χαμιλτονική διατηρήται από το σύστημα των ODEs, μόνο όμως εάν οι παράμετροι της διασποράς είναι σταθερές, όταν δηλαδή δεν υπάρχει κάποιου τύπου διαμόρφωσης. Σε αυτή λοιπόν τη περίπτωση το σύστημα είναι Χαμιλτονικό και οι εν λόγω παράμετροι μπορούν να ειπωθούν σαν κανονικές μεταβλητές. Οι παράμετροι δεν αντιστοιχούν ακριβώς στις κανονικές μεταβλητές της Χαμιλτονιανής, όμως διαφέρουν μόνο κατά κάποιους σταθερούς πολλαπλασιαστικούς παράγοντες, οπότε μπορούμε να μιλάμε για αυτές με τέτοιους όρους. Τα ζεύγη λοιπόν των κανονικών μεταβλητών (q_i, p_i) είναι $(W_i$ και $b_i)$, και $(T_i$ και $\omega_i)$. Να σημειώσουμε ότι για τους παραπάνω υπολογισμούς χρησιμοποιήσαμε το πακέτο Mathematica 5.

Το σύστημα (2.32) έχει οκτώ μεταβλητές και είναι δύσχρηστο, οπότε, θα το περιορίσουμε έτσι ώστε να προχωρήσουμε τη μελέτη σε συγκεκριμένες περιπτώσεις σύζευξης. Αρχικά θα το περιορίσουμε στις τέσσερις εξισώσεις (περίπτωση ίσων εύρων) και μετά στις έξι (για διαφορετικά εύρη).

2.4.1 W_1 και W_2 ίσα (Γκαουσιανό ansatz)

Η πρώτη περίπτωση που θα εξετάσουμε είναι όταν οι δύο συνιστώσες έχουν ίσες ενέργειες $E_1 = E_2 = E$, ίσα πλάτη και επομένως ίσα εύρη, κάτι που αντιστοιχεί σε γωνία πόλωσης $\theta = 45^\circ$ με ίδιες συνιστώσες.

Από την (2.32ζ, η) είναι φανερό ότι οι εξισώσεις μειώνονται στις έξι, καθώς και τα b_i θα είναι ίδια. Ακόμα, λόγω της συμμετρίας στις εξισώσεις, μπορούμε να περιορίσουμε περαιτέρω τις μεταβλητές στις παρακάτω $\Delta T = T_1 - T_2$ και $\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$. Τέλος θεωρούμε $d_1 = d_2 = d$, καθώς οι συνιστώσες έχουν την ίδια κεντρική συχνότητα. Οπότε το σύστημα διαμορφώνεται

$$\frac{d\Delta T}{dZ} = -d\Delta \omega \quad (2.40\alpha)$$

$$\frac{dW}{dZ} = 2db \quad (2.40\beta)$$

$$\frac{d\Delta \omega}{dZ} = \frac{8\beta g E \Delta T}{2\sqrt{2}W^3} e^{-\left(\frac{\Delta T}{W}\right)^2} \quad (2.40\gamma)$$

$$\frac{db}{dZ} = \frac{2d}{W^3} - \frac{gE}{\sqrt{2}W^2} - \frac{2\beta g E e^{-\left(\frac{\Delta T}{W}\right)^2}}{2\sqrt{2}W^2} \left[1 - 2\left(\frac{\Delta T}{W}\right)^2 \right] \quad (2.40\delta)$$

και η Χαμιλτονιανή του γράφεται,

$$H_4 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(Edb^2 + \frac{E_r}{2} d\Delta \omega^2 + \frac{Ed}{W^2} - \frac{gE^2}{\sqrt{2}W} - \frac{\beta g E^2 e^{-\frac{\Delta T^2}{W^2}}}{\sqrt{2}W} \right), \quad (2.41)$$

όπου $E_r = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$ είναι η «ανοιγμένη μάζα» τους συστήματος. Το μοναδικό στάσιμο σημείο

του παραπάνω συστήματος είναι: $\Delta T_{\sigma\sigma} = 0$, $\Delta\omega_{\sigma\sigma} = 0$, $b_{\sigma\sigma} = 0$, $W_{\sigma\sigma} = \frac{2^{3/2}}{Eg(1+\beta)}$,

γραμμικοποιώντας γύρω από αυτό καταλήγουμε στο σύστημα

$$\frac{d\Delta T}{dZ} = -d\Delta\omega \quad (2.42\alpha)$$

$$\frac{dW}{dZ} = 2db \quad (2.42\beta)$$

$$\frac{d\Delta\omega}{dZ} = \frac{g^4 E^4 \beta (1+\beta)^3}{8} \Delta T \quad (2.42\gamma)$$

$$\frac{db}{dZ} = -\frac{g^4 E^4 (1+\beta)^4}{32} \left(W - \frac{2^{3/2}}{gE(1+\beta)} \right) \quad (2.42\delta)$$

Οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι φανταστικές, οπότε το σ.σ. είναι «κέντρο». Επιπλέον, οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος, παριστάμενες ως ω_{q_i} υπολογίζονται

$$\omega_{\Delta T} = \sqrt{\frac{g^4 E^4 \beta (1+\beta)^3}{8d^2}}, \quad \omega_w = \frac{g^2 E^2 (1+\beta)^2}{4d} \quad (2.43)$$

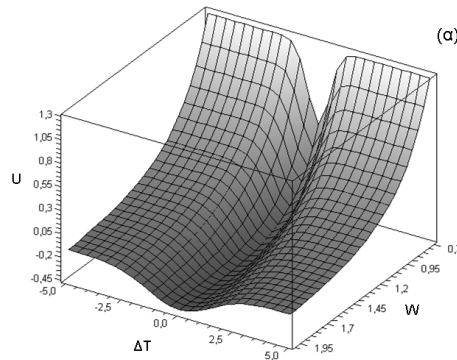
Οι ιδιοσυχνότητες παίζουν πρωταρχικό ρόλο στη μελέτη μας, καθώς η συχνότητα της διαταραχής θα δοκιμάζεται πάντα σε σύγκριση με αυτές.

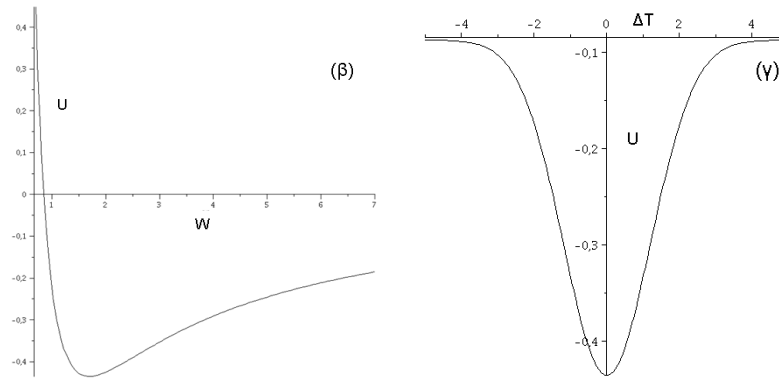
Από τη Χαμιλτονιανή μπορούμε να διακρίνουμε τη μορφή ενός δυναμικού U υπεύθυνου για τη ταυτόχρονη διάδοση των συνιστωσών

$$U = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{Ed}{W^2} - \frac{\sqrt{\pi} g E^2 (1+\beta)}{2W} e^{-\frac{\Delta T^2}{w^2}} \quad (2.44)$$

Το πηγάδι δυναμικού είναι Kepler για τη μεταβλητή W , αλλά αντεστραμμένη γκαουσιανή για το ΔT . Ουσιαστικά, το πρόβλημα αυτό ομοιάζει με τη κίνηση δύο σωματιδίων σε δυναμικό Kepler, ενώ η αλληλεπίδραση τους περιγράφεται από την αντεστραμμένη γκαουσιανή. Η μεταβολή της διασποράς, αντιστοιχεί σε μεταβολή στη μάζα των σωματιδίων.

Για να φέρουμε το πρόβλημα σε πιο συγκεκριμένη μορφή, ορίζουμε τιμές παραμέτρους που διέπουν το σύνολο τη μελέτη μας. Έτσι, καθώς δεν υπάρχουν απώλειες και ενίσχυση, $g=1$, σε ένα με ισχυρή διπλοθλαστικότητα $\beta=2/3$ και η ενέργεια των παλμών θα είναι $E=1$. Η τιμή αυτή είναι πλασματική καθώς οι τιμές των E , $W_{\sigma\sigma}$ και H_4 συνδέονται άμεσα. Επίσης, για να ξεκινήσουμε από το αδιατάρακτο σύστημα της σταθερής διασποράς, αρχικά θέτουμε $d=1$. Με τις παραπάνω τιμές, η μορφή του δυναμικού είναι όπως στο σχήμα 2.5.



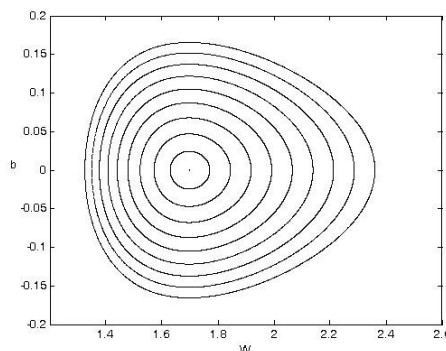


Σχήμα 2.5: (α) Μορφή του δυναμικού παγίδευσης U για $g=1$, $\beta=2/3$, $E=1$ και $d=1$, (β) για $\Delta T=0$, (γ) για $W = W_{\sigma\sigma}$.

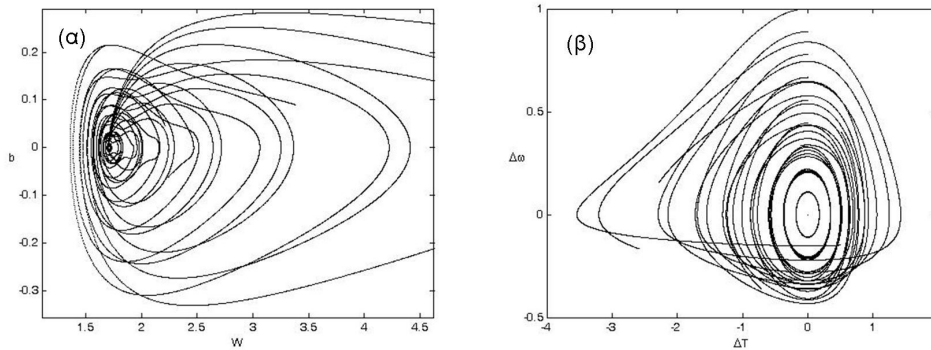
Η τιμή της Χαμιλτονιανής (ενέργειας του συστήματος) στο σ.σ. είναι και η ελάχιστη δυνατή, εκεί που το σύστημα βρίσκεται στον «πάτο του πηγαδιού» και οι δύο συνιστώσες διαδίδονται, θεωρητικά, αδιατάρακτες. Για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων η τιμή αυτή είναι $H_{\sigma\sigma}=-0.4351785198$. Ακόμα, $W_{\sigma\sigma}=1.697056274$ και $\omega_W=0.6944$, $\omega_{\Delta T}=0.6211$ είναι οι συχνότητες ταλαντώσεων πολύ κοντά στο σ.σ. ενώ όσο απομακρυνόμαστε από αυτό, οι συχνότητες θα μικραίνουν [22].

Είναι γνωστό από την κλασική μηχανική ότι όταν η ενέργεια του συστήματος έχει τιμή που ξεπερνά το πηγάδι δυναμικού τότε το σωματίδιο διαφεύγει αυτού [20]. Στο παρελθόν έχουν γίνει σχετικές εργασίες για την ελάχιστη διαφορά στις ταχύτητες ομάδας που προκαλεί διαφυγή, οπότε και διαχωρισμό του παλμού στις συνιστώσες του [110, 132]. Αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ είναι η μορφή της διαταραχής, η οποία δύναται να οδηγήσει το σύστημα σε διαφυγή, τη στιγμή που αδιατάρακτο ($d=1$) θα κρατιόταν παγιδευμένο και άρα στο επίπεδο της οπτικής ο παλμός, διαδιδόμενος, θα διατηρούσε την υπόστασή του.

Αρχικά ας δούμε μερικές αναπαραστάσεις του φασικού χώρου του συστήματος στο σχήμα 2.6 και 2.7



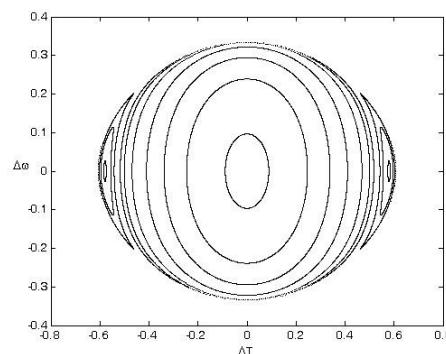
Σχήμα 2.6: Προβολή στο επίπεδο W - b του φασικού χώρου του συστήματος (2.42) για αρχικές συνθήκες, $W: W_{\sigma\sigma} - 2.36$ και τα υπόλοιπα όπως το σ.σ.



Σχήμα 2.7: Προβολή στο επίπεδο (α) $W-b$ και (β) $\Delta T-\Delta\omega$, του φασικού χώρου του συστήματος (2.42) για αρχικές συνθήκες, $\Delta\omega: 0-1$ και τα υπόλοιπα όπως το σ.σ.

Οι τιμές των αρχικών συνθηκών είναι τέτοιες ώστε να διατηρείται η παγίδευση. Βλέπουμε ότι ξεκινώντας μακριά από το σ.σ. στο ζεύγος $W-b$, έχει ως αποτέλεσμα περιοδικές τροχιές στο επίπεδο αυτών των μεταβλητών, ενώ το ζεύγος $\Delta T-\Delta\omega$ παραμένει στην αρχική του τιμή (σχήμα 2.6). Αντίθετα, εάν μετατοπίσουμε τις αρχικές συνθήκες στο επίπεδο $\Delta T-\Delta\omega$ η κίνηση είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη με το σύστημα να εκτελεί ημί-περιοδικές τροχιές καθώς ταλαντώνεται και στα δύο επίπεδα. Γι' αυτό το λόγο στο σχήμα 2.7 δεν βλέπουμε κλειστές τροχιές, αλλά κάποιες που φαίνεται να τέμνονται με άλλες. Στην πραγματικότητα αυτό είναι σημάδι μιας πολυδιάστατης κίνησης, όπου η απεικόνιση $W-b$ αποτελεί απλώς προβολή του φασικού χώρου που είναι τεσσάρων διαστάσεων. Όταν προσθέσουμε και τη μεταβολή στη διασπορά, το σύστημα θα πρέπει να μετατραπεί σε ένα τριών β.ε. από δύο που είναι, αυτό σημαίνει έξι εξισώσεις και εξαδιάστατο φασικό χώρο. Η απεικόνιση του χώρου φάσεων γίνεται τότε αδύνατη.

Αντί για αυτό, θα κατασκευάσουμε τομές Poincaré με τον τρόπο που αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 2.3. Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη της μεταβλητής διασποράς, απεικονίζουμε στο σχήμα 2.8 την απεικόνιση της τομής για $b=0$. Οι αρχικές συνθήκες ($\Delta\omega$ και W) μεταβάλλονται έτσι ώστε η Χαμιλτονιανή να διατηρείται σταθερή και ίση με -0.4 , οπότε σε τετραδιάστατο φασικό χώρο, η τομή είναι διδιάστατη. Από το σχήμα παρατηρούμε πως σε αυτό το περιορισμένο εύρος αρχικών συνθηκών οι τροχιές είναι ημιπεριοδικές, εκτός από ένα συντονισμό 1:2, και φραγμένες, κάτι αναμενόμενο.



Σχήμα 2.8: Τομή Poincaré για $b=0$, χωρίς διαταραχή ($d=1$).

Όταν εισάγουμε κάποια περιοδική μεταβολή στη διασπορά, το d παύει να είναι σταθερό και εξαρτάται από το Z . Το σύστημα παύει να είναι αυτόνομο και η Χαμιλτονιανή δε διατηρείται. Για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε την ανάλυση μας, το σύστημα θα μετατραπεί σε αυτόνομο με ένα β.ε. επιπλέον και θα εισάγουμε νέα Χαμιλτονιανή που θα διατηρείται κατά τη διάδοση, ενώ ο χώρος φάσεων, τριών β.ε., ονομάζεται «εκτεταμένος»[22]. Οι νέες μεταβλητές είναι $q_3=Z$ και $p_3=-H_4$ και το σύστημα γίνεται πλέον

$$\frac{d\Delta T}{dZ} = -d(q_3)\Delta\omega \quad (2.45\alpha)$$

$$\frac{dW}{dZ} = 2d(q_3)b \quad (2.45\beta)$$

$$\frac{d\Delta\omega}{dZ} = \frac{8\beta gE\Delta T}{2\sqrt{2}W^3} e^{-\left(\frac{\Delta T}{W}\right)^2} \quad (2.45\gamma)$$

$$\frac{db}{dZ} = \frac{2d(q_3)}{W^3} - \frac{gE}{\sqrt{2}W^2} - \frac{2\beta gEe^{-\left(\frac{\Delta T}{W}\right)^2}}{2\sqrt{2}W^2} \left[1 - 2\left(\frac{\Delta T}{W}\right)^2 \right] \quad (2.45\delta)$$

$$\frac{dq_3}{dZ} = 1 \quad (2.45\epsilon)$$

$$\frac{dp_3}{dZ} = -\frac{dH_4}{dZ} \quad (2.45\sigma)$$

Και η νέα Χαμιλτονιανή θα είναι $H'_4 = H_4(q_3) + p_3 = 0$.

Α) Ημιτονοειδής διαμόρφωση

Ξεκινάμε τη μελέτη με ομαλή διαταραχή, όπως

$$d = 1 + \varepsilon \sin(k_0 Z) \quad (2.46)$$

, καθώς ένας από τους στόχους μας είναι ο έλεγχος της εγκυρότητας της μεταβολικής μεθόδου, η παραπάνω διαταραχή προσφέρεται για γρηγορότερους υπολογισμούς. Η τετραγωνική μεταβολή παρουσιάζεται παρακάτω.

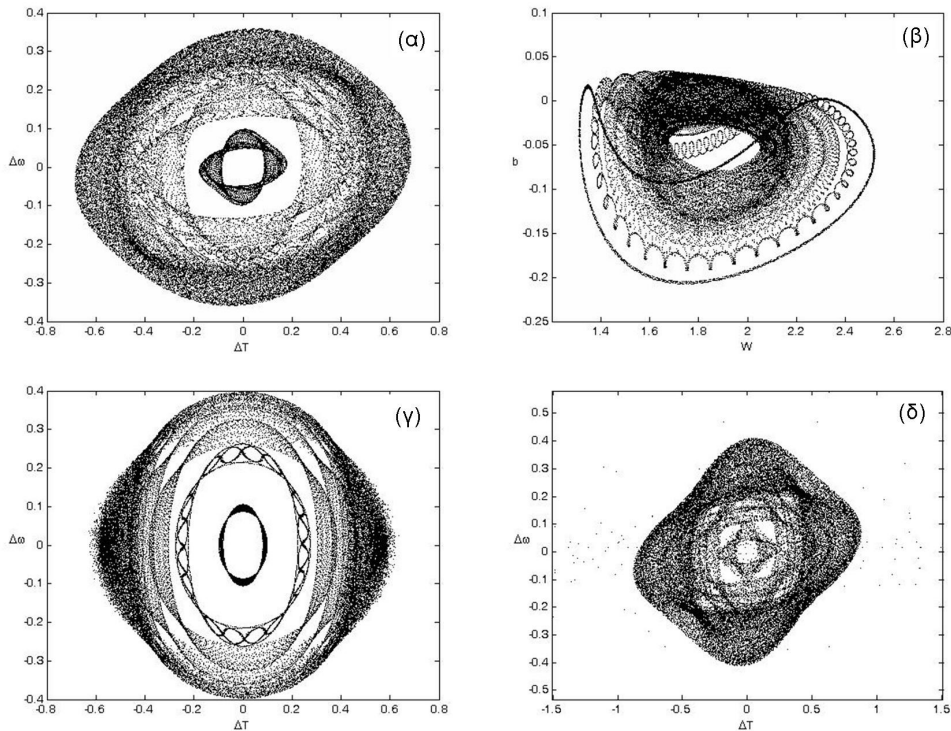
Αρχικά θα κρατήσουμε τις αρχικές συνθήκες περιορισμένες έτσι ώστε όχι μόνο $H'_4 = 0$, αλλά και η αρχική τιμή της H_4 να είναι -0.4 , όπως στα παραδείγματα του αδιατάρακτου συστήματος. Οι αρχικές συνθήκες φαίνονται στον Πίνακα1, όπου j είναι ο αριθμός της τροχιάς και $Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3$ είναι αρχικές τιμές για τα $\Delta T, W, q_3, \Delta\omega, b$ και p_3 αντίστοιχα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

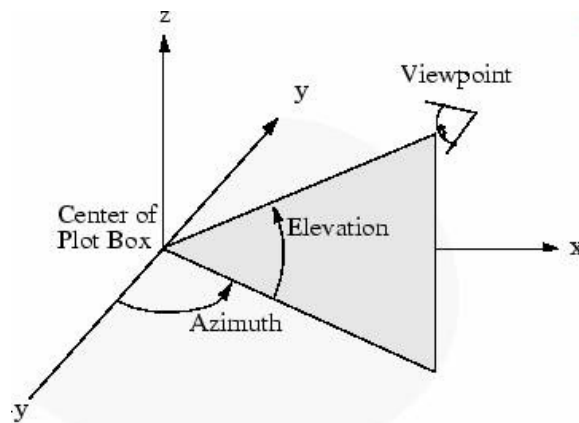
j=0	Q3=0.000000	P3=0.400000	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=-0.335073
j=1	Q3=0.000000	P3=0.400000	Q2=1.770717	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=-0.331467
j=2	Q3=0.000000	P3=0.400000	Q2=1.844377	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=-0.321578
j=3	Q3=0.000000	P3=0.400000	Q2=1.918038	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=-0.306329
j=4	Q3=0.000000	P3=0.400000	Q2=1.991698	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=-0.286144
j=5	Q3=0.000000	P3=0.400000	Q2=2.065358	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=-0.260975
j=6	Q3=0.000000	P3=0.400000	Q2=2.139019	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=-0.230173
j=7	Q3=0.000000	P3=0.400000	Q2=2.212679	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=-0.191969
j=8	Q3=0.000000	P3=0.400000	Q2=2.286340	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=-0.141454
j=9	Q3=0.000000	P3=0.400000	Q2=2.360000	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=-0.051740

Θέτουμε αρχικά $k_0=0.61$, τιμή πολύ κοντά στην $\omega_{\Delta T}$. Στο σχήμα 2.9 φαίνονται δισδιάστατες προβολές της τομής για τις αρχικές τιμές του Πίνακα1. Τα (α), (β), (δ) είναι τομές που λαμβάνονται όταν η $\sin(k_0 Z) = 0$ (μόνο όταν $k_0 Z = 2n\pi$, n ακέραιος), ενώ η (γ) είναι τομή για $b=0$ και παρατίθεται για λόγους σύγκρισης. Παρατηρούμε ότι οι τομές των δέκα τροχιών είναι σχεδόν αδύνατο να διακριθούν καθώς διπλώνουν στον εαυτό τους, συχνά δίνοντας την αίσθηση ζώνης σημείων, και αλληλεπικαλύπτονται δίνοντας την αίσθηση της επαφής. Στην πραγματικότητα οι τομές είναι ξεχωριστές στον τετραδιάστατο χώρο τους και η μορφή τους μπορεί να είναι ξεκάθαρα κυλινδρική ή τοροειδής, κάτι πολύ δύσκολο να

παρατηρηθεί στις δισδιάστατες προβολές. Η αλληλοεπικάλυψη εντείνεται για μεγαλύτερες τιμές της διαταραχής, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.9 (δ). Μερικά σημεία είναι μακριά από τα υπόλοιπα, σημάδι ότι κάποια ή κάποιες τροχιές διαφεύγουν.



Σχήμα 2.9: Προβολές των τομών για αρχικές συνθήκες (α.σ.) του Πίνακα 1 για $k_0=0.61$ και $\varepsilon=0.01$ (α,β,γ), $\varepsilon=0.05$ (δ). Στα (α,β,δ) η τομή είναι για $\sin(k_0 Z) = 0$, στο (γ) για $b=0$. Οι τομές έγιναν για διάδοση μέχρι το $Z_{\max}=50000$, ενώ $H'_4 = 0$ διαρκώς.

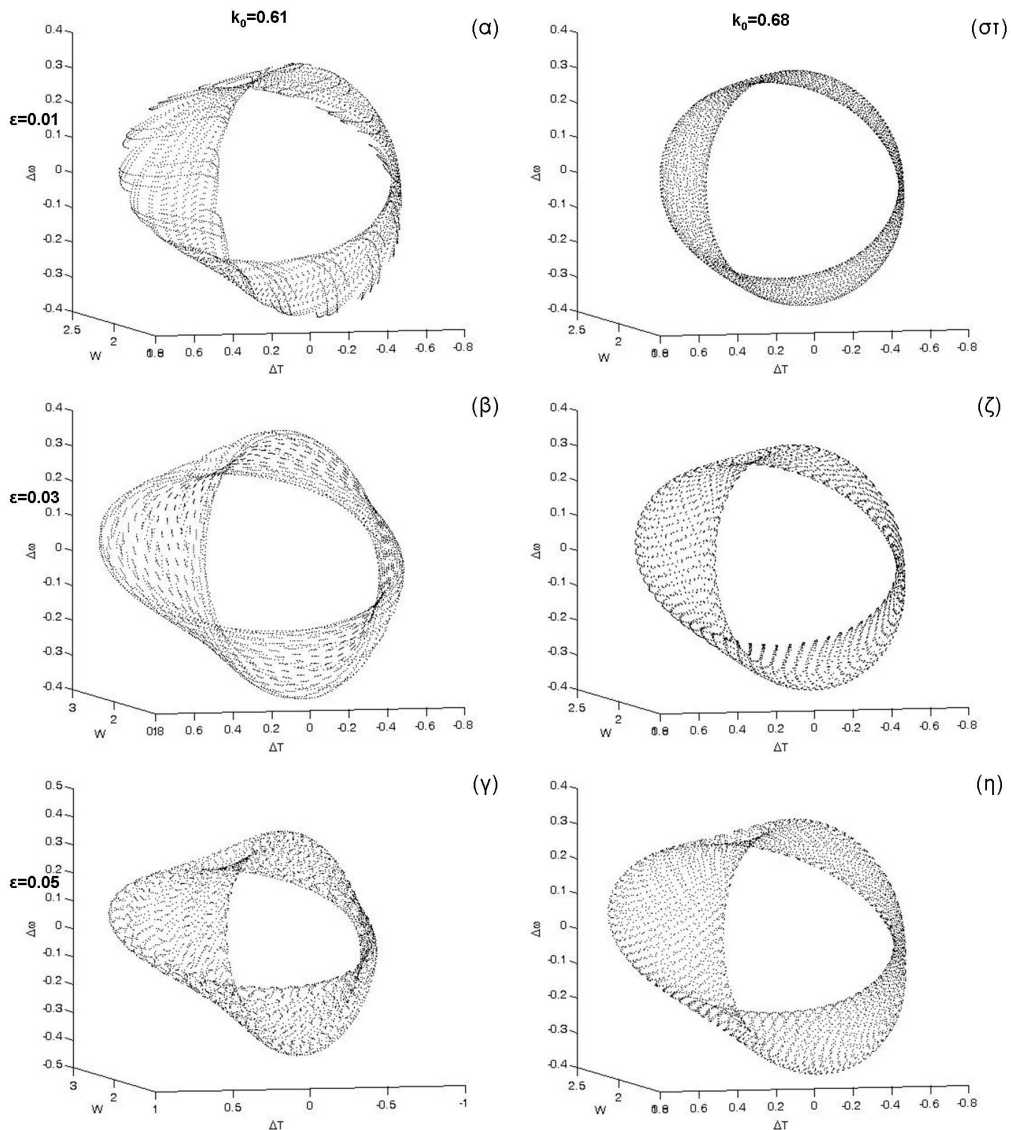


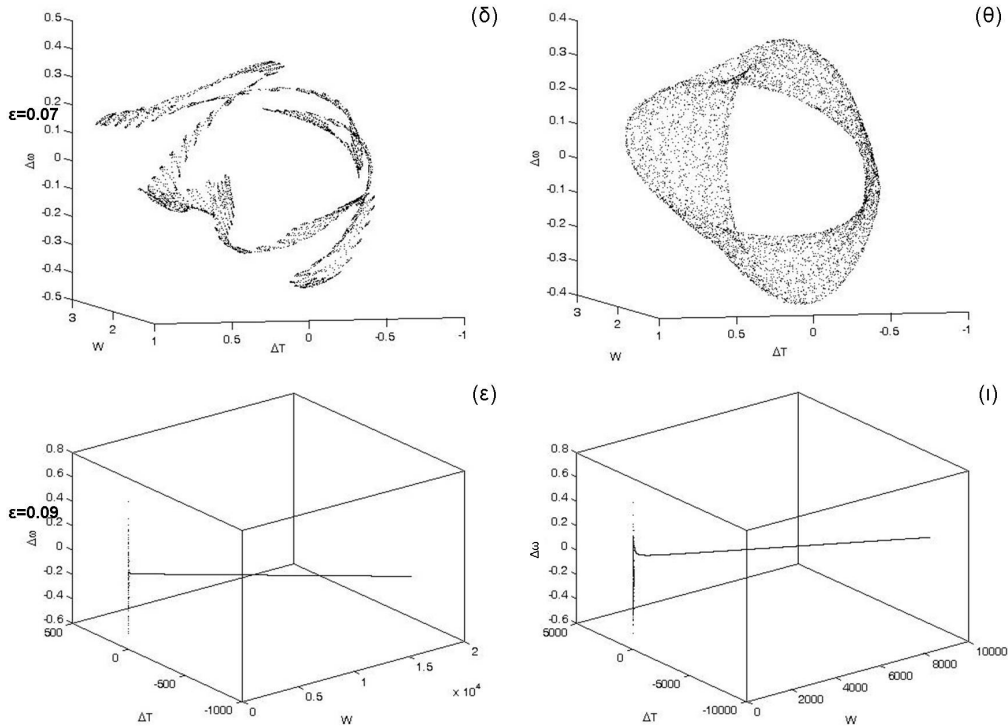
Σχήμα 2.10: Αναπαράσταση της γωνίας θέασης των τρισδιάστατων σχημάτων, με αζιμούθιο και ανύψωση, (az,el). Σχήμα από τη «βοήθεια» του MATLAB 7.

Για να αποκτήσουμε σαφέστερη εικόνα της συμπεριφοράς του συστήματος καταφεύγουμε σε τρισδιάστατες αναπαραστάσεις των τομών. Ο χώρος των τομών όμως είναι τετραδιάστατος, οπότε χρειάζεται η μελέτη τρισδιάστατων προβολών σε διαφορετικές διαστάσεις. Ευτυχώς το πρόβλημα αυτό έχει καταδειχθεί στην υπάρχουσα βιβλιογραφία έτσι ώστε οι τρισδιάστατες προβολές να είναι συχνά αρκετές για να διαγνώσουμε την κατάσταση του συστήματος και την πιθανή του τάση για διαφυγή (βλέπε κεφάλαιο 2.3 και [134-136, 139-142]). Ένα άλλο θέμα είναι ότι οι τρισδιάστατοι σχηματισμοί δεν μπορούν να

απεικονιστούν στο χαρτί όπως στην οθόνη του υπολογιστή, όπου υπάρχει η δυνατότητα περιστροφής. Για την ανάγκη της απεικόνισης διαλέγουμε κάποιες συγκεκριμένες γωνίες θέασης των τομών και καταφεύγουμε σε περιληπτική περιγραφή. Οι γωνίες είναι αζιμούθιο και ανύψωση και στο εξής θα παραθέτονται σαν (az, el), ενώ στο Σχ. 2.10 φαίνεται αναπαράσταση τους από σχήμα του MATLAB 7 που χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία των απεικονίσεων. Για περαιτέρω κατανόηση, σε κάποιες περιπτώσεις παρακάτω, χρησιμοποιούνται και τετραδιάστατες απεικονίσεις.

Αρχικά θα εξετάσουμε το αποτέλεσμα σταδιακά ισχυρότερης διαταραχής. Καθώς το αδιατάρακτο σύστημα έχει δύο χαρακτηριστικές συχνότητες (ω_w , $\omega_{\Delta T}$), δοκιμάζουμε για συχνότητα διαταραχής είτε πολύ κοντά στη μία, είτε στην άλλη, τουτέστιν για $k_0=0.61$ και 0.68 , για τις αρχικές συνθήκες του ΠΙΝΑΚΑ 1. Στο σχήμα 2.11 απεικονίζονται τα οι τρισδιάστατες προβολές των τομών (στο $\sin(k_0 Z) = 0$) για την τροχιά $j=4$ (ΠΙΝΑΚΑΣ 1), που έχει ενδιάμεσες αρχικές τιμές. Οι τιμές της διαταραχής ξεκινούν από 0.01 και φτάνουν στο 0.09 .

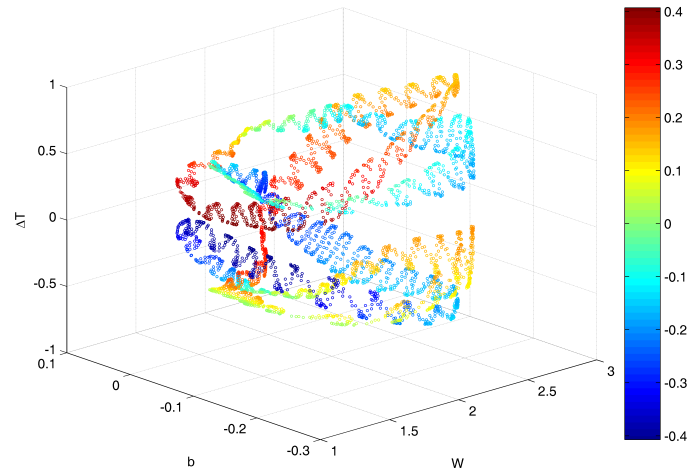




Σχήμα 2.11: Τρισδιάστατες προβολές, $(\Delta\omega-\Delta T-W)$, των τομών (στο $\sin(k_0 Z) = 0$) για την τροχιά $j=4$, με συχνότητα διαταραχής (α-ε) $k_0=0.61$, (στ-ι) $k_0=0.68$. Οι τιμές της έντασης αναγράφονται αριστερά εκάστου οριζόντιου ζεύγους. $Z_{\max}=50000$, γωνία θέασης $(255,5)$.

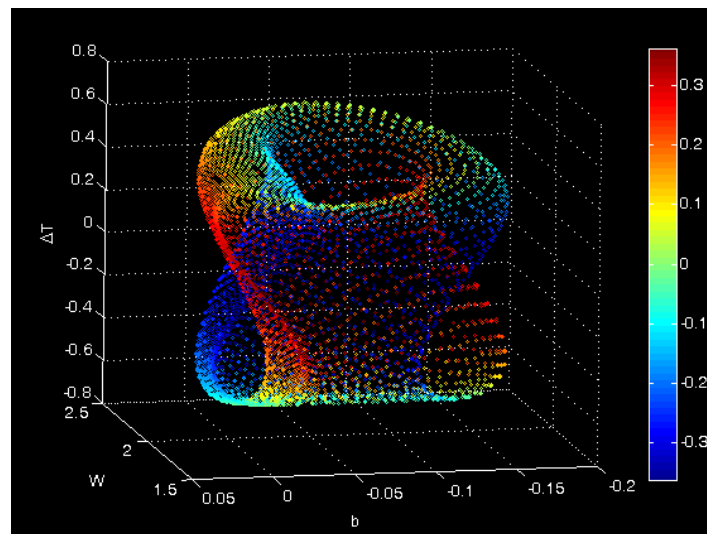
Παρατηρώντας το παραπάνω σχήμα καταλαβαίνει κανείς πως οι δύο συχνότητες διαταραχής δεν επιδρούν ιδιαίτερος διαφορετικά στην εξέλιξη του συστήματος. Αυτό οφείλεται στο ότι οι δύο χαρακτηριστικές συχνότητες, που οι παραπάνω τιμές προσεγγίζουν, είναι κοντινές. Στο εξής θα διαλέγουμε σα βάση της μελέτης μας μία εκ των δύο συχνοτήτων. Απεναντίας, η ένταση της διαταραχής επιδρά καταλυτικά στην εξέλιξη. Για μικρές τιμές του ε οι τομές είναι εν γένη τοροειδείς, εκτός ίσως από το (στ) που μοιάζει κυλινδρικό. Οι τοροειδείς σχηματισμοί είναι ουσιαστικά αναδιπλωμένοι κύλινδροι, που δίνουν την αίσθηση των τριών διαστάσεων, αλλά είναι δισδιάστατα σχήματα. Όσο αυξάνεται το ε , οι τόροι επεκτείνονται σε μεγαλύτερες τιμές των μεταβλητών και γίνονται παχύτεροι. Διαφοροποίηση παρατηρείται στο (δ), όπου ο τόρος γίνεται κορδέλα, πάλι δύο διατάσεων. Όπως αναφέρθηκε στο Κεφ2.3, αυτό είναι σημάδι εγγύτητας σε συντονισμό. Ακόμα στο (θ) φαίνεται πως ο ξεκάθαρος δισδιάστατος χαρακτήρας του σχήματος χάνεται, σημάδι ότι η κίνηση γίνεται πιο εργοδική. Μικρή αύξηση της διαταραχής το κάνει πιο φανερό, ενώ ακόμα μεγαλύτερη αύξηση πιθανό να οδηγήσει σε διαφυγή το σύστημα μας, όπως και γίνεται (ε και ι).

Στο σχήμα 2.12 αναπαρίσταται ξανά η περίπτωση (δ) του σχήματος 2.11 σε όλες (τέσσερις) τις διαστάσεις της τομής. Η τέταρτη διάσταση, το $\Delta\omega$, παρίσταται με τη χρήση χρώματος. Γίνεται έτσι τελείως φανερό ότι η τομή είναι μια κλειστή δισδιάστατη (ίσως και μονοδιάστατη καθώς έχει πολύ μικρό πάχος) καμπύλη που δεν τέμνει πουθενά τον εαυτό της. Το σύστημα βρίσκεται κοντά σε περίπλοκο συντονισμό, οι παράμετροι ταλαντώνονται, αλλά η δυναμική ευστάθεια διατηρείται.



Σχήμα 2.12: Τετραδιάστατη τομή (ΔT - b - W και $\Delta\omega$), στο $\sin(k_0 Z) = 0$, για την τροχιά $j=4$ (ΠΙΝΑΚΑΣ 1) με $\varepsilon=0.07$, $k_0=0.61$. Η κλίμακα του χρώματος συμβολίζει τις τιμές του $\Delta\omega$, την τέταρτη διάσταση. $Z_{\max}=50000$, γωνία θέασης (165,15).

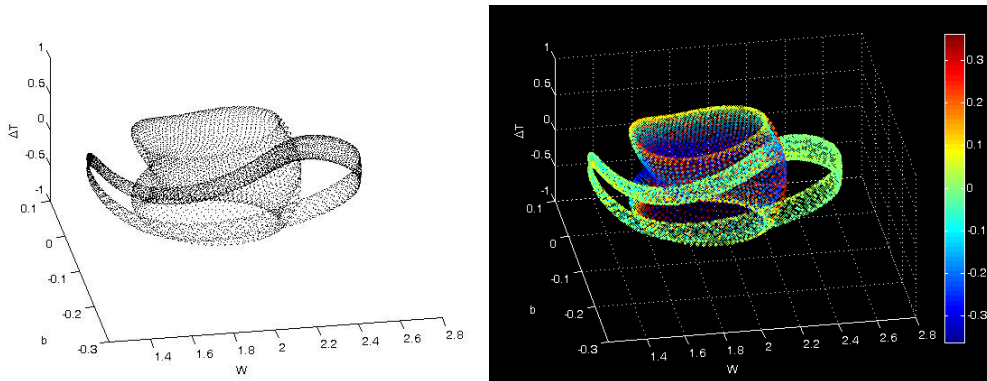
Μία ακόμα τετραδιάστατη τομή φαίνεται στο σχήμα 2.13. Είναι η τομή της τροχιάς $j=0$ για $\varepsilon=0.01$ και $k_0=0.61$. Καθώς η διάσταση του $\Delta\omega$ παρίσταται με χρώμα γίνεται φανερό ότι έχουμε μια διδιάστατη επιφάνεια η οποία δεν αναδιπλώνεται στον εαυτό της στις τέσσερις διαστάσεις, καθώς οι επιφάνειες που φαινομενικά ακουμπούν έχουν διαφορετικό χρώμα. Η τομή αποκαλύπτει βέβαια κίνηση ημιπεριοδική και περιορισμένη.



Σχήμα 2.13: Τετραδιάστατη τομή (ΔT - b - W και $\Delta\omega$) για την τροχιά $j=2$ (ΠΙΝΑΚΑΣ 1) με $\varepsilon=0.01$, $k_0=0.61$. Η κλίμακα του χρώματος συμβολίζει τις τιμές του $\Delta\omega$, την τέταρτη διάσταση. Γωνία θέασης (267,19).

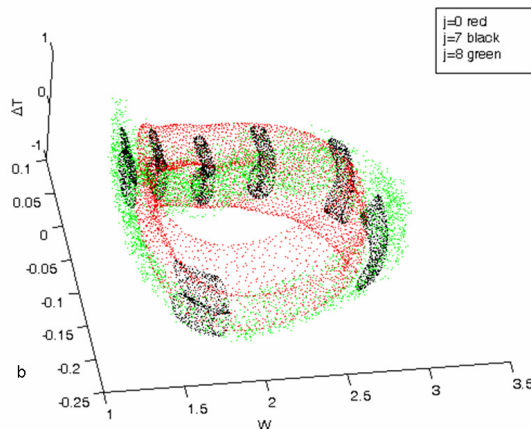
Οι διδιάστατες προβολές στο σχήμα 2.9 δίνουν την εντύπωση της επαφής μεταξύ τομών διαφορετικών τροχιών. Η ίδια εντύπωση διατηρείται και στην περίπτωση απεικόνισης πολλών τρισδιάστατων προβολών στους ίδιους άξονες. Στο σχήμα 2.14, απεικονίζουμε δύο τομές των $j=0$, και $j=9$. Η τομή της πρώτης είναι ένα κυλινδροειδές, ενώ της $j=9$ ένα διδιάστατο τοροειδές. Η μεταξύ τους τομή δεν είναι πραγματική τομή, αλλά φαινόμενη, όπως γίνεται φανερό από την τετραδιάστατη απεικόνιση. Μία ακόμα παρατήρηση σχετική με τη μορφή της τομής είναι πως η απομάκρυνση των α.σ. του W από το σ.σ. έχει παρόμοιο

αποτέλεσμα με την αύξηση της διαταραχής. Η εμφανέστερη τροποποίηση των τομών είναι ότι από κυλινδροειδείς γίνονται πιο περίπλοκες, συνηθέστερα τοροειδείς.



Σχήμα 2.14: Τρισδιάστατη και τετραδιάστατη (το b είναι η κλίμακα χρώματος) απεικόνιση τομών για τις τροχιές $j=0$ και 9 , για $\varepsilon=0.01$ και $k_0=0.61$. (350,45).

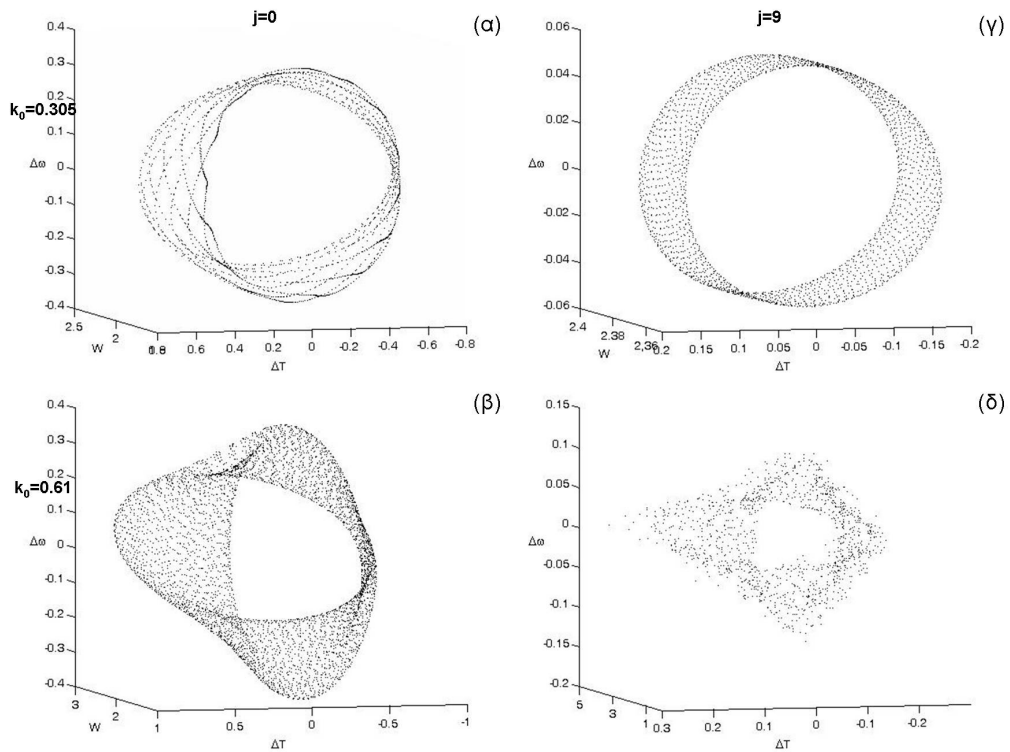
Συνθέτοντας τα παραπάνω συμπεράσματα, μπορούμε να κατανοήσουμε καλλίτερα το σχήμα 2.15. Βλέπουμε τρισδιάστατες προβολές τομών για τρεις τροχιές, τη $j=0$ με κόκκινο, τη $j=7$ με μαύρο και τη $j=8$ με πράσινο, για $\varepsilon=0.05$ και $k_0=0.61$. Κατ' αρχάς, για αυτή τη τιμή του ε ακόμα και η $j=0$ δεν έχει κυλινδρική τομή, αλλά τοροειδή. Για δεδομένες α.σ. παρατηρούμε την ύπαρξη περίπλοκου συντονισμού, όπως μαρτυρούν τα δισδιάστατα νησιά της $j=7$. Συνήθως οι μεγάλοι συντονισμοί είναι κοντά σε χαοτικές περιοχές. Αυτό επιβεβαιώνεται καθώς για μικρή αλλαγή των α.σ. ($j=8$) τα σημεία της τομής δε βρίσκονται πλέον σε επιφάνεια, αλλά γεμίζουν τρισδιάστατο χώρο. Αυτό είναι σημάδι εργοδικότητας και ένδειξη ότι πιθανώς βρισκόμαστε κοντά σε διαφυγή, που πράγματι συμβαίνει για $j=9$ (δε φαίνεται στο σχήμα).



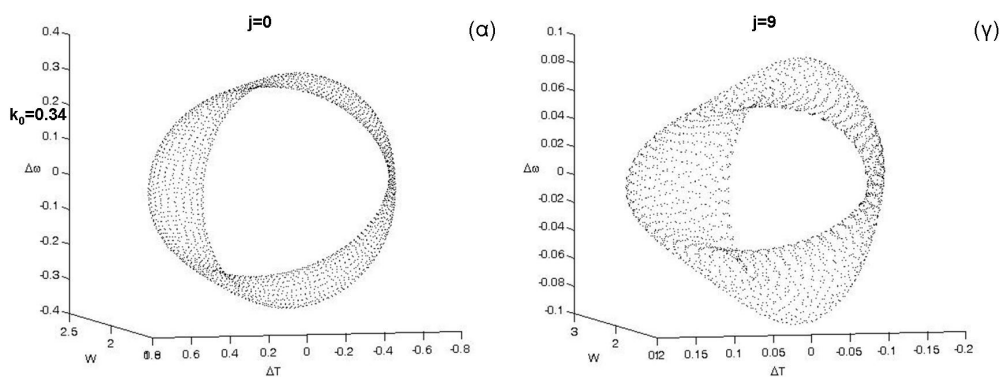
Σχήμα 2.15: Τρισδιάστατη προβολή τομών των $j=0$, $j=7$, $j=8$, για $\varepsilon=0.05$ και $k_0=0.61$. (315,84).

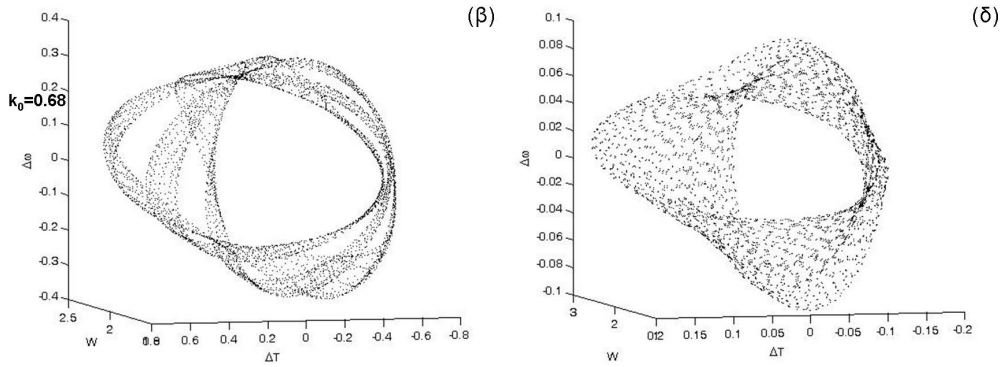
Σαν επόμενο βήμα, θα εξετάσουμε την επίδραση της συχνότητας διαταραχής στο σύστημα, ή, με όρους οπτικής, του μήκους διαμόρφωσης. Δοκιμάσαμε διαταραχή για $\varepsilon=0.05$ και με k_0 , 0.61 ($\sim \omega_{\Delta T}$), 0.305 ($\sim \omega_{\Delta T}/2$), αλλά και 0.68 ($\sim \omega_W$) και 0.34 ($\sim \omega_W/2$). Οι τομές για τις τροχιές $j=0$ και $j=9$ (μεγάλο P1 και μεγάλο Q2 αντίστοιχα) φαίνονται στα σχήματα 2.16 και 2.17. Είναι φανερό 'το οι μικρότερες συχνότητες επηρεάζουν λιγότερο δραματικά τις τροχιές. Στα σχήματα 2.16(α, γ) και 2.17(α) οι τομές είναι κυλινδρικές, αν και στο σχήμα 2.17(γ) είναι τοροειδής. Για συχνότητες όμως πολύ κοντά στις χαρακτηριστικές οι τροχιές

διαταράσσονται και γίνονται έντονα τοροειδείς, ενώ στο σχήμα 2.16(δ) η τομή γεμίζει τρισδιάστατο χώρο, ενώ έχουν κρατηθεί σημεία μόνο μέχρι το $Z=12000$ καθώς λίγο μετά η τροχιά οδηγείται σε διαφυγή.



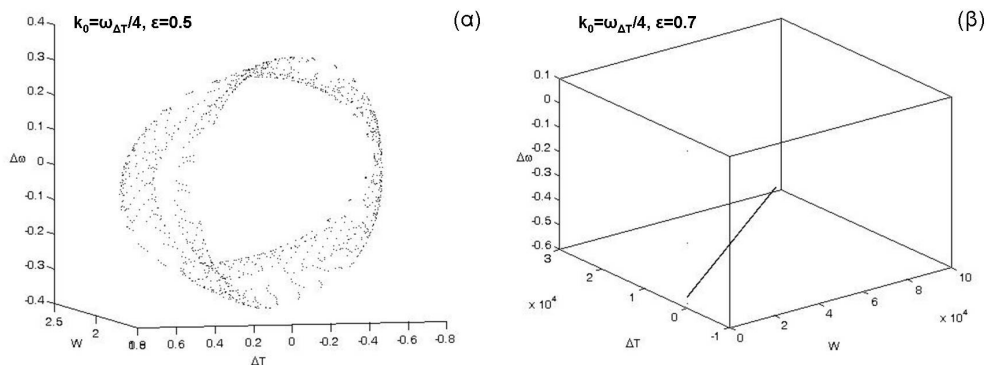
Σχήμα 2.16: Τρισδιάστατες προβολές, $(\Delta\omega-\Delta T-W)$, των τομών (στο $\sin(k_0 Z) = 0$) για τις τροχιές $j=0$ (α, β) και $j=9$ (γ, δ), με συχνότητα διαταραχής (α, γ) $k_0=0.305$, (β, δ) $k_0=0.61$ και $\varepsilon=0.05$. (α-γ): $Z_{\max}=50000$, (δ): $Z_{\max}=12000$, γωνία θέασης (255,5).





Σχήμα 2.17: Τρισδιάστατες προβολές, $(\Delta\omega-\Delta T-W)$, των τομών (στο $\sin(k_0 Z) = 0$) για τις τροχιές $j=0$ (α, β) και $j=9$ (γ, δ), με συχνότητα διαταραχής (α, γ) $k_0=0.34$, (β, δ) $k_0=0.68$ και $\varepsilon=0.05$. (α-δ): $Z_{\max}=50000$, γωνία θέασης $(255,5)$.

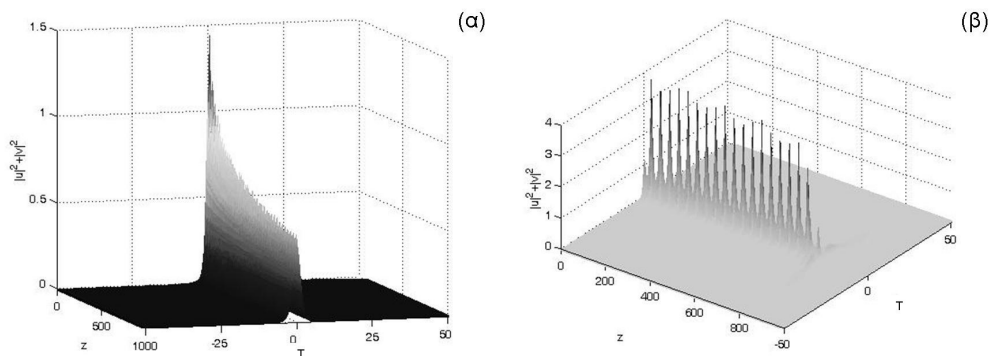
Στη συνέχεια δοκιμάσαμε το αποτέλεσμα ακόμη μικρότερης συχνότητας διαταραχής, με $k_0 = \omega_{\Delta T} / 4$, για διάφορες τιμές του ε . Διαπιστώθηκε ότι το σύστημα διατηρεί τη δυναμική του ευστάθεια για μεγάλες τιμές του ε . Στο σχήμα 2.18 φαίνονται οι τομές της $j=0$ για (α), $\varepsilon=0.5$, (δέκα φορές παραπάνω από το προηγούμενο σχήμα), όπου η τομή αποτελείται από δύο δισδιάστατα δαχτυλίδια σημάδι συντονισμού αλλά και δυναμικής ευστάθειας, και για (β), $\varepsilon=0.7$, όπου τελικά διαφεύγει.



Σχήμα 2.18: Τρισδιάστατες προβολές, $(\Delta\omega-\Delta T-W)$, των τομών για $j=0$ με $k_0 = \omega_{\Delta T} / 4$ και (α) $\varepsilon=0.5$, (β) $\varepsilon=0.7$.

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι όσο πιο κοντά είναι η k_0 στις $\omega_{\Delta T}$ και ω_w , τόσο πιο δραματικά επιδρά η διαταραχή στο σύστημα, όπου ακόμα και για μικρές τιμές του ε , συχνά το οδηγεί σε διαφυγή, σε διάλυση δηλαδή του παλμού. Το ερώτημα που τίθεται τώρα, είναι πόσο ακριβής είναι η μεταβολική μέθοδος για τη περιγραφή της εξέλιξης του συστήματος, κατά πόσο δηλαδή μπορεί να συλλάβει το σωστό μέγεθος της διαταραχής που μπορεί να οδηγήσει σε διαφυγή, αλλά και ποια η ακρίβεια της στην περιγραφή της εξέλιξης των παραμέτρων του παλμού. Για να το διαπιστώσουμε, συγκρίναμε κάποια αποτελέσματα με αυτά από απευθείας αριθμητική επίλυση των (2.28). Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1, ο κώδικας χρησιμοποιεί τη μέθοδο “split step Fourier”. Για τη μελέτη της ακρίβειας του ελέγχουμε τις ενέργειες των επί μέρους παλμών, οι οποίες πρέπει και να διατηρούνται, όπως και γινόταν για βήμα 10^{-4} και απουσία διαταραχής που δημιουργεί ακτινοβολία υποβάθρου. Τα αποτελέσματα του κώδικα είναι συγκρίσιμα με αυτά άλλων δημοσιευμένων αριθμητικών εργασιών [143, 144].

Στο σχήμα 2.19 βλέπουμε τα αποτελέσματα δύο αριθμητικών υπολογισμών της εξέλιξης του παλμού για αρχικές συνθήκες της $j=0$ και (α) $k_0=0.61$, $\varepsilon=0.1$ και (β) $k_0 = \omega_{\Delta T} / 4$, $\varepsilon=0.7$. Παρουσιάζεται η συνολική ένταση του παλμού στο T , όπως μεταβάλλεται κατά τη διάδοση Z . Φαίνεται πώς για $k_0=0.61$ ο παλμός χάνει πλάτος και ενέργεια, αλλά δε καταστρέφεται μέχρι και για 1000 μήκη διασποράς ακόμα και για $\varepsilon=0.1$ τη στιγμή που η μεταβολική μέθοδος προβλέπει διαφυγή για $\varepsilon \approx 0.07$. Αυτό είναι μια σχετική αποτυχία της μεθόδου. Αντίθετα, για $k_0 = \omega_{\Delta T} / 4$, η αριθμητική επίλυση προβλέπει καταστροφή για $\varepsilon=0.7$, ακριβώς την τιμή της μεταβολικής μεθόδου. Καταλαβαίνουμε ότι δεν είναι μόνο η φυσική του προβλήματος που μεταβάλλεται με τη συχνότητα διαταραχής, αλλά και η ακρίβεια της μεταβολικής μεθόδου. Η περαιτέρω μελέτη λαμβάνει και αυτό υπόψη.



Σχήμα 2.19: Γραφήματα λύσης των PDEs (2.28), για τη $j=0$ όπου (α) $k_0=0.61$, $\varepsilon=0.1$, πτώση πλάτους (β) $k_0 = \omega_{\Delta T} / 4$, $\varepsilon=0.7$, καταστροφή.

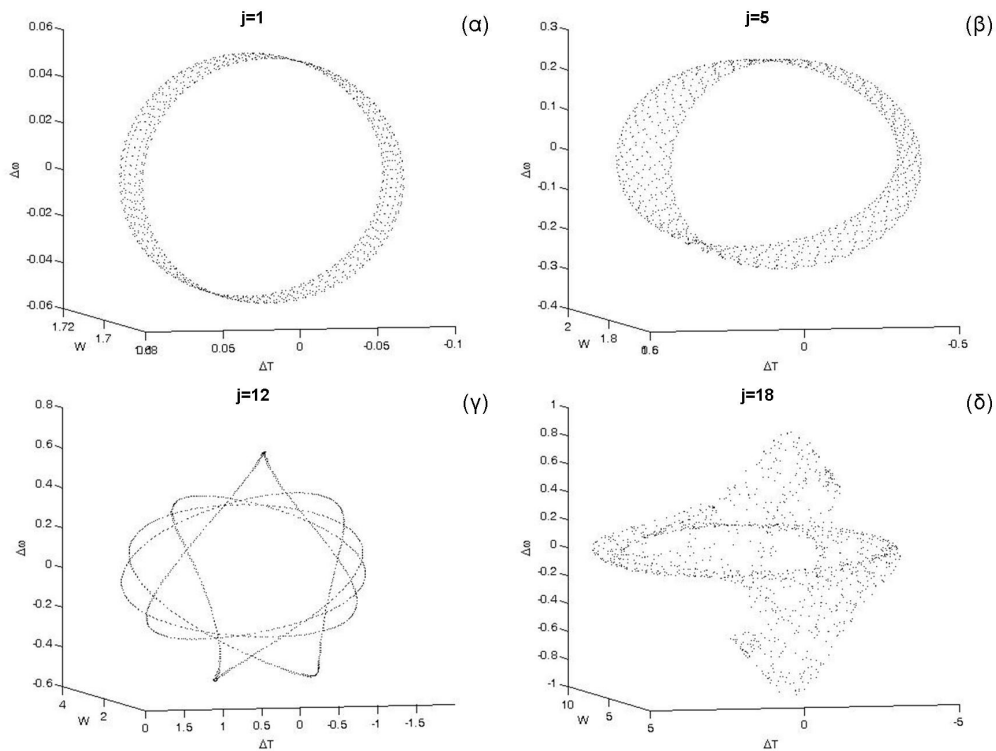
Στις επόμενες παραγράφους εξετάζουμε τη διάδοση για αρχικές συνθήκες πιο απομακρυσμένες από το σ.σ. Αφήνουμε λοιπόν την προϋπόθεση η αρχική τιμή της H_4 να είναι πάντα ίδια και αρκούμαστε στο ότι η νέα Χαμιλτονιανή θα είναι σταθερή, ($H'_4 = 0$). Οι αρχικές συνθήκες που εφαρμόζουμε φαίνονται στον ΠΙΝΑΚΑ 2, όπου μεταβάλλουμε την αρχική τιμή της $\Delta\omega$ από 0 έως 1, ουσιαστικά τη διαφορά στις ταχύτητες ομάδος των συνιστωσών, ενώ οι υπόλοιπες μεταβλητές έχουν τις τιμές του σ.σ.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

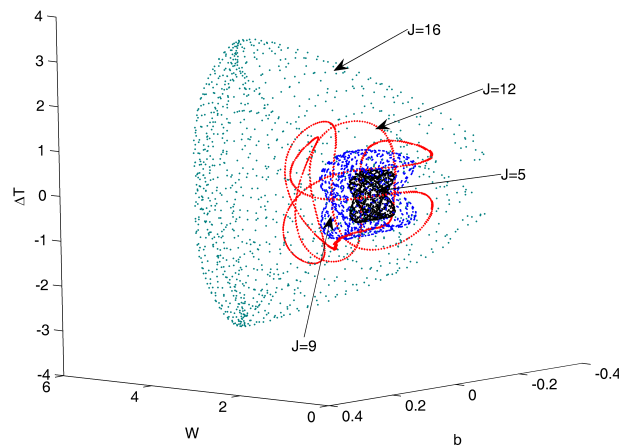
$j=0$	Q3=0.000000	P3=0.435179	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.000000
$j=1$	Q3=0.000000	P3=0.434311	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.052632
$j=2$	Q3=0.000000	P3=0.431707	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.105263
$j=3$	Q3=0.000000	P3=0.427367	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.157895
$j=4$	Q3=0.000000	P3=0.421291	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.210526
$j=5$	Q3=0.000000	P3=0.413480	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.263158
$j=6$	Q3=0.000000	P3=0.403932	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.315789
$j=7$	Q3=0.000000	P3=0.392649	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.368421
$j=8$	Q3=0.000000	P3=0.379630	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.421053
$j=9$	Q3=0.000000	P3=0.364875	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.473684
$j=10$	Q3=0.000000	P3=0.348384	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.526316
$j=11$	Q3=0.000000	P3=0.330157	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.578947
$j=12$	Q3=0.000000	P3=0.310194	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.631579
$j=13$	Q3=0.000000	P3=0.288496	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.684211
$j=14$	Q3=0.000000	P3=0.265061	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.736842
$j=15$	Q3=0.000000	P3=0.239891	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.789474

j=16	Q3=0.000000	P3=0.212984	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.842105
j=17	Q3=0.000000	P3=0.184342	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.894737
j=18	Q3=0.000000	P3=0.153964	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.947368
j=19	Q3=0.000000	P3=0.121850	Q2=1.697056	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=1.000000

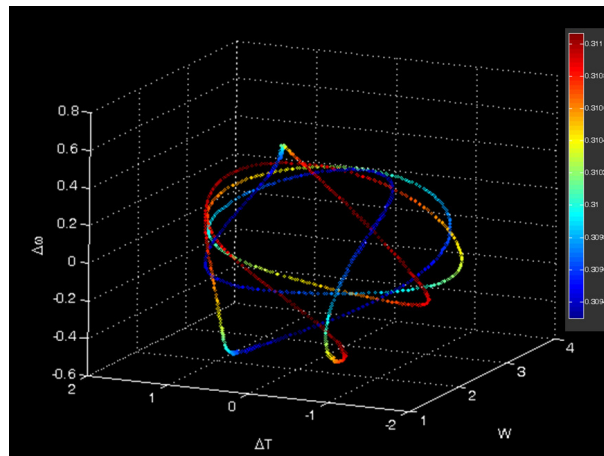
Για να εξετάσουμε το αποτέλεσμα της αυξανόμενης $\Delta\omega$, λύνουμε το σύστημα των ODEs για όλες τις α.σ. του ΠΙΝΑΚΑ 2, με συχνότητα διαταραχής $k_0 = \omega_{\Delta T} / 4$ και $\varepsilon=0.01$. Στα σχήματα 2.20 και 2.21 παραθέτονται μερικές από τις τομές, όπου φαίνεται πως η τροχιά κινείται σε όλο και πιο εκτεταμένη περιοχή παραμέτρων, και γίνεται όλο και πιο περίπλοκη αν και για τις περισσότερες α.σ. η τομή είναι κάποια δισδιάστατη επιφάνεια. Στο σχήμα 2.20(δ) η τομή μοιάζει περισσότερο με τρισδιάστατο «νέφος» σημείων, αλλά δεν υπάρχει διαφυγή, ούτε και για τη $j=19$. Η $j=12$ έχει μονοδιάστατη τομή (rotational torus), σημάδι ότι βρισκόμαστε κοντά σε κάποιο συντονισμό. Η περίπτωση αυτή παρουσιάζεται και στο σχήμα 2.22 σε τέσσερις διαστάσεις για λόγους επίδειξης.



Σχήμα 2.20: Τρισδιάστατες προβολές, ($\Delta\omega$ - ΔT - W), των τομών για τις α.σ. (ΠΙΝΑΚΑΣ 2) (α) $j=1$, (β) $j=5$, (γ) $j=12$, (δ) $j=18$ με $k_0 = \omega_{\Delta T} / 4$ και $\varepsilon=0.01$.

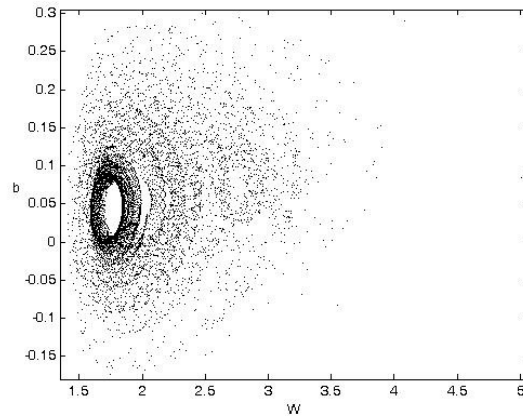


Σχήμα 2.21: Μία άλλη οπτική. Τρισδιάστατες προβολές (ΔT - W - b) τομών, για διαταραχή όπως στο σχήμα 32-35 και α.σ. : $j=5$ μαύρο, $j=9$ μπλε, $j=12$ κόκκινο, $j=16$ πράσινο. Όλες οι τομές είναι δισδιάστατες, εκτός από τη μονοδιάστατη $j=12$.

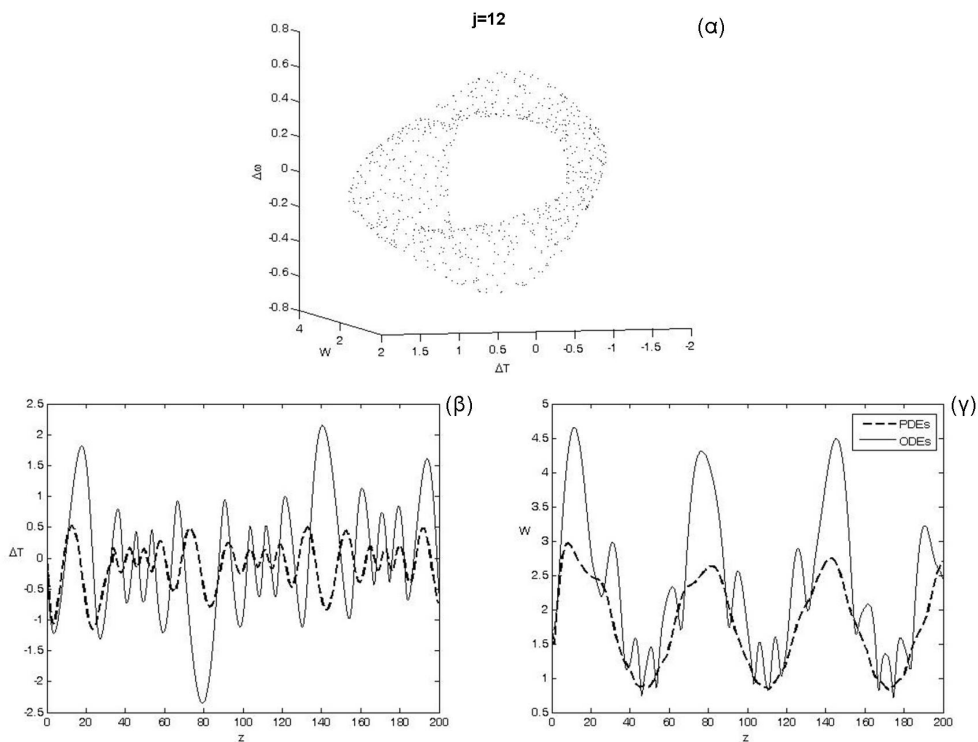


Σχήμα 2.22: Τομή Poincaré της τροχιάς $j=12$ για διαταραχή όπως στο σχήμα 32-35. Η κλίμακα του χρώματος συμβολίζει τις τιμές του b .

Παρακάτω προσπαθούμε να απομονώσουμε το παράγοντα της συχνότητας της διαταραχής. Ξεκινάμε με μικρή σε σχέση με τις χαρακτηριστικές τιμή, $k_0=0.1$. Οι τομές για τις τροχιές του ΠΙΝΑΚΑ 2 φανερώνουν διατήρηση της ευστάθειας για αρκετά μεγάλες τιμές του ε . Για παράδειγμα, για $\varepsilon=0.5$ οι τροχιές $j=11$ και πάνω δείχνουν σημάδια εργοδικότητας, ενώ για $j=13$ και πάνω διαφεύγουν, αν και για μεγάλο Z ($Z>10000$). Στο σχήμα 2.23 φαίνονται δισδιάστατες προβολές των εσωτερικών τροχιών. Σημεία από τις εξωτερικές τροχιές ($j>10$) διαχέονται στο χώρο τους και συσκοτίζουν την εικόνα. Στο σχήμα 2.24, φαίνεται στο (α) μια τρισδιάστατη προβολή της τομής για $j=12$ και παρακάτω (β, γ) προβάλλεται σύγκριση των λύσεων των ODEs με τις PDEs μέσω της εξέλιξης των ΔT και W . Φαίνεται λοιπόν ότι οι ODEs μπορούν να δώσουν μία ικανοποιητική εικόνα για την εξέλιξη του συστήματος, τουλάχιστον για χαμηλές k_0 . Οι ODEs προβλέπουν μετατοπίσεις μεγαλύτερου πλάτους και περισσότερες αρμονικές (οι μικρότερες ταλαντώσεις), αλλά φαίνεται να μπορούν να παρακολουθήσουν την εξέλιξη των μεταβλητών προσεγγίζοντας καλά τη συχνότητα μεταβολής τους.



Σχήμα 2.23: Δισδιάστατη προβολή (W - b) των τομών για $j=0-12$ του ΠΙΝΑΚΑ2 με $k_0=0.1$ και $\varepsilon=0.5$. Σημεία από διαφυγούσες τροχιές μεγαλύτερου j είναι παρόντα

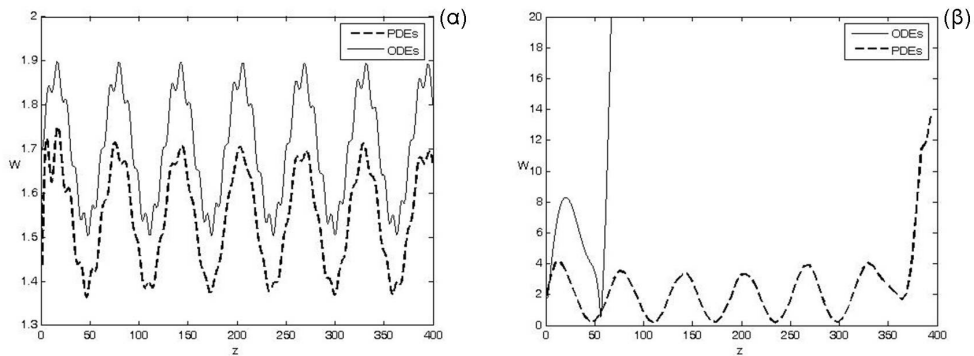


Σχήμα 2.24: (α) Τρισδιάστατη προβολή (ΔT - W - b) τομής για $j=12$ του ΠΙΝΑΚΑ2 με $k_0=0.1$ και $\varepsilon=0.5$. (β) Σύγκριση αποτελεσμάτων των ODEs (γραμμή) και PDEs (διακεκομμένη) για την εξέλιξη του ΔT για τις αυτές συνθήκες. (γ) Παρομοίως για το W .

Για μικρότερες τιμές της διαταραχής η συμφωνία των λύσεων είναι καλλίτερη, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.25(α) όπου για $\varepsilon=0.1$ προβάλλεται η εξέλιξη του εύρους της κάθε συνιστώσας, για $j=0$, όπως αυτό δίνεται από τις ODEs και τις PDEs. Παρατηρούμε ότι αν και η λύση των ODEs είναι μετατοπισμένη σε μεγαλύτερες τιμές, συλλαμβάνει το εύρος και τη συχνότητα της ταλάντωσης.

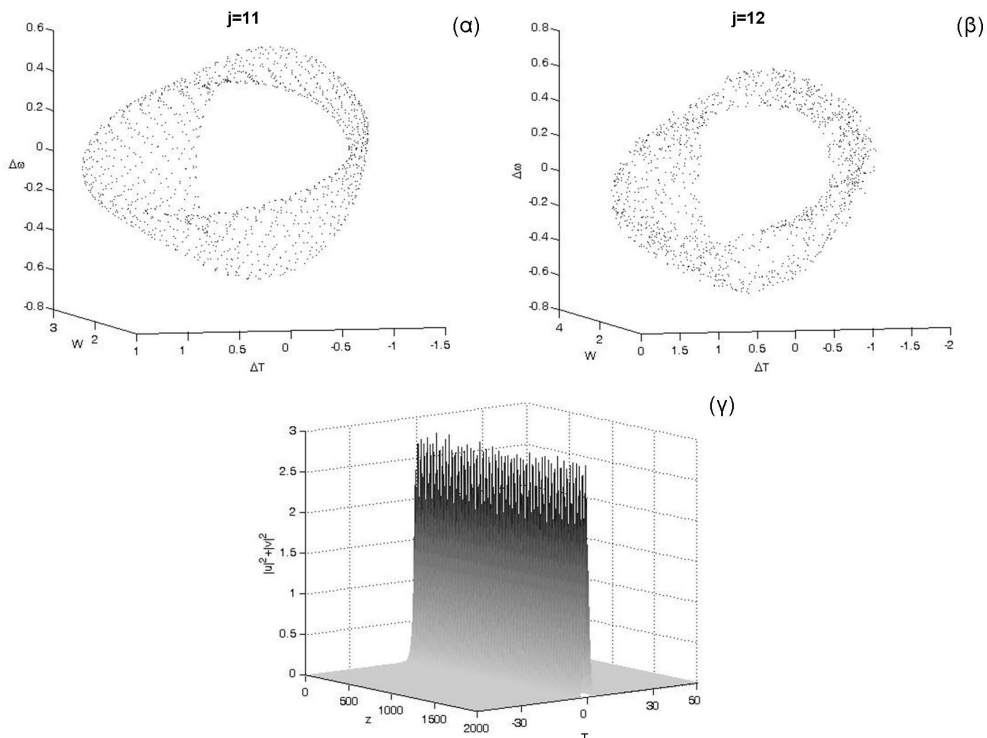
Αυξάνοντας την ένταση της διαταραχής και για $\varepsilon=0.9$, η τροχιά του σχήματος 2.24 τελικά διαφεύγει. Αυτό βέβαια σύμφωνα με τις ODEs, που όμως συμφωνεί και με το αποτέλεσμα των PDEs, που επίσης προβλέπουν μερική διαφυγή, διαπλάτυνση του παλμού και διασπορά του, όχι όμως και διαχωρισμό του. Αυτή η καταστροφική εξέλιξη φαίνεται στο σχήμα

2.25(β). Αν και οι ODEs προβλέπουν τη καταστροφή του παλμού να συμβαίνει νωρίτερα, η λύση των PDEs δίνει παρόμοιο αποτέλεσμα.



Σχήμα 2.25: Σύγκριση ODEs και PDEs για την εξέλιξη του W , (α) $j=0$, $k_0=0.1$, $\varepsilon=0.1$, (β) $j=12$, $k_0=0.1$, $\varepsilon=0.9$.

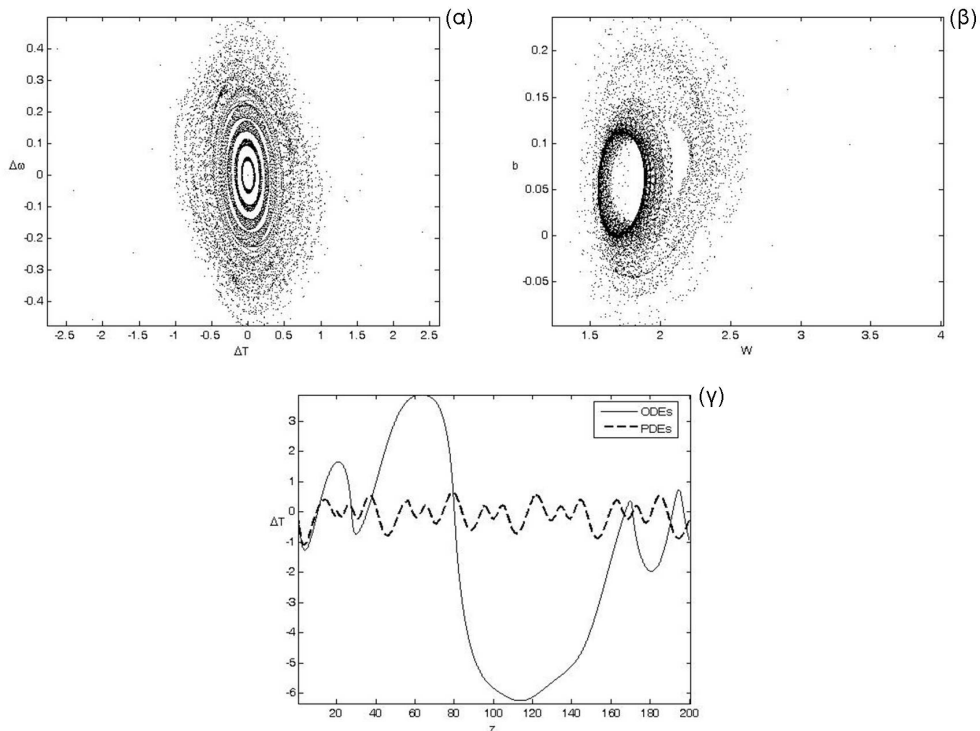
Ανεβάζουμε τη συχνότητα στο $k_0 = \omega_w / 4$ και για σχετικά μικρές τιμές του ε διαπιστώνουμε ότι οι ODEs καλώς προβλέπουν διατήρηση του παλμού. Επί παραδείγματι, για $\varepsilon=0.2$ και για $j=11, 12$, (ώστε να υπάρχει σύγκριση και με τη προηγούμενη περίπτωση), φαίνεται ότι οι προβολές των τομών, (σχήμα 2.26 α, β) δείχνουν κάποια εργοδικότητα, αλλά οι τροχιές διατηρούν τη δυναμική τους ευστάθεια. Για να επαληθεύσουμε αυτό το αποτέλεσμα παραθέτουμε τη λύση των PDEs στο σχήμα 2.26(γ), για το ίδιο ε και k_0 ενδιάμεση τιμή $\Delta\omega$ ($P_1=0.6$), όπου ο παλμός ταλαντώνεται έντονα, αλλά διατηρείται.



Σχήμα 2.26: (α, β) Τρισδιάστατες προβολές τομών για τις $j=11$ και $j=12$, όταν $k_0 = \omega_w / 4$ και $\varepsilon=0.2$. (γ) Λύση των PDEs με όμοια διαταραχή και ενδιάμεση $\Delta\omega=0.6$

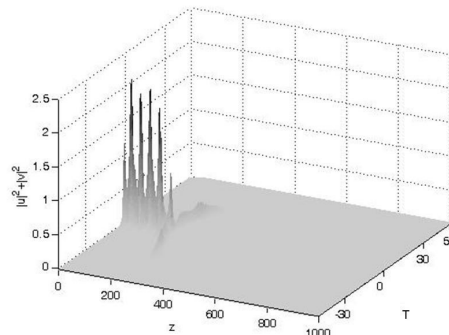
Αυξάνοντας τη διαταραχή σε $\varepsilon=0.4$, οι τροχιές $j=11, 12$ διαφεύγουν, σύμφωνα με τις ODEs. Στο σχήμα 2.27(α, β) φαίνονται οι δισδιάστατες προβολές των τομών για μικρότερα j . Παρολαυτά η λύση των PDEs είναι ευσταθέστερη, και δε διαφεύγει για το εύρος αρχικών

συνθηκών ανάμεσα στις $j=11-12$. Αυτό καταδεικνύεται στο σχήμα 2.27(γ) όπου συγκρίνεται η εξέλιξη του ΔT σύμφωνα με τις ODEs (βίαη ταλάντωση και διαφυγή) και τις PDEs (σταθερή ταλάντωση και διατήρηση του παλμού).



Σχήμα 2.27: (α, β) Δισδιάστατες προβολές τομών για α.σ. του ΠΙΝΑΚΑ2 για $k_0 = \omega_w / 4$, $\varepsilon=0.4$, οι τροχιές $j>10$ διαφεύγουν. (γ) Εξέλιξη του ΔT σύμφωνα με τις PDEs και τις ODEs για α.σ. $j=12$.

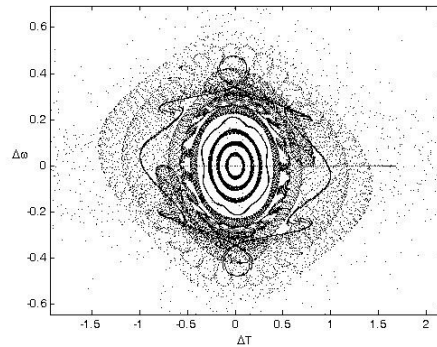
Η ασυμφωνία δεν είναι μεγάλη. Για λίγο μεγαλύτερη διαταραχή, $\varepsilon=0.5$, η λύση των PDEs δείχνει γρήγορη καταστροφή του παλμού (σχήμα 2.28). Συμπερασματικά, και για αυτή τη συχνότητα, μικρή καθώς είναι, το σύστημα των ODEs προερχόμενο από τη μεταβολική μέθοδο δίνει μια σωστή ποιοτικά εικόνα της εξέλιξης του παλμού.



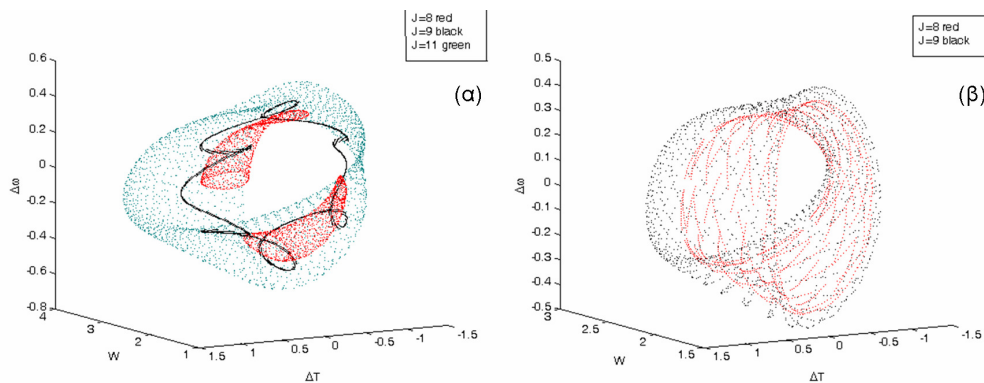
Σχήμα 2.28: Λύση των PDEs και καταστροφή του παλμού για $\Delta\omega=0.6$ και $k_0 = \omega_w / 4$, $\varepsilon=0.5$.

Αυξάνοντας περαιτέρω τη συχνότητα διαταραχής, θέτουμε $k_0 = \omega_w / 2$. Εδώ παρατηρούμε καταστροφή του παλμού για μικρότερες τιμές του ε , τόσο από τις ODEs, όσο και από την απευθείας αριθμητική επίλυση των PDEs. Για $\varepsilon=0.05$ παρατηρούνται πολλές διαφυγές, ήδη

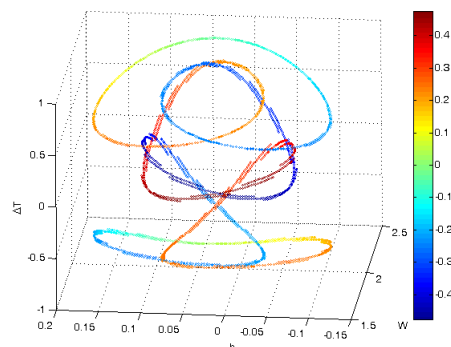
από το $j=12$ και πάνω. Στο σχήμα 2.29 φαίνονται δισδιάστατες προβολές των τομών, και στο σχήμα 2.30(α) τρισδιάστατες τριών από αυτές. Η $j=8$ έχει τη μορφή δύο νησίδων, σημάδι εγγύτητας σε συντονισμό, η $j=9$ μοιάζει μονοδιάστατη (tube like torus) και η $j=11$ εμφανίζει σημάδια απομάκρυνσης από δισδιάστατη επιφάνεια, άρα εργοδικότητα. Στο σχήμα 2.31 φαίνεται η τετραδιάστατη τομή της $j=9$.



Σχήμα 2.29: Δισδιάστατη (ΔT - $\Delta\omega$) προβολή τομών για $k_0 = \omega_w / 2$, $\varepsilon=0.05$, από $j=12$ και πάνω διαφεύγουν.



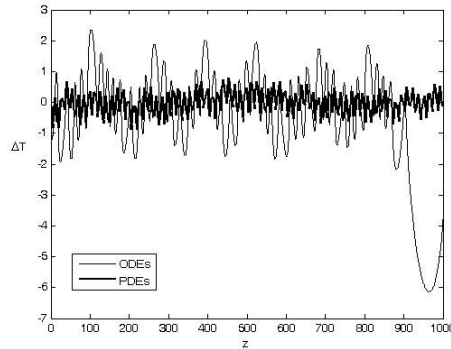
Σχήμα 2.30: Τρισδιάστατες προβολές των τομών $j=8, 9, 11$ με κόκκινο, μαύρο και πράσινο αντίστοιχα για (α) $\varepsilon=0.05$ και (β) $\varepsilon=0.1$. (240,10).



Σχήμα 2.31: Τετραδιάστατη προβολή της $j=9$, για τη διαταραχή του σχήμα 2.29, η χρωματική κλίμακα παριστά τις τιμές του $\Delta\omega$.

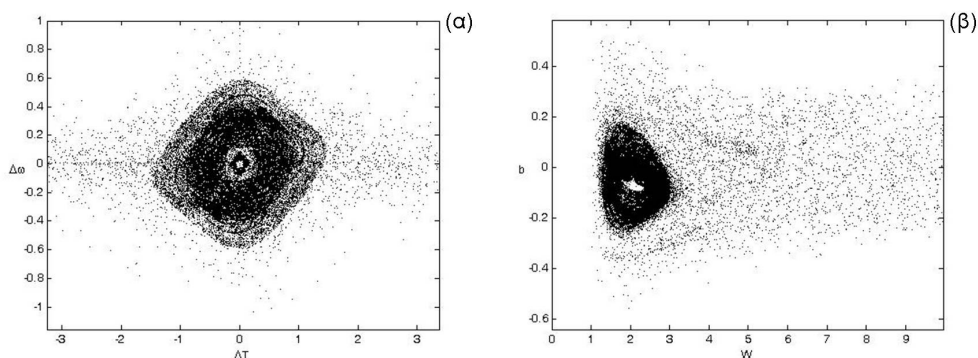
Αυξάνοντας τη διαταραχή στο $\varepsilon=0.1$ προκαλούμε τη διαφυγή και της $j=11$. Οι τροχιές $j=8$ και 9 παράγουν τομές που φαίνονται στο σχήμα 2.30(β) για σύγκριση. Οι λύσεις των PDEs παρακολουθούν αυτές των ODEs, είναι όμως τώρα σαφώς ευσταθέστερες. Για $\Delta\omega=0.6$, ανάμεσα σε $j=11$ και 12, ο παλμός δεν καταστρέφεται ούτε για $\varepsilon=0.05$, αλλά ούτε καν για

$\varepsilon=0.1$. Στο σχήμα 2.32 συγκρίνουμε τη μεταβολή του ΔT όπως δίνεται από τα δύο συστήματα για $\varepsilon=0.1$ και $\Delta\omega=0.6$. Η λύση των ODEs ταλαντώνεται έντονα και διαφεύγει, ενώ των PDEs όχι, ενώ θα χρειαστεί η διαταραχή να αυξηθεί στο $\varepsilon=0.15$ για να διαλυθεί ο παλμός και σύμφωνα με αυτές. Βλέπουμε ότι η μεταβολική μέθοδος σε αυτή τη περίπτωση αποτυγχάνει κατά πολύ να προβλέψει την ένταση της διαταραχής που καταστρέφει τον παλμό. Η απόκλιση μεταξύ των δύο λύσεων γίνεται μεγαλύτερη όσο πλησιάζουμε τις χαρακτηριστικές συχνότητες.



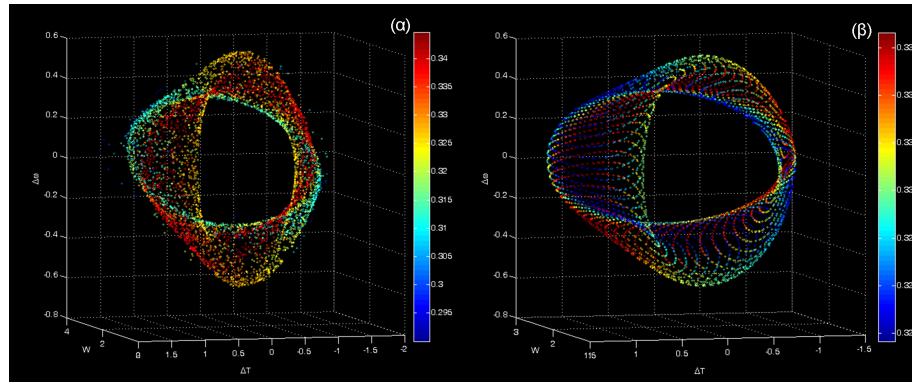
Σχήμα 2.32: Εξέλιξη του ΔT σύμφωνα με τις PDEs και τις ODEs για $k_0 = \omega_w / 2$, $\varepsilon=0.1$ και $\Delta\omega=0.6$.

Έτσι, για $k_0=0.61$ και για $\varepsilon=0.05$, οι περισσότερες από τις τροχιές του ΠΙΝΑΚΑ 2 αποκλίνουν, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.33. Βλέπουμε δισδιάστατες προβολές όλων των τομών στο επίπεδο ΔT - $\Delta\omega$ και στο W - b . Τα σημεία των διαφόρων τομών διαχέονται έντονα και ενώ υπάρχουν σημάδια εργοδικότητας και διαφυγής, δεν γίνεται κατανοητό ποιες τροχιές παραμένουν. Πάντως η σύγκριση με το σχήμα 2.29 κάνει εμφανή τη διαφορά. Μια πιο προσεκτική, επί μέρους μελέτη, δείχνει ότι για αρχικές συνθήκες των τροχιών $j>11$ υπάρχει γρήγορη διαφυγή.



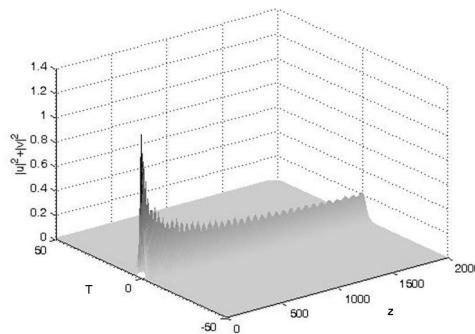
Σχήμα 2.33: Δισδιάστατες προβολές των τομών για $k_0=0.61$, $\varepsilon=0.05$, από $j=10$ και πάνω διαφεύγουν.

Στο σχήμα 2.34(α) φαίνεται η τετραδιάστατη τομή για τη $j=11$, την τελευταία εκ των τροχιών που δε διαφεύγει. Η τροχιά γεμίζει το χώρο σε τροχοειδή μορφή και η τομή είναι δεν είναι πια δισδιάστατη, δείγμα ότι για λίγο εντονότερη διαταραχή, ή μεγαλύτερο P_1 (αρχικό $\Delta\omega$) η τροχιά κινδυνεύει να διαφύγει, όπως και γίνεται για τη $j=12$. Η τομή στο σχήμα 2.34(β) είναι για μικρότερη διαταραχή, δισδιάστατη και παρατίθεται για σύγκριση.



Σχήμα 2.34: Τετραδιάστατες τομές της $j=11$ για (α) $k_0=0.61$, $\varepsilon=0.05$, (β) $k_0=0.61$, $\varepsilon=0.01$. Η κλίμακα του χρώματος παριστά τις τιμές του b . (255,5).

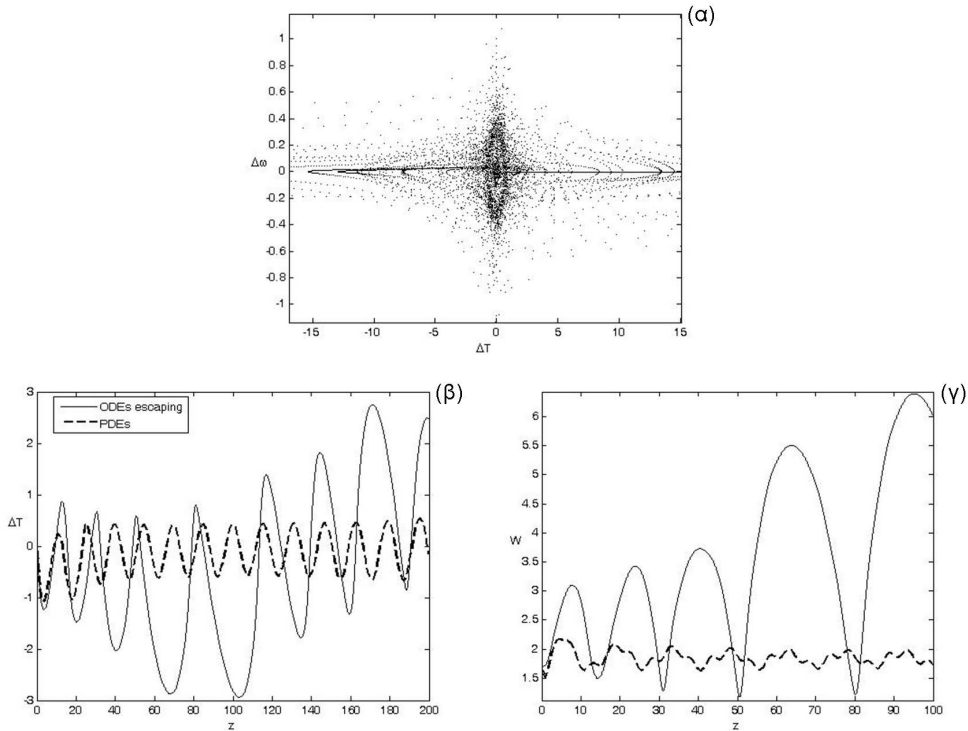
Όσο ενδιαφέροντα όμως και να είναι τα αποτελέσματα της δυναμικής μελέτης του συστήματος των συνήθων διαφορικών, για την παρούσα συχνότητα διαταραχής αποτυγχάνουν να συλλάβουν τη τιμή της διαταραχής που καταστρέφει τον παλμό. Απευθείας αριθμητική προσομοίωση για $k_0=0.61$ και $\varepsilon=0.05$ δείχνει ότι ο παλμός ταλαντώνεται αλλά διατηρείται για τιμές του $\Delta\omega$ γύρω στο 0.6 ή και παραπάνω. Μάλιστα χρειάζεται διαταραχή λίγο πάνω από $\varepsilon=0.3$ για να καταστρέψει τον παλμό με αρχικό $\Delta\omega=0.6$. Στο σχήμα 2.35, η λύση των PDEs, για $\varepsilon=0.3$, δείχνει τον παλμό να χάνει μεγάλο μέρος της ενέργειας του, η οποία ακτινοβολείται διασπειρόμενη και χάνεται στα άκρα του παραθύρου. Αυτό συμβαίνει στην αρχή της διάδοσης. Από κει και πέρα ο παλμός δε χάνει άλλη ενέργεια και διαδίδεται παλλόμενος κατά πλάτος και κατά το ΔT μεταξύ των συνιστωσών. Φαίνεται πως «κλειδώνει» σε ιδιορυθμό του. Αυτή ακριβώς η ακτινοβολία της «παραπανίσιας» ενέργειας, ή αλλιώς η ακτινοβολία υποβάθρου είναι και η μεγάλη διαφορά των λύσεων των PDEs από αυτές των ODEs, καθώς οι τελευταίες δε μοντελοποιούν με κάποιο τρόπο αυτή την απώλεια. Θα επανέλθουμε στο θέμα παρακάτω.



Σχήμα 2.35: Λύση των PDEs για $\Delta\omega=0.6$ και $k_0 = 0.61$, $\varepsilon=0.3$.

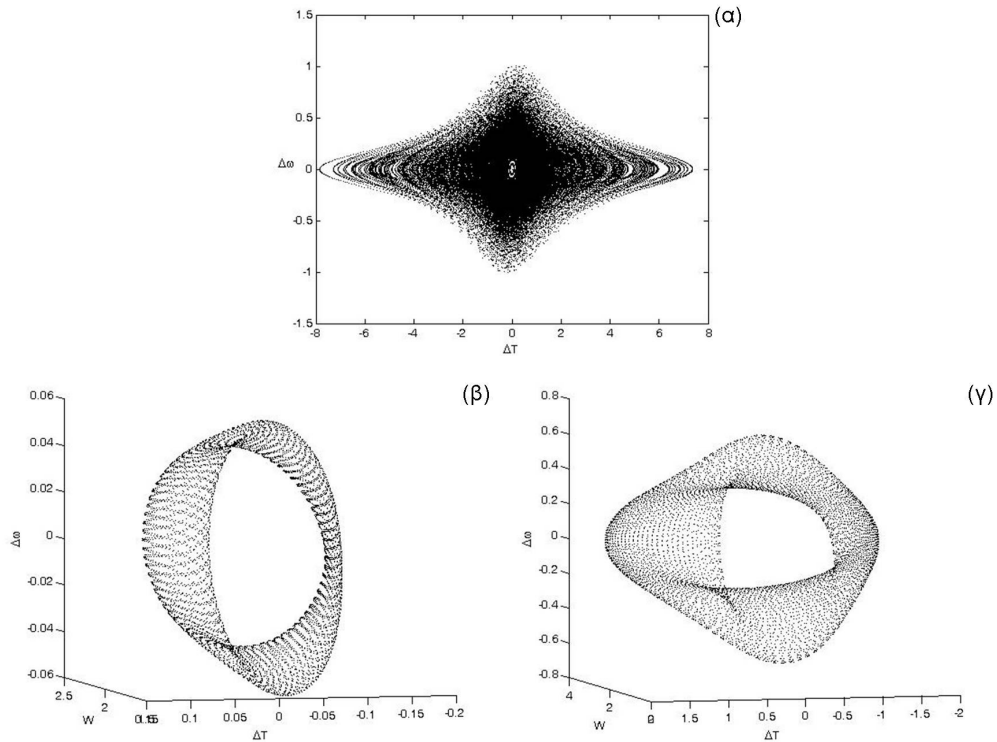
Για κάπως μεγαλύτερη συχνότητα διαταραχής, το σύνηθες συμπέρασμα από τις τομές των ODEs ή την απευθείας λύση των PDEs είναι πως η απαιτούμενη για την καταστροφή του παλμού ένταση της διαταραχής, (για δεδομένο $\Delta\omega$), αυξάνει, ξανά, σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές του ε για k_0 κοντά στις χαρακτηριστικές συχνότητες. Για ακόμα μια φορά όμως, η συμφωνία μεταξύ των δύο μεθόδων είναι μάλλον φτωχή. Χρησιμοποιώντας τις ODEs, των οποίων η επίλυση είναι πολύ γρηγορότερη υπόθεση, κατασκευάσαμε πολλές τομές για διάφορες τιμές του k_0 και του ε για να καταλήξουμε στα παραπάνω συμπεράσματα. Στο σχήμα 2.36 παραθέτουμε μία από αυτές τις απόπειρες, όπου για $k_0 = 2\omega_{\Delta T}$ και $\varepsilon=0.1$ φαίνεται ακόμα και από τη δισδιάστατη προβολή της τομής (σχήμα 2.36(a)) ότι οι τροχιές

διαφεύγουν για όλο το φάσμα των α.σ του ΠΙΝΑΚΑ 2 ($\Delta\omega:0-1$). Η λύση των PDEs δεν επαληθεύει αυτή τη πρόβλεψη, καθώς για $\Delta\omega=0.6$ χρειάζεται $\varepsilon > 1$ για να διαλυθεί ο παλμός. Αυτό φαίνεται και στα σχήματα 2.36(β, γ) όπου για $\varepsilon=0.1$ και $\Delta\omega=0.6$ οι ODEs δείχνουν διαφυγή στο ΔT και στο W , ενώ η λύση των PDEs απλά διατηρεί μια μικρή σχετικά ταλάντωση.

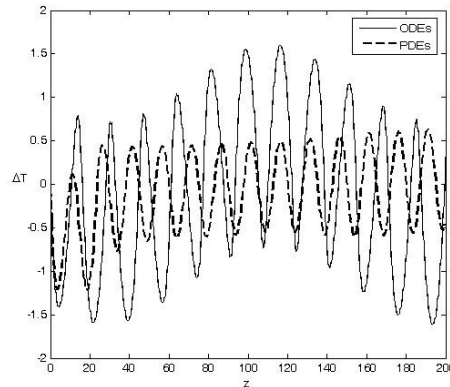


Σχήμα 2.36: (α) Δισδιάστατη τομή (ΔT - $\Delta\omega$) για τις α.σ. του ΠΙΝΑΚΑ 2 για $k_0 = 2\omega_{\Delta T}$ και $\varepsilon=0.1$ όπου φαίνεται διαφυγή όλων των τροχιών. (β, γ) Σύγκριση αποτελεσμάτων ODEs (γραμμή) και PDEs (διακεκομμένη) για την εξέλιξη των ΔT και W για τη συγκεκριμένη συχνότητα και ε .

Ανεβάζοντας τη συχνότητα διαταραχής οι τροχιές διαφεύγουν για όλο και μεγαλύτερες τιμές του ε , χρειάζεται όμως να ανέβει πολύ η συχνότητα ώστε η λύση των ODEs να διατηρήσει την ευστάθεια για πραγματικά μεγάλες τιμές της διαταραχής, όπως συμβαίνει με την απευθείας αριθμητική επίλυση των PDEs. Στο σχήμα 2.37 βλέπουμε προβολές της τομής Poincaré για $k_0 = 15\omega_{\Delta T}$ και $\varepsilon=2.0$. Από τη δισδιάστατη προβολή (α), δε φαίνεται καμία διαφυγή, αν και υπάρχει έντονη αλληλοεπικάλυψη των τομών. Στο (β) και (γ) παραθέτονται τρισδιάστατες προβολές για $j=1$ και $j=12$ αντίστοιχα και σε αντιστοιχία με προηγούμενες περιπτώσεις. Και τα δύο σχήματα είναι τοροειδείς δισδιάστατες επιφάνειες που δηλώνουν διατήρηση του συστήματος εντός ορίων για όλο το διάστημα της διάδοσης. Για λόγους σύγκρισης παραθέτονται στο σχήμα 2.38 οι λύσεις των δύο συστημάτων (ODEs, PDEs) για την εξέλιξη του ΔT , για αρχικό $\Delta\omega=0.2$. Η λύση των ODEs είναι ξανά «γενναιόδωρη» στην πρόβλεψη του πλάτους της ταλάντωσης, όπου πάλι φαίνεται να το δίνει διπλάσιο της αριθμητικής λύσης. Παρόλαυτα, η προσέγγιση δεν είναι κακή, ενώ αποδίδει αρκετά καλά τη συχνότητα της μεταβολής.



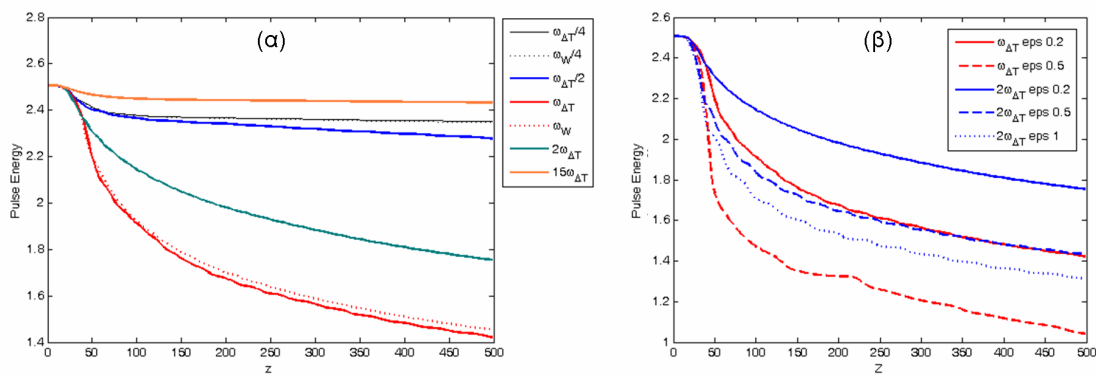
Σχήμα 2.37: Προβολές τομών, (α) δισδιάστατη για τις α.σ. του ΠΙΝΑΚΑ 2 και $k_0 = 15\omega_{\Delta T}$, $\varepsilon=2$, (β) (γ) τρισδιάστατες για τη $j=1$ και $j=12$ αντίστοιχα, $Z_{\max}=5000$.



Σχήμα 2.38: Σύγκριση λύσεων ODEs (γραμμική)-PDEs (διακεκομμένη) για την εξέλιξη του ΔT για αρχικό $\Delta\omega=0.2$ και $k_0 = 15\omega_{\Delta T}$, $\varepsilon=2$.

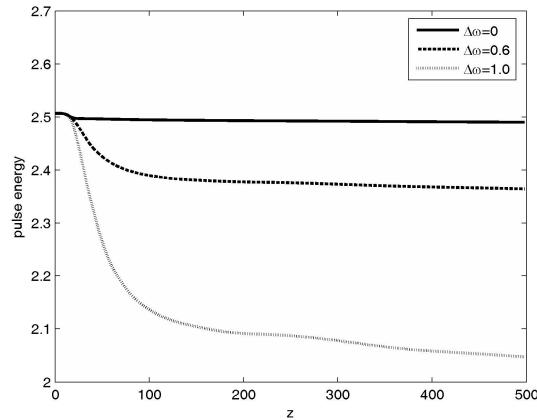
Ένα σημαντικό αίτιο της συμφωνίας ή ασυμφωνίας των λύσεων των ODEs με τις PDEs είναι η ενέργεια που ακτινοβολείται από τον παλμό. Εάν υπάρχει έντονη ακτινοβολία, τότε σίγουρα θα υπάρχει και σημαντική ποσοτική ασυμφωνία. Το ποσό της ακτινοβολούμενης ενέργειας σχετίζεται με το ύψος της διαταραχής, αλλά κυρίως με τη συχνότητα της. Για να αποκτήσουμε μια καλλίτερη εικόνα για αυτό, υπολογίστηκαν οι τιμές της ενέργειας που παραμένει στον παλμό (συνολική του «μάζα», ή αριθμός «σωματιδίων» κατά διαφορετικές ορολογίες) όπως αυτός περιγράφεται από τις PDEs, $N = \int_{-50}^{50} (|u|^2 + |v|^2) dT$. Το βήμα που χρησιμοποιήθηκε για τους υπολογισμούς ήταν 10^{-5} . Στο σχήμα 2.39 φαίνεται η εξέλιξη της ενέργειας του παλμού για διαφορετικές τιμές του k_0 και του ε . Διαταραχές για μεγαλύτερο ε προκαλούν εντονότερη ακτινοβολία και απώλεια ενέργειας, αλλά φαίνεται πως η συχνότητα

της διαταραχής είναι ο πλέον καθοριστικός παράγοντας. Για k_0 αρκετά μικρότερο από τις χαρακτηριστικές συχνότητες υπάρχει μόνο μικρή απώλεια στην αρχή της διάδοσης, ενώ το ίδιο παρατηρούμε και για τιμές πολύ μεγαλύτερες. Αντίθετα, υπάρχει έντονη απώλεια για συχνότητες πιο κοντά στις χαρακτηριστικές και πολύ έντονη για $\omega_{\Delta T}$, όπως φάνηκε και στο σχήμα 2.35. Αυτό το συμπέρασμα είναι αναμενόμενο και σύμφωνο με την εργασία [145], όπου αν και αναφέρεται σε σύνηθες σολιτόνιο και όχι διανυσματικό, η εκπομπή γραμμικών κυμάτων είναι εντονότερη όταν η συχνότητα της όποια διαταραχής συμπίπτει με τη χαρακτηριστική. Συμπερασματικά, φαίνεται ότι μπορούμε να χρησιμοποιούμε το απλοποιημένο σύστημα των συνήθων διαφορικών που εξάγεται από τη μεταβολική μέθοδο για να περιγράψουμε την εξέλιξη του διανυσματικού σολιτονίου παρουσία μεταβαλλόμενης διασπορά, όταν η συχνότητα μεταβολής είναι αρκετά μικρότερη των χαρακτηριστικών, ενώ καλή ακρίβεια έχουμε και για συχνότητα διαταραχής σημαντικά μεγαλύτερη. Αυτό συμβαίνει διότι η μεταβολική μέθοδος, ως αδιαβατική, απαιτεί τη διατήρηση του σχήματος και της ενέργειας του παλμού. Όταν κάτι τέτοιο δε μπορεί να ισχύει ούτε καν προσεγγιστικά, η μέθοδος αρχίζει να αποτυγχάνει.

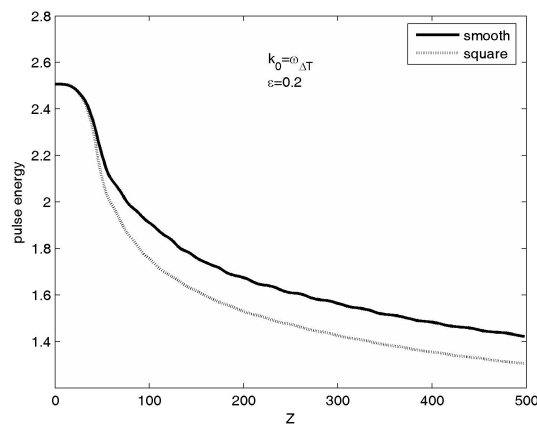


Σχήμα 2.39: Εξέλιξη της ενέργειας του παλμού για (α) διάφορες τιμές του k_0 (υπόμνημα) και $\epsilon=0.2$ και (β) $k_0=\omega_{\Delta T}$, $2\omega_{\Delta T}$ και διάφορες τιμές του ϵ (υπόμνημα).

Στο σχήμα 2.40 παρατίθενται η ενέργειες του παλμού χωρίς καθόλου διαταραχή, αλλά για διαφορετικά αρχικά $\Delta\omega$. Όσο πιο έντονη η διαφορά, (η διπλοθλαστικότητα) τόσο πιο έντονες και οι ταλαντώσεις μεταξύ των συνιστωσών και τελικά η απώλεια ενέργειας, αν και σε κάθε περίπτωση σύντομα αποκαθίσταται ισορροπία και οι εκπομπή σταματά. Αυτό που είναι εντυπωσιακό από τις αριθμητικές προσομοιώσεις, είναι η δυναμική ευστάθεια του παλμού. Οι γκαουσιανές συνιστώσες που εισάγονται αρχικά δεν είναι οι ιδιοσυναρτήσεις των συζευγμένων NLS με μεταβλητή διασπορά. Ο παλμός δείχνει να προσαρμόζεται στις τιμές της μη-γραμμικότητας και τις τοπικές τιμές της διασποράς και να οδεύει παλλόμενος. Περνώντας από την ημιτονοειδή μεταβολή διασποράς στη τετραγωνική, στο σχήμα 2.41 παρατίθενται οι ενέργειες του παλμού και για τις δύο περιπτώσεις. Η τετραγωνική διαταραχή προκαλεί ανάλογη απώλεια, αν και κάπως μεγαλύτερη.



Σχήμα 2.40: Εξέλιξη της ενέργειας του παλμού με $\varepsilon=0$, για διαφορετικές αρχικές τιμές της $\Delta\omega$.



Σχήμα 2.41: Εξέλιξη της ενέργειας του παλμού για ομαλή (ημιτονοειδή) και τετραγωνική μεταβολή της διασποράς (μαύρη και γκριζα γραμμή αντίστοιχα), όπου $k_0=\omega_{\Delta T}$, $\varepsilon=0.2$.

B) Τετραγωνική διαμόρφωση

Έχοντας βγάλει συμπεράσματα για τη χρησιμότητα της μεταβολικής μεθόδου, περνάμε σε τετραγωνική διαμόρφωση διασποράς, όπου θα εξετάσουμε πάλι τη διάδοση του παλμού αλλά και την ακρίβεια της μεθόδου. Η νέα συνάρτηση διασποράς είναι

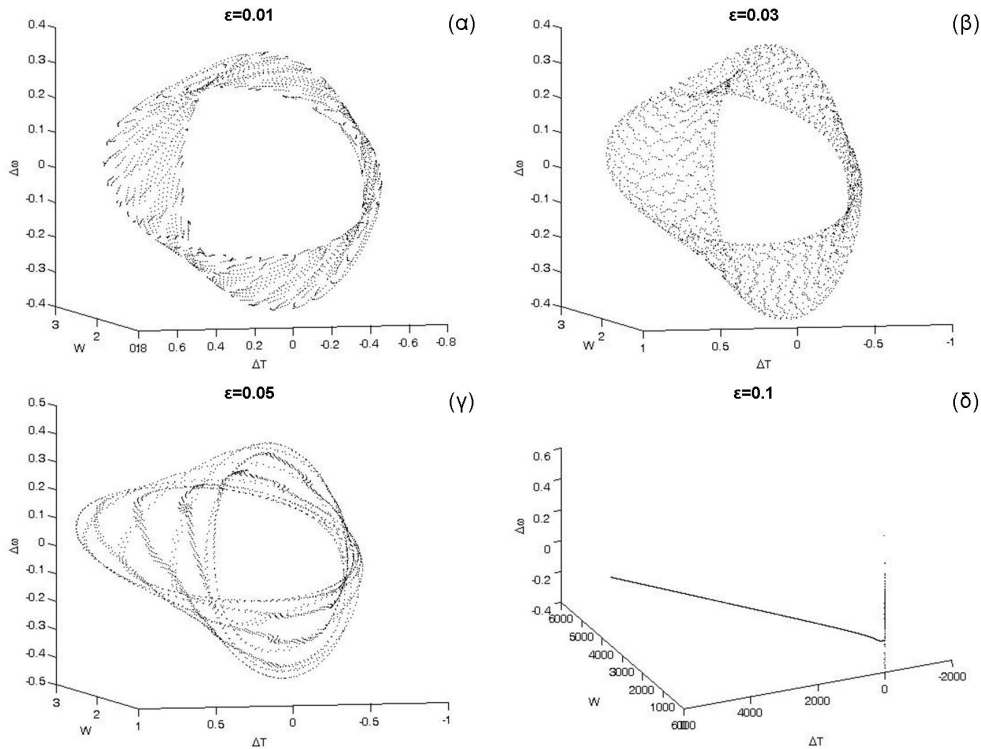
$$d = 1 + \varepsilon \sum_{i=0}^N (-1)^i [\tanh S(Z - iL_0) + \tanh SiL_0], \quad (2.47)$$

όπου N ο αριθμός περιόδων διαμόρφωσης μέχρι το Z_{\max} , S σταθερά που σχετίζεται με τη κλίση της συνάρτησης και $L_0 = 2\pi / k_0 = L_{\text{map}}$. Μερικές από τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν παρατίθενται παρακάτω.

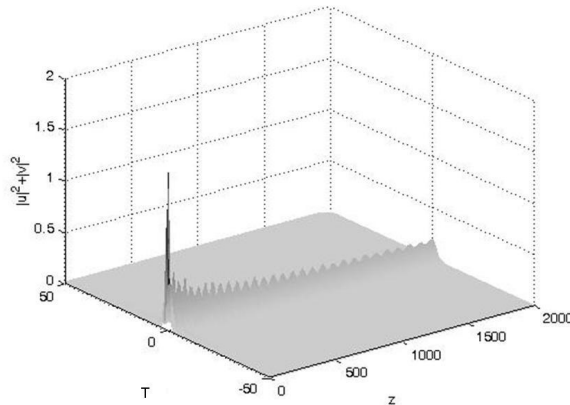
Ξεκινάμε όπως είχαμε κάνει και για την ομαλή διαμόρφωση, με $k_0=0.61$ και αρχικές συνθήκες του ΠΙΝΑΚΑ 1, ώστε η αρχική τιμή της H_4 να είναι πάντα **-0.4**. Στο σχήμα 2.42 φαίνονται οι τρισδιάστατες προβολές τομών της $j=4$, για διάφορες τιμές του ε , σε αντιστοιχία με το σχήμα 2.11. Ενώ για $\varepsilon=0.01$, (α), η τομή είναι σχεδόν κυλινδρική, για μεγαλύτερες τιμές του ε γίνεται τοροειδής, κατ' αναλογία με τη περίπτωση ομαλής μεταβολής της διασποράς. Εν τέλη για $\varepsilon=0.1$ (αντί για 0.09) η τροχιά διαφεύγει.

Απευθείας επίλυση των μερικών διαφορικών για τις παραπάνω αρχικές συνθήκες και k_0 δείχνει ότι ο παλμός δε διαλύεται για $\varepsilon=0.1$, αλλά για λίγο μεγαλύτερο από 0.3. Στο σχήμα

2.43 φαίνεται η λύση των PDEs για $\varepsilon=0.3$, όπου ο παλμός αν και χάνει πολύ ενέργεια διατηρείται αναγνωρίσιμος, τουλάχιστον μέχρι το $Z=2000$.



Σχήμα 2.42: Τρισδιάστατες προβολές τομών για τετραγωνική διαταραχή με $k_0=0.61$ και τιμές του ε να αναγράφονται στα επί μέρους σχήματα.

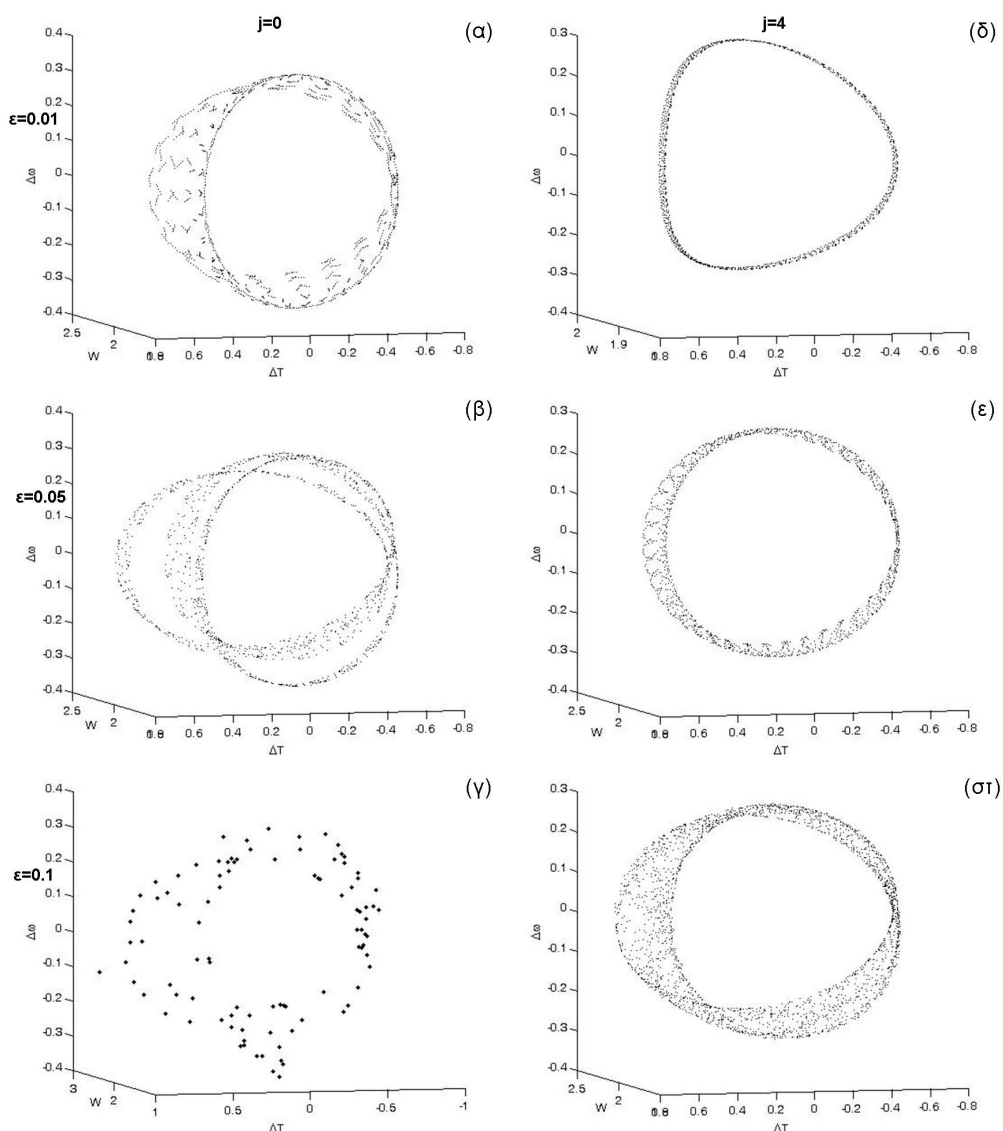


Σχήμα 2.43: Εξέλιξη του παλμού σύμφωνα με τις PDEs για τις αρχικές συνθήκες του σχήματος 2.42 και $k_0=0.61$, $\varepsilon=0.3$.

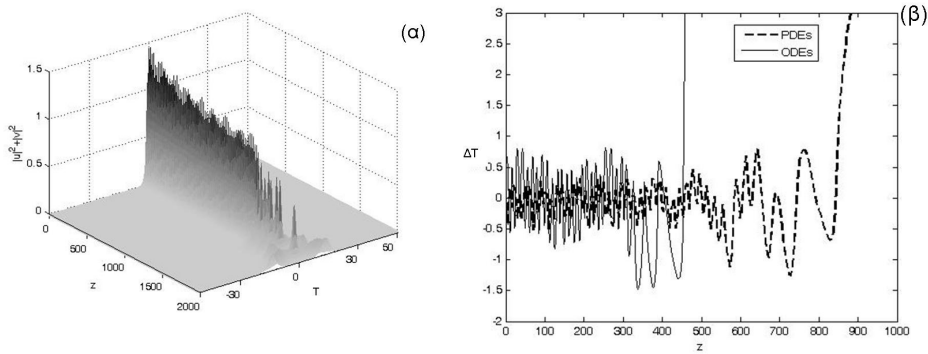
Για μικρότερη συχνότητα διαταραχής έχουμε ξανά καλλίτερη συμφωνία. Χρησιμοποιώντας πάλι τις α.σ. του ΠΙΝΑΚΑ 1, με $k_0=0.305$ ($\sim \omega_{\Delta T}/2$) και για διάφορες τιμές του ε , διαπιστώνουμε ότι η τροχιά με το μεγαλύτερο, κατά απόλυτο τιμή, P_1 ($\Delta\omega$) διαφεύγει για $\varepsilon=0.1$. Οι τροχιές με ενδιάμεσες τιμές των α.σ. διαφεύγουν για μεγαλύτερα ε . Στο σχήμα 2.44 αντιπαρατίθενται οι τομές των τροχιών $j=0$ και $j=4$ για κάποιες τιμές του ε . Για μικρή διαταραχή (α και δ) η $j=0$ δίνει ελαφρά τοροειδή τομή, ενώ η $j=4$ που οι α.σ. είναι

πιο κοντά στο σ.σ., ένα λεπτό κυλινδροειδές και τα δύο δισδιάστατα. Οι τομές παχαίνουν και γίνονται πιο φανερά τοροειδείς για μεγαλύτερα ε , ενώ για $\varepsilon=0.1$ η $j=0$ διαφεύγει και στο (γ) προβάλλονται τα πρώτα σημεία της τομής, μέχρι και για $Z=2000$ μόνο. Η αντίστοιχη τομή της $j=4$ (στ), έχει σημάδια εργοδικότητας και φαίνεται να καταλαμβάνει ένα στενό αλλά τρισδιάστατο χώρο. Παρολαυτά δε διαφεύγει.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων των ODEs με αυτά από απευθείας αριθμητική επίλυση των PDEs δείχνουν αρκετά καλή σύγκλιση. Για παράδειγμα, παραθέτουμε στο σχήμα 2.45(α) τη διάδοση του παλμού, για τις α.σ. της $j=0$ και διαταραχή ίδια με του σχήματος 2.44(γ), όπως δίνεται από τις μερικές διαφορικές. Πράγματι λοιπόν ο παλμός καταστρέφεται λίγο πριν το $Z=2000$ και η ενέργεια του μοιράζεται αρχικά στις συνιστώσες του και χάνεται σε γραμμικά κύματα που εκπέμπονται εκατέρωθεν. Για λίγο μεγαλύτερο $\varepsilon=0.15$, στο (β) συγκρίνονται τα αποτελέσματα των ODEs και των PDEs για την εξέλιξη του ΔT . Παρατηρείται γρήγορη διαφυγή και στις δύο λύσεις.



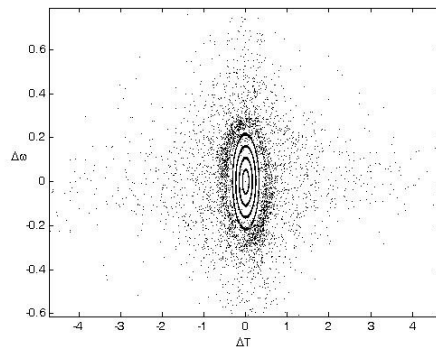
Σχήμα 2.44: Τρισδιάστατες προβολές τομών για τις $j=0$ (α-γ), $j=4$ (δ-στ), για $k_0=0.305$. Οι τιμές του ε για τα οριζόντια ζεύγη αναγράφονται αριστερά. Όλες έγιναν για $Z_{\max}=30000$, εκτός της (γ), που έγινε για $Z_{\max}=2000$. Σε όλες $(az,el)=(255,5)$.



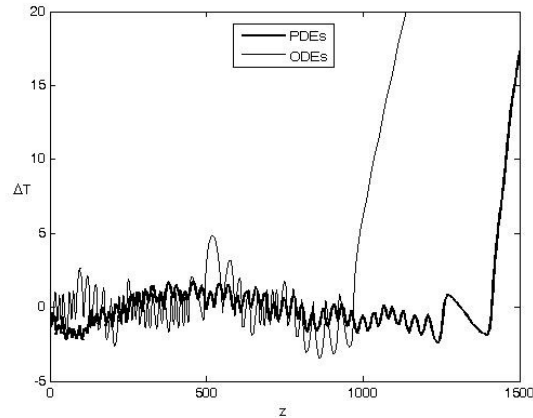
Σχήμα 2.45: Αριθμητικά αποτελέσματα, (α) α.σ. όπως $j=0$, $k_0=0.305$, $\varepsilon=0.1$, (β) $\varepsilon=0.15$, εξέλιξη του ΔT (διακεκομμένη) και σύγκριση με τις ODEs (γραμμική).

Για μικρότερες τιμές του k_0 η μεταβολική μέθοδος προσεγγίζει ακόμα καλύτερα τα αριθμητικά αποτελέσματα.

Στη συνέχεια εγκαταλείπουμε την επιταγή η αρχική τιμή της παλιάς Χαμιλτονιανής να είναι συγκεκριμένη, έτσι ώστε να ελέγξουμε την επίδραση του αρχικού $\Delta\omega$ για μεγάλο εύρος τιμών. Χρησιμοποιούμε τις α.σ. του ΠΙΝΑΚΑ 2. Ανάλογα με τη περίπτωση ομαλής διασποράς, δοκιμάζουμε αρχικά $k_0 = \omega_{\Delta T} / 4$. Στο σχήμα 2.46 είναι η δισδιάστατη προβολή των τομών για $\varepsilon=0.05$. Βλέπουμε ότι για μικρή σχετικά τιμή του ε πολλές τροχιές διαφεύγουν, ενώ άλλες γίνονται έντονα εργοδικές και αναμειγνύονται σε μεγάλο βαθμό. Οι τροχιές $j=11, 12$ διαφεύγουν για $\varepsilon=0.07$. Η αριθμητική επίλυση για κοντινή αρχική τιμή του $\Delta\omega (=0.6)$ δείχνει έντονη διατάραξη, αλλά όχι διάλυση. Τελικά διαλύεται για $\varepsilon=0.13$, τιμή μεγαλύτερη του 0.07, αλλά πάντως επίσης μικρή σε σχέση με την αντίστοιχη για ομαλή διασπορά. Το θετικό είναι ότι οι ODEs προβλέπουν αρκετά καλά τη διαφυγή και την απόσταση της, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.47.

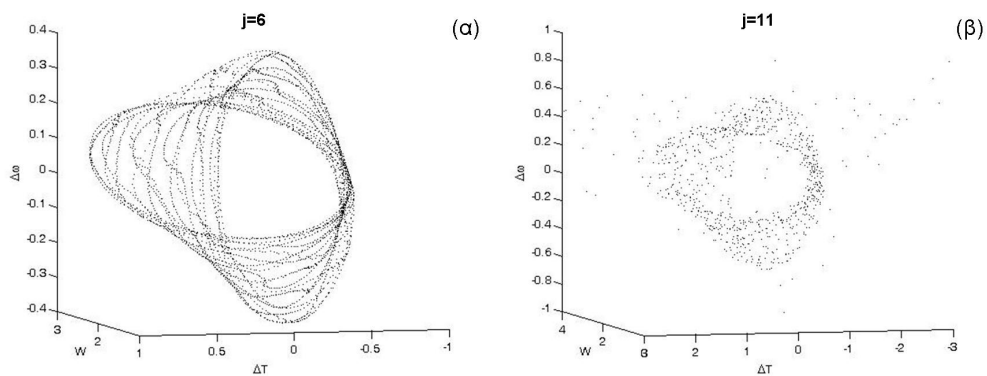


Σχήμα 2.46: Δισδιάστατη προβολή τομών για $k_0 = \omega_{\Delta T} / 4$, $\varepsilon=0.05$ και τετραγωνική συνάντηση διασποράς με α.σ. του ΠΙΝΑΚΑ2. Οι τροχιές από $j=13$ και πάνω διαφεύγουν γρήγορα.

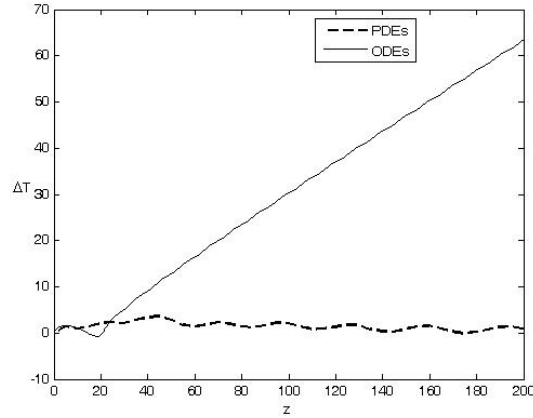


Σχήμα 2.47: Εξέλιξη του ΔT και διαφυγή για $k_0 = \omega_{\Delta T}/4$, $\varepsilon=0.14$, σύμφωνα με τις ODEs (γραμμή) και τις PDEs (έντονη γραμμή).

Για $k_0=0.61$, κοντά στο $\omega_{\Delta T}$, η συμφωνία των δύο μεθόδων επίλυσης χάνεται εντελώς. Στο σχήμα 2.48 φαίνονται τρισδιάστατες προβολές τομών των $j=6$ και $j=11$ για $\varepsilon=0.05$. Φαίνεται πως η $j=11$ διαφεύγει, κάτι κατανοητό και από τον εντελώς εργοδικό χαρακτήρα της τομής, όπου γεμίζει ξεκάθαρα εκτεταμένο τρισδιάστατο χώρο. Η αριθμητική επίλυση των συζευγμένων NLS όμως δεν δείχνει την ίδια ευαισθησία και προβλέπει τη διαφυγή να συμβαίνει για τιμή του ε πάνω από 0.2. Στο σχήμα 2.49 παρατίθενται οι λύσεις των δύο συστημάτων για την εξέλιξη του ΔT , όταν $\varepsilon=0.2$ και με αρχική τιμή του $\Delta\omega$ να είναι 0.6. Η λύση των ODEs φαίνεται βέβαια να διαφεύγει πολύ γρήγορα, τη στιγμή που η αριθμητική επίλυση δε δείχνει τίποτα τέτοιο.

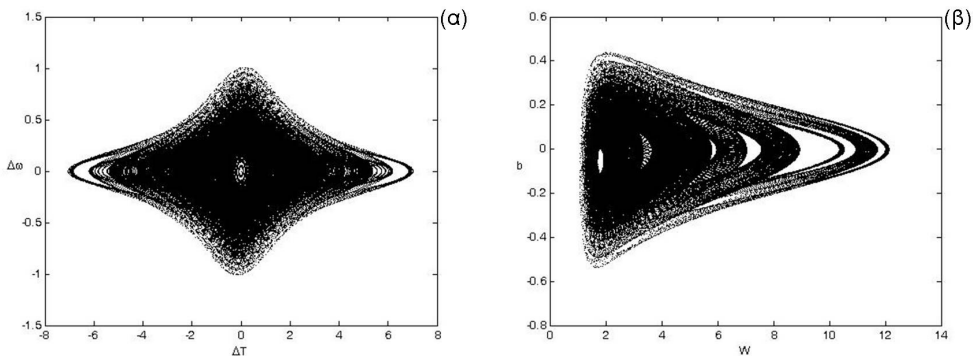


Σχήμα 2.48: Τρισδιάστατες προβολές για τις τομές των $j=6$ (α) και $j=11$ (β), όταν $k_0=0.61$, $\varepsilon=0.05$. Το $Z_{\max}=30000$, αλλά στο (β) φαίνεται τα σημεία μόνο μέχρι 10000 καθώς μετά διαφεύγουν.



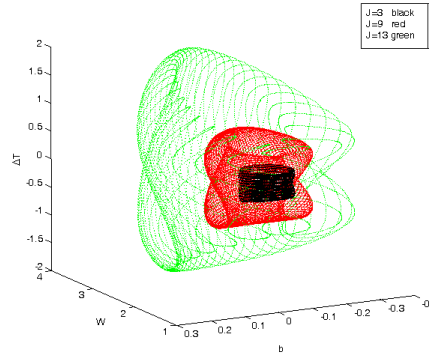
Σχήμα 2.49: Εξέλιξη του ΔT για την παραπάνω διαταραχή και αρχικό $\Delta\omega=0.6$, σύμφωνα με τις ODEs (α-γραμμή), και τις PDEs (β-διακεκομμένη).

Η ανοχή του συστήματος των συνήθων διαφορικών σε αρκετά μεγάλες τιμές του ε , όπως και η συμφωνία του με την αριθμητική επίλυση επανέρχεται για μεγάλες τιμές του k_0 . Κατ' αναλογία με την ομαλή διασπορά παραθέτουμε παρακάτω αποτελέσματα των ODEs για $k_0=20\omega_w$ και $\varepsilon=0.2$. Στο σχήμα 2.50 φαίνονται δισδιάστατες προβολές τομών. Ενώ δεν υπάρχει διαφυγή και υπάρχει περιορισμένη σχετικά εργοδικότητα οι προβολές των τομών αλληλεπικαλύπτονται έντονα και λόγω των πολλών σημείων (λόγω της μεγάλης συχνότητας k_0) η εικόνα συσκοτίζεται.

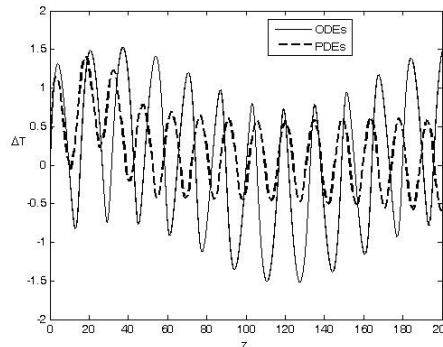


Σχήμα 2.50: Δισδιάστατες προβολές των τομών όταν $\sin(k_0 Z) = 0$, για $k_0=20\omega_w$, $\varepsilon=2.0$. $Z_{\max}=5000$.

Μια πιο κοντινή ματιά της εξέλιξης ορισμένων τροχιών βλέπουμε στο σχήμα 2.51, όπου παρίστανται τρισδιάστατες προβολές τριών τομών. Όλες είναι δισδιάστατες επιφάνειες. Τέλος στο σχήμα 2.52 συγκρίνεται η εξέλιξη του ΔT σύμφωνα με τις δύο μεθόδους, για αρχική τιμή του $\Delta\omega$ ίση με 0.6. Αν και οι ODEs δίνουν για ακόμα μια φορά διπλάσιο πλάτος ταλάντωσης, αυτό διατηρείται σταθερό σε σχέση με την αντίστοιχη λύση των PDEs, ενώ συλλαμβάνουν τη συχνότητα αρκετά καλά.



Σχήμα 2.51: Τρισδιάστατες προβολές των τροχιών $j=3$, μαύρο, $j=9$, κόκκινο, και $j=13$, πράσινο, για τη διαταραχή του σχήματος 90-91.



Σχήμα 2.52: Σύγκριση της εξέλιξης του ΔT σύμφωνα με τις ODEs (γραμμή) και τις PDEs (διακεκομμένη) για αρχικό $\Delta\omega=0.6$ και τη διαταραχή του σχήματος 90-91.

2.4.2 W_1 και W_2 άνισα (Γκαουσιανό ansatz)

Σε αυτή τη παράγραφο εξετάζεται η περίπτωση γωνίας πόλωσης διαφορετικής από 45° , κάτι που συμβαίνει όταν οι συνιστώσες έχουν διαφορετικές ενέργειες και εν κατακλείδι διαφορετικά εύρη. Δουλεύοντας όπως με το σύστημα (2.40) καταλήγουμε σε έξι εξισώσεις,

$$\frac{d\Delta T}{dZ} = -d\Delta\omega \quad (2.48\alpha)$$

$$\frac{dW_1}{dZ} = 2db_1 \quad (2.48\beta)$$

$$\frac{dW_2}{dZ} = 2db_2 \quad (2.48\gamma)$$

$$\frac{d\Delta\omega}{dZ} = \frac{4\beta g(E_2 + E_1)\Delta T}{(W_1^2 + W_2^2)^{3/2}} e^{-\left(2\frac{\Delta T}{W_1^2 + W_2^2}\right)^2} \quad (2.48\delta)$$

$$\frac{db_1}{dZ} = \frac{2d}{W_1^3} - \frac{gE_1}{\sqrt{2}W_1^2} - \frac{2\beta gE_2 W_1 e^{-\frac{2\Delta T^2}{W_1^2 + W_2^2}}}{(W_1^2 + W_2^2)^{3/2}} \left[1 - 4\frac{\Delta T^2}{W_1^2 + W_2^2}\right] \quad (2.48\epsilon)$$

$$\frac{db_2}{dZ} = \frac{2d}{W_2^3} - \frac{gE_2}{\sqrt{2}W_2^2} - \frac{2\beta gE_1 W_2 e^{-\frac{2\Delta T^2}{W_1^2 + W_2^2}}}{(W_1^2 + W_2^2)^{3/2}} \left[1 - 4\frac{\Delta T^2}{W_1^2 + W_2^2}\right] \quad (2.48\sigma)$$

Ενώ η Χαμιλτονιανή του συστήματος, η οποία διατηρείται όταν d =σταθερό, γράφεται

$$H_6 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[E_1 db_1^2 + E_2 db_2^2 + \frac{E_1 d}{W_1^2} + \frac{E_2 d}{W_2^2} - \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\frac{E_1^2}{W_1} + \frac{E_2^2}{W_2} \right) + E_r d \Delta \omega^2 - \frac{2\beta E_1 E_2}{\sqrt{W_1^2 + W_2^2}} e^{-\frac{2(\Delta T)^2}{W_1^2 + W_2^2}} \right]. \quad (2.49)$$

Το σύστημα έχει ένα σ.σ., για $d=1$, το $\Delta T_{\sigma\sigma} = 0$, $\Delta \omega_{\sigma\sigma} = 0$, $b_{1,2\sigma\sigma} = 0$ και

$$W_{1\sigma\sigma} = \frac{2^{3/2}}{g \left[E_1 + 2^{3/2} \beta \frac{E_2}{(1+\alpha^2)^{3/2}} \right]}, W_{2\sigma\sigma} = \frac{2^{3/2}}{g \left[E_2 + 2^{3/2} \beta \frac{E_1}{(1+\alpha^{-2})^{3/2}} \right]},$$

όπου το α σχετίζεται με τη γωνία πόλωσης, την οποία λόγω της ισχυρής διπλοθλαστικότητας θεωρούμε πάλι σταθερή, ενώ για το παραπάνω αποτέλεσμα θεωρήσαμε $W_2 = \alpha W_1$. Το α

δίνεται από $\frac{E_2}{E_1} \alpha - 1 + \beta \left(\frac{2}{1+\alpha^2} \right)^{3/2} \left(\alpha^4 - \frac{E_2}{E_1} \right) = 0$, η οποία για δεδομένο λόγο E_1 προς E_2

έχει μοναδική λύση. Η παραπάνω λύση εκπροσωπεί το στάσιμο διανυσματικό σολιτόνιο για οποιαδήποτε γωνία πόλωσης. Σε παρόμοιο συμπέρασμα είχε καταλήξει ο Kaup στην [110], αν και η συγκεκριμένη εργασία δεν περιλαμβάνει μεταβολή στη διασπορά.

Συνεχίζοντας όπως για το σύστημα τεσσάρων εξισώσεων, γραμμικοποιούμε γύρω από το στάσιμο σημείο και καταλήγουμε στις παρακάτω χαρακτηριστικές συχνότητες,

$$\omega_{W_1} = \omega_{W_2} = \frac{\gamma^2}{4} \left[E_1 + \frac{2^{3/2} \beta E_2}{(1+\alpha^2)^{3/2}} \right]^2 \quad (2.50\alpha)$$

$$\omega_{\Delta T} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} \beta \gamma^4 (E_1 + E_2) \left[E_1 (1+\alpha^2)^{3/2} + 2^{3/2} \beta E_2 \right]^3}{8(1+\alpha^2)^6}} \quad (2.50\beta)$$

, οι οποίες θα αποτελέσουν οδηγό για την περαιτέρω μελέτη.

Αν και το σύστημα έχει έξι εξισώσεις, ακόμα και αδιατάρακτο, μπορούμε να τις μειώσουμε στις τέσσερις. Αυτό συμβαίνει διότι εάν διατηρείται η πόλωση, όπως και θεωρούμε, υπάρχει σταθερή σχέση μεταξύ W_1 και W_2 , ενώ αποδεικνύεται εύκολα ότι υπάρχει και ανάλογη μεταξύ b_1 και b_2 . Θεωρώντας γωνία πόλωσης $\theta = 30^\circ$ και $E_1=1$, βρίσκουμε $E_2=0.57735$. Με τη βοήθεια αριθμητικής επίλυσης (Mathematica) βρίσκουμε ότι $\alpha=1.04967$. Τελικά $W_{1\sigma\sigma}=2.083899$, $W_{2\sigma\sigma}=2.187429$ και η τιμή της $H_6=-0.2199171054$.

Παρακάτω επιδεικνύονται αποτελέσματα για ομαλή μεταβολή της διασποράς $d=1+\varepsilon \sin(k_0 Z)$. Δεδομένου ότι θα πρέπει να μετατρέψουμε το πρόβλημα, για μια φορά ακόμα, από δύο σε τρεις β.ε., η νέα Χαμιλτονιανή θα είναι $H'_6 = H_6(q_3) + p_3 = 0$ και το νέο σύστημα,

$$\frac{d\Delta T}{dZ} = -d\Delta \omega \quad (2.51\alpha)$$

$$\frac{dW_1}{dZ} = 2db_1 \quad (2.51\beta)$$

$$\frac{d\Delta \omega}{dZ} = \frac{4\beta g (E_2 + E_1) \Delta T}{W_1^3 (1+\alpha^{-2})^{3/2}} e^{-\left(\frac{2\Delta T}{W_1^2 (1+\alpha^{-2})} \right)^2} \quad (2.51\gamma)$$

$$\frac{db_1}{dZ} = \frac{2d}{W_1^3} - \frac{gE_1}{\sqrt{2W_1^2}} - \frac{2\beta gE_2 e^{\frac{2\Delta T^2}{W_1^2(1+\alpha^{-2})}}}{W_1^2(1+\alpha^{-2})^{3/2}} \left[1 - 4 \frac{\Delta T^2}{W_1^2(1+\alpha^{-2})} \right] \quad (2.51\delta)$$

$$\frac{dq_3}{dZ} = 1 \quad (2.51\epsilon)$$

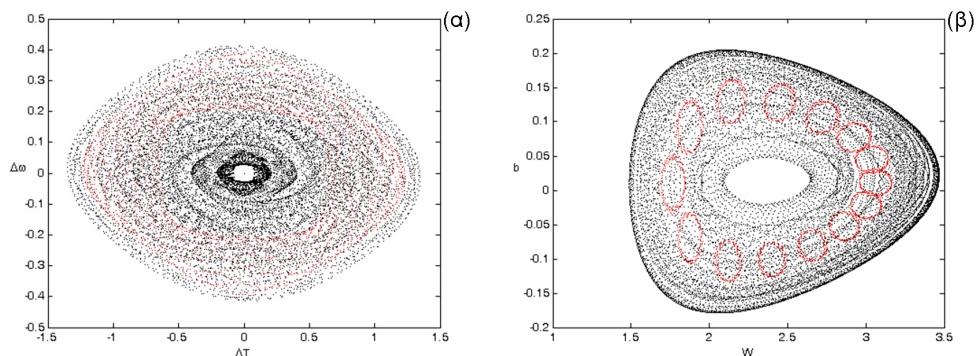
$$\frac{dp_3}{dZ} = -\frac{dH_6}{dZ} \quad (2.51\sigma\tau)$$

Τα αποτελέσματα της μελέτης είναι παρόμοια με αυτά για την περίπτωση $W_1=W_2$. Παραθέτουμε κάποια από αυτά για να παρουσιάσουμε τη δυνατότητα ελέγχου του συστήματος και για διαφορετικά εύρη. Οι αρχικές συνθήκες φαίνονται στον ΠΙΝΑΚΑ 3 και είναι τέτοιες, ώστε η αρχική τιμή της H_6 να είναι -0.18 , ξανά κοντά στο $\sigma.σ.$, ενώ η νέα τιμή της Χαμιλτονιανής παραμένει ίση με μηδέν. Σε αντίθεση με την προηγούμενη μελέτη, οι αρχικές τιμές που μεταβάλλονται είναι για το b_1 (P_2) και το ΔT (Q_1), τα αποτελέσματα όμως παραμένουν αμετάβλητα και εξαρτώμενα κυρίως από τη φύση της μεταβολής της διασποράς.

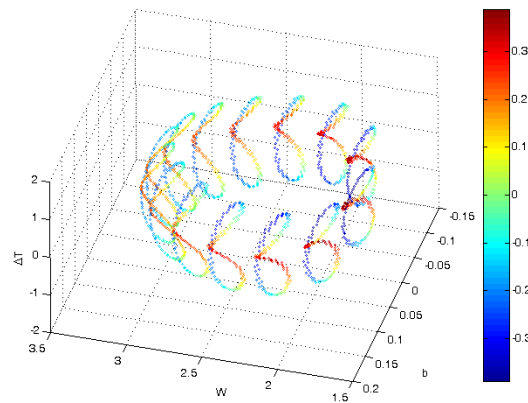
ΠΙΝΑΚΑΣ 3

j=0	Q3=0.000000	P3=0.180000	Q2=2.083900	P2=0.204443	Q1=0.000000	P1=0.000000
j=1	Q3=0.000000	P3=0.180000	Q2=2.083900	P2=0.203335	Q1=0.111111	P1=0.000000
j=2	Q3=0.000000	P3=0.180000	Q2=2.083900	P2=0.199994	Q1=0.222222	P1=0.000000
j=3	Q3=0.000000	P3=0.180000	Q2=2.083900	P2=0.194359	Q1=0.333333	P1=0.000000
j=4	Q3=0.000000	P3=0.180000	Q2=2.083900	P2=0.186318	Q1=0.444444	P1=0.000000
j=5	Q3=0.000000	P3=0.180000	Q2=2.083900	P2=0.175680	Q1=0.555556	P1=0.000000
j=6	Q3=0.000000	P3=0.180000	Q2=2.083900	P2=0.162118	Q1=0.666667	P1=0.000000
j=7	Q3=0.000000	P3=0.180000	Q2=2.083900	P2=0.145054	Q1=0.777778	P1=0.000000
j=8	Q3=0.000000	P3=0.180000	Q2=2.083900	P2=0.123359	Q1=0.888889	P1=0.000000
j=9	Q3=0.000000	P3=0.180000	Q2=2.083900	P2=0.094326	Q1=1.000000	P1=0.000000

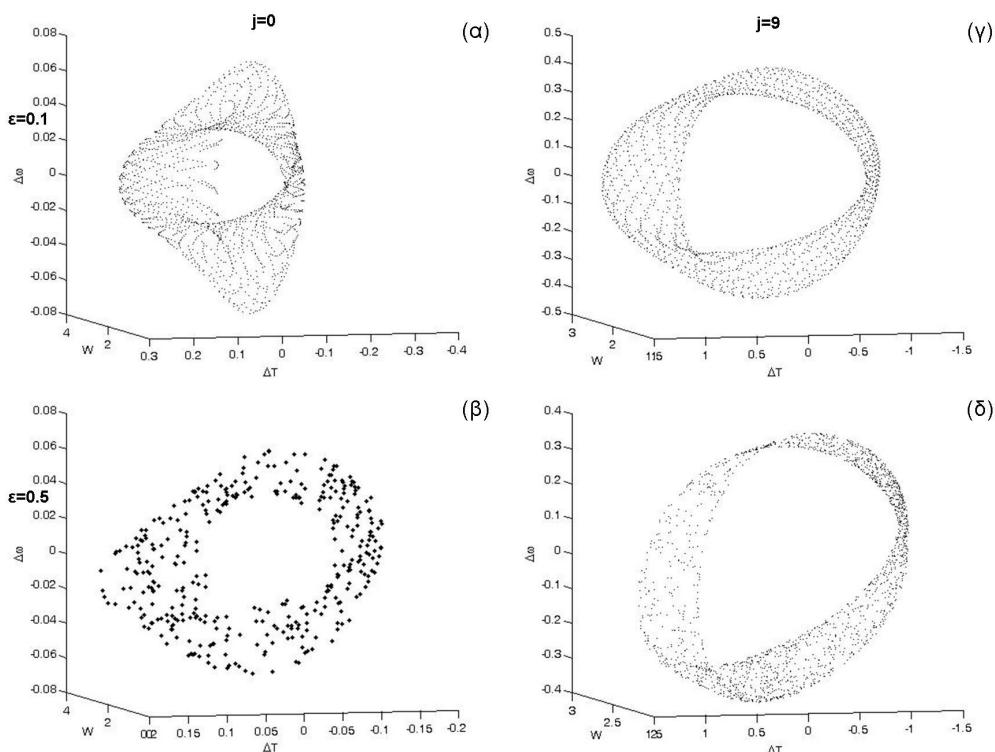
Ξεκινώντας για μικρή συχνότητα διαταραχής $k_0 = \omega_w / 4$, στο σχήμα 2.53 βλέπουμε τις διδιάστατες προβολές για τις τομές των τροχιών του ΠΙΝΑΚΑ 3, όταν $\epsilon=0.1$. Είναι φανερό ότι δεν υπάρχει καμία διαφυγή, ούτε ισχυρά φανερά εργοδικότητα, αλλά οι τομές αλληλεπικαλύπτονται. Με κόκκινο εμφανίζεται η $j=7$ όπου βρίσκεται κοντά σε περίπλοκο συντονισμό και η τομή της αποτελείται από δεκατέσσερα νησιά. Στο σχήμα 2.54 φαίνεται η τετραδιάστατη τομή αυτής της τροχιάς. Ο χρωματισμός κάνει σαφές ότι η αναδίπλωση που παθαίνουν τα νησιά στον εαυτό τους δε συνιστά πραγματική επαφή.



Σχήμα 2.53: Διδιάστατες τομές των τροχιών του ΠΙΝΑΚΑ3 για $k_0 = \omega_w / 4$, $\epsilon=0.1$, καμία διαφυγή. Με κόκκινο φαίνεται η τομή της $j=7$.



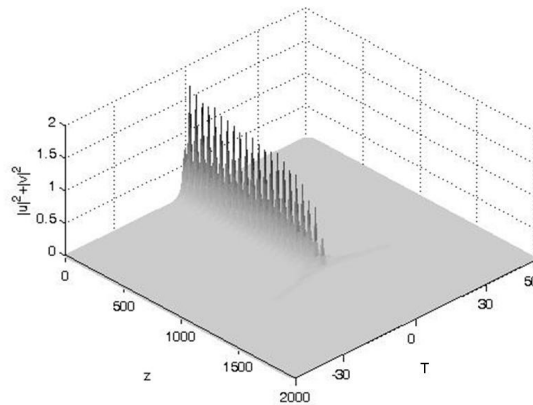
Σχήμα 2.54: Τομή της $j=7$ για $k_0 = \omega_w / 4$, $\varepsilon=0.1$. Η κλίμακα του χρώματος παριστά τις τιμές της $\Delta\omega$.



Σχήμα 2.55: Τρισδιάστατες προβολές τομών για τις $j=1$, $j=9$ (ΠΙΝΑΚΑΣ 3) για τα δεδομένα του Σχ. 2.53.

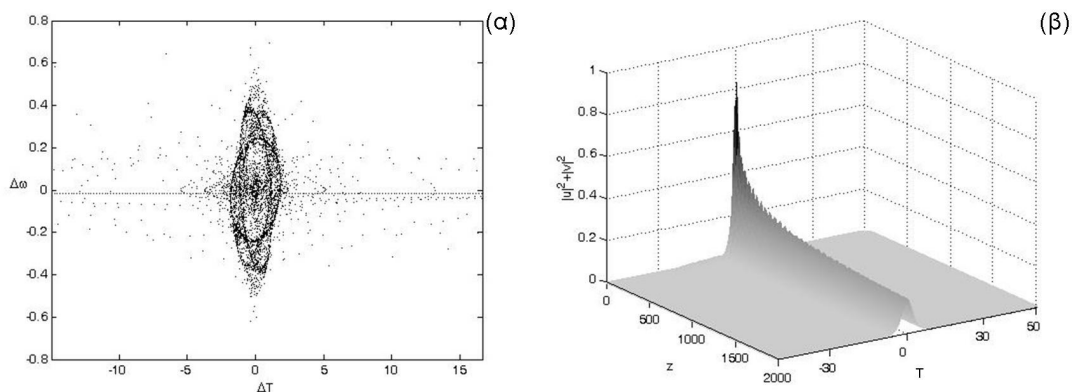
Δημιουργώντας τετραδιάστατες και τρισδιάστατες τομές των επί μέρους τροχιών μας βοηθάει να κατανοήσουμε την εξέλιξη του συστήματος και πως επηρεάζεται από την αυξανόμενη διαταραχή. Στο σχήμα 2.55 αντιπαραβάλλονται οι τρισδιάστατες προβολές τομών για τις τροχιές $j=0$ και $j=9$ για $\varepsilon=0.1$ και 0.5 , και διάδοση μέχρι $Z_{\max}=100000$. Για $\varepsilon=0.1$, αντίστοιχα με το Σχ.2.16(α-η), οι τομές είναι τοροειδείς και δισδιάστατες. Αυξάνοντας τη διαταραχή μέχρι το $\varepsilon=0.5$ προκαλείται η διαφυγή της $j=0$. Στο σχήμα 2.55(β) φαίνεται η τομή να καταλαμβάνει τρισδιάστατο χώρο, ενώ είναι χαραγμένη μόνο μέχρι $Z=20000$, καθώς λίγο μετά διαφεύγει. Οι υπόλοιπες τροχιές, για $\varepsilon=0.5$, παρουσιάζουν μεγαλύτερη ή μικρότερη εργοδικότητα, όπως φαίνεται και στο Σχ.2.55(δ). Η σταθερότητα που επιδεικνύεται επαληθεύεται από την αριθμητική επίλυση των PDEs, ενώ για $\varepsilon=0.55$ και η αριθμητική λύση

οδηγείται σε διάλυση (σχήμα 2.56), σημάδι της επιτυχίας της μεταβολικής μεθόδου, για αυτή τη συχνότητα.



Σχήμα 2.56: Εξέλιξη του παλμού και διάλυση του, σύμφωνα με απευθείας αριθμητική προσομοίωση, για τις αρχικές συνθήκες της $j=0$ και διαταραχή $k_0 = \omega_w / 4$, $\varepsilon=0.55$.

Αυξάνοντας τη συχνότητα μέχρι $k_0 = \omega_w$, διαπιστώνουμε για μία ακόμη φορά πως τα συμπεράσματα της μεταβολικής μεθόδου απέχουν πολύ από τα αριθμητικά. Σα παράδειγμα, παραθέτουμε στο σχήμα 2.57(α) τη δισδιάστατη προβολή των τόμων για $\varepsilon=0.05$. Φαίνεται πως σχεδόν όλες διαφεύγουν αργά ή πιο γρήγορα. Παρολαυτά η ευαισθησία που επιδεικνύεται στο (α) δεν επαληθεύεται από την αριθμητική επίλυση. Μάλιστα για τις α.σ. της $j=0$ ο παλμός δε διαλύεται παρά μόνο για ε μεγαλύτερο από 0.3. Στο σχήμα 2.57(β) φαίνεται ο παλμός όπως δίνεται από την επίλυση των PDEs για $\varepsilon=0.3$, όπου αν και χάνει, κατά τα γνωστά, αρκετή από την ενέργεια του παραμένει συγκεντρωμένος και αναγνωρίσιμος.



Σχήμα 2.57: (α) Δισδιάστατη προβολή τομών για τις α.σ. του ΠΙΝΑΚΑ3, $k_0 = \omega_w$, $\varepsilon=0.05$, (β) εξέλιξη του παλμού σύμφωνα με τις PDEs για τις α.σ. της $j=0$ και $k_0 = \omega_w$, $\varepsilon=0.3$.

2.4.3 *sech ansatz*, $W_1=W_2$

Στη παρούσα παράγραφο κάνουμε μία νέα αρχή χρησιμοποιώντας *ansatz* τύπου *sech* για τις συνιστώσες του παλμού. Αν και οι δύο συναρτήσεις δε διαφέρουν, η μεταβολική μέθοδος εφαρμόζεται εξ αρχής και γίνονται πάλι όλοι οι υπολογισμοί, όπως και στην αρχή του

κεφαλαίου 2.4, όπου χρησιμοποιήθηκε γκαουσιανό ansatz. Το sech σαν αρχική συνθήκη έχει χρησιμοποιηθεί από πολλούς συγγραφείς σε αριθμητικές [143, 144] και αναλυτικές εργασίες [109, 133], ενώ για συγκεκριμένη επιλογή παραμέτρων (στη μορφή διανυσματικού σολιτονίου) αποτελεί λύση για τις συζευγμένες NLS [1, 146]. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα παραμένει ίδια (σχέση 2.31).

Τα ansatz για τις δύο συνιστώσες θα είναι της μορφής,

$$u = A_1 \operatorname{sech} \left(\frac{T - T_1}{W_1} \right) \exp \left\{ i \left[-\omega_1 (T - T_1) + \frac{b_1}{2W_1} (T - T_1)^2 \right] \right\} \quad (2.52\alpha)$$

$$v = A_2 \operatorname{sech} \left(\frac{T - T_2}{W_2} \right) \exp \left\{ i \left[-\omega_2 (T - T_2) + \frac{b_2}{2W_2} (T - T_2)^2 \right] \right\}, \quad (2.52\beta)$$

με παραμέτρους ανάλογες με αυτές των (2.30). Εφαρμόζοντας, τις παραπάνω συναρτήσεις στην (2.31) και ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο, καταλήγουμε στη Λαγκρανζιανή του προβλήματος.

$$\begin{aligned} L_S = & i(A_1^* A_{1z} - A_1 A_{1z}^*) W_1 + i(A_2^* A_{2z} - A_2 A_{2z}^*) W_2 - \frac{\pi^2}{12} (|A_1|^2 W_1^2 b_{1z} + |A_2|^2 W_2^2 b_{2z}) \\ & - 2(|A_1|^2 W_1 \omega_1 T_{1z} + |A_2|^2 W_2 \omega_2 T_{2z}) + \frac{\pi^2}{12} (|A_1|^2 W_1 W_{1z} b_1 + |A_2|^2 W_2 W_{2z} b_2) \\ & - d_1 \left(\frac{|A_1|^2}{3W_1} + \frac{\pi^2}{12} |A_1|^2 W_1 b_1^2 + |A_1|^2 W_1 \omega_1^2 \right) - d_2 \left(\frac{|A_2|^2}{3W_2} + \frac{\pi^2}{12} |A_2|^2 W_2 b_2^2 + |A_2|^2 W_2 \omega_2^2 \right), \quad (2.53) \\ & + \frac{2}{3} g |A_1|^4 W_1 + \frac{2}{3} g |A_2|^4 W_2 + \beta g |A_1|^2 |A_2|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{T - T_1}{W_1} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{T - T_2}{W_2} \right) dT \end{aligned}$$

όπου ο δείκτης “S” συμβολίζει το sech. Το τελευταίο ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται αναλυτικά για διαφορετικά εύρη. Στο κεφάλαιο 3 της εργασίας χρησιμοποιούμε μια προσεγγιστική μέθοδο για τον υπολογισμό του. Εδώ θα περιορίσουμε τη μελέτη μας στην περίπτωση $W_1 = W_2$. Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που χρησιμοποιήσαμε και για τις γκαουσιανές συναρτήσεις, καταλήγουμε σε σύστημα οκτώ συνήθων διαφορικών,

$$\frac{dT_1}{dZ} = -d_1 \omega_1 \quad (2.54\alpha)$$

$$\frac{dT_2}{dZ} = -d_2 \omega_2 \quad (2.54\beta)$$

$$\frac{dW_1}{dZ} = d_1 b_1 \quad (2.54\gamma)$$

$$\frac{dW_2}{dZ} = d_2 b_2 \quad (2.54\delta)$$

$$\frac{d\omega_1}{dZ} = \frac{1}{2} \beta g \frac{E_2}{W_1 W_2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{T - T_2}{W_2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{T - T_1}{W_1} \right) dT \quad (2.54\epsilon)$$

$$\frac{d\omega_2}{dZ} = \frac{1}{2} \beta g \frac{E_1}{W_1 W_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{T - T_2}{W_2} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{T - T_1}{W_1} \right) dT \quad (2.54\sigma)$$

$$\frac{db_1}{dZ} = \frac{2}{\pi^2 E_1 W_1^2} \left\{ \frac{2E_1}{W_1} d_1 - 2gE_1^2 - \frac{3\beta g E_2 E_1}{W_2} \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2 \left(\frac{T-T_2}{W_2} \right) \frac{\partial}{\partial T} \left[(T-T_1) \sec h^2 \left(\frac{T-T_1}{W_1} \right) \right] dT \right\} \quad (2.54\zeta)$$

$$\frac{db_2}{dZ} = \frac{2}{\pi^2 E_2 W_2^2} \left\{ \frac{2E_2}{W_2} d_2 - 2gE_2^2 - \frac{3\beta g E_2 E_1}{W_1} \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2 \left(\frac{T-T_1}{W_1} \right) \frac{\partial}{\partial T} \left[(T-T_2) \sec h^2 \left(\frac{T-T_2}{W_2} \right) \right] dT \right\}. \quad (2.54\eta)$$

Το σύστημα έχει τις ίδιες διατηρήσιμες ποσότητες με το (2.32) και η επίσης διατηρήσιμη Χαμιλτονιανή του είναι,

$$H_8 = d_1 E_1 \left(\frac{1}{3W_1^2} + \frac{1}{12} \pi^2 b_1^2 + \omega_1^2 \right) + d_2 E_2 \left(\frac{1}{3W_2^2} + \frac{1}{12} \pi^2 b_2^2 + \omega_2^2 \right) - \frac{2}{3} g \left(\frac{E_1^2}{W_1} + \frac{E_2^2}{W_2} \right) - \beta g \frac{E_1 E_2}{W_1 W_2} \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2 \left(\frac{T-T_1}{W_1} \right) \sec h^2 \left(\frac{T-T_2}{W_2} \right) dT. \quad (2.55)$$

Δουλεύοντας όπως και για την περίπτωση γκαουσιανού ansatz, απαιτώντας ίσα εύρη, πλάτη και ενέργειες και εκμεταλλευόμενοι τις συμμετρίες στο σύστημα των ODEs, περιορίζουμε το πρόβλημα σε ένα τεσσάρων εξισώσεων:

$$\frac{d\Delta T}{dZ} = -d\Delta\omega \quad (2.56\alpha)$$

$$\frac{dW}{dZ} = db \quad (2.56\beta)$$

$$\frac{d\Delta\omega}{dZ} = -4\beta g \frac{E}{W^2} \frac{\partial}{\partial a} F(a) \quad (2.56\gamma)$$

$$\frac{db}{dZ} = \frac{4}{\pi^2 W^2} \left[\frac{d}{W} - gE - 3\beta g E \frac{d}{da} (aF(a)) \right], \quad (2.56\delta)$$

όπου $F(a) = \frac{a \cosh(a) - \sinh(a)}{\sinh^3(a)}$ και $a = \frac{\Delta T}{W}$. Η Χαμιλτονιανή γράφεται πλέον:

$$H_4 = \frac{d}{6} \pi^2 E b^2 + dE_1 \Delta\omega^2 + \frac{2}{3} d \frac{E}{W^2} - \frac{4}{3} g \frac{E^2}{W} - 4\beta g \frac{E^2}{W} F(a). \quad (2.57)$$

Για τη μορφοποίηση των παραπάνω εξισώσεων στάθηκαν χρήσιμα κάποια ολοκληρώματα, τα οποία και παραθέτονται στο Appendix B.

Χωρίς να αναφερθούμε αναλυτικά, σημειώνουμε ότι και πάλι το σύστημα ομοιάζει με την αλληλεπίδραση δύο σωματίων τα οποία έχουν μεταβαλλόμενη μάζα και βρίσκονται μέσα σε δυναμικό Kepler. Η μορφή του δυναμικού λοιπόν είναι Kepler ως προς το W και ομοιάζουν με ανάποδη γκαουσιανή ως προς το ΔT. Το στάσιμο σημείο (σ.σ.) του συστήματος (2.56) είναι

$\Delta T_{\sigma\sigma} = 0$, $\Delta\omega_{\sigma\sigma} = 0$, $b_{\sigma\sigma} = 0$, $W_{\sigma\sigma} = \frac{1}{Eg(1+\beta)}$, και είναι «κέντρο». Η τιμή της

Χαμιλτονιανής στον πυθμένα του δυναμικού είναι $H_{\sigma\sigma} = -1.851851852$. Γραμμικοποιώντας γύρω από αυτό βρίσκουμε πάλι τις χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος

$$\omega_{\Delta T} = \sqrt{\frac{16}{15} g^4 E^4 \beta (1+\beta)^3}, \quad \omega_W = \frac{4g^2 E^2 (1+\beta)^2}{\pi}, \quad (2.58)$$

Αυτό έχοντας θέσει το σύνηθες $d=1$. Οι συχνότητες αυτές μοιάζουν αρκετά διαφορετικές σε σχέση με αυτές που εξήχθησαν για γκαουσιανά ansatz, όμως αυτό οφείλεται στην κανονικοποίηση μόνο. Κυρίως δε στο γεγονός ότι στη περίπτωση της γκαουσιανής ορίσαμε τον παρονομαστή του εκθετικού ως W^2 και όχι $2W^2$, οπότε και θα υπήρχε άμεση αντιστοιχία με το εύρος του sech. Τονίζουμε ότι πρόκειται απλώς για διαφορετική κανονικοποίηση και οι συχνότητες είναι κοντά μεταξύ τους.

Παίρνοντας πάλι $E=1$ και $g=1$, $\beta=2/3$, το στάσιμο σημείο θα είναι $\Delta T_{\sigma\sigma}=0$, $\Delta\omega_{\sigma\sigma}=0$, $b_{\sigma\sigma}=0$, $W_{\sigma\sigma}=0.6$, ενώ $\omega_{\Delta T}=1.814$ και $\omega_w=1.768$. Η μορφή που παίρνουν τα ansatz είναι $u=\left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} \operatorname{sech}\left(\frac{5}{3}T\right)$, $v=\left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} \operatorname{sech}\left(\frac{5}{3}T\right)$, όπου με απλή κανονικοποίηση μετασχηματίζεται στη γνώστη στάσιμη λύση του διανυσματικού σολιτονίου για ισχυρή διπλοθλαστικότητα [146]: $u=\left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} \operatorname{sech}(T)$, $v=\left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} \operatorname{sech}(T)$.

Η μελέτη της επίδρασης διαταραχής περιορίζεται σε ομαλή συνάρτηση διασποράς $d=1+\varepsilon \sin(k_0 Z)$. Η εισαγωγή μεταβαλλόμενης διασποράς επιβάλει τη μετατροπή του συστήματος, από δύο β.ε., σε τρεις β.ε. Δουλεύοντας όπως πριν καταλήγουμε στο σύστημα,

$$\frac{d\Delta T}{dZ} = -d\Delta\omega \quad (2.59\alpha)$$

$$\frac{dW}{dZ} = db \quad (2.59\beta)$$

$$\frac{d\Delta\omega}{dZ} = -4\beta g \frac{E}{W^2} \frac{\partial}{\partial a} F(a) \quad (2.59\gamma)$$

$$\frac{db}{dZ} = \frac{4}{\pi^2 W^2} \left[\frac{d}{W} - gE - 3\beta gE \frac{d}{da} (aF(a)) \right] \quad (2.59\delta)$$

$$\frac{dq_3}{dZ} = 1 \quad (2.59\epsilon)$$

$$\frac{dp_3}{dZ} = -\frac{dH_4}{dZ} \quad (2.59\sigma\tau)$$

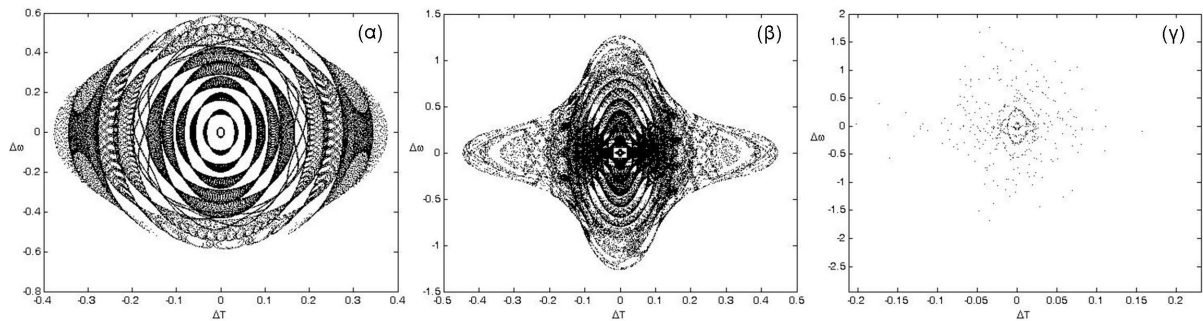
Η νέα Χαμιλτονιανή για μια φορά ακόμα θα γράφεται, $H'_4 = H_4(q_3) + p_3 = 0$. Αρχικά παίρνουμε α.σ. τέτοιες ώστε η H_4 να ξεκινά από σταθερή τιμή, κοντά στο σ.σ., συγκεκριμένα $H_4=-1.7$. Όλες οι α.σ. αναγράφονται στον ΠΙΝΑΚΑ 4.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4

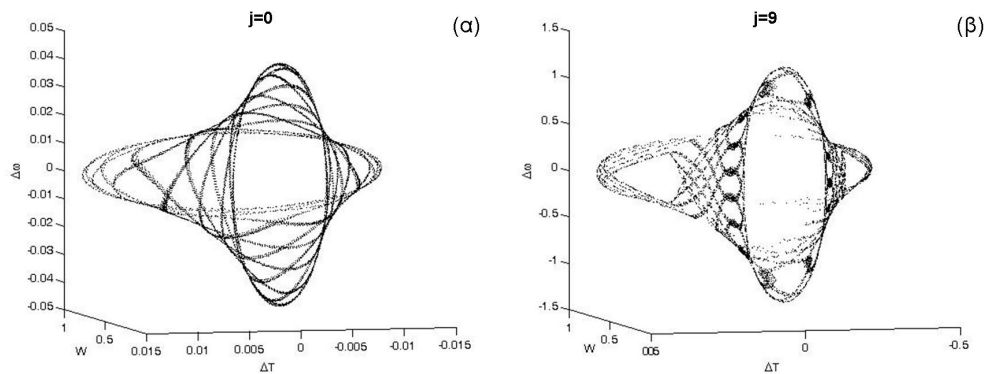
j=0	Q3=0.000000	P3=1.700000	Q2=0.600000	P2=0.303669	Q1=0.010000	P1=0.000000
j=1	Q3=0.000000	P3=1.700000	Q2=0.600000	P2=0.300729	Q1=0.043333	P1=0.000000
j=2	Q3=0.000000	P3=1.700000	Q2=0.600000	P2=0.294034	Q1=0.076667	P1=0.000000
j=3	Q3=0.000000	P3=1.700000	Q2=0.600000	P2=0.283377	Q1=0.110000	P1=0.000000
j=4	Q3=0.000000	P3=1.700000	Q2=0.600000	P2=0.268388	Q1=0.143333	P1=0.000000
j=5	Q3=0.000000	P3=1.700000	Q2=0.600000	P2=0.248428	Q1=0.176667	P1=0.000000
j=6	Q3=0.000000	P3=1.700000	Q2=0.600000	P2=0.222356	Q1=0.210000	P1=0.000000
j=7	Q3=0.000000	P3=1.700000	Q2=0.600000	P2=0.187918	Q1=0.243333	P1=0.000000
j=8	Q3=0.000000	P3=1.700000	Q2=0.600000	P2=0.139447	Q1=0.276667	P1=0.000000
j=9	Q3=0.000000	P3=1.700000	Q2=0.600000	P2=0.044358	Q1=0.310000	P1=0.000000

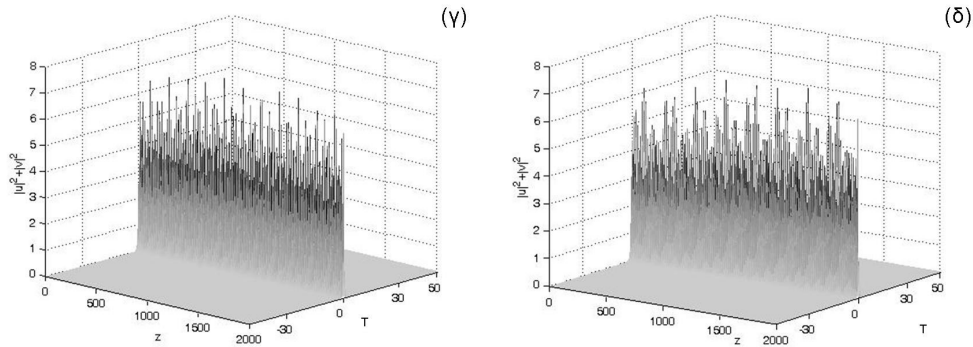
Ξεκινώντας με $k_0 = \omega_w/4$, κατασκευάζουμε τις τομές για όλες τις τροχιές του ΠΙΝΑΚΑ 4. Στο σχήμα 2.58 φαίνονται δισδιάστατες προβολές τους για $\varepsilon=0.1$, 0.5 και 0.7

όπου παρατηρούμε συνολική διαφυγή. Κάτι διαφορετικό που εφαρμόσαμε για τις συγκεκριμένες τομές είναι ότι κατασκευάστηκαν για $b_l=0$, ενώ στα προηγούμενα κεφάλαια δείξαμε κυρίως τομές για $\sin(k_0 Z) = 0$. Η συγκεκριμένη τομή επελέγη για να δείχθει ότι μπορούμε και σε αυτή τη περίπτωση να πάρουμε την εικόνα για την εξέλιξη του συστήματος. Στο (α), για $\varepsilon=0.1$, οι προβολές αλληλεπικαλύπτονται σε κάποιο βαθμό, και στο (β), για $\varepsilon=0.5$, πολύ περισσότερο, ενώ οι τροχιές εκτείνονται σε πολύ μεγαλύτερες τιμές των παραμέτρων. Ελάχιστα σημεία συγκεντρώνονται στο (γ), όπου οι τροχιές διαφεύγουν σχεδόν αμέσως. Στο σχήμα 2.59(α-β) φαίνονται τρισδιάστατες προβολές για τις $j=0$ και $j=9$, για τις πλέον ακραίες δηλαδή α.σ., για την περίπτωση του σχήματος 2.58(β). Τα σχήματα είναι δισδιάστατα, άρα αντιστοιχούν σε ημιπεριοδική φραγμένη κίνηση. Απευθείας αριθμητική επίλυση των PDEs επαληθεύει το αποτέλεσμα, όπως βλέπουμε στο σχήμα 2.59(γ, δ), όπου φαίνεται η εξέλιξη του παλμού για την ίδια μεταβολή στη διασπορά και τις ίδιες αρχικές συνθήκες με το σχήμα 2.59(α και β) αντίστοιχα. Ο παλμός παρουσιάζει πολύ έντονη ταλάντωση, αλλά διατηρείται τουλάχιστον μέχρι $Z=2000$.



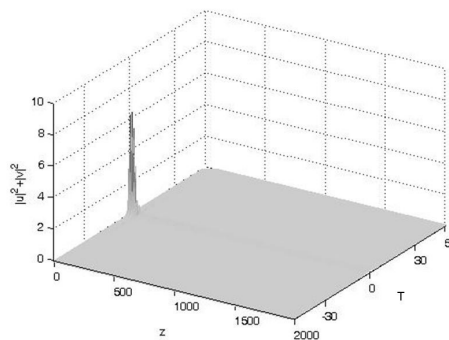
Σχήμα 2.58: Δισδιάστατες προβολές των τομών για $b_l=0$ των τροχιών του ΠΙΝΑΚΑ 4, για $k_0 = \omega_W / 4$ και $\varepsilon=0.1$ (α), $\varepsilon=0.5$ (β), $\varepsilon=0.7$ (γ).





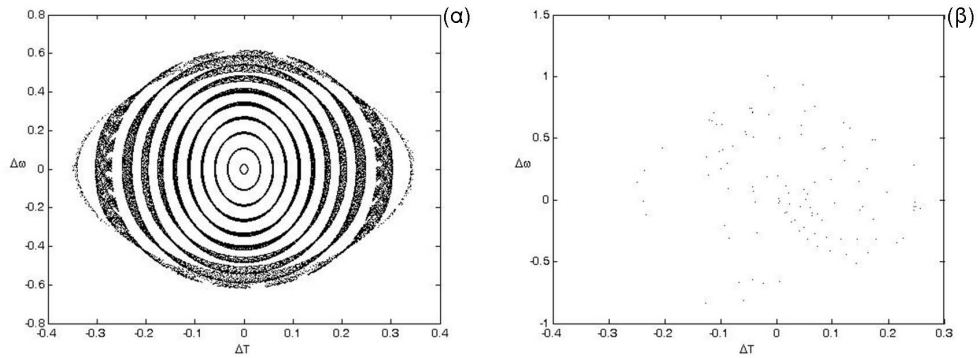
Σχήμα 2.59: (α, β) Τρισδιάστατες προβολές των τομών για τις τροχιές $j=0, j=9$, για διαταραχή $k_0 = \omega_w / 4$ και $\varepsilon=0.5$. (γ, δ) Εξέλιξη του παλμού για τις συνθήκες του (α) και (β) αντίστοιχα, σύμφωνα με την αριθμητική επίλυση των PDEs.

Η μεταβολική μέθοδος προβλέπει με επιτυχία και τη διαταραχή που τελικά καταστρέφει τον παλμό, όπως βλέπουμε και στο σχήμα 2.60. Η αριθμητική επίλυση των PDEs δείχνει επίσης πολύ γρήγορη καταστροφή και διασπορά του παλμού για $\varepsilon=0.7$, όπως δηλαδή στο σχήμα 2.58(γ).

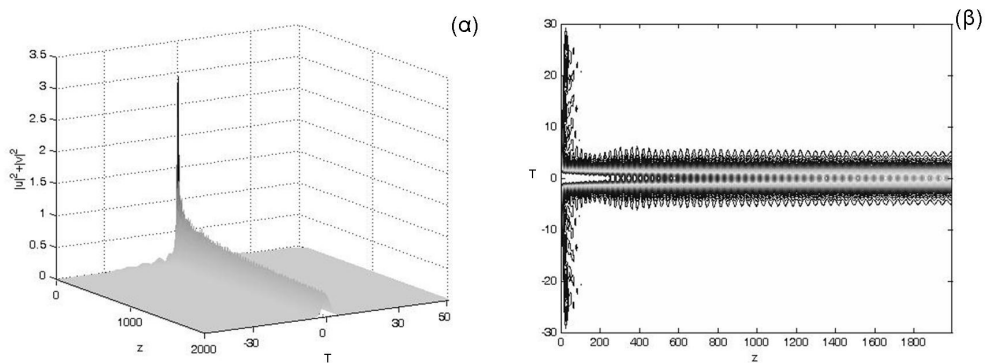


Σχήμα 2.60: Διάλυση του παλμού για $k_0 = \omega_w / 4$ και $\varepsilon=0.7$, αριθμητική επίλυση.

Αντιμέτωποι με την αποτυχία της μεταβολικής μεθόδου να αποδώσει έστω και κατά προσέγγιση ποσοτικά σωστά αποτελέσματα ερχόμαστε πάλι, για συχνότητες κοντά στις χαρακτηριστικές. Στο σχήμα 2.61 φαίνονται οι δισδιάστατες προβολές των τομών όταν $k_0 = \omega_w$ και $\varepsilon=0.03$ (α), $\varepsilon=0.1$ (β). Από το (β) φαίνεται πως όλες οι τροχιές διαφεύγουν σχεδόν αμέσως. Όπως και για τις γκαουσιανές συναρτήσεις, έτσι και τώρα, η υπερβολική ευαισθησία του συστήματος για αυτή τη συχνότητα, δεν επαληθεύεται στη απευθείας αριθμητική επίλυση. Στο σχήμα 2.62 παρίσταται το αριθμητικό αποτέλεσμα για την εξέλιξη του παλμού και συγκεκριμένα στο (β) φαίνεται κάτοψη του. Ο παλμός χάνει αρχικά πολύ από την ενέργεια του, η οποία φεύγει με τη μορφή γραμμικών κυμάτων μικρού πλάτους που χάνονται στα άκρα του παραθύρου. Τελικά όμως διατηρείται αναγνωρίσιμος, ακόμα και για $\varepsilon=0.5$.



Σχήμα 2.61: Δισδιάστατες προβολές των τομών για $k_0 = \omega_w$ και (α) $\varepsilon=0.03$, (β) $\varepsilon=0.1$.



Σχήμα 2.62: Εξέλιξη του παλμού σύμφωνα με τη λύση των PDEs (α) συνολική ένταση, (β) ισοπληθής κάτοψη.

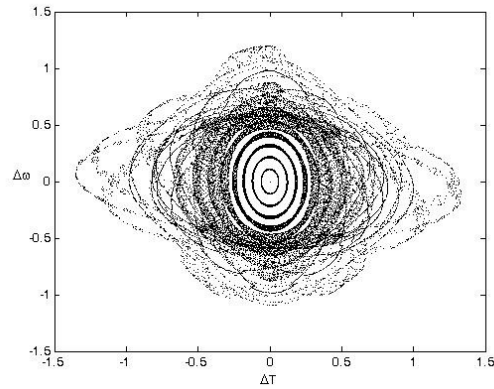
Θα ολοκληρώσουμε τη μελέτη, όπως είχαμε κάνει και για τις γκαουσιανές συναρτήσεις, δοκιμάζοντας ευρύ φάσμα α.σ. με βάση στις διαφορετικές τιμές του $\Delta\omega$ (διπλοθλαστικότητα). Οι τιμές που δοκιμάζονται αντιστοιχούν σε διαφορετικές τροχιές του συστήματος των ODEs και αναγράφονται στον ΠΙΝΑΚΑ 5 παρακάτω.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5

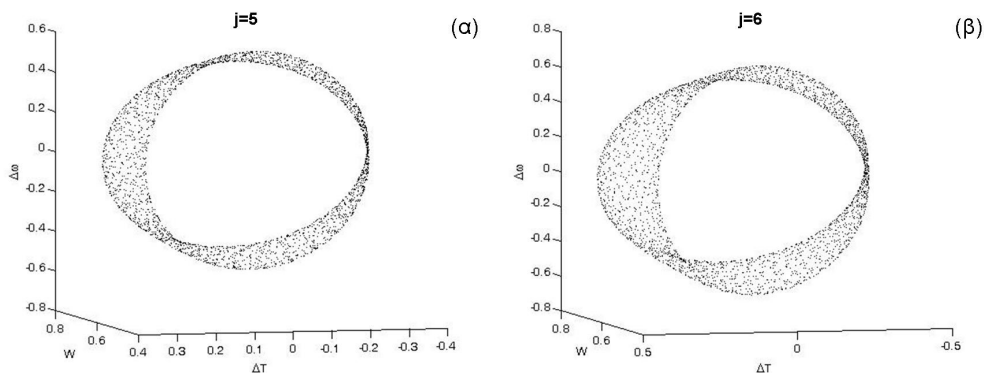
j=0	Q3=0.000000	P3=1.851852	Q2=0.600000	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.000000
j=1	Q3=0.000000	P3=1.845901	Q2=0.600000	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.109091
j=2	Q3=0.000000	P3=1.828050	Q2=0.600000	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.218182
j=3	Q3=0.000000	P3=1.798298	Q2=0.600000	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.327273
j=4	Q3=0.000000	P3=1.756645	Q2=0.600000	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.436364
j=5	Q3=0.000000	P3=1.703092	Q2=0.600000	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.545455
j=6	Q3=0.000000	P3=1.637637	Q2=0.600000	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.654545
j=7	Q3=0.000000	P3=1.560282	Q2=0.600000	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.763636
j=8	Q3=0.000000	P3=1.471025	Q2=0.600000	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.872727
j=9	Q3=0.000000	P3=1.369868	Q2=0.600000	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=0.981818
j=10	Q3=0.000000	P3=1.256811	Q2=0.600000	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=1.090909
j=11	Q3=0.000000	P3=1.131852	Q2=0.600000	P2=0.000000	Q1=0.000000	P1=1.200000

Ξεκινάμε για μικρή συχνότητα διαταραχής $k_0 = \omega_w / 4$ και για $\varepsilon=0.1$. Για τέτοια διαταραχή δεν υπάρχει διαφυγή, ακόμα και για μεγάλες αρχικές τιμές του $\Delta\omega$ (P_1). Στο σχήμα 2.63 βλέπουμε τις δισδιάστατες προβολές των τροχιών του ΠΙΝΑΚΑ 5 για την προαναφερθείσα

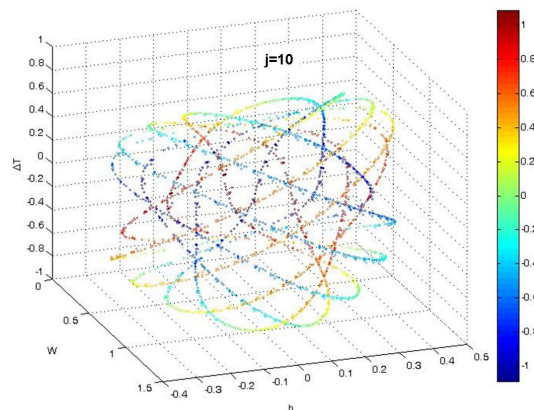
διαταραχή. Οι τομές παρήχθησαν στο $\sin(k_0 Z) = 0$. Για μικρά σχετικά P_1 οι προβολές μοιάζουν απλά ελλειψοειδή, ενώ για μεγαλύτερες τιμές η κίνηση δείχνει να περιπλέκεται. Στο σχήμα 2.64 βλέπουμε τρισδιάστατες προβολές τομών για τις τροχιές $j=5$ και $j=6$, όπου μοιάζουν δισδιάστατα κυλινδροειδή και άρα εκπροσωπούν ημiperiodική φραγμένη κίνηση. Στο σχήμα 2.65 φαίνεται η τετραδιάστατη τομή της $j=10$. Είναι φαινομενικά περίπλοκη, αλλά είναι μονοδιάστατη (rotational torus), σημάδι εγγύτητας σε συντονισμό.



Σχήμα 2.63: Δισδιάστατες προβολές τομών ($\sin(k_0 Z) = 0$) για $k_0 = \omega_W / 4$ και για $\varepsilon = 0.1$ και τις α.σ. του ΠΙΝΑΚΑ5. $Z_{\max} = 40000$.

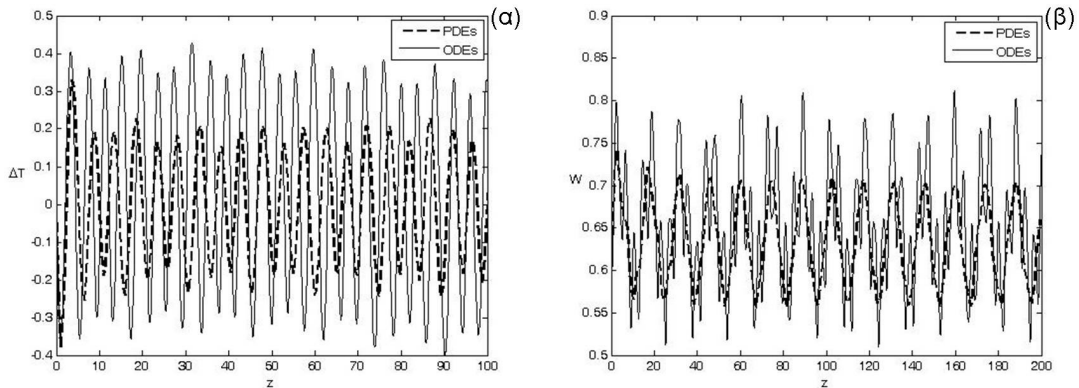


Σχήμα 2.64: Τρισδιάστατες προβολές τομών ($\sin(k_0 Z) = 0$) για την $j=5$ (α), $j=6$ (β) και $k_0 = \omega_W / 4$ και για $\varepsilon = 0.1$.



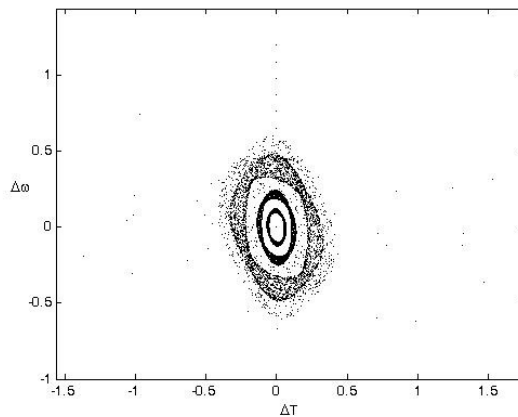
Σχήμα 2.65: Τετραδιάστατη τομή για τη $j=10$ και τη διαταραχή του σχήματος 2.63. Η κλίμακα του χρώματος παριστά τις τιμές του $\Delta\omega$.

Απευθείας αριθμητική επίλυση του συστήματος των PDEs επαληθεύει την πρόβλεψη για μη καταστροφή του παλμού, ενώ παρατηρείται και αρκετά καλή ποσοτική συμφωνία των δύο μεθόδων. Στο σχήμα 2.66 φαίνεται η εξέλιξη της απόστασης των συνιστωσών ΔT μέχρι $Z=100$ και του εύρους W μέχρι $Z=200$, για τη διαταραχή του σχήματος 2.63 και $\Delta\omega=0.6$, ανάμεσα στις α.σ. των τροχιών $j=5$ και $j=6$ (σχήμα 2.64). Η αντιπαράθεση με την αντίστοιχη λύση των ODEs δείχνει καλή πρόβλεψη για το πλάτος και τη συχνότητα της ταλάντωσης.

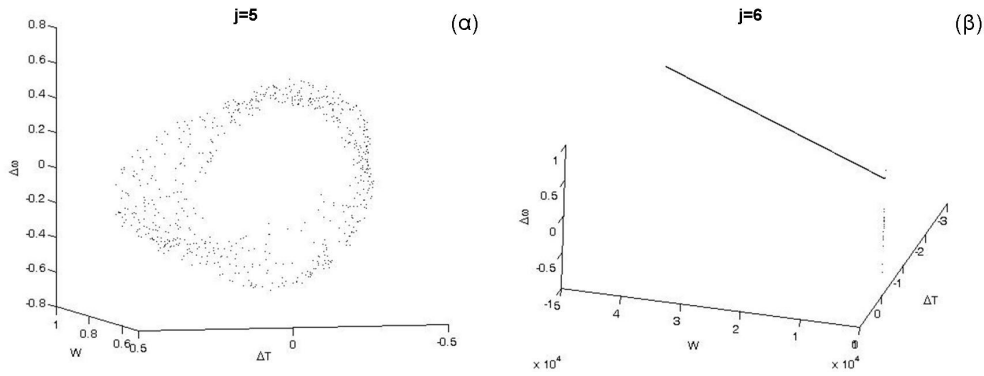


Σχήμα 2.66: Εξέλιξη του ΔT (α) και W (β) με το Z για $\Delta\omega=0.6$ και τη διαταραχή του σχήματος 116, σύμφωνα με τις PDEs (διακεκομμένη) και τις ODEs (γραμμική).

Αυξάνοντας τη διαταραχή σε $\varepsilon=0.5$ προκαλείται διαφυγή για αρκετές από τις τροχιές με μεγαλύτερα αρχικά $\Delta\omega$, όπως φαίνεται και στη δισδιάστατη προβολή στο σχήμα 2.67. Οι τροχιές $j=5$, $j=6$ αυτή τη φορά διαφεύγουν και οι τρισδιάστατες προβολές των τομών τους φαίνονται στο σχήμα 2.68 (α) και (β) αντίστοιχα, όπου φαίνονται μόνο μέχρι το $Z=10000$, όπου η $j=5$ διατηρείται αν και εργοδική, ενώ η $j=6$ φαίνεται να διαφεύγει νωρίτερα.

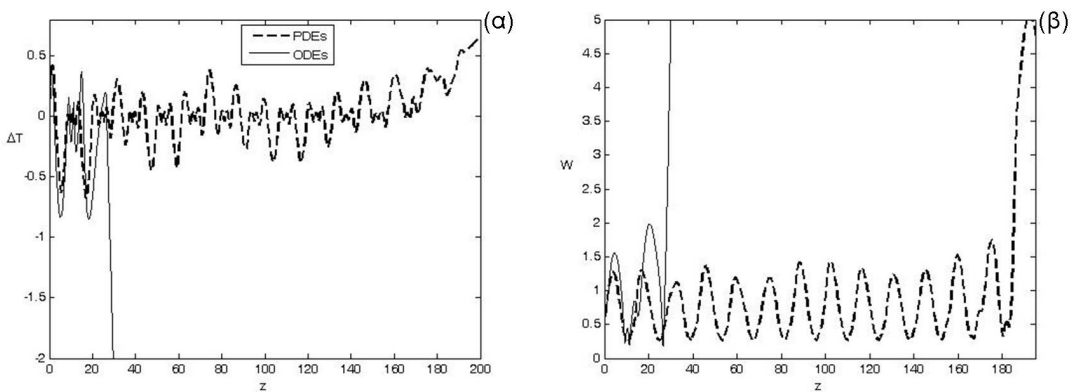


Σχήμα 2.67: Δισδιάστατη προβολή των τομών για $k_0 = \omega_w / 4$ και $\varepsilon=0.5$. $Z_{\max}=40000$.



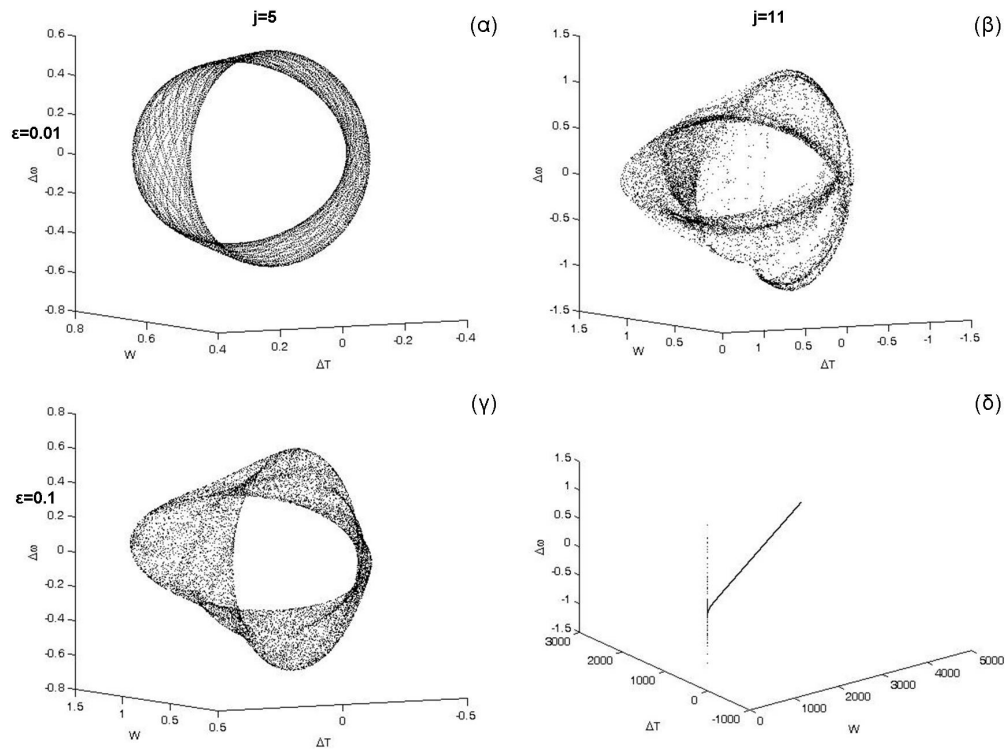
Σχήμα 2.68: Τρισδιάστατες προβολές των τομών (α) $j=5$, (β) $j=6$, μέχρι το $Z=10000$, λίγο μετά διαφεύγει και η $j=5$.

Παρόμοια συμπεριφορά διαπιστώνεται και με την αριθμητική επίλυση των συζευγμένων μερικών διαφορικών. Για $\Delta\omega=0.6$, τιμή ενδιάμεση των τροχιών $j=5$ και 6 του ΠΙΝΑΚΑ5, ο παλμός δε διαλύεται για $\epsilon=0.5$, τουλάχιστον μέχρι το $Z=2000$. Αυξάνοντας λίγο τη διαταραχή, προκαλεί γρηγορότερη διάλυση του παλμού, όπως εξάλλου και στις ODEs. Στο σχήμα 2.69 βλέπουμε την εξέλιξη των ΔT και W για $\epsilon=0.6$, όπως αυτή δίνεται από τις ODEs και την απευθείας αριθμητική επίλυση των PDEs. Η λύση των ODEs φαίνεται να διαφεύγει γρηγορότερα, όμως η αντίστοιχη των PDEs ακολουθεί, όχι πολύ αργότερα.

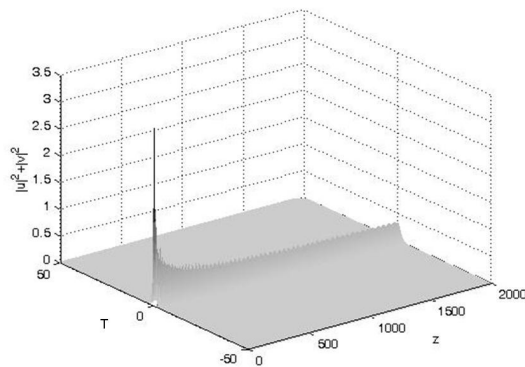


Σχήμα 2.69: Εξέλιξη των ΔT και W για την άνωθεν διαταραχή και για αρχικό $\Delta\omega=0.6$, σύμφωνα με τις ODEs (γραμμή) και PDEs (διακεκομμένη).

Στη συνέχεια ανεβάζουμε τη συχνότητα διαταραχής και η συμφωνία αρχίζει να χάνεται. Για $k_0=\omega_W$, οι τροχιές διαφεύγουν γρήγορα. Στο σχήμα 2.70 βλέπουμε τρισδιάστατες προβολές τομών των $j=5$ και $j=11$, του ΠΙΝΑΚΑ 5 για $\epsilon=0.01$ (α και β) και $\epsilon=0.1$ (γ και δ). Ακόμα και για μικρές τιμές του ϵ παρατηρούμε εργοδικότητα στις τροχιές που ξεκινούν με μεγάλο αρχικό $\Delta\omega$, όπως φαίνεται στο (β). Για $\epsilon=0.1$ η $j=5$ χάνει τη δισδιάστατη τομή της που είναι πλέον τρισδιάστατη (γ), αλλά τροχιές με μεγαλύτερα $\Delta\omega$ διαφεύγουν πλέον γρήγορα (δ). Για ακόμα μία φορά, η μεταβολική μέθοδος αποτυγχάνει να περιγράψει με κάποια ακρίβεια, πέραν από μια γενική συμπεριφορά στη μεταβολή των αρχικών συνθηκών και της έντασης της διαταραχής. Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.71, η αριθμητική επίλυση για $\Delta\omega=0.6$ και $\epsilon=0.3$ περιγράφει τον παλμό να ξεκινά με έντονη αυτοεστίαση και εκπομπή ακτινοβολίας, αλλά τελικά να διατηρείται.

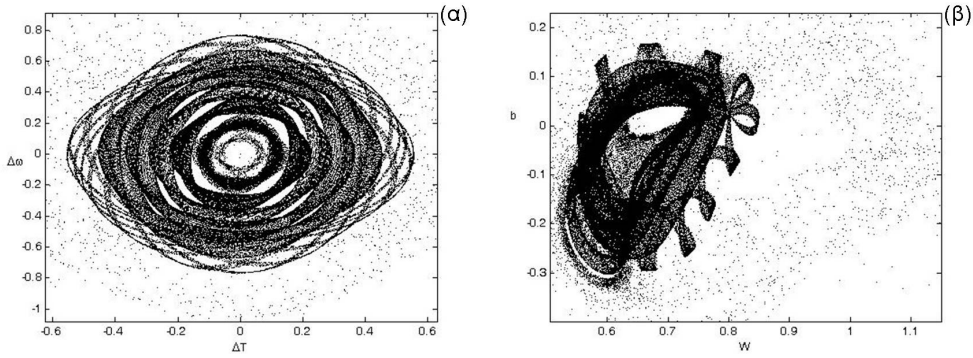


Σχήμα 2.70: Τρισδιάστατες προβολές τομών για τις $j=5$ (α, γ) και $j=11$ (β, δ), για $k_0=\omega_W$ για $\varepsilon=0.01$ (α, β) και $\varepsilon=0.1$ (γ, δ). Για όλες πλην της (δ), $(az, el)=(255,5)$.

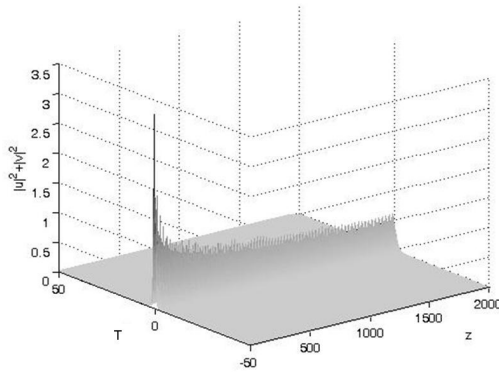


Σχήμα 2.71: Διάδοση του παλμού σύμφωνα με την αριθμητική επίλυση των PDEs, για $k_0=\omega_W$ και $\varepsilon=0.3$, όταν το αρχικό $\Delta\omega=0.6$.

Για λόγο μεγαλύτερες συχνότητες, η σύγκλιση των μεθόδων δε βελτιώνεται. Για $k_0=2\omega_W$, φαίνονται στο σχήμα 2.72 οι τομές των τροχιών, προβεβλημένες σε δύο διαστάσεις, για $\varepsilon=0.1$. Ήδη η τροχιά με τη μεγαλύτερη αρχική $\Delta\omega$ διαφεύγει και σε αυτή ανήκει το αχνό νέφος σημείων που φαίνεται στα δύο σχήματα. Οι υπόλοιπες διαφεύγουν το πολύ για $\varepsilon=0.3$. Αντίθετα, η αριθμητική επίλυση δε δείχνει καταστροφή του παλμού. Έτσι για παράδειγμα στο σχήμα 2.73 ο παλμός για $\Delta\omega=0.6$ φαίνεται να διατηρεί την υπόσταση του ως οδεύον μη—γραμμικό κυματοπακέτο ακόμα και για $\varepsilon=0.8$.

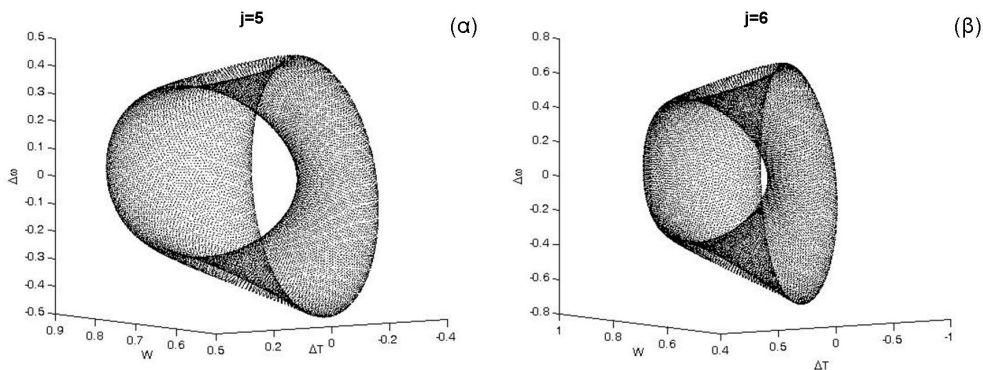


Σχήμα 2.72: Δισδιάστατες προβολές τομών για $k_0=2\omega_W$, $\varepsilon=0.1$. $Z_{\max}=40000$.

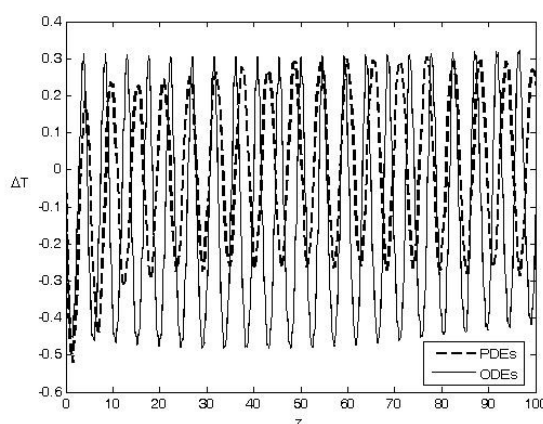


Σχήμα 2.73: Διάδοση του παλμού, σύμφωνα με την αριθμητική επίλυση, και μη διαφυγή για αρχικό $\Delta\omega=0.6$ με $\varepsilon=0.8$.

Η ανοχή του συστήματος των ODEs, αλλά και του παλμού, σε μεγάλες τιμές της διαταραχής-μεταβολής της διασποράς, επανέρχεται για αρκετά μεγαλύτερες συχνότητες. Στο σχήμα 2.74 χαράσσονται τρισδιάστατες προβολές των τομών των $j=5$ και $j=6$, όταν $k_0=10\omega_W$ και $\varepsilon=2.0$. Οι τομές είναι ξεκάθαρα δισδιάστατες και τοροειδείς και παραπέμπουν σε αναπνέοντα παλμό που διαδίδεται χωρίς να χαλάει. Το γεγονός επαληθεύεται από την αριθμητική προσομοίωση και στο σχήμα 2.75 παρατίθεται η εξέλιξη του ΔT μέχρι το $Z=100$, όπως δίνεται από την επίλυση των ODEs και των PDEs, για αρχικό $\Delta\omega=0.6$, τιμή «ανάμεσα» σε αυτές των τροχιών $j=5$ και $j=6$. Για μία φορά ακόμα η συμφωνία δεν είναι κακή.



Σχήμα 2.74: Τρισδιάστατες προβολές τομών για τις (α) $j=5$, (β) $j=6$, όταν $k_0=10\omega_W$, $\varepsilon=2.0$. $Z_{\max}=10000$. (235, 5).



Σχήμα 2.75: Εξέλιξη του ΔT μέχρι το $Z=100$, όπως δίνεται από την επίλυση των ODEs (γραμμή) και των PDEs (διακεκομμένη) για τη διαταραχή του σχήματος 2.74 και αρχικό $\Delta\omega=0.6$.

2.4.4 Μερικά συμπεράσματα

Συμπερασματικά, χρησιμοποιήθηκε η μεταβολική μέθοδος για τη περιγραφή της διάδοσης του διανυσματικού σολιτονικού παλμού και συγκεκριμένα σε περίπτωση ισχυρής διπλοθλαστικότητας με μεταβαλλόμενη διασπορά. Μελετήθηκαν οι περιπτώσεις ίσων και άνισων συνιστωσών γκαουσιανής μορφής και ίσων συνιστωσών μορφής sech. Η μεταβολή της διασπορά στη παρούσα μελέτη ήταν κυρίως ομαλή, αν και παρόμοια αποτελέσματα παίρνουμε και με τη τετραγωνική διασπορά. Το βασικό συμπέρασμα είναι ότι η μεταβολική μέθοδος μπορεί να περιγράψει την εξέλιξη παραμέτρων του παλμού με επιτυχία εφόσον η συχνότητα της μεταβολής είναι $k_0 < \omega_{\Delta T}, \omega_w$, των χαρακτηριστικών δηλαδή συχνοτήτων του αδιατάρακτου συστήματος, ενώ καλλίτερα αποτελέσματα έχουμε για $k_0 < \omega_{\Delta T}/4, \omega_w/4$. Όταν η συχνότητα της μεταβολής είναι πολύ κοντά στις παραπάνω συχνοότητες έχουμε έντονη εκπομπή ακτινοβολούμενης ενέργειας, κάτι που η μεταβολική μέθοδος δεν προβλέπει και αποτυγχάνει να περιγράψει ορθά το σύστημα. Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί με αρκετή επιτυχία όταν $k_0 \gg \omega_{\Delta T}, \omega_w$, κάτι που σχετίζεται και με την εκπεμπόμενη ενέργεια, που σε αυτές τις συχνότητες είναι πολύ μικρή.

Επιπλέον, παρατηρήθηκε για ακόμα μια φορά η σταθερότητα των σολιτονικών λύσεων, ακόμα και όταν οι διαταραχές δεν είναι χαμιλτονιανές. Επαναλαμβάνουμε ότι σύμφωνα με βασικές εργασίες πάνω σε σολιτονικές διαταραχές, ως χαμιλτονιανές χαρακτηρίζονται αυτές που είναι διατηρητικές και δε μεταβάλλονται με τη θέση και το χρόνο. Αυτές, συνήθως όταν δεν είναι μεγάλες, (αν και όχι απαραίτητα), δε καταστρέφουν το σολιτονικό χαρακτήρα της λύσης. Οι διαταραχές που εφαρμόσαμε είναι περιοδικά μεταβαλλόμενες με τη δυναμική παράμετρο, δηλαδή το z , οπότε δεν ανήκουν στις παραπάνω [146, 147]. Παρόλα αυτά, όταν η συχνότητα της διαταραχής είναι μικρή σε σχέση με αυτές του αδιατάρακτου συστήματος, η λύση διατηρεί σολιτονικά χαρακτηριστικά, αν και τα χαρακτηριστικά της δύνανται να αλλάξουν αρκετά. Για αρκετά μικρές συχνότητες το σύστημα μπορεί να ανεχθεί και ιδιαίτερος μεγάλες διαταραχές, όπως θα δούμε και στο κεφάλαιο 2.5.

2.5 Εφαρμογή DM σε WDM

Στο παρόν κεφάλαιο εφαρμόζουμε ξανά τη μεταβολική μέθοδο για να περιγράψουμε ένα άλλο πρόβλημα που μοντελοποιείται μέσω συζευγμένων NLS, αυτό της σύγκρουσης παλμών διαφορετικών καναλιών, τυπικό στην περίπτωση της φασματικής πολυπλεξίας, παρουσία διαχείρισης διασποράς.

Στο Κεφάλαιο 1 της εργασίας αναφερθήκαμε στην «ελαστικότητα» των συγκρούσεων μεταξύ σολιτονικών παλμών διαφορετικών καναλιών, λόγω της οποίας τα σολιτόνια εξέρχονται της αλληλεπίδρασης με αμετάβλητο πλάτος και εύρος, και στη συμμετρία της πλήρους σύγκρουσης, δηλαδή στο αμετάβλητο της κεντρικής συχνότητας. Στο κεφάλαιο 2.2 όμως αναφέρθηκε πως οι αναπόφευκτες διαταραχές, όπως η ενίσχυση και η μεταβολή της διασποράς, καταστρέφουν αυτή τη συμμετρία, ώστε τελικά η σύγκρουση να επιφέρει φασματική μετατόπιση. Παρόλα αυτά, οι μεγάλες τοπικές τιμές της διασποράς παρεμποδίζουν τη συμφασικότητα και άρα τη μίξη τεσσάρων φωτονίων (FWM). Έτσι, σε αντίθεση με τα συνήθη σολιτόνια, το μόνο μειονέκτημα ενός πυκνού WDM τηλεπικοινωνιακού συστήματος με διαχείριση διασποράς, είναι η φασματική μετατόπιση των παλμών λόγω των μεταξύ τους συγκρούσεων.

Σημαντική προσπάθεια για τη μείωση ή και εξάλειψη αυτής της μετατόπισης έχει ήδη γίνει. Ο Hasegawa και άλλοι σε βασικές εργασίες τους πρότειναν κλιμακωτή διαμόρφωση διασποράς, τέτοια ώστε να ακολουθεί το ρυθμό απωλειών-ενίσχυσης ([114, 148-150]), ενώ πιο πρακτικές θεωρούνται οι απόπειρες που περιλαμβάνουν διαμόρφωση δύο μόνο βημάτων (όπως στο σχήμα 2.2). Στις εργασίες αυτές ([116, 151, 152]), είτε συμπεριλαμβάνουν τις απώλειες, είτε όχι, έχει δειχθεί πως η κατάλληλη επιλογή του L_{map} (των επί μέρους μηκών και τιμών διασποράς) μπορεί να μηδενίσει τη φασματική μετατόπιση που προκαλείται από συγκρούσεις παλμών.

Οι παραπάνω εργασίες έχουν περιγράψει το πρόβλημα και τη λύση του αναλυτικά και αριθμητικά, οπότε μία ακόμα τέτοια απόπειρα, όπως στην παρούσα εργασία, μοιάζει ίσως περιττή. Αυτό όμως που λείπει από τις παραπάνω σημαντικές δουλειές είναι η χρήση «σολιτονίων διαχείρισης διασποράς» στις προσομοιώσεις τους. Στην παρούσα διατριβή προσεγγίζουμε το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης αναλυτικά με τη Μεταβολική μέθοδο, όπως δείχθηκε και στο κεφάλαιο 2.4 και αριθμητικά, με την επίλυση δύο συζευγμένων NLS. Στη συγκεκριμένη περίπτωση βέβαια, σκοπός δεν είναι ο έλεγχος της ευστάθειας των παλμών καθώς αυτοί βρίσκονται σε διαφορετικά κανάλια με μεγάλη φασματική διαφορά, αλλά η μελέτη της επίδρασης της μεταξύ τους σύγκρουσης και να δώσουμε μια πρώτη, ποιοτική περιγραφή της επίδρασης του L_{map} στη φασματική μετατόπιση. Τα αποτελέσματα είναι απολύτως ανάλογα με αυτά των προαναφερθέντων εργασιών.

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη των αλληλεπιδράσεων, θα αναφερθούμε στο DM-soliton και σε ένα απλό τρόπο με τον οποίο το προσεγγίζουμε.

2.5.1 DM-soliton (σολιτόνιο διαχείρισης διασποράς)

Σολιτόνιο διαχείρισης διασποράς ονομάζεται ο παλμός που ενώ μεταβάλλεται, στο τέλος κάθε περιόδου διαχείρισης έχει τα ίδια χαρακτηριστικά (πλάτος, εύρος, φάση) με αυτά που είχε στην αρχή. Ο όρος αυτός χρησιμοποιείται για τους παλμούς που επιχειρείται να διαδοθούν σε γραμμή με ισχυρή διαχείριση, που σημαίνει ότι οι επιμέρους τιμές της διασποράς είναι πολύ μεγαλύτερες της μέσης τιμής και, συνήθως, η περίοδος διαχείρισης L_{map} είναι αρκετά μικρότερη από το μήκος της μέσης διασποράς. Οι παλμοί αυτοί υπόκεινται σε μεγάλες αλλαγές κατά μήκος της περιόδου διαχείρισης και διαφέρουν πολύ από τα συνήθη σολιτόνια που έχουν αδιατάρακτη διάδοση. Επιπλέον, η επίτευξη αυτής της περιοδικής

επαναφοράς απαιτεί την εκ των προτέρων επιβολή συγκεκριμένης έντασης τερετίσματος ([153]), καθώς και ενισχυμένο πλάτος, οπότε και ενέργεια, σε σχέση με σολιτονικό παλμό του ίδιου εύρους [88]. Μία ακόμα σημαντική διαφορά είναι το σχήμα του παλμού, όπου είναι πλέον γκαουσιανή και όχι sech. Αυτό διότι οι μεγάλες τοπικές τιμές διασποράς καθιστούν τη μη-γραμμικότητα αμελητέα για το μήκος μιας περιόδου και είναι γνωστό ότι η λύση της NLS χωρίς μη-γραμμικότητα είναι γκαουσιανή.

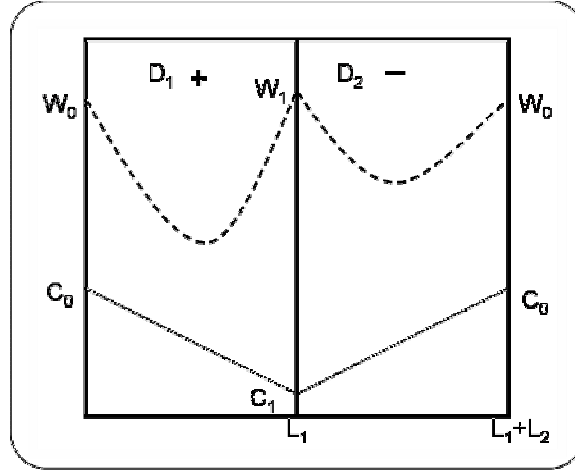
Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του DM-soliton δρουν ευεργετικά για μια σειρά από σοβαρά προβλήματα στη διάδοση σολιτονίων με φασματική πολυπλεξία. Καταρχάς οι υψηλές τοπικές τιμές της διασποράς μειώνουν σημαντικά το FWM. Το τερέτισμα προκαλεί έντονη περιοδική μεταβολή της φάσης, μειώνοντας έτσι τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των παλμών [90]. Ακόμα, η αυξημένη ενέργεια που απαιτείται περιορίζει το θορυβικό τρόμο Gordon Haus και συνολικά οδηγεί σε υψηλότερο SNR και σε καλύτερη επίδοση ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος [93].

Υπάρχουν ήδη αρκετές δημοσιευμένες εργασίες που περιγράφουν την πειραματική επίτευξη διάδοσης με φασματική πολυπλεξία με τη χρήση DM-solitons, όπως του Nakazawa [154] όπου πέτυχε διάδοση 20Gb/s τριών καναλιών σε υπερατλαντικές αποστάσεις και του Le Guen [102], που περιγράφει διάδοση 320Gb/s σε απόσταση 1100Km. Επίσης δεν είναι λίγες οι εργασίες που ασχολούνται με τη χρησιμότητα της προ-επιβολής τερετίσματος ή με την απαιτούμενη ενεργειακή επαύξηση (δείτε το [156] για μια εκτενή λίστα αναφορών). Το τελευταίο θέμα έχει απασχολήσει αρκετά την κοινότητα της μη-γραμμικής οπτικής και διάφορες αριθμητικές εργασίες έχουν στηριχτεί στον εμπειρικό τύπο της ενεργειακής επαύξησης του Smith [88], ενώ υπάρχουν ακόμα και κάποιες αναλυτικές προσεγγίσεις με σημαντικότερη αυτή του Turitsin [156]. Χωρίς να επεκταθούμε περαιτέρω, το βασικό συμπέρασμα της μέχρι τώρα μελέτης είναι πως για την επίτευξη σολιτονικής διάδοσης θα πρέπει το τερέτισμα, η μη-γραμμικότητα και η διασπορά να δημιουργούν τέτοιες επί μέρους μετατοπίσεις στη φάση του παλμού, έτσι ώστε κατά μέσο όρο να δίνουν μηδέν. Αυτός είναι και ο λόγος της ενεργειακής επαύξησης, καθώς ανάλογα με το συγκεκριμένο L_{map} απαιτείται, κατά κάποιο ποσό, μεγαλύτερος μη-γραμμικός όρος για να παράγει φασική μετατόπιση τέτοια ώστε να εξισορροπήσει αυτή της διασποράς. Το εντυπωσιακό είναι πως αυτή η ισορροπία μπορεί να επιτευχθεί ακόμα και με μηδενική αλλά και ομαλή μέση διασπορά, διευρύνοντας τη χρήση του DM-soliton εκεί που τα συνήθη οπτικά σολιτόνια δεν δύνανται να υπάρξουν [100, 101]. Παρόλο το επαρκές της μέχρι τώρα βιβλιογραφίας, παρακάτω εφαρμόζουμε έναν ομολογουμένως απλό και ποιοτικό τρόπο επιλογής των κατάλληλων χαρακτηριστικών του παλμού για δεδομένη διαχείριση διασποράς.

Αν, λοιπόν, ο παλμός που εισάγουμε στη γραμμή είναι γκαουσιανός της μορφής

$$u = A \exp \left[- \left(\frac{T}{W} \right)^2 \right] \exp \left\{ i \left[-\omega T + \frac{C}{W^2} T^2 \right] \right\},$$

(όπου έχουμε αντικαταστήσει το μέχρι τώρα χρησιμοποιούμενο συμβολισμό του τερετίσματος b/W με τον παρόντα βολικότερο για τη μελέτη μας), είναι γνωστό από αριθμητικές προσομοιώσεις και πειράματα ότι το C μεταβάλλεται περίπου γραμμικά με κλίση που σχετίζεται με την τοπική διασπορά. Κατά μήκος μιας περιόδου διαχείρισης, για ένα DM-soliton θα μεταβάλλεται με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα 2.76. Το σχήμα αποτελεί αναπαράσταση της μεταβολής του εύρους και του τερετίσματος κατά μήκος ενός L_{map} που αποτελείται από τμήματα ίσου μήκους με τιμές διασποράς D_1 και D_2 , ανώμαλη και ομαλή αντίστοιχα, και παρίσταται για να βοηθήσει στους παρακάτω υπολογισμούς. Το εύρος και το τερέτισμα φαίνονται να ξεκινούν από αρχικές τιμές W_0 και C_0 , φτάνουν σε τιμές W_1 και C_1 όταν ο παλμός διανύσει το L_1 και, ιδανικά, επανέρχονται στις αρχικές τους τιμές στο τέλος της περιόδου. Θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί περίοδος διαφορετικών επί μέρους μηκών, αλλά διατηρούμε αυτή τη διαμόρφωση για χάρη απλότητας.



Σχήμα 2.76: Αναπαράσταση της μεταβολής του εύρους (W) και του συντελεστή τερετίσματος (C) ενός DM-soliton κατά μήκος μίας περιόδου διαμόρφωσης.

Υιοθετώντας ξανά τη Μεταβολική μέθοδο για την αλληλεπίδραση δύο γκαουσιανών παλμών, όπως αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 2.4, και με δεδομένο ότι οι παλμοί ξεκινούν πλέον πολύ απομακρυσμένοι μεταξύ τους ($\Delta T \gg 1$), η εξέλιξη των χαρακτηριστικών ενός εξ αυτών θα δίνεται από το σύστημα (2.40). Καθώς δεν έχουν φτάσει να αλληλεπιδράσουν, μπορούμε να αρκεστούμε στις:

$$\frac{dW}{dZ} = 2db \quad (2.60\alpha)$$

$$\frac{db}{dZ} = \frac{2d}{W^3} - \frac{gE}{\sqrt{2}W^2} \quad (2.60\beta)$$

Γίνεται φανερό ότι $b \cdot W = C$, και από το σχήμα 2.76 φαίνεται ότι η μεταβολή του C ως προς Z είναι η κλίση της ευθείας, για κάθε ένα τμήμα. Αν ονομάσουμε την κλίση κ_1 για το L_1 και κ_2 για το L_2 θα ισχύει $d(b \cdot W)/dZ = \kappa_{1,2}$, ανάλογα σε πιο τμήμα εξετάζουμε τα μεγέθη.

$$\text{Φαίνεται ακόμα ότι } \kappa_1 = \frac{C_1 - C_0}{L_1}, \quad \kappa_2 = \frac{C_0 - C_1}{L_2}, \quad L_1 = L_2$$

και επιλύοντας την (2.60α) έχουμε,

$$W_1^2 - W_0^2 = 2 \int_0^{L_1} D_1 C(Z) dZ, \quad C(Z) = \kappa_1 Z + C_0 \quad (2.61\alpha)$$

$$W_0^2 - W_1^2 = 2 \int_{L_1}^{2L_1} D_2 C(Z) dZ, \quad C(Z) = \kappa_2 Z + 2C_1 - C_0, \quad (2.61\beta)$$

από τις οποίες προκύπτει ότι $C_1 = -C_0$. Λύνοντας έπειτα το παραπάνω σύστημα, λαμβάνοντας υπόψη ότι η κλίση του C παραμένει σταθερή στα δύο τμήματα, παίρνουμε,

$$\frac{g}{\sqrt{2}} WE = \frac{2C_0 W^2}{L_1} + 2D_1(1 + C^2), \quad Z \in [0, L_1] \quad (2.62\alpha)$$

$$\frac{g}{\sqrt{2}} WE = -\frac{2C_0 W^2}{L_1} + 2D_2(1 + C^2), \quad Z \in [L_1, 2L_1] \quad (2.62\beta)$$

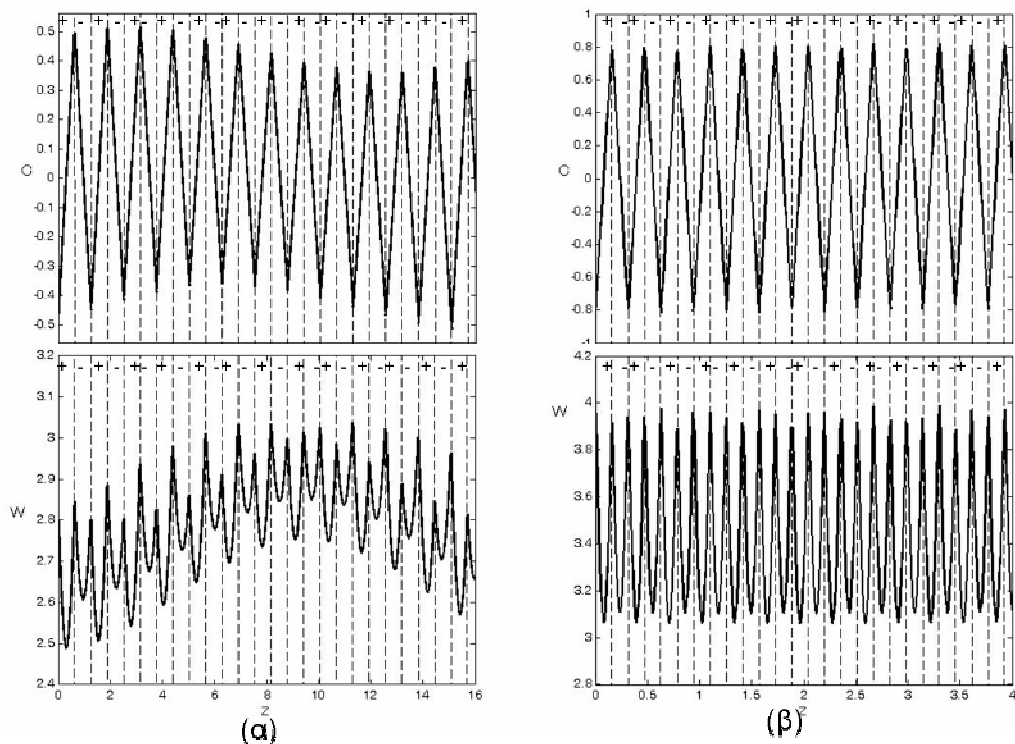
και με δεδομένο ότι η E είναι σταθερή, καταλήγουμε εύκολα στην παρακάτω αλγεβρική σχέση που συνδέει τα χαρακτηριστικά της περιόδου διαμόρφωσης (πλάτος και μήκος) με τις αρχικές συνθήκες του παλμού:

$$\frac{2C_0 W_0}{L_1} + \frac{\Delta D(1 + C_0^2)}{W_0} = 0 \quad (2.63)$$

Έτσι για δεδομένο L_{map} και εύρος παλμού μπορεί να υπολογιστεί η αρχική τιμή του τερετίσματος. Η ενέργεια επίσης υπολογίζεται εύκολα από τον τύπο:

$$E = -\frac{2\sqrt{2}C_0W_0}{gL_1} + \frac{2\sqrt{2}(1-\Delta D/2)(1+C_0^2)}{gW_0} \quad (2.64)$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι παραπάνω τύποι είναι προϊόντα προσέγγισης και θα ήταν πολύ αισιόδοξο να περιμένουμε ότι οι αρχικές συνθήκες που υπολογίζουν θα ορίζουν ένα DM-soliton με περιοδικότητα ακριβώς L_{map} . Επιπλέον, η όλη προσέγγιση έγινε με βάση το σύστημα των συνήθων διαφορικών και όχι το πλήρες μοντέλο της NLS. Όμως, το σύστημα των ODEs και οι παραπάνω τύποι επιτρέπουν μια αρκετά ασφαλή επιλογή αρχικών συνθηκών και καταφέρνουν να περιγράψουν την εξέλιξη ενός παλμού που προσεγγίζει το ιδεατό DM-soliton με περισσότερη ή λιγότερη επιτυχία.

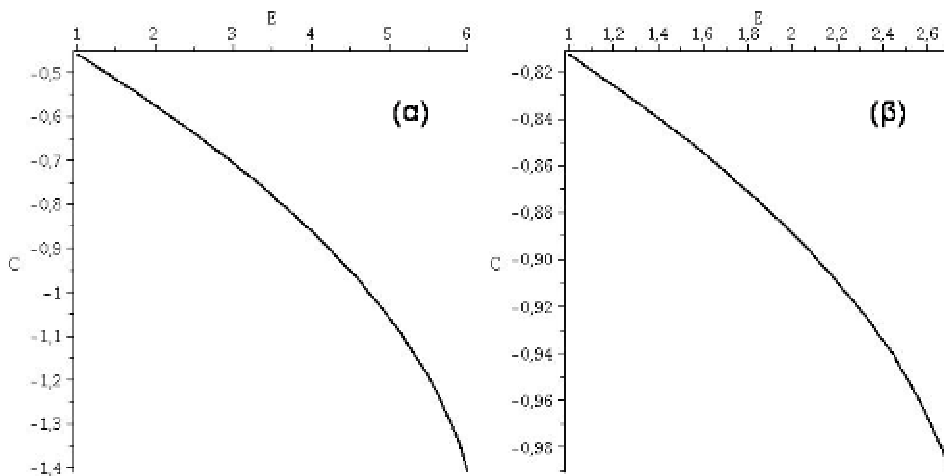


Σχήμα 2.77: Εξέλιξη του συντελεστή τερετίσματος C και εύρους του παλμού W κατά μήκος ενός αριθμού περιόδων διαμόρφωσης, σύμφωνα με το σύστημα (2.60), για α) $k_0=5$, $\Delta D=10$ ($\varepsilon=5$), β) $k_0=20$, $\Delta D=100$ ($\varepsilon=50$). Οι διακεκομμένες γραμμές οριοθετούν τα τμήματα του L_{map} . Τα μεγέθη είναι κανονικοποιημένα.

Έτσι στο σχήμα 2.77(α), φαίνεται η εξέλιξη των χαρακτηριστικών του παλμού για $L_{\text{map}} = 2\pi/5$ και $\Delta D=10$, με αρχικό εύρος παλμού πάνω στο σ.σ. των (2.60) χωρίς DM, $W_0 = 2\sqrt{2}$ και σύμφωνα με τις (2.63) και (2.64), $C_0 = -0.4851158628$ και $E=1.235$. Για σύγκριση αναφέρουμε ότι οι αντίστοιχες τιμές του αδιατάρακτου συστήματος είναι $C_0=0$ και $E=1$. Φαίνεται πως το τερέτισμα δεν ταλαντώνεται ακριβώς μεταξύ των τιμών C_0 και $-C_0$ και το εύρος εκτελεί μια πιο περίπλοκη ταλάντωση με περιοδικότητα διαφορετική από L_{map} . Ακόμα και έτσι όμως, στην αρχή κάθε περιόδου διαχείρισης (τμήμα «+») το εύρος δε βρίσκεται μακριά από την αρχική του τιμή, οπότε ο παλμός επανέρχεται αρκετά κοντά στο αρχικό του σχήμα. Τα αποτελέσματα είναι ακόμα καλλίτερα για την περίπτωση του σχήματος 2.77(β), με $L_{\text{map}} = 2\pi/20$ και $\Delta D=100$. Επιλέξαμε $W_0 = 4$ και έχουμε $C_0 = -0.8248678$ και

$E=1.18823$, όταν οι τιμές για αδιατάρακτο σύστημα θα ήταν 0 και 0.707 αντίστοιχα. Το τερέτισμα μεταβάλλεται πολύ πιο ομοιόμορφα και το εύρος επιστρέφει σχεδόν στην αρχική του τιμή στο τέλος κάθε L_{map} . Είναι φανερό πως η πολύ πιο γρήγορη και έντονη μεταβολή που επιβάλλει αυτή η διαμόρφωση στα χαρακτηριστικά του παλμού κάνει το τερέτισμα να μεταβάλλεται με τρόπο πιο κοντά στο γραμμικό, οπότε και την προσέγγιση μας πιο ακριβή.

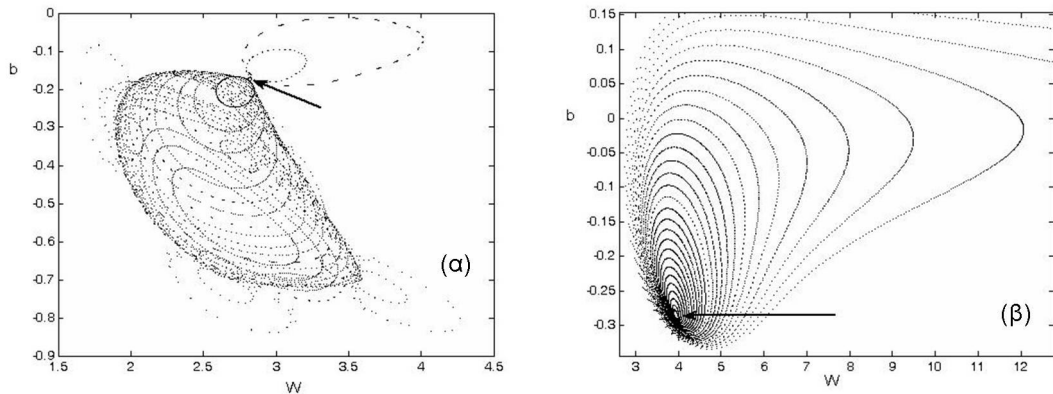
Αν και ο παραπάνω τρόπος επιλογής αρχικών τιμών είναι πολύ γρήγορος και απλός, μπορούμε να βελτιστοποιήσουμε αυτή την επιλογή με τη χρήση τομών Poincaré. Ξεκινώντας από τη σχέση (2.64) και για δεδομένο L_{map} και εύρος παλμού, οι πιθανές τιμές αρχικού τερέτισματος και επαυξημένης ενέργειας ικανοποιούν σχέση που χαράσσεται όπως για παράδειγμα στο σχήμα 2.78. Υπολογίζοντας το ζεύγος που δίνεται από τις (2.63) και (2.64) ερευνούμε την περιοχή τιμών γύρω από αυτό και, συνήθως, βρίσκουμε ζεύγος που δημιουργεί καλλίτερη προσέγγιση του DM-soliton.



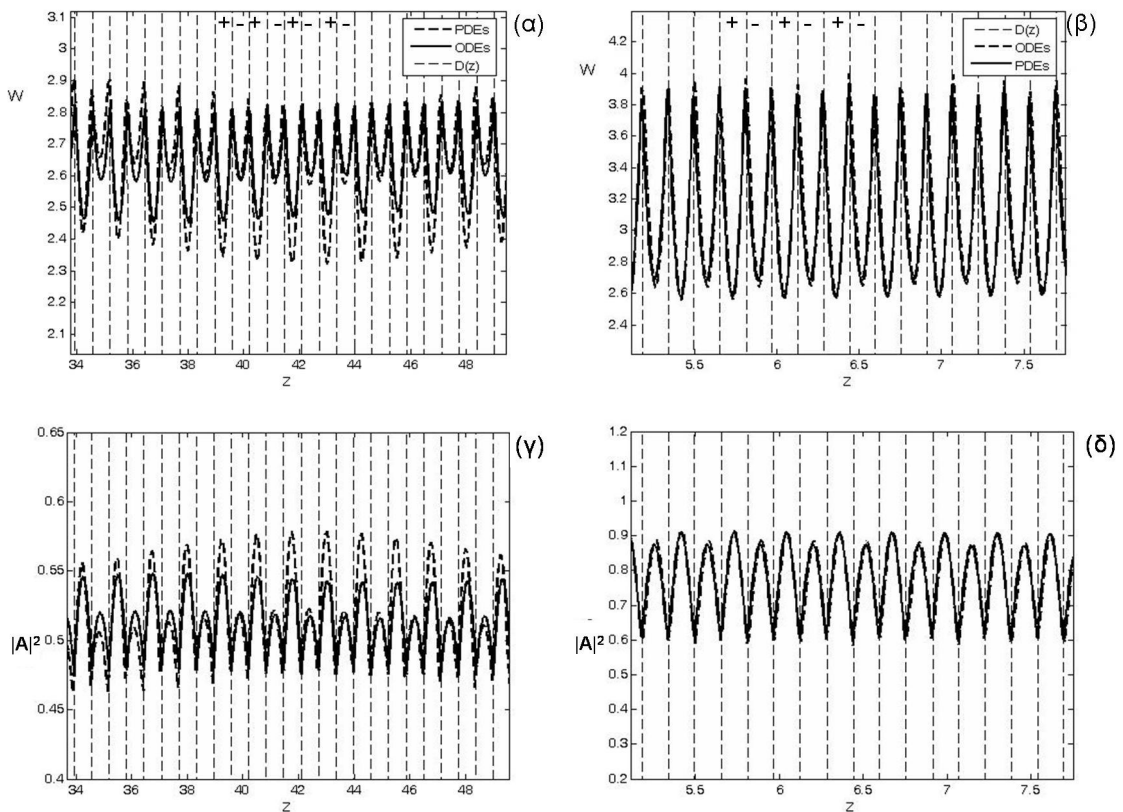
Σχήμα 2.78: Μεταβολή του C με την E για τις περιπτώσεις διαμόρφωσης α) και β) του Σχ. 2.77.

Η προαναφερθείσα τεχνική δοκιμάστηκε για διάφορες διαμορφώσεις διασποράς και διαπιστώθηκε ότι αν και, για δεδομένο εύρος, μπορεί να υπάρξει ζεύγος C_0 - E που να προσεγγίζει καλλίτερα έναν αναπνέων σολιτονικό παλμό (breather) με περίοδο ίση με το L_{map} , δεν υπάρχει μονό στάσιμο σημείο. Αυτό φάνηκε και από ανάλυση σε δράσεις-γωνίες, όπου αποκάλυψε συντονισμούς μεγάλης μόνο τάξης (και όχι 1:1 με τη διασπορά) και δεν περιγράφεται εδώ καθώς δε προσθέτει κάτι παραπάνω. Μόλα ταύτα, σε κάθε περίπτωση βρέθηκαν αρχικές τιμές που επέτρεπαν, στο τέλος κάθε περιόδου διαμόρφωσης, μικρή μόνο μετατόπιση από αυτές. Στο σχήμα 2.79 παρουσιάζονται τομές Poincaré για τις διαμορφώσεις του σχήματος 2.77(α) και (β). Για την πρώτη περίπτωση δοκιμάστηκαν τιμές της E από 1 έως 6 και του b_0 ($=C_0/W_0$) από -0.16 έως -0.50, ενώ στη δεύτερη περίπτωση, για το E από 0.7 έως 2.4 και το b_0 από -0.32, έως -0.28. Όλες οι τροχιές είναι ημί-περιοδικές, αλλά στάθηκε εύκολο να βρεθούν αυτές με το ελάχιστο εύρος παραμέτρων. Τα βέλη στο σχήμα 2.79 (α) και (β) δείχνουν αυτές τις τροχιές. Για τα συγκεκριμένα λοιπόν παραδείγματα, οι βέλτιστες τιμές είναι, για το (α) $C_0=-0.4975$, $E=1.3448$ και για το (β) $C_0=-1.152$, $E=2.3414$. Δοκιμάσαμε τη διάδοση γκαουσιανού παλμού με τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, όπως περιγράφεται από τις ODEs και παράλληλα δοκιμάσαμε τις ίδιες αρχικές συνθήκες σε αριθμητικές προσομοιώσεις. Τα αποτελέσματα για την εξέλιξη του εύρους και του πλάτους του παλμού και για τις δύο περιπτώσεις διαμόρφωσης παρουσιάζονται στο σχήμα 2.80 για ένα κομμάτι τις γραμμής διάδοσης. Βλέπουμε ότι το εύρος και το πλάτος του παλμού επιστρέφουν πολύ κοντά στην αρχική τους τιμή στο τέλος κάθε περιόδου διαμόρφωσης, ενώ αυτό επαληθεύεται με πολύ καλή ακρίβεια από την αριθμητική επίλυση. Αν και στο σχήμα παρουσιάζεται μικρό

μόνο μέρος της γραμμής διάδοσης, η συμπεριφορά αυτή διατηρείται για εκατοντάδες περιόδους που δοκιμάστηκαν, που σημαίνει για χιλιάδες χιλιόμετρα σε πραγματικές τιμές.



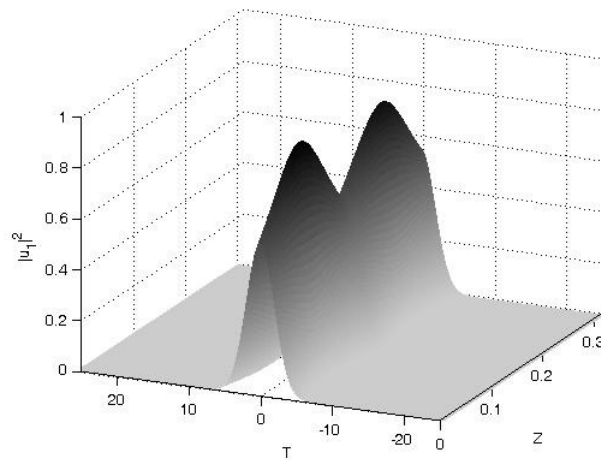
Σχήμα 2.79: Τομές Poincaré W-b, με περιοδικότητα L_{map} , του συστήματος (2.60) για τη διαμόρφωση διασποράς του σχήματος 2.77(α) και (β) αντίστοιχα. Τα βέλη καταδεικνύουν τις στενότερες τροχιές.



Σχήμα 2.80: Εξέλιξη του εύρους W και του τετραγώνου του πλάτους, σύμφωνα με τις ODEs (παχιά γραμμή) και την NLS (διακεκομμένη παχιά) για (α,γ): $k_0=5, \Delta D=10, W_0 = 2\sqrt{2}, C_0=-0.4975, E=1.3448$, (β,δ): $k_0=20, \Delta D=100, W_0 = 4, C_0=-1.152, E=2.3414$.

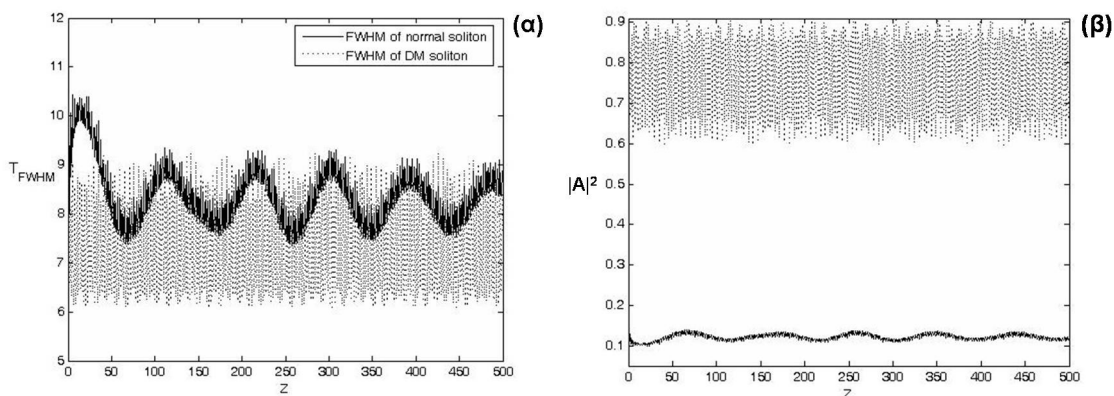
Στο σχήμα 2.81 δείχνεται το αποτέλεσμα απευθείας αριθμητικής προσομοίωσης για την εξέλιξη παλμού κατά μήκος μίας περιόδου διαμόρφωσης με τα χαρακτηριστικά και τις

επιλεγμένες αρχικές συνθήκες του σχήματος 2.80 (β, δ). Αν και ο παλμός αλλάζει ραγδαία κατά μήκος της περιόδου, στο τέλος της επανέρχεται στην αρχική του μορφή.



Σχήμα 2.81: Αριθμητική προσομοίωση εξέλιξης παλμού κατά μήκος ενός L_{map} με επιλεγμένες αρχικές συνθήκες όπως το σχήμα 2.80 (β, δ) και διαμόρφωση διασποράς με $L_{\text{map}}=2\pi/20$ και $\Delta D=100$.

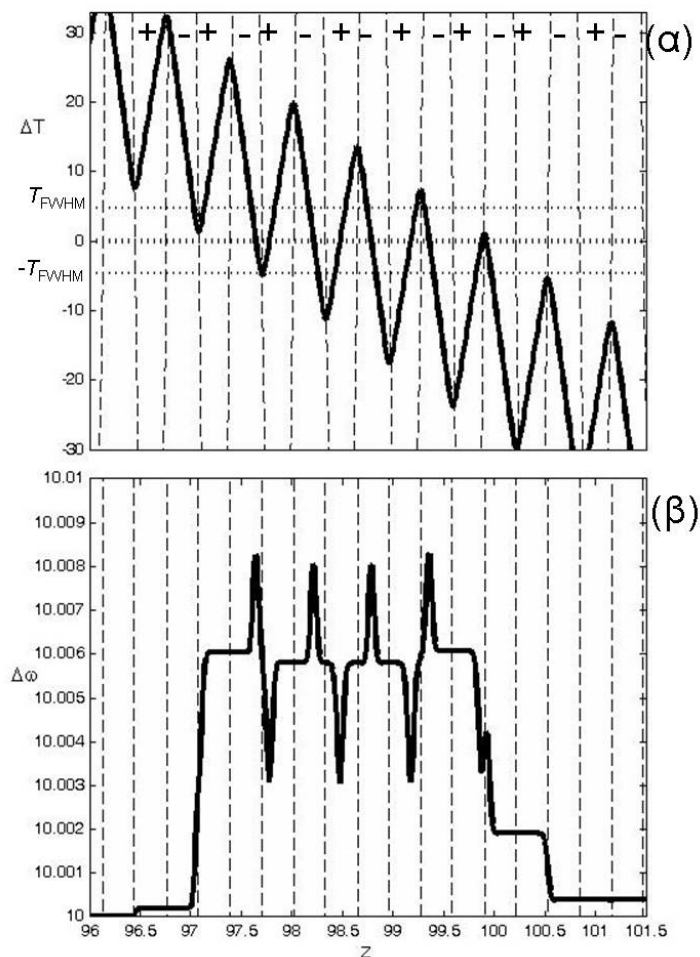
Για λόγους άμεσης σύγκρισης παραθέτονται στο σχήμα 2.82 τα εύρη (με τη μορφή του FWHM) και τα πλάτη δύο παλμών ίδιου αρχικού εύρους που διαδίδονται σε γραμμή με διαμόρφωση διασποράς, όπου $L_{\text{map}}=2\pi/20$ και $\Delta D=100$. Με διακεκομμένες γραμμές παρίστανται τα χαρακτηριστικά ενός DM-soliton που αναπαριστάται στα σχήματα 2.81 και 2.80(β, δ) και με πλήρεις γραμμές ενός συνήθους σολιτονίου, όπως θα επελέγετο για σταθερή διασπορά ίση με τη μέση διασπορά της περιόδου. Παρατηρούμε ότι το εύρος και το πάτος του DM-soliton επανέρχονται στις αρχικές τους τιμές με μεγάλη πιστότητα, η οποία θα φαινόταν καλλίτερη ακόμα αν δεν υπήρχαν κάποιες αδυναμίες στην απεικόνιση. Το sech σολιτόνιο υποβάλλεται σε έντονη ταλάντωση με τρόπο όμως ώστε να μην επανέρχεται στην αρχική του μορφή σε κάθε περίοδο διαμόρφωσης, μειώνοντας έτσι τη χρησιμότητα του σε τηλεπικοινωνιακό σύστημα μεταβλητής διασποράς. Επιπλέον, το απαιτούμενο πλάτος και η ενέργεια του DM-soliton είναι σημαντικά μεγαλύτερα με πρακτικό αποτέλεσμα, όπως προαναφέρθηκε, τη μείωση του Gordon-Haus jitter και τη βελτίωση του SNR σε ένα πιθανό σύστημα οπτικής επικοινωνίας.



Σχήμα 2.82: Αριθμητική προσομοίωση της εξέλιξης του FWHM (α) και του τετραγώνου του πλάτους (β), για σολιτόνιο διαχείρισης διασποράς (διακεκομμένη) και απλό σολιτόνιο, με $L_{\text{map}}=2\pi/20$ και $\Delta D=100$.

2.5.2 Αλληλεπίδραση σολιτονίων διαχείρισης διασποράς

Στη παρούσα παράγραφο εξετάζεται η δυνατότητα ελαχιστοποίησης της φασματικής μετατόπισης των παλμών διαφορετικών καναλιών, που προκαλείται από τις μεταξύ τους συγκρούσεις. Στο κεφάλαιο 2.2 αναφέρθηκε ότι οι συγκρούσεις σε γραμμή με ισχυρή διαχείριση αποτελούνται από πολλές «μικρό-συγκρούσεις», καθώς οι εναλλαγές στη διασπορά προκαλούν ραγδαίες μεταβολές της διεύθυνσης τους, όπως φαίνεται και από τη σχέση (2.40α). Επειδή χρησιμοποιούμε τις εν λόγω εξισώσεις που περιγράφουν αλληλεπίδραση παλμών ίσου εύρους και πλάτους με, κανονικοποιημένες, αντίθετες αρχικές χρονικές μετατοπίσεις και κεντρικές συχνότητες, το κέντρο της σύγκρουσης νοείται εκεί που $\Delta T=0$ και σε κάθε στιγμή $T_1=-T_2=\Delta T/2$, ενώ η φασματική τους διαφορά ορίζεται ως $\Delta\omega=\Delta\omega_0+\delta\omega$, όπου $\delta\omega$ το η διαφορά των φασματικών μετατοπίσεων λόγω σύγκρουσης και για κάθε παλμό είναι κατά απόλυτο τιμή, $\delta\omega/2$.

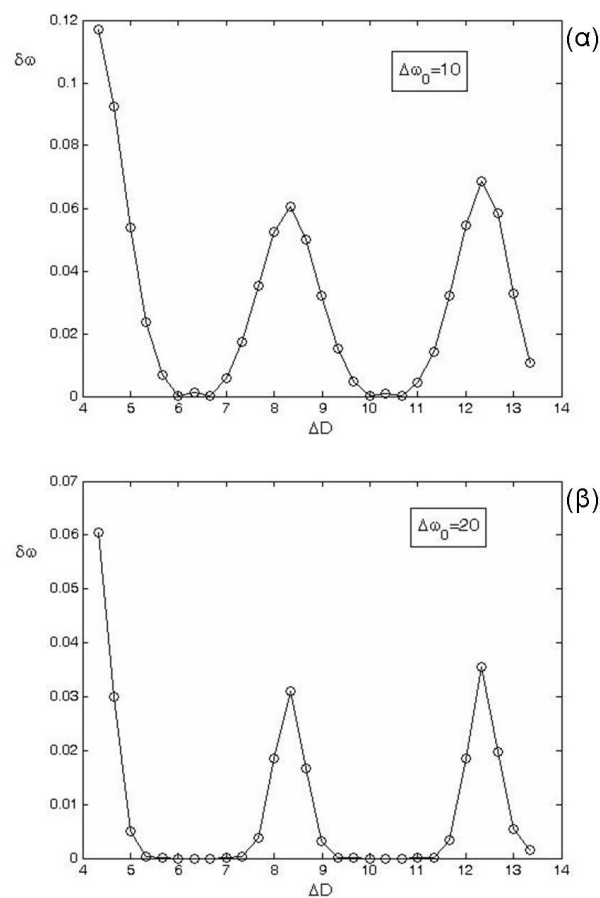


Σχήμα 2.83: Χρονική (α) και φασματική (β) μετατόπιση πριν, κατά τη διάρκεια και λίγο μετά τη σύγκρουση των παλμών. Τα πρόσθετα δείχνουν την εναλλαγή της διασποράς.

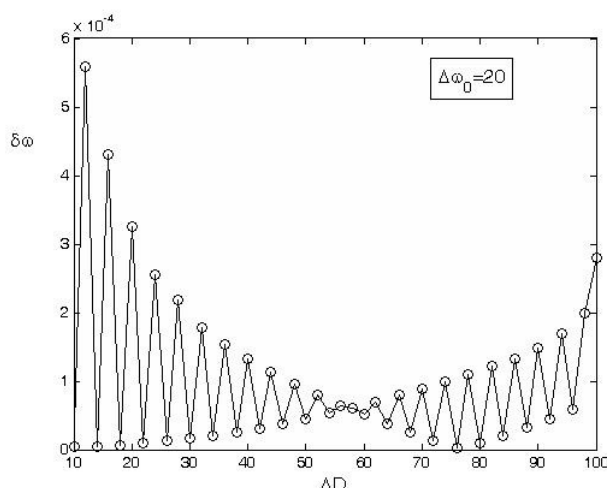
Για παράδειγμα, στο σχήμα 2.83, δύο παλμοί τύπου DM-soliton σε γραμμή διαχείρισης με $L_{\text{map}}=2\pi/10$, $\Delta D=20$ με αρχική χρονική μετατόπιση $\Delta T=100$ και $\Delta\omega_0=10$, αναμένεται να έχουν $\Delta T=0$ (κέντρο σύγκρουσης) στο $Z=100$, σε κανονικοποιημένες μονάδες. Στο σχήμα (α) με διάστικτες οριζόντιες γραμμές ορίζονται οι μετατοπίσεις ίσες με FWHM γύρω από το

$\Delta T=0$, οπότε και η αλληλεπίδραση είναι ισχυρότερη. Οι απότομες αλλαγές της διασποράς προκαλούν την απομάκρυνση και το πλησίασμα των παλμών και μία σειρά από ατελείς και πλήρεις συγκρούσεις, πριν τελικά ο «γρήγορος» ξεπεράσει τον «αργό». Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1 για την ετεροδιαμόρφωση φάσης, η αλληλεπίδραση του εμπρόσθιου μέρους του ενός παλμού με το πίσω μέρος του άλλου προκαλεί ανύψωση συχνότητας στο πρώτο και ελάττωση στο δεύτερο, ενώ το αντίθετο συμβαίνει όταν ο πρώτος ξεπεράσει το δεύτερο. Ακριβώς αυτή είναι και η εικόνα της φασματικής μετατόπισης στο σχήμα (β) με τις ατελείς συγκρούσεις στο πρώιμο στάδιο της αλληλεπίδρασης όπου έχουμε μόνο, ή κυρίως άνοδο, της $\Delta\omega$ και έπειτα στο τελικό όπου έχουμε ξανά πτώση. Στο ενδιάμεσο στάδιο, οι παλμοί φαίνονται να περνούν ο ένας μέσα από τον άλλο και έχουμε πλήρεις συγκρούσεις. Η τελική, συνολική, φασματική μετατόπιση είναι μικρή, της τάξης του 10^{-3} , αλλά διάφορη του μηδενός. Καταλαβαίνουμε πως σε ένα πραγματικό σύστημα με φασματική πολυπλεξία, οι παλμοί θα υπόκεινται σε πολλαπλές συγκρούσεις, οπότε και σε σημαντική φασματική μετατόπιση.

Σύμφωνα με τη σχέση (2.11) η φασματική μετατόπιση παρουσιάζει σειρά από μέγιστα και ελάχιστα, ανάλογα με τη τιμή του D (σα μια εικόνα συμβολής) και επίσης τείνει να ελαχιστοποιηθεί όσο μικραίνει το L_{pert} , εν προκειμένω το L_{map} . Διαλέγοντας τις διαμορφώσεις των παραπάνω σχημάτων, υπολογίσαμε τα χαρακτηριστικά των DM-soliton για διάφορες τιμές του ΔD . Επιλύοντας τις εξισώσεις, (2.40) μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνολική φασματική μετατόπιση για κάθε περίπτωση. Τα αποτελέσματα για $k_0=5$ και 20 παρουσιάζονται στα σχήματα 2.84 και 2.85.



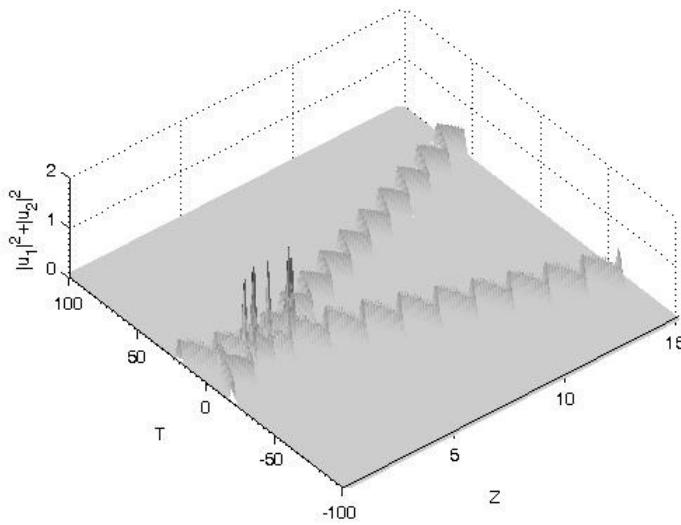
Σχήμα 2.84: Συνολική φασματική μετατόπιση σε σχέση με τη διαφορά στη διασπορά των τμημάτων διαμόρφωσης, με $L_{\text{map}}=2\pi/5$ για παλμούς με (α) $\Delta\omega_0=10$, (β) $\Delta\omega_0=20$.



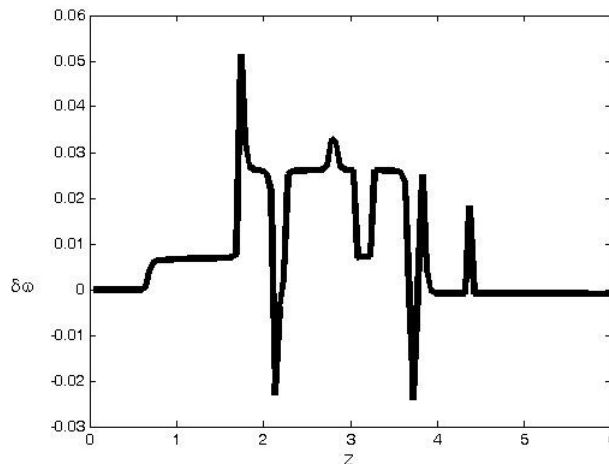
Σχήμα 2.85: Συνολική φασματική μετατόπιση σε σχέση με τη διαφορά στη διασπορά των τμημάτων διαμόρφωσης, με $L_{\text{map}}=2\pi/20$ για παλμούς με $\Delta\omega_0=20$.

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι υπάρχουν τιμές της διασποράς όπου η συνολική μετατόπιση είναι μηδενική, ενώ άλλες την ανεβάζουν σε κάποιο τοπικό μέγιστο. Για μεγαλύτερες τιμές της αρχικής φασματικής διαφοράς, οι μετατοπίσεις είναι γενικά μικρότερες, όπως άλλωστε προβλέπει και η σχέση (2.11). Στο σχήμα 2.85 τα σημεία είναι λίγα για το εύρος των διαφορετικών ΔD , αλλά το γεγονός της ύπαρξης μεγίστων και ελαχίστων είναι ξεκάθαρο, ενώ οι τιμές είναι πολύ μικρότερες από ότι στο σχήμα 2.84, καθώς το L_{map} είναι αρκετά μικρότερο. Στη περίπτωση του $L_{\text{map}}=2\pi/5$ δε μπορούμε να πάμε σε μεγαλύτερες τιμές της διασποράς χωρίς να έχουμε μιγαδικές τιμές τερετίσματος, μεγαλύτερο δηλαδή εύρος. Τα παραπάνω σχήματα είναι ανάλογα με αυτά του Sugahara [117] για σύνηθες σολιτόνιο.

Για να δοκιμάσουμε το αληθές των παραπάνω αποτελεσμάτων δοκιμάσαμε αριθμητικές προσομοιώσεις συγκρούσεων για ενδεικτικές τιμές παραμέτρων. Οι προσομοιώσεις έδειξαν φασματικές μετατοπίσεις που ακολουθούν αυτές που υποδεικνύουν οι ODEs στα σχήματα 2.84 και 2.85. Στο σχήμα 2.86 φαίνεται η σύγκρουση δύο παλμών με $W_0 = 2\sqrt{2}$, $C_0=-0.4975$, με $\Delta T_0=40$ και $\Delta\omega_0=10$, σε γραμμή με $L_{\text{map}}=2\pi/5$ και $\Delta D=10$. Σε πραγματικές μονάδες θα μπορούσαμε να έχουμε παλμούς εύρους FWHM $10ps$ που θα είχαν φασματική διαφορά $\Delta\lambda \approx 4.3nm$, σε διαμόρφωση διασποράς περιόδου $245km$, και μη-γραμμικό συντελεστή $\gamma \approx 3/Wkm$, οπότε θα χρειαζόταν αρχική ισχύς $P \approx 1.6mW$. Οι παλμοί φαίνονται να διέρχονται αλώβητοι της σύγκρουσης. Η πορεία «ζικ-ζακ» που ακολουθούν οφείλεται στη ισχυρή διαμόρφωση διασποράς που τους αλλάζει κατεύθυνση. Σύμφωνα με το σχήμα 2.84(a), αυτή η τιμή της διασποράς αφήνει τους παλμούς χωρίς μετατόπιση συχνότητας. Αυτό πράγματι επαληθεύεται, αφού στο σχήμα 2.87 όπου δείχνεται η φασματική μετατόπιση του u_1 όπως υπολογίζεται από την αριθμητική επίλυση είναι μηδενική.



Σχήμα 2.86: Αριθμητική επίλυση της σύγκρουσης δύο όμοιων DM-solitons με φασματική διαφορά $\Delta\omega_0=10$, σε γραμμή με διαχείριση διασποράς με $L_{\text{map}}=2\pi/5$ και $\Delta D=10$.



Σχήμα 2.87: Μετατόπιση συχνότητας κατά τη σύγκρουση των παλμών του σχήματος 2.86.

2.6 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε ο τρόπος μελέτης και τα αποτελέσματα για δύο προβλήματα αλληλεπίδρασης χρονικών σολιτονικών «παλμών», παρουσία μεταβαλλόμενης διασποράς. Και στις δύο περιπτώσεις το κύριο μέρος της μελέτης αφορούσε τα δυναμικά συστήματα τα οποία προσεγγίζουν τα προβλήματα. Στο πρώτο πρόβλημα εξετάσαμε τη δυνατότητα διατήρησης διανυσματικού σολιτονίου σε ένα με ισχυρή διπλοθλαστικότητα. Δείξαμε ότι εάν η συχνότητα της μεταβαλλόμενης διασποράς είναι πολύ μεγαλύτερη (δεκαπλάσια ή και παραπάνω) από τις χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος, αυτό διατηρείται και οι δύο ρυθμοί του δε χωρίζουν, ακόμα και για μεγάλες τοπικές τιμές της διασποράς (διαταραχή). Αντίθετα, όταν η συχνότητα είναι μικρή και ιδιαίτερα όταν είναι κοντά στις χαρακτηριστικές, ακόμα και μικρές τιμές της διαταραχής διαλύουν τον παλμό. Τα παραπάνω επαληθεύτηκαν και με αριθμητικές προσομοιώσεις. Επιπλέον εξετάσαμε την ισχύ της Μεταβολικής μεθόδου, η οποία χρησιμοποιήθηκε για την

εξαγωγή των δυναμικών συστημάτων. Σε κάθε περίπτωση φάνηκε πως η μέθοδος δίνει έγκυρα αποτελέσματα, μόνο εάν η συχνότητα διαταραχής είναι μικρή, κατά προτίμηση κάτω από το $\frac{1}{4}$ της μικρότερης από τις χαρακτηριστικές συχνότητες, ή πάλι όταν είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτές.

Το δεύτερο πρόβλημα αφορούσε την επίδραση της συχνότητας (περιόδου) διαχείρισης, αλλά και των ακρότατων τιμών της διασποράς στη φασματική μετατόπιση που προκαλείται σε σολιτονικό παλμό λόγω σύγκρουσης με παλμό άλλου καναλιού. Η διαχείριση θεωρείται ισχυρή και η συχνότητα μεταβολής της διασποράς αρκετά μεγαλύτερη από τις χαρακτηριστικές συχνότητες. Χρησιμοποιήθηκαν τα DM-σολιτόνια, για τα οποία χρησιμοποιήσαμε ένα απλό τρόπο υπολογισμού του πλάτους τους. Η επίλυση του δυναμικού συστήματος έδειξε ότι για δεδομένα χαρακτηριστικά της «περιόδου διαχείρισης» η φασματική μετατόπιση μηδενίζεται, ακριβώς όπως έχει δειχθεί και για τα συνήθη σολιτόνια σε παλαιότερες εργασίες.

Κεφάλαιο 3

Αλληλεπίδραση στενών χρονικών παλμών

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε ακόμα ένα πρόβλημα που περιγράφεται από συζευγμένες μονοδιάστατες NLS. Πιο συγκεκριμένα, προσπαθούμε να περιγράψουμε ημί-αναλυτικά την αλληλεπίδραση στενών χρονικών παλμών, που ανήκουν σε διαφορετικά κανάλια, είναι δηλαδή διαφορετικής συχνότητας. Καθώς στενοί ονομάζονται οι παλμοί με εύρος κάτω από $1ps$, κάποια φαινόμενα αρκετά ασθενή ώστε να αγνοούνται σε φαρδύτερους παλμούς, τώρα εμφανίζονται ενισχυμένα και επηρεάζουν δραματικά αυτούς και τις αλληλεπιδράσεις τους. Τα νέα φαινόμενα είναι η γραμμική διασπορά τρίτης τάξης και η σημαντικότερη, μη-γραμμική, απόκριση Raman. Στη παρούσα μελέτη, η μέθοδος προσέγγισης του προβλήματος είναι η άμεση διαταρακτική μέθοδος που, σαν τη μεταβολική, μας επιτρέπει να περιορίσουμε το πρόβλημα στην επίλυση συστήματος συνήθων διαφορικών, με τη βοήθεια των οποίων παρακολουθούμε την εξέλιξη των χαρακτηριστικών των παλμών. Επίσης, προτείνεται τρόπος περιορισμού της επίδρασης του φαινομένου Raman, της ολίσθησης συχνότητας, για το ένα κανάλι, μέσω της αλληλεπίδρασης του με το δεύτερο.

3.1 Φαινόμενα ανώτερης τάξης

Στο παρόν κεφάλαιο αντιμετωπίζονται φαινόμενα ανώτερης τάξης τα οποία εμφανίζονται κατά τη διάδοση πολύ στενών παλμών, με εύρος μικρότερο του $1ps$. Πιο συγκεκριμένα θα αναφερθούμε στα φαινόμενα της διασπορά τρίτης τάξης και στην ποικιλία των φαινομένων, οφειλόμενα στη σκέδαση Raman, και τα οποία είναι είτε «ενδοκαναλικά», επηρεάζοντας τον ίδιο τον παλμό, είτε «ετεροκαναλικά», επηρεάζοντας παλμούς διαφορετικής συχνότητας κατά τη συν-διάδοση τους. Συνεχίζοντας από τη φυσική περιγραφή των φαινομένων στο Κεφάλαιο 1, στο παρόν Κεφάλαιο παρουσιάζουμε τη μαθηματική τους μοντελοποίηση, πως δηλαδή περιγράφονται σαν επιπλέον όροι της μη-γραμμικής εξίσωσης του Schrödinger.

Η εξίσωση (1.28) χρειάζεται τροποποίηση στην περίπτωση που φαινόμενα όπως αυτά από διεγερόμενη ανελαστική σκέδαση (SRS και SBS) και η διασπορά ανώτερης τάξης γίνονται σημαντικά. Όπως είδαμε, εάν η ισχύς του παλμού είναι πάνω από κάποιο επίπεδο, τότε μπορεί να υπάρχουν και τα δύο φαινόμενα της ανελαστικής σκέδασης, με αποτέλεσμα τη μεταφορά ενέργειας από τον παλμό στη δημιουργία θυγατρικού παλμού “Stokes”. Στην περίπτωση τώρα όπου παλμοί διαφορετικών καναλιών συν-διαδίδονται και η φασματική τους απόσταση είναι μέσα στο φάσμα κέρδους Raman, ενέργεια δύναται να μεταφέρεται από τον παλμό μεγαλύτερης συχνότητας προς αυτόν της μικρότερης. Έτσι οι παλμοί θα αλληλεπιδρούν όχι μόνο μέσω XPM, αλλά και μέσω των φαινομένων Raman ή ακόμα και Brillouin. Τα φαινόμενα αυτά χαρακτηρίζονται «ετεροπαλμικά» (interpulse) ή «ετεροκαναλικά».

Επιπλέον στην περίπτωση παλμών με εύρος κάτω του $1ps$, το φασματικό τους εύρος είναι αρκετά μεγάλο, ώστε το φαινόμενο Raman να μεταφέρει ενέργεια από τις υψηλές συχνότητες του παλμού στις χαμηλότερες, ενισχύοντας τις. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται «ενδοπαλμική» (intrapulse) ή «ενδοκαναλική» σκέδαση Raman. Όπως αναφέραμε και στο Κεφάλαιο 1, το αποτέλεσμα είναι η μετατόπιση του φάσματος προς μικρότερες συχνότητες [157]. Πέραν των παραπάνω φαινομένων, οι στενοί παλμοί υπόκεινται και στην επίδραση της διασποράς τρίτης τάξης, που δε μπορεί να αγνοηθεί πλέον.

Παρακάτω παραθέτουμε το πως αυτά τα φαινόμενα περιγράφονται από μία NLS ανώτερης τάξης, αρχικά για διάδοση σε ένα κανάλι και μετά για διάδοση παλμών διαφορετικής συχνότητας. Οι αλγεβρικοί υπολογισμοί δε παρουσιάζονται με λεπτομέρεια, καθώς μοιάζουν με αυτούς με τους οποίους καταλήγουμε στις (1.28) και (2.20). Για ακόμα μία φορά θα αγνοήσουμε φαινόμενα που χρειάζονται κάποια συνθήκη συντονισμού για να γίνουν σημαντικά, όπως το FWM.

Ξεκινώντας πάλι από την (1.6), η επιδεκτικότητα στην περίπτωση μας θα γράφεται, [158],

$$\chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) = \chi^{(3)}R(t-t_1)\delta(t-t_2)\delta(t-t_3), \quad (3.1)$$

όπου $R(t)$ είναι η μη-γραμμική συνάρτηση απόκρισης του υλικού και περιγράφει τη μη άμεση απόκριση του και είναι κανονικοποιημένη όπως και η συνάρτηση δ : $\int_{-\infty}^{\infty} R(t)dt = 1$.

Αντικαθιστώντας την Εξ. (3.1) στην (1.10), η μη-γραμμική πόλωση δίνεται

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(3)} \vec{E}(\vec{r}, t) \int_{-\infty}^t R(t-t_1) |\vec{E}(\vec{r}, t_1)|^2 dt_1 \quad (3.2)$$

όπου πάλι θεωρείται πως το ηλεκτρικό πεδίο και το διάνυσμα της πόλωσης είναι συγγραμμικά. Το άνω όριο της ολοκλήρωσης είναι μόνο t , καθώς η συνάρτηση απόκρισης πρέπει να είναι μηδέν για $t_1 > t$.

Δουλεύοντας στο πεδίο των συχνοτήτων, όπως στο κεφάλαιο 1, ο μετασχηματισμός Fourier του ηλεκτρικού πεδίου υπολογίζεται ότι ικανοποιεί [159]

$$\nabla^2 \tilde{E} + n^2(\omega)k_0^2 \tilde{E} = -ik_0 a + \chi^{(3)} \frac{\omega^2}{c^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}(\omega - \omega_1) \tilde{E}(\omega_1, z) \tilde{E}(\omega_2, z) \tilde{E}(\omega_1 + \omega_2 - \omega, z) d\omega_1 d\omega_2 \quad (3.3)$$

όπου $\tilde{R}(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $R(t)$. Χωρίς να μπούμε σε περαιτέρω λεπτομέρειες της θεωρίας, το δεξί μέρος της εξίσωσης (3.3) μπορεί να ειπωθεί σα διαταραχή, που έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή της σταθεράς διάδοσης του βασικού ρυθμού, κατά $\Delta\beta$. Τελικά η εξίσωση που καθορίζει την εξέλιξη της αργά μεταβαλλόμενης περιβάλλουσας του παλμού, (αγνοώντας τις απώλειες), είναι:

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} = i\gamma \left(1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(U(z, t) \int_{-\infty}^t R(s) |U(z, t-s)|^2 ds \right) \quad (3.4)$$

Το β_3 είναι ο συντελεστής διασποράς 3^{ης} τάξης, τον οποίο διατηρούμε στην παρούσα περίπτωση των πολύ στενών παλμών. Η μερική διαφορίση με το χρόνο στο δεξί μέλος της (3.4) προέρχεται από τον όρο διαφορίσης πρώτης τάξης κατά την επέκταση του \tilde{P}_{NL} , ο οποίος επίσης διατηρείται για τέτοιους παλμούς. Σχετίζεται δε, με το φαινόμενο “self-steepening” [1]. Θα διατηρήσουμε τον εν λόγω όρο προς το παρόν μόνο, καθώς δε θα παίζει ρόλο στην ανάλυση μας παρακάτω. Η συνάρτηση απόκρισης $R(t)$ περιλαμβάνει το ηλεκτρονικό φαινόμενο, αλλά και το σχετικό με τους ρυθμούς ταλάντωσης (Raman) που αναπτύσσονται στο υλικό (πυριτία) και γράφεται [158-160]

$$R(t) = (1 - f_R)\delta(t) + f_R f(t) \quad (3.5)$$

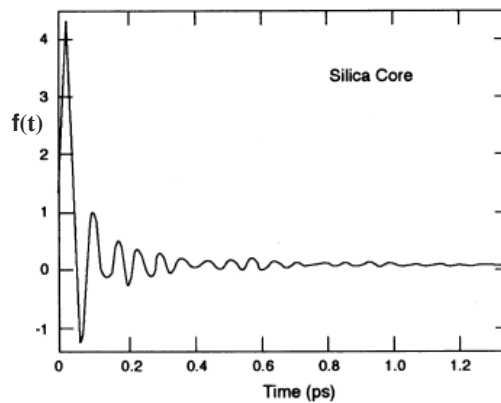
Το f_R συμβολίζει τη επίδραση της καθυστερημένης απόκρισης Raman στη μη-γραμμική πόλωση, ενώ η συνάρτηση απόκρισης Raman, $f(t)$, σχετίζεται με το «κέρδος Raman» του οποίου το φάσμα δίνεται από τη σχέση

$$g_R(\Delta\omega) = \frac{\omega_0}{cn_0} f_R \chi^{(3)} \text{Im} \left[\tilde{f}(\Delta\omega) \right] \quad (3.6)$$

όπου $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ και το “Im” συμβολίζει το φανταστικό μέρος του \tilde{f} , (μετασχηματισμού Fourier του $f(t)$), ενώ το πραγματικό μέρος βρίσκεται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Kramers-Kronig [7]. Η μορφή της συνάρτησης απόκρισης Raman φαίνεται στο σχήμα 3.1, ενώ προσεγγίζεται από τη σχέση, [158],

$$f(t) = \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 \tau_2^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \sin\left(\frac{t}{\tau_1}\right) \quad (3.7)$$

με $\tau_1 = 12.2\text{fs}$, $\tau_2 = 32\text{fs}$, ενώ το $f_R = 0.18$ [159].



Σχήμα 3.1: Συνάρτηση απόκρισης Raman συναρτήσεως του χρόνου ([160]).

Στο σχήμα 3.1 παρατηρούμε ότι για $t > 1ps$ η συνάρτηση απόκρισης Raman είναι σχεδόν μηδέν. Έτσι για παλμούς με εύρος μεγαλύτερο από $1ps$ ο όρος αυτός στη (3.4) απλοποιείται. Σε αυτή τη περίπτωση η $R(t)$ αντικαθίσταται με τη συνάρτηση $\delta(t)$ και η άνωθεν εξίσωση μετασχηματίζεται στη γνωστή NLS (1.28). Στην πραγματικότητα, δεδομένης της επιθυμίας για διάδοση σε μεγάλες αποστάσεις, οι όροι της σκέδασης Raman μπορούν να αγνοηθούν εντελώς όταν το εύρος είναι πάνω από $5ps$. Για παλμούς με εύρος γύρω στο $1ps$ ή λίγο παραπάνω το δεξί σκέλος της εξίσωσης (3.4) δύναται να απλοποιηθεί. Θα παραθέσουμε την απλοποιημένη αυτή μορφή για λόγους πληρότητας και διότι κάποιες βασικές εργασίες είχαν ακολουθήσει αυτή την οδό [157, 162, 164].

Αναπτύσσοντας κατά Taylor, $|U(z, t-s)|^2 \approx |U(z, t)|^2 - s \frac{\partial}{\partial t} |U(z, t)|^2$, η νέα εξίσωση γράφεται

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} = i\gamma \left(|U|^2 U + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (|U|^2 U) - T_R U \frac{\partial |U|^2}{\partial t} \right) \quad (3.8)$$

όπου $T_R = \int_{-\infty}^{\infty} tR(t)dt = f_R \left. \frac{d(\text{Im } \tilde{f})}{d(\Delta\omega)} \right|_{\Delta\omega=0}$. Η ανωτέρω απλοποίηση είχε χρησιμοποιηθεί σε

δημοσιευμένη μας εργασία [250], η οποία δεν αποτελεί τμήμα της διατριβής. Σε αυτή την εργασία ασχολούμαστε με παλμούς εύρους μικρότερου από $1ps$, οπότε δεν θα χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω απλοποιημένο μοντέλο.

Επιπλέον, για τα μικρά εύρη με τα οποία θα ασχοληθούμε, αλλά και για τις σχετικά μικρές εντάσεις των παλμών, καθώς θα μοντελοποιήσουμε μόνο $N=1$ σολιτόνια, η επίδραση του SBS είναι πολύ μικρότερη του SRS και μπορεί να αγνοηθεί. Ένα ακόμα φαινόμενο που αγνοούμε είναι το “self-steepening”, καθώς είναι λιγότερο δραστικό από το φαινόμενο Raman, ιδιαίτερα για μεγάλες τιμές της διασποράς. Γίνεται δε εντονότερο για παλμούς εύρους μικρότερου των $100fs$, περιοχή τιμών που δε χρησιμοποιούμε. Ξεκινώντας από αυτό, επεκτείνουμε παρακάτω το μοντέλο ώστε να περιγράφει την αλληλεπίδραση στενών παλμών με διαφορετικές κεντρικές συχνότητες (σε διαφορετικά κανάλια).

Το μοντέλο αυτό βασίζεται πάλι στις συζευγμένες NLS και περιλαμβάνει τους όρους της ετεροδιαμόρφωσης φάσης (XPM) για τους δύο παλμούς, ενώ περιλαμβάνονται φυσικά και όροι ανώτερης τάξης. Αρχικά χρησιμοποιήθηκε για την περιγραφή της δημιουργίας και συνδιάδοσης του αρχικού παλμού (pump) και του θυγατρικού παλμού “Stokes” (ή probe ή Raman). Για να δημιουργηθεί και ενισχυθεί ο παλμός Stokes θα πρέπει ο “pump” να ξεπερνά κάποια ισχύ κατωφλίου [161]. Σε αυτή την αρχή βασίζεται και η ενίσχυση μέσω Raman όπου οι “Stokes” παλμοί μεταφέρουν πληροφορία σε ένα κανάλι και δε «γεννιούνται» αλλά ενισχύονται από το pump που ανήκει σε κανάλι μεγαλύτερης συχνότητας (τόσο ώστε η φασματική τους διαφορά να βρίσκεται κοντά στη κορυφή του κέρδους Raman), και έχει πολύ μεγαλύτερο εύρος (συχνά είναι CW). Αυτή η διαμόρφωση έχει χρησιμοποιηθεί σε πειράματα, με το pump να βρίσκεται σε περιοχή ανώμαλης διασποράς [163, 165] ή και σε κανονική διασπορά [166], ενώ σημαντικές αριθμητικές εργασίες επίσης βασίστηκαν σε αυτή τη συνθήκη [167].

Στην παρούσα διατριβή εξετάζουμε την αλληλεπίδραση στενών παλμών διαφορετικών καναλιών και θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο των συζευγμένων εξισώσεων, αλλά χωρίς τις απλοποιήσεις που επιτρέπει το μεγάλο εύρος του pump.

Ξεκινώντας όπως και στην περίπτωση του κεφαλαίου 2.2 με το συνολικό πεδίο να δίνεται,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [E_1 \exp[i(\beta_{01} - \omega_1 t)] + E_2 \exp[i(\beta_{02} - \omega_2 t)]] + c.c \quad (3.9)$$

και δουλεύοντας ανάλογα, λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω ανάλυση που κατέληξε στη διάδοση ενός στενού παλμού, οι εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη για τις δύο περιβάλλουσες είναι:

$$i \frac{\partial U_1}{\partial z} + i\beta_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - \frac{i\beta_3}{6} \frac{\partial^3 U_1}{\partial t^3} = -\gamma(1-f_R) \left(|U_1|^2 + 2|U_2|^2 \right) U_1 - \gamma f_R U_1 \int_{-\infty}^t f(t-s) \left[|U_1(z,s)|^2 + |U_2(z,s)|^2 \right] ds - \gamma f_R U_2 \int_{-\infty}^t f(t-s) U_1(z,s) U_2^*(z,s) \exp[i\Delta\omega(t-s)] ds \quad (3.10\alpha)$$

$$i \frac{\partial U_2}{\partial z} + i\beta_1' \frac{\partial U_2}{\partial t} - \frac{\beta_2'}{2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - \frac{i\beta_3'}{6} \frac{\partial^3 U_2}{\partial t^3} = -\gamma'(1-f_R) \left(|U_2|^2 + 2|U_1|^2 \right) U_2 - \gamma' f_R U_2 \int_{-\infty}^t f(t-s) \left[|U_2(z,s)|^2 + |U_1(z,s)|^2 \right] ds - \gamma' f_R U_2 \int_{-\infty}^t f(t-s) U_2(z,s) U_1^*(z,s) \exp[-i\Delta\omega(t-s)] ds \quad (3.10\beta)$$

, όπου ο τονισμός δηλώνει τη διαφορετικότητα των μεγεθών μεταξύ των δύο καναλιών. Με έν απλό μετασχηματισμό φέρνουμε τις εξισώσεις στην παρακάτω μορφή,

$$i \frac{\partial U_1}{\partial z} + i\beta_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - \frac{i\beta_3}{6} \frac{\partial^3 U_1}{\partial t^3} = -\gamma(1-f_R) \left(|U_1|^2 + 2|U_2|^2 \right) U_1 - \gamma f_R U_1 \int_0^{\infty} f(s) \left[|U_1(z,t-s)|^2 + |U_2(z,t-s)|^2 \right] ds - \gamma f_R U_2 \int_0^{\infty} f(s) U_1(z,t-s) U_2^*(z,t-s) \exp[i\Delta\omega s] ds \quad (3.11\alpha)$$

$$i \frac{\partial U_2}{\partial z} + i\beta_1' \frac{\partial U_2}{\partial t} - \frac{\beta_2'}{2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - \frac{i\beta_3'}{6} \frac{\partial^3 U_2}{\partial t^3} = -\gamma'(1-f_R) \left(|U_2|^2 + 2|U_1|^2 \right) U_2 - \gamma' f_R U_2 \int_0^{\infty} f(s) \left[|U_2(z,t-s)|^2 + |U_1(z,t-s)|^2 \right] ds - \gamma' f_R U_2 \int_0^{\infty} f(s) U_2(z,t-s) U_1^*(z,t-s) \exp[-i\Delta\omega s] ds \quad (3.11\beta)$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor τα $|U_i(z,t-s)|^2$ και $U_i(z,t-s)U_{3-i}^*(z,t-s)$ γύρω από το $s=0$, (όπου $i=1, 2$), και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\int_{-\infty}^{\infty} R(t)dt = 1$, καταλήγουμε

$$i \frac{\partial U_1}{\partial z} + i\beta_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - \frac{i\beta_3}{6} \frac{\partial^3 U_1}{\partial t^3} = -\gamma \left[|U_1|^2 + (2-f_R + f_R \int_0^{\infty} f(s)e^{i\Delta\omega s} ds) |U_2|^2 \right] U_1 + \gamma f_R \int_0^{\infty} sf(s) ds \frac{\partial \left[|U_1|^2 + |U_2|^2 \right]}{\partial t} U_1 + \gamma f_R \int_0^{\infty} sf(s)e^{i\Delta\omega s} ds \frac{\partial (U_1 U_2^*)}{\partial t} U_2 \quad (3.12\alpha)$$

$$i \frac{\partial U_2}{\partial z} + i\beta_1' \frac{\partial U_2}{\partial t} - \frac{\beta_2'}{2} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - \frac{i\beta_3'}{6} \frac{\partial^3 U_2}{\partial t^3} = -\gamma' \left[|U_2|^2 + (2-f_R + f_R \int_0^{\infty} f(s)e^{-i\Delta\omega s} ds) |U_1|^2 \right] U_2 + \gamma' f_R \int_0^{\infty} sf(s) ds \frac{\partial \left[|U_1|^2 + |U_2|^2 \right]}{\partial t} U_2 + \gamma' f_R \int_0^{\infty} sf(s)e^{-i\Delta\omega s} ds \frac{\partial (U_2 U_1^*)}{\partial t} U_1 \quad (3.12\beta)$$

Πριν συνεχίσουμε με τις κανονικοποιήσεις, αξίζει να δώσουμε προσοχή στα ολοκληρώματα τα σχετιζόμενα με τη συνάρτηση απόκρισης Raman. Το $I_a = \int_0^{\infty} f(s)e^{i\Delta\omega s} ds$

είναι ουσιαστικά το $\tilde{f}(\Delta\omega)$ που σχετίζεται με τη φασματική συνάρτηση κέρδους Raman (εξ. 3.6), ενώ το $I_\beta = \int_0^\infty sf(s)e^{i\Delta\omega s} ds$ είναι το $-i \left[\tilde{df}(\Delta\omega)/d\omega \right]$, οπότε σχετίζεται με την κλίση της συνάρτησης κέρδους. Και τα δύο είναι μιγαδικά μεγέθη, όπου στην εξίσωση (3.12β) εμφανίζουν αντίθετα πρόσημα φανταστικού μέρους, από ότι στην (3.12α). Το πραγματικό μέρος του I_α συμβάλει στη περαιτέρω διαμόρφωση του «ενεργού» δείκτη διάθλασης που συναντά ο ένας παλμός όταν υπερτίθεται με τον άλλο, επηρεάζοντας έτσι τον όρο του XPM. Το φανταστικό του μέρος όμως, είναι ο κύριος μηχανισμός μεταφοράς ενέργειας από το κανάλι υψηλότερης συχνότητας σε αυτό με τη χαμηλότερη, λόγω SRS. Αντίθετα, είναι το πραγματικό μέρος του I_β , καθώς πολλαπλασιάζεται με διαφορικό ως προς t όρο, το οποίο ευθύνεται για τη μεταφορά ενέργειας, η οποία όμως έχει την ίδια φορά μόνο για θετική κλίση της συνάρτησης κέρδους, δηλαδή όταν $\Delta\omega < 13\text{THz}$. Ο όρος αυτός όμως είναι πολύ μικρότερος του $\text{Im}(I_\alpha)$, οπότε κατά την αλληλεπίδραση η ροή ενέργειας δεν δύναται να αντιστραφεί. Το φανταστικό μέρος του I_β σχετίζεται με τη περαιτέρω μείωση της συχνότητας του παλμού λόγω της παρουσίας του άλλου παλμού, ενώ ο σχετικός όρος έχει το ίδιο πρόσημο και στις δύο εξισώσεις. Τέλος, το $I_\gamma = \int_0^\infty sf(s)ds$ είναι καθαρά πραγματικό και σχετίζεται με το $\text{Im} \left[\partial \tilde{f}(\Delta\omega=0)/\partial \omega \right]$, είναι δηλαδή αίτιο αυτοδιαμόρφωσης, του παλμού και συγκεκριμένα της συχνότητας του. Ο όρος ο σχετιζόμενος με το I_γ , σχετίζεται με την «ενδοπαλμική» μεταφορά ενέργειας σε μικρότερες συχνότητες (intra-pulse Raman scattering, IRS), που έχει κυριότερο αποτέλεσμα την ολίσθηση της συχνότητας προς μικρότερες τιμές. Το φαινόμενο αυτό είναι η αυτοδιεγερόμενη ολίσθηση συχνότητας (“self frequency shift”-SFS). Όπως φαίνεται από τον τρίτο όρο στο δεξί μέλος των εξισώσεων (3.12), η παρουσία του έτερου παλμού εντείνει το παραπάνω φαινόμενο. Ανεξάρτητα λοιπόν από τη μεταφορά ενέργειας, η επικάλυψη ενός παλμού από έναν άλλο προσθέτει στην ενέργεια του και εν τέλει ενισχύει την ενδοπαλμική ολίσθηση. Λόγω της παρουσίας έτερου παλμού, η ενίσχυση αυτή του φαινομένου ονομάζεται ετεροδιεγερόμενη ολίσθηση συχνότητας (“cross frequency shift”-CFS).

Τα παραπάνω φαινόμενα γίνονται σαφέστερα στην επίδραση τους επάνω στους παράγοντες του παλμού με την εξαγωγή των συνήθων διαφορικών, που γίνεται παρακάτω, και περιγράφει την εξέλιξη αυτών των παραγόντων, δηλαδή του πλάτους, της φασματικής και της χρονικής μετατόπισης. Να σημειώσουμε ακόμα, ότι δε λαμβάνεται υπόψη η πιθανότητα δημιουργίας άλλων θυγατρικών, Stokes, παλμών λόγω της ύπαρξης των U_1 και U_2 . Αυτό διότι οι παλμοί είναι ιδιαίτερα στενοί και υπόκεινται σε σημαντική και διαρκή ολίσθηση συχνότητας, με αποτέλεσμα να μη προλαβαίνει να αναπτυχθεί σημαντικό ποσό ενέργειας σε κάποια συγκεκριμένη συχνότητα. Ο άλλος λόγος είναι ότι οι παλμοί, όντας της τάξης των εκατοντάδων femtoseconds, έχουν πολύ ευρύ φάσμα με αποτέλεσμα η ενέργεια να μετατοπίζεται εντός του παλμού, όταν βέβαια δεν υπάρχει η μεταξύ τους αλληλεπίδραση.

Από τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι στην περίπτωση της συν-διάδοσης στενών παλμών υπάρχει μια πληθώρα φαινομένων που επιδρούν έχοντας μεγαλύτερη ή μικρότερη βαρύτητα. Η αλληλεπίδραση τους δε, καθορίζει και την εξέλιξη των παλμών. Πέραν της ανταλλαγής ενέργειας, το σημαντικότερο αποτέλεσμα των φαινομένων, των προερχόμενων από τη απόκριση Raman, είναι η σημαντική ολίσθηση της συχνότητας, που μέσω της διασποράς μετασχηματίζεται σε σημαντική χρονική μετατόπιση. Γνωρίζουμε όμως, ότι η αλληλεπίδραση των παλμών μέσω XPM τους προκαλεί επίσης μόνιμη χρονική μετατόπιση. Βασιζόμενοι στην αρχική ιδέα της ακύρωσης της συχνοτικής ολίσθησης μέσω του XPM ([164]), για το ένα εκ των δύο καναλιών καταλήγουμε σε παρόμοιο συμπέρασμα, λύνοντας όμως σύστημα συνήθων διαφορικών, στο κεφάλαιο 3.3. Η μέθοδος μετάπτωσης από το

σύστημα των δύο μερικών διαφορικών σε αυτό των συνήθων, αυτή τη φορά, είναι η «Άμεση μέθοδος διαταραχών», που παρουσιάζεται συνοπτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

3.2 Άμεση Μέθοδος Διαταραχών της NLS

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται ο φορμαλισμός της μεθόδου, η οποία ξεκινώντας από τη διαταραχή της NLS καταλήγει στην εξαγωγή συνήθων διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν την εξέλιξη των χαρακτηριστικών του παλμού. Καθώς αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το σύστημα των διαφορικών, καθώς και κάποιες συνθήκες που αφορούν τη διαταραχή, η παρακάτω περιγραφή είναι συνοπτική. Ολόκληρη η μεθοδολογία είναι δημοσιευμένη στην εργασία των Yan et al. [168].

Η κανονικοποιημένη NLS μαζί με τους επιπλέον διαταρακτικούς όρους μπορεί να γραφεί

$$iu_z + u_{TT} + 2|u|^2 u = i\varepsilon R[u], \quad (3.13)$$

όπου οι δείκτες συμβολίζουν την αντίστοιχη διαφορίση και ε είναι μια μικρή θετική σταθερά. Η λύση της αδιατάρακτης εξίσωσης είναι η γνωστή,

$$u(Z, T) = 2\beta \operatorname{sech}[2\beta(T - T_0 + 4aZ)]e^{-2iaT - 4i(a^2 - \beta^2)Z - i\theta_0} \quad (3.14)$$

,όπου β το πλάτος, a η μετατόπιση συχνότητας, T_0 η αρχική του θέση στο χρονικό παράθυρο και θ_0 η αρχική φάση. Η αρχική συνθήκη για την (3.13) είναι

$$u(0, T) = 2\beta \operatorname{sech}[2\beta(T - T_0)]e^{-2iaT - i\theta_0} \quad (3.15)$$

Στη συνέχεια η (3.13) γραμμικοποιείται, έτσι ώστε στη μηδενική τάξη να είναι η αδιατάρακτη NLS, ενώ για την πρώτη τάξη (διόρθωση) να έχουμε μία γραμμική εξίσωση. Η μεταβλητή Z μετασχηματίζεται σε σειρά μεταβλητών $Z_n = \varepsilon^n Z$, ($n=1, 2, \dots$) και αναπτύσσουμε σε ασυμπτωτικές σειρές τη λύση και τη διαταραχή:

$$u = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon u^2 + \varepsilon u^3 + \dots \quad (3.16)$$

$$R[u] = R^1[u^0] + \varepsilon R^2[u^0, u^1] + \dots \quad (3.17)$$

Εξισώνοντας τις δυνάμεις του ε , καταλήγει στις εξισώσεις για τη μηδενική και διόρθωση πρώτης τάξης:

$$iu_{z_0}^0 + u_{TT}^0 + 2|u^0|^2 u^0 = 0 \quad (3.18)$$

$$iu_{z_0}^1 + u_{TT}^1 + 4|u^0|^2 u^1 + 2[u^0]^2 (u^1)^* = iR^1 - iu_{z_1}^0 \quad (3.19)$$

, όπου η αρχικές συνθήκες για τις ανώτερες τάξεις είναι $u^n(0, T) = 0$. Στη μηδενική τάξη η λύση παραμένει το γνωστό σολιτόνιο, που τώρα γράφεται,

$$u^0(Z_0, T) = 2\beta \operatorname{sech}(t)e^{-i\theta}, \quad (3.20)$$

με $t = 2\beta(T - x)$, όπου $x_{z_0} = -4a$ και $\theta = 2a(T - x) + \delta$, όπου $\delta_{z_0} = -4(a^2 + \beta^2)$. Λόγω της διαταραχής τα a, β, x, δ είναι συναρτήσεις των Z_1, Z_2, \dots , αλλά τα a και β είναι ανεξάρτητα από το Z_0 . Αντικαθιστώντας την (3.20) στην (3.19), θέτοντας $u^1 = e^{-i\theta}(A^1 + iB^1)$, καταλήγει σε δυο τελεστικές εξισώσεις:

$$A^1_{z_0} + 4\beta^2 \hat{L}_1 B^1 = \operatorname{Re}[R^1 e^{i\theta}] - 2\beta_{z_1} \psi_1(t) - 4\beta^2 x_{z_1} \psi_2(t) \quad (3.21)$$

$$B^1_{z_0} + 4\beta^2 \hat{L}_2 A^1 = \operatorname{Im}[R^1 e^{i\theta}] - (4a\beta x_{z_1} - 2\beta\delta_{z_1})\phi_1(t) + 2a_{z_1}\phi_2(t)$$

, όπου $\phi_1(t) = \operatorname{sech} h(t)$, $\phi_2(t) = t \operatorname{sech} h(t)$, $\psi_1(t) = (1 - \tanh t) \operatorname{sech} h(t)$, $\psi_2(t) = \tanh t \operatorname{sech} h(t)$ και

$\hat{L}_1 = \frac{d^2}{dt^2} + 2 \operatorname{sech}^2 h^2 t - 1$, $\hat{L}_2 = \frac{d^2}{dt^2} + 6 \operatorname{sech}^2 h^2 t - 1$, οι γραμμικοί τελεστές.

Οι ιδιοτιμές των τελεστών βρίσκονται λύνοντας τις

$$\begin{aligned}\hat{L}_2\hat{L}_1\phi &= \lambda^2\phi \\ \hat{L}_1\hat{L}_2\psi &= \lambda^2\psi\end{aligned}\quad (3.22)$$

, όπου πέρα των $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ που είναι ιδιοσυναρτήσεις για $\lambda=0$, οι υπόλοιπες βρίσκονται να είναι:

$$\begin{aligned}\phi(t, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(k^2+1)}(1-k^2-2ik \tanh t)e^{ikt} \\ \psi(t, k) &= \frac{1}{ik}\phi_1(t, k)\end{aligned}\quad (3.23)$$

, για $-\infty < k < \infty$. Έπειτα τα A^1 και B^1 αναπτύσσονται πάνω στις βάσεις $\{\psi\}$ και $\{\phi\}$, οπότε καταλήγει σε συνήθεις διαφορικές ως προς Z_0 . Χωρίς να μπορούμε σε αλγεβρικές λεπτομέρειες, οι οποίες είναι ιδιαίτερα μακροσκελείς, μεγάλη σημασία στην εξέλιξη της μεθόδου έχει η μη εξάρτηση του $R^1[u^0]e^{i\theta}$ από το θ , από τη μορφή δηλαδή των διαταρακτικών όρων. Χωρίς πάλι να μπορούμε σε περισσότερες αλγεβρικές λεπτομέρειες, το αποτέλεσμα είναι το δεξί μέρος των διαφορικών να είναι ανεξάρτητο του Z_0 , στο κινούμενο με την ταχύτητα ομάδος σύστημα αναφοράς. Ο μόνος παράγοντας του u^0 που μένει να εξαρτάται από το Z_0 είναι η φάση δ , οπότε το $R^1[u^0]e^{i\theta}$ δεν θα πρέπει να εξαρτάται από αυτή. Αυτό απλοποιεί το σύστημα των συνήθων διαφορικών και, κατά πάσα πιθανότητα, το κάνει διαχειρίσιμο. Οι εξισώσεις σε αυτή τη περίπτωση, παραλείποντας το δείκτη «1» για απλότητα, είναι,

Πλάτος:
$$\beta_z = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} [R \cdot e^{i\theta}] \phi_1^* dt \quad (3.24)$$

Χρονική μετατόπιση
$$x_z = \frac{1}{4\beta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} [R \cdot e^{i\theta}] \phi_2^* dt \quad (3.25)$$

Φασματική μετατόπιση
$$a_z = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im} [R \cdot e^{i\theta}] \psi_2^* dt \quad (3.26)$$

Φάση
$$\delta_z = 2ax_z - \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im} [R \cdot e^{i\theta}] \psi_1^* dt \quad (3.27)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν τη μεταβολή των παραμέτρων του παλμού εξαιτίας της διαταραχής, ενώ σε μηδενική τάξη διατηρεί τη sech μορφή του. Είναι δε ίδιες με αυτές που λαμβάνονται από τη θεωρία διαταραχών της μεθόδου αντίστροφης σκέδαση [169]. Οι παραπάνω εξισώσεις διατηρούν το συμβολισμό των δημιουργών της μεθόδου. Στο επόμενο κεφάλαιο θα επανέλθουμε στο δικό μας συμβολισμό και τις όποιες μικρές διαφορές στην κανονικοποίηση. Παρόλα αυτά πιστεύουμε ότι η χρήση των αποτελεσμάτων της μεθόδου γίνεται με ευκρίνεια.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις διαφορικές εξισώσεις (3.24-3.27) όπως εμφανίζονται στην απλοποιημένη τους μορφή, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η «διαταραχή» που εξετάζουμε ικανοποιεί τη συνθήκη ανεξαρτησίας του $Re^{i\theta}$ από το θ .

3.3 Εφαρμογή της Άμεσης Μεθόδου στην NLS ανώτερης τάξης

Στο κεφάλαιο αυτό εφαρμόζουμε την Άμεση μέθοδο διαταραχών στο ζεύγος των NLS ανώτερης τάξης που καταλήξαμε στο κεφάλαιο 3.1. Η αφορμή αυτής της μελέτης είναι ο έλεγχος της δυνατότητας καταπολέμησης του SFS από το XPM λόγω αλληλεπίδρασης

παλμών σε διαφορετικά κανάλια. Πιο σωστό βέβαια θα ήταν να πούμε πως ο σκοπός μας είναι ο επανέλεγχος αυτής της δυνατότητας μέσω της περιγραφής των παραμέτρων του παλμού από σύστημα συνήθων διαφορικών. Όπως αναφέραμε, αυτή η παρατήρηση πρωτοδημοσιεύτηκε στη [164] και επαληθεύτηκε από αριθμητική επίλυση του ζεύγους των NLS. Παρόμοια δουλειά ήταν και αυτή των Aarona et al.[167], οι οποίοι στη [170] προσεγγίζουν το πρόβλημα και ημί-αναλυτικά καταλήγοντας σε σύστημα συνήθων διαφορικών, όπου όμως αγνοήθηκε η σημαντική χρονική μετατόπιση που προκαλεί το SFS και περιορίστηκε στη μελέτη της κεντρικής συχνότητας. Το χαρακτηριστικό των παραπάνω εργασιών είναι ότι μόνο το ένα κανάλι, το «αργό», έχει στενούς παλμούς, ενώ στο άλλο βρίσκεται το “pump”, όπου χαρακτηρίζεται από παλμούς εύρους της τάξης των picoseconds ή nanoseconds που «κουκουλώνουν» τους στενούς παλμούς του αργού καναλιού και εν τέλει περιορίζουν τη χρονική μετατόπιση αυτού. Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε τη δυνατότητα περιορισμού της χρονικής μετατόπισης παλμού του «γρήγορου» καναλιού και συγκράτησης του στο «χρονικό του παράθυρο» μέσω των αλληλεπιδράσεων του με παλμούς ενός αργού καναλιού. Ουσιαστικά εξετάζουμε τη δυνατότητα διατήρησης της χρονικής θέσης του παλμού μέσω των πλήρων συγκρούσεων με άλλους στενούς παλμούς.

Καθώς οι παλμοί της τάξης των femtoseconds θα ήταν ιδανικοί φορείς πληροφορίας για ένα οπτικό τηλεπικοινωνιακό σύστημα, έχουν προταθεί και άλλοι τρόποι καταπολέμησης του SFS. Σύμφωνα με μία καθαρά θεωρητική προσέγγιση, υπάρχει οδεύουσα λύση για την NLS ανώτερης τάξης, όταν αυτή είναι ασύζευκτη [171]. Όμως, προϋποθέτει την ύπαρξη συγκεκριμένων συντελεστών στους όρους της μη-γραμμικότητας και της διασποράς 3^{ης} τάξης (TOD), κάτι που πρακτικά είναι πολύ δύσκολο. Μία άλλη πρόταση [172] είναι η χρήση φασματικά περιορισμένης ενίσχυσης, ενώ παρόμοια αποτελέσματα αναμένεται να έχει η χρήση φίλτρων[173].

Σε αυτή τη διατριβή προτείνουμε ένα απλό τρόπο, (την επίλυση συνήθων διαφορικών), για τη μελέτη της ολίσθησης συχνότητας αλλά και άλλων φαινομένων ανώτερης τάξης. Μέρος της παρουσιάστηκε στο συνέδριο της SPIE Opto-Ireland το 2005 και δημοσιεύτηκε στα proceedings αυτού [253].

3.3.1 Φορμαλισμός του προβλήματος

Ξεκινάμε από τις εξισώσεις (3.12) οι οποίες κανονικοποιούνται η κάθε μία σε σχέση με τα χαρακτηριστικά του εκάστοτε παλμού που περιγράφει. Έτσι η άμεση μέθοδος θα εφαρμοστεί δύο φορές, μία για κάθε εξίσωση. Μετά τις κανονικοποιήσεις, οι εξισώσεις γράφονται

$$iu_{1z} + \frac{1}{2}u_{1TT} + |u_1|^2 u_1 = R_1 \quad (3.28\alpha)$$

$$iu_{2z'} + \frac{1}{2}u_{2T'T'} + |u_2|^2 u_2 = R_2 \quad (3.28\beta)$$

, όπου

$$R_1 = -(1.82 + \sigma_1) \frac{P_2}{P_1} |u_2|^2 u_1 + \sigma u_1 \frac{d \left(|u_1|^2 + \frac{P_2}{P_1} |u_2|^2 \right)}{dT} + \sigma_2 \frac{P_2}{P_1} u_2 \frac{d(u_1 u_2^*)}{dT} + i\delta u_{1TTT} - i\sigma u_{1T} \quad (3.29\alpha)$$

$$R_2 = -(1.82 + \sigma_1') \frac{P_1}{P_2} |u_1|^2 u_2 + \sigma' u_2 \frac{d \left(|u_2|^2 + \frac{P_1}{P_2} |u_1|^2 \right)}{dT'} + \sigma_2' \frac{P_1}{P_2} u_1 \frac{d(u_2 u_1^*)}{dT'} + i\delta' u_{2T'T'T'} \quad (3.29\beta)$$

Ουσιαστικά γράφουμε τις εξισώσεις στη διαταρακτική μορφή της σχέσης (3.13), χωρίς το φανταστικό “i”, οπότε οι σχέσεις (3.24-27) μετατρέπονται ανάλογα. Τα κανονικοποιημένα

μεγέθη ορίζονται ως $Z = z/L_{D1}$, $T = \tau/T_{01}$, $Z' = z/L_{D2}$, $T' = \tau/T_{02}$, όπου $L_{D1} = T_{01}^2/|\beta_2|$ και $L_{D2} = T_{02}^2/|\beta_2'|$ είναι τα μήκη διασποράς για τον αντίστοιχους παλμούς, $\tau = t - z/v_{g2}$ ο μετασχηματισμένος χρόνος πάνω στο δεύτερο παλμό και τέλος T_{0i} , P_i , με $i=1,2$, είναι τα αρχικά τους εύρη και ισχεις. Θέσαμε δε, $u_i = NU_i/\sqrt{P_i}$ και καθώς οι αρχικές μας συνθήκες θα είναι σολιτόνια 1^{ns} τάξης, θα ισχύει

$$N^2 = \frac{\gamma P_1 T_{01}^2}{|\beta_2|} = \frac{\gamma' P_2 T_{02}^2}{|\beta_2'|} = 1 \quad (3.30)$$

Όσον αφορά τους νέους συντελεστές των διαταρακτικών όρων, τα $\delta = \beta_3/(6\beta_2 T_{01})$ και $\delta' = \beta_3'/(6\beta_2' T_{02})$ σχετίζονται με τη TOD, το $c_1 = v_{g1}^{-1} - v_{g2}^{-1}$ είναι η διαφορά των αντίστροφων ταχυτήτων τους, ενώ οι υπόλοιποι σχετίζονται με την απόκριση Raman. Πιο συγκεκριμένα, $\sigma_1 = f_r \int_0^\infty F(S) e^{i(\Omega_1 - \Omega_2)S} dS$ και $\sigma_2 = f_r \int_0^\infty sF(S) e^{i(\Omega_1 - \Omega_2)S} dS$, όπου $F(S) = T_{01} f(S)$, όπου ο χρόνος είναι πλέον κανονικοποιημένος, και $\Omega_i = T_{0i} \omega_i$ η κανονικοποιημένη συχνότητα. Τα αντίστοιχα μεγέθη στη (3.29β) είναι κανονικοποιημένα ως προς T_{02} . Οι συντελεστές αυτοί είναι μιγαδικοί και μια ανάλυση του ρόλου τους, όπως και των παραγόντων που πολλαπλασιάζουν βρίσκεται στο κεφάλαιο 3.2. Ο συντελεστής του SFS και του CFS, σ είναι υπολογισμένος στη βιβλιογραφία (π.χ. [1]) και προσεγγίζεται ως T_R/T_{01} , όπου $T_R \approx 3$ fs. Αντίστοιχα, οι συντελεστές με τονισμό στη δεύτερη εξίσωση έχουν κανονικοποιηθεί με το T_{02} .

Έπειτα εφαρμόζουμε την Άμεση διαταρακτική μέθοδο που παρουσιάστηκε συνοπτικά στο κεφάλαιο 3.2. Αυτό σημαίνει ότι θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (3.24-27) για την κάθε μία εκ των εξισώσεων (3.28), με την προϋπόθεση ότι $R_1 e^{i\theta}$ και $R_2 e^{i\theta}$ είναι «ανεξάρτητα από το θ » και άρα τα δεξιά μέρη των πρωτόγεννων συνήθων διαφορικών της μεθόδου, να είναι «ανεξάρτητα από το Z_0 » στο κινούμενο σύστημα αναφοράς. Εδώ εγείρεται ένα θέμα σχετικά με τον τελευταίο όρο της (3.29α), καθώς ο μετασχηματισμός στην πρώτη εξίσωση δεν ήταν πάνω στην ταχύτητα ομάδος του u_1 , v_{g1} , αλλά στη v_{g2} , οπότε μένει το “ c ” σαν «υπόλοιπο». Έτσι η χρονική μετατόπιση T_1 του παλμού μεταβάλλεται και ως προς Z_0 , καθώς το σύστημα αναφοράς κινείται με διαφορετική ταχύτητα. Όμως αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα, καθώς λόγω του αμετάβλητου του παλμού σε Γαλιλαϊκό μετασχηματισμό θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό και τη διαταρακτική μας μέθοδο με v_{g1} και μετά να προσθέσουμε τον όρο της «διαφοράς» των ταχυτήτων χάριν σωστής φυσικής αποτύπωσης και χωρίς να αλλάζει κάτι στον τρόπο που μεταβάλλονται τα μεγέθη.

Να σημειώσουμε ακόμα ότι η μέθοδος προϋποθέτει διαταραχή μικρού μεγέθους, για αυτό το λόγο υπάρχει και ο συντελεστής ε . Από τις εξισώσεις (3.12) φαίνεται πως οι περισσότεροι των «επιπλέον» όρων της NLS έχουν μικρούς συντελεστές, εκτός από αυτόν του XPM. Ο όρος αυτός σχετίζεται με την αλληλεπίδραση των παλμών, η οποία λόγω της διαφοράς στις αρχικές ταχύτητες ομάδος διαρκεί πολύ λίγο. Για αυτό το λόγο μπορεί και αυτός ο όρος να θεωρηθεί «διαταραχή» και να μελετηθεί μέσω της μεθόδου. Η αριθμητική επίλυση των δικαιώνει αυτή την επέκταση.

Οι αδιατάρακτες λύσεις των δύο PDEs είναι, όπως αναφέραμε, σολιτόνια 1^{ns} τάξης, τα οποία συμβολίζονται

$$u_1(Z, T) = A_1 \operatorname{sech}[A_1(T - T_1)] \exp[-ik_1(T - T_1) + i\phi_1] \quad (3.31\alpha)$$

$$u_2(Z', T') = A_2 \operatorname{sech}[A_2(T' - T'_2)] \exp[-ik'_2(T' - T'_2) + i\phi_2] \quad (3.31\beta)$$

Παρατηρούμε ότι οι αναλογίες με το συμβολισμό του κεφαλαίου 3.2 είναι $A_i \equiv 2\beta$, $k_i \equiv 2a$, $T_i \equiv T_0$, $\phi_i \equiv \delta$ και $[k_i(T - T_i) - \phi_i] \equiv \theta$. Ο τονισμός στο u_2 δηλώνει πάλι τη διαφορετική κανονικοποίηση. Εισάγοντας τις (3.31) στις (3.29) και εφαρμόζοντας τις (3.24-27), καταλήγουμε σε τέσσερις εξισώσεις για κάθε μία εκ των (3.28). Επειδή η φάση δεν υπεισέρχεται σε καμία εκ των υπολοίπων εξισώσεων, αλλά υπολογίζεται από τα υπόλοιπα μεγέθη, παρακάτω παραλείπεται η εξίσωση της. Τα συστήματα είναι της μορφής,

$$\frac{dA_i}{dZ} = -\text{Im}(a_{2i})A_i^2 A_j^2 [(T_{0j}/T_{0i})IA_i^1 + IA_i^3] - [\text{Im}(b_i) + \text{Re}(a_{2i})(k_1 - k_2)]A_i^2 A_j IA_i^2 \quad (3.32\alpha)$$

$$\frac{dk_i}{dZ} = -\text{Re}(2a_{1i} + a_{3i})A_i^2 A_j^2 (T_{0j}/T_{0i})I\Omega_i^1 - [\text{Re}(b_i) - \text{Im}(a_{2i})(k_i - k_j)]A_i A_j^2 I\Omega_i^3 - \text{Re}(a_{2i})A_i^2 A_j^2 I\Omega_i^2 - \frac{8}{15}\sigma A_i^4 \quad (3.32\beta)$$

$$\frac{dT_i}{dZ} = -k_i - A_i A_j^3 \text{Im}(a_{3i})(T_{0j}/T_{0i})IT_i^1 - [\text{Im}(b_i) + \text{Re}(a_{2i})(k_1 - k_2)](A_j^2/A_i)IT_i^2 + \text{Im}(a_{2i})A_i A_j^2 IT_i^3 + \frac{2}{3}\delta A_i^2 + 3\delta\Omega_i^2 + c \quad (3.32\gamma)$$

, όπου $j=3-i$ και $i=1,2$, ενώ στις εξισώσεις για τα χαρακτηριστικά του u_2 τα Z , T , πρέπει να αντικατασταθούν με Z' , T' . Καθώς τα δύο συστήματα είναι αλληλοεξαρτόμενα, για να μπορέσουμε να τα επιλύσουμε, προχωράμε σε αλλαγή των μεταβλητών του δεύτερου συστήματος σε αυτές του πρώτου. Έτσι θα είναι $Z' = \left(\frac{L_{D1}}{L_{D2}}\right)Z$ και $T' = \left(\frac{T_{01}}{T_{02}}\right)T$. Παρόμοια αλλάζουμε την κανονικοποίηση της μετατόπισης της κεντρικής συχνότητας, k_2 και της χρονικής μετατόπισης T_2 . Είναι φανερό ότι εάν τα αρχικά εύρη ήταν ίσα και δεδομένης της εγγύτητας των άλλων μεγεθών (όπως ο συντελεστής διασποράς β_2) για τους δύο παλμούς, όλες αυτές οι κανονικοποιήσεις δε θα ήταν απαραίτητες. Επειδή όμως στοχεύουμε σε σύστημα που μπορεί να περιγράψει την εξέλιξη και αλληλεπίδραση στενών παλμών ακόμα και με διαφορετικό αρχικό εύρος και ισχύ ακολουθήσαμε την παραπάνω διαδικασία.

Το σύστημα αυτό γίνεται,

$$\frac{dA_1}{dZ} = -\text{Im}(a_2)A_1^2 A_2^2 [(T_{02}/T_{01})IA_1^1 + IA_1^3] - [\text{Im}(b) + \text{Re}(a_2)(k_1 - k_2)]A_1^2 A_2 (T_{02}/T_{01})IA_1^2 \quad (3.33\alpha)$$

$$\frac{dk_1}{dZ} = -\text{Re}(2a_1 + a_3)A_1^2 A_2^2 (T_{02}/T_{01})I\Omega_1^1 - [\text{Re}(b_1) - \text{Im}(a_2)(k_1 - k_2)]A_1 A_2^2 I\Omega_1^3 - \text{Re}(a_2)A_1^2 A_2^2 I\Omega_1^2 - \frac{8}{15}\sigma A_1^4 \quad (3.33\beta)$$

$$\frac{dT_1}{dZ} = -k_1 - A_1 A_2^3 \text{Im}(a_3)(T_{02}/T_{01}) \left[-\frac{1}{2A_1} \frac{\partial}{\partial A_2} IT_1^{1,1} + \Delta T \frac{1}{A_2} IT_1^{1,2} \right] - [\text{Im}(b) + \text{Re}(a_2)(k_1 - k_2)](A_2^2/A_1)IT_1^2 + \text{Im}(a_2)A_1^2 A_2 \frac{T_{02}}{2T_{01}} \frac{\partial}{\partial A_1} IT_1^3 + \frac{2}{3}\delta A_1^2 + 3\delta k_1^2 + c \quad (3.33\gamma)$$

$$\frac{dA_2}{dZ} = -\frac{T_{01}^2 |\beta_{22}|}{T_{02}^2 |\beta_{21}|} \left\{ \text{Im}(a'_2)A_1^2 A_2^2 [IA_2^1 + IA_2^3] + [\text{Im}(b') + \text{Re}(a'_3)(k_2 - k_1)]A_2^2 A_1 (T_{01}/T_{02})IA_2^2 \right\} \quad (3.33\delta)$$

$$\frac{dk_2}{dZ} = -\frac{T_{01}^3 |\beta_{22}|}{T_{02}^3 |\beta_{21}|} \left\{ \text{Re}(2a'_1 + a'_3)A_2^2 A_1^2 (T_{01}/T_{02})I\Omega_2^1 + [\text{Re}(b') - \text{Im}(a'_3)(k_2 - k_1)]A_2 A_1^2 I\Omega_2^3 + \text{Re}(a'_2)A_1^2 A_2^2 I\Omega_2^4 + \frac{8}{15}\sigma' A_1^4 \right\} \quad (3.33\epsilon)$$

$$\frac{dT_2}{dZ} = \frac{T_{01} |\beta_{22}|}{T_{02} |\beta_{21}|} \left\{ \begin{array}{l} -k_2 \frac{T_{02}}{T_{01}} - A_2 A_1^3 \operatorname{Im}(a'_3) \frac{T_{01}}{T_{02}} \left[-\frac{1}{2A_2} \frac{\partial}{\partial A_1} IT_2^{1,1} - \Delta T \frac{T_{01}}{T_{02}} \frac{1}{A_1} IT_2^{1,2} \right] \\ - [\operatorname{Im}(b') + \operatorname{Re}(a'_3)(k_2 - k_1)] \frac{A_1^2}{A_2} IT_2^2 - \operatorname{Im}(a'_2) A_2^2 A_1 \frac{T_{01}}{2T_{02}} \frac{\partial}{\partial A_2} IT_2^3 \end{array} \right\} \quad (3.33\sigma\tau)$$

$$+ \frac{2}{3} \delta' A_2^2 + 3\delta' k_2^2$$

, όπου $\Delta T = T_2 - T_1$. Ακόμα, $b = (1.82 + \sigma_1)$, $a_1 = \sigma(T_{01}P_2/W_{02}P_1)$, $a_2 = \sigma_2(P_2/P_1)$, $a_3 = (T_{01}/T_{02})a_2$, $b' = (1.82 + \sigma'_1)$, $a'_1 = \sigma'(T_{02}P_1/W_{01}P_2)$, $a'_2 = \sigma'_2(P_1/P_2)$, $a'_3 = (T_{02}/T_{01})a'_2$. Τα IT_i^j , $I\Omega_i^j$ και IA_i^j , με $i=1,2$ και $j=1-4$, είναι ολοκληρώματα, τα οποία θα υπολογιστούν παρακάτω.

Η μορφές τους είναι οι ακόλουθες,

$$IA_1^1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2 \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{T_{02}}{T_{01}} T + A_1 \Delta T \right] \sec h^2(T) \tanh(T) dT \quad (3.34\alpha)$$

$$IA_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2 \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{T_{02}}{T_{01}} T + A_1 \Delta T \right] \sec h^2(T) dT \quad (3.34\beta)$$

$$IA_1^3 = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2 \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{T_{01}}{T_{02}} (T - A_1 \Delta T) \right] \sec h^2(T) \tanh(T) dT \quad (3.34\gamma)$$

$$I\Omega_1^1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2 \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{T_{02}}{T_{01}} T + A_1 \Delta T \right] \sec h^2(T) \tanh \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{T_{02}}{T_{01}} T + A_1 \Delta T \right] \tanh(T) dT \quad (3.34\delta)$$

$$I\Omega_1^3 = IA_1^3 \quad (3.34\epsilon)$$

$$I\Omega_1^4 = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2 \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{T_{01}}{T_{02}} (T - A_1 \Delta T) \right] \sec h^2(T) \tanh^2(T) dT \quad (3.34\sigma\tau)$$

$$IT_1^{1,1} = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2 \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{T_{01}}{T_{02}} (T - A_1 \Delta T) \right] \sec h^2(T) dT \quad (3.34\zeta)$$

$$IT_1^{1,2} = IA_1^1 \quad (3.34\eta)$$

$$IT_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} T \sec h^2 \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{T_{01}}{T_{02}} (T - A_1 \Delta T) \right] \sec h^2(T) dT \quad (3.34\theta)$$

$$IT_1^3 = IA_1^2 \quad (3.34\iota)$$

$$IA_2^1 = IA_1^3 \quad (3.34\iota\alpha)$$

$$IA_2^2 = IT_1^{1,1} \quad (3.34\iota\beta)$$

$$IA_2^3 = IA_1^1 \quad (3.34\iota\gamma)$$

$$I\Omega_2^1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2 \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{T_{01}}{T_{02}} (T - A_1 \Delta T) \right] \sec h^2(T) \tanh \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{T_{01}}{T_{02}} (T - A_1 \Delta T) \right] \tanh(T) dT \quad (3.34\iota\delta)$$

$$I\Omega_2^3 = IA_1^1 \quad (3.34\iota\epsilon)$$

$$I\Omega_2^4 = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2 \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{T_{02}}{T_{01}} T + A_1 \Delta T \right] \sec h^2(T) \tanh^2(T) dT \quad (3.34\iota\sigma\tau)$$

Όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι της μορφής, ή μπορούν να παραχθούν από τα

$$I_1(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2(t) \sec h^2(xt + y) dt, \text{ και } I_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2(t) \sec h^2(xt + y) t dt \text{ με } x > 0 \text{ και}$$

x, y πραγματικούς αριθμούς. Τα ολοκληρώματα έχουν αναλυτική λύση μόνο $x=0$ ή 1 . Στην περίπτωση μας, ακόμα και για ίδια αρχικά πλάτη, αυτά μεταβάλλονται μόνιμα κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης. Μέσω της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων βρέθηκαν προσεγγιστικά, αναλυτικές μορφές, που τα αντικατέστησαν στις εξισώσεις. Περισσότερα για αυτό υπάρχουν στο Appendix B.

Για να συνεχίσουμε την επίλυση του προβλήματος, θα πρέπει να βρούμε αναλυτική μορφή και για τους συντελεστές Raman. Τα σ_1 και σ_2 και αντίστοιχα τα σ'_1 και σ'_2 , σχετίζονται με τα ολοκληρώματα I_a και I_b αντιστοίχως, τα οποία όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 3.1 βρίσκονται με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier της $f(t)$ (εξ.3.7). Έτσι τελικά βρίσκουμε,

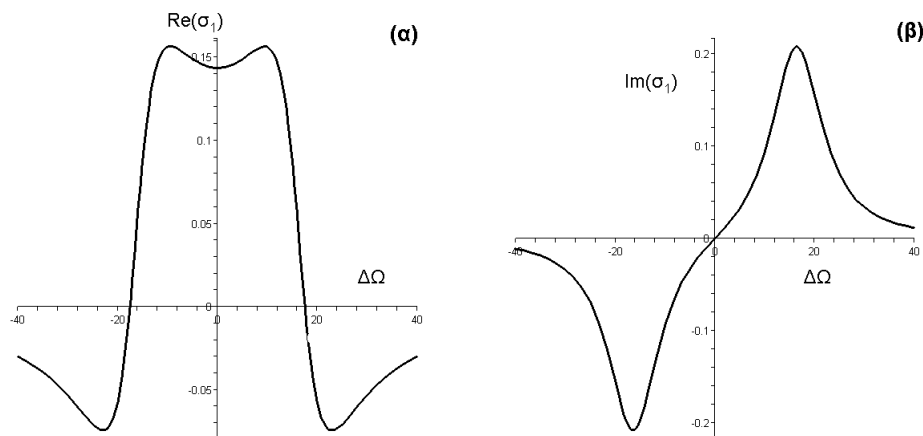
$$\sigma_1 = \frac{85.0454T_{01}^4 - 11051.76693T_{01}^2\Delta\Omega^2 + i690.7354T_{01}^3\Delta\Omega}{59.215895 \times 10^{-6}T_{01}^4 - 114.8412305 \times 10^{-4}T_{01}^2\Delta\Omega^2 + \Delta\Omega^4} \times 10^{-7} \quad (3.35)$$

$$\sigma_2 = \frac{40.9025T_{01}^7 + 7932.49T_{01}^5\Delta\Omega^2 - 2072206T_{01}^3\Delta\Omega^4}{D} \times 10^{-10} + i \frac{-644.463305T_{01}^6\Delta\Omega + 340181.6T_{01}^4\Delta\Omega^3 - 22103533.87T_{01}^2\Delta\Omega^5}{D} \times 10^{-10} \quad (3.36)$$

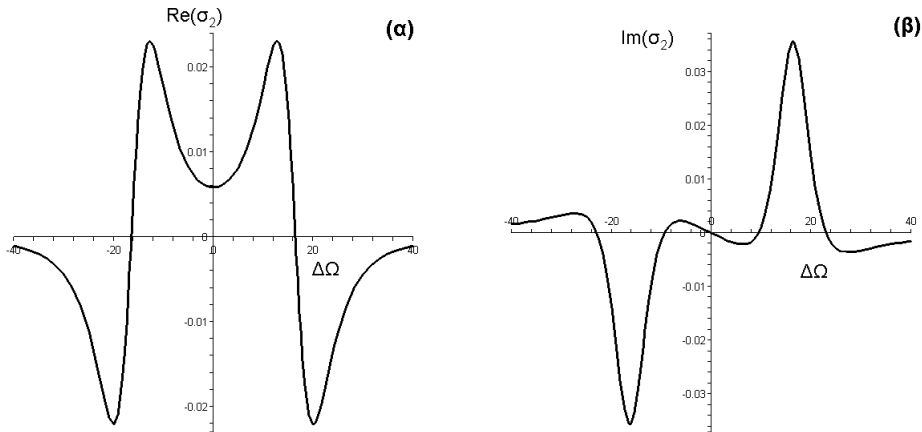
με $D = (35.06522T_{01}^8 - 13600.85T_{01}^6\Delta\Omega^2 + 2503168.7T_{01}^4\Delta\Omega^4 - 229682400T_{01}^2\Delta\Omega^6) \times 10^{-10} + \Delta\Omega^8$

Να επισημάνουμε ότι το T_{01} όπως εμφανίζεται στις σχέσεις (3.31-32) είναι αδιάστατο, αλλά αριθμητικά ίσο με το εύρος του παλμού σε fs και $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 = k_1 - k_2 + \Delta\Omega_0$. Με $\Delta\Omega_0$ συμβολίζουμε την αρχική φασματική διαφορά των δύο παλμών. Για τα σ'_1 και σ'_2 οι σχέσεις βρίσκονται να είναι όμοιες, εκτός από τον παράγοντα του εύρους που τώρα είναι T_{02} και ότι τα φανταστικά μέρη έχουν **αντίθετα** πρόσημα από αυτά των σ_1 και σ_2 .

Στα σχήματα 3.2 και 3.3, φαίνονται το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των σ_1, σ_2 για την κανονικοποιημένη διαφορά συχνότητας $\Delta\Omega$. Παρατηρούμε την ομοιότητα του φανταστικού μέρους του σ_1 με το «κέρδος Raman» στο σχήμα 1.13.



Σχήμα 3.2: Πραγματικό (α) και φανταστικό (β) μέρος του σ_1 ως προς τη κανονικοποιημένη διαφορά συχνότητων των καναλιών.



Σχήμα 3.3: Πραγματικό (α) και φανταστικό (β) μέρος του σ_2 ως προς τη κανονικοποιημένη διαφορά συχνοτήτων των καναλιών.

Στο τέλος του κεφαλαίου 3.1 έγινε μία παρουσίαση του ρόλου των όρων ανώτερης τάξης στις συζευγμένες PDEs. Στο σύστημα (3.33) αναγνωρίζουμε αυτούς τους ρόλους. Στις εξισώσεις για τα πλάτη A_1 και A_2 οι δύο τελευταίοι όροι είναι οι σημαντικότεροι, καθώς σχετίζονται με τη μεταφορά ενέργειας μεταξύ των δύο παλμών, λόγω του SRS. Τα ολοκληρώματα IA_i^2 που βρίσκονται στους όρους αυτούς δείχνουν ότι αυτή η ανταλλαγή γίνεται κατά τη διάρκεια της αλληλοεπικάλυψης των παλμών, δηλαδή κατά τη σύγκρουση τους. Θα μπορούσαμε να τους αγνοήσουμε εάν η φασματική διαφορά $\Delta\Omega_0$ ήταν μεγαλύτερη από το φασματικό εύρος Raman, αλλά στη παρούσα εργασία είναι πάντα δεξιά της κορυφής του κέρδους Raman. Οι δύο πρώτοι όροι (ολοκληρώματα) των εξισώσεων έχουν αντίθετα πρόσημα και για ίσα εύρη και «συμμετρικής» αλληλεπίδρασης αλληλοαναιρούνται. Η ασυμμετρία της αλληλεπίδρασης έγκειται στο γεγονός της μονόδρομης μεταφοράς ενέργειας από το «γρήγορο» παλμό στον «αργό», οπότε τα χαρακτηριστικά των παλμών μεταβάλλονται, μόνιμα, από αυτό και μόνο.

Στις εξισώσεις για τις k_1, k_2 , τελευταίος όρος αντιπροσωπεύει το SFS. Η επίδραση του στη μετατόπιση της συχνότητας είναι ανάλογη με τη τέταρτη δύναμη του εύρους του σολιτονίου [164]. Οι όροι οι σχετιζόμενοι με τα $I\Omega_i^3$ σχετίζονται με το XPM και είναι φανερό ότι εξαρτώνται από τη φασματική διαφορά των παλμών. Τα εν λόγω ολοκληρώματα έχουν αντίθετα πρόσημα, γεγονός που υποδεικνύει ότι το XPM αντιτίθεται στο SFS για τον ένα παλμό, ενώ μειώνει περαιτέρω τη συχνότητα για τον άλλο. Παρόλαυτα, σε μία πλήρη σύγκρουση οι ρόλοι αντιστρέφονται όταν ο γρήγορος παλμός περάσει από το κέντρο του αργού και αλλάξει το πρόσημο του ΔT . Έτσι μία πλήρης σύγκρουση δύναται να μειώσει το SFS μόνο κατά το πρώτο μισό του μήκους αλληλεπίδρασης και μόνο για τον ένα παλμό. Μία μη-πλήρης σύγκρουση μπορεί να έχει αρκετά διαφορετικό αποτέλεσμα, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Ο πρώτος και ο τέταρτος όρος σχετίζονται με ετεροπαλμικές μεταβολές της συχνότητας. Το πρώτο μέρος του αθροίσματος στο πρώτο όρο αντιπροσωπεύει την ολίσθηση λόγω CFS, που αναμένεται μικρή για μία πλήρη σύγκρουση, εφόσον δεν υπάρχει παγίδευση. Το δεύτερο μέρος του αθροίσματος, όπως και ο προτελευταίος όρος αντιπροσωπεύουν μικρές μεταβολές στη συχνότητα λόγω του SRS. Ουσιαστικά οι όροι αυτοί αλληλοεξουδετερώνονται για συμμετρική πλήρη σύγκρουση.

Παρομοίως και για τις εξισώσεις των T_i οι όροι της μετατόπισης λόγω της ασυμμετρίας της αλληλεπίδρασης (εξαιτίας της ύπαρξης του SRS), οι σχετικοί με τα $IT_1^{1,1}$, $IT_1^{1,2}$ και $IT_1^{1,3}$, είναι μικροί αλλά όχι ασήμαντοι. Καθώς οι παλμοί βρίσκονται σε σύστημα κινούμενο με τη ταχύτητα v_{g2} , το T_1 μετατοπίζεται με τη σχετική ταχύτητα c , ενώ και τα δύο είναι ανάλογα

των μεταβολών της συχνότητας, k_i . Ο όρος με το $IT_1^{1,2}$ σχετίζεται με τη μετατόπιση λόγω της αλληλεπίδρασης XPM. Τέλος η επίδραση της TOD φαίνεται να περιορίζεται σε μικρή χρονική μετατόπιση, κάτι ρεαλιστικό για σολιτόνια 1^{ης} μόνο τάξης.

3.3.2 Αποτελέσματα

Καταρχάς θα εξετάσουμε περίπτωση όπου τα εύρη των παλμών είναι ίσα. Συγκεκριμένα επιλέγουμε $T_{01} = T_{02} = 200 fs$. Τα μήκη κύματος των παλμών είναι $\lambda_1 = 1534 nm$ και $\lambda_2 = 1550 nm$ αντίστοιχα, πολύ κοντά στη φασματική περιοχή ελαχιστοποίησης των απωλειών για συνηθισμένη οπτική ίνα. Με αυτά τα δεδομένα και από τη σχέση $\Delta\omega = \frac{2\pi c_\phi \Delta\lambda}{\lambda^2}$, (c_ϕ είναι η ταχύτητα του φωτός), η κανονικοποιημένη φασματική διαφορά των καναλιών θα είναι $\Delta\Omega_0 = 2.4$, η οποία κρίνεται επαρκής καθώς το φασματικό εύρος του παλμού στη μισή ένταση υπολογίζεται $\delta\omega_{FWHM} \approx 1.12$. Το c υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσης (1.41) κοντά στο -2.1. Οι τιμές τη διασποράς δεύτερης τάξης βρίσκονται, [1], $\beta_{21} = -26 \frac{ps^2}{km}$ και $\beta_{22} = -27.9 \frac{ps^2}{km}$, ενώ $\gamma_1 / \gamma_2 \approx \lambda_2 / \lambda_1 = 1.0099$. Οι συντελεστές διασποράς 3^{ης} τάξης και SFS είναι αρκετά μικροί και ελάχιστα διαφορετικοί, για ίδια εύρη, οπότε θα είναι $\delta' \approx \delta = 0.0045$ και $\sigma' \approx \sigma = 0.015$.

Για την επίλυση του συστήματος χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο του MATLAB ode45, ο οποίος κρίνεται επαρκής. Οι αρχικές συνθήκες επιλέγονται έτσι ώστε οι αρχικές χρονικές μετατοπίσεις των παλμών να είναι ίσες και αντίθετες. Αυτό γίνεται για να αποκομίσουμε μία καλλίτερη εικόνα της αλληλεπίδρασης και δεν αλλοιώνει τη «φυσική» του προβλήματος. Οι αρχικές φασματικές μετατοπίσεις είναι φυσικά μηδέν, ενώ $A_1 = A_2 = 1$, καθώς αναφερόμαστε σε σολιτόνια 1^{ης} τάξης.

Πριν συνεχίσουμε στην επίλυση και ανάλυση των αποτελεσμάτων, θα πρέπει να ελέγξουμε την ικανότητα του συστήματος μας των ODEs να συλλαμβάνει ορθά την επίδραση των μη-γραμμικών όρων στα χαρακτηριστικά του παλμού. Οπότε παρακάτω συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του συστήματος με απευθείας αριθμητική επίλυση των εξισώσεων. (3.28α, β). Εδώ χρειάζεται πάλι προσοχή στην κανονικοποίηση. Καθώς οι PDEs είναι συζευγμένες τις κανονικοποιούμε προ της λύσης, πάλι με τα χαρακτηριστικά του πρώτου παλμού. Έτσι, οι μορφή των εξισώσεων, προς αριθμητική επίλυση, είναι,

$$iu_{1z} + \frac{1}{2}u_{1TT} + |u_1|^2 u_1 = -b \frac{P_2}{P_1} |u_2|^2 u_1 + \sigma u_1 \frac{d \left(|u_1|^2 + \frac{P_2}{P_1} |u_2|^2 \right)}{dT} + \sigma_2 \frac{P_2}{P_1} u_2 \frac{d(u_1 u_2^*)}{dT} + i\delta u_{1TTT} - icu_{1T} \quad (3.37\alpha)$$

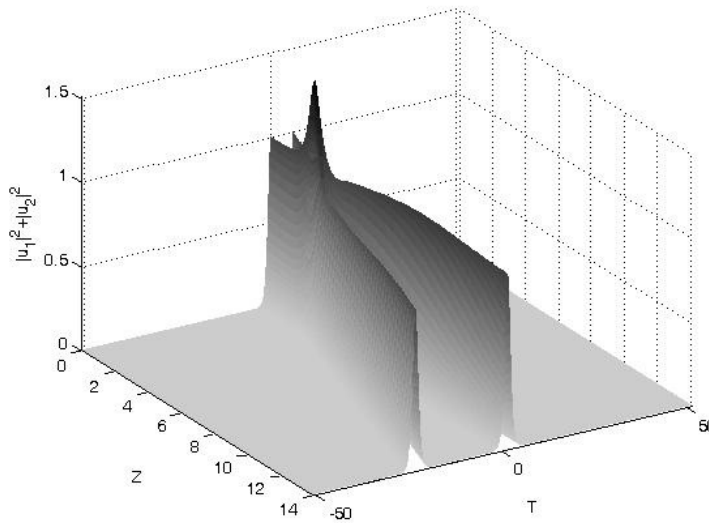
$$iu_{2z} + \frac{1}{2} \left| \frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} \right| u_{2TT} + \left| \frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} \right| \frac{T_{01}}{T_{02}} |u_2|^2 u_2 = -b' \frac{\gamma_2}{\gamma_1} |u_1|^2 u_2 + \sigma \left| \frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} \right| \frac{T_{01}}{T_{02}} \frac{d|u_2|^2}{dT} u_2 + \sigma \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{d|u_1|^2}{dT} u_2 - \sigma_2' \frac{\gamma_2}{\gamma_1} u_1 \frac{d(u_2 u_1^*)}{dT} + i\delta u_{2TTT} \quad (3.37\beta)$$

Για την επίλυση τους χρησιμοποιούμε τον κώδικα που χρησιμοποιήσαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο οποίος αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 1, έχοντας προσθέσει τους όρους

ανώτερης τάξης. Για την παρακολούθηση της χρονικής και φασματικής μετατόπισης των παλμών χρησιμοποιούμε πάλι τις σχέσεις,

$$\langle T_i \rangle = \frac{\int T |u_i|^2 dT}{\int |u_i|^2 dT} \quad \text{και} \quad \langle k_i \rangle = \frac{\int k |\tilde{u}_i|^2 dk}{\int |\tilde{u}_i|^2 dk} \quad (3.38)$$

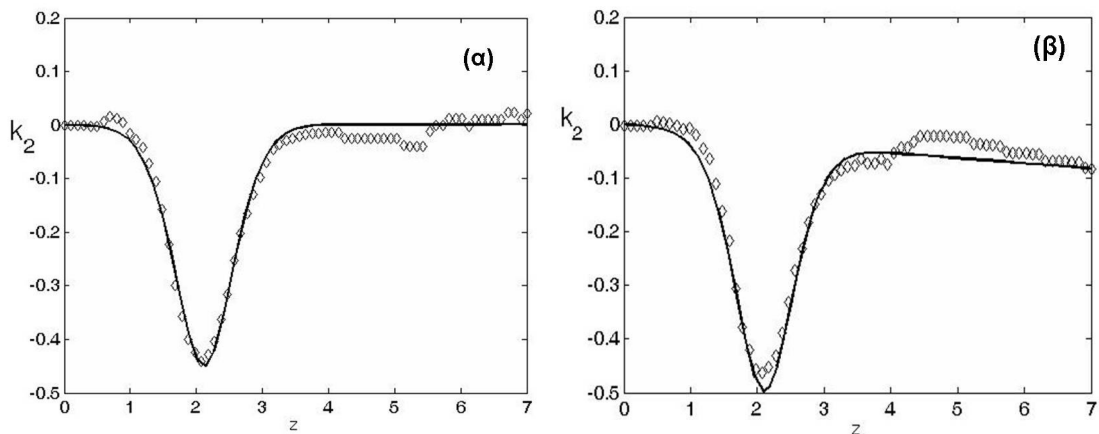
, όπου \tilde{u}_i είναι πάλι ο μετασχηματισμός Fourier του u_i ως προς το χρόνο και k κανονικοποιημένη συχνότητα. Καταρχάς δοκιμάζουμε μία πλήρη σύγκρουση για παλμούς με $T_{01}=T_{02}=200fs$ σε αρχικές μετατοπίσεις $T_1=-T_2=2.5$ ενώ $k_1=k_2=0$ και $A_1=A_2=1$. Στο σχήμα 3.4 βλέπουμε την εικόνα της πλήρους σύγκρουσης των δύο παλμών, με την παρουσία όλων των φαινομένων ανώτερης τάξης, όπως δίνεται από την απευθείας αριθμητική επίλυση των PDEs. Εδώ ο u_2 τοποθετήθηκε στο $T_2=0$ και ο u_1 στο $T_1=6$ για να γίνει πιο εμφανής η μετατόπιση του u_2 . Η μετατόπιση συχνότητας του δεύτερου παλμού κατά την αλληλεπίδραση του με τον πρώτο, φαίνεται στο σχήμα 3.5. Στο (α) παρατίθεται το ποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των δύο παλμών κατά μία πλήρη σύγκρουση όταν δεν λαμβάνονται υπόψη φαινόμενα ανώτερης τάξης. Παρατηρούμε πως η συχνότητα του παλμού μεταβάλεται κατά τη σύγκρουση με τον παλμό να επιβραδύνεται στο πρώτο μισό και να επιταχύνεται στο δεύτερο και τη συχνότητα του να επανέρχεται στην αρχική της τιμή μετά το πέρας της σύγκρουσης. Αλληλεπίδραση δηλαδή γίνεται μόνο μέσω XPM. Στο (β) βλέπουμε την επίδραση και των φαινομένων ανώτερης τάξης, είτε ενδοκαναλικά, όπως το SFS, είτε ετεροκαναλικά. Το SFS είναι το κυρίαρχο και δημιουργεί ολίσηση της συχνότητας προς μικρότερες τιμές. Παράλληλα παρατίθενται και τα αποτελέσματα από την αριθμητική επίλυση των (3.37), και εμφανίζονται με διαμάντια. Φαίνεται πως η συμφωνία είναι αρκετά καλή.



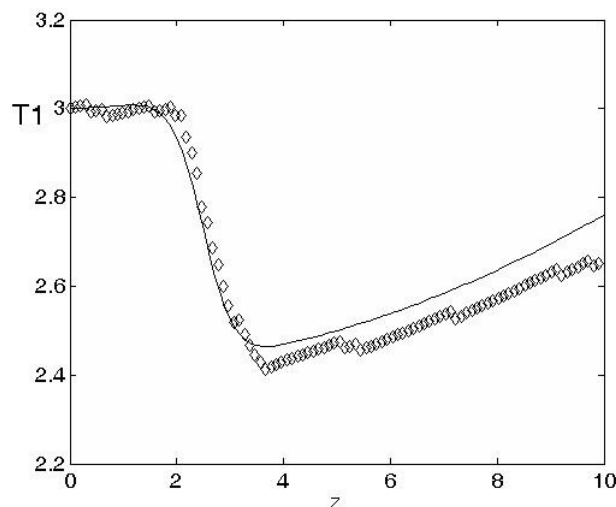
Σχήμα 3.4: Πλήρης σύγκρουση των δύο παλμών όπως απεικονίζεται από την αριθμητική επίλυση των (3.37). Ο γρήγορος παλμός u_1 χάνει ενέργεια από την αλληλεπίδραση, την οποία κερδίζει ο u_2 .

Επίσης καλή είναι και η συμφωνία για την εξέλιξη της χρονικής μετατόπισης. Στο σχήμα 3.6 φαίνεται η μετατόπιση για τον u_1 για μία πλήρη σύγκρουση με μόνη διαφορά από το προηγούμενο παράδειγμα ότι $T_1=-T_2=3$. Η σύγκρουση έγινε με την παρουσία όλων των φαινομένων ανώτερης τάξης. Για τις ίδιες αρχικές συνθήκες υπολογίστηκε και το πλάτος του γρήγορου παλμού κατά την πλήρη σύγκρουση με τον αργό. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων παρουσιάζεται στο σχήμα 3.7, όπου φαίνεται πως οι ODEs που παρήχθησαν από την Άμεση

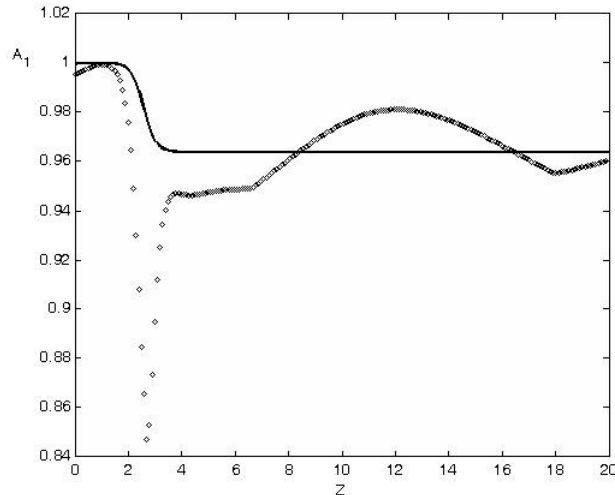
Μέθοδο δεν μπορούν να συλάβουν τη μεταβολή του πλάτους (και του εύρους) λόγω του XPM. Στη πραγματικότητα στις εξισώσεις (3.33α και δ), τέτοιος όρος δεν υπάρχει και το αποτέλεσμα των ODEs έχει σχέση με τη μεταβολή της ενέργειας του παλμού, παρά με την ακριβή παρακολούθηση του ίδιου του πλάτους. Να σημειώσουμε ότι στη μεταβολική μέθοδο που είδαμε στο κεφάλαιο 2, δεν υπάρχει αυτό το «μειονέκτημα» καθώς μπορούμε να έχουμε καλή εκτίμηση του εύρους, άρα και του πλάτους του παλμού μέσω των συνήθων διαφορικών. Ουσιαστικά, αυτή η διαφορά μεταξύ των μεθόδων οφείλεται στη ανάγκη για εισαγωγή της ακριβούς λύσης, στην περίπτωση της Άμεσης Μεθόδου, η οποία δεν έχει τερέτισμα, το οποίο σύμφωνα με τη Μεταβολική Μέθοδο έχει άμεση σχέση με τη μεταβολή του εύρους, όντας η συζηγής του «ορμή». Παρόλαυτά η εκτίμηση της μεθόδου δεν είναι κακή. Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.7, η αριθμητική λύση, μετά το πέρας της σύγκρουσης, πλησιάζει τη τιμή των ODEs και ταλαντώνεται γύρω της. Αυτό είναι κάτι αναμενόμενο, καθώς όταν ο παλμός βρεθεί με λίγο μικρότερη (ή μεγαλύτερη) ενέργεια από την απαιτούμενη για $N=1$ σολιτόνιο, γίνεται «αναπνέων» παλμός (breather). Η ταλάντωση αυτή είναι φανερή και στο σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.5: Μετατόπιση συχνότητας του αργού παλμού κατά μία πλήρη σύγκρουση σύμφωνα με το σύστημα (3.33), (γραμμή), και την αριθμητική επίλυση των PDEs (3.37), (διαμάντια), για (α) αλληλεπίδραση χωρίς όρους ανώτερης τάξης και (β) αλληλεπίδραση με όλους τους όρους. Το Z είναι σε κανονικοποιημένες μονάδες.

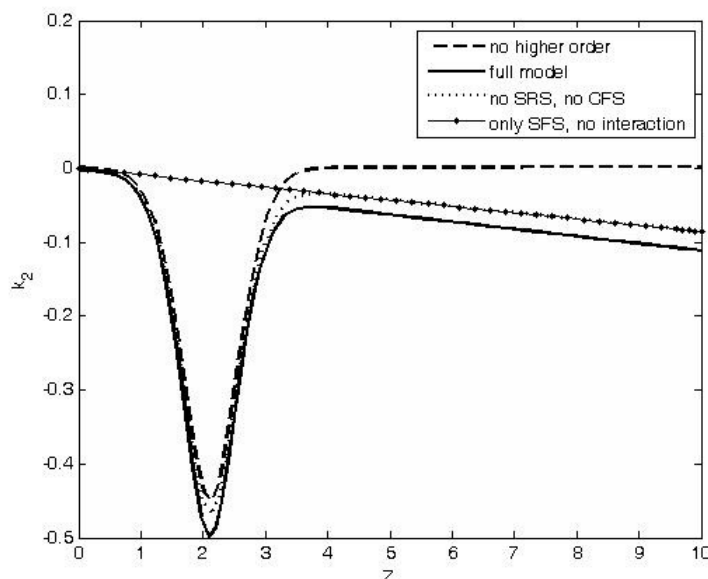


Σχήμα 3.6: Χρονική μετατόπιση του γρήγορου παλμού σε σύστημα κινούμενο με ταχύτητα c , κατά μία πλήρη σύγκρουση σύμφωνα με τις ODEs (γραμμή) και τις PDEs (διαμάντια).



Σχήμα 3.7: Εξέλιξη του πλάτους του γρήγορου παλμού u_1 κατά μία πλήρη σύγκρουση με τον u_2 σύμφωνα με τις ODEs (γραμμική) και τις PDEs (διαμάντια).

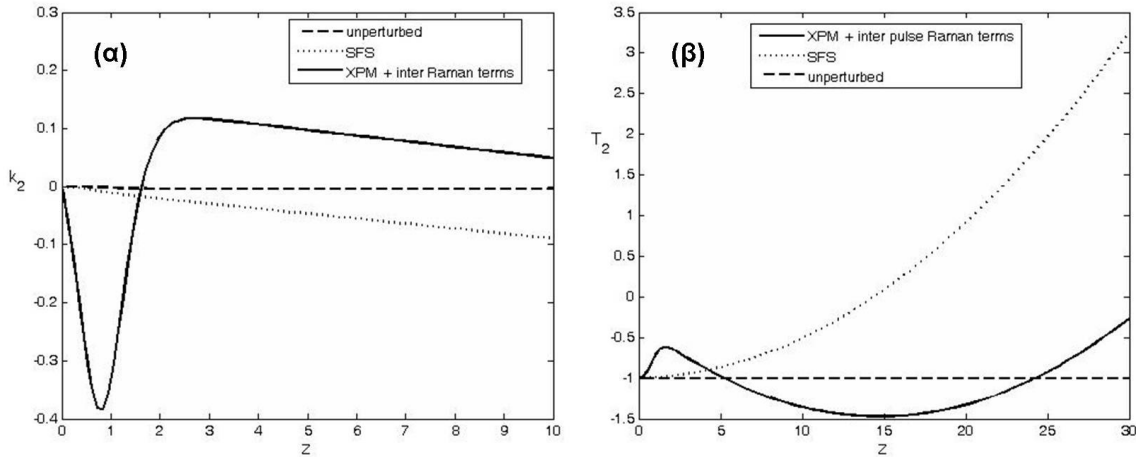
Θα προχωρήσουμε τώρα στην εξαγωγή κάποιων αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων από την επίλυση του συστήματος των ODEs. Ας δούμε καταρχάς το αποτέλεσμα μιας πλήρους σύγκρουσης στη συχνότητα του παλμού, παρουσία των φαινομένων ανώτερης τάξης. Οι δύο παλμοί ίδιου πλάτους και εύρους, ξεκινούν από $T_1 = -T_2 = 3$ με $k_1 = k_2 = 0$. Στο σχήμα 3.8 φαίνεται η επίδραση στη συχνότητα του δεύτερου παλμού. Η διακεκομμένη γραμμή αντιπροσωπεύει μία πλήρη σύγκρουση χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη τα φαινόμενα ανώτερης τάξης, ούτε καν το SFS. Η κεντρική συχνότητα εξελίσσεται συμμετρικά κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης και επιστρέφει στην αρχική της τιμή. Αυτό είναι ένα αναμενόμενο αποτέλεσμα, σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν στο Κεφάλαιο 1 για το XPM [84]. Η ευθεία γραμμή με τις τελείες αντιπροσωπεύει την ολίσθηση συχνότητας λόγω του SFS, απουσία του πρώτου παλμού. Η διάστικτη γραμμή αντιπροσωπεύει την περίπτωση όπου ενώ υπάρχει SFS και ο πρώτος παλμός, η μεταξύ τους αλληλεπίδραση γίνεται μέσω XPM μόνο, χωρίς τα έτερο-καναλικά φαινόμενα Raman, ή τη διασπορά τρίτης τάξης. Όπως φαίνεται από την έντονη γραμμή, η παρουσία όλων των φαινομένων ανώτερης τάξης προκαλεί ακόμα μεγαλύτερη ολίσθηση στη συχνότητα και καθιστούν την αλληλεπίδραση μη συμμετρική. Το πρώτο είναι αναμενόμενο, λόγω της τιμής της $\Delta\Omega_0$ σε σχέση με το φάσμα του κέρδους Raman. Παρόλαυτα, φαίνεται πως σε τόσο στενούς παλμούς και καθώς η αλληλεπίδραση διαρκεί για πολύ λίγο, το σημαντικότερο αίτιο για τη φασματική ολίσθηση είναι το SFS.



Σχήμα 3.8: Μεταβολή της συχνότητας του δεύτερου (αργού) παλμού κατά μήκος της διάδοσης Z , παρουσία, ή όχι φαινομένων ανώτερης τάξης και του πρώτου παλμού. Το k_2 είναι κανονικοποιημένο με το T_{01} και το Z με το L_{D1} .

Από την άλλη μεριά, μία ατελής σύγκρουση, με τους παλμούς να ξεκινούν μερικώς αλληλοεπικαλυπτόμενοι, αναμένεται να έχει διαφορετικό αποτέλεσμα στη χρονική και φασματική μετατόπιση των παλμών. Ένα σχετικό παράδειγμα απεικονίζεται στο σχήμα 3.9. Οι δύο παλμοί ξεκινούν με μικρή χρονική διαφορά, τοποθετημένοι στα $T_1 = -T_2 = 1$. Η διακεκομμένη γραμμή και στα δύο σχήματα αντιπροσωπεύει την αδιατάρακτη περίπτωση, ενώ η διάστικτη αντιπροσωπεύει την περίπτωση όπου δεν υπάρχει ο άλλος παλμός, αλλά επιδρά το φαινόμενο Raman και άρα το SFS. Η έντονη γραμμή παριστά τη περίπτωση αλληλεπίδρασης των παλμών με όλα τα φαινόμενα ανώτερης τάξης να συμπεριλαμβάνονται. Από το σχήμα 3.9α, βλέπουμε ότι η ατελής σύγκρουση έχει σαν αποτέλεσμα την άνοδο της μέσης συχνότητας. Αυτό με τη σειρά του προκαλεί χρονική μετατόπιση αντίθετη με αυτή του SFS. Με αυτό το τρόπο, ο παλμός παραμένει κοντά στο αρχικό του «χρονικό παράθυρο», τουλάχιστον για ορισμένα μήκη διασποράς.

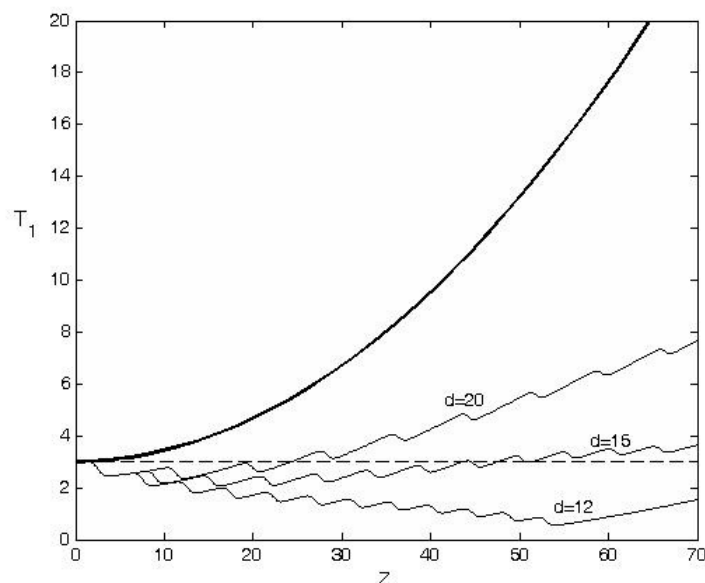
Μία ατελής λοιπόν σύγκρουση μπορεί να διατηρήσει τον αργό παλμό κοντά στην αρχική του θέση, τουλάχιστον για κάποιο διάστημα. Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν για το XPM στο Κεφάλαιο 1, ο δεύτερος παλμός, καθώς έχει μικρότερη κεντρική συχνότητα, επηρεάζεται κυρίως από το απώτατο τμήμα του γρήγορου παλμού. Αυτό προκαλεί και εντονότερη άνοδο στη κεντρική του συχνότητα, από ότι η αρχική κάθοδος, και εν τέλει αυξάνει τη ταχύτητα ομάδος. Μέσω της διασποράς, αυτή η αύξηση στη συχνότητα μετατρέπεται σε χρονική μετατόπιση, αντίθετη από αυτή που προκαλεί το SFS. Από την άλλη μεριά, ο παλμός στο γρήγορο κανάλι επηρεάζεται κυρίως από το μπροστινό τμήμα του αργού παλμού και εκτίθεται σε μείωση της κεντρικής του συχνότητας που προστίθεται στην ολίσθηση λόγω φαινομένου Raman. Γνωρίζουμε ότι εάν αυτές οι αντίθετες φασματικές μετατοπίσεις είναι αρκετά μεγάλες, οι δύο παλμοί μπορεί να ανταλλάξουν ρόλους, γρήγορου και αργού, όλη η διαδικασία να ξεκινήσει εκ νέου, παγιδεύοντας έτσι τους παλμούς [169]. Αυτό είναι ανάλογο με την παγίδευση των πολώσεων (λόγω διπλοθλαστικότητας), που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 2.



Σχήμα 3.9: Ατελής σύγκρουση. (α): Μεταβολή συχνότητας του δεύτερου (αργού) παλμού κατά μήκος του Z συγκρινόμενη με περιπτώσεις που δεν υπάρχει αλληλεπίδραση ή και φαινόμενο Raman. (β): Μεταβολή της χρονικής μετατόπισης T_2 του παλμού στις ίδιες περιπτώσεις.

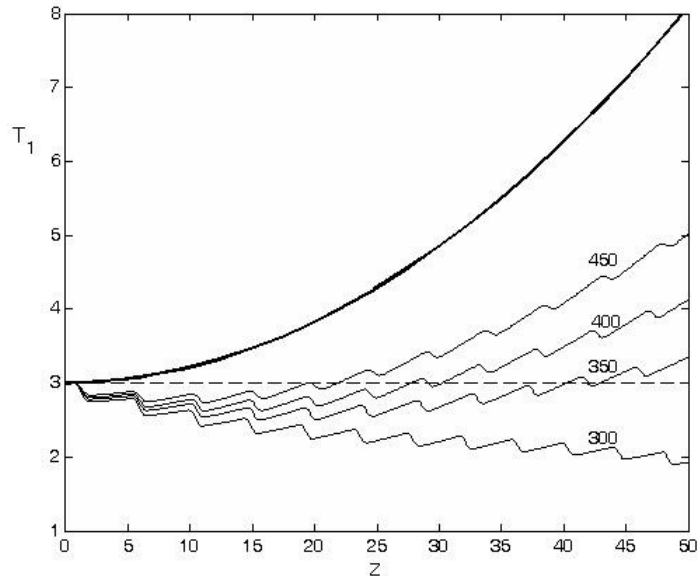
Από το σχήμα 3.8 φαίνεται ότι η πλήρης σύγκρουση «σπρώχνει» τη κεντρική συχνότητα του παλμού σε χαμηλότερες τιμές. Αντίθετα, η συχνότητα του γρήγορου παλμού οθείται προς μεγαλύτερες τιμές. Αν και σε μια συμμετρική σύγκρουση η συνολική μετατόπιση συχνότητας λόγω XPM είναι μηδέν και για τους δύο παλμούς, έχουμε ήδη αναφέρει στα προηγούμενα κεφάλαια ότι η χρονική μετατόπιση που επιφέρεται δεν είναι μηδενική. Επιπλέον, λόγω της ανταλλαγής ενέργειας οι πλήρεις συγκρούσεις δεν είναι συμμετρικές, οπότε η χρονική μετατόπιση μεταβάλλεται περαιτέρω. Αυτή η μόνιμη χρονική μετατόπιση, που ένα παράδειγμα της για το πρώτο παλμό φαίνεται στο σχήμα 3.6, μας οδηγεί στην υπόθεση ότι πολλαπλές πλήρεις συγκρούσεις ενός παλμού στο γρήγορο κανάλι με σειρά παλμών του αργού καναλιού μπορεί να επιβάλει διαδοχικές «διορθώσεις» στη χρονική μετατόπιση του πρώτου, ενάντια σε αυτή που προκαλείται από το SFS.

Αυτή η υπόθεση μπορεί να ελεγχθεί λύνοντας διαδοχικά τις εξισώσεις (3.33) για ένα παλμό στο γρήγορο κανάλι και ανατροφοδοτώντας το σύστημα με παλμούς του αργού καναλιού που απέχουν μεταξύ τους χρονικά κατά “ d ”, το οποίο είναι επίσης κανονικοποιημένο με το W_1 . Στο σχήμα 3.10 παρατίθεται η εξέλιξη της χρονικής μετατόπισης του γρήγορου παλμού u_1 , εύρους $W_1=200fs$. Οι λεπτές γραμμές δείχνουν τη μετατόπιση, όπως διαμορφώνεται από τις διαδοχικές συγκρούσεις με παλμούς του αργού καναλιού ίδιου εύρους, $W_2=200fs$, αλλά διαφορετικής κάθε φορά χρονικής απόστασης d . Σε κάθε περίπτωση, ο u_1 και ο πρώτος από τους παλμούς του αργού καναλιού με τον οποίο συγκρούεται ξεκινούν στα $T_1=-T_2=3$, ενώ $k_1=k_2=0$ και $A_1=A_2=1$. Η διακεκομμένη γραμμή παριστά την αρχική τιμή του T_1 και άρα το κέντρο του χρονικού παραθύρου στο οποίο πρέπει να παραμείνει, σε ένα σύστημα μετασχηματισμένο Γαλιειικά κατά ταχύτητα c . Οι τιμές του d που επελέγησαν για το σχήμα είναι ενδεικτικές. Παρατηρούμε ότι ανάλογα με τη συχνότητα των παλμών του αργού καναλιού, ο u_1 μπορεί να παραμείνει στο χρονικό του παράθυρο ($d=15$), ή να κινηθεί δεξιά ή αριστερά της αρχικής του χρονικής μετατόπισης ($d=20$, $d=12$). Η έντονη γραμμή παριστά τη χρονική μετατόπιση του παλμού μοναχά υπό την επίδραση του φαινομένου Raman.



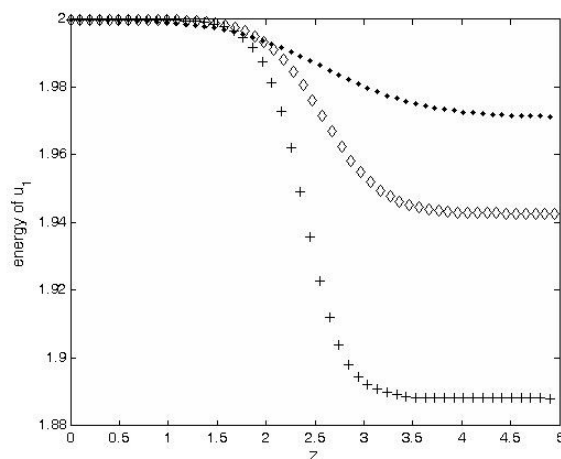
Σχήμα 3.10: Χρονική μετατόπιση του γρήγορου παλμού με ή χωρίς πολλαπλές συγκρούσεις με παλμούς του αργού καναλιού. Η χρονική μετατόπιση των παλμών του αργού καναλιού (d) φαίνεται για διάφορες περιπτώσεις πάνω από τις αντίστοιχες γραμμές, ενώ η έντονη γραμμή παριστά τη χρονική μετατόπιση απουσία του δεύτερου καναλιού. Όλοι οι παλμοί έχουν $W=200fs$.

Στο σχήμα 3.11 παρίσταται η επίδραση στη χρονική μετατόπιση του παλμού λόγω συγκρούσεων με αργούς παλμούς διαφορετικού πλάτους από αυτόν. Κρατώντας τις ίδιες κανονικοποιημένες αρχικές συνθήκες με το σχήμα 3.10, το πλάτος του u_1 διαφοροποιείται σε $W_1=400fs$. Ο παλμός αφέθηκε να συγκρουστεί διαδοχικά με σειρά παλμών του αργού καναλιού διαφορετικού κάθε φορά εύρους, αν και ίσου μεταξύ των, ενώ τέθηκε $d=20$ σε όλες τις περιπτώσεις. Στο σχήμα 3.11 φαίνεται η εξέλιξη του T_1 για διάφορα εύρη του u_2 . Οι αριθμοί που αναγράφονται πάνω από τις διαφορετικές λεπτές γραμμές-περιπτώσεις, είναι ακριβώς αυτά τα εύρη μετρούμενα σε femtoseconds. Από τα διαφορετικά «πειράματα» που δοκιμάστηκαν φάνηκε ότι οι παλμοί μεγαλύτερου εύρους από τον u_1 δεν προκαλούν σημαντική μετατόπιση (όπως στο σχήμα, για $W_2=450fs$). Αντίθετα, όσο μικρότερο το W_2 , τόσο μεγαλύτερη και η χρονική μετατόπιση του u_1 . Αυτό βέβαια δεν αποτελεί έκπληξη καθώς μία πλήρης σύγκρουση μεταξύ σολιτονίων διαφορετικού εύρους επηρεάζει περισσότερο το φαρδύτερο παλμό, (μέσω του XPM) καθώς ένας στενός παλμός έχει μεγαλύτερη μέγιστη ισχύ.



Σχήμα 3.11: Χρονική μετατόπιση του γρήγορου παλμού μετά από πολλαπλές πλήρεις συγκρούσεις με παλμούς του αργού καναλιού με $d=20$. Οι αριθμοί πάνω από τις λεπτές γραμμές αντιστοιχούν στο εύρος των αργών παλμών, ενώ $W_1=400fs$. Η έντονη γραμμή είναι πάλι η εξέλιξη χωρίς σύγκρουση.

Παρόλα αυτά, δεν θα πρέπει να ξεχάσει κανείς ότι οι παραπάνω αλληλεπιδράσεις ενέχουν και το SRS, δηλαδή μεταφορά ενέργειας. Σε κάθε σύγκρουση, ενέργεια από το γρήγορο παλμό μεταφέρεται στο αργό κανάλι. Αυτό γίνεται έμμεσα φανερό από τη ελάττωση του πλάτους του u_1 μετά κάθε σύγκρουση. Όμως στο σχήμα 3.12 φαίνεται η αριθμητικά υπολογισμένη απώλεια ενέργειας του γρήγορου παλμού μετά από μία πλήρη σύγκρουση με αργό παλμό για διάφορες τιμές του εύρους αυτού. Η ορθότητα του αριθμητικού υπολογισμού επαληθεύεται και από το γεγονός ότι ο κώδικας καταλήγει σε αποτελέσματα πολύ κοντά με αυτά του κώδικα των Chi και Wen [175], για τις συνθήκες της δικής τους εργασίας, όπου οι παλμοί ήταν της τάξης του $1ps$. Από το παρακάτω σχήμα φαίνεται πως η απώλεια ενέργειας για σύγκρουση με παλμό ίδιου ή μεγαλύτερου εύρους δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλη, όμως η απόπειρα διατήρησης του παλμού στο χρονικό του παράθυρο ή της επιλεγμένης στροφής του απαιτεί πολλές διαδοχικές συγκρούσεις. Στη πραγματικότητα λοιπόν, ακόμα και για το παρόν μοντέλο όπου δεν υπάρχουν απώλειες χρειάζεται κάποια διαδικασία ενίσχυσης. Κάτι τέτοιο μπορεί να καλυφθεί από την ύπαρξη “pump”, παλμών μεγάλου εύρους και ακόμα μεγαλύτερης συχνότητας από αυτή του u_1 , έτσι ώστε μέσω του φαινομένου Raman, αυτή τη φορά από την ανάποδη, να ενισχύεται το γρήγορο κανάλι (για παράδειγμα δείτε την [176]).



Σχήμα 3.12: Ενεργειακή απώλεια του παλμού u_1 εύρους $W_1=200fs$ λόγω πλήρους σύγκρουσης με αργό παλμό εύρους $200fs$ (διαμάντια), $400fs$ (στίγματα), $100fs$ (σταυροί).

3.4 Συμπεράσματα

Δείξαμε πως χρησιμοποιώντας την Άμεση Μέθοδο Διαταραχών μπορούμε να προσεγγίσουμε με σημαντική ποσοτική ακρίβεια το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης σολιτονικών παλμών διαφορετικών καναλιών, οι οποίοι όντας ιδιαίτερα στενοί υπόκεινται στην επίδραση φαινομένων ανώτερης τάξης. Το σύστημα των συνήθων διαφορικών που εξήχθη λύνεται από συνήθεις αλγορίθμους έτοιμων πακέτων, όπως το Matlab πολύ γρηγορότερα από ότι οι συζευγμένες NLS ανώτερης τάξης. Η επίλυση του απαιτούσε τον υπολογισμό αρκετών ολοκληρωμάτων τα οποία δεν έχουν αναλυτική λύση. Αντί της αριθμητικής τους επίλυσης προτιμήθηκε η εύρεση προσεγγιστικών αναλυτικών μορφών, οι οποίες και χρησιμοποιήθηκαν κατά την επίλυση του συστήματος. Τα αποτελέσματα της επίλυσης των ODEs επαληθεύονται από την απευθείας αριθμητική επίλυση των συζευγμένων PDEs όπως και από παρόμοιες παλαιότερες αριθμητικές εργασίες.

Βασικός στόχος της παρούσας μελέτης ήταν η κατάδειξη της δυνατότητας αντιμετώπισης της ολίσθησης συχνότητας (SFS) λόγω φαινομένου Raman και της επακόλουθης χρονικής μετατόπισης του παλμού, με τη χρήση συγκρούσεων με παλμούς διαφορετικών καναλιών. Φάνηκε πως μία ατελής σύγκρουση, με τους παλμούς να ξεκινούν μερικώς επικαλυπτόμενοι, οδηγεί σε ανόρθωση της συχνότητας του «αργού» παλμού, ενώ μία σειρά πλήρων συγκρούσεων μπορεί να αντιμετωπίσει τη χρονική μετατόπιση του «γρήγορου» παλμού, ή ακόμα και να τον κατευθύνει προς μεγαλύτερες ή μικρότερες χρονικές μετατοπίσεις. Τα σχήματα 3.10 και 3.11 είναι και τα κύρια αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου.

Όμως, όπως φαίνεται σε αυτά τα σχήματα, αν και ο παλμός μπορεί να διατηρηθεί στο χρονικό του παράθυρο σίγουρα για αρκετές δεκάδες σολιτονικές περιόδους, λόγω του μικρού του εύρους η πραγματική απόσταση είναι μικρή, της τάξης των εκατοντάδων μέτρων. Ακόμα και με τη χρήση ινών μειωμένης διασποράς, ή και επίπεδης διασποράς οι αποστάσεις αυτές δεν είναι μεγάλες, αν σκεφτούμε τις απώλειες του γρήγορου παλμού λόγω της ετεροκαναλικής μεταφοράς ενέργειας σε κάθε σύγκρουση. Όπως αναφέραμε το πρόβλημα θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί με την ύπαρξη ακόμα ενός καναλιού μεγαλύτερης συχνότητας και παλμών μεγάλου εύρους που θα χρησιμοποιούνται ως ενισχυτές μέσω πάλι του φαινομένου Raman.

Κεφάλαιο 4

Αυθόρμητη γένεση παλμών Τύπου X

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τη δυνατότητα αυθόρμητης δημιουργίας κυμάτων «Τύπου-X» μέσω αλληλεπίδρασης χωροχρονικού παλμού με ίδιας συχνότητας επίπεδο κύμα σταθερού πλάτους (CW). Σε αντίθεση λοιπόν με τα προηγούμενα η αλληλεπίδραση δεν είναι μεταξύ παλμών, αν και η εξέλιξη της περιγράφεται πάλι από τη, δισδιάστατη πλέον, NLS. Η σύμφωνη (coherent) αλληλεπίδραση του παλμού με το CW, κατά τη διάδοση σε μέσο εστιάζουσας μη-γραμμικότητας που παρουσιάζει περίθλαση και διασπορά διαφορετικού προσήμου, οπότε και ονομάζεται διπλοδιασπαρτικό (bidispersive), χαρακτηρίζεται από πλούσια δυναμική συμπεριφορά. Η μελέτη είναι αριθμητική και περιλαμβάνει ποικίλες περιπτώσεις αρχικών συνθηκών, ενώ φαίνεται ότι υπό συγκεκριμένες συνθήκες, η γένεση των εν λόγω ασυνήθων παλμών καθίσταται εφικτή.

4.1 Γενικά περί αυτό-εστίασης και κυματικής κατάρρευσης (wave collapse)

Προτού ασχοληθούμε με τη μελέτη της διάδοσης παλμών και ακτίνων σε διπλοδιασπαρτικά¹ υλικά, είναι απαραίτητο να αναφερθούμε στο πολύ ενδιαφέρον φαινόμενο της κυματικής κατάρρευσης, που προβλέπει η πολυδιάστατη NLS στην περίπτωση ανώμαλης διασποράς. Η μεθοδολογία της προσέγγισης σε αυτό το πρόβλημα και τα συμπεράσματα της χρησιμοποιήθηκαν εν μέρη για την μελέτη μας της περίπτωσης ομαλής (κανονικής) διασποράς.

Οποτεδήποτε λοιπόν το μοντέλο της διάδοσης κυματομορφής περιγράφεται από την πολυδιάστατη NLS, η «κατάρρευση» αυτής είναι μία δυνατότητα, όπως εξάλλου και η δημιουργία σολιτονίου (στην οποία έχουμε ήδη αναφερθεί, ειδικότερα για τη μονοδιάστατη περίπτωση). Η «κατάρρευση» οφείλεται στην ύπαρξη μη-γραμμικών φαινομένων και είναι η δημιουργία μοναδικοτήτων στις λύσεις των εξισώσεων διάδοσης λόγω της παρατεταμένης αυτό-εστίασης, κατ' αναλογία θα λέγαμε της βαρυτικής κατάρρευσης των αστέρων. Φυσικά αυτό δεν είναι κάτι άγνωστο στα Μαθηματικά, όπου στην ουσία αφορά την έκρηξη στην οποία δύναται να δηγηθούν οι λύσεις κάποιων μερικών διαφορικών εξισώσεων. Έτσι, για αρχικές συνθήκες πέρα από κάποια όρια, για αρχική ισχύ μεγαλύτερη από κάποια κρίσιμη τιμή P_{cr} , οι λύσεις τους υπάρχουν για πεπερασμένο χρόνο μόνο, έως ότου αναπτύξουν μοναδικότητα. Αυτό κατ' ουσία, σημαίνει ότι το εύρος του κυματοπακέτου μηδενίζεται και το πλάτος του τείνει στο άπειρο (σχήμα 4.1). Κάτι τέτοιο βέβαια δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα. Αν προσπαθούσαμε να δώσουμε μια ποιοτική εξήγηση του φαινομένου, θα μπορούσαμε να ανατρέξουμε στη διαδικασία της αυτό-εστίασης μέσω του συνδυασμού εστιάζουσας μη-γραμμικότητας και διασποράς κατάλληλου προσήμου, που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 1. Η ύπαρξη περισσότερων όρων περίθλασης προσήμου ανάλογου με αυτό της ανώμαλης διασποράς, σε συνδυασμό πάντα με εστιάζουσα μη-γραμμικότητα, εντείνουν το φαινόμενο της αυτοεστίασης περισσότερο από τη περίθλαση ακόμα και αν αυτή συμβαίνει σε δύο διαστάσεις.

Η NLS (2D για επίπεδο κύμα ή ακτίνα φωτός και 3D όταν περιλαμβάνει και τη χρονική διασπορά για φωτεινό παλμό) είναι ένα απλοποιημένο μοντέλο από το οποίο παραβλέπονται όροι ανώτερης τάξης όπως το φαινόμενο Raman, η αυτό-διαμόρφωση απότομων άκρων (self-steepening) και όροι διασποράς μεγαλύτερης τάξης, αλλά και απωλειών όταν αυτές είναι μικρές, πού όμως διακόπτουν την διαδικασία της κατάρρευσης. Μάλιστα τα φαινόμενα ανώτερης τάξης γίνονται εντονότερα καθώς ο παλμός εστιάζει και γίνεται στενότερος. Ακόμα, οι μεγάλες τιμές της ισχύος που απαιτούνται, προκαλούν ιονισμό των ατόμων του μέσου και δημιουργία πλάσματος, που με τη σειρά του προκαλεί ενεργειακές απώλειες στη δέσμη, αποτρέποντας έτσι τη κατάρρευση [6-Κεφ. 19]. Από την άλλη αυτό δε σημαίνει ότι το μοντέλο αποτυγχάνει να συλλάβει την ουσία του φαινομένου και να αποδώσει ικανοποιητικές ποσοτικές περιγραφές. Έτσι λοιπόν, πειραματικά δεδομένα αποκαλύπτουν ότι, όταν η NLS «προβλέπει» κατάρρευση της κυματομορφής είναι πολύ πιθανό να παρουσιαστεί έντονη αυτό-εστίαση μέχρι, είτε τη δημιουργία φωτεινού «νήματος» (νηματοποίηση-*filamentation*), είτε τη διάσπαση σε περισσότερα εντοπισμένα κυματοπακέτα, τα οποία δύνανται να αυτοεστιάσουν εκ νέου (πολλαπλή νηματοποίηση). Η απαιτούμενη ισχύς για να παρατηρηθεί πολυδιάσπαση και πολυσυλλεκτική νηματοποίηση ενός παλμού όπως τύπου Townes είναι ιδιαίτερα μεγάλη, της τάξης του $100P_{cr}$ [227]. Αν η ισχύς είναι μικρότερη της κρίσιμης τιμής απλώς υπερισχύει η διασπορά.

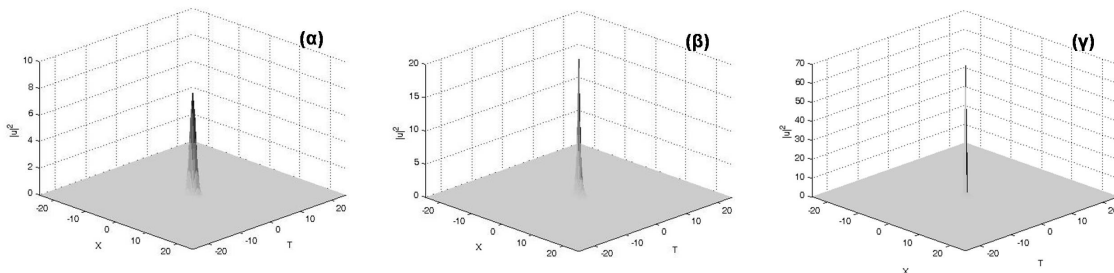
Η δυναμική της κυματικής κατάρρευσης, ή ουσιαστικά της παρατεταμένης αυτοεστίασης, αποτελεί αντικείμενο μελέτης σε αρκετά πεδία της Φυσικής και της τεχνολογίας. Ένα σύνηθες παράδειγμα είναι η έντονη αυτό-εστίαση που δύναται να παρουσιάσει ακτίνα laser

¹ Ο όρος “bidispersive” προέρχεται από το [209].

κατά τη δημιουργία πλάσματος. Εδώ η παρατηρημένη νηματοποίηση της ακτίνας συνδέεται με την αλληλεπίδραση της με τις χαμηλής συχνότητας διαταραχές πυκνότητας του πλάσματος οι οποίες φαίνεται πως λειτουργούν σαν συγκλίνων φακός για την οπτική ακτίνα [228, 229]. Αυτό γίνεται απόλυτα κατανοητό από την εξίσωση διάδοσης της ακτίνας, καθώς ιδιαίτερα στην απλοποιημένη περίπτωση όπου τα θερμικά φαινόμενα θεωρούνται αμελητέα και οι ιοντικές διακυμάνσεις στατικές, δεν είναι άλλη από την NLS. Ένα άλλο παράδειγμα, πάλι σχετιζόμενο με το πλάσμα, είναι η μελέτη κατάρρευσης κυμάτων Langmuir. Αυτά παράγονται, μαζί με ηχητικά κύματα, από την αλληλεπίδραση μιας ακτίνας laser υψηλής έντασης με το πλάσμα. Είναι μάλιστα τα πρώτα στα οποία παρατηρήθηκε η διαδικασία της «κατάρρευσης» και αναφέρονται στη πρωτοποριακή εργασία του Zacharov [230]. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση πάλι που πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις, η ενέργεια των κυμάτων δύναται να παγιδευτεί μέσα στις διαταραχές της ιοντικής πυκνότητας. Αυτές συζευγνύονται με υψίσυχνα κύματα πλάσματος μέσω της μη-γραμμικής σθενοκινητικής δύναμης (“ponderomotive force”). Έτσι τα αργά μεταβαλλόμενα κύματα Langmuir παγιδευμένα σε ιοντοακουστικές κοιλότητες (μεταβολές στην ιοντική πυκνότητα) δύνανται να οδηγηθούν σε κατάρρευση. Οι εξισώσεις διάδοσης τους έχουν περιγραφεί από τον Zacharov, αλλά στην απλοποιημένη τους μορφή καταλήγουν πάλι στην NLS. Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι η κατάρρευση τελικά δε θα συμβεί λόγω του φαινομένου της απόσβεσης Landau. Αντί αυτού και πριν την απόσβεση τους, παρατηρούνται πεδία Langmuir εξαιρετικά υψηλής έντασης. Ακόμα λοιπόν και με το απλοποιημένο μοντέλο μπορούμε να έχουμε μια καλή εικόνα των φαινομένων αλληλεπίδρασης laser με πλάσμα. Η κυματική κατάρρευση μελετάται και στο πεδίο της υδροδυναμικής [181], αλλά αυτό φεύγει πιο μακριά από το πεδίο της διατριβής που είναι βέβαια η Οπτική. Στην Οπτική λοιπόν ενδιαφέρει επίσης το φαινόμενο αυτό της κατάρρευσης, μόνο που το μέσο θεωρείται, εν γένει, στατικό, χωρίς χρονομεταβαλλόμενες διαταραχές στην πυκνότητα του.

Ο άμεσος στόχος της μελέτης της πολυδιάστασης NLS και της κυματικής κατάρρευσης δεν είναι η δημιουργία εντοπισμένων στενών φωτεινών σολιτονίων, που θα μπορούν να διαδοθούν για πολλά χιλιόμετρα αδιατάρακτα. Κάτι τέτοιο δεν δείχνει άμεσα εφικτό. Όμως η μελέτη των ορίων που επιβάλλει το φαινόμενο είναι πολύ χρήσιμη για τη διερεύνηση τρόπων υπέρβασης ή αποφυγής τους. Για παράδειγμα, σε πολλά πειράματα έχει αναφερθεί ακόμα και καταστροφή του οπτικού μέσου λόγω της έντονης αυτοεστίασης της ακτίνας [6-Κεφ. 3, 7, 16, 17]. Τρόποι ελεγχόμενου περιορισμού του φαινομένου έχουν προταθεί με τη μορφή κορέσιμης μη-γραμμικότητας (*saturable nonlinearity*), απωλειών, nonparaxiality [6-Κεφ. 17], κανονικής διασποράς και χρήση φωτοδιαθλαστικών κρυστάλλων (*photorefractive crystals*). Ο έλεγχος του φαινομένου κάνει δυνατή την κατασκευή οπτικών συσκευών. Επιπλέον, ο έλεγχος του φαινομένου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία φωτεινών νημάτων στο νερό ή στον αέρα που διαδίδονται για περισσότερα από 10Km (και των οποίων το ευρύτατο φάσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανίχνευση χημικών ουσιών στην κατώτερη ατμόσφαιρα [6, 70], ή απλώς για τη δημιουργία πολύ στενών και έντονων παλμών (νημάτων) σε οπτικά μέσα, αλλά και τη «γένεση «υπερσυνεχούς φάσματος» (supercontinuum generation-SCG) [231]. Συγκεκριμένα για τη SCG, η πρώτη παρατήρηση έγινε το 1970 και έκτοτε έχει παρατηρηθεί πειραματικά στην αλληλεπίδραση laser παλμών με διάφορα υλικά [177, 178, 231]. Εντυπωσιακό δε είναι ότι η μορφή του φάσματος βρίσκεται να είναι πάντα σχεδόν ίδια, κάτι που υποδηλώνει ότι το SCG είναι ένα χαρακτηριστικό της αλληλεπίδρασης του laser με την ύλη. Σύμφωνα με νεότερες θεωρίες, το φαινόμενο του SCG συνδέεται με την αυτοεστίαση [6]. Τέλος, η μελέτη των συνθηκών «κατάρρευσης» βοηθά στη μελέτη των φαινομένων, όταν η κατάρρευση αυτή δεν είναι εφικτή, στην περιοχή κανονικής (μη-ανώμαλης) διασποράς. Τα φαινόμενα που δύνανται να παρατηρηθούν είναι η διάσπαση του παλμού σε δύο ή περισσότερους και η δημιουργία μη-γραμμικών κυμάτων X, ένα ενδιαφέρον ενδεχόμενο με το οποίο ασχολούμαστε εκτενέστερα παρακάτω.

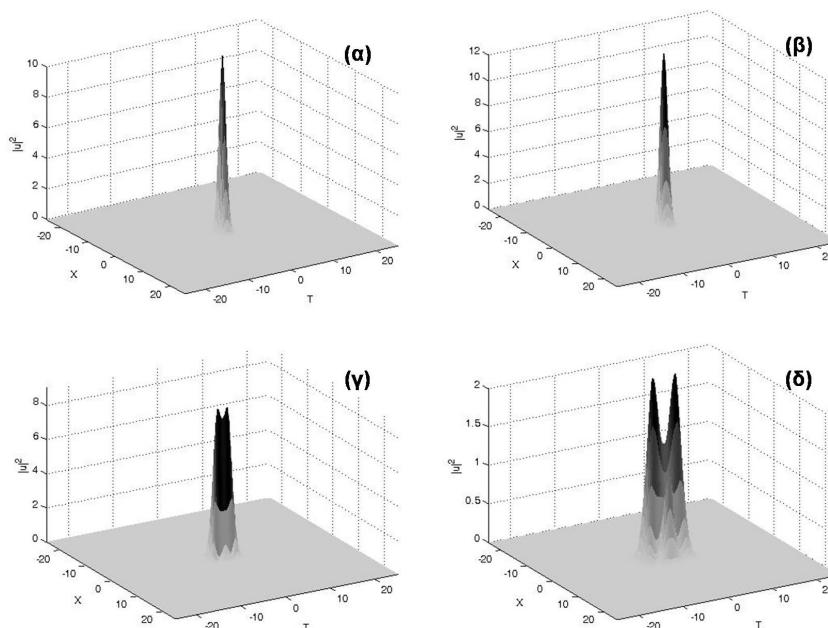
Στα παραπάνω αφήσαμε να εννοηθεί ότι η μη-γραμμικότητα είναι εστιάζουσα και η περίθλαση στις εγκάρσιες διαστάσεις είναι συνήθης, δηλαδή ανάλογη της ανώμαλης χρονικής διασποράς, ενώ αποσιωπήσαμε το ρόλο της τελευταίας. Όπως αναφέραμε και στο πρώτο Κεφάλαιο, η παρατεταμένη εστίαση οπτικών δεσμών ή παλμών παρατηρείται σε μέσα με κυβική μη-γραμμικότητα μόνο όταν η δέσμη ή ο παλμός έχουν παραπάνω από μία διάσταση. Αυτό διότι κυματική κατάρρευση δεν παρατηρείται σε παλμούς οδεύοντες σε οπτικές ίνες, όπου λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας το πρόβλημα είναι ουσιαστικά μονοδιάστατο, αλλά ούτε και σε δέσμες που διαδίδονται σε επίπεδο κυματοδηγό (slab waveguide). Αντίθετα, κατάρρευση μπορεί να παρατηρηθεί σε ακτίνες που διαδίδονται σε ελεύθερο μέσο (bulk medium) και σε παλμούς που διαδίδονται σε επίπεδο κυματοδηγό ή και σε ελεύθερο μέσο. Στη πρώτη περίπτωση η ακτίνα αντιμετωπίζει μόνο περίθλαση, ενώ αν ο παλμός είναι στενός τότε η διασπορά γίνεται αρκετά σημαντική (και πρέπει να συμπεριληφθεί και στο μοντέλο). Αν και η περίθλαση είναι πολύ ισχυρότερο φαινόμενο από τη διασπορά, με συνήθως πολύ μικρότερο χαρακτηριστικό μήκος από οπτικούς παλμούς της τάξης των picoseconds, η δράση της είναι ανάλογη με αυτή της (ανώμαλης) διασποράς, στο χώρο όμως αντί για το χρόνο. Τα εν λόγω προβλήματα μπορούν να μοντελοποιηθούν από τη πολυδιάστατη NLS, όπου στη πρώτη και δεύτερη περίπτωση το πρόβλημα είναι 2D ή όπως συχνά αναφέρεται, (2+1)D, για να σημειωθεί και η διάσταση της διάδοσης, ενώ στη τρίτη περίπτωση 3D ή (3+1)D. Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις δε, τα προβλήματα ονομάζονται χωροχρονικά και στη περίπτωση που η ισχύς του παλμού είναι μεγαλύτερη από μια κρίσιμη τιμή αντιμετωπίζουμε τη χωροχρονική αυτοεστίαση ή και κατάρρευση.



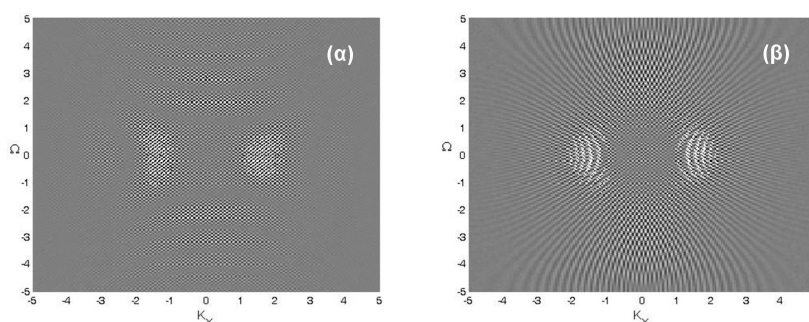
Σχήμα 4.1: Στιγμιότυπα αυτοεστίασης προς κατάρρευση δισδιάστατου κυκλικού γκαουσιανού παλμού ενέργειας $N=2N_c$, όπως αναπαρίσταται από τον κώδικα μας, α) $Z=0$, β) $Z=0.25$, γ) $Z=0.75$. Τα μεγέθη είναι κανονικοποιημένα όπως στο κεφάλαιο 4.4.

Σημαντικό ενδιαφέρον όμως παρουσιάζει και η περίπτωση της κανονικής διασποράς, όπου ανεξάρτητα από το αν ο παλμός είναι δύο ή τριών διαστάσεων, η παρουσία της αποτρέπει τη κατάρρευση. Αυτό είναι και ένα σημείο πάνω στο οποίο στηρίζεται το παρόν και το επόμενο Κεφάλαιο. Για να δώσουμε μία ποιοτική περιγραφή του φαινομένου, ας θεωρήσουμε ένα τρισδιάστατο παλμό σε μέσο με εστιάζουσα μη-γραμμικότητα τύπου Kerr και με ισχύ (ενέργεια) πάνω από τη κρίσιμη για κατάρρευση. Κατά τη διάδοση του παλμού η μη-γραμμικότητα (μέσω του SPM) ελαττώνει φασματικά το περιεχόμενο του μετώπου του παλμού και αυξάνει αυτό της ουράς του. Αυτές οι φασματικές μετατοπίσεις επιφέρουν τερέτισμα, δηλαδή μεταβολή της συχνότητας με το χρόνο κατά μήκος του παλμού η οποία έχει θετική κλίση κοντά στο κέντρο και αρνητική στα άκρα. Οι κλίσεις αυτές γίνονται πιο απότομες και το τερέτισμα εντονότερο καθώς ο παλμός τείνει να αυτό-εστιαστεί. Καθώς τότε η διασπορά γίνεται όλο και πιο σημαντική, ο συνδυασμός του τερέτισματος και της κανονικής διασποράς τείνει να κάνει τα δύο μέρη του παλμού (με αυξημένη ή μειωμένη) συχνότητα να κινηθούν αντίθετα, απομακρυνόμενα μεταξύ τους συμμετρικά. Το γεγονός αυτό αποτρέπει τη κατάρρευση και δύναται να δημιουργήσει παλμό με δύο κορυφές ή και να διαχωρίσει το παλμό σε δύο νέους με ίσες και αντίθετες ως προς το σύστημα του αρχικού

παλμού, ομαδικές ταχύτητες (σχήμα 4.2). Η πρώτη πειραματική καταγραφή διαχωρισμού στενού οπτικού παλμού διαδιδόμενου σε μέσο με ομαλή διασπορά έγινε το 1996 [180]. Σε αυτά τα πειράματα χρησιμοποιήθηκαν παλμοί με εγκάρσιο προφίλ κοντά στη γκαουσιανή, χρονικού εύρους $90fs$ με $\lambda=800nm$. Για τιμές εγκάρσιας ισχύος $(1.5-3)N_c$ οι παλμοί παρατηρήθηκαν να ξεκινούν να αυτο-εστιάζουν και γρήγορα να διαχωρίζονται στα δύο. Για ακόμα μεγαλύτερες τιμές, περαιτέρω διαχωρισμοί παρατηρήθηκαν. Το ενδιαφέρον για διάδοση παρουσία κανονικής διασποράς έχει ενταθεί περισσότερο τα τελευταία χρόνια και έχουν δημοσιευτεί κάποιες βασικές αριθμητικές και ημι-αναλυτικές εργασίες που περιγράφουν το αποτέλεσμα της στην αυτοεστίαση [180, 205-208, 212]



Σχήμα 4.2: Στιγμιότυπα αυτοεστίασης και χρονικού διαχωρισμού δισδιάστατου κυκλικού γκαουσιανού παλμού με $N=3N_c$ σε κανονική διασπορά με α) $Z=0$, β) $Z=0.15$, γ) $Z=0.5$, δ) $Z=0.75$. Τα μεγέθη είναι κανονικοποιημένα.



Σχήμα 4.3: Φασματική κατανομή του παλμού του Σχ. 4.2 για α) $Z=0.75$ και β) $Z=5$.

Η αυτοεστίαση στενών χωρικών ή χωροχρονικών παλμών είναι ένα θέμα που ήδη έχει μελετηθεί εξαντλητικά και η προσπάθεια κατανόησης του φαινομένου και περιγραφής της εξέλιξης του παλμού έχει οδηγήσει σε ποικιλόμορφες προσεγγίσεις [6]. Δειγματοληπτικά, μπορούμε να αναφερθούμε στις αριθμητικές προσεγγίσεις ([194, 195]) και σε κάποιες αναλυτικές. Έτσι, έχει χρησιμοποιηθεί με σχετική επιτυχία η Μεταβολική Μέθοδος ([196, 197]), αν και η παραδοχή της για παλμό που διατηρεί την αρχική μορφή του, αποκλίνει καθώς αυτός εστιάζει. Η προσέγγιση αυτή «απαιτεί» λοιπόν ο παλμός να διατηρεί την αυτό-

ομοιότητα του μέχρι τη κατάρρευση. Ο Bergé στις αναλυτικές εργασίες του, [198-200], απέδειξε ότι μετά από κάποια κρίσιμη απόσταση διάδοσης ο παλμός δε μπορεί να θεωρηθεί αυτό-όμοιος. Ανέπτυξε την «ημί-αυτό-όμοια» προσέγγιση [199, 201-203] σύμφωνα με την οποία ο παλμός διατηρεί αδιαβατικά τη μορφή του μέχρι κάποια απόσταση και μετά εξελίσσεται σε ένα αργά μεταβαλλόμενο σχεδόν αυτό-όμοιο κεντρικό τμήμα και «ουρά» (άλω) με διαφοροποιούμενη μορφή και κατάφερε να περιγράψει με τον πλέον ακριβή τρόπο την εξέλιξη του παλμού κατά την αυτοεστίαση του. Παρακάτω δε θα ασχοληθούμε με αυτή τη μέθοδο, αλλά στο επόμενο Κεφάλαιο χρησιμοποιούμε κάποια από τα συμπεράσματα της. Τέλος, αρκετά ακριβή συμπεράσματα σχετικά με την απαιτούμενη ισχύ και την απόσταση της κατάρρευσης έχουν δοθεί από την «ενεργειακή» χρήση της μεθόδου Virial, η οποία σκιαγραφείται παρακάτω.

4.1.1 Θεώρημα Virial

Το θεώρημα Virial, ή αλλιώς μέθοδος των ροπών χρησιμοποιείται στη μελέτη της έκρηξης του παλμού καθώς δίνει κάποια ασφαλή κριτήρια, αν και όχι τόσο λεπτομερή ποσοτικά, για το αν θα οδηγηθεί ή όχι σε αυτή. Εμείς απλώς θα σκιαγραφήσουμε τη μέθοδο και θα παραθέσουμε τα χρήσιμα για την κατανόηση της φυσικής του φαινομένου, συμπεράσματα. Ξεκινώντας από μια πιο γενική μορφή της NLS,

$$i\partial_z u + \partial_j g^{jk} \partial_k u + f(|u|^2)u = 0 \quad (4.1)$$

όπου στην δική μας απλούστερη περίπτωση ο τανυστής διασποράς g^{jk} είναι διαγώνιος και φέρει τα πρόσημα των δεύτερων παραγώγων στο χώρο και χρόνο. Ο δεύτερος όρος αφορά τη περίθλαση σε μία ή δύο εγκάρσιες χωρικές διατάσεις (D_\perp) και τη διασπορά στη χρονική διάσταση. Τώρα, σαν ροπή αδράνειας μιας εντοπισμένης κυματομορφής ορίζεται το

$$I_{(1)}(z) = N \langle |\vec{x} - \langle \vec{x} \rangle|^2 \rangle, \quad (4.2)$$

όπου το άνωσμα \vec{x} εμπεριέχει τη θέση του παλμού στη χρονική και στις εγκάρσιες διαστάσεις, ενώ η μέση τιμή μιας συνάρτησης $f(x)$, δίνεται από $\langle f(x) \rangle = N^{-1} \int f(x) |u|^2 d^D x$,

όπου $N = \int |u|^2 d^D x$ είναι η ενέργεια του χώρο-χρονικού παλμού ή η ισχύς αν αναφερόμαστε μόνο στις εγκάρσιες χωρικές διαστάσεις, (οπότε $D = D_\perp + D_t$). Σε πολλές εργασίες το εν λόγω σύμβολο χρησιμοποιείται αντί αυτών της ενέργειας και της ισχύος, το οποίο χαρακτηρίζεται και ως «μάζα» του παλμού. Αυτό είναι και υπενθύμιση της συμμετρίας μεταξύ της χρονικής και εγκάρσιας χωρικής διάστασης.

Τελικά χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της ορμής και το Γαλιλαϊκό μετασχηματισμό, και παραβλέποντας το σύμβολο του αθροίσματος, η δεύτερη παράγωγος του $I_{(1)}$ είναι

$$\partial_z^2 I_{(1)} = 4 \left\{ 2 \int \partial_j u^* g^{jk} g_k^i \partial_i u d^D x + \text{Tr}(g^{ljk1}) \int \left[F(|u|^2) - |u|^2 f(|u|^2) \right] d^D x - \frac{N}{2} \langle \partial_z x^i \rangle \right\} \quad (4.3)$$

με $\text{Tr}(g^{ljk1}) = D_\perp + \text{sgn}(\beta_2) D_t$, το ίχνος του μετρικού τανυστή. Παρομοίως ορίζουμε τη ποσότητα,

$$I_{(2)}(z) = N \langle (x^j - \langle x^j \rangle) (g^{jk})^{-1} (x^k - \langle x^k \rangle) \rangle \quad (4.4)$$

, όπου η δεύτερη παράγωγος της γράφεται,

$$\partial_z^2 I_{(2)} = 4 \left\{ 2 \int \partial_j u^* g^{jk} \partial_k u d^D x + \text{Tr}(\delta_k^j) \int \left[F(|u|^2) - |u|^2 f(|u|^2) \right] d^D x - \frac{N}{2} \langle \partial_z x^i \rangle g_{jk} \langle \partial_z x^k \rangle \right\} \quad (4.5)$$

με $\text{Tr}(\delta_k^j) = D_\perp + D_t$.

Αν το g^{jk} είναι θετικά ορισμένος (positive definite), στη περίπτωση δηλαδή θετικού προσήμου στους όρους περίθλασης και διασποράς, (αν υπάρχει, οπότε θα είναι ανώμαλη), η σχέση (4.3) γράφεται

$$\partial_z^2 I_{(1)} = 4 \left[2H_0 + (D+2) \int F(|u|^2) d^D x - D \int |u|^2 f(|u|^2) d^D x \right], \quad (4.6)$$

όπου $2H_0 = 2H - \frac{1}{2} N |\bar{U}|^2$, όπου \bar{U} είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας. Στη περίπτωση που

$A = 4 \left[(D+2) \int F(|u|^2) d^D x - D \int |u|^2 f(|u|^2) d^D x \right] = 0$ η εξίσωση γίνεται

$$\partial_z^2 I_{(1)} = 8H_0 \quad (4.7)$$

Η παραπάνω περίπτωση ονομάζεται και «κρίσιμη» και συμβαίνει όταν $f(|u|^2) = |u|^{2\sigma}$, με $\sigma = 2/D$, οπότε για $D=2$ έχουμε τη γνωστή Kerr μη-γραμμικότητα. Σε κάθε περίπτωση, όπως φαίνεται από τη (4.7) για $H_0 < 0$ το $I \rightarrow 0$ σε πεπερασμένη απόσταση. Καθώς η συνολική «μάζα» N διατηρείται και το $|u| \rightarrow 0$ παντού, θα απειρίζεται ($|u| \rightarrow \infty$) μόνο στο κέντρο μάζας. Όταν συμβεί αυτό λέμε ότι έχουμε «ολική κατάρρευση». Όπως αναφέρεται με περισσότερες λεπτομέρειες από τον Rasmussen [232], το Virial μας πληροφορεί για το εάν θα γίνει η κατάρρευση, όχι απαραίτητα για το πότε (σε ποια τιμή του z), καθώς αυτή μπορεί να συμβεί πριν το $I_{(1)}$ μηδενιστεί (βλέπε και [245]).

Η περίπτωση $A=0$ δεν είναι η μόνη, καθώς μπορεί να ισχύει $A < 0$ ή > 0 , οπότε και έχουμε την υπερκρίσιμη ή υποκρίσιμη περίπτωση. Η πρώτη μπορεί να οδηγήσει σε κατάρρευση, αλλά τα κριτήρια είναι κάπως διαφορετικά, ενώ σε αυτή περιλαμβάνεται και η μελέτη κατάρρευσης για $D=3$. Η υποκρίσιμη συνήθως δεν οδηγεί σε κατάρρευση, ενώ η περίπτωση $D=1$ σε υλικό Kerr δεν οδηγεί ποτέ. Δε θα επεκταθούμε περαιτέρω στις περιπτώσεις αυτές, καθώς στη παρούσα διατριβή μελετάμε χωροχρονικούς παλμούς σε επίπεδους κυματοδηγούς ($D=2$), αλλά για περισσότερα μπορεί κανείς να ανατρέξει στις αναφορές [232] και [193]. Οι σχέσεις (4.2) και (4.4) απλοποιούνται σημαντικά αν θεωρήσουμε μηδενική ταχύτητα για το κέντρο μάζας (μηδενική συνολική ορμή) και μετατόπιση στο σύστημα συντεταγμένων τέτοια ώστε $\langle \hat{x} \rangle = 0$. Έτσι καταλήγουμε στις

$$I_{(1)}(z) = \int (r_\perp^2 + t^2) |u|^2 d^D x, \quad (4.8)$$

$$I_{(2)}(z) = \int \left(r_\perp^2 + \frac{t^2}{\text{sgn}(\beta_2)} \right) |u|^2 d^D x, \quad (4.9)$$

υπενθυμίζοντας ότι $|x|^2 = r_\perp^2 + t^2$ και $x^j g_{jk} x^k = r_\perp^2 + \frac{t^2}{s}$ με $s = \text{sgn}(\beta_2)$. Στη περίπτωση τώρα που το g^{jk} δεν είναι καθολικά θετικό και συγκεκριμένα όταν $s=-1$, οι σχέσεις (4.8, 4.9) δίνουν

$$\partial_z^2 \int (r_\perp^2 + t^2) d^D x = 8 \int |\nabla u|^2 d^D x \quad (4.10)$$

$$\partial_z^2 \int (r_\perp^2 - t^2) d^D x = 8H \quad (4.11)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα μέρη της (4.10) με $I_{(1)}$ και χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα

$$\left(\int |u|^2 d^D x \right)^2 \leq \int \sum \left(\frac{4}{D_i} \right) |\nabla_i u|^2 |x_i u|^2 d^D x, \text{ (προερχόμενη από μερική ολοκλήρωση του } N \text{ στο}$$

$x_i = r_\perp$, ή t και χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz), με $i = \perp$, t καταλήγει στη

$$\partial_z^2 I_{(1)}^2 \geq 2I_{(1)} \partial_z^2 I_{(1)} \geq 16N^2 \quad (4.12)$$

από την οποία μπορεί να δειχθεί ότι το $I_{(1)}$ δεν γίνεται ποτέ μηδέν, οπότε η κατάρρευση αποκλείεται. Από τη σχέση (4.11) καταλαβαίνουμε ότι για $H < 0$ υπερισχύει η χρονική διασπορά, ενώ αν $H > 0$ υπερισχύει η περίθλαση και ο παλμός διασπείρεται κυρίως στις εγκάρσιες χωρικές διαστάσεις.

4.1.2 Μοντέλο κατάρρευσης οπτικής δέσμης σε επίπεδο κυματοδηγό-κρίσιμη ισχύς

Στη παρούσα παράγραφο θα επικεντρωθούμε στη περίπτωση $D=2$, που χαρακτηρίζει τη, τη διάδοση παλμού σε επίπεδο κυματοδηγό παρουσία διασποράς, ή διάδοση ακτίνας σε τρισδιάστατο μέσο, χωρίς χρονική διασπορά. Σε κάθε περίπτωση η κατάρρευση ή όχι του παλμού εξαρτάται από το μέσο, αλλά και από τα χαρακτηριστικά του παλμού. Αν λοιπόν θεωρήσουμε γκαουσιανό παλμό διαδιδόμενο σε επίπεδο κυματοδηγό, χωρίς αρχικό χωρικό ή χρονικό chirp, η αρχική μορφή του σε κανονικοποιημένες μονάδες (βλέπε και σχέση 1.32) θα είναι

$$u(X, T, 0) = u_0 \exp \left[-\frac{X^2}{2W_X^2} - \frac{T^2}{2W_T^2} \right] \quad (4.13)$$

Θεωρήσαμε ότι ο κυματοδηγός εκτείνεται μόνο στη X -εγκάρσια διάσταση, ενώ ο παλμός περιορίζεται στη Y . Τα W_X και W_T είναι τα κανονικοποιημένα εύρη, χωρικό και χρονικό.

Υπολογίζοντας τα τρία ολοκληρώματα κίνησης, μάζα(ενέργεια), ορμή και Χαμιλτονιανή, όπως αναφέρονται και στη παράγραφο 1.3.3. Για τον εν λόγω παλμό, καταλήγουμε

$$N = 2\pi |u_0|^2 W_X W_T \quad (4.14)$$

$$M = 0 \quad (4.15)$$

$$H = \frac{N}{2} \left(\frac{1}{W_X^2} + \frac{1}{W_T^2} - \frac{N}{2\pi W_X W_T} \right) \quad (4.16)$$

Τώρα, από όσα αναφέρθηκαν στη παράγραφο 4.1.1, για να συμβεί κατάρρευση, δεδομένης ανώμαλης διασποράς, θα πρέπει $H < 0$. Από τη σχέση (4.16) προκύπτει ότι για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει η μάζα του παλμού να ξεπερνά μια κρίσιμη τιμή,

$$N > N_c = \frac{2\pi (W_X^2 + W_T^2)}{W_X W_T} \quad (4.17)$$

Στη περίπτωση τώρα όπου $W_X = W_T$, η κρίσιμη μάζα παίρνει τη τιμή $N_c = 4\pi$. Η συγκεκριμένη τιμή είναι και η πλέον γνωστή στη βιβλιογραφία καθώς οι περισσότεροι ερευνητές χρησιμοποιούν σα παράδειγμα ακτίνες με όμοια εύρη στις δύο εγκάρσιες διαστάσεις, κυκλικής δηλαδή διατομής. Η συμμετρία των όρων χωρικής περίθλασης και χρονικής διασποράς μας επιτρέπει να αναφερόμαστε και σε χωροχρονικό παλμό που ικανοποιεί τη παραπάνω συνθήκη ως κυκλικό και όταν δε την ικανοποιεί, ως ελλειπτικό.

Σημειώνουμε επιπλέον ότι παλμοί με περιβάλλουσα διαφορετικής μορφής χαρακτηρίζονται από διαφορετικές τιμές του N_c . Οι έχοντες με περιβάλλουσα με μορφή του Townes έχουν τη μικρότερη τιμή κρίσιμης ισχύος, $N_c = 11.68$. Έχει δειχθεί ότι όποιο και να

είναι το σχήμα του παλμού, εάν η ισχύς υπερβαίνει την κρίσιμη, τότε αυτοεστιαζόμενος εξελίσσεται σε παλμό τύπου Townes [194, 216, 217].

4.2 Χωροχρονική διαμορφωτική αστάθεια (modulational instability-MI)

Σαν μια πρώτη προσπάθεια κατανόησης των περιπτώσεων ανώμαλης διασποράς, με την πιθανότητα κατάρρευσης, και ομαλής, με τη πιθανότητα διάσπασης του παλμού, αλλά και τη δυνατότητα δημιουργίας κυματοπακέτου τύπου «X», παραθέτουμε τη μελέτη MI για τρισδιάστατο στάσιμο κύμα (CW) που διαδίδεται σε οπτικό υλικό. Επανερχόμαστε για λίγο στη τρισδιάστατη περίπτωση, που προτιμήθηκε από τη δισδιάστατη, (στην οποία είναι εντοπισμένα το παρόν και το επόμενο Κεφάλαιο), ως γενικότερη.

Το σημείο εκκίνησης είναι λοιπόν η (3+1)D NLS την οποία παραθέτουμε στη μη κανονικοποιημένη μορφή, ένα βήμα πριν την (1.32).

$$i \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2\beta_0} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \gamma |U|^2 U = 0, \quad (4.18)$$

όπου το U περιγράφει τη περιβάλλουσα του κυματοπακέτου. Το β_0 είναι η σταθερά διάδοσης, το β_2 η διασπορά ομαδικής ταχύτητας (GVD) και μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό, ενώ η μη-γραμμική παράμετρος γ είναι υπεύθυνη για την αυτοδιαμόρφωση φάσης (SPM) και στην περίπτωση μας είναι θετική (εστίαση).

Το CW «εκπέμπεται» στο $z=0$, ενώ φαίνεται από την (4.18) ότι δέχεται λύση επιπέδου κύματος της μορφής,

$$U = \sqrt{I_0} \exp(i\phi_{NL}), \quad (4.19)$$

όπου I_0 η ένταση και $\phi_{NL} = \gamma I_0 z$ η μη-γραμμική μεταβολή φάσης, λόγω του SPM. Φαίνεται λοιπόν ότι το CW θα παραμείνει αμετάβλητο, εκτός της μεταβολής της φάσης του.

Σύμφωνα με τη διαδικασία του MI, μία μικρή διαταραχή προστίθεται στο πλάτος για να ελεγχθεί η σταθερότητα του επιπέδου αυτού κύματος. Οπότε τίθεται,

$$U = (\sqrt{I_0} + a) \exp(i\phi_{NL}). \quad (4.20)$$

και μελετάται η εξέλιξη της μικρής διαταραχής $a(x, y, z, t)$ κατά τη διάδοση στο μέσο. Βάζοντας την (4.20) στην (4.18) και γραμμικοποιώντας στο a , έχουμε,

$$i \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{1}{2\beta_0} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \right) - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \gamma I_0 (a + a^*) = 0. \quad (4.21)$$

Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$a(\vec{r}, T) = a_1 \exp \left[i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Omega t) \right] + a_2 \exp \left[-i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Omega t) \right], \quad (4.22)$$

όπου $\vec{r} = (x, y, z)$ και \vec{K} και Ω είναι το κυματικό διάνυσμα και η συχνότητα της διαταραχής, ουσιαστικά οι μεταβολές των μεγεθών σε σχέση με τα αντίστοιχα του επιπέδου κύματος. Μέσο αλγεβρικών πράξεων αποδεικνύεται ότι οι (4.21) και (4.22) έχουν μη-μηδενικές λύσεις όταν ισχύει η παρακάτω σχέση διασποράς:

$$4\beta_0^2 K_z^2 = (K_x^2 + K_y^2 - \beta_0 \beta_2 \Omega^2) (K_x^2 + K_y^2 - \beta_0 \beta_2 \Omega^2 - 4\gamma I_0) \quad (4.23)$$

Το $K_\perp = \sqrt{K_x^2 + K_y^2}$ είναι το εγκάρσιο κυματοδιάνυσμα και σχετίζεται με τη κωνική γωνία με τον άξονα z της διάδοσης, $\sin \theta = K_\perp / \beta_0$. Η σχέση (4.23) εκπίπτει στη σχέση διασποράς για την χρονική NLS όταν $K_x=K_y=0$, ενώ αφορά χωροχρονική διάδοση σε (2+1)D μέσο, όπως ένα κυματοδηγό τύπου πλάκας (επίπεδο), για $K_y=0$.

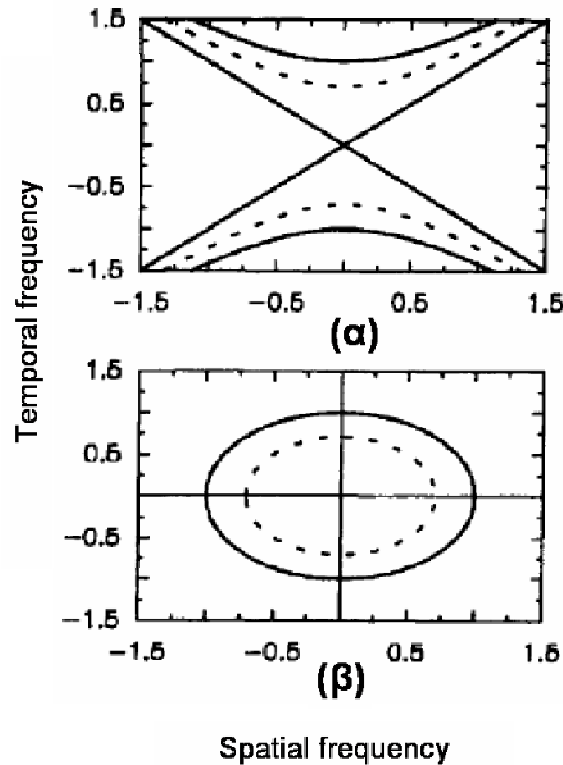
Φαίνεται λοιπόν ότι η σταθερότητα της CW λύσης εξαρτάται τόσο από τη χωρική και χρονική συχνότητα της διαταραχής, όσο και από τα πρόσημα των β_2 και γ . Η λύση γίνεται ασταθής όταν το K_z αποκτά φανταστικό μέρος, καθώς τότε η διαταραχή αυξάνει εκθετικά με κέρδος έντασης $g = 2\text{Im}(K_z)$. Για να δοθεί η πλήρης εικόνα του g , ορίζουμε την χωρική συχνότητα της διαταραχής:

$$\Omega_s = \left(\frac{K_x^2 + K_y^2}{\beta_0 \beta_2} \right)^{1/2} \quad (4.24)$$

Το κέρδος, το σχετιζόμενο με το MI γράφεται λοιπόν,

$$g(\Omega, \Omega_s) = |\beta_2| \left[\left(\Omega_s^2 - \text{sgn}(\beta_2) \Omega^2 \right) \left(\Omega_c^2 + \text{sgn}(\beta_2) \Omega^2 - \Omega_s^2 \right) \right]^{1/2} \quad (4.25)$$

όπου $\Omega_c = \frac{4\gamma I_0}{|\beta_2|}$. Η λύση (4.19) είναι ασταθής για τις τιμές των Ω και Ω_s που το g γίνεται θετικός πραγματικός αριθμός.



Σχήμα 4.4: Περιοχές αστάθειας, όπως διακρίνονται φραγμένες από συμπαγείς γραμμές, για τιμές Ω και Ω_s , για (α) κανονική διασπορά, (β) ανώμαλη. Οι διάστικτες γραμμές συμβολίζουν την περιοχή μέγιστου κέρδους (ανατύπωση από [218])

Η αστάθεια αυτή χαρακτηρίζεται «χωροχρονική» καθώς ενέχει χωρικές και χρονικές διαμορφώσεις του εισερχόμενου CW. Στο σχήμα 4.4 φαίνονται οι περιοχές αστάθειας για ανώμαλη ($\text{sgn}(\beta_2) = -1$) και κανονική διασπορά ($\text{sgn}(\beta_2) = +1$). Παρατηρούμε ότι η ανάπτυξη αστάθειας στην πολυδιάστατη NLS δεν απαιτεί ανώμαλη διασπορά. Επίσης, ενώ στο σχήμα 4.4(β) η περιοχή αστάθειας είναι φραγμένη, στην περίπτωση της κανονικής διασποράς (Σχ.4.4α), όπου έχουμε αστάθεια για $\Omega_s^2 - \Omega_c^2 \leq \Omega^2 \leq \Omega_s^2$, η αντίστοιχη περιοχή ορίζεται από υπερβολές και δεν είναι φραγμένη. Αυτό αποτελεί και την πρώτη ένδειξη ότι στην περίπτωση της ομαλής διασποράς δεν δύναται να έχουμε συνεχή αυτό-εστίαση και

συγκέντρωση της ενέργειας ως την κατάρρευση, ενώ συνδέεται και με το φαινόμενο της «κωνικής εκπομπής», στο οποίο βασίζεται και η δημιουργία κυματοπακέτων τύπου «X».

Από τα παραπάνω φαίνεται εύκολα πως αν περιοριστούμε σε μία μόνο εγκάρσια διάσταση (έστω τη x) θα πρέπει απλώς να αγνοήσουμε τους όρους που αφορούν το y και το K_y . Έτσι απομένει ο συνδυασμός περίθλασης σε μία διάσταση και διασποράς με αποτέλεσμα όμοιο με τα παραπάνω και με το σχήμα 4.4.

4.3 Κύματα τύπου X (X waves)

Τα κύματα «τύπου X», είναι χωρικά εντοπισμένα κύματα (localized waves) όπου διαδίδονται αδιατάρακτα και διατηρώντας το σχήμα τους, αλλά δεν είναι σολιτονικά κύματα, με την έννοια ότι είναι γραμμικές «οντότητες». Το φάσμα τους είναι μια συλλογή συναρτήσεων Bessel, με την περισσότερη ενέργεια να συγκεντρώνεται γύρω από μια συγκεκριμένη συχνότητα, κάνοντας έτσι το φάσμα να μοιάζει κωνικό, η περισσότερο σαν «X», με την κορυφή στο κέντρο. Το κυματοπακέτο έχει παρόμοιο σχήμα, όμως ο μαθηματικός του τύπος προϋποθέτει ότι η ένταση δεν σβήνει στο άπειρο, οπότε έχει άπειρη ενέργεια! Οποιαδήποτε πειραματική ή αριθμητική παρατήρηση τους λοιπόν δεν θα μπορούσε να αφορά ένα ακριβές «κύμα X», αλλά κάποιο «Τύπου X» με πεπερασμένη ενέργεια. Παρόλα αυτά, κύματα «Τύπου X» έχουν παρατηρηθεί σε γραμμικά μέσα, πειραματικά, πρώτα στο πεδίο της Ακουστικής [219], αργότερα στον Ηλεκτρομαγνητισμό [220] και πιο πρόσφατα στην Οπτική [221] και έχουν επιδείξει αντοχή σε διαταραχές και ευσταθή διάδοση χωρίς να διασπείρονται.

Για να επιδείξουμε τις ομοιότητες των γραμμικών κυμάτων «X» με τα μη-γραμμικά που μας ενδιαφέρουν πρωτίστως εδώ, παραθέτουμε μια σύντομη μαθηματική περιγραφή των πρώτων. Έτσι, για ηλεκτρικό πεδίο $E(r, \varphi, z, t) = U(r, \varphi, z, t) \exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t)]$, με ω_0 τη κεντρική συχνότητα, $\beta_0 = \beta(\omega_0)$ το κεντρικό κυματάριθμο και $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\varphi = \tan^{-1}(y/x)$ οι πολικές συντεταγμένες στο εγκάρσιο επίπεδο, η εξέλιξη της αργά μεταβαλλόμενης περιβάλλουσας U καθορίζεται από την εξίσωση,

$$i \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2\beta_0} \nabla_{\perp}^2 U - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (4.26)$$

η οποία δεν είναι άλλη από τη τρισδιάστατη NLS χωρίς τον όρο της μη-γραμμικότητας. Αν τώρα θεωρήσουμε πως το U είναι υπέρθεση ρυθμών, της μορφής $U = \sum_m U_m(r, t) \exp(im\varphi)$, με τη γωνιακή εξάρτησή τους να καθορίζεται από τον αριθμό m , τότε μπορεί να δειχθεί ότι εάν το φάσμα του m -ρυθμού $\tilde{U}_m(r, \Omega)$, με $\Omega = \omega - \omega_0$, υπακούει τη παρακάτω εξίσωση Bessel,

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) \tilde{U}_m + \left(\beta_0 \beta_2 \Omega^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \tilde{U}_m = 0, \quad (4.27)$$

η οποία για $\beta_2 > 0$ (κανονική διασπορά) μόνο, έχει μη τετριμμένες λύσεις (non-singular), το συνολικό πεδίο μένει αμετάβλητο κατά τη διάδοση. Οι λύσεις αυτές είναι $\tilde{U}_m(r, \Omega) = J_m(\sqrt{\beta_0 \beta_2} |\Omega| r)$. Υπερθέτοντας « $m=0$ » ρυθμούς, διαφορετικών συχνοτήτων, σύμφωνα με κάποια φασματική κατανομή, π.χ. $f(\Omega)$ κεντραρισμένη στο $\Omega=0$, μπορεί να κατασκευαστεί λύση με αξονική συμμετρία, η οποία και περιγράφει τη περιβάλλουσα των γραμμικών κυμάτων «X»,

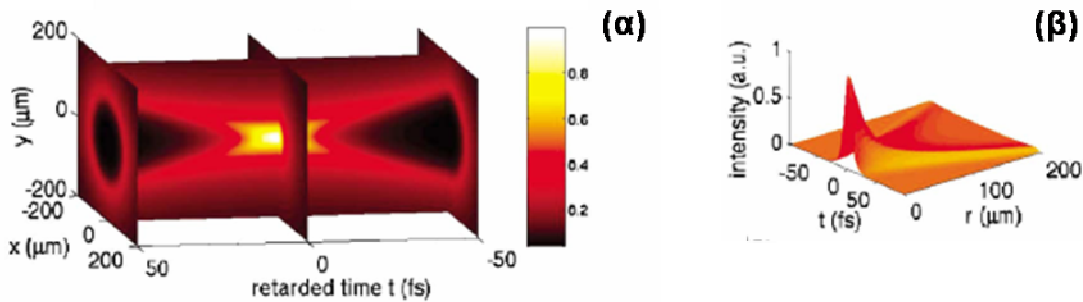
$$U(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) J_0(\sqrt{\beta_0 \beta_2} |\Omega| r) e^{-i\Omega t} d\Omega \quad (4.28)$$

Από φυσική σκοπιά, μπορούμε να πούμε πως η ευστάθεια που επιδεικνύει η περιβάλλουσα ενός «X» κύματος προέρχεται από την αμοιβαία εξουδετέρωση των φασματικών

μετατοπίσεων που προκαλούν η περίθλαση και η κανονική διασπορά. Αυτό μπορεί να δειχθεί εύκολα, παραθέτοντας τη γενική μορφή της λύσης της (4.26) η οποία γράφεται,

$$U(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \int_0^{\infty} K \tilde{U}(K, \Omega) J_0(Kr) e^{i\left(\frac{K^2}{2\beta_0} + \frac{\beta_2 \Omega^2}{2}\right)z} e^{-i\Omega t} dK \quad (4.29)$$

Η παραπάνω εξίσωση γίνεται η (4.28) στη περίπτωση που $\tilde{U}(K, \Omega) = f(\Omega) \delta(K - \sqrt{\beta_0 \beta_2} |\Omega|)$, όταν δηλαδή το φάσμα βρίσκεται πάνω στις διασταυρούμενες γραμμές του σχήματος 4.4(β). Σε αυτή τη περίπτωση οι δύο όροι της φασματικής μετατόπισης στην (4.29) εξουδετερώνονται, μαζί τους και η εξάρτηση της περιβάλλουσας από το z . Στο σχήμα 4.5 παραθέτονται δύο απεικονίσεις του γραμμικού κύματος X.



Σχήμα 4.5: Κύμα X: (α) Ισοϋψείς επιφάνειες για $|U(x,y,t)|^2 = \text{const}$, (β) ένταση περιβάλλουσα σε σχέση με τα r, t (σχήματα από [204]).

Ο Conití, με την αριθμητική του δουλειά έδειξε ότι κύματα τύπου X μπορούν να δημιουργηθούν και να διαδοθούν και σε μη-γραμμικά μέσα [222, 223]. Στη προσέγγιση του, η μορφή του χωροχρονικού κυματοπακέτου που μπορεί να διαδοθεί χωρίς να διασκορπίζεται ήταν ουσιαστικά ανάλογη ενός γραμμικού κύματος-X. Ουσιαστικά, η διατήρηση, ή η γέννηση αυτών των «X» μορφών είναι αποτέλεσμα των διπλοδιασπαρτικών ιδιοτήτων του μέσου και μπορεί να λάβει χώρα ακόμα και παρουσία μη-γραμμικότητας. Βασική διαφορά των γραμμικών κυμάτων X με τα μη-γραμμικά τύπου X, είναι ότι τα τελευταία «γεννιούνται» αυθόρμητα, για μεγάλες ισχύεις, μέσω του μετασχηματισμού κάποιου κυματοπακέτου (έστω γκαουσιανού με εγκάρσιους κυματάρθμους και συχνότητα κ_x , κ_y και ω αντίστοιχα), λόγω της συγκεκριμένης μορφής της διαμορφωτικής αστάθειας για ομαλή διασπορά (περίπτωση της κωνικής εκπομπής). Η τελευταία είναι που επιβάλλει την ενίσχυση συγκεκριμένων περιοχών του χώρο-χρονικού φάσματος, (μέσω διαδικασίας FWM, για να το πούμε με άλλα λόγια [189, 191]), όπου μεταφέρεται ενέργεια στις πλευρικές ζώνες ($\kappa_x \pm K_x$, $\kappa_y \pm K_y$, $\omega \pm \Omega$). Η αλληλεπίδραση διευρύνει το φάσμα σε συχνότητα και σε κυματάρθμο, αλλά ιδιαίτερη ενίσχυση λαμβάνουν φασματικές περιοχές με $K_{\perp}^2 \propto \Omega^2$ (σχήμα 4.4α) οι οποίες είναι υπερβολές που φράσσονται από τις ευθείες $|K_{\perp}| = \pm \sqrt{\beta_0 \beta_2} \Omega$. Έτσι η ύπαρξη μη-γραμμικότητας διατηρεί τη δομή του κύματος X ή μπορεί και να μετασχηματίσει ένα απλούστερο κυματοπακέτο σε «Τύπου X». Αυτό παρατηρήθηκε πρώτη φορά σε $\chi^{(2)}$ μέσα, όπου υπήρξε αλληλο-παγίδευση μεταξύ πρώτης και δεύτερης αρμονικής και χωρικός εντοπισμός του κυματοπακέτου (δείτε το [182] για ένα πειραματικό παράδειγμα). Μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα υλικά τύπου Kerr, για τα οποία έχουν γραφτεί πολλές πειραματικές και αριθμητικές εργασίες. Το γεγονός ότι η πιθανή γένεση και παρατήρηση παλμών τύπου X συμβαίνει για ενέργειες ανώτερες της κρίσιμης για κατάρρευση, επιφέρει την επίδραση περισσότερων συνιστωσών όπως το self-steepening και η δημιουργία πλάσματος, όπου καθιστούν το όλο φαινόμενο ιδιαίτερα πολύπλοκο. Σε σχετικά πρόσφατες πειραματικές

εργασίες, στις περισσότερες από τις οποίες χρησιμοποιείται το νερό ως μέσο, καθώς έτσι αποφεύγεται πιθανή ζημιά ([225] και [6]) στο υλικό από έντονη αυτοεστίαση, έχει παρατηρηθεί δημιουργία νημάτων (στενών παλμών) φέροντα κωνικές ουρές, ενώ αριθμητικές προσομοιώσεις περιγράφουν τη δημιουργία κυματοπακέτου με φασματικό περιεχόμενο κοντινό με αυτό των πειραμάτων και εμφανώς δημιουργημένο από μηχανισμό κωνικής εκπομπής [179, 183-189]. Σε κάποιες εργασίες μελετάται η επίδραση των φαινομένων ανώτερης τάξης [224], όμως είναι πλέον ευρέως παραδεκτό ότι το απαραίτητο υπόβαθρο για αυθόρμητη δημιουργία τέτοιων κυματοπακέτων είναι η μορφή της διασποράς [179] και της χώρο-χρονικής διαμορφωτικής αστάθειας [184, 220]. Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η ενίσχυση των πλευρικών ζωνών που μετασχηματίζει ένα παλμό σε «Τύπου-Χ» δεν ακολουθεί τις ευθείες $|K_{\perp}| = \pm \sqrt{\beta_0 \beta_2} \Omega$, όπως στη γραμμική περίπτωση, αλλά ούτε ακολουθεί ακριβώς τις υπερβολές της σχέσης διασποράς (σχήμα 4.4β). Ακριβώς επειδή ο γεννήτορας παλμός δεν είναι στάσιμο κύμα με κάποια διαταραχή, η σχέση διασποράς αναμένεται κάπως διαφορετική, όπως δείχθηκε στο [189] αλλά κυρίως στο [192]. Στο σχήμα 4.3 παρίσταται η φασματική κατανομή γκαουσιανού παλμού που διαδίδεται σε διπλοδιασπαστικό μέσο, και υπόκειται σε διαχωρισμό και διασπορά/περίθλαση. Το φάσμα έχει μορφή που ομοιάζει με τη προαναφερθείσα σχέση διασποράς, αλλά διαφέρει αρκετά, καθώς μεγάλο μέρος της ενέργειας διασπείρεται στον άξονα “X” (εγκάρσιο) λόγω περίθλασης. Παρόλα αυτά στη διατριβή αυτή διατηρούμε ως βάση την εν λόγω σχέση διασποράς καθώς γίνεται χρήση και στάσιμου κύματος.

Το ενδιαφέρον της δουλειάς μας περιστρέφεται γύρω από τη δυνατότητα δημιουργίας κάποιων «τύπου X» παλμών. Έχει παρατηρηθεί ότι η μη-γραμμικότητα, είτε τύπου Kerr είτε SHG σε $\chi^{(2)}$ μέσο, δεν καταστρέφει τα κύματα «Τύπου X», απλώς τα «ντύνει» με κάποια παραπάνω φαινόμενα. Ακόμα και σε μέσα με πολύ ισχυρή μη-γραμμικότητα το αποτέλεσμα της είναι κάποιες κυματώσεις ή και ταλαντώσεις στην περιβάλλουσα, χωρίς να καταστρέφει τη X δομή [204]. Δυστυχώς όμως, η δημιουργία κυμάτων τέτοιου τύπου από πηγή είναι κάτι όχι εύκολο, καθώς το ιδιαίτερο σχήμα της περιβάλλουσας απαιτεί περίπλοκες τεχνικές διαμόρφωσης, όπως τη χρήση φακών *axicon*. Ως εκ τούτου, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η δυνατότητα δημιουργίας τους («γένεσης τους») από κάποιο απλό πολυδιάστατο παλμό, όπως από έναν γκαουσιανού τύπου. Συγκεκριμένα, στη Μη-γραμμική Οπτική, έχει παρατηρηθεί πειραματικά τέτοιου είδους αυθόρμητη δημιουργία τρισδιάστατων δομών τύπου «X» σε κρυστάλλους *lithium triborate* και σε νερό [179, 182]. Οι μορφές αυτές δεν είναι ιδιαίτερα μακρόβιες (αναλλοιώτες στη διάδοση) και η κωνική τους μορφή είναι συχνά εμφανής μόνο στο φασματικό του πεδίο. Επίσης, το βασικό αίτιο που μπορεί να οδηγήσει στην αυθόρμητη δημιουργία κυματοπακέτου «X» προκαλεί και το προαναφερθέν φαινόμενο του διαχωρισμού του παλμού, το οποίο μάλιστα είναι και το πιθανότερο να συμβεί [180, 190].

Κάτι σημαντικό, σχετικά με τη γέννηση (διέγερση) κυματοπακέτων «Τύπου X» είναι ότι σχετίζεται με την άλω του χωροχρονικού παλμού, που είναι όμως μικρής έντασης, οπότε και το φαινόμενο είναι ασθενές. Καθώς πρόσφατα επαληθεύτηκε η ύπαρξη δισδιάστατων γραμμικών κυμάτων «X», η δυνατότητα δημιουργίας δομών «Τύπου X» από την αλληλεπίδραση συνεχούς κύματος, που δρα σαν τροφοδότης, (όπως στη παρούσα εργασία), με δισδιάστατο Γκαουσιανό παλμό είναι, πιστεύουμε, κάτι άξιο μελέτης και αυτή ακριβώς την ιδέα αναπτύσσουμε παρακάτω.

4.4 Μελέτη γένεσης κυμάτων «Τύπου-X» με τη χρήση CW

Στο παρόν κεφάλαιο καταγράφεται η αριθμητική μελέτη της δυνατότητας δημιουργίας κυματοπακέτου «X» από την αλληλεπίδραση γκαουσσιανού παλμού και επίπεδου κύματος (CW) σε επίπεδο κυματοδηγό ($D=2$). Για τους λόγους που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 4.3, η αυθόρμητη γένεση «τύπου-X» κυματοπακέτων είναι κάτι δύσκολο. Οι μορφές που δημιουργούνται από την επίδραση της περίθλαση, κανονικής διασποράς και εστιάζουσας μη-γραμμικότητας σε ένα χωροχρονικό κυματοπακέτο δύνανται να έχουν κοινά χαρακτηριστικά με τα γραμμικά κύματα X, αλλά είναι βραχύβιες και διασπείρονται γρήγορα. Η ιδέα της αλληλεπίδρασης ενός επίπεδου κύματος με το γκαουσσιανό παλμό, ή για να το θέσουμε διαφορετικά, η συνύπαρξη του παλμού με σταθερό υπόβαθρο ακτινοβολίας χαμηλής έντασης, στοχεύει στην ενίσχυση της διαμορφωτικής αστάθειας, η οποία έχει χαρακτηριστικά συναφή με αυτά των γραμμικών κυμάτων X, όπως αναφέρθηκε στο 4.2. Η ιδέα της συνύπαρξης CW με μονοδιάστατο ή πολυδιάστατο παλμό προέρχεται από τις εργασίες του Akhmediev [210] και μετέπειτα του Κομίνη [211]. Ακόμα, η ιδέα της χρήσης επιπέδου κύματος σαν γενεσιουργό αιτία δημιουργίας δομών τύπου-X προϋπήρξε της παρούσας εργασίας, αλλά ήταν περιορισμένης έκτασης και δεν αναφερόταν στην ύπαρξη μη-γραμμικότητας [209]. Η ύπαρξη μη-γραμμικότητας αναμένεται ότι θα ενισχύσει τον αυτό-περιορισμό του παλμού σε σχέση με τη διασπορά και θα δημιουργήσει μία πολύ πλουσιότερη δυναμική συμπεριφορά.

Η εξίσωση που διέπει την εξέλιξη του παλμού σε επίπεδο κυματοδηγό τύπου Kerr, είναι η δισδιάστατη NLS (βλέπε και 1.32). Κανονικοποιημένη και για κανονική διασπορά ($s=-1$), παίρνει τη μορφή

$$i \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} + |u|^2 u = 0 \quad (4.30)$$

, όπου $Z=z/Z_0$, $X=x/L_d$, $T=t/T_0$ και $u=(\gamma I_0 Z_0)^{1/2} U$, και $L_d = \beta_0 X_0^2$ είναι το μήκος περίθλασης, $Z_0 = 2\beta_0 X_0^2$ και $T_0 = X_0(\beta_0 \beta_2)^{1/2}$, όπου αν το θεωρήσουμε ως χαρακτηριστικό χρονικό εύρος του παλμού σημαίνει ότι $L_d = L_D$, δηλαδή τα μήκη περίθλασης και διασποράς είναι ίσα. Ως X_0 ορίζεται το χωρικό εύρος του παλμού, ενώ $\beta_0 = n\kappa_0$, με κ_0 τη σταθερά διάδοσης στο κενό και n το δείκτη διάθλασης. Να υπενθυμίσουμε ακόμα ότι $\gamma = \kappa_0 n_2$ και $L_{nl} = 1/\gamma I_0$, είναι το μήκος μη-γραμμικότητας. Σε αντίθεση με τα δύο προηγούμενα κεφάλαια ο συντελεστής «1/2» της διασποράς έχει απορροφηθεί στη κανονικοποίηση, (καθώς η εξίσωση είχε παρουσιαστεί με αυτή τη μορφή στη σχετική δημοσίευση [251], τη διατηρούμε και εδώ). Θα πρέπει πάλι να σημειώσουμε ότι το μοντέλο ενέχει αριθμό απλοποιήσεων. Καταρχάς αγνοήσαμε τα φαινόμενα ανώτερης τάξης και τη δημιουργία πλάσματος που είναι παράγοντας απωλειών. Θέλαμε να μελετήσουμε την αλληλεπίδραση των κύριων φαινομένων, επιδιώκοντας μια πιο «καθαρή» ματιά στη δυναμική τους για τη πιθανότητα γένεσης κυματοπακέτων Τύπου-X. Ακόμα, όμως, η θεώρηση μας στηρίζεται και στο γεγονός ότι οι παλμοί που δοκιμάσαμε τίθενται να έχουν εύρος της τάξης των 200fs και άνω, οπότε τα φαινόμενα ανώτερης τάξης δε προλαβαίνουν να επιδράσουν δραστικά στις μικρές αποστάσεις (τάξης κάποιων mm) που οι μορφές επιζούν. Κάτι ακόμα είναι πως λόγω της κανονικής διασποράς ο παλμός, σε κάθε περίπτωση, χάνει μεγάλο ποσοστό της έντασης του, έστω και αν αρχικά αυτοεστιάζει, περιορίζοντας τυχόν φαινόμενα ανώτερης τάξης και δημιουργία πλάσματος πιο συγκεκριμένα. Τέλος, σε αντίθεση με τη διάδοση στον αέρα, όπου το φαινόμενο της δημιουργίας πλάσματος είναι το κυριότερο αίτιο αφεστίασης, στο νερό και στα γυαλιά η χρονική διασπορά, όντας ισχυρότερη, είναι αυτή που παίζει το σημαντικότερο ρόλο. Αυτό ενισχύεται καθώς όταν αναφερόμαστε σε πολύ στενούς οπτικούς παλμούς της τάξης των femtoseconds. Έτσι η παράλειψη των όρων που περιγράφουν την επίδραση του

πλάσματος από τις εξισώσεις μας, δεδομένης της συνήθους διασποράς που σύντομα «προλαβαίνει» τη κυματική κατάρρευση είναι μία αποδεκτή απλοποίηση [179]. Μία επιπλέον παραδοχή είναι ότι διατηρούμε τη παρααξονική προσέγγιση, ενώ όπως αναφέραμε, υπάρχουν φαινόμενα κωνικής εκπομπής η οποία γίνεται υπό γωνία, ως προς τον άξονα διάδοσης. Είναι ευρέως παραδεκτό ότι η γωνία αυτή είναι μικρή, οπότε στη μεγάλη πλειοψηφία των μελετών η παρααξονική προσέγγιση είναι αυτή που χρησιμοποιείται εν γένει [6].

Όπως θα δούμε παρακάτω στις προσομοιώσεις, η δυναμική συμπεριφορά του παλμού εξαρτάται από την αλληλεπίδραση τριών φαινομένων, της περίθλασης, της διασποράς και του φαινομένου Kerr. Η επίδραση τους μπορεί να οριστεί από τα χαρακτηριστικά τους μήκη, τα οποία και χρησιμοποιούμε στη παρούσα μελέτη.

4.4.1 Μια «ενεργειακή» μελέτη

Για τη μελέτη χρησιμοποιούμε σύμφωνη (coherent) υπέρθεση γκαουσιανού κυματοπακέτου u_1 και επίπεδου κύματος u_{CW} , ίδιας συχνότητας, αλλά όχι απαραίτητα και ίδιας φάσης. Έτσι $u = u_1 + u_{CW}$, όπου για $Z=0$,

$$u_1 = A \exp\left(-\frac{X^2}{2W_X^2} - \frac{T^2}{2W_T^2}\right) \quad (4.31)$$

$$u_{CW} = a_{CW} A \exp(i\phi) \quad (4.32)$$

, όπου $A = \sqrt{4N/(N_c W_X W_T)}$, a_{CW} το σχετικό πλάτος του CW και ϕ η φάση του σε σχέση με το u_1 . Καταρχάς εκτελούμε μία «ενεργειακή μελέτη» για να προσδιοριστούν τα όρια, οι τιμές δηλαδή της ενέργειας πέρα από τις οποίες έχουμε αυτοεστίαση. Ξεκινάμε με τη περίπτωση ανώμαλης διασποράς και μέσω αυτής θα προσδιορίσουμε τα αντίστοιχα όρια για τη δίκη μας περίπτωση της ομαλής διασποράς. Στη τελευταία, η έντονη αυτοεστίαση οδηγεί συνήθως σε δαιχωρισμό του παλμού, κάτι αποτρεπτικό για τη δημιουργία τύπου-X παλμού. Έτσι, όπως αναφέρθηκε στη παράγραφο 4.1.1, για ανώμαλη διασπορά, ο παλμός οδηγείται σε κατάρρευση όταν $H < 0$. Τώρα θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε ποια θα πρέπει να είναι η ενέργεια του, παρουσία και του CW, για να συμβαίνει αυτό.

Για τη περίπτωση του κυκλικού παλμού, (οπότε και $W_X = W_T = W$), παρουσία επιπέδου κύματος η μάζα γίνεται $N_S = \iint |u + u_{CW}|^2 dXdT$ και καταλήγει

$$N + \Delta N + \iint |u_{CW}|^2 dXdT = N + 4a_{CW} N \cos(\phi) + \iint |u_{CW}|^2 dXdT, \quad (4.33)$$

όπου ο τελευταίος όρος είναι ουσιαστικά άπειρος, ή γενικά είναι πολύ μεγαλύτερος από τους άλλους δύο καθώς το εύρος του CW είναι πολύ μεγαλύτερο του παλμού. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι ο δεύτερος όρος προστίθεται στο παλμό αποκλειστικά και επηρεάζει τη εξέλιξη αυτού, ενώ το επίπεδο κύμα παραμένει ουσιαστικά αμετάβλητο. Έτσι η μάζα που θα πρέπει να καθορίζει την εξέλιξη του θα είναι πλέον

$$N_S = N + 4a_{CW} N \cos(\phi) \quad (4.34)$$

Παρομοίως, η Χαμιλτονιανή (παράγραφος 1.3.3) γίνεται

$$H = \frac{N}{W^2} - \frac{N^2}{4\pi W^2} - \frac{4a_{CW} N^2 \cos(\phi)}{3\pi W^2} - \frac{4a_{CW}^3 N^2 \cos(\phi)}{\pi W^2} - \frac{a_{CW}^2 N^2}{\pi W^2} - \frac{2a_{CW}^2 N^2 \cos^2(\phi)}{\pi W^2} + \iint |u_{CW}|^4 dXdT \quad (4.35)$$

Ο τελευταίος όρος είναι ξανά πολύ μεγαλύτερος από τους υπόλοιπους καθώς το CW εκτείνεται χωρικά και χρονικά πού περισσότερο συγκριτικά με τον παλμό. Λόγω της πολύ μεγαλύτερης μάζας (ενέργειας) του CW, θα μπορούσαμε να κάνουμε την υπόθεση ότι οι

ενεργειακοί όροι προερχόμενοι από την αλληλεπίδραση του παλμού με το CW ανήκουν και συμβάλουν στον παλμό. Έτσι και στη H , θα αφαιρέσουμε τον τελευταίο όρο και θα θεωρήσουμε ότι η νέα Χαμιλτονιανή που χαρακτηρίζει τον παλμό είναι:

$$H' = \frac{N}{W^2} - \frac{N^2}{4\pi W^2} - \frac{4a_{CW} N^2 \cos(\phi)}{3\pi W^2} - \frac{4a_{CW}^3 N^2 \cos(\phi)}{\pi W^2} - \frac{a_{CW}^2 N^2}{\pi W^2} - \frac{2a_{CW}^2 N^2 \cos^2(\phi)}{\pi W^2} \quad (4.36)$$

Οι παραπάνω υποθέσεις είναι περισσότερο ποιοτικές και δεν αναμένεται να αποδώσουν ένα αυστηρό κριτήριο για τη κατάρρευση, δίνουν όμως τιμές, από τις οποίες αν κινηθούμε σε μια γειτονική περιοχή πάνω ή κάτω από αυτές παρατηρούμε όντως κατάρρευση, ή διασπορά του παλμού. Επί παραδείγματι για $W=1$, $a_{CW}=0.1$ και $\phi=0$, η ελάχιστη τιμή για $H' \leq 0$ είναι $N \approx 7.53$, που σημαίνει περίπου $0.6N_c$. Δοκιμάζοντας στον κώδικα μας αρχική συνθήκη $N/N_c=0.7$ παρατηρήσαμε έντονη αυτοεστίαση και κατάρρευση, κάτι που δε συνέβη για τιμή 0.5.

Όπως έχει αναφερθεί από τον Luther η απαιτούμενη μάζα για αυτοεστίαση σε κανονική διασπορά είναι αρκετά μεγαλύτερη από το N_c [206]. Το πως ορίζεται η αυτοεστίαση στη κανονική διασπορά, είναι φαινομενολογικά κάτι όχι τόσο σαφές, καθώς δεν υπάρχει η κατάρρευση. Παρόλα αυτά παρατηρήσαμε ότι για ενέργεια πάνω από κάποια τιμή υπάρχει κάποια σχετικά έντονη αν και βραχύβια αυτοεστίαση που οδηγεί σε διαχωρισμό του παλμού στο χρόνο. Ακολουθήσαμε την ίδια διαδικασία με τη παραπάνω εργασία και καταλήξαμε σε παρόμοια συμπεράσματα για την απαιτούμενη μάζα. Επιπλέον, επαναλάβαμε τη διαδικασία και για ελλειπτικό παλμό, προσθέτοντας έτσι τα συμπεράσματα μας σε αυτή τη περίπτωση.

Η μέθοδος είναι εξίσου ποιοτική με την παραπάνω και συνοψίζεται στην υπόθεση ότι εφόσον είναι η κανονική διασπορά που αποτρέπει τη κατάρρευση, θα πρέπει η τιμή της ενέργειας για την οποία η απόσταση στην οποία έχουμε κατάρρευση (z_{SF}) γίνεται ίση με το μήκος διάδοσης που απαιτείται για να πέσει η μέγιστη ισχύς, (λόγω διασποράς), από την αρχική της τιμή στην οριακή για κατάρρευση P_c , να είναι η νέα κρίσιμη τιμή. Η απόσταση κατάρρευσης δίνεται από [213]

$$Z_{SF} = 0.367 \left[(p^{1/2} - 0.852)^2 - 0.0219 \right]^{-1/2}, \quad (4.37)$$

όπου $Z_{SF} = z_{SF} / Z_0$, $p = N_0 / N_c$. Η επίδραση της διασποράς στο παλμό δίνεται από τον τύπο, [214]

$$\frac{T_0}{T_{00}} = \left[1 + 2\sqrt{2}\phi_{\max} \frac{z}{L_D} + \left(1 + \frac{4}{3\sqrt{3}}\phi_{\max}^2 \right) 4 \frac{z^2}{L_D^2} \right]^{1/2}, \quad (4.38)$$

όπου T_{00} και T_0 είναι το αρχικό χρονικό εύρος του παλμού και η τιμή του κατά τη διάρκεια της διάδοσης, ενώ $\phi_{\max} = Z/L_{nl}$. Με την κατάλληλη κανονικοποίηση $\kappa_0 n_2 Z_0 I_0 = |\mu_0|^2$ (βλέπε παρόν κεφάλαιο και παράγραφο 4.1.2) καταλήγουμε πως $\phi_{\max} = 2(N/N_c)(Z/Z_0)$ και η σχέση (4.38) διαμορφώνεται

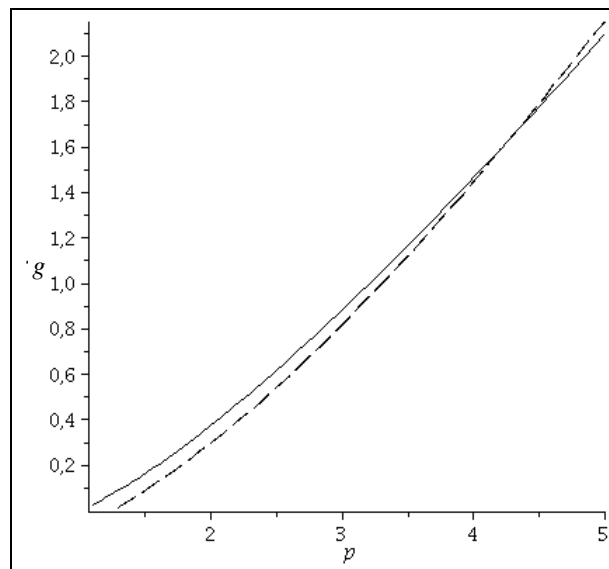
$$\frac{P_0}{P} = \left\{ 1 + 4\sqrt{2} \frac{N_0}{N_c} \frac{z^2}{Z_0^2} 2g + \left[1 + \frac{16}{3\sqrt{3}} \left(\frac{N_0}{N_c} \right)^2 \frac{z^2}{Z_0^2} \right] 4(2g)^2 \frac{z^2}{Z_0^2} \right\}^{1/2} \quad (4.39)$$

με $g = X_0^2 \beta_0 |\beta_2| / 2T_0^2 = L_d / 2L_D$ ο λόγος που συγκρίνει την ισχύ της διασποράς και της περίθλασης και χρησιμοποιείται εδώ αντί του L_d / L_D για σύγκριση με παλαιότερες εργασίες [205-207, 215]. Στη πραγματικότητα το $L_d / 2$ είναι το μήκος Rayleigh. Έπειτα αντικαθιστούμε το λόγο των ισχύων με το λόγο των μαζών. Αυτό φαίνεται αυθαίρετο, αλλά όπως προηγούμενοι συγγραφείς χρησιμοποιούν την ισχύ (μάζα) του παλμού σε δύο χωρικές

διαστάσεις, και φαίνεται πως η κρίσιμη μάζα είναι 4π , ενώ η διασπορά είναι διαταραχή, εμείς έχουμε την ενέργεια να διατίθεται σε δύο διαστάσεις, η μία χρονική. Έστω και αν η ενέργεια διατηρείται φυσικά σταθερή, η ποιοτική ομοιότητα του αποτελέσματος της ισχύος σε δύο χωρικές διαστάσεις με αυτό της ενέργειας στο χωροχρονικό μας πεδίο μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε το λόγο των ισχύων με N_0/N_c . Έπειτα, εξισώνοντας το Z με το Z_{SF} στις σχέσεις (4.38) και (4.39) καταλήγουμε στη

$$g \approx \frac{0.928}{A} \left[0.762p + \sqrt{0.581p^2 - 2.155A(1-p^2)B} \right], \quad (4.40)$$

όπου $A = 1 + 0.415p^2/B$ και $B = (\sqrt{p} - 0.852)^2 - 0.0219$. Η παραπάνω σχέση συνδέει τις τιμές της διασποράς και της περίθλασης με αυτή της μάζας για την οριακή περίπτωση όπου η αυτοεστίαση τείνει να υπερισχύσει. Για μικρότερες τιμές του p υπερισχύει η διασπορά ή/και η περίθλαση, ενώ για μεγαλύτερες υπερισχύει η αυτοεστίαση, κάτι που σημαίνει απλά ότι ο παλμός είναι πιθανό να υποστεί χρονικό διαχωρισμό. Η σχέση η οποία υπολογίστηκε χωρίς να εξαιρέσουμε κάποιο όρο παρίσταται γραφικά στο σχήμα 4.6 με τη γραμμή. Η καμπύλη είναι πολύ κοντά στην αντίστοιχη του Luther [207].



Σχήμα 4.6: Σχέση του λόγου μήκους περίθλασης (:2) προς διασποράς με τη σχετική μάζα του παλμού, που σηματοδοτεί το όριο δεξιά του οποίου υπερισχύει η αυτοεστίαση. Γραμμή: Κυκλικός παλμός. Διακεκομμένη: Παλμός ελλειπτικότητας $e=3$.

Στη περίπτωση ελλειπτικού παλμού $W_x \neq W_T$ και η παραπάνω σχέση τροποποιείται. Αυτό συμβαίνει διότι οι ελλειπτικοί παλμοί χρειάζονται μάζα μεγαλύτερη της N_c για να αυτοεστιάσουν. Αυτό έχει δείχθει για ανώμαλη διασπορά, αλλά αναλόγως ισχύει και στη κανονική. Η απαιτούμενη για κατάρρευση μάζα N_c^{el} ενός ελλειπτικού παλμού σε ανώμαλη διασπορά δίνεται από το παρακάτω εμπειρικό τύπο [216],

$$N_c^{el} \approx [0.4h(e) + 0.6]N_c, \quad (4.41)$$

όπου $h(e) = (e + 1/e)/2$, με $e = W_T/W_x$ η ελλειπτικότητα.

Εξετάζοντας τη περίπτωση $W_T=3$, $W_x=1$, για κανονική πλέον διασπορά, βάση της (4.41), οι σχέσεις (4.37) και (4.39) μετασχηματίζονται στις

$$Z_{SF} = 0.367 \left[(0.889p^{1/2} - 0.852)^2 - 0.0219 \right]^{-1/2} \quad (4.42)$$

$$\frac{P_0}{P} = \frac{1}{3} \left\{ 3 + 20\sqrt{2} \frac{N_0}{N_c} \frac{z^2}{Z_0^2} 2g + 36 \left[1 + \frac{400\sqrt{3}}{729} \left(\frac{N_0}{N_c} \right)^2 \frac{z^2}{Z_0^2} \right] 4(2g)^2 \frac{z^2}{Z_0^2} \right\}^{1/2} \quad (4.43)$$

, από τις οποίες με παρόμοια διαδικασία καταλήγουμε στη

$$g \approx \frac{0.928}{A} \left[0.334p + \sqrt{0.112p^2 - 2.155A(1 - 0.623p^2)B} \right], \quad (4.44)$$

όπου $A = 1 + 0.080p^2/B$ και $B = (0.889\sqrt{p} - 0.852)^2 - 0.0219$. Στο σχήμα 4.6 η σχέση αυτή αναπαρίσταται με τη διακεκομμένη καμπύλη. Γίνεται φανερό ότι απαιτείται περισσότερη ενέργεια για αυτοεστίαση του ελλειπτικού παλμού, κάτι αναμενόμενο, αν και το σχήμα δείχνει πως αυτό αντιστρέφεται από κάποια τιμή και μετά. Αυτό είναι βέβαια περίεργο, αλλά και οι σχέσεις με τις οποίες δουλέψαμε είναι σχέσεις προσεγγιστικές και εμπειρικές, αν και αποδεκτές, που δεν ισχύουν για κάθε τιμή της ενέργειας. Για παράδειγμα η σχέση (4.38) δεν είναι αξιόπιστη ακόμα και για $N/N_c=3$ και σίγουρα όχι για παραπάνω. Τα αποτελέσματα της σύντομης αυτής ανάλυσης δε φιλοδοξούμε να παρέχουν απολύτως αυστηρές ποσοτικά τιμές της μάζας του παλμού, που δύνανται να οδηγήσουν σε εστίαση, διαχωρίσιμο, διασπορά ή περίθλαση, αλλά μπορούν να μας δίνουν την αίσθηση για το ποια φαινόμενα πρόκειται να υπερισχύσουν και για ποιες περιοχές τιμών της ενέργειας.

Να σημειώσουμε ότι η «ελλειπτικότητα» του παλμού είναι κάτι το σχετικό, καθώς δεν αφορά δύο χωρικές διαστάσεις, αλλά μία χωρική και τη χρονική, όπου για να καταλήξουμε στην ανομοιότητα ($W_T=3$, $W_X=1$) κανονικοποιήσαμε το χρόνο όχι με το χρονικό εύρος T_0 , αλλά με ένα παράγοντα $T'_0 = X_0(\beta_0\beta_2)^{1/2}$, όπου $T'_0 = T_0/3$. Παρομοίως, το μήκος διασποράς που αναφέρεται στις παραπάνω σχέσεις και στο σχήμα 4.6 δεν είναι το σχετιζόμενο με το (μεγαλύτερο) χρονικό εύρος, αλλά με το T'_0 και παρατίθεται και για λόγους σύγκρισης με το «κυκλικό» παλμό. Ο λόγος που επιλέξαμε ελλειπτικό παλμό σαν το κύριο παράδειγμα θα δούμε παρακάτω πως σχετίζεται με την ελάττωση της ισχύος της διασποράς, κάτι που για δεδομένη μάζα παλμού και CW αποτρέπει, σε κάποιες περιπτώσεις το χρονικό διαχωρισμό.

Βάσει όλων των παραπάνω επιχειρούμε να επιλέξουμε τις αρχικές συνθήκες των αριθμητικών «πειραμάτων» και προσπαθούμε να εξηγήσουμε τα αποτελέσματά τους. Έτσι, ξεκινώντας από τη περίπτωση ανώμαλης διασποράς, παρουσία CW δεδομένων χαρακτηριστικών, και την απαίτηση κατάρρευσης ($H' \leq 0$), μπορεί κανείς να εκτιμήσει τη μάζα N του παλμού. Από τη σχέση (4.34) μπορεί τότε να υπολογίσει τη συνολική μάζα (ενέργεια) N_S υπεύθυνη για την αυτοεστίαση. Έπειτα από το σχήμα 4.6 μπορούμε να εκτιμήσουμε την αντίστοιχη N_S που απαιτείται για αυτοεστίαση (και τελικά υπερίσχυση της διασποράς) σε κανονική διασπορά για κυκλικό ή ελλειπτικό παλμό. Γνωρίζοντας αυτή τη τιμή και για το δεδομένο CW, μπορούμε να βρούμε το αρχικό N του παλμού, σε κανονική πλέον διασπορά.

4.4.2 Αριθμητική διερεύνηση

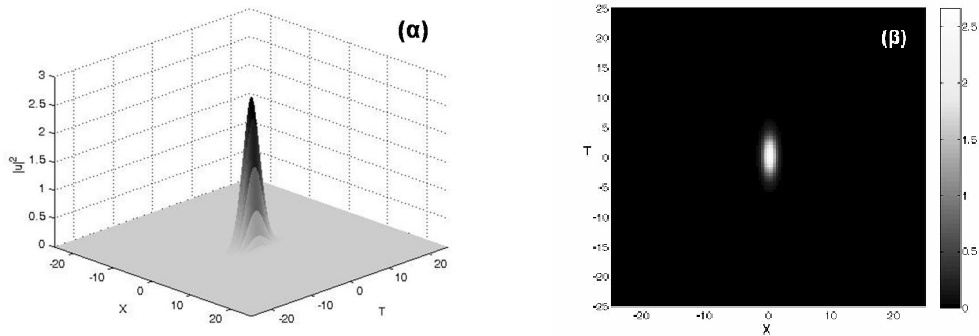
Χρησιμοποιήσαμε τον κώδικα που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1, που είναι παραλλαγή αυτού που χρησιμοποιήθηκε για τα Κεφάλαια 2 και 3 (Appendix A). Είναι ψευδοφασματικός κώδικας που χρησιμοποιεί τη split-step μέθοδο. Κάναμε πολλές προσομοιώσεις για διάφορες περιπτώσεις γκαουσιανού παλμού και επίπεδου κύματος και ο κώδικας διατηρεί την ενέργεια, αλλά και άλλες διατηρήσιμες ποσότητες του συστήματος, τη Χαμιλτονιανή και την ορμή. Πέραν τούτου, επιλέξαμε ευρύ υπολογιστικό πλέγμα και επίσης δημιουργήσαμε τεχνητά

απορροφητικά όρια στις διαστάσεις X και T για την αποφυγή ανακλάσεων, αντίστοιχα με το μονοδιάστατο των προηγούμενων Κεφαλαίων, όπως

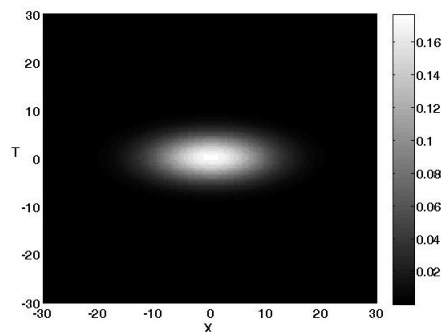
$$(1 - \sec h((1/2)(|X| - X_{\max}))) (1 - \sec h((1/2)(|T| - T_{\max}))),$$

όπου X_{\max} και T_{\max} είναι τα όρια του υπολογιστικού πλέγματος. Η εξίσωση που λύνουμε είναι η κανονικοποιημένη δισδιάστατη NLS, όπως στην (4.30) και η αρχική μορφή του παλμού και του CW δίνονται από τις (4.31-32). Όπως αναφέραμε νωρίτερα, το μοντέλο περιγράφει τη διάδοση σε επίπεδο κυματοδηγό, περιορισμένου στη Y διάσταση. Παρομοίως, η εξίσωση θα μπορούσε να περιγράφει τη διάδοση ακτίνας σε ελεύθερο μέσο, αντικαθιστώντας τη χρονική διάσταση T με το Y .

Καταγράψαμε ποικίλα αριθμητικά «πειράματα», που βοήθησαν στην εξαγωγή των συμπερασμάτων μας για τη δυνατότητα δημιουργίας κυματοπακέτου Τύπου- X . Παρακάτω περιγράφονται μερικά μόνο, όπου ο παλμός παρουσιάζει ελλειπτικότητα, καθώς φάνηκε πως αυτό ευνοεί τη δημιουργία τέτοιων κυματοπακέτων και αναστέλλει πιθανό χρονικό διαχωρισμό. Έτσι λοιπόν στα περισσότερα παραδείγματα έχουμε επιλέξει $W_X=1$ και $W_T=3$. Προς χάριν ενός παραδείγματος, θεωρούμε επίπεδο κυματοδηγό από AlGaAs ο οποίος για $\lambda_0=1.55\mu m$ έχει, γραμμικό δείκτη διάθλασης $n=3.34$, μη-γραμμικό συντελεστή Kerr $n_2=1.5 \times 10^{-13} cm^2/W$ και τιμή χρονικής διασποράς $\beta_2=1.35 \times 10^{-24} s^2 m^{-1}$. Ο παλμός έχει εγκάρσιο χωρικό εύρος $X_0=10.5\mu m$ και άρα χρονικό παράγοντα κανονικοποίησης $T'_0=45 fs$. Το πραγματικό χρονικό εύρος είναι $T_0=135 fs$ που αντιστοιχεί σε $T_{FWHM} \approx 225 fs$ και τέλος υπολογίζεται ότι $Z_0=3mm$. Ο αρχικός παλμός, χωρίς παρουσία CW και για $N=2N_c$ ($I_0 \approx 14.7 W / \mu m^2$ δεδομένου ότι ορίσαμε το πλάτος $A=|u_0| = \sqrt{\frac{4N}{N_c W_X W_T}}$) παρίσταται στο σχήμα 4.7 τρισδιάστατα και σε κάτοψη.



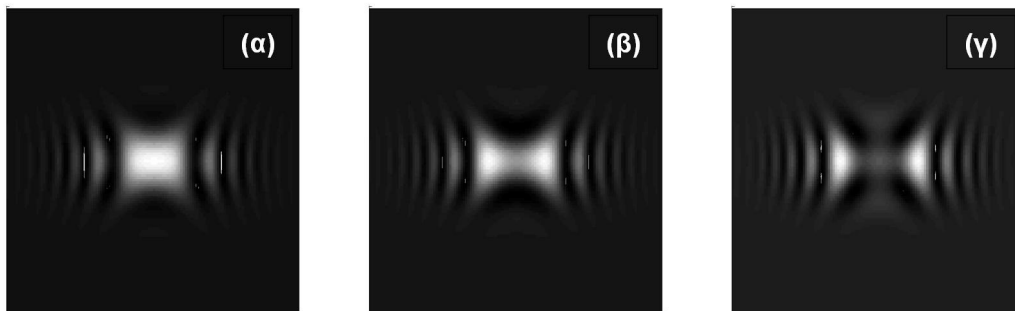
Σχήμα 4.7: Αρχικός γκαουσιανός παλμός ($Z=0$) με $W_X=1$, $W_T=3$, για $N=2N_c$. Στο (β) φαίνεται σε κάτοψη. Οι μονάδες είναι κανονικοποιημένες και τα φυσικά όρια των σχημάτων είναι, για το X , από -263 έως $263\mu m$, και για το T , από -1.13 έως $113ps$.



Σχήμα 4.8: Ένταση του παλμού του Σχ.4.7 στο $Z=5$ ($z=15mm$) απουσία μη-γραμμικότητας. Ο παλμός διασκορπίζεται.

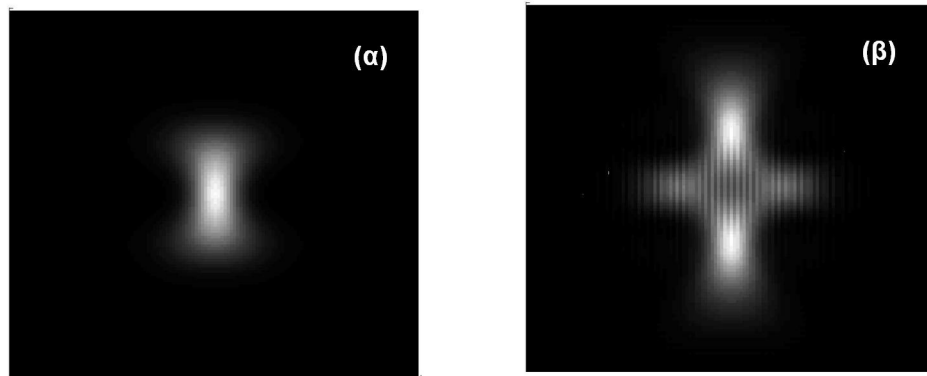
Δοκιμάζουμε καταρχάς τη διάδοση όταν δεν υπάρχει μη-γραμμικότητα. Το αναμενόμενο αποτέλεσμα είναι περίθλαση και διασπορά, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.8. Η περίθλαση υπερισχύει της διασποράς και ο παλμός γρήγορα διασπείρεται κυρίως στη X διάσταση. Αυτό συμβαίνει διότι ξεκινά με μικρότερο, σχετικά, εγκάρσιο εύρος με αποτέλεσμα το μήκος περίθλασης να είναι μικρότερο από αυτό της διασποράς, η οποία είναι εν τέλει ασθενέστερη.

Έπειτα δοκιμάζουμε τι αποτέλεσμα έχει στην εξέλιξη του παλμού η παρουσία CW, ως υποβάθρου χαμηλής έντασης, ξανά απουσία μη-γραμμικών φαινομένων. Για το παλμό που εξετάσαμε, προσθέτουμε επίπεδο κύμα με $a_{CW}=0.1$. Δοκιμάσαμε διάφορες τιμές της φάσης και παρακάτω παραθέτουμε τρεις χαρακτηριστικές περιπτώσεις. Όπως δείχνει και η σχέση (4.34) η αρχική διαφορά φάσης μπορεί να προσθέσει ή να αφαιρέσει «μάζα» σε αυτή του παλμού. Αυτό φαίνεται πως επηρεάζει την αρχική του εξέλιξη. Στο σχήμα 4.9 φαίνεται το προφίλ του παλμού στο $Z=5$ για τρεις τιμές της αρχικής φάσης. Τα τρία αποτελέσματα δεν είναι τόσο διαφορετικά μεταξύ τους. Σε όλες τις περιπτώσεις υπερισχύει η περίθλαση και σκορπίζει την ενέργεια κυρίως στη X διάσταση, όπως εξάλλου γίνεται και στην άλλη γραμμική περίπτωση του σχήματος 4.8. Αυτό που έχει μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι το πως διατάσσεται η ενέργεια, που πλέον συμπληρώνει κάποιες υπερβολές σχηματίζοντας κάποιες μορφές σαν «X». Ακόμα και απουσία μη-γραμμικότητας το CW ενισχύει αυτές τις συγκεκριμένες μορφές λόγω της διπλοδιασπαρτικής φύσης του μέσου και θυμίζει τη διάδοση των (αναλλοιώτων) γραμμικών κυμάτων με μορφή «X» σε τέτοια μέσα. Εδώ βέβαια οι μορφές που σχηματίζονται δεν είναι ιδιαίτερα εντοπισμένες και ήδη στο στιγμιότυπο αυτό είναι πολύ μικρής έντασης.



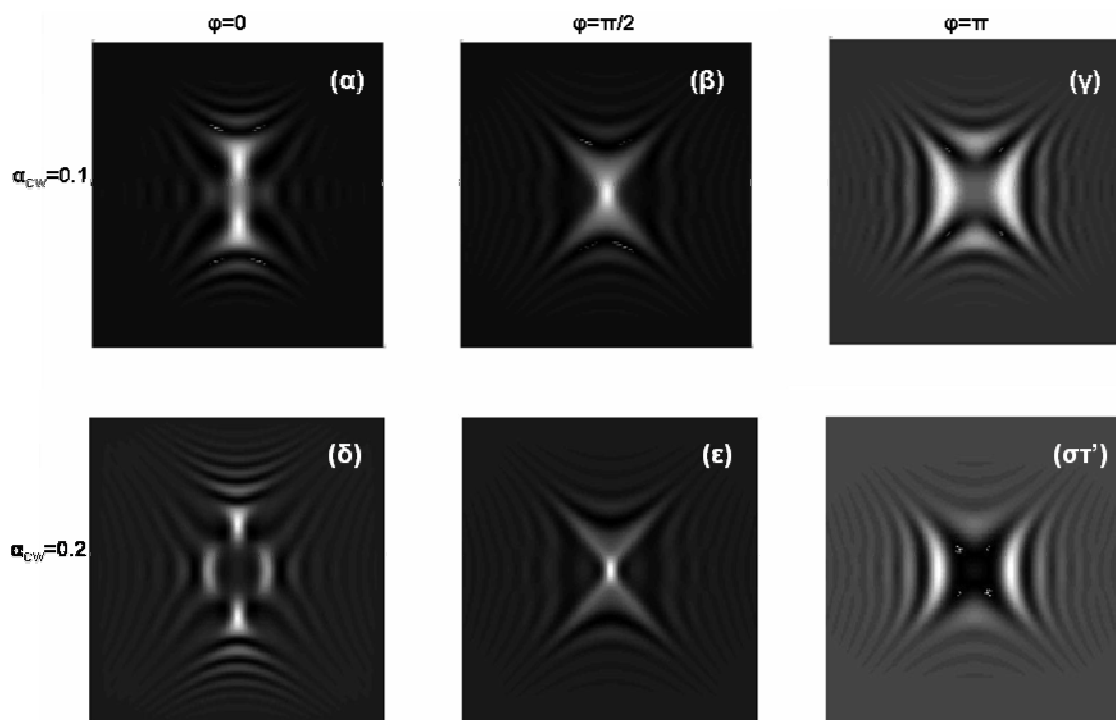
Σχήμα 4.9: Προφίλ έντασης εξόδου ($Z=5$) για παλμό με $N=2N_c$ και CW με $a_{CW}=0.1$ και α) $\phi=0$, β) $\phi=\pi/2$, γ) $\phi=\pi$ για γραμμική περίπτωση. Οι άξονες είναι όπως του Σχ.4.8 και η ένταση ανάλογη.

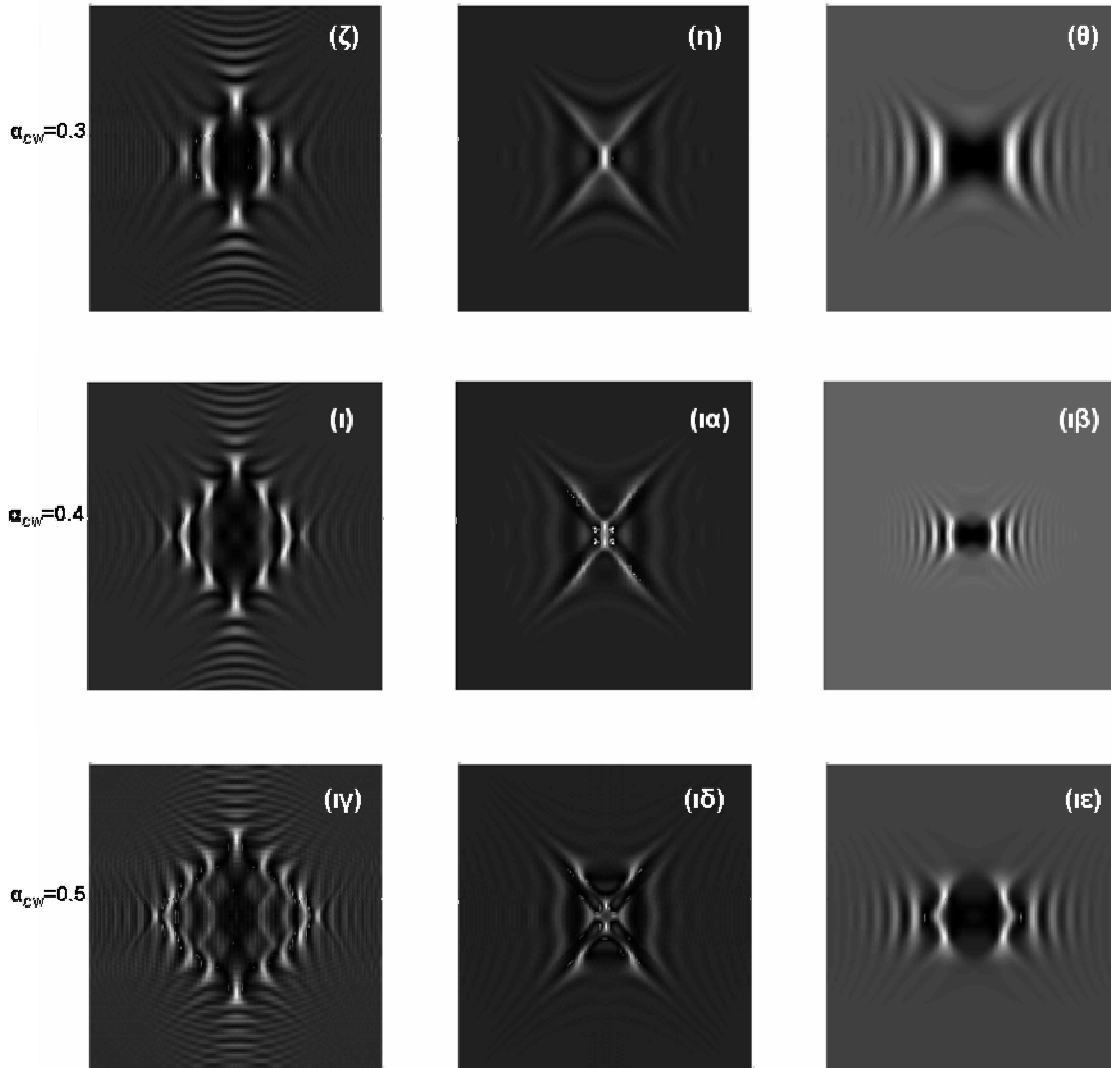
Συνεχίζουμε εξετάζοντας το αποτέλεσμα που έχει η αύξηση της έντασης του παλμού, επίσης χωρίς την παρουσία επίπεδου κύματος, αλλά πλέον σε μη-γραμμικό μέσο. Παρατηρήθηκε ότι για μικρή σχετικά ένταση, π.χ. τέτοια ώστε $N=2N_c$, ο παλμός διασπείρεται, αν και τώρα η διασπορά φαίνεται να υπερισχύει της περίθλασης, καθώς η μη-γραμμικότητα τείνει να συγκεντρώσει την ενέργεια στο μέσο του παλμού και δημιουργεί ένα τέτοιο chirp, ώστε η κανονική διασπορά να ισχυροποιείται. Έτσι ο παλμός σκορπίζει ξανά, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.10α για $Z=5$. Ανατρέχοντας στη παράγραφο 4.4.1 και στο σχήμα 4.6, συμπεραίνουμε ότι χρειάζεται μάζα N μεγαλύτερη από $2N_c$ για να υπάρξει κάποια εμφανής αυτοεστίαση. Για παράδειγμα, όταν $N=4N_c$ ο παλμός πράγματι παρουσιάζει αρχικά αυτοεστίαση, περίπτωση ανάλογη με το σχήμα 4.2 για τον κυκλικό πλμό. Έπειτα όμως και εντελώς ανάλογα, υφίσταται χρονικό διαχωρισμό και να σκορπίσει λίγο αργότερα με την ένταση του να πέφτει σε επίπεδα ανάλογα με τη γραμμική περίπτωση του Σχ.4.8. Το αποτέλεσμα της διάδοσης φαίνεται στο σχήμα 4.10β.



Σχήμα 4.10: Προφίλ ένταση εξόδου ($Z=5$) για α) $N=2N_c$ -διασπορά, β) $N=4N_c$ -διαχωρισμός για παλμό ανάλογο του Σχ.4.7 σε μέσο με μη-γραμμικότητα και χωρίς επίπεδο κύμα. Οι άξονες είναι όπως του Σχ.4.8 και η ένταση ανάλογη.

Το επόμενο βήμα είναι να δοκιμάσουμε την επίδραση στο παλμό επίπεδου κύματος παρουσία μη-γραμμικότητας. Στο σχήμα 4.11 φαίνονται τα αποτελέσματα στη διάδοση όταν το CW έχει φάση 0 , $\pi/2$ ή π , και α_{CW} να κυμαίνεται από 0.1 έως 0.5 , ενώ ο παλμός έχει σε κάθε περίπτωση ένταση $N=2N_c$. Το συμπέρασμα είναι ότι η δημιουργία των κυματοπακέτων Τύπου X ευνοείται όταν η διαφορά φάσης με το CW είναι γύρω στο $\pi/2$.





Σχήμα 4.11: Προφίλ έντασης εξόδου ($Z=5$) για γκαουσιανό παλμό με $N=2N_c$ και λοιπά χαρακτηριστικά όπως Σχ.4.7, παρουσία CW διαφόρων τιμών έντασης (οριζόντιες γραμμές) και φάσης (κατακόρυφες στήλες). Οι άξονες είναι ξανά (σε κανονικοποιημένες μονάδες) για το X και το T από -30 έως 30 .

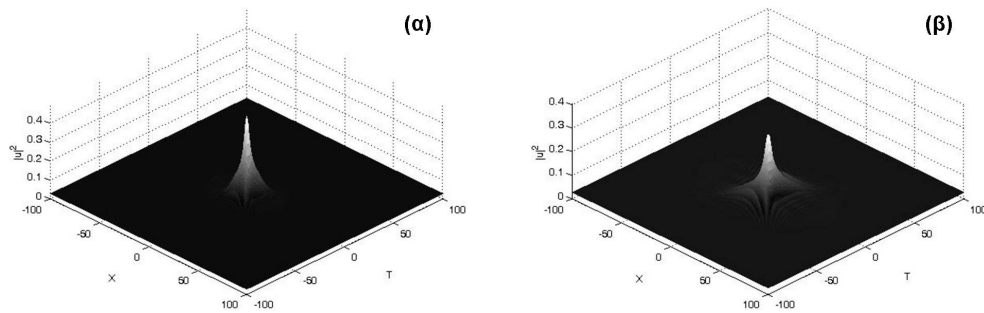
Για να γίνουν κατανοητά όσα φαίνονται στο Σχ.4.11 ανατρέχουμε στη μελέτη της παραγράφου 4.4.1, όπου υποθέσαμε ότι η κρίσιμη μάζα (ενέργεια) για την εξέλιξη του παλμού καθορίζεται και από τη μορφή του CW. Έτσι για $\phi = 0$, υπάρχει ένα ποσό ενέργειας που προστίθεται σε αυτή του παλμού. Η αρχική ενέργεια του παλμού ($2N_c$) δεν είναι αρκετή για να τον αναγκάσει σε έντονη αυτοεστίαση που για κανονική διασπορά ακολουθείται από χρονικό διαχωρισμό, όπως εξάλλου φάνηκε και στο Σχ.4.10a. Το επίπεδο κύμα, ακόμα και με $\alpha_{CW}=0.1$ διαμορφώνει την ενέργεια του όπως στη σχέση (4.34) σε $Ns=2.8N_c$ που είναι πιο πάνω από το όριο αυτοεστίασης που υπολογίσαμε στο σχήμα 4.6 για ελλειπτικότητα $e=3$. Το αποτέλεσμα είναι εστίαση και διαχωρισμός, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Για ακόμα υψηλότερη ένταση του CW ο διαχωρισμός είναι πιο γρήγορος (δ), ενώ φαίνεται πως η παρουσία του υποβάθρου τροφοδοτεί τα εναπομείναντα «νήματα» να διαχωριστούν περαιτέρω οδηγώντας το παλμό σε πολλαπλή νηματοποίηση (ζ , i , iv).

Αντίθετα για $\phi = \pi$ (Σχ.4.11 γ , σ' , θ , ib , ie) ο παλμός φαίνεται να διαχωρίζεται και να διασκορπίζεται κυρίως στη X διάσταση συμπληρώνοντας κάποιες υπερβολές και

σηματίζοντας, κάπως αδιόρατα, χαμηλής έντασης κυματώσεις σε «X» διάταξη. Ξανά, είναι η επίδραση του CW που καθορίζει αυτή την εξέλιξη. Καθώς βρίσκεται σε απόλυτη διαφορά φάσης από το παλμό, ο τελευταίος καταλήγει να χάνει ενέργεια, έτσι ώστε για $a_{CW}=0.1$, $N_S=1.6N_c$ ενώ για $a_{CW}=0.5$, $N_S=0$! Αυτό βέβαια δε σημαίνει ότι εκμηδενίζεται η ενέργεια του παλμού, αλλά μάλλον δείχνει και τα όρια ισχύος των σχέσεων, στις οποίες καταλήξαμε κάνοντας κάποιες ποιοτικές υποθέσεις. Παρότι αριθμητικά δε παίρνουμε κάποια πληροφορία, ακόμα και η απλή σχέση για το N_S αποτελεί ένα δείκτη της εξέλιξης του παλμού, όπως φάνηκε στις προσομοιώσεις. Το αποτέλεσμα είναι ένας παλμός με ουσιαστικά χαμηλότερη ένταση, που δεν εστιάζει, και βρίσκεται σε περιβάλλον με περίθλαση ισχυρότερη της χρονική διασποράς, όποτε και δικαιολογημένα διασπείρεται, κυρίως στη εγκάρσια διάσταση. Η εμφανής «προτίμηση» στην ενεργειακή διάταξη σε «X» μορφές ενισχύεται από την παρουσία του CW, όπως είχε εξάλλου φανεί και στο Σχ.4.9 για τη γραμμική περίπτωση, που δεν είναι τόσο διαφορετική, καθώς ο παλμός εδώ είναι μικρής σχετικά έντασης.

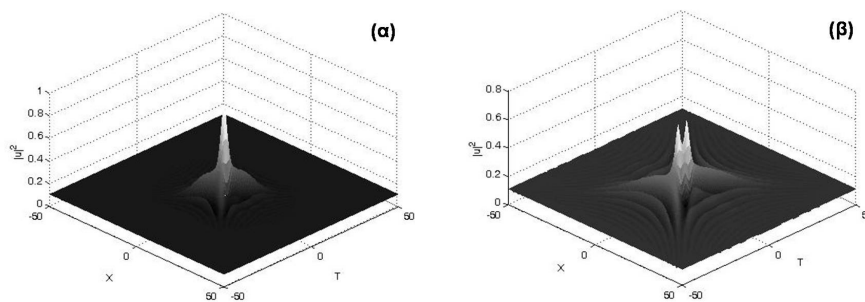
Η ευνοϊκότερη αρχική συνθήκη από αυτές που δοκιμάσαμε, για τη δημιουργία παλμών «Τύπου X» είναι για CW με $\phi = \pi/2$. Υπό συνθήκες, τα κυματοπακέτα που δημιουργούνται διατηρούνται συγκεντρωμένα και ευκρινή για αποστάσεις πέραν του $Z=15$, που σημαίνει πάνω από $50mm$. Αν και στη περίπτωση αυτή το N_S δεν είναι μεγαλύτερο από το αρχικό N του παλμού, το CW φαίνεται να παρέχει το κατάλληλο υπόβαθρο που σε συνδυασμό με τη μη-γραμμικότητα και τη διαμορφωτική αστάθεια κατανέμει την ενέργεια του με τρόπο που ομοιάζει περισσότερο από κάθε άλλη από τις περιπτώσεις που ελέγξαμε με τα γραμμικά κύματα X. Το αποτέλεσμα είναι να δημιουργούνται μορφές με κωνικές «ουρές» που αν και μικρότερης έντασης από το γκαουσιανό παλμό είναι συγκεντρωμένες και διακριτές, ενώ ανθίστανται της περίθλασης και της χρονικής διασποράς καλλίτερα από κάθε άλλη κυματομορφή που δοκιμάστηκε. Παρόλα αυτά σημασία έχει και η ένταση του CW. Έτσι στα σχήματα 4.11(β, ε, η), οι «X» μορφές που έχουν δημιουργηθεί στο $Z=5$ είναι εμφανείς, όμως στα σχήματα 4.11(κ, ν), όπου $a_{CW}=0.4$ και 0.5 αντίστοιχα, παρατηρείται διαχωρισμός. Αυτό συμβαίνει λόγω της υψηλότερης ενέργειας με την οποία το CW τροφοδοτεί το παλμό που τον οδηγεί σε εντονότερη εστίαση και τελικά χρονικό διαχωρισμό. Αυτό είναι κάτι που η απλοϊκή μας σχέση για το N_S δε μπορεί να συλλάβει. Να σημειώσουμε ακόμα ότι η επίτευξη δημιουργίας αυτών των (έστω και όχι μακρόβιων) κυματοπακέτων «Τύπου X» οφείλεται και στην ελλειπτικότητα του αρχικού παλμού. Ένας κυκλικός παλμός είναι απλώς στενότερος χρονικά, κάτι όμως που ενισχύει την επίδραση της διασποράς επάνω του. Παρατηρήθηκε ότι παλμοί με μήκος διασποράς κοντά σε αυτό της περίθλασης τείνουν να διαχωρίζονται ευκολότερα, καθώς η αυτοεστίαση σε συνδυασμό με την ισχυρότερη κανονική διασπορά επιβάλουν ραγδαίο χρωματικό διαχωρισμό του φασματικού περιεχομένου τους (βλέπε κεφάλαιο 4.1 για μια φυσική εξήγηση).

Στο Σχ.4.12 φαίνεται μία τρισδιάστατη άποψη της έντασης του κυματοπακέτου και του CW για τη περίπτωση του Σχ.4.11β. Συγκεκριμένα στο (α) φαίνεται η μορφή του για $Z=5$, ενώ στο (β) έχει προχωρήσει μέχρι το $Z=10$ ($30mm$). Η αρχική ένταση έχει περιοριστεί, αλλά η ενέργεια παραμένει συγκεντρωμένη στην κωνική μορφή του σχήματος και εντοπισμένη στο χώρο και στο χρόνο. Διασπείρεται αργά κατά μήκος των κωνικών «ουρών» και υπερβολών με άξονα αυτόν του T και παραμένει αναγνωρίσιμο πέραν του $Z=15$.



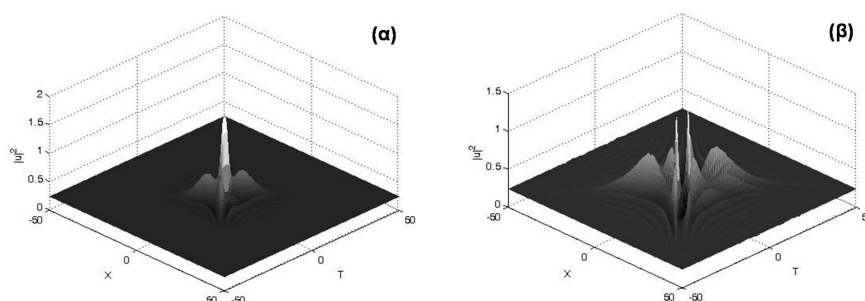
Σχήμα 4.12: Στιγμιότυπα της εξέλιξης παλμού με $N=2N_c$ παρουσία CW με $\alpha_{CW}=0.1$ και $\phi = \pi/2$, όπου α) $Z=5$, όπως στο Σχ.4.11β και β) $Z=10$.

Για υψηλότερη ένταση του CW, ο παλμός φαίνεται να διαμορφώνεται γρηγορότερα σε κωνική μορφή και να διατηρεί υψηλότερη ένταση. Στο Σχ.4.13α φαίνεται η περίπτωση του Σχ.4.11ε, ακριβώς για $Z=5$. Σε σχέση με το Σχ.4.12α έχει διπλάσια ένταση. Παρόλα αυτά, φαίνεται πως η διαρκής «υποστήριξη» του παλμού από το υπόβαθρο έχει τελικά αποτέλεσμα το χρονικό διαχωρισμό του, όπως αυτός φαίνεται να ξεκινά στο Σχ.4.13β, για $Z=10$.



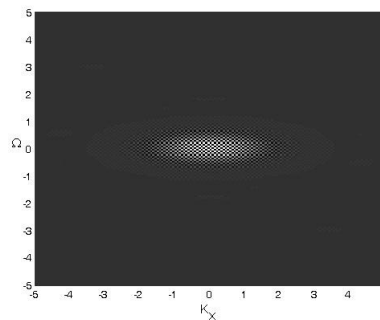
Σχήμα 4.13: Στιγμιότυπα της εξέλιξης παλμού με $N=2N_c$ παρουσία CW με $\alpha_{CW}=0.2$ και $\phi = \pi/2$, όπου α) $Z=5$, όπως στο Σχ.4.11ε και β) $Z=10$ όπου παρατηρείται διαχωρισμός.

Για ακόμα εντονότερο CW, όπως στο Σχ.4.11η, το κυματοπακέτο φθάνει ακόμα πιο ευδιάκριτο και έντονο στο $Z=5$, όπως φαίνεται και στη τρισδιάστατη αναπαράσταση στο Σχ.4.14α. Όμως δεν «επιζεί» για τόσο πολύ όσο οι παλμοί στα δύο προηγούμενα σχήματα. Σύντομα διαχωρίζεται και διευρύνεται σε μεγάλη έκταση, χρονικά και στη εγκάρσια διάσταση (Σχ.4.13β).

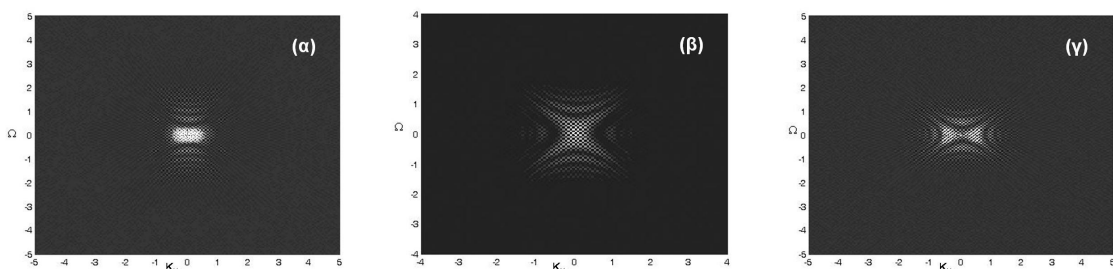


Σχήμα 4.14: Στιγμιότυπα της εξέλιξης παλμού με $N=2N_c$ παρουσία CW με $\alpha_{CW}=0.3$ και $\phi = \pi/2$, όπου α) $Z=5$, όπως στο Σχ.4.11η και β) $Z=10$, ο κεντρικός λοβός έχει ήδη διαχωριστεί.

Εξετάζοντας έπειτα το φάσμα του κυματοπακέτου, όπως αυτό διαμορφώνεται για διαφορετικές τιμές της φάσης του CW λαμβάνουμε μία ακόμα φαινομενολογική εξήγηση της σταθερότητας που επιδεικνύει όταν $\phi = \pi/2$. Στο Σχ. 4.15 παρίσταται το φάσμα του αρχικού παλμού. Η αναπαράσταση έγινε εύκολα χρησιμοποιώντας αλγόριθμο του MATLAB για διδιάστατο μετασχηματισμό Fourier. Το φάσμα του γκαουσιανού παλμού δίνεται για λόγους σύγκρισης, ενώ αμέσως παρακάτω, στο Σχ. 4.16 δίνονται οι φασματικές κατανομές για τις περιπτώσεις του Σχ. 4.11α-γ. Το $a_{CW}=0.1$ και η φάση είναι $0, \pi/2$ και π αντίστοιχα. Ο λόγος που επιλέξαμε τη μικρή αυτή ένταση του CW είναι ότι στο $Z=5$ και για $\phi = \pi/2$ ο παλμός δεν έχει διασπαστεί. Θα μπορούσαμε να είχαμε δείξει και τα φάσματα και για τις υψηλότερες εντάσεις, αλλά για μικρότερο Z . Τα αποτελέσματα είναι παρόμοια. Το φάσμα στο Σχ. 4.16β λοιπόν παρουσιάζει μεγάλη ομοιότητα με τη σχέση διασποράς του Σχ. 4.4β. Η διάδοση βρίσκεται στο $Z=5$ και η ενέργεια έχει ήδη διαταχθεί πάνω και γύρω στις ευθείες $K_x \sim \Omega$ και στις υπερβολές που περικλείουν, οι οποίες έχουν ως άξονα αυτό της συχνότητας Ω . Το φάσμα στα (α) και (γ) διατηρεί κάποια ομοιότητα με διάταξη μορφής X, αλλά διαφέρει αρκετά από τη προαναφερθείσα σχέση διασποράς και το φάσμα των γραμμικών κυμάτων X. Στο (α) η ενέργεια φαίνεται να είναι πιο «στριμωγμένη» κατά μήκος της διάστασης του χρόνου, ενώ στο (γ) δείχνει τάση να εκταθεί στο χώρο (X). Αυτά φαίνονται και από τη διάταξη της ενέργειας στο X-T για $Z=5$, όπως παρίσταται στο Σχ. 4.11.



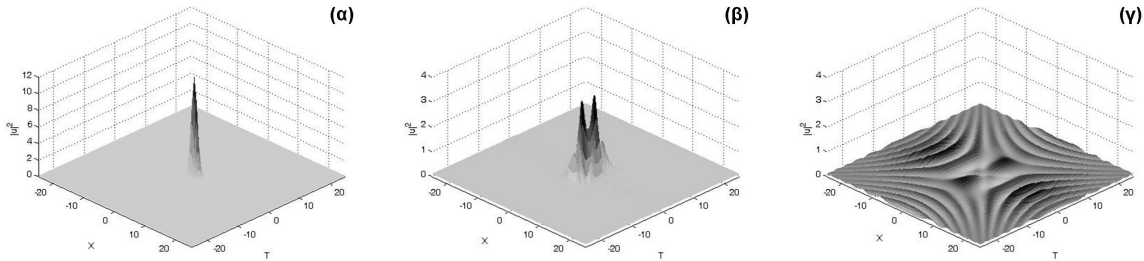
Σχήμα 4.15: Φασματική κατανομή του γκαουσιανού παλμού του Σχ. 4.7 ($Z=0$). Οι μονάδες του κυματάριθμου K_x και της συχνότητας Ω είναι κανονικοποιημένες και αντιστοιχούν σε $0.6\mu m^{-1}$ και $140THz$ ανά μονάδα αντίστοιχα.



Σχήμα 4.16: Φασματική κατανομή της u για τις περιπτώσεις του Σχ. 4.11α-γ ($Z=5$). Οι μονάδες του κυματάριθμου K_x και της συχνότητας Ω είναι κανονικοποιημένες και αντιστοιχούν σε $0.6\mu m^{-1}$ και $140THz$ ανά μονάδα αντίστοιχα.

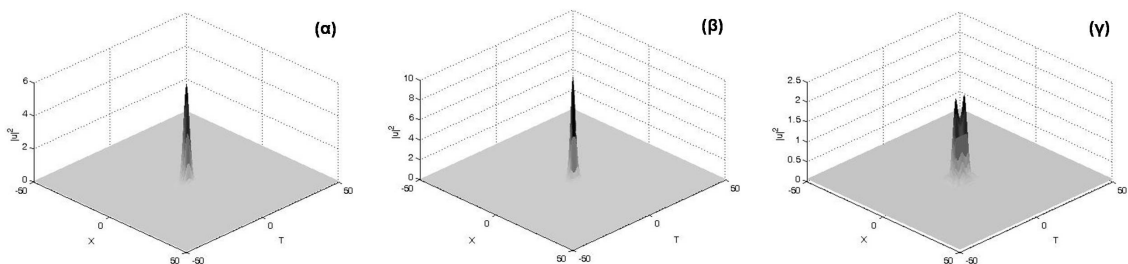
Στο Σχ. 4.11 φαίνεται πως ακόμα και για $\phi = \pi/2$, όσο αυξάνουμε την ένταση του CW, τόσο πιο εύκολο είναι ο παλμός να διαχωριστεί χρονικά, αντί να σχηματίσει εντοπισμένο κυματοπακέτο. Αυτό βέβαια σχετίζεται με την αρχική μάζα N του παλμού, αλλά και από τη παρουσία του CW. Αυξάνοντας το N του παλμού μπορεί να έχουμε παρόμοια εξέλιξη, ακόμα και για μικρό a_{CW} . Εξάλλου από το σχήμα 4.6 πληροφορούμαστε ότι ο εν λόγω ελλειπτικός

παλμός με $N > 2.5N_c$ δύναται να αυτοεστιάσει, οπότε (πιθανότατα) να υποστεί διαχωρισμό. Στο Σχ. 4.17 παρίσταται η εξέλιξη παλμού με $N=3N_c$ για επίπεδο κύμα με $a_{CW}=0.1$, $\phi = \pi/2$. Όπως υποθέσαμε, ο παλμός εστιάζει και υφίσταται γρήγορα διαχωρισμό, ώσπου τελικά η ενέργεια του διασκορπίζεται συμπληρώνοντας τα «αυλάκια» που καθορίζονται από τη σχέση διασποράς.

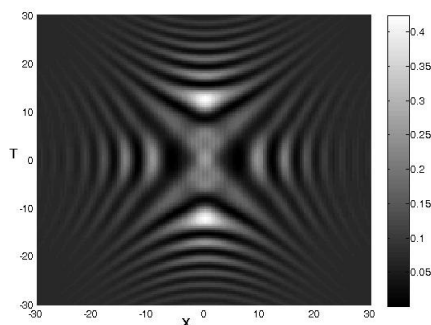


Σχήμα 4.17: Στιγμιότυπα της εξέλιξης παλμού με $N=3N_c$ παρουσία CW με $a_{CW}=0.1$ και $\phi = \pi/2$. Ο παλμός α) ξεκινάει με μεγάλη ένταση ($Z=0$), β) σύντομα διαχωρίζεται ($Z=0.75$) και γ) διασπείρεται ($Z=5$).

Σαν ένα τελευταίο παράδειγμα της αξίας της απλής μας μελέτης στη παράγραφο 4.4.1, εξετάζουμε και τη δυνατότητα αυτοεστίασης ακόμα και παρουσία επίπεδου κύματος με $\phi = \pi$. Δοκιμάζουμε το συχνό μας παράδειγμα του $a_{CW}=0.1$ και δεχόμενοι ότι το N_s πρέπει να είναι κοντά ή και λίγο παραπάνω από $2.5N_c$ και υπολογίζοντας ότι για τη περίπτωση της ανώμαλης διασποράς παρουσία του εν λόγω CW η απαιτούμενη μάζα για $H' \leq 0$ (σχέση 4.36) δεν είναι το γνωστό $N_c=4\pi$, αλλά πάνω από $N_c = 22$, καταλήγουμε ότι η απαιτούμενη μάζα για τη κανονική διασπορά πρέπει να είναι $N > 4.4N_c$. Στο σχήμα 4.18 παρίσταται η εξέλιξη του παλμού με $N=5.5N_c$. Επιλέξαμε τη τιμή αυτή για να είναι πιο εμφανή τα αποτελέσματα. Έτσι, ο παλμός ξεκινά να εστιάζει και σύντομα διαχωρίζεται. Στο $Z=5$, που φαίνεται στο Σχ. 4.19 έχουν παραμείνει δύο λοβοί ισχυρότεροι από τις υπόλοιπες κυματώσεις. Φαίνεται πάντως καθαρά πως τα φαινόμενα που υπερिσχύουν είναι η μη-γραμμικότητα και η διασπορά, σε αντίθεση με το Σχ. 4.11γ, όπου υπερिσχύει η περίθλαση.



Σχήμα 4.18: Στιγμιότυπα της εξέλιξης παλμού με $N=5.5N_c$ παρουσία CW με $a_{CW}=0.1$ και $\phi = \pi$. Ο παλμός α) ξεκινάει με μεγάλη ένταση ($Z=0$), β) εστιάζει ($Z=0.35$) και γ) αρχίζει να διαχωρίζεται και διασπείρεται ($Z=1.25$).



Σχήμα 4.19: Συνέχεια του προηγούμενου σχήματος για $Z=5$ και συγκρίσιμο με τις περιπτώσεις για $\phi = \pi$ του Σχ. 4.11. Η ενέργεια συγκεντρώνεται κυρίως σε υπερβολές, με άξονα αυτό του T .

4.5 Συμπεράσματα

Παρουσιάσαμε μία προσπάθεια δημιουργίας κυματοπακέτων τύπου X από αρχικό δισδιάστατο γκαουσιανό παλμό, μέσω αλληλεπίδρασης με επίπεδο κύμα. Παρατηρήσαμε ότι η ενέργεια του παλμού, όπως και η ενέργεια του CW παίζουν κομβικό ρόλο στην εξέλιξη του, όπως άλλωστε αναμενόταν, αλλά οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται για τη διερεύνηση της κατάρρευσης στην ανώμαλη διασπορά ή της αυτοεστίασης με πιθανό αποτέλεσμα το διαχωρισμό στη κανονική διασπορά, πρέπει να τροποποιηθούν ώστε να περιλαμβάνουν τη συμμετοχή του CW σε αυτή την εξέλιξη. Μια τέτοια τροποποίηση επιχειρήσαμε εδώ και βάση αυτής επιλέξαμε τα αριθμητικά μας «πειράματα» κάποια από τα οποία παρουσιάστηκαν και στο Κεφάλαιο αυτό.

Σημαντικότερο ίσως ρόλο από τη ενέργεια του CW φάνηκε πως παίζει η αρχική του φάση σχετικά με το παλμό. Ενώ η συμφασική αλληλεπίδραση οδηγεί συνήθως σε «υπερτροφοδοσία» του παλμού και τελικά σε χρονικό διαχωρισμό του, και ενώ οι μεγάλες διαφορές φάσης του αφαιρούν αρκετή ενέργεια ώστε η περίθλαση να παίζει το κυρίαρχο ρόλο και να διαλύει το παλμό, η διαφορά φάσης $\pi/2$ φάνηκε η ιδανική για δημιουργία κυματοπακέτων που ομοιάζουν φυσικά και φασματικά με τα κύματα X και ανθίστανται της διαφοράς περισσότερο από άλλες αριθμητικές απόπειρες που αναφέραμε. Παρόλα αυτά τα κυματοπακέτα παραμένουν βραχύβια και μετά από κάποιες δεκάδες χιλιοστά υποκύπτουν (κυρίως) στη χρονική διασπορά.

Επιθυμούμε να συνεχίσουμε τη μελέτη, προσεγγίζοντας το πρόβλημα τη συνύπαρξης και αλληλεπίδρασης παλμού με CW με μια νέα πληρέστερη σχέση διασποράς, που θα προέρχεται από τη παρουσία και των δύο. Αυτό ελπίζουμε να επιδιώξουμε στο κοντινό μέλλον.

Κεφάλαιο 5

Σύμφωνη αλληλεπίδραση δισδιάστατων παλμών παρουσία επίπεδου κύματος και χωροχρονική μετάθεση

Το τελευταίο αυτό Κεφάλαιο είναι ουσιαστικά μία «εφαρμογή» όσων ειπώθηκαν στο Κεφάλαιο 4. Αφορά δισδιάστατους χωροχρονικούς μη-γραμμικούς παλμούς παρουσία επίπεδου κύματος χαμηλής έντασης, ενώ η έμφαση δίνεται πάλι στη περίπτωση της ομαλής διασποράς. Πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα ασχολούμαστε με τις σύμφωνες αλληλεπιδράσεις τέτοιων παλμών, όμοιας συχνότητας. Εκτελώντας μία, κατά βάση, αριθμητική μελέτη φαίνεται πως ανάλογα με την ενέργεια τους, τη σχετικής τους χωρική απόσταση, τη φάση τους αλλά βέβαια και τα χαρακτηριστικά του υποβάθρου, οι παλμοί δύνανται να διασπαρθούν, να εστιάσουν και να εξελιχθούν αυτόνομα, ή να συνενωθούν με πιθανό αποτέλεσμα τη δημιουργία δύο νέων διακριτών λοβών, που συμπίπτουν πλέον στην εγκάρσια διάσταση, αλλά είναι μετατοπισμένοι χρονικά, ενώ έχουν και διακριτά φασματικά περιεχόμενα.

5.1 Γενικά περί αλληλεπίδρασης χωροχρονικών παλμών και ακτίνων

Στο Κεφάλαιο 1 αναφερθήκαμε στις αλληλεπιδράσεις σολιτονικών παλμών, χρονικών, είτε χωρικών και πως το αποτέλεσμα τους εξαρτάται από τη σχετική φάση, αν οι παλμοί είναι «σύμφωνοι». Σύμφωνοι είναι οι παλμοί όταν έχουν ίδια ή κοντινή κεντρική συχνότητα και όπως έχει περιγραφεί μπορεί να έλκονται (ίδια φάση), να απωθούνται (αντίθετη φάση) ή να εμπλακούν σε μια πιο περίπλοκη σχετική κίνηση, έλξης-άπωσης ανάλογα με τη σχετική τους φάση [1, 38]. Οι γενικές αυτές αρχές που διέπουν τις μη-γραμμικές αλληλεπιδράσεις δεν εξαρτώνται από το είδος του μέσου, ούτε από τις διαστάσεις που εμπλέκονται. Η απλούστερη όμως περίπτωση είναι οι μονοδιάστατοι (1+1D) παλμοί σε μέσο με Kerr μη-γραμμικότητα. Οι αλληλεπιδράσεις, ή συγκρούσεις, τους είναι πλήρως ελαστικές με την έννοια ότι διατηρούν το πλήθος των εμπλεκομένων παλμών, ενώ σε περίπτωση ασύμφωνης σύγκρουσης, οι παλμοί διατηρούν την ενέργεια τους, τη ταχύτητα και τη διεύθυνση διάδοσης τους. Να υπενθυμίσουμε ότι η συγκεκριμένη περίπτωση περιγράφεται και αναλυτικά από τη Μέθοδο Αντίστροφης Σκέδασης.

Από την άλλη όμως, για περισσότερες από μία εγκάρσιες διαστάσεις δεν υπάρχει ακριβής περιγραφή των αλληλεπιδράσεων. Το ίδιο φυσικά ισχύει όταν σε μία εγκάρσια διάσταση προστεθεί η χρονική, έτσι μιλάμε για διάδοση διδιάστατων παλμών (2+1D) σε επίπεδο κυματοδηγό, ή ακτίνων (2+1D) και παλμών (3+1D) σε μαζικό μέσο. Έχουμε ήδη αναφέρει στο Κεφάλαιο 4 ότι για μέσο τύπου Kerr η NLS δε δίνει ευσταθείς λύσεις, όμως ακόμα και για μέσο με κορέσιμη μη-γραμμικότητα όπου μπορούν να υποστηριχθούν τρισδιάστατοι χωροχρονικοί παλμοί (“light bullets”), οι οποίοι μάλιστα προσομοιάζουν αρκετά με τα 1+1D σολιτόνια στις αλληλεπιδράσεις τους, ο πλούτος των φαινομένων σε αυτές τις αλληλεπιδράσεις δεν έχει ανάλογο στη μονοδιάστατη περίπτωση. Έτσι, αντίθετα με τα 1D σολιτόνια, που όταν συγκρούονται απλώς περνούν το ένα μέσα από το άλλο, δύο ή και περισσότεροι χωροχρονικοί παλμοί (2D ή 3D) σε μέσο με εστιάζουσα μη-γραμμικότητα, δύνανται να συνενωθούν (εάν είναι αρκετά κοντά) σε ένα κυματοπακέτο το οποίο έπειτα να αυτοεστιάσει. Η συμπεριφορά αυτή παρατηρήθηκε πρώτη φορά στη αριθμητική δουλειά των Landman et al.[233], ενώ παρόμοια συμπεριφορά είχε ανακαλυφθεί και για δύο κύματα που μοντελοποιούνται από ζεύγος NLS [234].

Η ακριβής περιγραφή των αλληλεπιδράσεων είναι κάτι ελλιπές ακόμα και σήμερα, όχι μόνο λόγω της πολυπλοκότητας των φαινομένων, αλλά και της μη-ολοκληρωσιμότητας της πολυδιάστατης NLS. Αντίθετα στη μονοδιάστατη περίπτωση, πέρα από την ευθεία αναλυτική της επίλυση μέσω της IST, μπορεί κανείς να επιστρατεύσει και μία πληθώρα άλλων προσεγγιστικών μεθόδων, όπως η Άμεση Μέθοδος Διαταραχών και η Μεταβολική Μέθοδος. Ακόμα όμως και η τελευταία, που θεωρείται η πλέον στοιχειώδης, δε μπορεί να εφαρμοστεί με επιτυχία στην αλληλεπίδραση 2D και 3D παλμών καθώς οι διαδικασίες της σύνθεσης, εστίασης και διάσπασης σε πολλούς «νηματοειδείς» παλμούς αποκλείουν τη διατήρηση του σχήματος ή της ενέργειας των παλμών αυτών.

Σημαντικός αριθμός εργασιών, ως επί το πλείστον αριθμητικών, αλλά και πειραματικών, έχει δημοσιευτεί για μέσο με κορέσιμη μη-γραμμικότητα και σημαντική πρόοδος έχει επιτευχθεί στη κατανόηση των αλληλεπιδράσεων. Σε αυτές τις εργασίες τα κυματοπακέτα αναφέρονται συχνά σα «μονάδες φωτός» (light cells) καθώς στις αλληλεπιδράσεις τους μπορεί να συνενώνονται, να περνά το ένα μέσα από το άλλο, ή όντας αντίθετης φάσης να σκεδιάζονται απωθητικά διατηρώντας όμως το σχήμα τους σαν δύο μπάλες του μπιλιάρδου [235]. Καθώς τα κυματοπακέτα βρίσκονται σε κοινό δυναμικό έχει δειχθεί ότι μπορεί να εμπλακούν σε δέσμιες καταστάσεις (bound states) όπου μπορούν να περιστρέφονται το ένα γύρω από το άλλο [236, 237], όπως ένα σωματίο σε κεντρικό δυναμικό. Επειδή όμως η σχετική τους φάση δε μπορεί να μένει σταθερή και το δυναμικό εξαρτάται από αυτή, η κατάσταση είναι ασταθής. Ευσταθέστερα αποδεικνύονται συμπλέγματα περισσότερων από

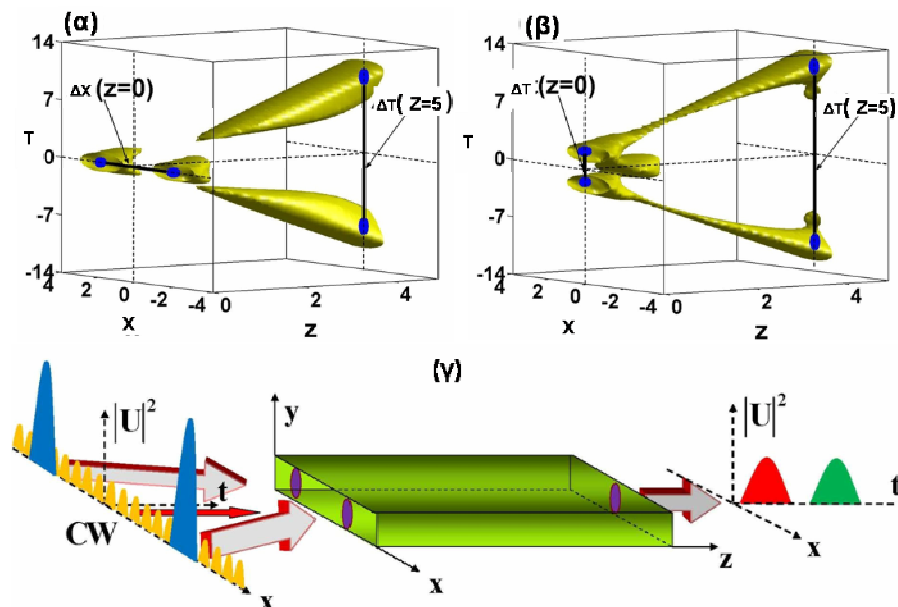
δύο σολιτονικών παλμών που ξεκινούν την αλληλεπίδραση σχηματίζοντας δακτυλίδι και έχοντας κυκλικά μεταβαλλόμενη φάση. Το αποτέλεσμα είναι γένεση στροφορμής που βοηθά στη δυναμική ευστάθεια του συμπλέγματος, κατά τρόπο ανάλογο με τις ακτίνες τύπου «βραχιολιού» (necklace beams). Οι τελευταίες είναι δισδιάστατα χωρικά κυματοπακέτα που έχουν παρατηρηθεί από νωρίς πειραματικά [238], είναι αρκετά ευσταθείς, με τη έννοια ότι διατηρούνται για αρκετό χρόνο και μπορεί να δημιουργηθούν από αριθμό ακτίνων τοποθετημένων κυκλικά, ή από το σπάσιμο μιας δακτυλιοειδούς σολιτονικής δίνης σε αριθμό αλληλεπιδρώντων φωτεινών νημάτων [239]. Τέλος, ένα μέσο με κορέσιμη μη-γραμμικότητα μπορεί να υποστηρίξει τη διάδοση δισδιάστατων χωρικών διανυσματικών σολιτονίων, ασύμφωνα συζευγμένων, κατ' αναλογία με τα χρονικά διανυσματικά σολιτόνια με τα οποία ασχοληθήκαμε στο Κεφάλαιο 2. Εντυπωσιακοί σχηματισμοί έχουν παρατηρηθεί από την αριθμητική επίλυση συζευγμένων δισδιάστατων NLS, συνιστούν αποτελέσματα που έχουν στηριχθεί και πειραματικά [240, 241].

Όπως είπαμε, οι εργασίες που αφορούν αλληλεπιδράσεις σε μέσο τύπου Kerr δεν είναι τόσο πολλές, αλλά ακόμα και στις περισσότερες από τις προαναφερθείσες εργασίες λείπει κάποια ανάλυση του ρόλου της ισχύος των παλμών, κάτι ιδιαίτερα σημαντικό ακόμα και σε μέσα με κορέσιμη μη-γραμμικότητα. Οι εργασίες των Bergé et al. συμπληρώνουν μερικώς αυτό το κενό. Στις εργασίες αυτές ακολουθείται μία ποιοτική αλλά Φυσικά ορθή μελέτη που συνδέει την εξέλιξη των αλληλεπιδράσεων δισδιάστατων χωρικών κυματοπακέτων με τη φάση τους, την ισχύ τους και τη μεταξύ τους απόσταση. Η μελέτη αυτή υποστηρίζεται από αριθμητικές προσομοιώσεις, όπου φαίνεται πως ανάλογα με τις αρχικές τιμές των παραπάνω μεγεθών οι παλμοί δύνανται να διασπαρθούν, να συνενωθούν και να διασπαρθούν στη συνέχεια, να εστιάσουν μέχρι κατάρρευσης αυτόνομα, ή να συσσωματωθούν δημιουργώντας νέο κυματοπακέτο, «αμάλγαμα», το οποίο εξελίσσεται δυναμικά αυτοεστιάζοντας [242]. Η μελέτη αυτή επαναλήφθηκε και για τη περίπτωση ασύμφωνης αλληλεπίδρασης ακτίνων, που μοντελοποιείται με σύστημα ισάριθμων NLS [243].

Στο παρόν Κεφάλαιο ακολουθούμε τα ίδια βήματα εξετάζοντας τη περίπτωση χωροχρονικών (δισδιάστατων παρόλα αυτά) κυματοπακέτων που αλληλεπιδρούν σε μέσο τύπου Kerr, όπου όμως χαρακτηρίζεται από κανονική διασπορά, ενώ συνυπάρχουν με σταθερή ακτινοβολία υποβάθρου με τη μορφή επίπεδου κύματος. Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο Κεφάλαιο, μία φαινομενολογική και αριθμητική μελέτη είναι πιο δύσκολη για τη κανονική διασπορά, καθώς η εξέλιξη των παλμών σπάνια είναι τόσο ξεκάθαρη όσο η κατάρρευση, που παρατηρείται για ανώμαλη διασπορά, περίπτωση στην οποία εστιάζουν όλες οι προαναφερθείσες εργασίες. Παρόλα αυτά ακολουθώντας μια απλή ανάλυση και αριθμητική μελέτη πιστεύουμε ότι εξάγονται κάποια συμπεράσματα για την αλληλεπίδραση και εξέλιξη κυματοπακέτων και για τη κανονική διασπορά. Πέρα από την ενέργεια (μάζα) και τη φάση των παλμών, εξετάζεται και η πιθανή σχετική τους γωνία (πάντα μικρή για να παραμένουμε στη παρααξονική προσέγγιση) και βέβαια τα χαρακτηριστικά του υποβάθρου, που όπως φάνηκε και στο Κεφάλαιο 4 είναι ήσσονος σημασίας για την εξέλιξη των κυματοπακέτων. Όπως είχε φανεί στην εργασία των Snyder et al. [244], οι παλμοί ανάλογα με τη ισχύ τους και τη γωνία προσβολής τους δύνανται να συσσωματωθούν ή να δημιουργήσουν δύο άλλους ή και τρεις άλλους παλμούς (ή ας πούμε καλλίτερα νημάτια²). Παρόμοια αποτελέσματα βρίσκουμε και στη παρούσα περίπτωση, αλλά με το CW να είναι ένας επιπλέον ρυθμιστικός παράγοντας μπορούμε να πετύχουμε μία εξ' ολοκλήρου οπτική διαχείριση των φωτεινών παλμών, χωρίς τη παρέμβαση ειδικά κατασκευασμένων στοιχείων (π.χ. φωτονικοί κρύσταλλοι).

² Στη ξένη βιβλιογραφία οι παλμοί ή ακτίνες που έχουν ίδια συχνότητα, είναι μέρη δηλαδή του ίδιου πεδίου μπορεί να αναφέρονται σαν “beamlets” ή “light cells”, ενώ τα «προϊόντα» της αλληλεπίδρασης σαν αυτά ή και σαν “filaments”.

Ένα από τα πιο εντυπωσιακά αποτελέσματα είναι, θεωρούμε, η δυνατότητα «μετάθεσης» των αρχικών παλμών από την αρχική εγκάρσια χωρική τους μετατόπιση σε δύο αναγνωρίσιμους και πλήρως διακριτούς φωτεινούς λοβούς, οι οποίοι είναι μετατοπισμένοι πλέον χρονικά. Οι λοβοί αυτοί έχουν διακριτά φασματικά περιεχόμενα με αποτέλεσμα να κινούνται απομακρυνόμενοι μεταξύ τους. Το φαινόμενο αυτό συνοψίζεται στο Σχ. 5.1(α) και (γ). Στο σχήμα παρουσιάζονται επιφάνειες σταθερής έντασης κατά μήκος της διάδοσης, σε κανονικοποιημένες μονάδες. Συγκεκριμένα στο Σχ. 5.1(α) δύο χωρικά μετατοπισμένοι παλμοί εισέρχονται ($Z=0$) σε επίπεδο κυματοδηγό με εστιάζουσα μη-γραμμικότητα και κανονική διασπορά, αλληλεπιδρούν και δημιουργούν δύο λοβούς, (ή νημάτια) ευρισκόμενα στο κέντρο της αρχικής τους απόστασης, έχοντας σημαντική χρονική μετάθεση. Παρατηρείται δηλαδή «χωροχρονική μετάθεση». Κάτι αντίστοιχο δεν συμβαίνει στο Σχ. 5.1(β), όπου δύο παλμοί εισέρχονται στο ίδιο σημείο με μικρή σχετικά χρονική μετάθεση, ώστε να αλληλεπιδράσουν και τελικά δημιουργούν δύο επίσης χρονικά μετατοπισμένα νημάτια. Και στις δύο περιπτώσεις οι παλμοί συνυπάρχουν με επίπεδο κύμα χαμηλής έντασης. Στο Σχ. 5.1(γ) αναπαρίσταται περίπτωση σαν του (α). Τα διαφορετικά χρώματα στους παλμούς εισόδου και εξόδου συμβολίζουν τη διαφορά στις συχνότητες.



Σχήμα 5.1: Ισοϋψείς επιφάνειες στο 80% της μέγιστης έντασης (α και β) και σχηματική αναπαράσταση χωροχρονικής μετάθεσης (γ). Ειδικότερα: α) Γένεση δύο διακριτών νηματιών στον άξονα του χρόνου ύστερα από αλληλεπίδραση συμφασικών παλμών (περίπτωση Σχ5.12θ). β) Η αλληλεπίδραση όμοιων παλμών χρονικά μετατοπισμένων. γ) Δύο φωτεινοί παλμοί εισέρχονται ταυτόχρονα υπό γωνία, από χωρικά διαχωρισμένες συμμετρικές θέσεις, σε οπτικό κρύσταλλο με αποτέλεσμα να εξέρχονται δύο παλμοί, σε χρονική ακολουθία, από το κέντρο της πλευράς εξόδου του κρυστάλλου.

Η μελέτη που ακολουθεί βασίζεται φορμαλιστικά και Φυσικά σε όσα ειπώθηκαν στο Κεφάλαιο 4. Έτσι έννοιες όπως χωροχρονική διαμορφωτική αστάθεια, κυματική κατάρρευση, χρονικός διαχωρισμός, κρίσιμη μάζα, θεώρημα Virial και η χρήση των διατηρήσιμων ποσοτήτων θεωρούνται γνωστές. Αν και ο σκοπός πλέον δεν είναι η γένεση κυμάτων «Τύπου X», το όμοιο Φυσικό υπόβαθρο καθιστά τη παρουσία τέτοιων σχηματισμών πανταχού παρούσα. Όσα περιλαμβάνονται στο παρόν Κεφάλαιο παρουσιάστηκαν εν μέρη σε δύο διεθνή συνέδρια, και δημοσιεύτηκαν σε Proceedings της SPIE, καθώς και στο περιοδικό JOSA B [252, 254].

5.2 Αλληλεπίδραση χωροχρονικών κυματοπακέτων παρουσία CW

Στο κεφάλαιο αυτό καταγράφεται η αριθμητική μελέτη της αλληλεπίδρασης δισδιάστατων γκαουσιανών παλμών και επίπεδου κύματος (CW) σε επίπεδο κυματοδηγό ($D=2$). Το κύριο θέμα των δημοσιευμένων εργασιών ήταν η διερεύνηση της δυνατότητας συνένωσης τους και εν συνεχεία χωροχρονικής τους μετάθεσης, και ο σκοπός αυτός έχει διατηρηθεί και εδώ, αλλά παρουσιάζουμε μερικές ακόμα περιπτώσεις αλληλεπίδρασης.

Για την αναπαράσταση του προβλήματος και την αριθμητική προσομοίωση του χρησιμοποιούμε την ίδια, με το Κεφάλαιο 4, $(2+1)D$ μη γραμμική εξίσωση του Schrödinger. Χρησιμοποιούμε μία εξίσωση για την προσομοίωση δύο γκαουσιανών παλμών, σε αντίθεση με τη μελέτη του μονοδιάστατου προβλήματος στα Κεφάλαια 2 και 3, διότι και τα δύο κυματοπακέτα έχουν την ίδια κεντρική συχνότητα, ενώ η διαφορά στις γωνίες εισόδου (δηλαδή η διαφορά των εγκάρσιων κυματάρθρων των παλμών) έχει κρατηθεί σε χαμηλές τιμές. Σε κάθε λοιπόν περίπτωση, μιλάμε για παλμούς που αλληλεπιδρούν «σύμφωνα», οπότε και η σχετική τους φάση επηρεάζει το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης τους. Τα παραδείγματα και τα συμπεράσματα που ακολουθούν έγιναν με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, όπως και για την μελέτη διάδοσης ενός δισδιάστατου παλμού. Η μικρή διαφορά είναι ότι οι παλμοί είναι κανονικοποιημένοι κυκλικής διατομής, αλλά και πάλι σε όλες τις παρακάτω περιπτώσεις η σχέση των μηκών περίθλασης και διασποράς κρατήθηκε σταθερή, όπως $L_d / 2L_D = 1/2$ (βλέπε και Σχ.4.6).

Καθώς λοιπόν οι παλμοί είναι όμοιας συχνότητας, η εξίσωση που περιγράφει τη διάδοση τους, σε συνδυασμό και με το CW σε επίπεδο κυματοδηγό με κανονική διασπορά, είναι μία και είναι η δισδιάστατη NLS που χρησιμοποιήσαμε και στο προηγούμενο Κεφάλαιο,

$$i \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} + |u|^2 u = 0 \quad (5.1)$$

, όπου πάλι, $Z=z/Z_0$, $X=x/L_d$, $T=t/T_0$ και $u = (\gamma I_0 Z_0)^{1/2} U$, και $L_d = \beta_0 X_0^2$ είναι το μήκος περίθλασης, $Z_0 = 2\beta_0 X_0^2$ και $T_0 = X_0 (\beta_0 \beta_2)^{1/2}$, όπου είναι το χαρακτηριστικό χρονικό εύρος του παλμού και άρα $L_d = L_D$, δηλαδή τα μήκη περίθλασης και διασποράς είναι ίσα. Ως X_0 ορίζεται το χωρικό εύρος του παλμού, ενώ $\beta_0 = n\kappa_0$, με κ_0 τη σταθερά διάδοσης στο κενό και n το δείκτη διάθλασης. Κάποιοι όροι ανώτερης τάξης έχουν αγνοηθεί, αλλά για τα μικρά μήκη διάδοσης που εξετάζουμε το συγκεκριμένο μοντέλο είναι επαρκές (βλέπε και κεφάλαιο 4.4).

5.2.1 Μελέτη δημιουργίας «αμαλλάματος»

Όπως αναφέρθηκε, βασικός στόχος του Κεφαλαίου δεν είναι τόσο η μελέτη εν γένη των αλληλεπιδράσεων, αλλά η διερεύνηση της δυνατότητας χωροχρονικής μετάθεσης. Επομένως μεγαλύτερη προσοχή δίνεται στις ελκτικές αλληλεπιδράσεις με σκοπό τη δημιουργία «αμαλλάματος». Ο όρος αυτός σημαίνει τη δυνατότητα συνένωσης δύο παλμών και την εξέλιξη τους σαν ένα κυματοπακέτο που θα έχει αρκετή ενέργεια ώστε να αυτοεστιάσει [242]. Χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά για αλληλεπιδράσεις σε περιβάλλον ανώμαλης διασποράς και δε χρησιμοποιείται για την απλή συνένωση των παλμών που μη έχοντας αρκετή ενέργεια καταλήγουν να διασπαρθούν. Το ενδιαφέρον είναι ότι οι αρχικοί παλμοί δεν έχουν απαραίτητα ενέργεια πάνω από τη κρίσιμη τιμή για εστίαση. Στη παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε τον ίδιο όρο και για την κανονική διασπορά. Με αυτόν σηματοδοτείται η

δυνατότητα συνένωσης των παλμών, αυτοεστίασης και δημιουργίας δύο νέων κορυφών λόγω χρονικού διαχωρισμού του νέου αυτού κυματοπακέτου. Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 4, ένας 2D ή 3D παλμός, σε μέσο με κανονική διασπορά, με ενέργεια αρκετά πάνω από τη N_c , μπορεί να αυτοεστιάσει και να διαχωριστεί χρονικά δημιουργώντας δύο νέους λοβούς χρονικά μετατιθέμενους. Κατ' αναλογία λοιπόν με τη δημιουργία αμαλγάματος και κατάρρευσης του, εδώ εξετάζουμε τη δυνατότητα δύο παλμών για έλξη, συνένωση και δημιουργία δύο νέων λοβών χρονικά και φασματικά μετατοπισμένους. Επίσης, παρατηρούμε ότι η παρουσία του CW είναι καταλυτική για τη «μακροβιότητα» των φωτεινών λοβών.

Θεωρούμε λοιπόν την υπέρθεση δύο παλμών και του CW, οπότε μπορούμε να τα γράψουμε σαν $u=u_1+u_2+u_{CW}$, με,

$$u_{1,2} = A_{1,2} \exp \left[-\frac{(X \mp X_0)^2}{2W_X^2} - \frac{(T \mp T_0)^2}{2W_T^2} \pm iKX + i\phi_{1,2} \right] \quad (5.2)$$

$$u_{CW} = a_{CW} A \exp(i\phi) \quad (5.3)$$

, όπου $A_{1,2} = \sqrt{4N_{1,2}/(N_c W_X W_T)}$, X_0 και T_0 οι αρχικές μετατοπίσεις των παλμών, W_X και W_T τα κανονικοποιημένα τους εύρη, $\pm K$ είναι μια μικρή αρχική διαφορά στον εγκάρσιο κυματάριθμο, ϕ_1 και ϕ_2 οι αρχικές τιμές της φάσης τους, a_{CW} το σχετικό πλάτος του CW και ϕ η φάση του. Η συνολική μάζα (ενέργεια) μπορεί να βρεθεί από το ολοκλήρωμα $N_S = \iint |u_1 + u_2 + u_{CW}|^2 dXdT$. Επειδή η μάζα του CW είναι πολύ μεγαλύτερη αυτής των παλμών ώστε να θεωρείται άπειρη και το ίδιο το επίπεδο κύμα αμετάβλητο, θεωρούμε ότι οι ενεργειακοί όροι λόγω σύζευξης μεταξύ των παλμών και του CW ανήκουν στη συνολική ενέργεια του κάθε παλμού (βλέπε και σχέση 4.33). Έτσι για τη περίπτωση κυκλικών παλμών με $W_X=W_T=1$ και με $T_0=0$,

$$N_S = N_1 + \Delta N_1 + N_2 + \Delta N_2 + \Delta N_{12} \quad (5.4)$$

Τα ΔN_1 και ΔN_2 είναι οι όροι σύζευξης του αντίστοιχου παλμού με το CW, ενώ ο τελευταίος όρος είναι μάζα αλληλεπίδρασης των δύο παλμών, ο οποίος πέφτει εκθετικά με τη μεταξύ τους απόσταση, έτσι

$$\Delta N_1 = 4a_{CW} N_1 e^{-\frac{\kappa^2}{2}} \cos(\phi_1 - \phi + KX_0) \quad (5.5a)$$

$$\Delta N_2 = 4a_{CW} N_2 e^{-\frac{\kappa^2}{2}} \cos(\phi_2 - \phi + KX_0) \quad (5.5b)$$

$$\Delta N_{12} = 2\sqrt{N_1 N_2} e^{-\kappa^2 - X_0^2} \cos[2KX_0 + (\phi_1 - \phi_2)]. \quad (5.5\gamma)$$

Όπως φάνηκε και στο προηγούμενο Κεφάλαιο, η παρουσία του CW αλλάζει την απαιτούμενη ενέργεια του παλμού ώστε αυτός να αυτοεστιάσει μέχρι κατάρρευσης σε ανώμαλη διασπορά, ή να διαχωριστεί χρονικά σε κανονική. Ακριβώς αυτή η συμπεριφορά, της πολύ σύντομης αυτόνομης εξέλιξης, που απαντάται κυρίως σε μέσα με μη-γραμμικότητα Kerr περιορίζει τη δυνατότητα αλληλεπίδρασης παλμών και είναι κάτι που πρέπει να λαμβάνουμε συνεχώς υπόψη.

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται και η Χαμιλτονιανή, ξανά «απαλλαγμένη» από τον άπειρο όρο που σχετίζεται με την ενέργεια του CW. Επαναλαμβάνουμε, πως έτσι δε βρίσκουμε τη Χαμιλτονιανή του συστήματος, αλλά μία ποσότητα που αφορά τους παλμούς και τις αλληλεπιδράσεις τους, είτε μεταξύ τους είτε με το επίπεδο κύμα. Το ίδιο είχαμε κάνει και στο Κεφάλαιο 4. Αυτή η προσέγγιση μοιάζει αυθαίρετη, βασίζεται όμως στη Φυσική διαίσθηση των σημαντικών για την εξέλιξη των παλμών παραμέτρων. Αν και πρόκειται για αυτό ακριβώς, μία προσέγγιση, που δεν αποδίδει εν τέλει αριθμητικά αυστηρές τιμές, μας βοηθά να καταδείξουμε περιοχές αρχικών συνθηκών που ορίζουν κάποια συγκεκριμένη εξέλιξη για το σύστημα. Αυτό το είδαμε να επαληθεύεται στο Κεφάλαιο 4 και το ίδιο γίνεται και εδώ.

Ένα ακόμα σημείο στο οποίο πρέπει να δοθεί προσοχή είναι ότι εργαζόμαστε όχι με τη Χαμιλτονιανή του συστήματος μας, για κανονική διασπορά, αλλά για την αντίστοιχη περίπτωση αλληλεπίδρασης σε ανώμαλη διασπορά. Το «δρόμο» αυτό είχαμε ακολουθήσει και στο Κεφάλαιο 4 για την ενεργειακή μελέτη (παράγραφος 4.4.1). Ο λόγος είναι ότι μόνο για ανώμαλη διασπορά έχουμε ένα αρκετά ασφαλές κριτήριο για την έναρξη αυτοεστίασης, και αυτό είναι η αρνητική τιμή της Χαμιλτονιανής (σχέση 4.7). Με αυτό το κριτήριο μπορούμε να υπολογίσουμε τις κρίσιμες αρχικές συνθήκες, όπως η ενέργεια N ή εδώ η απόσταση X_0 που ενεργοποιούν αυτοεστίαση. Επιστρέφοντας στη κανονική διασπορά και χρησιμοποιώντας το σχήμα 4.6 που δίνει την απαιτούμενη επαύξηση στη τιμή της κρίσιμης ισχύος επί αυτής για ανώμαλη διασπορά, υπολογίζουμε τις αρχικές συνθήκες που ενεργοποιούν αυτόνομη εστίαση, ή συσσωμάτωση των παλμών και περαιτέρω διαχωρισμό.

Αν λοιπόν υποθέσουμε ξανά ότι $W_X=W_T=1$ και με $T_0=0$, ενώ $A_1=A_2=A$ και άρα $N_1=N_2=N$, από τη σχέση (παράγραφος 1.3.3) υπολογίζουμε τη Χαμιλτονιανή του αντίστοιχου συστήματος για ανώμαλη διασπορά. Απαλείφοντας τον άπειρο όρο, η εναπομένουσα ποσότητα γράφεται

$$\begin{aligned}
H' = & -\frac{N^2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + 8a_{CW}^2 + 2e^{-2X_0^2} \right) + \right. \\
& + a_{CW}^2 e^{-K^2} \left[\cos(2(\phi - \phi_1 - KX_0)) + \cos(2(\phi - \phi_2 - KX_0)) \right] + \\
& \left(4a_{CW}^3 e^{-K^2/2} + \frac{4}{3} a_{CW} e^{-K^2/6} \right) \left[\cos(\phi - \phi_1 - KX_0) + \cos(\phi - \phi_2 - KX_0) \right] + \\
& \frac{1}{2} e^{-2(K^2+X_0^2)} \cos(2(\phi_1 - \phi_2)) + 2 \left(e^{-\frac{K^2}{2} - \frac{3X_0^2}{2}} \right) \cos(\phi_1 - \phi_2 - KX_0) + \\
& \frac{8}{3} a_{CW} \left(e^{-\frac{K^2}{6} - \frac{4X_0^2}{3}} \right) \left[\cos(\phi - \phi_1 + KX_0/3) + \cos(\phi - \phi_2 + KX_0/3) \right] + \\
& \frac{4}{3} a_{CW} \left(e^{-\frac{3K^2}{2} - \frac{4X_0^2}{3}} \right) \left[\cos(\phi - 2\phi_1 + \phi_2 - KX_0) + \cos(\phi - 2\phi_2 + \phi_1 - KX_0) \right] + \\
& \left. 2a_{CW}^2 e^{-X_0^2} \left[\cos(2\phi - \phi_1 - \phi_2) \right] + 4a_{CW}^2 e^{-K^2 - X_0^2} \cos(\phi_1 - \phi_2) \right\} + \\
& 2N \left[1 + K^2 - e^{-K^2 - X_0^2} (1 - X_0^2) \cos(\phi_1 - \phi_2) \right]
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Απλοποιώντας κάπως το πρόβλημα και εστιάζοντας στην ελκτική αλληλεπίδραση, θέτουμε $\phi_1 = \phi_2 = 0$ και $K=0$, παίρνοντας έτσι τη βασική περίπτωση παράλληλα οδοντώντων παλμών ή ακτίων. Τότε, η παραπάνω ποσότητα μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned}
H' = & -\frac{N^2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + 4a_{CW}^2 \left(1 + e^{-X_0^2} \right) + \left(4a_{CW}^3 + \frac{4}{3} a_{CW} \right) \cos(\phi) + \right. \\
& \left. 2a_{CW}^2 \left(1 + e^{-X_0^2} \right) \cos(2\phi) + 8a_{CW} e^{-\frac{4X_0^2}{3}} \cos(\phi) + 9e^{-2X_0^2} + 12e^{-\frac{3X_0^2}{2}} \right\} + \\
& 2N \left[1 - e^{-X_0^2} (1 - X_0^2) \right]
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Επιπλέον μπορούμε να διακρίνουμε το διαχωρισμό της στους παρακάτω όρους,

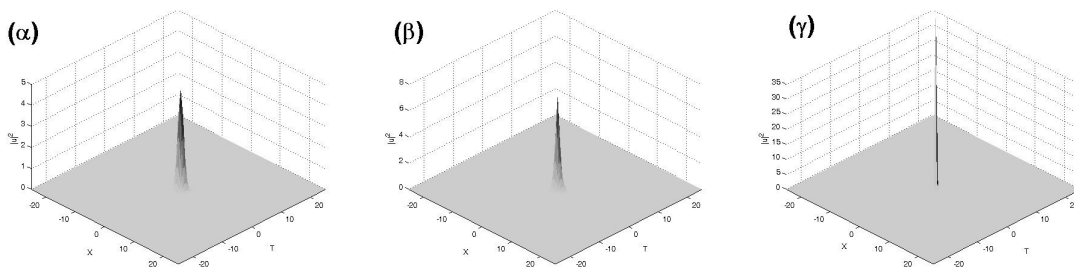
$$H' = H'_1 + H'_2 + H'_{int} \tag{5.8}$$

,όπου H'_i , ($i=1,2$), είναι η αντίστοιχη «ενεργός Χαμιλτονιανή» του εκάστοτε παλμού μαζί με την επίδραση του CW όπως υπολογίζεται στην (4.36), ενώ το H'_{int} είναι οι όροι της Χαμιλτονιανής οι σχετιζόμενοι με την αλληλεπίδραση των παλμών και εξαρτάται από τη σχετική τους απόσταση. Ο όρος αυτός γράφεται:

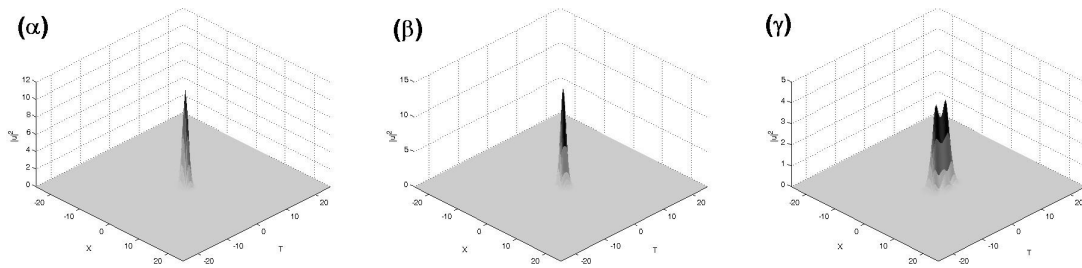
$$H'_{\text{int}} = -\frac{N^2}{\pi} e^{-X_0^2} \left[4a_{CW}^2 + 2a_{CW}^2 \cos(2\phi) + 8a_{CW} e^{-\frac{X_0^2}{3}} \cos(\phi) + 9e^{-X_0^2} + 12e^{-\frac{X_0^2}{2}} \right] + 2Ne^{-X_0^2} (1 - X_0^2) \quad (5.9)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, ενέργειας και Χαμιλτονιανής, καταλαβαίνουμε ότι σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των παλμών παίζει η αρχική τους μετατόπιση, όπως βέβαια και τα χαρακτηριστικά αυτών και του CW. Έτσι αν οι παλμοί είναι τοποθετημένοι σε μεγάλη απόσταση μεταξύ τους (ιδανικά $X_0 \rightarrow \infty$), τότε εξελίσσονται αυτόνομα και εστιάζουν αν η συνολική ενέργεια του κάθε ενός είναι $N_{si} \geq N_c = 4\pi$ (όπως αναφέρθηκε, για κανονική διασπορά θα χρειαστεί $\sim 2.3N_c$), αν δηλαδή $H'_i < 0$, αλλιώς διασπείρονται. Στην ακριβώς αντίθετη περίπτωση, όταν $X_0=0$ και οι παλμοί συμπίπτουν, οδηγούνται σε κατάρρευση εάν η συνολική ενέργεια του συσσωματώματος είναι πάνω από τη κρίσιμη.

Αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχει το επίπεδο κύμα και ότι $K=0$, καταλήγουμε στην απλούστερη περίπτωση αλληλεπίδρασης σε ανώμαλη διασπορά που μελέτησε ο Bergé. Εάν δε $X_0=0$ φαίνεται ότι το συσσωμάτωμα των παλμών αυτοεστιάζει ακόμα και με $N_1=N_2/4$, εφόσον βέβαια οι παλμοί έχουν ίδια φάση, καθώς η «υπόλοιπη» απαιτούμενη μάζα συμπληρώνεται από το ΔN_{12} της συμβολής τους (σχέση 5.5γ). Σαν απόδειξη της αντιστοιχίας των περιπτώσεων ανώμαλης με κανονική διασπορά παρουσιάζονται παρακάτω και οι δύο. Στο σχήμα 5.2 παρίστανται τρία στιγμιότυπα της εξέλιξης δύο υπερτιθέμενων όμοιων παλμών με $N_1=N_2=0.3N_c$ ($> N_c/4$), χωρίς CW και οδεύοντες σε κυματοδηγό με ανώμαλη διασπορά. Οι παλμοί υπερθέτουν την ενέργεια τους δημιουργώντας ένα κυματοπακέτο με αρκετή μάζα για να οδηγηθεί γρήγορα σε αυτοεστίαση και κατάρρευση. Αντιστοίχως, στο σχήμα 5.3 οι παλμοί βρίσκονται σε περιβάλλον κανονικής διασποράς. Προσαυξάνοντας την ενέργεια του κάθε παλμού κατά το ποσοστό που σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν εδώ και στο προηγούμενο Κεφάλαιο θεωρείται αρκετό για να τους οδηγήσει σε εστίαση ($N_1=N_2=0.7N_c$) παρατηρούμε και πάλι πως οι δύο παλμοί εξελίσσονται σαν ένα κυματοπακέτο που έχει πλέον την απαιτούμενη ενέργεια για να αυτοεστιάζει και να οδηγηθεί γρήγορα σε ξεκάθαρο χρονικό διαχωρισμό.

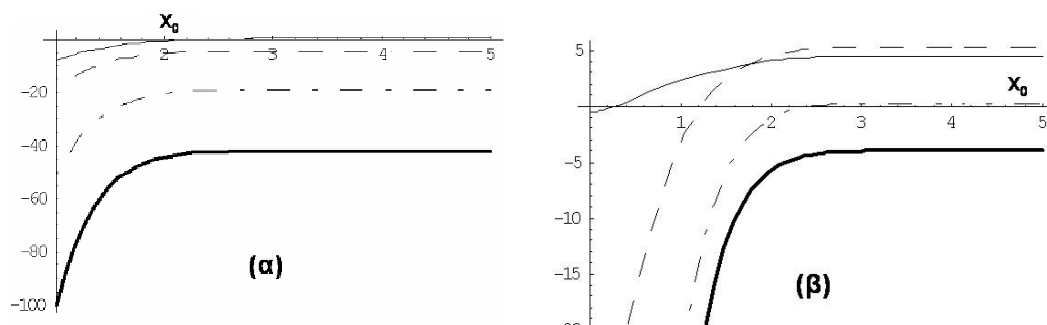


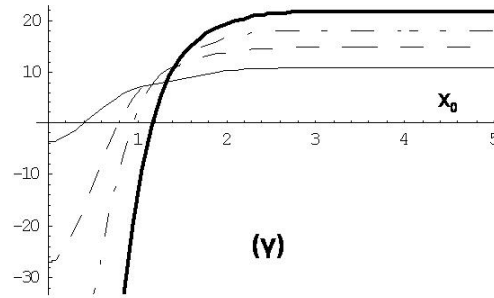
Σχήμα 5.2: Στιγμιότυπα εξέλιξης δύο υπερτιθέμενων συμφασικών γκαουσιανών παλμών με μάζα $N_1=N_2=0.3N_c$ σε ανώμαλη διασπορά. α) Είσοδος ($Z=0$), β) αυτοεστίαση ($Z=0.25$), γ)κατάρρευση ($Z=0.65$). Οι μονάδες είναι κανονικοποιημένες.



Σχήμα 5.3: Στιγμιότυπα εξέλιξης δύο υπερκρίθμενων συμφασικών γκαουσιανών παλμών με μάζα $N_1=N_2=0.7N_c$ σε κανονική διασπορά. α) Είσοδος ($Z=0$), β) αυτοεστίαση ($Z=0.25$), γ) χρονικός διαχωρισμός και πτώση/διασπορά ($Z=0.65$). Οι μονάδες είναι κανονικοποιημένες.

Για τους παλμούς που είναι χωρικά μετατοπισμένοι, η σημαντικότητα του ΔN_{12} πέφτει γρήγορα με την απόσταση. Για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε την κρίσιμη απόσταση, όπου όμοιοι παλμοί συγκεκριμένης ενέργειας, παρουσία συγκεκριμένου CW, μπορούν να συνενωθούν και να εξελιχθούν δυναμικά σαν ένα κυματοπακέτο, ακολουθήσαμε τη μέθοδο της προαναφερθείσας εργασίας [242]. Σύμφωνα με αυτή, οι παλμοί θα εξελιχθούν και θα εστιάσουν αυτόνομα εάν $|H'_1 + H'_2| > |H'_{int}|$. Οπότε είναι ασφαλές να υποθέσει κανείς ότι για $|H'_1 + H'_2| = |H'_{int}|$ τα φαινόμενα της ατομικής αυτοεστίασης και της δημιουργίας αμαλγάματος εξισορροπούνται, οπότε για δεδομένη ενέργεια των παλμών μπορεί να βρεθεί η τιμή του X_0 που εγγυάται την παραπάνω σχέση, η οποία δεν είναι κάτι άλλο από την οριακή τιμή $H' = 0$. Στο Σχ.5.4 οι τιμές της H' παρίστανται γραφικά σε σχέση με το X_0 , για κάποιες ενδεικτικές τιμές των παραμέτρων των παλμών και του CW. Συγκεκριμένα, οι παλμοί είναι όμοιοι και η φάση τους μηδέν, ενώ το σχετικό πλάτος του επίπεδου κύματος είναι παντού $a_{cw}=0.2$ και η φάση του είναι 0 στο (α), $\pi/2$ στο (β) και π στο (γ). Οι γραμμές συμβολίζουν και διαφορετικές τιμές της ενέργειας των παλμών. Για κάποιες τιμές της ενέργειας και της φάσης του CW η Χαμιλτονιανή δε μηδενίζεται για καμία τιμή του X_0 . Αυτό σημαίνει ότι ο κάθε παλμός θα εξελιχθεί αυτόνομα. Όταν η γραμμή τέμνει τον άξονα $H' = 0$ καταδεικνύεται μία κρίσιμη τιμή της εγκάρσιας απόστασης. Για τιμές του X_0 κοντά σε αυτή και για κάθε τιμή μικρότερη από αυτή οι δύο παλμοί αναμένεται να συσσωματωθούν σε αμάλγαμα και εν' συνεχεία να αυτοεστιάσουν. Για κάπως πιο μεγάλες τιμές και για θετική Χαμιλτονιανή οι παλμοί αναμένεται να υποκύψουν στη διασπορά, είτε κατά μόνος ή ακόμα και αν συνενωθούν.





Σχήμα 5.4: Γραφικές παραστάσεις της H' όπως μεταβάλλονται με το X_0 για παλμούς όμοιας ενέργειας με $\phi_1 = \phi_2 = 0$ και $K=0$, παρουσία CW με $\alpha_{cw}=0.2$ και α) $\phi = 0$, β) $\phi = \pi/2$, γ) $\phi = \pi$. Οι ενδεικτικές τιμές της ενέργειας των παλμών για την ακόλουθη σειρά (γραμμική, διακεκομμένη, παύλες-τελείες, παχιά) είναι: α) $(1.5\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi)$, β) $(2.1\pi, 2.2\pi, 2.34\pi, 2.4\pi)$, γ) $(2\pi, 3\pi, 4\pi, 6\pi)$.

Τα παραπάνω σχήματα παριστούν περιπτώσεις για μερικές μόνο τιμές των παραμέτρων. Η εκτίμηση της κρίσιμης απόστασης μπορεί να γίνει από το μηδενισμό της H' . Δεν αναμένουμε μια αυστηρά καθορισμένη τιμή, αλλά ένα δείκτη που θα μας βοηθά να διαλέξουμε τις τιμές της απόστασης και της ενέργειας με ικανοποιητική ακρίβεια. Η αριθμητική μελέτη των αλληλεπιδράσεων που ακολουθεί επαληθεύει σε πολύ καλό βαθμό τις παραπάνω εκτιμήσεις.

5.2.2 Αριθμητική διερεύνηση

Χρησιμοποιήθηκε ο ίδιος κώδικας με την αντίστοιχη διερεύνηση της παραγράφου 4.4.2 για την επίλυση της δισδιάστατης NLS με κανονική διασπορά (σχέση 5.1) και της αντίστοιχης για ανώμαλη. Οι παλμοί εισόδου δίνονται από τη σχέση (5.2). Σε κάθε περίπτωση το υπολογιστικό πλέγμα επελέγη αρκετά ευρύ ώστε να αποφεύγονται πολλές ανακλάσεις κατά τη διάρκεια της διάδοσης. Επίσης για να αποφευχθεί τελείως ο κίνδυνος αυτός επελέγησαν «απορροφητικά» όρια της μορφής

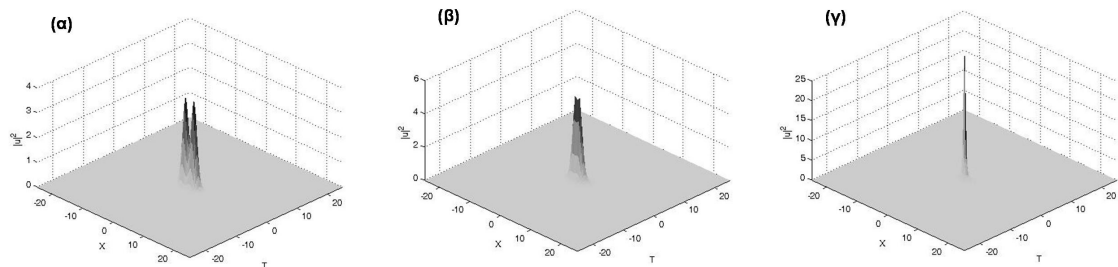
$$(1 - \sec h((1/2)(|X| - X_{\max}))) (1 - \sec h((1/2)(|T| - T_{\max}))),$$

όπου X_{\max} και T_{\max} τα όρια του υπολογιστικού πλέγματος. Το βήμα που χρησιμοποιήθηκε ήταν μεταξύ 10^{-2} και 10^{-4} , όπου δε παρατηρήθηκε φανερή διαφορά στα αποτελέσματα. Για βήμα 10^{-4} και για μη-απορροφητικά όρια οι διατηρήσιμες ποσότητες έμεναν σταθερές σε τάξη 10^{-10} . Εκτελέσαμε πολλά υπολογιστικά «πειράματα» αλληλεπιδράσεων, δίνοντας έμφαση στη δυνατότητα έλξης και δημιουργίας αμαλάματος των επί μέρους παλμών. Επίσης διερευνάται η σημαντικότητα του CW σε αυτές τις αλληλεπιδράσεις. Ο ρόλος του αποδεικνύεται καταλυτικός για την διαμόρφωση των κυματοπακέτων, αλλά και την ενίσχυση και διατήρηση συγκεκριμένων λοβών (νηματίων) που μπορεί να αναπτυχθούν σαν προϊόντα της αλληλεπίδρασης. Όπως φαίνεται παρακάτω δεν είναι μόνο η ενισχυτική του δράση, αλλά και η διαμορφωτική αστάθεια για κανονική διασπορά που υποβοηθά τη διατήρηση τέτοιων φωτεινών σχηματισμών.

Σε αντίθεση με το Κεφάλαιο 4, στις περισσότερες περιπτώσεις που παρουσιάζονται οι παλμοί είναι «κυκλικής» διατομής και καθώς δεν έχουμε δύο χωρικές διαστάσεις που κάνουν αυτή τη πρόταση προφανή, αλλά μία εγκάρσια χωρική και τη χρονική, σημαίνει πως τα μήκη περίθλασης και διασποράς είναι ίσα ($W_x = W_T = 1$). Πέραν τούτου και για να έχουμε κάποια διαστατική διαίσθηση επιλέγουμε τα ίδια χαρακτηριστικά όπως και στο παράδειγμα του προηγούμενου Κεφαλαίου. Θεωρούμε λοιπόν επίπεδο κυματοδηγό από AlGaAs όπου για $\lambda_0 = 1.55 \mu\text{m}$ έχει, γραμμικό δείκτη διάθλασης $n = 3.34$, μη-γραμμικό συντελεστή Kerr

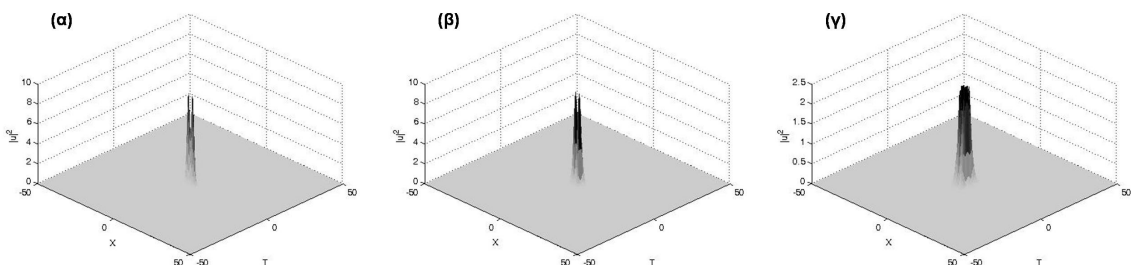
$n_2=1.5 \times 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{W}$ και τιμή χρονικής διασποράς $\beta_2=1.35 \times 10^{-24} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$. Ο παλμός έχει εγκάρσιο χωρικό εύρος $X_0=10.5 \mu\text{m}$ και άρα χρονικό εύρος $T'=45 \text{ fs}$, που αντιστοιχεί σε $T_{FWHM} \approx 75 \text{ fs}$, ενώ $Z_0=3 \text{ mm}$ είναι το χαρακτηριστικό μήκος διάδοσης.

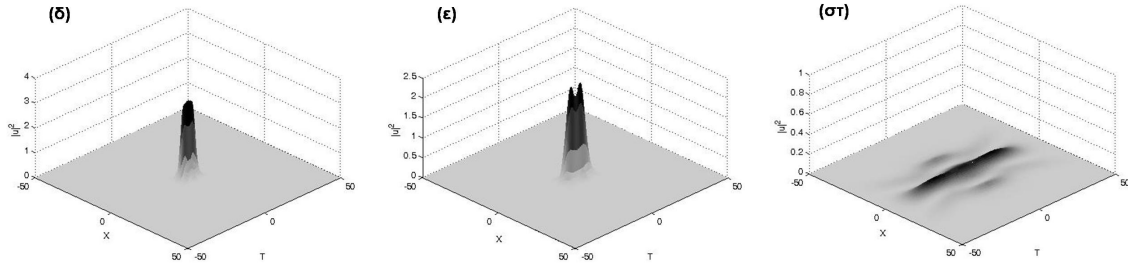
Αρχικά και για να ελέγξουμε την ισχύ της ανάλυσης της παραγράφου 5.2.1, δοκιμάζουμε χωρίς CW. Ξεκινώντας από τη περίπτωση ανώμαλης διασποράς, βάση της οποίας έγινε η ανάλυση, θέτουμε δύο παλμούς στο $T_0=0$, με $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $K=0$ και $N_1=N_2=0.88N_c$. Η ενέργεια του κάθε ενός δεν είναι αρκετή για αυτοεστίαση, οπότε ο κάθε ένας μόνος του θα διασπαρθεί. Σύμφωνα με τα παραπάνω η κρίσιμη απόσταση βρίσκεται $\Delta X_0 = 2X_0 \approx 2\sqrt{2}$. Πράγματι, με αυτή τη τιμή παρατηρούμε ότι οι παλμοί έλκονται και συσσωματώνονται, ενώ γρήγορα εξελίσσονται σαν ένα κυματοπακέτο που εστιάζει μέχρι τη κατάρρευση (Σχ.5.5). Δοκιμάσαμε και για μεγαλύτερη εγκάρσια μετατόπιση, όπως π.χ. για $\Delta X_0=3.5$, όμως οι παλμοί υποκύπτουν στη διασπορά και τη περίθλαση. Καθώς η ένταση τους πέφτει και διευρύνονται, οι παλμοί συνενώνονται, αλλά απλώς σβήνουν χωρίς εστίαση.



Σχήμα 5.5: Στιγμιότυπα εξέλιξης συμφασικών γκαουσιανών παλμών με $\Delta X_0=2\sqrt{2}$, α) είσοδος ($Z=0$), β) συσσωμάτωση ($Z=0.8$), γ) εστίαση και κατάρρευση ($Z=1.1$). Οι μονάδες X και T είναι μήκη περίθλασης και διασποράς.

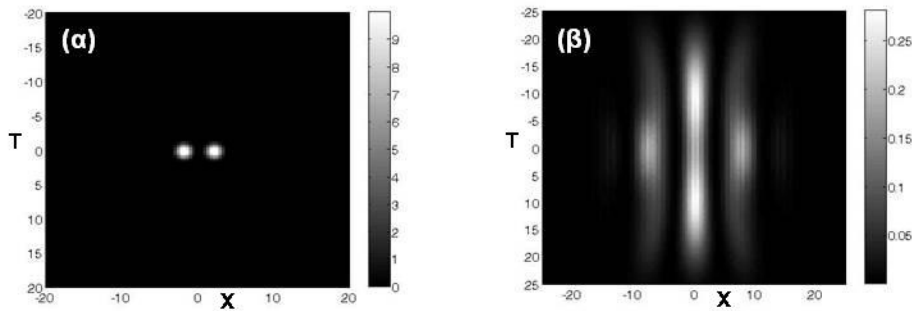
Επιστρέφοντας στη περίπτωση που ενδιαφέρει περισσότερο, της κανονικής διασποράς, δοκιμάζουμε να θέσουμε πάλι τους παλμούς, όμως αυτή τη φορά με μεγαλύτερη ενέργεια. Σύμφωνα με τη παράγραφο 4.4.1 και το Σχ. 4.6 για κυκλικό παλμό, η απαιτούμενη κρίσιμη μάζα πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερη, της τάξης $N_1=N_2=2.2N_c$. Όπως και πριν, η μάζα δεν είναι αρκετή για επί μέρους αυτοεστίαση που θα οδηγούσε σε διαχωρισμό. Όπως όμως και πριν, οι παλμοί συσσωματώνονται. Αν και φαίνονται να διασπείρονται το νέο κυματοπακέτο αυτοεστιάζει και διαχωρίζεται χρονικά. Έπειτα από αυτό διασπείρεται σαν ένα σώμα. Στιγμιότυπα της εξέλιξης παρίστανται στο σχήμα 5.6.





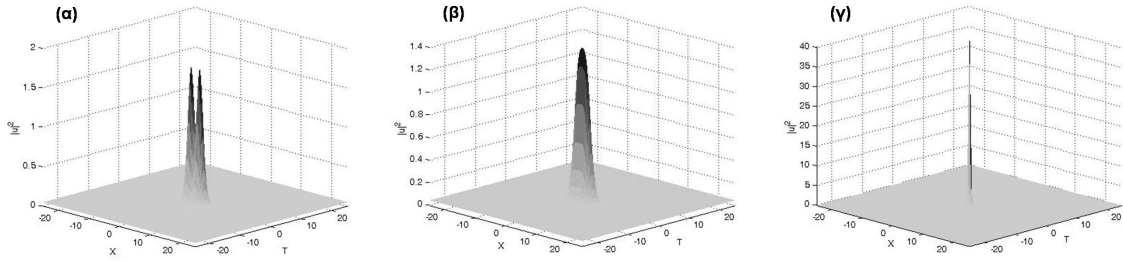
Σχήμα 5.6: Εξέλιξη συμφασικών γκαουσιανών παλμών $N_1=N_2=2.2N_c$, με $\Delta X_0=2\sqrt{2}$, σε κανονική διασπορά α) είσοδος ($Z=0$), β) μικρή αυτοεστίαση ($Z=0.5$), γ) συσσωμάτωση ($Z=0.85$), δ) εστίαση ($Z=1$), ε) διαχωρισμός ($Z=1.5$), στ) διασπορά ($Z=5$).

Ένα αντίστοιχο παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 5.7. Οι παλμοί έχουν $\Delta T=0$ αλλά $\Delta X_0=4$, χωρίς αρχική διαφορά φάσης και με $N_i=2.5N_c$. Με αυτή την ενέργεια, ο κάθε παλμός είναι, μόλις, ικανός για αυτό-διαχωρισμό. Αρχικά οι παλμοί φαίνονται να εστιάζουν, αλλά λόγω της διασποράς και της αμοιβαίας έλξης, σύντομα σκορπάνε. Τελικά η περισσότερη ενέργεια συγκεντρώνεται στον ενδιάμεσο χώρο ($T=0$), αλλά είναι διάσπαρτη σε μεγάλο μήκος σε μία χαμηλής έντασης μορφή με δύο ασθενείς συγκεντρώσεις εκατέρωθεν του $T=0$. Έχοντας δει αυτή την εικόνα, η σημασία της παρουσίας επίπεδου κύματος παρακάτω γίνεται ιδιαίτερα φανερή.



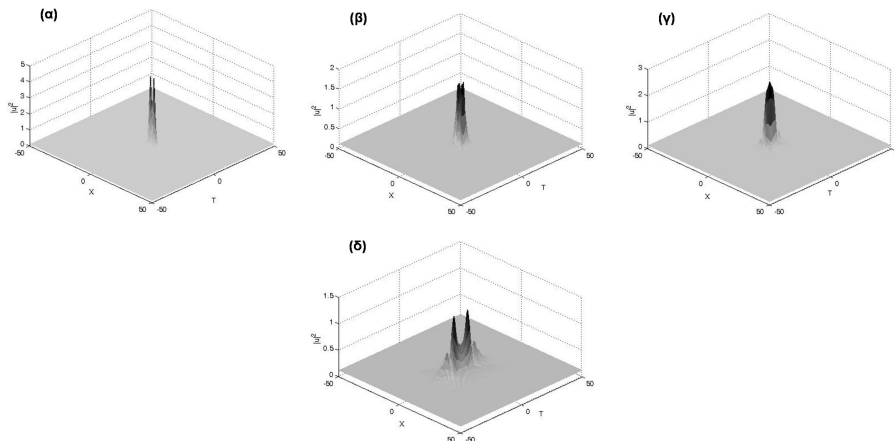
Σχήμα 5.7: Προφίλ έντασης, (α) εισόδου και (β) εξόδου στο $Z=3$ (9mm), ζεύγους κυματοπακέτων με $N_i=2.5N_c$ έκαστο, χωρίς CW. Ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στη χωρική (X) διάσταση και έχει μήκος 50 φορές το εύρος του παλμού (-263 μm to 263 μm) και ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στην χρονική διάσταση (T) με μήκος 50 φορές το χρονικό εύρος (-1.12 ps to 1.12 ps).

Συνεχίζοντας τη διερεύνηση μας χρησιμοποιούμε και επίπεδο κύμα. Δοκιμάζουμε $a_{cw}=0.2$ και $\phi=0$. Για αυτά τα χαρακτηριστικά σε ανώμαλη διασπορά μόνο παλμοί με πολύ μικρή ενέργεια μπορεί να αποφύγουν την κατά μόνως κατάρρευση. Ξανά λοιπόν εξετάζουμε πρώτα τη περίπτωση της ανώμαλης διασποράς και για όμοιους παλμούς με $N_i=1.2\pi$, υπολογίζεται ότι μια μετατόπιση σαν $\Delta X_0=2\sqrt{2}$ θα οδηγήσει σε συσσωμάτωση και εστίαση. Το σχήμα 5.8 επιβεβαιώνει την υπόθεση. Η ένταση των παλμών αρχικά πέφτει, καθώς όμως αυτοί γίνονται ένα κυματοπακέτο αποκτούν αρκετή ενέργεια για αυτοεστίαση και τελικά κατάρρευση.



Σχήμα 5.8: Εξέλιξη συμφασικών γκαουσιανών παλμών $N_1=N_2=1.2\pi$, με $\Delta X_0=2\sqrt{2}$, σε ανώμαλη διασπορά παρουσία CW με $\alpha_{cw}=0.2$ και $\phi=0$, α) είσοδος ($Z=0$), β) πτώση και συσσωμάτωση ($Z=0.5$), γ) εστίαση και κατάρρευση ($Z=4$).

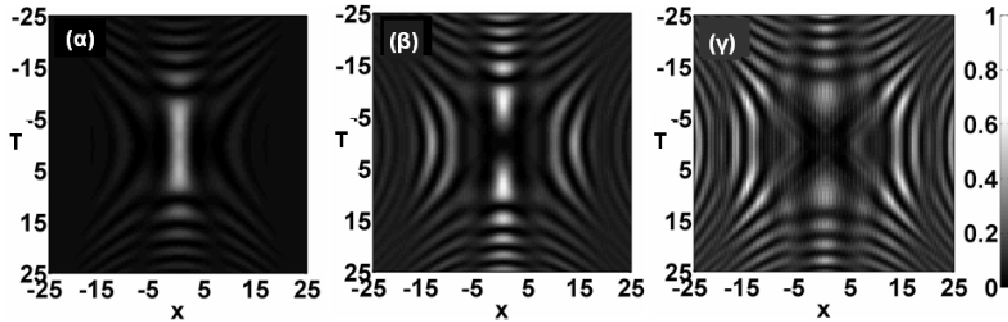
Δοκιμάζοντας την εξέλιξη σε κανονική διασπορά για την ίδια μετατόπιση και CW, αλλά για ενέργεια παλμών 2.5 φορές μεγαλύτερη από πριν παρατηρούμε παρόμοια εξέλιξη. Πράγματι, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.9 η επιλογή της μάζας είναι η σωστή για να οδηγήσει σε αμάλγαμα. Οι παλμοί πέφτουν σε ένταση, αλλά προλαβαίνουν να συνενωθούν πριν διασπαρθούν περισσότερο και εστιάζουν (Σχ.5.9γ) σαν ένα κυματοπακέτο. Σύντομα αυτό διαχωρίζεται χρονικά (Σχ.5.9δ). Όπως είχε φανεί και στο Κεφάλαιο 4, η παρουσία του CW ενισχύει τους λοβούς που γεννούνται από το διαχωρισμό και τους βοηθά να διατηρηθούν περισσότερο.



Σχήμα 5.9: Εξέλιξη συμφασικών γκαουσιανών παλμών $N_1=N_2=3\pi$, με $\Delta X_0=2\sqrt{2}$, σε κανονική διασπορά παρουσία CW με $\alpha_{cw}=0.2$ και $\phi=0$, α) είσοδος ($Z=0$), β) πτώση και συσσωμάτωση ($Z=0.95$), γ) εστίαση ($Z=1.65$), δ) διαχωρισμός ($Z=3.5$).

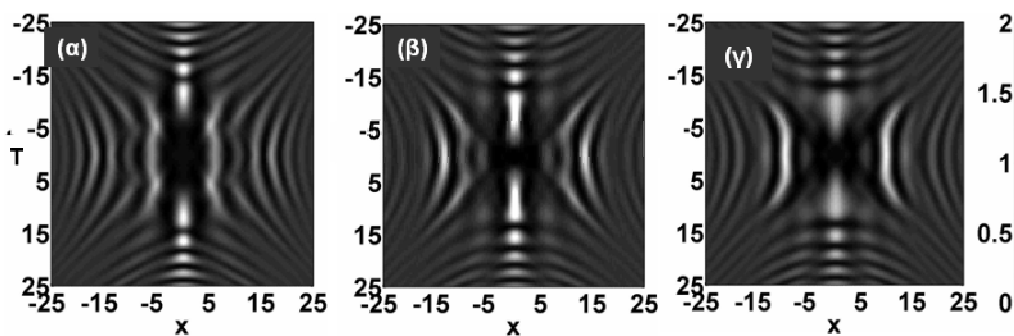
Στη συνέχεια μελετάμε τη σημασία της αρχικής ενέργειας των παλμών και δοκιμάζουμε μια μεγάλη, σχετικά, αρχική μετατόπιση. Οι παλμοί με όμοια φάση, παρουσία του CW αλληλεπιδρούν ελκτικά και έχουν την τάση να συνενωθούν, ανεξαρτήτως της ενέργειας. Το παράδειγμα που επιλέξαμε να παρουσιάσουμε φαίνεται στο σχήμα 5.10. Σε αυτό παρίστανται τα προφίλ έντασης εξόδου για τρεις τιμές των N_i , με $\alpha_{cw}=0.1$ και $\phi_1=\phi_2=\phi=0$, ενώ οι παλμοί τίθενται με $\Delta X_0=4$. Για $N_i=0.9N_c$, (α), η κρίσιμη τιμή της μετατόπισης υπολογίζεται γύρω στο 3, οπότε οι παλμοί δεν έχουν την ενέργεια για δημιουργία αμαλγάματος, αλλά ούτε για αυτοεστίαση. Έτσι πέφτουν σε ένταση, αλλά συνενώνονται σε ένα αχνό κεντρικό λοβό, ενώ, (λόγω του CW), η διασπειρόμενη ενέργεια ενισχύει και φανερώνει τις υπερβολές της διαμορφωτικής αστάθειας (MI). Για τιμές $N_i=1.85N_c$, (β), η ενέργεια του κάθε παλμού, μαζί με του CW, είναι αρκετή για κατά μόνος εστίαση και διαχωρισμό. Αυτό πράγματι γίνεται, αλλά οι επί μέρους λοβοί, όντας σε θέσεις συμμετρικές ως προς τον άξονα $X=0$, τείνουν να

συνενωθούν κατά μήκος του άξονα και σχηματίζουν δύο έντονους λοβούς χρονικά μετατοπισμένους, αλλά και πλήθος άλλων λίγο μικρότερων, η θέση των οποίων είναι το σημείο τομής των υπερβολών με τον άξονα. Για ενέργεια πολύ μεγαλύτερη, όπως στο (γ) για $N_i=3N_c$ οι παλμοί διασπóνται και οι λοβοί που γεννούνται συνενώνονται και διασπóνται ξανά διασκορπίζοντας την ενέργεια κατά μήκος των υπερβολών της MI. Ενδιαφέρον είναι ότι έστω και αν σε όλες τις περιπτώσεις οι παλμοί εξελίσσονται αρχικά μόνοι τους τελικά ενισχύονται υπερβολές που έχουν κέντρο το μέσο της απόστασης τους, όπως $(X, T)=(0,0)$.



Σχήμα 5.10: Προφίλ έντασης εξόδου, στο $Z=5$ (15mm), με $\alpha_{CW}=0.1$, $\phi_1 = \phi_2 = \phi = 0$ και $\Delta X_0=4$. Η ενέργεια εισόδου των παλμών ετέθη στα (α) $N_i=0.9N_c$, (β) $N_i=1.85N_c$, (γ) $N_i=3N_c$.

Επόμενο βήμα είναι να εστιάσουμε στο ρόλο της αρχικής εγκάρσιας μετατόπισης. Στο σχήμα 5.11 φαίνονται τα προφίλ εξόδου, για $Z=5$, παλμών με $N_i=1.5N_c$ και επίπεδου κύματος με $\alpha_{CW}=0.2$. Οι φάσεις είναι όλες ίσες και μηδέν. Με τα παραπάνω χαρακτηριστικά οι παλμοί έχουν αρχικά τη τάση να εξελιχθούν αυτόνομα. Για $\Delta X_0=3$ οι παλμοί εστιάζουν και τείνουν να διαχωριστούν, αλλά σύντομα συνενώνονται. Το αποτέλεσμα είναι ότι σπάνε σε τέσσερις προτεύοντες (μεγαλύτερους) και κάποιους δευτερεύοντες λοβούς εκατέρωθεν της αρχικής τους θέσης και κατά μήκος του άξονα $X=0$. Για μεγαλύτερες αποστάσεις, όπως το $\Delta X_0=4$ οι παλμοί διαχωρίζονται, αλλά τελικά τα προϊόντα της διάσπασης συνενώνονται πάλι στην ίδια περιοχή και παράγουν εικόνα παρόμοια με το $\Delta X_0=3$. Για $\Delta X=5$, οι παλμοί υποκύπτουν σε διασπορά και περίθλαση και μόνο μικρό μέρος της ενέργειας τους συγκεντρώνεται στο μέσο της απόστασης τους.

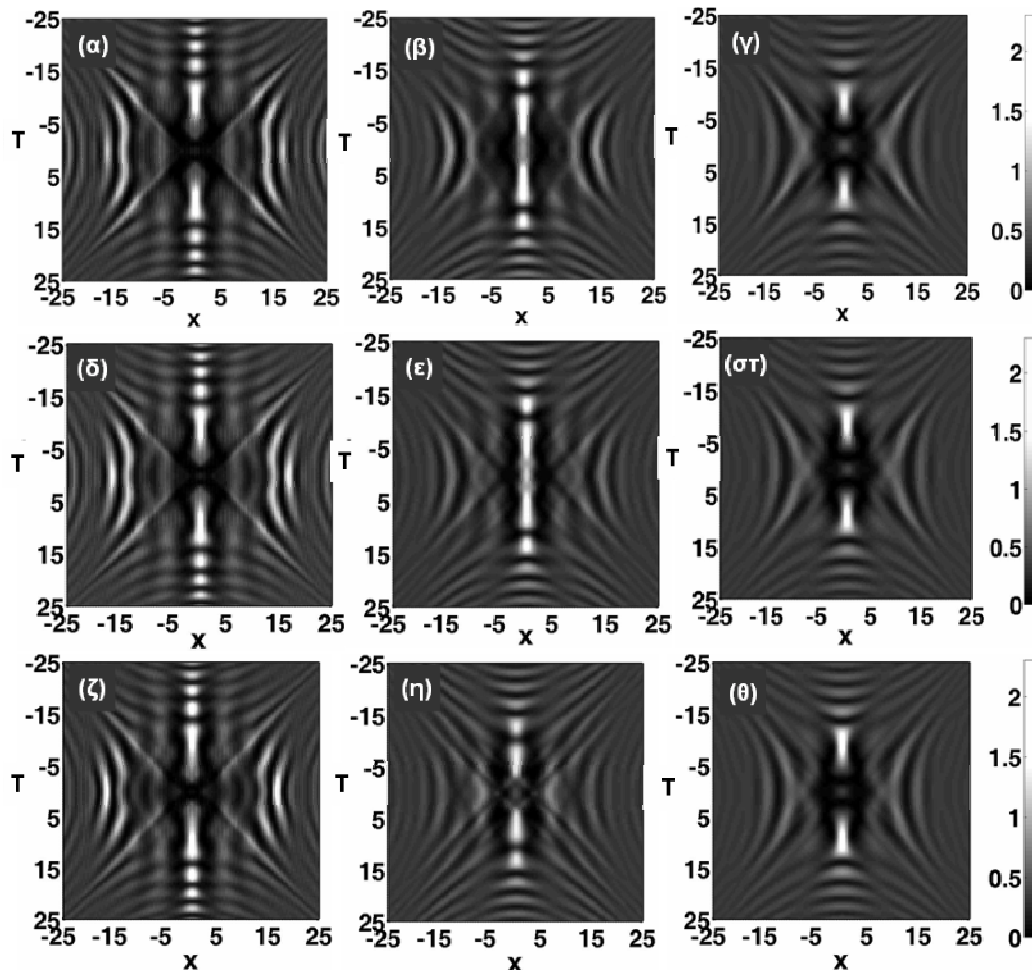


Σχήμα 5.11: Προφίλ έντασης εξόδου, στο $Z=5$ (15mm), με $\alpha_{CW}=0.2$, $\phi_1 = \phi_2 = \phi = 0$ και $N_i=1.5N_c$. Η εγκάρσια μετατόπιση των παλμών ετέθη (α) $\Delta X_0=3$, (β) $\Delta X_0=4$, (γ) $\Delta X_0=5$.

Παρατηρούμε ότι στη κανονική διασπορά οι παλμοί δύναται να συνενωθούν και να διαχωριστούν, αλλά αυτό μπορεί να γίνει και χωρίς να έχει προηγηθεί εστίαση κεντρικού συσσωματώματος, όπως στην ανώμαλη διασπορά. Όταν η ενέργεια είναι επαρκής, η φάση κατάλληλη και η μεταξύ τους απόσταση μικρότερη από κάποια κρίσιμη τιμή οι δύο παλμοί μπορεί διασπειρόμενοι να δημιουργήσουν απευθείας δύο νέους λοβούς (και συχνά και άλλους δευτερεύοντες) χρονικά μετατοπισμένους και με διαφορετικό συχνοτικό περιεχόμενο. Οι

λοβοί αυτοί απομακρύνονται μεταξύ τους, όπως γίνεται και όταν ένα κυματοπακέτο υφίσταται χρονικό διαχωρισμό. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η διαμορφωτική αστάθεια και η ενίσχυση των «υπερβολών» της, η δημιουργία κυμάτων τύπου X και η χρονική διάσπαση κυματοπακέτου μεγάλης έντασης είναι το ουσιαστικά το ίδιο πράγμα.

Δύο ακόμα σημαντικοί παράγοντες που επηρεάζουν την εξέλιξη των παλμών είναι η μεταξύ τους διαφορά κυματάριθμου και η διαφορά φάσης τους με το CW. Στα παραδείγματα που ακολουθούν η διαφορά φάσης των παλμών είναι μηδέν, $a_{cw} = 0.2$, $\Delta X_0 = 4$ και $N_i = 2N_c$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα προφίλ έντασης εξόδου αυτών των παραδειγμάτων.

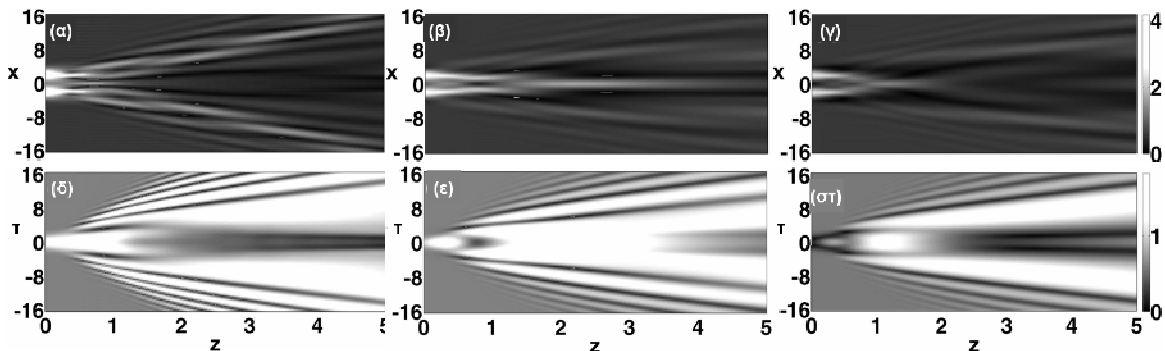


Σχήμα 5.12: Προφίλ έντασης εξόδου στο $Z=5$, παρουσία CW, με $a_{cw} = 0.2$, για διάφορες τιμές της φάσης (ϕ) και για διάφορες τιμές των γωνιών εισόδου (K): (α, δ, ζ) $\phi = 0$, (β, ε, η) $\phi = \pi/2$, (γ, στ, θ) $\phi = \pi$, (α, β, γ) $K=0$, (δ, ε, στ) $K=0.1$, (ζ, η, θ) $K=0.2$. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις θέσαμε $N_i = 2N_c$, $\Delta X_0 = 4$ και $\phi_1 = \phi_2 = 0$.

Φαίνεται λοιπόν ότι για $\phi = 0$ το CW προσθέτει αρκετή ενέργεια στους παλμούς με αποτέλεσμα ένα γρήγορο σπάσιμο του κάθε παλμού χωριστά, κατά μήκος του άξονα του χρόνου, και τη δημιουργία πολλών μικρών μη εξεχόντων λοβών, με σχεδόν ίδιο πλάτος. Αυτό δεν αποτέλεσε έκπληξη, καθώς για τις συγκεκριμένες τιμές της ενέργειας η H' είναι πάντα αρνητική, οπότε οι παλμοί αναμένονται να έχουν αυτόνομη εξέλιξη. Από την άλλη, όσο μεγαλύτερη είναι η γωνία εισόδου (οπότε και σύγκλισης) των παλμών, η ενέργεια που «δανείζει» το CW στο παλμό είναι και μικρότερη (σχέση 5.5α, β), αλλά και πάλι οι παλμοί διαχωρίζονται χρονικά κατά μόνες. Παρόλα αυτά, οι επί μέρους λοβοί συνεχίζουν να συγκλίνουν και όταν $K \neq 0$ αυτό είναι εντονότερο. Οι λοβοί συνενώνονται και σε περίπτωση

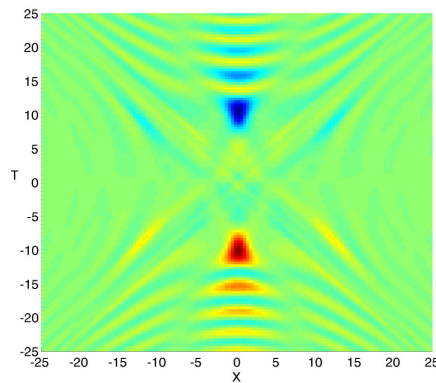
που ξεπερνούν την κρίσιμη τιμή της ενέργειας, διαχωρίζονται ξανά. Τελικά διασκορπίζονται σύμφωνα με το «μοτίβο» της διαμορφωτικής αστάθειας σε πολλούς μικρούς λοβούς κατά μήκος του $X=0$ (α, β, γ). Για $\phi = \pi/2$, (β, ϵ, η), το υπόβαθρο, αρχικά, δεν προσφέρει ενέργεια, οπότε οι παλμοί δεν δίνονται να αυτοεστιάσουν και να διαχωριστούν και αρχίζουν να διασπείρονται. Όμως η ενέργεια τους συγκλίνει προς το κέντρο και αργά ή γρήγορα, ανάλογα με τη γωνία εισόδου, συγκεντρώνεται σε κεντρικό λοβό, ο οποίος διαχωρίζεται ξανά σε τέσσερις λοβούς, με την ίδια σχεδόν χαμηλή ένταση. Αυτή η συνένωση και επαναδιαχωρισμός προβλέπεται και από τη μελέτη του H' . Όμως το αποτέλεσμα δεν είναι δύο νέοι λοβοί, αλλά τέσσερις μικρότεροι. Η ευνοϊκότερη περίπτωση για τη δημιουργία δύο εξεχόντων λοβών κατά μήκος του άξονα του χρόνου, (οπότε και θα έχουμε μια εμφανή χώρο-χρονική ανταλλαγή της ενέργειας), είναι για $\phi = \pi$, ($\gamma, \sigma\tau, \theta$). Αν και οι παλμοί ξεκινούν γρήγορα να διασπείρονται η ενέργεια τους συγκεντρώνεται σε κεντρικό λοβό, που διασπάται σε δύο άλλους μικρότερους, αλλά ιδιαίτερα εμφανείς λοβούς, που έχουν κατοπτρική χρονική μετατόπιση, η οποία αυξάνει με σταθερό ρυθμό, ενώ οι παλμοί (λοβοί) παραμένουν σχεδόν αναλλοίωτοι για αρκετό διάστημα (πέρα από το $Z=5$ που φαίνεται στο σχήμα). Αυτό είναι κάτι μη αναμενόμενο, σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν στη παράγραφο 5.2.1. Για τις συγκεκριμένες τιμές ενέργειας και εγκάρσιας μετατόπισης έχουμε $H' > 0$ και οι παλμοί αναμένονται απλώς να διασπαρθούν, καθώς όμως συνεχίζουν να συγκλίνουν και συγχωνεύονται, έστω και αν δεν επανα-εστιάζουν, η ΜΙ διαχωρίζει την ενέργεια τους σε δύο, κυρίως, λοβούς. Φαίνεται μάλιστα ότι για μικρές συγκλίνουσες γωνίες εισόδου οι τελικοί λοβοί είναι ακόμα μεγαλύτερης έντασης. Αυτό, διότι για $K \neq 0$ η ενέργεια που αρχικά αφαιρεί το επίπεδο κύμα από το παλμό είναι μικρότερη. Οι λοβοί «κλειδώνουν» στις υπερβολές που γεννά το ΜΙ, (που ενισχύεται από την παρουσία του CW), του οποίου η σημασία γίνεται εμφανής.

Στη περίπτωση του Σχ.5.12(θ) οι παλμοί ξεκινούν με $\Delta X=4$ και οι παράγωγοι λοβοί για $Z=5$ έχουν σημαντική χρονική μετατόπιση $\Delta T=16$. Στο σχήμα 5.13 παρίσταται η χωρική (α - γ) και χρονική (δ - $\sigma\tau$) εξέλιξη των παλμών για τις περιπτώσεις του Σχ.5.12(ζ, η, θ). Γίνεται φανερή μεταφορά της ενέργειας από την εγκάρσια χωρική στη χρονική συντεταγμένη, ιδιαίτερα στα (γ) και ($\sigma\tau$).



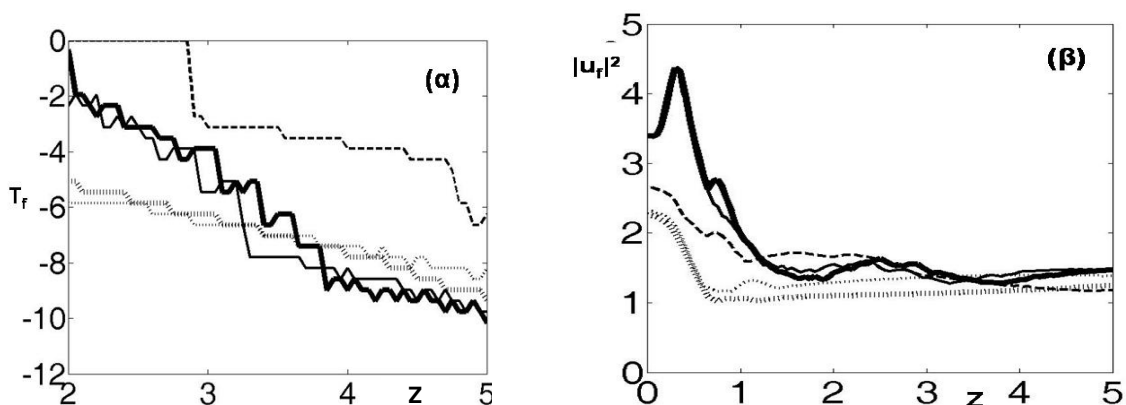
Σχήμα 5.13: Χωρική (α, β, γ) και χρονική ($\delta, \epsilon, \sigma\tau$) προφίλ έντασης κατά τη διάδοση για $K=0.2, \alpha_{CW}=0.2, N_i=2N_c, \phi_1 = \phi_2 = 0, \Delta X_0=4$ και: (α, δ) $\phi=0$, (β, ϵ) $\phi=\pi/2$, ($\gamma, \sigma\tau$) $\phi=\pi$.

Όπως ήδη αναφέραμε οι ποσότητες της συνολικής μάζας, της Χαμιλτονιανής και της ορμής παραμένουν σταθερές κατά την διάδοση. Επίσης η συνολική ορμή είναι μηδέν καθώς η κινήσεις των παλμών είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $X=0$ και οι παραγόμενες υπερβολές συμμετρικές ως προς τους άξονες $X=0, T=0$. Στο σχήμα 5.14 παραθέτουμε τη χρονική $P_T = (i/2)(u^* \partial_T u - u \partial_T u^*)$ συνιστώσα της ορμής για μία παραστατική επίδειξη της αντίθετης κίνησης των λοβών, στο $Z=5$ για τη περίπτωση του Σχ.5.12(γ).



Σχήμα 5.14: Προφίλ της T-συνιστώσας της ορμής (P_T) στο $Z=5$. Τα διαφορετικά χρώματα συμβολίζουν τις αντίθετες τιμές, ως προς το σύστημα αναφοράς των αρχικών παλμών.

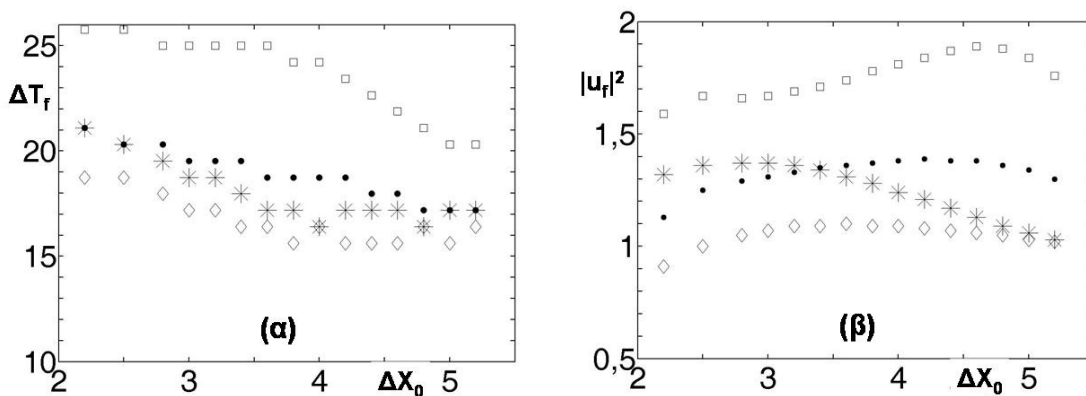
Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η χρονική μετατόπιση ενός εκ των δύο λοβών (αυτού που βρίσκεται σε «αρνητική» μετατόπιση) για κάποιες από τις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν πιο πάνω. Ο άξονας διάδοσης παρουσιάζεται από το $Z=2$, όπου έχει ολοκληρωθεί η συγχώνευση των παλμών στο μέσο της απόστασης τους. Τα σύμβολα T_f και $|u_f|^2$ αναφέρονται στη χρονική μετατόπιση και μέγιστη ένταση του λοβού, ενώ το “f” προέρχεται από το “filament” (νημάτιο). Φαίνεται πως οι μικρές μη μηδενικές γωνίες εισόδου δεν επηρεάζουν σημαντικά τη χρονική μετατόπιση των λοβών. Αντίθετα, η φάση του υποβάθρου παίζει κάποιο ρόλο, σε σχέση με το πότε εμφανίζονται οι λοβοί και με το φασματικό τους περιεχόμενο (οι λοβοί κινούνται γρηγορότερα για $\phi=0$ από ότι για $\phi=\pi$). Στο δεύτερο γράφημα του σχήματος φαίνεται η μέγιστη ένταση των λοβών για τις ίδιες περιπτώσεις. Η διαφορές είναι μικρές και η ένταση των λοβών διατηρείται τουλάχιστον μέχρι το $Z=5$. Στο Σχ.5.15 δε μπορεί να φανεί ότι για $\phi=0$ δημιουργούνται δευτερεύουσες κορυφές, όπως φαίνεται καλλίτερα στο Σχ.5.12.



Σχήμα 5.15: (α): Χρονική μετατόπιση ενός εκ των δύο λοβών μετά το σπάσιμο για περιπτώσεις αρχικής γωνίας εισόδου και τιμές της φάσης του CW. Η παχιά και η λεπτή γραμμή παριστούν τις περιπτώσεις του Σχ.5.12(α) και (δ), η παχιά και λεπτή διάστικτες γραμμές, τις περιπτώσεις του Σχ.5.12(γ) και (θ) και οι παύλες την περίπτωση Σχ.5.12(η). (β): Εξέλιξη της μέγιστης έντασης για τις ίδιες περιπτώσεις.

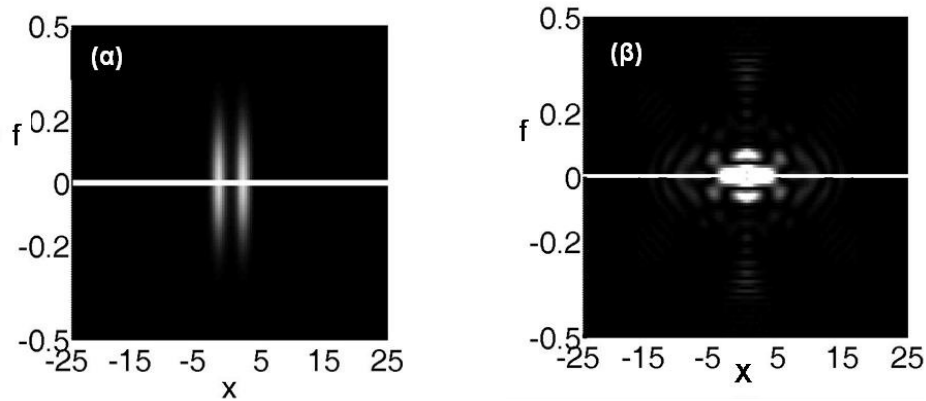
Στο επόμενο σχήμα, 5.16, παρίσταται σύγκριση της χρονικής μετατόπισης και της έντασης των λοβών για διάφορες περιπτώσεις της ενέργειας και της αρχικής θέσης των παλμών. Η τιμή της αρχικής χωρικής μετατόπισης επηρεάζει, αν και όχι σε μεγάλο βαθμό, την τελική

($Z=5$) χρονική μετατόπιση. Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι μεγαλύτερες μετατοπίσεις όπως $\Delta X_0=8$ αφήνουν τους παλμούς να διασπαρθούν και το κεντρικό τους συσσωμάτωμα δεν είναι ικανό να δημιουργήσει γένεση νηματίων (λοβών). Ακόμα, όσο μεγαλύτερη είναι η αρχική ενέργεια, τόσο μεγαλύτερη είναι η τελική χρονική μετατόπιση των λοβών. Ένα ακόμα συμπέρασμα που βγαίνει από τη σύγκριση των δύο περιπτώσεων για $N=2N_c$ είναι ότι η μικρή αρχική απόσταση οδηγεί σε γρήγορη μίξη, αλλά και διασπορά, ή ακόμα και πολυδιάσπαση σε πολλούς λοβούς μικρής έντασης. Προτιμότερη είναι μια αρχική απόσταση γύρω στο 3 με 4, όπου οδηγεί στη γένεση δύο ευδιάκριτων λοβών. Ένα ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι για τις περισσότερες από τις παρακάτω περιπτώσεις, όπου $\Delta X_0 > 3$, η ανάλυση της παραγράφου 4.2.1 προβλέπει διασπορά, ενώ για πολλές περιπτώσεις που η αρχική απόσταση είναι μικρή, προβλέπει συσσωμάτωση, εστίαση και διαχωρισμό. Παρόλα αυτά σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις γεννιούνται δύο ευδιάκριτοι λοβοί, είτε έχει προηγηθεί εστίαση του συσσωματώματος, είτε όχι. Αυτό πιστεύουμε είναι ένα σημαντικό συμπέρασμα και οφείλεται στη παρουσία του CW. Οι περιπτώσεις που σημειώνονται στο παρακάτω σχήμα διαφέρουν από αυτή στο Σχ.5.9, όπου η αλληλεπίδραση των παλμών δεν γίνεται επί κάποιου CW, αλλά διαφέρει και από την αλληλεπίδραση παλμών σε ανώμαλη διασπορά, είτε υπάρχει CW είτε όχι. Στις περιπτώσεις αυτές οι παλμοί εξελίσσονται σύμφωνα με τη παραπάνω ανάλυση. Από την άλλη οι αλληλεπιδράσεις παρουσία CW σε κανονική διασπορά, αν και ακολουθούν σε μεγάλο βαθμό ότι ξέρουμε για τις σύμφωνες αλληλεπιδράσεις μη-γραμμικών παλμών επηρεάζονται από τη διαμορφωτική αστάθεια, κάνοντας την εξέλιξη τους περίπλοκο φαινόμενο.



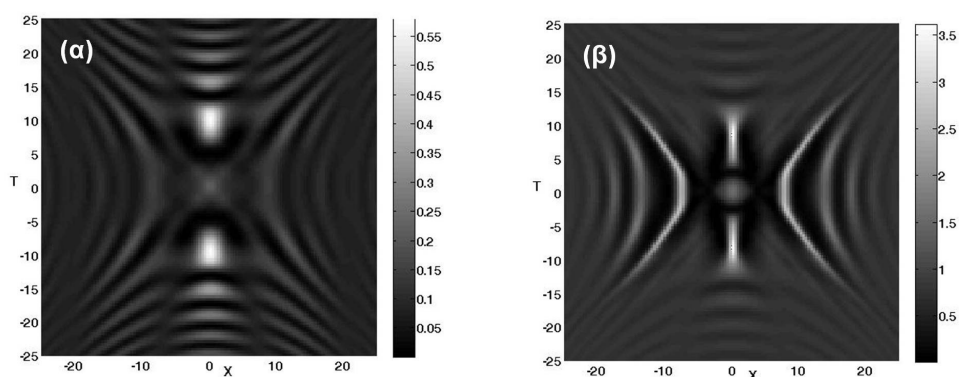
Σχήμα 5.16: (α) Χρονική μετατόπιση των κύριων λοβών ($Z=5$) και (β) μέγιστη ένταση, σε σχέση με την αρχική μετατόπιση για διάφορες τιμές της αρχικής ενέργειας ($N=1.5N_c$ διαμάντια, $N=2N_c$ άστρα και μαύρες τελείες, $N=3N_c$ τετράγωνα), όπου $a_{cw}=0.2$, $\phi=\pi$ και $K=0.2$, εκτός από τα άστρα, όπου $K=0$.

Μονοδιάστατοι χρονικοί μετασχηματισμοί Fourier παρίστανται στο σχήμα 5.17 για τη περίπτωση του Σχ.5.12(θ) στα «στιγμιότυπα» $Z=0$ και $Z=5$. Στο Σχ.5.17(β) βλέπουμε ότι υπάρχει συγκέντρωση ενέργειας σε φασματικές ζώνες εκατέρωθεν του CW, που σηματοδοτεί την αρχική κεντρική συχνότητα των παλμών, που έχει μετατόπιση μηδέν. Οι συγκεντρώσεις αυτές βρίσκονται στο $X=0$ και οι αντίθετες φασματικές μετατοπίσεις τους (ταχύτητες) αντιπροσωπεύουν τις αντίθετες και αυξανόμενες χρονικές μετατοπίσεις των λοβών.



Σχήμα 5.17: Φασματική μετατόπιση f κατά μήκος της εγκάρσιας διάστασης X , για παλμούς στην είσοδο ($Z=0$) και έξοδο ($Z=5$) του κυματοδηγού, στα (α) και (β) αντιστοίχως. Οι μονάδες της συχνότητας είναι $1/T_0 \approx 22\text{THz}$. Η λευκή γραμμή είναι λόγω του CW.

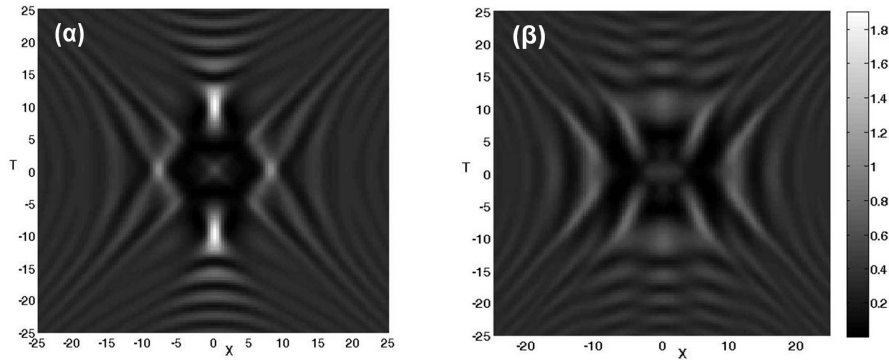
Μετά τις παραπάνω παρατηρήσεις και αποδεχόμενοι τη σημαντικότητα του CW και της διαμορφωτικής αστάθειας στη γένεση ή όχι δύο χρονικά μετατοπισμένων διακριτών λοβών, αξίζει να εξετάσουμε λίγο ακόμα την επίδραση του. Διατηρώντας τη φάση του σε $\phi = \pi$ και για δύο παλμούς με $N_i = 2N_c$, εξετάζουμε την επίδραση της έντασης του. Στο σχήμα 5.18 φαίνονται τα προφίλ αλληλεπίδρασης για $Z=5$, όταν $\alpha_{cw}=0.1$ και $\alpha_{cw}=0.3$, στο (α) και στο (β). Το $K=0$, και $\Delta X_0=4$, οπότε τα σχήματα είναι συγκρίσιμα με τη περίπτωση στο Σχ.5.12(γ). Για $\alpha_{cw}=0.1$ αν και το CW δεν αφαιρεί, αρχικά, μεγάλο ποσοστό της ενέργειας τους, οι παλμοί δεν έχουν αρκετή για να αυτοεστιάσουν, αλλά ούτε και να συσσωματωθούν και να εστιάσουν μετά. Πράγματι, αρχικά διασπείρονται αργά, αλλά ενώνονται και δημιουργούν δύο λοβούς, όπως και στο Σχ.5.12(γ). Οι λοβοί έχουν πολύ μικρότερη ένταση από αυτούς στο προηγούμενο σχήμα. Αυτό οφείλεται αποκλειστικά στο πολύ χαμηλό CW. Για $\alpha_{cw}=0.3$, ένα μεγάλο μέρος της ενέργειας των παλμών χάνεται στο CW, αλλά αυτό μόνο στην αρχή. Οι παλμοί διασπείρονται, ενώνονται και το πολύ ισχυρό CW ενισχύει δύο πολύ έντονους λοβούς, αλλά και εξίσου έντονες υπερβολές με άξονα τον $T=0$. Επομένως δεν δημιουργούνται δύο διακριτά κυματοπακέτα.



Σχήμα 5.18: Προφίλ έντασης εξόδου, στο $Z=5$ (15mm), όταν $N_i=2N_c$, $\phi_1 = \phi_2 = 0, \phi = \pi$, $\Delta X_0=4$ και α) $\alpha_{cw}=0.1$, β) $\alpha_{cw}=0.3$.

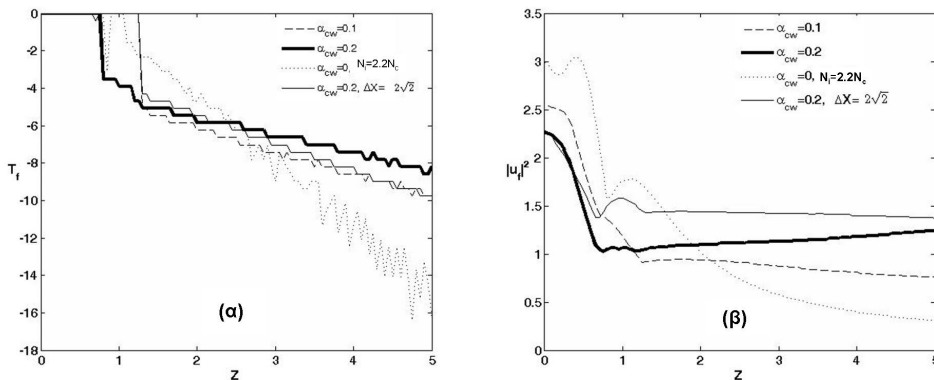
Στη προσπάθεια να σκιαγραφήσουμε την επίδραση του επίπεδου κύματος δοκιμάζουμε και το ρόλο της αρχικής απόστασης. Στο σχήμα 5.19 φαίνονται τα προφίλ έντασης στο $Z=5$ για δύο συμφασικούς παλμούς $N_i=2N_c$, με επίπεδο κύμα που έχει $\alpha_{cw}=0.2$ και $\phi = \pi$. Στο (α) οι παλμοί ξεκίνησαν με $\Delta X_0=2\sqrt{2}$, ενώ στο (β) με $\Delta X_0=8$. Για απόσταση αρκετά μικρή οι

παλμοί συνενώνονται και ο κεντρικός λοβός παρουσιάζει σημάδια εστίασης. Γρήγορα διαχωρίζεται και δημιουργούνται δύο λοβοί, όπως και στο Σχ.5.12(γ), αν και κάπως εντονότεροι. Για $\Delta X_0=8$ οι παλμοί απλώς διασπείρονται αυτόνομα. Μέρος της ενέργειας τους συγκλίνει προς το κέντρο, και το CW ενισχύει δομές τύπου-X λόγω του MI, αλλά η ενέργεια απλώς διασκορπίζεται σε πολλές κυματώσεις χαμηλής έντασης.



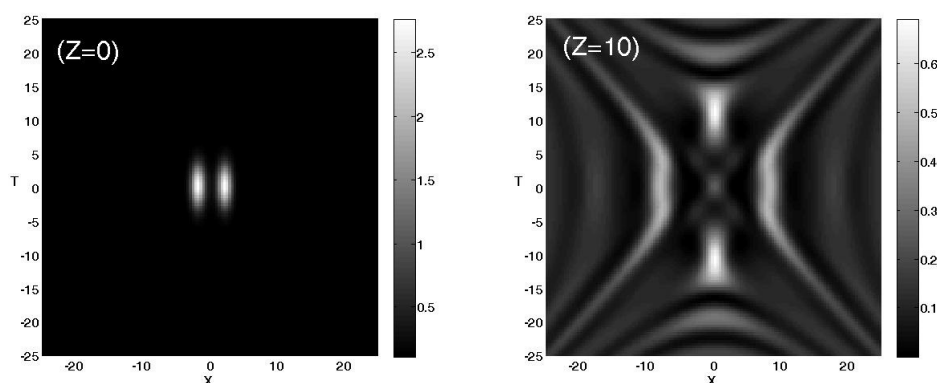
Σχήμα 5.19: Προφίλ έντασης εξόδου, στο $Z=5$ (15mm), όταν $N_i=2N_c$, $\phi_1 = \phi_2 = 0, \phi = \pi$, $\alpha_{CW}=0.2$ και α) $\Delta X_0=2\sqrt{2}$, β) $\Delta X_0=8$.

Κάποιες από τις χαρακτηριστικές περιπτώσεις που εξετάστηκαν παραπάνω συγκρίνονται στο σχήμα 5.20 ως προς τη χρονική μετατόπιση των λοβών και την ένταση τους. Πέρα από τη περίπτωση του Σχ.5.12(γ), συγκρίνεται αυτή του Σχ.5.18(α), (ίδια με τη προηγούμενη, αλλά με $\alpha_{CW}=0.1$), αυτή του Σχ.5.19(α) όπου $\Delta X_0=2\sqrt{2}$ και μία χωρίς CW, με $\Delta X_0=2\sqrt{2}$ και $N_i=2.2N_c$, αυτή στο Σχ.5.6. Φαίνεται λοιπόν πως για $\alpha_{CW}=0.1$ οι λοβοί έχουν χαμηλή σχετικά ένταση, αν και απομακρύνονται λίγο περισσότερο από ότι για $\alpha_{CW}=0.2$. Για παλμούς που ξεκινούν στη μικρότερη απόσταση, το συσσωμάτωμα προλαβαίνει να εστιάσει λίγο και οι τελικοί λοβοί είναι οι εντονότεροι. Για τη περίπτωση χωρίς CW, μεγάλη ενέργεια και μικρή απόσταση έχουμε μία καθαρή συνένωση σε αμάλγαμα που διαχωρίζεται. Οι λοβοί του όμως γρήγορα διασπείρονται και σβήνουν, οπότε η μεγάλη χρονική μετατόπιση που φαίνεται να έχουν στο Σχ.5.20(α) δε σημαίνει κάτι ουσιαστικό.



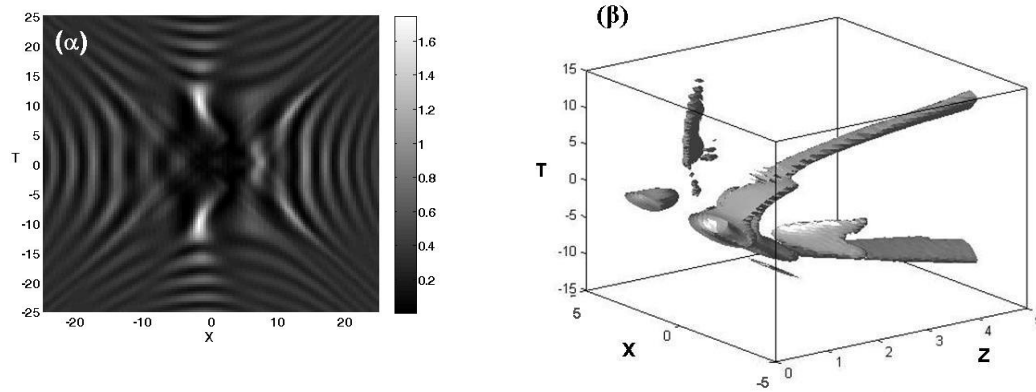
Σχήμα 5.20: Χρονική μετατόπιση (α) και μέγιστη ένταση (β) για τον αρνητικό λοβό σε διάφορες περιπτώσεις αλληλεπίδρασης. Στις περισσότερες $N_i=2N_c$, $\phi_1 = \phi_2 = 0, \phi = \pi$, $\Delta X_0=4$, και $\alpha_{CW}=0.2$. Διακεκομμένη: $\alpha_{CW}=0.1$. Γραμμική: $\Delta X_0=2\sqrt{2}$. Διάστικτη: Χωρίς CW, $N_i=2.2N_c$ και $\Delta X_0=2\sqrt{2}$.

Δοκιμάσαμε και την αλληλεπίδραση ελλειπτικών παλμών, σε παραδείγματα ανάλογα με αυτά που εξετάσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο για η γένεση κυματοπακέτων Τύπου-Χ. Ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 5.21. Δύο όμοιοι ελλειπτικοί παλμοί ($W_X=1$ με $W_T=3$) με μηδενική διαφορά φάσης και $N_i=2N_c$, τέθηκαν σε απόσταση $\Delta X_0=4$ μαζί με επίπεδο κύμα που έχει $a_{cw}=0.2$ και $\phi = \pi/2$. Η ενέργεια τους δεν είναι αρκετή για αυτόνομη εστίαση αλλά, σύμφωνα με την ανάλυση της παραγράφου 5.2.1, είναι αρκετή για να δημιουργήσουν συσσωμάτωμα και να εστιάσουν σαν ένα. Ο κεντρικός αυτός λοβός διαχωρίζεται στη συνέχεια χρονικά επιδεικνύοντας ιδανική εικόνα χωροχρονικής μετάθεσης και ακολουθώντας τη πρόβλεψη της ανάλυσης μας για δημιουργία αμαλλάματος. Όμως, η παρουσία του CW και η ενίσχυση συγκεκριμένων φασματικών ζωνών λόγω της διαμορφωτικής αστάθειας διασκορπίζει την ενέργεια, η οποία δε συγκεντρώνεται σε δύο κύριους λοβούς, αλλά ενισχύει και τους υπερβολικούς σχηματισμούς, που φαίνονται στο σχήμα 5.21 για $Z=10$. Υποθέτουμε ότι το μεγαλύτερο φασματικό εύρος της εγκάρσιας διάστασης, από ότι αυτό της χρονικής, είναι που διεγείρει την ενίσχυση των αντίστοιχων ζωνών και την εμφάνιση των πλευρικών υπερβολών. Τελικά οι λοβοί είναι χαμηλής έντασης και δυσδιάκριτοι.



Σχήμα 5.21: Προφίλ έντασης για $Z=0$ και $Z=10$ δύο όμοιων ελλειπτικών παλμών με $N_i=2N_c$ και $\Delta X_0=4$, παρουσία CW, όπου $a_{cw}=0.2$ και $\phi = \pi/2$.

Στη παρούσα μελέτη δεν αναπτύξαμε το ζήτημα της διαφορά φάσης μεταξύ των παλμών, καθώς ενδιέφερε περισσότερο η ελκτική τους αλληλεπίδραση και τα προϊόντα αυτής. Η παρουσία του επίπεδου κύματος δημιουργεί κάποιες νέες δυνατότητες, αλλά θέτει και περιορισμούς, καθώς δεν είναι μόνοι τους οι παλμοί που αλληλεπιδρούν. Στο σχήμα 5.22 παραθέτουμε ένα παράδειγμα αλληλεπίδρασης παλμών με διαφορετική φάση, το οποίο επιδεικνύει και τις δυνατότητες του CW σαν σήμα ελέγχου. Οι παλμοί είναι το κλασικό πλέον παράδειγμα, κυκλικοί με $N_i=2N_c$ σε απόσταση $\Delta X_0=4$, αλλά ο u_1 έχει φάση $\phi_1 = \pi$, ενώ ο u_2 $\phi_2 = 0$. Παράλληλα, υπάρχει επίπεδο κύμα με $a_{cw}=0.2$ και $\phi = 0$. Με αυτή τη διαφορά φάσης οι παλμοί δεν έλκονται και δε συγκλίνουν, οπότε εξελίσσονται γρήγορα αυτόνομα. Ο δεύτερος παλμός έχει αρκετή ενέργεια για εστίαση και διαχωρισμό και αυτό ακριβώς είναι που συμβαίνει. Διαχωρίζεται χρονικά και δημιουργεί δύο ευδιάκριτους λοβούς στο $X=2$, την αρχική του εγκάρσια θέση. Οι λοβοί κινούνται με αντίθετες ταχύτητες, όπως φαίνεται στο Σχ.5.22(α) για $Z=5$, ή στο (β) που παρίσταται ο διαχωρισμός κατά μήκος της διάδοσης. Αντίθετα ο πρώτος παλμός χάνει πολύ ενέργεια και διαλύεται.



Σχήμα 5.22: Προφίλ εξόδου ($Z=5$) (α), και ισοϋψείς επιφάνειες στο 65% της έντασης (β) για δύο παλμούς που ξεκινούν με $N_i=2N_c$ και $\phi_1 = \pi$, $\phi_2 = 0$, στα $X_0=2, -2$ αντίστοιχα, παρουσία CW, όπου $\alpha_{cw}=0.2$ και $\phi = 0$.

5.3 Συμπεράσματα

Βασικό συμπέρασμα είναι ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο χωρικά μετατοπισμένων κυματοπακέτων μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία δύο άλλων ευδιάκριτων νηματίων (ή λοβών) χρονικά μετατοπισμένων. Προϋπόθεση είναι η κανονική διασπορά, ενώ καταλυτική είναι η παρουσία CW που δρα σαν ελεγκτικός παράγοντας, όπου ενισχύει ή όχι τα προϊόντα της αλληλεπίδρασης. Φάνηκε ακόμα ότι η χρονική μετατόπιση των λοβών, η ένταση τους και η αντοχή τους στη διάδοση εξαρτώνται όχι μόνο από τα χαρακτηριστικά των παλμών, αλλά σε μεγάλο βαθμό από αυτά του CW με σημαντικότερο τη σχετική φάση του. Επιδεικνύεται έτσι η δυνατότητα για πλήρως οπτικό έλεγχο των αλληλεπιδρώντων κυματοπακέτων.

Σε όλα τα παραδείγματα που ελέγξαμε, συμπεριλαμβανόμενα και όσα παρουσιάστηκαν παραπάνω, οι σύμφωνες αλληλεπιδράσεις των μη-γραμμικών παλμών ακολουθούν τους γνωστούς κανόνες. Η ανάλυση που παρουσιάστηκε στη παράγραφο 5.2.1 φάνηκε επαρκής να προβλέπει τα αποτελέσματα των αλληλεπιδράσεων για δύο παλμούς σε ανώμαλη διασπορά παρουσία επιπέδου κύματος, ενώ σε συνδυασμό με όσα ειπώθηκαν στο κεφάλαιο 4.4 μπορούμε να εκτιμήσουμε και την εξέλιξη σε κανονική διασπορά. Η εκτίμηση αυτή όμως είναι πιο σαφής όταν δεν υπάρχει επίπεδο κύμα παρά όταν προστίθεται και αυτό. Οι περίπλοκη μορφή της διαμορφωτικής αστάθειας οδηγεί στην δημιουργία χρονικά διαχωρισμένων λοβών ακόμα και σε κάποιες περιπτώσεις που θα περιμέναμε απλώς τη διασπορά του κεντρικού λοβού. Φάνηκε λοιπόν ότι ο χρονικός διαχωρισμός, όπως και η δημιουργία κυματοπακέτων «Τύπου-X» βασίζονται στο ίδιο υπόβαθρο της MI η οποία διεγείρεται από τη παρουσία επίπεδου κύματος, καθώς τα κυματοπακέτα είναι ιδιαίτερα στενά και οι «ουρές» τους αμελητέας έντασης, ώστε να διεγείρουν το φαινόμενο. Από εκεί και πέρα όλα φάνηκαν να εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά του CW και τη σχετική φάση των παλμών.

Με τη παραπάνω μελέτη προσπαθήσαμε να σκιαγραφήσουμε την επίδραση του CW στους παλμούς. Στο μέλλον θα επεκτείνουμε τη διερεύνηση στη μελέτη της MI που δημιουργείται όχι μόνο από τη παρουσία του CW, αλλά και από τη συνύπαρξη του με γκαουσιανό κυματοπακέτο. Αυτό αναμένεται να δώσει εικόνα που θα διαφοροποιείται από αυτή στο Σχ.4.4(α) και ελπίζουμε ότι θα βοηθήσει σε μια βαθύτερη εξήγηση των αλληλεπιδράσεων.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και Προοπτικές

Στο τελευταίο Κεφάλαιο συνοψίζονται τα συμπεράσματα, από την άποψη της Φυσικής και της μεθοδολογίας, στα οποία καταλήξαμε στα προηγούμενα Κεφάλαια της εργασίας. Στη συνέχεια παραθέτουμε σκέψεις και προτάσεις, που δε πρόλαβαν να υλοποιηθούν και μπορεί να αποτελέσουν επεκτάσεις της εργασίας, στο κοντινό μέλλον.

6.1 Συμπεράσματα

Μελετήσαμε προβλήματα που αφορούν μη-γραμμική αλληλεπίδραση χρονικών και χωροχρονικών οπτικών κυματοπακέτων. Τα μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν είτε η δισδιάστατη NLS, για σύμφωνη αλληλεπίδραση παλμών, είτε δύο συζευγμένες NLS μέσω του όρου XPM και κατά περίπτωση όρων ανώτερης τάξης, για ασύμφωνη αλληλεπίδραση. Τα προβλήματα που αφορούν ασύμφωνη αλληλεπίδραση προσεγγίστηκαν και με διαταρακτικές ημι-αναλυτικές μεθόδους, καθώς αφορούν διάδοση μονοδιάστατων παλμών και πληρούν τις βασικές προϋποθέσεις για τη χρήση αυτής της μεθοδολογίας. Σε κάθε περίπτωση και για κάθε πρόβλημα αναπτύχθηκε και κατάλληλος αριθμητικός κώδικας.

Οι ημι-αναλυτικές μέθοδοι που χρησιμοποιήσαμε είναι η Μεταβολική και η Άμεση μέθοδος διαταραχών. Μέσω αυτών μετατρέψαμε τα προβλήματα από την επίλυση συστήματος μερικών διαφορικών, στην επίλυση συστημάτων από συνήθεις διαφορικές. Οι προσεγγιστικές αυτές μέθοδοι έχουν δύο σκοπούς. Ο πρώτος είναι η περιγραφή των βασικών χαρακτηριστικών του παλμού ή της ακτίνας και η αποκάλυψη των φαινομένων που τα επηρεάζουν. Δηλαδή, οι όροι των ODEs αντιπροσωπεύουν κάποια φυσικά φαινόμενα, η επίδραση των οποίων είναι ποιοτικά και ποσοτικά περισσότερο ξεκάθαρη από ότι στη πεπλεγμένη μορφή των PDEs. Ο άλλος λόγος είναι η υπολογιστική ευκολία και ταχύτητα που προσφέρει ένα σύστημα συνήθων διαφορικών.

Συγκεκριμένα, η Μεταβολική μέθοδος χρησιμοποιήθηκε για να προσεγγίσουμε το πρόβλημα των συζευγμένων NLS, μέσω XPM, για δύο επί μέρους περιπτώσεις. Κατ' αρχάς μελετήσαμε τη δυνατότητα συμπόρευσης δύο κάθετα πολωμένων ρυθμών σε ίνα με ισχυρή διπλοθλαστικότητα. Λόγω της μη γραμμικής απόκρισης του μέσου οι δύο ρυθμοί συζευγνύονται και αυτό αντιτίθεται στη τάση τους να διαχωριστούν. Το πρόβλημα αυτό υπάρχει στη βιβλιογραφία. Στη παρούσα εργασία προσθέσαμε έναν επιπλέον όρο διαταραχής, αυτό της ασθενώς μεταβαλλόμενης διασποράς, το οποίο, εξ όσων γνωρίζουμε, σε συνδυασμό με τη διπλοθλαστικότητα δεν έχει μελετηθεί εκτεταμένα. Το σύστημα των ODEs που καταλήξαμε, (περνώντας στον εκτεταμένο χώρο φάσεων), είναι τριών βαθμών ελευθερίας, οπότε για την απεικόνιση της εξέλιξης του συστήματος υιοθετήθηκε η δημιουργία τομών Poincaré τριών και τεσσάρων διαστάσεων. Στη μελέτη χρησιμοποιήσαμε σα βασικό παράδειγμα, την απλουστευμένη και υπολογιστικά ευκολότερη περίπτωση ρυθμών (ή παλμών) με ίδιο εύρος, αλλά συμπεριλάβαμε και παραδείγματα για ανόμοιο εύρος και για παλμούς τύπου sech, με τα συμπεράσματα να είναι ανάλογα. Η επίλυση των ODEs ήταν πολύ γρηγορότερη των αντίστοιχων PDEs και μπορέσαμε να δημιουργήσουμε τομές για πλήθος αρχικών συνθηκών και παραγόντων της διαταραχής. Η σύγκριση με την αριθμητική επίλυση, για συγκεκριμένες τιμές αρχικών συνθηκών, έδειξε τα εξής:

A) Το σύστημα των ODEs προβλέπει με καλή προσέγγιση τη διάλυση ή διατήρηση του συσσωματώματος των δύο ρυθμών, όπως και την εξέλιξη των χαρακτηριστικών τους, δηλαδή του εύρους, πλάτους, χρονικής μετατόπισης, συχνότητας και τερετίσματος, αρκεί η συχνότητα της διαταραχής (διασπορά) να είναι μικρότερη από το $1/4$, ή πολύ μεγαλύτερη από τις χαρακτηριστικές συχνότητες του αδιατάρακτου συστήματος.

B) Το ίδιο συμπέρασμα βαραίνει και την ισχύ της μεταβολικής μεθόδου, της οποίας η απόκλιση μεγαλώνει όταν η συχνότητα διαταραχής είναι εκτός των περιοχών αυτών. Έτσι χαράσσουμε τα όρια χρήσης της.

Η δεύτερη περίπτωση χρήσης της μεθόδου είναι η μελέτη της επίδρασης των συγκρούσεων παλμών διαφορετικών καναλιών, παρουσία ισχυρής διαχείρισης διασποράς, χωρίς να λάβουμε υπόψη απώλειες και ενίσχυση. Καθώς είναι γνωστό ότι για συγκεκριμένες τιμές της περιόδου διαχείρισης και της τοπικής τιμής της διασποράς δύναται να μηδενιστεί η φασματική μετατόπιση λόγω συγκρούσεων, δοκιμάσαμε το ίδιο για τα «σολιτόνια διαχείρισης διασποράς». Τα σολιτόνια αυτά έχουν πλάτος ενισχυμένο, σε σχέση με τα

συνήθη, κατά παράγοντα που εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της διαχείρισης. Βρήκαμε έναν απλό τρόπο υπολογισμού του παράγοντα αυτού, που δε γνωρίζουμε να είναι δημοσιευμένος αλλού. Αυτό βέβαια ίσως οφείλεται στην απλότητά του, αλλά παρόλα αυτά μας βοήθησε να επιλέξουμε τα κατάλληλα χαρακτηριστικά του σολιτονίου έτσι ώστε, μετά από περιοδική μεταβολή κατά μήκος της περιόδου διαχείρισης, να επανέρχονται στις αρχικές τιμές τους στο τέλος αυτής. Αυτό επαληθεύτηκε επακριβώς από τις αριθμητικές προσομοιώσεις. Έχοντας τις κατάλληλες μορφές των σολιτονίων διαχείρισης διασποράς και με βάση το σύστημα των συνήθων διαφορικών, η μελέτη έδειξε ότι δύνανται να βρεθούν συγκεκριμένες τιμές της διασποράς, όπως και της περιόδου διαχείρισης, όπου η φασματική μετατόπιση των σολιτονικών παλμών να μηδενίζεται.

Η Άμεση μέθοδος διαταραχών χρησιμοποιείται για να προσεγγίσουμε το πρόβλημα συγκρούσεων σολιτονικών παλμών, με εύρος μικρότερο από $1ps$ και διαφορετικής συχνότητας. Παίρνοντας σαν αρχικούς παλμούς το βασικό σολιτόνιο για κάθε κανάλι, αντιμετωπίζουμε τους όρους σύζευξης, Raman και διασποράς 3^{15} τάξης σε διαταραχές. Σε αντίθεση με παλαιότερες διαταρακτικές προσεγγίσεις, η χρήση παλμών σχήματος sech καταλήγει σε ODEs που περιλαμβάνουν ολοκληρώματα χωρίς αναλυτική έκφραση. Με τη βοήθεια της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων τα αντικαταστήσαμε με προσεγγιστικές συναρτησιακές εκφράσεις, ανάλογα με τη περίπτωση. Τα αποτελέσματα της επίλυσης του συστήματος συγκρίθηκαν με απευθείας αριθμητικές προσομοιώσεις, που περιλαμβάνουν όλα τα παραπάνω μεγέθη ανώτερης τάξης, οι οποίες έδειξαν πολύ καλή συμφωνία. Χρησιμοποιήσαμε το σύστημα των ODEs για να μελετήσουμε τη δυνατότητα καταπολέμησης της χρονικής μετατόπισης του παλμού, λόγω του SFS, με αντίθετες μετατοπίσεις προκαλούμενες από συγκρούσεις με παλμούς καναλιού μικρότερης συχνότητας. Φάνηκε ότι οι προγραμματισμένες συγκρούσεις μπορούν να επαναφέρουν το παλμό στο χρονικό του παράθυρο, αλλά αυτό συνοδεύεται και από ενεργειακές απώλειες προς το κανάλι χαμηλότερης συχνότητας.

Μελετήθηκαν και δύο διαφορετικά προβλήματα σύμφωνης αλληλεπίδρασης χωροχρονικών παλμών (2+1)D, που αντιστοιχούν σε διάδοση σε επίπεδο κυματοδηγό. Και στις δύο περιπτώσεις η μελέτη ήταν αριθμητική, αλλά η επιλογή των αρχικών συνθηκών έγινε με οδηγό φυσικές παρατηρήσεις. Έτσι, αρχικά δοκιμάσαμε το αποτέλεσμα που έχει στην εξέλιξη του παλμού συνεχές επίπεδο κύμα (που αναφέρεται σαν CW) ίδιας συχνότητας και ουσιαστικά άπειρου εύρους, αλλά μικρής έντασης. Ο απώτερος στόχος ήταν η διερεύνηση της δυνατότητας αυθόρμητης δημιουργίας μη-γραμμικού κυματοπακέτου Τύπου «X», αντίστοιχο με τα γραμμικά κύματα X, που δύνανται να δημιουργηθούν και διαδοθούν σε μέσα με κανονική διασπορά. Με βάση γνωστά συμπεράσματα για την εξέλιξη πολυδιάστατων παλμών σε μέσα με ανώμαλη διασπορά, επεκτείναμε τις θεωρητικές προβλέψεις για παλμούς με ελλειπτικότητα, παρουσία του CW. Φάνηκε ότι κομβικό σημείο της εξέλιξης, είναι η δυνατότητα του παλμού να αυτοεστιάζει, ή όχι. Βάση αυτού μεταφέραμε τα συμπεράσματα σε μέσα με κανονική διασπορά, ώστε να έχουμε έναν οδηγό για το πότε θα μπορούσαμε να αποφύγουμε την αυτοεστίαση. Σε αυτή τη περίπτωση ο παλμός δεν εξελίσσεται σε X μορφή. Οι θεωρητικές προβλέψεις βασίστηκαν περισσότερο σε ποιοτικά χαρακτηριστικά της εξέλιξης των παλμών, αλλά μέσω αυτών χαράξαμε, έστω και χοντρικά, περιοχές αρχικών τιμών όπου έπρεπε να αποφευχθούν. Εκτελέστηκαν πολλά αριθμητικά «πειράματα», από τα οποία φάνηκε η καταλυτική σημασία της φάσης, αλλά και του πλάτους σε δεύτερο λόγο, του CW στην εξέλιξη του παλμού, αλλά και στη δυνατότητα δημιουργία κυματοπακέτου τύπου X. Από όλες τις αριθμητικές απόπειρες αυθόρμητης δημιουργίας τέτοιων παλμών, η χρήση του CW έδειξε ότι καταλήγει σε δομές ξεκάθαρα κωνικής μορφής, όχι μόνο στο χώρο Fourier, όπως σε παλαιότερες εργασίες, αλλά και στο φυσικό πεδίο. Συμπεραίνουμε ότι αυτό οφείλεται στη χωροχρονική διαμορφωτική αστάθεια, η οποία χωρίς το επίπεδο κύμα είναι πολύ ασθενής για να βοηθήσει στην ανάδειξη τέτοιων μορφών. Επίσης,

φάνηκε ότι η δημιουργία τους ευνοείται όταν το μήκος διασποράς είναι μεγαλύτερο από αυτό της περίθλασης. Σε αντίθετη περίπτωση η έντονη διασπορά τείνει να διαχωρίσει το παλμό σε δύο κυματοπακέτα. Να πούμε τέλος ότι οι παλμοί τύπου X που δημιουργούνται δεν έχουν τη ευστάθεια των γραμμικών και σύντομα, μετά από 15-20 μήκη περίθλασης διασπείρονται και καταστρέφονται τελείως. Παρόλα αυτά είναι μακροβιότεροι άλλων χωροχρονικών παλμών και καθώς δημιουργούνται σε μέσα κανονικής διασποράς, δεν υφίστανται κατάρρευση.

Το δεύτερο πρόβλημα σχετικό με χωροχρονικούς παλμούς, αφορά την αλληλεπίδραση τους, παρουσία όμως πάλι CW. Η μελέτη εστιάζει στη περίπτωση κανονικής διασποράς, αλλά η θεωρητική πρόβλεψη της εξέλιξης ξεκινά ξανά από τη περίπτωση ανώμαλης διασποράς, για την οποία υπάρχει βιβλιογραφία. Φαίνεται ότι για κατάλληλη φάση του CW και ανάλογα με την εγκάρσια μετατόπιση των παλμών, αυτοί δύνανται να εξελιχθούν αυτόνομα, να συνενωθούν λόγω διαπλάτυνσης που προκαλείται από τη διασπορά τους, ή να συνενωθούν και να εστιάσουν σαν ένα κυματοπακέτο, δημιουργώντας αυτό που στη βιβλιογραφία ονομάζεται «αμάλαμα». Ο ρυθμιστικός ρόλος του CW και η ποικιλία των δυνατών αποτελεσμάτων είναι ένδειξη για τη δυνατότητα δημιουργίας οπτικών διατάξεων διαχείρισης των παλμών. Ένα από τα δυνατά αποτελέσματα είναι η συνένωση των παλμών, με τελικό «προϊόν» τη δημιουργία δύο νέων κυματοπακέτων μετατοπισμένων πλέον χρονικά, αλλά και φασματικά σε σχέση με τους αρχικούς παλμούς. Οι συνθήκες που μπορούν να οδηγήσουν στη χωροχρονική αυτή μετάθεση καταγράφονται.

Για την αριθμητική επίλυση των παραπάνω προβλημάτων χρησιμοποιήσαμε κώδικα βασισμένο στη μέθοδο χωριζόμενου βήματος, γραμμένο σε MATLAB. Ο βασικός κώδικας υπήρχε στο εργαστήριο Πλάσματος, Ηλεκτρονικής Δέσμης και Μη-Γραμμικής Οπτικής της σχολής των Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών του ΕΜΠ. Στο πλαίσιο της διατριβής και για τις ανάγκες αυτής επεκτείναμε τον κώδικα να περιλαμβάνει μη-γραμμική σύζευξη και όρους ανώτερης τάξης και χρησιμοποιήθηκε για να επιλύσουμε και προβλήματα (2+1)D διαστάσεων. Ο κώδικας είναι λειτουργικός και η σύγκριση των αποτελεσμάτων του με γνωστή θεωρία έδειξε πολύ καλή συμφωνία.

Για την επίλυση των διαφόρων συστημάτων από ODEs, κατασκευάσαμε απλούς κώδικες στο MATLAB βασισμένους στις υπορουτίνες Runge-Kutta του προγράμματος. Εξαίρεση αποτελεί ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε για τη κατασκευή των τομών Poincaré. Αυτός χρησιμοποιήθηκε στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων που εξήχθησαν από τη Μεταβολική μέθοδο, στο Κεφάλαιο 2. Είναι γραμμένος σε γλώσσα C και βασίστηκε σε έκδοση ενός κώδικα που υπήρχε στο εργαστήριο, και είχε κατασκευαστεί πριν αρκετά χρόνια, σε γλώσσα Fortran 77, από το μακαρίτη καθηγητή του τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών, Χρόνη Πολυμίλη. Πρέπει να πούμε ότι χρειάστηκε πολύ δουλειά για να γίνει ο κώδικας λειτουργικός σε compiler για Windows, και να προσαρμοστεί για τα δικά μας συστήματα, αλλά πλέον είναι λειτουργικός και δίνει σωστά αποτελέσματα, όπως φάνηκε από την επίλυση γνωστών συστημάτων.

6.2 Προτεινόμενες επεκτάσεις

Η μελέτη της ευστάθειας του παλμού σε ένα με ισχυρή διπλοθλαστικότητα, που παρουσιάζεται στο 2^ο Κεφάλαιο, έγινε με τη βοήθεια της Μεταβολικής μεθόδου, με την οποία καταλήξαμε σε συστήματα με τρεις βαθμούς ελευθερίας. Αν και δημιουργώντας τομές Poincaré, μπορεί κανείς να προβλέψει τη διατήρηση του παλμού, μια πιο ολοκληρωμένη μελέτη απαιτεί τον υπολογισμό συντελεστών Lyapunov. Ως εκ τούτου, στο άμεσο μέλλον θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό τους για συστήματα που προέρχονται από την προαναφερθείσα μέθοδο. Καθώς η μέθοδος εφαρμόστηκε για γκαουσιανούς ρυθμούς με εύρος όμοιο ή ανόμοιο και για ρυθμούς μορφής sech και κατέληξε σε αντιστοίχως

διαφορετικά συστήματα, θα επιχειρήσουμε να κάνουμε μελέτη ευστάθειας με τη βοήθεια των συντελεστών για όλα τα παραπάνω. Αν και αρκετά χρόνια τώρα το επιστημονικό και τεχνολογικό ενδιαφέρον δε βρίσκεται επικεντρωμένο στα χρονικά σολιτόνια, πιστεύουμε ότι η προτεινόμενη επέκταση θα δώσει στο συγκεκριμένο πρόβλημα περισσότερο ενδιαφέρον από μαθηματική άποψη.

Από τη μελέτη συγκρούσεων στενών παλμών, στο Κεφάλαιο 3, φάνηκε πως η Άμεση μέθοδος διαταραχών μπορεί να περιγράψει την εξέλιξη των φυσικών παραμέτρων με πολύ καλή ακρίβεια. Μια πιθανή επέκταση θα μπορούσε να είναι ο υπολογισμός της διόρθωσης που επιβάλλεται στην έκφραση του παλμού μετά τη σύγκρουση και την επίδραση των φαινομένων ανώτερης τάξης. Έτσι θα μπορούσαμε να πάμε και σε ακρίβεια δεύτερης τάξης. Επιπλέον, έχοντας τις προσεγγιστικές αναλυτικές εκφράσεις για τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στις ODEs, μπορούμε πιο εύκολα να μελετήσουμε την επίδραση και άλλων φαινομένων ανώτερης τάξης, όπως η αυτό-διαμόρφωση απότομων άκρων.

Περισσότερα πράγματα, πιστεύουμε, μπορούν να γίνουν για την αλληλεπίδραση χωροχρονικών παλμών με CW. Η σχέση διασποράς που χρησιμοποιήσαμε βασίζεται στη διαμορφωτική αστάθεια CW επίπεδου κύματος μόνο, και αυτό άλλωστε ακολουθείται από μεγάλο μέρος των συγγραφέων. Έτσι η εξέλιξη του παλμού, φυσική και φασματική, δεν ακολουθεί πάντα τις «υπερβολές» και «εφαπτόμενες» που σκιαγραφούν την υπάρχουσα σχέση διασποράς. Πιστεύουμε ότι θα είχε ενδιαφέρον να γίνει μελέτη διαμορφωτικής αστάθειας για τον παλμό και το CW μαζί. Ελπίζουμε πως μια τέτοια επέκταση θα βοηθήσει να εξηγήσουμε την εξέλιξη του παλμού και φαινόμενα όπως ο χρονικός διαχωρισμός και η χωροχρονική μετάθεση, που παρατηρείται σε κάποιες περιπτώσεις, όταν δύο παλμοί αλληλεπιδρούν συμφασικά.

Ακόμα, άμεσα υλοποιήσιμη φαίνεται να είναι η μελέτη δημιουργίας κυματοπακέτων τύπου «X», αλλά και η μελέτη αλληλεπίδρασης παλμών, παρουσία CW, σε τρεις διαστάσεις. Το φυσικό σύστημα θα περιγράφεται από τη (3+1)D NLS και οι παλμοί θα αντιστοιχούν σε «οπτικά βλήματα» που οδεύουν σε ελεύθερο μέσο. Επίσης, μπορούμε να εξετάσουμε τη περίπτωση κορέσιμης μη-γραμμικότητας για δύο ή περισσότερες διαστάσεις.

APPENDIX A

Κώδικες

ODE solver & Poincaré Section

Ο συγκεκριμένος κώδικας σε γλώσσα C χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση των συστημάτων συνήθων διαφορικών του Κεφαλαίου 2, όπως και για τη κατασκευή τομών Poincaré. Είναι παραλλαγή παλαιότερου κώδικα, κατασκευασμένου σε γλώσσα Fortran 77 από το μακαρίτη καθηγητή Φυσικής Χρόνη Πολυμίλη. Για να πιστοποιήσουμε την ακρίβεια του στη κατασκευή τομών, παραθέτουμε στο σχήμα A παρακάτω, τομή του συστήματος που χαρακτηρίζεται από τη Χαμιλτονιανή του “Toda”.

Η συγκεκριμένη Χαμιλτονιανή είναι:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{24}(e^{2y+2\sqrt{3}x} + e^{2y-2\sqrt{3}x} + e^{-4y}) - \frac{1}{8} \quad (\text{A.1})$$

Το σύστημα που διατηρεί τη Χαμιλτονιανή είναι:

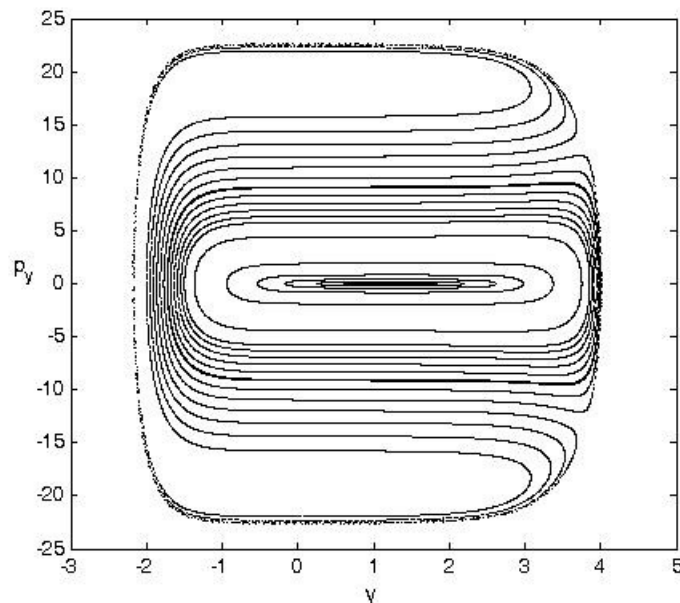
$$\frac{dx}{dt} = p_x \quad (\text{A.2}\alpha)$$

$$\frac{dy}{dt} = p_y \quad (\text{A.2}\beta)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\sqrt{3}}{12}(e^{2y+2\sqrt{3}x} - e^{2y-2\sqrt{3}x}) \quad (\text{A.2}\gamma)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{1}{12}(e^{2y+2\sqrt{3}x} + e^{2y-2\sqrt{3}x} - 2e^{-4y}) \quad (\text{A.2}\delta)$$

Ακολουθώντας το παράδειγμα από το [22] πήραμε τομή στο $x=0$ για $H=256$. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα A και είναι πανομοιότυπο με αυτό της αναφοράς.



Σχήμα A: Τομή Poincaré στο $x=0$ για το σύστημα (A.2) και για $H=256$, όπως δίνεται από τον ODE solver κώδικα σε C.

Παρακάτω παρατίθεται ο κώδικας για τη περίπτωση του συστήματος (2.45).

```
// Version: November 28, 2010
```

```
/*Canonical Variables and Their Derivatives
```

```
-----
reserve current (all with + 16*j)
-----
```

```
y + 0, y + 1 -> q1      DT
y + 3, y + 2 -> dq1/dt
y + 4, y + 5 -> q2      W
y + 7, y + 6 -> dq3/dt
y + 8, y + 9 -> p1      DV
y + 11, y + 10 -> dp1/dt
y + 12, y + 13 -> p2     b
y + 15, y + 14 -> dp2/dt
y + 16, y + 17 -> q3     z or "time" t
y + 19, y + 18 -> dq3/dt
y + 20, y + 21 -> p3     -H
y + 23, y + 22 -> dp3/d
```

```
EXTENDED HAMILTONIAN (VALUE = 0) given by Kaup with the extra "masses":
```

$$H(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3) = \sqrt{\pi/2} * (E * d(q_3) * p_2^2 + (1/2) * E * d(q_3) * p_1^2 + E * d(q_3) / q_2^2 - \gamma * (E^2) / (\sqrt{2} * q_2) - (\beta * \gamma * (E^2) / (\sqrt{2} * q_2)) * \exp(-(q_1 / q_2)^2) + p_3$$

```
*/
```

```
#include <stdio.h>
//#include <bios.h>
#include <stdlib.h>
//#include <malloc.h>
#include <math.h>
```

```
#define POS 1
#define NEG -1
#define YES 1
#define NO 0
#define ITWOPI M_1_PI/2
#define TWOPI 1./.(ITWOPI)
#define pi M_PI
#define P1MAX 1.
#define P1MIN 0.
```

```
#define beta 2.
#define gamma 1.
#define E 1.
#define wDT sqrt((beta)*(1+beta)*(1+beta)*(1+beta)/8.)
#define DIM 24 //this is NEW, DIM replaces 16 or 24 or whatever the # of variables
```

```
typedef struct {
```

```

                FILE *out;
                FILE *poinc;
    FILE *run;
    } output;
```

```
double Er = (E*E)/(E+E);
double SQ1;
double Q1;
double P1;
double Q2;
double P2;
double Q3;
double P3;
double RK0 = 0.50;
double K0 = 5.;
double L0;
double Eps;
//double Ham = 1.0;
double Ham;
// *****Var is the dispersion function, it can be sin or heaviside, Dar is the diff(Var)*****
//double Var = 1.;
//double Dar = 0.;
double Var;
```

```

double Dar;
double Zmin = 0.0;
double Zmax = 200;
double Zeta = 0.0;
//double Zstep = 0.0001;
//double Step = 0.0001;
double Zstep = 0.001;
double Step = 0.001;
int Nstep = 0;
double Steep = 50.;

int Norb = 40;
int NZ;
int SMOOTH = NO;
int ORBIT = YES;
int POINC = NO;

long int KL;
long int KR;
long int Cpoinc = 0;
long int Tpoinc = 0;
// !!!*****circle Poinc and Total Poinc hits*****!!
long int Zpoints;
// *****Parameters for the Poincare Surface of Section *****

double Q3POI;
double intq3;

int Dir = POS;
int Cross = NO;
//!!! ***** Enough has to do with Accuracy ***** !!!
int Enough = NO;
int Inter = NO;
int Noreg = YES;
int Cond1 = NO;
int Cond2 = NO;
int Cond3 = YES;
//double Accur = 1.e-14;
double Accur = 1.e-2;
double Finter = 0.0;
double Reduct = 0.0;

void initialize_param(output *f);
void open_files(output *f);
void initialize_variables(double *y,double *d,double *dd,output *f);
void propagation(double *y, register int j,double *d, double *dd,output *f);
void runge_kutta(double *y, register int j,double *d, double *dd);
void poincare(double *y, register int j);
void deriv(double *y, register int j,double *d, double *dd);
void file_orbit(double *y, register int j,output *f);
void reset(double *y, register int j);
void check(double *y, register int j,output *f);
void not_enough(double *y, register int j);
void reinitialize(double *d, double *dd);
//void reinitialize();
void close_all(double *y,double *d, double *dd, output *f);
double sumhev(double x);
double sumdelta(double x);
double disp(double x);
double diffdisp(double x);
int file_poinc(double *y, register int j,output *f);
//***** main *****

main()
{

register int j;
double *my_y, *my_d, *my_dd;
output *my_output;

my_output = (output *)malloc(sizeof(output));
my_output->run = fopen("run.dat", "wt+");
if (ORBIT == YES) my_output->out = fopen("out.dat", "wt+");
if (POINC == YES) my_output->poinc = fopen("poinc.dat", "wt+");

```

```

/*Norb = Norb/2;
Norb = 2*Norb;*/

my_y = (double *)calloc(DIM*Norb, sizeof(double));

Zpoints = Zmax/Zstep + 1;
my_d = (double *)calloc(Zpoints, sizeof(double));
my_dd = (double *)calloc(Zpoints, sizeof(double));

initialize_param(my_output);
printf("P2=%f Q1=%f\n", P2, Q1);
initialize_variables(my_y, my_d, my_dd, my_output);
fclose(my_output->run);

j = 0;
do {
/**!!the following "if" was added to eliminate the unnecessary calling of file_orbit (even with NO)and the crash!!***/
if (ORBIT == YES) file_orbit(my_y, j, my_output);

propagation(my_y, j, my_d, my_dd, my_output);
j++;
/**!!***** new addition for Eps(j) ***** !!
Eps = 10.8 + j*8./(Norb-1.);
printf("Norb=%d Eps=%f k0=%f\n", Norb, Eps, K0);
/**!!***** !!
printf("lfkdsaj j=%d\n", j);
printf(" J = %d Np = %Ld Tp = %Ld\n", j, Cpoinc, Tpoinc);
reinitialize(my_d, my_dd);
//reinitialize();
} while (j != Norb);

close_all(my_y, my_d, my_dd, my_output);
printf("check1");
}
//*****
void propagation(double *y, register int j,
double *d, double *dd, output *f)
{
do {
runge_kutta(y, j, d, dd);
Nstep +=1;

switch (POINC) {
case YES :
poincare(y, j);
check(y, j, f);
break;
case NO : switch (ORBIT) {
case YES : if((Nstep%10)==0) file_orbit(y, j, f);
break;
case NO :
break;
};
break;
};
} while(Zeta <= Zmax);
}

void runge_kutta(double *y, register int j, double *d, double *dd)
{
register int i;

deriv(y, j, d, dd);
i = 0;
do{
*(y + DIM*j + i + 0) = *(y + DIM*j + i + 1);
*(y + DIM*j + i + 3) = *(y + DIM*j + i + 2);
*(y + DIM*j + i + 1) = *(y + DIM*j + i + 0)
+ *(y + DIM*j + i + 2)*(Step)/2;
i += 4;
} while(i != DIM);

```



```

deriv(y, j, d, dd);
  i = 0;
  do{
    *(y + DIM*j + i + 3) += 2*(*(y + DIM*j + i + 2));
    *(y + DIM*j + i + 1) = *(y + DIM*j + i + 0)
                          + (*(y + DIM*j + i + 2))*(Step)/2;

    i += 4;
  } while(i != DIM);
deriv(y, j, d, dd);
  i = 0;
  do{
    *(y + DIM*j + i + 3) += 2*(*(y + DIM*j + i + 2));
    *(y + DIM*j + i + 1) = *(y + DIM*j + i + 0)
                          + (*(y + DIM*j + i + 2))*(Step);

    i += 4;
  } while(i != DIM);

deriv(y, j, d, dd);
  i = 0;
  do{
    *(y + DIM*j + i + 1) = *(y + DIM*j + i + 0)
                          + (*(y + DIM*j + i + 2)
                          + *(y + DIM*j + i + 3))*(Step)/6;

    i += 4;
  } while(i != DIM);
Zeta += Step;
}
// !!!*****Here "deriv" is defined *****!!!!
void deriv(double *y, register int j, double *d, double *dd)
{
  KL = (floor(Zeta/Zstep) <= Zpoints)
        ? floor(Zeta/Zstep)
        : Zpoints;
  KR = (ceil(Zeta/Zstep) <= Zpoints)
        ? ceil(Zeta/Zstep)
        : Zpoints;
  Var = (SMOOTH == YES)
        ? disp*(y + DIM*j + 17)
        // : *(d + KL)+(Zeta-KL*Zstep)*(d + KR) - *(d + KL)/Zstep; this has changed by advise of Panagiotis
        : disp(KL*Zstep)+(Zeta-KL*Zstep)*(disp(KR*Zstep)-disp(KL*Zstep))/Zstep;
  Dar = (SMOOTH == YES)
        ? diffdisp*(y + DIM*j + 17)
        // : *(dd + KL)+(Zeta-KL*Zstep)*(dd + KR) - *(dd + KL)/Zstep; this has changed by advise of Panagiotis
        : diffdisp(KL*Zstep)+(Zeta-KL*Zstep)*(diffdisp(KR*Zstep)-diffdisp(KL*Zstep))/Zstep;

  *(y + DIM*j + 2) = -Var*(*(y + DIM*j + 9));
  *(y + DIM*j + 6) = 2.*Var*(*(y + DIM*j + 13));
  *(y + DIM*j + 10) = 2.*sqrt(2.)*beta*gamma*E*((*(y + DIM*j + 1))/(pow(*(y + DIM*j + 5),3.)))
                   *exp(-pow(*(y + DIM*j + 1),2.)/(pow(*(y + DIM*j + 5),2.)));
  *(y + DIM*j + 14) = -1.*(E*gamma/(sqrt(2.))*(pow(*(y + DIM*j + 5),2.))) -2.*Var/pow(*(y + DIM*j + 5),3.)
                   +E*beta*(1./sqrt(2.)*pow(*(y + DIM*j + 5),2.))
                   *(1.-2.*pow(*(y + DIM*j + 1),2.)/(pow(*(y + DIM*j + 5),2.)))
                   *exp(-pow(*(y + DIM*j + 1),2.)/(pow(*(y + DIM*j + 5),2.)));
  *(y + DIM*j + 18) = 1.;
  *(y + DIM*j + 22) = -1.*sqrt(pi/2.)*(E*pow(*(y + DIM*j + 13),2.) + 0.5*Er*pow(*(y + DIM*j + 9),2.) + E/pow(*(y + DIM*j + 5),2.))*Dar;
}

void file_orbit(double *y, register int j,
               output *f)
{
  //!*****the last %f in "out" file is the Hamiltonian*****!
  fprintf(f->out, "%f %f %f %f %d %f %f %f %f %f %f\n",
          Var,*(y + DIM*j + 1),
          *(y + DIM*j + 5), *(y + DIM*j + 9),
          j + 1,
          *(y + DIM*j + 13), sin(K0*(*(y + DIM*j + 16))), sin(K0*(*(y + DIM*j + 17))), *(y + DIM*j + 17),*(y + DIM*j + 21),
          sqrt(pi/2.)*(E*Var*pow(*(y + DIM*j + 13),2.)
          + E*Var/(pow(*(y + DIM*j + 5),2.)) -gamma*pow(E,2.)/(sqrt(2.))*(*(y + DIM*j + 5)))
          + (1./2.)*Er*Var*pow(*(y + DIM*j + 9),2.) -(beta*gamma*E/(sqrt(2.))*(*(y + DIM*j + 5)))
          *exp(-pow(*(y + DIM*j + 1),2.)/(pow(*(y + DIM*j + 5),2.))));
}

void close_all(double *y, double *d, double *dd,
               output *f)

```

```

{
if (ORBIT == YES) fclose(f->out);
if (POINC == YES) fclose(f->poinc);
free(f);
free(y);
free(d);
free(dd);
}
void poincare(double *y, register int j)
{

int vdir;
double q3old, q3new;

intq3 = floor(*(y + DIM*j + 17)*K0/(2.*pi));
q3old = *(y + DIM*j + 16)*K0/(2.*pi) - intq3;
q3new = *(y + DIM*j + 17)*K0/(2.*pi) - intq3;
//q3old = sin(K0*(*(y + DIM*j + 16))) - Q3POI;
//q3new = sin(K0*(*(y + DIM*j + 17))) - Q3POI;
//printf("q3new=%f q3old=%f\n", fabs(q3new)-Accur, q3old);
vdir = (q3old < q3new)
      ? POS
      : NEG;
Cross = ((vdir*Dir > 0) && (q3old*q3new <= 0.))
      ? YES
      : NO;
//*****accuracy critical for square modulation*****!!!!

Enough = ((fabs(q3new) < Accur + Accur*fabs(Q3POI)) && (Cross == YES))
        ? YES
        : NO;

Finter = fabs(q3old + Q3POI)
        /(fabs(q3new + Q3POI) + fabs(q3old + Q3POI));
}

int file_poinc(double *y, register int j,
              output *f)
{

Cpoinc++;
Tpoinc++;

Ham = sqrt(pi/2.)*(E*Var*pow(*(y + DIM*j + 13),2.)
+ E*Var/(pow(*(y + DIM*j + 5),2.))- gamma*pow(E,2.)/(sqrt(2.)*(*(y + DIM*j + 5)))
+ (1./2.)*Er*Var*pow(*(y + DIM*j + 9),2.) - (beta*gamma*E*E/(sqrt(2.)*(*(y + DIM*j + 5))))
*exp(-pow(*(y + DIM*j + 1),2.)/pow(*(y + DIM*j + 5),2.)));
fprintf(f->poinc, "%f %f %d %f %f %f %f %f\n",
        *(y + DIM*j + 5),
        *(y + DIM*j + 13),
        j + 1,
        Ham, Zeta, *(y + DIM*j + 1),
        *(y + DIM*j + 9), *(y + DIM*j + 17), *(y + DIM*j + 21));

Step = Zstep;
return (NO);
}

void reset(double *y, register int j)
{

register int i;
Zeta -= Step;
i = 0;
do {
*(y + DIM*j + i + 1) = *(y + DIM*j + i + 0);
i += 4;

} while (i != DIM);
}

void check(double *y, register int j,
          output *f)

```

```

{

switch (Enough){

case YES: if(Zeta != 0.0) Noreg = file_poinc(y, j, f);
          break;
case NO:   switch (Cross) {

              case YES: Reduct = Finter;

              case NO:  Reduct = 0.5;

              break;

          };

          void not_enough(double *y, register int j)
          {

          int which;

          switch (Cond1) {

              case NO: which = NO;
                       break;
              case YES:reset(y, j);
                       Cond2 = Cond3;
                       Step = Step*Reduct;
                       which = YES;
                       break;

          };

          void reinitialize(double *d, double *dd)
          {
          Zeta = Zmin;
          Step = Zstep;
          Noreg = NO;
          Cpoinc = 0;
          if(SMOOTH == NO){
          Var = *(d + 0);
          Dar = *(dd + 0);}
          }
          /*void reinitialize()
          {
          Zeta = Zmin;
          Step = Zstep;
          Noreg = NO;
          Cpoinc = 0;

          }*/
          void initialize_variables(double *y, double *d, double *dd,
          output *f)
          {

          register long int k;
          register int j;
          double varz;
          /******use this when Eps does not change*****
          /*      for(k = 0; k <= Zpoints; k++)
          {

```

```

varz = k*Zstep;
*(d + k) = disp(varz);
*(dd + k) = diffdisp(varz);
};*/
/*****
for(j = 0; j < Norb; j++)
{
/*H0 = sqrt(pi/2.)*(E*Var*pow(0.,2.)
+ (E*Var/(pow(((6./5.)*sqrt(2.)),2.))) - gamma*pow(E,2.)/(sqrt(2.)*((6./5.)*sqrt(2.)))
+ (1./2.)*Er*Var*pow(0.,2.) - (beta*gamma*pow(E,2.)/(sqrt(2.)*((6./5.)*sqrt(2.))))
*exp(-pow(0.,2.)/pow(((6./5.)*sqrt(2.)),2.)); */
//H0 = -0.4;
//printf("H0=%f\n",H0);
/*****
KL = (floorl(Zeta/Zstep) <= Zpoints)
? floorl(Zeta/Zstep)
: Zpoints;
KR = (ceill(Zeta/Zstep) <= Zpoints)
? ceill(Zeta/Zstep)
: Zpoints;
Var = (SMOOTH == YES)
? disp*(y + DIM*j + 17)
//: *(d + KL)+(Zeta-KL*Zstep)**(d + KR) - *(d + KL))/Zstep; this has changed by advise of Panagiotis
: disp(KL*Zstep)+(Zeta-KL*Zstep)*(disp(KR*Zstep)-disp(KL*Zstep))/Zstep;
/*****
//P1 =P1MIN +(P1MAX-P1MIN)*j/(Norb-1.);
P3 = -1.*(sqrt(pi/2.)*(E*Var*pow(P2,2.)
+ E*Var/(pow(Q2,2.))- gamma*pow(E,2.)/(sqrt(2.)*(Q2))
+ (1./2.)*Er*Var*pow(P1,2.) - (beta*gamma*E/(sqrt(2.)*(Q2)))
*exp(-pow(Q1,2.)/pow(Q2,2.)));
//P1 = -1.*sqrt(((2.)/(Er*Var))*((sqrt(2./pi))*H0-E*Var*pow(P2,2.)-(E*Var/pow(Q2,2.))
//+(gamma*E/(sqrt(2.)*Q2)) +(beta*gamma*E/(sqrt(2.)*Q2))*exp(-pow((Q1/Q2),2.))));
//P2 = sqrt((1./(E*Var))*(sqrt(2./pi))*H0 -0.5*(Er/E)*pow(P1,2.)-(1./pow(Q2,2.))
//+(gamma*E/(sqrt(2.)*Var*Q2)) +(beta*gamma*E/(sqrt(2.)*Var*Q2))*exp(-pow((Q1/Q2),2.)));
printf("P1=%f Var=%f\n",P1,Var);
*(y + DIM*j + 0) = Q1;
*(y + DIM*j + 1) = *(y + DIM*j + 0);
*(y + DIM*j + 4) = Q2;
*(y + DIM*j + 5) = *(y + DIM*j + 4);
*(y + DIM*j + 8) = P1;
*(y + DIM*j + 9) = *(y + DIM*j + 8);
*(y + DIM*j + 12) = P2;
*(y + DIM*j + 13) = *(y + DIM*j + 12);
*(y + DIM*j + 16) = Q3;
*(y + DIM*j + 17) = *(y + DIM*j + 16);
*(y + DIM*j + 20) = P3;
*(y + DIM*j + 21) = *(y + DIM*j + 20);
printf("Norb=%d Eps=%f k0=%f\n", Norb, Eps, K0);
//fprintf(f->run, "j=%d Q2=%f P2=%f Ham=%f Q1=%f P1=%f\n", j + 1, Q2, P2, Ham, Q1, P1);
// Ham has no meaning here, since "init. variables" comes, in main, before the deffinition of Ham=... in "file_poinc"
fprintf(f->run, "j=%d Q3=%f P3=%f Q2=%f P2=%f Q1=%f P1=%f\n", j + 1, Q3, P3, Q2, P2, Q1, P1);
};

/***** comment this if Eps changes*****
/*for(k = 0; k <= Zpoints; k++)
{
varz = k*Zstep;
*(d + k) = disp(varz);
*(dd + k) = diffdisp(varz);
};*/

if(SMOOTH == NO){
/***** comment this if Eps changes*****
//Var = *(d + 0);
//Dar = *(dd + 0);
printf("STEP-WISE DISPERSION SET\n");}
}

void initialize_param(output *f)
{
Q2 = (2.)*sqrt(2.);
Q3 = Zmin;
P2 = 0.;
P1 = 20.;
Q1 = 1002.858;

```

```

/*Q2=1.105696;
P2=0.;
Q3=260.245165;
P3=0.270419;*/
//Q1 = Zmin;
Q3PO1 = 0.;
//K0 = 0.38;
L0 = 2.*pi/K0;
NZ = Zmax/L0;

fprintf(f->run,"K0 = %f\n", K0);
fprintf(f->run,"L0 = %f\n", L0);
fprintf(f->run,"NZ = %d\n", NZ);
fprintf(f->run,"Zpoints = %Ld\n", Zpoints);
}
// !!*****the dispersion function*****!!
double disp(double x)
{

double q;

q = (SMOOTH == YES)
    ? 1. + Eps*sin(K0*x)
    : 1. + Eps*sumhev(x);
return(q);
}
//!!!*****diff(disp,x)*****!!!
double diffdisp(double x)
{

double q;

q = (SMOOTH == YES)
    ? Eps*K0*cos(K0*x)
    : Eps*sumdelta(x);

return(q);
}

double sumhev(double x)
{

register int j;
double q;
q = 0.;
for(j = 0; j <= NZ*2.; j++){
q += pow(-1., j)*(tanh(Steep*(x +L0/4. - j*L0/2.))+tanh(Steep*j*L0/2.));

return(q);
}

double sumdelta(double x)
{

register int j;
double q, arg;
q = 0.;

for(j = 0; j <= NZ*2.; j++){
arg = (fabs(Steep*(x +L0/4. - j*L0/2.)) > 350.)
    ? 350.
    : Steep*(x +L0/4. - j*L0/2.);
q += pow(-1., j)*pow(1./cosh(arg), 2.);}

q = q*Steep;

return(q);
}

```

MATLAB script για επίλυση συστήματος ODEs (3.33), που περιγράφει την αλληλεπίδραση στενών παλμών

```

function dy=eqWslf(t,y)
dy = zeros(6,1);
%!!!!THIS FILE IS BASED ON eqWsl1 and eqWslw AND IS FOR CHEKING THE WAY THE ENRGY FLOWS FROM
1 TO 2

%y(1)=A1,y(2)=k1,y(3)=T1,y(4)=k2,y(5)=T2,y(6)=A2% W1=W2
EQUAL*EQUALEQUAL*EQUAL*EQUAL*EQUAL*EQUAL*EQUAL*EQUAL*EQUAL*EQUAL
%This is a test for a different approach to the Int3 (this time as the derivative of Int2)
W1=200.0;
%!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
%!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
W2=200.0; %EQUAL WIDTHHS, there will be another for unequal ones, and the appropriate
functions for the new integrals
sigma=0.1*(30/W1); delta=0.03*(30/W1);
%sigma=0.0; delta=0.0;
a=1;
%c=-0.9;
%c=-1.5;
c=-2.4;
%c=0;
% g1/g2=lamda2/lamda1
g1=1.550;
g2=1.542;
b1=-26;
b2=-27;

Ia11=1;

Ia12=1;
%Ia12=0;
Ia122=1;
%Ia122=0;
Ia21=1;

Ia22=1;
%Ia22=0;
Ia222=1;
%Ia222=0;

pi=4*atan(1);
s1=(0.000008504540*w1^4 - 0.001105176693*(w1^2)*((y(2)-
y(4)))^2)+i*(0.00006907354*(w1^3)*((y(2)-y(4))))/...
(0.000059215895*(w1^4)-0.01148412305*(w1^2)*((y(2)-y(4)))^2+((y(2)-y(4)))^4));
s2=(0.4090251737*10^-8*w1^7+0.7932490717*(10^-6)*(w1^5)*((y(2)-y(4)))^2)-
0.0002072206*(w1^3)*((y(2)-y(4)))^4)+i*(-6.44463305*(10^-8)*(w1^6)*((y(2)-
y(4)))^2)+0.00003401816*(w1^4)*((y(2)-y(4)))^3)-0.002210353387*(w1^2)*((y(2)-y(4)))^5)/...
(0.3506522300*10^-8)*w1^8-.1360085264e-5*(w1^6)*((y(2)-y(4)))^2+.2503168735e-
3*(w1^4)*((y(2)-y(4)))^4)-(.2296824610e-1)*((y(2)-y(4)))^6*w1^2+((y(2)-y(4)))^8));
s12=(0.000008504540*w1^4 - 0.001105176693*(w1^2)*((y(2)-y(4)))^2)-
i*(0.00006907354*(w1^3)*((y(2)-y(4))))/...
(0.000059215895*(w1^4)-0.01148412305*(w1^2)*((y(2)-y(4)))^2+((y(2)-y(4)))^4));
s22=(w1/w2)*(0.4090251737*(10^-8)*w1^7+0.7932490717*(10^-6)*(w1^5)*((y(2)-y(4)))^2)-
0.0002072206*(w1^3)*((y(2)-y(4)))^4)-i*(-6.44463305*(10^-8)*(w1^6)*((y(2)-
y(4)))^2)+0.00003401816*(w1^4)*((y(2)-y(4)))^3)-0.002210353387*(w1^2)*((y(2)-y(4)))^5)/...
(.3506522300e-8*w1^8-.1360085264e-5*(w1^6)*((y(2)-y(4)))^2+.2503168735e-
3*(w1^4)*((y(2)-y(4)))^4)-(.2296824610e-1)*((y(2)-y(4)))^6*w1^2+((y(2)-y(4)))^8));

b=(1/2)*(1.82+s1)*((g1/g2)*abs(b2/b1))*((W1/W2)^2);
%b=1
a1=sigma*((g1/g2)*abs(b2/b1))*((W1/W2)^3);
%a1=0;
a2=s2*((g1/g2)*abs(b2/b1))*((W1/W2)^2);
%a2=0;
a3=s2*((g1/g2)*abs(b2/b1))*((W1/W2)^3);

bb=(1/2)*(1.82+s12)*((g2/g1)*abs(b1/b2))*((W2/W1)^2);
a12=sigma*((g2/g1)*abs(b1/b2))*((W2/W1)^2);
a22=s22*((g2/g1)*abs(b1/b2))*((W2/W1)^2);
%a22=0;
a32=s22*((g2/g1)*abs(b1/b2))*((W2/W1)^3);
%a32=0;

```

```

I1=((y(1)*W2)/(y(6)*W1))^1*(exp((-0.722365+1.01878*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2)))*(y(1)*(y(3)-y(5)))^2))*(1.88474-1.51647*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2)))*(-0.722365+1.01878*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2)))*y(1)*(y(3)-y(5)));
%I1=((W2*y(1))/(W1*y(6)))^2*(-0.0374798-0.846045*exp(-(y(1)*W2/(y(6)*W1))))*(1*(1.93673-0.731868*(y(1)*W2/(y(6)*W1))+0.0944792*((y(1)*W2/(y(6)*W1))^2)*y(1)*(y(3)-y(5)))*exp((-0.0374798-0.846045*exp(-(y(1)*W2/(y(6)*W1))))*(1*(y(1)*(y(3)-y(5)))^2));
%I1=((W1/W2)^2*(y(6)^2/y(1)))*(-0.6276 + 0.508*exp(-(y(1)*W2/(y(6)*W1))^2))*exp(-(y(6)*(W1/W2)*(y(3)-y(5)))^2/3))*(y(3)-y(5));
%I2=(0.45*exp(-sqrt((y(1)*W2/(y(6)*W1))-1))-((y(1)*(y(3)-y(5)))^2)/(3*(1+3*((y(1)*W2/(y(6)*W1))-1))))*(y(1)*(y(3)-y(5)));
%I2=((W1*y(6)/(y(1)*W2))^2)*exp((-0.722365+1.01878*exp(-(y(1)*W2/(y(6)*W1))))*((y(1)*(y(5)-y(3)))*(W1*y(6)/(y(1)*W2))^2))*...
% (1.88474-1.51647*exp(-(y(1)*W2/(y(6)*W1))))*(-0.722365+1.01878*exp(-(y(1)*W2/(y(6)*W1))))*(y(1)*(y(5)-y(3)))*(W1*y(6)/(y(1)*W2)));
I2=((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^1*(-0.0374798-0.84604*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2)))*((y(6)*W1)/(W2))*y(5)*(y(3)-y(5))*...
0.731868*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))+0.0944742*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2)*exp((-0.0374798-0.84604*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2)))*((y(6)*W1)/(W2))*(y(5)-y(3))^2);
IA11=((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^1*(-0.0374798-0.84604*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2)))*((y(6)*W1)/(W2))*y(5)*(y(3)-y(5))*...
0.731868*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))+0.0944742*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2)*exp((-0.0374798-0.84604*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2)))*((y(6)*W1)/(W2))*(y(5)-y(3))^2);
%IA11=0;
IA12=(1.88474-1.51647*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2)))*exp((-0.722365-1.0187*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2)))*(y(1)*(y(5)-y(3)))^2);
%IA12=(1.88474-1.51647*exp(-(1*W1)/(1*W2)))*exp((-0.722365-1.0187*exp(-(1*W1)/(1*W2)))*(1*(y(5)-y(3)))^2);
%IA12=0;
%IA12=0;
IA13=((y(1)*W2)/(y(6)*W1))^1*(exp((-0.722365+1.01878*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2)))*(y(1)*(y(3)-y(5)))^2))*(1.88474-1.51647*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2)))*(-0.722365+1.01878*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2)))*y(1)*(y(3)-y(5)));
%IA13=0;
Iw11=2*(exp(-((y(1)*(y(5)-y(3)))^2)/((0.965905+1.4761635*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2))))*(0.444559+0.170244*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))-0.021752*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2)*(1+2*((y(1)*(y(5)-y(3)))^2)/((0.965905+1.4761635*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2)));
%Iw11=0;
Iw13=IA13;
Iw13=0;
Iw14=(-0.51308*exp(-1.1025*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2))*exp(-(y(6)*(W1/W2)*(y(3)-y(5)))^2)+(0.164271+1.00089*exp(-1.3*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))))*exp(-0.441801-0.26709*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))+0.04858*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2)*(y(6)*(W1/W2)*(y(3)-y(5)))^2);
%Iw14=0;
IT111=(-.731867*W1/W2/y(1)+.188958*W1^2/W2^2*y(6)/y(1)^2)*exp(-(.37479e-1+.846045*exp(-W1/W2*y(6)/y(1)))*y(6)^2*W1^2/W2^2*(y(3)-y(5))^2+(1.93673-.731867*W1/W2*y(6)/y(1)+.94479e-1*W1^2/W2^2*y(6)^2/y(1)^2)*(.846045*W1^3/W2^3/y(1)*exp(-W1/W2*y(6)/y(1))*y(6)^2*(y(3)-y(5))^2-2*(.37479e-1+.846045*exp(-W1/W2*y(6)/y(1)))*y(6)*W1^2/W2^2*(y(3)-y(5))^2)*exp(-(.37479e-1+.846045*exp(-W1/W2*y(6)/y(1)))*y(6)^2*W1^2/W2^2*(y(3)-y(5))^2);
%IT111=0;
IT112=IA11;
%IT112=0;
IT12=(0.1245+1.8276*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2))/0.8))*((y(6)*W1)/(W2))*(y(5)-y(3))*exp(-0.060981668+1.47906*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2))/0.6))*((y(6)*W1)/(W2))*(y(5)-y(3))^2);
%IT12=0;
IT13=-1.51647*W1/W2*y(6)/y(1)^2*exp(-W1/W2*y(6)/y(1))*exp((-0.722365+1.01878*exp(-W1/W2*y(6)/y(1)))*y(1)^2*(y(5)-y(3))^2+(1.88474-1.51647*exp(-W1/W2*y(6)/y(1)))*1.01878*W1/W2*y(6)*exp(-W1/W2*y(6)/y(1))*(y(5)-y(3))^2+(-0.722365+1.01878*exp(-W1/W2*y(6)/y(1)))*y(1)*(y(5)-y(3))^2)*exp((-0.722365+1.01878*exp(-W1/W2*y(6)/y(1)))*y(1)^2*(y(5)-y(3))^2);
%IT13=0;
IA21=IA13;
%IA21=0;
IA23=IA11;
%IA23=0;
IA22=(1.9367349-0.731867*(y(6)*W1)/(y(1)*W2))+0.094479*(y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2)*exp(-0.037479+0.846045*exp(-(y(6)*W1)/(y(1)*W2)))*(y(6)*(W1/W2)*(y(5)-y(3)))^2);
%IA22=0;
%IA22=0;
Iw21=2*(0.079705+0.3003468*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))-0.0954037*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2+0.009511*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^3)*exp(-((y(6)*(W1/W2)*(y(5)-y(3)))^2)/(0.71128+0.79646*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2)*(1-2*((y(6)*(W1/W2)*(y(5)-y(3)))^2)/((0.71128+0.79646*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2))*1/(0.71128+0.79646*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2)));
%Iw21=0;

```

```

%Iw23=IA23;
%Iw23=0;
Iw24=(-0.333997+0.31561*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))+0.16926*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2)*exp(-(y(1)*(y(5)-y(3)))^2)+(0.035027+0.20919*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))+0.1799*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2)*exp(-(-0.128049+0.3879*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))-0.0443962*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2)*(y(1)*(y(5)-y(3)))^2);
%Iw24=0;
IT211=IT13;
%IT211=0;
IT212=IA21;
%IT212=0;
IT22=(-0.54738+0.16063*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))-0.03788*((y(6)*W1)/(y(1)*W2))^2)*(y(1)*(y(5)-y(3)))^2)*exp(-(-0.17+0.186658*((y(6)*W1)/(y(1)*W2)))*(y(1)*(y(5)-y(3)))^2);
%IT22=0;
IT23=IT111;
%IT23=0;

dy(1)=0.-(Ia11)*imag(a2)*((y(1)*y(6))^2)*(W2/W1)*IA11+IA13)-(2*(Ia12)*imag(b)+(Ia122)*real(a2)*(y(2)-y(4)))*(y(1)^2)*y(6)*(W2/W1)*IA12;

dy(2)=-real(2*a1+a3)*((y(1)*y(6))^2)*(W2/W1)*Iw11...
-2*a*(y(1)*y(6)^2)*(real(b)-imag(a2)*(1/2)*(y(2)-y(4)))*I1-...
real(a2)*((y(1)*y(6))^2)*Iw14-(8/15)*sigma*y(1)^4;

dy(3)=-y(2)-y(1)*(y(6)^3)*imag(a3)*(W2/W1)*(-(1/(2*y(1))))*IT111+(y(5)-y(3))*(1/y(6))*IT112)-...
(2*imag(b)+real(a2)*(y(2)-y(4)))*((y(6)^2)/y(1))*IT12-...
imag(a2)*(y(1)^2)*y(6)*(-1/2)*(W2/W1)*IT13+(2/3)*delta*y(1)^2+3*delta*y(2)^2+c;

dy(4)=-((W1/W2)^3)*(abs(b2/b1))*(real(2*a12+a32))*((y(1)*y(6))^2)*(W1/W2)*Iw21...
-2*a*((W1/W2)^3)*abs(b2/b1)*(real(bb)-imag(a32)*(1/2)*(y(4)-y(2)))*(y(6)*y(1)^2)*I2-
...
((W1/W2)^3)*abs(b2/b1)*real(a22)*((y(1)*y(6))^2)*Iw24-...
(8/15)*(abs(b2/b1))*sigma*((W1/W2)^4)*y(6)^4;...

dy(5)=(abs(b2/b1))*(-y(4)+(2/3)*delta*((W1/W2)^2)*y(6)^2+3*delta*y(4)^2)+...
(W1/W2)*(abs(b2/b1))*(-imag(a32)*(y(6)*y(1)^3)*(W1/W2)*(-(1/2)*(1/y(6)))*IT211-(y(5)-y(3))*(W1/W2)*(1/y(1))*IT212)-...
(2*imag(bb)+real(a32)*(y(4)-y(2)))*((y(1)^2)/y(6))*IT22-...
imag(a22)*y(1)*(y(6)^2)*(-1/2)*(W1/W2)*IT23;

dy(6)=0.-
((W1/W2)^2)*abs(b2/b1)*(imag(a22)*(Ia21)*((y(1)*y(6))^2)*(IA21+IA23)+(Ia22)*2*imag(bb)+(Ia222)*real(a32)*(y(4)-y(2)))*(y(1)*y(6)^2)*(W1/W2)*IA22);

```


MATLAB script για την απευθείας αριθμητική επίλυση δύο μη-γραμμικά συζευγμένων NLS (1+1)D, όπου περιλαμβάνει προσομοίωση φαινομένων ανώτερης τάξης

main.m

```

clear;
%
delete UV_pulse.dat;
delete UV_fourie.dat;
N = 1024; % here we change N=1024 to larger numbers, in accordance with an
%increase to xmax
% N=2048;

%N=512;
b21=-26;
b22=-27.9;
% b21=1; b22=1; lamda1=1; lamda2=1;
lamda1=1534.7;
lamda2=1550;
W1=200;
W2=200;
% b1 =0.0;
b1 =+1/2;
b2=+(1/2)*(b22/b21); g1=1 ; g2=lamda1/lamda2; B=2.0;
delta1=0.03*(30/W1);
% delta1=0;
% c=0.0;
c = -2.3*W1/200;
%c = -1.0*W1/200;
sigma1=0.1*30/W1;
% sigma1=1.5.*30./W1;
% sigma1=0.00;
%delta2=delta1*(b21/b22);I commented this and replaced it below 30/8/11
delta2=delta1;
% delta2=0.0;
sigma2=sigma1*(lamda1/lamda2);
C=[b1 b2 c g1 g2 B delta1 delta2 sigma1 sigma2];
%EQUATIONS
%j*du/dz - b1*ddu/dtt + g1(|u|^2 + B*|v|^2)*u + j*c*du/dt -j*delta1*dddudttt -
sigma1*u*d(|u|^2)/dt= 0;
%j*dv/dz - b2*ddv/dtt + g2(B*|u|^2 + |v|^2)*v -j*delta2*dddv/dttt - sigma2*v*d(|v|^2)/dt= 0;
Lang = zeros(2,6);

Init = 1;
type = 2;
stype = 1;

%
A1 =1.0;
% A1 =2;
%W1 =1/sqrt(2);
x1 =2.5;
V1 =0.0;
C1 =0.0;
f1 =0.0;
%
A2 =1.0*((sqrt(b22/b21))/sqrt(g2))/(W2/W1);
%
A2 =0.0;
%W2 =1/sqrt(2);
x2 =-2.5;
V2 =0.0;
C2 =0.0;
f2 =0.0;

%
Lang(1,1) = A1;
Lang(1,2) = W1/W1;
%Lang(1,2) = W1;
Lang(1,3) = x1;
Lang(1,4) = V1;
Lang(1,5) = C1;
Lang(1,6) = f1;
%
Lang(2,1) = A2;
Lang(2,2) = (W2/W1);

```

```

    %Lang(2,2) = (W2);
    Lang(2,3) = x2;
    Lang(2,4) = V2;
    Lang(2,5) = C2;
    Lang(2,6) = f2;
%
% xmax = 819.2;
%xmax = 409.6;
xmax = 102.4;

Ztotal = 8;
%dz=1
dz = 0.001;
% dz=0.1;
iter = Ztotal/dz;
%
repfl = 1;
sav = 1;
sample = 100;
%
R = [sav repfl Init stype sample];
%
%dz = Ztotal/iter;
%
tic
    solve(Init, type, N ,dz, iter, xmax,...
          C, R, Lang);

toc

```

solve.m

```

function solve(Init, type, N ,dz, iter, xmax,...
              C, R,...
              Lang);
%kappa=wmega;
%x=t;
epsilon = 10^(-9)
kappa = zeros(N,1);
Lu = zeros(N,1);
ELu = zeros(N,1);
Lv = zeros(N,1);
ELv = zeros(N,1);
PowIni = zeros(2,1);
Pow = zeros(2,1);
uRaman = zeros(N,1);
vRaman = zeros(N,1);

B1 = zeros(N,iter);
B2 = zeros(N,iter);
P1 = zeros(1,iter);
P2 = zeros(1,iter);
% P is used to store the position of the max value for each iteration *****
%
%The following is for the FT of the data
FB1 = zeros(N,iter);
FP1 = zeros(1,iter);

dx=xmax/(N-1);
spacex=[-xmax/2:dx:xmax/2]';
%
spacez=[dz:dz:iter.*dz];

u = Ltype(R, C, type, spacex, N, Lang, 1);
v = Ltype(R, C, type, spacex, N, Lang, 2);
% length(u)
% length(v)
%
k0=2*pi/(N*dx);
for ll=1:N/2
    kappa(ll)=k0*(ll-1);
end;
for ll=N/2+1:N
    kappa(ll)=-k0*(N-ll+1);
end;
%

```

```

jj = 0;
%
%
ua = (u(N/2,1)+u(N/2+1,1))/2;
va = (v(N/2,1)+v(N/2+1,1))/2;
fprintf('%g %g %g\n', ...
        jj*dz, ...
        abs(ua), ...
        abs(va));
PowIni = calculate(R, N, u, v, spacex, jj);
Pow = PowIni;

data_file(spacex, N, u, v, jj, dz, R);
Fdata_file(kappa, N, u, v, jj, dz, R);
%

% *****LINEAR OPERATORS*****
Lu = +C(3)*kappa + C(1)*kappa.*kappa + C(7)*kappa.*kappa.*kappa;
Lv = +C(2)*kappa.*kappa + C(8)*kappa.*kappa.*kappa;
%
ELu = exp(-i*Lu*dz/2);
ELv = exp(-i*Lv*dz/2);

% A different approach follows
% ELu = exp(+i*Lu*dz/2);
% ELv = exp(+i*Lv*dz/2);

uzin=u;
vzin=v;

for jj=1:iter
%
    uzout = ifft(ELu.*fft(uzin));
    vzout = ifft(ELv.*fft(vzin));

%    uRaman = ifft(j*kappa.*fft(uzout.*conj(uzout)));
%    vRaman = ifft(j*kappa.*fft(vzout.*conj(vzout)));

    [uzin, vzin] = ruku(N, dz, uzout, vzout, kappa, C, R, Lang);
%
    uzout = ifft(ELu.*fft(uzin));
    vzout = ifft(ELv.*fft(vzin));
%
%    uzin = uzout;
%    vzin = vzout;
    uzin = (1-sech((1/2)*(abs(spacex)-xmax/2))).*uzout;
    vzin = (1-sech((1/2)*(abs(spacex)-xmax/2))).*vzout;

    ua = (uzin(N/2,1)+uzin(N/2+1,1))/2;
    va = (vzin(N/2,1)+vzin(N/2+1,1))/2;
%    if rem(jj,10*R(5))==0
%    fprintf('%g %g %g\n', ...
%           jj*dz, ...
%           abs(ua), ...
%           abs(va));
%    end;
    Pow = calculate(R, N, uzout, vzout, spacex, jj);

    B1(:,jj)=abs(uzin);
    B2(:,jj)=abs(vzin);
%
%*****Fourier of the data*****
    FB1(:,jj)=abs(fft(uzin));
%*****

%P(1,jj)=(find(max(A(:,jj)))-512).*dx

%find(max(A(:,jj)))

    b1=max(B1(:,jj));
    b2=max(B2(:,jj));
%
%*****Fourier of MAX*****
%[fb1,m]=max(FB1(:,jj));
    fb1=max(FB1(:,jj));
    for ii=1:N/2

```

```

    %f1=max(FB1(ii+1,jj),FB1(ii,jj));
    if abs(fb1-FB1(ii,jj))<epsilon

        fk1=ii ;
        FP1(1,jj)=(fk1).*k0-k0;

        end;
end;
for ii=N/2 + 1:N
    %f2=max(FB1(ii-1,jj),FB1(ii,jj));
    if abs(fb1-FB1(ii,jj))<epsilon

        fk1=ii - 1 - N;
        FP1(1,jj)=(fk1).*k0-k0;
    else;
        fk1=0;
    end;
end;
end;
%fprintf('%d %f\n',m,fb1);
%*****          MAX-1 -2          *****
for iii=1:N/2
    if b1==B1(iii,jj)

        k1=iii;
        P1(1,jj)=(k1-N/2)*dx;
    %
    %
    end;
end;

    for iii=N/2+1:N
        if b1==B1(iii,jj)

            k1=iii;
            P1(1,jj)=(k1-N/2)*dx;
        else;
            k1=0;
        end;

    end;
%
%
    if b2==B2(iii,jj)
%
%
        k2=iii;
        P2(1,jj)=(k2-N/2)*dx;
%
%
        else;
        k2=0;
%
%
    end;

data_file(spacex, N, uzin, vzin, jj, dz, R);

Fdata_file(kappa, N, uzin, vzin, jj, dz, R);

%PLOTS PULSE IN VARIOUS STEPS
%
%
%
    if jj==1
%
%
        plot(spacex, abs(uzout),spacex,abs(u));
%
%
    end

end;
%plot(spacex, abs(uzout), 'r');
% plot(spacex, abs(uzout),spacex,abs(u));
% plot(kappa, abs(fft(uzout)), 'k');
plot(kappa, abs(fft(uzout)),kappa,abs(fft(u)));
%plot(kappa, abs(fft(uzout)),kappa, abs(fft(vzout)), kappa,abs(fft(u)),'.',
kappa,abs(fft(v)),'.');
%plot(kappa,Lu);

%plot(kappa,FB1(:,iter));
%plot(spacez,FP1(1,:));
%plot(spacez,P1(1,:), spacez,P2(1,:));
% plot(spacez,P1(1,:), 'r');
% plot(spacez, max(A, [],1));
% length(A(N/2,:))
% length(max(A, [],1))
%plot(spacez, A(N/2,:));
%plot(kappa,abs(fft2(u)),'.');

```

```

%plot (spacex, abs(uzout), spacex,abs(vzout), spacex, abs(u), '.', spacex,abs(v), '.');
%plot (spacex, A(:,450));
% spacez=0:dz:dz*iter-dz;

```

Ltype.m

```

function y = Ltype(R, C, type, spacex, N, LL, kk);
%
%   spacex is a N-row, 1-column matrix
%
x1D= zeros(N,1);

if 2-R(4)==1
    %
    for k=1:N
        x1D(k,1) = spacex(k,1) - LL(kk,3);
    end;
    %
    %   d = NLC(3);
    %
    y = (2 - R(3))*LL(kk,1)*(2 - type)*exp(- x1D.*x1D/2/LL(kk,2)^2) ...
        + (type - 1)*LL(kk,1)*sech((x1D)/LL(kk,2))...
        .*exp(j*(LL(kk,6) ...
        - LL(kk,4)*x1D ...
        - LL(kk,5)*x1D.*x1D));
    %
    + (R(3) - 1)*(LL(kk,1))*((2 - type)*exp(- x1D.*x1D/2/LL(kk,2)^2) ...
    %
    %   + (type - 1)*sech(x1D)/LL(kk,2))...
    %
    %   .*exp(j*(LL(kk,6) ...
    %
    %   + (1/2/d)*LL(kk,4)*x1D ...
    %
    %   + LL(kk,5)/2/LL(kk,2)*x1D.*x1D));
elseif R(4)-1==1
    y=zeros(N,1);
    %   d = NLC(3);
    for m=1:2
        for k=1:N
            x1D(k,1) = spacex(k,1) - LL(m,3);
        end;

        y =y + (2 - R(3))*LL(m,1)*(2 - type)*exp(- x1D.*x1D/2/LL(m,2)^2) ...
            + (type - 1)*LL(m,1)*sech((x1D)/LL(m,2))...
            .*exp(j*(LL(m,6) ...
            - LL(m,4)*x1D ...
            - LL(m,5)*x1D.*x1D));
        %
        + (R(3) - 1)*(LL(m,1))*((2 - type)*exp(- x1D.*x1D/2/LL(m,2)^2) ...
        %
        %   + (type - 1)*sech(x1D)/LL(m,2))...
        %
        %   .*exp(j*(LL(m,6) ...
        %
        %   + (1/2/d)*LL(m,4)*x1D ...
        %
        %   + LL(m,5)/2/LL(m,2)*x1D.*x1D));
    end;
end;

```

ruku.m

```

function [z1, z2] = ruku(N, dz, uin, vin, kappa, C, R, Lang)

k = zeros(N,1);
u = zeros(N,1);
u1 = zeros(N,1);
u2 = zeros(N,1);
u3 = zeros(N,1);
u4 = zeros(N,1);
v = zeros(N,1);
v1 = zeros(N,1);
v2 = zeros(N,1);
v3 = zeros(N,1);
v4 = zeros(N,1);
%
u = uin;
v = vin;
k = kappa;
%
[F1, F2] = nl_operator(u, v, C, R,k, Lang);
u1 = F1*dz; v1=F2*dz;
[F1, F2] = nl_operator(u+u1/2, v+v1/2, C, R,k, Lang);

```

```

u2 = F1*dz; v2 = F2*dz;
[F1, F2] = nl_operator(u+u2/2, v+v2/2, C, R,k, Lang);
u3 = F1*dz; v3 = F2*dz;
[F1, F2] = nl_operator(u+u3, v+v3, C, R,k, Lang);
u4 = F1*dz; v4 = F2*dz;
z1 = u + (u1+2*u2+2*u3+u4)/6;
z2 = v + (v1+2*v2+2*v3+v4)/6;

```

nl_operator.m

```

function [du, dv] = nl_operator(u, v, C, R, k, Lang)
%
g1=C(4);
g2=C(5);
B= C(6)-0.18;
%Achtung! The equalities below take in to account that W1=200 !!!!!!!
W1=Lang(1,2)*200;
W2=Lang(2,2)*200;
s1=0.1449283165 + 0.01439459044*j;
s12=0.1449283165 - 0.01439459044*j;
s2=0.006333603132 - 0.001078358491*j;
s22=0.006333603132 + 0.001078358491*j;
%
du = j*g1*( u.*conj(u) + (B+s1)*v.*conj(v)).*u -
j*C(9)*(ifft(+j*k.*fft(u.*conj(u)+(W1/W2)^2)*v.*conj(v))).*u -
j*s2*((W1/W2)^2)*(ifft(+j*k.*fft(u.*conj(v))).*v);
dv = j*g2*((B+s12)*u.*conj(u) + v.*conj(v)).*v -
j*C(10)*(ifft(+j*k.*fft(v.*conj(v)+(W2/W1)^2)*u.*conj(u))).*v -
j*s22*((W2/W1)^2)*(ifft(+j*k.*fft(v.*conj(u))).*u);

```

data file.m

```

function data_file(spacez, N, u, v, jj, dz, R);
x1D= zeros(N,1);
%
x1D = spacez;
us = u.*conj(u);
vs = v.*conj(v);
%
UV_pulse = fopen('UV_pulse.dat','a+');
%
if R(1) == 1
    if rem(jj,R(5)) == 0
        for kk=1:N
            fprintf(UV_pulse,'%f %7f %7f %7f %7f\n', jj*dz, x1D(kk),
us(kk),vs(kk),us(kk)+vs(kk));
        end;
    end;
end;
fclose(UV_pulse);
% spacez=0:dz:dz*(N-1);
%
% [T, Z]=meshgrid(spacez,spacez);
%
% surf(T,Z,us);

```

Fdata file.m

```

function Fdata_file(kappa, N, u, v, jj, dz, R);
k= zeros(N,1);
k = kappa;
Fu=abs(fft(u));
Fv=abs(fft(v));
Fuv=abs(fft(u+v));
% us = u.*conj(u);
% vs = v.*conj(v);
UV_fourie = fopen('UV_fourie.dat','a+');
%
if R(1) == 1
    if rem(jj,R(5)) == 0
        for kk=N/2+1:N
            fprintf(UV_fourie,'%f %7f %7f %7f %7f\n', jj*dz, k(kk), Fu(kk), Fv(kk), Fuv(kk));
        end;
        for kk=1:N/2
            fprintf(UV_fourie,'%f %7f %7f %7f %7f\n', jj*dz, k(kk), Fu(kk), Fv(kk), Fuv(kk));
        end;
    end;
end;

```

```

end;
end;
fclose(UV_fourie);

```

makefiles.m

```

% function y=makefiles(N)
global u1 u2 u12
% global a b
load UV_pulse.dat;
% load out_dm.txt;
%load out_phase.txt;
u1=reshape(UV_pulse(:,3),[N length(UV_pulse)/N]);
u2=reshape(UV_pulse(:,4),[N length(UV_pulse)/N]);
u12=reshape(UV_pulse(:,5),[N length(UV_pulse)/N]);
% b=reshape(out_dm,[M N length(out_dm)/(M*N)]);
%b=reshape(out_phase,[M N length(out_phase)/(M*N)]);
save u1 u1;
save u2 u2;
save u12 u12;

dx=xmax/(N-1);
spacex=[-xmax/2:dx:xmax/2]';
spacez=0:Ztotal/((length(UV_pulse))/N):Ztotal-Ztotal/((length(UV_pulse))/N);
[T, Z]=meshgrid(spacex,spacez);
surf(Z',T',u12)

```

makeFourier.m

```

% function y=makefiles(N)
global fu1 fu2 fu12
load UV_fourie.dat;
fu1=reshape(UV_fourie(:,3),[N length(UV_fourie)/N]);
fu2=reshape(UV_fourie(:,4),[N length(UV_fourie)/N]);
fu12=reshape(UV_fourie(:,5),[N length(UV_fourie)/N]);
save fu1 fu1;
save fu2 fu2;
save fu12 fu12;

dx=xmax/(N-1);
% spacex=[-xmax/2:dx:xmax/2]';
k0=2*pi/(N*dx);
for ll=1:N/2
    kappa(ll)=k0*(ll-1);
end;
for ll=N/2+1:N
    kappa(ll)=-k0*(N-ll+1);
end;
spacez=0:Ztotal/((length(UV_fourie))/N):Ztotal-Ztotal/((length(UV_fourie))/N);

[k, Z]=meshgrid(kappa,spacez);
surf(Z',k',fftshift(fu2,1))

[d1,d2]=size(u1);

```

```

mu = zeros(1,d2);
mv = zeros(1,d2);
iu = zeros(d1,d2);
iv = zeros(d1,d2);
Pu = zeros(d1,d2);
Pv = zeros(d1,d2);
Nx = zeros(d1,d2);
%

```

DT2.m (calculates ΔT)

```

% u1 and u2 are already abs(u)^2
for i=1:d2
    Nx(:,i)=[1:d1];
end;
for j=1:d1
    for jj=1:d2
        if u1(j,jj)>=(1./5.)*max(u1(:,jj))
iu(j,jj) = u1(j,jj)*Nx(j,jj)*dx;
Pu(j,jj) = u1(j,jj)*dx;
        end;
    end;
end;

```

```

        if u2(j,jj)>=(1./5.)*max(u2(:,jj))
iv(j,jj) = u2(j,jj)*Nx(j,jj)*dx;
Pv(j,jj) = u2(j,jj)*dx;
%iv = u2.*Nx.*dx;
        end;
    end;
end;
%end;
% for j=1:d1
%     for jj=1:d2
%         if u1(j,jj)>=(1./20.)*max(u1(:,jj))
% Pu(j,jj) = u1(j,jj)*dx;
%         end;
%         if u2(j,jj)>=(1./20.)*max(u2(:,jj))
% Pv(j,jj) = u2(j,jj)*dx;
%         end;
%     end;
% end;

musum = zeros(1,d2);
mvsum = zeros(1,d2);
Pusum = zeros(1,d2);
Pvsum = zeros(1,d2);
for i=1:d2
for ix=1:d1

    musum(1,i) = musum(1,i) + iu(ix,i);
    mvsum(1,i) = mvsum(1,i) + iv(ix,i);

        Pusum(1,i) = Pusum(1,i) + Pu(ix,i);
        Pvsum(1,i) = Pvsum(1,i) + Pv(ix,i);
end;

mu(1,i) = musum(1,i)/Pusum(1,i);
mv(1,i) = mvsum(1,i)/Pvsum(1,i);
end;
DTx2 = (mu - mv)*dx;
% plot(spacez, mu*dx-51.3-c*spacez);

```

Dw2.m (calculates $\Delta\omega$)

```

[f1,f2]=size((ful));

mfu = zeros(1,f2);
mfv = zeros(1,f2);
ifu = zeros(f1,f2);
ifv = zeros(f1,f2);
Pfu = zeros(f1,f2);
Pfv = zeros(f1,f2);
Nfx = zeros(f1,f2);
%
for i=1:f2
    Nfx(:,i)=[1:f1];
end;
for j=1:f1
    for jj=1:f2
        if ful(j,jj)>=(1./5.)*max(ful(:,jj))
ifu(j,jj) = ful(j,jj)*Nfx(j,jj)*k0;
Pfu(j,jj) = ful(j,jj)*k0;
        end;
        if fu2(j,jj)>=(1./5.)*max(fu2(:,jj))
ifv(j,jj) = fu2(j,jj)*Nfx(j,jj)*k0;
Pfv(j,jj) = fu2(j,jj)*k0;
        end;
    end;
end;

mfusum = zeros(1,f2);
mfvsum = zeros(1,f2);
Pfusum = zeros(1,f2);
Pfvsum = zeros(1,f2);
for i=1:f2
for ix=1:f1

    mfusum(1,i) = mfusum(1,i) + ifu(ix,i);

```



```

mfvsum(1,i) = mfvsum(1,i) + ifv(ix,i);

        Pfusum(1,i) = Pfusum(1,i) + Pfu(ix,i);
        Pfvsum(1,i) = Pfvsum(1,i) + Pfv(ix,i);
end;

mfu(1,i) = mfusum(1,i)/Pfusum(1,i);
mfv(1,i) = mfvsum(1,i)/Pfvsum(1,i);
end;
Dwx2 = (mfu - mfv)*k0;
plot(spacez, -mfv*k0+31.45);

```

Width.m (calculates the width of the pulse)

```

[d1,d2]=size(u1);
%***** new width "wn1" method *****
e1=zeros(1,size(u1,2));
dx=xmax/(N-1);
%*****
% for UNKNOWN reason sqrt(u1) <> abs(u)
u=sqrt(u1);
v=sqrt(u2);
for i=1:d2

    um=find(u1(:,i)==max(u1(:,i)));
    vm=find(u2(:,i)==max(u2(:,i)));
    %vm=find(v(:,i)==max(v(:,i)));
%***** new width "wn1" method *****
% Amp1_2 is A1^2 and is the amp of u1 i.e. abs(u)^2
Amp1_2(i)=max(u1(:,i));
%*****
    timedist(i)=(min(um)-max(vm))*dx;
% uhwhm = find(u(:,i)-(1/2)*max(u(:,i))>=0);
uhwhm = find(u1(:,i)>=(1/2)*max(u1(:,i)));
vhwhm = find(u2(:,i)>=(1/2)*max(u2(:,i)));
% vhwhm = find(v(:,i)>=(1/2)*max(v(:,i)));
% uhwhm = find(u(:,i)-(1/2)*4>=0);
mvu(i) = sum(uhwhm)/length(uhwhm);
mvv(i) = sum(vhwhm)/length(vhwhm);

% uhwhm(i)=abs(mvu(i)-min(uhwhm))*dx;

% Gaussian
% wil(i)=uhwhm(i)*sqrt(2*log(2));
% Sech
% wil(i)=hwhm(i)*log(1+sqrt(2));
% wil(i)=hwhm(i);
% !!!!! we calculate the energy of |u|^2 *****
for kkk=1:N
e1(1,i)=e1(1,i)+u1(kkk,i)*dx;
end;
%*****Gaussian!!!!!!!!!!!!!!
wn1(i)=sqrt(2.)*e1(1,i)/(Amp1_2(i)*sqrt(pi));
%*****Sechant!!!!!!!!!!!!!!
wn1(i)=e1(1,i)/(2.*Amp1_2(i));
end;
%!!!! *****
plot(spacez,wn1);

```

calculate.m (calculates power for spatial pulse, energy for temporal)

```

function Pow = calculate(R, N, u, v, spacex, jj);
%
%
x1D = zeros(N,1);
uP = zeros(N,1);
vP = zeros(N,1);
%
x1D = spacex;
uP = u.*conj(u);
vP = v.*conj(v);

uPsum = 0;
vPsum = 0;
%
if R(1) == 1

```

```
if rem(jj,R(2)) == 0
    for kk=1:N
        uPsum = uPsum + uP(kk,1);
        vPsum = vPsum + vP(kk,1);
    end;
end;
end;
Pow = [uPsum;vPsum];
```

APPENDIX B

Κάποια ολοκληρώματα

Ολοκληρώματα που χρειάστηκαν για να καταλήξουμε από το σύστημα (2.54) στο (2.56)

Αν $F(a) = \frac{a \cosh(a) - \sinh(a)}{\sinh^3(a)}$, βρίσκουμε ότι,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2\left(\frac{T-T_1}{W}\right) \sec h^2\left(\frac{T+T_1}{W}\right) dT = 4WF\left(\frac{2T_1}{W}\right), \quad (\text{B.1})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2\left(\frac{T+T_1}{W}\right) \frac{\partial}{\partial T} \sec h^2\left(\frac{T-T_1}{W}\right) dT = -4 \frac{\partial}{\partial a} F(a), \text{ με } a = \frac{2T_1}{W}, \quad (\text{B.2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2\left(\frac{T+T_1}{W}\right) \frac{\partial}{\partial T} \left[(T-T_1) \sec h^2\left(\frac{T-T_1}{W}\right) \right] dT = 2W \frac{\partial}{\partial a} [aF(a)]. \quad (\text{B.3})$$

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων του συστήματος (3.33)

Οι εξισώσεις του συστήματος (3.33) περιλαμβάνουν κάποια ολοκληρώματα, που δίνονται στις (3.34), τα οποία εν γένη δε μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά. Μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις μπορεί να δειχθεί ότι όλα γράφονται σε παράγωγα του $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2(t) \sec h^2(xt+y) dt$, (με $x, y \in \mathbb{R}$ και $x > 0$), ενώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

και το $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2(t) \sec h^2(xt+y) t dt$. Τα I_1 και I_2 υπολογίζονται αναλυτικά μόνο για τις περιπτώσεις $x=0$ ή 1 . Καθώς επιδιώκαμε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών σε κλειστή μορφή, αποφασίσαμε να αντικαταστήσουμε τα ολοκληρώματα με αναλυτικές συναρτήσεις που τα προσεγγίζουν. Αυτό έγινε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων του πακέτου Mathematica 5. Με τη βοήθεια του πακέτου υπολογίσαμε προσεγγιστικά πολλά από τα ολοκληρώματα, αλλά τελικά παραθέτουμε τις συναρτήσεις μόνο για τα δύο παραπάνω καθώς τα υπόλοιπα γράφονται σε συνδιασμό αυτών. Το I_2 χρησιμοποιήθηκε για να βρεθεί μία ακριβέστερη προσέγγιση του και να περιορίσουμε το σφάλμα.

Συγκεκριμένα για το I_1 ,

$$I_1 = \begin{cases} (1.8847 - 1.5165e^{-x}) \exp\left[-(0.7224 - 1.0188e^{-x})y^2\right], & x \leq 1 \\ (1.9367 - 0.7318x + 0.0945x^2) \exp\left[(-0.0375 + .8460e^{-x})y^2\right], & x > 1 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

και το I_2 ,

$$I_2 = \begin{cases} -(0.1246 + 1.8276e^{-x/0.8})y \exp\left[-(0.0610 + 1.4791e^{-x/0.6})y^2\right], & x \leq 1 \\ -(0.5474 + 0.1606x - 0.0379x^2)y \exp\left[-(0.1700 + 0.1867x)y^2\right], & x > 1 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Όλα τα υπόλοιπα ανήκουν σε κάποια από τις παρακάτω μορφές,

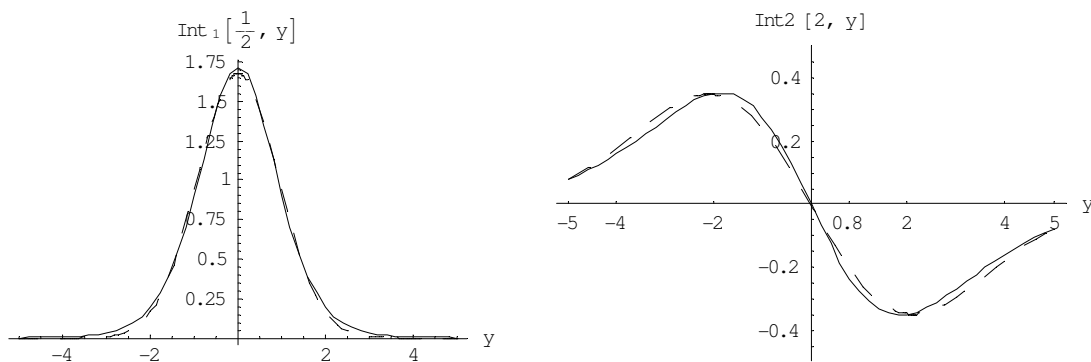
$$I_3(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2(t) \sec h^2(xt+y) \tanh(t) dt = -\frac{1}{2x} \frac{\partial}{\partial y'} I_1(x', y'), \quad x' = 1/x, y' = -y/x,$$

$$I_4(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2(t) \sec h^2(xt+y) \tanh(xt+y) \tanh(t) dt = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} I_3(x, y),$$

$$I_5(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2(t) \sec h^2(xt + y) \tanh^2(xt + y) dt = \frac{1}{3x} \left[I_1(x', y') - \frac{\partial}{\partial y'} I_3(x', y') \right],$$

$$I_6(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^2(t) \sec h^2(xt + y) \tanh(xt + y) dt = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} I_1(x, y).$$

Από τα ολοκληρώματα (3.34), το IA_i^2 είναι της μορφής I_1 , το IT_i^2 σαν το I_2 , τα $IA_i^1, IA_i^3, I\Omega_i^3$ της μορφής I_3 , $I\Omega_i^1$ και $I\Omega_i^2$ της μορφής I_4 και I_5 αντίστοιχα και τα IT_i^1, IT_i^3 της μορφής I_6 , ενώ $i=1, 2$. Οι συναρτήσεις είναι αρκετά ακριβείς. Στο Σχ. Β.1 φαίνονται οι τιμές των ολοκληρωμάτων I_1 και I_2 σε σχέση με το y και για συγκεκριμένες τιμές του x , υπολογισμένες αριθμητικά και από τις σχέσεις (B.4, 5).



Σχήμα Β.1: Ολοκληρώματα I_1 (αριστερά) και I_2 (δεξιά) για $x=1/2$ και $x=2$ αντιστοίχως, υπολογισμένα αριθμητικά (γραμμή) και σύμφωνα με τις προσεγγιστικές σχέσεις (διακεκομμένη).

APPENDIX C

Μέθοδοι ανάλυσης που εξετάστηκαν αλλά δεν ακολουθήθηκαν

Στα πλαίσια της διατριβής μελετήσαμε διάφορες μεθόδους προσέγγισης των προβλημάτων. Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε βέβαια σε ορισμένες μόνο, αλλά και πάλι υπήρξαν κάποιες που δεν τις συμπεριλάβαμε, είτε γιατί δεν πρόλαβαν να δώσουν αποτελέσματα, είτε γιατί τελικά, η συγκεκριμένη μελέτη δε φάνηκε να προσθέτει κάτι καινούριο.

Μία από αυτές τις μεθόδους που μελετήσαμε αρκετά επισταμένα είναι η χρήση της συνάρτησης κατανομής Wigner. Η πρώτη γνωστή χρήση της ήταν στη Κβαντομηχανική, όπου η μελέτη της προτάθηκε αντί αυτής της ίδιας της κυματοσυνάρτησης. Η συνάρτηση αυτή υπολογίζεται από την κυματοσυνάρτηση και παρέχει ταυτόχρονα πληροφορία για την κατανομή στο χρόνο και τη συχνότητα, ή τη θέση και την ορμή. Είναι πραγματική και μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές, αντίθετα από συνήθεις συναρτήσεις κατανομής. Έχει χρησιμοποιηθεί στην επεξεργασία σήματος, στην οπτική, ενώ δεν είναι άγνωστη και στη μη-γραμμική οπτική. Ουσιαστικά είναι μια αναπαράσταση του φασικού χώρου και δίνει ταυτόχρονα πληροφορία για τις θέσεις και τις ορμές [247].

Η σκέψη μας ήταν να τη χρησιμοποιήσουμε για την ανάλυση της εξέλιξης των χωρο-χρονικών κυματοπακέτων, στα προβλήματα των Κεφαλαίων 4 και 5, λόγω της μη ύπαρξης κάποιας αναλυτικής έκφρασης για την εξέλιξη των χαρακτηριστικών τους. Η ταυτόχρονη αναπαράσταση θέσεων (και χρόνου) και φάσματος μπορεί, ίσως, να μας βοηθήσει να καταλάβουμε καλλίτερα τη δυναμική των αλληλεπιδράσεων.

Παρακάτω παραθέτουμε της μορφή της συνάρτησης κατανομής Wigner, όπως μπορεί να υπολογιστεί για ένα δισδιάστατο κυματοπακέτο $u(x,t)$:

$$W(x, f_x, t, f_t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u \left(x + \frac{x'}{2}, t + \frac{t'}{2} \right) u^* \left(x - \frac{x'}{2}, t - \frac{t'}{2} \right) \times \exp(-2\pi i f_x x') \exp(-2\pi i f_t t') dx' dt' \quad (C.1)$$

, όπου f_x και f_t , η χωρική και χρονική συχνότητα. Η μέθοδος είναι πιθανώς υποσχόμενη, αλλά νόημα έχει μόνο η εύρεση του W για κάθε z , κάτι που απαιτεί την επίλυση διαφορικής εξίσωσης διαφορετικής πλέον από την NLS. Καθώς αυτό δεν ολοκληρώθηκε, η επιδίωξη της συγκεκριμένης προσέγγισης αφέθηκε για το κοντινό μέλλον.

Μία ακόμα μέθοδος στην οποία επενδύσαμε κάποιο χρόνο είναι η “singular value decomposition” (SVD), γνωστή από τη γραμμική Άλγεβρα. Ο σκοπός ήταν πάλι η μελέτη της εξέλιξης των χωροχρονικών κυματοπακέτων. Σύμφωνα με την SVD, για κάθε πίνακα $M \times N$ A , υπάρχουν δύο ορθοκανονικοί πίνακες, U και V , $M \times M$ και $N \times N$ αντίστοιχα, και ένας διαγώνιος S , $M \times N$ με πραγματικά και μη-μηδενικά διαγώνια στοιχεία, τέτοιοι ώστε,

$$A = USV^T \quad (C.2)$$

Οι στήλες u_i του U και v_i του V λέγονται αριστερά και δεξιά ιδιάζοντα (singular) διανύσματα και τα στοιχεία της διαγωνίου του S , έστω s_i , λέγονται ιδιάζουσες τιμές. Ουσιαστικά είναι ένας τρόπος παραγοντοποίησης του πίνακα, ο οποίος μπορεί να γραφεί:

$$A = \sum_i s_i u_i v_i^T \quad (C.3)$$

Ανάλογα με το μέγεθος των s_i μπορούμε να κρατήσουμε μερικά μόνο στοιχεία του αθροίσματος, που θεωρούνται σημαντικά και να αγνοήσουμε τα υπόλοιπα. Η μέθοδος χρησιμοποιείται στην επεξεργασία σήματος για την αφαίρεση θορύβου. Η σκέψη μας ήταν ότι η περίπλοκη εικόνα του πλάτους του πεδίου $u(X,T)$, ή του φάσματος $\tilde{u}(K_x, \Omega)$ θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν σα πίνακες, όπου μέσω της SVD θα μπορούσαμε να

διακρίνουμε τις κυρίαρχες τάσεις στην εξέλιξη τους. Τελικά δεν την ακολουθήσαμε καθώς δε προσέδιδε κάποια φυσική διαίσθηση.

APPENDIX D

Αρκτικόλεξα

ASE	amplified spontaneous emission	ενισχυόμενη αυθόρμητη εκπομπή
CE	conical emission	κωνική εκπομπή
CFS	cross frequency shift	ετεροπαλμική μετατόπιση συχνότητας
CW	continuous wave	συνεχές κύμα (συνήθως και επίπεδο για τη παρούσα εργασία)
DC	double clad	διπλής επικάλυψης
DCF	dispersion compensating fiber	ίνα εξισορρόπησης διασποράς
DM	dispersion management	διαχείριση(ς) διασποράς
FWHM	full width at half-maximum	εύρος στο μισό του πλάτους
FWM	four wave mixing	μίξη τεσσάρων φωτονίων
GVD	group velocity dispersion	διασπορά ταχύτητας ομάδας
IRS	intra pulse Raman scattering	ενδοπαλμική σκέδαση Raman
IST	inverse scattering transform	μετασχηματισμός αντίστροφης σκέδασης
KAM	Kolmogorov–Arnold–Moser	
KdV	Korteweg de Vries	
LIDAR	light detection and ranging	μέθοδος εντοπισμού μέσω ακτίνων laser
MI	modulation instability	διαμορφωτική αστάθεια
NLS	nonlinear Schrödinger equation	μη-γραμμική εξίσωση του Schrödinger
NRZ	non-return to zero	μη επιστροφή στο μηδέν (ψηφιακή μέθοδος μετάδοσης)
ODE	ordinary differential equation	συνήθης διαφορική εξίσωση
PDE	partial differential equation	μερική διαφορική εξίσωση
PMD	polarization mode dispersion	διασπορά ρυθμών διαφορετικής πόλωσης
QC	quadruple clad	τετραπλής επικάλυψης
RZ	return to Zero	επιστροφή στο μηδέν (ψηφιακή μέθοδος μετάδοσης)
SBS	stimulated Brillouin scattering	εξαναγκασμένη σκέδαση Brillouin
SC	single clad	μονής επικάλυψης
SCG	supercontinuum generation	γένεση υπερσυνεχούς φάσματος
SFS	self frequency shift	ολίσθηση συχνότητας
SPM	self phase modulation	αυτοδιαμόρφωση φάσης
SRS	stimulated Raman scattering	εξαναγκασμένη σκέδαση Raman
WDM	wavelength division multiplexing	φασματική πολυπλεξία
XPM	cross phase modulation	ετεροδιαμόρφωση φάσης
α.σ.		αρχικές συνθήκες
σ.σ.		στάσιμο σημείο

Δημοσιεύσεις σχετικές με τη διατριβή σε διεθνή περιοδικά και συνέδρια με κριτές

M.Manousakis, P.Papagiannis, K.Hizanidis, N.Moschonas, “Evolution of a PS-type soliton pulse in a dispersion varying link: A variational approach”, *Optics Communications* 198, 351-367 (2001)

M.Manousakis, N.Moschonas, K.Hizanidis, P.Papagiannis, “A direct perturbation method investigation of the interplay between self-frequency shift and cross-phase modulation for solitons” *Journal of Modern Optics* 52, 2549-62 (2005)

Y.Kominis, N.Moshonas, P.Papagiannis, K.Hizanidis, D.N.Christodoulides, “CW-controlled nonlinear X-wave generation”, *Optics Letters*, 30, 2924-6 (2005)

N.Moshonas, Y.Kominis, P.Papagiannis, K.Hizanidis, D.N.Christodoulides, “Spatiotemporal interaction of optical beams”, *JOSA B* 26, 1479-1483 (2009)

N.Moshonas, M.Manousakis, K.Hizanides, “A direct perturbation approach to optical soliton propagation with Raman scattering and cross phase modulation”, *Proceedings of SPIE, Opto-Ireland*, 5823-5827 (2005)

N.Moshonas, Y.Kominis, M.Manousakis, N.Efremidis, K.Hizanidis, “Investigation of spatiotemporal optical beam reallocation”, *Proceedings of SPIE, Prague 2007*, Vol.6582, 65821F (2007)

Βιβλιογραφία και αναφορές

- [1] G. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (4th ed.), (Academic Press, San Diego, 2007)
- [2] Hasegawa, Y. Kodama, *Solitons in Optical Communications*, (Clarendon Press, Oxford, 1995)
- [3] Y. Kivshar, G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fiber to Photonic Crystals*, (Elsevier, Academic Press, San Diego, 2003)
- [4] T. Dauxois, M. Peyrard, *Physics of Solitons*, (Cambridge University Press, 2006)
- [5] L. F. Mollenauer, J. P. Gordon, *Solitons in Optical Fibers: Fundamentals and Applications*, (Elsevier Academic Press, Burlington, MA, 2006)
- [6] R. W. Boyd, S. G. Lukishova, Y. R. Shen (Eds.), *Self Focusing: Past and Present*, (Springer, New York, 2009)
- [7] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, (3rd ed.) (Academic Press, Boston, 2008)
- [8] Y. R. Shen, *The principles of nonlinear optics* (John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2003)
- [9] G. S. He, S. H. Liu, *Physics of Nonlinear Optics*, (World Scientific, Singapore, 1999)
- [10] C. Newell, J. V. Moloney, *Nonlinear Optics*, (Addison-Wesley Publishing Co., Redwood City CA, 1992)
- [11] G. Agrawal, *Applications of Nonlinear Fiber Optics*, (Academic Press, San Diego, 2001)
- [12] G. Keiser, *Optical Fiber Communications* (2nd ed.), (McGraw-Hill, New York, 1991)
- [13] T. Mitschke, *Fiber Optics: Physics and Technology*, (Springer-Verlag, Berlin, 2009)
- [14] L. Kazovsky, S. Benedetto, A. Willner, *Optical Fiber Communication System*, (Artech House, Norwood, MA, 1996)
- [15] S. Trillo, W. Torruellas (Eds.), *Spatial Solitons*, (Springer, Berlin, 2001)
- [16] N. N. Akhmediev, A. Ankiewicz, *Soliton: Nonlinear Pulses and Beams*, (Chapman & Hall, London, 1997)
- [17] Κ. Ευταξίας, Θ. Λεβεντούρης, Π. Σκούτζος, *Οδηγός Μελέτης για την Κυματική-Οπτική*, (Παν/ιο Αθηνών, 1985)
- [18] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, (John Willwy & Sons, New York, 1999)
- [19] E. Infeld, G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1992)
- [20] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (2nd ed.), (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1980)
- [21] L. D. Landau E. M. Lifshitz, “*Mechanics*” (3rd ed.), (Butterworth, Heinemann, Oxford, 2003)
- [22] J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, (2nd ed.), Applied Mathematical Sciences, Vol. 38, (Springer-Verlag, New York, 1992)
- [23] J. Hale, H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, (Springer-Verlag, New York, 2001)
- [24] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, (Springer, New York, 1983)
- [25] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, (Springer, New York, 1990)
- [26] G. Contopoulos, *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*, (Springer-Verlag, Berlin, 2002)
- [27] M. E. Peskin, D. V. Schroeder: *An introduction to quantum field theory*, (Addison-Wesley, Reading, 1995)
- [28] C. Newell, *Solitons in mathematics and physics*, (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa, 1985)
- [29] P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1989)
- [30] C. Sulem, P.-L. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation*, (Springer-Verlag, New York, 1999)
- [31] B. W. Kernighan, D. M. Ritchie, *Η Γλώσσα Προγραμματισμού C (2^η έκδ.)*, (Prentice Hall, Κλειδάριθμος, 1990)
- [32] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Quantum mechanics: non-relativistic theory*, (Butterworth-Haneimann, Oxford, 1977)

- [33] N.J. Zabusky and M. D. Kruskal, "Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States", *Phys. Rev. Lett.* 15, 240 (1965)
- [34] S.V. Manakov, "On the theory of two-dimensional stationary self focussing of electromagnetic waves", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 65 (1973) 505 [*Sov. Phys. JETP* 38 (1974) 248]
- [35] M. Mitchell, M. Segev and D. N. Christodoulides, "Observation of multi-hump multi-mode solitons", *Physical Review Letters* 80, 4657 (1998), *Sov. Phys. JETP* 38(2), 248-253 (1974)].
- [36] E. Ostrovskaya, Yu. S. Kivshar, D. Skryabin, and W. J. Firth, "Stability of multihump optical solitons", *Phys. Rev. Lett.* 83, 296–299 (1999)
- [37] V.E. Zakharov, A.B. Shabat, "Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Waves in Nonlinear Media", *Sov. Phys. JETP*, 34(1), 62 (1972)
- [38] G. I. Stegeman, M. Segev, "Optical spatial solitons and their interactions: Universality and diversity", *Science*, 286, 518-523 (1999)
- [39] E. Feigenbaum, M. Orenstein, "Colored solitons interaction: particle-like and beyond", *Opt. Express.* 12 (10), 2193-2206 (2004)
- [40] E. Feigenbaum, M. Orenstein, "Coherent interaction of colored solitons: a perturbation description," *J. Opt. Soc. Am B* 22 (7), 1414-1423 (2005)
- [41] V.E. Zakharov, S. V. Manakov, S. E. Novikov, L. P. Pitaevskii, *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Transform* (Nauka, Moscow, 1980) [English Translation: Consultant Bureau, New York, 1984]
- [42] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, "Interaction between solitons in a stable medium", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 64, 1627 (1973) [*Sov. Phys. JETP* 37, 823 (1973)].
- [43] Hasegawa and E Tappert, "Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion", *Appl. Phys. Lett.* 23, 142 (1973)
- [44] S. A. Akhmanov, A. P. Sukhorukov, and R. V. Khokhlov, "Self-focusing and diffraction of light in a nonlinear medium", *Usp. Fiz. Nauk* 93, 19 (1967) [*Sov. Phys. Uspekhi* 10, 609 (1968)].
- [45] T. Li (Ed.), *Optical Fiber Communications: Fiber Fabrication*, Vol. 1 (Academic Press, San Diego, 1985)
- [46] H. Malitson, "Interspecimen Comparison of the Refractive Index of Fused Silica", *J. Opt. Soc. Am.* 55, 1205 (1965)
- [47] B. J. Ainslie and C. R. Day, "A review of single-mode fibers with modified dispersion characteristics", *J. Lightwave Technol.* 4, 967 (1986)
- [48] L. G. Cohen, W. L. Mammel, S. J. Jang, "Low-loss quadruple-clad single-mode lightguides with dispersion below 2 ps/km-nm over the 1.28 μm wavelength range", *Electron. Lett.* 18, 1023 (1982)
- [49] D. M. Bloom, L. F. Mollenauer, C. Lin, D. W. Taylor, and A. M. DelGaudio, "Direct demonstration of distortionless picosecond-pulse propagation in kilometer-length optical fibers", *Opt. Lett.* 4, 297 (1979)
- [50] M. A. Duguay and J. W. Hansen, "An ultra fast light gate", *Appl. Phys. Lett.* 15, 192 (1969)
- [51] G. P. Agrawal and M. J. Potasek, "Nonlinear pulse distortion in single mode optical fibers at the zero-dispersion wavelength", *Phys. Rev. A* 33, 1765 (1986)
- [52] M. Desaix, D. Anderson, and M. Lisak, "Solitons emerging from pulses launched in the vicinity of the zero-dispersion point in a single-mode optical fiber", *Opt. Lett.* 15, 18 (1990)
- [53] R. R. Alfano and S. L. Shapiro, "Direct distortion of electronic clouds of rare-gas atoms in intense electric fields", *Phys. Rev. Lett.* 24, 592 (1970); *Phys. Rev. Lett.* 24, 1217 (1970)
- [54] C. V. Raman, "A new radiation", *Indian J. Phys.* 2, 387 (1928)
- [55] E. J. Woodbury and W. K. Ng, Proc. "first demonstration of stimulated Raman scattering", *Proc. IRE* 50, 2347 (1962)
- [56] R. Shuker and R. W. Gammon, "Raman Scattering Selection Rule Breaking and the Density of States in Amorphous Materials", *Phys. Rev. Lett.* 25, 222 (1970)
- [57] R. H. Stolen and E. P. Ippen, "Raman gain in glass optical waveguides", *Appl. Phys. Lett.* 22, 276 (1973)
- [58] R.Y. Chiao, E. Garmire, C.H. Townes "Self-trapping of optical beams", *Phys. Rev. Lett.* 13, 479–481 (1964)
- [59] V. I. Talanov, "Self-focusing of wave beams in nonlinear media", *JETP Lett.-USSR* 2, 138 (1965)

- [60] P. L. Kelley, "Self-focusing of optical beams", *Phys. Rev. Lett.* 15, 1005–1007 (1965)
- [61] D. Grischkowsky, "Self-focusing of light by potassium vapour", *Phys. Rev. Lett.* 24, 866 (1970)
- [62] J. P. Gordon and H. A. Haus, "Random walk of coherently amplified solitons in optical fiber transmission", *Opt. Lett.* 11, 665–667 (1986)
- [63] http://web.physik.uni-rostock.de/optik/en/dm_referenzen_en.html
- [64] H. A. Haus, "Lecture 11" in *Optical Solitons: Theoretical challenges and industrial perspectives*, V.E. Zakharov and S. Wabnitz, Ed. (Springer, NY, 1999)
- [65] G. P. Agarwal, L. Wang, Y. Su, and P. Kumar, "All-Optical Loadable and Erasable Storage Buffer Based on Parametric Nonlinearity in Fiber," *J. Lightwave Technol.* 23, 2229- (2005)
- [66] M. N. Islam, "Ultrafast all-optical logic gates based on soliton trapping in fibers", *Opt. Lett.* 14, 1257–1259 (1989)
- [67] T. M. Monro, C. M. De Sterke, and L. J. Poladian, "Catching light in its own trap," *J. Mod. Opt.* 48, 191–238 (2001)
- [68] R. Kashyap, *Fiber Bragg Gratings*, (Academic Press, San Diego, 1999)
- [69] J. Kasparian, R. Sauerbrey, D. Mondelain, et al. "Infrared extension of the supercontinuum generated by femtosecond terawatt laser pulses propagating in the atmosphere", *Opt. Lett.*, 25(18), 1397–1399 (2000)
- [70] J. Kasparian, M. Rodriguez., G. Méjean, et al. "White light filaments for atmospheric analysis", *Science*, 301, 61 (2003)
- [71] H. Wille, M. Rodriguez, J. Kasparian, et al. "Teramobile: a mobile femtosecondterawatt laser and detection system", *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, 20, 183–190 (2002)
- [72] J.A. Fleck,Jr, J.R. Morris and M.D. Feit, "Time-Dependent Propagation of High Energy Laser Beams through the Atmosphere", *Appl. Phys.* 10, 129–160 (1976)
- [73] A. Kundu, *Tsunami and Nonlinear Waves*, pp. 31–49, (Springer, Berlin, 2007)
- [74] A. Constantin, "On the relevance of soliton theory to tsunami modelling", *Wave Mot.* 46, 420 (2009)
- [75] A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, N. Akhmediev, "Rogue wave observation in a water wave tank", *Phys. Rev. Lett.*, 106, 204502 (2011)
- [76] R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. H. Townes, "Self-Trapping of Optical Beams", *Phys. Rev. Lett.* 13, 479 (1964)
- [77] A. Barthelemy, S. Maneuf, G. Froehly, "Soliton propagation and self-confinement of laser-beams by Kerr optical non-linearity", *Opt. Commun.* 55, 201 (1985)
- [78] S. L. McCall and E. L. Hahn, "Self-Induced Transparency by Pulsed Coherent Light", *Phys. Rev. Lett.* 18, 908 (1967)
- [79] L. E Mollenauer, R. H. Stolen, J. E Gordon, "Experimental Observation of Picosecond Pulse Narrowing and Solitons in Optical Fibers", *Phys. Rev. Lett.* 45, 1095 (1980)
- [80] V.E. Zakharov, E.A. Kuznetsov, "Multi-scale expansions in the theory of systems integrable by the inverse scattering transform", *Physica D* 18, 455 (1986)
- [81] T.B. Benjamin, J.E. Feir, "The disintegration of wave-trains in deep water. Part I", *J. Fluid Mech.* 27, 417 (1967)
- [82] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J.D. Gibbon, H.C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, (Academic Press, London, 1982)
- [83] V. V. Afanasyev, E. M. Dianov, A. M. Prokhorov, V. N. Serkin, "Nonlinear pairing of bright and dark optical solitons", *JETP Lett.* 48, 638 (1989)
- [84] L. F. Mollenauer, S. G. Evangelides, J. P. Gordon, "Wavelength division multiplexing with solitons in ultra-long distance transmission using lumped amplifiers" *J. Lightwave Technol.* 9 362–367 (1991)
- [85] Lin, H. Kogelnik, L. G. Cohen, "Optical-pulse equalization of low-dispersion transmission in single-mode fibers in the 1.3–1.7- μm spectral region", *Opt. Lett.* 5, 476–478 (1980)
- [86] A. R. Chraplyvy, A. H. Gnauck, T. W. Tkach, R. M. Derosier, "8 \times 10 Gb/s transmission through 280 km of dispersion-managed fiber", *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 5, pp. 1233–1235 (1993)
- [87] N. S. Bergano, C. R. Davidson, "Wavelength division multiplexing in long-haul transmission systems", *J. Lightwave Technol.*, 14, 1299–1308 (1996)

- [88] N. J. Smith, F. M. Knox, N. J. Doran, K. J. Blow, I. Bernnion, “Enhanced power solitons in optical fibres with periodic dispersion management”, *Electron. Lett.*, 32, 54–55 (1996)
- [89] N. J. Smith, N. J. Doran, F. M. Knox, W. Forsyia, “Energy-scaling characteristics of solitons in strongly dispersion-managed fibers”, *Opt. Lett.*, 21, 1981–1983 (1996)
- [90] I. R. Gabitov, S. K. Turitsyn, “Averaged pulse dynamics in a cascaded transmission system with passive dispersion compensation”, *Opt. Lett.*, 21, 327–329 (1996)
- [91] M. Nakazawa, H. Kubota, “Construction of a Dispersion-Allocated Soliton Transmission Line Using Conventional Dispersion-Shifted Nonsoliton Fibers”, *Jpn. J. Appl. Phys.* 34, L681-L683 (1995)
- [92] L. F. Mollenauer, A. R. Grant, X. Liu, X. Wei, C. Xie, I. Kang, “Experimental test of dense wavelength-division-multiplexing using novel, periodic-groupdelay-complemented dispersion compensation and dispersion-managed solitons”, *Opt. Lett.*, 28, 2043–2045 (2003)
- [93] M. Suzuki, I. Morita, N. Edagawa, S. Yamamoto, H. Taga, S. Akiba, “Reduction of Gordon–Haus timing jitter by periodic dispersion compensation in soliton transmission,” *Electron. Lett.*, vol. 31, no. 23, pp. 2027–2028 (1995)
- [94] Hasegawa, Y. Kodama, “Guiding center soliton in optical fibers”, *Opt. Lett.*, 15, pp. 1443–1445 (1990)
- [95] K. J. Blow, N. J. Doran, “Average soliton dynamics and the operation of soliton systems with lumped amplifiers”, *Photon. Technol. Lett.*, 3, 369–371 (1991)
- [96] L. F. Mollenauer, J. P. Gordon, M. N. Islam, “Soliton propagation in long fibers with periodically compensated loss”, *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. QE-22, 157–173 (1986)
- [97] S. K. Turitsyn, “Dispersion-Managed solitons and optimization of the dispersion management”, *Opt. Fiber Tech.* 4, 384-452 (1998)
- [98] T. I. Lakoba, J. Yang, D.J. Kaup, B.A. Malomed, “Conditions for stationary pulse propagation in the strong dispersion management regime”, *Opt. Comm.* 149, 366-75 (1998)
- [99] T.-S. Yang, W. L. Kath, S. K. Turitsyn, “Optimal dispersion maps for wavelength-division-multiplexed soliton transmission”, *Opt. Lett.*, 23, 597–599 (1998)
- [100] M. Nakazawa, “Nonlinear pulse transmission through an optical fiber at zero-average group velocity dispersion”, *IEEE Phot. Tech. Let.* 8, 452 (1996)
- [101] J. N. Kutz, S. G. Evangelides, “Dispersion-managed breathers with average normal dispersion”, *Opt. Lett.* 23, 685-687 (1998)
- [102] F. Favre, D. Le Guen, M. L. Moulinard, M. Henry, T. Georges, “320 Gbit/s soliton WDM transmission over 1300 km with 100 km dispersion-compensated spans of standard fibre”, *El. Lett.* 33, 2135 (1997)
- [103] F. K. Breuer, A. Mattheus, E. G. Shapiro, I. Gabitov, S. K. Turitsyn, “Symmetrical dispersion compensation for standard monomode-fiber-based communication systems with large amplifier spacing”, *Opt. Lett.* 22, 546 (1997)
- [104] D. Breuer, K. Jürgensen, F. Küppers, A. Mattheus, I. Gabitov, S.K. Turitsyn, “Optimal schemes for dispersion compensation of standard monomode fiber based links”, *Opt. Comm.* 140, 15 (1997)
- [105] E. A. Golovchenko, A. N. Pilipetskii, C. R. Menyuk, “Collision-induced timing jitter reduction by periodic dispersion management in soliton WDM transmission”, *El. Lett.* 33, 735 (1997)
- [106] R. Ulrich, A. Simon, “Polarization optics of twisted single-mode fibers”, *Appl. Opt.* 18, 2241-2251 (1979)
- [107] K. J. Blow, N. J. Doran, David Wood, “Polarization instabilities for solitons in birefringent fibers”, *Opt. Lett.* 12, 202-204 (1987)
- [108] B. Daino, G. Gregori, S. Wabnitz, “New all-optical devices based on third-order nonlinearity of birefringent fibers”, *Opt. Lett.* 11, 42-44 (1986)
- [109] T. Ueda, W. L. Kath, “Dynamics of coupled solitons in nonlinear optical fibers”, *Physical Review A*, 42, 563-571 (1990)
- [110] D. J. Kaup, B. A. Malomed, R. S. Tasgal, “Internal dynamics of a vector soliton in a nonlinear optical fiber”, *Phys. Rev. E* 48, 3049 (1993)
- [111] Y. Silberberg, Y. Barad, “Rotating vector solitary waves in isotropic fibers”, *Opt. Lett.* 20, 246-248 (1995)
- [112] Y. S. Kivshar, S. K. Turitsyn, “Vector dark solitons”, *Opt. Lett.* 18, 337–339 (1993)

- [113] L. F. Mollenauer, P. V. Mamyshev, M. J. Neubelt, "Demonstration of soliton WDM transmission at 8×10 Gbit/s, error-free over transoceanic distances", in Technical Digest of the 1996 Optical Fiber Conference, San Jose, CA, PD22-2–PD22-5, Optical Society of America and IEEE, Feb./March 1996.
- [114] W. Forysiak, J. F. L. Devaney, N. J. Smith, N. J. Doran, "Dispersion management for wavelength-division-multiplexed soliton transmission", *Opt. Lett.* 22, 600 (1997)
- [115] L. F. Mollenauer, P. V. Mamyshev, M. J. Neubelt "Demonstration of soliton WDM transmission at 6 and 7×10 Gbit/s, error free over transoceanic distances", *Electron. Lett.* 32, 471 (1996)
- [116] J. F. L. Devaney, W. Forysiak, A. M. Niculae, N. J. Doran, "Soliton collisions in dispersion-managed wavelength-division-multiplexed systems," *Opt. Lett.*, 22, 1695–1697 (1997)
- [117] H. Sugahara, H. Kato, T. Inoue, A. Maruta, Y. Kodama, "Optimal Dispersion Management for a Wavelength Division Multiplexed Optical Soliton Transmission System", *J. Lightwave Technol.* 17, 1547 (1999)
- [118] R. R. Alfano, Q. X. Li, T. Jimbo, J. T. Manassah, P. Ho, "Induced spectral broadening of a weak picosecond pulse in glass produced by an intense picosecond pulse", *Opt. Lett.*, 11, 626-628 (1986)
- [119] R. Chraplyvy, J. Stone, "Measurement of crossphase modulation in coherent wavelength-division multiplexing using injection lasers", *Electron. Lett.* 20, 996 (1984)
- [120] A. D. Bonderson, M. Lisak, D. Anderson, "Soliton perturbations: a variational principle for the soliton parameters", *Phys. Scr.* 20, 479–485 (1979)
- [121] D. Anderson, "Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers", *Phys. Rev. A*, 27, 3135 (1983)
- [122] M. Lisak, A. Höök, D. Anderson, "Symbiotic solitary-wave pairs sustained by cross-phase modulation in optical fibers", *J. Opt. Soc. Am. B*, 7, 810-814 (1990)
- [123] J. N. Kutz, P. Holmes, S. G. Evangelides, J. P. Gordon, "Hamiltonian dynamics of dispersion-managed breathers", *J. Opt. Soc. Am. B*, 15, 87 (1998)
- [124] J. N. Kutz, Philip Holmes, "Dynamics and Bifurcations of a Planar Map Modeling Dispersion Managed Breathers", *SIAM J. Appl. Math.* 59, 1288-1302 (1999)
- [125] Q. Wang, P. K. A. Wai, C.-J. Chen, C. R. Menyuk, "Numerical Modeling of Soliton-Dragging Logic Gates", *J. Opt. Soc. Am. B* 10, 2030 (1993)
- [126] S. Chávez-Cerda, Solange B. Cavalcanti, J. M. Hickmann, "A variational approach of nonlinear dissipative pulse propagation," *European Physical Journal D* 1, 313 (1998)
- [127] I. Gabitov, S. K. Turitsyn, "Breathing solitons in optical fiber links", *JETP Lett.* 63 861-866 (1996)
- [128] I. Gabitov, E.G. Shapiro, S.K. Turitsyn, "Optical pulse dynamics in fiber links with dispersion compensation", *Opt. Commun.* 134 317-329 (1997)
- [129] J. P. Gordon, "Dispersive perturbations of solitons of the nonlinear Schrödinger equation", *J. Opt. Soc. Am. B* 9, 91-97 (1992)
- [130] Y. S. Kivshar, "Soliton stability in birefringent optical fibers: analytical approach", *J. Opt. Soc. Am. B* 7, 2204-2209 (1990)
- [131] D. Anderson, Yu S. Kivshar, M. Lisak, "Polarization oscillations and soliton stability in birefringent optical fibres", *Phys. Scr.* 43, 273 (1991)
- [132] B. A. Malomed, R. S. Tasgal, "Internal vibrations of a vector soliton in the coupled nonlinear Schrödinger equations", *Phys. Rev. E*, 58, 2564-575 (1998)
- [133] B. A. Malomed, "Polarization dynamics and interactions of solitons in a birefringent optical fiber", *Phys. Rev. A*, 43, 410-423 (1990)
- [134] C. Froeschlé, "Numerical study of dynamical systems with three degrees of freedom: I. Graphical display of four-dimensional sections", *Astron. & Astrophys.* 4, 115-128 (1970)
- [135] C. Froeschlé, "Numerical study of a four-dimensional mapping", *Astron. & Astrophys.* 16, 172-189 (1972)
- [136] G. Contopoulos, P. Magnenat, L. Martinet, "Invariant surfaces and orbital behaviour in dynamical systems of 3 degrees of freedom II", *Physica D*, 126-36 (1982)
- [137] L. Martinet, P. Magnenat, "Invariant surfaces and orbital behaviour in dynamical systems of 3 degrees of freedom", *Astron. & Astrophys.* 96, 68-77 (1981)

- [138] Ch. Skokos, G. Contopoulos, C. Polymilis, "Numerical study of the phase space of a four dimensional symplectic map", in *Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom*, (ed. C. Simó), p. 583-87 (Plenum Press, 1999)
- [139] P.A. Patsis, L. Zachilas: "Using color and rotation for visualizing 4-dimensional Poincaré Cross sections", *I.J. of Bif. and Chaos*, 4, 1399 (1994)
- [140] M. N. Vrahatis, T. C. Bountis, M. Kollman, "Periodic orbits and invariant surfaces of 4d nonlinear mappings", *Int. J. Bifurc. Chaos*, 6, 1425-37 (1996)
- [141] M. N. Vrahatis, H. Isliker, T. C. Bountis, "Structure and breakdown of invariant tori in a 4-D mapping model of accelerator dynamics", *Int. J. Bifurc. Chaos*, 7, 2707-22 (1997)
- [142] C. Froeschlé, "On the Number of Isolating Integrals in Systems with Three Degrees of Freedom", *Astroph. & Space Sc.* 14, 110-7 (1971)
- [143] C. R. Menyuk, "Stability of solitons in birefringent optical fibers. I: Equal propagation amplitudes", *Opt. Lett.* 12, 614-616 (1987)
- [144] C. R. Menyuk, "Stability of solitons in birefringent optical fibers. II. Arbitrary amplitudes", *J. Opt. Soc. Am. B* 5, 392-402 (1988)
- [145] Kh. Abdullaev, J. G. Caputo, "Validation of the variational approach for chirped pulses in fibers with periodic dispersion", *Phys. Rev. E*, 58, 6637-48 (1998)
- [146] C. R. Menyuk, "Hamiltonian deformations and optical fibers", *Lecture Notes in Physics*, 342, 218-231 (1988)
- [147] Y. S. Kivshar, B. A. Malomed, "Dynamics of solitons in nearly integrable systems", *Rev. of Mod. Phys.* 61, 763-915 (1989)
- [148] A. Hasegawa, S. Kumar, Y. Kodama, "Reduction of collision-induced time jitters in dispersion-managed soliton transmission systems", *Opt. Lett.* 21, 39-41 (1996)
- [149] S. Kumar, Y. Kodama, A. Hasegawa, "Optimal dispersion management schemes for WDM soliton systems", *Electron. Lett.* 33, 459-61 (1997)
- [150] Y. Kodama A. Maruta, "Optimal design of dispersion management for a soliton wavelength-division-multiplexed system", *Opt. Lett.* 22, 1692-1694 (1997)
- [151] H. Sugahara, H. Kato, Y. Kodama "Maximum reductions of collision induced frequency shift in soliton-WDM systems with dispersion compensation", *Electron. Lett.* 33, 1065-66 (1997)
- [152] T. Hirooka, A. Hasegawa, "Chirped soliton interaction in strongly dispersion-managed wavelength-division-multiplexing systems", *Opt. Lett.* 23, 768-770 (1998)
- [153] T. Georges, B. Charbonnier, "Reduction of the dispersive wave in periodically amplified links with initially chirped solitons", *IEEE Photon. Tech. Lett.* 9, 127 (1997)
- [154] M. Nakazawa, K. Suzuki, H. Kubota, E. Yamada, "60 G/bits WDM (20 G/bitsX 3 unequally spaced channels) soliton transmission over 10000 km using in-line synchronous modulation and optical filtering", *Electron. Lett.* 32, 1686 (1996)
- [155] S. K. Turitsyn, E. Shapiro, "Variational approach to the design of optical communication systems with dispersion management", *Opt. Fiber Techn.*, 4, 151 (1998)
- [156] S. K. Turitsyn, E. G. Shapiro, V. K. Mezentsev, "Dispersion-managed solitons and optimization of the dispersion management", *Invited paper to Opt. Fiber Techn.*, 4, 384 (1998)
- [157] F. M. Mitschke, L. F. Mollenauer, "Discovery of the soliton self-frequency shift", *Opt. Lett.* 11, 659-661 (1986)
- [158] K. J. Blow, D. Wood, "Theoretical Description of Transient Stimulated Raman Scattering in Optical Fibres", *IEEE J Quant. Electr.* 25, 2665-73 (1989)
- [159] P. V. Mamyshev and S. V. Chernikov, "Ultrashort-pulse propagation in optical fibers", *Opt. Lett.* 15, 1076-1078 (1990)
- [160] R. H. Stolen, J. P. Gordon, W. J. Tomlinson, H. A. Haus, "Raman response function of silica-core fibers", *J. Opt. Soc. Am. B* 6, 1159-1166 (1989)
- [161] R. G. Smith, "Optical Power Handling Capacity of Low Loss Optical Fibers as Determined by Stimulated Raman and Brillouin Scattering", *Appl. Opt.* 11, 2489-2494 (1972)
- [162] D. Anderson, M. Lisak "Nonlinear asymmetric self-phase modulation and self-steepening of pulses in long optical waveguides", *Phys. Rev. A* 27, 1393-1398 (1983)
- [163] E. M. Dianov, A. Y. Karasik, P. V. Mamyshev, A. M. Prokhorov, V. N. Serkin, M. F. Stel'makh, and A. A. Fomichev, "Stimulated-Raman conversion of multisoliton pulses in quartz optical fibers", *JETP Lett.* 41, 294 (1985)

- [164] D. Schadt, B. Jaskorzynska, "Suppression of the Raman self-frequency shift by cross-phase modulation", *J. Opt. Soc. Am. B*, 5, 2374-8 (1988)
- [165] P. Beaud, W. Hodel, B. Zysset, H. P. Weber, "Ultrashort pulse propagation, pulse-break up and fundamental soliton formation in a single mode optical fiber", *IEEE J. Quantum Electron.* 23, 1938 (1987)
- [166] R. R. Alfano, P. L. Baldeck, F. Racciah, P. P. Ho, "Cross phase modulation measured in optical fibers", *Appl. Opt.* 26, 3491-3492 (1987)
- [167] C. S. Aparna, S. Kumar, A. Selvarajan, "Suppression of the soliton frequency shifts by nonlinear pairing pulses", *Opt. Commun.* 131, 267-273 (1996)
- [168] J. Yan, Y. Tang, G. Zhou, Z. Chen, "Direct approach to the study of the nonlinear Schrödinger equation and the sine-Gordon equation", *Phys. Rev. E* 58, 1064-73 (1998)
- [169] V. I. Karpman, E. M. Maslov, "Perturbation theory for solitons", *Sov. Phys. JETP*, 46, 281 (1977)
- [170] S. Kumar, "Influence of Raman effects in WDM soliton systems", *Opt. Lett.* 23, 1450-1452 (1998)
- [171] K. Porsezian et al., "Complete integrability of N-coupled higher-order nonlinear Schrödinger equations in nonlinear optics" *J. Phys. A: Math. Gen.* 32, 8731-8737 (1999)
- [172] K. J. Blow, N. J. Doran, D. Wood, "Suppression of the soliton self-frequency shift by bandwidth-limited amplification", *J. Opt. Soc. Am. B* 5, 1301-1304 (1988)
- [173] P. T. Dinda, K. Nakkeeran, A. Labruyère, "Suppression of soliton self-frequency shift by upshifted filtering", *Opt. Lett.* 27, 382-384 (2002)
- [174] V. I. Karpman, "Soliton Evolution in the presence of perturbation", *Phys. Scripta* 20, 462-478 (1979)
- [175] S. Chi, S. Wen, "Raman cross talk of soliton collision in a lossless fiber", *Opt. Lett.* 14, 1216-18 (1989)
- [176] D. V. Gapontsev, S. V. Chernikov, J. R. Taylor, "Fiber Raman amplifiers for broadband operation at 1.3 μm ", *Opt. Commun.* 166, 85 (1999)
- [177] P. B. Corkum, C. Rolland, and T. Srinivasan-Rao, "Supercontinuum Generation in Gases" *Phys. Rev. Lett.* 57, 2268 (1986)
- [178] G. Sucha and D. S. Chemla, "Kilohertz-rate continuum generation by amplification of femtosecond pulses near 1.5 μm ", *Opt. Lett.* 16, 1177 (1991)
- [179] M. Kolesik, E. Wright, and J. Moloney, "Dynamic nonlinear X-waves for femtosecond pulse propagation in water", *Phys. Rev. Lett.* 92, 253901 (2004)
- [180] J. K. Ranka, R. W. Schirmer, A. L. Gaeta, "Observation of pulse splitting in nonlinear dispersive media", *Phys. Rev. Lett.* 77, 3783 (1996)
- [181] E.A. Kuznetsov, A.M. Rubenchik, V.E. Zakharov, "Soliton stability in plasmas and hydrodynamics", *Phys. Rep.* 142, 105 (1986)
- [182] P. Di Trapani, G. Valiulis, A. Piskarskas, et al. "Spontaneously generated X-shaped light bullets", *Phys. Rev. Lett.* 91, 093904 (2003)
- [183] A. Dubietis, A. Gaizauskas, G. Tomosauskas et al. "Light filaments without self-guiding", *Phys. Rev. Lett.* 92, 253903 (2004)
- [184] M. A. Porras, A. Parola, D. Faccio et al. "Nonlinear unbalanced Bessel beams: stationary conical waves supported by nonlinear losses", *Phys. Rev. Lett.* 93, 153902 (2004)
- [185] A. Matijosius, J. Trull, P. Di Trapani et al. "Nonlinear space-time dynamics of ultrashort wave packets in water", *Lett.* 29, 1123-1125 (2004)
- [186] D. Faccio, A. Matijosius, A. Dubietis et al. "Near- and far-field evolution of laser pulse filaments in Kerr media", *Phys. Rev. E* 72, 037601 (2005)
- [187] D. Faccio, P. Di Trapani, S. Minardi et al. "Far-field spectral characterization of conical emission and filamentation in Kerr media", *J. Opt. Soc. Am. B* 22, 862 (2005)
- [188] A. Couairon, E. Gaizauskas, D. Faccio et al. "Nonlinear X-wave formation by femtosecond filamentation in Kerr-media", *Phys. Rev. E* 73, 016608 (2006)
- [189] D. Faccio, M. Porras, A. Dubietis et al. "Conical emission, pulse splitting and X-wave parametric amplification in nonlinear dynamics of ultrashort light pulses", *Phys. Rev. Lett.* 96, 193901 (2006)

- [190] A. A. Zozuya, S. A. Diddams, et al. "Propagation Dynamics of Intense Femtosecond Pulses: Multiple Splittings, Coalescence, and Continuum Generation", *Phys.Rev.Lett.* 82, 1430 (1999)
- [191] J. V. Moloney, M. Kolesik, "Nonlinear Ultrafast Femtosecond X-waves", *Proc. of SPIE Vol.* 7005 700509-1 (2008)
- [192] M. A. Porras, A. Parola, D. Faccio, A. Couairon, and P. Di Trapani, "Light-filament dynamics and the spatiotemporal instability of the Townes profile", *PRA* 76, 011803 (2007)
- [193] H. Berkshire, J. D. Gibbon, "Collapse in the n-dimensional non-linear schrodinger-equation - a parallel with sundman results in the n-body problem", *Stud. Appl. Math.* 69, 229 (1983)
- [194] B. J. LeMesurier, G. C. Papanicolaou, C. Sulem, P. L. Sulem, "Focusing and multi-focusing solutions of the nonlinear Schrödinger equation", *Physica D* 31, 78 (1988)
- [195] N. E. Kosmatov, V. E. Zakharov, V. F. Shvets, "Computer simulation of wave collapses in the nonlinear Schrödinger equation", *Physica D* 52, 16 (1991)
- [196] D. Anderson, M. Bonnedal, M. Lisak, "Self-trapped cylindrical laser beams", *Phys. Fluids* 22, 1838 (1979)
- [197] M. Desaix, D. Anderson, M. Lisak, "Variational approach to collapse of optical pulses", *J. Opt. Soc. Am. B* 8, 2082 (1991)
- [198] L. Berge, D. Pesme, "Time dependent solutions of wave collapse", *Phys. Lett. A* 166 (1992) 116.
- [199] L. Berge, D. Pesme, "Non self-similar collapsing solutions of the nonlinear Schrödinger equation at the critical dimension", *Phys. Rev. E* 48 (1993) R684
- [200] L. Bergé, D. Pesme, "Bounded spatial extension of the self-similar collapsing solutions of the nonlinear Schrödinger equation", *Physica Scripta* 47 (1993) 323.
- [201] L. Bergé, J.J Rasmussen, "Multisplitting and collapse of self-focusing anisotropic beams in normal/anomalous dispersive media" *Phys. Plasmas* 3, 824 (1996)
- [202] L. Bergé, "Transient regimes of anisotropic light beam self-focusing in nonlinear dispersive media", *Phys. Lett. A*, 189, 290 (1994)
- [203] L. Bergé, J. J Rasmussen "Pulse splitting of self-focusing beams in normally dispersive media", *Phys. Rev. A*, 53, 4476 (1996)
- [204] P. Di Trapani, G. Valiulis, A. Piskarskas, O. Jedrkiewicz, J. Trull, C. Conti, and S. Trillo, "Spontaneously Generated X-Shaped Light Bullets", *PRL*, 91, 093904-1-4 (2003)
- [205] P. Chernev and V. Petrov, "Self-focusing of light pulses in the presence of normal group-velocity dispersion," *Opt. Lett.* 17, 172–174 (1992)
- [206] G. Luther, J. V. Moloney, and A. C. Newell, "Selffocusing threshold in normally dispersive media," *Opt. Lett.* 19, 862–864 (1994)
- [207] G. Luther, J. V. Moloney, A. C. Newell, and E. M. Wright, "Short-pulse conical emission and spectral broadening in normally dispersive media," *Opt. Lett.* 19, 789–791 (1994)
- [208] G. Litvak, V. A. Mironov, and E. M. Sher, "Regime of wave-packet self-action with normal dispersion of the group velocity," *Phys. Rev. E* 61, 891–893 (2000)
- [209] D. N. Christodoulides, N. K. Efremidis, P. Di Trapani, and B. A. Malomed, "Bessel X waves in two- and three-dimensional bidispersive optical systems", *Opt. Lett.* 29, 1446 (2004)
- [210] N. N. Akhmediev and S. Wabnitz, "Phase detecting of solitons by mixing with continuous wave background in an optical fiber", *J. Opt. Soc. Am. B* 9, 236–242 (1992)
- [211] Y. Kominis, K. Hizanidis, "Solitary wave interactions with continuous waves", *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* 16, 1753–1764 (2006)
- [212] G. Litvak, T. A. Petrova, A. M. Sergeev, A. D. Yunakovskii, "A nonlinear wave effect in plasmas", *Sov. J. Plasma Phys.* 9, 287-290 (1983)
- [213] J. H. Marburger, "Self-focusing: Theory", *Prog. Quantum Electron.* 4, 35 (1975)
- [214] M. J. Potasek, G. P. Agrawal, S. C. Pinault, "Analytic and numerical study of pulse broadening in nonlinear dispersive optical fibers", *JOSA B* 3, 205 (1986)
- [215] J. E. Rothenberg, "Pulse splitting during self-focusing in normally dispersive media", *Opt. Lett.* 17, 583 (1992)
- [216] G. Fibich, B. Ilan, "Self-focusing of elliptic beams: an example of the failure of the aberrationless approximation", *JOSA B*, 17, 1749-58 (1999)
- [217] M. J. Landman, G. C. Papanicolaou, C. Sulem et al. "Rate of blowup for solution of the nonlinear Schrodinger equation at critical dimension", *Phys.Rev. A* 38, 3837–3843 (1988)

- [218] L. W. Liou, X. D. Cao, C. J. McKinstrie, and G. P. Agrawal, "Spatiotemporal instabilities in dispersive nonlinear media," *Phys. Rev. A* 46, 4202–4208 (1992)
- [219] J. Salo, J. Fagerholm, A. T. Friberg, and M. M. Salomaa, "Nondiffracting Bulk-Acoustic X waves in Crystals", *Phys. Rev. Lett.* 83, 1171 (1999)
- [220] J. Salo, J. Fagerholm, A. T. Friberg, and M. M. Salomaa, "Unified Description of Nondiffracting X and Y Waves", *Phys. Rev. E* 62, 4261 (2000)
- [221] E. Saari and K. Reivelt, "Evidence of X-Shaped propagation-invariant localized light waves" *Phys. Rev. Lett.* 79, 4135 (1997)
- [222] C. Conti "X-wave mediated instability of plane waves in Kerr media", *Phys. Rev. E* 68, 016606 (2003)
- [223] C. Conti, "Generation and nonlinear dynamics of X waves of the Schrödinger equation", *Phys. Rev. E* 70, 046613 (2004)
- [224] G. Fibich, W.Q. Ren, X.P. Wang "Numerical simulations of self-focusing of ultrafast laser pulses", *Phys. Rev. E* 67, 056603 (2003)
- [225] C. Conti, S. Trillo, E Di Trapani, G. Valiulis, O. Jedrkiewicz, and J. Trull, webpage arXiv.org/physics/0204066
- [226] M. Hercher "Laser-induced damage in transparent media", *J. Opt. Soc. Am.* 54, 563 (1964)
- [227] G. Fibich, S. Eisenmann, B. Ilan et al. "Self-focusing distance of very high power laser Pulses", *Opt. Express* 13, 5897–5903 (2005)
- [228] H. A. Rose, D. F. DuBois, "Initial development of ponderomotive filaments in plasma from intense hot spots produced by a random phase plate", *Phys. Fluids B* 5, 3337 (1993)
- [229] C. Labaune, S. Baton, T. Jalinaud, H.A. Baldis, D. Pesme, "Filamentation in long scale length plasmas: experimental evidence and effects of spatial incoherence", *Phys. Fluids B* 4, 2224 (1992)
- [230] V. E. Zakharov, "Collapse of Langmuir waves", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 62, 1745 (1972) [*Sov. Phys. JETP* 35, 908 (1972)]
- [231] R. R. Alfano (Ed.): *The Supercontinuum Laser Source: Fundamentals with Updated References*, 2nd ed., 568 pp, (Springer, New York 2006)
- [232] J. J. Rasmussen, K. Rypdal, "Blow-up in nonlinear Schroedinger equations I: a general review", *Physica Scripta* 33, 481 (1986)
- [233] M. J. Landman, G. C. Papanicolaou, C. Sulem, P. L. Sulem, X. P. Wang, "Stability of isotropic singularities for the NLS", *Physica D* 47, 393 (1991)
- [234] C. J. McKinstrie, D. A. Russel, "Nonlinear focusing of coupled waves", *Phys. Rev. Lett.* 61, 2929 (1988)
- [235] D. E. Endmundson, R. H. Enns, "Fully three-dimensional collisions of bistable light bullets", *Opt. Lett.* 18, 1609 (1993)
- [236] L. Poladian, A.W. Snyder, and D. J. Mitchell, "Spiralling spatial solitons", *Opt. Commun.* 85, 59 (1991)
- [237] J. Schjødt-Eriksen M. R. Schmidt, J. J. Rasmussen, E L. Christiansen, Yu. B. Gaididei, and L. Bergé, *Phys. Let. A*, 246, 423 (1998)
- [238] A. Bathelmy, C. Froehly, M. Shalaby, P. Donnat, J. Paye, A. Migus, *Ultrafast Phenomena VIII*, J. J. Martin et al., Eds. (Springer, Berlin, 1993), pp. 299-305.
- [239] A. S. Desyatnikov and Yu. S. Kivshar, "Spatial optical solitons and soliton clusters carrying an angular momentum", *J. Opt. B* 4, S58 (2002)
- [240] A. S. Desyatnikov, D. Neshev, E. A. Ostrovskaya, Yu. S. Kivshar, et al, "Multipole composite spatial solitons: theory and experiment", *J. Opt. Soc. Am. B* 19, 586 (2002)
- [241] D. Neshev, G. McCarthy, W. Krolikowski, et al, "Dipole mode vector solitons in anisotropic non-local self-focusing media", *Opt. Lett.* 26, 1185 (2001)
- [242] L. Bergé, M. R. Schmidt, J. J. Rasmussen, P. L. Christiansen, K. Ø. Rasmussen, "Amalgamation of interacting light beamlets in Kerr-type media", *J. Opt. Soc. Am. B* 14, 2550-62 (1997)
- [243] L. Bergé, "Coalescence and instability of copropagating nonlinear waves", *Phys. Rev. E*, 58, 6606-24 (1998)
- [244] W. Snyder A. P. Sheppard, "Collision, steering and guidance with spatial solitons", *Opt. Lett.* 18, 482 (1993)

- [245] L. Bergé, “Wave collapse in physics: principles and applications to light and plasma waves”, *Phys. Rep.* 303, 259-370 (1998)
- [246] B. A. Malomed, “Chapter 2 Variational methods in nonlinear fiber optics and related fields”, *Prog. In Optics*, 43, 71-193 (2002)
- [247] D. Dragoman, “The Wigner distribution function in optics and optoelectronics”, *Progress in Optics*, 37, 1–56 (1997)
- [248] G. P. Agrawal, P. L. Baldeck, R. R. Alfano, “Temporal and spectral effects of cross-phase modulation on copropagating ultrashort pulses in optical fibers”, *Phy. Rev. A*, 40, 5063-72 (1989)
- [249] M.Manousakis, P.Papagiannis, K.Hizanidis, N.Moschonas, “Evolution of a PS-type soliton pulse in a dispersion varying link: A variational approach”, *Optics Communications* 198, 351-367 (2001)
- [250] M.Manousakis, N.Moschonas, K.Hizanidis, P.Papagiannis, “A direct perturbation method investigation of the interplay between self-frequency shift and cross-phase modulation for solitons” *Journal of Modern Optics* 52, 2549-62 (2005)
- [251] Y.Kominis, N.Moshonas, P.Papagiannis, K.Hizanidis, D.N.Christodoulides, “CW-controlled nonlinear X-wave generation”, *Optics Letters*, 30, 2924-6 (2005)
- [252] N.Moshonas, Y.Kominis, P.Papagiannis, K.Hizanidis, D.N.Christodoulides, “Spatiotemporal interaction of optical beams”, *JOSA B* 26, 1479-1483 (2009)
- [253] N.Moshonas, M.Manousakis, K.Hizanides, “A direct perturbation approach to optical soliton propagation with Raman scattering and cross phase modulation”, *Proceedings of SPIE, Opto-Ireland*, 5823-5827 (2005)
- [254] N.Moshonas, Y.Kominis, M.Manousakis, N.Efremidis, K.Hizanidis, “Investigation of spatiotemporal optical beam reallocation”, *Proceedings of SPIE, Prague 2007*, Vol.6582, 65821F (2007)

Συνοπτικό Βιογραφικό Σημείωμα

Επιστημονικά Ενδιαφέροντα

Μη-γραμμικά φαινόμενα, μη-γραμμικά κύματα, Χάος, Δυναμικά συστήματα, Φωτονική Τεχνολογία.

Ακαδημαϊκή Επιμόρφωση

Πτυχίο Φυσικής Ε.Κ.Π.Α

MSc “Applied Optics”, University of Salford

Διδακτορική διατριβή, Σ.Η.Μ.Μ.Υ.-Ε.Μ.Π. (παρόν κείμενο)

Δημοσιεύσεις σε διεθνή περιοδικά με κριτές

1. “Evolution of a PS-type soliton pulse in a dispersion varying link: A variational approach”, M.Manousakis, P.Papagiannis, K.Hizanidis, N.Moschonas. *Optics Communications* 198 (2001), 351-367.
2. “A direct perturbation method investigation of the interplay between self-frequency shift and cross-phase modulation for solitons” N.Moschonas, M.Manousakis, K.Hizanidis, P.Papagiannis. *Journal of Modern Optics* 52 (2005), 2549-62.
3. “CW-controlled nonlinear X-wave generation” Y.Kominis, N.Moshonas, P.Papagiannis, K.Hizanidis, D.N.Christodoulides. *Optics Letters*, 30 (2005), 2924-6
4. “Spatiotemporal interaction of optical beams in bidispersive media”, N.Moshonas, Y.Kominis, P.Papagiannis, K.Hizanidis, D.N.Christodoulides. *JOSA B* 26 (2009), 1479-1483.
5. “Gamma ray attenuation measurements as a laboratory experiment. Some remarks” E.Adamides, S.K.Koutroubas, N.Moshonas, K.Yiasemides, *Physics Education*, 46, 398 (2011)

Δημοσιεύσεις σε διεθνή συνέδρια με κριτές

1. “A direct perturbation approach to optical soliton propagation with Raman scattering and cross phase modulation”, N.Moshonas, M.Manousakis, K.Hizanides, *Proceedings of SPIE, Opto-Ireland 2005*, Vols. 5823-5827
2. “Spatiotemporal reallocation and evolution patterns of interacting beams in bi-dispersive media”, Y.Kominis, N.Moshonas, P.Papagiannis, N.K.Efremidis, K.Hizanidis, D.N.Christodoulides, *Nonlinear Guided Waves and Their Applications, Technical Digest (CD) (Optical Society of America, 2005)*, paper WD4
3. “Investigation of spatiotemporal optical beam reallocation”, N.Moshonas, Y.Kominis, M.Manousakis, N.Efremidis, K.Hizanidis, *Proceedings of SPIE, Prague 2007*, Vol.6582, p.65821F
4. “Dark soliton dynamics and interactions in dynamically photo-induced lattices: interaction with a continuous wave”, I.Tsopelas, Y.Kominis, P.Papagiannis, N.Moshonas, L.Halastanis, N.Efremidis, K.Hizanidis, *Proceedings of SPIE, Prague 2007*, Vol. 658218
5. “Soliton dynamics and interactions in dynamically photo-induced lattices”, I.Tsopelas Y.Kominis, K.Hizanidis, L.Halastanis, G.Papazisimos, N.Efremidis, N.Moshonas, S.Droulias, P.Papagiannis, *Proceedings of the SPIE*, Vol.6187, pp. 61871A

Ξένες Γλώσσες

Αγγλικά

Γερμανικά

