Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ,
ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Μελέτη της δυναμικής οπτικών σολιτονικών σχηματισμών σε διατάξεις μέσων με μη εντοπισμένη, μη γραμμική συμπεριφορά

Γεώργιος Ν. Παπαζήσιμος

Διδακτορική Διατριβή

Επιβλέπων Καθηγητής:
Κυριάκος Χιτζανίδης, Καθηγητής ΣΗΜΜΥ, ΕΜΠ

Αθήνα, Αύγουστος 2013

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Μελέτη της δυναμικής οπτικών σολιτονικών σχηματισμών σε διατάξεις μέσων με μη εντοπισμένη, μη γραμμική συμπεριφορά

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Γεώργιος Ν. Παπαζήσιμος

Συμβουλευτική Επιτροπή : Κυριάκος Χιτζανίδης
Ιωάννης Ρουμελιώτης
Ηρακλής Αβραμόπουλος

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή

Αθήνα, Αύγουστος 2013

Κυριάκος Χιτζανίδης Καθηγητής ΕΜΠ	Ιωάννης Ρουμελιώτης Καθηγητής ΕΜΠ	Ηρακλής Αβραμόπουλος Καθηγητής ΕΜΠ	Ηλίας Γλύτσης Καθηγητής ΕΜΠ

Ιωάννης Τσαλαμέγκας Καθηγητής ΕΜΠ	Νικόλαος Ευφραιμίδης Αν. Καθηγητής Παν. Κρήτης	Δημήτριος Συβρίδης Καθηγητής ΕΚΠΑ

Γεώργιος Ν. Παπαζήσιμος
Διδάκτωρ Ε. Μ. Π.

στην Ειρήνη και τη Βασιλική

Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή έχει ολοκληρωθεί στο εργαστήριο Μη Γραμμικής Οπτικής, Πλάσματος και Ηλεκτρονικής Δέσμης της Σχολής Ηλ. Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Ε.Μ.Π. υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Κ. Χιτζανίδη. Σε αδρές γραμμές μπορεί να ειπωθεί ότι αντικείμενό της αποτελεί η αναζήτηση σολιτονικών λύσεων κατά την οπτική διάδοση στην κατηγορία εκείνη των μη γραμμικών μέσων που τείνουν να διαχέουν την απόκρισή τους σε τοπικές διεγέρσεις. Αφετηρία του ενδιαφέροντος μου για το συγκεκριμένο θέμα υπήρξε η ιδιαίτερα έντονη πειραματική και θεωρητική διερεύνηση της δυναμικής της οπτικής διάδοσης σε διατάξεις νηματικών υγρών κρυστάλλων τα τελευταία δεκαπέντε χρόνια και οι σημαντικές προοπτικές τεχνολογικής αξιοποίησης της σχετικής έρευνας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον κ. Χιτζανίδη για την καθοδήγηση και τη φιλική σχέση που είχαμε όλα αυτά τα χρόνια. Η δυνατότητα που μου παρείχε να κινούμαι με ελευθερία στις επιστημονικές μου αναζητήσεις με βοήθησε στο να εμπεδώσω καλύτερα τη γνώση, που μου ήταν απαραίτητη για την παραγωγή επιστημονικού έργου και γι αυτό το κλίμα ελευθερίας και εμπιστοσύνης του είμαι ευγνώμων. Επίσης, ευχαριστίες οφείλω σε όλους ανεξαιρέτως τους συναδέλφους στο εργαστήριο για τις επιστημονικές και μη συζητήσεις μας. Από όλους τους να αναφέρω ιδιαιτέρως τους διδάκτορες Γ. Κομίνη, Π. Παπαγιάννη και Ν. Μοσχονά οι οποίοι κατά το τελευταίο έτος της εργασίας μου συνεισέφεραν στο να κατανοήσω και να ολοκληρώσω κάποια ανοικτά προβλήματα της διατριβής.

Γιώργος Παπαζήσιμος
Αύγουστος 2013

Περιεχόμενα

Εκτενής Περίληψη

Η παρούσα διδακτορική διατριβή έχει ως αντικείμενο την οπτική διάδοση σε περιοδικά διαμορφωμένα, μη γραμμικά μέσα με μη εντοπισμένη συμπεριφορά. Στο πλαίσιο της διατριβής εξετάζονται τέσσερα προβλήματα διάδοσης, η περιγραφή της οποίας γίνεται σε όλες τις περιπτώσεις με τη βοήθεια της διακριτής, μη γραμμικής εξίσωσης Schroedinger, όπως αυτή προκύπτει ανάλογα με το οπτικό μέσο και τη γεωμετρία της διάταξης. Οι ακολουθούμενες μέθοδοι διερεύνησης είναι ημι-αναλυτικές και αριθμητικές και μέσω αυτών και για καθένα από τα προβλήματα γίνεται η μοντελοποίηση των φυσικών διεργασιών που επιδρούν στην οπτική διάδοση και διερευνώνται οι δυνατότητες τεχνολογικών εφαρμογών.

Κεντρικό ρόλο στην εργασία που παρουσιάζεται έχει η έννοια της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Πρόκειται για μια ιδιότητα των μέσων των υπό εξέταση διατάξεων, που περιγράφει την τάση των μέσων να διαχέουν την απόκρισή τους στο χώρο μετά από χωρικά εντοπισμένη, οπτική, ηλεκτρική ή θερμική διέγερση. Υλικά που παρουσιάζουν τέτοια ιδιότητα και έχουν αποτελέσει αντικείμενο έντονης έρευνας στο πλαίσιο της οπτικής διάδοσης είναι, μεταξύ άλλων, οι νηματικοί υγροί κρύσταλλοι και τα συμπυκνώματα Bose-Einstein. Οι πρώτοι, δε, συνιστούν και το μέσο αναφοράς στην έρευνα που παρουσιάζεται στα Κεφάλαια 2, 3 και 4 της παρούσας διατριβής.

Αναφερόμενοι στη δομή της διατριβής, το 1^{ο} Κεφάλαιο αποτελεί την εισαγωγή και σκοπό έχει την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας της σχετικής με τα προβλήματα που θα μελετηθούν. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται στοιχεία μη γραμμικής οπτικής, καθώς και οι εξισώσεις που περιγράφουν τη διάδοση οπτικού πεδίου, για διάφορες περιπτώσεις διατάξεων και υλικών με διαφορετικές μη γραμμικότητες. Επίσης, δίνεται έμφαση στην παρουσίαση των φυσικών ιδιοτήτων του κύριου οπτικού μέσου που εξετάζεται στη διατριβή, τους υγρούς κρυστάλλους, ενώ, τέλος, αναφορά γίνεται σε αριθμητικές και ημι-αναλυτικές μεθόδους, που κρίνονται σημαντικές για τη μελέτη προβλημάτων οπτικής διάδοσης.

Στο 2^{ο} Κεφάλαιο εξετάζεται η διάδοση οπτικής δέσμης σε διάταξη υγρού κρυστάλλου του οποίου ο δείκτης διάθλασης έχει διαμορφωθεί τόσο στην εγκάρσια, όσο και στη διαμήκη διεύθυνση της διάδοσης. Καταρχάς γίνεται μελέτη του αδιατάρακτου στη διεύθυνση διάδοσης μοντέλου και εξάγονται συμπεράσματα για τις διατηρήσιμες ποσότητες του προβλήματος, παρουσιάζονται οι σχετικοί φασικοί χώροι και γίνεται αξιολόγηση της συμπεριφοράς του δυναμικού συστήματος για τις διάφορες περιοχές αρχικών τιμών. Εν συνεχεία, επεκτείνουμε στο μη ολοκληρώσιμο σύστημα που προκύπτει λόγω της διαμόρφωσης του δείκτη διάθλασης στη διεύθυνση διάδοσης με τη βοήθεια της μεταβολικής μεθόδου και καθορίζουμε την εξέλιξη των παραμέτρων του συστήματος με χρήση τομών Poincare. Παράλληλα επιλύεται αριθμητικά η διακριτή μη γραμμική εξίσωση Schroedinger και γίνονται συγκρίσεις με τα αποτελέσματα που δίνει η μεταβολική μέθοδος. Εξάγονται συμπεράσματα και το μοντέλο αξιολογείται και προτείνεται για χρήση ως ένα φίλτρο επιλογής ευσταθών οπτικών δεσμών με συγκεκριμένα φυσικά χαρακτηριστικά.

Στο ίδιο κεφάλαιο εξετάζονται ιδιαίτερες σολιτονικές λύσεις της μη γραμμικής εξίσωσης Schroedinger σε μέσο Kerr, τα τοπολογικά και τα επίπεδης κορυφής σολιτόνια, όταν αυτές διαδίδονται σε μέσο με μη εντοπισμένη συμπεριφορά και εξάγονται συμπεράσματα για τη (μη) σταθερότητά τους, ενώ προτείνεται η εισαγωγή διαμόρφωσης του δείκτη διάθλασης κατά τη διεύθυνση διάδοσης. Όπως θα δείξουμε, η τελευταία συγκρατεί εντοπισμένο το οπτικό πεδίο και παρέχει τη δυνατότητα για ενεργό έλεγχο της δρομολόγησης του οπτικού πεδίου.

Το 3^{ο} Κεφάλαιο έχει ως αντικείμενο την αλληλεπίδραση οπτικών δεσμών που διαδίδονται σε διάταξη που ο δείκτης διάθλασης της είναι διαμορφωμένος μόνο κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Η προσέγγιση είναι αριθμητική και η εξίσωση που περιγράφει το σύστημα, που είναι γενικά ασύμφωνο, είναι η διακριτή μη γραμμική εξίσωση Schroedinger που χρησιμοποιήθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο. Εξετάζονται διάφοροι συνδυασμοί αρχικών τιμών και γεωμετρικών παραμέτρων της διάταξης και εξάγονται συμπεράσματα για την επίδραση της διαφοράς φάσης, της σχετικής ταχύτητας των δεσμών και της απόστασης μεταξύ τους πάνω στους δημιουργούμενους οπτικούς σχηματισμούς. Επιπλέον, αναδεικνύεται ένα νέο είδος οπτικού σχηματισμού για μέσα με μη εντοπισμένη συμπεριφορά, που προκύπτει κατά την αλληλεπίδραση ενός φράζοντος σολιτονίου (blocker soliton) με ένα ασθενές οπτικό σήμα. Τέλος, επιβεβαιώνεται η σολιτονική ευκινησία σε διακριτές διατάξεις τέτοιων μέσων και γίνονται συγκρίσεις με ό,τι ισχύει για μέσα με μη γραμμικότητα Kerr. Από τα παραπάνω, προκύπτει αβίαστα η δυνατότητα για δρομολόγηση του οπτικού πεδίου μέσω της ενεργούς προσαρμογής των χαρακτηριστικών του οπτικού μέσου.

Στο 4^{ο} Κεφάλαιο διερευνάται η χωροχρονική συμπεριφορά οπτικού πεδίου που διέρχεται μέσα από υγρό κρύσταλλο, που έχει διαμορφωθεί κατά την εγκάρσια διεύθυνση με τη βοήθεια εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου. Εξάγεται η διακριτή χωροχρονική μη γραμμική εξίσωση Schroedinger ως μια επέκταση της εξίσωσης που περιγράφει το ελεύθερο μέσο και πραγματοποιούνται αριθμητικές προσομοιώσεις για οπτικούς παλμούς διαφόρων φυσικών χαρακτηριστικών. Επιλέγονται ποσότητες που δίνουν τη δυνατότητα του ελέγχου της διάδοσης και αναδεικνύεται η σχέση ανάμεσα στη μη εντοπισμένη συμπεριφορά του μέσου και την ισχύ του εισερχόμενου οπτικού πεδίου. Επιπλέον, εξετάζεται το σύστημα όταν ο συντελεστής διασποράς θεωρείται αμελητέος, πράγμα που είναι αποδεκτό για την περίπτωση των υγρών κρυστάλλων, καθώς και όταν αυτός ο συντελεστής είναι διάφορος του μηδενός. Στη δεύτερη περίπτωση η διάδοση εμφανίζει χαρακτηριστικά που συναντώνται κατά το σχηματισμό κυμάτων τύπου X.

Στο 5^{ο} Κεφάλαιο γίνεται η μοντελοποίηση της διάδοσης οπτικού πεδίου σε δισδιάστατο εξαγωνικό πλέγμα, στους κόμβους του οποίου βρίσκονται σωλήνες συμπληρωμένοι με καστορέλαιο. Σχετικά φυσικά φαινόμενα, όπως η διάχυση θερμότητας που αναπτύσσεται λόγω της αλληλεπίδρασης του φωτός με το καστορέλαιο, η διαδικασία αποκατάστασης κατά τη διέλευση του οπτικού πεδίου, η σύζευξη μεταξύ των πεδίων στους κυματοδηγούς και η μη γραμμικότητα του μέσου περιγράφονται από σχετικές εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές επιλύονται αριθμητικά με αλγόριθμο που εφαρμόζει τη μέθοδο Split-Step-Fourier και απεικονίζεται η χρονική απόκριση του μέσου και η κατανομή της αρχικής ισχύος στον κεντρικό και τους πρώτους γειτονικούς κυματοδηγούς.

Τέλος, στο 6^{ο} Κεφάλαιο γίνεται η ανασκόπηση των αποτελεσμάτων μας και προτείνονται επεκτάσεις της παρούσας εργασίας, που εμφανίζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και θα μπορούσαν να υλοποιηθούν στο προσεχές διάστημα.

Extensive Summary

The subject of the present doctoral thesis is the optical propagation in periodically modulated, nonlinear media, exhibiting nonlocal response. Four optical propagation problems are examined with the use of the discrete nonlinear Schroedinger equation, as has been modified to correspond to the specific optical medium and the geometry of the device. The methods involved are semi-analytical and numerical ones and with their use, modeling of the physical processes affecting the propagation has been derived and the potential for technological applications has been established.

Nonlocality plays a central role in the work presented. It refers to the property of the media utilized in the devices under investigation that describes the tendency of the media to diffuse their response in space after they have been subjected to spatially local optical, electrical or thermal excitement. Materials exhibiting the nonlocal property have been the subject of intense research in optics. Among others, the materials that have attracted attention are nematic liquid crystals and Bose-Einstein condensates. The former constitute the reference medium for the work presented in Chapters 2, 3, 4.

Regarding the structure of the thesis, the 1st Chapter is the introduction and its purpose is the overview of the relevant literature. Specifically, elements of nonlinear optics are introduced, as well as, the equations that describe the optical propagation in a media with different nonlinearities and device geometries. Emphasis is given on the physical properties of the optical medium that we mostly referred upon, liquid crystals, and finally numerical and semi-analytical methods, necessary of optical propagation problems are discussed.

In the 2nd Chapter optical propagation in a nematic liquid crystal device whose refractive index has been modulated longitudinally and transversely is investigated. To begin with, the unmodulated in the direction of propagation problem is studied and useful conclusions are extracted for the conserved quantities of the problem, the relevant phase spaces are shown and the behaviour of the dynamical system is evaluated for different regions of initial conditions. Moreover, we extend to the non-integrable system which is derived after the longitudinal modulation has been implemented and a variational method is applied and evolution of the characteristic parameters is shown with the use of Poincare surfaces of section. Furthermore, the discrete equation is solved numerically and comparisons with the variational method results are made. Conclusions are reached and the model is evaluated and proposed as a filter for selecting stable optical beams.

In the same chapter special solitonic solutions of the nonlinear Schroedinger equation with Kerr nonlinearity, topological and flat-top solitons are used for propagation in a nonlocal medium and their non-stability is established. However, with the introduction of a longitudinal modulation of the refractive index, a novel, unstable, but yet, bounded motion is revealed, providing the means for the active manipulation of the optical field.

In the 3rd Chapter, the interaction between optical beams propagating in a transversely modulated nonlocal medium is investigated. The approach is numerical and the equation that describes the system, which is generally incoherent, is the discrete nonlinear Schroedinger equation that was used in the 2nd Chapter. Several combinations of initial val-

ues and geometrical parameters are studied and conclusions on the effect of the beams' phase difference, their relevant transverse velocities and their initial distance of entry are reached. Furthermore, a new kind of optical formation in nonlocal media is revealed, stemming from the interaction of a blocker soliton with a weak optical signal. Finally, soliton mobility in nonlocal arrays is confirmed and comparisons with propagation in Kerr waveguide arrays are made. The potential for active steering of an optical field through the tuning of the characteristics of the nonlocal optical medium is emphasized upon.

In the 4th Chapter the spatiotemporal behaviour of an optical field propagating in a nematic liquid cell, periodically modulated in the transverse direction by means of an external electric field is examined. The discrete spatiotemporal nonlinear Schroedinger equation is derived as an extension of the equation describing the bulk medium and numerical simulations are executed for optical pulses of various physical characteristics. We focus on quantities whose variation can lead to the control of the propagation and a relation between the nonlocality and the power of the incoming optical field is found. Furthermore, the system is studied when the dispersion coefficient is considered negligible, which is valid for most of the cases in nematic liquid crystals, as well as, when this coefficient is taken into account. In the latter case, the traits of the propagation are shown to be of the same nature as those met during the formation of X-waves.

In the 5th Chapter the modeling of the optical propagation through a 2-D hexagonal lattice is considered. At the nodes of the lattice there are tubes filled with castor oil. Relevant physical phenomena, such as, thermal diffusion, coupling between the fields in the waveguiding tubes, the relaxation process after the optical field has set in and the nonlinearity of the medium are described through relevant equations. The equations are solved numerically with an algorithm applying the Split-Step Fourier method, the temporal response of the medium and the distribution of the initial power to neighboring waveguides is illustrated.

Finally, the 6th Chapter acts as an overview of our results, while several future extensions of the present work are proposed.

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία σολιτονίων και μη γραμμικής οπτικής. Οι υγροί κρύσταλλοι ως μέσο οπτικής διάδοσης

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται εισαγωγικά στοιχεία της κεντρικής έννοιας της παρούσας διατριβής, του οπτικού σολιτονίου. Γίνεται παράθεση του πλαισίου της μη γραμμικής οπτικής που οδήγησε στην ανάδειξη του σολιτονίου και αναφέρονται τα ιστορικά βήματα προς της θεωρητική και πειραματική θεμελίωσή του. Καταγράφονται οι κατηγορίες σολιτονίων, όπως προκύπτουν μαθηματικά για διάφορες ιδεατές ή πειραματικά υλοποιήσιμες διατάξεις και παρατίθενται τα μαθηματικά εργαλεία για τη διερεύνηση των ιδιοτήτων τους. Τέλος, δίνεται έμφαση στους υγρούς κρυστάλλους ως μέσο οπτικής διάδοσης, με την παρουσίαση της σχετικής φυσικής και αποτυπώνονται οι εξισώσεις που αποτελούν την αφετηρία για τη μελέτη των περισσότερων προβλημάτων, που αποτελούν αντικείμενα της διατριβής.

1.1 Γενικά περί σολιτονίων

Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες έννοιες της μη γραμμικής οπτικής είναι η έννοια του οπτικού σολιτονίου, όπως αυτή συστηματικά χρησιμοποιείται για να περιγράψει «μοναχικά» κύματα σε διάφορα φυσικά συστήματα. Με τη χρήση του προσδιορισμού «μοναχικό» για ένα κύμα, έχει επικρατήσει να εννοούμε τη στιβαρή διάδοση του κύματος, που περιλαμβάνει τη διατήρηση της μορφής του, τον χωρικό εντοπισμό του, καθώς και τη δυνατότητα δύο «μοναχικών» κυμάτων να αλληλεπιδρούν και στο πέρας της αλληλεπίδρασης τα κύματα να παραμένουν αναλλοίωτα [1].

Ανατρέχοντας στην πρώτη ενσυνείδητη παρατήρηση ενός σολιτονίου, το 1834, ο μηχανικός John Scott Russell, θα διαπιστώσει ότι κατά τη διακοπή της ρυμούλκησης μικρού πλοίου σε υδάτινο κανάλι με σταθερή ταχύτητα, ένα κύμα συνέχιζε την πορεία που αρχικά είχε το μικρό πλοίο με την ίδια ταχύτητα για εξαιρετικά μεγάλες αποστάσεις διάδοσης [2]. Ο Russell συστηματοποιώντας την παρατήρηση εκτέλεσε σειρά πειραμάτων σε ελεγχόμενο περιβάλλον και κατέληξε ότι η κατατομή των προκείμενων κυμάτων διατηρούσε μια σταθερή υπερβολικού secant μορφή κατά τη διάρκεια της διάδοσης. Ακόμη παρατήρησε ότι όσο πιο μεγάλο το κύμα, τόσο πιο γρήγορα κινείται αυτό, ενώ, μάλλον απροσδόκητα, προέκυψε ότι τα κύματα κατά την τομή τους μπορούσαν να περνούν το ένα μέσα από το άλλο, χωρίς να υπάρχει κάποια εμφανής μεταβολή στα αρχικά χαρακτηριστικά των κυμάτων.

Παρά την σπουδαιότητα της ανακάλυψης των «μοναχικών» κυμάτων και την καταγραφή τους από τον Russell, η μαθηματική θεμελίωση του φυσικού φαινομένου θα γινόταν αρκετά αργότερα, το 1895, όταν οι Δανοί φυσικοί Korteweg και de Vries κατόρθωσαν να περιγράψουν τη διάδοση διατυπώνοντας την ομώνυμη KdV εξίσωση (εξ. 1.1) [3, 4],

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0, \qquad (1.1)$$

όπου u_t και u_x δηλώνουν μερικές παραγώγους ως προς τα t, x. Η εξ. 1.1 περιγράφει τη διάδοση ενός κύματος σε ρευστό μέσο με μικρό βάθος και συνδέει το ρυθμό μεταβολής του ύψους ενός κύματος με ένα μη γραμμικό όρο και ένα γραμμικό όρο διασποράς, που αποτυπώνει το φαινόμενο διαφορετικά μήκη κύματος να ταξιδεύουν με διαφορετικές ταχύτητες. Η εξ. 1.1 έχει περιοδικές λύσεις καθώς και λύσεις που προσομοιάζουν τη μορφή των λύσεων που είχε νωρίτερα παρατηρήσει ο Russell. Οι τελευταίες προκύπτουν ως το αποτέλεσμα της ισορροπίας της συνεισφοράς των δύο ανταγωνιστικών όρων, της μη γραμμικότητας και της διασποράς.

Το επόμενο βήμα στη θεμελίωση της θεωρίας των «μοναχικών» κυμάτων γίνεται αρκετά αργότερα, το 1965, οπότε οι Zabusky και Kruskal κατά την παρουσίαση των λύσεων της εξίσωσης KdV προτείνουν τη χρήση του όρου σολιτονίου, υπονοώντας τόσο τη σωματιδιακή, όσο και τη «μοναχική» συμπεριφορά των συγκεκριμένων λύσεων [5]. Η εργασία τους θα συμπληρωθεί την ίδια χρονιά με την παρουσίαση προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης σολιτονικών κυμάτων σε πλέγμα FPU, τη διάδοση ως λύση της KdV, καθώς και ως λύση μιας τροποποιημένης KdV. Στο μεταξύ, η πειραματική διερεύνηση των σολιτονίων στο χώρο της οπτικής αποκτά νέες δυνατότητες με μια κομβική για την περαιτέρω διερεύνηση των σολιτονίων ανακάλυψη, αυτή του laser.

Η κατασκευή του πρώτου λειτουργικού laser από τον Maiman το 1960 και η ανακάλυψη της γένεσης της δεύτερης αρμονικής (SHG) από τον Franken το 1961 [6], ουσιαστικά σηματοδοτεί την απαρχή της έρευνας στα φαινόμενα της μη γραμμικής οπτικής και επακόλουθα τη διερεύνηση κυμάτων με σολιτονική συμπεριφορά. Η σπουδαιότητα του laser για τη μη γραμμική οπτική αποδίδεται στο γεγονός ότι με τη βοήθεια του laser επιτυγχάνεται φως πολύ μεγάλης έντασης, που είναι απαραίτητο για την εκδήλωση των οπτικών μη γραμμικών φαινομένων. Άλλωστε, η μη γραμμική οπτική αναφέρεται ακριβώς στην απόκριση του μέσου κατά τη διέλευση οπτικού πεδίου μέσα από αυτό και συγκεκριμένα στην μη γραμμική απόκριση όπως αυτή εξαρτάται από την ένταση του διερχόμενου οπτικού πεδίου. Ως παράδειγμα να αναφέρουμε ότι κατά την πρώτη παρατήρηση του μη γραμμικού φαινομένου της γένεσης της δεύτερης αρμονικής, η απαιτούμενη εστιασμένη ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ενός παλμικού maser ρουβιδίου ήταν της τάξης $10^5 V/m$ για εισερχόμενο πεδίο μήκους κύματος $6.943\,nm$ σε κρυσταλλικό χαλαζία [6]. Συγκρίνοντας, η ένταση της ηλιακής ακτινοβολίας στην επιφάνεια της Γής είναι της τάξης των $100\,V/m$ [7].

Μετά τις πρώτες παρατηρήσεις της εκδήλωσης οπτικών μη γραμμικών φαινομένων, ενδελεχής πειραματική και θεωρητική διερεύνηση ανέδειξε τα μη γραμμικά φαινόμενα που σήμερα είναι γνωστά. Έτσι, εκτός από τη γένεση της δεύτερης αρμονικής, τα σημαντικότερα από αυτά είναι η γένεση της τρίτης αρμονικής, η μίξη τεσσάρων κυμάτων, η ανελαστική σκέδαση και η μη γραμμική διάθλαση [8]. Η τελευταία ειδικά, είναι θεμελιώδους σημασίας, καθώς οδηγεί σε επιπλέον μη γραμμικά φαινόμενα, από τα οποία δυο από τα πιο ευρέως μελετημένα είναι η αυτοδιαμόρφωση φάσης (self-phase modulation-SPM) και η ετεροδιαμόρφωση φάσης (cross-phase modulation-XPM). Επειδή τα μη γραμμικά φαινόμενα στην οπτική θα μας απασχολήσουν εκτενέστερα στην επόμενη ενότητα, δε θα αναφερθούμε περαιτέρω εδώ, αλλά θα συνεχίσουμε την αναδρομή μας στη μη γραμμική οπτική με τον επόμενο μεγάλο σταθμό, την εφεύρεση της οπτικής ίνας.

Μια σπουδαία τεχνολογική εφαρμογή της μη γραμμικής οπτικής είναι η χρήση οπτικής ίνας για μετάδοση οπτικού σήματος. Οι μελέτες γύρω από τη φυσική της διάδοσης σε μια οπτική ίνα ξεκίνησαν τη δεκαετία του 1960, όμως οι πρώιμες εκείνες πειραματικές υλοποιήσεις είχαν εξαιρετικά μεγάλες απώλειες ($>1000\,dB/km$) [9]. Ωστόσο, με τη βελτίωση της τεχνολογίας υλικών και των μεθόδων παρασκευής, οι ίνες πυριτίου περιόρισαν αυτές τις απώλειες και το 1979 έγινε εφικτή απώλεια $0.2 dB/km$ σε μήκος κύματος στην περιοχή της «τηλεπικοινωνιακής» τιμής των $1.55\mu m$ [10]. Με δεδομένη την ύπαρξη θεωρητικής πρόβλεψης της υποστήριξης σολιτονικών λύσεων από τον Hasegawa το 1973 [11], σαν αποτέλεσμα της ισορροπίας ανάμεσα στο φαινόμενο της διασποράς και των μη γραμμικών φαινομένων, η πειραματική επιβεβαίωση των σολιτονίων σε οπτικές ίνες θα έρθει το 1980 [12] και θα οδηγήσει σε πληθώρα μελετών γύρω από τη γένεση και τον έλεγχο υπερβραχέων παλμών, την ανάπτυξη της συμπίεσης παλμού και τεχνικών οπτικής διαμεταγωγής [13]. Με την εφεύρεση δε, το 1987, της ενίσχυσης από ίνα εμπλουτισμένη με Έρβιο η οποία αποζημιώνει τις απώλειες της ίνας στα $1.55\mu m$ [14], τα μη γραμμικά φαινόμενα και η οπτική διάδοση στις οπτικές ίνες γνωρίζουν ευρεία μελέτη και οι εφαρμογές στις τηλεπικοινωνίες προκαλούν μια τεχνολογική επανάσταση. Ταυτόχρονα, η σολιτονική δυναμική διερευνάται και προτείνεται η ιδέα των σολιτονίων ελεγχόμενης διασποράς [15].

Εδώ να διευκρινιστεί ότι τα σολιτόνια μπορούν αδρά να χωριστούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τα χρονικά και τα χωρικά σολιτόνια. Αν και παρακάτω θα δούμε αναλυτικά στοιχεία της καθεμιάς κατηγορίας, μπορούμε να πούμε για χάρη της αναδρομής που εξυπηρετεί η παρούσα ενότητα, ότι τα χρονικά σολιτόνια αναφέρονται στη διατήρηση της μορφής τους στο χρόνο ενώ τα χωρικά διατηρούν τη μορφή τους σε τουλάχιστον μια χωρική διάσταση. Η αναφορά μας στα σολιτόνια που διεγείρονται σε οπτικές ίνες και ο αρχικός ενθουσιασμός στη δεκαετία του '80 για τις τεχνολογικές τους εφαρμογές αναφέρεται κατ' εξοχήν σε χρονικά σολιτόνια. Ταυτόχρονα, όμως, με τα χρονικά, τα χωρικά σολιτόνια διερευνήθηκαν διεξοδικά τις δύο τελευταίες δεκαετίες και έχουν να επιδείξουν σπουδαίες ιδιότητες με ευρύ πεδίο εφαρμογών.

Τα χωρικά σολιτόνια πρωτοαναφέρθηκαν το 1974 από τους Ashkin και Bjorkholm [16] σε πείραμα κυκλικής δέσμης σε ατμούς νατρίου όπου παρατηρήθηκε αυτοπαγίδευση της δέσμης σε μεγάλες τιμές ισχύος. Η μη γραμμικότητα ενός τέτοιου μέσου είναι κορέσιμης φύσης και αυτό είναι κρίσιμο για την επίτευξη χωρικών σολιτονίων, καθώς τα χωρικά σολιτόνια όπως εμφανίζονται με την ιδιότητα να εντοπίζονται αναλλοίωτα στις χωρικές διαστάσεις, επιλεκτικά εμφανίζονται σε κορέσιμα μέσα. Τέτοια μέσα, όπως κατά χρονολογική σειρά αποτέλεσαν πεδίο διερεύνησης των χωρικών σολιτονίων, είναι τα φωτοδιαθλαστικά, τα τετραγωνικής μη γραμμικότητας και τα μη εντοπισμένης συμπεριφοράς [17]. Η σπουδαιότητα των χωρικών σολιτονίων έγκειται στα εξαιρετικά ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά τους, όπως είναι οι αλληλεπιδράσεις των οπτικών δεσμών που προσομοιάζουν σωματιδιακές αλληλεπιδράσεις, η δυνατότητα δρομολόγησης οπτικού σήματος, η χρήση ως οπτικές διασυνδέσεις και η μετατροπή συχνότητας. Χωρικά σολιτόνια έχουν παρατηρηθεί σε πειράματα που έχουν πραγματοποιηθεί στα προαναφερθέντα οπτικά μέσα και τα χαρακτηριστικά της οπτικής διάδοσης για καθένα από αυτά ποικίλει ανάλογα με τις υποκείμενες φυσικές διαδικασίες επίδρασης του φωτός με την ύλη, παρέχοντας ένα μεγάλο εύρος δυνατών υλοποιήσεων ανάλογα με τον σκοπό της εφαρμογής [18].

Μια ειδική κατηγορία σολιτονίων των οποίων η συμπεριφορά οφείλεται στην ύπαρξη ανομοιογενούς κατανομής του δείκτη διάθλασης στο μέσο διάδοσης είναι τα διακριτά σολιτόνια. Τα διακριτά σολιτόνια, όμοια με τα χωρικά σολιτόνια, αναφέρονται στις χωρικές διαστάσεις της οπτικής διάδοσης και η θεωρητική πρόβλεψή τους έγινε από τον Χριστοδουλίδη το 1988 [19]. Πειραματικά συναντώνται για πρώτη φορά το 1998, όταν οι ερευνητικές ομάδες των Silberberg και Aitchison εκτέλεσαν πειράματα σε συστοιχία κυματοδηγών υψηλής μη γραμμικότητας AlGaAs, οπότε οπτική διέγερση από παλμικό laser των $1.53\mu m$ για χαμηλές τιμές ισχύος $(70W)$ έδινε έντονη διακριτή περίθλαση, ενώ για μεγάλες τιμές $(500W)$ επικρατούσαν τα μη γραμμικά φαινόμενα με αποτέλεσμα τον εγκλωβισμό της ισχύος σε εύρος λίγων κυματοδηγών, όπως ακριβώς προβλεπόταν από τη θεωρία [20]. Έκτοτε, πειράματα σε διακριτά συστήματα έχουν διεξαχθεί για διάφορα υλικά, όπως νηματικούς υγρούς κρυστάλλους, μέσα τετραγωνικής μη γραμμικότητας και αφεστιακούς φωτοβολταϊκούς κυματοδηγούς [21]. Η σπουδαιότητα της μελέτης διακριτών γεωμετριών βρίσκεται στο ότι τα πηγάδια δυναμικού που εγγράφονται στο μέσο και που είναι υπεύθυνα για τη «διακριτοποίηση» του μέσου, εμπλουτίζουν τη δυναμική του συστήματος εισάγοντας παραμέτρους που ρυθμιζόμενες μπορούν να οδηγήσουν σε ευκολότερη δρομολόγηση και έλεγχο του οπτικού σήματος, να δώσουν εφαρμογές διαμεταγωγής [22, 23] ή να συντηρήσουν ευκολότερα σολιτονική διάδοση. Τα προβλήματα που αποτελούν αντικείμενο της παρούσας διατριβής είναι γενικά διακριτά με την έννοια ότι είτε η οπτική διάδοση γίνεται σε διακριτούς κυματοδηγούς ή η διαμόρφωση του δείκτη διάθλασης μπορεί να περιγραφεί από διακριτές εξισώσεις.

1.2 Στοιχεία μη γραμμικής οπτικής

Στην αναζήτηση των «μοναχικών» κυμάτων ο χώρος της οπτικής αποτελεί ένα ιδανικό πεδίο μελέτης. Τα σολιτόνια έχουν ταυτοποιηθεί σε χώρους τόσο διαφορετικούς, όπως στη φυσική ατμόσφαιρας (ανεμοστρόβιλοι), στην κοσμολογία (γαλαξιακές δίνες), στην ωκεανολογία (τσουνάμι), στη βιολογία (νευρικοί παλμοί), στη φυσική στερεάς κατάστασης (δίνες σε υπεραγωγούς και υπερυγρά) [24]. Όμως είναι στην οπτική που η πειραματική διερεύνηση είναι σχετικά απλή, καθώς είναι δυνατή η παραμετροποίηση των οπτικών συστημάτων με μεγάλη ευχέρεια. Συγκεκριμένα, οι πηγές παραγωγής των κυμάτων (lasers) εμφανίζουν μεγάλο εύρος παρεχόμενων δυνατοτήτων, ενώ παράλληλα, η πρόοδος της επιστήμης υλικών και των μεθόδων παρασκευής, έχει επιτρέψει μεγάλο πλήθος μη γραμμικών υλικών για την υλοποίηση πειραματικών διατάξεων, μικρών διαστάσεων και απλής προσαρμογής ρυθμίσεων. Σε αυτή την ενότητα, θα παρουσιαστούν οι υποκείμενες μη γραμμικές διαδικασίες και τα εισαγωγικά στοιχεία περιγραφής της οπτικής διάδοσης.

1.2.1 Μη γραμμικές διαδικασίες

Η μη γραμμική οπτική είναι το κομμάτι εκείνο της οπτικής που αναφέρεται στη μελέτη των μη γραμμικών φαινομένων που εκδηλώνονται ως η απόκριση ενός υλικού μέσα από το οποίο διέρχεται οπτικό πεδίο. Τα φαινόμενα αυτά είναι προϊόντα της αλληλεπίδρασης του φωτός με ύλη, που εμφανίζει μη γραμμικές επιδεκτικότητες ανώτερης τάξης και τα φαινόμενα χωρίζονται σε αυτά που υπάρχει μίξη συχνότητας και σε αυτά που δεν υπάρχει. Σε αυτή την ενότητα θα γίνει μια συνοπτική ποιοτική αναφορά στα κυριότερα από αυτά τα φαινόμενα [8, 25].

Στην πρώτη κατηγορία φαινομένων έχουμε διαδικασίες όπου τα εισερχόμενα στο υλικό μέσο οπτικά πεδία και τα εξερχόμενα οπτικά πεδία εμφανίζουν διαφοροποίηση στις μεταξύ τους συχνότητές τους. Τέτοιες διαδικασίες είναι οι παρακάτω:

- *Γένεση δεύτερης αρμονικής*. Αναφέρεται στην επίδραση της δεύτερης τάξης μη γραμμικής επιδεκτικότητας για την παραγωγή ακτινοβολίας με συχνότητα διπλάσια από αυτή που εισέρχεται στο μέσο.
- *Γένεση άθροισης και διαφοράς συχνοτήτων.* Αν υποθέσουμε δύο οπτικά πεδία συχνοτήτων ω_1, ω_2 ότι διαδίδονται σε μη γραμμικό μέσο, τότε εκτός από τις συχνότητες της δεύτερης αρμονικής καθενός πεδίου, προκύπτουν ακτινοβολίες με συχνότητες που αντιστοιχούν σε $\omega_1 + \omega_2$ και $\omega_1 - \omega_2$.
- *Μίξη τεσσάρων κυμάτων.* Πρόκειται για μη γραμμικό φαινόμενο τρίτης τάξης που οφείλεται στη διαμόρφωση του δείκτη διάθλασης του μέσου κατά τη διάδοση δύο οπτικών

πεδίων με συχνότητες ω_1, ω_2. Ο μηχανισμός της μίξης τεσσάρων κυμάτων προκαλεί την εμφάνιση δύο νέων συχνοτήτων, $\omega_3 = 2\omega_1 - \omega_2$ και $\omega_4 = 2\omega_2 - \omega_1$.

- *Οπτική παραμετρική ταλάντωση.* Πραγματοποιείται κατά την τοποθέτηση μη γραμμικού κρυστάλλου στο εσωτερικό ενός οπτικού συντονιστή. Ένα οπτικό πεδίο συχνότητας ω_p παράγει δυο νέα πεδία με συχνότητες ω_s, ω_i για τα οποία $\omega_p = \omega_s + \omega_i$. Οι τιμές των ω_s, ω_i θα εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά της διάταξης και της αρχικής δέσμης.

Στη δεύτερη κατηγορία οπτικών μη γραμμικών φαινομένων που δε σχετίζονται αμιγώς με μετατροπή συχνοτήτων περιλαμβάνονται τα εξής:

- *Αυτοεστίαση.* Πραγματοποιείται όταν το μη γραμμικό μέσο διάδοσης έχει δείκτη διάθλασης που εξαρτάται από την ένταση της διαδιδόμενης ακτινοβολίας κατά τη σχέση $n = n_0 + n_2 I$, με I την ένταση, n_0 το γραμμικό μέρος του δείκτη διάθλασης και $n_2 > 0$ το μη γραμμικό. Κατά τη διάδοση πεδίου που εμφανίζει εγκάρσια κατανομή, παρατηρείται το φαινόμενο της εστίασης της δέσμης.
- *Οπτικό φαινόμενο Kerr.* Είναι η αιτία της αυτοεστίασης και χαρακτηρίζει ένα μέσο στο οποίο κατά τη διάδοση οπτικού πεδίου η μεταβολή του δείκτη διάθλασής του είναι ανάλογη της έντασης, δηλαδή $\Delta n = n_2 I$.
- *Αυτοδιαμόρφωση φάσης.* Είναι το χρονικό ανάλογο της «χωρικής» αυτοεστίασης. Λόγω της χρονικής εξάρτησης της φάσης ενός οπτικού παλμού, το φάσμα του μεταβάλλεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να παρατηρείται χρονική συμπίεση του παλμού.
- *Αστάθεια διαμόρφωσης.* Αναφέρεται σε πλευρικές αστάθειες του παλμού ή της δέσμης που προκύπτουν αν στη λύση της εξίσωσης διάδοσης υποτεθούν μικρές διαταραχές. Η ύπαρξη της αστάθειας διαμόρφωσης είναι απαραίτητη για ένα σύστημα, καθώς προϊδεάζει για την ύπαρξη σολιτονικών λύσεων.
- *Σκεδάσεις Raman/Brillouin.* Φαινόμενα που συνδέονται με την απώλεια μέρους της ενέργειας που διαθέτει ένα οπτικό πεδίο προς όφελος οπτικών/ακουστικών φωνονίων, που διαδίδονται μέσα στο κρυσταλλικό μέσο.
- *Απορρόφηση φωτονίων.* Πρόκειται για την ταυτόχρονη απορρόφηση δύο φωτονίων από ένα άτομο του οπτικού μέσου. Είναι ανάλογη της έντασης της διαδιδόμενης ακτινοβολίας.

1.2.2 Οπτική διάδοση

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την οπτική διάδοση μέσα σε ένα υλικό μέσο χωρίς την ύπαρξη ελεύθερων φορτίων ή ρευμάτων είναι οι εξισώσεις Maxwell (εξ. 1.2),

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \quad (\alpha) \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\gamma)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\beta) \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\delta) \qquad (1.2)$$

Όπου $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{P}$ είναι τα διανύσματα της μετατόπισης, του ηλεκτρικού πεδίου, του μαγνητικού πεδίου, της μαγνήτισης και της πόλωσης αντίστοιχα. Επιπλέον, δεχόμαστε ότι το υλικό δεν είναι μαγνητικό, οπότε $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ και, παράλληλα, τα πεδία $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{P}$ συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση (1.3)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}\,, \tag{1.3}$$

όπου ε_0, μ_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού και η μαγνητική διαπερατότητα του κενού, αντίστοιχα.

Παίρνοντας το στροβιλισμό της εξ. 1.2(γ) και μεταθέτοντας τη σειρά της χωρικής και χρονικής παραγώγισης στο δεξί μέρος της παραγόμενης εξίσωσης και με χρήση της εξ. 1.2(δ), προκύπτει αν αντικαταστήσουμε $\mu_0 = {}^{1}\!/_{\varepsilon_0 c^2}$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό, η παρακάτω σχέση.

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

Η εξ. 1.4 επιδέχεται περαιτέρω απλοποίησης κάνοντας χρήση της ταυτότητας (εξ. 1.5)

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{E}\right) - \nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{1.5}$$

Επομένως

$$\nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{E}\right) - \nabla^2 \boldsymbol{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2} \tag{1.6}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στη γενική εξίσωση (εξ. 1.6) η οποία απουσία του όρου $\nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{E}\right)$ περιγράφει την οπτική διάδοση σε γραμμικό μέσο χωρίς πηγές. Με αυστηρή θεώρηση ο όρος αυτός δεν παραλείπεται σε μη γραμμική διάδοση, ακόμη και αν το μέσο είναι ισοτροπικό. Ευτυχώς, όμως, αποδεικνύεται ότι υπό κατάλληλες προϋποθέσεις η συνεισφορά του όρου αυτού μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα στη μη γραμμική διάδοση, κάνοντας χρήση της προσέγγισης της αργά μεταβαλλόμενης περιβάλλουσας. Σε αυτή την περίπτωση η εξ. 1.6, η κυματική εξίσωση, που περιγράφει ικανοποιητικά τη διάδοση σε μη γραμμικό μέσο θα είναι

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial t^2} \tag{1.7}$$

Η επαγόμενη πόλωση $\boldsymbol{P}$ αποτελείται από δύο μέρη, ένα που εξαρτάται γραμμικά από το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ και ένα που εξαρτάται μη γραμμικά. Ορίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο τη μετατόπιση και θέτοντας $\boldsymbol{D}_L = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_L$ παίρνουμε,

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_L + \boldsymbol{P}_{NL} \qquad (\alpha)$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_L + \boldsymbol{P}_{NL} \qquad (\beta) \tag{1.8}$$

Οπότε και η εξ. 1.7 λόγω και των εξ. 1.3, εξ. 1.8, μετασχηματίζεται στην εξ. 1.9,

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{D}_L}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{P}_{NL}}{\partial t^2} \tag{1.9}$$

Το γραμμικό και μη γραμμικό μέρος της πόλωσης $\boldsymbol{P}$, συνδέονται με το ηλεκτρικό πεδίο και δίνονται από τις γενικές σχέσεις [8]

$$\boldsymbol{P}_L(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-t') \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')dt', \qquad (\alpha)$$

$$\boldsymbol{P}_{NL}(\boldsymbol{r},t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t-t_1,t-t_2,t-t_3) \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t_1)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t_2)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t_3)dt_1dt_2dt_3 \qquad (\beta) \tag{1.10}$$

Στην εξ. 1.10, $\chi^{(n)}$ είναι οι τανυστές επιδεκτικότητας, οι οποίοι περιγράφουν την απόκριση του μέσου κατά τη διάδοση οπτικού πεδίου. Γενικά, οι τανυστές επιδεκτικότητας συνδέονται με την πόλωση με τη σχέση

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\chi^{(1)}\boldsymbol{E} + \chi^{(2)}\boldsymbol{E} + \chi^{(3)}\boldsymbol{E} + \chi^{(4)}\boldsymbol{E}...) \tag{1.11}$$

Ο τανυστής πρώτης τάξης επιδεκτικότητας $\chi^{(1)}$ περιγράφει τη γραμμική συμπεριφορά, ενώ οι ανώτερης τάξης $\chi^{(n)}$ αναφέρονται στα μη γραμμικά φαινόμενα. Για να περιγραφεί η συμπεριφορά ενός μέσου πρέπει να προσδιοριστούν τα στοιχεία του τανυστή και σε αυτή την προσπάθεια βοηθούν οι συμμετρίες του μέσου που οδηγούν στον περιορισμό των προς πειραματική αναζήτηση στοιχείων. Με αυτό υπόψη, κατά την παράθεση της πόλωσης στην εξ. 1.10, αγνοήσαμε τη επιδεκτικότητα δεύτερης τάξης, υποθέτοντας ότι το μέσο εμφανίζει συμμετρία αντιστροφής. Επιπλέον, αγνοήθηκαν μη γραμμικές συνεισφορές από φαινόμενα ανώτερα της τρίτης τάξης καθώς αυτές είναι πολύ μικρές. Μια ακόμη παραδοχή για την εγκυρότητα των εξ. 1.10 είναι ότι η χρήση της προσέγγισης ηλεκτρικού διπόλου έγινε για εντοπισμένη χωρικά απόκριση, δηλαδή για απόκριση που περιορίζεται στην περιοχή διέγερσης από το οπτικό πεδίο. Αν δε υποθέσουμε και στιγμιαία απόκριση του μέσου, προσεγγίζοντας τη χρονική εξάρτηση από συναρτήσεις δέλτα της μορφής $\delta(t-t_1)$, το μη γραμμικό κομμάτι της πόλωσης γίνεται,

$$\boldsymbol{P}_{NL} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.12}$$

Στην παραπάνω παραδοχή, έχουμε, επίσης, αγνοήσει τη συνεισφορά του φαινομένου Raman στην τρίτης τάξης επιδεκτικότητα.

Στην αναζήτησή μας για την εξίσωση που περιγράφει πλήρως τη διάδοση οπτικού κύματος μέσα σε μη γραμμικό υλικό, δεχόμαστε επίσης ότι τα μη γραμμικά φαινόμενα συνιστούν μια μικρή διαταραχή στη μεταβολή του δείκτη διάθλασης, όπως αυτός καθορίζεται από τα γραμμικά φαινόμενα (άλλωστε η μεταβολή του δείκτη διάθλασης λόγω μη γραμμικών φαινομένων είναι μόλις $\Delta n / n < 10^{-6}$ [18]), το πεδίο διατηρεί την πόλωσή του κατά τη διάδοση (δεν ισχύει σε διπλοθλαστικά μέσα) και, τέλος, το οπτικό πεδίο είναι μονοχρωματικό. Με όλα αυτά υπόψη, κάνοντας χρήση της προσέγγισης της αργά μεταβαλλόμενης περιβάλλουσας, μπορούμε να γράψουμε το ηλεκτρικό πεδίο και την πόλωση ως γινόμενο ενός «γρήγορου» και ενός «αργού» όρου,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\hat{x}(\boldsymbol{r},t)\left[E(\boldsymbol{r},t)\exp(-i\omega t) + c.c.\right] \qquad (α)$$

$$\boldsymbol{P}_L(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\hat{x}(\boldsymbol{r},t)\left[P_L(\boldsymbol{r},t)\exp(-i\omega t) + c.c.\right] \qquad (β)$$

$$\boldsymbol{P}_{NL}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\hat{x}(\boldsymbol{r},t)\left[P_{NL}(\boldsymbol{r},t)\exp(-i\omega t) + c.c.\right], \qquad (γ) \qquad (1.13)$$

όπου το $\hat{x}$ αναφέρεται στη διεύθυνση πόλωσης του οπτικού πεδίου.

Με αντικατάσταση της έκφρασης της εξ. 1.13(α) στην εξ. 1.12 προκύπτουν δύο ταλαντούμενοι όροι με συχνότητες ω_0 και $3\omega_0$. Διατηρώντας μόνο τον όρο με τη θεμελιώδη συχνότητα ω_0 η μη γραμμική πόλωση γίνεται,

$$\boldsymbol{P}_{NL}(\boldsymbol{r},t) \approx \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \qquad (1.14)$$

με

$$\varepsilon_{NL} = \frac{3}{4}\chi^{(3)}_{xxxx}\left|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right|^2 \qquad (1.15)$$

Στην εξ. 1.15 υποδηλώνεται ότι η συνεισφορά του τανυστή επιδεκτικότητας στη μη γραμμικότητα γίνεται μέσω ενός μόνο στοιχείου, αυτού στη θέση $xxxx$ καθώς και ότι η μη γραμμική διηλεκτρική σταθερά είναι ανάλογη του τετραγώνου του μέτρου του πλάτους του πεδίου.

Αντίστοιχα για το γραμμικό κομμάτι της πόλωσης από την εξ. 1.10(α), θεωρώντας την απόκριση ως συνάρτηση δέλτα, μπορούμε να γράψουμε για το γραμμικό κομμάτι της πόλωσης και το γραμμικό κομμάτι της διηλεκτρικής σταθεράς,

$$\boldsymbol{P}_L = \varepsilon_0 \chi^{(1)}_{xx} \boldsymbol{E}$$

$$\varepsilon_L = \varepsilon_0 \chi^{(1)}_{xx} \qquad (1.16)$$

Μεταφέροντας στο χώρο των συχνοτήτων το σύνολο της διηλεκτρικής ποσότητας, $\varepsilon = \varepsilon_L + \varepsilon_{NL}$, αποδεικνύεται ότι [26],

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 + \chi^{(1)}_{xx}(\omega) + \varepsilon_{NL} \qquad (1.17)$$

Μέσω της εξ. 1.17, μπορούμε να ορίσουμε το δείκτη διάθλασης ως

$$n = n_0 + n_2\left|\boldsymbol{E}\right|^2 \qquad (1.18)$$

με

$$n_2 = \frac{3}{8n_0}\mathrm{Re}(\chi^{(3)}_{xxxx}) \qquad (1.19)$$

Ο συντελεστής n_2 είναι ο μη γραμμικός συντελεστής Kerr και αναφέρεται στην απόκριση που εμφανίζει μέσο στο οποίο επικρατεί η τρίτης τάξης επιδεκτικότητα. Χαρακτηριστικό μέσο αυτής της συμπεριφοράς είναι η πυριτία στις οπτικές ίνες. Για να περιγραφούν επιπλέον συνεισφορές από ανώτερης τάξης επιδεκτικότητες, τις περισσότερες φορές αρκεί η εξ. 1.18 να προσαρμόζεται αντίστοιχα ώστε να περιλαμβάνει το εξαρτώμενο από την ένταση μη γραμμικό μέρος του δείκτη διάθλασης.

Στη συνέχεια, προχωρούμε στην κατά περίπτωση εξαγωγή της κυματικής εξίσωσης που περιγράφει την οπτική διάδοση για τις διάφορες οικογένειες σολιτονικών λύσεων.

1.2.3 Χρονικά σολιτόνια

Τα χρονικά σολιτόνια αποτελούν λύσεις της κυματικής εξίσωσης όταν οπτικοί παλμοί διαδίδονται σε μη γραμμικό μέσο και είναι το αποτέλεσμα της εξισορρόπησης της διασποράς με τη μη γραμμική απόκριση του μέσου. Το σημαντικότερο πεδίο παρατήρησης και μελέτης των χρονικών σολιτονίων είναι στις τηλεπικοινωνιακές οπτικές ίνες [27].

Για να εξάγουμε την κυματική εξίσωση είναι πιο βολικό να εργαστούμε στο χώρο Fourier, ούτως ώστε να συμπεριληφθεί η χρωματική διασπορά. Αντικαθιστούμε, λοιπόν, τις σχέσεις της εξ. 1.13 στην εξ. 1.9 και λόγω της εξ. 1.3, βρίσκεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier του ηλεκτρικού πεδίου,

$$\tilde{E}(\boldsymbol{r},\omega-\omega_0)=\int_{-\infty}^{\infty}E(\boldsymbol{r},t)\exp\left[i(\omega-\omega_0)t\right]dt\,, \qquad (1.20)$$

ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz,

$$\nabla^2 E+\varepsilon(\omega)k_0^2E=0 \qquad (1.21)$$

Με $k_0=\omega/c$ και την $\varepsilon(\omega)$ όπως έχει οριστεί στην εξ. 1.17.

Η εξ. 1.21 μπορεί να επιλυθεί κάνοντας χρήση της μεθόδου των χωριζόμενων μεταβλητών. Υποθέτοντας μια λύση της μορφής

$$E(\boldsymbol{r},\omega-\omega_0)=F(x,y)A(z,\omega-\omega_0)\exp(i\beta_0\omega)\,, \qquad (1.22)$$

καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\left[\varepsilon(\omega)k_0^2-\beta^2\right]F=0 \qquad (\alpha)$$

$$2i\beta_0\frac{\partial\tilde{A}}{\partial z}+(\beta^2-\beta_0^2)\tilde{A}=0\,, \qquad (\beta) \qquad (1.23)$$

όπου η συνάρτηση $F(x,y)$ περιγράφει την εγκάρσια στην διεύθυνση διάδοσης κατανομή του θεμελιώδους ρυθμού διάδοσης και το $\tilde{A}$ αναφέρεται στο μετασχηματισμό Fourier του $A(z,t)$. Ακόμη είναι $\beta=k_0 n$ και $\beta_0=k_0 n_0$. Αν θεωρήσουμε τη μη γραμμική συνεισφορά στον κυματάριθμο β ως μια διαταραχή του γραμμικού μέρους, συμβολίζοντάς τη με $\Delta\beta$ και λάβουμε υπόψη τη χρωματική εξάρτηση του κυματάριθμου μπορούμε με κατάλληλες προσεγγίσεις και εκφράζοντας ως, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}\hat{x}\left[F(x,y)A(z,t)\exp\left[i(\beta_0 z-\omega_0 t)\right]+c.c.\right]$ το ηλεκτρικό πεδίο, να φθάσουμε από την εξ. 1.23(β) στη έκφραση

$$\frac{\partial\tilde{A}}{\partial z}=i\left[\beta(\omega)+\Delta\beta(\omega)-\beta_0\right]\tilde{A}, \tag{1.24}$$

με το μη γραμμικό κομμάτι του κυματάριθμου να δίνεται ως

$$\Delta\beta=k_0 n_2\left|A\right|^2\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}\left|F(x,y)\right|^4 dxdy}{\iint_{-\infty}^{\infty}\left|F(x,y)\right|^2 dxdy}\equiv\gamma\left|A\right|^2 \tag{1.25}$$

Μεταφέροντας την εξ. 1.24 στο πεδίο του χρόνου και αναπτύσσοντας σε σειρά τους τα μεγέθη $\beta(\omega)$ και $\Delta\beta(\omega)$ διατηρώντας μόνο όρους μέχρι και δεύτερης τάξης, λόγω της υπόθεσης ότι το εύρος του παλμού είναι $\Delta\omega<<\omega_0$, δηλαδή,

$$\beta(\omega)=\beta_0+(\omega-\omega_0)\beta_1+\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2\beta_2$$

$$\Delta\beta(\omega)=\Delta\beta_0+(\omega-\omega_0)\Delta\beta_1+\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2\Delta\beta_2, \tag{1.26}$$

καταλήγουμε στην εξίσωση που δίνει την εξέλιξη διάδοσης ενός οπτικού παλμού

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=i\gamma\left|A\right|^2 A \tag{1.27}$$

Η εξ. 1.27 μπορεί με κατάλληλους μετασχηματισμούς μεταβλητών να πάρει τη μορφή της γνωστής μη γραμμικής εξίσωσης Schroedinger (NLS),

$$i\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{s}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}+\left|u\right|^2 u=0 \tag{1.28}$$

όπου $s=\pm1$, με πρόσημο ανάλογα με το μήκος κύματος του οπτικού παλμού και $\tau=(t-\beta_1 Z)/\mathrm{T}_0$, $z=Z/L_D$, $u=\sqrt{\left|\gamma\right|L_D}A$. Στα προηγούμενα έχει οριστεί $L_D=T_0/\left|\beta_2\right|$, το μήκος διασποράς και T_0 είναι μια παράμετρος κλίμακας. Τέλος, να διευκρινιστεί ότι κατά την κανονικοποίηση της εξ. 1.27, επιλέξαμε η μη γραμμικότητα να είναι εστιάζουσας φύσης.

1.2.4 Χωρικά σολιτόνια

Στην οπτική, ο όρος χωρικό σολιτόνιο αναφέρεται στη λύση της κυματικής εξίσωσης που περιγράφει τη διάδοση οπτικής δέσμης, η οποία παραμένει χωρικά εντοπισμένη εξισορροπώντας τη γραμμική περίθλαση και τη μη γραμμική απόκριση του μέσου. Για την εύρεση της εξίσωσης που περιγράφει το σχηματισμό των χωρικών σολιτονίων θεωρούμε την εξίσωση 1.7 και υποθέτουμε γενική λύση της μορφής $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = A(\boldsymbol{r})\exp(i\beta_0 z)$. Χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες η περίθλαση ή η αυτοεστίαση που υφίσταται η δέσμη γίνεται στις εγκάρσιες στη διάδοση διευθύνσεις, X, Y. Επιπλέον, γίνεται χρήση της προσέγγισης της αργά μεταβαλλόμενης περιβάλλουσας, οπότε,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} << \beta_0 \frac{\partial A}{\partial z} \tag{1.29}$$

και επομένως η δεύτερη παράγωγος μπορεί να αγνοηθεί. Συνεπώς, προκύπτει η μη γραμμική παραβολική εξίσωση.

$$2i\beta_0 \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{Z}} + \left(\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial \mathrm{X}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial \mathrm{Y}^2} \right) + 2\beta_0 k_0 n_{nl}(I) A = 0 \tag{1.30}$$

Αν επικεντρώσουμε σε μη γραμμικότητα Kerr και εισάγουμε τις αδιάστατες ποσότητες

$$x = X / w_0,\, y = Y / w_0,\, z = Z / L_d,\, u = \sqrt{k_0 |n_2| L_d}\, A, \tag{1.31}$$

όπου w_0 μια παράμετρος κλίμακας συνδεδεμένη με το εύρος της δέσμης και L_d το χαρακτηριστικό μήκος περίθλασης, τότε η εξ. 1.30 μετασχηματίζεται στην NLS εξίσωση διαστάσεων (2+1),

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \pm |u|^2 u = 0 \tag{1.32}$$

Όμως, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 1.1 τα χωρικά σολιτόνια έχουν παρατηρηθεί ελάχιστες φορές σε συστήματα (2+1) και, επιπλέον, αναλυτικές λύσεις έχουν βρεθεί μόνο για Kerr συστήματα διαστάσεων (1+1). Έτσι, στην εξίσωση 1.32 η δεύτερη χωρική διάσταση είναι πλεονάζουσα (π.χ. θεωρώντας γεωμετρία επίπεδης κυματοδήγησης). Το $\pm$ μπροστά από το μη γραμμικό όρο καθορίζει αν η μη γραμμικότητα προκαλεί εστίαση ή αφεστίαση. Περιοριζόμενοι σε εστιάζουσα μη γραμμικότητα μπορούμε να γράψουμε,

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u = 0 \tag{1.33}$$

Για να προσδιορίσουμε τις λύσεις της προηγούμενης εξίσωσης, υποθέτουμε λύση που διατηρεί την κατατομή της, της μορφής $u(z,x) = V(x)\exp\left[i\varphi(z,x)\right]$, οπότε με αντικατάσταση στην εξ. 1.33 και με επίλυση της παραγόμενης μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης, τελικά βρίσκεται ότι η αναλυτική μορφή της λύσης είναι [18],

$$u(z,x) = a\,\mathrm{sech}(ax)\exp(-ia^2 z / 2) \tag{1.34}$$

Η παραπάνω έκφραση της λύσης της μη γραμμικής εξίσωσης Schroedinger αποτελεί ένα χωρικό σολιτόνιο, το οποίο παραμένει περιορισμένο χωρικά στη x διάσταση. Είναι ενδιαφέρον να αναφερθεί ότι οπτικές δέσμες με αυτή την κατατομή αντιστοιχούν στο θεμελιώδη ρυθμό διάδοσης και όταν εισαχθούν στο μη γραμμικό μέσο διαδίδονται ευσταθώς. Οποιαδήποτε απόκλιση της εισερχόμενης δέσμης από αυτή την κατατομή (δηλ. του $\sec h$) έχει ως αποτέλεσμα τη διέγερση και άλλων ρυθμών, δέσμιων υψηλότερης τάξης ή ακτινοβολίας.

1.2.5 Χωροχρονικά σολιτόνια

Τα γραμμικά φαινόμενα που συνδέονται με την εμφάνιση χωρικών και χρονικών σολιτονίων είναι η περίθλαση και η διασπορά, αντίστοιχα. Ως τώρα είδαμε τη δημιουργία σολιτονίων όταν επικρατούσε μόνο ένα από τα δύο αυτά γραμμικά φαινόμενα και απουσίαζε το άλλο. Όταν μπορεί να υποστηριχθεί η ταυτόχρονη παρουσία διασποράς και περίθλασης ένα νέο είδος σολιτονίων διεγείρεται, σαν αποτέλεσμα της δυναμικής που αναπτύσσεται ανάμεσα στα ανταγωνιζόμενα χρονικά και χωρικά φαινόμενα, τα χωροχρονικά σολιτόνια [28].

Γράφουμε, λοιπόν, χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες της εξαγωγής των σχετικών κανονικοποιήσεων, την (3+1) διαστάσεων εξίσωση που υποστηρίζει χωροχρονικές σολιτονικές λύσεις,

$$i\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-s_d\,\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right)+|u|^2 u=0 \tag{1.35}$$

Στην εξ. 1.35 είναι εμφανής η φαινομενολογική της προέλευση και η ενσωμάτωση του χρονικού φαινομένου της διασποράς και του χωρικού φαινομένου της περίθλασης. Στην εξ. 1.35 έχουμε υποθέσει μη γραμμικότητα Kerr.

Ο συντελεστής $s_d=\mathrm{sgn}(\beta_2)$, που πολλαπλασιάζει τη δεύτερη παράγωγο του χρόνου, καθορίζει το είδος της διασποράς και αντίστοιχα τις λύσεις της εξ. 1.35. Έτσι για $s_d=-1$ έχουμε ανώμαλη διασπορά και η εξ. 1.35 μπορεί να γραφεί με πιο συμπαγή τρόπο, ενσωματώνοντας την παράγωγο του χρόνου σε Λαπλασιανή με διαστάσεις τις δύο εγκάρσιες χωρικές και τη μια χρονική ώστε,

$$i\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{2}\nabla_R^2 u+|u|^2 u=0 \tag{1.36}$$

Έστω η γενική λύση που συντηρεί το σχήμα της $u(x,y,\tau,z)=U(x,y,\tau)\exp(i\kappa_0 z)$, με κ_0 τη σταθερά διάδοσης. Τότε, γράφοντας τη Λαπλασιανή σε σφαιρικές συντεταγμένες, η εξ. 1.36 καταλήγει στην παρακάτω [18]:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d^2U}{dR^2}+\frac{(D-1)}{R}\frac{dU}{dR}\right]-\kappa_0 U+U^3=0 \tag{1.37}$$

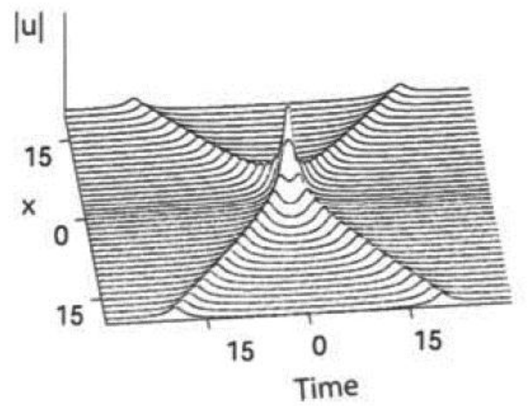
Η παράμετρος D καθορίζει τις διαστάσεις του συστήματος (για $D=1$ παίρνουμε είτε τη χρονική, είτε τη χωρική μη γραμμική εξίσωση Schroedinger). Ειδικά για $D=3$, η αριθμητική επίλυση δίνει μια «οπτική βολίδα», δηλαδή ένα οπτικό σχηματισμό που είναι εντοπισμένος τόσο στο χώρο, όσο και στο χρόνο.

Γενικά, οι οπτικές βολίδες είναι δύσκολο να παρατηρηθούν πειραματικά. Ειδικά για μέσα Kerr, κατά τις πρώτες απόπειρες πειραματικής επαλήθευσης, οι οπτικοί σχηματισμοί απείχαν σημαντικά από την προσδοκώμενη κατάρρευση του οπτικού πεδίου [29, 30] στις προβλεπόμενες τιμές ισχύος. Αυτό έχει αποδοθεί στα ανώτερης τάξης φαινόμενα Raman και απορρόφησης φωτονίων. Τέλος, να αναφερθεί ότι η εμφάνιση φωτεινών σολιτονίων έχει προβλεφθεί και για κυβικές και τετραγωνικές μη γραμμικότητες, ωστόσο τα πειράματα εμφανίζουν περιορισμούς στην επιβεβαίωση της θεωρίας. Μια άλλη παρατήρηση είναι ότι τα χωροχρονικά σολιτόνια εμφανίζουν αστάθεια διαμόρφωσης σε πλήρη τρισδιάστατα μοντέλα, με αποτέλεσμα τα εισερχόμενα οπτικά πεδία να διαλύονται.

Από την άλλη πλευρά, η συμπεριφορά των λύσεων της εξ. 1.35 στην περίπτωση της ομαλής διασποράς ($s_d = 1$), είναι σημαντικά διαφορετική, μην επιτρέποντας τον οπτικό εντοπισμό, οδηγώντας, όμως, σε εξίσου ενδιαφέροντα φαινόμενα, όπως είναι ο σχηματισμός κυμάτων τύπου Χ. Την έννοια των κυμάτων Χ θα τη δούμε και στο Κεφ. 4, κατά τη διάδοση χωροχρονικών σχηματισμών σε μη εντοπισμένης συμπεριφορά υλικά, τους νηματικούς υγρούς κρυστάλλους. Για λόγους πληρότητας της παρούσας ενότητας θα αναφέρουμε μόνο ότι στην εξ. 1.35, με $s_d = 1$, για ακτινικά συμμετρικές λύσεις που είναι του τύπου $u(x, y, z, \tau) = u_0 U(r, \tau)\exp(-ibz/2)$, το κανονικοποιημένο πεδίο, $U(r, \tau)$, ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + bU + \gamma U^3 = 0 \qquad (1.38)$$

Η εξ. 1.38 επιλύεται αριθμητικά και βρίσκεται ότι οι λύσεις εμφανίζουν μορφή τύπου Χ, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.1.



Σχ. 1.1. *Χαρακτηριστική μορφή τύπου Χ λύσης της χωροχρονικής NLS.* [18]

Η θεωρία πίσω από τη δημιουργία των κυμάτων Χ προβλέπει την προϋπόθεση κορέσιμης μη γραμμικότητας ή ενός διαμορφωμένου δείκτη διάθλασης. Πειραματικά τα κύματα Χ δε μπορούν να εμφανίσουν με μεγάλη σαφήνεια τη χαρακτηριστική μορφή του Σχ. 1.1, ωστόσο έχουν ως χαρακτηριστικά γνωρίσματα το διαχωρισμό του παλμού και τον φασματικό κατακερματισμό που συχνά ταυτοποιούνται σε πειράματα χωροχρονικών σχηματισμών στην περιοχή της ομαλής διασποράς [31].

<u>1.2.6 Άλλες οικογένειες σολιτονίων-Σολιτόνια μη εντοπισμένης συμπεριφοράς</u>

Εκτός από τα θεμελιώδη είδη σολιτονίων στα οποία αναφερθήκαμε παραπάνω (χρονικά, χωρικά, χωροχρονικά), υπάρχει ένα ευρύ φάσμα οικογενειών σολιτονίων ανάλογα με το είδος της μη γραμμικότητας ή τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης. Επιγραμματικά αναφέρουμε τις εξής ενδιαφέρουσες οικογένειες σολιτονίων [18]:

- *Σκοτεινά σολιτόνια*. Πρόκειται για τις λύσεις που προκύπτουν από την (1+1) μη γραμμική εξίσωση Schroedinger, για την περίπτωση αφεστιάζουσας μη γραμμικότητας.
- *Σολιτόνια Bragg*. Προκύπτουν ως λύσεις της NLS για διάταξη όπου έχει εφαρμοστεί κατά μήκος της διάδοσης μια ασθενής περιοδική διαμόρφωση του δείκτη διάθλασης. Αυτή η διαμόρφωση προκαλεί περίθλαση Bragg, με αποτέλεσμα τη δημιουργία αντίρροων κυμάτων. Η μελέτη αυτών των σολιτονίων γίνεται με τη θεωρία συζευγμένων ρυθμών που θα δούμε πιο κάτω.
- *Σολιτονικές δίνες*. Σκοτεινά σολιτόνια σε δύο εγκάρσιες διευθύνσεις, που οδηγούν σε πολλαπλά ζεύγη οπτικών δινών με εναλλασσόμενες πολικότητες.
- *Παραμετρικά σολιτόνια*. Πρόκειται για την αλληλεπίδραση δύο ή περισσότερων οπτικών πεδίων που καταλήγει στη σολιτονική διάδοση καθενός από τα οπτικά πεδία.
- *Ασύμφωνα σολιτόνια.* Αυτοπαγιδευμένοι παλμοί φωτός των οποίων η φάση μεταβάλλεται με τυχαίο τρόπο.
- *Σολιτόνια μη εντοπισμένης συμπεριφοράς*. Εμφανίζονται ως λύσεις της κυματικής εξίσωσης της οποίας η μη γραμμικότητα εμφανίζει μη εντοπισμένη συμπεριφορά. Παρακάτω αναφερόμαστε αναλυτικά σε αυτή την οικογένεια σολιτονίων, λόγω της κεντρικής τους σημασίας στη διατριβή.

Τα σολιτόνια μη εντοπισμένης συμπεριφοράς προκύπτουν ως λύσεις της μη γραμμικής εξίσωσης Schroedinger με μη εντοπισμένη απόκριση, όπου η τελευταία αναφέρεται στην ιδιότητα ενός οπτικού μέσου να «διαχέει» την απόκρισή του στο χώρο γύρω από την περιοχή που διεγείρεται οπτικά

$$i\frac{\partial u}{\partial z}+\nabla^2 u+u\int V\left(r-r'\right)\left|u(r')\right|^2 dr'=0, \tag{1.39}$$

όπου $V(R)$ είναι μια συνάρτηση που περιγράφει τη φύση της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς του μέσου και στο όριο της ασθενούς μη εντοπισμένης συμπεριφοράς μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαταραχή της NLS. Η παραπάνω εξίσωση, εκτός από την οπτική, έχει χρησιμοποιηθεί κατάλληλα προσαρμοσμένη για να περιγράψει διάδοση σε μέσα όπως πλάσμα [32] και συμπυκνώματα Bose-Einstein [33]. Ειδικά για την οπτική, το μέσο που έχει συγκεντρώσει την ερευνητική προσοχή, λόγω της μη εντοπισμένης του συμπεριφοράς, αλλά και επιπλέον, λόγω της τεράστιας μη γραμμικότητας του και του διπλοθλαστικού χαρακτήρα είναι οι νηματικοί υγροί κρύσταλλοι. Για την οπτική διάδοση στους τελευταίους θα μιλήσουμε εκτενώς στην τελευταία ενότητα της εισαγωγής, αλλά μπορούμε να αναφέρουμε επιγραμματικά, ότι για διατάξεις νηματικών υγρών κρυστάλλων οι λύσεις της εξ. 1.39, οι οποίες στη βιβλιογραφία ονομάζονται νηματόνια (nematicons), εμφανίζουν ιδιαίτερα ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα, στο όριο της ισχυρά μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, η τελευταία τείνει να καταπιέζει τη διαμόρφωση αστάθειας χωρίς ποτέ να την εξαφανίζει, με αποτέλεσμα να υπάρχουν ιδανικές συνθήκες για ευσταθείς, ιδιαίτερα εύρωστους σολιτονικούς σχηματισμούς [34]. Στο ίδιο όριο παρατηρείται το σπουδαίο φαινόμενο της εξάλειψης της κατάρρευσης μιας δέσμης, που στην περίπτωση που αυτή διαδίδεται σε μέσο Kerr καταρρέει [35]. Τέλος, άμεση συνέπεια της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς ενός μέσου είναι η δυνατότητα αλληλεπιδράσεων μεταξύ δεσμών που βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση μεταξύ τους, καθώς η απόκριση διαχέεται στο μεταξύ τους χώρο. Θα επιβεβαιώσουμε την τελευταία παρατήρηση κατά τη διερεύνηση των αλληλεπιδράσεων νηματονίων στο 3^{o} Κεφάλαιο.

1.3 Διακριτή μη γραμμική εξίσωση Schroedinger

Μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα ιδέα στην εξέλιξη της έρευνας της οπτικής διάδοσης είναι αυτή της χρήσης διακριτών συστημάτων, συστημάτων δηλαδή που υποστηρίζουν την «διακριτοποίηση» της συμπεριφοράς του φωτός. Βέβαια, το οπτικό πεδίο είναι συνεχές στο χώρο και στο χρόνο, ωστόσο με κατάλληλη γεωμετρία του μέσου διάδοσης, το οπτικό πεδίο μπορεί να εμφανίζει ένα κατακερματισμό της συμπεριφοράς του, ενώ παράλληλα αυτές οι συνιστώσες, προϊόντα του κατακερματισμού, να συνθέτουν ένα συνολικό οπτικό σχηματισμό του οποίου η συμπεριφορά εξαρτάται από τη σύζευξη μεταξύ των συνιστωσών. Η ιδέα των διακριτών συστημάτων στην οπτική προέκυψε σχετικά νωρίς. Το 1965 ο Allan Jones μελέτησε τις διαδικασίες οπτικής σύζευξης σε συστοιχίες κυματοδηγών [36], ενώ λίγο αργότερα τα συμπεράσματα επιβεβαιώθηκαν πειραματικά από τον Amnon Yariv [37].

Η πειραματική επιβεβαίωση της ύπαρξης διακριτών σολιτονικών σχηματισμών μπορεί να γίνει είτε με τη χρήση αυτόνομων κυματοδηγών που συζεύγνυνται μεταξύ τους, είτε με τη χρήση περίπλοκων οπτικών στοιχείων που μπορούν να περιορίσουν την οπτική ενέργεια σε ξεχωριστά «κανάλια» διάδοσης. Τέτοια στοιχεία έγιναν τεχνικά εφικτά στα μέσα της δεκαετίας του ‘90, όταν η πρόοδος της τεχνολογίας και οι τεχνικές παρασκευής επέτρεψαν την κατασκευή φωτονικών κρυστάλλων [38]. Έκτοτε, έχουν μελετηθεί περίπλοκες διακριτές γεωμετρίες σε πολλούς συνδυασμούς παραμέτρων διάταξης και χαρακτηριστικών δέσμης.

Όταν αναφερόμαστε στη σύζευξη δύο οπτικών σχηματισμών εννοούμε το μηχανισμό μεταφοράς ενέργειας από τον ένα σχηματισμό στον άλλο ή για την ακρίβεια ανταλλαγής ενέργειας ανάμεσα στους ρυθμούς των δύο πεδίων. Ως ρυθμό εννοούμε τους τρόπους ταλάντωσης της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας κατά τη διάδοσή της. Για να περιγραφούν οι μηχανισμοί σύζευξης των ρυθμών σε διακριτά οπτικά συστήματα έχουν αναπτυχθεί και προσαρμοστεί κατάλληλα κυρίως δύο θεωρίες, η θεωρία των συζευγμένων ρυθμών (coupled mode theory) που αφετηρία έχει τον Ηλεκτρομαγνητισμό και η προσέγγιση ισχυρής δέσμευσης με αφετηρία τη Φυσική Στερεάς Κατάστασης. Παρακάτω θα δούμε στοιχεία των δύο θεωριών και πως καταλήγουμε μέσω αυτών στη εξίσωση που περιγράφει τη διακριτή διάδοση, τη διακριτή μη γραμμική εξίσωση Schroedinger.

1.3.1 Θεωρία συζευγμένων ρυθμών

Βασική υπόθεση της θεωρίας των συζευγμένων ρυθμών είναι ότι οι ιδιορυθμοί που κυματοδηγούνται σε δύο γειτονικούς κυματοδηγούς αποτελούν διαταραχή ο ένας για τον άλλο. Η πρώτη αναφορά στη χρήση της θεωρίας συζευγμένων ρυθμών γίνεται στις αρχές της δεκαετίας του ’50, για την περιγραφή γραμμών μικροκυματικής μεταφοράς και της διάδοσης ηλεκτρονικών δεσμών [39, 40], ενώ στις αρχές της δεκαετίας του ’70 η θεωρία επεκτείνεται στο χώρο της οπτικής, για την περιγραφή της διάδοσης σε συζευγμένους οπτικούς κυματοδηγούς [41, 42].

Για να σκιαγραφήσουμε την εφαρμογή της θεωρίας συζευγμένων ρυθμών στην οπτική ξεκινούμε θεωρώντας μια (1+1) συστοιχία κυματοδηγών, στον καθένα από τους οποίους διαδίδεται ιδιορυθμός $\boldsymbol{E}_m(x)\exp\left(i\beta_m z\right)$. Τότε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο εύρος ολόκληρης της συστοιχίας θα δίνεται σαν την υπέρθεση των επιμέρους ιδιορυθμών

$$\boldsymbol{E}(x,z,t)=\sum_m A_m(z)\boldsymbol{E}_m(x)\exp\left(i\beta_m z\right) \tag{1.39}$$

με $\boldsymbol{E}_m(x)=\boldsymbol{E}_m(x-md)$, όπου d η απόσταση ανάμεσα στους κυματοδηγούς και β_m η σταθερά διάδοσης που αντιστοιχεί στον κυματοδηγό m. Επίσης, θεωρούμε ότι η χρονική εξάρτηση $\exp(i\omega t)$ έχει ενσωματωθεί στους όρους του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}(x)$. Το $A_m(z)$ είναι η περιβάλλουσα του διαδιδόμενου ρυθμού κατά μήκος της διάδοσης z, ενώ ο όρος $\exp\left(i\beta_m z\right)$ υποδηλώνει χρήση της προσέγγισης της αργά μεταβαλλόμενης περιβάλλουσας. Εναλλακτικά, η εξ. 1.39 μπορεί να ιδωθεί σαν ένα άθροισμα συναρτήσεων Bloch με πλάτη $A_m(z)$.

Το συνολικό πεδίο που διαδίδεται εντός της συστοιχίας θα ικανοποιεί την κυματική εξίσωση 1.40,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+n^2(x)\frac{\omega^2}{c^2}\right)\boldsymbol{E}(x,z,t)=0, \tag{1.40}$$

όπου $n(x)$ η κατανομή του δείκτη διάθλασης εγκάρσια στη διεύθυνση διάδοσης.

Εστιάζοντας, τώρα, στην περίπτωση που $m=1,2$, δηλαδή για δύο κυματοδηγούς, όταν αυτοί βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση μεταξύ τους, η κυματοδήγηση γίνεται αυτόνομα σε καθένα από αυτούς και τα πλάτη των ρυθμών, A_m, θα ικανοποιούν τις εξισώσεις (αγνοούνται οι δεύτερες παράγωγοι κατά την προσέγγιση της αργά μεταβαλλόμενης περιβάλλουσας),

$$\frac{dA_1}{dz}=-i\beta_1 A_1, \qquad \frac{dA_2}{dz}=-i\beta_2 A_2 \tag{1.41}$$

Φέρνοντας τους κυματοδηγούς σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους, οι ρυθμοί που διαδίδονται συζεύγνυνται σαν αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των φθινόντων στο εγκάρσιο επίπεδο πεδίων. Τότε, τα πλάτη των ρυθμών θα υπακούν τις αντίστοιχα διαμορφωμένες εξισώσεις 1.42.

$$\frac{dA_1}{dz} = -i(\beta_1 + K_{11})A_1 - iK_{12}A_2$$

$$\frac{dA_2}{dz} = -i(\beta_2 + K_{22})A_2 - iK_{21}A_1 \qquad (1.42)$$

όπου K_{12}, K_{21}, οι συντελεστές αμοιβαίας σύζευξης που συνδέονται με ολοκληρώματα επικάλυψης των ιδιορυθμών και K_{11}, K_{22} οι συντελεστές αυτό-σύζευξης που συνδέονται με ολοκληρώματα του ηλεκτρικού πεδίου του ενός κυματοδηγού λόγω της μεταβολής του δείκτη διάθλασης όπως αυτή προκαλείται λόγω της εισχώρησης πεδίου από τον γειτονικό.

Εδώ να αναφερθεί ότι θεωρούμε ότι το μέσο που εξετάζουμε δεν εμφανίζει απώλειες, οπότε οι ιδιορυθμοί $\boldsymbol{E}_m$ ως λύσεις προβλήματος ιδιοτιμών υπακούν σε σχέση ορθογωνιότητας, κατά τη θεωρία Sturm-Liouville.

$$\int \boldsymbol{E}_n^*(x)\boldsymbol{E}_m(x)dx = \frac{2\omega\mu}{\beta_m}\delta_{n,m} \qquad (1.43)$$

Γενικεύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων 1.41, αποδεικνύεται, με αντικατάσταση της εξ. 1.39 στην εξ. 1.40 και με κατάλληλη κανονικοποίηση, ότι για N κυματοδηγούς με ίδιους δείκτες διάθλασης και ασθενή σύζευξη μεταξύ τους, οι εξισώσεις για το αδιάστατο ηλεκτρικό πεδίο που διαδίδεται σε γραμμικό μέσο θα είναι, κατά αναλογία [21],

$$i\frac{dA_n}{dz} + C(A_{n+1} + A_{n-1}) = 0 \qquad (1.44)$$

όπου C, ο συντελεστής σύζευξης των κυματοδηγών.

Σημειώνουμε ότι στην οπτική η χρήση της θεωρίας συζευγμένων και αυτής της προσέγγισης ισχυρής δέσμευσης που θα δούμε παρακάτω, πολλές φορές ταυτίζονται ως προς τα αποτελέσματα, καθώς άλλωστε, ταυτόσημη είναι και η λογική των δύο μεθόδων ως προς την υπόθεση της υπέρθεσης εντοπισμένων κυμάτων για την προσέγγιση του συνολικού πεδίου. Συνηθίζεται κάποιες φορές η σύμβαση της χρήσης της θεωρίας συζευγμένων ρυθμών για οπτική διάδοση σε μέσα που εμφανίζουν περιοδικότητα κατά τη διεύθυνση της διάδοσης, ενώ η προσέγγιση ισχυρής δέσμευσης για την περίπτωση που η περιοδικότητα είναι εγκάρσια στην διάδοση.

1.3.2 Προσέγγιση ισχυρής δέσμευσης

Στην προσέγγιση ισχυρής δέσμευσης θεωρούμε ότι το συνεχές πεδίο μπορεί να γραφεί ως η υπέρθεση ισχυρά εντοπισμένων ρυθμών που διαδίδονται σε καθένα κυματοδηγό [18]. Για να εξάγουμε τη διακριτή εξίσωση που περιγράφει τη διάδοση θεωρούμε την κανονικοποιημένη (1+1) μη γραμμική εξίσωση Schroedinger

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + F(I;x)\psi = 0 \qquad (1.45)$$

Δεχόμενοι λύσεις που διατηρούν την κατατομή τους, της μορφής, $\psi(x,z) = u(x;\beta)\exp(i\beta z)$ και αντικαθιστώντας στην εξ. 1.45, προκύπτει ότι

$$\frac{d^2u}{dx^2} + F(I;x) = \beta u \qquad (1.46)$$

Η συνάρτηση $F(I;x)$ στις εξισώσεις 1.45-1.46 ενσωματώνει τα μη γραμμικά και περιοδικά χαρακτηριστικά του μέσου και εξαρτάται από την ένταση του οπτικού πεδίου. Η $F(I;x)$ μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή για λόγους απλοποίησης της ανάλυσής μας,

$$F(I,x) = \sum_n (\alpha + \gamma I)\delta(x - nh)\,, \qquad (1.47)$$

με h την απόσταση ανάμεσα στους κυματοδηγούς, n τον ακέραιο που απαριθμεί τους κυματοδηγούς και α, γ περιγράφουν τις γραμμικές και μη γραμμικές ιδιότητες του μέσου. Η συνάρτηση δ μοντελοποιεί τη συνολική απόκριση του μέσου που εμφανίζεται «διακριτά», παίρνοντας μοναδικές τιμές μόνο εντός του κάθε κυματοδηγού.

Στην προσέγγιση ισχυρής δέσμευσης δεχόμαστε ότι μια περιοδική διάταξη μπορεί να υποστηρίζει ένα μόνο ρυθμό ανά κυματοδηγό, ο οποίος ασθενώς επικαλύπτεται με τους ρυθμούς των γειτονικών κυματοδηγών. Η σύζευξη μεταξύ των ρυθμών πραγματοποιείται μέσω μιας ασθενούς μεταβολής στο δείκτη διάθλασης των κυματοδηγών.

Για να εξάγουμε τη διακριτή εξίσωση διάδοσης στο πνεύμα της προσέγγισης ισχυρής δέσμευσης, πρώτα αναζητούμε λύσεις για την εξ. 1.46 στη γραμμική περιοχή, θέτοντας στη συνάρτηση της εξ. 1.47, $\gamma = 0$. Σε αυτή την περίπτωση η χωρική κατατομή ενός γραμμικού καθοδηγούμενου ρυθμού θα έχει τη μορφή,

$$u_s(x) = \exp(-\alpha|x|/2)\,, \qquad (1.48)$$

με σταθερά διάδοσης που έχει τιμή $\beta_s = \alpha^2/4$. Αντίστοιχα με τη θεωρία συζευγμένων ρυθμών, δεχόμαστε ότι οι ρυθμοί είναι ισχυρά εντοπισμένοι στους κυματοδηγούς και το συνολικό πεδίο είναι η υπέρθεση ελαφρά διαταραγμένων λύσεων. Έτσι, η συνολική λύση μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα των διαταραγμένων γραμμικών λύσεων, δηλαδή,

$$A(x,z) = \sum_n A_n(z)u_s(x - nh) \qquad (1.49)$$

με A_n, τα πλάτη των συναρτήσεων Bloch.

Με αντικατάσταση της εξ. 1.49 στις εξ. 1.46-1.47 προκύπτει εξίσωση την οποία πολλαπλασιάζουμε με $u_s(x - mh)$ και ολοκληρώνουμε σε ολόκληρο το εγκάρσιο εύρος. Δεχόμενοι ασθενώς αλληλεπιδρώντες κυματοδηγούς, θα είναι $\alpha h \gg 1$ και $|\gamma||A_n(z)|^2 \ll \alpha$. Λαμβάνοντας υπόψη τα ολοκληρώματα επικάλυψης μεταξύ γειτονικών κυματοδηγών, προκύπτει ότι

$$i\frac{dA_n}{dz} + \beta_s A_n + \frac{\alpha^2}{2}\exp(-\alpha h/2)(A_{n-1} + A_{n+1}) + \frac{\gamma\alpha}{2}|A_n|^2 A_n = 0 \qquad (1.50)$$

Η παραπάνω εξ. 1.50 αποτελεί τη διακριτή μη γραμμική εξίσωση Schroedinger και μπορεί να γραφεί σε μια απλούστερη κανονικοποιημένη μορφή ως εξής,

$$i\frac{dA_n}{dz}+\beta A_n+C(A_{n-1}+A_{n+1})+\gamma\left|A_n\right|^2 A_n=0\,, \tag{1.51}$$

όπου β, η γραμμική σταθερή διάδοσης, C είναι ο συντελεστής σύζευξης και γ μια μη γραμμική παράμετρος.

<u>1.4 Αναλλοίωτες ποσότητες και μαθηματικές μέθοδοι στην οπτική</u>

<u>1.4.1 Αναλλοίωτες ποσότητες στην NLS</u>

Η επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης Schroedinger είναι μια διαδικασία που δε μπορεί να γίνει πάντα αναλυτικά. Για την ακρίβεια η αναλυτική επίλυση της NLS περιορίζεται μόνο στη (1+1) περίπτωση της NLS και αυτό ειδικά για την περίπτωση της Kerr μη γραμμικότητας. Μάλιστα, η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για την επίλυση της είναι αυτή της αντί-στροφης σκέδασης (IST) [43], μια μεθοδολογία ιδιαίτερα περίπλοκη, η οποία συνίσταται στη μετατροπή του προβλήματος σε ένα γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών που μεταβάλλονται κατά τη διάδοση και τον προσδιορισμό εξ' αυτών των αναλλοίωτων ιδιοτιμών. Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες για τη μέθοδο της αντίστροφης σκέδασης, στην υποενότητα αυτή θα αναφερθούμε στις βασικότερες σταθερές της κίνησης που συνδέονται με την NLS και έχουν προέλευση τις συμμετρίες του συστήματος. Γι αυτό το λόγο ξαναγράφουμε την (1+1) NLS με μη γραμμικότητα Kerr, καθώς και τη λύση της όπως προκύπτει από τη μέθοδο της αντίστροφης σκέδασης, τις οποίες συναντήσαμε και προηγουμένως,

$$i\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left|u\right|^2 u=0 \qquad (\alpha)$$

$$u(z,x)=a\sec h(ax)\exp(-ia^2 z/2) \qquad (\beta) \qquad (1.52)$$

Η εξ. 1.52(α) είναι ολοκληρώσιμη και ο αριθμός των αναλλοίωτων ποσοτήτων που συνδέ-ονται με αυτή είναι άπειρος. Εδώ να σημειωθεί ότι οι λύσεις που προκύπτουν από την ε-φαρμογή της αντίστροφης σκέδαση είναι πολλές, όμως η απλούστερη είναι η πρώτης τάξης λύση της εξ. 1.52(β), η οποία και θεωρείται το θεμελιώδες σολιτόνιο.

Η πυκνότητα Lagrange που αντιστοιχεί στην εξ. 1.52(α) είναι η παρακάτω [44]

$$\mathfrak{L}=\frac{i}{2}\left(u^*\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial u^*}{\partial z}\right)-\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|u\right|^4 \tag{1.53}$$

και ορίζουμε το ολοκλήρωμα της δράσης ως,

$$S=\iint\limits_{z,x}\mathfrak{L}\left(u,u^*,\partial_x u,\partial_x u^*,\partial_z u,\partial_z u^*\right)dzdx \tag{1.54}$$

Σύμφωνα με την αρχή της ελάχιστης δράσης κατά τη μετάβαση ενός συστήματος από μια κατάσταση σε μια άλλη, το ολοκλήρωμα της δράσης εμφανίζει ελάχιστο, οπότε $\delta S = 0$. Από εδώ προκύπτουν οι γνωστές εξισώσεις Euler-Lagrange (εξ. 1.54), οι οποίες είναι ισοδύναμες με την εξίσωση 1.52(α), όσον αφορά την περιγραφή της διάδοσης

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u} \tag{1.55}$$

Οι εξ. 1.55 είναι αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς που οφείλονται σε εγγενείς συμμετρίες του συστήματος και εφαρμόζοντας, όπως προβλέπεται από το θεώρημα της Noether, τις αντίστοιχες εξισώσεις συνέχειας προκύπτουν οι αναλλοίωτες ποσότητες ή σταθερές κίνησης. Αναφέρουμε τις σημαντικότερες συμμετρίες και τις αναλλοίωτες ποσότητες με εξίσωση αναφοράς την 1.52(α) [18]. Τα παρακάτω επεκτείνονται κατάλληλα για την περίπτωση περισσότερων διαστάσεων.

- *Διατήρηση μάζας* (ισχύος)
  Προκύπτει από το αναλλοίωτο της εξίσωσης διάδοσης κατά τη μετατόπιση της φάσης, $u \to ue^{i\varphi}$. Η αντίστοιχη εξίσωση συνέχειας γράφεται $\partial_z \tilde{P} + \partial_x I = 0$, με $\tilde{P} = |u|^2$, η πυκνότητας μάζας και $I = i\left(u\partial_x u^* - u^*\partial_x u\right)$ την αντίστοιχη ροή ενέργειας. Η διατηρήσιμη ποσότητα είναι το ολοκλήρωμα της πυκνότητας μάζας, $P = \int |u|^2 dx$.
- *Διατήρηση ορμής*
  Προκύπτει από το αναλλοίωτο της εξίσωσης διάδοσης κατά τη μετατόπιση στην εγκάρσια διεύθυνση, $x \to x + \delta x$. Η εξίσωση συνέχειας είναι $\partial_z \tilde{M} - \partial_x W = 0$, με $M = i\left(u_x^* u - u_x u^*\right)$ και W τον τανυστή της ορμής. Η αναλλοίωτη ποσότητα βρίσκεται ότι είναι το ολοκλήρωμα της ορμής, $M = i\int\left(u_x^* u - u_x u^*\right)dx$.
- *Διατήρηση της Χαμιλτονιανής*
  Προκύπτει από το αναλλοίωτο της Χαμιλτονιανής πυκνότητας κατά τη μετατόπιση στη διαμήκη διεύθυνση, $z \to z + \delta z$. Η εξίσωση συνέχειας είναι $\partial_z \tilde{H} + \partial_x L = 0$, όπου η Χαμιλτονιανή πυκνότητα δίνεται από την $\tilde{H} = \frac{1}{2}\left(|\partial_x u|^2 - |u|^4\right)$ και η ροή της ενέργειας, L, είναι $L = u_z \partial_x u^* + u_z^* \partial_x u$. Η διατηρήσιμη ποσότητα είναι το ολοκλήρωμα της πυκνότητας, δηλαδή $H = \frac{1}{2}\int\left(|\partial_x u|^2 - |u|^4\right)dx$.

Πέρα από τα παραπάνω τρία θεμελιώδη ολοκληρώματα κίνησης, υπάρχουν ακόμη αυτά που προκύπτουν από τη διατήρηση της γωνιακής στροφορμής (αναλλοίωτο στην περιστροφή), διατήρηση κατά την εφαρμογή του Γαλιλαϊκού σχηματισμού, καθώς και άλλα. Η ύπαρξη των ολοκληρωμάτων κίνησης είναι πολύ σημαντική, διότι τα ολοκληρώματα αυτά αποτελούν σημαντικό εργαλείο κατά τη μεταβολική μελέτη της δυναμικής ενός συστήματος, καθώς επιτρέπουν την αλγεβρική αναγωγή ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων σε μικρότερης τάξης σύστημα. Εδώ να σημειώσουμε ότι ένα σύστημα που διατηρεί τη Χαμιλτονιανή σταθερή χαρακτηρίζεται Χαμιλτονιανό και έχει την ικανότητα να υποστηρίζει εύρωστους σολιτονικούς σχηματισμούς, ενώ τα μη Χαμιλτονιανά συνδέονται συχνά με απώλειες ενέργειας και τα σολιτόνια που υποστηρίζουν είναι εν γένει πιο ασταθή.

1.4.2 Αριθμητικές και αναλυτικές μέθοδοι

1.4.2.1 Μεταβολική μέθοδος

Η μέθοδος της αντίστροφης σκέδασης, που αναφέρθηκε παραπάνω, παρά τους περιορισμούς στην εφαρμογή της σε (1+1) συστήματα μη γραμμικότητας Kerr αποτελεί το μόνο μέσο για τον υπολογισμό αναλυτικών λύσεων της NLS. Επειδή όμως στην παρούσα διατριβή δε θα γίνει ιδιαίτερη αναφορά στη μέθοδο, θα παραλείψουμε τη διαδικασία εφαρμογής της και θα εστιάσουμε σε μια μέθοδο βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται συστηματικά στη μελέτη της δυναμικής οπτικών συστημάτων, τη μεταβολική μέθοδο.

Η μεταβολική μέθοδος είναι μια διαταρακτική μέθοδος που βασίζεται στη διαδικασία βελτιστοποίησης Ritz και χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στην οπτική σε εργασία του Anderson το 1979 [45]. Η λογική η οποία ακολουθείται μπορεί να συνοψιστεί στα παρακάτω βήματα:

- Προσδιορισμός της Λαγκρατζιανής του συστήματος
- Υπόθεση μια διαταραγμένης λύσης που προσεγγίζει τα χαρακτηριστικά της αναμενόμενης και της οποίας η μορφή θα πρέπει να διατηρείται.
- Προσδιορισμός της ανηγμένης Λαγκρατζιανής που έχει προκύψει από την εισαγωγή της προηγούμενης υποθετικής λύσης.
- Εφαρμογή των εξισώσεων Euler-Lagrange και εξαγωγή συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων.
- Επίλυση του προηγούμενου συστήματος ως προς τις εξελικτικές παραγώγους των παραμέτρων του οπτικού πεδίου.

Η μεταβολική μέθοδος θα εφαρμοστεί στο δεύτερο κεφάλαιο της διατριβής, όπου θα ακολουθήσουμε αναλυτικά τη διαδικασία της εξαγωγής των μεταβολικών εξισώσεων για πρόβλημα διάδοσης σε διακριτή διάταξη. Συμπληρώνοντας, να σημειώσουμε κάποιες παρατηρήσεις για τη χρήση της μεταβολικής μεθόδου. Πρώτον, ότι η επιλογή της δοκιμαστικής λύσης δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει με την αναλυτική λύση του προβλήματος (αν αυτή υπάρχει). Δεύτερον, η μεταβολική μέθοδος εμφανίζει μειονεκτήματα. Συγκεκριμένα, με τη χρήση της δεν υπάρχει δυνατότητα αναπαραγωγής φαινομένων όπως ο διαχωρισμός δέσμης καθώς και φαινομένων ακτινοβολίας. Αν θέλουμε να μοντελοποιήσουμε τα τελευταία επιβάλλεται η εισαγωγή συγκεκριμένου όρου που περιλαμβάνει την εξελικτική παράμετρο των απωλειών. Ακόμη, περιοριστική για την ακρίβεια της μεθόδου είναι η υπόθεση ότι η κατατομή του οπτικού πεδίου διατηρείται κατά τη διάδοση. Στην πράξη, κατά τη διάδοση του οπτικού πεδίου, η κατατομή αυτή μεταβάλλεται, γεγονός όμως, που δεν αλλάζει τη σπουδαιότητα της μεταβολικής μεθόδου για την ανίχνευση των ποιοτικών χαρακτηριστικών του προβλήματος. Τέλος, να αναφέρουμε την ύπαρξη και άλλων παρόμοιων μεθόδων, όπως η μέθοδος των ροπών και η αδιαβατική μέθοδος.

1.4.2.2 Η μέθοδος Split-Step-Fourier

Όπως είδαμε και παραπάνω η εύρεση αναλυτικών λύσεων για τα προβλήματα μη γραμμικής οπτικής διάδοσης είναι δυνατή μόνο σε λίγες συγκεκριμένες περιπτώσεις. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να καταφεύγουμε στη χρήση αριθμητικών μεθόδων επίλυσης για να αποκτήσουμε μια διαίσθηση της συμπεριφοράς των λύσεων και να κατανοήσουμε τα γραμμικά φαινόμενα της οπτικής διάδοσης. Γενικά, οι αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην οπτική διακρίνονται σε δύο ευρείες κατηγορίες, τις ψευδοφασματικές και των πεπερασμένων διαφορών. Οι πρώτες είναι συνήθως προτιμότερες καθώς είναι αρκετά πιο γρήγορες από τις δεύτερες (διαφορά μιας τάξης μεγέθους), το οποίο οφείλεται στη χρήση του αλγόριθμου FFT. Ωστόσο, η χρήση των πεπερασμένων διαφορών εξακολουθεί να έχει πεδίο εφαρμογής σε συγκεκριμένα προβλήματα, όπως π.χ. στην προσομοίωση συστημάτων πολυπλεξίας με διαίρεση μήκους κύματος (WDM). Επειδή στη διατριβή θα χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά ψευδοφασματικές μεθόδους, θα εστιάσουμε σε αυτές.

Η ψευδοφασματική μέθοδος με τη μεγαλύτερη χρησιμότητα στην προσομοίωση της οπτικής διάδοσης είναι η μέθοδος Split-Step-Fourier (SSF), η οποία συχνά περιγράφεται με την ορολογία «μέθοδος διάδοσης δέσμης» [11, 25]. Για την εφαρμογή της μεθόδου γίνεται αρχικά ο διαχωρισμός του γραμμικού και μη γραμμικού κομματιού της διάδοσης στην αντίστοιχη εξίσωση, όπως φαίνεται παρακάτω

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \left(\hat{D} + \hat{N}\right) A, \tag{1.56}$$

όπου $\hat{D}$ είναι ο γραμμικός τελεστής που ενσωματώνει τη διασπορά (ή περίθλαση) και τις απώλειες που υφίσταται το οπτικό πεδίο κατά τη διάδοση σε γραμμικό μέσο και $\hat{N}$ είναι ο τελεστής που περιλαμβάνει την επίδραση των μη γραμμικών φαινομένων.

Προφανώς, στην πράξη, τα γραμμικά και μη γραμμικά φαινόμενα επιδρούν ταυτόχρονα στη διάδοση του πεδίου, αριθμητικά όμως μπορούμε να ανακτήσουμε μια προσεγγιστική λύση δεχόμενοι ότι τα γραμμικά και μη γραμμικά φαινόμενα δρουν ανεξάρτητα. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι η διάδοση από το z στο $z+\delta z$ πραγματοποιείται σε δύο βήματα. Στο πρώτο, δρα αποκλειστικά ο μη γραμμικός τελεστής, $\hat{N}$, ενώ $\hat{D}=0$. Στο δεύτερο βήμα, η διασπορά (ή περίθλαση) δρα μόνη της και $\hat{N}=0$. Δηλαδή, το σχήμα του αλγόριθμου θα είναι μαθηματικά ως εξής,

$$A(z+\delta z,t) = \exp(\delta z\hat{D})\exp(\delta z\hat{N})A(z,t) \tag{1.57}$$

Το εκθετικό τμήμα του γραμμικού τελεστή έχει αναλυτική μορφή στο πεδίο των συχνοτήτων και γι αυτό, μετασχηματίζοντας κατά Fourier και επαναφέροντας την ποσότητα στο πεδίο του χρόνου, με αντίστροφο μετασχηματισμό μπορούμε να γράψουμε

$$\exp(\delta z\hat{D})B(z,t) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\exp\left(\delta z\hat{D}(\omega)\right)\mathfrak{F}\left(B(z,t)\right)\right] \tag{1.58}$$

Αντίστοιχα το εκθετικό τμήμα του μη γραμμικού τελεστή δεν έχει αναλυτική έκφραση, αλλά μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $\exp(\delta z\hat{N}) \approx \exp\left(\int_z^{z+\delta z} \hat{N}(z')dz'\right)$ με μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης (π.χ. Runge-Kutta, κανόνα τραπεζοειδούς). Η ακρίβεια της μεθόδου Split-Step-Fourier είναι δεύτερης τάξης ως προς το βήμα δz, όμως η ακρίβεια μπορεί να βελτιωθεί περαιτέρω αν ακολουθηθεί το παρακάτω σχήμα

$$A(z+\delta z,t) = \exp\left(\frac{\delta z}{2}\hat{N}\right)\exp\left(\int_z^{z+\delta z} \hat{N}(z')dz'\right)\exp\left(\frac{\delta z}{2}\hat{D}\right)A(z,t) \qquad (1.59)$$

Η παραπάνω σχέση προτείνει τη χρήση της SSF σα μια διαδικασία τριών βημάτων:

- Εφαρμογή του γραμμικού τελεστή για μισό βήμα διάδοσης,
- αριθμητική ολοκλήρωση του προηγούμενου αποτελέσματος για ολόκληρο βήμα με εφαρμογή του μη γραμμικού τελεστή και τέλος,
- την εφαρμογή του γραμμικού τελεστή για το δεύτερο μισό του βήματος.

<u>1.5 Στοιχεία φυσικής υγρών κρυστάλλων</u> [46, 47, 48]

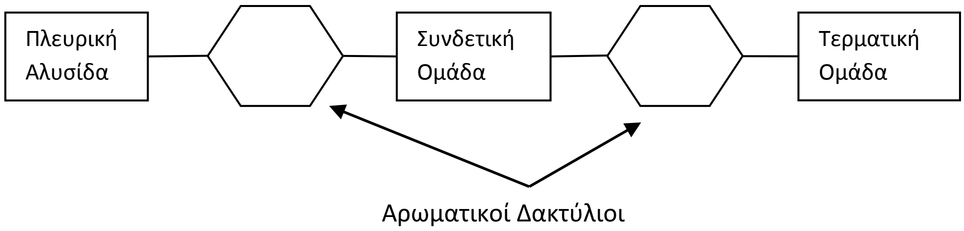
Οι υγροί κρύσταλλοι θα αποτελέσουν το οπτικό μέσο για το οποίο θα μελετήσουμε τη διάδοση στο μεγαλύτερο μέρος της διατριβής και γι αυτόν το λόγο στην παρούσα ενότητα θα αναφερθούμε εκτενώς στη φυσική των υγρών κρυστάλλων, ενώ στην 1.5.5 θα αναφερθούμε στη μαθηματική μοντελοποίηση της οπτικής διάδοσης μέσα σε νηματικούς κρυστάλλους.

<u>1.5.1 Φύση και ιδιότητες των υγρών κρυστάλλων</u>

Οι υγροί κρύσταλλοι (ΥΚ) αποτελούν μορφή της ύλης με φάση ενδιάμεση της υγρής και στερεής και πολύ ενδιαφέρουσες φυσικές ιδιότητες (όπως η υψηλή οπτική μη γραμμικότητα, μη εντοπισμένη συμπεριφορά κ.α.) που απαντώνται τόσο στα υγρά όσο και στα στερεά. Έτσι, οι υγροί κρύσταλλοι μπορούν να ρέουν όπως τα υγρά και ταυτόχρονα να εμφανίζουν φυσικές ιδιότητες χαρακτηριστικές των στερεών. Αυτές οι ενδιάμεσες φάσεις ονομάζονται μεσοφάσεις και τα υλικά που τις εμφανίζουν μεσογενή. Τα μεσογενή υλικά μπορούν να διακριθούν σε θερμοτροπικά, πολυμερικά και λυοτροπικά, ενώ ως συνάρτηση της θερμοκρασίας, της συγκέντρωσης και των υποκατάστατων στη μοριακή δομή, οι μεσοφάσεις διακρίνονται σε νηματικές, χολοστερικές, σμηκτικές και φερροηλεκτρικές.

Γενικά, οι υγροί κρύσταλλοι είναι αρωματικά μόρια που αποτελούνται από μια πλευρική αλυσίδα, δύο ή περισσότερους αρωματικούς δακτυλίους συνδεδεμένους με ομάδες ατόμων και από μια τερματική ομάδα. Μια τυπική απεικόνιση του μορίου ενός υγρού κρυστάλλου φαίνεται στο Σχ. 1.2.

Η πλειοψηφία των υγρών κρυστάλλων είναι παράγωγα βενζίνης, ενώ οι υπόλοιποι είναι ετεροκυκλικά, οργανομεταλλικά ή οργανικών αλάτων μόρια με τις διάφορες πάντως παραλ-

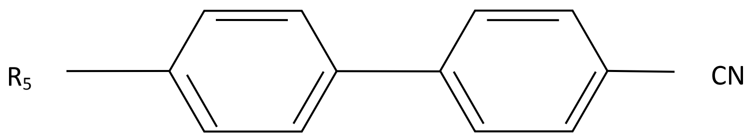


Σχ. 1.2 *Τυπική μοριακή δομή των υγρών κρυστάλλων.*

λαγές να λαμβάνονται με την κατάλληλη υποκατάσταση ομάδων μορίων στην τυπική μορφή της γενικής μοριακής δομής του Σχ. 1.2. Ακόμη, η συνδετική ομάδα μπορεί να είναι απλά ένας χημικός δεσμός που συνδέει τους αρωματικούς δακτύλιους ή ομάδες ατόμων όπως στιλβένιο (-CH=CH-), εστερομάδα (-COO-), αζοξυομάδα, ακετυλομάδα κ.α.

Επίσης, μεγάλο είναι και το φάσμα των δακτυλίων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή μοριακών δομών υγρών κρυστάλλων. Έτσι, μπορεί να χρησιμοποιηθεί κορεσμένο κυκλοεξάνιο ή ακόρεστο φαινύλιο, διφαινύλιο και τετραφαινύλιο σε διάφορους συνδυασμούς. Ειδικά στην περίπτωση των ετεροκυκλικών μορίων, που μοιάζουν στη δομή με αυτά των παραγώγων βενζίνης αν αντικατασταθούν οι δακτύλιοι βενζίνης με πυριδίνιο, πυριμιδίνιο ή κάτι όμοιο, προκύπτουν ετεροκυκλικοί υγροί κρύσταλλοι. Παράγωγα χολεστερόλης από τη άλλη δίνουν χημικά συμπλέγματα που εμφανίζουν χολεστερική (ή χειραλική νηματική) φάση. Τέλος, τα οργανομεταλλικά συμπλέγματα περιέχουν μεταλλικά άτομα και διαθέτουν ενδιαφέρουσες δυναμικές και μαγνητοοπτικές ιδιότητες.

Οι οπτικές και λοιπές φυσικές ιδιότητες των υγρών κρυστάλλων εξαρτώνται από τα διάφορα μέρη που αποτελούν το μόριο, καθώς και από τη διαδικασία σύνθεσης του. Έτσι οι ιδιότητες των υλικών που ενδιαφέρουν ερευνητικά και τεχνικά μπορεί να είναι οι διηλεκτρικές σταθερές του μέσου, οι ελαστικές σταθερές, οι ανισοτροπίες και οι οπτικές μη γραμμικότητες. Ακόμη η σταθερότητα του μορίου εξαρτάται από την κεντρική συνδετική ομάδα, με τα σταθερότερα μόρια να προκύπτουν όταν περιλαμβάνουν συμπλέγματα αζώτου και εστέρων με, ωστόσο, μεγάλη ποικιλία εξάρτησης από τη θερμοκρασία και την απορρόφηση UV ακτινοβολίας. Πάντως η απουσία συνδετικής ομάδας και η σύνδεση των δακτυλίων με απλό χημικό δεσμό έχει ως αποτέλεσμα τις σταθερότερες δομές μορίων (Σχ. 1.3).



Σχ. 1.3 *Μοριακή δομή του πιο διαδεδομένου νηματικού υγρού κρυστάλλου 5CB (πεντυλ - κυανο- διφαινύλιο)*

1.5.2 Ταξινόμηση των υγρών κρυστάλλων

Οι υγροί κρύσταλλοι διακρίνονται με βάση τις φυσικές παραμέτρους που καθορίζουν τις κρυσταλλικές τους φάσεις, σε λυοτροπικούς, πολυμερικούς και θερμοτροπικούς. Οι τελευταίοι περιλαμβάνουν τις υποκατηγορίες των νηματικών, χολεστερικών και σμηκτικών υγρών κρυστάλλων.

Λυοτροπικοί υγροί κρύσταλλοι

Οι λυοτροπικοί υγροί κρύσταλλοι δημιουργούνται κατά τη διάλυση κατάλληλης ουσίας σε διαλύτη, συνήθως κάποιας αμφιφιλικής ουσίας σε νερό. Οι ιδιότητες και η ταυτότητα του παραγόμενου υγρού κρυστάλλου καθορίζονται κυρίως από τη συγκέντρωση του διαλύματος.

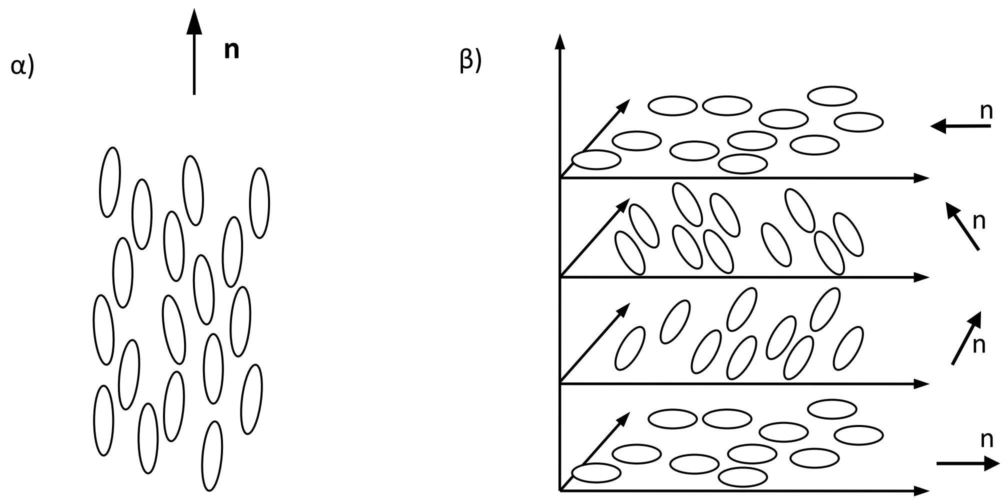
Πολυμερικοί υγροί κρύσταλλοι

Πρόκειται για υλικά που έχουν ως βάση τους πολυμερικές αλυσίδες με ιξώδες μεγαλύτερο από αυτό των υγρών κρυστάλλων μονομερών μορίων.

Θερμοτροπικοί υγροί κρύσταλλοι

Οι υγροί κρύσταλλοι αυτής της κατηγορίας εμφανίζουν έντονη εξάρτηση της κρυσταλλικής τους φάσης από τη θερμοκρασία. Περιλαμβάνονται οι υποκατηγορίες των νηματικών, χολεστερικών και σμηκτικών υγρών κρυστάλλων.

Τα υλικά αυτά έχουν μόρια με γενικά συμπαγή ραβδοειδή μορφή, που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους σχηματίζοντας διακριτά διατεταγμένες δομές. Οι αλληλεπιδράσεις αυτές μπορεί να οδηγήσουν σε μικρής ή μεγαλύτερης κλίμακας διατάξεις, καθώς και σε κατανομές προσανατολισμού των μορίων. Με χρήση του απλούστερου μοντέλου συμπαγών ραβδοειδών μορίων μπορούμε να τους απεικονίσουμε όπως φαίνονται στο Σχ. 1.4.



Σχ. 1.4 *Μοριακές διατάξεις μορίων υγρών κρυστάλλων. α) νηματικά μόρια, β) χολεστερικά μόρια*

Γενικά, οι νηματικοί υγροί κρύσταλλοι προκύπτουν από νηματογενή μόρια που έχουν τη μορφή του Σχ. 1.4(α), όπου η συνδετική ομάδα μπορεί να είναι είτε ένας απλός δεσμός ό-πως στην περίπτωση του 5CB (Σχ. 1.3), είτε μια ομάδα όπως -CH=N-, -C≡C-, -CH=CCl-, κ.α. Τα μόρια που αποτελούν τους υγρούς κρυστάλλους αυτού του είδους είναι ραβδοειδούς μορφής και στις περισσότερες περιπτώσεις εμφανίζουν συμμετρία κέντρου, με συνέπεια οι φυσικές τους ιδιότητες να είναι οι ίδιες κατά τις κατευθύνσεις $\hat{n}$ και $-\hat{n}$. Οι χολεστερικοί υγροί κρύσταλλοι είναι ουσιαστικά νηματικά μόρια, στα οποία έχει προστεθεί κάποιο χει-ραλικό μόριο. Οι φυσικές τους ιδιότητες είναι παρόμοιες με αυτές των νηματικών, με τη διαφορά ότι τα μόρια τους τείνουν να ευθυγραμμιστούν με ελικοειδή τρόπο.

Τέλος, το τρίτο είδος θερμοτροπικών υγρών κρυστάλλων είναι οι σμηκτικοί, οι οποίοι, εν αντιθέσει με τους προηγούμενους εμφανίζουν διάταξη στο χώρο. Αυτοί διακρίνονται σε σμηκτικούς Α (οπτικά μονοαξονικοί) και σμηκτικούς C (οπτικά διαξονικοί). Μεγάλης σπου-δαιότητας είναι οι σμηκτικοί C οι οποίοι εμφανίζουν αυθόρμητη ηλεκτρική πόλωση και τα-ξινομούνται ως σμηκτικοί C* ή φερροηλεκτρικοί.

Τα προβλήματα που θα μελετήσουμε στα κεφάλαια 2, 3, 4 αναφέρονται σε διατάξεις νημα-τικών υγρών κρυστάλλων. Επειδή οι διατάξεις μας είναι επίπεδες οι ροές του μέσου μπο-ρούν να θεωρηθούν αμελητέες και επομένως τα μόρια έχουν συγκεκριμένη θέση στο χώρο και μόνη δυνατότητα είναι να στρέφονται επί επιπέδου γύρω από το μικρό τους άξονα.

1.5.3 Παράμετρος τάξης και φασικές μεταβάσεις

Όπως αναφέρθηκε προηγούμενα, οι υγροί κρύσταλλοι συμπεριφέρονται γενικά όπως τα συνήθη ανισοτροπικά υγρά. Ωστόσο, υπάρχουν φαινόμενα, ειδικά κατά τη θερμοκρασιακή περιοχή κατά την οποία γίνεται η μετάβαση από την ισοτροπική στη νηματική φάση, που είναι χαρακτηριστικά των υγρών κρυστάλλων. Τέτοιο φαινόμενο είναι η ευαισθησία της αργής απόκρισης των μορίων σε εξωτερικά ηλεκτρικά πεδία.

Για να γίνει δυνατή η ποσοτικοποίηση της διευθυντικής συσχέτισης των μορίων των υγρών κρυστάλλων εισάγουμε ένα μονόμετρο μέγεθος, την παράμετρο τάξης S,

$$S = \frac{1}{2}\left\langle \left(\hat{k}\cdot\hat{n}\right)\left(\hat{k}\cdot\hat{n}\right)-1\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle 3\cos^2\theta - 1\right\rangle \qquad (1.60)$$

όπου $\hat{k}$ είναι το διάνυσμα κατεύθυνσης του μακρύ άξονα του μορίου και ϑ είναι η γωνία ανάμεσα στον άξονα του μορίου και τον άξονα του κατευθυντή, δηλαδή του διανύσματος της μέσης κατεύθυνσης των μορίων του υγρού κρυστάλλου. Η εξ. 1.60 αναφέρεται στην περίπτωση όπου στον κρύσταλλο υπάρχει κυλινδρική ή στροφική συμμετρία περί του άξο-να $\hat{k}$. Στη γενικότερη περίπτωση όπου απουσιάζει συμμετρία, η παράμετρος τάξης ορίζεται ως εξής,

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left\langle 3\left(\hat{n}\cdot\hat{i}\right)\left(\hat{k}\cdot\hat{j}\right)-1\right\rangle \qquad (1.61)$$

όπου $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων των μορίων.

Η παράμετρος τάξης όπως ορίστηκε με τις μέσες κατευθύνσεις των μορίων είναι δυνατό να αντικατασταθεί με εκφράσεις των ανισοτροπιών φυσικών παραμέτρων, όπως είναι οι ηλεκτρικές, οι μαγνητικές και οι οπτικές επιδεκτικότητες. Έτσι στην περίπτωση της οπτικής διηλεκτρικής ανισοτροπίας, $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$, η παράμετρος τάξης μπορεί να οριστεί και ως $Q_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\sum_{\gamma}\varepsilon_{\gamma\gamma} = \delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ όπου α, β είναι οι άξονες αναφοράς στο σύστημα του εργαστηρίου.

Θεωρία μετάβασης φάσης Meier-Saupe

Για την περιγραφή και μελέτη των αλληλεπιδράσεων των μορίων των υγρών κρυστάλλων και των μεταβάσεων του υλικού στις διάφορες φάσεις του έχουν κατά καιρούς αναπτυχθεί διάφορες θεωρίες. Η πιο επιτυχημένη είναι η θεωρία Meier-Saupe ή θεωρία των S^2 αλληλεπιδράσεων, της οποίας τα βασικά σημεία θα δούμε παρακάτω.

Η μέση ελεύθερη ενθαλπία ανά μόριο δίνεται από τη σχέση

$$G(p,T) = G_i(p,T) + K_B T \int f(\theta,\varphi)\log 4\pi f(\theta,\varphi) d\Omega + G_1(p,T,S), \qquad (1.62)$$

όπου $G_1(p,T,S) = -\frac{1}{2}U(p,T)S(\frac{3}{2}cos^2\theta - 1) = -\frac{1}{2}U(p,T)S^2$ η ενέργεια αλληλεπίδρασης και G_i, η ελεύθερη ενθαλπία της ισοτροπικής φάσης. U είναι η ενέργεια αλληλεπίδρασης που οφείλεται στις δυνάμεις van der Waals.

Ελαχιστοποιώντας την (1.62) ως προς τη συνάρτηση κατανομής, $f(\theta,\varphi)$, προκύπτει

$$f(\theta) = \frac{\exp(m\cos^2\theta)}{4\pi z} \qquad (1.63)$$

όπου

$$m = \frac{3}{2}\frac{US}{\mathrm{TK}_B} \qquad (1.64)$$

και z μια σταθερά κανονικοποίησης με $z = \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{mx}^2}\mathrm{dx}$. Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις με τον ορισμό της παραμέτρου τάξης της εξ. 1.60, προκύπτει ότι

$$S = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{\partial \mathrm{z}}{z\partial m} \qquad (1.65)$$

Από τις εξισώσεις 1.64 και 1.65 μπορούμε, αφού λύσουμε γραφικά, να ορίσουμε την κρίσιμη θερμοκρασία T_c από τη σχέση

$$\frac{K_{\mathrm{B}}T_C}{U(T_C)} = 4.55 \qquad (1.66)$$

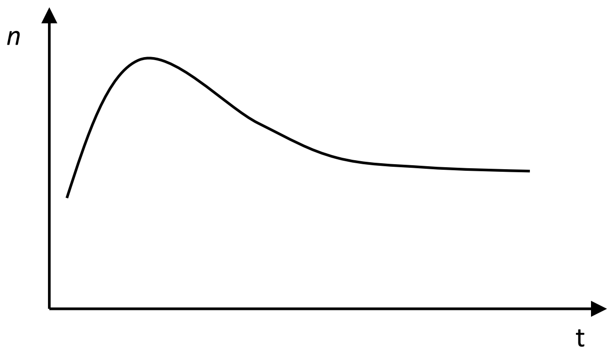
Η κρίσιμη θερμοκρασία T_c είναι η θερμοκρασία για χαμηλότερες τιμές από την οποία η νηματική φάση του υλικού είναι σταθερότερη, ενώ για μεγαλύτερες από αυτή η ισοτροπική φάση είναι σταθερότερη. Δηλαδή, η κρίσιμη θερμοκρασία είναι μια τιμή μετάβασης από τη νηματική στην ισοτροπική φάση. Έτσι, για $T = T_c$ η παράμετρος τάξης είναι $S = 0$ (αφού τότε έχουμε ισοτροπική φάση), ενώ για τιμές λίγο κάτω από την κρίσιμη θερμοκρασία γίνεται $S(T_c) = 0.44$.

Εξάρτηση του δείκτη διάθλασης από την παράμετρο τάξης

Πειραματικά έχει δειχθεί ότι, στην περίπτωση των νηματικών υγρών κρυστάλλων, η μεταβολή της τιμής του δείκτη διάθλασης κατά την αύξηση της θερμοκρασίας εξαιτίας «στιγμιαίου» οπτικού παλμού, συνδέεται με τη μεταβολή στην πυκνότητα και την παράμετρο τάξης, δηλαδή,

$$\Delta n = \frac{dn}{dp}dp + \frac{dn}{dS}dS \tag{1.67}$$

Η μεταβολή στην πυκνότητα dp, αντίθετα από ό,τι συμβαίνει για την παράμετρο τάξης με τη συλλογική συμπεριφορά των μορίων, οφείλεται στην απόκριση του καθενός μορίου ξεχωριστά και γι αυτό το λόγο είναι σχετικά γρήγορη κατά τη μεταβολή της θερμοκρασίας. Έτσι, πειραματικά βρίσκεται ότι η χρονική εξάρτηση του διαθλώμενου φωτός και επομένως και του δείκτη διάθλασης είναι της μορφής του Σχ. 1.4.



Σχ.1.4. *Χρονική εξάρτηση του δείκτη διάθλασης κατά τη διέλευση «στιγμιαίου» οπτικού παλμού. Το αρχικό ύψωμα οφείλεται σε μεγαλύτερο βαθμό στη μεταβολή της πυκνότητας, ενώ η επίδραση της παραμέτρου τάξης υπεισέρχεται σε μεγαλύτερους χρόνους.*

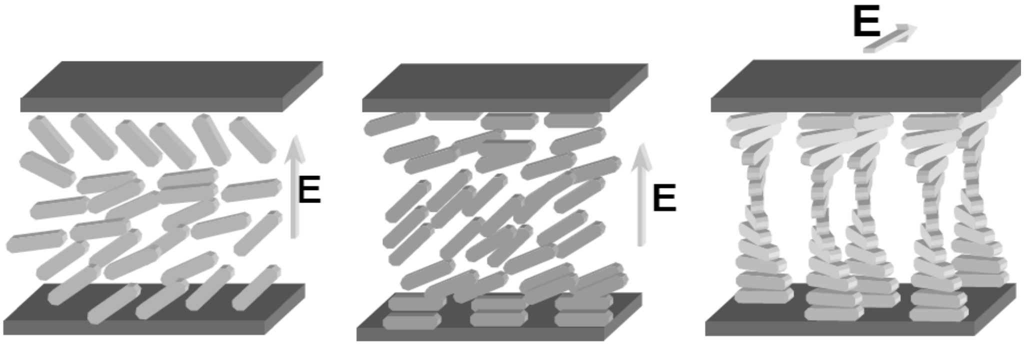
1.5.4 Θεωρία ελαστικού μέσου και οπτικές ιδιότητες νηματικών ΥΚ

Ελαστικές σταθερές και ελεύθερες ενέργειες

Ένα δείγμα νηματικού υγρού κρυστάλλου χαρακτηρίζεται από έναν τανυστή παραμέτρου τάξης $S_{\alpha\beta}$.

$$S_{\alpha\beta} = S(T)(n_\alpha n_b - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}) \tag{1.68}$$

Η παράμετρος τάξης μπορεί να μεταβληθεί αν επιδράσουμε στο δείγμα ηλεκτρομαγνητικά ή μηχανικά, οπότε και θα μεταβληθεί η συλλογική συμπεριφορά των μορίων με αποτέλεσμα την παραμόρφωση του δείγματος. Τα τρία είδη παραμορφώσεων τους Σχ. 1.5 σχετίζονται με χωρικές μεταβολές του άξονα διεύθυνσης και επομένως οι μαθηματικές εκφράσεις των ενεργειών παραμόρφωσης περιλαμβάνουν χωρικές παραγώγους. Έτσι η κάθε παραμόρφωση και η αντίστοιχη πυκνότητα ελεύθερης ενέργειας θα είναι ως εξής:



Σχ.1.5 *Παραμορφώσεις δείγματος νηματικού κρυστάλλου με την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου. α) κάμψης (bend), β) διεύρυνσης (splay), γ) στρέψης (twist).*

$$\text{Διεύρυνση:} \quad F_1 = \frac{1}{2}K_1\left(\nabla\cdot\hat{n}\right)^2$$

$$\text{Στρέψη:} \quad F_2 = \frac{1}{2}K_2\left(\hat{n}\cdot\nabla\times\hat{n}\right)^2 \tag{1.69}$$

$$\text{Κάμψη:} \quad F_3 = \frac{1}{2}K_3\left(\hat{n}\times\left(\nabla\times\hat{n}\right)\right)^2,$$

όπου οι σταθερές K_1, K_2, K_3 είναι οι σταθερές ελαστικότητας του Frank και $\hat{n}$ το διάνυσμα πάνω στο οπτικό άξονα των μορίων.

Γενικά και τα τρία είδη παραμόρφωσης μπορούν να υπάρξουν ταυτόχρονα, όταν επιδράσουμε μηχανικά ή ηλεκτρομαγνητικά σε δείγμα νηματικών κρυστάλλων, με αποτέλεσμα η συνολική πυκνότητα ελεύθερης ενέργειας παραμόρφωσης να είναι το άθροισμα των επιμέρους.

$$F_{ολ} = \frac{1}{2}K_1\left(\nabla\cdot\hat{n}\right)^2 + \frac{1}{2}K_2\left(\hat{n}\cdot\nabla\times\hat{n}\right)^2 + \frac{1}{2}K_3\left(\hat{n}\times\left(\nabla\times\hat{n}\right)\right)^2 \tag{1.70}$$

Συνηθίζεται πολλές φορές σε προβλήματα νηματικών υγρών κρυστάλλων να θεωρείται η προσέγγιση της μοναδικής σταθεράς παραμόρφωσης, δηλαδή, $K_1 = K_2 = K_3$. Στην ενέργεια $F_{ολ}$ για την περιγραφή του πλήρους μοντέλου είναι δυνατό να προστεθεί και η ενέργεια επιφανείας, που οφείλεται στην σύναψη των μορίων του κρυστάλλου με τα τοιχώματα του κελύφους που περικλείει το δείγμα.

Οπτικές παράμετροι νηματικών ΥΚ

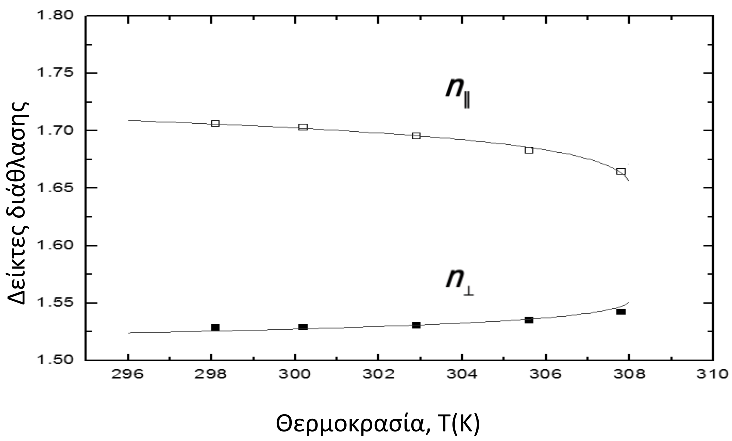
Οι νηματικοί ΥΚ, ως θερμοτροπικοί που είναι, εμφανίζουν εξάρτηση των φυσικών παραμέτρων τους από τη θερμοκρασία. Με την εξ. 1.67 δεχθήκαμε ότι η μεταβολή του δείκτη διάθλασης και συνεπώς των διηλεκτρικών σταθερών ε, εξαρτάται από τη θερμοκρασία μέσω της πυκνότητας p και της παραμέτρου τάξης S.

Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι οι δείκτες διάθλασης $n_{\parallel}, n_{\perp}$ υπακούν στις παρακάτω προσεγγιστικές εξισώσεις,

$$\frac{dn_{\parallel}}{dT} \simeq \frac{d\langle n\rangle}{dT} + \frac{2}{3}\frac{d\Delta n}{dT}, \quad \frac{dn_{\perp}}{dT} \simeq \frac{d\langle n\rangle}{dT} - \frac{1}{3}\frac{d\Delta n}{dT} \tag{1.71}$$

με $\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp}$ και $\langle n\rangle = \dfrac{n_{\parallel} + 2n_{\perp}}{3}$.

Στο Σχ. 1.6 παριστάνεται η εξάρτηση των δεικτών διάθλασης του νηματικού ΥΚ 5CB στα $500nm$.



Σχ.1.6 *Εξάρτηση του δείκτη διάθλασης του 5CB συναρτήσει της θερμοκρασίας*

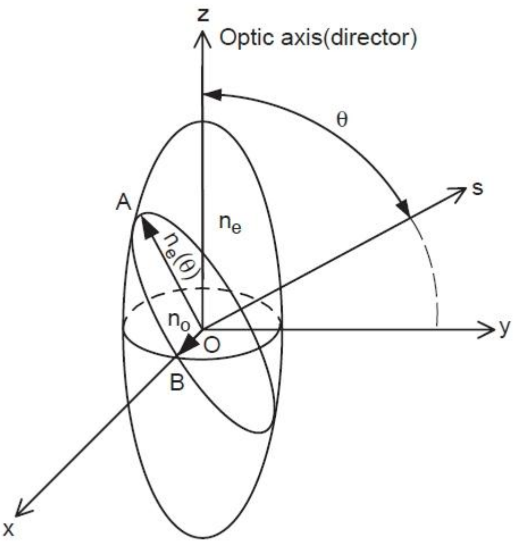
Σε αυτό το σημείο πρέπει να διευκρινιστεί ότι οι μεταβολές στο δείκτη διάθλασης που εξετάζουμε, αναφέρονται σε καταστάσεις ισορροπίας και όχι σε δυναμικές καταστάσεις. Αυτό συμβαίνει διότι, όταν, για παράδειγμα, έχουμε ένα δείγμα στο οποίο προσπίπτουν υπερβραχείς παλμοί τα μόρια διαταράσσονται τοπικά και η χαλάρωση επέρχεται σε χρόνους μεγαλύτερους από τη διάρκεια του παλμού. Επομένως, υφίσταται μια υστέρηση στην απόκριση και αυτό που είναι μετρήσιμο και εν τέλει μας ενδιαφέρει, είναι η ολική επίδραση της μεταβολής της θερμοκρασίας στο υλικό και όχι η τοπική αύξηση της θερμοκρασίας που δεν είναι χαρακτηριστική όλου του δείγματος.

1.5.5 *Διάδοση οπτικού πεδίου μέσα σε νηματικό ΥΚ*

Ένας νηματικός υγρός κρύσταλλος εμφανίζει μονοαξονική ανισοτροπία, δηλαδή διαθέτει ένα άξονα συμμετρίας και όλες οι εγκάρσιες σε αυτόν διευθύνσεις είναι οπτικά ισοδύναμες. Η οπτική πόλωση ενός τέτοιου μέσου περιγράφεται από το διηλεκτρικό τανυστή, $\ddot{\varepsilon}$.

$$\ddot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix} \quad (1.72)$$

Τα στοιχεία του τανυστή $\ddot{\varepsilon}$ προσδιορίζονται από το ελλειψοειδές των δεικτών διάθλασης, Σχ.1.7.



Σχ.1.7 *Ελλειψοειδές δεικτών διάθλασης.* $n_\perp, n_\parallel$ *είναι ο κανονικός και υπερκανονικός δείκτης διάθλασης.* $\boldsymbol{S}$ *είναι το διάνυσμα της διεύθυνσης διάδοσης της ακτινοβολίας που σχηματίζει γωνία* θ *με τον οπτικό άξονα του κρυστάλλου. Ένα πεδίο πολωμένο στο (ΟΑ) «βλέπει» έναν υπερκανονικό δείκτη διάθλασης* $n_e(\theta)$.

Αν η διεύθυνση της οπτικής ακτινοβολίας βρίσκεται στο επίπεδο στο οποίο στρέφονται τα νηματικά μόρια, τα στοιχεία του τανυστή (εξ. 1.72) θα εξαρτώνται από τον κανονικό και υπερκανονικό δείκτη διάθλασης ($n_\perp, n_\parallel(\theta)$) και τη γωνία ανάμεσα στον οπτικό άξονα των νηματικών μορίων και τη διεύθυνση διάδοσης. Αν μάλιστα, το οπτικό πεδίο είναι πολωμένο στη διεύθυνση του υπερκανονικού δείκτη, $n_e(\theta)$, τότε το οπτικό πεδίο «βλέπει» δείκτη διάθλασης που από το ελλειψοειδές (Σχ. 1.7) βρίσκεται ότι είναι,

$$n_\parallel(\theta) = n_\parallel n_\perp / \left[n_\parallel^2 \cos^2(\theta) + n_\perp^2 \sin^2(\theta) \right]^{1/2} \quad (1.73)$$

Η εξίσωση που περιγράφει τη διάδοση της ακτινοβολίας είναι παραπλήσια της NLS [45],

$$2ik\frac{\partial A}{\partial z} + \nabla_\perp^2 A + k_0^2 \left(n_\parallel^2 - n_\perp^2 \right) \left[\sin^2(\theta) - \sin^2(\theta_0) \right] A = 0, \quad (1.74)$$

όπου A είναι η περιβάλλουσα του διαδιδόμενου πεδίου και θ_0 η γωνία που σχηματίζει ο οπτικός άξονας των μορίων με τη διεύθυνση της διάδοσης απουσία οπτικού πεδίου. Η γωνία αυτή επιβάλλεται μέσω της εφαρμογής εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου σε δείγμα νηματικού υγρού κρυστάλλου για να ξεπεραστούν φαινόμενα κατωφλίου (μετάβαση Freedericksz) ενώ η γωνία θ είναι η συνολική επιβαλλόμενη στροφή των νηματικών μορίων συμπεριλαμβανομένης της συνεισφοράς λόγω του διαδιδόμενου οπτικού πεδίου. Τέλος, k_0 είναι ο κυματάριθμος στο κενό και k ο κυματάριθμος για $n_{\parallel}(\theta)$.

Η εξ. 1.74 αποτελεί την εξίσωση διάδοσης, στην οποία ωστόσο η γωνία θ ανάμεσα στον άξονα των νηματικών μορίων με τη διεύθυνση διάδοσης δεν είναι σταθερή, αλλά είναι συζευγμένη με την εξέλιξη του οπτικού πεδίου. Επομένως, απαιτείται μια ακόμη εξίσωση για την πλήρη περιγραφή του προβλήματος. Αυτή η εξίσωση προκύπτει από την ελαχιστοποίηση τη Λαγκρατζιανής που περιγράφει τις διαδικασίες στροφής των μορίων.

Η παραπάνω Λαγκρατζιανή θα έχει δύο όρους, έναν που αντιστοιχεί στην ηλεκτρομαγνητική συνεισφορά και έναν που αντιστοιχεί στην ελαστική. Δηλαδή, $L = L_{\varepsilon\lambda} + L_{\eta\lambda}$.

Το κομμάτι της Λαγκρατζιανής που αναφέρεται στα ελαστικά φαινόμενα $L_{\varepsilon\lambda}$, ουσιαστικά είναι η συνολική πυκνότητα ελεύθερης ενέργειας παραμόρφωσης $F_{o\lambda}$, που δόθηκε στην εξ. 1.69, ενώ το κομμάτι της ηλεκτρικής συνεισφοράς στη συνολική Λαγκρατζιανή είναι

$$L_{\eta\lambda} = -\frac{\Delta\varepsilon}{2}\langle \hat{n}\cdot \boldsymbol{E}\rangle \tag{1.75}$$

Επομένως, η συνολική Λαγκρατζιανή του συστήματος θα είναι [46],

$$L = \frac{1}{2}K_1\left(\nabla\cdot\hat{n}\right)^2 + \frac{1}{2}K_2\left(\hat{n}\cdot\nabla\times\hat{n}\right)^2 + \frac{1}{2}K_3\left(\hat{n}\times\left(\nabla\times\hat{n}\right)\right)^2 - \frac{\Delta\varepsilon}{2}\langle \hat{n}\cdot \boldsymbol{E}\rangle \tag{1.76}$$

Μια κατάσταση ισορροπίας του συστήματος θα αντιστοιχεί σε μια σταθερή κατανομή των γωνιών των μορίων, όπως αυτή δίνεται από τον προσανατολισμό του οπτικού άξονα του κάθε μορίου περί τη μέση διεύθυνση των μορίων, και θα αντιστοιχεί σε ελάχιστο του ολοκληρώματος δράσης,

$$\delta S = \delta\int L dx dy dz = 0 \tag{1.77}$$

Η εφαρμογή της εξ. 1.77 δίνει την εξίσωση που περιγράφει την κατανομή των γωνιών των μορίων νηματικού κρυστάλλου, υπό την επίδραση σταθερού ηλεκτρικού πεδίου E και οπτικού πεδίου με περιβάλλουσα A. Για τη εξαγωγή της εξ. 1.78 κάνουμε την παραδοχή της μοναδικής σταθεράς παραμόρφωσης που αναφέρθηκε παραπάνω ($K = K_1 = K_2 = K_3$). Επίσης, αγνοούνται φαινόμενα ροής, που εν γένει, εισάγουν όρους με χρονική εξάρτηση.

$$K\nabla^2\theta + \left(\frac{\Delta\varepsilon_{RF}\left|E_x\right|^2}{2} + \frac{\varepsilon_0\left(n_{\parallel}^2 - n_{\perp}^2\right)\left|A\right|^2}{4}\right)\sin 2\theta = 0 \tag{1.78}$$

Για την εξ. 1.78 έχει υποτεθεί ηλεκτρικό πεδίο E_x που εφαρμόζεται σε διεύθυνση x κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης z και επί του επιπέδου στροφής των νηματικών μορίων. Το οπτικό πεδίο θεωρείται πολωμένο στην ίδια διεύθυνση x [49].

Οι εξισώσεις 1.74-1.78 αποτελούν ένα σύστημα συζευγμένων εξισώσεων και είναι μια ειδική περίπτωση τη γενικής εξίσωσης 1.39 που δίνει σολιτονικές λύσεις μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Το σύστημα των εξ. 1.74-1.78 μπορεί να περιγράψει πλήρως την οπτική διάδοση και μπορεί να λυθεί αριθμητικά με εφαρμογή της μεθόδου οπτικής διάδοσης. Συνηθίζεται δε να μετασχηματίζεται σε αδιάστατη μορφή, αφού η γωνία θ γραφεί στη μορφή $\theta = \theta_0 + \varphi$ και γίνει γραμμικοποίηση ως προς φ ως εξής [49]:

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \nabla^2 u + \varphi u = 0 \qquad (\alpha)$$

$$\nabla^2 \varphi - \alpha^2 \varphi + |u|^2 = 0 \qquad (\beta) \qquad (1.79)$$

όπου α μια σταθερά που περιγράφει το βαθμό της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς του μέσου.

Στο κεφάλαιο 4 θα γίνει χρήση του συστήματος των εξισώσεων 1.74-1.78, αφού πρώτα οι εξισώσεις μετασχηματιστούν κατάλληλα, για να μελετηθεί η διάδοση σε διαμορφωμένο κατά την εγκάρσια διεύθυνση δείγμα νηματικού κρυστάλλου, λαμβάνοντας υπόψη και χρονικά φαινόμενα.

Κεφάλαιο 2

Δυναμική σολιτονικών κυμάτων σε μέσα με μη εντοπισμένη συμπεριφορά, με εγκάρσια και διαμήκη διαμόρφωση

Στο παρόν κεφάλαιο διερευνάται η διάδοση οπτικών δεσμών σε μη γραμμικά μέσα με μη εντοπισμένη συμπεριφορά, τα οποία έχουν διαμορφωθεί τόσο κατά την εγκάρσια διεύθυνση, όσο και κατά τη διεύθυνση διάδοσης της οπτικής δέσμης. Το μοντέλο που εφαρμόζεται βασίζεται σε γενική έκφραση της διακριτής μη γραμμικής εξίσωσης Schroedinger (DNLS), με απευθείας διαμόρφωση του βαθμού της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Το μοντέλο έχει ως αναφορά τους νηματικούς υγρούς κρυστάλλους, όπως έχουν ερευνηθεί πειραματικά από διάφορες επιστημονικές ομάδες. Η συστηματική μελέτη που πραγματοποιείται κάνει χρήση της μεταβολικής μεθόδου και μέσω αυτής διερευνάται η εξάρτηση της σολιτονικής δυναμικής από τις αρχικές συνθήκες και τις γεωμετρικές παραμέτρους της προτεινόμενης διάταξης. Θα δειχθεί ότι η διαμήκης διαμόρφωση επιφέρει σημαντικές μεταβολές στα δυναμικά χαρακτηριστικά της σολιτονικής διάδοσης, σε σχέση με τα ομογενή κατά τη διαμήκη διεύθυνση μέσα. Τα νέα αυτά χαρακτηριστικά συνιστούν νέες δυνατότητες δρομολόγησης και ελέγχου της σολιτονικής διάδοσης. Τέλος, διερευνάται αριθμητικά η ευστάθεια στη διάδοση οπτικών σχηματισμών, των οποίων η αρχική κατατομή σε μέσα εντοπισμένης συμπεριφοράς δίνει τοπολογικά και επίπεδης κορυφής σολιτόνια. Αποκαλύπτεται η ιδιότητα εντοπισμένης διάδοσης σε μη εντοπισμένης συμπεριφοράς μέσα, με την εφαρμογή διαμήκους διαμόρφωσης και επομένως η δυνατότητα της κατά επιλογή οπτικής δρομολόγησης.

2.1 Εισαγωγικά

Μια πληθώρα εγκάρσια περιοδικών οπτικών συστημάτων είναι γνωστό ότι περιγράφονται από τη διακριτή μη γραμμική εξίσωση Schroedinger (DNLS) [21], η οποία, επίσης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση της δυναμικής διαφόρων άλλων μη γραμμικών συστημάτων στη φυσική στερεάς κατάστασης [50], στη βιολογία [51] και σε συμπυκνώματα Bose-Einstein[52]. Από την πλευρά της υλοποίησης διακριτών οπτικών συστημάτων, η χρήση των νηματικών υγρών κρυστάλλων έχει αποδειχθεί σε πολλές περιπτώσεις ότι εμφανίζει συγκεκριμένα πλεονεκτήματα, που προκύπτουν από τις φυσικές ιδιότητες των νηματικών υγρών κρυστάλλων [46]. Από τις τελευταίες, ιδιαίτερης σημασίας είναι η υψηλή μη γραμμική απόκριση, η διπλοθλαστικότητα, η μη εντοπισμένη συμπεριφορά και η δυνατότητα ρύθμισης μέσω της γεωμετρίας της διάταξης και των παραμέτρων της οπτικής πηγής. Την τελευταία δεκαετία, διάφορες γεωμετρικές διατάξεις και συνδυασμοί παραμέτρων δέσμης έχουν διερευνηθεί θεωρητικά και πειραματικά, στο πλαίσιο των υγρών κρυστάλλων [53]. Η έμφαση σε όλες αυτές τις μελέτες ήταν η συσχέτιση της μη γραμμικότητας και της περίθλασης, καθώς επίσης και η επίδραση της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς στη δυναμική του συστήματος [49]. Ανάμεσα στις σχετικές διατάξεις που έχουν μελετηθεί, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει αυτή που περιλαμβάνει ένα λεπτό υμένιο δείγματος νηματικού υγρού κρυστάλλου, στο οποίο εφαρμόζεται μια εγκάρσια διαμόρφωση με τη βοήθεια ηλεκτροδίων τοποθετημένων παράλληλα στην διεύθυνση της διάδοσης [54]. Μια άλλη διάταξη που έχει προταθεί χρησιμοποιεί μια διευθέτηση τύπου χτένας των ηλεκτροδίων, κατά μήκος της διάδοσης της δέσμης [55]. Αυτού του είδους οι διατάξεις, καθώς και άλλες παρόμοιες που έχουν προταθεί, έχουν ως στόχο, μέσω της διαμόρφωσης του δείκτη διάθλασης του μέσου, τον έλεγχο της κατεύθυνσης της δέσμης και την ανάδειξη περιοχών τιμών για τις παραμέτρους της δέσμης και της διάταξης, στις οποίες το οπτικό πεδίο εμφανίζει εύρωστους εντοπισμένους σχηματισμούς [π.χ. 56, 57].

Σε σχέση με το προαναφερθέν ζητούμενο, ερευνητικές ομάδες έχουν προτείνει τη διαμόρφωση του μέσου κατά τη διεύθυνση διάδοσης [58]. Υιοθετώντας μια τέτοια προσέγγιση οδηγεί σε ποιοτικά διαφορετικά δυναμική στη οπτική διάδοση, με ενδιαφέρουσα συμπεριφορά κατά την κυματοδήγηση. Αν, δε, θεωρήσουμε, επιπλέον του προηγούμενου, τη διάταξή μας διακριτή κατά την εγκάρσια διεύθυνση, τότε είναι ευοίωνη η αναζήτηση νέων ενδιαφερόντων χαρακτηριστικών διάδοσης. Μια διάταξη όπως στοιχειοθετείται παραπάνω είναι το αντικείμενο μελέτης του παρόντος κεφαλαίου. Πριν όμως δούμε αναλυτικά το προτεινόμενο μοντέλο και την ανάλυση της δυναμικής του συστήματος, κρίνεται σκόπιμο να γίνει αναφορά σε ένα πολύ σημαντικό εργαλείο απεικόνισης της δυναμικής ενός συστήματος, τις επιφάνειες τομών Poincare.

2.1.1 Απεικόνιση της δυναμικής συστήματος μέσω επιφανειών τομών Poincare

Για να περιγράψουμε τη διαδικασία κατασκευής των επιφανειών τομών Poincare, σαν ένα εργαλείο απεικόνισης της δυναμικής ενός συστήματος, θα δώσουμε αρχικά κάποια στοιχεία Χαμιλτονιανής μηχανικής [59, 60]. Η συνάρτηση που περιγράφει τη δυναμική ενός μηχανικού συστήματος με διανύσματα θέσης και ταχύτητας, $\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$, είναι η Λαγκρατζιανή,

$$L(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)=T(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q})-U(\boldsymbol{q},t), \tag{2.1}$$

με T, την κινητική ενέργεια και U, τη δυναμική ενέργεια. Η ποσότητα της εξ. 2.1 με την απαίτηση για ικανοποίηση της μεταβολικής αρχής, $\delta\int Ldt=0$, θα υπακούει στις εξισώσεις Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \tag{2.2}$$

Ορίζουμε τώρα ως Χαμιλτονιανή του συστήματος, μετασχηματίζοντας κατά Legendre, τη Λαγκρατζιανή συνάρτηση,

$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t)=\sum_i \dot{\boldsymbol{q}}_i\boldsymbol{p}_i-L(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t) \tag{2.3}$$

Αν η Χαμιλτονιανή δεν έχει εξάρτηση από το χρόνο, τότε αυτή είναι μια σταθερή της κίνησης και το σύστημα χαρακτηρίζεται ως αυτόνομο. Στην αντίθετη περίπτωση το σύστημα χαρακτηρίζεται ως μη αυτόνομο.

Ορίζοντας με $p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ τη συζυγή μεταβλητή του q_i, οδηγούμαστε στις εξισώσεις του Hamilton,

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{2.4}$$

Τα $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$, όπως ορίζονται στις εξ. 2.4, αποτελούν αντίστοιχα τις γενικευμένες ορμές και τις συζυγείς γενικευμένες συντεταγμένες του προβλήματος και ο χώρος $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$, που ορίζουν, είναι ο φασικός χώρος του συστήματος. Το πλήθος των βαθμών ελευθερίας N του συστήματος καθορίζει τις διαστάσεις του φασικού χώρου, που θα είναι $2N$. Χαρακτηριστική ιδιότητα του φασικού χώρου είναι ότι κατά τη μετάβαση από μια χρονική κατάσταση σε μια άλλη η τροχιά που διαγράφεται δε μπορεί να τέμνεται με άλλη τροχιά μετάβασης, καθώς σε περίπτωση τομής οι τιμές των $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ θα αποτελούσαν κοινές αρχικές συνθήκες. Επιπλέον, το ολοκλήρωμα της πυκνότητας των σημείων που ορίζουν τον φασικό χώρο είναι σταθερό, δηλαδή η ροή σε έναν φασικό χώρο είναι ασυμπίεστη. Το τελευταίο είναι γνωστό σαν θεώρημα Liouville και είναι σημαντικό εργαλείο για τη μελέτη της δυναμικής ενός συστήματος.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα αυτόνομο σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας, ο φασικός του χώρος θα είναι τετραδιάστατος. Ένας τρόπος να παρακάμψουμε την προφανή δυσκολία απεικόνισης είναι να θεωρήσουμε μια δισδιάστατη επιφάνεια και να αποτυπώσουμε τις τομές των τροχιών κίνησης στο φασικό χώρο με την επιφάνεια αυτή. Μια βολική επιλογή της επιφάνειας μπορεί να γίνει αν παρατηρήσουμε ότι οι τροχιές κίνησης στον τετραδιάστατο φασικό χώρο βρίσκονται πάνω στην τρισδιάστατη ισοενεργειακή επιφάνεια $H(p_1,p_2,q_1,q_2)=H_0$, από την οποία μπορούμε να λύσουμε ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή, π.χ. την p_2, οπότε $p_2=p_2(p_1,q_1,q_2)$. Λογικό επόμενο βήμα είναι να θεωρήσουμε την προβολή της τροχιάς πάνω στον τρισδιάστατο χώρο (p_1,q_1,q_2), οπότε αν $q_2=\sigma\tau\alpha\theta$

είναι ένα επίπεδο, τότε αυτό θα τέμνεται επαναλαμβανόμενα από την τροχιά, αν θεωρήσουμε ότι η κίνηση είναι φραγμένη. Η προβολή της τροχιάς πάνω στο επίπεδο $q_2 = σταθ.$ είναι ένα σύνολο σημείων (p_1, q_1) και αν πέρα από τη σταθερή Χαμιλτονιανή υπάρχει κάποια ακόμη σταθερά της κίνησης, οι τομές των τροχιών με το επίπεδο θα δώσουν μια συνεχή καμπύλη, που αναπαριστά ομαλή κίνηση (επιφάνεια KAM). Απουσία μιας τέτοιας σταθεράς, το σύστημα δεν είναι ολοκληρώσιμο και το αποτύπωμα των τομών πάνω στο επίπεδο έχει στοχαστικά στοιχεία. Στην ουσία η επιφάνεια Poincare αποτελεί τον ανηγμένο φασικό χώρο, δηλαδή μια προβολή του φασικού χώρου σε μια επιφάνεια που χαρακτηρίζεται από μια σταθερά της κίνησης.

Αν υποθέσουμε ένα μη αυτόνομο σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας, πάλι μπορούμε να κάνουμε χρήση των επιφανειών Poincare. Το προκείμενο σύστημα εξαιτίας της χρονικής εξάρτησης λέμε ότι διαθέτει ενάμιση βαθμό ελευθερίας και η επιφάνεια Poincare είναι δισδιάστατη. Για την κατασκευή των επιφανειών γίνεται χρήση ενός «επεκταμένου» φασικού χώρου, που ορίζεται από τις επεκταμένες συντεταγμένες ($p_1, -H, q_1, t$), με τα $-H, t$ να αντιμετωπίζονται σαν ένα καινούργιο ζευγάρι συντεταγμένων. Βρίσκεται ότι η καινούργια Χαμιλτονιανή είναι

$$\bar{H}(\bar{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{q}}) = H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t) - H \qquad (2.5)$$

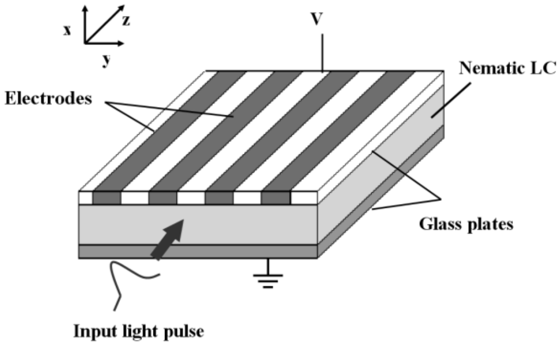
ενώ ορίζοντας μια καινούργια μεταβλητή «χρόνου», το ζ , παίρνουμε τις εξισώσεις του Hamilton (εξ. 2.6) στο επεκταμένο χώρο.

$$\frac{d\bar{p}_i}{d\zeta} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_i}, \quad \frac{d\bar{q}_i}{d\zeta} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i} \qquad (2.6)$$

Η χρήση των επιφανειών τομών Poincare επιτρέπει την διερεύνηση των ποιοτικών χαρακτηριστικών ενός δυναμικού συστήματος. Συγκεκριμένα, αναδεικνύει την ύπαρξη ομαλών καμπύλων KAM που αντιστοιχούν σε ολοκληρώματα της κίνησης, νησίδες ευστάθειας και αλυσίδες αυτών οι οποίες αντιστοιχούν σε περιοδικές ή ημιπεριοδικές κινήσεις και περιοχές στοχαστικότητας που μπορούν να περιορίζονται ή να επεκτείνονται ανάλογα με τη διαταραχή που υπεισέρχεται στις μεταβολικές εξισώσεις. Τέλος, επισημαίνουμε τη δυνατότητα επέκτασης της χρήσης του εργαλείου της απεικόνισης κατά Poincare σε συστήματα με περισσότερους από δύο βαθμούς ελευθερίας. Λόγω όμως του ότι η τομή Poincare έχει διαστάσεις $2N-2$, όπου N ο βαθμός ελευθερίας είναι προφανής η δυσκολία απεικόνισης για συστήματα με $N > 2$, καθώς οι υπερεπιφάνειες Poincare έχουν, πλέον, τέσσερις και άνω διαστάσεις.

2.2 Εξαγωγή γενικευμένης διακριτής NLS

Το πρόβλημα που θα εξεταστεί είναι η διάδοση οπτικού πεδίου σε διάταξη νηματικού υγρού κρυστάλλου στην οποία εφαρμόζεται εγκάρσια και διαμήκη διαμόρφωση του δείκτη διάθλασης του μέσου. Αντίστοιχη διάταξη (Σχ. 2.1), χωρίς όμως την διαμήκη διαμόρφωση έχει μελετηθεί στο παρελθόν από την ερευνητική ομάδα του Asssanto [54] και η μοντελοποίηση του σχετικού φυσικού προβλήματος προέβλεπε την εξαγωγή μιας διακριτής, μη γραμμικής εξίσωσης Schroedinger (DNLS). Αφετηρία της διαδικασίας εξαγωγής της DNLS αποτελεί η εξίσωση για την απόκριση των γωνιών των μορίων λόγω εξωτερικού πεδίου και διερχόμενου οπτικού πεδίου, όπως έχει παρουσιαστεί στο Κεφ. 1, καθώς και η εφαρμογή της θεωρίας συζευγμένων ρυθμών. Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε κάποια στοιχεία για τη διαδικασία εξαγωγής της εξίσωσης που περιγράφει το φυσικό πρόβλημα [54].



Σχ. 2.1 *Διάταξη επίπεδης γεωμετρίας με περιοδική διαμόρφωση κατά την εγκάρσια διεύθυνση*

Θεωρούμε τη διάταξη επίπεδης γεωμετρίας του Σχ. 2.1, όπου τα νηματικά κρυσταλλικά μόρια που βρίσκονται σε δείγμα λεπτού υμενίου υφίστανται την περιοδική εγκάρσια επίδραση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, όπως αυτό επιβάλλεται με παράλληλα προς τη διαμήκη διεύθυνση z ηλεκτρόδια. Όπως έχει αναφερθεί και στο Κεφ. 1, ο νηματικός υγρός κρύσταλλος αποτελείται από μόρια που είναι ραβδοειδούς μορφής και εμφανίζουν ηλεκτρική πόλωση κατά μήκος του άξονά τους, που στην περίπτωση απουσίας κάποιου πεδίου εμφανίζουν τυχαίες γωνίες ως προς το διαμήκη άξονα z. Όταν, όμως, εφαρμόζεται εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, τα μόρια τα οποία μπορούν να περιστρέφονται στο επίπεδο $\{x-z\}$, σχηματίζουν μια μέση γωνία στροφής ως προς τον άξονα της διεύθυνσης διάδοσης, καθώς το σύστημα τείνει να ελαχιστοποιήσει την ελεύθερη ενέργεια. Τα μόρια που βρίσκονται σε επαφή με τις επιφάνειες που οριοθετούν το δείγμα στη x-διάσταση είναι οριζόντια πακτωμένα, ενώ κατά μήκος του της x διάστασης αναπτύσσεται μια κατανομή γωνιών μορφής που προσεγγίζεται από γκαουσιανή. Αν $n_a^2 = n_\parallel^2 - n_\perp^2$ είναι η οπτική διπλοθλαστικότητα του νηματικού υγρού κρυστάλλου, με $n_\parallel$ και $n_\perp$ τους δείκτες διάθλασης παράλληλα και κάθετα ως προς τον κύριο άξονα των μορίων, τότε ο δείκτης διάθλασης που συναντά ένα *e*-πολωμένο (παράλληλο στο επίπεδο στροφής των μορίων) οπτικό πεδίο είναι $k = k_0\left(n_\parallel^2 \sin^2\hat{\theta}(y) + n_\perp^2 \cos^2\hat{\theta}(y)\right)^{1/2}$. Για την περιγραφή της περιοδικής εγκάρσιας ανομοιογένειας υποθέτουμε εφαρμοζόμενο ηλεκτρικό πεδίο χαμηλής συχνότητας της μορφής $E_x(x,y) = E_0\sqrt{1+\varepsilon F(y)}$, με $F(y) = F(y+\Lambda)$ και $\varepsilon < 1$, ενώ Λ είναι η εγκάρσια περιοδικότητα. Η εξίσωση που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της ελεύθερης ενέργειας δίνει για την κατανομή της μέσης γωνίας απόκλισης του κατευθυντή του μορίου την παρακάτω σχέση [46].

$$K\nabla_{xy}^2\theta_0 + \frac{\Delta\varepsilon_{RF}\left|E_x\right|^2}{2}\sin(2\theta_0) = 0\,, \tag{2.7}$$

όπου K είναι η ελαστική σταθερά του νηματικού υγρού κρυστάλλου, με την υπόθεση ότι ισχύει η προσέγγιση μονής σταθεράς, όπως είναι γενικά αποδεκτό κατά τη μελέτη φυσικών προβλημάτων νηματικών υγρών κρυστάλλων. $\Delta\varepsilon_{RF}$ είναι η ανισοτροπία που προκαλείται λόγω της ύπαρξης του ηλεκτρικού πεδίου.

Όταν μια *e*-πολωμένη οπτική δέσμη κατευθυνθεί στο δείγμα του νηματικού υγρού κρυστάλλου η εξ. 2.7 μετασχηματίζεται ώστε να περιλάβει και τον όρο της επίδρασης λόγω του οπτικού πεδίου στην εξ. 2.8.

$$K\nabla_{xy}^2\theta + \left(\frac{\Delta\varepsilon_{RF}\left|E_x\right|^2}{2} + \frac{n_a^2\varepsilon_0\left|\mathrm{A}\right|^2}{4}\right)\sin 2\theta = 0 \qquad (2.8)$$

Τώρα πλέον η συνολική κατανομή των γωνιών που σχηματίζει ο κύριος άξονας των μορίων με τη διεύθυνση διάδοσης μπορεί να γραφεί ως $\theta(x,y) = \theta_0(x,y)\left(1+\psi(x,y)\right)$, με το $\psi(x,y)$ να εκφράζει τη μη γραμμική οπτική συνεισφορά. Στα περισσότερα πειράματα η γωνία λόγω της στροφής των μορίων, εξαιτίας του ηλεκτρικού πεδίου μόνο, είναι $\theta_0 \le \pi/8$ και επομένως η πρώτης τάξης προσέγγιση για τη γωνία θ είναι δικαιολογημένη. Επίσης, η συμπεριφορά του μέσου όσον αφορά τη μη εντοπισμένη συμπεριφορά δεν είναι όμοια στις διευθύνσεις x, y και αυτό γιατί κατά τη διεύθυνση x, όπου η διάσταση του κελιού είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις, τα μόρια είναι πακτωμένα στα άκρα με αποτέλεσμα να καταπιέζεται η μη εντοπισμένη συμπεριφορά. Δεχόμενοι λοιπόν εντοπισμένη συμπεριφορά στη x, θα είναι $\partial_x^2\left(\theta_0\psi\right) \approx 0$ και υποθέτοντας την απόκριση όπως περιγράφεται από την ποσότητα $\psi(x,y)$ να είναι ασθενώς μη γραμμική, $\psi \ll 1$, οι εξ. 2.7 και 2.8 δίνουν

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{2}{\theta_0}\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{4\Delta\varepsilon_{RF}\left|E_x\right|^2}{2K}\psi + \frac{n_a^2\varepsilon_0\left|A\right|^2}{2K} = 0 \qquad (2.9)$$

Η εξ. 2.9 περιγράφει την απόκριση ψ του μέσου υπό την επίδραση του ηλεκτρικού και οπτικού πεδίου και η οποία μπορεί να δοθεί σε ολοκληρωτική μορφή με τη χρήση συνάρτησης Green ως εξής, $\psi = \iint G(\zeta - x, \eta - y)\left|A(\zeta,\eta)\right|^2 d\zeta d\eta$.

Στη συνέχεια για να εξαχθεί η διακριτή εξίσωση που αποδίδει τη διάδοση στο διαμορφωμένο κατά την εγκάρσια διεύθυνση μέσο, πρέπει να προσδιοριστεί η συνάρτηση Green. Αυτό μπορεί να γίνει όπως έχει δειχθεί [54] με μια σχετικά επίπονη προσέγγιση της οποίας, όπως είπαμε, θα δώσουμε μόνο κάποια στοιχεία των βημάτων που ακολουθούνται. Περιληπτικά, λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι από τις εξ. 2.7 και 2.8 είναι δυνατό να εξαχθεί η συνάρτηση Green ως εξής:

Οι εξ. 2.7, 2.9 μετασχηματίζονται σε αδιάστατη μορφή και δίνουν,

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial Y^2} + \beta\frac{\partial^2\vartheta}{\partial X^2} + \left(\frac{3}{4\theta_r^2}\alpha + \varepsilon f\right)\vartheta = 0 \qquad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial Y^2} - \gamma(\varepsilon) g + 2\sqrt{\alpha} u_0 = 0 \,, \qquad (2.11)$$

όπου η g αποτελεί μια κλίμακα της συνάρτησης Green ως προς τη γωνία ϑ και αν θέσουμε $\psi = 1/(k_0^2 n_a^4 \Lambda^2)\phi(X,Y)$ τότε θα είναι,

$$\phi = \iint g(\zeta - X, \eta - Y) / \vartheta(\zeta - X, \eta - Y) \left| a(\zeta, \eta) \right|^2 d\zeta d\eta \,, \qquad (2.12)$$

με $(x, y) = (Xd, Y\Lambda)$ και d την κατακόρυφη διάσταση.

Ακόμη είναι $A^2 = 8/\sqrt{3}\left(\sqrt{\Delta\varepsilon_{RF} K} E_0 / \varepsilon_0 k_0 n_a^4 \theta_r^2\right)$ με $\theta_0 = \theta_r \vartheta(X,Y)$ και $\vartheta(0,0) = 1$. Η ποσότητα f συνδέεται με τη συνάρτηση κατανομής της εξωτερικής διαμόρφωσης και ισχύει $F = (4\theta_r^2 / 3\alpha) f(Y)$ με $\alpha = \Lambda^2 / R_c^2$, $R_c^2 = 3K / 4\Delta\varepsilon_{RF} E_0^2 \theta_r^2$.

Τέλος, τα $\gamma(\varepsilon), \beta$ στις εξ. 2.10-2.11 θα είναι: $\gamma(\varepsilon) = \left(\alpha + \varepsilon(4\theta_r^2 f / 3)\right)\vartheta^2 + \partial^2\vartheta / \partial Y^2 \vartheta$ και $\beta = \Lambda^2 / d^2$.

Για την επίλυση της εξ. 2.11 πραγματοποιούμε χωρισμό μεταβλητών, οπότε προκύπτει

$$\frac{d^2\vartheta}{dY^2} + \left(\frac{3}{4\theta_r^2}\alpha + \varepsilon f\right)\vartheta = 0 \qquad (2.13)$$

Αφού τώρα θεωρήσουμε ανάπτυγμα $\vartheta = \sum_m \varepsilon^m \vartheta_m(Y)$ και αναπτύξουμε την ποσότητα $f(Y)$ σε βάση Fourier, $f = \sum_m \chi_m \exp(-2i\pi m Y)$, μπορούμε να πάρουμε για την γωνιακή απόκριση του μέσου τη λύση

$$\theta = 1 + \sum_m \varepsilon^m \vartheta_m(Y) = 1 + \varepsilon \sum_m \frac{\chi_m}{4\pi^2 m^2} \exp(-2i\pi m Y) + O(\varepsilon^2) \qquad (2.14)$$

Στη συνέχεια με αντικατάσταση της εξ. 2.14 στην εξ. 2.11 εξάγουμε την παρακάτω εξίσωση που μπορεί να δώσει τη συνάρτηση Green.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial Y^2} - \left(\alpha + \sum_m \varepsilon^m h_m(Y)\right) g + 2\sqrt{\alpha u_0} = 0 \qquad (2.15)$$

Με $g(X,Y) = u_0(X) g(Y)$, $h_1 = f(Y)\left((4\theta_r^2/3) - (1/\vartheta(Y))\right)$ και $h_m(Y) = h_m(Y+1)$. Η εξ. 2.15 για $u_0 \neq 0$, μπορεί να λυθεί αναπτύσσοντας σε σειρά τη συνάρτηση Green, ως εξής

$$g(Y) = \sum_m \varepsilon^m g_m(Y) \qquad (2.16)$$

Αντικαθιστώντας την προηγούμενη έκφραση στην εξ. 2.15 προκύπτει σύστημα εξισώσεων από το οποίο με εξίσωση των όρων της ίδιας τάξης του ε, και κάνοντας παραγοντοποίηση για τη συνάρτηση g με παράγοντες που περιγράφουν τη συνεισφορά της περιβάλλουσας και την επίδραση της περιοδικής επίδρασης στην πρώτη [$g(Y)=g_e(Y)g_{pn}(Y)$], προκύπτει η μέχρι πρώτου όρου έκφραση για τη συνάρτηση Green. Δηλαδή,

$$g(Y)=\exp(-\sqrt{\alpha}|Y|)\left(1+\sum_m \frac{h_{1m}}{4m(\alpha+m^2\pi^2)}\right.\\ \left.\times\left(m+3m\exp(-2i\pi mY)+\frac{2sign(Y)}{\pi\sqrt{\alpha}}\exp(-i\pi mY)\sin(m\pi Y)\right)\right) \tag{2.17}$$

Σε αυτό το σημείο γίνεται η παραδοχή ότι στο μοντέλο μας επικρατεί η σύζευξη ανάμεσα στους άμεσα γειτονικούς κυματοδηγούς, οπότε και μπορεί να γίνει χρήση της θεωρίας συζευγμένων ρυθμών και να γράψουμε την εξέλιξη κατά τη διεύθυνση διάδοσης του κάθε ιδιορυθμού. Συνεπώς θα είναι

$$i\frac{\partial Q_n}{\partial z}+C\left(Q_{n+1}+Q_{n-1}\right)+Q_n\sum_m \Gamma_{m,n}|Q_m|^2=0 \tag{2.18}$$

με $A=\sum_n Q_n(z)f_Q(x,y)\exp(-i\beta z)$, όπου f_Q και β είναι η ιδιοσυνάρτηση και η ιδιοτιμή του κάθε ρυθμού, ενώ $|Q_n|^2$ είναι η ισχύς ρυθμού στον κυματοδηγό n και C η σταθερά σύζευξης. Η ποσότητα $\Gamma_{m,n}$ είναι το μη γραμμικό ολοκλήρωμα επικάλυψης που δίνεται ως εξής

$$\Gamma_{m,n}=\frac{\omega\varepsilon_0}{4}\int\left|f_Q(x,y-n\Lambda)\right|^2 n_{2,\psi}(x,y)G(\zeta-x,\eta-y)\\ \times\left|f_Q(\zeta,\eta-m\Lambda)\right|^2 dxdyd\zeta d\eta, \tag{2.19}$$

όπου $n_{2,\psi}(x,y)=n_a^2\sin(2\theta_0)\theta_0/2n(\theta_0)$.

Παραγοντοποιώντας τη συνάρτηση Green $G(x,y)=G(x)G_p(y)G_e(y)$ όπου οι δείκτες « p », « e » αναφέρονται στην περιοδική συνεισφορά [$G_p(y)=G_p(y+\Lambda)$] και στην περιβάλλουσα, και δεχόμενοι ότι η περιβάλλουσα είναι αρκετά ευρύτερη από τον κυματοδηγούμενο ρυθμό, το ολοκλήρωμα της εξ. 2.19, γίνεται $\Gamma_{m,n}=G_e\left((m+n)\Lambda\right)Y$, με

$$Y=\frac{\omega\varepsilon_0}{4}\int\left|f_Q(x,y)\right|^2 n_{2,\psi}(x,y)G(\zeta-x)G_p(\eta-y)\\ \times\left|f_Q(\zeta,\eta)\right|^2 dxdyd\zeta d\eta \tag{2.20}$$

Επιστρέφοντας τώρα στην εξ. 2.18, μπορούμε να εισάγουμε σε αυτή τη 2.11 αφού πρώτα έχουμε ορίσει τα αδιάστατα πεδία $u_n=Q_n\sqrt{Y\coth(\kappa/2)/2C}\exp(-2i\xi)$ με $\xi=Cz$ και έχουμε θέσει $\kappa=\sqrt{\alpha}$ το συντελεστή της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς.

$$i\frac{\partial u_n}{\partial\xi}+(u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n)+2u_n\sum_m\frac{\exp(-\kappa|m+n|)}{\coth(\kappa/2)}|u_m|^2=0 \tag{2.21}$$

Η εξίσωση 2.21 αποτελεί μια διακριτή μη γραμμική εξίσωση Schroedinger, που περιγράφει ένα αυτόνομο σύστημα, και στης οποία το μη γραμμικό όρο έχει περιληφθεί ποσότητα που μπορεί να περιγράψει διάδοση μέσα σε μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Η μιγαδική ποσότητα u_n αντιστοιχεί στο πλάτος της περιβάλλουσας του οπτικού πεδίου στο n-στο κανάλι του πλέγματος, το οποίο ουσιαστικά αποτελεί ένα πηγάδι δυναμικού.

Η χρήση της θεωρίας συζευγμένων ρυθμών κατά την παραπάνω θεώρηση επέτρεψε τη μετάβασή μας από τις εξισώσεις 2.7-2.9, που δεν περιλαμβάνουν όρο διάδοσης, στην εξίσωση 2.21 που επιτρέπει τη μελέτη της διάδοσης οπτικής δέσμης. Πρέπει να σημειωθεί ότι, παρά το γεγονός ότι αφετηρία για την εξαγωγή της εξ. 2.21 ήταν ένα μοντέλο διάταξης νηματικών υγρών κρυστάλλων, η ίδια εξίσωση είναι γενικευμένη και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιοδήποτε μέσο με ή χωρίς εντοπισμένη συμπεριφορά. Στις επόμενες ενότητες θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω εξίσωση για να μελετήσουμε τόσο το αδιατάρακτο, όσο και το διαταραγμένο στη διεύθυνση διάδοσης πρόβλημα.

2.3 Μοντέλο

Η διάδοση του οπτικού πεδίου σε ανομοιογενές, κατά τη διεύθυνση της διάδοσης μέσου, έχει σημαντικά μεγάλη διαφοροποίηση από τη διάδοση σε ομοιογενές μέσο, και η δυνατότητα της ρύθμισης των επιπλέον παραμέτρων που εισάγονται λόγω της διαμήκους διαμόρφωσης, δίνουν ένα μεγάλο εύρος δυνατοτήτων για τη χειραγώγηση των δυναμικών ιδιοτήτων των σχετικών συστημάτων. Η διαμόρφωση του μέσου κατά τη διεύθυνση διάδοσης μπορεί να γίνει πειραματικά με διάφορους τρόπους ανάλογα με τη φύση του μέσου. Τέτοιοι τρόποι είναι η εφαρμογή εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου [61], η εφαρμογή θερμοκρασιακής βαθμίδας [62], η άσκηση μηχανικών πιέσεων [46] και βέβαια η διαφοροποίηση της σύνθεσης του μέσου κατά τη διεύθυνση διάδοσης. Βέβαια, αν δεν ενδιαφέρει η δυνατότητα ρύθμισης των παραμέτρων της διαμόρφωσης, μπορεί πολύ απλούστερα να χρησιμοποιηθούν διαδοχικά διαφορετικά μέσα.

Από την άλλη, για τη συστηματική μελέτη σχετικών διαταραγμένων προβλημάτων, είναι προφανές ότι γίνεται χρήση των εξισώσεων που χρησιμοποιούνται στα αδιατάρακτα. Στην απλούστερη περίπτωση, η μαθηματική σχέση που μοντελοποιεί τη διάδοση είναι μια μη γραμμική εξίσωση Schroedinger με τα χαρακτηριστικά της διαμόρφωσης να υπεισέρχονται γενικά, είτε στον όρο της μη γραμμικότητας [63, 64, 65], είτε στο συντελεστή της διασποράς ή της περίθλασης [66]. Ειδικά για την περίπτωση των διακριτών συστημάτων, η διαμόρφωση μπορεί, ακόμη, να βρίσκεται στο συντελεστή σύζευξης [21, 67]. Τέλος, όπως έχει προταθεί, η διαμόρφωση μπορεί να εγγραφεί για οπτικό σύστημα μέσου με μη εντοπισμένη συμπεριφορά ακόμη και στο συντελεστή που περιγράφει αυτή ακριβώς τη συμπεριφορά [68].

Το μοντέλο που προτείνεται για τη μελέτη του διαταραγμένου στην εγκάρσια και διαμήκη διεύθυνση μη εντοπισμένης συμπεριφοράς μέσου, είναι αυτό που απεικονίζεται για ένα δείγμα νηματικού υγρού κρυστάλλου στο Σχ. 2.1, όπου πλέον έχουν τοποθετηθεί ηλεκτρόδια παράλληλα και εγκάρσια προς τη διεύθυνση διάδοσης, με αποτέλεσμα την αντίστοιχη διαμόρφωση του συντελεστή μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Ομοίως, θα ήταν εφικτό το ίδιο αποτέλεσμα αν εκμεταλλευόμασταν την ιδιότητα της θερμικής μη γραμμικότητας, που εμφανίζουν οι νηματικοί υγροί κρύσταλλοι στους οποίους έχει εγχυθεί βαφή [62]. Όπως αναφέρθηκε, τα επιμηκυμένα μόρια του νηματικού κρυστάλλου είναι ηλεκτρικά πολωμένα κατά μήκος της μικρής διάστασης του κελιού, στο οποίο είναι εγκλωβισμένο το δείγμα του κρυστάλλου. Επιπλέον, τα μόρια τείνουν να αναπροσανατολίζονται κατά γωνία θ σε σχέση με τη διεύθυνση διάδοσης, όταν διεγείρονται από εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο ή από διερχόμενο οπτικό πεδίο, ώστε να ελαχιστοποιείται η ελεύθερη ενέργεια. Η εξίσωση που θα περιγράφει το μοντέλο υπό μελέτη θα είναι μια επέκταση της εξ. 2.21, όπου πλέον περιλαμβάνεται η διαμήκης διαμόρφωση ως εξής:

$$i\frac{\partial u_n}{\partial \xi}+(u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n)+2u_n\sum_m\frac{\exp(-\kappa(z)|m+n|)}{\coth(\kappa(z)/2)}|u_m|^2=0 \qquad (2.22)$$

Στην εξ. 2.22 το z είναι κανονικοποιημένο στο μήκος περίθλασης, ενώ τα πεδία είναι αδιάστατα. Πλέον, ο συντελεστής μη εντοπισμένης συμπεριφοράς $\kappa(z)$ εμφανίζει εξάρτηση από τη διαμήκη διάσταση, ενώ το άθροισμα στο μη γραμμικό όρο μοντελοποιεί τη μη γραμμική μη εντοπισμένη αλληλεπίδραση, ως τη μη γραμμική σύζευξη των καναλιών πέρα από τους άμεσους γείτονες. Στο εξής θα θεωρήσουμε ότι ο συντελεστής μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, ορίζεται ως εξής:

$$\kappa(z)=\kappa_0(1+e\cos(rz)), \qquad (2.23)$$

όπου κ_0 είναι μια τιμή αναφοράς για το συντελεστή μη εντοπισμένης συμπεριφοράς πάνω στην οποία εγγράφεται η διαμόρφωση, e είναι η ένταση της διαμόρφωσης και r είναι η χωρική της συχνότητα. Η διαμόρφωση της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς κατά μήκος της διεύθυνσης της διάδοσης (εξ. 2.23), όπως εισάγεται στην εξ. 2.22, δικαιολογείται στη βάση ότι η κλίση των μορίων του νηματικού κρυστάλλου οφείλεται στη διαμήκη διαμόρφωση του εφαρμοζόμενου εξωτερικού πεδίου. Υποθέτουμε ότι η μη γραμμικότητα και η μη εντοπισμένη συμπεριφορά που ελέγχονται από την παράμετρο $\kappa(z)$ είναι σύγχρονες σε απόκριση. Αυτή η υπόθεση είναι έγκυρη, όσο το εύρος της δέσμης είναι αρκετές φορές μεγαλύτερο από το μήκος κύματος της προσπίπτουσας δέσμης [68]. Πειράματα πάνω στο αδιατάρακτο κατά το διάμηκες μοντέλο, γενικά κάνουν χρήση εισερχόμενης οπτικής δέσμης με μήκος κύματος $1{,}064\mu m$ και προτείνουν τοποθέτηση ηλεκτροδίων κατά την εγκάρσια διεύθυνση, σε αποστάσεις $5\mu m$ μεταξύ τους [π.χ. 54]. Η εξαγωγή της αδιάστατης εξίσωσης 2.22 υποθέτει κανονικοποιήσεις στην παραπάνω περιοχή τιμών για τις φυσικές παραμέτρους και επομένως η απαίτηση για τη σχέση ανάμεσα στο εύρος της δέσμης και το μήκος κύματος ικανοποιείται με την προϋπόθεση ότι το εύρος της δέσμης είναι στην περιοχή των $5\mu m$.

Στην μελέτη που παρουσιάζεται, το ενδιαφέρον έγκειται ιδιαίτερα στη δυναμική των εντοπισμένων, σολιτονικής μορφής λύσεων, που διαδίδονται στο μέσο με τη μη εντοπισμένη συμπεριφορά, συντηρώντας το προφίλ και την ισχύ της οπτικής δέσμης. Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τη μεταβολική μέθοδο για να μελετήσουμε την εξέλιξη των ποσοτήτων που χαρακτηρίζουν τη δέσμη, δεχόμενοι χαρακτηριστικές τιμές γεωμετρικών μεγεθών της διάταξης και κατάλληλες αρχικές τιμές των υπό εξέταση ποσοτήτων. Παράλληλα, γίνεται αξιοποίηση της απεικόνισης της δυναμικής του συστήματος μέσω τομών Poincare, οι οποίες παρέχουν όλα τα ποιοτικά στοιχεία της οπτικής διάδοσης και μπορούν να αναδείξουν την κρίσιμη εξάρτηση της διάδοσης από τις παραμέτρους του μέσου και τις χαρακτηριστικές ποσότητες τις δέσμης. Τέλος, γίνονται συγκρίσεις των αποτελεσμάτων της μεταβολικής μεθόδου με αυτά της αριθμητικής επίλυσης της εξίσωσης διάδοσης.

2.4 Μεταβολική μέθοδος

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως η μελέτη του συστήματος που εξετάζουμε βασίζεται στη μεταβολική μέθοδο, της οποίας στοιχεία έχουν δοθεί στην εισαγωγή της διατριβής. Ο λόγος χρήσης της μεθόδου είναι ότι η εξ. 2.22, ως μη ολοκληρώσιμη, δεν είναι αναλυτικά επιλύσιμη. Άρα λοιπόν θα πρέπει να υποθέσουμε μια λύση της οποίας η μορφή γνωρίζουμε ότι προσεγγίζει την πραγματική συμπεριφορά της ζητούμενης λύσης και να διερευνήσουμε την εξέλιξη των χαρακτηριστικών ποσοτήτων της δέσμης. Σε αυτό το πνεύμα, θέτουμε τη Lagrangian τη συνδεόμενη με την εξ. 2.22 ως εξής,

$$L(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\left(u_n^*\frac{\partial u_n}{\partial z}-u_n\frac{\partial u_n^*}{\partial z}\right)-\left|u_{n+1}-u_n\right|^2+\tanh\frac{\kappa(z)}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\kappa(z)|m+n|}\left|u_m\right|^2\left|u_n\right|^2\right) \quad (2.24)$$

Επιλέγουμε δοκιμαστική λύση της μορφής,

$$u_n(z)=A(z)e^{i\varphi(z)+ib(z)|n|-\mu(z)|n|} \quad (2.25)$$

Η εξ. 2.25 έχει επιλεγεί με τη συγκεκριμένη μορφή, ως η πλέον διαδομένη για χρήση σε διακριτά συστήματα, καθώς έχει τη δυνατότητα να προσεγγίζει την εντοπισμένη φύση της λύσης που αναζητούμε, και να προσφέρει ευκολία στον αναλυτικό φορμαλισμό [69]. Στην εξ. 2.25 A είναι το πλάτος της εντοπισμένης λύσης, b μια παράμετρος που αντιστοιχεί στο τερέτισμα και μ είναι το αντίστροφο εύρος της δέσμης. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι η εγκυρότητα της δοκιμαστικής λύσης περιορίζεται σε τιμές του μ στην ευρύτερη περιοχή του $\mu=1$, ώστε η προαναφερθείσα απαίτηση για τη σχέση ανάμεσα στο εύρος της δέσμης και το μήκος κύματος να ικανοποιείται.

Εισάγοντας την εξ. 2.25 στην εξ. 2.26 και αθροίζοντας για n, m οδηγεί στην Λαγκρανζιανή πυκνότητα που διέπει τη δυναμική εξέλιξη των παραμέτρων της δοκιμαστικής λύσης

$$\begin{aligned}L_{eff}=&-2A^2\frac{1}{(\sinh\mu)^2}\frac{\partial b}{\partial z}-A^2\coth\mu\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{2A^2\cos b}{\sinh\mu}-2A^2\coth\mu\\&+A^4\tanh\frac{\kappa(z)}{2}\left(\frac{4}{(e^{6\mu}-e^{4\mu})(e^{\kappa(z)}-1)}+\frac{2}{e^{4\mu}-1}+\frac{e^{4\mu+2\kappa(z)}+2e^{2\mu+\kappa(z)}-1}{(e^{2\mu+\kappa(z)}-1)^2}\right)\end{aligned} \quad (2.26)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange που αντιστοιχούν στην εξ. 2.26, δίνουν τις παρακάτω εκφράσεις για την εξέλιξη των παραμέτρων:

$$\frac{d\mu}{dz}=-\frac{\left(e^{2\mu}-1\right)\left(e^{4\mu}-1\right)}{e^{\mu}\left(e^{4\mu}+1\right)}\sin b$$

$$\frac{db}{dz}=-\frac{1}{4(e^{4\mu}+1)}W\tanh\mu\left(-1+e^{8\mu}-2e^{6\mu}+2e^{2\mu}\right)\frac{dN\left(\mu;\kappa(z)\right)}{d\mu}+$$

$$\frac{2\left(e^{6\mu}+e^{2\mu}-2e^{4\mu}\right)}{e^{4\mu}+1}N(\mu;\kappa(z))-\frac{-e^{5\mu}+3e^{3\mu}-3e+e^{-\mu}}{e^{4\mu}+1}\cos b$$

(2.27)

όπου

$$N(\mu;\kappa(z))=\tanh\frac{\kappa(z)}{2}\left(\frac{4}{(e^{6\mu}-e^{4\mu})(e^{\kappa(z)}-1)}+\frac{2}{e^{4\mu}-1}+\frac{e^{4\mu+2\kappa(z)}+2e^{2\mu+\kappa(z)}-1}{(e^{2\mu+\kappa(z)}-1)^2}\right) \quad (2.28)$$

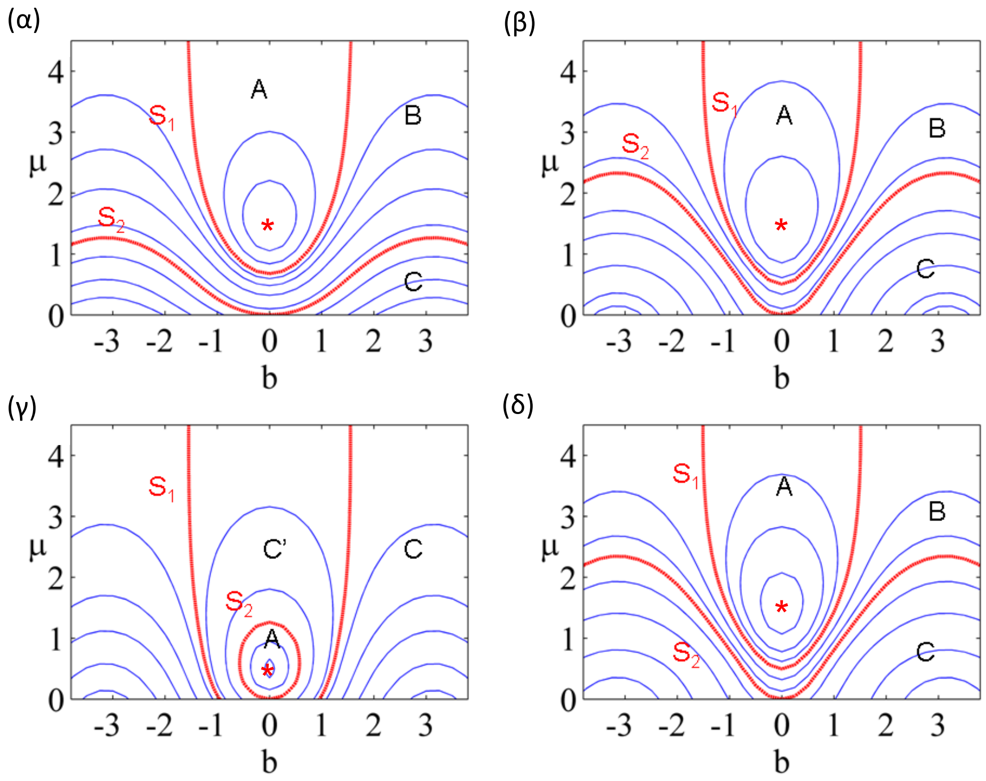
Η ποσότητα $N(\mu;\kappa(z))$ που δίνεται στην εξ. 2.28 έχει προκύψει από το διπλό άθροισμα της εξ. 2.24 με άθροιση σειρών, ενώ η ποσότητα W είναι μια διατηρούμενη ποσότητα, η χρήση της οποίας «ρίχνει» αλγεβρικά το αρχικό σύστημα των 4 μεταβλητών σε σύστημα 2 μεταβλητών. Η ποσότητα W αντιστοιχεί στη σολιτονική ισχύ, η οποία προκύπτει από τη μεταβολική εξίσωση της φάσης ότι είναι αναλλοίωτη, με $W=A^2\coth\mu$, αφού είναι: $\frac{d}{dz}\frac{\partial L}{\partial\varphi}=\frac{\partial L}{\partial\left(d\varphi/dz\right)}=0\Rightarrow\frac{d}{dz}(A^2\coth\mu)=0$. Οι εξισώσεις 2.27 περιγράφουν ένα δυναμικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας στο φασικό χώρο, που ορίζεται από το αντίστροφο εύρος μ και το τερέτισμα b .

Για την περίπτωση του αδιαμόρφωτου στη διεύθυνση διάδοσης συστήματος ($e=0$), το σύστημα είναι αυτόνομο και επομένως ολοκληρώσιμο, ενώ στην περίπτωση του διαμορφωμένου είναι μη αυτόνομο και μη ολοκληρώσιμο. Στην πρώτη περίπτωση το σύστημα έχει μια επιπλέον διατηρήσιμη ποσότητα H , που αντιστοιχεί στη Χαμιλτονιανή του αρχικού συστήματος, όπως αυτό ορίζεται στην εξ. 2.20 και είναι

$$H=-\frac{2W\cos b}{\cosh\mu}+2W-W^2N(\mu;\kappa_0)\tanh^2\mu \quad (2.29)$$

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη του δυναμικού συστήματος, κρίνεται σημαντικό να δοθεί έμφαση στο κατά τη διεύθυνση της διάδοσης αδιαμόρφωτο πρόβλημα ($e=0$), στο οποίο η τοπολογία του φασικού χώρου του συστήματος μπορεί να εξαχθεί άμεσα από διαγράμματα ισοϋψών καμπύλων για τη διατηρούμενη ποσότητα H . Σχετικά διαγράμματα ισοϋψών καμπύλων φαίνονται στο Σχ. 2.1.

Από τις εξ. 2.27 μπορούμε να εξάγουμε τα κρίσιμα σημεία του συστήματος. Ένα απομονωμένο κρίσιμο σημείο που βρίσκεται στη θέση $(\mu,b)=(\mu_0,0)$ (συμβολίζεται με αστέρι στο Σχ. 2.2) αναφέρεται σε στάσιμη σολιτονική διάδοση με σταθερές παραμέτρους. Γύρω από τα κρίσιμα σημεία τα σολιτόνια πραγματοποιούν αρμονικές ταλαντώσεις μικρού πλάτους με μέγιστη συχνότητα ω, η οποία μπορεί να βρεθεί ως η φανταστική ιδιοτιμή της γραμμικοποιημένης κίνησης γύρω από το αντίστοιχο κρίσιμο σημείο. Αρχικές συνθήκες αρκετά μακριά από το κρίσιμο σημείο αντιστοιχούν σε ταλαντώσεις με μικρότερη συχνότητα μέχρι



Σχ. 2.2 *Φασικοί χώροι για την αδιαμόρφωτη περίπτωση ($e=0$) για διαφορετικές ομάδες παραμέτρων, (α) $\kappa_0=1$, $W=7.97$; (β) $\kappa_0=5$, $W=2.51$; (γ) $\kappa_0=1$, $W=2.5$; (δ) $\kappa_0=5$, $W=2.5$. Τα κρίσιμα σημεία (μ, b)=(μ_0, b) που αντιστοιχούν σε στάσιμη διάδοση συμβολίζονται ως αστέρια. Οι χαρακτηριστικές τροχιές (S_1), (S_2) που διαχωρίζουν τις περιοχές με ποιοτικά διαφορετική σολιτονική εξέλιξη παρουσιάζονται με κόκκινες (παχιές) γραμμές.*

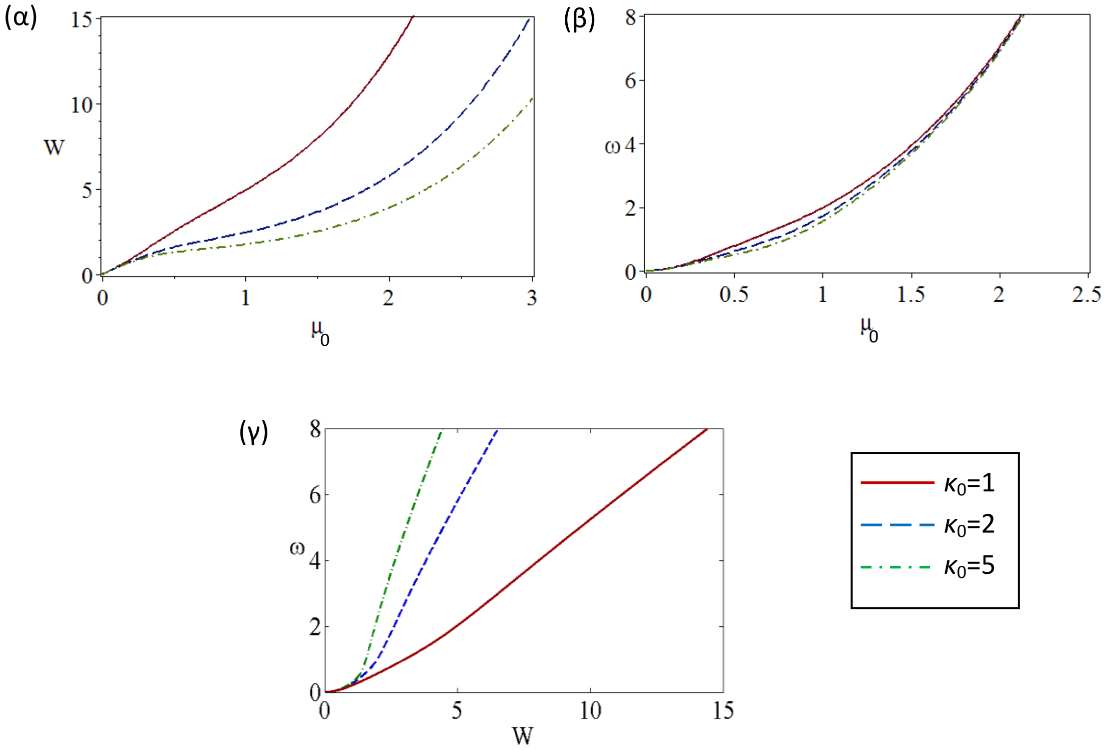
και της μηδενικής τιμής, με την τελευταία να δίνει την τροχιά που δίνεται στο Σχ. 2.2 ως η διαχωρίζουσα (S_1). Η συχνότητα ω, σα συνάρτηση με το αντίστροφο εύρος (μ_0) και την ισχύ (W) , καθώς και η σχέση ανάμεσα στα μ_0 και W παρουσιάζονται στο Σχ. 2.3. Ένα συνεχές σύνολο κρίσιμων σημείων βρίσκεται κατά μήκος της ευθείας $\mu=0$, με όλες τις γειτονικές αρχικές συνθήκες να αντιστοιχούν σε τροχιές που προσεγγίζουν την ευθεία $\mu=0$ από τις θετικές τιμές των μ, b.

Μπορούμε να διακρίνουμε τρείς κύριες περιοχές του φασικού χώρου που αντιστοιχούν σε ποιοτικά διαφορετική δυναμική, συγκεκριμένα: μια περιοχή (A) όπου μ και b είναι φραγμένα και ταλαντώνονται περιοδικά (παλινδρομικές ταλαντώσεις), μια περιοχή (B) όπου οι περιοδικές ταλαντώσεις είναι φραγμένες μόνο όσον αφορά το μ (περιστροφικές ταλαντώσεις) και μια περιοχή (C) όπου οι τροχιές πλησιάζουν ασυμπτωτικά τον $\mu=0$ άξονα. Οι τελευταίες μπορούμε να δεχθούμε ότι αντιστοιχούν σε διάδοση κατά την οποία πραγματοποιείται διάλυση της αρχικής δέσμης. Οι τρεις προηγούμενες περιοχές διαχωρίζονται μεταξύ τους από δύο χαρακτηριστικές καμπύλες, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.2, μια διαχωρίζουσα (S_1) που προκύπτει από την $H(\mu\rightarrow\infty)$ και από μια τροχιά εφαπτόμενη στον άξονα $\mu=0$

για τιμή τερετίσματος $b=0$ που αντιστοιχεί στην $H(\mu=0,b=0)=0$. Η αναλυτική έκφραση για την πρώτη καμπύλη (S_1) δίνεται από την εξ. 2.30,

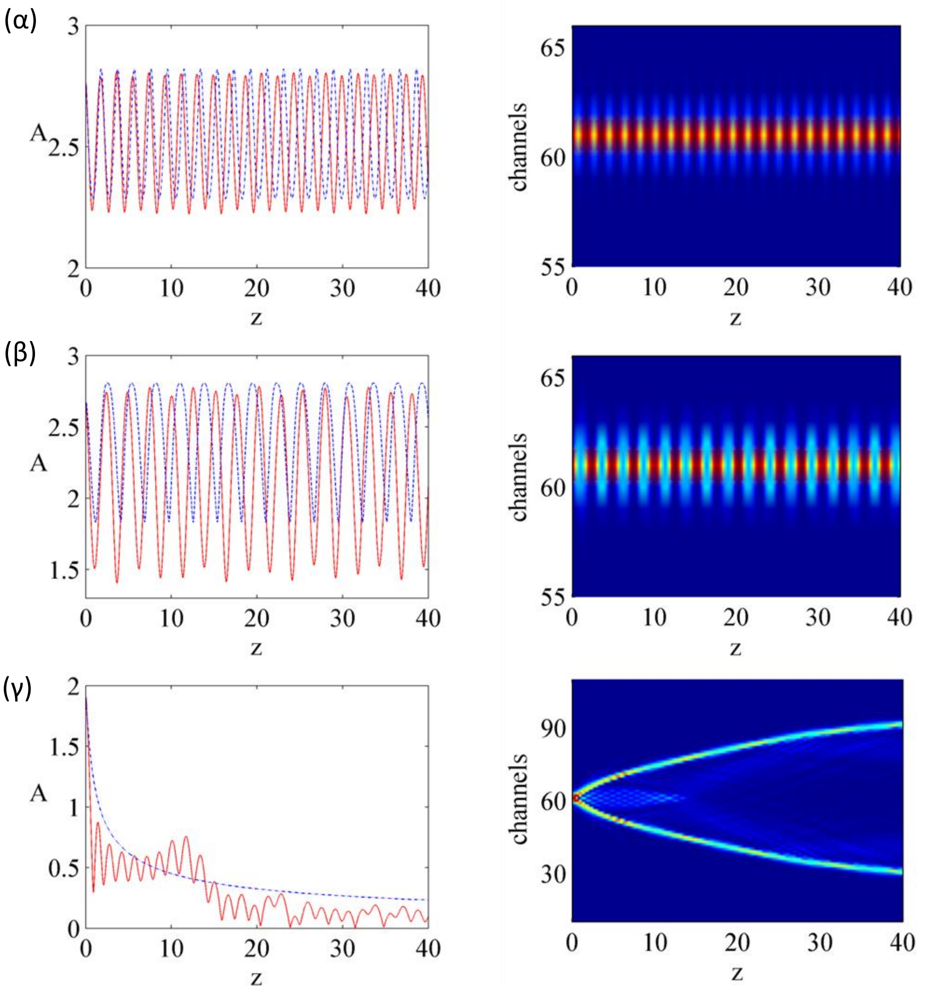
$$H(\mu,b)=H(\mu\to\infty)=\frac{W^2-W^2\cosh\kappa_0+2W\sinh\kappa_0}{\sinh\kappa_0}\,, \qquad (2.30)$$

και παρέχει μια περιοδική τροχιά άπειρης περιόδου. Να σημειωθεί ότι ανάλογα με τη σχετική θέση των (S_1) και (S_2), η περιοχή (B) μπορεί να εξαφανίζεται, όπως συμβαίνει στο Σχ. 2.2(γ).



Σχ. 2.3 *(α) Σχέση ανάμεσα στη σολιτονική ισχύ W και το αντίστροφο εύρος μ_0 για διάδοση στάσιμης λύσης στην αδιαμόρφωτη περίπτωση. (β), (γ) Η συχνότητα των μικρού πλάτους ταλαντώσεων γύρω από το στάσιμο σημείο σα συνάρτηση του μ_0 (β) και W (γ). Παρουσιάζονται περιπτώσεις διαφόρων βαθμών μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Η συνεχής (κόκκινη), διακεκομμένη (μπλε), διακεκομμένες με στίγματα (πράσινες) καμπύλες αντιστοιχούν σε βαθμούς μη εντοπισμένης συμπεριφοράς $\kappa_0=1,2,5$.*

Από την προηγούμενη ανάλυση του φασικού χώρου της δυναμικής του αδιαμόρφωτου συστήματος, γίνεται προφανές ότι σολιτόνια σε μέσα με διαφορετικούς συντελεστές μη εντοπισμένης συμπεριφοράς μπορούν να διαδίδονται χωρίς καταστροφική διάλυση, μόνο για συγκεκριμένους συνδυασμούς τιμών για το εύρος (μ^{-1}) και το τερέτισμα (b). Ακόμη, εξαιτίας του γεγονότος ότι η σχέση ανάμεσα στο αντίστροφο εύρος (μ_0) και την ισχύ (W) μιας στάσιμης λύσης εξαρτάται από τη μη εντοπισμένη συμπεριφορά, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.3(α), η ίδια τιμή μ_0 αντιστοιχεί σε διαφορετικές τιμές W, για μέσα με διαφορετικά κ_0. Σε μέσα με εντονότερα μη εντοπισμένη συμπεριφορά (Σχ. 2.2(α)), υψηλότερη ισχύς απαιτείται για διάδοση στάσιμης λύσης με συγκεκριμένο εύρος ($\mu_0 = 1.5$) σε σύγκριση με την περίπτωση ασθενέστερα μη εντοπισμένης συμπεριφοράς (Σχ. 2.2(β)). Συνεπώς, για δεδομένη προσπίπτουσα ισχύ ($W = 2.5$), στάσιμες λύσεις υπάρχουν για μέσα έντονα μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, με υψηλότερες τιμές αντίστροφου εύρους, όπως φαίνεται στα σχήματα 2.2(γ)-(δ). Ο φυσικός λόγος πίσω από αυτή τη διαπίστωση είναι ότι ισχύς από την οπτική δέσμη διεγείρει τα μόρια του μέσου μη εντοπισμένης συμπεριφοράς στην περιοχή της δέσμης, αφαιρώντας ισχύ από το ίδιο το οπτικό σολιτόνιο.



Σχ. 2.4 *Εξέλιξη του πλάτους για την περίπτωση απουσίας διαμόρφωσης ($e = 0$). Οι αντίστοιχες παράμετροι είναι, $\kappa_0 = 1$ και $W = 7.97$, όπως στο Σχ. 2.1(α). Οι αρχικές συνθήκες (α) $\mu = 2, b = 1$, (β) $\mu = 1.5, b = 1.5$, (γ) $\mu = 0.5, b = 2$ βρίσκονται στις περιοχές (A), (B) και (C), αντίστοιχα. Συνεχείς (κόκκινες)/διακεκομμένες (μπλε) γραμμές παράγονται με τη μεταβολική μέθοδο/αριθμητική προσομοίωση της DNLS. Στη δεξιά στήλη παρουσιάζεται η διάδοση της οπτικής δέσμης.*

Στο Σχ. 2.4 παρουσιάζεται η εξέλιξη του πλάτους του κεντρικού καναλιού, για περιπτώσεις που αντιστοιχούν στο Σχ. 2.2(α). Οι αρχικές τιμές των μ , b έχουν επιλεχθεί στις περιοχές του libration (A) ($\mu = 2, b = 1$, στο Σχ. 2.4(α)), του rotation (B) ($\mu = 1.5, b = 1.5$, στο Σχ. 2.4.(β)) και φθίνουσα συμπεριφορά (C) ($\mu = 0.5, b = 2$, στο Σχ. 2.4 (γ)). Οι αριθμητικές προσομοιώσεις που διεξήχθησαν πάνω στην εξ. (2.15) και τις μεταβολικές εξισώσεις (2.27), τα αποτελέσματα των οποίων παρουσιάζονται στο Σχ. 2.4, επιβεβαιώνουν την εξαιρετική συμφωνία των δύο μεθόδων, καθώς και οι δύο είναι σε θέση να αποτυπώνουν τόσο την ταλαντωτική, όσο και την φθίνουσα σολιτονική διάδοση, με την τελευταία να αντιστοιχεί σε διαχωρισμό δέσμης και δευτερεύουσα διακριτή περίθλαση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.4(γ). Αυτή η διαπίστωση διασφαλίζει την καταλληλότητα της μεταβολικής μεθόδου και υπογραμμίζει τη δυνατότητα για αξιόπιστη επέκταση στην περίπτωση της κατά το διάμηκες διαμόρφωσης, που θα δούμε στην επόμενη ενότητα. Τέλος, να σημειώσουμε την παρουσίαση της οπτικής διάδοσης στη δεξιά στήλη του Σχ. 2.4.

2.5 Διαμήκης διαμόρφωση

Η εισαγωγή της διαμήκους διαμόρφωσης εκδηλώνεται στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (2.27) που περιγράφει την εξέλιξη των σολιτονικών παραμέτρων, σαν ένας επιπλέον βαθμός ελευθερίας, που οδηγεί στη μη ολοκληρωσιμότητα του μοντέλου. Ενδιαφέρουσα σολιτονική δυναμική αναμένεται όταν η χωρική συχνότητα (r) βρίσκεται στην περιοχή τιμών που είναι συγκρίσιμες με τις συχνότητες ταλάντωσης των σολιτονικών παραμέτρων της αδιαμόρφωτης κατά το διάμηκες διάταξης. Σε αυτή την περίπτωση, οι συντονισμοί ανάμεσα στις σολιτονικές ταλαντώσεις (του αδιαμόρφωτου) και της διαμήκους διαμόρφωσης του μέσου προκαλούν δραστικές διαφοροποιήσεις του φασικού χώρου του συστήματος. Για την εύρεση των ιδιοτιμών του συστήματος των μεταβολικών εξισώσεων (2.27) γραμμικοποιούμε γύρω από τιμές στάσιμων λύσεων και εξάγουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων.

$$\alpha(\mu,b,W)\mu+\beta(\mu,b,W)b=\dot{b}$$

$$\gamma(\mu,b,W)\mu+\varepsilon(\mu,b,W)b=\dot{\mu} \qquad (2.31)$$

Με τους συντελεστές $a(\mu,b,W),\beta(\mu,b,W),\gamma(\mu,b,W),\varepsilon(\mu,b,W)$ να είναι ιδιαίτερα εκτεταμένες εκφράσεις και που για τιμές που αντιστοιχούν σε στάσιμες λύσεις, (για τις οποίες είναι $b=0$), προκύπτει $\beta(\mu,b,W)=0,\gamma(\mu,b,W)=0$, οπότε και οι ιδιοτιμές του συστήματος των μεταβολικών εξισώσεων θα δίνονται από την

$$\ddot{\mu}=-\varepsilon(\mu,b,W)\alpha(\mu,b,W)\mu \qquad (2.32)$$

με τον υπολογισμό της ποσότητας $\sqrt{\varepsilon(\mu,b,W)\alpha(\mu,b,W)}$.

κ_0	1			2			5		
W	3.04	4.95	8.11	1.97	2.61	3.82	1.55	1.89	2.65
μ_0	0.60	1.01	1.52	0.72	1.08	1.55	0.80	1.12	1.56
ω	1	2	4	1	2	4	1	2	4

Πίνακας 2.1 *Τιμές σολιτονικής ισχύος (W), αντιστρόφου εύρους (μ_0) για διάδοση σολιτονικής λύσης, συχνότητα μικρής ταλάντωσης γύρω από το στάσιμο σημείο (ω) για μέσα με διαφορετικά κ_0 . Οι τιμές των μ_0 και W έχουν επιλεγεί έτσι ώστε $\omega=1,2,4$ σύμφωνα με τις σχέσεις, όπως αυτές απεικονίζονται στο Σχ. 2.3.*

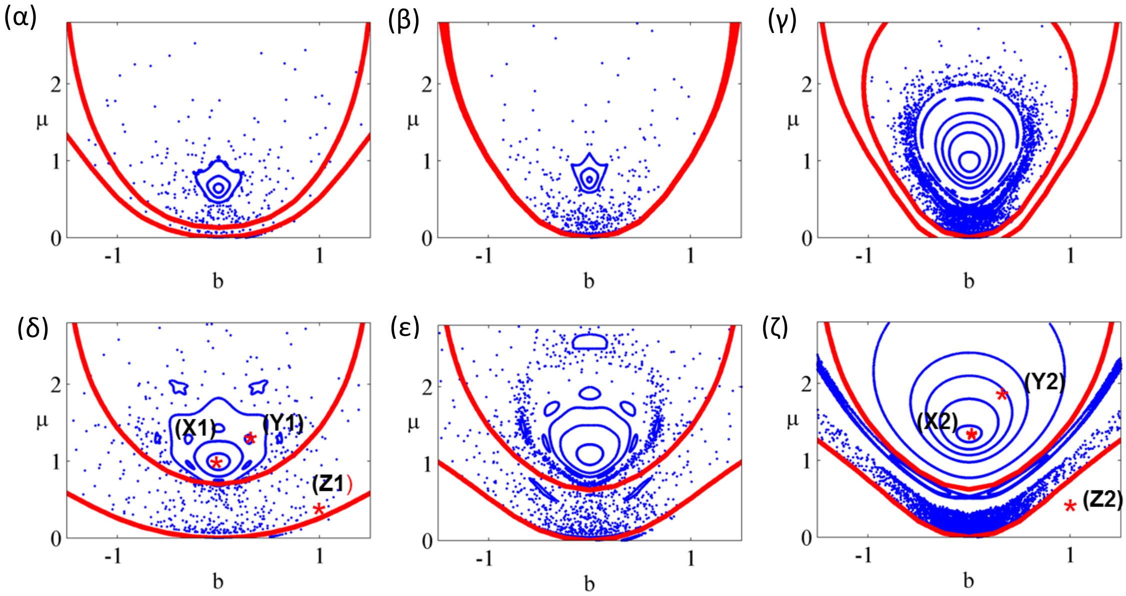
Με βάση τα παραπάνω, που ισχύουν για το αδιαμόρφωτο σύστημα, αρχικά η ανάλυσή μας θα επικεντρωθεί στις τιμές παραμέτρων που παρουσιάζονται στον πίνακα 2.1, όπως απεικονίζονται για διάφορες τιμές του συντελεστή μη εντοπισμένης συμπεριφοράς κ_0 και ιδιοτιμών συχνότητας (ω).

Διαφορετικοί συνδυασμοί των ρυθμιζόμενων φυσικών παραμέτρων (συντελεστής μη εντοπισμένης συμπεριφοράς κ_0, ένταση διαμόρφωσης e, χωρική συχνότητα διαμόρφωσης r) καθορίζουν τις περιοχές φραγμένης κίνησης ή φθίνουσας συμπεριφοράς του διαδιδόμενου οπτικού πεδίου, οι οποίες πλέον είναι διαφορετικές από αυτές που αντιστοιχούν στην αδιαμόρφωτη περίπτωση. Αυτές οι περιοχές μπορούν να ιδωθούν σε ένα επίπεδο τομών Poincare $\mu - b$, στο πλαίσιο του επεκταμένου φασικού χώρου του μη αυτόνομου συστήματος, όπως αυτά τα επίπεδα μπορούν να αναπαραχθούν στροβοσκοπικά σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου της διαμήκους διαμόρφωσης.

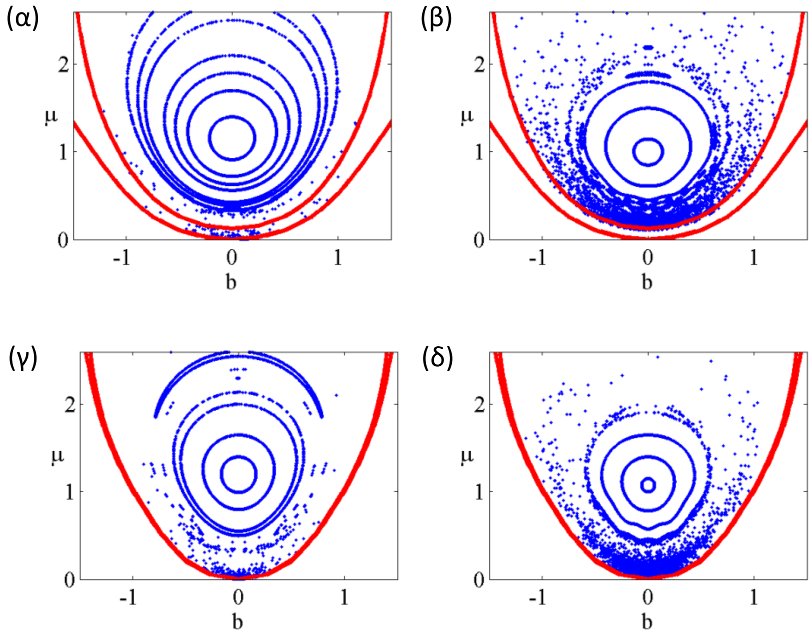
Στο Σχ. 2.5 παρουσιάζονται οι επιφάνειες των τομών Poincare για διάφορους συνδυασμούς και σύνολα παραμέτρων δέσμης (Πίνακας 2.1). Η ένταση της διαμόρφωσης είναι $e = 0.1$ και οι συχνότητες έχουν επιλεγεί ως $r = 2, r = 4$, που αντιστοιχούν σε περίπτωση 1:1 συντονισμού, με τις ταλαντώσεις μικρού πλάτους γύρω από το στάσιμο σημείο του αδιαμόρφωτου συστήματος. Από αυτά τα σετ επιφανειών τομών Poincare, η απόκλιση της δυναμικής του διαμορφωμένου συστήματος από τη δυναμική του αδιαμόρφωτου γίνεται ξεκάθαρο ότι εκδηλώνεται με την πλουσιότερη δυναμική συμπεριφορά. Συγκεκριμένα, εμφανίζονται περιοδικές τροχιές συντονισμού που αντιστοιχούν σε στάσιμα σημεία του επιπέδου Poincare και ημιπεριοδικές τροχιές που αντιστοιχούν σε αλυσίδες νησίδων που περιβάλλουν τα στάσιμα σημεία. Επιπλέον, τα σύνορα, όπως καθορίζονται από τις καμπύλες (S_1) και (S_2) για την αδιαμόρφωτη περίπτωση, πλέον εκλείπουν, επιτρέποντας τη δυναμική μετάβαση ανάμεσα στις περιοχές σολιτονικής διάδοσης και φθίνουσας συμπεριφοράς. Το εύρος των περιοχών ποιοτικά διαφορετικής σολιτονικής δυναμικής, εξαρτάται ισχυρά από τη σχέση ανάμεσα στις παραμέτρους της διάταξης, όπως η μη εντοπισμένη συμπεριφορά, η συχνότητα της διαμήκους διαμόρφωσης και τις σολιτονικές παραμέτρους, όπως η ισχύς.

Σε αυτό το σημείο να επισημάνουμε ότι η απουσία σημείων στις περιοχές φθίνουσας συμπεριφοράς στο Σχ. 2.5 δε σημαίνει την απουσία φθινουσών τροχιών. Πρόκειται για αδυναμία απεικόνισης που οφείλεται στην αριθμητική επίλυση. Συγκεκριμένα, ο άξονας $\mu = 0$ αποτελεί μια ευθεία ελκτικών κρίσιμων σημείων στην οποία τερματίζουν οι τροχιές της κίνησης, στα θετικά b ερχόμενες από πάνω και στα αρνητικά b ερχόμενες από κάτω. Για φθίνουσες τροχιές τα $d\mu/dz, db/dz$ έχουν μεγάλες τιμές, με αποτέλεσμα να μην αφήνουν ίχνος στην περιοχή που τις χαρακτηρίζει, ενώ ασυμπτωτικά μηδενίζονται στον άξονα.

Στο Σχ. 2.6 παρουσιάζονται οι επιφάνειες τομής Poincare που αντιστοιχούν στις παραμέτρους δέσμης και τους βαθμούς μη εντοπισμένης συμπεριφοράς των Σχ. 2.5(α),(β) για συχνότητες διαμόρφωσης υποτετραπλάσιες (πρώτη σειρά) και τετραπλάσιες (δεύτερη σειρά) των χαρακτηριστικών συχνοτήτων του αδιατάρακτου. Συγκρίνοντας τα Σχ. 2.6(α),(β) με το Σχ. 2.5(α) και τα Σχ. 2.6(γ),(δ) με το Σχ. 2.5(β) διαπιστώνουμε την τάση αποκλίνοντας από τη χαρακτηριστική συχνότητα οι νησίδες περιοδικής ή καλύτερα ημιπεριοδικής κίνησης να διευρύνονται. Από αριθμητικά πειράματα σε συχνότητες που απέκλιναν ακόμη περισσότερο της χαρακτηριστικής του αδιατάρακτου συστήματος, οι περιοχές στοχαστικής συμπεριφοράς περιορίζονται ακόμη περισσότερο, και η δυναμική όπως περιγράφεται από τις επιφάνειες Poincare προσεγγίζει αυτή του αδιατάρακτου.



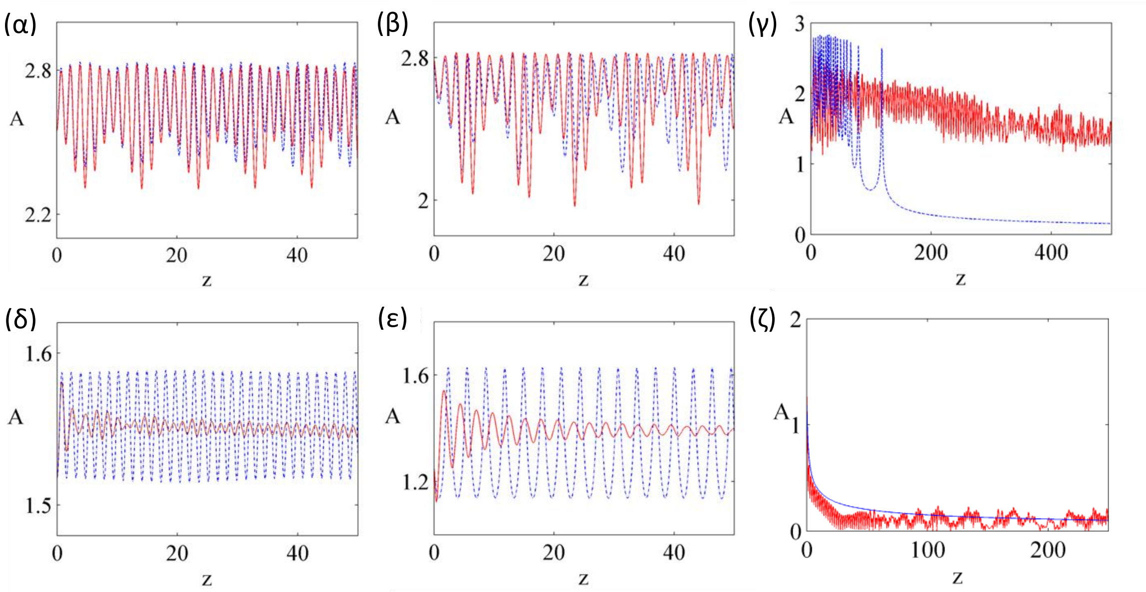
Σχ. 2.5 *Επιφάνειες τομών Poincare, οι αντίστοιχες παράμετροι είναι α) κ_0=1, W=4.95, β) κ_0=2, W=2.61, γ) κ_0=5, W=1.89, δ) κ_0=1, W=8.11, ε) κ_0=2, W=3.82, ζ) κ_0=5, W=2.65. Η ένταση διαμόρφωσης είναι $e=0.1$ και η χωρική συχνότητα r=2 (α, β, γ) και r=4 (δ, ε, ζ) αντιστοιχεί σε 1:1 συντονισμό με το ω. Με τη παχιά (κόκκινη) γραμμή είναι οι χαρακτηριστικές καμπύλες S_1, S_2 που διαχωρίζουν περιοχές ποιοτικά διαφορετικής σολιτονικής εξέλιξης για την αδιαμόρφωτη περίπτωση ($e=0$).*



Σχ. 2.6 *Επιφάνειες τομών Poincare. Οι αντίστοιχες παράμετροι είναι (α), (β) κ_0=1, W=4.95, (γ), (δ) κ_0=2, W=2.61. Η ένταση διαμόρφωσης είναι $e=0.1$ και η χωρική συχνότητα r=1 (α, γ) και r=4 (β, δ) αντιστοιχεί σε 1:2 και 2:1 συντονισμό με το ω. Με τη παχιά (κόκκινη) γραμμή είναι οι χαρακτηριστικές καμπύλες S_1, S_2.*

Η εμφάνιση έντονα στοχαστικής συμπεριφοράς στις χαρακτηριστικές συχνότητες του αδιατάρακτου είναι κάτι που αναμένεται, καθώς τότε ο συντονισμός μεγιστοποιεί την επίδραση της διαταραχής στη δυναμική του συστήματος.

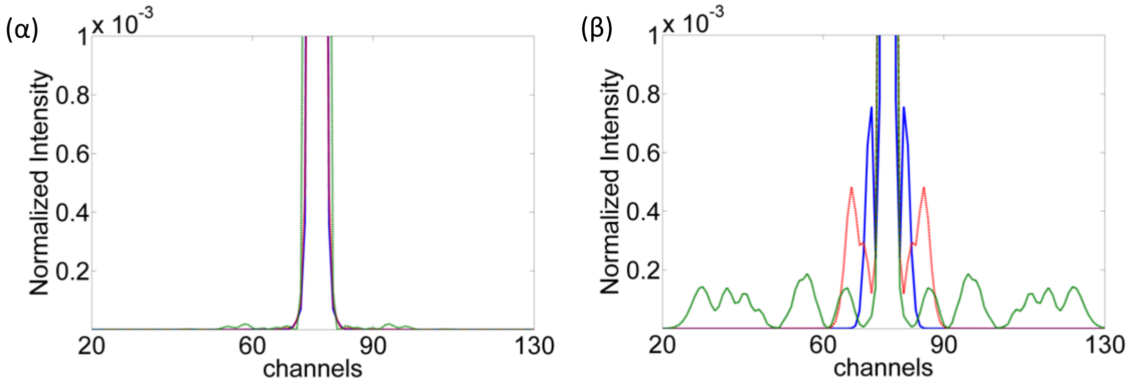
Χαρακτηριστικές περιπτώσεις διαφορετικής δυναμικής διάδοσης, όπως προβλέπονται από τη μεταβολική μέθοδο και προσομοιώσεις από την απευθείας επίλυση της DNLS (εξ. 2.22) φαίνονται στο Σχ. 2.7. Έτσι, περιπτώσεις σολιτονίων που εκτελούν φραγμένες στο μ και b ταλαντώσεις κατά τη διάδοση, φαίνονται στο Σχ. 2.7(α), (β), (γ) και (ε) για αρχικές συνθήκες που βρίσκονται κοντά στα κέντρα των νησίδων, που φαίνονται στο Σχ. 2.5, ενώ φθίνουσα σολιτονική συμπεριφορά εμφανίζεται στα Σχ. 2.7(γ)-(ζ). Το δυναμικό φαινόμενο που αντιστοιχεί στην καταστροφή των διαχωριζουσών καμπύλων (S_1) και (S_2), στην διαμορφωμένη περίπτωση, παρουσιάζεται καθαρά στο Σχ. 2.7(γ), όπου ένα αρχικά ταλαντούμενο σολιτόνιο φαίνεται να εξελίσσεται δυναμικά σε ένα φθίνον.



Σχ. 2.7 *Εξέλιξη του πλάτους όπως έχει βρεθεί από προσομοιώσεις της αρχικής DNLS εξίσωσης (συνεχείς/κόκκινες καμπύλες) και αποτελέσματα της μεταβολικής μεθόδου (διακεκομμένες/ μπλε καμπύλες) για αρχικές συνθήκες που έχουν σημειωθεί στο Σχ. 2.5.*
(α), (β), (γ) $e = 0.1, \kappa_0 = 1, W = 8.11, r = 4$ *και* $(X1: \mu = 1.1, b = 0)$, $(Y1: \mu = 1.9, b = 0.3)$, $(Z1: \mu = 0.6, b = 1)$.
(δ), (ε), (ζ) $e = 0.1, \kappa_0 = 5, W = 2.65, r = 4$ *και* $(X2: \mu = 1.33, b = 0)$, $(Y2: \mu = 0.68, b = 0.4)$, $(Z2: \mu = 0.7, b = 1)$.

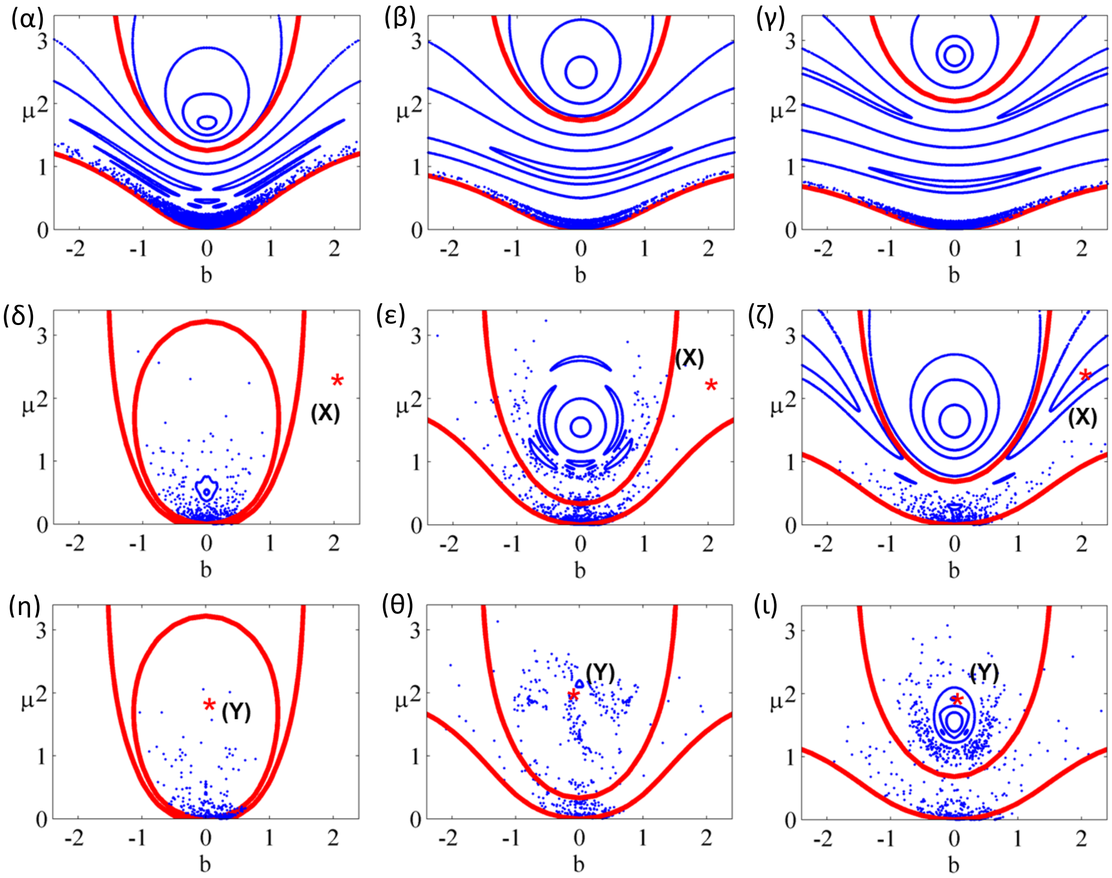
Τα αποτελέσματα της μεταβολικης μεθόδου, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.7, εμφανίζουν ποιοτικά αρκετά καλή συμφωνία σε σχέση με τα αποτελέσματα από την απευθείας προσομοίωση του αρχικού συστήματος, όσον αφορά την πρόβλεψη της σολιτονικής ταλάντωσης ή φθίνουσας συμπεριφοράς. Επίσης, διαπιστώνεται εξαιρετική συμφωνία, όσον αφορά τη συχνότητα της ταχείας ταλάντωσης και του πλάτους. Αυτό φαίνεται στα Σχ. 2.7(α),(β) με τη λύση του αρχικού συστήματος να είναι σχετικά ημιπεριοδική, σε σύγκριση με τη λύση που εξάγεται από το σύστημα των μεταβολικών εξισώσεων, η οποία είναι ακριβώς περιοδική. Αυτές οι διαφορές αποδίδονται στο γεγονός ότι το απλοποιημένο σύστημα εξισώσεων

(2.27) δεν είναι σε θέση να συλλάβει τις απώλειες μέσω ακτινοβολίας και, καθώς η διαχεόμενη ακτινοβολία αντιπροσωπεύει μείωση της σολιτονικής μάζας, το αποτέλεσμα είναι χαμηλότερη συχνότητα και ένταση. Αυτά τα φαινόμενα είναι πιο εμφανή σε περιπτώσεις περισσότερο εστιασμένης συμπεριφοράς, όπως φαίνεται στα Σχ. 2.7(δ),(ε), όπου οι προσομοιώσεις της DNLS και οι λύσεις της μεταβολικής μεθόδου διαφέρουν αρκετά, όταν λαμβάνεται υπόψη το πλάτος των ταλαντώσεων. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας της ικανότητας του μέσου να διαχέει εύκολα την ακτινοβολία, για τιμές του συντελεστή στην περιοχή εστιασμένης συμπεριφοράς, σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει όταν υπάρχει ισχυρά μη εντοπισμένη συμπεριφορά, οπότε η ακτινοβολία εγκλωβίζεται σε μια στενή ζώνη γύρω από την οπτική δέσμη, εξαιτίας της φύσης των μη εντοπισμένης συμπεριφοράς αλληλεπιδράσεων. Ο μηχανισμός του εγκλωβισμού της ενέργειας έχει περιγραφεί στο παρελθόν με αναφορά στους νηματικούς υγρούς κρυστάλλους και αποδίδεται στη μικρού κυματάριθμου ομαδική ταχύτητα των γραμμικών κυμάτων που διεγείρουν χαμηλής έντασης περιθλαστική ακτινοβολία, που δεν καταφέρνει να διαφύγει από την περιοχή της οπτικής δέσμης [70]. Η διάχυση της ακτινοβολίας για την περίπτωση της εστιασμένης συμπεριφοράς ($\kappa_0 = 5$), όπως και ο εγκλωβισμός της ισχύος στην περιοχή του κεντρικού καναλιού και η διατήρηση του προφίλ της έντασης για ισχυρά μη εντοπισμένη περίπτωση ($\kappa_0 = 1$) φαίνονται στο Σχ. 2.8.



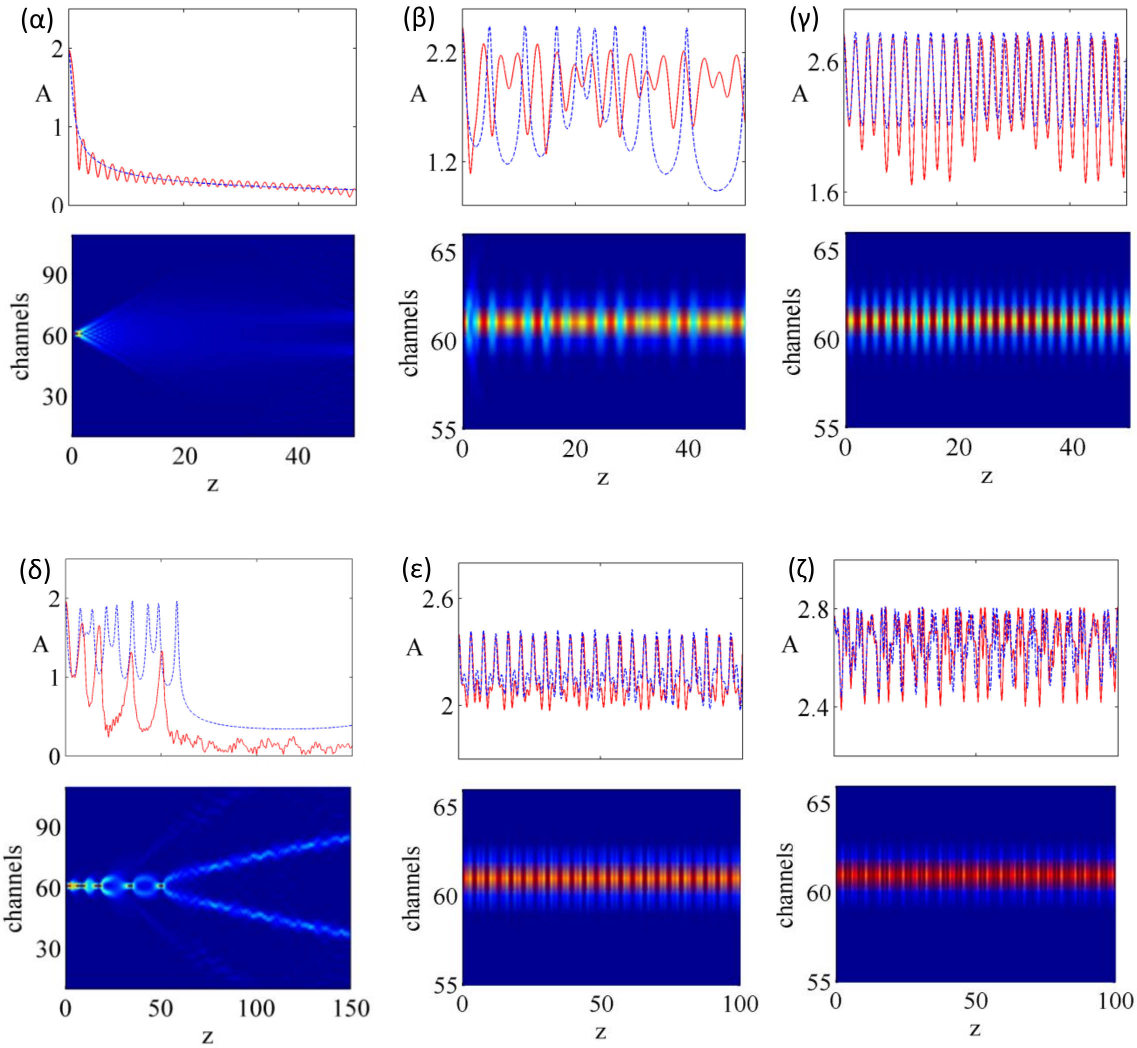
Σχ. 2.8. *Εγκάρσιες τομές της έντασης για: α) υψηλά μη εντοπισμένης συμπεριφοράς περίπτωση ($\kappa_0 = 1$) με αρχικές συνθήκες $\mu = 1.1, b = 0$ (αντιστοιχεί στο Σχ. 2.5(α)) και β) σχεδόν εντοπισμένης συμπεριφοράς περίπτωση ($\kappa_0 = 5$) για αρχικές συνθήκες $\mu = 1.33, b = 0$ (αντιστοιχεί στο Σχ. 2.5(δ)). Οι διαφορετικές γραμμές αντιστοιχούν σε διαδοχικά στιγμιότυπα (συνεχής (μπλε) σε διακεκομμένη με στίγματα (κόκκινη) σε διακεκομμένη (πράσινη) γραμμή) για διάδοση σε μια περίοδο του περιβάλλοντος πεδίου. Η δέσμη προσπίπτει στο κανάλι με αριθμό 76.*

Η εξάρτηση της έκτασης των περιοχών των αρχικών συνθηκών που ανταποκρίνονται σε ποιοτικά διαφορετική σολιτονική εξέλιξη από την σολιτονική ισχύ, συνιστά ένα μηχανισμό διάκρισης με βάση την ισχύ. Από άποψη εφαρμογών είναι ενδιαφέρον να θεωρήσουμε τη δυναμική της σολιτονικής διάδοσης στην περίπτωση που έχουμε διαφορετικές τιμές ισχύος σε μέσο με συγκεκριμένες γεωμετρικές και φυσικές παραμέτρους. Σε μια τέτοια περίπτωση διαφορετικές τιμές σολιτονικής ισχύος μεταβάλλουν τη σχέση της μέγιστης ισχύος των σολιτονικών ταλαντώσεων ω με τη συχνότητα διαμόρφωσης r, και συνεπώς τη θέση των τροχιών συντονισμού και την έκταση των περιοχών που αντιστοιχούν σε ομαλές ταλαντώσεις στις σχετικές επιφάνειες τομών Poincare. Όπως φαίνεται στο Σχ. 2.9, ο συντελεστής μη εντοπισμένης συμπεριφοράς κ_0 καθορίζει σε μεγάλο βαθμό το εύρος των περιοχών που αντιστοιχούν σε ταλαντωτική ή φθίνουσα συμπεριφορά όταν το μέσο είναι ισχυρά μη εντοπισμένης συμπεριφοράς [Σχ. 2.9 (δεύτερη σειρά)], έχοντας μάλιστα πιο περιορισμένες περιοχές ομαλής ταλαντωτικής συμπεριφοράς, σε σύγκριση με εστιασμένης συμπεριφοράς διατάξεις [Σχ. 2.9 (πρώτη σειρά)]. Συμπληρωματικά, είναι προφανής η διαπίστωση από το Σχ. 2.9 (τρίτη σειρά) ότι με την αύξηση της έντασης της διαμόρφωσης υπάρχει περαιτέρω συρρίκνωση των παραπάνω περιοχών ομαλής ταλαντωτικής συμπεριφοράς.



Σχ. 2.9 *Επιφάνειες τομών Poincare. Με συνεχές (κόκκινο) οι χαρακτηριστικές καμπύλες S_1, S_2 που διαχωρίζουν το χώρο σε περιοχές με ποιοτικά διαφορετική σολιτονική εξέλιξη για την αντίστοιχη αδιαμόρφωτη περίπτωση ($e=0$).*
(πρώτη σειρά) εστιασμένη συμπεριφορά με $\kappa_0=5$, ένταση διαμόρφωσης $e=0.1$, συχνότητα διαμόρφωσης $r=7.04$ και σολιτονική ισχύ $W=4$ (α), 6(β), 8(γ).
(δεύτερη σειρά) ισχυρά μη εντοπισμένη συμπεριφορά με $\kappa_0=1$, ένταση διαμόρφωσης $e=0.1$, συχνότητα διαμόρφωσης $r=1.44$ και σολιτονική ισχύ $W=4$ (δ), 6(ε), 8(ζ).
(τρίτη σειρά) ισχυρά μη εντοπισμένη συμπεριφορά με $\kappa_0=1$, ισχυρότερη ένταση διαμόρφωσης $e=0.2$, συχνότητα διαμόρφωσης $r=1.44$ και σολιτονική ισχύ $W=4$ (η), 6(ϑ), 8(ι).

Από την άλλη πλευρά, ακόμη και για ίδιο συντελεστή κ_0 και ίδια ένταση διαμόρφωσης e, η δομή του φασικού χώρου εξαρτάται ισχυρά από τη σολιτονική ισχύ. Στην πρώτη στήλη του Σχ. 2.9, η σολιτονική ισχύς ανταποκρίνεται σε ένα 1:1 συντονισμό με τη συχνότητα διαμόρφωσης ($\omega / r = 1$), ενώ οι άλλες στήλες δείχνουν περιπτώσεις με υψηλότερη σολιτονική ι-σχύ που ανταποκρίνονται σε $\omega / r < 1$. Για όλες τις περιπτώσεις είναι εμφανές ότι αυξανόμενη σολιτονική ισχύς οδηγεί σε «εξομάλυνση» της σολιτονικής εξέλιξης, όπως αυτή εκδηλώνεται μέσω της διεύρυνσης των περιοχών ταλαντωτικής συμπεριφοράς. Συνεπώς, σολιτόνια διαφορετικής ισχύος μπορούν να έχουν ποιοτικά διαφορετική διάδοση, είτε ως εντοπισμένες δέσμες ταλαντωμένου πλάτους, είτε ως φθίνουσες δέσμες που υφίστανται διακριτή περίθλαση ή ακόμη και διαχωρισμό. Η σολιτονική εξέλιξη για χαρακτηριστικές αρχικές συνθήκες που σημειώνονται στο Σχ. 2.9 παρουσιάζονται στο Σχ. 2.10 και αντιστοιχούν σε περιπτώσεις σολιτονίων που έχουν το ίδιο πλάτος (μ) και τερέτισμα (b) αλλά διαφορετική ισχύ (W).



Σχ. 2.10 *Σολιτονική εξέλιξη κατά τη διάδοση διάταξη με διαμήκη διαμόρφωση. Οι αντίστοιχες παράμετροι είναι* $\kappa_0 = 1, r = 1.44, e = 0.1$ *(πρώτη σειρά) και* $e = 0.2$ *(δεύτερη σειρά). Η σολιτονική ισχύς είναι* $W = 4$ *(πρώτη στήλη), 6 (δεύτερη στήλη), 8 (τρίτη στήλη). Το αντίστροφο εύρος του σολιτονίου* μ *και τερετίσματος* b *είναι* $(\mu, b) = (2.5, 2)$ *(πρώτη σειρά) και* $(\mu, b) = (2, 0)$ *(δεύτερη σειρά), που αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες όπως σημειώνονται με X, Y στο Σχ. 2.9. Συνεχείς (μπλε)/ διακεκομμένες (κόκκινες) καμπύλες αντιπροσωπεύουν μεταβολικές/ DNLS προσομοιώσεις.*

Η διαμήκης διαμόρφωση αποδεικνύεται ότι παίζει κρίσιμο ρόλο στον καθορισμό ποιοτικά διαφορετικών χαρακτηριστικών διάδοσης για σολιτόνια διαφορετικής ισχύος. Για μια αδιαμόρφωτη στη διεύθυνση της διάδοσης διάταξη, σολιτόνια με αρχικές συνθήκες που ανταποκρίνονται στα Σχ. 2.10 (ε), (γ), η διαμήκης διαμόρφωση συνεπάγεται χαοτικές και ομαλές ταλαντώσεις, αντίστοιχα. Για την περίπτωση της μεγαλύτερης έντασης διαμόρφωσης, που παρουσιάζεται στα Σχ. 2.9(η), (θ) και (ι), σολιτόνια με αρχικές συνθήκες που δίνουν ομαλές παλινδρομικές ταλαντώσεις για την αδιαμόρφωτη περίπτωση, μπορούν είτε να διαχωρίζονται, είτε να ταλαντώνονται όπως φαίνεται στα Σχ. 2.10(δ) και Σχ. 2.10(ε), (ζ), αντίστοιχα. Παρ' όλο που τέτοιος διαχωρισμός δε μπορεί να περιγραφεί από τη δοκιμαστική λύση (εξ. 2.25) που χρησιμοποιείται στη μεταβολική μέθοδο, είναι ενδιαφέρον ότι το ανηγμένο μοντέλο (εξ. 2.27) μπορεί να είναι χρήσιμο για τον καθορισμό των αρχικών συνθηκών που οδηγούν σε τέτοια συμπεριφορά.

2.5.1. Άλλες δοκιμαστικές λύσεις και τετραγωνική διαμόρφωση

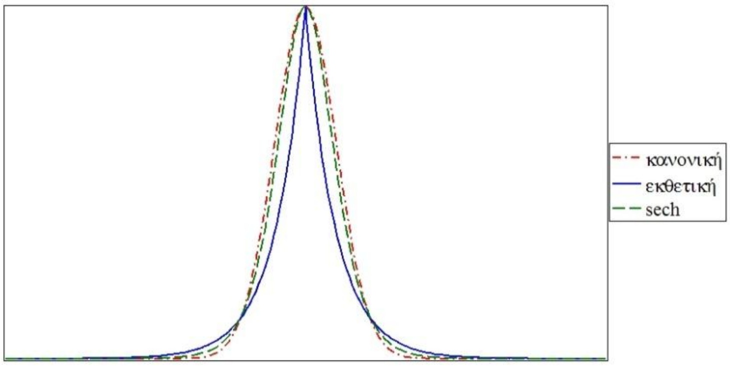
Σε αυτό το σημείο ενδιαφέρον είναι να γίνει μια αξιολόγηση της δοκιμαστικής εκθετικής λύσης, που χρησιμοποιήσαμε στην εξ. 2.24, σε σχέση με άλλες πιθανές δοκιμαστικές λύσεις. Στο πλαίσιο αυτό θα εξετάσουμε τη διάδοση, όπως προκύπτει από την επίλυση της DNLS, χρησιμοποιώντας δοκιμαστική λύση γκαουσσιανής μορφής και μορφής υπερβολικής τέμνουσας (sech) (εξ. 2.33(β)-(γ)). Το ενδιαφέρον εστιάζεται στο να δούμε αν δοκιμαστικές λύσεις με διαφορετικό από την εκθετική λύση φασματικό περιεχόμενο, μπορούν να απεικονίσουν εξίσου καλά την οπτική διάδοση.

$$u_{n,1}(z) = A(z)e^{i\varphi(z)+ib(z)|n|}e^{-\mu(z)n} \qquad (\alpha)$$

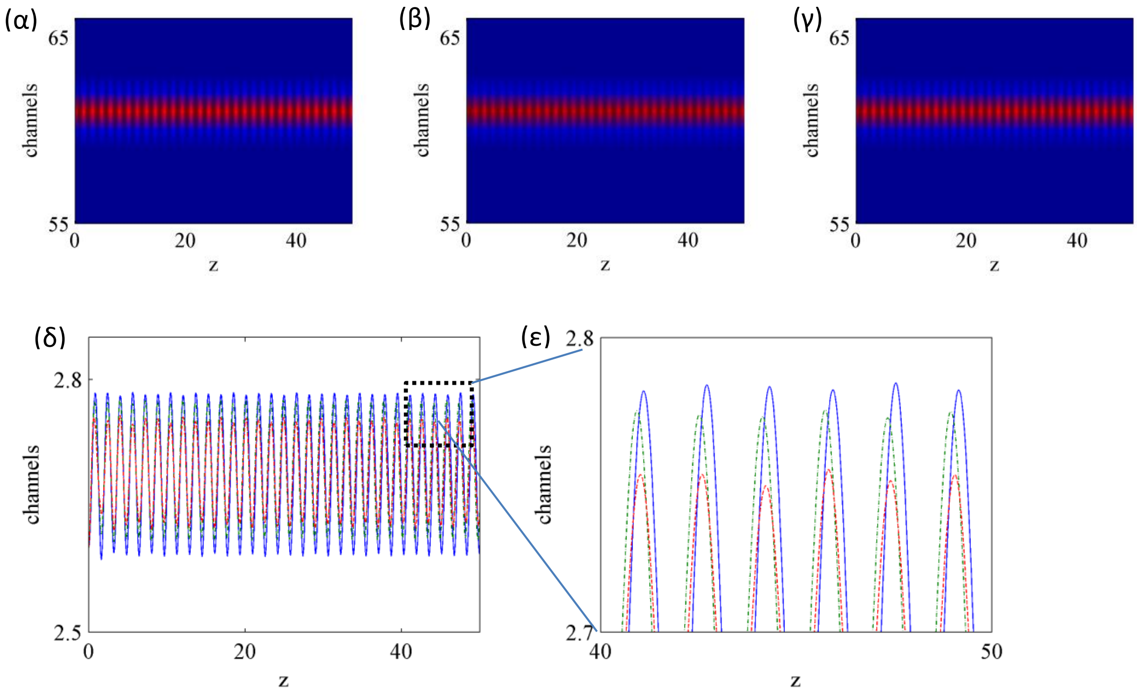
$$u_{n,2}(z) = A(z)e^{i\varphi(z)+ib(z)|n|}e^{-\mu(z)^2 n^2/w_2} \qquad (\beta)$$

$$u_{n,3}(z) = A(z)e^{i\varphi(z)+ib(z)|n|}\operatorname{sec}h\left(w_3\mu(z)n\right) \qquad (\gamma) \qquad (2.33)$$

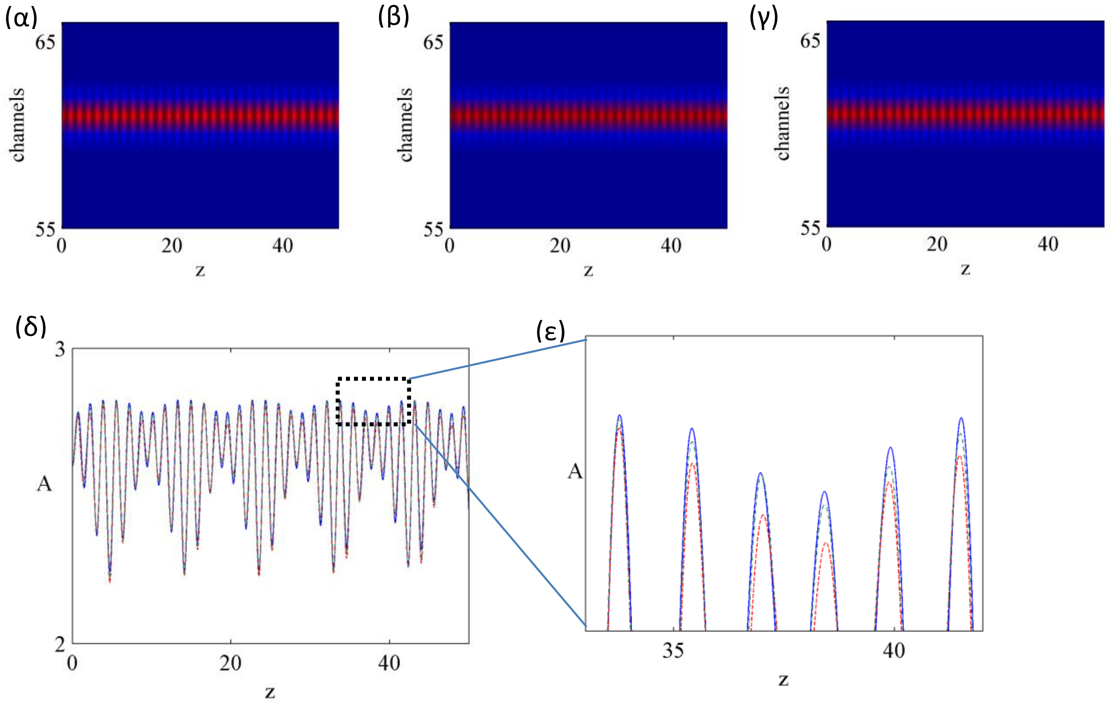
Στις εξ. 2.33 έχουν εισαχθεί οι συντελεστές w_2, w_3, οι οποίοι καθορίζουν το εύρος της Gaussian και της sech κατά τέτοιο τρόπο, ώστε για ίδιο πλάτος A οι λύσεις να έχουν για διαφορετικό αντίστροφο εύρος, μ, την ίδια ισχύ, W. Δηλαδή, $\sum_n |u_{n,1}|^2 = \sum_n |u_{n,2}|^2 = \sum_n |u_{n,3}|^2$.



Σχ. 2.11 *Απεικόνιση των δοκιμαστικών λύσεων. Η εκθετική που έχει χρησιμοποιηθεί ως τώρα στην ανάλυση είναι με συνεχή γραμμή.*



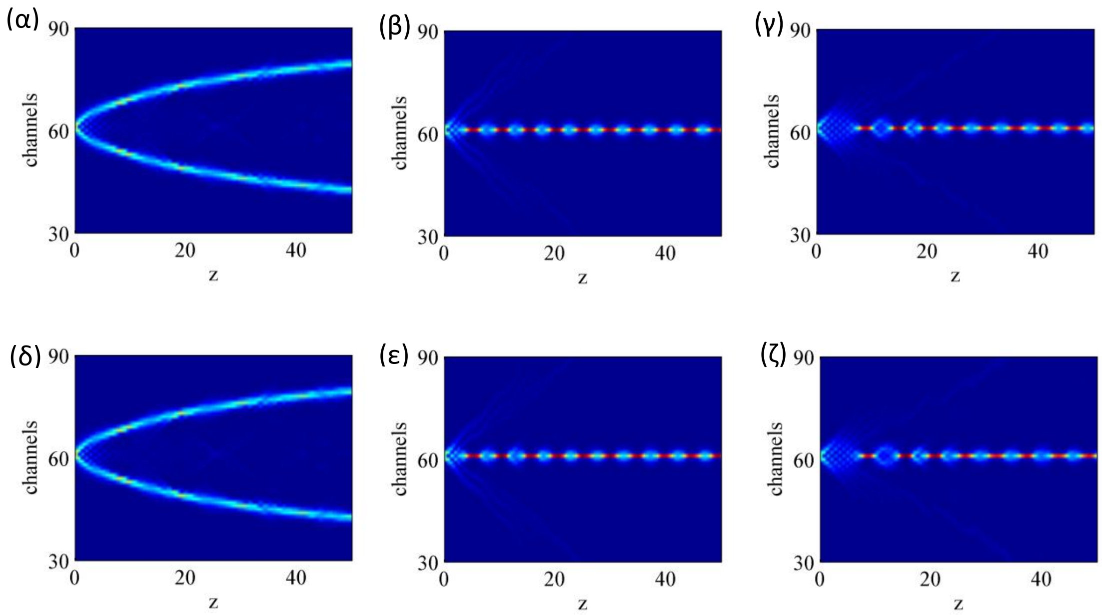
Σχ. 2.12 *Απεικόνιση των δοκιμαστικών λύσεων ισχύος* $W = 8.11$ *για διάταξη χωρίς διαμήκη διαμόρφωση, με* $\kappa_0 = 1$ *και αρχικές συνθήκες* $(\mu, b) = (1.2, 0)$. *Η εκθετική που έχει χρησιμοποιηθεί ως τώρα στην ανάλυση είναι με συνεχή γραμμή. Η διακεκομμένη αντιστοιχεί στη Γκαουσιανή λύση και η διακεκομμένη με στίγματα στην sech.*



Σχ. 2.13 *Απεικόνιση των δοκιμαστικών λύσεων για διάταξη με διαμήκη διαμόρφωση, με παραμέτρους* $\kappa_0 = 1, e = 0.1, r = 4$. *Οι δέσμες έχουν ισχύ* $W = 8.11$ *και αρχικές συνθήκες* $(\mu, b) = (1.2, 0)$. *Η εκθετική λύση είναι με συνεχή γραμμή. Η διακεκομμένη αντιστοιχεί στη Γκαουσιανή λύση και η διακεκομμένη με στίγματα στην sech.*

Στα Σχ. 2.12-2.13 παρουσιάζεται η οπτική διάδοση σε υλικό με μη εντοπισμένη συμπεριφορά $\kappa_0 = 1$ για τις τρεις δοκιμαστικές λύσεις (εκθετική-γκαουσιανή-sech) για αρχικές συνθήκες $(\mu, b) = (1.2, 0)$ και ισχύ $W = 8.11$. Στο Σχ. 2.12 θεωρούμε ότι η διάταξη δεν έχει διαμήκη διαμόρφωση, ενώ στο Σχ. 2.13 έχει εγγραφεί διαμόρφωση συχνότητας ίση με την ιδιοτιμή του συστήματος των μεταβολικών εξισώσεων.

Στα Σχ. 2.12, 2.13 απεικονίζονται ευσταθώς ταλαντούμενες λύσεις, ενώ στο Σχ. 2.14 παρουσιάζεται περίπτωση όπου η εκθετική δοκιμαστική λύση δίνει διαχωρισμό της αρχικής δέσμης και σημαντική δευτερεύουσα περίθλαση (Σχ. 2.14(α)), ενώ οι δοκιμαστικές λύσεις, γκαουσσιανού τύπου και τύπου υπερβολικής τέμνουσας (sech), παρουσιάζουν ασταθή ταλαντούμενη συμπεριφορά και παράλληλα σημαντική περίθλαση. Στο Σχ. 2.14, οι παράμετροι της διάδοσης σε μέσο με $\kappa_0 = 2$, είναι $W = 3.82$ με αρχικές συνθήκες $(\mu, b) = (0.5, 1)$. Η πρώτη σειρά σχημάτων αντιστοιχεί σε μη διαταραγμένο κατά τη διεύθυνση μέσο ($e = 0$) και η δεύτερη σε διαταραγμένο ($e = 0.1$) με $r = 4$.

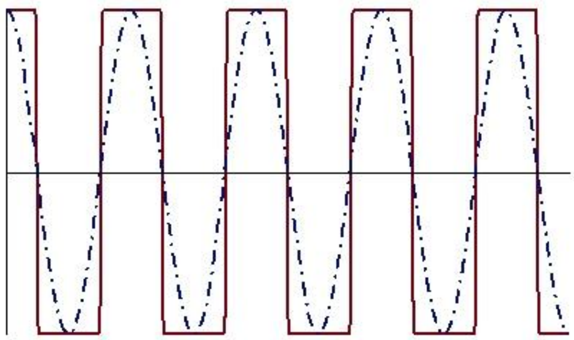


Σχ. 2.14 *Απεικόνιση των δοκιμαστικών λύσεων για διάταξη με* $\kappa_0 = 2$*, χωρίς διαμόρφωση (πρώτη σειρά) και με διαμήκη διαμόρφωση (δεύτερη σειρά) με παραμέτρους* $e = 0.1, r = 4$*. Οι δέσμες έχουν ισχύ* $W = 3.82$ *και αρχικές συνθήκες* $(\mu, b) = (0.5, 1)$.

Από τα Σχ. 2.12, 2.13, 2.14 μπορούμε να καταλήξουμε σε μια σημαντική παρατήρηση. Στην περίπτωση που το εύρος της δέσμης είναι μικρότερο από το εύρος του κάθε κυματοδηγού της διάταξης (Σχ. 2.12, 2.13), η δέσμη διαδίδεται με παρόμοια συμπεριφορά και για τις τρεις δοκιμαστικές λύσεις που εξετάσαμε. Αυτό δικαιολογείται αν λάβουμε υπόψη ότι σε ένα διακριτό μοντέλο οι κατανομές των λύσεων είναι στην ουσία κατανομές της περιβάλλουσας και το διακριτό μοντέλο δεν περιγράφει κατανομή πεδίου εντός του κάθε καναλιού. Επομένως, όταν οπτική δέσμη με σημαντική ισχύ βρίσκεται αρχικά εντοπισμένη εντός ενός κυματοδηγού, τότε η κατανομή έντασης περιορίζεται στον αρχικό κυματοδηγό και στις ουρές αρκετά χαμηλότερης έντασης στους γειτονικούς. Επομένως, η διάδοση θα εξαρτάται κυρίως από την τιμή της ισχύος και σε μικρότερο βαθμό από τη δοκιμαστική λύση που έχει επιλεγεί.

Από την άλλη πλευρά στο Σχ. 2.14, όπου το εύρος της δέσμης είναι διπλάσιο του εύρους του κυματοδηγού ($\mu = 0.5$), επιβάλλεται κατανομή της έντασης σε περισσότερους του ενός κυματοδηγούς και παρατηρείται φθίνουσα διάδοση για την εκθετική δοκιμαστική λύση και ταλαντωτική διάδοση με σημαντική περίθλαση όταν χρησιμοποιηθεί γκαουσσιανού τύπου ή υπερβολικής τέμνουσας δοκιμαστική λύση. Διαπιστώνουμε επομένως ότι δοκιμαστικές λύσεις με διαφορετικό από την εκθετική λύση φασματικό περιεχόμενο μπορούν, κατά περίπτωση (π.χ. διαφορετικά μ), να συγκλίνουν άλλοτε περισσότερο και άλλοτε λιγότερο με τη συμπεριφορά της εκθετικής λύσης. Γενικά, πάντως στα προβλήματα διακριτής διάδοσης η πρώτη επιλογή είναι η εντονότερα εντοπισμένη εκθετική δοκιμαστική λύση, λόγω της ικανοποιητικής προσομοίωσης του διακριτού δυναμικού.

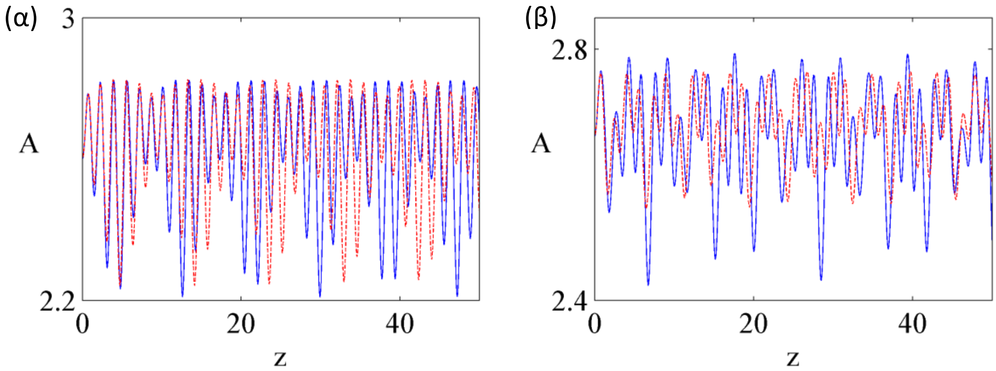
Μια ακόμη ενδιαφέρουσα πτυχή στη διάδοση, σε ένα διαταραγμένο κατά το διάμηκες μέσο, μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, είναι η μορφή της διαμόρφωσης. Ως τώρα στο κεφάλαιο αυτό έχουμε θεωρήσει μια ημιτονοειδή διαμόρφωση του δείκτη της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Για χάρη πειραματισμού παρακάτω θα δούμε πως η μεταβολή της μορφής της διαμόρφωσης επηρεάζει τη διάδοση. Η μορφή της υπό θεώρηση διαμόρφωσης θα είναι όπως φαίνεται στο Σχ. 2.15.



Σχ. 2.15 *Διαμορφώσεις του δείκτη μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Η τετραγωνική διαμόρφωση είναι με συνεχή γραμμή και στα αριθμητικά πειράματα κατασκευάστηκε με τη χρήση υπερβολικών εφαπτομένων.*

Στα Σχ. 2.16(α)-(β) εμφανίζεται η διάδοση σε μέσο με $\kappa_0 = 1$ και $e = 0.1, r = 4$ για ημιτονοειδή (διακεκομμένη) και τετραγωνική διαμόρφωση (συνεχής γραμμή) για αρχικές τιμές $\mu = 1.2, b = 0, W = 8.11$ (Σχ. 2.16(α)) και $\mu = 1.4, b = 0, W = 8$ (Σχ. 2.16(β)).

Από το Σχ. 2.16 είναι προφανής η διαφοροποίηση στα χαρακτηριστικά της ταλάντωσης του οπτικού πεδίου για διαμορφώσεις του δείκτη εντοπισμένης συμπεριφοράς κ , διαφορετικής μορφής. Η συνεχής γραμμή του Σχ. 2.16(α) αντιστοιχεί στην περίπτωση ημιτονοειδούς διαμόρφωσης και διακεκομμένη στην τετραγωνική διαμόρφωση, για διάδοση με $\mu = 1.2, b = 0, W = 8.11$. Οι δύο καμπύλες εμφανίζουν διαφορετική περιοδικότητα και υπάρχει μια μικρή διαφοροποίηση ως προς τα πλάτη της ταλάντωσης. Τα πλάτη της ημιπεριοδικής ταλάντωσης, στην περίπτωση που απεικονίζεται στο Σχ. 2.16(β) $(\mu = 1.4, b = 0, W = 8)$, παρουσιάζουν μια ακόμη πιο έντονη απόκλιση, ενώ τα μέγιστα και ελάχιστα δεν εμφανίζουν σημαντική διαφορά φάσης. Οι αποκλίσεις που παρουσιάζονται κατά τη διάδοση σε μέσο με διαφορετική μορφή διαμόρφωσης οφείλονται στο ότι, ενώ για την περίπτωση της ημιτονοειδούς διαμόρφωσης υπάρχει μια συχνότητα που συντονίζεται με τη δέσμη, στην περίπτωση της τετραγωνικής διαμόρφωσης υπάρχουν πολλές συχνότητες οι οποίες δίνουν κατά περίπτωση διαφορετικούς συντονισμούς.



Σχ. 2.16 *Απεικόνιση της διάδοσης σε μέσο με* $\kappa_0 = 1$ *για* $\mu = 1.2, b = 0, W = 8.11$ *(α) και* $\mu = 1.4, b = 0, W = 8$ *(β). Η ένταση της διαμόρφωσης είναι* $e = 0.1$ *και η συχνότητα της* $r = 4$*. Με συνεχή γραμμή η διάδοση σε μέσο με ημιτονοειδή διαμόρφωση του* κ *και με διακεκομμένη η διάδοση σε μέσο με τετραγωνική διαμόρφωση.*

2.6 Τοπολογικά σολιτόνια και σολιτόνια επίπεδης κορυφής

Ιδιαίτερες κατηγορίες σολιτονικών λύσεων της διακριτής μη γραμμικής εξίσωσης Schroedinger είναι τα τοπολογικά σολιτόνια. Πρόκειται για μαθηματικές κατασκευές στις οποίες δεχόμαστε δύο διαφορετικά ασυμπτωτικά πλάτη, ένα μηδενικής τιμής που παίζει το ρόλο υποβάθρου και ένα αυθαίρετης σταθερής τιμής. Όταν το μη μηδενικό πεδίο καταλαμβάνει το ένα ημιεπίπεδο της συστοιχίας των κυματοδηγών, τότε μιλάμε για τοπολογικά σολιτόνια, ενώ αν καταλαμβάνει πεπερασμένο πλήθος ενδιαμέσων κυματοδηγών, έχουμε σολιτόνια επίπεδης κορυφής [71]. Για την εύρεση της αναλυτικής μορφής των παραπάνω σολιτονίων θα ακολουθήσουμε μεθοδολογία που έχει προταθεί από τους Eilbeck et al [72] (βλ. και [73]).

2.6.1. Τοπολογικά σολιτόνια

Ξεκινούμε τη θεώρηση μας για τα τοπολογικά σολιτόνια από τη γνωστή αδιάστατη διακριτή μη γραμμική εξίσωση Schroedinger για μέσο Kerr [74, 75, 76],

$$i\frac{da_n}{dz} + c(a_{n+1} - a_{n-1}) + \gamma|\alpha_n|^2 a_n = 0 \qquad (2.34)$$

Υποθέτουμε μια στάσιμη λύση για την εξ. 2.34 της μορφής $\boldsymbol{a} = \{a_n\}$ με $a_n(z) = u_n \exp(ikz)$. Η u_n τότε θα ικανοποιεί το παρακάτω σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων.

$$-ku_n + c(u_{n+1} - u_{n-1}) + \gamma u_n^3 = 0 \qquad (2.35)$$

Απαιτούμε τώρα για λύση της εξ. 2.35 ένα τοπολογικό σολιτόνιο, που έχει κατατομή μετώπου της μορφής,

$$u = U(\ldots,0,0,0,u_1,u_2,u_3,u_4,1,1,1,\ldots) \tag{2.36}$$

Τα u_1, u_2, u_3, u_4 καθορίζουν την απότομη μεταβατική περιοχή ανάμεσα στις δύο ασυμπτωτικές περιοχές του υποβάθρου και της αυθαίρετης τιμής έντασης και με αντικατάσταση της εξ. 2.36 στην εξ. 2.35 προκύπτει η σχετική εξίσωση διασποράς.

$$k = 2c + \gamma U^2 \tag{2.37}$$

Τα u_1, u_2, u_3, u_4 βρίσκεται ότι είναι

$$u_1 = \alpha^2\,, \quad u_2 = -\alpha - \frac{3}{2}\alpha^2\,, \quad u_3 = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{8}\alpha^2\,, \quad u_4 = 1 - \frac{\alpha^2}{4} \tag{2.38}$$

με
$$\alpha = \frac{c}{\gamma U^2} \tag{2.39}$$

ένα χαρακτηριστικό δευτερεύον πλάτος που καθορίζει την κατατομή της μεταβατικής περιοχής. Για να ικανοποιείται η απαίτηση της έντονα εντοπισμένης λύσης (η αυτοδιαμόρφωση φάσης πρέπει να επικρατεί της γραμμικής σύζευξης) πρέπει $\alpha \ll 1$.

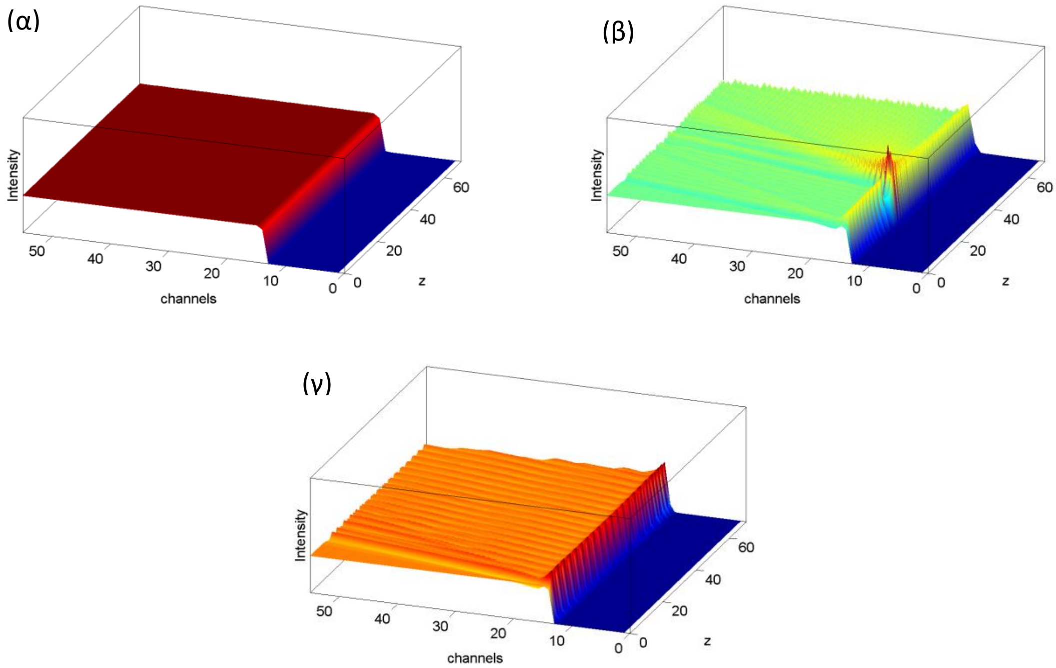
Εδώ να θυμίσουμε ότι για την ύπαρξη σολιτονικών λύσεων απαιτείται η παρουσία αστάθειας διαμόρφωσης (αστάθεια της λύσης του επίπεδου κύματος) και για να είναι αυτή συμβατή με την εξ. 2.34 πρέπει για τη μη γραμμικότητα να ισχύει $\gamma < 0$. Όμως, η θεώρηση μας για τα τοπολογικά σολιτόνια ισχύει και για εστιάζουσα μη γραμμικότητα ($\gamma > 0$), καθώς η εξ. 2.34 είναι αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς $\gamma \to -\gamma, a_n \to (-1)^n a_n, z \to -z$.

Σκοπός της ανάλυσής μας είναι να δούμε πως η ύπαρξη μη εντοπισμένης συμπεριφοράς διαφοροποιεί τα αποτελέσματά μας από αυτά της περίπτωσης Kerr και αν η εφαρμογή διαμήκους διαμόρφωσης επηρεάζει την ευστάθεια των τοπολογικών σολιτονίων. Κατά αναλογία με την ανάλυσή που έγινε για την εξ. 2.34, μπορούμε να επεκτείνουμε στην εξ. 2.22 που περιγράφει τη διακριτή διάδοση σε μέσο με μη εντοπισμένη συμπεριφορά. Η αντίστοιχη με την εξ. 2.35 θα προκύψει μετά από εισαγωγή της $u_n(z) = \upsilon_n \exp(ikz)$ στην εξ. 2.33, η οποία και στο όριο της εντοπισμένης συμπεριφοράς μετασχηματίζεται στην παρακάτω

$$-(k+2)\upsilon_n + \upsilon_{n+1} - \upsilon_{n-1} + 2\upsilon_n^3 = 0 \tag{2.40}$$

οπότε και οι καινούργιες παράμετροι θα είναι $c = 1, \gamma = 2$.

Στο Σχ. 2.17(α) παρουσιάζεται το τοπολογικό σολιτόνιο για την περίπτωση Kerr και στο Σχ. 2.17(β) παρουσιάζεται το αντίστοιχο τοπολογικό σολιτόνιο που αντιστοιχεί σε μέσο με μη εντοπισμένη συμπεριφορά με $\kappa = 1$ και ίδια κατατομή περιοχής μετάβασης. Το πρώτο είναι ευσταθές, όπως προβλέπεται από τη θεωρία, ενώ το δεύτερο είναι ασταθές, γεγονός που διαισθητικά αντίκειται στο χαρακτήρα της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, που εν γένει τείνει να δώσει πιο σταθερούς σχηματισμούς από αυτούς που προκύπτουν για την περίπτωση Kerr. Η αστάθεια στο Σχ. 2.17(β) εξηγείται από την εξάρτηση του δευτερεύοντος πλάτους α από το συντελεστή του μη γραμμικού όρου (εξ. 2.22) και η οποία εξάρτηση για συγκεκριμένες τιμές κ (εδώ $\kappa = 1$) δε μπορεί να εξασφαλίσει ότι η γραμμική σύζευξη είναι ασθενέστερη από την αυτοδιαμόρφωση φάσης. Στο Σχ. 2.17(γ) δείχνουμε πως η εισαγωγή μιας διαμόρφωσης στο συντελεστή της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς του μέσου (με χαρακτηριστική χωρική συχνότητα $r = 1.8$ στην προκείμενη περίπτωση), μπορεί να συγκρατήσει την τάση του οπτικού πεδίου να διαλυθεί. Βέβαια και σε αυτή την περίπτωση το σολιτόνιο είναι ασταθές, αλλά και μόνο το γεγονός της χωρικής συγκράτησης αποτελεί μια πολύ ενδιαφέρουσα πτυχή της φυσικής της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Το φαινόμενο της διατήρησης εντοπισμένου οπτικού πεδίου, με την εφαρμογή διαμήκους διαμόρφωσης σε μέσα με μη εντοπισμένη συμπεριφορά, καταδεικνύεται εμφατικά στην περίπτωση των σολιτονίων επίπεδης κορυφής, που θα δούμε στην επόμενη υπο-ενότητα.

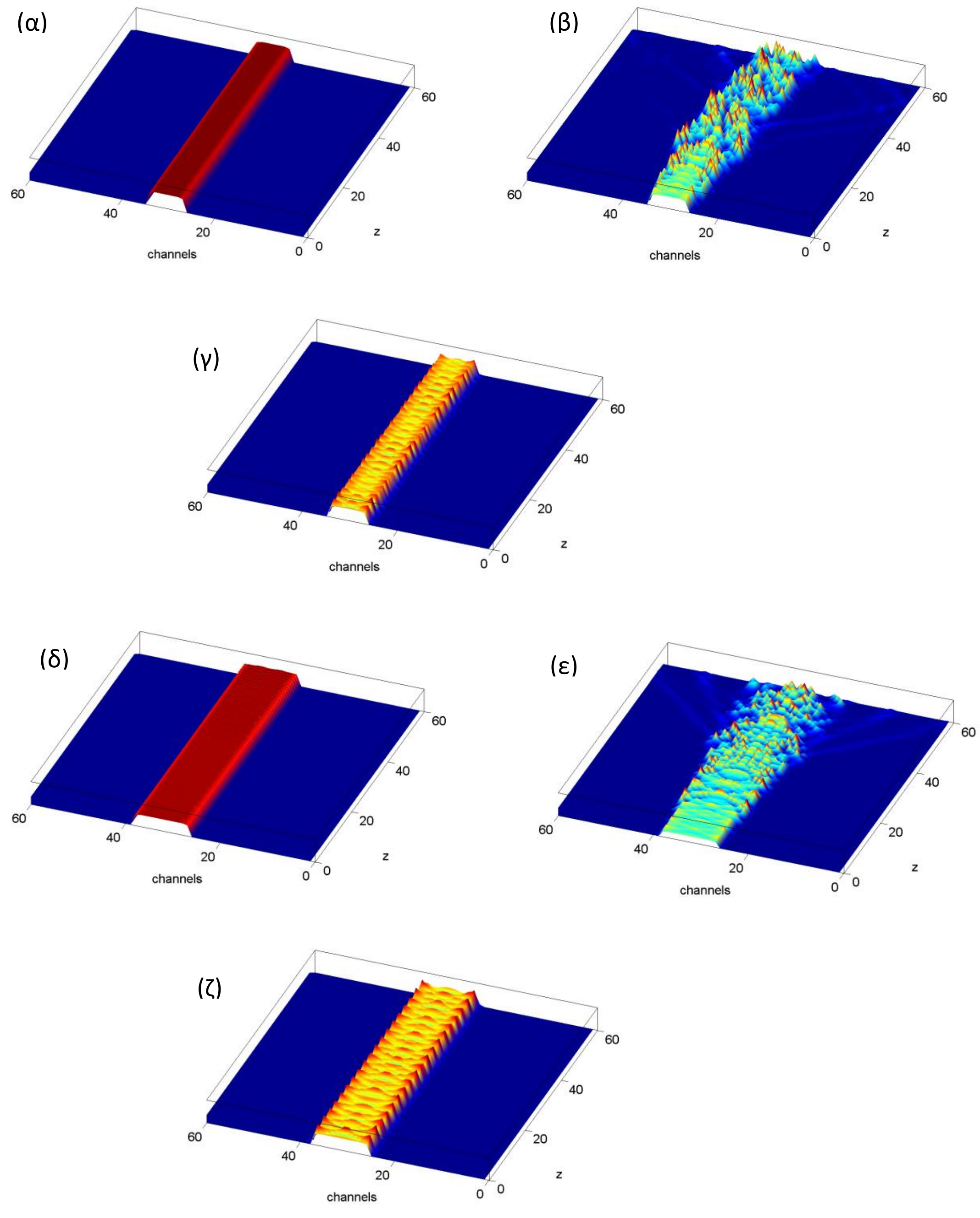


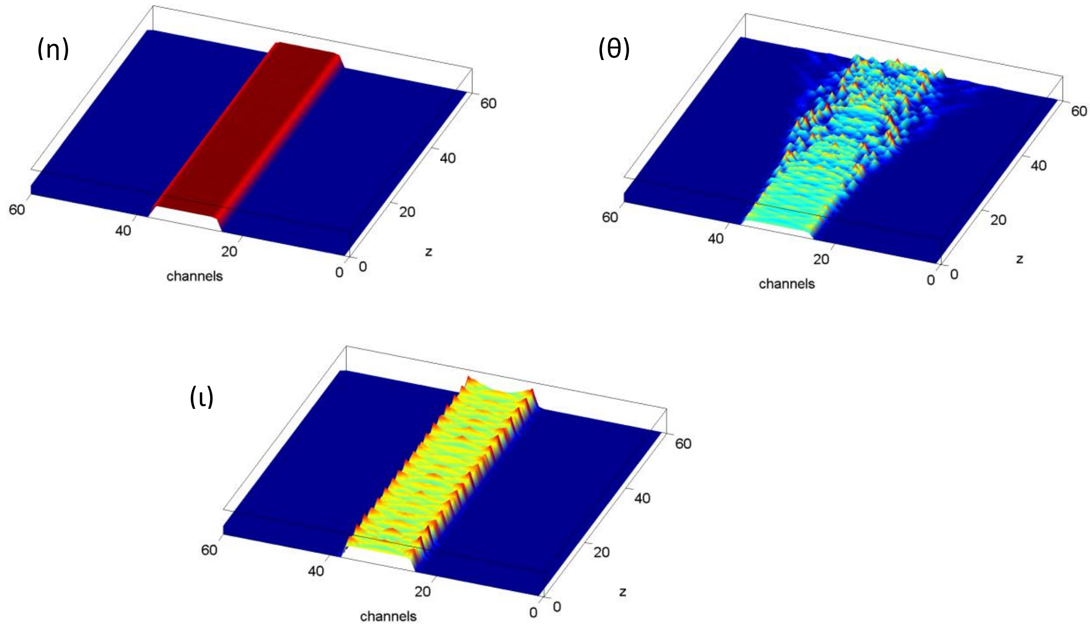
Σχ. 2.17 *Τοπολογικά σολιτόνια για μέσο περίπου Kerr ($\kappa = 5$) (α) και για μέσο με μη εντοπισμένη συμπεριφορά ($\kappa = 1$) (β). Στο (γ) έχει εφαρμοσθεί μια διαμήκης διαμόρφωση του $\kappa_0 = 1$ με συχνότητα $r = 1.8$. Το πλάτος του αρχικού πεδίου είναι σε όλες τις περιπτώσεις $U = 2.2$.*

<u>2.6.2 Σολιτόνια επίπεδης κορυφής (Flat-top solitons)</u>

Τα σολιτόνια επίπεδης κορυφής αποτελούν μια προέκταση των τοπολογικών σολιτονίων, από την άποψη ότι η κατασκευή τους έχει προκύψει από την τοποθέτηση «πλάτη με πλάτη» δυο τοπολογικών σολιτονίων. Οι μεταβατικές περιοχές από το χώρο κάποιας έντασης προς αυτούς που αντιστοιχούν σε μηδενική ένταση γίνεται με την κατατομή που χρησιμοποιήθηκε και στα τοπολογικά σολιτόνια. Εδώ πλέον σημαντικό ρόλο για την ευστάθεια ή μη του σολιτονίου σε μέσο μη εντοπισμένης συμπεριφοράς παίζει το πλήθος των κυματοδηγών που διεγείρονται αρχικά. Αυτό συμβαίνει γιατί το κ ουσιαστικά αντιστοιχεί σε ένα χαρακτηριστικό μήκος που δηλώνει την έκταση της απόκρισης του μέσου γύρω από μια οπτικά διεγερμένη περιοχή και επομένως όσο πιο πολλοί κυματοδηγοί διεγείρονται, τόσο πιο σύνθετο θα είναι το αποτέλεσμα των συνεισφορών μέσω των «ουρών» επικάλυψης.

Να σημειωθεί ότι τα σολιτόνια επίπεδης κορυφής που διαδίδονται σε μέσο Kerr για να είναι ευσταθή θα πρέπει το δευτερεύον πλάτος α που καθορίζει την κατατομή του μετώπου του κύματος να είναι μικρότερο μιας κρίσιμης τιμής $\alpha_{cr} = 0.16$ [71]. Αφού όπως είδαμε προηγουμένως $\alpha = c/\gamma U^2$ (εξ. 2.39), προκύπτει ότι για τιμές πλάτους $U > 1.83$ τα σολιτόνια επίπεδης κορυφής είναι ευσταθή. Πράγματι, στο Σχ. 2.18 παρουσιάζονται τα ευσταθή σολιτόνια που αντιστοιχούν σε Kerr μέσο, καθώς και η διάδοση που αντιστοιχεί στην ίδια κατατομή μετώπου κύματος για μέσο μη εντοπισμένης συμπεριφοράς ($\kappa = 1$). Στο Σχ. 2.18 παρουσιάζονται αρχικές δέσμες που έχουν αρχικά εύρη που καταλαμβάνουν 5 (α, δ, η), 8 (β, ε, θ) και 9 (γ, ζ, ι) κυματοδηγούς.





Σχ. 2.18. *Σολιτόνια επίπεδης κορυφής για περίπου Kerr μέσο ($\kappa = 5$) (α, β, γ) για μέσο με μη εντοπισμένη συμπεριφορά ($\kappa = 5$) (δ, ε, ζ). Στην τρίτη σειρά έχει εφαρμοσθεί διαμήκης διαμόρφωση του $\kappa = 1$ με συχνότητες που βελτιστοποιούσαν την ευστάθεια του σολιτονίου. Τα (α, β, γ), (δ, ε, ζ), (η, ϑ, ι) αντιστοιχούν σε εύρος 5, 8, 9 κυματοδηγούς. Το πλάτος του αρχικού πεδίου είναι σε όλες τις περιπτώσεις $U = 2.3$. Στα (γ), (ζ), (ι) οι συχνότητες διαμήκους διαμόρφωσης είναι αντίστοιχα 2.4, 3.1 και 2.2.*

Η αριθμητική διερεύνηση που πραγματοποιήθηκε πάνω σε δέσμες με επίπεδης κορυφής κατατομή, σε μέσα μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, ανέδειξε μια πολύ σημαντική ιδιότητα τους. Ενώ απουσία διαμήκους διαμόρφωσης του κ η διάδοση έχει χαρακτηριστικά διάλυσης, υπάρχουν χαρακτηριστικές συχνότητες διαμήκους διαμόρφωσης του $\kappa(z)$ για τις οποίες οι δέσμες αν και ασταθείς παραμένουν εντοπισμένες στο χώρο, καθώς για αυτές τις συχνότητες ο μη γραμμικός όρος της DNLS γίνεται τέτοιος ώστε η αυτοδιαμόρφωση φάσης να υπερισχύει της γραμμικής σύζευξης. Να επισημάνουμε ότι οι συχνότητες αυτές βρέθηκε ότι είναι χαρακτηριστικές για κάθε εύρος αρχικής δέσμης και ότι η εφαρμοζόμενη κατατομή στην μεταβατική περιοχή είναι αυτή που υπολογίστηκε για την περίπτωση Kerr. Επίσης, να αναφέρουμε έναν περιορισμό στη μελέτη μας, όπως ότι υπάρχουν κρίσιμες τιμές πλάτους (εξαρτώνται από το εύρος της δέσμης), αρκετά μεγαλύτερες από αυτή που παρουσιάσαμε $(U = 2.3)$, για τις οποίες τα σολιτόνια που διαδίδονται σε μέσο μη εντοπισμένης συμπεριφοράς εμφανίζουν ασταθή, αλλά εντοπισμένη συμπεριφορά χωρίς την ανάγκη εφαρμογής διαμήκους διαμόρφωσης. Από την άλλη πλευρά, η τιμή πλάτους που χρησιμοποιήσαμε ικανοποιεί την απαίτηση για δευτερεύον πλάτος (εξ. 2.39) $\alpha < 0.16$ για ευσταθή διάδοση σε Kerr και επομένως η παρατήρηση της ιδιότητας που περιγράψαμε είναι έγκυρη και μάλιστα με δυνατότητες περαιτέρω διερεύνησης και αξιοποίησης σε εφαρμογές οπτικής δρομολόγησης. Το τελευταίο στηρίζεται στη δυνατότητα ενεργούς προσαρμογής του συντελεστή μη εντοπισμένης συμπεριφοράς κ με σχετικά απλό τρόπο (π.χ. εφαρμογή εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου ή χρήση πηγών θερμότητας), με αποτέλεσμα να έχουμε κατ' επιλογή εντοπισμένη διάδοση. Επιπλέον παραμετροποίηση της διάταξης και μεγαλύτερος έλεγχος της διάδοσης είναι εφικτός λόγω της επιλεκτικότητας στην ευστάθεια της λύσης, ανάλογα με το εύρος της δέσμης σε συνδυασμό με τις χρησιμοποιούμενες συχνότητες διαμόρφωσης.

2.7 Περίληψη και συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο διερευνήθηκε η σολιτονική δυναμική για μέσο μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, με αναφορά στους νηματικούς υγρούς κρυστάλλους, που είναι εγκάρσια και διαμορφωμένο στη διεύθυνση της διάδοσης. Χρησιμοποιήθηκε η μεταβολική μέθοδος για την εξαγωγή ενός ανηγμένου μοντέλου που διέπει την εξέλιξη των σολιτονικών παραμέτρων κατά την διάδοση, καθώς και για τον καθορισμό της εξάρτησης γεωμετρικών και φυσικών χαρακτηριστικών της διάταξης. Το ανηγμένο μοντέλο αντιστοιχεί σε ένα μη ολοκληρώσιμο δυναμικό σύστημα που έχει σύνθετη δυναμική, η οποία διερευνήθηκε με τη χρήση επιφανειών τομών Poincare. Τα τελευταία, αποδεικνύεται, ότι παρέχουν ένα χρήσιμο εργαλείο για την πρόβλεψη της σολιτονικής εξέλιξης σε ένα μεγάλο εύρος συνδυασμών αρχικών παραμέτρων δέσμης, αφού τα σχετικά αποτελέσματα βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με την άμεση αριθμητική επίλυση της αρχικής εξίσωσης DNLS.

Δείχθηκαν διαφορετικά σενάρια σολιτονικής εξέλιξης, συμπεριλαμβανομένης της ομαλής και χαοτικής συμπεριφοράς, όπως επίσης και η φθίνουσα δυναμική των σολιτονιών, με τη μορφή διάλυσης ή διαχωρισμού της δέσμης. Η εξέλιξη βρέθηκε να καθορίζεται από τις τιμές των σολιτονικών αρχικών συνθηκών, όπως η ισχύς, το εύρος και το τερέτισμα και αναδείχθηκε μια πλούσια δομή φασικού χώρου με περιοχές ομαλών, συντονισμένων περιοδικών ή ημιπεριοδικών ταλαντώσεων καθώς και περιοχές με σύνθετη δυναμική. Επίσης, διερευνήθηκαν η εξάρτηση τόσο της θέσης όσο και του εύρους αυτών των περιοχών από τις παραμέτρους της διάταξης. Επομένως, καταδείχθηκε ένα πλούσιο σύνολο σολιτονικών παραμέτρων ελέγχου, μέσω της εγγραφής κατάλληλης διαμόρφωσης στη μη εντοπισμένη συμπεριφορά του μέσου κατά τη διεύθυνση της διάδοσης. Δέσμες με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά μπορούν να υποστούν μια κατά το επιθυμητό ρύθμιση της δυναμικής τους συμπεριφοράς κατά τη διάδοση και συνεπώς υπαρχουν τα κατάλληλα χαρακτηριστικά για το σκοπό της χρήσης της προτεινόμενης διάταξης σαν ρυθμιζόμενης διάταξης διαμεταγωγής.

Επιπλέον, διερευνήθηκαν οι περιπτώσεις χρήσης δοκιμαστικών λύσεων διαφορετικών από αυτή της εκθετικής, καθώς και η επίδραση της μορφής της διαμόρφωσης του συντελεστή μη εντοπισμένης διαφοράς, με ενδιαφέροντα συμπεράσματα. Τέλος, μελετήθηκαν κατηγορίες ιδεατών σολιτονίων ως προς τη διάδοσή τους σε εντοπισμένης και μη εντοπισμένης συμπεριφοράς μέσα. Διαπιστώθηκε η αστάθεια τοπολογικών και επίπεδης κορυφής σολιτονίων κατά τη διάδοσή στα δεύτερα, και αποκαλύφθηκε η δυνατότητα της χωρικής συγκράτησης των οπτικών δεσμών με την εφαρμογή διαμήκους διαμόρφωσης, χαρακτηριστικής συχνότητας, που εξαρτάται από το εύρος του διαδιδόμενης δέσμης. Με αφορμή την τελευταία ιδιότητα των μη εντοπισμένης συμπεριφοράς μέσων συζητήθηκε η σπουδαιότητα των σολιτονίων αυτών σε εφαρμογές οπτικής δρομολόγησης.

Κεφάλαιο 3

Αλληλεπιδράσεις δεσμών σε μέσο με μη εντοπισμένη συμπεριφορά

Αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι οι αλληλεπιδράσεις οπτικών δεσμών που διαδίδονται σε διακριτή διάταξη μέσου μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Σκοπός της παρουσιαζόμενης μελέτης είναι η επίδειξη των χαρακτηριστικών της διάδοσης για οπτικά πεδία διαφόρων παραμέτρων, σε οπτικά μέσα που παρουσιάζουν διάφορους βαθμούς μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Αναδεικνύεται ο ανταγωνισμός της επίδρασης της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς και της διακριτότητας της διάταξης και διαπιστώνεται ο ρόλος της διαφοράς φάσης των δεσμών ως προς τους παραγόμενους οπτικούς σχηματισμούς. Ακόμη, παρατηρείται η δυνατότητα δρομολόγησης με κατάλληλους συνδυασμούς παραμέτρων δέσμης, σύζευξης και παραμέτρων του μέσου. Τέλος, μελετάται η κατηγορία των φραζόντων σολιτονίων και διερευνώνται οι ιδιότητες τους σε μη εντοπισμένης συμπεριφοράς μέσα, υπό το πρίσμα της υλοποίησης φωτονικών διατάξεων δρομολόγησης.

3.1 Εισαγωγικά

Σε συνέχεια του προβλήματος διακριτής διάταξης νηματικών υγρών κρυστάλλων που μελετήθηκε στο Κεφάλαιο 2, στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει διερεύνηση των αλληλεπιδράσεων οπτικών δεσμών που εισάγονται σε παρόμοια διάταξη, με σκοπό τη μελέτη της δυναμικής τους. Οι ιδιότητες που κάνουν μια τέτοια διάταξη να εμφανίζει ιδιαίτερα ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά διάδοσης είναι ο συνδυασμός της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς του μέσου και η περιοδικότητα του δείκτη διάθλασης. Αυτά τα δύο στοιχεία επιτρέπουν τη χρήση του μοντέλου που περιγράφηκε στο Κεφ. 2 και συνεπώς της σχετικής γενικευμένης DNLS εξίσωσης.

Η διάδοση μιας οπτικής δέσμης σε ένα ομογενές μη γραμμικό μέσο διέπεται από διάφορες μη γραμμικές διαδικασίες. Όπως είδαμε και στο Κεφ. 1, οι σπουδαιότερες από αυτές είναι η αυτοδιαμόρφωση ή ετεροδιαμόρφωση φάσης, ανάλογα με τον αν έχουμε μια ή περισσότερες αλληλεπιδρώσες δέσμες και η μίξη τεσσάρων κυμάτων. Όσον αφορά στη διάδοση μιας μόνο δέσμης σε μέσα που μπορούν να χαρακτηριστούν ως διακριτά (είτε αποτελούνται από ξεχωριστούς κυματοδηγούς, είτε έχουν υποστεί διαμόρφωση του δείκτη διάθλασης), η ανάδειξη εντοπισμένων οπτικών δομών είναι ευκολότερη από ό,τι σε ομογενή μέσα [77, 21]. Αυτό συμβαίνει διότι το εγγεγραμμένο δυναμικό τείνει να διαχωρίσει το οπτικό πεδίο και να το συντηρήσει σε καθένα ξεχωριστό πηγάδι δυναμικού. Σε αυτή την περίπτωση, και ενώ κατά το εύρος του κάθε κυματοδηγού εμφανίζονται μέγιστα έντασης στο κέντρο του και ελάχιστα έντασης στο ενδιάμεσο δύο γειτονικών κυματοδηγών, η δημιουργία ενός χωρικού σολιτονίου αναφέρεται στην περιβάλλουσα των μεγίστων των κυματοδηγών που περιγράφονται από τη σολιτονική κατατομή.

Ειδικά για την περίπτωση της αλληλεπίδρασης δύο οπτικών πεδίων, η επίδραση της ετεροδιαμόρφωσης φάσης χαρακτηρίζει το μέσο ως σύμφωνο και η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος των δύο δεσμών εξαρτάται από τη διαφορά φάσης ανάμεσα στις δέσμες. Έτσι για εντοπισμένη συμπεριφορά τύπου Kerr, δύο ομοφασικές διαδιδόμενες σε ομογενές μέσο δέσμες εμφανίζουν έλξη μεταξύ τους. Το αντίστροφο (άπωση) παρατηρείται όταν οι δέσμες είναι εκτός φάσης μεταξύ τους [18]. Προεκτείνοντας σε διακριτές διατάξεις, έχει δειχθεί πειραματικά και θεωρητικά, ότι τα φαινόμενα που συμμετέχουν στην αλληλεπίδραση δεσμών είναι τα ίδια με αυτά που επικρατούν σε ομογενείς διατάξεις, με το βαθμό επίδρασης να εξαρτάται από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της γεωμετρίας της διακριτής διάταξης και της οπτικής δέσμης.

Εν γένει για τα μη γραμμικά υλικά, έχει δειχθεί ότι ένας ακόμη παράγοντας που προκαλεί την έλξη μεταξύ δεσμών είναι η ένταση της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς του μέσου [78]. Η μη εντοπισμένη συμπεριφορά του μέσου, διαφοροποιεί σημαντικά τη δυναμική συμπεριφορά και μάλιστα παρατηρούνται φαινόμενα, όπως η έλξη φωτεινών σολιτονίων που είναι εκτός φάσης και η ύπαρξη δέσμιων καταστάσεων δύο ασύμφωνων φωτεινών σολιτονίων [79]. Επικεντρώνοντας στους νηματικούς υγρούς κρυστάλλους, μπορεί να σημειωθεί ότι κατά τις αρχικές πειραματικές μελέτες ελεύθερων διατάξεων νηματικών υγρών κρυστάλλων, οι απαιτούμενες ενέργειες για την αυτοεστίαση της οπτικής δέσμης ήταν τόσο μεγάλες, ώστε τα θερμικά φαινόμενα που παρουσιάζονταν δε μπορούσαν να αγνοηθούν [80]. Με τη χρήση όμως εγκαρσίου πεδίου και την επακόλουθη διαμόρφωση του δείκτη διάθλασης, οι απαιτούμενες ενέργειες για αυτό-εστιασμένες σταθερές οπτικές δομές μειώνονται σημαντικά, όπως έχει δειχθεί τόσο θεωρητικά, όσο και πειραματικά [56].

Όπως θα δούμε στην ακόλουθη μελέτη πάνω στη διακριτή διάταξη νηματικών υγρών κρυστάλλων, και όπως έχει δειχθεί και σε αντίστοιχες διατάξεις Kerr μέσων, η διακριτή περίθλαση που συντελείται λόγω της ασθενούς σύζευξης των πεδίων, λόγω των πηγαδιών δυναμικού, εξαρτάται σημαντικά από το εύρος της εισερχόμενης δέσμης [81]. Αυτό συμβαίνει διότι αν το εύρος της αρχικής δέσμης είναι αρκετά μεγαλύτερο από την απόσταση μεταξύ των καναλιών κυματοδήγησης, η «διακριτότητα» του συστήματος είναι μικρή και η μορφή της περίθλασης μοιάζει με αυτή που παίρνουμε για ομογενές μέσο. Είναι λοιπόν εμφανής η ομαλή αναγωγή ενός ομογενούς συστήματος σε διακριτό, με κατάλληλη τροποποίηση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της διάταξης και είναι αβίαστο το συμπέρασμα της ισχύος των ίδιων κλασσικών μη γραμμικών μηχανισμών που διαμορφώνουν τους οπτικούς σχηματισμούς αλληλεπίδρασης.

Μια ακόμη διαφορά ανάμεσα στο σχήμα περίθλασης που λαμβάνεται σε διακριτά και ομογενή μέσα (ιδιαίτερα για την περίπτωση που οι αρχικές δέσμες εμφανίζουν αρκετά στενή χωρική κατατομή) είναι ότι οι δέσμες σε διακριτά συστήματα συντηρούν έντονα εντοπισμένα και για μεγάλες αποστάσεις τη μέγιστη ένταση σε αντίθεση με τα ομογενή, όπου η μέγιστη ένταση φθίνει σημαντικά [18]. Αυτή η παρατήρηση είναι άμεση συνέπεια της ύπαρξης των πηγαδιών δυναμικού, των οποίων η διάταξη είναι γνωστή και ως δυναμικό Peierls-Nabarro και το οποίο περιγράφει τις διαφορές ελαχίστων και μεγίστων της Hamiltonian. Για περισσότερο εντοπισμένους οπτικούς σχηματισμούς, το δυναμικό Peierls-Nabarro αυξάνεται και τείνει να περιορίζει την κινητικότητα των σολιτονίων.

Τέλος, θα πρέπει να επισημανθεί μια ακόμη διαφορά της οπτικής διάδοσης σε διακριτές και ομογενείς διατάξεις, που αναφέρεται στην περίπτωση που η δέσμη προσπίπτει στο μέσο σχηματίζοντας γωνία ανάμεσα στη διεύθυνσή της και της διαμήκους διεύθυνσης του μέσου. Σε μια τέτοια περίπτωση το οπτικό πεδίο, ανάλογα με τη γωνία πρόσπτωσης, είναι δυνατό να εμφανίζει διάδοση με ή χωρίς περίθλαση. Μια τέτοια συμπεριφορά είναι μοναδική για διάδοση σε διακριτούς κυματοδηγούς και όπως θα δούμε αναλυτικά στην επόμενη ενότητα, όπου θα μελετήσουμε τη διακριτή περίθλαση, σχετίζεται με την εξάρτηση της εγκάρσιας ταχύτητας και του «συντελεστή περίθλασης» από το μέσο διάνυσμα Bloch [82].

Έχοντας υπόψη τις παραπάνω παρατηρήσεις για την ιδιαιτερότητα της διακριτής διάδοσης και κάνοντας αναδρομή στις υπάρχουσες εργασίες για την αλληλεπίδραση σολιτονίων σε διακριτές διατάξεις, μπορούμε να διακρίνουμε τις αλληλεπιδράσεις, όπως αυτές προκύπτουν από αλληλεπίδραση οπτικών πεδίων που βρίσκονται σε γειτονικά κανάλια, σε αλληλεπιδράσεις ομόρροα ή αντίρροα οδευόντων κυμάτων, σε φράζοντα σολιτόνια (blocker solitons) και συγκρούσεις σολιτονίων των οποίων οι διευθύνσεις διάδοσης τέμνονται [21].

Ομόρροα οδεύοντα σολιτόνια. Πρόκειται για παράλληλα και με ίδια φορά διαδιδόμενα σολιτόνια, τα οποία έχουν αποτελέσει αντικείμενο πειραματικής διερεύνησης και τα οποία στην περίπτωση υλικού μέσου με μη γραμμικότητα τύπου Kerr, δηλαδή με μη γραμμικότητα εντοπισμένης συμπεριφοράς, χρειάζονται σημαντική επικάλυψη των πεδίων δεσμών για να αλληλεπιδράσουν [83]. Ειδικά στη περίπτωση που οι δέσμες είναι σημαντικά στενές, τα πεδία «κλειδώνουν» στους κυματοδηγούς με αποτέλεσμα η αλληλεπίδραση να είναι ασθενής. Ωστόσο, η κατάσταση βελτιώνεται αρκετά όταν οι αρχικές δέσμες είναι εύρους μεγαλύτερου από το εύρος του κυματοδηγού. Τότε, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η συμπεριφορά της αλληλεπίδρασης προσομοιάζει αυτή των σολιτονίων συνεχούς μέσου, δηλαδή ομοφασικά σολιτόνια έλκονται και συγχωνεύονται, ενώ σολιτόνια με διαφορά φάσης π απωθούνται. Για διαφορές φάσης ενδιαμέσων τιμών τα σολιτόνια μπορούν να επιβιώνουν το ένα εις βάρος του άλλου.

Αντίρροα οδεύοντα σολιτόνια. Πειράματα αλληλεπίδρασης ανάμεσα σε σολιτόνια που κινούνται παράλληλα με αντίθετες φορές έχουν πραγματοποιηθεί σε $LiNBO_3$ πλέγμα κυματοδηγών, με ίδιες τιμές εισερχόμενης ισχύος για τις δυο δέσμες [84]. Έχει δειχθεί ότι η τιμή της ισχύος παίζει σημαντικό ρόλο και, έτσι, για μικρή ισχύ εμφανίζονται διακριτά σολιτόνια, ενώ, όσο μεγαλώνει η ισχύς, στην αρχή παρατηρείται μια εγκάρσια μετατόπιση του μεγίστου της έντασης και στη συνέχεια, για ακόμη μεγαλύτερες τιμές ισχύος, παρατηρούνται αστάθειες και δεν υπάρχει σταθερή έξοδος.

Τα *φράζοντα (blocker) σολιτόνια* ανακαλύφθηκαν το 1999 κατά τη διάρκεια πειραμάτων σε διατάξεις ολικής οπτικής διαμεταγωγής, που βασίζονταν σε δισδιάστατες διακριτές γεωμετρίες [85-87]. Αυτά τα σολιτόνια είναι έντονα περιορισμένα και μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να φράξουν, να προκαλέσουν ανάκλαση ή να ανακατευθύνουν μια δέσμη χαμηλής ενέργειας ή μεγάλου εύρους. Πειράματα φραζόντων σολιτονίων έχουν πραγματοποιηθεί κυρίως σε φωτοδιαθλαστικά και Kerr μέσα για ίδιες ή ορθογώνιες πολώσεις φράζοντος σολιτονίου και οπτικού σήματος, φωτεινά ή σκοτεινά σολιτόνια και δέσμες σύμφωνες ή ασύμφωνες [88-90].

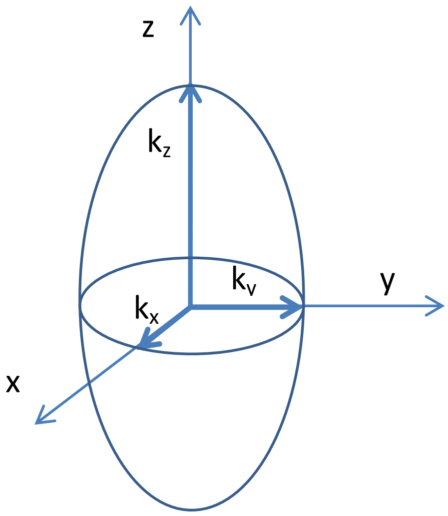
Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν αριθμητικά πειράματα αλληλεπίδρασης ομόρροων οδευόντων σολιτονίων, σε μέσο με μη εντοπισμένη συμπεριφορά. Πριν προχωρήσουμε όμως στα αριθμητικά πειράματα, κρίνεται σκόπιμη μια αναλυτική παρουσίαση του φαινομένου της διακριτής περίθλασης.

3.2 Διακριτή περίθλαση

Η αντίληψη που έχουμε για τη διάδοση του φωτός προέρχεται κυρίως από την συμπεριφορά του κατά τη διάδοση σε ελεύθερα μέσα όπως αυτή διέπεται από νόμους, όπως τον νόμο του Snell και το νόμο της περίθλασης. Ο πρώτος μας περιγράφει για την περίπτωση που φως προσπίπτει σε διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων, τη γραμμική εξάρτηση της γωνίας διάδοσης με τη γωνία πρόσπτωσης, ενώ ο δεύτερος μας καθορίζει το «άπλωμα» μιας δέσμης σαν μια διαδικασία που εξαρτάται κυρίως από το λόγο του μήκους κύματος προς το εύρος της δέσμης. Η προηγούμενη εξάρτηση, καθώς και η ανεξαρτησία της διάδοσης από την γωνία πρόσπτωσης οφείλεται στο αναλλοίωτο που προκύπτει κατά τον μετασχηματισμό συντεταγμένων, καθώς και λόγω της περιστροφικής συμμετρίας των ισοτροπικών μέσων και μαθηματικά εκφράζεται από την εξίσωση διασποράς των κανονικών ρυθμών (των μονοχρωματικών λύσεων της κυματικής εξίσωσης που υπακούουν στη σχέση διασποράς).

$$k_0^2(\omega^2) = k_{0x}^2 + k_{0y}^2 + k_{0z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega) \qquad (3.1)$$

όπου k_{0i} είναι οι συνιστώσες του κυματοδιανύσματος και $\varepsilon(\omega)$ η διηλεκτρική συνάρτηση που παίρνει πραγματικές τιμές στην περιοχή διαπερατότητας του υλικού. Η εξ. 3.1 περιγράφει στην περίπτωση ενός ισοτροπικού μέσου μια σφαίρα και σε κάθε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας βρίσκεται κάθετο το διάνυσμα Poynting, περιγράφοντας τη ροή ενέργειας. Για ανισοτροπικά μέσα παύει να ισχύει η συμμετρία και το κυματοδιάνυσμα δίνει ένα ελλειψοειδές, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.1, για μια συχνότητα ω. Η ένταση του φαινομένου της περίθλασης δίνεται από την καμπυλότητα της ισοσυχνοτικής επιφάνειας.



Σχ. 3.1 *Ελλειψοειδές που χαρακτηρίζει το κυματοδιάνυσμα ενός ανισοτροπικού μέσου. Η καμπυλότητά που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο της επιφάνειας του δίνει την ένταση του φαινομένου της περίθλασης.*

Όπως αναφέρθηκε στο εισαγωγικό κεφάλαιο η εξίσωση που περιγράφει την οπτική διάδοση μιας δέσμης σε ένα σύστημα Kerr διαστάσεων 1+1 είναι η γνωστή διακριτή μη γραμμική εξίσωση Schroedinger (εξ. 3.2), η οποία περιγράφει τη διάδοση συνεχούς μονοχρωματικού οπτικού πεδίου σε συστοιχία μεγάλου πλήθους κυματοδηγών, που υποστηρίζουν ένα μοναδικό ρυθμό ο καθένας

$$i\frac{du_n}{d\xi}+\beta u_n+C(u_{n+1}+u_{n-1})+\gamma|u_m|^2u_n=0 \tag{3.2}$$

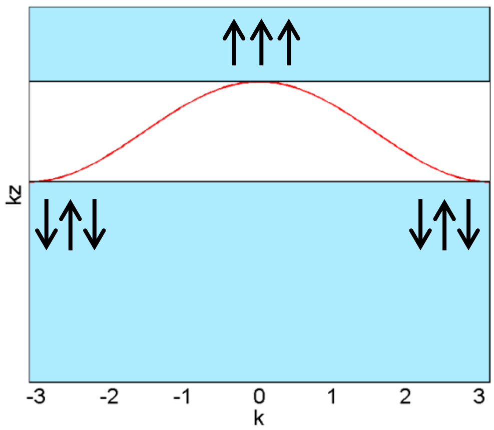
όπου β η σταθερά της γραμμικής διάδοσης, C ο συντελεστής σύζευξης, ενώ η απουσία δεύτερης παραγώγου οφείλεται στο γεγονός ότι αγνοούμε φαινόμενα διασποράς και περίθλασης σε καθένα κυματοδηγό.

Η εξ. 3.2 δε μπορεί να λυθεί αναλυτικά, ωστόσο αγνοώντας το μη γραμμικό όρο ($\gamma=0$), μπορούμε να εξάγουμε την εξίσωση διασποράς για το υπόλοιπο γραμμικό κομμάτι, που θυμίζουμε ότι περιλαμβάνει το γραμμικό φαινόμενο της περίθλασης. Για να γίνει αυτό υποθέτουμε επίπεδο κύμα της μορφής $u_n=u_0\exp(ink_xd+ik_zz)$, οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση διασποράς

$$k_z=\beta+k\Rightarrow k_z=\beta+2C\cos(k_xd) \tag{3.3}$$

Όπου k_x,k_z είναι οι συνιστώσες του κυματοδιανύσματος στις διευθύνσεις x,z.

Σημαντικές ιδιότητες της εξίσωσης διασποράς (εξ. 3.3) είναι η περιοδικότητα και η συνέχεια της και στις οποίες οφείλεται η ύπαρξη μιας μέγιστης γωνίας $\theta_{\max}$ για την περίθλαση ενός επιπέδου κύματος στο πλέγμα των κυματοδηγών. Δανειζόμενοι από την ορολογία της φυσικής στερεάς κατάστασης, ορίζουμε τη ζώνη Brillouin για την περιοχή $-\pi < k_x d < \pi$, στην οποία ορίζουμε τους ιδιορυθμούς που υποστηρίζονται στο περιοδικό σύστημα, και οι οποίοι είναι γνωστοί ως κύματα Floquet-Bloch. Στο Σχ. 3.2 παρουσιάζεται η ζώνη Brillouin για ένα διακριτό σύστημα. Οι γκρίζες ημιάπειρες περιοχές καθορίζουν τις περιοχές της z συνιστώσας του κυματοδιανύσματος, για τις οποίες δεν μπορούμε να έχουμε διάδοση.



Σχ. 3.2 *Σχέση διασποράς k_z στην ανηγμένη ζώνη Brillouin για το διακριτό πρόβλημα. Οι σκιασμένες περιοχές αντιστοιχούν σε ημιάπειρα χάσματα. Στα άκρα της ζώνης γειτονικά πλάτη του κύματος είναι εναλλασσόμενα (staggered) ενώ στο κέντρο είναι συνεχή (unstaggered).*

Αν δεχτούμε μια τυπική εισερχόμενη δέσμη σε μια διακριτή διάταξη, το εύρος της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το εύρος του κάθε κυματοδηγού, με αποτέλεσμα το φάσμα του χώρου Fourier να είναι πεπερασμένο με ένα κεντρικό διάνυσμα Bloch κ_0, του οποίου η τιμή καθορίζεται από την αρχική κλίση της οπτικής δέσμης. Έτσι αν $\kappa = k_x d$, μπορούμε να αναπτύξουμε την εξ. 3.3 γύρω από την τιμή κ_0 και κρατώντας μόνο τους τρείς πρώτους όρους, παίρνουμε,

$$k_z(\kappa) = k_z(\kappa_0) + \left.\frac{dk_z}{d\kappa}\right|_{\kappa_0}(\kappa - \kappa_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2k_z}{d\kappa^2}\right|_{\kappa_0}(\kappa - \kappa_0)^2 \qquad (3.4)$$

Με

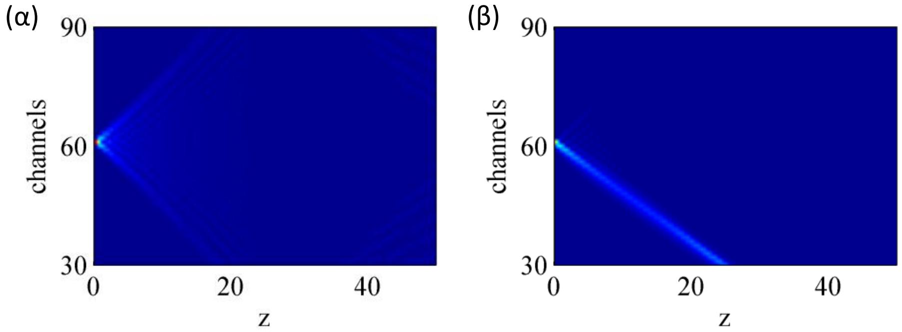
$$\gamma = \left.\frac{dk_z}{d\kappa}\right|_{\kappa_0} = -2C\sin(\kappa_0)$$

$$D = \left.\frac{d^2k_z}{d\kappa^2}\right|_{\kappa_0} = -2C\cos(\kappa_0) \qquad (3.5)$$

συντελεστές που αντιστοιχούν στην εγκάρσια ταχύτητα και την ένταση της περίθλασης, αντίστοιχα. Αυτή ακριβώς η εξάρτηση της ταχύτητας και του συντελεστή περίθλασης από το κεντρικό Bloch διάνυσμα, είναι η μεγάλη διαφορά των διακριτών συστημάτων από τα ομογενή.

Συνέπεια του προηγούμενου είναι η εμφάνιση μεγίστου ορίου για το συντελεστή περίθλασης, καθώς επίσης και μηδενισμός του στο σημείο καμπής της συνάρτησης $k_z(\kappa_0)$ για $\kappa_0 = \pm\pi/2$, οπότε προβλέπεται διάδοση χωρίς περίθλαση ($D = 0$). Επιπλέον, για τιμές

$\pi / 2 < k_x d < \pi$, ο συντελεστής περίθλασης είναι θετικός (εξ. 3.5) και τότε η περίθλαση είναι «ανώμαλη», στο πνεύμα της έννοιας της ανώμαλης διασποράς. Στο Σχ. 3.3 παρουσιάζεται η οπτική διάδοση μια δέσμης σε διακριτό μέσο για διάφορες τιμές εγκάρσιας ταχύτητας, με αντίστοιχη επίδραση στην ένταση της περίθλασης. Ειδικά στο Σχ. 3.3(b) και με αρχική ταχύτητα $u = 1$ είναι προφανής η διάδοση ελάχιστης διασποράς.



Σχ. 3.3 *Διάδοση δεσμών για διαφορετικές τιμές εγκάρσιας ταχύτητας σε μέσο Kerr. Και στις δύο περιπτώσεις η ισχύς της δέσμης είναι $W = 1$ και το αντίστροφο εύρος, $\mu = 1$. Η εγκάρσια ταχύτητα είναι στο (α) $u = 0$ και στο (β) $u = 1$. Το (β) αντιστοιχεί στην περίπτωση διάδοσης περίπου μηδενικής περίθλασης.*

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να σημειωθούν δύο ιδιαίτερες περιπτώσεις διακριτής διάδοσης. Αν η εισερχόμενη δέσμη είναι μικρής ενέργειας, ο μη γραμμικός όρος μπορεί να αγνοηθεί, οπότε η εξ. 3.2 είναι ολοκληρώσιμη και η λύση έχει αναλυτική μορφή. Τέλος, αν η εισερχόμενη δέσμη είναι αρχικά περιορισμένη σε περιοχή μικρότερη από το εύρος ενός κυματοδηγού, τότε η λύση θα είναι [18]:

$$u_n(z) = A_0 i^n J_n(2Cz)\exp(i\beta z) \tag{3.6}$$

Εδώ, απλά αναφέρουμε ότι η παραπάνω έκφραση για μια στενή αρχικά δέσμη οδηγεί σε μορφές περίθλασης που διαφέρουν από την περίθλαση που παίρνουμε από διάδοση σε ελεύθερο μέσο, αφού πλέον τα μέγιστα της ροής της ισχύος δεν βρίσκονται στην κεντρική περιοχή της περίθλασης, αλλά βρίσκονται στην περιφέρεια αυτής.

Μετά και από αυτή την ενότητα, όπου έγινε μια παρουσίαση του μηχανισμού δημιουργίας των διακριτών εντοπισμένων σχηματισμών, μπορούμε, πλέον, να διερευνήσουμε το σχηματισμό των περιθλαστικών σχηματισμών δύο δεσμών και των αλληλεπιδράσεων αυτών μεταξύ τους.

3.3 Αλληλεπιδράσεις δεσμών σε μέσα με μη εντοπισμένη συμπεριφορά

Οι αλληλεπιδράσεις δύο οπτικών δεσμών σε μέσο με μη εντοπισμένη συμπεριφορά έχει αποτελέσει στο παρελθόν αντικείμενο μελέτης για διάφορα οπτικά υλικά, όπως συμπυκνώματα Bose-Einstein [91-93], νηματικούς υγρούς κρυστάλλους [79] και υλικά με τετραγωνική μη γραμμικότητα [94, 95]. Ειδικά για τους νηματικούς υγρούς κρυστάλλους έχουν πραγματοποιηθεί πειράματα αλληλεπίδρασης (2+1) χωρικών σολιτονίων, με διάφορες παραλλαγές. Πρόσφατα έχει μελετηθεί η ασύμφωνη αλληλεπίδραση ομόρροπα και αντίρροπα οδευόντων δεσμών σε ομογενή νηματικό κρύσταλλο, χωρίς επίδραση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου σε διάφορες γωνίες πρόσπτωσης στην επιφάνεια εισόδου και διαφορετικές αποστάσεις εισόδου. Επιπλέον, παλαιότερα πειράματα που έχουν πραγματοποιηθεί σε νηματικούς κρυστάλλους με επίδραση ομογενούς εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, έχουν δείξει τεμνόμενες και συγχωνευόμενες οπτικές δέσμες. Και στις δύο περιπτώσεις πειραμάτων απαραίτητο είναι να γίνει η υπέρβαση του κατωφλίου Freèdericksz. Στην πρώτη περίπτωση αυτό επιτυγχάνεται με κατάλληλη επεξεργασία των δύο παράλληλων οριζόντιων πολυκαρβονικών πλακών που συγκρατούν το νηματικό δείγμα, ούτως ώστε τα αγκιστρωμένα στις επιφάνειες αυτές μόρια να εμφανίζουν γωνία $\pi/4$, η οποία και μεταφέρεται στα μόρια σε όλο τον όγκο του δείγματος [96]. Στη δεύτερη περίπτωση, όπως έχουμε δει και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η μεγιστοποίηση της μη γραμμικότητας αναπροσανατολισμού επιτυγχάνεται με τη χρήση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου [79]. Και στις δύο περιπτώσεις, μια *x*-πολωμένη (στο επίπεδο στροφής των μορίων) εισερχόμενη δέσμη παραμένει ένα υπερκανονικό κύμα και αυτό εξασφαλίζεται με κατάλληλα προσανατολισμένη στην υπερκανονική διεύθυνση διαδικασία εγχάραξης.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να σημειώσουμε την ύπαρξη ερευνητικής δραστηριότητας για αλληλεπιδράσεις σε ομογενείς διατάξεις νηματικών υγρών κρυστάλλων και ταυτόχρονα τη σχετική απουσία αντίστοιχων μελετών σε διακριτές διατάξεις. Η ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας έδειξε ότι τα μέσα μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, στα οποία υπάρχει δραστηριότητα όσον αφορά τις αλληλεπιδράσεις σε διακριτές διατάξεις, είναι τα συμπυκνώματα Bose-Einstein, για τα οποία έχουν αναλυθεί και συστηματικά διερευνηθεί οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ διπόλων [βλ. παραπάνω]. Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις, παρακάτω θα κάνουμε χρήση του μοντέλου που εισάγαμε στο Κεφ. 2 για τη μελέτη αλληλεπιδράσεων δεσμών που διαδίδονται σε διαμορφωμένο νηματικό υγρό κρύσταλλο, με σκοπό τη μελέτη ενός αντικειμένου που, κατά τη γνώση μας, δεν απαντάται ακόμη στη επιστημονική βιβλιογραφία.

Όπως ειπώθηκε και νωρίτερα, αφετηρία του μοντέλου μας είναι η διακριτή μη γραμμική εξίσωση Schroedinger

$$i\frac{\partial u_n}{\partial \xi} + (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + 2u_n \sum_m \frac{\exp(-\kappa|m+n|)}{\coth(\kappa/2)}|u_m|^2 = 0 \qquad (3.7)$$

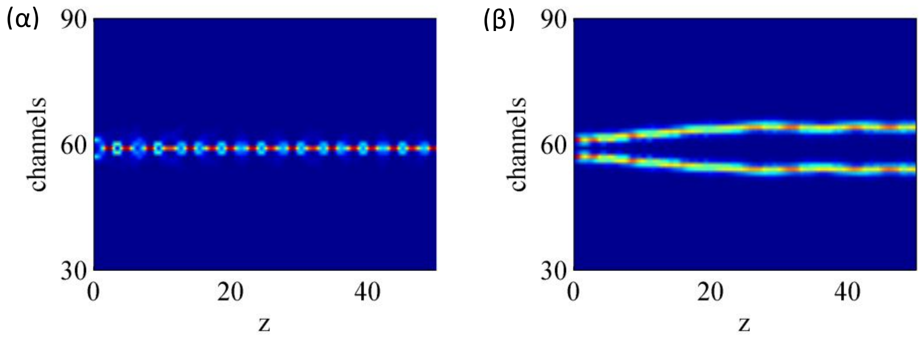
όπου u_n το πεδίο στο *n*-στο κανάλι. Η δοκιμαστική λύση που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι αυτή που χρησιμοποιήθηκε στο πρώτο κεφάλαιο, με την προσθήκη, βέβαια, επιπρόσθετου όρου που θα περιγράφει την αλληλεπιδρούσα δέσμη [97],

$$u_n(z) = A_1(z)e^{ib|n|-\mu_1|n|} + A_2(z)e^{ib|n+d|-\mu_2|n+d|+i\delta\varphi} \qquad (3.8)$$

όπου A_i τα πλάτη των δύο δεσμών που στη μελέτη μας θα θεωρήσουμε ότι είναι ίσα, b ποσότητα που αντιστοιχεί στο τερέτισμα, d η απόσταση ανάμεσα στις θέσεις εισόδου των δεσμών μέσα στο οπτικό μέσο, μ_i, το αντίστροφο εύρος των δεσμών και $\delta\varphi$ η σχετική φάση ανάμεσα τους.

Γενικά, κατά την διάδοση δεσμών σε δείγμα νηματικού υγρού κρυστάλλου η αλληλεπίδρασή τους οφείλεται στην επικάλυψη των οπτικών πεδίων των δεσμών. Επιπρόσθετα, σε μέσο μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, λόγω της επικάλυψης των διαταραχών του δείκτη διάθλασης που προκύπτουν με διάχυση από τις περιοχές διέγερσης, αναπτύσσεται μια εγκάρσια επιτάχυνση ανάμεσα στα σολιτόνια, η οποία μειώνει την απόσταση μεταξύ τους. Η ύπαρξη μη εντοπισμένης συμπεριφοράς καταπιέζει τη διαμόρφωση του δείκτη διάθλασης, στην περιοχή αλληλοεπικάλυψης των πεδίων, με αποτέλεσμα οι αλληλεπιδράσεις οπτικών δεσμών σε ομογενές, μη εντοπισμένης συμπεριφοράς μέσο να μπορούν να χαρακτηριστούν ως ασύμφωνες, δηλαδή είναι εν γένει ανεξάρτητες από τη διαφορά φάσης ανάμεσα στις δέσμες (πειραματική επιβεβαίωση στην [79]). Από την άλλη έχει αναφερθεί ότι αν είναι δυνατή η ρύθμιση της έντασης της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς του μέσου (πχ. με την επίδραση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου), μπορεί να βρεθούν τιμές κατωφλίου για τις οποίες το αποτέλεσμα είναι ελκτικό ή απωστικό και οι δέσμες να χαρακτηρίζονται από σύμφωνη συμπεριφορά [78].

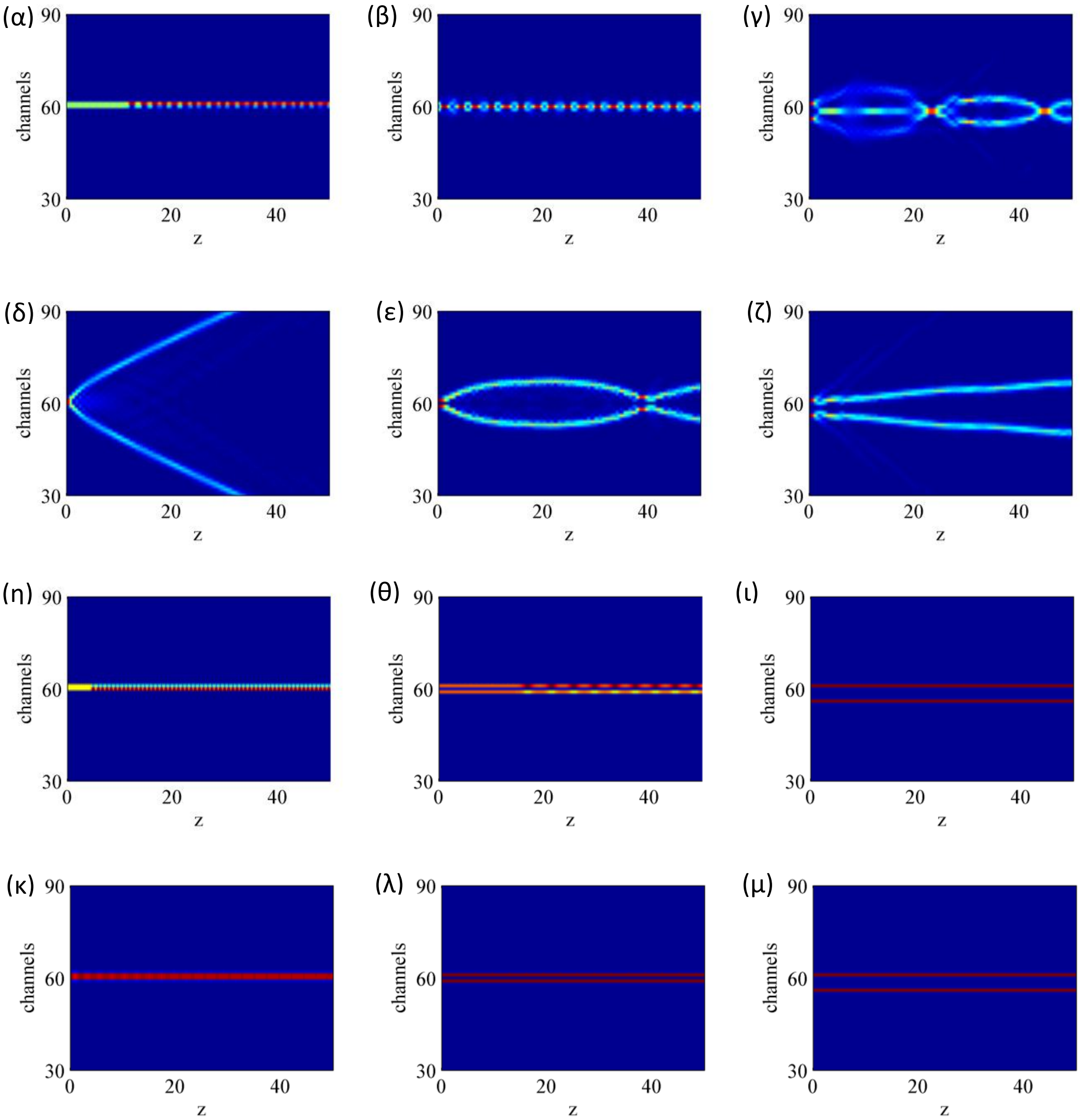
Έχοντας υπόψη τα παραπάνω στοιχεία για τις αλληλεπιδράσεις σε ομογενές μέσο, εισάγουμε στο εξής και τον παράγοντα της εγκάρσιας διαμόρφωσης. Αυτό που αναμένουμε είναι η εγκάρσια επιτάχυνση του πεδίου αλληλεπίδρασης να υφίσταται ενός είδους καταπίεση, με αποτέλεσμα να παρεμποδίζεται ο ασύμφωνος χαρακτήρας της αλληλεπίδρασης. Πράγματι, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.4, η αλληλεπίδραση δύο οπτικών δεσμών, σε επίπεδο προσομοίωσης, εξαρτάται από τη σχετική φάση των δεσμών.



Σχ. 3.4 *Αλληλεπιδράσεις μεταξύ δεσμών με αντίστροφο εύρος $\mu = 1$ και ισχύ $W = 4$. Στο (α) οι δέσμες είναι ομοφασικές ($\delta\varphi = 0$) και στο (β) είναι εκτός φάσης ($\delta\varphi = \pi$). Ο συντελεστής μη εντοπισμένης συμπεριφοράς είναι $\kappa = 1$.*

Τα αριθμητικά πειράματα που ακολουθούν επικεντρώνονται στο να διερευνήσουν την εξάρτηση των οπτικών σχηματισμών αλληλεπίδρασης από τις εξελικτικές παραμέτρους του αντίστροφου εύρους μ, την εισερχόμενη ισχύ W, τη διαφορά φάσης $\delta\varphi$ και, τέλος, τις γωνίες εισόδου, όπως αυτές σχετίζονται με τις εγκάρσιες ταχύτητες u. Εδώ να θυμίσουμε ότι το πλάτος A συνδέεται με τα μ και W με τη σχέση $W = A^2 \coth\mu$.

Στο Σχ. 3.5 εμφανίζεται η διάδοση δύο οπτικών δεσμών με ίδια ισχύ $W = 4$ και ίδιο πλάτος, για διάφορες τιμές αποστάσεων μεταξύ των αρχικών δεσμών (1, 2, 5 περίοδοι της εγκάρσιας διαμόρφωσης). Οι δέσμες θεωρούνται έντονα εντοπισμένες με εύρος $1/\mu = 0.5$ μικρότερο από το εύρος του κάθε κυματοδηγού, που είναι $w=1$. Επιπλέον, οι δέσμες δεν έχουν εγκάρσια ταχύτητα. Εξετάζουμε την περίπτωση όπου το μέσο παρουσιάζει έντονα μη εντοπισμένη συμπεριφορά ($\kappa=1$) και την περίπτωση που το μέσο είναι περίπου μη γραμμικότητας Kerr. Η περίοδος της εγκάρσιας διαμόρφωσης ορίζεται ως Λ.



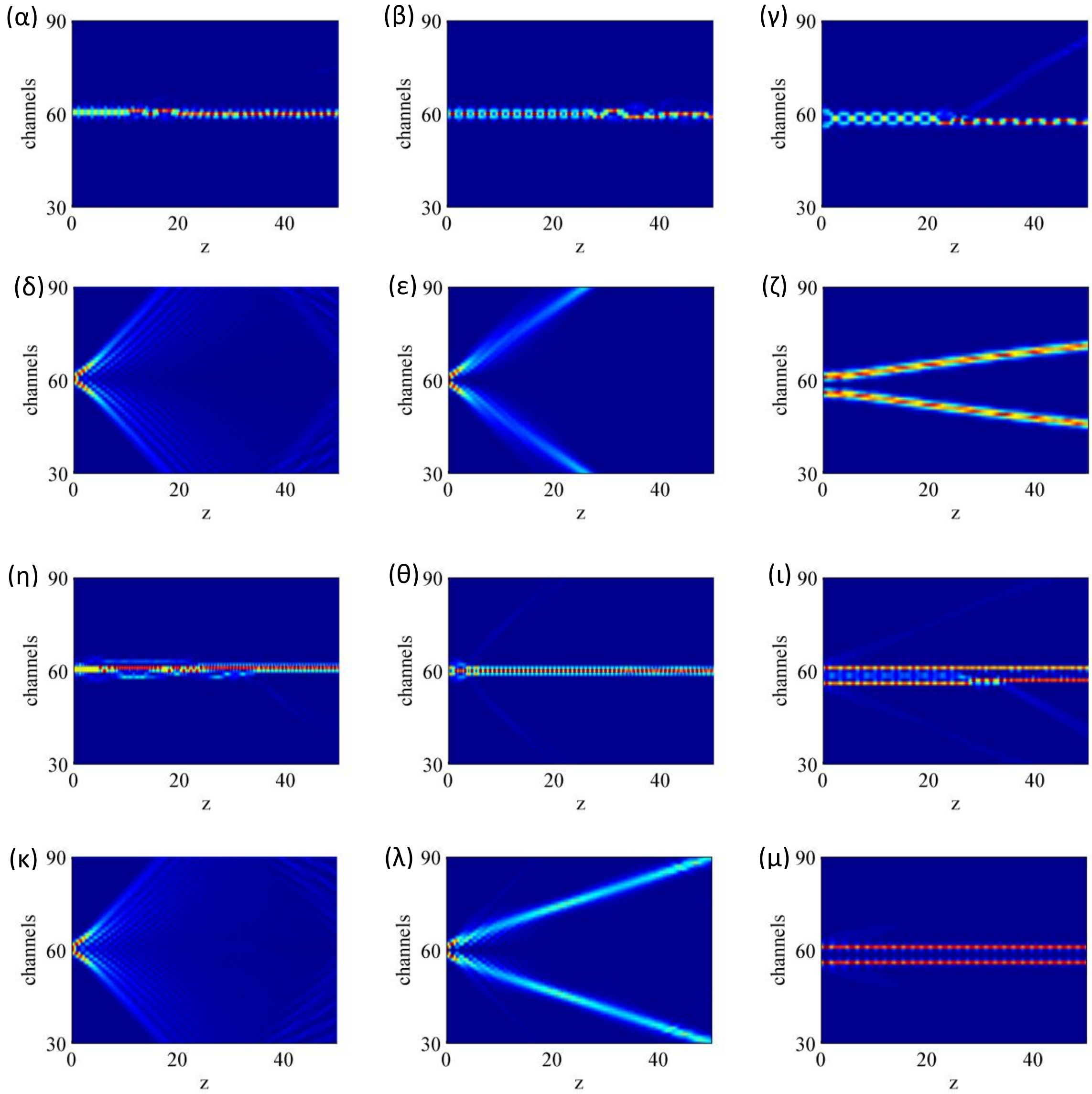
Σχ. 3.5 Αλληλεπιδράσεις μεταξύ δεσμών με $\mu=2$, $W=4$. Στις δύο πρώτες σειρές οι δέσμες διαδίδονται σε μέσο με μη εντοπισμένη συμπεριφορά ($\kappa=1$) και στις δύο τελευταίες σε μέσο με εντοπισμένη συμπεριφορά ($\kappa=5$). Στα (α), (β), (γ), (η), (θ), (ι) οι δέσμες είναι ομοφασικές, ενώ στα (δ), (ε), (ζ), (κ), (λ), (μ) είναι εκτός φάσης κατά π. Στην πρώτη στήλη η απόσταση μεταξύ των δεσμών είναι μια περίοδος εγκάρσιας διαμόρφωσης, Λ, στη δεύτερη στήλη 2 Λ και στην τρίτη 5 Λ.

Κατά τη διερεύνηση των αλληλεπιδράσεων μεταξύ δεσμών ο τρόπος για να ρυθμίζουμε τη σύζευξη ανάμεσα στα οπτικά πεδία είναι με την αυξομείωση της απόστασης που οι δέσμες έχουν κατά την είσοδό τους στο μέσο και που έχει ως αποτέλεσμα την κατά περίπτωση διαφοροποίηση των ολοκληρωμάτων επικάλυψης. Εστιάζοντας στη μη εντοπισμένης συμπεριφοράς περίπτωση, όπως φαίνεται στα Σχ. 3.5(α)-(β)-(γ) για ομοφασικές δέσμες, είναι εμφανές ότι οι αριθμητικές λύσεις δεν είναι ευσταθείς. Ωστόσο, για εισερχόμενες δέσμες σε γειτονικούς κυματοδηγούς (Σχ. 3.5(α)) το παραγόμενο από την αλληλεπίδραση πεδίο τείνει να βρίσκεται εντοπισμένο στους δύο κυματοδηγούς χωρίς ιδιαίτερη περίθλαση, ενώ μετά από κάποια απόσταση διάδοσης παρατηρείται η συγχώνευση σε μεγάλο βαθμό της οπτικής έντασης σε έναν από τους δύο κυματοδηγούς. Όσο οι δέσμες απομακρύνονται η μία από την άλλη παρατηρείται ένα ταλαντούμενο πεδίο (breathing), το οποίο για μεγαλύτερη απόσταση δεσμών (Σχ. 3.5(γ)) είναι μη περιοδικό. Εδώ να θυμίσουμε ότι σε ομογενή μέσα με ισχυρά μη εντοπισμένη συμπεριφορά προβλέπεται έλξη ομοφασικών δεσμών [78]. Η διαφοροποίηση που υπάρχει στη διακριτή διάταξη που εξετάζουμε είναι μικρή και ουσιαστικά αυτό που συμβαίνει είναι το εγκάρσιο περιοδικό δυναμικό, Peierls-Nabarro, να λειτουργεί ενισχυτικά του ελκτικού χαρακτήρα της ομοφασικής αλληλεπίδρασης, κατά τη λογική του εγκλωβισμού του οπτικού πεδίου, που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα.

Σημαντικά διαφοροποιημένη, ως προς την ομογενή περίπτωση, είναι η δυναμική συμπεριφορά κατά την εκτός φάσης αλληλεπίδραση στα Σχ. 3.5(δ)-(ε)-(ζ). Θυμίζουμε ότι στα ομογενή μέσα με έντονα μη εντοπισμένη συμπεριφορά η εκτός φάσης αλληλεπίδραση συνοδεύεται από έλξη ανάμεσα στις δέσμες (τουλάχιστον πάνω από μια κρίσιμη τιμή του βαθμού μη εντοπισμένης συμπεριφοράς) [78]. Στη διακριτή διάταξη, όμως, παρατηρούμε άπωση η οποία μάλιστα μπορεί να εμφανίζει και ταλαντωτική συμπεριφορά κατά τα πρώτα στάδια της διάδοσης (Σχ. 3.5(ε)). Η διαφοροποίηση της δυναμικής συμπεριφοράς ανάμεσα στις ομογενείς και διακριτές διατάξεις μπορεί να δικαιολογηθεί από το γεγονός ότι η μη εντοπισμένη συμπεριφορά λειτουργεί ανταγωνιστικά ως προς την παρουσία του δυναμικού Peierls-Nabarro, με την πρώτη να τείνει να διαχύσει την απόκριση της οπτικής διέγερσης ενώ το δεύτερο να τείνει να επιβάλλει τον εγκλωβισμό της απόκρισης του μέσου.

Στην τρίτη και τέταρτη σειρά του Σχ. 3.5 φαίνονται οι αντίστοιχες αλληλεπιδράσεις για διάδοση σε μέσο εντοπισμένης συμπεριφοράς. Σε ομογενές μέσο Kerr για ομοφασικές δέσμες επικρατεί έλξη μεταξύ των δεσμών. Στην διακριτή περίπτωση που μελετούμε στα Σχ. 3.5(η)-(θ)-(ι) η διάδοση δεν εμφανίζει ξεκάθαρη έλξη παρά μόνο στο Σχ. 3.5(η), όπου έχουμε συγχώνευση των πεδίων σε ένα κυματοδηγό. Ανάλογα, για την εκτός φάσης διάδοση των δεσμών στα Σχ. 3.5(κ)-(λ)-(μ), πάλι απουσιάζει σημαντική αλληλεπίδραση των πεδίων και οι δέσμες διαδίδονται αυτόνομα. Η συμπεριφορά αυτή είναι αναμενόμενη καθώς απουσία της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, ο παράγοντας που καθορίζει τη διάδοση είναι το εγκάρσιο περιοδικό δυναμικό. Άλλωστε, στις περιπτώσεις που είδαμε παραπάνω έχουμε υποθέσει δέσμες που είναι έντονα εντοπισμένες, με αποτέλεσμα να μην υπάρχουν οι «ουρές» των οπτικών πεδίων που θα δώσουν έντονη αλληλεπίδραση, όπως θα δούμε παρακάτω για ευρύτερες δέσμες.

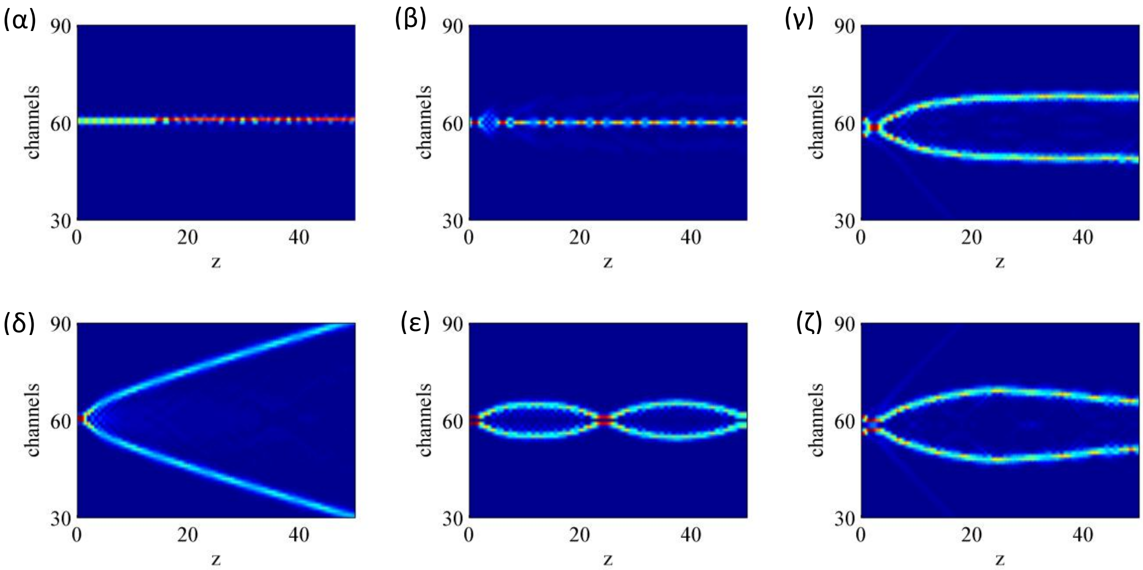
Στο Σχ. 3.6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης της αλληλεπίδρασης οπτικών δεσμών με $\mu = 0.5$. Εδώ, πλέον, το εύρος της δέσμης είναι διπλάσιο του πλάτους του κυματοδηγού και επομένως αναμένεται τα οπτικά πεδία να υπερνικούν σε μεγαλύτερο βαθμό το περιοριστικό εγκάρσιο δυναμικό και να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους εντονότερα. Πράγματι, από την πρώτη σειρά των σχημάτων στο Σχ. 3.6 που αντιστοιχεί σε αλληλεπιδράσεις για $\mu = 0.5$, $W = 4$ και αποστάσεις δεσμών 1, 2, 5 περιόδους εγκάρσιας διαμόρφωσης, διαπιστώνεται ότι η αλληλεπίδραση σε σχέση με την αντίστοιχη του Σχ. 3.5 (πρώτη σειρά) είναι εντονότερη, ισχυρά ελκτική και η όποια ταλάντωση στη διάδοση είναι πολύ μικρότερη από ότι για την περίπτωση των ισχυρότερα εντοπισμένων δεσμών για $\mu = 2$.



Σχ. 3.6 *Αλληλεπιδράσεις μεταξύ δεσμών με $\mu = 0.5$, $W = 4$. Στις δύο πρώτες σειρές οι δέσμες διαδίδονται σε μέσο με μη εντοπισμένη συμπεριφορά ($\kappa = 1$) και στις δύο τελευταίες σε μέσο με εντοπισμένη συμπεριφορά ($\kappa = 5$). Στα (α), (β), (γ), (η), (θ), (ι) οι δέσμες είναι ομοφασικές, ενώ στα (δ), (ε), (ζ), (κ), (λ), (μ) είναι εκτός φάσης κατά π. Στην πρώτη στήλη η απόσταση μεταξύ των δεσμών είναι 1Λ, στη δεύτερη στήλη 2Λ και στην τρίτη 5Λ.*

Από τη δεύτερη σειρά σχημάτων του Σχ. 3.6 και συγκρίνοντας με τη δεύτερη σειρά του Σχ. 3.5 μπορούμε, επίσης, να διαπιστώσουμε την απουσία της έντονης δευτερεύουσας περίθλασης, λόγω της διαδοχικής μεταπήδησης των δεσμών σε γειτονικούς κυματοδηγούς, καθώς και την εντονότερη άπωση των δεσμών, τεκμήριο της μεγαλύτερης σύζευξης των δεσμών. Όμοια, στην τρίτη και τέταρτη σειρά, όπου αναπαριστάται η αλληλεπίδραση σε μέσο Kerr, παρατηρείται εντονότερη έλξη για σύμφωνες δέσμες και άπωση για εκτός φάσης κατά π δέσμες. Σε κάθε περίπτωση όταν οι δέσμες απέχουν αρκετά μεταξύ τους (Σχ. 3.6(ι)-(μ)) οι δέσμες εμφανίζουν μικρή αλληλεπίδραση και διαδίδονται αυτόνομα.

Μια άλλη διάσταση στη διερεύνηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ οπτικών δεσμών είναι η περίπτωση οι αρχικές δέσμες να εμφανίζουν μια αρχική εγκάρσια ταχύτητα, οπότε δίνεται η δυνατότητα να εξεταστούν ελαστικές ή ανελαστικές κρούσεις ανάμεσα στους οπτικούς σχηματισμούς. Στο Σχ. 3.7 παρουσιάζονται οι αλληλεπιδράσεις δεσμών σε μέσο με μη εντοπισμένη συμπεριφορά με $\kappa = 1$ και αρχικές συγκλίνουσες εγκάρσιες ταχύτητες $u = 1$. Στην πρώτη στήλη η απόσταση των δεσμών είναι μια περίοδος εγκάρσιας διαμόρφωσης, στη δεύτερη δύο περίοδοι και στην τρίτη πέντε περίοδοι.



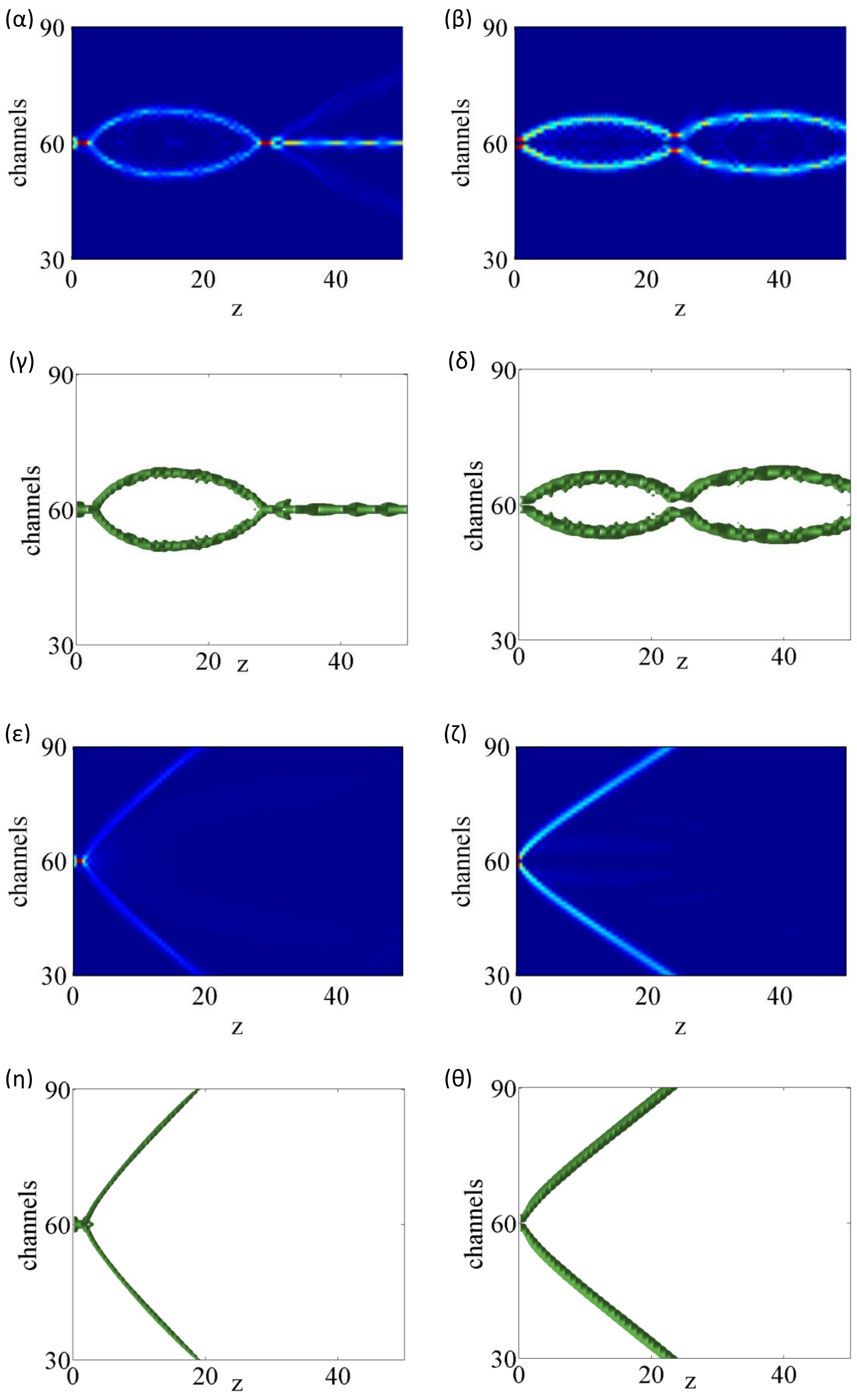
Σχ. 3.7 *Αλληλεπιδράσεις μεταξύ δεσμών με* $\mu = 1$*,* $W = 4$*, με συγκλίνουσες αρχικές εγκάρσιες ταχύτητες* $u = 1$*, σε μέσο με* $\kappa = 1$*. Στην πρώτη σειρά οι δέσμες είναι αρχικά ομοφασικές και στη δεύτερη είναι εκτός φάσης κατά π. Στην πρώτη στήλη η απόσταση μεταξύ των δεσμών είναι* 1Λ*, στη δεύτερη στήλη* 2Λ *και στην τρίτη* 5Λ*.*

Στο Σχ. 3.7 θεωρούμε την περίπτωση δεσμών που το εύρος τους είναι ίδιο με το πλάτος του κυματοδηγού, δηλαδή μια περίπτωση εύρους δέσμης που είναι ενδιάμεση των περιπτώσεων δεσμών έντονα εντοπισμένων (Σχ. 3.5) και αρκετά ευρύτερων του κυματοδηγού (Σχ. 3.6), που έχουμε ήδη δει. Ομοφασικές δέσμες, με αρχικά συγκλίνουσες εγκάρσιες ταχύτητες, τείνουν να συγχωνεύονται για μικρές αποστάσεις εισόδου μεταξύ τους (Σχ. 3.7(α)-(β)) δίνοντας ταλαντούμενη διάδοση, ενώ για μεγαλύτερη απόσταση εισόδου ($d = 5$) παρατηρείται ελαστική αλληλεπίδραση με τις δέσμες να περνούν η μία μέσα από την άλλη ανεπηρέαστες. Αντίστοιχα, για δέσμες που είναι εκτός φάσης κατά π, όταν οι δέσμες εισέρχονται σε γειτονικούς κυματοδηγούς η αλληλεπίδραση έχει απωθητικό αποτέλεσμα (Σχ. 3.7(δ)), ενώ για απόσταση 2 ή 5 περιόδων εγκάρσιας διαμόρφωσης παρατηρείται ταλαντωτική διάδοση, με ελαστική άπωση των δεσμών στη θέση όπου οι δέσμες παρουσιάζουν την κοντινότερη απόσταση μεταξύ τους. Η συμπεριφορά αυτή είναι αποτέλεσμα της ισορροπίας ανάμεσα στη διακριτή περίθλαση, όπως αυτή καθορίζεται από τη σύζευξη των δεσμών μέσω της αρχικής απόστασης τους και την μη γραμμικότητα μη εντοπισμένης συμπεριφοράς.

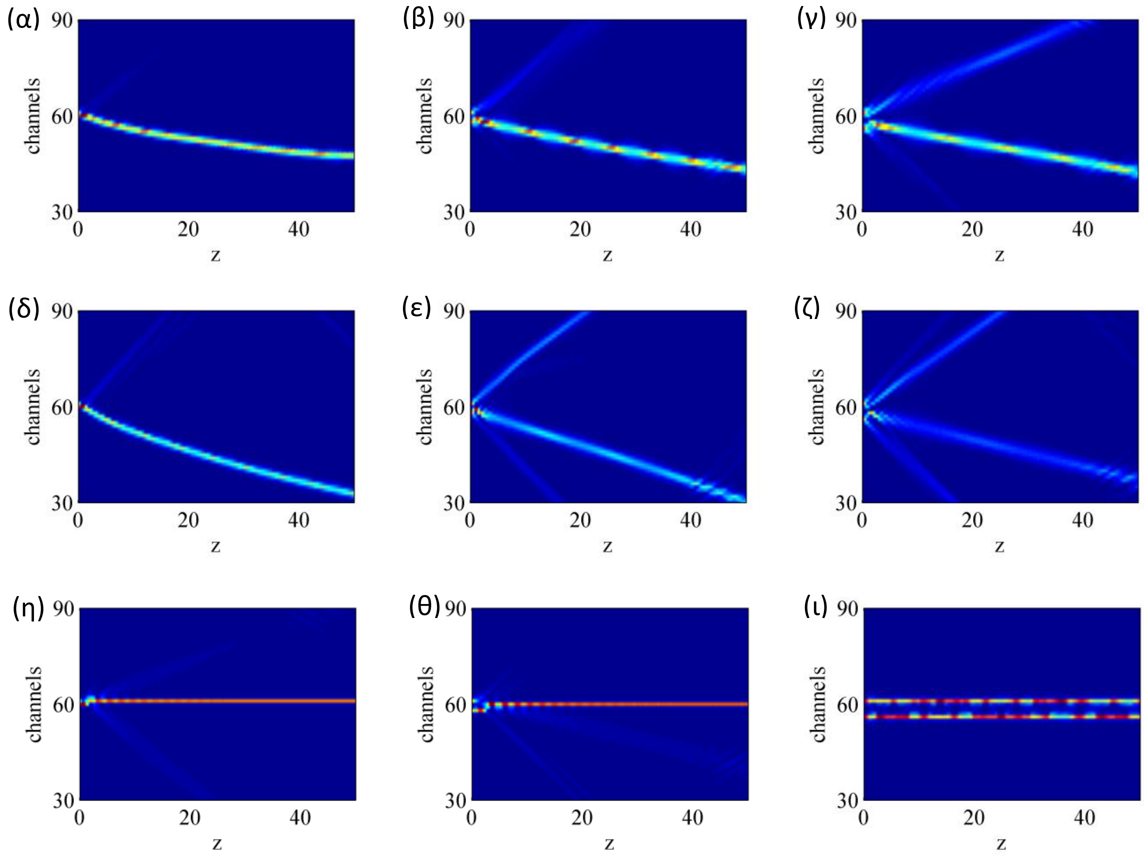
Στη συνέχεια παραθέτουμε αριθμητικές λύσεις για την αλληλεπίδραση δύο δεσμών που έχουν διαφορετικές τιμές ισχύος. Ως τώρα η ισχύς που χρησιμοποιήσαμε είχε την τιμή $W=4$. Στο Σχ. 3.8 θα γίνει σύγκριση με την αλληλεπίδραση δεσμών ισχύος $W=2$. Εδώ να θυμίσουμε την ανάλυση που ακολουθήθηκε για τον προσδιορισμό της σχέσης ανάμεσα στην ισχύ W και στο αντίστροφο εύρος μ που αντιστοιχεί σε στάσιμες λύσεις διάδοσης (βλ. Σχ. 2.3, Κεφ. 2) και να παρατηρήσουμε ότι για $W=2$ το αντίστροφο εύρος της στάσιμης λύσης είναι περίπου $\mu \approx 0.4$. Αυτό συνεπάγεται ότι αρχικές δέσμες με $\mu=2$ κατά την αλληλεπίδρασή τους είναι πιθανότερο να δίνουν σταθερούς οπτικούς σχηματισμούς όταν η ισχύς τους είναι $W=4$, παρά όταν $W=2$. Στο Σχ. 3.8 παρουσιάζονται ενδιαφέρουσες περιπτώσεις αλληλεπίδρασης δεσμών με $\mu=2$ και εγκάρσια ταχύτητα $u=1.5$ για τιμές ισχύος $W=4$ και $W=2$, σε μέσο με έντονα μη εντοπισμένη συμπεριφορά $\kappa=1$. Η απόσταση των δεσμών είναι δύο περίοδοι εγκάρσιας διαμόρφωσης. Στην πρώτη στήλη παρουσιάζεται η ομοφασική αλληλεπίδραση και στη δεύτερη αυτή που είναι εκτός φάσης, κατά π. Στη δεύτερη και τέταρτη σειρά του Σχ. 3.8 γίνεται χρήση μιας δισδιάστατης ψευδόισοεπιφανειακής απεικόνισης που προβάλλει την ένταση του οπτικού πεδίου στο 10 % της μέγιστης τιμής της, παραλείποντας, έτσι, περίθλαση και ακτινοβολούμενη ενέργεια.

Στο Σχ. 3.8(α) απεικονίζεται η αλληλεπίδραση δύο ομοφασικών δεσμών σε μέσο μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Η αρχική ταλάντωση κατά τη διάδοση συνοδεύεται από συγχώνευση των δεσμών με ταυτόχρονη εκπομπή ακτινοβολίας, με αποτέλεσμα το συνολικό οπτικό πεδίο να μεταπίπτει σε σταθερότερη κατάσταση μικρότερης ισχύος που εκτελεί ταλαντωτική διάδοση. Αντίστοιχα, για την εκτός φάσης κατά π διάδοση για $W=4$ παρατηρείται ελαστική κρούση κατά την ταλαντωτική τους διάδοσή (Σχ. 3.8(δ)) και ταυτόχρονα ισχυρή δευτερεύουσα περίθλαση. Από την άλλη πλευρά, για τη μικρότερη τιμή ισχύος, $W=2$, διαπιστώνεται ότι τόσο για την ομοφασική, όσο και για την εκτός φάσης διάδοση, για το συγκεκριμένο συνδυασμό παραμέτρων δεν είναι δυνατή η ευσταθής διάδοση, παρά επικρατεί η συγχώνευση των δεσμών και στη συνέχεια υπάρχει διαχωρισμός σε συνδυασμό με έντονη περίθλαση.

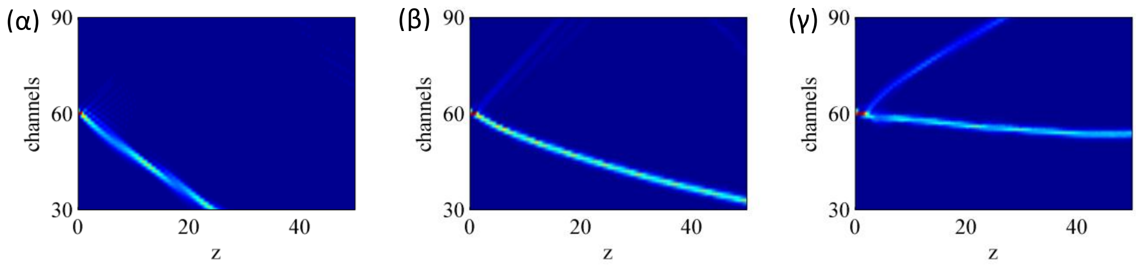
Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου, όταν η διαφορά φάσης ανάμεσα στις δέσμες που αλληλεπιδρούν είναι διαφορετική από $0, \pi$, ο συνολικός οπτικός σχηματισμός αποκλίνει από τη συμμετρική συμπεριφορά, που είδαμε στα προηγούμενα σχήματα. Έτσι, είναι σύνηθες η αλληλεπίδραση δεσμών να οδηγεί σε συγχώνευση και δρομολόγηση ενός σολιτονικού σχηματισμού με εγκάρσια ορμή, που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Στο Σχ. 3.9 παρουσιάζονται περιπτώσεις αλληλεπίδρασης δεσμών με ισχύ $W=2$, που εμφανίζουν διαφορά φάσης $\pi/2$ για διάφορες αποστάσεις εισαγωγής των δεσμών (και επομένως, διαφορετικής σύζευξης). Από αριστερά προς τα δεξιά ελαττώνεται ο συντελεστής σύζευξης, μέσω της αύξησης της απόστασης των αρχικών δεσμών.



Σχ. 3.8 Αλληλεπιδράσεις μεταξύ δεσμών, που απέχουν δύο περιόδους εγκάρσιας διαμόρφωσης, με $\mu = 2$ για τιμές ισχύος $W = 4$ (πρώτη - δεύτερη σειρά), $W = 2$ (τρίτη – τέταρτη σειρά) με συγκλίνουσες αρχικές εγκάρσιες ταχύτητες $u = 1.5$ σε μέσο με $\kappa = 1$. Στην πρώτη στήλη οι δέσμες είναι αρχικά ομοφασικές και στη δεύτερη είναι εκτός φάσης κατά π.



Σχ. 3.9 *Αλληλεπιδράσεις μεταξύ παραλλήλων δεσμών με διαφορά φάσης* $\pi/2$ *και τιμή ισχύος* $W=2$. *Στην πρώτη και δεύτερη σειρά οι δέσμες έχουν* $\mu=1$ *και* $\mu=2$ *αντίστοιχα και το μέσο έχει* $\kappa=1$. *Στην τρίτη σειρά οι δέσμες (* $\mu=2$ *) αλληλεπιδρούν σε μέσο εντοπισμένης συμπεριφοράς,* $\kappa=5$. *Η πρώτη, δεύτερη και τρίτη στήλη αντιστοιχεί σε αποστάσεις εισόδου των δεσμών,* $1,3$ *και* 5 *περιόδων διαμόρφωσης.*



Σχ. 3.10 *Αλληλεπιδράσεις μεταξύ παραλλήλων δεσμών με διαφορά φάσης* $\pi/2$, *αντίστροφο εύρος* $\mu=2$ *και τιμή ισχύος* $W=2$ *για μέσα με διάφορους βαθμούς μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Για τα (α), (β) και (γ) είναι αντίστοιχα* $\kappa=0.5,1$ *και* 1.5. *Η απόσταση των αρχικών δεσμών είναι σε όλες τις περιπτώσεις δύο περίοδοι εγκάρσιας διαμόρφωσης.*

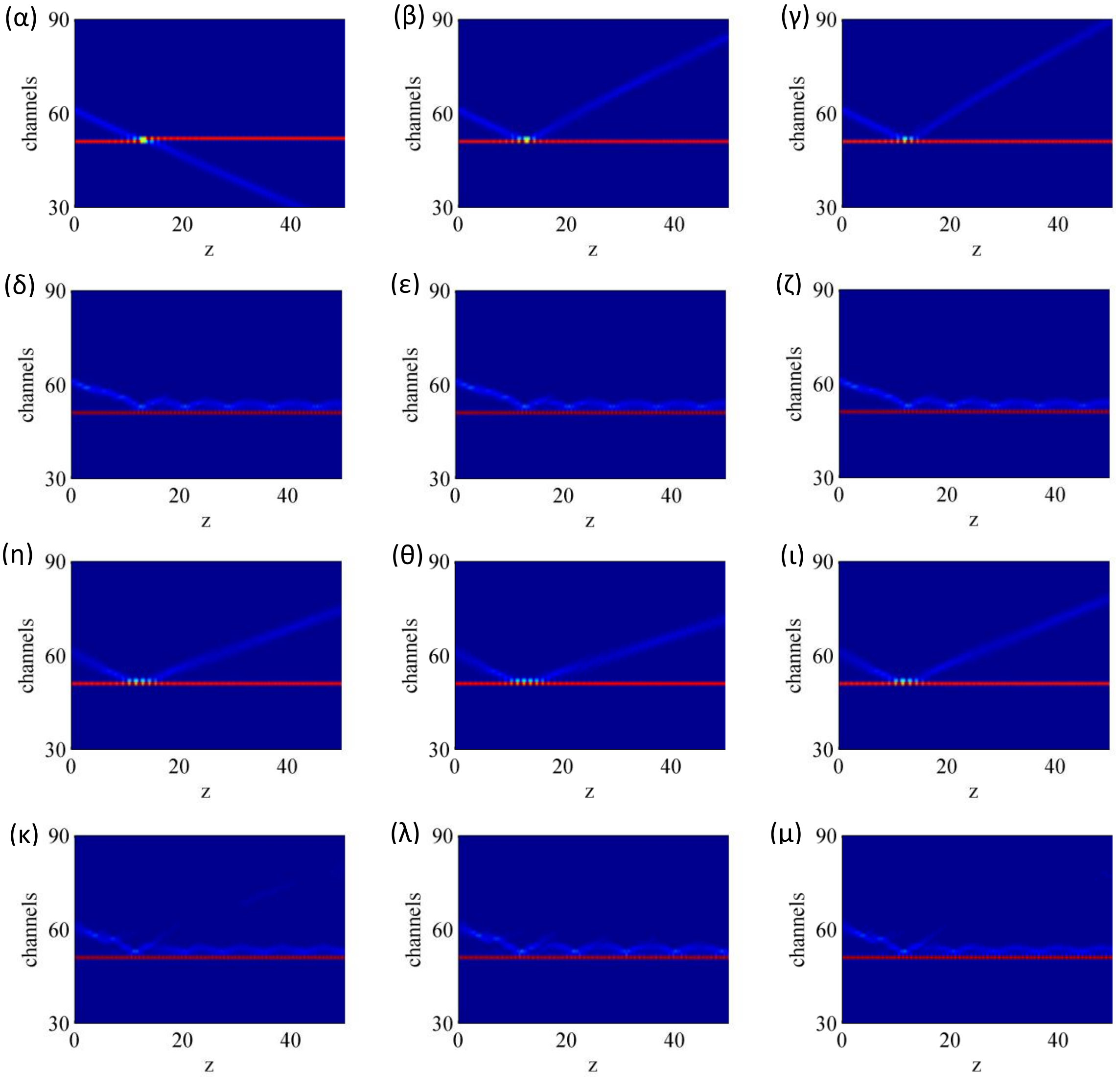
Συγκρίνοντας τις δύο πρώτες σειρές του Σχ. 3.9 μπορούμε να οδηγηθούμε σε σημαντικές παρατηρήσεις. Οι δέσμες των Σχ. 3.9(α)-(β)-(γ) έχουν $\mu=1$ δηλαδή το εύρος τους είναι ίσο με το πλάτος των κυματοδηγών, ενώ αυτές των Σχ. 3.9(δ)-(ε)-(ζ) είναι περισσότερο εντοπισμένες με $\mu=2$, με αποτέλεσμα να είναι πιο ευαίσθητες στην επίδραση του εγκάρσιου περιοδικού δυναμικού. Πράγματι, οι δέσμες της δεύτερης σειράς του Σχ. 3.9 εμφανίζουν πιο έντονη διακριτή περίθλαση και ο κεντρικός οπτικός σχηματισμός είναι ασθενέστερος από τους αντίστοιχους στα Σχ. 3.9(α)-(β)-(γ). Η διαφοροποίηση στην εγκάρσια ορμή που εμφανίζουν οι σχηματισμοί αυτοί, ανάλογα με το εύρος των αλληλεπιδρωσών δεσμών και την ένταση της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς του μέσου (Σχ. 3.10), αποτελεί ένα πεδίο εφαρμογών οπτικής δρομολόγησης. Το τελευταίο είναι εφικτό, όπως φαίνεται και στο Σχ. 3.10, όπου δέσμες ίδιας ισχύος ($W=2$) και αντιστρόφου εύρους ($\mu=2$) διαδίδονται σε μέσα με διάφορους βαθμούς μη εντοπισμένου χαρακτήρα. Η σπουδαιότητα της παρατήρησης οφείλεται στη δυνατότητα που παρέχεται για ενεργό έλεγχο της δρομολόγησης μέσω εξωτερικής επίδρασης, στη μη εντοπισμένη συμπεριφορά του μέσου.

Τέλος, να παρατηρηθεί ότι η συνεισφορά της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς του μέσου στην αλληλεπίδραση δεσμών γίνεται πιο προφανής όταν συγκρίνουμε με τα Σχ. 3.9(η)-(θ)-(ι), που αντιστοιχούν σε αλληλεπιδράσεις σε μέσο με εντοπισμένη συμπεριφορά ($\kappa=5$). Οι δέσμες παρά το ότι έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά με αυτές της δεύτερης σειράς σχημάτων του Σχ. 3.9, δεν παρουσιάζουν σημαντική σύζευξη και η διάδοση είναι περίπου αυτόνομη. Δηλαδή, η μη εντοπισμένη συμπεριφορά, ουσιαστικά ενισχύει την τάση σύζευξης, που με τη σειρά της τείνει να καταπιεστεί από την «διακριτότητα» της διάταξης.

3.4 Φράζοντα σολιτόνια (Blocker Solitons) σε διακριτές διατάξεις μέσων με μη εντοπισμένη συμπεριφορά

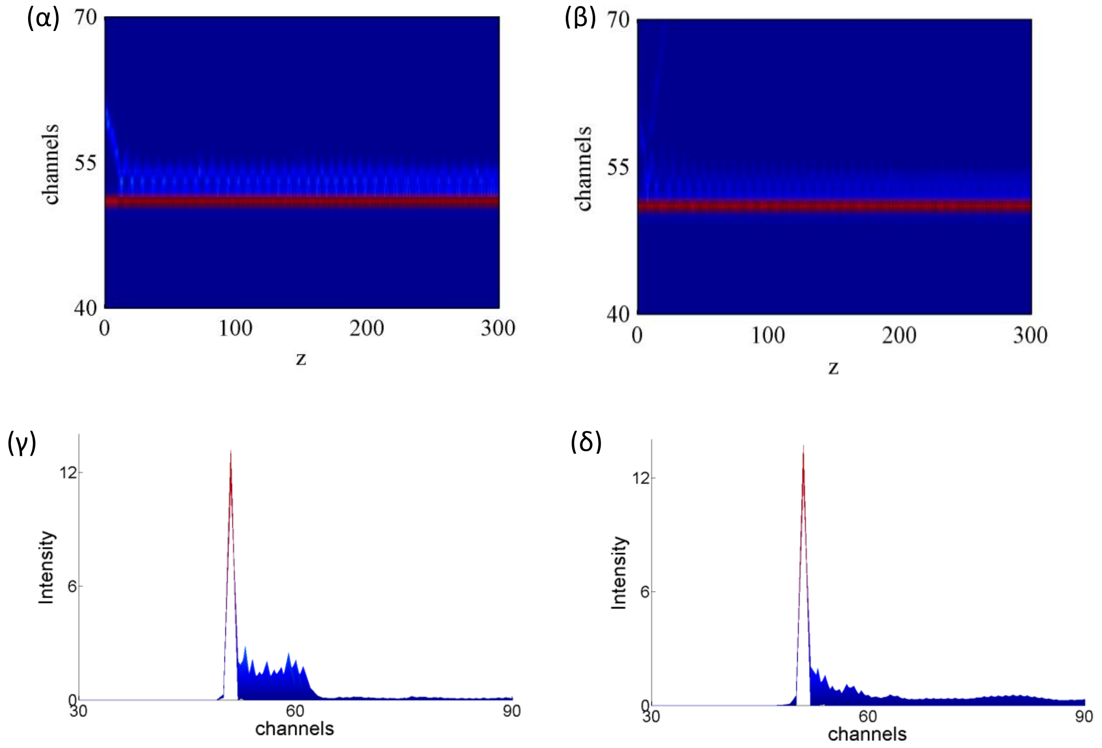
Μια ειδική κατηγορία σολιτονίων, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, είναι αυτή στην οποία σολιτονικές δέσμες υψηλής ισχύος αλληλεπιδρούν με δέσμες χαμηλής ισχύος και μεγάλου εύρους, έχοντας τεμνόμενες διευθύνσεις των αρχικών τους κυματάριθμων. Αυτού του είδους οι αλληλεπιδράσεις έχουν αποτελέσει αντικείμενο πειραματικής έρευνας σε μονοδιάστατα προβλήματα για μέσα με μη γραμμικότητα Kerr. Σε αυτά τα πειράματα διαπιστώθηκε ότι ένα ασθενές σήμα μπορεί να ανακλαστεί από ένα φράζον σολιτόνιο που είναι έντονα εντοπισμένο και υψηλής ισχύος ή ακόμη, αν το ζητούμενο είναι η σολιτονική διάδοση σε συγκεκριμένο κυματοδηγό, η αλληλεπίδραση των οπτικών δεσμών μπορεί να οδηγήσει σε μετατόπιση του φράζοντος σολιτονίου από το μονοπάτι διάδοσής του σε κάποιο γειτονικό μονοπάτι, διατηρώντας τα σολιτονικά του χαρακτηριστικά [89]. Για σύμφωνες αλληλεπιδράσεις το αποτέλεσμα εξαρτάται από τη σχετική φάση των αλληλεπιδρωσών δεσμών, σε αντίθεση με ότι συμβαίνει στις ασύμφωνες αλληλεπιδράσεις. Οι τελευταίες είναι ενδιαφέρουσες για την υλοποίηση εφαρμογών οπτικής δρομολόγησης και διαμεταγωγής, καθώς σε πρακτικές εφαρμογές αλληλεπιδράσεις ανεξάρτητες της διαφοράς φάσης είναι ιδιαίτερα επιθυμητές. Έτσι, λοιπόν, στο πλαίσιο της δρομολόγησης ενός οπτικού σήματος για χρήση σε φωτονικά δίκτυα, φράζοντα σολιτόνια έχουν χρησιμοποιηθεί σε σύμφωνες και ασύμφωνες διατάξεις οπτικών δεσμών σε μέσο Kerr [87, 90], ενώ πειραματική επιβεβαίωση των δυνατοτήτων δρομολόγησης έχει υπάρξει και σε διατάξεις με αφεστιακή μη γραμμικότητα με θεώρηση σκοτεινών και φωτεινών σολιτονίων [86].

Στα παρακάτω αριθμητικά πειράματα θα αναδείξουμε κάποιες ενδιαφέρουσες περιπτώσεις οπτικής αλληλεπίδρασης σολιτονίου με οπτικό σήμα, σε διάταξη μη εντοπισμένης μη γραμμικότητας και θα γίνουν συγκρίσεις με τις αντίστοιχες περιπτώσεις για εντοπισμένης συμπεριφοράς μέσο. Στις περιπτώσεις αλληλεπίδρασης που εξετάζουμε μπορούμε να δεχθούμε οπτικά πεδία που εμφανίζουν την ίδια πόλωση και επομένως να παρακάμψουμε τον «ασύμφωνο» χαρακτήρα των μέσων μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Η ίδια παραδοχή άλλωστε έχει γίνει και για όλες τις αλληλεπιδράσεις που εξετάζουμε στο παρόν κεφάλαιο και αυτή η παραδοχή εξασφαλίζει τη συμβατότητα των συμπερασμάτων μας με τυχόν πειραματική υλοποίηση των υπό εξέταση μοντέλων.



Σχ. 3.11 *Αλληλεπιδράσεις φραζόντων σολιτονίων με ασθενή οπτικά σήματα. Στην πρώτη και τρίτη σειρά το μέσο είναι Kerr με ισχύ σολιτονίου* $W = 3.92$ *και* $\mu = 2$ *για αντίστροφο εύρος σήματος,* $\mu = 0.5$ *και* $\mu = 0.25$ *αντίστοιχα. Στη δεύτερη και τέταρτη το μέσο είναι ισχυρά μη εντοπισμένης συμπεριφοράς (*$\kappa = 1$*) με σολιτονική ισχύ* $W = 12.84$ *για* $\mu = 0.5$ *και* $\mu = 0.25$*, αντίστοιχα. Ανά στήλη η διαφορά φάσης μεταξύ των δεσμών είναι* $\delta\varphi = 0, \pi/2, \pi$ *αντίστοιχα. Σε όλες τις περιπτώσεις το σήμα έχει ισχύ* $0.3W$ *και η εγκάρσια ταχύτητα είναι* $u = 0.5$.

Στο Σχ. 3.11 παρουσιάζεται η αλληλεπίδραση ασθενούς οπτικού πεδίου με φράζον σολιτόνιο σε μέσο μη γραμμικότητας περίπου Kerr και για μέσο μη εντοπισμένης συμπεριφοράς ($\kappa = 1$). Το σολιτόνιο είναι έντονα εντοπισμένο ($\mu = 2$) και έχει ισχύ $W = 3.92$ για $\kappa = 5$ και $W = 12.84$ για $\kappa = 1$ ενώ το ασθενές σήμα έχει ισχύ $0.3W$, εγκάρσια ταχύτητα $u = 0.5$ και αντίστροφο εύρος $\mu = 0.25$ και $\mu = 0.5$. Τα αντίστροφα εύρη, μ, και οι αντίστοιχες τιμές ισχύος που συντηρούν τη σολιτονική λύση έχουν βρεθεί με τη μεθοδολογία που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2 με τα σχετικά αποτελέσματα να συνοψίζονται στο Σχ. 2.3.

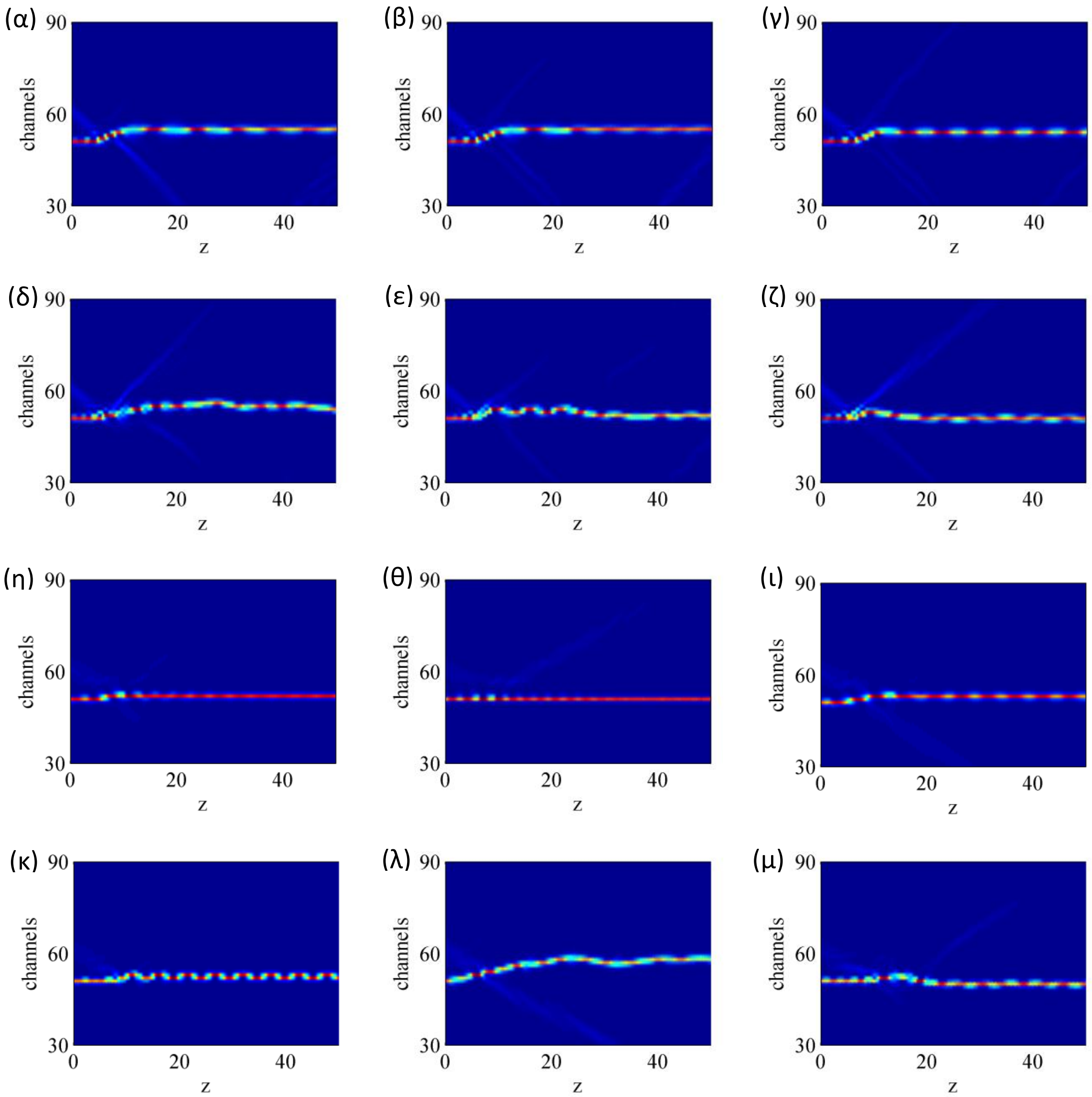


Σχ. 3.12 *Αλληλεπιδράσεις σολιτονίων ($W = 12.84$) με οπτικά σήματα ισχύος $0.3W$ και αντίστροφου εύρους $\mu = 0.5$ (α) και $\mu = 0.125$ (β). Στα (γ)-(δ) φαίνονται οι προβολές της έντασης σε επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση της διάδοσης για τα (α)-(β) αντίστοιχα.*

Για τα χαρακτηριστικά των δεσμών που επιλέχθηκαν στο Σχ. 3.11 γίνεται προφανής η διαφοροποίηση στη διάδοση ανάλογα με το βαθμό μη εντοπισμένης συμπεριφοράς του μέσου κ. Έτσι όταν αυτός είναι μεγάλος (περίπτωση Kerr), η αλληλεπίδραση μεταξύ των δεσμών οδηγεί σε μια «καθαρή» ανάκλαση στις περισσότερες περιπτώσεις (αγνοώντας δευτερεύουσα περίθλαση η οποία είναι ούτως ή άλλως αμελητέα για πλατιές δέσμες, καθώς τότε η δέσμη προσεγγίζει τη μη διακριτή διάδοση). Επιπλέον, η διαφορά φάσης παίζει ρόλο στο αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης και, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.11(α), το ασθενές σήμα μπορεί να περνά ελαστικά μέσα από τη σολιτονική δέσμη μεταφέροντας ορμή σε αυτή, ώστε η τελευταία να μετατοπίζεται ως προς τον κυματοδηγό διάδοσης. Από την άλλη, όταν το κ γίνεται μικρό, δεν υπάρχει σημαντική εξάρτηση της διάδοσης από τη διαφορά φάσης των δεσμών. Τότε παρατηρούνται διαδοχικές προσεγγίσεις και ανακλάσεις των οπτικών πεδίων. Η αλληλεπίδραση είναι ελαστική, το σολιτόνιο δεν υφίσταται μετατόπιση και το ασθενές σήμα εκτελεί ταλαντωτική κίνηση στην εγκάρσια διεύθυνση, χωρίς συγχώνευση ή απώλεια πλάτους ταλάντωσης. Το τελευταίο είναι εμφανές στο Σχ. 3.12, όπου απεικονίζονται δύο αλληλεπιδράσεις σε μέσο με $\kappa = 1$, για μεγάλα μήκη διάδοσης. Η ισχύς του σολιτονίου είναι $W = 12.84$ και του ασθενούς σήματος $0.3W$. Το αντίστροφο εύρος του σολιτονίου είναι $\mu = 1$, ενώ του ασθενούς σήματος $\mu = 0.5$ (α) και $\mu = 0.125$ (β). Στο Σχ. 3.12(β) γίνεται η ενδιαφέρουσα παρατήρηση ότι το ασθενές σήμα, πριν εγκλωβιστεί στην κίνηση που περιγράψαμε, αναγκάζεται να αποβάλλει κάποιο μέρος της ισχύος, στοιχείο που υποδηλώνει την επιλεκτικότητα του φαινομένου ως προς τις ενεργειακές απαιτήσεις για ευστάθεια.

Εδώ να επισημάνουμε δυο παρατηρήσεις όσον αφορά τα φράζοντα σολιτόνια που έχουμε παρουσιάσει ως τώρα. Όπως είδαμε στο 2^{ο} Κεφάλαιο, οι τιμές ισχύος για τις οποίες υπάρχουν ευσταθείς σολιτονικές λύσεις σε μέσο με μη εντοπισμένη συμπεριφορά, είναι αρκετά μεγαλύτερες από αυτές που απαιτούνται για σολιτονικές λύσεις σε μέσα Kerr (βλ. Σχ. 2.3). Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, αν θεωρούμε την ισχύ του σήματος σαν κλάσμα της ισχύος του φράζοντος σολιτονίου, να υπάρχουν τιμές ισχύος σε συγκεκριμένες περιοχές, για τις οποίες, ενώ για σήματα σε μέσα Kerr επιτυγχάνεται διάδοση υπό γωνία, σε μέσα με μη εντοπισμένη συμπεριφορά για το ίδιο κλάσμα ισχύος, το ασθενές σήμα να προσεγγίζει την περιοχή παραμέτρων που υποστηρίζει σολιτονική διάδοση. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το ασθενές σήμα, αντί να διασταυρώνεται με το σολιτόνιο «κλειδώνει» σε κυματοδηγό και έτσι αποφεύγεται η αλληλεπίδραση. Ένας τρόπος για να αντισταθμιστεί αυτό, είναι να χρησιμοποιούνται οπτικά σήματα που έχουν εύρος που καταλαμβάνει 7 ή και περισσότερους κυματοδηγούς. Τέτοιες τιμές εύρους δέσμης σήματος αναφέρονται σε αρκετά πειράματα φραζόντων σολιτονίων σε μέσα Kerr [π.χ. 89]. Η δεύτερη παρατήρηση έχει να κάνει με την εγκάρσια ταχύτητα του σήματος. Γενικά, σε σχετικά πειράματα σε μέσα Kerr η ταχύτητα του σήματος είναι τέτοια ώστε να επιτυγχάνεται μηδενική περίθλαση. Ωστόσο, όπως θα δούμε, η εγκάρσια ταχύτητα παίζει αρκετά σημαντικό ρόλο, καθώς στην περίπτωση δεσμών μεγάλου εύρους η γωνία διασταύρωσης καθορίζει το πόσο εκτεταμένη θα είναι η περιοχή αλληλεπίδρασης των δεσμών.

Παρακάτω θα δούμε πως η χρήση λιγότερο εντοπισμένων χωρικά σολιτονίων μπορεί να αλλάξει σημαντικά τις διαδικασίες στους οπτικούς σχηματισμούς αλληλεπίδρασης. Στο Σχ. 3.13 αναδεικνύουμε μια χαρακτηριστική ιδιότητα των σολιτονίων που διαδίδονται σε μέσα με μη εντοπισμένη συμπεριφορά, αυτή της κινητικότητας, δηλαδή τη δυνατότητα πλευρικής μετατόπισης των σολιτονίων σχετικά εύκολα μέσα σε μια συστοιχία κυματοδηγών. Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, η μη εντοπισμένη συμπεριφορά είναι ανταγωνιστική ως προς τη διακριτότητα μιας διάταξης. Συνεπώς, αφού η διακριτότητα τείνει να εγκλωβίζει το οπτικό πεδίο σε καθένα κυματοδηγό, η μη εντοπισμένη συμπεριφορά τείνει να προκαλεί τη μετακίνηση του οπτικού πεδίου μεταξύ γειτονικών κυματοδηγών. Στο Σχ. 3.13 παρουσιάζονται αλληλεπιδράσεις ασθενών σημάτων ισχύος $0.3W$, όπου W η ισχύς του σολιτονίου που τώρα έχουμε υποθέσει ότι είναι λιγότερο εντοπισμένο ($\mu = 1$). Κάτι τέτοιο σημαίνει ότι τα ολοκληρώματα επικάλυψης είναι πιο σημαντικά από ότι στην προηγούμενη περίπτωση (Σχ. 3.11) και επομένως σε συνδυασμό με τη μη εντοπισμένη συμπεριφορά μπορούν να δώσουν αλληλεπιδράσεις με περισσότερους συζευγμένους κυματοδηγούς περιορίζοντας, έτσι, τη συνεισφορά του εγκάρσιου διακριτού δυναμικού.



Σχ. 3.13 *Αλληλεπιδράσεις σολιτονίων με* $W = 1.75$ *,* $\mu = 1$ *(α-γ, η-ι) και* $W = 4.95$ *,* $\mu = 1$ *(δ-ε, κ-μ) με οπτικά σήματα ισχύος* $0.3W$ *εγκάρσιας ταχύτητας* $u = 1.5$ *και αντίστροφου εύρους* $\mu = 0.25$ *(πρώτη (* $\kappa = 5$ *) και δεύτερη (* $\kappa = 1$ *) σειρά) και εγκάρσιας ταχύτητας* $u = 0.5$ *για* $\mu = 0.125$ *(τρίτη (* $\kappa = 5$ *) και τέταρτη (* $\kappa = 1$ *) σειρά). Ανά στήλη η διαφορά φάσης μεταξύ των δεσμών είναι* $\delta\varphi = 0, \pi/2, \pi$ *αντίστοιχα.*

Συγκρίνοντας τα Σχ. 3.11 και 3.13 γίνεται εμφανές ότι για λιγότερο εντοπισμένο φράζον σολιτόνιο η μη εντοπισμένη συμπεριφορά του μέσου οδηγεί σε μεγαλύτερη κινητικότητα στην εγκάρσια διεύθυνση της συστοιχίας των κυματοδηγών. Αυτό το χαρακτηριστικό δεν παρατηρείται για μέσο Kerr, παρ' όλο που η αλληλεπίδραση προκαλεί μετατόπιση της αρχικά σολιτονικής δέσμης σε κυματοδηγούς που βρίσκονται μία (Σχ. 3.13(η)), δύο (Σχ. 3.13(ι)) ή τρεις (Σχ. 3.13(α),(β),(γ)) θέσεις μακρύτερα από τον αρχικό κυματοδηγό διάδοσης. Η δέσμη στη συνέχεια παραμένει «κλειδωμένη» και διαδίδεται στην καινούργια θέση ευσταθώς, αν και στις περισσότερες περιπτώσεις πλέον η δέσμη έχει γίνει περιοδική ή ημιπεριοδική λόγω της ανταλλαγής ενέργειας. Στις περιπτώσεις αλληλεπιδράσεων σε μη εντοπισμένης συμπεριφοράς μέσο διαπιστώνεται εξάρτηση του οπτικού σχηματισμού από τη διαφορά φάσης των δεσμών (Σχ. 3.13(δ)-(ε), (κ)-(μ)). Αυτό οφείλεται στα στοχαστικά χαρακτηριστικά της αλληλεπίδρασης του μετρίως εντοπισμένου σολιτονίου με το ασθενές σήμα, καθώς πλέον η αλληλεπίδραση γίνεται έντονα ευαίσθητη σε μεταβολές των παραμέτρων των δεσμών, συμπεριλαμβανομένης της διαφοράς φάσης. Αυτή η ικανότητα της εγκάρσιας ευκινησίας του οπτικού πεδίου χαρακτηρίζει ένα μέσο με μη εντοπισμένη συμπεριφορά [98, 99] και όπως δείξαμε (π.χ. Σχ. 2.13(δ), (λ)) μπορεί να διαπιστωθεί και σε εντοπισμένες σολιτονικές δέσμες, που παίζουν το ρόλο φραζόντων σολιτονίων σε σχετικές αλληλεπιδράσεις με ασθενές σήμα.

3.7 Περίληψη και συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο έγινε μια διερεύνηση των αλληλεπιδράσεων δεσμών διαφόρων χαρακτηριστικών σε μέσα μη εντοπισμένης συμπεριφοράς και τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αντίστοιχα που προέκυψαν από αλληλεπιδράσεις σε μέσα μη γραμμικότητας Kerr. Αναδείχθηκε η φυσική της ιδιότητας της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς και διαπιστώθηκε ότι σε διακριτές διατάξεις αυτή είναι ανταγωνιστική του διακριτού δυναμικού. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τα μη εντοπισμένης συμπεριφοράς υλικά να αναπτύσσουν οπτικούς σχηματισμούς, που εν γένει είναι σημαντικά διαφορετικοί από αυτά που προκύπτουν για μέσα Kerr. Έγιναν προσομοιώσεις διάδοσης για πλήθος συνδυασμών παραμέτρων που καθορίζουν το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης και προσδιορίστηκε η βαρύτητα καθεμιάς από αυτές. Οι παράμετροι που καθορίζουν το προϊόν της αλληλεπίδρασης, πέρα από το βαθμό μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, είναι η απόσταση των δεσμών (καθορίζει τη σύζευξη), η ισχύς τους (αν η τιμή αυτής βρίσκεται σε περιοχή που υποστηρίζει σολιτονική διάδοση με αποτέλεσμα η δέσμη να «κλειδώνει» σε κανάλια διάδοσης), το εύρος της δέσμης (αν είναι μεγάλο καταπιέζεται ο χαρακτήρας της διακριτής περίθλασης) και η όποια εγκάρσια ταχύτητα στο βαθμό που καθορίζει την ένταση της περίθλασης. Διαπιστώθηκε η δυνατότητα οπτικής δρομολόγησης, με κατάλληλη προσαρμογή των προηγούμενων παραμέτρων.

Επιπλέον διερευνήθηκαν τα λεγόμενα φράζοντα σολιτόνια για χρήση σε διατάξεις μέσων μη εντοπισμένης συμπεριφοράς και παρατηρήθηκε ενδιαφέρουσα ελαστική, ταλαντωτική στην εγκάρσια διεύθυνση, διάδοση του ασθενούς οπτικού σήματος όταν το φράζον σολιτόνιο είναι έντονα χωρικά εντοπισμένο. Για λιγότερο εντοπισμένο σολιτόνιο αναδείχθηκε η κινητικότητα που παρουσιάζουν οι οπτικοί σχηματισμοί κατά τη διάδοσή τους σε μη εντοπισμένης συμπεριφοράς μέσο και συμπεράναμε στοιχεία στοχαστικότητας όσον αφορά στην εξάρτηση του οπτικού σχηματισμού από τις παραμέτρους που χαρακτηρίζουν τις αλληλεπιδρώσες δέσμες.

Κεφάλαιο 4

Διακριτές χωροχρονικές δομές τύπου X σε μονοδιάστατη μη γραμμική συστοιχία κυματοδηγών, σε διάταξη υγρού κρυστάλλου

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε την διάδοση οπτικών παλμών σε μια διακριτή διάταξη κυματοδηγών που έχουν εγγραφεί σε νηματικό υγρό κρύσταλλο, ένα υλικό με έντονα μη εντοπισμένη συμπεριφορά, με τη βοήθεια εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου. Η μεθοδολογία που ακολουθείται είναι η διατύπωση της μη γραμμικής εξίσωσης Schroedinger για το ελεύθερο (αδιαμόρφωτο) μέσο, καθώς και της συζευγμένης εξίσωσης που περιγράφει την απόκριση του μέσου, όπως αυτή εκδηλώνεται μέσω της στροφής των ραβδοειδών μορίων γύρω από τον άξονα περιστροφής. Εν συνεχεία, κάνοντας χρήση κατάλληλου μετασχηματισμού μεταβαίνουμε σε σύστημα διακριτών εξισώσεων, τις οποίες και χρησιμοποιούμε για να προσομοιώσουμε τη διάδοση οπτικών παλμών με διαφορετικά εύρη. Για λόγους πληρότητας της διερεύνησης, εξετάζουμε τη διάδοση για διάφορες τιμές της χρονικής διασποράς και διαπιστώνουμε την ύπαρξη χαρακτηριστικών διάδοσης που μοιάζουν με αυτά που εμφανίζονται κατά το σχηματισμό κυμάτων τύπου X.

4.1 Εισαγωγικά

Οι νηματικοί υγροί κρύσταλλοι εμφανίζουν πολύ ενδιαφέρουσες φυσικές ιδιότητες, οι οποίες γενικά έχουν ήδη περιγραφεί στο Κεφάλαιο 1, και που στο πλαίσιο της μη γραμμικής οπτικής, έχουν αποτελέσει αφετηρία σημαντικής θεωρητικής και πειραματικής διερεύνησης, στοχεύοντας σε εφαρμογές οπτοηλεκτρονικής. Σχετικές μελέτες έχουν δείξει στο παρελθόν ότι, στη νηματική φάση των υγρών κρυστάλλων, η υψηλή ανισοτροπία, καθώς και η μη εντοπισμένη συμπεριφορά των νηματικών κρυσταλλικών μορίων οδηγούν στον αναπροσανατολισμό των κρυσταλλικών επιμηκυμένων μορίων, ακόμη και με την εφαρμογή ελάχιστης ηλεκτρικής [100] ή θερμικής επίδρασης [62]. Ειδικά, η ιδιότητα της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς των νηματικών υγρών κρυστάλλων, που οφείλεται στην αλληλεπίδραση των ραβδοειδών μορίων, ταυτόχρονα με την υψηλή οπτική μη γραμμικότητα των υγρών κρυστάλλων υπήρξαν οι ιδιότητες που επέτρεψαν την πειραματική παρατήρηση των χωρικών σολιτονίων κατά τη διάδοση φωτός μέσα από διατάξεις υγρών κρυστάλλων [101]. Μια από αυτές τις διατάξεις, με υποσχόμενη σημασία στη δρομολόγηση οπτικού σήματος είναι όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, αυτή στην οποία ο δείκτης διάθλασης του υγρού κρυστάλλου έχει διαμορφωθεί περιοδικά στην εγκάρσια διεύθυνση, δημιουργώντας διακριτούς χωρικούς σχηματισμούς [102, 103].

Η μελέτη της μη γραμμικής δυναμικής σε περιοδικά ή διακριτά συστήματα έχει οδηγήσει στην πρόβλεψη και παρατήρηση πολλών φαινομένων, τα οποία είναι θεμελιωδώς διαφορετικά από αυτά που διαπιστώνονται σε ομογενή μέσα. Όπως είδαμε τόσο στη διάδοση μιας μόνο δέσμης όσο και κατά την αλληλεπίδραση δεσμών, ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι η διακριτή περίθλαση, η οποία είναι αποτέλεσμα τη αλληλεπίδρασης του οπτικού πεδίου με το περιοδικό δυναμικό Peierls-Nabarro. Ανάμεσα στα πιο ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά, που σχετίζονται με την πλούσια φαινομενολογία των διακριτών μη γραμμικών συστοιχιών κυματοδηγών, είναι η δυνατότητα εμφάνισης αυτο-εντοπιζόμενων καταστάσεων [19, 104, 105]. Αυτά τα μη γραμμικά αυτο-παγιδευμένα κύματα (διακριτά σολιτόνια) προκύπτουν ως η συλλογική διέγερση της μη γραμμικής συστοιχίας και είναι αποτέλεσμα της ισορροπίας ανάμεσα στη διακριτή περίθλαση και τη μη γραμμική διαδικασία αποσύζευξης.

Η ιδιότητα που χαρακτηρίζει το μέσο στη διάταξη που θα μελετήσουμε είναι η γνωστή από τα προηγούμενα μη εντοπισμένη συμπεριφορά, μια ιδιότητα η οποία συναντάται, εκτός από την οπτική, σε ατομικούς ατμούς [106], συμπυκνώματα Bose-Einstein [52] και στη μηχανική ρευστών [107]. Επιπλέον, η μη εντοπισμένη συμπεριφορά καθιστά ικανή την έλξη και συγχώνευση σολιτονικών δεσμών με αυθαίρετες διαφορές φάσης (ασύμφωνες αλληλεπιδράσεις), ενώ σε διακριτές διατάξεις οδηγεί σε οπτικούς σχηματισμούς έντονα διαφοροποιημένους από αυτούς για συστήματα μη γραμμικότητας Kerr [53]. Ειδικά για την περίπτωση φραζόντων σολιτονίων, όπως δείχθηκε στο 3^{o} Κεφάλαιο, η μη εντοπισμένη συμπεριφορά είναι υπεύθυνη για ταλαντωτική συμπεριφορά ασθενούς σήματος στην περιοχή του σολιτονίου, χαρακτηριστικό αλληλεπίδρασης, σημαντικά διαφορετικό από ό,τι συμβαίνει σε Kerr μέσο. Επίσης, για μέσα μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, έχουν προβλεφθεί χωρικά εντοπισμένες οπτικές δίνες με τοπολογικό φορτίο ένα [108], καθώς και ευσταθείς μη στρεφόμενες χωροχρονικές οπτικές βολίδες [109].

Η χωροχρονική εξέλιξη οπτικών παλμών σε μη γραμμικές περιοδικές δομές με ομαλή διασπορά, έχει μελετηθεί στο παρελθόν με ενδιαφέρουσες προβλέψεις για τη διέγερση δισδιάστατων κυμάτων τύπου X, σε συστοιχίες συζευγμένων κυματοδηγών. Γενικά, τα κύματα τύπου X αναπαριστούν στάσιμες μορφές πεδίου, που μπορούν να διαδίδονται ελεύθερα χωρικής περίθλασης ή/και χρονικής διασποράς, ενώ αρχικά η παρατήρησή τους έγινε στο πεδίο των υπερήχων [110] και στη συνέχεια διερευνήθηκαν στην οπτική. Έτσι για το χώρο της οπτικής έχει προβλεφθεί ότι κύματα τύπου X μπορούν να επαχθούν αυθόρμητα σε περιοδικές δομές, σε μέσα επίπεδα εισερχόμενης οπτικής ισχύος, σαν αποτέλεσμα της χωρικής περίθλασης και της ομαλής χρονικής διασποράς. Επίσης, τα ξεχωριστά χωροχρονικά και φασματικά χαρακτηριστικά αυτών των διακριτών κυμάτων τύπου X και η σχέση της διαδικασίας δημιουργίας τους με την ευρύτερη οικογένεια των κυμάτων X (σε ελεύθερο μέσο) έχει υπάρξει αντικείμενο μελέτης [111].

Ωστόσο, χωροχρονικές δομές τύπου X δεν έχουν μελετηθεί διεξοδικά και πολύ περισσότερο δεν έχουν παρατηρηθεί σε μέσα με κάποιο βαθμό χωρικά μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Έτσι, το θέμα της χωροχρονικής εξέλιξης και η δημιουργία οπτικών σχηματισμών σε περιοδικές-διακριτές δομές, σε συνδυασμό με τη μη εντοπισμένη συμπεριφορά, ανοίγει ένα νέο πεδίο φυσικών διεργασιών. Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των νηματικών κρυστάλλων, όπως η διπλοθλαστικότητα, η μη εντοπισμένη συμπεριφορά και η εξαιρετικά μεγάλη μη γραμμική απόκριση, μπορούν να παίξουν σημαντικό ρόλο στην παραμετροποίηση διατάξεων για πλήθος εφαρμογών. Ωστόσο, υπάρχει το μειονέκτημα ότι η απόκριση είναι τόσο αργή (λόγω της υψηλής τιμής του ιξώδους του μέσου), που κάνει τους νηματικούς υγρούς κρυστάλλους μη ιδανικούς για τη διαχείριση βραχέων οπτικών παλμών [46, 47]. Από την άλλη πλευρά, χρονικά εκτεταμένοι παλμοί μπορούν να οδηγήσουν σε ενδιαφέρουσα χωροχρονική οπτική συμπεριφορά. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η αργή διαδικασία αναπροσανατολισμού των μορίων του νηματικού κρυστάλλου, μετά τη διέγερσή τους από οπτικό πεδίο, καθιστά υποχρεωτικό το να περιληφθεί ο χρονικά εξαρτώμενος όρος στην εξίσωση διάχυσης που περιγράφει τις διαδικασίες χαλάρωσης στους νηματικούς υγρούς κρυστάλλους. Η χρονική εξάρτηση της διαδικασίας σχηματισμού σολιτονικών δεσμών σε νηματικούς υγρούς κρυστάλλους έχει υπάρξει αντικείμενο μελέτης στο παρελθόν [112, 113, 114].

Στο παρόν κεφάλαιο, θα ακολουθήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση από αυτή που ακολουθήθηκε στα δύο προηγούμενα κεφάλαια. Αντί να εξαχθεί μία διακριτή εξίσωση με την αντίστοιχη προσθήκη του συνεχούς όρου της συνεισφοράς της διασποράς, θα εξάγουμε τη (2+1) συνεχή μη γραμμική χωροχρονική εξίσωση Schroedinger, όπου η +1 διάσταση αναφέρεται στη χωρική διάσταση της διάδοσης, και η οποία εξίσωση είναι συζευγμένη με την εξίσωση που περιγράφει την κλίση των γωνιών των μορίων του μέσου, όπως προβλέπεται από τη θεωρία που διέπει τους νηματικούς υγρούς κρυστάλλους (Κεφ. 1). Εν συνεχεία θα επεκτείνουμε το συνεχές μοντέλο, ώστε να μπορέσουμε να περιγράψουμε τη διάδοση οπτικού πεδίου όταν διαμορφώσουμε περιοδικά το δείκτη διάθλασης κατά την εγκάρσια διεύθυνση, οπότε το σύστημά μας περιγράφεται από ένα σύστημα δύο εξισώσεων που είναι συζευγμένες μεταξύ τους και μπορούν να δώσουν για κάθε απόσταση διάδοσης την ένταση του οπτικού πεδίου και τη γωνία στροφής των μορίων, όπως αυτή καθορίζει την απόκριση του οπτικού μέσου. Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή του μοντέλου μας και τη διατύπωση των σχετικών εξισώσεων, κρίνεται σκόπιμο να ξαναδούμε αναλυτικότερα την έννοια των κυμάτων X, όπως αυτά προκύπτουν από τη χωροχρονική εξίσωση Schroedinger.

4.2 Κύματα τύπου Χ

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, η χωροχρονική μη γραμμική εξίσωση Schroedinger είναι η εξίσωση που ενσωματώνει τα χωρικά και χρονικά γραμμικά φαινόμενα, δηλαδή τη περίθλαση και την διασπορά. Στην παρούσα ενότητα θα ξαναδούμε τη χωροχρονική εξίσωση Schroedinger και τις λύσεις που αυτή υποστηρίζει για ανώμαλη διασπορά (οπτικές βολίδες) και για ομαλή διασπορά (κύματα τύπου Χ). Ας θεωρήσουμε ανώμαλη διασπορά για τη χωροχρονική εξίσωση NLS (1^o Κεφ. εξ. 1.34) και ας ξαναγράψουμε την αδιάστατη χωροχρονική NLS σε σφαιρικές συντεταγμένες στη γενική μορφή που είδαμε στο 1^o Κεφάλαιο (εξ. 1.36)

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d^2U}{dR^2}+\frac{D-1}{R}\frac{dU}{dR}\right]-\kappa_0 U+U^3=0\,, \qquad (4.1)$$

με $R=(x^2+y^2+\tau^2)^{1/2}$ και το U, ανεξάρτητο από το z, είναι το πλάτος της λύσης που συντηρεί τη μορφή της $u(x,y,\tau,z)=U(x,y,\tau)\exp(i\kappa_0 z)$ και ικανοποιεί την 1.34. Η κ_0 είναι η σταθερά διάδοσης.

Όπως είδαμε και νωρίτερα για $D=3$ η εξ. 4.1 περιγράφει τη διάδοση παλμών σε τρισδιάστατα μέσα. Για αυτήν την τιμή προκύπτουν αριθμητικά λύσεις, εκ των οποίων η χαμηλότερης τάξης είναι οι λεγόμενες «οπτικές βολίδες», δηλαδή παλμοί οι οποίοι δε μεταβάλλουν το χωρικό και χρονικό τους σχήμα κατά τη διάδοση. Εφαρμόζοντας τη μεταβολική μέθοδο έχει διαπιστωθεί [115, βλ. και 116] ότι μικρές διαταραχές στις χαρακτηριστικές παραμέτρους της δέσμης μπορεί να έχουν ως αποτέλεσμα χωροχρονική καταστροφή, αν η ενέργεια του παλμού ξεπερνά μια κρίσιμη τιμή. Σε αυτή την περίπτωση ο παλμός καταρρέει χωρικά και χρονικά και η ένταση να γίνεται άπειρη. Μια ακόμη ποσότητα που καθορίζει τη χωροχρονική καταστροφή είναι το τερέτισμα και όσο πιο μεγάλη τιμή έχει αυτή τόσο πιο έντονα είναι τα καταστροφικά χαρακτηριστικά του οπτικού πεδίου.

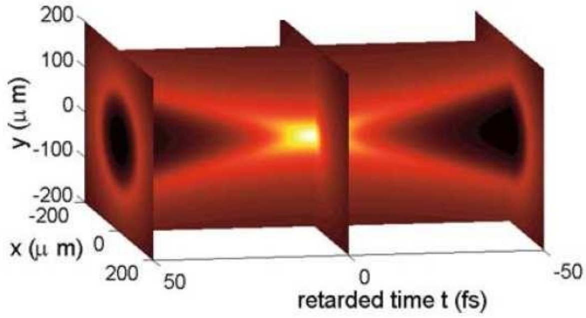
Τα οπτικά μέσα που αποτελούν αντικείμενο έρευνας της παρούσας διατριβής είναι γενικά μέσα που εμφανίζουν μη εντοπισμένη συμπεριφορά στο χώρο και στο χρόνο, ωστόσο, όπου τα χρονικά φαινόμενα είναι τέτοια ώστε να μπορούν να θεωρηθούν σημαντικά, η διασπορά είναι εν γένει ομαλή. Ας υποθέσουμε λοιπόν την τρισδιάστατη χωροχρονική εξίσωση Schroedinger με ομαλή διασπορά

$$i\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right)+|u|^2 u=0 \qquad (4.2)$$

και τη λύση με διατηρούμενη μορφή, $u(z,x,\tau)=f(x)g(y)h(\tau)\exp(iK_0 z)$. Με κατάλληλες ολοκληρώσεις εξισώσεων που προκύπτουν από την εξ. 4.2, έχουμε τις λύσεις

$$f(x)=\mathrm{sec}h\left(\sqrt{a}x\right),\ \ g(y)=\mathrm{sec}h\left(\sqrt{a}y\right)\ \ g(\tau)=\tan h\left(\sqrt{a}\tau\right) \qquad (4.3)$$

με a υπολογίσιμη σταθερά. Οι σχέσεις της εξ. 4.3 δηλώνουν ότι οι λύσεις f,g,h έχουν τη μορφή φωτεινού χωρικού σολιτονίου στις χωρικές διαστάσεις και ενός σκοτεινού χρονικού σολιτονίου. Όπως έχει δειχθεί οι σολιτονικές αυτές λύσεις δεν είναι ευσταθείς [18]. Αριθμητική ολοκλήρωση της εξ. 4.2 δείχνει ότι ο παλμός υφίσταται αυτοεστίαση στις χωρικές διαστάσεις και συμπίεση στη χρονική. Σε δεύτερο στάδιο η μεγάλη αύξηση της έντασης στο κέντρο παλμού οδηγεί σε διαχωρισμό του παλμού και φασματική διεύρυνση. Αυτή ακριβώς είναι η διαδικασία της παραγωγής κυμάτων, που στο επίπεδο της εγκάρσιας χωρικής και της χρονικής διάστασης παρουσιάζουν μια μορφή τύπου X (Σχ. 4.1).



Σχ. 4.1 *Απεικόνιση της χωρικής εστίασης και χρονικής συμπίεσης και στη συνέχεια διαχωρισμού και φασματικής διεύρυνσης για την παραγωγή τρισδιάστατου οπτικού σχηματισμού τύπου X.* [111]

Η εισαγωγή των μη γραμμικών κυμάτων τύπου X ακολούθησε αυτή των γραμμικών κυμάτων X, με τα τελευταία να ανακύπτουν στο χώρο της οπτικής [117, 118, 119] και της ακουστικής σα μια γενίκευση επίπεδων κυμάτων ομοιόμορφα κατανεμημένων σε κώνο.

Αν θεωρήσουμε το γραμμικό κομμάτι της εξ. 4.2 και υποθέτοντας λύση της περιβάλλουσας ως υπέρθεση ρυθμών των οποίων η γωνιακή εξάρτηση ρυθμίζεται από ακέραιους m,

$$A = \sum\nolimits_m A_m(r,t)\exp(im\varphi), \tag{4.4}$$

τότε το ολικό πεδίο A είναι ελεύθερο περίθλασης, με την προϋπόθεση ότι το χρονικό φάσμα ικανοποιεί την εξίσωση Bessel. Τότε η περιβάλλουσα βρίσκεται ότι είναι της μορφής [111],

$$A(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega f(\Omega) J_0\left(|\Omega| r\right)\exp(-i\Omega t), \tag{4.5}$$

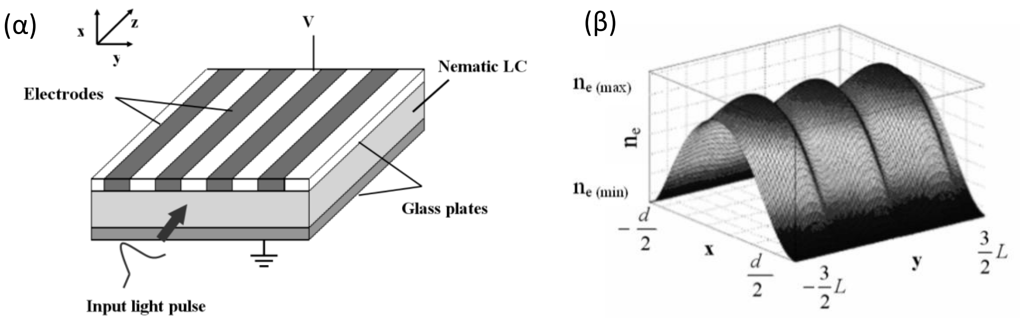
με J_0 την συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης, $\Omega = \omega - \omega_0$, με ω_0 τη κεντρική συχνότητα και f τη συνάρτηση της φασματικής κατανομής.

Οι λύσεις που περιγράφονται από την εξ. 4.5 για το γραμμικό μοντέλο ουσιαστικά δε διαφέρουν από τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης της μη γραμμικής εξίσωσης, η οποία βέβαια δε μπορεί να δώσει αναλυτικές λύσεις. Πρακτικά η διαδικασία είναι όμοια και στις δύο περιπτώσεις και μπορεί να ειπωθεί ότι τα μη γραμμικά κύματα τύπου X είναι γραμμικά κύματα «ενδεδυμένα» με μη γραμμικότητα και πρακτικά η διαφορά στην απεικόνισή τους σε ένα διάγραμμα χωρικής συντεταγμένης και χρόνου είναι η ύπαρξη επιπλέον ταλαντώσεων, όταν η μη γραμμικότητα παίρνει πολύ υψηλές τιμές. Το παραπάνω αντιστοιχεί σε χρονικό διαχωρισμό του παλμού και φασματικό κατακερματισμό.

4.3 Το συνεχές μοντέλο

Το μοντέλο που εξετάζουμε έχει ως αντικείμενο μελέτης τη χωροχρονική συμπεριφορά ενός ιδεατού περιοδικού συστήματος που εμφανίζει χωρικά μη εντοπισμένη συμπεριφορά. Η χωροχρονική διάχυση στο πρωτότυπο μοριακό μέσο, καθώς αυτό αλληλεπιδρά με ένα διαδιδόμενο οπτικό παλμό, λαμβάνεται υπ' όψη μοντελοποιώντας κατ' αυτό τον τρόπο τον αναπροσανατολισμό των μορίων σε πραγματικές διατάξεις νηματικών υγρών κρυστάλλων. Η διάρκεια του παλμού θεωρείται συγκρίσιμη ($20\%-300\%$) με τον αντίστοιχο χρόνο χαλάρωσης του μέσου, ώστε τα χρονικά φαινόμενα να είναι σημαντικά. Ο λόγος του χρόνου διασποράς του παλμού προς το χρόνο χαλάρωσης του μέσου χρησιμοποιείται ως ελεύθερη παράμετρος. Αν, για παράδειγμα, το πρωτότυπο μέσο είναι νηματικός υγρός κρύσταλλος και η πειραματική διάταξη είναι αυτή που είναι η πιο διαδεδομένη πειραματικά [120, 102], αυτός ο λόγος είναι αμελητέος (της τάξης 10^{-24}) καθιστώντας τον οπτικό παλμό χωρίς διασπορά. Ωστόσο, για λόγους γενίκευσης, η διασπορά διατηρείται δια μέσου μια ελεύθερης παραμέτρου. Όσον αφορά τους νηματικούς υγρούς κρυστάλλους, οι αργοί χρόνοι χαλάρωσης είναι το κυριότερο μειονέκτημα από την πλευρά των εφαρμογών. Συνεπώς, μη γραμμικά φαινόμενα διεγείρονται και εκτονώνονται με μεταβατικές διαδικασίες, και αυτό έχει ως αποτέλεσμα η μη γραμμική απόκριση του μέσου να χαρακτηρίζεται από μη εντοπισμένη συμπεριφορά στο χρόνο.

Για τη μελέτη της διάδοσης ενός παλμού, υποθέτουμε ότι το οπτικό πεδίο είναι κάθετα πολωμένο σε ένα λεπτό επίπεδο κελί νηματικού υγρού κρυστάλλου με περιοδική εγκάρσια διαμόρφωση κατά μήκος του y, που έχει επιβληθεί με τη βοήθεια ηλεκτρικού πεδίου χαμηλής συχνότητας, καθοριζόμενου από την επίδραση περιοδικής κατά το y διαφοράς δυναμικού. Αρχικά, απόντος του οπτικού παλμού, τα μόρια διαμορφώνουν τη λεγόμενη επίπεδη διαμόρφωση, ενώ το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο χρησιμοποιείται για να στρέψει τα μόρια, για την αποφυγή φαινομένων κατωφλίου (μετάβαση Freedericksz) κατά τη μη γραμμική απόκριση (Σχ. 4.2).



Σχ. 4.2 *α) Τυπική διάταξη ενός επίπεδου νηματικού κρυστάλλου υπό την επίδραση περιοδικής στην εγκάρσια διεύθυνση τάσης. β) το χωρικό προφίλ του υπερκανονικού δείκτη διάθλασης.*

Η δυναμική του μοριακού αναπροσανατολισμού περιγράφεται, για μια διάταξη νηματικού υγρού κρυστάλλου, υπό την επίδραση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου με μια εξίσωση ισορροπίας ροπών. Ισορροπώντας τις ροπές ιξώδους και ελαστικών δυνάμεων που εμφανίζονται κατά τη διαδικασία αναπροσανατολισμού που διεγείρεται λόγω του πεδίου, η εξίσωση που περιγράφει το σύστημα είναι η εξής,

$$\gamma \frac{\partial \theta_0}{\partial t} = K\nabla_{xy}^2 \theta_0 + \frac{\Delta\varepsilon_{RF} E_x{}^2}{2} \sin 2\theta_0 \qquad (4.6)$$

όπου γ είναι ένας συντελεστής ιξώδους, K είναι ο συντελεστής του Frank που περιγράφει την ελαστικότητα του μέσου και $\Delta\varepsilon_{RF}$ είναι η χαμηλής συχνότητας ανισοτροπία. E_x είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που εφαρμόζεται εξωτερικά στο υγρό κρύσταλλο.

Για να περιλάβουμε και τη συνεισφορά της διάδοσης του οπτικού πεδίου στον αναπροσανατολισμό των μορίων η εξ. 4.6 μετασχηματίζεται ως εξής.

$$\gamma \frac{\partial \theta_0}{\partial t} = K\nabla_{xy}^2 \theta + \frac{\Delta\varepsilon_{RF} E_x{}^2}{2} \sin 2\theta + \frac{\varepsilon_0 n_a^2 |A|^2}{4} \sin 2\theta \qquad (4.7)$$

όπου $n_a^2 = n_{\parallel}^2 - n_{\perp}^2$, η οπτική ανισοτροπία και A, η περιβάλλουσα του οπτικού πεδίου. Η γωνία θ πλέον αναφέρεται στην κλίση του μορίου που οφείλεται αθροιστικά στην επίδραση του εξωτερικού πεδίου και του οπτικού πεδίου που διέρχεται μέσα από το νηματικό κρύσταλλο.

Αντίστοιχα, η συζευγμένη με την εξ. 4.7 σχέση που δίνει την εξέλιξη της περιβάλλουσας του οπτικού πεδίου είναι η ακόλουθη παραξονική κυματική εξίσωση.

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \nabla_{xy}^2 A + k_0^2 n_a^2 \left(\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0 \right) A = 0 \qquad (4.8)$$

Στην εξ. 4.8 ο γωνιακός προσανατολισμός των μορίων περιγράφεται από μια μέση κατά τη x διεύθυνση γωνία, $\hat{\theta}(y)$, σε σχέση με τον άξονα διάδοσης, z. Τα μόρια που βρίσκονται σε επαφή με τις επιφάνειες που οριοθετούν το κελί στο κατακόρυφο θεωρούμε ότι είναι αγκιστρωμένα σε αυτές σε επίπεδη διάταξη, ενώ τα μεταξύ των επιφανειών αυτών μόρια εμφανίζουν μια κατανομή γωνιών. Η μέση τιμή της γωνίας συμβολίζεται με θ_0 και ο συνολικός γωνιακός προσανατολισμός, $\theta(y,z,t)$, όταν το οπτικό πεδίο είναι παρόν, εκφράζεται ως,

$$\theta(y,z,t) = \theta(y)\left(1 + \Psi(y,z,t) / \theta_0\right) \qquad (4.9)$$

όπου το $\Psi(y,z,t)$ αντιπροσωπεύει τη μη γραμμική οπτική απόκριση του μέσου. Όπως μπορεί εύκολα να δειχθεί, οι εξισώσεις διάδοσης που περιγράφουν την περιβάλλουσα $U(z,y,t)$ και τη μη γραμμική απόκριση $\Psi(y,z,t)$ εξάγονται από τις εξ. 4.8-4.9 και είναι

$$2ik \frac{\partial U}{\partial z} - kk'' \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + F(y) k_0^2 n_a^2 U\Psi = 0 \qquad (\alpha)$$

$$K \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \gamma \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{G(y)}{\pi} \left[2\Delta\varepsilon_{RF} E^2 \Psi - \varepsilon_0 n_a^2 \theta_0 |U|^2 \right] = 0 \qquad (\beta) \qquad (4.10)$$

όπου η διαμόρφωση εκφράζεται μέσω των y-περιοδικών συναρτήσεων F, G

$$F(y)=\frac{\hat{\theta}(y)\sin\left[2\hat{\theta}(y)\right]}{\hat{\theta}_0},\quad G(y)=\frac{\pi}{4}\frac{\sin\left[2\hat{\theta}(y)\right]}{\hat{\theta}(y)} \tag{4.11}$$

Στις συζευγμένες εξ. 4.10(α)-(β), όροι που περιλαμβάνουν $\partial\ln\theta/\partial y, \partial\Psi/\partial y$ και $\Psi\cos 2\theta$ έχουν παραληφθεί, καθώς είναι μικροί σε σχέση με τα ελάχιστα των F, G. Αυτή η υπόθεση μπορεί να δικαιολογηθεί στη βάση των διαμορφώσεων που υπολογίζονται και μετριούνται σε πειραματικές εργασίες [120, 121]. Στο πλαίσιο της εργασίας μας, οι συναρτήσεις F, G έχουν εμμέσως εκτιμηθεί από το προφίλ του υπολογισμένου και του εξαρτώμενου από τη διεύθυνση x υπερκανονικού δείκτη, $n_e(y)=n_{\|}n_{\perp}/\left(n_{\|}^2\cos^2\theta(y)+n_{\perp}^2\sin^2\theta(y)\right)^{1/2}$.

Στην εξ. 4.8, k είναι η σταθερά διάδοσης , όπου $k=k_0\left(n_{\|}^2\sin^2\theta(y)+n_{\perp}^2\cos^2\theta(y)\right)^{1/2}$, με k_0 τον κυματάριθμο στο κενό (για ένα κεντρικό μήκος κύματος λ, στο εύρος των $500-1000nm$) και $k''=d^2k/d\omega^2$ είναι ο αντίστοιχος συντελεστής διασποράς (συνήθως ομαλή διασπορά και επομένως $k''>0$ της τάξης $10^{-3}ps^2/mm$). Επιπλέον, $\Delta\varepsilon_{RF}$ είναι η α-νισοτροπία χαμηλής συχνότητας (της τάξης $20\varepsilon_0$) και $n_a=n_{\|}^2-n_{\perp}^2$ είναι η οπτική ανισοτρο-πία. Οι εκτιμώμενες διαμορφώσεις για τη σταθερά διάδοσης k και το συντελεστή διασπο-ράς k'' είναι περισσότερο από μια τάξη μεγέθους χαμηλότερη από τις αντίστοιχες διαμορ-φώσεις των F, G και γι αυτό δε λαμβάνονται υπόψη. Αντί αυτού αντικαθιστούμε και τις δύο ποσότητες με τις τιμές τους, όταν η μέση τιμή της γωνίας είναι $\theta=\theta_0$. Τέλος, στην εξ. 4.10, K, γ είναι αντίστοιχα η ελαστική σταθερά του Frank (της τάξης του $10^{-11}N$) και ο συ-ντελεστής ιξώδους (της τάξης 10^{-1} και $10^{-2}kg/ms$).

Στη συνέχεια εισάγουμε τις παρακάτω φυσικές ποσότητες κλίμακας με σκοπό την κανονι-κοποίηση των χωρικών και χρονικών ποσοτήτων στις εξ. 4.10(α)-(β)

$$\begin{aligned}
R_0^{\,2} &= \pi K/2\Delta\varepsilon_{RF}E^2\\
T_0 &= \gamma R_0^{\,2}/K\\
Z_0 &= 2kR_0^{\,2}\\
\Psi_0 &= 1/\left(R_0k_0n_a\right)^2\\
U_0 &= \Psi_0k_0\left(2K/\varepsilon_0\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Μετά την εισαγωγή των ποσοτήτων της εξ.4.12, οι εξ. 4.10 μετασχηματίζονται σε αδιάστατη μορφή ως εξής:

$$i\frac{\partial u}{\partial\zeta}-\frac{D}{\alpha}\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+F(\xi)u\psi=0 \tag{α}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}-\frac{\partial\psi}{\partial\tau}-G(\xi)\left[\alpha\psi-\frac{2\widehat{\theta}_0}{\pi}|u|^2\right]=0 \quad (\beta), \qquad (4.13)$$

όπου στις εξ. 4.13 οι αδιάστατες ποσότητες είναι τώρα οι

$$\tau = t/\left(\alpha\Gamma_0\right),$$

$$\xi^2 = y^2/(\alpha R_0{}^2),$$

$$\zeta = z/(\alpha Z_0), \qquad (4.14)$$

$$u = \alpha U/U_0,$$

$$\psi = \alpha\Psi/\Psi_0 .$$

Κατά τον παραπάνω μετασχηματισμό των εξ. 4.13, μια ελεύθερη αδιάστατη παράμετρος α έχει εισαχθεί κατά τον πνεύμα εργασιών που έχουν γίνει πάνω στους νηματικούς υγρούς κρυστάλλους [49] και σκοπό έχει να ανιχνεύει τις οικογένειες των χωρικών σολιτονικών δομών σε αμιγώς χωρικά συστήματα. Το φυσικό ανάλογο θα δειχθεί ότι είναι η προσπίπτουσα οπτική ένταση ή ισχύς. Στο μοντέλο μας, εν τέλει, υπεισέρχεται και μια δεύτερη αδιάστατη παράμετρος, το τετράγωνο του λόγου του χρόνου διασποράς προς το χρόνο χαλάρωσης. Στις εξ. 4.13 η τελευταία παράμετρος συμβολίζεται με D και για το φυσικό σύστημα που εξετάζουμε δίνεται από τη σχέση $D = K^2kk''/\gamma^2R_0^2$ (συνήθως της τάξης 10^{-25} για νηματικούς υγρούς κρυστάλλους).

Το σύστημα των εξ. 4.13 αποτελεί ένα πρωτότυπο σύστημα για τη μελέτη της χωροχρονικής εξέλιξης σε περιοδικά μέσα που εμφανίζουν μη εντοπισμένη απόκριση σε διαδιδόμενο οπτικό πεδίο αργά μεταβαλλόμενης περιβάλλουσας (παραξονική προσέγγιση). Στην περίπτωση που θέσουμε $D = 0$ το μοντέλο γίνεται συμβατό με τη συμπεριφορά των νηματικών υγρών κρυστάλλων. Για τους νηματικούς υγρούς κρυστάλλους βρίσκεται ότι το R_0 είναι της τάξης μερικών μm (για εφαρμοζόμενη τάση $1V$ και πάχος κελιού μερικών μm). Συνεπώς, αν είναι ζητούμενο να αυξήσουμε τη σημαντικότητα του όρου της διασποράς θα πρέπει να είναι αρκετά μικρότερος ο όρος της διάδοσης. Η εξάρτησή του όρου αυτού από το R_0, όμως, αναδεικνύει ότι ακόμη και με την περαιτέρω σμίκρυνση των διαστάσεων του κελιού κατά μια τάξη μεγέθους (τεχνικά απαιτητικό), η διασπορά μέσω του συντελεστή D θα αυξανόταν μόλις κατά μια τάξη μεγέθους. Εν τέλει, μια απαιτούμενη αύξηση του συντελεστή διασποράς κατά μερικές τάξεις μεγέθους, με σκοπό να γίνει ο όρος σημαντικός, είναι δυνατή μόνο μέσα σε ένα μέσο με εξαιρετικά γρήγορη απόκριση (π.χ. $1\,\mu s$), υψηλής διασποράς στο μήκος κύματος της φέρουσας του οπτικού παλμού (με το k'' της τάξης μεγέθους $\pm 1 ps^2/\mu m$) και ισχυρά ελαστικό (με K της τάξης $10^{-3}N$), ή ένα συνδυασμό των παραπάνω προϋποθέσεων. Στην παρακάτω ανάλυση ο όρος της χρονικής διασποράς θα διατηρηθεί μόνο για λόγους γενίκευσης.

4.4 Το διακριτό μοντέλο

Το πρώτο βήμα προς τη μελέτη του μοντέλου όπως περιγράφεται από τις εξ. 4.10(α)-(β), (σημειώνοντας εδώ ότι οι ποσότητες F, G είναι περιοδικές συναρτήσεις του ξ με μέσες τιμές κοντά στη μονάδα και μια διακύμανση περίπου στο $10\% - 20\%$, έχοντας υπόψη τους νηματικούς υγρούς κρυστάλλους), είναι να μετασχηματίσουμε τις εξ. 4.10 σε διακριτή μορφή. Η προσέγγισή μας για το μετασχηματισμό αυτό είναι να αναπτύξουμε τις εξ. 4.10 ως προς την εισηγμένη ελεύθερη παράμετρο α, που όπως αναφέρθηκε σχετίζεται άμεσα με την ένταση του οπτικού πεδίου και την τιμή αναφοράς $U_0 = \Psi_0 k_0 (2K/\varepsilon_0)^{1/2}$, όπως φαίνεται και από τις εξ. 4.14. Για να θεωρήσουμε το σχετικό ανάπτυγμα θα υποθέσουμε ότι η παράμετρος α παίρνει μεγάλες τιμές ($\alpha >> 1$) και, συνεπώς, η εισερχόμενη οπτική ισχύς παίρνει αντιστοίχως μεγάλες τιμές. Έτσι είναι δυνατό ένα ανάπτυγμα των συνεχών συζευγμένων εξ. 4.13 ως προς τον όρο $1/\alpha$ που είναι μικρός. Επομένως, για $|u|^2(\zeta = 0) = |u_0|^2$, παίρνουμε

$$i\frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{D}{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \approx -F(\xi)\frac{2\theta_0}{\pi\alpha}|u_0|^2 u + O(\alpha^{-n}, n \geq 2) \quad (\alpha)$$

$$\psi \approx \frac{2\widehat{\theta}_0}{\pi\alpha}|u_0|^2 + O(\alpha^{-n}, n \geq 2) \quad (\beta) \qquad (4.15)$$

Η σχετιζόμενη με την εξ. 4.15(α) γραμμική εξίσωση μπορεί εύκολα να λυθεί αν δεχθούμε προσέγγιση τύπου «κουτιού» για την περιοδική συνάρτηση $N(\xi) = 2\theta_0 F(\xi)/\pi$ για μια κανονικοποιημένη περίοδο $L/\left(R_0\alpha^{1/2}\right)$, όπου L είναι η περίοδος (μια ενδεικτική τιμή είναι $L = 6\mu m$). Η χαμηλότερης τάξης λύση $f(\xi)$ αυτού του προβλήματος [εξισώσεις (4.A4)-(4.A6) στο παράρτημα 4.A] χρησιμοποιείται σαν βάση για τους περιοδικούς στο ξ συναρτησιακούς συντελεστές, με μια έκφραση αναπτύγματος σειράς των λύσεων (u, ψ) του συστήματος των εξ. 4.13(α)-(β),

$$u = \sqrt{S}\sum_n c_n(\zeta,\tau) f(\xi - n\frac{L}{R_0\sqrt{\alpha}})e^{i\lambda\zeta} \quad (\alpha)$$

$$\psi = S\frac{2\theta_0}{\pi\alpha}\sum_n b_n(\zeta,\tau) f^2(\xi - n\frac{L}{R_0\sqrt{\alpha}}), \quad (\beta) \qquad (4.16)$$

όπου λ είναι η σταθερά διάδοσης του οπτικού παλμού και δίνεται από την εξ. A2 του παραρτήματος 4.A. S είναι ένας παράγοντας μορφής, ο οποίος παίρνει υπ' όψη του το πεπερασμένο χωρικά μέγεθος κηλίδας, καθώς και τον υποκείμενο υπολογισμό μέσης τιμής κατά τη διεύθυνση x [122] και $|u_0|$ είναι η εισερχόμενη ένταση του οπτικού πεδίου, που θεωρούμε ότι διαδίδεται σε ένα απειροδιάστατο μέσο. Με την εισαγωγή των αναπτυγμάτων σειράς στο συνεχές μοντέλο, στο πνεύμα της προσέγγισης ισχυρής δέσμευσης, η σύζευξη (γραμμική και μη γραμμική) ανάμεσα στους κοντινότερους γείτονες υπερισχύει της σύζευξης με τους απομακρυσμένους. Προκύπτει το ακόλουθο συζευγμένο σύστημα χωροχρονικής εξέλιξης των πλατών $c_m\left(\zeta,\tau\right)$ (μιγαδικό) και $b_m\left(\zeta,\tau\right)$ (πραγματικό).

$$i\frac{\partial c_m}{\partial\zeta}-D_0\frac{\partial^2 c_m}{\partial\tau^2}+V_0c_m+K_0\left(c_{m+1}+c_{m-1}\right)+Q_0c_mb_m+Q_0\left(c_{m+1}b_{m+1}+c_{m-1}b_{m-1}\right)=0 \qquad (\alpha)$$

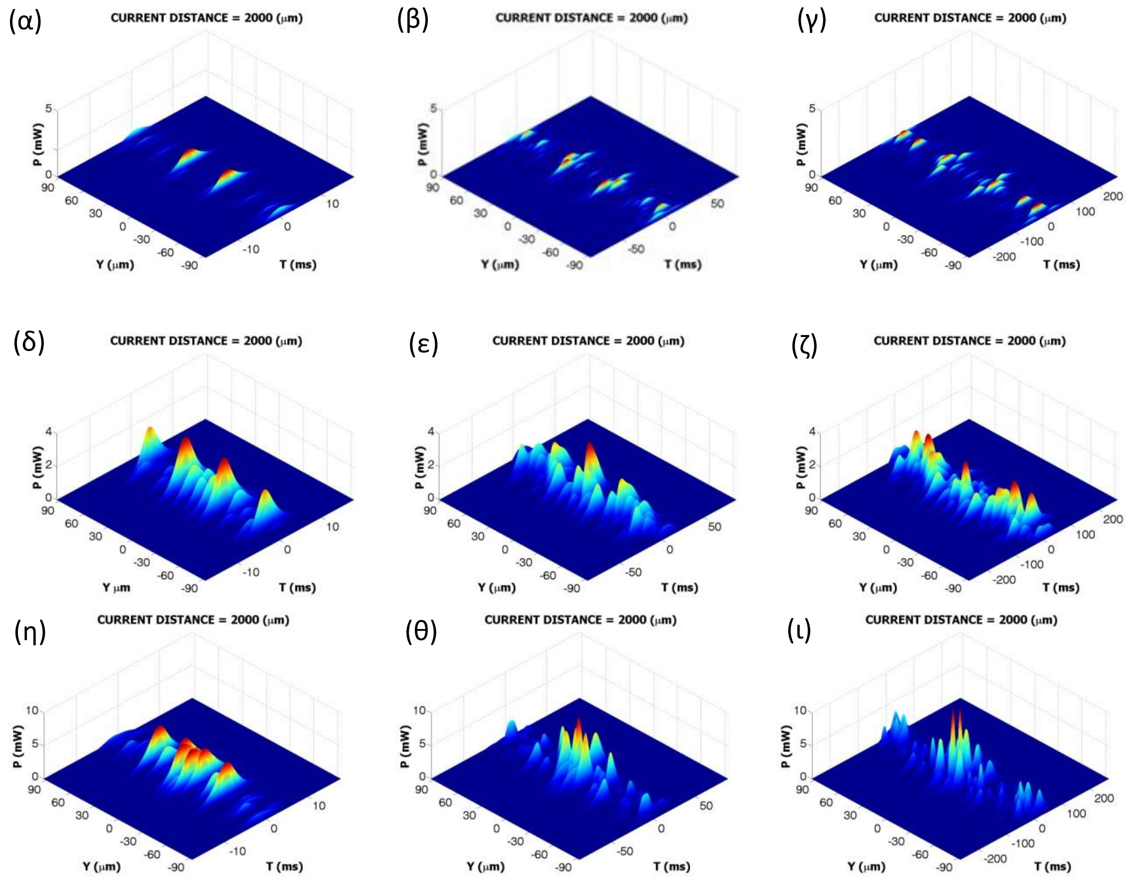
$$V_1b_m+K_1\left(b_{m+1}+b_{m-1}\right)-\frac{\partial b_m}{\partial\tau}+Q_1\left|c_m\right|^2+Q_1\left(\left|c_{m+1}\right|^2+\left|c_{m-1}\right|^2\right)=0 \qquad (\beta) \qquad (4.17)$$

Οι συντελεστές σύζευξης στις εξ. 4.17(α)-(β) είναι συναρτήσεις της ελεύθερης παραμέτρου a και περιλαμβάνουν ολοκληρώματα επικάλυψης των συναρτήσεων βάσης $f\left(\xi-nL/\alpha R_0^{1/2}\right)$. Οι αντίστοιχες εκφράσεις παρατίθενται στο Παράρτημα 4.Β. Αυτό το σύστημα εξισώσεων περιγράφει μια συστοιχία γραμμικών και μη γραμμικών συζευγμένων κυματοδηγών και θα μελετηθεί στην επόμενη ενότητα.

4.5. Αριθμητικά πειράματα

Σε αυτή την ενότητα θα εκτελέσουμε αριθμητικά πειράματα πάνω στο σύστημα εξ. 4.17(α)-(β), με σκοπό την αναζήτηση χωροχρονικά εντοπισμένων οπτικών σχηματισμών. Η μεθοδολογία της αριθμητικής προσομοίωσης που χρησιμοποιούμε περιλαμβάνει συνδυασμό της εφαρμογής ψευδο-φασματικής τεχνικής και ρουτίνα ολοκλήρωσης Runge-Kutta στο z. Τα χαρακτηριστικά της τυπικής πειραματικής επίπεδης διάταξης νηματικού υγρού κρυστάλλου που ενσωματώθηκαν είναι η περίοδος της περιοδικής ηλεκτρικής διέγερσης, περιόδου $L=6\mu m$ με πάχος κατά τη x διεύθυνση $d\approx 4\mu m$. Ο συντελεστής ιξώδους του υλικού είναι $\gamma=0.08\,Kg/ms$, το χαμηλής συχνότητας ηλεκτρικό πεδίο είναι $E=2\times10^5V/m$ και η ελαστική σταθερά του Frank, $K=10^{-11}N$. Το μήκος κύματος της φέρουσας του οπτικού παλμού είναι της τάξης $\lambda\approx 1\,\mu m$ και οι αντίστοιχοι δείκτες διάθλασης κατά μήκος και κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του οπτικού παλμού είναι $n_{\|}=1.6814$ και $n_{\perp}=1.5158$. Τέλος, η μέση τιμή της γωνίας προσανατολισμού των μορίων είναι $\hat{\theta}_0\approx 0.678$ και η χαμηλής συχνότητας ανισοτροπία είναι $\Delta\varepsilon_{RF}=20\varepsilon_0$. Η σταθερά διάδοσης υπολογίζεται $k\approx 10\mu m^{-1}$, ο χρόνος χαλάρωσης, $T_0=18\,ms$ και η παράμετρος χωρικής κλίμακας, $R_0\approx\ 1.5\mu m$.

Στο Σχ. 4.3 παρουσιάζεται η χωροχρονική εξέλιξη των οπτικών παλμών για διάφορες τιμές εισερχόμενης ισχύος P_0, $5mW$ (α, β, γ), $20\,mW$ (δ, ε, ζ) και $50\,mW$ (η, θ, ι) και για απόσταση διάδοσης $2000\mu m$. Τα χρονικά εύρη των παλμών είναι ανά στήλη $0.2T_0$ (πρώτη), $1T_0$ (δεύτερη), $3T_0$ (τρίτη). Ο αριθμός των κυματοδηγών που απαρτίζουν το σύστημα υπό μελέτη θεωρούμε ότι είναι 31 και ότι ο εισερχόμενος παλμός έχει χρονικό προφίλ υπερβολικού αντιστρόφου συνημίτονου γωνίας $(\sec h)$ (και επομένως η εισερχόμενη ισχύς θα έχει κατανομή της μορφής $P=P_0\sec h^2(t/t_0)$) ή είναι γκαουσιανής μορφής με χρονικό εύρος $20\%-300\%$ του χρόνου χαλάρωσης. Η αδιάστατη παράμετρος D_0, που συνδέεται με τη χρονική διασπορά μπορεί να μεταβάλλεται σε ένα μεγάλο εύρος τιμών, κυρίως για θεωρητικούς λόγους, προσεγγίζοντας διάφορες κατηγορίες υλικών, όπως υλικά υψηλής διασποράς, μεγάλης ελαστικότητας και υπερταχείας απόκρισης. Η ελεύθερη παράμετρος α που έχουμε εισάγει και που ελέγχει την εντοπισμένη συμπεριφορά των οπτικών παλμών δεν

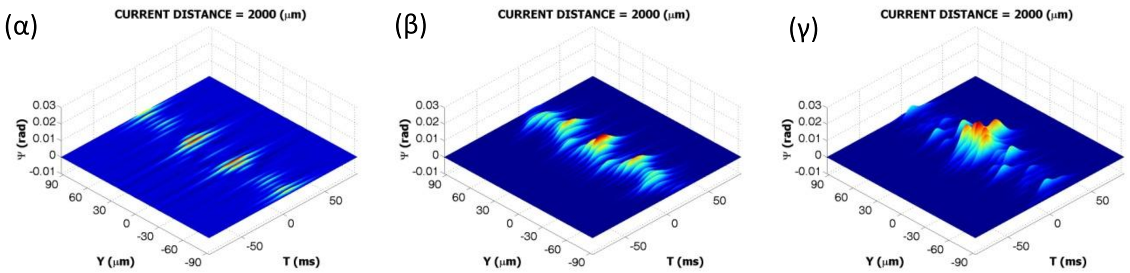


Σχ. 4.3 *Χωροχρονική κατανομή εξερχόμενης ισχύος σε απόσταση διάδοσης* $2000\mu m$ *για εισερχόμενη ισχύ υπερβολικού secant. Η πρώτη σειρά (α, β, γ) αντιστοιχεί σε εισερχόμενη ισχύ* $5\,mW$ *, η δεύτερη (δ, ε, ζ) σε* $20\,mW$ *και η τρίτη (η, ϑ, ι) σε* $50\,mW$ *. Στην πρώτη στήλη (α, δ, η) το χρονικό εύρος είναι* $0.2T_0$ *, στη δεύτερη (β, ε, ϑ),* $1T_0$ *και στην τρίτη (γ, δ, ι),* $3T_0$ *.*

έχει ιδιαίτερο φυσικό ανάλογο, πέρα του ότι αντιστοιχεί στην εισερχόμενη ισχύ του οπτικού πεδίου. Αυτό είναι εμφανές από το ό,τι η παράμετρος α συνδέεται με την εισερχόμενη ενέργεια και τον παράγοντα μορφής με τη σχέση $S|u_0|^2 = \alpha^2 P_{\max}(z=0)/P_0$, όπου $P_0 = U_0^2 \varepsilon_0 cLd/2$, οπότε μπορούμε να θέσουμε $\alpha = 1$ και να χρησιμοποιηθεί η εισερχόμενη ενέργεια $\left(P_{\max}(z=0)/P_0\right)^{1/2}$ για τον έλεγχο της εντοπισμένης συμπεριφοράς.

Τέλος, να σημειωθεί ότι όλες οι προσομοιώσεις έγιναν για την περίπτωση που διεγείρουμε τον κεντρικό κυματοδηγό, μεταβάλλοντας, κατά περίπτωση, το χρονικό προφίλ της εισερχόμενης ισχύος και το χρονικό εύρος.

Από το Σχ. 4.3, προκύπτει, όπως άλλωστε αναμένουμε, ότι εντονότερα εντοπισμένη συμπεριφορά χαρακτηρίζει τις δέσμες με μεγαλύτερη αρχική ένταση. Ακόμη, φαίνεται ότι για υψηλές ενέργειες εισόδου, όσο πιο κοντά είναι η διάρκεια του παλμού στο χρόνο απόκρισης του μέσου, τόσο πιο έντονη είναι η εντοπισμένη συμπεριφορά. Σε κάθε περίπτωση πάντως, για τις αποστάσεις διάδοσης που εξετάζουμε, η αρχική ενέργεια κατανέμεται σημαντικά στους κυματοδηγούς πέρα από τον κεντρικό.

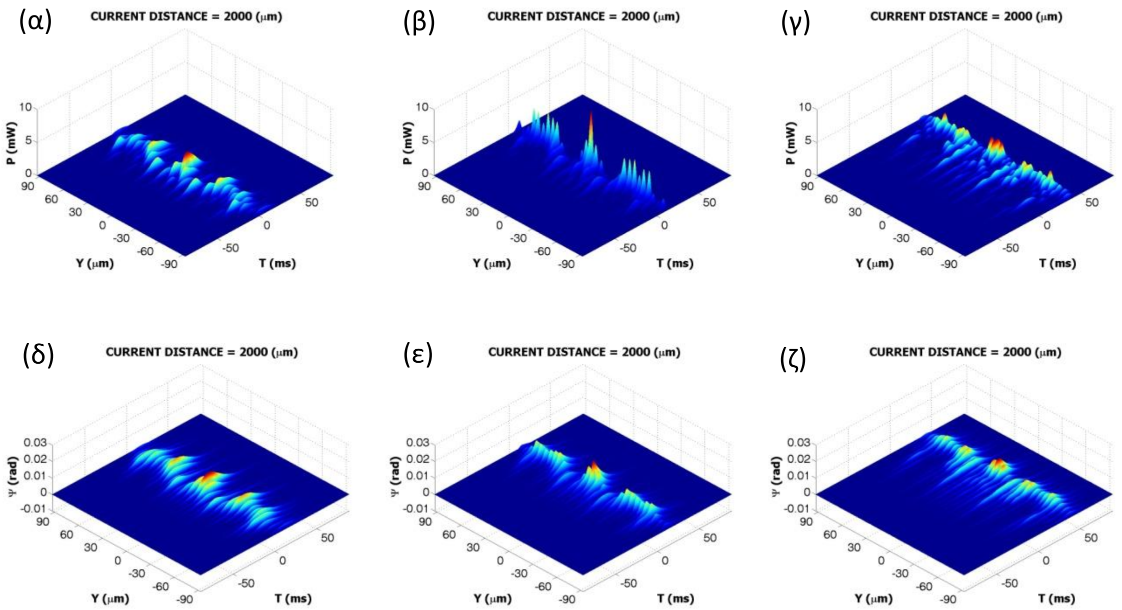


Σχ.4.4 *Χωροχρονική εξέλιξη της μη γραμμικής οπτικής απόκρισης του νηματικού υγρού κρυστάλλου,* Ψ *(σε rad), για ισχύ εισόδου α)* $5\,mW$ *, β)* $20\,mW$ *, γ)* $50\,mW$ *. Το χρονικό εύρος του παλμού είναι το ίδιο με το χρόνο απόκρισης* T_0 *.*

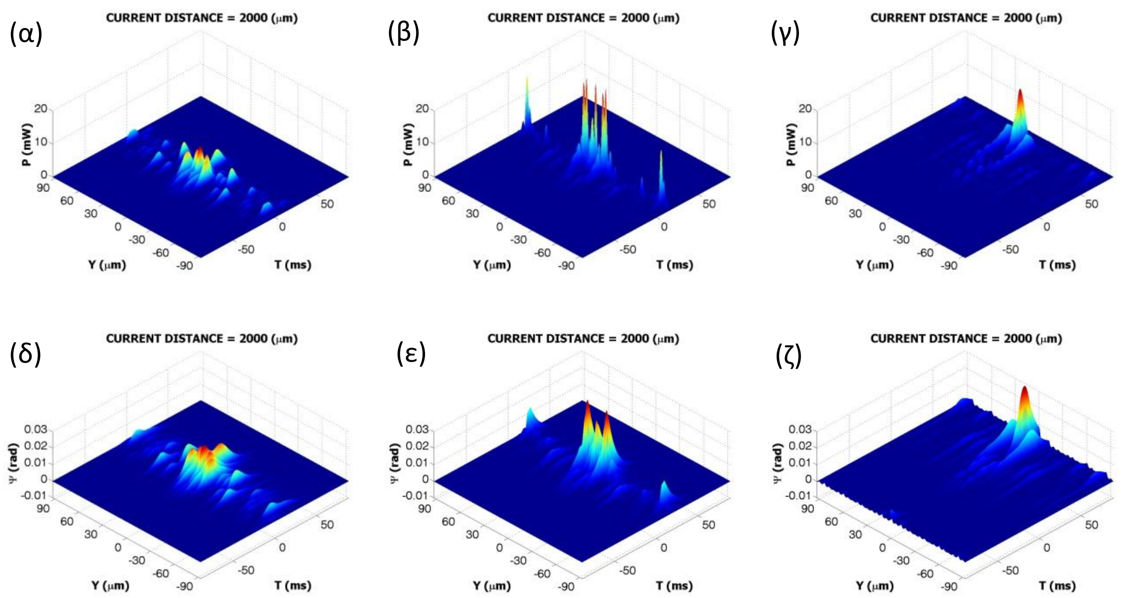
Στο Σχ. 4.4 απεικονίζεται η μη γραμμική απόκριση του μέσου Ψ σε απόσταση $2000\mu m$ για εισερχόμενους παλμούς ισχύος P_0, (α) $5\,mW$, (β) $20\,mW$, (γ) $50\,mW$. Και στις τρείς περιπτώσεις το χρονικό εύρος του παλμού είναι το ίδιο και ίσο με το χρόνο χαλάρωσης του μέσου, $t_0 = 1T_0$. Συγκρίνοντας με τα αντίστοιχα σχήματα για την ένταση του πεδίου (Σχ. 4.3(δεύτερη στήλη)), διαπιστώνεται ότι η απόκριση ακολουθεί ποιοτικά την κατανομή της ισχύος.

Στα Σχ. 4.5 και 4.6 απεικονίζεται η χωροχρονική εξέλιξη της κατανομής της οπτικής ισχύος, καθώς και της μη γραμμικής απόκρισης του μέσου όταν λάβουμε υπόψη τον παράγοντα της χρονικής διασποράς. Οι θεωρούμενες τιμές εισερχόμενης ισχύος είναι $20\,mW$ (Σχ. 4.5) και $50\,mW$ (Σχ. 4.6). Στην πρώτη στήλη και των δυο σχημάτων, για μέτρο σύγκρισης, έχει παρατεθεί η περίπτωση όπου δεν έχουμε διασπορά, ενώ στη δεύτερη στήλη η διασπορά είναι $D_0 = 10^{-5}$ και στην τρίτη $D_0 = 5\cdot 10^{-5}$. Το χρονικό εύρος είναι σε όλες τις περιπτώσεις ίσο με το χρόνο χαλάρωσης T_0. Αξίζει να σημειωθεί ότι στις δυο περιπτώσεις, όπου έχουμε διασπορά, η μικρότερη απόλυτη τιμή των οκτώ γραμμικών ($V_0,\ K_0,\ V_1,\ K_1$) και μη γραμμικών $(Q_0,\ Q_0,\ Q_1,\ Q_1)$ συντελεστών σύζευξης, που εμφανίζονται στο σύστημα εξισώσεων (4.14), είναι μία ή δύο τάξεις μεγαλύτερες από τις εξεταζόμενες τιμές διασποράς D_0, ωστόσο όπως φαίνεται στα σχήματα, η επίδραση της διασποράς στην εξέλιξη του παλμού είναι σημαντική.

Όπως φαίνεται στο Σχ. 4.5 η διασπορά επηρεάζει την εντοπισμένη συμπεριφορά και οδηγεί σε πιο απότομες στο χρόνο κατανομές. Ειδικά για μεγάλες τιμές ενέργειας εισόδου $(50\,mW)$ οδηγεί σε χρονική εστίαση και σε διαχωρισμό του παλμού στον κεντρικό και τους άμεσους γείτονες σε αυτόν. Αυτά τα φαινόμενα δικαιολογούνται, αφού η διασπορά είναι ομαλή και ανταγωνίζεται την περίθλαση μέσω της σύζευξης των μη γραμμικών Q (εξ. 4.17). Όμως η διαδικασία ανταγωνισμού της ομαλής διασποράς και της περίθλασης, μαζί με τα ακόλουθα φαινόμενα της εστίασης της ενέργειας και του διαχωρισμού των ενεργειακών κορυφών, είναι χαρακτηριστικά της διαδικασίας γένεσης των κυμάτων τύπου Χ.



Σχ. 4.5 *Χωροχρονική εξέλιξη της κατανομής της ισχύος εξόδου (α, β, γ) και της μη γραμμικής οπτικής απόκρισης του μέσου* Ψ *(δ, ε, ζ) στα* $2000\mu m$*, για ισχύ εισόδου* $P_0 = 20\,mW$*. Στην πρώτη στήλη (α, δ) δεν έχουμε χρονική διασπορά, στη δεύτερη (β, ε)* $D_0 = 10^{-5}$ *και στην τρίτη (γ, ζ)* $D_0 = 5 \cdot 10^{-5}$*. Το χρονικό εύρος είναι* $1T_0$ *για όλες τις περιπτώσεις.*



Σχ. 4.6 *Χωροχρονική εξέλιξη της κατανομής της ισχύος εξόδου (α, β, γ) και της μη γραμμικής οπτικής απόκρισης του μέσου* Ψ *(δ, ε, ζ) στα* $2000\mu m$*, για ισχύ εισόδου* $P = 50mW$ *χωρίς χρονική διασπορά (α, δ),* $D_0 = 10^{-3}$ *(β, ε),* $D_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ *(γ, ζ). Το πλήθος των κυματοδηγών είναι 31 και η περίοδος είναι* $L = 6\mu m$*. Το χρονικό εύρος είναι* $1T_0$*, με* $T_0 = \gamma R_0^2 / K \approx 18\,ms$*.*

Στο Σχ. 4.6 μπορούμε να κάνουμε άλλη μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση. Για υψηλές εντάσεις εισόδου ($50\,mW$) και υψηλές τιμές διασποράς (αν και όπως αναφέρθηκε, με τιμές μικρότερες από αυτές των συντελεστών σύζευξης) η εντοπισμένη συμπεριφορά είναι αρκετά έντονη και οι τιμές της ισχύος των εντοπισμένων σχηματισμών είναι σχετικά μεγάλες $(20\,mW)$, ακόμη και στο τέλος του απόστασης διάδοσης που εξετάζουμε ($2\,mm$). Το παραπάνω φαίνεται στα Σχ. 4.6(γ)-(ζ). Τέλος, να σημειωθεί η μετατόπιση του χρονικού κέντρου, φαινόμενο το οποίο οφείλεται στο συνδυασμό της χρονικής διάχυσης της μη γραμμικής απόκρισης του μέσου και της διασποράς του πεδίου που το διεγείρει.

4.6 Συμπεράσματα

Το διακριτό μοντέλο της χωροχρονικής εξέλιξης οπτικών παλμών σε νηματικούς ΥΚ, που μελετήθηκε σε αυτή την ενότητα, ενσωματώνει τα χωροχρονικά φαινόμενα που συμβαίνουν στο μέσο (διάχυση, σύζευξη, χαλάρωση), τη συμπεριφορά του οπτικού πεδίου (περίθλαση, διασπορά), καθώς και τη μη γραμμική αλληλεπίδρασή τους. Το μοντέλο αυτό πραγματεύεται ικανοποιητικά το θέμα της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, ενώ η εισαγωγή της χρονικής διασποράς του παλμού προκαλεί φυσικά φαινόμενα ανάλογα με αυτά που παρουσιάζουν τα κύματα τύπου X. Όσον αφορά την ύπαρξη πραγματικών υλικών που να υποστηρίζουν το μοντέλο μας, να πούμε ότι μόνο η χωρίς διασπορά περίπτωση μπορεί να υποστηριχθεί από τους υπάρχοντες νηματικούς υγρούς κρυστάλλους.

Έτσι σε αυτή την περίπτωση, κατά την οποία δεν υπάρχει διασπορά, το μοντέλο που εξετάσαμε προβλέπει ότι υψηλότερα εντοπισμένη συμπεριφορά χαρακτηρίζει τις αρχικά εντονότερες οπτικές δέσμες. Ωστόσο, οι προσομοιώσεις για παλμούς με διάφορα χρονικά εύρη δείχνει ότι, για υψηλές ενέργειες εισόδου, όσο πιο κοντά είναι η διάρκεια του παλμού στο χρόνο απόκρισης του μέσου, τόσο πιο εμφανής είναι η εντοπισμένη συμπεριφορά. Πάντως, σε κάθε περίπτωση, στο τέλος της απόστασης διάδοσης η οπτική ισχύς κατανέμεται σε σημαντικό αριθμό κυματοδηγών.

Ο άλλος παράγοντας, που είναι σημαντικός στην εξέλιξη του παλμού, είναι η διασπορά, που παρ' όλο που είναι ένας μικρός σε τιμή όρος σε σχέση με τους συντελεστές σύζευξης, ωστόσο παρατηρήσαμε ότι η ύπαρξή του, κάνει τους παλμούς πιο απότομους στο χρόνο, οδηγώντας τους σε εστίαση και διαχωρισμό. Πρόκειται για διαδικασία ανάλογη της εξέλιξης των κυμάτων τύπου X. Η πιο σημαντική όμως πρόβλεψη του μοντέλου μας είναι ότι, σε υψηλότερες εντάσεις, σχετικά μεγάλες τιμές διασποράς και μεγάλες αποστάσεις διάδοσης, η εντοπισμένη συμπεριφορά είναι παρούσα και το πλάτος της ισχύος εξόδου είναι αρκετά σημαντικό συγκρινόμενο με αυτό της εισόδου.

Κεφάλαιο 5

Ίνες φωτονικών κρυστάλλων με ελεγχόμενη περίθλαση

Το αντικείμενο μελέτης του παρόντος κεφαλαίου είναι η διάδοση οπτικής δέσμης διαμέσου φωτονικού κρυστάλλου σε διάταξη ίνας. Συγκεκριμένα, μικροί κενοί σωλήνες σε εξαγωνική δομή, εγγεγραμμένοι σε πυριτία κατά τη διαμήκη διεύθυνση της ίνας, συμπληρώνονται με καστορέλαιο και με εξωτερική επίδραση μεταβάλλεται η θερμοκρασία, και όπως θα δειχθεί ακολούθως, μεταβάλλεται η περίθλαση που υφίσταται οπτικό πεδίο που διέρχεται από ένα τέτοιο μέσο. Προτείνεται μοντέλο που μπορεί να περιγράψει τα μεταβατικά φαινόμενα που πραγματοποιούνται, λαμβάνοντας υπόψη το χρονικό προφίλ της δέσμης, τη διάχυση της θερμότητας από τους σωλήνες και τη συμπεριφορά των δεικτών διάθλασης της πυριτίας και του καστορέλαιου, κατά τις μεταβολές της θερμοκρασίας. Η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται είναι η αριθμητική επίλυση ενός συστήματος διακριτών εξισώσεων με τη βοήθεια της μεθόδου Split-Step-Fourier και ολοκλήρωση με ρουτίνα Runge-Kutta και εξάγονται συμπεράσματα πάνω στην κατανομή της ισχύος στους κυματοδηγούς του φωτονικού κρυστάλλου και την χρονική απόκριση του μέσου κατά τη διάδοση της οπτικής δέσμης.

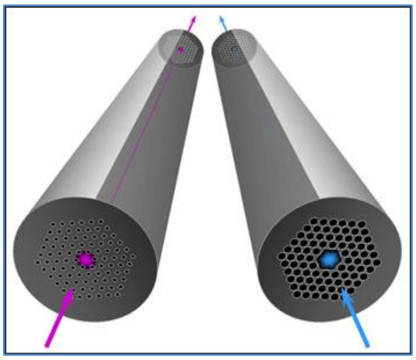
5.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στα προηγούμενα Κεφάλαια, οπτικά συστήματα που παρουσιάζουν περιοδικές και μη γραμμικές ιδιότητες εμφανίζουν σύνθετη δυναμική και η κατάλληλη προσαρμογή των παραμέτρων της διάταξης και των διαδιδόμενων δεσμών αναδεικνύει δυνατότητες ενεργούς δρομολόγησης και διαχείρισης της ροής της ενέργειας. Ειδικότερα, η περιοδική διαμόρφωση του δείκτη διάθλασης μεταβάλλει το χάσμα του κυματικού φάσματος και οδηγεί σε διακριτή περίθλαση, με αποτέλεσμα την ισχυρή επίδραση στα χαρακτηριστικά της διάδοσης και ακολούθως στον εντοπισμό του διαδιδόμενου φωτός. Πειραματικές υλοποιήσεις σε επίπεδους κυματοδηγούς έχουν εγγενείς περιορισμούς στην επιλογή των χαρακτηριστικών της διάταξης, που όμως εκλείπουν για δισδιάστατες, στο εγκάρσιο επίπεδο της διάδοσης, γεωμετρίες. Οι επιλογές στη σχεδίαση του εγκάρσιου περιοδικού πλέγματος και οι συμμετρίες που προκύπτουν σε τέτοιες τρισδιάστατες γεωμετρίες, έχει αποδειχθεί ότι παρέχουν ένα πλήρες πεδίο διερεύνησης των φαινομένων χάσματος και της μη γραμμικότητας στην οπτική διάδοση.

Φωτονικές διατάξεις που εκμεταλλεύονται τη δυνατότητα προσαρμογής των φυσικών παραμέτρων, που καθορίζουν την περίθλαση και την εγκάρσια δισδιάστατη περιοδικότητα, με σκοπό τη διαχείριση και δρομολόγηση του φωτός, έχουν πειραματικά πραγματοποιηθεί και έχουν αναδείξει αυτοπαγιδευόμενες οπτικές δέσμες, διακριτά σολιτόνια και σολιτόνια φασματικού χάσματος [123]. Τέτοιες διατάξεις μπορούν να υλοποιηθούν είτε με τη χρήση πλεγμάτων φωτοδιαθλαστικής μη γραμμικότητας [105, 124], απαιτώντας ωστόσο περίπλοκες και ογκώδεις διαμορφώσεις ευαίσθητες στις συνθήκες λειτουργίας, είτε με την εγγραφή κυματοδηγών με χρήση fs-laser [125], είτε με τη χρήση πολυπύρηνων οπτικών ινών [126]. Τα δύο τελευταία, παρόλο που διαθέτουν σταθερότητα και δομική στιβαρότητα, στηρίζονται σε πολύ εξεζητημένες διαδικασίες παρασκευής και απαιτούν μεγάλες τιμές ενέργειας για να ενεργοποιηθεί η μη γραμμικότητα ενώ, επιπλέον, τέτοια συστήματα δεν προσφέρουν ικανοποιητικό δυναμικό έλεγχο.

Διατάξεις που εμφανίζουν περιοδικότητα και μη γραμμικότητα, με δυνατότητα ενεργού προσαρμογής, χωρίς τα προαναφερθέντα μειονεκτήματα, είναι οπτικές ίνες που στο εσωτερικό τους έχουν υποστεί μικρομετρική επεξεργασία και που έχει επικρατήσει να ονομάζονται ίνες φωτονικού κρυστάλλου (PCF) [127]. Μια τέτοια κατασκευή θα μελετηθεί στο παρόν κεφάλαιο και αποτελείται από μια οπτική ίνα τηγμένης πυριτίας, στο εσωτερικό και κατά το πλήρες μήκος της οποίας έχουν εγγραφεί μικρής διαμέτρου κενοί σωλήνες σε θέσεις εξαγωνικής διάταξης, που συμπληρώνονται μέσω πίεσης ή τριχοειδών δυνάμεων με υψηλού δείκτη διάθλασης κατάλληλο οργανικό υγρό. Αυτό που θα δειχθεί είναι ότι με μία τέτοια διάταξη (Σχ. 5.1) είναι δυνατόν να ρυθμίζεται η περίθλαση και η αυτο-αφεστίαση οπτικής δέσμης, μέσω των θερμοκρασιακά εξαρτώμενων οπτικών ιδιοτήτων του οργανικού υλικού, με αποτέλεσμα η διάταξη να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ρυθμιστής ισχύος διερχόμενου σήματος [128, 129].

Εδώ, να επισημανθεί ότι η δισδιάστατη κατασκευή που θα μελετήσουμε έχει την αφετηρία της σε ανάλογα διακριτά μη γραμμικά μονοδιάστατα μοντέλα. Ωστόσο, ενώ αυτά τα μοντέλα, εν γένει, έχουν πειραματικά επαληθευθεί, τα αντίστοιχα δισδιάστατα εμφανίζουν πειραματικές δυσκολίες στην υλοποίησή τους. Συγκεκριμένα, οι ίνες φωτονικών κρυστάλλων



Σχ. 5.1 *Άποψη ίνας φωτονικού κρυστάλλου. Φαίνονται οι εγγεγραμμένοι σε εξαγωνική διάταξη σωλήνες, που συμπληρώνονται με οργανικό υγρό.*

απαιτούν κατά την κατασκευή τους υψηλή καθαρότητα και ομοιογένεια, ενώ και για την πλήρη καταγραφή των φαινομένων της διακριτής οπτικής απαιτείται μεγάλο πλήθος σωλήνων εγγεγραμμένων στην ίνα φωτονικού κρυστάλλου, με ανάλογη κατασκευαστική δυσκολία [126].

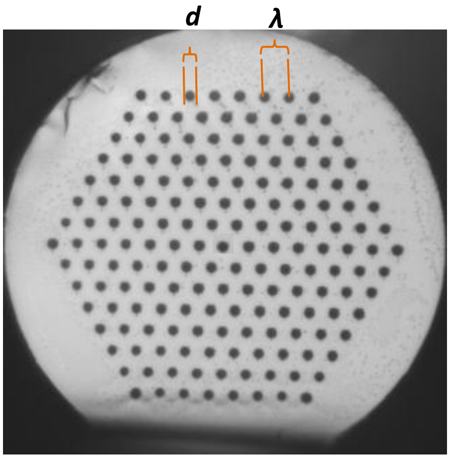
Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι μικροί σωλήνες της ίνας υγρού κρυστάλλου συμπληρώνονται από κάποιο οργανικό υγρό. Ο λόγος της χρήσης οργανικού υγρού στην υπό μελέτη φωτονική διάταξη είναι για να υπάρχει δυνατότητα προσαρμογής των οπτικών παραμέτρων της διάταξης, που να επιτρέπει τον έλεγχό της. Τα οργανικά υλικά και συγκεκριμένα το καστορέλαιο που θα θεωρήσουμε στη διερεύνησή μας, εμφανίζουν θερμοκρασιακή εξάρτηση του δείκτη διάθλασης και επομένως είναι κατάλληλα για αυτό το σκοπό [130, 131]. Ενισχυτικά της χρησιμότητας των οργανικών υλικών είναι ότι αυτά εμφανίζουν σχετικά ταχεία απόκριση και μεγάλες οπτικές μη γραμμικότητες, που αποδίδονται στον οφειλόμενο στο διερχόμενο φως αναπροσανατολισμό των μορίων, στην ασύμφωνη ηλεκτρονική διέγερση και στο φαινόμενο του θερμικού φακού [132].

Το καστορέλαιο χρησιμοποιείται σε διάφορες βιομηχανικές εφαρμογές και αποτελεί τη βάση για την παρασκευή διαφόρων υλικών. Χημικά αποτελεί μίγμα τριγλυκεριδίων, τα οποία έχουν προκύψει από λιπαρό οξύ με 18 άτομα άνθρακα. Το κύριο συστατικό του μίγματος είναι μια οργανική αλυσίδα με υδροξυλική ομάδα στο δωδέκατο άτομο άνθρακα, που δίνει μεγάλες δυνατότητες στη συμμετοχή χημικών συνθέσεων. Όσον αφορά τις φυσικές του ιδιότητες να αναφέρουμε το σχετικά μεγάλο ιξώδες και ειδικό βάρος, ενώ ο δείκτης διάθλασης του είναι $n = 1.48$ στους 18.5^0C. Στην επόμενη ενότητα θα διατυπώσουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν τη διάδοση οπτικού πεδίου μέσα από ίνα φωτονικού κρυστάλλου και θα δούμε πως μπορούμε να επιδράσουμε στη χωρική κατανομή της ενέργειας του πεδίου μέσω του βήματος του δείκτη διάθλασης ανάμεσα στους σωλήνες και την πυριτία της ίνας. Το βήμα αυτό ρυθμίζεται ανάλογα με τη θερμοκρασία που επιβάλλεται στο καστορέλαιο, αφού όπως θα δούμε ο δείκτης διάθλασης της πυριτίας που περιβάλλει το καστορέλαιο είναι ανεξάρτητος αυτής [129].

5.2 Περιγραφή μοντέλου – Βασικές έννοιες

Τα τελευταία χρόνια η πειραματική διερεύνηση της οπτικής διάδοσης σε ίνες φωτονικού κρυστάλλου εκτείνεται σε ένα μεγάλο εύρος δυνατών συνδυασμών παραμέτρων δέσμης, οπτικού υλικού και γεωμετριών. Σε αυτό το πλαίσιο εντάσσονται πειραματικές και θεωρητικές εργασίες πάνω στη διάδοση σε ίνες φωτονικών κρυστάλλων, με διάφορες κατηγορίες ενεργών υλικών να τοποθετούνται στον όγκο της πυριτίας. Τέτοια ενεργά υλικά μπορεί να είναι υγροί κρύσταλλοι [133], βιολογικά υλικά [134], πολυμερή [135], ακόμη και μέταλλα [136]. Από την άποψη της γεωμετρίας της διάταξης έχουν μελετηθεί οι περιπτώσεις επιλεκτικής πλήρωσης των σωλήνων που είναι εγγεγραμμένοι σε οπτική ίνα [137, 138], καθώς και η περίπτωση υπέρπυκνης διάταξης σωλήνων σε εξαγωνικό πλέγμα [139]. Θεωρητική μελέτη έχει υπάρξει και για τη δυνατότητα συντήρησης χωροχρονικών σολιτονίων σε δισδιάστατο πλέγμα, μέσω της χρήσης των ρυθμών Bloch [140]. Τέλος, σημαντικές προσπάθειες έχουν καταβληθεί για τον προσδιορισμό τη δυναμικής του συστήματος, και ειδικά τον καθορισμό των ορίων μετάβασης από μια αυτοεστιάζουσα συμπεριφορά σε μια περιθλαστική [141], ενώ ακόμη έχει γίνει αναφορά για μη εντοπισμένης συμπεριφοράς σολιτόνια χάσματος [130].

Για τη μελέτη της διάδοσης οπτικών κυμάτων σε ίνες φωτονικών κρυστάλλων βασιζόμαστε σε διάταξη που έχει τη μορφή της εγκάρσιας γεωμετρίας του Σχ. 5.2. Πρόκειται για μια κατασκευή από πυριτία στην οποία είναι εγγεγραμμένοι σωλήνες μήκους περί τα $2\,cm$, που σχηματίζουν μια εξαγωνική διάταξη στο επίπεδο και είναι συμπληρωμένοι με καστορέλαιο με $(n=1.48)$, λίγο υψηλότερο από το δείκτη διάθλασης της πυριτίας $(n=1.46)$.



Σχ. 5.2 *Κατατομή ίνας φωτονικού κρυστάλλου. Τα εμφανιζόμενα d , λ είναι η διάμετρος και η περίοδος των εγγεγραμμένων καναλιών*

Η συνήθης πειραματική υλοποίηση απαιτεί μια ίνα διατηρούμενης πόλωσης που διοχετεύει το φως από το laser (συνήθως της τάξης $\lambda = 532\,nm$) στον φωτονικό κρύσταλλο και της οποίας η διάδοση ολοκληρώνεται με την απεικόνιση της εξόδου μέσω ενός οπτικού μικροσκοπίου [127]. Να επισημανθεί ότι το φως στην έδρα εισόδου της ίνας προσπίπτει στα κεντρικά κανάλια, αφού πρώτα έχει εξασφαλιστεί ότι το εύρος του ρυθμού πεδίου ταιριάζει με το θεμελιώδη ρυθμό των καναλιών του κρυστάλλου.

Οι δείκτες διάθλασης της πυριτίας και του καστορέλαιου είναι παραπλήσιας τιμής. Συνδυάζοντας αυτό με τη θερμο-οπτική ευαισθησία του καστορέλαιου και την ανεξαρτησία του δείκτη διάθλασης της πυριτίας από τη θερμοκρασία, μπορούμε με την προτεινόμενη διάταξή να ρυθμίζουμε τις παραμέτρους διάδοσης. Έτσι, η ίνα φωτονικού κρυστάλλου τοποθετείται μέσα σε φούρνο ελεγχόμενης θερμοκρασίας, επιτρέποντας θερμο-οπτική ρύθμιση ακριβείας για το δείκτη διάθλασης του καστορέλαιου, που έχει συμπληρώσει τους σωλήνες [127]. Σε θερμοκρασία δωματίου η βηματική διαφορά των δεικτών διάθλασης είναι 0.02

και οι κυματοδηγοί είναι ισχυρά πολυρυθμικοί και αποσυζευγμένοι μεταξύ τους. Καθώς όμως ο θερμο-οπτικός συντελεστής του καστορέλαιου είναι υψηλός ($-3\cdot10^{-4}K^{-1}$), είναι δυνατό με αύξηση της θερμοκρασίας να ελαττωθεί ο δείκτης διάθλασης του και ταυτόχρονα να ελαττωθεί η βηματική διαφορά με την πυριτία. Έτσι με αύξηση της θερμοκρασίας στους $\sim 70^{0}C$ μπορεί ο αριθμός V του κάθε σωλήνα να γίνει μικρότερος του 2.4 και επομένως οι κυματοδηγοί να γίνουν μονορυθμικοί και η σύζευξη μεταξύ των κυματοδηγών να γίνει εντονότερη. Όπως είναι προφανές, μια τέτοια διαδικασία που ξεκινά με την πρόσπτωση φωτός στον κεντρικό κυματοδηγό συνεχίζεται με τη διάχυση του οπτικού πεδίου σε όλο και περισσότερους κυματοδηγούς, οδηγώντας σε διεύρυνση δέσμης σαν αποτέλεσμα της διακριτής περίθλασης.

Για να περιγραφεί μαθηματικά το φαινόμενο της διάχυσης της θερμότητας και της ανάπτυξης θερμοκρασιακής βαθμίδας $\vec{\nabla}T$ που προκαλείται από μια ροή θερμότητας $\vec{Q}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Fourier [142]

$$\vec{Q} = -K\vec{\nabla}T \tag{5.1}$$

όπου K είναι η θερμική αγωγιμότητα του υλικού. Η εξ. 5.1 μαζί με τη διατήρηση της ενέργειας οδηγεί στην παραβολική εξίσωση της διάχυσης θερμότητας, η οποία απουσία εσωτερικών πηγών θερμότητας γράφεται

$$\nabla^2 T - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{5.2}$$

όπου D είναι ο συντελεστής θερμικής διάχυσης, που συνδέεται με τη θερμική αγωγιμότητα K μέσω της σχέσης $K = pcD$, με p και c την πυκνότητα και την ειδική θερμότητα, αντίστοιχα.

Η εξ. 5.2 δεν λαμβάνει υπόψη την παράμετρο της ταχύτητας διάδοσης και τη χρονική υστέρηση της εξέλιξης του θερμοκρασιακού πεδίου, σε σχέση με τη ροή της θερμότητας. Σε αυτό το πλαίσιο ο Cattaneo πρότεινε η εξ. 5.2 να περιλάβει μια χρονική καθυστέρηση ανάμεσα στη θερμοκρασιακή βαθμίδα και τη ροή της θερμότητας $\vec{Q}$ [143]. Δηλαδή:

$$\vec{Q}(x,t+\tau_r) = -K\nabla\vec{\mathrm{T}}(x,t)\,, \tag{5.3}$$

όπου τ_r είναι ο χρόνος θερμικής χαλάρωσης, με τυπικές τιμές ανάμεσα στο $10^{-9}s$ και $10^{-12}s$.

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor την εξ. 5.3 γύρω από το $\tau_r = 0$ παίρνουμε

$$\vec{Q}(x,t) + \tau_r\frac{\partial\vec{Q}(x,t)}{\partial t} = -K\nabla\vec{\mathrm{T}}(x,t) \tag{5.4}$$

Η παραπάνω εξ. 5.4 είναι μια υπερβολική εξίσωση και οδηγεί στο να ξεπεραστεί το παράδοξο της άμεσης διάδοσης, όπως υπονοείται στην παραβολική εξίσωση 5.2.

Με βάση τα παραπάνω και, επιπλέον, την ύπαρξη εξωτερικής πηγής έντασης I, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση διάχυσης που θα ισχύει στο μοντέλο μας, ως εξής:

$$pc_p \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{Q}(x,y,z,t) = aI(x,y,z,t) \quad (\alpha)$$

$$\vec{Q}(x,t+\tau_r) = -K\vec{\nabla}\mathrm{T}(x,t) \quad (\beta) \qquad (5.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} \quad (\gamma)$$

Στις παραπάνω εξ. 5.5 το a είναι ο συντελεστής απορρόφησης σε m^{-1}, I είναι η ένταση του φωτός σε Wm^{-2} και τ_r ο χρόνος της θερμικής χαλάρωσης, ο οποίος λαμβάνεται μικρός σε σχέση με τη χρονική κλίμακα μεταβολής της περιβάλλουσας του ηλεκτρικού πεδίου. Επίσης, $\beta_1 = d\beta_0 / d\omega \cong n_0 / c$, με $\beta_0(\omega) = n_0(\omega)k_0(\omega) \cong n_0 k_0(\omega)$ και $k_0(\omega) = 2\pi/\lambda = \omega/c$.

Το n_0 στις παραπάνω σχέσεις είναι ο δείκτης διάθλασης του καστορέλαιου στους 18.5 ^{0}C, με $n_0 = 1.48$.

Μια παρατήρηση στις εξ. 5.5 είναι ότι η γ μας δηλώνει ότι η διάδοση γίνεται στη διεύθυνση z. Από την άλλη, το διάνυσμα $\vec{Q}$, το διάνυσμα της ροής της θερμότητας, θεωρείται ως μια καθυστερημένη κατά τ_r, απόκριση στη θερμοκρασιακή βαθμίδα.

Αναπτύσσοντας την εξ. 5.5(α) κατά Taylor, μπορούμε να τη μετασχηματίσουμε στην

$$pc_p\left[\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_r\left(1 - \frac{\kappa\beta_1^2}{\tau_r pc_p}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right] = K\nabla_\perp^2\mathrm{T} + aI + a\tau_r\frac{\partial I}{\partial t} + O\left[\left(\frac{\tau_r}{\tau_\mathrm{E}}\right)^n, n \geq 2\right] \qquad (5.6)$$

Η παρουσία της δεύτερης χρονικής παραγώγου στην εξ. 5.6 μας τονίζει την ταχεία φύση των υποκείμενων διαδικασιών.

Ενδεικτικές τιμές των φυσικών μεγεθών των υλικών είναι $pc_p = 1.6\times10^6\ JK^{-1}m^{-3}$ για το καστορέλαιο, το οποίο εμφανίζει θερμική αγωγιμότητα, $K = 1.8\times10^{-1}\ WK^{-1}m^{-1}$, ενώ η θερμική αγωγιμότητα της πυριτίας είναι $K = 1.63\times10^6\ JK^{-1}m^{-3}$. Για το καστορέλαιο η τιμή που δίνεται από τη βιβλιογραφία για την απορρόφηση είναι $a = 5.3\,m^{-1}$ [131]. Συνήθως, η τιμή του ρυθμού απορρόφησης αυξάνεται για λόγους βελτιστοποίησης του πειράματος με την προσθήκη απορροφητικής βαφής, ώστε η τιμή να φτάσει $a = 45.8\,m^{-1}$. Ο συντελεστής του ρυθμού απορρόφησης για την πυριτία θεωρείται αμελητέος. Αν επιπλέον λάβουμε υπόψη ότι ο δείκτης διάθλασης της πυριτίας μπορεί σε μεγάλο βαθμό να θεωρηθεί ανεξάρτητος της θερμοκρασίας, γίνεται κατανοητό γιατί κατά τη μελέτη που θα ακολουθήσει θα θεωρήσουμε ότι η μεταβολή στο βήμα του δείκτη διάθλασης ανάμεσα στο καστορέλαιο και την πυριτία οφείλεται στη μεταβολή της θερμοκρασίας στο καστορέλαιο. Τέλος, να σημειωθεί ότι, εξαιτίας της πολύ μεγαλύτερης θερμικής αγωγιμότητας, η πυριτία άγει με ταχύ ρυθμό την παραγόμενη θερμότητα μακριά από της φωτισμένες περιοχές των καναλιών του καστορέλαιου, γεγονός που εξηγεί τη θερμοκρασιακή ανεξαρτησία της πυριτίας από τις μεταβολές των ροών θερμότητας [129].

Όπως αναφέρθηκε, ο χρόνος θερμικής χαλάρωσης τ_r είναι πολύ μικρότερος του χρόνου ανύψωσης της οπτικής δέσμης, που είναι της τάξης $10^{-7}s - 10^{-5}s$, οπότε σε αυτή την περίπτωση, ο δεύτερος όρος $\frac{K\beta_1^2}{\tau_r pc_p} \approx 10^{-20} - 10^{-21}$ και στο εξής μπορεί να παραλείπεται.

Για να ολοκληρώσουμε τη μετατροπή της εξ. 5.6 σε μια μορφή που θα περιγράφει με συνεκτικό και λειτουργικό τρόπο τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στην ίνα φωτονικού κρυστάλλου, θα πρέπει επιπλέον να λάβουμε υπόψη τα ακόλουθα σημεία.

Καταρχάς, η ένταση του φωτός I στην εξ. 5.6, με όρους περιβάλλουσας ηλεκτρικού πεδίου U (σε V/m), θα είναι

$$I = \frac{n_0 c\varepsilon_0}{2}|U|^2 \tag{5.7}$$

Επίσης, ορίζοντας το θερμο-οπτικό συντελεστή $n_{oil,T} = {dn_{oil}}/{dT}$, παίρνουμε το δείκτη διάθλασης του καστορέλαιου σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία ως $n_{oil}(T) = n_0 + (T - 18.5)n_{oil,T}$. Το θερμο-οπτικό συντελεστή, $n_{oil,T}$, μπορούμε να τον αξιοποιήσουμε για να εκφράσουμε τη θερμοκρασιακή μεταβολή του βήματος του δείκτη διάθλασης μεταξύ του καστορέλαιου και της πυριτίας, ως εξής:

$$\delta[\Delta n(T)] = \delta[n_{oil}(T) - n_{sil}(T)] = \delta n_{oil}(T) - \delta n_{sil}(T) = \delta n_{oil}(T) = \delta T \frac{dn_{oil}}{dT} \tag{5.8}$$

όπου για να εξάγουμε την εξ. 5.8 λάβαμε υπόψη την παραδοχή που κάναμε προηγουμένως ότι ο δείκτης διάθλασης της πυριτίας είναι ανεξάρτητος της θερμοκρασίας [129]. Με βάση την ως τώρα ανάλυσή μας, μπορούμε με τις κατάλληλες αντικαταστάσεις να επαναδιατυπώσουμε την εξ. 5.6 και να θέσουμε ως μεταβλητή του προβλήματος μας το βήμα του δείκτη διάθλασης Δn ως εξής:

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial^2 \Delta n}{\partial t^2} = \frac{K}{pc_p}\nabla_\perp^2 \Delta n - \frac{a\left|\frac{dn_{oil}}{dT}\right| n_0 c\varepsilon_0}{2pc_p}|U|^2 - \frac{\tau_r a\left|\frac{dn_{oil}}{dT}\right| n_0 c\varepsilon_0}{2pc_p}\frac{\partial |U|^2}{\partial t} \tag{5.9}$$

Για την εξέλιξη της περιβάλλουσας στα φωτισμένα κανάλια της ίνας φωτονικού κρυστάλλου ισχύει η παραξονική προσέγγιση της εξίσωσης του Maxwell σε ένα σύνθετο μέσο, όπου υπάρχει μια ασθενής χωρική μεταβολή του δείκτη διάθλασης. Δηλαδή θα είναι

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{a}{2}U + \frac{i}{2\beta_0}\nabla_\perp^2 U + ik_0 \Delta n U = 0 \tag{5.10}$$

Στην παραπάνω εξ. 5.10 η εξασθένιση λόγω της απορρόφησης από το καστορέλαιο περιλαμβάνεται στον τελευταίο όρο, ενώ β_1 είναι η αντίστροφη ταχύτητα ομάδας που, με κατάλληλη επιλογή χρόνου και μήκους κανονικοποίησης, είναι εξαιρετικά μικρή και θα παραλείπεται στο εξής. Οι προηγούμενες εξισώσεις 5.9 και 5.10 σε αδιάστατη μορφή, λοιπόν, γράφονται ως εξής:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\tau_r}{\tau_0}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Delta n=\xi\hat{\nabla}_\perp^2\Delta n-\nu\left(1+\frac{\tau_r}{\tau_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)|u|^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial\zeta}=-\frac{\alpha}{2}u+\frac{i}{2}\hat{\nabla}_\perp^2 u+i\gamma u\Delta n=0 \qquad (5.11)$$

Στις εξ. 5.11 έχουν γίνει αλλαγή κλίμακας και επανακανονικοποίηση ως εξής:

$$\xi\equiv\frac{K\tau_0}{pc_p\Lambda^2},\ \nu\equiv\frac{a\left|\frac{dn_{oil}}{dT}\right|P_0\tau_0}{\pi d^2 pc_p},\ \alpha=az_0,\ \gamma\equiv k_0 z_0$$

και $U=uU_0$ με $U_0^2=(2P_0)/(\pi d^2 n_0 c\varepsilon_0)$, $\nabla^2=\hat{\nabla}^2/\Lambda^2$, $z=\zeta z_0$, $t=\tau\tau_0$, $z_0=\beta_0\Lambda^2$

Όπως έχει σημειωθεί και στο Σχ. 5.2 τα d,Λ που αναφέρονται στις παραπάνω εξισώσεις είναι η διάμετρος των εγγεγραμμένων σωλήνων και η περίοδος του φωτονικού πλέγματος αντίστοιχα και το P_0 είναι μια τιμή αναφοράς για την εισερχόμενη ενέργεια. Τυπικές τιμές των φυσικών παραμέτρων της διάταξης οδηγούν σε τιμές της τάξης $\tau_0=10^{-3}s$ και $z_0=10^{-3}m$.

Στη συνέχεια της θεώρησής μας παραλείπουμε τους όρους των εξ. 5.11 που περιλαμβάνουν το χρόνο θερμικής χαλάρωσης τ_r, καθώς αυτός είναι πολύ μικρός και καταλήγουμε στην παρακάτω μορφή των εξισώσεων.

$$\frac{\partial\Delta n}{\partial\tau}=\xi\hat{\nabla}_\perp^2\Delta n-\nu|u|^2 \qquad (\alpha)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\zeta}=-\frac{\alpha}{2}u+\frac{i}{2}\hat{\nabla}_\perp^2 u+i\gamma u\Delta n=0 \qquad (\beta) \qquad (5.12)$$

Η λύση της 5.12(α) είναι η εξής

$$\Delta n(\chi,\psi,\tau;\zeta)=\Delta n_{lattice}(\chi,\psi)+\int_{-\infty}^{+\infty}d\chi'\int_{-\infty}^{+\infty}d\psi' G(\chi',\psi',\tau'=0;\chi,\psi,\tau)\Delta n(\chi',\psi',\tau'=0;\zeta)$$
$$-\nu\int_{-\infty}^{\tau}d\tau'\int_{-\infty}^{\infty}d\chi'\int_{-\infty}^{\infty}d\psi' G(\chi',\psi',\tau';\chi,\psi,\tau)|u(x',\psi',\tau';\zeta)|^2 \qquad (5.13)$$

με τη συνάρτηση Green να είναι

$$G(\chi',\psi',\tau';\chi,\psi,\tau)=\frac{\exp\left[-\frac{(\chi-\chi')^2+(\psi-\psi')^2}{4\xi(\tau-\tau')}\right]}{4\pi\xi(\tau-\tau')} \qquad (5.14)$$

Στην προηγούμενη εξ. 5.13, είναι $\Delta n(\chi,\psi,\tau=0,\zeta)=0$, αφού $u(\chi,\psi,\tau<0,\zeta)=0$ και επομένως δεν υπάρχει βηματική διαφορά στο δείκτη διάθλασης λόγω υποκείμενου φωτός πριν εκπεμφθεί η δέσμη laser στον κεντρικό κυματοδηγό. Ωστόσο, μια διαμόρφωση στο επίπεδο (x, y) για το βήμα του δείκτη διάθλασης ανάμεσα στους κυματοδηγούς και την περιβάλλουσα πυριτία έχει ήδη εφαρμοστεί, όπως εισάγεται με τον όρο $\Delta n_{lattice}(\chi,\psi)$ στην 5.13, και η οποία είναι ανεξάρτητη από τη διεύθυνση ζ. Δεχόμαστε δε ότι το βήμα του δείκτη διάθλασης θα έχει τιμή μηδέν εντός της περιοχής της πυριτίας και μια μικρή θετική τιμή στις περιοχές των κυματοδηγών, εξαρτώμενη από τις θερμοκρασιακές συνθήκες του πειράματος.

Μια άλλη παρατήρηση στην εξ. 5.13, είναι ότι το κάτω όριο του χρονικού ολοκληρώματος έχει τεθεί στο $-\infty$, αφού $u(\chi,\psi,\tau<0,\zeta)=0$. Επομένως, η εξ. 5.12(β) μπορεί τώρα να διατυπωθεί ως εξής:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial\zeta}=-\frac{\alpha}{2}u+\frac{i}{2}\hat{\nabla}_{\perp}^{2}+i\gamma u\Delta n_{lattice}(\chi,\psi)\\&-iu\frac{\gamma\nu}{4\pi\xi}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{d\tau'}{\tau-\tau'}\int_{-\infty}^{\infty}d\chi'\int_{-\infty}^{\infty}d\psi'\exp\left[-\frac{(\chi-\chi')^{2}+(\psi-\psi')^{2}}{4\xi(\tau-\tau')}\right]|u'|^{2}=0\end{aligned} \tag{5.15}$$

Η παραπάνω εξ. 5.15 είναι μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση στην οποία απεικονίζεται τόσο η μη εντοπισμένη φύση των υποκείμενων διαδικασιών, όσο και η αφεστιακή διάδοση του φωτός.

5.3 Προσέγγιση ισχυρής δέσμευσης

Αναφέρθηκε στο εισαγωγικό κεφάλαιο ότι η σπουδαιότητα της μεθόδου ισχυρής δέσμευσης οφείλεται στο ότι μπορούμε να περιγράψουμε φωτονικές διατάξεις που αποτελούνται από απομονωμένα δομικά στοιχεία, που συζεύγνυνται ασθενώς μεταξύ τους, με τους ιδιορυθμούς της διάδοσης του συνολικού συστήματος να συνδέονται στενά με τους ιδιορυθμούς των ξεχωριστών στοιχείων.

Για να επιλυθεί η εξ. 5.15 της προηγούμενης ενότητας μπορούμε να ακολουθήσουμε διαδικασίες που εφαρμόζουν την μεθοδολογία της ισχυρής δέσμευσης, όπως ακριβώς έχει εφαρμοσθεί σε παρόμοια προβλήματα.

Η αφετηρία μας είναι να εκφράσουμε τις λύσεις της εξίσωσης με τη μορφή αναπτύγματος σειράς με βάση τις συναρτήσεις $f_{m,n}(\chi,\psi)$, που περιγράφουν τη διάταξη των κυματοδηγών στο επίπεδο, οπότε προκύπτει:

$$u(\chi,\psi,\tau;\zeta)=\sum_{m,n}c_{m,n}(\zeta,\tau)f_{m,n}(\chi,\psi)\exp\left[i\left(\lambda+i\frac{\alpha}{2}\right)\zeta\right] \tag{5.16}$$

Στην εξ. 5.16 $c_{m,n}$ είναι οι τιμές της ισχύος του ρυθμού σε κάθε κυματοδηγό και λ, f οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις του κάθε ρυθμού. Ο όρος $\exp(-\lambda\alpha\zeta/2)$ οδηγεί στη μείωση της ισχύος με την εξέλιξη στο ζ και αναφέρεται στην απώλεια ενέργειας λόγω απορρόφησης από τη βαφή. Η μεταβολή των πεδίων $c_{m,n}(\zeta,\tau)$ κατά μήκος της διεύθυνσης ζ θεωρείται αργή, ώστε:

$$\left|\frac{\partial c_{m,n}(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right| << \lambda \qquad (5.17)$$

Οι προαναφερθείσες συναρτήσεις πλέγματος $f_{m,n}$ παράγονται μετασχηματίζοντας στα πλεγματικά κέντρα τη λύση ενός προβλήματος Schroedinger για ένα πλεγματικό κελί (κυματοδηγό συμπληρωμένο με καστορέλαιο). Δηλαδή,

$$\begin{gathered} f_{m,n}(\chi,\psi) = f\left(\rho;\kappa\acute{\varepsilon}\nu\tau\rho o\ \sigma\tau o\ \chi=\chi_{\mathrm{m}},\psi=\psi_n\right) \\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{df}{d\rho}\right)+\left\{\begin{matrix} 2(\gamma\Delta n_0-\lambda), & \rho\le\dfrac{d}{2\Lambda} \\ -2\lambda\,, & \rho>\dfrac{d}{2\Lambda} \end{matrix}\right\} f=0 \end{gathered} \qquad (5.18)$$

Οι χαμηλότερης τάξης λύσεις (χωρίς εξάρτηση από τη ζ διεύθυνση) της προηγούμενης εξ. 5.18, θα είναι:

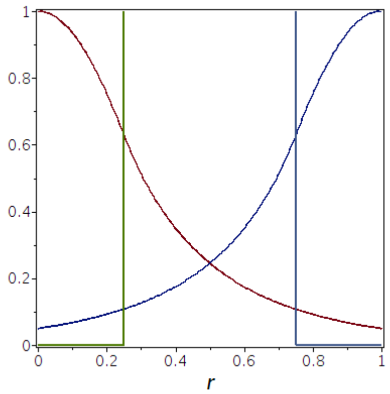
$$\begin{aligned} & f\left(\rho\le\frac{d}{2\Lambda}\right)=J_0\left(\rho\sqrt{2(\gamma\Delta n_0-\lambda)}\right), \\ & f\left(\rho>\frac{d}{2\Lambda}\right)=C_0K_0\left(\rho\sqrt{2\lambda}\right), \qquad \gamma>\lambda>0 \end{aligned} \qquad (5.19)$$

με J τη συνάρτηση Bessel και K την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel. Για να προσδιορισθεί το C_0 είναι αναγκαίο να ικανοποιείται η συνέχεια των λύσεων και των παραγώγων τους στο όριο. Η απαίτηση αυτή οδηγεί στις εξισώσεις

$$\frac{J_0\left(\frac{d}{2\Lambda}\sqrt{2(\gamma\Delta n_0-\lambda)}\right)}{J_1\left(\frac{d}{2\Lambda}\sqrt{2(\gamma\Delta n_0-\lambda)}\right)}\frac{K_1\left(\frac{d}{2\Lambda}\sqrt{2\lambda}\right)}{K_0\left(\frac{d}{2\Lambda}\sqrt{2\lambda}\right)}=\sqrt{\frac{\gamma\Delta n_0}{\lambda}-1} \qquad (5.20)$$

$$C_0=\frac{J_0\left(\frac{d}{2\Lambda}\sqrt{2(\gamma\Delta n_0-\lambda)}\right)}{K_0\left(\frac{d}{2\Lambda}\sqrt{2\lambda}\right)} \qquad (5.21)$$

Από τις παραπάνω εξ. 5.20-5.21 μπορούν να εξαχθούν οι τιμές των C_0, λ του χαμηλότερου ρυθμού. Στο Σχ. 5.3 φαίνεται το σχήμα και η επικάλυψή των ρυθμών δύο γειτονικών κυματοδηγών.



Σχ. 5.3 *Ρυθμοί δύο γειτονικών κυματοδηγών και η διάχυσή τους έξω από αυτούς.*

Αν στη συνέχεια της μελέτης μας, αντικαταστήσουμε την εξ. 5.16 στην εξ. 5.15, και πραγματοποιήσουμε την διαδικασία που περιγράφεται στο παράρτημα του παρόντος κεφαλαίου, μπορούμε να καταλήξουμε στη σχέση 5.22 που περιγράφει την εξέλιξη των πεδίων $c_{m,n}(\zeta,\tau)$. Ο συμβολισμός «^» στην παρακάτω σχέση αναφέρεται σε άμεσους γείτονες ως προς τον κόμβο {*m,n*} του πλέγματος των αξόνων των κυματοδηγών,

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_{m,n}(\zeta,\tau)}{\partial\zeta} &\cong i\gamma C\sum_{\hat{m},\hat{n}} c_{\hat{m},\hat{n}}(\zeta,\tau)+i\gamma V c_{m,n}(\zeta,\tau)-i\frac{\gamma v e^{-\alpha\zeta}}{4\pi\xi}\sum_{m,n} c_{m,n}(\zeta,\tau)\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \left|c_{m,n}(\zeta,\tau')\right|^2 B\left[\xi(\tau-\tau')\right]\\ &-i\frac{\gamma v e^{-\alpha\zeta}}{4\pi\xi}\sum_{\hat{m},\hat{n}} c_{m,n}(\zeta,\tau)\int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \left|c_{\hat{m},\hat{n}}(\zeta,\tau')\right|^2 E\left[\xi(\tau-\tau')\right]\\ &-i\frac{\gamma v e^{-\alpha\zeta}}{4\pi\xi}\sum_{\hat{m},\hat{n}} c_{\hat{m},\hat{n}}(\zeta,\tau)\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \left|c_{m,n}(\zeta,\tau')\right|^2 E\left[\xi(\tau-\tau')\right] \qquad (5.22)\end{aligned}$$

Τα C, B, V, E είναι συντελεστές που δίνονται ως πηλίκα ολοκληρωμάτων επικάλυψης, που δίνονται αναλυτικά στο παράρτημα του κεφαλαίου.

<u>5.4 Επίλυση του διακριτού συστήματος</u>

Για την επίλυση της εξ. 5.22 θα πρέπει να εισαχθεί σε αυτήν ένας πίνακας που περιγράφει το πλέγμα των κυματοδηγών. Μια συνηθισμένη μορφή ίνας φωτονικού κρυστάλλου είναι αυτή στην οποία οι κυματοδηγοί εμφανίζουν εξαγωνική διάταξη στο επίπεδο και η εξ. 5.22 μπορεί πλέον να γραφεί ως εξής

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_{m,n}}{\partial\zeta} &= i\gamma C\sum_{(\hat{m},\hat{n})} H^{(m,n)}_{(\hat{m},\hat{n})} c_{\hat{m},\hat{n}} + i\gamma V c_{m,n} - i\frac{\gamma v \mathrm{e}^{-\alpha\zeta}}{4\pi\xi}\int_{-\infty}^{\tau} d\tau' B\left[\xi\left(\tau-\tau'\right)\right] c_{m,n}\left|c'_{m,n}\right|^2\\ &-i\frac{\gamma v \mathrm{e}^{-\alpha\zeta}}{4\pi\xi}\sum_{(\hat{m},\hat{n})}\int_{-\infty}^{\tau} d\tau' E\left[\xi\left(\tau-\tau'\right)\right]\left(c_{m,n} H^{(m,n)}_{(\hat{m},\hat{n})}\left|c'_{\hat{m},\hat{n}}\right|^2+\left|c'_{m,n}\right|^2 H^{(m,n)}_{(\hat{m},\hat{n})} c_{\hat{m},\hat{n}}\right) \qquad (5.23)\end{aligned}$$

με $H^{(m,n)}_{(\hat{m},\hat{n})}$ τον πίνακα που περιγράφει το εξαγωνικό πλέγμα να είναι

$$H_{(\hat{m},\hat{n})}^{(m,n)} \equiv \begin{Bmatrix} \delta_{\hat{m},m}\delta_{\hat{n},n+1} + \delta_{\hat{m},m-1}\delta_{\hat{n},n} + \delta_{\hat{m},m-1}\delta_{\hat{n},n-1} + \delta_{\hat{m},m}\delta_{\hat{n},n-1} + \delta_{\hat{m},m+1}\delta_{\hat{n},n-1} + \delta_{\hat{m},m+1}\delta_{\hat{n},n},\ m\text{: }\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o} \\ \delta_{\hat{m},m}\delta_{\hat{n},n+1} + \delta_{\hat{m},m-1}\delta_{\hat{n},n} + \delta_{\hat{m},m-1}\delta_{\hat{n},n+1} + \delta_{\hat{m},m}\delta_{\hat{n},n-1} + \delta_{\hat{m},m+1}\delta_{\hat{n},n+1} + \delta_{\hat{m},m+1}\delta_{\hat{n},n},\ m: \acute{\alpha}\rho\tau\iota o \end{Bmatrix}$$

Τα *m, n* είναι δείκτες που απαριθμούν την κατακόρυφη και οριζόντια θέση του κυματοδηγού στο δισδιάστατο φωτονικό πλέγμα. Η εξαγωνική μορφή του πλέγματος φαίνεται στο Σχ. 5.4.

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
 & & n \rightarrow & & & & & & & & & & \\
m & & \bullet_{1,1} & & \bullet_{1,2} & & \bullet_{1,3} & & \bullet_{1,4} & & \bullet_{1,5} & & \cdot\ \cdot \\
\downarrow & \bullet_{2,1} & & \bullet_{2,2} & & \bullet_{2,3} & & \bullet_{2,4} & & \bullet_{2,5} & & \cdot\ \cdot & \\
 & & \bullet_{3,1} & & \bullet_{3,2} & & \bullet_{3,3} & & \bullet_{3,4} & & \bullet_{3,5} & & \cdot\ \cdot \\
 & \bullet_{4,1} & & \bullet_{4,2} & & \bullet_{4,3} & & \bullet_{4,4} & & \bullet_{4,5} & & \cdot\ \cdot & \\
 & & \bullet_{5,1} & & \bullet_{5,2} & & \bullet_{5,3} & & \bullet_{5,4} & & \bullet_{5,5} & & \cdot\ \cdot \\
 & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \\
 & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & &
\end{array}$$

Σχ. 5.4 *Εξαγωνική διάταξη καναλιών και η αρίθμησή τους για την κατασκευή του πίνακα* $H_{(\hat{m},\hat{n})}^{(m,n)}$ *προς χρήση για επίλυση της εξ. 5.23.*

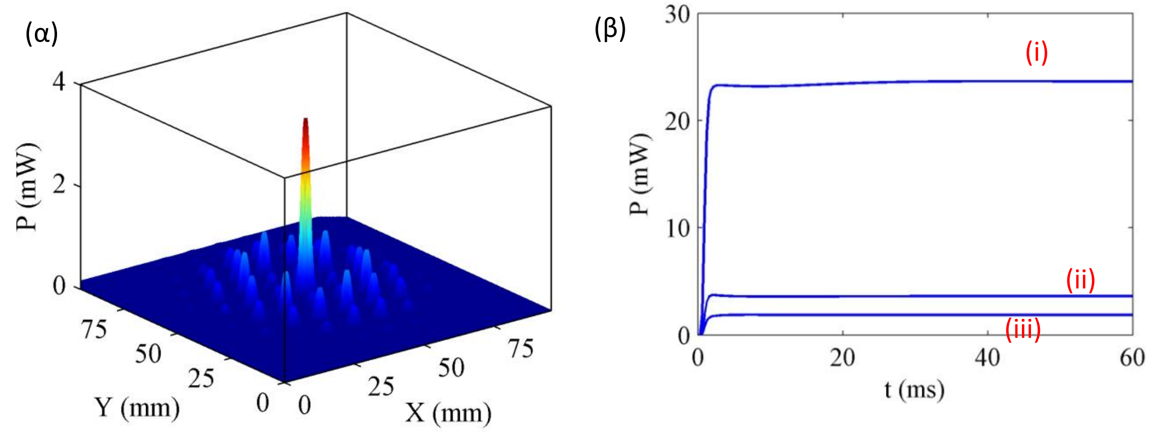
Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στο παράρτημα και με κατάλληλους χειρισμούς που αφορούν την απεικόνιση σε πλέγματα για χρήση με αριθμητικές μεθόδους, καταλήγουμε σε μια μορφή της εξ. 5.22, όπου μπορεί να επιλυθεί με ψευδοφασματικές μεθόδους, όπως είναι η μέθοδος split step Fourier.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\mathbf{c}}}{\partial \zeta} &= \vec{\mathbf{L}} \bullet \vec{\mathbf{c}} + \left\{ \mathsf{F}^{-1}\left[N_{0,\omega}\left(\vec{\mathbf{c}} \otimes \bar{\vec{\mathbf{c}}} \right)_{\omega} \right] \right\} \otimes \mathbf{c} \\ &+ \left[\vec{\mathbf{c}} \otimes \left(\ddot{\mathbf{H}} \bullet \left\{ \mathsf{F}^{-1}\left[N_{1,\omega}\left(\vec{\mathbf{c}} \otimes \bar{\vec{\mathbf{c}}} \right)_{\omega} \right] \right\} \right) + \left\{ \mathsf{F}^{-1}\left[N_{1,\omega}\left(\vec{\mathbf{c}} \otimes \bar{\vec{\mathbf{c}}} \right)_{\omega} \right] \right\} \otimes \left(\ddot{\mathbf{H}} \bullet \vec{\mathbf{c}} \right) \right] \end{aligned} \tag{5.24}$$

Στην παραπάνω εξ 5.24 F^{-1} είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier, ο δείκτης «ω» δηλώνει φασματική συνιστώσα της συχνότητας ω και τα $N_{0.\omega}, N_{1,\omega}$ είναι οι φασματικές συνιστώσες των ποσοτήτων N_0, N_1 αντίστοιχα, των οποίων η αναλυτική έκφραση δίνεται στο παράρτημα. Τέλος, έχουμε θέσει $\vec{L} = i\gamma(C\ddot{H} + V\ddot{I})$. Όπως έχει αναφερθεί το c είναι το πεδίο, ενώ έχει εισαχθεί και η πράξη $\otimes$ ανάμεσα σε διανύσματα, ώστε $\left(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}\right)_j \equiv \left(\mathbf{a}\right)_j \cdot \left(\mathbf{b}\right)_j$.

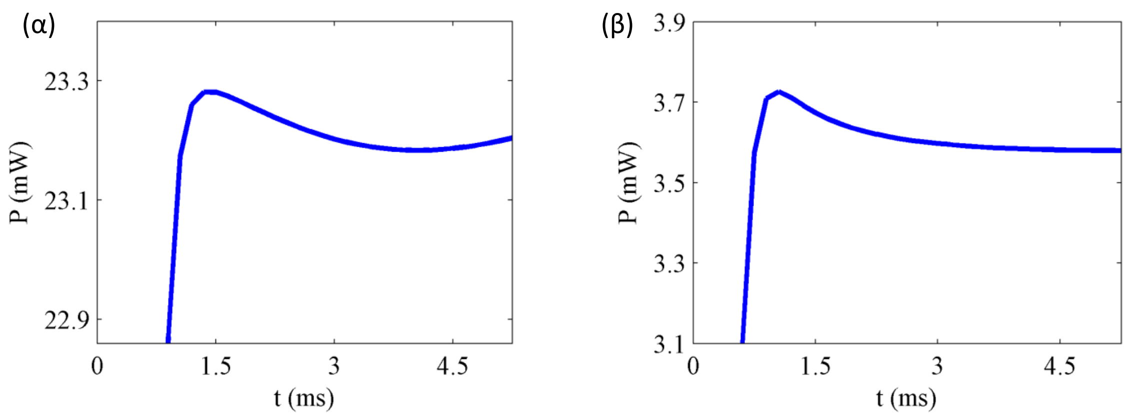
5.5 Αριθμητικά αποτελέσματα

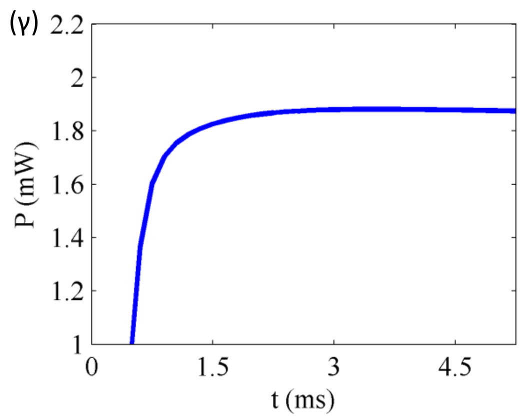
Όπως είπαμε παραπάνω, η εξ. 5.23 μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο Split-Step-Fourier. Έτσι για τυπικές τιμές $T = 74^0 C$ και $P_{in} = 30\,mW$ για οπτική δέσμη με χρόνο ανύψωσης $250\mu s$, παίρνουμε το χρονικό προφίλ της ισχύος, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.5. Έχουμε διακρίνει την ολική ισχύ, την ισχύ για τον κεντρικό κυματοδηγό και την ισχύ των έξι πρώτων γειτονικών κυματοδηγών.



Σχ. 5.5 *α) Κατανομή της ισχύος του οπτικού πεδίου στους κυματοδηγούς του εξαγωνικού πλέγματος, για χρόνο* $50\,ms$ *από την άφιξη του κύματος στην απόσταση* $5\,mm$. *Στο (β) απεικονίζεται το χρονικό προφίλ για i) την ολική ισχύ, ii) την ισχύ του κεντρικού κυματοδηγού και iii) την ισχύ των έξι πρώτων γειτόνων σε απόσταση διάδοσης* $5\,mm$. *Η εισερχόμενη ισχύς είναι* $30\,mW$, *ο χρόνος ανύψωσης* $0.25\,ms$ *και η θερμοκρασία* $T = 74^0 C$.

Από το Σχ. 5.5 γίνεται προφανές ότι η ενέργεια εισόδου μετά το χρόνο ανύψωσης κατανέμεται σε μεγάλο πλήθος κυματοδηγών. Στο Σχ. 5.6 φαίνεται με μεγαλύτερη λεπτομέρεια η χρονική εξέλιξη της ισχύος στους κυματοδηγούς.

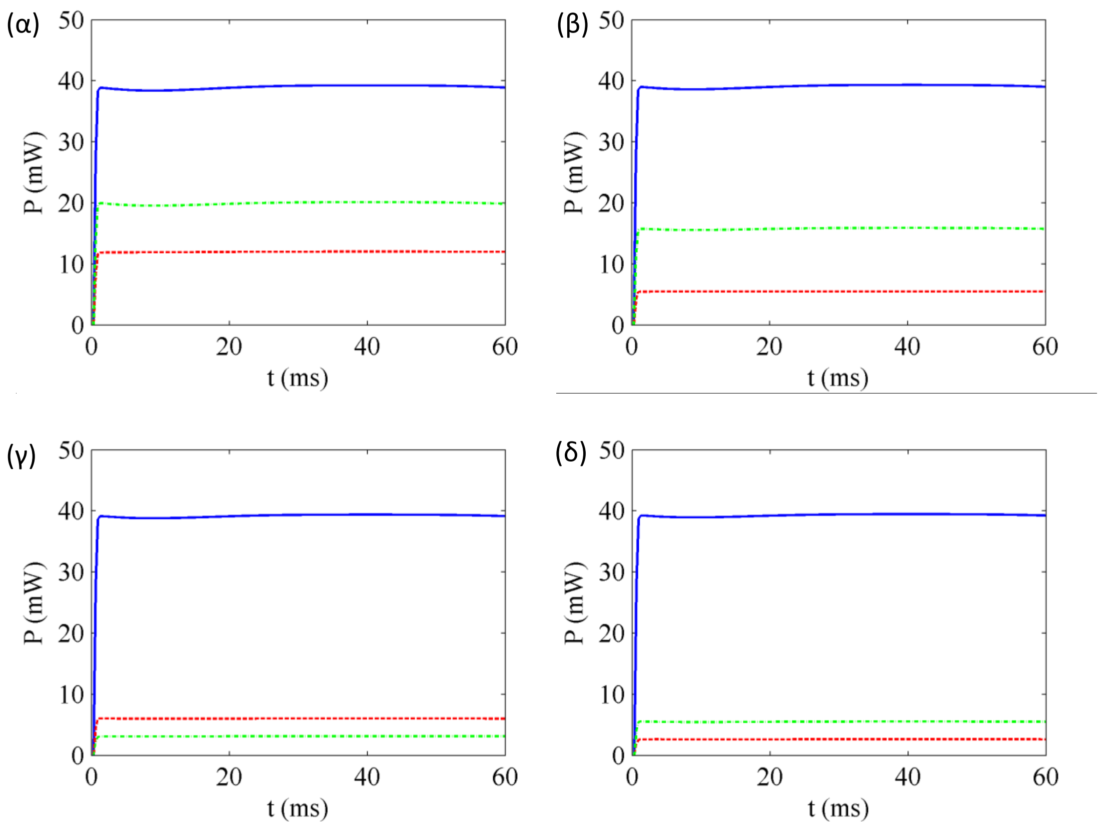




Σχ. 5.6 *Χρονική εξέλιξη του οπτικού πεδίου σε μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Στα (α)-(β)-(γ) φαίνεται η χρονική εξέλιξη της ισχύος της οπτικής δέσμης για το σύνολο των εγγεγραμμένων κυματοδηγών, τον κεντρικό και τους πρώτους γείτονες, αντίστοιχα. Είναι προφανής η υστέρηση της διάχυσης του οπτικού πεδίου στους γειτονικούς από τον κεντρικό κυματοδηγό.*

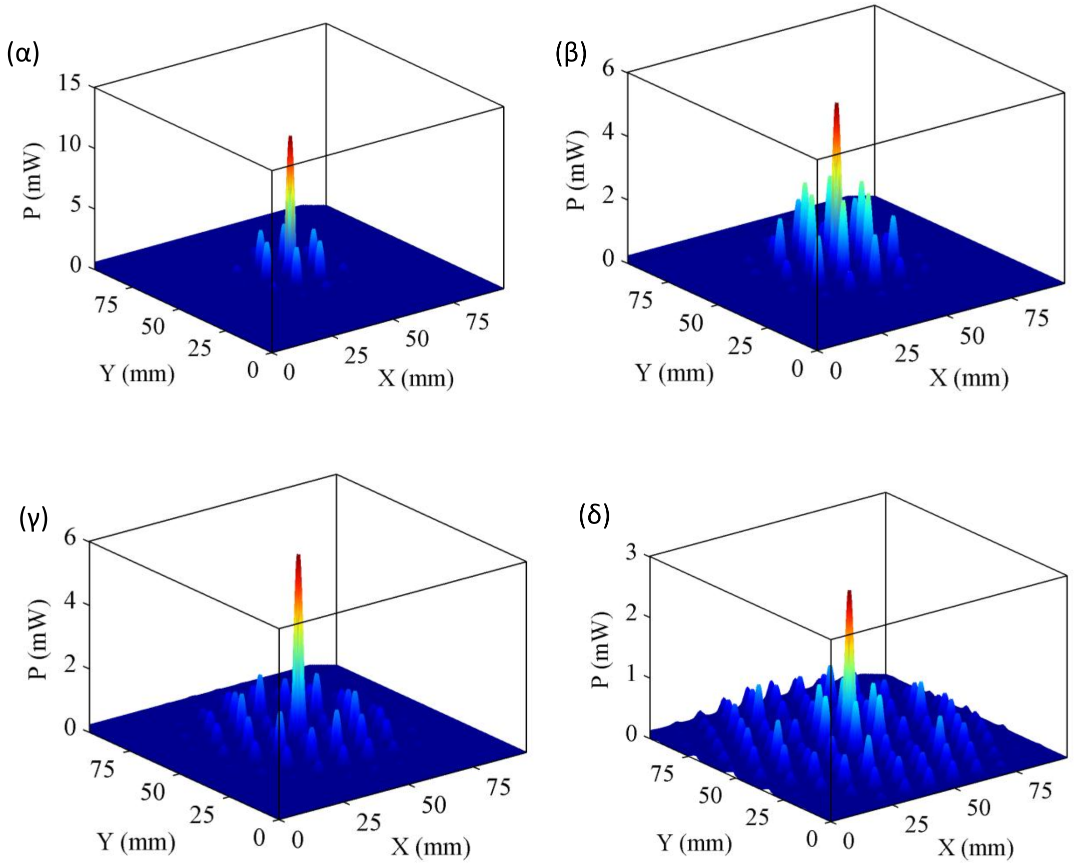
Στο Σχ. 5.6 παρουσιάζεται η εξέλιξη του χρονικού προφίλ της δέσμης στο στάδιο που το οπτικό πεδίο ισχύος $30\,mW$ «εγκαθίσταται» στη φωτονική ίνα σε μήκος διάδοσης $5mm$ και χρόνο ανύψωσης $250\,\mu s$. Συγκρίνοντας τα Σχ. 5.6(α-β-γ) που αντιστοιχούν στη συνολική ισχύ, στην ισχύ του κεντρικού και στην ισχύ των έξι πρώτων γειτόνων στον κεντρικό κυματοδηγών, συμπεραίνουμε τη χρονική υστέρηση στη διασπορά του οπτικού πεδίου στους εξωτερικούς κυματοδηγούς. Μια άλλη παρατήρηση στα σχετικά σχήματα είναι η εμφάνιση κρουστικής συμπεριφοράς κατά τη μεταβατική κατάσταση της «εγκατάστασης» της οπτικής δέσμης.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η επίδραση της θερμοκρασίας στην ολική διαδιδόμενη ισχύ είναι αμελητέα, ενώ η θερμοκρασία παίζει σημαντικό ρόλο στη χωρική κατανομή της ισχύος. Θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις που η θερμοκρασία είναι $70^0, 72^0, 74^0, 76^0$. Οι τιμές έχουν επιλεγεί με βάση παραμέτρους πειραμάτων που έχουν πραγματοποιηθεί [127].

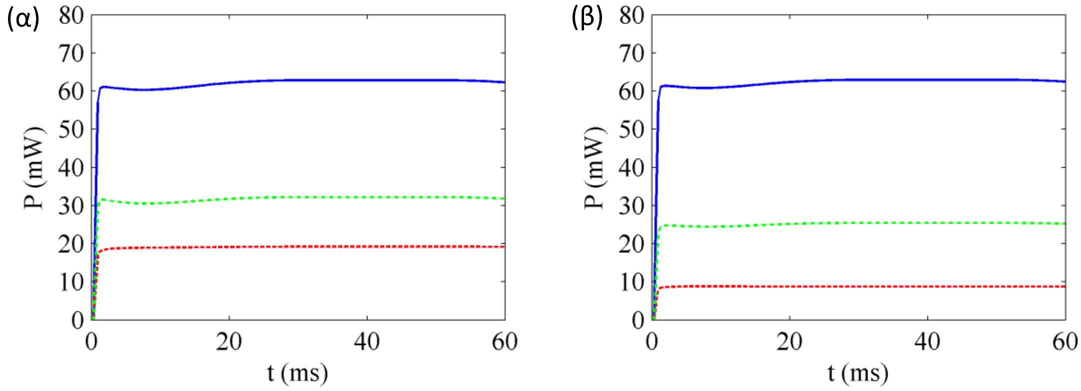


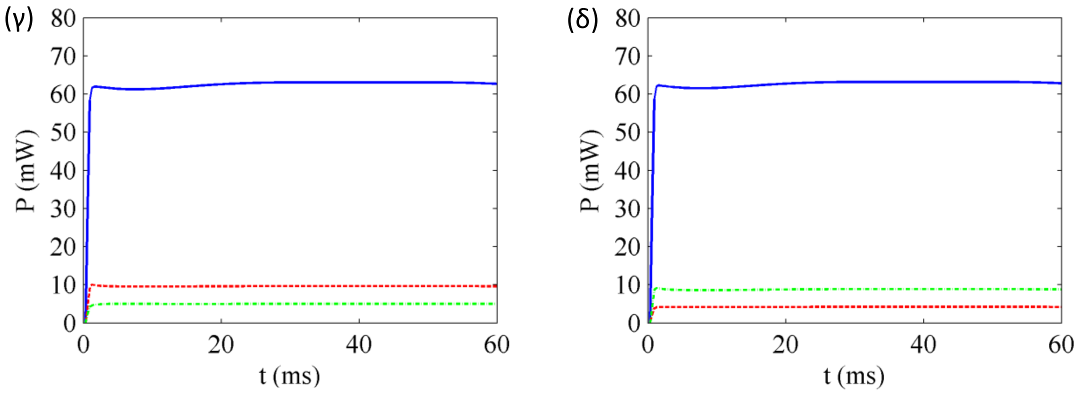
Σχ. 5.7 *Σύγκριση χρονικού προφίλ ισχύος για θερμοκρασίες α)* 70^0*, β)* 72^0*, γ)* 74^0 *και δ)* 76^0 *για ισχύ εισόδου* $50\,mW$ *και απόσταση διάδοσης* $5\,mm$*. Με συνεχή (μπλε) γραμμή είναι η συνολική ισχύς, με διακεκομμένη (κόκκινη) είναι η ισχύς του κεντρικού καναλιού και με στίγματα (πράσινη) είναι το άθροισμα ισχύος των πρώτων γειτόνων.*

Η σύγκριση των διαγραμμάτων στο Σχ. 5.7 μας οδηγεί στο ότι η μεταβολή στη θερμοκρασία δεν έχει επίδραση πάνω στην ολική ισχύ που διαδίδεται στο σύστημά μας. Αυτή, όπως φαίνεται, εξαρτάται από την απορρόφηση που υφίσταται το οπτικό πεδίο κατά τη διάδοση. Από την άλλη πλευρά, ο τρόπος με τον οποίο κατανέμεται η ισχύς ανάμεσα στα κανάλια του φωτονικού κρυστάλλου εξαρτάται από τη θερμοκρασία και αυτό είναι αναμενόμενο λόγω της επίδρασης της θερμοκρασίας στην βηματική διαφορά των δεικτών διάθλασης του καστορέλαιου και της πυριτίας και κατά συνέπεια των συντελεστών σύζευξης των καναλιών. Η εξάρτηση είναι εμφανής αν συγκρίνουμε τα Σχ. 5.7(α, β, γ, δ) όπου φαίνεται ότι όσο αυξάνει η θερμοκρασία τόσο πιο έντονα διαμοιράζεται η ισχύς σε μεγαλύτερο πλήθος κυματοδηγών.

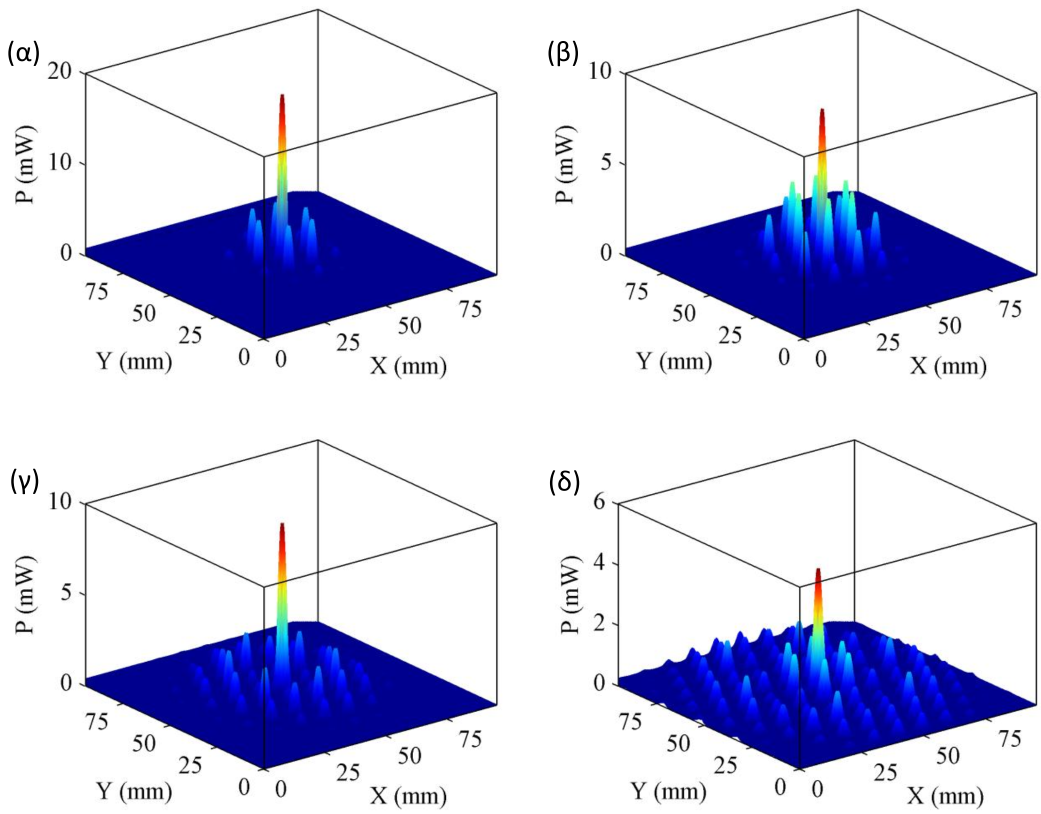


Σχ. 5.8 *Κατανομές ισχύος για θερμοκρασίες α)* 70^0 *, β)* 72^0 *, γ)* 74^0 *και δ)* 76^0 *και ισχύ εισόδου* $50\,mW$ *σε απόσταση διάδοσης* $5\,mm$ *.*





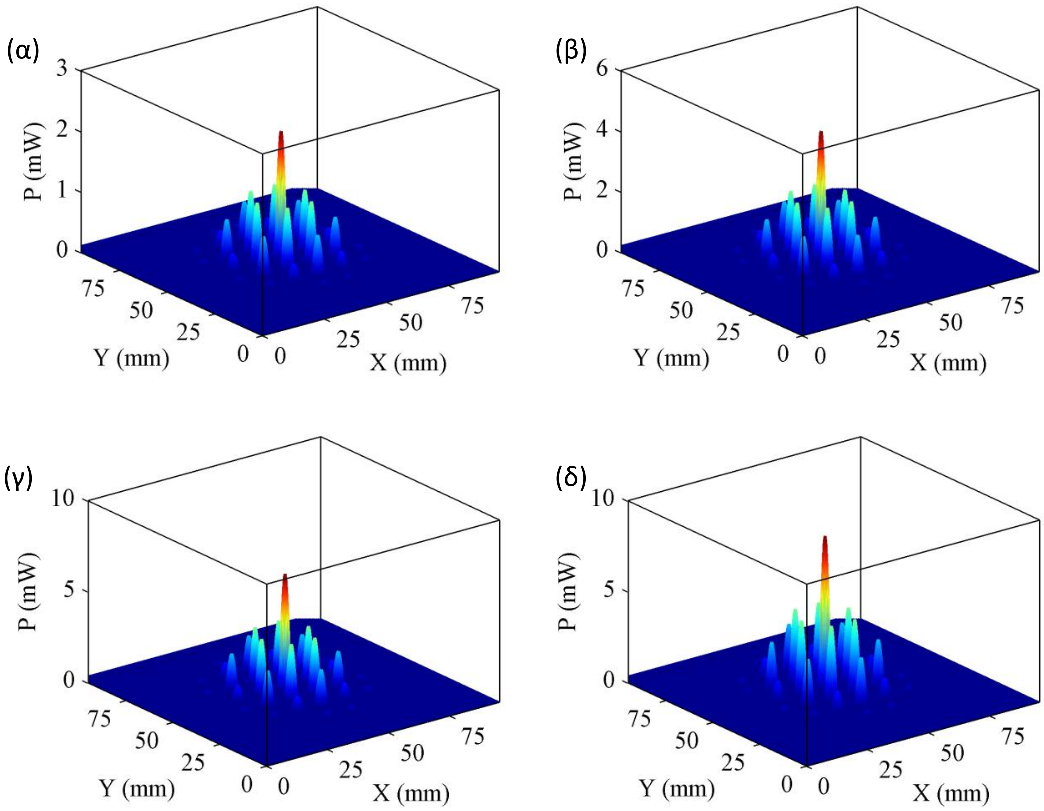
Σχ. 5.9 *Σύγκριση χρονικού προφίλ ολικής ισχύος για θερμοκρασίες α)* 70^0 *, β)* 72^0 *, γ)* 74^0 *και δ)* 76^0 *, για ισχύ* $80\,mW$ *και απόσταση διάδοσης* $5\,mm$ *. Με συνεχή (μπλε) γραμμή είναι η συνολική ισχύς, με διακεκομμένη (κόκκινη) είναι η ισχύς του κεντρικού καναλιού και με στίγματα (πράσινη) είναι το άθροισμα ισχύος των πρώτων γειτόνων.*



Σχ. 5.10 *Κατανομές ισχύος για εισερχόμενη δέσμη ισχύος* $80\,mW$, *για θερμοκρασίες α)* 70^0, *β)* 72^0 *, γ)* 74^0 *και δ)* 76^0 *και απόσταση διάδοσης* $5\,mm$ *.*

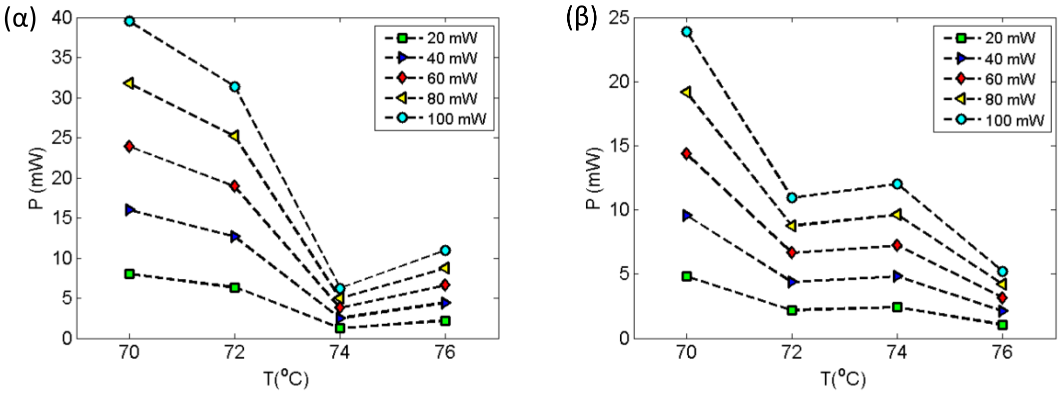
Κατά αντιστοιχία με την προηγούμενη προσομοίωση όπως αυτή απεικονίζεται στο Σχ. 5.8, στο Σχ. 5.9 παρουσιάζεται η χρονική απόκριση κατά τη διάδοση οπτικής δέσμης ισχύος $80mW$ σε απόσταση διάδοσης $5mm$ για θερμοκρασίες $T = 70^0, 72^0, 74^0, 76^0$.

Στο Σχ. 5.11 απεικονίζεται η κατανομή ισχύος για θερμοκρασία $T = 72^0$ και διάφορες τιμές εισερχόμενης ισχύος ($20, 40, 60, 80\,mW$). Διαπιστώνεται ότι η μεταβολή ισχύος της προσπίπτουσας δέσμης, αφήνει σχεδόν αναλλοίωτη την κατανομή ισχύος στα κανάλια.



Σχ. 5.11 *Κατανομές ισχύος για εφαρμοζόμενη θερμοκρασία* 72^0 *και διάφορες τιμές ισχύος εισόδου α)* 20 *, β)* 40 *, γ)* 60 *, δ)* $80\,mW$ *σε απόσταση διάδοσης* $5\,mm$ *.*

Τα παραπάνω αποτελέσματα για τις κατανομές της ισχύος στις διάφορες εφαρμοζόμενες θερμοκρασίες συνοψίζονται στο Σχ. 5.12. Συγκεκριμένα, στο Σχ. 5.12(α), παρουσιάζεται η σχέση ανάμεσα στην τιμή της ισχύος του κεντρικού κυματοδηγού σε απόσταση διάδοσης $5\,mm$ και χρόνο $t = 50\,ms$ από τη στιγμή της άφιξής του παλμού σε αυτή τη θέση σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία που έχει εφαρμοστεί στο καστορέλαιο. Στο Σχ. 5.12(β) αντίστοιχα απεικονίζεται η ισχύς που διαμοιράζεται στους πρώτους γείτονες για τα ίδια χαρακτηριστικά διάδοσης.



Σχ. 5.12 *Τιμές ισχύος σε απόσταση διάδοση* $5\,mm$ *για δέσμες διαφορετικών τιμών ι-σχύος εισόδου για α) το κεντρικό κανάλι διάδοσης β) το σύνολο των πρώτων στο κεντρι-κό κανάλι γειτόνων.*

5.5. Περίληψη-Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο 5 έγινε η μοντελοποίηση της διάχυσης του οπτικού πεδίου σε μια δισδιάστατη διάταξη πυριτίας, όπου στους κόμβους εξαγωνικής δομής έχουν τοποθετηθεί λεπτοί σωλήνες συμπληρωμένοι με καστορέλαιο. Οι δείκτης διάθλασης του καστορέλαιου και της πυριτίας έχουν παραπλήσιες τιμές, αλλά παρουσιάζουν διαφορετική απόκριση στις μεταβολές της θερμοκρασίας. Ο πρώτος εξαρτάται από την εφαρμοζόμενη θερμοκρασία, ενώ ο δεύτερος όχι. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η βηματική διαφορά των δεικτών διάθλασης ανάμεσα στο καστορέλαιο και την πυριτία που περιβάλλει τους σωλήνες να παρουσιάζει μεταβολή, εξαρτώμενη τη θερμοκρασιακή απόκριση του καστορέλαιου. Αριθμητικά δείχθηκε ότι μεγαλύτερη εφαρμοζόμενη θερμοκρασία οδηγεί σε ευρύτερη κατανομή της ισχύος στο χώρο, ενώ η συνολική ισχύς είναι ανεξάρτητη της θερμοκρασίας. Συμπληρωματικά διαπιστώθηκε ότι η κατανομή της ισχύος στα κανάλια είναι ανεξάρτητη της ισχύος εισόδου.

Η εφαρμοζόμενη μεταβολή στη θερμοκρασία επιδρά σημαντικά στην διάδοση οπτικής δέσμης διαμέσου της διάταξης, καθώς επηρεάζεται η διαδικασία διάχυσης της θερμότητας, που όπως δείχθηκε είναι κομβικής σημασίας για την περιγραφή της οπτικής διάδοσης. Αυτή η δυνατότητα για ενεργό προσαρμογή των χαρακτηριστικών της διακριτής περίθλασης είναι εξαιρετικά σημαντική, γιατί αφήνει ανοικτές τις προοπτικές για εύρωστη σολιτονική διάδοση και εφαρμογές σε οπτικούς αισθητήρες [144]. Από την άλλη, αν η ίδια δυνατότητα συνδυαστεί με την επιλεκτική συμπλήρωση των κενών σωλήνων, μπορεί να οδηγήσει με απλό τρόπο σε γένεση υπερσυνεχούς [145].

Τέλος, από τα αριθμητικά πειράματα διαπιστώθηκε η υστέρηση στη μεταφορά ενέργειας κατά το χρόνο «εγκατάστασης» της δέσμης στο οπτικό μέσο, από τον κεντρικό κυματοδηγό στους γειτονικούς και παρατηρήθηκε κρουστική συμπεριφορά στη χρονική απόκριση κατά την είσοδο της δέσμης στο μέσο, φαινόμενα που σχετίζονται με το χαρακτήρα της μη εντοπισμένης συμπεριφοράς του καστορέλαιου.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και επεκτάσεις

Στο τελευταίο κεφάλαιο γίνεται μια ανασκόπηση των κυριοτέρων αποτελεσμάτων της διατριβής και προτείνονται ενδιαφέρουσες επεκτάσεις των προβλημάτων, που θα μπορούσαν να υλοποιηθούν στο άμεσο μέλλον.

6.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα διατριβή μελετήθηκαν τέσσερα προβλήματα οπτικής διάδοσης σε διακριτή διάταξη μέσου με μη εντοπισμένη συμπεριφορά. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν ήταν αριθμητικές και ημι-αναλυτικές και τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε επιβεβαίωσαν την πλούσια δυναμική και τις προοπτικές ενεργούς δρομολόγησης που χαρακτηρίζουν τις διατάξεις που εμφανίζουν περιοδικότητες.

Από την άλλη, τα συστήματα που εξετάστηκαν χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα να διαχέουν την απόκρισή τους στο χώρο γύρω από την περιοχή που διεγείρεται οπτικά ή ηλεκτρικά. Όπως μπορέσαμε να στοιχειοθετήσουμε, εν γένει, η μη εντοπισμένη συμπεριφορά είναι ανταγωνιστική του διακριτού χαρακτήρα μιας διάταξης, δηλαδή η επιτάχυνση της μεταφοράς της απόκρισης του μέσου καταπιέζεται από το περιοδικό δυναμικό, που τείνει να εγκλωβίσει την απόκριση στην περιοχή που πραγματοποιείται η κυματοδήγηση. Το συμπέρασμα αυτό υπήρξε εμφατικό κατά τη μελέτη αλληλεπιδράσεων οπτικών δεσμών, καθώς τότε, μέτρια εντοπισμένες δέσμες διαπιστώθηκε ότι παρουσιάζουν σημαντική ευαισθησία των χαρακτηριστικών διάδοσης τους από τις επιμέρους παραμέτρους.

Συνοψίζοντας τα συμπεράσματα που προέκυψαν από το 2^{ο} Κεφάλαιο, μπορούμε να αναφέρουμε τη δυνατότητα χρήσης ενός δείγματος μέσου μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, διαμορφωμένου κατά της διεύθυνση της διάδοσης και κατά το εγκάρσιο, σαν φίλτρο επιλογής ευσταθών σολιτονικών δεσμών. Τα αποτελέσματα της μεταβολική μεθόδου που εφαρμόστηκε ταυτίζονται σε μεγάλο βαθμό με αυτά της απευθείας αριθμητικής επίλυσης της DNLS. Επιπλέον, αναδείχθηκε η ασταθής, αλλά εντοπισμένη διάδοση σε μέσο μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, που είναι εφικτή για τοπολογικά και επίπεδης κορυφής σολιτόνια, των οποίων η κατατομή είναι λύση της DNLS με μη γραμμικότητα Kerr. Κάτι τέτοιο δίνει μια καλή προοπτική για οπτική δρομολόγηση και εφαρμογές οπτικού διακόπτη.

Στο 3^{ο} Κεφάλαιο αναδείχθηκαν οι διαφορετικοί σχηματισμοί που προκύπτουν από την αλληλεπίδραση δεσμών που διαδίδονται σε μέσα με εντοπισμένο ή μη χαρακτήρα και ανιχνεύθηκε η συσχέτιση ανάμεσα στον χαρακτήρα αυτό και το περιοδικό δυναμικό. Σημαντικό εύρημα αποτελεί ο ταλαντωτικός οπτικός σχηματισμός που προκύπτει από την αλληλεπίδραση ενός φράζοντος σολιτονίου και ενός ασθενούς σήματος, με έντονα ελαστικά στοιχεία και αξιοσημείωτη αντοχή.

Στη συνέχεια είδαμε τη χωροχρονική εξέλιξη ενός παλμού σε δείγμα νηματικού υγρού κρυστάλλου. Διαπιστώθηκε η εξάρτηση του μη εντοπισμένου χαρακτήρα του μέσου από την εισερχόμενη οπτική ισχύ και στην ιδεατή περίπτωση που ο συντελεστής διασποράς του νηματικού κρυστάλλου δεν είναι αμελητέος, καταλήξαμε στο ότι τα χαρακτηριστικά της διάδοσης μοιάζουν με αυτά που εκδηλώνονται κατά το σχηματισμό κυμάτων τύπου Χ.

Τέλος, στο 5^{ο} Κεφάλαιο το αντικείμενο μελέτης είναι η διάδοση σε (2+1) εξαγωνική διάταξη με σωλήνες καστορέλαιου στους κόμβους της διάταξης. Η διάδοση εξαρτάται από την εφαρμοζόμενη θερμοκρασία που επηρεάζει το δείκτη διάθλασης του καστορέλαιου και αναλόγως επιδρά στο βαθμό σύζευξης των διαδιδόμενων στους κυματοδηγούς οπτικών πεδίων. Αριθμητικά προέκυψε ότι υψηλότερη θερμοκρασία οδηγεί σε ευρύτερη κατανομή της ισχύος στο χώρο, ενώ αυτή η κατανομή είναι ανεξάρτητη της ισχύος εισόδου.

6.2 Επεκτάσεις

Στο 2ο Κεφάλαιο έγινε η μελέτη της δυναμικής ενός συστήματος μέσου μη εντοπισμένης συμπεριφοράς, του οποίου ο δείκτης διάθλασης έχει διαμορφωθεί περιοδικά στη διεύθυνση της διάδοσης, καθώς και στην εγκάρσια σε αυτή διεύθυνση. Η μελέτη έγινε μέσω μια γενικευμένης DNLS, στην οποία τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης είναι κανονικοποιημένα στην ένταση του οπτικού πεδίου. Αν και τα αποτελέσματα δίνουν μια ικανοποιητική ποιοτική περιγραφή της οπτικής διάδοσης, θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να επιλυθεί απευθείας το σύστημα των συζευγμένων εξισώσεων 1.74-1.78 (κατάλληλα διαμορφωμένων, ώστε να περιληφθεί η διαμήκης και εγκάρσια διαμόρφωση), καθώς τότε θα μπορούσαμε να έχουμε έλεγχο επί της διάδοσης μέσω των γεωμετρικών παραμέτρων. Μια τέτοια προσπάθεια βρίσκεται ήδη σε προχωρημένο στάδιο και η επίλυση γίνεται με τη βοήθεια των πεπερασμένων διαφορών.

Στο ίδιο κεφάλαιο, τα ενδιαφέροντα αποτελέσματα πάνω στα τοπολογικά σολιτόνια και τα σολιτόνια επίπεδης κορυφής πρέπει να ποσοτικοποιηθούν με τη χρήση μια συστηματικής μελέτης ευστάθειας και να προσδιοριστούν, αν γίνεται, αναλυτικά οι χωρικές συχνότητες για τις οποίες επιτυγχάνεται ο εντοπισμός του οπτικού πεδίου για μέσο μη εντοπισμένης συμπεριφοράς. Ενδεχομένως να χρειάζεται η μελέτη μας να ξεκινήσει από τα περιττά και άρτια φωτεινά σολιτόνια που καταλαμβάνουν έναν ή δύο κυματοδηγούς, αντίστοιχα, αν και η μη εντοπισμένη συμπεριφορά του μέσου έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να αναδεικνύεται σε σολιτονικούς σχηματισμούς μεγαλύτερου εύρους.

Όσον αφορά το κομμάτι της εργασίας που ασχολείται με τις αλληλεπιδράσεις οπτικών δεσμών, πάλι θα ήταν επιθυμητή μια προσέγγιση που θα επέτρεπε τη συστηματική απεικόνιση της δυναμικής της αλληλεπίδρασης. Η μεταβολική μέθοδος θα μπορούσε να προσφέρει μια πρώτη περιγραφή της δυναμικής. Από την άλλη, οι πρωτότυπες εγκάρσιες ταλαντώσεις που διαπιστώθηκαν κατά την αλληλεπίδραση ασθενούς οπτικού πεδίου με φράζον σολιτόνιο, μπορούν σχετικά σύντομα να δώσουν έναν όγκο αριθμητικών πειραμάτων που θα χαρτογραφούν ικανοποιητικά το φαινόμενο.

Στο 5ο κεφάλαιο είδαμε τη διάδοση οπτικής δέσμης σε (2+1) εξαγωνικό πλέγμα. Πειράματα σε τέτοια πλέγματα φωτονικού κρυστάλλου πραγματοποιούνται εντατικά και είναι ενδιαφέρουσα η προσομοίωση και πρόβλεψη νέων δυνατοτήτων. Οι επιλογές που υπάρχουν είναι πάρα πολλές και σε πρώτη φάση θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να εστιάσουμε στην επιλεκτική συμπλήρωση των σωλήνων της διάταξης. Θυμίζουμε ότι, ανάλογα με τη γεωμετρία που επιλέγεται, υπάρχουν δυνατότητες για σολιτονική διάδοση ή δημιουργία υπερσυνεχούς. Εφόσον έχουμε επιβεβαιώσει ότι ο αλγόριθμος προσεγγίζει τα πειραματικά αποτελέσματα, το επόμενο λογικό βήμα είναι να αναζητήσουμε τις συνθήκες για ύπαρξη σολιτονικής λύσης ή ενδεχομένως τις προοπτικές δρομολόγησης της δέσμης.

Παραρτήματα

Κεφάλαιο 4

4.A

Προσεγγίζοντας το περιοδικό δυναμικό $N(\xi)$ με μια συνάρτηση κουτιού, η μη γραμμική εξίσωση Schroedinger παίρνει τη μορφή

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2}+\left[\frac{|u_0|^2}{\alpha}N(\xi)-\lambda\right]f=0, \quad N(\xi)\equiv\frac{2\widehat{\theta}_0}{\pi}F(\xi)\approx\begin{cases} N_{\min},\ \xi\leq 0 \text{ and } \xi\geq\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}} \\ \\ N_{\max},\ 0<\xi<\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}} \end{cases} \tag{A1}$$

Επιλύοντας την εξ. A1 για τις λύσεις χαμηλότερων ρυθμών προκύπτει η σταθερά διάδοσης

$$\lambda=\frac{|u_0|^2}{\alpha}\left[N_{\max}\left(1-\chi^2\right)+N_{\min}\chi^2\right], \tag{A2}$$

όπου η παράμετρος χ μπορεί να βρεθεί με τη λύση της ακόλουθης υπερβατικής εξίσωσης

$$\chi:\ \frac{\chi L}{4R_0\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{|u_0|^2}{\alpha}\Delta N}+\sin^{-1}\chi=\frac{\pi}{2} \tag{A3}$$

Από την άλλη πλευρά η λύση της εξ. A1 στις τρεις γειτονικές περιοχές που συμβολίζονται με I, II, III είναι

$$f_I\equiv f(\xi\leq 0)=\chi\exp\left[\xi\sqrt{1-\chi^2}\sqrt{\frac{|u_0|^2}{\alpha}\Delta N}\right] \tag{A4}$$

$$f_{II}\equiv f(0<\xi<\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}})=\sin\left[\xi\chi\sqrt{\frac{|u_0|^2}{\alpha}\Delta N}+\sin^{-1}\chi\right] \tag{A5}$$

$$f_{III}\equiv f(\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}}\leq\xi)=\chi\exp\left[\left(\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}}-\xi\right)\sqrt{1-\chi^2}\sqrt{\frac{|u_0|^2}{\alpha}\Delta N}\right] \tag{A6}$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων επικάλυψης γίνεται χρήση της επόμενης συνάρτησης

$$\widehat{f}_{II}\equiv\widehat{f}(0<\xi<\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}})=\cos\left[\xi\chi\sqrt{\frac{|u_0|^2}{\alpha}\Delta N}+\sin^{-1}\chi\right] \tag{A7}$$

4.B

Οι συντελεστές που υπεισέρχονται στο διακριτό μοντέλο είναι οι ακόλουθοι:

$$D_0 = \frac{1}{\alpha}\frac{\kappa k k''}{\gamma^2 R_0^2} \tag{B1}$$

$$V_0 = -\frac{|u_0|^2}{\alpha}\frac{N_{\min} I_{13} + N_{\max} I_2}{I_{123}} \tag{B2}$$

$$K_0 = \frac{|u_0|^2}{\alpha}\frac{\Delta N\left[\left(1-\chi^2\right)M_{1235} - \chi^2 M_4\right] - N_{\min} M_{135} - N_{\max} M_{124}}{I_{123}} \tag{B3}$$

$$Q_0 = \frac{2S\hat{\theta}_0}{\pi\alpha}\frac{L_{123}}{I_{123}} \tag{B4}$$

$$\hat{Q}_0 = \frac{2S\hat{\theta}_0}{\pi\alpha}\frac{N_{12345}}{I_{123}} \tag{B5}$$

$$V_1 = \frac{|u_0|^2}{\alpha}\frac{2\Delta N\left[2\left(1-\chi^2\right)J_{13} - \chi^2\left(J_2 - \hat{J}_2\right)\right]}{J_{123}} - \alpha\frac{G_{\max} J_{13} + G_{\min} J_2}{J_{123}} \tag{B6}$$

$$K_1 = \frac{|u_0|^2}{\alpha}\frac{2\Delta N\left[2\left(1-\chi^2\right)K_{1235} - \chi^2\left(K_4 - \hat{K}_4\right)\right]}{J_{123}} - \alpha\frac{G_{\max} K_{135} + G_{\min} K_{124}}{J_{123}} \tag{B7}$$

$$Q_1 = \alpha\frac{G_{\max} J_{13} + G_{\min} J_2}{J_{123}} \tag{B8}$$

$$\hat{Q}_1 = \alpha\frac{G_{\max} K_{135} + G_{\min} K_{124}}{J_{123}} \tag{B9}$$

όπου, $I_{123}=I_1+I_2+I_3$, $J_{123}=J_1+J_2+J_3$, $I_{13}=I_1+I_3$, $J_{13}=J_1+J_3$, $K_{1235}=K_1+K_2+K_3+K_5$, $K_{135}=K_1+K_3+K_5$, $K_{124}=K_1+K_2+K_4$, $L_{123}=L_1+L_2+L_3$, $M_{1235}=M_1+M_2+M_3+M_5$, $M_{135}=M_1+M_3+M_5$, $M_{124}=M_1+M_2+M_4$, $N_{12345}=N_1+N_2+N_3+N_4+N_5$.

Επίσης είναι $\Delta N = N_{\max} - N_{\min}$, S ένας παράγοντας μορφής που σχετίζεται με το μέγεθος της διατομής της δέσμης laser που προσπίπτει στο x-y επίπεδο (εξαιτίας της μικρής x διάστασης, η κατανομή στη διεύθυνση x έχει αντικατασταθεί από τη μέση τιμή) και θ_0 είναι η μέση κατά την y διεύθυνση κλίση των νηματικών μορίων χωρίς την επίδραση του οπτικού πεδίου. Τέλος, τα επιμέρους ολοκληρώματα I, J, J, K, K, L και M δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\begin{gathered} M_1 = \int_{-\infty}^{0} d\xi\, f_{I,0} f_{I,+1},\ M_2 = \int_{0}^{\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}}} d\xi\, f_{II,0} f_{I,+1},\ M_3 = \int_{\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}}}^{\frac{L}{R_0\sqrt{\alpha}}} d\xi\, f_{III,0} f_{I,+1}, \\ M_4 = \int_{\frac{L}{R_0\sqrt{\alpha}}}^{\frac{3L}{2R_0\sqrt{\alpha}}} d\xi\, f_{III,0} f_{II,+1},\ M_5 = \int_{\frac{3L}{2R_0\sqrt{\alpha}}}^{+\infty} d\xi\, f_{III,0} f_{III,+1} \end{gathered} \tag{B10}$$

$$K_1 = \int_{-\infty}^{0} d\xi\, f_{I,0}\, f_{I,+1}^2,\ K_2 = \int_{0}^{\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}}} d\xi\, f_{II,0}\, f_{I,+1}^2,\ K_3 = \int_{\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}}}^{\frac{L}{R_0\sqrt{\alpha}}} d\xi\, f_{III,0}\, f_{I,+1}^2$$

$$K_4 = \int_{\frac{L}{R_0\sqrt{\alpha}}}^{\frac{3L}{2R_0\sqrt{\alpha}}} d\xi\, f_{III,0}\, f_{II,+1}^2,\ \widehat{K}_4 = \int_{\frac{L}{R_0\sqrt{\alpha}}}^{\frac{3L}{2R_0\sqrt{\alpha}}} d\xi\, f_{III,0}\, \widehat{f}_{II,+1}^2,\ K_5 = \int_{\frac{3L}{2R_0\sqrt{\alpha}}}^{+\infty} d\xi\, f_{III,0}\, f_{III,+1}^2 \quad \text{(B11)}$$

$$J_1 = \int_{-\infty}^{0} d\xi\, f_{I,0}^3,\ J_2 = \int_{0}^{\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}}} d\xi\, f_{II,0}^3,\ \widehat{J}_2 = \int_{0}^{\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}}} d\xi\, \widehat{f}_{II,0}^3,\ J_3 = \int_{\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}}}^{+\infty} d\xi\, f_{III,0}^3 \quad \text{(B12)}$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} d\xi\, f_{I,0}^2,\ I_2 = \int_{0}^{\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}}} d\xi\, f_{II,0}^2,\ \ I_3 = \int_{\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}}}^{+\infty} d\xi\, f_{III,0}^2, \quad \text{(B13)}$$

$$L_1 = \int_{-\infty}^{0} d\xi\, f_{I,0}^4,\ L_2 = \int_{0}^{\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}}} d\xi\, f_{II,0}^4,\ \ L_3 = \int_{\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}}}^{+\infty} d\xi\, f_{III,0}^4 \quad \text{(B14)}$$

$$N_1 = \int_{-\infty}^{0} d\xi\, f_{I,0}\, f_{I,+1}^3,\ N_2 = \int_{0}^{\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}}} d\xi\, f_{II,0}\, f_{I,+1}^3,\ N_3 = \int_{\frac{L}{2R_0\sqrt{\alpha}}}^{\frac{L}{R_0\sqrt{\alpha}}} d\xi\, f_{III,0}\, f_{I,+1}^3,$$

$$N_4 = \int_{\frac{L}{R_0\sqrt{\alpha}}}^{\frac{3L}{2R_0\sqrt{\alpha}}} d\xi\, f_{III,0}\, f_{II,+1}^3,\ N_5 = \int_{\frac{3L}{2R_0\sqrt{\alpha}}}^{+\infty} d\xi\, f_{III,0}\, f_{III,+1}^3 \quad \text{(B15)}$$

Κεφάλαιο 5

5.Α

Για την εξαγωγή της 5.23, όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο, εφαρμόζεται η προσέγγιση της ισχυρής δέσμευσης. Με αφετηρία την εξίσωση

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial \zeta}=-\frac{\alpha}{2}u+\frac{i}{2}\hat{\nabla}_{\perp}^{2}u+i\gamma u\Delta n_{lattice}\left(\chi,\psi\right)\\&-iu\frac{\gamma\nu}{4\pi\xi}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{d\tau'}{\tau-\tau'}\int_{-\infty}^{\infty}d\chi'\int_{-\infty}^{\infty}d\psi'\exp\left[-\frac{\left(\chi-\chi'\right)^{2}+\left(\psi-\psi'\right)^{2}}{4\xi\left(\tau-\tau'\right)}\right]\left|u'\right|^{2}=0\end{aligned} \tag{A1}$$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη λύση

$$u\left(\chi,\psi,\tau;\zeta\right)=\sum_{(m,n)}c_{m,n}\left(\zeta,\tau\right)f_{m,n}\left(\chi,\psi\right)\exp\left[i\left(\lambda+i\frac{\alpha}{2}\right)\zeta\right], \tag{A2}$$

οπότε θα προκύψει

$$\begin{aligned}\sum_{(m',n')}&\frac{\partial c_{m',n'}\left(\zeta,\tau\right)}{\partial\zeta}f_{m',n'}\left(\chi,\psi\right)\\&=i\left[\gamma\Delta n_{lattice}\left(\chi,\psi\right)-\lambda\right]\sum_{(m',n')}c_{m',n'}\left(\zeta,\tau\right)f_{m',n'}\left(\chi,\psi\right)\\&+\frac{i}{2}\sum_{(m',n')}c_{m',n'}\left(\zeta,\tau\right)\hat{\nabla}_{\perp}^{2}f_{m',n'}\\&-i\frac{\gamma\nu e^{-\alpha\zeta}}{4\pi\xi}\sum_{\substack{(m',n'),\\(m'',n''),\\(m''',n''')}}c_{m',n'}\left(\zeta,\tau\right)\int_{-\infty}^{\tau}\frac{d\tau'}{\tau-\tau'}c_{m'',n''}\left(\zeta,\tau'\right)\bar{c}_{m''',n'''}\left(\zeta,\tau'\right)\\&\times f_{m',n'}\left(\chi,\psi\right)\int_{-\infty}^{\infty}d\chi'\int_{-\infty}^{\infty}d\psi' f_{m'',n''}\left(\chi',\psi'\right)f_{m''',n'''}\left(\chi',\psi'\right)e^{-\frac{\left(\chi-\chi'\right)^{2}+\left(\psi-\psi'\right)^{2}}{4\xi\left(\tau-\tau'\right)}}\end{aligned} \tag{A3}$$

Με $\bar{c}$ έχει συμβολισθεί η συζυγής ποσότητα που σχετίζεται με την ισχύ του οπτικού πεδίου σε κάθε κυματοδηγό.

Στη συνέχεια εξαιτίας του μη εντοπισμένου χαρακτήρα των συναρτήσεων $f_{m,n}$ και του ότι $\left|\frac{\partial c_{m,n}\left(\zeta,\tau\right)}{\partial\zeta}\right| << \lambda$,

προκύπτει,

$$\frac{\partial c_{m,n}(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}d\chi\int_{-\infty}^{\infty}d\psi\, f_{m,n}(\chi,\psi)\, f_{m',n'}(\chi,\psi)\cong\delta_{(m,n)}^{(m',n')}\frac{\partial c_{m,n}(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}d\chi\int_{-\infty}^{\infty}d\psi\, f_{m,n}^{2}(\chi,\psi)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\chi\int_{-\infty}^{\infty}d\psi\int_{-\infty}^{\infty}d\chi'\int_{-\infty}^{\infty}d\psi' f_{m,n}(\chi,\psi)\, f_{m',n'}(\chi,\psi) f_{m'',n''}(\chi',\psi')\, f_{m''',n'''}(\chi',\psi')\mathrm{e}^{-\frac{(\chi-\chi')^2+(\psi-\psi')^2}{4\xi(\tau-\tau')}}$$

$$\cong\delta_{(m,n)}^{(m',n')}\delta_{(m'',n'')}^{(m''',n''')}\int_{-\infty}^{\infty}d\chi\int_{-\infty}^{\infty}d\psi\int_{-\infty}^{\infty}d\chi'\int_{-\infty}^{\infty}d\psi' f_{m,n}^{2}(\chi,\psi) f_{m'',n''}^{2}(\chi',\psi')\mathrm{e}^{-\frac{(\chi-\chi')^2+(\psi-\psi')^2}{4\xi(\tau-\tau')}} \quad \text{(A4)}$$

Επίσης εισάγουμε τις ποσότητες

$$\langle ab\rangle\equiv\int_{-\infty}^{\infty}d\chi\int_{-\infty}^{\infty}d\psi\, a(\chi,\psi)b(\chi,\psi)$$

$$\langle\langle ab\rangle\rangle_{\xi(\tau-\tau')}\equiv\int_{-\infty}^{\infty}d\chi\int_{-\infty}^{\infty}d\psi\int_{-\infty}^{\infty}d\chi'\int_{-\infty}^{\infty}d\psi'\, a(\chi,\psi)b(\chi',\psi')\mathrm{e}^{-\frac{(\chi-\chi')^2+(\psi-\psi')^2}{4\xi(\tau-\tau')}},$$

οπότε, η εξίσωση Α.3 γίνεται,

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_{m,n}(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}&\cong i\gamma C\sum_{(\bar{m},\bar{n})}c_{\bar{m},\bar{n}}(\zeta,\tau)+i\gamma V c_{m,n}(\zeta,\tau)\\&-i\frac{\gamma\nu\mathrm{e}^{-\alpha\zeta}}{4\pi\xi}c_{m,n}(\zeta,\tau)\int_{-\infty}^{\tau}d\tau'\left|c_{m,n}(\zeta,\tau')\right|^2 B\left[\xi(\tau-\tau')\right]\\&-i\frac{\gamma\nu\mathrm{e}^{-\alpha\zeta}}{4\pi\xi}\sum_{(\bar{m},\bar{n})}c_{m,n}(\zeta,\tau)\int_{-\infty}^{\tau}d\tau'\left|c_{\bar{m},\bar{n}}(\zeta,\tau')\right|^2 E\left[\xi(\tau-\tau')\right]\\&-i\frac{\gamma\nu\mathrm{e}^{-\alpha\zeta}}{4\pi\xi}\sum_{(\bar{m},\bar{n})}c_{\bar{m},\bar{n}}(\zeta,\tau)\int_{-\infty}^{\tau}d\tau'\left|c_{m,n}(\zeta,\tau')\right|^2 E\left[\xi(\tau-\tau')\right]\end{aligned} \quad \text{(A5)}$$

με τους συντελεστές C, V, B *και* E ορισμένους ως εξής:

$$C\equiv\frac{\left\langle f_{m,n}\left(\Delta n_{lattice}-\Delta n_0^{\bar{m},\bar{n}}\right)f_{\bar{m},\bar{n}}\right\rangle}{\left\langle f_{m,n}^2\right\rangle}=\Delta n_0\frac{\left\langle f_{m,n}f_{\bar{m},\bar{n}}\right\rangle_{\varepsilon\sigma\omega(m,n)}}{\left\langle f_{m,n}^2\right\rangle},$$

$$V\equiv\frac{\left\langle f_{m,n}\left(\Delta n_{lattice}-\Delta n_0^{m,n}\right)f_{m,n}\right\rangle}{\left\langle f_{m,n}^2\right\rangle}=\Delta n_0\frac{\left\langle f_{m,n}^2\right\rangle_{\varepsilon\sigma\omega(m,n)}}{\left\langle f_{m,n}^2\right\rangle}$$

$$B\left[\xi(\tau-\tau')\right]\equiv\frac{\left\langle\left\langle f_{m,n}^2 f_{m,n}^2\right\rangle\right\rangle_{\xi(\tau-\tau')}}{(\tau-\tau')\left\langle f_{m,n}^2\right\rangle},\qquad E\left[\xi(\tau-\tau')\right]\equiv\frac{\left\langle\left\langle f_{m,n}^2 f_{\bar{m},\bar{n}}^2\right\rangle\right\rangle_{\xi(\tau-\tau')}}{(\tau-\tau')\left\langle f_{m,n}^2\right\rangle} \quad \text{(A6)}$$

Στην εξ. Α.6 ο δείκτης «έσω (m, n)» αναφέρεται σε ολοκλήρωση στην περιοχή που ορίζει ο κυματοδηγός με κέντρο $\{m, n\}$.

5.B

Για την εξαγωγή της εξίσωσης 5.24, ξεκινούμε από την 5.23 που περιγράφει τη διάδοση σε εξαγωνικό πλέγμα

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_{m,n}}{\partial \zeta} &= i\gamma C \sum_{(\bar{m},\bar{n})} H_{(\bar{m},\bar{n})}^{(m,n)} c_{\bar{m},\bar{n}} + i\gamma V c_{m,n} \\ &-i\frac{\gamma \nu \mathrm{e}^{-\alpha\zeta}}{4\pi\xi}\int_{-\infty}^{\tau} d\tau' B\left[\xi\left(\tau-\tau'\right)\right] c_{m,n}\left|c'_{m,n}\right|^2 \\ &-i\frac{\gamma \nu \mathrm{e}^{-\alpha\zeta}}{4\pi\xi}\sum_{(\bar{m},\bar{n})}\int_{-\infty}^{\tau} d\tau' E\left[\xi\left(\tau-\tau'\right)\right]\left(c_{m,n} H_{(\bar{m},\bar{n})}^{(m,n)}\left|c'_{\bar{m},\bar{n}}\right|^2 + \left|c'_{m,n}\right|^2 H_{(\bar{m},\bar{n})}^{(m,n)} c_{\bar{m},\bar{n}}\right),\end{aligned} \tag{B1}$$

με $H_{(\bar{m},\bar{n})}^{(m,n)}$ τον πίνακα που περιγράφει το πλέγμα και έχει διαστάσεις ($M\times N$) × ($M\times N$), ενώ το $c_{m,n}$ είναι διάνυσμα με στοιχεία ($M\times N$).

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{\mathbf{c}}(\tau)}{\partial \zeta} &= \vec{\mathbf{L}} \bullet \vec{\mathbf{c}}(\tau) \\ &+\left\{\int_0^{\infty} d\tau' N_0(\tau')\left[\vec{\mathbf{c}}(\tau-\tau')\otimes\bar{\vec{\mathbf{c}}}(\tau-\tau')\right]\right\}\otimes\vec{\mathbf{c}}(\tau) \\ &+\vec{\mathbf{c}}(\tau)\otimes\left(\vec{\vec{\mathbf{H}}}\bullet\left\{\int_0^{\infty} d\tau' N_1(\tau')\left[\vec{\mathbf{c}}(\tau-\tau')\otimes\bar{\vec{\mathbf{c}}}(\tau-\tau')\right]\right\}\right) \\ &+\left\{\int_0^{\infty} d\tau' N_1(\tau')\left[\vec{\mathbf{c}}(\tau-\tau')\otimes\bar{\vec{\mathbf{c}}}(\tau-\tau')\right]\right\}\otimes\left[\vec{\vec{\mathbf{H}}}\bullet\vec{\mathbf{c}}(\tau)\right]\end{aligned} \tag{B2}$$

με

$$\vec{\vec{\mathbf{L}}} \equiv i\gamma\left(C\vec{\vec{\mathbf{H}}}+V\vec{\vec{\mathbf{I}}}\right)$$

$$N_0(\tau) \equiv -i\frac{\gamma\nu\mathrm{e}^{-\alpha\zeta}}{4\pi\xi}B(\xi\tau) \qquad \text{και} \qquad N_1(\tau) \equiv -i\frac{\gamma\nu\mathrm{e}^{-\alpha\zeta}}{4\pi\xi}E(\xi\tau)$$

Ορίζοντας $\left(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\right)_j \equiv \left(\mathbf{a}\right)_j \cdot \left(\mathbf{b}\right)_j$, και συμβολίζοντας με «•» την πράξη του πολλαπλασιασμού πίνακα – διανύσματος, προκύπτει η εξ.5.24

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{\mathbf{c}}}{\partial \zeta} &= \vec{\vec{\mathbf{L}}} \bullet \vec{\mathbf{c}} + \left\{\mathsf{F}^{-1}\left[N_{0,\omega}\left(\vec{\mathbf{c}}\otimes\bar{\vec{\mathbf{c}}}\right)_{\omega}\right]\right\}\otimes\vec{\mathbf{c}} \\ &+\left[\vec{\mathbf{c}}\otimes\left(\vec{\vec{\mathbf{H}}}\bullet\left\{\mathsf{F}^{-1}\left[N_{1,\omega}\left(\vec{\mathbf{c}}\otimes\bar{\vec{\mathbf{c}}}\right)_{\omega}\right]\right\}\right)+\left\{\mathsf{F}^{-1}\left[N_{1,\omega}\left(\vec{\mathbf{c}}\otimes\bar{\vec{\mathbf{c}}}\right)_{\omega}\right]\right\}\otimes\left(\vec{\vec{\mathbf{H}}}\bullet\vec{\mathbf{c}}\right)\right]\end{aligned} \tag{B3}$$

Αναφορές

[1] A. C. Scott, *Encyclopedia of Nonlinear Science*, Routledge, Taylor & Francis Group, New York, NY (2005)

[2] J. S. Russell "Report on Waves" 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science: 311-390 (1844)

[3] J. S. Russell "The wave of Translation in the Oceans of Water, Air and Ether», Truebner & Co. London", NY (1885)

[4] G. de Vries, D. J. Korteweg, "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves", Philosophical Magazine 39: 442-443 (1895)

[5] N. J. Zabusky & M. D. Kruskal, "Interactions of 'solitons' in a collisionless plasma and the recurrence of initial states", Physical Review Letters (1965)

[6] P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, G. Weinreich, "Generation of optical harmonics", Physical Review Letters (1961)

[7] D. K. Singh, R.P. Singh, A. K. Kamra, "The electrical environment of the earth's atmosphere: A review", Space Science Reviews, **113**, 375-408, 2004

[8] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, (3rd ed.), Academic Press, Boston, 2008

[9] M. Ferreira, *Nonlinear Effects in Optical Fibers*, John Wiley & Sons, 2011

[10] M. Tateda, T. Horiguchi, M. Tokuda, N. Uchida, "Optical loss measurement in graded index fiber using a dummy fiber", Applied Optics, **18**, 19 (1979)

[11] A. Hasegawa & F. Tappert, "Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion", Applied Physics Letters, **23**, 3 (1973)

[12] D. U. Martin, H. C. Yuen, P. G. Saffman, "Stability of plane wave solutions of the two-space-dimensional nonlinear Schroedinger equation", Wave Motion, **2**, 215-29 (1980)

[13] L. Mollenauer & J. Gordon, *Solitons in optical fibers: Fundamentals and Applications*, Academic Press, 2006

[14] R. J. Mears, L. Reekie, I. M. Jauncey, D. N. Payne, "Low-noise Erbium-doped fibre amplifier at 1.54μm", Electronics Letters, **23**, 1026-1028 (1987)

[15] K. Tajima, "Compensation of soliton broadening in nonlinear optical fibers with loss", Optics Letters, **12**, 1 (1987)

[16] J. E. Bjorkholm & A. Ashkin, "cw Self-Focusing and self-Trapping of light in sodium vapor", Physical Review Letters, **32**, 4 (1974)

[17] Z. Chen, M. Segev, D. N. Christodoulides, "Optical spatial solitons: historical overview and recent advances", Reports on Progress in Physics, **75** (2012)

[18] Y. Kivshar, G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fiber to Photonic Crystals*, Elsevier Academic Press, San Diego, 2003

[19] D. N. Christodoulides & R. I. Joseph, "Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides", Optics Letters, **13**, 9 (1988)

[20] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd, J. S. Aitchinson, "Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays", Physical Review Letters, **81** (1998)

[21] F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, Y. Silberberg, "Discrete solitons in optics", Physics Reports, **463**, 1-126 (2008)

[22] O. Bang, P. D. Miller, "Exploiting discreteness for switching in waveguide arrays", Optics Letters, **21**, 1105, 1996

[23] W. Krolikowski, Y. S. Kivshar, "Soliton-based optical switching in waveguide arrays", Journal of Optical Society of America B **13**, 876 (1996)

[24] A. T. Filippov, *The Versatile Soliton*, Modern Birkauser Classics, 2010

[25] G. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (4^{th} ed.), Academic Press, San Diego, 2007

[26] Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2003

[27] G. Agrawal, *Applications of Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, San Diego, 2001

[28] B. Malomed, D. Mihalache, F. Wise, L. Torner, "Spatiotemporal optical solitons", Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, **7** (2005)

[29] V. E. Zakharov & V. S. Synakh, Soviet Physics JETP, **41**, 465 (1975)

[30] Y. R. Shen, "Self Focusing: Experimental", Progress in Quantum Electronics, **4**, 1 (1975)

[31] C. Conti, S. Trillo, P. Di Trapani, G. Valiulis, A. Piskarskas, O. Jedrkiewicz, J. Trull, "Nonlinear electromagnetic X waves", Physical Review Letters, **90**, 170406 (2003)

[32] H. L. Pecseli & J. J. Rasmussen, "Nonlinear electron waves in strongly magnetized plasmas", Plasma Physics, **22**, 421 (1980)

[33] V. M. Perez-Garcia, V. V. Konotop, J. J. Garcia-Ripoll, "Dynamics of quasicollapse in nonlinear Schroedinger systems with nonlocal interactions", Physical Review E, **62**, 4300 (2000)

[34] W. Krolikowski, O. Bang, J. J. Rasmussen, J. Wyller, "Modulational instability in nonlocal nonlinear Kerr media", Physical Review E, **64**, 16612 (2001)

[35] N. N. Rosanov, A. G. Vladimirov, D. V. Skryabin, W. J. Firth, "Internal Oscillations of solitons in two-dimensional NLS equation with nonlocal nonlinearity", Physics letters A, **293**, 45 (2002)

[36] A. I. Jones, "Coupling of optical fibers and scattering in fibers", Journal of Optical Society of America, **55**, 261 (1965)

[37] S. Somekh, E. Garmire, A. Yariv, H. L. Garvin, R. G. Hunsperger, "Channel optical waveguide directional couplers", Applied Physics Letters, **22**, 46 (1973)

[38] J. D. Joannopoulos, P. R. Villeneuve, S. H. Fan, “Photonic crystals: Putting a new twist on light”, Nature **386**, 143 (1997)

[39] S. E. Miller, “Coupled wave theory and waveguide applications”, Bell System Technical Journal (1954)

[40] J. R. Pierce, “Coupling of modes of propagations”, Journal of Applied Physics, **25** (1954)

[41] A. W. Snyder, “Coupled-Mode theory for optical fibers”, Journal of Optical Society of America, **62**, 11 (1972)

[42] A. Yariv, “Coupled-mode theory for guided wave optics”, IEEE Journal of Quantum Electronics, **9** (1973)

[43] V. E. Zakharov, S. V. Manakov, S. E. Novikov, L. P. Pitaevskii, *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Transform*, Nauka, Moscow, 1980

[44] D. Anderson, “Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers”, Physical Review A, **27**, 6 (1983)

[45] A. D. Bonderson, M. Lisak, D. Anderson, “Soliton perturbations: a variational principle for the soliton parameters”, Physica Scripta, **20**, 479-485 (1979)

[46] I. C. Khoo, *Liquid Crystals* (2^{nd} ed.), Willey & Sons, NJ, 2007

[47] P. de Gennes, J. Prost*, The Physics of Liquid Crystals* (2^{nd} ed.), Oxford University Press, USA, London, 1995

[48] S. Chandrasekhar, Liquid Crystals (2^{nd} ed.), Cambridge University Press, 1992

[49] C. Conti, M. Peccianti, G. Assanto, “Route to nonlocality and observation of accessible solitons”, Physical Review Letters, **91**, 7 (2003)

[50] W. P. Su, J. R. Schrieffer, A. J. Heeger, “Solitons in polyacetelene”, Physical Review Letters, **42**, 1698-1701 (1979)

[51] A. S. Davydov, N. I. Kislukha, “Solitary excitations in one-dimensional molecular chains”, Physical Status Solidi B, **59**, 465-470 (1973)

[52] A. Trombettoni, A. Smerzi, “Discrete solitons and breathers with dilute Bose-Einstein condensates”, Physical Review Letters, **86**, 2353-2356 (2001)

[53] M. Peccianti, G. Assanto, “Nematicons”, Physics Reports, **516**, 147-208 (2012)

[54] A. Fratalocchi, G. Assanto, “Discrete light localization in one-dimensional nonlinear lattices with arbitrary nonlocality”, Physical Review E, **72** (2005)

[55] A. Piccardi, M. Peccianti. G. Assanto, A. Dyadyusha, M. Kaczmarek, “Voltage driven in plane steering of nematicons”, Applied Physics Letters, **94** (2009)

[56] M. Peccianti, C. Conti, G. Assanto, A. De Luca, C. Umeton, “All optical switching and logic gating with spatial solitons in liquid crystals”, Applied Physics Letters, **81**, 3335 (2002)

[57] M. Peccianti & G. Assanto, “Signal readdressing by steering of spatial solitons in bulk nematic liquid crystals”, Optics Letters, **26**, 21 (2001)

[58] G. Assanto, L. Cisneros, A. Minzoni, B. Skuse, N. F. Smyth, A. Worthy, “Soliton steering by longitudinal modulation of the nonlinearity in waveguide arrays”, Physical Review Letters, **104**, 5 (2010)

[59] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (2nd ed.), Addison Wesley Publishing Company, Reading, 1980

[60] J. Lichtenberg & M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics* (2nd ed.), Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1992

[61] M. Peccianti, G. Assanto, A. De Luca, C. Umeton, I. C. Khoo, “Electrically assisted self-confinement and waveguiding in planar nematic liquid crystal cells”, Applied Physics Letters, **77**, 7-9 (2000)

[62] J. F. Henninot, M. Debailleul, M. Warenghem, “Tunable non-locality of thermal non-linearity in dye doped nematic liquid crystal”, Molecular Crystals and Liquid Crystals, **375**, 631-640 (2002)

[63] P. Papagiannis, Y. Kominis, K. Hizanidis, “Power and momentum dependent soliton dynamics in lattices with longitudinal modulation”, Physical Review A, **84**, 13820 (2011)

[64] Y. Kartashov, V. Vysloukh, L. Torner, “Propagation of solitons in thermal media with periodic nonlinearity”, **33**, 15, Optics Letters (2008)

[65] H. Zhang, D. Xu, J. Zou, H. Zeng, Y. Tian, “Soliton control in inhomogeneous nonlocal media”, **5**, 1 (2011)

[66] A. V. Zhukov, I. O. Zolotovskii, O. G. Okhotnikov, D. I. Sementsov, A. A. Sysolyatin, I. O. Yavtushenko, “Dynamics of frequency-modulated soliton-like pulses in a longitudinally inhomogeneous active optical waveguide”, Optics and Spectroscopy, **113**, 1 (2012)

[67] I. L. Garanovich, S. Longhi, A. A. Sukhorukov, Y. S. Kivshar, “Light propagation and localization in modulated photonic lattices and waveguides”, Physics Reports, **518**, 1-79 (2012)

[68] F. Ye, Y. Kartashov, L. Torner, “Enhanced soliton interactions by inhomogeneous nonlocality and nonlinearity”, Physical Review A, **76**, 033812 (2007)

[69] B. Malomed, M. I. Weinstein, “Soliton dynamics in the discrete nonlinear Schroedinger equation”, Physics Letters A, **220**, 91-96 (1996)

[70] G. Assanto, A. A. Minzoni, N. F. Smyth, “Light self-localization in nematic liquid crystals: modeling solitons in nonlocal reorientational media”, Journal of Nonlinear Optical Physics and Materials, **18**, 4 (2009)

[71] S. Trillo, W. E. Torruellas, *Spatial Solitons*, Springer-Verlag, 1998

[72] J. C. Eilbeck, P. S. Lombahl, A. C. Scott, “The discrete self-trapping equation”, Physica D, **14**, 318-338 (1985)

[73] A. J. Sievers, S. Takeno, “Intrinsic localized modes in anharmonic crystals”, Physical Review Letters, **61**, 970-973 (1988)

[74] S. Darmanyan, A. Kobyakov, E. Schmidt, F. Lederer, “Strongly localized vectorial modes in nonlinear waveguide arrays”, Physical Review E, **57**, 3520-3529 (1998)

[75] S. Darmanyan, A. Kobyakov, F. Lederer, L. Vazquez, “Discrete fronts and quasirectangular solitons”, Physical Review B, **59**, 5994-5997 (1998)

[76] S. Darmanyan, A. Kobyakov, F. Lederer, “Stability of strongly localized excitations in discrete media with cubic nonlinearity”, Journal of Experimental and Theoretical Physics, **86**, 682-685 (1998)

[77] P. D. Rasmussen, O. Bang, W. Krolikowski, “Theory of nonlocal soliton interaction in nematic liquid crystals”, Physical Review E, **72**, 066611 (2005)

[78] W. Hu, T. Zhang, Q. Guo, L. Xuan, S. Lan, “Nonlocality-controlled interaction of spatial solitons in nematic liquid crystals”, Applied Physics Letters, **89**, 071111 (2006)

[79] M. Peccianti, K. Brzdakiewicz, G. Assanto, “Nonlocal spatial soliton interactions in nematic liquid crystals”, Optics Letters, **27**, 16 (2002)

[80] E. Braun, L. Faucheux, A. Libchaber, “Strong self-focusing in nematic liquid crystals”, Physical Review A, **48**, 611-622 (1993)

[81] U. Peschel, R. Morandotti, J. S. Aitchinson, H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, “Nonlinearly induced escape from a defect state in waveguide arrays”, Applied Physics Letters, **75**, 10 (1999)

[82] T. Pertch, T. Zentgral, U. Peschel, A. Brauer, F. Lederer, “Anomalous refraction and diffraction in discrete optical systems”, Physical Review Letters, **88**, 9 (2002)

[83] A. B. Aceves, C. De Angelis, T. Peschel, R. Muschall, F. Lederer, S. Trillo, S. Wabnitz, “Discrete self-trapping, soliton interactions, and beam steering in nonlinear waveguide arrays”, Physical Review E, **53**, 1172-1189 (1996)

[84] E. Smirnov, M. Stepic, C. Ruter, V. Shandarov, D. Kip, “Interaction of counterpropagating discrete solitons in nonlinear one-dimensional waveguide array”, Optics Letters, **32**, 5 (2007)

[85] D. N. Christodoulides, E. D. Eugenieva, “Blocking routing discrete solitons in two-dimensional networks of nonlinear waveguide arrays”, Physical Review Letters, **87**, 233901 (2001)

[86] D. N. Christodoulides, E. D. Eugenieva, “Minimizing bending losses in two-dimensional discrete soliton networks”, Optics Letters, **26**, 1876 (2001)

[87] E. D. Eugenieva, N. K. Efremidis, D. N. Christodoulides, “Design of switching junctions for two-dimensional discrete soliton networks”, Optics Letters, **26**, 1978 (2001)

[88] E. Smirnov, C. E. Ruter, M. Stepic, V. Shandarov, D. Kip, “Dark and bright blocker soliton interaction in defocusing waveguide arrays”, Optics Express, **14**, 23 (2006)

[89] J. Meier, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, Y. Silberberg, R. Morandotti, H. Yang, G. Salamo, M. Sorel, J. S. Aitchinson, “Beam interactions with a “blocker” soliton in 1D arrays”, Optics Letters, **30**, 1027 (2005)

[90] J. Meier, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, R. Morandotti, H. Yang, G. Salamo, M. Sorel, Y. Silberberg, J. S. Aitchinson, “Incoherent blocker soliton interaction in Kerr waveguide arrays”, Optics Letters, **30**, 3174 (2005)

[91] G. Gligoric, A. Maluckov, M. Stepic, L. Hadzievski, B. Malomed, “Two-dimensional discrete solitons in dipolar Bose-Einstein condensates”, Physical Review A, **81**, 013633 (2010)

[92] G. Gligoric, A. Maluckov, M. Stepic, L. Hadzievski, B. Malomed, “Soliton stability and collapse in the discrete nonpolynomial Schroedinger equation with dipole-dipole interactions”, Physical Review A, **79**, 053609 (2009)

[93] G. Gligoric, A. Maluckov, M. Stepic, L. Hadzievski, B. Malomed, “Bright solitons in the one-dimensional Gross-Pitaevskii equation with dipole-dipole interactions”, Physical Review A, **78**, 063615 (2008)

[94] B. K. Esbensen, M. Bache, O. Bang, W. Krolikowski, “Anomalous interaction of nonlocal solitons in media with competing nonlinearities”, Physical Review A, **86**, 3 (2012)

[95] Y. Du, Z. Zhou, H. Tian, D. Liu, “Bright solitons and repulsive in-phase interaction in media with competing nonlocal Kerr nonlinearities”, Journal of Optics, **13**, 015201 (2011)

[96] Y. V. Izdebskaya, V. G. Shvedov, A. S. Desyatnikov, W. Krolikowski, Y. S. Kivshar, “Soliton bending and routing induced by interaction with curved surfaces in nematic liquid crystals”, Optics Letters, **35**, 10 (2010)

[97] G. Assanto, *Nematicons: Spatial Optical Solitons in Nematic Liquid Crystals*, John Wiley & Sons, 2012

[98] Z. Xu, Y. V. Kartashov, L. Torner, “Soliton mobility in nonlocal optical lattices”, Physical Review Letters, **95**, 113901 (2005)

[99] Z. Dai, Y. Wang, Q. Guo, “Mobility of strongly nonlocal solitons in optical lattices”, Physical Review A, **77**, 063834 (2008)

[100] I. C. Khoo, “Theory of optically induced molecular reorientations and quantitative experiments on wave mixing and the self-focusing of light”, Physical Review A, **25**, 1637 (1982)

[101] G. Assanto, M. Karpierz, “Nematicons: self-localized beams in nematic liquid crystals”, Liquid Crystals, **36**, 1161 (2009)

[102] A. Fratalocchi, G. Assanto, K. Brzdadkiewicz, M. A. Karpierz, “Discrete light propagation and self-trapping in liquid crystals”, Optics Express, **13**, 6 (2005)

[103] G. Assanto, A. Fratalocchi, M. Peccianti, “Spatial solitons in nematic liquid crystals: from bulk to discrete”, Optics Express, **15**, 8 (2007)

[104] J. Meier, J. Hudock, D. Christodoulides, G. Stegeman, H. Yang, G. Salamo, R. Morandotti, J.S. Aitchinson, Y. Silberberg, “Excitation of strongly confined scalar and vector self-trapped beams in one-dimensional arrays of Kerr-nonlinear channel waveguides”, Journal of the Optical Society of America B, **22**, 7 (2005)

[105] J. W. Fleischer, M. Segev, N. K. Efremidis, D. N. Christodoulides, “Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices”, Nature **422**, 147-150 (2003)

[106] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, “Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases”, Reviews of Modern Physics, **71**, 463 (1999)

[107] A. C. Eringen, “On nonlocal fluid mechanics”, International Journal of Engineering Science, **10**, 561-575 (1971)

[108] D. Briedis, D. E. Petersen, D. Edmundson, W. Krolikowski, O. Bang, “Ring vortex solitons in nonlocal nonlinear media”, Optics Express, **13**, 435 (2005)

[109] D. Mihalache, D. Mazilu, F. Lederer, B. A. Malomed, Y. V. Kartashov, L. C. Crasovan, L. Torner, " Three dimensional spatiotemporal optical solitons in nonlocal nonlinear media", Physical Review E, **73**, 025601 (2006)

[110] J. Salo, J. Fagerholm, A. T. Friberg, M. M. Salomaa, "Non-diffracting bulk-acoustic X waves in crystals", Physical Review Letters, **83**, 1171 (1999)

[111] R. W. Boyd, S. G. Lukishova, Y. R. Shen, Self-Focusing: Past and present, Springer, New York, 2009

[112] M. Peccianti, I. Burgess, G. Assanto, R. Morandotti, "Space-time bullet trains via modulation instability and nonlocal solitons", Optics Express, **18**, 5934-5941 (2010)

[113] A. I. Strinic, D. V. Timoijevic, D. Arsenovic, M. S. Petrovic, M. R. Belic, "Spatiotemporal optical instabilities in nematic solitons", Optics Express, **13**, 493 (2005)

[114] J. Beeckman, K. Neyts, X. Hutsebaut, C. Cambournac, M. Haelterman, " Time dependence of soliton formation in planar cells of nematic liquid crystals", IEEE Journal of Quantum Electronics, **41**, 5 (2005)

[115] M. Desaix, D. Anderson, M. Lisak, "Variational approach to collapse of optical pulses", Journal of Optical Society of America B, **8**, 10 (1991)

[116] V. E. Zakharov, V. S. Synakh, "The nature of the self-focusing singularity", Journal of experimental and theoretical physics, **41**, 3 (1975)

[117] C. Conti, S. Trillo, P. Di Trapani, G. Valiulis, A. Piskarskas, O. Jedrkiewicz, J. Trull, "Nonlinear electromagnetic X waves", Physical Review Letters, **90**, 093904 (2003)

[118] P. Di Trapani, G. Valiulis, A. Piskarskas, O. Jedrkiewicz, J. Trull, C. Conti, S. Trillo, "Spontaneously generated X-shaped light bullets", Physical Review Letters, **91**, 093904 (2003)

[119] S. Droulias, K. Hizanidis, J. Meier, D. N. Christodoulides, "X-waves in nonlinear normally dispersive waveguide arrays", Optics Express, **13**, 1827 (2005)

[120] K. A. Brzdakiewicz, A. Fratalocchi, G. Assanto, "Discrete optical solitons in nematic liquid crystals", Molecular Crystals and Liquid Crystals, **421**, 61-68 (2004)

[121] A. Fratalocchi, G. Assanto, K. A. Brzdakiewicz, M. A. Karpierz, "Discrete light propagation and self-trapping in nematic liquid crystals", Optics Express, **13**, 6 (2005)

[122] Y. Lahini, E. Frumker, Y. Silberberg, S. Droulias, K. Hizanidis, R. Morandotti, D. N. Christodoulides, "Discrete X-wave formation in nonlinear waveguide arrays", Physical Review Letters, **98**, 023901 (2007)

[123] J. Joannopoulos, R. D. Meade, J. N. Winn, S. G. Johnson, *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light* (2nd ed.), Princeton University Press (2008)

[124] H. Martin, E. D. Eugenieva, Z. Chen, D. N. Christodoulides, "Discrete solitons and soliton-induced dislocations in partially coherent photonic lattices", Physical Review Letters, **92**, 123902-4 (2004)

[125] A. Szameit, D. Blomer, J. Burghoff, T. Pertsch, S. Nolte, A. Tunnermann, "Hexagonal waveguide arrays written with fs-laser pulses", Applied Physics B, **82**, 507-512 (2006)

[126] U. Ropke, H. Bartelt, S. Unger, K. Schuster, J. Kobelke, “Two-dimensional high-precision fiber waveguide arrays for coherent light propagations”, Optics Express, **15**, 6894-6899 (2007)

[127] C. R. Rosberg, F. H. Bennet, D. N. Neshev, P. D. Rasmussen, O. Bang, W. Krolikowski, A. Bjarklev, Y. S. Kivshar, “Tunable diffraction and self-focusing in liquid-filled photonic crystal fibers”, Optics Express, **15**, 19 (2007)

[128] T. T. Larsen, A. Bjarklev, D. S. Hermann, J. Broeng, “Optical devices based on liquid crystal photonic bandgap fibres”, Optics Express, **11**, 20 (2003)

[129] T. T. Alkeskjold, J. Laegsgaard, A. Bjarklev, D. S. Hermann, A. Anawati, J. Broeng, J. Li, S.-T. Wu, “All-optical modulation in dye-doped nematic liquid crystal photonic bandgap fibers”, Optics Express, **12**, 24 (2004)

[130] R. F. Souza, M. Alencar, M. R. Meneghetti, J. M. Hickmann, “Large nonlocal nonlinear optical response of castor oil”, Optical Materials, **31**, 11 (2009)

[131] M. Castro, A. Andrade, R. Franco, P. Miranda, M. Sthel, H. Vargas, R. Constantino, M. Baesso, “Thermal properties measurements in biodiesel oils using photothermal techniques”, Chemical Physics, 411, 18-22 (2005)

[132] P. N. Prasad, D. J. Williams, *Introduction to Nonlinear Optical Effects in Molecules and Polymers*, Wiley Interscience, New York (1991)

[133] W. Yuan, L. Wei, T. T. Alkskjold, A. Bjarklev, O. Bang, “Thermal tunability of photonic bandgaps in liquid crystal infiltrated microstructured polymer optical fibers”, Optics Express, **17**, 22 (2009)

[134] L. Rindorf, J. B. Jensen, M. Dufva, L. H. Pedersen, P. E. Hoiby, O. Bang, “Photonic crystal fiber long-period gratings for biochemical sensing”, Optics Express, **14**, 18 (2006)

[135] P. S. Westbrook, B. J. Eggleton, R. S. Windeler, A. Hale, T. A. Strasser, G. L. Burdge, “Cladding-mode resonances in hybrid polymer-silica microstructured optical fiber gratings”, IEEE Photonics Technology Letters, **12**, 5 (2000)

[136] H. W. Lee, M. A. Schmidt, H. K. Tyagi, L. P. Sempere, P. Russel, “Polarization-dependent coupling to plasmon modes on submicron gold wire in photonic crystal fiber”, Applied Physics Letters, **93**, 11 (2008)

[137] F. Wang, W. Yuan, O. Hansen, O. Bang, “Selective filling of photonic crystal fibers using focused ion beam milled microchannels”, Optics Express, **19**, 18 (2011)

[138] W. Quian, C.-L. Zhao, Y. Wang, C. C. Chan, S. Liu, W. Jin, “Partially liquid-filled hollow-core photonic crystal fiber polarizer”, Optics Letters, **36**, 16 (2011)

[139] A. M. Apetrei, M. C. Huy, N. Belabas, J. A. Levenson, J.-M. Moison, J. M. Dudley, G. Melin, A. Fleureau, L. Galkovsky, S. Lempereur, “A dense array of small coupled waveguides in fiber technology: trefoil channels of microstructured optical fibers”, Optics Express, **16**, 25 (2008)

[140] P. D. Rasmussen, A. A. Sukhorukov, D. N. Neshev, W. Krolikowski, O. Bang, J. Laegsgaard, Y. S. Kivshar, “Spatiotemporal control of light by Bloch-mode dispersion in multi-core fibers”, Optics Express, **16**, 8 (2008)

[141] F. H. Bennet, I. A. Amuli, A. A. Sukhorukov, W. Krolikowski, D. N. Neshev, Y. S. Kivshar, “Focusing-to-defocusing crossover in nonlinear periodic structures”, Optics Letters, **35**, 19 (2010)

[142] A. Salazar, “Energy propagation of thermal waves”, European Journal of Physics, **27**, 1349-1355 (2006)

[143] C. Cattaneo, “On the conduction of heat”, Compte Rendus, 247-431 (1958)

[144] J. Russel, “Photonic crystal fibers”, Science, **299**, 358-362 (2003)

[145] J. Dudley, G. Genty, S. Coen, “Supercontinuum generation in photonic crystal fiber”, Reviews of Modern Physics, **78** (2006)

Συνοπτικό Βιογραφικό Σημείωμα

Επιστημονικά Ενδιαφέροντα

Μη γραμμικά φαινόμενα, Σολιτόνια, Χάος, Δυναμικά συστήματα, Μοντελοποίηση οπτικής διάδοσης

Ακαδημαϊκή Μόρφωση

Διδακτορική διατριβή, Σ.Η.Μ.Μ.Υ.-Ε.Μ.Π.
MSc in Photonics and Optoelectronic Devices, Universities St. Andrews/Heriot-Watt
Πτυχίο στη Φυσική, Ε.Κ.Π.Α.

Δημοσιεύσεις σε Περιοδικά - Διεθνή Συνέδρια με κρίση

Περιοδικό

G. Papazisimos, Y. Kominis, N. Moshonas, P. Papagiannis, K. Hizanidis, "*Solitary wave dynamics in transversely and longitudinally modulated nonlocal media*", Optics Communications 2013.

Πρακτικά συνεδρίων

- **G. Papazisimos**, L. Halastanis, S. Droulias, P. Papagiannis, Y. Kominis, K. Hizanidis "*Discrete X-waves in one-dimensional nonlinear liquid crystal waveguide arrays*" , SPIE Prague 2007(oral presentation).
- P. Papagiannis, L. Halastanis, **G. Papazisimos**, N. Moshonas, S. Droulias, Y. Kominis, K. Hizanidis., "*Spatio-temporal pattern formation in slab nematic liquid crystal cells*", SPIE Prague 2007
- Y. Kominis, A. Papadopoulos, I. Tsopelas, S. Droulias, N. Efremidis, **G. Papazisimos** and K. Hizanidis, "*Surface Lattice Solitons: Analytical Solutions of a Kronig-Penney Model*", NLO, WE17, Hawaii, USA 2007
- L. Halastanis, **G. Papazisimos**, M. Manousakis, S. Droulias, N. Moshonas, P. Papagiannis, I. Tsopelas, K. Hizanidis "*Variational approach to spatial soliton formation in bulk nematic liquid crystal cells*", SPIE ROMOPTO 2006
- I. Tsopelas, Y. Kominis, K. Hizanidis, N. Efremidis, S. Droulias, L. Halastanis, **G. Papazisimos**, N. Moshonas, P. Papagiannis "*Soliton dynamics and interactions in dynamically photo-induced lattices*" , SPIE ROMOPTO 2006