



**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και
Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών
Τομέας Συστημάτων Μετάδοσης Πληροφορίας
και Τεχνολογίας Υλικών**

**Διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων υπεράνω επιπέδου εδάφους με
απώλειες, για εφαρμογές στις ασύρματες τηλεπικοινωνίες : ακριβής
διατύπωση και επίλυση του προβλήματος στον φασματικό χώρο**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΧΡΗΣΤΟΥ Κ. ΧΡΗΣΤΑΚΗ

**Απόφοιτου Σχολής Τηλεπικοινωνιών Ηλεκτρονικών Αξιωματικών Διαβιβάσεων
(ΣΤΗΑΔ)**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Π. Φράγκος

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Φεβρουάριος 2016



**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και
Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών
Τομέας Συστημάτων Μετάδοσης Πληροφορίας
και Τεχνολογίας Υλικών**

**Διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων υπεράνω επιπέδου εδάφους με
απώλειες, για εφαρμογές στις ασύρματες τηλεπικοινωνίες : ακριβής
διατύπωση και επίλυση του προβλήματος στον φασματικό χώρο**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΧΡΗΣΤΟΥ Κ. ΧΡΗΣΤΑΚΗ

Απόφοιτου Σχολής Τηλεπικοινωνιών Ηλεκτρονικών Αξιοματικών Διαβιβάσεων (ΣΤΗΑΔ)

Συμβουλευτική Επιτροπή: Π. Φράγκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π (επιβλέπων)
Ν. Ουζούνογλου, Καθηγητής Ε.Μ.Π
Α. Παναγόπουλος, Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την Φεβρουαρίου 2016.

Π. Φράγκος
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Ν. Ουζούνογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Χ. Καψάλης
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Π. Κωττής
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Δ. Φραντζεσκάκης
Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α

Α. Παναγόπουλος
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Π. Στεφανέας
Λέκτορας ΣΕΜΦΕ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2016

.....
Χρήστος Κ. Χρηστάκης

Διδάκτωρ Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Χρήστος Κ. Χρηστάκης, 2016.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Αφιερώνεται

στη σύζυγό μου Βιβή

και στα παιδιά μου

Νατάσα, Έλενα, Μελίνα

και Κωνσταντίνο.

Περίληψη

Αντικείμενο της διατριβής αποτελεί η μελέτη στο πρόβλημα της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από ένα κατακόρυφο μικρό δίπολο (δίπολο Hertz) επάνω από το επίπεδο έδαφος με απώλειες. Αυτό αντιπροσωπεύει το γνωστό πρόβλημα ακτινοβολίας του Sommerfeld, το οποίο διατυπώνεται με μία νέα μέχρι τώρα προσέγγιση, την φασματική. Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο τρισδιάστατο μετασχηματισμό του Fourier, λαμβάνουμε εκφράσεις για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο (HM) (στον φυσικό χώρο, πλέον), αποτελούμενες από μονοδιάστατα ολοκληρώματα, έχοντας ως βάση το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιώντας την μέθοδο στάσιμης φάσης (SPM) στην περιοχή των υψηλών συχνοτήτων, λαμβάνονται κλειστοί αναλυτικοί τύποι για το HM πεδίο στην λήψη. Στην περιοχή των υψηλών συχνοτήτων και για γωνίες πρόσπτωσης (grazing angle) όχι πολύ μικρές, η προκύπτουσα λύση είναι το αποκαλούμενο 'κύμα χώρου' (απευθείας και ανακλώμενα κύματα), οπότε στην περίπτωση αυτή το ονομαζόμενο 'κύμα επιφανείας' μπορεί να αγνοηθεί. Τέλος, τα αριθμητικά αποτελέσματα στην περιοχή των υψηλών συχνοτήτων παρουσιάζονται σε σύγκριση με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα βασισμένα στη λύση Norton (κύματα χώρου και επιφανείας).

Λέξεις – κλειδιά: πρόβλημα ακτινοβολίας του Sommerfeld, λύση στον φασματικό χώρο, μέθοδος στάσιμης φάσης, περιοχή υψηλών συχνοτήτων.

Abstract

This dissertation focuses on the study of radiation from a vertical short (Hertzian) dipole above flat lossy ground, which represents the well-known in the literature ‘Sommerfeld radiation problem’. The problem is formulated in a novel spectral domain approach, and by inverse three-dimensional Fourier transformation the expressions for the received electric and magnetic (EM) field in the physical space are derived as one-dimensional integrals over the radial component of wavevector, in cylindrical coordinates. Subsequent use of the Stationary Phase Method (SPM) in the high frequency regime yields closed-form analytical solutions for the received EM field vectors, which coincide with the corresponding reflected EM field originating from the image point. In this way, we conclude that the so-called in the literature ‘space wave’ (line of sight plus reflected EM field) represents the total solution of the Sommerfeld problem in the high frequency regime, in which case the surface wave can be ignored (as far as the ‘grazing angle’ of the incident EM wave is not very small). Finally, numerical results in the high frequency regime are presented in this paper, in comparison with corresponding numerical results based on Norton’s solution of the problem (space and surface waves).

Index Terms: Sommerfeld radiation problem, spectral domain solution, Stationary Phase Method (SPM), high frequency approximation.

Ευχαριστίες

Για την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω κάποιους ανθρώπους που με τον τρόπο τους συνέβαλαν σε αυτό.

Πρώτα απ' όλους, τον καθηγητή Ε.Μ.Π. κ. Παναγιώτη Φράγκο ο οποίος με την ιδιότητα του επιβλέποντος μου ανέθεσε τη συγκεκριμένη έρευνα, συνέβαλε σε αυτή τόσο με την άψογη επιστημονική του επίβλεψη (ημέρα και νύχτα) όσο και με την επίτευξη της επιθυμητής προόδου, εξέλιξης και ολοκλήρωσης της διατριβής. Τον καθηγητή Ε.Μ.Π. κ. Νικόλαο Ουζούνογλου, ο οποίος με εμπιστεύτηκε σε κάθε μου βήμα και το έδειξε αυτό όποτε χρειάστηκε, έμπρακτα. Τους Ταξίαρχο (ε.α.) κ. Νικόλαο Καρολεμέα, πρώην Διοικητή της ΣΤΗΑΔ και Μ.Υ. κ. Αναστάσιο Σκεμπέ, επίσης της ΣΤΗΑΔ, οι οποίοι πίστεψαν σε εμένα και με στήριξαν καθ' όλη τη διάρκεια της προσπάθειάς μου. Την Αρετή Βαβέτση η οποία με αντικατέστησε επάξια στην ασφάλεια και υποχρεώσεις των παιδιών μου κατά την απουσία μου στην ΑΔΙΣΠΟ. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τον άνθρωπο της ζωής μου, τη σύζυγό μου Παρασκευή Βαβέτση, η οποία με κατανόηση, υπομονή και υπερηφάνεια υπήρξε αρωγός στη δύσκολη καθημερινότητα του κοινού μας βίου. Οφείλω να ευχαριστήσω και να ζητήσω ένα συγγνώμη από τα 4 υπέροχα παιδιά μου που τους στέρησα αρκετό χρόνο από την πατρική φροντίδα μέχρι την ολοκλήρωση της διατριβής, την οποία και τους την αφιερώνω.

Περιεχόμενα

Εισαγωγικό Σημείωμα-Δομή Διδακτορικής Διατριβής.....	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1- ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ.....	5
1. Μετασχηματισμός Fourier.....	6
2. Ο Προσδιορισμός ενός Πεδίου.....	9
3. Θεμελιώδεις Εξισώσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού.....	9
4. Εξισώσεις επί των Οριακών Συνθηκών.....	14
5. Επίπεδα Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα και Πόλωση αυτών.....	16
6. Επίλυση Ηλεκτρομαγνητικών Προβλημάτων.....	18
7. Πόλωση Κεραιών.....	19
8. Παράγοντας Απωλειών Πόλωσης.....	22
9. Η Συνάρτηση Bessel.....	24
10. Συναρτήσεις Hankel.....	26
11. Συναρτήσεις Green.....	29
12. Πρώτη Χρησιμοποίηση της Στάσιμης Φάσης από τον Stokes...	31
13. Μέθοδος Στάσιμης Φάσης.....	33
14. Τροποποιημένη μέθοδος Στάσιμης Φάσης.....	40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2- ΚΕΡΑΙΕΣ ΚΑΙ ΠΕΔΙΑ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ.....	51
1. Κεραίες.....	52
2. Διάγραμμα Ακτινοβολίας.....	54
3. Λοβοί Διαγράμματος Ακτινοβολίας.....	56
4. Εύρος Ζώνης Κεραίας.....	59
5. Ενεργός Επιφάνεια Κεραίας.....	61
6. Διάνυσμα Poynting.....	65
7. Ένταση Ακτινοβολίας.....	67
8. Κατευθυντικό Κέρδος – Κατευθυντικότητα.....	68
9. Κέρδος Ισχύος – Απόδοση Κεραίας.....	70
10. Η Εξίσωση του Friis.....	75
11. Περιοχές Ακτινοβολίας (Πεδίου).....	77
12. Επίδραση της Γης στην Ακτινοβολία Κεραίων-Ανάκλαση Επίπεδων Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων.....	78
13. Κεραίες πάνω από τη Γη-Θεωρία Ειδώλων.....	84
14. Ακτινοβολία στο Μακρινό Πεδίο.....	94
15. Το Βραχύ Δίπολο ή Δίπολο Hertz.....	96

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3- ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΔΟΣΗΣ

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ.....	105
1. Διάδοση Ηλεκτρομαγνητικών (H/M) Κυμάτων.....	106
2. Διάδοση σε Ελεύθερο Χώρο.....	112
3. Ανάκλαση.....	114
4. Διάδοση Πάνω από Επίπεδη Ανακλαστική Επιφάνεια.....	115
5. Κύματα Εδάφους.....	117
6. Κύμα Επιφανείας Norton.....	121

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4- ΔΙΑΔΟΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΥΠΕΡΑΝΩ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΕΔΑΦΟΥΣ ΜΕ ΑΠΩΛΕΙΕΣ, ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΑΣΥΡΜΑΤΕΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ : ΑΚΡΙΒΗΣ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟΝ ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ ΧΩΡΟ..... 128

1. Εισαγωγή.....	129
2. Γεωμετρία του Προβλήματος Ακτινοβολίας.....	130
3. Διατυπώσεις του Προβλήματος Ακτινοβολίας Sommerfeld στη Φασματική Περιοχή: Εκφράσεις για το Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο στη Λήψη σε Ολοκληρωτική Μορφή.....	132
3.1 Η/Μ Πεδία Συναρτήσεως Πυκνοτήτων Ρεύματος στη Φασματική Περιοχή.....	132
3.2 Διατύπωση του Προβλήματος Οριακών Συνθηκών.....	135
3.3 Εφαρμογή των Οριακών Συνθηκών – Λύση για τις Άγνωστες Πυκνότητες Ρεύματος επί της Επιφάνειας του Εδάφους στη Φασματική Περιοχή.....	138
4. Εκφράσεις για τα Ανακλώμενα και Μεταδιδόμενα Η/Μ Πεδία σε Ολοκληρωτική Μορφή.....	140
5. Η/Μ Πεδία Ανακλώμενα από Άπειρο, Επίπεδο και με Απώλειες Έδαφος στο Μακρινό Πεδίο: Κλειστοί Αναλυτικοί Τύποι που Λαμβάνονται Μέσω της Εφαρμογής της Μεθόδου Στάσιμης Φάσης (SPM) στην Περιοχή των Υψηλών Συχνοτήτων.....	141
6. Τελικοί Τύποι για το Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο στη Λήψη: Πεδία Ανακλώμενα από Έδαφος με Απώλειες.....	146
6.1 Ηλεκτρικό Πεδίο.....	146
6.2 Μαγνητικό Πεδίο.....	148
7. Αριθμητικά Αποτελέσματα στην Περιοχή των Υψηλών Συχνοτήτων –Σύγκριση με τα Αποτελέσματα Norton για τα Κύματα Χώρου και Επιφανείας.....	149

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5-ΕΠΙΛΟΓΟΣ.....	153
1. Συμπεράσματα.....	154
2. Μελλοντική Έρευνα.....	154
3. Βιβλιογραφικές Παραπομπές.....	156

Εισαγωγικό Σημείωμα-Δομή

Διδακτορικής Διατριβής

Η παρούσα διδακτορική διατριβή βασίστηκε στην έρευνα που διεξήχθη από το συγγραφέα στη φασματική περιοχή. Αντικείμενο της διατριβής αποτέλεσε η μελέτη της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων υπεράνω επιπέδου εδάφους με απώλειες, για εφαρμογές στις ασύρματες τηλεπικοινωνίες. Η σπουδαιότερη καινοτομία της διατριβής αυτής είναι ότι η ακριβής διατύπωση και επίλυση του προβλήματος που παρουσιάζεται είναι στο φασματικό χώρο. Στην παρούσα έρευνα, συγκριτικά με αντίστοιχες εργασίες, η μεν κλασική λύση Sommerfeld σε αυτό το πρόβλημα παρέχεται στο φυσικό διάστημα με τη χρησιμοποίηση των αποκαλούμενων δυνατοτήτων Hertz και δεν τελειώνει με κλειστούς αναλυτικούς τύπους, η δε του K.A. Norton που επικεντρώθηκε περισσότερο στις εφαρμογές μηχανικής του προβλήματος με προφανή εφαρμογή στις ασύρματες τηλεπικοινωνίες, παρείχε τις κατά προσέγγιση λύσεις οι οποίες αντιπροσωπεύονται από τις μάλλον μακροσκελείς αλγεβρικές εκφράσεις. Για την εγκυρότητα και αποδοτικότητα των μεθόδων που αναπτύσσονται στην παρούσα διατριβή περιλαμβάνονται ακριβείς μαθηματικές εκφράσεις και αποδείξεις για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο (HM) στο φασματικό χώρο. Αυτά, αποτελούνται από μονοδιάστατα ολοκληρώματα έχοντας ως βάση το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Επιπρόσθετα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο στάσιμης φάσης (SPM) σε καθεστώς υψηλών συχνοτήτων παράγονται κλειστοί αναλυτικοί τύποι για τα λαμβανόμενα HM πεδία τα οποία συμπίπτουν με τα αντίστοιχα ανακλώμενα HM πεδία που προέρχονται από το σημείο παρατήρησης. Κατ' αυτό τον τρόπο, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα αποκαλούμενα κύματα χώρου (απευθείας και ανακλώμενα κύματα) αντιπροσωπεύουν τη συνολική λύση του προβλήματος Sommerfeld σε καθεστώς υψηλών συχνοτήτων, οπότε σ' αυτή την περίπτωση το κύμα επιφάνειας μπορεί να αγνοηθεί. Τέλος τα ουσιαστικά αποτελέσματα αποτυπώνονται με τη σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων σε καθεστώς υψηλών συχνοτήτων με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα βασισμένα στη λύση Norton (κύματα χώρου και επιφανείας).

Στο πρώτο (εισαγωγικό) κεφάλαιο παρουσιάζεται συνοπτικά όλο το υπόβαθρο που απαιτείται για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα και τις τηλεπικοινωνίες. Ειδικότερα γίνεται αναφορά στο μετασχηματισμό Fourier, από τον οποίο μπορούν να αποκαλυφθούν οι φασματικές ιδιότητες ενός σήματος. Στη συνέχεια γίνεται μία επεξήγηση του πλήρους προσδιορισμού ενός πεδίου. Ακολούθως, περιγράφονται τα διανυσματικά μεγέθη του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και παρατίθενται οι τέσσερις εξισώσεις Maxwell σε διαφορική μορφή οι οποίες περιγράφουν τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα στα οποία ο τελευταίος απέδωσε ένα κυματικό χαρακτήρα ο οποίος βοήθησε στην εξήγηση της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό. Πραγματοποιείται μία ανάλυση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου επί της συνοριακής επιφάνειας (οριακές συνθήκες). Στο κεφάλαιο αυτό, εξετάζονται η πόλωση των επίπεδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και παρουσιάζεται η πλέον απλή επίλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων που είναι το επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται κατά μία συγκεκριμένη διεύθυνση. Γίνεται επίσης αναφορά και στην πόλωση των κεραιών καθώς και στον παράγοντα απωλειών της πόλωσης καθώς αποτελούν κρίσιμη παράμετρο για τον υπολογισμό ισχύος μιας ασύρματης ζεύξης. Ακολούθως, παρουσιάζεται το αμιγώς μαθηματικό υπόβαθρο και αφορά τις συναρτήσεις Bessel, Hankel και Green. Τέλος παρουσιάζεται η βασική για την παρούσα διατριβή μέθοδος στάσιμης φάσης (SPM) η οποία έχει εφαρμογή σε περιοχές υψηλών συχνοτήτων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφονται οι κεραιές και τα πεδία ακτινοβολίας. Συγκεκριμένα, γίνεται επεξήγηση πώς γίνεται η γέννηση, το διάγραμμα, οι λοβοί και η ένταση της ακτινοβολίας. Στη συνέχεια αναλύονται το εύρος ζώνης και η ενεργός επιφάνεια της κεραιάς. Γίνεται ειδική αναφορά στο διάνυσμα Poynting καθώς είναι η ποσότητα που χρησιμοποιείται για να συνδέσει την ισχύ που μεταφέρει το ηλεκτρομαγνητικό κύμα με το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. Ακολούθως παρουσιάζονται παράμετροι που περιγράφουν την απόδοση της κεραιάς όπως το κατευθυντικό κέρδος, η κατευθυντικότητα και το κέρδος ισχύος. Επιπλέον παρουσιάζεται η εξίσωση του Friis η οποία συνδέει την ισχύ λήψης που λαμβάνει μία κεραιά λήψης με την ισχύ που εκπέμπει μία κεραιά εκπομπής, όταν οι δύο κεραιές της ασύρματης ζεύξης έχουν οπτική επαφή και βρίσκονται η μία στη μακρινή περιοχή ακτινοβολίας της άλλης, καθώς ταιριάζει με τη γεωμετρία της παρούσας διατριβής.

Στο κεφάλαιο αυτό, περιγράφονται οι περιοχές ακτινοβολίας του πεδίου και η επίδραση της γης στην ακτινοβολία κεραιών και ιδιαίτερα στην ανάκλαση των επίπεδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Εξηγούμε αναλυτικά τη θεωρία ειδώλων καθώς πάνω σε αυτή στηριζόμαστε στη γεωμετρία της αμιγούς έρευνας. Τέλος, επεξηγείται η ακτινοβολία στο μακρινό πεδίο που είναι μείζονος σημασίας στις ασύρματες ζεύξεις και παρουσιάζεται ενδελεχώς το βραχύ δίπολο (δίπολο Hertz) καθώς αυτό αποτελεί το θεωρητικό μοντέλο μελέτης και χρησιμοποιείται ως ο ακτινοβολητής στην παρούσα διατριβή.

Στο τρίτο κεφάλαιο, γίνεται μια παρουσίαση στη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Αφού αναφέρουμε τις κατηγορίες των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, εστιάζουμε στα κύματα εδάφους και ειδικότερα στα κύματα επιφανείας και χώρου και από τα τελευταία στα απευθείας και τα ανακλώμενα κύματα που μας αφορούν στην παρούσα διατριβή. Επιπλέον αφού αναφέρουμε την πλέον καθοριστική παράμετρο για την ηλεκτρομαγνητική διάδοση που είναι η συχνότητα των H/M κυμάτων και παρουσιάσουμε τις διάφορες ζώνες συχνοτήτων, εξετάζουμε τα βασικά χαρακτηριστικά κάθε ζώνης ως προς τη δυνατότητα διάδοσης των κυμάτων εδάφους. Γίνεται αναφορά στα μοντέλα διάδοσης ελευθέρου χώρου και διάδοσης πάνω από επίπεδη ανακλαστική επιφάνεια. Στο κεφάλαιο αυτό, περιγράφονται τα κύματα εδάφους που προαναφέραμε. Γίνεται ειδική αναφορά στον K.A. Norton ο οποίος διαχωρίζει τα συστατικά του κύματος εδάφους σε αυτά που αποτελούν τα κύματα χώρου (απευθείας και ανακλώμενα κύματα) με τα κύματα επιφανείας και η οποία αποτελεί την πλέον ιδανική για πρακτικές εφαρμογές μορφή λύσεως. Επειδή το κύμα επιφανείας διαφέρει από αυτό του Sommerfeld, το αναλύουμε διεξοδικά και τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται στη σύγκριση με τα αποτελέσματα της δικής μας έρευνας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο προτείνεται μια ακριβής διατύπωση και επίλυση του προβλήματος Sommerfeld στον φασματικό χώρο και αφορά τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων υπεράνω επιπέδου εδάφους με απώλειες, για εφαρμογές στις ασύρματες τηλεπικοινωνίες. Αρχικά σχεδιάζουμε τη γεωμετρία του προβλήματος ακτινοβολίας. Ακολούθως, προβαίνουμε σε διατυπώσεις του προβλήματος ακτινοβολίας Sommerfeld στη φασματική περιοχή με εκφράσεις για το ηλεκτρικό

και μαγνητικό πεδίο στη λήψη σε ολοκληρωτική μορφή υπολογίζοντας τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία συναρτήσει των πυκνοτήτων ρεύματος και εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες για την επίλυση των άγνωστων πυκνοτήτων ρεύματος επί της επιφάνειας του εδάφους. Επιπλέον, λαμβάνουμε εκφράσεις για τα ανακλώμενα και μεταδιδόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία σε ολοκληρωτική μορφή. Ακόμη, εφαρμόζοντας την μέθοδο Στάσιμης Φάσης (SPM) στην περιοχή των υψηλών συχνοτήτων λαμβάνουμε κλειστούς αναλυτικούς τύπους για τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία τα οποία είναι ανακλώμενα από άπειρο, επίπεδο και με απώλειες έδαφος στο μακρινό πεδίο. Καταλήγοντας λαμβάνουμε για τα παραπάνω πεδία τους τελικούς τύπους για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο στη λήψη. Τέλος, πραγματοποιούμε σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων στην περιοχή των υψηλών συχνοτήτων με τα αποτελέσματα Norton για τα κύματα χώρου και επιφανείας.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και οι μελλοντικές κατευθύνσεις καθώς επίσης και οι βιβλιογραφικές αναφορές της παρούσας διατριβής.

Κεφάλαιο 1

***ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ ΚΑΙ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗΣ
ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ***

1. Μετασχηματισμός Fourier

Τα μαθηματικά εργαλεία που απαιτούνται για τη μετάβαση από το πεδίο του χρόνου σε αυτό της συχνότητας είναι συνηθέστερα η αναπαράσταση με σειρές Fourier (για περιοδικά σήματα) και ο μετασχηματισμός Fourier (για τα εν γένει περιοδικά και απεριοδικά σήματα). Δηλαδή, ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένα μαθηματικό εργαλείο με τη βοήθεια του οποίου περιγράφονται περιοδικές και μη περιοδικές συναρτήσεις στο πεδίο της συχνότητας.

Ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος $x(t)$ είναι ένας μετασχηματισμός που ορίζεται μέσω του ολοκληρώματος

$$X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.1)$$

η οποία μπορεί να γραφεί και

$$F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos 2\pi ftdt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\eta\mu 2\pi ftdt \quad (1.2)$$

Όταν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος, το σήμα $x(t)$ μπορεί να προσδιορισθεί μέσω του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier που ορίζεται μέσω του ολοκληρώματος

$$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (1.3)$$

Η ικανή συνθήκη ώστε ένα σήμα $x(t)$ να διαθέτει μετασχηματισμό Fourier είναι:

α. το $x(t)$ να ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirichlet σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα (t_1, t_2) και

β. το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$ να είναι πεπερασμένο.

Ωστόσο, η ανωτέρω συνθήκη δεν είναι και αναγκαία καθώς για τις τηλεπικοινωνίες σημαντικά σήματα που διαθέτουν μετασχηματισμό Fourier δεν ικανοποιούν τη συνθήκη. Σημειώνεται ότι όλα τα σήματα που παρουσιάζουν ενδιαφέρον στις τηλεπικοινωνίες διαθέτουν μετασχηματισμό Fourier αν και σε αρκετές περιπτώσεις δεν είναι γνωστός σε αναλυτική μορφή.

Στη γενική περίπτωση, ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια μιγαδική συνάρτηση, αδιάφορα αν η $x(t)$ είναι πραγματική ή μιγαδική συνάρτηση. Έτσι με εφαρμογή του ευθύ και αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier προκύπτουν οι σχέσεις:

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos 2\pi f t dt \quad (1.4)$$

$$\text{και } I(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \eta \mu 2\pi f t dt \quad (1.5)$$

όπου το $R(f)$ είναι άρτια συνάρτηση της συχνότητας f και το $I(f)$ είναι περιττή συνάρτηση της συχνότητας f .

Αν το σήμα $x(t)$ είναι άρτια συνάρτηση του χρόνου, ο μετασχηματισμός Fourier του έχει $I(f)=0$, δηλ. είναι πραγματική και άρτια συνάρτηση της συχνότητας f . Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιττή συνάρτηση του χρόνου, ο μετασχηματισμός Fourier του έχει $R(f)=0$, δηλαδή είναι φανταστική και περιττή συνάρτηση της συχνότητας f περιττή.

Με μία μικρή διερεύνηση προκύπτει ότι:

α. Αν το $|X(f)|$ είναι το μέτρο του $X(f)$ και $\text{Arg}\{X(f)\}$ το όρισμα του $X(f)$, τότε θα έχουμε $X(f) = |X(f)| e^{j\text{Arg}\{X(f)\}}$. Η γραφική παράσταση του $|X(f)|$ αποτελεί το φάσμα πλάτους του σήματος $x(t)$ και η γραφική παράσταση του $\text{Arg}\{X(f)\}$ αποτελεί το φάσμα φάσης του σήματος $x(t)$. Το $|X(f)|$ παίρνει πάντα θετικές τιμές και το $\text{Arg}\{X(f)\}$ παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

β. Για οποιοδήποτε πραγματικό σήμα $x(t)$, το $|X(f)|$ είναι άρτια συνάρτηση της συχνότητας f , δηλ. ισχύει: $|X(-f)| = |X(f)|$, και το $\text{Arg}\{X(f)\}$ είναι περιττή συνάρτηση της συχνότητας f , δηλ. ισχύει: $\text{Arg}\{X(-f)\} = -\text{Arg}\{X(f)\}$.

γ. Για οποιοδήποτε πραγματικό σήμα $x(t)$ ισχύει $X(-f) = X^*(f) = \overline{X(f)} =$ = συζυγής του $X(f)$ υπάρχει δηλαδή συμμετρία.

Ο μετασχηματισμός Fourier καθώς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός δημιουργούν μια άμεση σχέση μεταξύ του πεδίου του χρόνου και του πεδίου της συχνότητας [$x(t) \leftrightarrow X(f)$]. Αυτά τα δύο πεδία αποτελούν δυο εναλλακτικούς τρόπους

να ερμηνευτεί ένα σήμα. Παρόλο που ο μετασχηματισμός επιτρέπει την μετάβαση από το ένα πεδίο στο άλλο, δεν επιτρέπει τον συνδυασμό και των δύο πεδίων. Πιο συγκεκριμένα, πληροφορίες για τις χρονικές συνιστώσες δεν είναι διαθέσιμες όταν το σήμα μας περιγράφεται στο πεδίο των συχνοτήτων.

Η βασική ιδέα του μετασχηματισμού Fourier είναι ότι κάθε αυθαίρετο σήμα (για παράδειγμα του χρόνου) μπορεί πάντα να αναλυθεί σε μια ομάδα ημιτονοειδών καμπύλων διαφορετικών συχνοτήτων. Ο μετασχηματισμός Fourier παράγεται από τη διαδικασία προβολής του σήματος σε μια ομάδα βασικών συναρτήσεων, κάθε μια από τις οποίες είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη με μοναδική συχνότητα. Οι προκύπτουσες τιμές προβολής διαμορφώνουν το μετασχηματισμό Fourier (ή το φάσμα συχνότητας) του αρχικού σήματος. Η τιμή του σε μια συγκεκριμένη συχνότητα είναι ένα μέτρο της ομοιότητας του σήματος με την ημιτονοειδή βάση σε εκείνη την συχνότητα. Επομένως, οι φασματικές ιδιότητες του σήματος μπορούν να αποκαλυφθούν μέσω του μετασχηματισμού Fourier. Σε πολλές εφαρμογές εφαρμοσμένης μηχανικής, αυτό έχει αποδειχθεί εξαιρετικά χρήσιμο στο χαρακτηρισμό, την ερμηνεία, και τον προσδιορισμό των σημάτων.

Οι σειρές Fourier μπορούν να αναπαραστήσουν κάθε σήμα που είναι περιοδικό στο πεδίο του χρόνου ως ένα άθροισμα αρμονικά (δηλαδή συχνοτικά) σχετιζόμενων ημιτονοειδών κυμάτων. Η αναπαράσταση ενός σήματος στο πεδίο του χρόνου με ένα άθροισμα ημιτονικών ή συνημιτονικών όρων αναφέρεται συνήθως ως το φάσμα (spectrum) του σήματος.

Ενώ ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια πολύ χρήσιμη έννοια για τα στάσιμα σήματα, πολλά σήματα που αντιμετωπίζονται στις πραγματικές καταστάσεις έχουν συχνοτικό περιεχόμενο που αλλάζει κατά τη διάρκεια του χρόνου. Σε αυτήν την περίπτωση, είναι καλύτερο να μην χρησιμοποιούνται οι απλές ημιτονοειδείς συναρτήσεις ως συναρτήσεις βάσης και να χαρακτηρίζεται ένα σήμα από το φάσμα συχνότητάς του. Οι κοινές μετατροπές χρόνου-συχνότητας αναπτύχθηκαν με σκοπό το χαρακτηρισμό της χρονομεταβλητότητας του συχνοτικού περιεχομένου ενός σήματος.

Υπάρχει ένας σημαντικός αριθμός ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Fourier που επιτρέπει τη λύση πολλών προβλημάτων με πολύ απλό και σύντομο τρόπο. Θα αναφερθούμε μόνο σε μία. Στην ολίσθηση συχνότητας όπου πάνω σε αυτή βασίζεται η μετάθεση συχνότητας η οποία αποτελεί μία θεμελιώδη διαδικασία που απαντάται σε κάθε τηλεπικοινωνιακό σύστημα. Πιο αναλυτικά ισχύει:

$$x(t)\exp(j2\pi f_0 t) \leftrightarrow F(2\pi f - 2\pi f_0) \quad (1.6)$$

από την οποία προκύπτει και η ιδιότητα της διαμόρφωσης

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} F(2\pi f + 2\pi f_0) + \frac{1}{2} F(2\pi f - 2\pi f_0) \quad [15], [23] \quad (1.7)$$

2. Προσδιορισμός ενός Πεδίου - Θεμελιώδεις Εξισώσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού

2.1 Προσδιορισμός ενός Πεδίου

Η γνώση του $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ θα λέγαμε ότι αρκεί για να προσδιορίσουμε το πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$, γιατί η διανυσματική διαφορική εξίσωση $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{a}$ αναλύεται σε τρεις μονόμετρες διαφορικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους (A_x, A_y, A_z). Από τις τρεις όμως αυτές διαφορικές εξισώσεις, οι δύο μόνο είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, γιατί ισχύει η ταυτότητα $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv 0$. Αν όμως ξέρουμε και το $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\beta}$ τότε έχουμε μία ακόμη διαφορική εξίσωση ανεξάρτητη από τις άλλες. Κατά συνέπεια έχοντας το $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ και το $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ προσδιορίζουμε πλήρως το πεδίο \vec{A} . [24]

2.2 Θεμελιώδεις Εξισώσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού

Η μετάδοση σημάτων βασίζεται στις βασικές έννοιες και εξισώσεις της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο οφείλεται στα ηλεκτρικά φορτία και την κίνησή τους που συνιστά το ηλεκτρικό ρεύμα. Η κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία δεν εξετάζει λεπτομερώς την κίνηση των στοιχειωδών φορτισμένων σωματιδίων αλλά εξετάζει τα σχετικά φαινόμενα σωρευτικά, αποδίδοντας στα αποτελέσματα χαρακτήρα μέσω των τιμών. Η μικροσκοπική θεώρηση

των φαινομένων αυτών αποτελεί αντικείμενο της Κβαντικής και της Θεωρητικής Φυσικής.

Οι πηγές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, δηλαδή το ηλεκτρικό φορτίο και το ηλεκτρικό ρεύμα, περιγράφονται από τις αντίστοιχες πυκνότητες που είναι συναρτήσεις με χωρική και χρονική εξάρτηση.

Η πυκνότητα φορτίου ορίζεται ως

$$\rho(\underline{r}, t) = \lim_{dV \rightarrow 0} [dQ(\underline{r}, t)/dV] \quad (1.8)$$

ενώ η πυκνότητα ρεύματος ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\underline{J}(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}, t) \underline{u}(\underline{r}, t) \quad (1.9)$$

όπου $\underline{u}(\underline{r}, t)$ η ταχύτητα των κινουμένων φορτίων.

Στον ορισμό της πυκνότητας φορτίου, ο στοιχειώδης όγκος dV είναι απειροστός αλλά πάντως μεγαλύτερος του φυσικού όγκου ενός στοιχειώδους σωματιδίου. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιγράφεται μέσω των τεσσάρων διανυσματικών μεγεθών:

$\underline{E}(\underline{r}, t)$ ένταση ηλεκτρικού πεδίου (Volt/m)

$\underline{D}(\underline{r}, t)$ διηλεκτρική μετατόπιση (Cb/m²)

$\underline{H}(\underline{r}, t)$ ένταση μαγνητικού πεδίου (A/m)

$\underline{B}(\underline{r}, t)$ μαγνητική επαγωγή (T)

Τα μεγέθη αυτά που είναι συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου συνδέονται μέσω ενός ενιαίου συστήματος διαφορικών εξισώσεων που διατυπώθηκε το 1873 από τον Maxwell. Η θεωρία αυτή περιγράφει κατά αξιωματικό τρόπο τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα με διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν από πειράματα και μετρήσεις. Οι εξισώσεις Maxwell είναι οι εξής:

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (1.10)$$

$$\nabla \cdot \underline{D} = \rho \quad (1.11)$$

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad (1.13)$$

Η σχέση (1.10) αποτελεί την εξίσωση Maxwell-Faraday, η οποία υλοποιεί τον νόμο του Faraday για την επαγωγή. Ο νόμος αναφέρει το πώς η επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη παράγεται από την χρονικά μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή. Η εξίσωση (1.11) περιγράφει το νόμο του Gauss και περιγράφει το πώς η κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου δημιουργεί το ηλεκτρικό πεδίο. Η εξίσωση (1.12) περιγράφει τον νόμο του Ampere, ο οποίος συνδέει μαγνητικά πεδία με τα ηλεκτρικά ρεύματα που τα παράγουν. Η εξίσωση (1.13) περιγράφει το νόμο του Gauss για το μαγνητισμό. Αναφέρει ότι η απόκλιση του μαγνητικού πεδίου είναι ίση με το μηδέν και ουσιαστικά ισοδυναμεί με την πρόταση ότι η στοιχειώδης μονάδα του μαγνητισμού είναι το μαγνητικό δίπολο.

Διακρίνουμε με σαφήνεια ότι οι εξισώσεις Maxwell συσχετίζουν την πυκνότητα ηλεκτρικής ροής \underline{D} , την πυκνότητα μαγνητικής ροής \underline{B} , την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου \underline{E} και την ένταση του μαγνητικού πεδίου \underline{H} με την πυκνότητα της εντάσεως του ρεύματος \underline{J} και την πυκνότητα φορτίου ρ δηλαδή τις πηγές του πεδίου ενώ όπου εμφανίζονται βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη είναι σημειακές συναρτήσεις του χρόνου. Οι διανυσματικές συναρτήσεις \underline{D} , \underline{E} , \underline{B} , και \underline{H} είναι συνεχείς με συνεχείς παραγώγους σε σημεία όπου οι ηλεκτρικές και μαγνητικές ιδιότητες του χώρου δεν παρουσιάζουν ασυνέχειες. Επισημαίνεται ότι το σύμβολο \bullet δηλώνει το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, ενώ το σύμβολο \times δηλώνει το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.

Οι ηλεκτρικές και μαγνητικές ιδιότητες του χώρου καθορίζουν τη σχέση μεταξύ των διανυσμάτων \underline{D} , \underline{E} και \underline{B} , \underline{H} . Έτσι οι σχέσεις αυτές είναι:

$$\text{το } \underline{D} \text{ είναι ανάλογο του } \underline{E} \text{ δηλαδή } \underline{D} = \epsilon \underline{E} \quad (1.14)$$

$$\text{και το } \underline{B} \text{ ανάλογο του } \underline{H} \text{ δηλαδή } \underline{B} = \mu \underline{H} \quad (1.15)$$

όπου ϵ είναι η διηλεκτρική σταθερά και μ η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου.

Στην περίπτωση του κενού οι συνδετικές σχέσεις γίνονται:

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} \quad (1.16)$$

$$\underline{B} = \mu_0 \underline{H} \quad (1.17)$$

όπου $\epsilon_0 = (36\pi \cdot 10^9)^{-1} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ και $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ η διηλεκτρική επιτρεπτότητα και μαγνητική διαπερατότητα του κενού αντίστοιχα.

Αν το υλικό μέσο είναι ισότροπο ισχύουν οι σχέσεις

$$\underline{D} = \epsilon(r) \underline{E} \quad \text{και} \quad (1.18)$$

$$\underline{B} = \mu(r) \underline{H} \quad (1.19)$$

όπου $\epsilon(r)$ και $\mu(r)$ η διηλεκτρική επιτρεπτότητα και μαγνητική διαπερατότητα του μέσου αντίστοιχα. Αν οι παράμετροι $\epsilon(r)$ και $\mu(r)$ είναι σταθερές τότε το μέσο χαρακτηρίζεται ως ομογενές. Η περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών ιδιοτήτων κάποιου ισότροπου και ομογενούς μέσου γίνεται μέσω των αδιάστατων μεγεθών $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ και $\mu_r = \mu/\mu_0$ που ονομάζονται σχετική διηλεκτρική σταθερά και σχετική μαγνητική διαπερατότητα αντίστοιχα ($\epsilon_r = 1$ και $\mu_r = 1$ για το κενό). Στα ισοτροπικά μέσα τα διανύσματα \underline{D} , \underline{E} και \underline{B} , \underline{H} είναι συγγραμικά. Τα υλικά για τα οποία τα ανωτέρω ζεύγη πεδιακών μεγεθών δεν είναι συγγραμικά ονομάζονται ανισοτροπικά και είναι συνήθως κρυσταλλικής μορφής. Η ανάλυση των ανισότροπων μέσων εκφεύγει της παρούσας διατριβής και προορίζεται για μελλοντική έρευνα.

Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να εξετάσουμε τη διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό από φυσική άποψη. Από τις εξισώσεις

$$\nabla^2 \underline{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{και} \quad \nabla^2 \underline{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{θα μπορούσε να υπάρξει ο}$$

ισχυρισμός ότι τα \underline{E} και \underline{B} , είναι χωριστά, πληρούν την εξίσωση κύματος και συνεπώς καθ' ένα από μόνο του συνιστά κύμα. Αυτό όμως δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα καθώς από τις εξισώσεις Maxwell διακρίνεται αμέσως ότι τα \underline{B} και

\underline{E} είναι αλληλοσυνδεδεμένα. Χρονικές μεταβολές του ενός δημιουργούν το άλλο και αντίστροφα. Η αναφορά μας έγκειται πάντα για ηλεκτρομαγνητικό κύμα και όχι για ηλεκτρικό και μαγνητικό κύμα χωριστά. Αυτή η αλληλοσύνδεση έχει σαν αποτέλεσμα το χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο να διαδίδει ενέργεια στον κενό χώρο και μάλιστα με την ταχύτητα του φωτός c_0 .

Πρέπει να τονισθεί ότι τα \underline{E} και \underline{B} θεωρούνται και είναι υπαρκτά μεγέθη που ορίζονται και υπάρχουν στον κενό χώρο. Η διάδοση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό οφείλεται στις χρονικές μεταβολές των \underline{B} και \underline{E} . Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι αυτοσυντηρούμενο (σε αντίθεση με τα \underline{E} και \underline{B} που μόνα τους δεν είναι αυτοσυντηρούμενα). Ας υποθέσουμε ότι με κάποιο τρόπο έχει δημιουργηθεί σε μια περιοχή του χώρου ένα μαγνητικό πεδίο \underline{B} . Όταν αυτό αρχίσει

να φθίνει τότε κατά την εξίσωση $\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$ δημιουργείται ένα ηλεκτρικό πεδίο

\underline{E} . Όταν το \underline{E} αρχίσει να φθίνει τότε κατά την εξίσωση $\nabla \times \underline{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$

δημιουργείται ένα \underline{B} κ.ο.κ. Έτσι η διάδοση των \underline{E} και \underline{B} αυτοσυντηρείται χωρίς να είναι αναγκαία η ύπαρξη ύλης όπως στα μηχανικά κύματα. Αυτή είναι και η διαφορά μεταξύ μηχανικών και ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Στα πρώτα έχουμε μεταφορά ορμής και ενέργειας μέσα στην ύλη με εξάσκηση δυνάμεων μέσω των γειτονικών δομικών λίθων που πάλλονται κατά τη διάδοση του μηχανικού κύματος. Στα δεύτερα έχουμε δράση από απόσταση. Η ανταλλαγή γίνεται μέσω φωτονίων. Διακρίνουμε

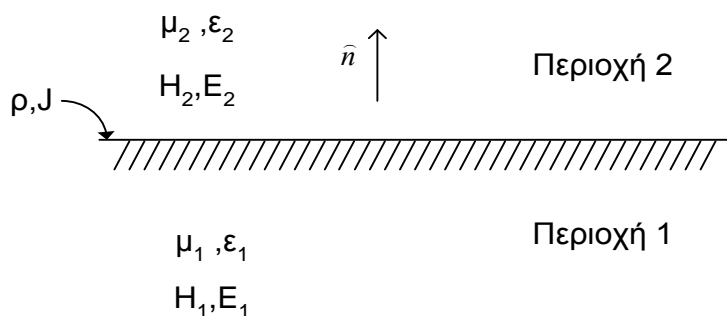
πλέον με σαφήνεια τη μεγάλη αξία της εισαγωγής του όρου $\frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$ από τον Maxwell ο

οποίος πέτυχε να συνδυάσει τις τέσσερις εξισώσεις που περιγράφουν τον ηλεκτρομαγνητισμό σε ενιαίο σύνολο ενσωματώνοντας παράλληλα την αρχή της συνέχειας. Έτσι απέδωσε στα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα ένα κυματικό χαρακτήρα ο οποίος βοήθησε στην εξήγηση της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό. Επίσης, λόγω της κίνησης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με την ταχύτητα του φωτός (το οποίο είναι H/M κύμα από τη φύση του) επιτεύχθηκε η ουσιαστική

ενοποίηση (με τη βοήθεια των εξισώσεων Maxwell) του ηλεκτρισμού, του μαγνητισμού και του φωτός.[15]

3. Εξισώσεις Οριακών Συνθηκών

Ασυνέχεια στις παραμέτρους ϵ , μ και σ (όπου σ η ειδική αγωγιμότητα του υλικού σε mho/m) παρουσιάζεται κατά τη μετάβαση από ένα υλικό μέσο σε ένα άλλο. Στην περίπτωση αυτή, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που είναι συνεχές σε κάθε ημιχώρο, οφείλει να ικανοποιεί επί της συνοριακής επιφάνειας συνθήκες συνέχειας που ονομάζονται οριακές συνθήκες.



Σχήμα 1.1: Διαχωρισμός του χώρου σε δύο ημιχώρους

Σύμφωνα με το σχήμα 1, έστω οι ημιχώροι 1 και 2 με παραμέτρους ϵ_1 , μ_1, σ_1 και ϵ_2 , μ_2, σ_2 αντίστοιχα. Επιπλέον \hat{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς τη συνοριακή επιφάνεια με φορά από τον ημιχώρο 1 προς τον ημιχώρο 2. Χρησιμοποιώντας τους δείκτες 1 και 2 για τα πεδιακά μεγέθη των ημιχώρων 1 και 2 αντίστοιχα, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ικανοποιεί επί της συνοριακής επιφάνειας S τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\hat{n} \times (\underline{E}_1 - \underline{E}_2) = 0 \quad (1.20)$$

$$\hat{n} \cdot (\underline{D}_1 - \underline{D}_2) = \rho_s \quad (1.21)$$

$$\hat{n} \times (\underline{H}_1 - \underline{H}_2) = \underline{J}_s \quad (1.22)$$

$$\hat{n} \cdot (\underline{B}_1 - \underline{B}_2) = 0 \quad (1.23)$$

Η εξίσωση (1.20) εκφράζει τη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου επί της συνοριακής επιφάνειας. Η εξίσωση (1.23) εκφράζει τη συνέχεια των κάθετων συνιστωσών της μαγνητικής επαγωγής. Η ασυνέχεια των κάθετων συνιστωσών της διηλεκτρικής μετατόπισης επί της συνοριακής επιφάνειας συνοδεύεται από επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ρ_s (Cb/m²) όπως φαίνεται στην εξίσωση (1.21). Η ασυνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών της έντασης του μαγνητικού πεδίου συνοδεύεται από την εμφάνιση επιφανειακής πυκνότητας ρεύματος \underline{J}_s επί της συνοριακής επιφάνειας όπως φαίνεται στην εξίσωση (1.22).

Οι παραπάνω οριακές συνθήκες απλοποιούνται στην περίπτωση κατά την οποία ο ημιχώρος 2 είναι τέλειος αγωγός, οπότε η ειδική αγωγιμότητα σ_2 είναι άπειρη. Αποτέλεσμα αυτού είναι η εμφάνιση ρεύματος αγωγιμότητας με μηδενική ένταση ηλεκτρικού πεδίου, όπως προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση. Ο μηδενισμός του ηλεκτρικού πεδίου συνεπάγεται το μηδενισμό και του μαγνητικού πεδίου, όπως προκύπτει από τις εξισώσεις Maxwell. Στην περίπτωση όπου το μέσο 2 είναι τέλειος αγωγός οι οριακές συνθήκες γράφονται:

$$\hat{n} \times \underline{E}_1 = \underline{E}_{1t} = 0 \quad (1.24)$$

$$\hat{n} \cdot \underline{D}_1 = \underline{E}_{1n} = \rho_s \quad (1.25)$$

$$\hat{n} \times \underline{H}_1 = \underline{H}_{1t} = \underline{J}_s \quad (1.26)$$

$$\hat{n} \cdot \underline{B}_1 = \underline{B}_{1n} = 0 \quad (1.27)$$

όπου οι δείκτες n και t δηλώνουν την κάθετη και την επιφανειακή συνιστώσα ενός πεδιακού μεγέθους επί της συνοριακής επιφάνειας.

Αν το μέσο 2 δεν είναι τέλειος αγωγός, δηλαδή έχει πεπερασμένη και όχι άπειρη αγωγιμότητα τότε επιτρέπει την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο

εσωτερικό του. Η ένταση του πεδίου αυτού μειώνεται εκθετικά ανάλογα προς τον παράγοντα $\exp(-h/\delta)$ όπου h η απόσταση από τη συνοριακή επιφάνεια και δ το βάθος διείσδυσης του όχι τελείως αγωγίμου μέσου που δίνεται από τη σχέση $\delta=(2/\omega\mu\sigma)^{1/2}$.

Η επιφανειακή αντίσταση του αγωγίμου μέσου είναι

$$Z_m=[j\omega\mu/(\sigma+j\omega\epsilon)]^{1/2} \approx 1+j/\sigma\delta \text{ (}\Omega/\text{m)} \quad (1.28)$$

Η επιφανειακή συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτει από τη σχέση

$$\underline{E}_t = Z_m \cdot \underline{J}_s = Z_m \cdot (\hat{n} \times \underline{H}) \quad (1.29)$$

και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των θερμικών απωλειών σε αγωγούς.[15]

4. Επίπεδα Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα και Πόλωση αυτών

Ο πλήρης προσδιορισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε χώρο γνωστών ηλεκτρομαγνητικών παραμέτρων ϵ , μ και σ απαιτεί τη λύση των εξισώσεων Maxwell και την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών στις συνοριακές επιφάνειες του χώρου. Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο συνυπάρχουν, εκτός από την περίπτωση κατά την οποία οι πηγές είναι χρονικά σταθερές ($\omega=0$). Η περίπτωση αυτή ονομάζεται ηλεκτροστατική αν υπάρχει μόνο το ηλεκτρικό πεδίο ή μαγνητοστατική αν υπάρχει μόνο το μαγνητικό πεδίο. Με εξαίρεση τη στατική περίπτωση, όταν τα μεγέθη \underline{E} και \underline{H} είναι κάθετα μεταξύ τους και προς τη διεύθυνση διάδοσης του πεδίου, το ηλεκτρομαγνητικό κύμα ονομάζεται επίπεδο κύμα. Σε όλα τα επίπεδα που είναι κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης το ηλεκτρομαγνητικό κύμα έχει σταθερή φάση, ενώ τα διανύσματα \underline{E} και \underline{H} ανήκουν σε κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης επίπεδα.

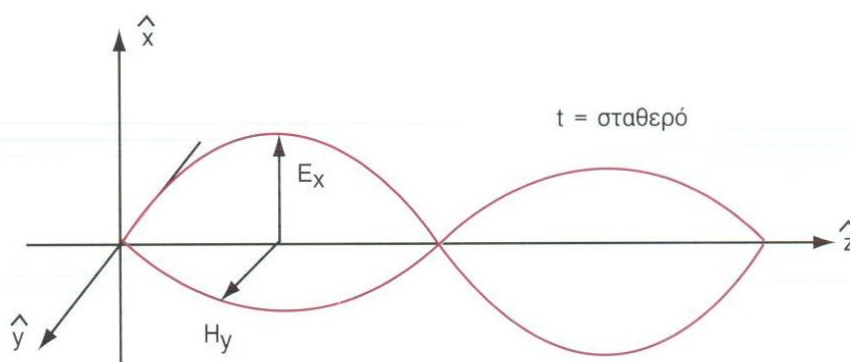
Πόλωση ενός επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος ονομάζεται η καμπύλη που διαγράφεται από το άκρο του διανύσματος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου \underline{E} σε επίπεδα σταθερής φάσης, δηλαδή σε επίπεδα κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης.

Η πόλωση χαρακτηρίζεται ως ελλειπτική, κυκλική ή γραμμική όταν η διαγραφόμενη καμπύλη είναι έλλειψη, κύκλος ή ευθεία γραμμή αντίστοιχα.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ενός επίπεδου κύματος που διαδίδεται κατά τη θετική διεύθυνση του άξονα z είναι

$$\underline{E}(x,\psi,z) = (E_x \hat{x} + E_\psi \hat{\psi}) \exp(-j\beta z) \quad (1.30)$$

όπου $E_x = r_x \exp(j\phi_x)$ και $E_\psi = r_\psi \exp(j\phi_\psi)$



Σχήμα 1.2 : Διάδοση Επιπέδου Κύματος

Η εξίσωση $\beta z = \text{σταθερό}$ είναι η εξίσωση επιπέδου σταθερής φάσης. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ως συνάρτηση του χρόνου προκύπτει όπως παρακάτω:

$$e_x(x,\psi,z,t) = r_x \cos(\omega t - \beta z + \phi_x) \quad (1.31)$$

$$e_\psi(x,\psi,z,t) = r_\psi \cos(\omega t - \beta z + \phi_\psi) \quad (1.32)$$

Απαλείφοντας τον όρο $\omega t - \beta z$ και θέτοντας $\varphi = \phi_\psi - \phi_x$ προκύπτει η εξίσωση

$$E_x / r_x + E_\psi / r_\psi - 2 (E_x / r_x) (E_\psi / r_\psi) \cos\varphi = \sin^2\varphi \quad (1.33)$$

που αποτελεί τη γενική εξίσωση έλλειψης. Επομένως στη γενική περίπτωση η πόλωση είναι ελλειπτική και προσδιορίζεται από τις παραμέτρους r_x , r_ψ και φ .

Με μία μικρή διερεύνηση διαπιστώνουμε τα παρακάτω:

α. Όταν $r_x = r_\psi = r$ και $\varphi = \pm\pi/2$ η εξίσωση (1.33) μετατρέπεται στην εξίσωση $E_x^2 + E_\psi^2 = r^2$ (1.34)

που είναι εξίσωση κύκλου, δηλαδή η πόλωση είναι κυκλική.

β. Όταν $\varphi = 0$ ή π τότε η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται στην εξίσωση $E_x / r_x \pm E_\psi / r_\psi$ (1.35)

που είναι εξίσωση ευθείας επί του επιπέδου $\beta z =$ σταθερό με κλίση $\pm r_\psi / r_x$ ως προς τον άξονα x ενώ η πόλωση είναι γραμμική.

γ. Αν $r_x = 0$ και $r_\psi \neq 0$ υπάρχει μόνο η E_ψ συνιστώσα.

δ. Αν $r_\psi = 0$ και $r_x \neq 0$ υπάρχει μόνο η E_x συνιστώσα.[15]

5. Επίλυση Ηλεκτρομαγνητικών Προβλημάτων

Ο ακριβής προσδιορισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου απαιτεί την επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων Maxwell ενώ ταυτόχρονα πρέπει να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες του ηλεκτρομαγνητικού συστήματος. Ο προσδιορισμός όμως της ακριβούς λύσης ενός ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος μόνο σε λίγες περιπτώσεις είναι εφικτός. Αυτό διότι τα προβλήματα είναι πολύπλοκα και η γνώση των πηγών υπό μορφή συναρτήσεων δεν είναι πάντα γνωστές.

Η μεθοδολογία η οποία συνήθως ακολουθείται είναι η επίλυση απλών προβλημάτων, η εύρεση ειδικών λύσεων και η κατάταξή τους σε κατηγορίες. Η επίλυση σύνθετων προβλημάτων ανάγεται στην επίλυση απλών, των οποίων οι λύσεις είναι γνωστές. Η αρχή της επαλληλίας που ισχύει λόγω της γραμμικότητας των εξισώσεων Maxwell επιτρέπει την υπέρθεση απλών λύσεων για τον ακριβή προσδιορισμό της λύσης σύνθετων προβλημάτων. Η πλέον απλή λύση των

εξισώσεων Maxwell είναι το επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται κατά μία συγκεκριμένη διεύθυνση. Με διεύθυνση αναφοράς τη διεύθυνση διάδοσης διακρίνονται τρεις κατηγορίες λύσεων :

α. Εγκάρσια ηλεκτρομαγνητικά κύματα ή κύματα τύπου TEM

Στα κύματα αυτά τόσο το ηλεκτρικό όσο και το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης, δηλαδή δεν έχουν διαμήκη συνιστώσα.

β. Εγκάρσια ηλεκτρικά κύματα ή κύματα τύπου TE

Στα κύματα αυτά το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο προς τη διεύθυνση διάδοσης ενώ το μαγνητικό πεδίο έχει και διαμήκη συνιστώσα.

γ. Εγκάρσια Μαγνητικά κύματα ή κύματα τύπου TM

Στα κύματα αυτά το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης ενώ το ηλεκτρικό έχει και διαμήκη συνιστώσα.[15]

6. Πόλωση Κεραιών

Πόλωση μιας κεραίας σε μια διεύθυνση είναι η πόλωση του μακρινού ηλεκτρικού πεδίου που εκπέμπει κατά τη διεύθυνση αυτή. Ως πόλωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου εννοείται η καμπύλη που διαγράφει το άκρο του διανύσματος της στιγμιαίας τιμής του ηλεκτρικού πεδίου κατά τη διεύθυνση διάδοσής του.

Η στιγμιαία τιμή ενός επίπεδου κύματος που διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα z είναι της μορφής

$$\mathbf{E}(r,t) = E_x(r,t) \hat{x} + E_y(r,t) \hat{y} \quad (1.36)$$

Τα στιγμιαία μεγέθη που υπεισέρχονται στην παραπάνω σχέση στην περίπτωση των ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενων ως προς το χρόνο πεδίων γράφονται

$$E_x(z,t) = E_x \cos(\omega t - kz + \phi_x) \quad (1.37)$$

$$\epsilon_{\psi}(z,t) = E_{\psi} \cos(\omega t - kz + \phi_{\psi}) \quad (1.38)$$

όπου $k=2\pi/\lambda$ ο κυματικός αριθμός και E_x, E_{ψ} οι μέγιστες τιμές των αντιστοίχων συνιστωσών και ϕ_x, ϕ_{ψ} οι φάσεις τους. Από το συσχετισμό παραμέτρων E_x, E_{ψ}, ϕ_x και ϕ_{ψ} εξαρτάται το είδος της πόλωσης του επίπεδου κύματος.

α. Γραμμική πόλωση

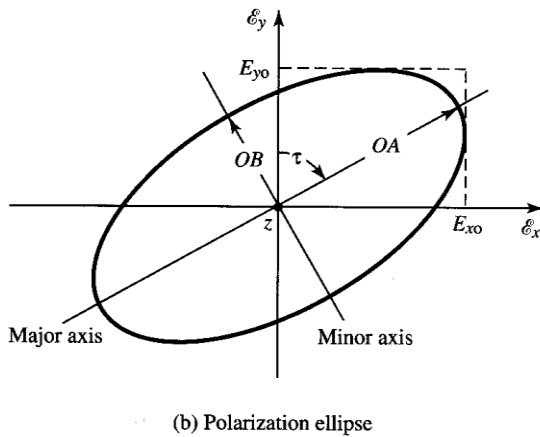
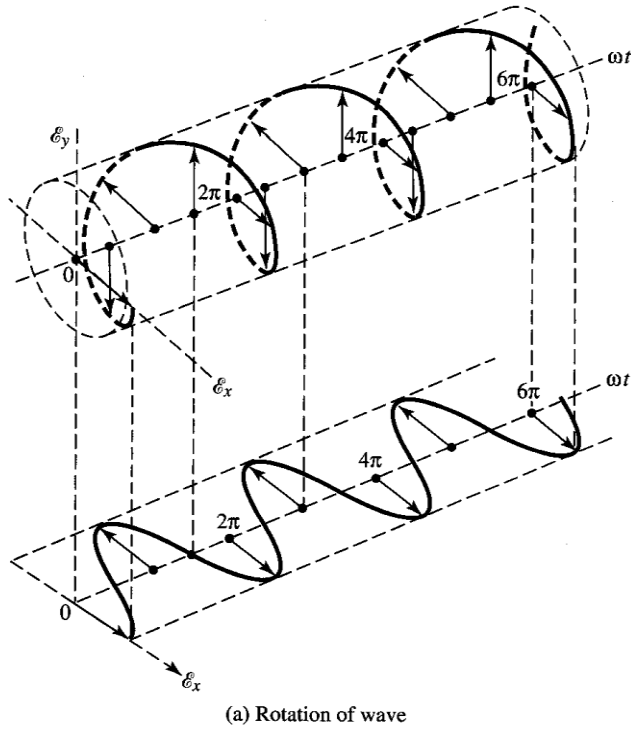
Είναι το είδος της πόλωσης που προκύπτει όταν $\phi_{\psi} - \phi_x = n\pi$ με $n=0,1,2,\dots$ δηλαδή η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο συνιστωσών είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του π . Σε αυτή την περίπτωση, καθώς διαδίδεται το επίπεδο κύμα το ηλεκτρικό πεδίο διατηρεί σταθερή διεύθυνση.

β. Κυκλική πόλωση

Είναι το είδος της πόλωσης που προκύπτει όταν $E_x = E_{\psi}$ και $\phi_{\psi} - \phi_x = \pm(2n\pi + \pi/2)$ με $n=0,1,2,\dots$ δηλαδή τα πλάτη των δύο συνιστωσών είναι ίσα και η διαφορά φάσης είναι περιττό πολλαπλάσιο του $\pi/2$. Σε αυτή την περίπτωση, κατά τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος το άκρο του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου διαγράφει περιφέρεια κύκλου με ωρολογιακή ή ανθρωρολογιακή φορά.

γ. Ελλειπτική πόλωση

Είναι το είδος πόλωσης που προκύπτει όταν $E_x \neq E_{\psi}$ και $\phi_{\psi} - \phi_x = (2n\pi + \pi/2)$ με $n=0,1,2,\dots$ ή όταν $\phi_{\psi} - \phi_x \neq \pm n\pi/2$ με $n=0,1,2,\dots$ δηλαδή η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο συνιστωσών είναι περιττό πολλαπλάσιο του $\pi/2$ και τα πλάτη τους δεν είναι ίσα ή η διαφορά φάσης δεν είναι πολλαπλάσιο του $\pi/2$ (ανεξάρτητα των πλατών). Σε αυτή την περίπτωση, η καμπύλη που διαγράφεται από το άκρο του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου είναι έλλειψη.



Σχήμα 1.3: Ελλειπτική Πόλωση

Ένα μέγεθος που περιγράφει το πόσο ελλειπτική είναι η πόλωση ενός κύματος είναι ο αξονικός λόγος (Axial Ratio) AR που ορίζεται από την παρακάτω σχέση όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

$$AR = \frac{\text{μεγάλος * άξονας}}{\text{μικρός * άξονας}} = \frac{OA}{OB}, \quad 1 \leq AR \leq \infty \quad (1.39)$$

όπου ο μεγάλος και ο μικρός άξονας της έλλειψης δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$OA = \left\{ \frac{1}{2} [E_x^2 + E_y^2 + (E_x^4 + E_y^4 + 2E_x^2 E_y^2 \cos(2\Delta\varphi))^{1/2}] \right\}^{1/2} \quad (1.40)$$

$$OB = \left\{ \frac{1}{2} [E_x^2 + E_y^2 - (E_x^4 + E_y^4 + 2E_x^2 E_y^2 \cos(2\Delta\varphi))^{1/2}] \right\}^{1/2} \quad (1.41)$$

Η κλίση της έλλειψης ως προς τον y άξονα αναπαριστάται με τη γωνία τ που δίνεται από τη σχέση

$$\tau = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2E_x E_y}{E_x^2 - E_y^2} \cos(\Delta\varphi) \right] \quad (1.42)$$

Όταν η έλλειψη ευθυγραμμίζεται με τους δύο άξονες του συστήματος συντεταγμένων ($\tau = n\pi/2$, $n=0,1,2,\dots$) ο μεγάλος (μικρός) άξονας είναι ίσος με E_x (E_y) ή E_y (E_x) και ο αξονικός λόγος είναι ίσος με E_x/E_y ή E_y/E_x . [22]

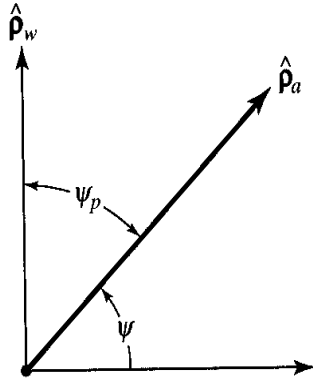
7. Παράγοντας Απωλειών Πόλωσης

Ένα σημαντικό πρόβλημα δημιουργείτε, όταν η πόλωση της κεραίας δεν ταυτίζεται με την πόλωση του προσπίπτοντος κύματος, οπότε η ισχύς που συλλέγει η κεραία δεν είναι η μέγιστη δυνατή.

Αν το προσπίπτον στην κεραία κύμα είναι πολωμένο κατά την κατεύθυνση $\hat{\rho}_w$, ενώ η πόλωση της κεραίας είναι κατά την κατεύθυνση $\hat{\rho}_a$, οι απώλειες που συνεπάγεται η μη ευθυγράμμιση των δύο πολώσεων λαμβάνονται υπόψη μέσω του παράγοντα απωλειών πόλωσης PLF (Polarization Loss Factor), που ορίζεται από τη σχέση

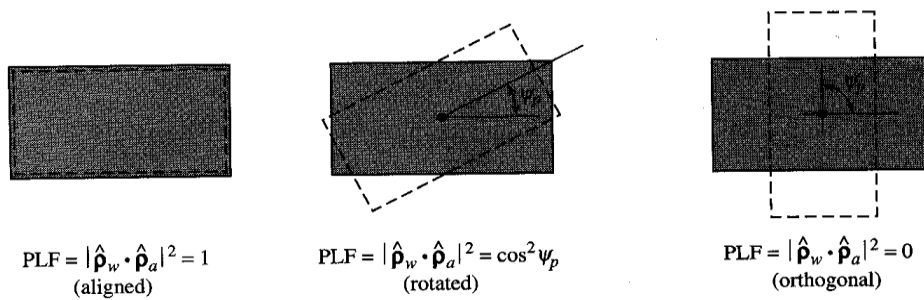
$$PLF = |\hat{\rho}_w \cdot \hat{\rho}_a|^2 = |\cos \psi_p|^2 \quad (1.43)$$

Η γωνία ψ_p είναι η γωνία μεταξύ των δύο μοναδιαίων διανυσμάτων, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

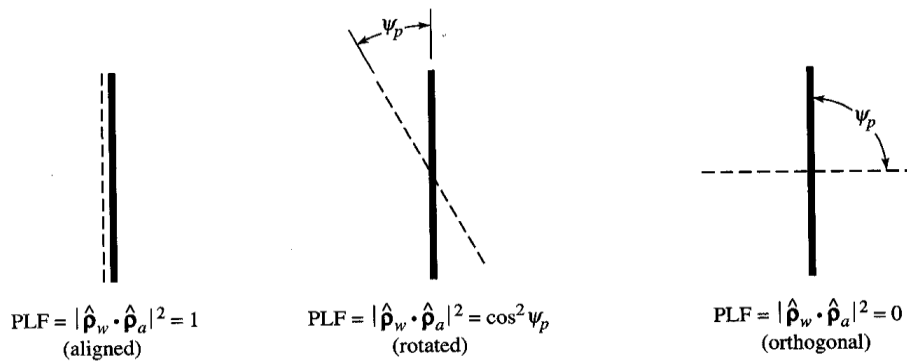


Σχήμα 1.4 : Γωνία απωλειών πόλωσης

Ο μηδενισμός των απωλειών πόλωσης επιτυγχάνεται με την ευθυγράμμιση των δύο πολώσεων οπότε λαμβάνουμε τη μέγιστη τιμή του PLF η οποία ίση με 1 ενώ η ελάχιστη τιμή του PLF είναι ίση με 0 όταν οι δύο πολώσεις είναι κάθετες μεταξύ τους ($\psi_p = 90^\circ$) και κατά συνέπεια η ισχύς που λαμβάνει η κεραία είναι μηδενική. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται διάφορα παραδείγματα υπολογισμού του PLF για δύο τύπους κεραιών, γραμμικές και ανοίγματος.



(a) PLF for transmitting and receiving aperture antennas



(b) PLF for transmitting and receiving linear wire antennas

Σχήμα 1.5: Παράγοντες Απωλειών Πόλωσης

Οι απώλειες πόλωσης πρέπει να λαμβάνονται σοβαρά υπόψη διότι σε αρκετές περιπτώσεις αποτελούν κρίσιμη παράμετρο για τον ισολογισμό ισχύος μιας ασύρματης ζεύξης.[22]

8. Η Συνάρτηση Bessel

Για τον ορισμό και τη μελέτη των συναρτήσεων Bessel χρειαζόμαστε την έννοια της ‘συνάρτησης γάμα’ Γ , η οποία ορίζεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \Re(z) > 0 \quad (1.44)$$

Η γάμμα συνάρτηση έχει την εξής βασική ιδιότητα:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.45)$$

Επιπλέον χρειαζόμαστε τη διγάμα συνάρτηση ψ , η οποία ορίζεται από τον τύπο:

$$\psi(z) = d[\ln \Gamma(z)]/d(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z), \quad \Re(z) > 0 \quad (1.46)$$

για την οποία ισχύει

$$\psi(1) = -\gamma, \psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad (1.47)$$

όπου $\gamma \approx 0.5772156649\dots$ (σταθερά Euler).

Στα προβλήματα εμφανίζονται πέντε κατηγορίες συναρτήσεων Bessel. Αυτές που πηγάζουν από τη συνάρτηση Green, οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel πρώτου και τρίτου είδους $j_n(z)$ και $h_n^{(2)}(z)$ αντίστοιχα, όπου n ακέραιος, καθώς και οι κυλινδρικές συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους $J_m(z)$, δεύτερου είδους $Y_m(z)$ (συναρτήσεις Neumann) και τρίτου είδους $H_m^{(2)}(z)$ (συναρτήσεις Hankel), όπου m ακέραιος, και χρησιμοποιούνται για απλοποίηση των προβλημάτων. Η μετατροπή των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel σε κυλινδρικές μπορεί να γίνει μέσα από τις σχέσεις:

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) \quad (1.48)$$

$$h_n^{(2)}(z) = j_n(z) - iy_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(z) \quad (1.49)$$

Οι κυλινδρικές συναρτήσεις Bessel μπορούν να οριστούν από τις παρακάτω σειρές:

$$J_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{m+2k}}{k!(m+k)!}, \quad |z| < \infty \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} Y_m(z) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(m-l-1)!}{l!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l-m} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{z}{2}\right)^{m+2l}}{l!(m+l)!} [2 \log\left(\frac{z}{2}\right) - \psi(l+1) - \psi(l+m+1)] \\ &= \frac{2}{\pi} J_m(z) \log\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(m-l-1)!}{l!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l-m} - \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{z}{2}\right)^{m+2l}}{l!(m+l)!} [\psi(l+1) + \psi(l+m+1)], \\ &|\arg z| < \pi \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$H_m^{(2)}(z) = J_m(z) - jY_m(z) \quad (1.52)$$

Παρακάτω παρατίθενται συμπληρωματικά μερικές βασικές ιδιότητες των κυλινδρικών συναρτήσεων Bessel:

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z) \quad (1.53)$$

$$Y_{-m}(z) = (-1)^m Y_m(z) \quad (1.54)$$

$$H_{-m}^{(2)}(z) = (-1)^m H_m^{(2)}(z) \quad (1.55)$$

$$J_m(-z) = (-1)^m J_m(z) \quad (1.56)$$

$$Y_m(-z) = (-1)^m Y_m(z) \quad (1.57)$$

$$H_m^{(2)}(-z) = (-1)^m H_m^{(2)}(z) \quad (1.58)$$

Γενικευμένο ολοκλήρωμα με λύση βασισμένη στις ‘συναρτήσεις Γάμμα’ :

$$\int_0^a x^m (a^n - x^n)^p dx = \frac{a^{m+1+np} \Gamma[(m+1)/n] \Gamma(p+1)}{n \Gamma[(m+1)/n + p + 1]} \quad [9] \quad (1.59)$$

9. Συναρτήσεις Hankel

Οι συναρτήσεις Hankel 1ου είδους και νιοστής τάξης ορίζονται από την εξίσωση

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + i Y_n(x) \quad (1.60)$$

Στην παραπάνω σχέση, $J_n(x)$ και $Y_n(x)$, είναι οι συναρτήσεις Bessel και Neumann, οι οποίες ορίζονται σε μορφή άπειρης σειράς

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^K}{K! (n+K)!} \quad (1.61)$$

$$Y_n(x) = -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}}{\pi} \sum_{K=0}^{n-1} \frac{(n-K-1)!}{K!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^K + \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_n(x)$$

$$-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\pi} \sum_{K=0}^{\infty} \{\Psi(k+1) + \Psi(n+k+1)\} \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{K! (n+K)!} \quad (1.62)$$

όπου $\gamma = 0.5772156649 \dots$ είναι η σταθερά του Euler.

Οι παραπάνω σειρές, αν και συγκλίνουν για $0 < x < \infty$, δηλαδή για θετικά x , για υπολογιστικούς σκοπούς μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο για αρκετά μικρές τιμές του ορίσματος x . Για x πολύ μεγαλύτερο από την τάξη n , ισχύουν οι ασυμπτωτικές σειρές.

$$J_n(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}(2n+1)\right)$$

(1.63)

$$Y_n(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}(2n+1)\right)$$

Για $n = 0$, οι παραπάνω ασυμπτωτικές σειρές παίρνουν τη μορφή

$$J_0(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

(1.64)

$$Y_0(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Έτσι λοιπόν, η συνάρτηση Hankel 1ου είδους και μηδενικής τάξης, χρησιμοποιώντας τις τελευταίες σχέσεις, δίνεται με τη μορφή

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(x) &= J_0(x) + iY_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + i\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{ix} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$H_0^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{ix} e^{-i\frac{\pi}{4}} \tag{1.65}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.63) για $n = 1$ έχουμε

$$J_1(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$$

(1.66)

$$Y_1(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$$

Η συνάρτηση Hankel 1ου είδους και πρώτης τάξης, αν εργαστούμε όπως πριν είναι

$$H_1^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{ix} e^{-i\frac{3}{4}\pi} \quad (1.67)$$

Στη συνέχεια ακολουθούν δύο ενδεικτικοί πίνακες που δίνουν τις πρώτες θετικές ρίζες. Παρατηρούμε ότι k^{th} zero of $J_0(x) = k^{\text{th}}$ zero of $J_1(x)$ και k^{th} zero of $J_n'(x) \sim k^{\text{th}}$ zero of $J_{n-1}(x)$. Σε κάθε περίπτωση οι διαδοχικές μεγάλες ρίζες διαφέρουν κατά $\pi=3,14159\dots\dots$ περίπου.

	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
1	2.40483	3.83171	5.13562	6.38016	7.58834	8.77148
2	5.52008	7.01559	8.41724	9.76102	11.0647	12.3386
3	8.65373	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.796	16.2235	17.616	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178

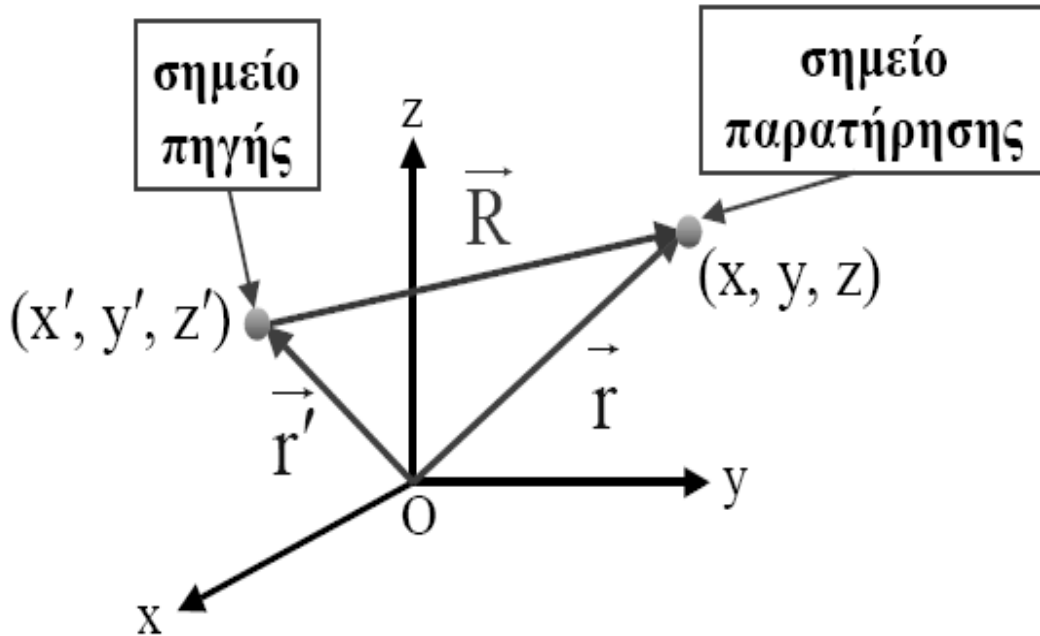
Πίνακας 1.1 : [$J_n(x)=0$ για $n=0,1,2,3,4,5$] α_{nk} : k^{th} zero of $J_n(x)$

	J_0'	J_1'	J_2'	J_3'	J_4'	J_5'
1	3.83171	1.84118	3.05424	4.20119	5.31755	6.41562
2	7.01559	5.33144	6.70613	8.01524	9.2824	10.5199
3	10.1735	8.53632	9.96947	11.3459	12.6819	13.9872
4	13.3237	11.706	13.1704	14.5858	15.9641	17.3128
5	16.4706	14.8636	16.3475	17.7887	19.196	20.5755

Πίνακας 1.2 : [$J_n'(x)=0$ για $n=0,1,2,3,4,5$] β_{nk} : k^{th} zero of $J_n'(x)$ [9]

10. Συναρτήσεις Green

Η συνάρτηση Green αποτελεί την κρουστική απόκριση (impulse response) ενός συστήματος. Συγκεκριμένα, στην ειδική περίπτωση σημειακής πηγής όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα,



Σχήμα 1.6: Σχεδιάγραμμα Παρατήρησης Σημειακής Πηγής

η λύση της βαθμωτής κυματικής εξίσωσης

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.68)$$

είναι η συνάρτηση Green ελεύθερου χώρου

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad \text{με } R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (1.69)$$

που εξαρτάται από τα διανύσματα θέσης των σημείων πηγής και παρατήρησης.

Επεκτείνοντας το πρόβλημα σε χώρο απεριόριστων διαστάσεων, οι κυματικές εξισώσεις είναι (λύνεται πρώτα η καρτεσιανή συνιστώσα x

πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη με $J_x(\mathbf{r}')$ και ολοκληρώνοντας επί του όγκου τους):

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Rightarrow$$

$$\int_{V'} (\nabla^2 + k^2)\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J_x(\mathbf{r}') dV' = -\int_{V'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') J_x(\mathbf{r}') dV' \quad (1.70)$$

Βγάζοντας το $(\nabla^2 + k^2)$ έξω από το ολοκλήρωμα και γνωρίζοντας ότι στη σημειακή πηγή η κατανομή μένει αναλλοίωτη η εξίσωση γίνεται:

$$(\nabla^2 + k^2) \int_{V'} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J_x(\mathbf{r}') dV' = -J_x(\mathbf{r}') \quad (1.71)$$

Συγκρινόμενη με τη βαθμωτή κυματική εξίσωση της καρτεσιανής συνιστώσας x για το μαγνητικό δυναμικό A

$$(\nabla^2 + k^2)A_x(\mathbf{r}') = -\mu J_x(\mathbf{r}') \quad (1.72)$$

δίνει τη λύση του δυναμικού A στη κατεύθυνση της συνιστώσας x ότι είναι

$$A_x(\mathbf{r}') = \mu \int_{V'} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J_x(\mathbf{r}') dV' \quad (1.73)$$

Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζεται ότι το δυναμικό A, στις άλλες 2 καρτεσιανές συνιστώσες έχει τη μορφή:

$$A_y(\mathbf{r}') = \mu \int_{V'} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J_y(\mathbf{r}') dV' \quad (1.74)$$

$$A_z(\mathbf{r}') = \mu \int_{V'} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J_z(\mathbf{r}') dV' \quad (1.75)$$

Συνεπώς η λύση της διανυσματικής κυματικής εξίσωσης είναι :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}') = \mu \int_{V'} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' \quad (1.76)$$

που είναι συνέλιξη της συνάρτησης Green με τη ρευματική κατανομή.[9]

11. Πρώτη Χρησιμοποίηση της Στάσιμης Φάσης από τον Stokes

Πολλοί νόμοι της φύσης μπορούν να γίνουν ευκολότερα καταληπτοί από την ασυμπτωτική συμπεριφορά ορισμένων ολοκληρωμάτων. Ένας από τους πρώτους ασυμπτωτικούς νόμους είναι ο τύπος που ανακάλυψε ο Stirling στις αρχές του 18ου αιώνα δηλαδή:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n} \quad (1.77)$$

όπου το σύμβολο \sim σημαίνει ότι ο λόγος των δύο όρων τείνει προς τη μονάδα όταν το $n \rightarrow \infty$. Το ουσιαστικό με αυτό τον ασυμπτωτικό τύπο είναι ότι είναι ακριβής ακόμα και για μικρές τιμές του n . Π.χ. για $n=1$, η ασυμπτωτική εκτίμηση είναι 0.92! Για $n=10$, η ασυμπτωτική εκτίμηση του είναι 3598600 όταν το $10!=3628800$, γεγονός που δείχνει λάθος μικρότερο από 1%. Αυτό είναι σύνηθες στις ασυμπτωτικές εκτιμήσεις είναι δηλαδή ακριβείς ακόμα και για μικρές τιμές της ασυμπτωτικής παραμέτρου.

Η μέθοδος της στάσιμης φάσης χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Stokes για να εκτιμήσει την ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος (για μεγάλες θετικές τιμές του t):

$$z(t) = \int_0^{\infty} \cos(t[\omega^3 - \omega]) d\omega \quad (1.78)$$

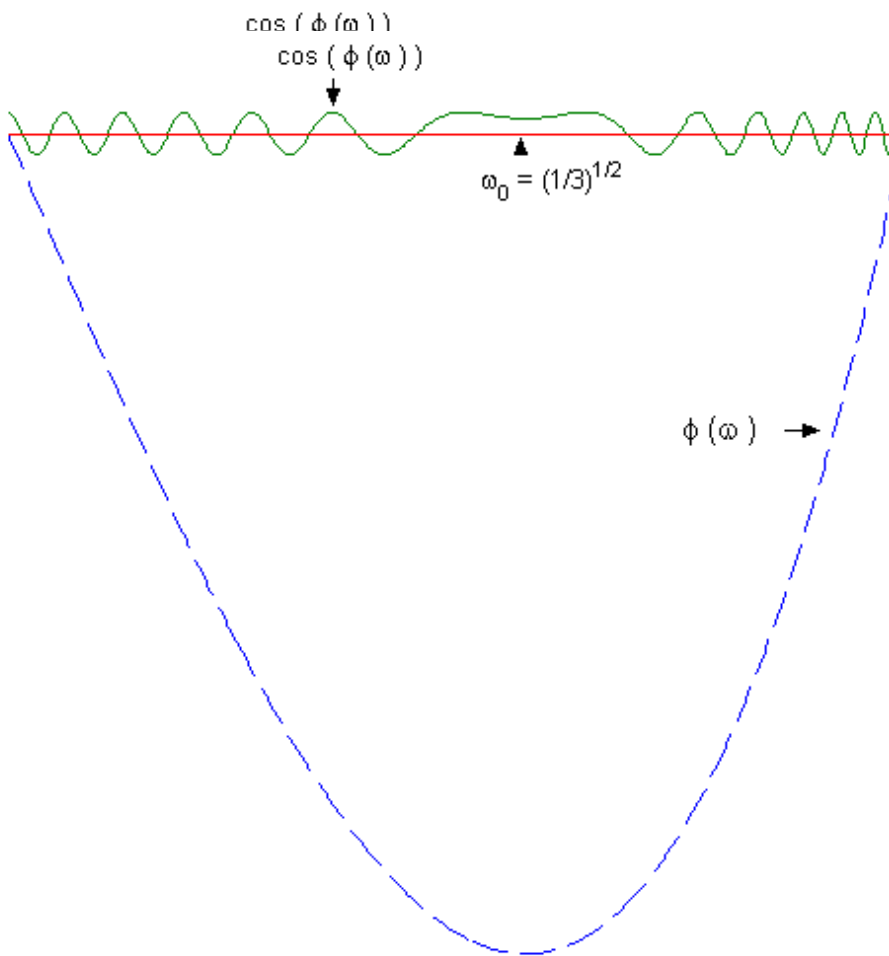
Ορίζουμε ως φάση του συνημιτόνου την $\varphi = t[\omega^3 - \omega]$. Εάν σχεδιάσουμε τη φάση συναρτήσει της ω όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, είναι φανερό ότι για μεγάλες τιμές του t , η φάση είναι μία ραγδαία μεταβαλλόμενη συνάρτηση της ω , εκτός από τη περιοχή του σημείου $\omega_0 = (1/3)^{1/2}$ όπου η φάση είναι στάσιμη. Το συνημίτονο λαμβάνει ραγδαία εναλλασσόμενες τιμές όταν μεταβάλλεται το ω , και πιο συγκεκριμένα οι ταλαντώσεις αυτές είναι όλο και πιο συχνές όσο αυξάνεται το t . Το συνημίτονο όμως έχει σταθερή τιμή στη περιοχή του ω_0 όπου η φάση είναι στάσιμη. Ο Stokes συνειδητοποίησε ότι η συμβολή στο ολοκλήρωμα από τις περιοχές της ω στις οποίες η φάση μεταβάλλεται είναι ασυμπτωτικά αμελητέα, και ότι η κύρια συμβολή στο ολοκλήρωμα προέρχεται για μεγάλες τιμές της t μόνο από τις περιοχές

στάσιμη φάσης. Εφόσον αναμένεται η συμβολή να προέρχεται μόνο από τη περιοχή του ω_0 , εάν αναπτύξω θα έχω:

$$\omega^3 - \omega \cong \omega_0^3 - \omega_0 + 3\omega_0(\omega - \omega_0)^2 \quad (1.79)$$

και

$$z(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t(\omega_0^3 - \omega_0) + 3x\omega_0(\omega - \omega_0)^2) d\omega \quad (1.80)$$



Σχήμα 1.7: Η φάση ϕ σε συνάρτηση με την ω

Το μικρότερο όριο του ολοκληρώματος λήφθηκε στο $-\infty$ δεδομένου ότι η μόνη συμβολή στο ολοκλήρωμα είναι αυτή περί το ω_0 , οπότε δεν έχει ασυμπτωτική

συμβολή το επεκταμένο τμήμα του ολοκληρώματος. Αρκεί να υπολογιστεί αυτό το απλούστερο ολοκλήρωμα, το οποίο μπορούμε να το υπολογίσουμε ακριβώς.

12. Μέθοδος Στάσιμης Φάσης

Η μέθοδος στάσιμης φάσης (Stationary Phase Method - SPM) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε με έναν συγκεκριμένο τρόπο το διπλό ολοκλήρωμα που είναι της παρακάτω μορφής:

$$I(k) = \int_a^b \int_c^d F(x, y) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x, y)} dx \cdot dy \quad (1.81)$$

όπου $F(x, y)$ μη γραμμική, μπορεί να είναι μιγαδική, αλλά πρέπει να είναι ανεξάρτητη του k , k ένας πραγματικός αριθμός και $f(x, y)$ πραγματική, μη γραμμική συνάρτηση, ανεξάρτητη του k επίσης. Το αποτέλεσμα της μεθόδου στηρίζεται στην ασυμπτωτική προσέγγιση του παρακάτω απλού ολοκληρώματος

$$I'(k) = \int_a^b F(x) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x)} dx \quad (1.82)$$

και μας δίνει μια προσεγγιστική έκφραση του ολοκληρώματος (1.81) μόνο όμως για μεγάλες τιμές του k .

Η ασυμπτωτική προσέγγιση στηρίζεται στο γεγονός ότι η $f(x, y)$ πρέπει να συμπεριφέρεται ομαλά, δηλαδή η τιμή της πρέπει να μεταβάλλεται αργά, εντός της περιοχής των στάσιμων σημείων x_s, y_s . Τα στάσιμα σημεία της f είναι τα σημεία για τα οποία οι μερικές παράγωγοι της f ως προς x και y γίνονται ίσες με μηδέν. Δηλαδή είναι τα σημεία για τα οποία ισχύει :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_s \\ y=y_s}} \equiv f'_x(x_s, y_s) = 0 \quad (1.83)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_s \\ y=y_s}} \equiv f'_y(x_s, y_s) = 0 \quad (1.84)$$

Έξω από την περιοχή των στάσιμων σημείων, η συνάρτηση f μπορεί να μεταβάλλεται ταχέως με τέτοιο τρόπο ώστε ο εκθετικός παράγοντας $e^{j \cdot k \cdot f(x)}$ για μεγάλες τιμές του k να κυμαίνεται μεταξύ των τιμών -1 και $+1$. Προβαίνοντας σε συνεχείς ολοκληρώσεις σε περιοχές όπου δεν υπάρχουν στάσιμα σημεία παρατηρούμε αλληλοαναιρέσεις. Αυτό συμβαίνει γιατί η συνάρτηση f είναι μια συνάρτηση χωρίς απότομες μεταβολές στην τιμή της. Άρα η τιμή του ολοκληρώματος καθορίζεται από τις συμβολές των στοιχειωδών ολοκληρώσεων που γίνονται εντός της περιοχής των στάσιμων σημείων. Κατά συνέπεια μπορεί να θεωρηθεί (προσεγγιστικά) ότι ισχύει :

$$I(k) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x,y)} dx \cdot dy \quad (1.85)$$

$$I(k) = F(x_s, y_s) \cdot \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} e^{j \cdot k \cdot f(x,y)} dx \cdot dy \quad (1.86)$$

όπου τα όρια a, b και c, d που είδαμε στον τύπο (1.81) έχουν επεκταθεί στο άπειρο αφού οι συμβολές από την ολοκλήρωση στην περιοχή εκτός των στάσιμων σημείων αλληλοαναιρούνται.

Χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο Taylor της $f(x,y)$ μπορούμε να δεχτούμε ότι πλησίον στην περιοχή των στάσιμων σημείων η συνάρτηση προσεγγίζεται από τη σχέση :

$$f(x, y) \cong f(x_s, y_s) + \frac{1}{2} \cdot (x - x_s)^2 \cdot f''_{xx}(x_s, y_s) + \frac{1}{2} \cdot (y - y_s)^2 \cdot f''_{yy}(x_s, y_s) + (x - x_s) \cdot (y - y_s) \cdot f''_{xy}(x_s, y_s) \quad (1.87)$$

Στην παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν οι πρώτες μερικές παράγωγοι ως προς x ή y γιατί στα στάσιμα σημεία οι παράγωγοι είναι ίσες με μηδέν (σχέσεις 1.83 και 1.84). Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι δίνονται από τις σχέσεις:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=x_s \\ y=y_s}} \equiv f''_{xx}(x_s, y_s) \quad (1.88)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=x_s \\ y=y_s}} \equiv f''_{yy}(x_s, y_s) \quad (1.89)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=x_s \\ y=y_s}} \equiv f''_{xy}(x_s, y_s) \quad (1.90)$$

Διαμορφώνοντας ανάλογα τη σχέση (1.87) από τις (1.88), (1.89) και (1.90) μπορούμε να τη γράψουμε :

$$f(x, y) \cong f(x_s, y_s) + A \cdot \xi^2 + B \cdot \eta^2 + C \cdot \xi \cdot \eta \quad (1.91)$$

όπου

$$\xi = x - x_s \quad (1.92)$$

$$\eta = y - y_s \quad (1.93)$$

και

$$A = \frac{1}{2} \cdot f''_{xx}(x_s, y_s) \quad (1.94)$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot f''_{yy}(x_s, y_s) \quad (1.95)$$

$$C = f''_{xy}(x_s, y_s) \quad (1.96)$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (1.86) και (1.91) έχουμε :

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot k \cdot (A \cdot \xi^2 + B \cdot \eta^2 + C \cdot \xi \cdot \eta)} d\xi \cdot d\eta \quad (1.97)$$

Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω μετασχηματισμό :

$$A \cdot \xi^2 + B \cdot \eta^2 + C \cdot \xi \cdot \eta = A' \cdot \mu^2 + B' \cdot \lambda^2 \quad (1.98)$$

όπου

$$A' = \frac{1}{2} \left[(A+B) + \sqrt{(A+B)^2 - (4AB - C^2)} \right] \quad (1.99)$$

$$B' = \frac{1}{2} \left[(A+B) - \sqrt{(A+B)^2 - (4AB - C^2)} \right] \quad (1.100)$$

Οι τιμές των A, B, C προκύπτουν από το μηδενισμό της ορίζουσας :

$$\begin{vmatrix} (A-\zeta) & \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} & (B-\zeta) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.101)$$

όπου $\zeta_1 = A'$ και $\zeta_2 = B'$ οι δύο ρίζες.

Με τις παραπάνω αντικαταστάσεις η σχέση (1.97) γίνεται :

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot k \cdot (A' \cdot \mu^2 + B' \cdot \lambda^2)} d\mu \cdot d\lambda \quad (1.102)$$

και συνεχίζοντας

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j \cdot k \cdot |A'| \cdot \mu^2} d\mu \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j \cdot k \cdot |B'| \cdot \lambda^2} d\lambda \quad (1.103)$$

όπου τα πρόσημα των εκθετών προσδιορίζονται από τα πρόσημα των A' και B' τα οποία δίνονται από τις σχέσεις (1.99) και (1.100).

Το ολοκλήρωμα της σχέσης (1.103) μπορεί να υπολογιστεί με βάση το ολοκλήρωμα :

$$I''(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j \cdot k \cdot |\alpha| \cdot t^2} dt = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{\pm j \cdot k \cdot |\alpha| \cdot t^2} dt \quad (1.104)$$

όπου η παράμετρος α αντιστοιχεί είτε στο A' είτε στο B' . Αντικαθιστώντας τις παρακάτω σχέσεις :

$$k \cdot |\alpha| \cdot t^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \tau^2 \quad (1.105)$$

και

$$dt = \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot k \cdot |\alpha|}} d\tau \quad (1.106)$$

Οπότε το ολοκλήρωμα της σχέσης (1.103) γράφεται τώρα :

$$I''(k) = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot k \cdot |\alpha|}} \int_0^{+\infty} e^{\pm j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \tau^2} d\tau \quad (1.107)$$

Το ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης είναι το μιγαδικό ολοκλήρωμα Fresnel και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\int_0^{+\infty} e^{\pm j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \tau^2} d\tau = \frac{1}{2} \cdot (1 \pm j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\pm j \cdot \frac{\pi}{4}} \quad (1.108)$$

οπότε το ολοκλήρωμα της σχέσης (1.107) γράφεται :

$$I''(k) = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot k \cdot |\alpha|}} \int_0^{+\infty} e^{\pm j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \tau^2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{k \cdot |\alpha|}} \cdot e^{\pm j \cdot \frac{\pi}{4}} \quad (1.109)$$

Καταλήγοντας για το ολοκλήρωμα $I(k)$ ότι δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \cdot \frac{\pi}{k \cdot \sqrt{|A'| \cdot |B'|}} \cdot e^{\pm j \cdot \frac{\pi}{4}} \cdot e^{\pm j \cdot \frac{\pi}{4}} \quad (1.110)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$$\alpha. \text{ Όταν } A' > 0 \text{ και } B' > 0, \text{ τότε } e^{\pm j \frac{\pi}{4}} \cdot e^{\pm j \frac{\pi}{4}} = e^{+j \frac{\pi}{2}} = +j$$

$$\beta. \text{ Όταν } A' < 0 \text{ και } B' < 0, \text{ τότε } e^{\pm j \frac{\pi}{4}} \cdot e^{\pm j \frac{\pi}{4}} = e^{-j \frac{\pi}{2}} = -j$$

$$\gamma. \text{ Όταν } A' \cdot B' < 0, \text{ τότε } e^{\pm j \frac{\pi}{4}} \cdot e^{\pm j \frac{\pi}{4}} = 1$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, το ολοκλήρωμα $I(k)$ δύναται να γραφτεί:

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \cdot \frac{j \cdot \pi \cdot \delta}{k \cdot \sqrt{|A'| \cdot |B'|}} \quad (1.111)$$

όπου το δ παίρνει τιμές όπως παρακάτω :

$$\delta = \begin{cases} +1 & , \quad A' > 0, B' > 0 \\ -1 & , \quad A' < 0, B' < 0 \\ -j & , \quad A' \cdot B' < 0 \end{cases} \quad (1.112)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν κάποια ιδιαίτερα συμπεράσματα :

α. Οι παράμετροι A' και B' είναι πραγματικοί αριθμοί.

$$\beta. \quad A' + B' = A + B$$

$$\gamma. \quad A' \cdot B' = \frac{(4A \cdot B - C^2)}{4}$$

Χρησιμοποιώντας αυτά τα συμπεράσματα μπορούμε να απλοποιήσουμε ακόμα παραπάνω τη σχέση (1.111) ως εξής :

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \cdot \frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \delta}{k \cdot \sqrt{|4A \cdot B - C^2|}} \quad (1.113)$$

όπου ο προσδιορισμός των πρόσημων των A' , B' γίνεται όπως παρακάτω :

α. Όταν $4A \cdot B > C^2$, τότε τα A και B έχουν ίδιο πρόσημο οπότε $A' \cdot B' > 0$.

Άρα και τα A' και B' έχουν το ίδιο πρόσημο.

Όταν $A > 0$ τότε $B > 0$ και $A' > 0$ και $B' < 0$

Όταν $A < 0$ τότε $B < 0$ και $A' < 0$ και $B' < 0$

β. Όταν $4A \cdot B < C^2$, τότε τα A και B έχουν διαφορετικό πρόσημο, οπότε $A' \cdot B' < 0$.

Άρα και τα A' και B' έχουν διαφορετικό πρόσημο.

Συμπερασματικά, από όλα τα παραπάνω, προκύπτει ότι συνολικά έχουμε τρεις περιπτώσεις :

α. Όταν $4A \cdot B > C^2$ και $A > 0$, τότε $A' > 0$ και $B' > 0$.

β. Όταν $4A \cdot B > C^2$ και $A < 0$, τότε $A' < 0$ και $B' < 0$.

γ. Όταν $4A \cdot B < C^2$, τότε $A' \cdot B' < 0$.

Συνεπώς η έκφραση για το δ γράφεται ισοδύναμα :

$$\delta = \begin{cases} +1 & , \quad 4A \cdot B > C^2, A > 0 \\ -1 & , \quad 4A \cdot B > C^2, A < 0 \\ -j & , \quad 4A \cdot B < C^2 \end{cases}$$

Και οι τύποι υπολογισμού του ολοκληρώματος $I(k)$ δίνονται από :

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} e^{j \cdot k \cdot (A \cdot \xi^2 + B \cdot \eta^2 + C \cdot \xi \cdot \eta)} d\xi \cdot d\eta \quad (1.114)$$

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \cdot \frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \delta}{k \cdot \sqrt{|4A \cdot B - C^2|}} \quad [5] \quad (1.115)$$

13. Τροποποιημένη μέθοδος Στάσιμης Φάσης

Τα αναλυτικά μοντέλα έχουν ένα μεγάλο πλεονέκτημα απέναντι στα εμπειρικά. Σε αυτά υπάρχει η δυνατότητα να γενικευτούν τα αποτελέσματα. Δυστυχώς δεν μπορεί να γίνει το αντίστροφο. Στα περισσότερα εμπειρικά μοντέλα, δεν υπάρχει η βεβαιότητα για τις συνθήκες που επικρατούσαν κατά τις πειραματικές μετρήσεις ακόμα και αν αυτές οι μετρήσεις είχαν διεξαχθεί με τον πλέον σχολαστικό τρόπο και για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα. Κανείς δεν μπορεί να εγγυηθεί ότι ένα εμπειρικό μοντέλο που δίνει καλά αποτελέσματα σε μια χώρα του εξωτερικού όπως η Βραζιλία ή η Κίνα, θα λειτουργήσει το ίδιο καλά και σε ευρωπαϊκό έδαφος, ιδιαίτερα στο ελληνικό που μας ενδιαφέρει.

Έτσι αναγκαζόμαστε να στραφούμε σε αναλυτικά μοντέλα για την πρόβλεψη του ηλεκτρικού πεδίου E. Ο προσδιορισμός δεν χρειάζεται να λάβει παρά μόνο τα ιδιαίτερα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του εκάστοτε περιβάλλοντος. Η μελέτη πραγματοποιείται λαμβάνοντας υπόψη αναλυτικά τους πιο σημαντικούς από τους μηχανισμούς διάδοσης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Οι υπολογισμοί λαμβάνουν υπόψη τα φαινόμενα της ανάκλασης, της περίθλασης και της σκέδασης. Το ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα γίνεται πιο πολύπλοκο και δύσκολο όσο πλησιάζουμε στην περιοχή του κοντινού πεδίου (near field) ή στη ζώνη Fresnel. Ο υπολογισμός του πεδίου γίνεται δύσκολος και πολύπλοκος και πρέπει να ληφθούν μια σειρά από προσεγγίσεις, γιατί αλλιώς η επίλυση γίνεται εξαιρετικά χρονοβόρα και δύσκολη.

Σκοπός είναι η εύρεση μιας αναλυτικής μεθόδου, η οποία χωρίς να είναι ιδιαίτερα περίπλοκη, να μπορεί να υλοποιηθεί υπολογιστικά και να μας δίνει αποτελέσματα χωρίς σημαντικά σφάλματα που θα επηρεάζουν το τελικό αποτέλεσμα.

Από αυτή την αναλυτική μέθοδο θα έχουμε στα χέρια μας ένα πολύ δυνατό μαθηματικό και υπολογιστικό εργαλείο το οποίο θα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σε ποικίλες και διαφορετικές μεταξύ τους περιπτώσεις όταν μελετάμε μια ασύρματη διάδοση. Για να συμβεί αυτό αναζητούμε μια σειρά από μαθηματικές μεθόδους που μπορούν να απλοποιήσουν ένα δύσκολο πρόβλημα, και να δώσουν μια ικανοποιητική προσεγγιστική λύση.

Κατά συνέπεια ένα πολύ δύσκολο ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί τώρα ευκολότερα. Με γνωστό το πεδίο μπορούμε χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία να προσδιορίσουμε τη λαμβανόμενη ισχύ. Η σχεδίαση ενός αναλυτικού μοντέλου αποτελεί πρόκληση καθώς δίνει το δικαίωμα για σύγκριση με τις πειραματικές μετρήσεις για να διαπιστώσει την ορθότητα του αναλυτικού μοντέλου, ή τη λανθασμένη χρήση των εμπειρικών μοντέλων.

Συνήθως τα αναλυτικά μοντέλα καταλήγουν σε τύπους υπολογισμού του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο παρατήρησης πάνω από την επιφάνεια της γης. Η παλιότερη μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι η μέθοδος της Γεωμετρικής Οπτικής η οποία δίνει αποτελέσματα μόνο αν το σημείο παρατήρησης βρίσκεται πάνω στην υπό εξέταση επιφάνεια. Παρατηρήθηκε όμως δυσλειτουργία της μεθόδου όταν η επιφάνεια είναι επίπεδη ή κυρτή. Καλύτερα αποτελέσματα σε αυτές τις επιφάνειες δίνει η Φυσική Οπτική τα οποία όμως γίνονται ασαφή όσο απομακρύνεται η κατεύθυνση σκέδασης από την κατεύθυνση παρατήρησης. Αντίστοιχα καλά αποτελέσματα, δίνει και η Φυσική Θεωρία Περίθλασης. Η Γεωμετρική Θεωρία Περίθλασης δίνει καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με την γεωμετρική οπτική αλλά οι περισσότεροι συντελεστές περίθλασης προσδίδουν αυξημένη υπολογιστική πολυπλοκότητα. Καταλήγοντας, συμπεραίνουμε ότι κάθε μέθοδος έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά της. Το τι θα επιλέξουμε εμείς εξαρτάται από τις δυσκολίες που προκύπτουν κατά την εφαρμογή.

Έστω ότι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα προσπίπτει πάνω σε ηλεκτρικά αγώγιμη πλάκα πεπερασμένων διαστάσεων. Αυτό δημιουργεί ένα σκεδαζόμενο πεδίο το οποίο υπολογίζεται από ένα διπλό ολοκλήρωμα της μορφής :

$$I = \iint_S f(x, y) \exp\{jkg(x, y)\} dx dy \quad (1.116)$$

όπου S είναι η επιφάνεια πάνω στην οποία λαμβάνεται η επαγόμενη ισοδύναμη ρευματική κατανομή (Js) σύμφωνα με τη θεωρία της φυσικής οπτικής.

Συνήθως οι συναρτήσεις f(x,y) και g(x,y) είναι τέτοιου τύπου ώστε να αποκλείεται η αναλυτική μέθοδος επίλυσης του παραπάνω διπλού ολοκληρώματος. Η αριθμητική μέθοδος ολοκλήρωσης είναι αυτή που θα μας βοηθήσει στην επίλυση του προβλήματος. Έχοντας ως δεδομένο ότι οι τιμές που παίρνει το k είναι μεγάλες, μπορεί να γίνει ασυμπτωτικός υπολογισμός του ολοκληρώματος εξαρτώμενος βέβαια και από την συμπεριφορά της συνάρτησης φάσης f(x,y).

Γενικά το k είναι μιγαδικός αριθμός για την εφαρμογή της μεθόδου. Όμως στην δική μας περίπτωση παρατηρούμε ότι το k είναι ένας πραγματικός αριθμός, ο οποίος αυξάνεται όσο αυξάνεται η συχνότητα. Ενδεικτικά για υψηλή συχνότητα $f = 80\text{MHz}$ έχουμε ότι $\lambda = c/f = 3,75$ οπότε $k = 2\pi/\lambda \approx 1,68 \text{ m}^{-1}$.

Όταν έχουμε πηγή 2 διαστάσεων ισοδύναμης κατανομής η εξίσωση (1.116) γίνεται :

$$I = \int_b^a f(x) \exp\{jkg(x)\} dx \quad (1.117)$$

όπου a και b είναι οι διαστάσεις της πλάκας, δηλαδή τα όριά της. Για τον ασυμπτωτικό υπολογισμό γράφουμε την παραπάνω εξίσωση στη μορφή :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\{jkg(x)\} dx - \int_a^{\infty} f(x) \exp\{jkg(x)\} dx - \int_{-\infty}^{-b} f(-x) \exp\{jkg(-x)\} dx = I_0 - I_a - I_{-b} \quad (1.118)$$

Πρώτα θα υπολογίσουμε τον όρο I_0 . Αν το k είναι μεγάλο τότε η φάση στο I_0 θα αλλάζει ταχύτατα και έχοντας ως δεδομένο ότι η f(x) είναι αργή και ομαλά μεταβαλλόμενη συνάρτηση, η τιμή του I_0 θα τείνει στο μηδέν καθώς το k τείνει στο άπειρο. Αν ωστόσο υπάρχουν σημεία για τα οποία η συνάρτηση φάσης g(x) δίνει

$g'(x)=0$ τότε ο εκθετικός όρος $\exp\{jkg(x)\}$ δε θα μεταβάλλεται γρήγορα στην περιοχή περίξ αυτών των σημείων. Η μέγιστη συνεισφορά στον όρο I_0 είναι από αυτές τις περιοχές στις οποίες $g'(x)=0$. Αναπτύσσοντας τις συναρτήσεις του όρου I_0 γύρω από αυτά τα σημεία παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα μπορεί να επιλυθεί με ασυμπτωτική μέθοδο. Τα παραπάνω σημεία ονομάζονται στάσιμα σημεία ενώ η μέθοδος είναι γνωστή ως τροποποιημένη μέθοδος στάσιμης φάσης. Το στάσιμο σημείο φάσης πρώτου βαθμού ορίζεται ως $g'(x)=0$ και $g''(x)\neq 0$. Αναπτύσσοντας τον εκθετικό όρο $g(x)$ σε σειρά Taylor γύρω από το x_0 και διατηρώντας μόνο τους δύο πρώτους μη μηδενικούς όρους του αναπτύγματος θα έχουμε :

$$g(x) \approx g(x_0) + g''(x_0) \frac{s^2}{2} \quad (1.119)$$

$$\text{όπου } s = x - x_0$$

Στην περιοχή της παραπάνω εξίσωσης θεωρούμε ότι η $f(x)$ μεταβάλλεται αργά οπότε είναι περίπου ίση με την $f(x_0)$, οπότε η εξίσωση του I_0 γίνεται :

$$I_0 \sim f(x_0) \exp\{jkg(x_0)\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{jk g''(x_0) \frac{s^2}{2}\right\} ds \quad (1.120)$$

Το ολοκλήρωμα μπορεί να ξαναγραφεί ως :

$$2 \sqrt{\left(\frac{2}{k |g''(x_0)|}\right)} \int_0^{\infty} \exp[jt^2 \operatorname{sgn}\{g''(x_0)\}] dt \quad (1.121)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι το ολοκλήρωμα είναι στη μορφή ολοκληρώματος Fresnel με μηδενικό το φανταστικό μέρος οπότε θα έχουμε :

$$I_0 \sim \sqrt{\left(\frac{2\pi}{k |g''(x_0)|}\right)} f(x_0) \exp\left(j \left[kg(x_0) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}\{g''(x_0)\} \right]\right) \quad (1.122)$$

Αν $g(x_0)=0$ τότε ο επόμενος μεγαλύτερος όρος στην ασυμπτωτική ανάπτυξη (αναπτύσσοντας την $f(x)$ σε σειρά Taylor γύρω από το x_0) είναι ανάλογος του $k^{-3/2} f''(x_0)$. Σε αυτή την περίπτωση η συνεισφορά των άκρων η οποία θα αναλυθεί παρακάτω, θα αποτελέσει τον αρχικό όρο στον υπολογισμό της εξίσωσης (1. 118).

Αν $g'(x_0) \rightarrow 0$ τότε η εξίσωση (1.122) δε θα ισχύει οπότε θα πρέπει να θεωρήσουμε έναν επιπλέον όρο στην ανάπτυξη της συνάρτησης φάσης $g(x)$, δηλαδή :

$$g(x) \approx g(x_0) + g''(x_0) \frac{s^2}{2} + \frac{1}{2} g'''(x_0) \frac{s^3}{3} \quad (1.123)$$

οπότε η (1.120) γίνεται :

$$I_0 \sim f(x_0) \exp\{jk g(x_0)\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[jk \left\{ g''(x_0) \frac{s^2}{2} + \frac{1}{2} g'''(x_0) \frac{s^3}{3} \right\} \right] ds \quad (1.124)$$

Το ολοκλήρωμα της παραπάνω εξίσωσης εκφράζεται σε όρους της τασιακής συνάρτησης Airy η οποία ορίζεται από τη σχέση :

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ \pm j \left(xt + \frac{t^3}{3} \right) \right\} dt \quad (1.125)$$

Με αλλαγή μεταβλητής $t = \left(\frac{1}{2} k |g'''(x_0)| \right)^{1/3} \left(s + \frac{g''(x_0)}{g'''(x_0)} \right)$ παίρνουμε ότι :

$$I_0 \sim 2\pi f \exp(jk g) \exp\left\{ j \frac{k}{3} (g'')^3 (g''')^{-2} \right\} \left[\frac{2}{k |g''''|} \right]^{1/3} Ai(\zeta) \Big|_{x=x_0} \quad (1.126)$$

όπου
$$\zeta = \left(\frac{k}{2} \right)^{2/3} |g''|^2 |g''''|^{-4/3} \exp(\mp j\pi) \quad (1.127)$$

Για μεγάλες τιμές του ζ η παραπάνω σχέση καταλήγει στην (1.122). Όταν $\zeta=0$ έχουμε $g''(x_0)=0$ οπότε έχουμε στάσιμο σημείο δεύτερου βαθμού. Το στάσιμο σημείο δεύτερου βαθμού θεωρείται σαν συμβολή 2 κοντινών στάσιμων σημείων πρώτου βαθμού.

Εάν $g'''(x_0) \rightarrow 0$ η σχέση (1.126) δεν υπολογίζεται. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να θεωρήσουμε, όπως και προηγουμένως, έναν επιπρόσθετο όρο στην ανάπτυξη της $g(x)$. Το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος όμως δεν μπορεί να εκφραστεί με όρους γνωστών συναρτήσεων. Συνεπώς είναι απαραίτητη η αριθμητική επίλυση του ολοκληρώματος.

Αρκεί να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα ολοκληρώματα :

$$I_a = \int_a^{\infty} f(x) \exp\{jkg(x)\} dx \quad (1.128)$$

Για στάσιμα σημεία φάσης που βρίσκονται στην περιοχή $a < x < \infty$ υπολογίζουμε την συμβολή τους στο I_a από τις σχέσεις (1.122) και (1.126). Με αυτόν τον τρόπο θα πάρουμε τον πρώτο όρο του I_a . Ο άλλος όρος θα δοθεί από την συμβολή του άκρου $x=a$. Γράφοντας την (1.128) στην παρακάτω μορφή:

$$\frac{1}{jk} \int_a^{\infty} \frac{f(x)}{g'(x)} jkg'(x) \exp\{jkg(x)\} dx \quad (1.129)$$

και λύνοντάς την, παίρνουμε για τη συμβολή του άκρου a , την παρακάτω σχέση :

$$-\frac{1}{jk} \frac{f(a)}{g'(a)} \exp\{jkg(a)\} + O(k^{-2}) \quad (1.130)$$

Η συμβολή του άνω ορίου δεν υπολογίζεται. Αυτό συμβαίνει επειδή θεωρούμε ότι το μέσο έχει ασήμαντες απώλειες, δίνοντας k με φανταστικό μέρος πολύ μικρό. Ο παραπάνω όρος είναι $k^{-1/2}$ μεγαλύτερος από την τιμή της συμβολής ενός στάσιμου σημείου φάσης πρώτου βαθμού.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε τον επόμενο όρο της συμβολής ενός άκρου στο Ια.

$$\frac{1}{(jk)^2} \frac{f'(a)g'(a) - f(a)g''(a)}{\{g'(a)\}^3} \exp\{jkg(a)\} + O(k^{-3}) \quad (1.131)$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προκύπτουν οι ασυμπτωτικές σειρές :

$$\exp\{jkg(a)\} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{j}{k}\right)^m u_m(a) \left(\frac{1}{g'(a)}\right)^{m-1} \quad (1.132)$$

όπου $u_m(a) = \frac{\partial}{\partial x} u_{m-1}(x)|_{x=a}$ για $m > 1$ και $u_1(x) = \frac{f(x)}{g'(x)}$

Σε μερικές περιπτώσεις οι $f(x)$ και $g(x)$ μηδενίζονται για $x=a$ οπότε οι παραπάνω σχέσεις καταλήγουν σε απροσδιόριστες μορφές 0/0. Εφαρμόζοντας τον κανόνα L'Hospital η (1.126) δίνει :

$$-\frac{1}{jk} \frac{f'(a)}{g''(a)} \exp\{jkg(a)\} \quad (1.133)$$

Η έρευνα τώρα θα επεκταθεί στη επέκταση Fresnel του απλού ολοκληρώματος. Όταν ένα στάσιμο σημείο πρώτου βαθμού πλησιάζει το άκρο $x=a$ πρέπει να υπολογίσουμε την επίδραση μεταξύ των δύο σημείων. Αναπτύσσοντας την $g(a)$ σε σειρά Taylor γύρω από το x_0 παίρνουμε :

$$g(x_0) - g(a) \approx -\frac{1}{2}(a - x_0)^2 g''(x_0) \quad (1.134)$$

ή εναλλακτικά αναπτύσσοντας την $f(x_0)$ γύρω από το a έχουμε :

$$g(x_0) - g(a) \approx -(a - x_0)g'(x_0) \quad (1.135)$$

Επειδή $x_0 \rightarrow a$ με $f'(x_0) \approx f'(a)$ από τις δύο παραπάνω σχέσεις παίρνουμε :

$$g'(a) \approx \frac{1}{2}(a - x_0)g''(a) \quad \text{με } x_0 \rightarrow a \quad (1.136)$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της σχέσης (1.128) όταν $x_0 \rightarrow a$ μπορούμε να αναπτύξουμε την $f(x)$ είτε γύρω από το x_0 είτε γύρω από το a . Αναπτύσσοντας γύρω από το a , όπου οι εκφράσεις που λαμβάνουμε είναι πιο απλές, παίρνουμε :

$$g(x) \approx g(a) + sg'(a) + \frac{s^2}{2}g''(a) \quad \text{με } s = x - a \quad (1.137)$$

χρησιμοποιώντας την σχέση (1.136) έχουμε :

$$g(x) \approx g(a) \pm \left\{ e_1 s |g'(a)| + \frac{s^2}{2} |g''(a)| \right\} \quad \text{με } g''(a) \neq 0 \quad (1.138)$$

όπου $e_1 = \text{sgn}(a - x_0)$

Διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις :

α. Όταν το ε_1 είναι θετικό και το στάσιμο σημείο φάσης βρίσκεται έξω από τα όρια ολοκλήρωσης ($x_0 < a$). Αντικαθιστώντας την (1.138) στη σχέση (1.128) και υποθέτοντας όπως και πριν ότι η $g(x)$ είναι αργά μεταβαλλόμενη συνάρτηση παίρνουμε :

$$I_a = f(a) \exp\{jk g(a)\} \int_a^\infty \exp\left[\pm jk \left\{ s |g'(a)| + \frac{s^2}{2} |g''(a)| \right\}\right] dx \quad \text{με } g''(a) \neq 0 \quad (1.138)$$

Με αλλαγή μεταβλητής

$$t = \sqrt{\left(\frac{k}{2|g''(a)|}\right) |g'(a)| + \left(\frac{k}{2} |g''(a)|\right)} s$$

Η εξίσωση μετατρέπεται στην :

$$I_a = f(a) \exp \{ jk g(a) \mp ju^2 \} \sqrt{\left(\frac{2}{k |g''(a)|} \right)} \int_u^\infty \exp(\pm jt^2) dt \quad \varepsilon_1 > 0, g''(a) \neq 0 \quad (1.139)$$

όπου
$$u = \sqrt{\left(\frac{k}{2 |g''(a)|} \right)} |g'(a)|$$

Το ολοκλήρωμα στην σχέση (1.139) είναι ολοκλήρωμα Fresnel $F_{\pm}(u)$ και έχει υπολογιστεί.

β. Όταν το ε_1 είναι αρνητικό και το στάσιμο σημείο φάσης είναι μέσα στα όρια ολοκλήρωσης ($x_0 > a$).

Σε αυτήν την περίπτωση η (1.128) γίνεται :

$$I_a = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp \{ jk g(x) \} dx - \int_{-\infty}^a f(x) \exp \{ jk g(x) \} dx \quad \varepsilon_1 < 0 \quad (1.140)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα θα δώσει τη συμβολή στάσιμου σημείου I_0 όπως η σχέση (1.122) στο $x=x_0$. Το δεύτερο ολοκλήρωμα αναπτύσσεται γύρω από το $x=a$ και χρησιμοποιώντας την (1.138) δίνει :

$$f(a) \exp \{ jk g(a) \} \int_{-\infty}^a \exp \left[\pm jk \left\{ -s |g'(a)| + \frac{s^2}{2} |g''(a)| \right\} \right] dx \quad g''(a) \neq 0 \quad (1.141)$$

Με αλλαγή μεταβλητής
$$t = -\sqrt{\left(\frac{k}{2 |g''(a)|} \right)} |g'(a)| + \sqrt{\left(\frac{k}{2 |g''(a)|} \right)} s$$

η εξίσωση γίνεται :

$$f(a) \exp \{ jk g(a) \mp ju^2 \} \sqrt{\left(\frac{2}{k |g''(a)|} \right)} F_{\pm}(u) \quad (1.142)$$

και επομένως η λύση για το I_a όταν $\varepsilon_1 < 0$ δίνεται από :

$$I_a \approx I_0 - f(a) \exp\{jkg(a) \mp ju^2\} \sqrt{\left(\frac{2}{k|g''(a)|}\right)} F_{\pm}(u) \quad \varepsilon_1 < 0, g''(a) \neq 0 \quad (1.143)$$

Συνδυάζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα με εκείνο της σχέσης (1.139) παίρνουμε τελικά :

$$I_a \approx U(-e_1)I_0 + e_1 f(a) \exp\{jkg(a) \mp ju^2\} \sqrt{\left(\frac{2}{k|g''(a)|}\right)} F_{\pm}(u) \quad g''(a) \neq 0 \quad (1.144)$$

Δηλαδή ισχύει ότι εφόσον $g''(a) > 0$ χρησιμοποιούμε την F_{r+} και το αρνητικό πρόσημο (-) στην \exp , ενώ όταν $g''(a) < 0$ χρησιμοποιούμε την F_{r+} και το θετικό πρόσημο (+) στην \exp ,

$$\text{όπου } e_1 = \text{sgn}(a - x_0) \quad \text{και} \quad u = \sqrt{\left(\frac{k}{2|g''(a)|}\right)} |g'(a)|$$

$$\text{ενώ η } U(x) \text{ είναι η βηματική συνάρτηση} \quad U(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Όταν το u είναι μεγάλο (u η παράμετρος της συνάρτησης Fresnel που δίνεται από την παραπάνω εξίσωση) τότε ο ασυμπτωτικός όρος μετά την προσέγγιση της Fresnel (1.144) αστοχεί και συμπεριλαμβάνοντας την πληροφορία προσήμου της εξίσωσης (1.136), η (1.144) μετασχηματίζεται στην :

$$I_a \sim U(-e_1)I_0 - \frac{1}{jk} \frac{f(a)}{g'(a)} \exp\{jkg(a)\} \quad (1.145)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι σύμφωνο με τον αρχικό όρο, όπως είχαμε δει, της συμβολής του άκρου. Η σχέση (1.144) αποτελεί την ασυμπτωτική λύση όταν ένα στάσιμο σημείο πρώτου βαθμού είναι κοντά στο άκρο του ολοκληρώματος. Για να αποφευχθούν λανθασμένα αποτελέσματα θα χρησιμοποιείται η (1.144) για $u < 3$ και η (1.145) όταν $u > 3$.

Όταν το στάσιμο σημείο δεν είναι πρώτου βαθμού αλλά υπολογίζεται από την σχέση (1.126), τότε το ολοκλήρωμα Fresnel αντικαθίσταται από την τασική συνάρτηση Airy της μορφής :

$$\int_u^{\infty} \exp \left\{ -j \left(at + \frac{t^3}{3} \right) \right\} dt \quad (1.146)$$

Συνοψίζοντας τα όσα προαναφέραμε θα υποθέσουμε ότι έχουμε να υπολογίσουμε το άπειρο ολοκλήρωμα ενός ταλαντευόμενου όρου:

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikq(x)} dx, \quad k \gg 1 \quad (1.147)$$

όπου a, b, k, f(x) και q(x) πραγματικές συναρτήσεις.

Εάν το k είναι μεγάλο, το παραπάνω ολοκλήρωμα αναφέρεται σε έναν όρο που ταλαντεύεται πάρα πολύ γρήγορα. Αποτέλεσμα αυτής της ταχύτατης ταλάντωσης είναι να έχουμε αλληλοακυρώσεις από θετικές και αρνητικές συνεισφορές μεταξύ γειτονικών διαστημάτων κατά την συνεισφορά όρων στο τελικό αποτέλεσμα. Το στάσιμο σημείο πρώτης τάξης x_s θα ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} q'(x_s) &= 0 \text{ και } q''(x_s) \neq 0, \quad f(x) = f(x_s) \\ q(x) &\sim q(x_s) + \frac{1}{2} q''(x_s) (x - x_s)^2 \\ I(k) &\cong f(x_s) e^{ikq(x_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{1}{2} q''(x_s) (x - x_s)^2} dx \end{aligned} \quad (1.148)$$

Με βάση την σχέση υπολογισμού του ολοκληρώματος Fresnel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} e^{i \frac{\pi}{4} \text{sgn}(a)} \quad (1.149)$$

το τελικό αποτέλεσμα θα είναι:

$$I(k) \sim f(x_s) \sqrt{\frac{2\pi}{k |q''(x_s)|}} e^{i \frac{\pi}{4} \text{sgn}(q''(x_s))} e^{ikq(x_s)} \quad (1.150)$$

και ο όρος σφάλματος του ασυμπτωτικού υπολογισμού εκτιμάται ξανά:

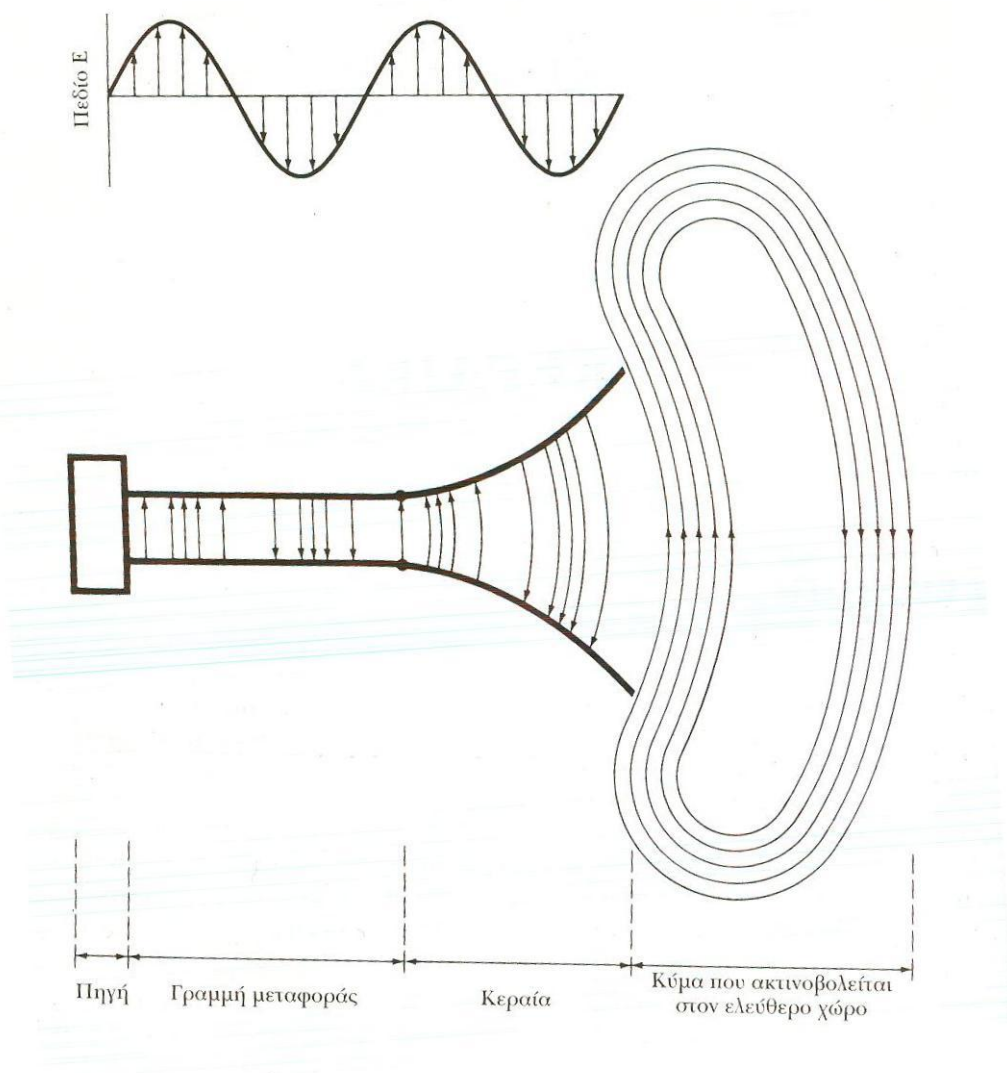
$$O\left(\frac{1}{k}\right) \quad [6] \quad (1.151)$$

Κεφάλαιο 2

ΚΕΡΑΙΕΣ ΚΑΙ ΠΕΔΙΑ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ

1. Κεραίες

Κεραία είναι ένα μέσο εκπομπής ή λήψης ακτινοβολίας. Διαφορετικά, η κεραία είναι η μεταβατική διάταξη ανάμεσα στον ελεύθερο χώρο και μιας διάταξης κυματοδότησης, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Ο ρόλος της διάταξης κυματοδότησης ή γραμμής μεταφοράς είναι να μεταφέρει ηλεκτρομαγνητική ενέργεια από μια πηγή εκπομπής στην κεραία ή από την κεραία στο δέκτη.



Σχήμα 2.1: Λειτουργία Κεραίας

Ο μηχανισμός ακτινοβολίας της κεραίας αποτελεί το πρώτο εύλογο ερώτημα. Δηλαδή πως δημιουργούνται τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία από την πηγή,

πως συντηρούνται και καθοδηγούνται μέσα στη γραμμή μεταφοράς και την κεραία και πως εκφεύγουν από την κεραία σχηματίζοντας ένα κύμα ελεύθερου χώρου. Στην πιο απλή περίπτωση που διαθέτουμε θα έχουμε ένα λεπτό αγωγίμο σύρμα. Αν το ρεύμα που το διαρρέει είναι χρονομεταβλητό οπότε η παράγωγος του ρεύματος θα είναι

$$dI_z/dt=qdu_z/dt=qa_z \quad (2.1)$$

όπου $du_z/dt=a_z$ η επιτάχυνση (σε m/sec^2). Εάν θεωρήσουμε το μήκος του σύρματος ότι είναι l τότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$l dI_z/dt= l qdu_z/dt= l qa_z \quad (2.2)$$

Η εξίσωση αυτή είναι η βασική σχέση μεταξύ ρεύματος και φορτίου και θεμελιώνει την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Ουσιαστικά η σχέση αυτή μας δείχνει ότι για να δημιουργηθεί ακτινοβολία πρέπει να υπάρχει ένα χρονομεταβλητό ρεύμα ή ένα επιταχυνόμενο (ή επιβραδυνόμενο) φορτίο. Τα ρεύματα αναφέρονται συνήθως σε χρονικά αρμονικές εφαρμογές ενώ τα φορτία σε μεταβατικές καταστάσεις. Για να επιταχυνθεί (ή να επιβραδυνθεί) το φορτίο πρέπει το σύρμα να καμπυλωθεί, να καμφθεί, να έχει ασυνέχειες ή απολήξεις. Περιοδικές επιταχύνσεις (ή επιβραδύνσεις) φορτίων ή χρονομεταβλητά ρεύματα, δημιουργούνται επίσης όταν ένα φορτίο ταλαντώνεται κατά τη διάρκεια μιας χρονικά αρμονικής κίνησης. Κατά συνέπεια συμπεραίνουμε ότι:

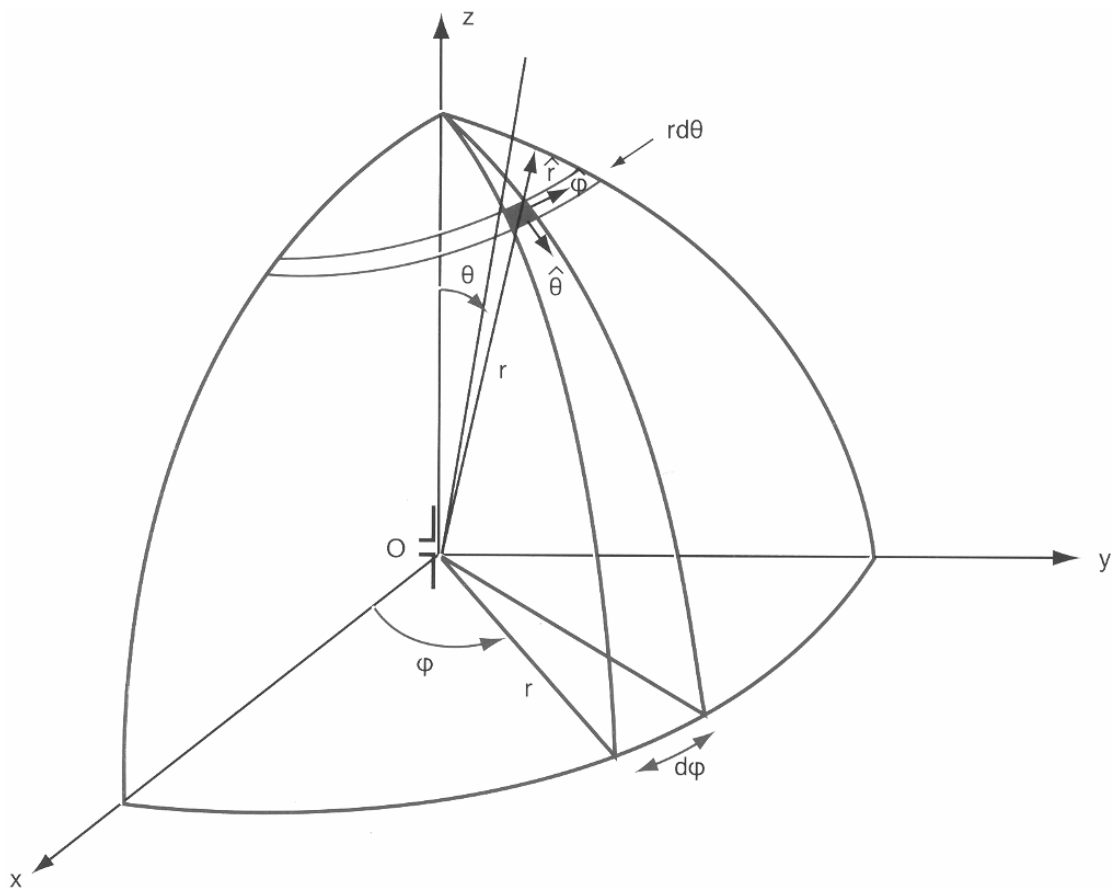
α. Αν ένα φορτίο δεν κινείται, δεν δημιουργείται ρεύμα και κατά συνέπεια δεν υπάρχει ακτινοβολία.

β. Αν ένα φορτίο κινείται με σταθερή ταχύτητα τότε δεν δημιουργείται ακτινοβολία αν το σύρμα είναι ευθύγραμμο και απείρου μήκους ενώ δημιουργείται ακτινοβολία αν το σύρμα έχει καμπύλα σημεία, κάμψεις, ασυνέχειες και απολήξεις.

γ. Αν ένα φορτίο ταλαντώνεται χρονικά, τότε ακτινοβολεί ακόμη κι αν είναι ευθύγραμμο. [22]

2. Διάγραμμα Ακτινοβολίας

Το διάγραμμα ακτινοβολίας μιας κεραίας ή απλώς διάγραμμα κεραίας είναι η μαθηματική συνάρτηση ή η γραφική παράσταση των ιδιοτήτων ακτινοβολίας της κεραίας συναρτήσει των χωρικών συντεταγμένων. Στις περισσότερες περιπτώσεις το διάγραμμα ακτινοβολίας προσδιορίζεται στο μακρινό πεδίο καθώς αυτό μας ενδιαφέρει στην πράξη και αποδίδεται ως συνάρτηση των σφαιρικών συντεταγμένων κατεύθυνσης θ , ϕ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



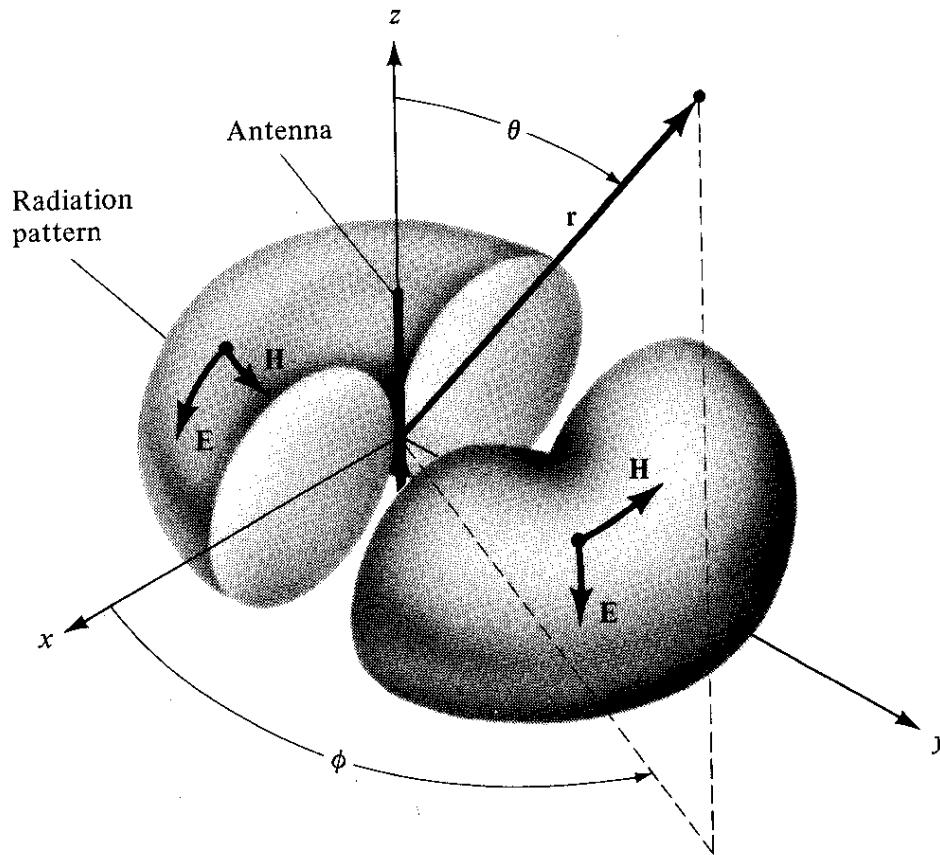
Σχήμα 2.2: Σφαιρικό Σύστημα Συντεταγμένων για την Ανάλυση Κεραίων

Οι ιδιότητες ακτινοβολίας μιας κεραίας είναι η πυκνότητα ροής ισχύος, η ένταση της ακτινοβολίας, η ένταση του πεδίου, η φάση της κατευθυντικότητας και η πόλωση. Στην πράξη, αυτό που ενδιαφέρει περισσότερο είναι η ισχύς ακτινοβολίας ως συνάρτηση της θέσης ενός παρατηρητή στη μακρινή περιοχή μιας κεραίας και σε

σταθερή απόσταση από την κεραία το οποίο αποτελεί το διάγραμμα ισχύος ακτινοβολίας. Αντίστοιχα, το διάγραμμα χωρικής μεταβολής του ηλεκτρικού (ή του μαγνητικού πεδίου) ονομάζεται διάγραμμα πλάτους πεδίου.

Στο παραπάνω σχήμα το επίπεδο $z=0$ ταυτίζεται, συνήθως, με το οριζόντιο επίπεδο που σχετίζεται με την ακτινοβολία της κεραίας, και η γωνία φ ($0 \leq \varphi \leq 360^\circ$) ονομάζεται αζιμουθιακή γωνία. Ο άξονας z που διέρχεται από κάποιο χαρακτηριστικό σημείο της κεραίας ταυτίζεται, αντίστοιχα, με την κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο αυτό, ενώ η γωνία θ ($0 \leq \theta \leq 180^\circ$) γωνία ανύψωσης. Στις πιο πολλές περιπτώσεις που παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον, για να περιγραφεί σχεδόν πλήρως η ακτινοβολία μιας κεραίας, είναι αρκετή η σχεδίαση δυσδιάστατων διαγραμμάτων καθώς μεταβάλλεται η γωνία θ για ορισμένες τιμές της γωνίας φ και διαγραμμάτων συναρτήσεως της φ για ορισμένες τιμές της θ .

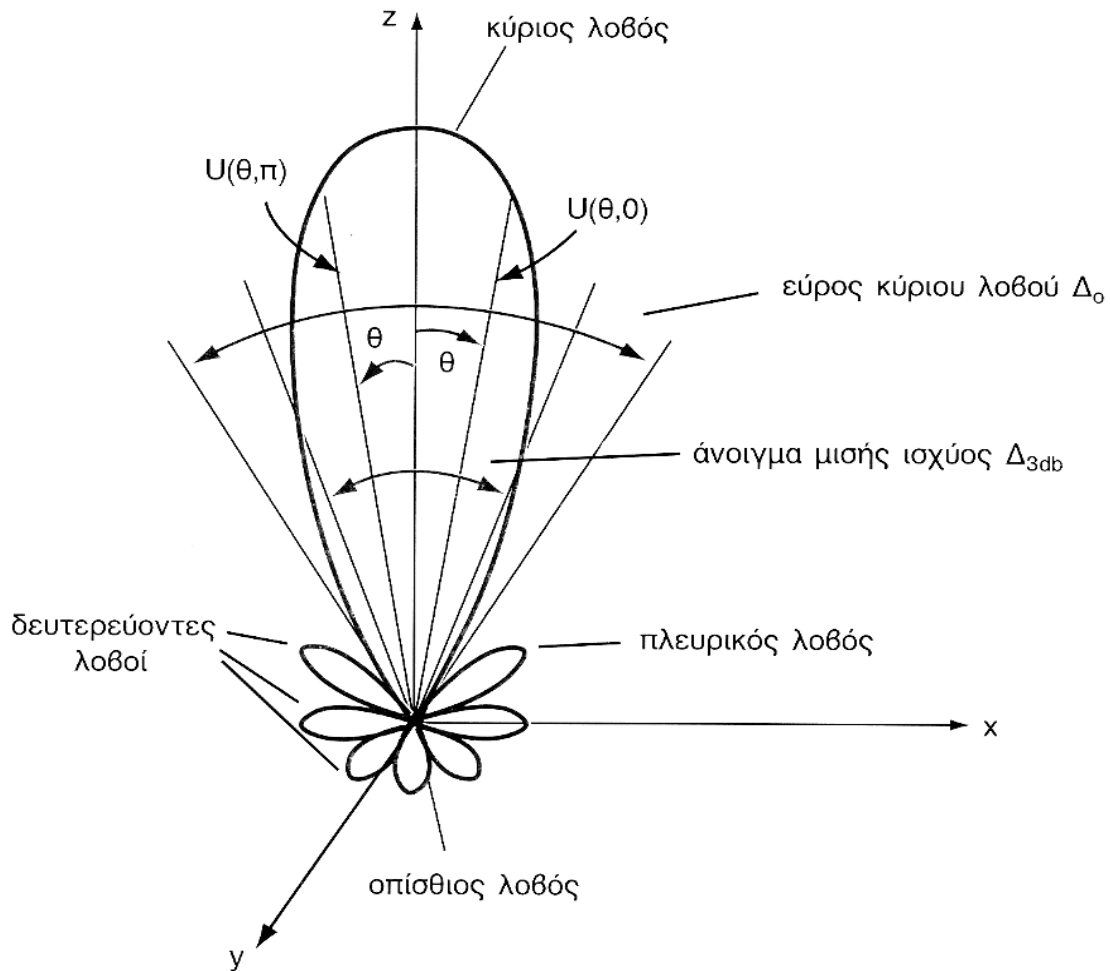
Ένας ακτινοβολητής ο οποίος εκπέμπει και λαμβάνει εξίσου προς και από όλες τις κατευθύνσεις χωρίς απώλειες ονομάζεται ισοτροπικός. Η σημειακή πηγή, αν και δεν αποτελεί υλοποιήσιμη κεραία, χρησιμοποιείται ως κεραία αναφοράς ως προς την οποία εκφράζονται τα χαρακτηριστικά ακτινοβολίας των πρακτικών κεραιών. Οι κατευθυντικές κεραίες είναι αυτές που έχουν ως χαρακτηριστικό την κατεύθυνση της ισχύος προς ορισμένες διευθύνσεις με περισσότερη αποτελεσματικότητα (και όχι σε όλες), δηλαδή ακτινοβολούν και λαμβάνουν ακτινοβολία καλύτερα. Τέλος, μια ειδική κατηγορία κατευθυντικών κεραιών είναι οι λεγόμενες ομοιοκατευθυντικές όπως αυτή του παρακάτω σχήματος. Παρατηρούμε ότι υπάρχει κατευθυντικότητα ως προς την γωνία ανύψωσης θ ενώ η κεραία είναι μη κατευθυντική ως προς τη γωνία αζιμουθίου φ . [22]



Σχήμα 2.3: Ομοιοκατευθυντική Κεραία

3. Λοβοί Διαγράμματος Ακτινοβολίας

Οι λοβοί είναι τμήματα του διαγράμματος ακτινοβολίας και διακρίνονται σε κύριους (ή μέγιστους), σε πλευρικούς, σε οπίσθιους και σε μικρότερους. Λοβός ακτινοβολίας είναι το τμήμα του διαγράμματος ακτινοβολίας που περιορίζεται από περιοχές σχετικά μικρής έντασης ακτινοβολίας. Κύριος λοβός (ή κύρια δέσμη) είναι αυτός που περιέχει τη διεύθυνση της μέγιστης ακτινοβολίας. Στο παρακάτω σχήμα, ο κύριος λοβός είναι προσανατολισμένος κατά τη διεύθυνση $\theta=0$. Σε μερικές κεραίες (κεραίες διαχωριστικής δέσμης) ενδέχεται να υπάρχουν περισσότεροι του ενός κύριοι λοβοί. Κάθε λοβός που δεν είναι κύριος χαρακτηρίζεται ως μικρότερος (δευτερεύων). Πλευρικός λοβός είναι κάθε λοβός που δεν περιέχει τη διεύθυνση που είναι διαφορετική από την επιθυμητή. Οπίσθιος λοβός είναι αυτός που περιέχει την κατεύθυνση την αντίθετη αυτής του κύριου λοβού δηλαδή ο άξονάς του σχηματίζει γωνία περίπου 180^0 ως προς τη δέσμη μιας κεραίας.

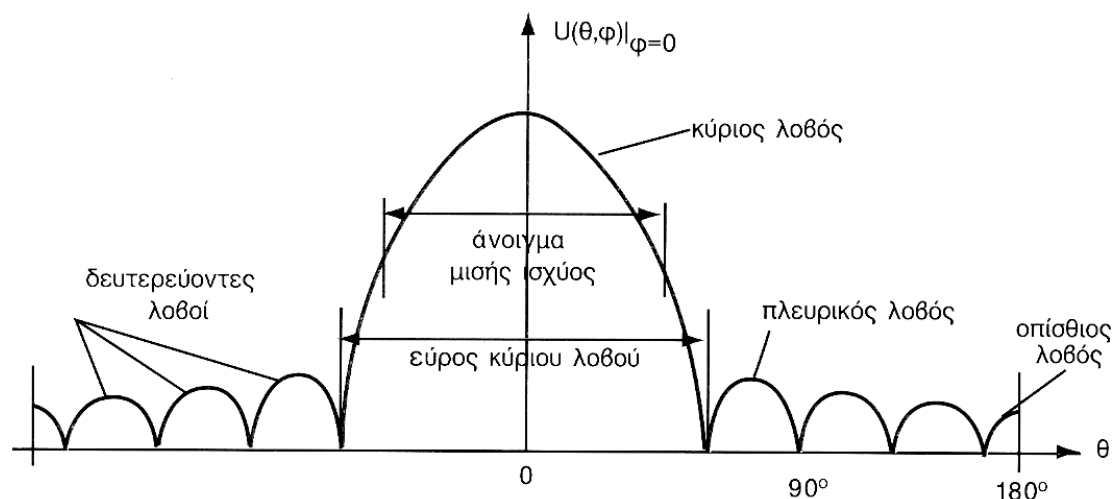


Σχήμα 2.4: Λοβοί Ακτινοβολίας και Εύρη Ζώνης Διαγράμματος Κεραίας

Οι μικρότεροι λοβοί αντιπροσωπεύουν ακτινοβολία προς ανεπιθύμητες διευθύνσεις και πρέπει να ελαχιστοποιούνται. Οι πλευρικοί λοβοί είναι μεγαλύτεροι από τους μικρότερους. Ο λόγος της ισχύος ενός λοβού προς αυτήν του κύριου λοβού ονομάζεται στάθμη του πλευρικού λοβού και εκφράζεται σε db. Σε πολλές εφαρμογές, έχει ιδιαίτερη σημασία η ελαχιστοποίηση των πλευρικών λοβών.

Σημαντικό μέγεθος για την περιγραφή των κατευθυντικών ιδιοτήτων των κεραιών είναι το άνοιγμα του κυρίου λοβού Δ_0 , που είναι η γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις μηδενισμού μεταξύ των οποίων περιλαμβάνεται η διεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας. Επίσης, στην πράξη, η περιγραφή του κύριου λοβού γίνεται μέσω του ανοίγματος μισής ισχύος Δ_{3db} που είναι η γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις για τις οποίες η ισχύς ακτινοβολίας είναι μισή σε σχέση με τη μέγιστη τιμή της. Στα

παρακάτω σχήμα φαίνονται τα διάφορα είδη λοβών ακτινοβολίας καθώς και οι παράμετροι περιγραφής του κύριου λοβού.

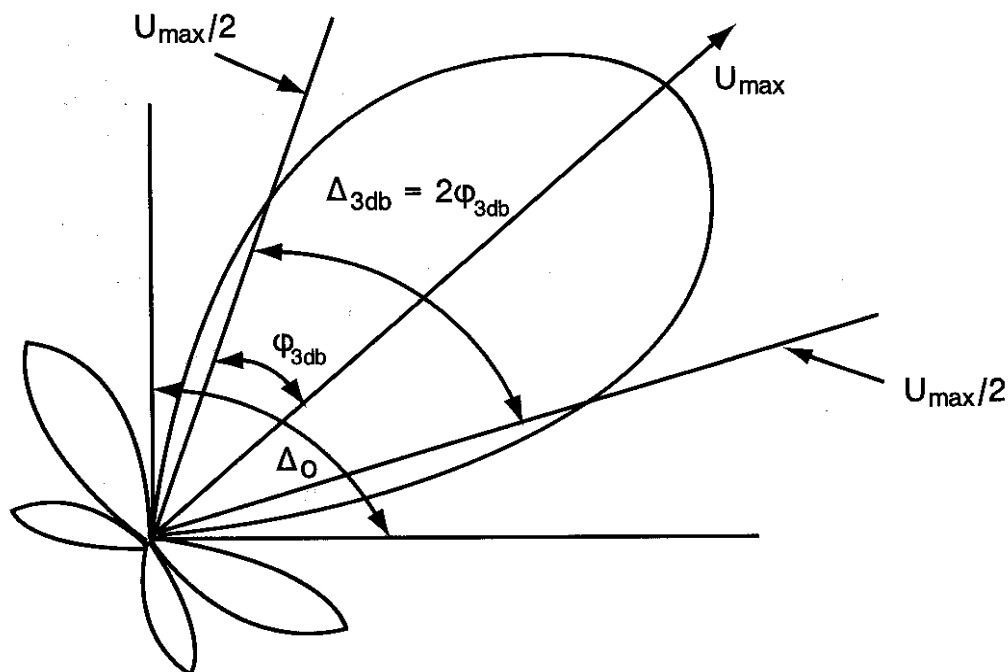


Σχήμα 2.5: Γραμμική Σχεδίαση Διαγράμματος Ισχύος με τους Λοβούς και τα Εύρη Δέσμης

Το άνοιγμα μισής ισχύος (ή εύρος ημίσειας ισχύος) (HPBW- Half Power Beam Width) καθορίζεται από εκείνα τα σημεία του διαγράμματος ακτινοβολίας στο οριζόντιο και κατακόρυφο επίπεδο, στα οποία η ακτινοβολούμενη ισχύς είναι η μισή της μέγιστης (ή κατά 3dB μικρότερη, αν εκφράζεται σε dB). Αυτά τα σημεία καλούνται επίσης και σημεία 3dB.

Ουσιαστικά, ένας από τους κύριους στόχους της σχεδίασης πρέπει να είναι η ελαχιστοποίηση των πλευρικών λοβών αφού αυτοί σχετίζονται όπως προαναφέραμε με την ακτινοβολία προς ανεπιθύμητες κατευθύνσεις. Το επίπεδο ενός πλευρικού λοβού εκφράζεται συνήθως σε σχέση με αυτό του κύριου λοβού. Συγκεκριμένα, στάθμη ενός πλευρικού λοβού λέμε το λόγο της ισχύος του πλευρικού λοβού στην κατεύθυνση μεγίστου του, προς την αντίστοιχη ισχύ του κύριου λοβού. Συνήθως, στάθμες πλευρικών της τάξης των -20 db θεωρούνται οριακά ικανοποιητικές για τις περισσότερες εφαρμογές, ενώ τα -30 db αποτελούν μια πιο αυστηρή προδιαγραφή για τις πιο απαιτητικές εφαρμογές όπως είναι τα συστήματα ραντάρ (ελαχιστοποίηση ψεύτικων ιχνών στόχων που εισάγονται μέσω των πλευρικών λοβών).

Γωνιακό εύρος ονομάζεται η γωνία μεταξύ των μηδενισμών ή ελαχίστων του διαγράμματος στην οποία βρίσκεται η κατεύθυνση μεγίστου. Πρακτικά, πιο πολύ ενδιαφέρον παρουσιάζει το εύρος ημίσειας ισχύος που ορίζεται ως η γωνία που περιλαμβάνει την κατεύθυνση μεγίστου και η οποία οριοθετείται από τις κατευθύνσεις στις οποίες η ένταση ακτινοβολίας έχει την μισή τιμή της μέγιστης. Συνήθως, μια μείωση του εύρους του κύριου λοβού (που σημαίνει πιο κατευθυντική κεραία) συνεπάγεται αύξηση της στάθμης των πλευρικών λοβών. Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.[15]



Σχήμα 2.6 : Λοβοί Ακτινοβολίας, Γωνιακό Εύρος, Εύρος Ημίσειας Ισχύος

4. Εύρος Ζώνης Κεραίας

Το εύρος ζώνης (bandwidth) μιας κεραίας είναι το εύρος συχνοτήτων μέσα στο οποίο οι επιδόσεις της κεραίας ικανοποιούν συγκεκριμένες προδιαγραφές ως προς ορισμένα χαρακτηριστικά. Ως εύρος ζώνης της κεραίας, συνήθως, θεωρούμε τη ζώνη συχνοτήτων εκατέρωθεν μιας κεντρικής συχνότητας, (για δίπολο είναι η συχνότητα συντονισμού) όπου ορισμένα χαρακτηριστικά μεγέθη της κεραίας όπως η αντίσταση εισόδου, το κέρδος ή η πόλωση, το εύρος δέσμης διατηρούν αποδεκτές τιμές σε σχέση με αυτές της κεντρικής συχνότητας.

Στις κεραιές ευρείας ζώνης, το εύρος ζώνης εκφράζεται ως ο λόγος της υψηλότερης προς τη χαμηλότερη συχνότητά του. Εύρος 8:1 σημαίνει ότι η υψηλότερη συχνότητα αποδεκτής λειτουργίας είναι 8 φορές μεγαλύτερη της χαμηλότερης. Στις κεραιές στενής ζώνης, το εύρος ζώνης εκφράζεται ως ποσοστό της διαφοράς συχνοτήτων. Εύρος ζώνης 10% σημαίνει ότι η διαφορά συχνοτήτων αποδεκτής λειτουργίας (της χαμηλότερης από την υψηλότερη συχνότητα) είναι το 10% της κεντρικής συχνότητας του εύρους ζώνης.

Επειδή τα διάφορα χαρακτηριστικά μιας κεραιάς δεν μεταβάλλονται ή δεν επηρεάζονται με τον ίδιο τρόπο από τη συχνότητα, δεν υπάρχει ένας μοναδικός ορισμός του εύρους ζώνης αλλά εξαρτάται από την εκάστοτε εφαρμογή. Τα χαρακτηριστικά τα οποία κυρίως ενδιαφέρουν σε σχέση με το εύρος ζώνης είναι το διάγραμμα ακτινοβολίας και η σύνθετη αντίσταση εισόδου. Πιο συγκεκριμένα, αναφερόμαστε στο εύρος ζώνης διαγράμματος ακτινοβολίας και το εύρος ζώνης αντίστασης εισόδου. Με το πρώτο σχετίζεται το κέρδος, η στάθμη των πλευρικών λοβών, το εύρος και διεύθυνση δέσμης και η πόλωση, ενώ με το δεύτερο η αντίσταση εισόδου και ο συντελεστής απόδοσης ακτινοβολίας.

Το χαρακτηριστικό του οποίου η μεταβολή ως προς τη συχνότητα ενδιαφέρει για τον προσδιορισμό του εύρους ζώνης μιας κεραιάς είναι, συνήθως, η αντίσταση εισόδου. Η επιτρεπτή διακύμανση της αντίστασης εισόδου, με βάση την οποία καθορίζεται το εύρος ζώνης, προδιαγράφεται από τη μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή του συντελεστή ανάκλασης (ρ_m) που δημιουργείται μεταξύ του κυκλώματος τροφοδότησης και της κεραιάς. Γνωρίζοντας ότι, $\rho = \frac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0}$ η σχέση προσδιορισμού του εύρους ζώνης της κεραιάς είναι:

$$|\rho(\omega)| \leq \rho_m \quad \eta \quad \left| \frac{Z_A(\omega) - Z_0}{Z_A(\omega) + Z_0} \right| \leq \rho_m \quad (2.3)$$

Αποδεικνύεται αφού λάβουμε υπόψη ότι στην πράξη επιδιώκεται και επιτυγχάνεται $R_A=Z_0$, ότι η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$|X_A(\omega)| \leq \frac{2\rho_m}{(1-\rho_m)^{1/2}} Z_0 \quad (2.4)$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση το εύρος ζώνης της κεραίας περιλαμβάνει τις συχνότητες που ικανοποιούν την τελευταία σχέση. Το εύρος ζώνης αυτό είναι συμμετρικό περί την κεντρική συχνότητα ω_0 για την οποία επιδιώκεται συντονισμός της κεραίας, δηλαδή $X_A(\omega_0) = 0$.

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι το διάγραμμα ενός γραμμικού διπόλου συνολικού μήκους μικρότερου του $\lambda/2$ είναι ευαίσθητο στη συχνότητα. Ο περιοριστικός παράγοντας της κεραίας αυτής είναι η σύνθετη αντίσταση και το εύρος ζώνης. Για κεραίες ενδιάμεσου μεγέθους, το εύρος ζώνης μπορεί να περιορίζεται από μεταβολές του διαγράμματος ακτινοβολίας ή από μεταβολές της σύνθετης αντίστασης ανάλογα με την εφαρμογή. Ένα εύρος ζώνης 2:1 για τέτοιες κεραίες θεωρείται καλή σχεδίαση ενώ για άλλες χρειάζονται μεγαλύτερα εύρη ζώνης. Γενικά κεραίες με εύρος ζώνης μεγαλύτερα του 40:1 είναι κεραίες ανεξάρτητες από τη συχνότητα.[15]

5. Ενεργός Επιφάνεια Κεραίας

Μία κεραία σε λειτουργία λήψης, έχει στόχο να αποσπάσει τη μέγιστη δυνατή ενέργεια από το ηλεκτρομαγνητικό κύμα που προσπίπτει πάνω της. Η ικανότητά της αυτή περιγράφεται από ένα μέγεθος που ονομάζεται ενεργός επιφάνεια. Αυτή ορίζεται ως το πηλίκο της ισχύος P_T με την οποία τροφοδοτεί η κεραία το φορτίο της προς την προσπίπτουσα πυκνότητα ισχύος, δηλαδή

$$A_e = \frac{P_T}{W_{av}} = \frac{|I_T|^2 R_T}{2W_{av}} \quad (2.5)$$

όπου W_{av} είναι το μέτρο του διανύσματος Poynting του προσπίπτοντος κύματος επί της κεραίας.

Η φυσική ερμηνεία της ενεργού επιφανείας παριστά την υποθετική επιφάνεια που θα συνέλλεγε από το περιβάλλον της ισχύ, ίση με αυτήν που πραγματικά συλλέγει η κεραία. Η ενεργός επιφάνεια εξαρτάται από τον προσανατολισμό της κεραίας και από το συσχετισμό της πόλωσής της με αυτόν του προσπίπτοντος πεδίου. Χρησιμοποιώντας το ισοδύναμο κύκλωμα μιας κεραίας λήψης προκύπτει η σχέση

$$A_e = \frac{|V_T|^2}{2W_{av}} \frac{R_T}{(R_r + R_L + R_T)^2 + (X_\alpha + X_T)^2} \quad (2.6)$$

Στην ειδική περίπτωση συζυγούς προσαρμογής της κεραίας λήψης προς τη διάταξη που αυτή τροφοδοτεί, η παραπάνω σχέση μας δίνει

$$A_{em} = \frac{|V_T|^2}{8W_{av}} \frac{R_T}{(R_r + R_L)^2} = \frac{|V_T|^2}{8W_{av}} \frac{1}{R_r + R_L} \quad (2.7)$$

όπου A_{em} είναι η μέγιστη ενεργός επιφάνεια της κεραίας. Συνήθως με τον όρο ενεργός επιφάνεια εννοούμε την μέγιστη ενεργό επιφάνεια.

Η έννοια της ενεργού επιφάνειας βρίσκει εφαρμογή στις κεραίες ανοίγματος (χοανοκεραίες και παραβολικά κάτοπτρα) στις οποίες έχει επιτευχθεί σταθερή κατά μέτρο και φάση πεδιακή κατανομή, οπότε η μέγιστη ενεργός επιφάνεια είναι ίση με τη φυσική επιφάνεια αλλά και σε κεραίες σύρματος (διπολικές κεραίες) που δεν διαθέτουν κάποια φυσική επιφάνεια με την οποία συλλέγουν ηλεκτρομαγνητική ισχύ. Στις κεραίες ανοίγματος η ενεργός επιφάνεια είναι περίπου ίση με τη φυσική τους επιφάνεια, ενώ στις γραμμικές κεραίες είναι μεγαλύτερη από τη φυσική επιφάνεια. Αυτό σημαίνει ότι οι γραμμικές κεραίες ηλεκτρικά είναι μεγαλύτερες από τις φυσικές τους διαστάσεις.

Έτσι τα βασικά χαρακτηριστικά (παράμετροι) μιας κεραίας που είναι, για λειτουργία εκπομπής η κατευθυντικότητα και για λειτουργία λήψης η (μέγιστη) ενεργός επιφάνεια, συνδέονται μεταξύ τους. Αυτό μπορεί να συμβεί αν η κεραία εκπομπής είναι ισοτροπική, οπότε θα δημιουργήσει στην περιοχή της κεραίας λήψης μία πυκνότητα ισχύος ίση με

$$W_i = \frac{P_t}{4\pi R^2} \quad (2.8)$$

όπου P_t η ισχύς ακτινοβολίας της κεραίας εκπομπής.

Στην περίπτωση που πετύχουμε τον καλύτερο δυνατό προσανατολισμό των δύο κεραιών τότε η πυκνότητα ισχύος θα ήταν

$$W_{av} = W_i \cdot D_{mt} = \frac{P_t}{4\pi R^2} D_{mt} \quad (2.9)$$

Έτσι η ισχύς που θα εμφανιστεί στους ακροδέκτες της κεραίας λήψης θα είναι

$$P_r = W_{av} \cdot A_{emr} = \frac{P_t}{4\pi R^2} D_{mt} A_{emr} \quad (2.10)$$

όπου A_{emr} η ενεργός επιφάνεια της κεραίας λήψης. Απλοποιώντας την εξίσωση (2.10) παίρνουμε:

$$D_{mt} A_{emr} = \frac{P_r}{P_t} (4\pi R)^2 \quad (2.11)$$

Με την ίδια λογική και αντεστραμμένους τώρα τους ρόλους των κεραιών και με δεδομένο ότι το μέσο είναι ισότροπο και γραμμικό θα έχουμε

$$D_{mr} A_{emt} = \frac{P_r}{P_t} (4\pi R)^2 \quad (2.12)$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις και λόγω της αναλογίας της μέγιστης ενεργού επιφάνειας προς την ενεργό επιφάνεια μιας κεραίας προκύπτει

$$\frac{D_{mt}}{D_{mr}} = \frac{A_{emt}}{A_{emr}} \quad (2.13)$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι ο λόγος των κατευθυντικότητων δύο κεραιών είναι ίσος με το λόγο των μεγίστων ενεργών επιφανειών τους. Η μέγιστη ενεργός επιφάνεια ενός ισοτροπικού ακτινοβολητή είναι ίση με το λόγο της μέγιστης ενεργού επιφάνειας οποιασδήποτε κεραίας προς την κατευθυντικότητά της.

Για το στοιχειώδες δίπολο Hertz που μας ενδιαφέρει περισσότερο στην παρούσα διατριβή, η κατευθυντικότητα D_{mH} και η μέγιστη ενεργός επιφάνειά του A_{mH} δίνονται από τις σχέσεις $D_{mH}=1,5$ και $A_{mH}=3\lambda^2/8\pi$.

Η μέγιστη ενεργός επιφάνεια A_{mi} ενός ισοτροπικού ακτινοβολητή είναι ίση με $A_{mi}=\lambda^2/4\pi$. Άρα η σχέση που συνδέει τη μέγιστη ενεργό επιφάνεια A_{em} και την κατευθυντικότητα D_m οποιασδήποτε κεραίας είναι

$$A_{em} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_m \quad (2.14)$$

Αν υπάρχουν και απώλειες τότε η προηγούμενη σχέση παίρνει τη μορφή

$$A_{em} = \frac{\lambda^2}{4\pi} e_{rad} D_m = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_m \quad (2.15)$$

Στην γενικότερη περίπτωση, μπορούμε να γράψουμε τη σχέση που συνδέει το κατευθυντικό κέρδος με τη (μέγιστη) ενεργό επιφάνεια σε μία ορισμένη διεύθυνση

$$A_{em}(\theta, \varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_g(\theta, \varphi) \quad (2.16)$$

Το μέγιστο της ενεργού επιφανείας (το οποίο συνήθως παραλείπεται) έχει να κάνει με το συζυγή τερματισμό της κεραίας ως προς τη διάταξη τροφοδότησής της και όχι με τον προσανατολισμό και τα κατευθυντικά χαρακτηριστικά της. Στην περίπτωση όπου κατά τη σύνδεση της κεραίας δεν υπάρχει προσαρμογή, για τον υπολογισμό της ισχύος που αποδίδει η κεραία στο κύκλωμα προς το οποίο συνδέεται πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και ο συντελεστής ανάκλασης.[15]

6. Διάνυσμα Poynting

Η ποσότητα που χρησιμοποιείται για να συνδέσει την ισχύ που μεταφέρει το ηλεκτρομαγνητικό κύμα με το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι το διάνυσμα Poynting που ορίζεται ως εξής:

$$\underline{w}(r,t) = \underline{e}(r,t) \times \underline{h}(r,t) \quad (2.17)$$

όπου $\underline{e}(r,t)$ και $\underline{h}(r,t)$ είναι οι στιγμιαίες τιμές της έντασης του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα. Η φυσική σημασία του διανύσματος Poynting είναι ότι εκφράζει τη στιγμιαία ροή ηλεκτρομαγνητικής ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας, έχει δηλαδή διαστάσεις πυκνότητας ισχύος (W/m^2). Η πυκνότητα ισχύος μεταβάλλεται χωρικά και χρονικά και η διάδοσή της γίνεται σε διεύθυνση κάθετη προς το επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Η συνολική στιγμιαία ισχύς που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια υπολογίζεται με ολοκλήρωση της κάθετης συνιστώσας του διανύσματος Poynting πάνω στην κλειστή επιφάνεια

$$P(t) = \iiint_S \underline{w}(r,t) \cdot d\underline{S} \quad (2.18)$$

Στην περίπτωση χρονομεταβλητών πεδίων, η πλέον ενδιαφέρουσα μέση πυκνότητα ισχύος, υπολογίζεται με ολοκλήρωση του στιγμιαίου διανύσματος Poynting σε μία περίοδο και στη συνέχεια διαιρώντας με την περίοδο. Ειδικά για ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενα πεδία, προς απλοποίηση των υπολογισμών, χρησιμοποιούνται οι μιγαδικοί φασιθέτες των πεδίων

$$\underline{e}(r,t) = \text{Re} \left\{ \underline{E}(r) \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad (2.19)$$

$$\underline{h}(r,t) = \text{Re} \left\{ \underline{H}(r) \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad (2.20)$$

Αντικαθιστώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση (2.17) παίρνουμε:

$$w(r,t) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \underline{E}(r) \times \underline{H}(r)^* \right\} + \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \underline{E}(r) \times \underline{H}(r) \cdot e^{j2\omega t} \right\} \quad (2.21)$$

Ο πρώτος όρος της (2.21) είναι ανεξάρτητος του χρόνου και εκφράζει τη μέση πυκνότητα πραγματικής ισχύος που ακτινοβολείται, ενώ ο δεύτερος, ο οποίος είναι διπλάσιας συχνότητας, εκφράζει την άεργη αποθηκευμένη ισχύ του πεδίου. Η μέση τιμή του διανύσματος Poynting (μέση πυκνότητα ισχύος) είναι

$$W_{av}(r) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \underline{E}(r) \times \underline{H}(r)^* \right\} \quad (2.22)$$

Ο παράγοντας $\frac{1}{2}$ οφείλεται στη χρησιμοποίηση των μέγιστων τιμών του πεδίου και πρέπει να παραλείπεται για ενεργές τιμές.

Η μέση ισχύς που εκπέμπεται από μια κεραία, σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι

$$P_{rad} = \iint_S W_{av}(r) \cdot dS = \frac{1}{2} \iint_S \text{Re} \left\{ \underline{E}(r) \times \underline{H}(r)^* \right\} \cdot dS \quad (2.23)$$

Το διάγραμμα ισχύος ακτινοβολίας μιας κεραίας είναι ουσιαστικά η παράσταση της μέσης πυκνότητας ισχύος που εκπέμπει ή λαμβάνει μια κεραία συναρτήσει της θέσης ενός παρατηρητή, ο οποίος κινείται πάνω σε επιφάνεια σφαίρας με ακτίνα αρκετά μεγάλη ώστε τα σημεία παρατήρησης να ανήκουν στη μακρινή περιοχή. Το διάνυσμα Poynting του ισοτροπικού ακτινοβολητή δεν παρουσιάζει λόγω συμμετρίας εξάρτηση από τις συντεταγμένες θ και ϕ και διαθέτει μόνο ακτινική συνιστώσα. Το διάνυσμα Poynting ενός ισοτροπικού ακτινοβολητή που εκπέμπει συνολική ισχύ P_{rad} δίνεται από τη σχέση

$$W_o(r) = \frac{P_{rad}}{4\pi r^2} \hat{r} \quad [15] \quad (2.24)$$

7. Ένταση Ακτινοβολίας

Η ένταση ακτινοβολίας σε μια ορισμένη διεύθυνση είναι η ακτινοβολούμενη ισχύς (ροή ισχύος) ανά μονάδα στερεάς γωνίας. Είναι ένα μέγεθος που αφορά το μακρινό πεδίο ακτινοβολίας μιας κεραίας και ορίζεται από τη σχέση

$$U(\theta, \phi) = r^2 \left| \underline{W}_{av}(\underline{r}) \right| \quad (2.25)$$

Επίσης, η ένταση ακτινοβολίας σχετίζεται με το μακρινό ηλεκτρικό πεδίο μέσω της σχέσης

$$U(\theta, \phi) = \frac{r^2}{2\eta} \left| \underline{E}(\underline{r}) \right|^2 \cong \frac{r^2}{2\eta} [|E_\theta(\theta, \phi)|^2 + |E_\phi(\theta, \phi)|^2] \quad (2.26)$$

όπου $E_\theta(\theta, \phi)$ και $E_\phi(\theta, \phi)$ οι εγκάρσιες συνιστώσες του μακρινού ηλεκτρικού πεδίου και $n = (\mu/\epsilon)^{1/2}$ η κυματική αντίσταση του μέσου διάδοσης. Η συνολική ισχύς ακτινοβολίας μπορεί να προσδιορισθεί και μέσω του ολοκληρώματος της έντασης της ακτινοβολίας σε όλη τη στερεά γωνία που περιβάλλει μια κεραία δηλαδή

$$P_{rad} = \iiint_{\Omega} U(\theta, \phi) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta [U(\theta, \phi) \sin \theta] \quad (2.27)$$

Η ένταση ακτινοβολίας του ισοτροπικού ακτινοβολητή που προκύπτει είναι

$$U_o = \frac{P_{rad}}{4\pi} \quad (2.28)$$

η οποία είναι σταθερή και ανεξάρτητη των γωνιών θ και ϕ .

8. Κατευθυντικό Κέρδος – Κατευθυντικότητα

Κατευθυντικό κέρδος $D_g(\theta, \varphi)$ σε μια ορισμένη διεύθυνση είναι ο λόγος της έντασης ακτινοβολίας μιας κεραίας σε αυτή την διεύθυνση προς την ένταση ακτινοβολίας του ισοδύναμου ιστροπικού ακτινοβολητή. Έτσι θα έχουμε

$$D_g(\theta, \varphi) = \frac{U(\theta, \varphi)}{U_o} = 4\pi \frac{U(\theta, \varphi)}{P_{rad}} \quad (2.28)$$

Κατευθυντικότητα D_m μιας κεραίας είναι η μέγιστη τιμή του κατευθυντικού κέρδους δηλαδή ο λόγος της μέγιστης τιμής της έντασης ακτινοβολίας προς αυτήν της ιστροπικής κεραίας όπως φαίνεται στην παρακάτω σχέση

$$D_m = D_g(\theta, \varphi)|_{\max} = \frac{U(\theta, \varphi)|_{\max}}{U_o} = 4\pi \frac{U(\theta, \varphi)|_{\max}}{P_{rad}} \quad (2.29)$$

Συμπεραίνουμε ότι η κατευθυντικότητα της ιστροπικής κεραίας είναι ίση με τη μονάδα καθώς η ακτινοβολία της είναι η ίδια προς όλες τις κατευθύνσεις. Για κάθε άλλη κεραία, η κατευθυντικότητα είναι μεγαλύτερη της μονάδας και αποτελεί ένα μέτρο του πόσο κατευθυντική είναι η κεραία.. Το κατευθυντικό κέρδος, που είναι συνάρτηση των συντεταγμένων διεύθυνσης θ και φ , παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, D_m]$. Η κατευθυντικότητα εκφράζεται συνήθως σε dBi (με αναφορά τον ιστροπικό ακτινοβολητή) ή πιο σπάνια σε dBd (με αναφορά το δίπολο $\lambda/2$).

Αξίζει να αναφερθεί ο στερεός λοβός ακτινοβολίας Ω_A , που είναι η στερεά γωνία από την οποία θα ακτινοβολούταν όλη η ισχύς, αν η ένταση ακτινοβολίας ήταν σταθερή και ίση με την μέγιστη τιμή της προς κάθε κατεύθυνση εντός της Ω_A . Η γωνία Ω_A μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta U_n(\theta, \varphi) \sin \theta \quad (2.30)$$

όπου

$$U_n(\theta, \varphi) = \frac{U(\theta, \varphi)}{U(\theta, \varphi)|_{\max}} \quad (2.31)$$

είναι η κανονικοποιημένη ένταση ακτινοβολίας της κεραίας. Με βάση τις παραπάνω σχέσεις η σχέση για την κατευθυντικότητα διαμορφώνεται όπως παρακάτω:

$$D_m = \frac{4\pi}{\Omega_A} \quad (2.32)$$

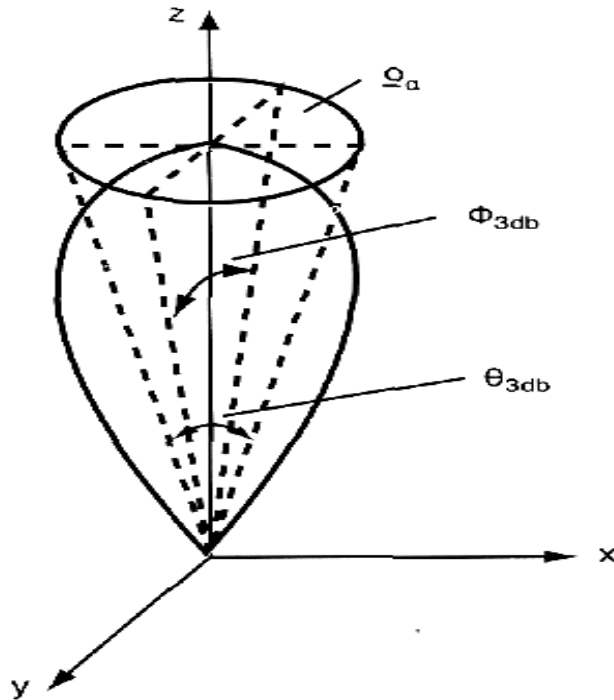
Για κεραίες που χαρακτηρίζονται από ένα κύριο λοβό (στενό) και αμελητέους μικρότερους, ο στερεός λοβός (γωνία Ω_A) είναι ίσος με το γινόμενο των ανοιγμάτων ημίσειας ισχύος φ και θ σε δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα συμμετρίας του κύριου λοβού ακτινοβολίας. Σε αυτή την περίπτωση, η κατευθυντικότητα δίνεται από την προσεγγιστική σχέση

$$D_m \approx \frac{4\pi}{\theta_{3db}\varphi_{3db}} \quad (2.33)$$

όπου θ_{3db} και φ_{3db} είναι οι γωνίες μισής ισχύος κατά τις γωνιακές διευθύνσεις θ και φ αντίστοιχα σε ακτίνια. Όταν οι γωνίες θ_{3db} και φ_{3db} είναι γνωστές σε μοίρες τότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$D_m \approx \frac{41253}{\theta_{3db}\varphi_{3db}} \quad (2.34)$$

Από την σχέση αυτή αναδεικνύεται ακόμη περισσότερο το γεγονός ότι όσο μειώνεται το εύρος ημίσειας ισχύος μιας κεραίας τόσο πιο κατευθυντική είναι. Στην περίπτωση κεραιών με περισσότερους του ενός κύριους λοβούς ή με σημαντικούς μικρότερους τότε οι δύο παραπάνω σχέσεις υπερκτιμούν την κατευθυντικότητα. Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.[17]



Σχήμα 2.7: Στερεός Λοβός Ακτινοβολίας Κατευθυντικής Κεραίας

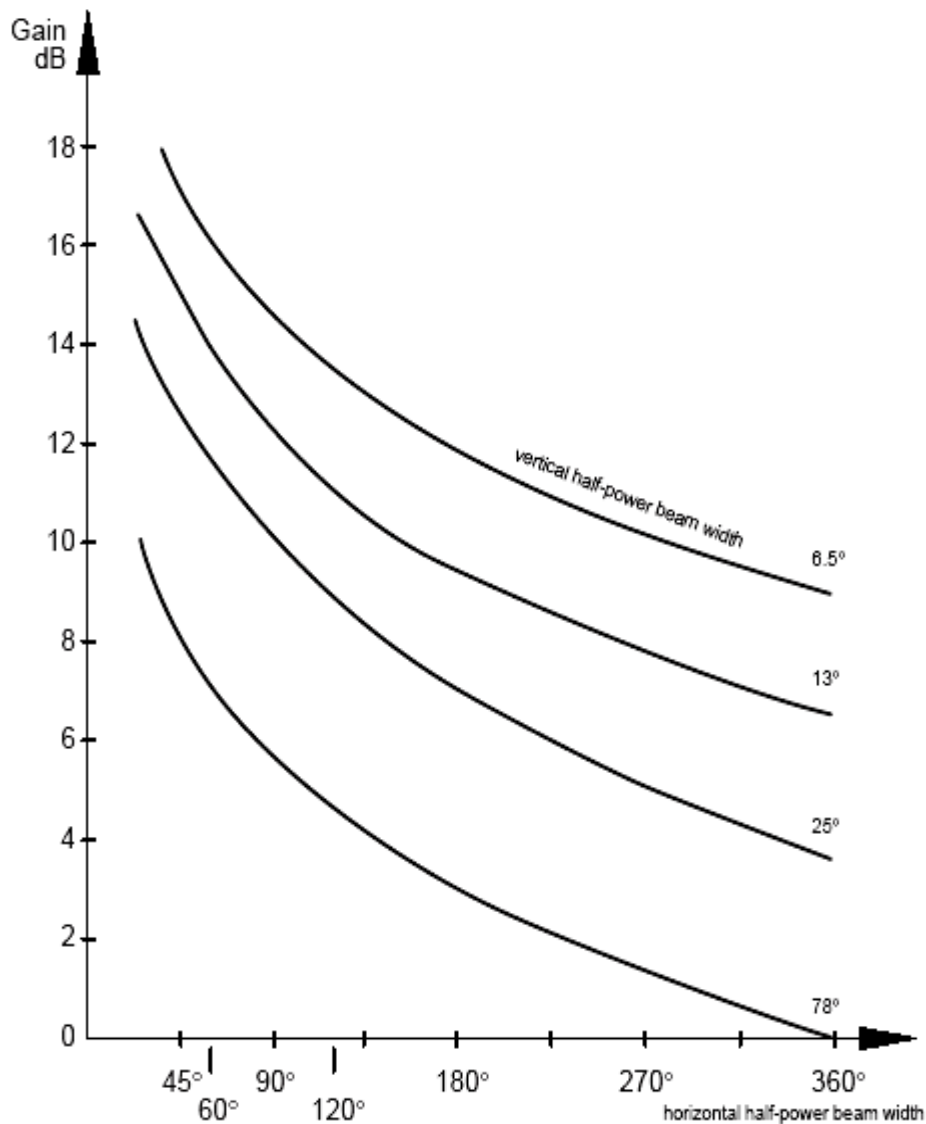
9. Κέρδος Ισχύος – Απόδοση Κεραίας

Μία άλλη παράμετρος που περιγράφει την απόδοση μιας κεραίας είναι το κέρδος της. Αυτό ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$G_g(\theta, \varphi) = 4\pi \frac{U(\theta, \varphi)}{P_{in}} \quad (2.35)$$

όπου P_{in} είναι η ισχύς τροφοδότησης της κεραίας. Το κέρδος ισχύος είναι το μέγεθος που κυρίως χρησιμοποιείται στην πράξη, κι αυτό διότι λαμβάνει υπόψη την ισχύ τροφοδοσίας αντί της ακτινοβολούμενης ισχύος σε σχέση με τον ορισμό του κατευθυντικού κέρδους. Έτσι λαμβάνεται υπόψη το πόσο αποδοτικά τροφοδοτείται η κεραία, εκτός από τις κατευθυντικές ιδιότητες της. Το κέρδος ισχύος είναι και αυτό μία συνάρτηση των συντεταγμένων κατεύθυνσης, ενώ όταν δεν αναφέρεται συγκεκριμένη διεύθυνση εννοείται η διεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας, οπότε και λέγεται απλώς κέρδος. Η μονάδα μέτρησης του κέρδους, συνήθως εκφράζεται σε dB,

με πιο συνηθισμένη την αναφορά ως προς τον ιστροπικό ακτινοβολητή (dBi) ή το δίπολο $\lambda/2$ (dBd), όπως ακριβώς και το κατευθυντικό κέρδος.



Σχήμα 2.8: Εμπειρικό Διάγραμμα Υπολογισμού Κέρδους Κεραιών με Βάση το Άνοιγμα Μισής Ισχύος στο Οριζόντιο και Κατακόρυφο Επίπεδο

Η ισχύς ακτινοβολίας συνδέεται με την ισχύ τροφοδοσίας μιας κεραίας P_{in} μέσω της σχέσης

$$P_{rad} = e_{tot} P_{in} \quad (2.36)$$

όπου e_{tot} είναι ο συντελεστής απόδοσης της κεραίας. Με βάση τις σχέσεις (2.28), (2.35) και (2.36) εξάγεται η σχέση μεταξύ του κέρδους ισχύος και του κατευθυντικού κέρδους

$$G_g(\theta, \varphi) = e_{tot} D_g(\theta, \varphi) \quad (2.37)$$

Αντίστοιχα συνδέονται και το (μέγιστο) κέρδος με την κατευθυντικότητα μιας κεραίας με τη σχέση

$$G_m = G_g(\theta, \varphi) \Big|_{\max} = e_{tot} D_m \quad (2.38)$$

Οι παράγοντες που συμβάλουν στη μείωση της απόδοσης μιας κεραίας είναι οι ωμικές απώλειες, οι απώλειες διηλεκτρικού της κεραίας και η ανάκλαση ισχύος λόγω μη επίτευξης προσαρμογής στην είσοδο της κεραίας (κεραία με γραμμή μεταφοράς). Οι δύο πρώτοι παράγοντες είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστούν και συνήθως μετρώνται πειραματικά. Επίσης, είναι πολύ δύσκολο να διαχωριστούν, οπότε η επίδρασή τους λαμβάνεται μαζί, μέσω του συντελεστή απόδοσης ακτινοβολίας e_{rad} . Μπορούμε, έτσι να γράψουμε τη σχέση

$$e_{tot} = e_{rad} e_{ref} \quad (2.39)$$

όπου e_{ref} είναι ο συντελεστής απόδοσης λόγω ανακλάσεων (reflection efficiency) ο οποίος δίνεται από τη σχέση

$$e_{ref} = 1 - |\rho|^2 \quad (2.40)$$

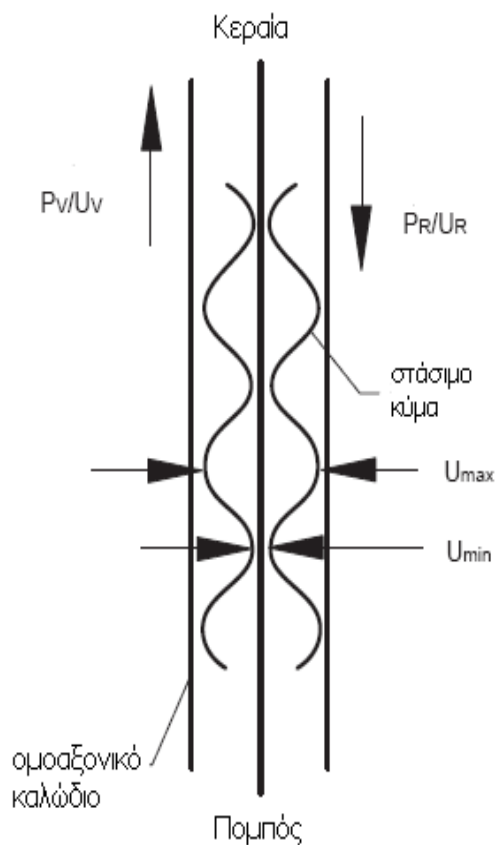
όπου

$$\rho = \frac{Z_\alpha - Z_o}{Z_\alpha + Z_o} \quad (2.41)$$

είναι ο συντελεστής ανάκλασης στην είσοδο της κεραίας, Z_a η αντίσταση εισόδου της κεραίας και Z_0 η χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής μεταφοράς που τροφοδοτεί την κεραία.

Λόγω των ανακλάσεων, δημιουργείται στη γραμμή μεταφοράς ένα στάσιμο κύμα. Ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη τιμή του κύματος στη γραμμή ονομάζεται λόγος στασίμων κυμάτων (Voltage Standing Wave Ratio- VSWR) και συνδέεται με τον συντελεστή ανάκλασης με την σχέση (όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα):

$$\mathbf{VSWR} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (2.42)$$



VSWR

$$s = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

Return loss attenuation a_r

$$\text{Συντελεστής Ανάκλασης: } \rho = \frac{U_R}{U_V} = \frac{s - 1}{s + 1}$$

$$a_r \text{ [dB]} = -20 \log \rho$$

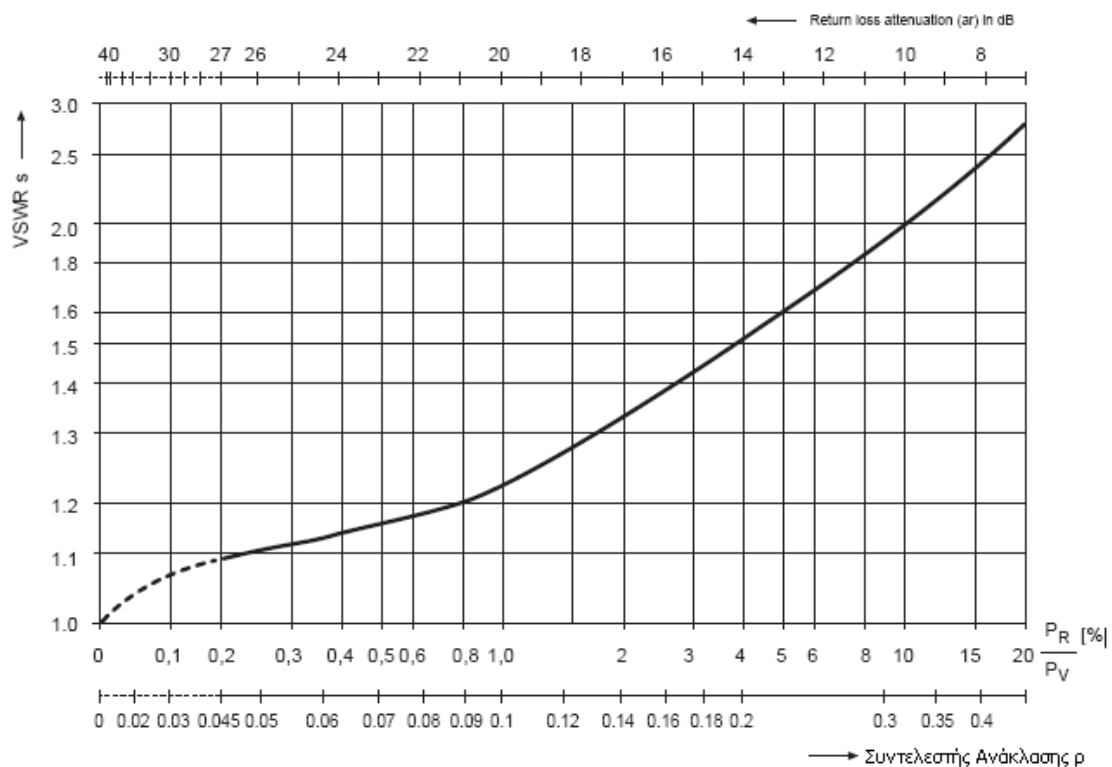
Ανακλώμενη Ενέργεια

$$\frac{P_R}{P_V} = 100 \rho^2 \text{ [%]}$$

Σχήμα 2.9: Ορισμός του VSWR

Η περίπτωση συζυγούς προσαρμογής (50 Ohm) μπορεί πρακτικά να επιτευχθεί μόνο σε μια συχνότητα. Το VSWR καθορίζει πόσο διαφέρει η σύνθετη αντίσταση από τα 50 Ohm με μια κεραία ευρείας ζώνης. Η ενέργεια που διανέμεται από τον πομπό δεν ακτινοβολείται χωρίς απώλειες εξαιτίας της εσφαλμένης αντιστάθμισης. Μέρος αυτής της ενέργειας αντανακλάται στην κεραία και επιστρέφεται στον πομπό. Η εκπεμπόμενη και η επιστρεφόμενη ενέργεια δημιουργούν ένα στάσιμο κύμα με αντίστοιχη τάση μέγιστη και ελάχιστη (U_{min}/U_{max}). Αυτός ο λόγος ορίζει το επίπεδο αντιστάθμισης της κεραίας και μετράται εκ των προτέρων από εξωτερικούς αισθητήρες.

Ο λόγος τάσης του επιστρεφόμενου προς το εκπεμπόμενο κύμα U_R/U_V μπορεί να μετρηθεί μέσω ενός κατευθυντικού ζεύγους. Ο παράγοντας αυτός ορίζεται ως συντελεστής ανάκλασης. Το παρακάτω σχήμα δείχνει τη σχέση μεταξύ του συντελεστή ανάκλασης, της εξασθένισης απώλειας επιστροφής (return loss attenuation), του VSWR και της ανακλώμενης ενέργειας.[22]



Σχήμα 2.10: Σχέση μεταξύ του συντελεστή ανάκλασης, της εξασθένισης απώλειας επιστροφής και του VSWR

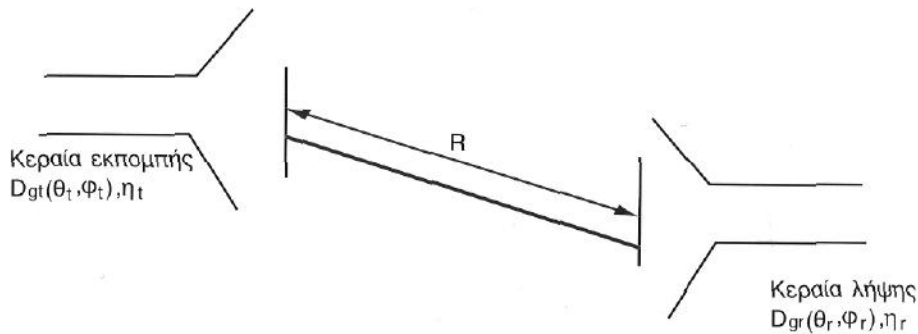
10. Η Εξίσωση του Friis

Η εξίσωση του Friis συνδέει την ισχύ λήψης P_r που λαμβάνει μία κεραία λήψης με την ισχύ P_t που εκπέμπει μία κεραία εκπομπής, όταν οι δύο κεραίες της ασύρματης ζεύξης έχουν οπτική επαφή και βρίσκονται η μία στη μακρινή περιοχή ακτινοβολίας της άλλης. Η πυκνότητα ισχύος που δημιουργεί η κατευθυντική κεραία εκπομπής στη θέση της κεραίας λήψεως σε απόσταση R είναι

$$W_i = \frac{P_t G_{g,t}(\theta_t, \varphi_t)}{4\pi R^2} = e_{tot,t} \frac{P_t D_{g,t}(\theta_t, \varphi_t)}{4\pi R^2} \quad (2.43)$$

όπου $G_{g,t}(\theta_t, \varphi_t)$ είναι το κέρδος ισχύος στην διεύθυνση θ_t, φ_t , $D_{g,t}(\theta_t, \varphi_t)$ το κατευθυντικό κέρδος στην ίδια διεύθυνση, P_t η ισχύς εισόδου και $e_{tot,t}$ ο συντελεστής απόδοσης της κεραίας εκπομπής. Διαπιστώνουμε ότι στην περίπτωση της ισότροπης κεραίας εκπομπής, η πυκνότητα ισχύος που θα παρήγαγε σε απόσταση R θα είναι:

$$W_i = e_{tot,t} \frac{P_t}{4\pi R^2} \quad (2.44)$$



Σχήμα 2.11: Γεωμετρική Απεικόνιση της Ζεύξης Δύο Κεραιών

Αφού η ενεργός επιφάνεια της κεραίας λήψης συνδέεται με την απόδοση και το κατευθυντικό της κέρδος με την σχέση

$$A_{e,r} = \frac{\lambda^2}{4\pi} e_{tot,r} D_{g,r}(\theta_r, \varphi_r) = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_{g,r}(\theta_r, \varphi_r) \quad (2.45)$$

η ισχύς P_r που αυτή λαμβάνει θα είναι

$$P_r = A_{e,r} W_t = \frac{\lambda^2}{4\pi} e_{tot,r} D_{g,r}(\theta_r, \varphi_r) W_t = e_{tot,t} e_{tot,r} \frac{\lambda^2 D_{g,t}(\theta_t, \varphi_t) D_{g,r}(\theta_r, \varphi_r) P_t}{(4\pi R)^2} \quad (2.46)$$

Λαμβάνοντας υπόψη και τις πιθανές απώλειες πόλωσης έχουμε

$$P_r = e_{tot,t} e_{tot,r} \frac{\lambda^2 D_{g,t}(\theta_t, \varphi_t) D_{g,r}(\theta_r, \varphi_r) P_t}{(4\pi R)^2} (PLF) \quad (2.47)$$

οπότε

$$\frac{P_r}{P_t} = e_{rad,t} e_{rad,r} (1 - |\rho_t|^2)(1 - |\rho_r|^2) \frac{\lambda^2 D_{g,t}(\theta_t, \varphi_t) D_{g,r}(\theta_r, \varphi_r)}{(4\pi R)^2} \cos^2(\psi_p) \quad (2.48)$$

όπου $\cos^2(\psi_p)$ ο παράγοντας απωλειών πόλωσης και με την παραδοχή ότι υπάρχει προσαρμογή στις συνδέσεις των δύο κεραιών.

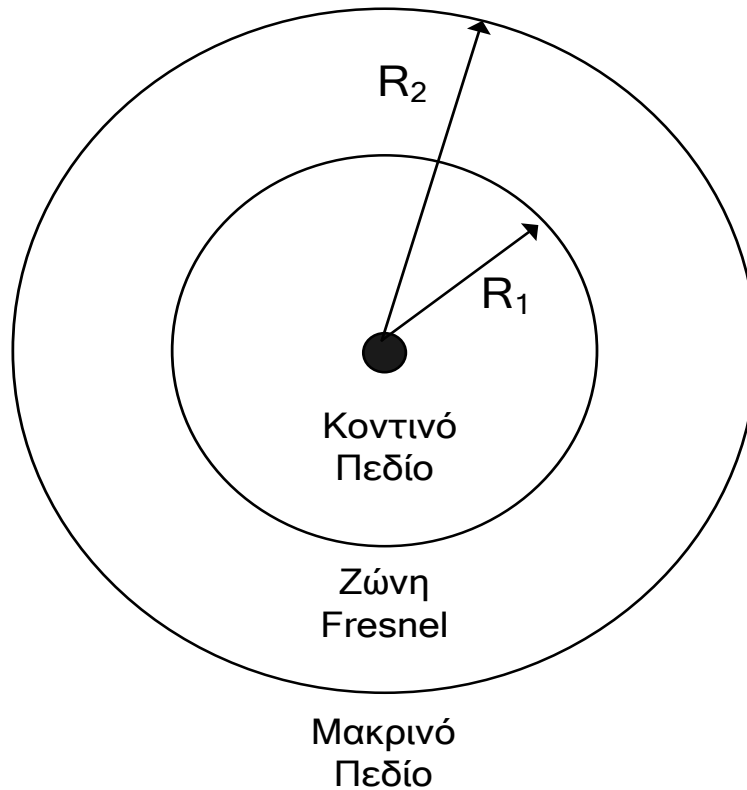
Για ζεύξεις με μηδενικές απώλειες πόλωσης (ευθυγραμμισμένες) και κεραιές προσανατολισμένες κατά το μέγιστο της ακτινοβολίας τους, ισχύει η σχέση

$$\frac{P_r}{P_t} = \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 G_{m,t} G_{m,r} \quad (2.49)$$

όπου $G_{m,t}$ και $G_{m,r}$ τα κέρδη των κεραιών εκπομπής και λήψης αντίστοιχα. Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή ως εξίσωση του Friis. Ο παράγοντας $(\lambda/4\pi R)^2$ ονομάζεται παράγοντας απωλειών ελευθέρου χώρου (free space loss) και εκφράζει την εξασθένιση της ισχύος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που εκπέμπεται, εξαιτίας της σφαιρικής του διάδοσης. Είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης και εκφράζεται συνήθως σε dB. Συνήθως, οι απώλειες ελευθέρου χώρου είναι οι ελάχιστες απώλειες τις οποίες πρέπει να αντισταθμίσει μία ζεύξη. Η υπόθεση ελευθέρου χώρου στις περισσότερες εφαρμογές γίνεται όταν τουλάχιστον η πρώτη ζώνη Fresnel της ζεύξης δεν διακατέχεται από εμπόδια.[15]

11. Περιοχές Ακτινοβολίας (Πεδίου)

Ο χώρος γύρω από μια κεραία υποδιαιρείται σε τρεις περιοχές. Το εγγύς πεδίο φανταστικής αντίστασης (reactive near-field region), το εγγύς πεδίο ακτινοβολίας (περιοχή Fresnel) και το μακρινό πεδίο ακτινοβολίας (περιοχή Fraunhofer). Τα παραπάνω πεδία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.12: Περιοχές Ακτινοβολίας (Πεδίου) Κεραίας

Τα όρια μεταξύ των περιοχών δεν είναι μοναδικά καθώς υπάρχουν διάφορα κριτήρια για τον καθορισμό τους. Κάθε περιοχή χαρακτηρίζει το πεδίο από πλευράς δομής χωρίς αυτό να σημαίνει ότι παρατηρούνται απότομες μεταβολές στα όρια των περιοχών.

Το εγγύς πεδίο φανταστικής αντίστασης είναι η περιοχή που άμεσα περιβάλλει την κεραία και όπου το πεδίο παρουσιάζει άεργη συμπεριφορά χωρίς να έχουμε

ακτινοβολία ισχύος. Το όριο αυτής της περιοχής αποδεικνύεται ότι βρίσκεται σε απόσταση

$$R_1 = 0.62 \sqrt{\frac{D^3}{\lambda}} \quad (2.50)$$

από την κεραία, όπου D είναι η μεγαλύτερη της διάσταση και λ το μήκος κύματος.

Το εγγύς πεδίο ακτινοβολίας ή περιοχή Fresnel είναι η ενδιάμεση περιοχή μεταξύ εγγύς πεδίου φανταστικής αντίστασης και περιοχής μακρινού πεδίου της κεραίας. Εδώ ακτινοβολείται μεν ισχύς, αλλά οι συνιστώσες του πεδίου (γωνιακή κατανομή) εξαρτώνται ισχυρά από την απόσταση καθώς επίσης η ακτινική συνιστώσα δεν είναι αμελητέα. Το εξωτερικό όριο της περιοχής Fresnel αποδεικνύεται (με κριτήριο του μέγιστου σφάλματος $\pi/8$) ότι βρίσκεται σε απόσταση από την κεραία ίση με

$$R_2 = \frac{2D^2}{\lambda} \quad (2.51)$$

Το μακρινό πεδίο ακτινοβολίας ή περιοχή Fraunhofer ορίζεται ως η περιοχή όπου οι εγκάρσιες συνιστώσες του πεδίου (γωνιακή κατανομή) δεν εξαρτώνται από την απόσταση και όπου η ακτινική συνιστώσα είναι τόσο μικρή ώστε να μπορούμε να μιλάμε για εγκάρσιο πεδίο. Η περιοχή αυτή εκτείνεται σε αποστάσεις μεγαλύτερες της R_2 που φτάνουν στο άπειρο.[15]

12. Επίδραση της Γης στην Ακτινοβολία Κεραίων - Ανάκλαση Επίπεδων Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων

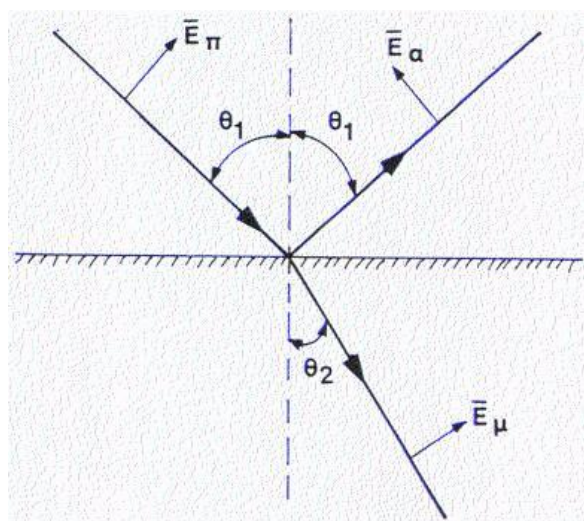
Όταν ένα επίπεδο κύμα προσπέσει σε επίπεδη επιφάνεια που χωρίζει δύο ημιάπειρους διηλεκτρικούς χώρους με διαφορετικές παραμέτρους ϵ , μ παρατηρούνται τα φαινόμενα της ανάκλασης και της διάθλασης. Η ικανοποίηση των οριακών συνθηκών επί της διαχωριστικής επιφάνειας επιβάλλει τη θεώρηση ότι μέρος του προσπίπτοντος κύματος ανακλάται ως επίπεδο κύμα στον άνω ημιχώρο ($z > 0$) και

μέρος διαθλάται ως επίπεδο κύμα στον κάτω ημιχώρο ($z < 0$) όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Η διεύθυνση διάδοσης τους προσπίπτοντος κύματος \hat{n}_π και η κάθετος στη διαχωριστική επιφάνεια στο σημείο πρόσπτωσης καθορίζουν το επίπεδο πρόσπτωσης. Στη γενική περίπτωση, το προσπίπτον κύμα μπορεί να αναλυθεί σε μία συνιστώσα κάθετη στο επίπεδο πρόσπτωσης (περίπτωση κάθετης πόλωσης) και σε μία συνιστώσα που ανήκει στο επίπεδο πρόσπτωσης (περίπτωση παράλληλης πόλωσης). Σε περιπτώσεις ανάκλασης πάνω στην επιφάνεια της γης, όπου η διαχωριστική επιφάνεια είναι οριζόντια, η κάθετη πόλωση αναφέρεται ως οριζόντια και η παράλληλη ως κατακόρυφη (αν και το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να διαθέτει και οριζόντια συνιστώσα).

Η επίλυση προβλημάτων πρόσπτωσης γίνεται χωριστά για κάθε πόλωση και επακολουθεί υπέρθεση για την εύρεση της πλήρους λύσης. Ο συντελεστής ανάκλασης προκύπτει όπως θα αναλύσουμε παρακάτω.

α. Παράλληλη (Κατακόρυφη) Πόλωση

Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} κείται στο επίπεδο προσπτώσεως.



Σχήμα 2.13 : Παραστάσεις Πεδίων στην Περίπτωση Παράλληλης (Κατακόρυφης) πόλωσης

Σύμφωνα με την οριακή συνθήκη κατά την οποία η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου E είναι συνεχής επί της διαχωριστικής επιφάνειας, θα ισχύει

$$(E_{\pi}-E_{\alpha})\cos\theta_1=E_{\mu}\cos\theta_2 \text{ ή } E_{\mu}/E_{\pi}=[1-(E_{\alpha}/E_{\pi})](\cos\theta_1/\cos\theta_2) \quad (2.52)$$

και αποδεικνύεται ότι ισχύει η ακόλουθη εξίσωση του Fresnel:

$$\frac{E_{\alpha}}{E_{\pi}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_1 - \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_2}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_2} \quad (2.53)$$

Η εξίσωση που συνδέει τη γωνία προσπίπτωσης θ_1 και τη γωνία διαθλάσεως θ_2 δίνεται από το νόμο του Snell:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \quad (2.54)$$

Από το νόμο του Snell και θέτοντας $E_{\alpha}/E_{\pi}=R_k$ η εξίσωση (2.53) μετατρέπεται στην ακόλουθη:

$$R_k = \frac{E_{\alpha}}{E_{\pi}} = \frac{(\varepsilon_2 / \varepsilon_1) \cos \theta_1 - \sqrt{(\varepsilon_2 / \varepsilon_1) - \sin^2 \theta_1}}{(\varepsilon_2 / \varepsilon_1) \cos \theta_1 + \sqrt{(\varepsilon_2 / \varepsilon_1) - \sin^2 \theta_1}} \quad (2.55)$$

όπου R_k είναι ο συντελεστής ανακλάσεως για παράλληλη (κατακόρυφη) πόλωση.

Ο συντελεστής μεταδόσεως για την ίδια πόλωση, δίνεται από την εξίσωση:

$$T_{\kappa} = \frac{E_{\mu}}{E_{\pi}} = (1 - R_{\kappa}) \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \quad (2.56)$$

Από την εξίσωση (2.55) προκύπτει ότι για μια ορισμένη τιμή της γωνίας θ_1 , ο αριθμητής και συνεπώς ο συντελεστής ανακλάσεως R_k μηδενίζεται. Προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει όταν:

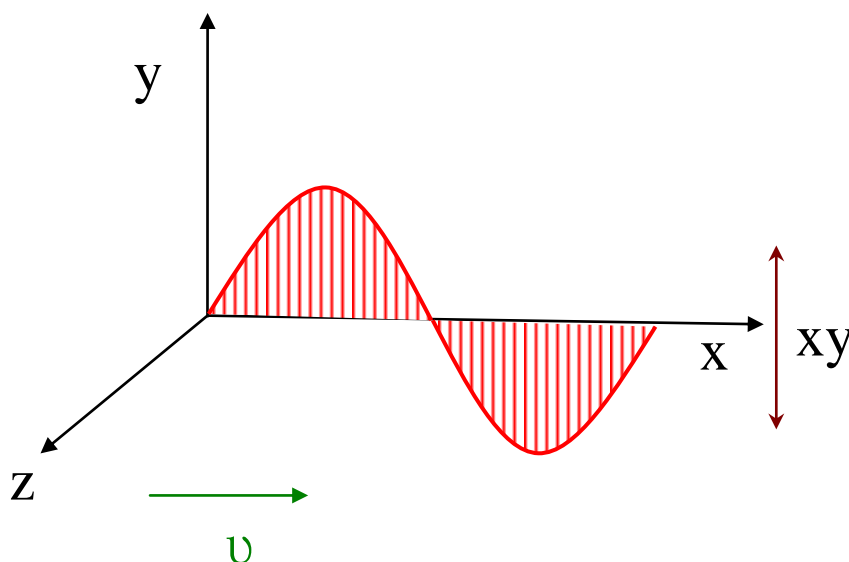
$$\tan \theta_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \quad (2.57)$$

Όταν ισχύει η παραπάνω σχέση, η γωνία θ_1 , για την οποία μηδενίζεται ο συντελεστής ανάκλασης για την παράλληλη πόλωση ονομάζεται γωνία Brewster (θ_B). Συνεπώς, όταν έχουμε πρόσπτωση κύματος παράλληλης (κατακόρυφης) πόλωσης με γωνία προσπτώσεως ίση με τη γωνία Brewster, δεν υφίσταται ανακλώμενο κύμα. Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται στην πράξη προς αποφυγή ανεπιθύμητων ανακλάσεων. Στη γενική περίπτωση για δύο μέσα με ηλεκτρικές επιτρεπτότητες ε_1 και ε_2 , η γωνία Brewster προκύπτει από τη σχέση:

$$\sin(\theta_B) = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \quad (2.58)$$

Αν το πρώτο μέσο θεωρηθεί το κενό και το δεύτερο μέσο θεωρηθεί ότι έχει σχετική ηλεκτρική επιτρεπτότητα ε_r , έχουμε :

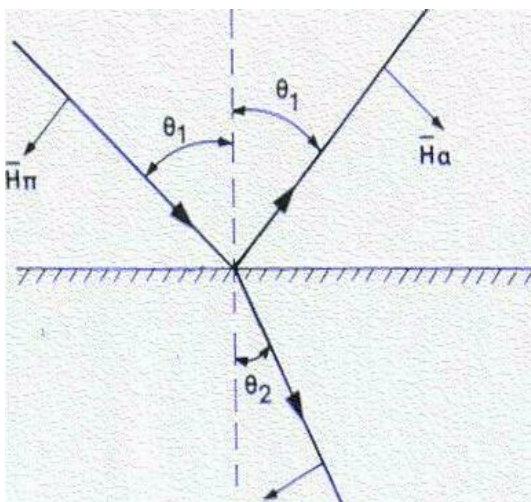
$$\sin(\theta_B) = \frac{\sqrt{\varepsilon_r - 1}}{\sqrt{\varepsilon_r^2 - 1}} \quad (2.59)$$



Σχήμα 2.14 : Παράλληλη (Κατακόρυφη) Πόλωση

β. Κάθετη (Οριζόντια) Πόλωση

Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου E είναι κάθετο επί του επιπέδου προσπτώσεως και παράλληλο προς την επιφάνεια διαχωρισμού όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.15: Παραστάσεις Πεδίων στην Περίπτωση Κάθετης (Οριζόντιας) Πόλωσης

Σύμφωνα με την οριακή συνθήκη κατά την οποία η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου E είναι συνεχής επί της επιφάνειας διαχωρισμού των δύο μέσων, θα ισχύει

$$E_{\pi} + E_{\alpha} = E_{\mu} \quad \text{ή} \quad E_{\mu}/E_{\pi} = 1 + (E_{\alpha}/E_{\pi}) \quad (2.60)$$

και αποδεικνύεται ότι ισχύει η ακόλουθη εξίσωση του Fresnel :

$$\frac{E_{\alpha}}{E_{\pi}} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2} \quad (2.61)$$

Αν θέσουμε $R_o = E_o/E_\pi$ και λάβουμε υπόψη το νόμο του Snell, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί διαφορετικά:

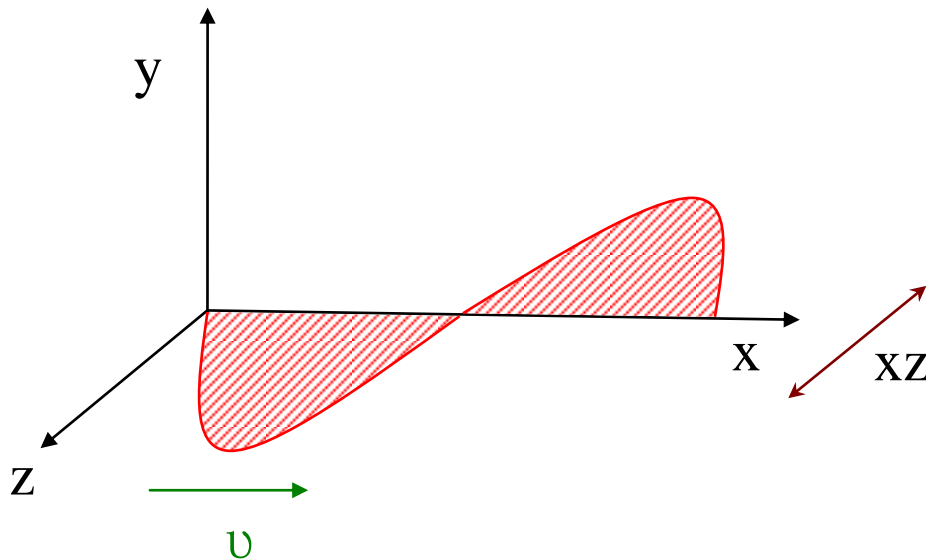
$$R_o = \frac{E_o}{E_\pi} = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1 - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1 - \sin^2 \theta_1}} \quad (2.62)$$

όπου R_o είναι ο συντελεστής ανακλάσεως για κάθετη (οριζόντια) πόλωση, ενώ $T_o = E_\mu / E_\pi$ είναι ο συντελεστής μεταδόσεως.

$$T_o = 1 + R_o = \frac{2 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 + \sqrt{(\varepsilon_2 / \varepsilon_1) - \sin^2 \theta_1}} \quad (2.63)$$

Για την ανάκλαση και τη διάθλαση επίπεδων κυμάτων από επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια ισχύουν τα συμπεράσματα της γεωμετρικής οπτικής όσον αφορά το μέγεθος και τη διεύθυνση του ανακλώμενου και διαθλώμενου πεδίου.

Στις κινητές επικοινωνίες χρησιμοποιείται συνήθως η παράλληλη (κατακόρυφη) πόλωση (γραμμική πόλωση με $\theta=90^\circ$) και στα συστήματα μετάδοσης η κάθετη (οριζόντια) πόλωση (υποπεριπτώσεις της γραμμικής πόλωσης).[22]



Σχήμα 2.17: Κάθετη (Οριζόντια) Πόλωση

13. Κεραίες πάνω από τη Γη - Θεωρία Ειδώλων

Στη μέχρι τώρα ανάλυση έχουμε θεωρήσει κεραίες που βρίσκονται στον ελεύθερο χώρο δηλαδή ότι δεν υπάρχει κανένα φυσικό ή τεχνητό εμπόδιο κοντά στην κεραία που να αλλοιώνει τον τρόπο λειτουργίας της είτε κατά την εκπομπή είτε κατά τη λήψη. Αυτή η παραδοχή είναι απαραίτητη για την ανάλυση του τρόπου λειτουργίας της κεραίας, χωρίς την επιρροή επίδραση άλλων αντικειμένων. Ωστόσο σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι ρεαλιστική προσέγγιση αφού αναπόφευκτα οι κεραίες συνυπάρχουν με διάφορες άλλες φυσικές ή τεχνητές κατασκευές, οι οποίες θα πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά την ανάλυση του τρόπου λειτουργίας τους. Η παρουσία αυτών των αντικειμένων μπορεί να μεταβάλλει δραστικά τον τρόπο λειτουργίας τους.

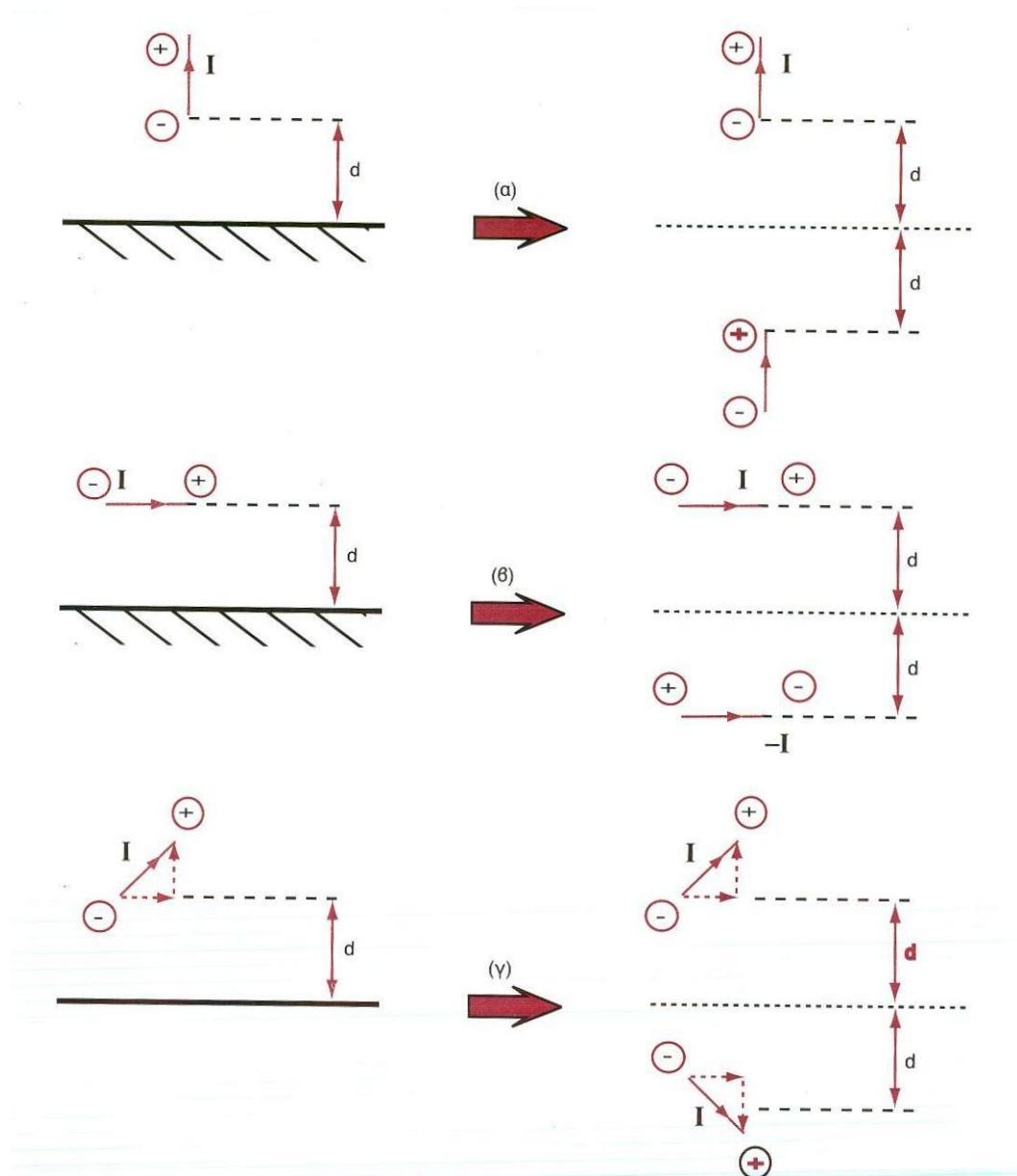
Ο τρόπος αλληλεπίδρασης μιας κεραίας με τα αντικείμενα που βρίσκονται στο εγγύς περιβάλλον της εξαρτάται από το είδος της κεραίας, τις φυσικές διαστάσεις και τις ηλεκτρικές ιδιότητες των αντικειμένων και τις σχετικές τους θέσεις. Είναι προφανές ότι οι παράγοντες αυτοί είναι αδύνατο να προβλεφθούν, άρα η κάθε περίπτωση απαιτεί ειδική αντιμετώπιση. Ωστόσο, έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να αναλυθεί η επίδραση του εδάφους στη λειτουργία των κεραιών, και αυτό γιατί σε πολλές περιπτώσεις οι κεραίες λειτουργούν σε κοντινή απόσταση από το έδαφος, το οποίο μπορεί με αρκετά καλή προσέγγιση να θεωρηθεί οριζόντια επιφάνεια με άπειρες διαστάσεις.

Έτσι, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που προσπίπτουν στο έδαφος ανακλώνται και στη συνέχεια εκπέμπονται στο περιβάλλον (εφόσον μελετάμε κεραία-πομπό) ή συλλέγονται από την κεραία (στην περίπτωση κεραίας λήψης). Το ποσοστό της ενέργειας που χάνεται από την ανάκλαση, δηλαδή την αλληλεπίδραση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος με το έδαφος, καθώς και η κατεύθυνση προς την οποία ανακλώνται τα προσπίπτοντα στο έδαφος κύματα, εξαρτώνται από τα γεωμετρικά και τα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά του εδάφους.

Γενικά, το έδαφος συμπεριφέρεται ως αγωγός, με ειδική αγωγιμότητα η οποία εξαρτάται από τη συχνότητα και συγκεκριμένα αυξάνεται με αυτή. Το πόσο καλός αγωγός μπορεί να χαρακτηριστεί ένα τμήμα του εδάφους, εξαρτάται κατά κύριο λόγο από την υγρασία του. Έτσι, σε ακραίες περιπτώσεις, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει έδαφος με σχεδόν μηδενική αγωγιμότητα (π.χ. βραχώδες ή αμμώδες ξηρό έδαφος) ή έδαφος με πολύ υψηλή αγωγιμότητα (π.χ. βρεγμένο χώμα). Ανάλογα με τα ειδικά χαρακτηριστικά του εδάφους, η ανάλυση μπορεί να είναι ιδιαίτερα περίπλοκη. Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι το έδαφος είναι ένας απόλυτα επίπεδος, καλός αγωγός με άπειρες διαστάσεις. Η ίδια ανάλυση μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση όπου, αντί του εδάφους, έχουμε έναν άλλο επίπεδο αγωγό με υψηλή αγωγιμότητα και πολύ μεγάλες διαστάσεις σε σχέση με το μήκος κύματος (π.χ. μεταλλικά φύλλα μεγάλων διαστάσεων).

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μιας κεραίας επηρεάζεται σημαντικά από την απουσία της γης. Όμως είναι πολύ δύσκολο να προσδιορισθεί ακριβώς η επίδραση της γης επειδή οι παράγοντες που υπεισέρχονται στους υπολογισμούς ποικίλουν και είναι δύσκολο να προσδιορισθεί πως ακριβώς επηρεάζουν τα διάφορα μεγέθη. Οι παράγοντες αυτοί είναι η πεπερασμένη αγωγιμότητα, οι ανωμαλίες της επιφάνειας, η καμπυλότητα της γης και η ανομοιογένεια της σύνθεσης του εδάφους.

Σε μία πρώτη προσέγγιση, που αποδεικνύεται επαρκής σε πολλές εφαρμογές, η γη θεωρείται επίπεδη με άπειρη αγωγιμότητα. Στην περίπτωση αυτή, για τον προσδιορισμό της επίδρασης της γης μπορεί να εφαρμοσθεί η θεωρία ειδώλων. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, το πεδίο που δημιουργεί η κεραία πάνω από άπειρο, τελείως αγωγίμο επίπεδο δηλαδή στον ημιχώρο 1 ($z > 0$) είναι το ίδιο ακριβώς με το πεδίο που δημιουργείτε στον ημιχώρο 2 ($z < 0$) από το συνδυασμό της κεραίας και του ειδώλου της ως προς το επίπεδο. Η φορά του ρεύματος στο είδωλο πρέπει να είναι ομόρροπη προς αυτό της κεραίας για κατακόρυφα στοιχεία και αντίρροπη για οριζόντια. Το είδωλο κεραίας με τυχαίο προσανατολισμό προκύπτει με υπέρθεση κατάλληλων στοιχειωδών ειδώλων.

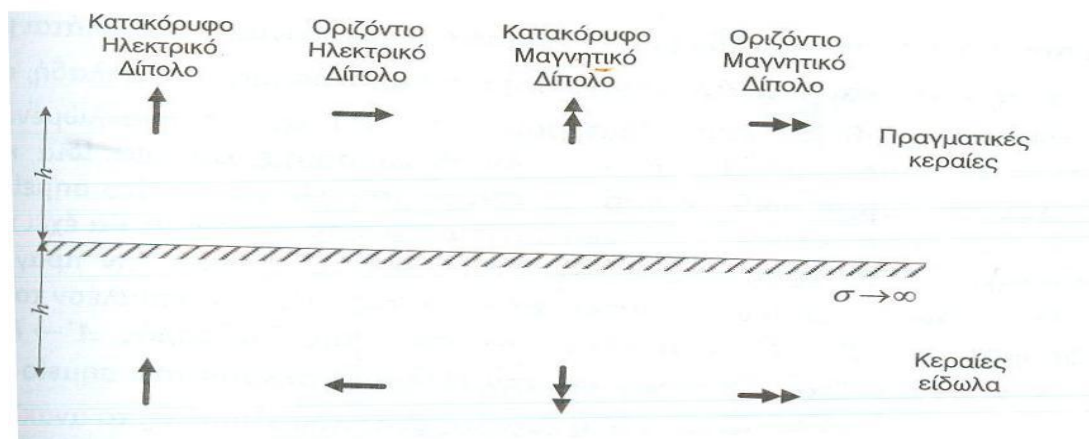


Σχήμα 2.18 : Κεραία και Είδωλό της πάνω από Τελείως Αγωγίμη Επιφάνεια

Η θεωρία των ειδώλων είναι μια απλή τεχνική για την ανάλυση της επίδρασης που έχει ένας λείος επίπεδος αγωγός, με άπειρες διαστάσεις, στη λειτουργία μιας κεραίας που βρίσκεται κοντά του. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η αγωγίμη επιφάνεια αντικαθίσταται από ένα "είδωλο" της κεραίας τοποθετημένο συμμετρικά ως προς την επιφάνεια. Προκύπτει έτσι, ένα ισοδύναμο σύστημα δύο κεραίων, όπου η κεραία "είδωλο" υποκαθιστά την αγωγίμη επιφάνεια και τα ανακλώμενα κύματα υποκαθίστανται από εκείνα που εκπέμπονται από την κεραία -

είδωλο. Το ισοδύναμο αυτό σύστημα περιγράφει ικανοποιητικά τα πεδία που δημιουργούνται στο χώρο υπεράνω της αγωγίμης επιφάνειας, ενώ τα πεδία που προκύπτουν για το χώρο κάτω από την αγωγίμη επιφάνεια δεν ανταποκρίνονται στην πραγματική κατάσταση.

Στην πράξη θα πρέπει να αντιμετωπίσουμε τόσο την περίπτωση των κατακόρυφων ή οριζόντιων ηλεκτρικών δίπολων όσο και εκείνη των ισοδύναμων κατακόρυφων ή οριζόντιων μαγνητικών δίπολων. Να θυμίσουμε ότι π.χ. ένας μικρός κυκλικός βρόχος είναι ισοδύναμος με ένα μαγνητικό δίπολο του οποίου ο άξονας ταυτίζεται με την κάθετη στο επίπεδο που περιέχει το βρόχο και η φορά προκύπτει εφαρμόζοντας τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου. Τα δίπολα και τα είδωλά τους φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.19 : Ηλεκτρικά και Μαγνητικά Δίπολα και τα Είδωλά τους

Περιορίζοντας τη μελέτη της επίδρασης της γης στην ακτινοβολία διπολικών κεραιών πάνω από αυτή διαπιστώνεται ότι λόγω της παρουσίας της γης, το πεδίο ακτινοβολίας ενός διπόλου πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα διάταξης της στοιχειοκεραίας που δημιουργεί η κεραία και το είδωλό της.

Στην περίπτωση κατακόρυφου διπόλου μήκους $2l$ υπεράνω τέλειας αγωγίμης επίπεδης γης, το μακρινό πεδίο δίνεται από τη σχέση

$$E^{(v)}(r,\theta) = E_0^{(v)}(r,\theta) S^{(v)}(\theta) \quad (2.64)$$

όπου $E_0^{(v)}(r,\theta)$ το μακρινό πεδίο ενός κατακόρυφου διπόλου με

$$E_0^{(v)}(r,\theta) = j [nI_m \exp(-ikr) \cos(kl \cos\theta) - \cos(kl) / 2\pi r \sin\theta] \quad (2.65)$$

και $S^{(v)}(\theta)$ ο παράγοντας διάταξης της στοιχειοκεραίας δύο κατακόρυφων στοιχείων που εκφράζει ως πολλαπλασιαστικός παράγοντας την επίδραση της γης με

$$S^{(v)}(\theta) = 2\cos(kh \cos\theta) \quad (2.66)$$

Οι σχέσεις (2.64), (2.65), (2.66) έχουν προκύψει θεωρώντας ως άξονα z την κατακόρυφο που διέρχεται από το κέντρο διέγερσης του διπόλου και ισχύουν για κάθε κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει το κατακόρυφο δίπολο που αποτελεί κατά περίπτωση και το επίπεδο πρόσπτωσης. Το κατακόρυφο δίπολο, ο άξονας του οποίου ταυτίζεται με τον άξονα z , δημιουργεί πεδίο πολωμένο παράλληλα προς το επίπεδο πρόσπτωσης, αφού η μοναδική συνιστώσα του μακρινού πεδίου που είναι πολωμένη κατά θ μοναδιαίο διάνυσμα ανήκει στο επίπεδο πρόσπτωσης. Με μία μικρή διερεύνηση των σχέσεων (2.64) και (2.66) διαπιστώνουμε τα παρακάτω:

α. Πάνω στην επιφάνεια της γης ($\theta=90^\circ$) και λόγω της επίδρασης της γης, το κατακόρυφο δίπολο δημιουργεί πεδίο μέγιστης έντασης.

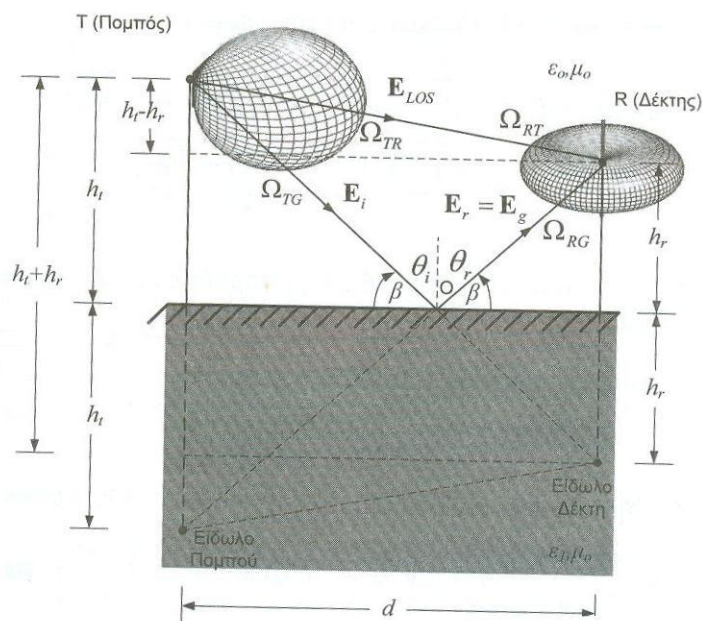
β. Η αύξηση του ύψους τοποθέτησης (έστω h_1) της διπολικής κεραίας πάνω από τη γη, οδηγεί σε κλίση του κυρίου λοβού ως προς τον ορίζοντα με ταυτόχρονη δημιουργία σημαντικών δευτερευόντων λοβών. Αν στο πεδίο ακτινοβολίας μιας κεραίας πάνω από επίπεδη γη υπάρχει άλλη κεραία που λειτουργεί ως δέκτης με ύψος τοποθέτησης h_2 , η επίδραση της γης περιγράφεται μέσω των πολλαπλασιαστικών παραγόντων:

$$S^{(v)}(\theta) = 2\cos(kh_1 h_2 / r) \quad (2.67)$$

$$S^{(h)}(\theta) = 2j\sin(kh_1 h_2 / r) \quad (2.68)$$

Δηλαδή, όταν ο δέκτης κινείται κατακόρυφα συναντά ζώνες με εναλλάξ μέγιστη ή ελάχιστη πεδιακή ένταση, γεγονός που μπορεί να χρησιμεύσει για διαφορική λήψη στο δέκτη.

Για να κατανοήσουμε περισσότερο τη θεωρία ειδώλων θα προσομοιάσουμε με τη γεωμετρία που θα μας απασχολήσει στην παρούσα έρευνα και θα παρουσιάσουμε σε επόμενο κεφάλαιο. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε ένα ηλεκτρικό δίπολο τοποθετημένο κατακόρυφα σε απόσταση h_t πάνω από επίπεδο και τέλεια αγώγιμο έδαφος, με άπειρες διαστάσεις.

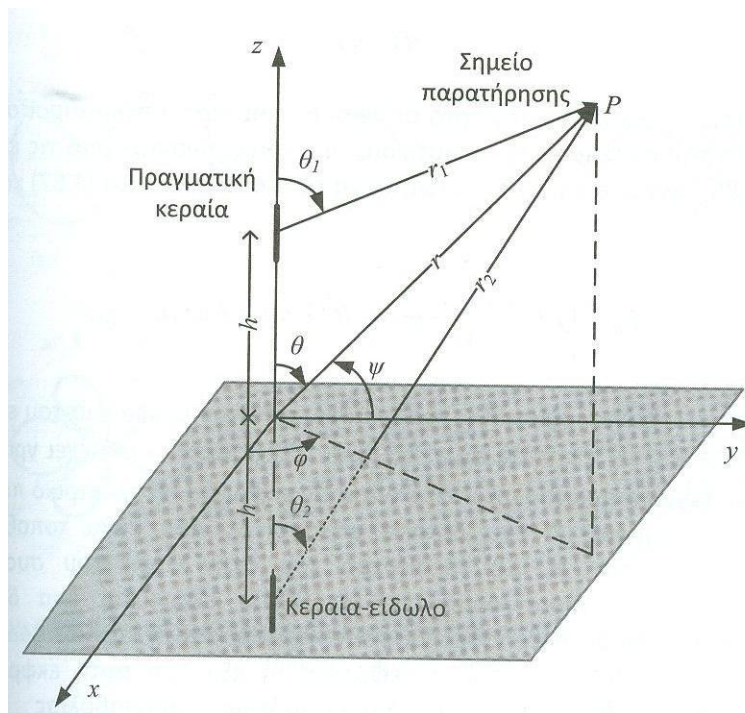


Σχήμα 2.20: Ασύρματη Ζεύξη με Απευθείας και Ανακλώμενο Κύμα

Το κύμα που προσπίπτει στο έδαφος στο σημείο O με γωνία θ_i ανακλάται με την ίδια γωνία θ_r , ($\theta_i = \theta_r$) και λαμβάνεται στο δέκτη R . Δηλαδή στο R λαμβάνεται το απευθείας κύμα (LOS) και το ανακλώμενο. Αν θεωρήσουμε ότι μια ίδια κεραία τοποθετείται στο συμμετρικό ως προς το έδαφος σημείο, τότε το ηλεκτρομαγνητικό κύμα που εκπέμπεται προς το σημείο O θα έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με το κύμα που εκπέμπεται προς το O από την πραγματική κεραία. Προφανώς, το σημείο O ανήκει στην νέα ευθεία και επιπλέον τα μήκη των διαδρομών είναι ίσα. Έτσι, εφόσον κατά την τέλεια ανάκλαση στο σημείο O δεν αλλοιώνονται τα χαρακτηριστικά του ηλεκτρομαγνητικού κύματος, το ανακλώμενο κύμα που φτάνει

στο δέκτη R είναι το ίδιο με εκείνο που θα έφτανε στο δέκτη R αν μια ίδια κεραία ήταν τοποθετημένη στο συμμετρικό σημείο. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε για οποιαδήποτε σημείο παρατήρησης πάνω από το έδαφος.

Στην περίπτωση που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, έχουμε θεωρήσει ότι η κεραία εκπέμπει κύματα με κατακόρυφη πόλωση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η ανάκλαση από το τέλειο έδαφος να είναι τέλεια και η πόλωση να διατηρείται. Αν η κεραία εξέπεμπε κύματα πολωμένα οριζόντια, τότε η ανάκλαση θα προκαλούσε αλλαγή φάσης 180° , οπότε η κεραία-είδωλο θα πρέπει να θεωρηθεί ότι εκπέμπει κι αυτή οριζόντια πολωμένα ηλεκτρομαγνητικά κύματα αλλά με διαφορά φάσης 180° σε σχέση με την πραγματική κεραία.



Σχήμα 2.21: Ανάκλαση Κυμάτων Κατακόρυφης Πόλωσης

Αν το δίπολο έχει μήκος l και διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης I_0 , τότε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου του απευθείας κύματος στο σημείο P θα δίνεται από την εξίσωση

$$E_\theta^d = jZ_o \frac{k I_0 e^{-jk r_1}}{4\pi r_1} l \sin \theta_1 \quad (2.69)$$

Παρατηρούμε ότι μόνο η θ συνιστώσα του πεδίου δίνεται επειδή υπάρχει ανεξαρτησία από τη μεταβλητή ϕ , δηλαδή πρόκειται για ομοιοκατευθυντική πηγή. Συνεπώς μια απλή περιστροφή του διαγράμματος ακτινοβολίας ως προς τον άξονα z θα δώσει το πλήρες διάγραμμα ακτινοβολίας. Όμοια, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου λόγω του κύματος που εκπέμπει η κεραία-είδωλο και η οποία θα είναι η ίδια με αυτή του ανακλώμενου κύματος, θα είναι

$$E_{\theta}^r = jZ_o \frac{kI_o e^{-jk r_2}}{4\pi r_2} l \sin \theta_2 \quad (2.70)$$

Από τη γεωμετρία του παραπάνω σχήματος μπορούμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις r_1 και r_2 όπως παρακάτω:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta} \quad (2.71)$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + h^2 - 2rh \cos(\pi - \theta)} \quad (2.72)$$

Στο μακρινό πεδίο θα είναι $r \gg h$ οπότε $r_2 + h_2 \cong r_2$ και εφαρμόζοντας την προσέγγιση του διωνυμικού αναπτύγματος, οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται:

$$r_1 \cong r - h \cos \theta \quad (2.73)$$

$$r_2 \cong r + h \cos \theta \quad (2.74)$$

Παρατηρώντας το παραπάνω σχήμα είναι φανερό ότι οι εξισώσεις (2.71) και (2.72) αντιστοιχούν στη θεώρηση ότι οι ευθείες AP, OP και A'P είναι παράλληλες, δηλαδή ότι $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, κάτι που ισχύει κατά προσέγγιση, αν $r \gg h$.

Όπως, έχει προαναφερθεί, για υπολογισμούς πλάτους μπορούμε να θεωρήσουμε $r_1 \cong r_2 \cong r$. Άρα το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P, που προκύπτει αθροίζοντας την απευθείας και ανακλώμενη συνιστώσα, οι οποίες δίνονται από τις εξισώσεις (1) και (2) θα είναι:

$$E_{\theta} \propto \left[jZ_o \frac{kI_o e^{-jkr}}{4\pi r} l \sin \theta \right] [2 \cos(kh \cos \theta)] \quad (2.75)$$

Όλοι οι παραπάνω υπολογισμοί ισχύουν για πάνω από την επιφάνεια του εδάφους δηλαδή για $z > 0$. Για $z < 0$ θα είναι $E_{\theta} = 0$. Η εξίσωση (2.75) έχει γραφτεί ως γινόμενο δύο όρων, ο πρώτος από τους οποίους εκφράζει το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί στο σημείο P ένα δίπολο μήκους l , που είναι τοποθετημένο παράλληλα στο άξονα z , με το κέντρο του στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Ο δεύτερος όρος του γινομένου εξαρτάται (για δεδομένη συχνότητα) από το ύψος h τοποθέτησης της κεραίας και τη γωνία παρατήρησης θ . Η εξίσωση αυτή εκφράζει την πολλαπλασιαστική ιδιότητα των διαγραμμάτων ακτινοβολίας με το δεύτερο όρο του γινομένου να έχει το ρόλο του παράγοντα διάταξης. Ο ίδιος παράγοντας διάταξης εφαρμόζεται και στην περίπτωση του οριζόντιου μαγνητικού δίπολου, που το είδωλό του έχει την ίδια φορά.

Είναι προφανές ότι το διάγραμμα ακτινοβολίας της κεραίας δεν εξαρτάται μόνο από την ίδια την κεραία αλλά και από το ύψος στο οποίο είναι τοποθετημένη πάνω από το έδαφος. Όπως φαίνεται από την εξίσωση (2.75), ο ρυθμός μεταβολής του πολλαπλασιαστικού παράγοντα $[2 \cos(kh \cos \theta)]$ είναι ανάλογος του ύψους h από το έδαφος. Άρα, για μεγαλύτερα ύψη το πολικό διάγραμμα ακτινοβολίας θα εμφανίζει περισσότερες διακυμάνσεις. Για ύψη μεγαλύτερα από $\lambda/4$ παρατηρούμε ότι εμφανίζονται πλευρικοί λοβοί ακτινοβολίας. Αποδεικνύεται ότι το πλήθος των λοβών του διαγράμματος ισούται με τον ακέραιο αριθμό που είναι πλησιέστερος στην ποσότητα $(2h/\lambda) + 1$.

Εφόσον το ηλεκτρικό πεδίο της κεραίας επηρεάζεται από την ύπαρξη του εδάφους, το ίδιο θα συμβαίνει και για τα υπόλοιπα μεγέθη που σχετίζονται με αυτό, όπως η ένταση ακτινοβολίας, η κατευθυντικότητα και η αντίσταση ακτινοβολίας.

Η ακτινοβολουμένη ισχύς σε ένα ημισφαίριο ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) ακτίνας r θα δίνεται από την εξίσωση:

$$W_{rad} = \iiint_s \mathbf{P}_{av} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2Z} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} |\mathbf{E}_\theta|^2 r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{\pi}{Z} \int_0^{\pi/2} |\mathbf{E}_\theta|^2 r^2 \sin\theta d\theta \quad (2.76)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.75) στην εξίσωση (2.76) παίρνουμε:

$$W_{rad} = \pi Z \left| \frac{I_0}{\lambda} \right|^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{\cos(2kh)}{(2kh)^2} + \frac{\sin(2kh)}{(2kh)^3} \right] \quad (2.77)$$

Από την εξίσωση (2.77) παρατηρούμε ότι για kh τείνει στο άπειρο δηλαδή όταν ουσιαστικά δεν υπάρχει επίδραση του εδάφους, η ακτινοβολούμενη ισχύς παίρνει την μορφή της εξίσωσης που έχει υπολογιστεί για τον ελεύθερο χώρο. Αντίθετα, αν kh τείνει στο 0, τότε αποδεικνύεται πως η ακτινοβολούμενη ισχύς είναι διπλάσια από αυτή που εκπέμπεται στον ελεύθερο χώρο.

Η ένταση ακτινοβολίας θα είναι:

$$U = r^2 |P_{av}| = r^2 \frac{1}{2Z_0} |E_\theta|^2 = \frac{Z_0}{3} \left| \frac{I_0 l}{\lambda} \right|^2 \sin^2 \theta \cos^2(kh \cos \theta) \quad (2.78)$$

Η μέγιστη τιμή της έντασης της ακτινοβολίας αντιστοιχεί στη γωνία $\theta = \pi/2$ και είναι:

$$U_{max} = \frac{Z_0}{2} \left| \frac{I_0 l}{\lambda} \right|^2 \quad (2.79)$$

δηλαδή τετραπλάσια από την αντίστοιχη τιμή για ελεύθερο χώρο. Άρα η κατευθυντικότητα της κεραίας θα είναι:

$$D = \frac{4\pi U_{max}}{W_{rad}} = \frac{2}{\frac{1}{3} - \frac{\cos(2kh)}{(2kh)^2} + \frac{\sin(2kh)}{(2kh)^3}} \quad (2.80)$$

Η ένταση της ακτινοβολίας μπορεί να υπολογισθεί ως εξής:

$$R_{rad} = \frac{2W_{rad}}{|I_0|^2} = 2\pi Z_0 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{\cos(2kh)}{(2kh)^2} + \frac{\sin(2kh)}{(2kh)^3} \right] \quad (2.81)$$

Ενώ για $kh \rightarrow \infty$ δίνει την τιμή που έχει υπολογισθεί για τον ελεύθερο χώρο. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.80) προκύπτει ότι η μέγιστη αυτή τιμή είναι ίση με 6.566, δηλαδή τέσσερις φορές μεγαλύτερη σε σχέση με τον ελεύθερο χώρο.[16],[20]

14. Ακτινοβολία στο Μακρινό Πεδίο

Η επεξεργασία των εξισώσεων του Maxwell, στις οποίες στηρίζεται ολόκληρη η θεωρία κεραιών, καταλήγει στην εξίσωση

$$\nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\mu \underline{J} \quad (2.82)$$

όπου \underline{A} είναι το διανυσματικό δυναμικό και \underline{J} είναι η χωρική πυκνότητα του ρεύματος που διαρρέει τον ακτινοβολητή. Τα κύματα που ακτινοβολούνται από κεραιές με πεπερασμένες διαστάσεις είναι σφαιρικά. Γι' αυτές τις κεραιές, η γενική λύση της παραπάνω διανυσματικής κυματικής εξίσωσης ως προς τις σφαιρικές συνιστώσες που κάθε μία από αυτές είναι συνάρτηση των r , θ , και ϕ θα είναι της μορφής

$$\underline{A}(r) = A_r(r, \theta, \phi) \hat{r} + A_\theta(r, \theta, \phi) \hat{\theta} + A_\phi(r, \theta, \phi) \hat{\phi} \quad (2.83)$$

Κάθε συνιστώσα του $\underline{A}(r)$ έχει μια εξάρτηση από την ακτινική απόσταση r (μεταβολή πλάτους) ανάλογη των δυνάμεων ($1/r^n$), $n=1,2,3\dots$. Μακριά από την κεραιά, οι όροι που αντιστοιχούν σε δυνάμεις $n \geq 2$ καθίστανται αμελητέοι μπροστά στους όρους που είναι ανάλογοι του $1/r$. Έτσι παίρνουμε την έκφραση

$$\underline{A}(r) \cong [A'_r(\theta, \phi) \hat{r} + A'_\theta(\theta, \phi) \hat{\theta} + A'_\phi(\theta, \phi) \hat{\phi}] \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (2.84)$$

η οποία εκφράζει το γεγονός ότι, στη μακρινή περιοχή ακτινοβολίας της κεραιάς, η ακτινική εξάρτηση του διανυσματικού δυναμικού είναι διαχωρίσιμη από την

εγκάρσια εξάρτησή του. Με βάση την προηγούμενη σχέση προκύπτει η έκφραση για το μακρινό ηλεκτρικό πεδίο

$$\underline{E}(r) = \frac{1}{r} \left\{ -j\omega e^{-jkr} [A'_\theta(\theta, \phi)\hat{\theta} + A'_\phi(\theta, \phi)\hat{\phi}] \right\} + \frac{1}{r^2} \{ \dots \} + \dots \quad (2.85)$$

Η ακτινική συνιστώσα του πεδίου \underline{E} δεν έχει όρους $1/r$ διότι οι συνεισφορές της από τον πρώτο και δεύτερο όρο της αλληλοαναιρούνται.

Η αντίστοιχη έκφραση για το μαγνητικό πεδίο είναι

$$\underline{H}(r) = \frac{1}{\eta r} \left\{ j\omega e^{-jkr} [A'_\phi(\theta, \phi)\hat{\theta} - A'_\theta(\theta, \phi)\hat{\phi}] \right\} + \frac{1}{r^2} \{ \dots \} + \dots \quad (2.85)$$

όπου $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ είναι η κυματική αντίσταση του μέσου μετάδοσης (ενδογενής αντίσταση του μέσου).

Αγνοώντας όρους ανώτερης τάξης του $1/r^n$, τα ακτινοβολούμενα πεδία \underline{E} και \underline{H} έχουν συνιστώσες μόνο θ και ϕ που είναι στην περιοχή μακρινού πεδίου δηλαδή

$$\begin{aligned} E_r &\approx 0 \\ E_\theta &\approx -j\omega A_\theta \\ E_\phi &\approx -j\omega A_\phi \end{aligned} \quad (2.86)$$

οπότε θα είναι

$$\underline{E}_A \approx -j\omega \underline{A} \quad (\text{μόνο για τις συνιστώσες } \theta \text{ και } \phi \text{ αφού } E_r \approx 0)$$

$$\begin{aligned} H_r &\approx 0 \\ H_\theta &\approx +j\omega A_\phi/n = -E_\phi/n \\ H_\phi &\approx -j\omega A_\theta/n = +E_\theta/n \end{aligned} \quad (2.87)$$

οπότε θα είναι

$$\underline{H}_A \approx \frac{\hat{A}_r}{n} \times \underline{E}_A = -j \omega/n (\hat{A}_r \times \underline{A}) \quad (\text{μόνο για τις συνιστώσες } \theta \text{ και } \phi \text{ αφού } H_r \approx 0)$$

Ακτινικές συνιστώσες του πεδίου υπάρχουν μόνο για τους όρους ανώτερης τάξης του $1/r^n$.

Με όμοιο τρόπο, τα πεδία μακρινής ζώνης, λόγω της μαγνητικής πηγής M (δυναμικό F) γράφονται όπως παρακάτω για την περιοχή μακρινού πεδίου:

$$\begin{aligned} H_r &\approx 0 \\ H_\theta &\approx -j\omega F_\theta \\ H_\phi &\approx -j\omega F_\phi \end{aligned} \quad (2.88)$$

οπότε θα είναι

$$\underline{H}_A \approx -j\omega \underline{F} \quad (\text{μόνο για τις συνιστώσες } \theta \text{ και } \phi \text{ αφού } H_r \approx 0)$$

και

$$\begin{aligned} E_r &\approx 0 \\ E_\theta &\approx -j\omega F_\phi n = H_\phi n \\ E_\phi &\approx -j\omega F_\theta n = -H_\theta n \end{aligned} \quad (2.89)$$

οπότε θα είναι

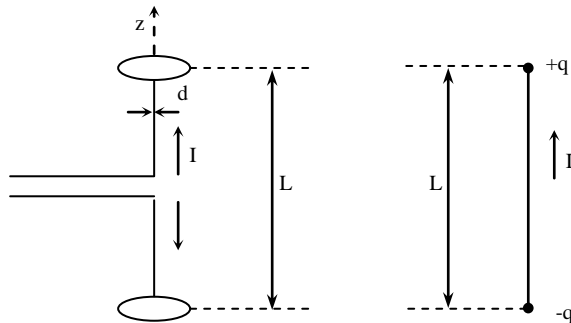
$$\underline{E}_F \approx -n \hat{\underline{A}}_r \times \underline{H}_F = j \omega n (\hat{\underline{A}}_r \times \underline{F}) \quad (\text{μόνο για τις συνιστώσες } \theta \text{ και } \phi \text{ αφού } E_r \approx 0)$$

Συμπεραίνουμε ότι, επειδή οι ακτινικές συνιστώσες του διατηρούν εξάρτηση από όρους $(1/r^n)$ μόνο για $n \geq 2$ (οι οποίοι και αμελούνται), το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι εγκάρσιο. Αυτό σημαίνει ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετα μεταξύ τους και προς την διεύθυνση διάδοσης του κύματος (TEM κύμα). [15]

15. Το Βραχύ Δίπολο ή Δίπολο Hertz

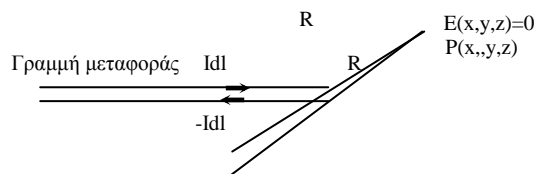
Σε αρκετές εφαρμογές κεραιών, χρησιμοποιούνται ηλεκτρικά μικρές κεραιές δηλαδή κεραιές των οποίων οι φυσικές διαστάσεις είναι πολύ μικρότερες του μήκους κύματος. Το θεωρητικό μοντέλο μελέτης των ηλεκτρικά μικρών κεραιών, βασίζεται στο λεγόμενο βραχύ δίπολο ή δίπολο Hertz. Το δίπολο Hertz όπως φαίνεται και στο

παρακάτω σχήμα είναι ένας ευθύγραμμος ακτινοβολητής με μήκος $L \ll \lambda$ και κατανομή ρεύματος σταθερή κατά μήκος του διπόλου.



Σχήμα 2.22: Το Δίπολο Hertz

Στα άκρα του διπόλου τοποθετούμε μεταλλικές πλάκες, που δρουν ως πυκνωτής για την επίτευξη σταθερής κατανομής ρεύματος κατά μήκος του διπόλου (φόρτιση κορυφής). Το δίπολο τροφοδοτείται από γραμμή μεταφοράς, η οποία δεν ακτινοβολεί σε μακρινή περιοχή (καθώς τα ρεύματα στους δύο αγωγούς της είναι αντίθετα και σε μεγάλες αποστάσεις με συνέπεια τα πεδία που δημιουργούν να αλληλοαναιρούνται) και η ακτινοβολία από τις μεταλλικές πλάκες θεωρείται αμελητέα. Το πάχος του αγωγού σε περίπτωση που είναι πολύ μικρότερο από το μήκος του διπόλου ($d \ll L$), θεωρείται επίσης αμελητέο. Σύμφωνα με τα παραπάνω το ισοδύναμο μοντέλο του βραχέως διπόλου αποτελείται από αγωγό μηδενικού πάχους, μήκους L , με σταθερή ρευματική κατανομή I και σημειακά φορτία $q, -q$ στα άκρα του όπου $dq/dt = I$.

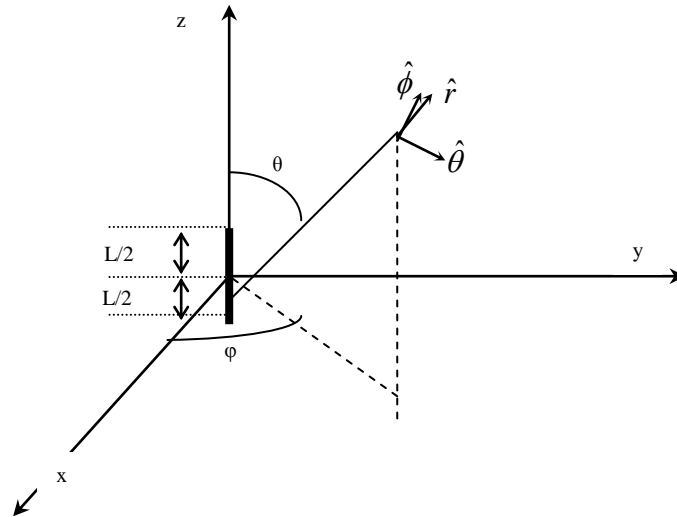


Σχήμα 2.23: Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο Διπόλου Hertz

Έστω βραχύ δίπολο τοποθετημένο στο κέντρο του συστήματος συντεταγμένων όπως στο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, με πυκνότητα ρεύματος:

$$\vec{J}(x, y, z) = \begin{cases} I\delta(x)\delta(y)\hat{z} & -L/2 \leq z \leq L/2 \\ 0 & z < -L/2, z > L/2 \end{cases} \quad (2.90)$$

όπου $\delta(x)$ και $\delta(y)$ είναι συναρτήσεις δ λόγω μηδενικού πάχους του διπόλου



Σχήμα 2.24: Συνιστώσες Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου Διπόλου Hertz

Το μαγνητικό πεδίο του διπόλου δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \vec{A}(x, y, z) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J}(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dV' = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \int_x \int_y \left[I\delta(x')\delta(y') \frac{e^{-jkR}}{R} \right] \Rightarrow \\ \vec{A}(x, y, z) &= \frac{\mu I L e^{-jkR}}{4\pi R} \hat{z} \end{aligned} \quad (2.91)$$

όπου, ισχύει

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2} \cong \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r, \quad \text{για } r \gg L \quad (2.92)$$

και $k = 2\pi/\lambda$ ο κυματικός αριθμός του μέσου διάδοσης στη συχνότητα εκπομπής ή λήψης της κεραίας.

Μεταφέροντας στις σφαιρικές συντεταγμένες τη σχέση (2.91) προκύπτει:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_z \hat{z} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} \\ A_r &= \frac{\mu I L e^{-jkr}}{4\pi r} \cos \theta \\ A_\theta &= \frac{\mu I L e^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta\end{aligned}\quad (2.93)$$

Το μαγνητικό πεδίο για το κενό προκύπτει:

$$\vec{H}(r, \theta) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} = \frac{jkIL \sin \theta e^{-jkr}}{4\pi r} \hat{\phi} + \frac{IL \sin \theta e^{-jkr}}{4\pi r^2} \hat{\phi} \quad (2.94)$$

Το βαθμωτό δυναμικό, υπολογίζεται με τη συνθήκη Lorentz:

$$\Phi = -\frac{1}{j\omega\mu_0\epsilon_0} \nabla \cdot \vec{A} = \frac{IL \cos \theta}{4\pi j\omega\epsilon_0} e^{-jkr} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) \quad (2.95)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο για το βραχύ δίπολο προκύπτει:

$$\begin{aligned}\vec{E}(r, \theta) &= -\nabla\Phi - j\omega\vec{A} = \left[\frac{IL}{4\pi} e^{-jkr} \left(\frac{2n}{r^2} + \frac{2}{j\omega\epsilon_0 r^3} \right) \cos \theta \right] \hat{r} + \\ &+ \left[\frac{IL}{4\pi} e^{-jkr} \left(\frac{j\omega\mu_0}{r} + \frac{n}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon_0 r^3} \right) \sin \theta \right] \hat{\theta}\end{aligned}\quad (2.96)$$

με $n = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi = 377 \Omega = \zeta$, η κυματική αντίσταση του κενού.

Για το κοντινό πεδίο ($kr \ll \lambda$) οι επικρατούσες συνιστώσες του μαγνητικού και του ηλεκτρικού πεδίου είναι αυτές που μεταβάλλονται ανάλογα του $\frac{1}{r^3}$ και $\frac{1}{r^2}$ αντίστοιχα. Συνεπώς το διάνυσμα Poynting προκύπτει:

$$\bar{P}_{av}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -\hat{r} j \frac{n}{k} \left| \frac{IL}{4\pi} \right|^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^5} + \hat{\theta} j \frac{n}{2k} \left| \frac{IL}{2\pi} \right|^2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^5} \right\} = 0 \quad (2.97)$$

Για το μακρινό πεδίο ($kr \gg \lambda$) οι όροι των εξισώσεων (2.94), (2.96) που είναι ανάλογοι του $\frac{1}{r^2}$ και του $\frac{1}{r^3}$, μπορούν να αγνοηθούν. Το μακρινό πεδίο ακτινοβολίας έχει ιδιαίτερη σημασία καθώς ο προορισμός των κεραιών είναι να ακτινοβολούν και να λαμβάνουν σε πολύ μεγάλες αποστάσεις.

Οπότε προκύπτει:

$$\vec{E}(r, \theta) = E_{\theta} \hat{\theta} = jn \frac{kILe^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta \hat{\theta} \quad (2.98)$$

και

$$\vec{H}(r, \theta) = H_{\phi} \hat{\phi} = j \frac{kILe^{-jkr}}{4\pi r} \sin \theta \hat{\phi} \quad (2.99)$$

Στις αποστάσεις αυτές, κάθε τμήμα του σφαιρικού τμήματος αποτελεί ένα επίπεδο κύμα ενώ από τις σχέσεις (2.98) και (2.99), αναμένονται χαρακτηριστικά επίπεδου κύματος. Στο μακρινό πεδίο οι μη αμελητέες συνιστώσες είναι οι E_{θ} και H_{ϕ} (ενώ $E_r = E_{\phi} = H_r = H_{\theta} = 0$). Εφόσον το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο την E_{θ} συνιστώσα, το Δίπολο Hertz είναι γραμμικά πολωμένη κεραία. Ανάλογα με την οριζόντια ή κατακόρυφη τοποθέτηση του διπόλου ως προς το έδαφος, η γραμμική πόλωση θα είναι οριζόντια ή κατακόρυφη, αντίστοιχα.

Οι συνιστώσες E_{θ} και H_{ϕ} είναι σε φάση, και ο λόγος τους μας δίνει την αντίσταση του μέσου διάδοσης n .

$$Z_w = \frac{E_{\theta}}{H_{\phi}} = n \quad (2.100)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στο μαγνητικό και τα δύο είναι κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης r . Το διάνυσμα Poynting προκύπτει:

$$\vec{P}_{av}(\vec{r}) = P_r(r, \theta) \hat{r} = \frac{nk^2 I^2 L^2}{32\pi^2} \sin^2 \theta \hat{r} \quad (2.101)$$

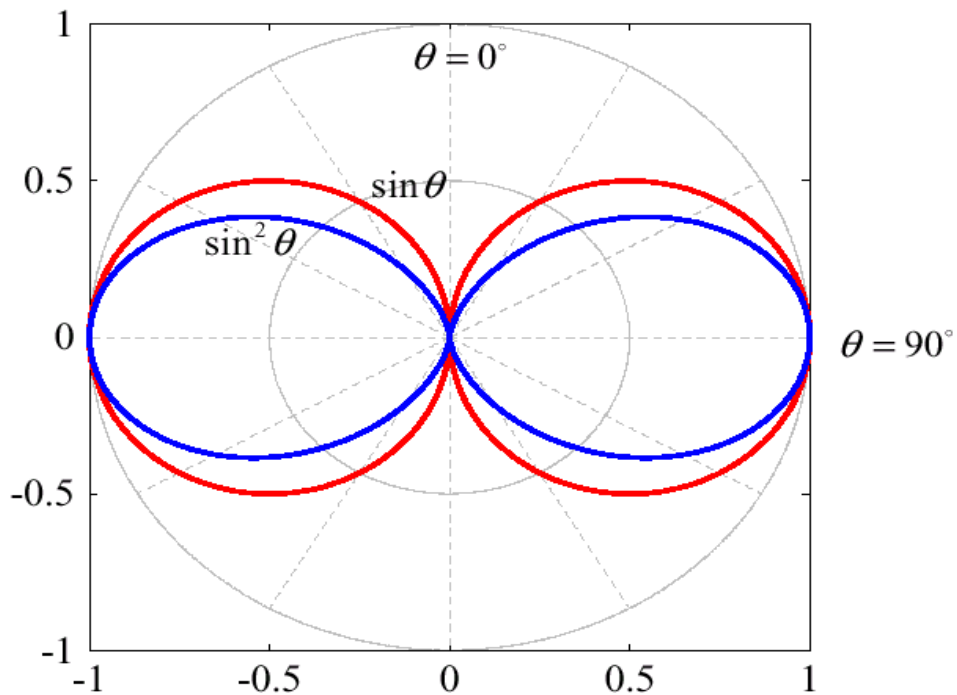
Η ένταση ακτινοβολίας του βραχέως διπόλου δίνεται από τη σχέση:

$$U(\theta) = r^2 P_r(r, \theta) = \frac{nk^2 I^2 L^2}{32\pi^2} \sin^2 \theta \quad (2.102)$$

Το διάγραμμα ακτινοβολίας στα πρωτεύοντα επίπεδα ($\varphi, \theta=90^\circ$) και ($\varphi=0^\circ, \theta$), παρουσιάζει τα εξής χαρακτηριστικά:

α. Ομοιοκατευθυντική ακτινοβολία στο επίπεδο ($\varphi, \theta=90^\circ$)

β. Κατευθυντική ακτινοβολία στο επίπεδο ($\varphi=0^\circ, \theta$)

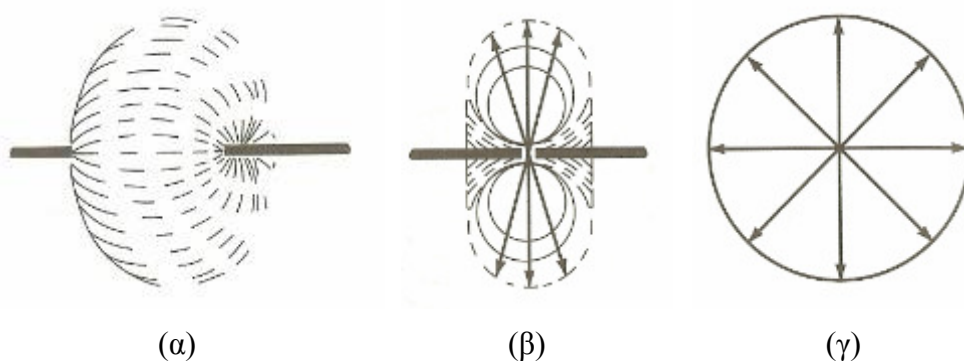


Σχήμα 2.25: Διάγραμμα Μακρινού Πεδίου Διπόλου Hertz

Το διάγραμμα πεδίου-ακτινοβολίας παρουσιάζει σημεία μηδενισμού στις διευθύνσεις $\theta=0^\circ$ και 180° και σημεία μέγιστου στις διευθύνσεις $\theta=90^\circ/270^\circ$. Τα σημεία ημίσειας ισχύος παρουσιάζονται στις γωνίες για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$\eta\mu\theta = 1/\sqrt{2} \Leftrightarrow \theta = \eta\mu^{-1}(1/\sqrt{2}) \Leftrightarrow \theta = 45^\circ + n\frac{\pi}{2} \quad (2.103)$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται διάφορα διαγράμματα ακτινοβολίας στοιχειώδους διπόλου από διαφορετικές γωνίες.



Σχήμα 2.26: (α) πλευρική άποψη, (β) γωνία μέγιστης ακτινοβολίας, (γ) κατακόρυφη άποψη.

Η συνολική ισχύς που ακτινοβολεί το δίπολο είναι:

$$W_{rad} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta [U(\theta) \sin \theta] = 40\pi^2 I^2 \frac{L^2}{\lambda^2} \quad (2.104)$$

Η αντίσταση ακτινοβολίας του βραχέως διπόλου υπολογίζεται ως εξής:

$$R_{rad} = \frac{W_{rad}}{\left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2} = 80\pi^2 \frac{L^2}{\lambda^2} \quad (2.105)$$

όπου, $\frac{I}{\sqrt{2}}$ είναι η ενεργός τιμή ρεύματος του διπόλου Hertz.

Το κατευθυντικό κέρδος του διπόλου δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$D_g(\theta) = 4\pi \frac{U(\theta)}{W_{rad}} = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \quad (2.106)$$

Η κατευθυντικότητα είναι η τιμή του κατευθυντικού κέρδους, στην κατεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας $\theta=90^\circ$ δηλαδή

$$D_m = \frac{3}{2} \cong 1.76dB \quad (2.107)$$

Η μέγιστη ενεργός επιφάνεια του διπόλου δίνεται από τη σχέση:

$$A_{em} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_m = \frac{3\lambda^2}{8\pi} \quad (2.108)$$

Το Εμβαδόν Δέσμης της κεραίας δίνεται από τη Στερεά Γωνία Ω_A

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{U(\theta, \phi)}{U(\theta, \phi)_{max}} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta d\phi = 2\pi \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3} \quad (2.109)$$

Το δίπολο Hertz έχει ορισμένα μειονεκτήματα, τα σημαντικότερα των οποίων είναι:

α. Η τιμή της ρευματικής κατανομής μειώνεται μέχρι να μηδενιστεί στα άκρα του δίπολου και επομένως η παραδοχή της σταθερής ρευματικής κατανομής I , δεν είναι ρεαλιστική. Ένας τρόπος για να αντισταθμιστεί η απώλεια ακτινοβολούμενης ισχύος, είναι η προσθήκη πλακών στα άκρα του δίπολου (χωρητικό φορτίο), που έχει σαν αποτέλεσμα μια σχεδόν σταθερή ρευματική κατανομή.

β. Η αντίσταση εισόδου της κεραίας παρουσιάζει μικρό πραγματικό μέρος (αντίσταση ακτινοβολίας R_{ak}) και υψηλή χωρητική αντίσταση. Ο συνδυασμός των δύο αυτών παραγόντων επιβάλλει υψηλές τάσης τροφοδότησης, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται επαρκές ρεύμα και ακτινοβολούμενη ισχύς.

γ. Επίσης, λόγω της υψηλής χωρητικής αντίστασης τίθενται ζητήματα συντονισμού, που συνήθως λύνονται με τη σύνδεση επαγωγικής αντίστασης σε σειρά προς τη κεραία. Η λύση αυτή, αναπόφευκτα δημιουργεί ωμικές απώλειες που θέτουν όρια στο βαθμό απόδοσης της κεραίας.[25]

Κεφάλαιο 3

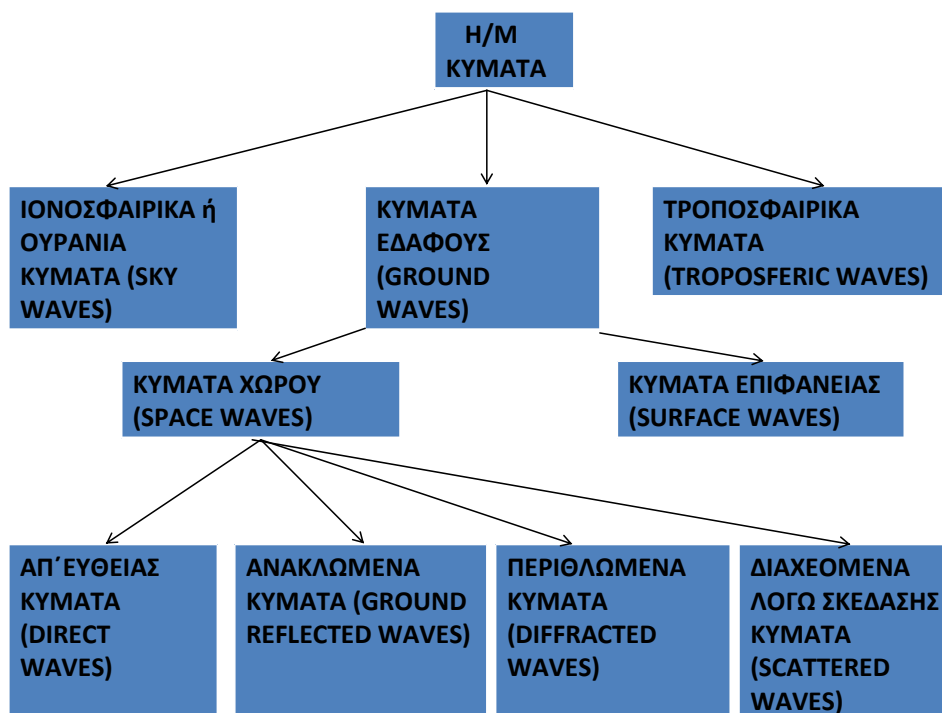
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

1. Διάδοση Ηλεκτρομαγνητικών (H/M) Κυμάτων

Με τον όρο διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων εννοούμε την όδευση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και τη μεταφορά H/M ενέργειας από μια κεραία πομπού σε μια κεραία δέκτη σε περιβάλλον που συμμετέχουν τόσο το έδαφος και η τροπόσφαιρα ή ιονόσφαιρα, όσο και διάφορες φυσικές ή τεχνητές δομές. Οι μηχανισμοί της διάδοσης εξαρτώνται από τη χρησιμοποιούμενη συχνότητα, τα διαγράμματα ακτινοβολίας και τα κέρδη των κεραιών, τα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά του εδάφους και των διάφορων σκεδαστών της H/M ενέργειας, καθώς και από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τη σχετική θέση κεραιών και σκεδαστών στο χώρο.

Η επίδραση όλων αυτών των παραγόντων στο εκπεμπόμενο σήμα γίνεται αντιληπτή ως μεταβολή και πιθανώς παραμόρφωση λαμβανόμενου από το δέκτη σήματος. Η λεπτομερής περιγραφή του λαμβανόμενου σήματος και η δυνατότητα πρόβλεψης των μεταβολών και των παραμορφώσεων που υπόκειται στο εκπεμπόμενο σήμα είναι εξαιρετικά μεγάλης σημασίας για τους σχεδιαστές των ασύρματων τηλεπικοινωνιακών συστημάτων. Ταυτόχρονα όμως είναι μια ιδιαίτερα σύνθετη διαδικασία, αφού οι παράγοντες που επηρεάζουν του μηχανισμούς της διάδοσης μεταβάλλονται με τρόπο τυχαίο, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να γίνει αναλυτική περιγραφή των φαινομένων και ακριβής εκτίμηση των μεγεθών, παρά μόνο με στατιστικούς όρους.

Τα H/M κύματα που μπορεί να καταφθάνουν στο δέκτη μιας ζεύξης χωρίζονται σε διάφορες κατηγορίες ανάλογα με τους μηχανισμούς διάδοσης, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.1: Κατηγορίες Η/Μ Κυμάτων

Τα ιονοσφαιρικά ή ουράνια κύματα είναι κύματα που ανακλώνται ή υπόκεινται σκέδαση από την ιονόσφαιρα. Τα τροποσφαιρικά κύματα, είναι κύματα που ανακλώνται, περιθλώνται ή υπόκεινται σκέδαση από την τροπόσφαιρα. Τα κύματα εδάφους είναι κύματα που μεταδίδονται κοντά στην επιφάνεια της γης και χωρίζονται σε κύματα χώρου και κύματα επιφάνειας. Τα κύματα χώρου με τη σειρά τους περιλαμβάνουν τα απευθείας κύματα, τα ανακλώμενα από το έδαφος κύματα, και τα περιθλώμενα από τα εμπόδια στην επιφάνεια της γης κύματα.

Ο κάθε τύπος κύματος είναι άμεσα συσχετισμένος με κάποιο μέσο μετάδοσης και κυρίως τα διαφορετικά στρώματα της γήινης ατμόσφαιρας καθώς και τα διάφορα φυσικά ή τεχνητά εμπόδια στην επιφάνεια της γης. Η γήινη ατμόσφαιρα αποτελείται από διάφορα αέρια με σύνθεση που μεταβάλλεται με το χρόνο και που στις μέρες μας περιέχει περίπου 78% άζωτο, 21% οξυγόνο και το υπόλοιπο 1% αντιστοιχεί σε υγρασία, διοξείδιο του άνθρακα και αργό. Τα αέρια αυτά συγκρατούνται από τη βαρυτική δύναμη της γης και προέρχονται κυρίως από τις

απελευθερώσεις αερίων από τον εξωτερικό φλοιό της γης κατά την ηφαιστειακή δραστηριότητα.

Η ατμόσφαιρα χωρίζεται σε διαφορετικά στρώματα. Η τροπόσφαιρα είναι η περιοχή της ατμόσφαιρας που εκτείνεται μέχρι περίπου τα 10 km από την επιφάνεια της γης. Στην πράξη μέχρι τα 6 km στους πόλους και περίπου τα 18 km στον ισημερινό ανάλογα με τις κλιματικές συνθήκες. Στην τροπόσφαιρα η θερμοκρασία τείνει να μειώνεται με το υψόμετρο με ρυθμό περίπου $6.5^{\circ}\text{C}/\text{km}$ φθάνοντας περίπου τους 50°C στο ανώτατο όριο της τροπόσφαιρας που πολλές φορές καλείται και τροπόπαυση. Παρόμοια συμπεριφορά με τη θερμοκρασία παρουσιάζει και η διηλεκτρική σταθερά. Στην τροπόσφαιρα συμβαίνουν και τα περισσότερα φυσικά φαινόμενα. Για λόγους της συγκεκριμένης διατριβής δε θα επεκταθούμε σε άλλα στρώματα της ατμόσφαιρας.

Η πλέον καθοριστική παράμετρος για την ηλεκτρομαγνητική διάδοση είναι η συχνότητα των Η/Μ κυμάτων. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις διάφορες ζώνες συχνοτήτων.

Σύμβολο	Εύρος Συχνοτήτων	Αντίστοιχη Μετρική Υποδιαίρεση
VLF	3 to 30 kHz	Myriametric waves
LF	30 to 300 kHz	Kilometric waves
MF	300 to 3. 000 kHz	Hectometric waves
HF	3 to 30 MHz	Decametric waves
VHF	30 to 300 MHz	Metric waves
UHF	300 to 3. 000 MHz	Decimetric waves
SHF	3 to 30 GHz	Centimetric waves
EHF	30 to 300 GHz	Millimetric waves
	300 to 3 .000 GHz	Decimillimetric waves

Πίνακας 3.1: Ζώνες Συχνοτήτων

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στα βασικά χαρακτηριστικά κάθε ζώνης ως προς τη δυνατότητα διάδοσης των κυμάτων εδάφους. Να υπενθυμίσουμε ότι με τον όρο ραδιοκύματα αναφερόμαστε συνήθως σε κύματα συχνότητας από 3kHz ως 300 GHz.

Στις VHF (30 MHz-300 MHz) και UHF (300 MHz-3 GHz) ζώνες συχνοτήτων, τα κύματα δεν ανακλώνται από την ιονόσφαιρα, αλλά τη διαπερνούν προς το διάστημα. Υπάρχουν βέβαια περιπτώσεις όπου λαμβάνει χώρα ιονοσφαιρική σκέδαση λόγω της ανομοιογένειας της ιονόσφαιρας καθώς και ανάκλαση από το ιονισμένα ίχνη μετεωριτών, αλλά οι περιπτώσεις αυτές είναι σπάνιες και με μικρή συνεισφορά στη λαμβανόμενη ενέργεια, οπότε συνήθως αμελούνται. Συνεπώς ο σημαντικότερος τύπος κυμάτων είναι τα κύματα χώρου και τα τροποσφαιρικά κύματα, δηλαδή τα ανακλώμενα, διαθλώμενα ή σκεδαζόμενα από την τροπόσφαιρα. Στις δύο αυτές ζώνες συχνοτήτων το μήκος κύματος είναι σχετικά μικρό όπως και το μέγεθος των κεραιών. Επειδή δε το ύψος των κεραιών είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερο από το μήκος κύματος, τα κύματα επιφάνειας είναι αμελητέα και τα κύματα εδάφους περιορίζονται μόνο στα κύματα χώρου.

Το διαθέσιμο εύρος ζώνης στις περιοχές συχνοτήτων VHF και UHF είναι σημαντικό και ικανό για τη μετάδοση υψηλής ποιότητας ραδιοφωνικών (FM) και τηλεοπτικών σημάτων σε μικρότερες όμως αποστάσεις, σε σχέση με τις ζώνες χαμηλότερων συχνοτήτων. Η απόσταση αυτή καλείται και ράδιο-ορίζοντας. Επίσης άλλου τύπου τηλεπικοινωνιακές ζεύξεις είναι δυνατές, όπως των συστημάτων κινητών επικοινωνιών, των κινητών δορυφορικών συστημάτων, συστημάτων ραδιοεντοπισμού κ.α. Το άνω μέρος της ζώνης UHF (750-900 MHz) έχει αποκτήσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον λόγω των πολύ ευνοϊκών συνθηκών διάδοσης που χαρακτηρίζουν αυτή τη ζώνη συχνοτήτων. Αρχικά η ζώνη αυτή εκχωρήθηκε για υπηρεσίες αναλογικής τηλεοπτικής ευρυεκπομπής. Όμως, με τη μετάβαση στην ψηφιακή τηλεόραση μειώνονται οι φασματικές απαιτήσεις για την παροχή υπηρεσιών τηλεοπτικής ευρυεκπομπής και απελευθερώνεται ένα τμήμα του φάσματος, που είναι γνωστό ως ψηφιακό μέρισμα. Στις περισσότερες χώρες μελετάται η απελευθέρωση του φάσματος αυτού για χρήση και από άλλες τηλεπικοινωνιακές υπηρεσίες, με στόχο την αποδοτικότερη εκμετάλλευσή του.

Στα κύματα χώρου είδαμε ότι ανήκουν το απευθείας κύμα, τα ανακλώμενα καθώς και τα περιθλώμενα από το έδαφος και από άλλες φυσικές ή τεχνητές κατασκευές κύματα. Με τα τροποσφαιρικά κύματα είναι δυνατή η επικοινωνία πομποδεκτών που βρίσκονται σε αποστάσεις μεγαλύτερες του οπτικού ορίζοντα. Αυτό οφείλεται ακριβώς στη διάθλαση και την ανάκλαση των Η/Μ από την τροπόσφαιρα καθώς και στο φαινόμενο της τροποσφαιρικής σκέδασης που παρουσιάζεται και στην ανομοιογένεια του δείκτη διάθλασης στην τροπόσφαιρα, που είναι υπεύθυνη για την δημιουργία κέντρων σκέδασης της Η/Μ ακτινοβολίας. Τα κέντρα αυτά καλούμενα και ράδιο-σύννεφα, έχουν υψηλή πυκνότητα σωματιδίων που σκεδάζουν την ακτινοβολία, η οποία και λαμβάνεται από τον επιθυμητό δέκτη ως αθροιστική ή αφαιρετική συμβολή πολλών σκεδαζομένων κυμάτων. Το φαινόμενο είναι παρόμοιο με εκείνο που παρατηρείται σε κινηματογραφικές προβολές όπου μεταξύ της μηχανής προβολής και της οθόνης μπορεί να παρεμβληθεί αέριο με υψηλή πυκνότητα, π.χ. καπνός, και τα ανθρώπινο μάτι λαμβάνει ένα μέρος της σκεδαζόμενης ενέργειας.

Στην SHF (3 GHz-30 GHz) ζώνη συχνοτήτων, δηλαδή στις μικροκυματικές συχνότητες, ο κυριότερος τύπος κυμάτων είναι τα κύματα χώρου και ιδιαίτερα το απευθείας κύμα. Η οπτική επαφή είναι απολύτως απαραίτητη λόγω των μεγάλων εξασθενήσεων στις οποίες υπόκεινται τα υψηλής συχνότητας κύματα. Οι κεραιές που χρησιμοποιούνται είναι συνήθως τύπου ανακλαστήρα και χοανοκεραίες με υψηλή κατευθυντικότητα. Παραδείγματα εφαρμογών είναι οι μικροκυματικές ζεύξεις δηλαδή επίγειες ψηφιακές ζεύξεις σημείου προς σημείο υψηλού ρυθμού μετάδοσης, οι δορυφορικές ζεύξεις με γεωστατικούς και μη δορυφόρους, τα radar , κτλ. Τα σημαντικότερα προβλήματα στις μικροκυματικές συχνότητες είναι η ατμοσφαιρική απορρόφηση, η βροχή, το χιόνι και τα σύννεφα. Στην EHF (30 GHz-300 GHz) ζώνη συχνοτήτων, δηλαδή στις χιλιοστομετρικές συχνότητες, η οπτική επαφή μεταξύ πομπού και δέκτη είναι πάλι απολύτως απαραίτητη και δε θα σχολιαστεί περαιτέρω στα πλαίσια της παρούσας διατριβής.

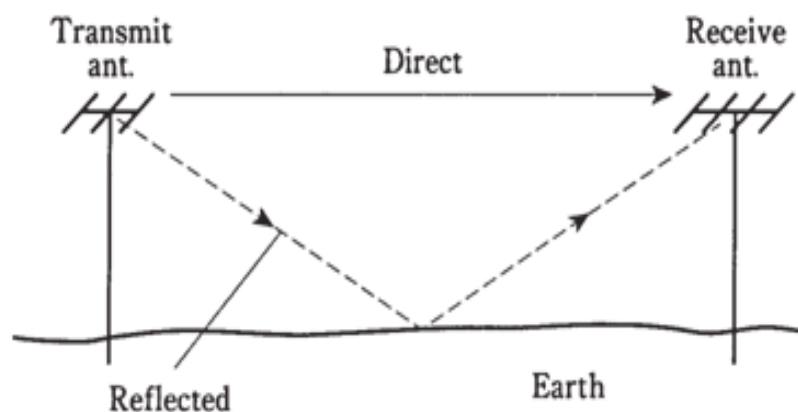
Η διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο γήινο εξωτερικό περιβάλλον χαρακτηρίζεται όπως είδαμε από φαινόμενα ανάκλασης, περίθλασης και σκέδασης. Κάποιοι από τους παράγοντες που επηρεάζουν την αξιοπιστία των

ασυρμάτων ζεύξεων είναι οι ανομοιογενείς εν γένει επιφάνειες, οι ποικίλες τιμές αγωγιμότητας από υλικό σε υλικό και μερικές φορές ακόμα και στο ίδιο το υλικό, οι μεταβαλλόμενες διηλεκτρικές ιδιότητες, τα μετεωρολογικά φαινόμενα, τα κέντρα σκέδασης που δημιουργούνται λόγω καιρικών φαινομένων στην τροπόσφαιρα για πολύ μεγάλες συχνότητες, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του περιβάλλοντος στο οποίο μεταδίδονται τα ραδιοκύματα, ακόμα και το γήινο μαγνητικό πεδίο ή η έντονη ηλιακή δραστηριότητα. Εδώ, θα εξετάσουμε κυρίως τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζει τη ραδιοδιάδοση το έδαφος, καθώς και την επίδραση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του περιβάλλοντος στις απώλειες διάδοσης. Περιγράφονται μοντέλα διάδοσης πάνω από έδαφος χωρίς εμπόδια.

Η διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μελετάται ξεχωριστά για τις διαφορετικές περιοχές που έχουμε ήδη εξετάσει γύρω από τον ακτινοβολητή, δηλαδή το κοντινό πεδίο (δεν έχουμε ακτινοβολία ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας), τη ζώνη Fresnel (υπάρχει ακτινοβολία ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας, αλλά οι εγκάρσιες συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου έχουν ακτινική εξάρτηση) και το μακρινό πεδίο (οι εγκάρσιες συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δεν έχουν ακτινική εξάρτηση).

Το πρόβλημα της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι από τα πλέον δύσκολα να μοντελοποιηθεί επειδή ο ραδιοδίαυλος είναι ένα σύνθετο και μεταβλητό περιβάλλον. Οι αστάθμητοι παράγοντες που υπεισέρχονται στη διάδοση ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι δύσκολο να προβλεφθούν και ακόμα πιο δύσκολο είναι να προβλεφθεί η τελική τιμή των πεδίων σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο του χώρου που μελετάται η διάδοση. Η διαδικασία αυτή συνήθως γίνεται χρησιμοποιώντας διάφορες στατιστικές μεθόδους κατόπιν μετρήσεων που γίνονται.

Οι βασικοί μηχανισμοί που διέπουν την διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σύμφωνα με την υπάρχουσα θεωρία είναι : (α) η διάδοση ελεύθερου χώρου, (β) η ανάκλαση (reflection), (γ) η περίθλαση (diffraction) και (δ) η σκέδαση (scattering). Στο παρακάτω σχήμα γίνεται μια αναπαράσταση για τους μηχανισμούς διάδοσης μόνο των δύο πρώτων περιπτώσεων που θα εστιάσουμε στην παρούσα διατριβή.



Σχήμα 3.2: Τυπική Διάδοση με Απ' ευθείας και Ανακλώμενο Κύμα

Η διάδοση ελεύθερου χώρου προϋποθέτει την απευθείας οπτική επαφή πομπού και δέκτη (Line Of Sight- LOS) και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις ως σφαιρικά κύματα. Η ισχύς του σήματος είναι συνήθως αντίστροφα ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης από τον πομπό. Στην περίπτωση που ο πομπός έχει οπτική επαφή με το δέκτη, τα φαινόμενα της περίθλασης και της σκέδασης ενδέχεται να μην επηρεάζουν την διάδοση του σήματος.[16]

2. Διάδοση στον Ελεύθερο Χώρο

Η πιο απλή περίπτωση μελέτης της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι χρησιμοποιώντας το μοντέλο διάδοσης ελεύθερου χώρου (free space). Για να χρησιμοποιηθεί το συγκεκριμένο μοντέλο θα πρέπει πομπός και δέκτης να έχουν άμεση οπτική επαφή και να μην υπάρχουν γύρω εμπόδια. Είναι προφανές ότι το συγκεκριμένο μοντέλο διάδοσης απαιτεί ιδανικές συνθήκες, οι οποίες δεν υφίστανται σε ένα πραγματικό σενάριο ασύρματης ζεύξης. Ωστόσο, σε ορισμένες περιπτώσεις όπως για παράδειγμα σε μια δορυφορική ζεύξη, σε μια μικροκυματική ζεύξη ή πιο ειδικά στη μελέτη ενός προβλήματος στο οποίο έχουμε περιβάλλον ικανό να θεωρηθεί όμοιο με το περιβάλλον «ελεύθερου χώρου», το μοντέλο διάδοσης ελεύθερου χώρου μπορεί να χρησιμοποιηθεί δίνοντας εκτιμήσεις για την στάθμη ισχύος του σήματος.

Γίνεται η υπόθεση ότι η κεραία εκπομπής και η κεραία λήψης βρίσκονται σε περιβάλλον ελεύθερου χώρου, δηλαδή μακριά από τη γη ή από τυχόν εμπόδια. Αν P_T , P_R είναι η ισχύς που εκπέμπεται από τον πομπό και τον δέκτη αντίστοιχα, G_T , G_R τα κέρδη της κεραίας του πομπού και του δέκτη στη κατεύθυνση λήψης αντίστοιχα, A η ενεργός επιφάνεια της κεραίας λήψης και d η απόσταση της ραδιοζεύξης, η ενέργεια ανά μονάδα επιφανείας σε απόσταση d προκύπτει ίση με

$$W = \frac{P_T \cdot G_T}{4\pi \cdot d^2} \quad (3.1)$$

Η διαθέσιμη ισχύς της κεραίας λήψης προκύπτει ίση με

$$P_R = \frac{P_T \cdot G_T}{4\pi \cdot d^2} \cdot A = \frac{P_T \cdot G_T}{4\pi \cdot d^2} \frac{\lambda^2 \cdot G_R}{4\pi} \quad (3.2)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί με δύο ακόμα διαφορετικές μορφές :

$$\frac{P_R}{P_T} = G_T \cdot G_R \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi \cdot d} \right)^2 \quad (3.3)$$

$$\frac{P_R}{P_T} = G_T \cdot G_R \cdot \left(\frac{c}{4\pi \cdot f \cdot d} \right)^2 \quad (3.4)$$

όπου $c = \lambda \cdot f$.

Όλες οι παραπάνω σχέσεις εξήχθησαν με την υπόθεση ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται μέσα από σφαιρική επιφάνεια εμβαδού $4 \cdot \pi \cdot d^2$ χωρίς εμπόδια στον περιβάλλοντα χώρο. Επιπλέον είναι διακριτό ότι, στο μοντέλο διάδοσης ελεύθερου χώρου η ισχύς του λαμβανόμενου σήματος P_R είναι ανάλογη του παράγοντα $1/d^2$, δηλαδή αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης της ραδιοζεύξης.

Η απώλεια διάδοσης σε dB δίδεται από την παρακάτω σχέση :

$$L_F = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_R}{P_T} = 10 \cdot \log_{10} G_T + 10 \cdot \log_{10} G_R - 20 \cdot \log_{10} f - 20 \cdot \log_{10} d + k \quad (3.5)$$

$$\text{όπου } k = 20 \cdot \log_{10} \frac{3 \cdot 10^8}{4\pi} = 147,6.$$

3. Ανάκλαση

Με τον όρο ανάκλαση περιγράφουμε το φαινόμενο που λαμβάνει χώρα όταν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα προσπίπτει πάνω σε εμπόδιο με διαστάσεις πολύ μεγαλύτερες σε σχέση με το μήκος κύματος. Παραδείγματα ανάκλασης έχουμε από την επιφάνεια της γης (που μας ενδιαφέρει στην παρούσα διατριβή), από βουνά, από κτίρια και γενικά από αντικείμενα μεγάλων διαστάσεων. Τα ανακλώμενα κύματα μπορούν ανάλογα με τη φάση και το μέτρο τους, να συμβάλουν είτε θετικά είτε αρνητικά στο συνολικό σήμα.

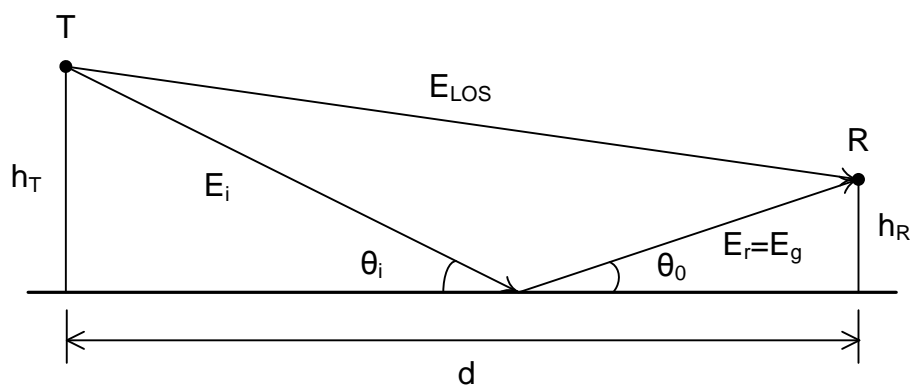
Όταν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα περάσει από ένα μέσο σε ένα άλλο με διαφορετικές ηλεκτρικές ιδιότητες, ένα ποσοστό του κύματος ανακλάται ενώ ένα άλλο μεταδίδεται. Αν τα σώματα αυτά είναι διηλεκτρικά, μέρος της ακτινοβολίας μεταδίδεται από το ένα στο άλλο σώμα και μέρος της ακτινοβολίας ανακλάται στο αρχικό σώμα, ενώ δεν υπάρχει καθόλου απώλεια ενέργειας ή απορρόφηση. Αν όμως το δεύτερο σώμα είναι τέλειος αγωγός, τότε όλη η ενέργεια ανακλάται πίσω στο πρώτο σώμα. Το ποσοστό του κύματος που ανακλάται ορίζει τον συντελεστή ανάκλασης ο οποίος ονομάζεται και συντελεστής ανάκλασης Fresnel. Ο συντελεστής ανάκλασης εξαρτάται από την πόλωση, την γωνία πρόσπτωσης και την συχνότητα του διαδιδόμενου ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Τέλος αν Γ είναι ο συντελεστής ανάκλασης και T ο συντελεστής μετάδοσης, οι δύο συντελεστές συνδέονται μεταξύ τους μέσω της παρακάτω βασικής σχέσης η οποία εξασφαλίζει ότι δεν έχουμε απώλεια ενέργειας

$$T = 1 + \Gamma \quad (3.6)$$

4. Διάδοση Πάνω από Επίπεδη Ανακλαστική Επιφάνεια

Ένα πιο συνηθισμένο μοντέλο διάδοσης και ταυτόχρονα πιο ρεαλιστικό σε σχέση με το μοντέλο διάδοσης ελεύθερου χώρου και την παρούσα διατριβή είναι το μοντέλο διάδοσης σε επίπεδη ανακλαστική επιφάνεια (plane earth). Αυτό το μοντέλο προβλέπει ότι στο δέκτη φτάνουν δύο σήματα, το απευθείας σήμα από τον πομπό και το ανακλώμενο σε μια επίπεδη επιφάνεια η οποία σε ρεαλιστικές περιπτώσεις μπορεί να είναι το έδαφος. Το συγκεκριμένο μοντέλο προβλέπει με αρκετά καλή ακρίβεια τις απώλειες του σήματος σε αποστάσεις τάξεως έως και μερικές δεκάδες χιλιόμετρα. Γενικά, σε αυτές τις αποστάσεις η καμπυλότητα της γης μπορεί να παραβλεφθεί. Τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά ακόμα και αν ο πομπός ή ο δέκτης βρίσκονται σε ύψος μεγαλύτερο των 50m.

Θεωρούμε το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3.3: Το Μοντέλο Επίπεδης Επιφάνειας

όπου h_T και h_R τα ύψη των κεραιών πομπού και δέκτη αντίστοιχα, d η απόσταση μεταξύ των κεραιών πομπού και δέκτη, E_{LOS} το ηλεκτρικό πεδίο που φτάνει στο δέκτη απευθείας, E_i το προσπίπτον στην επίπεδη επιφάνεια ηλεκτρικό πεδίο, E_r το ανακλώμενο ηλεκτρικό πεδίο, θ_i και θ_0 οι γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης αντίστοιχα.

Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο δέκτη θα είναι ίσο με

$$E_{TOT} = E_{LOS} + E_g \quad (3.7)$$

Δεδομένου ότι τα πεδία E_{LOS} και E_g έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi$, η παραπάνω δίνει :

$$E_{TOT} = E_o (1 - \exp(-j\Delta\phi)) = E_o (1 - \cos(\Delta\phi) + j \sin(\Delta\phi)) \quad (3.8)$$

Παίρνοντας το μέτρο θα έχουμε ότι :

$$|E_{TOT}| = |E_o| \left[1 + \cos^2 \Delta\phi - 2 \cos \Delta\phi + \sin^2 \Delta\phi \right]^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot |E_o| \cdot \sin \frac{\Delta\phi}{2} \quad (3.9)$$

Στην παραπάνω σχέση η διαφορά φάσης μπορεί να υπολογιστεί με κάποια προσέγγιση που πηγάζει από αναπτύγματα Taylor και σχετίζεται με την διαφορά δρόμων ΔR σύμφωνα με τη σχέση :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta R \cong \frac{4\pi \cdot h_T \cdot h_R}{\lambda \cdot d} \quad (3.10)$$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε τελικά ότι

$$|E_{TOT}| = 2 \cdot |E_o| \cdot \sin \left(\frac{2\pi \cdot h_T \cdot h_R}{\lambda \cdot d} \right) \quad (3.11)$$

Η ισχύς του λαμβανόμενου σήματος είναι ανάλογη του E_{TOT}^2 , οπότε η λαμβανόμενη ισχύς P_R θα είναι ίση με :

$$P_R = 4 \cdot |E_o|^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{2\pi \cdot h_T \cdot h_R}{\lambda \cdot d} \right) \quad (3.12)$$

και

$$P_R = 4 \cdot P_T \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi \cdot d} \right)^2 \cdot G_T \cdot G_R \cdot \sin^2 \left(\frac{2\pi \cdot h_T \cdot h_R}{\lambda \cdot d} \right) \quad (3.13)$$

Σε περίπτωση που είναι $d \gg h_T, h_R$, η (3.13) απλοποιείται περαιτέρω αφού τότε

ισχύει ότι $\sin^2\left(\frac{2\pi \cdot h_T \cdot h_R}{\lambda \cdot d}\right) \cong \left(\frac{2\pi \cdot h_T \cdot h_R}{\lambda \cdot d}\right)^2$ και γίνεται:

$$P_R = P_T \cdot G_T \cdot G_R \cdot \left(\frac{h_T \cdot h_R}{d^2}\right)^2 \quad (3.14)$$

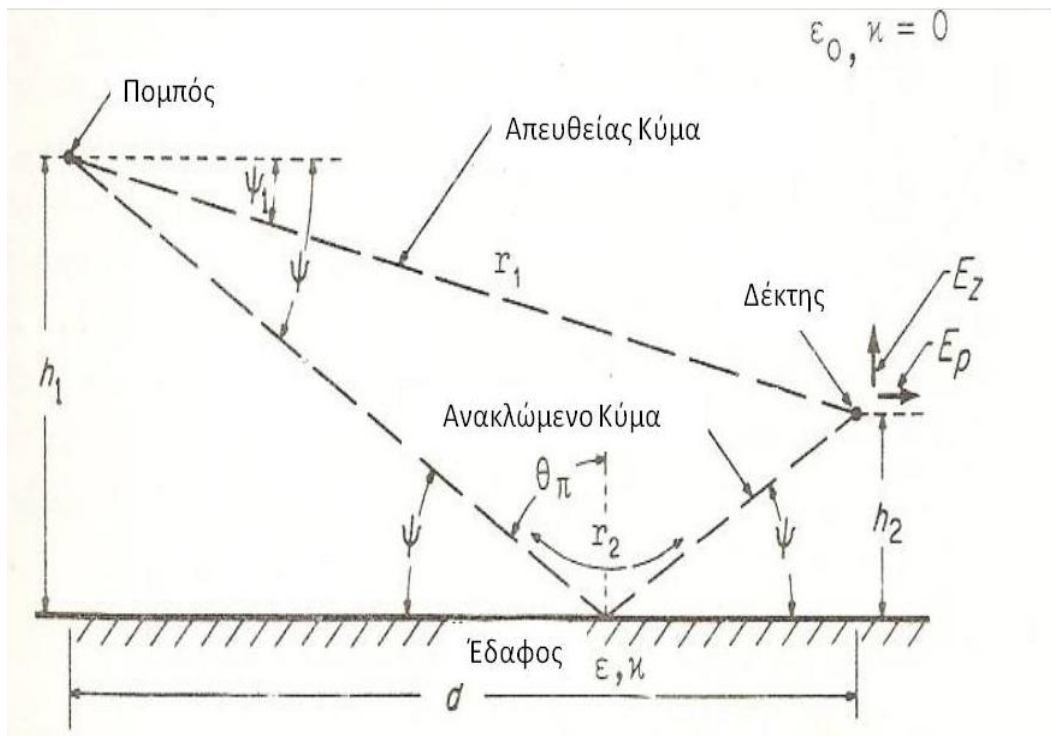
Η παραπάνω σχέση είναι η τελική εξίσωση που περιγράφει το μοντέλο επίπεδης επιφανείας. Είναι διακριτό ότι σε αυτό το μοντέλο, η ισχύς του λαμβανόμενου σήματος P_R είναι ανάλογη του παράγοντα $1/d^4$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που δεν ισχύει $d \gg h_T, h_R$, το μοντέλο μας δίνει εναλλασσόμενα μέγιστα και ελάχιστα του σήματος κοντά στον πομπό.

Η απώλεια διάδοσης σε dB, σύμφωνα με το μοντέλο επίπεδης επιφανείας είναι ίση με :

$$\begin{aligned} L_{PE} &= 10 \cdot \log_{10} \frac{P_R}{P_T} \\ &= 10 \cdot \log_{10} G_T + 10 \cdot \log_{10} G_R + 20 \cdot \log_{10} h_T + 20 \cdot \log_{10} h_R - 40 \cdot \log_{10} d \end{aligned} \quad (3.15)$$

5. Κύματα Εδάφους

Έστω μία τυπική ασύρματη διάδοση μεταξύ πομπού και δέκτη. Στο παρακάτω σχήμα διακρίνεται το κύμα χώρου αποτελούμενο από το απευθείας και το ανακλώμενο κύμα (θα απαλείψουμε τα περιθλώμενα κύματα και τα διαχεόμενα λόγω σκέδασης κύματα). Θεωρούμε το έδαφος λείο και επίπεδο. Οι ανακλαστικές ιδιότητες του εδάφους οφείλονται στη διηλεκτρική σταθερά ϵ και την αγωγιμότητά του κ . Σε αυτό το μέσο ισχύει $J = \kappa E$.



Σχήμα 3.4: Τυπική Ασύρματη Διάδοση με Απευθείας και Ανακλώμενο Κύμα

Η δεύτερη εξίσωση του Maxwell παίρνει τη μορφή

$$\nabla \times \underline{H} = i\omega \underline{E} + \kappa \underline{E} = i\omega (\epsilon + \kappa/i\omega) \underline{E} = i\omega \epsilon' \underline{E} \quad (3.16)$$

Δηλαδή ένα αγώγιμο μέσο είναι δυνατό να χαρακτηριστεί από μια μιγαδική διηλεκτρική σταθερά

$$\epsilon' = \epsilon + \kappa/i\omega = \epsilon(1 + \kappa/i\omega\epsilon) \quad (3.17)$$

$$\text{Θέτοντας } \epsilon_2/\epsilon_1 = \epsilon'/\epsilon_0 = \epsilon_r - i\chi, \quad (3.18)$$

όπου

$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ είναι το πραγματικό μέρος της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς της γης, $\chi = \kappa/\omega\epsilon_0 = 18 \times 10^9 \kappa/f$, το φανταστικό της μέρος και $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ η διηλεκτρική σταθερά στο κενό ή τον αέρα.

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι η γωνία προσπτώσεως μετρούμενη από την επιφάνεια του εδάφους είναι $\psi=90^0-\theta\pi$ οπότε θα είναι

$$\cos\theta\pi = \sin\psi,$$

και

$$\sin\theta\pi = \cos\psi \quad (0^0 \leq \theta\pi, \psi \leq 90^0) \quad (3.19)$$

Από όλα τα παραπάνω ο συντελεστής ανάκλασης R_2 του λείου και επίπεδου εδάφους δίνεται από τη σχέση:

$$R_2 = (\epsilon_r - ix) \sin\psi - (\epsilon_r - ix - \cos 2\psi)^{1/2} / (\epsilon_r - ix) \sin\psi + (\epsilon_r - ix - \cos 2\psi)^{1/2} \quad (3.20)$$

Ο συντελεστής ανακλάσεως είναι μιγαδικός με αποτέλεσμα το ανακλώμενο κύμα να διαφέρει από το απευθείας κύμα τόσο στο πλάτος όσο και στη φάση.

Από μία μικρή διερεύνηση του παραπάνω τύπου προκύπτει ότι για μία εφαπτομενική περίπτωση πρόσπτωση δηλαδή $\psi \rightarrow 0$ τότε $R \rightarrow -1$ για όλες τις τιμές των ϵ_r , κ , f . Έτσι το ανακλώμενο κύμα θα έχει τιμή ίση και αντίθετη με το απευθείας κύμα και ενδεχομένως ένα τμήμα τους να αλληλοαναιρείται. Σε αυτή την περίπτωση κυρίαρχη θέση στη διάδοση καταλαμβάνει το κύμα επιφανείας. Όσο αυξάνεται η γωνία ψ (δηλαδή το ύψος h_1 του πομπού) το κύμα επιφανείας μειώνεται και διαδραματίζει μικρότερο ρόλο στη διάδοση.

Το κλασικό πρόβλημα της ακτινοβολίας ενός κατακόρυφου διπόλου πάνω από επίπεδο, λείο και πεπερασμένης αγωγιμότητας εδάφους επιλύθηκε αρχικά από τον Sommerfeld το 1909 προσφέροντας διάφορες λύσεις για αριθμητικό υπολογισμό. Έκτοτε μία πληθώρα δημοσιεύσεων υπήρξαν για το αντίστοιχο θέμα και προέκυψαν μια σειρά από προσεγγιστικές λύσεις. Η πλέον ιδανική για πρακτικές εφαρμογές μορφή λύσεως είναι αυτή του K.A. Norton ο οποίος διαχωρίζει τα συστατικά του κύματος εδάφους σε αυτά που αποτελούν τα κύματα χώρου (απευθείας και ανακλώμενα κύματα) με τα κύματα επιφανείας. Το τελευταίο διαφέρει από το κύμα επιφανείας του Sommerfeld και θα το αναλύσουμε παρακάτω.

Έστω ότι ο πομπός είναι ένα κατακόρυφο στοιχειώδες δίπολο Idl σε ύψος h_1 πάνω από λείο, επίπεδο και πεπερασμένης αγωγιμότητας κ έδαφος. Η λύση του Norton για τις συνιστώσες E_z (κατακόρυφη) και E_r (ακτινική ή οριζόντια) του ολικού πεδίου E στο μακρινό πεδίο είναι:

$$E_z = 30ikIdl [\cos^2 \psi (e^{-ikr_1/r_1} + R_2 e^{-ikr_2/r_2}) + F (1-R_2) (1-\gamma^2 + \gamma^4 \cos^2 \psi) e^{-ikr_2/r_2}] \quad (3.21)$$

$$E_r = -30ikIdl \{ \sin \psi \cos \psi (e^{-ikr_1/r_1} + R_2 e^{-ikr_2/r_2}) - F \cos \psi (1-R_2) \gamma (1-\gamma^2 \cos^2 \psi)^{1/2} [1-\gamma^2 (1-\gamma^2 \cos^2 \psi/2 + \sin^2 \psi/2)] e^{-ikr_2/r_2} \} \quad (3.22)$$

Στις παραπάνω σχέσεις οι όροι ανώτερης τάξης των $1/r_1$ και $1/r_2$ δεν αναγράφησαν με δεδομένο ότι πρόκειται για πεδίο ακτινοβολίας όπως έχουμε εξηγήσει σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Τα r_1 και r_2 είναι οι αποστάσεις του διπόλου και του ειδώλου του από το σημείο υπολογισμού (που τώρα είναι ο δέκτης), R_2 ο συντελεστής ανάκλασης του εδάφους ο οποίος δίνεται από τη σχέση (3.20) και

$$\gamma^2 = \epsilon_0 / \epsilon' = 1 / \epsilon_r - i\chi \quad (3.23)$$

όπου ϵ_r και χ γνωστά ενώ το F είναι ο συντελεστής εξασθενήσεως που χαρακτηρίζει το κύμα επιφανείας του Norton και εξαρτάται από την απόσταση του δέκτη και τις σταθερές της γης τα οποία θα αναλύσουμε περαιτέρω παρακάτω.

Οι εξισώσεις (3.21) και (3.22) αποτελούνται από τρεις όρους. Ο πρώτος όρος είναι το απευθείας κύμα (εξαρτάται από την r_1), ο δεύτερος είναι το ανακλώμενο από το έδαφος κύμα (εξαρτάται από την r_2 και R_2) και ο τρίτος είναι το κύμα επιφανείας του Norton. Διαχωρίζοντας τα κύματα χώρου από το επιφανειακό και υπολογίζοντας τις ολικές τιμές έχουμε:

$$E_{\text{χώρου}} = E_{\psi}(\text{χώρου}) = [E_z^2(\text{χώρου}) + E_r^2(\text{χώρου})]^{1/2} = 30ikIdl / \cos \psi (e^{-ikr_1/r_1} + R_2 e^{-ikr_2/r_2}) \quad (3.24)$$

και

$$E_{\text{επιφ}} = 30ikId/F (1-R_2) [1-2\gamma^2 + \gamma^2 \cos^2 \psi (1+ \sin^2 \psi/2)^2]^{1/2} e^{-ikr_2/r_2} \quad (3.25)$$

όπου επίσης οι όροι γ^4 δεν αναγράφηκαν. Επί των παραπάνω σχέσεων προβαίνουμε σε κάποιες διαπιστώσεις.

α. Παρατηρούμε ότι το ανακλώμενο κύμα πολλαπλασιάζεται με το συντελεστή ανακλάσεως R_2 ο οποίος υπολογίστηκε για πρόσπτωση επίπεδου κύματος. Όσο μεγαλύτερο είναι το $h_1 \gg \lambda$, το προσπίπτον κύμα επί του εδάφους θα είναι επίπεδο αφού αναφερόμαστε στο μακρά πεδίο. Όταν όμως το δίπολο βρίσκεται κοντά στο έδαφος (μικρό ύψος), τότε το προσπίπτον κύμα δεν είναι επίπεδο και στο συνολικό κύμα εδάφους περιέχονται και νέοι όροι οι οποίοι συνιστούν το κύμα επιφανείας όπως φαίνεται στη σχέση (3.25).

β. Όταν η γη είναι τελείως αγωγίμη (χ τείνει στο άπειρο) τότε ο $R_2=1$ και το κύμα επιφανείας μηδενίζεται.

γ. Για $\psi=0$, το κύμα χώρου μηδενίζεται και παραμένει μόνο το κύμα επιφανείας. Αυτό οφείλεται στην ταχεία μεταβολή του συντελεστή ανάκλασης R_2 κοντά στη γωνία Brewster $[\tan\theta_B = (\epsilon_2/\epsilon_1)^{1/2}]$ που είναι η αιτία πολλών φαινομένων μεταδόσεως και είναι χαρακτηριστικό της κατακόρυφης πόλωσης. Όταν $\psi > \psi_B$ τότε η φάση του R_2 πλησιάζει πολύ γρήγορα την τιμή 0^0 ενώ όταν $\psi < \psi_B$ τότε η φάση του R_2 πλησιάζει πολύ γρήγορα την τιμή -180^0 . [18], [21]

6. Κύμα Επιφανείας Norton

Οι εκφράσεις του κύματος επιφανείας Norton δίνονται από τις εξισώσεις (3.21), (3.22) και (3.25). Θα εξετάσουμε το κύμα επιφανείας όταν το κατακόρυφο δίπολο βρίσκεται πάνω στο έδαφος ($h_1=0$).

Από τις (3.21) και (3.22) προκύπτει:

$$E_{\text{επιφ}} = 30ikl F (1-R_2) e^{-ikr} / r \left[\hat{z} (1-\gamma^2) + \hat{\rho} \cos\psi (1+\sin^2\psi/2-\gamma^2/2) \gamma (1-\gamma^2 \cos^2\psi) \right] \quad (3.26)$$

όπου

ο όρος $\gamma^4 \cos^2\psi$ δεν αναγράφηκε, $\hat{\rho}$ είναι τα ακτινικό μοναδιαίο διάνυσμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες και $r=r_1=r_2$ είναι η απόσταση του σημείου υπολογισμού (δέκτης) από το δίπολο όταν αυτό βρίσκεται επί του εδάφους ($h_1=0$).

Ο συντελεστής εξασθένησης δίνεται από το Norton από τη σχέση

$$F=1- i(\pi\delta)^{1/2} e^{-\delta} \operatorname{erfc}(i\delta^{1/2}) \quad (3.27)$$

όπου

$$\begin{aligned} \delta &= -ikr/2 \gamma^2 (1-\gamma^2 \cos^2\psi) \{1+ [\sin\psi/\gamma (1-\gamma^2 \cos^2\psi)1/2] \}^2 = \\ &= -2ikr\gamma^2 (1-\gamma^2 \cos^2\psi)/ (1-R_2)^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

και

$$\operatorname{erfc}(i\delta^{1/2})= 2/\pi^{1/2} \int_{i\sqrt{\delta}}^{\infty} e^{-u^2} du = 1- \operatorname{erf}(i\delta^{1/2}) \quad (3.29)$$

η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος με την παρακάτω ασυμπτωτική ανάπτυξη όταν το $z \rightarrow \infty$

$$\operatorname{erfc}(z) \sim e^{-z^2} / \pi^{1/2} (1/z - 1/2z^3 + 1 \cdot 3/2^2 z^5 - 1 \cdot 3 \cdot 5/2^3 z^7 + \dots) \quad (3.30)$$

Από την (3.27) και (3.29) καταλαβαίνουμε ότι ο συντελεστής F εξαρτάται από την απόσταση r, το μήκος κύματος $\lambda=2\pi/k$ και τις σταθερές ϵ_r και k της γης.

Διερευνώντας μερικώς τον τύπο του συντελεστή εξασθένησης παρατηρούμε:

α. Για $r=0$ και για αποστάσεις r ίσες με λίγα μήκη κύματος το $F=1$.

β. Για χαμηλές συχνότητες και καλή αγωγιμότητα κ ($\kappa=1500$) το κύμα επιφανείας είναι πολύ μικρό (εκτός αν είναι πολύ μικρή η γωνία ψ)

γ. Για $\psi=0$, το $F=2$ ενώ το κύμα χώρου μηδενίζεται λόγω της εξουδετερώσεως του απευθείας κύματος από το ανακλώμενο.

Το σημαντικότερο ωστόσο στοιχείο είναι ότι το κύμα επιφανείας λόγω τη συντελεστή εξασθένησης μειώνεται ραγδαίως όσο μεγαλώνει η απόσταση.

Επί του εδάφους ($\psi=0$), ο συντελεστής εξασθένησης F συμβολίζεται με το A και ονομάζεται συντελεστής εξασθένησης του κύματος εδάφους και είναι ίσος με:

$$A = |F(\psi=0)| = |1 - i(\pi\rho_1)^{1/2} e^{-\rho_1} \operatorname{erfc}(i\rho_1^{1/2})| \quad (3.31)$$

όπου

$$\rho_1 = \delta(\psi=0) \rho e^{-ib} = -ikr/2 \gamma^2 (1-\gamma^2) \quad (3.32)$$

Η απόλυτη τιμή $\rho = |\rho_1|$ ονομάζεται αριθμητική απόσταση ενώ η b είναι η σταθερά φάσεως. Ισχύει

$$b' = \arctan(\epsilon_r/x) \quad (3.33)$$

και

$$b' = \arctan(\epsilon_r - 1/x) \quad (3.34)$$

όπου $b' \geq 0$ και $b'' \leq 90^\circ$

οπότε

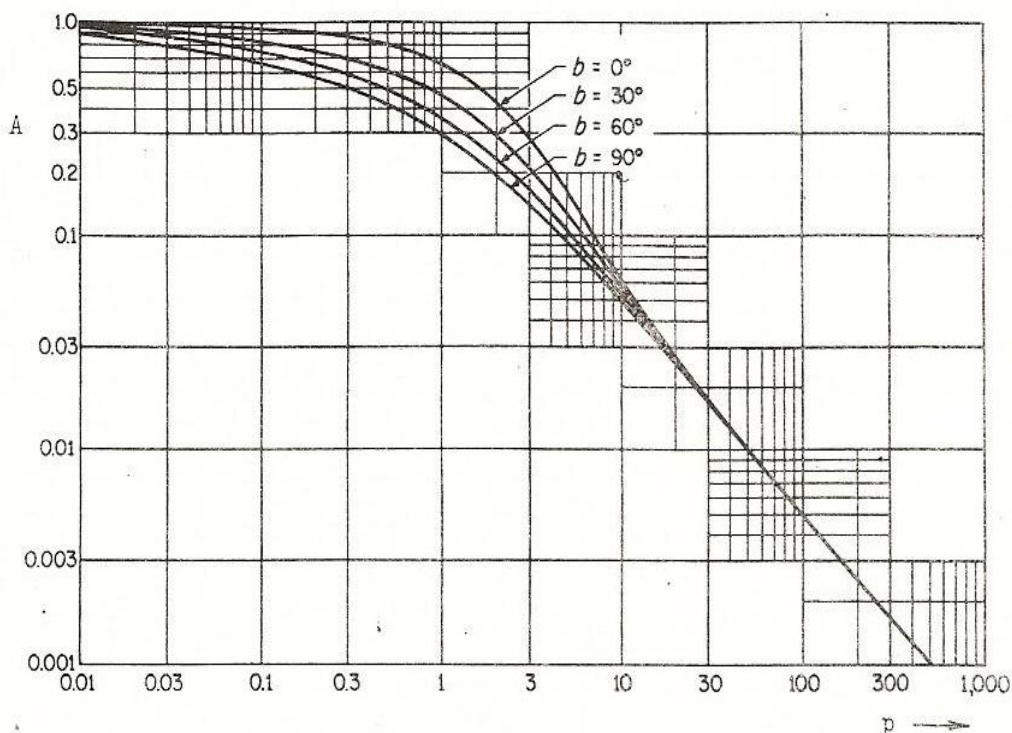
$$b = 2b'' - b'$$

και

$$\rho = \pi r (1 + \tan^2 b')^{1/2} / \lambda x \quad (1 + \tan^2 b'' = \pi r \cos^2 b'' / \lambda x \quad \cos b' = \pi r \cos b / \lambda x) \quad (3.35)$$

Για την εξαγωγή της παραπάνω σχέσης προσεγγιστικά θεωρήθηκε ότι $b'' \cong b' \cong b$ λόγω των (3.33) και (3.34) και επειδή $\epsilon_r - 1 \cong \epsilon_r$ επειδή αυτό για τη γη είναι πάντα μεγαλύτερο του 5.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η καμπύλη της αριθμητικής απόστασης p για διάφορες τιμές της b .



Σχήμα 3.5: Η Αριθμητική Απόσταση p σε συνάρτηση με την παράμετρο b

Η p είναι ανάλογη της απόστασης r και του τετραγώνου της συχνότητας και σχεδόν αντιστρόφως ανάλογη της k . Παρατηρούμε τα παρακάτω:

α. Όταν $\epsilon_r \ll \chi$ τότε το b τείνει στο μηδέν και η μιγαδική απόσταση p_1 είναι κυρίως πραγματική (αυτό συμβαίνει τόσο στις ραδιοσυχνότητες όσο και για εδάφη μέσης και υψηλής αγωγιμότητας).

β. Για πολύ ψηλές συχνότητες ή χαμηλές αγωγιμότητες $\epsilon_r \gg \chi$ τότε η μιγαδική απόσταση της γης είναι φανταστική.

γ. Για μικρές τιμές της αριθμητικής απόστασης ρ , ο A μεταβάλλεται εκθετικά.

δ. Για μεγάλες τιμές της αριθμητικής απόστασης ρ , ο A μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα της ρ . Αυτό συμβαίνει διότι η ένταση του πεδίου του κύματος επιφανείας μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα του τετραγώνου της απόστασης από τον πομπό λόγω του όρου $1/r$.

Θα εξετάσουμε τώρα το κύμα επιφανείας όταν το κατακόρυφο δίπολο (πομπός) και ο δέκτης βρίσκονται σε ύψη h_1 και h_2 . Το σήμα λήψης στο δέκτη υπολογίζεται από το διανυσματικό άθροισμα του κύματος χώρου και του επιφανειακού. Το ηλεκτρικό πεδίο της κατακόρυφης συνιστώσας του κατακόρυφου διπόλου είναι αυτό που επικρατεί (για μικρές γωνίες ψ) και δίνεται από τον τύπο (3.21) παραλείποντας τους όρους γ^2 και γ^4 :

$$E_z = 30i k I d l [\cos^2 \psi (e^{-ikr_1} / r_1 + R_2 e^{-ikr_2} / r_2) + F (1 - R_2) (e^{-ikr_2} / r_2)] \quad (3.36)$$

Ο συντελεστής εξασθένησης εξακολουθεί να δίνεται από τους τύπους (3.27) και (3.29) αντικαθιστώντας τώρα λόγω των υψών το r με r_2 , ενώ έχουμε τώρα:

$$\sin \psi = (h_1 + h_2) / 2 \quad (3.37)$$

Η κατακόρυφη συνιστώσα E_z είναι ακριβής για αποστάσεις μερικών μηκών κύματος από την κεραία ($r_1 > 4\lambda - 6\lambda$). Παραμένει όμως δύσχρηστη για αριθμητικούς υπολογισμούς. Δύναται όμως να απλουστευτεί κάτι που έχει μεγάλη πρακτική σημασία όταν η απόσταση r_1 είναι πολύ μεγαλύτερη των υψών h_1 και h_2 αθροιστικά δηλαδή $r_1 \gg h_1 + h_2$, οπότε μπορούμε να δεχτούμε τις προσεγγίσεις $\cos \psi \cong 1$ και $r_1 \cong r_2 \cong d$.

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (3.28) και (3.32) θα έχουμε:

$$P_1 = -ikr_2 \gamma^2 (1-\gamma^2)/2 \quad (3.38)$$

και

$$\delta \cong \rho_1 [1 + (h_1+h_2)/r_2 \gamma (1-\gamma^2)^{1/2}]^2 \quad (3.39)$$

Παρατηρώντας την ομοιότητα των ορισμών (3.27) και (3.31) για το F και το A, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα το συντελεστή εξασθένησης αν το $\delta = \rho e^{-ib}$.

Για μεγάλες όμως τιμές της $|\delta|$ χρησιμοποιούμε τη σχέση (3.30) για να υπολογίσουμε μία ασυμπτωτική έκφραση του συντελεστή F, δηλαδή:

$$F = 1 - i(\pi\delta)^{1/2} e^{-\delta} \operatorname{erfc}(i\delta^{1/2}) = -1/2\delta - 1.3/(2\delta)^2 - 1.3.5/(2\delta)^3 - 1.3.5.7/(2\delta)^4 \dots \quad (3.40)$$

Για $|\delta| > 20$ τότε $F = -1/2\delta$ και κατά συνέπεια η εξίσωση (3.36) γίνεται:

$$E_z = 30ikIdl/d [e^{-ikr_1} + e^{-ikr_2} (R_2 - (1-R_2)/2\delta)] \quad (3.41)$$

Αν όμως, εκτός της προϋπόθεσης $r_1 \gg h_1 + h_2$ ισχύει και $|\gamma r_2| \gg h_1 + h_2$, τότε $\delta \cong \rho_1$ (δηλαδή η δ πλησιάζει την τιμή που είχαμε για $\psi=0$) οπότε ο συντελεστής εξασθένησης θα είναι:

$$|F| \cong A = 1/2\rho = \lambda x \cos b' / 2\pi d \cos^2 b'' \quad (3.42)$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής εξασθένησης είναι ανεξάρτητος των υψών h_1 και h_2 . Σε αυτή την περίπτωση η απόλυτη τιμή της συνιστώσας E_z του κύματος επιφανείας θα είναι:

$$|E_z \text{ επιφ}| = 30kIdl |1-R_2| / 2d\rho = 30 Idl x \cos b' |1-R_2| / d^2 \cos^2 b'' \quad (3.43)$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις ισχύουν για το πεδίο κατακόρυφου στοιχειώδους διπόλου (Hertz). Με τους περιορισμούς που προαναφέραμε ($r_1 \gg h_1 + h_2$, $|\gamma r_2| \gg h_1 + h_2$) οι σχέσεις ισχύουν και για ανυψωμένα κατακόρυφα δίπολα μήκους L εάν το dl αντικατασταθεί από το ενεργό μήκος L_e του διπόλου. Αυτό προκύπτει από την αρχή της υπέρθεσης όπου ο υπολογισμός του πεδίου του διπόλου L θα βρεθεί με

ολοκλήρωση των συνεισφορών των στοιχειωδών διπόλων $I(I)dl$ που είναι κατανεμημένα κατά μήκος του L . Για δίπολο $L=\lambda/2$ με κατανομή ρεύματος $I(I)= I_m \cos(2\pi I/\lambda)$ οπότε ολοκληρώνοντας από $-\lambda/4$ έως $\lambda/4$ θα έχουμε $I(I)= I_m\lambda/\pi$ δηλαδή $L= \lambda/\pi$. [18], [21]

Κεφάλαιο 4

***ΔΙΑΔΟΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ
ΚΥΜΑΤΩΝ ΥΠΕΡΑΝΩ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΕΔΑΦΟΥΣ
ΜΕ ΑΠΩΛΕΙΕΣ, ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ
ΑΣΥΡΜΑΤΕΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ :
ΑΚΡΙΒΗΣ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟΝ ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ ΧΩΡΟ.***

1. Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο που αποτελεί και το βασικό σημείο της έρευνάς μας, θα εξετάσουμε το πρόβλημα της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από ένα κατακόρυφο μικρό δίπολο (δίπολο Hertz) επάνω από το επίπεδο έδαφος με απώλειες. Αυτό αντιπροσωπεύει το γνωστό πρόβλημα ακτινοβολίας του Sommerfeld το οποίο διατυπώνεται με μία νέα μέχρι τώρα προσέγγιση, τη φασματική. Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο τρισδιάστατο μετασχηματισμό του Fourier λαμβάνουμε εκφράσεις για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο (EM) (στο φυσικό χώρο πλέον) αποτελούμενα από μονοδιάστατα ολοκληρώματα έχοντας ως βάση το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Επιπρόσθετα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο στάσιμης φάσης (SPM) σε καθεστώς υψηλών συχνοτήτων παράγονται κλειστοί αναλυτικοί τύποι για τα λαμβανόμενα EM πεδία τα οποία συμπίπτουν με τα αντίστοιχα ανακλώμενα EM πεδία που προέρχονται από το σημείο παρατήρησης.

Κατ' αυτό τον τρόπο, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα αποκαλούμενα κύματα χώρου (απευθείας και ανακλώμενα κύματα) αντιπροσωπεύουν τη συνολική λύση του προβλήματος Sommerfeld σε καθεστώς υψηλών συχνοτήτων, οπότε σ' αυτή την περίπτωση το κύμα επιφάνειας μπορεί να αγνοηθεί. Σε αυτό το κεφάλαιο και για όλα τα παραπάνω, παρουσιάζονται με τρόπο ενδεικτικό όλες οι μαθηματικές αποδείξεις. Τέλος, τα αριθμητικά αποτελέσματα σε καθεστώς υψηλών συχνοτήτων παρουσιάζονται σε σύγκριση με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα βασισμένα στη λύση Norton (κύματα χώρου και επιφάνειας) που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Το αποκαλούμενο πρόβλημα ακτινοβολίας 'Sommerfeld' είναι ένα αρκετά γνωστό πρόβλημα στον τομέα της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (EM) επάνω από το επίπεδο με απώλειες έδαφος έχοντας προφανείς εφαρμογές στον τομέα των ασύρματων τηλεπικοινωνιών. Η κλασσική λύση Sommerfeld σε αυτό το πρόβλημα παρέχεται στο φυσικό διάστημα με τη χρησιμοποίηση των αποκαλούμενων δυνατοτήτων Hertz και δεν τελειώνει με κλειστούς αναλυτικούς τύπους. Ο Κ.Α. Norton επικεντρώθηκε στα επόμενα έτη περισσότερο στις εφαρμογές μηχανικής του

προβλήματος με προφανή εφαρμογή στις ασύρματες τηλεπικοινωνίες, και παρείχε τις κατά προσέγγιση λύσεις οι οποίες αντιπροσωπεύονται από τις μάλλον μακροσκελείς αλγεβρικές εκφράσεις. Σε αυτές, ο αποκαλούμενος "συντελεστής εξασθένησης" που αναφέρεται στη διάδοση του κύματος επιφάνειας διαδραματίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο.

Σε αυτό το κεφάλαιο υπάρχει πλήρης εκμετάλλευση της προηγούμενης ερευνητικής εργασίας για το πρόβλημα EM ακτινοβολίας στο ελεύθερο διάστημα με τη χρησιμοποίηση της προσέγγισης φασματικής περιοχής. Αυτή θα είναι η λύση στη φασματική περιοχή, για ακτινοβολία από σημειακό δίπολο σε μια συγκεκριμένη γωνιακή συχνότητα ω , στα ισότροπα μέσα, με μια επίπεδη άπειρη επιφάνεια. Θα παρουσιαστούν ακέραια τα λαμβανόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία επάνω ή κάτω από τη επιφάνεια της γης (απευθείας και ανακλώμενο πεδίο - πεδία εκπομπής αντίστοιχα), όπου η ολοκλήρωση πραγματοποιείται επί των ακτινωτών φασματικών συντεταγμένων k_r . Κατόπιν, επικεντρωθήκαμε στη λύση του κλασσικού προβλήματος ακτινοβολίας του 'Sommerfeld' που περιγράφεται παραπάνω, όπου η ακτινοβολία από κατακόρυφο σημειακό δίπολο με γωνιακή συχνότητα ω λαμβάνει χώρα επάνω από επίπεδο με απώλειες έδαφος (αυτό είναι ισοδύναμο με την ακτινοβολία ενός κάθετου μικρού διπόλου (Hertzian) επάνω από το επίπεδο με απώλειες έδαφος, δεδομένου ότι θα εξηγηθεί από τύπο στο κύριο κείμενο). Με τη χρησιμοποίηση της στάσιμης φάσης (μέθοδος SPM), η ολοκλήρωση επί των ακτινωτών φασματικών συντεταγμένων k_r δύναται να εκτελεστεί και έτσι παράγεται η λύση υψηλής συχνότητας στο πρόβλημα (κύμα χώρου το οποίο αντιπροσωπεύει το απευθείας κύμα και το κύμα που σκεδάζεται από το έδαφος), όπως θα εξηγηθεί λεπτομερώς σε επόμενη παράγραφο, παρακάτω. Τέλος, παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα τα οποία δείχνουν και τα δύο προαναφερθέντα κύματα καθώς επίσης και το κύμα επιφανείας του Norton.

2. Γεωμετρία του Προβλήματος Ακτινοβολίας

Η γεωμετρία του προβλήματος δίνεται στο σχήμα 4.1. Εδώ το Hertzian (μικρό) δίπολο με σημείο p έχει κατεύθυνση το θετικό άξονα X , σε ύψος x_0 επάνω από το άπειρο, σε επίπεδο και με απώλειες έδαφος, ενώ ακτινοβολεί χρονικά

αρμονικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα (EM) με γωνιακή συχνότητα $\omega=2\pi f$ [$\exp(-i\omega t)$] η χρονική εξάρτηση είναι υποθετική).

Επίσης, η σχετική διηλεκτρική σταθερά του εδάφους (το μέσο 2) είναι $\epsilon'_r = \epsilon'/\epsilon_0 = \epsilon_r + ix$,

όπου

$x = \sigma/\omega\epsilon_0 = 18 \times 10^9 \sigma/f$, σ η αγωγιμότητα εδάφους, f η συχνότητα της ακτινοβολίας και $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m η διηλεκτρική σταθερά στο κενό ή τον αέρα. Κατόπιν, οι κυματάρθρωμοι της διάδοσης των κυμάτων EM στον αέρα και στο έδαφος με απώλειες αντίστοιχα, δίνονται από τον ακόλουθο τύπο:

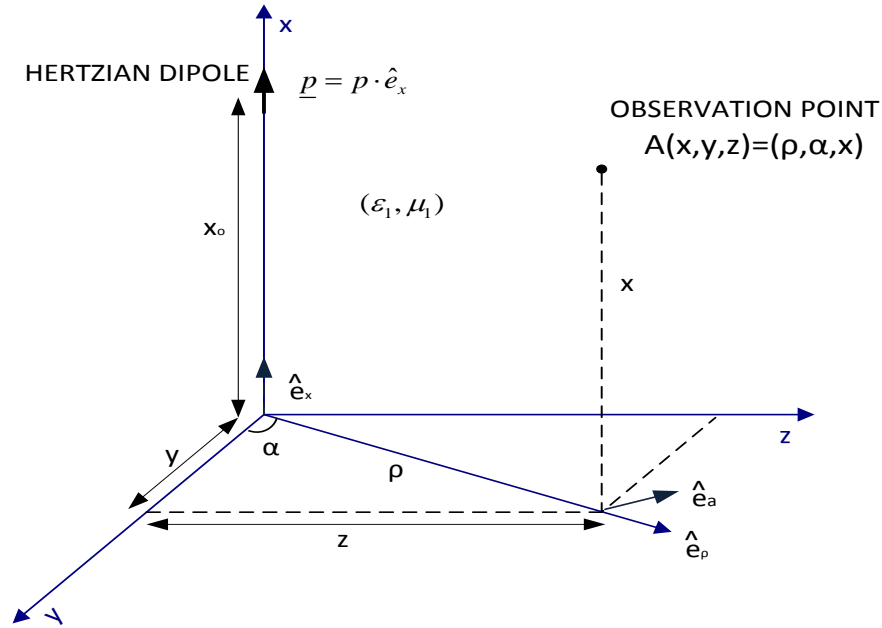
$$k_{01} = \omega/c_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_{r1}\mu_{r1}} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \quad (4.1)$$

$$k_{02} = \omega/c_2 = \omega\sqrt{\epsilon_2\mu_2} = \omega\sqrt{\epsilon_{r2}\mu_{r2}\epsilon_0\mu_0} = k_{01}\sqrt{\epsilon_r + ix} \quad (4.2)$$

Οι εξισώσεις Maxwell για τα χρονικά αρμονικά πεδία EM που εξετάσαμε παραπάνω δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} \text{rot } \underline{E} - i\omega\mu_0\mu_r \underline{H} = 0 \\ \text{rot } \underline{H} + i\omega\epsilon_0\epsilon_r \underline{E} = \underline{j} \end{cases} \quad (4.3)$$

όπου \underline{j} είναι η πυκνότητα ρεύματος (πηγή των EM πεδίων που εξετάζονται).



(ε2, μ2)

Σχήμα 4.1 : Γεωμετρία του Προβλήματος με το Δίπολο να Ακτινοβολεί από τη Θέση $(x_0, 0, 0)$ Επάνω από το Άπειρο, Επίπεδο και με Απώλειες Έδαφος.

3. Διατυπώσεις του Προβλήματος Ακτινοβολίας Sommefeld στην Φασματική Περιοχή: Εκφράσεις για το Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο στην Λήψη σε Ολοκληρωτική Μορφή

3.1 Η/Μ Πεδία Συναρτήσεως Πυκνοτήτων Ρεύματος στην Φασματική Περιοχή

Το Ε/Μ πεδίο στο φυσικό χώρο εξαρτάται από την πυκνότητα ρεύματος \underline{J} στη φασματική περιοχή και τη συνάρτηση Green $\underline{\Psi}$, επίσης στη φασματική περιοχή τα οποία συνδέονται διαμέσου του αντίστροφου τριδιάστατου (3D) μετασχηματισμού του Fourier όπως παρακάτω :

$$\underline{H} = -i F^{-1} \left[\tilde{\Psi} \cdot (\underline{k} \times \tilde{\underline{J}}) \right] \quad (4.4)$$

$$\underline{E} = -\frac{i}{\omega \epsilon_r \epsilon_0} F^{-1} \left\{ \tilde{\Psi} \left[\epsilon_r \mu_r k_0^2 \tilde{\underline{J}} - \langle \underline{k}, \tilde{\underline{J}} \rangle \underline{k} \right] \right\} \quad (4.5)$$

όπου το σύμβολο $\langle \rangle$ δείχνει το εσωτερικό γινόμενο και F^{-1} είναι ο αντίστροφος τρισδιάστατος μετασχηματισμός του Fourier (FT) ενώ

$$\tilde{\Psi} = (k_{01}^2 - k^2)^{-1} = (k_{01}^2 - k_\rho^2 - k_x^2)^{-1} \quad (4.6)$$

είναι η τρισδιάστατη συνάρτηση Green στη φασματική περιοχή και τις κυλινδρικές συντεταγμένες. Επιπλέον, με τη σημείωση ότι, για το πρόβλημα που εξετάζουμε εδώ, οι πυκνότητες ρεύματος $\tilde{\underline{J}}_1 = [\tilde{J}_1(k_\rho), 0, 0]$ και $\tilde{\underline{J}}_2 = [\tilde{J}_2(k_\rho), 0, 0]$ έχουν μόνο το ρ -συστατικό, και ότι το κυματοδιάνυσμα $\underline{k} = (k_\rho, k_\alpha=0, k_x)$ δεν κατέχει το αζιμουθιακό α -συστατικό, και εφαρμόζοντας το εξωτερικό γινόμενο και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (FT) στην εξίσωση (4.4) λαμβάνουμε:

$$\underline{H}(\underline{r}) = -\frac{i}{(2\pi)^3} e_\alpha \int_{k_\rho=0}^{\infty} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{k_x=-\infty}^{\infty} k_x \tilde{J}(k_\rho) \tilde{\Psi} k_\rho \cdot \exp(i \underline{k} \cdot \underline{r}) \cdot dk_\rho d\alpha dk_x \quad (4.7)$$

Ομοίως, εφαρμόζοντας το εσωτερικό γινόμενο και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (FT) στην εξίσωση (4.5) λαμβάνουμε:

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\frac{i}{(2\pi)^3 \epsilon_r \epsilon_0 \omega} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\epsilon_r \mu_r k_0^2 e_\rho - k_\rho \underline{k} \right) \cdot \tilde{J}(k_\rho) \tilde{\Psi} k_\rho \exp(i \underline{k} \cdot \underline{r}) dk_\rho d\alpha dk_x \quad (4.8)$$

όπου

$$\underline{k} = (k_\rho, 0, k_x) = k_\rho \hat{e}_\rho + k_x \hat{e}_x \quad (4.9)$$

είναι το κυματοδιάνυσμα της διάδοσης, και $\underline{r} = (\rho, \alpha, x)$ είναι το σημείο της παρατήρησης όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1, όλα στις κυλινδρικές συντεταγμένες.

Επιπλέον, αν εφαρμόσουμε την εξίσωση (4.9) στην εξίσωση (4.8) τότε το λαμβανόμενο ηλεκτρικό πεδίο μπορεί επίσης να γραφτεί στη μορφή:

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\frac{i}{(2\pi)^3 \epsilon_r \epsilon_0 \omega} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (\epsilon_r \mu_r k_0^2 - k_\rho^2) \hat{e}_\rho - k_\rho k_x \hat{e}_x \cdot \tilde{J}(k_\rho) \tilde{\psi} k_\rho \exp(i\mathbf{k} \cdot \underline{r}) dk_\rho d\alpha dk_x \quad (4.10)$$

Επιπλέον, προκειμένου να ενσωματωθούν οι εκφράσεις (4.7) και (4.10) όσον αφορά την αζιμουθιακή γωνία α όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1, λαμβάνουμε υπόψη ότι:

$$\underline{k} \cdot \underline{r} = k_x x + k_\rho \rho \cdot \cos(\alpha - \beta) \quad (4.11)$$

όπου β είναι η γωνία αζιμουθίου της προβολής του διανυσματικού \mathbf{k} στο z - τμήμα. Μετά, με τη χρησιμοποίηση των ακόλουθων ταυτοτήτων για τις συναρτήσεις Bessel έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ik_\rho \rho \cos \alpha) d\alpha = J_0(k_\rho \rho) \int_0^\infty J_0(k_\rho \rho) dk_\rho = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty H_0^{(1)}(k_\rho \rho) dk_\rho \quad (4.12)$$

όπου J_0 είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης και $H_0^{(1)}$ είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης, οπότε λαμβάνουμε:

$$\underline{H}(\underline{r}) = -\frac{i}{8\pi^2} \hat{e}_\alpha \int_{k_\rho=-\infty}^\infty \int_{k_x=-\infty}^\infty k_x \tilde{J}(k_\rho) \tilde{\psi} k_\rho \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \exp(ik_x x) dk_\rho dk_x \quad (4.13)$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\frac{i}{8\pi^2 \omega \epsilon_r \epsilon_0} \int_{k_\rho=-\infty}^\infty \int_{k_x=-\infty}^\infty ((\epsilon_r \mu_r k_0^2 - k_\rho^2) \hat{e}_\rho - k_\rho k_x \hat{e}_x) \tilde{J}(k_\rho) \tilde{\psi} k_\rho H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \exp(ik_x x) dk_\rho dk_x \quad (4.14)$$

3.2 Διατύπωση του Προβλήματος Οριακών Συνθηκών

Για το πρόβλημα που εξετάζουμε, χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (4.13) και (4.14) για να γράψουμε τις κατάλληλες εκφράσεις για το ανακλώμενο (R) και εκπεμπόμενο (T) Ε/Μ πεδίο, όπως παρακάτω:

$$\underline{H}^R(\underline{r}) = -\frac{i}{8\pi^2} \hat{e}_\alpha \int_{k_\rho=-\infty}^{\infty} \int_{k_x=-\infty}^{\infty} k_x \tilde{J}_1(k_\rho) \tilde{\psi}_1 k_\rho \cdot \mathbf{H}_0^{(1)}(k_\rho \rho) \exp(ik_x x) dk_\rho dk_x \quad (4.15)$$

$$\underline{E}^R(\underline{r}) = -\frac{i}{8\pi^2 \omega \epsilon_{r1} \epsilon_0} \int_{k_\rho=-\infty}^{\infty} \int_{k_x=-\infty}^{\infty} ((\epsilon_{r1} \mu_{r1} k_{01}^2 - k_\rho^2) \hat{e}_\rho - k_\rho k_x \hat{e}_x) \cdot \tilde{J}_1(k_\rho) \tilde{\psi}_1 k_\rho \mathbf{H}_0^{(1)}(k_\rho \rho) \exp(ik_x x) dk_\rho dk_x \quad (4.16)$$

$$\underline{H}^T(\underline{r}) = -\frac{i}{8\pi^2} \hat{e}_\alpha \int_{k_\rho=-\infty}^{\infty} \int_{k_x=-\infty}^{\infty} k_x \tilde{J}_2(k_\rho) \tilde{\psi}_2 k_\rho \cdot \mathbf{H}_0^{(1)}(k_\rho \rho) \exp(ik_x x) dk_\rho dk_x \quad (4.17)$$

$$\underline{E}^T(\underline{r}) = -\frac{i}{8\pi^2 \omega \epsilon_{r2} \epsilon_0} \int_{k_\rho=-\infty}^{\infty} \int_{k_x=-\infty}^{\infty} ((\epsilon_{r2} \mu_{r2} k_{02}^2 - k_\rho^2) \hat{e}_\rho - k_\rho k_x \hat{e}_x) \cdot \tilde{J}_2(k_\rho) \tilde{\psi}_2 k_\rho \mathbf{H}_0^{(1)}(k_\rho \rho) \exp(ik_x x) dk_\rho dk_x \quad (4.18)$$

όπου k_{01} και k_{02} δίνονται από τις εξισώσεις (4.1) and (4.2) παραπάνω, ενώ

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{1}{k_{01}^2 - k_\rho^2 - k_x^2} \quad (4.19)$$

$$\tilde{\psi}_2 = \frac{1}{k_{02}^2 - k_\rho^2 - k_x^2} \quad (4.20)$$

$\tilde{J}_1 = [\tilde{J}_1(k_\rho), 0, 0]$, $\tilde{J}_2 = [\tilde{J}_2(k_\rho), 0, 0]$ είναι τα τμήματα Fourier της πυκνότητας ρεύματος επιφανείας.

Επιπλέον, το απευθείας πεδίο (LOS) E/M του διπόλου Hertz στο μακρινό πεδίο το οποίο θα εξηγηθεί σε επόμενη παράγραφο παρακάτω δίνεται όπως παρακάτω.

$$H_{\alpha}^{LOS}(r, \theta) = \frac{\omega^2 p}{4\pi} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\exp(ikr)}{r} \sin \theta = \frac{\omega k_{01} p}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \sin \theta \quad (4.21)$$

όπου οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ) δίνονται από την άποψη των κυλινδρικών συντεταγμένων (ρ, x) όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1 από:

$$r \approx \rho + \frac{(x - x_0)^2}{2\rho} \quad (4.22)$$

και

$$\theta = \pi - \tan^{-1} \left[\frac{\rho}{(x_0 - x)} \right] \quad \text{για } x_0 > x \quad (4.23\alpha)$$

ή

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{\rho}{(x - x_0)} \right] \quad \text{για } x > x_0 \quad (4.23\beta)$$

και

$$\underline{E}^{LOS}(r, \theta) = \zeta H_{\alpha}^{LOS} \cos \theta \hat{e}_{\rho} - \zeta H_{\alpha}^{LOS} \sin \theta \hat{e}_x \quad (4.24)$$

όπου H_{α}^{LOS} δίνεται από τις εξισώσεις (4.21) - (4.23), ανωτέρω.

Τότε, το συνολικό E/M πεδίο στις περιοχές $x > 0$ και $x < 0$ δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\underline{H}(r) = \begin{cases} \underline{H}^{LOS}(r) + \underline{H}^R(r), & x > 0 \\ \underline{H}^T(r), & x < 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \begin{cases} \underline{E}^{LOS}(\underline{r}) + \underline{E}^R(\underline{r}), & x > 0 \\ \underline{E}^T(\underline{r}), & x < 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

Επιπλέον, με την εκτέλεση των ολοκληρώσεων των εκφράσεων (4.15) έως (4.18) επί του k_x και με τη χρησιμοποίηση του θεωρήματος υπολειμμάτων, λαμβάνουμε τις παρακάτω ακέραιες εκφράσεις για τα Ε/Μ πεδία:

Στο ανώτερο μισό διάστημα ($x > 0$):

$$\underline{H}(\underline{r}) = \underline{H}^{LOS}(\underline{r}) - \frac{\hat{e}_\alpha}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho \tilde{J}_1(k_\rho) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_1 x} dk_\rho \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r}) = & \underline{E}^{LOS}(\underline{r}) - \frac{1}{8\pi\omega\epsilon_{r1}\epsilon_0} \hat{e}_\rho \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_1 k_\rho \tilde{J}_1(k_\rho) \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_1 x} dk_\rho + \\ & + \frac{1}{8\pi\omega\epsilon_{r1}\epsilon_0} \hat{e}_x \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho^2 \tilde{J}_1(k_\rho) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_1 x} dk_\rho \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ενώ για το κατώτερο μισό διάστημα ($x < 0$):

$$\underline{H}^T(\underline{r}) = \frac{\hat{e}_\alpha}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho \tilde{J}_2(k_\rho) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{-ik_2 x} dk_\rho \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \underline{E}^T(\underline{r}) = & -\frac{1}{8\pi\omega\epsilon_{r2}\epsilon_0} \hat{e}_\rho \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_2 k_\rho \tilde{J}_2(k_\rho) \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{-ik_2 x} dk_\rho + \\ & + \frac{1}{8\pi\omega\epsilon_{r2}\epsilon_0} \hat{e}_x \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho^2 \tilde{J}_2(k_\rho) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{-ik_2 x} dk_\rho \end{aligned} \quad (4.30)$$

όπου

$$\kappa_1 = \sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2} \quad (4.31)$$

$$\kappa_2 = \sqrt{k_{02}^2 - k_\rho^2} \quad (4.32)$$

3.3 Εφαρμογή των Οριακών Συνθηκών – Λύση για τις Άγνωστες Πυκνότητες Ρεύματος επί της Επιφάνειας του Εδάφους στη Φασματική Περιοχή

Αποδεχόμαστε τώρα ότι στις συνοριακές συνθήκες στη διεπαφή ($x=0$), τα επαπτόμενα συστατικά του ηλεκτρικού πεδίου E και του μαγνητικού πεδίου H πρέπει να είναι συνεχή, δηλαδή

$$H_\alpha^{LOS} + H_\alpha^R = H_\alpha^T \quad (4.33)$$

$$E_\rho^{LOS} + E_\rho^R = E_\rho^T \quad (4.34)$$

όπου

$$H_\alpha^{LOS} = -\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega k_\rho^2 e^{i\kappa_1 x_0}}{\kappa_1} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) dk_\rho \quad (4.35)$$

$$E_\rho^{LOS} = \frac{1}{8\pi \varepsilon_{r1} \varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega k_\rho^2 e^{i\kappa_1 x_0} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) dk_\rho \quad (4.36)$$

$$H^R = -\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho \tilde{J}_1(k_\rho) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) dk_\rho \quad (4.37)$$

$$E_\rho^R = -\frac{1}{8\pi \omega \varepsilon_{r1} \varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_1 k_\rho \tilde{J}_1(k_\rho) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) dk_\rho \quad (4.38)$$

$$H_\alpha^T = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho \tilde{J}_2(k_\rho) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) dk_\rho \quad (4.39)$$

$$\underline{E}^T(r) = -\frac{1}{8\pi\omega\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_2 k_\rho \tilde{J}_2(k_\rho) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) dk_\rho \quad (4.40)$$

Μετά, από τις εξισώσεις (4.33) και (4.34) βρίσκουμε :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\omega\rho k_\rho e^{i\kappa_1 x_0}}{\kappa_1} + \tilde{J}_1(k_\rho) \right) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho = \\ & -\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}_2(k_\rho) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-i\omega\rho k_\rho e^{i\kappa_1 x_0} + \tilde{J}_1(k_\rho) \kappa_1 \right) \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho = \\ & = \frac{1}{8\pi\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}_2(k_\rho) \kappa_2 H_0^{(1)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \end{aligned} \quad (4.42)$$

Επομένως, από τις εξισώσεις (4.41) και (4.42) λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\frac{i\omega\rho k_\rho e^{i\kappa_1 x_0}}{\kappa_1} + \tilde{J}_1(k_\rho) = -\tilde{J}_2(k_\rho) \quad (4.43\alpha)$$

$$-i\omega\rho k_\rho e^{i\kappa_1 x_0} + \tilde{J}_1(k_\rho) \kappa_1 = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \tilde{J}_2(k_\rho) \kappa_2 \quad (4.43\beta)$$

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων (4.43) είναι τα άγνωστα τμήματα Fourier των πυκνοτήτων ρεύματος επιφανείας, όπως παρακάτω:

$$\tilde{J}_1(k_\rho) = i\omega\rho k_\rho e^{i\kappa_1 x_0} \frac{\varepsilon_{r2} \kappa_1 - \varepsilon_{r1} \kappa_2}{\kappa_1 (\varepsilon_{r2} \kappa_1 + \varepsilon_{r1} \kappa_2)} \quad (4.44\alpha)$$

$$\tilde{J}_2(k_\rho) = -i\omega\rho k_\rho e^{i\kappa_1 x_0} \frac{2\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r2} \kappa_1 + \varepsilon_{r1} \kappa_2} \quad (4.44\beta)$$

4. Εκφράσεις για τα Ανακλώμενα και Μεταδιδόμενα Η/Μ Πεδία σε Ολοκληρωτική Μορφή

Με αντικατάσταση των εκφράσεων των εξισώσεων (4.44) για τις άγνωστες πυκνότητες ρεύματος (επί της διεπαφής, στη φασματική περιοχή) στις εξισώσεις (4.27) έως (4.30), λαμβάνουμε τα ανακλώμενα και μεταδιδόμενα EM πεδία σε ολοκληρωτική μορφή, όπως παρακάτω:

Στο ανώτερο ημιδιάστημα (απευθείας και ανακλώμενο πεδίο, $x>0$):

$$\underline{H}(r) = \underline{H}^{LOS} - \frac{i\omega p e_{\alpha}^{\wedge}}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{r2}\kappa_1 - \varepsilon_{r1}\kappa_2}{\kappa_1(\varepsilon_{r2}\kappa_1 + \varepsilon_{r1}\kappa_2)} k_{\rho}^2 \cdot H_0^{(1)}(k_{\rho}\rho) e^{i\kappa_1(x_0+x)} dk_{\rho} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \underline{E}(r) = & \underline{E}^{LOS}(r) - \frac{ip}{8\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} e_{\rho}^{\wedge} \int_{-\infty}^{\infty} k_{\rho}^2 \frac{\varepsilon_{r2}\kappa_1 - \varepsilon_{r1}\kappa_2}{(\varepsilon_{r2}\kappa_1 + \varepsilon_{r1}\kappa_2)} e^{i\kappa_1(x+x_0)} H_0^{(1)}(k_{\rho}\rho) dk_{\rho} + \\ & + \frac{ip}{8\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} e_x^{\wedge} \int_{-\infty}^{\infty} k_{\rho}^3 \frac{\varepsilon_{r2}\kappa_1 - \varepsilon_{r1}\kappa_2}{\kappa_1(\varepsilon_{r2}\kappa_1 + \varepsilon_{r1}\kappa_2)} e^{i\kappa_1(x+x_0)} \cdot H_0^{(1)}(k_{\rho}\rho) dk_{\rho} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Στο κατώτερο ημιδιάστημα (εκπεμπόμενα πεδία, $x<0$):

$$\underline{H}^T(r) = -\frac{i\omega p}{4\pi} e_{\alpha}^{\wedge} \int_{-\infty}^{\infty} k_{\rho}^2 \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r2}\kappa_1 + \varepsilon_{r1}\kappa_2} e^{i(\kappa_1 x_0 - \kappa_2 x)} \cdot H_0^{(1)}(k_{\rho}\rho) dk_{\rho} \quad (4.47)$$

$$\underline{E}^T(r) = -\frac{ip}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} (k_{\rho}^{\wedge} e_x - \kappa_2 e_{\rho}^{\wedge}) \frac{k_{\rho}^2}{\varepsilon_{r2}\kappa_1 + \varepsilon_{r1}\kappa_2} \cdot e^{i(\kappa_1 x_0 - \kappa_2 x)} H_0^{(1)}(k_{\rho}\rho) dk_{\rho} \quad (4.48)$$

5. Η/Μ Πεδία Ανακλώμενα από Άπειρο, Επίπεδο και με Απώλειες Έδαφος στο Μακρινό Πεδίο: Κλειστοί Αναλυτικοί Τύποι που Λαμβάνονται Μέσω της Εφαρμογής της Μεθόδου Στάσιμης Φάσης (SPM) στην Περιοχή των Υψηλών Συχνοτήτων

Προκειμένου να υπολογιστεί το Ε/Μ πεδίο επάνω από το με απώλειες έδαφος (δηλ. για $x>0$), γράφουμε τις εξισώσεις (4.45) - (4.46) στην ακόλουθη μορφή:

$$\underline{E}_{x>0} = \underline{E}^{LOS} - \frac{ip}{8\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r1}} \mathbf{I}_1 \cdot \hat{e}_\rho - \frac{ip}{8\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r1}} \mathbf{I}_2 \cdot \hat{e}_x \quad (4.49)$$

$$\underline{H}_{x>0} = \underline{H}^{LOS} - \frac{i\omega p}{8\pi} \mathbf{I}_3 \cdot \hat{e}_\alpha \quad (4.50)$$

όπου

$$I_1 = \int_{k_\rho=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_2\kappa_1 - \varepsilon_1\kappa_2}{\varepsilon_2\kappa_1 + \varepsilon_1\kappa_2} \cdot k_\rho^2 \cdot H_o^{(1)}(k_\rho\rho) \cdot e^{i\kappa_1(x+x_o)} dk_\rho \quad (4.51)$$

$$I_2 = \int_{k_\rho=-\infty}^{\infty} \frac{k_\rho(\varepsilon_2\kappa_1 - \varepsilon_1\kappa_2)}{\kappa_1(\varepsilon_2\kappa_1 + \varepsilon_1\kappa_2)} \cdot k_\rho^2 \cdot H_o^{(1)}(k_\rho\rho) \cdot e^{i\kappa_1(x+x_o)} dk_\rho \quad (4.52)$$

και

$$I_3 = \int_{k_\rho=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_2\kappa_1 - \varepsilon_1\kappa_2}{\kappa_1(\varepsilon_2\kappa_1 + \varepsilon_1\kappa_2)} \cdot k_\rho^2 \cdot H_o^{(1)}(k_\rho\rho) \cdot e^{i\kappa_1(x+x_o)} dk_\rho \quad (4.53)$$

Επιπλέον, προκειμένου να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα I_1 (με παρόμοιο τρόπο θα υπολογιστούν τα ολοκληρώματα I_2 και I_3) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο SPM, υποθέτουμε προσεγγιστικά μεγάλη τιμή για τις συναρτήσεις Hankel των εξισώσεων (4.51) έως (4.53), δηλαδή υποθέτουμε ότι :

$$k_\rho \cdot \rho \gg 1 \quad (4.54)$$

Οπότε για οποιαδήποτε περίπτωση της συνάρτησης $H_0^{(1)}(k_\rho \rho)$ γίνεται μια ταχέως ταλαντούμενη συνάρτηση k_ρ . Κατόπιν, δεδομένου ότι η μέθοδος στάσιμης φάσης (SPM) πρόκειται να εφαρμοστεί, αντικαθιστούμε ακριβώς την $H_0^{(1)}(k_\rho \rho)$ στην εξίσωση (4.51) από την ασυμπτωτική προσεγγιστικά μεγάλη τιμή, δηλαδή:

$$H_0^{(1)}(k_\rho \rho) = \sqrt{\frac{-2i}{\pi k_\rho \rho}} \cdot e^{+ik_\rho \rho} \quad (4.55)$$

Οπότε το ολοκλήρωμα I_1 της εξίσωσης (4.51) λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$I_1 = \sqrt{\frac{-2i}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_{k_\rho=-\infty}^{\infty} k_\rho^{3/2} \cdot \frac{\varepsilon_2 \mathcal{K}_1 - \varepsilon_1 \mathcal{K}_2}{\varepsilon_2 \mathcal{K}_1 + \varepsilon_1 \mathcal{K}_2} \cdot e^{ik_1(x+x_o)} e^{+ik_\rho \rho} dk_\rho \quad (4.56)$$

Επιπλέον, προκειμένου να εφαρμοστεί η μέθοδος SPM, καθορίζουμε την ακτινική απόσταση ρ (όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1) ως ‘μεγάλη παράμετρο’, και καθορίζουμε επίσης:

Συνάρτηση φάσης:

$$f(k_\rho) = \frac{\kappa_1(x+x_o)}{\rho} + k_\rho \quad (4.57)$$

Συνάρτηση πλάτους:

$$F(k_\rho) = k_\rho^{3/2} \cdot \frac{\varepsilon_2 \mathcal{K}_1 - \varepsilon_1 \mathcal{K}_2}{\varepsilon_2 \mathcal{K}_1 + \varepsilon_1 \mathcal{K}_2} \quad (4.58)$$

Έπειτα, σύμφωνα με τη μέθοδο SPM το ‘στάσιμο σημείο’ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$f'(k_\rho) = \frac{df(k_\rho)}{dk_\rho} = 0 \quad (4.59)$$

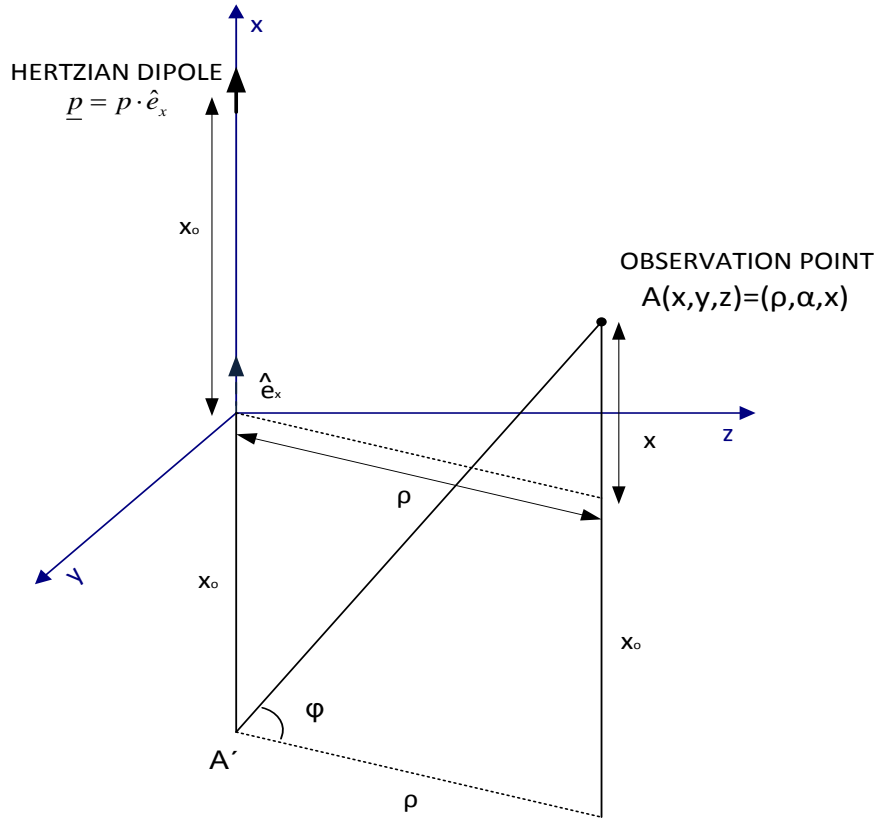
το ποιο παράγει τελικά την ακόλουθη έκφραση για το στάσιμο σημείο (μόνο ένα στάσιμο σημείο υπάρχει):

$$k_{\rho s} = \frac{k_{01}\rho}{\left[(x+x_0)^2 + \rho^2\right]^{1/2}} = k_{01} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{x+x_0}{\rho}\right)^2\right]^{1/2}} = k_{01} \cos \phi \quad (4.60)$$

όπου ϕ είναι η γωνία που φαίνεται στο σχήμα 4.2 παρακάτω, και καθορίζεται από το είδωλο του ακτινοβολούμενου διπόλου με το σημείο παρατήρησης και την οριζόντια γραμμή που προέρχεται από το είδωλο, Επιπλέον, σημειώστε ότι η γωνία ϕ δεν είναι η αζιμουθιακή γωνία των κυλινδρικών συντεταγμένων που περιγράφεται σε αυτό το κεφάλαιο (αυτή είναι η α όπως φαίνεται στο σχήμα 4.1)

Επιπλέον, για τον αέρα και το με απώλειες έδαφος πρόβλημα που εξετάζουμε εδώ το $k_{\rho s}$ είναι πραγματικό και θετικό με $k_{\rho s} < k_{01}$. Επίσης, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} k_{\rho s} = \lim_{(x+x_0) \rightarrow 0} k_{\rho s} = k_{01} \quad (4.61)$$



Σχήμα 4.2: Γεωμετρία του Προβλήματος Ακτινοβολίας, όπου επίσης φαίνεται η εικόνα A' του ακτινοβολούμενου Hertzian διπόλου. Επίσης παρουσιάζεται σε αυτό το σχήμα η γωνία ενώ το $\cos\phi$ δίνεται από εξίσωση (4.60).

Σύμφωνα με τη μέθοδο SPM, πρέπει επίσης να υπολογίσουμε το δεύτερο παράγωγο της συνάρτησης φάσης, που στην περίπτωσή μας υπολογίζεται από την εξίσωση (4.57) όπως παρακάτω:

$$f''(k_{\rho s}) = -\frac{(x + x_0)}{\rho} \cdot \frac{k_{01}^2}{(k_{01}^2 - k_{\rho s}^2)^{3/2}} \quad (4.62)$$

Σημειώστε ότι $f''(k_{\rho s})$ είναι πάντα αρνητική, το οποίο σημαίνει :

$$\text{sgn}[f''(k_{\rho s})] = -1 \quad (4.63)$$

η οποία σχέση απαιτείται στην εφαρμογή της μεθόδου SPM.

Στη συνέχεια, κατά την εφαρμογή τη μεθόδου SPM, από την εξίσωση (4.56) βρίσκουμε:

$$I_1 = iF(k_{\rho s}) e^{i\rho f(k_{\rho s})} \cdot e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}[f''(k_{\rho s})]} \sqrt{\frac{2\pi}{\rho |f''(k_{\rho s})|}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \exp(i\pi/4) \quad (4.64)$$

ή

$$I_1 = \frac{i2}{\rho |f''(k_{\rho s})|^{1/2}} F(k_{\rho s}) e^{i\rho f(k_{\rho s})} \quad (4.65)$$

Κατόπιν, χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (4.52), (4.53) και (4.64), καταλήγουμε στις ακόλουθες εκφράσεις:

$$I_1 = \frac{i2}{k_{01}\rho^{1/2}} \frac{1}{(x+x_0)^{1/2}} \kappa_{1s}^{3/2} k_{\rho s}^{3/2} \frac{\varepsilon_2 \kappa_{1s} - \varepsilon_1 \kappa_{2s}}{\varepsilon_2 \kappa_{1s} + \varepsilon_1 \kappa_{2s}} e^{ik_{\rho s}\rho} e^{i\kappa_{1s}(x+x_0)} \quad (4.66)$$

$$I_2 = \frac{i2}{k_{01}\rho^{1/2}} \frac{1}{(x+x_0)^{1/2}} \kappa_{1s}^{1/2} k_{\rho s}^{5/2} \frac{\varepsilon_2 \kappa_{1s} - \varepsilon_1 \kappa_{2s}}{\varepsilon_2 \kappa_{1s} + \varepsilon_1 \kappa_{2s}} e^{ik_{\rho s}\rho} e^{i\kappa_{1s}(x+x_0)} \quad (4.67)$$

$$I_3 = \frac{i2}{k_{01}\rho^{1/2}} \frac{1}{(x+x_0)^{1/2}} \kappa_{1s}^{1/2} k_{\rho s}^{3/2} \frac{\varepsilon_2 \kappa_{1s} - \varepsilon_1 \kappa_{2s}}{\varepsilon_2 \kappa_{1s} + \varepsilon_1 \kappa_{2s}} e^{ik_{\rho s}\rho} e^{i\kappa_{1s}(x+x_0)} \quad (4.68)$$

όπου

$$\kappa_{1s} = \sqrt{k_{01}^2 - k_{\rho s}^2} = k_{01} \sin \phi \quad (4.69)$$

όπου η γωνία ϕ καθορίζεται στο σχήμα 4.2, και

$$\kappa_{2s} = \sqrt{k_{02}^2 - k_{\rho s}^2} \quad (4.70)$$

Οπότε η τελική λύση μας σε περιοχή υψηλής συχνότητας (χρησιμοποιώντας τη μέθοδο SPM) αποτελείται από τις εξισώσεις (4.49), (4.50) και (4.66) έως (4.70), ενώ το $k_{\rho s}$ δίνεται από την εξίσωση (4.60).

6. Τελικοί Τύποι για το Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο στη Λήψη : Πεδία Ανακλώμενα από Έδαφος με Απώλειες.

6.1 Ηλεκτρικό Πεδίο

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.49), (4.66) και (4.67), καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα για το ηλεκτρικό πεδίο, σκεδαζόμενο από έδαφος με απώλειες στο σημείο παρατήρησης:

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_{x>0}^{sc} &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_o\epsilon_{r1}} \frac{1}{\rho^{1/2}} \frac{1}{(x+x_0)^{1/2}} \frac{\kappa_{1s}^{1/2} k_{\rho s}^{3/2}}{k_{01}} \cdot \frac{\epsilon_2 \mathcal{K}_{1s} - \epsilon_1 \mathcal{K}_{2s}}{\epsilon_2 \mathcal{K}_{1s} + \epsilon_1 \mathcal{K}_{2s}} e^{ik_{\rho s}\rho} e^{i\kappa_{1s}(x+x_0)} \cdot (\kappa_{1s} \hat{e}_\rho + k_{\rho s} \hat{e}_x) = \\
 &= \frac{\rho k_{01}}{4\pi\epsilon_o\epsilon_{r1}} \frac{(\sin\phi)^{1/2} (\cos\phi)^{3/2}}{\rho^{1/2} (x+x_0)^{1/2}} \cdot \frac{\epsilon_2 \mathcal{K}_{1s} - \epsilon_1 \mathcal{K}_{2s}}{\epsilon_2 \mathcal{K}_{1s} + \epsilon_1 \mathcal{K}_{2s}} e^{ik_{\rho s}\rho} e^{i\kappa_{1s}(x+x_0)} \cdot (\kappa_{1s} \hat{e}_\rho + k_{\rho s} \hat{e}_x) = \\
 &= \frac{\rho k_{01} \cos\phi}{4\pi\epsilon_o\epsilon_{r1} (A'A)} \cdot \frac{\epsilon_2 \mathcal{K}_{1s} - \epsilon_1 \mathcal{K}_{2s}}{\epsilon_2 \mathcal{K}_{1s} + \epsilon_1 \mathcal{K}_{2s}} e^{ik_{\rho s}\rho} e^{i\kappa_{1s}(x+x_0)} \cdot (\kappa_{1s} \hat{e}_\rho + k_{\rho s} \hat{e}_x)
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

όπου η γωνία ϕ και η απόσταση (A'A) φαίνονται στο σχήμα 4.2 [ας σημειωθεί ότι (A'A) είναι η απόσταση μεταξύ του σημείου του ειδώλου και του σημείου παρατήρησης]. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$R_V = |R_V| e^{i\phi_V} = \frac{\epsilon_2 \mathcal{K}_{1s} - \epsilon_1 \mathcal{K}_{2s}}{\epsilon_2 \mathcal{K}_{1s} + \epsilon_1 \mathcal{K}_{2s}} \tag{4.72}$$

είναι ο γνωστός (σύνθετος) συντελεστής ανάκλασης Fresnel για το πρόβλημα ακτινοβολίας ‘Sommerfeld’ (όταν το R_V είναι σύνθετο, αυτό σημαίνει την αλλαγή στο μέγεθος και στη φάση του E/M κύματος όταν ανακλάται πάνω σε έδαφος με απώλειες).

Επιπλέον, προκειμένου να διαμορφώσουμε λίγο περισσότερο τον τύπο (4.71), καθορίζουμε τον "παράγοντα πλάτους" F_0 από

$$F_0 = \frac{p}{4\pi} \frac{1}{\rho^{1/2}} \frac{1}{(x+x_0)^{1/2}} \frac{\kappa_{1s}^{1/2} k_{\rho s}^{3/2}}{k_{01}} \quad (4.73)$$

και τον "παράγοντα φάσης" ϕ_0 από

$$\phi_0 = k_{\rho s} \rho + \kappa_{1s} (x + x_0) \quad (4.74)$$

η οποία είναι η φάση της εξίσωσης (4.71) εκτός από τη φάση ϕ_v που προέρχεται από το σύνθετο συντελεστή ανάκλασης Fresnel R_v της εξίσωσης (4.72). Κατόπιν, από τις εξισώσεις (4.71) - (4.74) λαμβάνουμε:

$$\underline{E}_{x>0} = \frac{1}{\epsilon_o \epsilon_{r1}} F_0 R_v e^{i\phi_0} (\kappa_{1s} \hat{e}_\rho + k_{\rho s} \hat{e}_x) \quad (4.75)$$

Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις (4.60) και (4.69) βρίσκουμε τις ακόλουθες εκφράσεις για τα οριζόντια (\hat{e}_ρ) και κάθετα (\hat{e}_x) συστατικά του διανύσματος των ηλεκτρικών πεδίων, αντίστοιχα :

$$E_h^{sc} |_{x>0} = \frac{\kappa_{1s}}{\epsilon_o \epsilon_{r1}} F_0 R_v e^{i\phi_0} = \frac{k_{01} \sin \phi}{\epsilon_o \epsilon_{r1}} F_0 R_v e^{i\phi_0} \quad (4.76)$$

$$E_v^{sc} |_{x>0} = \frac{k_{\rho s}}{\epsilon_o \epsilon_{r1}} F_0 R_v e^{i\phi_0} = \frac{k_{01} \cos \phi}{\epsilon_o \epsilon_{r1}} F_0 R_v e^{i\phi_0} \quad (4.77)$$

και

$$|\underline{E}_{tot}^{sc} |_{x>0} = \sqrt{|E_h^{sc}|^2 + |E_v^{sc}|^2} = \frac{k_{01}}{\epsilon_o \epsilon_{r1}} F_0 |R_v| \quad (4.78)$$

6.2 Μαγνητικό Πεδίο

Ομοίως, με τη χρησιμοποίηση των εξισώσεων (4.50) και (4.68), βρίσκουμε ότι η ακόλουθη έκφραση για το ανακλώμενο μαγνητικό πεδίο επάνω από το επίπεδο και με απώλειες έδαφος:

$$\begin{aligned}
 \underline{H}_{x>0}^{sc} &= \frac{\omega p}{4\pi} \frac{1}{\rho^{1/2}} \frac{1}{(x+x_0)^{1/2}} \frac{\kappa_{1s}^{1/2} k_{\rho s}^{3/2}}{k_{01}} \cdot \frac{\varepsilon_2 \mathcal{K}_{1s} - \varepsilon_1 \mathcal{K}_{2s}}{\varepsilon_2 \mathcal{K}_{1s} + \varepsilon_1 \mathcal{K}_{2s}} e^{ik_{\rho s} \rho} e^{i\kappa_{1s}(x+x_0)} \hat{e}_\alpha = \\
 &= \frac{\omega k_{01} p}{4\pi} \frac{(\sin \phi)^{1/2} (\cos \phi)^{3/2}}{\rho^{1/2} (x+x_0)^{1/2}} \frac{\varepsilon_2 \mathcal{K}_{1s} - \varepsilon_1 \mathcal{K}_{2s}}{\varepsilon_2 \mathcal{K}_{1s} + \varepsilon_1 \mathcal{K}_{2s}} e^{ik_{\rho s} \rho} e^{i\kappa_{1s}(x+x_0)} \hat{e}_\alpha = \\
 &= \frac{\omega k_{01} p \cdot \cos \phi}{4\pi (A' A)} \frac{\varepsilon_2 \mathcal{K}_{1s} - \varepsilon_1 \mathcal{K}_{2s}}{\varepsilon_2 \mathcal{K}_{1s} + \varepsilon_1 \mathcal{K}_{2s}} e^{ik_{\rho s} \rho} e^{i\kappa_{1s}(x+x_0)} \hat{e}_\alpha
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Επιπλέον, με τη χρησιμοποίηση των ορισμών των ποσοτήτων R_V , F_0 και ϕ_0 , των εξισώσεων (4.72) - (4.74) ανωτέρω, λαμβάνουμε:

$$\underline{H}^{sc} \Big|_{x>0} = \omega F_0 R_V e^{i\phi_0} \hat{e}_\alpha \tag{4.80}$$

και

$$\left| \underline{H}^{sc} \right|_{x>0} = \omega F_0 |R_V| \tag{4.81}$$

Τελικά, σημειώστε ότι από τις εξισώσεις (4.78) και (4.81) καταλήγουμε στο:

$$\frac{\left| \underline{E}_{tot}^{sc} \right|_{x>0}}{\left| \underline{H}^{sc} \right|_{x>0}} = \zeta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \tag{4.82}$$

όπου ζ είναι η σύνθετη αντίσταση του κενού ($\zeta=377\Omega$).

Οι παραπάνω εκφράσεις (4.71) και (4.79) είναι οι κλασσικές εκφράσεις για τα ανακλώμενα E/M πεδία από το έδαφος με απώλειες και προέρχονται από το σημείο

είδωλο, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2. Κατόπιν, με τη χρησιμοποίηση των παραγόμενων σε εκφράσεων για το λαμβανόμενο EM πεδίο στη φασματική περιοχή, εξισώσεων (4.45) - (4.46) ανωτέρω, και με την εφαρμογή της μεθόδου SPM, σε περιοχή υψηλής συχνότητας, παράγεται το κλασσικό κύμα χώρου στην περιοχή $x > 0$. Αυτό το αποτέλεσμα έχει τις ακόλουθες δύο ενδιαφέρουσες συνέπειες:

α. Το κύμα χώρου, που αντιστοιχεί στο σύνθετο άθροισμα των ανακλώμενων πεδίων, όπως στις εξισώσεις (4.71) και (4.79) παραπάνω, και τα απευθείας πεδία (LOS) (τα τελευταία δεν περιλαμβάνονται σε αυτές τις εξισώσεις, αλλά που παρουσιάζονται στις εξισώσεις (4.21) και (4.24)) είναι η λύση στο πρόβλημα ακτινοβολίας Sommerfeld σε περιοχή υψηλής συχνότητας, όπου το αποκαλούμενο κύμα επιφάνειας μπορεί να αγνοηθεί.

β. Η ισχύς των εκφράσεων (4.45) και (4.46) για το ανακλώμενο E/M πεδίο πάνω από επίπεδο και με απώλειες έδαφος, παράγεται με έναν νέο τρόπο και έχει επιβεβαιωθεί σε όλες τις πτυχές σε περιοχή υψηλής συχνότητας. Κατόπιν, φαίνεται ότι οι εκφράσεις (4.45) - (4.48) αντιπροσωπεύουν μια πολύ κατάλληλη αφετηρία για την περαιτέρω έρευνα σε ότι αφορά τον υπολογισμό του λαμβανόμενου EM πεδίου για οποιαδήποτε συχνότητα του ακτινοβολούμενου διπόλου (δηλαδή συμπεριλαμβανομένων επίσης των αποτελεσμάτων χαμηλής συχνότητας), είτε επάνω είτε κάτω από το έδαφος, με έναν ακριβή αναλυτικό τρόπο χρησιμοποιώντας το θεώρημα υπολειμμάτων, ή χρησιμοποιώντας έναν αριθμητικό τρόπο (δηλαδή μέσω των αριθμητικών τεχνικών ολοκλήρωσης).

7. Αριθμητικά Αποτελέσματα στην Περιοχή των Υψηλών Συχνοτήτων – Σύγκριση με τα Αποτελέσματα Norton για τα Κύματα Χώρου και Επιφανείας.

Σε αυτό το τμήμα τα ενδεικτικά αριθμητικά αποτελέσματα παρέχονται για το ηλεκτρικό πεδίο (μέγεθος) στο σημείο λήψης ως συνάρτηση της οριζόντιας απόστασης (ρ) μεταξύ της θέσης εκπομπής του διπόλου Hertz και της θέσης λήψης. Αυτά τα αριθμητικά αποτελέσματα περιλαμβάνουν το ηλεκτρικό πεδίο που σκεδάζεται από το έδαφος, μέγεθος της εξίσωσης (4.71), το απευθείας πεδίο (LOS), το αποκαλούμενο κύμα χώρου (που είναι ακριβώς το σύνθετο άθροισμα των δύο

προαναφερθέντων πεδίων) και, τελικά, το αποκαλούμενο κύμα επιφάνειας, σύμφωνα με το Norton.

Επιπλέον, αυτά τα αριθμητικά αποτελέσματα παρέχονται για τη συχνότητα ακτινοβολίας του διπόλου $f=80$ MHz (σχήμα 4.3) ή $f=30$ MHz (σχήμα 4.4). Σημειώστε ότι στην υψηλότερη συχνότητα $f=80$ MHz το κύμα επιφάνειας, σύμφωνα με τη διατύπωση Norton θεωρείται αμελητέο, σε σύγκριση με το κύμα χώρου, ενώ γίνεται σημαντικότερο στη χαμηλότερη συχνότητα $f=30$ MHz. Η προτεινόμενη μέθοδος SPM (που είναι μια μέθοδος υψηλής συχνότητας) αγνοεί αυτή τη συμβολή κυμάτων επιφάνειας σε περιοχή υψηλής συχνότητας.

Ακόμη, σημειώστε ότι οι παράμετροι του προβλήματος στα σχήματα 4.3 και 4.4 επιλέγονται με τα παρακάτω δεδομένα:

α. Ύψος του διπόλου εκπομπής $x_0 = 60\text{m}$

β. Ύψος του σημείου παρατήρησης (θέση λήψης) $x = 15\text{m}$

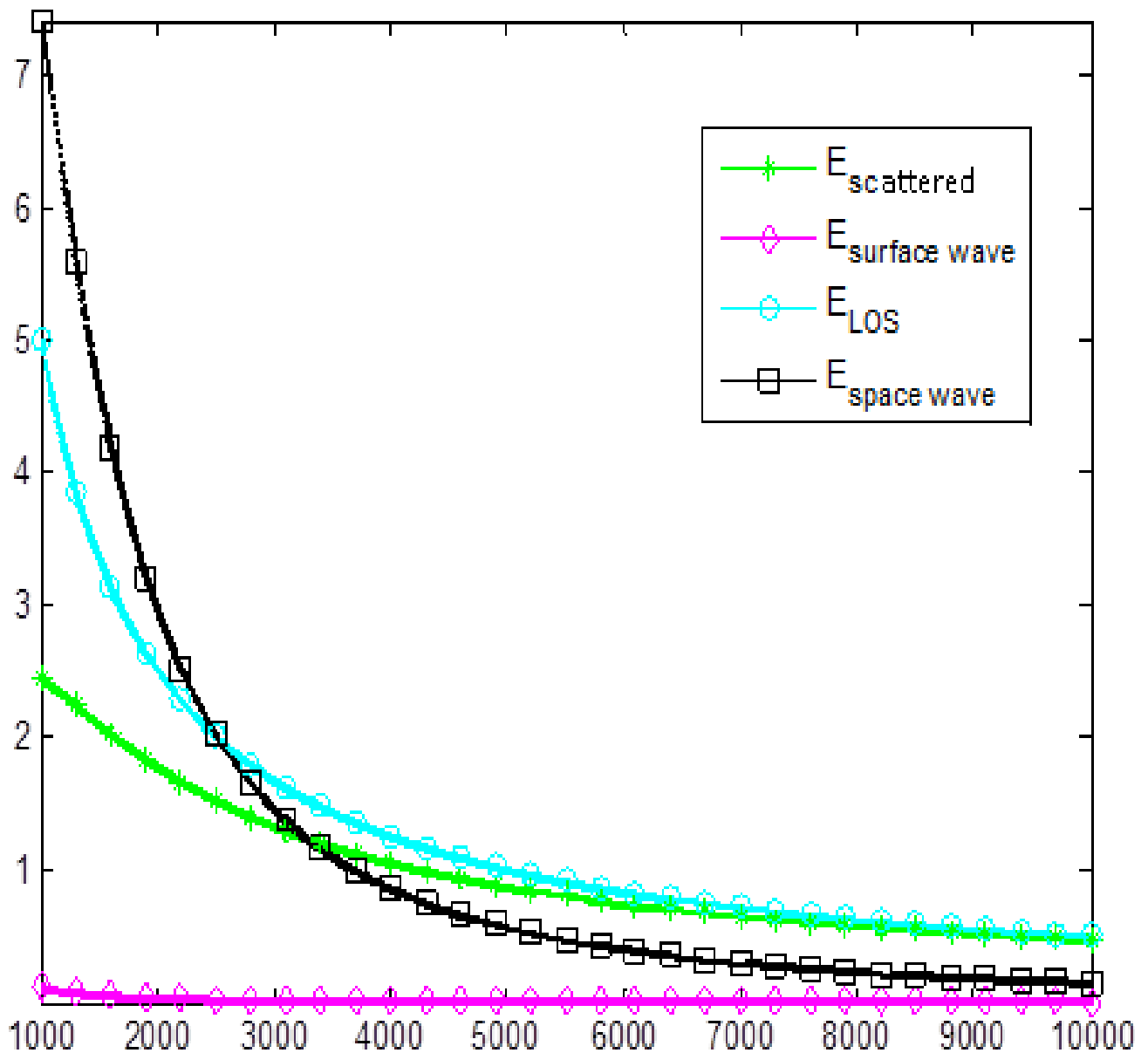
γ. Ρεύμα του ακτινοβολούντος διπόλου Hertz $I = 1\text{A}$

δ. Μήκος του διπόλου Hertz $2h = 0.1\text{m}$ (πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος $\lambda = c/f$)

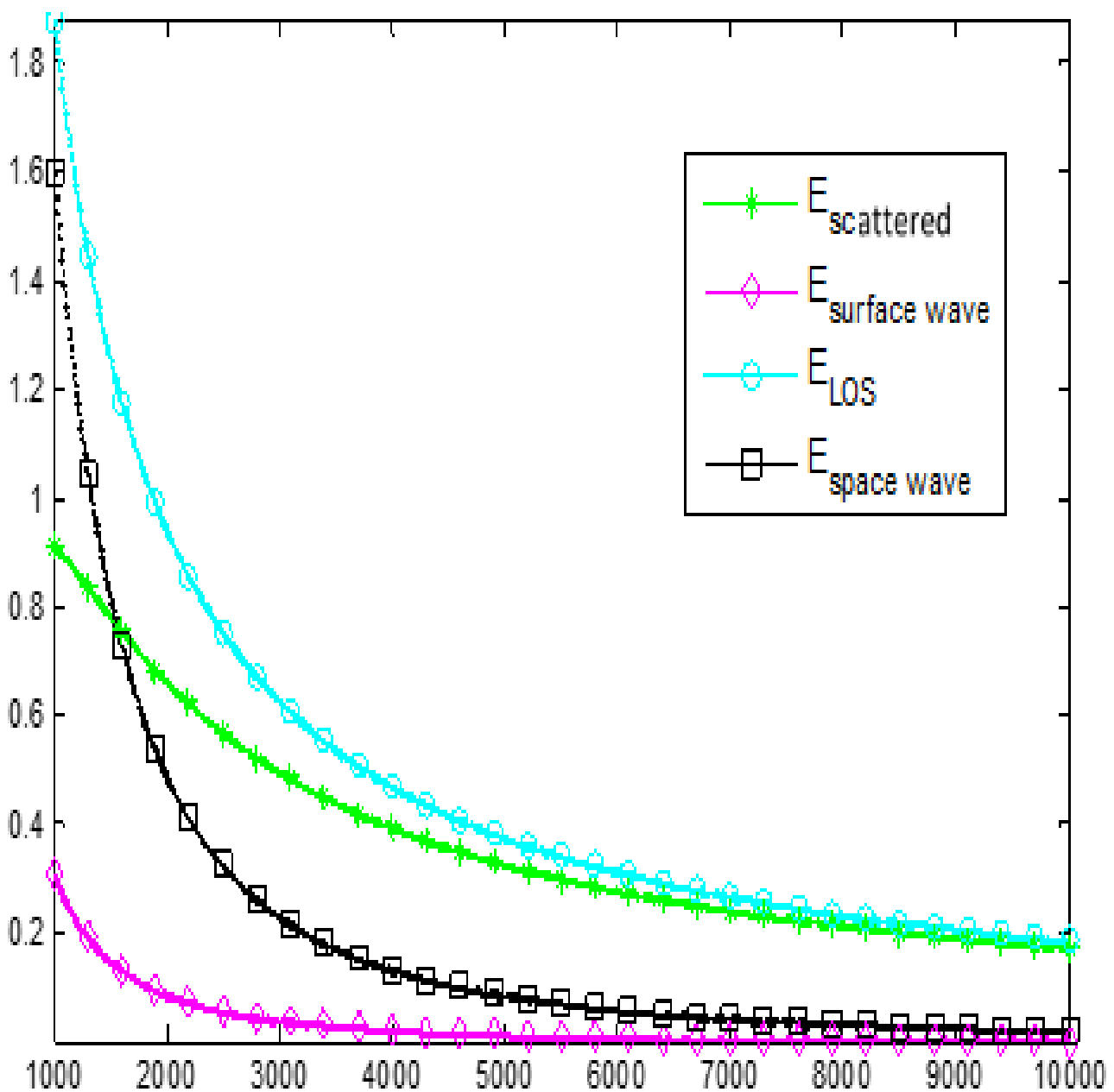
ε. Σχετική διηλεκτρική σταθερά του εδάφους $\epsilon_r = 20$

στ. Αγωγιμότητα εδάφους $\sigma = 0.01\text{ S/m}$.

Τέλος, επισημαίνεται ότι η σχέση μεταξύ του ρεύματος I και του τμήματος p του διπόλου δίνεται από τη σχέση $I(2h) = i\omega p$, όπου $\omega = 2\pi f$ και είναι φανταστική αριθμητική μονάδα.



Σχήμα 4.3: Τα ηλεκτρικά πεδία στο σημείο παρατήρησης ως συνάρτηση της οριζόντιας απόστασης ρ μεταξύ της θέσης εκπομπής διπόλου Hertz και της λήψης, για τη συχνότητα $f=80$ MHz. Εδώ τα διάφορα συστατικά του λαμβανόμενου ηλεκτρικού πεδίου παρουσιάζονται όπως: Απευθείας πεδίο (LOS) (κύκλος), σκεδαζόμενο πεδίο από το έδαφος (αστερίσκος), κύμα χώρου (τετράγωνο) και το κύμα επιφάνειας (διαμάντι). Σημειώστε ότι σε αυτήν την περίπτωση το κύμα επιφάνειας Norton θεωρείται αμελητέο σε σύγκριση με το αντίστοιχο κύμα χώρου.



Σχήμα 4.4: Ομοίως με το σχήμα 4.3 εκτός από το ότι εδώ η συχνότητα της ακτινοβολίας του διπόλου Hertz είναι τώρα ίση με 30 MHz (χαμηλότερη συχνότητα). Σε αυτήν την περίπτωση, το κύμα επιφάνειας δεν μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο, σε σύγκριση με το κύμα χώρου .

Κεφάλαιο 5

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

1. Συμπεράσματα

Σε αυτή την έρευνα διατυπώσαμε το πρόβλημα ακτινοβολίας από ένα κάθετο μικρό (Hertzian) δίπολο επάνω από το επίπεδο και με απώλειες έδαφος στη φασματική περιοχή και καταλήξαμε σε μία εύκολη ακέραια έκφραση για το λαμβανόμενο EM πεδίο επάνω ή κάτω από το έδαφος. Στη συνέχεια, με την εφαρμογή της μεθόδου στάσιμης φάσης (SPM) σε περιοχή υψηλής συχνότητας, η κλασική λύση για το κύμα χώρου αποτέλεσε μία λύση νεοσύστατη αποδεικνύοντας παράλληλα ότι αυτή είναι η κυρίαρχη λύση στο καθεστώς υψηλής συχνότητας. Οι μαθηματικές λύσεις των εξισώσεων σχετικά με την εφαρμογή της προτεινόμενης μεθόδου στη φασματική περιοχή, καθώς επίσης και η εφαρμογή της μεθόδου SPM δόθηκαν με λογικές λεπτομέρειες. Τέλος, τα αριθμητικά αποτελέσματα που δόθηκαν σε συγκεκριμένες υψηλές συχνότητες επιτεύχθηκαν, και συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα Norton για κύματα επιφάνειας και χώρου.

2. Μελλοντική Έρευνα

Η αντίστοιχη έρευνα στο εγγύς μέλλον θα μπορεί να επικεντρωθεί στον υπολογισμό του λαμβανόμενου EM πεδίου κάτω από το έδαφος σε περιοχή υψηλής συχνότητας (με τη χρησιμοποίηση ξανά της μεθόδου SPM). Επιπλέον, ο υπολογισμός του λαμβανόμενου EM πεδίου, επάνω από ή κάτω από το έδαφος, για οποιαδήποτε συχνότητα του ακτινοβολούντος διπόλου, κατά τρόπο ακριβή και αναλυτικό ή με έναν αριθμητικό τρόπο (δηλ. μέσω της χρήσης των αριθμητικών τεχνικών ολοκλήρωσης αποτελεί σημαντική πρόκληση. Η επέκταση σε όλο το φάσμα συχνοτήτων είναι ουσιαστικά και η ολοκληρωμένη λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Επίσης, η έρευνα δύναται να επεκταθεί στη διατύπωση του ίδιου προβλήματος ακτινοβολίας στη φασματική περιοχή, αλλά τώρα στην περίπτωση ενός οριζόντιου ακτινοβολουμένου μικρού (Hertzian) διπόλου επάνω από επίπεδο και με απώλειες έδαφος. Τέλος, οι περαιτέρω έρευνες δύναται να συνεχισθούν και στις περιπτώσεις μη επίπεδου εδάφους (τραχύτητα γης-κριτήριο Rayleigh), καμπυλότητα γήινης επιφάνειας για τις εφαρμογές επικοινωνίας μεγάλης απόστασης κλπ., όπου πλέον τα προβλήματα επίλυσης πολλαπλασιάζονται καθώς υπεισέρχονται και άλλοι παράγοντες που αποτελούν σημαντικό κριτήριο και δύναται να καθορίσουν ένα αποτέλεσμα. Σε κάθε περίπτωση η επίλυση του κλασικού προβλήματος

πραγματοποιήθηκε στη φασματική περιοχή και θα αποτελέσει τον προπομπό όλων των υπολοίπων μελλοντικών ερευνών.

3. Βιβλιογραφικές Παραπομπές

- [1] A. N. Sommerfeld, ‘Propagation of Waves in Wireless Telegraphy’, *Ann. Phys.*, 28, pp. 665 – 736, March 1909; and 81, pp. 1135 – 1153, December 1926.
- [2] K. A. Norton, ‘The Propagation of Radio Waves Over the Surface of the Earth’, *Proceedings of the IRE*, 24, pp. 1367 – 1387, 1936; and 25, pp. 1203 – 1236, 1937.
- [3] T. K. Sarkar et. al., ‘Electromagnetic Macro Modeling of Propagation in Mobile Wireless Communication : Theory and Experiment’, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 54, No. 6, pp. 17 – 43, Dec. 2012.
- [4] S. Sautbekov, ‘The Generalized Solutions of a System of Maxwell’s Equations for the Uniaxial Anisotropic Media’, Chapter 1 in book *Electromagnetic Waves Propagation in Complex Matter*, edited by A. A. Kishk, Croatia, pp. 3 – 24, June 2011.
- [5] C. A. Balanis, ‘Antenna Theory : Analysis and Design, Appendix VIII : Method of Stationary Phase’, pp. 922 – 927, J. Wiley and Sons Inc., New York, 1997.
- [6] Ch. Moschovitis, ‘Asymptotic methods and High Frequency Techniques for the Calculation of Electromagnetic Scattering by Using the Modified Stationary Phase Method’, Doctoral Dissertation, in Greek, National Technical University of Athens (NTUA), Athens, Greece, December 2010.
- [7] Ch. Moschovitis, K. Karakatselos, E. Papkelis, H. Anastassiu, I. Ouranos, A. Tzoulis and P. Frangos, ‘High Frequency Analytical Model for Scattering of Electromagnetic Waves from a Perfect Electric Conductor Plate using an Enhanced Stationary Phase Method Approximation’, *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol. 58, No. 1, pp. 233 – 238, January 2010.

- [8] Ch. G. Moschovitis, H. T. Anastassiou, and P. V. Frangos, ‘Scattering of electromagnetic waves from a rectangular plate using an Extended Stationary Phase Method based on Fresnel functions (SPM-F)’, *Progress in Electromagnetics Research (PIER)*, Vol. PIER 107, pp. 63-99, August 2010.
- [9] G. Arfken, ‘Mathematical Methods for Physicists’, 3rd Edition, pp. 400 – 414, Academic Press Inc., Orlando, Florida, USA, 1985.
- [10] M. Abramowitz and I.A. Stegun, ‘Handbook of Mathematical Functions’, Dover Publ. Inc., N.Y., 10th Ed., 1972.
- [11] J. R. Wait, ‘The Ancient and Modern History of EM Ground Wave Propagation’, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 40, No. 5, pp. 7-24, October 1998.
- [12] R. J. King, ‘EM Wave Propagation over a Constant Impedance Plane’, *Radio Science*, Vol. 4, pp. 225-268, 1969.
- [13] J. Zenneck, ‘Propagation of Plane EM Waves along a Plane Conducting Surface’, *Ann. Phys. (Leipzig)*, 23, pp. 846-866, 1907.
- [14] A. Hrovat et. al., ‘An Open – Source Radio Coverage Prediction Tool’, *ICCOM'10 Proceedings of the 14th WSEAS International Conference on Communications*, pp. 135-140, 2010.
- [15] Π. Γ. Κωττής, *Διαμόρφωση και Μετάδοση Σημάτων*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2η Έκδοση, Θεσσαλονίκη, 2005.
- [16] Α. Κανάτας, Φ. Κωνσταντίνου, Γ. Πάντος, *Ασύρματες Επικοινωνίες*, Αθήνα 2010.
- [17] Π.Γ. Κωττής, Π-Δ Μ. Αράπογλου, *Ασύρματες Επικοινωνίες*, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη 2014.

- [18] Ι. Γ. Φικιώρης, Εισαγωγή εις την Θεωρίαν των Κεραιών, Επιστημονικές Εκδόσεις Β. Σελλούντος, Αθήνα, 1975.
- [19] Φ. Κωνσταντίνου, Χ. Καψάλης, Π. Κωττής, Εισαγωγή στις Τηλεπικοινωνίες, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1995.
- [20] Χ. Καψάλης, Π. Κωττής, Κεραίες και Ασύρματες Ζεύξεις, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2005.
- [21] Ι. Κανελλόπουλος, Διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε γήινο περιβάλλον, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη 2003.
- [22] C. A. Balanis, Κεραίες, Ανάλυση και Σχεδίαση, Μετάφραση – Επιμέλεια Κωνσταντίνος Λιολιούσης, Εκδόσεις Ίων, 1η Ελληνική Έκδοση, Αθήνα, 2005.
- [23] J. G. Proakis, M. Salehi, Συστήματα Τηλεπικοινωνιών, Μετάφραση – Επιμέλεια Καρούμπαλος Κ. και Ζέρβας Ε., Καραμπόγιας Σ., Σαγκριώτης Ε., Έκδοση Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα, 2002.
- [24] Κ. Καρούμπαλου, Κ. Βαλεόντη, Εφαρμοσμένος Ηλεκτρομαγνητισμός, Έκδοση Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα, 1994.
- [25] Γ. Κ. Μαργκά, Κεραίες, Εκδόσεις Ίων, Αθήνα 1993.
- [26] Δ. Παρασκευόπουλου, Βασική Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία, Εκδόσεις Φοίβος, Αθήνα, 1980.