



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ  
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

## ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ ΤΟΥ ΥΠΕΔΑΦΟΥΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΣΠΥΡΙΔΩΝ Χ. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗΣ

ΑΘΗΝΑ, ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2017





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ  
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

## Μικροκυματικές Μέθοδοι Απεικόνισης του Υπεδάφους

Σπυρίδων Χ. Αθανασιάδης

**Συμβουλευτική Επιτροπή:** Νικόλαος Κ. Ουζούνογλου  
Δήμητρα Ι. Κακλαμάνη  
Άγγελος Ι. Αμδίτης

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 1<sup>η</sup> Δεκεμβρίου 2017.

.....  
Νικόλαος Ουζούνογλου  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Δήμητρα Κακλαμάνη  
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

.....  
Άγγελος Αμδίτης  
Ερευνητής Α' Ε.Π.Ι.Σ.Ε.Υ.

.....  
Παναγιώτης Φράγκος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Ιωάννης Τίγκελης  
Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

.....  
Δημήτρης Σούντρης  
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Γιώργος Κυριακού  
Καθηγητής Δ.Π.Θ.

Αθήνα, Δεκέμβριος 2017

.....

Σπυρίδων Χ. Αθανασιάδης

Διδάκτωρ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Σπυρίδων Χ. Αθανασιάδης, 2017.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διατριβή μελετώνται μέθοδοι απεικόνισης του υπεδάφους και ανίχνευσης αντικειμένων που βρίσκονται στο εσωτερικό του. Για τη μελέτη του υπεδάφους, τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι που στηρίζονται στη διάδοση και σκέδαση κυμάτων. Τα κυματικά πεδία προσπίπτουν στο έδαφος, σκεδάζονται από τα υπάρχοντα αντικείμενα και τα υλικά του υπεδάφους και η επίλυση ενός αντιστρόφου προβλήματος σκέδασης παρέχει πληροφορίες για τις γεωμετρικές και φυσικές ιδιότητες των θαμμένων αντικειμένων. Οι μέθοδοι επίλυσης αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης και οι μετρήσεις που γίνονται στην επιφάνεια του εδάφους με κατάλληλες κεραίες συνιστούν μεθόδους ανίχνευσης και απεικόνισης του υπεδάφους.

Η ανίχνευση του υπεδάφους στο πεδίο του χρόνου γίνεται με ραντάρ διείσδυσης εδάφους. Εκπέμπεται ένας ηλεκτρομαγνητικός παλμός και καταγράφεται ο παλμός του σκεδαζόμενου από το άγνωστο αντικείμενο κύματος. Ο χρόνος επιστροφής του παλμού συνδέεται με το βάθος του αντικειμένου. Έχουν χρησιμοποιηθεί ευρυζωνικές κεραίες όπως η παπιγιόν και η χοανοειδής. Επίσης έχουν χρησιμοποιηθεί λογαριθμικές κεραίες και ειδικότερα έχει κατασκευαστεί μία λογαριθμική περιοδική μονοπολική κεραία η οποία συνδυάζει τα πλεονεκτήματα της διπολικής, αλλά έχει μικρότερες διαστάσεις και λιγότερο βάρος. Έχουν γίνει προσομοιώσεις παλμικού ραντάρ στο CST studio.

Έχει γίνει έλεγχος απόσβεσης κύματος σε σχέση με την αγωγιμότητα του εδάφους σε διάφορα βάθη. Επίσης έχουν γίνει μετρήσεις σε αρχαίο λατομείο στο Λαύριο, σε θαμμένη δεξαμενή νερού, περιμετρικά πηγαδιού και σε κατασκευασμένο χώρο δοκιμών.

## Λέξεις κλειδιά

Ευθύ και αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης, μέθοδος βοηθητικών πηγών, τεχνική πεπερασμένων ολοκληρώσεων, στρωματοποιημένο υπέδαφος, γεωραντάρ, κεραίες παπιγιόν, λογαριθμική περιοδική κεραία.

# ABSTRACT

In this thesis, methods of imaging ground and detecting objects are studied. For the study of the ground, several methods have been developed in recent years, based on the propagation and scattering of waves. Wave fields (acoustic, electromagnetic, and elastic) hit the ground, scattered by existing objects and subsoil materials. Solving an inverse scattering problem provides information on the geometric and physical properties of the buried objects. Methods of solving inverse scattering problems and measurements made on the surface of the ground with suitable antennas are methods of detecting and visualizing the ground.

The detection of ground in the time domain is done with ground penetrating radar and in particular with excitation radar. An electromagnetic pulse is transmitted and the pulse of the scattered wave from the unknown object is recorded. The return time of the pulse is associated with the depth of the object. Broadband antennas such as the bowtie and TEM Horn have been used. Also, logarithmic antennas have been used and in particular a logarithmic periodic monopole antenna has been constructed which combines the advantages of dipole but is lighter and smaller. Pulse radar simulations have been made at CST studio.

Wave damping has been performed with regard to soil conductivity at different depths. Measurements have also been made on a buried water tank, a well, and at a constructed test site.

## **Key words**

Direct and inverse scattering problem, method of auxiliary sources, finite integral technique, stratified soil, ground penetrating radar, antenna bowtie, log periodic antenna.

*Στην οικογένειά μου*

# ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

*Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Μικροκυμάτων και Οπτικών Ινών της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου.*

*Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα Καθηγητή Ε.Μ.Π. της διδακτορικής διατριβής μου, κ. Νικόλαο Ουζούνογλου, τον οποίο εκτιμώ ιδιαίτερα τόσο σαν Καθηγητή όσο και σαν άνθρωπο. Τον ευχαριστώ για τη μεγάλη εμπιστοσύνη με την οποία περιέβαλε την προσπάθειά μου και την υποστήριξη που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διδακτορικής μου διατριβής. Επίσης θέλω να εκφράσω τις εγκάρδιες ευχαριστίες μου στην Καθηγήτρια ΕΜΠ, κ. Δ. Κακλαμάνη και τον Ερευνητή βαθμού Α' του ΕΠΙΣΕΥ, κ. Α. Αμδίτη, μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφεραν κατά την εκπόνηση της διδακτορικής διατριβής. Ευχαριστώ θερμά τα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής της διδακτορικής μου διατριβής, τον Καθηγητή ΕΜΠ, κ. Γ. Φράγκο, τον Καθηγητή του Τμήματος Φυσικής ΕΚΠΑ, κ. Ι. Τίγκελη, τον Α. Καθηγητή ΕΜΠ Δ. Σούντρη και τον Καθηγητή του ΔΠΘ Γ. Κυριακού για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην επταμελή εξεταστική επιτροπή της διδακτορικής διατριβής μου.*

*Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω την ομάδα του εργαστηρίου και συγκεκριμένα την Ερευνήτρια βαθμού Α' του ΕΠΙΣΕΥ Ρ. Μακρή, την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια ΣΣΕ Ειρήνη Καρανάσιου, τη Δρ. Μ. Κουτσουπίδου, τον Υ.Δ. Ε. Γρούμπα και τον Υ.Δ. Α. Κυρίτση για την πολύτιμη βοήθειά τους σε κάθε επίπεδο. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Α. Γιδά για την άμεση τεχνική βοήθεια που προσέφερε σε όλες τις κατασκευές κεραιών και εξοπλισμών που χρειάστηκαν στα πλαίσια του διδακτορικού.*

*Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Ευαγγελία και Χριστόδουλο, και τον αδερφό μου, Ευτύχιο, τους φίλους μου και τη φίλη μου Ευαγγελία που με στηρίζουν και με ενισχύουν με κάθε τρόπο.*

*Σπύρος Αθανασιάδης*

*Αθήνα, Δεκέμβριος 2017*



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....	5
ABSTRACT .....	6
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ .....	12
ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΙΣΜΩΝ .....	17
ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	19
<b>1 ΣΚΕΔΑΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ .....</b>	<b>24</b>
<b>1.1 Εξισώσεις του Maxwell .....</b>	<b>24</b>
1.1.1 Πεδίο του χρόνου .....	25
1.1.2 Πεδίο της συχνότητας.....	28
1.1.3 Προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.....	32
<b>1.2 Επίλυση των προβλημάτων σκέδασης.....</b>	<b>34</b>
1.2.1 Μέθοδος των ροπών .....	35
1.2.2 Μέθοδος βοηθητικών πηγών .....	37
1.2.3 Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων .....	37
1.2.4 Τεχνική πεπερασμένων ολοκληρώσεων .....	38
1.2.5 Συνάρτηση Green.....	47
<b>2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΠΗΓΩΝ .....</b>	<b>49</b>
<b>2.1 Περιγραφή της μεθόδου .....</b>	<b>50</b>
2.1.1 Θεμελιώδης λύση .....	50
2.1.2 Βοηθητικές πηγές .....	52
2.1.3 Προβλήματα οριακών τιμών .....	53
<b>2.2 Εφαρμογές στη σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.....</b>	<b>59</b>
2.2.1 Τέλειος αγωγός.....	59
2.2.2 Σκεδαστής με επιφανειακή εμπέδηση .....	66
2.2.3 Διηλεκτρικός σκεδαστής.....	67
2.2.4 Διηλεκτρικός σκεδαστής με πυρήνα .....	69
<b>3 ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΤΗΣ MAS .....</b>	<b>75</b>
<b>3.1 Πολυστρωματικά μοντέλα σκέδασης.....</b>	<b>76</b>
3.1.1 Διηλεκτρικό σε τρεις διαστάσεις .....	77
3.1.2 Θαμμένο διηλεκτρικό .....	80
3.1.3 Ένας διστρωματικός σκεδαστής .....	83
3.1.4 Ένας πολυστρωματικός σκεδαστής σε δύο διαστάσεις.....	89

<b>3.2</b>	<b>Στρωματοποιημένο υπέδαφος .....</b>	<b>94</b>
<b>3.3</b>	<b>Αντίστροφα προβλήματα σκέδασης.....</b>	<b>96</b>
3.3.1	Μακρινό πεδίο.....	100
3.3.2	Σύνδεση κοντινού και μακρινού πεδίου .....	101
3.3.3	Η MAS στην επίλυση αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης (IMAS) .....	103
3.3.4	Γενική περιγραφή της IMAS.....	104
3.3.5	Τέλειος αγωγός.....	108
<b>4</b>	<b>ΡΑΝΤΑΡ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗΣ ΥΠΕΔΑΦΟΥΣ .....</b>	<b>111</b>
<b>4.1</b>	<b>Διάταξη γεωραντάρ .....</b>	<b>112</b>
<b>4.2</b>	<b>Περιγραφή της μεθόδου .....</b>	<b>119</b>
4.2.1	Οδηγός μελέτης υπεδάφους .....	121
<b>4.3</b>	<b>Ευρυζωνικές κεραίες .....</b>	<b>123</b>
4.3.1	Παπιγιόν (Bowtie).....	123
4.3.2	Χοανοειδής (TEM Horn).....	126
<b>5</b>	<b>ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΕ GPR.....</b>	<b>128</b>
<b>5.1</b>	<b>Προσομοιώσεις κεραίων .....</b>	<b>128</b>
5.1.1	Προσομοιώσεις.....	129
5.1.2	Απόσβεση του σήματος.....	130
5.1.3	Χρονική διάρκεια διαδρομής του σήματος.....	132
5.1.4	Ανακλώμενο σήμα από την επίδραση σκεδαστών .....	135
<b>5.2</b>	<b>Μετρήσεις GPR .....</b>	<b>143</b>
5.2.1	Μετρήσεις σε αρχαίο λατομείο στο Λαύριο .....	144
5.2.2	Μετρήσεις στον προαύλιο χώρο του Ε.Μ.Π.....	152
5.2.3	Μετρήσεις περιμετρικά πηγαδιού .....	157
5.2.4	Μετρήσεις περιμετρικά δεξαμενής λυμάτων .....	160
5.2.5	Μετρήσεις σε κατασκευασμένο χώρο δοκιμών.....	162
5.2.6	Πρόταση επεξεργασίας σημάτων GPR .....	165
<b>6</b>	<b>ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΚΕΡΑΙΕΣ.....</b>	<b>173</b>
<b>6.1</b>	<b>Λογαριθμική περιοδική διπολική κεραία (LPDA).....</b>	<b>175</b>
<b>6.2</b>	<b>Λογαριθμική περιοδική μονοπολική κεραία (LPMA) .....</b>	<b>177</b>
6.2.1	Σχεδιασμός LPMA .....	178
6.2.2	Προσομοιώσεις λογαριθμικής κεραίας.....	181
<b>6.3</b>	<b>Μετρήσεις .....</b>	<b>191</b>
<b>7</b>	<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ .....</b>	<b>194</b>
<b>7.1</b>	<b>Συμπεράσματα έρευνας .....</b>	<b>194</b>

---

7.2	Μελλοντική έρευνα .....	196
8	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ .....	198
8.1	Ειδικές συναρτήσεις .....	198
8.1.1	Κυλινδρικές συναρτήσεις .....	198
8.1.2	Σφαιρικές συναρτήσεις.....	200
8.1.3	Σφαιρικές κυματικές συναρτήσεις .....	201
8.2	Διανυσματική - δυαδική ανάλυση .....	202
8.3	Μακρινό πεδίο .....	203
8.3.1	Μακρινό πεδίο στις δύο διαστάσεις .....	204
8.3.2	Μακρινό πεδίο στις τρεις διαστάσεις .....	205
	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>	<b>207</b>

# ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1 Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $S$ με φορά προς το εξωτερικό του $D$ .....	26
Σχήμα 1.2 Σκέδαση επιπέδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.....	33
Σχήμα 1.3 Πλέγμα σε μία διάσταση .....	40
Σχήμα 1.4 Ορθογώνιο πλέγμα σε 2D.....	41
Σχήμα 1.5 Ορθογώνιο πλέγμα σε 3D.....	42
Σχήμα 1.6 Ορθογώνιο κελί.....	42
Σχήμα 1.7 Δυϊκά πλέγματα σε 3D.....	43
Σχήμα 1.8 Ένα σύστημα πλεγμάτων σε 2D.....	43
Σχήμα 1.9 Ένα πλέγμα με κελιά διαφορετικών διαστάσεων .....	44
Σχήμα 2.1 Εξωτερικό πρόβλημα οριακών τιμών .....	54
Σχήμα 2.2 Εσωτερικό πρόβλημα οριακών τιμών .....	57
Σχήμα 2.3 Πρόβλημα μετάβασης .....	58
Σχήμα 2.4 Μεικτό πρόβλημα .....	58
Σχήμα 2.5 Μεικτό πρόβλημα σε δακτύλιο .....	59
Σχήμα 2.6 Σκέδαση Η/Μ κυμάτων από τέλειο αγωγό σε 3D .....	60
Σχήμα 2.7 Σκέδαση Η/Μ κυμάτων από τέλειο αγωγό με τη MAS σε 2D .....	63
Σχήμα 2.8 Σκεδαζόμενο πεδίο από κυκλικό τέλειο αγωγό με κέντρο το $(0,0)$ σε 2D .....	64
Σχήμα 2.9 Σκεδαζόμενο πεδίο από κυκλικό τέλειο αγωγό με κέντρο το $(0,0)$ σε 3D .....	65
Σχήμα 2.10 Σκεδαζόμενο πεδίο από κυκλικό τέλειο αγωγό με κέντρο το $(1,1)$ σε 2D .....	65
Σχήμα 2.11 Σκεδαζόμενο πεδίο από κυκλικό τέλειο αγωγό με κέντρο το $(1,1)$ σε 3D .....	66
Σχήμα 2.12 Σκέδαση Η/Μ κυμάτων από σκεδαστή με επιφάνεια εμπέδησης με τη MAS .....	66
Σχήμα 2.13 Σκέδαση Η/Μ κυμάτων από ένα διηλεκτρικό με τη MAS σε 2D.....	69
Σχήμα 2.14 Πολυστρωματικό πρόβλημα σε 2D .....	70
Σχήμα 3.1 Σκέδαση Η/Μ κυμάτων από ένα διηλεκτρικό με τη MAS σε 3D.....	78
Σχήμα 3.2 Θαμμένο αντικείμενο .....	83
Σχήμα 3.3 Σκεδαστής με ομοαξονικούς κυλίνδρους.....	84
Σχήμα 3.4 Πολυστρωματικός σκεδαστής .....	89
Σχήμα 3.5 Στρωματοποιημένο έδαφος .....	94
Σχήμα 3.6 Θαμμένο αντικείμενο σε στρωματοποιημένο έδαφος $K+1$ στρωμάτων .....	95
Σχήμα 3.7 Αντίστροφο πρόβλημα με την IMAS.....	106

Σχήμα 3.8 Επίλυση αντίστροφου προβλήματος με χρήση 15 βοηθητικών πηγών .....	109
Σχήμα 3.9 Επίλυση αντίστροφου προβλήματος με χρήση 19 βοηθητικών πηγών .....	110
Σχήμα 3.10 Επίλυση αντίστροφου προβλήματος με χρήση 44 βοηθητικών πηγών .....	110
Σχήμα 4.1 Λογική διάταξη γεωραντάρ .....	113
Σχήμα 4.2 Σήμα γεννήτριας που κατασκευάστηκε για τη χρήση του GPR .....	113
Σχήμα 4.3 Σήμα εργαστηριακής γεννήτριας (κίτρινο είναι το σήμα και μωβ το trigger)	114
Σχήμα 4.4 Ακτινωτή κεραία συνολικού μήκους 3 m .....	115
Σχήμα 4.5 Κεραία συνολικού μήκους 1 m .....	116
Σχήμα 4.6 Παράλληλες κεραίες .....	116
Σχήμα 4.7 Κεραίες κάθετες μεταξύ τους .....	117
Σχήμα 4.8 Κεραία με πτερύγια ύψους 50 cm .....	117
Σχήμα 4.9 Κεραία TEM horn .....	118
Σχήμα 4.10 Διάταξη γεωραντάρ .....	119
Σχήμα 4.11 Περιοχή που φωτίζει η κεραία .....	122
Σχήμα 4.12 Διάταξη κεραίας bowtie .....	123
Σχήμα 4.13 Κεραία παπιγιόν ύψους 1,5 m στο εργαστήριο .....	124
Σχήμα 4.14 $S_{11}$ μεγάλου παπιγιόν .....	124
Σχήμα 4.15 Κεραία παπιγιόν ύψους 0,5 m στο εργαστήριο .....	125
Σχήμα 4.16 $S_{11}$ της κεραίας παπιγιόν .....	125
Σχήμα 4.17 Κεραία παπιγιόν με πτερύγια στο εργαστήριο .....	125
Σχήμα 4.18 $S_{11}$ της κεραίας παπιγιόν με πτερύγια .....	125
Σχήμα 4.19 Κεραίες παπιγιόν παράλληλες στο εργαστήριο .....	126
Σχήμα 4.20 $S_{11}$ της παράλληλης κεραίας παπιγιόν .....	126
Σχήμα 4.21 Κεραίες TEM horn .....	127
Σχήμα 4.22 $S_{11}$ κεραίας TEM horn .....	127
Σχήμα 5.1 Probes στο περιβάλλον προσομοίωσης κεραίων .....	129
Σχήμα 5.2 Παλμός εκπομπής στο περιβάλλον προσομοίωσης .....	130
Σχήμα 5.3 Καταγραφή παλμού για $\sigma=0,01$ και σε βάθος -1 m .....	130
Σχήμα 5.4 Καταγραφή παλμού για $\sigma=0,01$ και σε βάθος -2 m .....	130
Σχήμα 5.5 Καταγραφή παλμού για $\sigma=0,01$ και σε βάθος -3 m .....	130
Σχήμα 5.6 Καταγραφή παλμού για $\sigma=0,001$ και σε βάθος -1 m .....	131
Σχήμα 5.7 Καταγραφή παλμού για $\sigma=0,001$ και σε βάθος -2 m .....	131
Σχήμα 5.8 Καταγραφή παλμού για $\sigma=0,001$ και σε βάθος -3 m .....	131
Σχήμα 5.9 Κάτοψη & τομή προσομοίωσης λάμας σε βάθος 2 m .....	135

Σχήμα 5.10 Σήμα λήψης με μεταλλική λάμα σε βάθος 2m .....	136
Σχήμα 5.11 Κάτοψη & τομή προσομοίωσης με λάμα σε βάθος 3 m .....	136
Σχήμα 5.12 Σήμα λήψης με μεταλλική λάμα σε βάθος 3 m.....	137
Σχήμα 5.13 Κάτοψη & τομή προσομοίωσης λάμας σε βάθος 4 m .....	138
Σχήμα 5.14 Σήμα λήψης με μεταλλική λάμα σε βάθος 4 m.....	138
Σχήμα 5.15 Κάτοψη & τομή προσομοίωσης δεξαμενής ύψους 0,5 m σε βάθος 1 m ....	139
Σχήμα 5.16 Σήμα λήψης με δεξαμενή νερού στο 1m βάθος (ύψος δεξαμενής 0,5 m) ..	140
Σχήμα 5.17 Κάτοψη & τομή προσομοίωσης δεξαμενής ύψους 0,5 m σε βάθος 2 m ....	140
Σχήμα 5.18 Σήμα λήψης με δεξαμενή νερού στα 2m βάθος (ύψος δεξαμενής 0,5 m) ..	141
Σχήμα 5.19 Κάτοψη & τομή προσομοίωσης δεξαμενής πάχους 1 m σε βάθος 1 m .....	141
Σχήμα 5.20 Σήμα λήψης με δεξαμενή νερού στο 1m βάθος (ύψος δεξαμενής 1 m) .....	142
Σχήμα 5.21 Κάτοψη & τομή προσομοίωσης δεξαμενής πάχους 1 m σε βάθος 2 m .....	142
Σχήμα 5.22 Σήμα λήψης με δεξαμενή νερού στα 2m βάθος (ύψος δεξαμενής 1 m).....	143
Σχήμα 5.23 Στρωματοποιημένο έδαφος αρχαίου λατομείου στο Λαύριο .....	144
Σχήμα 5.24 Σχεδιάγραμμα αρχαίου λατομείου στο Λαύριο.....	145
Σχήμα 5.25 Μέτρηση με περιστροφή 90° (τύπου A-scan) και ανάλυση .....	146
Σχήμα 5.26 Κάτοψη & τομή του σημείου 1 .....	147
Σχήμα 5.27 Μέτρηση στο σημείο 1 .....	147
Σχήμα 5.28 Κάτοψη & τομή του σημείου 2.....	148
Σχήμα 5.29 Μέτρηση στο σημείο 2 .....	148
Σχήμα 5.30 Κάτοψη & τομή του σημείου 3 .....	149
Σχήμα 5.31 Μέτρηση στο σημείο 3 .....	149
Σχήμα 5.32 Κάτοψη & τομή του σημείου 4 .....	150
Σχήμα 5.33 Μέτρηση στο σημείο 4 .....	150
Σχήμα 5.34 Κάτοψη & τομή του σημείου 5.....	151
Σχήμα 5.35 Μέτρηση στο σημείο 5 .....	151
Σχήμα 5.36 Κάτοψη & τομή του σημείου 6.....	152
Σχήμα 5.37 Μέτρηση στο σημείο 6 .....	152
Σχήμα 5.38 Στρωματοποιημένο μοντέλο μετρήσεων σε χώρο στάθμευσης.....	153
Σχήμα 5.39 Μέτρηση τύπου A-scan με ανάλυση .....	154
Σχήμα 5.40 Τομή 1 <sup>ου</sup> πειράματος .....	154
Σχήμα 5.41 Μετρήσεις σε κενό χωρίς σκεδαστή.....	155
Σχήμα 5.42 Τομή 2 <sup>ου</sup> πειράματος .....	155
Σχήμα 5.43 Μέτρηση με αυτοκίνητο .....	156

Σχήμα 5.44 Τομή 3 <sup>ου</sup> πειράματος .....	156
Σχήμα 5.45 Μετρήσεις με μισό αυτοκίνητο .....	157
Σχήμα 5.46 Στρωματοποιημένο υπέδαφος πηγαδιού .....	158
Σχήμα 5.47 Σχεδιάγραμμα διάταξης πηγαδιού .....	158
Σχήμα 5.48 Μέτρηση πάνω από το πηγάδι.....	159
Σχήμα 5.49 Δεξαμενή λυμάτων σε στρωματοποιημένο υπέδαφος .....	160
Σχήμα 5.50 Σημείο τοποθέτησης κεραίας πάνω από τη δεξαμενή λυμάτων.....	161
Σχήμα 5.51 Μέτρηση πάνω από τη δεξαμενή λυμάτων .....	161
Σχήμα 5.52 Ομοιογενές έδαφος .....	162
Σχήμα 5.53 Μέτρηση σε ομοιογενές έδαφος.....	163
Σχήμα 5.54 Μεταλλική πλάκα (βάθος 1,5 m) σε ομοιογενές έδαφος .....	163
Σχήμα 5.55 Μέτρηση μεταλλικής πλάκας (βάθος 1,5 m) σε ομοιογενές έδαφος.....	164
Σχήμα 5.56 Μεταλλική πλάκα (βάθος 3 m) σε ομοιογενές έδαφος.....	164
Σχήμα 5.57 Μέτρηση μεταλλικής πλάκας (βάθος 3 m) σε ομοιογενές έδαφος.....	165
Σχήμα 5.58 Σήμα εργαστηριακής γεννήτριας σε παλμογράφο .....	166
Σχήμα 5.59 Διάταξη καταγραφής στον ανηχοϊκό θάλαμο .....	166
Σχήμα 5.60 Καταγραφή στον ανηχοϊκό θάλαμο .....	167
Σχήμα 5.61 Κρουστική απόκριση συστήματος.....	167
Σχήμα 5.62 Μορφή τελικής επεξεργασίας σήματος .....	169
Σχήμα 5.63 Αρχική και επεξεργασμένη μέτρηση .....	170
Σχήμα 5.64 Αρχική και επεξεργασμένη μέτρηση .....	171
Σχήμα 5.65 Αρχική και επεξεργασμένη μέτρηση .....	172
Σχήμα 6.1 Λογαριθμική περιοδική κεραία .....	176
Σχήμα 6.2 Είδωλο λογαριθμικής μονοπολικής κεραίας.....	178
Σχήμα 6.3 Κάτοψη κεραίας.....	179
Σχήμα 6.4 Προοπτική απεικόνιση της κεραίας σε πλήρη ανάπτυξη .....	179
Σχήμα 6.5 Προοπτική κεραίας διπλωμένη .....	180
Σχήμα 6.6 LPMA με ράβδους κάτω από το επίπεδο γείωσης.....	182
Σχήμα 6.7 Παράμετρος $S_{11}$ - LPMA με ράβδους κάτω από το επίπεδο γείωσης .....	182
Σχήμα 6.8 LPMA με ράβδους πάνω από το επίπεδο γείωσης .....	183
Σχήμα 6.9 Παράμετρος $S_{11}$ - LPMA με ράβδους πάνω από το επίπεδο γείωσης .....	183
Σχήμα 6.10 LPMA με δύο πηγές .....	184
Σχήμα 6.11 Παράμετροι $S_{11}$ , $S_{12}$ , $S_{22}$ - LPMA με δύο πηγές .....	184
Σχήμα 6.12 LPMA με δύο πηγές και μία γείωση .....	185

Σχήμα 6.13 Παράμετροι $S_{11}$ , $S_{12}$ , $S_{22}$ - LPMA με δύο πηγές και μία γείωση .....	185
Σχήμα 6.14 LPMA με πολλές γειώσεις.....	186
Σχήμα 6.15 Παράμετροι $S_{11}$ , $S_{12}$ , $S_{22}$ - LPMA με πολλές γειώσεις.....	186
Σχήμα 6.16 LPMA με οριζόντια στοιχεία εκατέρωθεν κάθε μονόπολου .....	187
Σχήμα 6.17 Παράμετρος $S_{11}$ - LPMA με οριζόντια δομή .....	187
Σχήμα 6.18 LPMA με οριζόντια στοιχεία μειωμένα 10% σε μήκος.....	188
Σχήμα 6.19 Παράμετρος $S_{11}$ - LPMA με οριζόντια δομή μειωμένη κατά 10% σε μήκος	188
Σχήμα 6.20 LPMA με οριζόντια στοιχεία μειωμένα 20% σε μήκος.....	189
Σχήμα 6.21 Παράμετρος $S_{11}$ - LPMA με οριζόντια δομή μειωμένη κατά 20% σε μήκος	189
Σχήμα 6.22 Ακτινοβολία μακρινού πεδίου στα 30 MHz .....	190
Σχήμα 6.23 Ακτινοβολία μακρινού πεδίου στα 50 MHz .....	190
Σχήμα 6.24 Ακτινοβολία μακρινού πεδίου στα 65 MHz .....	191
Σχήμα 6.25 Ακτινοβολία μακρινού πεδίου στα 85 MHz .....	191
Σχήμα 6.26 Ακτινοβολία μακρινού πεδίου στα 95 MHz .....	191
Σχήμα 6.27 $S_{11}$ της κατασκευασμένης κεραίας .....	192
Σχήμα 6.28 $S_{11}$ της κατασκευασμένης κεραίας και της προσομοιωμένης.....	192



# ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΙΣΜΩΝ

H/M	Ηλεκτρομαγνητικά
2D	2 Dimensional
3D	3 Dimensional
MoM	Method of Moments
MAS	Method of Auxiliary Sources
AS	Auxiliary Sources
CP	Collocation Points
MGE	Maxwell Grid Equations
FIT	Finite Integral Technique
FEM	Finite Element Method
IMAS	Inverse Method of Auxiliary Sources
GPR	Ground Penetrating Radar
BALUN	Balance Unbalance
LNA	Low Noise Amplifier
LPMA	Log-Periodic Monopole Array
LPDA	Log-Periodic Dipole Array



# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μελέτη του υπεδάφους και ειδικότερα η ανίχνευση αντικειμένων μέσα στο έδαφος παρουσιάζει εξαιρετικό ερευνητικό ενδιαφέρον και τα επιστημονικά αποτελέσματα έχουν σημαντικές εφαρμογές. Η ανίχνευση αντικειμένων μέσα στο έδαφος μελετάται με μικροκυματικές μεθόδους απεικόνισης οι οποίες επιτυγχάνονται με την επίλυση αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης με χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών. Ενδεικτικά αναφέρονται οι εργασίες [1] και [2] όπου στην επίλυση αντιστρόφων προβλημάτων έχει χρησιμοποιηθεί και η μέθοδος των βοηθητικών πηγών.

Όταν στο χώρο διάδοσης ενός κύματος υπάρχει ένα εμπόδιο τότε το κύμα σκεδάζεται και δημιουργείται ένα νέο κύμα, το σκεδαζόμενο. Όταν γνωρίζουμε το προσπίπτον κύμα και το εμπόδιο (σκεδαστής) και αναζητούμε το σκεδαζόμενο κύμα τότε έχουμε να επιλύσουμε ένα ευθύ πρόβλημα σκέδασης. Όταν γνωρίζουμε το προσπίπτον και το σκεδαζόμενο κύμα και αναζητούμε πληροφορίες για το σκεδαστή τότε έχουμε ένα

αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης. Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης είναι γραμμικό και καλά τοποθετημένο, δηλαδή έχει μοναδική λύση η οποία εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλήματος. Για τη θεωρητική μελέτη των προβλημάτων σκέδασης παραπέμπουμε στα βιβλία [3] και [4]. Η ακριβής λύση ενός ευθέως προβλήματος σκέδασης δύσκολα μπορεί να βρεθεί στη γενική περίπτωση. Όμως σε ειδικές περιπτώσεις γεωμετρίας του σκεδαστή και διεύθυνσης πρόσπτωσης του επιπέδου κύματος ή τοποθέτησης της σημειακής πηγής μπορεί να υπολογιστεί (π.χ. σφαιρικός σκεδαστής και πρόσπτωση κατά τη διεύθυνση του άξονα  $z$ ). Προβλήματα αυτού του τύπου έχουν μελετηθεί και έχουν δημοσιευθεί αποτελέσματα. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα βιβλία [5], [6] και [7].

Στα προβλήματα εφαρμογών χρησιμοποιούμε προσεγγιστικές μεθόδους επίλυσης οι οποίες είναι αριθμητικές ή αναλυτικές. Στις αριθμητικές μεθόδους γίνεται διακριτοποίηση του προβλήματος σκέδασης και το πρόβλημα ανάγεται σε ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα το οποίο επιλύεται με μία από τις κλασικές μεθόδους. Συγκεκριμένες εργασίες θα αναφερθούν κατά την αναλυτική ανάπτυξη των μεθόδων που χρησιμοποιούμε. Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης είναι μη καλά τοποθετημένο. Στοιχεία για την επίλυση αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης περιγράφονται στο παράρτημα. Η βάση επίλυσης των αντιστρόφων προβλημάτων που μελετάμε στη διατριβή είναι η μέθοδος των βοηθητικών πηγών στο πεδίο της συχνότητας και η τεχνική των πεπερασμένων ολοκληρώσεων στο πεδίο του χρόνου. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε τροποποιήσει και επεκτείνει τη μέθοδο των βοηθητικών πηγών σε σύνθετα μοντέλα σκέδασης χρησιμοποιώντας τη θεωρία ελαχίστων τετραγώνων για τη βελτιστοποίηση ενός κατάλληλου συναρτησοειδούς. Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε εφαρμόσει μία βελτιωμένη τεχνική πεπερασμένων ολοκληρώσεων όπου η διακριτοποίηση του προβλήματος έγινε με την κατασκευή ενός εξαεδρικού πλέγματος. Οι μέθοδοι που έχουμε αναπτύξει μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις δύο και στις τρεις διαστάσεις.

Στο κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται συνοπτικά τα προβλήματα σκέδασης Η/Μ κυμάτων [3], [4], [5] και [8]. Περιγράφονται συνοπτικά οι νόμοι του ηλεκτρομαγνητισμού και οι εξισώσεις του Maxwell σε διαφορική και ολοκληρωτική μορφή, όπως θα χρησιμοποιηθούν στην τεχνική των πεπερασμένων ολοκληρώσεων. Γίνεται μία γενική

περιγραφή των βασικών μεθόδων επίλυσης των ευθέων προβλημάτων. Συγκεκριμένα αναφέρονται η μέθοδος των ροπών, η μέθοδος των βοηθητικών πηγών, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων και η τεχνική των πεπερασμένων ολοκληρώσεων. Τέλος αναγράφονται βασικές λύσεις των εξισώσεων του Maxwell οι οποίες έχουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη των προβλημάτων σκέδασης.

Στο κεφάλαιο 2 περιγράφεται αναλυτικά η μέθοδος των βοηθητικών πηγών την οποία εισήγαγε ο Kurpadze το 1967 στην εργασία [9] για την επίλυση προβλημάτων θεωρίας δυναμικού. Τα επόμενα χρόνια αναπτύχθηκε και χρησιμοποιείται ευρέως στην επίλυση πολλών προβλημάτων οριακών τιμών [10], [11], [12] και [13]. Πρόσφατα η μέθοδος εφαρμόζεται και σε προβλήματα και οριακών-αρχικών τιμών [14]. Η μέθοδος αναπτύσσεται για διάφορα είδη προβλημάτων ελλειπτικού τύπου για τα οποία έχουν υπολογιστεί οι αντίστοιχοι πίνακες. Η μέθοδος εφαρμόζεται σε κλασικά προβλήματα σκέδασης H/M κυμάτων στο πεδίο της συχνότητας.

Στο κεφάλαιο 3 επιλύονται σύνθετα προβλήματα σκέδασης στις περιπτώσεις 2D και 3D με τη μέθοδο των βοηθητικών πηγών αφού η μέθοδος τροποποιηθεί κατάλληλα για το αντίστοιχο πρόβλημα. Τα προβλήματα αυτά περιγράφουν μαθηματικά μοντέλα που έχουν σημαντικές εφαρμογές. Συγκεκριμένα έχουν μελετηθεί πολυστρωματικά μοντέλα και έχουν γίνει εφαρμογές στην περίπτωση ομοαξονικών κυκλικών κυλίνδρων [15]. Οι πίνακες της μεθόδου των βοηθητικών πηγών αυτών των προβλημάτων έχουν στοιχεία πίνακες που προέρχονται από τις οριακές συνθήκες πάνω στις διαχωριστικές επιφάνειες των διηλεκτρικών στρωμάτων των σκεδαστών. Επίσης έχουν μελετηθεί προβλήματα με θαμμένα αντικείμενα. Έμφαση έχει δοθεί στη δομή του υπεδάφους το οποίο έχει θεωρηθεί ότι αποτελείται από στρώματα με διαφορετικές διηλεκτρικές σταθερές. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των βοηθητικών πηγών αναπτύσσεται μία μέθοδος επίλυσης αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης. Προβλήματα αυτού του τύπου έχουν μελετηθεί στις εργασίες [1] και [2]. Στις εργασίες [16] και [17] η μέθοδος των θεμελιωδών λύσεων που ουσιαστικά είναι η μέθοδος των βοηθητικών πηγών έχει χρησιμοποιηθεί για την επίλυση αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης.

Στη συνέχεια της διατριβής η ανίχνευση θαμμένων αντικειμένων και η μελέτη της δομής του υπεδάφους γίνονται με ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο πεδίο του χρόνου. Για την εκπομπή και λήψη των κυμάτων χρησιμοποιούνται ευρυζωνικές κεραιές όπως

παπιγιόν, χοανοειδής καθώς και οι λογαριθμικές περιοδικές κεραίες. Το όργανο με το οποίο γίνονται οι μετρήσεις του σκεδαζόμενου ηλεκτρομαγνητικού κύματος από υλικά θαμμένα στο υπεδάφος είναι το ραντάρ διείσδυσης υπεδάφους (Ground Penetrating Radar - GPR). Το GPR ανιχνεύει όλα τα αντικείμενα που βρίσκονται στο υπεδάφος. Η σκέδαση των κυμάτων οφείλεται όχι μόνο στους θαμμένους στόχους αλλά και στις ανομοιογένειες του εδάφους, γεγονός που δυσκολεύει την ανίχνευση των αντικειμένων.

Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου εξαρτάται από τη μορφολογία και τη σύσταση των πετρωμάτων του υπεδάφους. Οι μετρήσεις με GPR υπό ορισμένες συνθήκες είναι πολύ ακριβείς. Τα τεχνικά χαρακτηριστικά του GPR, όπως η ισχύς του πομπού, η συχνότητα και η πόλωση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος μπορούν να βελτιώσουν σημαντικά τα στοιχεία της απεικόνισης του υπεδάφους.

Στο κεφάλαιο 4 γίνεται μία λεπτομερής περιγραφή του συστήματος GPR που αναπτύχθηκε και μελετήθηκε στην παρούσα διατριβή. Παρουσιάζονται τα γεωμετρικά και τεχνικά χαρακτηριστικά των κεραιών εκπομπής και λήψης καθώς και άλλων συστημάτων που απαρτίζεται (γεννήτρια σήματος, κάρτα δειγματοληψίας, φίλτρα, ενισχυτής λήψης LNA). Στη συνέχεια περιγράφεται η μέθοδος η οποία εφαρμόστηκε στην ανίχνευση του υπεδάφους. Η μέθοδος στηρίζεται στην καταμέτρηση του χρόνου που απαιτείται ώστε το ηλεκτρομαγνητικό κύμα από την πηγή να φτάσει στο θαμμένο αντικείμενο και να επιστρέψει στην κεραία λήψης. Επίσης γίνονται προσομοιώσεις για να μελετηθεί και να ελεγχθεί η απόσβεση του σήματος σε σχέση με την αγωγιμότητα του εδάφους, η χρονική διάρκεια της διαδρομής του σήματος σε σχέση με τη διηλεκτρική επιτρεπτότητα του μέσου διάδοσης και η ισχύς του ανακλώμενου σήματος από τα διάφορα υλικά του υπεδάφους. Τέλος δίνονται αποτελέσματα μετρήσεων από τοποθεσίες όπου εφαρμόστηκε το GPR καθώς και επεξεργασμένες μετρήσεις με την προτεινόμενη μέθοδο.

Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται λογαριθμικές περιοδικές κεραίες με μονόπολα και δίπολα στοιχεία. Η λογαριθμική κεραία αποτελείται από στοιχεία που αντιστοιχούν σε διάφορες συχνότητες, καθιστώντας την κεραία αυτή ανεξάρτητη της συχνότητας του προσπίπτοντος κύματος. Η λογαριθμική κεραία προέκυψε από μεταβολές που έγιναν στη δομή της κωνικής ελικοειδούς κεραίας και χρησιμοποιείται από το 1950. Μία νέα

φορητή λογαριθμική περιοδική κεραία με μονόπολα σχεδιάστηκε, προσομοιώθηκε και κατασκευάστηκε. Η προτεινόμενη κεραία σχεδιάστηκε με στόχο να εκπέμπει από τα 50 MHz και γνώμονα να είναι φορητή καθώς και να μπορεί να ενσωματωθεί στην οροφή οχήματος.

Στο κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα της έρευνας που πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής. Βασικός στόχος της έρευνας ήταν η ανάπτυξη μεθόδων απεικόνισης αντικειμένων θαμμένων στο έδαφος. Η μελέτη αναπτύχθηκε στο πεδίο της συχνότητας και στο πεδίο του χρόνου. Επίσης στο κεφάλαιο αναφέρονται γενικότερα προβλήματα που μπορούν να μελετηθούν χρησιμοποιώντας και προσαρμόζοντας τις μεθόδους και τα αποτελέσματα της διατριβής.

# 1 ΣΚΕΔΑΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνονται οι εξισώσεις του Maxwell στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας. Διατυπώνονται τα βασικά προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και αναφέρονται προσεγγιστικές μέθοδοι επίλυσής τους. Καταγράφονται λύσεις των εξισώσεων του Maxwell οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στις μεθόδους επίλυσης των προβλημάτων, κυρίως στη μέθοδο των βοηθητικών πηγών. Η μέθοδος αυτή θα έχει σημαντικό ρόλο στη μελέτη των προβλημάτων μας και αναπτύσσεται εκτενώς στο επόμενο κεφάλαιο.

## 1.1 Εξισώσεις του Maxwell



Στην ενότητα αυτή θα γίνει μία σύντομη αναφορά στις εξισώσεις του Maxwell. Συγκεκριμένα μέσω των νόμων του ηλεκτρομαγνητισμού θα παρουσιαστούν οι χρονοεξαρτώμενες εξισώσεις και θεωρώντας πεδία ημιτονοειδούς μορφής θα προκύψουν οι εξισώσεις του Maxwell στο πεδίο της συχνότητας. Για περισσότερα στοιχεία παραπέμπουμε στα βιβλία [5], [6], [8], [18] και [19].

### 1.1.1 Πεδίο του χρόνου

Έστω  $\mathcal{E}$  η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου,  $\mathcal{H}$  η ένταση του μαγνητικού πεδίου,  $\mathcal{D}$  η διηλεκτρική μετατόπιση,  $\mathcal{B}$  η μαγνητική επαγωγή και  $\mathcal{J}$  η πυκνότητα ρεύματος ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Τα μεγέθη αυτά είναι συναρτήσεις του διανύσματος θέσης  $\mathbf{r}$  και του χρόνου  $t$ . Συνδέονται με το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο μέσω των νόμων του ηλεκτρομαγνητισμού.

Θεωρούμε ένα υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^3$ ,  $S = \partial D$  το σύνορό του, το οποίο είναι μία κλειστή επιφάνεια και  $\hat{\mathbf{n}}$  το κάθετο στην επιφάνεια  $S$  με φορά προς το εξωτερικό του  $D$  μοναδιαίο διάνυσμα. Διατυπώνουμε τους νόμους του ηλεκτρομαγνητισμού σε ολοκληρωτική και διαφορική μορφή.

*Νόμος του Gauss.* Αν  $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$  είναι το ηλεκτρικό πεδίο και  $Q$  είναι το ηλεκτρικό φορτίο που το παράγει, τότε η ολική ροή του  $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$  δια μέσου της κλειστής επιφάνειας  $S$ , δηλαδή το επιφανειακό ολοκλήρωμα του ηλεκτρικού πεδίου  $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$  πάνω στην επιφάνεια  $S$ , ισούται με το πηλίκο του φορτίου το οποίο περιβάλλεται από την επιφάνεια  $S$  δια της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας  $\epsilon_0$  του κενού, δηλαδή η εξίσωση ισχύει σε χώρο όπου δεν υπάρχουν διηλεκτρικά ή μαγνητικά υλικά.

$$\text{Ολοκληρωτική μορφή:} \quad \int_S \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.1)$$

$$\text{Διαφορική μορφή:} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.2)$$

όπου

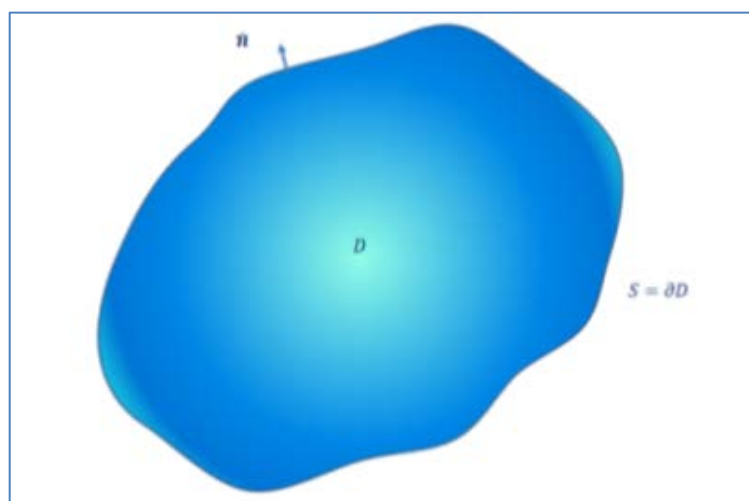
$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta Q}{\delta V}, \quad (1.3)$$

είναι η πυκνότητα φορτίου στη θέση  $\mathbf{r}$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Με  $\delta V$  συμβολίζεται ο στοιχειώδης όγκος που περιέχει το στοιχειώδες φορτίο  $\delta Q$ .

*Νόμος του Gauss για τη μαγνητική επαγωγή.* Η μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από την κλειστή επιφάνεια  $S$ , δηλαδή το επιφανειακό ολοκλήρωμα της μαγνητικής επαγωγής  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  πάνω στην  $S$  ισούται με μηδέν.

Ολοκληρωτική μορφή: 
$$\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad (1.4)$$

Διαφορική μορφή: 
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.5)$$



Σχήμα 1.1 Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια  $S$  με φορά προς το εξωτερικό του  $D$

*Νόμος του Faraday.* Αν  $\partial S$  είναι το σύνορο της επιφάνειας  $S$  (κλειστή καμπύλη) τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της  $\partial S$  είναι ίσο με το ρυθμό μεταβολής της ροής του μαγνητικού πεδίου δια μέσου της επιφάνειας  $S$ . Συγκεκριμένα είναι:

Ολοκληρωτική μορφή: 
$$\int_{\partial S} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad (1.6)$$

όπου

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (1.7)$$

είναι η μαγνητική ροή. Το αρνητικό πρόσημο στον τύπο (1.6) προκύπτει από την αρχή διατήρησης της ενέργειας και είναι σύμφωνο με το νόμο του Lenz.

Διαφορική μορφή: 
$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.8)$$

*Νόμος των Ampère-Maxwell.* Ο νόμος αυτός περιγράφεται από τους τύπους:

Ολοκληρωτική μορφή: 
$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_e}{dt}, \quad (1.9)$$

όπου

$$\Phi_e = \int_S \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds, \quad (1.10)$$

είναι η ροή του ηλεκτρικού πεδίου,  $I$  το ολικό ρεύμα αγωγιμότητας και  $\varepsilon_0 \mu_0$  η διηλεκτρική επιτρεπτότητα και η μαγνητική διαπερατότητα του κενού αντίστοιχα.

Διαφορική μορφή: 
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t}, \quad (1.11)$$

όπου  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  είναι η πυκνότητα ρεύματος και δίνεται

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (1.12)$$

με  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  τη μέση ταχύτητα των φορτίων που βρίσκονται στον όγκο.

### 1.1.2 Πεδίο της συχνότητας

Θεωρούμε ότι όλα τα διανυσματικά πεδία που εμφανίζονται στις εξισώσεις του Maxwell έχουν ημιτονοειδή μορφή. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{W}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\}, \quad (1.13)$$

όπου  $\mathcal{W} = \mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{B}, \mathcal{J}$ ,  $\mathbf{W} = \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{J}$  και  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα. Τα διανυσματικά πεδία  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{J}$  είναι συναρτήσεις του διανύσματος θέσης  $\mathbf{r}$ , δηλαδή είναι τα χωρικά μέρη των αντιστοιχών πεδίων. Από τις εξισώσεις (1.8) και (1.11) με την αντικατάσταση (1.13) για τα μεγέθη  $\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{B}, \mathcal{J}$  παίρνουμε

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (1.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j\omega\mathbf{D}(\mathbf{r}) - \mathbf{J}(\mathbf{r}). \quad (1.15)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις καταστατικές σχέσεις για τα χωρικά τμήματα

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu\mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (1.16)$$

βρίσκουμε τις χρονικά ανεξάρτητες εξισώσεις του Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (1.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = (j\omega\varepsilon + \sigma)\mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (1.18)$$

Για σταθερές φυσικές παραμέτρους, χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$  έχουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (1.19)$$

Αν απαλείψουμε το μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{H}$  από τις (1.17) και (1.18) παίρνουμε

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.20)$$

όπου

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 - j\mu\sigma\omega}, \quad \text{Im}(k) \geq 0, \quad (1.21)$$

είναι ο κυματικός αριθμός ή κυματάρηθος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος και εξαρτάται από τις φυσικές ιδιότητες του χώρου διάδοσής του.

Η ταχύτητα φάσης  $c$  του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \sigma^2/(\varepsilon\omega)^2}}} \quad (1.22)$$

Αν στην (1.20) εφαρμόσουμε τη διανυσματική ταυτότητα

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \Delta \mathbf{U} \quad (1.23)$$

και λάβουμε υπόψη την πρώτη εξίσωση της (1.19) παίρνουμε

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (1.24)$$

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο ικανοποιεί τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz με τον ίδιο κυματικό αριθμό. Προφανώς οι εξισώσεις (1.20) και (1.24) ικανοποιούνται και από το μαγνητικό πεδίο.

Η ειδική αγωγιμότητα  $\sigma$  του μέσου εξαρτάται από την κρυσταλλική δομή του υλικού. Για τις διάφορες τιμές του  $\sigma$  έχουμε:

Για  $\sigma = 0$ , το υλικό είναι ένα μη αγώγιμο μέσο διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Τα μη αγώγιμα μέσα δεν επιτρέπουν την κίνηση ηλεκτρικών φορτίων, αφού από τον τρίτο τύπο της (1.16) έπεται  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ . Στην περίπτωση αυτή από τον τύπο (1.21) έχουμε

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (1.25)$$

και από τον τύπο (1.22) παίρνουμε

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (1.26)$$

Για  $\sigma \neq 0$ , το υλικό είναι ένα αγώγιμο μέσο διάδοσης και απορροφά ενέργεια από το ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Αν θεωρήσουμε ότι  $\sigma \rightarrow \infty$ , τότε το υλικό είναι ένας τέλειος αγωγός. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι το  $\nabla \times \mathbf{H}$  είναι φραγμένο για  $\sigma \rightarrow \infty$ , τότε από τις σχέσεις (1.17) και (1.18) έπεται  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  και  $\mathbf{H} = \mathbf{0}$  αντίστοιχα. Επομένως στο εσωτερικό ενός τέλειου αγωγού δεν υπάρχουν ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

**Λύσεις των εξισώσεων του Maxwell.** Στη θεωρία σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και ειδικότερα στις προσεγγιστικές μεθόδους επίλυσης των προβλημάτων σκέδασης, όπως είναι η μέθοδος βοηθητικών πηγών, έχουν σημαντικό ρόλο ορισμένες ειδικές λύσεις του συστήματος εξισώσεων του Maxwell, [5], [7], [8]. Συγκεκριμένα στον  $\mathbb{R}^3$  είναι:

*Θεμελιώδης λύση.* Η θεμελιώδης λύση  $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  σε δυαδική μορφή (βλέπε Παράρτημα) είναι

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \left( \tilde{\mathbf{I}} + \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{r}}}{k^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \quad (1.27)$$

όπου

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{e^{jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}, \quad (1.28)$$

είναι θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz και  $\tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 \hat{\mathbf{x}}_3$ , είναι το ταυτοτικό δυαδικό. Η  $\tilde{\mathbf{G}}$  είναι λύση με την έννοια των κατανομών της εξίσωσης

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - k^2 \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{4\pi}{jk} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \tilde{\mathbf{I}} \quad (1.29)$$

και η  $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  για  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$  είναι κλασική λύση της εξίσωσης

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - k^2 \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \mathbf{0}. \quad (1.30)$$

Χρησιμοποιείται στη μέθοδο των βοηθητικών πηγών για προβλήματα σκέδασης στην περίπτωση 3D.

Σφαιρικά κύματα. Τα ηλεκτρικά και τα μαγνητικά δίπολα κατά τη διέγερσή τους παράγουν σφαιρικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Ένα ηλεκτρικό δίπολο ροπής  $\hat{\mathbf{p}}$  παράγει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο  $\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e$ , που επαληθεύει τις εξισώσεις

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + j\omega\mu\mathbf{H}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \mathbf{0}, \quad (1.31)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - j\omega\varepsilon\mathbf{E}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = j\omega\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\hat{\mathbf{p}}. \quad (1.32)$$

και δίνεται από τους τύπους

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{jk^3}{4\pi\varepsilon} \left( \tilde{\mathbf{I}} + \frac{\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}}}{k^2} \right) \cdot [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\hat{\mathbf{p}}], \quad (1.33)$$

$$\mathbf{H}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{k\omega}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \times [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\hat{\mathbf{p}}]. \quad (1.34)$$

Ένα μαγνητικό δίπολο ροπής  $\hat{\mathbf{m}}$  παράγει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο  $\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m$ , που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + j\omega\varepsilon\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \mathbf{0}, \quad (1.35)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + j\omega\mu\mathbf{H}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -j\omega\mu\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\hat{\mathbf{m}}. \quad (1.36)$$

και δίνεται από τους τύπους

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\frac{k\omega\mu}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \times [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\hat{\mathbf{m}}], \quad (1.37)$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{jk^3}{4\pi} \left( \tilde{\mathbf{I}} + \frac{\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}}}{k^2} \right) \cdot [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\hat{\mathbf{m}}]. \quad (1.38)$$

Στις εφαρμογές της μεθόδου των βοηθητικών πηγών πολλές φορές χρειαζόμαστε σχέσεις που συνδέουν το ηλεκτρικό  $\mathbf{E}_e$  και το μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{H}_m$  με τη θεμελιώδη λύση σε δυαδική μορφή. Εφαρμόζοντας την (1.27) στις (1.33) και (1.38) αντίστοιχα παίρνουμε

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{jk^3}{4\pi\varepsilon} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{p}}, \quad (1.39)$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{jk^3}{4\pi} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{m}}. \quad (1.40)$$

Τα σφαιρικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι κλασικές λύσεις των εξισώσεων του Maxwell στο  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{r}_0\}$ , δηλαδή επαληθεύουν τις εξισώσεις του Maxwell παντού εκτός από τη θέση της πηγής, όπου δεν ορίζονται. Η θέση της πηγής είναι ένα ιδιάζον σημείο της θεμελιώδους λύσης των εξισώσεων Maxwell και έχει σημαντικό ρόλο στη μέθοδο των βοηθητικών πηγών.

*Επίπεδα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.* Τα επίπεδα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που διαδίδονται κατά τη διεύθυνση  $\hat{\mathbf{d}}$  και έχουν πολώσεις του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, τα μοναδιαία διανύσματα  $\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}$  αντίστοιχα (γενικότερα οι πολώσεις μπορεί να είναι και μιγαδικά διανύσματα) έχουν τη μορφή

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{p}}e^{jk\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{q}}Ye^{jk\hat{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.41)$$

και είναι λύσεις του συστήματος εξισώσεων του Maxwell στον  $\mathbb{R}^3$ . Η παράμετρος  $Y$  είναι η χαρακτηριστική αντίσταση του μέσου διάδοσης και στην περίπτωση του μη αγώγιμου μέσου, δηλαδή όταν  $\sigma = 0$ , δίνεται από τον τύπο  $Y = \sqrt{\varepsilon/\mu}$ . Τα διανύσματα  $\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}$  και  $\hat{\mathbf{d}}$  αποτελούν ένα τρισσορθογώνιο σύστημα:  $\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{d}}$ . Τα επίπεδα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων του Maxwell.

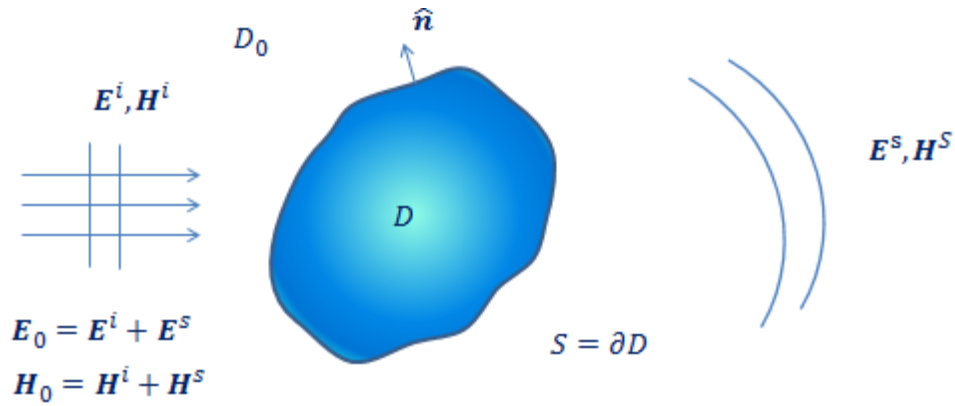
### 1.1.3 Προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Διατυπώνουμε τα βασικά προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων για τις εξισώσεις του Maxwell στο πεδίο της συχνότητας.

Αν  $\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i$  είναι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα σε ημιτονοειδή μορφή και προσπίπτει σε έναν σκεδαστή  $D$  και  $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$  είναι το αντίστοιχο σκεδαζόμενο κύμα τότε το ολικό κύμα  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$  στο εξωτερικό του σκεδαστή χώρο  $D_0$  είναι

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s \text{ στο } D_0. \quad (1.42)$$





Σχήμα 1.2 Σκέδαση επιπέδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο ικανοποιούν τις εξισώσεις του Maxwell (1.17) και (1.18). Οι βασικές οριακές συνθήκες που ικανοποιούνται πάνω στην επιφάνεια  $S$  του σκεδαστή (σε  $3D$ ) είναι:

- τέλειος αγωγός:  $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$  στο  $\partial D$ , ( $\hat{\mathbf{n}}$  είναι μοναδιαίο κάθετο στο  $\partial D$ ).
- επιφάνεια με εμπέδηση:  $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_0 = Z_s Z \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_0)$  στο  $\partial D$ , όπου  $Z_s$  είναι η επιφανειακή αντίσταση.
- διηλεκτρικό:  $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1|_{\partial D}$ ,  $\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{E}_0 = \frac{\mu_0}{\mu_1} (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{E}_1)|_{\partial D}$ , όπου  $\mathbf{E}_1$  το ολικό ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του σκεδαστή και  $\mu_0, \mu_1$  οι μαγνητικές διαπερατότητες στο εξωτερικό και εσωτερικό του σκεδαστή αντίστοιχα.

Για τη συμπεριφορά του σκεδαζόμενου πεδίου στο άπειρο συνήθως χρησιμοποιούμε τη συνθήκη ακτινοβολίας των Silver-Müller

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\hat{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{E}^s) + jkr \mathbf{E}^s] = \mathbf{0}, \quad (1.43)$$

ομοιόμορφα ως προς όλες τις διευθύνσεις  $\hat{\mathbf{r}}$ . Άλλες ισοδύναμες μορφές αυτής της συνθήκης ακτινοβολίας αναφέρονται στη βιβλιογραφία, όπως στα βιβλία [3] και [8].

Στις δύο διαστάσεις οι οριακές συνθήκες ανάγονται σε βαθμωτές συνθήκες για τις συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου (TE και TM κύματα) και η συνθήκη ακτινοβολίας σε εκείνη του Sommerfeld

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - jku^s \right) = 0. \quad (1.44)$$

Τα προβλήματα σκέδασης που εμφανίζονται στις εφαρμογές είναι σύνθετα και πολλές φορές συνδυάζουν δύο ή περισσότερες οριακές συνθήκες. Επίσης οι σκεδαστές περιβάλλονται από διάφορα υλικά [20], [21], [22], [23], [24] και [25]. Μικτά προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που εμφανίζονται κατά την ανίχνευση θαμμένων αντικειμένων μελετώνται στο κεφάλαιο 3.

## 1.2 Επίλυση των προβλημάτων σκέδασης

Ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει ένα πρόβλημα σκέδασης κυμάτων με ημιτονοειδή μορφή είναι ένα εξωτερικό πρόβλημα οριακών τιμών για την εξίσωση ή το σύστημα των εξισώσεων που διέπει το κυματικό φαινόμενο. Για την καλή τοποθέτηση αυτών των προβλημάτων, δηλαδή την ύπαρξη μοναδικής λύσης που εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα παραπέμπουμε στα βιβλία [3], [4], [26] και έχουν γίνει κατάλληλες αναφορές σε γνωστά αποτελέσματα.

Για τον υπολογισμό της λύσης πρέπει να σημειώσουμε ότι σε πολύ λίγες περιπτώσεις μπορεί να βρεθεί η ακριβής λύση σε κλειστή μορφή. Για παράδειγμα η συνάρτηση Green έχει υπολογιστεί στην περίπτωση σκέδασης σφαιρικών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από έναν σφαιρικό σκεδαστή σε σύνθετα υλικά στην [27]. Στην πράξη εφαρμόζουμε προσεγγιστικές μεθόδους επίλυσης οι οποίες μπορεί να είναι είτε αναλυτικές ή αριθμητικές. Στις αναλυτικές μεθόδους, τις οποίες δεν θα χρησιμοποιήσουμε, εντάσσονται και μεταβολικές μέθοδοι όπως είναι η μέθοδος υψηλών συχνοτήτων και η μέθοδος χαμηλών συχνοτήτων όπου τα προσπίπτοντα και τα σκεδαζόμενα πεδία αναπτύσσονται σε δυναμοσειρές ως προς τον κυματικό αριθμό και το πρόβλημα σκέδασης μετασχηματίζεται σε μία ακολουθία προβλημάτων θεωρίας δυναμικού τα οποία επιλύονται με χρήση αρμονικών συναρτήσεων.

Στις αριθμητικές μεθόδους που θα χρησιμοποιήσουμε γίνεται διακριτοποίηση των προβλημάτων, μετατρέποντας το ευθύ πρόβλημα σκέδασης σε ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα το οποίο επιλύεται με μία γραμμική κλασική μέθοδο. Η διακριτοποίηση γίνεται είτε με ταύτιση σημείων (point-matching) ή κλιμακωτά πλέγματα. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν η μέθοδος των ροπών και η μέθοδος των βοηθητικών πηγών, ενώ

στη δεύτερη ανήκουν η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων και η τεχνική πεπερασμένης ολοκλήρωσης.

### 1.2.1 Μέθοδος των ροπών

Η αριθμητική μέθοδος των ροπών (Method of Moments - MoM) εφαρμόζεται με επιτυχία στην επίλυση προβλημάτων της μορφής

$$Lu = f, \quad (1.45)$$

όπου  $L$  είναι ένας γραμμικός τελεστής και  $u$  (άγνωστη),  $f$  (γνωστή) κατάλληλες συναρτήσεις. Τα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων τα οποία θα μελετήσουμε ανάγονται στη μορφή (1.45) με  $L$  έναν ολοκληρωτικό τελεστή. Στην αναγωγή αυτή έχουν χρησιμοποιηθεί δυναμικά απλού και διπλού στρώματος και έχουν ενσωματωθεί οι οριακές συνθήκες του προβλήματος. Τυπικά η άγνωστη συνάρτηση στην (1.45) μπορεί να βρεθεί αν αντιστραφεί ο τελεστής  $L$ , δηλαδή

$$u = L^{-1}f. \quad (1.46)$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των ροπών η (1.45) μετασχηματίζεται σε ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα της μορφής

$$A \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad (1.47)$$

το οποίο επιλύεται με μία κλασική μέθοδο αντιστροφής του πίνακα  $A$ .

Μία σύντομη περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθείται είναι:

Πάνω σε ένα σύνολο συναρτήσεων βάσης  $u_1, u_2, \dots, u_N, \dots$  αναπτύσσουμε την  $u$  σε συγκλίνουσα σειρά από την οποία παίρνουμε το άθροισμα

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N c_n u_n(\mathbf{r}), \quad (1.48)$$

όπου  $c_n, n = 1, 2, \dots, N$  είναι οι άγνωστοι συντελεστές.

Οι συναρτήσεις βάσης είναι απλές για τους υπολογισμούς και κατάλληλες για τη γεωμετρία του προβλήματος.

Από τις σχέσεις (1.45) και (1.48) και λόγω της γραμμικότητας του τελεστή  $L$  παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^N c_n L u_n(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}). \quad (1.49)$$

Η (1.49) είναι μία αλγεβρική εξίσωση με  $N$  αγνώστους. Οι εξισώσεις που απαιτούνται για τον υπολογισμό των συντελεστών μπορούν να προκύψουν από την (1.49) με ταύτιση σημείων. Γενικότερα, θεωρούμε ένα σύνολο συναρτήσεων βάσης  $w_m(\mathbf{r})$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$  και ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle g, h \rangle = \int_S g(\mathbf{r}) h(\mathbf{r}) w_m(\mathbf{r}) ds. \quad (1.50)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1.49) με  $w_m$  και ολοκληρώνουμε. Τότε προκύπτει

$$\sum_{n=1}^N c_n a_{mn} = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (1.51)$$

όπου  $a_{mn} = \langle w_m, L u_n \rangle$  και  $f_m = \langle w_m, f \rangle$ . Η (1.51) εκφράζει ένα αλγεβρικό σύστημα της μορφής (1.47) όπου

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,N}, \quad \mathbf{b} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T, \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T. \quad (1.52)$$

Η MoM εφαρμόζεται στην επίλυση προβλημάτων σκέδασης αφού οι συναρτήσεις βάσης μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε να ικανοποιούν και μία συνθήκη ακτινοβολίας. Η μέθοδος εφαρμόστηκε στις εργασίες [28] και [29] αλλά αναπτύχθηκε κυρίως από τον Harrington στο βιβλίο του [30] και αργότερα στην εργασία [31]. Από τότε έχουν γίνει προσπάθειες για κάποιες βελτιώσεις για εφαρμογές σε πιο σύνθετα προβλήματα, [32]. Πρόσφατα έχει αναπτυχθεί μία γενικευμένη μέθοδος των ροπών (General Method of Moments) [33], [34] και [35]. Στην εργασία [36] έχει αναπτυχθεί μία μέθοδος ροπών για ανακατασκευή ενός διηλεκτρικού αντικειμένου στις δύο διαστάσεις. Στο βιβλίο [37] συγκεντρώνονται πολλά στοιχεία για τη MoM.

Με μικρές αλλαγές προκύπτουν άλλες μέθοδοι που εφαρμόζονται στην επίλυση συγκεκριμένων σύνθετων προβλημάτων. Αν στη μέθοδο των ροπών τα σύνολα συναρτήσεων βάσης και βάρους συμπίπτουν τότε προκύπτει η μέθοδος Galerkin στην οποία μειώνεται το υπολογιστικό κόστος αλλά ελαττώνεται η ευελιξία στο πλήθος των προβλημάτων.

### 1.2.2 Μέθοδος βοηθητικών πηγών

Η μέθοδος των βοηθητικών πηγών (Method of Auxiliary Sources - MAS) είναι μία αριθμητική προσεγγιστική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων οριακών τιμών. Το 1967 πρώτος ο V. Kupradze χρησιμοποίησε τη θεμελιώδη λύση του τελεστή Laplace και ανέπτυξε μία προσεγγιστική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων θεωρίας δυναμικού. Αργότερα η εφαρμογή της μεθόδου επεκτάθηκε και σε άλλα προβλήματα φυσικής, όπως και στα προβλήματα κυματικής σκέδασης. Γενικότερα η μέθοδος εφαρμόζεται σε προβλήματα όπου είναι γνωστή η θεμελιώδης λύση. Μία θεμελιώδης λύση  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  εκφράζει στη θέση  $\mathbf{r}$  το αποτέλεσμα της δράσης που παράγεται από ένα σημειακό αίτιο μοναδιαίας έντασης στη θέση  $\mathbf{r}'$ . Στο σημείο  $\mathbf{r}'$  τοποθετείται η βοηθητική πηγή. Η μέθοδος μελετάται διεξοδικά και εφαρμόζεται σε απλά και σύνθετα προβλήματα στα επόμενα κεφάλαια. Τα άγνωστα πεδία (σκεδαζόμενα) αναπτύσσονται σε σειρές ως προς τη θεμελιώδη λύση μεταβάλλοντας τις θέσεις  $\mathbf{r}'_n$  των βοηθητικών πηγών. Από τη σειρά αυτή που συγκλίνει αποκόπτεται ένα πεπερασμένο άθροισμα. Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες του προβλήματος σε συγκεκριμένα σημεία δημιουργείται ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα το οποίο επιλύεται. Εκτενής ανάλυση της μεθόδου παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο.

### 1.2.3 Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method - FEM) είναι μία αριθμητική προσεγγιστική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων οριακών τιμών. Στην αρχή

(1943) χρησιμοποιήθηκε σε προβλήματα μηχανικής και αργότερα (1969) σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητισμού. Ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων στις οποίες η διακριτοποίηση γίνεται μέσω ενός πλέγματος, όπως στις μεθόδους πεπερασμένων διαφορών και πεπερασμένων ολοκληρώσεων. Το πλέγμα είναι ουσιαστικά μία διαμέριση του χώρου λύσεων όπως θα περιγράψουμε εκτενώς στην επόμενη ενότητα.

Στα μικρά σχήματα (στοιχεία) στα οποία χωρίζεται ο χώρος, οι άγνωστες συναρτήσεις προσεγγίζονται από γραμμικούς συνδυασμούς γνωστών συναρτήσεων. Οι συντελεστές προσδιορίζονται από την επίλυση ενός γραμμικού αλγεβρικού συστήματος που προκύπτει με τη συμβολή των οριακών συνθηκών. Ο πίνακας του συστήματος έχει πολλά μηδενικά στοιχεία προσδίδοντας το πλεονέκτημα του χαμηλού υπολογιστικού κόστους. Οι διαστάσεις των στοιχείων του πλέγματος μπορεί να μεταβάλλονται επιτυγχάνοντας αντίστοιχη ακρίβεια. Η διαδικασία αυτή μπορεί να μειώσει περαιτέρω το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου. Η ακρίβεια της μεθόδου αυξάνει με την αύξηση του αριθμού των στοιχείων και ειδικότερα του αριθμού των κορυφών (κόμβων) των στοιχείων, αλλά τότε αυξάνει το υπολογιστικό κόστος.

#### **1.2.4 Τεχνική πεπερασμένων ολοκληρώσεων**

Η τεχνική των πεπερασμένων ολοκληρώσεων (Finite Integral Technique - FIT) είναι μία αριθμητική προσεγγιστική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων αρχικών - οριακών τιμών και βρίσκει εφαρμογή σε προβλήματα προσομοίωσης, διάδοσης και σκέδασης ακουστικών, ηλεκτρομαγνητικών και ελαστικών κυμάτων στο πεδίο συχνότητας και στο πεδίο του χρόνου [38]. Η διακριτοποίηση των εξισώσεων του Maxwell και των καταστατικών σχέσεων γίνεται με τη χρήση ενός συστήματος κλιμακωτών πλεγμάτων.

Η FIT είναι μία αριθμητική προσεγγιστική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων αρχικών - οριακών τιμών. Παρουσιάστηκε για πρώτη φορά το 1977 από τον Weiland στην [39], [40] και αργότερα σε μία σειρά εργασιών η μέθοδος εφαρμόστηκε στην επίλυση προβλημάτων σκέδασης. Η διακριτοποίηση του προβλήματος στηρίζεται στην κατασκευή πλεγμάτων του χώρου στον οποίο εξελίσσεται το κυματικό φαινόμενο. Τα πλέγματα είναι διαφόρων ειδών τετραεδρικά, εξαεδρικά, σφαιρικά και άλλα ανάλογα

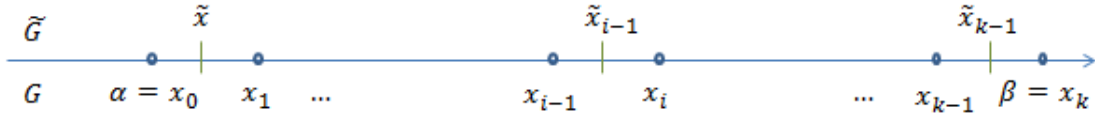
με τα δεδομένα του προβλήματος και το σύστημα συντεταγμένων. Η σημαντική διαφορά από τις άλλες γνωστές μεθόδους έγκειται στο ότι χρησιμοποιεί την ολοκληρωτική μορφή των νόμων του ηλεκτρομαγνητισμού [41], [42], [43] και [44]. Στην εργασία [45] υπάρχουν αποτελέσματα για εφαρμογή της FIT σε ακουστικά, ηλεκτρομαγνητικά και ελαστικά κύματα.

Η διακριτοποίηση των εξισώσεων Maxwell και των καταστατικών σχέσεων γίνεται μέσω ενός συστήματος κλιμακωτών πλεγμάτων  $\{G, \tilde{G}\}$ . Βασικό πλεονέκτημα της FIT είναι η δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση που υπάρχουν κελιά με διαφορετικές φυσικές παραμέτρους του υλικού. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε μεικτά προβλήματα και προβλήματα μετάβασης.

**Κατασκευή πλέγματος.** Στις τρεις διαστάσεις θεωρούμε ένα σύνολο  $G$  το οποίο περιέχει το χώρο υπολογισμού της λύσης του προβλήματος και το διαιρούμε σε ένα πεπερασμένο πλήθος απλών στερεών, των κελιών. Τα κελιά μπορεί να είναι τετράεδρα, εξάεδρα ορθογώνια ή καμπυλόγραμμα σχήματα ίδιων ή διαφορετικών διαστάσεων ή και συνδυασμός αυτών, αρκεί η ένωσή τους να είναι το  $G$  και η τομή ανά δύο διαδοχικών κελιών να είναι μία επιφάνεια, ή έδρα ή ένα τόξο, ή ακμή στα άκρα των οποίων ορίζονται οι κόμβοι.

Στην περίπτωση των δύο διαστάσεων τα κελιά εκφυλίζονται σε διάφορα επίπεδα σχήματα, τρίγωνα, ορθογώνια, κυκλικούς τομείς ενώ οι άλλες έννοιες παραμένουν. Το σύνολο  $G$  με αυτή τη γεωμετρική δομή είναι ένα πλέγμα πάνω στο οποίο γίνεται η διακριτοποίηση των εξισώσεων του Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή. Η επιλογή του κατάλληλου πλέγματος εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος και από το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε. Στη μελέτη των προβλημάτων μας θα χρησιμοποιήσουμε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων και τα πλέγματα θα αποτελούνται από ορθογώνια. Αντίστοιχα πλέγματα χρησιμοποιούμε στις δύο διαστάσεις και στη μία διάσταση.

*Περίπτωση 1D.* Αν το σύνολο αναφοράς είναι το ευθύγραμμο τμήμα  $[\alpha, \beta]$  τότε ένα ομοιόμορφο πλέγμα μπορεί να προκύψει από μία πεπερασμένη διαμέριση του  $[\alpha, \beta]$  σε ισομήκη τμήματα μήκους  $L$ .



Σχήμα 1.3 Πλέγμα σε μία διάσταση

Τα  $k$  ευθύγραμμα τμήματα  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, k - 1$  μήκους  $L_i = x_{i+1} - x_i$  ( $L_1 = L_2 = \dots = L_k$ ) αποτελούν το πλέγμα  $G$  και τα σημεία  $x_i, i = 0, 1, \dots, k$  είναι οι κόμβοι του. Το δυϊκό πλέγμα  $\tilde{G}$  ορίζεται από τα σημεία  $\tilde{x}_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$  και αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα  $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]$ .

*Περίπτωση 2D.* Υποθέτουμε ότι το σύνολο αναφοράς του προβλήματος είναι το ορθογώνιο

$$S = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]. \quad (1.53)$$

Θεωρούμε μία ομοιόμορφη διαμέριση του  $[\alpha, \beta]$  με βήμα  $L_x = x_i - x_{i-1} = \frac{\beta - \alpha}{n}$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta \quad (1.54)$$

και μία διαμέριση του διαστήματος  $[\gamma, \delta]$

$$\gamma = y_0 < y_1 < \dots < y_l = \delta, \quad (1.55)$$

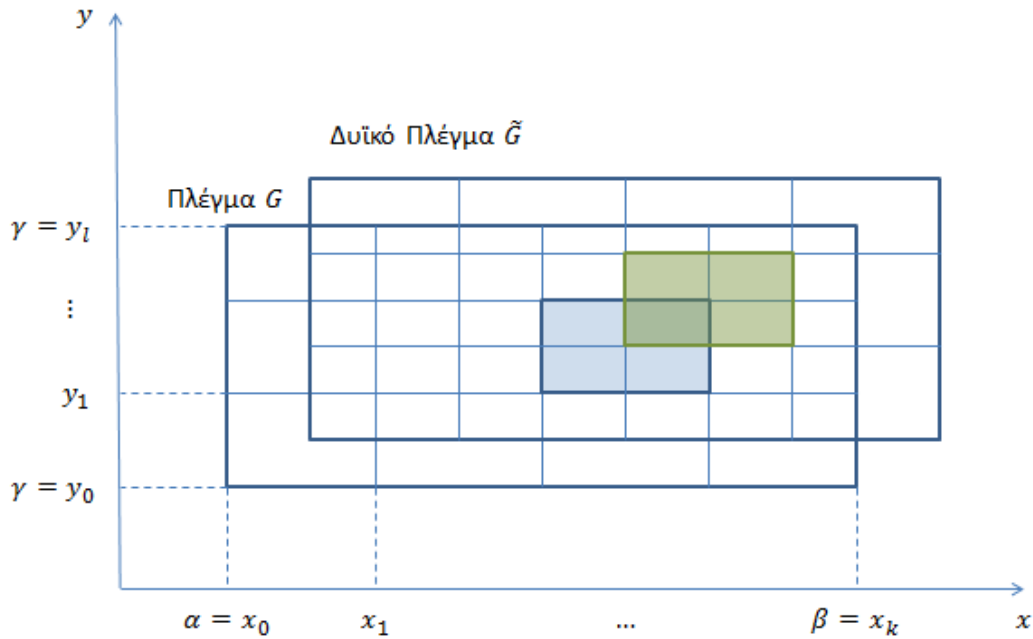
με βήμα  $L_y = y_j - y_{j-1} = \frac{\delta - \gamma}{l}$ .

Μία διαμέριση του ορθογωνίου  $S$  αποτελείται από τα ορθογώνια

$$S_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (1.56)$$



Το πρωτεύον πλέγμα  $G$  αποτελείται από τα ορθογώνια  $S_{ij}$  με πλευρές  $L_x, L_y$  και κόμβους τις κορυφές  $(x_{i-1}, y_{j-1}), (x_{i-1}, y_j), (x_i, y_{j-1}), (x_i, y_j)$ . Το δυϊκό πλέγμα  $\tilde{G}$  αποτελείται από τα ορθογώνια  $\tilde{S}_{ij}$  τα οποία προκύπτουν από τα ορθογώνια  $S_{ij}$  του  $G$  με μεταφορά παράλληλα προς τον  $x$  άξονα κατά  $l_x/2$  και παράλληλα προς τον  $y$  άξονα κατά  $l_y/2$ , δηλαδή οι κορυφές των ορθογωνίων  $\tilde{S}_{ij}$  είναι τα κέντρα των ορθογωνίων  $S_{ij}$ . Οι κόμβοι και οι πλευρές του πλέγματος  $\tilde{G}$  ορίζονται από τα σημεία  $(x_i, y_j)$ .



Σχήμα 1.4 Ορθογώνιο πλέγμα σε 2D

*Περίπτωση 3D.* Αν το σύνολο αναφοράς του προβλήματος είναι το ορθογώνιο στον  $\mathbb{R}^3$

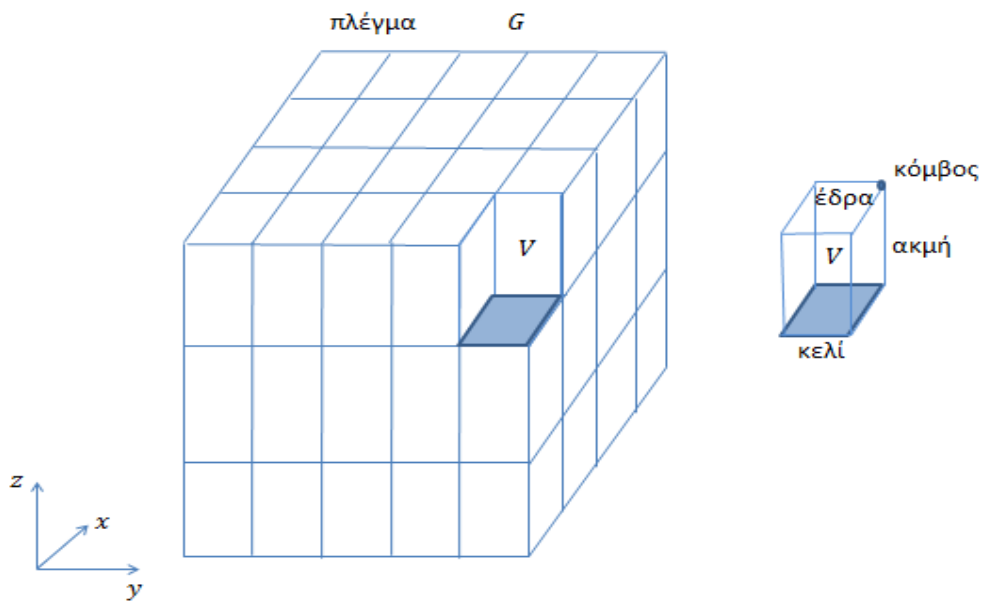
$$V = [x_0, x_n] \times [y_0, y_l] \times [z_0, z_m], \quad (1.57)$$

τότε χρησιμοποιώντας τη διαμέριση των ευθυγράμμων τμημάτων  $[x_0, x_n], [y_0, y_l], [z_0, z_m]$  κατασκευάζουμε τα ορθογώνια στον  $\mathbb{R}^3$

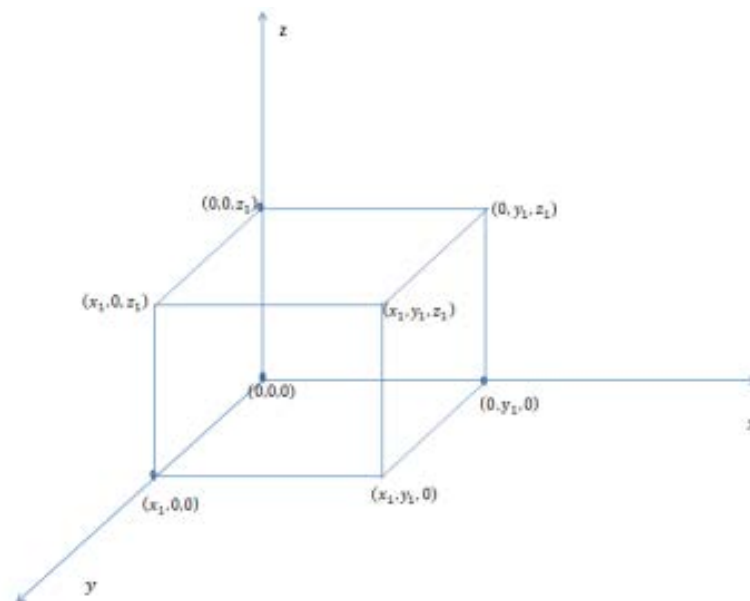
$$V_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k], \quad (1.58)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

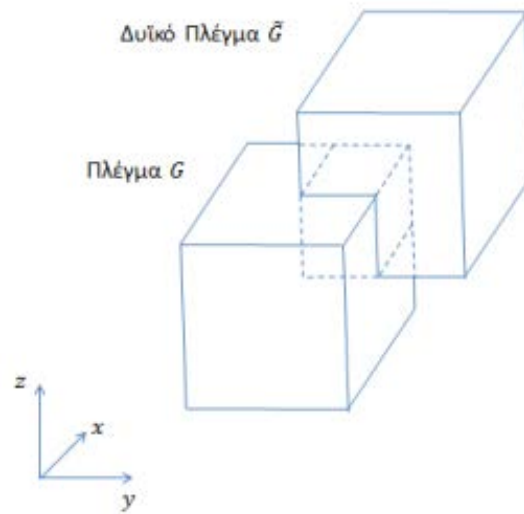
Τα ορθογώνια  $V_{ijk}$  είναι τα κελιά και τα επίπεδα που το περιβάλλουν είναι οι έδρες, οι τομές των εδρών είναι οι ακμές και οι τομές τριών εδρών είναι οι κόμβοι.



Σχήμα 1.5 Ορθογώνιο πλέγμα σε 3D



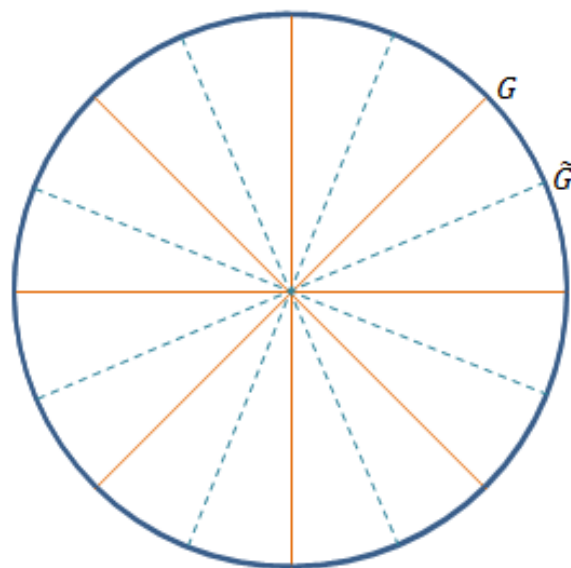
Σχήμα 1.6 Ορθογώνιο κελί



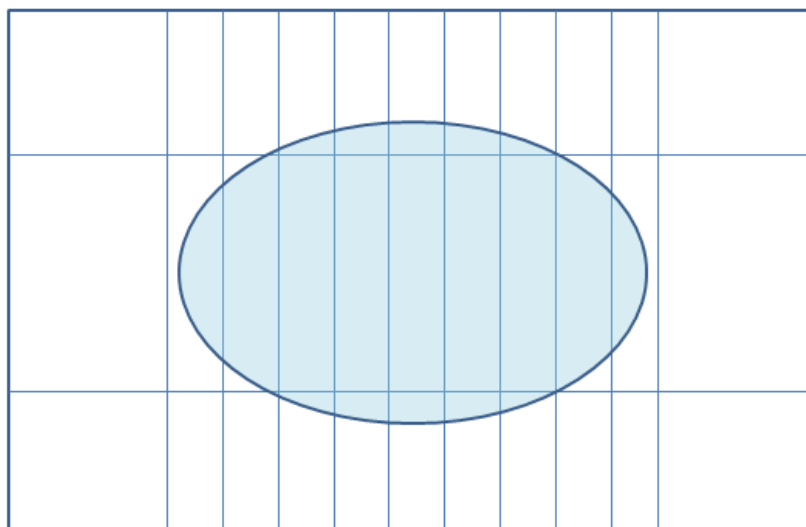
Σχήμα 1.7 Δυϊκά πλέγματα σε 3D

Σημειώνουμε ότι τα κελιά ενός πλέγματος μπορεί να έχουν διάφορα σχήματα όμοια ή συνδυασμός διαφόρων μορφών. Επίσης η πυκνότητα του πλέγματος μπορεί να μεταβάλλεται και να αυξάνεται σε περιοχές όπου επιθυμούμε μεγαλύτερη ακρίβεια. Η δυνατότητα αυτή δίνει ένα πλεονέκτημα της μεθόδου.

Παρουσιάζουμε ενδεικτικά κάποια σχήματα που συχνά χρησιμοποιούμε στις εφαρμογές.



Σχήμα 1.8 Ένα σύστημα πλεγμάτων σε 2D



Σχήμα 1.9 Ένα πλέγμα με κελιά διαφορετικών διαστάσεων

**Οι εξισώσεις του Maxwell σε σύστημα πλεγμάτων.** Στο πρωτεύον πλέγμα  $G$  υπολογίζουμε το ηλεκτρικό δυναμικό κατά μήκος κάθε ακμής  $L$  που δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$e = \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.59)$$

και τη μαγνητική ροή διαμέσου κάθε έδρας  $S$  του  $G$  που δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$b = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds. \quad (1.60)$$

Στο δυϊκό πλέγμα  $\tilde{G}$  κατά μήκος κάθε ακμής  $\tilde{L}$  υπολογίζουμε το μαγνητικό δυναμικό

$$\tilde{h} = \int_{\tilde{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.61)$$

Διαμέσου κάθε επιφάνειας  $\tilde{S}$  του  $\tilde{G}$  ορίζουμε τη διηλεκτρική ροή  $\tilde{d}$  με το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\tilde{d} = \int_{\tilde{S}} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (1.62)$$

και το ηλεκτρικό ρεύμα

$$\tilde{j} = \int_{\tilde{S}} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds. \quad (1.63)$$

Η περιεκτικότητα σε ηλεκτρικό φορτίο κάθε κελιού  $\tilde{V}$  δίνεται από το χωρικό ολοκλήρωμα

$$\tilde{q} = \int_{\tilde{V}} \rho dV. \quad (1.64)$$

Ορίζουμε το διάνυσμα ηλεκτρικού δυναμικού  $\mathbf{e}$  που έχει συντεταγμένες τα ηλεκτρικά δυναμικά που ορίζονται από την (1.59) κατά μήκος όλων των ακμών του πλέγματος. Ομοίως ορίζουμε το διάνυσμα της μαγνητικής ροής  $\mathbf{b}$  από τον τύπο (1.60) διαμέσου όλων των εδρών του πλέγματος.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζονται τα διανύσματα  $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{q}}$  με συντεταγμένες που υπολογίζονται από τους τύπους (1.61), (1.62) και (1.63) αντίστοιχα.

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1.59) - (1.64) και τους νόμους του ηλεκτρομαγνητισμού της §1.1.1 σε ολοκληρωτική μορφή, παίρνουμε

Νόμος Faraday:

$$\sum_j C_{ij} e_j = -\frac{d}{dt} b_i. \quad (1.65)$$

Νόμοι Gauss:

$$\sum_j S_{ij} b_j = 0, \quad (1.66)$$

$$\sum_j \tilde{S}_{ij} \tilde{d}_j = \tilde{q}_i. \quad (1.67)$$

Νόμος Ampère:

$$\sum_j \tilde{C}_{ij} \tilde{h}_j = \frac{d}{dt} \tilde{d}_i + \tilde{j}_i. \quad (1.68)$$

Οι δείκτες  $i, j$  παίρνουν τιμές έτσι ώστε να καλύπτουν όλες τις ακμές και τις έδρες (και μόνο αυτές) που ανήκουν στα συστήματα πλεγμάτων  $G, \tilde{G}$ . Τα στοιχεία  $C_{ij}, \tilde{C}_{ij}, S_{ij}$  και  $\tilde{S}_{ij}$  παίρνουν τιμές  $0, \pm 1$  ανάλογα με τον προσανατολισμό του συστήματος.

Οι παραπάνω εξισώσεις διακριτοποίησης των νόμων Maxwell ολοκληρωτικής μορφής αποτελούν τις εξισώσεις πλέγματος του Maxwell (Maxwell Grid Equations - MGE). Οι εξισώσεις αυτές σε μορφή πινάκων γράφονται:

$$C \cdot \mathbf{e} = -\frac{d}{dt} \mathbf{b}, \quad (1.69)$$

$$S \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (1.70)$$

$$\tilde{C} \cdot \tilde{\mathbf{h}} = \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{j}}, \quad (1.71)$$

$$\tilde{S} \cdot \tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{q}}. \quad (1.72)$$

**Λογισμικό FIT.** Για την επίλυση προβλημάτων σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με την FIT θα χρησιμοποιήσουμε κατάλληλο πρόγραμμα το CST Microwave Studio. Τα βασικά χαρακτηριστικά του προγράμματος είναι:

- εφαρμόζεται σε σύνθετα προβλήματα στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο συχνότητας και μάλιστα σε ένα ευρύ φάσμα συχνοτήτων.
- εξασφαλίζει ικανοποιητική ακρίβεια και ταχύτητα.
- έχει τη δυνατότητα σχεδίασης ενδιάμεσων αποτελεσμάτων, από το προσπίπτον μέχρι το σκεδαζόμενο κύμα σε διάφορα είδη πλεγμάτων και διαστάσεις.
- αν μία υπολογιστική διαδικασία επαναλαμβάνεται μέσα σε ένα πρόβλημα τότε γίνεται παραμετρικοποίηση του προβλήματος. Το πρόγραμμα έχει τη δυνατότητα να εκτελεί μία ρουτίνα μέχρι να εκτελεστούν συγκεκριμένες επαναλήψεις ή η διαφορά δύο διαδοχικών όρων να γίνει αρκετά μικρή.

Σημειώνουμε ότι η FIT είναι γενίκευση μίας άλλης αριθμητικής προσεγγιστικής μεθόδου, της μεθόδου χρονικών πεπερασμένων διαφορών (Finite Difference Time

Domain - FDTD). Την FDTD παρουσίασε ο Yee το 1966 στην [46]. Η διακριτοποίηση του προβλήματος για την FDTD γίνεται με ένα κλιμακωτό πλέγμα όπως στις FEM και FIT. Δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε χρονοεξαρτώμενα σύνθετα προβλήματα. Οι φυσικές παράμετροι  $\epsilon, \mu, \sigma$  του προβλήματος μπορεί να μεταβάλλονται στα διάφορα κελιά του πλέγματος.

Πρόσφατα αποτελέσματα για την ακρίβεια και την ευστάθεια της μεθόδου περιέχονται στην [47].

### 1.2.5 Συνάρτηση Green

Όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση Green ενός προβλήματος, ουσιαστικά έχουμε και την ακριβή λύση του [48]. Για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση Green του προβλήματος σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από έναν σφαιρικό τέλειο αγωγό θα χρησιμοποιήσουμε τις σφαιρικές κυματικές συναρτήσεις. Οι σφαιρικές συναρτήσεις είναι λύσεις της τροποποιημένης εξίσωσης Helmholtz. Τα σκεδαζόμενα πεδία αναπτύσσονται σε σειρές ως προς τις κυματικές συναρτήσεις. Οι συντελεστές των σειρών υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες του προβλήματος λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες ορθογωνιότητας των σφαιρικών κυματικών συναρτήσεων. Σε ειδικές περιπτώσεις όπου ο σκεδαστής έχει ένα απλό γεωμετρικό σχήμα και το προσπίπτον κύμα παράγεται από ένα ηλεκτρικό ή μαγνητικό δίπολο τοποθετημένο σε κατάλληλη θέση, υπολογίζουμε την ακριβή λύση του προβλήματος χρησιμοποιώντας αναπτύγματα σε σφαιρικές κυματικές συναρτήσεις. Συγκεκριμένα το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από σημειακή πηγή τοποθετημένη στη θέση  $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{z}}$  με πόλωση  $\hat{\mathbf{x}}$  εφαρμόζοντας τους τύπους (13.3.68) - (13.3.70) του βιβλίου [49] και έχουμε

$$\mathbf{E}_a^i(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{x}}) = \frac{j}{h_0(ka)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [h_n(ka) \mathbf{N}_{e1n}^1(\mathbf{r}) - \tilde{h}_n(ka) \mathbf{M}_{o1n}^1(\mathbf{r})], \quad (1.73)$$

για  $r < a$ , όπου  $h_n$  είναι μία σφαιρική συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και

$$\tilde{h}_n(x) = x^{-1}h_n(x) + h'_n(x) = x^{-1}[xh_n(x)]'. \quad (1.74)$$

Το σκεδαζόμενο πεδίο το οποίο οφείλεται σε έναν σφαιρικό τέλει αγωγό με κέντρο την αρχή των αξόνων έχει το ανάπτυγμα [6]

$$\mathbf{E}_a^s(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{x}}) = \frac{j}{h_0(ka)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \{a_n h_n \mathbf{N}_{e1n}^3(\mathbf{r}) - \beta_n \tilde{h}_n \mathbf{M}_{o1n}^3(\mathbf{r})\}. \quad (1.75)$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη του τέλει αγωγού πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας  $r = a$  υπολογίζουμε τους συντελεστές

$$a_n = -\frac{j_n(ka) + ka j_n'(ka)}{h_n(ka) + kah_n'(ka)}, \quad (1.76)$$

$$\beta_n = -\frac{j_n(ka)}{h_n(ka)}. \quad (1.77)$$

Στην εργασία [27] έχει μελετηθεί με τη μέθοδο της συνάρτησης Green ένα πρόβλημα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε σύνθετα υλικά [50], [51].



## 2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΠΗΓΩΝ

Η μέθοδος των βοηθητικών πηγών (MAS) είναι μία αριθμητική προσεγγιστική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων οριακών τιμών που χρησιμοποιείται ευρέως στην επίλυση προβλημάτων κυματικής σκέδασης. Το 1976 ο Kurpadze στην εργασία [9] δημοσίευσε μία προσεγγιστική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων θεωρίας δυναμικού χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Laplace. Στα επόμενα χρόνια οι Aleksidze και Vekua [52], [53] καθώς και οι νεότεροι Zaridze [54], [55], [56], [57] και Karkashadze [58], [59] βελτίωσαν και επέκτειναν τη μέθοδο σε προβλήματα κυματικής διάδοσης και σκέδασης. Πολύ σημαντική είναι η συνεισφορά Ελλήνων επιστημόνων στη μελέτη της μεθόδου και διεύρυνση των εφαρμογών της. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες [1], [2], [10], [11], [60], [61], [62] και [63]. Ειδικότερα η μέθοδος εφαρμόζεται στις περιπτώσεις όπου είναι γνωστή η θεμελιώδης λύση του προβλήματος, όπως στη σκέδαση ακουστικών, ηλεκτρομαγνητικών και ελαστικών κυμάτων [14]. Σε μία σειρά

εργασιών [64], [65] και [66] γίνεται μία αυστηρή εκτίμηση του σφάλματος της MAS σε διάφορα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Τη MAS μπορούμε να τη βρούμε στη διεθνή βιβλιογραφία και με άλλες ονομασίες όπως Μέθοδος Θεμελιωδών Λύσεων [16], [17] και Μέθοδος Γενικευμένων Σειρών Fourier. Η αριθμητική προσεγγιστική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων οριακών τιμών, MAS, χρησιμοποιείται ευρέως στην επίλυση προβλημάτων σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

## 2.1 Περιγραφή της μεθόδου

Η μέθοδος των βοηθητικών πηγών στηρίζεται στη θεμελιώδη λύση του διαφορικού τελεστή που περιγράφει το πρόβλημα. Για το λόγο αυτό αναφέρουμε μερικά βασικά στοιχεία για τις θεμελιώδεις λύσεις των τελεστών που εμφανίζονται στα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (ελλειπτικοί τελεστές).

### 2.1.1 Θεμελιώδης λύση

Έστω  $D$  ένα φραγμένο, ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  ή του  $\mathbb{R}^2$ . Θεωρούμε έναν γραμμικό ελλειπτικό διαφορικό τελεστή  $2^{\text{ης}}$  τάξης. Ο τελεστής του Laplace (Λαπλασιανή)

$$L = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.1)$$

είναι χαρακτηριστικός τύπος ελλειπτικού τελεστή. Τέτοιου τύπου τελεστές είναι και αυτοί που εμφανίζονται στην κυματική σκέδαση όπου τα κύματα έχουν ημιτονοειδή μορφή, όπως είναι ο τελεστής Helmholtz  $L = \Delta + k^2$  που εμφανίζεται στα ακουστικά κύματα ( $2D$  ή  $3D$ ) και στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στην περίπτωση  $2D$ . Του ιδίου τύπου είναι ο τελεστής  $L = (\nabla \times \nabla \times) - k^2$  που περιγράφει τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στις  $3D$ .

Μία συνάρτηση  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , λέγεται θεμελιώδης λύση του γραμμικού διαφορικού τελεστής  $L$ , όταν είναι λύση (με την έννοια των κατανομών) της εξίσωσης.

$$L\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.2)$$

όπου  $\delta$  είναι το συναρτησοειδές του Dirac. Το σημείο  $\mathbf{r}'$  είναι πόλος ή ιδιάζον σημείο της  $\Phi$ . Στην ορολογία της MAS το σημείο  $\mathbf{r}'$  είναι θέση βοηθητικής πηγής (Auxiliary source - AS). Αν  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ , τότε η  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  είναι κλασική λύση, δηλαδή ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση  $L\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ .

Η θεμελιώδης λύση  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  εκφράζει στη θέση  $\mathbf{r}$  το αποτέλεσμα της δράσης, που παράγεται από ένα σημειακό αίτιο μοναδιαίας έντασης στη θέση  $\mathbf{r}'$ . Στους διαφορικούς τελεστές που εμφανίζονται στα προβλήματα κυματικής σκέδασης, η θεμελιώδης λύση έχει τη μορφή

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (2.3)$$

δηλαδή μιας συνάρτησης  $G$  που εξαρτάται από την απόσταση των σημείων  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  και προφανώς έχει την ιδιότητα

$$G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = G(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|), \quad (2.4)$$

η οποία είναι γνωστή ως ιδιότητα αμοιβαιότητας.

Αν  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  είναι η θεμελιώδης λύση του τελεστή  $L$  τότε η λύση της εξίσωσης

$$Lu = f, \quad (2.5)$$

δίνεται από τον τύπο

$$u(\mathbf{r}) = \int_D \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'). \quad (2.6)$$

Στη συνέχεια αναφέρουμε θεμελιώδεις λύσεις για τους βασικούς τελεστές που εμφανίζονται στα προβλήματα σκέδασης:

i)  $L = \Delta + k^2$

α) Δύο διαστάσεις:

$$H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (2.7)$$

$$H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (2.8)$$

(κυλινδρικές) συναρτήσεις Hankel μηδενικής τάξης πρώτου και δεύτερου είδους αντιστοίχως. Η  $H_0^{(1)}$  εκφράζει ένα εξερχόμενο κύμα ενώ η  $H_0^{(2)}$  εκφράζει ένα εισερχόμενο κύμα.

β) Τρεις διαστάσεις:

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.9)$$

ii)  $L = (\nabla \times \nabla \times) - k^2$  (Ηλεκτρομαγνητικά κύματα, 3D)

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left( \tilde{I} + \frac{\nabla_r \nabla_r}{k^2} \right) \frac{e^{jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.10)$$

Λεπτομέρειες για τις συναρτήσεις Hankel και τις ασυμπτωτικές τους μορφές μπορεί να βρει κανείς στα βιβλία των Abramowitz και Stegun [67] και των Morse και Feshbach [49].

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι να αναπτύξουμε τις άγνωστες συναρτήσεις του ελλειπτικού προβλήματος ως γραμμικούς συνδυασμούς των θεμελιωδών λύσεων με άγνωστους συντελεστές. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες και η επίλυση του ελλειπτικού προβλήματος ανάγεται στην επίλυση ενός γραμμικού αλγεβρικού συστήματος.

### 2.1.2 Βοηθητικές πηγές

Τα ιδιάζοντα σημεία της θεμελιώδους λύσης, δηλαδή οι βοηθητικές πηγές της MAS θα βρίσκονται εκτός του χώρου λύσης του προβλήματος, αφού στα σημεία αυτά δεν ορίζεται η λύση. Αυτό σημαίνει ότι στα εσωτερικά προβλήματα οι βοηθητικές πηγές θα

βρίσκονται στο εξωτερικό και στα εξωτερικά προβλήματα οι βοηθητικές πηγές θα βρίσκονται στο εσωτερικό, δηλαδή εκτός του πεδίου ορισμού της λύσης. Στα προβλήματα που ορίζονται σε δακτύλιο οι βοηθητικές πηγές βρίσκονται εκατέρωθεν.

Σε πολλά προβλήματα εφαρμογών εκτός από τους συντελεστές (πλάτη) στο ανάπτυγμα των πεδίων με τις θεμελιώδεις λύσεις θέλουμε να υπολογίσουμε και τις θέσεις  $\mathbf{r}_n^\pm$  των βοηθητικών πηγών. Χρησιμοποιούμε μία μη γραμμική μέθοδο βελτιστοποίησης ελαχίστων τετραγώνων. Συγκεκριμένα αν

$$Bu = f|_S, \quad (2.11)$$

είναι η οριακή συνθήκη ενός εσωτερικού προβλήματος και

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N c_n^- \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n^-), \quad (2.12)$$

η λύση του με τη MAS, τότε οι θέσεις  $\mathbf{r}_n^-$  των βοηθητικών πηγών μπορούν να βρεθούν με ελαχιστοποίηση του συναρτησοειδούς

$$T(\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{r}}^-) = \sum_{m=1}^M \left| \sum_{n=1}^N c_n^- \Phi(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n^-) \right|^2, \quad (2.13)$$

όπου  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}^- = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$ .

Η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης  $T$  μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας κατάλληλα προγράμματα ελαχίστων τετραγώνων όπως το MINPACK, MLDIF και LMDER [68] και [69] στο περιβάλλον της Fortran.

### 2.1.3 Προβλήματα οριακών τιμών

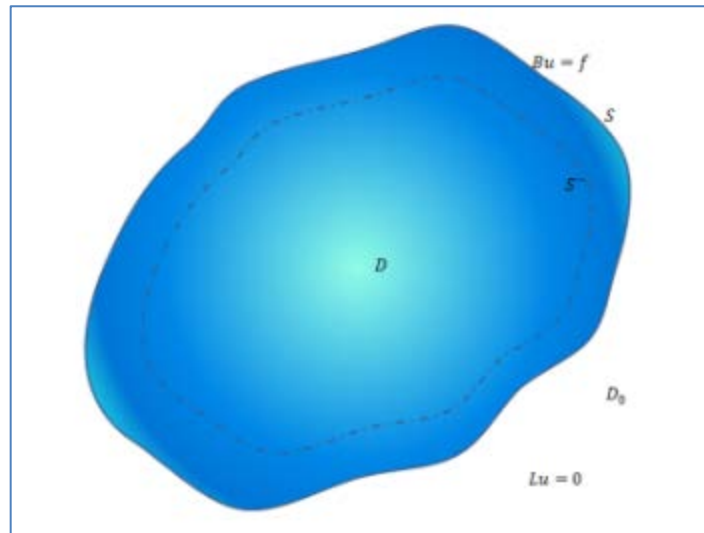
Έστω  $D$  ένα ανοικτό και συνεκτικό φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  ή  $\mathbb{R}^2$  και  $D_0 = \mathbb{R}^3 \setminus D$  ή  $D_0 = \mathbb{R}^2 \setminus D$  και  $S = \partial D$  είναι το σύνορο του  $D$ .

*Εξωτερικό πρόβλημα.* Να βρεθεί συνάρτηση  $u$  που ικανοποιεί μία συνθήκη ακτινοβολίας (στο άπειρο) και

$$(P_1): \begin{cases} Lu = 0 | D_0 \\ Bu = f | S \end{cases}, \quad (2.14)$$

όπου  $B$  είναι ένας οριακός τελεστής (περιγράφει την οριακή συνθήκη) και  $f$  μία γνωστή συνάρτηση που ορίζεται στο σύνορο  $S$  του  $D$ . Για την επίλυση του  $(P_1)$  εφαρμόζουμε την προσεγγιστική μέθοδο των βοηθητικών πηγών, η οποία θεμελιώνεται στην εργασία [9].

Θεωρούμε τα σημεία  $r_1^-, r_2^-, \dots, r_N^-$  που ανήκουν στο  $D$ , δηλαδή δεν βρίσκονται στο εξωτερικό πεδίο  $D_0$  όπου ορίζεται η λύση του  $(P_1)$ . Τα σημεία αυτά θεωρούμε ότι βρίσκονται πάνω σε μία επιφάνεια (ή καμπύλη)  $S^-$ , “ομοιόμορφη” της  $S$  στο εσωτερικό του  $D$  και είναι τα σημεία βοηθητικών πηγών (AS).



Σχήμα 2.1 Εξωτερικό πρόβλημα οριακών τιμών

Θεωρούμε τις θεμελιώδεις λύσεις  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n^-)$  του τελεστή  $L$ , οι οποίες για  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_n^-$  είναι και κλασικές λύσεις της εξίσωσης  $Lu = 0$  και ικανοποιούν μία συνθήκη ακτινοβολίας στο άπειρο. Ο Kurgradze στην [9] έχει αποδείξει ότι οι συναρτήσεις  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n^-)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  αποτελούν, ένα πλήρες σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων λύσεων της εξίσωσης  $Lu = 0$ . Επομένως λόγω και της γραμμικότητας του τελεστή  $L$ , η συνάρτηση

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n^-), \quad (2.15)$$

ως γραμμικός συνδυασμός λύσεων, είναι επίσης λύση της εξίσωσης  $Lu = 0$ . Στις εφαρμογές, χρησιμοποιώντας μεθόδους βελτιστοποίησης, επιλέγουμε κατάλληλο πεπερασμένο πλήθος  $N$  θεμελιωδών λύσεων. Για την επίλυση των προβλημάτων σκέδασης θα χρησιμοποιήσουμε την προσεγγιστική μέθοδο των βοηθητικών πηγών με πεπερασμένο άθροισμα [9]

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N c_n \Phi_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n^-). \quad (2.16)$$

Οι συντελεστές  $c_n$  υπολογίζονται από την εφαρμογή της οριακής συνθήκης στη  $u(\mathbf{r})$ , δηλαδή

$$Bu(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N c_n B\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n^-) = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S. \quad (2.17)$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε  $\mathbf{r}$  πάνω στην επιφάνεια  $S$ . Για τον υπολογισμό των συντελεστών  $c_n$  επιλέγουμε πεπερασμένο πλήθος  $M$  σημείων  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_M$  CP της επιφάνειας  $S$  και κατασκευάζουμε το αλγεβρικό σύστημα (δηλαδή γίνεται διακριτοποίηση της (2.17))

$$\sum_{n=1}^N c_n B\Phi(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n^-) = f(\mathbf{r}_m), \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (2.18)$$

Αν το πλήθος  $M$  των CP ικανοποιεί τη σχέση  $M = N$  τότε οι συντελεστές υπολογίζονται με την επίλυση του γραμμικού αλγεβρικού συστήματος

$$\sum_{n=1}^N c_n a_{mn} = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, M = N, \quad (2.19)$$

όπου

$$\begin{aligned} a_{mn} &= B\Phi(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n^-), \quad m = 1, 2, \dots, M = N, \\ f_m &= f(\mathbf{r}_m), \quad m = 1, 2, \dots, M = N. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Αναλυτικά το σύστημα (2.19) γράφεται

$$\left. \begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1N}c_N &= f_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2N}c_N &= f_2 \\ &\vdots \\ a_{N1}c_1 + a_{N2}c_2 + \cdots + a_{NN}c_N &= f_N \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

και με χρήση πινάκων-διανυσμάτων:

$$A \cdot \mathbf{c} = \mathbf{F}, \quad (2.22)$$

όπου ο πίνακας  $A$  είναι

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,N} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & \ddots & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

και τα διανύσματα  $\mathbf{F}$  και  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Από τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος οριακών τιμών ( $\Pi_1$ ) με τη MAS, προκύπτουν τα ακόλουθα ερωτήματα.

- i) Ποιο είναι το πλήθος και ποια η κατανομή των βοηθητικών πηγών  $\mathbf{r}_n^-$  πάνω στη βοηθητική επιφάνεια  $S^-$ .
- ii) Ποιο είναι το πλήθος και ποια η κατανομή των σημείων  $\mathbf{r}_m$  που επιλέγουμε πάνω στην επιφάνεια  $S$ .

Απάντηση στα ερωτήματα αυτά δίνει η μαθηματική ανάλυση εφαρμόζοντας μεθόδους βελτιστοποίησης όπως αναπτύσσεται στις εργασίες [70], [71] και [72]. Ένα άρθρο επισκόπησης όπου μπορεί να βρει κανείς προσεγγιστικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων οριακών τιμών που βασίζονται σε εφαρμογές των θεμελιωδών λύσεων είναι το [14].

Γενικά, όταν είναι  $M \geq N$  τότε το σύστημα (2.21) επιλύεται με μία αριθμητική μέθοδο π.χ. τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss. Όταν  $M < N$  τότε εφαρμόζεται μία μέθοδος

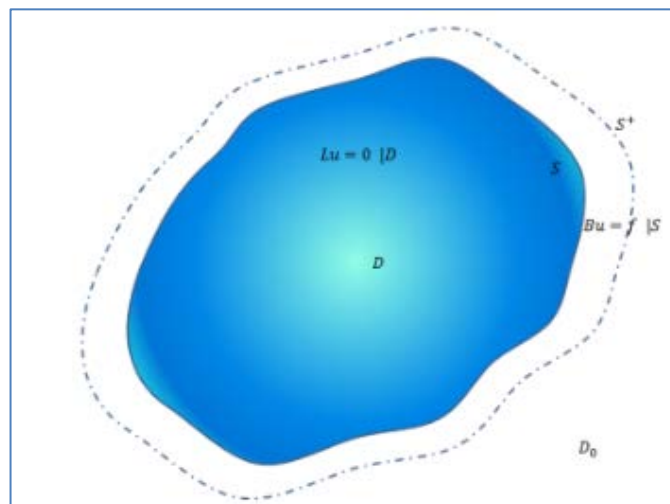


ελαχίστων τετραγώνων. Στις εφαρμογές θα λαμβάνουμε  $M = N$ . Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι η θεμελιώδης λύση ικανοποιεί και τη συνθήκη ακτινοβολίας.

Στην επίλυση του γραμμικού συστήματος (2.22) σημαντικό ρόλο έχει ο δείκτης της κατάστασης του πίνακα  $A$ ,  $cond(A)$ . Στην ιδανική περίπτωση  $cond(A) = 1$ , ο πίνακας είναι διαγώνιος και η επίλυση του συστήματος απλή. Σε μεγάλες τιμές του  $cond(A)$  δημιουργείται πρόβλημα αστάθειας το οποίο αντιμετωπίζεται με μεθόδους βελτιστοποίησης.

**Εσωτερικό πρόβλημα.** Με παρόμοιο τρόπο επιλύονται και τα εσωτερικά προβλήματα με τις εξής διαφορές:

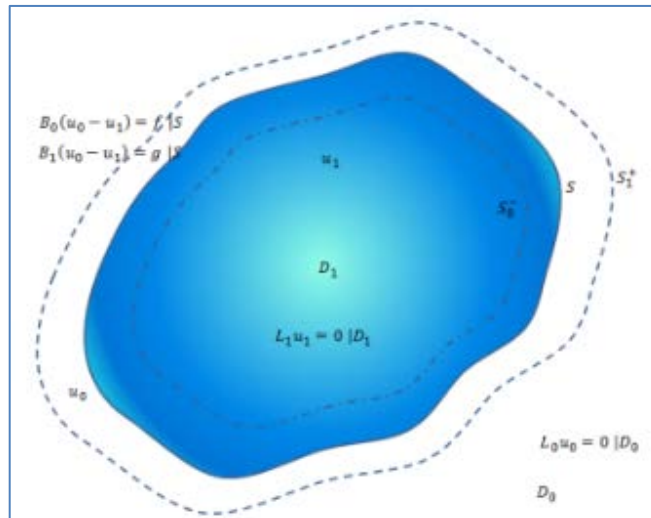
- i) Η λύση  $u$  εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός λύσεων  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_N^+)$  της εξίσωσης  $Lu = 0$ , οι οποίες δεν απαιτείται να ικανοποιούν συνθήκη ακτινοβολίας αλλά να είναι ομαλές σε μία περιοχή του μηδενός.
- ii) Η βοηθητική επιφάνεια  $S^+$  πάνω στην οποία βρίσκονται τα σημεία  $\mathbf{r}_n^+$  τώρα είναι στο  $D_0$  δηλαδή στο εξωτερικό του  $D$ .



Σχήμα 2.2 Εσωτερικό πρόβλημα οριακών τιμών

**Πρόβλημα μετάβασης.** Στα προβλήματα μετάβασης (transmission conditions) υπάρχουν δύο επιφάνειες βοηθητικών πηγών: μία στο χώρο  $D_0$  για τη λύση του  $D_1$  και μία στο χώρο  $D_1$  για τη λύση του  $D_0$  (Σχήμα 2.3). Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τις θεμελιώδεις λύσεις  $\Phi_0$  και  $\Phi_1$  στο εξωτερικό  $D_0$  και στο εσωτερικό  $D_1$  αντίστοιχα. Οι

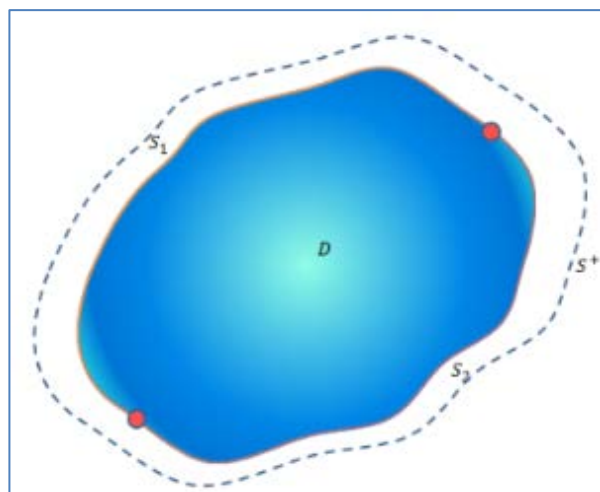
επιφάνειες των βοηθητικών πηγών θα συμβολίζονται  $S_0^-$  για τα AS του  $D_0$  και  $S_1^+$  για τα AS του  $D_1$ , δηλαδή  $S_0^-$  θα είναι η βοηθητική επιφάνεια όταν ζητάμε λύση εξωτερικά της επιφάνειας  $S$ , ενώ  $S_1^+$  η βοηθητική επιφάνεια όταν αναζητάμε λύση εσωτερικά της  $S$ .



Σχήμα 2.3 Πρόβλημα μετάβασης

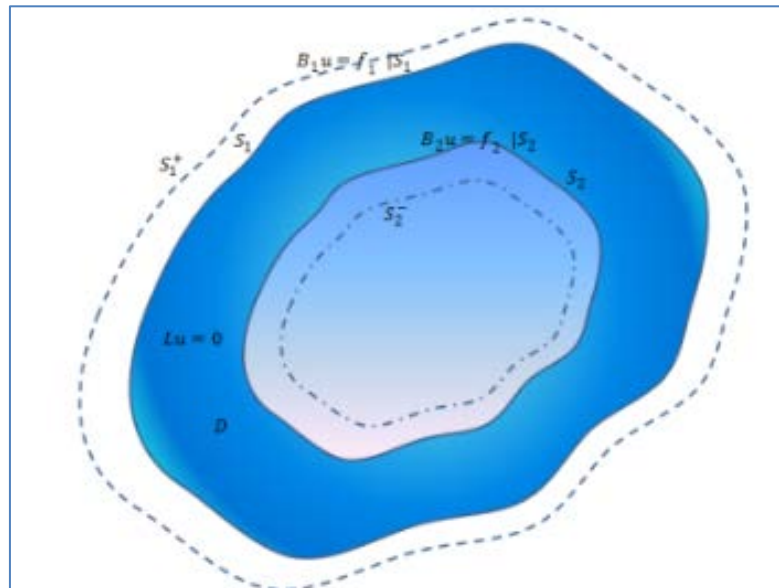
**Μεικτά προβλήματα.** Στα μεικτά προβλήματα μελετάμε δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις όπως φαίνονται στα σχήματα.

1. Στο Σχήμα 2.4 (διαφορετικές συνθήκες σε δύο τμήματα του συνόρου) οι βοηθητικές πηγές κατανέμονται σε μία βοηθητική επιφάνεια σύμφωνα με την περιγραφή που έχει γίνει για τα εσωτερικά και εξωτερικά προβλήματα.



Σχήμα 2.4 Μεικτό πρόβλημα

2. Στο Σχήμα 2.5 (δακτύλιος) οι βοηθητικές πηγές κατανέμονται σε δύο βοηθητικές επιφάνειες  $S_1^+$  και  $S_2^-$  που βρίσκονται εκτός του σκεδαστή  $D$ .



Σχήμα 2.5 Μεικτό πρόβλημα σε δακτύλιο

Η MAS εφαρμόζεται σε διάφορες τροποποιημένες μορφές στην επίλυση ευθέων και αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες [10], [11], [12], [13], [64], [65], [73] για το ευθύ πρόβλημα και [1], [16], [74] για το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Τροποποιημένες μορφές της MAS για μεικτά προβλήματα σκέδασης, έχουμε αναπτύξει στο κεφάλαιο 3.

## 2.2 Εφαρμογές στη σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Η MAS εφαρμόζεται με επιτυχία στα ευθέα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στις περιπτώσεις  $2D$  (θεωρώντας TM ή TE κύματα) και  $3D$  (χρησιμοποιώντας θεμελιώδη λύση σε δυαδική μορφή).

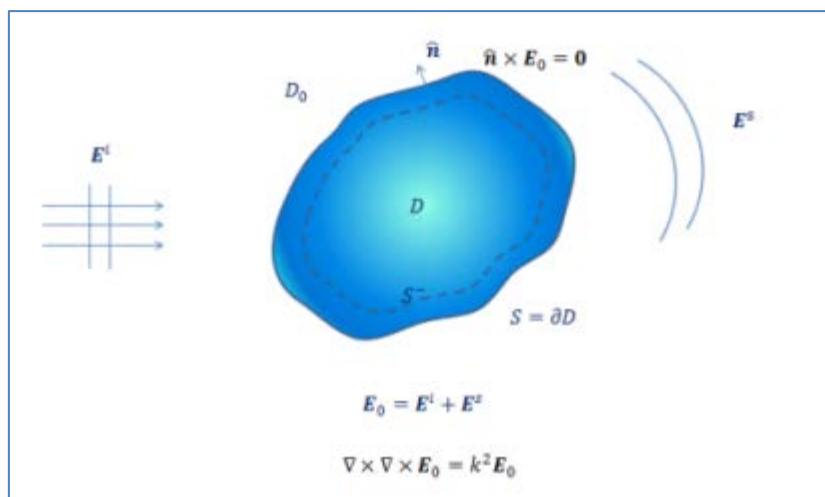
### 2.2.1 Τέλειος αγωγός

Το πρόβλημα σκέδασης από τέλειο αγωγό έχει μελετηθεί εκτενώς με τη MAS και έχουν δημοσιευθεί σημαντικά αποτελέσματα. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες [1], [54], [65], [60] και [75]. Στην ενότητα αυτή γίνεται μία σύντομη περιγραφή προβλημάτων τα οποία γενικεύονται και επιλύονται σε επόμενα κεφάλαια.

**Περίπτωση 3D.** Το πρόβλημα του τέλειου αγωγού και του διηλεκτρικού στις 3D έχει μελετηθεί στην εργασία [76], όπου επίσης γίνεται μία επισκόπηση της MAS και παρουσιάζονται πλεονεκτήματα της μεθόδου έναντι της MoM. Παρουσιάζουμε μία ανάλυση του προβλήματος την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο στη μελέτη πολυστρωματικών μοντέλων σκέδασης με πυρήνα. Το πρόβλημα του τέλειου αγωγού στις 3D διατυπώνεται ως προς το ηλεκτρικό πεδίο

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_0 &= k^2 \mathbf{E}_0 \text{ στο } D_0, \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_0 &= \mathbf{0} \text{ στο } \partial D, \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

όπου  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s$  είναι το ολικό εξωτερικό πεδίο (Σχήμα 2.6). Το σκεδαζόμενο πεδίο  $\mathbf{E}^s$  ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας των Silver-Müller.



Σχήμα 2.6 Σκέδαση H/M κυμάτων από τέλειο αγωγό σε 3D

Για τον υπολογισμό του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου  $\mathbf{E}^s$  θα εφαρμόσουμε τη MAS χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη λύση σε δυαδική μορφή (1.27) [7] και [76]

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left( \tilde{\mathbf{I}} + \frac{\nabla \nabla}{k^2} \right) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (2.26)$$

όπου

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (2.27)$$

είναι θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz  $\Delta u + k^2 u = 0$ . Το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο γράφεται:

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n^-) \cdot \mathbf{c}_n, \quad (2.28)$$

όπου  $\mathbf{r}_n^-$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  είναι σημεία της βοηθητικής επιφάνειας  $S^-$ . Οι διανυσματικοί συντελεστές  $\mathbf{c}_n$  θα υπολογιστούν από την οριακή συνθήκη του τέλει αγωγού.

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S, \quad (2.29)$$

δηλαδή

$$\sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{n}} \times [\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n^-) \cdot \mathbf{c}_n] = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S. \quad (2.30)$$

Επιλέγοντας στην επιφάνεια  $S$  του σκεδαστή τις τιμές CP,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_M$ ,  $M \geq N$ , παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{n}} \times [\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n^-) \cdot \mathbf{c}_n] = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_m), \quad m = 1, 2, \dots, M = N, \quad (2.31)$$

η οποία γράφεται

$$\sum_{n=1}^N [\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n^-)] \cdot \mathbf{c}_n = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_m), \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (2.32)$$

και αν θέσουμε

$$\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_n^-) = \tilde{\mathbf{A}}_{mn}, \quad -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_m) = \mathbf{F}_m, \quad (2.33)$$

παίρνουμε το σύστημα

$$\sum_{n=1}^N \tilde{\mathbf{A}}_{mn} \cdot \mathbf{c}_n = \mathbf{F}_m, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (2.34)$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{11} \cdot \mathbf{c}_1 + \tilde{\mathbf{A}}_{12} \cdot \mathbf{c}_2 + \dots + \tilde{\mathbf{A}}_{1N} \cdot \mathbf{c}_N &= \mathbf{F}_1, \\ &\vdots \\ \tilde{\mathbf{A}}_{N1} \cdot \mathbf{c}_1 + \tilde{\mathbf{A}}_{N2} \cdot \mathbf{c}_2 + \dots + \tilde{\mathbf{A}}_{NN} \cdot \mathbf{c}_N &= \mathbf{F}_N, \end{aligned} \quad (2.35)$$

ή

$$\mathbb{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{F}, \quad (2.36)$$

όπου

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} & \dots & \tilde{\mathbf{A}}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{A}}_{N1} & \tilde{\mathbf{A}}_{N2} & \dots & \tilde{\mathbf{A}}_{NN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Τύποι και ιδιότητες των δυαδικών που χρησιμοποιούμε αναφέρονται στο Παράρτημα.

**Περίπτωση 2D.** Στις δύο διαστάσεις το ολικό εξωτερικό πεδίο  $E_0$  (βαθμωτό) είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz (TM κύματα)

$$\Delta E_0 + k^2 E_0 = 0 \quad (2.38)$$

και ικανοποιεί την οριακή συνθήκη

$$E_0 = E^i + E^s = 0, \quad \text{στην } S. \quad (2.39)$$

Το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο  $E^s$  ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld (1.44). Εφαρμόζοντας τη διαδικασία όπως στις 3D αλλά με θεμελιώδη λύση τη συνάρτηση Hankel

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (2.40)$$

καταλήγουμε στο αλγεβρικό σύστημα

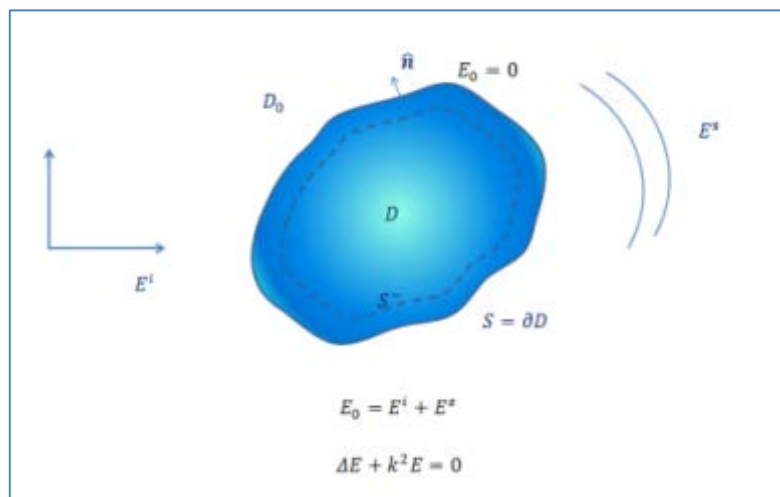
$$A \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}, \quad (2.41)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

με

$$a_{mn} = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n^-|), \quad b_m = -E^i(\mathbf{r}_m), \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (2.43)$$

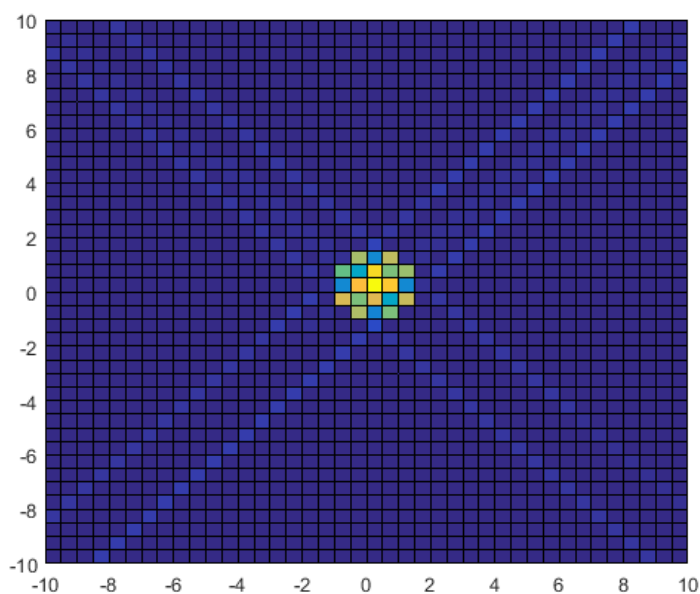


Σχήμα 2.7 Σκέδαση H/M κυμάτων από τέλει αγωγό με τη MAS σε 2D

**Αριθμητική εφαρμογή.** Η εφαρμογή της μεθόδου υλοποιείται σε περιβάλλον Matlab. Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση *cpitime* για να προσδιορίσουμε το χρόνο που χρειάστηκε ο κώδικας μας για να εκτελεστεί. Θα θεωρήσουμε δύο κύκλους, ο πρώτος με ακτίνα 2 cm που είναι ο στόχος μας και ο δεύτερος με ακτίνα μικρότερη όπου θα τοποθετηθούν οι βοηθητικές πηγές. Στην πρώτη περίπτωση οι βοηθητικές πηγές τοποθετούνται σε κύκλο με ακτίνα 1,2 cm. Αρχικά και δύο κύκλοι είναι ομόκεντροι με κέντρο το (0,0). Θα διαμερίσουμε τους κύκλους σε 101 ισαπέχοντα σημεία. Στόχος μας

είναι να επιλύσουμε το γραμμικό σύστημα της μορφής  $A \cdot c = b$ . Ο πίνακας  $A$  περιέχει τις τιμές της θεμελιώδους λύσης της εξίσωσης Helmholtz στα CP και στα AS και έχει διαστάσεις  $101 \times 101$ . Η συνάρτηση Hankel υλοποιείται με τη συνάρτηση στο Matlab *besselh*. Το διάνυσμα  $b$  περιέχει τις τιμές του  $E^i$ , το οποίο είναι ένα επίπεδο κύμα με  $k = 1$  και διεύθυνση διάδοσης  $(0,1)$ . Έχει διάσταση  $1 \times 101$  και παίρνουμε το ανάστροφό του. Η επίλυση του γραμμικού συστήματος επιτυγχάνεται με την εντολή  $c = a \setminus b$ . Το σύστημα έχει επιλυθεί και επόμενος στόχος μας είναι να απεικονίσουμε γραφικά σε μία περιοχή το σκεδαζόμενο πεδίο. Δημιουργούμε μία περιοχή από  $-10 \text{ cm}$  έως το  $10 \text{ cm}$  με κανάβο  $0,5 \text{ cm} \times 0,5 \text{ cm}$  με την εντολή *meshgrid*.

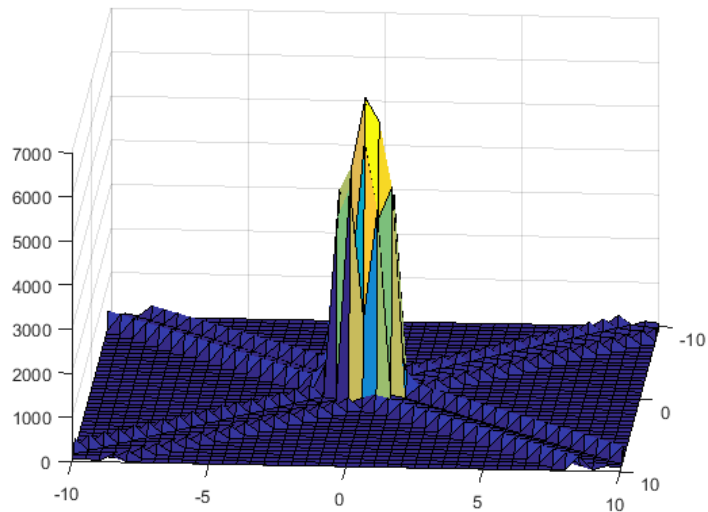
Στις συντεταγμένες αυτής της περιοχής, βρίσκουμε το σκεδαζόμενο πεδίο και με την εντολή *surf* προβάλλουμε γραφικά, στην περιοχή που ορίσαμε, το μέτρο του σκεδαζόμενου πεδίου.



Σχήμα 2.8 Σκεδαζόμενο πεδίο από κυκλικό τέλει αγωγό με κέντρο το  $(0,0)$  σε 2D

Ο χρόνος εκτέλεσης του προγράμματος που περιγράψαμε ήταν 1.1076 sec. Στο Σχήμα 2.8 βλέπουμε στην περιοχή που απεικονίσαμε το σκεδαζόμενο πεδίο, σε 2D, με διαφορετικό χρώμα να διαγράφεται ο σκεδαστής που ήταν κύκλος με ακτίνα 2 και κέντρο το  $(0,0)$ .

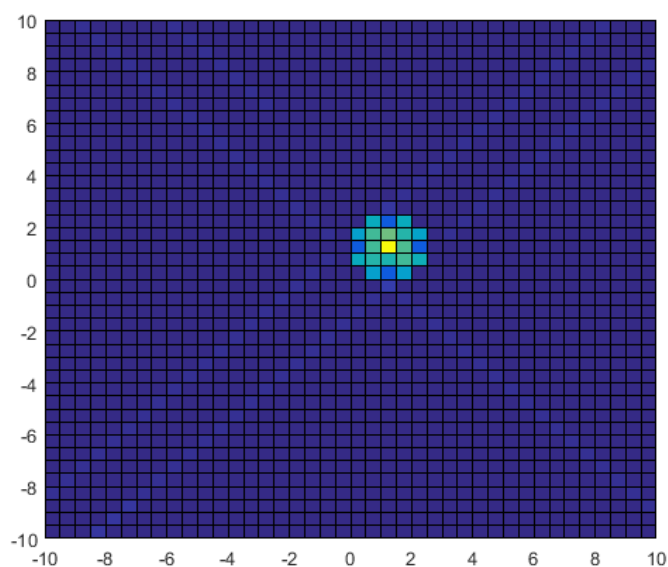




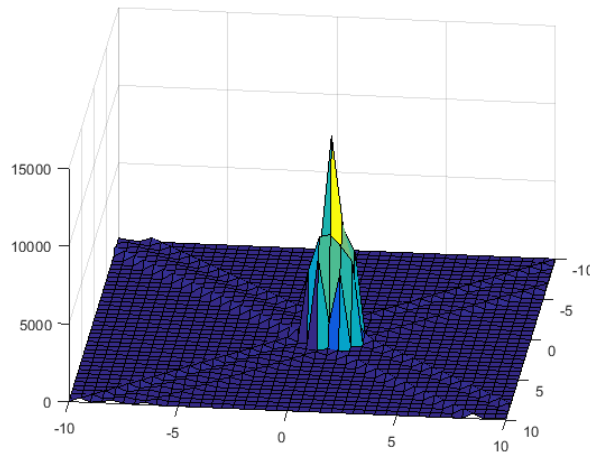
Σχήμα 2.9 Σκεδαζόμενο πεδίο από κυκλικό τέλει αγωγό με κέντρο το  $(0,0)$  σε 3D

Στο Σχήμα 2.9 στην ίδια περιοχή απεικονίζουμε το σκεδαζόμενο πεδίο με το ύψος του διαγράμματος να αντιστοιχεί στην έντασή του. Παρατηρείται ότι στην περιφέρεια του κύκλου οι τιμές της έντασης είναι πολύ μεγαλύτερες σε σχέση με τα υπόλοιπα σημεία. Αυτό είναι το χαρακτηριστικό που μας προσδιορίζει και τη θέση του αντικειμένου.

**Σενάριο 2<sup>ο</sup>.** Αλλάζοντας το κέντρο των κύκλων από  $(0,0)$  σε  $(1,1)$  και διατηρώντας τις ίδιες ακτίνες επαναλαμβάνουμε το πείραμα και παίρνουμε τα παρακάτω.



Σχήμα 2.10 Σκεδαζόμενο πεδίο από κυκλικό τέλει αγωγό με κέντρο το  $(1,1)$  σε 2D



Σχήμα 2.11 Σκεδαζόμενο πεδίο από κυκλικό τέλει αγωγό με κέντρο το (1,1) σε 3D

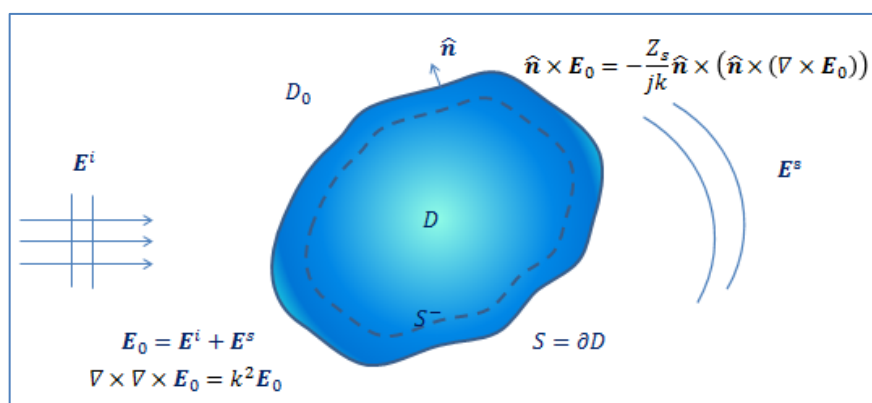
Ο χρόνος εκτέλεσης *crutime* είναι 1.0452 sec. Στο Σχήμα 2.11 και Σχήμα 2.12 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα μετατοπισμένα στο κέντρο (1,1).

Η διαδικασία που περιγράψαμε με κατάλληλες προσαρμογές μπορεί να εφαρμοστεί και άλλα είδη σκεδαστών.

### 2.2.2 Σκεδαστής με επιφανειακή εμπέδηση

Το ολικό εξωτερικό πεδίο  $\mathbf{E}_0$  ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_0 &= k^2 \mathbf{E}_0 \text{ στο } D_0, \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_0 &= -\frac{Z_s}{jk} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{E}_0)) \text{ στο } \partial D, \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$



Σχήμα 2.12 Σκέδαση Η/Μ κυμάτων από σκεδαστή με επιφάνεια εμπέδησης με τη MAS

Στο πρόβλημα αυτό η MAS εφαρμόζεται όπως στον τέλει αγωγό. Το αντίστοιχο πρόβλημα σε  $2D$  έχει μελετηθεί στην εργασία [73].

### 2.2.3 Διηλεκτρικός σκεδαστής

Στην περίπτωση  $2D$  το πρόβλημα του διηλεκτρικού σκεδαστή έχει μελετηθεί σε διάφορες μορφές, χρησιμοποιώντας TM ή TE και τη θεμελιώδη λύση της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz. Στο επόμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας λύση σε δυαδική μορφή έχουμε μελετήσει το πρόβλημα του διηλεκτρικού σε  $3D$  με τη MAS. Στη συνέχεια της ενότητας παραθέτουμε μία σύντομη περιγραφή των αποτελεσμάτων σε  $2D$  για σύγκριση με τη λύση σε  $3D$ .

**Περίπτωση  $2D$ .** Το ολικό ηλεκτρικό εξωτερικό και εσωτερικό πεδίο  $E_0$  και  $E_1$  ικανοποιούν την εξίσωση Helmholtz με κυματικούς αριθμούς  $k_0$  και  $k_1$  αντίστοιχα και τις συνθήκες διαπερατότητας στην επιφάνεια  $S$

$$E_0 = E_1, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} E_0 = \frac{\partial}{\partial n} E_1. \quad (2.46)$$

Αναπτύσσουμε τα πεδία  $E_0$  και  $E_1$  συναρτήσει των θεμελιωδών λύσεων και έχουμε  $H_0^{(2)}(k_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  και  $H_0^{(2)}(k_1|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  αντίστοιχα.

$$E_0(\mathbf{r}) = E^i(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{N_0} c_{0n} H_0^{(2)}(k_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^-|), \quad (2.47)$$

$$E_1(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_1} c_{1n} H_0^{(2)}(k_1|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^+|). \quad (2.48)$$

όπου  $\mathbf{r}_n^-$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_0$  και  $\mathbf{r}_n^+$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_1$  είναι οι βοηθητικές πηγές για τα πεδία  $E_0$  και  $E_1$  αντίστοιχα.

Η διακριτοποίηση του προβλήματος γίνεται θεωρώντας τα σημεία  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_M \in S$  CP και εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες (2.45) και (2.46)

$$\sum_{n=1}^{N_0} c_{0n} H_0^{(2)}(k_0 |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n^-|) - \sum_{n=1}^{N_1} c_{1n} H_0^{(2)}(k_1 |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n^+|) = -E^i(\mathbf{r}_m). \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_0} c_{0n} \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(k_0 |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n^-|) - \sum_{n=1}^{N_1} c_{1n} \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(k_1 |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n^+|) \\ = -\frac{\partial}{\partial n} E^i(\mathbf{r}_m). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Το γραμμικό σύστημα (2.49), (2.50) γράφεται

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ \widetilde{A}_0 & \widetilde{A}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{c}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \widetilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

όπου οι πίνακες  $A_0, A_1, \widetilde{A}_0$  και  $\widetilde{A}_1$  ορίζονται

$$A_0 = \left[ H_0^{(2)}(k_0 |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n^-|) \right]_{m=1,2,\dots,M, n=1,2,\dots,N_0}, \quad (2.52)$$

$$A_1 = -\left[ H_0^{(2)}(k_1 |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n^+|) \right]_{m=1,2,\dots,M, n=1,2,\dots,N_1}, \quad (2.53)$$

$$\widetilde{A}_0 = \frac{\partial}{\partial n} A_0, \quad \widetilde{A}_1 = \frac{\partial}{\partial n} A_1. \quad (2.54)$$

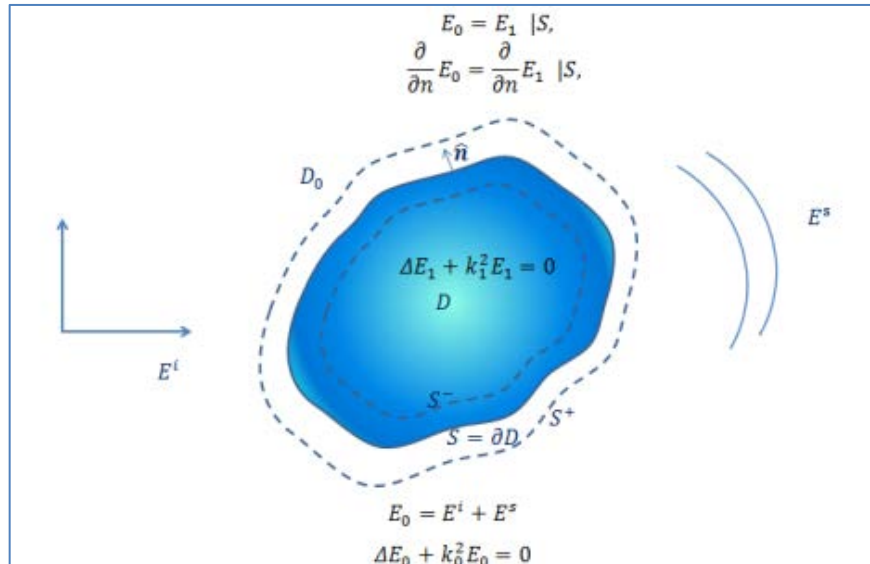
Στις δύο τελευταίες σχέσεις οι κάθετες παράγωγοι αναφέρονται στις συναρτήσεις  $H_0^{(2)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^-|), \left[ H_0^{(2)}(k_1 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^+|) \right]$  ως προς  $\mathbf{r}$ .

Τα διανύσματα  $\mathbf{c}_0$  και  $\mathbf{c}_1$  έχουν συνιστώσες τους συντελεστές (πλάτη) των πεδίων

$$\mathbf{c}_0 = \begin{bmatrix} c_{01} \\ c_{02} \\ \vdots \\ c_{0N_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{1N_1} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

και τα διανύσματα  $\mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{b}}$  έχουν συνιστώσες τις τιμές του προσπίπτοντος και της κάθετης παραγωγού του στα CP

$$\mathbf{b} = - \begin{bmatrix} E^i(\mathbf{r}_1) \\ E^i(\mathbf{r}_2) \\ \vdots \\ E^i(\mathbf{r}_M) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{b}} = \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{b}. \quad (2.56)$$



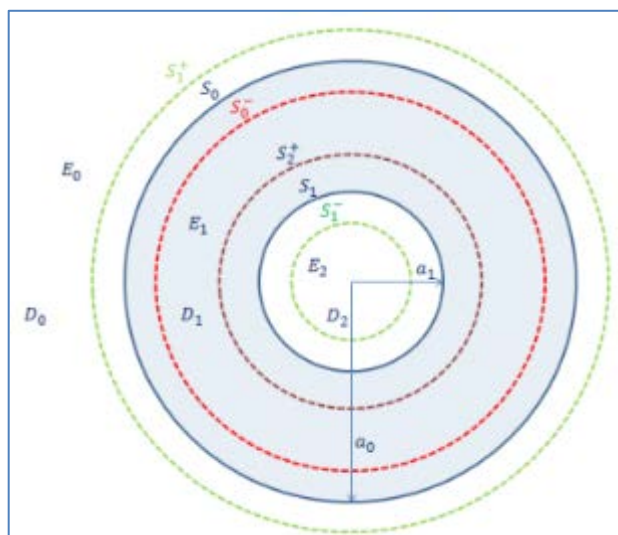
Σχήμα 2.13 Σκέδαση Η/Μ κυμάτων από ένα διηλεκτρικό με τη MAS σε 2D

## 2.2.4 Διηλεκτρικός σκεδαστής με πυρήνα

Είναι ένα χρήσιμο μοντέλο σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Έχει εφαρμογές στον υπολογισμό του σκεδαζόμενου κύματος (ευθύ πρόβλημα). Αποτελείται από ένα διηλεκτρικό στρώμα στο εσωτερικό του οποίου υπάρχει ένας πυρήνας που μπορεί να είναι είτε τέλειος αγωγός είτε να περιβάλλεται από μία επιφάνεια εμπέδησης ή να είναι ένα άλλο διηλεκτρικό.

Επίσης αν στον πυρήνα εφαρμόζεται οριακή συνθήκη εμπέδησης (impedance) μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά εμπέδησης και να μελετήσουμε τις φυσικές ιδιότητες του πυρήνα λύνοντας ένα αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης. Επιπλέον μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην ανίχνευση θαμμένων αντικειμένων (αντίστροφο πρόβλημα) π.χ. ανίχνευση ενός πλαστικού κυλινδρικού σωλήνα στο εσωτερικό του οποίου υπάρχει μία χάλκινη ράβδος. Η μελέτη θα γίνει στις δύο διαστάσεις θεωρώντας εγκάρσια μαγνητικά κύματα ( $TM^z$ ) και οι διατομές θα είναι κυκλικές.

Θεωρούμε δύο κυκλικούς ομοαξονικούς κυλίνδρους απείρου μήκους με ακτίνες  $a_0$  και  $a_1$  για τον εξωτερικό και τον εσωτερικό αντίστοιχα. Ο χώρος  $D_1$  μεταξύ των δύο κυλίνδρων αποτελείται από ομοιογενές ισότροπο διηλεκτρικό υλικό ηλεκτρικής επιτρεπτότητας  $\epsilon_1$  και μαγνητικής διαπερατότητας  $\mu_1$ . Ο εσωτερικός κύλινδρος  $D_2$ , δηλαδή ο πυρήνας της διάταξης έχει αντίστοιχες σταθερές  $\epsilon_2, \mu_2$ . Ο εξωτερικός μη φραγμένος χώρος  $D_0$  έχει αντίστοιχες σταθερές  $\epsilon_0, \mu_0$ , [77].



Σχήμα 2.14 Πολυστρωματικό πρόβλημα σε 2D

Αν  $E_0, E_1$  είναι τα ολικά ηλεκτρικά πεδία στον εξωτερικό χώρο  $D_0$  και στο στρώμα  $D_1$  αντίστοιχως και  $E_2$  στον πυρήνα  $D_2$  στην περίπτωση του διηλεκτρικού πυρήνα, τότε τα πεδία ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\Delta E_i + k_i^2 E_i = 0 \mid D_i, \quad i = 0,1,2, \quad (2.57)$$

όπου

$$k_i = \omega \sqrt{\epsilon_i \mu_i}, \quad i = 0,1,2, \quad (2.58)$$

είναι οι κυματικοί αριθμοί στο χωρίο  $D_i$ ,  $i = 0,1,2$ . Οι διαχωριστικές καμπύλες είναι  $S_0$  η εξωτερική και  $S_1$  η εσωτερική.

Σε πολικές συντεταγμένες  $(\rho, \varphi)$  οι καμπύλες  $S_0$  και  $S_1$  (περιφέρειες κύκλων με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνες  $a_0$  και  $a_1$ ) έχουν τις διανυσματικές εξισώσεις.

$$S_0: \mathbf{r}_0 = (a_0 \cos \varphi_0, a_0 \sin \varphi_0), \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi), \quad (2.59)$$

$$S_1: \mathbf{r}_1 = (a_1 \cos \varphi_1, a_1 \sin \varphi_1), \quad \varphi_1 \in [0, 2\pi), \quad \alpha_1 < \alpha_0. \quad (2.60)$$

Τα σημεία των βοηθητικών πηγών (AS) κατανέμονται στις βοηθητικές καμπύλες  $S_0^-$  (εκτός του  $D_0$ , στο χώρο  $D_1$ ),  $S_1^-$  (εκτός του  $D_1$ , στο χώρο  $D_2$ ),  $S_1^+$  (εκτός του  $D_1$ , στο χώρο  $D_0$ ) και  $S_2^+$  (εκτός του  $D_2$ , στο χώρο  $D_1$ ) έτσι ώστε να βρίσκονται εκτός των πεδίων ορισμού των αντιστοίχων λύσεων. Μία απλή κατάλληλη επιλογή βοηθητικών πηγών σημείων πάνω στις βοηθητικές επιφάνειες προκύπτει με τη διαίρεση των κύκλων σε ισαπέχοντα σημεία. Συγκεκριμένα μπορούμε να επιλέξουμε:

$$S_0^-: \mathbf{r}_{0n}^- = (a_0^- \cos \varphi_{0n}^-, a_0^- \sin \varphi_{0n}^-), \quad \varphi_{0n}^- = \frac{2\pi(n-1)}{N_0^-}, \quad n = 1, 2, \dots, N_0^-, \quad (2.61)$$

$$S_1^+: \mathbf{r}_{1n}^+ = (a_1^+ \cos \varphi_{1n}^+, a_1^+ \sin \varphi_{1n}^+), \quad \varphi_{1n}^+ = \frac{2\pi(n-1)}{N_1^+}, \quad n = 1, 2, \dots, N_1^+, \quad (2.62)$$

$$S_1^-: \mathbf{r}_{1n}^- = (a_1^- \cos \varphi_{1n}^-, a_1^- \sin \varphi_{1n}^-), \quad \varphi_{1n}^- = \frac{2\pi(n-1)}{N_1^-}, \quad n = 1, 2, \dots, N_1^-, \quad (2.63)$$

$$S_2^+: \mathbf{r}_{2n}^+ = (a_2^+ \cos \varphi_{2n}^+, a_2^+ \sin \varphi_{2n}^+), \quad \varphi_{2n}^+ = \frac{2\pi(n-1)}{N_2^+}, \quad n = 1, 2, \dots, N_2^+, \quad (2.64)$$

Χρησιμοποιώντας τις βοηθητικές πηγές  $\mathbf{r}_{0n}^-$ ,  $\mathbf{r}_{1n}^\pm$ ,  $\mathbf{r}_{2n}^+$ , τις θεμελιώδεις λύσεις και εφαρμόζοντας τη MAS τα πεδία  $E_0, E_1$  καθώς και το  $E_2$  για την περίπτωση διηλεκτρικού πυρήνα, αναπτύσσονται:

$$E_0(\rho, \varphi) = E^i(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{N_0^-} c_{0n}^- G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{0n}^-), \quad (2.65)$$

$$E_1(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{N_1^-} c_{1n}^- G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{1n}^-) + \sum_{n=1}^{N_1^+} c_{1n}^+ G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{1n}^+), \quad (2.66)$$

$$E_2(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{N_2^+} c_{2n}^+ G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{2n}^+), \quad (2.67)$$

όπου

$$G_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}^\pm) = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_i |\mathbf{r} - \mathbf{r}^\pm|), \quad (2.68)$$

στις περιοχές  $D_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  αντίστοιχα.

Εφαρμόζουμε τις συνθήκες μετάβασης στα  $CP$   $\mathbf{r}_{0m}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M_0$  και  $\mathbf{r}_{1m}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M_1$  τα οποία επιλέγονται πάνω στους κύκλους  $S_0, S_1$  αντίστοιχα με πολικές συντεταγμένες

$$\mathbf{r}_{0m} = (\alpha_0 \cos \varphi_{0m}, \alpha_0 \sin \varphi_{0m}), \quad \varphi_{0m} = \frac{2\pi(m-1)}{M_0}, \quad m = 1, 2, \dots, M_0. \quad (2.69)$$

$$\mathbf{r}_{1m} = (\alpha_1 \cos \varphi_{1m}, \alpha_1 \sin \varphi_{1m}), \quad \varphi_{1m} = \frac{2\pi(m-1)}{M_1}, \quad m = 1, 2, \dots, M_1. \quad (2.70)$$

Οι συνθήκες μετάβασης που ισχύουν στη διαχωριστική καμπύλη  $S_0$  δίνουν τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} E^i(\mathbf{r}_{0m}) + \sum_{n=1}^{N_0^-} c_{0n}^- G_0(\mathbf{r}_{0m}, \mathbf{r}_{0n}^-) \\ = \sum_{n=1}^{N_1^-} c_{1n}^- G_1(\mathbf{r}_{0m}, \mathbf{r}_{1n}^-) + \sum_{n=1}^{N_1^+} c_{1n}^+ G_1(\mathbf{r}_{0m}, \mathbf{r}_{1n}^+), \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} E^i(\mathbf{r}_{0m}) + \frac{\partial}{\partial n} \sum_{n=1}^{N_0^-} c_{0n}^- G_0(\mathbf{r}_{0m}, \mathbf{r}_{0n}^-) \\ = \beta_1 \frac{\partial}{\partial n} \sum_{n=1}^{N_1^-} c_{1n}^- G_1(\mathbf{r}_{0m}, \mathbf{r}_{1n}^-) + \beta_1 \frac{\partial}{\partial n} \sum_{n=1}^{N_1^+} c_{1n}^+ G_1(\mathbf{r}_{0m}, \mathbf{r}_{1n}^+), \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\sum_{n=1}^{N_1^-} c_{1n}^- G_1(\mathbf{r}_{1m}, \mathbf{r}_{1n}^-) + \sum_{n=1}^{N_1^+} c_{1n}^+ G_1(\mathbf{r}_{1m}, \mathbf{r}_{1n}^+) = 0. \quad (2.73)$$

Στην περίπτωση του διηλεκτρικού πυρήνα η οριακή συνθήκη (2.73) αντικαθίσταται από τις συνθήκες μετάβασης



$$\sum_{n=1}^{N_1^-} c_{1n}^- G_1(\mathbf{r}_{1m}, \mathbf{r}_{1n}^-) + \sum_{n=1}^{N_0^+} c_{1n}^+ G_1(\mathbf{r}_{1m}, \mathbf{r}_{0n}^+) = \sum_{n=1}^{N_2^+} c_{2n}^+ G_2(\mathbf{r}_{1m}, \mathbf{r}_{2n}^+), \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \sum_{n=1}^{N_1^-} c_{1n}^- G_1(\mathbf{r}_{1m}, \mathbf{r}_{1n}^-) + \frac{\partial}{\partial n} \sum_{n=1}^{N_1^+} c_{1n}^+ G_1(\mathbf{r}_{1m}, \mathbf{r}_{1n}^+) \\ = \beta_2 \frac{\partial}{\partial n} \sum_{n=1}^{N_2^+} c_{2n}^+ G_2(\mathbf{r}_{1m}, \mathbf{r}_{2n}^+). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Από τις εξισώσεις (2.71) - (2.73) προκύπτει το αλγεβρικό σύστημα για την περίπτωση του τέλει αγωγού πυρήνα.

$$\begin{bmatrix} A_{00}^- & -A_{01}^- & -A_{01}^+ \\ \widetilde{A}_{00}^- & -\widetilde{A}_{01}^- & -\widetilde{A}_{01}^+ \\ 0 & A_{11}^- & A_{11}^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^- \\ \mathbf{c}_1^- \\ \mathbf{c}_1^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \widetilde{b}_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

όπου

$$A_{ij}^\pm = [G_j(\mathbf{r}_{im}, \mathbf{r}_{jn}^\pm)]_{m=1,2,\dots,M_i, n=1,2,\dots,N_j^\pm}, \quad (2.77)$$

$$\widetilde{A}_{ij}^\pm = \left[ \frac{\partial}{\partial n} G_j(\mathbf{r}_{im}, \mathbf{r}_{jn}^\pm) \right]_{m=1,2,\dots,M_i, n=1,2,\dots,N_j^\pm}, \quad (2.78)$$

$$\mathbf{c}_0^- = \begin{bmatrix} c_{01}^- \\ c_{02}^- \\ \vdots \\ c_{0N_0^-} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1^- = \begin{bmatrix} c_{11}^- \\ c_{12}^- \\ \vdots \\ c_{1N_1^-} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1^+ = \begin{bmatrix} c_{11}^+ \\ c_{12}^+ \\ \vdots \\ c_{1N_1^+} \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

Από τις (2.71), (2.72) και τις (2.74), (2.75) προκύπτει το αλγεβρικό σύστημα για την περίπτωση του διηλεκτρικού πυρήνα.

$$\begin{bmatrix} A_{00}^- & -A_{01}^- & -A_{01}^+ & 0 \\ \widetilde{A}_{00}^- & -\widetilde{A}_{01}^- & -\widetilde{A}_{01}^+ & 0 \\ 0 & A_{11}^- & A_{11}^+ & -A_{12}^+ \\ 0 & \widetilde{A}_{11}^- & \widetilde{A}_{11}^+ & -\widetilde{A}_{12}^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^- \\ \mathbf{c}_1^- \\ \mathbf{c}_1^+ \\ \mathbf{c}_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \widetilde{b}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.80)$$

όπου

$$A_{ij}^{\pm} = [G_j(\mathbf{r}_{im}, \mathbf{r}_{jn}^{\pm})]_{\substack{i=0,1, \quad j=0,1,2, \quad i \leq j \\ m=1,2,\dots,M_i, \quad n=1,2,\dots,N_j^{\pm}}} \quad (2.81)$$

και

$$\mathbf{c}_2^+ = \begin{bmatrix} c_{21}^+ \\ c_{22}^+ \\ \vdots \\ c_{2N_1^+}^+ \end{bmatrix}, \quad (2.82)$$

στην περίπτωση του διηλεκτρικού πυρήνα.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε ένα πρόβλημα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από έναν πολυστρωματικό σκεδαστή και θα περιγράψουμε τη διαδικασία επίλυσης του με τη MAS.

# 3 ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΤΗΣ MAS

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται τροποποιήσεις και γενικεύσεις της MAS και εφαρμόζονται στην επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων εφαρμογών. Το πρόβλημα του διηλεκτρικού σκεδαστή μελετάται στην περίπτωση  $3D$  χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη λύση σε δυαδική μορφή. Επίσης έχει μελετηθεί και ένας διστρωματικός σκεδαστής πυρήνα σε  $2D$ . Το πρόβλημα αυτό έχει γενικευτεί σε έναν πολυστρωματικό σκεδαστή. Το πρόβλημα του θαμμένου αντικειμένου σε ένα στρωματοποιημένο έδαφος έχει επίσης μελετηθεί. Στην περίπτωση ενός σκεδαστή με τρία τουλάχιστον στρώματα (ή στρωματοποιημένο έδαφος) οι βοηθητικές πηγές των πεδίων που ορίζονται στα δύο ακραία στρώματα και βρίσκονται στο ενδιάμεσο στρώμα συμπίπτουν.

### 3.1 Πολυστρωματικά μοντέλα σκέδασης

Τα τελευταία χρόνια υπάρχουν αρκετά σημαντικές εφαρμογές των πολυστρωματικών μοντέλων σε προβλήματα σκέδασης διαφόρων κυματικών πεδίων (ακουστικών, ηλεκτρομαγνητικών και ελαστικών). Ένας πολυστρωματικός σκεδαστής αποτελείται από διαπερατά στρώματα π.χ. στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι στρώματα διηλεκτρικού με διαφορετικές φυσικές ιδιότητες (ηλεκτρική επιτρεπτότητα, μαγνητική διαπερατότητα). Το ένα στρώμα περιβάλλει το άλλο και στο εσωτερικό όλων (συνήθως) υπάρχει ένας πυρήνας διαπερατός ή μη. Τέτοια προβλήματα από μαθηματική άποψη είναι “καλά τοποθετημένα”. Στην παρούσα διατριβή μας ενδιαφέρει η επίλυση τέτοιων προβλημάτων, ευθέων και αντιστρόφων, με τη MAS. Σε κάποιες περιπτώσεις αναπτύσσεται μία τροποποιημένη μέθοδος βοηθητικών πηγών κατάλληλη για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Η MAS έχει χρησιμοποιηθεί στην επίλυση πολυστρωματικών προβλημάτων. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες [77], όπου έχει επιλυθεί το πρόβλημα σκέδασης από έναν σκεδαστή δύο διηλεκτρικών στρωμάτων και την [15] όπου μελετάται η σκέδαση από έναν σκεδαστή με διηλεκτρικά στρώματα πλήθους  $N$ . Επίσης στην [78] γίνεται ανακατασκευή πολυστρωματικών μέσων σε 3D. Εφαρμογές πολυστρωματικών μοντέλων έχουμε στην κατασκευή κεραιών, οι οποίες συνήθως αποτελούνται από αγωγούς (πυρήνες) που περιβάλλονται από διηλεκτρικά στρώματα.

Επίσης, στην ανίχνευση ενός αντικειμένου από το radar ένα ρεαλιστικό μοντέλο αποτελείται από πολλά διαπερατά υλικά, δηλαδή ο στόχος προσεγγίζεται ικανοποιητικά από έναν πολυστρωματικό σκεδαστή με πυρήνα. Σημαντικές εφαρμογές έχουμε και στην ιατρική για διάγνωση και θεραπεία ασθενειών, δεδομένου ότι πολλά ανθρώπινα όργανα (π.χ. ο εγκέφαλος) μπορούν να προσεγγιστούν από έναν πολυστρωματικό σκεδαστή. Ένας πολυστρωματικός σκεδαστής μπορεί να παίξει το ρόλο ενός “ρυθμιστή” σκεδαστή. Αν μεταβάλλουμε τις διαστάσεις των στρωμάτων ή τις τιμές των φυσικών παραμέτρων μπορούμε να έχουμε την επιθυμητή ένταση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στον πυρήνα του σκεδαστή. Από μαθηματικής άποψης ένας πολυστρωματικός σκεδαστής μπορεί να θεωρηθεί ως ένας κατά τμήματα ομοιογενής σκεδαστής. Αν το πλήθος των στρωμάτων είναι πολύ μεγάλο, τότε ένας

πολυστρωματικός σκεδαστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τις μελέτες προβλημάτων σκέδασης από μη ομοιογενείς σκεδαστές.

Χαρακτηριστική περίπτωση έχουμε κατά την ανίχνευση αντικειμένων μέσα στο έδαφος, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε “στρωματοποιημένο”.

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε διάφορα ηλεκτρομαγνητικά πολυστρωματικά μοντέλα και θα λύσουμε ευθέα και αντίστροφα προβλήματα που αντιστοιχούν σε αυτά. Βασικός μας στόχος είναι η χρησιμοποίηση αυτών των μοντέλων για την ανίχνευση θαμμένων αντικειμένων.

### 3.1.1 Διηλεκτικό σε τρεις διαστάσεις

Αν ονομάσουμε  $D_1$  το εσωτερικό και  $D_0$  το εξωτερικό του σκεδαστή αντίστοιχα και με δείκτες 0 και 1 συμβολίσουμε τα μεγέθη και τις φυσικές παραμέτρους στους αντίστοιχους χώρους  $D_0$  και  $D_1$ , τότε το πρόβλημα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από έναν διηλεκτικό σκεδαστή διατυπώνεται (μόνο ως προς το ηλεκτρικό πεδίο) ως εξής.

Διατύπωση του προβλήματος. Να βρεθούν τα πεδία  $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1$  που ικανοποιούν

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_0 - k_0^2 \mathbf{E}_0 &= \mathbf{0} | D_0, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1 - k_1^2 \mathbf{E}_1 &= \mathbf{0} | D_1, \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_0 &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1 | S, \\ \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{E}_0 &= \frac{\mu_0}{\mu_1} (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{E}_1) | S, \\ \mathbf{E}_0 &= \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} [\hat{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{E}^s) + jkr \mathbf{E}^s] &= \mathbf{0}, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

ομοιόμορφα ως προς όλες τις διευθύνσεις  $\hat{\mathbf{r}}$ .

Για την εφαρμογή της MAS, στον εξωτερικό χώρο  $D_0$  χρησιμοποιούμε το σκεδαζόμενο πεδίο  $\mathbf{E}^s$ , το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση

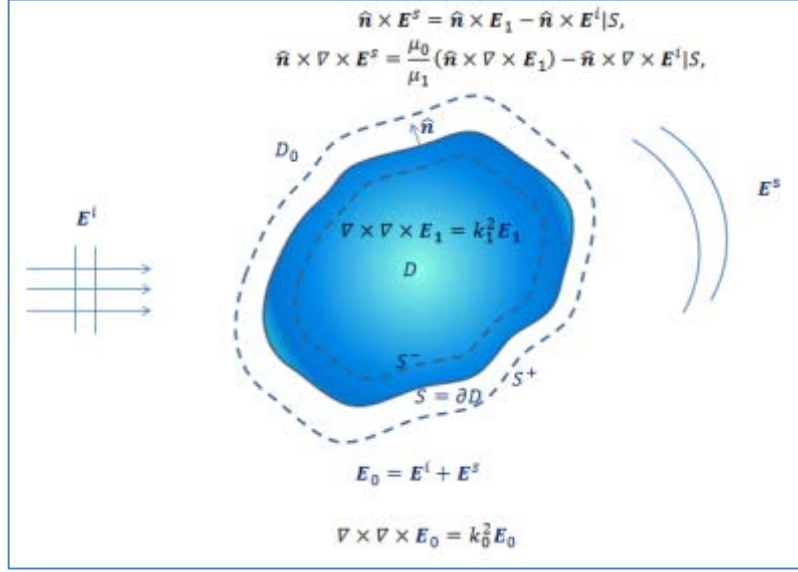
$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^s - k_0^2 \mathbf{E}^s = \mathbf{0} | D_0, \quad (3.2)$$

και τις συνθήκες μετάβασης

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1 - \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i|_S, \quad (3.3)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{E}^s = \frac{\mu_0}{\mu_1} (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{E}_1) - \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{E}^i|_S, \quad (3.4)$$

Αναπτύσσουμε τα ηλεκτρικά πεδία  $\mathbf{E}^s$  και  $\mathbf{E}_1$  συναρτήσει (γραμμικός συνδυασμός) θεμελιωδών λύσεων  $\Phi_0$  και  $\Phi_1$  στους χώρους  $D_0$ ,  $D_1$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 3.1 Σκέδαση Η/Μ κυμάτων από ένα διηλεκτικό με τη MAS σε 3D

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_0} \tilde{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{0n}^-) \cdot \mathbf{c}_n^+, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_1} \tilde{G}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{1n}^+) \cdot \mathbf{c}_n^-, \quad (3.6)$$

όπου

$$\tilde{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left( I + \frac{\nabla \nabla}{k_0^2} \right) \Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (3.7)$$

$$\tilde{G}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left( I + \frac{\nabla \nabla}{k_1^2} \right) \Phi_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (3.8)$$

$$\Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{jk_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{jk_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (3.9)$$

$$\Phi_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{jk_1|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{jk_1|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (3.10)$$

θεμελιώδεις λύσεις των εξισώσεων Helmholtz  $\Delta u + k_0 u = 0$  και  $\Delta u + k_1 u = 0$  αντιστοίχως. Εκφράζουμε τα πεδία  $\mathbf{E}^s, \mathbf{E}_1$ .

Οι άγνωστοι συντελεστές  $\mathbf{c}_n^+, \mathbf{c}_n^-, n = 1, 2, \dots, N$  θα υπολογιστούν από τις συνθήκες διαπερατότητας (transmission conditions).

$$\sum_{n=1}^{N_0} \hat{\mathbf{n}} \times [\tilde{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{0n}^-) \cdot \mathbf{c}_n^+] = \sum_{n=1}^{N_1} \hat{\mathbf{n}} \times [\tilde{G}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{1n}^+) \cdot \mathbf{c}_n^-] - \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}), \quad (3.11)$$

$$\sum_{n=1}^{N_0} \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times [\tilde{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{0n}^-) \cdot \mathbf{c}_n^+] = \frac{\mu_0}{\mu_1} \sum_{n=1}^{N_1} \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times [\tilde{G}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{1n}^+) \cdot \mathbf{c}_n^-] - \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}), \quad (3.12)$$

όπου τα σημεία  $\mathbf{r}_{0n}^-$  και  $\mathbf{r}_{1n}^+$  είναι στις βοηθητικές επιφάνειες  $S^-$  και  $S^+$  στο εσωτερικό και το εξωτερικό του σκευαστή αντίστοιχα. Για  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_M$  πάνω στην επιφάνεια  $S$  παίρνουμε:

$$\sum_{n=1}^{N_0} [\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{G}_0(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_{0n}^-)] \cdot \mathbf{c}_n^+ - \sum_{n=1}^{N_1} [\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{G}_1(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_{1n}^+)] \cdot \mathbf{c}_n^- = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_m), \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_0} [\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \tilde{G}_0(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_{0n}^-)] \cdot \mathbf{c}_n^+ - \frac{\mu_0}{\mu_1} \sum_{n=1}^{N_1} [\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \tilde{G}_1(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_{1n}^+)] \cdot \mathbf{c}_n^- \\ = -\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_m). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Αν θέσουμε

$$\tilde{A}_{mn}^+ = \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{G}_0(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_{0n}^-), \quad \tilde{A}_{mn}^- = \hat{\mathbf{n}} \times \tilde{G}_1(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_{1n}^+), \quad (3.15)$$

$$\tilde{B}_{mn}^+ = \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \tilde{G}_0(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_{0n}^-), \quad \tilde{B}_{mn}^- = \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \tilde{G}_1(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_{1n}^+), \quad (3.16)$$

$$\mathbf{P}_m = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_m), \quad \mathbf{Q}_m = -\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_m), \quad (3.17)$$

το σύστημα γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{N_0} \tilde{A}_{mn}^+ \cdot \mathbf{c}_n^+ - \sum_{n=1}^{N_1} \tilde{A}_{mn}^- \cdot \mathbf{c}_n^- = \mathbf{P}_m, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (3.18)$$

$$\sum_{n=1}^{N_0} \tilde{B}_{mn}^+ \cdot \mathbf{c}_n^+ - \sum_{n=1}^{N_1} \tilde{B}_{mn}^- \cdot \mathbf{c}_n^- = \mathbf{Q}_m, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (3.19)$$

Σε μορφή πινάκων το σύστημα (3.18) και (3.19) γράφεται

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^+ & \tilde{A}^- \\ \tilde{B}^+ & \tilde{B}^- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

όπου

$$\tilde{A}^+ = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^+ & \cdots & \tilde{A}_{1N_0}^+ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{N_0 1}^+ & \cdots & \tilde{A}_{N_0 N_0}^+ \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}^- = - \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^- & \cdots & \tilde{A}_{1N_1}^- \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{N_1 1}^- & \cdots & \tilde{A}_{N_1 N_1}^- \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\tilde{B}^+ = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11}^+ & \cdots & \tilde{B}_{1N_0}^+ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{B}_{N_0 1}^+ & \cdots & \tilde{B}_{N_0 N_0}^+ \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}^- = - \frac{\mu_0}{\mu_1} \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11}^- & \cdots & \tilde{B}_{1N_1}^- \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{B}_{N_1 1}^- & \cdots & \tilde{B}_{N_1 N_1}^- \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{c}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^+ \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{N_0}^+ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^- \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{N_1}^- \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_M \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

### 3.1.2 Θαμμένο διηλεκτρικό

Στις εργασίες [75] και [77] μία νέα μέθοδος κατανομής των βοηθητικών πηγών έχει χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη του προβλήματος σκέδασης ενός απείρου μήκους κυκλικού κυλίνδρου τέλειου αγωγού θαμμένου σε ένα δι-στρωματικό ημιάπειρο έδαφος. Περιγράψουμε ένα αντίστοιχο πρόβλημα με θαμμένο διηλεκτρικό και η



μέθοδος μπορεί να επεκταθεί σε ένα στρωματοποιημένο έδαφος όπως στον πολυστρωματικό σκεδαστή που αναπτύσσεται στη συνέχεια. Έστω  $D_1$  ο χώρος του εδάφους (μη φραγμένος) με σταθερές φυσικές παραμέτρους μέσα στο οποίο είναι θαμμένο το διηλεκτρικό  $D_2$  με επιφάνεια  $S_1$ . Η διαχωριστική επιφάνεια αέρος-εδάφους  $S_0$ , έχει εξίσωση στις  $2D$  σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων  $xz$

$$S_0: z = 0, \quad |x| \leq x_0, \quad (3.25)$$

όπου  $x_0$  είναι ένα κατάλληλο μήκος έτσι ώστε τα CP τα οποία βρίσκονται πάνω στην  $S_0$  να καλύπτουν τα δεδομένα του προβλήματος σε μήκος  $2x_0$ . Η εξίσωση της κυκλικής διατομής  $S_1$  του κυλίνδρου σε βάθος  $z_0$  είναι

$$S_1: x^2 + (z + z_0)^2 = \rho^2. \quad (3.26)$$

Τα ολικά ηλεκτρικά πεδία  $E_0, E_1$  και  $E_2$  στο  $D_0, D_1$  και  $D_2$  αντιστοίχως ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\Delta E_0 + k_0^2 E_0 = 0 | D_0, \quad \Delta E_1 + k_1^2 E_1 = 0 | D_1, \quad | D_0, \Delta E_2 + k_2^2 E_2 = 0 | D_2 \quad (3.27)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις θεμελιώδεις λύσεις

$$G_i(x, z; x_i^\pm, z_i^\pm) = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_i \|(x, z) - (x_i^\pm, z_i^\pm)\|), \quad (3.28)$$

στις περιοχές  $D_i$  για  $i = 0, 1, 2$  αντίστοιχα, όπου τα  $(x_i^\pm, z_i^\pm)$  είναι οι θέσεις των βοηθητικών πηγών πάνω στις βοηθητικές καμπύλες  $S_0^-$ ,  $S_1^\pm$  και  $S_2^+$  τότε

$$E_0(x, z) = E^i(x, z) + \sum_{n=1}^{N_0^-} c_{0n}^- G_0(x, z; x_{0n}^-, z_{0n}^-), \quad (3.29)$$

όπου  $(x_{0n}^-, z_{0n}^-) \in S_0^-$  είναι οι βοηθητικές πηγές στο  $D_1$  και

$$E_1(x, z) = \sum_{n=1}^{N_1^-} c_{1n}^- G_1(x, z; x_{1n}^-, z_{1n}^-) + \sum_{n=1}^{N_1^+} c_{1n}^+ G_1(x, z; x_{1n}^+, z_{1n}^+), \quad (3.30)$$

όπου  $(x_{1n}^-, z_{1n}^-) \in S_1^-$  και  $(x_{1n}^+, z_{1n}^+) \in S_1^+$  είναι οι βοηθητικές πηγές στο  $D_2$  και  $D_0$  αντίστοιχα και

$$E_2(x, z) = \sum_{n=1}^{N_2^+} c_{2n}^+ G_2(x, z; x_{2n}^+, z_{2n}^+), \quad (3.31)$$

όπου  $(x_{2n}^+, z_{2n}^+)$  είναι βοηθητικές πηγές που βρίσκονται στο  $D_1$ , δηλαδή εκτός του  $D_2$ .

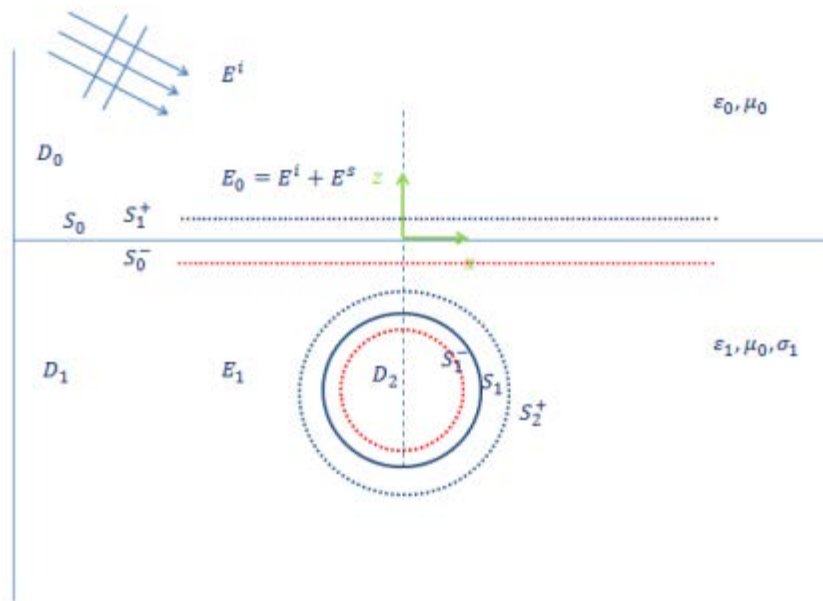
Εφαρμόζουμε τις συνθήκες διαπερατότητας του προβλήματος σε σημεία που έχουν επιλεγεί πάνω στις διαχωριστικές επιφάνειες  $S_0, S_1, S_2$  και καταλήγουμε στο αλγεβρικό σύστημα

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_0^-} c_{0n}^- G_0(x_{0m}, z_{0m}; x_{0n}^-, z_{0n}^-) + \sum_{n=1}^{N_1^-} c_{1n}^- G_1(x_{0m}, z_{0m}; x_{1n}^-, z_{1n}^-) \\ + \sum_{n=1}^{N_1^+} c_{1n}^+ G_1(x_{0m}, z_{0m}; x_{1n}^+, z_{1n}^+) = -E^i(x_{0m}, z_{0m}), \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \sum_{n=1}^{N_0^-} c_{0n}^- G_0(x_{0m}, z_{0m}; x_{0n}^-, z_{0n}^-) + \frac{\partial}{\partial n} \sum_{n=1}^{N_1^-} c_{1n}^- G_1(x_{0m}, z_{0m}; x_{1n}^-, z_{1n}^-) \\ + \frac{\partial}{\partial n} \sum_{n=1}^{N_1^+} c_{1n}^+ G_1(x_{0m}, z_{0m}; x_{1n}^+, z_{1n}^+) \\ = -\frac{\partial}{\partial n} E^i(x_{0m}, z_{0m}), \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_1^-} c_{1n}^- G_1(x_{1m}, z_{1m}; x_{1n}^-, z_{1n}^-) + \sum_{n=1}^{N_1^+} c_{1n}^+ G_1(x_{1m}, z_{1m}; x_{1n}^+, z_{1n}^+) \\ = \sum_{n=1}^{N_2^+} c_{2n}^+ G_2(x_{1m}, z_{1m}; x_{2n}^+, z_{2n}^+), \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \sum_{n=1}^{N_1^-} c_{1n}^- G_1(x_{1m}, z_{1m}; x_{1n}^-, z_{1n}^-) + \frac{\partial}{\partial n} \sum_{n=1}^{N_1^+} c_{1n}^+ G_1(x_{1m}, z_{1m}; x_{1n}^+, z_{1n}^+) \\ = \beta_2 \frac{\partial}{\partial n} \sum_{n=1}^{N_2^+} c_{2n}^+ G_2(x_{1m}, z_{1m}; x_{2n}^+, z_{2n}^+). \end{aligned} \quad (3.35)$$



Σχήμα 3.2 Θαμμένο αντικείμενο

### 3.1.3 Ένας διστρωματικός σκεδαστής

Θεωρούμε ένα σύστημα τριών ομοαξονικών κυλίνδρων απείρου μήκους με διατομές του ομόκεντρους κύκλους ακτίνων  $\rho_0, \rho_1, \rho_2$  με  $\rho_2 < \rho_1 < \rho_0$  και αντίστοιχες περιφέρειες  $S_0, S_1, S_2$ . Έστω  $D_0$  ο εξωτερικός χώρος μη φραγμένος,  $D_1$  ο χώρος μεταξύ  $S_0$  και  $S_1$ ,  $D_2$  ο χώρος μεταξύ των  $S_1$  και  $S_2$  και  $D_2$  ο κύκλος στο εσωτερικό του συστήματος (βλέπε Σχήμα 3.3). Ο εξωτερικός χώρος  $D_0$  έχει διηλεκτρική επιτρεπτότητα  $\epsilon_0$  και μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$ . Οι χώροι  $D_1$  και  $D_2$  είναι διηλεκτρικά με φυσικές παραμέτρους  $\epsilon_1, \mu_1$  και  $\epsilon_2, \mu_2$  αντίστοιχα ενώ ο εσωτερικός χώρος είναι ένας τέλειος αγωγός με φυσικές παραμέτρους  $\epsilon_3, \mu_3$ .

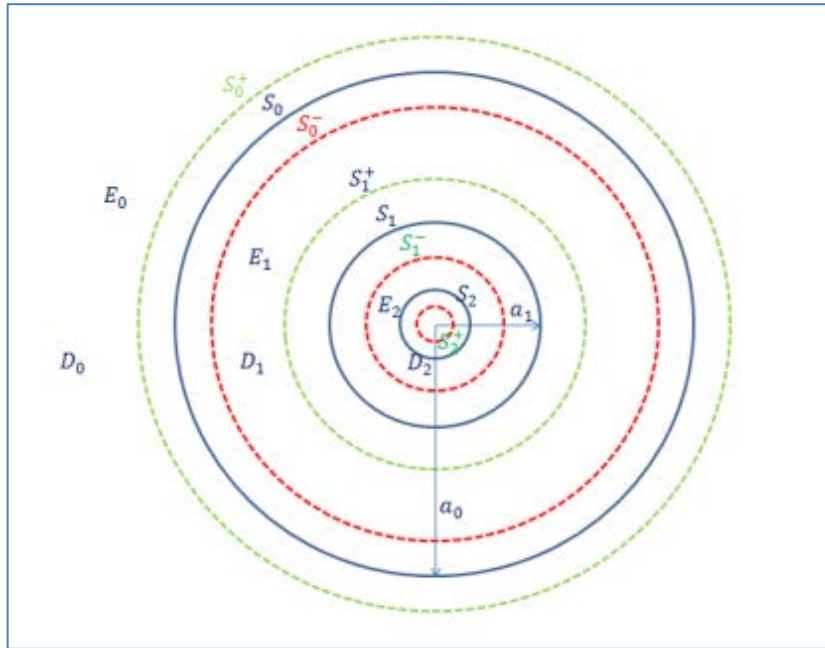
Η μελέτη αυτή μπορεί να επεκταθεί σε ένα σύνθετο πολυστρωματικό μοντέλο σκέδασης στις τρεις διαστάσεις (3D) με  $K$  διαπερατά στρώματα τα οποία περιέχουν ένα πυρήνα. Εφαρμογές τέτοιων κατασκευών μπορεί να βρει κανείς σε κεραίες, σωληνώσεις, καλώδια και αλλού. Σημαντικές εφαρμογές υπάρχουν στη βιομηχανία, στην γεωφυσική και στην ιατρική, όπως στην ηλεκτρική τομογραφία.

Θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες για να εκφράσουμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του προβλήματος. Οι διανυσματικές εξισώσεις των  $S_0, S_1, S_2$  είναι

$$S_0: \mathbf{r}_0 = (\rho_0 \cos \varphi_0, \rho_0 \sin \varphi_0), \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi), \quad (3.36)$$

$$S_1: \mathbf{r}_1 = (\rho_1 \cos \varphi_1, \rho_1 \sin \varphi_1), \quad \varphi_1 \in [0, 2\pi), \quad (3.37)$$

$$S_2: \mathbf{r}_2 = (\rho_2 \cos \varphi_2, \rho_2 \sin \varphi_2), \quad \varphi_2 \in [0, 2\pi). \quad (3.38)$$



Σχήμα 3.3 Σκεδαστής με ομοαξονικούς κυλίνδρους

Εκφράζουμε τα ολικά ηλεκτρικά πεδία  $E_0, E_1$  και  $E_2$  ως γραμμικούς συνδυασμούς λύσεων της εξίσωσης Helmholtz στους αντίστοιχους χώρους  $D_0, D_1$  και  $D_2$ . Τα ιδιάζοντα σημεία, δηλαδή οι βοηθητικές πηγές είναι εκτός των αντιστοιχων χώρων λύσεων. Συγκεκριμένα για το ολικό πεδίο  $E_0$  του χώρου  $D_0$  οι βοηθητικές πηγές λαμβάνονται στο  $D_1$ , δηλαδή εκτός του  $D_0$ . Για το σκοπό αυτό θεωρούμε μία καμπύλη  $S_0^-$  στο εσωτερικό του  $D_1$  σύμμορφη της  $S_0$ , δηλαδή κύκλο με εξίσωση:

$$S_0: \mathbf{r}_0^- = (\rho_0^- \cos \varphi_0^-, \rho_0^- \sin \varphi_0^-), \quad \varphi_0^- \in [0, 2\pi), \quad \rho_0^- < \rho_0 \quad (3.39)$$

και πάνω στην  $S_0^-$  επιλέγουμε τις βοηθητικές πηγές  $\mathbf{r}_{0n}^-$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_0^-$  με

$$\mathbf{r}_{0n}^- = (\rho_0^- \cos \varphi_{0n}^-, \rho_0^- \sin \varphi_{0n}^-), \quad \varphi_{0n}^- \in [0, 2\pi), \quad \rho_0^- < \rho_0, \quad (3.40)$$

με

$$\varphi_{0n}^- = \frac{2\pi(n-1)}{N_0^-}. \quad (3.41)$$

Επομένως η  $n$ -οστή βοηθητική πηγή της  $S_0^-$  ακτινοβολεί

$$E_{0n}^-(\rho, \varphi) = G_0(\rho, \varphi; \rho_0^-, \varphi_{0n}^-), \quad (3.42)$$

όπου  $G_0$  είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz.

Για το ολικό εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο στο  $D_1$  οι βοηθητικές πηγές λαμβάνονται στο εξωτερικό του  $D_1$ , δηλαδή στις περιοχές  $D_0$  και  $D_2$ . Οι βοηθητικές πηγές που παράγουν το ηλεκτρικό πεδίο  $E_1$  στο στρώμα  $D_1$  βρίσκονται σε σύμμορφες καμπύλες στις αντίστοιχες περιοχές, δηλαδή πάνω στους κύκλους:

$$S_1^+: \quad \mathbf{r}_1^+ = (\rho_1^+ \cos \varphi_1^+, \rho_1^+ \sin \varphi_1^+), \quad \varphi_1^+ \in [0, 2\pi), \quad \rho_1^+ > \rho_0, \quad (3.43)$$

$$S_1^-: \quad \mathbf{r}_1^- = (\rho_1^- \cos \varphi_1^-, \rho_1^- \sin \varphi_1^-), \quad \varphi_1^- \in [0, 2\pi), \quad \rho_1^- < \rho_1. \quad (3.44)$$

Επιλέγουμε τις βοηθητικές πηγές πάνω στις περιφέρειες των αντιστοίχων κύκλων σε ισαπέχοντα σημεία με κατανομή:

$$\mathbf{r}_{1n}^+ = (\rho_1^+ \cos \varphi_{1n}^+, \rho_1^+ \sin \varphi_{1n}^+), \quad \varphi_{1n}^+ \in [0, 2\pi), \quad \rho_1^+ < \rho_0, \quad (3.45)$$

με

$$\varphi_{1n}^+ = \frac{2\pi(n-1)}{N_1^+} \quad (3.46)$$

και

$$\mathbf{r}_{1n}^- = (\rho_1^- \cos \varphi_{1n}^-, \rho_1^- \sin \varphi_{1n}^-), \quad \varphi_{1n}^- \in [0, 2\pi), \quad \rho_1^- < \rho_1, \quad (3.47)$$

με

$$\varphi_{1n}^- = \frac{2\pi(n-1)}{N_1^-}. \quad (3.48)$$

Επομένως οι  $n$ -οστές βοηθητικές πηγές που δημιουργούν το εσωτερικό πεδίο  $E_1$  ακτινοβολούν τα πεδία:

$$E_{1n}^+(\rho, \varphi) = G_1(\rho, \varphi; \rho_1^+, \varphi_{1n}^+), \quad (3.49)$$

$$E_{1n}^-(\rho, \varphi) = G_1(\rho, \varphi; \rho_1^-, \varphi_{1n}^-), \quad (3.50)$$

όπου  $G_1$  είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz στο  $D_1$ .

Ομοίως το ολικό εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο  $E_2$  στο  $D_2$  δημιουργείται από τις βοηθητικές πηγές που βρίσκονται εκτός του  $D_2$ , δηλαδή στις περιοχές  $D_1$  και  $D_3$ . Οι πηγές βρίσκονται σε βοηθητικές καμπύλες  $S_2^+$  (σύμμορφη της  $S_1$ ) και  $S_2^-$  (σύμμορφη της  $S_2$ ) στις περιοχές  $D_1$  και  $D_3$  αντίστοιχα.

Συγκεκριμένα βρίσκονται πάνω στους κύκλους:

$$S_2^+: \mathbf{r}_2^+ = (\rho_2^+ \cos \varphi_2^+, \rho_2^+ \sin \varphi_2^+), \quad \varphi_2^+ \in [0, 2\pi), \quad \rho_2^+ > \rho_1, \quad (3.51)$$

$$S_2^-: \mathbf{r}_2^- = (\rho_2^- \cos \varphi_2^-, \rho_2^- \sin \varphi_2^-), \quad \varphi_2^- \in [0, 2\pi), \quad \rho_2^- < \rho_2 \quad (3.52)$$

και λαμβάνονται σε ισαπέχοντα σημεία

$$\mathbf{r}_{2n}^+ = (\rho_2^+ \cos \varphi_{2n}^+, \rho_2^+ \sin \varphi_{2n}^+), \quad \varphi_{2n}^+ \in [0, 2\pi), \quad \rho_2^+ < \rho_1, \quad (3.53)$$

$$\mathbf{r}_{2n}^- = (\rho_2^- \cos \varphi_{2n}^-, \rho_2^- \sin \varphi_{2n}^-), \quad \varphi_{2n}^- \in [0, 2\pi), \quad \rho_2^- < \rho_2, \quad (3.54)$$

με

$$\varphi_{2n}^+ = \frac{2\pi(n-1)}{N_2^+}, \quad (3.55)$$

$$\varphi_{2n}^- = \frac{2\pi(n-1)}{N_2^-}. \quad (3.56)$$

Επομένως οι βοηθητικές πηγές που δημιουργούν το  $E_2$  ακτινοβολούν τα πεδία

$$E_{2n}^+(\rho, \varphi) = G_2(\rho, \varphi; \rho_2^+, \varphi_{2n}^+), \quad (3.57)$$

$$E_{2n}^-(\rho, \varphi) = G_2(\rho, \varphi; \rho_2^-, \varphi_{2n}^-), \quad (3.58)$$

όπου  $G_2$  είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz στο  $D_2$ .

Τα ολικά ηλεκτρικά πεδία στους χώρους  $D_0$ ,  $D_1$  και  $D_2$  είναι αντίστοιχα:

$$E_0(\rho, \varphi) = E^i(\rho, \varphi) + \sum_{n=1}^{N_0^-} c_{0n}^- E_{0n}^-(\rho, \varphi), \quad (3.59)$$

$$E_1(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{N_1^+} c_{1n}^+ E_{1n}^+(\rho, \varphi) + \sum_{n=1}^{N_1^-} c_{1n}^- E_{1n}^-(\rho, \varphi), \quad (3.60)$$

$$E_2(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{N_2^+} c_{2n}^+ E_{2n}^+(\rho, \varphi) + \sum_{n=1}^{N_2^-} c_{2n}^- E_{2n}^-(\rho, \varphi). \quad (3.61)$$

Οι άγνωστοι συντελεστές  $c_{0n}^-$ ,  $c_{1n}^+$ ,  $c_{1n}^-$ ,  $c_{2n}^+$  και  $c_{2n}^-$  προσδιορίζονται με την βοήθεια των οριακών συνθηκών και των συνθηκών μετάβασης ( $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2$ ).

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= E_1 \\ \frac{\partial E_0}{\partial n} &= \frac{\partial E_1}{\partial n} \end{aligned} \right|_{S_0}, \quad (3.62)$$

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_2 \\ \frac{\partial E_1}{\partial n} &= \frac{\partial E_2}{\partial n} \end{aligned} \right|_{S_1}, \quad (3.63)$$

$$E_2 = 0 \quad | \quad S_2, \quad (3.64)$$

Επιλέγουμε κατάλληλα σημεία πάνω στις καμπύλες  $S_0$ ,  $S_1$  και  $S_2$  (CP)

$$S_0: (\rho_0, \varphi_{0m}), \quad \varphi_{0m} = \frac{2\pi(m-1)}{M_0}, \quad m = 1, 2, \dots, M_0, \quad (3.65)$$

$$S_1: (\rho_1, \varphi_{1m}), \quad \varphi_{1m} = \frac{2\pi(m-1)}{M_1}, \quad m = 1, 2, \dots, M_1, \quad (3.66)$$

$$S_2: (\rho_2, \varphi_{2m}), \quad \varphi_{2m} = \frac{2\pi(m-1)}{M_2}, \quad m = 1, 2, \dots, M_2. \quad (3.67)$$

Οι συνθήκες διαπερατότητας και οι οριακές συνθήκες δίνουν:

$$\begin{aligned} E^i(\rho_0, \varphi_{0m}) + \sum_{n=1}^{N_0^-} c_{0n}^- E_{0n}^-(\rho_0, \varphi_{0m}) \\ = \sum_{n=1}^{N_1^+} c_{1n}^+ E_{1n}^+(\rho_1, \varphi_{1m}) + \sum_{n=1}^{N_1^-} c_{1n}^- E_{1n}^-(\rho_1, \varphi_{1m}), \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} E^i(\rho_0, \varphi_{0m}) + \frac{\partial}{\partial n} \sum_{n=1}^{N_0^-} c_{0n}^- E_{0n}^-(\rho_0, \varphi_{0m}) \\ = \beta \frac{\partial}{\partial n} \sum_{n=1}^{N_1^+} c_{1n}^+ E_{1n}^+(\rho_1, \varphi_{1m}) + \beta \frac{\partial}{\partial n} \sum_{n=1}^{N_1^-} c_{1n}^- E_{1n}^-(\rho_1, \varphi_{1m}). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Το πλήθος των βοηθητικών πηγών δίνει τον αριθμό των αγνώστων συντελεστών και το πλήθος των CP πάνω στις καμπύλες του συστήματος. Πρέπει να συνδέονται κατάλληλα ώστε το γραμμικό σύστημα που θα προκύψει να επιλύεται μάλιστα μονοσήμαντα. Λαμβάνοντας υπόψη ότι πάνω στις καμπύλες  $S_0$  και  $S_1$  τα CP  $M_0$  και  $M_1$  δίνουν  $2M_0$  εξισώσεις (από τις συνθήκες διαπερατότητας) και  $2M_1$  εξισώσεις (από τις συνθήκες διαπερατότητας) αντίστοιχα. Πάνω στην  $S_2$  τα  $M_2$  CP δίνουν  $M_2$  (συνθήκη τέλει αγωγού). Γενικά πρέπει να είναι

$$N_0^- + (N_1^+ + N_1^-) + (N_2^+ + N_2^-) \leq 2M_0 + 2M_1 + M_2. \quad (3.70)$$

Μελέτη της (3.71) μπορεί να μας δώσει την βέλτιστη λύση.

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες (3.62) - (3.64) στα CP καταλήγουμε σε ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα της μορφής

$$A \cdot \mathbf{c} = \mathbf{f}, \quad (3.71)$$

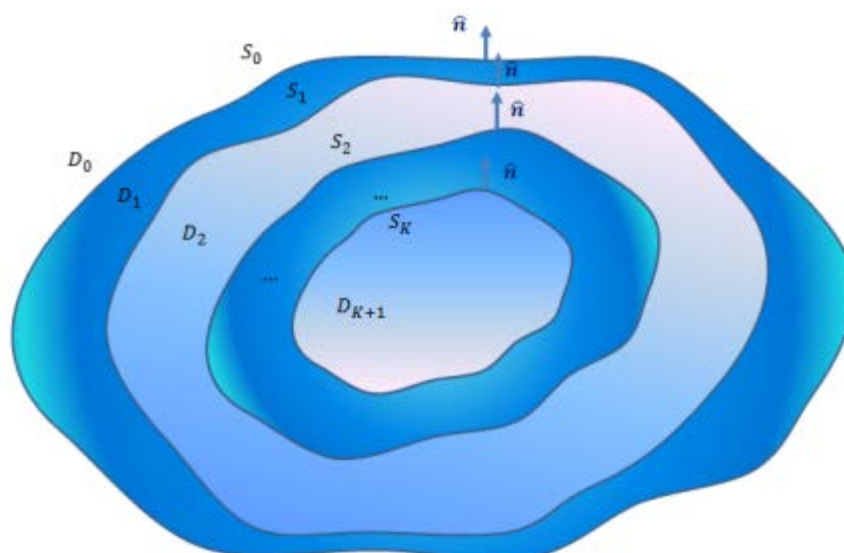
όπου  $A$  είναι ο πίνακας με στοιχεία τις τιμές των θεμελιωδών λύσεων στα σημεία (3.65) - (3.67),  $\mathbf{c}$  είναι το διάνυσμα με συντεταγμένες τους άγνωστους συντελεστές



$c_{0n}^-, c_{1n}^-, c_{1n}^+, c_{2n}^+$  και  $f$  είναι οι τιμές του προσπίπτοντος πεδίου και των κάθετων παραγώγων του.

### 3.1.4 Ένας πολυστρωματικός σκεδαστής σε δύο διαστάσεις

**Διατύπωση του προβλήματος.** Η περιγραφή του πολυστρωματικού σκεδαστή γίνεται στις  $3D$  και στη συνέχεια η διατύπωση του μαθηματικού προβλήματος είναι στις  $2D$  για ευκολία των υπολογισμών στις εφαρμογές. Ένας σκεδαστής  $D$  στο  $\mathbb{R}^3$  με σύνορο  $S_0$  διαιρείται με επιφάνειες  $S_1, S_2, \dots, S_K$  στα διηλεκτρικά στρώματα  $D_1, D_2, \dots, D_{K+1}$  αντίστοιχα. Ο εξωτερικός μη φραγμένος χώρος  $\mathbb{R}^3 \setminus D$ , θα συμβολίζεται με  $D_0$ . Οι διαχωριστικές επιφάνειες δεν έχουν κοινά σημεία ανά δύο και η  $S_i$  περιβάλλει την  $S_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, K - 1$ . Επίσης οι επιφάνειες  $S_i$  θεωρούνται λείες (κλάσης  $C^2$ ) και τα κάθετα μοναδιαία διανύσματα σε κάθε επιφάνεια έχουν φορά προς το εξωτερικό του σκεδαστή. Στο στρώμα  $D_i$  η ηλεκτρική επιτρεπτότητα είναι  $\epsilon_j$ , η μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_i$  και ο κυματικός αριθμός  $k_i = \omega\sqrt{\epsilon_i\mu_i}$ . Το εσωτερικό της επιφάνειας  $S_K$  είναι ο πυρήνας του πολυστρωματικού σκεδαστή και μπορεί να είναι τέλειος αγωγός ή διηλεκτρικό ή να έχει επιφάνεια εμπέδησης (impedance).



Σχήμα 3.4 Πολυστρωματικός σκεδαστής

Αν συμβολίσουμε  $E_i(\mathbf{r})$  τα ολικά ηλεκτρικά πεδία στους χώρους  $D_i$  τότε το πρόβλημα σκέδασης για το πολυστρωματικό σκεδαστή διατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \Delta E_i + k_i^2 E_i &= 0 \mid D_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, K, \\ \frac{\partial E_i}{\partial n} &= \beta_i \frac{\partial E_{i+1}}{\partial n} \Big|_{S_i}, \quad i = 0, 1, \dots, K-1, \\ E_0 &= E^i + E^s. \end{aligned} \tag{3.72}$$

$E^s$  ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld.

Στην επιφάνεια του πυρήνα  $S_K$  θα ισχύει μία από τις ακόλουθες συνθήκες:

- Τέλειος αγωγός:  $E_K = 0 \mid S_K$ .
- Εμπέδηση (impedance):  $\frac{\partial E_K}{\partial n} + j\lambda E_K = 0 \mid S_K$ .
- Διηλεκτρικό:  $\frac{\partial E_K}{\partial n} = \beta_K \frac{\partial E_{K+1}}{\partial n} \Big|_{S_K}$ ,

όπου  $E_{K+1}$  είναι το ηλεκτρικό πεδίο στον πυρήνα  $D_{K+1}$  στην περίπτωση του διηλεκτρικού πυρήνα.

Όπως προκύπτει από την περιγραφή του πολυστρωματικού σκεδαστή το πρόβλημα είναι γενικό και η επίλυσή του δίνει αποτελέσματα που καλύπτουν άλλα γνωστά προβλήματα.

**Επίλυση του προβλήματος.** Το ολικό ηλεκτρικό πεδίο  $E_i$  στο στρώμα  $D_i$ ,  $1 \leq i \leq K$  αποτελείται από δύο όρους  $E_i^+(\mathbf{r})$  και  $E_i^-(\mathbf{r})$ . Κάθε όρος είναι υπέρθεση θεμελιωδών λύσεων  $G_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  της εξίσωσης Helmholtz στο στρώμα  $D_i$ , όπου η “επίδραση”  $\mathbf{r}'$  οφείλεται σε βοηθητική πηγή (AS), που βρίσκεται εκτός του στρώματος  $D_i$ . Συγκεκριμένα το πεδίο  $E_i^-$  δίνεται από τον τύπο

$$E_i^-(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_i^-} c_{in}^- G_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{in}^-), \tag{3.73}$$

όπου  $\mathbf{r}_{in}^-$  είναι οι βοηθητικές πηγές τοποθετημένες στο στρώμα  $D_{i+1}$  πάνω στη βοηθητική επιφάνεια  $S_i^-$  και  $c_{in}^-$  είναι οι άγνωστοι συντελεστές. Το πεδίο  $E_i^+$  δίνεται από τον τύπο

$$E_i^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_i^+} c_{in}^+ G_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{in}^+), \quad (3.74)$$

όπου  $\mathbf{r}_{in}^+$  είναι οι βοηθητικές πηγές τοποθετημένες στο στρώμα  $D_{i-1}$  πάνω στη βοηθητική επιφάνεια  $S_i^+$  και  $c_{in}^+$  είναι οι άγνωστοι συντελεστές.

Επομένως το ολικό ηλεκτρικό πεδίο στο στρώμα  $D_i$  είναι

$$E_i(\mathbf{r}) = E_i^-(\mathbf{r}) + E_i^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_i^-} c_{in}^- G_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{in}^-) + \sum_{n=1}^{N_i^+} c_{in}^+ G_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{in}^+), \quad i = 1, \dots, K. \quad (3.75)$$

Να σημειώσουμε ότι για  $i = 0$ , δηλαδή το ολικό εξωτερικό πεδίο δίνεται από τον τύπο

$$E_0(\mathbf{r}) = E^i(\mathbf{r}) + \sum_{n=0}^{N_0^-} c_{0n}^- G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{0n}^-) \quad (3.76)$$

και για  $i = K + 1$ , δηλαδή για το ολικό εσωτερικό πεδίο  $D_{K+1}$  στην περίπτωση που είναι διαπερατός ο πυρήνας, έχουμε

$$E_{K+1}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_{K+1}^+} c_{(K+1)n}^+ G_{K+1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{(K+1)n}^+). \quad (3.77)$$

**Υπολογισμός των συντελεστών.** Οι συντελεστές  $c_{in}^\pm$  υπολογίζονται με τη βοήθεια των οριακών συνθηκών και συνθηκών διαπερατότητας. Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες στα CP στις επιφάνειες  $S_i$  και καταλήγουμε σε ένα αλγεβρικό σύστημα της μορφής

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B}, \quad (3.78)$$

όπου για την περίπτωση του τέλει αγωγού πυρήνα, ο πίνακας  $\mathbf{A}$  είναι

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix}
 A_{00}^- & -A_{01}^- & -A_{01}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \widetilde{A}_{00}^- & -\widetilde{A}_{01}^- & -\widetilde{A}_{01}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & A_{11}^- & A_{11}^+ & -A_{12}^- & -A_{12}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \widetilde{A}_{11}^- & \widetilde{A}_{11}^+ & -\widetilde{A}_{12}^- & -\widetilde{A}_{12}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & A_{22}^- & A_{22}^+ & -A_{23}^- & -A_{23}^+ & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \widetilde{A}_{22}^- & \widetilde{A}_{22}^+ & -\widetilde{A}_{23}^- & -\widetilde{A}_{23}^+ & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{(K-1)(K-1)}^- & A_{(K-1)(K-1)}^+ & -A_{(K-1)K}^- & -A_{(K-1)K}^+ \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{A}_{(K-1)(K-1)}^- & \widetilde{A}_{(K-1)(K-1)}^+ & -\widetilde{A}_{(K-1)K}^- & -\widetilde{A}_{(K-1)K}^+ \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{KK}^- & A_{KK}^+
 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

με στοιχεία τους πίνακες  $A_{ij}$

$$A_{ij}^\pm = [G_j(\mathbf{r}_{im}, \mathbf{r}_{jn}^\pm)]_{m=1,2,\dots,M_i, n=1,2,\dots,N_j^\pm}^{i=0,1,\dots,K, j=0,1,\dots,K+1 \quad i \leq j} \quad (3.80)$$

και

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^- \\ \mathbf{c}_1^- \\ \mathbf{c}_1^+ \\ \vdots \\ \mathbf{c}_K^- \\ \mathbf{c}_K^+ \end{bmatrix}, \quad (3.81)$$

με

$$\mathbf{c}_i^\pm = \begin{bmatrix} c_{i1}^\pm \\ c_{i2}^\pm \\ \vdots \\ c_{iN_i}^\pm \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, K. \quad (3.82)$$

Στην περίπτωση που ο πυρήνας έχει επιφάνεια εμπέδησης  $\lambda$  τότε η τελευταία γραμμή του πίνακα  $\mathbb{A}$  αντικαθίσταται από

$$\widetilde{A}_{KK}^- \quad \widetilde{A}_{KK}^+ \quad j\lambda A_{KK}^- \quad j\lambda A_{KK}^+. \quad (3.83)$$

Στην περίπτωση του διηλεκτρικού πυρήνα η τελευταία γραμμή αντικαθίσταται με δύο νέες γραμμές που προκύπτουν από τις δύο προηγούμενες αν οι δείκτες αυξηθούν κατά ένα.

Ο αριθμός  $M_i$  των CP που επιλέγονται πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια  $S_i$  ικανοποιεί την ανισωτική σχέση

$$N_i^- + N_i^+ \leq 2M_i. \quad (3.84)$$

Από την παραπάνω συνθήκη προκύπτει ότι ο αριθμός των εξισώσεων είναι μεγαλύτερος ή ίσος του αριθμού των αγνώστων και συνεπώς μπορεί να εφαρμοστεί μία κλασική μέθοδος (π.χ. η μέθοδος Gauss) για την επίλυση του αλγεβρικού συστήματος (3.78). Σε αντίθετη περίπτωση αν δηλαδή  $N_i^- + N_i^+ > 2M_i$  τότε για την προσεγγιστική επίλυση του συστήματος χρησιμοποιούμε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Στην πράξη έχουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα παίρνοντας

$$N_i^- = N_i^+ = M_i. \quad (3.85)$$

**Ειδικές περιπτώσεις.** Ο πολυστρωματικός σκεδαστής μπορεί να παίζει το ρόλο ενός “ρυθμιστή” σκεδαστή αυξομειώνοντας τις διαστάσεις των στρωμάτων ή μεταβάλλοντας τις τιμές των φυσικών παραμέτρων. Συγκεκριμένα έχουμε

- Αν το πλάτος των στρωμάτων είναι πολύ μικρό, τότε η επίδραση των στρωμάτων μειώνεται και παραμένει η σκέδαση που οφείλεται στον πυρήνα.
- Αν για τις φυσικές παραμέτρους ισχύει ( $\sigma = 0$ )

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}, \quad \mu_i = \mu_{i+1}.$$

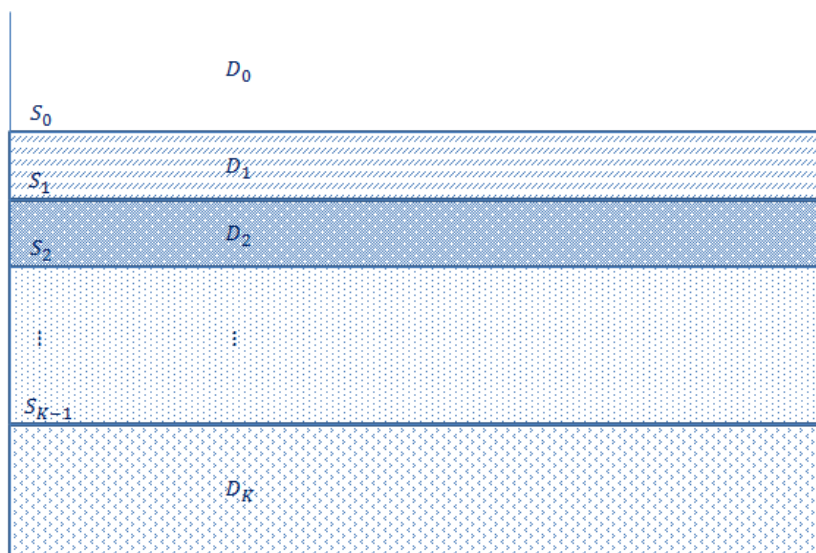
για κάθε  $i = 0, 1, \dots, K - 1$  τότε στις διαχωριστικές καμπύλες των στρωμάτων δεν γίνεται σκέδαση παρά μόνο στον πυρήνα του σκεδαστή.

- Αν μεταβάλλουμε τις φυσικές και γεωμετρικές παραμέτρους του πολυστρωματικού σκεδαστή μπορούμε να ρυθμίσουμε τα μεγέθη ώστε να επιτύχουμε επιθυμητή ένταση του πεδίου.

Ο πυρήνας ενός πολυστρωματικού σκεδαστή περιγράφει τα τρία βασικά είδη: τέλειο αγωγό, διηλεκτρικό και επιφάνεια εμπέδησης. Γενικότερα στον πυρήνα μπορεί να ισχύουν και μεικτές οριακές συνθήκες που έχουμε αναπτύξει στην παράγραφο §1.2.4.

### 3.2 Στρωματοποιημένο υπέδαφος

Η μέθοδος που αναπτύξαμε στο προηγούμενο πρόβλημα όπου ένα αντικείμενο είναι θαμμένο σε έδαφος με σταθερές φυσικές παραμέτρους μπορεί να γενικευτεί σε προβλήματα όπου το έδαφος αποτελείται από πολλά στρώματα πλήθους  $K$ .



Σχήμα 3.5 Στρωματοποιημένο έδαφος

Αν ονομάσουμε  $D_0$  το εξωτερικό μη φραγμένο χωρίο (πάνω από το έδαφος),  $D_1, D_2, \dots, D_K$  τα φραγμένα στρώματα (εσωτερικά του εδάφους) και  $D_{K+1}$  το μη φραγμένο (semi-infinite ground) τελευταίο στρώμα και  $S_0, S_1, \dots, S_K$  τις αντίστοιχες διαχωριστικές επιφάνειες, τότε το πρόβλημα σκέδασης από έναν τέλει αγωγό  $D$  με  $\partial D = S$  που βρίσκεται στο στρώμα  $D_{K+1}$  διατυπώνεται ως εξής:

Να υπολογιστούν τα ηλεκτρικά πεδία  $E_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, K + 1$  που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\Delta E_i + k_i^2 E_i = 0 | D_i, \quad i = 0, 1, \dots, K + 1,$$

$$\left. \begin{aligned} E_i &= E_{i+1} \\ \frac{\partial E_i}{\partial n} &= \beta_i \frac{\partial E_{i+1}}{\partial n} \end{aligned} \right| S_i, \quad i = 0, 1, \dots, K, \quad (3.86)$$

$$E_{K+1} = 0 | S,$$

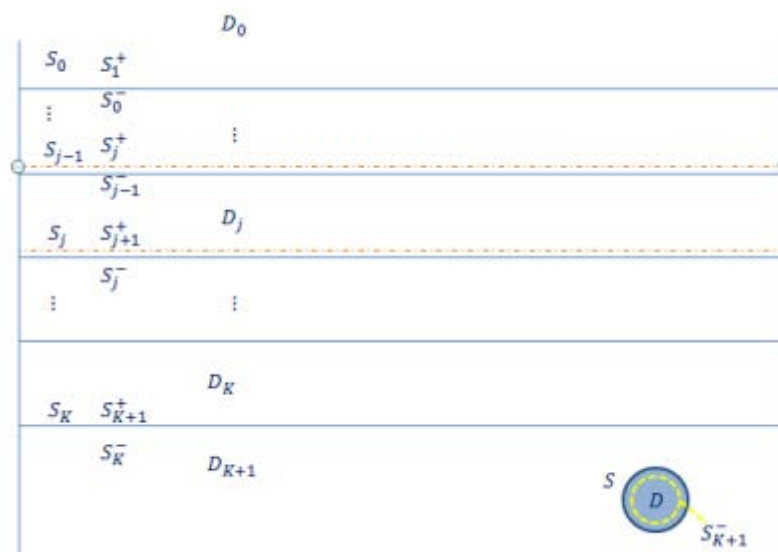
$$E_0 = E^i + E^s | D_0.$$

και το σκεδαζόμενο πεδίο  $E^s$  ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld.

Χρησιμοποιούμε τη θεμελιώδη λύση

$$G_i(x, z; x_{in}^\pm, z_{in}^\pm) = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_i \|(x, z) - (x_{in}^\pm, z_{in}^\pm)\|), \quad (3.87)$$

για  $i = 0, 1, \dots, K + 1$  στα στρώματα  $D_i$  αντίστοιχα, όπου τα  $(x_{in}^\pm, z_{in}^\pm)$  είναι θέσεις των βοηθητικών πηγών.



Σχήμα 3.6 Θαμμένο αντικείμενο σε στρωματοποιημένο έδαφος  $K+1$  στρωμάτων

Συγκεκριμένα έχουμε:

- Στο στρώμα  $D_0$ :

$$E_0(x, z) = E^i(x, z) + \sum_{n=1}^{N_0^-} c_{0n}^- G_0(x, z; x_{0n}^-, z_{0n}^-), \quad (3.88)$$

όπου  $(x_{0n}^-, z_{0n}^-) \in S_0^-$  είναι οι βοηθητικές πηγές στο  $D_1$ .

- Στο στρώμα  $D_1$ :

$$E_1(x, z) = \sum_{n=1}^{N_1^-} c_{1n}^- G_1(x, z; x_{1n}^-, z_{1n}^-) + \sum_{n=1}^{N_1^+} c_{1n}^+ G_1(x, z; x_{1n}^+, z_{1n}^+), \quad (3.89)$$

όπου  $(x_{1n}^-, z_{1n}^-) \in S_1^-$  και  $(x_{1n}^+, z_{1n}^+) \in S_0^+$  είναι οι βοηθητικές πηγές στο  $D$  και  $D_0$  αντίστοιχα.

- $\vdots$
- Στο στρώμα  $D_{K+1}$ :

$$E_{K+1}(x, z) = \sum_{n=1}^{N_{K+1}^-} c_{(K+1)n}^- G_{K+1}(x, z; x_{(K+1)n}^-, z_{(K+1)n}^-) + \sum_{n=1}^{N_{K+1}^+} c_{(K+1)n}^+ G_{K+1}(x, z; x_{(K+1)n}^+, z_{(K+1)n}^+), \quad (3.90)$$

όπου  $(x_{(K+1)n}^-, z_{(K+1)n}^-) \in S_{K+1}^-$  και  $(x_{(K+1)n}^+, z_{(K+1)n}^+) \in S_{K+1}^+$  είναι οι βοηθητικές πηγές στο  $D$  και  $D_K$  αντίστοιχα.

### 3.3 Αντίστροφα προβλήματα σκέδασης

Οι μέθοδοι επίλυσης αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης και ειδικότερα οι αλγόριθμοι ανακατασκευής μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

1. Επαναληπτικές (Iterative)
2. Διάσπασης (Decomposition)
3. Δειγματοληπτικές (Sampling)

Στις **επαναληπτικές μεθόδους** ανακατασκευής το πρόβλημα σκέδασης μετασχηματίζεται σε μία εξίσωση τελεστών. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε γνωστές μεθόδους επίλυσης εξισώσεων τελεστών (μέθοδος Newton, μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων, μέθοδος συζυγούς κλίσης). Οι επαναληπτικές μέθοδοι δημιουργούν πολύ



καλής ποιότητας ανακατασκευές. Έχουν το βασικό μειονέκτημα ότι σε κάθε βήμα της επανάληψης πρέπει να επιλύεται ένα ευθύ πρόβλημα σκέδασης.

Στις **μεθόδους διάσπασης** υπολογίζεται το σκεδαζόμενο πεδίο από τον τελεστή μακρινού πεδίου. Δύο βασικά πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι ότι δεν χρειάζεται να λυθεί το ευθύ πρόβλημα σκέδασης και ότι μπορούν να υπολογιστούν μόνο κάποια τμήματα του σκεδαστή.

Στις **δειγματοληπτικές μεθόδους** δεν χρειάζεται να επιλύεται σε κάθε βήμα της ανακατασκευής ένα ευθύ πρόβλημα σκέδασης. Ορίζεται μία *δείκτρια συνάρτηση* από την οποία προκύπτουν πληροφορίες για το σχήμα τη θέση και τις ιδιότητες του σκεδαστή. Αν θεωρήσουμε σαν δείκτρια συνάρτηση το σκεδαζόμενο πεδίο τότε για το προσδιορισμό του σχήματος του σκεδαστή απαιτείται και κάποια οριακή συνθήκη.

Στην παρούσα εργασία θα αναπτύξουμε μία μέθοδο επίλυσης αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης και ανακατασκευής αγνώστων αντικειμένων εφαρμόζοντας τη MAS όπως την έχουμε περιγράψει για το ευθύ πρόβλημα στο Κεφάλαιο 2. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι:

*Μετράμε το σκεδαζόμενο πεδίο σε σημεία που περιβάλλουν το άγνωστο αντικείμενο. Υπολογίζουμε το ίδιο πεδίο με τη MAS και χρησιμοποιώντας μία μέθοδο βελτιστοποίησης παίρνουμε πληροφορίες για το σχήμα του αντικειμένου.*

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε διαδικασίες που οδηγούν στην ανίχνευση αγνώστων αντικειμένου σε διάφορες περιπτώσεις.

**Μοναδικότητα λύσης.** Όπως έχουμε αναφέρει τα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης γενικά δεν έχουν μοναδική λύση. Όμως με κατάλληλες υποθέσεις και μετρήσεις που αντιστοιχούν σε διάφορες διευθύνσεις πρόσπτωσης των κυματικών πεδίων μπορούμε να εξασφαλίσουμε μοναδική λύση.

Διατυπώνουμε ένα θεώρημα μοναδικότητας λύσης για τα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων για έναν τέλειο αγωγό ( $2D$  ή  $3D$ ). Την

απόδειξη μπορεί να βρει κανείς στο βιβλίο [3]. Αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν και για άλλα είδη σκεδαστών.

**Θεώρημα 1.** Έστω  $D_1$  και  $D_2$  δύο σκεδαστές τέλει αγωγοί. Αν για έναν σταθερό κυματικό αριθμό τα ηλεκτρικά μακρινά πεδία τους συμπίπτουν για κάθε διεύθυνση πρόσπτωσης και για κάθε πόλωση, τότε είναι  $D_1 = D_2$ .

Στην περίπτωση  $2D$  έχουν αποδειχθεί θεωρήματα μοναδικότητας για σκεδαστές με επιφάνεια εμπέδησης  $\lambda$ . Συγκεκριμένα στο [3] αποδεικνύεται.

**Θεώρημα 2.** Έστω  $D_1$  και  $D_2$  δύο σκεδαστές με επιφανειακές εμπεδήσεις  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$ . Αν για έναν σταθερό κυματικό αριθμό τα μακρινά πεδία τους συμπίπτουν για κάθε διεύθυνση πρόσπτωσης τότε είναι  $D_1 = D_2$  και  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

Στα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης που οφείλονται σε ένα εμπόδιο, το σκεδαστή, όπως έχουμε αναφέρει γνωρίζουμε το προσπίπτον και το σκεδαζόμενο κύμα και αναζητούμε πληροφορίες για τη θέση, το σχήμα και τις φυσικές παραμέτρους του σκεδαστή. Όταν γνωρίζουμε το προσπίπτον κύμα και το σκεδαστή, δηλαδή τις οριακές συνθήκες πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή και αναζητούμε το σκεδαζόμενο κύμα, τότε έχουμε να επιλύσουμε ένα ευθύ πρόβλημα κυματικής σκέδασης. Σε πολλές εφαρμογές γνωρίζουμε τον σκεδαστή και το σκεδαζόμενο κύμα και αναζητούμε στοιχεία του προσπίπτοντος κύματος π.χ. διεύθυνση διάδοσης, πόλωσης για επίπεδα κύματα ή τη θέση της πηγής για σφαιρικά κύματα [79].

Στις εργασίες [80], [81] έχουν μελετηθεί αντίστροφα προβλήματα σκέδασης χρησιμοποιώντας μία μέθοδο μεταβολών και την εξίσωση Heitler αντίστοιχα.

Στην εργασία [74] μελετάται ένα αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης εφαρμόζοντας τη MAS και τοπική βελτιστοποίηση.

Άλλα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης για την ανίχνευση θαμμένων αντικειμένων έχουν μελετηθεί στις [82], [83] και [84]. Στην εργασία [85] έχει μελετηθεί με τη μέθοδο των θεμελιωδών λύσεων ένα αντίστροφο πρόβλημα θεωρίας δυναμικού.

Στην παρούσα διατριβή θα μελετηθούν ευθέα και αντίστροφα προβλήματα σκέδασης που οφείλονται σε ένα αντικείμενο που βρίσκεται σε ένα ομοιογενές μέσο διάδοσης. Η μελέτη αυτών των προβλημάτων θα γίνει στο πεδίο της συχνότητας. Η ανίχνευση θαμμένων και υποθαλάσσιων αντικειμένων καθώς και έρευνες στη γεωφυσική και τη σεισμολογία είναι εφαρμογές της αντίστροφης σκέδασης. Στα radar γνωρίζουμε το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα, μετράμε το σκεδαζόμενο κύμα και επιλύουμε ένα αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης, η λύση του οποίου απεικονίζεται στην οθόνη ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή. Με παρόμοιο τρόπο λειτουργεί και το Sonar, το οποίο χρησιμοποιεί ακουστικά κύματα για την ανίχνευση αντικειμένων μέσα σε υδάτινο περιβάλλον.

Από μαθηματική άποψη τα αντίστροφα προβλήματα κυματικής σκέδασης είναι μη-γραμμικά και μη-καλά τοποθετημένα. Η μη γραμμικότητα αντιμετωπίζεται με κατάλληλη γραμμικοποίηση. Η καλή τοποθέτηση ενός προβλήματος, δηλαδή η ύπαρξη μοναδικής λύσης η οποία εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλήματος είναι απαραίτητη για την εφαρμογή μίας μεθόδου. Οι δυσκολίες που προκύπτουν κατά την επίλυση αυτών των προβλημάτων και ειδικότερα της μη-καλής τοποθέτησης των προβλημάτων αντιμετωπίζεται με κανονικοποίηση, συνήθως του Tikhonov [3].

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε και θα περιγράψουμε μεθόδους επίλυσης αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης στο πεδίο της συχνότητας χρησιμοποιώντας κυρίως τη μέθοδο βοηθητικών πηγών (IMAS) και θα τις εφαρμόσουμε στην επίλυση διαφόρων προβλημάτων και κυρίως στην ανίχνευση θαμμένων αντικειμένων. Στις εφαρμογές στις δύο διαστάσεις ( $2D$ ) τα προβλήματα σκέδασης  $H/M$  κυμάτων ανάγονται σε προβλήματα οριακών τιμών για τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz. Θα μελετήσουμε τα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης για  $H/M$  κυματικά πεδία στις δύο διαστάσεις ( $2D$ ) και στις τρεις διαστάσεις ( $3D$ ).

Κατά τη μελέτη αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης από ένα εμπόδιο για όλα τα είδη κυμάτων (ακουστικά, ηλεκτρομαγνητικά, ελαστικά, θερμοελαστικά), τον πιο σημαντικό ρόλο παίζουν το σκεδαζόμενο (scattered field) και το μακρινό πεδίο του (far field pattern). Με βάση αυτές τις δύο έννοιες τα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Σε προβλήματα στα οποία γνωρίζουμε:

- το σκεδαζόμενο πεδίο (*near-field data*)
- το μακρινό πεδίο (*far-field data*).

Οι μετρήσεις στην πρώτη περίπτωση γίνονται κοντά στον σκεδαστή οπότε μετράμε το σκεδαζόμενο ή το ολικό πεδίο και στη δεύτερη περίπτωση μετράμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του σκεδαζόμενου πεδίου στο άπειρο δηλαδή μετράμε το μακρινό πεδίο.

Θα αναπτύξουμε ένα σύντομο μαθηματικό υπόβαθρο με τις έννοιες του σκεδαζόμενου και μακρινού πεδίου και θα δώσουμε τύπους για διάφορα είδη σκεδαστών σε  $2D$  και  $3D$ .

Χρησιμοποιώντας τη MAS θα περιγράψουμε μία προσεγγιστική διαδικασία υπολογισμού του σκεδαζόμενου πεδίου από τη γνώση του μακρινού πεδίου.

### 3.3.1 Μακρινό πεδίο

Το μακρινό πεδίο (Far Field Pattern - FFP) είναι μία συνάρτηση που ορίζεται στη μοναδιαία σφαίρα ( $3D$ ) ή στο μοναδιαίο κύκλο ( $2D$ ) και δίνει πληροφορίες για την ασυμπτωτική συμπεριφορά του σκεδαζόμενου πεδίου μακριά από τον σκεδαστή. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τα μακρινά πεδία για τις περιπτώσεις  $2D$  και  $3D$  ηλεκτρομαγνητικά κύματα, τα οποία στηρίζονται στην ανάλυση των θεμελιωδών λύσεων των αντιστοιχών εξισώσεων.

Αν  $E^S$  είναι το σκεδαζόμενο κύμα και  $E^\infty$  το αντίστοιχο μακρινό πεδίο:

α) Στην περίπτωση  $2D$  έχουμε:

$$E^S(\mathbf{r}) = \frac{e^{jkr}}{\sqrt{r}} E^\infty(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.91)$$

$$E^\infty(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{jk}{4\pi} \int_{\partial D} \left[ E^S(\mathbf{r}') \frac{\partial e^{-jk\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}}{\partial n'} - e^{-jk\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'} \frac{\partial u^S(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}'). \quad (3.92)$$

β) Στην περίπτωση  $3D$  έχουμε:

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = \frac{e^{jkr}}{r} \mathbf{E}^\infty(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.93)$$

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{r}) = \frac{e^{jkr}}{r} \mathbf{H}^\infty(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.94)$$

$$\mathbf{E}^\infty(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{jk}{4\pi} \hat{\mathbf{r}} \times \int_S [(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^s) - \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^s)] e^{-jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} ds(\mathbf{r}'), \quad (3.95)$$

$$\mathbf{H}^\infty(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{jk}{4\pi} \hat{\mathbf{r}} \times \int_S [(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^s) + \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^s)] e^{-jk\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} ds(\mathbf{r}'). \quad (3.96)$$

Λεπτομέρειες για τα μακρινά πεδία αναφέρονται στο παράρτημα.

### 3.3.2 Σύνδεση κοντινού και μακρινού πεδίου

Η μέθοδος επίλυσης αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης με χρήση της MAS χρειάζεται τη γνώση του σκεδαζόμενου πεδίου NF (Near Field). Σε πολλές όμως περιπτώσεις οι μετρήσεις γίνονται μακριά του σκεδαστή. Για το λόγο αυτό θα αναπτύξουμε μία μέθοδο υπολογισμού του NF από τη γνώση του FF (Far Field). Θα χρησιμοποιήσουμε τη βασική ιδέα που έχει αναπτυχθεί στην εργασία [2]. Στηρίζεται στην ασυμπτωτική συμπεριφορά του σκεδαζόμενου πεδίου, ουσιαστικά στην ασυμπτωτική μορφή της θεμελιώδους λύσης της αντίστοιχης εξίσωσης για  $r \rightarrow \infty$ .

Τα βήματα της μεθόδου στις περιπτώσεις 2D και 3D είναι τα ίδια, αλλάζουν μόνο οι θεμελιώδεις λύσεις και συνεπώς οι ασυμπτωτικές μορφές τους. Στην περίπτωση 2D έχουμε τα ακόλουθα βήματα.

α) Γνωρίζουμε (από μετρήσεις) το FF (Far Field Pattern)  $F(\varphi_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . Δηλαδή

$$E_{meas}^\infty(\varphi_m) = F(\varphi_m), \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (3.97)$$

β) Θεωρούμε  $N$  βοηθητικές πηγές τοποθετημένες στα σημεία  $\mathbf{r}_n^+$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  πάνω σε έναν κύκλο  $S^+$  που περιβάλλει το σκεδαστή και βρίσκεται στο NF που δημιουργεί. Οι πηγές είναι τύπου  $H_0^{(1)}$  (συναρτήσεις Hankel 1<sup>ου</sup> είδους και μηδενικής τάξης).

$$E_{MAS}^S(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N c_n H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^+|), \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_n^+. \quad (3.98)$$

γ) Χρησιμοποιούμε την ασυμπτωτική μορφή της συνάρτησης Hankel (8.1) από το παράρτημα και βρίσκουμε το FF  $E_{MAS}^\infty$  που προκύπτει από το σκεδαζόμενο πεδίο  $E_{MAS}^S$ .

$$\begin{aligned} E_{MAS}^S(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^N c_n H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^+|) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \sum_{n=1}^N c_n e^{-jk(x_n \cos \varphi + y_n \sin \varphi) + \frac{j\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Επομένως το FF που αντιστοιχεί στο  $E_{MAS}^S(\mathbf{r})$  είναι

$$E_{MAS}^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \sum_{n=1}^N c_n e^{-jk(x_n \cos \varphi + y_n \sin \varphi) + \frac{j\pi}{4}}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.100)$$

δ) Από την ισότητα

$$E_{MAS}^\infty = E_{meas}^\infty \quad (3.101)$$

και την επίλυση του συστήματος

$$\sum_{n=1}^N c_n e^{-jk(x_n \cos \varphi + y_n \sin \varphi) + \frac{j\pi}{4}} = F(\varphi_m), \quad (3.102)$$

υπολογίζουμε τους συντελεστές  $c_n$  δηλαδή το  $E_{MAS}^S$ .

Κατασκευάζουμε το κοντινό πεδίο που αντιστοιχεί στο FF. Το κοντινό αυτό πεδίο είναι έξω από την περιοχή των SFS του ερευνούμενου κυματικού πεδίου. Αυτό μπορεί να γίνει αν θεωρήσουμε  $N$  πηγές που είναι θεμελιώδεις λύσεις της εξίσωσης Helmholtz

της μορφής  $H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  δηλαδή συναρτήσεις Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης που εκφράζουν εξερχόμενα κύματα, πάνω σε έναν κύκλο όπου μέσα έχει τοποθετηθεί μία κεραία.

Η διάμετρος  $d$  του κύκλου  $S$  λαμβάνεται

$$d > \frac{\lambda}{\theta}, \quad (3.103)$$

όπου  $\lambda$  είναι μήκος κύματος και  $\theta$  το εύρος του βασικού λοβού της κεραίας. Τότε το κοντινό πεδίο με εφαρμογή της MAS γράφεται

$$E(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N c_n H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n|), \quad \mathbf{r}'_n \in S. \quad (3.104)$$

Το FF του  $E$  μπορεί να βρεθεί από την ασυμπτωτική μορφή για  $r \rightarrow \infty$ . Λαμβάνοντας υπόψη την ασυμπτωτική σχέση (3.99) η (3.104) γίνεται

$$E(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} E^\infty(\hat{\mathbf{r}}) + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.105)$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε  $N$  CP όπως προηγουμένως στην ανακατασκευή πεδίου υπολογίζουμε τους συντελεστές  $c_n$  από την επίλυση του αλγεβρικού συστήματος

$$\sum_{n=1}^N c_n e^{-jkr_m} = F(\varphi_m), \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (3.106)$$

### 3.3.3 Η MAS στην επίλυση αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης (IMAS)

Για την ανίχνευση ενός (άγνωστου) αντικειμένου με εφαρμογή της θεωρίας σκέδασης θα αναπτύξουμε μία μέθοδο επίλυσης αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης με βάση τη MAS. Εκτελούμε μετρήσεις, οι οποίες μπορεί να είναι για:

- Το σκεδαζόμενο πεδίο (δεδομένα κοντινού πεδίου)

- Το μακρινό πεδίο (δεδομένα μακρινού πεδίου)
- Το ολικό πεδίο

Αν λάβουμε υπόψη ότι το ολικό πεδίο είναι η υπέρθεση του προσπίπτοντος και του σκεπαζόμενου καθώς επίσης ότι το προσπίπτον πεδίο είναι λύση της εξίσωσης του προβλήματος (Maxwell, Helmholtz), τότε η τρίτη περίπτωση (του ολικού πεδίου) ανάγεται στην πρώτη (του σκεδαζόμενου πεδίου). Το προσπίπτον κύμα μπορεί να είναι επίπεδο ή σφαιρικό όπως στο ευθύ πρόβλημα ανάλογα με την απόσταση της πηγής από τον σκεδαστή.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε έναν αλγόριθμο εφαρμογής της μεθόδου των βοηθητικών πηγών στην επίλυση αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης (IMAS).

### 3.3.4 Γενική περιγραφή της IMAS

*Περίπτωση 2D.* Έστω  $D$  ένα άγνωστο αντικείμενο του  $\mathbb{R}^2$ . Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα σφαιρικό ή επίπεδο προσπίπτει στο  $D$ .

α) Θεωρούμε μία κυκλική καμπύλη  $S_{meas}$  η οποία περιβάλλει το σώμα  $D$  και πάνω σε αυτή την καμπύλη στα σημεία  $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_M$  μετράμε το σκεδαζόμενο πεδίο

$$E_{meas}^S(\mathbf{r}'_m), \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (3.107)$$

β) Υπολογίζουμε το σκεδαζόμενο πεδίο με τη MAS χρησιμοποιώντας τις βοηθητικές πηγές  $\mathbf{r}^-_1, \mathbf{r}^-_2, \dots, \mathbf{r}^-_N$ , στο εσωτερικό του  $D$  πάνω σε μία επιφάνεια  $S^-$  κατάλληλα κατανεμημένες (βοηθητικές πηγές).

$$E_{MAS}^S(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N c_n H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^-|). \quad (3.108)$$

γ) Ορίζουμε τη συνάρτηση



$$\begin{aligned}
T(\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{r}}^-) &= \sum_{m=1}^M |E_{meas}^S(\mathbf{r}'_m) - E_{MAS}^S(\mathbf{r}'_m)|^2 \\
&= \sum_{m=1}^M \left| E_{meas}^S(\mathbf{r}'_m) - \sum_{n=1}^N c_n H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}'_m - \mathbf{r}_n^-|) \right|^2,
\end{aligned} \tag{3.109}$$

όπου  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)$  είναι το διάνυσμα των πλατών των βοηθητικών πηγών και  $\tilde{\mathbf{r}}^- = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_M)$ . Γίνεται ελαχιστοποίηση  $T$  με παραμέτρους τα πλάτη  $c_1, c_2, \dots, c_N$  και τις θέσεις  $\mathbf{r}_1^-, \mathbf{r}_2^-, \dots, \mathbf{r}_N^-$  συναρτήσεως της γεωμετρίας της επιφάνειας του σκεδαστή.

Έχουμε να επιλύσουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μη γραμμικό και μη καλά τοποθετημένο. Η άμεση σύνδεση των πλατών και των θέσεων των βοηθητικών πηγών με τη γεωμετρία του σκεδαστή είναι ένα μαθηματικό πρόβλημα που παρουσιάζει δυσκολίες στη θεωρητική μελέτη αλλά και στις εφαρμογές. Όμως σε ειδικές περιπτώσεις όταν έχουμε κάποιες πληροφορίες για τη γεωμετρική δομή του άγνωστου αντικείμενου η διαδικασία μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά και να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε πολλά προβλήματα εφαρμογών. Συγκεκριμένα αυτό μπορεί να γίνει αν γνωρίζουμε ότι το άγνωστο αντικείμενο είναι μία μικρή διαταραχή ενός εικονικού σκεδαστή ο οποίος μπορεί να προσεγγίσει διάφορα σώματα. Ένα τέτοιο εικονικό σχήμα είναι το αστεροειδές, το οποίο με μικρές διαταραχές των γεωμετρικών παραμέτρων του μπορεί να προσεγγίσει διάφορα άλλα γεωμετρικά σχήματα π.χ. κύκλο, έλλειψη, βελόνα.

Αν επιπλέον έχουμε πληροφορίες για τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή δηλαδή γνωρίζουμε τη μορφή των οριακών συνθηκών τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε μία μέθοδο κανονικοποίησης (όπως είναι εκείνη του Tikhonov [3]) και να έχουμε ευσταθή λύση. Αναλυτική περιγραφή της κανονικοποίησης γίνεται στις εφαρμογές.

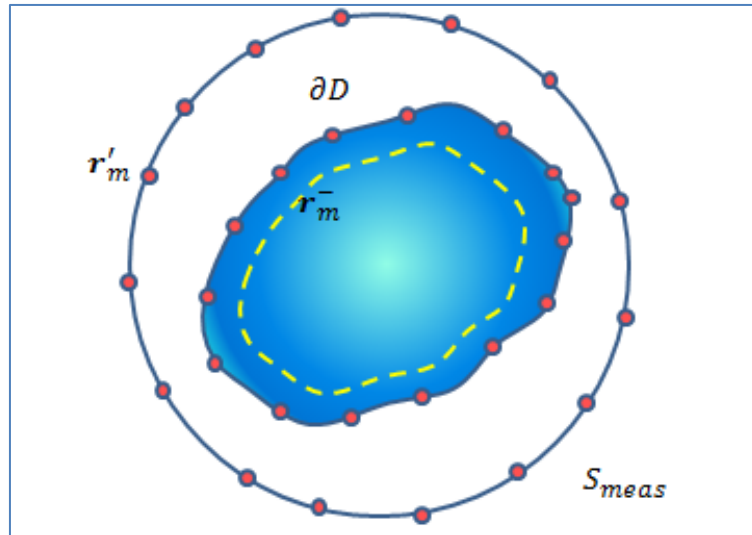
*Περίπτωση 3D - βαθμωτή.* Τα βασικά βήματα της μεθόδου όπως και στην περίπτωση 2D επίλυσης αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης (IMAS) είναι:

α) Μετράμε το σκεδαζόμενο κύμα σε σημεία  $\mathbf{r}'_m$  (testing points),  $m = 1, 2, \dots, M$  τα οποία κατανέμονται ομοιόμορφα πάνω σε μία σφαιρική επιφάνεια  $S_R = \partial B(\mathbf{0}, R)$ , όπου  $B(\mathbf{0}, R)$  είναι σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $R$  αρκετά μεγάλη ώστε να περιέχει στο εσωτερικό της το σώμα  $D$ .

Συγκεκριμένα παίρνουμε:

$$u(\mathbf{r}'_m) = \varphi_m, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (3.110)$$

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση του διηλεκτρικού και της εμπέδησης μετράμε και την κάθετη παράγωγο  $\frac{\partial u}{\partial n}$  πάνω στην επιφάνεια  $S_R$ .



Σχήμα 3.7 Αντίστροφο πρόβλημα με την IMAS

β) Υπολογίζουμε το σκεδαζόμενο πεδίο  $u^s(\mathbf{r})$  ως γραμμικό συνδυασμό και των θεμελιωδών λύσεων  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  της εξίσωσης Helmholtz (2.9):

$$u^s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N c_n \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n^-), \quad \mathbf{r} \in D_{\varepsilon\xi}(\mathbb{R}^3 \setminus D), \quad (3.111)$$

όπου  $\mathbf{r}_n^-$  είναι οι θέσεις των βοηθητικών πηγών τοποθετημένες στο εσωτερικό του σκεδαστή  $D$  και  $c_n$  είναι οι άγνωστοι συντελεστές. (Στο ευθύ πρόβλημα, όπου είναι γνωστό το  $\partial D$ , οι συντελεστές  $c_n$  υπολογίζονται από τις εκτιμήσεις των οριακών συνθηκών (collocations)).

γ) Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} T(\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{r}}^-) &= \sum_{m=1}^M |u_{meas}^S(\mathbf{r}'_m) - u_{MAS}^S(\mathbf{r}'_m)|^2 \\ &= \sum_{m=1}^M \left| u_{meas}^S(\mathbf{r}'_m) - \sum_{n=1}^N c_n \Phi^{(2)}(|\mathbf{r}'_m - \mathbf{r}_n^-|) \right|^2, \end{aligned} \quad (3.112)$$

όπου  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)$  είναι το διάνυσμα των πλατών των βοηθητικών πηγών και  $\tilde{\mathbf{r}}^- = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_M)$ , την οποία ελαχιστοποιούμε με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, θεωρώντας ως παραμέτρους τα  $\mathbf{c}$  και  $\tilde{\mathbf{r}}^-$ .

*Περίπτωση 3D - διανυσματική.* Όπως και στην περίπτωση του βαθμωτού 3D προβλήματος μετράμε το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία  $\mathbf{r}'_m$  που βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια σφαίρας που περιβάλλει το άγνωστο αντικείμενο, δηλαδή

$$\mathbf{E}_{meas}^S(\mathbf{r}'_m) = \mathbf{F}_m, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (3.113)$$

Υπολογίζουμε το σκεδαζόμενο κύμα  $\mathbf{E}^S$  με χρήση της MAS

$$\mathbf{E}_{MAS}^S(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_n) \cdot \mathbf{c}_n, \quad (3.114)$$

όπου  $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_n)$  είναι η θεμελιώδης λύση (2.10) της (1.30) σε δυαδική μορφή της εξίσωσης. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$T(\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{r}}^-) = \sum_{m=1}^M \left| \mathbf{E}_{meas}^S(\mathbf{r}'_m) - \sum_{n=1}^N \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_n) \cdot \mathbf{c}_n \right|^2, \quad (3.115)$$

όπου  $\tilde{\mathbf{c}} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_N)$ .

Στη συνέχεια γίνεται ελαχιστοποίηση όπως προηγουμένως.

### 3.3.5 Τέλειος αγωγός

Στην περίπτωση του τέλει αγωγού στις 2D το συναρτησοειδές  $T$  γίνεται

$$\begin{aligned}
 T(\mathbf{r}, \mathbf{c}, \mathbf{r}^-) = & \sum_{m=1}^N |E_{meas}^S(\mathbf{r}_m) - E_{MAS}^S(\mathbf{r}_m)|^2 \\
 & + \sum_{m=1}^N |E_{meas}^S(\mathbf{r}_m) + E^{in}(\mathbf{r}_m)|^2 + \lambda_1 \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \\
 & + \lambda_2 \sum_{n=2}^N (\rho_n - \rho_{n-1})^2,
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

όπου  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  είναι οι παράμετροι κανονικοποίησης.

Η ελαχιστοποίηση των συναρτησοειδών συνήθως γίνεται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων MINPACK, LMDIF and LMDER, VA07AD και NAG E04UPF [68], [69] και [86] στο περιβάλλον της Fortran.

Με τη μέθοδο των θεμελιωδών λύσεων στην εργασία [87] μελετώνται αντίστροφα προβλήματα Cauchy και στις εργασίες [88] και [89] αντίστροφα προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων για ακουστικά μαλακό σκεδαστή και με εμπέδηση στο περιβάλλον του Matlab.

**Αριθμητική εφαρμογή.** Η εφαρμογή της μεθόδου υλοποιείται στο περιβάλλον Matlab. Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση cputime για να προσδιορίσουμε το χρόνο που χρειάστηκε ο κώδικας μας για να εκτελεστεί.

1<sup>η</sup> περίπτωση. Αναζητούμε το σχήμα του στόχου και για να το προσδιορίσουμε θεωρούμε 15 βοηθητικές πηγές πάνω σε κύκλο με ακτίνα 0,8 cm και κέντρο (0,0).

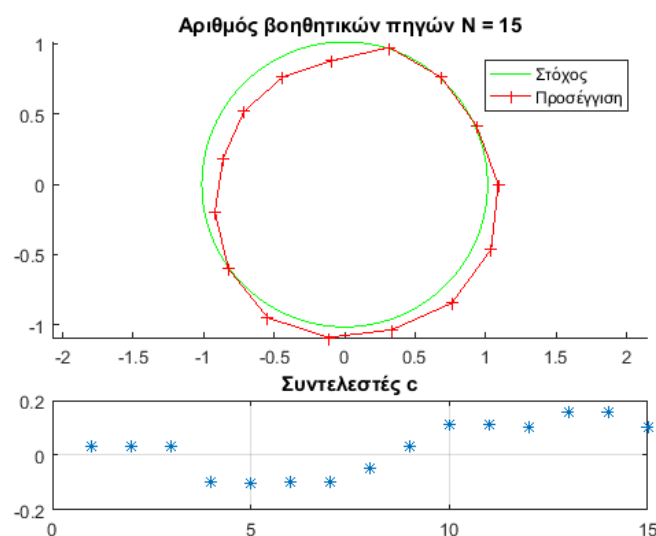
Για να προσδιορίσουμε το στόχο μας αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση (3.116) με παραμέτρους τα  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{r}$  και  $\mathbf{r}'$ .

θεωρούμε ότι οι παράμετροι κανονικοποίησης  $\lambda_1, \lambda_2$  μηδενίζονται και το σκεδαζόμενο πεδίο που υπολογίζουμε με τη MAS ικανοποιεί τη συνθήκη του τέλειου αγωγού.

Η ελαχιστοποίηση αυτή θα επιτευχθεί με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `lsqnonlin`,  $d = @(x) fun\_d(x(1:N), x(N + 1:2 * N), N, E, r1); x = lsqnonlin(d, [c; r]);$ , η οποία για να μοντελοποιηθεί πρέπει να οριστεί ένα m file με τον ορισμό `fun`.

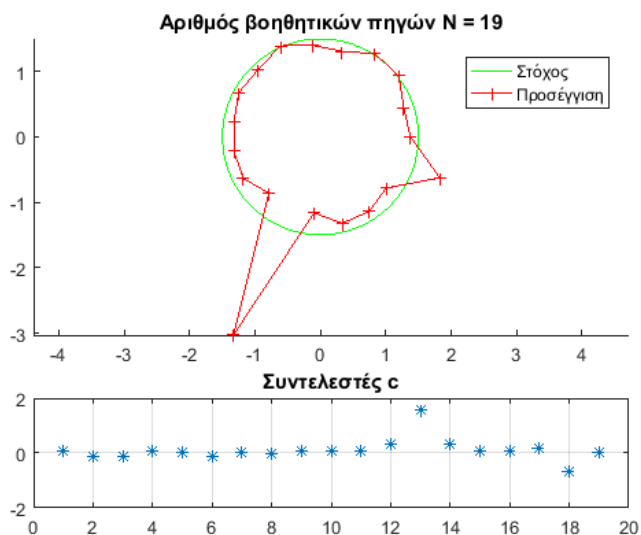
Στα σχήματα προβάλλουμε με πράσινο χρώμα τη θέση του στόχου μας και με κόκκινο χρώμα τα σημεία που βρέθηκαν με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Επίσης υπάρχει και ο πίνακας τιμών των συντελεστών  $c$ .

Για 15 βοηθητικές πηγές ( $N=15$ ), Σχήμα 3.8, παρατηρούμε ότι τα σημεία προσεγγίζουν αρκετά στο πραγματικό σχήμα. Ο χρόνος του `cpurtime` έφτασε τα 2.2152 sec.



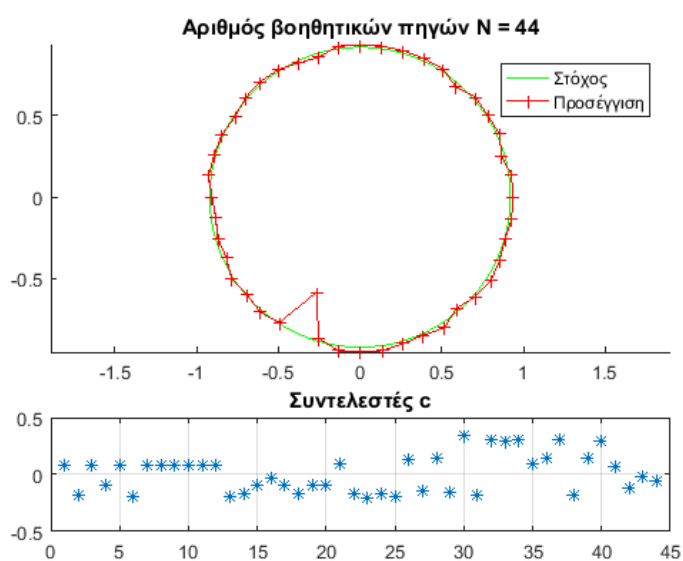
Σχήμα 3.8 Επίλυση αντίστροφου προβλήματος με χρήση 15 βοηθητικών πηγών

2<sup>η</sup> περίπτωση. Διατηρώντας τις ίδιες παραμέτρους και αλλάζοντας το πλήθος των βοηθητικής πηγών από 15 σε 19, έχουμε τα αποτελέσματα στο Σχήμα 3.9. Ο χρόνος του `cpurtime` έφτασε τα 4.3876 sec.



Σχήμα 3.9 Επίλυση αντίστροφου προβλήματος με χρήση 19 βοηθητικών πηγών

3<sup>η</sup> περίπτωση. Τέλος στο Σχήμα 3.10 δείχνουμε τα αποτελέσματα για 44 βοηθητικές πηγές. Ο χρόνος του *cruntime* έφτασε τα 13.7749 sec.



Σχήμα 3.10 Επίλυση αντίστροφου προβλήματος με χρήση 44 βοηθητικών πηγών

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος επίλυσης του αντίστροφου προβλήματος, μεγαλώνει εκθετικά όσο αυξάνεται ο αριθμός των βοηθητικών πηγών.

## 4 ΡΑΝΤΑΡ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗΣ ΥΠΕΔΑΦΟΥΣ

Το ραντάρ διείσδυσης εδάφους (Γεωραντάρ - Ground Penetrating Radar - GPR) χρησιμοποιείται ευρέως για την ανίχνευση θαμμένων αντικειμένων και γενικότερα για τη μελέτη της γεωλογικής δομής του υπεδάφους. Η λειτουργία του GPR διέργεσης, το οποίο κυρίως θα χρησιμοποιήσουμε, στηρίζεται στη διάδοση και σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πεδίο του χρόνου. Συγκεκριμένα παράγονται ηλεκτρομαγνητικοί παλμοί υψηλής συχνότητας από μία γεννήτρια παλμικών σημάτων, εκπέμπονται με κατάλληλη κεραία, διαδίδονται στο υπέδαφος σκεδάζονται από τις ανομοιογένειες του εδάφους, επιστρέφουν στην κεραία λήψης καταγράφονται και μελετώνται. Η χρονική διάρκεια της διαδρομής του σήματος καθώς επίσης και η ισχύς του σκεδαζόμενου κύματος είναι τα βασικά μεγέθη στη μελέτη των οποίων στηρίζεται η μέθοδος. Η επεξεργασία αυτών των καταγραφών δίνει σημαντικές πληροφορίες για τη

θέση του θαμμένου αντικειμένου και για τη δομή του υπεδάφους οι οποίες απεικονίζονται στην οθόνη ενός υπολογιστή. Τα κύματα με υψηλές συχνότητες εξασθενούν λόγω της αγωγιμότητας, της διηλεκτρικής επιτρεπτότητας και την αντίσταση του εδάφους και δεν δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα για την ανίχνευση αντικειμένων σε μεγάλο βάθος, ενώ για μικρά βάθη πετυχαίνουν πολύ καλές απεικονίσεις του εδάφους.

Στη μελέτη του υπεδάφους σε μεγάλα βάθη χρησιμοποιούνται κύματα σε χαμηλές συχνότητες τα οποία με κατάλληλη επιλογή του παλμού που εκπέμπεται από τη γεννήτρια σήματος μέσω της κεραίας δίνουν καλύτερα αποτελέσματα. Επομένως η σχεδίαση κατάλληλων ευρυζωνικών κεραιών είναι μία σημαντική ερευνητική διαδικασία που μπορεί να βελτιώσει ουσιαστικά τα αποτελέσματα της έρευνας. Συνήθως χρησιμοποιούνται κεραιές μεγάλου εύρους συχνοτήτων, όπως οι παπιγιόν (Bowtie) και οι χοανοειδείς (TEM Horn).

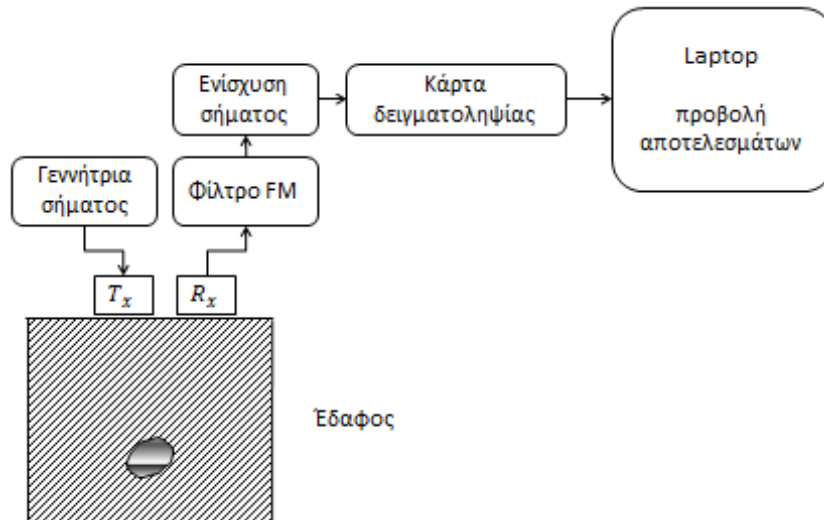
Στην έρευνα μας οι κεραιές εκπομπής και λήψης που θα χρησιμοποιηθούν είναι συχνοτήτων από 50 MHz έως 1 GHz. Κατά την ανίχνευση ενός θαμμένου αντικειμένου η καταγραφή των σημάτων γίνεται με συνεχή κίνηση στην επιφάνεια του εδάφους και λαμβάνονται μέτρα για τη μείωση του θορύβου που δημιουργείται από την επιφάνεια και το υλικό διάδοσης του εδάφους αλλά και από τη σύζευξη πομπού και δέκτη.

#### **4.1 Διάταξη γεωραντάρ**

Το γεωραντάρ αποτελείται από τις κεραιές εκπομπής και λήψης, τη γεννήτρια σήματος, την κάρτα δειγματοληψίας και τον ενισχυτή σήματος στο σημείο λήψης (Σχήμα 4.1). Ενδιάμεσα υπάρχουν και ηλεκτρονικά κομμάτια που διασφαλίζουν την ομαλή λειτουργία, όπως φίλτρα.

Τέλος ένα inverter συνδεδεμένο σε μπαταρία με 35 Ah παρέχει 220 V στη διάταξη, για να δουλέψουν όλα τα υποσυστήματα.



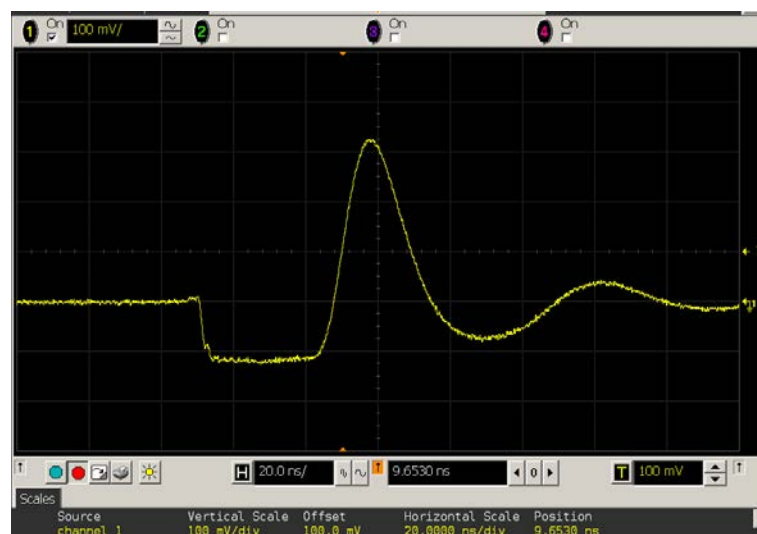


Σχήμα 4.1 Λογική διάταξη γεωραντάρ

Το γεωραντάρ αποτελείται από ένα σταθερό τμήμα, στο οποίο μπορούμε να προσαρμόσουμε διάφορες κεραίες σε μέγεθος και συχνότητα λειτουργίας καθώς να επιλέξουμε το σήμα εκπομπής μεταξύ δύο γεννητριών σήματος.

Το παραμετροποιήσιμο τμήμα του GPR περιλαμβάνει:

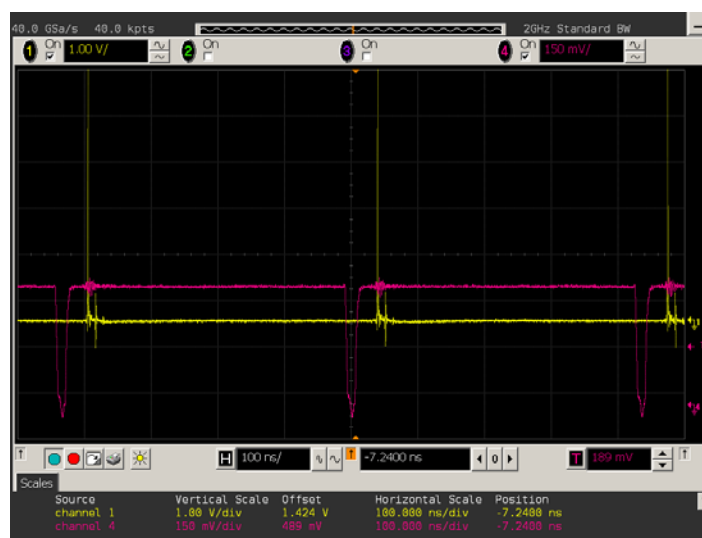
**Γεννήτρια σήματος.** Διαθέτουμε μία γεννήτρια που κατασκευάστηκε για τη χρήση του GPR και τη λειτουργία του σε μεγάλα βάθη εκπέμποντας έναν πολύ ισχυρό παλμό (Σχήμα 4.2).



Σχήμα 4.2 Σήμα γεννήτριας που κατασκευάστηκε για τη χρήση του GPR

Η γεννήτρια δεν διαθέτει εξωτερικό trigger και ο συγχρονισμός της στην κάρτα δειγματοληψίας γίνεται από το λογισμικό. Η καταγραφή του σήματος της γεννήτριας έγινε με τη χρήση παλμογράφου και δύο attenuators (20 dB ο καθένας) που συνδέθηκαν σε σειρά και μας έδωσαν μία εξασθένηση της τάξης των 40 dB. Η διάταξη αυτή πραγματοποιήθηκε για να προστατέψουμε τον παλμογράφο από το ισχυρό σε ένταση σήμα της γεννήτριας.

Επίσης υπάρχει η δυνατότητα επιλογής της χρήσης εργαστηριακής γεννήτριας σήματος που διαθέτει μικρότερη ισχύ αλλά έχει πολλές δυνατότητες παραμετροποίησης στα χαρακτηριστικά της. Ιδιότητα που την καθιστά κατάλληλη για την έρευνα σε μικρότερα βάθη με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Το μοντέλο της γεννήτριας είναι το AVM-2-C και παρέχει πλάτη μέχρι και 15V. Η διάρκεια των παλμών κυμαίνεται από 0,25 μέχρι 2 nsec ανάλογα με το πλάτος που θα ζητηθεί. Ο παλμός θεωρείται αρκετά στενός και ικανοποιητικός για χρήση σε σύστημα GPR.

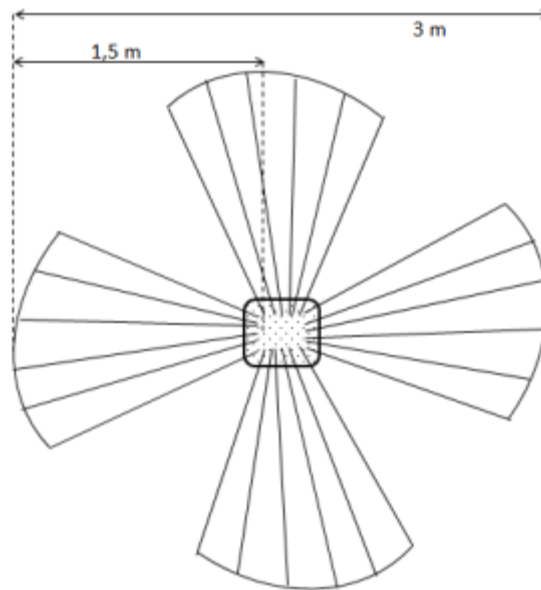


Σχήμα 4.3 Σήμα εργαστηριακής γεννήτριας (κίτρινο είναι το σήμα και μωβ το trigger)

Στο Σχήμα 4.3 βλέπουμε σε παλμογράφο στο κανάλι ένα με κίτρινο χρώμα το σήμα της γεννήτριας μας και στο κανάλι 4 με μωβ χρώμα το σήμα από το trigger. Η ύπαρξη εξωτερικού trigger δίνει τη δυνατότητα ευκολότερου συγχρονισμού των σημάτων στο GPR και καλύτερη λειτουργία του ως προς την καταγραφή.

**Κεραίες.** Η βασική χρήση του GPR πραγματοποιήθηκε με κεραίες τύπου παπιγιόν σε διάφορα μεγέθη, ανάλογα με το επιθυμητό βάθος μελέτης, καθώς και με TEM horn.

Για τη μελέτη σε μεγάλα βάθη επιλέξαμε δύο κεραίες τύπου παπιγιόν κάθετες μεταξύ τους (Σχήμα 4.4). Οι κεραίες έχουν διαστάσεις 3 m x 3 m.



Σχήμα 4.4 Ακτινωτή κεραία συνολικού μήκους 3 m

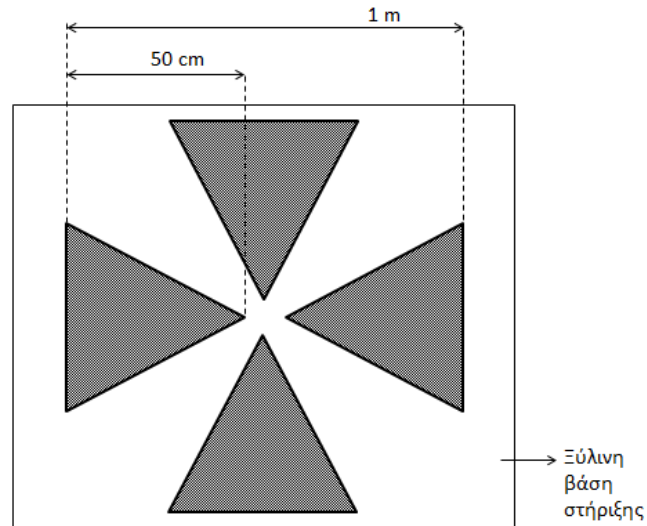
Η κεραία δεν είναι συμπαγής και έχει κατασκευαστεί από ράβδους αλουμινίου. Στο κέντρο υπάρχει ένα κομμάτι ερταλόν όπου συνδέονται όλα τα άκρα των ράβδων. Στη σύνδεση των αντικριστών κεραιών παρεμβάλλεται balun 4:1.

Το μεγάλο μέγεθος της κεραίας, δίνει τη δυνατότητα να υλοποιηθεί με ράβδους και να μην είναι συμπαγής χωρίς να έχουμε σημαντικές αλλοιώσεις στα χαρακτηριστικά της. Το μέγεθός της την καθιστά ικανή να ακτινοβολεί σε χαμηλές συχνότητες δίνοντάς μας τη δυνατότητα να μελετήσουμε βάθη έως 10 - 15 m, με αντίβαρο τους περιορισμούς στη μετακίνηση και τοποθέτηση στην εφαρμογή του πεδίου.

Θέλοντας να μειώσουμε τις διαστάσεις της κεραίας και να γίνει πιο εύκολη η χρήση της στο πεδίο, κατασκευάσαμε άλλη μία κεραία τύπου παπιγιόν με διαστάσεις 1 m x 1 m (Σχήμα 4.5).

Το υλικό κατασκευής είναι γαλβανισμένο σίδηρο.

Οι αντικριστές κεραίες συνδέονται μεταξύ τους και στο ενδιάμεσο παρεμβάλλεται ένα balun 4:1.

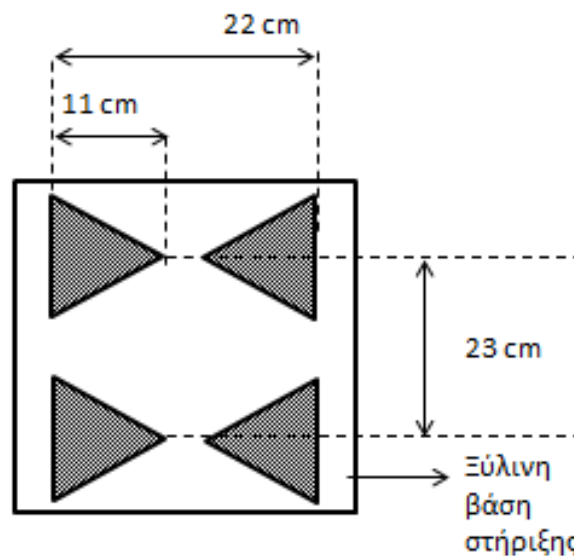


Σχήμα 4.5 Κεραία συνολικού μήκους 1 m

Το μέγεθός της και κατά συνέπεια η συχνότητα λειτουργίας της, την καθιστά ικανή για χρήση και μελέτη σε βάθη έως 8 m.

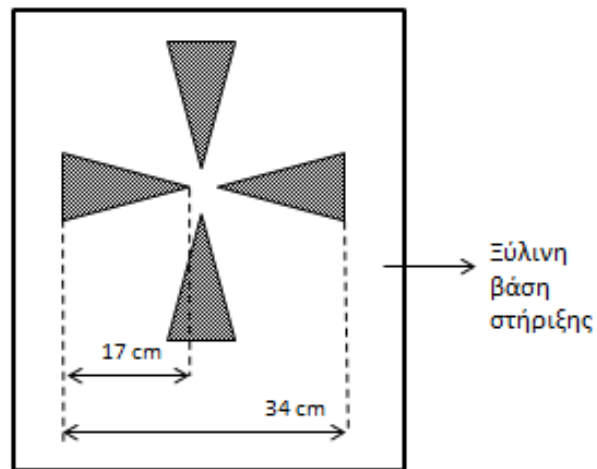
Για τη μελέτη σε μικρότερα βάθη μελετήσαμε και κατασκευάσαμε άλλες τρεις κεραίες τύπου παπιγιόν με αρκετά μικρότερες διαστάσεις. Μία με παράλληλη διάταξη των κεραιών και άλλες δύο με κάθετη διάταξη.

Η παράλληλη διάταξη των κεραιών (Σχήμα 4.6) αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα που έχουν ύψος 11 cm και η μεταξύ τους απόσταση από τα κέντρα είναι 23 cm [90].



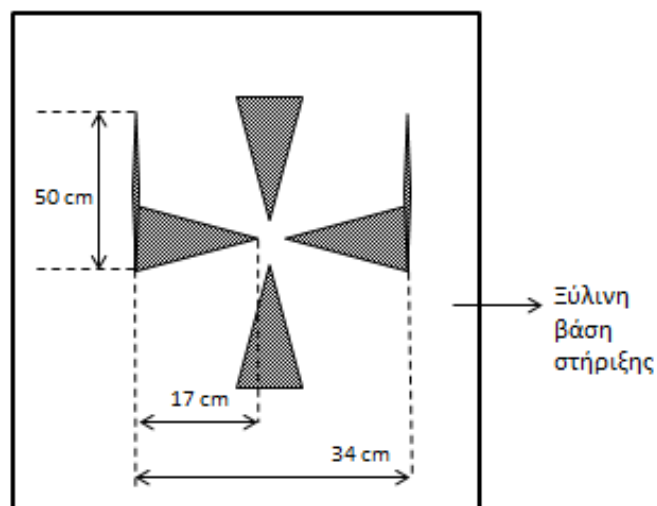
Σχήμα 4.6 Παράλληλες κεραίες

Οι δύο άλλες διατάξεις είναι κάθετες μεταξύ τους. Η πρώτη αποτελείται από τρίγωνα με ύψος 17 cm (Σχήμα 4.7).



Σχήμα 4.7 Κεραίες κάθετες μεταξύ τους

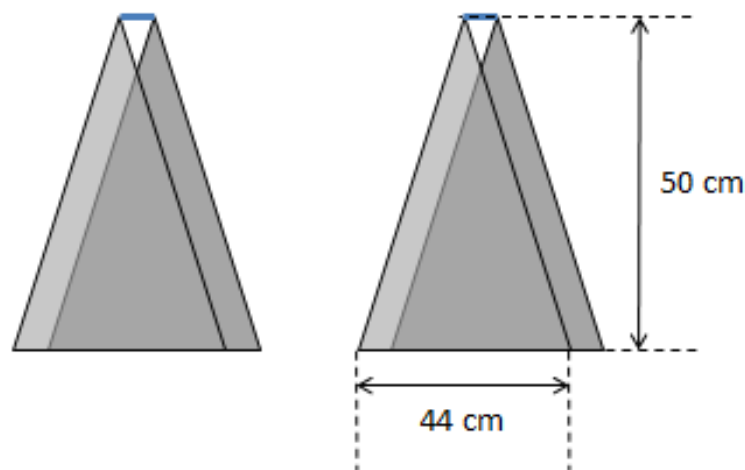
Η δεύτερη κεραία εκπομπής διαθέτει πτερύγια (Σχήμα 4.8), δηλαδή στο τέλος της κεραίας συνεχίζεται κάθετη κατασκευή ύψους 50 cm.



Σχήμα 4.8 Κεραία με πτερύγια ύψους 50 cm

Όλες οι κατασκευές είναι τοποθετημένες σε ξύλινες βάσεις τύπου κόντρα πλακέ εξωτερικής χρήσης και διαθέτουν ιμάντες στη μία άκρη τους, για να είναι εύκολη η μετακίνησή τους και κατά συνέπεια η σάρωση στο πεδίο.

Τέλος χρησιμοποιήσαμε και δύο κεραίες τύπου TEM horn με ύψος τριγώνου 50 cm. Αυτού του τύπου οι κεραίες είναι σαν μία διπλωμένη κεραία παπιγιόν με μεγαλύτερη κατευθυντικότητα.



Σχήμα 4.9 Κεραία TEM horn

Το σταθερό τμήμα του GPR περιλαμβάνει:

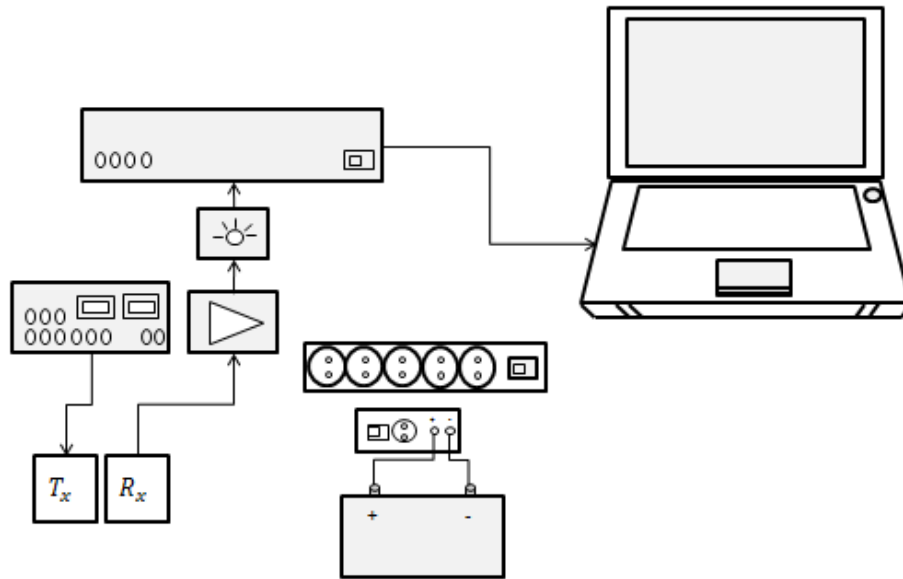
Το σήμα στην έξοδο της κεραίας λήψης, εισέρχεται σε φίλτρο σημάτων FM που δεν επιτρέπει τη διέλευση σημάτων στις συχνότητες 80-100 MHz και περιορίζει τις παρεμβολές από σήματα ραδιοφώνου.

Στη συνέχεια το σήμα εισέρχεται σε ενισχυτή (LNA - Low Noise Amplifier) που ενισχύει σήματα στο εύρος από 50 MHz έως 2 GHz.

Έπειτα το σήμα καταλήγει στην κάρτα δειγματοληψίας μοντέλο AP 240 Acqiris, η οποία διαθέτει 1 κανάλι x 2 Gsp/s, 8bits ανάλυση και υποστηρίζει είσοδο από εξωτερικό trigger.

Η κάρτα συνδέεται σε φορητό υπολογιστή ο οποίος διαθέτει Labview και Matlab, προγράμματα τα οποία είναι απαραίτητα για την ανάλυση, επεξεργασία και παρουσίαση των αποτελεσμάτων της καταγραφής.

Τέλος το σύστημα διαθέτει και ένα inverter 12v / 220v (800 Watt/1500 Watt peak) που συνδέεται σε μπαταρία με 35 ah και είναι ικανό να τροφοδοτήσει όλα τα υποσυστήματα για αρκετές ώρες, επιτρέποντας τη μελέτη στο πεδίο.



Σχήμα 4.10 Διάταξη γεωραντάρ

## 4.2 Περιγραφή της μεθόδου

Η μέθοδος στηρίζεται στην καταμέτρηση του χρόνου που απαιτείται ώστε το ηλεκτρομαγνητικό κύμα από την πηγή να φτάσει στο θαμμένο αντικείμενο και να επιστρέψει στην κεραία λήψης. Γνωρίζοντας την ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων υπολογίζουμε το βάθος. Η ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r \frac{1 + \sqrt{1 + (\sigma/\epsilon\omega)^2}}{2}}}, \quad (4.1)$$

όπου  $c$  είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό ( $c \cong 0,3 \text{ m/ns}$ ),  $\epsilon_r$  και  $\mu_r$  είναι η σχετική διηλεκτρική επιτρεπτότητα και η σχετική μαγνητική διαπερατότητα του μέσου διάδοσης. Η ποσότητα  $\sigma/\epsilon\omega$ , όπου  $\sigma$  είναι η ηλεκτρική αγωγιμότητα,  $\epsilon$  η διηλεκτρική επιτρεπτότητα του μέσου διάδοσης και  $\omega$  η γωνιακή συχνότητα, είναι ένας παράγοντας απώλειας. Αν θεωρήσουμε ότι ο παράγοντας απώλειας είναι πολύ μικρός και υποθέσουμε ότι η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου είναι ίση με το κενό ( $\mu_r = 1$ ) τότε η ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων δίνεται από τον τύπο

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}. \quad (4.2)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (4.2) και γνωρίζοντας το χρόνο διάδοσης  $t$  του κύματος για τη διαδρομή πομπός - στόχος - δέκτης υπολογίζουμε το βάθος  $h$  του θαμμένου αντικειμένου από τον τύπο

$$h = \frac{ct}{2\sqrt{\epsilon_r}} \quad (4.3)$$

Οι μετρήσεις επιτυγχάνονται με τις κεραίες εκπομπής και τις κεραίες λήψης του GPR, που εκτός από το χρόνο διάδοσης του κύματος για τη διαδρομή πομπός - αντικείμενο - δέκτης απεικονίζουν και την ισχύ του ανακλώμενου σήματος.

Η ταχύτητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που εισέρχεται στο έδαφος εξαρτάται κυρίως από τις ηλεκτρικές ιδιότητες του υλικού. Η απόδοση της μεθόδου εξαρτάται από την προσέγγιση της σχετικής διηλεκτρικής επιτρεπτότητας. Η  $\epsilon_r$  και η ταχύτητα  $c$  του παλμού για μερικά βασικά υλικά συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Υλικό εδάφους	Σχετική διηλεκτρική επιτρεπτότητα - ( $\epsilon_r$ )	Ταχύτητα κύματος - ( $c$ ) [m/ns]
Αέρας	1	0,3
Νερό	81	0,033
Άμμος (Ξηρή)	4-6	0,12-0,17
Άμμος (Κορεσμένη)	20-30	0,06
Άργιλος	2-40	0,06

Πίνακας 4.1 Σχετική διηλεκτρική επιτρεπτότητα υλικών και ταχύτητα κύματος στα υλικά

Στις περισσότερες προσομοιώσεις που έχουμε πραγματοποιήσει έχουμε θεωρήσει ότι το  $\epsilon_r$  έχει την τιμή 4.



Οι υψηλές συχνότητες είναι κατάλληλες για αντικείμενα που βρίσκονται σε μικρό βάθος και οι χαμηλές συχνότητες δίνουν καλύτερα αποτελέσματα σε μεγάλο βάθος πάντως οι υψηλές συχνότητες γενικά δίνουν ευκρινέστερα είδωλα.

Εκτός από τα GPR που λειτουργούν στο πεδίο του χρόνου και συνήθως χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές υπάρχουν και άλλα που λειτουργούν στο πεδίο συχνοτήτων. Στην περίπτωση αυτή αντί της εκπομπής παλμών μικρής χρονικής διάρκειας εκπέμπεται ένα ημιτονοειδές κύμα. Στην περίπτωση αυτή με ένα αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier μπορούμε να μεταβούμε στο πεδίο του χρόνου.

Στη συνέχεια περιγράφουμε σύντομα βασικές κεραίες που χρησιμοποιούμε στην ανίχνευση θαμμένων αντικειμένων.

#### 4.2.1 Οδηγός μελέτης υπεδάφους

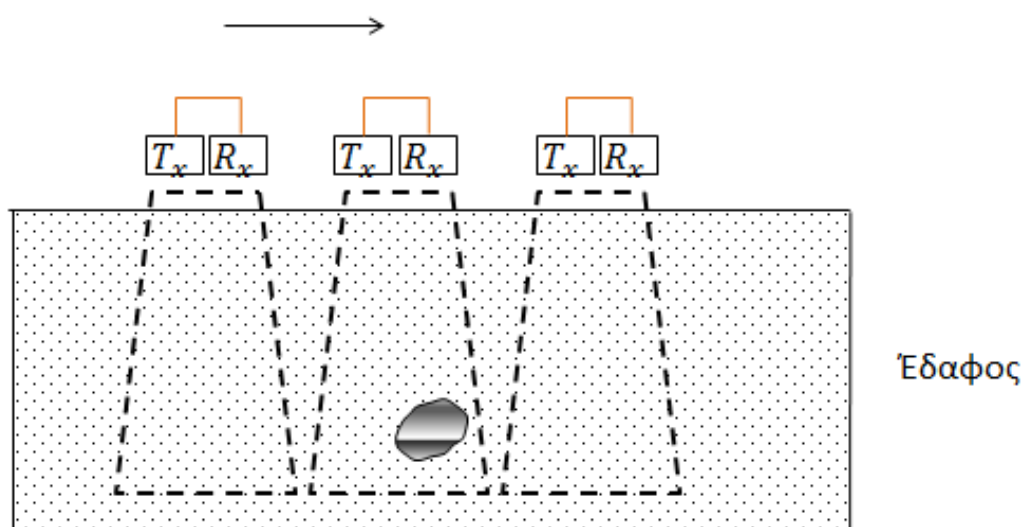
Η μελέτη του εδάφους με χρήση GPR δεν είναι ένα εύκολο πρόβλημα. Υπάρχουν αρκετές δυσκολίες και περιορισμοί, μερικές από τις οποίες θα αναπτύξουμε παρακάτω.

Έδαφος με υψηλή υγρασία ή χώμα τύπου πυλός μας περιορίζει αρκετά στην εξαγωγή συμπερασμάτων.

Σε γενικές γραμμές θα πρέπει να έχουμε πληροφορίες για το υλικό της ανομοιογένειας (μεταλλική επιφάνεια, διηλεκτρικό, μπετόν, αλλαγή πετρώματος, κλπ.) που θέλουμε να προσδιορίσουμε καθώς και για το βάθος της σε κάποιο σημείο για να μπορέσουμε να το επαληθεύσουμε. Η καλύτερη δυνατή τεχνική που θα μπορούσε να μας ανεβάσει τα ποσοστά επιτυχίας είναι να κάνουμε γεώτρηση όπου θα προσδιορίσουμε το πέτρωμα σε μία στήλη και έχοντας ως γνώμονα αυτό να εξάγουμε συμπεράσματα σε γειτονικές περιοχές.

Οι κεραίες ανάλογα με τη συχνότητα λειτουργίας τους φωτίζουν διαφορετικά βάθη. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι αν έχουμε κεραίες των 250 MHz (επιτρέπουν έρευνα μέχρι 6 m), 500 MHz (επιτρέπουν έρευνα μέχρι 3 m) και 800 MHz (επιτρέπουν έρευνα μέχρι 1 m) και έχουμε να μελετήσουμε ένα φαινόμενο στο 1 m, τότε με την κεραία στα 800 MHz το φαινόμενο θα αποτυπωθεί σε μεγάλο βαθμό, με την κεραία στα 500 MHz το

φαινόμενο θα αποτυπωθεί ικανοποιητικά και τέλος με την κεραία στα 250 MHz το φαινόμενο δεν θα γίνει αντιληπτό. Όσο μεγαλύτερη σε διαστάσεις είναι η ανομοιογένεια που μελετάμε τόσο ευκολότερο είναι να καταγραφεί στις μετρήσεις μας. Σε περίπτωση που δεν γνωρίζουμε μία τάξη μεγέθους του βάθους της ανομοιογένειας που θέλουμε να μελετήσουμε, πρέπει να γίνει σταδιακή σάρωση της περιοχής με διαφορετικά σετ κεραιών. Θα πρέπει η περιοχή της κάλυψης να χωριστεί σε κানাβο ανάλογα με την κεραία που θα χρησιμοποιήσουμε (Σχήμα 4.11). Για κεραία που ακτινοβολεί στα 500 MHz ικανοποιητικός κানাβος θα μπορούσε να θεωρηθεί 1 m x 1 m. Ο κানাβος προκύπτει από την περιοχή που φωτίζει η κεραία μας.



Σχήμα 4.11 Περιοχή που φωτίζει η κεραία

Στον ελλαδικό χώρο σε γενικές γραμμές το έδαφος δεν είναι ομοιογενές. Η ομοιογένεια βοηθάει τη μελέτη και την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων. Εκτός από την ομοιογένεια του εδάφους άλλη μία παράμετρος που δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε είναι και η πυκνότητα των υλικών του εδάφους. Ειδικές περιπτώσεις θα μπορούσε να θεωρηθεί η μελέτη ομοιογενών στρωμάτων, όπως ο προσδιορισμός στρώματος πάγου.

Στόχος μας, είναι να προσδιορίσουμε το ποσοστό επιτυχίας του GPR στην αναγνώριση ανωμαλιών του εδάφους και να το αυξήσουμε αφού εκπαιδευτούμε στην ανάγνωση και αναγνώριση αυτών σε κατασκευασμένο παραμετροποιήσιμο χώρο δοκιμών [91].

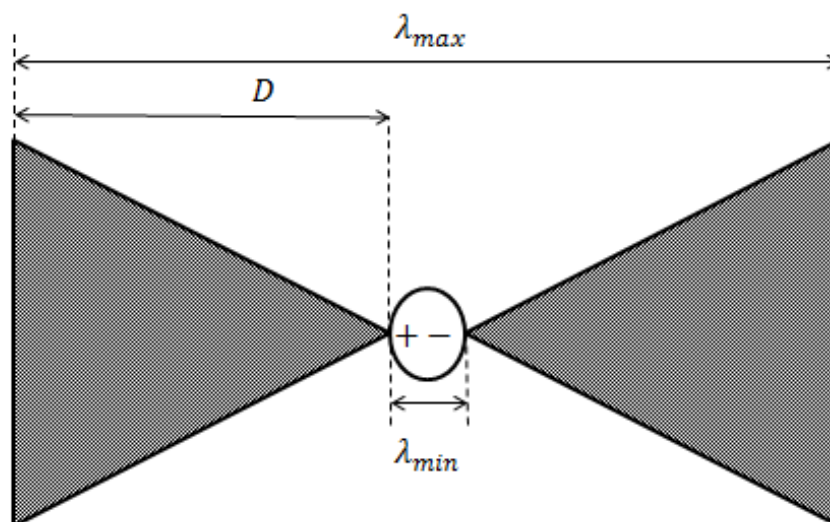
Φαινόμενα που έχουν επιστημονικό ενδιαφέρον στην αναγνώρισή τους είναι ο προσδιορισμός στρώμα αέρα, στρώμα νερού, μεταλλικών επιφανειών και διηλεκτρικών.

### 4.3 Ευρυζωνικές κεραίες

Στις μετρήσεις μας χρησιμοποιούμε κεραίες μεγάλου εύρους φάσματος. Θα περιγράψουμε τις ευρυζωνικές κεραίες παπιγιόν και τη χοανοειδή.

#### 4.3.1 Παπιγιόν (Bowtie)

Η διάταξη της κεραίας bowtie είναι παρόμοια με αυτή του δίπολου μεγάλου εύρους ζώνης που συχνά χρησιμοποιείται για παλμικά ραντάρ. Η bowtie εμφανίζει μεγαλύτερο κέρδος και καλύτερη απόδοση φάσματος από το απλό δίπολο. Για ένα κυκλικό αντικείμενο η bowtie είναι ο κατάλληλος τύπος κεραίας, αφού παράγει γραμμική πόλωση και έχει σχετικά καλή απόκριση φάσης πάνω στο απαιτούμενο εύρος ζώνης.



Σχήμα 4.12 Διάταξη κεραίας bowtie

Έστω  $\lambda_{max} = 2D$ , η μικρότερη συχνότητα εκπομπής είναι

$$f_{min} = \frac{c}{\lambda_{max}} = \frac{c}{2D} = \frac{3 \cdot 10^8}{2D} = \frac{150}{D(m)} MHz. \quad (4.4)$$

Από τον τύπο (4.4) και για  $D = 3 \text{ m}$  έχουμε

$$f_{min} = \frac{150}{3} = 50 MHz. \quad (4.5)$$

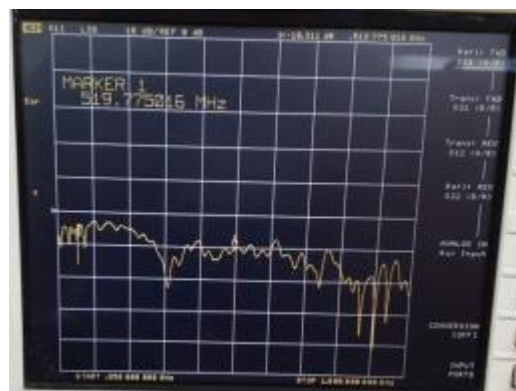
Από τον τύπο (4.4) και για  $D = 1 \text{ m}$  έχουμε

$$f_{min} = \frac{150}{1} = 150 MHz. \quad (4.6)$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε τη μεγαλύτερη κεραία που χρησιμοποιήσαμε στα πειράματά μας σε διαστάσεις (3 m x 3 m) τοποθετημένη στο εργαστήριο (Σχήμα 4.13) και δίπλα παρουσιάζουμε το συντελεστή  $S_{11}$  της (Σχήμα 4.14).



Σχήμα 4.13 Κεραία παπιγιόν ύψους  
1,5 m στο εργαστήριο

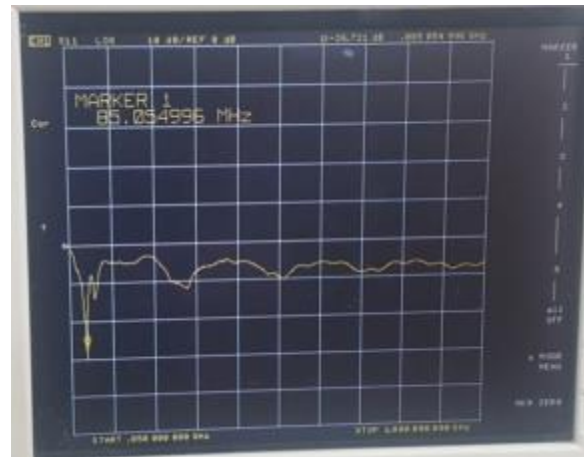


Σχήμα 4.14  $S_{11}$  μεγάλου παπιγιόν

Στη συνέχεια βλέπουμε δύο bowtie κάθετες μεταξύ τους που αποτελούνται από τρίγωνα με ύψος 50 cm και γωνία  $60^\circ$  (Σχήμα 4.15) και δίπλα παρουσιάζουμε το συντελεστή  $S_{11}$  της (Σχήμα 4.16). Επίσης τα καλώδια εκπομπής και λήψης διασχίζουν τις κεραίες, τεχνική που έχουμε χρησιμοποιήσει για να αντισταθμίσουμε την απουσία balun.



Σχήμα 4.15 Κεραία παπιγιόν ύψους 0,5 m στο εργαστήριο

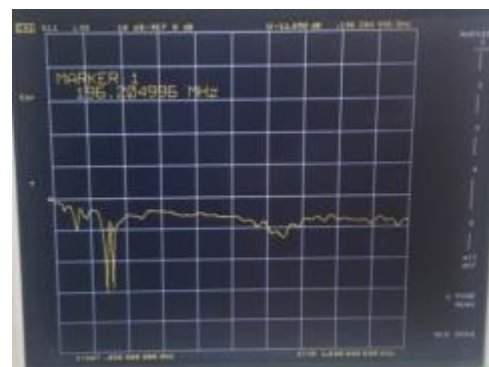


Σχήμα 4.16  $S_{11}$  της κεραίας παπιγιόν

Επίσης έχουμε δύο κάθετες κεραίες με κεραία εκπομπής ύψους 36 cm και κεραία λήψης ύψους 26 cm. Επίσης τα καλώδια εκπομπής και λήψης διασχίζουν τις κεραίες, τεχνική που έχουμε χρησιμοποιήσει για να αντισταθμίσουμε την απουσία balun.



Σχήμα 4.17 Κεραία παπιγιόν με πετερύγια στο εργαστήριο

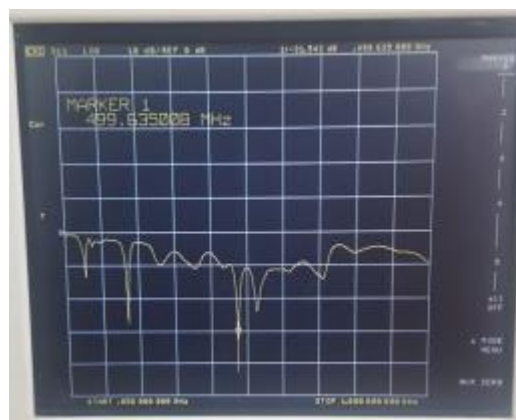


Σχήμα 4.18  $S_{11}$  της κεραίας παπιγιόν με πετερύγια

Τέλος έχουμε δύο παράλληλες κεραίες τύπου παπιγιόν με ύψος τριγώνου 11 cm και balun 4:1 στη μεταξύ σύνδεση κάθε ζευγαριού.



Σχήμα 4.19 Κεραίες παπιγιόν παράλληλες στο εργαστήριο



Σχήμα 4.20  $S_{11}$  της παράλληλης κεραίας παπιγιόν

### 4.3.2 Χοανοειδής (TEM Horn)

Στις περιπτώσεις που χρειάζεται το μεγαλύτερο εύρος ζώνης και στενότερος λοβός ακτινοβολίας χρησιμοποιείται η κεραία TEM Horn. Επιπλέον η κεραία αυτή έχει χαμηλότερο λόγο στάσιμου κύματος (voltage standing wave ratio - VSWR) και υψηλότερο κέρδος σε σχέση με την παπιγιόν. Η TEM Horn αποτελείται από ένα ζεύγος τριγωνικών επιφανειών οι οποίες σχηματίζουν ένα δίπολο σε σχήμα V. Τα χαρακτηριστικά που περιγράφουν την κεραία TEM Horn είναι, το μήκος  $L$  της κεραίας, το κενό  $d$  στο σημείο τροφοδοσίας, η γωνία  $\theta$  μεταξύ των δύο φύλλων και η γωνία  $\alpha$  της τριγωνικής επιφάνειας του κάθε φύλλου. Η TEM Horn είναι μία ζωνοπερατή κεραία για ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων. Πολλές φορές οι ηλεκτρικές της διαστάσεις περιορίζουν τη λειτουργία της κεραίας στις χαμηλές συχνότητες.

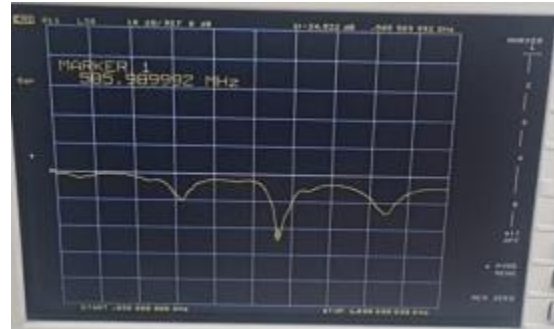
Μία βελτίωση της TEM Horn προκύπτει αν στην κεραία προστεθεί ένα διηλεκτρικό (Partial Dielectric loaded TEM Horn - PDTEM) ώστε να αυξηθεί το κατευθυντικό κέρδος και να μειωθεί ο λόγος στάσιμου κύματος. Επιπλέον τοποθετείται μία ρυθμιζόμενη

αντίσταση για να διατηρήσει το λόγο στάσιμου κύματος σε ικανοποιητικές τιμές όταν εργάζεται σε χαμηλές συχνότητες.

Για την κεραία που χρησιμοποιήθηκε (Σχήμα 4.21), με ύψος 50 cm καταγράψαμε το συντελεστή  $S_{11}$  (Σχήμα 4.22).



Σχήμα 4.21 Κεραίες TEM horn



Σχήμα 4.22  $S_{11}$  κεραίας TEM horn

# 5 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΕ GPR

Στο κεφάλαιο αυτό προσομοιώνονται η συμπεριφορά και η ακτινοβολία διαφόρων κεραιών στο περιβάλλον CST καθώς επίσης γίνονται καταγραφές με το GPR. Οι καταγραφές του GPR παρουσιάζονται, αναλύονται και επεξεργάζονται με στόχο τη βελτίωση των πιθανοτήτων πρόβλεψης του υπεδάφους.

## 5.1 Προσομοιώσεις κεραιών

Στην ενότητα αυτή εκτελούμε προσομοιώσεις για τη μελέτη και τον έλεγχο:

- της απόσβεσης σήματος σε σχέση με την αγωγιμότητα του εδάφους,
- της χρονικής διάρκειας της διαδρομής του σήματος σε σχέση με τη διηλεκτρική επιτρεπτότητα και

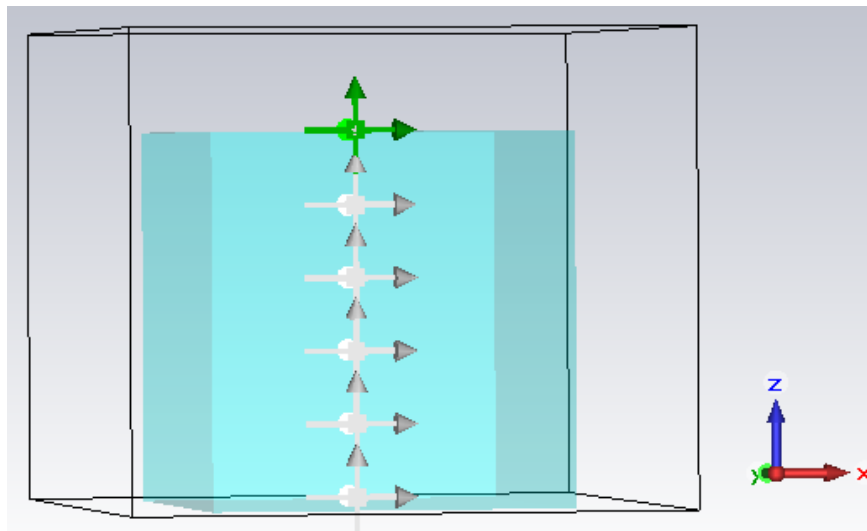


- του ανακλούμενου σήματος από σκεδαστές μέσα στο έδαφος.

Για τις προσομοιώσεις του παλμικού μας ραντάρ έχουμε χρησιμοποιήσει το περιβάλλον CST studio.

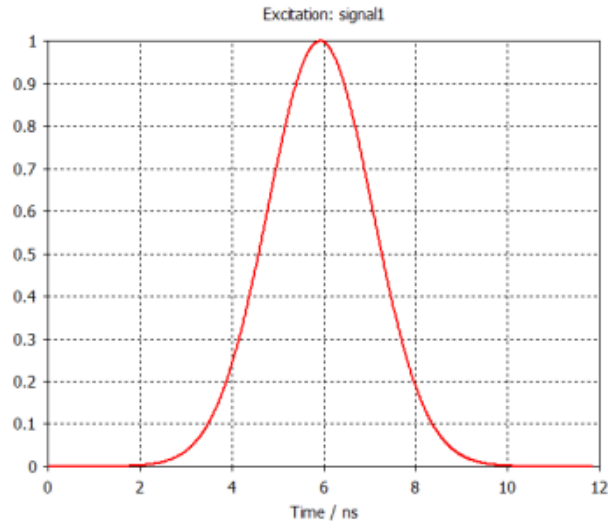
### 5.1.1 Προσομοιώσεις

Το πρώτο φαινόμενο που θέλουμε να μελετήσουμε είναι η μετάδοση ενός κύματος μέσα στο έδαφος. Στην επιφάνεια του εδάφους τοποθετούμε κεραίες τύπου παλιγιόν με ύψος τριγώνου 1,5 m. Η κεραία εκπομπής μεταδίδει έναν παλμό και με την κεραία λήψης η οποία έχει προσαρμοσμένη αντίσταση 200 ohm θα μετρήσουμε την τάση της στα άκρα. Στην προσομοίωση έχουμε θεωρήσει ομοιόμορφο έδαφος με βάθος 5 m και χαρακτηριστικά  $\epsilon = 4$  και  $\mu = 1$ . Έχουμε τοποθετήσει probes στο έδαφος κάθε 1 m (Σχήμα 5.1).



Σχήμα 5.1 Probes στο περιβάλλον προσομοίωσης κεραιών

Η κεραία εκπομπής διεγείρεται με παλμό διάρκειας 2 nsec και βρίσκεται στην επιφάνεια του εδάφους (Σχήμα 5.2).

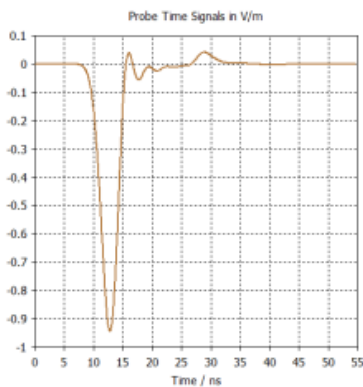


Σχήμα 5.2 Παλμός εκπομπής στο περιβάλλον προσομοίωσης

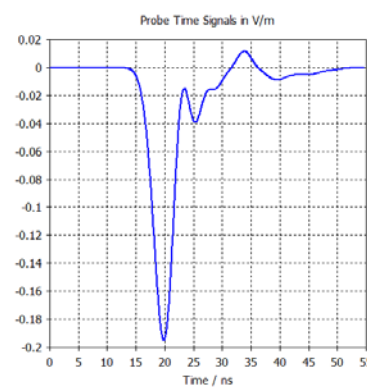
### 5.1.2 Απόσβεση του σήματος

Για να μελετηθεί η απόσβεση του σήματος μέσα στο έδαφος με διαφορετικά χαρακτηριστικά θα θεωρήσουμε δύο περιπτώσεις εδάφους με  $\sigma = 0,01$  και  $\sigma = 0,001$ .

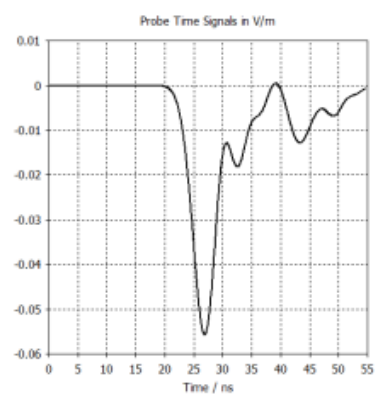
Για  $\sigma = 0,01$ :



Σχήμα 5.3 Καταγραφή παλμού για  $\sigma=0,01$  και σε βάθος -1 m



Σχήμα 5.4 Καταγραφή παλμού για  $\sigma=0,01$  και σε βάθος -2 m

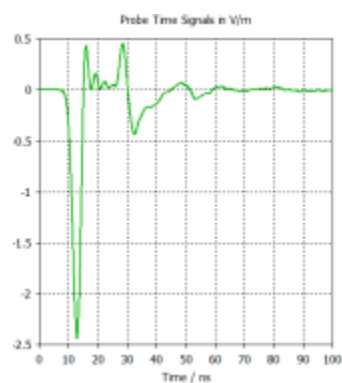


Σχήμα 5.5 Καταγραφή παλμού για  $\sigma=0,01$  και σε βάθος -3 m

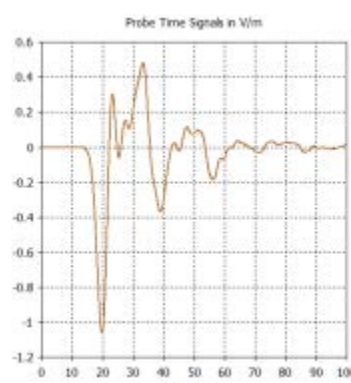
Στο Σχήμα 5.3 έχουμε την καταγραφή του παλμού σε βάθος ενός μέτρου. Το σήμα φτάνει αρκετά ισχυρό μετά από 12 ns και η ουρά του παλμού είναι σχεδόν αμελητέα. Στο Σχήμα 5.4 βλέπουμε τον παλμό σε βάθος 2 m να έχει εξασθενήσει και να χρειάζεται 20 ns για να φτάσει. Τέλος στο Σχήμα 5.5 το ασθενές σήμα φτάνει μετά από 27 ns και πλέον η ουρά του παλμού έχει αρχίσει και γίνεται συγκρίσιμη με το βασικό μας σήμα.

Γενικά από τα τρία τελευταία σχήματα παρατηρούμε ότι υπάρχει μία χρονική καθυστέρηση στον παλμό όσο πηγαίνουμε πιο βαθιά στο έδαφος καθώς και ότι η ουρά του παλμού αυξάνει σταδιακά, μέχρι να φτάσει στο σημείο να είναι συγκρίσιμη με το σήμα μας.

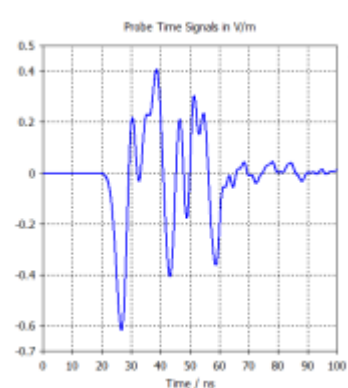
Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα, αλλάζοντας τα χαρακτηριστικά του εδάφους και συγκεκριμένα θέτουμε  $\sigma = 0,001$ :



Σχήμα 5.6 Καταγραφή παλμού για  $\sigma=0,001$  και σε βάθος -1 m



Σχήμα 5.7 Καταγραφή παλμού για  $\sigma=0,001$  και σε βάθος -2 m



Σχήμα 5.8 Καταγραφή παλμού για  $\sigma=0,001$  και σε βάθος -3 m

Στο Σχήμα 5.6 έχουμε την καταγραφή του παλμού σε βάθος ενός μέτρου. Το σήμα φτάνει πολύ ισχυρό μετά από 12 ns και έπειτα ακολουθεί η ουρά του παλμού. Στο Σχήμα 5.7 ο παλμός φτάνει σε βάθος 2 m μετά από 20 ns με μία ελαφριά απόσβεση. Τέλος στο Σχήμα 5.8 το σήμα φτάνει εξασθετισμένο μετά από 27 ns και η ουρά του είναι συγκρίσιμη με το βασικό μας σήμα.

Γενικά από τα τρία τελευταία σχήματα παρατηρούμε ότι υπάρχει μία χρονική καθυστέρηση στον παλμό όσο πηγαίνουμε πιο βαθιά στο έδαφος καθώς και ότι η

ουρά του παλμού αυξάνει σταδιακά, μέχρι να φτάσει στο σημείο να είναι συγκρίσιμη με το σήμα μας.

Συγκρίνοντας τα δύο πειράματα που πραγματοποιήσαμε σχετικά με την εκπομπή σήματος μέσα το έδαφος παρατηρήσαμε τα εξής:

- μειώνοντας το  $\sigma$  μειώνεται και η αντίσταση του εδάφους στον παλμό με αποτέλεσμα να έχουν ισχυρότερα σήματα σε μεγαλύτερο βάθος.
- μειώνοντας το  $\sigma$  αυξάνεται η ουρά του παλμού καθώς και γρηγορότερα αρχίζει να γίνεται συγκρίσιμος με τον αρχικό παλμό.
- Χρονικά ο παλμός φτάνει στις ίδιες χρονικές στιγμές σε συγκεκριμένα βάθη.

### 5.1.3 Χρονική διάρκεια διαδρομής του σήματος

Θέλουμε να μελετήσουμε τον τύπο

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{l}{t} \Rightarrow t = \frac{l}{c} \sqrt{\varepsilon}, \quad (5.1)$$

όπου  $l$  η απόσταση που ταξιδεύει το κύμα,  $c$  η ταχύτητα του φωτός και  $\varepsilon$  η διηλεκτρική σταθερά. Συγκεκριμένα θέλουμε να μελετήσουμε το χρόνο που χρειάζεται να ταξιδέψει το κύμα σε διάφορα υλικά δεδομένου ότι έχουμε κάνει ορισμένες παραδοχές για να απλουστευτεί η μορφή του τύπου.

Αυτή τη φορά θα διατηρήσουμε σταθερά το  $\mu$  και το  $\sigma$  και θα τροποποιήσουμε τις τιμές του  $\varepsilon$  στα χαρακτηριστικά του εδάφους. Έτσι θα ελέγξουμε το χρόνο που χρειάζεται το κύμα για να ταξιδέψει μέσα στο έδαφος. Για να διαπιστώσουμε σε πόσο χρόνο φτάνει το κύμα σε διάφορα βάθη τοποθετούμε probes μέσα σε αυτό ανά ένα μέτρο.

Στην 1<sup>η</sup> περίπτωση θεωρούμε έδαφος με χαρακτηριστικά  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$  και  $\sigma = 0,001$ . Στον παρακάτω πίνακα στην πρώτη γραμμή έχουμε το βάθος που έχουμε τοποθετήσει τα probes. Στη δεύτερη γραμμή έχουμε το offset του παλμού για το χρόνο που

χρειάζεται ο παλμός να μεταδοθεί. Ο χρόνος αυτός ανέρχεται σε 6 ns μέχρις ότου ο παλμός να φτάσει στο 80% του πλάτους του. Στην επόμενη γραμμή έχουμε τον αναμενόμενο χρόνο άφιξης του κύματος, βάση του τύπου (5.1) θεωρώντας  $l$  την απόσταση που ταξιδεύει το κύμα. Στο χρόνο αυτό έχει προστεθεί και ο χρόνος που χρειάζεται η προσομοίωση για να εκπέμψει το σήμα. Στην τέταρτη γραμμή παρουσιάζουμε το χρόνο που χρειάζεται η προσομοίωση για να πάει το κύμα από την επιφάνεια στο probe. Τέλος έχουμε τη διαφορά του χρόνου της προσομοίωσης σε σχέση με τον αναμενόμενο χρόνο που προέκυψε από τον τύπο (5.1).

$l$ (βάθος που έχει τοποθετηθεί το probe)	$l = 1\text{ m}$	$l = 2\text{ m}$	$l = 3\text{ m}$	$l = 4\text{ m}$	$l = 5\text{ m}$
Χρόνος που χρειάζεται ο παλμός να φτάσει στο 80% του Peak του (σε ns)	$t = 6\text{ ns}$	$t = 6\text{ ns}$	$t = 6\text{ ns}$	$t = 6\text{ ns}$	$t = 6\text{ ns}$
Αναμενόμενος χρόνος άφιξης κύματος βάση τύπου (5.1) (σε ns)	$3,3 + 6 = 9,3$	$6,6 + 6 = 12,6$	$10 + 6 = 16$	$13,3 + 6 = 19,3$	$16,6 + 6 = 22,6$
Χρόνος άφιξης κύματος στο simulation (σε ns)	9,4	13	16,5	20	23,2
Διαφορά χρόνου άφιξης στο simulation σε σχέση με το αναμενόμενο (σε ns)	+0,1ns	+0,4ns	+0,5ns	+0,7ns	+0,8ns

Πίνακας 5.1 Βάθος και χρόνος άφιξης κύματος στην προσομοίωση

και βάση τύπων, σε υλικό με  $\varepsilon = 1$

Στη συνέχεια θα αλλάξουμε τα χαρακτηριστικά του εδάφους θεωρώντας  $\varepsilon = 4$ ,  $\mu = 1$  και  $\sigma = 0,001$ .

$l$ (βάθος που έχει τοποθετηθεί το probe)	$l = 1\text{ m}$	$l = 2\text{ m}$	$l = 3\text{ m}$	$l = 4\text{ m}$	$l = 5\text{ m}$
Χρόνος που χρειάζεται ο παλμός να φτάσει στο 80% του Peak του (σε ns)	$t = 6\text{ ns}$	$t = 6\text{ ns}$	$t = 6\text{ ns}$	$t = 6\text{ ns}$	$t = 6\text{ ns}$
Αναμενόμενος χρόνος άφιξης κύματος βάση τύπου (5.1) (σε ns)	$6,6 + 6 = 12,6$	$13,2 + 6 = 19,3$	$20 + 6 = 26$	$26,4 + 6 = 32,4$	$33 + 6 = 39$
Χρόνος άφιξης κύματος στο simulation (σε ns)	12,8	19,8	26,6	34	41
Διαφορά χρόνου άφιξης στο simulation σε σχέση με το αναμενόμενο (σε ns)	+0,2ns	+0,5ns	+0,6ns	+1,6ns	+2ns

Πίνακας 5.2 Βάθος και χρόνος άφιξης κύματος στην προσομοίωση και βάση τύπων, σε υλικό με  $\varepsilon = 4$

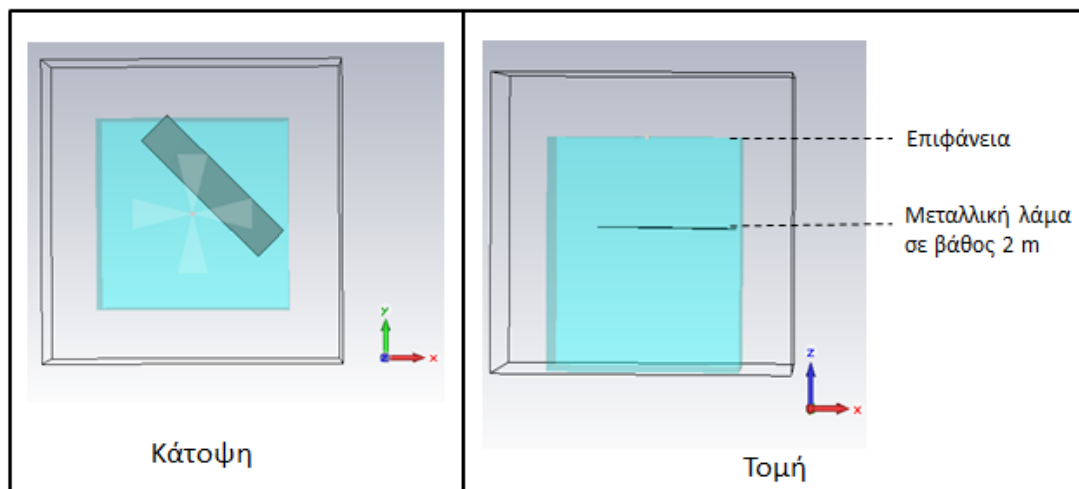
Στα δύο πειράματα που πραγματοποιήσαμε παρατηρήσαμε ότι η απόκλιση του τύπου σε σχέση με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης είναι σχετικά μικρή. Γενικά η απόκλιση δεν μεγαλώνει αναλογικά με το βάθος και επίσης όσο μικραίνει η επαγωγή  $\sigma$  η απόκλιση αυξάνει. Οπότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι για μεγάλους σκεδαστές ή για

μεγάλες ανομοιογένειες, η απόκλιση θα μπορούσε να θεωρηθεί αμελητέα στην εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με το βάθος της ανομοιογένειας.

#### 5.1.4 Ανακλώμενο σήμα από την επίδραση σκεδαστών

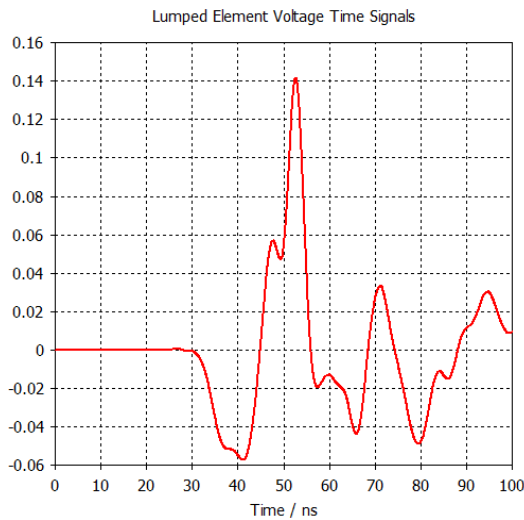
Σε αυτή την ενότητα θα ακολουθήσουν μία σειρά από προσομοιώσεις όπου θα μελετηθεί το σήμα λήψης από την κεραία, έχοντας στο υπέδαφος σκεδαστές, όπως μεταλλική λάμα και δεξαμενή με νερό σε διάφορα βάθη.

Αρχικά θεωρούμε μία μεταλλική λάμα με πάχος 0,1 m, μήκος 4,5 m και πλάτος 1 m τοποθετημένη έκκεντρα της κεραίας και σε βάθος 2 μέτρων (Σχήμα 5.9). Τα χαρακτηριστικά του εδάφους είναι  $\epsilon = 4$ ,  $\mu = 1$  και  $\sigma = 0,001$ .



Σχήμα 5.9 Κάτοψη & τομή προσομοίωσης λάμας σε βάθος 2 m

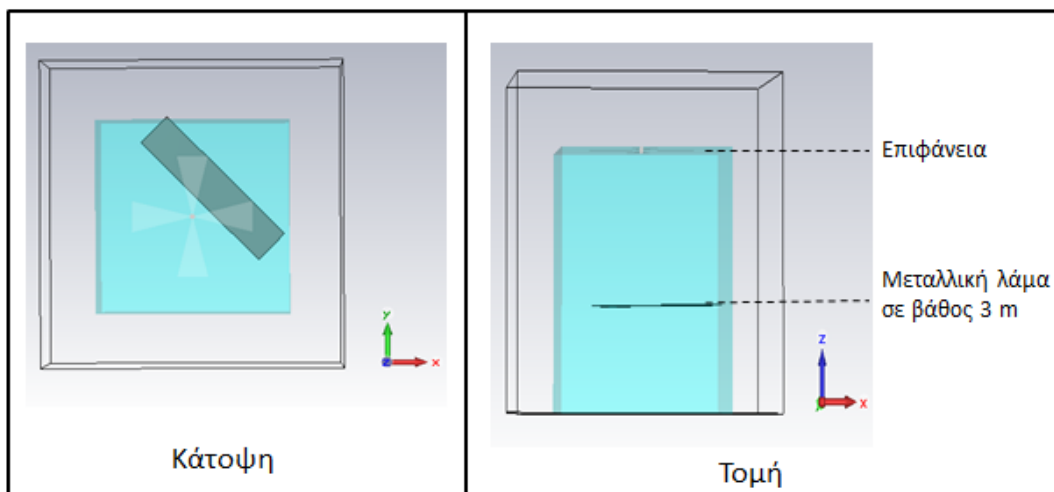
Το ανακλώμενο σήμα που λαμβάνει η κεραία λήψης έχει διανύσει μία συνολική διαδρομή 4 m. Ξεκινάει από την κεραία εκπομπής και χρειάζεται 2 m για να συναντήσει τη λάμα και θα διανύσει άλλα 2 m για να επιστρέψει από τη λάμα στην επιφάνεια. Το ανακλώμενο σήμα από τη μεταλλική λάμα θα χρειαστεί  $t = 34 \text{ ns}$  για να επιστρέψει στην κεραία λήψης (Σχήμα 5.10).



Σχήμα 5.10 Σήμα λήψης με μεταλλική λάμα σε βάθος 2m

Η ανάκλαση είναι αισθητή σε σχέση με τις υπόλοιπες ανακλάσεις που λαμβάνουμε και συμπίπτει χρονικά με το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Μετά την επιθυμητή ανάκλαση ακολουθεί η ουρά του σήματος που ήδη είναι μετρήσιμη.

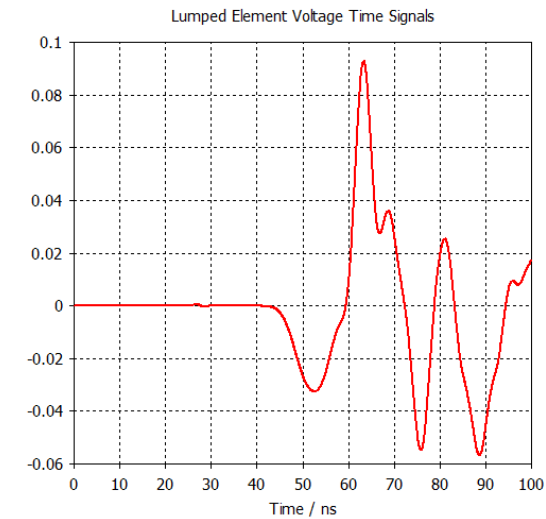
Στη συνέχεια μετατοπίζουμε την ίδια μεταλλική λάμα κατά 1 m πιο βαθιά, σε βάθος 3 m (Σχήμα 5.11). Τα χαρακτηριστικά του εδάφους είναι  $\epsilon = 4$ ,  $\mu = 1$  και  $\sigma = 0,001$ .



Σχήμα 5.11 Κάτοψη & τομή προσομοίωσης με λάμα σε βάθος 3 m



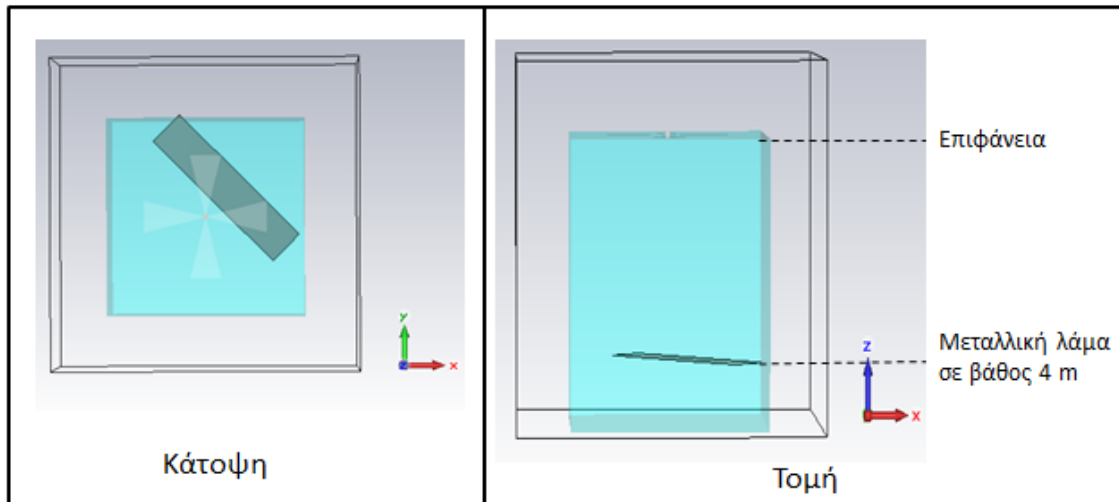
Το ανακλώμενο σήμα που λαμβάνει η κεραία λήψης έχει διανύσει μία συνολική διαδρομή 6 m. Ξεκινάει από την κεραία εκπομπής και χρειάζεται 3 m για να συναντήσει τη λάμα και θα διανύσει άλλα 3 m για να επιστρέψει από τη λάμα στην επιφάνεια. Η ανάκλαση από τη μεταλλική λάμα θα χρειαστεί  $t = 54 \text{ ns}$  για να επιστρέψει στην κεραία λήψης (Σχήμα 5.12).



Σχήμα 5.12 Σήμα λήψης με μεταλλική λάμα σε βάθος 3 m

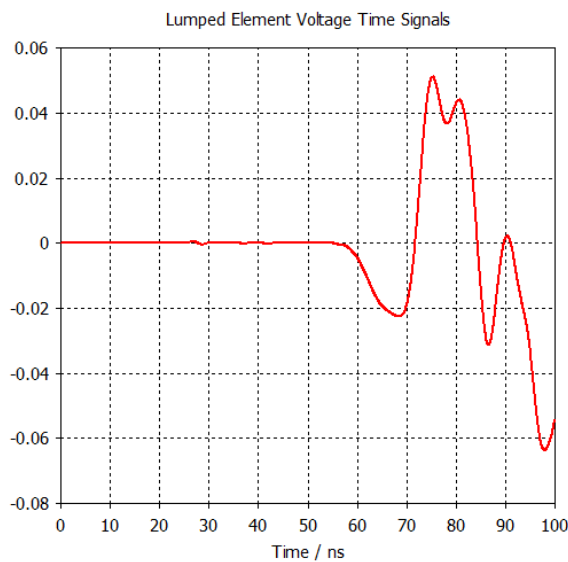
Η ανάκλαση της μεταλλικής λάμας εμφανίζεται χρονικά την ίδια στιγμή με το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Μετά την επιθυμητή ανάκλαση ακολουθεί η ουρά του σήματος που είναι αρκετά ισχυρή.

Στη συνέχεια μετατοπίζουμε την ίδια μεταλλική λάμα ακόμα ένα μέτρο πιο βαθιά, σε βάθος 4 m (Σχήμα 5.13). Τα χαρακτηριστικά του εδάφους είναι  $\epsilon = 4$ ,  $\mu = 1$  και  $\sigma = 0,001$ .



Σχήμα 5.13 Κάτοψη & τομή προσομοίωσης λάμας σε βάθος 4 m

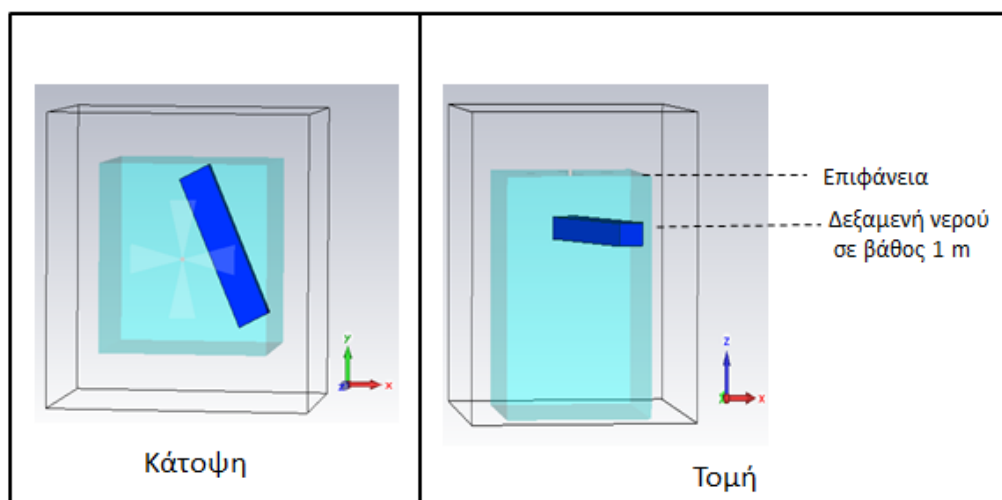
Το ανακλώμενο σήμα που λαμβάνει η κεραία λήψης έχει διανύσει μία συνολική διαδρομή 8 m. Ξεκινάει από την κεραία εκπομπής και χρειάζεται 4 m για να συναντήσει τη λάμα και θα διανύσει άλλα 4 m για να επιστρέψει από τη λάμα στην επιφάνεια. Η ανάκλαση από τη μεταλλική λάμα θα χρειαστεί  $t = 68 \text{ ns}$  για να επιστρέψει στην κεραία λήψης (Σχήμα 5.14).



Σχήμα 5.14 Σήμα λήψης με μεταλλική λάμα σε βάθος 4 m

Η ανάκλαση έχει γίνει αρκετά μικρή σε σχέση με τις υπόλοιπες ανακλάσεις που λαμβάνουμε αλλά συμπίπτει χρονικά με το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Δεδομένων των ιδανικών συνθηκών στην αρχή δεν υπάρχει καμία ανάκλαση, γεγονός που μας βοηθάει να εξάγουμε τα συμπεράσματά μας.

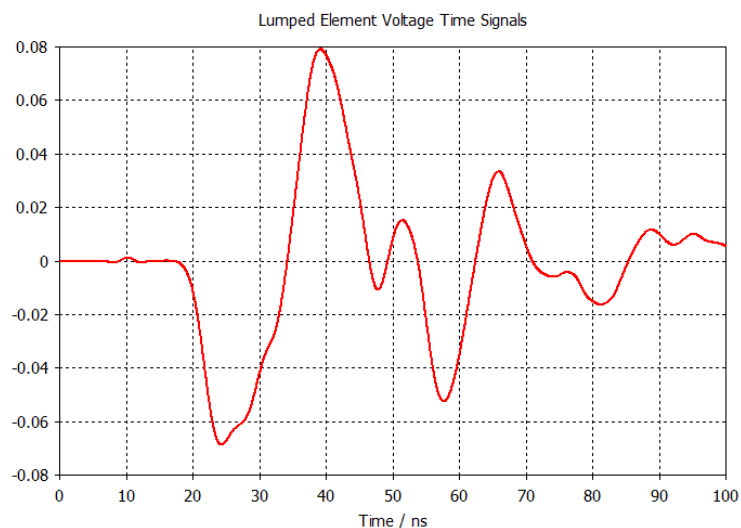
Στη συνέχεια τοποθετήσαμε σε βάθος 1 m, μία δεξαμενή νερού με διαστάσεις 4,5 m μήκος, 1 m πλάτος και 0,5 m ύψος, τοποθετημένη έκκεντρα της κεραίας (Σχήμα 5.15). Τα χαρακτηριστικά του εδάφους είναι  $\varepsilon = 4$ ,  $\mu = 1$  και  $\sigma = 0,001$ .



Σχήμα 5.15 Κάτοψη & τομή προσομοίωσης δεξαμενής ύψους 0,5 m σε βάθος 1 m

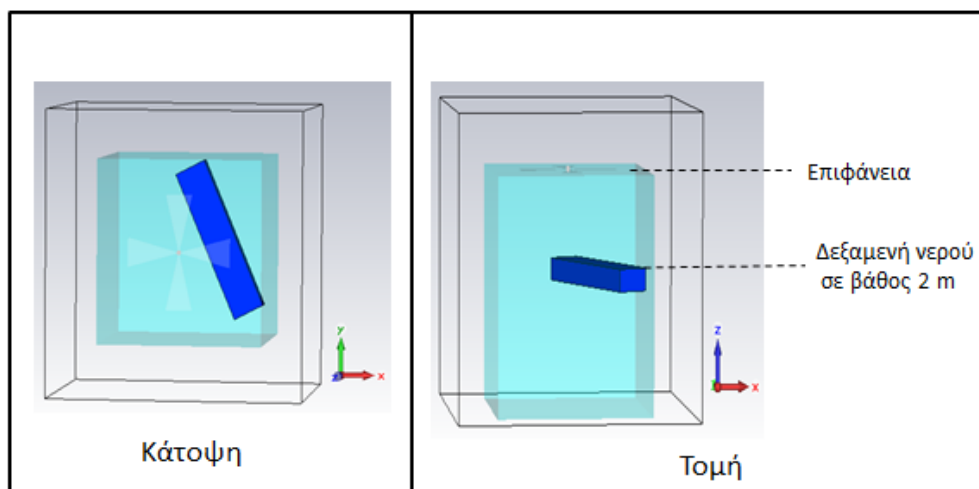
Το ανακλώμενο σήμα που λαμβάνει η κεραία λήψης έχει διανύσει μία συνολική διαδρομή 2 m. Ξεκινάει από την κεραία εκπομπής και χρειάζεται 1 m για να συναντήσει τη λάμα και θα διανύσει άλλα 1 m για να επιστρέψει από τη λάμα στην επιφάνεια.

Η ανάκλαση από τη δεξαμενή νερού χρειάστηκε  $t = 23 \text{ ns}$  για να εμφανιστεί στη κεραία λήψης (Σχήμα 5.16).



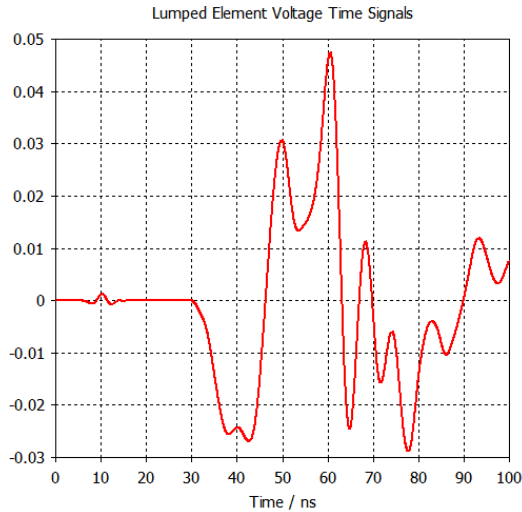
Σχήμα 5.16 Σήμα λήψης με δεξαμενή νερού στο 1m βάθος (ύψος δεξαμενής 0,5 m)

Έπειτα τοποθετήσαμε σε βάθος 2 m την ίδια δεξαμενή νερού (Σχήμα 5.17). Τα χαρακτηριστικά του εδάφους είναι  $\epsilon = 4$ ,  $\mu = 1$  και  $\sigma = 0,001$ .



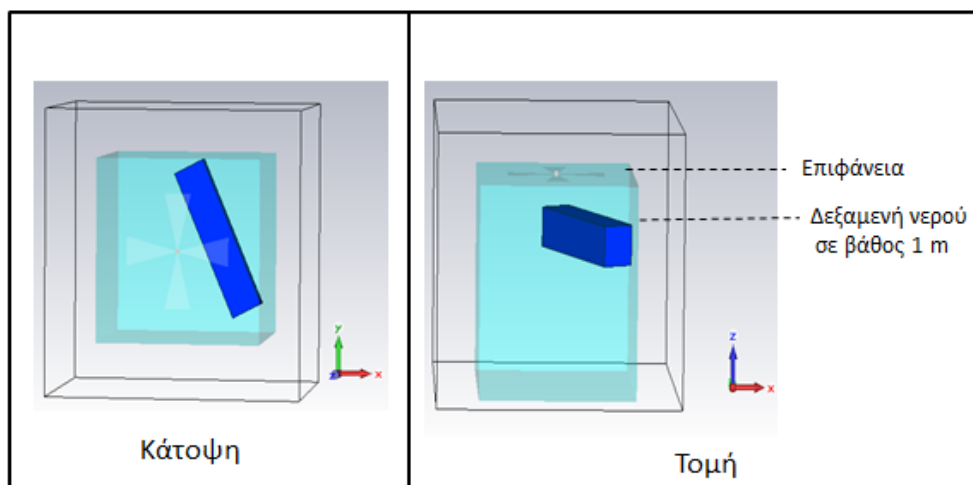
Σχήμα 5.17 Κάτοψη & τομή προσομοίωσης δεξαμενής ύψους 0,5 m σε βάθος 2 m

Το ανακλώμενο σήμα που λαμβάνει η κεραία λήψης έχει διανύσει μία συνολική διαδρομή 4 m για να φτάσει στην πάνω πλευρά της δεξαμενής. Η ανάκλαση από τη δεξαμενή νερού χρειάστηκε  $t = 34 \text{ ns}$  για να εμφανιστεί στην κεραία λήψης (Σχήμα 5.18).



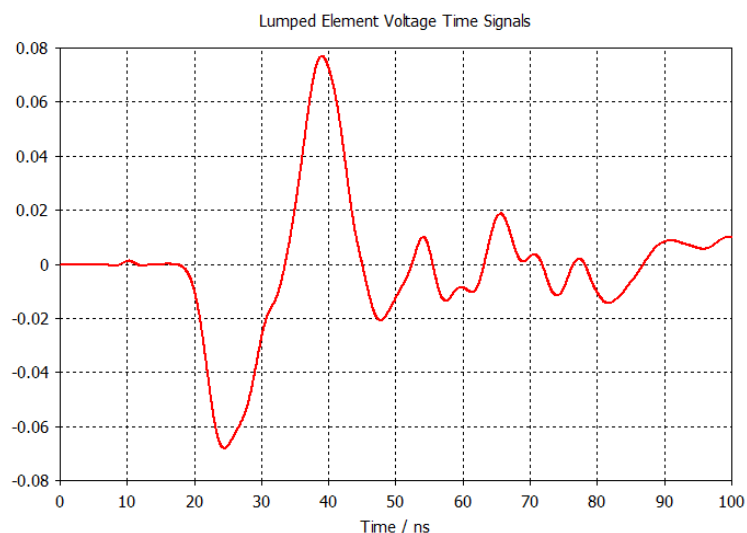
Σχήμα 5.18 Σήμα λήψης με δεξαμενή νερού στα 2m βάθος (ύψος δεξαμενής 0,5 m)

Στη συνέχεια προσομοιώνουμε θαμμένη δεξαμενή νερού σε βάθος 1 m, με διαστάσεις 4,5 m μήκος, 1 m πλάτος και 1 m ύψος, τοποθετημένη έκκεντρα της κεραίας (Σχήμα 5.19). Τα χαρακτηριστικά του εδάφους είναι  $\epsilon = 4$ ,  $\mu = 1$  και  $\sigma = 0,001$ .



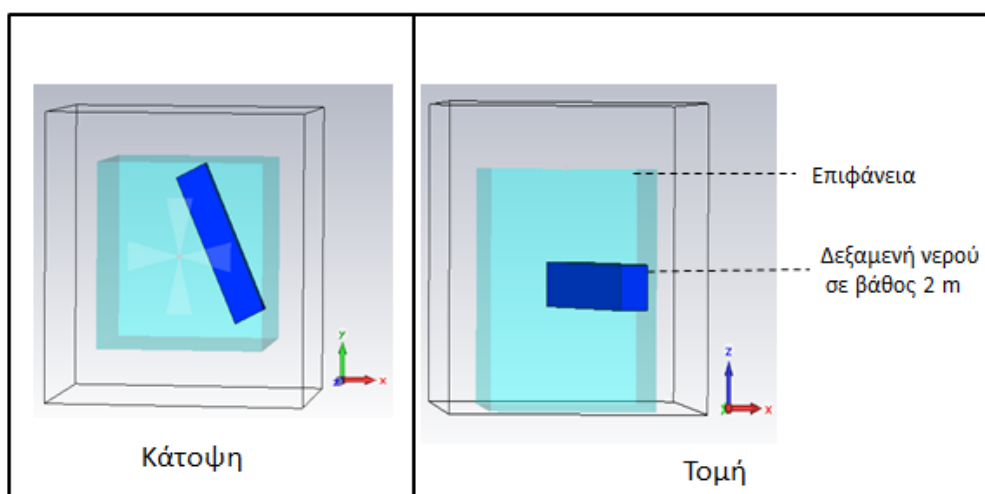
Σχήμα 5.19 Κάτοψη & τομή προσομοίωσης δεξαμενής πάχους 1 m σε βάθος 1 m

Το ανακλώμενο σήμα που λαμβάνει η κεραία λήψης έχει διανύσει μία συνολική διαδρομή 2 m για να φτάσει στην πάνω πλευρά της δεξαμενής. Η ανάκλαση από τη δεξαμενή νερού χρειάστηκε  $t = 23 \text{ ns}$  για να εμφανιστεί στην κεραία λήψης (Σχήμα 5.20).



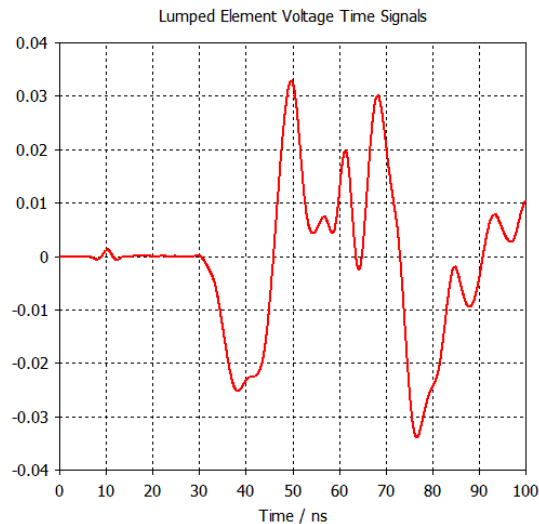
Σχήμα 5.20 Σήμα λήψης με δεξαμενή νερού στο 1m βάθος (ύψος δεξαμενής 1 m)

Έπειτα τοποθετούμε την ίδια δεξαμενή νερού θαμμένη σε βάθος 2 m (Σχήμα 5.21). Τα χαρακτηριστικά του εδάφους είναι  $\epsilon = 4$ ,  $\mu = 1$  και  $\sigma = 0,001$ .



Σχήμα 5.21 Κάτοψη & τομή προσομοίωσης δεξαμενής πάχους 1 m σε βάθος 2 m

Το ανακλώμενο σήμα που λαμβάνει η κεραία λήψης έχει διανύσει μία συνολική διαδρομή 4 m. Ξεκινάει από την κεραία εκπομπής και χρειάζεται 2 m για να συναντήσει την επιφάνεια της δεξαμενής και θα διανύσει άλλα 2 m για να επιστρέψει στην επιφάνεια του εδάφους. Η ανάκλαση από τη δεξαμενή νερού χρειάστηκε  $t = 38 \text{ ns}$  για να εμφανιστεί στην κεραία λήψης (Σχήμα 5.22).



Σχήμα 5.22 Σήμα λήψης με δεξαμενή νερού στα 2m βάθος (ύψος δεξαμενής 1 m)

Συγκρίνοντας τις τελευταίες τέσσερις προσομοιώσεις με τις δεξαμενές νερού ύψους 0,5 m και 1 m θαμμένες στα 1 m και 2 m αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι:

- Ανεξάρτητα από το ύψος της θαμμένης δεξαμενής, η αρχική ανάκλαση της πρώτης επιφάνειας που συναντάει το κύμα, δεν επηρεάζεται.
- Όσο μεγαλώνει το πάχος της δεξαμενής εμφανίζεται ένα μοτίβο στην ουρά του σήματος.

## 5.2 Μετρήσεις GPR

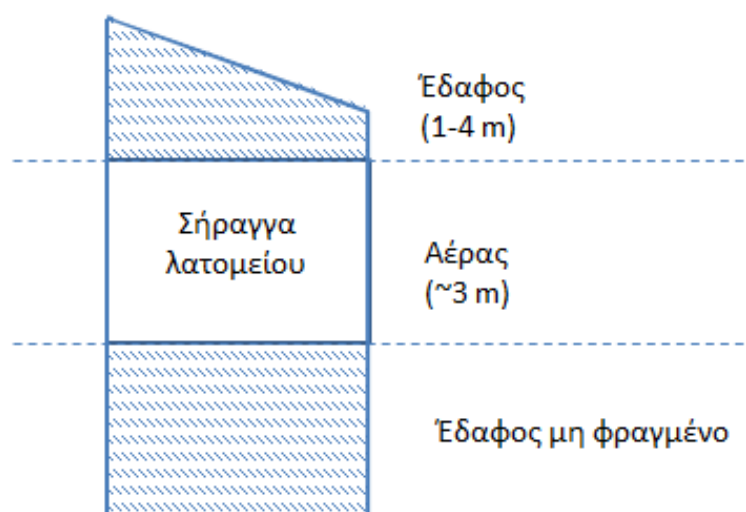
Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τις μετρήσεις που πραγματοποιήσαμε με το GPR. Οι καταγραφές μας πραγματοποιήθηκαν σε τέσσερις διαφορετικές περιοχές που επιλέχθηκαν για να έχουν ένα ιδιαίτερο επιστημονικό ενδιαφέρον. Σε μία πέμπτη τοποθεσία έγιναν κατασκευασμένα, ελεγχόμενα, πειράματα και καταγραφές με διάφορα σενάρια (καθαρό έδαφος, θαμμένα αντικείμενα, κλπ.).

Τέλος παρουσιάζουμε μία νέα μέθοδο επεξεργασίας του λαμβανόμενου σήματος του GPR και παραθέτουμε επιλεγμένες μετρήσεις, όπου φαίνεται πως ήταν αρχικά και πως τροποποιήθηκαν, καθώς επίσης γίνεται και ανάλυση των καταγραφών.

### 5.2.1 Μετρήσεις σε αρχαίο λατομείο στο Λαύριο

Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν στη νοτιοανατολική πλευρά του Τεχνολογικού και Πολιτισμικού Πάρκου Λαυρίου όπου βρίσκεται ένα αρχαίο λατομείο, του οποίου το εσωτερικό έχει χαρτογραφηθεί από σπηλαιολόγους. Μελετήθηκε η επιφάνεια πάνω από το λατομείο στα πρώτα 10 m της σήραγγας, η οποία είναι εντός του πάρκου.

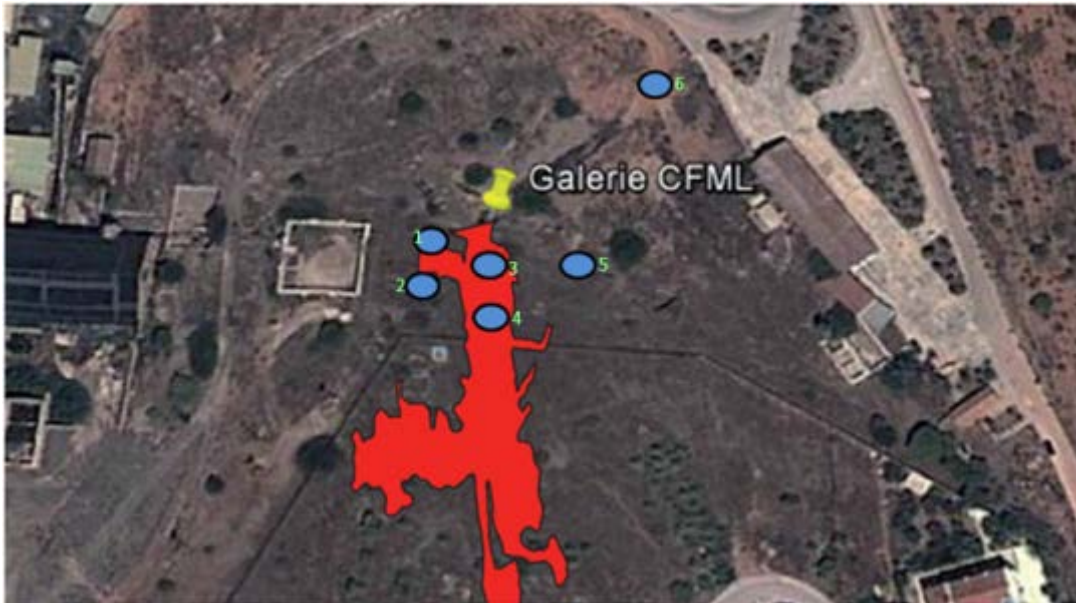
Κομβικά σημεία από άποψη επιστημονικού ενδιαφέροντος επιλέχθηκαν στο αρχαίο λατομείο σε μία έκταση  $100 \text{ m}^2$ . Το φαινόμενο που θέλουμε να μελετήσουμε είναι η απόκριση του κενού μέσα στο έδαφος. Συγκεκριμένα η δομή του εδάφους στα περισσότερα σημεία αποτελείται από τρία στρώματα (Σχήμα 5.23). Το πρώτο στρώμα είναι το επιφανειακό έδαφος το οποίο είναι χώμα πάχους που κυμαίνεται από 1 έως 4 m. Το δεύτερο στρώμα είναι η σήραγγα και περιέχει αέρα, με πάχος 3 m. Το τρίτο στρώμα είναι το έδαφος από το δάπεδο του λατομείου και κάτω.



Σχήμα 5.23 Στρωματοποιημένο έδαφος αρχαίου λατομείου στο Λαύριο

Ο κύριος διάδρομος του λατομείου στα πρώτα 10 m έχει πλάτος και ύψος 2,5 έως 3 m. Η σήραγγα είναι καλυμμένη με χώμα που το πάχος του κυμαίνεται από 1 m (αρχή) έως 4 m (τέλος).





Σχήμα 5.24 Σχεδιάγραμμα αρχαίου λατομείου στο Λαύριο

Στο Σχήμα 5.24 με κόκκινο χρώμα παρουσιάζονται τα πρώτα 50 m της σήραγγας, με κίτρινο χρώμα είναι η είσοδος του λατομείου, οι μπλε κύκλοι είναι τα σημεία στα οποία έγιναν οι καταγραφές και με πράσινο χρώμα είναι η αρίθμηση των θέσεων καταγραφής.

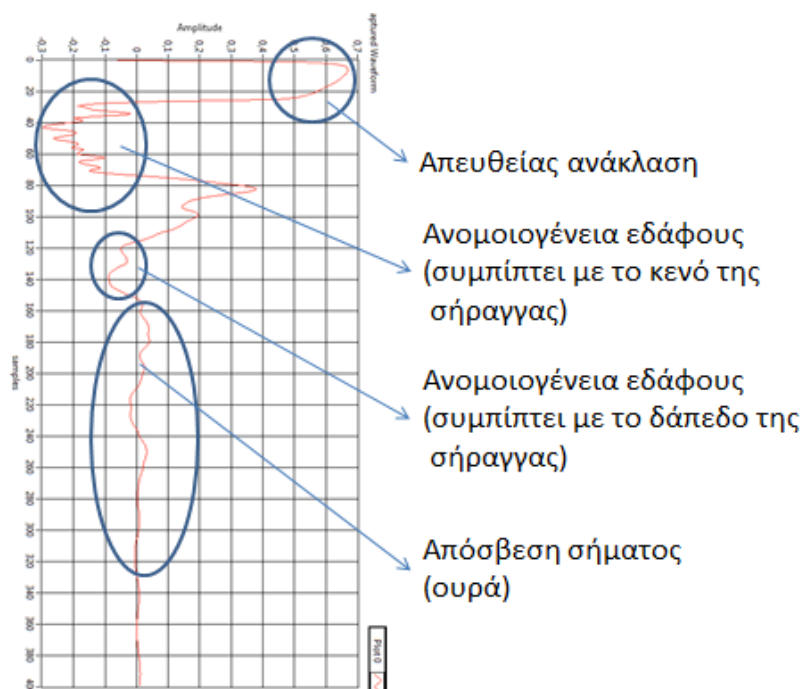
Οι μετρήσεις στα σημεία 3 και 4 έγιναν ακριβώς πάνω από το λατομείο και έχουν διαφορετικό πάχος στο πρώτο στρώμα. Επιλέξαμε άλλα δύο σημεία, το 1 και το 2, με τις κεραίες μισές να καλύπτουν το διάδρομο του λατομείου και μισές να είναι σε σταθερό χρώμα. Άλλη μία μέτρηση στο σημείο 5, έγινε στο λόφο πάνω από το λατομείο σε απόσταση 40 m από το λατομείο εκτός της σήραγγας. Τέλος πραγματοποιήθηκε μία μέτρηση στο σημείο 6, που έγινε στο ύψος του δαπέδου 40 m πριν την είσοδο.

Περιγραφή της διάταξης GPR που χρησιμοποιήσαμε στο συγκεκριμένο πείραμα: Χρησιμοποιήσαμε το βασικό σύστημα GPR, με την ισχυρή μη παραμετροποιήσιμη γεννήτρια σήματος. Οι κεραίες για την εκπομπή και τη λήψη ήταν ένα σετ παπιγιόν, κάθετες μεταξύ τους και συνολικών διαστάσεων 3 x 3 m. Οι κεραίες μας ξεκινούν να ακτινοβολούν από τα 50 MHz πράγμα που σημαίνει ότι σε συνδυασμό με μία ισχυρή

γεννήτρια σήματος μπορούμε να επιτύχουμε μεγάλη διείσδυση αλλά όχι πολύ καλή ανάλυση.

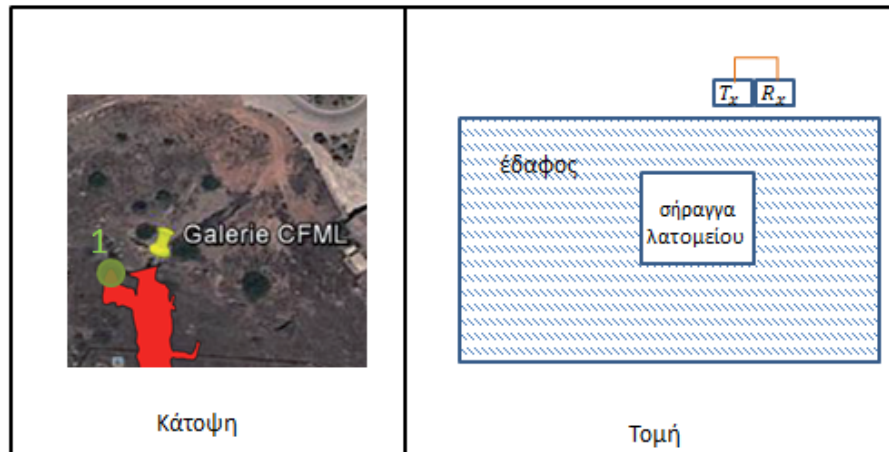
Γενική ανάλυση μίας καταγραφής. Δεδομένου ότι έχουμε αρκετές πληροφορίες για τη μορφολογία του εδάφους καθώς και της σήραγγας του λατομείου, οι μετρήσεις είναι ικανοποιητικές και ανάλογες του τι περιμέναμε να απεικονίσει το GPR. Στο Σχήμα 5.25 παραθέτουμε ενδεικτικά μία μέτρηση περιστραμμένη κατά  $90^\circ$  και κάνουμε μία λεπτομερή ανάλυση των φαινομένων που παρουσιάζονται.

Στα πρώτα 30 έως 40 δείγματα (2,25 - 3 m βάθος) φαίνεται η απευθείας ανάκλαση μεταξύ των κεραιών (μέσω του αέρα) και οι ανακλάσεις από την επιφάνεια του εδάφους. Στα επόμενα 20 με 30 δείγματα (3 έως 4,5 m βάθος) εμφανίζεται η πρώτη ανομοιογένεια στο έδαφος. Στα επόμενα 60 δείγματα (9 m βάθος) εμφανίζεται μία ακόμα ανομοιογένεια του εδάφους. Μετά τα 200 δείγματα (15 m βάθος) το σήμα φθίνει αισθητά λόγω της απόσβεσης που υφίσταται από το έδαφος και έχει φτάσει στο μέγιστο βάθος διείσδυσης. Από εκεί και μετά δεν μπορούμε να εξάγουμε κάποια πληροφορία.



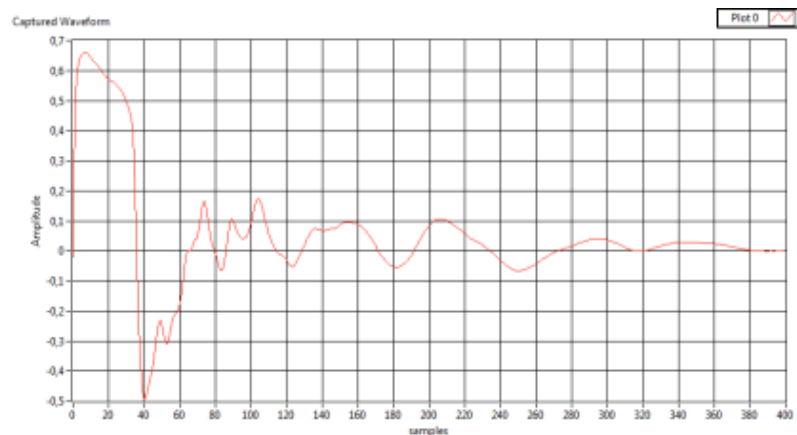
Σχήμα 5.25 Μέτρηση με περιστροφή  $90^\circ$  (τύπου A-scan) και ανάλυση

Περιγραφή της θέσης 1 (Σχήμα 5.26). Οι κεραιές εκπομπής και λήψης τοποθετήθηκαν πάνω από τη σήραγγα έτσι ώστε το μισό σύστημα κεραιών να επικαλύψει τη σήραγγα και το άλλο μισό να βρίσκεται σε σταθερό έδαφος. Η σήραγγα εκτιμάται ότι ξεκινάει από το βάθος των 3 - 3,5 m.



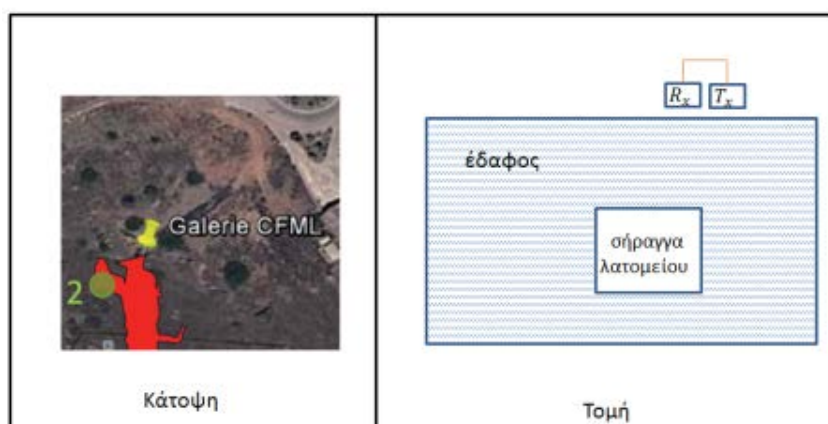
Σχήμα 5.26 Κάτοψη & τομή του σημείου 1

Η μέτρηση στο Σχήμα 5.27 δείχνει στα πρώτα δείγματα να είναι εμφανής η απευθείας ανάκλαση μεταξύ των κεραιών στον αέρα. Το φαινόμενο είναι αναμενόμενο καθώς γνωρίζουμε ότι με τις κεραιές που χρησιμοποιούμε ξεκινούν να ακτινοβολούν από τα 50 MHz με αποτέλεσμα στα πρώτα μέτρα να έχουμε καθαρή εικόνα. Στα 40 δείγματα, δηλαδή περίπου στα 3 m βάθος παρουσιάζεται μία ανομοιογένεια στο έδαφος γεγονός που συμπίπτει και με την οροφή του αρχαίου λατομείου που το περιμέναμε στο συγκεκριμένο βάθος.



Σχήμα 5.27 Μέτρηση στο σημείο 1

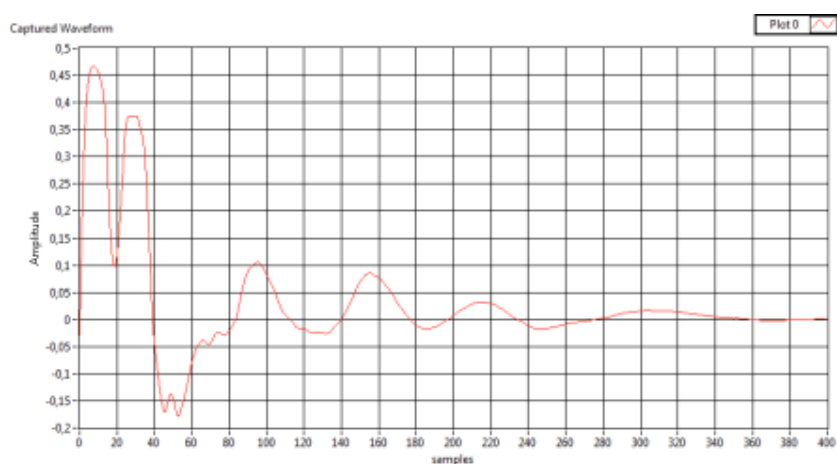
Περιγραφή της θέσης 2 (Σχήμα 5.28). Όπως στη θέση 1 με αντίθετη πολικότητα των κεραιών. Η σήραγγα εκτιμάται ότι ξεκινάει από το βάθος των 3,5 - 4 m.



Σχήμα 5.28 Κάτοψη & τομή του σημείου 2

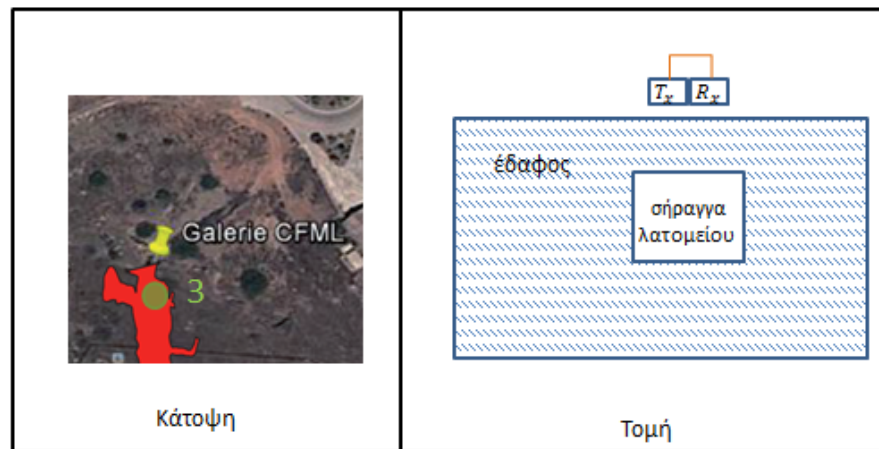
Η μέτρηση στο Σχήμα 5.29 είναι παρόμοια με τη μέτρηση στο σημείο 1. Η διαφορά είναι ότι η οροφή της σήραγγας βρίσκεται 0,5 m πιο κάτω καθώς επίσης και ότι η κεραία έχει στραφεί κατά  $90^\circ$  σε σχέση με πριν.

Αυτή η στροφή δημιουργεί δύο λοβούς στα πρώτα δείγματα (απευθείας ανάκλασης), τα οποία απορρίπτουμε. Το φαινόμενο της παρουσίας αέρα μέσα στη σήραγγα έχει μετατοπιστεί κατά 10 δείγματα, δηλαδή περίπου 75 cm πιο βαθιά εμφανίζεται η οροφή της σήραγγας.



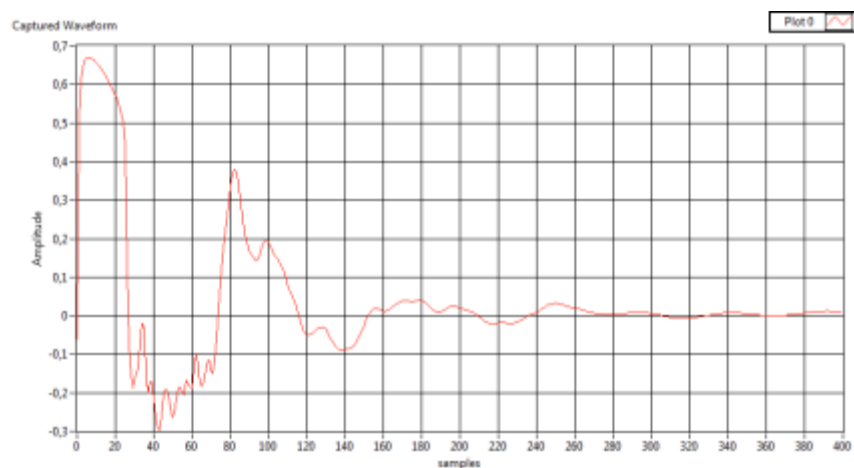
Σχήμα 5.29 Μέτρηση στο σημείο 2

Περιγραφή της θέσης 3 (Σχήμα 5.30). Οι κεραιές τοποθετήθηκαν ακριβώς πάνω από τη σήραγγα. Η σήραγγα εκτιμάται ότι ξεκινάει από το βάθος των 3 m.



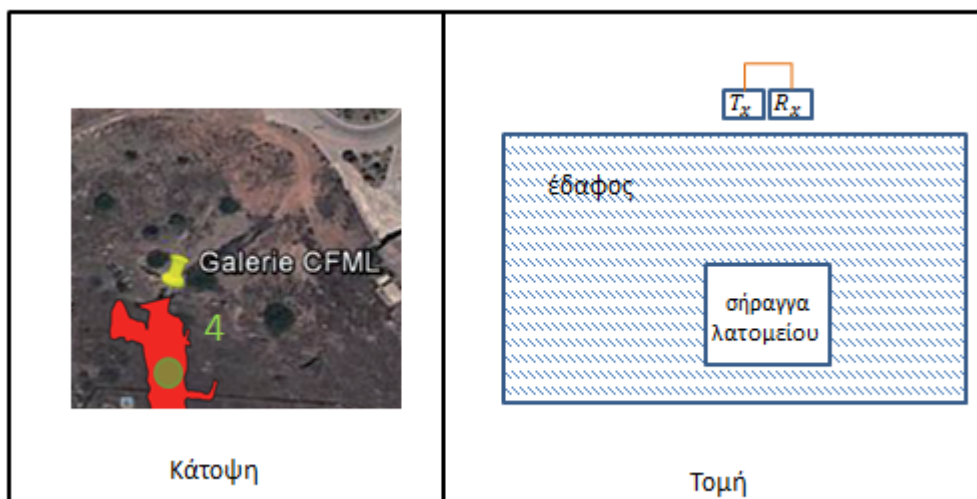
Σχήμα 5.30 Κάτοψη & τομή του σημείου 3

Η μέτρηση στο Σχήμα 5.30 έχει γίνει ακριβώς πάνω από τη σήραγγα, πράγμα που βοηθάει να δούμε καθαρότερα το φαινόμενο. Πράγματι στα δείγματα από 30 έως 70 φαίνεται να υπάρχει μία ισχυρή ανομοιογένεια στο έδαφος ξεκινώντας από τα 2,5 m και συνεχίζεται μέχρι τα 5,5 m που θα μπορούσε να ταυτιστεί με το πάτωμα του λατομείου.



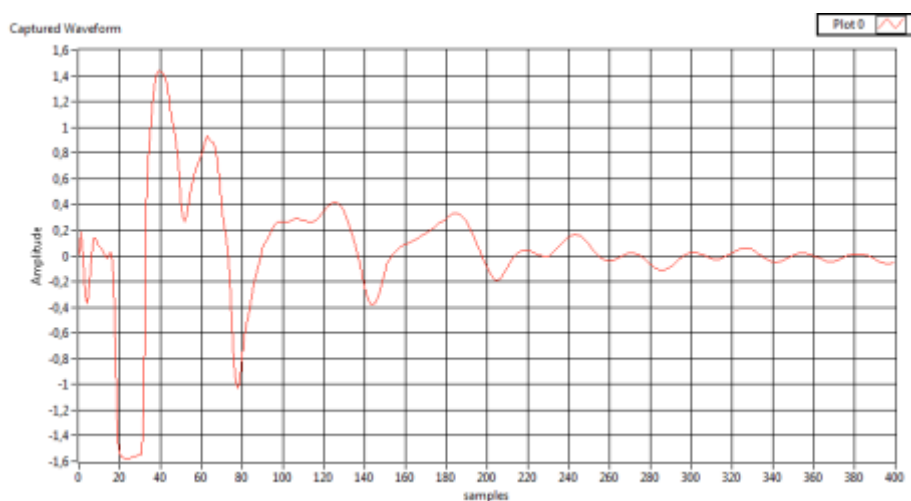
Σχήμα 5.31 Μέτρηση στο σημείο 3

Περιγραφή της θέσης 4 (Σχήμα 5.32). Οι κεραιές τοποθετήθηκαν ακριβώς πάνω από τη σήραγγα. Η σήραγγα εκτιμάται ότι ξεκινάει από το βάθος των 3 - 4 m.



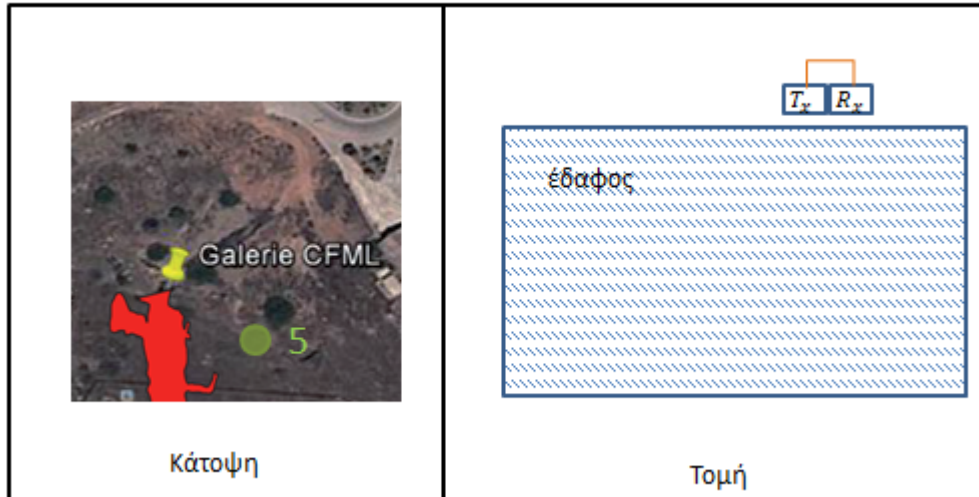
Σχήμα 5.32 Κάτοψη & τομή του σημείου 4

Η μέτρηση στο Σχήμα 5.33 έγινε πάνω από το αρχαίο λατομείο. Η οροφή της σήραγγας στη μέτρηση δείχνει να είναι πιο ψηλά από αυτό που πιθανολογούσαμε.



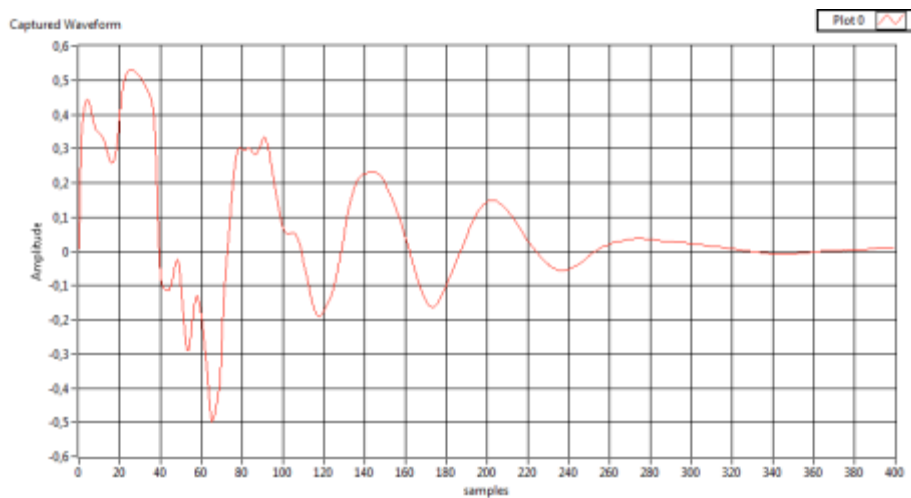
Σχήμα 5.33 Μέτρηση στο σημείο 4

*Περιγραφή της θέσης 5 (Σχήμα 5.34).* Η μέτρηση πραγματοποιήθηκε αρκετά μακριά σε σχέση με τη σήραγγα έτσι ώστε να έχουμε μεγαλύτερες πιθανότητες για καθαρή μέτρηση (με σκέτο χώμα).



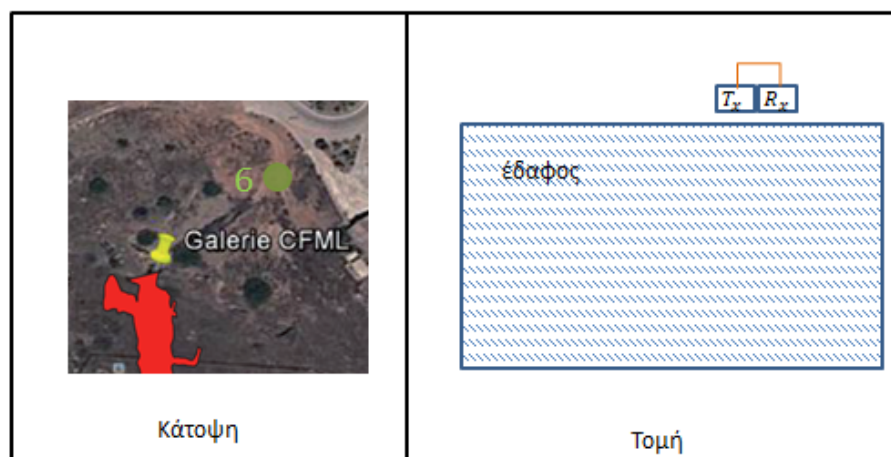
Σχήμα 5.34 Κάτοψη &amp; τομή του σημείου 5

Η μέτρηση στο Σχήμα 5.35 είναι μία καταγραφή που θέλουμε να δούμε μία εικόνα χωρίς ενδιαφέρον και να τη συγκρίνουμε με τα προηγούμενα αποτελέσματα και να το έχουμε ως σημείο αναφοράς.



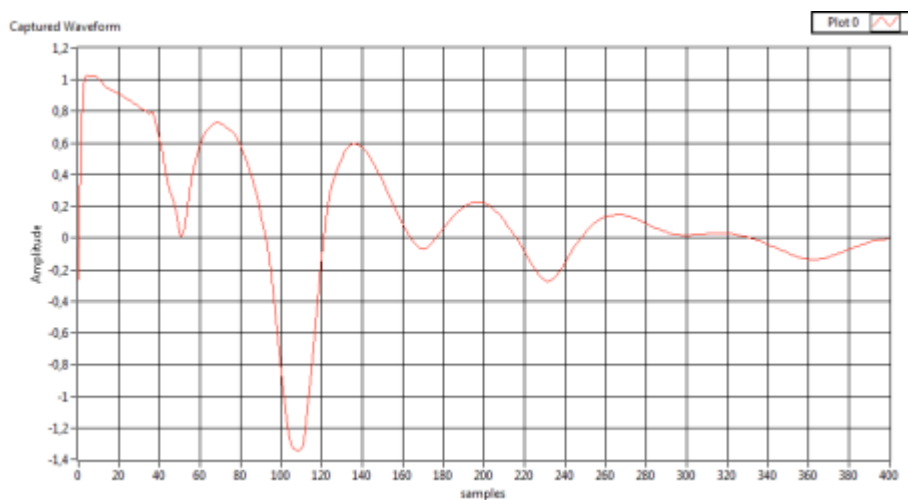
Σχήμα 5.35 Μέτρηση στο σημείο 5

*Περιγραφή της θέσης 6 (Σχήμα 5.36).* Η μέτρηση πραγματοποιήθηκε αρκετά μακριά σε σχέση με τη σήραγγα, στο επίπεδο του πατώματος του λατομείου, έτσι ώστε να έχουμε μεγαλύτερες πιθανότητες για καθαρή μέτρηση (με σκέτο χώμα).



Σχήμα 5.36 Κάτοψη & τομή του σημείου 6

Η μέτρηση στο Σχήμα 5.37 είναι μία καταγραφή που θέλουμε να δούμε μία εικόνα χωρίς ενδιαφέρον και να τη συγκρίνουμε με τα προηγούμενα αποτελέσματα και να το χρησιμοποιήσουμε ως σημείο αναφοράς.



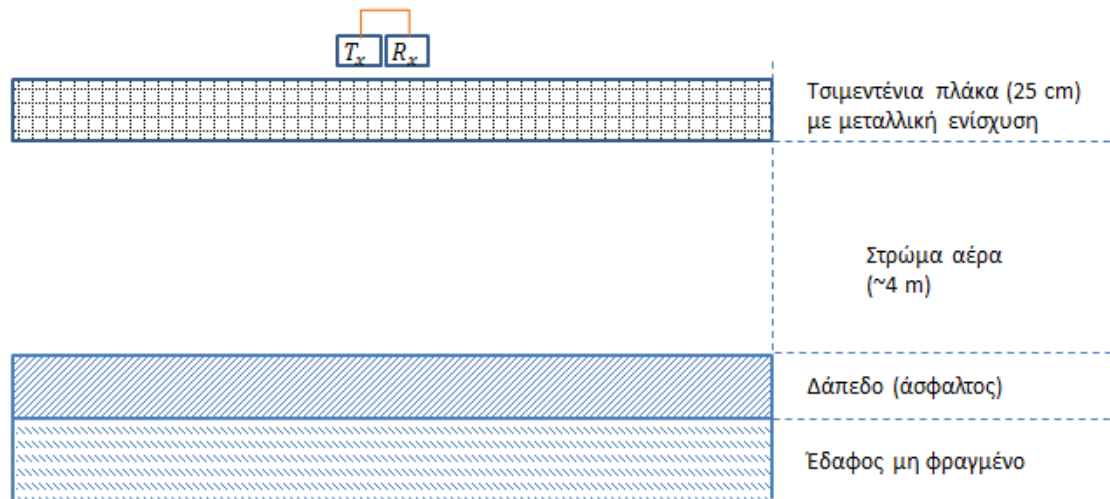
Σχήμα 5.37 Μέτρηση στο σημείο 6

### 5.2.2 Μετρήσεις στον προαύλιο χώρο του Ε.Μ.Π.

Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν στη νοτιοανατολική πλευρά του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου (Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου), στους προαύλιους χώρους του παλαιού κτιρίου της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών.



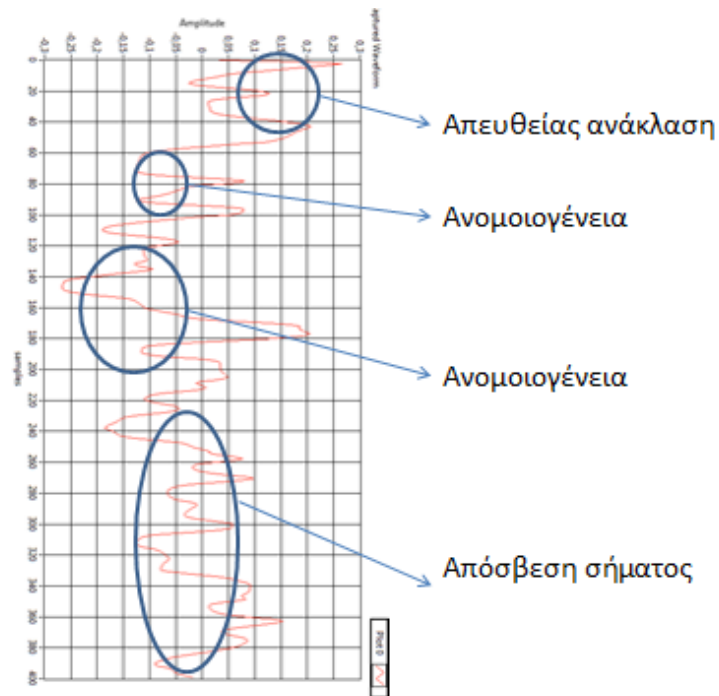
Οι δοκιμές έγιναν στο χώρο στάθμευσης αυτοκινήτων, τοποθετώντας τον εξοπλισμό εκπομπής και λήψης στον πρώτο όροφο και στο ισόγειο ένα όχημα, σε διάφορες θέσεις. Η δομή των στρωμάτων του πειράματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.38. Το πρώτο στρώμα είναι η πλάκα του τσιμέντου με το μεταλλικό οπλισμό και μετά ακολουθεί ένα στρώμα αέρα με 4 m πάχος. Στο δάπεδο υπάρχει άσφαλτος για 10 - 15 cm και ακολουθεί το μη φραγμένο έδαφος.



Σχήμα 5.38 Στρωματοποιημένο μοντέλο μετρήσεων σε χώρο στάθμευσης

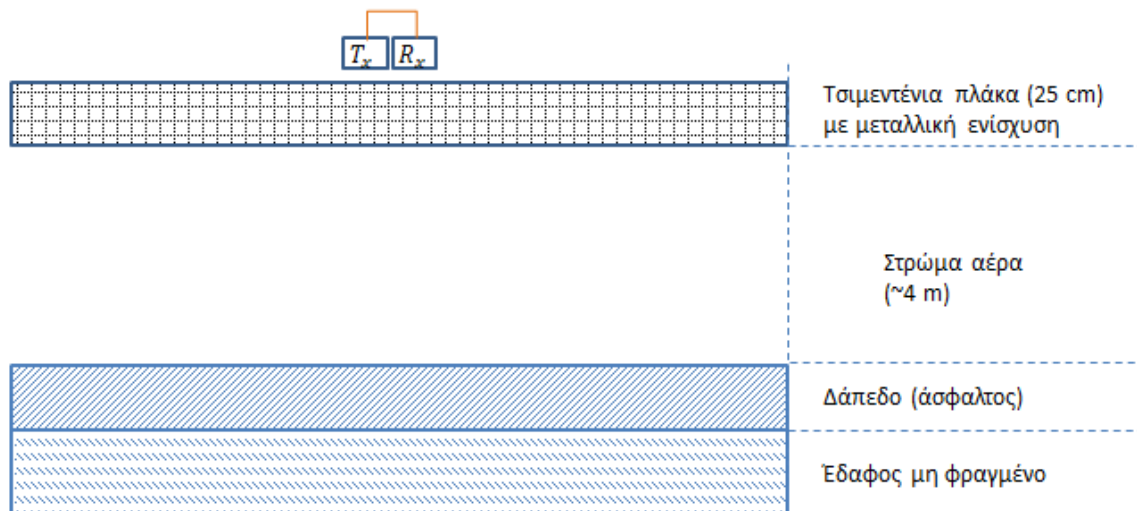
Περιγραφή της διάταξης GPR που χρησιμοποιήσαμε στο συγκεκριμένο πείραμα: Χρησιμοποιήσαμε το βασικό σύστημα GPR, με την ισχυρή μη παραμετρικοποιήσιμη γεννήτρια σήματος. Οι κεραίες για την εκπομπή και τη λήψη ήταν δύο παπιγιόν, κάθετες μεταξύ τους και συνολικών διαστάσεων 3 x 3 m.

Γενική ανάλυση μίας καταγραφής. Στο Σχήμα 5.39 παραθέτουμε ενδεικτικά μία μέτρηση περιστραμμένη κατά 90° και κάνουμε ανάλυση των φαινομένων που παρουσιάζονται.



Σχήμα 5.39 Μέτρηση τύπου A-scan με ανάλυση

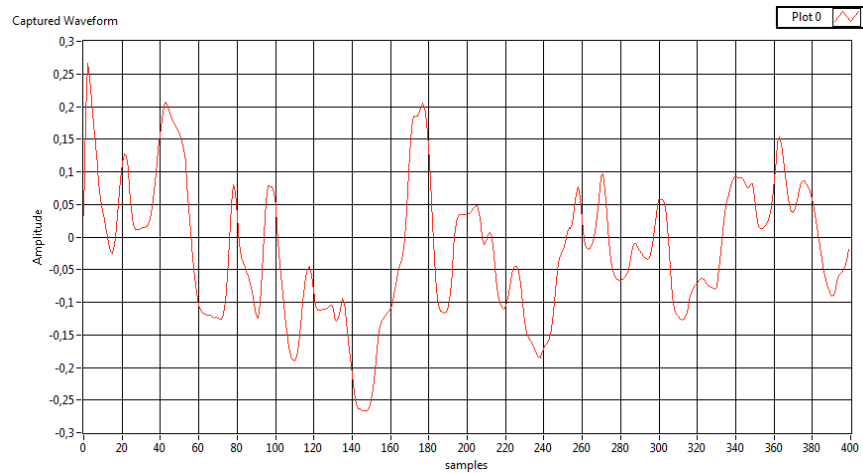
Περιγραφή 1<sup>ου</sup> σεναρίου (Σχήμα 5.40). Οι κεραιές τοποθετήθηκαν στον 1<sup>ο</sup> όροφο και από κάτω, στο υπόγειο παρκινγκ, υπήρχε μόνο αέρας.



Σχήμα 5.40 Τομή 1<sup>ου</sup> πειράματος

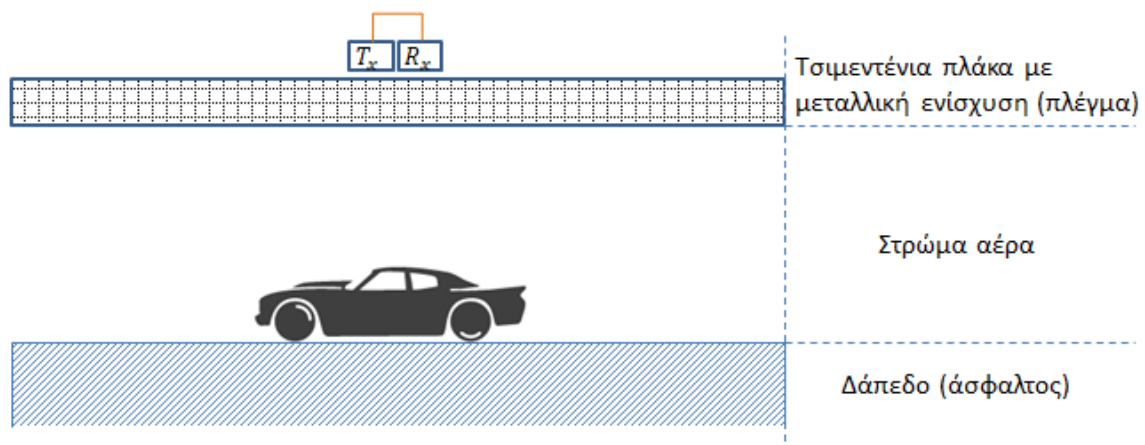
Η μέτρηση στο Σχήμα 5.41 μας δείχνει μία αρχική ανάκλαση από το απευθείας σήμα. Στη συνέχεια παρατηρείται μία περιοδική επανάληψη του σήματος που θα μπορούσε

να χαρακτηριστεί μία μορφή κυματοδότησης και το σήμα να παγιδεύεται μεταξύ τσιμεντένιας πλάκας και εδάφους. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το σήμα να φθίνει με αργό ρυθμό. Στην περίπτωση αυτή είναι πιθανόν να μη μπορούμε να βγάλουμε ασφαλές συμπέρασμα.



Σχήμα 5.41 Μετρήσεις σε κενό χωρίς σκεδαστή

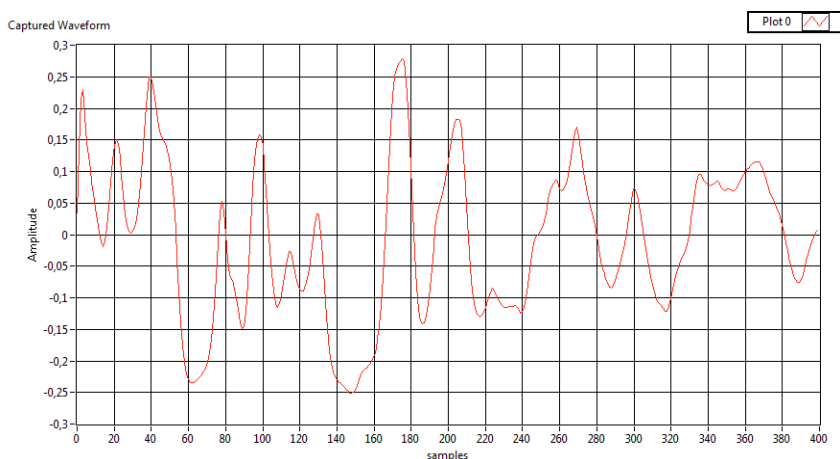
Περιγραφή 2<sup>ου</sup> σεναρίου (Σχήμα 5.42). Οι κεραιές τοποθετήθηκαν στον 1<sup>ο</sup> όροφο και ακριβώς από κάτω στο υπόγειο χώρο στάθμευσης τοποθετήθηκε ένα όχημα. Η μεταλλική οροφή του οχήματος είναι κάτω από το κέντρο του συστήματος των κεραιών.



Σχήμα 5.42 Τομή 2<sup>ου</sup> πειράματος

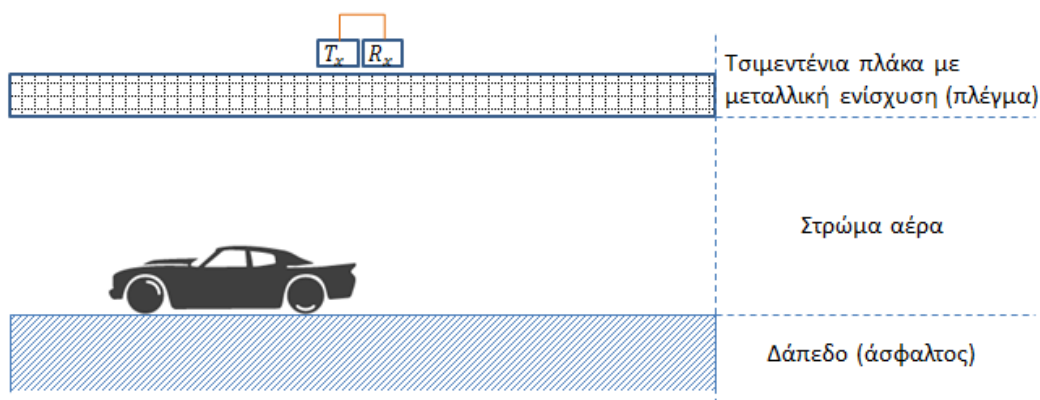
Η μέτρηση στο Σχήμα 5.43 εμφανίζει αρχικά την απευθείας ανάκλαση και στη συνέχεια μία αντίστοιχη επαναλαμβανόμενη ανάκλαση όπως στην προηγούμενη καταγραφή. Η

βασική διαφορά στις δύο καταγραφές είναι ότι στη δεύτερη εμφανίζονται πολύ μεγαλύτερες σε ένταση ανακλάσεις. Η πιθανότερη αιτία είναι η ύπαρξη της μεγάλης μεταλλικής επιφάνειας του αυτοκινήτου. Έτσι ενώ μεμονωμένα η πρώτη και η δεύτερη καταγραφή ίσως έχουν ελάχιστη αξιοποιήσιμη πληροφορία έχοντας και τις δύο καταγραφές ταυτόχρονα για αξιολόγηση μπορούμε να προβούμε στο συμπέρασμα ότι στη δεύτερη περίπτωση προστέθηκε μεγάλη μεταλλική επιφάνεια.



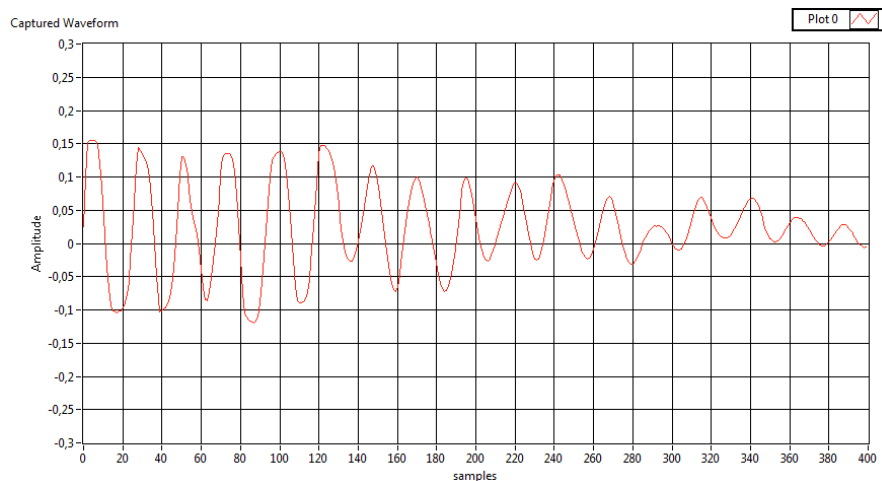
Σχήμα 5.43 Μέτρηση με αυτοκίνητο

Περιγραφή 3<sup>ου</sup> σεναρίου (Σχήμα 5.44). Οι κεραιές τοποθετήθηκαν στον 1<sup>ο</sup> όροφο και από κάτω τους, στο υπόγειο χώρο στάθμευσης τοποθετήθηκε ένα όχημα. Το μισό όχημα είναι κάτω από το σύστημα των κεραιών ενώ το άλλο μισό βρίσκεται εκτός του συστήματος. Είναι η τελευταία δοκιμή που θα κάνουμε στο συγκεκριμένο πείραμα, θέλοντας να δούμε τη διαφορά που θα υπάρξει στην καταγραφή σε σχέση με τις άλλες περιπτώσεις.



Σχήμα 5.44 Τομή 3<sup>ου</sup> πειράματος

Η μέτρηση στο Σχήμα 5.45 δυστυχώς δεν μπορεί να μας προσφέρει πληροφορία. Έχουμε λάβει ένα περιοδικό σήμα που φθίνει πάρα πολύ αργά. Το σήμα αυτό δεν συμβαδίζει με το πείραμα που έχουμε στήσει. Η λογική εξήγηση που μπορεί να δοθεί είναι ότι αλλάζοντας ελαφρώς τη θέση ή την πολικότητα της κεραίας μας το εκπεμπόμενο κύμα να επηρεάζεται από το μεταλλικό πλέγμα ενίσχυσης της μπετένιας πλάκας. Το φαινόμενο αυτό δεν μπόρεσε να εξαληφθεί στο συγκεκριμένο πείραμα και να λάβουμε μία πιο καθαρή εικόνα με περισσότερη πληροφορία.

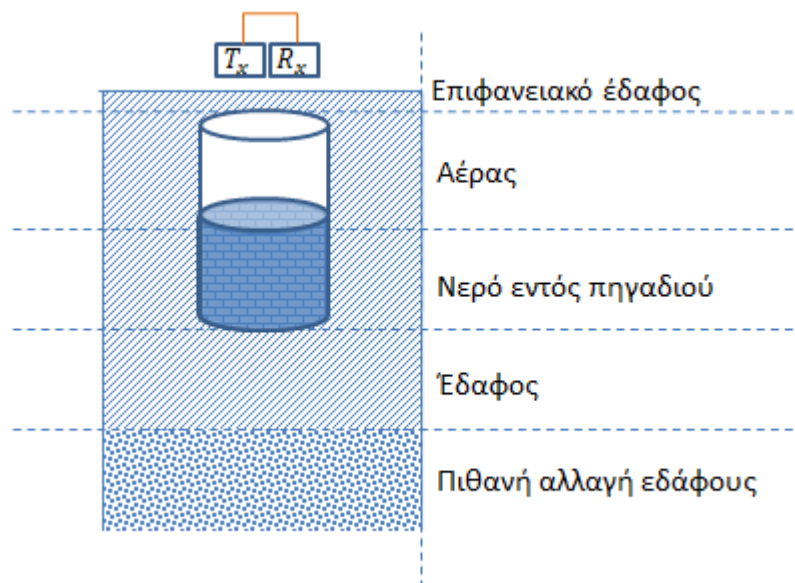


Σχήμα 5.45 Μετρήσεις με μισό αυτοκίνητο

### 5.2.3 Μετρήσεις περιμετρικά πηγαδιού

Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε κτήμα με πηγάδι, στους πρόποδες της ανατολικής πλαγιάς της Πάρνηθας.

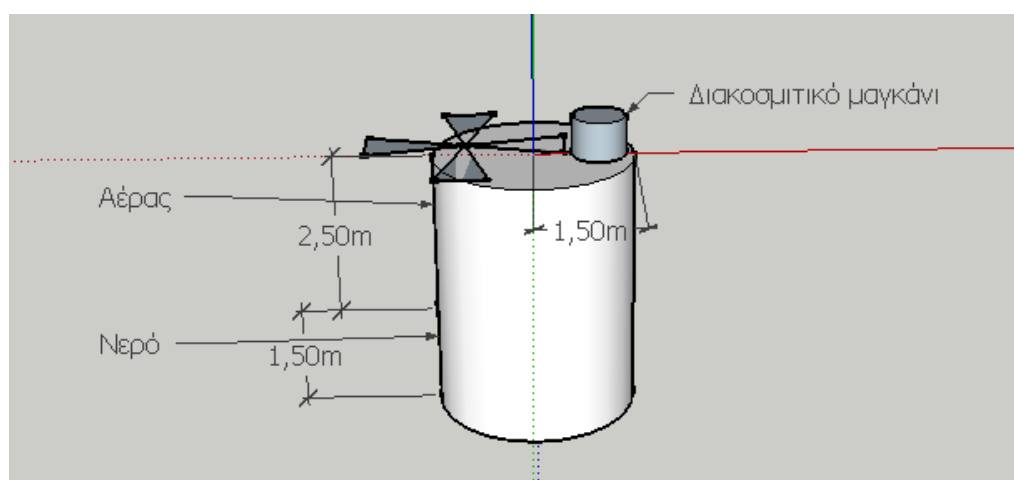
Η μελέτη εστίασε στην καταγραφή με το GPR ενός πηγαδιού στο οποίο μετρήσαμε και καταγράψαμε τη στάθμη του νερού. Η δομή των στρωμάτων του πειράματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.46. Το πρώτο στρώμα είναι το επιφανειακό έδαφος το οποίο εκτιμάται στα 5 - 10 cm εδαφοκάλυψης και μετά ξεκινάει το μπετένιο καπάκι του πηγαδιού. Ακολουθεί ένα στρώμα άερα και νερού εντός του πηγαδιού. Μετά τον πυθμένα του πηγαδιού υπάρχει το έδαφος. Από γεώτρηση σε κοντινή περιοχή εκτιμάται ότι σε βάθος 10 m υπάρχει αλλαγή πετρώματος.



Σχήμα 5.46 Στρωματοποιημένο υπέδαφος πηγαδιού

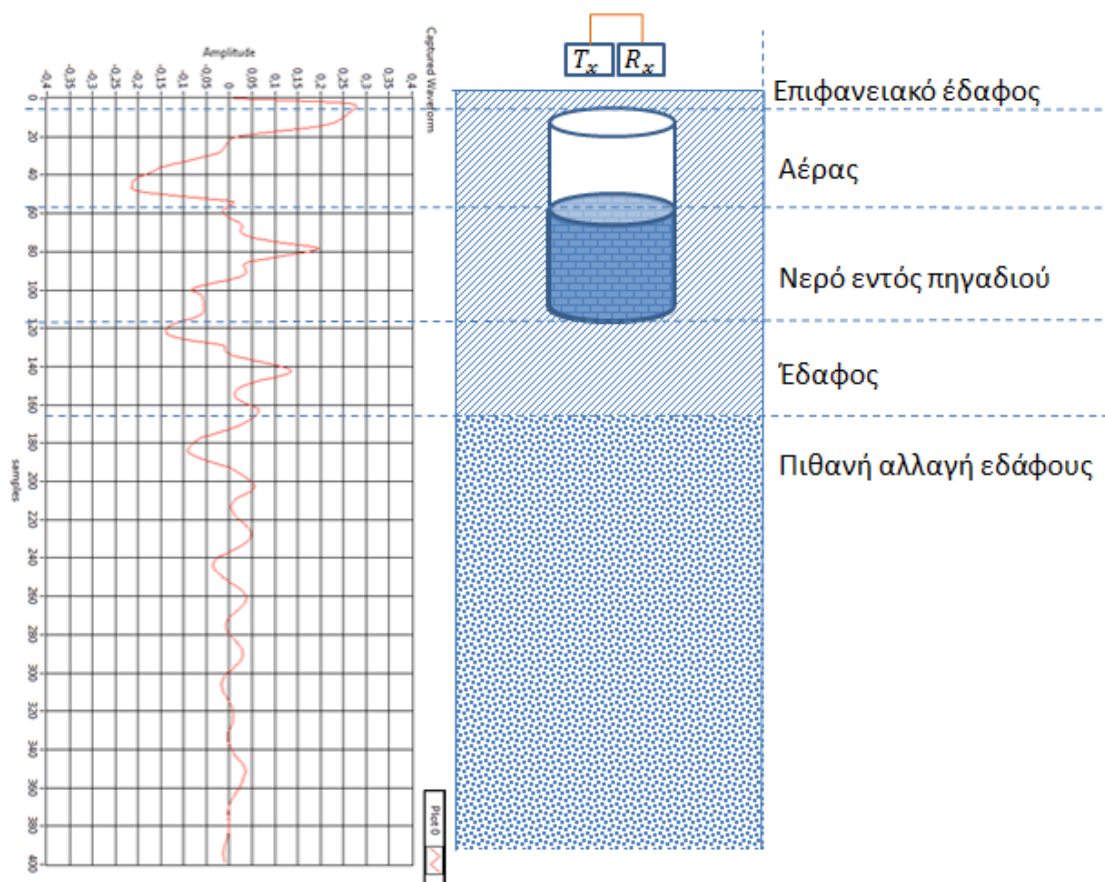
Περιγραφή της διάταξης GPR που χρησιμοποιήσαμε στο συγκεκριμένο πείραμα. Χρησιμοποιήσαμε το βασικό σύστημα GPR, με εργαστηριακή παραμετρικοποιήσιμη γεννήτρια σήματος. Οι κεραίες για την εκπομπή και τη λήψη ήταν ένα σετ παπιγιόν, κάθετες μεταξύ τους και συνολικών διαστάσεων 3 x 3 m.

Περιγραφή της διάταξης καταγραφής (Σχήμα 5.47). Το σετ των κεραιών τοποθετήθηκε πάνω από το πηγάδι του γλυκού νερού. Το πηγάδι έχει 2,5 m αέρα και 1,5 m νερό.



Σχήμα 5.47 Σχεδιάγραμμα διάταξης πηγαδιού

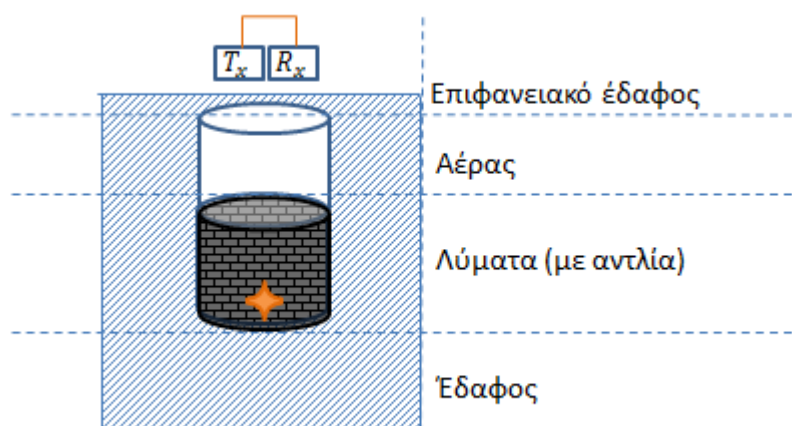
Στο Σχήμα 5.48 βλέπουμε αριστερά την καταγραφή της μέτρησης και δεξιά το έδαφος που μελετάμε. Τις πληροφορίες για τα τρία πρώτα στρώματα τις μετρήσαμε και τις καταγράψαμε στο πεδίο. Για τα δύο τελευταία στρώματα έχουμε ενδείξεις από γεώτρηση σε κοντινό σημείο και είναι αρκετά πιθανό να ισχύουν τα ίδια βάθη και στο δικό μας σημείο καταγραφής. Στα πρώτα 20 δείγματα (1,5 m βάθος) εμφανίζεται η απευθείας ανάκλαση από τον αέρα και τις επιφανειακές ανακλάσεις. Στα επόμενα 10 δείγματα (3 m βάθος) το κύμα ταξιδεύει στον αέρα με ταχύτητα κοντά στην ταχύτητα του φωτός, έτσι διανύει μεγαλύτερη απόσταση στο ίδιο χρόνο σε σχέση με όταν κινείται σε κάποιο πέτρωμα. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μία ανομοιογένεια στον πυθμένα του πηγαδιού κοντά στα 6 με 7 m. Τέλος, μετά τα 10 m δείχνει να υπάρχει μία ακόμα ανομοιογένεια, πράγμα που συμπίπτει με την πληροφορία από τη γεώτρηση ότι υπάρχει αλλαγή πετρώματος.



Σχήμα 5.48 Μέτρηση πάνω από το πηγάδι

### 5.2.4 Μετρήσεις περιμετρικά δεξαμενής λυμάτων

Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν στην Αθήνα, σε οικία που στον προαύλιο χώρο της υπήρχε θαμμένη δεξαμενή λυμάτων, που περιείχε και μία αντλία σε ύψος 0,5 m από τον πυθμένα της. Η δομή των στρωμάτων του πειράματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.49. Το πρώτο στρώμα είναι το επιφανειακό έδαφος το οποίο εκτιμάται στα 5 - 10 cm εδαφοκάλυψης και μετά ξεκινάει το μπετόνιο καπάκι της δεξαμενής λυμάτων. Ακολουθεί ένα στρώμα άερα και ακάθαρτων υδάτων εντός της δεξαμενής, ενώ με πορτοκαλί χρώμα έχει σημειωθεί η αντλία. Μετά τον πυθμένα της δεξαμενής πηγαδίου υπάρχει το έδαφος.

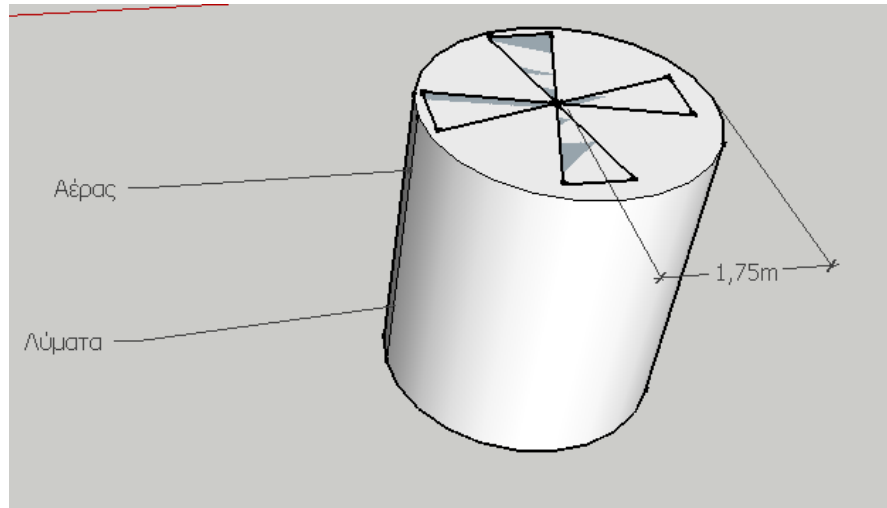


Σχήμα 5.49 Δεξαμενή λυμάτων σε στρωματοποιημένο υπέδαφος

Περιγραφή της διάταξης GPR που χρησιμοποιήσαμε στο συγκεκριμένο πείραμα. Χρησιμοποιήσαμε το βασικό σύστημα GPR, με εργαστηριακή παραμετροποιήσιμη γεννήτρια σήματος. Οι κεραίες για την εκπομπή και τη λήψη ήταν δύο τύπου παπιγιόν, κάθετες μεταξύ τους και συνολικών διαστάσεων 3 x 3 m.

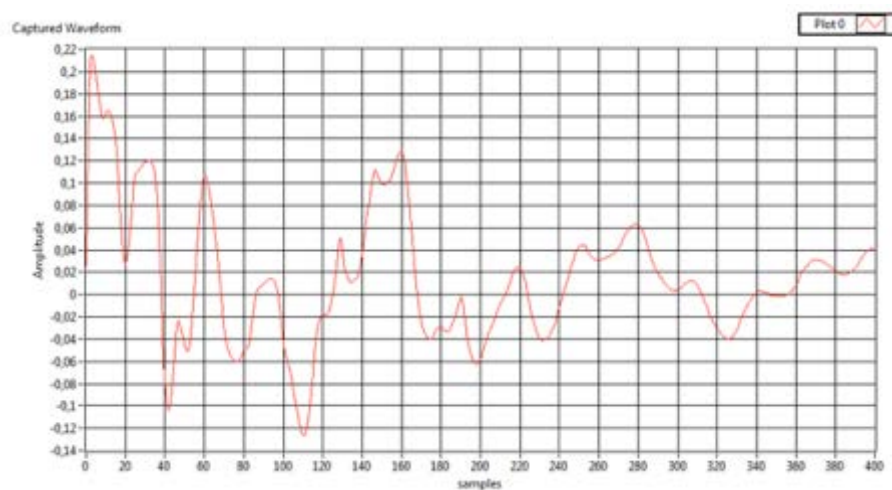
Περιγραφή της διάταξης καταγραφής Σχήμα 5.50. Οι κεραίες τοποθετήθηκαν πάνω από τη δεξαμενή λυμάτων. Η δεξαμενή λυμάτων περιέχει 1 m αέρα και 3 m ακάθαρτα ύδατα.





Σχήμα 5.50 Σημείο τοποθέτησης κεραίας πάνω από τη δεξαμενή λυμάτων

Στο Σχήμα 5.51 βλέπουμε την καταγραφή από τη δεξαμενή λυμάτων. Στα πρώτα δείγματα (1,5 m βάθος) έχουμε τις επιφανειακές ανακλάσεις. Στα επόμενα 10 δείγματα (3 m βάθος) το κύμα ταξιδεύει στον αέρα με ταχύτητα κοντά στην ταχύτητα του φωτός, έτσι διανύει μεγαλύτερη απόσταση στον ίδιο χρόνο σε σχέση με όταν κινείται σε κάποιο πέτρωμα. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μία ισχυρή ανάκλαση από τον πυθμένα της δεξαμενής κοντά στα 6 με 7 m που υπάρχει η μεταλλική αντλία. Τέλος μετά τα 10 m δείχνει να υπάρχει μία σταθερή απόσβεση του κύματος μέσα στο έδαφος κάτω από τη δεξαμενή.



Σχήμα 5.51 Μέτρηση πάνω από τη δεξαμενή λυμάτων

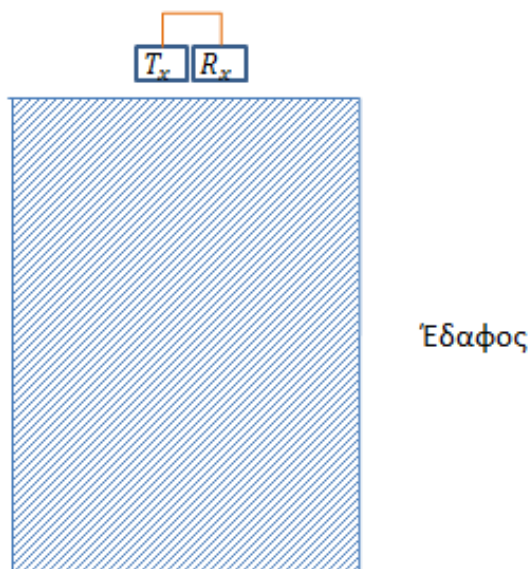
### 5.2.5 Μετρήσεις σε κατασκευασμένο χώρο δοκιμών

Οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν εκτός Αθηνών αλλά εντός Αττικής, στο προαύλιο χώρο οικίας. Σε μία έκταση  $50 \text{ m}^2$  έγιναν δοκιμές σε σκέτο χώμα (1 στρώμα), καθώς και έγινε ανασκαφή για να θαφτούν διάφορα αντικείμενα, σε διάφορα βάθη.

Περιγραφή της διάταξης GPR που χρησιμοποιήσαμε στο συγκεκριμένο πείραμα: Χρησιμοποιήσαμε παραμετρικοποιήσιμη εργαστηριακή γεννήτρια σήματος. Οι κεραίες για την εκπομπή και τη λήψη ήταν τύπου παπιγιόν, παράλληλες μεταξύ τους και σε απόσταση 23 cm.

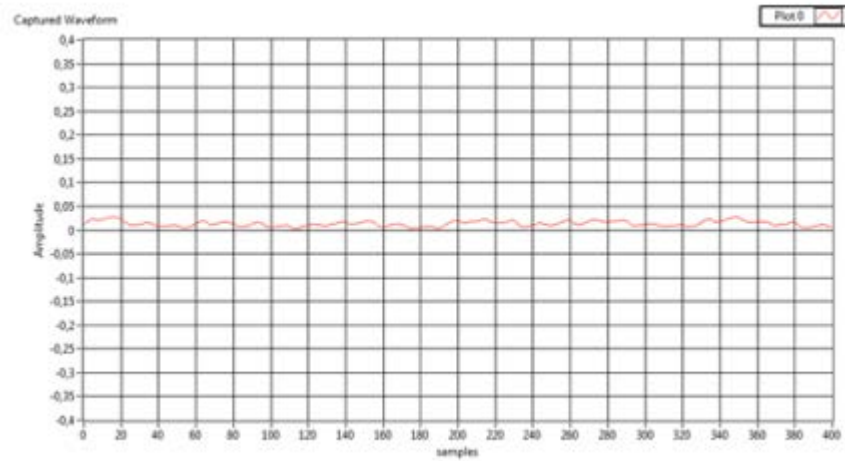
Οι κεραίες μας ξεκινούν να ακτινοβολούν από τα 500 MHz, πράγμα που σημαίνει ότι έχουμε μέτρια διείσδυση στο έδαφος αλλά ικανοποιητική ανάλυση σε μικρότερο βάθος.

*1<sup>η</sup> περίπτωση, σκέτο χώμα (Σχήμα 5.52).* Οι κεραίες τοποθετήθηκαν πάνω από καθαρό έδαφος χωρίς να υπάρχει κάποιο αντικείμενο ή εδαφική ανομοιογένεια (η μέτρηση έγινε σε ομοιογενές έδαφος, το οποίο είχε ελεχθεί οπτικά).



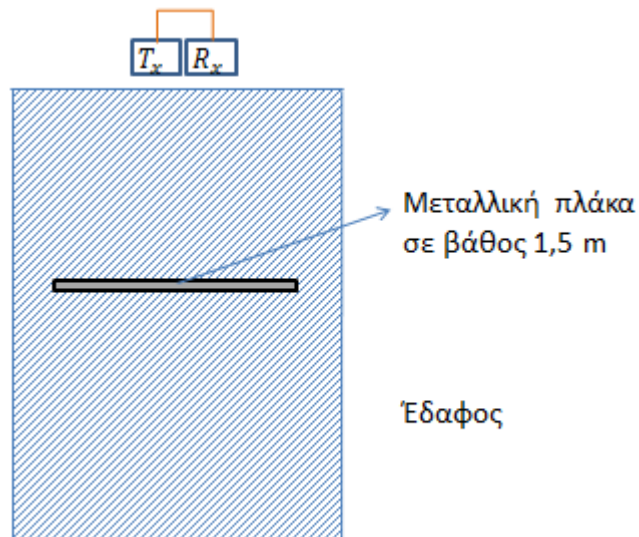
Σχήμα 5.52 Ομοιογενές έδαφος

Η μέτρηση στο Σχήμα 5.53 δείχνει ένα σήμα με σχεδόν ανύπαρκτες ανακλάσεις. Θεωρώντας ότι το έδαφος είναι ομοιογενές και χωρίς την ύπαρξη σκεδαστών (τουλάχιστον οπτικά) αναμένουμε να μην έχουμε σχεδόν καθόλου ανακλάσεις.



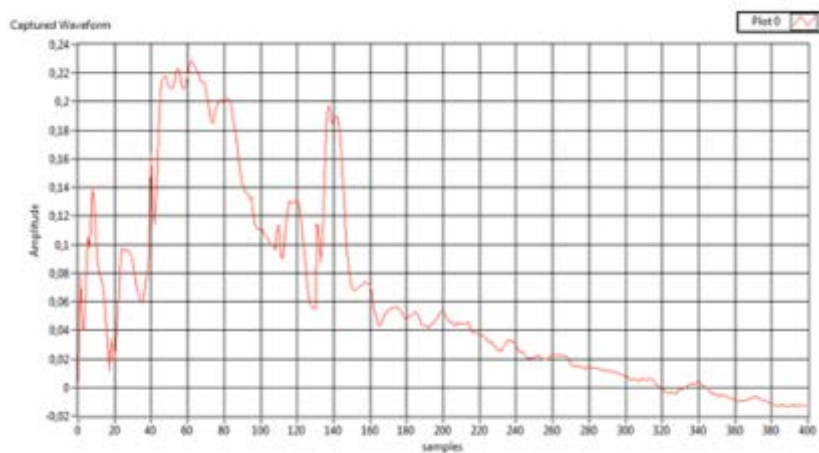
Σχήμα 5.53 Μέτρηση σε ομοιογενές έδαφος

2<sup>η</sup> περίπτωση, θαμμένη μεταλλική πλάκα σε βάθος 1,5 m (Σχήμα 5.54). Οι κεραίες τοποθετήθηκαν πάνω από μία μεταλλική λάμα διαστάσεων 30 cm x 60 cm και ύψους 1 cm σε βάθος 1,5 m.



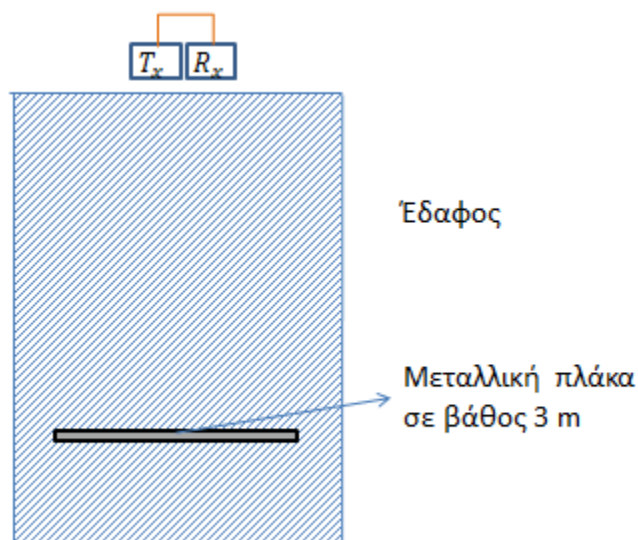
Σχήμα 5.54 Μεταλλική πλάκα (βάθος 1,5 m) σε ομοιογενές έδαφος

Η μέτρηση στο Σχήμα 5.55 δείχνει μία ανάκλαση από μεταλλική επιφάνεια σε βάθος 1,5 m, στο δείγμα 20 και σε χρόνο 20 ns πράγμα που συμπίπτει με το βάθος που τοποθετήσαμε τη μεταλλική πλάκα στο έδαφος.



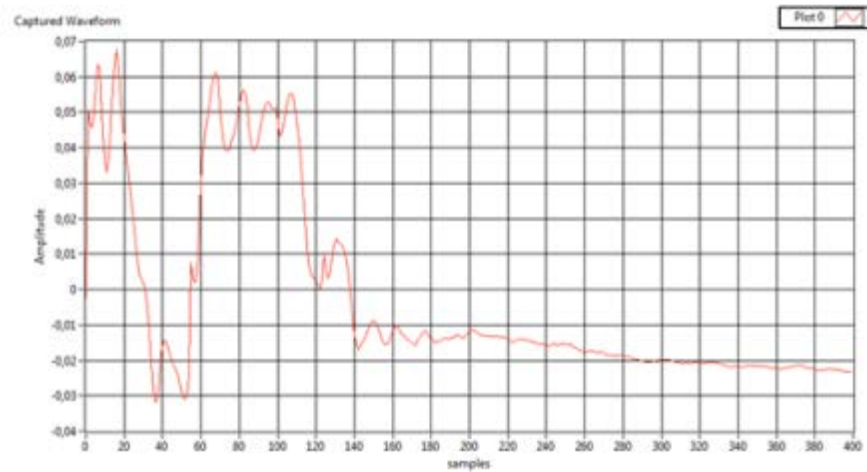
Σχήμα 5.55 Μέτρηση μεταλλικής πλάκας (βάθος 1,5 m) σε ομοιογενές έδαφος

3<sup>η</sup> περίπτωση, θαμμένη μεταλλική πλάκα σε βάθος 3 m (Σχήμα 5.56). Οι κεραίες τοποθετήθηκαν πάνω από μία μεταλλική λάμα διαστάσεων 30 cm x 60 cm και ύψους 1 cm σε βάθος 3 m.



Σχήμα 5.56 Μεταλλική πλάκα (βάθος 3 m) σε ομοιογενές έδαφος

Η μέτρηση στο Σχήμα 5.57 δείχνει μία ανάκλαση από μεταλλική επιφάνεια σε βάθος 3 m, στο δείγμα 40 και σε χρόνο 40 ns πράγμα που συμπίπτει με το βάθος που τοποθετήσαμε τη μεταλλική πλάκα στο έδαφος.

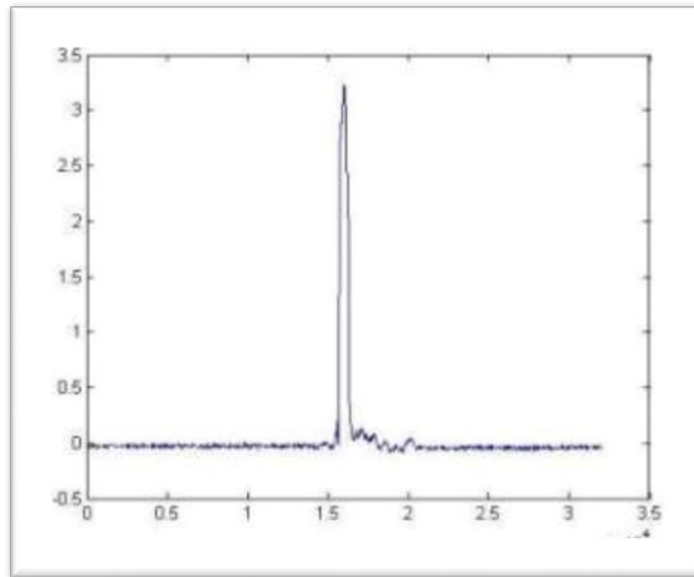


Σχήμα 5.57 Μέτρηση μεταλλικής πλάκας (βάθος 3 m) σε ομοιογενές έδαφος

### 5.2.6 Πρόταση επεξεργασίας σημάτων GPR

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα του ραντάρ βλέπουμε ότι εμφανίζεται μία ουρά στο σήμα. Με την προτεινόμενη επεξεργασία σήματος δημιουργούμε ένα πρόγραμμα που λειτουργεί ως φίλτρο το οποίο είναι προσαρμοσμένο διαφορετικά για κάθε σύστημα κεραιών εκπομπής και λήψης [92].

Θεωρούμε μία εργαστηριακή γεννήτρια σήματος που τροφοδοτεί με παλμούς το ραντάρ. Αυτό το σήμα το ονομάζουμε  $s_i(t)$  (Σχήμα 5.58). Για να μετρήσουμε και να καταγράψουμε αυτό το σήμα χρησιμοποιούμε δύο εξασθενητές σε σειρά, εξασθένησης 20 dB ο καθένας, με συνολική εξασθένηση 40 dB για να μπορέσουμε να εισάγουμε το σήμα με ασφάλεια σε έναν παλμογράφο.



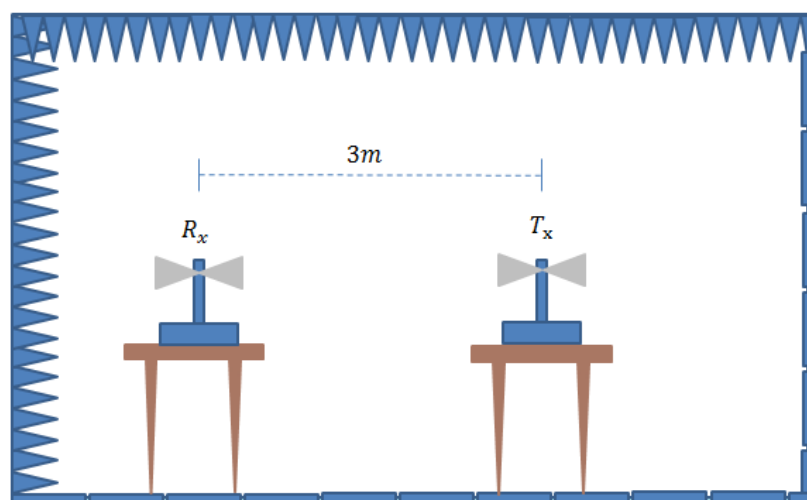
Σχήμα 5.58 Σήμα εργαστηριακής γεννήτριας σε παλμογράφο

Υπολογίζουμε το ταχύ μετασχηματισμό Fourier (Fast Fourier Transform - FFT) του σήματος

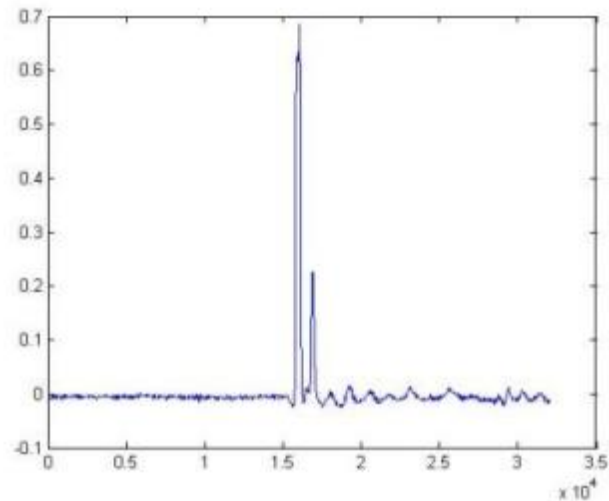
$$F(s_i(t)) = S_i(j\omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (5.2)$$

όπου  $N$  είναι ένας αριθμός της μορφής  $2^n$ . Ειδικότερα θα πάρουμε  $N = 2^8 = 256$ .

Μετράμε σε ανηχοϊκό θάλαμο το σήμα των δύο κεραιών, με την μεταξύ τους απόσταση να είναι  $L = 3 \text{ m}$ . Η διάταξη της μέτρησης φαίνεται στο Σχήμα 5.59.

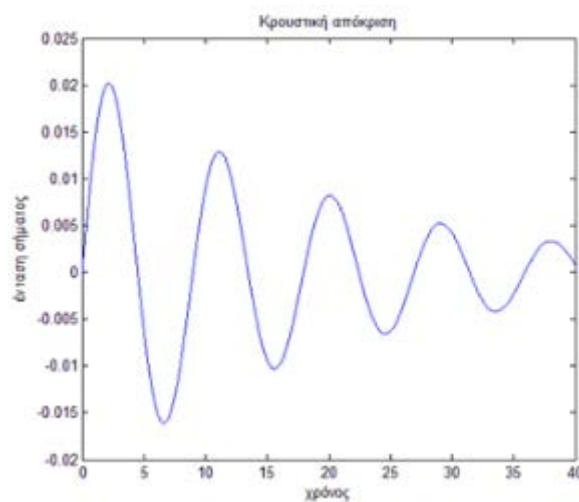


Σχήμα 5.59 Διάταξη καταγραφής στον ανηχοϊκό θάλαμο



Σχήμα 5.60 Καταγραφή στον ανηχοϊκό θάλαμο

Η κρουστική απόκριση του συστήματος των κεραιών φαίνεται στο Σχήμα 5.61.



Σχήμα 5.61 Κρουστική απόκριση συστήματος

Υπολογίζουμε τον FFT του  $s_0(t)$

$$F(s_0(t)) = S_0(j\omega), \quad (5.3)$$

Ο χρόνος που απαιτείται ώστε το σήμα να ταξιδέψει από τη μία κεραία στην άλλη είναι

$$\tau_0 = \frac{L}{C} = \frac{3}{3 * 10^8} = 10 \text{ ns}, \quad (5.4)$$

Θεωρούμε την κρουστική συνάρτηση

$$h_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_0(j\omega)}{S_i(j\omega)} e^{j\omega(\tau_0-t)} d\omega. \quad (5.5)$$

Έστω  $y(t)$  μία μέτρηση με ραντάρ του σκεδαζόμενου κύματος που αντιστοιχεί στο  $h_0(t)$ . Αν θεωρήσουμε τα  $N$  σημεία του FFT σαν σημειακούς σκεδαστές, τότε

$$y(t) = \sum_{i=1}^N a_i h_0(t - t_i), \quad (5.6)$$

όπου  $a_i$  είναι η ένταση σκέδασης και  $t_i$  είναι ο χρόνος που χρειάζεται το σήμα να ταξιδέψει από την κεραία εκπομπής μέχρι το σημειακό σκεδαστή που βρίσκεται σε βάθος  $z_i$  και να επιστρέψει στην κεραία λήψης. Για τις καταγραφές μας έχουμε θεωρήσει ότι  $\epsilon_r = 4$ . Ο χρόνος αυτός δίνεται από τον τύπο

$$t_i = \frac{2z_i}{c/\sqrt{\epsilon_r}}. \quad (5.7)$$

Εφαρμόζουμε το FFT στη σχέση (5.6) και παίρνουμε

$$F(y(t)) = Y(j\omega) = \sum_{i=1}^N a_i H_0(j\omega) e^{-j\omega t_i}, \quad (5.8)$$

όπου  $H_0$  είναι ο FFT της  $h_0$

$$H_0(j\omega) = F(h_0(t)). \quad (5.9)$$

Εάν θέσουμε

$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H_0(j\omega)}, \quad (5.10)$$

τότε από την (5.8) παίρνουμε

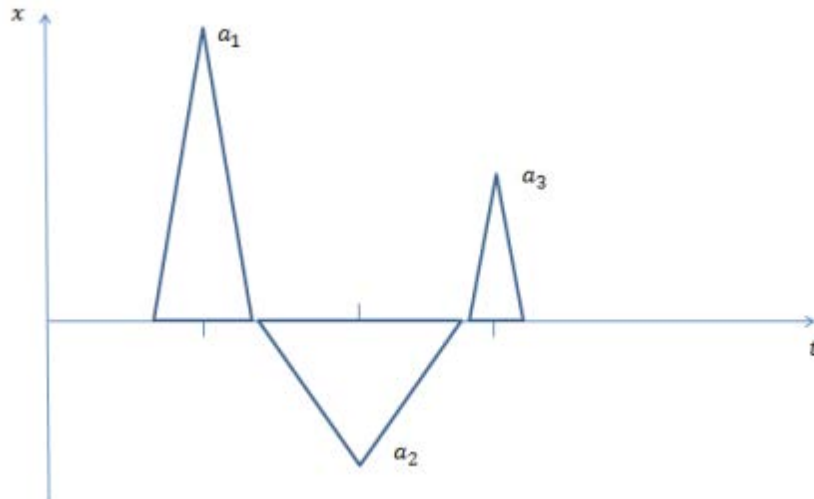


$$X(j\omega) = \sum_{i=1}^N a_i e^{-j\omega t_i}. \quad (5.11)$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο FFT έχουμε,

$$F^{-1}(X(j\omega)) = \sum_{i=1}^N a_i \delta(t - t_i) = x(t). \quad (5.12)$$

Από τη γραφική παράσταση των σκεδαζόμενων παλμών κατά μήκος του άξονα του χρόνου  $t$  παίρνουμε πληροφορίες για το βάθος και τη μορφή των σημειακών σκεδαστών και αναμένουμε να δούμε μία γραφική παράσταση της μορφής όπως στο Σχήμα 5.62.



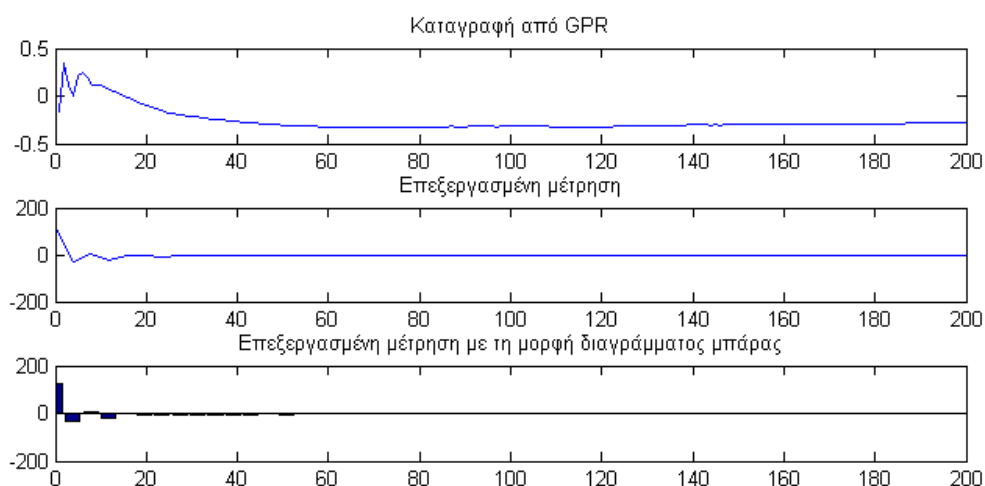
Σχήμα 5.62 Μορφή τελικής επεξεργασίας σήματος

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω προτεινόμενη μέθοδο επεξεργασίας μετρήσεων GPR θα παρουσιάσουμε επιλεγμένες καταγραφές επιστημονικού ενδιαφέροντος για το πως ήταν αρχικά οι καταγραφές, πως τροποποιήθηκαν καθώς και μία συνοπτική ανάλυση για τα συμπεράσματα που μπορούμε να εξάγουμε.

Στο Σχήμα 5.63 βλέπουμε στην πρώτη γραφική παράσταση τη μέτρηση που έκανε το GPR. Η μέτρηση έχει γίνει χρησιμοποιώντας δύο παράλληλες bowtie κεραίες με 23 cm απόσταση μεταξύ τους. Η κεραία είναι τοποθετημένη σε σχετικά ομοιόμορφο έδαφος το οποίο δεν περιέχει κάποια ανομοιογένεια.

Στην πρώτη καταγραφή παρατηρούμε ότι αρχικά υπάρχει μία ισχυρή ανάκλαση που οφείλεται στην απευθείας ανάκλαση των κεραιών και ανάκλαση από την επιφάνεια του υπεδάφους. Στη συνέχεια δεν παρατηρείται κάποια αισθητή ανάκλαση παρά μία φυσιολογική εξασθένηση του σήματος.

Στην επεξεργασμένη μέτρηση χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μέθοδο παρατηρούμε τα ίδια πράγματα με πιο εύκολο και ασφαλή τρόπο στην εξαγωγή των συμπερασμάτων. Η τελευταία γραφική είναι το ίδιο διάγραμμα με το προηγούμενο αλλά σε μορφή μπάρας, πράγμα που μας βοηθάει να δούμε πιο καθαρά τα αποτελέσματα.



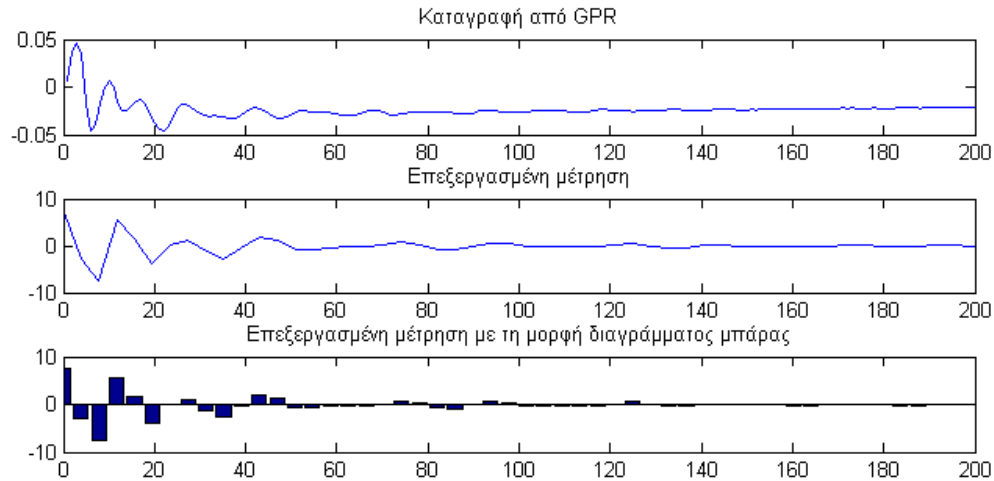
Σχήμα 5.63 Αρχική και επεξεργασμένη μέτρηση

Στο Σχήμα 5.64 βλέπουμε στην πρώτη γραφική παράσταση τη μέτρηση από το GPR. Η μέτρηση έχει γίνει χρησιμοποιώντας δύο παράλληλες bowtie κεραίες με 23 cm απόσταση μεταξύ τους. Η κεραία είναι τοποθετημένη σε σχετικά ομοιόμορφο υπέδαφος στο οποίο είναι θαμμένη μεταλλική λάμα σε βάθος 75 cm.

Στην αρχική καταγραφή παρατηρούμε ότι υπάρχει μία ασθενής ένδειξη στα 10 ns που αντιστοιχούν στο βάθος των 75 cm για μία ανωμαλία στο έδαφος η οποία ταιριάζει σε σκέδαση μεταλλικής επιφάνειας.

Στην επεξεργασμένη μέτρηση χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μέθοδο παρατηρούμε τα ίδια πράγματα με πιο εύκολο και ασφαλή τρόπο στην εξαγωγή των

συμπερασμάτων. Η τελευταία γραφική είναι το ίδιο διάγραμμα με το προηγούμενο αλλά σε μορφή μπάρας, πράγμα που μας βοηθάει να δούμε λίγο πιο καθαρά τα αποτελέσματα.

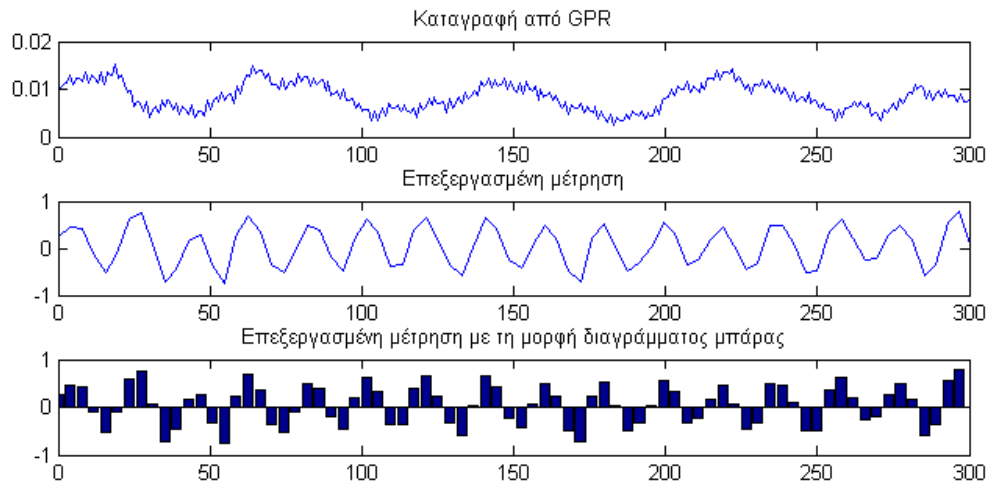


Σχήμα 5.64 Αρχική και επεξεργασμένη μέτρηση

Στο Σχήμα 5.65 βλέπουμε στην πρώτη γραφική παράσταση μία κακή μέτρηση που έκανε το GPR. Η μέτρηση έχει γίνει χρησιμοποιώντας δύο κάθετες κεραίες τύπου bowtie με ύψος 1 m η καθεμία. Η κεραία είναι τοποθετημένη σε σχετικά ομοιόμορφο υπέδαφος στο οποίο έχει θαφτεί μεταλλική λάμα σε βάθος 1,5 m.

Στην αρχική καταγραφή παρατηρούμε ένα περιοδικό σήμα το οποίο δεν διαθέτει πληροφορίες για το υπέδαφος. Δεν θα μπορούσαμε να κάνουμε ασφαλείς υποθέσεις για το τι υπάρχει στο υπέδαφος.

Στην επεξεργασμένη μέτρηση χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μέθοδο παρατηρούμε ξεκάθαρα ότι η μέτρηση δεν μπορεί να θεωρηθεί έγκυρη ή ότι δεν διαθέτει πληροφορία. Η μέθοδος μας έδειξε ότι λάβαμε μία μη αποδεκτή μέτρηση και επομένως πρέπει να επαναληφτεί διαφοροποιώντας τις ρυθμίσεις του GPR. Η τελευταία γραφική είναι το ίδιο διάγραμμα με το προηγούμενο αλλά σε μορφή μπάρας, πράγμα που μας βοηθάει να δούμε πιο καθαρά το προαναφερθέν αποτέλεσμα.



Σχήμα 5.65 Αρχική και επεξεργασμένη μέτρηση

# 6 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΚΕΡΑΙΕΣ

Οι ευρυζωνικές λογαριθμικές περιοδικές κεραιές, οι οποίες αρχίζουν να λειτουργούν από τη συχνότητα των 30 MHz και είναι κινητές (π.χ. εγκατεστημένες στην οροφή οχήματος) χρησιμοποιούνται σε αρκετές εφαρμογές. Σε αυτές τις χαμηλές συχνότητες λειτουργίας, το μέγεθος του μεγαλύτερου διπόλου της κεραιάς φτάνει τα 5 m και οι ράβδοι κατά μήκος των οποίων εκτείνονται τα μονόπολα ξεπερνούν τα 7 m.

Μία κεραιά που να ικανοποιεί τα παραπάνω χαρακτηριστικά συνήθως κατασκευάζεται από μεταλλικές ράβδους, όπου συναρμολογούνται χειροκίνητα. Η διαδικασία της συναρμολόγησης, σε βέλτιστες συνθήκες (διαθέτουμε όλα τα στοιχεία της κεραιάς, βίδες, κλπ.) θα διαρκέσει πάνω από 25 - 35 λεπτά τα οποία είναι κρίσιμα ειδικά όταν

πρόκειται για στρατιωτικές εφαρμογές. Για να αποφύγουμε τη χειροκίνητη συναρμολόγηση καθώς και να διατηρήσουμε τα ηλεκτρομαγνητικά χαρακτηριστικά μίας κλασικής λογαριθμικής περιοδικής διπολικής κεραίας, σχεδιάσαμε, κατασκευάσαμε και καταγράψαμε μία νέα κεραία που αποτελείται από συστοιχία μονοπόλων.

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν διάφορες τεχνικές για να μειώσουμε το μέγεθος μίας λογαριθμικής περιοδικής διπολικής κεραίας, ενδεικτικά θα αναφέρουμε τα παρακάτω.

Μία χαμηλού προφίλ μονοπολική κεραία παρουσιάζεται στην εργασία [93] όπου τα μονόπολα έχουν το ίδιο ύψος, αλλά διαφορετικού μεγέθους καπέλο στην οροφή για να επιτευχθεί η κατάλληλη συχνότητα συντονισμού.

Στις εργασίες [94] και [95] παρουσιάζεται μία μέθοδος για να μειωθεί το μέγεθος μίας διπολικής λογαριθμικής κεραίας και στην εργασία [96] μία αντίστοιχη μέθοδος για μονοπολική λογαριθμική κεραία.

Μία νέα μικροσκοπική ευρυζωνική λογαριθμική περιοδική κεραία προτείνεται και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, στην εργασία [97]. Η προτεινόμενη λύση περιλαμβάνει ένα βραχίονα μορφής T, που αποτελείται από το βασικό βραχίονα, έναν κάθετο βραχίονα και έναν βοηθητικό βραχίονα.

Στην εργασία [98] τοποθετείται φορτίο της μορφής T στην κορυφή των διπόλων για να επιτευχθεί μείωση του μήκους των στοιχείων στο ήμισυ. Στην εργασία [99] μία τυπωμένη λογαριθμική περιοδική Koch συστοιχία διπόλων παρουσιάζεται όπου τα Koch prefractal στοιχεία μειώνουν το μέγεθος της ευρυζωνικής κεραίας και παρουσιάζεται για πρώτη φορά.

Άλλες μέθοδοι μείωσης του μεγέθους κεραίας περιγράφονται στις εργασίες [100], [101] και [102] όπου μία λογαριθμική περιοδική κεραία με στοιχεία σε σχήμα μενάδρου παρουσιάζεται, κατασκευάζεται και καταγράφεται η απόδοσή της. Στην εργασία [103] παρουσιάζεται θεωρητικά και πειραματικά μία λογαριθμική περιοδική κεραία με μονόπολα σε σχήμα μενάδρου στις ράβδους που καταλήγουν στην τροφοδοσία. Περισσότερες λεπτομέρειες για την κατασκευή κεραίας μπορούμε να βρούμε πληροφορίες στο βιβλίο [104].

Η λογαριθμική κεραία προέκυψε από μεταβολές που έγιναν στη δομή της κωνικής ελικοειδούς κεραίας και άρχισε να χρησιμοποιείται το 1950. Αποτελείται από στοιχεία που αντιστοιχούν σε διάφορες συχνότητες καθιστώντας την κεραία αυτή ουσιαστικά ανεξάρτητη της συχνότητας του προσπίπτοντος κύματος.

Η ονομασία αυτών των κεραιών προκύπτει από τη χαρακτηριστική ιδιότητα που συνδέει τις συχνότητες σε δύο στοιχεία,

$$\ln(f \tau^{n-1}) - \ln(f) = (n - 1) \ln(\tau), \quad (6.1)$$

όπου  $f$  είναι η συχνότητα λειτουργίας και  $\tau$  ο λόγος των διαστάσεων των στοιχείων. Στην περίπτωση αυτή οι ιδιότητες μίας κεραίας λογαριθμικής περιοδικής (Log-Periodic Array - LPA) παραμένουν ίδιες όταν οι διαστάσεις της πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό  $\tau$ . Για τις συχνότητες  $f_{max}$  και  $f_{min}$  ισχύει

$$\frac{f_{max}}{f_{min}} = \frac{1}{\tau^{n-1}}. \quad (6.2)$$

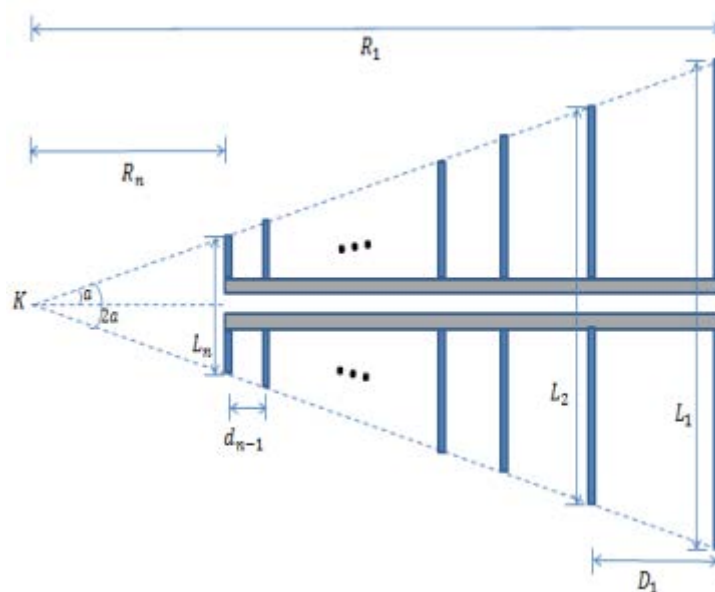
Για  $\tau < 1$  έχουμε  $\ln \tau < 0$  και για  $\tau \rightarrow 0$  είναι  $|\ln(\tau)| \rightarrow \infty$ , επομένως έχουμε μεγάλη αύξηση της περιόδου επανάληψης των συχνοτήτων.

Παρόμοιο αποτέλεσμα μπορεί να επιτευχθεί αν αυξηθεί σημαντικά ο αριθμός των στοιχείων της κεραίας. Στην περίπτωση αυτή όμως αυξάνει το βάρος και οι διαστάσεις της με αποτέλεσμα να είναι δύσκολη η χρήση της. Σημειώνουμε ότι κάθε στοιχείο της κεραίας επηρεάζει με την ακτινοβολία του, τα ρεύματα που διαρρέουν τα άλλα στοιχεία.

Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν η διπολική και η μονοπολική περιοδική κεραία που μελετάμε παρακάτω.

### 6.1 Λογαριθμική περιοδική διπολική κεραία (LPDA)

Η λογαριθμική περιοδική διπολική κεραία (Log-Periodic Dipole Antenna - LPDA) αποτελείται από δύο ράβδους πάνω στις οποίες είναι τοποθετημένα παράλληλα δίπολα στοιχεία διαφορετικού μήκους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.1.



Σχήμα 6.1 Λογαριθμική περιοδική κεραία

Αν  $L_1, L_2, \dots, L_n$  είναι τα μήκη των διπόλων με  $L_1 > L_2 > \dots > L_n$  και  $R_1, R_2, \dots, R_n$  με  $R_1 > R_2 > \dots > R_n$  οι αποστάσεις της κορυφής  $K$  από τα δίπολα τότε ισχύουν:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{L_3}{L_2} = \dots = \frac{L_n}{L_{n-1}} = \tau, \quad (6.3)$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} = \dots = \frac{R_n}{R_{n-1}} = \tau, \quad (6.4)$$

όπου ο λόγος  $\tau$  είναι αριθμός μικρότερος του 1.

Από τους τύπους αυτούς προκύπτει

$$L_n = \tau^{n-1} L_1, \quad (6.5)$$

$$R_n = \tau^{n-1} R_1. \quad (6.6)$$

Επομένως τα μήκη των διπόλων και οι αποστάσεις της κορυφής από αυτά είναι όροι φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με λόγο  $\tau < 1$ .

Αν ονομάσουμε  $d_n$  την απόσταση μεταξύ των διπόλων  $n$  και  $n + 1$  τάξης, τότε

$$d_n = R_n - R_{n+1} \quad (6.7)$$



και λόγω των σχέσεων (6.4) και (6.7) έχουμε

$$d_n = R_n(1 - \tau). \quad (6.8)$$

Η πυκνότητα των διπόλων περιγράφεται από τη σταθερά χώρου  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{d_n}{2L_n}. \quad (6.9)$$

Μικρή τιμή του  $\sigma$ , σημαίνει πυκνά δίπολα. Άλλη μία γεωμετρική παράμετρος που χαρακτηρίζει την κεραία LPDA είναι η γωνία  $\alpha$ , η οποία είναι το ήμισυ της γωνίας που ορίζουν οι ευθείες που διέρχονται από τα εξωτερικά άκρα των διπόλων και όπως προκύπτει από το αντίστοιχο τρίγωνο ισχύει:

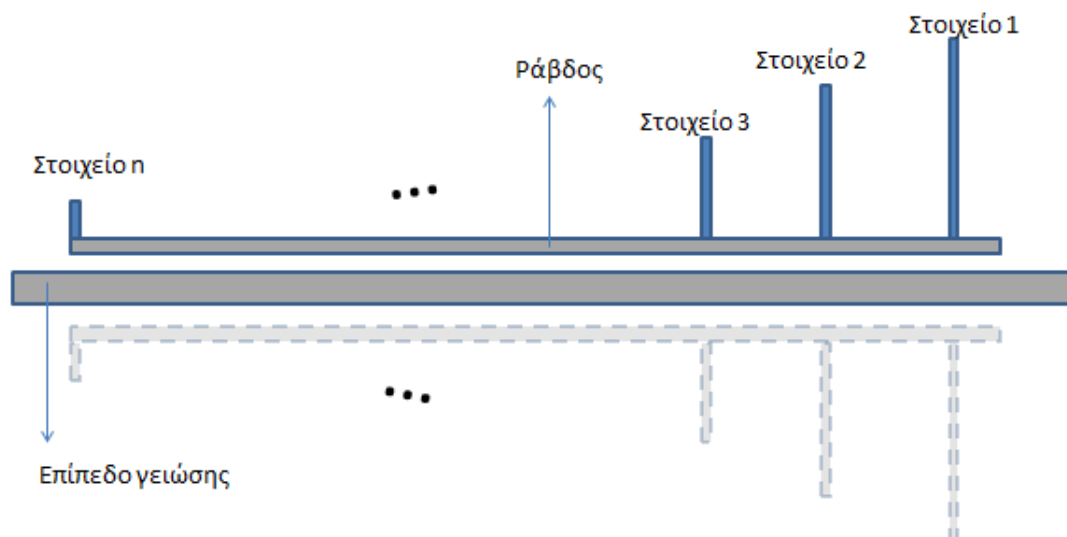
$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{L_n}{2R_n} \right). \quad (6.10)$$

Από τις σχέσεις (6.8) - (6.10) προκύπτει ότι οι τρεις παράμετροι  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $\sigma$  συνδέονται με τον τύπο

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1 - \tau}{4\sigma}. \quad (6.11)$$

## 6.2 Λογαριθμική περιοδική μονοπολική κεραία (LPMA)

Αν σε μία κεραία LPDA τα δίπολα αντικατασταθούν με μονόπολα τότε η διάταξη που προκύπτει είναι μία λογαριθμική περιοδική μονοπολική κεραία (Log-Periodic Monopole Array - LPMA). Αν τα μονόπολα είναι πάνω σε μία αγώγιμη επιφάνεια, τότε όπως δικαιολογείται από τη θεωρία των ειδώλων αυτά ισοδυναμούν με δίπολα διπλασίου μεγέθους. Στην περίπτωση αυτή η LPMA θα λειτουργεί όπως η LPDA. Οι παράμετροι  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$  της μονοπολικής ορίζονται όπως στη διπολική.

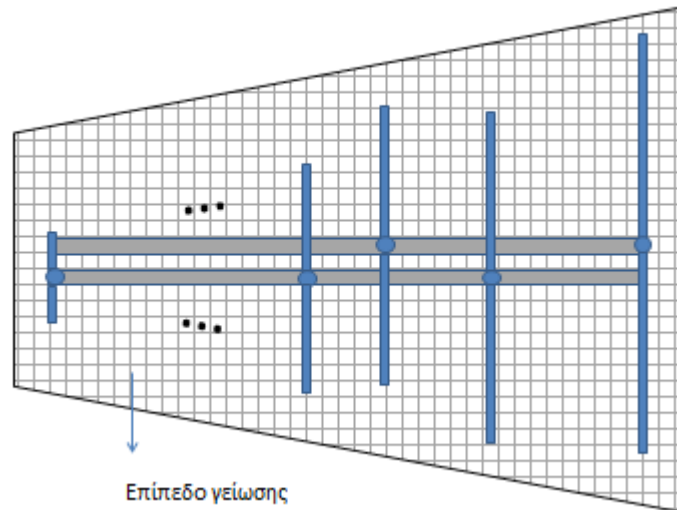


Σχήμα 6.2 Είδωλο λογαριθμικής μονοπολικής κεραίας

Επομένως με την κεραία LPMA διατηρούμε τα πλεονεκτήματα της LPDA και επιπλέον πετυχαίνουμε μικρότερες διαστάσεις, λιγότερο βάρος και χαμηλότερο κόστος κατασκευής.

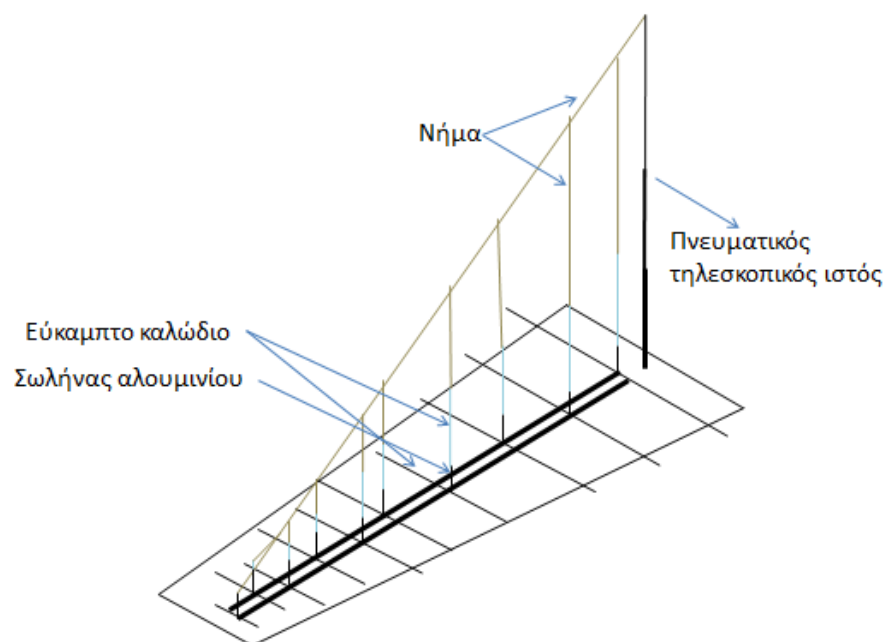
### 6.2.1 Σχεδιασμός LPMA

Οι βασικές αρχές στις οποίες στοχεύσαμε για να κατασκευάσουμε μία LPMA ήταν να είναι φορητή, έτοιμη για χρήση σε λιγότερο από 5' λεπτά και να μπορεί να τοποθετηθεί με έναν έξυπνο τρόπο στην οροφή ενός οχήματος για να μπορεί να μεταφερθεί γρήγορα και άμεσα σε διάφορα μέρη. Αυτό μας οδήγησε να σχεδιάσουμε μία λογαριθμική μονοπολική κεραία (Σχήμα 6.3) με βασικά πλεονεκτήματα την ελαφρύτερη κατασκευή καθώς και τις μικρότερες διαστάσεις σε σχέση με την κλασική. Στις προσομοιώσεις δοκιμάσαμε πολλές διαφορετικές γεωμετρίες μέχρι να καταλήξουμε σε αυτή που ικανοποιεί την επιθυμητή απόδοση στη ζητούμενη ζώνη ακτινοβολίας.



Σχήμα 6.3 Κάτοψη κεραίας

Τα βασικά βήματα κατασκευής της λογαριθμικής κεραίας με μονόπολα [105] (Σχήμα 6.4) είναι τα παρακάτω. Στην οροφή του οχήματος πακτώνουμε ένα επίπεδο γείωσης (ground plane) σχήματος τραπέζιου με διαστάσεις βάσεων 4 m και 0,8 m αντίστοιχα και με ύψος 3,5 m, το οποίο είναι ένα μεταλλικό πλέγμα με κάναβο 20 mm × 40 mm. Δύο ράβδοι (boom) από αλουμίνιο όπου βιδώνονται τα μονόπολα έχουν μήκος 3,5 m και η διατομή τους είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις 20 mm × 40 mm.



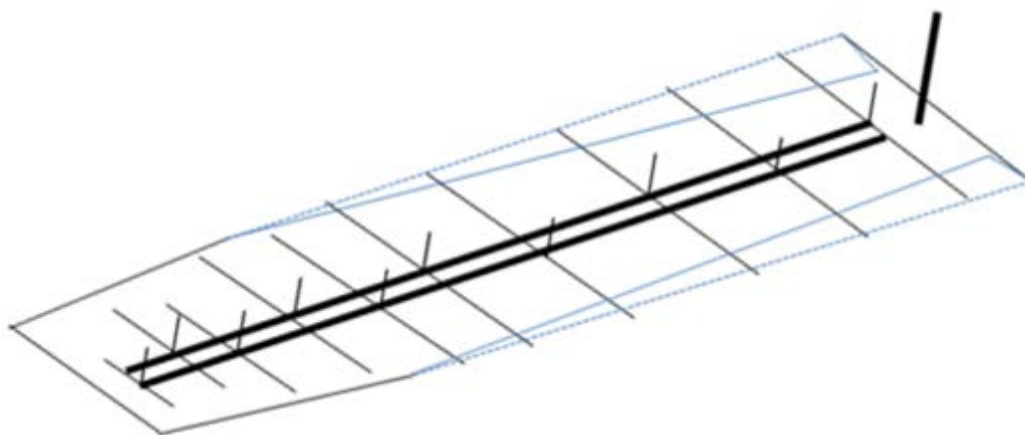
Σχήμα 6.4 Προοπτική απεικόνιση της κεραίας σε πλήρη ανάπτυξη

Οι δύο ράβδοι απέχουν 6 cm από το επίπεδο γείωσης και είναι πακτωμένες με μονωτή (ερταλόν) και η μεταξύ τους απόσταση είναι 20 mm. Όλα τα μονόπολα αποτελούνται από ένα σταθερό μέρος (σωλήνα αλουμινίου) μήκους 150 mm και η μεταλλική επιφάνεια που υπολείπεται, υλοποιείται με εύκαμπτο μεταλλικό καλώδιο.

Στην πίσω πλευρά της κατασκευής, όπου εντοπίζεται και το μεγαλύτερο μονόπολο, υπάρχει ένας πνευματικός τηλεσκοπικός ιστός σταθερού μεγέθους 0,5 m, του οποίου το μήκος σε πλήρη ανάπτυξη φτάνει τα 15 m. Ένα σχοινί εκτείνεται από την κορυφή του ιστού στο μπροστινό μέρος της κατασκευής όπου βρίσκεται το μικρότερο στοιχείο και δημιουργεί ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Από την υποτεινούσα του τριγώνου κρέμονται σχοινιά, κάθετα ως προς την οροφή του οχήματος, τόσα όσα και τα στοιχεία της κεραίας μας. Μέρος του σχοινιού αποτελείται από μεταλλικό καλώδιο το οποίο συνδέεται με τους μεταλλικούς σωλήνες και συμπληρώνει το υπόλοιπο φυσικό μήκος του μονόπολου. Εκατέρωθεν κάθε μονόπολου εκτείνεται καλώδιο ίσου μήκους με το αντίστοιχο μονόπολο.

Επίσης ένα μικρό μέρος του τραπέζιου (επίπεδου γείωσης) είναι αναδιπλωμένο ώστε να μην προεξέχει εκτός του οχήματος όταν δεν χρησιμοποιείται η κεραία (Σχήμα 6.5).

Αυτή είναι μία έξυπνη ιδέα για να μειώσουμε το πραγματικό μήκος της λογαριθμικής περιοδικής κεραίας με μονόπολα όταν δεν είναι σε χρήση, δίνοντας τη δυνατότητα να μετακινείται το όχημα σε αστικό περιβάλλον (π.χ. κάτω από γέφυρες) καθώς και σε διαδρομές εκτός δρόμου (π.χ. χωματόδρομος με πυκνή βλάστηση εκατέρωθεν της διαδρομής).



Σχήμα 6.5 Προοπτική κεραίας διπλωμένη

Η λογαριθμική περιοδική μονοπολική κεραία με τα οριζόντια στοιχεία σε κάθε μονόπολο, προσομοιώθηκε, κατασκευάστηκε και μετρήθηκε στο πεδίο.

### 6.2.2 Προσομοιώσεις λογαριθμικής κεραίας

Στην προσπάθειά μας να δημιουργήσουμε μία LPMA που να ικανοποιεί τους στόχους που θέσαμε στην αρχή της ενότητας δοκιμάστηκαν αρκετές γεωμετρίες [106].

Οι προσομοιώσεις σε όλα τα παραπάνω μοντέλα πραγματοποιήθηκαν στο περιβάλλον CST studio.

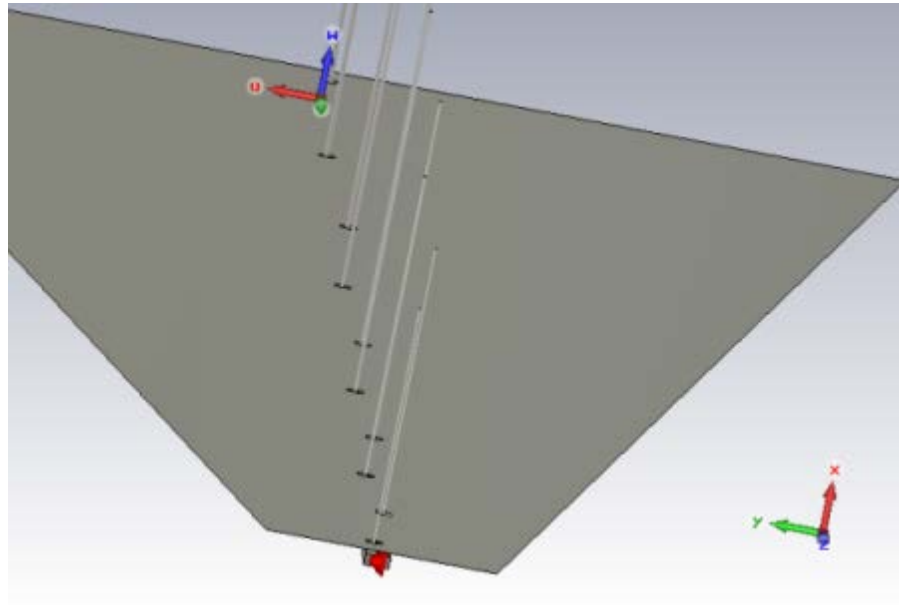
Η κεραία δοκιμάστηκε σε εύρος από 30 MHz έως 600 MHz. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η βελτίωση των χαρακτηριστικών στις χαμηλές συχνότητες, δηλαδή κάτω των 100 MHz. Παραθέτουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για όλα τα σενάρια που αναφέραμε.

Οι συχνότητες όπου δοκιμάστηκαν τα σενάρια μας, είναι στο διάστημα από 1 έως 100 MHz.

Ο δείκτης αξιολόγησης που χρησιμοποιήθηκε για να αξιολογήσουμε κάθε μοντέλο είναι η παράμετρος  $S_{11}$ . Η γραφική παράσταση του δείκτη πρέπει να είναι στο μεγαλύτερο διάστημα συνεχώς κάτω από -5 dB καθώς και να υπάρχουν διάστημα που βρίσκεται κάτω από τα -10 dB.

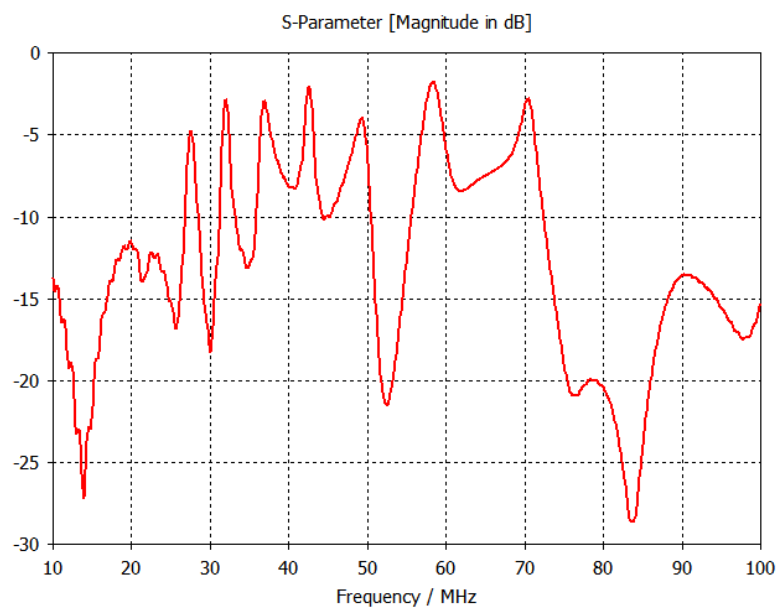
Παρουσιάζουμε τις γεωμετρίες που σχεδιάστηκαν στην προσομοίωση και δοκιμάστηκαν.

1. LPMA με ράβδους τοποθετημένες κάτω από το επίπεδο γείωσης (Σχήμα 6.6). Στο ground plane υπάρχουν μικρές οπές για τη διέλευση των στοιχείων χωρίς να παρουσιάζεται βραχυκύκλωμα. Η τροφοδοσία γίνεται κανονικά στο μπροστινό σημείο της κεραίας (που βρίσκονται τα μικρότερα στοιχεία της κεραίας) μεταξύ των δύο ράβδων.



Σχήμα 6.6 LPMA με ράβδους κάτω από το επίπεδο γείωσης

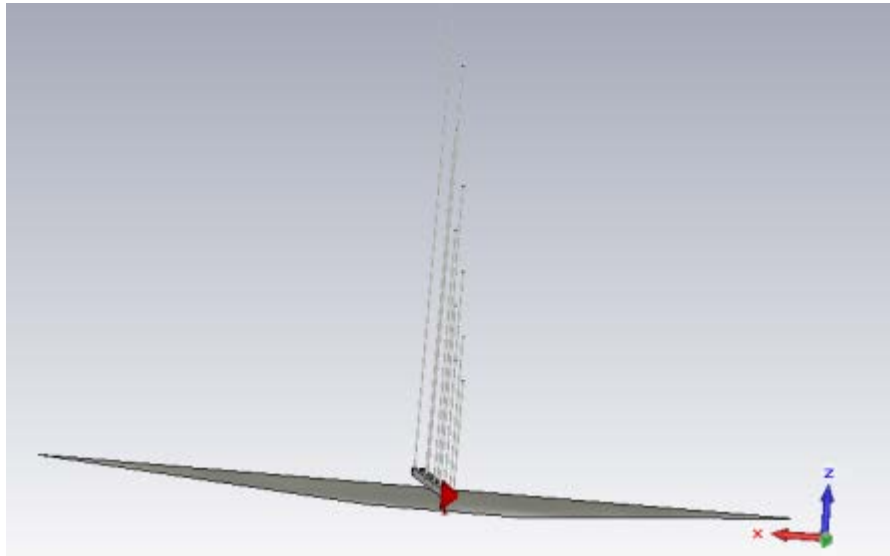
Τα αποτελέσματα της παραμέτρου  $S_{11}$  αυτής της γεωμετρίας, μπορούν να χαρακτηριστούν ικανοποιητικά. Δηλαδή υπό συνθήκες αν δεν βρεθεί καλύτερη γεωμετρία θα μπορούσε με μικρές τροποποιήσεις να υιοθετηθεί.



Σχήμα 6.7 Παράμετρος  $S_{11}$  - LPMA με ράβδους κάτω από το επίπεδο γείωσης

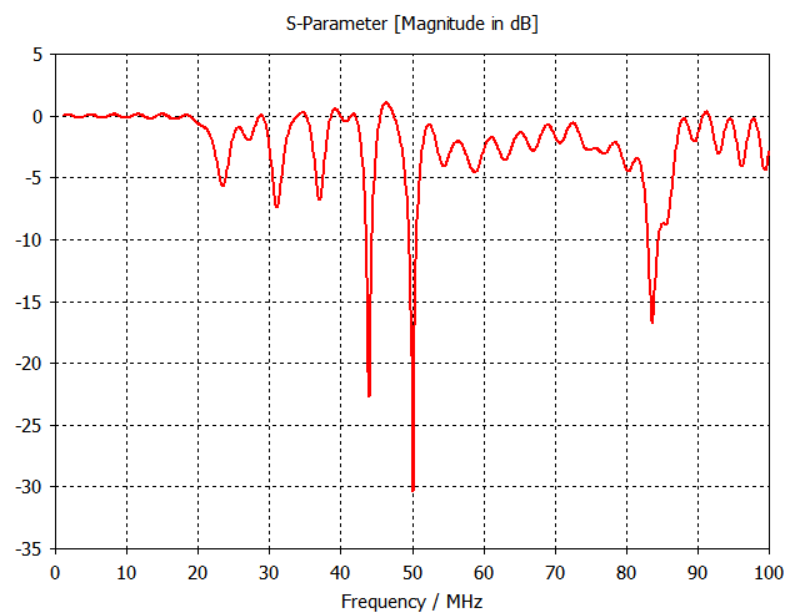
2. LPMA με ράβδους τοποθετημένες πάνω από το επίπεδο γείωσης (Σχήμα 6.8). Η τροφοδοσία γίνεται κανονικά στο μπροστινό σημείο της κεραίας μεταξύ των δύο

ράβδων.



Σχήμα 6.8 LPMA με ράβδους πάνω από το επίπεδο γείωσης

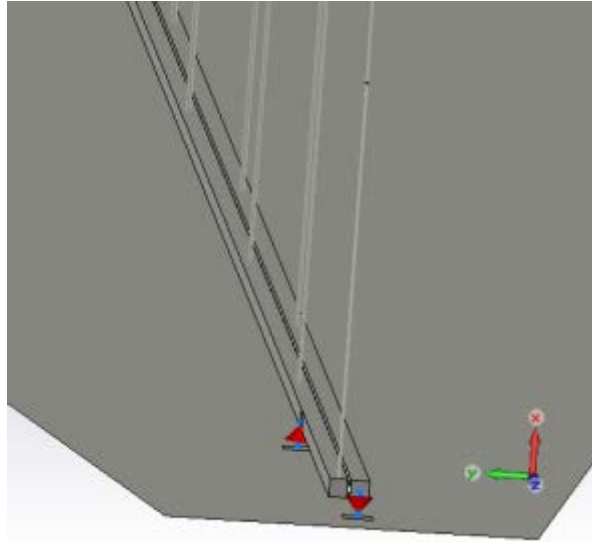
Τα αποτελέσματα της παραμέτρου  $S_{11}$  αυτής της γεωμετρίας, μπορούν να χαρακτηριστούν μη αποδεκτά. Σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να υλοποιηθεί η παρούσα γεωμετρία.



Σχήμα 6.9 Παράμετρος  $S_{11}$  - LPMA με ράβδους πάνω από το επίπεδο γείωσης

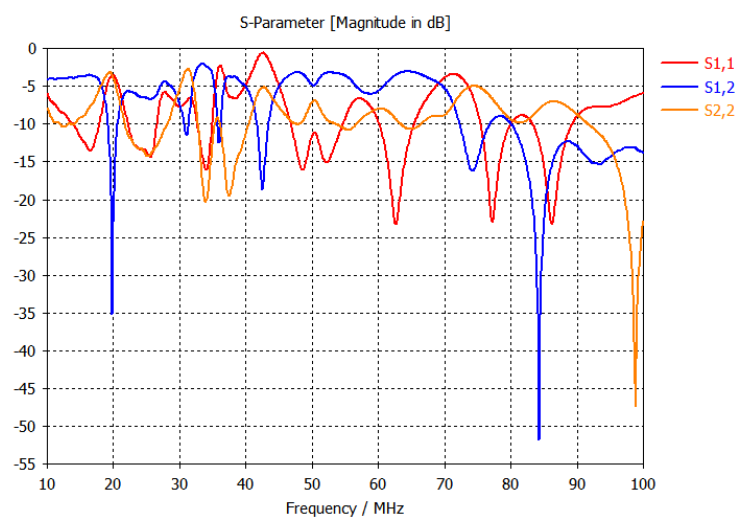
3. LPMA με δύο πηγές (Σχήμα 6.10). Η πρώτη πηγή τοποθετείται μεταξύ της μίας

ράβδου και του επιπέδου γείωσης απέναντι από το μικρότερο στοιχείο, στη θέση που απουσιάζει το στοιχείο. Η δεύτερη πηγή τοποθετείται μεταξύ ράβδου και επιπέδου γείωσης στο επόμενο στοιχείο προς τα πίσω, στην πλευρά που απουσιάζει αυτό. Οι δύο πηγές έχουν αντίθετη πολικότητα.



Σχήμα 6.10 LPMA με δύο πηγές

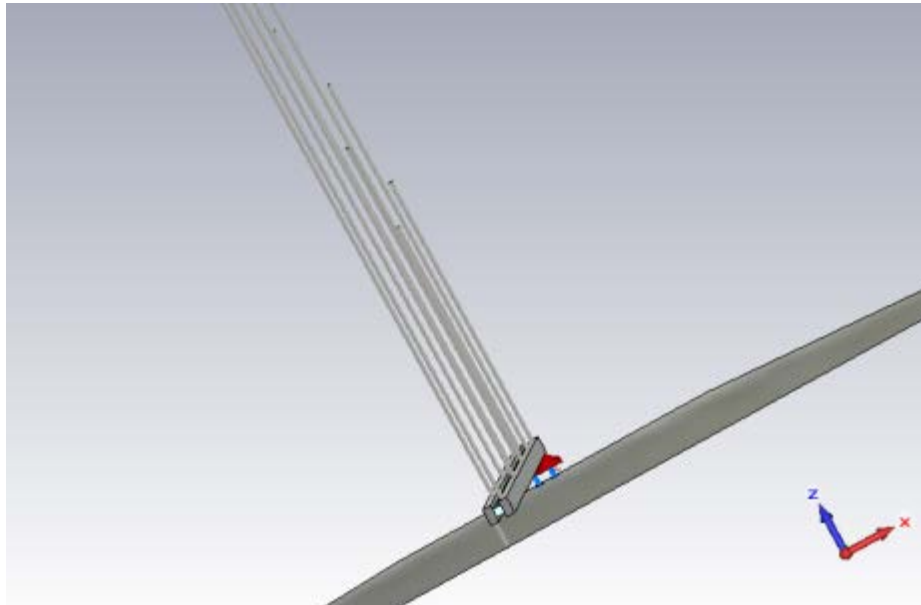
Τα αποτελέσματα της παραμέτρου  $S_{11}$  αυτής της γεωμετρίας, μπορούν να χαρακτηριστούν μη αποδεκτά. Σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να υλοποιηθεί η παρούσα γεωμετρία.



Σχήμα 6.11 Παράμετροι  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{22}$  - LPMA με δύο πηγές

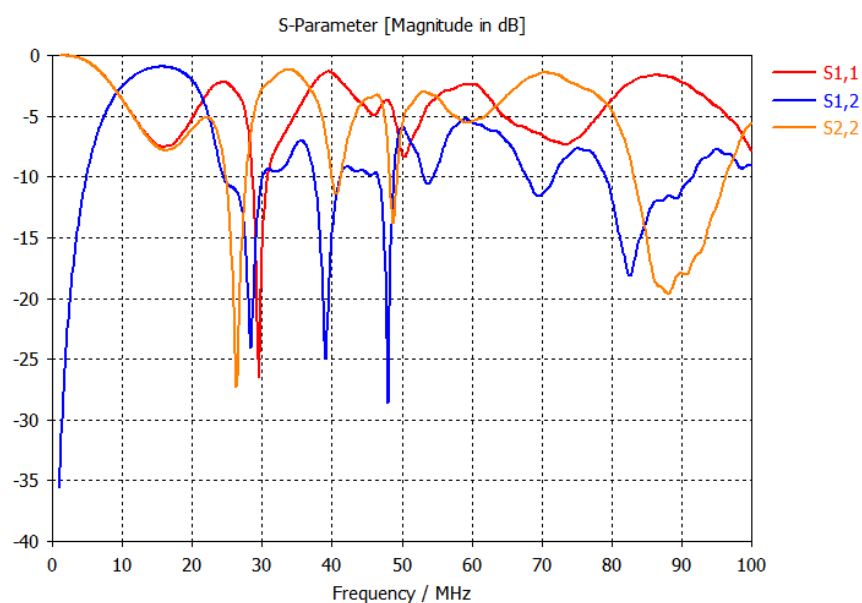


4. LPMA με γείωση στο πρώτο στοιχείο (που έχει και το μεγαλύτερο μήκος) και δύο πηγές στο τελευταίο και μικρότερο στοιχείο (Σχήμα 6.12). Οι πηγές τοποθετούνται μία σε κάθε ράβδο και έχουν αντίθετη πολικότητα.



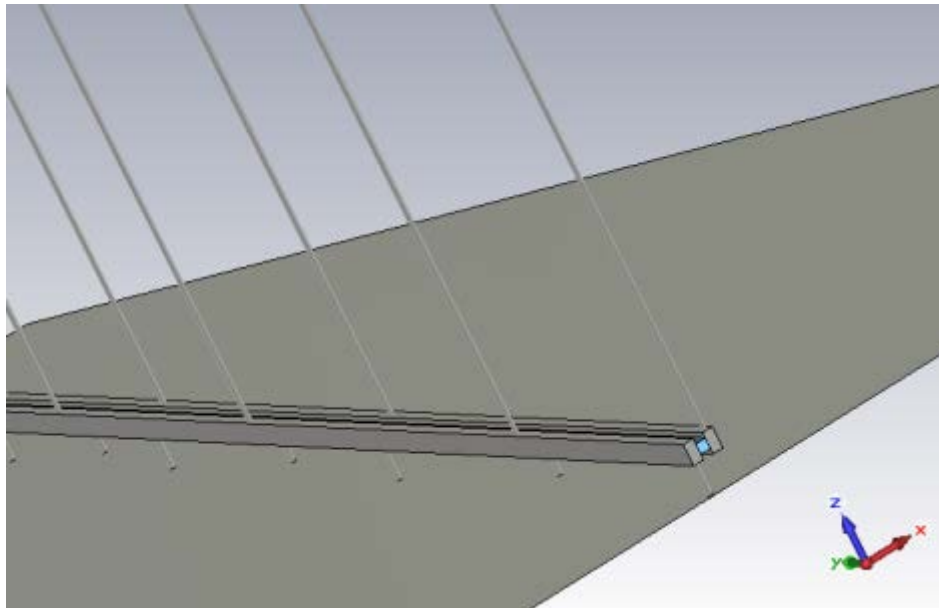
Σχήμα 6.12 LPMA με δύο πηγές και μία γείωση

Τα αποτελέσματα της παραμέτρου  $S_{11}$  αυτής της γεωμετρίας, μπορούν να χαρακτηριστούν μη αποδεκτά. Σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να υλοποιηθεί η παρούσα γεωμετρία.



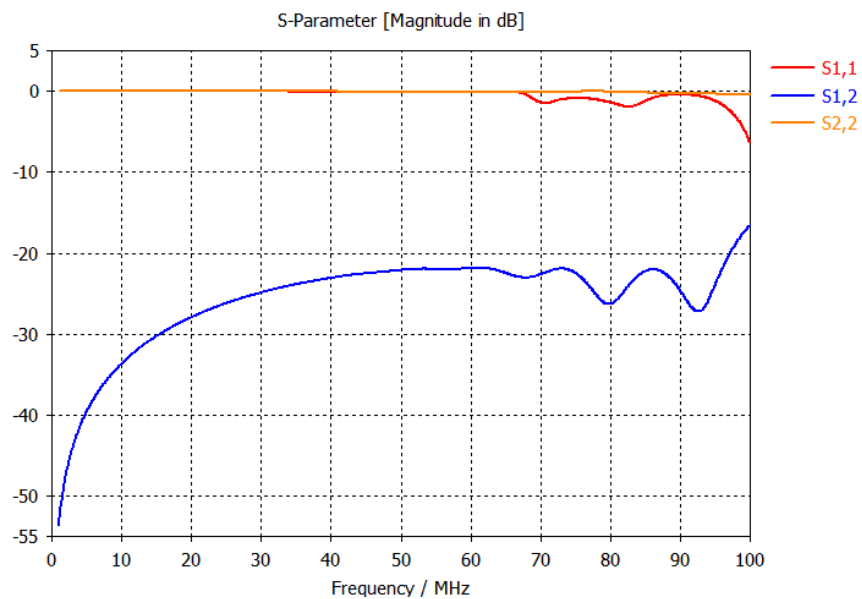
Σχήμα 6.13 Παράμετροι  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{22}$  - LPMA με δύο πηγές και μία γείωση

5. LPMA με γειώσεις σε όλα τα στοιχεία που απουσιάζουν στη μονοπολική κεραία (Σχήμα 6.14).



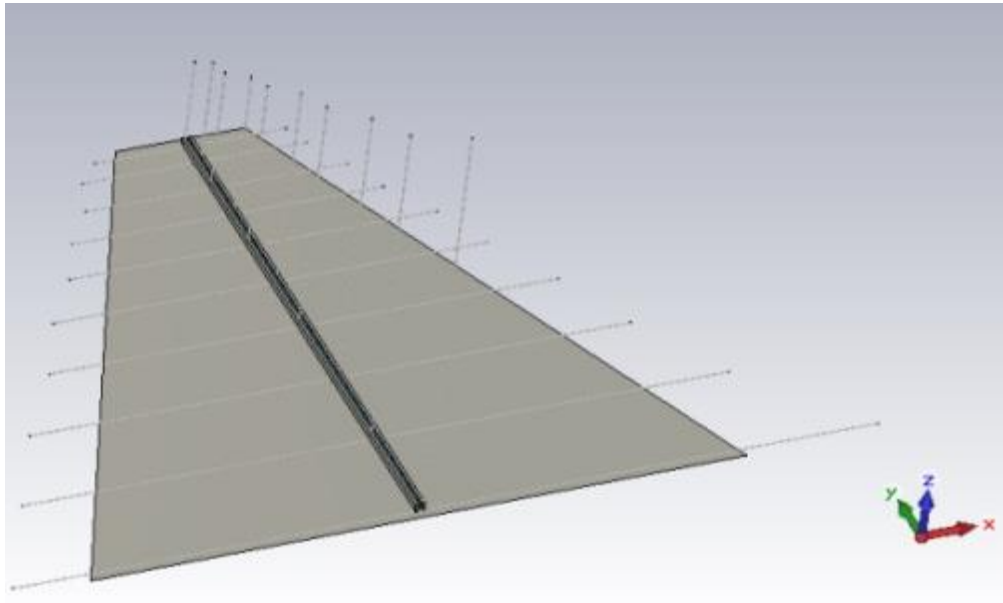
Σχήμα 6.14 LPMA με πολλές γειώσεις

Τα αποτελέσματα της παραμέτρου  $S_{11}$  αυτής της γεωμετρίας, μπορούν να χαρακτηριστούν μη αποδεκτά και σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να υλοποιηθεί η παρούσα γεωμετρία.



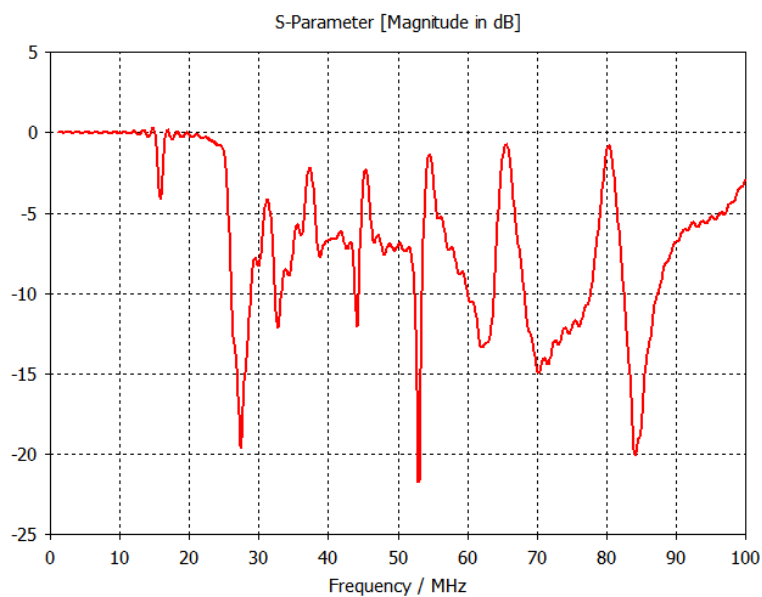
Σχήμα 6.15 Παράμετροι  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{22}$  - LPMA με πολλές γειώσεις

6. LPMA με οριζόντια στοιχεία εκατέρωθεν του κάθε μονόπολου (Σχήμα 6.16). Τα οριζόντια στοιχεία έχουν μήκος διπλάσιο του εκάστοτε μονόπολου. Το μέσον των οριζόντιων στοιχείων είναι το τρέχον μονόπολο.



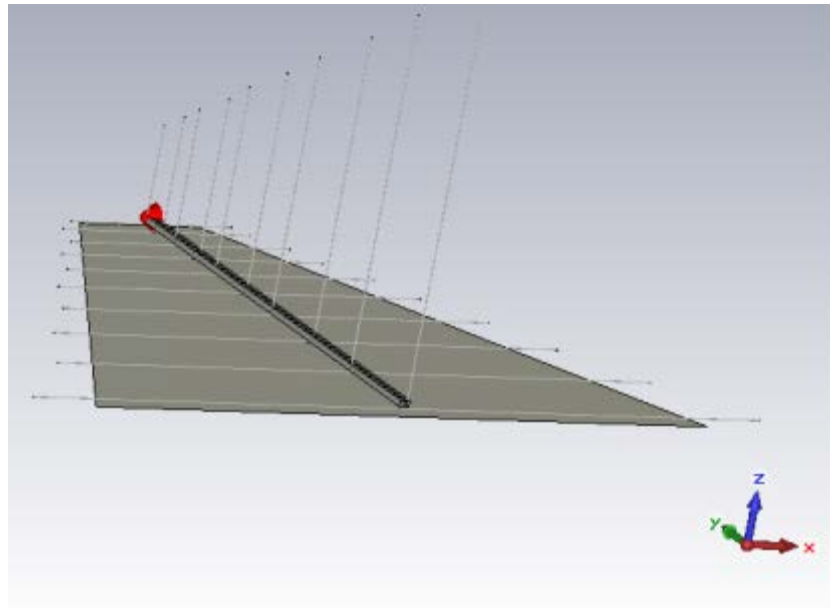
Σχήμα 6.16 LPMA με οριζόντια στοιχεία εκατέρωθεν κάθε μονόπολου

Τα αποτελέσματα της παραμέτρου  $S_{11}$  αυτής της γεωμετρίας, μπορούν να χαρακτηριστούν πολύ καλά.



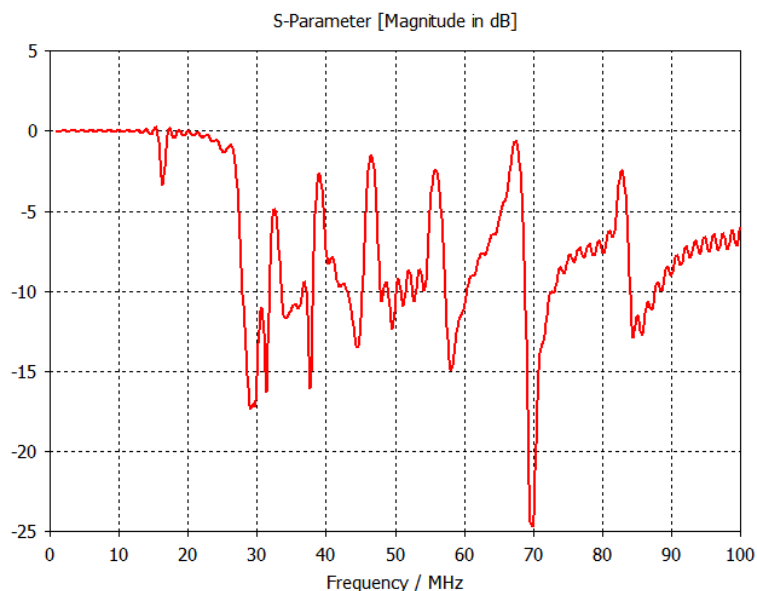
Σχήμα 6.17 Παράμετρος  $S_{11}$  - LPMA με οριζόντια δομή

7. LPMA με οριζόντια στοιχεία μειωμένα 10% σε μήκος, σε σχέση με το αντίστοιχο μονόπολο (Σχήμα 6.18).



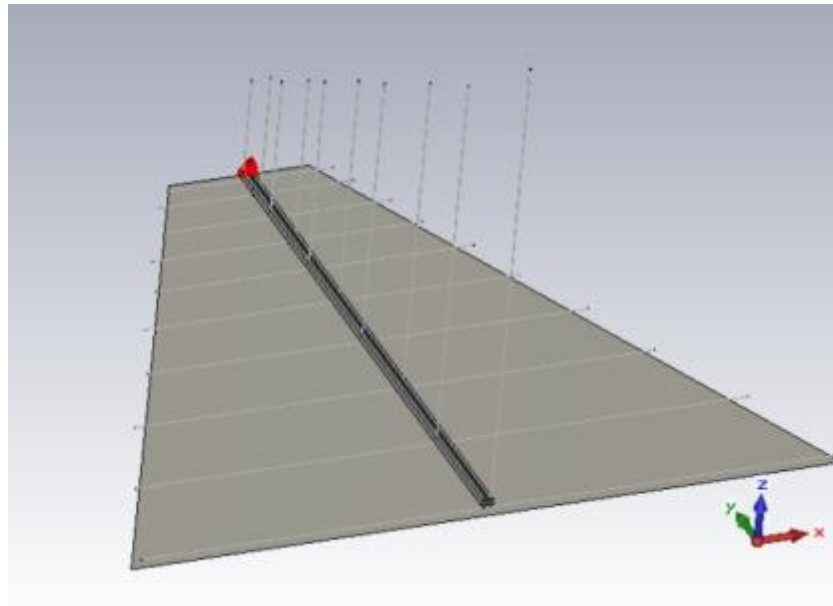
Σχήμα 6.18 LPMA με οριζόντια στοιχεία μειωμένα 10% σε μήκος

Τα αποτελέσματα της παραμέτρου  $S_{11}$  αυτής της γεωμετρίας, μπορούν να χαρακτηριστούν πολύ καλά.



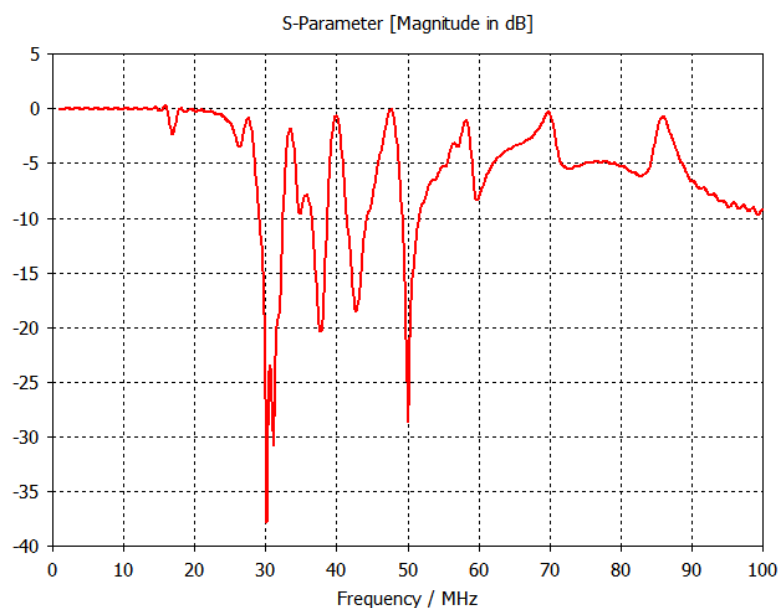
Σχήμα 6.19 Παράμετρος  $S_{11}$  - LPMA με οριζόντια δομή μειωμένη κατά 10% σε μήκος

8. LPMA με οριζόντια στοιχεία μειωμένα 20% σε μήκος, σε σχέση με το αντίστοιχο μονόπολο (Σχήμα 6.20).



Σχήμα 6.20 LPMA με οριζόντια στοιχεία μειωμένα 20% σε μήκος

Τα αποτελέσματα της παραμέτρου  $S_{11}$  αυτής της γεωμετρίας, μπορούν να χαρακτηριστούν ικανοποιητικά. Δηλαδή υπό συνθήκες, αν δεν βρεθεί καλύτερη γεωμετρία θα μπορούσε με μικρές τροποποιήσεις να υιοθετηθεί.



Σχήμα 6.21 Παράμετρος  $S_{11}$  - LPMA με οριζόντια δομή μειωμένη κατά 20% σε μήκος

Μελετώντας τις οκτώ γεωμετρίες που προσομοιώθηκαν και παρουσιάστηκαν τα καλύτερα αποτελέσματα παρατηρούνται στις γεωμετρίες 6 και 7 που βρίσκονται στο Σχήμα 6.17 και στο Σχήμα 6.19 αντιστοίχως.

Οι γεωμετρίες 6 και 7, έχουν οριζόντια στοιχεία εκατέρωθεν κάθε μονόπολου ίσα με το διπλάσιο μήκος του εκάστοτε μονόπολου.

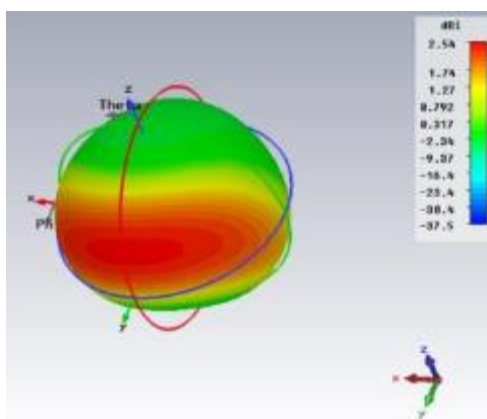
Από τις δύο λύσεις προτιμάμε τη δεύτερη (γεωμετρία 7), μιας και έχουμε το ίδιο επίπεδο απόδοσης με το πλεονέκτημα ότι το μέγεθος των οριζόντιων στοιχείων είναι μειωμένο κατά 10% σε σχέση με την προηγούμενη προτεινόμενη λύση.

Η κεραία ξεκινάει να ακτινοβολεί ικανοποιητικά αρκετά χαμηλά και συγκεκριμένα από τα 30 MHz.

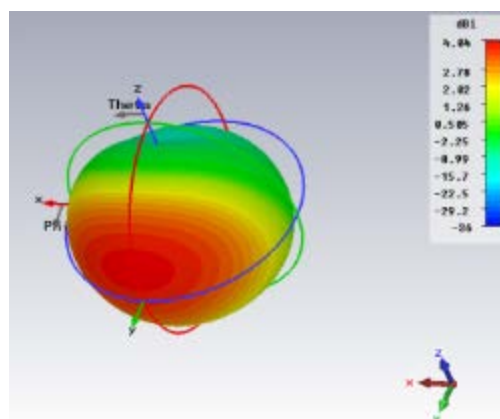
Η γεωμετρία 7, που μας δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα στα πλαίσια της προσομοίωσης, είναι και η γεωμετρία που κατασκευάστηκε στην οροφή ενός οχήματος καθώς και καταγράφηκε η απόδοσή της.

Για την προτεινόμενη λύση μελετήσαμε την προσομοίωση και την ακτινοβολία του μακρινού πεδίου σε διάφορες συχνότητες.

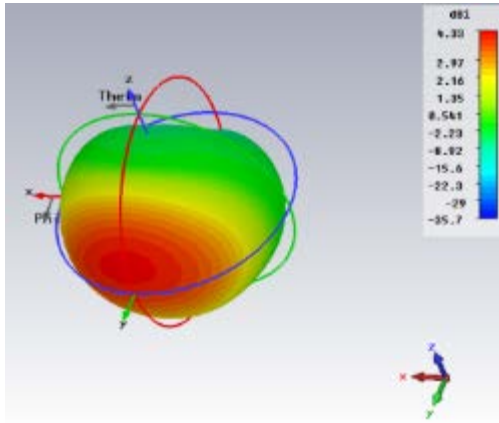
Ενδεικτικά παρουσιάζουμε την ακτινοβολία στα 30 MHz, 50 MHz, 65 MHz, 85 MHz, 95 MHz.



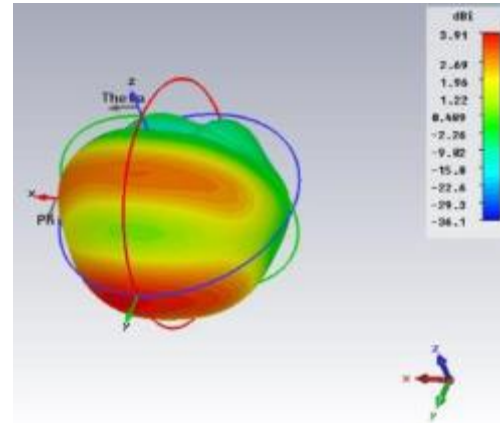
Σχήμα 6.22 Ακτινοβολία μακρινού πεδίου  
στα 30 MHz



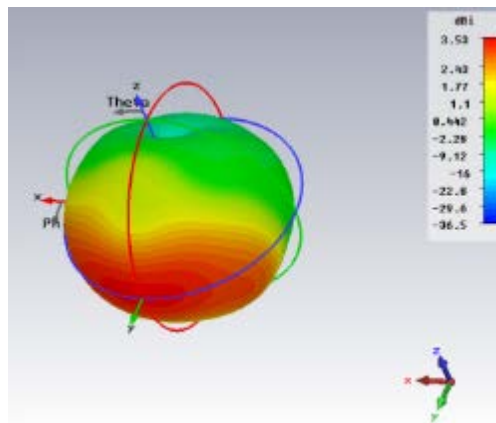
Σχήμα 6.23 Ακτινοβολία μακρινού πεδίου  
στα 50 MHz



Σχήμα 6.24 Ακτινοβολία μακρινού πεδίου  
στα 65 MHz



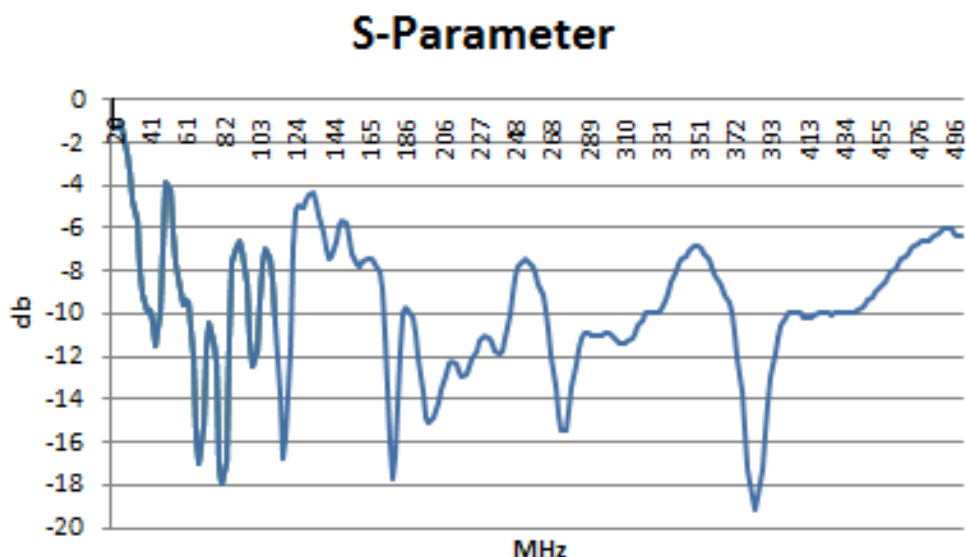
Σχήμα 6.25 Ακτινοβολία μακρινού πεδίου  
στα 85 MHz



Σχήμα 6.26 Ακτινοβολία μακρινού πεδίου στα 95 MHz

### 6.3 Μετρήσεις

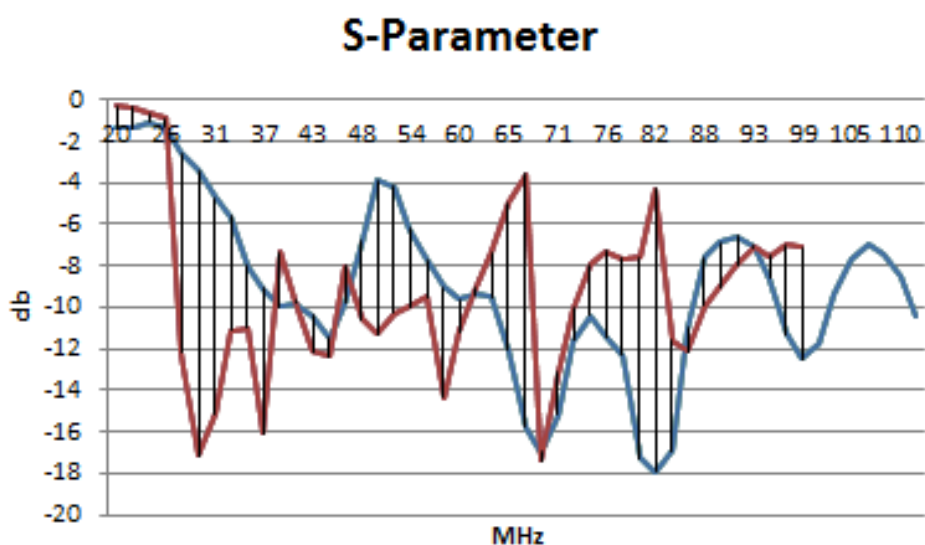
Στο Σχήμα 6.27 παρουσιάζουμε τις μετρήσεις του συντελεστή  $S_{11}$  που πραγματοποιήθηκαν στην κεραία που κατασκευάστηκε (Σχήμα 6.4). Στη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι ο συντελεστής κυμαίνεται σε όλο το διάστημα της συχνότητας κάτω από -5 dB καθώς και ότι υπάρχουν μεγάλα διαστήματα που έχουμε επιτύχει να είμαστε κάτω από τα -10 dB.



Σχήμα 6.27  $S_{11}$  της κατασκευασμένης κεραίας

Οι καταγραφές έγιναν στο διάστημα από 20 MHz έως 500 MHz. Τα καλύτερα αποτελέσματα είναι στα 383 MHz με απώλεια επιστροφής -19 dB και SWR 1,25 ενώ τα χειρότερα είναι στα 23 MHz με απώλεια επιστροφής -1,1 dB και SWR 15,1.

Στο Σχήμα 6.28 παρουσιάζουμε στην ίδια γραφική παράσταση το δείκτη  $S_{11}$  που βρήκαμε από την προσομοίωση και την πραγματική τιμή που μετρήσαμε από την κατασκευασμένη κεραία. Με μπλε χρώμα είναι τα αποτελέσματα της κατασκευασμένης κεραίας και με κόκκινο χρώμα είναι τα αποτελέσματα από την προσομοίωση.



Σχήμα 6.28  $S_{11}$  της κατασκευασμένης κεραίας και της προσομοιωμένης



Η προτεινόμενη κεραία με τις οριζόντιες δομές, που έχουν μήκος μειωμένο 10% από το αντίστοιχο ύψος του μονόπολου, μπορεί να τοποθετηθεί στην οροφή ενός οχήματος και να παραμείνει λειτουργικό ως προς τη μετακίνησή του καθώς και με αυτοματοποιημένο μηχανισμό η κεραία είναι έτοιμη για χρήση σε λιγότερο από 5 λεπτά.

Η απόδοση της κεραίας είναι κοντά στα επίπεδα της διπολικής λογαριθμικής περιοδικής. Το τίμημα της μείωσης του όγκου της κεραίας είναι ότι έχουμε χαμηλότερο κέρδος σε σχέση με την πλήρη κεραία.

Από την άλλη μεριά, έχουμε μία κεραία που όταν δεν είναι σε χρήση, μπορεί να μειωθεί ακόμα περισσότερο ο όγκος της και να μεταφερθεί εύκολα και γρήγορα σε σχέση με το πραγματικό μέγεθός της.

# 7 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

## 7.1 Συμπεράσματα έρευνας

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την έρευνα που πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της μελέτης της παρούσας διατριβής. Βασικός στόχος της έρευνας στο πλαίσιο της διατριβής ήταν να αναπτυχθούν μικροκυματικές μέθοδοι απεικόνισης αντικειμένων που βρίσκονται θαμμένα στο έδαφος. Η διαδικασία ανίχνευσης αυτών των αντικειμένων πραγματοποιήθηκε στο πεδίο συχνότητας και στο πεδίο του χρόνου.

Στο πεδίο συχνότητας η έρευνα επικεντρώθηκε στη μελέτη σύνθετων μοντέλων σκέδασης και κυρίως στην ανίχνευση θαμμένων αντικειμένων με εφαρμογή της μεθόδου των βοηθητικών πηγών. Μελετήθηκαν διάφορα είδη σκεδαστών και θαμμένων αντικειμένων. Δύο είναι τα γενικά σύνθετα μοντέλα σκέδασης που, για

ειδικές τιμές των γεωμετρικών και φυσικών τιμών των παραμέτρων τους μπορούν να δώσουν αποτελέσματα για πολλά αλλά απλούστερα συστήματα.

Το ένα αναφέρεται σε έναν πολυστρωματικό σκεδαστή (περιπτώσεις  $2D$  και  $3D$ ) και το άλλο μοντέλο σκέδασης αντιστοιχεί σε ένα θαμμένο αντικείμενο (τέλειος αγωγός ή διηλεκτρικό ή με επιφάνεια εμπέδησης) σε ένα στρωματοποιημένο έδαφος. Τα μοντέλα αυτά είναι σημαντικά για τις εφαρμογές αφού μπορούν να προσεγγίσουν με το καλύτερο τρόπο μη ομοιογενείς σκεδαστές και πετρώματα του υπεδάφους, Διατυπώθηκαν τα μαθηματικά προβλήματα που περιγράφουν αυτά τα μοντέλα σκέδασης και αναπτύχθηκαν μέθοδοι επίλυσής τους. Εφαρμόστηκαν διάφοροι μέθοδοι όπως η μέθοδος των ροπών, η μέθοδος των βοηθητικών πηγών, η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων και η τεχνική των πεπερασμένων ολοκληρώσεων. Κυρίως όμως αναπτύχθηκε, τροποποιήθηκε και χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των βοηθητικών πηγών.

Στα ευθέα προβλήματα σκέδασης η μέθοδος των βοηθητικών πηγών προσαρμόστηκε στο μεγάλο αριθμό στρωμάτων και οδήγησε σε ένα αλγεβρικό σύστημα με block-πίνακα για τον υπολογισμό των συντελεστών (πλατών) της μεθόδου. Σε πολλές περιπτώσεις στο εσωτερικό των στρωμάτων τοποθετήθηκε ένας πυρήνας με διάφορες οριακές συνθήκες στην επιφάνειά του, έτσι ώστε θεωρώντας ένα γεωμετρικό ή φυσικό εκφυλισμό των στρωμάτων να καλύπτονται όσο το δυνατόν περισσότερες περιπτώσεις προβλημάτων σκέδασης.

Στα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης έχουν γίνει μετρήσεις για το σκεδαζόμενο κύμα, το οποίο επίσης υπολογίζεται και με τη μέθοδο των βοηθητικών πηγών. Κατασκευάζεται ένα συναρτησοειδές που περιέχει το μέτρο της διαφοράς των δύο τιμών του σκεδαζόμενου κύματος, δηλαδή της τιμής μέτρησης μείον της τιμής υπολογισμού και των οριακών τιμών του προβλήματος. Η ελαχιστοποίηση αυτού του συναρτησοειδούς με παραμέτρους τους συντελεστές της θεμελιώδους λύσης στα σημεία των βοηθητικών πηγών (AS) και στα σημεία πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή (CP) δίνει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται με κατάλληλο πρόγραμμα της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων. Οι περισσότερες εφαρμογές έχουν γίνει με χρήση πολικών συντεταγμένων ( $2D$ ) ή κυλινδρικών συντεταγμένων ( $3D$ ).

Η έρευνα στην παρούσα διατριβή στο πεδίο του χρόνου έχει επικεντρωθεί στην κατασκευή συστήματος ανίχνευσης θαμμένων αντικειμένων σε ένα σύνθετο έδαφος, όπου υπάρχουν στρώματα πετρωμάτων, υγρών και αερίων. Η μελέτη είναι ολοκληρωμένη και αφορά όλα τα όργανα του συστήματος. Ιδιαίτερη προσοχή έχει δοθεί στις κεραίες, τις γεννήτριες σήματος και της κάρτας δειγματοληψίας. Οι κεραίες που έχουν χρησιμοποιηθεί είναι ευρυζωνικές για να καλύπτουν ευρύ φάσμα συχνοτήτων. Ειδικότερα έχουν συνδυαστεί κεραίες τύπου παπιγιόν και χοανοειδείς με κατάλληλες διαστάσεις και διαφορετικές γεωμετρικές σχέσεις μεταξύ τους για μεγαλύτερη διεισδυτικότητα στο έδαφος. Πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις σε πολλούς χώρους που επιλέχθηκαν με κριτήριο το επιστημονικό τους ενδιαφέρον και η ανομοιογένειά τους. Συγκεκριμένα μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε αρχαίο λατομείο, σε πηγάδι, σε θαμμένη δεξαμενή λυμάτων καθώς και σε κατασκευασμένο χώρο δοκιμών όπου θάφτηκαν επιλεκτικά στόχοι. Επίσης περιγράφεται μία μέθοδος ανίχνευσης θαμμένων στόχων χρησιμοποιώντας το ταχύ μετασχηματισμό Fourier και αναπτύσσεται μία μέθοδος απεικόνισης του βάθους θαμμένων αντικειμένων.

Σημαντική μελέτη έγινε στις λογαριθμικές περιοδικές κεραίες (μονοπολική, διπολική). Έγινε μία κατασκευή που συνδυάζει μικρές διαστάσεις, λιγότερο βάρος και πολύ καλή απόδοση.

## 7.2 Μελλοντική έρευνα

Στην περίπτωση των προβλημάτων στο πεδίο της συχνότητας έχει γίνει πολύ ερευνητική δουλειά και έχει δημοσιευθεί μεγάλος πλήθος εργασιών κυρίως για προβλήματα σε δύο διαστάσεις. Η εφαρμογή της μεθόδου των βοηθητικών πηγών στις 3D παρουσιάζει υπολογιστικές δυσκολίες αφού η θεμελιώδης λύση που συνήθως χρησιμοποιείται είναι σε δυαδική μορφή. Υπάρχουν αποτελέσματα, όμως υπάρχουν θέματα για ευθέα και αντίστροφα προβλήματα, όπως είναι μεικτά προβλήματα σε σύνθετα υλικά. Ένα γενικό πρόβλημα που μπορεί να μελετηθεί με τη μέθοδο των βοηθητικών πηγών είναι η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από έναν πολυστρωματικό σκεδαστή που είναι θαμμένος σε ένα στρωματοποιημένο έδαφος.

Αυτό το μαθηματικό πρόβλημα περιγράφει ένα ρεαλιστικό μοντέλο σκέδασης που προσεγγίζει το πρόβλημα ανίχνευσης για ένα μη ομοιογενές θαμμένο αντικείμενο.

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα που παρουσιάζεται στο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης είναι η ανίχνευση της δομής του υπεδάφους. Μία γενίκευση της μεθόδου των βοηθητικών προς την κατεύθυνση των σύνθετων υλικών είναι η ανίχνευση ανισοτροπικών αντικειμένων που είναι θαμμένα σε ένα στρωματοποιημένο έδαφος. Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας, για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων, μπορούν να καλύψουν άλλα γνωστά αποτελέσματα. Τέλος, δεδομένου ότι η μέθοδος των βοηθητικών πηγών έχει μελετηθεί και εφαρμοστεί σε ηλεκτρομαγνητικά, ακουστικά και ελαστικά κύματα ενδιαφέρον θα είχε να γίνει ένας συνδυασμός αυτών των κυμάτων για την ανίχνευση αντικειμένων θαμμένων σε ένα τυχαίο έδαφος.

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου ανίχνευσης αντικειμένων στο πεδίο του χρόνου έχουμε απλοποιήσει τον τύπο που υπολογίζει την ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα στο υπεδάφος, μηδενίζοντας έναν παράγοντα απώλειας. Ο παράγοντας αυτός εξαρτάται από την ηλεκτρική αγωγιμότητα, τη διηλεκτρική επιτρεπτότητα του μέσου διάδοσης καθώς επίσης και τη γωνιακή συχνότητα του κύματος. Επιπλέον έχουμε υποθέσει ότι η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου είναι ίση με του κενού. Θα είχε ενδιαφέρον να αναπτύξουμε τη μέθοδο αποφεύγοντας αυτές τις προσεγγίσεις. Θα είχαμε μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα, όμως θα χρειαζούν περισσότερες πληροφορίες για το μέσο διάδοσης.

# 8 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## 8.1 Ειδικές συναρτήσεις

### 8.1.1 Κυλινδρικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις Hankel 1<sup>ου</sup> και 2<sup>ου</sup> είδους, οι οποίες λέγονται και συναρτήσεις Bessel 3<sup>ου</sup> είδους, ορίζονται από τους τύπους

$$H_a^{(1)}(x) = J_a(x) + iN_a(x),$$

$$H_a^{(2)}(x) = J_a(x) - iN_a(x),$$

όπου

$$J_a(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^a \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\kappa! \Gamma(\kappa + a + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa},$$

$$J_{-a}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\kappa! \Gamma(\kappa - a + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa},$$

και  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ ,  $x > 0$  είναι η συνάρτηση Γάμμα.

Για  $a \notin \mathbb{Z}$ , οι συναρτήσεις  $J_a(x)$  και  $J_{-a}(x)$  είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Bessel τάξης  $a$ :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - a^2)y = 0,$$

όπου  $a \in \mathbb{R}$  σταθερά.

Για  $a = n \in \mathbb{Z}$ , οι λύσεις της εξίσωσης Bessel  $J_n(x)$  και  $J_{-n}(x)$  είναι γραμμικά εξαρτημένες και συνδέονται με τη σχέση

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Τότε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Bessel τάξης  $a$  είναι οι  $J_n(x)$  και  $N_n(x)$  όπου

$$N_n(x) = \lim_{a \rightarrow n} N_a(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{dJ_a(x)}{da} - (-1)^a \frac{dJ_{-a}(x)}{da} \right]_{a=n},$$

με

$$N_a(x) = \frac{J_a(x) \cos(a\pi) - J_{-a}(x)}{\sin(a\pi)}.$$

Οι συναρτήσεις  $J_a(x)$  και  $J_{-a}(x)$  είναι οι συναρτήσεις Bessel 1<sup>ου</sup> είδους  $a$  τάξης και οι  $N_a(x)$  είναι οι συναρτήσεις Neumann  $a$  τάξης, οι οποίες λέγονται και συναρτήσεις Bessel 2<sup>ου</sup> είδους.

*Ασυμπτωτικές μορφές.* Σε πολλές εφαρμογές χρειάζεται η συμπεριφορά της θεμελιώδους λύσης σε μία περιοχή του μηδενός και του απείρου. Για τις συναρτήσεις Hankel πρώτου και δεύτερου είδους μηδενικής τάξης ισχύει [3], [107] και [49].

Στο μηδέν:

$$H_0^{(1)}(x) \sim \frac{2j}{\pi} \ln x, \quad x \rightarrow 0,$$

$$H_0^{(2)}(x) \sim -\frac{2j}{\pi} \ln x, \quad x \rightarrow 0.$$

Στο άπειρο:

$$H_0^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{j(x-\frac{\pi}{4})}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (8.1)$$

$$H_0^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j(x-\frac{\pi}{4})}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (8.2)$$

### 8.1.2 Σφαιρικές συναρτήσεις

Οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel  $j_n$ , Neumann  $n_n$  και Hankel  $h_n^{(1)}, h_n^{(2)}$  είναι λύσεις της εξίσωσης Bessel  $n$  τάξης

$$x^2 y'' + 2xy' + (x^2 - n(n+1))y = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

και συνδέονται με τους τύπους

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+\frac{1}{2}}(x),$$

$$h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x), \quad h_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x),$$

Αν συμβολίσουμε με  $f_n = j_n, n_n, h_n^{(1)}, h_n^{(2)}$  τις σφαιρικές συναρτήσεις τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = \frac{2n+1}{x} f_n(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$f_{n+1}(x) = -x^n \{x^{-n} f_n(x)\}', \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x) - \frac{n+1}{x} f_n(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

Ασυμπτωτικές μορφές. Για  $x$ , σε μία περιοχή του μηδενός ισχύουν οι ασυμπτωτικές σχέσεις:

$$j_n(x) \sim \frac{x^n}{(2n+1)!!}, \quad x \rightarrow 0, \quad n_n(x) \sim \frac{(2n-1)!!}{x^{n+1}}, \quad x \rightarrow 0,$$

όπου  $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$ .



Για  $x$ , σε μία περιοχή του απείρου ισχύουν οι ασυμπτωτικές σχέσεις:

$$j_n(x) \sim \frac{1}{x} \cos\left(x - (n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad x \rightarrow \infty, \quad n_n(x) \sim \frac{1}{x} \sin\left(x - (n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

$$h_n^{(1)}(x) \sim \frac{e^{ix}}{ix} i^{-n}, \quad x \rightarrow \infty, \quad h_n^{(2)}(x) \sim \frac{e^{-ix}}{-ix} i^n, \quad x \rightarrow \infty.$$

Ειδικότερα οι συναρτήσεις Bessel, Neumann και Hankel μηδενικής τάξης είναι,

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad n_0(x) = -\frac{\cos x}{x},$$

$$h_0^{(1)}(x) = \frac{e^{ix}}{ix}, \quad h_0^{(2)}(x) = \frac{e^{-ix}}{-ix}.$$

### 8.1.3 Σφαιρικές κυματικές συναρτήσεις

Οι σφαιρικές διανυσματικές κυματικές συναρτήσεις πρώτου είδους  $\mathbf{M}_{\sigma 1n}^1(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{N}_{\sigma 1n}^1(\mathbf{r})$  δίνονται από τους τύπους

$$\mathbf{M}_{\sigma 1n}^1(\mathbf{r}) = \nabla \times [\mathbf{r}j_n(kr)Y_{\sigma 1n}(\theta, \varphi)] = \sqrt{n(n+1)}\mathbf{C}_{\sigma 1n}(\theta, \varphi)j_n(kr), \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{\sigma 1n}^1(\mathbf{r}) &= k^{-1}\nabla \times \mathbf{M}_{\sigma 1n}^1 \\ &= n(n+1)\mathbf{P}_{\sigma 1n}(\theta, \varphi)(kr)^{-1}j_n(kr) \\ &\quad + \sqrt{n(n+1)}\mathbf{B}_{\sigma 1n}(\theta, \varphi)(kr)^{-1}(d/dr)[\mathbf{r}j_n(kr)], \end{aligned} \quad (8.4)$$

όπου για  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\sigma = e$  ή  $o$  (άρτιο ή περιττό), είναι

$$\mathbf{P}_{\sigma 1n}(\theta, \varphi) = \hat{\mathbf{r}}Y_{\sigma 1n}(\theta, \varphi), \quad (8.5)$$

$$\mathbf{B}_{\sigma 1n}(\theta, \varphi) = \hat{\mathbf{r}}\{n(n+1)\}^{-1/2}\nabla Y_{\sigma 1n}(\theta, \varphi), \quad (8.6)$$

$$\mathbf{C}_{\sigma 1n}(\theta, \varphi) = \{n(n+1)\}^{-1/2}\nabla \times [\mathbf{r}Y_{\sigma 1n}(\theta, \varphi)]. \quad (8.7)$$

Οι σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις  $Y_{\sigma 1n}$  ορίζονται από

$$Y_{e1n} = P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi, \quad (8.8)$$

$$Y_{o1n} = P_n^1(\cos \theta) \sin \varphi, \quad (8.9)$$

όπου

$$P_n^1(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} P_n'(x), \quad (8.10)$$

είναι μία συνάρτηση Legendre και  $P_n(x)$  είναι ένα πολυώνυμο Legendre.

Οι σφαιρικές διανυσματικές κυματικές συναρτήσεις τρίτου είδους  $\mathbf{M}_{\sigma 1n}^3(\mathbf{r}), \mathbf{N}_{\sigma 1n}^3(\mathbf{r})$  προκύπτουν από τις αντίστοιχες πρώτου είδους αν οι συναρτήσεις Bessel  $j_n(kr)$  αντικατασταθούν από τις σφαιρικές συναρτήσεις Hankel  $h_n(kr)$ .

## 8.2 Διανυσματική - δυαδική ανάλυση

Αν  $\varphi, \psi$  βαθμωτές,  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  διανυσματικές και  $\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{Q}}$  δυαδικές συναρτήσεις του  $\mathbb{R}^3$ , τότε ισχύουν.

$$1) \nabla \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{P}) = \mathbf{Q} \nabla \cdot \mathbf{P} - \mathbf{P} \nabla \cdot \mathbf{Q} - (\mathbf{Q} \cdot \nabla) \mathbf{P} + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{Q}.$$

$$2) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{Q}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{Q}) - \Delta \mathbf{Q}.$$

3) Πρώτο βαθμωτό θεώρημα Green

$$\int_{\partial D} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = \int_D (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV.$$

4) Δεύτερο βαθμωτό θεώρημα Green

$$\int_{\partial D} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds = \int_D (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV.$$

5) Πρώτο διανυσματικό θεώρημα Green

$$\int_{\partial D} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{Q} \times \nabla \times \mathbf{P}) ds = \int_D [(\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot (\nabla \times \mathbf{P}) - \mathbf{Q} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{P})] dV.$$

6) Δεύτερο διανυσματικό θεώρημα Green

$$\int_{\partial D} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \times \nabla \times \mathbf{P}) ds = \int_D [\mathbf{Q} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q})] dV.$$

7) Πρώτο θεώρημα Green δυαδικού

$$\int_{\partial D} (\nabla \times \tilde{\mathbf{Q}})^T \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{P}}) ds = \int_D [(\nabla \times \tilde{\mathbf{Q}})^T \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{P}}) - (\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{Q}})^T \cdot \tilde{\mathbf{P}}] dV.$$

8) Δεύτερο θεώρημα Green δυαδικού

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} [(\nabla \times \tilde{\mathbf{Q}})^T \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{P}}) + \tilde{\mathbf{Q}}^T \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \tilde{\mathbf{P}})] ds \\ = \int_D [\tilde{\mathbf{Q}}^T \cdot (\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{P}}) - (\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{Q}})^T \cdot \tilde{\mathbf{P}}] dV. \end{aligned}$$

Πράξεις και ιδιότητες δυαδικών

$$1) (\mathbf{ab}) \cdot (\mathbf{cd}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{ad}.$$

$$2) (\mathbf{ab}) : (\mathbf{cd}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

$$3) (\mathbf{ab}) \times (\mathbf{cd}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{d}).$$

$$4) (\mathbf{ab}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

$$5) (\mathbf{a} \cdot \tilde{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{b}.$$

$$6) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \tilde{\mathbf{A}}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \tilde{\mathbf{A}}).$$

### 8.3 Μακρινό πεδίο

Στη μελέτη των αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης το μακρινό πεδίο (ή πλάτος σκέδασης) είναι πολύ σημαντικό για το λόγο αυτόν αναφέρουμε τα μακρινά πεδία στις περιπτώσεις 2D και 3D. Λεπτομέρειες για τον υπολογισμό τους μπορεί να βρει κανείς στα βιβλία [3], [7], [4].

### 8.3.1 Μακρινό πεδίο στις δύο διαστάσεις

Στις δύο διαστάσεις το σκεδαζόμενο πεδίο  $u^s$ , ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz

$$\Delta u^s + k^2 u^s = 0 \mid D_0, \quad (8.11)$$

στο μη φραγμένο χωρίο  $D_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ , η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - j k u^s \right) = 0. \quad (8.12)$$

Το μακρινό πεδίο εκφράζει την ασυμπτωτική συμπεριφορά του σκεδαζόμενου πεδίου στο άπειρο και προκύπτει από την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$u^s(\mathbf{r}) = \int_{\partial D} \left[ u^s(\mathbf{r}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u^s(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}'). \quad (8.13)$$

όπου

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (8.14)$$

είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz. Αν στην (8.13) πάρουμε  $r \rightarrow \infty$  τότε

$$u^s(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} u^\infty(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (8.15)$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις  $\hat{\mathbf{r}}$ .

Η συνάρτηση  $u^\infty$  η οποία ορίζεται στο μοναδιαίο κύκλο  $S$  είναι το μακρινό πεδίο (*far-field pattern, scattering amplitude*) ή πλάτος σκέδασης και δίνεται από τον τύπο [26]

$$u^\infty(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1+j}{4\sqrt{k\pi}} \int_{\partial D} \left[ u^s(\mathbf{r}') \frac{\partial e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}}{\partial n'} - e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \frac{\partial u^s(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}'). \quad (8.16)$$

όπου  $\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{r}'')}$  εκφράζει την εξωτερική κάθετη παράγωγο στην επιφάνεια  $\partial D$  του σκεδαστή στο σημείο  $\mathbf{r}'$ .

### 8.3.2 Μακρινό πεδίο στις τρεις διαστάσεις

Για τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Helmholtz

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (8.17)$$

έχουμε την ασυμπτωτική μορφή

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'} e^{jkr}}{4\pi r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), r \rightarrow \infty. \quad (8.18)$$

Στις τρεις διαστάσεις σε μη αγώγιμο ( $\sigma = 0$ ) μέσο διάδοσης, το σκεδαζόμενο ηλεκτρομαγνητικό κύμα  $\mathbf{E}^S, \mathbf{H}^S$  στο μη φραγμένο χωρίο  $D_0 \subseteq \mathbb{R}^3$  ικανοποιεί τις εξισώσεις.

$$\nabla \times \mathbf{E}^S(\mathbf{r}) = -j\omega\mu\mathbf{H}^S(\mathbf{r}), \quad (8.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^S(\mathbf{r}) = j\omega\varepsilon\mathbf{E}^S(\mathbf{r}) \quad (8.20)$$

και τις συνθήκες ακτινοβολίας των Silver-Müller

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\hat{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{E}^S) + jkr\mathbf{E}^S] = \mathbf{0}, \quad (8.21)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\hat{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{H}^S) + jkr\mathbf{H}^S] = \mathbf{0}. \quad (8.22)$$

τότε ισχύει [3], [4].

Κάθε λύση  $\mathbf{E}^S, \mathbf{H}^S$  των εξισώσεων του Maxwell που ικανοποιεί τις συνθήκες των Silver-Müller και έχει την ασυμπτωτική μορφή

$$\mathbf{E}^S(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{E}^\infty(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), r \rightarrow \infty, \quad (8.23)$$

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{H}^\infty(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (8.24)$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις  $\hat{\mathbf{r}}$ . Οι συναρτήσεις  $\mathbf{E}^\infty, \mathbf{H}^\infty$  ορίζονται στη μοναδιαία σφαίρα  $S^2$ , ονομάζονται ηλεκτρικό και μαγνητικό μακρινό πεδίο ή πλάτος σκέδασης αντίστοιχα και δίνονται από τους τύπους

$$\mathbf{E}^\infty(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{ik}{4\pi} \hat{\mathbf{r}} \times \int_S [(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^s) - \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^s)] e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} dS(\mathbf{r}'), \quad (8.25)$$

$$\mathbf{H}^\infty(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{ik}{4\pi} \hat{\mathbf{r}} \times \int_S [(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^s) + \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^s)] e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} dS(\mathbf{r}'). \quad (8.26)$$

Επίσης ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\mathbf{E}^\infty(\hat{\mathbf{r}}) = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^\infty(\hat{\mathbf{r}}), \quad \mathbf{H}^\infty(\hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^\infty(\hat{\mathbf{r}}) \quad (8.27)$$

και

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}^\infty(\hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}^\infty(\hat{\mathbf{r}}) = 0. \quad (8.28)$$

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] R. Zaridze, G. Bit-Babik, K. Tavzarashvili, N. K. Uzunoglu, and D. Economou, "The Method of Auxiliary Sources (MAS) - Solution of Propagation, Diffraction and Inverse Problems Using MAS," *Applied Computational Electromagnetics*, vol. 171, pp. 33-45, 2000.
- [2] R. Zaridze, G. Bit-Babik, K. Tavzarashvili, D. Economou, and N. K. Uzunoglu, "Wave Field Singularity Aspects in Large-Size Scatterers and Inverse Problems," *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, vol. 50, no. 1, pp. 50-58, 2002.
- [3] D. Colton and D. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. New York: John Wiley & Sons, 1983.
- [4] P. Monk, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Oxford: Clarendon Press, 2003.
- [5] N. K. Ουζούνογλου, *Εισαγωγή στα μικροκύματα*, Β' Έκδοση ed. Αθήνα: Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 1994.
- [6] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1975.
- [7] C. Tai, *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory*, 2nd ed., IEEE Press, Ed. New York, 1993.
- [8] G. Dassios and R. Kleinmann, *Low Frequency Scattering*.: Clarenton, 2000.
- [9] V. Kupradze, "About approximates solytions of mathematical physics problems," *Success of Mathematical Sciences*, vol. 22, no. 2, pp. 59-107, 1967.
- [10] H. T. Anastassiou, G. K. Avdikos, and A. T. Vouldis, "Efficient Preconditioning of the Method of Auxiliary Sources (MAS) for Cylindrical Scatterers of Quasi-Circular Cross-Section," *The Open Electrical and Electronic Engineering Journal*, pp. 50-55, 2008.
- [11] N. L. Tsitsas, E. G. Alivizatos, H. T. Anastassiou, and D. I. Kaklamani, "Optimizaton of the method of auxiliary sources (MAS) for scatttering by an infinite cyclinder under oblique incidence," *Electromagnetics*, vol. 25, pp. 39-54, 2005.
- [12] R. Zaridze, D. Economou, R. Jobava, and N. Uzunoglou, "A novel target imaging technique using the MAS," in *Abstracts of International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications*, Torino, Italy, 1997.
- [13] I. M. Petoev, V. A. Tabatadze, and R. S. Zaridze, "The Method of Auxiliary Sources Applied to Problems of Electromagnetic Wave Diffraction by Certain Metal - Dielectric Structures," *Journal of Communications Technology and Electronics*, vol. 58, no. 5, pp. 404-416, 2013.
- [14] G. Fairweather, A. Karageorghis, and P.A. Martin, "The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems," *Engineering Analysis with*

- Boundary Elements*, vol. 27, no. 7, pp. 759-769, 2003.
- [15] N. Aguilí and T. Hichem, "Scattering by Multilayered Structures Using The Extended Method of Auxiliary Sources EMAS," *Progress In Electromagnetics Research B*, vol. 15, pp. 133-150, 2009.
- [16] A. Karageorghis and D. Lesnic, "Application of the MFS to inverse obstacle scattering problems," *Eng Anal Bound Elem*, vol. 35, pp. 631-638, 2011.
- [17] A. Karageorghis and D. Lesnic, "The method of fundamental solutions for the inverse conductivity problem," *Inverse Probl Sci Eng*, vol. 18, pp. 567-583, 2010.
- [18] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. New York: J. Wiley & Sons, 1989.
- [19] J. A. Kong, *Electromagnetic wave theory*. New York: J. Wiley & Sons, 1986.
- [20] G. Kristensson, "Electromagnetic scattering from buried inhomogeneities—a general three-dimensional formalism," *Journal of Applied Physics*, vol. 51, no. 7, pp. 3486-3500, 1979.
- [21] N. K. Uzunoglu and J. D. Kanellopoulos, "Scattering from underground tunnels," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 15, no. 2, pp. 459-471, 1981.
- [22] E. Tonti, "Finite formulation of the electromagnetic field," *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 32, pp. 1-44, 2001.
- [23] Y. Leviatan and A. Boag, "Analysis of electromagnetic scattering from dielectric cylinders using a multifilament current model," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-35, no. 10, 1987.
- [24] Y. Leviatan and A. Boag, "Analysis of electromagnetic scattering from dielectrically coated conducting cylinders using a multifilament current model," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 36, no. 11, pp. 1602-1607, 1988.
- [25] Y. Leviatan, "Analytic continuation considerations when using generalized formulations for scattering problems," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 38, no. 8, pp. 1259-1263, Aug. 1990.
- [26] F. Cakoni and D. Colton, *Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory*.: Springer, 2006.
- [27] S. C. Athanasiadis and A. Chronos, "Electromagnetic excitation in complex materials," *Journal of Materials Science: Materials in Electronics*, vol. 25, no. 10, pp. 4273-4277, 2014.
- [28] M. G. Andreasen, "Scattering from parallel metallic cylinders with arbitrary cross sections," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 12, no. 6, pp. 746-754, 1964.
- [29] J. H. Richmond, "Digital computer solutions of the rigorous equations for scattering problems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 53, no. 8, pp. 796-804, 1965.



- [30] R. F. Harrington, *Field Computation by moment methods*. New York: MacMillan, 1968.
- [31] R. Harrington, "Origin and development of the method of moments for field computation," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 32, no. 3, pp. 31-35, 1990.
- [32] G. Fikioris, P. J. Papakanellos, J. D. Koundouros, and A. K. Patsiotis, "Difficulties in MoM analyses of resonant circular arrays of cylindrical dipoles," *Electronics Letters*, vol. 41, no. 2, pp. 54-55, 2005.
- [33] N. V. Nair and B. Shanker, "Generalized Method of Moments: A Novel Discretization Technique for Integral Equations," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 59, no. 6, pp. 2280-2293, 2011.
- [34] N. V. Nair, B. Shanker, and L. Kempel, "Generalized method of moments: a boundary integral framework for adaptive analysis of acoustic scattering," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 132, no. 3, pp. 1261-70, 2012.
- [35] D. L. Dault, "The generalized method of moments for electromagnetic integral equations: New formulations and applications," Michigan State University, Phd Thesis 2015.
- [36] T. A. Maniatis, K. S. Nikita, and N. K. Uzunoglu, "Two dimensional dielectric profile reconstruction based on spectral domain moment method and non-linear optimization," *IEEE Transactions on microwave Theory and Techniques*, vol. 48, pp. 1831-1840, 2000.
- [37] W. C. Gibson, *The Method of Moments in Electromagnetics*.: Taylor & Francis Group, 2008.
- [38] P. H. Wen, Y. C. Hon, M. Li, and T. Korakianitis, "Finite integration method for partial differential equations," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, no. 24, pp. 10092-10106, 2013.
- [39] T. Weiland, "A Discretization Method for the Solution of Maxwell's Equations for six-component Fields," *AEU Archiv fur Elektrotechnik und Ubertragungstechnik*, vol. 31, pp. 116-120, 1977.
- [40] T. Weiland, "Lossy Waveguides with an Arbitrary Boundary Contour and Distribution of Material," *AEU Archiv fur Elektrotechnik und Ubertragungstechnik*, vol. 33, pp. 170-174, 1979.
- [41] Z. Rahimi, A. Erdmann, and C. Pflaum, "Finite integration (FI) method for modelling optical waves in lithography masks," in *Electromagnetics in Advanced Applications, ICEAA*, Torino, 2009, pp. 809-812.
- [42] S. Kirsch, L. Kuen, and R. Schuhmann, "Accurate Treatment of Nonconformal Material Interfaces in the Finite Integration Technique," *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 52, no. 3, pp. 1-4, 2016.
- [43] S. Kirsch, "Cylindrical and nonconformal material interfaces in the finite integration

- technique," phd TU Berlin 2016.
- [44] J. L. Volakis, A. Chatterjee, and Kempel L. C., *Finite Element Method Electromagnetics: Antennas, Microwave Circuits, and Scattering Applications*, 1st ed. New York: IEEE Press, 1998.
- [45] R. Marklein, "The Finite Integration Technique as a General Tool to Compute Acoustic, Electromagnetic, Elastodynamic, and Coupled Wave Fields," *IEEE Antennas Wireless Propagation Letter*, vol. 1, pp. 31-34, 2002.
- [46] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE, Antennas and Propagation*, vol. 14, pp. 302-307, 1966.
- [47] Y. Wang, S. Langdon, and C. Penney, "Analysis of accuracy and stability of FDTD subgridding schemes," in *40th European Microwave Conference*, Paris, 2010, pp. 1297-1300.
- [48] E. G. Alivizatos, I. D. Chremmos, N. L. Tsitsas, and N. K. Uzunoglu, "Green's-function method for the analysis of propagation in holey fibers.," *J Opt Soc Am A Opt Image Sci Vis*, vol. 21, no. 5, pp. 847-57, 2004.
- [49] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics II*. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [50] A. Lakhtakia, *Beltrami Fields in Chiral Media*. Singapore: World Scientific, 1994.
- [51] A. Lakhtakia, V. K. Varadan, and V. V. Varadan, "Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media," *Springer: Lecture Notes in Physics*, vol. 335, 1989.
- [52] I. N. Vekua, *The new methods for solving elliptic equations*. New York: John Wiley, 1967.
- [53] V. D. Kupradze and M. A. Aleksidze, "The method of functional equations for approximate solution of some boundary problems," *Journal of Applied Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 4, no. 4, pp. 683-715, 1964.
- [54] R. S. Zaridze et al., "The method of auxiliary sources (MAS): Solution of propagation, diffraction, and inverse problems using MAS," in *Trans. Black Sea Region Union of Applied Electrodynamics (BSUAE)*, Tbilisi-Athens, 1998.
- [55] R. Zaridze et al., "The method of auxiliary sources and scattered field singularities (caustics)," *J. Electromagn. Waves Applicat.*, vol. 12, no. 11, pp. 1491-1507, 1998.
- [56] G. Afridonidze, I. Petoev, V. Tabatadze, and Zaridze R., "Application of the method of auxiliary sources for the spherical and ellipsoid resonators," in *in: Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*, Tbilisi, Georgia, 2016.
- [57] R. S. Zaridze, I. M. Petoev, V. A. Tabatadze, and B. V. Poniava, "The Method of Auxiliary Sources For Antenna Synthesis Problems," *DIPED*, pp. 13-19, 2013.

- [58] R. Zaridze, D. Karkashadze, G. Talakvadze, J. Khatiashvili, and Z. Tsverikmazashvili, "A MAS in Applied Electrodynamics," in *URSI International Symposium of E/M Theory Budapest*, Hungary, 1985.
- [59] F. G. Bogdanov, D. D. Karkashadze, and R. S. Zaridze, "The method of auxiliary sources in electromagnetic scattering problems," in *Generalized Multipole Techniques for Electromagnetic and Light Scattering*, T. Wriedt, Ed. North Holland, 1999, ch. 7, pp. 143-172.
- [60] C. A. Valagiannopoulos, N. L. Tsitsas, and G. Fikioris, "Convergence and oscillations in method-of-auxiliary-sources analyses of dielectric scattering problems," in *Electromagnetics in Advanced Applications*, Sydney, Australia, 2010.
- [61] N. L. Tsitsas, G. P. Zouros, G. Fikioris, and Y. Leviatan, "On methods employing auxiliary sources for non-circular scattering problems," in *Computing and Electromagnetics International Workshop (CEM)*, Barcelona, Spain, 2017.
- [62] F. Shubitidze, H. T. Anastasiou, and D. I. Kaklamani, "An improved accuracy version of the method of auxiliary sources for computational electromagnetics," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 52, no. 1, pp. 302-309, 2004.
- [63] H. T. Anastassiou, D. I. Kaklamani, D. P. Economou, and O. Breinbjerg, "Electromagnetic scattering analysis of coated conductors with edges using the method of auxiliary sources (MAS) in conjunction with the standard impedance boundary condition (SIBC)," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 50, no. 1, pp. 59 - 66, 2002.
- [64] H. Anastassiou, "Error estimation of the method of auxiliary sources (MAS) for scattering from an impedance circular cylinder," *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 52, pp. 109-128, 2005.
- [65] H. T. Anastassiou and D. I. Kaklamani, "Error Estimation and Optimization of the Method of Auxiliary Sources (MAS) Applied to TE Scattering by a Perfectly Conducting Circular Cylinder," *Radio Science*, vol. 39, 2004.
- [66] H. T. Anastassiou, D. G. Lympelopoulou, and D. I. Kaklamani, "Accuracy analysis and optimization of the method of auxiliary sources (MAS) for scattering by a circular cylinder," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 6, pp. 1541-1547, 2004.
- [67] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York, USA, 1972.
- [68] J. J. Moré, B. S. Garbow, and K. E. Hillstrom, *User Guide for MINPACK-1*. Argonne: Argonne National Laboratory Report ANL-80-74, 1980.
- [69] J. J. Moré, D. C. Sorensen, K. E. Hillstrom, and B. S. Garbow, "The MINPACK Project," *Sources and Development of Mathematical Software*, pp. 88-111, 1984.
- [70] G. Fairweather and A. Karageorghis, "The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems," *Advances in Computational Mathematics*, vol.

- 9, no. 1-2, pp. 69-95, 1998.
- [71] C. A. Valagiannopoulos and A. Sihvola, "On Modeling Perfectly Conducting Sharp Corners With Magnetically Inert Dielectrics of Extreme Complex Permittivities," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 60, no. 10, pp. 4777-4784, 2012.
- [72] J. Lee and S. Nam, "Protecting the method of auxiliary sources (MAS) solutions from the interior resonance problem," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 15, no. 3, pp. 186-188, 2005.
- [73] M. Karamehmedovic and O. Breinbjerg, "Application of the Method of Auxiliary Sources for the analysis of plane-wave scattering by impedance spheres," *Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*, vol. 2, pp. 499-501, 2002.
- [74] M. Karamehmedovic, M. Sorensen, P. Hansen, and A. Lavrinenko, "Application of the method of auxiliary sources to a defect-detection inverse problems of optical diffraction microscopy," *Journal of the European Optical Society*, vol. 5, pp. 10021-7, 2010.
- [75] N. L. Tsitsas, D. G. Lymperopoulos, and D. I. Kaklamani, "An optimized Quasi-Point matching functions sources method: application to scattering by a buried cylinder," in *11 Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*, kharkiv, Ukraine, 2006.
- [76] D. I. Kaklamani and H. T. Anastassiou, "Aspects of the method of auxiliary sources (MAS) in computational electromagnetics," *IEEE Antennas Propagat. Mag*, vol. 44, no. 3, pp. 48-64, 2002.
- [77] D. G. Lymperopoulos, N. L. Tsitsas, and D. I. Kaklamani, "A Distributed Intelligent Agent Platform for Genetic Optimization in CEM: Applications in a Quasi-Point Matching Method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 3, pp. 619-628, 2007.
- [78] C. Yu et al., "Microwave Imaging in Layered Media: 3-D Image Reconstruction From Experimental Data," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 58, no. 2, pp. 440-448, 2010.
- [79] N. Tsitsas and P. A. Martin, "Finding a source inside a sphere," *Inverse Problems*, vol. 28, no. 1, pp. 015003-14, 2012.
- [80] K. T. Ladas, T. A. Maniatis, and N. K. Uzunoglu, "Inverse scattering using a variational principle," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 10, no. 1, pp. 3-17, 1996.
- [81] K. T. Ladas, T. A. Maniatis, and N. K. Uzunoglu, "On the reconstruction of dielectric objects from scattered field data using the Heitler equation," *Electromagnetics*, vol. 16, pp. 17-34, 1996.
- [82] C. A. Valagiannopoulos and N. K. Uzunoglu, "Scattering of ELF waves by underground formations because of night-day ionospheric ridge," *Radio Science*,

- vol. 42, no. 6, p. RS6S32, 2007.
- [83] C. A. Valagiannopoulos and N. K. Uzunoglu, "Simplified model for EM inverse scattering by longitudinal subterranean inhomogeneities exploiting the dawn/dusk ionospheric ridge," *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, vol. 5, no. 11, pp. 1319-1327, 2011.
- [84] C. A. Valagiannopoulos, N. L. Tsitsas, and A. H. Sihvola, "'Unlocking' the Ground: Increasing the Detectability of Buried Objects by Depositing Passive Superstrates," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 54, no. 6, pp. 3697-3709, 2016.
- [85] A. Karageorghis and D. Lesnic, "Detection of cavities using the method of fundamental solutions," *Inverse Probl Sci Eng*, vol. 17, pp. 803-820, 2009.
- [86] NAG (UK) LTD, Numerical Algorithms Group Library Mark 21, Oxford, UK, 2007.
- [87] A. Karageorghis, D. Lesnic, and Marin L., "A survey of applications of the MFS to inverse problems," *Inverse Problems in Science and Engineering*, vol. 19, no. 3, pp. 309-336, 2011.
- [88] A. Karageorghis, D. Lesnic, and L. Marin, "The method of fundamental solutions for the identification of a scatterer with impedance boundary condition in interior inverse acoustic scattering," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, pp. 1-7, 2017.
- [89] A. Karageorghis, B. T. Johansson, and D. Lesnic, "The method of fundamental solutions for the identification of a sound-soft obstacle in inverse acoustic scattering," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 62, pp. 1767-1780, 2012.
- [90] T. Kind, I. Krause, and C. Maierhofer, "Development of an Utility Finding Impulse Radar," *Non-Destructive Testing in Civil Engineering 2003*.
- [91] F. I. Rial, H. Lorenzo, M. Pereira, and J. Armesto, "Waveform Analysis of UWB GPR Antennas," *Sensors*, vol. 9, pp. 1454-1470, 2009.
- [92] Ν. Μήτρου, *Ψηφιακές Επικοινωνίες*. Αθήνα, 2015.
- [93] Z. Hu, Z. Shen, W. Wu, and J. Lu, "Low-Profile Log-Periodic Monopole Array," *IEEE Trans. Antennas Propag*, vol. 63, no. 12, pp. 5484-5491, 2015.
- [94] H. Jardon-Aguilar, J. A. Tirado-Mendez, R. Flores-Leal, and R. Linares-Miranda, "Reduced log-periodic dipole antenna using a cylindrical-hat cover," *IET Microw. Antennas Propag.*, vol. 5, no. 14, pp. 1697-1702, 2011.
- [95] H. Shnitkin, "Analysis of log-periodic folded dipole array," *Int. Symp. Antennas and Propagation Society*, vol. 4, pp. 2105-2108, 1992.
- [96] J. A. Tirado-Mendez, H. Jardon-Aguilar, R. Flores-Leal, and M. Reyes-Ayala, "A novel reduced lambda/4 resonant monopole with associated extra inductance," *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol. 52, no. 2, pp. 276-280, 2010.

- [97] S. Luan, X. Liu, and J. Qiu, "A novel miniaturized ultra wideband logperiodic antenna," *Proc. IEEE Int. Conf. Ultrawideband Ultrashort Impulse Signals*, pp. 246 - 248, 2010.
- [98] D. S. Rhodes and S. Lim, "Size reduction of the log-periodic dipole array," *Proc. IEEE Antennas Propag. Soc. Int. Symp.*, pp. 1578-1579, 2013.
- [99] D. E. Anagnostou, J. Papapolymerou, M. M. Tentzeris, and C. G. Christodoulou, "A printed log-periodic Koch-dipole array (LPKDA)," *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol. 7, pp. 456 - 460, 2008.
- [100] M. A. Mangoud, M. A. Aboul-Dahab, A. I. Zaki, and S. E. El-Khamy, "Genetic algorithm design of compressed log-periodic dipole array," *IEEE Int. Symp. on Micro-NanoMechatronics and Human Science*, vol. 3, pp. 1194-1197, 2003.
- [101] A. A. Gheetan and D. E. Anagnostou, "Reduced size planar log-periodic dipole arrays (LPDAs) using rectangular meander line elements," in *Int. Symp. on Antennas and Propagation Society*, 2008, pp. 1-4.
- [102] J. Rashed-Mohassel, "A miniaturized log-periodic dipole array," *Antennas and Propagation*, vol. 1, pp. 403-406, 1989.
- [103] P. B. Green and P. E. Mayes, "50  $\Omega$  log-periodic monopole array with modulated-impedance microstrip feeder," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 22, no. 2, pp. 332 - 334, 1974.
- [104] C. A. Balanis, *Antenna Theory Analysis and Design*. New York: J. Wiley & Sons, 1997.
- [105] S. C. Athanasiadis and N. Uzunoglu, "A Compact Log-Periodic Monopole Array installed on top of vehicle," *Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics*, (accepted) 2017.
- [106] S. C. Athanasiadis and N. Uzunoglu, "Design and development of a Log-Periodic Monopole Array installed on top of a vehicle," in *Operational Planning, Technological Innovations and Mathematical Applications (OPTIMA)*, Hellenic Military Academy - Athens, 2017.
- [107] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics I*. New York, USA, 1953.